UNIVERZITET SINGIDUNUM

BEOGRAD

DEPARTMAN ZA POSLEDIPLOMSKE STUDIJE

DOKTORSKA DISERTACIJA

Odlučivanje bazirano na premium principu u prospekt teoriji predstavljeno neaditivnim integralima

MENTOR:

akademik prof.dr Endre Pap

STUDENT:

Ana Blagojević, master

BROJ INDEKSA:

2011/450183

Beograd, 2019.god.

Mentor:

Akademik prof.dr Endre Pap
Univerzitet Singidunum, Beograd

Članovi komisije:

Prof.dr Nemanja Stanišić
Univerzitet Singidunum, Beograd

Prof.dr Biljana Mihailović
Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet Novi Sad

Zahvalnost

Htela bih da se zahvalim upravi i kolektivu Univerziteta Singidunum, bez čije bi podrške izrada ovog rada bila neuporedivo teža. Divno je sarađivati i raditi u takvom okruženju. Najveću zahvalnost dugujem mom mentoru, profesoru dr Endre Papu, koji je imao veliki uticaj na moj profesionalni razvoj u poslednjih par godina. Hvala mu na podršci i svim savetima koje mi je davao i koji su mi bili od izuzetne pomoći. Hvala mu što mi je otkrio teoriju neaditivnih mera, koja je do tada meni bila potpuna nepoznanica. Hvala prof.dr Nemanji Stanišiću koji mi je dao par korisnih saveta i uputio me na profesora Papa. Drago mi je što sam prihvatila njegov savet. Hvala profesorki dr Biljani Mihailović na korisnim sugestijama i pažljivo čitanom rukopisu. Hvala mojoj kumi na moralnoj i stručnoj pomoći. Hvala mojoj porodici koja je najzaslužnija što ova disertacija uopšte postoji. I na kraju hvala mami, kojoj i posvećujem ovaj rad.

Ana Blagojević

Sadržaj

1. Uvod

Ovaj rad smešten je u oblast teorije odlučivanja, pre svega posvećen normativnoj teoriji odlučivanja, koja se tiče prirode racionalnosti i logike odlučivanja. Suprotno tome, bihejvioralna teorija se bavi ljudskim uverenjima onakvima kakva zapravo jesu, a ne kakva bi trebalo da budu, videti [Kah 17]. Kaneman i Tverski su uspeli da objedine ova dva pristupa i dobiju prvu teoriju koja kombinuje utemeljenost u teoriji sa empirijksim rezultatima, čemu je posvećen i ovaj doktorat.

Prvi deo rada opisuje teoriju odlučivanja, tj. donošenja odluka, pre svega u ekonomiji, prilikom kojih se susrećemo sa raznim vrstama neodređenosti kao što su: nepoznavanje pojava, nepreciznost merenja, neodređenost jezika, subjektivne procene koje pokušavamo matematički da modeliramo, videti [Pap15]. U ekonomiji proces rešavanja problema odlučivanja na jednostavan način mogao bi se opisati kroz sledeće korake: potrebno je da uočimo i definišemo problem, zatim da odredimo ciljeve, definišemo i izaberemo opcije (alternative), zatim da prikažemo metode za realizaciju akcija. Na kraju je potrebno da analiziramo dobijene rezultate. Pitanje donošenja dobre odluke je lako razrešiti na osnovu dobijenog rezultata, ali pošto se odluka donosi pre njene realizacije, to koliko je odluka dobra se procenjuje na osnovu procedura koje smo sproveli za njeno donošenje.

Za osnove teorije odlučivanja zaslužni su Fon Nojman i Oskar Morgenštern, videti [Neu47], koji su izložili nekoliko kvalitativnih principa kojim bi racionalni donosilac odluka trebalo da se rukovodi u svojim odlukama. U zavisnosti od količine i nivoa znanja koje posedujemo, razlikujemo tri modela odlučivanja: odlučivanje u uslovima izvesnosti, odlučivanje u uslovima potpune neizvesnosti i odlučivanje u uslovima rizika. U ovom delu rada opisana je normativna (racionalna) i bihejvioralna (deskrpitivna) teorija odlučivanja, videti ([Tap97], [Pav04]). Normativa teorija pretpostavlja da je pojedinac savršeno racionalan i sposoban da postavi jasne ciljeve, dok deskriptivna teorija nije usmerena na to šta treba da rade racionalni pojedinci, već na to šta realni subjekti zapravo rade. Da bi se donosilac odluka smatrao racionalnim, njegove odluke bi trebalo da zadovolje sedam uslova racionalnosti, videti ([Fre91], [Pav04], [Dam14]): asimetričnost, tranzitivnost, kompletnost, kontinuitet preferencija, supstitucija, monotonost, redukcija složenih lutrija. Ako ispunjava ove uslove onda je donosilac odluke sposoban da izrazi svoje preferencije među opcijama, tj. da ih sortira po prioritetu i uporedi. U ovom poglavlju opisana je i Jensenova nejednakost, koja prikazuje kako se pomoću konkavne funkcije može opisati način na koji investira osoba nesklona riziku, a pomoću konveksne funkcije osoba koja je sklona riziku. Tokom poslednjih decenija, složenost ekonomskog odlučivanja je rapidno porasla, dajući na važnosti razvoju implementaciji sofisticiranih i efikasnih tehnika kvantitativne analize koje podržavaju ekonomsko odlučivanje. Poslednjih godina, višekriterijumsko odlučivanje (Multiple criteria decision making, MCDM) dobija široku primenu u ekonomskim naukama, zbog kompleksnosti odlučivanja pod uticajem socioekonomskog, političkog i privrednog sistema. Poslednjih desetak godina, naučnici su razvili niz novih MCDM metoda koje se primenjuju u rešavanju kako naučnih, tako i praktičnih problema u odlučivanju.

U drugom poglavlju opisana je Prospekt teorija (*engl. Prospect Theory)*, videti ([Moh07], [Wak10]). Njenu originalnu verziju predstavili su Kaneman i Tverski 1979. godine, u članku koji je predstavljao prekretnicu u teoriji odlučivanja, sa ciljem da provere pretpostavke o racionalnom pojedincu, videti [Kah79]. Oni su počeli da proučavaju stavove ljudi prema rizičnim opcijama, u cilju da odgovore na pitanje čime se ljudi rukovode pri izboru različitih kockarskih opcija, te između kockanja i sigurnih poteza, videti [Kah17]. Tako je nastalo nekoliko bihejvioralnih teorija, a najpopularnija deskriptivna teorija odlučivanja u uslovima rizika i neizvesnosti danas je prospekt teorija. Osnovni princip na kome se zasniva ova teorija je da pojedinac svaku situaciju odlučivanja posmatra u odnosu na referentnu tačku kao nezavisan događaj, dobitak ili gubitak. Prema ovoj teoriji gubitak ima veću vrednost u apsolutnoj meri od dobitka iste vrednosti, stoga u domenu gubitaka donosilac odluke je sklon da preuzime rizik, dok u domenu dobitaka teži izbegavanju rizika. Ova teorija pretpostavlja da postoje dve faze odlučivanja: faza izmena i faza evaluacije. U prvoj fazi osoba koja donosi odluku modelira kognitivnu reperezentaciju ishoda, a različite izbore slaže u određeni poredak. U fazi evaluacije donoslilac odluke procenjuje vrednost svake alternative i vrši izbor na osnovu procene najveće vrednosti. Prospekt teorija može da objasni paradokse racionalnog izbora, kao što je Aleov paradoks, zatim efekat izvesnosti, efekat okvira (engl. framing effects). Prospekt teorija je uspela da objasni uzroke zbog kojih donosioci odluke narušavaju sve pretpostvke racionalnog ponašanja u normativnom modelu. Kako je ova teorija imala brojne nedostatke, Kaneman i Tverski su uključili zavisnost referenci i averziju prema gubitku u modele Quiggin, videti [Qui82], i Gilboa-Schmeidler, videti [Gil89], što je dovelo do nove prospekt teorije, koju su nazvali kumultativna prospet teorija (Cumulative prospect theory, CPT), videti ([Tve81], [Tve92],[Sch03]). U ovom poglavlju opisane su, kroz dva eksperimenta, suštinske razlike između originalne i kumulativne prospekt teorije, videti [Fen97].

Treće poglavlje definiše i opisuje operatore agregacije, videti ([Gra09], [Gra11], [Bel07], [Cal02]). Agregacija predstavlja proces spajanja nekoliko ulaznih vrednosti u jednu izlaznu vrednost. Operatori agregacije imaju široku primenu u opštoj i primenjenoj matematici, u ekonomiji i finansijama (npr. teorija igara, teorija glasanja, donošenje odluka), zatim u društvenim naukama. U ovom delu su opisane osobine operatora agregacije, pri čemu nemaju sve osobine podjednaku važnost.

U četvrtom poglavlju prikazane su neaditivne mere, kao i Šokeov i Sugenov integrale koji se zasnivaju na neaditivnim merama i predstavljaju uopštenje Lebegovog integrala, ([Aum74], [Ber10],[Cho54],[Den94],[Gra95],[Gra09],[Qui93],[Sch89],[Tve92],[Wak93],[Wak10],[Wan09]). Oni su se pokazali izuzetno korisnim prilikom rešavanja problema u kojima je potrebno doneti odluku na osnovu više kriterijuma koji se međusobno preklapaju. Oni omogućavaju modeliranje interakcije izmedju događaja, pojava, alternativa. Time se prevazilazi ograničenje nezavisnosti događaja, koja je osnovna pretpostavka u primeni teorije verovatnoće, pošto je verovatnoća aditivna mera. Osobine fazi integrala kao operatora agregacije proučavaju se već duže vreme, videti [Den94],[Pap95]. Šokeov integral ima veliku ekspresivnu moć jer može predstavljati nekoliko važnih mera, npr. može predstavljati maximum, minimum, infimum i supremum, i mnoge druge funkcije agregacija, videti ([Gra09],[Pap15]). Klasična teorija mere se bavi proučavanjem skupovnih funkcija koje praznom skupu dodeljuju nulu i imaju osobinu aditivnosti. Takve skupovne funkcije se nazivaju merama. Lebegov integral je baziran na meri. Uprkos širokoj primeni Lebegovog integrala u različitim oblastima kako matematike tako i u rešavanju praktičnih problema, njegova primena zbog same osobine aditivnosti je ograničena. Stoga se razvila oblast koja se naziva uopštena teorija mere ili teorija fazi mere. U uopštenoj teoriji mere se polazi od skupovne funkcije koja pored osobine da je na praznom skupu nula ima osobinu monotonosti, dok u opštem slučaju ne mora da bude aditivna. Ovakve skupovne funkcije predstavljaju uopštenje mere i nazivaju se monotone skupovne funkcije ili fazi mere. Kao efikasna alatka za merenje interakcije između elemenata, fazi mera se definiše na sledeći način: Skupovna funkcija m definisana na sigma algebri podskupova osnovnog skupa X naziva se monotona (fazi) mera, ako je monotona i anulira se na praznom skupu. Da bi se odredila takva fazi mera, mora se naći $2^n - 2$ vrednosti na skupu X sa n elemenata. Očigledno je da je ovakav proces procenjivanja prilično složen. Da bi smanjili proces izračunavanja predložena je specijalna vrsta fazi mere λ-fazi mera g, kao i Šeplijeva vrednost koja izražava važnost interaktivnih karakteristika datih kriterijuma, videti [Sha53]. Dat je primer u kome je izračunata vrednost parametra λ, i u kome su upoređena dva kontinualna podatka, tako što su izračunate Šeplijeve vrednosti za obe varijable, što predstavlja originalni doprinos, videti [Pap19].

U petom poglavlju opisan je metod baziran na Prospekt teoriji, TODIM metod (skraćenica na portugalskom za interaktivno i multikriterijumsko odlučivanje) koji je razvijen od strane Gomesa i Lime, [Gom92]. U TODIM-u multikriterjumska funkcija vrednosti je napravljena da meri stepen dominacije svake alternative u odnosu na ostale, što odražava karakteristike donosioca odluke, kao što su zavisnost od referentne tačke i averzija prema gubitku, pomoću funkcije vrednosti iz prospekt teorije. Opisan je prošireni Šokeov TODIM metod u cilju rešavanja hezitant fazi MCDM problema, gde se razmatra interaktivnost među kriterijumima. Prvo se interaktivna kriterijumska težina meri putem Šeplijeve vrednosti. Onda se prospektna vrednost kriterijuma za svaku alternativu računa putem prospektne vrednosti funkcije hezitent fazi skupa. Zatim se stepen dominacije svake alternative u odnosu na ostale računa putem Šokeovog integrala. Globalna vrednost svake alternative može da se dobije i alternative se mogu rangirati. Kombinovanjem Šokeovog TODIMA sa PROMETHEE-II metodom, nastaje novi produženi TODIM pod nazivom PC-TODIM, koji je opisan na kraju ovog poglavlja.

Poslednje, šesto poglavlje, opisuje premium princip, koji predstavlja pravilo za dodeljivanje premije riziku osiguranja. Ovo poglavlje sadrži originalne rezultate. Opisane su metode koje aktuari koriste da razviju premium principe: ad hoc metoda, metoda karakterizacije, ekonomska metoda. U ovom delu su još i navedene i objašnjene osobine premium principa. U aktuarskim naukama pojavila se potreba za novim premium principom koji može da modelira bipolarnost baziranu na konceptu KPT-a, što je najveći doprinos ovog rada, videti [Kal12]. Vrlo kratak opis sledi.

Premium princip baziran na integralima (engl. the integral-based premium principle) je bilo koje pravilo $\Pi(f, m_1, m_2)$ za dodeljivanje premije riziku osiguranja pri čemu je $f:\Omega \to \mathbb{R}$, i $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ (klasa svih monotonih mera), videti [Pap17], [Mih19]. Neka $\mathcal{F}$ predstavlja klasu rizika osiguranja $f:\Omega \to \mathbb{R}$. Za funkciju $f \in \mathcal{F}$, mi definišemo $f^+, f^- \in \mathcal{F}^+$ kao pozitivan deo i negativan deo funkcije f definisane sa $f^+ = f \vee 0$, $f^- = -f \vee 0$. Neka je $\mathcal{M}_b$ klasa svih monotonih mera takvih da važi $m(\Omega) = b$.

Novi premium princip baziran na integralima definiše se na sledeći način, videti [Pap17], [Mih19]:

Definicija KPT premium princip baziran na integralima $\Pi_{CPT_\phi}(f, m_1, m_2): \mathcal{F} \times \mathcal{M}_b \times \mathcal{M}_b \to \overline{\mathbb{R}}$ za rizik osiguranja $f \in \mathcal{F}$ i $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_b$ se definiše na sledeći način:

$$\Pi_{CPT_\phi}(f, m_1, m_2) = \phi^{-1}(I(\phi(f^+), m_1) - I(\phi(f^-), \overline{m_2})),$$

za neparnu, rastuću, neprekidnu funkciju $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gde je

$$I(f, m) = \int_0^\infty m(\{\omega \mid f(\omega) \geq x\})\ dx.$$

Dokazane su sve dobre osobine uvedenog novog KPT premium principa, te navedeni svi raniji važni KPT premium principi koje on pokriva. Jensenova teorema za Šokeov integral vezana za konačni univerezalni skup je dokazana. Univerzalni integral predložen u [Kle10], generalizuje Šokeov, Shilkretov i Sugenov integral, i predložen je u [Gre14] koncept diskretnog univerzalnog integrala u bipolarnoj formulaciji. Integrali koji se mogu posmatrati kao generalizacija asimetričnog Šokeovog integrala, bazirani na konceptu simetričnih pseudo operacija na intervalima [−a, a] ⊆ [−∞, ∞], proučavaju se u [Mes95], [Pap95], [Pap02], [Mih11]).

Bazirano na aparaturi teorije neaditivnih mera, glavni cilj ovog rada bio je da predloži Uopšteni premium princip baziran na KPT integralima (CPT-like integral-based premium principle) koji se može posmatrati kao zajednički okvir za distorzioni premium princip, uopšteni KPT premium princip i prosečni premium princip, videti [Pap17], [Mih19]. U poslednjem delu ovog poglavlja predstavljamo uslove pod kojima Jensen Stefensenova nejednakost za KPT premium princip važi za rizike u okviru konačnog ranga.

2. Teorija odlučivanja

Pod odlučivanjem se podrazumeva izbor iz skupa od najmanje dve opcije (alternative, akcije) kojima se ostvaruje željeni cilj, videti ([Dam14], [Pap15]). Za osnove teorije odlučivanja zaslužni su Džon Fon Nojman i Oskar Morgenstern, videti ([Neu47],[Fis70]), iako su koncepte funkcije korisnosti i očekivane vrednosti uveli mnogo ranije Bernuli i Paskal. U ovom poglavlju biće opisana normativna (racionalna) i bihejvioralna (deskrpitivna) teorija odlučivanja, videti ([Tap97],[Pav04]). Kako se u problemima odlučivanja pomoću konkavne funkcije može opisati način na koji investira osoba nesklona riziku, a pomoću konveksne funkcije osoba koja je sklona riziku, u ovom poglavlju biće uveden pojam i osnovne karakteristike konveksnih funkcija. U poslednjem poglavlju ovog rada biće uvedena i dokazana Jensenova teorema za CPT integral, s toga će u ovom delu biti uvedena klasična i integralna Jensenova nejednakost.

Prilikom donošenja odluka u različitim oblastima najčešće se susrećemo sa sledećim vrstama neodređenosti, videti [Pap15]:

1. Nepoznavanje pojava,
2. Nepreciznost merenja,
3. Neodređenost jezika,
4. Subjektivne procene.

Ove neodređenosti matematički modeliramo pomoću teorije verovatnoće i statistike, zatim novijim matematičkim metodama teorijom fazi skupova i fazi logike, i neaditivnim merama i integralima baziranim na njima.

Proces rešavanja problema odlučivanja na jednostavan način mogao bi se opisati kroz sledeće korake. Potrebno je da uočimo i definišemo problem, zatim da odredimo ciljeve, definišemo i izaberemo opcije (alternative), zatim da prikažemo metode za realizaciju akcija. Na kraju je potrebno da analiziramo i primenimo dobijene rezultate. Vrlo često se dešava da ne budemo zadovoljni donetom odlukom. Pitanje donošenja dobre odluke je lako razrešiti na osnovu dobijenog rezultata, ali pošto se odluka donosi pre njene realizacije, to koliko je odluka dobra se procenjuje na osnovu procedura koje smo sproveli za njeno donošenje.

Modelovanje za donošenje odluka uključuje dve strane: onog ko donosi odluku i onog ko gradi model. Analitičar asistira pri donošenju odluke. Specijalisti za pravljenje modela prvo prouče problem, potom naprave matematički model koji će menadžer koristiti. Greška u komunikaciji između menadžera i analitičara može se izbeći tako što će raditi zajedno sa ciljem da prvo naprave vrlo jednostavan model koji obezbeđuje analizu koja je gruba, ali razumljiva. Kada se menadžer navikne na taj model, onda model može da se razrađuje i usložnjava. Ovaj proces zahteva vreme od strane menadžera i iskreno interesovanje od strane analitičara za rešavanje menadžerovog stvarnog problema, pre nego pravljenje komplikovanog modela. Postepeno pravljenje modela je najvažniji faktor pri određivanju uspeha implementacije modela za donošenje odluka. Ovaj pristup pojednostavljuje ono što bi bio komplikovan zadatak verifikacije modela.

2.1. Modeli donošenja odluka u ekonomiji

U zavisnosti od količine i nivoa znanja koje imamo, postoje tri najrasprostranjenija modela odlučivanja u ekonomiji:

- Odlučivanje u uslovima izvesnosti,
- Odlučivanje u uslovima potpune neizvesnosti,
- Odlučivanje u uslovima rizika.

Odlučivanje u uslovima izvesnosti

Odlučivanje u uslovima izvesnosti odnosi se na situaciju kada unapred znamo sve osobine okruženja u kome ćemo sprovoditi izabranu akciju. Dakle, potrebno je da izvršimo rangiranje i upoređivanje svih akcija, a potom da napravimo izbor među akcijama tako da u što većoj meri ostvarimo željeni cilj.

Odlučivanje u uslovima potpune neizvesnosti

U uslovima potpune neizvesnosti, donosilac odluka nema nikakvo znanje o verovatnoći da će se nešto desiti. Njegovo ponašanje zavisi od tipa ličnosti i stava prema nepoznatom. U uslovima neizvesnosti moguće je predvideti različite ishode svake alternative, ali ne i verovatnoće za njihovo javljanje. Ovakve situacije javljaju se prilikom dugoročnih prognoza ekonomskih i političkih prilika u zemlji i svetu, u istraživačkim projektima, prilikom uvođenja novog proizvoda na tržište i veoma su nepovoljne za donosioca odluka. I u takvim situacijama postoje metode izbora u uslovima neizvesnosti kao što su: optimistički (maximax), pesimistički (maximin), Hurvikov metod optimizma-pesimizma, metod minimaks kajanja (Sevidžov), Laplasov princip nedovoljnog razloga, videti ([Luc57],[Sav71], [Hur72], [Tap97],[Pav04]).

Odlučivanje u uslovima rizika

Između izvesnosti i neizvesnosti nalazi se odlučivanje u uslovima rizika. Kada pored toga što znamo sve moguće događaje, znamo i verovatnoće da se oni realizuju, donosimo odluke u uslovima rizika, videti [Pav04]. Rizik implicira dozu nesigurnosti i nemogućnosti da se potpuno kontrolišu ishodi i posledice delovanja. U nekim situacijama eliminacija jednog rizika, može da poveća drugi rizik. Verovatnoće koje pripisujemo događajima pokazuju stepen našeg uverenja u realizaciju događaja. Donosilac odluke u uslovima rizika može da izabere jednu od sledeće tri procedure izbora: metod maksimalne verodostojnosti, metod maksimalne očekivane vrednosti, metod minimalnog očekivanog kajanja. Metod maksimalne verodostojnosti je opravdano koristiti u sluačaju kada je verovatnoća događaja bliska 1.

Odlučivanje u uslovima rizika prvi je počeo da proučava švajcarski matematičar Nikolas Bernuli postavivši pitanje koliko bi novca ljudi uložili u igri koja ima sledeća dva pravila, videti [Pav04]:

- novčić se baca dok ne padne "pismo",
- igrač dobija 2$ ako pismo padne pri prvom bacanju, 4$ pri drugom, 8$ pri trećem itd.

Ispostavilo se da je mali broj ljudi spreman da uloži više od par dolara da bi igralo ovu igru, iako je očekivana vrednost igre beskonačna, $E=\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 4 + ... = \infty$. Postavlja se pitanje zašto su ljudi nespremni da ulože malo više novca, kada je očekivani prinos jednak beskonačnosti. Ovaj paradoks, poznat pod nazivom paradoks Sankt Petersburga, dovodi do zaključka da je očekivana novčana vrednost nedovoljno dobra osnova za procenu akcija u uslovima rizika, videti [Pav04]. Paradoks je pokušao da razreši Danijel Bernuli time što je zaključio da ljudi ne posmatraju očekivanu vrednost, već očekivanu korisnost i traže njen maksimum.

Posmatrajmo sledeći primer. Potrebno je da napravimo izbor između dve opcije:

- prva opcija donosi siguran dobitak od milion evra,
- druga opcija donosi dobitak od 5 miliona evra sa verovatnoćom 0.5 ili dobitak od 0 evra sa istom verovatnoćom.

Očekivana novčana vrednost prve opcije je million eura, a druge je $\frac{1}{2}\cdot 5000000 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 2500000$. I pored toga što je očekivana novčana vrednost druge opcije veća, ispostavilo se da bi većina ljudi izabrala prvu opciju. Razlog se ogleda u činjenici da vrednost ili "korisnost" novca opada sa količinom već posedovanog bogatstva, u smislu da je dobitak od 1000 eura vredniji prosjaku nego bogatašu, videti [Pav04]. Dakle, iako je očekivana vrednost u paradoksu Sankt Petersburg jednaka beskonačnosti, ispostavlja se da očekivana korisnost ipak nije beskonačna. Iz tog razloga Bernuli je odbacio očekivanu vrednost kao kriterijum odlučivanja u uslovima neizvesnosti i rizika.

Svaki donosilac odluke formira svoju sopstvenu funkciju novčanih vrednosti, koja neće biti univerzalna, već će zavisiti od sredstava sa kojima raspolaže donosilac odluke, zatim od njegovog ukupnog bogatstva, kao i od njegovih psiholoških karakteristika. U zavisnosti od navedenih karakteristika svaka funkcija vrednosti će biti specifična kako po nagibu tako i po obliku, koji otkriva odnos donosioca odluka prema riziku, i razlikovaće se od funkcija drugih pojedinaca.

2.2. Normativna i bihejvioralna teorija odlučivanja

Normativna (racionalna) teorija odlučivanja se zasniva na pretpostavci da odluku donosi savršeno racionalan donosilac odluka, koji je sposoban da postavi jasne ciljeve i da ih u što većem stepenu realizuje, tako da maksimizira svoju dobit. Ova teorija postulira principe ispravnog odlučivanja u zavisnosti od okolnosti u kojima se odlučuje, a koje mogu biti uslovi izvesnosti, neizvesnosti i rizika. U uslovima izvesnosti svaka opcija ima samo jedan siguran poznati ishod. U uslovima neizvesnosti poznate su moguće okolnosti u okruženju kao i ishodi opcija u svakoj od njih, ali ne i verovatnoće javljanja ovih okolnosti. U uslovima rizika raspolažemo i verovatnoćama javljanja pojedinih okolnosti, odnosno ishoda koji će se u njima realizovati, videti [Dam14].

Da bi donosilac odluka bio racionalan, njegove odluke treba da zadovolje sledeće uslove racionalnosti, videti ([Fre91], [Pav04], [Dam14]):

- Asimetričnost. Pri poređenju dve opcije donosilac odluke ne može istovremeno da:
  1) prvu opciju preferira u odnosu na drugu i drugu u odnosu na prvu,
  2) prvu opciju preferira u odnosu na drugu i bude indiferentan između prve i druge,
  3) bude indiferentan između dve opcije i da prvu preferira u odnosu na drugu ili drugu u odnosu na prvu.

- Tranzitivnost. Ukoliko donosilac odluke preferira prvu odluku u odnosu na drugu, i drugu odluku u odnosu na treću, onda prvu odluku mora preferirati u odnosu na treću. Ako je donosilac odluke indiferentan između prve i druge odluke, i između druge i treće, onda mora biti indiferentan i između prve i treće odluke.
- Kompletnost. Donosilac odluke, prilikom poređenja dve opcije može, ili prvu da preferira u odnosu na drugu, ili drugu da preferira u odnosu na prvu, ili da bude indiferentan.

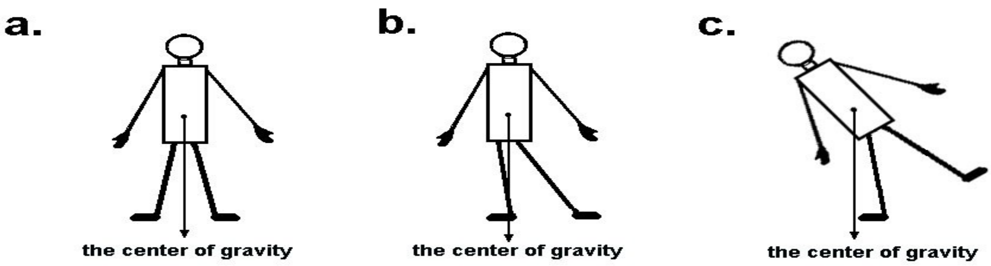
Normativa teorija odlučivanja pretpostavlja da je pojedinac savršano racionalan i sposoban da postavi jasne ciljeve, kao i da ih u različitom stepenu realizuje, sa ciljem da maksimizuje ličnu dobrobit. Ovaj pristup pretpostavlja određena pravila koja bi ljudima, ukoliko ih se pridržavaju, pomogla da u datoj sitaciji donesu najbolju odluku.

Teorija racionalnog izbora zasniva se na modelu koji sadrži dve komponente: jednu komponentu čine sve akcije koje su, pod različitim okolnostima, dostupne donosiocu odluke, dok drugu komponentu predstavljaju upravo preferencije pojedinca.

Bihejvioralni pristup, sa druge strane, nije usmeren na to šta treba da rade racionalni pojedinci, već na to šta realni pojedinci zapravo rade. Primarni cilj deskriptivne teorije je da razume i objasni kako pojedinici razmatraju dostupne informacije i kako na osnovu njih dolaze do neke odluke ili izbora. Deskriptivna teorija odlučivanja bavi se onim što je u normativnoj teoriji izdvojeno kao odstupanje od kriterijuma racionalnog ponašanja. Centar interesovanja čine kako osobenosti i ograničenja kognitivnog sistema donosioca odluke, tako i drugi psihološki uzroci grešaka koje on pravi kada donosi odluku.

2.3. Konveksnost i konkavnost

Konveksnost je jednostavan matematički pojam koji je uveo Arhimed oko 250 godine pre nove ere, kada se bavio svojom čuvenom procenom vrednosti broja π. Mi se susrećemo sa konveksnošću i njenim posledicama sve vreme na različite načine. Arhimed je uočio da se težište svakog konveksnog lika mora nalaziti unutar tog lika. Primer koji to ilustruje jeste naš uspravan položaj koji se održava dok je vertikalna projekcija našeg centra za gravitaciju unatar konveksnog položaja naših stopala, (slika 2.1).



Slika 2.1 *preuzeto sa: http://thatmanfromsyracuse.weebly.com/contributions/center-of-gravity).*

Definicija 2.1 Kažemo da je funkcija $f: I \to R$ konveksna na intervalu I ako za sve $x, y \in I$ i sve $\lambda \in [0,1]$ važi:

$$f\left[(1-\lambda)x + \lambda y\right] \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y).$$

Konveksnost ima veliki uticaj na naš svakodnevni život putem mnogobrojnih primena u privredi, poslovanju, medicini, umetosti, dok u ekonomskoj analizi ima uticaj na probleme iz područja optimizacije. Proučavanje konveksnosti dobilo je posebno veliku važnost sredinom 20. veka, paralelno uz razvoj linearnog programiranja. Ukoliko želimo da maksimiziramo profit, potrebno je da proizvodna funkcija bude konkavna. U problemima minimizacije poželjno je da funkcija koju želimo da minimiziramo bude konveksna. Prepoznavanje konveksne funkcije kao zasebnog predmeta proučavanja pripisuje se Jensenu. Međutim on nije bio prvi koji se susreo sa ovakvim funkcijama. Među njegove prethodnike ubrajamo Hermita, Holdera i Stolza. Tokom dvadesetog veka sprovedeno je intenzivno istraživanje i značajni rezultati su dobijeni u geometrijskoj funkcionalnoj analizi, matematičkoj ekonomiji, analizi konveksnosti, nelinearnoj optimizaciji. Najznačajnijim delom smatra se knjiga o nejednakostima autora Hardija, Litlvuda i Polija, videti [Har78].

Postoje dve osnovne karakteristike konveksne funkcije zbog kojih ona ima široku primenu u problemima iz područja optimizacije:

- Maksimum se dostiže u graničnoj tački,
- Svaki lokalni minimum je globalni. Štaviše, striktna konveksna funkcija dozvoljava najviše jedan minimum.

Konkavnost funkcije odražava se u promeni količine proizvedenog prilikom povećanja količine uloženog, videti [Čud17]. U modelima koji uključuju proces kojim određene resurse pretvaramo u gotove proizvode, korisno je imati funkciju kojom bismo opisali vezu između količine proizvedenog (*outputa*) i količine uloženih faktora (*inputa*) da bi se proizvodnja ostvarila.Takvu funkciju nazivamo funkcija proizvodnje i pretpostavljamo da je ona rastuća i konkavna. Činjenica da je rastuća znači da se povećanjem količine uloženog povećava i količina proizvedenog.

2.4. Relacija preferencije i funkcija korisnosti

Teorija korisnosti se izdvojila kao potpuno nezavisna naučna disciplina sa primenama u raznim oblastima: ekonomija, tehnika, politika, psihologija itd. Osnovni aparat teorije odlučivanja u uslovima neizvesnosti zasnivao se do sada na meri verovatnoće. Korisnost se odnosi na vrednost nekog dobra. Na primer, ako više volite sladoled od vanile od čokoladnog, Vi ćete pripisati veću vrednost sladoledu od vanile, nego istoj količini čokoladnog sladoleda. Činjenica da različiti ekonomski subjekti imaju različite vrednosti za dobra, je osnova svih tržišta. U aktuarskim naukama, fokus se nalazi na vrednosti novca. Proučavanje vrednosti novca počelo je u ranom 18-tom veku sa paradoksom St Petersburga.

Po teoriji korisnosti, korisnost dobitka se procenjuje poređenjem korisnosti dva stanja bogatstva. Prema ovoj teoriji dobici i gubici razlikuju se samo po predznaku (+ ili -), što predstavlja ogrničenje jer ne postoji način da se predstavi činjenica da je nekorisnost gubitka određene sume novca mnogo veća nego korisnost dobitka iste sume, videti [Kah17].

Moderna psihologija objašnjava korisnost u odnosu na način kako mi definišemo materijlno bogatstvo. Na primer:

1. Prosjak će vrednovati jednu funtu mnogo više nego milioner. Funta može da duplira bogatstvo prosjaka dok milioner neće ni primetiti gubitak jedne funte.
2. Očekivanje neizvesnog ishoda manje vredi nego izvestan ishod.

3. Buduće zarade smatraju se manje vrednima nego sadašnje zarade, pošto ne znate kakva će biti vaša buduća situacija.
4. Novac u vašem džepu vredi više nego investirani novac, zato što novac u džepu ima trenutnu korisnost, može se odmah potrošiti, što nije slučaj sa investiranim novcem.

Primer broj tri rešava se putem diskontovanja (vremenska vrednost novca). Ako je investicija u četvrtom primeru bez rizika, ona bi se takođe rešavala putem diskontovanja. U aktuarskoj matematici posebno smo zainteresovani za neizvesne ishode, kada se korisnost bogatstva posmatra kao slučajna promenljiva.

U ekonomiji se preferencije pojedinaca posmatraju kroz binarne relacije, tj. kao poređenja između dve ili više opcija, pa ih je nezamislivo razmatrati ukoliko ne postoji mogućnost izbora između dobara. Ipak, izbor bez preferencija može da postoji, kao u primeru bacanja novčića, kada odluka pojedinca isključivo zavisi od strane koja će se pokazati kada novčić padne, [Boa09].

Defincija 2.2 Za relaciju ρ kažemo da je relacija preferencije ako ima sledeće osobine:

(i) $\forall x \in X \quad x\rho x$ (refleksivnost),

(ii) $\forall x, y \in X \quad x\rho y$ ili $y\rho x$ (kompletnost),

(iii) $\forall x, y, z \in X \quad x\rho y, y\rho z \Rightarrow x\rho z$ (tranzitivnost).

Osobine kompletnosti i tranzitivnosti sa sobom nose pretpostavku da pojedinac uvek zna koju od dve korpe dobara preferira, kao i da su njegove preferencije konzistentne i van okvira u kom se razmatraju samo dva dobra. Relacije sa ovim osobinama nazivaju se racionalne preferencije. Relacijama koje prikazuju preferencije donosioca odluke samo su jedan način na koji se može matematički modelirati fenomen razmatranja više različitih dobara koja su u ponudi u datom momentu. Elegantniji način sada jeste da se povežu različita dobra sa nekim brojevima (koji predstavljaju korisnost tih dobara), tako da veći broj označava veću preferenciju donosioca odluke prema dobru koje ga nosi, videti [Kne15].

Umesto rang listom, preferencije možemo izraziti na pogodniji način. Svakoj opciji možemo pridružiti jedan broj koji predstavlja značaj ili korisnost koju nam ta opcija pruža. Funkcije koje pridružuju brojeve, odnosno korisnosti, korpama dobara nazivaju se jednim imenom funkcije korisnosti:

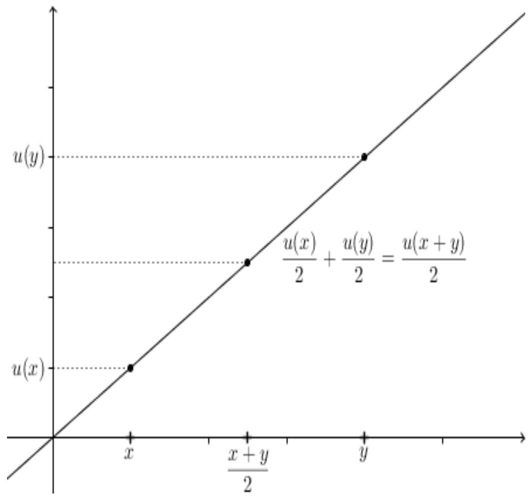
Definicija 2.3 Neka je ρ relacija preferencije na skupu X. Funkcija $u : X \to R$ za koju važi: $x\rho y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$ naziva se funkcija korisnosti (utilitarna funkcija) relacije preferencije.

Broj koji opisuje stepen korisnosti nam ukazuje na to da li investitor preferira više jednu opciju u odnosu na drugu, ali nam ti brojevi ne daju informaciju koliko puta osoba voli jedno dobro u odnosu na drugo. Marginalna korisnost predstavlja prvi izvod funkcije korisnosti i ona meri promenu korisnosti sa povećanjem bogatstva, odnosno potrošnog dobra. Kako je konkavnost posledica negativnosti drugog izvoda funkcije korisnosti, jasno je da to znači opadanje funkcije prvog izvoda, odnosno opadajuću marginalnu korisnost. Drugim rečima, kada je bogatstvo malo, onda dodavanje još jedne jedinice bogatstva znači mnogo više nego kada je bogatstvo veliko. Na primer, dvojici radnika fabrike povećamo platu za hiljadu

dinara, to će mnogo više značiti radniku čija je dotadašnja plata bila 20000 dinara nego onom čija plata je bila 50000.
Fridman i Sevidž su bili prvi koji su grafički prikazali funkciju korisnosti koja je konkavna u slučaju odbojnosti prema riziku i konveksna u slučaju sklonosti prema riziku. Sklonost ka rizičnim akcijama javlja se, na primer, kada smo veoma motivisani da ostvarimo veliki dobitak. Tada umesto sigurnog iznosa, preferiramo akciju čija je očekivana vrednost
jednaka tom novčanom iznosu.

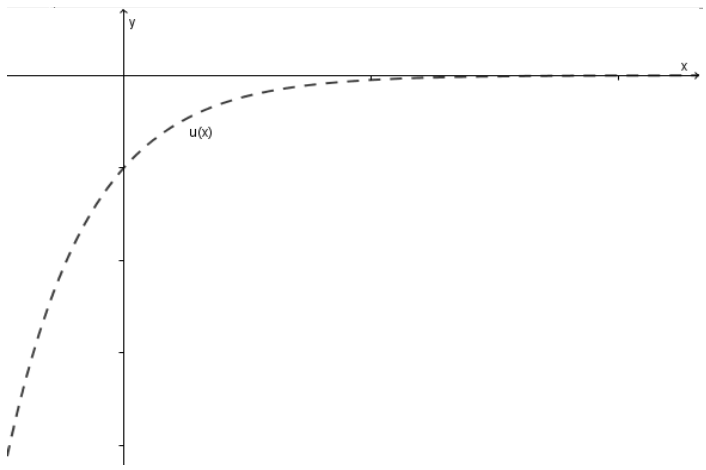
Primeri funkcije korisnosti:

- Linearna funkcija korisnosti ima oblik $u(x) = ax + b \quad a, b \in R$. Njena osnovna osobina je neutralnost prema riziku. Linearnu funkciju korisnosti oblika $u(x) = x$ koriste investitori koji su indiferentni prema riziku. Ovaj oblik funkcije korisnosti je veoma redak i po pravilu je karakterističan za ekstremno bogate pojedince i velike korporacije, videti [Kne15].



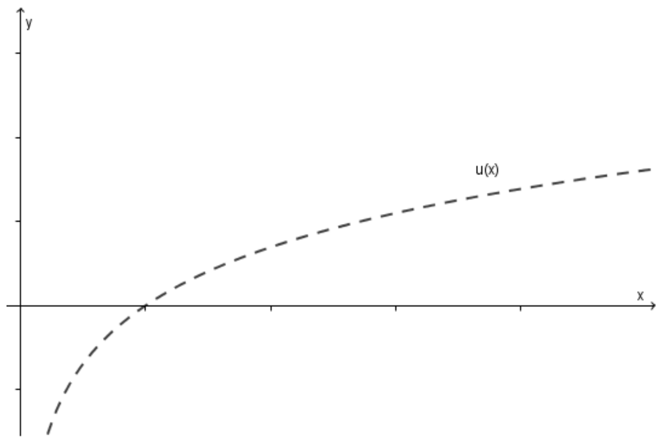
Slika 2.2 *Linearna funkcija korisnosti*

- Eksponencijalna funkcija korisnosti ima oblik $u(x) = -e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$. Vrednosti ovako zadate funkcije korisnosti su negativne, ali nas interesuju relativne vrednosti korisnosti, na osnovu kojih utvrđujemo preferencije pojedinca, videti [Kne15].



Slika 2.3 *Eksponencijalna funkcija korisnosti*

- Logaritamska funkcija korisnosti ima oblik $u(x) = \ln x$. Predložio ju je Bernuli, pretpostavljajući da je priraštaj korisnosti proporcionalan relativnoj promeni kapitala. Ova funkcija je definisana samo za $x > 0$ i vrlo je stroga kada su u pitanju vrednosti nezavisne promenljive (dobra, bogatstva, očekivanog dobitka) bliske 0, što se može tumačiti kao odbojnost investitora od ishoda u kojima gubi ili ne profitira mnogo, videti [Kne15].



Slika 2.4 *Logaritamska funkcija korisnosti*

- Kvadratna funkcija korisnosti ima oblik $u(x) = x - bx^2$, gde je $b > 0$ i definisana je samo za vrednosti $x < \dfrac{1}{2b}$.

Korisnost novčanih ishoda posmatranih akcija možemo prikazati grafički. Na apcisu nanosimo novčane vrednosti ishoda, a na ordinatu izračunate korisnosti. Tako imamo tri kategorije donosioca odluke: one koji su odbojni prema riziku, one koji su skloni riziku i one koji su indiferentni.

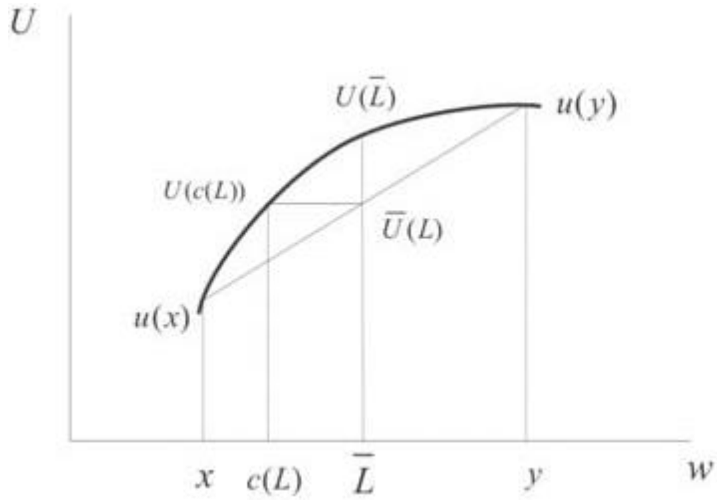
Odbojnost prema riziku

Ukoliko je donosilac odluke odbojan prema riziku, funkcija korisnosti je konkavna, (slika 2.5). Takav donosilac odluke uvek preferira siguran novčani iznos x, u odnosu na lutriju čija je očekivana vrednost x. Npr. nudi se izbor između sigurnog dobitka $x=1.5$ miliona dinara i akcije L: dobitak od 3 miliona dinara sa verovatnoćom 0.5 ili 0 dinara sa istom verovatnoćom. U slučaju akcije L matematičko očekivanje je:

$$u\left(L\right)=0.5\cdot 3000000+0.5\cdot 0=1500000.$$

Za donosioca odluke odbojnog prema riziku važi da je:

$$u\left(x\right)>u\left(L\right).$$



Slika 2.5 Odbojnost prema riziku

Averzija prema riziku (eng. risk aversion) je odbojnost prema riziku koju ima većina investitora. Investitior koji ima averziju prema riziku analiziraće potencijalne investicije proporcionalno veličini rizika predstavljenog disperzijom mogućih rezultata oko očekivanog rezultata. Stepen rizik-averzije se za različite funkcije korisnosti može meriti tzv. magnitudama njihovih lukova, jer što je “oštriji” luk, to je averzija prema riziku veća.

Najznačajniji kriterijum za merenje averzije prema riziku je drugi izvod funkcije. U velikom broju slučajeva sklonost ka riziku raste sa porastom bogatstva, odnosno i pojedinci i kompanije su više spremne za rizik ukoliko su finansijski sigurni. Stepen averzije prema riziku meri se Arov-Prat koeficijentom apsolutne rizik-averzije koji se izračunava na sledeći način, videti [Kne15]:

$$A(x)=-\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

Arov-Prat koeficijent pokazuje kako se stepen averzije prema riziku menja sa porastom bogatstva. Primera radi izračunajmo ovaj koeficijent za eksponencijalnu funkciju korisnosti $u(x)=-e^{-\alpha x}$, $\alpha>0$:

$$u'(x) = \alpha e^{-\alpha x}$$
$$u''(x) = -\alpha^2 e^{-\alpha x}$$
$$A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \alpha \;.$$

Dakle, ukoliko je funkcija korisnosti eksponencijalna funkcija, averzija prema riziku je konstantna, bez obzira na bogatstvo pojedinca.

Izračunajmo ovaj koeficijent za logaritamsku funkciju korisnosti:

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$
$$u''(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$A(x) = \frac{1}{x},$$

što oslikava osobinu smanjenja averzije rizika sa porastom sigurnosti. Dakle, ova funkcija je adekvatna za modeliranje korisnosti u slučaju averzije prema riziku. U slučaju kada je funkcija korisnosti linearna dobijamo da je $A(x) = 0$, pa zaključujemo da su subjekti koji imaju ovakvu funkciju korisnosti indiferentni prema riziku.

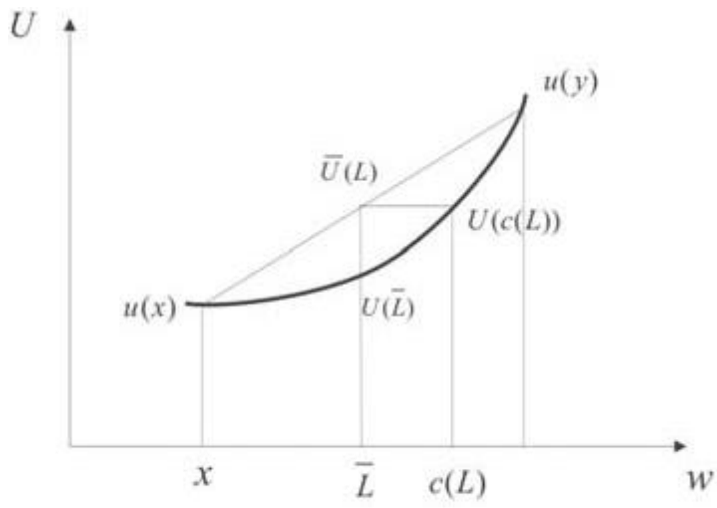
Sklonost prema riziku

Ukoliko je donosilac odluke sklon prema riziku, on preferira siguran novčani iznos x, u odnosu na lutriju čija je očekivana vrednost x. U tom slučaju funkcija korisnosti je konveksna, (slika 2.6). Npr. nudi se izbor između sigurnog dobitka $x = 1.5$ miliona dinara i akcije L: dobitak od 3 miliona dinara sa verovatnoćom 0.5 ili 0 dinara sa istom verovatnoćom. U slučaju akcije L matematičko očekivanje je:

$$u(L) = 0.5 \cdot 3000000 + 0.5 \cdot 0 = 1500000.$$

Za donosioca odluke sklonog prema riziku je:

$$u(x) < u(L).$$



Slika 2.6 *Sklonost prema riziku*

Neutralan odnos prema riziku

U slučaju neutralnog odnosa prema riziku, donosilac odluke je indiferentan prema izboru sigurnog novčanog iznosa x ili lutrije čija je očekivana vrednost x. U tom slučaju funkcija korisnosti je linearna funkcija. Novac vrednujemo onoliko kolika je njegova nominalna vrednost.

Oblik funkcije korisnosti zavisi od više faktora: specifičnosti problema, materijalnog stanja, psiholoških karakteristika donosioca odluke. Ne postoji univerzalna funkcija korisnosti, koja odražava odnos prema riziku u svim situacijama i u svim periodima života. U nekim segmentima novčanih vrednosti možemo biti skloni riziku, a u drugim ispoljiti averziju, pa je potrebno u svakoj situaciji posebno odrediti funkciju korisnosti. Rizičnu opciju prikazujemo u obliku lutrije sa dva moguća ishoda: dobitak D, koji se realizuje sa verovatnćom p i gubitak G, koji se realizuje sa verovatnoćom 1-p. Lutriju obeležavamo sa L(p, D, 1-p, G). Dobitak i gubitak na lutriji ne treba tumačiti u bukvalnom smislu. U jednom problemu gubitak se može odnositi na najmanji profit u skupu posmatranih profita, dok dobitak može predstavljati minimalni trošak.

Nojman i Morgenštern su definisali sedam osnovnih aksioma i pomoću tih aksioma precizno definisali funkciju očekivane korisnosti, videti ([Hey79], [Hey94]). Pored asimetričnosti, kompletnosti i tranzitivnosti dopunski uslovi racionalnosti su, videti [Dam14]:

- Kontinuitet preferencija: Donosilac odluka formira rang listu opcija od najbolje do najgore po sledećem redosledu x, y, z. Uslov kontinuitet preferencije zahteva da je on u stanju da formuliše lutriju L (čiji je dobitak jednak najboljoj opciji x, a gubitak najgoroj opciji z), koju smatra jednako dobrom kao i sigurnu opciju y. To znači da mora biti sposoban da odredi verovatnoću q realizacije opcije x, tako da bude indiferentan između sigurnog dobitka opcije y i učešća u lutriji čiji su mogući ishodi najbolja opcija x sa verovatnoćom q i najgora opcija z, sa verovatnoćom $1-q$.

- Supstitucija: Ako je donosilac odluke indiferentan između opcija x i y, onda mora biti indiferentan i između dve po svemu identične lutrije L1 i L2, od kojih jedna nudi opciju x kao dobitak, a druga opciju y.

- Monotonost: Ako dve lutrije L1 i L2 imaju identične moguće ishode, onda će donosilac odluke uvek birati onu lutriju koja ima veću verovatnoću sticanja dobitka.

- Redukcija složenih lutrija: Stav DO prema složenoj lutriji treba da bude identičan stavu prema prostoj lutriji izvedenoj računom verovatnoće iz složene lutrije. Uslov zahteva da prilikom izbora DO ne ispoljava preferencije prema samim lutrijama, već da njegove preferencije zavise isključivo od mogućih ishoda opcija i verovatnoća njihovog javljanja.

Ovi uslovi moraju biti zadovoljeni da bismo precizno izrazili svoje preferencije između opcija. Ako ih ispunjavamo onda smo sposobni da formiramo rang listu opcija po prioritetu i da uporedimo svake dve opcije.

Suština njihove teorije je u tome da pojedinac ponderiše korisnost ishoda u svakom stanju prirode sa verovatnoćom ostvarenja tog stanja prirode i da sumira sve ove ponderisane vrednosti. Dakle, ako je korisnost pojedinca u i-tom stanju prirode u_i , a verovatnoća ostvarenja tog stanja prirode p_i, tada je očekivana korisnost $U = \sum_{i=1}^{n} u_i p_i$.

Navedenih sedam aksioma su uslovi racionalnosti normativne teorije očekivane korisnosti, videti ([Neu47], [Dam14]). Pretpostavka modela je da se odlučivanje odvija na sledeći način: Donosilac odluke, koji ispunjava uslove racionalnosti, svakoj opciji pripisuje numeričku vrednost, u(.), tzv. kardinalnu korisnost, takvu da je $u(x) > u(y)$ ako DO preferira x u odnosu na y, i $u(x) = u(y)$ ako je DO indiferentan pri izboru između dve opcije.

Donosilac odluke je sklon da pripiše korisnost i rizičnim opcijama, koje posmatramo u uslovima merljive neizvesnosti i koje imaju više mogućih ishoda sa poznatim verovatnoćama. Ako rizičnu opciju prikažemo lutrijom L, koja ima ishode x (sa verovatnoćom q) i z (sa verovatnoćom $1-q$), onda korisnost lutrije L, u oznaci $u(L)$, izračunavamo na sledeći način: $u(L) = q \cdot u(x) + (1-q) \cdot u(z)$. Korisnost rizične opcije izračunavamo tako što korisnosti njenih ishoda množimo pripadajućim verovatnoćama javljanja i ove proizvode sabiramo. Ovaj zbir proizvoda se u matematici naziva očekivana korisnost, što znači da je korisnost rizične opcije, $u(L)$, jednaka njenoj očekivanoj korisnosti [Pav04]. Samim tim, teorija očekivane korisnosti sugeriše da racionalni DO izbor između rizičnih opcija zasniva na njihovim očekivanim korisnostima i da bira onu opciju koja ima maksimalnu očekivanu korisnost, videti [Dam14].

2.5. Klasična Jensenova nejednakost

Jensenova nejednakost je generalizacija nekih, manje ili više poznatih, nejednakosti. Dobila je ime po danskom matematičaru Johanu Ludvigu Jensenu (1859.–1925.) koji ju je dokazao u svom radu "Sur les fonctions convexes et les intégalités entre les valeurs moyennes" objavljenom 1906. godine u časopisu Acta Mathematical. Iz Jensenove nejednakosti proizlaze mnoge poznate nejednakosti kao što su nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, Čebiševljeva nejednakost, Koši -Švarc-Bunjakovskijeva nejednakost.

Definicija 2.4 Funkcija $f: I \to \mathbb{R}$ je konveksna u Jensenovom smislu na intervalu $(a,b) \subseteq I$ ako važi:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \text{, za sve } x, y \in (a,b).$$

Definicija 2.5 Funkcija $f: I \to \mathbb{R}$ konkavna u Jensenovom smislu na intervalu $(a,b) \subseteq I$ ako važi:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \text{, za sve } x, y \in (a,b).$$

Teorema 2.1 (*Diskretan slučaj Jensenove nejednakosti*)

Funkcija $f: I \to \mathbb{R}$ je konveksna na $I \subseteq \mathbb{R}$ ako i samo ako za sve $n \in N$, $n \geq 2$, $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ i za sve $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in [0,1]$ takve da je $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, važi:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f\left(x_k\right).$$

Integralna Jensenova nejednakost u klasičnoj analizi data je sledećim tvrđenjem (videti [Rud86]).

Teorema 2.2 (***Klasična integralna Jensenova nejednakost)***

Neka je (X,Σ) merljiv prostor, $X \neq \varnothing$ univerzalan skup, Σ je σ-algebra njegovih podskupova i neka je μ mera na Σ takva da je $\mu(X)=1$. Neka je h realna funkcija koja pripada $L^1(\mu)$, $a<h(x)<b$, za svako $x \in X$. Ako je f konveksna funkcija na (a,b), tada važi:

$$f\left(\int h d\mu\right) \leq \int (f \circ h) d\mu.$$

Jensenova nejednakost ima važnu primenu u teoriji verovatnoće, videti [Bil68]. Za sve diskretne slučajne promenljive X za koje postoji E(X), i konkavnu funkciju f važi:

$$f(E(X)) \geq E(f(X)).$$

Jensenova nejednakost prikazuje kako se pomoću konkavne funkcije može opisati način na koji investira osoba nesklona riziku, a pomoću konveksne osoba koja je sklona riziku.

Primer 2.1

Pretpostavimo da smo u situaciji da moramo izabrati bolju od sledeće dve lutije:

1. Lutrija L_1: Osvajamo 4 miliona dolara sa verovatnoćom 1.
2. Lutrija L_2: Osvajamo 3 miliona dolara sa verovatnoćom 0.8, 10 miliona dolara sa verovatnoćom 0.16 ili nula dolara sa verovatnoćom 0.04.

Očekivana korisnost u prvom slučaju je $U(L_1)=u(4000000)\cdot 1$, a u drugom slučaju iznosi $U(L_2)=u(3000000)\cdot 0.8+u(10000000)\cdot 0.16+u(0)\cdot 0.04$, odakle sledi da je u oba slučaja očekivana korisnost jednaka, tj. $U(L_1)=U(L_2)$. Pretpostavimo da osoba koja vrši izbor nije sklona riziku. Primenimo Jensenove nejednakosti na konkavnu funkciju korisnosti u:

$$\begin{aligned}
&U(L_1)=u(4000000)=u(3000000\cdot 0.8+10000000\cdot 0.16+0\cdot 0.04)> \\
&u(3000000)\cdot 0.8+u(10000000)\cdot 0.16+u(0)\cdot 0.04=U(L_2).
\end{aligned}$$

Zaključujemo da osoba koja je nesklona riziku, pri odabiru između svih lutrija sa zadatim očekivanjem bira onu lutriju koja donosi siguran dobitak (jednak tom očekivanju). U ovom primeru takva osoba bi izabrala prvu opciju, a to je izbor koji bi verovatno donela i većina ljudi, videti [Čud17].

2.6. Višekriterijumsko odlučivanje

Višekriterijumsko odlučivanje (Multiple criteria decision making, MCDM) odnosi se na problem izbora alternativa vezanih za više kriterijuma, videti [Vin85]. Od 50-tih godina prošlog veka pa do danas razvio se veliki broj MCDM metoda koje se međusobno razlikuju u pogledu zahtevanog kvaliteta i kvantiteteta informacija, korišćene metodologije i matematičkih osobina koje treba da potvrde. Vince je u [Vin85] sažeto podelio MCDM u tri grupe: teorija korisnosti na bazi višestrukih atributa, metode rangiranja i interaktivne metode. Karlson I Fuler navode da postoje različite vrste MCDM metode, videti [Car96]:

(i) Metode rangiranja,
(ii) Metode bazirane na teoriji korisnosti i vrednosti,
(iii) Programiranje sa višestrukim ciljevima,
(iv) Metode bazirane na grupnom odlučivanju i pregovaranju.

Većina MCDM metoda bavi se diskretnim alternativama, koje su opisane nizom kriterijuma. Informacije mogu da budu precizno utvrđene ili fazi utvrđene, u intervalima. Jedan od problema koji se javlja pri rešavanju MCDM-a, je izbor agregacione procedure za rešavanje problema odlučivanja. Tokom poslednjih decenija, složenost ekonomskog odlučivanja je rapidno porasla, dajući na važnosti razvoju implementaciji sofisticiranih i efikasnih tehnika kvantitativne analize koje podržavaju ekonomsko odlučivanje. Poslednjih godina, MCDM metode dobile su široku primenu u ekonomskim naukama, zbog kompleksnosti odlučivanja pod uticajem socioekonomskog, političkog i privrednog sistema. MCDM je napredna oblast Operacionih istraživanja; ona pruža donosiocu odluke i analitičaru niz metodologija koje su prilagođene kompleksnosti ekonomskog odlučivanja. Poslednjih desetak godina, naučnici su razvili niz novih MCDM metoda koje se primenjuju u rešavanju kako naučnih, tako i praktičnih problema u odlučivanju.

U MCDM pristupu, analitičar teži da napravi nekoliko kriterijuma koristeći nekoliko različitih perspektiva posmatranja problema. MCDM je jedna od najčešće upotrebljivanih metodologija odlučivanja u nauci, biznisu , i politici. MCDM može da poboljša kvalitet odluka time što proces odlučivanja čini eksplicitnijim, racionalnijim i efikasnijim. U stvarnom svetu, donosilac odluka pre svega mora da razume i opiše situaciju. Ova faza uključuje utvrđivanje i procenu različitih alternativa mogućih akcija, velikog broja različitih i važnih kriterijuma odlučivanja, tipa i kvaliteta informacija, itd. U ekonomskim naukama, tipični primeri MCDM problema nazivaju se diskretni MCDM problemi i uključuju izbor između različitih investicionih projekata, problem rangiranja zaposlenih i problem finansijske klasifikacije. Osnovna prednost MCDM metoda je njihova sposobnost da rešavaju problem odlučivanja u kome postoje različiti konfliktni interesi.

MCDM proces se sastoji od sledećih koraka:

1. Izbor kriterijuma:
   Izabrani kriterijumi moraju biti: usklađeni sa odlukom, nezavisni jedan od drugog, prikazani na isti način, merljivi, povezani sa alternativama.

2. Izbor alternative:
   Izabrane alternative moraju biti: dostupne, uporedive, realne, a ne idealne, praktične-moguće.

3. Izbor težinskih metoda za prikazivanje važnosti:
   Metode za utvrđivanje težine se dele na kompenzatorne i rangirane. Primeri kompenzatornih metoda su: Analitički hijerarhijski process (AHP), Fuzzy MCDM process (FDM). Primeri metoda rangiranja su: Eliminaciona i izborna realnost (ELECTRE), Organizacioni metod rangiranja za poboljšanje procesa evaluacije (PROMETHUS).

4. Metod agregacije:
   Kroz proces agregacije vrednosti atributa na nižem nivou hijerarhije određuju vrednosti na višem nivou. Elementarna pravila odlučivanja koja se u tom procesu primenjuju mogu biti proizvod, prosek ili funkcija agregacije.

U kontekstu višekriterijumskog odlučivanja, odluke se često donose na bazi nepreciznih, nesigurnih, i nekompletnih informacija koje dolaze od nekoliko manje ili više pouzdanih izvora i zavise od stanja u svetu. Zato je MCDM pod nesigurnim okolnostima veoma važno pitanje. Sve različite vrste neizvesnosti treba da se uzmu u obzir. Teorija verovatnoće je razvijena zbog neizvesnosti ili nedostatka znanja o mogućim stanjima alternativa. Evidenciona racionalna teorija, koja predstavlja nastavak teorije verovatnoće, je čuvena alatka za odlučivanje usled neizvesnosti, videti [Sha76]. Da bi se ova vrsta neizvesnosti prevazišla predložene su teorije fazi skupova i približnih (rough) skupova, jer nije moguće uvek modelirati verovatnoćom. Ove teorije predstavljaju generalizaciju klasične teorije skupova za modeliranje neizvesnosti. Fazi skupovi bave se problemom definisanja granice klase putem kontinuirane generalizacije karakterističnih funkcija skupa. Približni skupovi uzimaju u obzir nemogućnost razlikovanja objekata.

Poslednjih 40 godina, teorije fazi skupova pokazale su se kao odlično rešenje za odlučivanje usled neizvesnosti. Ali alatke za modeliranje fazi skupova su ograničene time što se dva ili više izvora nejasnoće pojavljuju u isto vreme. Stoga je nastalo nekoliko generalizacija i unapređivanja osnovne fazi teorije koje su uspešno korišćene za modeliranje nepreciznog i nejasnog ljudskog ponašanja prilikom odlučivanja. Jedna od takvih teorija jeste Hesitant fuzzy set (HFS) čiji su tvorci Tora i Narukava, [Tor09], [Tor10]. Ona opisuje situacije u kojima je dozvoljeno ubacivanje elemenata u dati skup sa različitim vrednostima, što predstavlja korisno sredstvo za rešavanje situacija sa nejasnim informacijama u procesu MCDM-a.

U poslednje vreme HFS zavređuje sve više pažnje. Neki operatori agregacije za HFS predloženi su za rešavanje MCDM-a, videti [Men14]. Xia i Xu definisali su operativna pravila i predložili su niz operatora za različite situacije, kao što su hesitant fazi težinski prosečni operator, hesitant fazi prosečni geometrijski operator, i diskutovali su o odnosima među njima, videti [Xia11]. Ovi autori predložili su razne mere razdaljine za hesitant fazi skupove.

Važno je napomenuti da su hesitant fazi operatori agregacije koji se koriste u različitim teorijama svi bazirani na pretpostavci da su kriterijumi (atributi) nezavisni i da je ponašanje donosioca odluke potpuno racionalno. Međutim, problem je u tome što je ljudsko odlučivanje uvek subjektivno u nekoj meri. Ono je pod uticajem percepcije, individualnih potreba, odlika ličnosti, vrednosti, iskustva i subjektivnih procena. Stoga u stvarnom odlučivanju ljudi nisu u potpunosti racionalni i zato se njihova ponašanja razlikuju od onih koja su predviđena na bazi teorije očekivane korisnosti. Neki bihejviorističi eksperimenti pokazali su da zavisnost od referentne tačke i averzija prema riziku, pri donošenju odluka, imaju ključan uticaj na konačnu odluku.

Za rešavanje problema višekriterijumskog rangiranja alternativa razvijena je familija metoda PROMETHEE (engl. Preference Ranking Organization METhod for Enrichment Evaluation). Postoje četiri varijante ove metode: PROMETHEE I koja daje parcijalni poredak alternative, PROMETHEE-II daje potpuni poredak, PROMETHEE-III daje intervalni poredak, PROMETHEE-IV se koristi za neprekidni skup alternativa, videti [Bra85]. Izbor metode zavisi od tipa problema koji se rešava, znanja i iskustva donosioca odluke, kao i tehnologije problematike koja se rešava. U petom poglavlju ovog rada opisan je algoritam za rešavanje hezitant fazi MCDM problema. Kombinovanjem Šokeovog TODIMA sa PROMETHEE-II metodom, nastaje novi produženi TODIM pod nazivom PC-TODIM, videti [Chu15].

3. Prospekt teorija (The Prospect Theory)

Najpopularnija deskriptivna teorija odlučivanja u uslovima rizika i neizvesnosti danas je prospekt teorija (*engl. Prospect Theory).* Njenu originalnu verziju predstavili su Kaneman i Tverski 1979. godine, u članku koji je predstavljao prekretnicu u teoriji odlučivanja, videti [Kah79]. Do tog trenutka opšte prihvaćeni stav bio je da je iracionalno ponašanje donosioca odluke previše haotično da bi bilo modelirano, i da su modeli racionalnih izbora najbolja deskriptivna aproksimacija iracionalnog ponašanja. U ovom poglavju biće opisane dve komponente prospekt teorije: funkcija vrednosti i funkcija težinskih koeficijenata. Prospekt teorija je uspela da objasni uzroke zbog kojih donosioci odluke narušavaju sve pretpostavke racionalnog ponašanja u normativnom modelu. Najpoznatiji uzroci kao što su: efekat izvesnosti i pseudoizvesnosti, efekat okvira, pristrasan odnos prema verovatnoćama, averzija prema gubitku, uticaj referentne tačke na izbor alternative biće opisani u ovom poglavlju. U istom poglavlju opisane su, kroz dva eksperimenta, suštinske razlike između originalne prospekt teorije i njene unapređene verzije kumulativne prospekt teorije (engl. Cumulative Prospect Theory), videti [Fen97]. Kumulativna teorija ne predstavlja samo ispravku nekih teoretskih problema u prospekt teoriji, već ona pruža različita predviđanja.

Da bismo objasnili razloge za nastanak prospekt teorije, navešćemo pet glavnih fenomena izbora, koji krše standardni model odlučivanja, videti [Tve92]:

(i) Nelinearna preferencija (engl. *Nonlinear preferences)*. U skladu sa principom očekivane vrednosti, korisnost rizičnog prospekta je linearna u pogledu ishoda verovatnoće. Aleov primer, videti [Ale53], doveo je u pitanje ovaj princip, tako što je pokazao da razlika između verovatnoća od 0.99 i 1.00 ima više uticaja na preferencije nego razlika između 0.10 i 0.11.

(ii) Izvor nesigurnosti (engl. *Source dependence).* Spremnost ljudi da se klade na nesigurne događaje zavisi ne samo od stepena nesigirnosti, već i od njenog izvora.

(iii) Sklonost ka riziku (engl. *Risk seeking).* Izbori koji govore o sklonosti ka riziku se mogu uočiti u dve vrste problema. Prvo ljudi često preferiraju malu verovatnoću da dobiju veliku nagradu u odnosu na očekivanu vrednost tog prospekta. Drugo, sklonost ka riziku preovlađuje kada ljudi moraju da biraju između sigurnog gubitka i velike verovatnoće većeg gubitka.

(iv) Averzija prema riziku (engl. *Loss aversion).* Jedan od osnovnih fenomena izbora u uslovima rizika jeste da mogućnost gubitka više utiče na odlučivanje nego mogućnost dobitka. Uočena asimetrija je previše ekstremna da bi mogla da bude objašnjena efektima prihoda ili smanjenjem averzije prema riziku.

(v) Efekat okvira (*engl. Framing effects*). Racionalna teorija izbora pretpostavlja da bi jednake formulacije problema izbora trebalo da podstaknu isti redosled preferencija, [Arr82]. Suprotno ovoj pretpostavci, varijacije u efektu okvira u pogledu dobitaka i gubitaka, daju sistematski različite preferencije.

U nizu eksperimenata koji su uključivali zadatke odlučivanja o novcu, godišnjim odmorima, ljudskim životima, Kaneman i Tverski su na velikom uzorku studenata iz Švedske, Izraela i Sjedinjenih Američkih Država došli do rezultata koji ubedljivo svedoče o narušavanju aksiome supstitucije. Autori takav fenomen nazivaju efektom izvesnosti (engl. certainty effect), i pod njim podrazumevaju fenomen preferiranja ishoda koji su izvesni u odnosu na ishode koji su samo mogući, videti ([Coh88], [Dam14]). Prospekt teorija može da objasni paradokse racionalnog izbora, kao što je Aleov paradoks, zatim efekat izvesnosti, efekat okvira, tako što uključuje distorziju verovatnoća, smanjuje osetljivost i uzima status quo za referentnu tačku, [Fen97]. Termin izgled (engl. *prospect*) iz naziva teorije se odnosi na lutriju ili kocku, preciznije na skup ishoda određenih verovatnoća rizičnih opcija koji imaju sintaksu lutrije.

Prospekt teorija je bila prvi ubedljivi model koji je u isto vreme bio podložan ispitivanju koje uključuje teoretske analize i primenu u predviđanju, i koji je takođe mogao da modelira iracionalnosti koje se obično nalaze u empirijskim izborima. Teorija očekivane korisnosti pretpostavlja da su pojedinci savršeno racionalni i da se ponašaju u skladu sa određenim aksiomima. Ako su pojedinci ograničeno racionalni, teorija očekivane korisnosti nema empirijsku podlogu. U tom smislu Kaneman i Tverski predlažu prospekt teoriju kao alternativu teoriji očekivane korisnosti, smatrajući da pojedinci većinu odluka zasnivaju na intuiciji.

Danas se smatra da u srži prospekt teorije postoje tri kognitivne odlike, koje imaju značajnu ulogu u proceni finansijskih ishoda, [Kah17]:

- Procena se obavlja u odnosu na nivo adaptacije, tj. u odnosu na referentnu tačku. Pojedinac svaku situaciju odlučivanja posmatra kao nezavisan događaj u terminima dobitaka ili gubitaka u odnosu na referentnu tačku. Na primeru se lako demonstrira ovaj princip. Posmatrajmo tri činije u kojima se nalazi redom hladna voda, voda sobne temperature i na kraju topla voda. Ubacimo levu ruku u hladnu vodu, desnu u toplu i potom obe ruke ubacimo u srednju činiju. Istu temperaturu ćemo levom rukom osetiti kao toplu, a desnom rukom kao hladnu. Kada posmatramo finansijske ishode uobičajena referentna tačka je status kvo, mada može biti i ishod na koji mislite da imate pravo, npr. povišica.
- Odbojnost prema riziku. Prema ovoj teoriji gubitak ima veću vrednost u apsolutnoj meri od dobitka iste vrednosti pa u domenu gubitaka donosilac odluke teži preuzimanju rizika, dok u domenu dobitaka teži izbegavanju rizika. Ova asimetrija je evolutivno utemeljena. Organizmi koji opasnosti tretiraju hitnije u odnosu na pogodnosti, imaju više šanse da opstanu i da se reprodukuju.

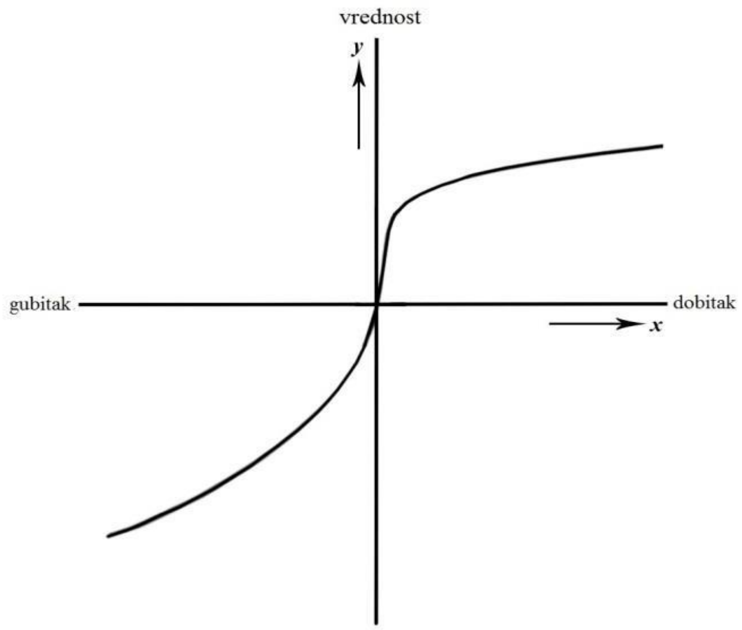
- Treći princip je princip slabljenja osetljivosti. Subjektina razlika između 1400 i 1500 dolara, mogo je manja od razlike između 100 i 200 dolara.

Prospekt teorija ima dve komponente, videti ([Kah79],[Tve92],[Fox96],[Pav04],[Rie08]):

- Funkciju vrednosti, koja igra ulogu funkcije korisnosti u teoriji očekivane korisnosti i koja odražava naš odnos prema ishodima različitih akcija.
- Funkciju težinskih koeficijenata odluke, koja odražava naš subjektivan odnos prema verovatnoćama pojedinih ishoda.

3.1. Funkcija vrednosti

Ishode akcija vrednujemo u odnosu na neku referentnu tačku. Ako je ishod veći od novčanog iznosa u referentnoj tački, onda ga tretiramo kao dobitak i pripisujemo mu pozitivnu vrednost. Suprotno ako je novčani ishod manji od iznosa u referentnoj tački, onda on predstavlja gubitak i priprisujemo mu negativnu vrednost. Na taj način formiramo funkciju vrednosti i na osnovu nje donosimo odluke (slika 3.1).



Slika 3.1 *Funkcija vrednosti*

Do sada najpopularnija funkcija vrednosti korišćena u prospekt teoriji opisana je u sledećoj formi, videti [Kah79]:

$$\nu(x)=\begin{cases}(x-x_0)^{\alpha}, x-x_0\geq 0\\ -\theta\left(-(x-x_0)\right)^{\beta}, x-x_0<0\end{cases},$$

gde je x_0 referentna tačka, x je ekonomski ishod u odnosu na referentnu tačku, gde su dobici pozitivne vrednosti, a gubici negatine vrednosti, α i β odnose se na zakrivljenost funkcije vrednosti za gubitke i dobitke, i važi $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$. Ako su vrednosti α i β veće, donosilac odluke skloniji je riziku. θ je koeficijent averzije prema riziku i on pokazuje da je funkcija vrednosti strmija za gubitke, nego za dobitke, i važi $\theta>1$.

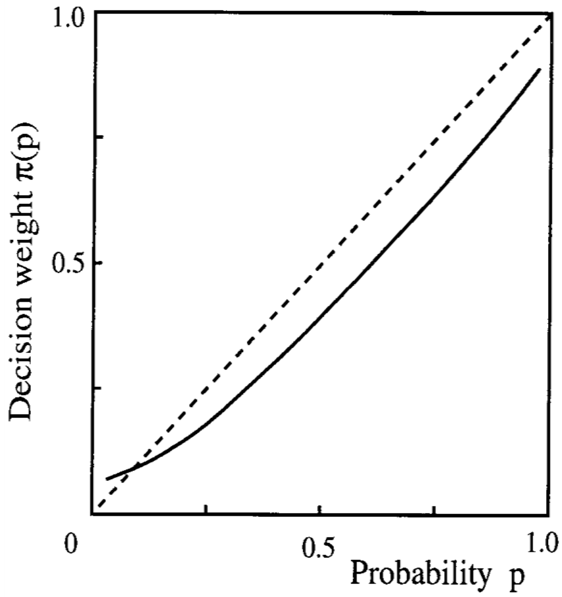
Osobine funkcije vrednosti su sledeće, videti [Dam14]:

(i) Funkcija vrednosti u domenu gubitka je strmija nego u domenu dobitka, jer ljudi imaju tendenciju averzije prema riziku,
(ii) Dobici i gubici su relativni u pogledu referentne tačke odlučivanja, i za istu odluku referentne tačke mogu da se razlikuju,
(iii) Ljudi su skloni averziji prema riziku kada je u izgledu dobitak, ali su takođe skloni riziku kada je u izgledu gubitak,
(iv) Referencijalna zavisnost (engl. reference dependence) – nosioci vrednosti (y) su dobici i gubici određeni u odnosu na referentnu tačku (referentnom tačkom smatra se početna pozicija, presek x ose i y ose),
(v) Averzija prema gubitku (engl. loss aversion) – nagib funkcije je veći u negativnom nego u pozitivnom domenu, tj. gubici imaju veću težinu od ekvivalentnih dobitaka (gubitak od 100 evra ima veću težinu od dobitka od 100 evra),
(vi) Opadajuća osetljivost (engl. diminishing sensitivity) – marginalne vrednosti i dobitaka i gubitaka opadaju sa njihovom udaljenošću od referentne tačke.

3.2. Funkcija težinskih koeficijenata odluke

Funkcija težinskih koeficijenata otkriva naš odnos prema verovatnoćama događaja, za razliku od normativne teorije koja pretpostavlja da smo neutralni prema verovatnoćama, tj. da iste poraste verovatnoća tretiramo na isti način. Tverski i Kaneman tvrde da mi različito vrednujemo ove poraste. Na primer porast verovatnoće sa 0.9 na 1 vrednujemo više u odnosu na porast verovatnoće sa 0.7 na 0.8, jer u prvom slučaju povećanje verovatnoće znači siguran dobitak. Težinska funkcija daje na značaju manjim verovatnoćama, a redukuje veće. Dijagonala na grafiku ove funkcije predstavlja slučaj kada smo savršeno racionalni, tj. kada podjedanko vrednujemo istovetna povećanja ili smanjena verovatnoća. Vrednosti težinskih koeficijenata, koje obeležavamo slovom π nisu verovatnoće. Za granične vrednosti

0 i 1, važi $\pi(0)=0$ i $\pi(1)=1$, dok je u blizini ekstremnih vrednosti ne možemo definisati, (Slika 3.2). Funkcija se nalazi iznad dijagonale za male verovatnoće, tada je $\pi(p)>p$ i ispod dijagonale za srednje i velike verovatnoće, što pokazuje da precenjujemo šanse javljanja maloverovatnih događaja i potcenjujemo šanse javljanja srednje i veoma verovatnih događaja.



Slika 3.2 *Funkcija težinskih koeficijenata odluke za PT*

U prospekt teoriji ne govori se o očekivanoj korisnosti, već o vrednosti V koju pojedinac dodeljuje svakom prospektu (lutriji). Teorija analizira prospekte tipa $L=(x,p;y,q)$, gde se ishod x ostvaruje sa verovatnoćom p, ishod y sa verovatnoćom q, pri čemu je $p+q=1$. Prospekt je striktno pozitivan ukoliko su svi njegovi ishodi pozitivni, odnosno $x,y>0$ i $p+q=1$, a striktno negativan ako su svi njegovi ishodi negativni. Prospekt je regularan ukoliko nije ni striktno pozitivan ni striktno negativan. Vrednost regularnog prospekta je:

$$V(x,p;y,q)=\pi(p)v(x)+\pi(q)v(y),$$

gde su p i q verovatnoće ostvarenja prvog i drugog stanja prirode, respektivno, a $v(x)$ i $v(y)$ predstavljaju vrednosti ishoda lutrije u ova dva stanja prirode, pri čemu je π(•) nelinearna funkcija.

Tverski i Kaneman predložili su u [Tve92] sledeću funkciju težinskih koeficijenata odluke (eng. probability weighting function):

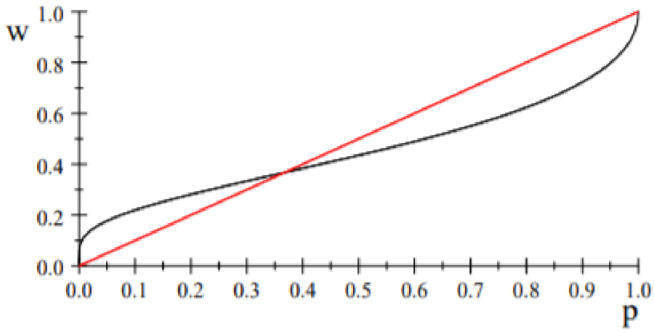
$$w(p)=\frac{p^{\gamma}}{\left[p^{\gamma}+(1-p)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\gamma}}}, \text{ gde je } 0.5\le\gamma<1,\ 0\le p\le 1.$$

Prelec je predložio u [Pre98] sledeću funkciju težinskih koeficijenata odluke:

$$w(p)=e^{-\beta(-\ln p)^{\alpha}}, \text{ gde je } 0<p\le 1,\ \alpha>0, \beta>0.$$

Na slici 3.3 je prikazana Prelecova funkcija za parametre:

$\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=1$.



Slika 3.3 [Pre88] *Prelecova funkcija težinskih koeficijenata odluke*

3.3. Uzroci narušavanja racionalnog ponašanja u normativnom modelu

Prospekt teorija je uspela da objasni na koji način ljudi vrše izbore, kao i da opiše uzroke zbog kojih ovi izbori odstupaju od ponašanja savršeno racionalnog pojedinca. Obični donosioci odluke, narušavaju sve pretpostvke racionalnog ponašanja u normativnom modelu, a najpoznatiji uzroci za takvo ponašanje su:

- Efekat izvesnosti i pseudoizvesnosti,
- Efekat okvira,
- Pristrasan odnos prema verovatnoćama,
- Averzija prema gubitku,
- Uticaj referentne tačke na izbor alternative.

3.3.1. Efekat izvesnosti i pseudoizvesnosti

Efekat izvesnosti (engl. the certainty effect) prikazuje odnos prema verovatnoćama i predviđa da redukcija verovatnoće ishoda konstantnim faktorom ima više uticaja kada je ishod inicijalno izvestan nego kada je samo verovatan, videti ([Pav04], [Dam14]). Efekat izvesnosti najbolje se može prikazati kroz sledeći primer: većina ljudi bi više platila da se izvadi jedini metak iz pištolja u ruskom ruletu, nego što bi platila da se izvadi jedan metak od četiri, [Zec00]. Iako je smanjenje verovatnoće da igrač bude ubijen u oba slučaja podjednako, razlika između 0 i 1 se doživljava kardinalnijom nego razlika između 3 i 4 metka. Ljudi žele da eliminišu rizik, što se opaža kao ponašanje u kom se više ceni eliminsanje rizika nego smanjenje, i to u slučajevima kada je umanjenje verovatnoće nepovoljnog ishoda isto u obe situacije.

Pored efekta izvesnosti, Tverski i Kaneman razmatraju i efekat pseudoizvesnosti (engl. *pseudocertainty*), videti [Tve81]. Naziv pseudoizvesnost proističe iz činjenice da izvesnost nije realna, već samo prividna. Fenomen su demonstrirali Slovik, Fišof i Lihtenštajnova (Slovic, Fischhoff & Lichtenstein, 1982) koji su ispitanicima predstavili dva moguća programa vakcinacije. U prvoj situaciji, ispitanici su pitani da li bi se dobrovoljno prijavili da prime vakcinu koja je zaštitila polovinu vakcinisanih od bolesti za koju se očekuje da će zahvatiti 20% populacije (vakcina, dakle, smanjuje rizik sa 20% na 10%). Za takvu vakcinu bilo je zainteresovano 40% ispitanika. U situaciji pseudoizvesnosti, ispitanicima je rečeno da postoje dva međusobno isključiva i verovatna oblika bolesti i da se očekuje da će oba zahvatiti po 10% populacije. Vakcina koja im je ponuđena u ovoj situaciji u potpunosti štiti od jednog oblika bolesti i nimalo ne štiti od drugog oblika bolesti. Potpuni rizik od zaraze je i u ovoj situaciji smanjen sa 20% na 10%, ali u ovom slučaju se 57% ispitnika opredeljuje za vakcinu, videti [Dam14].

3.3.2. Efekat okvira

Jezička manipulacija prilikom opisivanja mogućih ishoda naziva se okvir, a empirijski fenomen promene redosleda preferencija koji je posledica tih različitih opisa naziva se efekat okvira (engl. framing effect), videti [Gon05]. Kada prilikom opisivanja mogućih ishoda naglašavamo pozitivne aspekte ishoda, koristimo pozitivan okvir, a kada naglašavamo nepovoljne aspekte istih ishoda koristimo negativan okvir. Ovaj efekat najbolje će biti opisan kroz sledeći primer, videti [Dam14]:

Pretpostavite da se nalazimo u sledećoj situaciji: Država se priprema za izbijanje epidemije neobične bolesti za koju se očekuje da će odneti 1200 života. Predložene su dve opcije:

Opcija A: garantuje da će 400 ljudi preživeti,
Opcija B: garantuje sa verovatnoćom od 1/3 da će svih 1200 ljudi preživeti i verovatnoćom od 2/3 da niko neće preživeti.

Sada prikažimo isti problem na drugačiji način, korišćenjem drugačije jezičke formulacije mogućih ishoda. Pretpostavite da se nalazimo u sledećoj situaciji: Država se priprema za izbijanje epidemije bolesti za koju se očekuje da odnese 1200 života. Predložena su dva plana akcije:

Opcija A': garantuje da će 800 ljudi umreti.

Opcija B': garantuje sa verovatnoćom od 1/3 da niko neće umreti i sa verovatnoćom od 2/3 da će svih 1200 ljudi umreti.

Formalno gledajući sve četiri opcije su formalno indentične, a razlikuju se po tome što su prve ponuđene opcije (A i A') u obe verzije zadatka sigurne, a druge ponuđene opcije (B i B') su rizične. Vrednost sigurne opcije u obe verzije jednaka je očekivanoj vrednosti odgovarajuće rizične opcije (na primer, u prvoj verziji $400 = \frac{1}{3} \cdot 1200 + \frac{2}{3} \cdot 0$). Sigurne opcije imaju identičan, mada različito prikazan ishod (od 1200 ljudi, 400 će preživeti, odnosno 800 će umreti), što važi i za moguće ishode rizičnih akcija. Dakle, dva zadatka predstavljaju različite prikaze istog problema izbora. Prema normativnoj teoriji, tj. pomenutom principu invarijantnosti, jasno je da je racionalna odluka onaj izbor koji je dosledan u obe verzije zadatka. Dakle, ukoliko je DO u prvoj verziji izabrao sigurnu mogućnost, onda ne postoji racionalni osnov da u drugoj verziji izabere rizičnu mogućnost.
Međutim, rezultati originalnog eksperimenta Tverskog i Kanemana pokazuju da u prvoj verziji 72% ispitanika bira program A (sigurnu opciju), dok u drugoj verziji zadatka 78% ispitanika bira program B' (rizičnu opciju), videti [Tve81]. Ono što je drugačije u ove dve verzije zadatka i što dovodi do inverzije redosleda opcija, tj. promene preferencija jeste jezička formulacija mogućih ishoda.

3.3.3. Pristrasan odnos prema verovatnoćama

Dok je u normativnoj teoriji prisutan neutralan odnos prema verovatnoćama, u prospekt teoriji zastupljena je „pristrasnost naviše“ prema malim verovatnoćama i „pristrasnost naniže“ prema velikim verovatnoćama.

Izaberite jednu od sledeće dve opcije:

A: Gubitak od 5000$ sa verovatnoćom od 0,001 i gubitak od 0$ sa verovatnoćom od 0,999,

B: Siguran gubitak od 5$.

U istraživanju koje je sproveo S.Plous na 144 ispitanika koji su birali jednu od dve ponuđene opcije, 18% njih izabralo je opciju A, a 82% je izabralo opciju B. U ovom primeru su precenjene male šanse za javljanje velikih gubitaka. Zato preferiramo manji siguran gubitak, u odnosu na opciju gde sa velikom verovatnoćom prolazimo bez gubitka. To je i razlog zbog kojeg smo spremni da plaćamo osiguranje imovine, kako bismo se zaštitili od malo verovatnih ekstremnih gubitaka, [Plo93].

Odsustvo osnovnih preferencija kod originalne prospekt teorije mogla je da bude pokazatelj da nešto nedostaje. Osnovne preferencije navode uslove, direktno u vidu preferencija, koji su neophodni da bi se neki model odlučivanja, kao što je prospect teorija održao. Zato što su preferencije direktno uočljive, osnovne preferencije utvrđuju empirijsko značenje modela. One pokazuju kako da se direktno potvrdi ili opovrgne model empirijskim putem, i kako da se on odbrani ili kritikuje normativnim putem. Ako su uslovi u osnovnim preferencijama prirodni onda se može utvrditi da je model teoretski utemeljen.

3.3.4. Averzija prema gubitku

Averzija prema gubitku predstavlja fenomen koji odražava činjenicu da gubitke i dobitke iste veličine ne posmatramo na isti način. Ovim fenomenom možemo objasniti brojne odluke u različitim situacijama. Jedan od fenomena koji se objašnjava averzijom prema riziku je i efekat poklona, videti [Tha85]. Vrednost nekog predmeta se povećava onog momenta kada on postane deo naše lične svojine. Na osnovu toga, ukoliko želimo da otuđimo predmet koji posedujemo tražićemo više novca za njega, nego što smo bili spremni da za njega platimo. Ovaj efekat upravo koriste firme koje dozvoljavaju kupcima da vrate robu kojom nisu zadovoljni u predviđenom vremenskom intervalu. Kupovinom određenog proizvoda kupci dolaze u njegov posed i samim tim mu sada pripisuju daleko veću vrednost u odnosu na period pre kupovine. Iz tog razloga kupci se odlučuju da vrate proizvod jedino u situaciji kada je kupljeni proizvod daleko ispod njihovih očekivanja, videti [Pav04].

3.3.5. Uticaj referentne tačke na izbor alternative

Referentna tačka predstavlja nivo u odnosu na koji posmatramo i ocenjujemo alternative i od nje zavisi da li ćemo ishode posmatrati kao dobitke ili kao gubitke. Prema Bernulijevoj teoriji, dovoljno je da znamo koliko je bogatstvo, pa možemo odrediti njegovu korisnost, ali u prospekt teoriji treba da znamo i referentno stanje, videti [Kah17]. Prospekt teorija je iz tog razloga kompleksnija od teorije korisnosti. Jedan od fenomena koji delimično objašnjava referentna tačka je fenomen iluzije novca, videti [Tve86]. Na primer u uslovima inflacije mi prihvatamo porast nominalnih zarada, iako on nije dovoljan da zaštiti naš realni životni standard. Takođe, manji porast od prvobitno najavljenog doživljavamo kao dobitak. Na primer, zamislite da je najavljeno da će cena hleba značajno poskupeti za 30%. Ako nakon određenog vremena prožetog nagađanjima i neizvesnostima, cena poskupi za 10%, to poskupljenje ćemo prihvatiti sa olakšanjem, jer smo u međuvremenu referentnu tačku pomerili na viši nivo koji je bio najavljen.

3.4. Kumulativna prospekt teorija

Originalana prospekt teorija ima neke nedostatke. Pre svega, postoje neki teoretski problemi vezani za način na koji ona primenjuje neaditvne verovatnoće. Zatim, ona se bavi samo rizikom (poznatim verovatnoćama). Pored toga, u okviru rizika ona se bavi samo ograničenim skupom prospekata (samo dva nenula ishoda). Kigin je otkrio rešenje za prvi nedostatak vezan za rizik, videti [Qui82]. Šmidler je samostalno otkrio isto rešenje i proširio ga na neizvesnost (nepoznate verovatnoće), zajedno sa Gilboom, što je rešilo drugi nedostatak, videti ([Gil87], [Sch89]). Kigin je mogao da obradi bilo koji konačni skup ishoda, ne samo slučaj dva nenula ishoda, a Šmidler je mogao da obradi sve ograničene prospekte što rešava treći nedostatak. Ograničenje njihovog rešenja bilo je, međutim, što nisu mogli da obrade zavisnost referenci i averziju prema gubitku, važne empirijske komponente prospekt teorije, tako da se njihovo rešenje moglo primeniti samo na dobitke ili gubitke odvojeno. Ono ne može da obradi mešovite slučajeve koji sadrže i dobitak i gubitak.

Prospekt teorija ne uključuje kajanje, što je predstavljeno sledećim primerom, videti [Kah17]:

Izaberite : 90% šanse da dobijete 1 milion dolara ili da sigurno dobijete 50 dolara.

Izaberite: 90% šanse da dobijete 1 milion dolara ili da sigurno dobijete 150 000 dolara.

U oba slučaja bi se razočarali ukoliko ne dobijete milion dolara, ali potencijalno kajanje u drugom problemu je veće. Doživljaj ishoda ovde zavisi od opcije koju ste mogli izabrati, ali niste.

Takođe, prospekt teorija ne može da se nosi sa razočaranjem zato što ne dopušta promenu vrednosti ishoda ukoliko je malo verovatan ili ako je alternativa vrlo visoke vrednosti, videti [Kah17]. Razmotrimo sledeće izglede:

Šansa jedan prema milion da dobijete 5 miliona dolara;

90% šansa da dobijete 10 dolara i 10% šansa da ne dobijete ništa;

90% šansa da dobijete 5 miliona dolara i 10% šansa da ne dobijete ništa.

Ne dobiti ništa je referentna tačka, moguć ishod u sva tri slučaja, s tim što je ne dobiti ništa jedino u trećem slučaju krajnje razočaravajuće. U odnosu na očekivanja, izostanak dobitka nas razočarava. Razočaranje je realno i nemogućnost da bude uključeno u teoriju donosi očigledne nedostatke.

Kaneman i Tverski (1992) uključili su zavisnost referenci i averziju prema gubitku u modele Quiggin i Gilboa- Schmeidler, što je dovelo do nove prospekt teorije, koju su nazvali kumultativna prospet teorija (Cumulative prospect theory, CPT). Tako su oni dobili prvu teoriju koja kombinuje utemeljenost u teoriji sa empirijskim rezultatima. Za razliku od prospekt teorije prema kojoj postoje samo dva obrasca ponašanja, prema kumulativnoj teoriji postoje četiri obrasca ponašanja: rizikovanje u području dobitaka i izbegavanje rizika u području gubitaka za male verovatnoće, izbegavanje rizika u području dobitaka i rizikovanje u području gubitaka za velike verovatnoće.

Glavna promena u kumulativnoj teoriji u pogledu očekivane korisnosti je da se stavovi prema riziku i neizvesnost više ne oblikuju isključivo na osnovu zakrivljenosti funkcije korisnosti. Uvedene su dve nove komponente – merenje neizvesnosti i averzija prema gubitku. Stavovi prema riziku u kumulativnoj teoriji odnose se na to kako se donosioci odluka osećaju povodom ishoda istih. Trebalo bi uzeti u obzir kako se donosioci odluka osećaju po pitanju verovatnoća i neizvesnosti, i kako oni porede gubitke i dobitke (averzija prema gubitku). Veći deo rizika prema gubitku koji je uočen empirijskim putem, verovatno nije izazvan konkavnošću funkcije korisnosti, kao što to tvrde klasične teorije, već averzijom prema gubitku.
Kumulativna prospekt teorija spada u grupu tzv. teorija korisnosti zavisnih od ranga (engl. rank dependent utility theories, skr. RDU), videti [Qui93], [Abd09]. Osnovna osobina ovih teorija jeste ta da se u oceni verovatnoće određenog dobitka ili gubitka na nekom lozu uzima u obzir cela distribucija verovatnoća na tom lozu i relativan položaj tog gubitka ili dobitka u odnosu na druge dobitke ili gubitke koje taj loz sadrži. Tako se svaka opcija na nekom rizičnom lozu evaluira u kontekstu drugih rizičnih opcija, i njena evaluacija zato ne može biti uvek ista.

Pretpostavimo da je $x_1 \le \ldots \le x_k \le 0 \le x_{k+1} \le \ldots \le x_n$. Tada je CPT vrednost prospekta $(x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n)$ data sledećom formulom:

$$\sum_{i=1}^{k} \pi_i^- v(x_i) + \sum_{i=k+1}^{n} \pi_i^+ v(x_i),$$

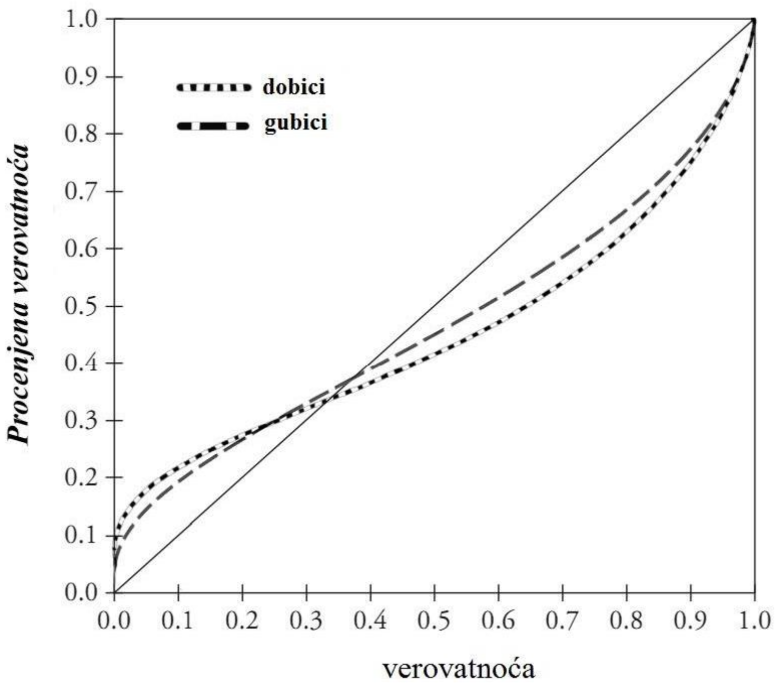
gde su težinski koeficijenti odluka definisani na sledeći način:

$$\pi_1^- = w^-(p_1),$$

$$\pi_i^- = w^-(p_1 + \ldots + p_i) - w^-(p_1 + \ldots + p_{i-1}),\ 2 \le i \le k,$$

$$\pi_i^+ = w^+(p_i + \ldots + p_n) - w^+(p_{i+1} + \ldots + p_n),\ k+1 \le i \le n-1,$$

$$\pi_n^+ = w^+(p_n).$$



Slika 3.4 [Tve92] *Funkcija težine odluke za dobitke i za gubitke*

Verovatnoća 0 se opaža kao verovatnoća nemogućeg događaja i verovatnoća 1 se opaža kao verovatnoća sigurnog događaja, dok se niske verovatnoće precenjuju ili zanemaruju. Pored toga, srednje i visoke verovatnoće su potcenjene (na primer, objektivna verovatnoća 0.8 se subjektivno procenjuje kao 0.6). Postavlja se pitanje gde se nalazi granica, tj. kritična tačka, između visokih i niskih subjektivnih verovatnoća. U originalnoj prospekt teoriji, videti [Kah79], kao kritičnu vrednost verovatnoće autori navode 0.1, u kumulativnoj teoriji, videti [Tve92], funkcija težinskih koeficijenata je redefinisana i kao kritična tačka verovatnoće se navodi 0.3 (kao na slici 3.4), dok Kaneman navodi da se i verovatnoće 0.2 precenjuju, videti [Dam14].

3.5. Razlike između originalne i kumulativne prospekt teorije

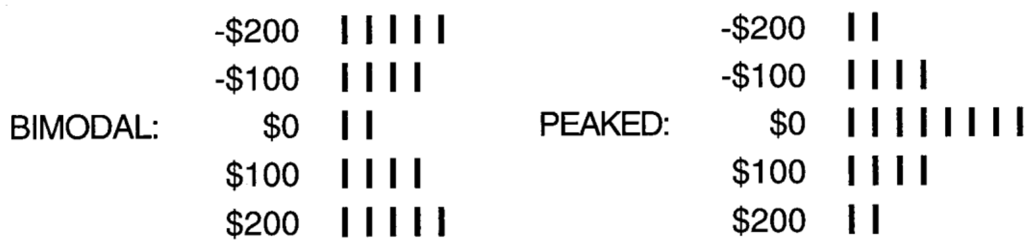
U sledećim primerima opisane su neke empirijske razlike između originalne prospect teorije ,PT i kumulativne prospect teorije KPT. Kumulativna teorija ne predstavlja samo ispravku nekih teoretskih problema u prospekt teoriji, već ona pruža različita predviđanja. Dva eksperimenta koja je sproveo Lopez u cilju testiranja PT-a, su posebno osmišljena da naglase razlike između PT i KPT, [Lop93]. Prvi eksperiment testira oblik težinske funkcije. Težinska funkcija KPT-a u obliku slova S, bolje objašnjava podatke nego težinska funkcija koja je uobičajeno pretpostavljena za PT. Prvi eksperiment ne odbacuje generalne formule PT-a. Testiranje generalnih formula PT-a u poređenju sa KPT-om omogućava drugi eksperiment. Kahneman i Tversky, videti [Kah79], su formulisali forme prospekta sa najviše dva nenula isoda, dok sledeći eksperiment proširuje forme na četiri do šest nenula ishoda, videti [Fen97].

Eksperimet 1.

U prvom eksperimentu razmatraju se dva prospekta pod nazivom "Bimodal" i "Peaked" prospekt. Ishod svakog prospekta određuje se na osnovu nasumičnog izvlačenja jedne karte od dvadeset numerisanih karata. Na primer "Peaked" prospekt daje sledeće rezultate: gubitak od 200$ ako je izvučena karta sa rednim brojem 1 ili 2, …, dobitak od 200$ ako je izvučena karta sa rednim brojem 19 ili 20. (Slika 3.5). Stoga,

(-200, 0.10; -100, 0.20; 0, 0.40; 100, 0.20; 200, 0.10),

opisuje "Peaked" prospekt. U Lopezovom originalnom eksperimentu uzet je uzorak od 56 studenata osnovnih studija, koji su upitani da navedu u kome od ova dva prospekta zamena jedne karte čiji je ishod -200$ kartom čiji je ishod 200$ daje najbolje poboljšanje.



Slika 3.5 [Fen97] *Prizak "Bimodal" i "Peaked" prospekta, linije predstavljaju lutrijske karte, numerisane od gornje levo do donje desno.*

Sledeći Lopezovu analizu, pretpostavljamo da su dobijene prednosti preferencija predstavljene razlikama u PT ili KPT vrednostima. Promena PT vrednosti u "Bimodal" prospektu dobija se zamenom vrednosti u PT formuli i oduzimanjem. Verovatnoća ishoda od 200$ povećava se od 0.25. do 0.30 i vrednosti težinskih koeficijenata odluka se povećavaju za $\pi(0.30)-\pi(0.25)$. Na sličan način vrednosti težinskih koeficijenata odluka za ishod -200$ smanjuje se za $\pi(0.25)-\pi(0.20)$. Za sve druge ishode verovatnoće i vrednosti težinskih koeficijenata odluka ostaju nepromenjene.

Za "Bimodal" prospekt promena u PT koja sledi iz promene ishoda je:

$$(\pi(0.30)-\pi(0.25))v(200\$)-(\pi(0.25)-\pi(0.20))v(-200\$). \qquad (1)$$

Za "Peaked"prospekt promena je:

$$(\pi(0.15)-\pi(0.10))v(200\$)-(\pi(0.10)-\pi(0.05))v(-200\$). \qquad (2)$$

PT ne pravi jasna predviđanja ovde. Ako je težinska funkcija linearna u intervalu [0.05, 0.30] za većinu ispitanika, onda obe promene daju otprilike ista poboljšanja za većinu ispitanika i očekuje se da oko polovine ispitanika preferira “Peaked” promenu.

Pretpostavimo da je težinska funkcija zakrivljena na gore u intervalu [0.05; 0.30]. Tada važi:

(i) $\pi(0.30)-\pi(0.25)>\pi(0.15)-\pi(0.10),$
(ii) $\pi(0.25)-\pi(0.20)>\pi(0.10)-\pi(0.05),$

iz čega sledi da je vrednost jednačine (1) veća od vrednosti jednačine (2), što znači da PT predviđa da će većina ispitanika da preferira “Bimodal” promenu. Eksperiment je međutim pokazao da velika većina (84% u Lopezovom eksperimentu) preferira “Peaked” promenu. PT može da prihvati ove zaključke ako je težinska funkcija zakrivljena na dole u intervalu [0.05; 0.30]. Onda su gore navedene nejednakosti obrnute što dovodi do preferiranja “Peaked” prospekta.

Eksperimentalni zaključci mogu da budu objašnjeni pomoću KPT-a, što je bazirano na zapažanju da su promene ishoda za “Peaked” prospekt locirane na ekstremnijim kartama u odnosu na “Bimodal” prospekt. KPT predviđa da je više vrednosti težinskih koeficijenata odluka pripisano ekstremnim ishodima, što odražava smanjenu senzitivnost. Stoga, KPT predviđa da će promene u “Peaked” prospektu dovesti do većih promena u evaluaciji. Pogodno je da za svaku kartu posebno obeležimo ishod. Stoga ćemo “Peaked” prospekt obeležiti sa:

(-200, 0.05; -200, 0.05; -100, 0.05; ... ; 100; 0.05; 200, 0.05; 200, 0.05).

Slično ćemo obeležiti “Bimodal” prospekt. Korisno je sačuvati rangiranje ishoda u sledećoj analizi, jer onda svi prospekti imaju iste vrednosti težinskih koeficijenata odluka. Ovo se može ostvariti na sledeći način. Prvo promena ishoda sa -200$ na 200$ sprovodi se u četiri koraka: od -200 do -100, od -100 do 0, od 0 do 100 i od 100 do 200, (slika 3.6).

Drugo, treba locirati prvu promenu u “Peaked” prospektu na karti broj 2, drugu na karti broj 6, treću na karti broj 14 i četvrtu na karti broj 18. Onda uvek karta sa rednim brojem 1 dovodi do najnižeg ishoda, ..., karta sa rednim brojem 20 do najvišeh ishoda, tako da je rangiranje ishoda očuvano.

Promena u KPT vrednostima ostvarena promenom prvog ishoda u koraku 1 (promena od -200 do -100 za drugu kartu) računa se zamenjivanjem u formuli $\sum_{i=1}^{k}\pi_i^{-}v(x_i)+\sum_{i=k+1}^{n}\pi_i^{+}v(x_i)$ da je k=10 i oduzimanjem. Pre promene ishoda druga karta doprinosila je sa $\pi_2^{-}v(-200)$, pošto se ishod promeni ona doprinosi sa $\pi_2^{-}v(-100)$, što dovodi do KPT povećanja od $\pi_2^{-}(v(-100)-v(-200))$. Na sličan način KPT povećanja zbog druge, treće i četvrte promene ishoda su redom: $\pi_6^-(\nu(0)-\nu(-100))$, $\pi_{14}^+(\nu(100)-\nu(0))$, $\pi_{18}^+(\nu(200)-\nu(100))$. Zbir ove četiri promene predstavlja povećanje KPT vrednosti koja je nastala zamenom jedne karte sa vrednošću -200\$ na kartu sa vrednosti 200\$ za "Peaked" prospekt.

	Peaked Prospect					**Bimodal Prospect**				
Ticket		*step 1*	*step 2*	*step 3*	*step 4*		*step 1*	*step 2*	*step 3*	*step 4*
20	\$200	\$200	\$200	\$200	\$200	\$200	\$200	\$200	\$200	\$200
19	\$200	\$200	\$200	\$200	\$200	\$200	\$200	\$200	\$200	\$200
18	\$100	\$100	\$100	\$100	\$200	\$200	\$200	\$200	\$200	\$200
17	\$100	\$100	\$100	\$100	\$100	\$200	\$200	\$200	\$200	\$200
16	\$100	\$100	\$100	\$100	\$100	\$200	\$200	\$200	\$200	\$200
15	\$100	\$100	\$100	\$100	\$100	\$100	\$100	\$100	\$100	\$200
14	\$0	\$0	\$0	\$100	\$100	\$100	\$100	\$100	\$100	\$100
13	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$100	\$100	\$100	\$100	\$100
12	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$100	\$100	\$100	\$100	\$100
11	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$100	\$100
10	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0
9	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	–\$100	–\$100	\$0	\$0	\$0
8	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	–\$100	–\$100	–\$100	–\$100	–\$100
7	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	–\$100	–\$100	–\$100	–\$100	–\$100
6	–\$100	–\$100	\$0	\$0	\$0	–\$100	–\$100	–\$100	–\$100	–\$100
5	–\$100	–\$100	–\$100	–\$100	–\$100	–\$200	–\$100	–\$100	–\$100	–\$100
4	–\$100	–\$100	–\$100	–\$100	–\$100	–\$200	–\$200	–\$200	–\$200	–\$200
3	–\$100	–\$100	–\$100	–\$100	–\$100	–\$200	–\$200	–\$200	–\$200	–\$200
2	–\$200	–\$100	–\$100	–\$100	–\$100	–\$200	–\$200	–\$200	–\$200	–\$200
1	–\$200	–\$200	–\$200	–\$200	–\$200	–\$200	–\$200	–\$200	–\$200	–\$200

Slika 3.6 *[Fen97]*

U "Bimodal" prospektu četiri promene od -200 do -100, od -100 do 0, od 0 do 100 i od 100 do 200 locirane su na kartama sa rednim brojevima 5, 9, 11 i 15, pa su CPT povećanja redom: $\pi_5^-(\nu(-100)-\nu(-200))$, $\pi_9^-(\nu(0)-\nu(-100))$, $\pi_{11}^+(\nu(100)-\nu(0))$, $\pi_{15}^+(\nu(200)-\nu(100))$ Zbir ove četiri promene predstavlja povećanje KPT vrednosti zamenom jedne karte sa vrednošću -200\$ na kartu sa vrednosti 200\$ za "Bimodal" prospekt.

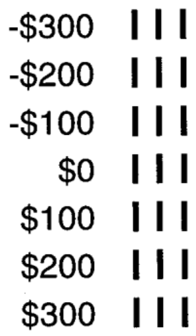
KPT odražava smanjenu osetljivost u pogledu transformacija verovatnoća za promenu koja je prikazana u "Peaked" prospektu, verovatnoća najvećeg gubitka smanjena je sa 0.1 na 0.05, dok je u "Bimodal" prospektu ova verovatnoća smanjena sa 0.25 na 0.20.

Važi da je $\pi_2^- > \pi_5^-$, $\pi_6^- > \pi_9^-$ i $\pi_{18}^+ > \pi_{15}^+$, što se lako vidi iz definicije težinskih koeficijenata (npr. $\pi_{18}^+ > \pi_{15}^+ \Leftrightarrow \omega^+(0.15)-\omega^+(0.10) > \omega^+(0.30)-\omega^+(0.25)$). Kako je treće povećanje približno isto za oba prospekta, sledi da je ukupan porast za "Peaked" prospekt, veći od ukupnog porasta za “Bimodal” prospekt. Ovo predviđanje KPT-a je u skadu sa empirijskim istraživanjem.

U pogledu psihologije druga promena ima manje uticaja. Kada je u pitanju gubitak, prikazana promena takođe favorizuje “Peaked” prospekt, jer su ljudi osetljiviji na promenu od 0.10 do 0.15, nego na promenu od 0.25 do 0.30.

Eksperiment 2.

U sledećem eksperimentu, videti [Fen97], posmatramo prospekt koji donosi -300$ ako su izvučeni tiketi sa rednim brojem 1, 2, ili 3, ..., 300$ ako su izvučeni tiketi sa rednim brojem 19, 20, ili 21 (Slika 3.7) Eksperimet se izvodi tako što se jedan tiket pomera u kategoriju iznad, npr. tiket koji donosi 0$ može da se promeni tako da donosi 100$. Menjanje tiketa koji donose 300$ se ne uključuje, tako da je moguće šest promena. Izabran je uzorak od 42 studenta koji su trebali da izaberu između dva prospekta koja su oba izvedena iz originalnog prospekta menjanjem jednog različitog tiketa u ta dva prospekta. Za svaki od 15 mogućih parova takvog izmenjenog prospekta studenti su morali da naprave izbor. Klasična teorija očekivane korisnosti predviđa da će studenti preferirati pomeranje tiketa sa nižim ishodom. Sada analiziramo predviđanja PT-a i KPT-a. Najveće odstupanje ćemo uočiti pri menjanju između -300$ ishoda i -200$ ishoda, kao i između menjanja 100$ ishoda i menjanja 200$ ishoda.



Slika 3.7 *[Fen97]*

Razmotrimo menjanje x u x+100 za jedan tiket, koje ćemo nazvati “x pomeraj”. Izračunajmo promenu PT vrednosti. Verovatnoća ishoda x opada od $\frac{3}{21}$ na $\frac{2}{21}$, što doprinosi smanjenju PT vrednosti za $(\pi(\frac{3}{21})-\pi(\frac{2}{21}))v(x)$. Verovatnoća ishoda x+100 raste sa $\frac{3}{21}$ na $\frac{4}{21}$, što doprinosi da PT poraste za $(\pi(\frac{4}{21})-\pi(\frac{3}{21}))v(x+100)$. Dakle, promena PT vrednosti je:

$$(\pi(\frac{4}{21})-\pi(\frac{3}{21}))v(x+100)-(\pi(\frac{3}{21})-\pi(\frac{2}{21}))v(x).$$

Oduzimanjem izraza $(\pi(\frac{4}{21})-\pi(\frac{3}{21}))v(x)$ od prvog dela i dodavanjem drugom delu prethodne jednačine dobijamo:

$$(\pi(\frac{4}{21})-\pi(\frac{3}{21}))(v(x+100)-v(x))+(\pi(\frac{4}{21})-2\pi(\frac{3}{21})+\pi(\frac{2}{21}))v(x). \quad (3)$$

Razmotrimo prvi deo formule (3), koji oslikava efekat zakrivljenosti funkcije vrednosti. Za gubitke smanjena osetljivost ukazuje da će vrednost razlike $v(x+100)-v(x)$ biti veća za $x=-100$, manja za $x=-200$ i najmanja za $x=-300$. Za dobitke smanjena osetljivost ukazuje da će vrednost razlike biti najveća $x=0$, manja $x=100$ i najmanja za $x=200$.
Sada posmatrajmo drugi deo formule (3) koji oslikava efekat zakrivljenosti težinske funkcije. Za pojedinca za koga važi:

$$\pi(\frac{4}{21})-2\pi(\frac{3}{21})+\pi(\frac{2}{21})\geq 0, \quad (4)$$

drugi deo izraza je rastući u x, što znači da je najveći za $x=200$ i najmanji za $x=-300$. Kombinujući ovo sa ponašanjem prvog dela izraza zaključujemo da je izmena u $x=-200$, veća od izmene za $x=-300$. Poređenje između izmena $x=100$ i $x=200$ ne može da se napravi direktno zato što prvi i drugi deo izraza prave suprotne efekte.
Za pojedinca za koga važi:

$$\pi(\frac{4}{21})-2\pi(\frac{3}{21})+\pi(\frac{2}{21})\leq 0, \quad (5)$$

drugi deo izraza je opadajući u x, što znači da je najveći za $x=-300$, i najmanji za $x=200$. Kombinovanjem ovoga sa ponašanjem prvog izraza zaključujemo da je promena u $x=100$ veća nego u $x=200$. Poređenje između izmena $x=-200$ i $x=-300$ ne može da se napravi direktno zato što prvi i drugi deo izraza prave suprotne efekte.

Sumirajmo predviđanja PT-a uzimajući u obzir dva izbora, izbor između pomeraja -200 i pomeraja -300, i izbor između pomeraja 100 i pomeraja 200.

1. Ako formula (4) važi za većinu pojedinaca, onda se -200 pomeraj preferira u odnosu na -300 pomeraj za većinu, dok za pomeraje 100 i 200 nema jasnih predviđanja.
2. Ako formula (5) važi za većinu pojedinaca, onda se 100 pomeraj preferira u odnosu na 200 pomeraj za većinu, dok za pomeraje -200 i -300 nema jasnih predviđanja.

Ako nema izražene većine studenata za koju (4) i (5) važe, onda će postojati većinske preferencije za oba, -200 pomeraj u odnosu na -300, kao i za 100 pomeraj u odnosu na 200 pomeraj.
PT predviđa da će više studenata preferirati pomeranje srednjih ishoda nego pomeranje ekstremnih ishoda. Lopezov eksperiment je dao suprotne rezultate. Većina (90%) je preferirala -300 pomeraj u odnosu na -200, i slično (86%) je preferiralo pomeraj 200 u odnosu na 100.
Sada ćemo uraditi analizu pomoću KPT-a. Locirajmo pomeraje tikete 3, 6, 9, 12, 15 i 18, redom, da bi zadržali redosled rangiranja, gde tiket 1 uvek proizvodi najmanji ishod, a tiket 21 najveći. Prvo ćemo se skoncentrisati na ulogu funkcije vrednosti i zanemariti efekat težinske funkcije (npr. pretpostavkom da je linearna). Onda za gubitke, smanjena osetljivost funkcije vrednosti implicira da je -100 pomeraj najpoželjniji, -200 manje poželjan i -300 najmanje. Za dobitke smanjena osetljivost funkcije vrednosti implicira da je 0 pomeraj najpoželjniji, 100 manje poželjan i 200 najmanje poželjan.
Sada posmatrajmo ulogu težinske funkcije, a zamemarimo funkciju vrednosti. Zbog smanjene osetljivosti za težinsku funkciju w^- za gubitke, tiketi sa ekstremnijim ishodima imaju veće težinske koeficijente i -300 pomeraj (tiket 3) je više preferiran u odnosu -200 pomeraj (tiket 6), koji je preferiraniji u odnosu na -100 pomeraj (tiket 9). Slično, zbog smanjene osetljivosti za težinsku funkciju w^+, sledi da je pomeraj 200 poželjniji od pomeraja 100, a on poželjniji u odnosu na pomeraj 0. Sumirajući oba zaključka, i za gubitke i za dobitke, zakrivljenost funkcije vrednosti favorizuje pomeraje srednjih ishoda, a zakrivljenost težinske funkcije favorzuje ishode ekstremnih pomeraja. Kako su ovi efekti suprotni, u ovoj fazi ne može biti napravljeno definitivno predviđanje. Da bismo doneli odluku na osnovu KPT-a, moramo odlučiti koji efekat se može očekivati da bude jači. Ishodi nisu veoma ekstremni i obuhvataju samo mali deo uzorka (od -300 do -100, i od 0 do 200). Efekti zakrivljenosti funkcije vrednosti su mali, a efekti težinske funkcije će biti jači. Odatle sledi da su očekivane većinske preferencije pomeraja -300 u odnosu na pomeraj -200, što je u saglasnosti sa Lopezovim eksperimentom (86%). Slično većinska preferencija 200 pomeraja je predviđena u odnosu na 100 pomeraj (90%).
U drugom eksperimentu KPT predviđa većinske preferencije pomeranja ekstremnih ishoda, i za gubitke i za dobitke, dok PT predviđa da će bar u jednom slučaju biti preferirani pomeraji srednjih ishoda. Velika većina studenata se ponašala u skladu sa KPT predviđanjima. Ovaj rezultat važi nezavisno od težinske funkcije koja se izabere u PT-u. Time ovaj eksperiment pruža empirijski dokaz protiv originalne PT verzije u korist KPT-a.

4. Definicija i osobine funkcija agregacije

Oblast funkcija agregacije je u poslednjoj deceniji postala nezavisno istraživačko polje matematike i informatike. Funkcije agregacije igraju važnu ulogu u raznim pristupima teoriji odlučivanja. One čine osnovu višekriterijumskog odlučivanja, inženjerskog dizajna, prepoznavanja oblika, neuronskih mreža, fazi kontrolera, genetskih algoritama, videti ([Gra09], [Gra11], [Bel07], [Cal02]). Agregacija predstavlja proces spajanja nekoliko vrednosti u jednu vrednost. Svaka funkcija koja, slično kao i aritmetička sredina, daje jednu izlaznu vrednost na osnovu vektora ulaznih vrednosti naziva se funkcija (operator) agregacije.

Operatori agregacije različito utiču na krajnju odluku donosioca odluke i nemaju svi podjednaku vrednost. Minimum daje najgoru ocenu, dok se kod maksimuma posmatraju najbolje ocene i optimista smatra da će najbolji faktor preovladati. Medijana posmatra samo karakteristiku koja je u sredini. Aritmetička sredina izračunava srednju vrednost ocena karakteristika. Nijedan od ovih operatora agregacije nije dovoljno dobar, jer ne uvažava i interakcije između karakteristika, kao ni razlike. Operator agregacije baziran na Šokeovom integralu se pokazao kao najbolji operator agregacije jer donosi odluku na osnovu više karakteristika, ali i interakcija između njih. Operator agregacije baziran na Sugenovom integralu je takođe pogodan operator agregacije kod donošenja odluke, ali je potrebno da ocene karakteristika budu u intevalu [0,1], videti [Dul15].

Da bi se dobila osetljiva i zadovoljavajuća agregacija, ne može se upotrebiti bilo koja funkcija agregacije. Za izbor odgovarajuće funkcije agregacije možemo primeniti aksiomatski pristup, te pretpostaviti da funkcija zadovoljava neke odabrane osobine. Ove osobine mogu biti diktirane prirodom vrednosti koje treba objediniti (agregirati). Tako, na primer, u višekriterijskom odlučivanju cilj je da se dobije globalna procena na osnovu parcijalnih ocena u odnosu na razne kriterijume. Bilo bi neprirodno da se da globalna ocena koja bi bila niža od najmanje parcijalne ocene, ili veća od najveće parcijalne ocene, što znači da su u ovom slučaju samo interni operatori agregacije dozvoljeni. Ako pak stepen preferencije dolazi od kombinacije tranzitivnih (u neku ruku) relacija, onda je očekivati da i konačni rezultat bude tranzitivan. Drugi važan primer dolazi iz agregacije mišljenja prilikom glasanja. Kako su najčešće glasači anonimni prirodno je da je operator agregacije simetričan.

Vrlo često se operatori agregacije klasifikuju u tri klase:

- konjuktivni,
- disjunktivni,
- unutrašnji (interni) operatori,

u zavisnosti da li su vrednosti operatora uvek manje od minimuma, veće od maksimuma ili između maksimuma i minimuma argumenata, respektivno.

Unutrašnji, tj. interni operatori agregacije se često zovu i kompenzatorni operatori, jer kod njih slab (odnosno dobar) rezultat jednog kriterijuma se može kompenzovati dobrim (odnosno lošim) rezultatom drugog kriterijuma, tako da je konačan rezultat neka srednja vrednost.

Funkcija agregacije je funkcija sa određenim osobinama koja dodeljuje realan broj y svakoj *n*-torki realnih brojeva $(x_1, x_2, ...x_n)$:

$$y = A(x_{1,} x_2, ..., x_n).$$

Definicija 4.1 Funkcija agregacije $A : \bigcup_{n \in N} [0,1]^n \to [0,1]$ zadovoljava sledeće osobine:

$A(x) = x,$ za sve $x \in [0,1]$,

$A(0,0,...,0) = 0$ i $A(1,1,...,1) = 1$ (granični uslovi),

$A(x_1, x_2, ..., x_n) \leq A(y_1, y_2, ..., y_n)$, ako je $(x_1, x_2, ..., x_n) \leq (y_1, y_2, ..., y_n)$.

4.1. Osobine funkcija agregacije

4.1.1. Rubni uslovi

Funkcija agregacije treba da ispunjava sledeće rubne uslove:

(1) $A(0,0,...,0) = 0,$

(2) $A(1,1,...,1) = 1.$

Prvi uslov znači da ako se posmatraju nezadovoljavajući kriterijumi, ukupna agregacija mora takođe biti nezadovoljavajuća. Drugi uslov kaže obrnuto, da ako se posmatraju samo pravi i potpuno zadovoljavajući kriterijumi, tada ukupna agregacija mora biti zadovoljavajuća.

Ova osobina se može proširiti:

$A(x,0) = A(1,0) \cdot x$, za svako $x \in [0,1],$

$A(x,1) = (1 - A(1,0)) \cdot x + A(1,0)$, za svako $x \in [0,1].$

Zapravo vidi se da su uslovi (1) i (2) specijalni slučajevi prethodna dva uslova.

4.1.2. Monotonost

Definicija 4.2 Funkcija $F: I^n \to \mathbb{R}$ je neopadajuća (za svaki argument) ako, za svako $x, x' \in I^n$ važi $x \leq x' \Rightarrow F(x) \leq F(x')$.

Dakle, povećanje svake ulazne vrednosti ne može da smanji izlaznu vrednost.

Definicija 4.3 Funkcija $F: I^n \to \mathbb{R}$ je osetljiva ako za svaki indeks $i \in \{1, 2, ..., n\}$ i svaki realni broj $\lambda \neq 0$ važi $F(x) \neq F(x + \lambda 1_i)$.

Ako je $K \subset X$ sa 1_K označavamo karakteristični vektor skupa K u $\{0,1\}^n$, tj. n-torku čija je i-ta koordinata jednaka 1, ukoliko $i \in K$, inače je nula.

Teorema 4.1 [Gra09]: Neopadajuća funkcija $F: I^n \to \mathbb{R}$ je strogo rastuća ako i samo ako je osetljiva.

4.1.3. Neprekidnost

Osobina neprekidnosti u suštini znači da bilo kakve promene u argumentima (moguće manje greške) ne bi trebale da dovedu do velikih promena u agregacionim vrednostima (output greške). Neprekidnost funkcije *F* sprečava da imamo velike promene izlaznih vrednosti usled malih promena ulaznih vrednosti.

Definicija 4.4 Funkcija $F: I^n \to \mathbb{R}$ je neprekidna ako važi:

$$\lim_{x \to x^*} F(x) = F(x^*),\ x^* \in I^n.$$

Teorema 4.2 Za neopadajuću funkciju $F: I^n \to \mathbb{R}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

- F je neprekidna funkcija.
- Za proizvoljno $x \in I^n$ i proizvoljno $i \in \{1, 2, ..., n\}$ unarna funkcija $u \to (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, u, x_{i+1}, ... x_n)$ je neprekidna.
- Za svako $x, y \in I^n$ pri čemu je $x \leq y$ i svako $c \in [F(x), F(y)]$ postoji $z \in I^n$ pri čemu je $x \leq y \leq z$, tako da važi da je $F(z) = c$.

4.1.4. Simetričnost

Osobina simetrije u procesu agregacije znači da agregaciona vrednost ne zavisi od rasporeda ulaznih vrednosti. Simetričnost se naziva i komutativnost, neutralnost ili anonimnost.

Definicija 4.5 Funkcija $F: I^n \to \mathbb{R}$ je simetrična ako je $F(x) = F([x]_\sigma)$, gde je σ permutacija elemenata skupa indeksa, $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ i $\left[x\right]_\sigma=\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},...,x_{\sigma(n)}\right)$.

Dakle, nije bitan raspored ulaznih vrednosti u procesu agregacije. Takva osobina je potrebna pri kombinovanju kriterijuma jednakih važnosti ili mišljenja anonimnih učesnika.

4.1.5. Idempotentnost

Idempotentnost se naziva i jednoglasnost, podudarnost ili refleksivnost. Navedena osobina znači da ako su svi x_i jednaki (identični), $F(x_1,...,x_n)$ vraća istu vrednost.

Definicija 4.6 Funkcija $F:I^n\to\mathbb{R}$ je idempotentna ako važi $F(x,x,x,...,x)=x,$ za sve $x\in I.$

4.1.6. Konjunkcija, disjunkcija i unutrašnjost

Za date *n*-arne funkcije $F:I^n\to\mathbb{R}$ i $G:I^n\to\mathbb{R}$, kažemo da G dominira nad F ako je $F\le G$ na I^n. S obzirom da su funkcije $\min$ i $\max$ dominatne funkcije dolazimo do tri glavne klase funkcija agregacije: konjunktivne funkcije, disjunktivne funkcije i funkcije unutrašnjosti.

Definicija 4.7 Funkcija $F:I^n\to R$ je konjunktivna ako je $\inf I\le F\le min.$

Definicija 4.8 Funkcija $F:I^n\to R$ je disjunktivna ako je $max\le F\le\sup I.$

Definicija 4.9 Funkcija $F:I^n\to R$ je unutrašnja ako je $min\le F\le max.$

Unutrašnjost je osobina koju imaju aritmetička sredina, geometrijska sredina kao i funkcije za računanje proseka koje se najviše koriste za agregaciju.

4.1.7. Asocijativnost

Kažemo da je binarna operacije * asocijativna ako važi $(a*b)*c=a*(b*c)$. Ukoliko bi binarnu operaciju * zapisali u obliku funkcije $a*b=f\left(a,b\right)$ dobili bismo asocijativnu funkcionalnu jednačinu $f(f(a,b),c)=f(a,f(b,c))$.

Definicija 4.10 Funkcija $F:I^2\to I$ je asocijativna ako za sve $x\in I^3$ važi:

$$F(F(x_1,x_2),x_3)=F(x_1,F(x_2,x_3)).$$

4.1.8. Dekompozabilnost

Aritmetička sredina kao proširena funkcija ne ispunjava uslov asocijativnosti. Zato je potrebno uvesti novu osobinu, sličnu asocijativnosti, koju ima aritmetička sredina, videti [Gra09].

Definicija 4.11 $F:\bigcup_{n\in N} I^n \to I$ je dekompozabilna funkcija ako je $F(x)=x$ za svako $x\in I$ i ako važi:

$$F\left(x,x^{'}\right)=F\left(k\cdot F\left(x\right),k^{'}\cdot F\left(x^{'}\right)\right),$$

za svako $k,k^{'}\in N$, za svako $x\in I^k$ i za svako $x^{'}\in I^{k^{'}}$.

4.2. Pregled osnovnih funkcija agregacije

U grupu osnovnih funkcija agregacije spadaju sledeće funkcije: aritmetička sredina, medijana, (ponderisani) minimum i (ponderisani) maksimum, kao i neki klasični oblik generalizacije kao što je ponderisana sredina. Transformacijom klasične aritmetičke sredine dolazimo do kvazi-aritmetička sredina. Sledeći operator koji je opisan u ovom poglavlju je ponderisani operator usrednjavanja (*OWA* operator), koji u sklopu aditivne forme uključuje minimum i maksimum kao posebne slučajeve.

4.2.1. Aritmetička sredina

Aritmetička sredina predstavlja najjednostavniju i najčešću funkciju agregacije. Definiše se na sledeći način:

$$AM(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ .$$

Ova funkcija je interesantna zato što daje vrednost agregacije koja je manja od najvećeg argument, a veća od najmanjeg. Zadovoljava osobine monotonosti, neprekidnosti, simetrije, idempotentnosti i stabilnosti za linearne transformacije. Međutim, nema annhilator niti neutralni elemenat, videti [Dul15].

4.2.2. Ponderisana sredina

Klasično proširenje aritmetičke sredine, omogućava dodavanje ponderisanih koeficijenata argumentima. Time se gubi osobina simetričnosti. Ova funkcija se izražava matematičkom formulom:

$$M_{w_1,...,w_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i,$$

pri čemu važi da su težinski koeficijenti nenegativni i važi $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

4.2.3. Medijana

Iz niza argumenata poređanih od najmanje do najveće vrednosti uzima se element koji se nalazi u sredini i na taj način se vrši agregacija pomoću funkcije pod nazivom medijana. U slučaju da je broj elemenata skupa paran broj, tada se u sredini nalaze dva elementa. Tada se uzima srednja vrednost tog para. Ova funkcija agregacije zadovoljava granične uslove, monotonost, simetričnost i idempotentnost.
Postoje razne generalizacije medijane, na primer postoji funkcija agregacije koji uzima k-tu vrednost uređenih elemenata, videti [Dul15].

4.2.4. Minimum i maksimum

Iz niza argumenata agregacija se vrši pomoću operatora minimum, tako što se uzima najmanju vrednost skupa, dok maksimum daje najveću vrednost.

Ove funkcije imaju osobinu monotonosti, simetričnosti, asocijativnosti, idempotentnosti, videti [Dul15].

4.2.5. Ponderisani minimum i ponderisani maksimum

Ponderisani minimum i ponderisani maksimum su funkcije agregacije koje se definišu na sledeći način:

$$\min_{w_1,...,w_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \min_{i=1}^{n}\left[\max(1 - w_i, x_i)\right],$$

$$\max_{w_1,...,w_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \max_{i=1}^{n}\left[\min(w_i, x_i)\right],$$

pri čemu su težinski koeficijenti nenegativni i važi $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

4.2.6. Kvazi aritmetička sredina

Kvazi-aritmetička sredina se bazira na transformacijama klasične aritmetičke sredine, videti [Dul15].

Definicija 4.12 Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna i strogo monotona funkcija. Funkcija $M_f : I^n \to I$ definisana na sledeći način $M_f(x) = f^{-1}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i))$ predstavlja $n-$arnu kvazi-aritmetičku sredinu koja je generisana funkcijom f .

4.2.7. Uređena ponderisana funkcija usrednjavanja OWA – funkcija

OWA (*eng. ordered weighted averaging*) funkcije je uveo Ronald R. Jager da obezbedi sredstva za agregaciju rezultata u višekriterijumskom odlučivanju i pomoću ove funkcije dolazi do sjedinjavanja konjunktivnih i disjunktivnih osobina, videti [Dul15].

Definicija 4.13 OWA (*eng. ordered weighted averaging*) funkcija se definiše na sledeći način:

$$OWA(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j x_{\sigma(j)} ,$$

gde je σ permutacija elemenata skupa indeksa, takva da je $x_{\sigma(1)} \le ... \le x_{\sigma(n)}$. Težinski koeficijenti su nenegativni i njihov zbir je jednak 1.

Pomoću OWA funkcija, biranjem odgovarajućih težinskih koeficijenata, se dobija parametrizovana grupa funkcija agregacije koja obuhvata mnoge poznate funkcije kao što su maksimum, minimum, medijana i aritmetička sredina.

U tabeli 4.1. predstavljeni su specifični slučajevi OWA funkcija:

	OWA
Minimun	$\begin{Bmatrix} w_1 = 1 \\ w_i = 0, i \neq 1 \end{Bmatrix}$
Maksimum	$\begin{Bmatrix} w_n = 1 \\ w_i = 0, i \neq n \end{Bmatrix}$
Medijana	$\begin{Bmatrix} w_{\frac{n+1}{2}} = 1,\ ako\ \ je\ n\ neparno \\ w_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\ \ i\ \ w_{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{2},\ ako\ \ je\ n\ \ parno \\ w_i = 0,\ ostalo \end{Bmatrix}$
Aritmetička sredina	$w_i = \frac{1}{n}, \forall i$

Tabela 4.1 *Specifični slučajevi OWA funkcije*

OWA funkcije zadovoljavaju osobine: komutativnost, monotonost, idempotentnost i stabilne su za pozitivne linearne transformacije. Agregacija dobijena pomoću OWA funkcija je uvek između maksimalne i minimalne vrednosti.

5. Neaditivne mere i integrali kao podrška odlučivanju

5.1. Neaditivne mere

U klasičnom prilazu (fon Nojman Morgenšterna) odlučivanja u ekonomiji glavni matematički aparat bila je verovatnoća. Ona je aditivna veličina, te se zato sa njom nije mogla modelirati interakcija između kriterijuma. Monotona neopadajuća skupovna funkcija, koja se pojavljuje pod različitim nazivima u literaturi, kao monotona mera, neaditivna mera, fazi mera ili kapacitet, omogućava modeliranja interakcije između događaja, pojava, alternativa. Time se prevazilazi ograničenje nezavisnosti događaja. Dok se klasični modeli zasnivaju na očekivanoj korisnosti, posmatranje određenih parametara koje očekivana vrednost ne objašnjava, nas je dovelo do razmatranja neaditivnih mera i Šokeovog integrala. U ovom radu, u poslednjem poglavlju, predstavljen je premium princip zasnovan na monotonom integralu koji se bazira na monotonoj meri. Zato će predmet ove glave biti upravo definicija i karakteristike neaditivnih mera i integrala.

Klasične mere su nenegativne skupovne funkcije sa vrednostima na skupu realnih brojeva, koje su definisane na određenoj klasi podskupova datog univerzalnog skupa, koje mogu zadovoljavati određene uslove [Lie01],[Wan09]. Osnovna osobina klasičnih mera je uslov prebrojive aditivnosti, koji se pokazao suviše restriktivan. Zato se javila potreba da se uslov prebrojive aditivnosti zameni uslovom monotonosti, koji je slabiji od prebrojive aditivnosti. Na taj način se dobija klasa skupovnih funkcija koje su opštije od aditivnih mera i koje se nazivaju neaditivne mere ili fazi mere.

Japanski naučnik Mihio Sugeno pokušao je da objasni vezu između funkcije pripadnosti fazi skupova sa verovatnoćom. Kako to nije bilo moguće, Sugeno je uopštenje klasične mere u neaditivne mere posmatrao analogno uopštenju klasičnih skupova u fazi skupove. Koristeći ovu analogiju, dodelio je neaditivnim merama naziv *fazi mere*. Na osnovu Sugenove teorije, fazi mere su dobijene kada je uslov aditivnosti klasičnih mera zamenjen slabijim uslovima rastuće monotonosti u odnosu na inkluziju i neprekidnošću, videti [Den94],[Gra16], [Pap95], [Pap99], [Pap02], [Pop15].

Neka je X neprazan skup koga nazivamo univerzalni skup. Sa C ćemo označiti nepraznu klasu podskupova skupa koja može biti poluprsten, prsten, algebra ili σ-algebra. $\mu : C \to [0,\infty]$ će označavati nenegativnu skupovnu funkciju sa vrednostima u proširenom skupu realnih brojeva definisanu na C koja poseduje neke dodatne osobine kao što su monotonost u odnosu na inkluziju, neprekidnost, poluneprekidnost.

Definicija 5.1 Skupovna funkcija $\mu : C \to [0,\infty]$ naziva se opšta mera na (X,C) ako je $\mu(\varnothing)=0$ kada je $\varnothing \in C$.

Klasa C na kojoj je μ definisano može biti monotona klasa, poluprsten, prsten, algebra, σ-prsten, σ-algebra ili partitivni skup skupa X.

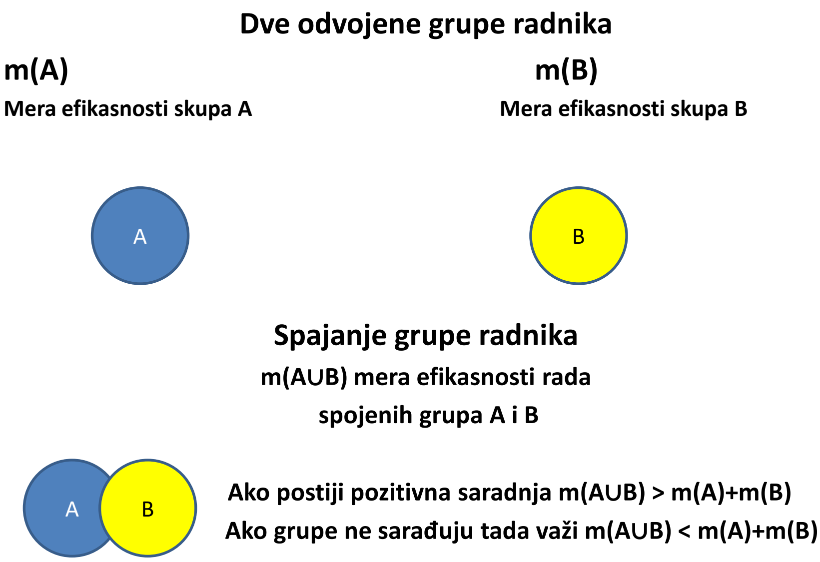
Definicija 5.2 Skupovna funkcija $\mu : C \to [0,\infty]$ naziva se *monotona (fazi) mera* na (X,C) ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$ kada je $\varnothing \in C$,
(ii) $E \in C$, $F \in C$, $E \subset F$ tada sledi da je $\mu(E) \le \mu(F)$ (monotonost).

Za više detalja videti [Den94], [Pap95].

Primer 5.1 Neka je X skup svih radnika u radionici i neka su A i B dve odvojene grupe radnika. Neka je $m(A)$ broj proizvoda koju grupa A napravi za sat vremena, pretpostavimo da oni svi prave isti proizvod, slika 5.1. Svaka grupa može raditi na različite načine: različite kombinacije zajedničkog i podeljenog rada. Pretpostavimo da svaka grupa radi na najefikasniji način. Onda je skupovna funkcija m definisana na skupu svih podskupova skupa X monotona i anulira se na praznom skupu i stoga je to fazi mera, koja nije obavezno aditivna.

Neka su A i B disjunktni podskupovi skupa X. Posmatrajmo produktivnost udružene grupe $A \cup B$. Ako A i B rade odvojeno, onda je $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. Ali, kako oni međusobno utiču jedni na druge, jednakost se možda neće uvek održati. Efektivna saradnja članova $A \cup B$ dovodi do nejednakosti $m(A \cup B) > m(A) + m(B)$. Sa druge strane, nesaglasnost između grupa A i B, tj. nemogućnost odvojenog rada dovodi do suprotne nejednakosti $m(A \cup B) < m(A) + m(B)$, što je prikazano na slici 5.1, videti [Pap15].



Slika 5.1 *Mera efikasnosti rada*

Definicija 5.3 [Wan 09] Monotona mera μ na (X,C) je normirana ako je $X \in C$ i $\mu(X)=1$.

Mera definisana u primeru 5.2 je normirana, videti [Pop15].

Primer 5.2 Posmatrajmo merljv prostor (X,C) gde je $C=P(X)$ i $X=\{1,2,3\}$. Skupovna funkcija μ definisana na sledeći način je monotona mera na $(X,P(X))$:

$$\mu(\varnothing)=0, \mu(X)=1,$$
$$\mu(\{1\})=0.2, \mu(\{2\})=0.2, \mu(\{3\})=0.2,$$
$$\mu(\{1,2\})=0.4, \mu(\{1,3\})=0.4, \mu(\{2,3\})=0.5.$$

Ako je monotona mera definisana kao zbir ili proizvod druge dve neprekidne, konačne ili σ-konačne monotone mere, tada je i ona sama neprekidna, konačna ili σ-konačna monotona mera, što je opisano u sledećoj lemi.

Lema 5.1 [Wan 09] Ako su μ_1 i μ_2 neprekidne, nenegativne, skupovne funkcije na (X,C) sa vrednostima u proširenom skupu realnih brojeva i $\mu_1+\mu_2$ i $\mu_1\times\mu_2$ definisani na sledeći način:

$(\mu_1+\mu_2)(E)=\mu_1(E)+\mu_2(E),$ za sve $E\in C$,

$(\mu_1\times\mu_2)(E)=\mu_1(E)\times\mu_2(E),$ za sve $E\in C.$

Tada su $\mu_1+\mu_2$ i $\mu_1\times\mu_2$ neprekidne.

Ukoliko posmatramo osobinu aditivnosti, monotone mere možemo podeliti u četiri klase, videti [Pop15]:

1. aditivne mere,
2. superaditivne mere,
3. subaditivne mere,
4. monotone mere koje ne pripadaju ni jednoj od prethodne tri klase.

Definicija 5.4 [Wan 09] Neka $A\bigcup B\in C$, $A\in C$, $B\in C$ i $A\bigcap B=\varnothing$. Monotona mera μ na (X,C) je:

a) Aditivna ako važi $\mu(A\bigcup B)=\mu(A)+\mu(B)$,
b) Simetrična ako važi: ako je $|A|=|B|$ odatle sledi da je $\mu(A)=\mu(B)$,
c) Maksitivna ako važi $\mu(A\bigcup B)=\mu(A)\vee\mu(B)$,
d) Minitivna ako važi $\mu(A\bigcap B)=\mu(A)\wedge\mu(B)$.

Definicija 5.5 [Wan 09] Neka je $A \in C$, $B \in C$, $A \bigcup B \in C$, $A \bigcap B = \varnothing$ i $\mu(B) = 0$.

a) Monotona mera $\mu : C \to [-\infty, \infty]$ je nula aditivna ako važi $\mu(A \bigcup B) = \mu(A)$,
b) Monotona mera μ na (X, C) je superaditivna ako važi: $\mu(A \bigcup B) \geq \mu(A) + \mu(B)$,
c) Monotona mera μ na (X, C) je subaditivna ako važi: $\mu(A \bigcup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

Aditivne mere se mogu primeniti samo u situaciji kada ne postoji interakcija između skupova koji predstavljaju osobine kojima se dodeljuje neka vrednost (mera). Zato su u opštoj teoriji mere superaditivne mere, kao i subaditivne mere od velike važnosti. Pomoću superaditivnih mera je moguće izraziti zajednički uticaj dva skupa u smislu osobine čiju vrednost (meru) one određuju, dok je pomoću subaditivnih mera moguće izraziti nekompatibilnost između skupova u smislu osobina čiju meru ove skupovne funkcije predstavljaju. Pomoću aditivnih mera nije moguće izraziti bilo koji od ovih interaktivnih efekata, videti [Pop15]. Veza imeđu različitih familija mera predstavljena je na slici 5.2.

Slika 5.2 *[Wan09] Veza između različitih familija mera*

5.2. λ-Fazi mera i Šeplijeva vrednost

Kao efikasna alatka za merenje interakcije između elemenata, fazi mera se definiše na sledeći način:

Definicija 5.6 Neka je $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ fiksni skup. $P(X)$ je skup svih podskupova skupa X. Fazi mera na X je skupovna funkcija $\mu : P(X) \to [0,1]$, koja ispunjava sledeće uslove:

(i) $\mu(\varnothing)=0$, $\mu(X)=1$,

(ii) Ako $A,B\in P(X)$ i $A\subseteq B$, tada važi $\mu(A)\leq\mu(B)$.

U MDCM, $\mu(A)$, posmatra se kao stepen subjektivne važnosti skupa kriterijuma za odlučivanje A. Stoga, pored uobičajnih težina kriterijuma koji se posmatraju odvojeno, težine bilo koje kombinacije kriterijuma se takođe definišu pomoću fazi mere.

Za tradicionalne operetore agregacije, npr. OWA operator, kriterijumu $c_k\in X$ (X predstavlja skup kriterijuma), je često dodeljena težina $\omega_k\in[0,1]$, koja predstavlja relativnu važnost ovog kriterijuma u odlučivanju. Zbir svih ω_k, je jednak jedinici. Težina svake kombinacije ovih kriterijuma u datoj situaciji, međutim, nije definisana. Kada su prisutni međuzavisni ili interaktivni fenomeni između kriterijuma, u realnoj situaciji odlučivanja, sve ukupni značaj kriterijuma $c_k\in X$ ne zavisi samo od c_k, već i od skupova kriterijuma T, $c_k\notin T$. Pretpostavimo da ω_k označava stepen važnosti kriterijuma c_k, $\omega_k=0$, nagoveštava da je element nevažan, ali može da se dogodi za mnoge podskupove $T\subseteq X$ da je $\omega(T\cup c_k)$ mnogo veće od $\omega(T)$. To nagoveštava da je k zapravo važan element u odlučivanju. Fazi mera koja je upravo definisana može da predstavlja težinu ne samo pojedinačnog kriterijuma, već takođe i kombinacije kriterijuma gde zbir svih ω_k nije jednak jedinici. Kao rezultat, mera interakcije između kriterijuma može da bude predstavljena pomoću fazi mere.

Da bi utvrdili takvu fazi meru, mora se naći 2^n-2 vrednosti za n kriterijuma u datoj MCDM situaciji. U skladu sa gore navedenom definicijom vrednosti $\mu(\varnothing)$ i $\mu(X)$, su uvek jednake nuli tj. jedinici. Očigledno je da je ovakav proces procenjivanja prilično složen. Da bi smanjili složenost izračunavanja, predložena je λ-fazi mera g koja se ponaša kao specijalna vrsta fazi mere, videti [Sug74], [Che97], [Mur00].

Definicija 5.7 Neka je $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ fiksni skup. Fazi mera g na X naziva se λ-fazi fazi mera, ako zadovoljava sledeće uslove:

$$g(A\cup B)=g(A)+g(B)+\lambda g(A)g(B),$$

gde je, $\lambda\in(-1,\infty)$ za $\forall A,B\in P(X)$ i $A\cap B=\varnothing$.

Teorema 5.1 Ako je X konačan skup $\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}=X$, λ-fazi mera g zadovoljava sledeću jednačinu:

$$g\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}\right)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{n}\left[1+\lambda g\left(\{x_i\}\right)\right]-1\right), & za \quad \lambda\neq 0\\ \sum_{i=1}^{n} g\left(\{x_i\}\right), & za \quad \lambda=0\end{cases}, \qquad (1)$$

gde je $\{x_i\}\cap\{x_j\}=\varnothing$, za svako $i, j=1,\ldots,n$ i $i\neq j$.

$g\left(\{x_i\}\right)$ za podskup sa jednim elementom x_i naziva se fazi gustina, označena kao $g_i=g\left(\{x_i\}\right)$, što predstavlja subjektivnu težinu kriterijuma c_i u MCDM. Za interaktivan kriterijum generalno važi da je $\sum_{i=1}^{n} g\left(\{x_i\}\right)\neq 1$.

Specjalno za svaki podskup $A\in P\left(X\right)$ imamo da važi:

$$g\left(A\right)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i\in A}\left[1+\lambda g_i\right]-1\right), & za \quad \lambda\neq 0\\ \sum_{i\in A} g_i, & za \quad \lambda=0\end{cases}. \qquad (2)$$

Vrednost λ može se jedinstveno utvrditi pomoću prethodne jednačine. Za $g\left(X\right)=1$ jednačina se svodi na:

$$\lambda+1=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\lambda g_i\right). \qquad (3)$$

Teorema 5.2

1) $\lambda>0$ kada je $\sum_{i=1}^{n} g\left(\{x_i\}\right)<g\left(X\right)$,

2) $\lambda=0$ kada je $\sum_{i=1}^{n} g\left(\{x_i\}\right)=g\left(X\right)$,

3) $-\frac{1}{g\left(X\right)}<\lambda<0$ kada je $\sum_{i=1}^{n} g\left(\{x_i\}\right)>g\left(X\right)$.

Bazirano na skupu aksioma, Šepli je predložio definiciju koeficijenta važnosti, koji se naziva **Šeplijeva vrednost** $\varphi_i\left(\mu, X\right)$ (kraće zapisano sa $\varphi_i\left(\mu\right)$), i definisao ga je na sledeći način, videti [Sha53]:

$$\varphi_i(\mu, X) = \sum_{T \subseteq X|\{i\}} \frac{(n-t-1)!t!}{n!}\left[\mu(T \cup i) - \mu(T)\right], \qquad (4)$$

gde n, t označavaju kardinalnost skupova X, T redom.

Na bazi prethodne jednačine mi znamo da je Šeplijeva vrednost očekivana vrednost ukupnog marginalnog doprinosa između elementa i i bilo koje koalicije $T \subseteq X|\{i\}$. Na osnovu definicije fazi mere, lako je uvideti da za svako i, važi da je $\varphi_i(\mu) \geq 0$ i $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\mu) = 1$, što znači da je $\{\varphi_i(\mu)\}_{i \in X}$, težinski vektor, koji se naziva Šeplijev težinski vektor.

Kada je mera μ aditivna, imamo da je $\varphi_i(\mu) = \mu(\{i\})$, što pokazuje da nema interakcije između elementa i i bilo koje koalicije $T \subseteq X|\{i\}$. U ovom slučaju Šeplijev težinski vektor se svodi na tradicionalan težinski vector $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)^T$, gde je $\omega_i = \mu(\{i\})$.

Kada μ nije aditivna, ako je $\varphi_i(\mu) > \mu(\{i\})$, onda postoji komplementarna interakcija između elementa i i bilo koje koalicije $T \subseteq X|\{i\}$. Ako je $\varphi_i(\mu) < \mu(\{i\})$, onda postoji redudantna interakcija između elementa i i bilo koje koalicije $T \subseteq X|\{i\}$. Stoga, Šeplijeva težina ne samo da pruža meru važnosti kriterijuma, već takođe odražava njihove interaktivne karakteristike.

Kombinovanjem sa definicijom λ-fazi mere g i Šeplijeve vrednosti, lako je izračunati **indeks važnosti** $\varphi_i(g)$, za kriterium i koji se izražava sledećom jednačinom:

$$\varphi_i(g) = \sum_{T \subseteq X|\{i\}} \frac{(n-t-1)!t!}{n!} g_i \prod_{j \in T}(1 + \lambda g_j). \qquad (5)$$

5.3. Određivanje fazi mere

Određivanje fazi mere je kompleksan proces zbog eksponencijalnog broja podskupova nad kojima se mera procenjuje. Tabela 5.1 klasifikuje metode procene fazi mera kao direktne, indirektne i kao kombinaciju ove dve metode, videti [Gra96]. Direktne metode uključuju ili utvrđivanje od strane eksperta stepena važnosti svih podskupova atributa ili procenjivanje relativnog značaja svih atributa i zatim utvrđivanje mera baziranih na semantičkom razmatranju. Oba pristupa su prilično teška za primenu u praksi. Indirektni metod uključuje ili konstriusanje skupa podataka na osnovu stvarnih eksperimenata ili prikupljanje informacija od eksperata i zatim primenu neke od metoda: Kvadratno programranje, Neuralne mreže, Genetski algoritmi ili metod najmanjih kvadrata pomoću kojih se utvrđuju fazi mere. Ostale metode predložene u literaturi su:

- Konstruisanje novih fazi mera na osnovu datih fazi mera putem racionalne transformacije, videti [Kli96]
- Rešavanje relacione jednačine, videti [Kli95]
- Metod baziran na mašinskom učenju i optimizaciji, videti [Nar05]

Kombinacija ovih metoda uključuje prikupljanje semantičkih informacija radi pravljenja prve aproksimacije fazi modela. Onda se vrši usavršavanje modela tako što se na njega primene neke od gore navedenih indirektnih metoda.

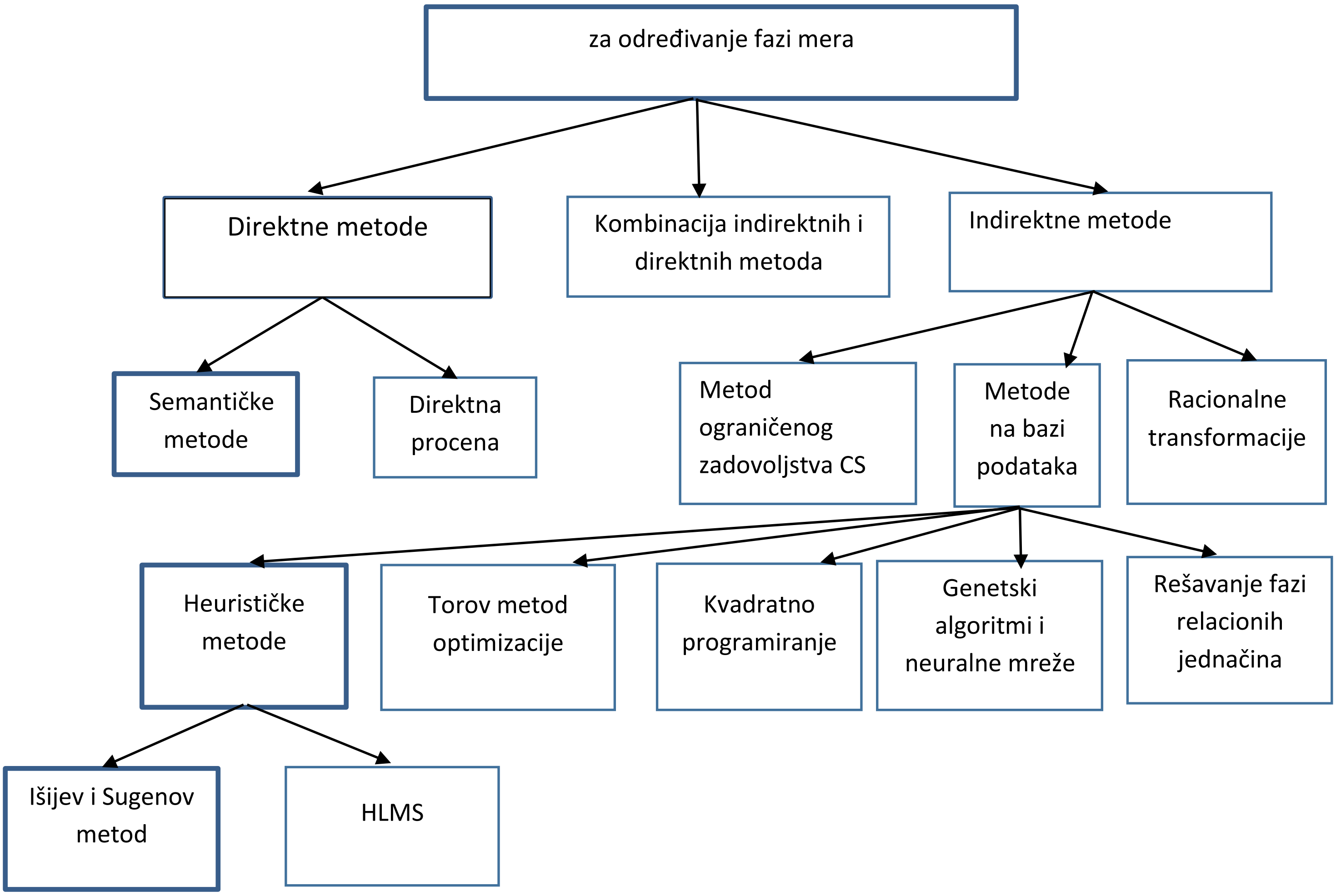


Tabela 5.1 *[Lig06] Prikaz metoda za procenu fazi mera*

U kontekstu višekriterijumskog odlučivanja postoje tri metode koje su dobro proučene i to su: Metod ograničenog zadovoljsta (The constrain satisfaction method, CS), HLMS metod i metod Kvadratnog programiranja. CS metod pokušava da reši linearni program na osnovu rangiranja objekata koji se procenjuju na osnovu indikacije relativnog značaja kriterijuma. Baziran je samo na struktuiranim informacijama, ali prostor mogućih rešenja je toliko veliki da izabrano rešenje možda neće imati realnu vrednost u pogledu strategije odlučivanja. Eksperimenti na realnim podacima pokazali su neke mane ovog metoda. Ako ima premalo podataka, rešenje nije jedinstveno i može biti nelogično, zato što su mnogi koeficijenti blizu 0 ili 1. Porast podataka je eksponencijalnim porastom dimenzija vektora i matrica. U isto vreme raste memorija neophodan za ovo kao i vreme računanja. U tabeli 5.1 smo naznačili da su metode bazirane na podacima kao što su HLMS i Kvadratno programiranje zavređuju više pažnje u primeni. U poređenju sa Kvadratnim programiranjem, HLMS metoda se pokazala kao bolja jer zahteva manje memorije i kraće vreme računanja. HLMS metoda gotovo uvek daje rešenje i ne zahteva semantičke informacije kada je dostupno dovoljno podataka. Ona je savršeno odgovarajuća metoda za utvrđivanje skrivenih ponašanja u odlučivanju, kao na primer u slučaju proučavanja rizika u odlučivanju, videti [Lig06].

Kada analiziramo ponašanje donosioca odluka koje je bazirano na fazi meri, zahteva se od DO da pruži holistički odgovor na stimulans koji sadrži razne informacije o mnogobrojnim faktorima. Holistički odgovor postaje zavisna varijabla, i statističke procedure se koriste da se proceni uticaj različitih faktora na varijansu zavisne varijable. Liginlav i Ov su predložili metodologiju “PC technique” (policy capturing), na bazi teorije fazi mera, videti [Lig05]. To je statistička metoda koja se koriti da se kvantifikuje odnos između stava jedne osobe i informacija koje su korišćene da bi se do tog stava došlo. Skup podataka za PC tehniku se generiše i fazi mere se određuju na osnovu tog skupa podataka. Metoda koju predlažu Liginlav i Ov za proučavanje donošenja odluka u uslovima rizika predstavlja proširenje ovog pristupa i sastoji se od sledeća 4 koraka, videti [Lig06]:

1. Sakupljanje podataka od donosioca odluka na bazi PC tehnike,
2. Procenjivanje fazi mera korišćenjem odgovarajuće metode bazirane na podacima,
3. Izračunavanje parameta kao što su: degree of orness index, Šeplijeve vrednosti, Šeplijevi indeki interakcije i indeksi prihvatanja i odbijanje koji odgovaraju,
4. Tumačenje parametara u cilju razumevanja ponašanja donosioca odluke.

Linginlal i Ov su primenili analizu na bazi fazi mera da bi istražili ponašanje u uslovima rizika kako pojedinačnih donosioca odluka, tako i kod grupnog odlučivanja, videti [Lig06]. Oni su izgradili fazi model koji odgovara podacima sakupljenim od direktora firmi putem PC tehnike. Potom su ih grupisali na osnovu orness indeksa njihovih individualnih fazi modela u tri kategorije: skloni riziku, neutralni prema riziku i averzni prema riziku. Zbirni statistički podaci o svakoj grupi i fazi mere koje odgovaraju skupu podataka svake grupe obezbeđuju osnovu za tumačenje ponašanja DO u slučaju odlučivanja povodom strateške investicije koja se razmatrala u ovoj studiji. Dalje su istraživali klastere napravljene na osnovu analize linearnih regresionih modela individualnih DO. Analiza fazi mere sakupljenih skupova podataka u skladu sa svakim klasterom omogućila je korisne informacije o relativnom ponašanju dva klastera DO. Svaki DO dobio je skup stimulansa i traženo je da napravi opštu procenu verovatnoće investiranja u telekomunikacionu infrastrukturu. Predstavili su učesnicima 40 investicionih scenarija. Svaki scenario opisao je spoljašnje i unutrašnje uslove odluke, čime su izbegli problem sa spoljašnjim i unutrašnjim vrednostima. Svaki scenario je prezentovan učesnicima putem korišćenja istog skupa lingvističkih vrednosti. Pretpostavka je da se interpretacija ovih lingvističkih vrednosti ne razlikuje značajno za date atribute u studiji u odnosu na interpretaciju koju imaju DO. Ova pretpostavka je od ključnog značaja za minimizaciju šansi da se desi situacija u kojoj svi DO imaju različitu interpretaciju vrednosti rizika. Da bi kodirali lingvističke vrednosti u cilju izračunavanja Šokeovog integrala, posmatrali su ih kao da se nalaze u jednakim inetrvalima od 0 do 1. Termin medium predstavlja srednju tačku ovog inetrvala, a povećanje u vrednosti atributa od niskog ka srednjem je isto kao od srednjeg ka visokom. Ovo je rezultiralo u izboru vrednosti koje odgovaraju srednjim tačkama tri jednaka podintervala u [0,1]. Omogućavanje iste mere u svim atributima kod svih DO je težak zadatak.

5.4. Primena $\lambda-$ fazi mere i Šeplijeve vrednosti na procene performansi robe u skladištima

Sledeći primer prikazuje određivanje parametra λ, $\lambda-$ fazi mere i Šeplijeve vrednosti, ovo je originalni doprinos u disertaciji. Podaci su prikazani u Tabeli 5.2 s tim što su vrednosti koje predstavljaju aritmetičku sredinu podeljene sa 2. U tabeli su prikazani sledeći podaci: prosečna prodaja, prosečna cena, nedostatak zaliha u centralnom magacinu, da li je proizvod na promociji ili ne, da li se automatski poručuje, kao i verovatnoća da proizvoda nema na stanju, videti [Avl15]. Kako su prva dva podatka kontinualna, u ovom primeru oni su upoređeni, tako što su izračunate Šeplijeve vrednosti za obe varijable.

Promenljive	**Aritmetička sredina**	**Standardna devijacija**	**Minimum**	**Maksimum**
Prosečna prodaja	0.4971689	0.9021178	0	14.91257
Prosečna cena	1.4928780	0.8573341	0.486092	3.970331
Nedostatatak zaliha	0.1577934	0.3645473	0	1
Promocija	0.1633783	0.3697106	0	1
Automatsko poručivanje	0.3574065	0.4792361	0	1
Stanje	0.0341950	0.1817298	0	1

Tabela 5.2 *Deskriptivna statistika*

Neka je $X=\{a,b,c,d,e,f\}$, $\mu(X)=1$, $\mu(\{a\})=0.24859$, $\mu(\{b\})=0.74644$, $\mu(\{c\})=0.07889$, $\mu(\{d\})=0.08169$, $\mu(\{e\})=0.17870$, $\mu(\{f\})=0.01709$. Sada koristimo formulu (1) iz Teoreme 5.1 da izračunamo parametar λ. Kako je $\sum_{i=1}^{6}\mu(\{x_i\})>\mu(X)$, očekujemo, na osnovu Teoreme 5.2, da važi $-1<\lambda<0$. Dobijamo sledeću jednačinu:

$$(1+\lambda\cdot 0,24859)\cdot(1+\lambda\cdot 0,74644)\cdot(1+\lambda\cdot 0,07889)\cdot(1+\lambda\cdot 0,08169)\cdot(1+\lambda\cdot 0,17870)\cdot(1+\lambda\cdot 0,01709)=\lambda+1,$$

koja se nakon transformisanja svodi na jednačinu petog stepena:

$$\lambda^5\cdot 0.000004+\lambda^4\cdot 0.00034+\lambda^3\cdot 0.00935+\lambda^2\cdot 0.10859+\lambda\cdot 0.58109+0.3514=0.$$

Koristimo metodu polovljenja za pronalaženje približnog rešenje prethodne jednačine sa greškom koja je manja od 10^{-2}. Broj koraka nalazimo iz uslova:

$$\frac{B-A}{2^n}\le 10^{-2}\Leftrightarrow n\ge 7,$$

gde su A, B rubovi intervala. Primenjujući metod polovljenja dobijamo niz aproksimacija tako što nalazimo sredinu intervala:

$$x_1=\frac{A+B}{2}=\frac{-1+0}{2}=-0.5,$$

a zatim, pomoću znaka funkcije ($f(x_1)>0$) proveravamo u kojoj polovini intervala se nalazi koren jednačine. Isti metod se ponavlja na toj polovini intervala, sa novim A i B. Ponovo tražimo sredinu intervala i metod ponavljamo 7 puta. Sve vrednosti su date u Tabeli 5.3:

n	**A**	**B**	**x_n**	**$f(x_n)$**
1	-1	0	-0.5	0.086
2	-1	-0.5	-0.75	-0.0271
3	-0.75	-0.5	-0.625	0.0284
4	-0.75	-0.625	-0.6875	-0.0084
5	-0.6875	-0.625	-0.65625	0.0142
6	-0.6875	-0.65625	-0.671875	0.0076
7	-0.6875	-0.671875	-0.6796875	

Tabela 5.3 *Određivanje parametra* λ

Vrednost $\lambda=-0.6796875$ je traženo približno rešenje polazne jednačine.

Sada na osnovu formule (1) iz Teoreme 5.1 izračunavamo preostale mere svih podskupova skupa X. U prilogu je dat program u C++ za izračunavanje mera.

Rezultati su prikazani u sledećoj tabeli:

$\mu\{a\} = 0.24859$

$\mu\{a,b\} = 0.868909$

$\mu\{a,b,c\} = 0.901208$

$\mu\{a,b,c,d\} = 0.932859$

$\mu\{a,b,c,d,e\} = 0.998254$

$\mu\{a,b,c,d,e,f\} = 1.00375$

$\mu\{a,b,c,d,f\} = 0.939113$

$\mu\{a,b,c,e\} = 0.970447$

$\mu\{a,b,c,e,f\} = 0.976264$

$\mu\{a,b,c,f\} = 0.907829$

$\mu\{a,b,d\} = 0.902354$

$\mu\{a,b,d,e\} = 0.971454$

$\mu\{a,b,d,e,f\} = 0.97726$

$\mu\{a,b,d,f\} = 0.908962$

$\mu\{a,b,e\} = 0.942071$

$\mu\{a,b,e,f\} = 0.948218$

$\mu\{a,b,f\} = 0.875906$

$\mu\{a,c\} = 0.31415$

$\mu\{a,c,d\} = 0.378398$

$\mu\{a,c,d,e\} = 0.511137$

$\mu\{a,c,d,e,f\} = 0.52229$

$\mu\{a,c,d,f\} = 0.391092$

$\mu\{a,c,e\} = 0.454694$

$\mu\{a,c,e,f\} = 0.466502$

$\mu\{a,c,f\} = 0.327591$

$\mu\{a,d\} = 0.316477$

$\mu\{a,d,e\} = 0.456738$

$\mu\{a,d,e,f\} = 0.468523$

$\mu\{a,d,f\} = 0.329891$

$\mu\{a,e\} = 0.397096$

$\mu\{a,e,f\} = 0.409574$

$\mu\{a,f\} = 0.262792$

$\mu\{b\} = 0.74644$

$\mu\{b,c\} = 0.785305$

$\mu\{b,c,d\} = 0.823392$

$\mu\{b,c,d,e\} = 0.902083$

$\mu\{b,c,d,e,f\} = 0.908695$

$\mu\{b,c,d,f\} = 0.830918$

$\mu\{b,c,e\} = 0.868622$

$\mu\{b,c,e,f\} = 0.875622$

$\mu\{b,c,f\} = 0.793273$

$\mu\{b,d\} = 0.786685$

$\mu\{b,d,e\} = 0.869834$

$\mu\{b,d,e,f\} = 0.87682$

$\mu\{b,d,f\} = 0.794637$

$\mu\{b,e\} = 0.834477$

$\mu\{b,e,f\} = 0.841874$

$\mu\{b,f\} = 0.754859$

$\mu\{c\} = 0.07889$

$\mu\{c,d\} = 0.1562$

$\mu\{c,d,e\} = 0.315928$

$\mu\{c,d,e,f\} = 0.329348$

$\mu\{c,d,f\} = 0.171475$

$\mu\{c,e\} = 0.248008$

$\mu\{c,e,f\} = 0.262217$

$\mu\{c,f\} = 0.0950636$

$\mu\{d\} = 0.08169$

$\mu\{d,e\} = 0.250468$

$\mu\{d,e,f\} = 0.264649$

$\mu\{d,f\} = 0.0978311$

$\mu\{e\} = 0.1787$

$\mu\{e,f\} = 0.193714$

$\mu\{f\} = 0.01709$

Sada smo u mogućnosti na osnovu formule (4) da izračunamo Šeplijevu vrednost $\varphi_a(\mu, X) = 0.1244983$, koja predstavlja koeficijent važnosti varijable a, kao i

$\varphi_b(\mu, X) = 0.4826678$ koja predstavlja koeficijent važnosti varijable b. Zaključeno je da je Šeplijeva vrednost za prosečnu cene veća od Šeplijeve vrednosti za prosečnu prodaju, videti [Pap19]. Na taj način Šeplijeva vrednost ne samo da pruža meru važnosti kriterijuma, već dolaze do izražaja interaktivne karakteristike datih kriterijuma.

5.5. Neaditivni integrali

Osobine fazi integrala kao operatora agregacije proučavaju se već duže vreme. Na polju operatora agregacije, rad sa operatorima baziranim na integralima u poslednje vreme dobija na značaju. Sugenov i Šokeov integral imaju široku primenu u raznim oblastima kao što su bankarstvo, finansije, obrada slike, dijagnostika u medicini itd. Pre svega važni su rezultati vezani za Šokeov integral koji predstavlja jednostavan i fleksibilan način agregacije numeričkih vrednosti. To nije iznenađujuće, ako se uzme u obzir da se mnogi operatori agregacije mogu predstaviti kao integralni operatori na konačnom skupu. Šokeov integral generalizuje operatore kao OWA ili kao ponderisana sredina, dok Sugenov integral generalizuje „minimalne-maksimalne" operatore.

Ovi integrali imaju veoma važnu ulogu u teoriji odlučivanja i to u slučajevima kada je potrebno doneti odluku na osnovu više kriterijuma koji se međusobno preklapaju, videti ([Aum74],[Ber10],[Cho54],[Den94],[Gra95],[Gra09],[Kle10],[Kle15],[Qui93],[Sch89],[Tve92],[Wak93],[Wak10],[Wan09]).

5.5.1. Dekumulativna funkcija raspodele

Označimo sa $B(\mathcal{F})$ skup ograničenih $\mathcal{F}$ merljivih funkcija i sa $B^+(\mathcal{F})$ skup ograničenih $\mathcal{F}$ merljivih nenegativnih funkcija. Sledeća definicija uvodi pojam dekumulativne funkcije raspodele, videti [Gra16].

Definicija 5.8 Neka je $f \in B(\mathcal{F})$ i neka je μ monotona mera. Dekumulativnu funkciju raspodele $G_{\mu,f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definešemo na sledeći način:

$$G_{\mu,f}(t) = \mu(\{x \in X : f(x) \geq t\}). \quad (t \in R)$$

Definicija 5.9 Za neku funkciju $f \in B(\mathcal{F})$ i monotonu meru μ na $(X, \mathcal{F})$, esencijalni supremum i esencijalni infimum u odnosu na μ se definišu na sledeći način:

$$ess\sup_{\mu} f = \inf\left\{t \in \mathbb{R} \mid \mu\left(\left\{x \in X : f(x) > t\right\}\right) = 0\right\},$$

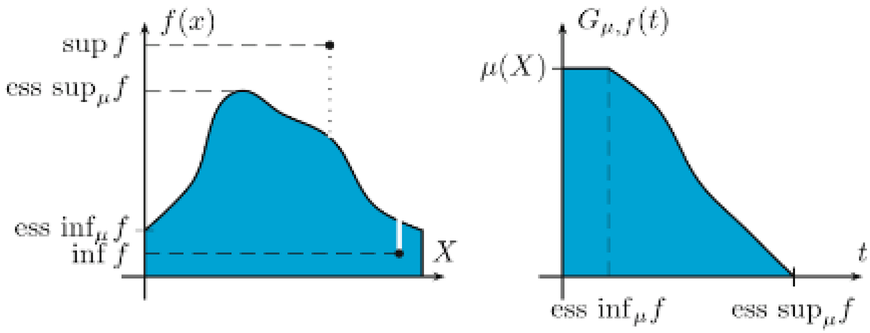
$$ess\inf_{\mu} f = \sup\left\{t \in \mathbb{R} \mid \mu\left(\left\{x \in X : f(x) < t\right\}\right) = 0\right\}.$$

Lema 5.2 Neka je $f \in B^{+}(\mathcal{F})$ i μ monotona mera na $(X, \mathcal{F})$. Tada je $G_{\mu,f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(i) nenegativna, nerastuća funkcija za koju važi $G_{\mu,f}(0) = \mu(X)$,

(ii) $G_{\mu,f}(t) = \mu(X)$ na intervalu [0, $ess\inf_{\mu} f$].

Na slici 5.3 su ilustrovane definicija i osobine dekumulativne funkcije raspodele.



Slika 5.3 [Gra16] *Ograničena nenegativna merljiva funkcija (levo) i njena dekumulativna funkcija raspoodele (desno)*

5.5.2. Šokeov integral

Neaditivni integrali bazirani na monotonim merama, kao važne funkcije agregacije (objedinjavanja), imaju brojne primene u mnogim disciplinama matematike, naročito u problemima koji zahtevaju optimizaciju, modeliranje rizika i neizvesnosti. Najpopularniji među njima je Šokeov integral (engl. Choquet). Pojam Šokeovog integrala prvi je uveo francuski matematičar Gustavo Choquet 1953. godine, videti ([Cho54], [Den94], [Pap95], [Gra09]).

Definicija 5.10 Neka je μ monotona mera na X, a f funkcija definisana na X sa vrednostima u skupu nenegativnih realnih brojeva a sa skupom vrednosti $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, takvih da je $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Šokeov integral (C)$\int f(x) d\mu(x)$ za konačan slučaj (ili jednostavnije zapisano $(C)\int f d\mu$ se definiše ($a_0 = 0$):

$$(C)\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \cdot \mu(\{x \mid f(x) \geq a_i\}).$$

U sledećoj teoremi opisane su važne osobine Šokeovog integrala, videti [Pap15].

Teorema 5.3 Neka su f i g funkcije na X i $A \subset X$. Tada važi:

(i) Ako je μ fazi mera i $f \leq g$ onda je $(C)\int f d\mu \leq (C)\int g d\mu,$

(ii) Ako je a nenagativan realan broj, a b realan broj, onda je $(C)\int (af + b) d\mu = a(C)\int f d\mu + b\mu(X),$

(iii) $(C)\int (-f) d\mu = -(C)\int f d\overline{\mu},$

(iv) $(C)\int (-f) d\mu = -(C)\int f d\mu$ za sve funkcije f na X ako i samo ako je $\overline{\mu} = \mu,$

(v) Ako je a realan broj onda važi $(C)\int f d(a\mu) = a(C)\int f d\mu,$

(vi) Ako su μ i ν fazi mere na X takve da je $\mu \leq \nu$ i $\mu(X) = \nu(X)$, onda za sve funkcije f na X važi $(C)\int f d\mu \leq (C)\int f d\nu,$

(vii) Ako je M nula skup, i ako je $f(x) = g(x)$ za svako x koje ne pripada M, onda $(C)\int f d\mu = (C)\int g d\mu$.

Primer 5.4 (nastavak primera sa radnicima, videti [Pap15]):

Neka je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ skup svih radnika. U toku radnog vremena, broj radnih sati radnika x_i je $f(x_i)$. Pretpostavimo da važi $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \ldots \leq f(x_n)$. Za $i \geq 2$ imamo da važi:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) \geq 0,$$

$$f(x_i) = f(x_1) + [f(x_2) - f(x_1)] + [f(x_3) - f(x_2)] + \ldots + [f(x_i) - f(x_{i-1})].$$

Pokažimo da je ukupan broj proizvoda koje radnici proizvedu, predstavljen pomoću Šokeovog integrala. Predstavimo sve radne sate svih radnika na sledeći način. Prva grupa X od n radnika radi $f(x_1)$, sledeća grupa od $X \setminus \{x_1\}$ radi $f(x_2) - f(x_1)$, naredna grupa od $X \setminus \{x_1, x_2\}$ radi $[f(x_3) - f(x_2)]$, ..., i na kraju radnik x_n radi $f(x_n) - f(x_{n-1})$ sati. Svaka grupa $A \subset X$ proizvodi količinu $\mu(A)$. Ukupan broj proizvoda koje radnici proizvedu izražen je na sledeći način:

$$f(x_1)\cdot\mu\left(X\right)+\left[f(x_2)-f(x_1)\right]\cdot\mu\left(X\setminus\{x_1\}\right)+$$
$$+\left[f(x_3)-f(x_2)\right]\cdot\mu\left(X\setminus\{x_1,x_2\}\right)+\ldots+\left[f(x_n)-f(x_{n-1})\right]\cdot\mu\left(x_n\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-f(x_{i-1})\right]\cdot\mu\left(x_i,x_{i+1},\ldots,x_n\right),$$

gde je $f(x_0)=0$. Ovo je Šokeov integral funkcije f.

Definicija 5.11 Šokeov integral $I:\mathcal{F}\times\mathcal{M}\to[0,\infty]$ se definiše na sledeći način:

$$I(f,m)=\int_0^\infty m(\{\omega\mid f(\omega)\geq x\})\ dx.$$

Primer koji sledi pokazuje na koji način se pomoću Šokeovog integrala rešavaju problemi kada postoji interakcija među kriterijumima, pa je nemoguće doći do rešenja pomoću nekog drugog operatora agregacije, videti [Pap15]:

Primer 5.5 U tabeli se nalaze tri studenta i njihovi poeni osvojeni iz tri predmeta, kao i prosečan broj bodova.

	finansije	bankarstvo	marketing	prosek
Anja	18	16	10	14.67
Jelena	10	12	18	14.09
Vuk	14	15	16	14.34

Računanjem aritmetičke sredine redosled rangiranja od najboljeg ka najgorem studentu je sledeći: Anja, Vuk, Jelena. Međutim, ukoliko se u obzir uzme i važnost predmeta ne dolazi se do istih rezultata. Kriterijumi po kojima se rangira važnost predmeta su sledeći:

1. Da se znanje iz finansija i bankarstva vrednuje više nego znanje iz marketinga,
2. Znanje iz finansija i bankarstava se vrednuje na isti način, jer je obično student koji je dobar u jednom predmetu, dobar i u drugom,
3. Da se sa dobrim znanjem iz finansija ili bankarstva favorizuje i znanje iz marketinga.

Mera m na skupu $X=\{F,B,M\}$ koja govori o tome koliko je važan koji predmet definisana je na sledeći način:

$m(\{\varnothing\}) = 0$
$m(\{F\}) = m(\{B\}) = 0.45$
$m(\{M\}) = 0.3$
$m(\{F, B\}) = 0.5$
$m(\{F, M\}) = m(\{B, M\}) = 0.9$
$m(X) = 1.$

Sada definišemo funkciju ocene i izračunavamo Šokeov integral za svakog studenta:

Za Anju imamo:

$f_A(F) = 18, f_A(B) = 16, f_A(M) = 10$

$\{x, f_A(x) \geq 10\} = A_1,$
$\{x, f_A(x) \geq 16\} = A_2,$
$\{x, f_A(x) \geq 18\} = A_3.$

$$\int fdm = \sum_{i=1}^{3} (a_i - a_{i-1})m(A_i) = (a_1 - a_0)m(A_1) + (a_2 - a_1)m(A_2) + (a_3 - a_2)m(A_3) = 10 \cdot 1 + 6 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.45 = 13.9.$$

Na isti način dobijamo da je Šokeov integral za Jelenu 13.6, a za Vuka 14.6.

Sada uporedimo dobijene rezultate sa malopređašnjim rangiranjem:

	Prosek bodova	Šokeov integral
Anja	14.67	13.9
Jelena	14.09	13.6
Vuk	14.34	14.6

Sada je redosled Vuk, Anja, Jelena.

Pomoću Šokeovog integrala mogu se predstaviti operatori agregacije, izborom određene mere. Mogu se predstaviti maximum, minimum, infimum i supremum, i mnoge druge funkcije agregacija, videti ([Gra09], [Gra11], [Pap15]).

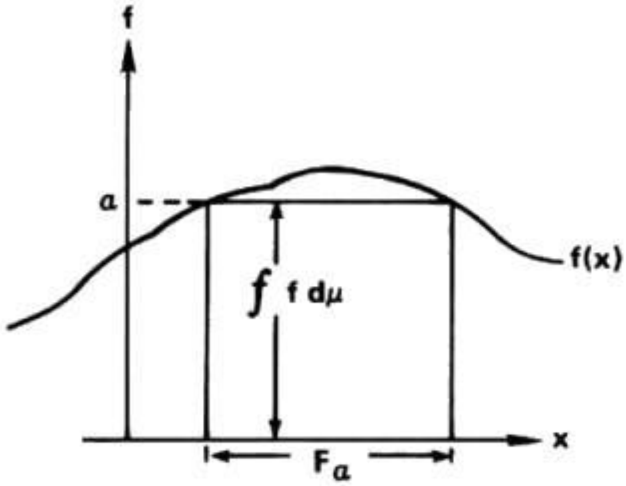
5.5.3. Sugenov integral

Sugeno je 1974. godine uveo pojam i osnovne osobine Sugenovog (fazi) integrala za merljivu funkciju $f : X \to [0,1]$ na normiranom prostoru monotone mere $(X, \mathcal{F}, \mu)$, videti [Sug74]. Neka je $(X, \mathcal{F})$ merljiv prostor, pri čemu $X \in \mathcal{F}$, $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ je neprekidna monotona mera i G je klasa svih konačnih nenegativnih merljivih funkcija definisanih na $(X, \mathcal{F})$.

Definišimo sledeće skupove: $\mathcal{F}_\alpha = \{x \mid f(x) \geq \alpha\}$ i $\mathcal{F}_{\alpha^+} = \{x \mid f(x) > \alpha\}$, gde je $f \in G$ i $\alpha \in [0, \infty]$.

Definicija 5.12 Neka je $A \in \mathcal{F}$ i $f \in G$. Sugenov integral od funkcije f na skupu A u odnosu na μ definišemo na sledeći način:

$$\int_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0,\infty]} (\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)).$$



Slika 5.4 *[Wan 09] Geometrijska interpretacija Sugenovog inetgrala*

U praksi se najčešće primenjuje Sugenov integral na konačnom skupu. U primeru 5.6 opisano je na koji način se može izračunati Sugenov integral na skupu koji ima tri elementa, videti [Pop15].

Primer 5.6 Posmatrajmo merljv prostor $(X, \mathcal{F})$ gde je $\mathcal{F} = P(X)$ i $X = \{a, b, c\}$. Neka je μ monotona mera na $(X, P(X))$:

$$\mu(\emptyset) = 0, \mu(X) = 1,$$
$$\mu(\{a\}) = 0.2, \mu(\{b\}) = 0.2, \mu(\{c\}) = 0.2,$$
$$\mu(\{a,b\}) = 0.4, \mu(\{a,c\}) = 0.4, \mu(\{b,c\}) = 0.5.$$

Neka je funkcija f definisana na sledeći način:

$$f(a) = 1,$$
$$f(b) = 2,$$
$$f(c) = 3.$$

Kako važi da je $f(a) < f(b) < f(c)$, Sugenov integral od funkcije f na skupu X u odnosu na μ ima sledeći oblik:

$$\sup(\sup_{\alpha\in[0,f(a)]}(\alpha\wedge\mu(\{a,b,c\}),\sup_{\alpha\in[f(a),f(b)]}(\alpha\wedge\mu(\{b,c\}),\sup_{\alpha\in[f(b),f(c)]}(\alpha\wedge\mu(\{c\}),$$
$$\sup_{\alpha\in[f(c),\infty]}(\alpha\wedge\mu(\{\varnothing\})))$$
$$=\sup(f(a)\wedge\mu(\{a,b,c\}), f(b)\wedge\mu(\{b,c\}, f(c)\wedge\mu(\{c\},0)$$
$$=\sup(1\wedge 1, 2\wedge 0.5, 3\wedge 0.2)=\sup(1,0.5,0.2)=1.$$

Posmatraćemo Sugenov integral kao funkciju agregacije nad I^n i umesto oznake $\int fd\mu$, koristićemo oznaku $S_\mu(x)$.

Neka je μ monotona mera na $(X,P(X))$, gde je $X=\{1,2,...,n\}$, $x\in[0,\mu(X)]^n$ i σ permutacija na X takva da je $x_{\sigma(1)}\le x_{\sigma(2)}\le ...\le x_{\sigma(n)}$, uz uslov da je $A_{\sigma(i)}=\{\sigma(i),...,\sigma(n)\}$.

Sugenov integral od x u odnosu na μ ima sledeći oblik:

$$S_\mu(x):=\bigvee_{i=1}^{n}(x_{\sigma(i)}\wedge\mu(A_{\sigma(i)})).$$

Pomoći Sugenovog integrala mogu se predstaviti operatori agregacije, izborom određene mere, videti ([Gra09], [Gra11], [Pap15]).

5.5.4. Šokeov i Sugenov integral –reperezentacija pomoću dekumulativne funkcije raspodele

Ovde će biti definisani Šokeov i Sugenov integral, pomoću dekumulativne funkcije raspodele, videti [Gra16].

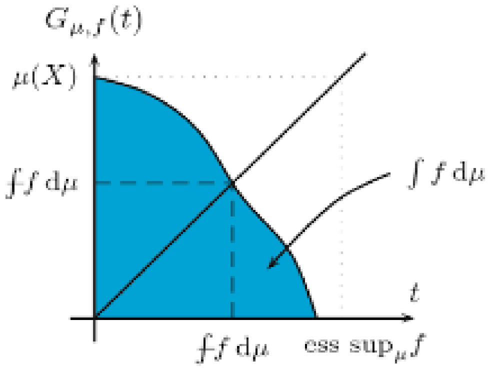
Definicija 5.13 Neka je $f\in B^+(\mathcal{F})$ i μ monotona mera na $(X,\mathcal{F})$. Šokeov integral se definiše na sledeći način:

$$\int fd\mu=\int_0^\infty G_{\mu,f}(t)dt.$$

Definicija 5.14 Neka je $f\in B^+(\mathcal{F})$ i μ monotona mera na $(X,\mathcal{F})$. Sugenov integral se definiše na sledeći način:

$$\int fd\mu=\bigvee_{t\ge 0}(G_{\mu,f}(t)\wedge t)=\bigwedge_{t\ge 0}(G_{\mu,f}(t)\vee t).$$

Na slici 5.5 se vidi da Šokeov integral predstavlja površinu ispod grafika dekumulativne funkcije, dok je Sugenov integral apcisa tačke koja se dobija u preseku dijagonale i grafika dekumulativne funkcije.



Slika 5.5 [Gra16] *Choquet-ov i Sugenov integral*

6. Višekriterijumsko odlučivanje bazirano na metodi TODIM

Od kada su Tverski i Kaneman predložili prospekt teoriju, neke bihejviorističke teorije odlučivanja su se ubrzano razvijale, kao što su teorija žaljenja, teorija razočarenja i kumulativa prospekt teorija. Kao metod baziran na Prospekt teoriji, TODIM (skraćenica na portugalskom za interaktivno i multikriterijumsko odlučivanje) razvijen je od strane Gomesa i Lime, [Gom92]. U TODIM-u multikriterjumska funkcija vrednosti je napravljena da meri stepen dominacije svake alternative u odnosu na ostale, što odražava karakteristike donosioca odluke, kao što su zavisnost od referentne tačke i averzija prema gubitku, pomoću funkcije vrednosti iz prospekt teorije.

U poslednje vreme uzima se u obzir psihološko ponašanje donosioca odluke, zbog čega je TODIM postao efikasna alatka za rešavanje MCDM problema. Razvijene su različite verzije TODIM-a sa relativnnom uspešnošću primene. Problem većine metoda je što ne uzimaju u obzir međuzavisne i interaktivne karakteristike kriterijuma, i ne mogu da reše MCDM problem sa hesitant fazi informacijama.

Za realne MCDM probleme, uvek će postojati neki stepen međuzavisnosti karakteristika između kriterijuma. Na primer, procenićemo skup studenata u odnosu na tri predmeta: matematika, fizika i književnost. Mi želimo da damo veću vrednost prirodnim naukama, nego književnosti, ali sa druge strane želimo da damo prednost studentima koji su dobri u sva tri predmeta. Iako je primenjen TODIM metod u ovom slučaju, rešenje se svelo na primenu Šokeovog integrala, što znači da je proširen TODIM metod sveden na običan operator agregacije, što odstupa od osnovne ideje TODIM metoda, jer u proširenom TODIM metodu dominacija alternative a_i, nad alternativom a_j nije uzeta u obzir. Takođe, proširen TODIM metod ne rešava problem nesigurnih informacija. Stoga je neophodno razviti novi TODIM metod radi prevazilaženja ovih nedostataka. U ovom poglavlju je proširen tradicionalni TODIM na primenu u hesitant fazi okruženju i uzet je u obzir interaktivan fenomen među kriterijumima.

Problem višekritrijumskog odlučivanja predstavlja proces nalaženja najbolje alternative među mogućim alternativama, gde se sve alternative mogu proceniti na osnovu broja kriterijuma ili atributa. Neka je $A=(a_1,a_2,...,a_m)$ skup alternativa, $C=(c_1,c_2,...,c_n)$ skup kriterijuma sa težinskim vektorom, $\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)^T$, tako da je $\omega_k>0$ i $\sum_{k=1}^{n}\omega_k=1$. Onda možemo formirati sledeću matricu odlučivanja D:

$$D=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

gde x_{ik} pokazuje rejting alternative a_i u odnosu na kriterijum c_k. Podaci za matricu odlučivanja D dolaze iz različitih izvora, tako da je neophodno normalizovati ih, da bi ih transformisali u dimenzionalnu matricu, što omogućava upoređivanje različitih kriterijuma. Koristimo normalizovanu matricu odlučivanja $R=[r_{ik}]_{m\times n}$.

TODIM metod je baziran na nelinearnoj PT pošto je oblik njegove funkcije vrednosti isti kao funkcija dobitka-gubitka u PT-u. Ovde se dobici i gubici uvek utvrđuju u odnosu na referentnu tačku, koja je obično kriterijum sa težinom najveće vrednosti. Za normalizovanu matricu odlučivanja i težinski vector $\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)^T$ forma TODIM algoritma je opisana kroz sledeće korake, videti [Gom92]:

Korak1.

Na osnovu normalizovane matrice odlučivanja $R=[r_{ik}]_{m\times n}$ i težinskog vektora ω, izračunavamo vrednosti $\phi_c(a_i,a_j)$ koristeći sledeću formulu i uzimajući da θ varira u intervalu od 1 do 10, videti [Gom13]:

$$\phi_c(a_i,a_j)=\left\{\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{\omega_{rc}(r_{ic}-r_{jc})}{\sum_{c=1}^{m}\omega_{rc}}}, \quad (r_{ic}-r_{jc})>0 \\ 0, \quad (r_{ic}-r_{jc})=0 \\ -\dfrac{1}{\theta}\sqrt{\dfrac{\left(\sum_{c=1}^{m}\omega_{rc}\right)(r_{jc}-r_{ic})}{\omega_{rc}}}, \quad (r_{ic}-r_{jc})<0 \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

gde $\omega_{rc}=\dfrac{\omega_c}{\omega_r}$ predstavlja trade off stopu (ili trade off težinski faktor) između referentnog kriterijuma r i bilo kog drugog generičkog kriterijuma c. Indeks r identifikuje referentni kriterijum za donosioca odluka. To može biti, na primer, kriterijum koji donosilac odluka smatra najvažnijim. Lako je uvideti da bilo koji kriterijum može da bude izabran kao referentni kriterijum; r_{ic} i r_{jc} su normalizovana procena alternative a_i i a_j u odnosu na kriterijum c; θ predstavlja faktor gubitka; različiti izbori θ vode do različitih oblika funcije vrednosti u PT u negativnom kvadrantu.

Korak 2.

Izračunavamo dominaciju svake alternative a_i nad alternativom a_j koristeći sledeći izraz:

$$\delta\left(a_i, a_j\right) = \sum_{c=1}^{m} \phi_c\left(a_i, a_j\right) \text{, gde } i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,n, \qquad (2)$$

gde $\phi_c\left(a_i, a_j\right)$, predstavlja doprinos kriterijuma c funkciji $\delta\left(a_i, a_j\right)$, kada poredimo alternative a_i i a_j.

Korak 3.

Izračunavamo globalnu vrednost alternative $a_i, i = 1,\dots,n$ putem normalizovanja finalne matrice dominacije koristeći sledeći izraz:

$$\varepsilon_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \delta\left(a_i, a_j\right) - \min_i \sum_{j=1}^{n} \delta\left(a_i, a_j\right)}{\max_i \sum_{j=1}^{n} \delta\left(a_i, a_j\right) - \min_i \sum_{j=1}^{n} \delta\left(a_i, a_j\right)}. \qquad (3)$$

Korak 4.

Rangiramo alternative na osnovu toga da su najbolje one koje imaju najveću vrednost ε_i.

Korišćenje numeričkih vrednosti u oceni alternativa može imati ograničenja u pogledu nesigurnosti. U nastavku je predložen nadograđen TODIM metod za rešavanje MDCM problema sa nesigurnim informacijama.

6.1. Hezitant fazi inetraktivan MCDM baziran na proširenoj TODIM metodi

6.1.1. Neodlučan (hezitatan) fazi skup

Hezitant fazi skup (HFS) koristi se u situacijama kada je donosilac odluka neodlučan prilikom izbora između nekoliko vrednosti za procenu indikatora, alternative, varijable itd. U poslednje vreme MCDM problemi sa hezitat fazi informacijama dobijaju sve više pažnje i ravili su se mnogi MCDM metodi. Nijedan od njih, međutim, ne može da se koristi da se reše MCDM problemi u slučaju razmatranja psihološkog ponašanja donosioca odluka.

U ovom delu, prvo ćemo pregledati neke osnovne koncepte hezitatan fazi skupa.

Definicija 6.1 Neka je X fiksni skup. Hezitant fazi skup (HFS) od X se definiše pomoću funkcije koja vraća podskup od [0,1], kada se primeni na X. HFS se može izraziti matematičkim putem sledećom formulom, videti [Xia11]:

$$E = \{ < x, h_E(x) > | \, x \in X \},$$

gde je $h_E(x)$ skup vrednosti u [0,1], koji označava mogući stepen pripadnosti elementa $x \in X$ skupu E. Da bi nam bilo lakše, označićemo $h = h_E(x)$ hezitatnt fazi element (HFE), a H će biti skup svih takvih elemenata.

Definicija 6.2 [Xia11]: Neka su h, h_1, h_2 tri HFE-a. Osnovne operacije nad njima definišu se na sledeći način:

(i) $h^C = \bigcup_{\gamma \in h} \{1-\gamma\}$,

(ii) $h_1 \cup h_2 = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \{\gamma_1 \vee \gamma_2\}$,

(iii) $h_1 \cap h_2 = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \{\gamma_1 \wedge \gamma_2\}$,

(iv) $h_1 \oplus h_2 = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2\}$,

(v) $h_1 \otimes h_2 = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \{\gamma_1 \gamma_2\}$,

(vi) $h^\lambda = \bigcup_{\gamma \in h} \{\gamma^\lambda\}$,

(vii) $\lambda h = \bigcup_{\gamma \in h} \{1-(1-\gamma)^\lambda\}$.

Definicija 6.3 [Xia11] Za HFE h formula $s(h) = \frac{\sum_{\gamma \in h} \gamma}{l(h)}$ se naziva score funkcija od h, gde je $l(h)$, broj elemenata u h. Za dva HFE-a h_1, h_2, ako je $s(h_1) > s(h_2)$, onda je $h_1 > h_2$; ako je $s(h_1) = s(h_2)$, onda je $h_1 = h_2$.

Definicaja 6.4 Neka su h_1, h_2 dva HFE-a na $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Hezitant normalizovano Hamingovo rastojanje između h_1 i h_2 definiše se na sledeći način:

$$d_{hnh}(h_1, h_2) = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} \left| h_1^{\sigma(j)}(x_i) - h_2^{\sigma(j)}(x_i) \right|,$$

gde je $l = \max\{l(h_1), l(h_2)\}$, $h_1^{\sigma(j)}(x_i)$ i $h_2^{\sigma(j)}(x_i)$ su j-ta najveća vrednost u $h_1(x_i)$ i $h_2(x_i)$.

U većini slučajeva, kako je $l(h_1) \neq l(h_2)$, da bi radili ispravno, treba da proširimo manji HFE da bi oba bile iste dužine kada ih poredimo. Za proširenje manjeg HFE-a, najbolji način je da dodamo istu vrednost nekoliko puta. Zapravo, možemo proširiti kraći HFE dodavanjem bilo koje vrednosti. Izbor ove vrednosti uglavnom zavisi od preferencije prema riziku donosioca odluke. Optimisti iščekuju poželjan ishod i možda će dodati maksimalnu vrednost, dok pesimisti očekuju nepovoljan ishod i možda će dodati minimalnu vrednost. Ovde mi pretpostavljamo da su svi donosioci odluka pesimisti.

6.1.2. Proširena TODIM metoda bazirana na Šokeovom integralu

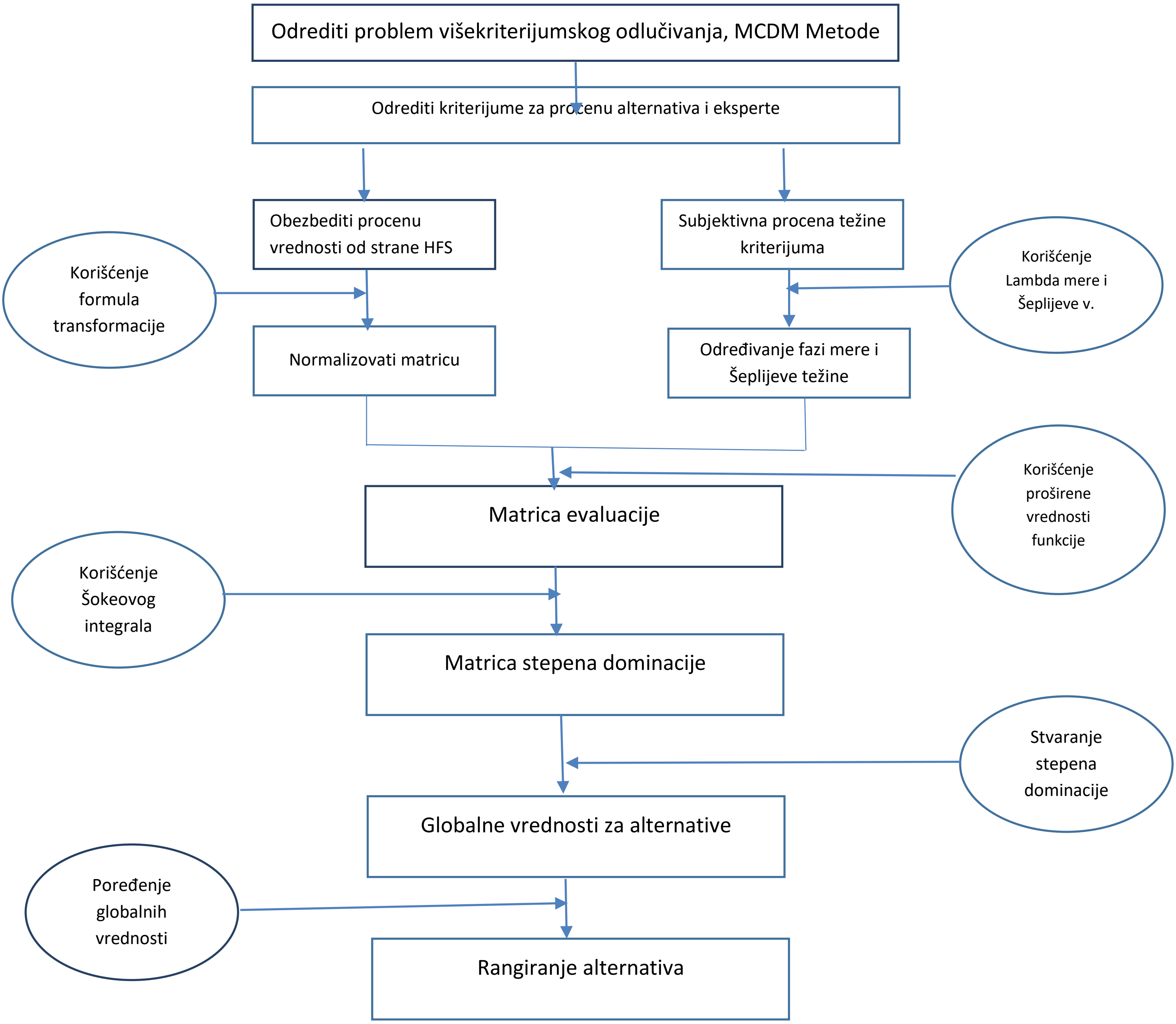
U ovom delu opisan je prošireni Šokeov TODIM metod u cilju rešavanja hesitant fazi MCDM problema, gde se razmatra interaktivnost među kriterijumima. Prvo se meri interaktivna kriterijumska težina putem Šeplijeve vrednosti. Onda se prospektna vrednost kriterijuma za svaku alternativu računa putem prospektne vrednosti funkcije hezitent fazi skupa. Zatim se stepen dominacije svake alternative u odnosu na ostale računa putem Šokeovog integrala. Globalna vrednost svake alternative može da se dobije i alternative se mogu rangirati.

Kod nekih praktičnih problema, hezitant fazi skup može se efikasno koristiti da se modeliraju sledeće situacije. Na primer, ako donosilac odluke ima nekoliko vrednosti za alternative a_i pod kriterijumom c_j, koji nije sasvim poznat, ove vrednosti mogu se smatrati kao hezitant fazi element h_{ij}. U slučaju kada dva donosioca odluke imaju istu vrednost, onda se vrednost pojavljuje samo jednom u h_{ij}. Stoga, mi proširujemo TODIM metod da bismo rešili interaktivni MCDM problem sa hesitant fazi informacijama. Pretpostavimo da matrica odlučivanja koja sadrži hesitant fazi elemente, ima sledeću formu:

$$D = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix},$$

gde je h_{ij} rejting alternative a_i u pogledu kriterijuma c_j koji nije sasvim poznat i mi samo znamo $h_{ij} = (h_E(x))_{ij} = \bigcup_{\gamma_{ij} \in h_{ij}} \{\gamma_{ij}\}$, što predstavlja skup svih mogućih vrednosti koje alternativa $a_i \in A$ može da ima u pogledu atributa $c_i \in C$.

Na osnovu hezitant fazi matrice odlučivanja D, prošireni TODIM metod na bazi Šokeovog integrala opisan je sledećim algoritmom i prikazan na sledećoj šemi po koracima:



Slika 6.1 *Prikaz proširene TODIM metode predstavljene Šokeovim integralom*

Korak 1. Normalizujemo matricu odlučivanja. Ako postoje atributi korisnosti i troškovni atributi u MCDM-u, možemo da transformišemo vrednosne atribute troškovnog tipa u rejting vrednosti benefitnog tipa na osnovu sledećeg:

$$r_{ij}=\left\{\begin{array}{ll} h_{ij}, & za\ benefitne\ atribute\ c_j \\ \left(h_{ij}\right)^C, & za\ troškovne\ atribute\ c_j \end{array}\right\}, \quad (4)$$

gde je $\left(h_{ij}\right)^C$ komplement od h_{ij}, tako da važi $\left(h_{ij}\right)^C=\bigcup_{\gamma_{ij}\in h_{ij}}\left\{1-\gamma_{ij}\right\}$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$. U ovom slučaju hesitant fazi matrica odlučivanja $D=\left(h_{ij}\right)_{m\times n}$ može da se tranformiše u odgovarajuću normalizovanu hezitant fazi matricu odlučivanja $R=\left(r_{ij}\right)_{m\times n}$.

Korak 2. Izračunavamo Šeplijevu vrednost. Na osnovu stvarnog MCDM problema, fazi gustina $g_k=g\left(\left\{c_k\right\}\right)$ svakog kriterijuma može da se odredi putem DM. Na osnovu definicija i teorema iz prethodnog poglavlja izračunavamo parameter λ i fazi meru g. Potom se izračunava Šeplijeva vrednost svakog kriterijuma.

Korak 3. Izračunavamo dominantne vrednosti $\phi_c\left(a_i,a_j\right)$ od alternative a_i u odnosu na svaku alternativu a_j, uzimajući u obzir generički kriterijum c koristeći sledeću formulu, gde θ varira u intervalu $\left[1,10\right]$:

$$\phi_c\left(a_i,a_j\right)=\left\{\begin{array}{ll} \left(\dfrac{\varphi_{rc}d_{hnh}\left(r_{ic},r_{jc}\right)}{\sum_{c=1}^{m}\varphi_{rc}}\right)^{\alpha}, & s\left(r_{ic}\right)>s\left(r_{jc}\right) \\ 0, & s\left(r_{ic}\right)=s\left(r_{jc}\right) \\ -\dfrac{1}{\theta}\left(\dfrac{\left(\sum_{c=1}^{m}\varphi_{rc}\right)d_{hnh}\left(r_{ic},r_{jc}\right)}{\varphi_{rc}}\right)^{\alpha}, & s\left(r_{ic}\right)<s\left(r_{jc}\right) \end{array}\right\}, \quad (5)$$

gde $\varphi_{rc}=\dfrac{\varphi_c}{\varphi_r}$ predstavlja trade off stopu (ili trade off Šeplijev težinski faktor) između referentnog kriterijuma r i bilo kog drugog generičkog kriterijuma c. Referentni kriterijum donosioca odluka označavamo sa r. To može da bude, na primer, kriterijum koji donosilac odluka smatra najvažnijim. Jednostavno je uvideti da bilo koji kriterijum može da bude izabran kao referentni kriterijum; $s\left(r_{ic}\right)$ i $s\left(r_{jc}\right)$ predstavljaju rezultirajuću funkciju hezitant fazi skupa r_{ic} i r_{jc}. $d_{hnh}\left(r_{ic},r_{jc}\right)$ predstavlja hezitant normalizovano Hamingovo rastojanje između dva hezitant fazi skupa r_{ic} i r_{jc}. Tri slučaja mogu da se jave u prethodnoj formuli:

(i) Ako je $s\left(r_{ic}\right) > s\left(r_{jc}\right)$, to predstavlja dobitak,

(ii) Ako je $s\left(r_{ic}\right) = s\left(r_{jc}\right)$, to predstavlja neutralnost,

(iii) Ako je $s\left(r_{ic}\right) < s\left(r_{jc}\right)$, to predstavlja gubitak.

θ predstavlja faktora gubitka, različiti izbori θ vode do različitih oblika funkcije vrednosti PT u negativnom kvadrantu. Zatim se izračunava matrica evaluacije.

Korak 4. Izračunavamo dominaciju svake alternative a_i nad svakom alternativom a_j koristeći sledeću jednačinu:

$$\delta\left(a_i,a_j\right)=\sum_{k=1}^{p}\phi_{(k)}\left(a_i,a_j\right)\left[\mu\left(B_{(k)}\right)-\mu\left(B_{(k-1)}\right)\right]+\sum_{k=p+1}^{n}\phi_{(k)}\left(a_i,a_j\right)\left[\mu\left(A_{(k)}\right)-\mu\left(A_{(k+1)}\right)\right] \quad (6)$$

$i,j=1,2,\ldots,n,$

gde (.) u indeksu označava permutaciju takvu da važi:

$$\phi_{(1)}\left(a_i,a_j\right)\le\phi_{(2)}\left(a_i,a_j\right)\le\ldots\le\phi_{(p)}\left(a_i,a_j\right)<0\le\phi_{(p+1)}\left(a_i,a_j\right)\le\ldots\le\phi_{(m)}\left(a_i,a_j\right)$$

$$B_{(i)}=\left\{c_{(1)},c_{(2)},\ldots,c_{(i)}\right\},\ B_{(0)}=\varnothing,\ A_{(i)}=\left\{c_{(i)},\ldots,c_{(m)}\right\},\ A_{(m+1)}=\varnothing,$$

$\phi_k\left(a_i,a_j\right)$ predstavlja doprinos kriterijuma c_k funkciji $\delta\left(a_i,a_j\right)$, kada poredimo alternative a_i i a_j. Onda se matrica dominacije alternative a_i nad alternativom a_j dobija na način prikazan u tabeli 6.1.

	a_1	a_2	$\ldots$	a_i	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
a_1		$\delta(a_1,a_2)$	$\ldots$	$\delta(a_1,a_i)$	$\ldots$	$\delta(a_1,a_{n-1})$	$\delta(a_1,a_n)$
a_2	$\delta(a_2,a_1)$		$\ldots$	$\delta(a_2,a_i)$	$\ldots$	$\delta(a_2,a_{n-1})$	$\delta(a_2,a_n)$
$\ldots$		$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$	$\ldots$	
a_i	$\delta(a_i,a_1)$					$\delta(a_i,a_{n-1})$	$\delta(a_i,a_n)$
$\ldots$						$\ldots$	
a_{n-1}	$\delta(a_{n-1},a_1)$	$\delta(a_{n-1},a_2)$		$\delta(a_{n-1},a_i)$			$\delta(a_{n-1},a_n)$
a_n	$\delta(a_n,a_1)$	$\delta(a_n,a_2)$		$\delta(a_n,a_i)$		$\delta(a_n,a_{n-1})$	

Tabela 6.1 *Matrica dominacije*

Korak 5. Izračunavamo globalnu vrednost alternative a_i, normalizovanjem finalne matrice dominacije na osnovu (3).

Korak 6. Rangiranje svake alternative u odnosu na globalnu vrednost ξ_i. Najbolje alternative su one koje imaju što veću vrednost ξ_i.

Korak 7. Kraj.

Napomene:

1. Gore prikazani produženi TODIM prevazilazi nedostatke i u potpunosti oslikava osnovnu ideju klasičnog TODIM metoda. U isto vreme produženi TODIM metod primenjuje se u situacijama gde su ulazni podaci podložni tome da budu opisani putem hezitant fazi skupova.

2. Za prošireni Šokeov Todim metod, gde je $A, B \in P(X)$, $A \cap B = \varnothing$ $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, A i B se razmatraju kao nezavisni (bez interakcija), i $\alpha = 0.5$, predloženi prošireni TODIM se svodi na klasičan TODIM. Stoga je predloženi TODIM fleksibilniji u rešavanju MCDM problema.

6.1.3. PC-TODIM

Drugi pristup je razvijen za rangiranje alternativa, inspirisan idejom PROMETHEE-II metode, videti [Vin85]. Sledi kratak opis ovog pristupa.

Za matricu dominacije koja je prikazana u Tabeli 6.1, neka $\pi^+(a_i)$ bude stepen dominacije koji predstavlja meru da alternativa a_i dominira nad drugim alternativama, a $\pi^-(a_i)$ je nedominantni stepen koji predstavlja meru da druge alternative dominiraju nad alternativom a_i. Kako alternative a_i posmatara $n-1$ drugih alternativa u A, ovde je $\pi^+(a_i)$ i $\pi^-(a_i)$ definisano na sledeći način:

$$\pi^+(a_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \delta(a_i, a_j),\ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (7)$$

$$\pi^-(a_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \delta(a_j, a_i),\ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (8)$$

Neka je $\pi(a_i)$ relativni stepen dominacije koji meri razliku između dominantnog i nedominantnog stepena alternative a_i, što znači da se $\pi(a_i)$ može izračunati putem sledeće formule:

$$\pi(a_i) = \pi^+(a_i) - \pi^-(a_i). \qquad (9)$$

$\pi(a_i)$ može da se posmatra kao vrednost rangiranja alternative a_i. Očigledno je da što je veće $\pi(a_i)$, to će bolja biti alternativa a_i. Stoga, na osnovu, $\pi(a_i)$, $i = 1, 2, ..., n$ možemo da opišemo rezultat rangiranja alternativa ili izaberemo poželjne alternative.

Na osnovu ove analize, kombinovanjem Šokeovog TODIMA sa PROMETHEE-II metodom, nastaje novi produženi TODIM pod nazivom **PC-TODIM**. Algoritam za rešavanje hezitant fazi MCDM problema dat je u sledećim koracima:

Korak 1. Normalizujemo matricu odlučivanja na osnovu (4).

Korak 2. Izračunavamo Šeplijevu težinu.

Korak 3. Izračunavamo vrednosti dominacije $\phi_c(a_i, a_j)$ alternative a_i nad svakom alternativom a_j uzevši u obzir generički kriterijum c korišćenjem (5) i variranjem θ u intervalu [1,10].

Korak 4. Izračunavamo dominaciju svake alternative a_i nad svakom alternativom a_j na osnovu (6).

Korak 5. Izračunavamo stepen relativne dominacije $\pi(a_i)$ koristeći (9).

Korak 6. Utvrđujemo rezultat rangiranja alternativa na osnovu $\pi(a_i)$.

Korak 7. Kraj.

7. Premium princip

7.1. Stohastička dominacija

Koncept stohastičke dominacije (engl. Stohastic dominance) predstavlja analitičko sredstvo za rangiranje dve investicione alternative, videti ([Man06], [Lon11], [Kne15]). Stohastička dominacija vrši rangiranje koristeći celokupnu funkciju raspodele. Funkcija korisnosti je slučajna promenljiva koja prati isplativost kockanja od stvarnih vrednosti do mogućih vrednosti. Kada imamo dve slučajne promenljive, ne možemo da ih poredimo. Ako su X i Y slučajne promenljive, onda iskaz $X < Y$ nema smisla sam za sebe. Iskaz $X(\omega) < Y(\omega)$ za sve $\omega \in \Omega$, ima smisla. Jedan način za upoređivanje slučajnih promenljivih jeste izračunavanje njihovih očekivanja. Proces dodeljivanja očekivanja uključuje sintezu slučajne promenljive i verovatnoće slučajne promenljive kojoj je dodeljena druga vrednost. Pošto je teško utvrditi funkciju korisnosti nekog ekonomskog subjekta, bilo bi korisno uporediti projekte bez toga da se definiše funkcija korisnosti, već da se koristi očekivana korisnost. Stohastička dominacija omogućava mehanizam da se ovo izvrši putem merenja relativnog rizika dve distribucije verovatnoća.

Hanoh i Levi, videti [Han69]), su prvi autori koji su se bavili stohastičkom dominacijom. Stohastička dominacija omogućava parcijalno uređenje skupa slučajnih promenljivih, koje su u našem slučaju prinosi investicija, a kako imamo samo parcijalnu informaciju o preferencijama investitora i, samim tim, izbora njihovih funkcija korisnosti, možemo ostvariti samo parcijalno uređenje datog skupa, videti [Lev06], [Lon11]. Koncept prvostepene stohastičke dominacije, podrazumeva da investitor preferira veću zaradu posmatrajući skup svih neopadajućih funkcija korisnosti. Ukoliko pretpostavimo da investitor ujedno ima i odbojnost ka riziku, tada posmatramo samo one funkcije korisnosti koje su neopadajuće i konkavne, što predstavlja koncept drugostepene stohastičke dominacije.

Definicja 7.1 Neka su X i Y dve slučajne promenljive nad istim skupom mogućih ishoda i neka je $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ funkcija raspodele verovatnoća, $F_X(\eta) = P(X \le \eta)$, za $\eta \in \mathbb{R}$. Kažemo da X prvostepeno stohastički dominira u odnosu na Y (engl. first stohastic dominance, FSD), u oznaci $X \succ_{FSD} Y$, ako i samo ako je:

$$F_X(\eta) \le F_Y(\eta) \text{ , za sve } \eta \in \mathbb{R},$$

i ako za neko $\eta_0 \in \mathbb{R}$ važi $F_X(\eta_0) < F_Y(\eta_0)$.

Primer 7.1 Posmatrajmo dve investicione alternative, videti [Kne15]:

Investicija A		Investicija B	
ishod	verovatnoća	ishod	verovatnoća
12	1/3	11	1/3
10	1/3	9	1/3
8	1/3	7	1/3

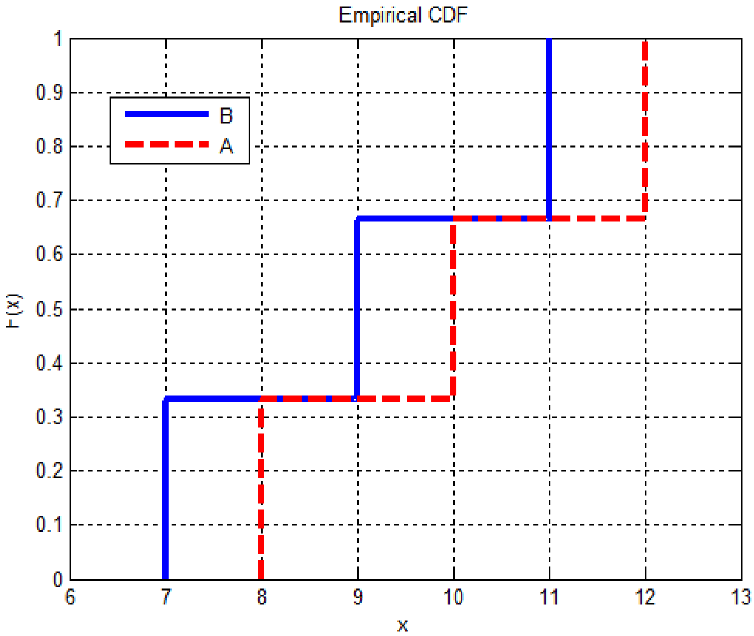
Tabela7.1 *Prinosi verovatnoće za investivije A i B*

Na osnovu tabele 7.1 nije moguće doneti zaključak koju alternativu izabrati. Moguće je da prinos na investiciju B bude 11%, dok na investiciju A može da bude 10% ili 8%. Sledeća tabela u kojoj prikazujemo funkcije raspodele pomaže u rešavanju ove dileme:

Prinos	Funkcija raspodele	
R	A	B
7	0	1/3
8	1/3	1/3
9	1/3	2/3
10	2/3	2/3
11	2/3	1
12	1	1

Tabela 7.2 *Funkcije raspodele za investicije A i B*

Iz prethodne tabele uočavamo da je kumulativna verovatnoća ostvarenja nekog prinosa uvek veća za investiciju B, na osnovu čega zaključujemo da je verovatnoća ostvarenja nižeg prinosa veća za investiciju B. Dakle, investicija B je rizičnija pa će investitor koji preferira više u odnosu na manje izabrati investiciju A. U ovom primeru investicija A dominira nad investicijom B prema prvostepenoj stohastičkoj dominaciji.



Slika 7.1 *Prvostepena stohastička dominacija*

Stohastička dominacija je primer osnovnog racionalnog uslova koji relacija preferencije ili model odlučivanja treba da zadovolji. Predstavimo lutriju pomoću dekumulativne funkcije raspodele. Za lutriju $p=(p_1,x_1;p_2,x_2;...p_n,x_n)$ za koju važi $0<x_1<x_2<...<x_n$, dekumulativna funkcija je definisana na sledeći način, videti [Gra16]:

$$G_p(x)=\sum_{i=i(x)+1}^{n} p_i \qquad (x\in\mathbb{R}^+),$$

gde je $i(x)=\max\{i\in\{0,...,n\}\,|\,x>x_i\}$, za $x>0$, $i(0)=0$ i $x_0=0$.

Kažemo da lutrija p prvostepeno stohastički dominira u odnosu na lutriju q, ako važi $G_p(x)\geq G_q(x)$ za svako $x\in\mathbb{R}^+$, sa striktnom nejednakošću za najmanje jedno x ($G_p>G_q$). Relacija preferencije zadovoljava stohastičku dominaciju ako za lutrije p,q važi sledeća implikacija $G_p>G_q\Rightarrow p\succ q$.

7.2. Paradoksi racionalnog izbora

7.2.1. Aleov paradoks

Prvi veliki izazov teoriji očekivane korisnosti postavlja Ale [All53], ukazujući na kontradikciju rezultata koje predviđa teorija korisnosti i izbora koji većina ljudi smatra racionalnim, videti [Dam14]. Ale je pokazao da se pojedinci često ne ponašaju u skladu sa očekivanom korisnošću i izveo je eksperiment koji potkrepljuje njegove tvrdnje, koji je nazvan Aleov paradoks, videti [Mas95]. Jedan od uslova racionalnog odlučivanja je i princip nezavisnosti, sekundarni aksiom u originalnoj verziji Nojmana i Morgenšterna, koji se izvodi iz prva tri navedena. Po tom principu izbor između dve opcije treba da zavisi samo od toga kako se te opcije razlikuju, a ne od faktora koji je isti za obe alternative. Na primer, ukoliko se bira između dva automobila koji su prešli istu kilometražu, onda kilometraža nije faktor na osnovu kojeg se odlučuje. Princip deluje primenljivo - racionalni donosilac odluke treba da se fokusira na razlike u određenim parametrima. Aleov eksperiment je uzdrmao ovaj princip.

Posmatrajmo sledeći primer, videti [Dam14]:

Primer 7.2

A: siguran dobitak 1 000 000 $.
B: lutrija: 5 000 000 $ verovatnoća 0.10,
1 000 000 $ verovatnoća 0.89,
0 $ verovatnoća 0.01.

Većina ljudi će izabrati opciju A, tj.siguran dobitak od milion evra. Opcija B je previše odbojna (jer u njoj postoji minimalna verovatnoća da ne dobiju ništa), iako je njena očekivana vrednost veća od sigurnog iznosa opcije A:

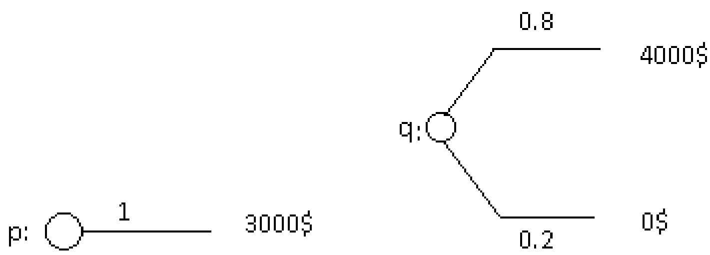
$$\left(0.10\cdot 5000000 + 0.89\cdot 1000000 + 0.01\cdot 0 = 1350000\right).$$

C: lutrija: 1 000 000 $ verovatnoća 0.11,
0 $ verovatnoća 0.89.
D: lutrija: 5 000 000 $ verovatnoća 0.10,
0 $ verovatnoća 0.90.

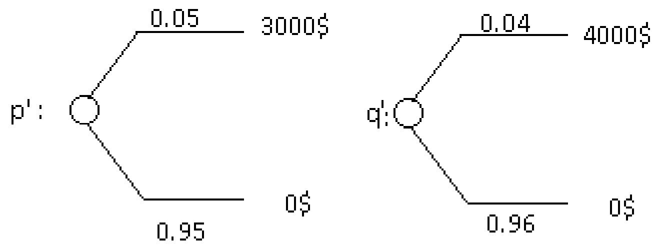
Paradoks se očitava u sledećem: većina ljudi se u prvom slučaju opredeljuje za A (siguran, iako manji dobitak), a u drugom slučaju za opciju D (neznatno manja verovatnoća za znatno veći dobitak u odnosu na opciju C). Nasuprot tome, sa stanovišta teorije korisnosti, ako preferiramo A u odnosu na B, onda moramo preferirati C u odnosu na D.

Primer 7.3

Posmatrajmo sledeće dve lutrije p, q videti [Gra16]:



Kako je p sigurna lutrija, većina ljudi će preferirati p u odnosu na q, $p \succ q$, zato što se siguran dobitak preferira u odnosu na rizično kockanje, a dobitak od 1000$ više, ne smatra se dovoljno atraktivnim u poređenju sa mogućnošću ishoda od 0$.
U sledećem koraku predloženi su sledeći izbori:



Ovde većina ljudi preferira $q^{'}$ u odnosu na $p^{'}$, zato što je verovatnoća dobijanja 4000$ u $q^{'}$, skoro ista kao i verovatnoća dobitka od 3000$ u $p^{'}$.

Međutim donosilac odluke prateći teoriju korisnosti, trebao bi da preferira $p^{'}$ u odnosu na $q^{'}$, ako važi $p \succ q$, što sledi iz sledećeg:

$$\begin{aligned}
& p \succ q \Leftrightarrow EU(p) > EU(q) \\
& \Leftrightarrow u(3000) > 0.2u(0) + 0.8u(4000) \\
& \Leftrightarrow 0.05u(3000) > 0.01u(0) + 0.04u(4000) \\
& \Leftrightarrow 0.05u(3000) + 0.95u(0) > 0.96u(0) + 0.04u(4000) \\
& \Leftrightarrow EU(p^{'}) > EU(q^{'}) \\
& \Leftrightarrow p^{'} \succ q^{'}.
\end{aligned}$$

Ipak, eksperiment je pokazao da većina ljudi narušava teoriju očekivane korisnosti, u čemu se i očitava Aleov paradox.

Razlog za neuspeh koncepta očekivane korisnosti u Aleovom paradoksu leži u pogrešnom predstavljanju averzije prema riziku. Očekivana korisnost može da predstavlja averziju prema riziku samo na osnovu konkavnosti funkcije korisnosti, ali očigledno je da je averzija prema riziku slabo povezana sa percepcijom bogatstva. Iz ovog razloga su psiholozi pedesetih godina prošlog veka, videti [Edv55], razvili ideju da transformišu verovatnoće umesto transformacije bogatstva. Transformacija verovatnoće dovodi do kršenja stohastičke dominacije i postaje neprimenljiva u procesu odlučivanja.

Neka je data lutrija $p = (p_1, x_1; p_2, x_2; \ldots p_n, x_n)$. Edvardova ideja da predstavi averziju prema riziku sastojala se u tome da primeni funkciju distorzije φ na distribuciju verovatnoće. Numerička reprezentacija preferencije je:

$$V(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(p_i).$$

Ako φ nije identička funkcija, onda postoje $p^{'}, p^{''} \in [0,1]$ za koje važi:

$$\varphi(p^{'} + p^{''}) = \varphi(p^{'}) + \varphi(p^{''}).$$

Pretpostavimo da je $\varphi(p^{'} + p^{''}) > \varphi(p^{'}) + \varphi(p^{''})$.

Neka je data lutrija $p = (p_1, x_1; p_2, x_2; \ldots p_n, x_n)$ za koju važi $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ i $p_{n-1} = p^{'}$, $p_n = p^{''}$. Smanjimo količinu x_n postepeno do x_{n-1}. Kada se to dogodi $\varphi(p^{'}) + \varphi(p^{''})$ se zamenjuje sa $\varphi(p^{'}+p^{''})$, tako da se $V(p)$ povećava iako se jedan od ishoda smanjio, što dovodi do kršenja stohastičke dominacije. Ovo čini princip transformacije verovatnoće nepromenljivim u odlučivanju.

7.2.2. Elzbergov paradoks

Elzberg [Ell61] je predložio sledeći eksperiment. U kutiji se nalazi 90 loptica, koje mogu biti crvene, žute ili plave. Znamo da kutija sadrži 30 crvenih loptica, a preostalih 60 su ili žute ili plave u nepoznatom odnosu (može se desiti da bude npr. 30 žutih i 30 plavih, kao i nijedna žuta i 60 plavih kuglica). Iz kutije se bira jedna loptica i sledeća klađenja su predložena, videti [Gra16]:

1. da je loptica crvene boje ili da je loptica plave boje. Ako pogodite boju dobijate 100$, u suprotnom ne dobijate ništa.
2. da je loptica crvena ili žuta, ili da je izvučena loptica ili plava ili žuta. Ako pogodite boju dobijate 100$, u suprotnom ne dobijate ništa.

Eksperimentali rezultati pokazuju da se većina ljudi kladila na crvenu kuglicu u prvom koraku, jer su sigurni da je 1/3 loptica crvene boje, dok nema nikakve garancije za kuglice plave boje (možda ih uopšte i nema).
U sledećem koraku većina ljudi se kladila na opciju plava ili žuta iz istog razloga: 2/3 loptica cu plave ili žute, dok je kod druge opcije (crvena ili žuta) samo je 1/3 garantovana.
Pokažimo sada da rezultati ovog eksperimenta ne mogu biti objašnjeni teorijom očekivane korisnosti.
Formulisaćemo problem uzimajući u obzir stanja i odluke. Stanja se odnose na moguće boje izabranih loptica, S=(C, Ž, P), a odluke se odnose na četiri moguća klađenja. Prikazaćemo posledice različitih odluka u tabeli 7.3.

Odluka	Crvena (C)	Žuta (Ž)	Plava (P)
f_1: klađenje na crvenu	100	0	0
f_2: klađenje na plavu	0	0	100
f_3: klađenje na crvenu ili žutu	100	100	0
f_4: klađenje na plavu ili žutu	0	100	100

Tabela 7.3

Jasno je iz tabele 7.3 da izbor $f_1 \succ f_2$, $f_4 \succ f_3$ dovodi u pitanje princip sigurnosti (engl. The sure – thing principle). Odluke f_1 i f_2 koje se odnose na žute kuglice su iste, stoga po principu sigurnosti važnost imaju samo crvene i plave loptice. Kako su f_3 i f_4 identične kao

f_1 i f_2 po pitanju crvenih i plavih kuglica, izbor $f_1 \succ f_2$ nameće $f_3 \succ f_4$, što ne odgovara zabeleženom ponašanju ispitanika. Očekivana korisnost podrazumeva princip sigurnosti, međutim iz eksperimenta sledi da većina ispitanika ne primenjuje maksimizaciju očekivane korisnosti.

$$\begin{aligned} & f_1 \succ f_2 \Leftrightarrow u(100)(P(\{C\})) > u(100)(P(\{P\})) \\ & \Leftrightarrow P(\{C\}) > P(\{P\}) \end{aligned}$$

Sa druge strane,

$$\begin{aligned} & f_4 \succ f_3 \Leftrightarrow u(100)(P(\{\check{Z}, P\})) > u(100)(P(\{\check{Z}, C\})) \\ & \Leftrightarrow P(\{\check{Z}, P\}) > P(\{\check{Z}, C\}) \\ & \Leftrightarrow 1 - P(\{C\}) > 1 - P(\{P\}) \\ & \Leftrightarrow P(\{C\}) < P(\{P\}). \end{aligned}$$

Jasno je da je došlo do kontradikcije.
Generalno, nijedan model koji pretpostavlja sofistikaciju verovatnoće (engl. Probabilistic sophistication) ne može da objasni ovaj izbor.
Ako ispitanik preferira f_1 u odnosu na f_2, to je zato što postoji mogućnost da bude manje plavih kuglica u odnosu na broj crvenih kuglica, $P(\{C\}) > P(\{P\})$. Na osnovu ove pretpostavke može se zaključiti da možda ima manje loptica koje su crvene ili žute nego loptica koje su plave ili žute, što znači da bi f_3 trebalo da bude izabrano umesto f_4. Međutim, izbor većine ispitanika je suprotan.

7.3. Premium princip

Uopštemo govoreći, premium princip je pravilo za dodeljivanje premije riziku osiguranja. Mi ćemo se fokusirati na premije koje se odnose na novčanu isplatu od strane osiguravajuće kompanije u vezi sa gubicima koji se mogu osigurati na koje se dodaju dodatni rizik, koji osiguravajuće kompanije uračunavaju uzimajući u obzir činjenicu da su realni gubici retko jednaki očekivanim gubicima. Drugim rečima, ignorišemo dodatke za troškove i profit. U nastavku rada, opisaćemo tri metode koje aktuari koriste da razviju premium principe.

Prva metoda se zove **ad hoc metoda**, zato što u okviru nje, aktuar definiše potencijalno razuman premium princip, a zatim određuje koju odliku, sa liste poželjnih osobina, dati premium princip zadovoljava. Na primer the Expected Value Premium Principle, u kome je premija jednaka očekivanoj vrednosti pomnožena brojem koji je veći od jedan, je prilično ad hoc, ali zadovoljava neke fine osobine. On zapravo zadržava affine transformacije slučajnih promenljivih i aditivan je ili jednak.

Striktnija metoda je ona koju nazivamo **metoda karakterizacije**, zato što, u okviru nje, aktuar sastavlja listu osobina koje on želi da premium princip zadovolji i onda nalazi premium princip (ili skup premium principa) koji su određeni putem ovih osobina. Ponekad, aktuar ne mora da odredi skup premium principa koji zadovoljavaju datu listu osobina, nego će naći jedan premium princip koji to čini. Nalaženje samo jednog takvog premium principa je lošiji metod nego sveobuhvatni metod karakterizacije, ali je u praksi često sasvim dovoljan. Primer lošijeg metoda je traženje premium principa koji je skalirano ekvivarijantan.

Najstriktnija metoda koju aktuar može da koristi da razvije premium princip, je ona koju nazivamo **Ekonomska metoda.** U okviru ove metode, aktuar bira određenu ekonomsku teoriju i onda utvrđuje premium princip koji iz nje sledi. Važno je napomenuti da ove metode ne isključuju jedna drugu. Na primer, the Proportional Hazards Premium Principle, videti [Wan95], prvo je nastao kada je Wang tražio premium princip koji zadovoljava osobinu aditivnosti; zapravo Wang je koristio slabiju formu metode karakterizacije. Zatim su Wang, Young, i Panjer pokazali da Proportional Hazards Premium Principle može da nastane na osnovu preciznog određivanja liste osobina i pokazivanja da je ovaj princip jedini premium princip koji zadovoljava datu listu osobina, videti [Wan97].

Neki premium principi nastaju na osnovu jedne ili više metoda, na primer, aktuar može da ima određenu osobinu (ili listu osobina) koje njegov premium princip treba da zadovolji. On zatim nalazi takav premium princip i nakon toga otkriva da taj premium princip može biti zasnovan na ekonomskom premiumu principu.

7.3.1. Osobine premium principa

U nastavku ćemo navesti neke osobine premium principa. Neka je $\mathcal{F}$ skup nenegativnih slučajnih promenljivih na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, koje nazivamo rizicima osiguranja. Neka X, Y, Z pripadaju skupu $\mathcal{F}$ i neka je H premium princip, ili funkcija koja preslikava $\mathcal{F}$ u skup nenegativnih realnih brojeva. Zato je moguće da $H[X]$ uzima vrednost beskonačno. Moguće je proširiti domen premium principa H da uključi negativne slučajne promenljive. Mi ćemo ovde razmatrati samo isplatu osiguranja i nazvaćemo je isurance loss randm variable.

1. Nezavisnost: $H[X]$ zavisi samo od dekumulativne funkcije distribucije od X, zapravo G_X, gde je $G_X(t) = P\{w \in \Omega : X(w) > t\}$. Ova osobina označava da premium zavisi samo od novčanog gubitka, predmeta osiguranja i verovatnoće da će se dogoditi dati novčani gubitak, a ne od izvora novčanog gubitka.

2. Risk loading: $H[X] \geq E(X)$ za sve $X \in \mathcal{F}$. Loading for risk (dodatak za rizik) je poželjan jer je generalno potrebno premium pravilo da bi se naplatio u najmanju ruku očekivani iznos za rizik X, zapravo $E(X)$, u razmenu za osiguravanje rizika. U suprotnom osiguravajuća kompanija će u većini slučajeva izgubiti novac.

3. No unjustified risk loading (Bez neosnovanog risk loading-a): Ako je rizik $X \in \mathcal{F}$ indentično jednak konstanti $c \geq 0$ (gotovo svuda), onda je $H[X] = c$. Za razliku od osobine 2. (Risk loading), ako znamo sigurno (sa verovatnoćom 1) da je isplata osiguranja c, onda nemamo razlog da obračunamo risk loading, zato što nema neizvesnosti vezane za isplatu.

4. Maksimalni gubitak: $H[X] \leq ess\sup[X]$ za sve $X \in \mathcal{F}$.

5. Translatorna invarijantnost (eng. translation invariance): $H[X+a] = H[X]+a$, za sve $X \in \mathcal{F}$ i sve $a \geq 0$. Ako povećamo rizik X za fiksni iznos a, onda ova osobina navodi da bi premija osiguranja (premium) za $X+a$ trebalo da bude premium za X povećan za fiksni iznos a.

6. Skalna invarijantnost (eng. scale invariance): $H[bX] = bH[X]$, za sve $X \in \mathcal{F}$ i sve $b \geq 0$.

Iz osobina 5. i 6. sledi osobina 3. pod uslovom da postoji rizik Y takav da je $H[Y] < \infty$. Zapravo, ako je $X \equiv c$, onda $H[X] = H[c] = H[c+0] = H[c] + H[0] = c + 0 = c$. Važi da je $H[0] = 0$ zato što $H[0] = H[0Y] = 0H[Y] = 0$.
Skalna invarijantnost je takođe poznata pod nazivom homogenost prvog stepena u ekonomskoj teoriji. U suštini ova osobina označava da je premium za dupliranje rizika dupli premium jednog rizika. Obično se koristi nearbitražni argument da bi se opravdalo ovo pravilo. Ako je premium za $2X$ veći nego dvostruki premium za X, onda se može kupiti osiguranje za $2X$, tako što se kupi osiguranje za $2X$ kod dve različite kompanije, ili kod iste osiguravajuće kompanije u vidu dve polise. Slično, ako je premium za $2X$ manji nego dvostruki premium za X, onda se može kupiti osiguranje za $2X$, prodati osiguranje za X i X i na taj način arbitražni profit. Skalna invarijantnost ne bi bio racionalan izbor ako je rizik X veliki i osiguravajuća kompanija (ili tržište osiguranja) ima dodatna ograničenja. U tom slučaju, možemo očekivati da je premija za $2X$ veća nego dvostrka premija za X.

7. Aditivnost: $H[X+Y] = H[X] + H[Y]$ za sve $X, Y \in \mathcal{F}$.

8. Subaditivnost: $H[X+Y] \leq H[X] + H[Y]$ za sve $X, Y \in \mathcal{F}$.

U okviru subaditivnosti obezbeđeno je da zbir premija dva rizika nije veći od zbira pojedinačnih premija. U suprotnom kupac osiguranja bi jednostvno osigurao dva rizika pojedinačno. Međutim, nearbitražni argument koji tvrdi da $H[X+Y]$ ne može biti manji od $H[X] + H[Y]$ nije primenljiv jer generalno nije moguće da kupac osiguranja proda osiguranje za dva rizika pojedinačno.

9. Superaditivnost: $H[X+Y] \geq H[X]+H[Y]$ za sve $X,Y \in \mathcal{F}$.

Treba naglasiti da osobine 8. i 9. mogu da budu oslabljene zahtevanjem samo H[bX] ≤ bH[X] ili H[bX] ≥ bH[X] za b > 0. Zatim mi možemo oslabiti osobinu aditivnosti zahtevajući aditivnost samo za određene rizike osiguranja:

10. Aditivnost za nezavisne rizike: $H[X+Y]=H[X]+H[Y]$, za sve $X,Y \in \mathcal{F}$ tako da su X i Y nezavisni.

11. Aditivnost za komonotone rizike: $H[X+Y]=H[X]+H[Y]$, za sve $X,Y \in \mathcal{F}$ takve da su X i Y komonotoni. Aditivnost za komonotone rizike je poželjna zato što ako prihvatimo subaditivnost kao generalno pravilo, onda je neracionalno da imamo $H[X+Y]<H[X]+H[Y]$, jer rizici nisu suprostvljeni već se zajedno kreću. Treba naglasiti da osobina 11. implicira osobinu 6., ako H dodatno zadovoljava uslov neprekidnosti.

12. Monotonost: Ako je $X(w) \leq Y(w)$ onda za sve $w \in \Omega$, sledi $H[X] \leq H[Y]$.

7.3.2. Premium princip baziran na integralima (the Integral-based premium principle)

Neka je $\mathcal{F}$ klasa rizika osiguranja $f:\Omega \to \mathbb{R}$ na merljivom prostoru (Ω,Σ). Označimo sa $\mathcal{M}$ klasu svih neaditivnih mera na merljivom prostoru (Ω,Σ), gde je Σ $\sigma-$algebra podskupova od Ω, $P:\Sigma \to [0,1]$ mera verovatnoće. Neka je $\mathcal{M}_b$ klasa svih neaditivnih mera za koje važi da je $m(\Omega)=b$. Neaditivna mera je normalizovana, ako je ispunjeno $m(\Omega)=1$. Premium princip bazaran na integralima (engl. The integral-based premium principle) je bilo koje pravilo $\Pi:\mathcal{F}\times\mathcal{M}\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ za dodeljivanje premije $\Pi(f,m_1,m_2)$ riziku osiguranja $f:\Omega\to\mathbb{R}$, videti [Pap17], [Mih19]. Označimo sa $f^+ = f \vee 0$, $f^- = -f \vee 0$.
Dualnu skupovnu funkciju $\bar{m}:\Sigma \to [0,\infty)$, skupovne funkcije m, $m \in \mathcal{M}_b$ definišemo na sledeći način:

$$\bar{m}(A)=m(\Omega)-m(\Omega \setminus A),$$

za sve $A \in \Omega$.

Sa $I(f,m)=\int_0^\infty m(\{\omega \mid f(\omega)\geq x\})\, dx$ označavaćemo Šokeov integral.

U sledećem primeru navodimo neke premium principe bazirane na integralima koji se široko proučavaju u literaturi, videti ([Tve92], [Qui93], [Wak10], [You06]).

Primer 7.1

(i) Net premium princip *(engl. The net premium principle)*, definiše se za $f \in \mathcal{F}$ i za meru verovatnoće $m = P \in \mathcal{M}_1$ kao:

$$E(f) = \Pi_N\left(f, P, P\right) = I(f^+, P) - I(f^-, P).$$

(ii) Distorzioni premium princip (*The distortion premium principle*), definiše se za $f \in \mathcal{F}$ i $m = P \in \mathcal{M}_1$ kao:

$$\Pi_{DPP}\left(f, m, m\right) = I(f^+, m) - I(f^-, \overline{m}),$$

gde je $m = g \circ P$ za neopadajuću distorzionu funkciju $g : \left[0,1\right] \to \left[0,1\right]$,

$g(0) = 0$, $g(1) = 1$.

(iii) Asimetrični premium princip baziran na Šokeovom integral (*The asymmetric Choquet integral-based premium principle)*, definiše se za $f \in \mathcal{F}$ i monotonu meru $m \in \mathcal{M}_b$ kao:

$$\Pi_{ACH}\left(f, m, m\right) = I(f^+, m) - I(f^-, \overline{m}),$$

gde je $\overline{m}$ dualna skupovna funkcija funkcije m.

(iv) Generalni CPT premium princip *(engl. The general CPT premium principle)*, definiše se za $f \in \mathcal{F}$ i monotone mere $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_b$ kao:

$$\Pi_{CPT}\left(f, m_1, m_2\right) = I(f^+, m_1) - I(f^-, \overline{m}_2).$$

Primer 7.2

Neki premium principi nemaju isti oblik kao gore navedeni principi, iako su predstavljeni pomoću monotonih integrala:

(i) The mean premium principle, definiše se za $f \in \mathcal{F}$, meru verovatnoće $P \in \mathcal{M}_1$ i rastuću funkciju realne vrednosti, ϕ , $\phi(0) = 0$, kao:

$$\Pi_M\left(f\right) = \phi^{-1}(I(\phi(f), P)).$$

(ii) Eksponencijalni premium princip *(engl.The exponential premium principle),* definiše se za $f \in \mathcal{F}$, meru verovatnoće $P \in \mathcal{M}_1$ i $\alpha > 0$ kao:

$$\Pi_{\exp}(f) = \frac{1}{\alpha}\ln(I(e^{\alpha f}, P)).$$

Eksponencijalni premium princip zadovoljava mnoge dobre osobine, uključujući aditivnost u pogledu nezavisnih rizika. Za više detalja vezanih za premium principe bazirane na integralima pogledati [Qui93], [Wak10], [Yaa87].

7.4. Uopšteni premium princip baziran na KPT integralima

Sada uvodimo uopšteni premium princip, koji pokriva prethodne primere i rešava modeliranje iz primera koji će biti opisan u sledećem poglavlju , videti [Pap17], [Mih19].

Neka $\mathcal{F}$ predstavlja klasu rizika osiguranja $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Uvodimo sledeći opšti KPT tip integrala:

Definicija 7.1 Uopšteni premium princip baziran na KPT integralima (The CPT-like integral-based premium principle) $\Pi_{CPT_\phi} : \mathcal{F} \times \mathcal{M}_b \times \mathcal{M}_b \to \overline{\mathbb{R}}$ za rizik osigranja $f \in \mathcal{F}$ i $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_b$ se definiše na sledeći način:

$$\Pi_{CPT_\phi}(f, m_1, m_2) = \phi^{-1}(I(\phi(f^+), m_1) - I(\phi(f^-), \overline{m}_2)),$$

za neparnu, rastuću, neprekidnu funkciju $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Napomena:

(i) Ako je $\phi(x) = x$, i $m_1 = m_2 = P$ mera verovatnoće tada je $\Pi_{CPT_\phi} = \Pi_N$,

(ii) Ako je ϕ neparna funkcija i $m_1 = m_2 = P$ mera verovatnoće, tada je $\Pi_{CPT_\phi} = \Pi_M$,

(iii) Ako posmatramo samo nenegativne rizike $f \in \mathcal{F}^+$, sa $\phi(x) = e^{\alpha x} - 1$ i $m_1 = P$, imamo da je $\Pi_{CPT_\phi} = \pi_{\exp}$.

7.5. Primer primene uopštenog KPT premium principa na procenu najpovoljnije kamatne stope na deviznu štednju

U sledećem primeru prikazaćemo primenu predloženog KPT premium principa u odlučivanju. Ovaj primer prikazuje problem u kome monotoni integral, net premium princip, asimetrični Šokeov integrlani preminum princip, distorzioni premium princip i opšti KPT premiuim princip nisu odgovarajući za predstavljanje tražene interakcije između kriterijuma.

Razmotrićemo kamatnu stopu na deviznoj štednji u četiri banke B_1, B_2, B_3, B_4. Procenićemo koja banka nudi najpovoljniju kamatnu stopu na deviznu štednju pod istim uslovima u valuti c_1, c_2, c_3. Neka godišnje kamatne stope budu izražene u procentima i prikazane sledećom tabelom, videti [Mih19]:

	c_1	c_2	c_3
B_1	0.1	0.7	0.9
B_2	0.2	0.7	0.8
B_3	0.1	0.3	0.7
B_4	0.2	0.3	0.6

Štediše najviše štede u valuti c_2, c_3, a zatim u valuti c_1. Pošto su u bankama B_1 i B_2 valute c_2 i c_3 povoljne, obratićemo pažnju na valutu c_1, na osnovu koje sledi $B_2 \succ B_1$. Pošto banke B_3 i B_4 nude nepovoljnu kamatnu stopu na ušteđevinu u valuti c_2, više pažnje obraćamo na valutu c_3, na osnovu koje sledi $B_3 \succ B_4$.

Sada izračunavamo monotoni integral vezan za B_1 i B_2:

$$I(\mathrm{B}_1,\mathrm{m}) = 0.1\mathrm{m}(\{\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,\mathrm{c}_3\}) + 0.6\mathrm{m}(\{c_2,c_3\}) + 0.2\mathrm{m}(\{c_3\}),$$
$$I(\mathrm{B}_2,\mathrm{m}) = 0.2\mathrm{m}(\{\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,\mathrm{c}_3\}) + 0.5\mathrm{m}(\{c_2,c_3\}) + 0.1\mathrm{m}(\{c_3\}).$$

Kako je $B_2 \succ B_1$, sledi da je $I(\mathrm{B}_2,\mathrm{m}) > I(\mathrm{B}_1,\mathrm{m})$, odakle imamo:

$$\mathrm{m}(\{\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,\mathrm{c}_3\}) > \mathrm{m}(\{c_2,c_3\}) + \mathrm{m}(\{c_3\}).$$

Sa druge strane imamo:

$$I(\mathrm{B}_3,\mathrm{m}) = 0.1\mathrm{m}(\{\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,\mathrm{c}_3\}) + 0.2\mathrm{m}(\{c_2,c_3\}) + 0.4\mathrm{m}(\{c_3\}),$$
$$I(\mathrm{B}_4,\mathrm{m}) = 0.2\mathrm{m}(\{\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,\mathrm{c}_3\}) + 0.1\mathrm{m}(\{c_2,c_3\}) + 0.3\mathrm{m}(\{c_3\}).$$

Kako je $B_3 \succ B_4$, sledi da je $I(\mathrm{B}_3,\mathrm{m}) > I(\mathrm{B}_4,\mathrm{m})$, odakle imamo:

$$\mathrm{m}(\{\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,\mathrm{c}_3\}) < \mathrm{m}(\{c_2,c_3\}) + \mathrm{m}(\{c_3\}).$$

Na osnovu dobijene kontradikcije sledi da monotoni integral nije pogodan za predstavljanje ove interakcije između kriterijuma.

Valute c1, c2, c3, razmatrali smo na skali od 0-1, a sada ćemo ih posmatrati na skali -0.5-0.5:

	c_1	c_2	c_3
B_1	-0.4	0.2	0.4
B_2	-0.3	0.2	0.3
B_3	-0.4	-0.2	0.2
B_4	-0.3	-0.2	0.1

Za $\phi(x) = x$, $x \in \Omega$, gde je $\Omega = \{\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,\mathrm{c}_3\}$, imamo:

$$\Pi_{CPT_\phi}(\mathrm{B}_1,\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2) = 0.2\mathrm{m}_1(\{c_2,c_3\}) + 0.2\mathrm{m}_1(\{c_3\}) - 0.4\overline{m_2}(\{c_1\}),$$
$$\Pi_{CPT_\phi}(\mathrm{B}_2,\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2) = 0.2\mathrm{m}_1(\{c_2,c_3\}) + 0.1\mathrm{m}_1(\{c_3\}) - 0.3\overline{m_2}(\{c_1\}),$$
$$\Pi_{CPT_\phi}(\mathrm{B}_3,\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2) = 0.2\mathrm{m}_1(\{c_3\}) - 0.2\overline{m_2}(\{c_2,c_1\}) - 0.2\overline{m_2}(\{c_1\}),$$
$$\Pi_{CPT_\phi}(\mathrm{B}_4,\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2) = 0.1\mathrm{m}_1(\{c_3\}) - 0.2\overline{m_2}(\{c_2,c_1\}) - 0.1\overline{m_2}(\{c_1\}).$$

Kako je $B_2 \succ B_1$ i $B_3 \succ B_4$, sledi da je $\Pi_{CPT_\phi}(\mathrm{B}_1,\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2) < \Pi_{CPT_\phi}(\mathrm{B}_2,\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2)$ i $\Pi_{CPT_\phi}(\mathrm{B}_4,\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2) < \Pi_{CPT_\phi}(\mathrm{B}_3,\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2)$, odakle zaključujemo da važe redom sledeće nejednakosti:

$$\mathrm{m}_1(\{c_3\}) < \overline{m_2}(\{c_1\}) ,$$
$$\overline{m_2}(\{c_1\}) < \mathrm{m}_1(\{c_3\}) .$$

Primetićemo da i u ovom slučaju imamo kontradikciju. Treba uočiti da net premium princip, asimetrični Šokeov integralni premium princip, distrorzioni premium princip i opšti KPT premium princip nisu odgovarajući za predstavljanje zahtevane interakcje među kriterijumima.

Sada pokažimo da je naš uopšteni premium princip baziran na KPT integralima prikladan za rešavanje prikazanog problema odlučivanja uz odabir odgovarajuće funkcije ϕ i monotone mere.

Uzmimo da je $\phi(x)=\sqrt[3]{x}$, $x\in\Omega$. Tada važi:

$$\Pi_{CPT_\phi}(\mathrm{B}_1,\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2)=\left(\sqrt[3]{0.2}m_1(\{c_2,c_3\})+\left(\sqrt[3]{0.4}-\sqrt[3]{0.2}\right)m_1(\{c_3\})-\sqrt[3]{0.4}\overline{m_2}(\{c_1\})\right)^3,$$

$$\Pi_{CPT_\phi}(\mathrm{B}_2,\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2)=\left(\sqrt[3]{0.2}m_1(\{c_2,c_3\})+\left(\sqrt[3]{0.3}-\sqrt[3]{0.2}\right)m_1(\{c_3\})-\sqrt[3]{0.3}\overline{m_2}(\{c_1\})\right)^3,$$

$$\Pi_{CPT_\phi}(\mathrm{B}_3,\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2)=\left(\sqrt[3]{0.2}m_1(\{c_3\})-\left(\sqrt[3]{0.2}\right)\overline{m_2}(\{c_2,c_1\})-\left(\sqrt[3]{0.4}-\sqrt[3]{0.2}\right)\overline{m_2}(\{c_1\})\right)^3,$$

$$\Pi_{CPT_\phi}(\mathrm{B}_4,\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2)=\left(\sqrt[3]{0.1}m_1(\{c_3\})-\left(\sqrt[3]{0.2}\right)\overline{m_2}(\{c_2,c_1\})-\left(\sqrt[3]{0.3}-\sqrt[3]{0.2}\right)\overline{m_2}(\{c_1\})\right)^3.$$

Kako je $B_2\succ B_1$ i $B_3\succ B_4$, sledi da su ispunjene sledeće nejednakosti:

$$\mathrm{m}_1(\{c_3\})<\overline{m_2}(\{c_1\}),$$
$$\left(\sqrt[3]{0.4}-\sqrt[3]{0.3}\right)\overline{m_2}(\{c_1\})<\left(\sqrt[3]{0.2}-\sqrt[3]{0.1}\right)\mathrm{m}_1(\{c_3\}),$$

Odakle važi da je:

$$\mathrm{m}_1(\{c_3\})<\overline{m_2}(\{c_1\})<1.7907\,\mathrm{m}_1(\{c_3\}).$$

U ovom slučaju nema kontradikcije. Na primer, ako je $\mathrm{m}_1(\{c_3\})=0.5$ i $\overline{m_2}(\{c_1\})=0.6$ onda su prethodne nejednakosti zadovoljene. Iz ovoga sledi da KPT integralni premium princip vezan za funkciju ϕ, definisanu sa $\phi(x)=\sqrt[3]{x}$, može da se primeni u modeliranju posmatranog problema.

7.6. Jensenova teorema za KPT integral

Pokazaćemo da za uopšteni KPT integral važi nejednakost tipa Jensena.

Lema 7.1 Ako je $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ konkavna funkcija i važi da je $\varphi(0)=0$, tada je $\frac{\varphi(x)}{x}$ nerastuća funkcija na $(0,\infty)$.

Dokaz: Neka je $x_1<x_2$ i neka važi $x_1,x_2\neq 0$. Tada sledi:

$$\frac{\varphi(x_1)}{x_1}=\frac{1}{x_1}\varphi\left(\frac{x_1}{x_2}x_2\right)=\frac{1}{x_1}\left(\varphi\left(\frac{x_1}{x_2}x_2+\left(1-\frac{x_1}{x_2}\right)0\right)\right)$$
$$\geq\frac{1}{x_1}\left(\frac{x_1}{x_2}\varphi(x_2)+\left(1-\frac{x_1}{x_2}\right)\varphi(0)\right)=\frac{\varphi(x_2)}{x_2}.$$

Teorema 7.1 Neka je $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ konkavna, rastuća funkcija takva da je $\varphi(0)=0$. Tada za bilo koje $m\in\mathcal{M}_1$ i bilo koju realnu, nenegativnu funkciju osiguranja rizika f, za koju važi $I(f,m)<\infty$, imamo sledeću nejednakost:

$$I(\varphi(f),m)\le\varphi(I(f,m)).$$

Dokaz: Neka je $0<I(f,m)<\infty$ i $x_0=I(f,m)$. Kako je φ konkavna funkcija, postoje $a,b\in R$ tako da za neko $x\in[0,\infty)$ važi $ax_0+b=\varphi(x_0)$ i $ax+b\ge\varphi(x)$.
Označimo sa $a=\varphi_+^{'}(x_0)$. Tada je $a\ge 0$, budući da je φ rastuća fukcija. Pokažimo da je $b\ge 0$. Kako je $b=\varphi(x_0)-\varphi_+^{'}(x_0)x_0$, imamo da važi:

$$\begin{aligned}\frac{b}{x_0^2}&=\lim_{h\to0+}\left(\frac{\varphi(x_0)}{x_0^2}-\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{hx_0}\right)\\&=\lim_{h\to0+}\left(\frac{\varphi(x_0)}{x_0^2}-\frac{1}{hx_0}\left(\frac{\varphi(x_0+h)}{x_0+h}\left(x_0+h\right)-\frac{\varphi(x_0)}{x_0}x_0\right)\right)\\&=\lim_{h\to0+}\left(\frac{\varphi(x_0)}{x_0^2}-\frac{1}{h}\left(\frac{\varphi(x_0+h)}{x_0+h}-\frac{\varphi(x_0)}{x_0}\right)-\frac{1}{x_0}\frac{\varphi(x_0+h)}{x_0+h}\right)\\&=\lim_{h\to0+}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{\varphi(x_0)}{x_0}-\frac{\varphi(x_0+h)}{x_0+h}\right)\right).\end{aligned}$$

Na osnovu Leme 7.1, imamo da je $\frac{b}{x_0^2}\ge 0$, tj. važi da je $b\ge 0$. Dalje sledi:

$$\begin{aligned}&I(\varphi(f),m)\le I(af+b,m)=aI(f,m)+bm(\Omega)\\&=ax_0+b=\varphi(x_0)=\varphi(I(f,m)).\end{aligned}$$

Direktna posledica Teoreme 7.1, je sledeća teorema.

Teorema 7.2 Neka je $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ konveksna, rastuća funkcija takva da je $\varphi(0)=0$. Tada za bilo koje $m\in\mathcal{M}_1$ i bilo koju realnu, nenegativnu funkciju f, za koju važi $I(f,m)<\infty$, imamo sledeću nejednakost:

$$I(\varphi(f),m)\ge\varphi(I(f,m)).$$

Lema 7.2 Neka je $\Pi_{CPT_\phi}:\mathcal{F}^+\times\mathcal{M}_1\to[0,\infty]$ sa generativnom funkcijom ϕ.

(i) Ako je ϕ konveksna funkcija na $[0,\infty[$, tada važi $\Pi_{CPT_\phi}(f,m)\ge\Pi_{CH}(f,m)$ za sve $f\in\mathcal{F}^+$ i $m\in\mathcal{M}_1$. Ako je $m=P$, tada je $\Pi_{CPT_\phi}(f,m)\ge E(f)$.

(ii) Ako je ϕ konkavna funkcija na $[0,\infty[$, tada važi $\Pi_{CPT_\phi}(f,m)\le\Pi_{CH}(f,m)$ za sve $f\in\mathcal{F}^+$ i $m\in\mathcal{M}_1$. Ako je $m=P$, tada je $\Pi_{CPT_\phi}(f,m)\le E(f)$.

Dokaz: Po definiciji monotonog integrala imamo da je $\Pi_{CPT_\phi}(f,m)=\phi^{-1}(I(\phi(f),m))$, pa je nejednakost direktno ispunjena za $\Pi_{CPT_\phi}(f,m)=\infty$. Imamo da je $\Pi_{CPT_\phi}(f,m)<\infty$, kada je $I(\phi(f),m)<\infty$. Po Teoremi 7.5.2, kako je ϕ konveksna funkcija imamo da važi:

$$\begin{aligned}&\Pi_{CPT_\phi}(f,m)=\phi^{-1}(I(\phi(f),m))\\&\geq I(f,m)=\Pi_{CH}(f,m).\end{aligned}$$

Jensenova teorema za KPT integral:

Teorema 7.3 Neka je $u:[0,\infty]\to[0,a]$, $u(0)=0$ konkavna, rastuća, neprekidna funkcija i neka je ϕ konveksni generator, $\phi:[0,a]\to[0,\infty]$, $\phi(0)=0$, tako da je kompozicija $\phi\circ u$ je konkavna na $[0,\infty]$. Tada za sve $f\in\mathcal{F}_a^+$ i $m\in\mathcal{M}_1$ važi:

$$\Pi_{CPT_\phi}(u(f),m)\leq u(\Pi_{CPT_\phi}(f,m)).$$

Dokaz: Na osnovu Teoreme 7.1, pošto je $\phi\circ u$ je konkavna funkcija, i na osnovu Leme 7.2 sledi:

$$\begin{aligned}&\Pi_{CPT_\phi}(u(f),m)=\phi^{-1}(I(\phi(u(f)),m))\\&\leq u(I(f,m))=u(\Pi_{CH}(f,m))\\&\leq u(\Pi_{CPT_\phi}(f,m)).\end{aligned}$$

Teorema 7.4 Neka je $u:[0,\infty]\to[0,a]$, $u(0)=0$ konveksna, rastuća, neprekidna funkcija i neka je ϕ konkavni generator, $\phi:[0,a]\to[0,\infty]$, $\phi(0)=0$, tako da je kompozicija $\phi\circ u$ konveksna na $[0,\infty]$. Tada za sve $f\in\mathcal{F}_a^+$ i $m\in\mathcal{M}_1$ važi:

$$\Pi_{CPT_\phi}(u(f),m)\geq u(\Pi_{CPT_\phi}(f,m)).$$

7.7. Osobine uopštenog premium principa baziranog na KPT integralima

U ovom poglavlju predstavićemo i dokazati glavne osobine uopštenog premium principa baziranog na KPT integralima, videti [Pap17], [Mih19].

Uvodimo sledeće oznake:
Neka je $\phi:\left[-a,a\right]\to\left[-\infty,\infty\right]$ neparna, striktno rastuća, neprekidna funkcija, $a\in\overline{\mathbb{R}}^+$, $\phi\left(0\right)=0,\phi\left(a\right)=\infty.$

Simetrično pseudo sabiranje $\oplus:[-a,a]^2 \to [-a,a]$ definiše se kao:

$$x \oplus y = \phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y)),$$

Sa konvencijom $\infty - \infty = \infty$.

Simetrično pseudo množenje $\odot:[-a,a]^2 \to [-a,a]$ definiše se kao:

$$x \odot y = \phi^{-1}(\phi(x)\phi(y)),$$

Sa konvencijom $0 \cdot \infty = 0$.

U sledećem primeru uvešćemo neke dobro poznate tipove diskretnih KPT integrala, predstavljenih u obliku funkcija agregacije, široko proučavanih u literaturi, videti [Cal02],[Gra09].

Primer 7.3

- Ponderisana kvazi aritmetička sredina (engl. Weigthed quasi-arithmetic means):

$$WQAM(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) m(\{i\})\right),$$

gde težine $m(\{i\}) = \omega_i$, za $i = 1, 2, \ldots, n$, zadovoljavaju $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.

(i) Ako je ϕ indentična funkcija tada imamo ponderisanu aritmetičku sredinu (engl. the weighted arithmetic means):

$$WAM(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i .$$

(ii) Ako je $\phi(x) = x^p$, $p > 0$, imamo the root-power means:

$$M_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[p]{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i^{\,p}\right)},$$

gde je $m(\{i\}) = \frac{1}{n}$, za $i = 1, 2, \ldots, n$.

- Ponderisani kvazi operator usrednjavanja (engl. Ordered weighted quasi-averages):

$$OWQA(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \phi\left(x_{\alpha(i)}\right)\left(m(A_{i+1}) - m(A_i)\right)\right),$$

gde $x_{\alpha(1)} \le x_{\alpha(2)} \le \ldots \le x_{\alpha(n)}$, $A_i = \{\alpha(i), \ldots, \alpha(n)\}$, $A_{n+1} = \emptyset$ i $\omega_i = m(A_{i+1}) - m(A_i)$ za $i = 1, 2, \ldots, n,$ tako da važi da je $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$. Ako je ϕ indentična funkcija tada imamo Ponderisani operator usrednjavanja (engl. Ordered weighted averages), OWA.

Uvedimo definicije komonotonih rizika (engl. comonotone risks) i rizika kosignacije (engl. cosigned risks), videti ([Den94], [Pap95],[Gra09], [Mih11], [Mih13]). Neka su f i h iz $\mathcal{F}_a$.

- f i h komonotoni rizici ako važi:

$$f(w) < f(w_1) \Rightarrow h(w) \le h(w_1),$$

Za sve $w, w_1 \in \Omega$.

- f i h su rizici kosignacije, kosignacioni rizici, ako važi $f(w)h(w) \ge 0$, za sve $w \in \Omega$.

Označimo sa $f \backsim s\, h$ par komonotonih rizika i rizika kosignacije. Sledeća lema opisuje neke osobine ovakvih rizika vezanih za operacije $\oplus$ i $\odot$. Za više detalja videti [Mih11].

Lema 7.3 Neka su $f, h \in \mathcal{F}$, takvi da je $f \backsim s\, h$. Tada važi:

(i) $(f \oplus h)^+ = f^+ \oplus h^+$;

(ii) $(f \oplus h)^- = f^- \oplus h^-$;

(iii) $c \odot f \sim_s d \odot h$ za svako $c, d \in [0, \infty)$;

(iv) $f \sim_s f \oplus h$.

U sledećoj teoremi dokazaćemo neke osobine uopštenog premium principa baziranog na KPT integralima, videti [Mih19].

Teorema 7.5 Neka je $\Pi_{CPT_\phi} : \mathcal{F} \times \mathcal{M}_b \times \mathcal{M}_b \to \mathbb{R}$ uopšteni premium princip baziran na KPT integralima. $\Pi(f, m_1, m_2) = \Pi_{CPT_\phi}(f, m_1, m_2)$ za sve $f \in \mathcal{F}$, $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_b$. Tada Π zadovoljava sledeće osobine:

1. Opterećenje rizika *(engl. Risk loading):* za sve $m_1 = m_2 = p \in \mathcal{M}_1$ i ϕ konveksnu na $\mathbb{R}$ imamo

$$E(f) \le \Pi(f, m_1, m_2) \text{ za sve } f \in \mathcal{F}^+.$$

2. Maksimalni gubitak *(engl. Maximal loss):* za sve $f \in \mathcal{F}^+$ i $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_1$ imamo

$$\Pi(f, m_1, m_2) \le ess\sup_{m_1}(f).$$

3. Bez neosnovanog opterećenja rizika *(engl. No unjustified risk loading):* ako je rizik f jednak konstanti $c \in \mathbb{R}$ i $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_1$,onda je:

$$\Pi(f, m_1, m_2) = c.$$

4. ϕ-Komonotona aditivnost *(engl. ϕ-co-comonotone additivity):* za sve $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ takve da je $f_1 \backsim s\ f_2$ i $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_b$, sledi da je:

$$\Pi(f_1 \oplus f_2, m_1, m_2) = \Pi(f_1, m_1, m_2) \oplus \Pi(f_2, m_1, m_2).$$

5. ϕ-Skalna invarijantnost *(engl. ϕ-scale invariance)*: za sve $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, $c \in \mathbb{R}$ i $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_b$ važi:

$$\Pi(c \odot f, m_1, m_2) = c \odot \Pi(f, m_1, m_2).$$

6. ϕ-Osnovna vrednost *(engl. ϕ-basic value): Za sve* $A \in \Sigma$, $c \in \mathbb{R}$ i $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_b$ važi:

$$\Pi(c \cdot 1_A, m_1, m_2) = \begin{Bmatrix} \phi^{-1}\left(\phi(c) \cdot m_1(A)\right), c \geq 0 \\ \phi^{-1}\left(\phi(c) \cdot \overline{m_2}(A)\right), c < 0 \end{Bmatrix}$$

7. Monotonost:

(i) Za sve $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_b$ i za sve $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ takve da je $f_1 \leq f_2$ važi:

$$\Pi\left(f_1, m_1, m_2\right) \leq \Pi\left(f_2, m_1, m_2\right),$$

(ii) Za sve $f \in \mathcal{F}$ i za sve $\left(m_1, m_2\right), \left(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2\right) \in \mathcal{M}_b \times \mathcal{M}_b$ takve da je $m_1 \leq \tilde{m}_1$, $m_2 \geq \tilde{m}_2$ važi:

$$\Pi\left(f, m_1, m_2\right) \leq \Pi\left(f, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2\right).$$

8. Semi-neprekidnost:

(i) Za svaki neopadajući niz $\left\{f_n\right\}$, $f_n \in \mathcal{F}^+$, i $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_b$, gde je m_1 neprekidna odozdo, važi:

$$\Pi\left(\lim_{n\to\infty} f_n, m_1, m_2\right) = \lim_{n\to\infty} \Pi\left(f_n, m_1, m_2\right),$$

(ii) Za svaki nerastući niz $\{f_n\}$, $f_n \in \mathcal{F}^-$, i $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_b$, gde je m_1 neprekidna odozgo, važi:

$$\Pi\left(\lim_{n\to\infty} f_n, m_1, m_2\right) = \lim_{n\to\infty} \Pi\left(f_n, m_1, m_2\right).$$

Dokaz:

Osobine 1. i 2. direktno proizilaze iz Leme 7.2

Dokaz osobine 4:

$$\begin{aligned}
&\Pi(f_1 \oplus f_2, m_1, m_2) = \\
&\phi^{-1}\left(I\left(\phi\left((f_1 \oplus f_2)^+\right), m_1\right) - I\left(\phi\left((f_1 \oplus f_2)^-\right), \overline{m_2}\right)\right) = \\
&\phi^{-1}\left(I\left(\phi\left(f_1^+\right), m_1\right) + I\left(\phi\left(f_2^+\right), m_1\right) - I\left(\phi\left(f_1^-\right), \overline{m_2}\right) - I\left(\phi\left(f_2^-\right), \overline{m_2}\right)\right) = \\
&\phi^{-1}\left(\phi\left(\Pi\left(f_1, m_1, m_2\right)\right) + \phi\left(\Pi\left(f_2, m_1, m_2\right)\right)\right) = \\
&\Pi\left(f_1, m_1, m_2\right) \oplus \Pi\left(f_2, m_1, m_2\right).
\end{aligned}$$

Dokaz osobine 5:

$$\begin{aligned}
&\Pi(c \odot f, m_1, m_2) = \\
&\phi^{-1}\left(I\left(\phi\left((c \odot f)^+\right), m_1\right) - I\left(\phi\left((c \odot f)^-\right), \overline{m_2}\right)\right) = \\
&\phi^{-1}\left(\phi(c) I\left(\phi\left(f^+\right), m_1\right) - \phi(c) I\left(\phi\left(f^-\right), \overline{m_2}\right)\right) = \\
&\phi^{-1}\left(\phi(c)\phi\left(\Pi\left(f, m_1, m_2\right)\right)\right) = \\
&c \odot \Pi\left(f, m_1, m_2\right).
\end{aligned}$$

Dokaz osobine 6:

Za sve $A \in \Sigma$, i $c \in \mathbb{R}$ imamo da važi:

$$(c \cdot 1_A)(\omega) = \begin{Bmatrix} c, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A \end{Bmatrix},$$

dakle, za $c \geq 0$, sledi da je:

$$\Pi\left(c \cdot 1_A, m_1, m_2\right) = \phi^{-1}\left(I\left(\phi\left(c \cdot 1_A\right), m_1\right)\right) = \phi^{-1}\left(\phi\left(c\right) \cdot m_1\left(A\right)\right).$$

Slično se dokazuje kada je $c < 0$.

Teorema 7.6 Neka premium princip $\Pi_{CPT_\phi} : \mathcal{F} \times \mathcal{M}_b \times \mathcal{M}_b \to \mathbb{R}$ zadovoljava osobine (4), (6) i (7) na skupu S svih jednostavnih funkcija iz $\mathcal{F}$. Tada za sve $s \in \mathcal{F}$ i $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_b$ važi:

$$\Pi(s, m_1, m_2) = \Pi_{CPT_\phi}(s, m_1, m_2) .$$

Dokaz:

$$s = \bigoplus_{i=1}^{n} c_i \cdot 1_{A_i} ,$$

gde je $c_i = \phi^{-1}\left(\phi\left(a_i\right) - \phi\left(a_{i-1}\right)\right) \geq 0$, za $i = 1, \ldots, n$.

Kako Π zadovoljava osobine (4) i (6) imamo da važi:

$$\Pi\left(s, m_1, m_2\right) = \phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \phi\left(\Pi\left(c_i \cdot 1_{A_i}, m_1, m_2\right)\right)\right) = \phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\phi\left(a_i\right) - \phi\left(a_{i-1}\right)\right) m_1\left(A_i\right)\right).$$

Za $s \in S^+$ važi:

$$\Pi\left(s, m_1, m_2\right) = \Pi_{CPT_\phi}\left(s, m_1, m_2\right) = \phi^{-1}\left(I\left(\phi\left(s\right), m_1\right)\right).$$

Slično, za $s \in S^-$, sa $Ran\left(s\right) = \left\{-a_1, \ldots, -a_n\right\}$, gde je $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ i skup $B_i = \left\{i, \ldots, n\right\}$ imamo sledeću komonotonu i kosignacionu aditivnu reprezentaciju:

$$s = \bigoplus_{i=1}^{n} b_i \cdot (-1_{B_i}) ,$$

gde je $b_i = \phi^{-1}\left(\phi\left(a_i\right) - \phi\left(a_{i-1}\right)\right) \geq 0$, za $i = 1, \ldots, n$. Kako Π zadovoljava osobine (4) i (6) imamo da važi:

$$\Pi\left(s, m_1, m_2\right) = \Pi_{CPT_\phi}\left(s, m_1, m_2\right) = \phi^{-1}\left(-I\left(\phi\left(-s\right), \overline{m_2}\right)\right).$$

Na kraju, kako je $s^+ \sim_s -s^-$ i $s = s^+ \oplus (-s^-)$ sledi:

$$\Pi\left(s, m_1, m_2\right) = \phi^{-1}\left(\left(I\left(\phi\left(s^+\right), m_1\right)\right) - I\left(\phi\left(s^-\right), \overline{m_2}\right)\right) = \Pi_{CPT_\phi}\left(s, m_1, m_2\right).$$

Teorema 7.7 Neka premium princip $\Pi : \mathcal{F}^c \times \mathcal{M}_b^c \times \mathcal{M}_b^c \to \mathbb{R}$ zadovoljava osobine (4), (6), (7) i (8). Tada za sve $f \in \mathcal{F}^c$ i $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_b^c$ važi:

$$\Pi(f,m_1,m_2)=\Pi_{CPT_\phi}(f,m_1,m_2).$$

Dokaz:

Na osnovu prethodne teoreme i semineprekidnosti Π i Π_{CPT_ϕ}, za neopadajući niz jednostavnih funkcija $\{s_n\}_{n\in N}$ koji konvergira ka $f\in\mathcal{F}^{c+}$, važi:

$$\Pi(f,m_1,m_2)=\lim_{n\to\infty}\Pi(s_n,m_1,m_2)=\phi^{-1}\Big(I\big(\phi(f),m_1\big)\Big)=\Pi_{CPT_\phi}(f,m_1,m_2).$$

Slično, za $f\in\mathcal{F}^{c-}$, i nerastući niz jednostavnih funkcija $\{s_n\}_{n\in N}$, kako je Π semineprekidno, imamo da važi:

$$\Pi(f,m_1,m_2)=\lim_{n\to\infty}\Pi(s_n,m_1,m_2)=\phi^{-1}\Big(-I\big(\phi(-f),\overline{m_2}\big)\Big)=\Pi_{CPT_\phi}(f,m_1,m_2).$$

Na osnovu osobine (4) i neprekidnosti funkcije ϕ, za $f\in\mathcal{F}_a^c$, $f=f^+\oplus\left(-f^-\right)$, $f^+\sim_s\left(-f^-\right)$, imamo da važi:

$$\Pi(f,m_1,m_2)=\phi^{-1}\Big(I\big(\phi(f^+),m_1\big)-I\big(\phi(f^-),\overline{m_2}\big)\Big)=\Pi_{CPT_\phi}(f,m_1,m_2).$$

7.8. Jensen-Stefensenova nejednakost za KPT integral

Pokazaćemo u ovom poglavlju da za uvedeni KPT integral važi uopštenje Jensen-Stefensenove nejednakosti. Koristićemo sledeću notaciju:

$$\Omega^+=\{\omega_i\in\Omega\mid f(\omega_i)>0\},\ \Omega^-=\{\omega_i\in\Omega\mid f(\omega_i)<0\},$$
$$\Omega^0=\{\omega_i\in\Omega\mid f(\omega_i)=0\},\ \textit{supp(f)}=\Omega^+\cup\Omega^-=\Omega\setminus\Omega^0.$$

Definicija 7.2 Za $f:\Omega\to\mathbb{R}$, i $m_1,m_2\in\mathcal{M}$, skupovne funkcije $\mu_{f^+},\mu_{f^+}:\mathrm{P}(\Omega)\to\mathbb{R}$ definisane su na sledeći način:

$$\mu_{f^+}(A)=m_1\left(A\cap\Omega^{+0}\right)-\overline{m_2}\left(A\cap\Omega^-\right),$$
$$\mu_{f^+}(A)=m_1\left(A\cap\Omega^+\right)-\overline{m_2}\left(A\cap\Omega^{-0}\right).$$

Očigledno je, $\mu_{f^+}(A)=\mu_{f^+}(A)$ za sve $A\subseteq$ *supp(f).*

Lema 7.4 Neka je Ω konačan skup, $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $Ran(f)=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ i $m_1,m_2\in\mathcal{M}$. Neka su μ_{f^+} i μ_{f^+} skupovne funkcije definisane u prethodnoj definiciji, na $\mathrm{P}(\Omega)$.Tada važi:

$$\Pi_{CPT}(f,m_1,m_2)=\sum_{i=1}^{n}(|a_i|-|a_{i-1}|)\cdot\mu_{f^+}(A_i)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(|a_i|-|a_{i-1}|)\cdot\mu_{f^+}(A_i)=\sum_{i=1}^{n}|a_i|\left(\mu_{f^+}(A_i)-\mu_{f^+}(A_{i+1})\right),$$

gde je $0\le|a_1|\le|a_2|\le...\le|a_n|$, $a_0=0$, $A_1=\Omega$, $A_i=\{|f|\ge|a_i|\}, i=1,2,...,n$, $A_{n+1}=\varnothing$.

Sledeća teorema poznata je pod nazivom Jensen-Stefensenova teorema, videti [Ste19], [Bul09].

Teorema7.8 Neka je $\varphi:S\to\mathbb{R}$ konveksna funkcija na intervalu $S\subset\mathbb{R}$, i neka je $a_i\in S$, $i=1,2,...,n$, tako da važi da je $a_1\le...\le a_n$ ili $a_1\ge...\ge a_n$. Tada važi:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}a_i p_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\varphi(a_i)p_i,$$

za realne p_i, $i=1,2,...,n$, takve da je $0\le\sum_{i=1}^{k}p_i\le 1$, za sve $k=1,...,n-1$ i $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$.

Kao posledica prethodne teoreme, sledeća teorema predstavlja Jensen-Stefensenovu nejednakost za KPT integral, videti [Mih19].

Teorema 7.9 Neka je $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neparana i striktno rastuća funkcija, konkavna na $[0,\infty[$. Neka $m_1,m_2\in\mathcal{M}$ i $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $Ran(f)=\{a_1,a_2,...,a_n\}$, tako da je $0\le|a_1|\le|a_2|\le...\le|a_n|$ i $A_i=\{|f|\ge|a_i|\}$, $i=1,2,...,n$. Za neko $c\ne 0$ važi:

a) $0\le\mu_{f^+}(A_i)\le c$, za sve i, i $\mu_{f^+}(A_1)=c$ ili $0\le\mu_{f^+}(A_i)\le c$, za sve i, i $\mu_{f^+}(A_1)=c$, tada važi:

$$u\left(\frac{1}{c}\cdot\Pi_{CPT}(f,m_1,m_2)\right)\ge\frac{1}{c}\cdot\Pi_{CPT}(u(f),m_1,m_2).$$

b) $-c\le\mu_{f^+}(A_i)\le 0$, za sve i, i $\mu_{f^+}(A_1)=-c$, ili $-c\le\mu_{f^+}(A_i)\le 0$ za sve i, i $\mu_{f^+}(A_1)=-c$, tada važi:

$$u\left(\frac{1}{c}\cdot\Pi_{CPT}(f,m_1,m_2)\right)\le\frac{1}{c}\cdot\Pi_{CPT}(u(f),m_1,m_2).$$

Dokaz:

a) Neka $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ i $f:\Omega \to \mathbb{R}$, $Ran(f)=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, tako da je $0 \le |a_1| \le |a_2| \le ... \le |a_n|$
Neka je $A_1 = \Omega$, $A_i = \{|f| \ge |a_i|\}$, $i=1,2,...,n$, $A_{n+1}=\varnothing$. Na osnovu Leme 7.1 imamo da važi:

$$\Pi_{CPT}(f, m_1, m_2) = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \left(\mu_{f^+}(A_i) - \mu_{f^+}(A_{i+1}) \right).$$

Neka je $0 \le \mu_{f^+}(A_i) \le c$, za sve i, i neka važi $\mu_{f^+}(A_1) = c$, $c \ne 0$. Označimo sa $p_i = \frac{1}{c} \cdot \left(\mu_{f^+}(A_i) - \mu_{f^+}(A_{i+1}) \right)$, za sve $i = 1,2,...,n$. Kako je u striktno rastuća i neparna, imamo da važi:

$$\begin{aligned}
\Omega^+ &= \{\omega_i \in \Omega \mid f(\omega_i) > 0\} = \{\omega_i \in \Omega \mid u \circ f(\omega_i) > 0\}, \\
\Omega^- &= \{\omega_i \in \Omega \mid f(\omega_i) < 0\} = \{\omega_i \in \Omega \mid u \circ f(\omega_i) < 0\}, \\
\Omega^0 &= \{\omega_i \in \Omega \mid f(\omega_i) = 0\} = \{\omega_i \in \Omega \mid u \circ f(\omega_i) = 0\},
\end{aligned}$$

$0 \le |u(a_1)| \le |u(a_2)| \le ... \le |u(a_n)|$, $A_i = \{|f| \ge |a_i|\} = \{|u(f)| \ge |u(a_i)|\}$, $i=1,2,...,n$ |
$\mu_{f^+}(A_i) = \mu_{(u \circ f)^+}(A_i)$ za sve i. Odatle sledi:

$$\frac{1}{c} \cdot \Pi_{CPT}(u(f), m_1, m_2) = \sum_{i=1}^{n} |u(a_i)| \cdot p_i.$$

Stoga imamo da važi $\sum_{i=1}^{n} |u(a_i)| \cdot p_i \ge 0.$
Sada na osnovu Teoreme 7.1 , kako je u konkavana na $[0,\infty[$, striktno rastuća i neparna, imamo da važi:

$$\begin{aligned}
u\left(\frac{1}{c} \cdot \Pi_{CPT}(f, m_1, m_2) \right) &= u\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot p_i \right) \ge \sum_{i=1}^{n} u(|a_i|) \cdot p_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} |u(a_i)| \cdot p_i = \frac{1}{c} \cdot \Pi_{CPT}(u(f), m_1, m_2).
\end{aligned}$$

Analogno se dokazuje ako je $0 \le \mu_{f^+}(A_i) \le c$ za sve i, i neka važi $\mu_{f^+}(A_1) = c$, $c \ne 0$. Označimo sa $p_i = \frac{1}{c} \cdot \left(\mu_{f^+}(A_i) - \mu_{f^+}(A_{i+1}) \right)$, za sve $i = 1,2,...,n$ i nastavljamo dokaz na isti način.

Neka je $-c \leq \mu_{f^+}(A_i) \leq 0$, za sve i, $\mu_{f^+}(A_1) = -c$, ili $-c \leq \mu_{f^+}(A_i) \leq 0$, za sve i, i važi $\mu_{f^+}(A_1) = -c$. Važe sledeće jednakosti:

$$\mu_{(-f)^+}(A_i) = -\mu_{f^+}(A_i) = -m_1\left(A_i \cap \Omega^{+0}\right) + \overline{m}_2\left(A_i \cap \Omega^-\right) = -m_1\left(A_i \cap \Omega^+\right) + \overline{m}_2\left(A_i \cap \Omega^{-0}\right),$$

Za sve i takve da je $A_i \subseteq$ supp(f). Tada važi:

$$\begin{aligned}
\Pi_{CPT}(f, m_1, m_2) &= -\Pi_{CPT}\left(-f, \overline{m}_2, \overline{m}_1\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} |-a_i| \cdot \left(\mu_{(-f)^+}(A_i) - \mu_{(-f)^+}(A_{i+1})\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} |-a_i| \cdot \left(\mu_{(-f)^+}(A_i) - \mu_{(-f)^+}(A_{i+1})\right).
\end{aligned}$$

Zbog činjenice da je u neparna funkcija, slično kao u dokazu pod a), dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned}
& u\left(\frac{1}{c} \cdot \Pi_{CPT}(f, m_1, m_2)\right) = u\left(-\frac{1}{c} \cdot \Pi_{CPT}\left(-f, \overline{m}_2, \overline{m}_1\right)\right) \\
&= -u\left(\frac{1}{c} \cdot \Pi_{CPT}\left(-f, \overline{m}_2, \overline{m}_1\right)\right) \leq -\frac{1}{c} \cdot \Pi_{CPT}\left(u(-f), \overline{m}_2, \overline{m}_1\right) = \\
&= \frac{1}{c} \cdot \Pi_{CPT}\left(u(f), m_1, m_2\right).
\end{aligned}$$

Što je i trebalo dokazati.

8. Zaključak

Tokom poslednjih decenija, složenost ekonomskog odlučivanja je rapidno porasla, dajući na važnosti razvoju implementaciji sofisticiranih i efikasnih tehnika kvantitativne analize koje podržavaju ekonomsko odlučivanje. U ovom radu dat je pregled osnova teorije odlučivanja, višekriterijumskog odlučivanja, prospekt teorije i operatora agregacije. U klasičnom prilazu (fon Nojman Morgenšterna) odlučivanja u ekonomiji glavni matematički aparat bila je verovatnoća. Ona je aditivna veličina, te se zato sa njom nije mogla modelirati interakcija između kriterijuma. Monotona neopadajuća skupovna funkcija, koja se pojavljuje pod različitim nazivima u literaturi, kao monotona mera, neaditivna mera, fazi mera ili kapacitet, omogućava modeliranja interakcije između događaja, pojava, alternativa. Time se prevazilazi ograničenje nezavisnosti događaja.

Posebna pažnja u ovom radu upravo je posvećena neaditivnim merama i integralima koji predstavljaju osnov razmatranja u ovoj disertaciji. Ovi integrali imaju veoma važnu ulogu u teoriji odlučivanja i to u slučajevima kada je potrebno doneti odluku na osnovu više kriterijuma koji se preklapaju i međusobno su interaktivni. Sa specijalnom neaditivnom merom, lambda merom, i odgovarajućom Šeplijevom vrednošću je modeliran primer koji je vezan za procenu performansi robe u skladištima, što predstavlja originalni rezultat.

U ekonomiji, premium principi zasnovani na integralima su u širokoj upotrebi. U ovom radu predstavljen je premium princip zasnovan na neaditivnom integralu koji se bazira na neaditivnoj meri. Analogno opštem KPT premium principu, uveden je uopšteni KPT premium princip baziran na integralima. Ovaj novi premium princip baziran na integralima predstavlja zajednički okvir za distorzioni premium princip, opštи KPT premium princip i prosečni premium princip.

Dokazane su sve dobre osobine uvedenog novog KPT premium principa, i navedeni svi raniji važni KPT premium principi koje on pokriva. Dat je primer u kome je data procena najpovoljnije kamatene stope na deviznu štednju, te je pokazano da je naš uopšteni premium princip baziran na KPT integralima prikladan za rešavanje problema odlučivanja, uz odabir odgovarajuće funkcije ϕ i monotone mere, koji ranije nisu mogli biti modelirani pomoću opšteg KPT principa. Pokazano je da za uvedeni KPT integral važi nejednakost tipa Jensena, kao i uopštenje Jensen-Steffensenove nejednakosti, što su originalni rezultati.

Prilog za poglavlje 5.2

```
// SubsetsCalculation.cpp : Defines the entry point for the console application.
//

#include "stdafx.h"
#include <iostream>
#include "stdio.h"
#include <vector>
#include <string>
#include "Util.h"

using namespace std;
int main()
{

	while (true) {

		double lamda;
		int n;

		vector<double> coefs;
		vector<vector<int>> subsets;

		cout << "Enter lamda coefficient/Unesite lamda koeficijent: " << endl;
		cin >> lamda;
		cout << "Enter the size of the set/ Unestite velicinu skupa: " << endl;
		cin >> n;
		cout << "Enter the coefficients of the members of separated with blank space/Unesite
koeficijente clanova skupova radvojene razmakom: " << endl;

		double x;
		for (int i = 0; i < n; ++i) {

			cin >> x;
			coefs.push_back(x);
		}

		if (coefs.size() == n) {

			double subsetzSize = pow(2, n);

			for (int i = 0; i < subsetzSize; ++i)
			{
				vector<int> tmp;
				for (int bitIndex = 0; bitIndex < subsetzSize; bitIndex++) {
					if (Util::getBit(i, bitIndex) == 1) {
						tmp.push_back(bitIndex);
					}

				}
				subsets.push_back(tmp);
```

```
			}

			cout << "There are/Ukupno ima " << subsets.size() << " subsets/podskupova: 
" << endl;

			for (const auto& vect : subsets) {
				Util::printSubset(vect);
			}

			map<vector<int>, double> result = Util::calculate(subsets, coefs, lamda);

			cout << "***********RESULT/REZULTAT***************" << endl;

			for (auto entry : result) {
				vector<int> subset = entry.first;

				cout << "{";
				Util::printSubset(subset, true);
				cout << "} -> " << entry.second << endl;

			}
		} else{
			cout << "ERROR! Set size and number of coeffficients missmatch" << endl;

		}

		cout << "Press any key to continue or type \"exit\" to exit the programe... ";
		string input;
		cin >> input;
		if (input.compare("exit") == 0) {
			break;
		}
	}


  return 0;
}


#include "stdafx.h"
#include "Util.h"
#include <cmath>
#include <iostream>


int Util::getBit(int value, int posititon) {
	int bit = value & (int)pow(2, posititon);
	return (bit > 0 ? 1 : 0);
}

map<vector<int>, double> Util::calculate(const vector<vector<int>>& subsets, const vector<double>& coefs, 
double lamda) {
	map<vector<int>, double> result;
	double lamdaInvers = 1 / lamda;

	vector<double> coefsP = Util::coefsP(coefs, lamda);
	for (auto subset : subsets) {
```

```
            double p = (subset.size() == 0) ? 0 : 1;
            double subsetResult;
            for (size_t i = 0; i < subset.size(); ++i) {
                if (i >= coefsP.size()) {
                    cout << "Error: there's no value for coefficient " << i << endl;
                    return result;
                }
                p *= coefsP[subset[i]];
            }

            subsetResult = lamdaInvers*(p - 1);

            result.insert(std::make_pair(subset, subsetResult));

        }
        return result;
}
// for each element x calculate (1 + lamda*coef[x])
vector<double> Util::coefsP(const vector<double>& coefs, double lamda) {
        vector<double> coefsP;
        for (size_t i = 0; i < coefs.size(); ++i) {
            coefsP.push_back(1 + lamda*coefs[i]);
        }

        return coefsP;

}

void Util::printSubset(const vector<int>& vect, bool no_endl) {
        int i = 0;
        int size = vect.size();
        while (i < size - 1) {
            cout << vect[i] << ",";
            ++i;
        }
        if (vect.size() > 0) {
            cout << vect[size - 1];
        }
        else {
            cout << "EMPTY";
        }

        if (!no_endl) {
            cout << endl;
        }
}
```

Literatura

[Abd09] Abdellaoui, M. (2009). Rank Dependent Utility. U: Anand, P., Pattanaik, P. & Puppe, C. (ur.), Handbook of Rational and Social Choice. Oxford University Press, Oxford, 2009.

[All53] Allais, M. (1953). Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école américaine. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 503-546.

[Arr82] Arrow, Kenneth J. (1982). "'Risk Perception in Psychology and Economics," *Economic lnquiry,* 20, 1-9.

[Aum74] R.J. Aumann and L.S. Shapley, Values of Non-Atomic Games. Princton Univ. Press, Princton, New Jersey, 1974.

[Avl15] G. Avlijaš, A. Simićević, R. Avlijaš, M. Prodanović, Measuring the impact of stock-keeping unit attributes on retail stock-out performance, OPERATIONS MANAGEMENT RESEARCH, (2015), 131-141.

[Bel07] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, Aggregation functions: a guide for practitioners, Studies in Fuziness and Soft Computing, Springer, Berlin, 2007.

[Ber10] C. Bernard and M. Ghossoub, Static portfolio choice under Cumulative Prospect Theory, Mathematics and Financial Economics 2 (2010), 277—306.

[Bil68]P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, 1st edition, John Wiley and sons, Inc., New York (1968)

[Boa09] Board S., (2009), "*Preferences and Utility*, Department of Economics, UCLA.

[Bra85] Brans J.P., Vincke P., A preference ranking organisation method/ The Promethee Method for Multile Criteria Decision Making, Management Science, vol. 31, 1985.

[Bul09] P. S. Bullen, Accentuate the negative, Math. Bohem. 134 (2009) 427- 446.

[Cal02] T. Calvo, A. Kolesarova, M. Komornıkova, R. Mesiar, Aggregation operators: properties, classes and construction methods, in: Aggregation Operators: New Trends and Applications, Physica, Heidelberg, 2002, pp. 3–104.

[Car96] C. Carlsson and R. Fuller, Fuzzy multiple criteria decision making: Recent developments, Fuzzy sets and systems, 78(1996) 139-153.

[Che97] U. Cherubini, Fuzzy measures and asset prices: accounting for information ambiguity, Appl. Math. Finance 4 (1997) 135–149.

[Cho54] G. Choquet. Theory of capacities. Ann. Inst. Fourier 5, 131–295, 1954.

[Chu15] Chunqiao T., Zhong J., Xiaohong C., An extended TODIM method for hesitant fuzzy interactive multicriteria decision making on generalized Choquet integral, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems 29 (2015), 293-305.

[Coh88] Cohen M., Jaffray J.Y. "Certainty Effect versus Probability Distortion: An Experimental Analysis of Decision Making under Risk," *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance* 14, 1998, 554–560.

[Čud17] Čudina D., Slamić I. Neke primjene svojstva konveksnosti i konkavnosti u ekonomiji, hrvatski matematički elektronski časopis, 2017.

[Dam14] Damnjanović K. Kognitivni faktori efekta okvira u zadacima odlučivanja, doktorska disertacija, Beograd 2014.

[Dam14] Damnjanović K., Janković I., Normativna i deskriptivna teorija donošenja odluka u uslovima rizika, Theoria 4/2014, 25-50, 2014.

[Den94] D. Denneberg. Non-additive Measure and Integral. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[Dul15] Dulić J. Operatori agregacije i njihova komparacija kroz primere, Novi Sad, 2015.

[Edv55] Edwards W. The prediction of decisions among bets. J. Of Experimental Psyhology, 50:201-214, 1955.

[Ell61] D. Ellsberg , "Risk ambiguity and the Savage axioms", Quart. J.Econom., 75:643-669, 1961.

[Fen97]H. Fennema, P.Wakker, *"Original and Cumulative Prospect Theory: A Discussion of Empirical Diferences",* Journal of Behavioral Decision Making, Vol. 10, 53-64, 1997.

[Fis70] Fishburn P., Utility Theory for Decision Making, 1970., Wiley, New York.

[Fox96] Fox C.,Rogers B., Tversky A., "Options Traders Exhibit Subadditive Decision Weights," *Journal of Risk and Uncertainty* 13, 1996, 5–17.

[Fre91] French, Kenneth R. & James M. Poterba (1991) "Investor Diversification and International Equity Markets," *American Economic Review* 81, 222–226.

[Gil87] Gilboa I., Expected utility with purely subjective non-additive probabilities. *Journal of Mathematical Economics, 1987, 16*, 65–88.

[Gil89] Gilboa I., Schmeidler D., “Maxmin Expected Utility with a Non- Unique Prior,” *Journal of Mathematical Economics* 18,(1989), 141–153.

[Gom92] L.F.A.M. Gomes, M.M.P.P. Lima, TODIM: Basic and application to multicriteria ranking of projects with environmental impacts, Foundations of Computing and Decision Sciences, 1992, 113-127

[Gom13] L.F.A.M. Gomes, M.A.S. Machado, L.A.D. Rangel, Behavioral multi criteria decision analysis: The TODIM method with criteria interactions, Annals of Operations Research 211 (1), 2013, 531-548.

[Gon05] Gonzalez, Cleotilde, Jason Dana, Hideya Koshino, & Marcel A. Just (2005) “The Framing Effect and Risky Decisions: Examining Cognitive Functions with fMRI,” *Journal of Economic Psychology* 26, 1–20.

[Gra95] M. Grabisch, H.T. Nguyen and E.A. Walker, Fundamentals of Uncertainty Calculi with Applications to Fuzzy Inference. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1995.

[Gra96] M. Grabisch, The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making, European J. Oper. Res. 89 , 445-456 (1996).

[Gra00] Michel Grabisch, Toshiaki Murofushi, Michio Sugeno (eds.) – *Fuzzy Measures and Integrals* – Theory and applications, Physica Verlag, 2000.

[Gra09] M. Grabisch, J.-L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, Aggregation functions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 127, Cambridge University, Press, 2009.

[Gra11] Michel Grabisch, Jean-Luc Marichal, Radko Mesiar, Endre Pap, Aggregation functions: Means, Information Sciences 181, 1-22, 2011.

[Gra16] Michel Grabisch, “Set Functions, Games and Capacities in Decision Making, Springer, 2016.

[Gre14] S. Greco, R. Mesiar, F. Rindone, Discrete bipolar universal integrals. Fuzzy Sets and Systems 252, (2014), 55–65.

[Han69] Hanoch, Giora and Haim Levy, 1969, The Efficiency Analysis of Choices Involving Risk, Review of Economic Studies, 36, 335- 346.

[Har78] Hardy G., Littlewood J., Pòlya G. “*Inequalities.”,* Cambridge University Press, Cambridge, UK. (2nd edition 1952, reprinted 1978.)

[Hey79] Hey J., Uncertainty in Microeconomics, Martin Robertson & Company, 1979, Oxford.

[Hey94] Hey J., Orme C. “Investigating Generalizations of Expected Utility Theory Using Experimental Data,” *Econometrica* 62, 1994, 1291–1326.

[Hur72] Hurwitz L., On Informationally Decentralized Systems, *In* C. Bartlett McGuire & Roy Radner (eds.) *Decision and Organization*, 297–336, 1972, North- Holland, Amsterdam.

[Kah79] Kahneman Daniel, and Amos Tversky (1979) "Prospect theory: An analysis of decision under risk." Econometrica: Journal of the Econometric Society, 263-291.;

[Kah17] Kahneman Daniel, “Misliti, brzo i sporo”. Heliks, Smederevo 2017, 259-270.

[Kal12] M. Kaluszka, M. Krzeszowiec, Pricing insurance contracts under Cumulative Prospect Theory. Insurance: Mathematics and Economics 50, (2012), 159–166.

[Kle10] E.P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. A Universal Integral as Common Frame for Choquet and Sugeno Integral. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 18: 178–187, 2010.

[Kle15] E.P. Klement, J. Li, R. Mesiar, and E. Pap. Integrals based on monotone set functions. Fuzzy Sets and Systems, 281:88–102, 2015

[Kli95] Klir G.J., Yuan B., Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applicatons, Prentice-Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 1995

[Kne15] M. Knežević, Stohastička dominacija, Univerzitet u Novom Sadu, 2015

[Lev06] Levi H., (2006) Stochastic Dominance: Investment Decision Making under Uncertainty, Second Edition, Springer

[Lie 01] E. Lieb, M. Loss: Analysis, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2001.

[Lig05] D.Liginlal, T. Ow, On policy capturing with fuzzy measures, European J. Oper.Res. 167, 461-474, 2005.

[Lig06] D.Liginlal, T. Ow, Modeling attitude to risk in human decision processes: An application of fuzzy measures, Fuzzy Sets and Systems 157, 3040-3054, 2006.

[Lon11] Lončar S., Primena prvostepene i drugostepene stohastičke dominacije u rangiranju investicija, 157-164, 2011.

[Lop93] Lopes, L. L. “*Reasons and resources: the human side of risk taking”,* in Bell, N. and Bell, R. (eds), Adolescent Risk Taking, Lubbock, TX: Sage, 1993.

[Luc57] Luce D., Raiffa H., “*Games and Decisions.”* Wiley, New York, 1957.

[Man06]B. Manel, F. Heukamp, Stochastic Dominance and Cumulative Prospect Theory, *Management Science* 52,(2006), 1409–1423.

[Mas95] Mas-Colell, Andreu, Michael Winston and Jerry Green, 1995, Microeconomic Theory, New York, Oxford University Press.

[Men14] Meng F.Y., Chen X.H., Zhang Q., Multi-attribute decision analysis under a linguistic hesitant fuzzy environment, Information Applications, 2013.

[Mes95] R. Mesiar, Choquet-like integrals. J. Math. Anal. Appl. 194, (1995), 477– 488.

[Mes10] R. Mesiar, J. Li, and E. Pap. The Choquet integral as Lebesgue integral and related inequalities. Kybernetika, 46:1098–1107, 2010.

[Mih11] B. Mihailović and E. Pap. Asymmetric integral as a limit of generated Choquet integrals based on absolutely monotone real set functions. Fuzzy Sets and Systems, 181:39–49, 2011.

[Mih13] B. Mihailović, P. Dapić, - Premium principles based on generated Choquet integrals. Proceedings of 11th IEEE International Symposium on Intelligent systems and Informatics, Subotica, Serbia, (2013), 195–198.

[Mih19] B.Mihailović, E. Pap, M. Štrboja, A. Simićević. A unified approach to the monotone integral-based premium principles under the CPT theory. Fuzzy Sets and Systems, 2019, submitted.

[Moh07] A. Mohammed, C.Barrios, P. Wakker "Reconciling Introspective Utility With Revealed Preference: Experimental Arguments Based on Prospect Theory," *Journal of Econometrics* 138,(2007) 336–378.

[Mur00] T. Murofushi, M. Sugeno, Fuzzy measures and fuzzy integrals, in: M. Grabisch, T. Murofushi, M. Sugeno (Eds.), Fuzzy Measures and Integrals, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000.

[Neu47] von Neumann, J., & Morgenstern, O., Theory of games and economic behavior, 2nd ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1947.

[Pap95] E. Pap. Null-Additive Set Functions. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[Pap99] Endre Pap – *Fazi mere i njihova primena*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno matematički fakultet Novi Sad, 1999.

[Pap02]E. Pap (ed.), Handbook of Measure Theory. Elsevier Science, Amsterdam, 2002.

[Pap02]E. Pap, Pseudo-Additive Measures and Their Applications. Handbook of Measure Theory In: E. Pap, editor, Handbook of Measure Theory, Vol II, Elsevier, (2002) 1403-1465.

[Pap10]E. Pap and M. Štrboja, Generalization of the Jensen inequality for pseudo-integral. Information Sciences 180, (2010), 543–548.

[Pap15] E.Pap : Istraživanje ključnih matematičkih problema u teoriji odlučivanja vezanih za donošenje odluka u neodređenim kompleksnim sistemima, Akademija nauka, kultura i umetnosti Vojvodine, Novi Sad, 2015.

[Pap17] E.Pap, A.Simićević, B. Mihailović, M.Štrboja, *"Decisions based on a general premium principle in Cumulative Prospect Theory",* Sinteza 2017, Univerzitet Singidunum, Beograd, 315-319.

[Pap19] E.Pap, A Blagojević, *"Primena lambda fazi mere i Šeplijeve vrednosti na procene performansi robe u skladištima",* Sinteza 2019, Univerzitet Singidunum, Beograd, 52-56.

[Pav04]D. Pavličić: *Teorija odlučivanja*, Ekonomski fakultet, Beograd, 2004.

[Plo93] Plous S., *The Psychology of Judgment and Decision Making,* McGraw-Hill, Inc. New York, 1993.

[Pop15] Popov J. Sugenov i Šokeov integral sa primenom u obradi slika, Univerzitet u Novom Sadu, 2015.

[Pre98] Prelec, D., (1998) The probability weighting function. Econometrica 60, 497-528.

[Qui82] Quiggin J., A theory of anticipated utility. *Journal of Economic Behaviour and Organization, 1982.*

,

[Qui93] J. Quiggin. Generalized Expected Utility Theory. The Rank-Dependent Model. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993.

[Rie08] Rieger, Marc Oliver, Mei Wang, "Prospect Theory for Continuous Distributions," *Journal of Risk and Uncertainty* 36,2008, 83–102.

[Rud86] W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd edition, McGraw-Hill Book Company (1986)

[Sav71] Savage L., Elicitation of Personal Probabilities and Expectations, *Journal of the American Statistical Association* 66, 1971, 783–801.

[Sch89] D. Schmeidler, Subjective probability and expected utility without additivity. Econometrica 57, (1989), 517–587.

[Sch03] Schmidt U., Reference Dependence in Cumulative Prospect Theory, *Journal of Mathematical Psychology* 47, (2003), 122–131.

[Sha53] Shapley L.S., A value for n person game, in: H. Kuhn, A.Tucker, Contributios to the theory of games, Princeton University Press, Princeton 1953.

[Sha76] Shafer G.A., Mathematical Theory of Evidence, Princeton University Press, Princeton, 1976.

[Ste19] J. F. Steffensen, On certain inequalities and methods of approximation. J. Inst. Actuar. 51 (1919) 274-297.

[Sug74]M. Sugeno: Theory of Fuzzy Integrals and its Applications, Ph.D. dissertation, Tokyo, Institute of Technology, 1974.

[Tap97] B. Tapan, Decision Making under Uncertainty, Macmillan press, London, 1997.

[Tha85] Thaler, Richard H. (1985) "Mental Accounting and Consumer Choice," *Marketing Science* 4, 199–214.

[Tor09] V. Torra, Y. Narukawa: On hesitant fuzzy sets and decision, The 18th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Korea, 2009, 1378-1382

[Tor10]V.Torra: Hesitatn fuzzy sets, International Journal of Intelligent Systems 2010, 529-539

[Tve81] Tversky A., Kahneman D. "The Framing of Decisions and the Psychology of Choice," *Science* 211, 1981, 453–458.

[Tve86] Tversky, A., Kahneman D., "Rational Choice and the Framing of Decisions," *Journal of Business* 59, 1986, S251–S278

[Tve92]Tversky A., Kahneman D., "Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty." Journal of Risk and uncertainty Vol 5(4), 1992, 297-323.

[Yaa87] M.E. Yaari. The dual theory of choice under risk. Econometrica, 55:95–115, 1987.

[You06] V.R. Young, Premium principles, Encyclopedia of Acturial Science. John Wiley & Sons, Ltd, 2006.

[Vin85] J.P.Vincke, Ph Brans, A preference ranking organization method: The PROMETHEE method for MCDM, Management Science (1985), 641 -656.

[Xia11] M. Xia, Z.S.Xu: Hesitant fuzzy information aggregatin in decision making, International Journal of Approximate Reasoning 52 , 395 – 407, (2011).

[Wan95] Wang, S. Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms, *Insurance: Mathematics and Economics* **17**, 1995, 43–54.

[Wan97] Wang, S., Young, V.R. & Panjer, H.H. Axiomatic characterization of insurance prices, *Insurance: Mathematics and Economics* **21**(2), 1997, 173–183.

[Wan 09] Z. Wang, G.J. Klir: Generalized measure theory, Springer, Boston, 2009.

[Wak93] P. Wakker, A. Tversky, An Axiomatization of Cumulative Prospect Theory. Journal of Risk and Uncertainty 7, (1993), 147-175.

[Wak10] P.P. Wakker. Prospect Theory: For Risk and Ambiguity. Cambridge University Press, New York, 2010.

[Zec00] Zeckhauser, R., & Viscusi, K. (2000). 27 Risk within Reason. Judgment and Decision Making: An Interdisciplinary Reader, 248, 465