



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ  
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА

---



Иван Ђорђевић

**МОДЕЛ ЗА ПЛАНИРАЊЕ ИСПОРУКА ДОБАВЉАЧА У  
ЛАНЦИМА СНАБДЕВАЊА У АУТОМОБИЛСКОЈ  
ИНДУСТРИЈИ**

**ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА**

Нови Сад, 2019.



UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES

---



Ivan Djordjevic

**MODEL FOR DELIVERY PLANNING OF SUPPLIER IN  
SUPPLY CHAINS IN THE AUTOMOTIVE INDUSTRY**

DOCTORAL DISSERTATION

Novi Sad, 2019.



## КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, <b>РБР:</b>	
Идентификациони број, <b>ИБР:</b>	
Тип документације, <b>ТД:</b>	Монографска публикација
Тип записа, <b>ТЗ:</b>	Текстуални штампани материјал
Врста рада, <b>ВР:</b>	Докторска дисертација
Аутор, <b>АУ:</b>	Иван Ђорђевић
Ментор, <b>МН:</b>	др Гордан Стојић, ванредни професор, др Добрила Петровић, редовни професор
Наслов рада, <b>НР:</b>	Модел за планирање испорука добављача у ланцима снабдевања у аутомобилској индустрији
Језик публикације, <b>ЈП:</b>	Српски
Језик извода, <b>ЈИ:</b>	Српски
Земља публикавања, <b>ЗП:</b>	Република Србија
Уже географско подручје, <b>УГП:</b>	АП Војводина
Година, <b>ГО:</b>	2019.
Издавач, <b>ИЗ:</b>	Ауторски репринт
Место и адреса, <b>МА:</b>	Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, 21000 Нови Сад
Физички опис рада, <b>ФО:</b> <small>(поглавља/страна/</small>	8/187/171/71/571/-/9
Научна област, <b>НО:</b>	Саобраћајно инжењерство
Научна дисциплина, <b>НД:</b>	Саобраћајно инжењерство
Предметна одредница/Кључне речи, <b>ПО:</b>	Планирање испорука, агрегационо планирање производње, фази оптимизациони модели, аутомобилска индустрија
<b>УДК</b>	
Чува се, <b>ЧУ:</b>	Библиотека Факултета техничких наука у Новом Саду
Важна напомена, <b>ВН:</b>	
Извод, <b>ИЗ:</b>	У докторској дисертацији су предложена два модела: модел за планирање испорука и агрегационо планирање производње и модел за прогнозу купчеве потражње у ланцу снабдевања у аутомобилској индустрији. Оба модела примењена су на студији случаја у предузећима два добављача из области аутомобилске индустрије у Републици Србији. Истраживање је показало применљивост предложених модела на практичним проблемима у присуству неизвесности и употребљивост њихових резултата у аутомобилској индустрији. Модели су показали боље резултате у односу на практичне податке у предузећима и у односу на основне стратегије за планирање производње и залиха које се користе у аутомобилској индустрији.
Датум прихватања теме, <b>ДП:</b>	
Датум одбране, <b>ДО:</b>	
Чланови комисије, <b>КО:</b>	Председник: Др Небојша Ралевић, редовни професор Члан: Др Ђурђица Стојановић, ванредни професор Члан: Др Милован Лазаревић, ванредни професор Члан, Др Гордан Стојић, ванредни професор Члан, Др Добрила Петровић, редовни професор
	Потпис ментора



## KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, <b>ANO</b> :	
Identification number, <b>INO</b> :	
Document type, <b>DT</b> :	Monographic publication
Type of record, <b>TR</b> :	Printed textual material
Contents code, <b>CC</b> :	PhD Thesis
Author, <b>AU</b> :	Ivan Đorđević
Mentor, <b>MN</b> :	PhD Gordan Stojić, Associate Professor, PhD Dobrila Petrović, Full professor
Title, <b>TI</b> :	Model for delivery planning of supplier in supply chains in the automotive industry
Language of text, <b>LT</b> :	Serbian
Language of abstract, <b>LA</b> :	English
Country of publication, <b>CP</b> :	Republic of Serbia
Locality of publication, <b>LP</b> :	AP Vojvodina
Publication year, <b>PY</b> :	2019.
Publisher, <b>PB</b> :	Authors reprint
Publication place, <b>PP</b> :	Faculty of Tehnical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad
Physical description, <b>PD</b> : <small>(chapters/pages/ref./tables/pictures/ara</small>	8/187/171/71/57/-/9
Scientific field, <b>SF</b> :	Traffic engineering
Scientific discipline, <b>SD</b> :	Traffic engineering
Subject/Key words, <b>S/KW</b> :	Delivery planning, Aggregate production planning, Fuzzy optimization models, Automotive industry
<b>UC</b>	
Holding data, <b>HD</b> :	Library of the Faculty of Technical Sciences Novi Sad
Note, <b>N</b> :	
Abstract, <b>AB</b> :	In doctoral dissertation are proposed two models: model for delivery planning and aggregate production planning and model for customer demand forecasting in supply chain in automotive industry. Both models are applied on the case study in enterprises of two suppliers from area of automotive industry in Republic of Serbia. The research shows applicability of proposed models on practical problems in the presence of uncertainty and usability of their results in automotive industry. Models have showed better results in regard to both the practical data in enterprises and a basic strategies for production planning and inventory planning which are used in automotive industry.
Accepted by the Scientific Board on, <b>ASB</b> :	
Defended on, <b>DE</b> :	
Defended Board,	President: PhD Nebojša Ralević, Full professor
	Member: PhD Đurđica Stojanović, Associate Professor
	Member: PhD Milovan Lazarević, Associate Professor
	Member, Mentor: PhD Gordan Stojić, Associate Professor
	Member, Mentor: PhD Dobrila Petrović, Full professor
	Mentor's sign

## **Захвалница**

*Највећу захвалност дугујем својој супрузи Мари и својим родитељима на несебичној подршци, разумевању и љубави.*

*Захвалан својим менторима професору Гордану Стојић и професору Добрили Петровић за сву подршку коју су ми пружили током докторских студија.*

*Захвалан професору Илији Танацков на саветима и подршци.*

*Захвалан професору математике Зорици Милутиновић из основне школе за прва знања из математике и припрему за упис на факултет.*

## РЕЗИМЕ

У докторској дисертацији представљен је модел за планирање испорука у ланцима снабдевања у аутомобилској индустрији за конфигурацију ланца снабдевања: један добављач првог нивоа – више произвођача аутомобила. Добављач првог нивоа производи и испоручује готову робу својим купцима, произвођачима аутомобила. Модел за планирање испорука тестиран је и верификован у предузећима два добављача првог нивоа у аутомобилској индустрији у Републици Србији. Оба предузећа добављача испоручују произведену робу истим купцима. Производња у оба предузећа добављача одвија се на једној производној линији, која производи робу за више произвођача аутомобила.

Модел за планирање испорука састоји се из два модела који су посебно представљени и анализирани у дисертацији и који су интегрисани у један модел. Први модел је модел за агрегирано планирање производње у предузећу добављача. Модел минимализује време у предузећу добављача потребно за све логистичке и производне активности за производњу, складиштење сигурносних залиха и припрему испоруке произведене робе његовим купцима. Укључени су неизвесни фактори који разматрају неизвесност у купчевој потражњи и неизвесност у произведеној количини робе. Производња је врло сложен и неизвесан процес који је условљен бројним чиниоцима као што су: висина шкарта, технички застоји и кварови машина, абсентизам запослених, увођење и развој нових производа итд. Други модел је модел за прогнозу потражње купаца у предузећу добављача. Потражња купаца одступа на дневном и недељном нивоу и захтева од добављача држање сигурносних залиха, како би могао да испоручи повећану количину робе у кратком временском периоду или да раније реализује поруцбину. Све промене у потражњи добављач мора да апсорбује у својој производњи и испоручи тражену количину робе, како би ниво услуге остао на задовољавајућем нивоу. Оба модела интегрисана су у један модел за који је извршена анализа сензитивности у којој је разматран утицај промене различите неизвесности у произведеној количини робе, различите неизвесности у одступању купчеве потражње и различите стратегије у висини сигурносних залиха. Сви експерименти промене утицаја неизвесности извршени су у оба предузећа добављача.

Извршено је поређење резултата модела за планирање испорука са реалним подацима у предузећу оба добављача. Поређење је извршено за план производње реализован у предузећу добављача, реализован план испорука и различите стратегије планирања производње које се користе у пракси. Верификација модела у предузећу оба добављача показала је поузданост, једноставност и практичну применљивост.

Идентификован је допринос представљеног модела како за науку, тако и за индустрију. Представљене су предности и недостаци модела разматрајући различите аспекте, укључујући применљивост модела у пракси, коришћење фази скупова за моделирање неизвесних параметара, метод фази оптимизације, дефазификације, моделирање одступања у купчевој потражњи. Дат је предлог за даље истраживање.

## ABSTRACT

The doctoral dissertation presented a model for delivery planning in supply chain in the automotive industry for the configuration of the supply chain: single first tier supplier - multiple car manufacturers. The first tier supplier produces and delivers finish goods to its customers, car manufacturers. The model for delivery planning has been tested and verified in two enterprises of first tier suppliers in the automotive industry in the Republic of Serbia. Both enterprises deliver manufactured goods to the same customers. Production in both supplier enterprises takes place on one production line that produces goods for several car manufacturers.

The model for delivery planning consists of two models that are specifically presented and analyzed in the dissertation and integrated into one model. The first model is a model for aggregated production planning in the supplier enterprise. The model minimizes the time in the supplier enterprise needed for all logistic and manufacturing activities for the production, storage of safety stock and the preparation of deliveries of manufactured goods to its customers. Uncertain factors are involved which consider uncertainty in the customer's demand and uncertainty in the quantity of produced goods. Production is a very complex and uncertain process that is conditioned by many factors, such as the scrap rate, technical congestion and machine breakdown, employee absenteeism, the start production and development of new products, etc. The second model is a model for the forecast of customer demand in the supplier enterprises. Customer demand deviates on a daily and weekly level and requires the supplier to hold safety stock in order to deliver an increased quantity of goods in a short period of time or to execute an order beforehand. All changes in demand must be absorbed by the supplier in its production and deliver the requested quantity of goods in order to maintain the level of service at a satisfactory level. Both models are integrated into one model for which the sensitivity analysis was carried out in which the impact of the change of different uncertainty in the produced quantity of goods, different uncertainties in the deviation of the customer's demand and different strategies in the amount of the safety stock were considered. All experiments to change the impact of uncertainty were carried out in both supplier enterprises.

A comparison of the results of the model for delivery planning with real data in the enterprise of both suppliers was performed. A comparison was made for the production plan realized in the supplier enterprise, the realized delivery plan and the different production planning strategies used in practice. Verification of the model in the enterprise of both suppliers showed reliability, simplicity and practical applicability.

The contribution of the presented model for both science and industry has been identified. The advantages and disadvantages of the model are discussed considering various aspects, including the applicability of the model in practice, the use of the fuzzy sets for modeling uncertain parameters, the method of fuzzy optimization, defuzzification, modeling deviations in the customer's demand. A proposal for further research is given.

## Садржај:

1. Увод.....	8
1.1 Дефинисање проблема и предмет истраживања .....	8
1.2 Потреба за истраживањем .....	10
1.3 Циљ истраживања.....	11
1.4 Почетне хипотезе истраживања .....	12
1.5 Структура докторске дисертације .....	13
2. Актуелно стање у области и преглед литературе о агрегираном планирању производње.....	15
2.1 Агрегирано планирање производње .....	15
2.2 Модели оптимизације у агрегираном планирању производње.....	17
2.2.1 Линеарно програмирање .....	18
2.2.2 Вишециљна оптимизација у агрегираном планирању производње .....	20
2.2.3 Неуронске мреже.....	21
2.2 Агрегирано планирање производње у присуству неизвесности .....	21
3. Преглед литературе о релевантним дефиницијама и концептима теорије фази скупова.....	28
3.1 Дефиниција фази скупова .....	30
3.1.1 Фази бројеви .....	35
3.1.1 Фази релације .....	38
3.2 Фази оптимизациони проблем .....	43
3.2.1 Класификација фази оптимизационог проблема .....	43
3.2.2 Дефинисање проблема фази екстрема.....	44
3.2.3 Фази математичко програмирање .....	44
3.2.4 Фази линеарно програмирање.....	46
3.2.5 Фази аритметика у фази линеарном програмирању .....	48
3.2.6 Фази мере.....	58
3.2.7 Трансформација расподеле вероватноће у расподелу могућности .....	63
3.2.8 Методе фазификације и дефазификације.....	74
4. Развој новог модела за агрегирано планирање производње у функцији планирања испука .....	82
4.1 Увод.....	82
4.2 Опис проблема .....	83
4.3 Дефинисање фази агрегираног плана производње и залиха .....	84



4.3.1	Обележавање у моделу .....	84
4.3.2	Развој фази АПП ЛП модела .....	85
4.3.3	Моделирање неизвесности коришћењем фази скупова заснованих на историјским подацима .....	86
4.3.4	Трансформација фази АПП оптимизационог модела у крисп АПП оптимизациони модел .....	86
5.	Студија случаја .....	93
5.1	Студија случаја у првом предузећу добављача из аутомобилске индустрије.....	93
5.1.1	Развој и примена модела прогнозе потражње купаца и планирања испорука .....	96
5.1.2	Експеримент: основни случај .....	107
5.1.3	Анализа сензитивности фази АПП модела.....	109
5.1.4	Поређење резултата фази АПП модела и модела ФЛРА са подацима у предузећу добављача .....	116
5.1.5	Предности и недостаци предложеног фази АПП модела и методе планирања испорука ФЛРА са дефазификацијом .....	126
5.2	Студија случаја у другом предузећу добављача из аутомобилске индустрије ..	127
5.2.1	Примена модела прогнозе потражње купаца и планирања испорука.....	128
5.2.2	Експеримент: основни случај за обе методе прогнозе потражње купаца и планирања испорука .....	136
5.2.3	Анализа сензитивности фази АПП модела.....	142
5.2.4	Различита стратегија у висини сигурносних залиха за обе методе прогнозе потражње купаца.....	151
5.2.5	Поређење резултата експеримената са реалним стањем у предузећу другог добављача .....	156
6.	Значај предложеног модела АПП за науку и индустрију .....	163
7.	Перформансе алгоритама развијеног модела .....	165
8.	Закључак .....	167
	Литература.....	168
	Прилози .....	178

## СПИСАК ТАБЕЛА

Табела 2-1. Поређење предложеног модела са другим АПП моделима.....	17
Табела 5-1. Фази фактори $wid$ купчеве потражње за сваку недељу $i, i = 1, \dots, 12$ у периоду планирања.....	97
Табела 5-2. Параметри ФЛРА за промену степена задовољења решења, $h$ .....	102
Табела 5-3. Резултати метода прогнозе купчеве потражње.....	106
Табела 5-4. Резултати основног случаја.....	108
Табела 5-5. Оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу.....	108
Табела 5-6. Оптимално решење променљивих $P_i, S_{si}$ и $Q_i, i = 1, \dots, 12$ за $\beta = 0,8$ .....	109
Табела 5-7. Резултати добијени за случај 50% мање неизвесности у произведеној количини.....	110
Табела 5-8. Захтевано оптимално просечно време на дневном нивоу за 50% мање неизвесности у произведеној количини.....	110
Табела 5-9. Резултати добијени где је 50% већа неизвесност у произведеној количини робе.....	110
Табела 5-10. Оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу када је 50% већа неизвесност у произведеној количини.....	111
Табела 5-11. Поређење вредности циљне функције за исти степен изводљивости, $\beta = 0,8$ .....	111
Табела 5-12. Резултати добијени када је неизвесност одступања 50% мања у купчевој потражњи.....	112
Табела 2-1. Поређење предложеног модела са другим АПП моделима.....	17
Табела 5-1. Фази фактори $wid$ купчеве потражње за сваку недељу $i, i = 1, \dots, 12$ у периоду планирања.....	97
Табела 5-2. Параметри ФЛРА за промену степена задовољења решења, $h$ .....	102
Табела 5-3. Резултати метода прогнозе купчеве потражње.....	106
Табела 5-4. Резултати основног случаја.....	108
Табела 5-5. Оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу.....	108
Табела 5-6. Оптимално решење променљивих $P_i, S_{si}$ и $Q_i, i = 1, \dots, 12$ за $\beta = 0,8$ .....	109
Табела 5-7. Резултати добијени за случај 50% мање неизвесности у произведеној количини.....	110
Табела 5-8. Захтевано оптимално просечно време на дневном нивоу за 50% мање неизвесности у произведеној количини.....	110
Табела 5-9. Резултати добијени где је 50% већа неизвесност у произведеној количини робе.....	110
Табела 5-10. Оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу када је 50% већа неизвесност у произведеној количини.....	111
Табела 5-11. Поређење вредности циљне функције за исти степен изводљивости, $\beta = 0,8$ .....	111
Табела 5-12. Резултати добијени када је неизвесност одступања 50% мања у купчевој потражњи.....	112
Табела 5-13. Оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу када је 50% мања неизвесност у одступању купчеве потражње.....	112
Табела 5-14. Добијени резултати у експерименту када је неизвесност 50% већа у одступању купчеве потражње.....	113
Табела 5-15. Оптимално захтевано време на дневном нивоу када је неизвесност 50% већа у одступању купчеве потражње.....	113
Табела 5-16. Поређење резултата циљне функције за исти степен изводљивости, $\beta = 0,9$ .....	113
Табела 5-17. Резултати добијени када је ниво сигурносних залиха између 2 и 4 дана.....	114
Табела 5-18. Оптимално захтевано просечно време на дневном нивоу за ниво сигурносних залиха између 2 и 4 дана.....	115
Табела 5-19. Добијени резултати за ниво сигурносних залиха између 1 и 3 дана.....	115
Табела 5-20. Оптимално захтевано просечно време на дневном нивоу када су сигурносне залихе између 1 и 3 дана.....	115
Табела 5-21. Оптимално просечно захтевано време за сваку недељу у периоду планирања за степен изводљивости, $\beta = 0,9$ .....	116
Табела 5-22. Забележени подаци у предузећу добављача.....	117
Табела 5-23. Преглед испоручених количина у предузећу и добијен у експериментима.....	120
Табела 5-24. План производње реализован у предузећу и у експериментима.....	121
Табела 5-25. Ниво залиха реализован у предузећу и у експериментима.....	121

Табела 5-26. План сигурносних залиха реализован у предузећу и у експериментима .....	122
Табела 5-27. Поређење са две стратегије планирања производње.....	123
Табела 5-28. Вредност циљне функције и покривеност залиха .....	124
Табела 5-29. Поређење плана производње и залиха реализованих у предузећу и код две методе прогнозе потражње купаца .....	125
Табела 5-30. Вредност циљне функције и покривеност залиха .....	126
Табела 5-31. Предности и недостаци предложеног фази АПП модела .....	126
Табела 5-32. Предности и недостаци предложеног модела за прогнозу купчеве потражње и планирања испорука методом стандардне девијације.....	127
Табела 5-33. Предности и недостаци предложеног модела за прогнозу купчеве потражње и планирања испорука ФЛРА са дефазификацијом .....	127
Табела 5-34. Фази фактори $wid$ купчеве потражње за сваку недељу $i, i = 1, \dots, 20$ у периоду планирања .....	129
Табела 5-35. Параметри ФЛРА за промену степена задовољења решења, $h$ .....	130
Табела 5-36. Резултати метода прогнозе купчеве потражње.....	134
Табела 5-37. Резултати основног случаја за методу прогнозе стандардном девијацијом .....	139
Табела 5-38. Оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу за методу прогнозе стандардном девијацијом .....	139
Табела 5-39. Оптимално решење променљивих $P_i, S_{si}$ и $Q_i, i = 1, \dots, 20$ за $\beta = 0,6$ .....	140
Табела 5-40. Резултати основног случаја за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом.....	141
Табела 5-41. Оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом.....	141
Табела 5-42. Оптимално решење променљивих $P_i, S_{si}$ и $Q_i, i = 1, \dots, 20$ за $\beta = 0,99$ .....	141
Табела 5-43. Резултати добијени за случај 50% мање неизвесности у произведеној количини за методу прогнозе стандардном девијацијом .....	143
Табела 5-44. Захтевано оптимално просечно време на дневном нивоу за 50% мање неизвесности у произведеној количини за методу прогнозе стандардном девијацијом .....	144
Табела 5-45. Резултати добијени где је 50% већа неизвесност у произведеној количини робе за методу прогнозе стандардном девијацијом.....	144
Табела 5-46. Оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу када је 50% већа неизвесност у произведеној количини за методу прогнозе стандардном девијацијом .....	144
Табела 5-47. Резултати добијени где је 50% мања неизвесност у произведеној количини робе за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом.....	145
Табела 5-48. Захтевано оптимално просечно време на дневном нивоу за 50% мање неизвесности у произведеној количини за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом.....	145
Табела 5-49. Резултати добијени где је 50% већа неизвесност у произведеној количини робе за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом .....	146
Табела 5-50. Оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу када је 50% већа неизвесност у произведеној количини за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом.....	146
Табела 5-51. Резултати добијени где је 50% мања неизвесност у одступању купчеве потражње за методу прогнозе стандардном девијацијом .....	148
Табела 5-52. Захтевано оптимално просечно време на дневном нивоу за 50% мање неизвесности у одступању купчеве потражње за методу прогнозе стандардном девијацијом.....	148
Табела 5-53. Резултати добијени где је 50% већа неизвесност у одступању купчеве потражње за методу прогнозе стандардном девијацијом .....	149
Табела 5-54. Захтевано оптимално просечно време на дневном нивоу за 50% већу неизвесност у одступању купчеве потражње за методу прогнозе стандардном девијацијом.....	149
Табела 5-55. Резултати добијени где је 50% мања неизвесност у одступању купчеве потражње за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом.....	150
Табела 5-56. Захтевано оптимално просечно време на дневном нивоу за 50% мање неизвесности у одступању купчеве потражње за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом .....	150
Табела 5-57. Резултати добијени где је 50% већа неизвесност у одступању купчеве потражње за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом.....	150
Табела 5-58. Захтевано оптимално просечно време на дневном нивоу за 50% већу неизвесност у одступању купчеве потражње за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом .....	151
Табела 5-59. Резултати добијени када је ниво сигурносних залиха између 2 и 4 дана за методу прогнозе стандардном девијацијом.....	152

Табела 5-60. Оптимално захтевано просечно време на дневном нивоу за ниво сигурносних залиха између 2 и 4 дана за методу прогнозе стандардном девијацијом.....	152
Табела 5-61. Добијени резултати за ниво сигурносних залиха између 1 и 3 дана за методу прогнозе стандардном девијацијом .....	153
Табела 5-62. Оптимално захтевано просечно време на дневном нивоу када су сигурносне залихе између 1 и 3 дана за методу прогнозе стандардном девијацијом.....	153
Табела 5-63. Оптимално просечно захтевано дневно време за сваку недељу у периоду планирања за степен изводљивости $\beta = 0,6$ .....	154
Табела 5-64. Резултати добијени када је ниво сигурносних залиха између 2 и 4 дана за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом .....	155
Табела 5-65. Оптимално захтевано просечно време на дневном нивоу за ниво сигурносних залиха између 2 и 4 дана за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом .....	155
Табела 5-66. Добијени резултати за ниво сигурносних залиха између 1 и 3 дана за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом.....	155
Табела 5-67. Оптимално захтевано просечно време на дневном нивоу када су сигурносне залихе између 1 и 3 дана за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом .....	156
Табела 5-68. Забележени подаци у предузећу другог добављача.....	157
Табела 5-69. Поређење са две стратегије планирања производње.....	161
Табела 5-70. Вредност циљне функције и покривености залиха .....	162
Табела А-1. Интервал расподеле вероватноће $p_i$ , $p_i +$ за интервал $i = 1, \dots, 4$ снимљених података у предузећу првог добављача .....	179
Табела А- 2. Анализа времена производње у предузећу другог добављача .....	180
Табела А-3. Интервал расподеле вероватноће $p_i$ , $p_i +$ за интервал $i = 1, \dots, 5$ снимљених података у предузећу другог добављача.....	180

## СПИСАК СЛИКА

Слика 3-1. Елементи функције припадности, $\mu(x)$ .....	32
Слика 3-2. Конвексан нормалан фази скуп (лева страна) и неконвексан нормалан фази скуп (десна страна).....	33
Слика 3-3. Пресек два конвексна скупа.....	33
Слика 3-4. Интервални фази скуп .....	34
Слика 3-5. Алфа пресек на континуалном фази скупу .....	36
Слика 3-6. Дискретан фази скуп, $S_d$ .....	37
Слика 3-7. Алфа пресеци на континуалном фази скупу.....	37
Слика 3-8. Дискретан фази скуп.....	38
Слика 3-9. Пресликавање скупа $X$ у скуп $Y$ .....	38
Слика 3-10. Функција припадности пресликавања елемената скупа $X$ у елементе скупа $Y$ .....	39
Слика 3-11. Функција припадности решења проблема $FLP$ .....	48
Слика 3-12. Максимализовање циљне функције као трапезоидног фази броја и крисп ограничења .....	49
Слика 3-13. Минимализовање циљне функције као трапезоидног фази броја и крисп ограничења .....	50
Слика 3-14. Максимализовање циљне функције као трапезоидног фази броја.....	51
Слика 3-15. Десна страна ограничења као трапезоидни фази број, $\mu(b)$ .....	52
Слика 3-16. Лева страна ограничења као трапезоидни фази број, $\mu(a)$ .....	53
Слика 3-17. Функција припадности леве $\mu(ax)$ и десне стране $\mu b$ ограничења у $FLP$ .....	54
Слика 3-18. Трапезоидне функције припадности леве $\mu(ax)$ и десне стране $\mu b$ ограничења у $FLP$ .....	55
Слика 3-19. Фази релација леве и десне стране система ограничења.....	56
Слика 3-20. Хистограм мере вероватноће добијен из статистичких података дужине трајања производње .....	66
Слика 3-21. Распдела вероватноће дефинисана од скупа интервала .....	67
Слика 3-22. Фазификована вредност трајања производње.....	74
Слика 3-23. Унија два фази скупа .....	75
Слика 3-24. Метода максималне вредности функције припадности .....	77
Слика 3-25. Гравитациони метод дефазификације.....	77
Слика 3-26. Метода пондерисаних средина као дефазификациона метода.....	78
Слика 3-27. Средина максималне функције припадности .....	78
Слика 3-28. Средина сума: (а) прва функција припадности, (б) друга функција припадности, (ц) дефазификациона метода.....	79
Слика 3-29. Центар највеће области обележен је зелено .....	80
Слика 3-30. Пример са последњим максимумом функције припадности .....	81
Слика 4-1. Функција толеранције $G$ за добијену вредност циљне функције $Z\beta$ .....	90
Слика 4-2. Дијаграм тока предложеног фази АПП модела.....	92
Слика 5-1. Фази скуп произведених комада у једној минути, пр.....	94
Слика 5-2. Фази скупови: време припреме испоруке и време складиштења сигурносних залиха.....	96
Слика 5-3. Функција припадности фази коефицијента $A$ .....	99
Слика 5-4. Фази линеарна регресија из рада аутора Танака и други (Tanaka et al., 1982).....	100
Слика 5-5. Модел ФЛР за период развоја модела у тест периоду пре периода планирања, $h = 0,1$ ....	101
Слика 5-6. Фази аритметика за израчунавање степен функције припадности прогнозиране потражње у тест периоду .....	102
Слика 5-7. Дискретизован тест период на фази скупове и период планирања .....	103
Слика 5-8. Фази скуп дискретизованих фази скупова за тест период планирања потражње купаца. 103	103
Слика 5-9. Статистичка анализа остатака ЛР у софтверу Minitab 2016.....	105
Слика 5-10. Поређење времена забележеног у предузећу и резултата експеримената .....	118
Слика 5-11. Поређење времена реализованог у предузећу и резултата плана производње .....	119
Слика 5-12. Поређење резултата циљне функције за два случаја.....	120
Слика 5-13. Модел ФЛР за период развоја модела у тест периоду пре периода планирања, $h = 0,1$ ..	130
Слика 5-14. Дискретизован тест период на фази скупове и период планирања .....	131
Слика 5-15. Фази скуп дискретизованих фази скупова за тест период планирања потражње купаца .....	132
Слика 5-16. Статистичка анализа остатака ЛР у софтверу Minitab 2016.....	133

Слика 5-17. Фази скуп времена производње, $t_p$ .....	136
Слика 5-18. Фази скуп времена складиштења залиха, $t_s$ .....	137
Слика 5-19. Фази скуп времена припреме испоруке за купце, $t_t$ .....	138
Слика 5-20. Поређење времена забележеног у предузећу и резултата експеримената фази АПП модела са методом прогнозе потражње купаца стандардном девијацијом .....	157
Слика 5-21. Поређење времена забележеног у предузећу и резултата експеримената фази АПП модела са методом прогнозе потражње купаца ФЛРА са дефазификацијом.....	158
Слика 5-22. Поређење времена реализованог у предузећу и резултата плана производње за методу прогнозе стандардном девијацијом.....	159
Слика 5-23. Поређење времена реализованог у предузећу и резултата плана производње за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом .....	160
Слика 8-1. Време израчунавања алгоритма из прилога Б по сегментима .....	166
Слика 8-2. Време израчунавања алгоритма из прилога З по сегментима .....	166
Слика А-1. Број произведених комада производа у току једног минута на једној производној линији у предузећу првог добављача .....	179

## 1. Увод

### 1.1 Дефинисање проблема и предмет истраживања

Аутомобилска индустрија врло је сложена и захтевна грана индустрије. Производни процеси сложени су и условљени бројним параметрима. Неразматрање свих утицајних параметара код организације производног процеса, и у целом ланцу снабдевања, доводи до ниже ефикасности пословања изражене кроз продужено време производње, кашњења у испорукама, ангажовања додатне радне снаге, финансијских губитака, повећаног нивоа шкарта, застоја итд. На простору Републике Србије у последњој деценији аутомобилска индустрија је у експанзији након покретања производње више десетина добављача великих европских и светских произвођача аутомобила. Ланци снабдевања у којима послују добављачи комплексни су и захтевају детаљно планирање за рационално пословање.

Добављачи првог нивоа (енгл. First Tier Suppliers) великих аутомобилских произвођача (енгл. OEM) морају да имају развијену мрежу снабдевања репроматеријалом за стабилну производњу, која може да одговори на високе захтеве њихових купаца. Купци, поред квалитета испоручених делова, имају високе захтеве у тачности и роковима испоручених количина. Такви захтеви често су толико високи да поједини добављачи не могу да их испуне и губе тржишну утакмицу. Тржишне осцилације у продаји аутомобила непосредно утичу на повећање или смањење потражње делова од добављача, који морају да произведу у кратком временском року веће количине од планираних или да смање своју производњу како би избегли гомилање залиха и непотребан финансијски трошак.

Држање високих залиха произведених делова код добављача може да одговори на изненадно повећање потражње од стране купаца, али тиме добављач везује значајна финансијска средства у држање залиха готових производа. Такође, осцилације у потражњи купаца могу да се ублаже и држањем већих залиха репроматеријала или полупроизвода, где се уз додатно ангажовање производње испуњава повећана потражња. Веће залихе репроматеријала и полупроизвода јефтине су од повећаног нивоа залиха готовог производа, али потребно је више времена за покретање и завршетак финалне производње уколико купац повећа своју потражњу у кратком року. Стратегије добављача код одређивања који тип производа држаће се на залихама различите су, и често зависе од сложености и дужине трајања производних процеса. Као и у случају залиха готових производа, залихе репроматеријала и полупроизвода утичу на биланс пословања предузећа. Може да се закључи да су прекомерне залихе последица тржишне несигурности у потражњи делова у аутомобилској индустрији и служе да амортизују неизвесност у потражњи купаца. Као последица тржишне несигурности, прекомерне залихе често су присутне у предузећу добављача. Њихова улога је амортизација неизвесности у промени потражње купаца.

Ланац снабдевања у аутомобилској индустрији комплексан је и састоји се од бројних чиниоца. Крајњи чинилац ланца су купци аутомобила, док је први чинилац добављач основне сировине за производњу. Добављачи у ланцу снабдевања класификују се према редоследу у односу на ниво снабдевања произвођача аутомобила. Тако постоје први добављач, други добављач, трећи добављач итд. Трећи

добављач снабдева другог добављача, други добављач снабдева првог добављача, док први добављач снабдева произвођача аутомобила. Предмет истраживања у дисертацији је део ланца снабдевања коме припада први добављач и више произвођача аутомобила.

Стратегија произвођача аутомобила јесте контрола и развијање својих добављача. Контрола и предлози унапређења за своје добављаче дугорочан су и одржив развојни план у ланцу снабдевања који спроводе произвођачи аутомобила. Тиме се обезбеђује стабилност у ланцу снабдевања као главни циљ дуготрајне и одрживе стратегије. Добављачи првог нивоа у ланцу снабдевања послују са великим бројем поддобављача (енгл. Second Tier Suppliers). Развијеност мреже поддобављача у великој мери утиче на пословање добављача и његову флексибилност у тржишним осцилацијама и потражњи производа од стране произвођача аутомобила, који су носиоци ланца снабдевања. Високи захтеви квалитета, осцилације у потражњи и кратки рокови испоруке за добављаче у директној су вези са ефикасношћу пословања поддобављача. Планирање репроматеријала захтева перманентно праћење нивоа залиха репроматеријала у предузећу добављача, најављених испорука од стране поддобављача и праћење потреба сопствене производње. Ово је прва оперативна активност у ланцу снабдевања од које зависи план производње добављача. Испуњавање потражње за репроматеријалом од стране поддобављача кључан је чинилац у ланцу снабдевања добављача, од чега даље зависи стабилност ланца и задовољство крајњих корисника у ланцу.

Планирање производње у предузећу добављача захтева праћење купчеве потражње, сопствених капацитета производње, залиха репроматеријала, полупроизвода и готових производа, висине шкарта, техничких застоја и кварова машина. То је врло сложен процес који зависи од бројних параметара: залиха репроматеријала, величине и времена израде радних налога, нивоа шкарта, абсентизма запослених, екстерне дораде производа уколико је има, увођење нових производа у производњу, кварови машина и застоји, магацински капацитети, транспортни капацитети итд. Уколико неки од наведених параметара не испуни тражени ниво услуге, испорука робе може бити озбиљно угрожена, као и сама сарадња са купцима. Кашњење у испорукама може довести до угрожавања плана производње купца, што има за последицу плаћање изузетно високих надокнада. Некада су такве надокнаде толико високе да могу да угрозе опстанак добављача.

Оптимално планирање ланца снабдевања представља свеобухватну анализу и константно праћење свих утицајних чиниоца. У савременим условима пословања комуникација добављача и купца (произвођача аутомобила) обавља се електронски, путем информационих система. Данас на тржишту постоји велики број софтвера који подржавају електронско пословање. Електронска размена података (енгл. EDI - Electronic Data Interchange) омогућава брзу размену информација између купаца и добављача. Информациона умреженост свих чланова ланца снабдевања од суштинске је важности за ефикасно функционисање читавог ланца. ЕРП софтвери интегришу оперативне активности свих одељења предузећа и омогућавају брзу интерну размену информација у оквиру једног предузећа. За логистику важан део ЕРП софтвера је МРП (енгл. MRP - Material Requirement Planning) који интегрише купчеву потражњу, генерише податке за план производње и рачуна набавку репроматеријала. Одељења логистике у предузећима, у којима се спроводи истраживање, ослања се на МРП податке.



У конфигурацији ланца снабдевања у аутомобилској индустрији, произвођач аутомобила носилац је ланца, тзв. „власник“ ланца. Добављач првог нивоа добија план потражње на основу којег организује своју производњу и снабдевање репроматеријалом. Поддодобављачи добијају план потражње од стране добављача првог нивоа на основу којег организују сопствену производњу и снабдевање репроматеријалом од својих добављача. Размена података врши се у оба смера, од врха ланца ка његовом почетку и обрнуто. Од врха ка почетку ланца је ток информација са роковима испоруке и траженим количинама робе, док у супротном смеру је ток информација са временом испоруке и послатој количини робе (енгл. ASN – Advanced Shipping Notice). Наравно, уз основне информације егзистирају и додатне: врста паковања, количина паковања, превозник, тип возила, регистарске ознаке доставног возила, паритет испоруке итд. Тиме сваки члан у ланцу има потребне информације у сваком тренутку.

У дисертацији спроведена је студија случаја у предузећу два добављача у Републици Србији. Оптимизациони модели планирања испорука и производње примењени су у конфигурацији ланца снабдевања: добављач првог нивоа – више произвођача аутомобила.

## 1.2 Потреба за истраживањем

Потражња коју добављач прима од купца садржи краткорочни план испоруке (енгл. DELJIT – Delivery Just in Time) и дугорочни план (енгл. DELFOR - Delivery Forecast) који садржи прогнозу потражње. Краткорочни план потражње је план са најдуже недељним траженим количинама и овакав план је углавном стабилан, али је некада подложен променама. Дугорочни план потражње подложен је променама и садржи велике осцилације у траженим количинама и роковима испоруке. Зато дугорочно планирање производње и капацитета код добављача захтева велику опрезност и анализу ризика. Ово је отежавајући фактор да се достигне оптималност пословања, где су сви узрочно – последични параметри у циљаним границама (висина залиха, капацитет производње, радна снага, трошкови рада, трошкови транспорта, итд.). Оптимизација у ланцу снабдевања има ефекат само у случају уколико се посматра читав ланац и као такав анализира. Уколико се тражи оптимизација сваког појединачног члана у ланцу са локалним циљевима, такав приступ негативно се одражава на глобални оптимум читавог ланца. Једна од негативних последица локалне оптимизације је „ефекат бича“ (енгл. BullWhip). Зато свака карика у ланцу мора да тежи укупном оптимуму ланца снабдевања.

Истраживање у дисертацији фокусира се на анализу агрегираног планирања производње и залиха у предузећу добављача првог нивоа у конфигурацији ланца: више произвођача аутомобила – један добављач првог нивоа. Главни правац истраживања је развој модела за планирање производње у присуству неизвесности код промене купчеве потражње, произведене количине робе у предузећу добављача, планирање испорука са испуњењем максималног нивоа услуге и планирање оптималног нивоа залиха. Анализираће се утицај стратегије управљања залихом робе и промене у потражњи купаца на план производње у предузећу. Због хетерогености и специфичности фаза у производњи, практично немогуће је развити универзални модел

за све гране индустрије и зато истражују се процеси у аутоиндустрији, односно у предузећу првог добављача.

Превентивно реаговање у ланцу снабдевања доприноси елиминисању значајних трошкова и бољем управљању у ланцу. Идентификовање најслабијих тачака у ланцу врло је значајно како би се оптимизовао цео ланац снабдевања. Најслабије тачке могу бити: капацитет производње добављача, технички застоји у производњи добављача, доступност превозних средстава итд. Превентивно реаговање важан је фактор у смањењу ризика. Управљање ризицима у ланцу снабдевања савремени је приступ неопходан за ефикасно функционисање ланца и задовољство крајњих корисника (произвођача аутомобила).

### 1.3 Циљ истраживања

Многи истраживачи бавили су се оптимизацијом ланца снабдевања у његовим различитим конфигурационим облицима. Већина истраживача бави се трошковном анализом. Временска анализа у ланцу снабдевања изузетно је важна анализа која, поред трошковне анализе, показује перформансе добављача са аспекта смањивања времена неопходног за производњу, складиштење производа и испоруке робе купцима. Што је наведено време краће у предузећу добављача, његова ефикасност је већа.

Многи аутори развијали су моделе на бази података којој је недостајала основа са истраживањем спроведеним у пракси на реалном примеру мерењем одређених параметара. Пошто је аутомобилска индустрија у Републици Србији поново у развоју након краха деведесетих година прошлог века, ово истраживање даће допринос сагледавању нових услова у привреди. Због потребе за оваквим истраживањем, развијени модел биће тестиран у реалним условима, извршиће се његова валидација и анализирати применљивост.

Основни циљ је изналажење нових модела агрегираног планирања производње, залиха и испоруке робе у предузећу добављача у присуству неизвесности. Додатни циљеви су: преглед литературе моделирања планирања производње у присуству неизвесности, развој фази АПП модела (фази агрегирано планирање производње), испитивање утицаја неизвесности на АПП модел, поређење са реалним подацима из предузећа, моделирање неизвесности промене у прогнози купчеве потражње применом фази линеарне регресије у реалном проблему. План производње укључује неизвесности које се јављају у пракси и које битно утичу на испуњење плана производње. Анализирани утицајни параметри, укључени у модел плана производње, су неизвесност у потражњи купаца, неизвесност у времену производње и произведеним количинама робе, неизвесност у времену складиштења производа и времену припреме робе за отпрему. Укључивање неопходних ресурса за испуњење плана производње и испоруке произведене робе купцима, као и њихова анализа, чини производни план агрегираним. Ресурси за агрегираног плана производње су производни капацитети, капацитети магацина, транспортни капацитети, време производње, потражња купаца, залихе, радна снага итд. (Aliev et al., 2007; Baykasoglu, 2001; Djordjevic et al., 2019; Fung et al., 2003; Gholamiana et al., 2016; Madadi et al., 2016).

Крајњи циљ агрегираног плана производње јесте максимирање профита или минимализовање трошкова (Chopra and Meindl, 2010). У дисертацији крајњи циљ је минимализација времена, као критичног фактора у аутомобилској индустрији,

потребног за обављање производних и логистичких активности у предузећу да би се испоручила произведена роба купцима. Анализирано време састоји се од три компоненте: време производње, време складиштења сигурносних залиха и време припреме робе за отпрему купцима. У предузећу првог добављача анализирани период је у месецима април, мај и јун. То је тромесечни период (12 недеља) који се у аутомобилској индустрији узима као поуздан са аспекта планирања производње, репроматеријала, капацитета машина, одржавања машина, радне снаге и других ресурса. Месеци април, мај и јун у периоду су када је потражња купаца врло изражена и нема прекида у недељној потражњи. У предузећу другог добављача анализиран је дужи период у месецима јануар, фебруар, март, април и мај. Ово је период од пет месеци (20 недеља) и који садржи далеко више неизвесности у планирању испред наведених активности у предузећу. Овим се потврђује способност модела да апсорбује већу неизвесност и генерише валидан план производње, залиха и испорука у аутомобилској индустрији.

Производни план у предузећу треба да обезбеди поштовање рокова испорука и тражених количина робе. Агрегирани план производње треба да осигура несметано планирање испорука и обезбеди довољне залихе готове робе. Моделирање потражње купаца услед неизвесности интегрисано је са агрегираним планирањем производње и утиче на планирање испорука. Планирање производње ограничено је капацитетом и расположивом радном снагом и подложно утицају кварова машина који узрокују застоје. Важан утицајни фактор на кварове машина има превентивно одржавање и правилно руковање од стране радне снаге. Велики утицај на ефикасност производње и количину произведене робе има ниво шкарта и абсентизам радне снаге. Ниво шкарта је уско везан са обученошћу радне снаге, исправношћу машина и алата, квалитетом репроматеријала.

У истраживању разматраће се ниво сигурносних залиха готовог производа. Посебна пажња обратиће се на дефинисање њиховог нивоа у магацину. У пракси је отежано чување константног нивоа сигурносних залиха због осцилација у потражњи купаца и расположивости капацитета производње. Кроз математички модел покушаће се пронаћи њихов оптималан ниво.

## 1.4 Почетне хипотезе истраживања

Након извршеног опсежног прегледа литературе и утврђених недостатака у спроведеним истраживањима, биће постављене почетне хипотезе.

У дисертацији постављено је шест главних хипотеза и четири помоћне хипотезе. Главне хипотезе су:

- **Хипотеза 1:** планирање испорука може да се моделира укључујући неизвесност утицајних параметара;
- **Хипотеза 2:** планирање испорука може да се моделира користећи фази линеарну регресиону анализу;
- **Хипотеза 3:** прогноза потражње методом фази линеарне регресионе анализе може дати прецизнију прогнозу од класичних статистичких метода;
- **Хипотеза 4:** агрегирани план производње може да се оптимизује укључујући неизвесност утицајних параметара;

- **Хипотеза 5:** агрегирани план производње може да се оптимизује користећи фази линеарну оптимизацију;
- **Хипотеза 6:** са агрегираним планом производње могу да се добију бољи резултати времена потребног за производне и логистичке операције код отпреме робе купцима него у пракси без њега.

Помоћне хипотезе у дисертацији гласе:

- **Помоћна хипотеза 1:** историјски податаци о испорукама робе купцима могу да се примене у моделу агрегираног плана производње;
- **Помоћна хипотеза 2:** промена неизвесности утицајних параметара у моделу агрегираног плана производње може да се симулира;
- **Помоћна хипотеза 3:** различите стратегије чувања нивоа сигурносних залиха у предузећу могу да се симулирају у моделу агрегираног плана производње;
- **Помоћна хипотеза 4:** резултате модела агрегираног плана производње могуће је поредити са реалним подацима из предузећа.

## 1.5 Структура докторске дисертације

У дисертацији истраживање је спроведено у четири фазе. У оквиру прве фазе дефинисан је план истраживања. Опсежно је прегледана доступна литература. Прикупљени су подаци, дефинисан је начин и опсег мерења. Утврђена је величина потребног узорка, формирана база података и утврђени су алати за обраду прикупљених података.

У другој фази спроведено је експериментално истраживање на подацима прикупљеним током прве фазе. Анализирани су прикупљени подаци и извршена је њихова селекција за даљу примену у истраживању. На одабраним подацима извршени су статистички тестови као услов за правилан избор математичке методе у даљем истраживању. Изабрана је одговарајућа математичка метода за развој модела.

Трећа фаза подразумева развој модела уз примену одговарајуће математичке методе. Развијени модел примењен је на реалним подацима у предузећу добављача (енгл. First tier supplier) у аутомобилској индустрији у конфигурацији ланца снабдевања: један добављач – више купаца. Извршена је његова верификација и валидација на практичним подацима.

Последња фаза је четврта фаза и укључује анализу целокупног истраживања и оцену практичне примене развијеног модела. Представљене су све предности и недостаци развијеног модела, као и могућности за њихово унапређење. Дате су смернице за даља истраживања. Постављене главне и помоћне хипотезе верификоване су кроз трећу и четврту фазу.

Наведене фазе истраживања у дисертацији описане су кроз осам поглавља. Прво поглавље односи се на уводни део, где се разматра проблем и предмет истраживања, потребе за истраживањем, подручје примене, циљ истраживања, постављене хипотезе и структура дисертације. У овом делу разматра се зашто се тема истражује и шта је циљ истраживања.

У другом поглављу дат је преглед литературе и актуелног стања у области о агрегираном планирању производње. Ово је важан део у коме се даје преглед колико је и на који начин тема истраживања експлоатисана у стручној јавности и који су

недостаци досадашњег истраживања. Појашњен је појам и значај агрегираног планирања производње у савременим произвођачким привредним системима.

У трећем поглављу дат је теоријски приступ. Указано је на могућности фази логике, фази оптимизације и линеарног програмирања и на њихову подобност у моделирању и решавању практичног проблема. Неизвесност која се прожима кроз утицајне факторе у моделу моделирана је употребом фази скупова и расподеле могућности. Једно подпоглавље односи се на трансформацију расподеле вероватноће у расподелу могућности и дефазификацију по деловима линеарне функције припадности (енгл. *piece-wise*) тако добијеног фази скупа.

У четвртом поглављу представљен је развој модела и укључених фактора. Моделовање сваког фактора објашњено је и начин његовог укључивања у модел. Развијени модел настао је комбинацијом фази логике и линеарног програмирања. Тако развијени модел трансформисан је у класичан крисп (енгл. *Crisp*) линеаран модел и добијено је јединствено решење модела.

Пето поглавље садржи студију случаја у два предузећа добављача у аутомобилској индустрији и изведеним експериментима. Модел је тестиран на реалним подацима у два предузећа добављача и резултати су представљени у студијама случаја. У сваком од експеримената извршена је промена величине неизвесности утицајних параметара и анализиран је променљив утицај на агрегирани план производње у моделу. У последњем експерименту представљене су основне стратегије планирања производње из праксе и њихово поређење са резултатима развијеног модела.

У шестом поглављу представљен је значај предложеног модела АПП за науку и индустрију са освртом на постављене хипотезе.

Седмо поглавље закључно је разматрање изведеног. Разматран је допринос дисертације са научног и практичног аспекта, правци даљег истраживања и ограничења изведеног истраживања.

Осмо поглавље анализа је развијених алгоритама у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у C++ програмском језику. Дат је преглед перформанси развијених алгоритама.

## 2. Актуелно стање у области и преглед литературе о агрегираном планирању производње

*„Обележје подученог ума је да остане задовољан оним степеном прецизности који природа субјекта признаје, и да не тражи тачност тамо где је могућа само приближност истини.“*

*Аристотел (384-322 п.н.е.), грчки филозоф*

*„Морамо искористити нашу толеранцију за непрецизност.“*

*Лотфи Задех, професор, UC Berkeley, 1973*

### 2.1 Агрегирано планирање производње

Агрегирано планирање производње (АПП) једно је од најважнијих делова операционог управљања у савременом ланцу снабдевања. Подразумева ланац снабдевања са прогнозом купчеве потражње и планирања испорука у планираном периоду. Уопштено, циљ је да се дефинишу потребни ресурси, који укључују капацитет производње, магацинске капацитете, радну снагу, прековремени рад и др., тако да се испуни купчева потражња.

Подела система, који интегришу планирање производње и залиха у литератури наводи се код аутора Холта (Holt, 1983): а) статички модели који су у вези са коначним периодом планирања и детерминистичком потражњом, б) динамички модели који су у вези са неограниченим периодом планирања са одговарајућом прогнозом потражње.

У литератури најчешће се претпоставља да сви параметри повезани са АПП процесом, као што је купчева потражња, време производње, производни капацитети, итд., природно су детерминистички (Gansterer, 2015; Nam and Logendran, 1992; Nam and Logendran, 1995; Nahmias, 2008). Пратећи ову претпоставку, као резултат, развијени АПП модели углавном су детерминистички линеарни оптимизациони модели са циљем да минимализују укупне трошкове, који се састоје од трошкова производње, залиха, редовних радних сати, прековремених радних сати или од неке друге трошковне компоненте.

Како би управљао неизвесношћу, која карактерише реално АПП окружење и случајност у купчевој потражњи, предложени су различити стохастички оптимизациони модели код аутора Фајринга (Feiring, 1991). Даље, у литератури могу да се нађу различити типови неизвесности укључени у АПП проблеме, као што је непрецизна потражња, производни капацитети са толеранцијом, фази процесна времена могу да буду дефинисана од стране експерата употребом непрецизних лингвистичких услова. То је довело до развоја АПП модела и примене фази оптимизационе технике (Mula et al., 2006).

Агрегирано планирање производње (АПП) појам је који је познат у литератури и користи се у последњих неколико деценија као модел за израчунавање оптималних вредности у производном систему (Buxey, 2005; Chien and Cunningham, 2000; Davison et al., 2015; Schroeder and Larson, 1986; Tadei et al., 1995; Taubert, 1968). Наиме, АПП интегрише капацитете производње, капацитете магацина, капацитете транспорта, радну снагу, залихе робе, потражњу купаца, ниво услуге итд. једне организације, уколико је то производно предузеће, иако није нужно да буде, у задатом временском

периоду. Сврха АПП јесте да са расположивим ресурсима достигне оптималан циљ, нпр. код производног предузећа да расположивим капацитетом производње и другим ресурсима одговори на захтеве купаца. Наведени фактори интегрисани у АПП одређују се за сваки временски интервал у задатом временском периоду. Најчешће су ти интервали изражени као дани, недеље или месеци, у зависности од дужине задатог временског периода, природе података и сврхе оптимизације. У производном предузећу АПП модели примењују се за један производ или фамилију производа за краткорочне, средњорочне и дугорочне временске периоде планирања производње.

АПП хијерархијски је на вишем нивоу и код дисагрегације у производном предузећу може да се расчлани на агрегиране моделе нижег нивоа, као што је планирање потражње материјала (енгл. MRP - Material Requirement Planning), планирање потребног капацитета (енгл. CRP - Capacity Requirement Planning), главни план производње (енгл. MPS - Master Production Schedule).

Досад примењени су различити приступи у истраживању планирања у ланцима снабдевања. Један од приступа јесте планирање ланца снабдевања као део управљања њиме. Планирање према Чопри и Мајндлу (Chopra and Meindl, 2010) може да се подели на: а) стратегијски ниво – дугорочно планирање, б) тактички ниво – средњерочно планирање, ц) оперативни ниво – краткорочно планирање. Набројане категорије припадају нивоу одлучивања у ланцу. Истраживања која су досад примењена у ланцу снабдевања баве се претежно трошковном анализом и минимализацијом трошкова. Одређени број радова бавио се квалитативним аспектом у ланцу, као што је задовољство купаца (Lai et al., 2014).

Стратегијско планирање односи се на период од пет до десет година, при чему утврђује се локација фабрике, дистрибутивног центра, мреже добављача, конфигурација ланца снабдевања итд. Тактичко планирање обухвата краћи период, од годину до две, у коме се дефинишу капацитети производње, поруџбине репроматеријала, транспортни капацитети. Оперативни ниво најкраћи је, са периодом од неколико недеља, при чему се праве планови производње, планирање снабдевања материјалом, планирају се датуми отпреме робе купцима, планирају се активности запослених итд.

Аутори који су се бавили стратегијским нивоом одлучивања су (Buxey, 2003; Goetschalckx et al., 2002; Jang et al., 2002; Kallrath, 2009; Niknejad and Petrovic, 2016). Највише аутора бавило се тактичким нивоом одлучивања (Aliev et al., 2007; Lim et al., 2007; Liang and Cheng, 2009; Oh and Carimi, 2006; Peidro et al., 2010; Selim et al., 2008; Torabi and Hassini, 2008). По својој природи средњорочно планирање погодно је за анализирање активности и циљева у ланцу. Оперативним нивоом одлучивања бавио се релативно мали број аутора (Jung and Jeong, 2012; Rizk et al., 2006; Rizk et al., 2008). Било је радова који су се бавили испитивањем више нивоа утицаја (Kanyalkar and Adil, 2005; Romo et al., 2009).

Преглед доступне литературе показује да није разматрано и анализирано време тока материјала у АПП проблемима. Међутим, у неким гранама индустрије време тока материјала изузетно је важан фактор и не може да буде занемарен јер има значајан утицај на ефикасност пословања произвођача. Типичан пример за то је аутомобилска индустрија. Додатно, већина модела фази АПП укључује фази параметре са троугластим и трапезоидним функцијама припадности, због своје једноставности интерпретације и рачунања. У дисертацији разматра се реалан АПП проблем из аутомобилске индустрије и развијен је модел фази линеарног програмирања, који разматра време тока

материјала код отпреме робе купцу, као меру ефикасности пословања произвођача делова за аутомобиле. Коришћени су реални историјски подаци у предузећу добављача за генерисање функције припадности неизвесног времена производње, који није троугласта или трапезоидна функција, већ по деловима линеарна функција припадности (енгл. piece-wise).

## 2.2 Модели оптимизације у агрегираном планирању производње

Истраживање литературе дало је увид у анализиране области у АПП проблемима којима се бавило доста аутора. Примењене су различите технике и оптимизационе методе за решавање конкретних АПП проблема. Аутори су тестирали предложене моделе у некој индустријској области или су користили импровизоване нумеричке податке. Било је и аутора који нису у раду валидирани предложени модел кроз нумерички пример (Tang et. al., 2010). У табели 2-1. је преглед новијих радова са предложеним АПП моделима са својим најважнијим карактеристикама (примењена математика код моделирања сегмената АПП, коришћена оптимизациона метода, број циљних функција и променљивих, област студије случаја итд.).

Табела 2-1. Поређење предложеног модела са другим АПП моделима

Параметар	Wang and Liang (2005)	Mezghani et al., (2008)	Tang et al., (2010)	Madadi and Wong (2014)	Kalaf et al., (2015)
Моделирање производње	Фази	Фази	Фази	Фази	Крисп
Моделирање потражње	Фази	Фази	Фази	Фази	Крисп
Моделирање нивоа залиха	Крисп	Крисп	Фази	Крисп	Крисп
Кашњење у испорукама	Разматрано	Разматрано	Разматрано	Разматрано	Није разматрано
Разматрани капацитети производње	Ограничен капацитет	Ограничен капацитет	Ограничен капацитет	Ограничен капацитет	Ограничен капацитет
Област студије случаја	Производња информационе опреме	Импровизовани подаци	Није рађено	Аутомобилска индустрија	Индустрија биљног уља
Број производа / Број периода	Више производа / Више периода	Више производа / Више периода	Више производа / Више периода	Више производа / Више периода	Више производа / Више периода
Оптимизацион а метода	Линеарно програмирање	Линеарно програмирање	Квадратно програмирање	Линеарно програмирање	Линеарно програмирање
Број циљних функција	Једна: 1. Минимализовање укупних трошкова	Две: 1. Минимализовање укупних трошкова производње 2. Минимализовање промена радне снаге	Једна: 1. Минимализовање укупних трошкова производње и залиха	Три: 1. Минимализовање укупних трошкова 2. Максимализовање квалитета производа 3. Максимализовање испорука на време	Две: 1. Минимализовање укупних трошкова производње 2. Минимализовање трошкова радне снаге
Променљиве у циљној функ. / Коэф. у циљној функ.	Крисп / Фази	Крисп / Крисп	Фази / Крисп	Крисп / Фази	Крисп / Крисп
Променљиве у огранич. /	Крисп / Фази	Фази / Крисп	Фази / Крисп	Фази / Крисп	Крисп / Крисп



Коеф. у огранич.					
Тип променљиве у циљној функцији	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Трошак редовне производње</li> <li>2. Трошак прековремене производње</li> <li>3. Трошак екстерне уговорене производње</li> <li>4. Трошак држања залиха</li> <li>5. Трошак заостатка у испоруци</li> <li>6. Трошак запослених радника</li> <li>7. Трошак отпуштених радника</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Број запослених</li> <li>2. Време редовне производње</li> <li>3. Прековремена производња</li> <li>4. Капацитет машина</li> <li>5. Ниво залиха</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Количина производње,</li> <li>2. Ниво залиха</li> <li>3. Потражња купца</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Количина производње</li> <li>2. Број радника за обуку</li> <li>3. Заостатак у испоруци</li> <li>4. Ниво залиха</li> <li>5. Количина порученог материјала за производњу</li> <li>6. Број обучених радника</li> <li>7. Ниво рекламација порученог материјала за производњу</li> <li>8. Прогнозирана потражња производа</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Прогнозирана потражња</li> <li>2. Количина производње</li> <li>3. Ниво залиха</li> <li>4. Укупан број радника</li> <li>5. Број ново-запослених радника</li> <li>6. Број отпуштених радника</li> <li>7. Прековремени рад</li> </ol>

Једна од примењених оптимизација је конвексна оптимизација у ланцу снабдевања (Bushuev, 2014; Colajanni and Daniele, 2018; Karakitsiou and Migdalas, 2015; Veinott, 2005), као и конкавна оптимизација код аутора Вејнота (Veinott, 2005). Робустном оптимизацијом бавили су се аутори Берсимас и Тила (Bertsimas and Thiele, 2004).

### 2.2.1 Линеарно програмирање

Истраживање доступне литературе показало је да је највећи број радова за проблеме агрегираног планирања производње (АПП) користио мешовито целобројно линеарно програмирање (енгл. MILP - Mixed Integer Linear Programming), као што су радови (Bilgen and Ozkarahan, 2007; Christou et al., 2007; Gomes et al., 2006; Letmathe and Balakrishnan, 2005; Sillekens et al., 2011; Turkay et al., 2016), затим целобројно линеарно програмирање (енгл. ILP - Integer Linear Programming) у раду аутора Ризка (Rizk et al., 2008), затим класично линеарно програмирање (Kanyalkar and Adil, 2005; Kim and Kim, 2001). Једна од доста примењиваних метода код АПП проблема је циљно програмирање (енгл. GP – Goal Programming) примењено у радовима (Baykasoglu, 2001; Gass, 1987; Hannan, 1985; Jones and Tamiz, 2002; Leung and Chang, 2009; Leung et al., 2003; Min and Storbeck, 1991; Rifai, 1996; Romero, 2004). Динамичко линеарно програмирање представљено је у раду аутора Чаја (Cai et al., 2008).

Мешовито целобројно линеарно програмирање у раду аутора Билгена и Озкарахана (Bilgen and Ozkarahan, 2007) примењено је за проблем прераде и отпреме пшенице. Проблем анализира доставу расутог терета са утоварних до истоварних лука различитим типовима пловила. Критеријумска функција у MILP минимализује укупан трошак утовара, прераде, залиха и транспорта. Постављена ограничења укључују потражњу купаца и захтева за прерадом, доступност зрна пшенице у изворном и прерађеном облику, као и ограничења капацитета прераде, утовара и транспортних пловила. Модел на излазу производи следеће податке: (1) количина зрна у изворном облику потребна за прераду, (2) количина сваког производа потребна за утовар у свакој

отпремној луци и потребна за транспорт до купца, (3) број сваког типа возила потребан за сваки период.

Мешовито целобројно линеарно програмирање, као оптимизациони модел, примењено је у раду аутора Кристоа и других (Christou et al., 2007) за проблем агрегираног планирања производње за више производа (MCP) у предузећу произвођача сокова. Модел је базиран на избору најизводљивијег плана производње са аспекта минималних трошкова да би се испунила прогнозирана потражња купца. Смањење трошкова подразумева ангажовање минималног броја смена потребних за испуњење плана производње, минимализовање залиха и максимализовање квалитета производа са аспекта рока трајања (што краће задржавање производа у магацину). Ограничења модела су: максималан капацитет производње по производној линији, време трајања производа, буџетирани трошкови. План производње, као излаз из модела, састоји се од три хијерархијска нивоа: месечно, недељно и дневно планирање производње.

У аутомобилској индустрији у проблему агрегираног планирања производње у раду аутора Силекенса и других (Sillekens et al., 2011) примењена је метода мешовито целобројно линеарно програмирање. Развијен модел узима у обзир планирање капацитета и флексибилност радне снаге. Модел је тестиран на реалним подацима и развијен је систем за подршку у одлучивању, као и апликација. Тестирање модела изведено је за три различита периода планирања и за четири различита тренда потражње купаца (константна, растућа, опадајућа, осцилирајућа).

Вишекритеријумско мешовито целобројно програмирање (MCMILP) примењено је на проблему у предузећу за производњу грађевинског материјала (Gomes et al., 2006). Три критеријумске функције заступљене су у агрегираном моделу за планирање производње: максимализовање профита предузећа, минимализовање закаснелих поруџбина (максимализовање задовољства купаца) и минимализовање промена у радној снази. Циљ истраживања је дефинисати потребан број радника за сваку врсту посла, број прековремених сати, ниво залиха за сваки производ и ангажовање подизвођача за испуњење потражње на тржишту за период од годину дана. Аутори су развили апликацију базирану на развијеном моделу као подршку доносиоцу одлуке. Апликација је тестирана на практичном проблему у предузећу које производи грађевински материјал у Португалији.

Код оптимизационих метода коришћено је и нелинеарно програмирање (енг. NLP - Non linear Programming), као што је у радовима (Lababidi et al., 2004; Memari et al., 2014; Penkuhn et al., 1997). У свом раду аутор Трапеј и други (Trappey et al., 1988) представили су модел фази нелинеарно програмирање који је трансформисан у модел крисп нелинеарно програмирање и као такав решен. Циљ модела је налажење оптималних параметара производње када су подаци неизвесни. Модел представљен у раду аутора Елахија и других (Elahi et al., 2011) јесте нелинеарно целобројно мешовито програмирање са две циљне функције, који се бави темом планирања у ланцу снабдевања и који треба да помогне доносиоцу одлуке. Конфигурација разматраног ланца снабдевања са четири је нивоа: више купаца – дорада - дистрибутер – малопродаја.

## 2.2.2 Вишециљна оптимизација у агрегираном планирању производње

У литератури предложено је доста хеуристичких и метахеуристичких алгоритама (Aliev et al., 2007; Chern and Hsein, 2007;) и хибридних модела (Lim et al., 2006, Oblak et al., 2017). Велики број аутора користио је вишециљно програмирање у различитим типовима математичког програмирања. Тако су настали модели: вишециљно линеарно програмирање (енгл. MOLP - Multi Objective Linear Programming), представљено у радовима (Al-e-hashem et al., 2011; Selim et al., 2008), вишециљно целобројно линеарно програмирање (енгл. MOILP - Multi Objective Integer Linear Programming) у раду аутора Торабија и Хасинија (Torabi and Hassini, 2008), као и вишециљно нелинеарно програмирање (енгл. MONLP - Multi Objective Non linear Programming) у раду аутора Роганинија (Roghianian et al., 2007) и вишециљно целобројно нелинеарно програмирање (енгл. MONLIP - Multi Objective Non linear Integer Programming) представљено у раду Чена и Лија (Chen and Lee, 2004). Генетски алгоритми коришћени су у анализи ланца снабдевања у радовима (Aliev et al., 2007; Tang and Wang, 1997).

Наведене методе коришћене су углавном код оптимизовања снабдевања материјалом, оптималног нивоа залиха, производних и дистрибутивних операција, интегрисаних производно – дистрибутивних операција, транспортно – дистрибутивних операција, у различитим гранама индустрије.

Аутор Џуниор и други (Junior et al., 2014) у свом раду користили су критеријуме код избора добављача: квалитет, цена, испорука на време, профил добављача са његовом репутацијом и финансијским бонитетом. Примењене методе су *fuzzy ANP* и *fuzzy TOPSIS* у области аутоиндустрије. Критеријуми код избора добављача: квалитет, финансијски показатељи, испорука на време, који се деле на подкритеријуме коришћени су у раду аутора Фалапора и других (Fallahpour et al., 2017) применом АНП методе. Подела на подкритеријуме следећа је: критеријум финансијски показатељ има подкритеријум цену материјала; критеријум логистика садржи подкритеријуме време испоруке, поузданост, флексибилност; критеријум квалитет има подкритеријум квалитет материјала. Интегрисани модел *fuzzy ANP* и *fuzzy MOORA* модел за решавање проблема у области индустријског инжењерства представљен је у раду аутора Акаја и других (Akca et al., 2015).

У свом раду аутори Кристеа и Кристеа (Cristea and Cristea, 2017) користе мултикритеријумску анализу код избора добављача, интегрисани робусни хибридни модел у повратној логистици за избор логистичког сарадника представљен је у раду аутора Пракаша и Баруа (Prakash and Barua, 2016), фази аналитички хибридни модел за рангирање инвестиција у индустрији аутора Динцера и других (Dincer et al., 2016), фази вишекритеријумски модел за одлучивање код набавке опреме за руковање аутора Јазданија (Yazdani, 2014), код избора добављача у зеленом ланцу снабдевања употреба више метода код вишекритеријумског одлучивања аутора Јазданија и других (Yazdani et al., 2016), за процену локације повратних центара у повратној логистици представљена је комбинација АНП, GIS и циљног програмирања аутора Акара и других (Acar et al., 2015).

Циљ највећег броја досадашњих истраживања јесте трошковна анализа у ланцу снабдевања и минимализовање трошкова (Rizk et al., 2008; Torabi and Hassini, 2008). Неки модели постављени су тако да рачунају максималну корист, зараду или продају аутора Алијева и других (Aliev et al., 2007) или комбинују минимализовање трошкова и максимализовање зараде аутора Селима и других (Selim et al., 2008). Многи радови,

поред оптимизовања трошкова у ланцу, укључују и ниво услуге и тиме комплетније представљају рационално функционисање у ланцу (Chen and Lee, 2004; Liang and Cheng, 2009; Selim et al., 2008). Максимализовање сигурносних залиха, један је од важних чиниоца рационалног пословања у ланцу, такође је разматрано у радовима и то углавном заједно са максимизовањем користи и нивоа услуге (Chen et al., 2003; Chen and Lee, 2004).

Трошкови производње, трошкови држања залиха, транспортни трошкови, трошкови узроковани кашњењем испорука, трошкови радне снаге и други разматрани трошкови у радовима анализирани су на индивидуалним примерима предузећа и држава. Јасно је да се такви параметри разликују у другим државама и у другим предузећима. Зато такви модели не могу да се користе као универзални и закључци изведени из таквих истраживања својствени су узетом примеру.

### **2.2.3 Неуронске мреже**

У оптимизацији залиха у предузећу развијани су модели са употребом неуронских мрежа. Један од радова који се бави применом неуронских мрежа у ланцу снабдевања јесте аутора Хеа (He, 2013). У раду је наведено да стандардни модели, који користе мреже са методом простирања уназад могу да дају недовољно прецизне податке или су недовољно брзи код проналажења решења. Вештачке неуронске мреже са простирањем уназад (енгл. Back-propagation) највише је коришћен модел. Простирање уназад има за циљ да подеси тежинску матрицу према квадрату грешке између тренутног резултата на излазу и циљаног излазног резултата. Развијен модел у раду користи нову тежинску формулу и ново правило простирања у неуронској мрежи. Модел је експериментално тестиран у аутомобилској индустрији у предузећу добављача који производи лежачеве у Кини. Модел користи реалне податке за обучавање неуронске мреже са унапређеном формулом за простирање уназад. Да би се избегла два негативна случаја код неуронских мрежа, која доводе до непрецизних излазних података, а то је недовољно података за обучавање мреже или прекомеран број података, изабрано је 100 група података за обучавање мреже. Коришћена је трослојна структура мреже. Улазни податак у мрежу јесте девет фактора: трошкови складиштења, трошкови поруџбине, трошкови кашњења, транспортни трошкови, ниво потражње, ниво снабдевања, количина заменских делова, време чекања, ниво услуге. Нови алгоритам упоређен је са стандардним алгоритмом простирања уназад и са друга два унапређена алгоритма из литературе. Показао је прецизнију прогнозу залиха и бржу конвергенцију ка решењу.

## **2.2 Агрегирано планирање производње у присуству неизвесности**

У литератури препознато је да укључивање неизвесности у АПП моделе на одговарајући начин доноси предности у решавању практичних проблема у раду аутора Мула и других (Mula et al., 2006). У раду аутора Ванга и Фанга (Wang and Fang, 2001) развијен је фази АПП модел са више циљних функција за фамилију производа (MOFLM). Постављене критеријумске функције су капацитет производње, радна снага, цена производа, купчева потражња и трошкови екстерних сарадника. Сличан АПП модел разматран је у раду аутора Фунга и других (Fung et al., 2003) користећи параметарско

програмирање које омогућава доносиоцу одлуке да изабере одговарајући агрегирани план услед фази потражње, фази капацитета и финансијских ограничења. У раду аутора Калафа и других (Kalaf et al., 2015) развијен је FMO LP модел који минимализује трошкове производње и радне снаге у две критеријумске функције уз ограничења нивоа залиха, радне снаге, прековременог рада, капацитета производње. У моделу развијеном у раду аутора Аријафара и других (Ariafar et al., 2014), у коме је критеријумска функција фази троугласта функција припадности, сви параметри представљени су троугластом функцијом припадности. Толеранција код доношења одлуке је одређена линеарном функцијом припадности монотоно нерастућом. Трансформација из фази модела у крисп LP модел извршена је користећи Белман и Задехову (Bellman and Zadeh, 1970) заједно са Цимермановом методом трансформације (Zimmermann, 1978). Преглед фази моделирања и фази оптимизације представљен је у раду аутора Танга и других (Tang et al., 2004).

Фази оптимизациони модел са фази математичким програмирањем представљен је у раду Пеидра и других (Peidro et al., 2009) у коме је формиран модел базиран на фази мешовито целобројно линеарним програмирањем. Сви елементи у моделу (коэффициенти критеријумске функције, коэффициенти леве стране ограничења, десна страна ограничења и неједнакост у ограничењима) моделирани су са троугластим фази функцијама припадности и тестирање је извршено на примеру из аутомобилске индустрије. Фази фактори у моделу су: трошкови производње, капацитет производње, време производње, прековремени трошкови радне снаге, трошкови држања залиха, трошкови кашњења у испорукама, максимални капацитет снабдевања материјалом од добављача, прековремени капацитет ресурса, потражња купца, транспортни трошкови, време транспорта, максимални транспортни капацитет, максимални капацитет магацина. У модел укључена је могућност бирања нивоа задовољења, где доносилац одлуке може да утиче на крајњи резултат постављеног проблема. Крајњи циљ постављеног АПП модела јесте минимализовање трошкова у ланцу снабдевања. Трансформација из FMILP извршена је у крисп MILP употребом Јејгерове методе.

Фази оптимизациони модел са целобројним линеарним програмирањем дат је у раду аутора Дијаза-Мадронера и других (Diaz-Madronero et al., 2014) за планирање транспорта код набавке репроматеријала за производњу код добављача првог нивоа у аутомобилској индустрији. Резултати примене модела показали су боље планирање залиха и боље искоришћење капацитета камиона. Фази програмирање представљено је у радовима (Cadenas and Verdegay, 1995; Tanaka et al., 1974).

Фази вишециљно мешовито целобројно нелинеарно програмирање у АПП предложено је у раду аутора Голамијана и других (Gholamiana et al., 2016). Фази купчева потражња укључена је у ограничења модела. Модел садржи три критеријумске функције које минимизују укупне трошкове у ланцу снабдевања, недостатак делова за испоруку и флукуацију запослених.

Линеарно мешовито целобројно програмирање (MIPs) конструисано је у раду аутора Ауоама и других (Aouam et al., 2018) да реши два проблема планирања производње са неизвесном потражњом. Аутори су разматрали интеграцију купчеве потражње у планирање производње у два практична случаја: планирање производње са ограниченим капацитетима величине производне серије и планирање производње са ограниченим дужинама производње. У првом случају одлучивање прихватања или одбацивања купчеве поруџбине условљено је висином трошкова, а у другом случају одлучивање условљено је кашњењем испуњења осталих поруџбина. Примењена је

робустна оптимизација и хеуристички метод коришћен је претходно за проналажење изводљивог решења, а затим и за побољшање достигнутог решења.

Целобројно мешовито програмирање је примењено у раду аутора Саламатија-Хормозија и других (Salamati-Hormozi, et al., 2018) за решавање проблема планирања производње за више производа и више периода у производном систему „производња по поруџбини (енгл. make-to-order manufacturing system). Разматран је случај када произвођач раздвоји купчеву поруџбину и преусмери на произвођача кооперанта да би минимализовао трошкове производње. Три метахеуристичка алгоритма развијена су и примењена у више експеримената да би се добили подаци за парето оптималан скуп. Доносилац одлуке бира податке из парето скупа за одговарајуће решење.

Савремени ланац снабдевања садржи вишехијерархијско доношење одлука. Оптимизација појединачног циља на одређеном нивоу у ланцу снабдевања у конфликту је са оптимизацијом циља целог ланца. У раду аутора Аврамидоуа и Пистикопулоса (Avraamidou and Pistikopoulos, 2017) хијерархијски дистрибутивно – производни проблем разматран је кроз мешовито целобројно линеарно програмирање у два нивоа (B-MILP) са неизвесном потражњом. Алгоритам је развијен за више параметарски проблем програмирања за нижи ниво планирања производње, где главни параметар зависи од потражње дистрибуције са вишег нивоа планирања дистрибуције. У изведеним експериментима анализирана су два различита случаја: за константну и за неизвесну купчеву потражњу. У раду аутора Билгена (Bilgen, 2010) разматран је проблем интеграције производних планова у фабрици са планом доставе робе у дистрибуционе центре. Развијен је фази модел са фазификованих ограничењима капацитета и нивоом прихватања трошкова на бази различитих агрегационих оператора. Студија случаја извршена је у индустрији робе широке потрошње.

У савременом производном процесу веома важан елемент је потрошња енергије. Данас многи произвођачи улажу велика финансијска средства да оптимизују и смање потрошњу енергије. У раду аутора Модареса и Изадпанахија (Modarres and Izadpanahi, 2016) развијен је линеарни програм (MOLP) са три критеријумске функције које минимализују оперативне трошкове, трошкове енергије и емисију гасова. Да би се решио вишециљни модел, коришћена је техника достизања циља (енгл. Goal Attainment Technique). Неизвесни параметри у моделу су: оперативни трошкови, енергија, параметри гасова, потражња и максималан капацитет. Техника робустне оптимизације употребљена је за решавање неизвесности и достизање изводљивог решења. Експеримент је изведен на практичним подацима у топионици за средњерочно планирање производње и резултати показују велики утицај трошкова енергије на укупне трошкове.

Неизвесношћу у потражњи купца бавили су се у раду аутори Петровић и други (Petrovic et al., 2008). Потражња купца моделирана је као лингвистичка варијабла са дискретним фази скуповима. Минимални укупни трошкови у разматраном ланцу снабдевања детерминисани су разлагањем генералног модела на више једноставнијих подмодела. Укупни трошкови састоје се од две компоненте: трошкови малопродаје и трошкови магацина. Трошкови магацина, као и трошкови малопродаје, састоје се од фази трошкова држања залиха и фази трошкова неиспоручених делова. У одвојеним моделима трошкови су представљени линеарним функцијама припадности са толеранцијом између прихватљиве и песимистичне вредности трошкова. На крају је развијен модел за координацију у разматраном ланцу снабдевања за сваки временски

интервал у целом посматраном периоду. Ограничења постављена у моделу координације су фази дискретни скупови за контролу подмодела.

Моделирањем прогнозе купчеве потражње бавили су се у раду аутори Петровић и други (Petrovic et al., 2006). Потражња купца у моделу састављена је од четири компоненте, две су формиране на основу лингвистичке интерпретације купца и стручњака на тржишту и представљене су кроз фази скупове, док су друге две крисп вредности добијене употребом статистичке анализе ARMA модела и модела временске серије. Оба фази скупа улазних компоненти у модел представљена су симетричним трапезоидним функцијама припадности. Улазна компонента статистичке прогнозе потражње обрађена временским серијама користи сезоналност, тренд и цикличан параметар временске серије код историјских података. Четврта улазна компонента која користи ARMA модел, подешена је са параметрима модела које бира сам корисник. Прве две улазне компоненте са фази скуповима дефазификоване су употребом *mean-maximum* модела. Интеграција четири компоненте извршена је употребом девет IF-THEN правила и *Mamdani* моделом закључивања. Нови механизам учења развијен је у моделу који побољшава постављена IF-THEN правила јер проверава перформансе постављених правила кроз преиспитавања поверења сваког од улазних компоненти у модел. Такође, оставља могућност доносиоцу одлуке да подешава тежину важности улазних компоненти. Модел прогнозе даје један излаз који је, такође, фази скуп и који је дефазификован како би се добила крисп вредност на излазу. Развијени модел прогнозе потражње верификован је на реалним подацима из индустрије, где је показао своју употребну вредност. На крају тестиран је модел са механизмом учења и без њега уз поређење са практичним подацима. Студија случаја показала је да модел са механизмом учења даје доста прецизнију прогнозу потражње.

Прогнозом купчеве потражње бавили су се у раду аутори Луксој и други (Luxhoj et al., 1996). Развили су хибридную економетријску неуронску мрежу. Модел је робустан и састоји се од три сегмента, при чему су излази из прва два уједно и улаз у трећи сегмент. Први сегмент користи Винтеров експоненцијални метод, други постепено вишеструку регресију (енгл. Stepwise Multiple Regression) и последњи сегмент је трослојна неуронска мрежа. За избор одговарајуће методе у првом сегменту извршена је анализа сензитивности више познатих статистичких метода, при чему је одабран Винтеров метод, који укључује тренд, сезоналност и локацију. У другом сегменту коришћена је постепена вишеструка регресија (енгл. Backward Stepwise Regression) са простирањем уназад, која у сваком кораку елиминише варијаблу са најмањом зависношћу. У трећем сегменту коришћена је неуронска мрежа трослојне архитектуре. Да би се дошло до адекватног типа мреже за обраду података извршено је тестирање два типа: са простирањем уназад и са генералном регресијом. Генерална регресија показала је боље резултате. Коришћено је 11 улазних варијабли, 51 скривени неуронски чвор и једна излазна варијабла. Излазни подаци у првом сегменту улазни су подаци у други сегмент, док су излазни подаци из другог сегмента улазни подаци за трећи сегмент. Сваки од резултата сегмената контролисан је од стране менаџмента предузећа „филтрирајући“ податке кроз избор утицајних варијабли или подешавајући укупну прогнозу продаје. Хибридни модел садржи сигнал праћења, који регулише величину грешке на излазу из модела и сигнализира потребу ревизије сегмената у моделу. Поређење је извршено са квалитативним приступом прогнозе продаје групе за истраживање тржишта у данској компанији за производњу аудио/видео уређаја. Хибридни модел показао је боље прогнозиране резултате са мањом грешком за период

од шест месеци. Резултат хибридног модела са прецизном прогнозом продаје у краткорочном периоду треба да подржи планирање производње у компанији.

Прогноза потражње, пратећи промене у периоду испред реализације потражње, представљена је у раду аутора Хета и Џексона (Heath and Jackson, 1994). Грешка у прогнози потражње купаца негативно утиче на планирање производње и дистрибуције робе са аспекта трошкова, организације радне снаге и нивоа услуге. Развијен је еволуциони метод прогнозе потражње и анализиран је утицај на сигурносне залихе за више производа у више фабрика у производно - дистрибутивном систему. Коришћени су Мартингалов модел еволутивне прогнозе (MMFE) и линеарно програмирање у проблему производно – дистрибутивног планирања за утврђен период.

Моделирањем купчеве потражње у ланцу снабдевања, која је подложна променама, бавили су се у раду аутори Ким и други (Kim et al., 2005). Модел је развијен на структури ланца снабдевања: један добављач – више малопродајних објеката. Предложена су два модела заснована на контроли залиха у наведеној структури ланца снабдевања: централизован модел и децентрализован модел. Контролни параметри у оба модела дефинишу време допуне залиха код свих малопродајних објеката. Заједнички циљ оба модела јесте испуњење нивоа услуге. У централизованом моделу добављач је одговоран за контролу залиха у малопродајним објектима примењујући правило испоруке тачно на време (енгл. Just In Time). Добављач прати поруџбину малопродаје и продају анализирајући историјске податке и прогнозирајући потражњу кроз линеарну временску серију. У децентрализованом моделу сваки малопродајни објекат дужан је да сам контролише своје сигурносне залихе у односу на промену потражње купаца, док је добављач дужан да испоручи робу тачно на време, слично као у централизованом моделу. Експеримент је изведен у ланцу снабдевања са једним добављачем и четири малопродајна објекта, а разматрана су два случаја: са стационарном и са променљивом купчевом потражњом.

Аутори Јунг и Јеонг у раду (Jung and Jeong, 2012) користили су фази линеарно програмирање (FLP) у постављеном моделу за решавање проблема планирања у ланцу снабдевања. Анализиран период купчеве потражње састоји се из две компоненте: период са доступним подацима из предузећа и период прогнозиране потражње. На основу доступних података извршена је калкулација горње границе оптимистичне вредности потражње и доње границе песимистичне вредности потражње. Функција припадности фази скупа потражње купца добијена је на основу анкетања експерата у предузећу и експерата са тржишта са питањима о мишљењу о резултатима извршене калкулације. Експерти су одговарали на питања са већ понуђеним одговорима на бази резултата добијених калкулацијом. У раду је представљен модел дефазификације базиран на фази систему закључивања. Фази систем закључивања састоји се од две улазне променљиве, а то су субјективно мишљење експерата у предузећу и експерата са тржишта за период прогнозиране потражње (изван периода прикупљања података) и излазне варијабле, која је формирана из горе наведене калкулације. Улазне варијабле су троугласти и линеарни фази скупови. Дефинисано је девет IF-THEN правила и коришћен је *Mamdani* принцип у систему закључивања. У дефазификацији коришћен је метод центра гравитације и крисп вредност потражње купца коришћена је у класичном моделу линеарног програмирања. Ланац снабдевања састоји се од произвођача, дистрибуције и крајњег корисника. Циљ оптимизације предложеног модела јесте максимализација зараде у комплетном ланцу уз неизвесност у потражњи купца. Студија случаја је извршена у корејском предузећу које производи мобилне телефоне. Сви



улазни параметри у FLP, осим потражње купаца, генерисани су као случајни бројеви: производни трошкови, транспортни трошкови, трошкови држања залиха, капацитет магацина, производни капацитети, транспортни капацитети. Фази линеарно програмирање коришћено је и у радовима (Cadenas and Verdegay, 1997; Campos and Verdegay, 1989; Mahdavi-Amiri and Nasser, 2007; Maleki et al., 2000; Nasser, 2008; Rommelfanger and Slowinski, 1998; Tanaka and Asai, 1984; Zarandi, et al., 2007).

Циљно програмирање, такође је експлоатисана метода у објављеним радовима у области планирања производње. У раду који се бави увођењем фази логике у циљно програмирање аутора Акоза и Петровића (Akoz and Petrovic, 2007) представљен је модел у коме је неодређена важност циљева формулисана фази бинарним релацијама. Баланс између степена достигнућа свих задатих циљева у моделу и степена задовољења релације између циљева изражен је кроз додатну функцију. Додатна функција која се максимализује у проблему линеарног програмирања збир је суме степена достизања фази циља и суме степена задовољења неодређене важности релације. Бирањем степена достизања циљева у моделу и лингвистичке неодређене релације између циљева, доносилац одлуке може далеко ефикасније доћи до жељеног решења. Дат је математички пример примене модела, као и поређење са резултатима примене модела из раније објављених радова. У раду аутора Селима и других (Selim et al., 2008) примењено је фази циљно програмирање у ланцу снабдевања за производно-дистрибутивни проблем. Практичан пример дат је за хипотетички постављен случај. Аутори Лијао и Као (Liao and Kao, 2014) развили су хибридни модел који укључује циљно програмирање, QFD (енгл. Quality Function Development) и FEANP (енгл. Fuzzy Extended Analytic Hierarchy Process) и применили га у проблему. Фази циљно програмирање анализирано је у радовима (Chanas and Kuchta, 2002; Chen and Tsai, 2001; Mohamed, 1997; Mohandas et al., 1990; Mohanty and Vijayaraghavan, 1995; Narasimhan, 1980; Tiwari et al., 1987).

Аутори у раду Ванг и Лијанг (Wang and Liang, 2004) развили су АПП модел са линеарним програмирањем и више циљних функција, при чему се минимализују трошкови производње, трошкови држања залиха и неиспоручених делова, као и минимализовање стопе промене у радној снази. Модел је проширен у раду аутора Ванга и Лијанга (Wang and Liang, 2005) користећи линеарно програмирање могућности (енгл. possibilistic linear programming (PLP)) за моделирање неизвесности у капацитету, прогнозираној потражњи и оперативним трошковима. Исти аутори развили су у раду (Wang and Liang, 2007) интерактиван PLP модел у којем доносилац одлуке има могућност да интерактивно мења непрецизност података и параметре док се не достигне задовољавајуће решење. Линеарно програмирање могућности коришћено је у раду аутора Пруксапханрата (Phruksaphanrat, 2011) за максимализовање профита и минимализовање промене у радној снази. Студија случаја урађена је у електронској индустрији.

Метод који трансформише проблем фази линеарног програмирања (FLP) у проблем крисп линеарног програмирања дат је у раду аутора Џименезеа и других (Jimenez et al., 2007). Метод се бави фази моделом са линеарном фази критеријумском функцијом и линеарним фази функцијама ограничењима са фази параметрима, при чему су сви фази параметри моделирани трапезоидним функцијама припадности. Предложени модел разматра два циља: побољшање задовољења критеријумске функције и побољшање степена задовољења ограничења. Ова два циља у конфликту су јер уколико је степен задовољења ограничења виши, тј. мање је одступање фази

ограничења и сужава се подручје изводљивости, и тиме се погоршава вредност фази критеријумске функције и смањује се задовољење решења критеријумске функције. Метод тражи баланс између наведене две конфликтне области. Метод је итеративан, у свакој итерацији степен изводљивости ограничења повећава се и с тим у складу одређује се задовољење решења критеријумске функције. Решење са највећим задовољењем критеријумске функције и највећим степеном изводљивости ограничења бира се као задовољавајуће решење. Метод је верификован на теоријском примеру.

### 3. Преглед литературе о релевантним дефиницијама и концептима теорије фази скупова

Већина АПП модела бави се неизвесношћу користећи класичну теорију вероватноће и разматра само један тип неизвесности који се базира на случајности и фреквенцији случајног догађаја. Задех је у свом раду (Zadeh, 1965) предложио нови приступ код бављења неизвесношћу увођењем концепта фази логике. У литератури је доказано да фази скупови могу да буду успешно примењени у моделирању неизвесности, где су доступне информације неодређене или непотпуне услед недостатка довољно знања о разматраној појави. Цимерман је у свом раду први пут увео фази логику у оптимизациону методу линеарног програмирања са више циљних функција (Zimmermann, 1978). У случају АПП модела, неизвесност може бити описана субјективним знањем експерата, искуством и претпоставкама, и изражена кроз непрецизне језичке изразе, као што је велико, веома велико, средње, довољно мало, итд. У литератури могу да се нађу добри примери примене фази скупова у проблему управљања ланцима снабдевања, као нпр. у комуникацији међу члановима ланца снабдевања (Wulan and Petrovic, 2012), у проблемима планирања материјала (Mula et al., 2006), или у моделирању ланца снабдевања (Petrovic et al., 1999). У раду аутора Танга и других (Tang et al., 2000) разматрана је неизвесност у потражњи купца и производним капацитетима, која је моделирана као фази вредност у АПП моделу за више производа. Аутори су предложили оптимизацију АПП модела, где су укупни трошкови минимализовани и укључују квадратне трошкове производње и линеарне трошкове држања залиха. Модел фази квадратног програмирања са фази критеријумском функцијом и фази ограничењима трансформисан је у модел са класичним линеарним програмирањем и јединственим решењем.

Неизвесност у купчевој потражњи са употребом фази скупова бавили су се у раду аутори Петровић и други (Petrovic et al., 2006). Циљ рада је контрола нивоа залиха у ланцу снабдевања са два нивоа, који се манифестују кроз трошак држања залиха и неиспоручених делова у целом ланцу снабдевања. Контрола залиха у целом ланцу снабдевања разложена је на подпроблеме локалне оптимизације за сваку карику у ланцу, односно фабрику. Локално оптимизирани трошкови интегрисан су у генералан модел који оптимизује трошкове у целом ланцу снабдевања. Фази скупови за купчеву потражњу представљени су као дискретни скупови, који су формиран на основу могућих вредности купчеве потражње. Наиме, експерти су одговарали на питање да ли купчева потражња може да буде у датој вредности, на шта је одговарано са „да“ или „не“. Функција припадности приказана је у дискретном облику, што је суштинска разлика од континуалног облика, и при чему сума свих вредности функције припадности не мора да буде нужно једнака. Како је потражња изражена кроз фази скуп, тиме су и трошкови фази скупови. Дефазификација фази скупова извршена је методом гравитације (метода момента). Алгоритам за генерални модел, који обједињује подмоделе, развијен је и доказао је да су резултати контроле над целим ланцем снабдевања бољи него када се разматрају резултати подмодела за сваку карику у ланцу.

Веома важно питање, које се поставља код употребе фази скупова у реалним проблемима, јесте како да се формира одговарајућа функција припадности. Постоји ограничен број радова који се баве овом темом. Један од радова је рад аутора Педрича

и Гомидеа (Pedrycz and Gomide, 1998) који су идентификовали експерименталну методу за формирање функције припадности на основу субјективне процене експерата. Аутори Дубоа и Праде (Dubois and Prade, 1986) предложили су метод генерисања функције припадности неизвесних параметара на основу расподеле вероватноће вредности параметара. Овај метод касније је проширен за случај када расподела вероватноће параметара није позната, али постоје емпиријски подаци, као што је представљено у раду Масона и Денуеа (Masson and Denoeux, 2006). У овом раду је демонстриран метод аутора Дубоа и Праде (Dubois and Prade, 1986), где је доказано да различите функције припадности фази скупова могу да буду генерисане за различите узорке података са истом расподелом вероватноће. Зато су аутори Масон и Денуе (Masson and Denoeux, 2006) предложили метод који гарантује да је формирана функција припадности настала коришћењем емпиријских података са непознатом расподелом вероватноће са одређеним нивоом поверења. Трансформација расподеле вероватноће у расподелу могућности представљена Масон и Денуе методом (Masson and Denoeux, 2006) генерализована је у раду на практичном примеру, када је расподела вероватноће непозната за скуп емпиријских података. У Дубоа и Праде методи (Dubois and Prade, 1986) расподела могућности доминира над познатом расподелом вероватноће, док су аутори Масон и Денуе (Masson and Denoeux, 2006) развили метод који израчунава расподелу могућности из фамилије непознатих расподела вероватноће уз ниво поверења,  $1 - \alpha$ . То значи да крајња расподела могућности доминира над расподелом вероватноће у најмање  $100(1 - \alpha)\%$  случајева. Дубоа и Праде (Dubois and Prade, 1986) метод трансформације гради се употребом пермутације чија повратна пермутација даје рангирање елемената вектора вероватноће по растућем редоследу. Елементи вектора расподела могућности настају из суме елемената вектора расподеле вероватноће, при чему су представљене две формуле, у зависности да ли се елементи вектора расподеле вероватноће понављају или не. Како из истог узорка прикупљених података могу да настану различите расподеле вероватноће, аутори уводе интервале поверења на мултиноминалној дистрибуцији са заједничким нивоом поверења. Узастопни интервали поверења чине једну ширу област поверења са расподелом вероватноће која покрива дату област. Аутори користе метод одређивања граница интервала поверења из рада аутора Гудмана (Goodman, 1965). Развијен је алгоритам са линеарним моделом који израчунава расподелу могућности, која доминира над свим могућим расподелама вероватноће из емпиријских података.

Поред испред наведеног рада, трансформацијом расподеле вероватноће у расподелу могућности бави се и рад аутора Јина и других (Jin et al., 2018). Аутори су у раду на почетку представили аксиоме трансформације расподеле вероватноће у расподелу могућности дефинишући модел APPT (енгл. Admissible Probability-to-Possibility Transformation). Дате су четири аксиоме, већ познате у литератури, које осигуравају трансформацију из једне у другу расподелу. У наставку дат је осврт на трансформацију објављену у раду аутора Дубоа и Праде (Dubois and Prade, 1988) износећи све аксиоматске карактеристике модела ААТ (енгл. Arising Accumulation Transformation). Како је према првој аксиоми трансформација бијективна, предстаљен је и модел РААТ (енгл. Reverse Arising Accumulation Transformation), који дефинише повратну трансформацију из расподеле могућности у расподелу вероватноће. У једном поглављу представљена је практична примена модела ААТ и РААТ у доношењу одлука. Након формиране расподеле могућности или вероватноће употребом ова два модела, крисп решења, која се захтевају у доношењу одлуке, могу да се добију применом

различитих метода познатих у литератури, а која у раду нису разматрана. Доносилац одлуке среће се у пракси са већом или мањом неизвесношћу на основу које треба да одлучи како да започне или заврши нека пословна активност. Неизвесност може да се степеније, при чему су аутори у раду дефинисали степен неизвесности UD (енгл. Uncertain degree), и кроз методу проширења или смањења степена неизвесности пружили могућност доносиоцу одлуке да прошири или ублажи неизвесност на основу свог мишљења и искуства. Друга метода употребом пресека или реза,  $\lambda$  даје могућност доносиоцу одлуке да одлучи да ли ће излазно решење бити у одређеном скупу излазних решења изнад жељеног пресека или реза,  $q(x_i) > \lambda$ . Трећа метода представља комбинацију претходне две методе и даје доносиоцу одлуке шире могућности у разматрању неизвесности код доношења одлуке. Ова метода јесте генерализовање претходне две методе и њених параметара, степена неизвесности и пресека (реза). Све три методе служе за дефинисање расподеле могућности. Како је трансформација повратна, расподела вероватноће такође може да се одреди из добијене расподеле могућности. На крају рада аутори су дали поглавље које су назвали: *Процена користи неизвесних информација користећи могућност - вероватноћа теорије*. Овде је представљена додатна метода која даје могућност доносиоцу одлуке да одабере информације од мањег значаја, искључи их из процеса доношења одлуке и тиме убрза процес обраде података. Увођење додатне функције, за одређивање корисних информација из скупа понуђених информација, прилагођава процес доношења одлука практичном проблему и уз то убрзава процес. Представљене су две методе за генерисање додатне функције.

Преглед литературе показао је да су фази АПП модели углавном формулисани као модели фази математичког програмирања са фази критеријумском функцијом и/или фази ограничењима. Како би се добило јединствено решење проблема АПП, углавном фази АПП модели трансформишу се у крисп оптимизационе проблеме на начин да се добро познати детерминистички оптимизациони модели могу да примене. Различити приступи код трансформације предложени су у литератури, као нпр. у радовима (Baykasoglu and Gocken, 2008; Jiafu et al., 2004; Rommelfanger, 1996). Типично фази оптимизациони модели садрже:

1. Фази критеријумску функцију која може да укључи разне методе рангирања вредности фази критеријумске функције;
2. Фази ограничења која укључују разне методе трансформације фази ограничења у крисп ограничења базирана на интервалу толеранције;
3. Заједно фази критеријумску функцију и фази ограничења, при чему се тежи решењу њиховог максималног задовољења.

### 3.1 Дефиниција фази скупова

Свакодневно се срећемо на послу и у приватном животу са различитим неодређеностима у информацијама, изјавама и тврдњама. Често су те неодређености последица немогућности да прецизно дефинишемо у датом моменту тражени податак, зато дајемо информацију са оквирним подацима. Овакве непрецизности можемо да класификујемо у две групе: неизвесно (енгл. Uncertainty) и нејасно (енгл. Vagueness). Наведимо пример тумачења неодређености у наредне две тврдње:

1. „Производња ће да буде завршена ускоро.”

2. „Производња ће да буде завршена у наредних сат времена.“

У првој реченици нејасно је када ће производња да буде завршена. Никаква ближа информација није дата. Производња може да буде завршена у наредних 10 минута, један сат или више сати. У другој реченици дата је ближа информацију о томе када ће производња да буде завршена. Међутим, прецизан податак и даље недостаје, можда буде завршена у наредних 15 минута, пола сата или сат времена. У односу на прву реченицу у другој дата је временска граница завршетка производње, производња ће да траје максимално сат времена. Ова изјава припада групи неизвесности.

Фази скупови важни су за моделирање неизвесних, нејасних, недовољно прецизних и лингвистичких израза у математици. Елемент неког скупа не мора нужно да припада у целости датом скупу. Његова припадност може да буде парцијална. То је основна разлика у односу на детерминистичке скупове, који изражавају припадност неког елемента скупу према бинарном систему, припада или не припада.

Сви елементи фази скупа  $\tilde{S}$  дефинисаног на универзалном скупу  $\Omega$ ,  $\tilde{S} \in \Omega(R)$  могу да се опишу функцијом припадности,  $\{\mu_{\tilde{S}}(x)|x \in R\}$ . Функција припадности узима вредности из интервала  $[0,1]$ . Функција припадности може да има различите облике и самим тим и различите особине. Најчешћи облици функције припадности су: линеарна, троугласта, трапезоидна, звонаста (гаусовска), параболична, по деловима линеарна (енгл. *piece-wise*) итд. Облик функције може да буде и неправилан. Функције припадности према континуалности могу да буду непрекидне и дискретне.

### **Особине функције припадности**

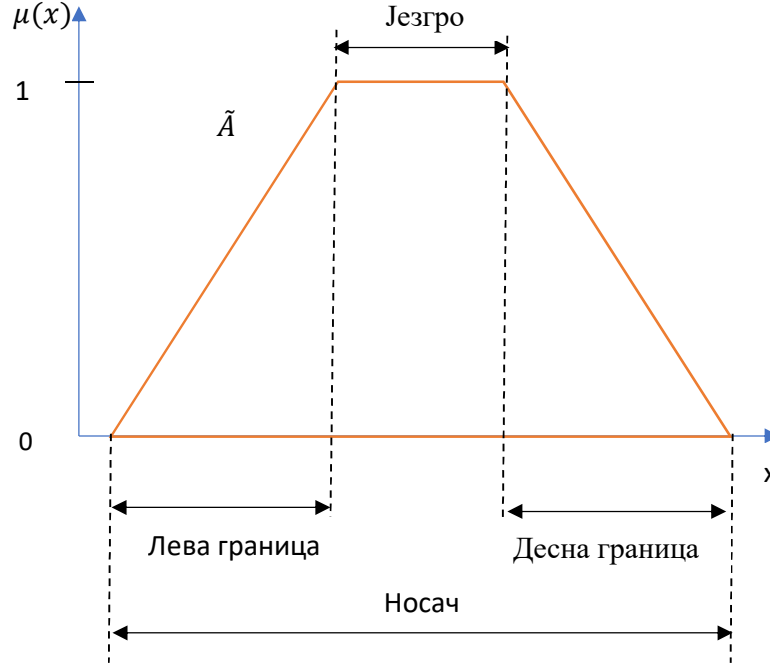
Језгро (енгл. *core*) функције припадности датог фази скупа  $\tilde{S}$  област је у којој функција припадности има највећу вредност (слика 3-1), за нормализован фази скуп то је  $(x|\mu_{\tilde{S}}(x) = 1)$ . Фази скуп може да садржи један или више елемената, који имају такву функцију припадности.

Носач (енгл. *support*) функције припадности датог фази скупа  $\tilde{S}$  област је у којој функција припадности различита је од нуле, односно сви елементи фази скупа имају функцију припадности  $(x|\mu_{\tilde{S}}(x) > 0)$ .

Инфимум (*inf*) јесте највеће доње ограничење фази скупа  $\tilde{S}$ .

Супремум (*sup*) јесте најмање горње ограничење фази скупа  $\tilde{S}$ .

Границе функције припадности датог фази скупа  $\tilde{S}$  граничне су области у којима је функција припадности различита од нуле и садржи одређени степен фазификованости. Математички може се изразити  $(x|0 < \mu_{\tilde{S}}(x) < 1)$ .



Слика 3-1. Елементи функције припадности,  $\mu(x)$

Унија два фази скупа  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  означава се као  $\tilde{A} \cup \tilde{B}$  и дефинише се као најмањи фази скуп који садржи истовремено и фази скуп  $\tilde{A}$  и фази скуп  $\tilde{B}$  (Teodorovic and Vukadinovic, 1998). Функција припадности уније фази скупова,  $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x)$  дефинише се на следећи начин:  $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ . Функција припадности уније два фази скупа приказана је на слици 3-23.

Пресек два фази скупа  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  означава се као  $\tilde{A} \cap \tilde{B}$  и дефинише се као највећи фази скуп, који садржи истовремено и фази скуп  $\tilde{A}$  и фази скуп  $\tilde{B}$  (Teodorovic and Vukadinovic, 1998). Функција припадности пресека фази скупова,  $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x)$  дефинише се на следећи начин:  $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ . Функција припадности пресека два фази скупа приказана је на слици 3-3.

Функција припадности дефинише облик фази скупа. Фази скуп  $\tilde{a}$  трапезоидан је  $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ , ако је његова функција припадности  $\mu_{\tilde{a}}$ :

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} f_a(x), & a_1 \leq x < a_2 \\ 1, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ g_a(x), & a_3 < x \leq a_4 \end{cases}$$

где су  $f_a(x)$   $g_a(x)$  растућа и опадајућа функција, респективно. Ако је  $a_2 = a_3$ , онда је  $\tilde{a}$  троугласти фази број (Pedrycz and Gomide, 1998).

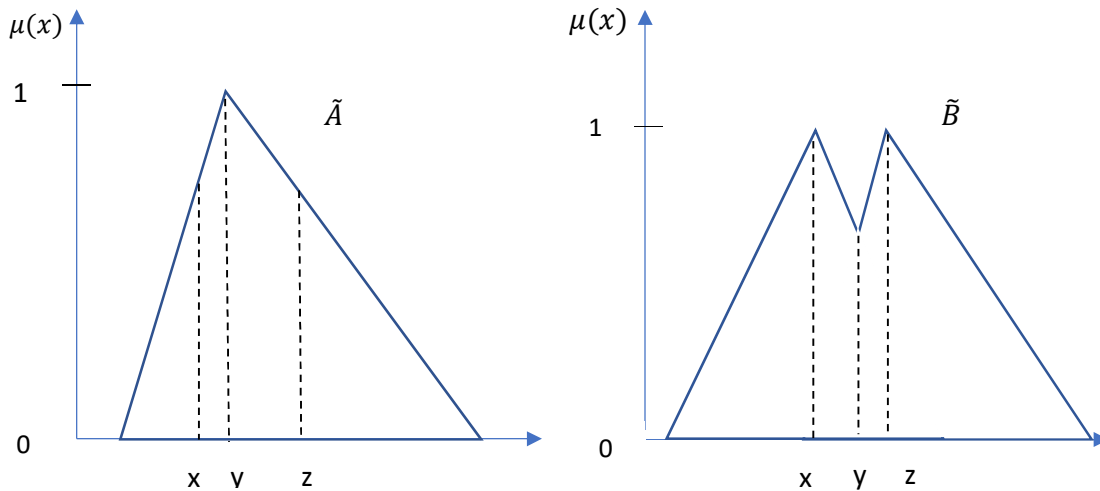
Множење трапезоидног фази скупа  $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  скаларом  $r$  дефинисано је:

$$\tilde{a} \cdot r = (a_1 \cdot r, a_2 \cdot r, a_3 \cdot r, a_4 \cdot r)$$

Конвексан фази скуп садржи функцију припадности која је строго монотono растућа или строго монотono опадајућа, или функција припадности која је прво строго монотono растућа, затим строго монотono опадајућа за растуће вредности фази скупа (слика 3-2). Уколико се елементи скупа изразе у релацији  $x < y < z$ , тада је:

$$\mu_{\tilde{s}}(y) \geq \min[\mu_{\tilde{s}}(x), \mu_{\tilde{s}}(z)] \quad (3-1)$$

Уколико овај услов није испуњен онда се такав фази скуп назива неконвексним фази скупом (слика 3-2).



Слика 3-2. Конвексан нормалан фази скуп (лева страна) и неконвексан нормалан фази скуп (десна страна)

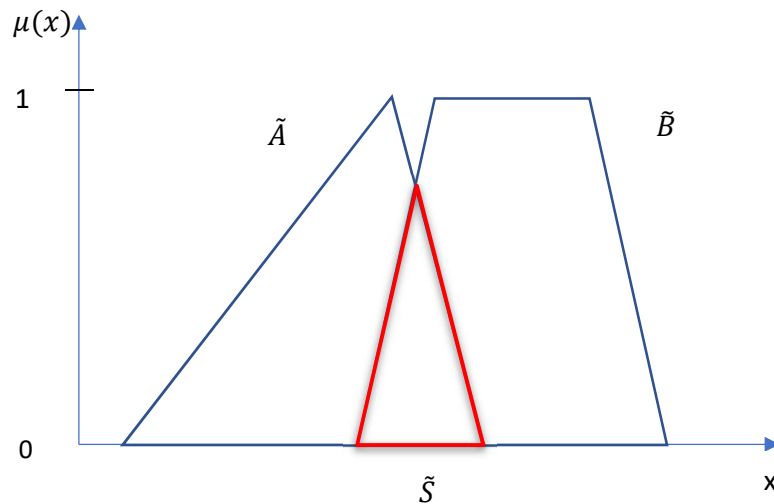
Потребан и довољан услов да би фази скуп  $\{\forall x_1, x_2 \in \Omega\}$  био конвексан је:

$$\{\mu_{\tilde{S}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)\} \geq \min\{\mu_{\tilde{S}}(x_1), \mu_{\tilde{S}}(x_2)\} \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad (3-2)$$

Испред наведена формула може да се напише на следећи начин:

$$\mu_{\tilde{S}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda \mu_{\tilde{S}}(x_1) + (1 - \lambda) \mu_{\tilde{S}}(x_2) \quad (3-3)$$

Пресек два конвексна скупа  $\tilde{A} \cap \tilde{B}$  такође је конвексан фази скуп  $\tilde{S}$  (слика 3-3).



Слика 3-3. Пресек два конвексна скупа



Crossover тачке функције припадности елементи су фази подскупа са функцијом припадности 0,5, ( $x | \mu_{\tilde{S}}(x) = 0,5$ ).

Висина (енгл. height) фази скупа  $\tilde{S}$  максимална је вредност функције припадности,  $hgt(\tilde{S}) = \max\{\mu_{\tilde{S}}(x)\}$ . Уколико је  $hgt(\tilde{S}) = 1$  фази скуп је нормализован. Висина фази скупа  $hgt(\tilde{S})$  може да се опише као највећи степен припадности неког елемента фази скупу. Уколико је висина фази скупа различита од 1, такав фази скуп назива се субнормалан,  $hgt(\tilde{S}) \neq 1$ .

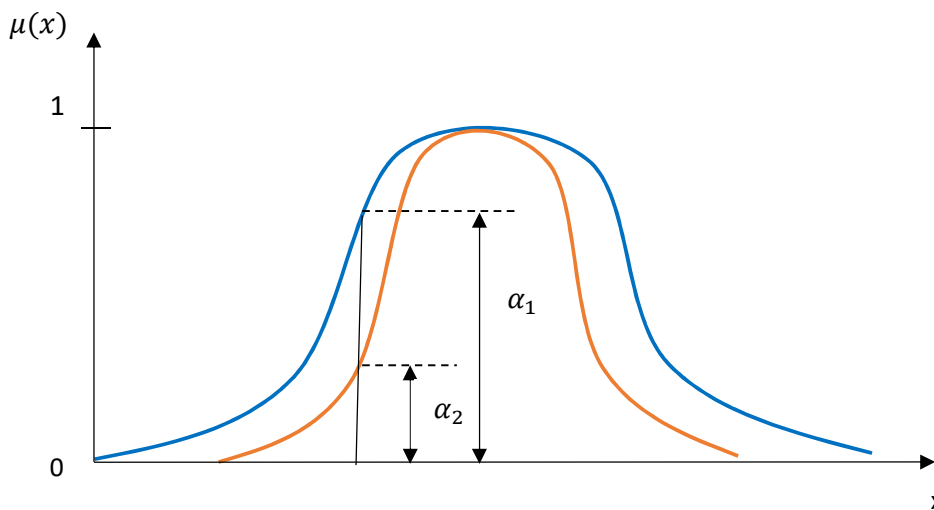
### Фази комплемент

Дефинисана функција пресликавања нека буде  $F: [0,1] \rightarrow [0,1]$  и тада је:  $\tilde{S} \rightarrow \mu_{\tilde{S}}(x)$ ,  $\tilde{S}^C \rightarrow \mu_{\tilde{S}^C}(x) = 1 - \mu_{\tilde{S}}(x)$  при чему следеће аксиоме морају да буду задовољене:

1. Аксиом 1: Гранични услов:  $C(0) = 1, C(1) = 0$ ,
2. Аксиом 2: Услов монотоности: уколико је  $\mu_{\tilde{S}}(x) < \mu_{\tilde{S}}(y)$ , онда је  $C(\mu_{\tilde{S}}(x)) \geq C(\mu_{\tilde{S}}(y))$ ,
3. Аксиом 3: Функција је континуална,
4. Аксиом 4: Идемпотентност:  $C(C(a)) = a$ , онда је  $C(C(\mu_{\tilde{S}}(x))) = C(1 - \mu_{\tilde{S}}(x)) = \mu_{\tilde{S}}(x)$ .

Једна од особина функција припадности јесте симетричност. Функција припадности може да буде симетрична и асиметрична. Обично, је дефинисана на једнодимензионалном универзалном скупу, али може да буде дефинисана и на дводимензионалном универзалном скупу (тада формира површину) или на вишедимензионалном универзалном скупу. Параметри који чине вишедимензионални простор пресликавају се у елементе функције припадности у интервалу  $[0,1]$ .

Класичан фази скуп подразумева да сваки његов елемент узима тачно једну вредност припадности том скупу. Међутим, уколико се припадност елемента фази скупа не може прецизно да одреди, његова припадност се изражава као интервал. Такви фази скупови имају функцију припадности изражену као интервал  $\mu_{\tilde{S}} = [\alpha_1, \alpha_2]$ . Интервалски фази скупови могу се генерализовати фазификовањем функције припадности. Овакви фази скупови познати су у литератури као тип 2 фази скупови (енгл. Type-2 fuzzy set).



Слика 3-4. Интервални фази скуп

### 3.1.1 Фази бројеви

Да би фази скуп дефинисан на универзалном скупу  $\tilde{S} \in \Omega(R)$  био фази број  $\tilde{B}$  мора да задовољи следеће услове:

- а) Фази скуп  $\tilde{S}$  нормализован је, односно његова висина  $hgt(\tilde{S}) = 1$ ,
- б) Фази скуп  $\tilde{S}$  конвексан је,
- ц) Постоји тачно једна вредност елемента  $x \in R$  тако да је функција припадности  $\mu_{\tilde{S}}(x) = 1$ ,
- д) Функција припадности  $\mu_{\tilde{S}}(x)$  мора бити непрекидна бар по својим деловима.

Поштујући наведене услове фази број може да се дефинише на следећи начин: *фази број нормализован је конвексан фази скуп.*

Фази бројеви  $\tilde{B}$  могу да буду симетрични и асиметрични, што је у директној вези са обликом њихове функције припадности,  $\mu_{\tilde{B}}$ . Уколико је елемент фази скупа  $\bar{x}$  модална вредност фази броја (аритметичка средина), тада симетричан фази број може да се дефинише као:

$$\mu_{\tilde{B}}(\bar{x} + x) = \mu_{\tilde{B}}(\bar{x} - x) \quad \forall x \in R \quad (3-4)$$

Супротно симетричним су асиметрични фази бројеви:

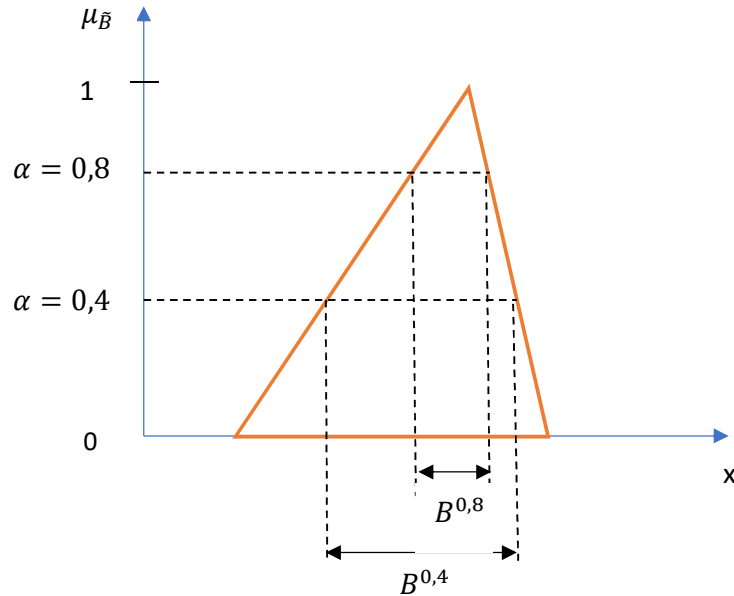
$$\mu_{\tilde{B}}(\bar{x} + x) \neq \mu_{\tilde{B}}(\bar{x} - x) \quad \forall x \in R \quad (3-5)$$

Алфа пресек или алфа рез фази скупа (фази броја  $\tilde{B}$ ) скуп је који садржи елементе фази скупа са функцијом припадности, која је једнака алфа пресеку или већа од алфа пресека,  $B^\alpha = \{x \in \Omega | \mu_{\tilde{B}} \geq \alpha\}$  тако да је  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Алфа пресек класичан је скуп и подскуп фази скупа. Сваки фази скуп може да буде трансформисан у коначан број алфа пресек скупова, зато што постоји коначан број алфа пресека на интервалу  $[0,1]$ . Строги алфа пресек подскуп је фази скупа (фази броја  $\tilde{B}$ ) који садржи елементе са функцијом припадности строго веће од алфа пресека,  $B^{\alpha+} = \{x \in \Omega | \mu_{\tilde{B}} > \alpha\}$ .

#### Особине алфа пресека

Нека су дата два фази скупа,  $\tilde{N}$  и  $\tilde{M}$ :

1.  $(\tilde{N} \cup \tilde{M})^\alpha = \tilde{N}^\alpha \cup \tilde{M}^\alpha, \alpha \in [0,1]$
2.  $(\tilde{N} \cap \tilde{M})^\alpha = \tilde{N}^\alpha \cap \tilde{M}^\alpha, \alpha \in [0,1]$
3.  $(\tilde{N}^c)^\alpha \neq (\tilde{N}^\alpha)^c$ , осим за crossover тачку,  $\alpha = 0,5$
4. За два алфа пресека:  $\alpha \leq \beta, \tilde{N}^\beta \subseteq \tilde{N}^\alpha$



Слика 3-5. Алфа пресек на континуалном фази скупу

Фази скуп конвексан је уколико је његов алфа пресек конвексан (у класичном смислу). Другим речима, сваки алфа пресек мора да буде конвексан да би фази скуп коме припада био конвексан.

### **Дискретни фази бројеви**

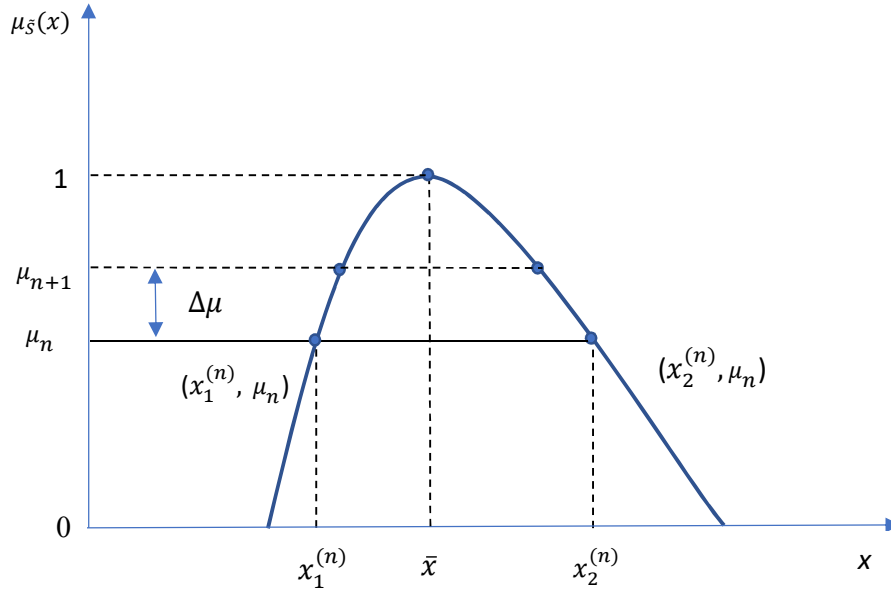
Уколико се непрекидна функција припадности фази броја дискретизује и фази број представи преко дискретних фази скупова, такви фази бројеви називају се дискретним. Дискретизација се спроводи употребом алфа пресека на оси функције припадности,  $\mu_{\xi}$ .

Када се  $\mu_{\xi}$  оса подели на  $t$  број алфа пресека,  $t$  се назива дискретизационим бројем и тада је:

$$\mu_0 = 0, \mu_m = 1, \mu_{n+1} = \mu_n + \Delta\mu, n = 0, 1, 2, \dots, t - 1 \quad (3-6)$$

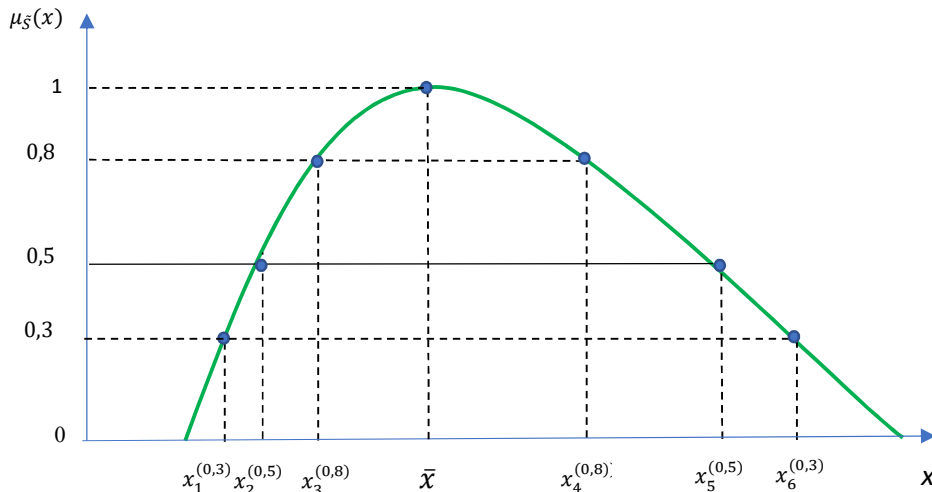
Фази број може да се представи као дискретан фази скуп:

$$\tilde{S}^d = \{(x_1^0, \mu_0), (x_2^0, \mu_0), (x_1^1, \mu_1), (x_2^1, \mu_1), \dots, (x_1^n, \mu_n), (x_2^n, \mu_n), \dots, (x_1^m, \mu_m), (x_2^m, \mu_m)\} \quad (3-7)$$



Слика 3-6. Дискретан фази скуп,  $\tilde{S}^d$

Уколико је  $\alpha = 0$ , може се рећи да дискретни скуп садржи све елементе фази скупа  $\tilde{S}$ . Уколико је  $\alpha = 1$ , тада дискретни скуп има само један елемент, а то је модална вредност фази скупа, тј. фази броја.

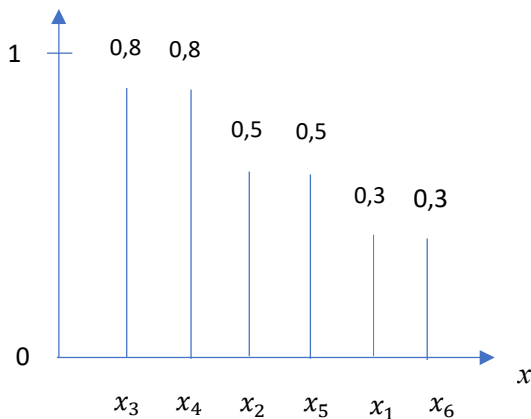


Слика 3-7. Алфа пресеци на континуалном фази скупу

Пример фази скупа са коначним бројем алфа пресека представљен је на слици 3-7. Уколико се универзални скуп састоји од елемената  $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$  и ако су они елементи фази скупа  $\tilde{S} \in \Omega$ , користећи Задехову ову формулацију, дискретан фази скуп може да се представи (Ross, 2004):

$$\tilde{S}^d = \left\{ \frac{0,3}{x_1}, \frac{0,5}{x_2}, \frac{0,8}{x_3}, \frac{0,8}{x_4}, \frac{0,5}{x_5}, \frac{0,3}{x_6} \right\} \quad (3-8)$$

Дискретан фази скуп из обрасца 3-8. представљен је на слици 3-8.



Слика 3-8. Дискретан фази скуп

### 3.1.2 Фази релације

Дата су два универзална скупа  $X$  и  $Y$ . Релација између елемената који припадају универзалним скуповима означава се као картазијански производ и дефинише се:

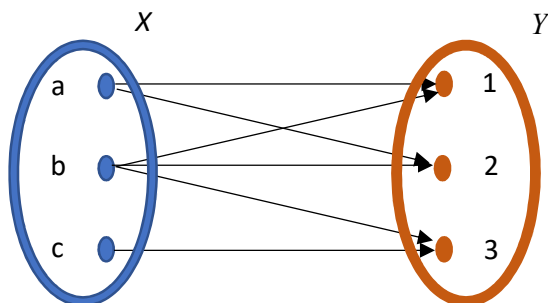
$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\} \quad (3-9)$$

Крисп релација се може да се означи и као:

$$R = \mathcal{X}_{X \times Y}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in X \times Y \\ 0, & (x, y) \notin X \times Y \end{cases} \quad (3-10)$$

Релација у крисп смислу јесте пресликавање релације универзалних скупова  $X \times Y$  по тачно одређеном правилу, које дефинише да ли су припадајући елементи у релацији или не:

$$R: X \times Y \rightarrow \{0,1\} \quad (3-11)$$



Слика 3-9. Пресликавање скупа  $X$  у скуп  $Y$

Релација у крисп смислу за елементе два скупа  $X$  и  $Y$  тако да је  $(a, b, c) \in X$  и  $(1, 2, 3) \in Y$  може да се изрази на следећи начин:

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3-12)$$

Колоне матрице представљене су ознакама 1, 2, 3 док су редови матрице ознакама a, b, c. Матрица је дводимензионална.

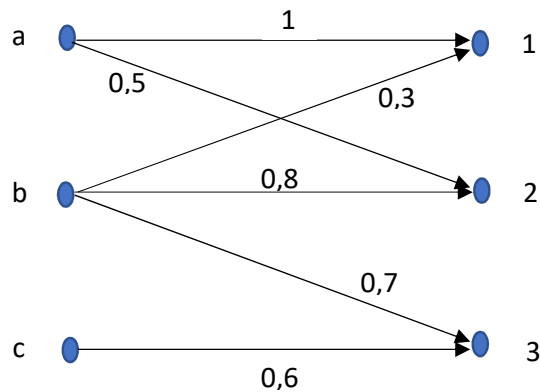
У фази смислу релација може да се представи као пресликавање релације универзалних скупова  $X \times Y$  на интервал између 0 и 1:

$$\tilde{R}: X \times Y \rightarrow [0,1] \quad (3-13)$$

Или може да се дефинише као релација између елемената универзалних скупова  $X$  и  $Y$  изражена кроз функцију припадности  $\mu_{\tilde{R}}$  тој релацији:

$$\tilde{R} = \{(x, y), \mu_{\tilde{R}}(x, y) | (x, y) \in X \times Y\} \quad (3-14)$$

При чему је функција припадности  $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$  снага релације.



Слика 3-10. Функција припадности пресликавања елемената скупа  $X$  у елементе скупа  $Y$

Фази релација за елементе скупова  $X$  и  $Y$  при чему је  $(a, b, c) \in X$  и  $(1, 2, 3) \in Y$  може да се представи на следећи начин:

$$\tilde{R} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,8 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0,6 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3-15)$$

Математичке операције са фази скуповима могу да се примене и код фази релација. Уколико су дате две фази релације  $\tilde{R}$  и  $\tilde{S}$  за елементе који припадају универзалним скуповима, тако да је  $(x, y) \in X \times Y$ , операције са фази релацијама могу да се представе као:

1. Пресек:  $\mu_{\tilde{R} \cap \tilde{S}}(x, y) = \min\{\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{S}}(x, y)\}$
2. Унија:  $\mu_{\tilde{R} \cup \tilde{S}}(x, y) = \max\{\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{S}}(x, y)\}$

3. Комплемент:  $\mu_{\tilde{R}^c}(x, y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x, y)$

За фази релације могу да се дефинишу три пројекције:

1. прва пројекција:  $\tilde{R}^1 = \{x, \max_y \mu_{\tilde{R}}(x, y) \mid (x, y) \in X \times Y\}$
2. друга пројекција:  $\tilde{R}^2 = \{y, \max_x \mu_{\tilde{R}}(x, y) \mid (x, y) \in X \times Y\}$
3. укупна пројекција:  $\tilde{R}^T = \{\max_x \max_y \mu_{\tilde{R}}(x, y) \mid (x, y) \in X \times Y\}$

Врло једноставан пример израчунавања наведених пројекција дат је за елементе који припадају картезијанском производу два универзална скупа,  $(x, y) \in X \times Y$ :

	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$\mu_{\tilde{R}^1}$		
$\tilde{R} =$	$x_1$	0,2	0,4	0,8	0,6	1	1	(3-16)
	$x_2$	1	0,5	0,4	0,7	1	1	
	$x_3$	0,3	1	0,5	1	0,2	1	
	$\mu_{\tilde{R}^2}$	1	1	0,8	1	1	$\mu_{\tilde{R}^T} = 1$	

Када се ради о две релације  $\tilde{R}$  и  $\tilde{S}$

$$\tilde{R} = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,5 & 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 1 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0,4 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3-17)$$

$$\tilde{S} = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 \\ 0,5 & 0,4 & 0 \\ 0,6 & 1 & 0,5 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3-18)$$

$$\tilde{R} \cap \tilde{S} = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3-19)$$

$$\tilde{R} \cup \tilde{S} = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0,7 & 0,8 \\ 0,5 & 1 & 0,2 \\ 1 & 1 & 0,5 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3-20)$$

### А) Фази композиција релације

Представљено је седам начина композиције релација (3-25). То су max – min, min – max, max – max, min – min, max – prod, max – prosek, suma - prod. Прва композиција max – min била је представљена изворно од стране Задеха користећи IF - THEN правило (Zadeh, 1979).

### Б) Фази толерантне и еквивалентне релације

Фази релација  $\tilde{R}$  која је дефинисана на универзалном скупу  $X$  испуњава услов  $\tilde{R}: X \times X$ . Уколико су испуњена сва три услова особине релације матрице, тада је фази релација еквивалентна релација:

- I. рефлексивност  $\forall i \mu_{\tilde{R}}(x_i, x_i) = 1$ ,
- II. симетричност  $\forall i, j \mu_{\tilde{R}}(x_i, x_j) = \mu_{\tilde{R}}(x_j, x_i)$ ,
- III. транзитивност  $\forall i, j, k \lambda_1 = \mu_{\tilde{R}}(x_i, x_j), \lambda_2 = \mu_{\tilde{R}}(x_j, x_k) \rightarrow \lambda = \mu_{\tilde{R}}(x_i, x_k)$ , при чему је  $\lambda \geq \min(\lambda_1, \lambda_2)$

Свака фази толерантна релација  $\tilde{R}$  може да буде пребачена у еквивалентну релацију  $\tilde{R}_1$  са највише  $(n - 1)$  композиција, где је  $n$  кардинални број скупа који дефинише  $\tilde{R}$ . Фази толерантна релација дефинисана над универзалним скупом  $X$  задовољава само два услова, а то су рефлексивност и симетричност.

$$\tilde{R}_1^{(n-1)} = \tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_1 \circ \dots \circ \tilde{R}_1 = \tilde{R} \quad (3-21)$$

Испред наведени услови који фази релацију чине еквивалентном, испитаће се на једноставном примеру фази релације:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	1	0,6	0,7	0	0,2
$x_2$	0,6	1	0,5	0,4	0
$x_3$	0,7	0,5	1	0,4	0
$x_4$	0	0,4	0,4	1	0,5
$x_5$	0,2	0	0	0,5	1

$$\tilde{R} = \quad (3-22)$$

Може да се закључи да је матрица (3-22):

- I. рефлексивна,  $\forall i \mu_{\tilde{R}}(x_i, x_i) = 1$ ,
- II. симетрична,  $\forall i, j \mu_{\tilde{R}}(x_i, x_j) = \mu_{\tilde{R}}(x_j, x_i)$ ,

Ово су два довољна услова да релација буде толерантна, зато је релација  $\tilde{R}$  толерантна релација.

- III. Транзитивна. Испитаће се кроз два примера:

$\lambda_1 = \mu_{\tilde{R}}(x_1, x_4) = 0, \lambda_2 = \mu_{\tilde{R}}(x_4, x_2) = 0,4 \rightarrow \lambda = \mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2) = 0,6$ , при чему је  $\lambda \geq \min(\lambda_1, \lambda_2) = 0$

$\lambda_1 = \mu_{\tilde{R}}(x_2, x_3) = 0,5, \lambda_2 = \mu_{\tilde{R}}(x_3, x_4) = 0,4 \rightarrow \lambda = \mu_{\tilde{R}}(x_2, x_4) = 0,4$ , при чему је  $\lambda \geq \min(\lambda_1, \lambda_2) = 0,4$

Може да се закључи да је матрица (3-22) фази еквивалентна релација, јер испуњава сва три услова.



## В) Метод сличности

Да би се одговорило на питање која је јачина повезаности података у релацијама користе се бројне нумеричке методе (Dubois and Prade, 1980; Zadeh, 1971). Међу њима највише су заступљене метода косина (енгл. Cosine Amplitude) и max – min метода, које припадају методама сличности и које су нашле широку примену у пракси.

## Г) Метода косина (енгл. Cosine Amplitude)

Ова метода на метрички начин израчунава повезаност елемената у фази релацији. Јачина повезаности елемената матрице релације представљена је кроз функцију припадности. Прикупљени подаци који се анализирају представљени су као низ,  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . Сваки од елемената у низу  $X$  вектор је за себе, тако да је  $x_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{im}\}^T$ .

Сваки елемент релације  $r_{ij}$  гради се поређењем парова два узорка,  $x_i$  и  $x_j$  чија је јачина релације изражена кроз функцију припадности,  $r_{ij} = \mu_{\tilde{R}}(x_i, x_j)$ . Израчунавање јачине релације према формули је:

$$r_{ij} = \frac{|\sum_{k=1}^m x_{ik}x_{jk}|}{\sqrt{(\sum_{k=1}^m x_{ik}^2)(\sum_{k=1}^m x_{jk}^2)}}, i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3-23)$$

Уколико су дате две релације  $\tilde{R}$  и  $\tilde{S}$  и припадајући елементи универзалним скуповима,  $x \in X, y \in Y, z \in Z$  тако да је:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \{(x, y), \mu_{\tilde{R}}(x, y) | (x, y) \in X \times Y\} \\ \tilde{S} &= \{(y, z), \mu_{\tilde{S}}(y, z) | (y, z) \in Y \times Z\} \end{aligned} \quad (3-24)$$

Композиција релација може да се представи као:

$$\begin{aligned} \tilde{R} \circ \tilde{S} &= \tilde{R} \max - \min \tilde{S} = \left\{ (x, z), \max_y \min \{ \mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{S}}(y, z) \} \right\} \\ \tilde{R} \circ \tilde{S} &= \tilde{R} \min - \max \tilde{S} = \left\{ (x, z), \min_y \max \{ \mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{S}}(y, z) \} \right\} \\ \tilde{R} \circ \tilde{S} &= \tilde{R} \max - \max \tilde{S} = \left\{ (x, z), \max_y \max \{ \mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{S}}(y, z) \} \right\} \\ \tilde{R} \circ \tilde{S} &= \tilde{R} \min - \min \tilde{S} = \left\{ (x, z), \min_y \min \{ \mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{S}}(y, z) \} \right\} \\ \tilde{R} \circ \tilde{S} &= \tilde{R} \max - \text{product} \tilde{S} = \left\{ (x, z), \max_y \{ \mu_{\tilde{R}}(x, y) \cdot \mu_{\tilde{S}}(y, z) \} \right\} \\ \tilde{R} \circ \tilde{S} &= \tilde{R} \max - \text{average} \tilde{S} = \left\{ (x, z), \frac{1}{2} \max_y \{ \mu_{\tilde{R}}(x, y) + \mu_{\tilde{S}}(y, z) \} \right\} \\ \tilde{R} \circ \tilde{S} &= \tilde{R} \text{sum} - \text{product} \tilde{S} = \left\{ (x, z), f \{ \sum_y \{ \mu_{\tilde{R}}(x, y) \cdot \mu_{\tilde{S}}(y, z) \} \} \right\} \end{aligned} \quad (3-25)$$

Код композиције sum – product функција  $f$  логистичка је функција која ограничава вредност функције и омогућује да остане у оквиру интервала  $[0,1]$ . Ова композициона метода најчешће се користи у конфигурацији неуронских мрежа за пресликавање између паралелних слојева у вишеслојним неуронским мрежама.

У теорији је развијено седам различитих врста композиција које покривају логичке операције. Композиције  $\max - \min$  и  $\max - \text{product}$  основне су композиције код фази релација и две најчешће коришћене технике (Ross, 2004). Нека су дате фази релације:

$$\tilde{R} = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & [0,5 & 0,7 & 0,3] \\ x_2 & [0,3 & 1 & 0,2] \\ x_3 & [1 & 0 & 0,4] \end{matrix} \quad (3-26)$$

$$\tilde{S} = \begin{matrix} & z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & [1 & 0,3 & 0,8] \\ y_2 & [0,5 & 0,4 & 0] \\ y_3 & [0,6 & 1 & 0,5] \end{matrix} \quad (3-27)$$

Композиција фази релације за сва три облика композиције дата је испод:

$$\begin{aligned} \tilde{R} \circ \tilde{S} &= \tilde{R} \max - \min \tilde{S} = 0,8 \\ \tilde{R} \circ \tilde{S} &= \tilde{R} \max - \text{product} \tilde{S} = 0,8 \\ \tilde{R} \circ \tilde{S} &= \tilde{R} \max - \text{average} \tilde{S} = 0,9 \end{aligned} \quad (3-28)$$

## 3.2 Фази оптимизациони проблем

### 3.2.1 Класификација фази оптимизационог проблема

Оптимизациони проблем састоји се од два основна елемента: циљне функције и допустивог домена. Као што је представљено код аутора Дубоа и Праде (Dubois and Prade, 1994), фази оптимизација односи се на проналажење екстрема функције када је она фазификована са или без фазификованих ограничења (домена изводљивости). Фази оптимизациони проблем (FOP) може да се представи на следећи начин.

Нека је дат универзални скуп  $X = \{x\}$  и нека је  $X_1$  подскуп или фази подскуп универзалног скупа,  $X$ . Циљна функција је пресликавање  $f: X_1 \rightarrow L(R)$ , где је  $L(R)$  подскуп или фази подскуп скупа реалних бројева  $R$ , и где је допустив домен описан као подскуп или фази скуп, тако да је  $C \subset X$ , са функцијом припадности  $\mu_C(x) \in [0,1]$  која представља степен изводљивости за  $x$ . Према томе, фази оптимизациони проблем може да се представи (Fedrizzi et al., 1991):

$$f(x, r) \rightarrow \frac{\max}{x \in C} \quad (3-29)$$

где је  $r$  целобројна константа или фази коефицијент. Образац изнад (3-29) показује да  $f(x, r)$  може да достигне могућ максимум, али тако да сваки елемент  $x$  припада домену  $C$ . Овај образац само је оквирно представљање фази оптимизационог проблема. Представљање припадности и максимума у фази смислу може да буде на различите начине. FOP може да се класификује у два различита типа, проблем фази екстрема и проблем математичког програмирања (Jiafu et al., 2004).

### 3.2.2 Дефинисање проблема фази екстрема

Проблем фази екстрема (PFE), или како се још назива екстрем фази функције, познат је и као фази оптимизациони проблем без ограничења, у коме је домен  $C$  једнак скупу  $X$ . PFE уопштено може да буде описан на два начина према ауторима Дубоа и Праде (Dubois and Prade, 1980), у зависности од дефинисања фази функције:

1. PFE заснован на фази функцији дефинисаној из фази домена на фази домен:

$$\tilde{Y} = f(\tilde{X}, r) \rightarrow \max/\min \quad (3-30)$$

где је  $\tilde{X} \subset R$  фази скуп у пресликавању  $X; f: X \rightarrow R$ . Ово је класична стварно вреднована функција из фази домена  $\tilde{X}$  над фази доменом  $\tilde{Y} \subset R$ . Функција  $f(\tilde{X}, r)$  јесте фази функција и подскуп скупа реалних бројева,  $R$ . Функција припадности фази функције,  $f(\tilde{X}, r)$  задовољава следећи услов:

$$\mu_{\tilde{Y}}(y) = \sup_{f(x,r)=y} \mu_{\tilde{X}}(x) \quad (3-31)$$

Образац (3-31) показује да постоји  $x$  над фази доменом,  $\tilde{X} \subset X$  тако да крисп функција постиже екстрем.

2. PFE заснован на фази функцији дефинисаној из крисп домена над фази доменом може да се представи обрасцем:

$$\tilde{f}(x, r) \rightarrow \max/\min \quad (3-32)$$

где су  $X, Y$  универзални скупови,  $\tilde{P}(Y)$  скуп је свих фази скупова над  $Y$ ,  $\tilde{f}: X \rightarrow \tilde{P}(Y)$  је фази функција дефинисана са функцијом припадности,  $\mu_{\tilde{f}(x,r)}(y) = \mu_{\tilde{R}}(x, y)$ . Функција припадности фази релације је  $\mu_{\tilde{R}}(x, y), \forall (x, y) \in X * Y$ . Функција у обрасцу (3-32) тежи да нађе  $x$  из скупа  $X$ , тако да функција  $\tilde{f}(x, r)$  дефинисана преко фази релације достиже максимум или минимум. Коефицијент  $r$  у фази функцији представља фази број и фазификованост функције изражена је кроз тај фази број.

У свакој форми проблема фази екстрема, екстрем функције није јединствен и нема јединствене релације између екстрема циљне функције и оптималне одлуке. Решење проблема фази екстрема зависи од начина како је представљен. Једно од могућих објашњење проблема фази екстрема дато је у раду аутора Дубоа и Праде (Dubois and Prade, 1980). Концепт максималних скупова, максимума и минимума фази бројева и метода интеграла за рангирање фази скупова, може да се примени у решавању проблема екстрема (Jiafu et al., 2004).

### 3.2.3 Фази математичко програмирање

Проблем фази математичког програмирања (FMP) познат је и као фази оптимизациони проблем са ограничењима. Уопштено може да буде представљено у форми:

$$\begin{aligned} & f(x, r) \rightarrow \max \\ \text{s. t. } & x \in C = \{x \in X | g_i(x, s) \lesseqgtr 0, i = 1, 2, \dots, m\} \end{aligned} \quad (3-33)$$

У овом случају, домен  $C$  може да буде формулисан као крисп систем ограничења или као фази систем ограничења са фази једнакостима, фази неједнакостима, једнакости или неједнакости са фази коефицијентима, тако да  $f(x, r)$  може да буде или крисп циљна функција или циљна функција са фази коефицијентима. Циљ проблема,  $C_0$  изражен је преко  $f(x, r) \rightarrow \max$ , који може да буде фази циљ описан преко  $\overline{\max}$  или крисп циљ.

Предложено је доста метода које класификују фази математичко програмирање. У свом раду аутор Цимерман (Zimmermann, 1985) сврстао је FMP у симетричне и асиметричне моделе, (Luhandjula, 1989) поделио је на флексибилно програмирање, фази стохастично програмирање и математичко програмирање са фази коефицијентима. Док у раду аутора Аниугучија и Рамика (Inuiguchi and Ramik, 2000) осврћући се на неизвесност, FMP класификовано је као што следи:

- фази математичко програмирање са неодређеношћу, тзв. флексибилно програмирање,
- фази математичко програмирање са двосмисленошћу, тзв. могуће програмирање,
- фази математичко програмирање са неодређеношћу и двосмисленошћу, тзв. робусно програмирање.

Према мишљењу аутора Аниугучија и Рамика, класификација проблема FMP зависи од тога шта се фазификује и где се уводи фазификација. Фазификовање може да се појави као:

- фази циљ; циљ који је изражен кроз неодређеност и обично са нивоом тежње, и циљна вредност циљне функције има одређену слободу, тако да циљна вредност циљне функције  $f(x, r)$  достиже максимум што је више могуће,
- фази ограничења која представљају систем ограничења са условима толеранције  $\lesssim, \gtrsim$ , или  $\cong$ ,
- фази коефицијенти у циљној функцији са или без фази коефицијената у систему ограничења.

FMP, према месту појављивања фазификованих параметара у постављеном проблему, класификује се на следећи начин:

- $FMP_1$  са фази циљем  $\tilde{C}_0$  и фази ограничењима  $\tilde{C}$ , као што следи:

$$\begin{aligned} & \overline{\max} f(x, r) \\ & s. t. x \in \tilde{C} \end{aligned} \quad (3-34)$$

- $FMP_2$  са крисп коефицијентима у циљној функцији  $f(x, r)$  и фази ограничењима  $\tilde{C}$ , као што следи:

$$\begin{aligned} & \max f(x, r) \\ & s. t. x \in \tilde{C} \end{aligned} \quad (3-35)$$

- $FMP_3$  са фази коефицијентима у циљној функцији  $f(x, \tilde{r})$  и фази ограничењима  $\tilde{C}$ , као што следи:

$$\begin{aligned} & \max f(x, \tilde{r}) \\ & s. t. x \in \tilde{C} \end{aligned} \quad (3-36)$$

- $FMP_4$  са фази циљем  $\tilde{C}_0$  и фази коефицијентима у систему ограничења  $C(x, \tilde{s})$ , као што следи:

$$\begin{aligned} & \overline{max} f(x, r) \\ & s. t. x \in C(x, \tilde{s}) \end{aligned} \quad (3-37)$$

- $FMP_5$  са фази коефицијентима у циљној функцији,  $f(x, \tilde{r})$  и крисп коефицијентима у ограничењима  $C(x, s)$ , као што следи:

$$\begin{aligned} & max f(x, \tilde{r}) \\ & s. t. x \in C(x, s) \end{aligned} \quad (3-38)$$

- $FMP_6$  са крисп коефицијентима у циљној функцији  $f(x, r)$  и фази коефицијентима у систему ограничења  $C(x, \tilde{s})$ , као што следи:

$$\begin{aligned} & max f(x, r) \\ & s. t. x \in C(x, \tilde{s}) \end{aligned} \quad (3-39)$$

- $FMP_7$  са фази коефицијентима у циљној функцији  $f(x, \tilde{r})$  и фази коефицијентима у систему ограничења  $C(x, \tilde{s})$ , као што следи:

$$\begin{aligned} & max f(x, \tilde{r}) \\ & s. t. x \in C(x, \tilde{s}) \end{aligned} \quad (3-40)$$

Према Цимермановој подели (Zimmermann, 1985), где је FMP према месту настанка фазификованих елемената математичког програмирања сврстано у две групе модела, на симетричне и асиметричне, симетрични модели су  $FMP_1, FMP_3, FMP_4, FMP_7$ , док су асиметрични модели  $FMP_2, FMP_5, FMP_6$ .

Друга врста класификације FMP може да буде према облику функције припадности фазификованих елемената у проблему. Аутори Аниугучи и Рамик (Inuiguchi and Ramik, 2000) моделе  $FMP_1, FMP_2$  сврстали су у проблем флексибилног програмирања. Уколико су фази коефицијенти представљени као расподела могућности, модели  $FMP_5, FMP_6$ , и  $FMP_7$  припадаће проблему *possibility* програмирања ( $PMP_5, PMP_6, PMP_7$ ), док  $FMP_3$  и  $FMP_4$  припадају проблему робусног програмирања.

### 3.2.4 Фази линеарно програмирање

Линеарно програмирање представља једно од највише примењиваних техника операционих истраживања за реалне проблеме. Након увођења фази логике и фази скупова у традиционално линеарно програмирање од стране Цимермана (Zimmermann, 1978) и увођењем концепта фази одлучивања од стране Задеха и Белмана (Bellman and Zadeh, 1970) фази линеарно програмирање (FLP) постаје врло важна област фази оптимизације. Класичан модел линеарног програмирања представља се у облику:

$$\begin{aligned} & \max c^T x, \\ & s. t. Ax \leq b, x \geq 0, \end{aligned} \quad (3-41)$$

где су  $c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ,  $A = (A_{ij})_{mn}$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  вектори коефицијената циљне функције, матрица коефицијената леве стране ограничења, вектор десне стране ограничења и вектор променљиве, респективно.

Увођење фази скупова на различите начине у проблем линеарног програмирања може дати различите облике фази линеарног програмирања. Такви облици су:

- фазификовање циља линеарног проблема, уколико је циљ постављен као  $\min$  или  $\max$  кроз неодређеност,
- фазификовање циљне функција, уколико су коефицијенти циљне функције изражени кроз неодређеност,
- фазификовање ограничења, уколико је линеарни систем ограничења представљен кроз неодређеност.

Подподела за сваку од наведених типова облика фази линеарног проблема следи у наставку.

### 3.2.4.1 Фази линеарно програмирање са крисп коефицијентима (FLPCK)

Облик FLPCK задржава крисп коефицијенте у фази окружењу и развијена су три теоријска модела која се користе:

- $FLPCK_1$  са фази циљем и фази ограничењима, где је циљна функција изражена као неодређеност  $\tilde{\min}, \tilde{\max}$  и линеарни систем ограничења одређен је са фази релацијом  $\tilde{\leq}$  уз одређене толеранције. Овакав модел представљен је од стране аутора Цимермана (Zimmermann, 1978).
- $FLPCK_2$  са крисп циљем и фази ограничењима, при чему је систем линеарних ограничења представљен са фази релацијом ( $\tilde{\leq}$ ).
- $FLPCK_3$  са фази циљем и крисп ограничењима, где је циљна функција изражена као неодређеност  $\tilde{\min}, \tilde{\max}$  и линеарни систем ограничења је са крисп релацијом.

### 3.2.4.2 Фази линеарно програмирање са фази коефицијентима (FLPFK)

Код проблема FLPFK могу да буду фазификовани поједини или сви коефицијенти који добијају облик фази бројева. FLPFK може да се примени у следећим облицима:

- $FLPFK_1$  са фази коефицијентима циљне функције,  $\tilde{c}^T = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n)$  и фази ограничењима.
- $FLPFK_2$  са фази циљем и фази коефицијентима леве стране ограничења (енгл. LHS – left hand side),  $\tilde{A} = (\tilde{A}_{ij})_{mn}$ , са или без фази коефицијентима десне стране ограничења (енгл. RHS – right hand side),  $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m)^T$ .
- $FLPFK_3$  са фази коефицијентима циљне функције  $\tilde{c}^T = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n)$  који постају фази бројеви и крисп ограничењима.
- $FLPFK_4$  са фази коефицијентима леве стране ограничења,  $\tilde{A} = (\tilde{A}_{ij})_{mn}$  са или без фази коефицијентата десне стране ограничења,  $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m)^T$  и крисп циљном функцијом.
- $FLPFK_5$  када су сви коефицијенти у проблем LP фазификовани (коефицијенти циљне функције и коефицијенти система ограничења). Сви су изражени као фази бројеви.

Детаљније објашњење за наведене поделе је дато у раду аутора Лаја и Хванга (Lai and Hwang, 1992). Као у случају FMP, и FLP може да садржи фазификоване елементе

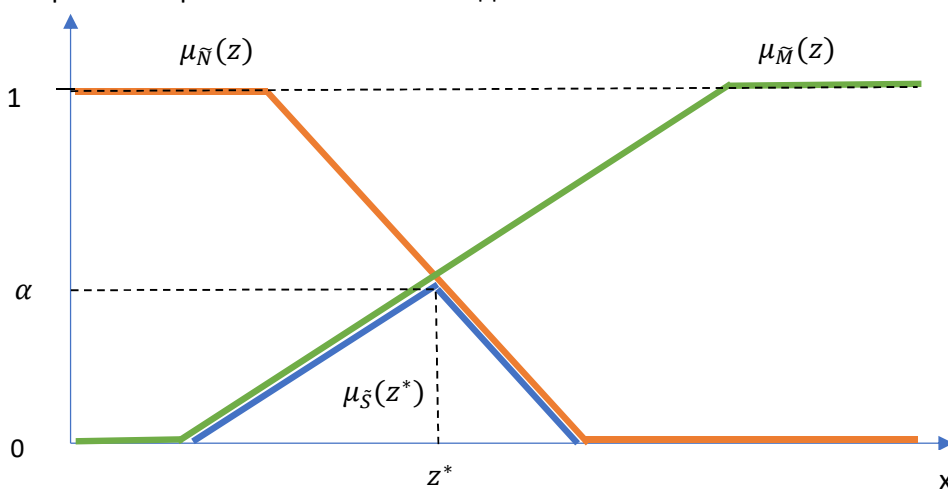
на различитим местима у проблему. Такође, фазификовани елементи могу да имају различите облике и један од облика је расподела могућности (енгл. Possibility distribution), која проблем FLP претвара у проблем *possibility* линеарног програмирања (PLP). Према подели предложеној од стране аутора Аниугучија и Рамика (Inuiguchi and Ramik, 2000),  $FLPCK_1$  и  $FLPCK_2$  припадају групи флексибилног програмирања,  $FLPFK_1$  и  $FLPFK_2$  припадају групи проблема робустног програмирања и  $FLPFK_3, FLPFK_4, FLPFK_5$  проблему могућег програмирања.

### 3.2.5 Фази аритметика у фази линеарном програмирању

У фази линеарном програмирању (FLP) циљна функција и ограничења представљена су као фази скупови. Према Белману и Задеху (Bellman and Zadeh, 1970) решење проблема FLP налази се у фази области пресека циљне функције и постављених ограничења. Ово значи да је циљна функција реализована у домену задовољења ограничења проблема FLP. Уколико претпоставимо да једна или више циљних функција припадају фази скупу  $\tilde{N}$  и ограничења припадају фази скупу  $\tilde{M}$ , према Белману и Задеху решење се налази у фази скупу  $\tilde{S}$  као пресеку наведена два скупа.

$$\mu_{\tilde{S}}(z^*) = \min\{\mu_{\tilde{N}}(z), \mu_{\tilde{M}}(z)\} \quad (3-42)$$

Решење пресека фази скупова, које је и сам фази скуп, представљено је функцијом припадности  $\mu_{\tilde{S}}(z^*)$ . У литератури обично се узима да је решење она тачка или вектор која има максималну вредност функције припадности фази скупа  $\tilde{S}$ . Максимална вредност функције припадности  $\mu_{\tilde{S}}(z^*)$ , приказана на ординати као  $\alpha$ , ниво је задовољења циљне функције и ограничења (слика 3-11). Крисп вредност на апциси  $z^*$  је коначно решење проблема FLP за ниво задовољења  $\alpha$ .



Слика 3-11. Функција припадности решења проблема FLP

Ниво задовољења је уведен први пут од стране аутора Танаке и Асаија (Tanaka and Asai, 1984) и представља вредност при чему је задовољена циљна функција или више циљних функција (уколико је проблем постављен као вишециљно линеарно програмирање) и систем ограничења проблема FLP. Ниво задовољења  $\alpha$  узима

вредност у интервалу  $[0,1]$  и изражава се на ординати (слика 3-11). Ниво задовољења према својим карактеристикама понаша се као алфа пресек при чему је:

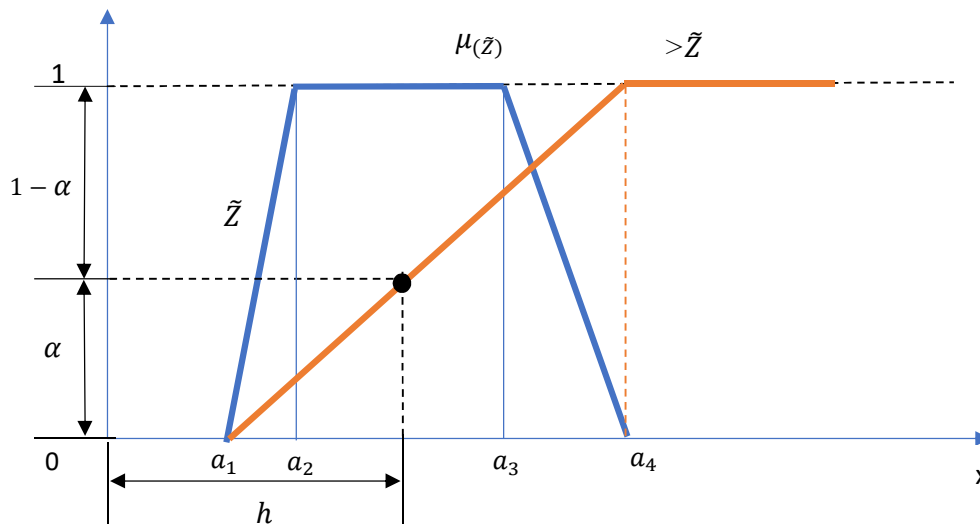
$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{N}}(z) &\geq \alpha \\ \mu_{\tilde{M}}(z) &\geq \alpha \end{aligned} \quad (3-43)$$

### 3.2.5.1 Решавање проблема FLP са фазификованом циљном функцијом

Нека је дат проблем FLP при чему су коефицијенти циљне функције фази бројеви:

$$\begin{aligned} \max \tilde{Z} &= c^T x, \\ \text{s. t. } ax &\leq b, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \quad (3-44)$$

Циљна функција у овом случају је трапезоидни фази број,  $\tilde{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$ . Коефицијенти ограничења су крисп бројеви. У FLP тражи се максимум трапезоидне функције припадности циљне функције.



Слика 3-12. Максимализовање циљне функције као трапезоидног фази броја и крисп ограничења

На слици 3-12. циљна функција представљена је ознаком  $\tilde{Z}$  и њена функција припадности је  $\mu(z)$  (означено плавом бојом). Максимум трапезоидне функције припадности циљне функције означен је  $>\tilde{Z}$  (означено наранџастом бојом). Оптимална вредност постављеног проблема на ординати узима вредност  $h$ . Ниво задовољења решења је  $\alpha$ .

Користећи методу сличности троуглова долази се до решења да је:

$$h = a_1 + \alpha(a_4 - a_1) \quad (3-45)$$

Извршиће се трансформација циљне функције у функцију ограничења. Улогу нове циљне функције добија ниво задовољења  $\alpha$ , које се максимализује:

$$\begin{aligned} \max \alpha \\ c^T x &\geq a_1 + \alpha(a_4 - a_1) \\ \text{s. t. } ax &\leq b, c^T x \leq r \end{aligned}$$



$$x \geq 0, \alpha \leq 1 \quad (3-46)$$

У случају да је циљна функција минимализована, постављен проблем постаје:

$$\begin{aligned} \min \tilde{Z} &= c^T x, \\ \text{s. t. } ax &\geq b, \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (3-47)$$

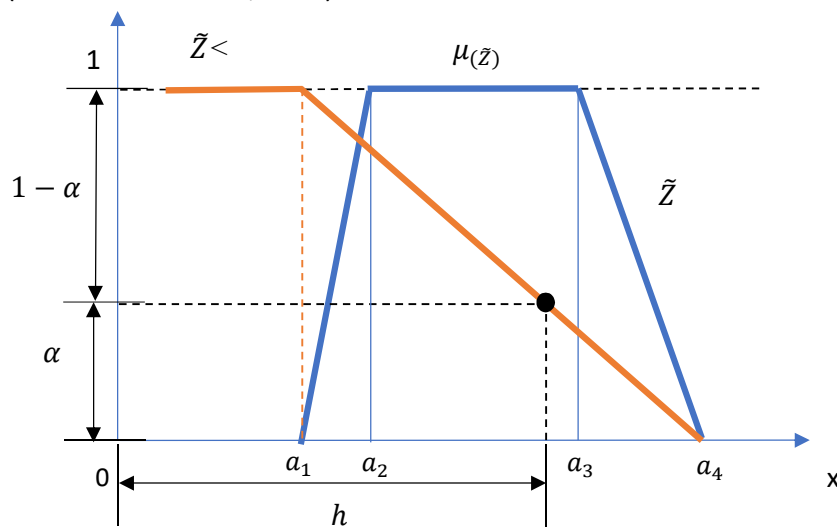
као што је приказано на слици 3-13, тада је растојање  $h$ :

$$h = a_4 - \alpha(a_4 - a_1) \quad (3-48)$$

и нов линеарни проблем добија облик:

$$\begin{aligned} \max \alpha \\ c^T x &\geq a_4 - \alpha(a_4 - a_1) \\ \text{s. t. } ax &\leq b, c^T x \leq r \\ x &\geq 0, \alpha \leq 1 \end{aligned} \quad (3-49)$$

Нови облик FLP у складу је са идејом о трансформацији коју су описали аутори Белман и Задех (Bellman and Zadeh, 1970).



Слика 3-13. Минимализовање циљне функције као трапезоидног фази броја и крисп ограничења

На слици 3-13. циљна функција представљена је ознаком  $\tilde{Z}$  и њена функција припадности је  $\mu(\tilde{z})$  (означено плавом бојом). Минимум трапезоидне функције припадности циљне функције означен је  $<\tilde{Z}$  (означено наранџастом бојом). Оптимална вредност постављеног проблема на ординати узима вредност  $h$ . Ниво задовољења решења је  $\alpha$ .

### 3.2.5.2 Решавање проблема FLP са фазификованим коефицијентима циљне функције

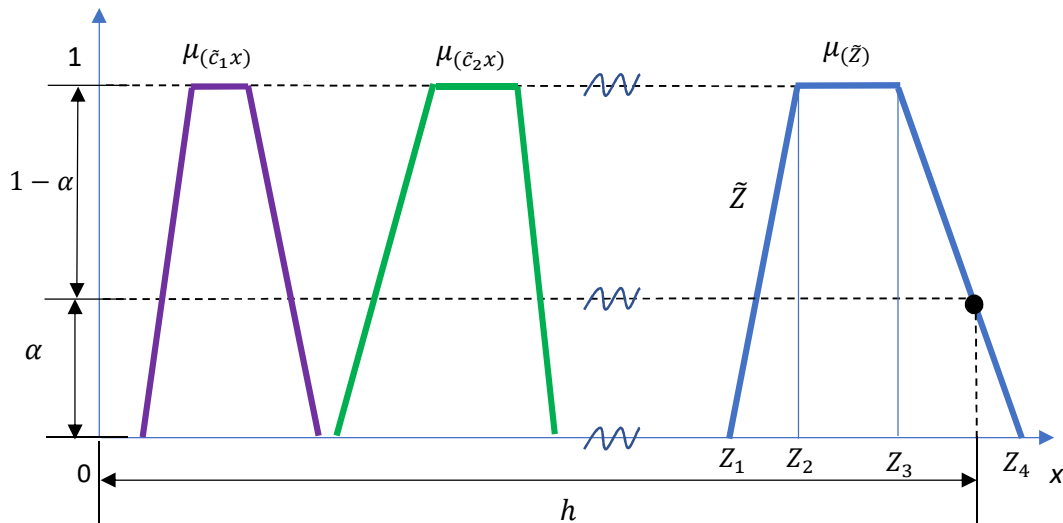
Уколико се циљна функција посматра као фази број који настаје збиром фази бројева  $\tilde{c}_1^T x_1 + \tilde{c}_2^T x_2 + \dots + \tilde{c}_n^T x_n$ , тада FLP постаје:

$$\begin{aligned} \max Z &= \tilde{c}_1^T x_1 + \tilde{c}_2^T x_2 + \dots + \tilde{c}_n^T x_n, \\ \text{s. t. } &ax \leq b, \\ &x \geq 0 \end{aligned} \quad (3-50)$$

Нека је дат пример са трапезоидном функцијом припадности фази броја коефицијената циљне функције,  $\tilde{c}_i = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ . Множењем трапезоидног фази броја променљивом  $x$ , циљна функција постаје трапезоидни фази број,  $\tilde{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$ .

Пошто се FLP максимизује тражи се пресек нивоа задовољења  $\alpha$  са десном страном функције припадности  $\mu(\tilde{z})$  циљне функције. На основу сличности троуглова и утврђеног растојања  $h$  (видети слику 3-14), FLP постаје:

$$\begin{aligned} \max Z_4 - \alpha(Z_4 - Z_3) \\ \text{s. t. } &ax \leq b, \\ &x \geq 0 \end{aligned} \quad (3-51)$$



Слика 3-14. Максимализовање циљне функције као трапезоидног фази броја

На слици 3-14. циљна функција представљена је ознаком  $\tilde{Z}$  и њена функција припадности је  $\mu(\tilde{z})$  (означено плавом бојом). Она настаје збиром фази бројева  $\tilde{c}_1^T x_1$  и  $\tilde{c}_2^T x_2$ , односно функција припадности  $\mu(\tilde{c}_1 x)$  и  $\mu(\tilde{c}_2 x)$ , које су означене љубичастом и зеленом бојом, респективно. Оптимална вредност постављеног проблема на ординати узима вредност  $h$ . Ниво задовољења решења је  $\alpha$ .

### 3.2.5.3 Решавање проблема FLP са фазификованом десном страном ограничења

Нека је дат FLP тако да је коефицијент десне стране система ограничења фазификован,  $\tilde{b}$ . Лева страна ограничења  $a$ , циљна функција  $Z$  и променљива  $x$  су крисп бројеви.

$$\max Z = c^T x,$$

$$\begin{aligned} s. t. \quad & ax \leq \tilde{b}, \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (3-52)$$

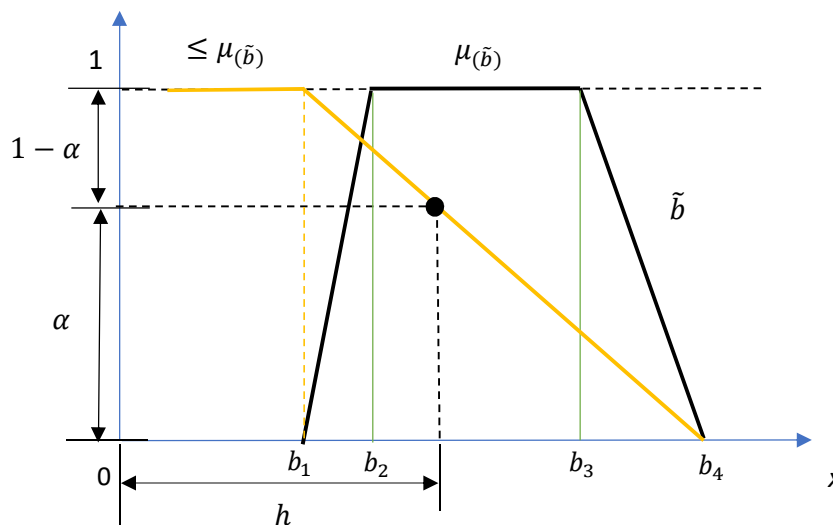
Из сличности троуглова закључује се да је растојање  $h$  једнако (видети слику 3-15):

$$h = b_4 - (1 - \alpha)(b_4 - b_1) \quad (3-53)$$

Претходно постављен FLP постаје:

$$\begin{aligned} \max Z &= c^T x, \\ s. t. \quad & ax \leq b_4 - (1 - \alpha)(b_4 - b_1), \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (3-54)$$

У овако постављеном FLP доносилац одлуке сам дефинише вредност нивоа задовољења  $\alpha$ .



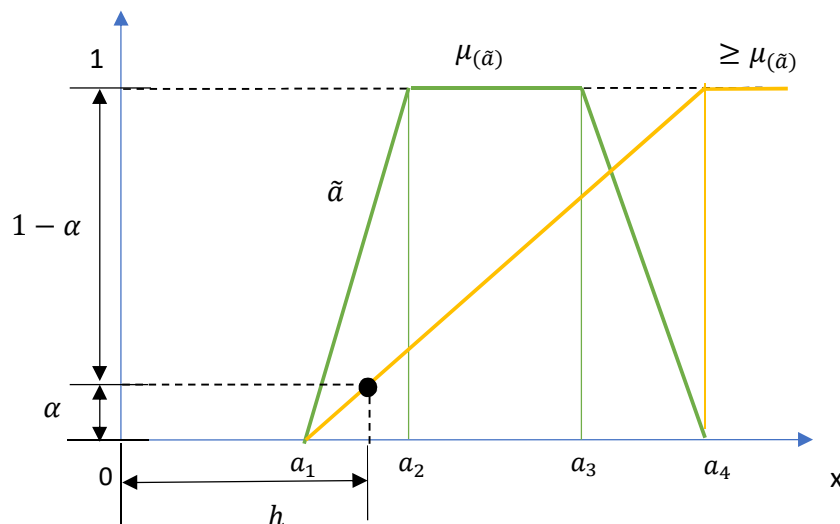
Слика 3-15. Десна страна ограничења као трапезоидни фази број,  $\mu(\tilde{b})$

На слици 3-15. фази десна страна ограничења представљена је ознаком  $\tilde{b}$  и њена функција припадности је  $\mu(\tilde{b})$  (означено црном бојом). Неједнакост у ограничењу је функција  $\leq \mu(\tilde{b})$  (означено жутим бојом). Оптимална вредност постављеног проблема на ординати узима вредност  $h$ . Ниво задовољења решења је  $\alpha$ .

### 3.2.5.4 Решавање проблема FLP са фазификованом левом страном ограничења

Нека је дат FLP тако да је коефицијент леве стране ограничења фазификован,  $\tilde{a}$ . Десна страна ограничења  $b$ , циљна функција  $Z$  и променљива  $x$  су крисп бројеви.

$$\begin{aligned} \max Z &= c^T x, \\ s. t. \quad & \tilde{a}x \leq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \quad (3-55)$$



Слика 3-16. Лева страна ограничења као трапезоидни фази број,  $\mu(\bar{a})$

На слици 3-16. фази лева страна ограничења представљена је ознаком  $\tilde{a}$  и њена функција припадности је  $\mu(\bar{a})$  (означено зеленом бојом). Неједнакост у ограничењу је функција  $\geq \mu(\bar{a})$  (означено жутом бојом). Оптимална вредност постављеног проблема на ординати узима вредност  $h$ . Ниво задовољења решења је  $\alpha$ .

Из сличности троуглова добија се да је растојање  $h$  једнако (видети слику 3-16):

$$h = a_4 - \alpha(a_4 - a_3) \quad (3-56)$$

стога FLP постаје:

$$\begin{aligned} \max Z &= c^T x, \\ \text{s. t. } &(a_4 - \alpha(a_4 - a_3))x \leq b, \\ &x \geq 0. \end{aligned} \quad (3-57)$$

### 3.2.5.5 Решавање проблема FLP са фазификованим коефицијентима леве и десне стране ограничења

Нека је проблем FLP представљен као:

$$\begin{aligned} \max Z &= c^T x, \\ \text{s. t. } &\tilde{a}x \leq \tilde{b}, \\ &x \geq 0. \end{aligned} \quad (3-58)$$

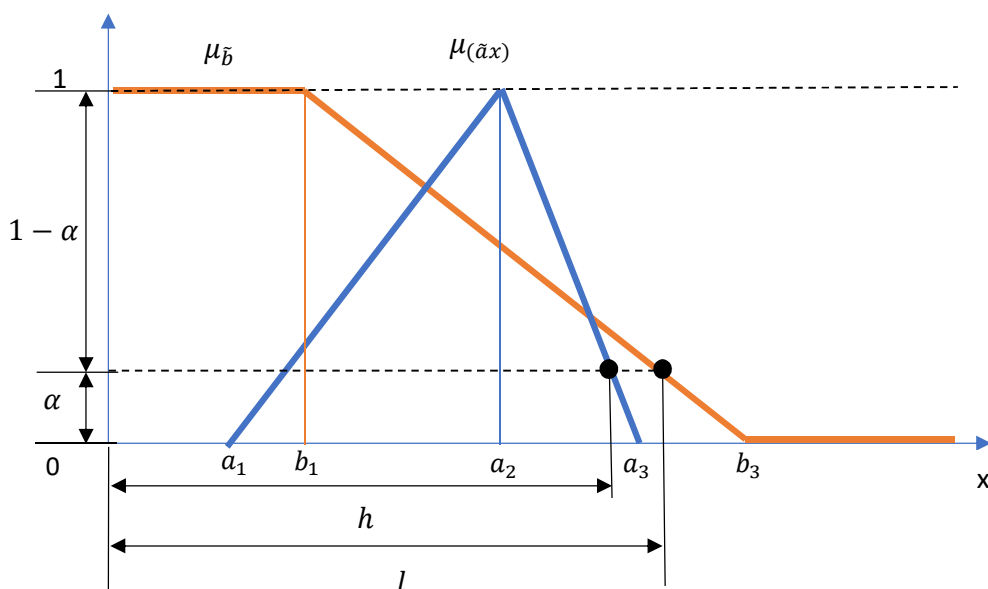
Нека су коефицијенти ограничења леве и десне стране једначине ограничења  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$  фази бројеви. Коефицијент леве стране ограничења  $\tilde{a}$  нека је несиметричан троугласти фази број и коефицијент десне стране ограничења нека је фази број са линеарном функцијом припадности. Множење фази броја скаларом добија се фази број, тако да је лева страна ограничења  $\tilde{a}x$  фази број (слика 3-17). Ниво задовољења  $\alpha$ , који жели да се оствари у проблему FLP, мора да задовољи услов да је највећа могућа вредност фази

броја  $\tilde{a}x$  (лева страна ограничења) мања или једнака највећој могућој вредности фази броја  $\tilde{b}$  (десна страна ограничења) за одређени ниво задовољења  $\alpha$ :

$$\max \mu_{(\tilde{a}x)}^\alpha \leq \max \mu_{\tilde{b}}^\alpha \quad (3-59)$$

Такође, услов да је  $h \leq l$  мора да буде задовољен код изналагања решења. Користећи методу сличности троуглова долази се до решења да је:

$$\begin{aligned} h &= a_2 + (1 - \alpha)(a_3 - a_2) \\ l &= b_1 + (1 - \alpha)(b_3 - b_1) \end{aligned} \quad (3-60)$$



Слика 3-17. Функција припадности леве  $\mu_{(\tilde{a}x)}$  и десне стране  $\mu_{\tilde{b}}$  ограничења у FLP

На слици 3-17. фази лева страна ограничења представљена је функцијом припадности  $\mu_{(\tilde{a}x)}$  (означено плавом бојом). Фази десна страна ограничења представљена је функцијом припадности  $\mu_{\tilde{b}}$  (означено наранџастом бојом). Ознаке  $h$  и  $l$  означавају максималне вредности функција припадности  $\mu_{(\tilde{a}x)}$  и  $\mu_{\tilde{b}}$  на ординати, респективно. Ниво задовољења решења је  $\alpha$ .

Проблем FLP може да се трансформише у крисп модел линеарног програмирања (класичан проблем LP) на следећи начин:

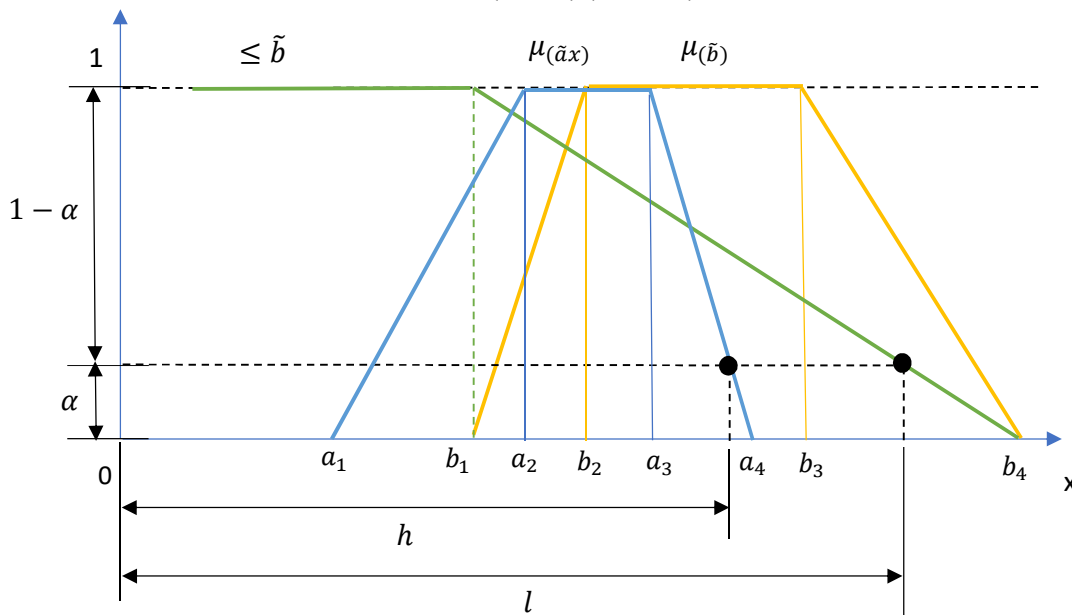
$$\begin{aligned} \max Z &= c^T x, \\ \text{s. t. } &(a_2 + (1 - \alpha)(a_3 - a_2))x \leq b_1 + (1 - \alpha)(b_3 - b_1), \\ &x \geq 0 \end{aligned} \quad (3-61)$$

За сваки од нивоа задовољења  $\alpha$  из интервала  $[0,1]$  циљна функција узима одређену вредност  $Z^\alpha$ . Доносилац одлуке приликом бирања најадекватнијег решења за одређени проблем одређује ниво задовољења.

Нека је дат FLP са фази коефицијентом леве стране ограничења  $\tilde{a}$ , који је сада несиметрични трапезоидни фази броје и фази десном страном ограничења  $\tilde{b}$ , који је такође несиметричан трапезоидни фази број. Циљна функција  $Z$  је крисп број, као и

променљива  $x$ . Лева страна ограничења  $\tilde{a}x$  постаје несиметричан трапезоидни фази број. На основу сличности троуглова долази се до формуле за растојања  $h$  и  $l$ :

$$\begin{aligned} h &= a_3 + (1 - \alpha)(a_4 - a_3) \\ l &= b_1 + (1 - \alpha)(b_4 - b_1) \end{aligned} \quad (3-62)$$



Слика 3-18. Трапезоидне функције припадности леве  $\mu_{(\tilde{a}x)}$  и десне стране  $\mu_{\tilde{b}}$  ограничења у FLP

На слици 3-18. фази лева страна ограничења представљена је функцијом припадности  $\mu_{(\tilde{a}x)}$  (означено плавом бојом). Фази десна страна ограничења представљена је функцијом припадности  $\mu_{\tilde{b}}$  (означено жутом бојом). Неједнакост у ограничењу је функција  $\leq \tilde{b}$  (означено зеленом бојом). Ознаке  $h$  и  $l$  означавају максималне вредности функција припадности  $\mu_{(\tilde{a}x)}$  и  $\mu_{\tilde{b}}$  на ординати, респективно. Ниво задовољења решења је  $\alpha$ .

Проблем FLP тада постаје:

$$\begin{aligned} \max Z &= c^T x, \\ \text{s. t. } &(a_3 + (1 - \alpha)(a_4 - a_3))x \leq b_1 + (1 - \alpha)(b_4 - b_1), \\ &x \geq 0. \end{aligned} \quad (3-63)$$

### 3.2.5.6 Решавање проблема FLP са фазификованом релацијом између леве и десне стране ограничења

У фази линеарном програмирању релација између леве и десне стране ограничења дефинисана је са знаком једнакости, веће или једнако, мање или једнако, веће, мање. Приликом дефинисања одређеног проблема ове релације фазификују се у складу са условима неодређености у проблему. Тако услов “веће” постаје “приближно веће” и добија знак  $\gtrsim$ , док услов “мање” постаје “приближно мање” и добија знак  $\lesssim$ . Нови услов добија одређени праг толеранције, који дозвољава расплутост релације,

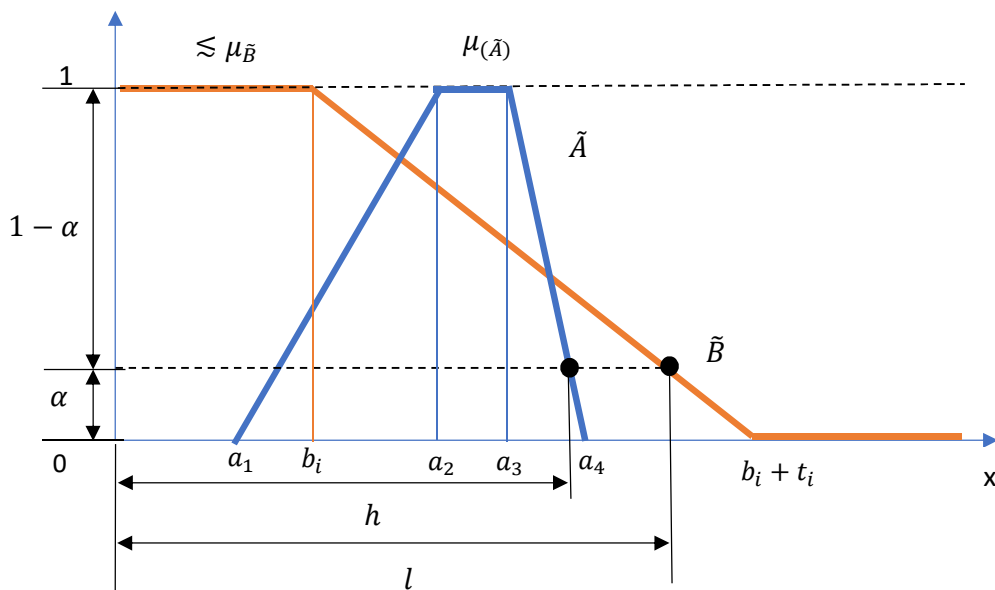
при чему лева страна ограничења може да буде у некој мери и мало већа од десне стране. Овај праг толеранције представља се фази скупом.

Нека је дат FLP у којем је релација у ограничењу исказана са “приближно мање”, односно лева страна ограничења је “приближно мања” од десне стране ограничења:

$$\begin{aligned} \max Z &= c^T x, \\ \text{s. t. } ax &\lesssim b, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{3-64}$$

Ова релација не значи да је лева страна ограничења стриктно мања од десне стране, она може у некој мери да буде и већа. Зато се ова релација представља фази скупом и поставља се одређени праг толеранције  $b_i + t_i$  за који је лева страна ограничења већа од десне стране.

Ако се производ  $\tilde{a}x$  представи као фази скуп  $\tilde{A}$  и десна страна ограничења као фази скуп  $\tilde{B}$ , тада ограничење може да се представи као релација  $\tilde{A} \lesssim \tilde{B}$ . Ограничење може графички да се представи:



Слика 3-19. Фази релација леве и десне стране система ограничења

На слици 3-19. функција припадности фази релације означена је као  $\lesssim \mu_{\tilde{B}}$  (означено наранџастом бојом). Фази лева страна ограничења представљена је функцијом припадности  $\mu_{(\tilde{A})}$  (означено плавом бојом). Ознаке  $h$  и  $l$  означавају максималне вредности функција припадности  $\lesssim \mu_{\tilde{B}}$  и  $\mu_{(\tilde{A})}$  на ординати, респективно за ниво задовољења решења,  $\alpha$ .

Примењујући методу сличности троуглова за одговарајуће троуглове растојања  $h$  и  $l$  су:

$$\begin{aligned} h &= a_3 + (1 - \alpha)(a_4 - a_3) \\ l &= b_i + (1 - \alpha)((b_i + t_i) - b_i) \end{aligned} \tag{3-65}$$

и FLP постаје:

$$\begin{aligned} \max Z &= c^T x, \\ \text{s. t. } (a_3 + (1 - \alpha)(a_4 - a_3))x &\leq b_i + (1 - \alpha)((b_i + t_i) - b_i), i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

$$x \geq 0. \quad (3-66)$$

Према ауторима Белман и Задех (Bellman and Zadeh, 1970) симетричан FLP, у коме се тражи максимално задовољење циљне функције и ограничења модела, састоји се из два дела у коме се израчунава горње и доње ограничење циљне функције,  $Z^u, Z^l$ , респективно.

FLP за добијање доњег ограничења циљне функције  $Z^l$ :

$$\begin{aligned} \max Z^l &= c^T x, \\ \text{s. t. } a_i x &\leq b_i, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \quad (3-67)$$

FLP за добијање горњег ограничења циљне функције  $Z^u$ :

$$\begin{aligned} \max Z^u &= c^T x, \\ \text{s. t. } a_i x &\leq b_i + t_i, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \quad (3-68)$$

Функција припадности  $\mu_{(x)}$  променљиве  $x$  монотono је растућа између 0 и 1. Она представља степен у коме променљива  $x$  испуњава неједнакост  $ax \leq b$ . Уколико је једнака 0, то значи да не постоји баланс између циљне функције и ограничења, или уколико је једнака 1, ниво задовољења максимално је испуњен. Ако се претпостави да је функција припадности  $\mu_{(x)}$  линеарна, тада гласи:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } a_i x \leq b_i \\ 1 - \frac{a_i x - b_i}{t_i}, & \text{ако је } b_i < a_i x \leq b_i + t_i \\ 0, & \text{ако је } a_i x > b_i + t_i \end{cases} \quad (3-69)$$

Оптимална вредност FLP је фази скуп са функцијом припадности  $\mu_{(\tilde{G})}$ :

$$\mu_i(\tilde{G}) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } Z^u \leq cx \\ \frac{cx - Z^l}{Z^u - Z^l}, & \text{ако је } Z^l \leq cx \leq Z^u \\ 0, & \text{ако је } Z^l \geq cx \end{cases} \quad (3-70)$$

Дефазификован FLP постаје класичан LP:

$$\begin{aligned} \max \alpha \\ \text{s. t. } \alpha(Z^u - Z^l) - c^T x &\leq -Z^l \\ \alpha t_i + ax &\leq b_i + t_i, \\ x, \alpha &\geq 0, \alpha \leq 1. \end{aligned} \quad (3-71)$$

За анализу сензитивности у којој се анализира одступање појединачног ограничења  $i$  у FLP, уводи се варијабла одступања,  $s_i$ . Тада функција припадности  $\mu_{i(x)}$  гласи:



$$\mu_i(x) = 1 - \frac{s_i}{t_i}, \quad (3-72)$$

при чему је варијабла одступања  $s_i$  једнака:  $0 \leq s_i \leq t_i$ . Модел FLP тада постаје:

$$\begin{aligned} & \max \alpha \\ \text{s. t. } & \alpha t_i + s_i \leq t_i, \\ & a_i x - s_i \leq b_i \\ & s_i \leq t_i \\ & x, s \geq 0, \alpha \leq 1 \end{aligned} \quad (3-73)$$

## 3.2.6 Фази мере

### 3.2.6.1 Мере могућности и неопходне мере

Монотоне мере веома су корисне приликом квантификовања неизвесности. Ако елемент  $s$  припада крисп скупу  $S$  дефинисаном на универзалном скупу  $P(X)$ , може да се формира степен доказа или веровања да дати елемент припада том крисп скупу. Уколико се степен доказа или веровања исказе кроз функцију припадности  $\mu(S)$ , пресликавање се изражава као:

$$\mu: P(S) \rightarrow [0,1] \quad (3-74)$$

Функција припадности  $\mu(S)$  јесте степен доступних доказа веровања да дати елемент  $s$  припада крисп подскупу  $S$ . Збир свих степена доступних доказа веровања за дати елемент јесте расплутост (енгл. fuzziness) његове припадности. Тип ове неизвесности који је заправо монотона мера, разликује се од неизвесности исказане преко фази скупа, који је ограничен својим границама. Монотоне мере за коначан скуп дефинисане су са најмање три тврдње, од којих су две:

1.  $\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(X) = 1$
2.  $\mu(S) \leq \mu(F)$  за  $S, F \in P(X), S \subseteq F$

Прва аксиома представља постављене границе за монотоне мере, која каже да нема доказа за празан скуп и комплетна припадност дефинисана је за универзални скуп. Друга аксиома каже да уколико се подскуп  $S$  садржи у подскупу  $F$ , степен доказа елемената подскупа  $F$  већи је или једнак степену доказа елемената подскупа  $S$ .

Мера веровања (енгл. Belief measure) може да се представи као пресликавања елемената универзалног скупа  $P(X)$  на доказ представљен кроз интервал:

$$bel: P(S) \rightarrow [0,1] \quad (3-75)$$

За сваки подскуп  $S_n$  скупа  $S$  дефинисаног на универзалном скупу  $X$ , *belief* мера је степен веровања заснована на доказима за елементе скупа  $S$ . Трећа аксиома за *belief* меру може да буде представљена као:

$$bel(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n) \geq \sum_i bel(S_i) - \sum_{i < j} bel(S_i \cap S_j) + \dots + (-1)^{n+1} bel(S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n) \quad (3-76)$$

где су  $S_n$  крисп подскупови универзалног скупа  $X$ . Уколико су скупови  $S_i$  непреклапајући, тако да је  $S_i \cap S_j = \emptyset$ , трећа аксиома постаје:

$$bel(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n) \geq bel(S_1) + bel(S_2) + \dots + bel(S_n) \quad (3-77)$$

За случај када је  $n = 2$ , тада постоје два непреклапајућа скупа,  $S$  и  $\bar{S}$ :

$$bel(S) + bel(\bar{S}) \leq 1 \quad (3-78)$$

Фази мера поузданости (енгл. Plausibility measure) такође је пресликавање универзалног скупа на интервал  $[0,1]$ :

$$pl: P(X) \rightarrow [0,1] \quad (3-79)$$

Као и *belief* мера, *plausibility* мера задовољава прве две аксиоме монотоности и трећу аксиому њој својственоу:

$$pl(S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n) \leq \sum_i pl(S_i) - \sum_{i < j} pl(S_i \cup S_j) + \dots + (-1)^{n+1} pl(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n) \quad (3-80)$$

За случај када је  $n = 2$ , тада постоје два непреклапајућа скупа,  $S$  и  $\bar{S}$ :

$$pl(S) + pl(\bar{S}) \geq 1 \quad (3-81)$$

Користећи релације:  $bel(S) + bel(\bar{S}) \leq 1$  и  $pl(S) = 1 - bel(\bar{S})$ , добија се:

$$pl(S) \geq bel(S) \quad (3-82)$$

Може да се констатује да је *plausibility* мера у најмању руку једнака *belief* мери.

Када се говори о угњежденим скуповима (енгл. Nested sets), позивајући се на рад аутора Шафера (Shafer, 1976), они се представљају у математичком изразу  $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots \subset S_n$ , где је  $S_i$  подскуп универзалног скупа  $X$ . Уколико су елементи  $s$ , наведених подскупова дефинисаних на универзалном скупу  $X$ , угњеждени и садрже квантитативне вредности које нису у супротности, тада могу да се дефинишу мере над тим вредностима, као што су  $bel(S_i)$  и  $pl(S_i)$ . Обе мере специјалне су форме монотоне мере. *Belief* мера означава идеју или мишљење пре него што се дође до података који потврђују или оповргавају тврдњу. *Plausibility* мера садржи информације да је нешто могуће или вероватно. У основи *belief* мера је количина која може да се искаже као степен доказивања збира елемената једног или више скупова дефинисаних на универзалном скупу. У том случају *plausibility* мера је комплемент *belief* мере комплемента скупа  $S$ . Релација између две мере за скуп елемената  $S$ , може да се представи као:

$$\begin{aligned} pl(S) &= 1 - bel(\bar{S}) \\ bel(S) &= 1 - pl(\bar{S}) \end{aligned} \quad (3-83)$$

Ако се наведене мере представе као релације за два различита скупа на универзалном скупу, тако да  $S, F \in P(X)$ :

$$\begin{aligned} bel(S \cap F) &= \min[bel(S), bel(F)] \\ pl(S \cup F) &= \max[pl(S), pl(F)] \end{aligned} \quad (3-84)$$

Уколико се дефинише мера БЕА (енгл. Basic Evidence Assignment) као мера  $m(S)$  на универзалном скупу  $P(X)$  која може да обједини  $bel(S_i)$  и  $pl(S_i)$  меру, представљаће пресликавање:

$$m: P(X) \rightarrow [0,1] \quad (3-85)$$

Границе мере  $m(S)$  могу да се представе као:

$$m(\emptyset) = 0$$

$$\sum_{S \in P(X)} m(S) = 1 \quad (3-86)$$

Осврћући се на релацију  $pl(S) \geq bel(S)$  *plausibility* мера скупа  $S$  садржи све доказе садржане у *belief* мери и доказе у свим скуповима који секу скуп  $S$ .

Исказано речима, наведена релација за *belief* меру,  $bel(S \cap F)$  говори да је *belief* мера пресека два различита скупа једнака минимуму *belief* мера посматрајући скупове независно, док је *plausibility* мера  $pl(S \cup F)$  уније два различита скупа једнака максимуму *plausibility* мера посматрајући скупове независно. У литератури се *belief* мера представља као фази мера неопходности (енгл. Necessity measure), док се *plausibility* мера представља као фази мера могућности (енгл. Possibility measure), и према томе наведена релација може исказати:

$$\begin{aligned} \eta(S \cap F) &= \min[\eta(S), \eta(F)] \\ \pi(S \cup F) &= \max[\pi(S), \pi(F)] \end{aligned} \quad (3-87)$$

Позивајући се на релацију  $pl(S) \geq bel(S)$  и представљање *belief* и *plausibility* мере као *necessity* и *possibility* мере, респективно, нова релација може да буде изражена као:

$$\pi(S) \geq \eta(S) \quad (3-88)$$

Мера ВЕА представља степен веровања да појединачни елемент  $x$ , из универзалног скупа  $X$ , припада скупу  $S$ , али не и сваком подскупу скупа  $S$ . Ово је разлика између мере ВЕА, *belief* и *plausibility* мере. Потребно је да се наведе да се мера ВЕА разликује од функције густине вероватноће (енгл. Probability Density Function, PDF), тако што је ВЕА дефинисана на скупу универзалног скупа, док је PDF дефинисана на елементу универзалног скупа.

Ако је  $bel(S_i)$  укупан степен доказа за елементе скупа  $S$  и елементе његовог подскупа  $F$ , а  $m(F)$  мера за степен доказа подскупа  $F$ , тада ВЕА може да се искористи за дефинисање *belief* мере:

$$bel(S) = \sum_{F \subseteq S} m(F) \quad (3-89)$$

ВЕА мера може да се искористи и за дефинисање *plausibility* мере:

$$pl(S) = \sum_{F \cap S \neq \emptyset} m(F) \quad (3-90)$$

Горе наведена формула показује да је *plausibility* мера елемената из скупа  $S$  једнака укупном доказу из скупа  $S$  са доказом из свих подскупова  $F$ , као његовом подскупу, дефинисаних на универзалном скупу који секу скуп  $S$ .

### 3.2.6.2 Теорија доказа

Још једна од монотоних мера, коју је у свом раду аутор Шафер објаснио (Shafer, 1976), јесте теорија доказа (енгл. Evidence Theory). Ова теорија узима у обзир више извора приликом процене доказа. Користи здружену меру ВЕА, која се обележава са  $m_{12}(S)$ , и састоји се заправо од две мере ВЕА,  $m_1$  и  $m_2$  дефинисане на скупу  $S_i$  универзалног скупа  $X$ . Користи се правило комбинованих доказа дато од стране аутора Демстера (Dempster, 1967), који је први изучавао процену незнања, тј. одсуства информација, шездесетих година XX века. Ово правило може да се исказе следећим математичким записом:

$$m_{12}(S) = \frac{\sum_{F \cap H = S} m_1(F) \cdot m_2(H)}{1-K} \text{ за } S \neq \emptyset \quad (3-91)$$

При чему је именилац нормализован фактор:

$$K = \sum_{F \cap H = \emptyset} m_1(F) \cdot m_2(H) \quad (3-92)$$

Демстерово правило комбинованих доказа слично је грађењу комбинованих функција густине вероватноће, које се састоје од две независне функције. Према томе, срж доказа овог правила може да се искаже као пар  $(S, m)$ , где је  $S$  скуп доказа дефинисаних са  $m(S)$ .

### 3.2.6.3 Мере вероватноће

Према теорији доказа фази мера вероватноће  $p(S)$  (енгл. Probability measures) монотона је мера и представља пресликавање само елемената универзалног скупа на интервал  $[0,1]$ :

$$p: x \rightarrow [0,1] \quad (3-93)$$

То је и разлика између мере вероватноће и *belief* и *plausibility* мера, при чему мера вероватноће односи се на доказе који су искључиво додељени елементима универзалног скупа, јер уколико постоје докази за подскуп универзалног скупа, не за елементе скупа, тада не може да се одреди мера вероватноће, само *belief* и *plausibility* мера (обе због њихове дуалности). Уколико због наведеног услова може да се одреди мера вероватноће, тада важи релација (Dempster, 1967):

$$\forall S \in P(X) \quad bel(S) = pl(S) = p(S) = \sum_{x \in S} p(x) \quad (3-94)$$

Релација изнад доказује да су фази мере *belief*, *plausibility* и мера вероватноће једнаке за ситуацију уколико постоје докази за сваки појединачан елемент универзалног скупа. Поштујући трећу, додатну аксиому за монотоне мере и за случај када је  $n = 2$  са два непреклапајућа скупа,  $S$  и  $\bar{S}$ , за фази меру вероватноће тада важи:

$$p(S) + p(\bar{S}) = 1 \quad (3-95)$$

Осврћући се на трећу аксиому за *belief* меру, додајући строжи услов посматрајући само два скупа,  $S$  и  $F$ :

$$bel(S \cup F) = bel(S) + bel(F), \quad S \cap F = \emptyset \quad (3-96)$$

добија се мера вероватноће.

### 3.2.6.4 Поређење теорије вероватноће и теорије могућности

Обе теорије заснивају се на теорији доказа и обе се користе за доношење одлука у неизвесном окружењу, иако су се развијале посебно кроз историју. Да би се разумеле теорије и њихова разлика кроз аксиоматски приступ, дато је 16 аксиома при чему се разликују у само једној аксиоми, шеснаестој по реду, као што је представљено у раду аутора Гајнеса (Gaines, 1978). У његовом раду представљена је логика неизвесности кроз форму решетке  $L$ , као проширење Булове логике засноване на теорији фази скупа. Логичке операције засноване на аритметичким операцијама се користе у рачунању

конјункције, користећи оператор *min*, дисјункције, користећи оператор *max*, негације, користећи одузимање од укупне вредности. У свом раду аутор Гајнес (Gaines, 1978) истиче да није довољна употреба логичких оператора *min* и *max* да би се дефинисала разлика између теорије вероватноће и теорије могућности, с обзиром да се они користе у теорији вероватноће за израчунавање истог.

За представљање логике неизвесности употребиће се решетка  $L(\Omega, M, N, \wedge, \vee)$ . дефинисана на универзалном скупу  $\Omega$ , максималног елемента  $M$ , минималног елемента  $N$ , оператора конјункције  $\wedge$ , оператора дисјункције  $\vee$ . Елементи универзалног скупа  $\Omega$ , биће означени са  $x, y, z$ .

Наведених шест аксиома задовољавају идемпотентност логике неизвесности (Ross, 2004):

1. Комутативност, ако је:  $\forall x \in L \quad x \vee x = x \wedge x = x$
2. Асоцијативност, ако је:  $\forall x, y \in L \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$  и  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
3. Дистрибутивност, ако је:  $\forall x, y, z \in L \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$  и  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
4. Дефинисање *max* и *min* елемента, ако је:  $\forall x, y \in L \quad x \vee (x \wedge y) = x, \quad x \wedge (x \vee y) = x$
5. Релација, ако је:  $\forall x \in L \quad x \vee M = M$  и  $x \wedge M = x$
6. Ако је:  $\forall x, y \in L \quad x \leq y$  ако постоји  $z \in L$ , тако да је  $y = x \vee z$

Претпоставимо да сваки елемент решетки  $L$  има додељену вредност вероватноће или степена веровања (Belief или Probability фази мера) на интервалу  $[0,1]$  дефинисану функцијом пресликавања  $p: L \rightarrow [0,1]$  са ограничењима, (Ross, 2004):

7.  $p(N) = 0, p(M) = 1$
8. Ако је:  $\forall x, y \in L \quad x \leq y$  онда је  $p(x) \leq p(y)$
9. Додатна аксиома, ако је:  $\forall x, y \in L \quad p(x \wedge y) + p(x \vee y) = p(x) + p(y)$ . Мора да буде задовољено:  $(x \wedge y) \leq \min[p(x), p(y)] \leq \max[p(x), p(y)] \leq p(x \vee y)$
10. Логичка једнакост или подударност:  $\forall x, y \in L \quad x \leftrightarrow y$  ако  $p(x \wedge y) = p(x \vee y)$

Да би се употпунила Гајнесова логика потребно је да се дефинишу импликација и негација, као две операције које се издвајају од других логика у математици. Да би се ове операције дефинисале користиће се метрика на решетки  $L$ , која мери удаљеност вредности тврдње две претпоставке. Ово се базира на тврдњи да две логички једнаке претпоставке немају удаљеност између себе (ако је  $d = 0$ , оне су једнаке). Мера удаљености (Ross, 2004):

11. Ако је:  $\forall x, y \in L \quad d(x, y) = p(x \vee y) - p(x \wedge y)$ . Где је  $d(x, x) = 0, 0 \leq d(x, y) \leq 1$ , и  $d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)$
12. Ако је:  $\forall x, y \in L \quad p(x \leftrightarrow y) = 1 - d(x, y) = 1 - p(x \vee y) + p(x \wedge y)$

13. Јачина импликације, ако је:  $\forall x, y \in L$   $p(x \rightarrow y) = p(x \leftrightarrow x \wedge y)$   
 $= 1 - d(x, x \wedge y)$   
 $= 1 - p(x) + p(x \wedge y)$   
 $= 1 + p(y) - p(x \vee y)$   
 $= 1 - d(y, x \vee y)$
14. Јачина негације, ако је:  $\forall x \in L$   $p(x) = p(x \leftrightarrow F) = 1 - p(x)$   
 $= 1 - d(x, F)$
15. Дистрибутивност, ако је:  $\forall x, y, z \in L$   $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
16. Икључена средина, ако је:  $\forall x, y \in L$   $p(x \vee \bar{x}) = 1$ ,  $p(x \rightarrow y) = 1 \vee p(y \rightarrow x) = 1$   
или  $p((x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x)) = 1$

### 3.2.7 Трансформација расподеле вероватноће у расподелу могућности

Када се говори о вероватноћи (енгл. Probability) углавном мисли се на учесталост понављања неког догађаја. Вероватноћа се заснива на историјским подацима и статистичком мерењу понављања догађаја. Најједноставније може да се изрази кроз образац:

$$p(x) = \frac{n(x)}{N} \quad (3-97)$$

где је:

$n(x)$  – број поновљања одређеног догађаја,

$N$  – укупан број измерених догађаја.

У раду аутор Задех (Zadeh, 1978) тврдио је да помоћу теорије фази скупова може да се прецизније опише могућност неког догађаја него његова вероватноћа. Опис могућности неког догађаја према Задеху не састоји се у мерењу понављања догађаја, већ у лингвистичком опису припадности података некој променљивој. Теорија фази скупова посебно долази до изражаја уколико нема довољно историјских података о неком догађају, нема довољно објективних података, и мора да се приступи субјективном опису истог догађаја. Користећи приступ из Задеховог рада (Zadeh, 1978) за пример: “време производње је дуго”, не даје се нумерички изражен податак о трајању производње. Дат пример може да се субјективно и лингвистички опише са могућим вредностима трајања производње: “време производње је око 5 минута“, „време производње је краће од 5 минута“, „време производње је дуже од 5 минута“ или “време производње је између 5 и 7 минута“. Оваквим лингвистичким описом постављају се границе трајања производње, или се приближно одређује време њеног трајања. Трајање производње може да се изрази кроз јачину тврдње, при чему снажније или слабије се тврди колико ће трајати производња. Пример за то је оцена експерта који искуствено одређује неизвесност трајања производње кроз субјективне тврдње:

- 30% сам сигуран да ће производња да траје 5 минута,
- 60% сам сигуран да ће производња да траје 6 минута,
- 10% сам сигуран да ће производња да траје 7 минута.

Наведеним изразима експерт најснажније тврди да ће производња да траје 6 минута, затим следећа по снази је тврдња да ће производња да траје један минут мање и најслабије тврди да ће производња да траје 7 минута. На овај начин додељује се

могућност трајања догађаја који ће да се деси. Користећи вероватноћу и историјска мерења ово би значило да 6 мерења од укупно 10 показују време трајања производње 6 минута, 3 мерења од укупно 10 показују време трајања од 5 минута и 1 мерење од укупно 10 показује време трајања производње од 7 минута. Статистичким описом већ одиграног догађаја, при чему су измерена трајања производње, може да се прогнозира догађај који треба да се деси, у нашем случају нова производња.

Вероватноћа и могућност (енгл. Probability and Possibility) нису потпуно независне једна од друге. Изражено кроз опис вероватноће тражи се фреквентност догађаја  $N$  из коначног скупа  $X$ , док кроз опис могућности тражи се могућност одигравања догађаја  $N$ . Уколико се вероватноћа означи са  $P(N)$  и могућност са  $\Pi(N)$  тада се њихова веза може представити:

$$\begin{aligned} P(X) &= \Pi(X) = 1, \\ P(\emptyset) &= \Pi(\emptyset) = 0. \end{aligned} \quad (3-98)$$

### **Трансформација мера вероватноће у мере могућности**

Као што је претходно наведено, вероватноћа и могућност нису у потпуности међусобно независни. Постоји релација између њих. Уколико се тражи њихова веза, обе морају да прођу математичке захтеве, као што је дефинисано у раду аутора Дубое и Прадеа (Dubois and Prade, 1986).

#### **А) Pointwise трансформација**

Нека је вероватноћа догађаја  $N$  изражена кроз скуп  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_n)$ , при чему је  $p_1, p_2, \dots, p_n$  вероватноћа одређене класе догађаја  $N$ . Потребно је да се изврши линеарна трансформација у могућност изражену кроз скуп  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \dots, \pi_n)$ , тако да је:

$$\begin{aligned} \exists k > 0, \\ \forall i \pi_i &= kp_i \end{aligned} \quad (3-99)$$

Мера могућности је тада изражена као:

$$\forall N \Pi(N) = \max \pi_i \quad (3-100)$$

Уколико је  $\Pi(N) = 1$ , биће да је  $1/k = \max \pi_i$ , за свако  $\exists i, \pi_i = 1$ . Пошто је сума свих чланова скупа  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_n)$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ , следи да је сваки елемент  $\pi_i \geq p_i$ , (Dubois and Prade, 1986).

#### **Б) Не Pointwise трансформација**

*Pointwise* трансформација заснива се више на историјским измереним подацима. Прави случајан догађај је када исходи вероватноће имају униформну расподелу. Ово се најједноставније објашњава тиме да коначан исход након довољно дугог бацања кованог новчића биће једнак број писама и главе. Ако је након одређеног броја бацања новчића једна од страна, писмо ( $n_1$ ) или глава ( $n_2$ ), са више исхода, онда догађај није потпуно случајан.

У овом случају уводи се фази мера неопходности (енгл. Necessity measure) која се математички изражава:

$$\begin{aligned} N(n_1) &= p_1 - p_2 \\ N(n_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3-101)$$

Мера неопходности за неки догађај  $Q$ , представља разлику између исхода  $Q$  и његовог супротног исхода  $\bar{Q}$ , тако да је:

$$N(Q) = \sum_{n_i \in Q} \max(p_i - p_Q, 0) \quad (3-102)$$

где је  $p_Q = \max(p_i | n_i \notin Q)$ .

Да би се илустративно приказала мера неопходности поставиће се тврдња (Dubois and Prade, 1986):

- Дато је  $n_i$  које је уређено према поретку  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ ,  $Q_j = \{n_1, n_2, \dots, n_j\}$  за  $j = 1, \dots, n$  и  $Q_0 = \emptyset$ , тако да је  $N(Q) = \max_{Q_i \subseteq Q} N(Q_i)$ ,
- Ако је  $p_1 > p_j$  за  $j > 1$ ,  $N(Q) > 0$  и, ако и само ако је  $n_1 \in Q$ ,
- $N$  је мера неопходности тако да важи  $N(Q \cap W) = \min(N(Q), N(W))$ ,
- $N$  је конзистентно са мером вероватноће из које настаје, тако да је:  
 $\forall Q N(Q) \leq P(Q) \leq \Pi(Q)$

При чему је  $\Pi$  мера могућности добијена из  $N$ , мере неопходности због своје дуалности. Из овога може да се израчуна да је  $\pi_i = 1 - N(\Omega - \{n_i\})$ , при чему је  $\Omega = \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ , то јест  $\pi_i = \sum_{k=1}^n p_k - \sum_{j \neq i} (p_j - p_i, 0)$ , стога је:  $\pi_i = \sum_{k=1}^n \min(p_i, p_k)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

## В) Пример пребацивање мере вероватноће у меру могућности

Приликом снимања података о трајању производње једног комада производа на производној линији врши се мерење времена трајања производње. Пошто је процес производње сложен и састоји се од низа повезаних операција које имају своја времена трајања производње, готово је немогуће да се добије идентично време трајања производње за сваки комад производа. Зато се мерење врши на великом броју узорака како би се добило просечно време трајања производње. Од измереног времена може да се креира хистограм, као што је приказано на слици 3-20, и скуп измерених вредности може да се прикаже као интервал од *min* до *max* вредности:

$$M = [3,5, 6,3] \quad (3-103)$$

Уколико се скуп  $M$  дискретизује на  $n$  узастопних интервала, тада постаје:

$$M = M_i, i = 1, \dots, n \quad (3-104)$$

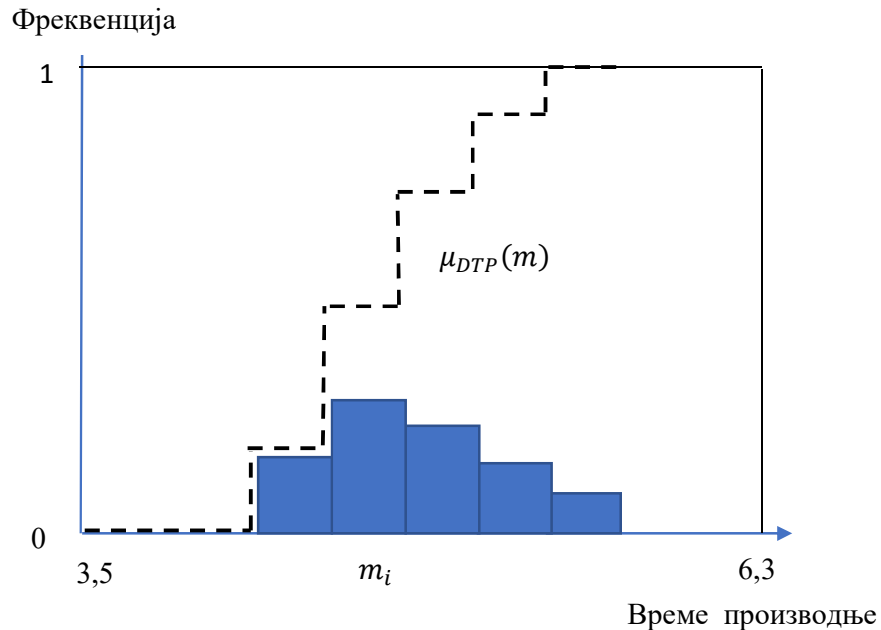
И ако је  $n$  довољно велик број измерених вредности, може да се направи хистограм, тако да је скуп вероватноћа:  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_n)$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ , од  $p(M_i), i = 1, \dots, n$ .

Уколико се дужина трајања производње (ДТР) искаже семантичком тврдњом да је дужина трајања производње већа од неке граничне вредности  $M$  и максимално траје до 6,3 минута, у том случају вероватноћа се додељује скупу  $M = [m_i, 6,3]$ , тако да је  $m_i = \inf M_i$ . Фази скуп, који настаје из дистрибуције вероватноће на скупу  $M$ , добија облик (Dubois and Prade, 1986):



$$\forall m \mu_{DTP}(m) = Pl(\{m\}) = \sum_{m_i \leq m} P(M_i) \quad (3-105)$$

При чему је  $\mu_{DTP}(m)$  функција припадности фази броја. Овај начин трансформације расподеле вероватноће у расподелу могућности, односно у функцију припадности фази броја, први пут је представљен у раду аутора Меквикар-Велана (MacVicar-Whelan, 1979).



Слика 3-20. Хистограм мере вероватноће добијен из статистичких података дужине трајања производње

За случај уколико функција расподеле није доступна и уколико су прикупљени подаци изражени као интервал, нпр. уколико мерење дужине трајања производње не може да буде измерено као јединствен број, већ се изражава кроз скуп интервала,  $I = \{(l_k, u_k) | k = 1, \dots, n\}$ , постоје два случаја: када се скупови интервала преклапају или не преклапају. У пракси дешава се често да се скупови интервала прикупљених вредности преклапају.

Претпоставиће се да је:

$$\exists [l, u] = \cap_{k=1, \dots, n} [l_k, u_k] \neq \emptyset \quad (3-106)$$

И нека је:

$$[L, K] = \cup_{k=1, \dots, n} [l_k, u_k] \quad (3-107)$$

Скуп преклапајућих интервала може математички да се изрази као:

$$[L, K] = [l_k, u_k] \subseteq I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \quad (3-108)$$

Према томе, може да се закључи да је  $[l_k, u_k]$  најмањи интервал који се садржи у следећем већем интервалу  $I_1$ , затим је  $I_1$  део већег интервала  $I_2$  итд. Приликом сакупљања података, који припадају сваком од интервала, узима се вредност  $m(I_i)$  која дефинише вероватноћу за сваки интервал и могу да се креирају хистограм и расподела



et al., 2004) предложена су ограничење јаког поретка за трансформацију мере вероватноће у мере могућности, који треба да обезбеди очување облика расподеле:

$$p_i < p_j \leftrightarrow \pi_i < \pi_j \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\} \quad (3-112)$$

При чему је  $p_i = P(x_i)$  и  $\pi_i = \Pi(x_i)$  за сваки  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Поштујући ограничења (3-111) и (3-112) из расподеле вероватноће тражи се најспецифичнија расподела могућности,  $\pi$ . Посматрајући релацију за свако  $i$   $\pi_i \leq \pi'_i$  може се рећи да је расподела  $\pi_i$  специфичнија од  $\pi'_i$  и у овом случају тражи се  $\pi_i$ . У ту сврху уводи се пермутација  $\sigma$ , тако да је строг линеарни поредак  $\tau$  дефинисан над унивезалним скупом  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ :

$$p_i < p_j \leftrightarrow (x_i, x_j) \in \tau \quad (3-113)$$

Уколико се додели пермутација  $\sigma$  на линеарном поретку  $\tau$  за свако  $i \in \{1, \dots, N\}$ , тада је  $\sigma(i) < \sigma(j) \leftrightarrow (x_{\sigma(i)}, x_{\sigma(j)}) \in \tau$ .

Пермутација је бијекција (пресликавање) између елемената два скупа при чему елемент једног скупа пресликава се тачно у један елемент другог скупа, а елемент другог скупа има тачно једног пара међу елементима првог скупа. Нема елемената ни у једном скупу који немају свог пара. Да би услов бијекције био испуњен треба да важи испод наведено.

Дата су два скупа  $M$  и  $N$  тако да се  $N$  разликује од  $M$ , четири услова морају да буду испуњена да би се добила бијекција,  $\tau: M \rightarrow N$ :

- сваки елемент из скупа  $M$  мора да се пресликава у најмање један елемент скупа  $N$ ,
- не постоји елемент скупа  $M$  који може да се пресликава у више од једног елемента из скупа  $N$ ,
- сваки елемент из скупа  $N$  може имати најмање један оригинал из скупа елемената  $M$ ,
- не постоји елемент скупа  $N$  који може да има више од једног оригинала из скупа елемената  $M$ .

Пермутација је пресликавање елемената једног скупа у самог себе поштујући задати поредак. У Каучијевом дворедном обележавању у горњем реду налазе се елементи неког скупа, нпр. скупа  $M$ , док су у другом реду њихове слике. Као пример нека су елементи скупа  $M = \{1, 2, 3, 4\}$  и пермутација може да буде записана као:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-114)$$

То значи да је пресликавање извршено према следећем редоследу:

$$\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 2, \sigma(4) = 1 \quad (3-115)$$

Важно је напоменути да поредак елемената у првом реду може да се промени, али пресликавање остаје исто, нпр.:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-116)$$

Бијекција елемената из скупа  $M$  на елементе из скупа  $N$  има и инверзну функцију са елемената из скупа  $N$  на елементе скупа  $M$ ,  $\sigma^{-1}: N \rightarrow M$ . За пример дат изнад (3-114), инверзна функција  $\sigma^{-1}$  гласи:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (3-117)$$

Односно, то је обрнуто пресликавање тако да:  $\sigma^{-1}(1) = 4, \sigma^{-1}(2) = 3, \sigma^{-1}(3) = 1, \sigma^{-1}(4) = 2$ . Инверзна функција  $\sigma^{-1}$  даје рангирање за сваку класу вероватноће  $p_i$  из вектора вероватноће  $p$  сортираних по растућем редоследу. Аутори Дубоа и Праде трансформацију су представили кроз релацију према раду Масона и Деное (Masson and Denoeux, 2006):

$$\pi_i = \sum_{\{j | \sigma^{-1}(j) \leq \sigma^{-1}(i)\}} p_j \quad (3-118)$$

Уколико је вероватноћа времена производње  $P$  подељена на пет класа, које су различите међусобно, тада је вектор вероватноће  $p = (p_1, p_2, \dots, p_5)$ . Нека је:  $p_1 = 0,1, p_2 = 0,3, p_3 = 0,4, p_4 = 0,15, p_5 = 0,05$ . Пермутација је дата:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-119)$$

Инверзна функција пермутације:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (3-120)$$

Тако да је:  $\sigma^{-1}(1) = 2, \sigma^{-1}(2) = 4, \sigma^{-1}(3) = 5, \sigma^{-1}(4) = 3, \sigma^{-1}(5) = 1$ . Према релацији трансформације (3-118) расподела могућности формира се на следећи начин:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= p_1 + p_5 = 0,1 + 0,05 = 0,15 \\ \pi_2 &= p_1 + p_2 + p_4 + p_5 = 0,1 + 0,3 + 0,15 + 0,05 = 0,6 \\ \pi_3 &= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 0,1 + 0,3 + 0,4 + 0,15 + 0,05 = 1 \\ \pi_4 &= p_1 + p_4 + p_5 = 0,1 + 0,15 + 0,05 = 0,3 \\ \pi_5 &= p_5 = 0,05 \end{aligned} \quad (3-121)$$

Уколико је вероватноћа времена производње  $P$  подељена на пет класа међу којима су макар две једнаке, тада строги линеарни поредак више није примењив и уводи се строги парцијални поредак  $\vartheta$  дефинисан на универзалном скупу  $X$ . Парцијални поредак  $\vartheta$  може да се представи скупом одговарајућих линеарних поредака,  $L(\vartheta) = \{\tau_l, l = 1, L\}$ . За сваки линеарни поредак  $\tau_l$  важи правило:

$$\sigma_l(i) < \sigma_l(j) \leftrightarrow (x_{\sigma_l(i)}, x_{\sigma_l(j)}) \in \tau_l \quad (3-122)$$

У овом случају специфична расподела могућности за вектор вероватноће  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  добија се као максимум над свим могућим пермутацијама:

$$\pi_i = \max_{l=1, L} \sum_{\{j | \sigma^{-1}(j) \leq \sigma^{-1}(i)\}} p_j \quad (3-123)$$

Уколико је вероватноћа времена производње  $P$  подељена на пет класа, при чему су две међусобно једнаке, тада је вектор вероватноће  $p = (p_1, p_2, \dots, p_5)$ . Нека је:  $p_1 = 0,15, p_2 = 0,2, p_3 = 0,45, p_4 = 0,15, p_5 = 0,05$ . Према томе постоје две различите пермутације:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-124)$$

И две различите инверзне функције пермутације:

$$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (3-125)$$

Тако да је:  $\sigma_1^{-1}(1) = 2, \sigma_1^{-1}(2) = 1, \sigma_1^{-1}(3) = 3, \sigma_1^{-1}(4) = 5, \sigma_1^{-1}(5) = 4.$

$$\sigma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (3-126)$$

Може да се напише:  $\sigma_2^{-1}(1) = 3, \sigma_2^{-1}(2) = 1, \sigma_2^{-1}(3) = 2, \sigma_2^{-1}(4) = 5, \sigma_2^{-1}(5) = 4.$

Према релацији трансформације (3-123) расподела могућности формира се на следећи начин:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \max(p_1 + p_2, p_1 + p_3) = \max(0,35, 0,6) = 0,6 \\ \pi_2 &= \max(p_2, p_1 + p_2 + p_3) = \max(0,2, 0,8) = 0,8 \\ \pi_3 &= \max(p_1 + p_2 + p_3, p_3) = \max(0,8, 0,45) = 0,8 \\ \pi_4 &= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \\ \pi_5 &= p_1 + p_2 + p_3 + p_5 = 0,85 \end{aligned}$$

#### Д) Извођење расподеле могућности из експерименталних података

У индустрији сакупљање података и њихова анализа од суштинског је значаја за анализу процеса производње, настанка аномалија, доношења одлуке и акција спречавања понављања проблема. Зато је потребно да се анализирају подаци да би се установила величина утицаја одређених фактора у процесу.

Најједноставнији начин анализе јесте извођење расподеле вероватноће из прикупљених података. Нека се расподела вероватноће,  $P_x$  састоји од неколико класа  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  и нека је  $k_i$  број измерених вредности који припада једној од класа  $i = 1, \dots, n$ , тако да је  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

На основу фреквенције понављања измерених вредности формира се вектор  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ , при чему је  $f_i = k_i/N$ ,  $N$  је укупан број измерених вредности. Измерене вредности сврставају се у класе и трансформацијом аутора Дубоа и Праде (Dubois and Prade, 1986) може да се добије расподела могућности. Међутим, могуће је из исте расподеле вероватноће на истом узорку добити различите расподеле могућности. Постоји одређена неизвесност приликом трансформације расподеле вероватноће у расподелу могућности. Ниво поверења и интервал поверења у статистици користе се да се објасни утицај непознатих параметара у расподели вероватноће, односно дефинишу вероватноћу да ће случајна променљива узети вредност из одређеног интервала. Ниво поверења  $\alpha$  дефинише да ће генерисана могућносна расподела доминирати над расподелом вероватноће у  $100 \cdot (1 - \alpha)\%$  случајева.

Наиме, процедура треба да осигура да ће вероватноћа могућности да доминира над расподелом вероватноће у  $100 \cdot (1 - \alpha)\%$  случајева.

$$P(\Pi(X) \geq P(X) \forall X \subseteq p) \geq 1 - \alpha \quad (3-127)$$

при чему је:

$P(X)$  – непозната константна расподела вероватноће за догађај  $X$ ,

$\Pi(X)$  – расподела могућности за догађај  $X$  као случајна променљива,

Горе наведена формула може да се представи кроз мере неопходности  $N(X) = 1 - \Pi(\bar{X}) \forall X \subseteq p$  на следећи начин:

$$P(N(X) \leq P(X) \forall X \subseteq p) \geq 1 - \alpha \quad (3-128)$$

Да би се израчунао интервал поверења за мултиномиалну расподелу потребно је да се дефинише величина интервала,  $k_i$  биномиалне расподеле и дефинише скуп независних интервала поверења. Један од модела може бити конструисање истовремених интервала поверења и у литератури дат је низ решења (Fitzpatrick and Scott, 1987; Goodman, 1965; Quesenberry and Hurst, 1964; Sison and Glaz, 1995). Свако од ових решења има за циљ да дефинише регион поверења,  $M_n$  на простору расподеле вероватноће  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ . Регион поверења,  $M_n$  картезијански је производ од  $n$  интервала  $[p_1^-, p_1^+]x[p_2^-, p_2^+]x \dots x[p_n^-, p_n^+]$ , тако да је  $P(p \in M_n) \geq 1 - \alpha$ .

Горе наведена вероватноћа је вероватноћа процене. У свом раду аутори Масон и Деноа (Masson and Depoeux, 2006) искористили су модел који је развио аутор Гудман (Goodman, 1965) за узастопне интервале поверења:

*Бонферонијева неједнакост.* Нека су  $X_1, X_2, \dots, X_n$  догађаји  $n$  узорка који има вероватноћу догађаја,  $1 - \alpha$ . Према томе, вероватноћа да ће догађаји да се догоде истовремено је  $1 - n\alpha$ .

Доказ:

$$P(X_1 \cap \dots \cap X_n) = 1 - P(\overline{X}_1 \cup \dots \cup \overline{X}_n) \quad (3-129)$$

Користећи чињеницу да је  $P(\overline{X}_i) = \alpha, \forall i$ :

$$P(\overline{X}_1 \cup \dots \cup \overline{X}_n) \leq P(\overline{X}_1) + \dots + P(\overline{X}_n) \quad (3-130)$$

Или поједностављено:

$$P(X_1 \cap \dots \cap X_n) \geq 1 - n\alpha \quad (3-131)$$

Како би извео интервале поверења за мултиномиалну расподелу, Гудман је у свом раду дефинисао да је свака расподела вероватноће случајна биномиална расподела. Биномиална расподела за довољно велики узорак постаје нормална расподела са математичким очекивањем 0 и варијансом 1:

$$Z_i = \frac{\sqrt{N}(f_i - m_i)}{\sqrt{m_i(1 - m_i)}} \quad (3-132)$$

при чему је:

$m_i$  – математичко очекивање,

$f_i$  – величина класе (фреквентност понављања догађаја).

Квадрат расподеле  $Z_i$  постаје хи-квадрат  $\chi^2$  расподела са једним степеном слободe,  $\chi^2(1 - \alpha, 1)$ . Хи-квадратна расподела и хи-квадрат тест користе се у статистици приликом тестирања хипотезе да ли се крајњи исход разликује од очекиваног исхода и у којој мери. Хи-квадрат тест увек се рачуна са фреквенцијама, односно фреквенције које очекујемо у крајњем исходу уз постављену хипотезу. Најчешћи случајеви у којима се употребљава  $\chi^2$  тест:

- када постоји један узорак и жели да се тестира да ли фреквенције тог узорка одступају од очекиваних фреквенција уз постављену хипотезу,
- када су дате фреквенције два или више независних узорака и жели да се установи да ли се узорци разликују и у којим карактеристикама,
- када су дате фреквенције два или више зависних узорака и потребно је да се утврди да ли се узорци разликују у одређеним својствима.

Посматрајући их независно, свака од расподела  $Z_i, \forall i = 1, \dots, n$  је  $\chi^2$  расподела, при чему је  $i = 1, \dots, n$  број класа мултиномиалне расподеле.

$$\chi^2(1 - \alpha, 1) = \sum \frac{(f_i - m_i)^2}{m_i(1 - m_i)} \quad (3-133)$$

Интервал поверења за сваку од математичких очекивања,  $m_i$  може да буде добијен према следећој формули:

$$N(f_i - m_i)^2 = \chi^2(1 - \alpha, 1)m_i(1 - m_i), \forall i = 1, \dots, n \quad (3-134)$$

И једнако је:

$$m_i^2(N + \chi^2(1 - \alpha, 1)) - (2n_i + \chi^2(1 - \alpha, 1))m_i + \frac{n_i^2}{N} = 0 \quad \forall i = 1, n. \quad (3-135)$$

Где је  $\chi^2(1 - \alpha, 1)$  квантил хи – квадрат расподеле са једним степеном слободe. Свака формула има два решења која дефинишу горњу и доњу границу интервала поверења. Користећи Бонферонијеву неједнакост, Гудман релацију  $\chi^2(1 - \alpha, 1)$  замењује се  $\chi^2(1 - \alpha/n, 1)$ .

У свом раду Масон и Деноа (Masson and Depoex, 2006) користе Гудманово извођење и долазе до формуле за ограничење интервала поверења. Нека је:

$$A = \chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{K}, 1\right) + N \quad (3-136)$$

где је:

$\chi^2(1 - \alpha/n, 1)$  – квантил  $\chi^2$  расподеле са једним степеном слободe,  
 $N = \sum_{i=1}^m n_i$  – величина узорка.

Уз то нека је:

$$\begin{aligned} B_i &= \chi^2(1 - \alpha/n, 1) + 2n_i, \\ C_i &= \frac{n_i^2}{N}, \\ \Delta_i &= B_i^2 - 4AC_i \end{aligned} \quad (3-137)$$

И горње и доње ограничење интервала поверења:

$$[p_i^-, p_i^+] = \left[ \frac{B_i - \Delta_i^{1/2}}{2A}, \frac{B_i + \Delta_i^{1/2}}{2A} \right] \quad (3-138)$$

Препорука у литератури за практичну употребу формуле за израчунавање горње и доње границе интервала поверења предложене од стране Гудмана је у случајевима када је број класа  $n$  већи од 2 и број измерених вредности у једној од класа већи од 5. За примере са мањим бројем класа и измерених вредности, потребно је да се примене неке од метода предложене у литератури према ауторима Сисон и Глаз (Sison and Glaz, 1995).

Област поверења,  $\beta_n$  дефинисана интервалима поверења у мултиномиалној расподели, једнака је мерама вероватноће. Нека су доња и горња граница области поверења представљене респективно као  $P^- = \min_{P \in \beta_n} P(X)$  и  $P^+ = \max_{P \in \beta_n} P(X)$ . Израчунавање граница области поверења према формулама за сваки непразан скуп  $X$  од  $K$  је:

$$\begin{aligned} P^-(X) &= \max(\sum_{K_i \in X} p_i^-, 1 - \sum_{K_i \notin X} p_i^+) \\ P^+(X) &= \min(\sum_{K_i \in X} p_i^+, 1 - \sum_{K_i \notin X} p_i^-) \end{aligned} \quad (3-139)$$

Доказ:

За сваки  $X \subset K$ , доња граница области поверења решење је линеарног система:

$$\min_{p_1, \dots, p_n} \sum_{K_i \in X} p_i$$

Поштујући услове:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ и } p_i^- \leq p_i \leq p_i^+, i = 1, \dots, n. \quad (3-140)$$

Овакав линеарни систем специјалан је случај линеарних система који је изучаван у раду аутора Дубоа и Праде (Dubois and Prade, 1988). Као последица формулације за доњу и горњу границу поверења дату изнад, може да се закључи да је:

$$P^+(X) = 1 - P^-(\bar{X}), \forall X \subseteq K \quad (3-141)$$

И доња граница мере вероватноће довољна је да се опише област поверења,  $\beta_n$  кроз:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \{P | P^- \leq P\} \\ P(P_x \in \beta_n) &= P(P^- \leq P_x) \geq 1 - \alpha \end{aligned} \quad (3-142)$$

Чему је једнако:

$$P(P^+ \geq P_x) \geq 1 - \alpha \quad (3-143)$$

На овај начин скуп узастопних мултиномиалних интервала поверења за ниво поверења  $1 - \alpha$  може да се представи као скуп мера вероватноће са својом доњом и горњом границом. Као крајњи циљ потребно је да се достигне мера могућности која доминира над сваком мером вероватноће, односно доминира над њеном горњом границом, поштујући услов:

$$\Pi(X) \geq P^+(X), \forall X \subseteq K \quad (3-144)$$

Уколико доминира над њеном горњом границом, то значи да доминира над сваком мером вероватноће, с обзиром на то да је  $P^- \leq P_i \leq P^+$ . Овај циљ може другачије да се формулише, при чему је потребно пронаћи расподелу могућности која доминира над расподелом вероватноће, која је дефинисана својим границама,  $p_i = [p_i^-, p_i^+]$ . Као што је изнад објашњено за релације између расподеле и мере, циљ може бити проналажење расподеле могућности која доминира над мером вероватноће.

У свом раду аутори Масон и Деноа (Masson and Denoeux, 2006) развили су алгоритам за проналажење расподеле могућности заснован на тврдњама објашњеним изнад. Уколико је  $\theta$  строг парцијалан поредак дефинисан интервалима  $p_i = [p_i^-, p_i^+]$ , тако да је:

$$(K_i, K_j) \in \theta \Leftrightarrow p_i^+ < p_j^- \quad (3-145)$$

и који може да буде објашњен скупом пермутација  $\{\sigma_l, l = 1, L\}$ .

Алгоритам се састоји од два корака:



а) први корак решавање је линеарног система за сваку пермутацију,  $\sigma_l$  и сваку класу,  $n$ :

$$\pi_i^{\sigma_l} = \max_{p_1, \dots, p_n} \sum_{\{j | \sigma_l^{-1}(j) \leq \sigma_l^{-1}(i)\}} p_j \quad (3-146)$$

поштујући ограничења:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n p_i = 1, \\ p_i^- \leq p_i \leq p_i^+, \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ p_{\sigma_l(1)} \leq \dots \leq p_{\sigma_l(n)} \end{cases} \quad (3-147)$$

б) други корак израчунавање је расподеле могућности  $\pi_i^{\sigma_l}$  која доминира над сваком расподелом вероватноће:

$$\pi_i = \max_{l=1, L} \pi_i^{\sigma_l}, \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3-148)$$

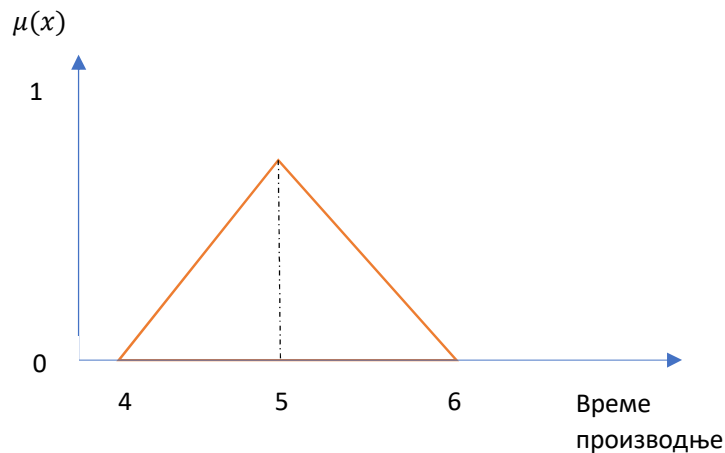
уз поштовање правила да коначно решење расподеле могућности,  $\pi_i$  доминира над сваком мером вероватноће,  $(P^-(A), P^+(A))$  са нивоом поверења  $1 - \alpha$ .

### 3.2.8 Методе фазификације и дефазификације

#### 3.2.8.1 Фазификација

Фазификација представља процес у којем скаларна вредност (енгл. crisp) постаје расплинута вредност (енгл. fuzzy). Уколико нека појава или вредност не могу да се представе јединственом вредношћу услед неизвесности, неодређености или варијације, тада се оне фазификују и представљају фази скупом.

Постоји много начина фазификације. Једноставан пример јесте неодређено време трајања производње изражено у минутима. Пример: “време производње је око 5 минута”. У том случају време производње не може да се представи крисп вредношћу 5 минута, већ постаје расплинуто у својим границама (горње и доње ограничење).



Слика 3-22. Фазификована вредност трајања производње

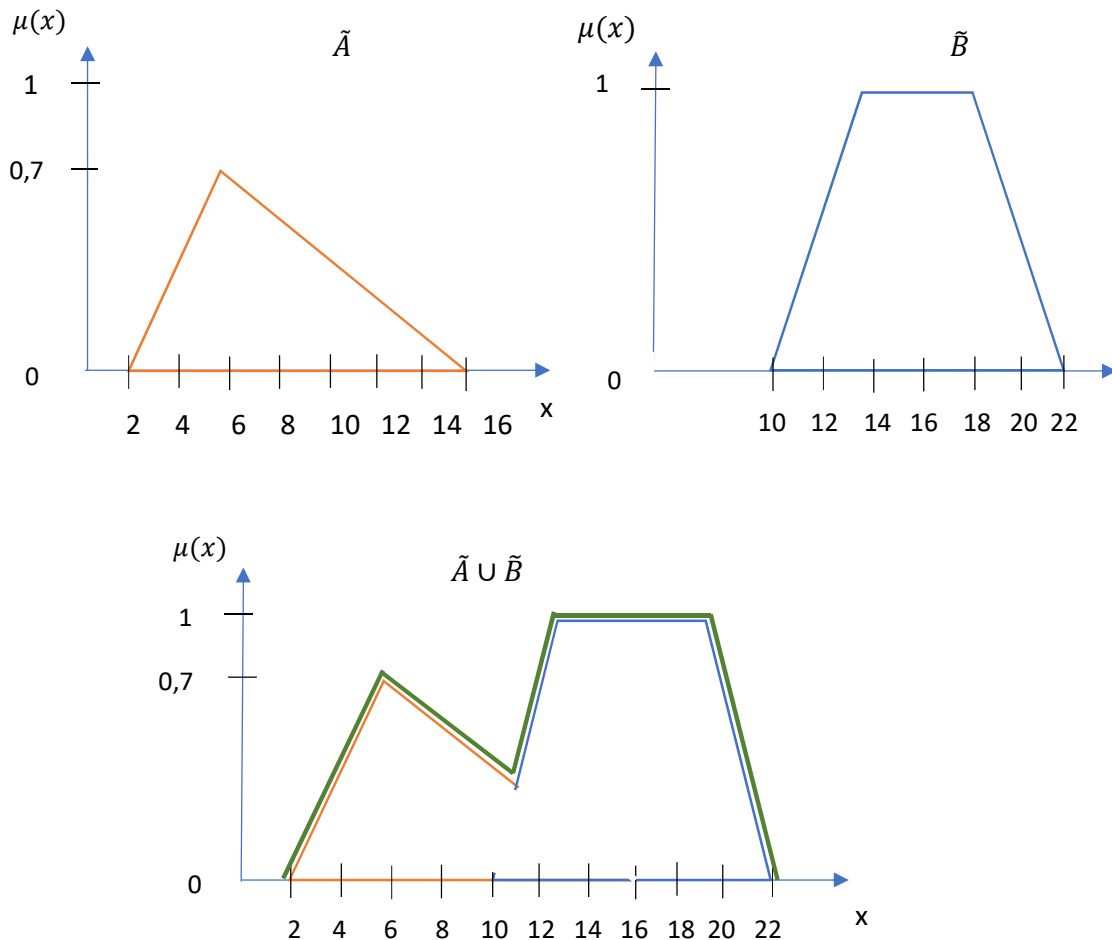
### 3.2.8.2 Дефазификација

Постоје различити облици фази скупова и фази бројева који могу да буду правилног, али и неправилног облика. Неки од најчешће коришћених облика су линеарни, троугласти, трапезоидни и звонасти, симетричног и несиметричног облика. Фази бројеви неправилног облика обично настају комбинацијом испред наведених правилних облика. У процесу фазификације са два или више улаза правилних фази бројева (нпр. троугласти или трапезоидни фази бројеви) као излаз настају фази бројеви који добијају неправилан облик.

Уколико је број улаза у процес фазификације већи од два ( $K > 2$ ) функција припадности излазног фази броја неправилнија је:

$$\mu_K = \bigcup_{i=1}^K \mu_i \quad (3-149)$$

Наведен пример је дат на слици 3-23. са фази скуповима  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$ .



Слика 3-23. Унија два фази скупа

Постоји потреба да се фази вредности добијене путем фази система или фази закључивања, које лингвистички могу да се изразе “вредност око”, трансформишу у

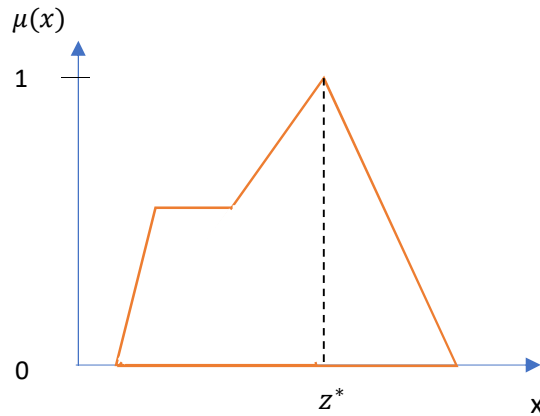
једну вредност. Фази скуп садржи низ фази вредности у облику интервала или вектора који приликом дефазификације постаје јединствена крисп вредност, која треба најбоље да опише облик фази скупа.

Један од примера јесте трансформација лингвистичког израза “време производње око 5 минута” у јединствену вредност “време трајања производње 4,5 минута”. Дефазификација фази бројева подразумева добијање скаларне вредности као јединствене вредности из фази скупа. Дефазификација супротна је процесу фазификације, у којој се једној скаларној вредности додељује једна или више фази вредности. Постоји неколико основних метода дефазификације фази бројева и низ метода у литератури изведених из основних метода.

Често се поставља питање која метода дефазификације је најбоља. Одговор на ово питање аутори Хелендурн и Томас (Hellendoorn and Thomas, 1993) у свом раду дали су кроз пет критеријума: континуитет (енгл. continuity), недвосмисленост (енгл. disambiguity), веродостојност (енгл. plausibility), једноставно израчунавање (енгл. computational simplicity), пондерисање (енгл. weighting method). Уколико мале промене на улазу у фази процес не проузрокују велике промене на излазу, тада је задовољен критеријум континуитета. Критеријум недвосмислености показује да излаз дефазификације увек садржи један крисп број,  $z^*$ . Међутим, овај критеријум није задовољен код методе центра највеће области (слика 3-29) у случају када функција припадности има уједначену област и може да садржи више дефазификованих крисп вредности,  $z^*$ . Трећи критеријум веродостојности испуњен је уколико дефазификована вредност  $z^*$  „лежи“ приближно на средини супорта функције припадности и садржи максималан степен припадности функције. Метод центроид не испуњава овај критеријум што је очигледно на слици 3-25. Критеријум једноставности израчунавања подразумева брзину израчунавања дефазификоване вредност  $z^*$ . Центроид метода и метода центра суме спорије су него методе висине, средине максимума, или првог максимума, јер захтевају више времена за израчунавање. Последњи критеријум односи се на пондерисање излаза фази скупа, тако да прави разлику између методе центра суме, центроид методе и методе пондерисаних средина.

### **Метод дефазификације фази скупова**

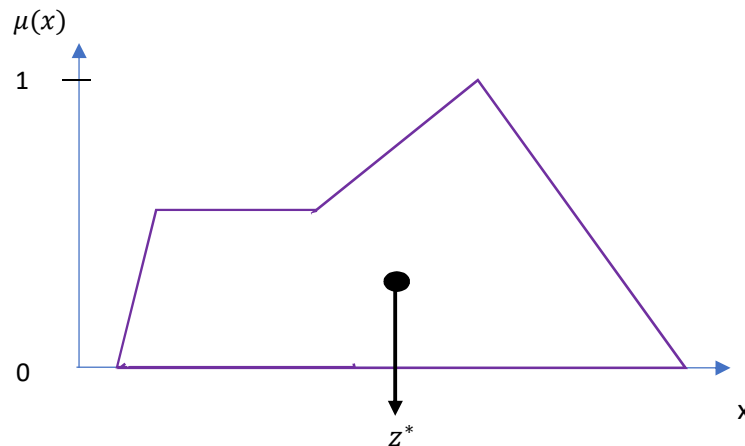
1. Метода максималне вредности функције припадности, која је позната као метода висине,  $\mu_A(z^*) \geq \mu_A(z), \forall z \in Z$  при чему је  $z^*$  дефазификована скаларна вредност (слика 3-24).



Слика 3-24. Метода максималне вредности функције припадности

3. Гравитациона метода, која се још назива центроид метода, највише је коришћена у литератури (Sugeno, 1985). Њен графички приказ дат је на слици 3-25. Може алгебарски да се изрази као:

$$z^* = \frac{\int \mu_A(z) \cdot z \cdot dz}{\int \mu_A(z) \cdot dz} \quad (3-150)$$



Слика 3-25. Гравитациони метод дефазификације

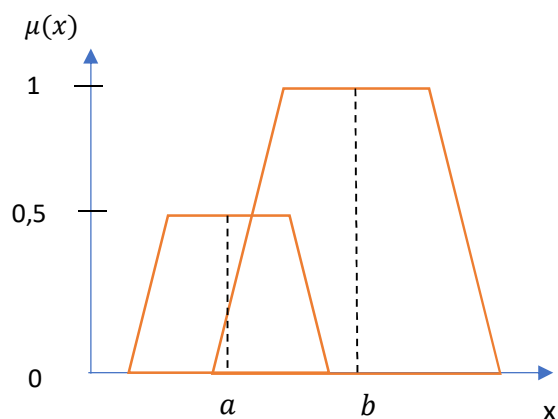
4. Метода пондерисаних средина. Ова метода је такође је врло коришћена у литератури као ефикасна, али са ограничењем да се користи код симетричних облика функције припадности (слика 3-26). Позната је и као метода Сугено дефазификациона метода. Њен алгебарски израз:

$$z^* = \frac{\sum \mu_A(\bar{z}) \cdot \bar{z}}{\sum \mu_A(\bar{z})} \quad (3-151)$$

где је:

$\bar{z}$  – центар сваке симетричне функције припадности.

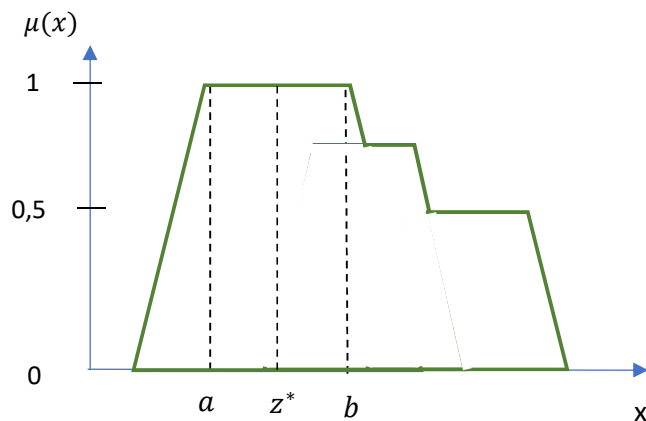
Ова метода подразумева проналажење средине сваке од симетричних функција припадности, али поштујући њихове максималне вредности.



Слика 3-26. Метода пондерисаних средина као дефазификациона метода

5. Средина максималне функције припадности. Ову методу често називају средина максимума јер узима средњу вредност максималне вредности функције припадности (слика -27). Подсећа на методу висине, али користи се уколико је облик функције припадности такав да његова висина није у једној тачки. Тачке  $a$  и  $b$  су висине фази скупа на крајевима максималне вредности функције припадности фази скупа и имају исту функцију припадности. Математички израз за ову методу је:

$$z^* = \frac{a+b}{2} \quad (3-152)$$



Слика 3-27. Средина максималне функције припадности

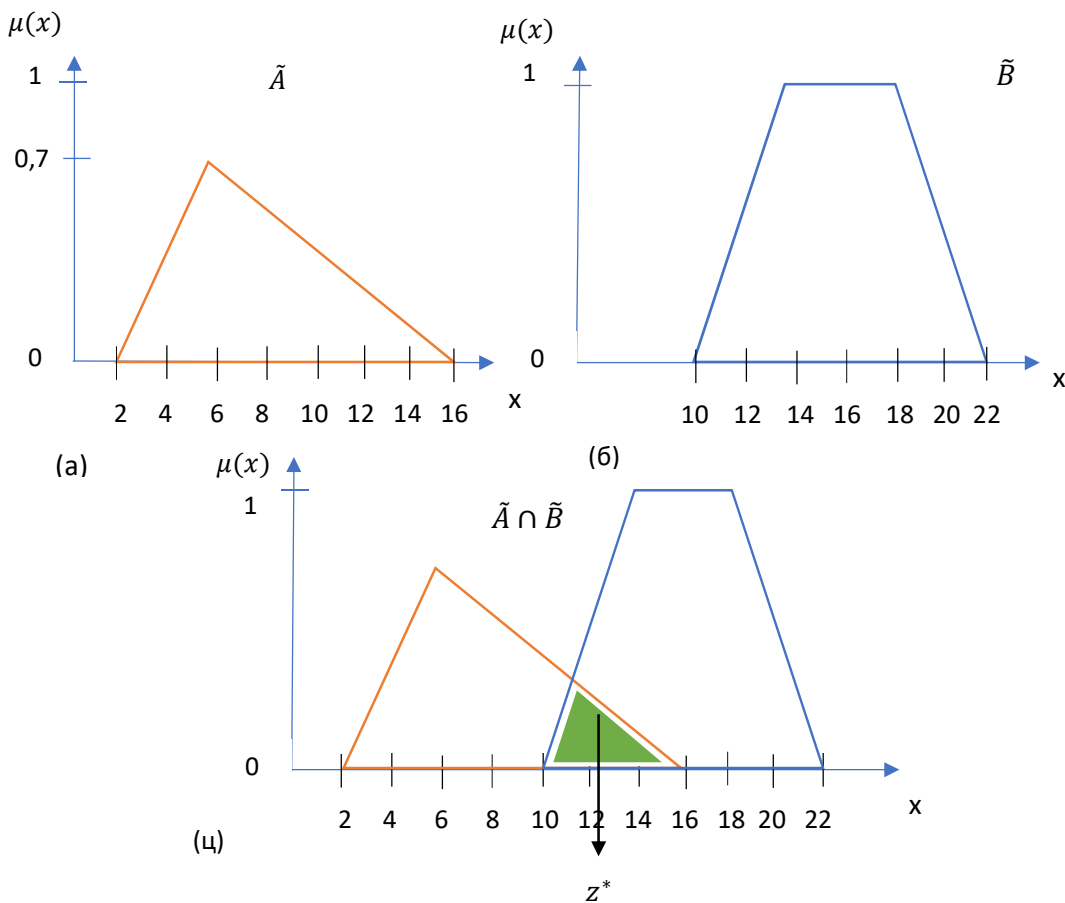
6. Центар сума. Ова метода нема ограничења као претходна и користи се како за симетричне, тако и за несиметричне функције припадности. У свом математичком изразу метода користи алгебарски збир функција припадности уместо уније:

$$z^* = \frac{\int_Z \bar{z} \sum_{k=1}^n \mu_{A_k}(z) \cdot dz}{\int_Z \sum_{k=1}^n \mu_{A_k}(z) \cdot dz} \quad (3-153)$$

при чему је:

$\bar{z}$  – растојање средине сваке од функција припадности до средине њиховог пресека.

Може се рећи да постоје сличности са методом пондерисаних средина, али код ове методе пондерисани фактори области су сваке од функција припадности, док код претходне методе пондерисани фактори јединствене су вредности функције припадности. Пример је дат на слици 3-28.



Слика 3-28. Средина сума: (а) прва функција припадности, (б) друга функција припадности, (ц) дефазификациона метода

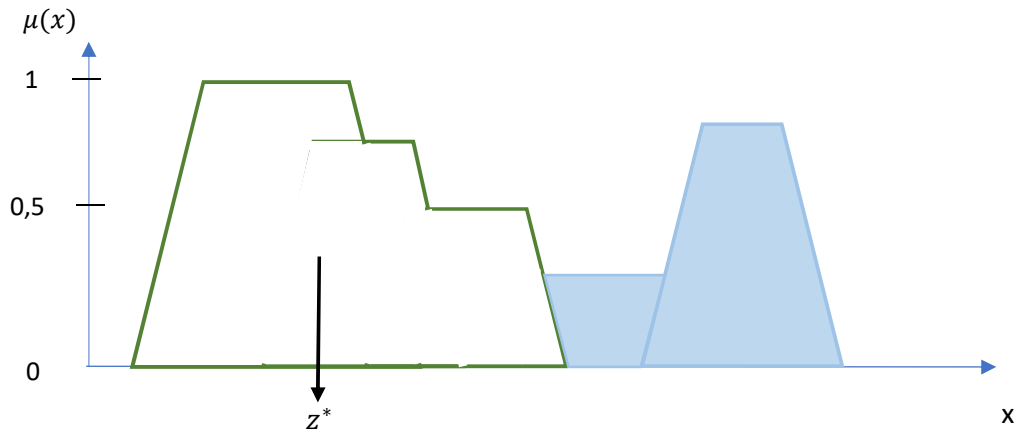
7. Центар највеће области. Уколико излазни фази скуп из фази система има најмање две конвексне подобласти (уколико је укупна функција припадности неконвексна), тада се примењује метода центра гравитације над највећом конвексном облашћу за израчунавање крисп вредности  $z^*$  (слика 3-29):

$$z^* = \frac{\int \mu_{A_k}(z) \cdot z dz}{\int \mu_{A_k}(z) \cdot dz} \quad (3-154)$$

при чему је:

$A_k$  - највећа конвексна област у функцији припадности фази броја.

Уколико се функција припадности излазног фази броја над којим се врши дефазификација састоји од једне конвексне области, добија се иста вредност применом методе центра гравитације.



Слика 3-29. Центар највеће области обележен је зелено

8. Први или последњи максимум. У овој методи посматра се целокупна функција припадности фази скупа који се дефазификује и детерминише се најмања вредност домена са максималном вредношћу функције припадности.

$$visina\bar{A}_k = \sup_{z \in Z} \mu_{A_k}(z) \quad (3-155)$$

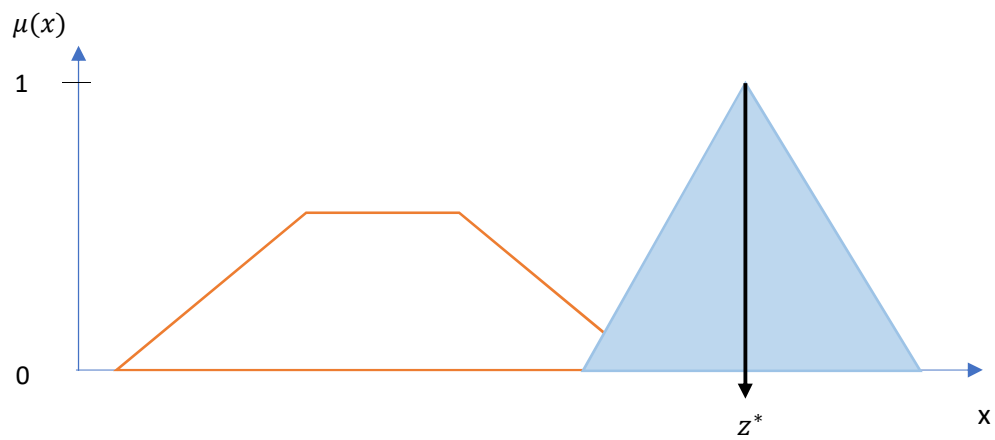
Први максимум одређује се на следећи начин:

$$z^* = \inf_{z \in Z} \{z \in Z | \mu_{A_k}(z) = visina\bar{A}_k\} \quad (3-156)$$

при чему *inf* (енгл. infimum) у фази терминологији означава највећу доњу границу у функцији припадности. Алтернативно првом максимуму, последњи максимум одређује се преко израза:

$$z^* = \sup_{z \in Z} \{z \in Z | \mu_{A_k}(z) = visina\bar{A}_k\} \quad (3-157)$$

при чему *sup* (енгл. supremum) у фази терминологији означава најмању горњу границу функције припадности. На слици 3-30. приказан је један пример фази скупа са својом функцијом припадности код кога је први максимум истовремено и последњи максимум. За овај пример, метода висине и метода средине максимума такође ће да дају исту дефазификовану вредност.



Слика 3-30. Пример са последњим максимумом функције припадности



## 4. Развој новог модела за агрегирано планирање производње у функцији планирања испорука

### 4.1 Увод

На бази доступне литературе утврђено је да оптимизациони модели користе углавном укупне трошкове као меру ефикасности разматраног производног система са циљем да их минимализују. Међутим, трошковне компоненте различите су у различитим окружењима, областима и државама за које се рачунају. На тај начин модели не могу да се генерализују и универзално користе. Како би се избегао концепт трошкова у мерењу АПП ефикасности, у предложеном моделу у овој дисертацији коришћена су различита времена, која се јављају у АПП процесу за мерење ефикасности. Карактеристична времена укључују време потребно за производњу поручених производа, време за складиштење производа у магацину и време припреме производа за испоруку за купца. Уопштено, колико су ова времена краћа, то је боља ефикасност АПП процеса.

Пратећи идеју разматрања реалних АПП проблема, претпостављено је да су ова времена окарактерисана непрецизним лингвистичким условима; нпр. одређујући време производње једног производа, лингвистички израз може да буде „време је око 4 минуте“, или „захтева се између 0,25 и 0,3 минуте за складиштење једног производа у магацину“, или „припрема испоруке једног комада производа за купца је између 0,12 и 0,15 минута“ итд.

У овој дисертацији предложен је нов фази модел за оптималан АПП уз присуство неизвесности и нов модел за прогнозу потражње купаца и планирање испорука. Новина фази АПП модела је циљ оптимизовања фази укупног времена потребног за производњу, складиштење произведених производа и њихова припрема за испоруку купцу. Укључени су неизвесни фактори који разматрају неизвесност у купчевој потражњи, која је прогнозирана и може да одступа, и неизвесност у произведеној количини робе. Пошто су сви набројани параметри фази одговарајућа циљна функција и ограничења су фази, такође. Адаптирана је и примењена једна од метода за трансформацију модела фази линеарног програмирања са фази циљном функцијом и фази ограничењима, у крисп оптимизациони модел са крисп циљном функцијом и крисп ограничењима представљена у раду аутора Џименеза и других (Jimenez et al, 2007). Овај метод узима у обзир истовремено степен задовољења вредности фази циљне функције и степен изводљивости ограничења и налази баланс између њих. Предложени модел тестиран је користећи реалне податке измерене у предузећу добављача у аутоиндустрији, који је први добављач произвођачима аутомобила у Европи (енгл. First tier supplier). Различити нумерички експерименти изведени су да би се добило боље разумевање ефикасности предложеног фази АПП модела уз присуство неизвесности. Производња и планирање сигурносних залиха, као резултат фази АПП модела, упоређени су са реалним подацима измереним у периоду од 12 недеља код добављача. Могуће предности употребе модела у пракси анализирани су.

Новина предложеног АПП модела је:

- (1) Нови фази АПП оптимизациони модел развијен је да минимализује укупно време потребно за производњу, складиштење и припрему робе за испоруку.

Неизвесност у осцилацији купчеве потражње и произведене количине у дефинисаном временском периоду укључено је у модел преко два фази фактора, респективно.

- (2) Циљна функција и ограничења дефинисане су на основу реалног АПП проблема.
- (3) Метод за генерисање фази скупа из прикупљених података прилагођен је и примењен у пракси за добијање фази времена производње.
- (4) Метод за трансформацију фази оптимизационог модела са фази циљном функцијом и фази ограничењима прилагођен је и примењен у предложеном фази АПП оптимизационом моделу.
- (5) Оптималан ниво сигурносних залиха у предузећу.
- (6) Различити експерименти изведени су. Добијени резултати веродостојни су и показују предност примене предложеног модела у пракси.

## 4.2 Опис проблема

Проблем који се решава јесте генерисање оптималног агрегираног плана производње и залиха у предузећу добављача за дати временски период (период планирања). Добављач производи по принципу „производња по поруџбини“ (енгл. “make-to-order”) и треба да припреми план производње, залиха и план испорука тако да задовољи купчеву потражњу.

Међутим, због промена на тржишту претпостављено је да купчева поруџбина флукутира око прогнозиране потражње на неизвесан начин. На пример, купчева потражња у планираном периоду може да буде око 10% виша или нижа него што је прогнозирано. То значи да агрегирани план производње и залиха треба да буде направљен уз присуство неизвесности купчеве потражње. Такође, претпостављено је да је капацитет производње ограничен. Додатно, број произведених комада производа зависи од екстерних и интерних фактора укључујући доступну радну снагу, ефикасност производње, висину шкарта, кварове машина и застоје, испоручен репроматеријал лошег квалитета итд. Сви ови фактори неизвесни су и не могу да буду прецизно одређени. Могу да буду процењени на основу искуства руководства предузећа добављача.

Произведена роба складишти се у магацину. Купчева потражња подмирује се слањем залиха доступних у магацину. Добављач да би могао да подмири одступање у купчевој потражњи и планира испоруке мора да држи сигурносне залихе у магацину. Висина сигурносних залиха одређује се према прогнозираној потражњи и изражава у броју дана покривености испорука робе купцима.

Временски период планирања дискретизован је на мање временске периоде, у разматраном случају то је недељни ниво. АПП садржи три компоненте за сваки временски период у оквиру планираног периода: (1) оптималан број произведених комада, (2) ниво сигурносних залиха који морају да буду ускладиштени и (3) количина која треба да буде испоручена купцу.

Ефикасност производње од суштинског је значаја за профитабилно пословање предузећа. Ово захтева развој мерних показатеља производног плана и плана залиха. У овој дисертацији производни процес заснован је на производњи више производа за више купаца који захтева исту производну линију. Зато је циљ рада да покаже да укупна ефикасност планирања производње и залиха може да буде измерена преко времена

потребног да се подмири купчева потражња и планирају испоруке са 100% нивоом услуге. Потребно време је збир времена производње наручених делова, складиштење сигурносних залиха у магацину и припрема наручених делова за испоруку, за сваки временски период у оквиру периода планирања.

Дубља анализа показује да постоје различити извори неизвесности који утичу на планирање производње, залиха и испорука:

- флукуација купчеве потражње око прогнозиране количине; купчева потражња мора да буде у потпуности подмирена за сваки период, испоручујући робу са залиха или произведену у том периоду,
- количина произведених делова,
- време производње једног комада,
- време потребно за складиштење у магацину, укључујући време скупљања контејнера спаковане робе на производној линији, време вожње виљушкарком до магацина и ускладиштење контејнера у магацину на одређену локацију,
- време потребно да се припреми један контејнер за испоруку, укључујући време скупљања контејнера са позиција у магацину према отпремној листи, доношење у зону отпреме виљушкарком, штампање и лепљење отпремних етикета на сваки контејнер, скенирање етикета и утовар контејнера у камион.

Сва ова неизвесна времена треба да буду узета у обзир приликом генерисања оптималног плана производње и залиха.

## 4.3 Дефинисање фази агрегираног плана производње и залиха

### 4.3.1 Обележавање у моделу

Коришћено је следеће обележавање параметара у моделу:

$i$  – индекс временског периода у периоду планирања,  $i = 1, \dots, n$ ,

$D_i$  – купчева потражња у периоду планирања,  $i = 1, \dots, n$ ,

$\tilde{n}_p$  – фази број произведених производа у једној минути са по деловима линеарном функцијом припадности (енгл. *piece-wise*),

$\tilde{t}_p$  – фази време производње по јединици производа (у минутима),

$\tilde{t}_s$  – фази време складиштења производа у јединици времена (у минутима) са

трапезоидном функцијом припадности  $\tilde{t}_s = (t_{s1}, t_{s2}, t_{s3}, t_{s4})$ ,

$\tilde{t}_t$  – фази време припреме испоруке за купца по јединици производа (у минутима) са

трапезоидном функцијом припадности  $\tilde{t}_t = (t_{t1}, t_{t2}, t_{t3}, t_{t4})$ ,

$\tilde{w}_i^d$  – фази фактор неизвесне купчеве потражње са флукуацијом око прогнозиране количине за период  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$  са троугластом функцијом припадности  $\tilde{w}_i^d = (w_{i1}^d, w_{im}^d, w_{iu}^d)$ ,

$\tilde{w}_i^p$  – фази фактор неизвесне произведене количине за период  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , са троугластом функцијом припадности  $\tilde{w}_i^p = (w_{i1}^p, w_{im}^p, w_{iu}^p)$ ,

$T^l$  – минимум “дана залиха” у магацину,

$T^u$  – максимум “дана залиха” у магацину,

$C$  – машински капацитет.

Променљиве одлучивања:

$P_i$  – количина произведених делова у периоду  $i$ ,

$Ss_i$  – сигурносна залиха у периоду  $i$ ,

$Q_i$  – количина испоручених делова купцу у периоду  $i$ .

#### 4.3.2 Развој фази АПП ЛП модела

Формулисан је фази ЛП модел (модел линеарног програмирања). Два фази фактора,  $\tilde{w}_i^d$  и  $\tilde{w}_i^p$ , укључена су у модел неизвесности промене купчеве потражње и неизвесности произведене количине производа за сваки временски период  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Према томе, купчева потражња и произведена количина за сваки период  $i$  рачунају се као  $\tilde{w}_i^d D_i$  и  $\tilde{w}_i^p P_i$ , респективно.

Циљ је да се минимализује укупно време тока материјала  $\tilde{Z}$ , укључујући време производње  $\tilde{t}_p P_i$ , време складиштења сигурносних залиха  $\tilde{t}_s Ss_i$  и време припреме испоруке за купца  $\tilde{t}_t Q_i$ , као што следи:

$$\min \tilde{Z} = \sum_{i=1}^n \tilde{t}_p P_i + \tilde{t}_s Ss_i + \tilde{t}_t Q_i \quad (4-1)$$

Уз следећа ограничења:

- неизвесна купчева потражња  $\tilde{w}_i^d D_i$  за сваки период  $i$  подмирена је неизвесном производњом  $\tilde{w}_i^p P_i$  и сигурносним залихама  $Ss_i$ :

$$Ss_i + \tilde{w}_i^p P_i \geq \tilde{w}_i^d D_i, i = 1, \dots, n \quad (4-2)$$

- сигурносне залихе  $Ss_{i+1}$  за сваки период  $i + 1$  једнаке су залихама на крају претходног периода  $Ss_i$ , увећано за неизвесну производњу из претходног периода  $\tilde{w}_i^p P_i$  и умањено за неизвесну купчеву потражњу у претходном периоду, тј. испоручену количину робе у претходном периоду  $\tilde{w}_i^d D_i$ :

$$Ss_{i+1} = Ss_i + \tilde{w}_i^p P_i - \tilde{w}_i^d D_i, i = 1, \dots, n \quad (4-3)$$

- инсталиран машински капацитет  $C$  производи неизвесну количину делова  $\tilde{w}_i^p P_i$  за период  $i$ :

$$\tilde{w}_i^p P_i \geq 0, i = 1, \dots, n \quad (4-4)$$

$$C \geq \tilde{w}_i^p P_i, i = 1, \dots, n \quad (4-5)$$

- сигурносне залихе  $Ss_i$  за период  $i$  дефинисане су произвођачевим циљем да покрију „дане неизвесне купчеве потражње  $\tilde{w}_i^d D_i$ “ између  $T^l$  и  $T^u$ :

$$Ss_i \geq T^l \tilde{w}_i^d D_i, i = 1, \dots, n \quad (4-6)$$

$$T^u \tilde{w}_i^d D_i \geq Ss_i, i = 1, \dots, n \quad (4-7)$$

- испоручена количина производа  $Q_i$  у сваком периоду  $i$  мора да буде једнака неизвесној купчевој потражњи  $\tilde{w}_i^d D_i$  тако да задовољи максималан ниво услуге 100%.

$$Q_i = \tilde{w}_i^d D_i, i = 1, \dots, n \quad (4-8)$$

- Променљиве  $P_i$ ,  $Ss_i$  и  $Q_i$  за сваки период  $i$  су не негативне:

$$P_i, Ss_i, Q_i \geq 0, i = 1, \dots, n \quad (4-9)$$

### 4.3.3 Моделирање неизвесности коришћењем фази скупова заснованих на историјским подацима

Циљна функција укључује три временске компоненте  $\tilde{t}_p$ ,  $\tilde{t}_t$  и  $\tilde{t}_s$  које се прецизно веома тешко одређују у пракси. Према томе, моделиране су у дисертацији коришћењем фази скупова. Подаци о броју произведених комада производа у датом временском периоду прикупљени су у два предузећа добављача и коришћени су за одређивање фази скупова. Међутим, не постоје измерени крисп подаци за складиштење залиха  $\tilde{t}_s$  и припрему испоруке за купца  $\tilde{t}_t$ . Прецизна времена је тешко измерити због низа немерљивих параметара, као што је различит број производа у контејнеру за различите типове производа, различита брзина виљушкарa и различита брзина рада магационера. Процена наведених времена дата је од стране експерата у логистици и представљена су лингвистичким изразима. Ови непрецизни лингвистички изрази моделирани су употребом фази скупова са трапезоидним функцијама припадности.

### 4.3.4 Трансформација фази АПП оптимизационог модела у крисп АПП оптимизациони модел

Метод развијен у раду аутора Џименеза и других (Jimenez et al, 2007) примењен је за трансформацију фази АПП модела у крисп АПП модел. Метод је прилагођен тако да користи фази параметре у циљној функцији са по деловима линеарном функцијом припадности (енгл. *piece-wise*) и трапезоидном функцијом припадности. Релевантне дефиниције фази скупова и Џименезове методе дате су у наставку.

Дефиниција интервала очекивања  $EI(\tilde{a})$  фази скупа  $\tilde{a}$  (Heilpern, 1992, Shenify and Mzarbhuiya, 2015):

$$EI(\tilde{a}) = [E_1^a, E_2^a] = \left[ \int_0^1 f_a^{-1}(r) dr, \int_0^1 g_a^{-1}(r) dr \right] \quad (4-10)$$

Дефиниција очекиване вредности  $EV(\tilde{a})$  фази скупа  $\tilde{a}$ :

$$EV(\tilde{a}) = \frac{1}{2} (E_1^a + E_2^a) \quad (4-11)$$

Ако је фази скуп  $\tilde{a}$  трапезоидни, онда су очекивани интервал и очекивана вредност:

$$EI(\tilde{a}) = \left[ \frac{1}{2}(a_1 + a_2), \frac{1}{2}(a_3 + a_4) \right] \quad (4-12)$$

$$EV(\tilde{a}) = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \quad (4-13)$$

Упоредба два фази скупа  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$  (Jimenez, 1996):

за свака два фази броја  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$ , функција припадности степена где је  $\tilde{a}$  веће од  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{a} \geq_{\beta} \tilde{b}$ :

$$\mu_{\geq}(\tilde{a}, \tilde{b}) = \begin{cases} 0 & \text{ако је } E_2^a - E_1^b < 0 \\ \frac{E_2^a - E_1^b}{E_2^a - E_1^b - (E_1^a - E_2^b)} & \text{ако је } 0 \in [E_1^a - E_2^b, E_2^a - E_1^b] \\ 1 & \text{ако је } E_1^a - E_2^b > 0 \end{cases} \quad (4-14)$$

Фази бројеви  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$  нису различити ако је  $\mu_{\geq}(\tilde{a}, \tilde{b}) = 0,5$ . Ако је  $\tilde{a}$  веће или једнако од  $\tilde{b}$  за степен  $\beta$ , може да се представи као  $\tilde{a} \geq_{\beta} \tilde{b}$ .

$\beta$  – изводљивост ограничења

Дати вектор  $x \in R^n$  изводљив је за степен  $\beta$  ако:

$$\min_{i=1,\dots,m} \{\mu_A(\tilde{a}_i x, \tilde{b}_i)\} = \beta \quad (4-15)$$

где је  $\tilde{a}_i = (\tilde{a}_{i1}, \dots, \tilde{a}_{in})$ . Може да се представи као  $\tilde{a}_i x \geq_{\beta} \tilde{b}_i, i = 1, \dots, m$ . Односећи се на горе наведену функцију припадности  $\mu_{\geq}(\tilde{a}, \tilde{b})$  може да се формулише као:

$$\frac{E_2^{a_i x} - E_1^{b_i}}{E_2^{a_i x} - E_1^{a_i x} + E_2^{b_i} - E_1^{b_i}} \geq \beta, i = 1, \dots, m \quad (4-16)$$

или

$$[(1 - \beta)E_2^{a_i x} + \beta E_1^{a_i x}] x \geq (1 - \beta)E_1^{b_i} + \beta E_2^{b_i}, i = 1, \dots, m. \quad (4-17)$$

### **Трансформација фази ЛП модела у крисп ЛП модел**

Фази ЛП (линеарно програмирање) проблем је:

$$\min z = \tilde{c} x, \quad (4-18)$$

где је  $\tilde{c}$  вектор фази параметара циљне функције

$$\text{subject to } x \in \aleph_{\beta}(\tilde{A}, \tilde{b}) = \{x \in R^n | \tilde{a}_i x \geq_{\beta} \tilde{b}_i, i = 1, \dots, m, x \geq 0\} \quad (4-19)$$

Овај метод заснован је на одређивању баланса између степена изводљивости ограничења и степена задовољења вредности циљне функције (Jimenez et al., 2007). Степен изводљивости  $\beta_0$ , који је доносилац одлуке спреман да прихвати, поставља се семантички за жељени степен изводљивости, од неприхватљивог решења  $\beta_0 = 0$ , практично неприхватљивог решења  $\beta_0 = 0,2$ , практично прихватљивог решења  $\beta_0 = 0,9$  и комплетно прихватљивог решења  $\beta_0 = 1$ .

Степен изводљивости  $\beta_k \in [\beta_0, 1]$  разматра се као итеративан процес.

Корак први. Крисп ЛП проблем решен је за свако  $\beta_k$  изводљиво решење (прилог Б):

$$\begin{aligned} & \min EV(\tilde{c})x \\ & \text{subject to } x \in \aleph_{\beta_k}(\tilde{A}, \tilde{b}) = \{x \in R^n | \tilde{a}_i x \geq_{\beta_k} \tilde{b}_i, i = 1, \dots, m, x \geq 0\} \end{aligned} \quad (4-20)$$

Оптимално решење за овај крисп ЛП проблем је крисп вектор  $x^0(\beta_k)$ .

Донсилац одлуке одређује своју толеранцију да достигне фази вредност циљне функције  $\tilde{G}$ , која је ограничена својим доњим и горњим ограничењем  $\underline{G}$  and  $\overline{G}$ , респективно. Функција припадности фази толеранције  $\tilde{G}$  је линеарна функција:

$$\mu_{\tilde{G}}(z) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } z < \underline{G} \\ \vartheta \in [0,1] & \text{ако је } \underline{G} \leq z \leq \overline{G} \\ 0, & \text{ако је } z > \overline{G} \end{cases} \quad (4-21)$$

Корак други. Степен толеранције (степен задовољења решења)  $K_{\tilde{G}}$  за достигнуту фази вредност  $\tilde{z}^0(\beta_k)$  израчунат је употребом методе центра гравитације:

$$K_{\tilde{G}}(\tilde{z}^0(\beta_k)) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{z}^0(\beta_k)}(z) \cdot \mu_{\tilde{G}}(z) dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{z}^0(\beta_k)}(z) dz} \quad (4-22)$$

Корак трећи. Одлука  $\tilde{D}$  која се доноси рачуна се као баланс између степена толеранције циљне функције  $K_{\tilde{G}}(\tilde{z}^0(\beta_k))$  и прихватљивог оптималног решења  $\beta_k$ :

$$\mu_{\tilde{D}}(x^0(\beta_k)) = \beta_k \cdot K_{\tilde{G}}(\tilde{z}^0(\beta_k)) \quad (4-23)$$

На крају, да би се добило крисп решење фази ЛП проблема,  $x^*$  предложено је да се узме највећи степен функције припадности фази скупа  $\tilde{D}$ :

$$\mu_{\tilde{D}}(x^*) = \max_{\beta_k} \{\beta_k * K_{\tilde{G}}(\tilde{z}^0(\beta_k))\} \quad (4-24)$$

Крисп оптимизациони модел развијен у дисертацији решен је итеративно за сваки степен изводљивости  $\beta = 0,5, 0,6, \dots, 0,9, 0,95, 0,99, 1$ . За  $\beta$ - изводљиво решење променљиве  $P_i, Ss_i, Q_i, i = 1, \dots, n$  израчунате су.

Прво, фази параметри  $\tilde{t}_s, \tilde{t}_t$  у циљној функцији су прсликани у своје очекиване вредности. Израчунате су као средње тачке очекиваних интервала. На пример, очекивани интервал  $EI(\tilde{t}_t)$  фази времена припреме испоруке је:

$$EI(\tilde{t}_t) = [E_1^{t_t}, E_2^{t_t}] = [\frac{1}{2}(t_{t1} + t_{t2}), \frac{1}{2}(t_{t3} + t_{t4})] \quad (4-25)$$

Затим, очекивана вредност  $EV(\tilde{t}_t)$  фази времена припреме испоруке израчунава се:

$$EV(\tilde{t}_t) = \frac{1}{2}(E_1^{t_t}, E_2^{t_t}). \quad (4-26)$$

Очекивани интервали  $EI(\tilde{t}_s), EI(\tilde{t}_p)$  и њихова очекивана вредност  $EV(\tilde{t}_s), EV(\tilde{t}_p)$  рачунају се на исти начин. Овим, фази циљна функција трансформисана је у крисп циљну функцију. Свако фази ограничење од (4-2) до (4-8) у предложеном моделу трансформисано је у крисп ограничење користећи Џиминезову трансформацију, као што следи у наставку.

Ограничење из формуле (4-2) постаје:

$$Ss_i + \left[ (1 - \beta)E_2^{w_i^p} + \beta E_1^{w_i^p} \right] P_i \geq \left[ \beta E_2^{w_i^d} + (1 - \beta)E_1^{w_i^d} \right] D_i, i = 1, \dots, n \quad (4-27)$$

где је:

$$\begin{aligned} E_1^{w_i^p} &= \frac{1}{2}(w_{i1}^p + w_{i2}^p), E_2^{w_i^p} = \frac{1}{2}(w_{i3}^p + w_{i4}^p), \\ E_1^{w_i^d} &= \frac{1}{2}(w_{i1}^d + w_{i2}^d), E_2^{w_i^d} = \frac{1}{2}(w_{i3}^d + w_{i4}^d). \end{aligned} \quad (4-28)$$

Ограничење из формуле (4-3) постаје:

$$\left[ (1 - \beta)E_2^{w_i^p} + \beta E_1^{w_i^p} \right] P_i = Ss_{i+1} - Ss_i + \left[ (1 - \beta)E_2^{w_i^d} + \beta E_1^{w_i^d} \right] Q_i, i = 1, \dots, n \quad (4-29)$$

где је:

$$\begin{aligned} E_1^{w_i^p} &= \frac{1}{2}(w_{i1}^p + w_{i2}^p), E_2^{w_i^p} = \frac{1}{2}(w_{i3}^p + w_{i4}^p), \\ E_1^{w_i^d} &= \frac{1}{2}(w_{i1}^d + w_{i2}^d), E_2^{w_i^d} = \frac{1}{2}(w_{i3}^d + w_{i4}^d). \end{aligned} \quad (4-30)$$

Ограничење из формуле (4-4) постаје:

$$\left[ (1 - \beta)E_2^{w_i^p} + \beta E_1^{w_i^p} \right] P_i \geq 0, i = 1, \dots, n \quad (4-31)$$

где је:

$$E_1^{w_i^p} = \frac{1}{2}(w_{i1}^p + w_{i2}^p), E_2^{w_i^p} = \frac{1}{2}(w_{i3}^p + w_{i4}^p). \quad (4-32)$$

Ограничење из формуле (4-5) постаје:

$$C \geq \left[ (1 - \beta)E_2^{w_i^p} + \beta E_1^{w_i^p} \right] P_i, i = 1, \dots, n \quad (4-33)$$

где је:

$$E_1^{w_i^p} = \frac{1}{2}(w_{i1}^p + w_{i2}^p), E_2^{w_i^p} = \frac{1}{2}(w_{i3}^p + w_{i4}^p) \quad (4-34)$$

Ограничење из формуле (4-6) постаје:

$$Ss_i \geq T^l \left[ \beta E_2^{w_i^d} + (1 - \beta)E_1^{w_i^d} \right] D_i, i = 1, \dots, n \quad (4-35)$$

где је:

$$E_1^{w_i^d} = \frac{1}{2}(w_{i1}^d + w_{i2}^d), E_2^{w_i^d} = \frac{1}{2}(w_{i3}^d + w_{i4}^d) \quad (4-36)$$

Ограничење из формуле (4-7) постаје:

$$T^u \left[ \beta E_2^{w_i^d} + (1 - \beta)E_1^{w_i^d} \right] D_i \geq Ss_i, i = 1, \dots, n \quad (4-37)$$

где је:

$$E_1^{w_i^d} = \frac{1}{2}(w_{i1}^d + w_{i2}^d), E_2^{w_i^d} = \frac{1}{2}(w_{i3}^d + w_{i4}^d) \quad (4-38)$$

Ограничење из формуле (4-8) постаје:

$$Q_i = \left[ \beta E_2^{w_i^d} + (1 - \beta)E_1^{w_i^d} \right] D_i, i = 1, \dots, n \quad (4-39)$$

где је:

$$E_1^{w_i^d} = \frac{1}{2}(w_{i1}^d + w_{i2}^d), E_2^{w_i^d} = \frac{1}{2}(w_{i3}^d + w_{i4}^d) \quad (4-40)$$

Решење горе наведене крисп оптимизације су променљиве  $P_i$ ,  $Ss_i$  и  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , које су добијене за сваки степен изводљивости  $\beta = 0,5, 0,6, \dots, 0,9, 0,95, 0,99, 1$ . Одговарајуће фази вредности за циљну функцију израчунате су као:

$$\tilde{Z}(\beta) = \sum_{i=1}^n (\tilde{t}_p P_i + \tilde{t}_t Q_i + \tilde{t}_s Ss_i), \beta = 0,5, 0,6, \dots, 0,9, 0,95, 0,99, 1. \quad (4-41)$$

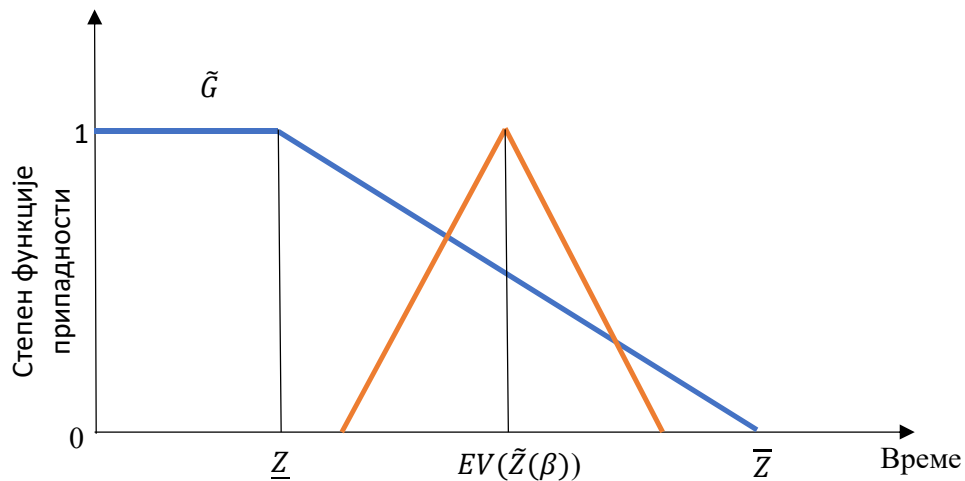
Доносилац одлуке одређује праг толеранције за добијене вредности циљне функције за различите степене изводљивости. Најкраће време  $\underline{Z}$  добијено је за најнижи степен изводљивости,  $\beta = 0,5$ , а најдуже време  $\overline{Z}$  за највиши степен изводљивости  $\beta = 1$ . Претпоставимо да је функција толеранције,  $\tilde{G}$  линеарна између ова два прага толеранције, најкраћег  $\underline{Z}$  и најдуже времена  $\overline{Z}$ . Функција припадности је:



$$\mu_{\tilde{G}}(z) = \begin{cases} 1, & z < \underline{Z} \\ \frac{\bar{Z}-z}{\bar{Z}-\underline{Z}}, & \underline{Z} \leq z \leq \bar{Z} \\ 0, & z > \bar{Z} \end{cases} \quad (4-42)$$

У овој дисертацији предложена је формула за израчунавање толеранције, као степена задовољења решења,  $K_{\tilde{G}}(\tilde{Z}(\beta))$  добијених вредности циљне функције  $\tilde{Z}(\beta)$  за степен изводљивости,  $\beta$  (слика 4-1). Формула обезбеђује добру процену толеранције и једноставнија је за примену у пракси од формуле у раду аутора Џименеза и осталих (Jimenez et al., 2007).

$$K_{\tilde{G}}(\tilde{Z}(\beta)) = \frac{\bar{Z} - EV(\tilde{Z}(\beta))}{\bar{Z} - \underline{Z}}, \beta = 0,5, 0,6, \dots, 0,9, 0,95, 0,99, 1. \quad (4-43)$$



Слика 4-1. Функција толеранције  $\tilde{G}$  за добијену вредност циљне функције  $\tilde{Z}(\beta)$

Баланс између степена изводљивости ограничења,  $\beta$  и степена задовољења решења,  $K_{\tilde{G}}(\tilde{Z}(\beta))$ , израчунава се:

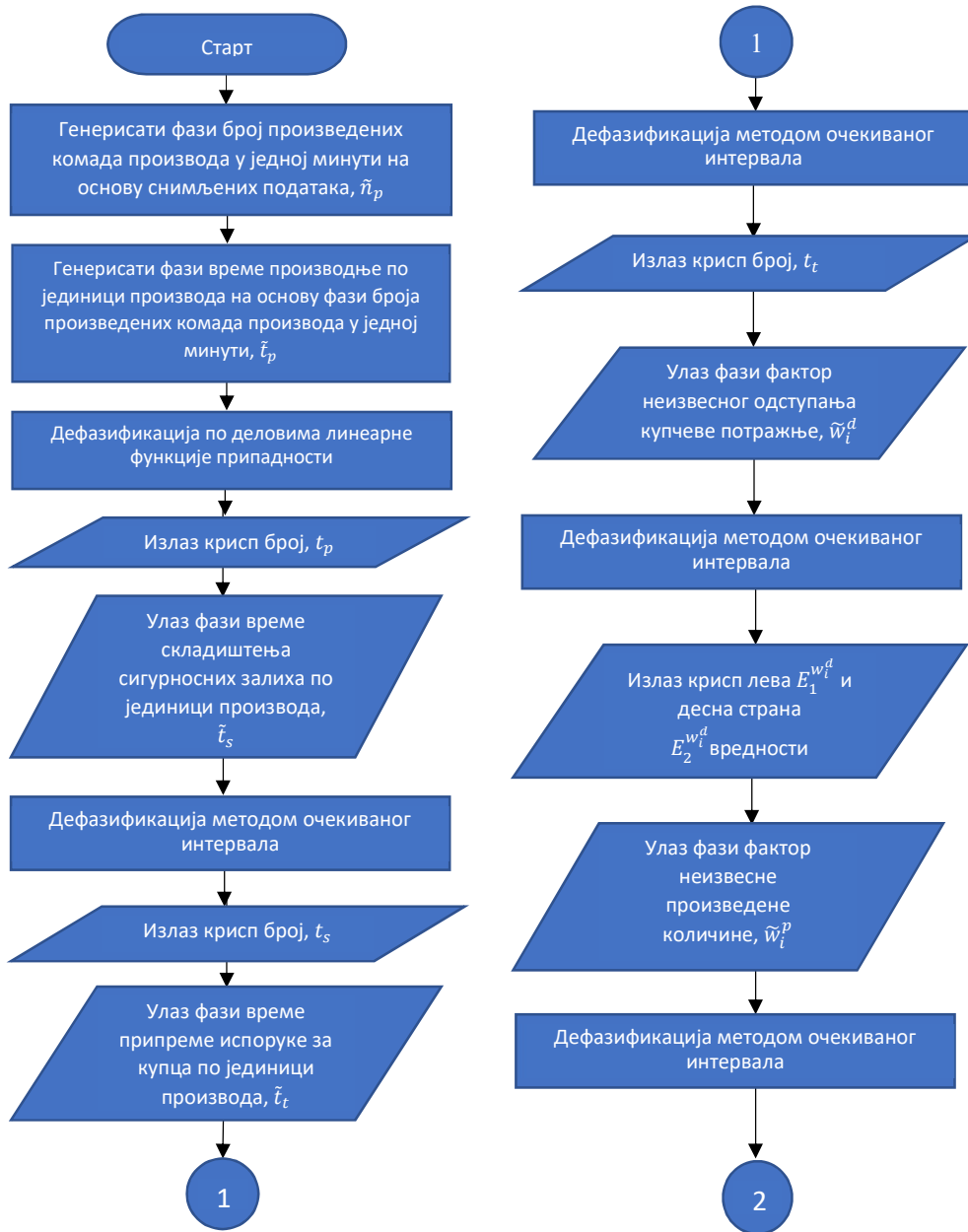
$$\beta \cdot K_{\tilde{G}}(\tilde{Z}(\beta)) \quad (4-44)$$

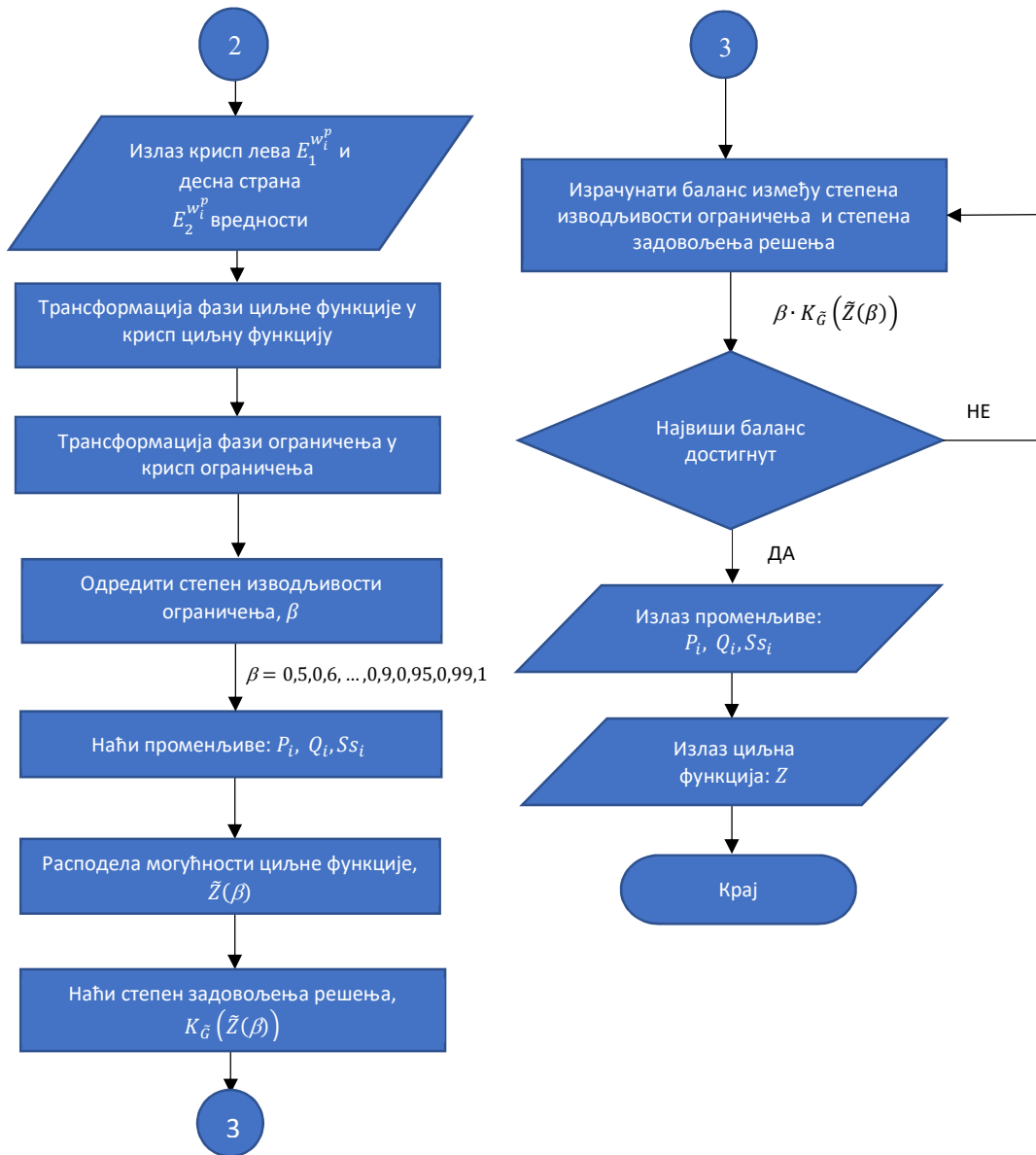
Решење променљивих  $P_i, Ss_i$  и  $Q_i, i = 1, \dots, n$  које достижу највиши баланс:

$$\max_{\beta=0,5,0,6,\dots,0,9,0,95,0,99,1} \beta \cdot K_{\tilde{G}}(\tilde{Z}(\beta)) \quad (4-45)$$

препоручљиво је.

Алгоритам предложеног фази АПП модел представљен је на дијаграму на слици испод.





Слика 4-2. Дијаграм тока предложеног фази АПП модела

## 5. Студија случаја

Студија случаја извршена је у предузећима два добављача у аутомобилској индустрији у Републици Србији који припадају групи првих добављача јер испоручују робу директно произвођачима аутомобила. Анализиран је део ланца снабдевања у аутомобилској индустрији у конфигурацији: један добављач – више произвођача аутомобила. Произвођачи аутомобила директни су купци за оба добављача.

Оба предузећа добављача организована су на врло сличан начин разматрајући поделу послова, организацију одељења, хијерархију, руководство итд. Разликују се у броју запослених и величини фабрике. Одељење логистике идентично је организовано у оба предузећа и подељења су: планирање материјала, планирање производње, подршка купцима, откривање системских грешака и магацински послови. Ток материјала у предузећима организован је на сличан начин који је типичан за аутомобилску индустрију: магацин репроматеријала снабдева производњу која се састоји од производње полупроизвода и производње готовог производа, полупроизвод се складишти у магацину полупроизвода, готов производ се складишти у магацину готовог производа. Припрема испоруке робе купцима одвија се у посебној отпремној зони која је лоцирана поред утоварних рампи.

Оба предузећа добављача део своје робе испоручују истим произвођачима аутомобила. Зато је рађена студија случаја на производним линијама које производе робу за исте купце. Периоди за тестирања модела и за његову верификацију разликују се у студији случаја. У предузећу првог добављача оба периода краћа су у односу на другог добављача. Студија случаја у предузећу другог добављача рађена је у дужем периоду да би се потврдила функционалност и применљивост модела на већем узорку.

### 5.1 Студија случаја у првом предузећу добављача из аутомобилске индустрије

Предложен модел тестиран је у предузећу добављача произвођача аутомобила у Републици Србији (енгл. First tier supplier), с обзиром на то да је аутомобилска индустрија веома важан чинилац привреде у последњој деценији у Републици Србији. Анализирана је једна производна линија која производи више различитих производа за различите купце за европско тржиште. Сви производи припадају истој фамилији производа по својим карактеристикама. Пакују се у два типа пластичних контејнера дефинисаних од стране купаца.

Развијени фази АПП модел примењен је да дефинише минимално потребно време за производњу и логистичке операције код отпреме произведене робе купцима. Ово време од суштинске је важности за ефикасно управљање у предузећу. Уколико произвођач може да произведе наручене производе и испоручи их у краћем периоду од својих конкурената, то значи да је конкурентнији на тржишту. Краће време производње, такође значи и ангажовање радне снаге и енергената за мањи број дана производње, што директно утиче на смањење трошкова и боље финансијске резултате.

Усвојен период планирања у моделу је 12 недеља. Потражња купца за период од три месеца типична је за аутомобилску индустрију са аспекта купчевих поруџбеница и

представља средњорочни период планирања (енгл. mid-term forecast). Дугорочнија купчева потражња има изузетно високу неизвесност и није поуздана за стабилно планирање производње.

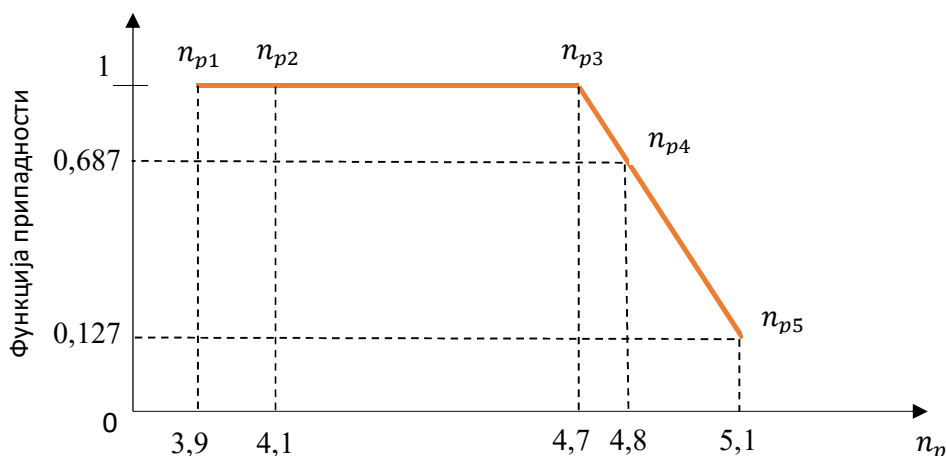
Изведено је седам експеримената:

- (1) основни случај,
- (2) различита неизвесност у произведеној количини,
- (3) различита неизвесност у одступању у купчевој потражњи,
- (4) различите стратегије у висини сигурносних залиха,
- (5) поређење резултата основног случаја са реалним подацима снимљеним у фабрици,
- (6) поређење резултата основног случаја са стратегијама планирања производње,
- (7) поређење две методе за прогнозу потражње купца са реалним подацима снимљеним у предузећу.

Прикупљање података изведено је у фабрици за период од 12 недеља. Мерење броја произведених комада у јединици времена изведено је за све производе који се производе на производној линији за два купца. Алат који је коришћен за мерење је уређај инсталиран на производној линији за мерење произведених комада у једној минути. Подаци су искоришћени за генерисање фази скупа  $\tilde{n}_p$  са по деловима линеарном функцијом припадности (енгл. piece-wise), као што је приказано на слици 5-1.

Метода примењена за генерисање функције припадности на основу прикупљених података представљена је у прилогу А. Коришћен је метод очекиваног интервала и адаптиран је за дефазификацију по деловима линеарне функције припадности  $\tilde{n}_p$  као што следи:

$$EI(\tilde{n}_p) = [E_1^{n_p}, E_2^{n_p}], \text{ где је очекивана вредност леве стране } E_1^{n_p}: \\ E_1^{n_p} = \int_0^1 [n_{p1} + (n_{p2} - n_{p1}) r] dr = \frac{n_{p1} + n_{p2}}{2} = \frac{3,9 + 4,1}{2} = 4. \quad (5-1)$$



Слика 5-1. Фази скуп произведених комада у једној минути,  $\tilde{n}_p$

Очекивана вредност десне стране  $E_2^{n_p}$  садржи три парцијална интеграла за сваки део линеарне функције припадности по деловима, као што следи:

$$E_2^{n_p} = \int_{0,687}^1 [n_{p4} + (n_{p3} - n_{p4})r]dr + \int_{0,126}^{0,687} [n_{p5} + (n_{p4} - n_{p5})r] dr + \int_0^{0,126} n_{p5} dr = \int_{0,687}^1 [4,8 + (4,7 - 4,8)r]dr + \int_{0,126}^{0,687} [5,1 + (4,8 - 5,1)r] dr + \int_0^{0,126} 5,1 dr = 4,91. \quad (5-2)$$

Очекивани интервал броја произведених производа у току једне минуте,  $EI(\tilde{n}_p)$  је:

$$EI(\tilde{n}_p) = [4, 4,91]. \quad (5-3)$$

Очекивана вредност  $EV(\tilde{n}_p)$  добијеног очекиваног интервала је:

$$EV(\tilde{n}_p) = \frac{1}{2}(4 + 4,91) = 4,46. \quad (5-4)$$

То значи да је просечан број произведених комада производа у току једне минуте 4,46. Зато дефазификовано просечно време производње једног комада је  $t_p = 1/EV(\tilde{n}_p) = 0,224$  минуте.

Мерење времена складиштења залиха  $\tilde{t}_s$  и времена припреме испоруке  $\tilde{t}_t$  обављено је у магацину од стране особља магацина и менаџера логистике. Мерење времена складиштења залиха обављено је на 100 узорака ускладиштених контејнера. Време је моделирано са трапезоидним фази скупом:

$$\tilde{t}_s = (0,020, 0,023, 0,028, 0,04). \quad (5-5)$$

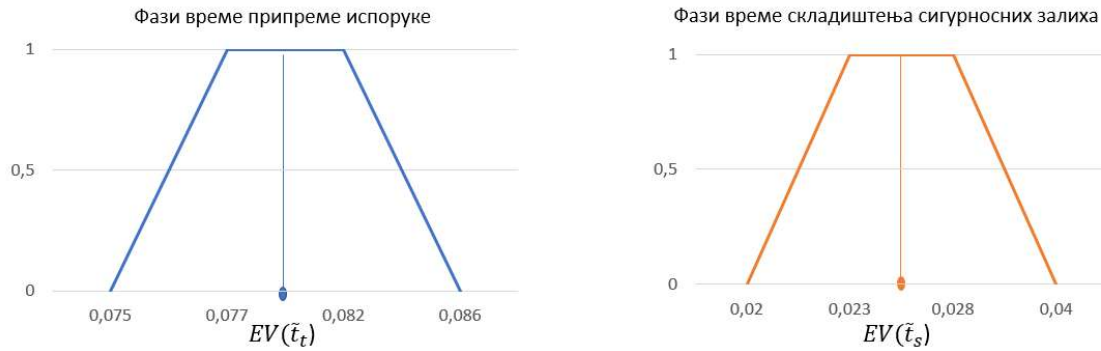
Дефазификована вредност добијена је коришћењем очекиване вредности фази скупа:  $EV(\tilde{t}_s) = \frac{1}{2}(E_1^{t_s} + E_2^{t_s}) = \frac{1}{4}(0,020 + 0,023 + 0,028 + 0,04) = 0,03$  минуте по производу.

Мерење времена припреме испоруке,  $\tilde{t}_t$  изведено је у зони за отпрему робе на 100 узорака испорука укључујући све логистичке операције неопходне за припрему испоруке за оба типа контејнера. Време припреме испоруке моделирано је са трапезоидним фази скупом:

$$\tilde{t}_t = (0,075, 0,077, 0,082, 0,086). \quad (5-6)$$

Дефазификована вредност добијена је коришћењем методе очекиване вредности фази скупа:  $EV(\tilde{t}_t) = \frac{1}{2}(E_1^{t_t} + E_2^{t_t}) = \frac{1}{2}(0,075 + 0,077 + 0,082 + 0,086) = 0,08$  минута по производу.

Фази скупови  $\tilde{t}_s$  и  $\tilde{t}_t$  дати су на слици 5-2.



Слика 5-2. Фази скупови: време припреме испоруке и време складиштења сигурносних залиха

Неизвесност у производњи и купчевој потражњи анализирана је са тимом логистике у предузећу. На основу њиховог искуства и реализације производних планова одступање од 10% коришћено је за величину одступања у произведеној количини делова. Зато фази фактор  $\tilde{w}_i^p$  произведене количине за сваку недељу  $i, i = 1, \dots, 12$  је троугласти фази скуп:

$$\tilde{w}_i^p = (0,9, 1, 1,1) \quad (5-7)$$

### 5.1.1 Развој и примена модела прогнозе потражње купца и планирања испорука

Потражња купца разматрана је за сваки производ за оба купца. Прикупљање података изведено је од стране одељења логистике. Одељење логистике у предузећу користи напредан САП софтвер за интеграцију купчевих поруџбеница, планирање производње, магацинске операције, праћење залиха и планирање репроматеријала.

Сви подаци транспарентни су и лаки за извожење и обраду у неким другим алатима, нпр. у *excel*-у. Купчева потражња и испоручена количина прикупљене су за два периода:

- (1) 12 недеља реализованих пре периода планирања,
- (2) 12 недеља у периоду планирања.

#### 5.1.1.1 Метод стандардне девијације

За моделирање прогнозе купчеве потражње узет је период од 12 недеља пре периода планирања са подацима о испорученим количинама производа купцима из предузећа добављача. Прогнозирана потражња купца  $D_i$  у периоду планирања  $i = 1, \dots, 12$  узета је на почетку периода планирања у недељи  $i = 0$  за цео период планирања од 12 недеља.

Користећи податке о испорукама робе купцима  $D_i^*$  за период од 12 недеља пре периода планирања, стандардна девијација израчуната је:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{12} \sum_{i=-1}^{-12} (D_i^* - \bar{D}^*)^2} = 1869, \quad (5-8)$$

где је  $\bar{D}^*$  просечна испоручена количина у периоду од 12 недеља пре планираног периода,  $\bar{D}^* = 16240$  испоручених комада производа. Затим, девијација  $f_i$  испоручених количина производа  $D_i^*$  од прогнозиране потражње купаца  $D_i$  у периоду  $i = 1, \dots, 12$  израчуната је:

$$f_i = \frac{\sigma}{D_i} \quad (5-9)$$

Добијена девијација за 12 недеља је вектор:

$$f_i = 0,19, 0,20, 0,23, 0,14, 0,22, 0,33, 0,15, 0,19, 0,18, 0,18, 0,18, 0,18. \quad (5-10)$$

Фази фактор девијације купчеве потражње  $\tilde{w}_i^d$  генерисан је као троугласти фази скуп  $(1 - f_i, 1, 1 + f_i)$ . Фази фактор  $\tilde{w}_i^d$  израчунат је за сваку недељу  $i, i = 1, \dots, 12$  и представљен у табели 5-1.

Табела 5-1. Фази фактори  $\tilde{w}_i^d$  купчеве потражње за сваку недељу  $i, i = 1, \dots, 12$  у периоду планирања

$\tilde{w}_1^d = (0,81,1,1,19)$	$\tilde{w}_7^d = (0,85,1,1,15)$
$\tilde{w}_2^d = (0,80,1,1,20)$	$\tilde{w}_8^d = (0,81,1,1,19)$
$\tilde{w}_3^d = (0,77,1,1,23)$	$\tilde{w}_9^d = (0,82,1,1,18)$
$\tilde{w}_4^d = (0,86,1,1,14)$	$\tilde{w}_{10}^d = (0,82,1,1,18)$
$\tilde{w}_5^d = (0,78,1,1,22)$	$\tilde{w}_{11}^d = (0,82,1,1,18)$
$\tilde{w}_6^d = (0,67,1,1,33)$	$\tilde{w}_{12}^d = (0,82,1,1,18)$

Множење фази фактора  $\tilde{w}_i^d, i = 1, \dots, 12$  прогнозом купчеве потражње у периоду планирања  $D_i, i = 1, \dots, 12$  добија се горња и доња граница, као и средина прогнозе купчеве потражње,  $\tilde{D}_i = (D_i^l, D_i^m, D_i^u)$ . Множење скалара троугластим фази бројем добија се троугласти фази број (поглавље 3.1.1). На овај начин купчева потражња у периоду планирања постаје симетричан троугласти фази број који је различит за сваку недељу потражње,  $i = 1, \dots, 12$ . Очекивана вредност купчеве потражње добија се употребом формуле  $EV(\tilde{D}_i) = \frac{1}{3}(\tilde{D}_i^l + \tilde{D}_i^m + \tilde{D}_i^u)$  за сваку недељу  $i = 1, \dots, 12$  (поглавље 4.3.4). Практично, излаз модела прогнозе потражње купца методом стандардне девијације постаје испоручена количина робе купцима у периоду пре планирања,  $D_i^*$ .

### 5.1.1.2 Метод фази линеарне регресионе анализе

Регресиона анализа користи се код проналажења повезаности између зависне и независне променљиве. Зависна променљива као резултат регресионе анализе функција је независне променљиве, док је степен утицаја независне променљиве на њу изражен преко коефицијената. Регресиона анализа врло је заступљена код емпиријски прикупљених података и широко је примењена у инжењерингу, логистици, економији, финансијским анализама итд. Форма регресионе анализе је:

$$y = f(x, a) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n \quad (5-11)$$



Разлика између улазних и излазних података у моделу регресионе анализе окарактерисана је грешком која се јавља и која је случајна. Самим тим, излазни подаци имају своју горњу и доњу границу у оквиру којих егзистирају услед појаве грешке. Може се рећи да је класична регресиона анализа условљена вероватноћом (енгл. probabilistic).

Подаци који се користе код класичне регресионе анализе су крисп. Међутим, како често желе да се анализирају практични непрецизни или неодређени подаци, уводи се фази логика у регресиону анализу. Исто тако, однос између зависне и независне променљиве често је неодређен. Излаз регресионе анализе може да добије низ могућих решења и увођењем фази логике регресиона анализа постаје фази регресиона анализа. Фази регресиона анализа за разлику од класичне условљена је могућношћу (енгл. possibilistic). Типичан облик фази линеарне регресије (ФЛР) је према аутору Занг (Zhang, 2016):

$$\tilde{y} = f(x, \tilde{a}) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x_1 + \dots + \tilde{a}_n x_n + \tilde{\varepsilon} \quad (5-12)$$

где су коефицијенти  $\tilde{a}$  фази скупови (фази бројеви) и према правилу множења фази броја скаларом (поглавље 3.1.1) излаз регресионе анализе је фази скуп. Грешка која се јавља је, такође, фази скуп:

$$\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_n \in \tilde{R}, \tilde{\varepsilon} \in \tilde{R} \quad (5-13)$$

У матричном облику фази линеарна регресија може да се исказе (Zhang, 2016):

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)^T, \tilde{A} = (\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)^T, \\ \tilde{E} &= (\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \dots, \tilde{\varepsilon}_n)^T, \\ X &= \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5-14)$$

Из тога следи да је фази линеарни модел:

$$\tilde{Y} = \tilde{A}X + \tilde{E} \quad (5-15)$$

Због могућности разматрања неизвесности практичних података фази линеарна регресиона анализа (ФЛРА) употребљена је за прогнозу купчеве потражње у предузећу добављача. Узет је модел аутора Танака и други (Tanaka et al., 1982) са крисп излазом:

Циљна функција:

$$O = \min\{m c_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_i x_{ij}\} \quad (5-16)$$

Ограничења:

$$\begin{aligned} y_j &\geq \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} - (1-h) \sum_{i=1}^n c_i x_{ij} \\ y_j &\leq \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} + (1-h) \sum_{i=1}^n c_i x_{ij} \end{aligned} \quad (5-17)$$

Излазна вредност:

$$\begin{aligned} Y &= (p_0, c_0) + (p_1, c_1)x_1 + (p_2, c_2)x_2 + \dots + (p_n, c_n)x_n \\ \tilde{a}_i &= (p_i, c_i) \end{aligned} \quad (5-18)$$

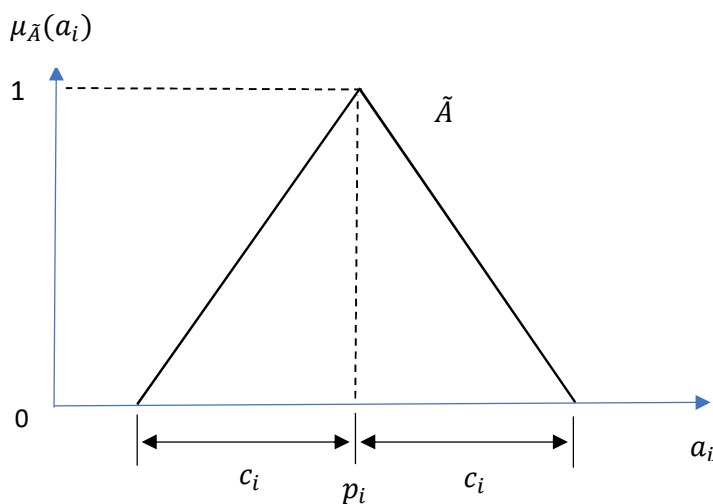
При чему је:

- $m$  - укупан број недеља које су укључене у фази АПП модел,  $m = 12$ ,
- $c_0$  - ширина (лева и десна страна троугластог фази броја) независног члана регресионе праве  $y$ ,
- $p_0$  - средина независног члана регресионе праве  $y$ ,
- $c_1$  - ширина (лева и десна страна троугластог фази броја) коефицијента регресионе праве  $y$ ,
- $p_1$  - средина коефицијента регресионе праве  $y$ ,
- $x_i$  - променљива у регресионој правој  $y$  (редни број недеље),  $i = 1, \dots, 12$
- $Y$  - излаз регресионе праве (испоручена количина робе купцу),
- $h$  - степен задовољења расплнутости регресионе праве.

Функција припадности  $\mu_{\tilde{A}}(a_i)$  за коефицијенте у фази линеарној регресионој правој (3-42) има облик:

$$\mu_{\tilde{A}}(a_i) = \begin{cases} 1 - \frac{|p_1 - a_i|}{c_i}, & p_1 - c_i \leq a_i \leq p_1 + c_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (5-19)$$

Фази коефицијент  $\tilde{A}$  троугласти је фази број окарактерисан са два параметра  $\tilde{A}(p, c)$  који представљају средину фази броја и његову леву и десну ширину (слика 5-3). Фази коефицијент формира вектор  $\tilde{A}(p_i, c_i)$ , где је  $p_i = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  и  $c_i = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ .

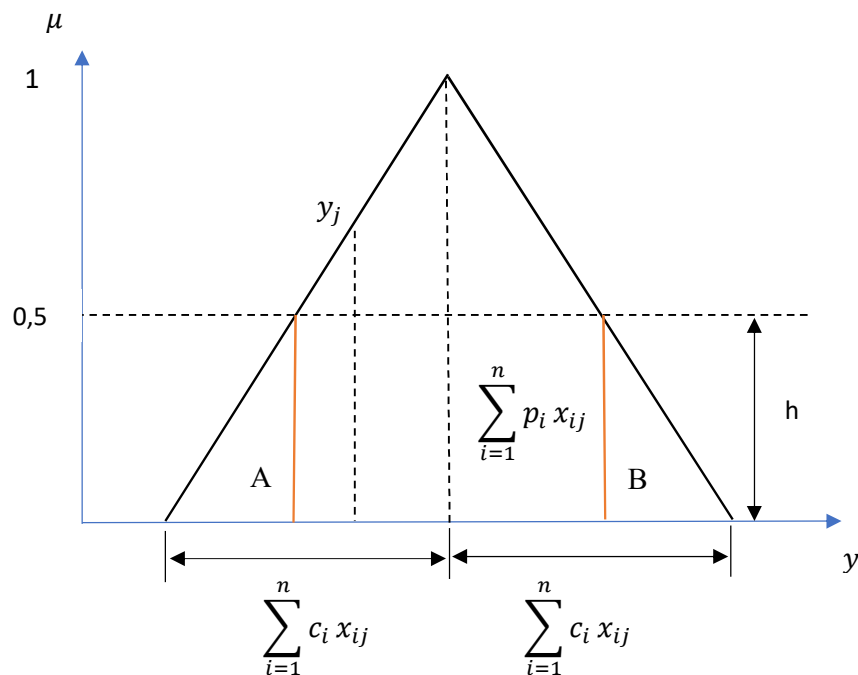


Слика 5-3. Функција припадности фази коефицијента  $\tilde{A}$

У складу са обликом функције припадности излазна вредност фази линеарне регресије је према формули 5-18. Према моделу предложеном у раду Танаке и других (Tanaka et al., 1982), функција припадности излазне вредности фази линеарне регресије  $Y$  (зависне променљиве) је:

$$\mu_{\bar{y}}(y) = \begin{cases} 1 - \frac{y - \sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n c_i x_i}, & x_i \neq 0 \\ 1, & x_i = 0, y = 0 \\ 0, & x_i = 0, y \neq 0 \end{cases} \quad (5-20)$$

Графички облик фази линеарне регресије може да се представи као на слици 5-4. Излазна вредност,  $y_j$  узима вредност између  $A$  и  $B$ , који су одређени степеном задовољења расплнутости регресионе праве,  $h$ . Циљна функција (5-16) је минимализовање ширине коефицијената као фази бројева. Број ограничења је  $2m$  (5-17) у које је укључен степен задовољења расплнутости регресионе праве,  $h[0,1]$ . Може имати вредност у интервалу од 0 до 1 и одређен је од стране доносиоца одлуке. Уколико је степен ближе 0, ширина расплнутости мања је.

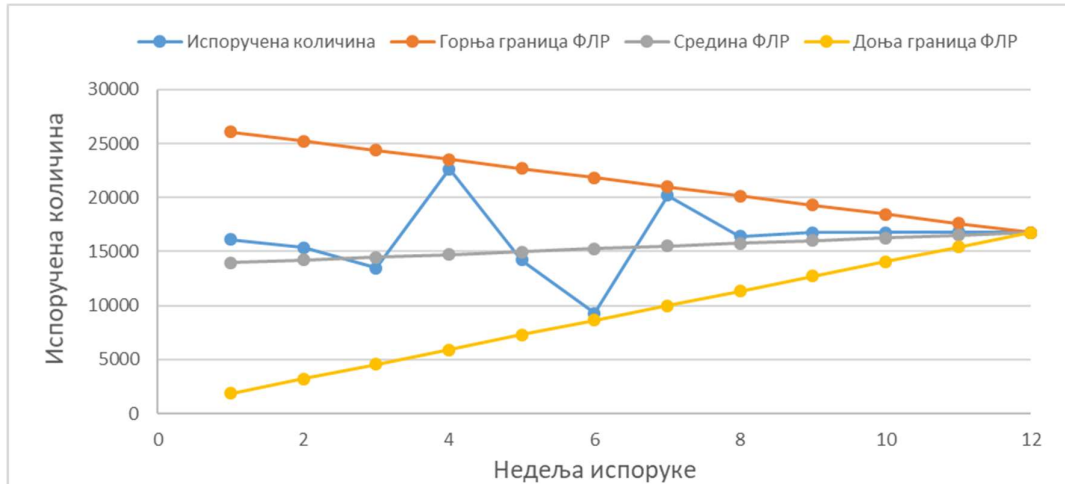


Слика 5-4. Фази линеарна регресија из рада аутора Танака и други (Tanaka et al., 1982)

Модел примењен на прикупљеним подацима у предузећу код моделирања потражње купаца за тест је период од 12 недеља пре периода планирања ( $i = 1, \dots, 12$ ). Модел је тестиран за цео интервал промене степена задовољења решења,  $h = 0,1, 0,2, \dots, 1$  (табела 5-2). Регресиона права има најмању ширину расплнутости за степен задовољења  $h = 0,1$  (слика 5-5), при чему образац ФЛР гласи:

$$y_i = (13718, 13219) + (255, -1102)x_i, \quad i = 1, \dots, 12 \quad (5-21)$$

Образац (5-21) користиће се за прогнозу купчеве потражње у периоду планирања и код поређења са осталим методама (табела 5-3).



Слика 5-5. Модел ФЛР за период развоја модела у тест периоду пре периода планирања,  $h = 0,1$

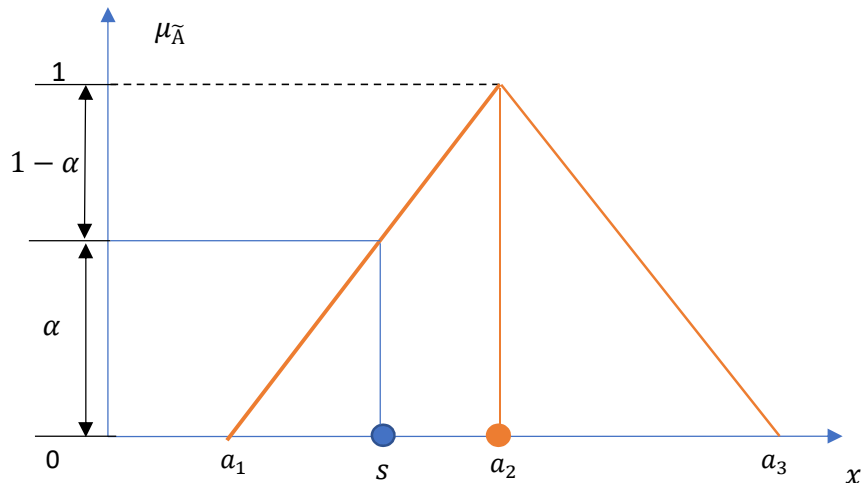
### 5.1.1.3 Метод фази линеарне регресионе анализе са дефазификацијом

Резултат ФЛР анализе за тест период од 12 недеља показује 12 независних фази скупова добијених за сваку недељу (слика 5-7). Фази скупови дефинисани су својом левом границом, средином и десном границом као резултат примењене ФЛР (слика 5-3). Испоруке купцима на којима је формиран модел ФЛР у тест периоду припада дискретизованим фази скуповима. Степен функције припадности потражње купца (плаве тачке на слици 5-6) фази скупу, добијеном као резултат ФЛРА, одређен је применом фази аритметике и сличности троуглова. Степен функције припадности,  $\alpha$  из сличности троуглова једнак је:

$$\alpha = \frac{s - a_1}{a_2 - a_1} \quad (5-22)$$

У случају када је потражња купца (плава тачка на слици 5-6) са десне стране средине фази броја (наранџаста тачка на слици 5-6), тада се степен функције припадности,  $\alpha$  из сличности троуглова израчунава:

$$\alpha = \frac{a_3 - s}{a_3 - a_2} \quad (5-23)$$



Слика 5-6. Фази аритметика за израчунавање степен функције припадности прогнозиране потражње у тест периоду

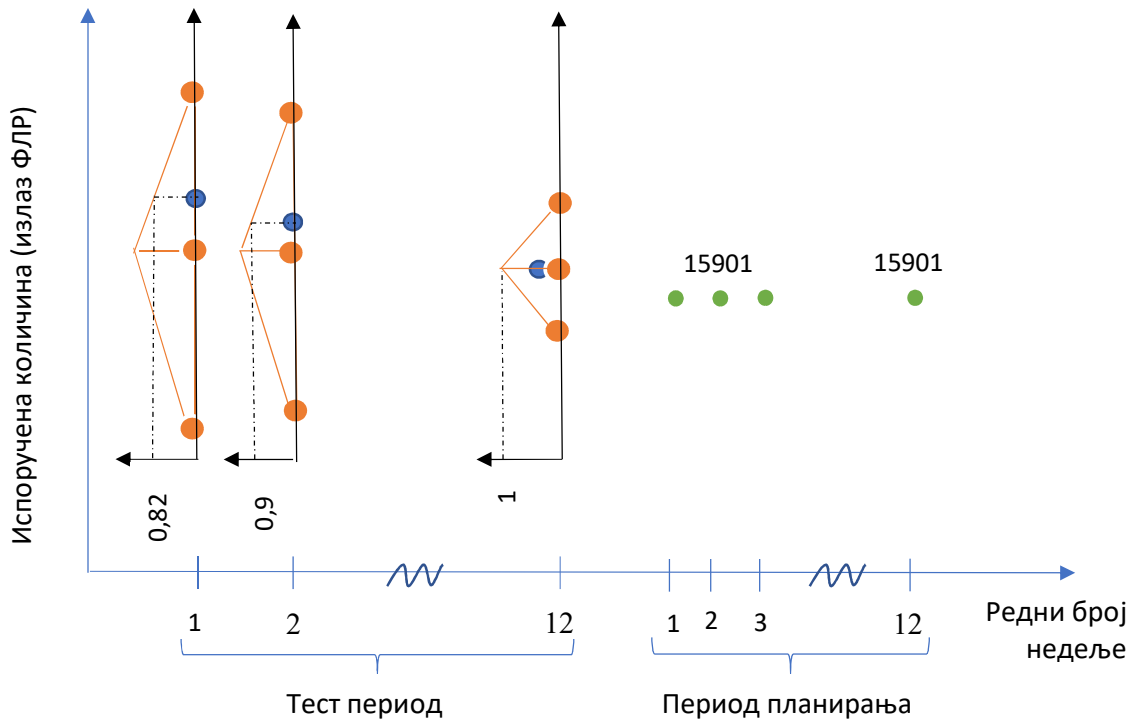
У табели 5-2. уочљиво је да се са променом степена задовољења мењају циљна функција и параметри регресионе праве. Са порастом степена задовољења решења,  $h$  мењају се циљна функција, ширина независног члана регресионе праве,  $c_0$  и ширина коефицијента регресионе праве,  $c_1$ . Средина независног члана регресионе праве,  $p_0$  и средина коефицијента регресионе праве,  $p_1$  не мењају се. За  $h = 1$  решење није изводљиво.

Табела 5-2. Параметри ФЛРА за промену степена задовољења решења,  $h$

Степен задовољења решења, $h$	Циљна функција	Средина независног члана регресионе праве, $p_0$	Средина коефицијента регресионе праве, $p_1$	Ширина независног члана регресионе праве, $c_0$	Ширина коефицијента регресионе праве, $c_1$
0,1	72704	13718	255	13219	-1102
0,2	81792	13718	255	14871	-1239
0,3	93477	13718	255	16996	-1416
0,4	109057	13718	255	19828	-1652
0,5	130868	13718	255	23794	-1983
0,6	163585	13718	255	29743	-2479
0,7	218113	13718	255	39657	-3305
0,8	327170	13718	255	59485	-4957
0,9	654339	13718	255	118971	-9914
1	Није изводљиво решење				

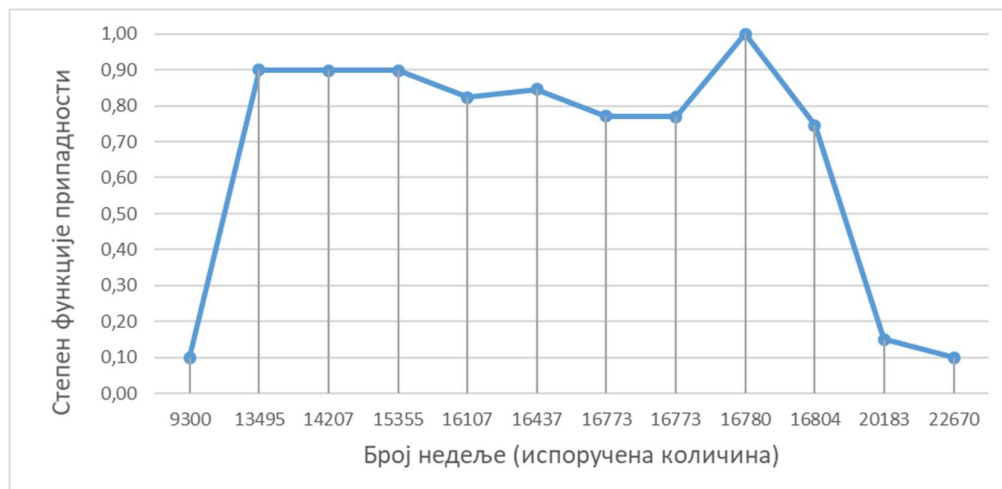
За дефазификацију добијеног фази скупа (слика 5-8) употребљена је метода пондерисаних средина са алгебарским изразом (образац 3-151). Функција припадности фази скупа дискретизована је на 12 елемената скупа. Калкулација крисп вредности фази скупа испоруке робе је:

$$z^* = \frac{0,1 \cdot 9300 + ,9 \cdot 13495 + 0,9 \cdot 14207 + ,9 \cdot 15355 + ,82 \cdot 16107 + \dots + 0,1 \cdot 22670}{0,1 + 0,9 + 0,9 + 0,9 + 0,82 + \dots + 0,1} = 15901 \quad (5-24)$$



Слика 5-7. Дискретизован тест период на фази скупове и период планирања

Прогнозирана потражња купца добијена у 5-24. је 15901 комад производа. Ова вредност користиће се у анализи сензитивности методе прогнозе потражња купца и има исту вредност за сваку недељу у периоду планирања,  $i = 1, \dots, 12$ . То је разлика у односу на модел прогнозе потражње методом стандардне девијације (поглавље 5.1.1.1), где је прогнозирана потражња купца различита за сваку недељу  $i = 1, \dots, 12$ .



Слика 5-8. Фази скуп дискретизованих фази скупова за тест период планирања потражње купца

Алгоритам за примењен модел ФЛР у овој дисертацији написан је у C++ програмском језику и развијен у програмском пакету *Visual Studio 2015* (прилог 3).

#### 5.1.1.4 Анализа грешке предвиђања методе прогнозе потражње и планирања испорука

Урађена је статистичка анализа методе прогнозе купчеве потражње засноване на тест периоду прогнозе у предузећу добављача (период од 12 недеља пре планираног периода у коме је примењен фази АПП модел). Прва анализа урађена је за класичну линеарну регресиону анализу (формула 5-11). Коришћен је софтвер *Minitab 2016*. Резултати софтвера су:

The regression equation is  
 $y = 15525 + 110x$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	15525	2105	7,37	0,000
Week	110,1	286,0	0,38	0,708

S = 3420,57    R-Sq = 1,5%    R-Sq(adj) = 0,0%

#### Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	1	1732483	1732483	0,15	0,708
Residual Error	10	117002892	11700289		
Total	11	118735375			

#### Unusual Observations

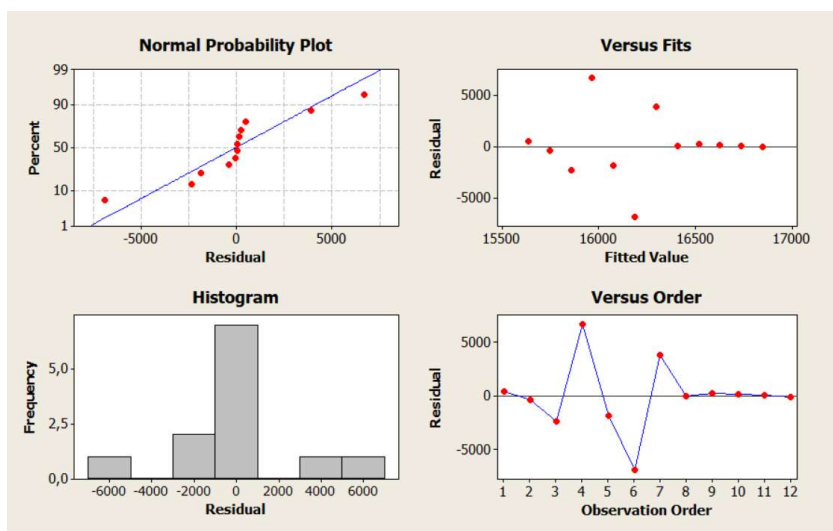
Obs	C1	C2	Fit	SE Fit	Residual	St Resid
4	4,0	22670	15965	1219	6705	2,10R
6	6,0	9300	16185	998	-6885	-2,10R

R denotes an observation with a large standardized residual.

Коришћен интервал поверења је 95%, тако да је праг толеранције  $\alpha = 0,05$ . Анализом резултата софтвера може да се закључи да је снага теста или  $P$  вредност мања од  $\alpha = 0,05$  у случају константе (Constant,  $P = 0$ ), тако да је статистички поуздан утицај константе на зависну променљиву,  $y$  (енгл. response). Код независне променљиве,  $x$  (енгл. predictor) снага теста већа је од прага толеранције  $\alpha = 0,05$  (Week,  $P = 0,708$ ) и може да се закључи да статистички није поуздан утицај независне променљиве на зависну променљиву. Зато морају детаљно да се анализирају остаци. Варијанса је висока ( $S = 3420,57$ ), коефицијент корелације између зависне и независне променљиве изузетно је низак ( $R\text{-Sq} = 1,5\%$ ,  $R\text{-Sq}(\text{adj}) = 0,0\%$ ). Анализа такође показује да вредности у недељи 4 и 6 не прате предложену регресиону формулу, с обзиром на то да апсолутне вредности стандардизованих остатака веће су од 2. Вредност у недељи 4 позитивна је,

док у недељи 6 негативна је, што је видљиво на слици 5-9. (графикон у доњем десном углу).

Резултати анализе остатака (енгл. residuals) приказани су на слици 5-9. Први графикон у горњем левом углу са слике 5-9. показује тест нормалности остатака. Видљиво је да остаци не прате праву нормалности, као и да су изражене вредности које су далеко удаљене у негативном и позитивном пољу. Постављен интервал поверења је 95%, тако да је праг толеранције  $\alpha = 0,05$ . Снага теста или  $P$  вредност теста нормалности остатака је  $P = 0,025$ . Снага теста мања је од прага толеранције, тако да почетна хипотеза  $H_0$  да остаци имају нормалну расподелу мора да се одбаца. Закључак је да остаци немају нормалну расподелу и да постоје вредности које су значајно различите од осталих вредности (енгл. outlier) и морају додатно да се анализирају. То је видљиво и на хистограму у доњем левом углу на слици 5-9. У горњем десном углу анализирани су остаци у односу на фитоване вредности линеарне регресионе праве. Видљиво је да нема константне варијансе, остаци нису случајно распоређени око нула вредности и да постоји присуство вредности које су значајно различите од осталих вредности. Закључује се да је потребна даља анализа увођења услова експоненцијалног степена (енгл. higher-order term), квадратног, кубног итд., што неће да се даље анализира у дисертацији. Коментар у вези са графиконом у доњем десном углу дат је у пасусу изнад.



Слика 5-9. Статистичка анализа остатака ЛР у софтверу Minitab 2016

Резултат добијен методом купчеве потражње упоређен је са резултатима 17 метода прогнозе, које су формиране на бази података испорука робе купцима за 12 недеља у тест периоду у предузећу добављача пре периода планирања. Резултати су представљени у табели 5-3.

Коришћене методе прогнозе су:

- метод прогнозе 1 - Прогноза потражње примљена од купца путем EDI поруке у предузећу,
- метод прогнозе 2 - Прогнозирана потражња методом ФЛРА са дефазификацијом,
- метод прогнозе 3 - Прогнозирана потражња методом ФЛРА,
- метод прогнозе 4 - Прогнозирана потражња класичном ЛРА,



- метод прогнозе 5 - Прогнозирана потражња методом: *Decomposition (Additive method, Trend&Seasonal)*,
- метод прогнозе 6 - Прогнозирана потражња методом: *Decomposition (Additive method, Seasonal)*,
- метод прогнозе 7 - Прогнозирана потражња методом: *Decomposition (Multiplicative method, Trend&Seasonal)*,
- метод прогнозе 8 - Прогнозирана потражња методом: *Decomposition (Multiplicative method, Seasonal)*,
- метод прогнозе 9 - Прогнозирана потражња методом: *Moving Average (MA=3)*,
- метод прогнозе 10 - Прогнозирана потражња методом: *Single Exponential Smoothing (95% CI, Optimal ARIMA)*,
- метод прогнозе 11 - Прогнозирана потражња методом: *Double Exponential Smoothing (95% CI, Optimal ARIMA)*,
- метод прогнозе 12 - Прогнозирана потражња методом: *Winters' Method (Additive Method, SL=12)*,
- метод прогнозе 13 - Прогнозирана потражња методом: *Winters' Method (Multiplicative Method, SL=12)*,
- метод прогнозе 14 - Прогнозирана потражња методом: *ARIMA (Moving Average, Nonesesonal method)*,
- метод прогнозе 15 - Прогнозирана потражња методом: *ARIMA (Moving Average, Sesonal method)*,
- метод прогнозе 16 - Прогнозирана потражња методом: *ARIMA (Autoregressive method, Nonesesonal method)*,
- метод прогнозе 17 - Прогнозирана потражња методом: *ARIMA (Autoregressive method, Sesonal method)*,
- метод прогнозе 18 - Прогнозирана потражња методом стандардне девијације.

Табела 5-3. Резултати метода прогнозе купчеве потражње

Недеља	Метод прогнозе 1	Метод прогнозе 2	Метод прогнозе 3	Метод прогнозе 4	Метод прогнозе 5	Метод прогнозе 6	Метод прогнозе 7	Метод прогнозе 8	Метод прогнозе 9	Метод прогнозе 10	Метод прогнозе 11	Метод прогнозе 12	Метод прогнозе 13	Метод прогнозе 14	Метод прогнозе 15	Метод прогнозе 16	Метод прогнозе 17	Метод прогнозе 18
1	16516	15901	17035	15635	23183	20912	24780	21361	16786	16760	16956	17428	16954	15398	19492	16048	16222	16107
2	15744	15901	17290	15745	18072	15452	18469	15590	16786	16760	17066	16676	16244	16256	26653	16293	16208	15355
3	16877	15901	17545	15855	15327	12357	15395	12730	16786	16760	17176	14816	14347	16256	-8669	16211	16208	13495
4	16122	15901	17800	15965	24231	20912	26358	21361	16786	16760	17286	23990	24220	16256	23911	16238	16207	22670
5	22030	15901	18055	16075	19120	15452	19620	15590	16786	16760	17396	15528	15253	16256	42804	16229	16208	14207
6	11398	15901	18311	16185	16375	12357	16335	12730	16786	16760	17506	10621	10033	16256	904	16232	16231	9300
7	15130	15901	18566	16295	25279	20912	27936	21361	16786	16760	17616	21504	21879	16256	15328	16231	16231	20183
8	16888	15901	18821	16406	20168	15452	20772	15590	16786	16760	17726	17757	17903	16256	14033	16231	16231	16437
9	21980	15901	19076	16516	17423	12357	17276	12730	16786	16760	17836	18094	18356	16256	14033	16231	16231	16773
10	15492	15901	19331	16626	26327	20912	29514	21361	16786	16760	17946	18094	18443	16256	13912	16231	16231	16773

11	16258	15901	19586	16736	21217	15452	21924	15590	16786	16760	18056	18125	18563	16256	15507	16231	16230	16804
12	16374	15901	19842	16846	18471	12357	18216	12730	16786	16760	18166	18100	18622	16256	16208	16231	16230	16780
SQRT(MSE)	9914	11460	9665	20788	16770	25421	16901	9486	9485	9934	13434	14106	9689	38174	9657	9657	13236	
MAPE	10	18	11	33	23	38	24	11	11	14	18	19	11	45	10	10	16	

Све методе поређене су са методом прогнозе 1 (потражње примљена од купца путем EDI поруке у предузећу), која је заправо поручена количина робе  $D_i$  у периоду планирања у предузећу,  $i = 1, \dots, 12$ . Коришћене су две мере за мерење прецизности методе прогнозе у статистици код поређења резултата метода прогнозе и поручене количине  $D_i$  у предузећу за период планирања: MAPE (енгл. Mean Absolute Percentage Error) и MSE (енгл. Mean Squared Error). Због једноставности приказивања мере MSE коришћен је квадратни корен  $\sqrt{MSE}$  у табели 5-3. Формуле израчунавања према ауторима Чопра и Мајндл дате су испод (Chopra and Meindl, 2010):

$$SQRT(MSE) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (F_i - D_i)^2} \quad (5-25)$$

$$MAPE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left| \frac{F_i - D_i}{D_i} \right| \cdot 100}{n}} \quad (5-26)$$

где је:

$F_i$  – прогнозирана количина у свакој од метода у табели 5-3,

$D_i$  – потражња купца у предузећу за период планирања (метод прогнозе 1).

Коришћене мере за мерење прецизности показују различите вредности у табели 5-3. за поједине методе прогнозе. Што су мере мање, метода је прецизнија и показује мање одступање од прогнозиране потражње купца. Приметно је да је *MAPE* и *SQRT(MSE)* најмањи за: метод прогнозе 2, 16. и 17. чиме су ове методе најпрецизније од наведених 17 метода које се пореде са методом 1. Затим следе методе прогнозе 4, 9, 10. и 14. са већим мерама. У трећој групи су методе 11, 18, 3, 12, 13, 6. и 8. Највеће мере имају методе 5, 7. и 15. и оне су најнепрецизније у прогнози купчеве потражње.

Анализа грешке предвиђања показала је изузетну прецизност предложене методе ФЛРА са дефазификацијом из поглавља 5.1.1.3, што је чини валидном за прогнозу купчеве потражње и планирања испорука робе купцима. Прецизнија је од методе класичне линеарне регресионе анализе и фази линеарне регресионе анализе, која користи средину троугластог фази броја за прогнозу потражње. Високу прецизност показале су ARIMA методе, осим методе ARIMA (Moving Average, Sesonal method). Класична линеарна регресиона анализа и методе које се користе као временске серије, такође су показале већу прецизност од других статистичких метода: *Moving Average*, *Single Exponential Smoothing*, *Double Exponential Smoothing*.

### 5.1.2 Експеримент: основни случај

У студији случаја код првог добављача дефинисан је минимум залиха у магацину (дани покривености потражње купаца са залихама)  $T^l = 3$  дана и њен максимум  $T^u =$

5. Машински капацитет је  $C = 19000$  комада производа недељно максималне производње (са 100% доступности машина). Фази фактор одступања у купчевој потражњи  $\tilde{w}_i^d$  коришћен је из табеле 5-1. Фази фактор одступања произведене количине робе једнак је за цео период планирања  $\tilde{w}_i^p = (0,9, 1, 1,1)$ ,  $i = 1, \dots, 12$ .

Циљна функција израчуната је за сваки степен изводљивости  $\beta$ ,  $\beta = 0,5, 0,6, \dots, 0,9, 0,95, 0,99, 1$ . Табела 5-4. показује добијене резултате укључујући степен изводљивости  $\beta$ , збир променљивих у ЛП ( $P_i, Ss_i$  и  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, 12$ ) у периоду планирања од 12 недеља, вредности фази циљне функције са трапезоидном функцијом припадности ( $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$ ), толеранција  $\mu_{\tilde{c}}(z)$ , степен задовољења решења  $K_{\tilde{c}}(Z(\beta))$  и оптимална вредност циљне функције,  $z$ .

Максимална вредност степена задовољења решења је  $K_{\tilde{c}}(Z(\beta)) = 0,4225$ . Баланс између степена задовољења циљне функције и степена изводљивости ограничења достигнут је за  $\beta = 0,8$ . Оптималне кумулативне вредности променљивих су  $\sum_{i=1}^{12} P_i = 205098$ ,  $\sum_{i=1}^{12} Ss_i = 131323$  и  $\sum_{i=1}^{12} Q_i = 205977$  комада производа.

Табела 5-4. Резултати основног случаја

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\tilde{c}}(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\tilde{c}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $z$
	$\sum P_i$	$\sum Ss_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
0,5	188776	123372	194883	54839	58009	62338	68889	0,733	0,3665	61382
0,6	194107	126022	198581	56235	59489	63927	70646	0,666	0,3995	62948
0,7	199546	128672	202279	57654	60992	65541	72429	0,598	0,4183	64538
<b>0,8</b>	<b>205098</b>	<b>131323</b>	<b>205977</b>	<b>59094</b>	<b>62519</b>	<b>67180</b>	<b>74241</b>	<b>0,528</b>	<b>0,4225</b>	<b>66153</b>
0,9	210766	134141	209674	60562	64074	68851	76089	0,458	0,4118	67799
0,95	213644	135620	211523	61305	64863	69698	77027	0,422	0,4006	68634
0,99	215968	137007	213003	61909	65503	70386	77791	0,393	0,3886	69313
1	216552	137365	213372	62061	65664	70559	77983	0,385	0,3852	69484

Вредност оптималне циљне функције за  $\beta = 0,8$  је 66153 минута за 12 недеља. На недељном нивоу то је 5513 минута, а на дневном нивоу 1103 минута (разматрајући пет радних дана недељно, тј. 18,4 h/дан). Преглед просечног захтеваног времена на дневном нивоу за производне и логистичке операције код отпреме робе купцима представљен је у табели 5-5.

Табела 5-5. Оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
12,8	1	4,6	18,4

Веома је важно у пракси да се анализирају резултати оптималног решења фази АПП модела за сваку недељу у планираном периоду. Задовољство купаца је 100%, што значи да је подмирена купчева потражња у потпуности и испуњен план испорука. Најдуже време за све три активности захтевано је у недељи 4, где је највећа испоручена количина робе купцу,  $Q_4$ . Међутим, то није случај за сигурносне залихе у истој недељи,  $Ss_4$  и произведену количину робе,  $P_4$ . Највећа количина произведене робе је у недељи 3. и највеће сигурносне залихе су у недељи 1. Вредности циљне функције представљене су у табели 5-6. као просечно дневно време потребно за разматране операције

изражено у сатима. Најдуже време потребно је у недељи 4. са 22 радна сата (потребно је да се организује 3 смене), док је у недељи 1 и 5 најкраће време са 14 сати (потребно је да се организује 2 смене). Радне суботе нису потребне.

Табела 5-6. Оптимално решење променљивих  $P_i, Ss_i$  и  $Q_i, i = 1, \dots, 12$  за  $\beta = 0,8$

Недеља, $i$	$P_i$	$Ss_i$	$Q_i$	Вредност циљне функције у минутама недељно, $z$	Вредност циљне функције у сатима дневно, $z$
1	10070	17031	17031	4095	14
2	16585	9768	16279	5296	18
3	19588	9576	14419	5815	19
4	19089	14156	23594	6565	22
5	12564	9079	15132	4282	14
6	17272	6135	10224	4865	16
7	19443	12664	21107	6404	21
8	18106	10417	17361	5742	19
9	18245	10618	17697	5805	19
10	18264	10618	17697	5810	19
11	18262	10637	17729	5812	19
12	17610	10622	17704	5663	19
$\Sigma$	205098	131323	205977	66153	221

Експеримент за основни случај изведен је у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у С++ програмском језику (прилог Б).

### 5.1.3 Анализа сензитивности фази АПП модела

#### 5.1.3.1 Утицај промене различите неизвесности у произведеној количини робе

Руководство у предузећу добављача предложило је 10% потенцијалне девијације у произведеној количини производа на основу реализације производних планова. Ова неизвесност у произведеној количини робе неопходна је да би се анализирао утицај свих проблема који се јављају у процесу производње: технички застоји, кварови машина, ниво шкарта, абсентизам радника итд. Изведена су два експеримента:

1. Неизвесност у произведеној количини  $w_i^p, i = 1, \dots, 12$ , мања је 50% него у експерименту у основном случају и има троугласту функцију припадности (0,95, 1, 1,05),
2. Неизвесност у произведеној количини  $w_i^p, i = 1, \dots, 12$ , већа је 50% него у експерименту у основном случају и има троугласту функцију припадности (0,85, 1, 1,15).

Фази фактор одступања у купчевој потражњи  $\tilde{w}_i^d$  је коришћен из табеле 5-1. за оба експеримента. Резултати добијени за сваки степен изводљивости,  $\beta$  представљени су у табели 5-7.

Табела 5-7. Резултати добијени за случај 50% мање неизвесности у произведеној количини

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\bar{c}}(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\bar{c}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $z$
	$\sum P_i$	$\sum Ss_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
0,5	188776	123372	194883	54839	58009	62338	68889	0,716	0,3580	61382
0,6	193131	126022	198581	56040	59281	63706	70402	0,654	0,3927	62729
0,7	197531	128672	202279	57251	60563	65083	71926	0,592	0,4147	64086
<b>0,8</b>	<b>201975</b>	<b>131323</b>	<b>205977</b>	<b>58470</b>	<b>61854</b>	<b>66470</b>	<b>73461</b>	<b>0,530</b>	<b>0,4240</b>	<b>65452</b>
0,9	206464	134141	209674	59701	63159	67873	75014	0,467	0,4202	66834
0,95	208726	135620	211523	60322	63816	68580	75797	0,435	0,4133	67531
0,99	210544	137007	213003	60824	64349	69153	76435	0,409	0,4052	68096
1	211000	137365	213372	60950	64483	69297	76595	0,403	0,4028	68237

Степен изводљивости  $\beta = 0,8$  има највећи степен задовољења решења  $K_{\bar{c}}(Z(\beta)) = 0,4240$ . Оптималне кумулативне вредности променљивих су  $\sum_{i=1}^{12} P_i = 201975$ ,  $\sum_{i=1}^{12} Ss_i = 131323$  и  $\sum_{i=1}^{12} Q_i = 205977$  комада производа. Оптимална вредност циљне функције,  $z$  је 65452 минута. Просечно захтевано време за производне и логистичке операције код испоруке робе купцима у фабрици су 5454 минута на недељном нивоу, а то је на дневном нивоу 1090 минута (18,2 h/дан). Табела 5-6 приказује захтевано оптимално просечно време на дневном нивоу.

Експеримент за овај случај неизвесности је изведен у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у C++ програмском језику (прилог В).

Табела 5-8. Захтевано оптимално просечно време на дневном нивоу за 50% мање неизвесности у произведеној количини

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
12,6	1	4,6	18,2

У експерименту 2. када је неизвесност 50% већа, оптимално решење добијено је за степен изводљивости  $\beta = 0,7$  при чему је достигнут највећи степен задовољења решења  $K_{\bar{c}}(Z(\beta)) = 0,4220$ . Оптималне кумулативне вредности променљивих су  $\sum_{i=1}^{12} P_i = 201604$ ,  $\sum_{i=1}^{12} Ss_i = 128672$  и  $\sum_{i=1}^{12} Q_i = 202279$  комада производа, као што је представљено у табели 5-9. У овом експерименту, где је неизвесност у произведеној количини већа, збир произведене количине робе за планирани период од 12 недеља већи је поредећи са експериментом 1. где је неизвесност мања, и то за сваки степен изводљивости  $\beta$ , осим за  $\beta = 0,5$  где је једнака.

Табела 5-9. Резултати добијени где је 50% већа неизвесност у произведеној количини робе

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\bar{c}}(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\bar{c}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $z$
	$\sum P_i$	$\sum Ss_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
0,5	188776	123372	194883	54839	58009	62338	68889	0,749	0,3744	61382
0,6	195092	126022	198581	56432	59698	64151	70892	0,677	0,4060	63169
0,7	<b>201604</b>	<b>128672</b>	<b>202279</b>	<b>58065</b>	<b>61429</b>	<b>66009</b>	<b>72944</b>	<b>0,603</b>	<b>0,4220</b>	<b>65000</b>
0,8	208320	131323	205977	59739	63204	67912	75047	0,527	0,4217	66876

0,9	215250	134141	209674	61458	65028	69870	77210	0,449	0,4043	68806
0,95	218799	135620	211523	62336	65959	70869	78315	0,409	0,3890	69791
0,99	221679	137007	213003	63051	66718	71684	79218	0,377	0,3733	70595
1	222405	137365	213372	63231	66909	71889	79446	0,369	0,3689	70797

Добијена оптимална вредност циљне функције је 65000 минута. На недељном нивоу укупно захтевано време за производне и логистичке операције код испоруке робе купцима је 5417 минута, што је на дневном нивоу 1083 минута (18,1 h/дан). Табела 5-10. представља просечно захтевано време на дневном нивоу као оптимално решење.

Експеримент за овај случај неизвесности изведен је у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у C++ програмском језику (прилог Г).

Табела 5-10. Оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу када је 50% већа неизвесност у произведеној количини

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
12,6	1	4,5	18,1

Значајно је да се примети да је оптимално решење у првом експерименту, где је неизвесност мања у произведеној количини робе, добијено за степен изводљивости  $\beta = 0,8$ , док у другом експерименту са већом неизвесношћу добијено је за  $\beta = 0,7$ .

Даље упоређивање резултата са различитим степеном изводљивости по недељама не би имало смисла. Ако се узму резултати за оба експеримента за исти степен изводљивости  $\beta = 0,8$ , који су добијени у фази АПП моделу, њихово поређење дато је у табели 5-11.

Табела 5- 11. Поређење вредности циљне функције за исти степен изводљивости,  $\beta = 0,8$

Степен изводљивости, $\beta$	Неизвесност у произведеној количини	Вредност циљне функције за 12 недеља	Вредност циљне функције на дневном нивоу
0,8	50% мање	65452	1090
0,8	50% веће	66876	1115

Резултати показују да постоји разлика у захтеваном времену за операције за исти степен изводљивости. Разлика је 25 минута на дневном нивоу. То значи да уколико је неизвесност у произведеној количини робе 50% већа него у основном случају, захтевано укупно време је дуже 25 минута сваки дан. То је 9,2 сати дуже месечно, што проузрокује 1,5 смену више на месечном нивоу. За услове добављача, са аспекта трошкова, то је значајно време јер узрокује додатно плаћање радника и потрошњу енергената за производњу.

### 5.1.3.2 Утицај промене различите неизвесности у одступању у купчевој потражњи

У аутомобилској индустрији купац мења потражњу због честих промена у свом плану производње или залиха. Та промена настаје због промена на тржишту продаје

аутомобила. Да би се боље разумео утицај одступања у купчевој потражњи на планирање производње у предузећу првог добављача, спроведена су два експеримента:

1. неизвесност у одступању купчеве потражње  $w_i^d$ ,  $i = 1, \dots, 12$  мања је 50% него у основном случају и има троугласту функцију припадности  $(1 - 0,05f_i, 1, 1 + 0,05f_i)$ ,
2. неизвесност у одступању купчеве потражње  $w_i^d$ ,  $i = 1, \dots, 12$  већа је 50% него у основном случају и има троугласту функцију припадности  $(1 - 0,15f_i, 1, 1 + 0,15f_i)$ .

Фази фактор одступања произведене количине робе једнак је за цео период планирања  $\tilde{w}_i^p = (0,9, 1, 1, 1) = 1, \dots, 12$ .

Резултати добијени за сваки степен изводљивости  $\beta$  у првом експерименту представљени су у табели 5-12. Оптимална вредност добијена је за степен изводљивости  $\beta = 0,9$  са највећим степеном задовољења решења  $K_{\bar{c}}(Z(\beta)) = 0,4351$ . Оптималне кумулативне вредности променљивих су  $\sum_{i=1}^{12} P_i = 203704$ ,  $\sum_{i=1}^{12} S_{S_i} = 128672$  и  $\sum_{i=1}^{12} Q_i = 202279$  комада производа. Оптимална вредност циљне функције је 65471 минут. То значи да је укупно захтевано време за све производне и логистичке операције за испоруку робе 5456 минута на недељном нивоу, тј. 1091 минут на дневном нивоу (18,2 h/дан). Ово је време краће него у основном случају. У табели 5-13. представљени су резултати укупног захтеваног времена на дневном нивоу.

Експеримент за овај случај неизвесности изведен је у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у C++ програмском језику (прилог Д).

Табела 5-12. Резултати добијени када је неизвесност одступања 50% мања у купчевој потражњи

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\bar{c}}(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\bar{c}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $z$
	$\sum P_i$	$\sum S_{S_i}$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
0,5	188776	123372	194883	54839	58009	62338	68889	0,688	0,3441	61382
0,6	192395	124697	196732	55728	58951	63350	70006	0,638	0,3830	62379
0,7	196088	126022	198581	56632	59910	64378	71141	0,588	0,4113	63392
0,8	199856	127347	200430	57550	60885	65423	72295	0,536	0,4288	64423
<b>0,9</b>	<b>203704</b>	<b>128672</b>	<b>202279</b>	<b>58485</b>	<b>61876</b>	<b>66486</b>	<b>73469</b>	<b>0,483</b>	<b>0,4351</b>	<b>65471</b>
0,95	205658	129335	203203	58958	62378	67024	74063	0,457	0,4340	66002
0,99	207235	129865	203943	59340	62783	67458	74543	0,435	0,4311	66430
1	207632	129998	204128	59436	62885	67567	74663	0,430	0,4300	66537

Табела 5-13. Оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу када је 50% мања неизвесност у одступању купчеве потражње

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
12,7	1	4,5	18,2

У другом експерименту када је неизвесност 50% већа, оптимално решење добијено је за нижи степен изводљивости  $\beta = 0,7$ . Достигнути баланс између циљне функције и ограничења је  $K_{\bar{c}}(Z(\beta)) = 0,4259$ . Оптималне кумулативне вредности променљивих су  $\sum_{i=1}^{12} P_i = 208692$ ,  $\sum_{i=1}^{12} S_{S_i} = 136555$  и  $\sum_{i=1}^{12} Q_i = 212099$  комада производа.

Може да се закључи да је произведена количина робе  $\sum_{i=1}^{12} P_i$ , количина робе у сигурносним залихама  $\sum_{i=1}^{12} Ss_i$  и количина робе достављена купцу  $\sum_{i=1}^{12} Q_i$  већа када је одступање у купчевој потражњи неизвесније. Такође, оптимална добијена вредност циљне функције већа је и износи 67595 минута за период планирања од 12 недеља. На недељном нивоу то је 5633 минута, а на дневном 1127 минута (18,8 h/дан). Табела 5-14. представља резултате спроведеног експеримента, док табела 5-15. представља оптимално захтевано време на дневном нивоу.

Експеримент за овај случај неизвесности изведен је у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у C++ програмском језику (прилог Ђ).

Табела 5-14. Добијени резултати у експерименту када је неизвесност 50% већа у одступању купчеве потражње

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_G(Z)$	Степен задовољења решења, $K_G(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $Z$
	$\sum P_i$	$\sum Ss_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
0,5	194543	127965	201169	56556	60027	64293	70854	0,765	0,3826	63307
0,6	201546	131912	206634	58445	62034	66443	73227	0,688	0,4126	65425
<b>0,7</b>	<b>208692</b>	<b>136555</b>	<b>212099</b>	<b>60377</b>	<b>64087</b>	<b>68646</b>	<b>75664</b>	<b>0,608</b>	<b>0,4259</b>	<b>67595</b>
0,8	215986	141933	217564	62353	66189	70902	78167	0,527	0,4216	69818
0,9	223431	150321	223029	64420	68392	73277	80828	0,441	0,3972	72159
0,95	227212	156518	225761	65505	69552	74534	82253	0,396	0,3762	73399
0,99	230266	161935	227947	66388	70497	75559	83419	0,359	0,3555	74409
1	231033	163452	228494	66613	70738	75821	83718	0,350	0,3496	74667

Табела 5-15. Оптимално захтевано време на дневном нивоу када је неизвесност 50% већа у одступању купчеве потражње

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
13	1,1	4,7	18,8

У ова два експеримента са различитом неизвесношћу у одступању купчеве потражње оптимална решења добијена су за различит степен изводљивости  $\beta = 0,9$  и  $\beta = 0,7$ , респективно. Поређење резултата добијених у експериментима за различите степене изводљивости не би дало веродостојан закључак. Зато резултати оба експеримента за исти степен изводљивости  $\beta = 0,9$  упоређени су и представљени у табели 5-16.

Табела 5-16. Поређење резултата циљне функције за исти степен изводљивости,  $\beta = 0,9$

Степен изводљивости, $\beta$	Неизвесност у произведеној количини	Вредност циљне функције за 12 недеља	Вредност циљне функције на дневном нивоу
0,9	50% мање	65471	1091
0,9	50% веће	72159	1203



Из представљених резултата експеримената може да се закључи да постоји значајна разлика у захтеваном времену на дневном нивоу. Разлика у времену је 112 минута. Уколико је неизвесност 50% већа у одступању купчеве потражње него у основном случају, захтевано укупно време за производне и логистичке операције је 112 минута (1,87 h/дан) дуже сваки дан. На месечном нивоу (21 радни дан) то је дуже укупно време за 39,27 сати или 4,9 смена. Ово је значајно дуже време што узрокује веће финансијске трошкове због плата радника и потрошње енергената.

### 5.1.3.3 Различита стратегија у висини сигурносних залиха

У овом делу студије случаја у предузећу првог добављача анализиран је утицај различитих стратегија висине сигурносних залиха на планирање производње. Дани у залихама (енгл. Days of Inventory (DOI) или Days on Hand (DOH)) типичан су метрички параметар који дефинише коју количину робе треба имати на залихама у магацину и рачунају се као број дана покривености испорука робе купцима. Наравно, DOI има изузетан значај за финансијско пословање предузећа.

Зато су изведена два експеримента разматрајући различите нивое сигурносних залиха:

1. сигурносне залихе између 2 и 4 дана,  $T^l = 2$  и  $T^u = 4$  дана,
2. сигурносне залихе између 1 и 3 дана,  $T^l = 1$  и  $T^u = 3$  дана.

Фази фактор одступања произведене количине робе једнак је за цео период планирања  $\tilde{w}_i^p = (0,9, 1, 1, 1)$ ,  $i = 1, \dots, 12$  за оба експеримента. Фази фактор  $\tilde{w}_i^d$  за период планирања  $i = 1, \dots, 12$  је коришћен из табеле 5-1. Треба да се нагласи да у експерименту основни случај ниво сигурносних залиха укључен у калкулацију је између 3 и 5 дана, односно  $T^l = 3$  и  $T^l = 5$  дана.

У првом експерименту оптимално решење добијено је за степен изводљивости  $\beta = 0,8$ , при чему је достигнут степен задовољења решења циљне функције и ограничења  $K_{\bar{c}}(Z(\beta)) = 0,4214$ . Оптималне кумулативне вредности добијених променљивих су  $\sum_{i=1}^{12} P_i = 208610$ ,  $\sum_{i=1}^{12} S S_i = 93283$  и  $\sum_{i=1}^{12} Q_i = 205977$  количина производа. Оптимална вредност циљне функције је 65886 минута за период планирања од 12 недеља. На недељном нивоу захтевано просечно време за производне и логистичке операције код испорука робе купцима је 5491 минут, док је на дневном нивоу 1098 минута (18,3 h/дан). Табеле 5-17. и 5-18. приказују добијене резултате и просечно захтевано време на дневном нивоу за наведене операције, респективно.

Експеримент за овај случај неизвесности изведен је у програмском пакету, при чему је исписан код у C++ програмском језику (прилог Е).

Табела 5-17. Резултати добијени када је ниво сигурносних залиха између 2 и 4 дана

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\bar{c}}(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\bar{c}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $z$
	$\sum P_i$	$\sum S S_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z$			
0,5	191997	85748	194883	54731	57829	62017	68189	0,738	0,3688	61061
0,6	197423	87844	198581	56135	59316	63612	69947	0,669	0,4014	62633
0,7	202959	90240	202279	57568	60834	65241	71745	0,599	0,4192	64238
<b>0,8</b>	<b>208610</b>	<b>93283</b>	<b>205977</b>	<b>59036</b>	<b>62391</b>	<b>66913</b>	<b>73598</b>	<b>0,527</b>	<b>0,4214</b>	<b>65886</b>

0,9	214378	96796	209674	60537	63984	68626	75498	0,453	0,4077	67574
0,95	217307	98806	211523	61302	64795	69500	76470	0,415	0,3946	68435
0,99	219673	100532	213003	61920	65452	70207	77258	0,385	0,3810	69132
1	220268	100963	213372	62076	65617	70384	77455	0,377	0,3772	69307

Табела 5-18. Оптимално захтевано просечно време на дневном нивоу за ниво сигурносних залиха између 2 и 4 дана

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
13	0,7	4,6	18,3

У другом експерименту, у коме је циљ за ниво сигурносних залиха између 1 и 3 дана, оптимално решење добијено је за исти степен изводљивости  $\beta = 0,8$ , са незнатно вишим степеном задовољења решења,  $K_{\bar{c}}(Z(\beta)) = 0,4234$ . Оптимална кумулативна вредност променљивих  $\sum_{i=1}^{12} P_i = 212121$ ,  $\sum_{i=1}^{12} S_i = 65353$  и  $\sum_{i=1}^{12} Q_i = 205977$  комада производа. У табели 5-19. представљени су добијени резултати. Може да се закључи да уколико се држи нижи ниво сигурносних залиха у магацину, у првом експерименту 93283 комада производа и у другом 65353 комада производа, производња се повећава са 208610 комада производа на 212121 комад производа, респективно.

Експеримент за овај случај неизвесности изведен је у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у С++ програмском језику (прилог Ж).

Табела 5-19. Добијени резултати за ниво сигурносних залиха између 1 и 3 дана

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\bar{c}}(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\bar{c}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $z$
	$\sum P_i$	$\sum S_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
0,5	195219	54479	194883	54750	57795	61874	67744	0,746	0,3731	60916
0,6	200739	57622	198581	56194	59326	63520	69568	0,676	0,4054	62538
0,7	206372	60883	202279	57663	60885	65194	71424	0,604	0,4226	64189
<b>0,8</b>	<b>212121</b>	<b>65353</b>	<b>205977</b>	<b>59180</b>	<b>62496</b>	<b>66929</b>	<b>73358</b>	<b>0,529</b>	<b>0,4234</b>	<b>65899</b>
0,9	217990	72675	209674	60777	64197	68771	75437	0,450	0,4052	67715
0,95	220971	76619	211523	61591	65065	69711	76499	0,410	0,3893	68642
0,99	223378	79775	213003	62246	65763	70468	77354	0,377	0,3736	69388
1	223983	80564	213372	62411	65939	70658	77568	0,369	0,3692	69575

Добијена оптимална вредност циљне функције веома је слична вредности у претходном експерименту и износи 65899 минута за период планирања од 12 недеља. На недељном нивоу просечно захтевано време за производне и магацинске операције готово је исто, 5492 минута, што је на дневном нивоу 1098 минута (18,3 h/дан). Табела 5-20. представља оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу. Може да се закључи да држање нижих залиха узрокује већу производњу и захтева веће производно време, док је време за складиштење сигурносних залиха смањено због мање количине залиха у магацину. У оба експеримента укупно захтевано време исто је за извршење производних и магацинских операција.

Табела 5-20. Оптимално захтевано просечно време на дневном нивоу када су сигурносне залихе између 1 и 3 дана

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
13,2	0,5	4,6	18,3

Преглед оптималног захтеваног времена за сваку недељу у периоду планирања, за оба експеримента када је ниво сигурносних залиха између 1 и 3 дана и 2 и 4 дана, представљен је у табели 5-21. Највећа разлика је у недељи 6, у којој је просечно захтевано време за све операције 1,3 сата дуже уколико су сигурносне залихе веће. Затим, поредећи укупно захтевано просечно време за цео период планирања од 12 недеља, може да се закључи да нема разлике између две стратегије држања залиха у предузећу добављача.

Табела 5-21. Оптимално просечно захтевано време за сваку недељу у периоду планирања за степен изводљивости,  $\beta = 0,8$

Недеља, $l$	Вредност циљне функције (сати) за сигурносне залихе између 1 и 3 дана	Вредност циљне функције (сати) за сигурносне залихе између 2 и 4 дана	Разлика између вредности циљне функције (сати)
1	13,3	13,5	-0,2
2	17,0	17,2	-0,2
3	18,8	19,1	-0,3
4	21,7	21,9	-0,2
5	15,2	14,8	0,4
6	13,5	14,8	-1,3
7	20,8	21,1	-0,3
8	19,4	18,8	0,6
9	19,8	19,0	0,8
10	19,9	19,3	0,6
11	20,1	20,1	0
12	20,2	20,2	0
$\Sigma$	18,3	18,3	0

#### 5.1.4 Поређење резултата фази АПП модела и модела ФЛРА са подацима у предузећу добављача

Подаци су прикупљени у првом предузећу добављача из аутомобилске индустрије у Републици Србији. Да би се валидирани резултати добијени применом фази АПП модела и модела ФЛРА за прогнозу потражње купаца и планирања испорука, извршено је поређење са реализованим подацима из праксе у предузећу добављача. Поређење је извршено за:

- поређење резултата експеримената са подацима у предузећу добављача,
- поређење резултата плана производње,
- поређење резултата експеримената са стратегијама планирања производње у предузећу,
- поређење две методе прогнозе потражње купаца и планирања испорука са подацима у предузећу добављача.

#### 5.1.4.1 Поређење резултата експеримената са реалним стањем у предузећу добављача

Поређење резултата експеримената предложеног фази АПП модела са стварним подацима у предузећу првог добављача у којем је спроведена студија случаја извршено је у два случаја. У првом случају резултати експеримената коришћени су као што је представљено у поглављима 5.1.2 – 5.1.3. У другом случају извршено је поређење са комбиновањем добијених резултата експеримената и реалних података у предузећу да би се анализирао утицај плана производње добијен у фази АПП моделу ( $P_i, i = 1, \dots, 12$ ) на реалну испоручену количину и залихе у предузећу за планирани период.

Стварни подаци, произведена количина робе  $P_i$ , количина сигурносне залихе робе  $Ss_i$  и отпремљена количина робе купцима  $Q_i$ , за сваку недељу у периоду планирања  $i = 1, \dots, 12$ , забележени су у предузећу добављача (табела 5-22). У првом случају они су упоређени са резултатима фази АПП модела за сваки експеримент за оптималне вредности циљне функције.

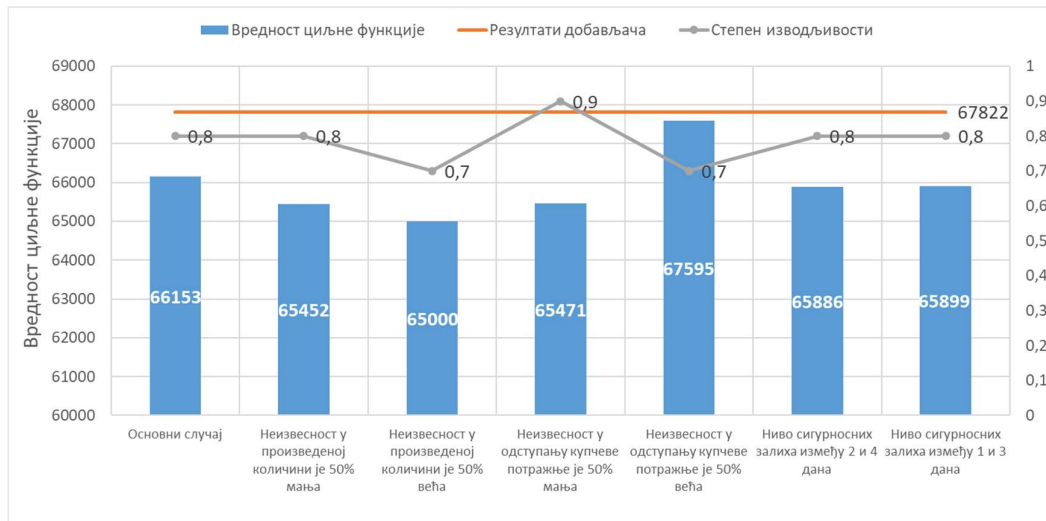
Табела 5-22. Забележени подаци у предузећу добављача

Недеља, $i$	Ниво сигурносних залиха, $Ss_i$	Произведена количина робе, $P_i$	Испоручена количина робе купцу, $Q_i$
1	10000	17450	16516
2	10934	17800	15744
3	12990	17750	16877
4	13863	18350	16122
5	16091	17740	22030
6	11801	17850	11398
7	18253	15950	15130
8	19073	16840	16888
9	19025	17530	21980
10	14575	17440	15492
11	16523	17530	16258
12	17795	18360	16374
$\Sigma$	180923	210590	200809

Укупно време потребно за производне и логистичке операције код отпреме робе купцима, као што је време производње, време складиштења сигурносних залиха и време припреме отпреме робе купцима забележени су у предузећу добављача и упоређени са резултатима свих изведених експеримената, као што је приказано на слици 5-10. Укупно време забележено у фабрици добављача је 67822 минута за период од 12 недеља и на слици 5-10. представљено је као континуална линија наранџасте боје. Оптимална вредност циљне функције за сваки од експеримената представљен је плавим стубићима.

Са представљеног графика може да се закључи да је укупно време добијено у сваком експерименту краће него што је забележено у пракси, једино у експерименту, када је неизвесност у одступању купчеве потражње већа него у основном случају, укупно време готово је идентично. Приметно је да је најкраће време добијено за оба

случаја неизвесности у произведеној количини робе (50% веће и 50% мање неизвесности него у основном случају), и то је краће у односу на време забележено у пракси за 2822 и 2370 минута за период планирања од 12 недеља, респективно. То је 47 минута и 39,5 минута краће на дневном нивоу (пет радних дана у недељи). Ово унапређење у захтеваном краћем времену за производне и логистичке операције потребне да се испоручи роба купцима, од пресудног је значаја за ефикасно пословање предузећа добављача. То значи да предузеће за краће време сваког дана произведе тражену количину робе, испуни план испорука и ниво услуге 100%. Финансијска уштеда је у платама радника и мањој потрошњи енергената.



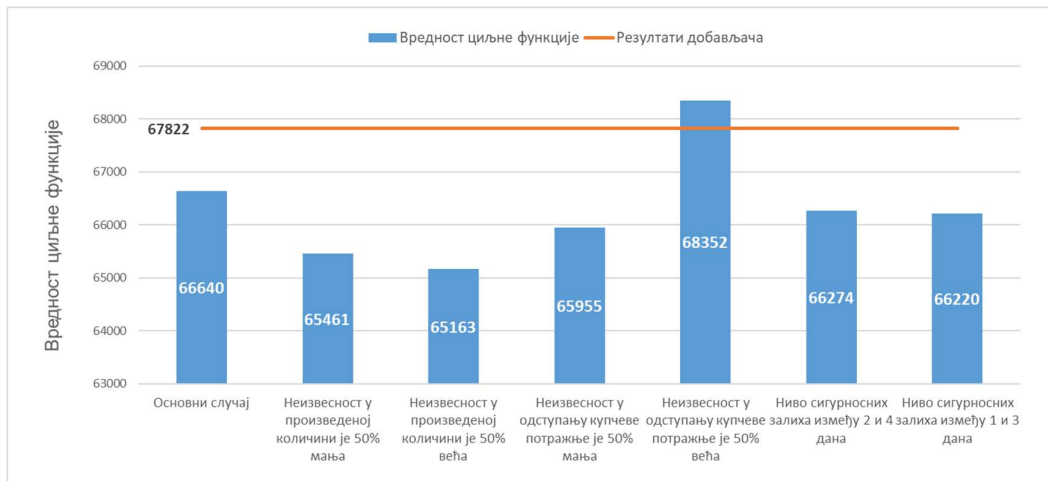
Слика 5-10. Поређење времена забележеног у предузећу и резултата експеримента

#### 5.1.4.2 Поређење резултата плана производње

Додатна анализа поређења података из предузећа и резултата добијених у фази АПП моделу извршена је за план производње. Практично, план производње генерисан у фази АПП моделу за сваки од експеримента укључен је у план испорука реализован у предузећу за исти разматран период.

Анализа је конципирана на следећи начин: произведена количина робе  $P_i$  за  $i = 1, \dots, 12$ , и почетне сигурносне залихе  $Ss_i$ ,  $i = 1$  узете су као резултат из фази АПП модела, док је отпремљена количина робе купцима  $Q_i$  узета као реална испоручена количина робе забележена у предузећу за исти период (добија ознаку  $Q_i^*$ ). Ниво сигурносних залиха  $Ss_i$  за остале недеље у периоду планирања  $i = 2, \dots, 12$  израчунат је коришћењем формуле:

$$Ss_{i+1} = Ss_i + P_i - Q_i^*, i = 1, \dots, 12. \quad (5-27)$$



Слика 5-11. Поређење времена реализованог у предузећу и резултата плана производње

Са слике 5-11. може да се закључи да је укупно време добијено за план производње из сваког експеримента краће него што је реализовано у предузећу, једино у експерименту, када је неизвесност у одступању купчеве потражње 50% већа него у основном случају, укупно време је веће. Као и у првом случају поређења резултата, најкраће време добијено је за оба случаја неизвесности у произведеној количини робе (50% веће и 50% мање неизвесности него у основном случају). Укупно време краће је 2659 и 2361 минут за период планирања од 12 недеља, респективно. То је 44,32 минута и 39,35 минута краће на дневном нивоу (пет радних дана у недељи).

Ово потврђује веродостојност плана производње генерисаног фази АПП моделом. Производни план валидан је и може да испуни план испорука реализованих у предузећу са уштедом у времену. Како је горе наведено, то је од пресудног значаја за ефикасно пословање предузећа добављача.

Циљна функција има различите вредности за сваки од експеримената у анализирана два случаја (слика 5-12). У другом случају, када је разматран план производње, вредност циљне функције већа је за сваки од експеримената. Ово може да се објасни у мањој реализованој испорученој количини у предузећу добављача  $Q_i^*$  (други случај) од испоручене количине  $Q_i$  у фази АПП моделу која је прогнозирана (први случај), што генерише далеко веће сигурносне залихе у другом случају према формули 5-27. Као подсетник, прогнозирана количина робе за испоруку  $Q_i$  у фази АПП моделу добијена је методом прогнозе купчеве потражње стандардном девијацијом.

Купац шаље сваке недеље нови план потражње за наредни период од 12 недеља, при чему се потраживана количина разликује за исту недељу из претходног плана потражње. Реална ситуација у предузећу показује да је купац смањивао суцесивно недељну потражњу количина и зато је  $Q_i > Q_i^*$ . Преглед испоручене количине реализован у предузећу  $Q_i^*$  и испоручене количине  $Q_i$  као резултат експеримената за оптималан ниво задвољења  $\beta$  дат је у табели 5-23.

Табела 5-23. Преглед испоручених количина у предузећу и добијен у експериментима

Не де ља	Подаци из предузећа, $Q_i^*$	Основни случај, $\beta = 0,8$	Неизвесност у произведеној количини је 50% мања, $\beta = 0,8$	Неизвесност у произведеној количини је 50% већа, $\beta = 0,7$	Неизвесност у одступању купчеве потражње је 50% мања, $\beta = 0,9$	Неизвесност у одступању купчеве потражње је 50% већа, $\beta = 0,7$	Ниво сигурносних залиха између 2 и 4 дана, $\beta = 0,8$	Ниво сигурносних залиха између 1 и 3 дана, $\beta = 0,8$
1	16516	17031	17031	16723	16723	17581	17031	17031
2	15744	16279	16279	15971	15971	16805	16279	16279
3	16877	14419	14419	14111	14111	14885	14419	14419
4	16122	23594	23594	23286	23286	24355	23594	23594
5	22030	15132	15132	14824	14824	15620	15132	15132
6	11398	10224	10224	9916	9916	10554	10224	10224
7	15130	21107	21107	20799	20799	21788	21107	21107
8	16888	17361	17361	17053	17053	17921	17361	17361
9	21980	17697	17697	17389	17389	18268	17697	17697
10	15492	17697	17697	17389	17389	18268	17697	17697
11	16258	17729	17729	17421	17421	18040	17729	17729
12	16374	17704	17704	17396	17396	18014	17704	17704
$\Sigma$	200809	205977	205977	202279	202279	212099	205977	205977



Слика 5-12. Поређење резултата циљне функције за два случаја

Произведена количина у предузећу за период  $i = 1, \dots, 12$  већа је него у свим експериментима, осим за експеримент када су сигурносне залихе између 1 и 3 дана (табела 5-24). То значи да у случају експеримента за ниво сигурносних залиха између 1 и 3 дана далеко је већа количина која се производи и директно испоручује у свакој недељи јер циљ сигурносних залиха које се смештају у магацин најнижи је.

Табела 5-24. План производње реализован у предузећу и у експериментима

Недеља	Подаци из предузећа	Основни случај, $\beta = 0,8$	Неизвесност у произведеној количини је 50% мања, $\beta = 0,8$	Неизвесност у произведеној количини је 50% већа, $\beta = 0,7$	Неизвесност у одступању купчеве потражње је 50% мања, $\beta = 0,9$	Неизвесност у одступању купчеве потражње је 50% већа, $\beta = 0,7$	Ниво сигурносних залиха између 2 и 4 дана, $\beta = 0,8$	Ниво сигурносних залиха између 1 и 3 дана, $\beta = 0,8$
1	17450	10070	9916	9879	9982	10288	10225	10380
2	17800	16585	16333	15950	16116	17687	16323	16560
3	17750	19588	19289	19588	19792	19388	19588	19588
4	18350	19089	18799	18772	18967	19388	19588	19588
5	17740	12564	12373	12247	12374	12837	13576	14588
6	17850	17272	17009	16955	17131	18125	15656	14185
7	15950	19443	19147	19125	19324	19388	19588	19588
8	16840	18106	17830	17788	17974	18499	18037	19295
9	17530	18245	17967	17927	18114	18641	18245	19588
10	17440	18264	17986	17946	18133	18502	18610	19588
11	17530	18262	17984	17944	18131	18392	19588	19588
12	18360	17610	17342	17483	17665	17557	19588	19588
$\Sigma$	210590	205098	201975	201604	203704	208692	208610	212121

Просечан ниво залиха (покривеност потражње купца) према подацима реализованим у предузећу је 4,6 дана. То је далеко више него у резултатима експеримената (табела 5-25) добијених за оптималан ниво изводљивости. За експерименте: основни случај, неизвесност у произведеној количини мања је 50%, неизвесност у произведеној количини је 50% већа, неизвесност у одступању купчеве потражње мања је 50%, и неизвесност у одступању купчеве потражње већа је 50%, ограничење за сигурносне залихе постављено је између 3 и 5 дана (табела 5-25). Фази АПП модел дао је резултат да је просечна покривеност залихама 3,2 дана за период планирања од 12 недеља. То је значајно мање од реализоване покривености у предузећу за исти период. За експерименте у којима се мења ограничење нивоа сигурносних залиха, између 2 и 4 дана и између 1 и 3 дана, просечна покривеност залихама је 2,3 и 1,6 дана, респективно (табела 5-25). Ова разлика између реализоване покривености у предузећу и наведена два експеримента изражена је због циљаног смањења висине сигурносних залиха.

Табела 5-25. Ниво залиха реализован у предузећу и у експериментима

Подаци из предузећа	Основни случај, $\beta = 0,8$	Неизвесност у произведеној количини је 50% мања, $\beta = 0,8$	Неизвесност у произведеној количини је 50% већа, $\beta = 0,7$	Неизвесност у одступању купчеве потражње је 50% мања, $\beta = 0,9$	Неизвесност у одступању купчеве потражње је 50% већа, $\beta = 0,7$	Ниво сигурносних залиха између 2 и 4 дана, $\beta = 0,8$	Ниво сигурносних залиха између 1 и 3 дана, $\beta = 0,8$
4,6	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	2,3	1,6

Преглед количина производа у сигурносним залихама за сваку недељу  $i = 1, \dots, 12$  дат је у табели 5-26.



Табела 5-26. План сигурносних залиха реализован у предузећу и у експериментима

Не де ља	Подаци из предузећа	Основни случај, $\beta = 0,8$	Неизвесност у произведеној количини је 50% мања, $\beta =$ 0,8	Неизвесност у произведеној количини је 50% већа, $\beta =$ 0,7	Неизвесност у одступању купчеве потражње је 50% мања, $\beta = 0,9$	Неизвесност у одступању купчеве потражње је 50% већа, $\beta = 0,7$	Ниво сигурносних залиха између 2 и 4 дана, $\beta =$ 0,8	Ниво сигурносних залиха између 1 и 3 дана, $\beta =$ 0,8
1	10000	17031	17031	16723	16723	17581	13625	10219
2	10934	9768	9768	9583	9583	10083	6512	3256
3	12990	9576	9576	9083	9083	10612	6066	3040
4	13863	14156	14156	13972	13972	14727	10647	7620
5	16091	9079	9079	8894	8894	9372	6053	3026
6	11801	6135	6135	5950	5950	6333	4090	2045
7	18253	12664	12664	12480	12480	13541	9052	5580
8	19073	10417	10417	10232	10232	10753	6944	3472
9	19025	10618	10618	10434	10434	10961	7079	4828
10	14575	10618	10618	10434	10434	10961	7079	6130
11	16523	10637	10637	10452	10452	10824	7433	7433
12	17795	10622	10622	10438	10438	10808	8704	8704
$\Sigma$	180923	131323	131323	128672	128672	136555	93283	65353

#### 5.1.4.3 Поређење резултата експеримената са стратегијама планирања производње у предузећу

Практично планирање производње подразумева искоришћење доступних производних капацитета, задовољење купчеве потражње (реализовање плана испорука) и одржавање минималног нивоа сигурносних залиха. Оперативно планирање производње у аутоиндустрији на недељном је нивоу и то је краткорочно планирање производње у предузећу. Наведена три циља код прављења планова често су супростављена, на пример: уколико је купчева потражња у једној недељи мања од производног капацитета и ради се максималан број дана у недељи (пет радних дана), тада су залихе у магацину веће од циљаних или уколико је купчева потражња далеко већа од производног капацитета, тада су залихе испод постављеног циља или их нема уколико је производња у заостатку.

Планирање производње у пракси често се састоји од две основне стратегије:

1. планирање производње са максималним искоришћењем капацитета,
2. планирање производње са циљаним нивоом сигурносних залиха.

Прва стратегија добра је са аспекта искоришћења доступног броја запослених, доступног машинског капацитета, оптималног искоришћења енергената, уколико је старт производње захтеван због потрошње енергената, висине шкарта уколико је старт производње захтеван због великог шкарта на почетку итд. Ова стратегија често је негативна са аспекта генерисања непотребних залиха робе, посебно у периодима када је купчева потражња смањена. Тиме се везују значајна финансијска средства за залихе, уместо да се искористе у неке друге сврхе у предузећу, нпр. за технолошки развој нових производа.

Друга стратегија ограничава рад са максималним капацитетом, посебно када је купчева потражња смањена. То често подразумева рад краћи од пет радних дана недељно. Негативан утицај ове стратегије је на потрошњу енергената, уколико је старт

производње захтеван због потрошње енергената и висине шкарта, уколико је старт производње захтеван због великог шкарта на почетку.

Тестирање је извршено у предузећу добављача за обе стратегије и поређење је извршено са реализованим планом производње и испорука у предузећу и резултатом плана производње експеримента за основни случај из фази АПП модела (Djordjevic et al., 2019). Претпостављено је да је вредност сигурносних залиха у првој недељи,  $Ss_1 = 10000$  комада производа за обе стратегије једнако залихама код реализованог плана производње. За резултат експеримента чији је план производње  $P_i$  укључен са реализованим подацима узет је из фази АПП модела,  $Ss_1 = 17031$  комад производа.

Табела 5-27. Поређење са две стратегије планирања производње

Недеља, $i$	П.п. са искоришћењем макс.капацитета ( $C=19000$ ком/нед)			П.п. са циљаним нивоом сигурносних залиха (3 дана покривености)			Резултати експеримента за основни случај			Реализован план производње у предузећу		
	$Ss_i$	$P_i$	$Q_i$	$Ss_i$	$P_i$	$Q_i$	$Ss_i$	$P_i$	$Q_i$	$Ss_i$	$P_i$	$Q_i$
1	10000	19000	16516	10000	15962	16516	17031	10070	16516	10000	17450	16516
2	12484	19000	15744	9446	16424	15744	10585	16585	15744	10934	17800	15744
3	15740	19000	16877	10126	16424	16877	11426	19588	16877	12990	17750	16877
4	17863	19000	16122	9673	19667	16122	14137	19089	16122	13863	18350	16122
5	20741	19000	22030	13218	15651	22030	17104	12564	22030	16091	17740	22030
6	17711	19000	11398	6839	13637	11398	7638	17272	11398	11801	17850	11398
7	25313	19000	15130	9078	16185	15130	13513	19443	15130	18253	15950	15130
8	29183	19000	16888	10133	19943	16888	17826	18106	16888	19073	16840	16888
9	31295	19000	21980	13188	18087	21980	19044	18245	21980	19025	17530	21980
10	28315	19000	15492	9295	15952	15492	15309	18264	15492	14575	17440	15492
11	31823	19000	16258	9755	16328	16258	18081	18262	16258	16523	17530	16258
12	34565	19000	16374	9824	11550	16374	20085	17610	16374	17795	18360	16374
$\Sigma$	275033	228000	200809	120576	195809	200809	181778	205098	200809	180923	210590	200809

Ознака п.п. у табели 5-27. је „планирање производње“.

У табели 5-27. представљени су резултати за стратегију планирања производње са максималним искоришћењем капацитета, где је коришћен машински капацитет  $C = 19000$  ком/недељно (пет радних дана недељно). За стратегију циљаног нивоа залиха коришћена је покривеност 3 дана купчеве потражње. За сваку стратегију и практичне податке испоручена количина робе је иста,  $\Sigma Q_i = 200809$  комада производа за период од 12 недеља. Количина робе у сигурносним залихама и произведена количина робе разликују се. Сигурносне залихе и произведена количина робе највеће су код стратегије са максималним искоришћењем капацитета, 275033 и 228000 комада производа, респективно. Сигурносне залихе најмање су код стратегије са 3 дана залиха, 120576 комада производа.

Вредност циљне функције (табела 5-28), односно укупно време потребно за производне и логистичке операције код отпреме робе купцима, највеће је и најнеповољније код стратегије са максималним искоришћењем капацитета 74476 минута за 12 недеља (6206 минута недељно, 1241 минут дневно, 20,7 сати дневно). Најмање је код стратегије са циљаним нивоом сигурносних залиха, 62760 минута за 12 недеља (5230 минута недељно, 1046 минута дневно, 17,4 сати дневно). Резултати фази АПП модела са прогнозом купчеве потражње методом стандардне девијације показују изузетно добре резултате са вредношћу циљне функције која је нижа у односу на реализован план у предузећу и у односу на стратегију плана производње са максималним искоришћењем капацитета. У односу на реализован план производње у предузећу просечно дневно време краће је за 20 минута (недељно 100 минута); у односу

на стратегију планирања производње са максималним искоришћењем капацитета просечно дневно време краће је 130 минута (недељно 653 минута). Међутим, у односу на стратегију плана производње са циљаним нивоом сигурносних залиха резултат циљне функције већи је за просечно дневно време од 65 минута.

Табела 5-28. Вредност циљне функције и покривеност залиха

П.п. са искоришћењем макс.капацитета (C=19000 ком/нед)		П.п. са циљаним нивоом сигурносних залиха (3 дана покривености)		Резултати експеримента за основни случај, $\beta = 0,8$		Реализован план производње у предузећу	
Циљна функција	Покривеност залиха	Циљна функција	Покривеност залиха	Циљна функција	Покривеност залиха	Циљна функција	Покривеност залиха
74476	6,9	62760	3	66640	4,5	67822	4,6

Ознака п.п. у табели 5-28. је „планирање производње“.

#### 5.1.4.4 Поређење две методе прогнозе потражње купаца и планирања испорука са реалним стањем у предузећу добављача

Анализа грешке предвиђања (поглавље 5.1.1.4) показала је високу прецизност предложене методе ФЛРА са дефазификацијом што је чини валидном за прогнозу купчеве потражње и извршење плана испорука робе купцима. Предложена метода прецизнија је од методе класичне линеарне регресионе анализе и ФЛРА која користи средину троугластог фази броја за прогнозу потражње. Такође, метода је показала боље резултате и од предложене методе прогнозе потражње стандардном девијацијом која се користи у изведеним експериментима (поглавља 5.1.2-5.1.5) и код поређења са резултатима из предузећа (поглавља 5.1.6.1 – 5.1.6.3).

Фази АПП модел када користи прогнозиране количине  $D_i$  добијене методом ФЛРА са дефазификацијом у периоду планирања (формула 5-24) разликује се од фази АПП модела који користи прогнозу потражње стандардном девијацијом. Осврћући се на ограничења фази АПП модела разлика је у ограничењима (4-2, 4-3, 4-6, 4-7 и 4-8) у поглављу 4.3.4. Та ограничења постају:

$$Ss_i + \tilde{w}_i^p P_i \geq D_i, i = 1, \dots, n \quad (5-28)$$

$$Ss_{i+1} = Ss_i + \tilde{w}_i^p P_i - D_i, i = 1, \dots, n \quad (5-29)$$

$$Ss_i \geq T^l D_i, i = 1, \dots, n \quad (5-30)$$

$$T^u D_i \geq Ss_i, i = 1, \dots, n \quad (5-31)$$

$$Q_i = D_i, i = 1, \dots, n \quad (5-32)$$

Приметно је да је искључено множење фази фактора промене купчеве потражње са потражњом купца,  $\tilde{w}_i^d D_i$ . Прогноза потражње методом ФЛРА са дефазификацијом  $D_i$  већ је укључила неизвесност у промени купчеве потражње у тест периоду пре планирања. У овом делу студије случаја анализира се утицај прогнозе потражње добијен овом методом на резултате фази АПП модела.

Фази ограничења изнад наведена постају крисп ограничења.

Ограничење из формуле (4-27) постаје:

$$Ss_i + \left[ (1 - \beta)E_2^{w_i^p} + \beta E_1^{w_i^p} \right] P_i \geq D_i, i = 1, \dots, n \quad (5-33)$$

где је:

$$E_1^{w_i^p} = \frac{1}{2}(w_{i1}^p + w_{i2}^p), E_2^{w_i^p} = \frac{1}{2}(w_{i3}^p + w_{i4}^p), \quad (5-34)$$

Ограничење из формуле (4-29) постаје:

$$\left[ (1 - \beta)E_2^{w_i^p} + \beta E_1^{w_i^p} \right] P_i = Ss_{i+1} - Ss_i + D_i, i = 1, \dots, n \quad (5-35)$$

где је:

$$E_1^{w_i^p} = \frac{1}{2}(w_{i1}^p + w_{i2}^p), E_2^{w_i^p} = \frac{1}{2}(w_{i3}^p + w_{i4}^p). \quad (5-36)$$

Студија случаја урађена је и за поређење плана производње и залиха у експерименту основни случај заснованом на прогнози потражње методом стандардне девијације (поглавље 5.1.2) са планом производње и залиха у експерименту основни случај заснованом на прогнози потражње методом ФЛРА са дефазификацијом. Додатно, план производње и залиха за две методе упоређен је са реализованим планом производње и залиха у предузећу (табела 5-29). Анализа је конципирана као у поглављу 5.1.6.3 употребом формуле (5-27).

Табела 5-29. Поређење плана производње и залиха реализованих у предузећу и код две методе прогнозе потражње купаца

Недеља	П.п. реализован у предузећу	Ниво залиха реализован у предузећу	П.п. за основни случај - метод ФЛРА са дефазиф., $\beta = 1$	Ниво залиха за основни случај - метод ФЛРА са дефазиф., $\beta = 1$	П.п. за основни случај - метод станд.девијације $\beta = 0,8$	Ниво залиха за основни случај - метод станд.девијације, $\beta = 0,8$
1	17450	3,0	10043	4,8	10070	5,2
2	17800	3,5	16738	3,0	16585	3,4
3	17750	3,8	16738	2,8	19588	3,4
4	18350	4,3	16738	3,0	19089	4,4
5	17740	3,7	16738	2,2	12564	3,9
6	17850	5,2	16738	4,2	17272	3,4
7	15950	6,0	16738	3,2	19443	4,5
8	16840	5,6	16738	2,8	18106	5,3
9	17530	4,3	16738	2,2	18245	4,3
10	17440	4,7	16738	3,1	18264	4,9
11	17530	5,1	16738	2,9	18262	5,6
12	18360	5,4	17221	2,9	17610	6,1
$\Sigma$	210590	4,6	194643	3,1	205098	4,5

Ознака п.п. у табели 5-29. је „планирање производње“.

Из табеле може да се закључи да је укупна количина производње за период од 12 недеља за исту количину испоручених производа  $Q_i^* = 200809$  (табела 5-22) најмања код плана производње за основни случај са методом ФЛРА са дефазификацијом,  $\sum_{i=1}^{12} P_i = 194643$  комада производа. Такође, и план залиха показује најниже залихе где је просечна покривеност 3,1 дан за период од 12 недеља. План испорука испуњен је и ниво услуге 100 % за све купце.

Анализа је показала да је фази АПП модел најефикаснији са методом прогнозе потражње ФЛРА са дефазификацијом. Фази АПП модел са наведеном методом прогнозе потражње има најнижу вредност циљне функције, што значи да је потребно најмање времена за производне и логистичке операције приликом отпреме готове робе купцима (табела 5-30). План залиха је, такође најефикаснији при чему су просечне залихе ниже од реализованог плана у предузећу и ниже од плана генерисаног фази АПП моделом са методом прогнозе стандардном девијацијом.

Табела 5-30. Вредност циљне функције и покривеност залиха

П.п. реализован у предузећу		П.п. за основни случај- метод ФЛРА са дефазиф., $\beta = 1$		П.п. за основни случај-метод станд.девијације $\beta = 0,8$	
Циљна функција	Покривеност залиха	Циљна функција	Покривеност залиха	Циљна функција	Покривеност залиха
67822	4,6	62573	3,1	66640	4,5

Ознака п.п. у табели 5-30. је „планирање производње“.

План производње генерисан фази АПП моделом са методом прогнозе потражње стандардном девијацијом има мању циљну функцију од плана реализованог у предузећу и нижу покривеност залихама, односно ефикаснији план залиха. Може да се закључи да је метод прогнозе потражње стандардном девијацијом ефикасан и практично употребљив.

Комбинација предложене две методе за прогнозу купчеве потражње и фази АПП модела показала је врло поуздане резултате и боље у односу на практичне податке из предузећа добављача. Наведене две методе за прогнозу потражње валидне су за планирање испорука у предузећу добављача.

### 5.1.5 Предности и недостаци предложеног фази АПП модела и методе планирања испорука ФЛРА са дефазификацијом

Предности и недостаци предложеног фази АПП модела представљени су у табели испод разматрајући различите аспекте, укључујући применљивост модела у пракси, коришћење фази скупова за моделирање неизвесних параметара, метод фази оптимизације и моделирање одступања у купчевој потражњи.

Табела 5-31. Предности и недостаци предложеног фази АПП модела

Аспект	Предности	Недостаци
Практична примена	Омогућује решење за практичне проблеме у предузећу	Захтева скупљање података у предузећу
Употреба фази скупова	Генерише фази скупове употребом реалних података. Применљиво у случају када су фази скупови субјективно дефинисани	Засновано на комплексној процедури коришћења стварних података за генерисање фази скупова. Генерисани фази скупови не морају да буду трапезоидни, већ са по деловима линеарном функцијом припадности (енгл. piece-wise)
Фази оптимизација	Омогућује баланс између циљне функције и ограничења.	/

Одступање у купчевој потражњи	Засновано на статистичкој анализи историјских података у претходном периоду пре периода планирања.	/
-------------------------------	--	---

Предности и недостаци предложеног модела за прогнозу купчеве потражње и планирања испорука методом стандардне девијације представљени су у табели 5-32. са аспекта практичне примене.

Табела 5-32. Предности и недостаци предложеног модела за прогнозу купчеве потражње и планирања испорука методом стандардне девијације

Аспект	Предности	Недостаци
Практична примена	Омогућује решење за практичне проблеме у предузећу.	Захтева скупљање података у предузећу.
Брзина израчунавања	Брзо израчунавање резултата употребом савремених софтвера.	/

Предности и недостаци предложеног модела за прогнозу купчеве потражње и планирања испорука ФЛРА са дефазификацијом представљени су у табели 5-33. са аспекта практичне примене, употребе фази скупова, фази оптимизације и дефазификације.

Табела 5-33. Предности и недостаци предложеног модела за прогнозу купчеве потражње и планирања испорука ФЛРА са дефазификацијом

Аспект	Предности	Недостаци
Практична примена	Омогућује решење за практичне проблеме у предузећу. Генерисање прецизне прогнозе користећи практичне податке.	Захтева скупљање података у предузећу.
Употреба фази скупова	Генерише фази скупове употребом реалних података.	Засновано на комплексној процедури коришћења стварних података за генерисање фази скупова.
Фази оптимизација	Брзо израчунавање резултата употребом савремених софтвера.	/
Дефазификација	Брзо израчунавање крисп вредности.	Немогућност примене свих теоријских метода дефазификације.

## 5.2 Студија случаја у другом предузећу добављача из аутомобилске индустрије

Прва студија случаја (поглавље 5.1) урађена је у предузећу добављача из аутомобилске индустрије за тест период (период пре периода планирања) од 12 недеља ( $i = -12, -11, \dots, -2, -1$ ) и период планирања од 12 недеља ( $i = 1, 2, \dots, 12$ ). Анализиран временски период карактеристичан је за аутоиндустрију јер може да се узме као најдужи поуздани период за планирање производње, залиха и испорука робе купцима. Период дужи од 12 недеља неизвеснији је и осцилације у потражњи купаца

далеко су веће. У студији случаја валидирана је употребна вредност предложеног фази АПП модела и модела за прогнозу потражње купаца и планирања испорука. Потврђене су све постављене хипотезе.

Да би се проверила додатно употребна вредност предложеног фази АПП модела и модела планирања испорука, студија случаја урађена је у предузећу другог добављача из области аутомобилске индустрије у Републици Србији који производи различите производе у односу на првог добављача. Заједничко добављачима је испорука делова истим европским произвођачима аутомобила. Други добављач такође је први добављач великим европским произвођачима аутомобила у ланцу снабдевања (енгл. First tier supplier). Зато студија случаја код оба добављача је урађена на производној линији, која производи делове за исте купце, али за различите моделе аутомобила.

Ток материјала у фабрици идентичан је код оба добављача. Производна линија снабдева се из магацина репроматеријалом употребом *Kanban* система, готов производ са производне линије складишти се у магацину готовог производа и припрема испоруке купцима врши се у зони отпреме. Због поверљивости података имена предузећа неће да се наводи у дисертацији.

У студији случаја код другог добављача узет је дужи временски период пре периода планирања и дужи период планирања, него код првог добављача. Тест период пре периода планирања период је од годину дана (51 недеља) и период планирања састоји се од 20 недеља у наредној години.

Изведено је пет експеримената:

- 1) експеримент: основни случај за обе методе прогнозе потражње купаца и планирања испорука,
- 2) различита неизвесност у произведеној количини за обе методе прогнозе потражње купаца и планирања испорука,
- 3) различита неизвесност у одступању купчеве потражње за обе методе прогнозе потражње купаца и планирања испорука,
- 4) различита стратегија у висини сигурносних залиха за обе методе прогнозе потражње купаца и планирања испорука, и
- 5) поређење резултата основног случаја за обе методе прогнозе потражње купаца са реалним подацима снимљеним у фабрици.

## 5.2.1 Примена модела прогнозе потражње купаца и планирања испорука

### 5.2.1.1 Метод стандардне девијације

За моделирање прогнозе купчеве потражње и планирања испорука у предузећу добављача узет је тест период од годину дана (51 недеља) пре периода планирања са подацима о испорученим количинама производа купцима. Прогнозирана потражња купаца  $D_i$  у периоду планирања  $i = 1, \dots, 20$  узета је на почетку периода планирања у недељи  $i = 0$  за цео период планирања од 20 недеља.

Користећи податке о испорукама купцима  $D_i^*$  за период од 51 недеље пре периода планирања, стандардна девијација израчуната је:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{51} \sum_{i=-1}^{-5} (D_i^* - \bar{D}^*)^2} = 10826, \quad (5-37)$$

где је  $\bar{D}^*$  просечна испоручена количина у периоду од 51 недеље пре планираног периода,  $\bar{D}^* = 17216$  испоручених комада производа. Затим, девијација  $f_i$  испоручених количина производа  $D_i^*$  од прогнозиране потражње купаца  $D_i$  у периоду  $i = 1, \dots, 20$  израчуната је:

$$f_i = \frac{\sigma}{D_i} \quad (5-38)$$

Добијена девијација за 20 недеља је:

$$f_i = (1,52, 0,53, 0,61, 0,55, 0,65, 0,51, 0,69, 0,67, 0,74, 0,65, 0,96, 0,78, 0,89, 0,70, 1,46, 0,45, 4,57, 0,66, 0,93, 0,65). \quad (5-39)$$

Фази фактор девијације купчеве потражње  $\tilde{w}_i^d$  генерисан је као фази скуп са троугластом функцијом припадности  $(1 - f_i, 1, 1 + f_i)$ . Фази фактор  $\tilde{w}_i^d$  израчунат је за сваку недељу  $i, i = 1, \dots, 20$  и представљен у табели 5-34.

Табела 5-34. Фази фактори  $\tilde{w}_i^d$  купчеве потражње за сваку недељу  $i, i = 1, \dots, 20$  у периоду планирања

$\tilde{w}_1^d = (-0,52, 1, 2, 52)$	$\tilde{w}_{11}^d = (0,04, 1, 1, 96)$
$\tilde{w}_2^d = (0,47, 1, 1, 53)$	$\tilde{w}_{12}^d = (0,22, 1, 1, 78)$
$\tilde{w}_3^d = (0,39, 1, 1, 61)$	$\tilde{w}_{13}^d = (0,11, 1, 1, 89)$
$\tilde{w}_4^d = (0,45, 1, 1, 55)$	$\tilde{w}_{14}^d = (0,30, 1, 1, 70)$
$\tilde{w}_5^d = (0,35, 1, 1, 65)$	$\tilde{w}_{15}^d = (-0,46, 1, 2, 46)$
$\tilde{w}_6^d = (0,49, 1, 1, 51)$	$\tilde{w}_{16}^d = (0,55, 1, 1, 45)$
$\tilde{w}_7^d = (0,31, 1, 1, 69)$	$\tilde{w}_{17}^d = (-3,57, 1, 5, 57)$
$\tilde{w}_8^d = (0,33, 1, 1, 67)$	$\tilde{w}_{18}^d = (0,34, 1, 1, 66)$
$\tilde{w}_9^d = (0,26, 1, 1, 74)$	$\tilde{w}_{19}^d = (0,07, 1, 1, 93)$
$\tilde{w}_{10}^d = (0,35, 1, 1, 65)$	$\tilde{w}_{20}^d = (0,35, 1, 1, 65)$

Множење фази фактора  $\tilde{w}_i^d, i = 1, \dots, 20$  прогнозом купчеве потражње у периоду планирања  $D_i, i = 1, \dots, 20$  добија се горња и доња граница, као и средина прогнозе купчеве потражње,  $\tilde{D}_i = (D_i^l, D_i^m, D_i^u)$ . Множење скалара троугластим фази бројем добија се троугласти фази број (поглавље 3.1.1). На овај начин купчева потражња у периоду планирања постаје симетричан троугласти фази број који је различит за сваку недељу потражње,  $i = 1, \dots, 20$ . Очекивана вредност купчеве потражње добија се употребом формуле  $EV(\tilde{D}_i) = \frac{1}{3}(\tilde{D}_i^l + \tilde{D}_i^m + \tilde{D}_i^u)$  за сваку недељу  $i = 1, \dots, 20$  (поглавље 4.3.4). Практично, модел прогнозе потражње купца методом стандардне девијације постаје испоручена количина робе купцима у периоду пре планирања,  $D_i^*$ .

Приметно је да је фази фактор  $\tilde{w}_i^d$  више расплут код другог добављача. Разлог за то је узет далеко већи тест период пре периода планирања у коме су обухваћени летњи и зимски периоди, када је испорука купцима изузетно мала или је нема. Самим тим, стандардна девијација већа је и просечна испоручена количина мања него у случају када се анализира пролећни период од 12 недеља у којима купац потражује високе количине делова.

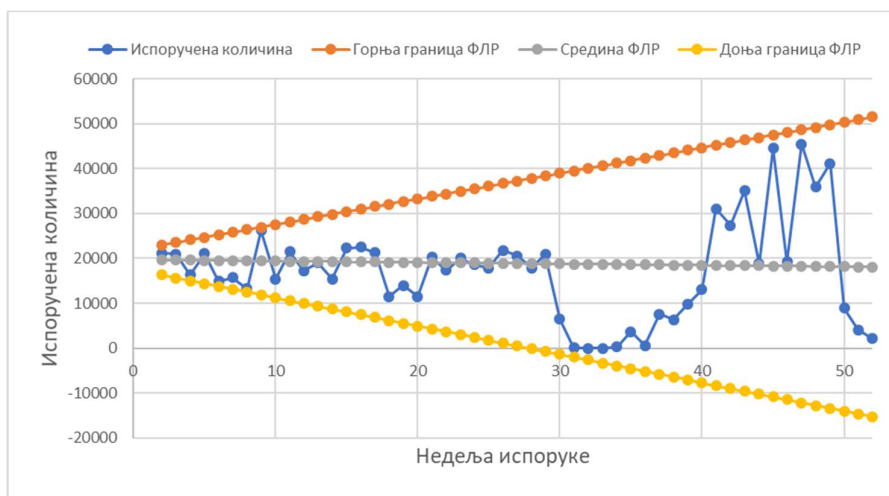
### 5.2.1.2 Метод ФЛРА са дефазификацијом

Резултат ФЛРА за тест период од 51 недеље показује 51 независан фази скуп добијен за сваку недељу (слика 5-13). Фази скупови дефинисани су својом левом



границом, средином и десном границом као резултат примењене ФЛРА (поглавље 5.1.1.2, слика 5-3). Испоруке купцима на којима је формиран модел ФЛРА у тест периоду припада дискретизованим фази скуповима. Степен функције припадности испоруке робе фази скупу, добијеном као резултат ФЛРА, одређен је применом фази аритметике и сличности троуглова (поглавље 5.1.1.3, формуле 5-22. и 5-23). Видети слику 5-14.

У табели 5-35. уочљиво је да се са променом степена задовољења мењају циљна функција и параметри регресионе праве. Са порастом степена задовољења решења,  $h$  мењају се циљна функција, ширина независног члана регресионе праве,  $c_0$  и ширина коефицијента регресионе праве,  $c_1$ . Средина независног члана регресионе праве,  $p_0$  и средина коефицијента регресионе праве,  $p_1$  не мењају се. За  $h = 1$  решење није изводљиво (табела 5-35). Изабрано је решење за степен задовољења  $h = 0,1$ , зато што је ширина  $c_0$  и  $c_1$  најмања и расплнутост ФЛР најмања је.



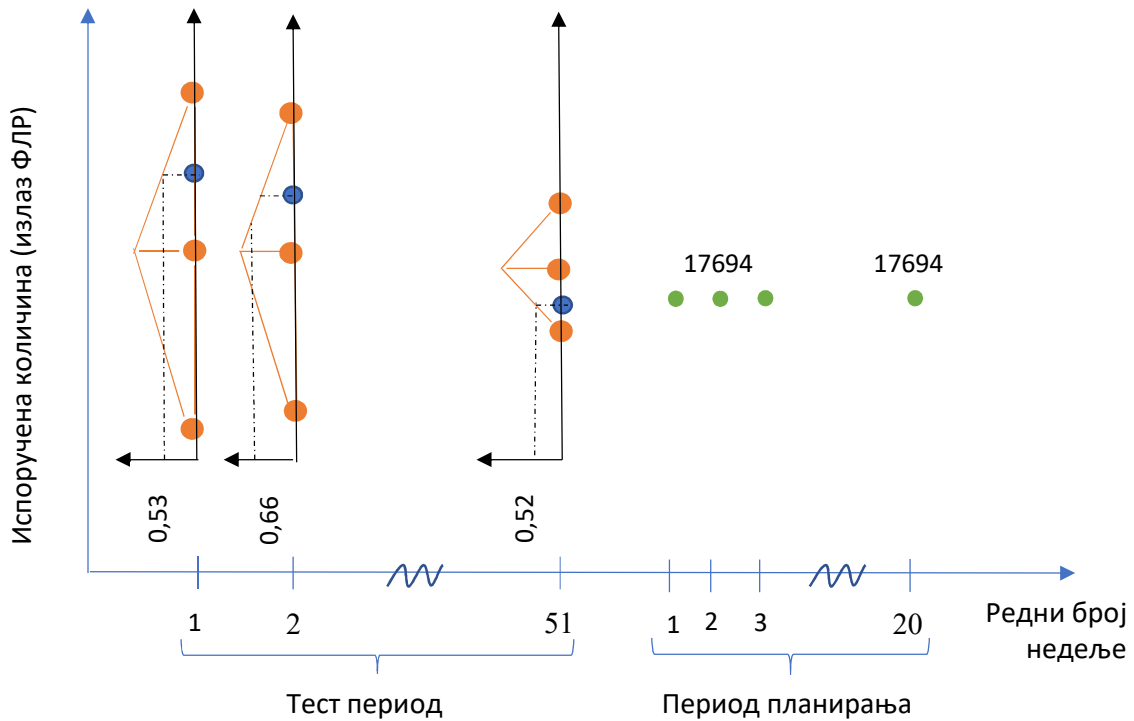
Слика 5-13. Модел ФЛР за период развоја модела у тест периоду пре периода планирања,  $h = 0,1$

Табела 5-35. Параметри ФЛРА за промену степена задовољења решења,  $h$

Степен задовољења решења, $h$	Циљна функција	Средина независног члана регресионе праве, $p_0$	Средина коефицијента регресионе праве, $p_1$	Ширина независног члана регресионе праве, $c_0$	Ширина коефицијента регресионе праве, $c_1$
0,1	936609	19703	-31	2147	601
0,2	1053685	19703	-31	2415	676
0,3	1204211	19703	-31	2760	772
0,4	1404913	19703	-31	3220	901
0,5	1685896	19703	-31	3865	1081
0,6	2107370	19703	-31	4831	1351
0,7	2809827	19703	-31	6441	1802
0,8	4214740	19703	-31	9661	2703
0,9	8429480	19703	-31	19323	5406
1	Није изводљиво решење				

За дефазификацију добијеног фази скупа (слика 5-15) употребљена је метода пондерисаних средина са алгебарским изразом (образац 3-151). Функција припадности фази скупа дискретизована је на 51 елемент скупа као што је представљено у раду аутора Ђорђевић и Петровић (Djordjevic and Petrovic, 2019). Калкулација крисп вредности фази скупа испоруке робе је:

$$z^* = \frac{0,12 \cdot 0 + 0,15 \cdot 0 + 0,1 \cdot 60 + 0,19 \cdot 300 + 0,24 \cdot 600 + \dots + 0,11 \cdot 45420}{0,12 + 0,15 + 0,1 + 0,19 + 0,24 \dots + 0,11} = 17694 \quad (5-40)$$



Слика 5-14. Дискретизован тест период на фази скупове и период планирања

Прогнозирана потражња купца добијена у обрасцу 5-40. је 17694 комада производа. Ова вредност користиће се у анализи сензитивности методе прогнозе потражње купца и има исту вредност за сваку недељу у периоду планирања,  $i = 1, \dots, 20$ . То је разлика у односу на модел прогнозе потражње методом стандардне девијације (поглавље 5.2.1.1), где је прогнозирана потражња купца различита за сваку недељу  $i = 1, \dots, 20$ .



Слика 5-15. Фази скуп дискретизованих фази скупова за тест период планирања потражње купаца

Алгоритам за примењен модел ФЛР написан је у С++ програмском језику и развијен у програмском пакету *Visual Studio 2015* (прилог 3).

### 5.2.1.3 Анализа грешке предвиђања методе прогнозе потражње и планирања испорука

Урађена је статистичка анализа методе прогнозе купчеве потражње и планирања испорука засноване на тест периоду испорука у предузећу добављача (период од 20 недеља пре планираног периода у коме је примењен фази АПП модел). Прва анализа урађена је за класичну линеарну регресиону анализу (формула 5-11). Коришћен је софтвер *Minitab 2016*. Резултати софтвера су:

The regression equation is  
 $C1 = 16256 + 36 C2$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	16256	3227	5,04	0,000
Week	35,6	104,9	0,34	0,736

S = 11031,6    R-Sq = 0,2%    R-Sq(adj) = 0,0%

#### Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	1	13965338	13965338	0,11	0,736
Residual Error	49	5963063167	121695167		
Total	50	5977028504			

#### Unusual Observations

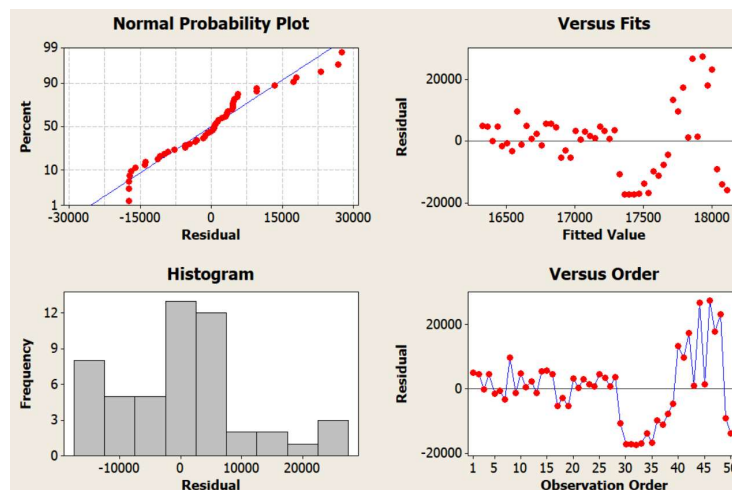
Obs	C2	C1	Fit	SE Fit	Residual	St Resid
44	45,0	44580	17856	2440	26724	2,48R
46	47,0	45420	17927	2606	27493	2,56R

48 49,0 41160 17998 2778 23162 2,17R

R denotes an observation with a large standardized residual.

Коришћен интервал поверења је 95%, тако да је праг толеранције  $\alpha = 0,05$ . Анализом резултата софтвера може да се закључи да је снага теста или  $P$  вредност мања од  $\alpha = 0,05$  у случају константе (Constant,  $P = 0$ ), тако да је статистички поуздан утицај константе на зависну променљиву,  $y$  (енгл. response). Код независне променљиве,  $x$  (енгл. predictor) снага теста већа је од прага толеранције  $\alpha = 0,05$  (Week,  $P = 0,736$ ) и може да се закључи да статистички није поуздан утицај независне променљиве на зависну променљиву. Зато морају детаљно да се анализирају остаци. Варијанса је висока ( $S = 11031,6$ ), коефицијент корелације између зависне и независне променљиве изузетно је низак ( $R\text{-Sq} = 0,2\%$ ,  $R\text{-Sq}(\text{adj}) = 0,0\%$ ). Такође, анализа показује да вредности у недељи 44, 46. и 48. не прате предложену регресиону формулу, с обзиром на то да апсолутне вредности стандардизованих остатака веће су од 2.

Резултати анализе остатака (енгл. residuals) приказани су на слици 5-16. Први графикон у горњем левом углу са слике 5-16. показује тест нормалности остатака. Видљиво је да остаци не прате праву нормалности, као и да су изражене вредности које су далеко удаљене у негативном и позитивном пољу. Постављен интервал поверења је 95%, тако да је праг толеранције  $\alpha = 0,05$ . Снага теста или  $P$  вредност теста нормалности остатака је  $P = 0,026$ . Снага теста мања је од прага толеранције, тако да почетна хипотеза  $H_0$  да остаци имају нормалну расподелу мора да се одбаца. Закључак је да остаци немају нормалну расподелу и да постоје вредности које су значајно различите од осталих вредности (енгл. outlier) и морају додатно да се анализирају. То је видљиво и на хистограму у доњем левом углу на слици 5-16. У горњем десном углу анализирани су остаци у односу на фитоване вредности линеарне регресионе праве. Видљиво је да нема константне варијансе, остаци нису случајно распоређени око нула вредности и да постоји присуство вредности које су значајно различите од осталих вредности. Закључује се да је потребна даља анализа увођења услова експоненцијалног степена (енгл. higher-order term), квадратног, кубног итд. што неће даље да се анализира у дисертацији.



Слика 5-16. Статистичка анализа остатака ЛР у софтверу Minitab 2016

Резултат добијен методом купчеве потражње упоређен је са резултатима 16 метода прогнозе, које су формиране на бази података испорука робе купцима за 51 недељу у тест периоду у предузећу добављача. Резултати су представљени у табели 5-36.

Коришћене методе прогнозе су:

- метод прогнозе 1 - Прогноза потражње примљена од купца путем EDI поруке у предузећу,
- метод прогнозе 2 - Прогнозирана потражња методом ФЛРА са дефазификацијом,
- метод прогнозе 3 - Прогнозирана потражња методом ФЛРА,
- метод прогнозе 4 - Прогнозирана потражња класичном ЛРА,
- метод прогнозе 5 - Прогнозирана потражња методом: *Decomposition (Additive method, Trend&Seasonal)*,
- метод прогнозе 6 - Прогнозирана потражња методом: *Decomposition (Additive method, Seasonal)*,
- метод прогнозе 7 - Прогнозирана потражња методом: *Decomposition (Multiplicative method, Trend&Seasonal)*,
- метод прогнозе 8 - Прогнозирана потражња методом: *Decomposition (Multiplicative method, Seasonal)*,
- метод прогнозе 9 - Прогнозирана потражња методом: *Moving Average (MA=5)*,
- метод прогнозе 10 - Прогнозирана потражња методом: *Single Exponential Smoothing (95% CI, Optimal ARIMA)*,
- метод прогнозе 11 - Прогнозирана потражња методом: *Double Exponential Smoothing (95% CI, Optimal ARIMA)*,
- метод прогнозе 12 - Прогнозирана потражња методом: *Winters' Method (Additive Method, SL=12)*,
- метод прогнозе 13 - Прогнозирана потражња методом: *Winters' Method (Multiplicative Method, SL=12)*,
- метод прогнозе 14 - Прогнозирана потражња методом: *ARIMA (Moving Average, Nonsesonal method)*,
- метод прогнозе 15 - Прогнозирана потражња методом: *ARIMA (Moving Average, Sesonal method)*,
- метод прогнозе 16 - Прогнозирана потражња методом: *ARIMA (Autoregressive method, Nonsesonal method)*,
- метод прогнозе 17 - Прогнозирана потражња методом: *ARIMA (Autoregressive method, Sesonal method)*.

Табела 5-36. Резултати метода прогнозе купчеве потражње

Недеља	Метод прогнозе 1	Метод прогнозе 2	Метод прогнозе 3	Метод прогнозе 4	Метод прогнозе 5	Метод прогнозе 6	Метод прогнозе 7	Метод прогнозе 8	Метод прогнозе 9	Метод прогнозе 10	Метод прогнозе 11	Метод прогнозе 12	Метод прогнозе 13	Метод прогнозе 14	Метод прогнозе 15	Метод прогнозе 16	Метод прогнозе 17

1	7110	17694	18075	18140	18232	11104	18854	17810	18444	5122	-8718	17722	17382	N/A	2655	N/A	22324
2	20350	17694	18045	18176	17152	9248	16599	15646	18444	5122	-20086	12480	12638	N/A	14274	N/A	20113
3	17820	17694	18014	18211	16142	14027	16425	15449	18444	5122	-31453	20392	19823	N/A	10972	N/A	18073
4	19540	17694	17983	18247	19986	12270	20563	19300	18444	5122	-42820	14182	14244	N/A	22913	N/A	6735
5	16615	17694	17952	18282	19202	14754	19822	18566	18444	5122	-54188	20434	19861	N/A	1821	N/A	9078
6	21180	17694	17922	18318	18401	8551	19055	17810	18444	5122	-65555	15161	15150	N/A	20858	N/A	4203
7	15720	17694	17891	18353	17320	11056	16775	15646	18444	5122	-76922	20502	19937	N/A	326	N/A	14445
8	16160	17694	17860	18389	16311	11365	16600	15449	18444	5122	-88290	9081	9825	N/A	8902	N/A	-1768
9	14725	17694	17830	18425	20155	25017	20780	19300	18444	5122	-99657	13288	13590	N/A	2368	N/A	14218
10	16740	17694	17799	18460	19371	22128	20031	18566	18444	5122	-111024	12213	12536	N/A	23940	N/A	-2297
11	11280	17694	17768	18496	18570	21421	19256	17810	18444	5122	-122392	17104	16700	N/A	24906	N/A	3712
12	13820	17694	17737	18531	17489	20784	16952	15646	18444	5122	-133759	11861	12140	N/A	25864	N/A	386
13	12125	17694	17707	18567	16480	20958	16774	15449	18444	5122	-145126	19774	19040	N/A	16315	N/A	20680
14	15457	17694	17676	18602	20324	25812	20998	19300	18444	5122	-156494	13563	13679	N/A	16315	N/A	23741
15	7390	17694	17645	18638	19539	25491	20241	18566	18444	5122	-167861	19815	19070	N/A	16315	N/A	24951
16	24000	17694	17615	18673	18739	23292	19457	17810	18444	5122	-179228	14542	14544	N/A	16315	N/A	12250
17	2370	17694	17584	18709	17658	26463	17128	15646	18444	5122	-190596	19884	19136	N/A	16315	N/A	13643
18	16375	17694	17553	18745	16649	12147	16948	15449	18444	5122	-201963	8463	9429	N/A	16315	N/A	14928
19	11675	17694	17522	18780	20493	5446	21216	19300	18444	5122	-213330	12669	13039	N/A	16315	N/A	22069
20	16710	17694	17492	18816	19708	10473	20450	18566	18444	5122	-224697	11595	12026	N/A	16315	N/A	20593
SQRT(MSE)	25762	25805	27853	28203	43473	29211	25611	27568	48976	29211	25611	33112	N/A	39141	N/A	50045	
MAPE	63	63	69	68	103	69	60	68	66	1268	78	74	N/A	77	N/A	91	

Све методе поређене су са методом 1 (прогноза потражње примљена од купца путем EDI поруке у предузећу), која је заправо поручена количина робе  $D_i$  у периоду планирања,  $i = 1, \dots, 20$ . Као и код студије случаја код првог добављача, коришћене су две мере за мерење прецизности методе прогнозе за период планирања: *MAPE* и *MSE* употребом формула у поглављу 5.1.1.4 (5-25 и 5-26).

Из табеле 5-36. видљиво је да мере показују различите вредности за поједине методе прогнозе. Што су мере мање, метода је прецизнија и показује мање одступање од прогнозиране потражње купца. Приметно је да је *MAPE* и *SQRT(MSE)* најмањи за: метод прогнозе 8, 2. и 3. при чему су ове методе најпрецизније од наведених 17 метода. Метод прогнозе декомпозицијом (Decomposition: Multiplicative method, Seasonal) показао је најмању меру и зато је најпрецизнији метод. Метод прогнозе 2. и 3. имају исти *MAPE*.

Затим следе методе прогнозе 10, 9, 5, 4. и 7. са већим мерама. Трећој групи према величини мера припадају методе прогнозе 13, 15, 12. и 17. Највећу меру имају методе 6. и 11, док методе 14. и 16. не показују валидне резултате.

Анализа грешке предвиђања показала је јако добру прецизност предложене методе ФЛРА са дефазификацијом из поглавља 5.2.1.2 што је чини валидном за прогнозу купчеве потражње и планирања испорука. Прецизнија је од методе класичне линеарне регресионе анализе. У односу на фази линеарну регресиону анализу која користи средину троугластог фази броја за прогнозу потражње, показује мању укупну прогнозирану количину за испоруку за период од 20 недеља, а то је 1790 комада мање производа што је чини бољом за планирање залиха. Методе које се користе као

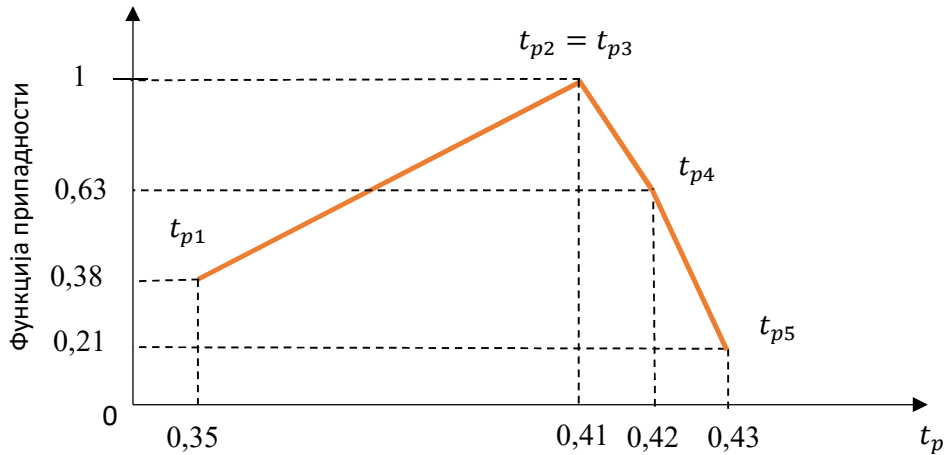
временске серије такође су pokazale високу прецизност: *Single Exponential Smoothing (95% CI, Optimal ARIMA)* и *Moving Average (MA=5)*.

### 5.2.2 Експеримент: основни случај за обе методе прогнозе потражње купаца и планирања испорука

Прикупљање података изведено је у фабрици добављача за период од 20 недеља. Мерење броја произведених комада у току једног сата изведено је за све производе који се производе на производној линији за два купца. Подаци о броју произведених комада у периоду од 20 недеља узети су из софтвера добављача (САП софтвер), који архивира податке. Подаци су искоришћени за генерисање фази скупа  $\tilde{t}_p$  са по деловима линеарном функцијом припадности (енгл. *piece-wise*), као што је приказано на слици 5-17.

Метода примењена за генерисање функције припадности од прикупљених података представљена је у прилогу А. Коришћен је метод очекиваног интервала и адаптиран је за дефазификацију по деловима линеарном функцијом припадности  $\tilde{t}_p$  као што следи:

$$EI(\tilde{t}_p) = [E_1^{t_p}, E_2^{t_p}], \text{ где је очекивана вредност леве стране } E_1^{t_p}: \\ E_1^{t_p} = \int_0^{0,38} t_{p1} dr + \int_{0,38}^1 [t_{p1} + (t_{p2} - t_{p1}) r] dr = \int_0^{0,38} 0,35 dr + \int_{0,38}^1 [0,35 + (0,41 - 0,35) r] dr = 0,376. \quad (5-41)$$



Слика 5-17. Фази скуп времена производње,  $\tilde{t}_p$

Очекивана вредност десне стране  $E_2^{t_p}$  садржи три парцијална интеграла за сваки део по деловима линеарне функције припадности (енгл. *piece-wise*), као што следи:

$$E_2^{t_p} = \int_{0,63}^1 [t_{p4} + (t_{p3} - t_{p4})r] dr + \int_{0,21}^{0,63} [t_{p5} + (t_{p4} - t_{p5}) r] dr + \\ \int_0^{0,21} t_{p5} dr = \int_{0,63}^1 [0,42 + (0,41 - 0,42)r] dr + \int_{0,21}^{0,63} [0,43 + (0,42 - 0,43) r] dr + \\ \int_0^{0,21} 0,43 dr = 0,421. \quad (5-42)$$

Очекивани интервал времена производње,  $EI(\tilde{t}_p)$  је:

$$EI(\tilde{t}_p) = [0,376, 0,421]. \quad (5-43)$$

Очекивана вредност  $EV(\tilde{t}_p)$  добијеног очекиваног интервала је:

$$EV(\tilde{t}_p) = \frac{1}{2}(0,376 + 0,421) = 0,399. \quad (5-44)$$

То значи да је време производње једног производа 0,399 минута, односно број произведених комада производа у току једног сата је 24.

Мерења времена складиштења залиха  $\tilde{t}_s$  и времена припреме испоруке  $\tilde{t}_t$  извршена су у магацину од стране особља магацина и менаџера логистике. Мерење времена складиштења залиха обављено је на 300 узорак ускладиштених контејнера у периоду од 20 недеља. Измерено време састоји се од: време купљења контејнера у производњи, време вожње виљушкарком до магацина готовог производа, време одлагања контејнера на слободну позицију. Време је моделирано са симетричним трапезоидним фази скупом:

$$\tilde{t}_s = (0,015, 0,017, 0,023, 0,025). \quad (5-45)$$



Слика 5-18. Фази скуп времена складиштења залиха,  $\tilde{t}_s$

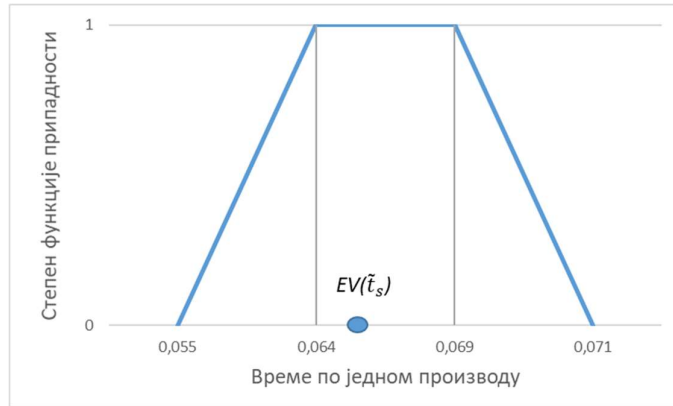
Дефазификована вредност добијена је коришћењем очекиване вредности фази скупа:  $EV(\tilde{t}_s) = \frac{1}{2}(E_1^{t_s} + E_2^{t_s}) = \frac{1}{4}(0,015 + 0,017 + 0,023 + 0,025) = 0,020$  минута по производу.

Мерење времена припреме испоруке,  $\tilde{t}_t$  изведено је у зони за отпрему робе на 100 узорак испорука укључујући све логистичке операције неопходне за припрему испоруке за оба типа контејнера: време купљења контејнера у магацину готовог производа према отпремници, превозење виљушкарком до зоне отпреме, време штампања отпремних етикета, време лепљења отпремних етикета на кутију, време утовара контејнера у камион. Време припреме испоруке моделирано је са несиметричним трапезоидним фази скупом:

$$\tilde{t}_t = (0,055, 0,064, 0,069, 0,071). \quad (5-46)$$

Дефазификована вредност добијена је коришћењем методе очекиване вредности фази скупа:  $EV(\tilde{t}_t) = \frac{1}{2}(E_1^{t_t} + E_2^{t_t}) = \frac{1}{2}(0,055 + 0,064 + 0,069 + 0,071) = 0,065$  минута по производу.





Слика 5-19. Фази скуп времена припреме испоруке за купце,  $\tilde{t}_t$

Неизвесност у производњи и купчевој потражњи анализирани су са тимом логистике у предузећу. На основу њиховог искуства и реализације производних планова одступање од 20% мање и 10% више од очекиване реализације производног плана коришћено је за величину одступања у произведеној количини делова. Зато фази фактор  $\tilde{w}_i^p$  произведене количине за сваку недељу  $i, i = 1, \dots, 20$  несиметричан је трозапни фази скуп:

$$\tilde{w}_i^p = (0,8, 1, 1,1) \quad (5-47)$$

Потражња купца разматрана је за сваки производ за оба купца. Прикупљање података изведено је од стране одељења логистике. Одељење логистике у предузећу користи напредан САП софтвер (енгл. ERP – Enterprise Resource Planning) за интеграцију купчевих поруџбеница, планирање производње, магацинске операције, праћење залиха и планирање репроматеријала.

Сви подаци транспарентни су и лаки за извожење и обраду у неким другим алатима, нпр. у *excel*-у. Купчева потражња прикупљена је за два периода:

- 51 недеља реализованих пре периода планирања,
- 20 недеља у периоду планирања.

Недељни капацитет је  $Q = 23000$  комада производа за пет радних дана. У случају повећане потражње купаца добављач је флексибилан да производи и суботом, што повећава капацитет производње. Фази фактор за методу прогнозе купчеве потражње стандардном девијацијом  $\tilde{w}_i^d$  за период планирања  $i = 1, \dots, 20$  коришћен је из табеле 5-34.

За спроведене експерименте за прогнозу потражње купаца методом стандардне девијације биће коришћен фази АПП ЛП који је трансформисан у крисп АПП ЛП модел (поглавље 4.3.4) употребом циљне функције и ограничења 4-27. до 4-45. За експеримент примене фази АПП модела са прогнозом потражње методом ФЛРА са дефазификацијом биће примењена ограничења у формулама 5-33. до 5-36.

Експеримент за основни случај изведен је у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у C++ програмском језику (прилог Б).

### 5.2.2.1 Експеримент: основни случај за методу прогнозе потражње и планирања испорука стандардном девијацијом

У студији случаја дефинисан је минимум залиха у магацину (дани покривености потражње купаца са залихама)  $T^l = 3$  дана и њен максимум  $T^u = 5$ . Машински капацитет је  $C = 23000$  комада производа недељно за пет радних дана максималне производње (са 100% доступности машина). Фази фактор одступања у купчевој потражњи  $\tilde{w}_i^d$  коришћен је из табеле 5-34. Фази фактор одступања произведене количине робе једнак је за сваку недељу у периоду планирања  $\tilde{w}_i^p = (0,8, 1, 1, 1)$ ,  $i = 1, \dots, 20$ .

Циљна функција израчуната је за сваки степен изводљивости  $\beta$ ,  $\beta = 0,5, 0,6, \dots, 0,9, 0,95, 0,99, 1$ . Табела 5-37. показује добијене резултате укључујући степен изводљивости  $\beta$ , кумулативну вредност променљивих у ЛП  $P_i, Ss_i$  и  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, 20$  у периоду планирања од 20 недеља, вредности фази циљне функције са трапезоидном функцијом припадности  $(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$ , толеранција  $\mu_{\tilde{c}}(z)$ , степен задовољења решења  $K_{\tilde{c}}(Z(\beta))$  и оптимална вредност циљне функције,  $z$ . Максимална вредност степена задовољења решења је  $K_{\tilde{c}}(Z(\beta)) = 0,4401$ . Баланс између степена задовољења циљне функције и степена изводљивости ограничења достигнут је за  $\beta = 0,6$ . Оптималне кумулативне вредности променљивих су  $\sum_{i=1}^{20} P_i = 333980$ ,  $\sum_{i=1}^{20} Ss_i = 194565$  и  $\sum_{i=1}^{20} Q_i = 318813$  комада производа.

Табела 5-37. Резултати основног случаја за методу прогнозе стандардном девијацијом

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\tilde{c}}(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\tilde{c}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $z$
	$\sum Ss_i$	$\sum P_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
0,5	181141	307746	297162	126772	135964	150846	167190	0,839	0,4196	145962
<b>0,6</b>	<b>194565</b>	<b>333980</b>	<b>318813</b>	<b>137346</b>	<b>147284</b>	<b>163405</b>	<b>181131</b>	<b>0,733</b>	<b>0,4401</b>	<b>158127</b>
0,7	207989	361047	340465	148212	158913	176305	195455	0,625	0,4375	170624
0,8	221413	388988	362116	159383	170865	189564	210180	0,513	0,4107	183470
0,9	236048	417844	383768	170893	183176	203225	225357	0,398	0,3586	196708
0,95	247572	432630	394594	176837	189536	210300	233215	0,339	0,3220	203554
0,99	259646	444636	403254	181696	194738	216097	239655	0,290	0,2874	209158
1	262999	447663	405419	182925	196053	217565	241285	0,278	0,2779	210576

Вредност оптималне циљне функције за  $\beta = 0,6$  је 158127 минута за 20 недеља. На недељном нивоу то је 7906 минута, и на дневном нивоу 1581 минут (разматрајући пет радних дана недељно, тј. 26,4 h/дан) за све производне и логистичке операције. Посматрајући произведену количину  $\sum_{i=1}^{20} P_i = 333980$  захтевано време је 6679 минута недељно, односно 1335 минута дневно (22,3 h/дан), што значи да су потребне комплетне 3 смене производње дневно. Преглед просечног захтеваног времена на дневном нивоу за све операције у току материјала представљен је у табели 5-38.

Табела 5-38. Оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу за методу прогнозе стандардном девијацијом

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
22,3	0,6	3,4	26,4

Веома је важно у пракси да се анализирају резултати оптималног решења фази АПП модела за сваку недељу у планираном периоду. Задовољство купаца је 100%, што значи да је подмирена купчева потражња у потпуности и испуњен план испорука. Најдуже време за све три активности захтевано је у недељама 2,3,4,5,6. и 20, где је највећа испоручена количина робе купцу, зато је највећи захтев за производњом. Вредности циљне функције у сатима дневно показује да није довољно да се организује производња током пет радних дана, већ је потребно укључити радну суботу у 2 смене (табела 5-39).

Табела 5 39. Оптимално решење променљивих  $P_i, Ss_i$  и  $Q_i, i = 1, \dots, 20$  за  $\beta = 0,6$

Недеља, $i$	$Ss_i$	$P_i$	$Q_i$	Вредност циљне функције у минутама недељно, $z$	Вредност циљне функције у сатима дневно, $z$
1	8193	13395	8193	6052	20,2
2	12860	20744	21433	9943	33,1
3	11342	20765	18903	9757	32,5
4	12374	19654	20623	9444	31,5
5	10619	21288	17698	9874	32,9
6	13358	19778	22263	9620	32,1
7	10082	17778	16803	8401	28,0
8	10346	17064	17243	8149	27,2
9	9485	17726	15808	8303	27,7
10	10694	15153	17823	7429	24,8
11	7418	14465	12363	6735	22,4
12	8942	14464	14903	6929	23,1
13	7925	15840	13208	7350	24,5
14	9924	12187	16540	6144	20,5
15	5084	19207	8473	8333	27,8
16	15050	12609	25083	6969	23,2
17	2072	12350	3453	5205	17,3
18	10475	15247	17458	7439	24,8
19	7655	16436	12758	7554	25,2
20	10676	17830	17793	8498	28,3
$\Sigma$	194565	333980	318813	158127	527

### 5.2.2.2 Експеримент: основни случај за методу прогнозе потражње и планирања испорука ФЛРА са дефазификацијом

У овом експерименту у фази АПП ЛП моделу коришћена је метода прогнозе потражње ФЛРА са дефазификацијом. Коришћене су формуле 5-28. до 5-32. и трансформисане формуле 5-33. и 5-36.

Резултати примењеног модела су представљени у табели 5-40. Вредност оптималне циљне функције добијена је за степен изводљивости  $\beta = 0,99$  и њена вредност је 180916 минута за период планирања од 20 недеља. На недељном нивоу то

је 9045 минута, 1809 минута на дневном нивоу, односно 30,2 h/дан за логистичке и производне операције.

Табела 5-40. Резултати основног случаја за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом

Степен изводљиво сти, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_G(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\bar{G}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $z$
	$\sum SS_i$	$\sum P_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
0,5	219418	355082	353900	147034	171963	192803	193950	0,514	0,2571	169336
0,6	219418	360630	353900	148976	174238	195356	196502	0,476	0,2854	171555
0,7	219418	366354	353900	150980	176585	197989	199135	0,436	0,3052	173845
0,8	219418	372263	353900	153048	179008	200707	201854	0,395	0,3160	176209
0,9	219418	378366	353900	155184	181510	203514	204661	0,353	0,3174	178650
0,95	219418	381493	353900	156278	182792	204953	206099	0,331	0,3144	179901
<b>0,99</b>	<b>219418</b>	<b>384032</b>	<b>353900</b>	<b>156278</b>	<b>182792</b>	<b>204953</b>	<b>207267</b>	<b>0,326</b>	<b>0,3229</b>	<b>180916</b>
1	219418	384672	353900	157391	184095	206415	207562	0,309	0,3089	181172

Преглед просечног захтеваног времена на дневном нивоу за све операције у току материјала представљен је у табели 5-41.

Табела 5-41. Оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
25,6	0,7	3,8	30,2

Може да се закључи да је потребна радна субота за производњу пошто је просечно захтевано дневно време 25,6 сати. Веома је важно у пракси да се анализирају резултати оптималног решења фази АПП модела за сваку недељу у планираном периоду. Задовољство купаца је 100%, што значи да је подмирена купчева потражња у потпуности. Вредности циљне функције представљене су у табели 5-42. као просечно дневно време потребно за све операције изражено у сатима.

Табела 5-42. Оптимално решење променљивих  $P_i, SS_i$  и  $Q_i, i = 1, \dots, 20$  за  $\beta = 0,99$

Недеља, $i$	$SS_i$	$P_i$	$Q_i$	Вредност циљне функције у минутама недељно, $z$	Вредност циљне функције у сатима дневно, $z$
1	17695	11777	17695	6210	21
2	10617	19628	17695	9209	31
3	10617	19628	17695	9209	31
4	10617	19628	17695	9209	31
5	10617	19628	17695	9209	31
6	10617	19628	17695	9209	31
7	10617	19628	17695	9209	31
8	10617	19628	17695	9209	31
9	10617	19628	17695	9209	31
10	10617	19628	17695	9209	31
11	10617	19628	17695	9209	31
12	10617	19628	17695	9209	31

13	10617	19628	17695	9209	31
14	10617	19628	17695	9209	31
15	10617	19628	17695	9209	31
16	10617	19628	17695	9209	31
17	10617	19628	17695	9209	31
18	10617	19628	17695	9209	31
19	10617	19628	17695	9209	31
20	10617	18944	17695	8936	30
$\Sigma$	219418	384032	353900	180916	603

Може да се закључи да је потребно да се организује производња суботом у свакој недељи осим у првој. Довољне су две додатне смене сваке суботе, осим у недељи 20, где је потребна једна субота.

За експеримент основни случај мања вредност захтеваног просечног времена добијена је за методу прогнозе стандардном девијацијом (табеле 5-38. и 5-41). Просечно захтевано дневно време је 26,4 h/дан у односу на 30,2 h/дан, колико је добијено ФЛРА са дефазификацијом. Треба да се нагласи да је степен задовољења код методе стандардном девијацијом од  $\beta = 0,6$  доста мањи него код методе ФЛРА са дефазификацијом,  $\beta = 0,99$ .

## 5.2.3 Анализа сензитивности фази АПП модела

### 5.2.3.1 Утицај промене различите неизвесности у произведеној количини робе за обе методе прогнозе потражње купаца и планирања испорука

Неизвесности у производњи и купчевој потражњи анализирани су са тимом логистике у предузећу. Руководство у предузећу добављача предложило је одступање од 20% мање и 10% више од очекиване реализације производног плана. Зато фази фактор  $\tilde{w}_i^p$  произведене количине за сваку недељу  $i, i = 1, \dots, 20$  несиметричан је троугласти фази скуп,  $\tilde{w}_i^p = (0,8, 1, 1,1)$ . Ова неизвесност у произведеној количини робе неопходна је да би се анализирао утицај свих проблема који се јављају у процесу производње: технички застоји, кварови машина, ниво шкарта, абсентизам радника итд. Изведена су два експеримента:

1. неизвесност у произведеној количини  $w_i^p, i = 1, \dots, 20$ , мања је 50% него у експерименту у основном случају и има троугласту функцију припадности (0,90, 1, 1,05).
2. неизвесност у произведеној количини  $w_i^p, i = 1, \dots, 12$ , већа је 50% него у експерименту у основном случају и има троугласту функцију припадности (0,70, 1, 1,15).

Недељни капацитет је  $Q = 23000$  комада производа за пет радних дана. У случају повећане потражње купца добављач је флексибилан да производи и суботом, што повећава капацитет производње. Фази фактор за методу прогнозе купчеве потражње стандардном девијацијом  $\tilde{w}_i^d$  за период планирања  $i = 1, \dots, 20$  коришћен је из табеле 5-34.

За спроведене експерименте за прогнозу потражње купаца методом стандардне девијације биће коришћен фази АПП ЛП, који је трансформисан у крисп АПП ЛП модел (поглавље 4.3.4) употребом циљне функције и ограничења 4-27. до 4-45. За експеримент примене фази АПП модела са прогнозом потражње методом ФЛРА са дефазификацијом биће примењена ограничења у формулама 5-33. до 5-36.

### 5.2.3.2 Утицај промене различите неизвесности у произведеној количини робе за методу прогнозе потражње и планирања испорука стандардном девијацијом

У овом експерименту дефинисан је минимум залиха у магацину (дани покривености потражње купаца са залихама)  $T^l = 3$  дана и њен максимум  $T^u = 5$ . Машински капацитет је  $C = 23000$  комада производа недељно за пет радних дана максималне производње (са 100% доступности машина). Фази фактор одступања у купчевој потражњи  $\tilde{w}_i^d$  коришћен је из табеле 5-34. Фази фактор одступања произведене количине робе различит је у зависности од разматране неизвесности.

Циљна функција израчуната је за сваки степен изводљивости  $\beta$ ,  $\beta = 0,5, 0,6, \dots, 0,9, 0,95, 0,99, 1$ . Табела 5-43. показује добијене резултате укључујући степен изводљивости  $\beta$ , кумулативну вредност променљивих у ЛП  $P_i, Ss_i$  и  $Q_i, i = 1, \dots, 20$  у периоду планирања од 20 недеља, вредности фази циљне функције са трапезоидном функцијом припадности  $(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$ , толеранција  $\mu_{\tilde{c}}(z)$ , степен задовољења решења  $K_{\tilde{c}}(Z(\beta))$  и оптимална вредност циљне функције,  $z$ . Максимална вредност степена задовољења решења је  $K_{\tilde{c}}(Z(\beta)) = 0,4334$ . Баланс између степена задовољења циљне функције и степена изводљивости ограничења досигнуто је за  $\beta = 0,6$ . Оптималне кумулативне вредности променљивих су  $\sum_{i=1}^{20} P_i = 327164$ ,  $\sum_{i=1}^{20} Ss_i = 194565$  и  $\sum_{i=1}^{20} Q_i = 318813$  комада производа.

Табела 5-43. Резултати добијени за случај 50% мање неизвесности у произведеној количини за методу прогнозе стандардном девијацијом

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\tilde{c}}(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\tilde{c}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $z$
	$\sum Ss_i$	$\sum P_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
0,5	181141	303850	297162	125409	134522	149249	165398	0,826	0,4132	144404
<b>0,6</b>	<b>194565</b>	<b>327164</b>	<b>318813</b>	<b>134961</b>	<b>144762</b>	<b>160610</b>	<b>177995</b>	<b>0,722</b>	<b>0,4334</b>	<b>155400</b>
0,7	207989	350838	340465	144639	155136	172119	190758	0,617	0,4319	166540
0,8	221413	374879	362116	154445	165645	183779	203690	0,510	0,4081	177827
0,9	236170	399298	383768	164404	176316	195624	216829	0,402	0,3615	189291
0,95	248923	411651	394594	169514	181797	201729	223599	0,346	0,3285	195189
0,99	261638	421604	403254	173665	186249	206700	229110	0,300	0,2974	199985
1	265118	424102	405419	174710	187371	207953	230499	0,289	0,2889	201194

Оптимална вредност циљне функције,  $z$  је 155400 минута. Просечно захтевано време за све производне и логистичке операције је 7770 минута на недељном нивоу, а то је на дневном нивоу 1554 минута (25,9 h/дан). Табела 5-44. приказује захтевано оптимално просечно време на дневном нивоу. Просечно време потребно за производњу је 21,8 h /дан, што значи да је потребан рад у 3 смене константно током периода планирања од 20 недеља. Радне суботе нису неопходне.

Табела 5-44. Захтевано оптимално просечно време на дневном нивоу за 50% мање неизвесности у произведеној количини за методу прогнозе стандардном девијацијом

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
21,8	0,6	3,4	25,9

Експеримент за овај случај неизвесности изведен је у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у C++ програмском језику (прилог В).

У експерименту 2. када је неизвесност 50% већа, оптимално решење добијено је за степен изводљивости  $\beta = 0,6$  при чему је достигнут највећи степен задовољења решења  $K_{\bar{c}}(Z(\beta)) = 0,4469$ . Оптималне кумулативне вредности променљивих су  $\sum_{i=1}^{20} P_i = 341086$ ,  $\sum_{i=1}^{20} Ss_i = 194565$  и  $\sum_{i=1}^{20} Q_i = 318813$  комада производа, као што је представљено у табели 5-45. У овом експерименту, где је неизвесност у произведеној количини већа, кумулативни захтев за производњом за планирани период од 20 недеља већи је поредећи са експериментом 1. где је неизвесност мања, и то за сваки степен изводљивости  $\beta$ .

Табела 5-45. Резултати добијени где је 50% већа неизвесност у произведеној количини робе за методу прогнозе стандардном девијацијом

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\bar{c}}(Z)$	Степен задовољења решења, $K_{\bar{c}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $z$
	$\sum Ss_i$	$\sum P_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
0,5	181141	311742	297162	128171	137442	152485	169029	0,851	0,4257	147561
<b>0,6</b>	<b>194565</b>	<b>341086</b>	<b>318813</b>	<b>139833</b>	<b>149914</b>	<b>166318</b>	<b>184399</b>	<b>0,745</b>	<b>0,4469</b>	<b>160969</b>
0,7	207989	371869	340465	152000	162917	180742	200432	0,634	0,4436	174952
0,8	221413	404200	362116	164707	176493	195800	217177	0,518	0,4142	189555
0,9	236048	438198	383768	178017	190707	211570	234720	0,396	0,3566	204849
0,95	247572	455863	394594	184968	198132	219825	243902	0,333	0,3161	212847
0,99	258323	470331	403254	190670	204222	226602	251441	0,281	0,2778	219410
1	261611	473996	405419	192121	205773	228329	253363	0,267	0,2673	221082

Добијена вредност циљне функције је 160969 минута. На недељном нивоу укупно захтевано време за производне и логистичке операције је 8048 минута, што је на дневном нивоу 1609 минута (26,8 сати). Табела 5-46. представља просечно захтевано време на дневном нивоу као оптимално решење,  $\beta = 0,6$ .

Табела 5-46. Оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу када је 50% већа неизвесност у произведеној количини за методу прогнозе стандардном девијацијом

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
22,7	0,6	3,4	26,8

Резултати показују да постоји разлика у захтеваном времену за операције за исти степен изводљивости  $\beta = 0,6$  и различиту неизвесност у два експеримента. Разлика је 0,9 h/дан, односно 54 минута на дневном нивоу. То значи да уколико је неизвесност у произведеној количини робе 50% већа него у основном случају, захтевано укупно време

је дуже 54 минута сваки дан. То је 18,9 сати дуже месечно, што проузрокује 2,5 смене више. За услове добављача, са аспекта трошкова, то је значајно време јер узрокује додатно плаћање радника и потрошњу енергената за производњу.

Експеримент за овај случај неизвесности изведен је у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у C++ програмском језику (прилог Г).

### 5.2.3.3 Утицај промене различите неизвесности у произведеној количини робе за методу прогнозе потражње и планирања испорука ФЛРА са дефазификацијом

Разлика у крисп АПП ЛП моделу између потражње методом стандардне девијације и методом ФЛРА са дефазификацијом је у ограничењима 5-33. до 5-36. Изведена су два експеримента као и код претходне методе потражње:

1. неизвесност у произведеној количини  $w_i^p$ ,  $i = 1, \dots, 12$ , мања је 50% него у експерименту у основном случају и има троугласту функцију припадности (0,90, 1, 1,05).
2. неизвесност у произведеној количини  $w_i^p$ ,  $i = 1, \dots, 12$ , већа је 50% него у експерименту у основном случају и има троугласту функцију припадности (0,70, 1, 1,15).

Резултати добијени за сваки степен изводљивости,  $\beta$  представљени су у табели 5-47. Степен изводљивости  $\beta = 0,99$  има највећи степен задовољења решења  $K_{\tilde{c}}(Z(\beta)) = 0,4999$ . Оптималне кумулативне вредности променљивих су  $\sum_{i=1}^{20} P_i = 364139$ ,  $\sum_{i=1}^{20} Ss_i = 219418$  и  $\sum_{i=1}^{20} Q_i = 353900$  комада производа. Оптимална вредност циљне функције,  $z$  је 172959 минута. Просечно захтевано време за све операције је 8648 минута на недељном нивоу, а то је на дневном нивоу 1729 минута (28,8 сати). Табела 5-48. приказује захтевано оптимално просечно време на дневном нивоу.

Табела 5-47. Резултати добијени где је 50% мања неизвесност у произведеној количини робе за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\tilde{c}}(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\tilde{c}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $z$
	$\sum Ss_i$	$\sum P_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
0,5	219418	350587	353900	145461	156097	173207	191883	0,598	0,2992	167538
0,6	219418	353270	353900	146400	157090	174307	193117	0,578	0,3469	168612
0,7	219418	355995	353900	147354	158098	175424	194370	0,558	0,3904	169701
0,8	219418	358762	353900	148322	159122	176558	195643	0,537	0,4295	170808
0,9	219418	361572	353900	149306	160161	177710	196935	0,516	0,4641	171932
0,95	219418	362993	353900	149803	160687	178293	197589	0,505	0,4797	172501
<b>0,99</b>	<b>219418</b>	<b>364139</b>	<b>353900</b>	<b>149803</b>	<b>160687</b>	<b>178293</b>	<b>197589</b>	<b>0,505</b>	<b>0,4999</b>	<b>172959</b>
1	219418	364426	353900	150305	161217	178881	198248	0,494	0,4942	173074

Табела 5-48. Захтевано оптимално просечно време на дневном нивоу за 50% мање неизвесности у произведеној количини за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
24,3	0,7	3,8	28,8



Експеримент за овај случај неизвесности изведен је у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у С++ програмском језику (прилог В).

У експерименту 2. када је неизвесност 50% већа, оптимално решење добијено је за степен изводљивости  $\beta = 0,99$ , као и у претходном експерименту, при чему је достигнут највећи степен задовољења решења  $K_{\bar{G}}(Z(\beta)) = 0,4410$ . Оптималне кумулативне вредности променљивих су  $\sum_{i=1}^{20} P_i = 406225$ ,  $\sum_{i=1}^{20} S S_i = 219418$  и  $\sum_{i=1}^{20} Q_i = 353900$  комада производа, као што је представљено у табели 5-49. У овом експерименту, где је неизвесност у произведеној количини већа, кумулативна потреба за производњом за планирани период од 20 недеља већа је поредећи са експериментом 1, где је неизвесност мања и то за сваки степен изводљивости.

Табела 5-49. Резултати добијени где је 50% већа неизвесност у произведеној количини робе за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\bar{G}}(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\bar{G}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $z$
	$\sum S S_i$	$\sum P_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
0,5	219418	359694	353900	148648	159466	176940	196071	0,688	0,3440	171181
0,6	219418	368303	353900	151662	162652	180470	200032	0,639	0,3831	174625
0,7	219418	377335	353900	154823	165994	184173	204187	0,587	0,4107	178237
0,8	219418	386821	353900	158143	169504	188062	208550	0,532	0,4259	182032
0,9	219418	396797	353900	161635	173194	192152	213139	0,475	0,4277	186022
0,95	219418	401980	353900	163449	175112	194277	215523	0,445	0,4232	188095
<b>0,99</b>	<b>219418</b>	<b>406225</b>	<b>353900</b>	<b>163449</b>	<b>175112</b>	<b>194277</b>	<b>215523</b>	<b>0,445</b>	<b>0,4410</b>	<b>189793</b>
1	219418	407300	353900	165311	177081	196459	217970	0,415	0,4150	190223

Добијена вредност циљне функције је 189793 минута. На недељном нивоу укупно захтевано време за производне и логистичке операције код отпреме робе купцима је 9489 минута, што је на дневном нивоу 1897 минута (31,6 сати). Табела 5-50. представља просечно захтевано време на дневном нивоу као оптимално решење.

Експеримент за овај случај неизвесности изведен је у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у С++ програмском језику (прилог Г).

Табела 5-50. Оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу када је 50% већа неизвесност у произведеној количини за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
27,1	0,7	3,8	31,6

Резултати показују да постоји разлика у захтеваном времену за операције за исти степен изводљивости,  $\beta = 0,99$ . Разлика је 2,8 сати за све операције, односно 169 минута на дневном нивоу. То значи да уколико је неизвесност у произведеној количини робе 50% већа него у основном случају, захтевано укупно време дуже је 169 минута сваки дан. Посматрајући само време производње захтевано је дуже време у случају 50% веће неизвесности за 2,8 h/дан. То је 58,8 сати дуже месечно, што проузрокује 7,35 смена више. За услове добављача са аспекта трошкова то је значајно време, јер узрокује додатно плаћање радника и потрошњу енергената за производњу радним суботама у 2 смене.

За експерименте са 50% мање неизвесности у произведеној количини мања вредност захтеваног просечног времена је добијена за методу прогнозе стандардном девијацијом (табеле 5-44. и 5-48). Просечно захтевано дневно време је 25,9 h/дан у односу на 28,8 h/дан колико је добијено ФЛРА са дефазификацијом. Треба нагласити да је степен задовољења код методе стандардном девијацијом од  $\beta = 0,6$  доста мањи него код методе ФЛРА са дефазификацијом,  $\beta = 0,99$ .

За експерименте са 50% већом неизвесношћу у произведеној количини мања вредност захтеваног просечног времена добијена је за методу прогнозе стандардном девијацијом (табеле 5-46. и 5-50). Просечно захтевано дневно време је 26,8 h/дан у односу на 31,6 h/дан колико је добијено ФЛРА са дефазификацијом. Треба да се нагласи да је степен задовољења код методе стандардном девијацијом од  $\beta = 0,6$  доста мањи него код методе ФЛРА са дефазификацијом,  $\beta = 0,99$ .

#### **5.2.3.4 Утицај промене различите неизвесности у одступању купчеве потражње за обе методе прогнозе потражње купаца и планирања испорука**

У аутомобилској индустрији купац мења потражњу због честих промена у свом плану производње или залиха, што је условљено потражњом аутомобила на тржишту. Да би се боље разумео утицај одступања у купчевој потражњи на планирање производње у предузећу добављача, спроведена су два експеримента:

1. неизвесност у одступању купчеве потражње  $w_i^d$ ,  $i = 1, \dots, 20$  мања је 50% него у основном случају и има троугласту функцију  $(1 - 0,05f_i, 1, 1 + 0,05f_i)$ ,
2. неизвесност у одступању купчеве потражње  $w_i^d$ ,  $i = 1, \dots, 20$  већа је 50% него у основном случају и има троугласту функцију припадности  $(1 - 0,15f_i, 1, 1 + 0,15f_i)$ .

Фази фактор одступања произведене количине робе једнак је за сваки период у периоду планирања  $\tilde{w}_i^p = (0,8, 1, 1, 1)$ ,  $i = 1, \dots, 20$  у обе методе прогнозе потражње. У експериментима дефинисан је минимум залиха у магацину (дани покривености потражње купаца са залихама)  $T^l = 3$  дана и њен максимум  $T^u = 5$ . Машински капацитет је  $C = 23000$  комада производа недељно за пет радних дана максималне производње (са 100% доступности машина). У случају повећане потражње купца добављач је флексибилан да производи и суботом, што повећава капацитет производње. Фази фактор за методу прогнозе купчеве потражње стандардном девијацијом  $\tilde{w}_i^d$  за период планирања  $i = 1, \dots, 20$  коришћен је из табеле 5-43, који се у овом експерименту мења у складу са изведеним експериментом за промену неизвесности.

За спроведене експерименте за прогнозу потражње купаца методом стандардне девијације биће коришћен фази АПП ЛП, који је трансформисан у крисп АПП ЛП модел (поглавље 4.3.4) употребом циљне функције и ограничења 4-27. до 4-45. За експеримент примене фази АПП модела са прогнозом потражње методом ФЛРА са дефазификацијом биће примењена ограничења у формулама 5-33. до 5-36.

### 5.2.3.5 Утицај промене различите неизвесности у одступању купчеве потражње за методу прогнозе потражње и планирања испорука стандардном девијацијом

Резултати добијени за сваки степен изводљивости  $\beta$  у првом експерименту за 50% мању неизвесност представљени су у табели 5-51. Оптимална вредност добијена је за степен изводљивости  $\beta = 0,7$  са највећим степеном задовољења решења  $K_{\bar{c}}(Z(\beta)) = 0,4254$ . Оптималне кумулативне вредности променљивих су  $\sum_{i=1}^{20} P_i = 339281$ ,  $\sum_{i=1}^{20} S S_i = 194565$  и  $\sum_{i=1}^{20} Q_i = 318813$  комада производа. Оптимална вредност циљне функције је 160247 минута. То значи да је укупно захтевано време за све производне и логистичке операције за испоруку робе 8012 минута на недељном нивоу, тј. 1602 минута на дневном нивоу (26,7 сати). Ово је време врло слично времену у основном случају. У табели 5-52. представљени су резултати укупног захтеваног времена на дневном нивоу.

Табела 5-51. Резултати добијени где је 50% мања неизвесност у одступању купчеве потражње за методу прогнозе стандардном девијацијом

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\bar{c}}(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\bar{c}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $z$
	$\sum S S_i$	$\sum P_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
0,5	181141	307746	297162	126772	135964	150846	167190	0,779	0,3893	145962
0,6	187853	323267	307988	132901	142514	158111	175266	0,694	0,4166	153006
<b>0,7</b>	<b>194565</b>	<b>339281</b>	<b>318813</b>	<b>139202</b>	<b>149246</b>	<b>165578</b>	<b>183569</b>	<b>0,608</b>	<b>0,4254</b>	<b>160247</b>
0,8	201277	355812	329639	145684	156169	173257	192110	0,519	0,4150	167695
0,9	207989	372885	340465	152355	163293	181159	200900	0,427	0,3844	175359
0,95	211345	381633	345878	155765	166933	185196	205392	0,380	0,3612	179276
0,99	214030	388736	350208	158530	169884	188469	209034	0,342	0,3389	182451
1	214701	390527	351291	159226	170627	189293	209952	0,546	0,3256	183251

Табела 5-52. Захтевано оптимално просечно време на дневном нивоу за 50% мање неизвесности у одступању купчеве потражње за методу прогнозе стандардном девијацијом

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
22,6	0,6	3,4	26,7

Експеримент за овај случај неизвесности изведен је у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у C++ програмском језику (прилог Д).

У другом експерименту, када је неизвесност 50% већа, солвер фази АПП модела не показује изводљиво решење за степен изводљивости  $\beta > 0,8$  (табела 5-53). Највећи баланс између циљне функције и ограничења је  $K_{\bar{c}}(Z(\beta)) = 0,4094$  који је добијен за најнижи степен изводљивости  $\beta = 0,5$ . Оптималне кумулативне вредности променљивих су  $\sum_{i=1}^{20} P_i = 307746$ ,  $\sum_{i=1}^{20} S S_i = 181141$  и  $\sum_{i=1}^{20} Q_i = 297162$  комада производа. Оптимална добијена вредност циљне функције износи 145692 минута за период планирања 20 недеља. На недељном нивоу то је 7284 минута, а на дневном 1456 минута (24,3 сати). Табела 5-53. представља резултате спроведеног експеримента, док табела 5-54. представља оптимално захтевано време на дневном нивоу.

Табела 5-53. Резултати добијени где је 50% већа неизвесност у одступању купчеве потражње за методу прогнозе стандардном девијацијом

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\tilde{c}}(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\tilde{c}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $z$	
	$\sum Ss_i$	$\sum P_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$				
0,5	181141	307746	297162	126772	135964	150846	167190	0,819	0,4094	145962	
0,6	201277	344693	329639	141792	152055	168699	186995	0,650	0,3898	163247	
0,7	221413	382813	362116	157222	168580	187032	207340	0,476	0,3331	181001	
0,8	248140	422164	394594	173182	185673	206021	228415	0,296	0,2368	199378	
0,9					Нема изводљиво решење						
0,95					Нема изводљиво решење						
0,99					Нема изводљиво решење						
1					Нема изводљиво решење						

Табела 5-54. Захтевано оптимално просечно време на дневном нивоу за 50% већу неизвесност у одступању купчеве потражње за методу прогнозе стандардном девијацијом

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
20,5	0,6	3,2	24,3

Експеримент за овај случај неизвесности изведен је у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у C++ програмском језику (прилог Ђ).

### 5.2.3.6 Утицај промене различите неизвесности у одступању купчеве потражње за методу прогнозе потражње и планирања испорука ФЛРА са дефазификацијом

Резултати добијени за сваки степен изводљивости  $\beta$  у првом експерименту за 50% мању неизвесност представљени су у табели 5-55. Оптимална вредност добијена је за степен изводљивости  $\beta = 0,6$  са највећим степеном задовољења решења  $K_{\tilde{c}}(Z(\beta)) = 0,3493$ . Оптималне кумулативне вредности променљивих су  $\sum_{i=1}^{20} P_i = 376899$ ,  $\sum_{i=1}^{20} Ss_i = 230136$  и  $\sum_{i=1}^{20} Q_i = 370866$  комада производа. Оптимална вредност циљне функције је 179376 минута. То значи да је укупно захтевано време за све производне и логистичке операције за испоруку робе 8969 минута на недељном нивоу, тј. 1794 минута на дневном нивоу (30 сати). У табели 5-56. представљени су резултати укупног захтеваног времена на дневном нивоу.

Експеримент за овај случај неизвесности изведен је у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у C++ програмском језику (прилог Д).

Табела 5-55. Резултати добијени где је 50% мања неизвесност у одступању купчеве потражње за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\tilde{c}}(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\tilde{c}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $z$
	$\sum Ss_i$	$\sum P_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
0,5	219418	355082	353900	147034	171963	192803	193950	0,692	0,3460	169336
<b>0,6</b>	<b>230136</b>	<b>376899</b>	<b>370866</b>	<b>155764</b>	<b>182177</b>	<b>204257</b>	<b>205459</b>	<b>0,582</b>	<b>0,3493</b>	<b>179376</b>
0,7	240854	399410	387831	164737	192674	216028	217286	0,469	0,3286	189693
0,8	255231	422646	404797	174018	203531	228218	229538	0,353	0,2821	200373
0,9	283467	446644	421762	183774	214936	241077	242488	0,230	0,2067	211636
0,95	Није изводљиво решење									
0,99	Није изводљиво решење									
1	Није изводљиво решење									

Табела 5-56. Захтевано оптимално просечно време на дневном нивоу за 50% мање неизвесности у одступању купчеве потражње за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
25,1	0,8	4	29,9

У другом експерименту када је неизвесност 50% већа, солвер фази АПП модела дао је изводљиво решење само за степен изводљивости  $\beta = 0,5$  (табела 5-57). У овом случају баланс између циљне функције и ограничења је  $K_{\tilde{c}}(Z(\beta)) = 0,1866$ . Кумулативне вредности променљивих су  $\sum_{i=1}^{20} P_i = 355082$ ,  $\sum_{i=1}^{20} Ss_i = 219418$  и  $\sum_{i=1}^{20} Q_i = 353900$  комада производа. Добијена вредност циљне функције износи 169336 минута за период планирања од 20 недеља. На недељном нивоу то је 8467 минута, а на дневном 1693 минуте (28,2 сата). Табела 5-57. представља резултате спроведеног експеримента, док табела 5-58. представља оптимално захтевано просечно време на дневном нивоу.

Табела 5-57. Резултати добијени где је 50% већа неизвесност у одступању купчеве потражње за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\tilde{c}}(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\tilde{c}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $z$
	$\sum Ss_i$	$\sum P_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
<b>0,5</b>	<b>219418</b>	<b>355082</b>	<b>353900</b>	<b>147034</b>	<b>171963</b>	<b>192803</b>	<b>193950</b>	<b>0,373</b>	<b>0,1866</b>	<b>169336</b>
0,6	Нема изводљиво решење									
0,7	Нема изводљиво решење									
0,8	Нема изводљиво решење									
0,9	Нема изводљиво решење									
0,95	Нема изводљиво решење									
0,99	Нема изводљиво решење									
1	Нема изводљиво решење									

Табела 5-58. Захтевано оптимално просечно време на дневном нивоу за 50% већу неизвесност у одступању купчеве потражње за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
23,7	0,7	3,8	28,2

Експеримент за овај случај неизвесности изведен је у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у С++ програмском језику (прилог Ђ).

За експерименте са 50% мање неизвесности у одступању купчеве потражње мања вредност захтеваног просечног времена добијена је за методу прогнозе стандардном девијацијом (табеле 5-52. и 5-56). Просечно захтевано дневно време је 26,7 h/дан у односу на 29,9 h/дан колико је добијено ФЛРА са дефазификацијом. Треба да се нагласи да је степен задовољења код методе стандардном девијацијом од  $\beta = 0,7$  доста мањи него код методе ФЛРА са дефазификацијом,  $\beta = 0,6$ .

За експерименте са 50% већом неизвесношћу у одступању купчеве потражње мања вредност захтеваног просечног времена добијена је за методу прогнозе стандардном девијацијом (табеле 5-54. и 5-58). Просечно захтевано дневно време је 24,3 h/дан у односу на 28,2 h/дан, колико је добијено ФЛРА са дефазификацијом. Треба да се нагласи да је степен задовољења исти за обе методе,  $\beta = 0,5$ .

#### 5.2.4 Различита стратегија у висини сигурносних залиха за обе методе прогнозе потражње купаца

У овом делу студије случаја анализиран је утицај различитих стратегија висине сигурносних залиха на планирање производње и планирање испорука. Дани у залихама (енгл. Days of Inventory (DOI)) су типичан метрички параметар који дефинише која количина робе треба да се има на залихама у магацину и рачунају се као број дана покривености испоруке робе у односу на потражњу купаца. Наравно, DOI има изузетан значај за финансијско пословање предузећа.

Зато су изведена два експеримента разматрајући различите нивое сигурносних залиха:

1. сигурносне залихе између 2 и 4 дана,  $T^l = 2$  и  $T^u = 4$  дана,
2. сигурносне залихе између 1 и 3 дана,  $T^l = 1$  и  $T^u = 3$  дана.

Фази фактор одступања произведене количине робе једнак је за сваку недељу у периоду планирања  $\tilde{w}_i^p = (0,8, 1, 1, 1)$ ,  $i = 1, \dots, 20$  за оба експеримента. Фази фактор за методу прогнозе купчеве потражње стандардном девијацијом  $\tilde{w}_i^d$  за период планирања  $i = 1, \dots, 20$  је коришћен из табеле 5-34.

Треба да се нагласи да је у експерименту основни случај ниво сигурносних залиха укључен у калкулацију између 3 и 5 дана, односно  $T^l = 3$  и  $T^l = 5$  дана.

За спроведене експерименте за прогнозу потражње купаца методом стандардне девијације биће коришћен фази АПП ЛП који је трансформисан у крисп АПП ЛП модел (поглавље 4.3.4) употребом циљне функције и ограничења 4-27. до 4-45. За експеримент

примене фази АПП модела са прогнозом потражње методом ФЛРА са дефазификацијом биће примењена ограничења у формулама 5-33. до 5-36.

#### 5.2.4.1 Различита стратегија у висини сигурносних залиха за методу прогнозе потражње и планирања испорука стандардном девијацијом

У првом експерименту у коме су залихе између 2 и 4 дана покривености купчеве потражње за метод прогнозе потражње стандардном девијацијом добијени подаци употребом солвера су представљени у табели 5-59. Оптимално решење добијено је за степен изводљивости  $\beta = 0,6$  са степеном задовољења решења,  $K_{\bar{c}}(Z(\beta)) = 0,4408$ . Оптимална кумулативна вредност променљивих је  $\sum_{i=1}^{20} P_i = 335687$ ,  $\sum_{i=1}^{20} Ss_i = 130802$  и  $\sum_{i=1}^{20} Q_i = 318813$  комада производа.

Експеримент за овај случај неизвесности изведен је у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у C++ програмском језику (прилог Е).

Табела 5-59. Резултати добијени када је ниво сигурносних залиха између 2 и 4 дана за методу прогнозе стандардном девијацијом

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\bar{c}}(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\bar{c}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $z$
	$\sum Ss_i$	$\sum P_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
0,5	121709	309204	297162	126391	135493	150077	166375	0,841	0,4204	145357
<b>0,6</b>	<b>130802</b>	<b>335687</b>	<b>318813</b>	<b>136987</b>	<b>146832</b>	<b>162638</b>	<b>180322</b>	<b>0,735</b>	<b>0,4408</b>	<b>157534</b>
0,7	139896	363010	340465	147878	158482	175544	194655	0,626	0,4380	170047
0,8	148990	391215	362116	159077	170458	188811	209394	0,514	0,4110	182913
0,9	159175	420345	383768	170616	182795	202482	224586	0,398	0,3585	196170
0,95	170956	435271	394594	176612	189210	209620	232515	0,338	0,3213	203077
0,99	182432	447391	403254	181502	194444	215451	238991	0,289	0,2862	208716
1	185324	450446	405419	182734	195762	216919	240623	0,277	0,2767	210136

Може да се закључи да уколико се држи нижи ниво сигурносних залиха између 2 и 4 дана, захтевано време за све производне и логистичке операције је 157534 минута, односно на недељном нивоу 7868 минута, 1573 минута на дневном нивоу (26,2 h/дану). У табели 5-60. је представљено оптимално захтевано време на дневном нивоу.

Табела 5-60. Оптимално захтевано просечно време на дневном нивоу за ниво сигурносних залиха између 2 и 4 дана за методу прогнозе стандардном девијацијом

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
22,4	0,4	3,4	26,2

У другом експерименту у коме је циљ за ниво сигурносних залиха између 1 и 3 дана, оптимално решење добијено је за исти степен изводљивости,  $\beta = 0,6$  као у првом експерименту са незнатно вишим степеном задовољења решења,  $K_{\bar{c}}(Z(\beta)) = 0,4417$ . Оптимална кумулативна вредност променљивих је  $\sum_{i=1}^{20} P_i = 337394$ ,  $\sum_{i=1}^{20} Ss_i = 68274$  и  $\sum_{i=1}^{20} Q_i = 318813$  комада производа. У табели 5-61. представљени су добијени резултати. Може да се закључи да уколико се држи нижи ниво сигурносних залиха, у првом

експерименту 130802 комада производа и у другом 68274 комада производа, производња се повећава са 335687 комада производа на 337394 комада производа, респективно.

Експеримент за овај случај неизвесности изведен је у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у C++ програмском језику (прилог Ж).

Табела 5-61. Добијени резултати за ниво сигурносних залиха између 1 и 3 дана за методу прогнозе стандардном девијацијом

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\tilde{c}}(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\tilde{c}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $z$
	$\sum Ss_i$	$\sum P_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
0,5	62644	310663	297162	126015	135028	149317	165569	0,843	0,4213	144759
<b>0,6</b>	<b>68274</b>	<b>337394</b>	<b>318813</b>	<b>136647</b>	<b>146400</b>	<b>161900</b>	<b>179544</b>	<b>0,736</b>	<b>0,4417</b>	<b>156966</b>
0,7	73903	364973	340465	147575	158086	174831	193908	0,627	0,4387	169513
0,8	79960	393443	362116	158821	170109	188137	208693	0,514	0,4114	182423
0,9	89710	422846	383768	170449	182539	201910	223999	0,398	0,3580	195781
0,95	101438	437912	394594	176493	189006	209104	231991	0,337	0,3203	202743
0,99	111391	450145	403254	181401	194255	214946	238482	0,288	0,2850	208396
1	113886	453229	405419	182636	195577	216417	240117	0,275	0,2755	209820

Добијена оптимална вредност циљне функције веома је слична вредности у претходном експерименту, 156966 минута за период планирања од 20 недеља. На недељном нивоу просечно захтевано време за производне и магацинске операције готово је исто, 7848 минута, што је на дневном нивоу 1569 минута (26,2 сати). Табела 5-62. представља оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу. Може да се закључи да држање нижих залиха узрокује већу производњу и захтева веће производно време, док је време за складиштење сигурносних залиха смањено.

Табела 5-62. Оптимално захтевано просечно време на дневном нивоу када су сигурносне залихе између 1 и 3 дана за методу прогнозе стандардном девијацијом

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
22,5	0,2	3,5	26,2

Преглед оптималног захтеваног времена за сваку недељу у периоду планирања, за оба експеримента када је ниво сигурносних залиха између 1 и 3 дана и 2 и 4 дана, представљен је у табели 5-63. Највећа разлика је у недељи 15, у којој је просечно захтевано време за све операције 4,7 сати и дуже уколико су сигурносне залихе веће. Међутим, недеља 16 показује да је захтевано време дуже ако су залихе између 1 и 3 дана. Може да се објасни утицајем фактора одступања у купчевој потражњи, који је врло расплут  $\tilde{w}_{16}^d = (0,55,1,1,45)$ . Затим, поредећи укупно захтевано просечно време за цео период планирања од 20 недеља, може да се закључи да је просечно захтевано време дуже за 1,9 сати дневно уколико су веће сигурносне залихе.



Табела 5-63. Оптимално просечно захтевано дневно време за сваку недељу у периоду планирања за степен изводљивости  $\beta = 0,6$

Недеља, $l$	Вредност циљне функције (сати) за сигурносне залихе између 1 и 3 дана	Вредност циљне функције (сати) за сигурносне залихе између 2 и 4 дана	Разлика између вредности циљне функције (сати)
1	12,6	16,4	-3,8
2	34,0	33,6	0,4
3	31,1	31,8	-0,7
4	32,6	32,0	0,5
5	29,9	31,4	-1,5
6	34,5	33,3	1,2
7	27,3	27,7	-0,3
8	27,5	27,3	0,2
9	26,1	26,9	-0,8
10	27,3	26,0	1,3
11	20,7	21,6	-0,9
12	23,6	23,4	0,3
13	22,3	23,4	-1,1
14	24,5	22,5	2,0
15	18,3	23,0	-4,7
16	34,6	28,9	5,7
17	9,5	13,4	-3,9
18	26,9	25,9	1,1
19	23,8	23,6	0,1
20	36,1	33,0	3,1
$\Sigma$	523	525	-1,9

#### 5.2.4.2 Различита стратегија у висини сигурносних залиха за методу прогнозе потражње и планирања испорука ФЛРА са дефазификацијом

За ову методу прогнозе потражње купаца и планирања испорука, као и код прве методе, изведена су два експеримента разматрајући различите нивое сигурносних залиха:

1. Сигурносне залихе између 2 и 4 дана,  $T^l = 2$  и  $T^u = 4$  дана,
2. Сигурносне залихе између 1 и 3 дана,  $T^l = 1$  и  $T^u = 3$  дана.

Фази фактор одступања произведене количине робе једнак је за сваку недељу у периоду планирања  $\tilde{w}_i^p = (0,8, 1, 1, 1), = 1, \dots, 20$  за оба експеримента.

У првом експерименту оптимално решење добијено је за степен изводљивости  $\beta = 0,99$  при чему је достигнут степен задовољења решења циљне функције и ограничења  $K_{\tilde{c}}(Z(\beta)) = 0,4678$ . Оптималне кумулативне вредности добијених променљивих су  $\sum_{i=1}^{20} P_i = 387958$ ,  $\sum_{i=1}^{20} S_i = 148638$  и  $\sum_{i=1}^{20} Q_i = 353900$  комада производа. Оптимална вредност циљне функције је 181071 минута за период планирања од 20 недеља. На недељном нивоу захтевано просечно време за производне и логистичке операције је 9053 минута, док је на дневном нивоу 1811 минута (30,2 сати). Табеле 5-64.

и 5-65. приказују добијене резултате и просечно захтевано време на дневном нивоу за све операције, респективно.

Експеримент за овај случај неизвесности изведен је у програмском пакету, при чему је исписан код у C++ програмском језику (прилог Е).

Табела 5-64. Резултати добијени када је ниво сигурносних залиха између 2 и 4 дана за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\tilde{G}}(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\tilde{G}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $Z$
	$\sum Ss_i$	$\sum P_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
0,5	148638	358712	353900	147243	157900	174910	193850	0,648	0,3241	169373
0,6	148638	364317	353900	149205	159974	177208	196429	0,611	0,3668	171614
0,7	148638	370099	353900	151229	162113	179579	199089	0,573	0,4013	173928
0,8	148638	376069	353900	153318	164322	182026	201835	0,534	0,4271	176315
0,9	148638	382234	353900	155476	166603	184554	204670	0,493	0,4440	178781
0,95	148638	385393	353900	156582	167772	185849	206124	0,473	0,4489	180045
<b>0,99</b>	<b>148638</b>	<b>387958</b>	<b>353900</b>	<b>156582</b>	<b>167772</b>	<b>185849</b>	<b>206124</b>	<b>0,473</b>	<b>0,4678</b>	<b>181071</b>
1	148638	388604	353900	157706	168960	187166	207601	0,451	0,4514	181330

Табела 5-65. Оптимално захтевано просечно време на дневном нивоу за ниво сигурносних залиха између 2 и 4 дана за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
25,9	0,5	3,8	30,2

У другом експерименту у коме је циљ за ниво сигурносних залиха између 1 и 3 дана, оптимално решење добијено је за исти степен изводљивости  $\beta = 0,99$  са степеном задовољења решења,  $K_{\tilde{G}}(Z(\beta)) = 0,4675$ . Оптимална кумулативна вредност променљивих  $\sum_{i=1}^{20} P_i = 391884$ ,  $\sum_{i=1}^{20} Ss_i = 79014$  и  $\sum_{i=1}^{20} Q_i = 353900$  комада производа. У табели 5-66. представљени су добијени резултати. Може да се закључи да уколико се држи нижи ниво сигурносних залиха, у првом експерименту 148638 комада производа и у другом 79014 комада производа, производња се повећава са 387958 комада производа на 391884 комада производа, респективно.

Табела 5-66. Добијени резултати за ниво сигурносних залиха између 1 и 3 дана за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом

Степен изводљивости, $\beta$	Променљиве ЛП			Вредност фази циљне функције				Функција толеранције, $\mu_{\tilde{G}}(z)$	Степен задовољења решења, $K_{\tilde{G}}(Z(\beta))$	Вредност циљне функције, $Z$
	$\sum Ss_i$	$\sum P_i$	$\sum Q_i$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$			
0,5	79014	362342	353900	147469	158059	174796	193779	0,650	0,3251	169432
0,6	79014	368003	353900	149451	160154	177118	196384	0,613	0,3677	171697
0,7	79014	373844	353900	151495	162315	179513	199071	0,574	0,4020	174033
0,8	79014	379874	353900	153606	164546	181985	201844	0,534	0,4276	176445
0,9	79014	386102	353900	155785	166850	184538	204709	0,493	0,4440	178936
0,95	79014	389293	353900	156902	168031	185846	206177	0,472	0,4486	180212
<b>0,99</b>	<b>79014</b>	<b>391884</b>	<b>353900</b>	<b>156902</b>	<b>168031</b>	<b>185846</b>	<b>206177</b>	<b>0,472</b>	<b>0,4675</b>	<b>181249</b>
1	79014	392537	353900	158038	169231	187176	207669	0,451	0,4508	181510

Експеримент за овај случај неизвесности изведен је у програмском пакету *Visual Studio 2015*, при чему је исписан код у C++ програмском језику (прилог Ж).

Добијена оптимална вредност циљне функције веома је слична вредности у претходном експерименту, 181249 минута за период планирања од 20 недеља. На недељном нивоу просечно захтевано време за производне и магацинске операције готово је исто, 9062 минута, што је на дневном нивоу 1812 минута (30,2 сата). Табела 5-67. представља оптимално просечно захтевано време на дневном нивоу. Може да се закључи да држање нижих залиха узрокује већу производњу и захтева веће производно време, док је време за складиштење сигурносних залиха смањено. У оба експеримента укупно захтевано време исто је.

Табела 5-67. Оптимално захтевано просечно време на дневном нивоу када су сигурносне залихе између 1 и 3 дана за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом

Време производње (сати)	Време складиштења сигурносних залиха (сати)	Време припреме испоруке (сати)	Укупно време (сати)
26,1	0,3	3,8	30,2

За експерименте за ниво сигурносних залиха између 2 и 4 дана мања вредност захтеваног просечног времена добијена је за методу прогнозе стандардном девијацијом (табеле 5-60. и 5-65). Просечно захтевано дневно време је 26,2 h/дан у односу на 30,2 h/дан колико је добијено ФЛРА са дефазификацијом. Треба да се нагласи да је степен задовољења код методе стандардном девијацијом од  $\beta = 0,6$  доста мањи него код методе ФЛРА са дефазификацијом,  $\beta = 0,99$ .

За експерименте за ниво сигурносних залиха између 1 и 3 дана мања вредност захтеваног просечног времена добијена је за методу прогнозе стандардном девијацијом (табеле 5-62. и 5-67). Просечно захтевано дневно време је 26,2 h/дан у односу на 30,2 h/дан колико је добијено ФЛРА са дефазификацијом. Треба да се нагласи да је степен задовољења код методе стандардном девијацијом од  $\beta = 0,6$  доста мањи него код методе ФЛРА са дефазификацијом,  $\beta = 0,99$ .

### 5.2.5 Поређење резултата експеримената са реалним стањем у предузећу другог добављача

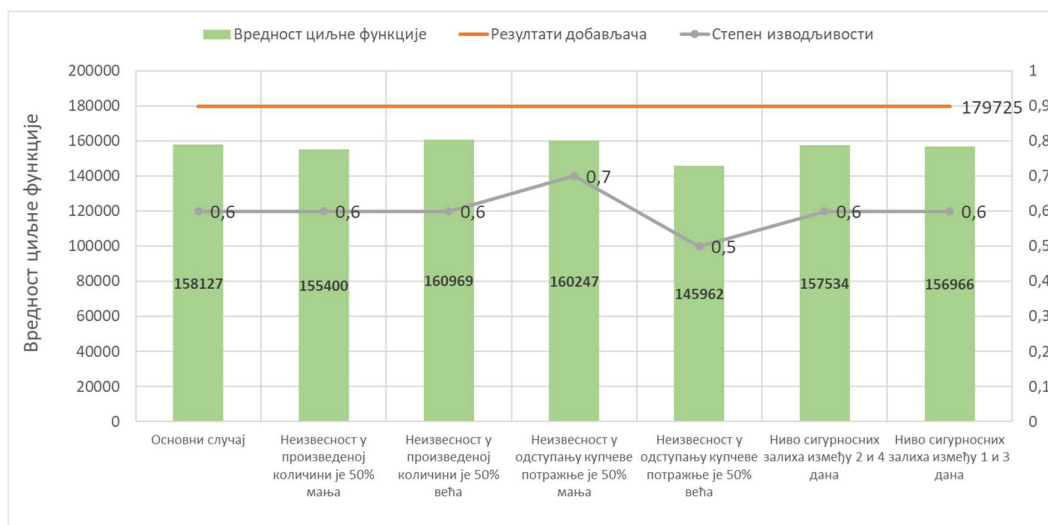
Поређење резултата експеримената са стварним подацима у предузећу другог добављача извршено је у два случаја. У првом случају резултати експеримената су коришћени, као што је представљено у поглављима 5.2.2.1 – 5.2.2.2. У другом случају извршено је поређење са комбиновањем добијених резултата експеримената и реалних података у предузећу, да би се анализирао утицај плана производње добијен у експериментима ( $P_i, i = 1, \dots, 20$ ) на реалну испоручену количину и залихе у предузећу за планирани период.

Стварни подаци, произведена количина робе  $P_i$ , количина сигурносне залихе робе  $Ss_i$  и отпремљена количина робе купцима  $Q_i$ , за сваку недељу у периоду планирања  $i = 1, \dots, 20$  забележени су у предузећу другог добављача (табела 5-68). У првом случају они су упоређени са резултатима фази АПП модела за сваки експеримент за оптималне вредности циљне функције (слика 5-20).

Табела 5-68. Забележени подаци у предузећу другог добављача

Недеља, $i$	Ниво сигурносних залиха, $SS_i$	Поизведена количина робе, $P_i$	Испоручена количина робе купцу, $Q_i$
1	29078	9300	6280
2	32098	16891	21320
3	27669	22521	28935
4	21255	20000	21380
5	19875	21090	26180
6	14785	13740	16370
7	12155	22520	16110
8	18565	23527	20640
9	21452	19733	20740
10	20445	20530	26770
11	12205	19680	17960
12	13925	16690	20900
13	9715	18340	6260
14	21795	13680	18060
15	17415	18280	23180
16	12515	21440	27730
17	6225	12250	6930
18	11545	19350	22650
19	8245	22050	23660
20	6635	22550	16410
$\Sigma$	337597	374162	388465

Укупно време потребно за ток материјала код отпреме робе купцу, као што је време производње, време складиштења сигурносних залиха и време припреме отпреме робе купцу, забележени су у предузећу добављача и упоређени са резултатима свих изведених експеримената (слике 5-20. и 5-21).

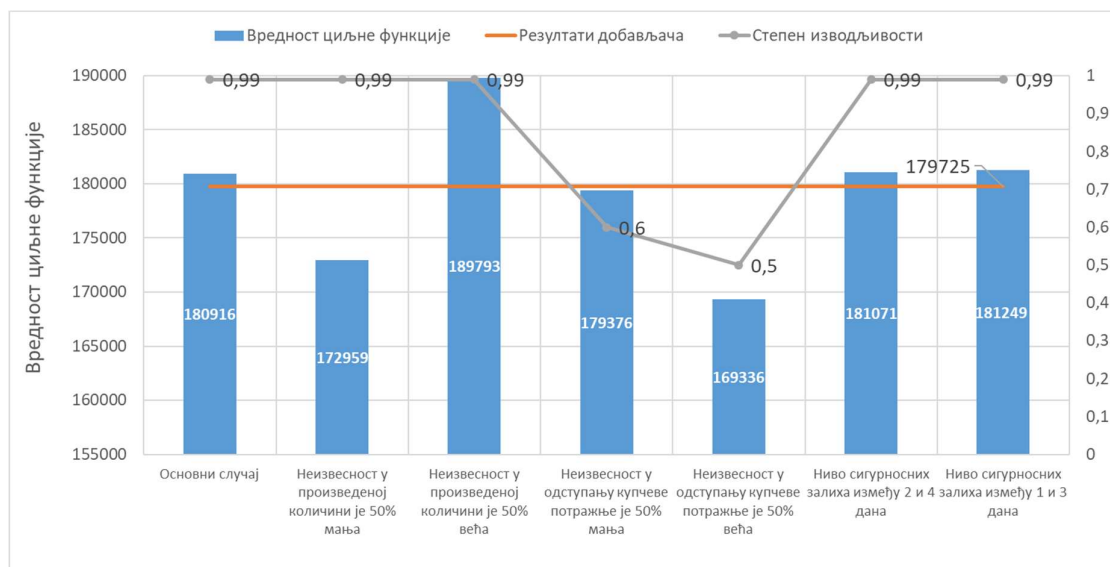


Слика 5-20. Поређење времена забележеног у предузећу и резултата експеримената фази АПП модела са методом прогнозе потражње купаца стандардном девијацијом

На слици 5-20. упоређени су резултати експеримената фази АПП модела са методом прогнозе потражње купаца и планирања испорука методом стандардне девијације. На слици 5-21. су упоређени резултати експеримената фази АПП модела са методом ФЛРА са дефазификацијом. Укупно време забележено у фабрици добављача је 179725 минута и на сликама је представљено као континуална линија наранџасте боје. Оптимална вредност циљне функције за сваки од експеримената представљена је зеленим стубићима на слици 5-20. и плавим стубићима на слици 5-21.

Са представљеног графика на слици 5-20. може да се закључи да је укупно време добијено у сваком експерименту краће него што је забележено у пракси. Приметно је да је најкраће време добијено за случај када је неизвесност у одступању купчеве потражње 50% већа за степен изводљивости  $\beta = 0,5$  (145962 минута). Солвер за  $\beta > 0,8$  (табела 5-53) није показао изводљиво решење и као оптимално решење је узето за  $\beta = 0,5$  према највећем степену задовољења решења  $K_{\tilde{c}}(Z(\beta)) = 0,4254$ . Ово решење не може се узети као поуздано. Циљне функције код осталих експеримената показују уједначене вредности. Експеримент са најмањом циљном функцијом за неизвесност је у произведеној количини која је мања 50% у односу на основни случај (155400 минута) са степеном изводљивости  $\beta = 0,6$ .

На графику са слике 5-21. уочљиви су различити резултати експеримената фази АПП модела са методом прогнозе потражње и планирања испорука ФЛРА са дефазификацијом. Најнижу вредност показује циљна функција за случај када је неизвесност у одступању купчеве потражње 50% већа за степен изводљивости  $\beta = 0,5$  (169336 минута). Слично, као у горе наведеном објашњењу солвер није показао изводљиво решење за  $\beta > 0,5$  (табела 5-57). Експеримент са најмањом циљном функцијом (172959 минута) неизвесност је у произведеној количини која је мања 50% у односу на основни случај са степеном задовољења решења  $\beta = 0,99$ .



Слика 5-21. Поређење времена забележеног у предузећу и резултата експеримената фази АПП модела са методом прогнозе потражње купаца ФЛРА са дефазификацијом

### 5.2.5.1 Поређење резултата плана производње и плана испорука

Додатна анализа поређења података из предузећа и резултата добијених у фази АПП моделу извршена је за план производње. Практично, план производње генерисан у фази АПП моделу за сваки од експеримената укључен је у план испорука реализован у предузећу за исти разматран период.

Анализа је конципирана на следећи начин: произведена количина робе  $P_i$  за  $i = 1, \dots, 20$ , и почетне сигурносне залихе  $Ss_i$ ,  $i = 1$  узете су као резултат из фази АПП модела, док је отпремљена количина робе купцима  $Q_i$  узета као реална испоручена количина робе забележена у предузећу за исти период (добија ознаку  $Q_i^*$ ). Ниво сигурносних залиха  $Ss_i$  за остале недеље у периоду планирања  $i = 2, \dots, 20$  израчунат је коришћењем формуле:

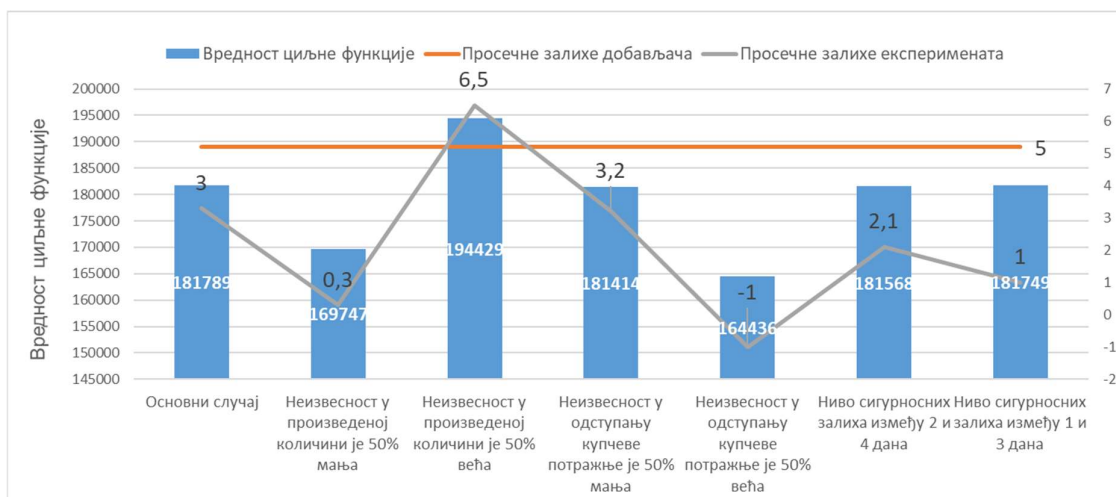
$$Ss_{i+1} = Ss_i + P_i - Q_i^*, i = 1, \dots, 20. \quad (5-48)$$

Поређење резултата урађено је за решење фази АПП модела за обе методе прогнозе купчеве потражње (слике 5-22. и 5-23).



Слика 5-22. Поређење времена реализованог у предузећу и резултата плана производње за методу прогнозе стандардном девијацијом

Са слике 5-22. може да се закључи да је укупно време добијено за план производње из сваког експеримента за методу прогнозе стандардном девијацијом краће него што је реализовано у предузећу. Међутим, просечан ниво залиха негативан је за сваки експеримент, што значи да план залиха не може да покрије купчеву потражњу и испуни план испорука (100% ниво услуге). Са оваквим планом залиха угрозила би се купчева потражња и изазвали велики трошкови у пеналима од стране купаца. Пословање предузећа не може да буде рентабилно на овај начин. Резултати показују да планирање производње, испорука и залиха предложеним фази АПП моделом са прогнозом потражње купаца стандардном девијацијом није валидно.



Слика 5-23. Поређење времена реализованог у предузећу и резултата плана производње за методу прогнозе ФЛРА са дефазификацијом

На слици 5-23. где је извршено поређење резултата експеримената фази АПП модела са прогнозом потражње и планирања испорука методом ФЛРА са дефазификацијом; негативне просечне залихе су код експеримента неизвесност у одступању купчеве потражње је 50% већа. Овај експеримент не може да се узме као валидан због разлога који су објашњени код претходне методе прогнозе (план залиха не може да покрије купчеву потражњу и испуни план испорука).

Циљна функција има различите вредности за сваки од експеримената у анализирана два случаја. Најбољи резултат показује за експеримент када је неизвесност у произведеној количини 50% мања са најнижом вредношћу циљне функције. Најгори резултат у експерименту у коме је неизвесност у произведеној количини 50% већа је са највећом вредношћу циљне функције. Остали експерименти показују вредности циљне функције које су приближно једнаке практичним резултатима.

У следећем кораку потребно је да се анализира ниво залиха у сваком експерименту и у предузећу добављача. Ниво залиха у предузећу добављача је 5 дана. Изведени експерименти показују различите просечне залихе. У сваком од изведених експеримената ниво залиха нижи је него у предузећу добављача, осим за експеримент неизвесност у произведеној количини је 50% већа.

Овим је доказано да предложени фази АПП модел са прогнозом потражње купаца ФЛРА са дефазификацијом има боље планирање залиха него што је реализовано у предузећу са максималним нивоом услуге без кашњења испорука.

### 5.2.5.2 Поређење резултата експеримената са стратегијама планирања производње у предузећу

Као и код првог добављача анализирани су две основне стратегије у планирању производње и залиха које се спроводе у пракси:

1. Планирање производње са максималним искоришћењем капацитета,
2. Планирање производње са циљаним нивоом сигурносних залиха.

Прва стратегија добра је са аспекта искоришћења доступног броја запослених, доступног машинског капацитета, оптималног искоришћења енергената, уколико је старт производње захтеван због потрошње енергената, висине шкарта уколико је старт производње захтеван због великог шкарта на почетку итд. Ова стратегија често је негативна због генерисања непотребних залиха робе, посебно у периодима када је купчева потражња смањена. Друга стратегија ограничава рад са максималним капацитетом, посебно када је купчева потражња смањена. То често подразумева рад краћи од пет радних дана недељно, уколико је потражња купаца смањена. Негативан утицај ове стратегије је на потрошњу енергената, уколико је старт производње захтеван због потрошње енергената и висине шкарта, уколико је старт производње захтеван због великог шкарта на почетку.

Тестирање је извршено у предузећу добављача за обе стратегије и поређење је извршено са реализованим планом производње у предузећу и резултатом плана производње експеримента за основни случај из фази АПП модела са методом прогнозе ФЛРА са дефазификацијом (поглавље 5.2.2.2, табела 5-40). Претпостављено је да је вредност сигурносних залиха у првој недељи,  $Ss_1 = 3800$  комада производа за обе стратегије. Вредност залиха у првој недељи код резултата експеримента за основни случај узет је из табеле 5-42,  $Ss_1 = 17695$  комада производа.

Табела 5-69. Поређење са две стратегије планирања производње

Недеља, $i$	П.п. са искоришћењем макс.капацитета ( $C=23000$ ком/нед)			П.п. са циљаним нивоом сигурносних залиха (3 дана покривености)			Резултати експеримента за основни случај			Реализован план производње у предузећу		
	$Ss_i$	$P_i$	$Q_i$	$Ss_i$	$P_i$	$Q_i$	$Ss_i$	$P_i$	$Q_i$	$Ss_i$	$P_i$	$Q_i$
1	3800	23000	6280	3800	15272	6280	17695	11797	6280	29078	9300	6280
2	20520	23000	21320	12792	25889	21320	23212	19661	21320	32098	16891	21320
3	22200	23000	28935	17361	24402	28935	21553	19661	28935	27669	22521	28935
4	16265	23000	21380	12828	24260	21380	12279	19661	21380	21255	20000	21380
5	17885	23000	26180	15708	20294	26180	10560	19661	26180	19875	21090	26180
6	14705	23000	16370	9822	16214	16370	4041	19661	16370	14785	13740	16370
7	21335	23000	16110	9666	18828	16110	7332	19661	16110	12155	22520	16110
8	28225	23000	20640	12384	20700	20640	10883	19661	20640	18565	23527	20640
9	30585	23000	20740	12444	24358	20740	9904	19661	20740	21452	19733	20740
10	32845	23000	26770	16062	21484	26770	8826	19661	26770	20445	20530	26770
11	29075	23000	17960	10776	19724	17960	1717	19661	17960	12205	19680	17960
12	34115	23000	20900	12540	12116	20900	3418	19661	20900	13925	16690	20900
13	36215	23000	6260	3756	13340	6260	2179	19661	6260	9715	18340	6260
14	52955	23000	18060	10836	21132	18060	15580	19661	18060	21795	13680	18060
15	57895	23000	23180	13908	25910	23180	17181	19661	23180	17415	18280	23180
16	57715	23000	27730	16638	15250	27730	13662	19661	27730	12515	21440	27730
17	52985	23000	6930	4158	16362	6930	5593	19661	6930	6225	12250	6930
18	69055	23000	22650	13590	23256	22650	18324	19661	22650	11545	19350	22650
19	69405	23000	23660	14196	19310	23660	15336	19661	23660	8245	22050	23660
20	68745	23000	16410	9846	18564	16410	11337	18976	16410	6635	22550	16410
$\Sigma$	736525	460000	388465	233111	617744	388465	230612	384672	388465	337597	374162	388465

Ознака п.п. у табели 5-69. је „планирање производње“.

У табели 5-69. представљен је резултат за стратегију планирања производње са максималним искоришћењем капацитета, где је коришћен машински капацитет  $C = 23000$  ком/недељно (пет радних дана недељно). За стратегију циљаног нивоа залиха коришћена је покривеност 3 дана купчеве потражње. За сваку стратегију и практичне податке испоручена количина робе је иста,  $\Sigma Q_i = 388465$  комада производа за период од 20 недеља. Количина робе у сигурносним залихама и произведена количина робе



разликују се. Сигурносне залихе и произведена количина робе највеће су код стратегије са максималним искоришћењем капацитета, кумулативно 736525 и 460000 комада производа, респективно. Сигурносне залихе најмање су код експеримента основни случај, 230612 комада производа.

Вредност циљне функције (табела 5-70), односно укупно време потребно за производне и логистичке операције код отпреме робе купцима, највеће је и најнеповољније код стратегије са максималним искоришћењем капацитета 222038 минута за 20 недеља (11101 минут недељно, 2220 минута дневно, 37 сати дневно). Најмање је код реализованог плана производње у предузећу 179725 минута за 20 недеља (8986 минута недељно, 1797 минута дневно, 30 сати дневно).

Резултат основног експеримента по вредности циљне функције је приближно једнак најбољем решењу (181789 минута), односно резултату из праксе, док је по вредности нивоа залиха (3,3 дана просечне залихе) такође приближно једнак најбољем решењу код планирања производње са циљаним нивоом сигурносних залиха. Резултати модела показују оптималне вредности и за укупно време и за план залиха. Стратегије у предузећу и реализован план производње показују оптималне резултате само у свом домену. Може да се закључи да су резултати модела оптимални и валидни са аспекта планирања производње и залиха у пракси.

Табела 5-70. Вредност циљне функције и покривености залиха

П.п. са искоришћењем макс. капацитета (C=23000 ком/нед)		П.п. са циљаним нивоом сигурносних залиха (3 дана покривености)		Резултати експеримента за основни случај, $\beta = 0,99$		Реализован план производње у предузећу	
Циљна функција	Покривеност залиха	Циљна функција	Покривеност залиха	Циљна функција	Покривеност залиха	Циљна функција	Покривеност залиха
222038	11,1	275068	3	181789	3,3	179725	5,2

Ознака п.п. у табели 5-70. је „планирање производње“.

## 6. Значај предложеног модела АПП за науку и индустрију

Кроз развој фази АПП модела и модела ФЛРА са дефазификацијом и њихове практичне примене у предузећу два добављача идентификован је допринос како за науку, тако и за индустрију.

Планирање испорука и прогноза купчеве потражње моделирана је са неизвесношћу у одступању купчеве потражње. Овим је потврђена главна хипотеза 1. Примењен математички модел хибридни је модел фази линеарна регресиона анализа са дефазификацијом методом пондерисаних средина. Тиме је потврђена главна хипотеза 2. Тестирање модела на практичним подацима у предузећу два добављача и поређење са другим статистичким методама примењеним на истим подацима показало је велику прецизност предложеног модела и боље предвиђање у односу на класичне статистичке методе. Овим је потврђена главна хипотеза 3. Моделирање прогнозе потражње на историјским подацима реализованих испорука у предузећу добављача показало је у дисертацији да може да се користи у генерисању плана испорука у будућем периоду. Овим је потврђења помоћна хипотеза 1.

Планирање производње у предузећу добављача у аутоиндустрији моделирано је са неизвесношћу у одступању купчеве потражње, количине произведених делова, времена производње, времена припреме испоруке робе купцима и времена складиштења сигурносних залиха. Овим је потврђена главна хипотеза 4. Предложени фази АПП модел хибридни је модел фази логике и линеарног програмирања примењен у агрегираном планирању производње. У моделу је употребљена фази линеарна оптимизација и потврђена је главна хипотеза 5. Изведено је низ експеримената са предложеним фази АПП моделом и резултати су упоређени са подацима из праксе. Резултати експеримената упоредиви су са подацима забележеним у предузећу добављача чиме је потврђена помоћна хипотеза 4. Одређени експерименти у дисертацији дали су боље резултате него што је то у пракси и тиме је потврђена главна хипотеза 6. Изведени експерименти укључују симулацију промене неизвесних параметара, као што је одступање у купчевој потражњи, произведена количина робе и различит ниво сигурносних залиха. У дисертацији доказано је да њихова промена може да се симулира, чиме су потврђене помоћне хипотезе 2 и 3.

Предложени фази АПП модел је робустан и укључује три теоријске методе које су прилагођене:

- 1) фази оптимизациони метод која трансформише фази АПП ЛП модел у крисп АПП ЛП модел, тако да балансира достигнут степен изводљивости ограничења и степен задовољења решења,
- 2) метод генерисања фази скупа произведених комада у јединици времена измерених у предузећу,
- 3) нов дефазификациони модел за фази скупове са по деловима линеарном функцијом припадности (енгл. *piece-wise*).

Предложени модел ФЛРА са дефазификацијом за прогнозу потражње купаца и планирања испорука такође је робустан и укључује:

- 1) теоријски модел фази линеарне регресионе анализе,
- 2) дискретизацију на фази скупове за сваку недељу и генерисање континуалног фази скупа,
- 3) дефазификацију фази скупа методом пондерисаних средина.

Примена фази АПП модела са моделом ФЛРА са дефазификацијом успешно је валидирана употребом стварних података забележених у предузећу добављача у аутомобилској индустрији. Валидација модела доказује да фази скупови и фази оптимизациони АПП модел могу успешно да се користе у пракси. Различити експерименти спроведени су и дају нов увид у АПП проблеме у аутомобилској индустрији, која је окарактерисана са високом неизвесношћу. Примена фази АПП са моделом ФЛРА модела скраћује укупно захтевано време за производне и логистичке операције у отпреми готове робе купцима и на тај начин унапређује ефикасност пословања добављача.

## 7. Перформансе алгоритама развијеног модела

Алгоритам за крисп АПП ЛП оптимизациони модел (поглавље 4.3.4) и метод фази линеарне регресионе анализе (поглавље 5.1.1.2) написани су у програмском пакету *Visual Studio 2015*. Коришћен је програмски језик C++. Алгоритми су представљени у прилозима:

- прилог Б. Програмски код C++ за експеримент „основни случај“,
- прилог В. Програмски код C++ за експеримент „неизвесност у произведеној количини мања је 50% него у експерименту у основном случају“,
- прилог Г. Програмски код C++ за експеримент „неизвесност у произведеној количини већа је 50% него у експерименту у основном случају“,
- прилог Д. Програмски код C++ за експеримент „неизвесност у одступању купчеве потражње мања је 50% него у основном случају“,
- прилог Ђ. Програмски код C++ за експеримент „неизвесност у одступању купчеве потражње већа је 50% него у основном случају“,
- прилог Е. Програмски код C++ за експеримент „сигурносне залихе између 2 и 4 дана“,
- прилог Ж. Програмски код C++ за експеримент „сигурносне залихе између 1 и 3 дана“,
- прилог З. Програмски код C++ за модел прогнозе потражње купаца методом ФЛРА.

Алгоритми у прилогу Б и у прилогу З представљени су у комплетном запису, док су алгоритми из прилога В, Г, Д, Ђ, Е и Ж представљени само за део који се разликује од алгоритма из прилога Б, с обзиром на то да се граде на основи алгоритма из прилога Б.

У програмском пакету *Visual Studio 2015* коришћена је библиотека *XLNT Library* узета са линка <https://github.com/TFussell/xlnt> за уношење података из *excel* фајла и библиотека *LP solve Library* узета са линка <http://lpsolve.sourceforge.net/5.5> за симплекс методу линеарног програмирања.

Рачунар на коме су рађени експерименти у студијама случаја (поглавље 5.1 и 5.2) састоји се од процесора ознаке *Intel i3-2120* (3М Cache, брзине 3.30 GHz) и РАМ меморије 8G, брзине 2133 MHz. Анализирана је брзина израчунавања алгоритма:

- крисп АПП ЛП оптимизациони модел (из прилога Б),
- метод фази линеарне регресионе анализе (из прилога З).

Време израчунавања по основним сегментима алгоритама дато је на сликама 8-1 и 8-2. Са слике 8-1 видљиво је дуго време израчунавања сегмента циљне функције и ограничења (1044 ms). Овај сегмент састоји се од 12 итерација у којима се израчунавају ограничења и циљна функција користећи израчунате улазне крисп податке из сегмента улазних параметара модела који траје 16 ms. Најкраће време (11 ms) потребно је за израчунавање функције толеранције, степена задовољења решења и оптималне вредности циљне функције.



Слика 8-1. Време израчунавања алгоритма из прилога Б по сегментима

Алгоритам методе фази линеарне регресионе анализе (из прилога 3) чије време израчунавања представљено је за два основна сегмента, представљен је на слици 8-2. Јасно је да је најдуже време потребно за израчунавање циљне функције и ограничења (2500 ms), док је време израчунавања улазних параметара модела врло кратко, свега 3 ms.



Слика 8-2. Време израчунавања алгоритма из прилога 3 по сегментима

Поред алгоритама који су развијени у C++ програмском пакету, развијени су и у *excel*-у. Паралелно развијање алгоритама модела у два различита алата урађено је из два разлога: провере тачности алгоритама и поређења брзине израчунавања решења. У оба алата модел је показао исто решење, док је време израчунавања далеко дуже у *excel*-у, с обзиром на то да је итеративно израчунавање постављено у одвојеним сегментима које захтева далеко више манипулативног рада и бележења одвојених решења. Предност употребе алгоритма развијеног у C++ програмском пакету свакако је у његовој брзини и једноставности у практичној употреби. Лако може да се користи од стране запослених у предузећу.

## 8. Закључак

Нови фази АПП модел развијен је да минимализује укупно захтевано време за производњу робе, њено ускладиштење у магацину и припрема отпреме робе купцима. Неизвесности укључене у модел су произведена количина робе, одступање у купчевој потражњи, време производње, време припреме испоруке и време складиштења сигурносних залиха. Неизвесности су дефинисане фази скуповима различитих облика заснованим на прикупљеним подацима из предузећа добављача. Употреба фази оптимизације у моделирању АПП проблема код проналажења оптималног решења доказана је у дисертацији. Такође, употреба фази скупова и ФЛРА са методом дефазификације у моделирању потражње купаца и планирања испорука робе доказана је у дисертацији.

Развијени модели примењени су у реалном окружењу у грани индустрије која је у експанзији у последњој деценији у Републици Србији, у аутомобилској индустрији. Различити експерименти изведени су да би се анализирао утицај различите неизвесности на планирање производње, залиха и испорука у предузећима два добављача који снабдевају европске произвођаче аутомобила. Студија случаја је изведена у предузећу два добављача аутоделова у Републици Србији. Оба добављача производе делове за исте купце, али различити су производи и нису конкуренти на тржишту. Разликују се у броју запослених и обиму производње.

Коришћењем стварних података прикупљених у два предузећа добављача показано је да неизвесност у произведеној количини робе и у одступању у купчевој потражњи има различите утицаје. У предузећу првог добављача предложени модели, фази АПП модел и модели за прогнозу потражње и планирања испорука стандардном девијацијом и ФЛРА са дефазификацијом, примењени су на периоду од 12 недеља. Овај период карактеристичан је за аутомобилску индустрију због поузданости купчеве потражње. У предузећу другог добављача наведени модели тестирани су на дужем периоду од 20 недеља. Период је нестабилнији са аспекта поузданости купчеве потражње. За примену модела прогнозе купчеве потражње коришћен је период од годину дана (51 недеља), што је значајно дуже од случаја у предузећу првог добављача. Овим је доказано да модел прогнозе потражње и планирања испорука може успешно да се примени на дужи период у аутомобилској индустрији, која је условљена неизвесношћу. Сви модели показали су добру прецизност и практичну применљивост у обе студије.

Примена предложених модела за проблем АПП и прогнозу потражње купаца и планирања испорука показала је да може да се унапреди ефикасност предузећа. Ефикасност предузећа има директан утицај на финансијске резултате, чиме је показано да предложени модели имају практичну примену.

Даље истраживање и унапређење модела може да иде у смеру:

- 1) прогноза купчеве потражње са историјским подацима употребом неком од хеуристичких метода,
- 2) прогноза купчеве потражње са историјским подацима са дужим периодом испорука од годину дана,
- 3) анализа утицаја ограниченог животног века производа у аутоиндустрији на АПП и планирање испорука,
- 4) примена хеуристичких метода у АПП и валидација на практичним подацима.

## Литература

1. Acar, A. Z., Onden, I. and Kara, K. (2015) Evaluating the location of regional return centers in reverse logistics through integration of GIS, AHP and integer programming, *International Journal of Industrial Engineering*, 22(4).
2. Aouam, T., Geryl, K., Kumar, K. and Brahim, N. (2018) Production planning with order acceptance and demand uncertainty, *Computers and Operations Research* 91, 145-159.
3. Akoç, O. and Petrović, D. (2007) A fuzzy goal programming method with imprecise goal hierarchy, *European Journal of Operational Research* 181, 1427–1433.
4. Akkaya, G., Turanoglu, B. and Oztas, S. (2015) An integrated fuzzy AHP and fuzzy MOORA approach to the problem of industrial engineering sector choosing, *Expert Systems with Applications*, 42(24), 9565-9573.
5. Aliev, R. A., Fazlollahi, B., Guirimov, B. G. and Aliev, R. R. (2007) Fuzzy-genetic approach to aggregate production–distribution planning in supply chain management, *Information Sciences* 177, Issue 20, Elsevier, 4241–4255.
6. Al-e-hashem, S.M.J., Malekly, H. and Aryanezhad, M.B. (2011) A multi-objective robust optimization model for multi-product multi-site aggregate production planning in a supply chain under uncertainty, *Int. J. Prod. Econ.*, 134, 28–42.
7. Ariaifar, S., Ahmed, S., Choudhury, I. A. and Bakar, M. A. (2014) Application of Fuzzy Optimization to Production-Distribution Planning in Supply Chain Management, *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi, Article ID 218132.
8. Atalay, K. D., Eraslan, E. and Cinar, M., O. (2015) A hybrid algorithm based on fuzzy linear regression analysis by quadratic programming for time estimation: An experimental study in manufacturing industry, *Journal of Manufacturing Systems* 36, 182–188.
9. Avraamidou, S. and Pistikopoulos, E. (2017) A Multiparametric Mixed-integer Bi-level Optimization Strategy for Supply Chain Planning Under Demand Uncertainty, *IFAC-PapersOnLine*, Volume 50 Issue 1, 10178-10183.
10. Banerjee, A. and Banerjee, S. (1994) A coordinated order-up-to inventory control policy for a single supplier and multiple buyers using electronic data interchange, *Int. J. Production Economics* 35, 85-91.
11. Baykasoglu, A. (2001) Aggregate production planning using the multiple-objective tabu search, *International Journal of Production Research*, MOAPPS 1.0, 39(16), 36853702.
12. Baykasoglu, A. and Gocken, T. (2008) A review and classification of fuzzy mathematical programs, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems* 19, 205–229.
13. Bellman, R. E. and Zadeh, L. A. (1970) Decision making in a fuzzy environment, *Management Science*, 17: B-141–164.
14. Bertsimas, D. and Thiele, A. (2004) Robust Optimization Approach to Supply Chain Management, Conference paper, 10th International IPCO Conference, New York, NY, USA, June 7-11.
15. Bilgen, B. (2010) Application of fuzzy mathematical programming approach to the production allocation and distribution supply chain network problem, *Expert Systems with Applications* 37, 4488–4495.

16. Bilgen, B. and Ozkarahan, I. (2007) A mixed-integer linear programming model for bulk grain blending and shipping, *International Journal of Production Economics* 107, Issue 2, Elsevier, 555–571.
17. Bushuev, M. (2014) Convex optimization for aggregate production planning, *Int. J. Prod. Res.*, 52, 1050–1058.
18. Buxey, G. (2003) Strategy not tactics drives aggregate planning, *Int. J. Prod. Econ.*, 85, 331–346.
19. Buxey, G. (2005) Aggregate planning for seasonal demand: Reconciling theory with practice, *Int. J. Oper. Prod. Manag.*, 25, 1083–1100.
20. Cadenas, J.M. and Verdegay, J.L. (1995) PROBO: An interactive system in fuzzy programming, *Fuzzy Sets and Systems* 76, 319–322.
21. Cadenas, J.M. and Verdegay, J.L. (1997) Using fuzzy numbers in linear programming, *IEEE Transactions on systems, Man and Cybernetics–Part B Cybernetics* 27 (6), 1016–1022.
22. Cai, Y.P., Huang, G.H., Yang, Z.F., Lin, Q.G., Bass, B. and Tan, Q. (2008) Development of an optimization model for energy systems planning in the region of Waterloo, *Int. J. Energy Res.*, 32: 988–1005.
23. Campos L. and Verdegay, J.L. (1989) Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 32, 1-11.
24. Chanas, S. and Kuchta, D. (2002) Fuzzy goal programming – One notion, many meanings, *Control and Cybernetics* 31 (4), 871–890.
25. Chern, C.C. and Hsieh, J.S. (2007) A heuristic algorithm for master planning that satisfies multiple objectives, *Computers and Operations Research* 34, Issue 11, Elsevier, 3491–3513.
26. Chen, C.L., Wang, B.W. and Lee, W.C. (2003) Multiobjective optimization for a multienterprise supply chain network, *Industrial and Engineering Chemistry Research* 42, American Chemical Society, 1879–1889.
27. Chen, C.L. and Lee, W.C. (2004) Multi-objective optimization of multi-echelon supply chain networks with uncertain product demands and prices, *Computers and Chemical Engineering* 28, Issues 6-7, Elsevier, 1131–1144.
28. Chen, L.-H. and Tsai, F.-C. (2001) Fuzzy goal programming with different importance and priorities, *European Journal of Operational Research* 133, 548–556.
29. Chien, Y.I. and Cunningham, W.J. (2000) Incorporating production planning in business planning: A linked spreadsheet approach, *Prod. Plan. Control*, 11, 299–307.
30. Christou, I.T., Lagodimos, A.G. and Lycopoulou, D. (2007) Hierarchical production planning for multi-product lines in the beverage industry, *Production Planning and Control*, 18(5), 367376.
31. Chopra, S. and Meindl, P. (2010) *Supply chain management; strategy, planning and operation*, Pearson education, inc. publishing at prentice hall, 3<sup>rd</sup> edition. One Lake Street, Upper Saddle River, New Jersey.
32. Colajanni, G. and Daniele, P. (2018) A Convex Optimization Model for Business Management, *Journal of Convex Analysis*, 25(2), 487-514.
33. Cristea, C. and Cristea, M. (2017) A multi-criteria decision making approach for supplier selection in the flexible packaging industry, In *MATEC Web of Conferences* (Vol. 94, p. 06002). EDP Sciences.



34. Davizon, Y.A., Martínez-Olvera, C., Soto, R., Hinojosa, C. and Espino-Roman, P. (2015) Optimal Control Approaches to the Aggregate Production Planning Problem, *Sustainability* 2015, 7, 16324–16339; doi:10.3390/su71215819.
35. Dempster, A. (1967) Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping, *Ann. Math. Stat.*, vol. 38, pp. 325–339.
36. Diaz-Madronero, M., Peidro, D. and Mula J. (2014) A fuzzy optimization approach for procurement transport operational planning in an automobile supply chain, *Applied Mathematical Modelling* 38, 5705–5725.
37. Dincer, H., Hacıoglu, U., Tatoglu, E. and Delen, D. (2016) A fuzzy-hybrid analytic model to assess investors' perceptions for industry selection, *Decision Support Systems*, 86, 24-34.
38. Djordjevic, I., Petrovic, D. and Stojic, G. (2019) A fuzzy linear programming model for aggregated production planning (APP) in the automotive industry, *Computers in Industry*, Vol. 110, pp 48-63, ISSN:0166-3615, doi: 10.1016/j.compind.2019.05.004.
39. Djordjevic, I. and Petrovic, D. (2019) A new prediction model for customer demands in the automotive industry, 30th European Conference on Operational Research EURO 2019, Dublin, Ireland, 23-26 June.
40. Djordjevic, I., Stojic, G. and Petrovic, D. (2019) Control of production and inventory in the automotive industry for multi customer and multi products, 54th International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologies ICEST 2019, Ohrid, North Macedonia, June 27-29 2019. ISSN 2603-3267 (online).
41. Djordjevic, I. and Petrovic, D. (2018) A new fuzzy linear programming model for aggregate production planning for a supplier in the automotive industry, 29th European Conference on Operational Research EURO2018, Valencia, Spain, 8-11 July.
42. Dubois, D. and Prade, H. (1980) *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, New York, Toronto.
43. Dubois, D. and Prade, H. (1986) Fuzzy sets and statistical data, *European Journal of Operational Research* 25, 345 – 356, North-Holland.
44. Dubois, D. and Prade, H. (1988) *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*, Plenum, New York.
45. Dubois, D. and Prade, H. (1994) Decision making under fuzzy constraints and fuzzy criteria mathematical programming vs rule-based system approach, in M. Delgado, et al. Ed. *Fuzzy Optimization-Recent Advances*, Physica-Verlag, Heidelberg, pp. 21–32.
46. Dubois, D., Prade, H. and Sandri, S. (1991) On possibility/probability transformations, in: *Proc. of the Fourth International Fuzzy Systems Association World Congress (IFSA'91)*, Brussels, Belgium, pp. 50–53.
47. Dubois, D., Foulloy, L., Mauris, G. and Prade, H. (2004) Probability – possibility transformations, triangular fuzzy sets and probabilistic inequalities, *Reliable Comput.* 10, 273–297.
48. Elahi, B., Pakzad-Jafarabadi, Y., Etaati, L. and Seyedhosseini, S. M. (2011) Optimization of Supply Chain Planning with Considering Defective Rates of Products in Each Echelon, *Technology and Investment*, 2, 211-221.
49. Fallahpour, A., Olugu, E. U. and Musa, S. N. (2017) A hybrid model for supplier selection: integration of AHP and multi expression programming (MEP), *Neural Computing and Applications*, Vol. 28 No. 3, pp. 499-504.

50. Fedrizzi, M., Kacprzyk, J. and Verdegar, J. L. (1991) A survey of fuzzy optimization and mathematical programming, in: M. Fedrizzi, J. Kacprzyk, et al. Eds. *Interactive Fuzzy Optimization-Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 15 - 28.
51. Feiring, B.R. (1991) Production planning in stochastic demand environments, *Mathematical and Computing Modelling* 15 91-95.
52. Fitzpatrick, S. and Scott, A. (1987) Quick simultaneous confidence intervals for multinomial proportions, *J. Amer. Statist. Assoc.* 82 (399) 875–879.
53. Fung, R. Y. K., Tang, J. and Wang, D. (2003) Multi product Aggregate production planning with fuzzy demands and fuzzy capacities, *IEEE Transactions on Systems*, 33, 302-313.
54. Gaines, B. (1978) Fuzzy and probability uncertainty logics, *Inf. Control*, vol. 38, pp. 154–169.
55. Gansterer, M. (2015) Aggregate planning and forecasting in make-to-order production systems, *Int. J. Production Economics* 170, 521–528.
56. Gass, S.I. (1987) The setting of weights in linear goal-programming problems, *Computers & Operations Research* 14 (3), 227–229.
57. Gholamiana, N., Mahdavia, I. and Tavakkoli - Moghaddam, R. (2016) Multi-objective multi-product multi-site aggregate production planning in a supply chain under uncertainty: fuzzy multi-objective optimisation, *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, 29 (2), 149–165.
58. Goetschalckx, M., Vidal, C.J. and Dogan, K. (2002) Modeling and design of global logistics systems: a review of integrated strategic and tactical models and design algorithms. *European Journal of Operational Research* 143, Elsevier, 1–18.
59. Gomes da Silva, C., Figueira, J., Lisboa, J. and Barman, S. (2006) An interactive decision support system for an aggregate production planning model based on multiple criteria mixed integer linear programming, *Omega International Journal of Management Science*, 34 ( 2), 167177.
60. Goodman, L.A. (1965) On simultaneous confidence intervals for multinomial proportions, *Technometrics* 7 (2) 247–254.
61. Hannan, E.L. (1985) An assessment of some criticisms of goal programming, *Computers & Operations Research* 12 (6), 525-541.
62. He, W. (2013) An Inventory Controlled Supply Chain Model Based on Improved BP Neural Network. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Hindawi Volume 2013, Article ID 537675.
63. Heath, D. C. and Jackson, P. L. (1994) Modeling the evolution of demand forecasts with application to safety stock analysis in production/distribution systems, *IIE Transactions*.
64. Heilpern, S. (1992) The expected value of a fuzzy number, *Fuzzy Sets and Systems*, 47, 81-86.
65. Hellendoorn, H. and Thomas, C. (1993) Defuzzification in fuzzy controllers, *Intell. Fuzzy Syst.*, vol. 1, pp. 109–123.
66. Holt, J.A. (1983) PDF versus LP: An empirical aggregate planning comparison, *J. Oper. Manag.*, 3, 141–147.
67. Inuiguchi, M. and Ramik, J. (2000) Possibility linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem, *Fuzzy Sets and Systems*, 111: 3–28.

68. Jang, Y. J., Jang, S. Y., Chang, B. M. and Park, J. (2002) A combined model of network design and production/distribution planning for a supply network, *Computers and Industrial Engineering* 43, Elsevier, 263–281.
69. Jiafu, T., Dingwei, W., Fung, R.Y.K. and Yung, K-L. (2004) Understanding of fuzzy optimisation: Theories and methods, *Journal of Systems Science and Complexity* 17, 117-125.
70. Jimenez, M. (1996) Ranking fuzzy numbers through the comparison of its expected intervals, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 4, 379–388.
71. Jimenez, M., Arenas, M., Bilbao, A. and Rodriguez, M. V. (2007) Linear programming with fuzzy parameters: An interactive method resolution, *European Journal of Operational Research* 177, 1599-1609.
72. Jin, L., Kalina, M., Mesiar, R. and Borkotokey, S. (2018) Characterizations of the possibility-probability transformations and some applications, *Information Science* 477, 281-290.
73. Jones, D.F. and Tamiz, M. (2002) Goal programming in the period 1990-2000. In: Ehrgott, M., Gandibleux, X. (Eds.), *Multiple Criteria Optimization, State of the Art Annotated Bibliographic Surveys*. Kluwer Academic Publishers, USA, pp. 129-170.
74. Jung, H. and Jeong S-J. (2012) Managing demand uncertainty through fuzzy inference in supply chain planning, *International Journal of Production Research* Vol. 50, No. 19, 1 October 2012, 5415–5429.
75. Junior, F.R.L., Osiro, L. and Carpinetti, L.C.R. (2014) A comparison between Fuzzy AHP and Fuzzy TOPSIS methods to supplier selection, *Applied Soft Computing*, 21, 194-209.
76. Kalaf, B.A., Bakar, R.A., Soon L.L., Monsi, M.B., Bakheet, A.J.K. and Abbas I.T. (2015) A modified fuzzy multi-objective linear programming to solve aggregate production planning, *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 104 (3), 339-352.
77. Kallrath, J. (2009) *Combined strategic design and operational planning in the process industry*, Computers and Chemical Engineering, Elsevier.
78. Kanyalkar, A.P. and Adil, G.K. (2005) An integrated aggregate and detailed planning in a multi-site production environment using linear programming, *International Journal of Production Research* 43, Issue 20, 4431–4454.
79. Karakitsiou, A. and Migdalas A. (2015) Convex optimization problems in supply chain planning and their solution by a column generation method based on the Frank Wolfe method, *Operational Research International Journal*, Volume 16, Issue 3, pp 401–421.
80. Kim, B. and Kim, S. (2001) Extended model for a hybrid production planning approach. *Int. J. Prod. Econ.*, 73, 165–173.
81. Kim, C.O., Jun, J., Baek, J. K., Smith, R.L. and Kim, Y.D. (2005) Adaptive inventory control models for supply chain management, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Volume 26, Issue 9–10, pp 1184–1192.
82. Lababidi, H.M.S., Ahmed, M.A., Alatiqi, I.M. and Al-enzi, A.F. (2004) Optimizing the supply chain of a petrochemical company under uncertain operating and economic conditions, *Industrial and Engineering Chemistry Research* 43, American Chemical Society, 63– 73.
83. Lai, Y.J. and Hwang, C.L. (1992) *Fuzzy Mathematical Programming Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 394, Springer-Verlag, Berlin.

84. Lai X., Chen Z., Giri B. and Chiu C. (2014) Two-Echelon Inventory Optimization for Imperfect Production System under Quality Competition Environment, *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi Volume 2015, Article ID 326919.
85. Letmathe, P. and Balakrishnan, N. (2005) Environmental considerations on the optimal product mix, *European Journal of Operational Research*, 167: 398–412.
86. Leung, S.C.H and Chan, S.S.W. (2009) A goal programming model for aggregate production planning with resource utilization constraint, *Computers and Industrial Engineering*, 56(3), 10531064.
87. Leung, S.C.H., Wu, Y. and Lai, K.K. (2003) Multi-site aggregate production planning with multiple objectives: A goal programming approach. *Prod. Plan. Control*, 14, 425–436.
88. Liao, C-N. and Kao, H-P. (2014) An evaluation approach to logistics service using fuzzy theory, quality function development and goal programming, *Computers & Industrial Engineering* 68, 54–64.
89. Liang, T.F. and Cheng, H.W. (2009) Application of fuzzy sets to manufacturing/distribution planning decisions with multi-product and multi-time period in supply chains, *Expert Systems with Applications* 36, Issue 2, Elsevier, 3367–3377.
90. Lim, S.J., Jeong, S.J., Kim, K.S. and Park, M.W. (2006) A simulation approach for production–distribution planning with consideration given to replenishment policies, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 27, Issue 5, Springer, 593–603.
91. Lo, S.C. and Hallb, R.W. (2008) The design of real-time logistics information system for trucking industry, *Computers & Operations Research* 35, 3439-3451.
92. Luhandjula, M.K. (1989) Fuzzy optimization: an appraisal, *Fuzzy Sets and Systems*, 30(3): 257–282.
93. Luxhoj, J.T., Riis, J.O. and Stensballe, B. (1996) A hybrid econometric-neural network modeling approach for sales forecasting, *Int. J. Production Economics* 43, 175-192.
94. MacVicar-Whelan, P.J. (1979) Fuzzy logic: An alternative approach, *Proceedings of the 9th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic*, Bath.
95. Madadi, N. and Wong, K.Y. (2014) A Multiobjective Fuzzy Aggregate Production Planning Model Considering Real Capacity and Quality of Products, *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2014, Article ID 313829.
96. Mahdavi-Amiri, N. and Nasserli, S.H. (2007) Duality results and a dual simplex method for linear programming problems with trapezoidal fuzzy variables, *Fuzzy Sets and Systems*, 158, 1961-1978.
97. Maleki, H.R., Tata, M. and Mashinchi, M. (2000) Linear programming with fuzzy variables, *Fuzzy Sets and Systems*, 109, 21-33.
98. Masson, M.-H., Denoeux, T. (2006) Inferring a possibility distribution from empirical data, *Fuzzy Sets and Systems*, 157, 319–340.
99. Memari, A., Rahim, A.R.B.A. and Ahmad, R.B. (2014) Production Planning and Inventory Control in Automotive Supply Chain Networks, *Conference paper DOI: 10.1007/978-3-319-07455-9\_45*.
100. Mezghani, M., Aouni, B. and Loukil, T.M. (2008) Aggregate production planning in an imprecise environment through the goal programming and the satisfaction functions, *ASAC 2008*, Halifax, Nouvelle-Écosse.

101. Min, H. and Storbeck, J., (1991) On the origin and persistence of misconceptions in goal programming, *Journal of the Operational Research Society* 42 (4), 301-312.
102. Modarres, M. and Izadpanahi, E. (2016) Aggregate production planning by focusing on energy saving: A robust optimization approach, *Journal of Cleaner Production* 133, 1074e1085.
103. Mohamed, R.H. (1997) The relationship between goal programming and fuzzy programming, *Fuzzy Sets and Systems* 89, 215-222.
104. Mohandas, S.U., Phelps, T.A. and Ragsdell, K.M. (1990) Structural optimisation using a fuzzy goal programming approach, *Computers & Structures* 37 (1), 1-8.
105. Mohanty, B.K. and Vijayaraghavan, T.A.S. (1995) A multi-objective programming problem and its equivalent goal programming problem with appropriate priorities and aspiration levels: A fuzzy approach, *Computers & Operations Research* 22 (8), 771-778.
106. Mula, J., Poler, R., Garcia-Sabater, J. P. and Lario, F.C. (2006) Models for production planning under uncertainty: A review, *International Journal of Production Economics* 103, 271-285.
107. Nahmias, S. (2008) *Production and Operations Analysis*. Irwin/McGraw-Hill.
108. Nam, S.J. and Logendran R. (1992) Aggregate production planning - a survey of models and methodologies, *European Journal of Operational Research* 61, 255-272.
109. Nam, S. and Logendram, R. (1995) Modified production switching heuristics for aggregate production planning, *Comput. Oper. Res.*, 22, 531-541.
110. Narasimhan, R. (1980) Goal programming in a fuzzy environment, *Decision Sciences* 11, 325-336.
111. Nasser, S.H. (2008) A new method for solving fuzzy linear programming by solving linear programming, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 2, no. 50, 2473 - 2480.
112. Niknejad, A. and Petrovic, D. (2016) A fuzzy dynamic Inoperability Input-output Model for strategic risk management in Global Production Networks, *Int. J. Production Economics* 179, 44-58.
113. Oblak, L., Kuzman, M.K. and Groselj, P. (2017) A FUZZY LOGIC-BASED MODEL FOR ANALYSIS AND EVALUATION OF SERVICES IN A MANUFACTURING COMPANY, *Journal of Applied Engineering Science* 15, 3, 439, 258-271, DOI: 10.5937/jaes15-13399.
114. Oh, H. C. and Karimi, I. A. (2006) Global multiproduct production-distribution planning with duty drawbacks, *AIChE Journal* 52, Issue 2, 595-610.
115. Pedrycz, W. and Gomide, F. (1998) *An introduction to Fuzzy sets, Analysis and Design*, A Bradford Book, The MIT Press.
116. Pedro D., Mula J., Poler R. and Verdegay J.L. (2009) Fuzzy optimization for supply chain planning under supply, demand and process uncertainties, *Fuzzy Sets and Systems* 160, Issue 18, Elsevier, 2640-2657.
117. Pedro D., Mula J., Jimenez M. and Botella M.d.M. (2010) A fuzzy linear programming based approach for tactical supply chain planning in an uncertain environment, *European Journal of Operational Research* 205, Issue 1, Elsevier, 65-80.
118. Penkuhn T, Spengler T, Pouchert H and Rentz O. (1997) Environmental integrated production planning for ammonia synthesis, *European Journal of Operational Research*, 97: 327-336.

119. Petrovic, D., Xie, Y., Burnham, K. and Petrovic, R. (2008) Coordinated control of distribution supply chains in the presence of fuzzy customer demand, *European Journal of Operational Research* 185, Issue 1, Elsevier, 146–158.
120. Petrovic D., Roy R. and Petrovic R. (1999) Supply chain modelling using fuzzy sets, *International Journal of Production Economics* 59 443-453.
121. Petrovic, D., Xie, Y. and Burnham, K. (2006) Fuzzy decision support system for demand forecasting with a learning mechanism. *Fuzzy sets and Systems* 157, Issue 12, Elsevier, 1713 – 1725.
122. Phruksaphanrat, B. (2011) Preemptive Possibilistic Linear Programming: Application to Aggregate Production Planning, *International Journal of Industrial and Manufacturing Engineering* Vol:5, No:8.
123. Prakash, C., & Barua, M.K. (2016) An analysis of integrated robust hybrid model for third-party reverse logistics partner selection under fuzzy environment, *Resources, Conservation and Recycling*, 108, 63-81.
124. Quesenberry, C.P. and Hurst, D.C. (1964) Large sample simultaneous confidence intervals for multinomial proportions, *Technometrics* 6 (2) 191–195.
125. Rifai, A.K. (1996) A note on the structure of the goal-programming model: assessment and evaluation, *International Journal of Operations and Production Management*. 16(1), 4049.
126. Rizk, N., Martel, A. and D’amours, S. (2006) Multi-item dynamic production–distribution planning in process industries with divergent finishing stages, *Computers and Operations Research* 33, Issue 12, Elsevier, 3600–3623.
127. Rizk, N., Martel, A. and D’amours, S. (2008) Synchronized production-distribution planning in a single-plant multi-destination network, *Journal of the Operational Research Society* 59, 90–104.
128. Roghanian, E., Sadjadi, S.J. and Aryanezhad, M.B. (2007) A probabilistic bi-level linear multi-objective programming problem to supply chain planning, *Applied Mathematics and Computation* 188, Issue 1, Elsevier, 786–800.
129. Romero, C. (2004) A general structure of achievement function for a goal programming model, *European Journal of Operational Research*. 153 (3), 675686.
130. Rommelfanger, H. (1996) Fuzzy linear programming and applications, *European Journal of Operational Research* 92, 512-527.
131. Rommelfanger, H. and Slowinski, R. (1998) Fuzzy linear programming with single or multiple objective functions. In: Slowinski, R. (Ed.), *Fuzzy Sets in Decision Analysis, Operation Research and Statistics*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
132. Romo, F., Tomasgard, A., Hellemo, L., Fodstad, M., Eidesen, B.H. and Pedersen, B. (2009) Optimizing the Norwegian Natural gas production and transport, *Interfaces* 39 (1), 46–56.
133. Ross, J.T. (2004) *Fuzzy logic with engineering applications*, University of New Mexico, USA, Second Edition.
134. Salamati-Hormozi, H., Zhang, Z-H., Zarei, O. and Ramezani, R. (2018) Trade-off between the costs and the fairness for a collaborative production planning problem in make-to-order manufacturing, *Computers & Industrial Engineering* 126, 421-434.
135. Schroeder, R.G., Larson, P.D. (1986) A Reformulation of the aggregate planning problem, *J. Oper. Manag.*, 6, 245–256.

136. Shafer, G. (1976) A mathematical theory of evidence, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Wallsten, T. and Budescu, D. (1983). *Manage. Sci.*, vol. 29, no. 2, p. 167.
137. Shenify, M. and Mzarbhuiya, F.A. (2015) The expected value of a fuzzy number, *International Journal of Intelligence Science* 5, 1-5.
138. Sheu, J.B. (2007) A hybrid fuzzy-optimization approach to customer grouping-based logistics distribution operations, *Applied Mathematical Modelling* 31, 1048–1066.
139. Selim, H., Am, C. and Ozkarahan, I. (2008) Collaborative production–distribution planning in supply chain: a fuzzy goal programming approach, *Transportation Research Part E-Logistics and Transportation Review* 44, Issue 3, Elsevier, 396–419.
140. Sillekens, T., Koberstein, A., and Suhl, L. (2011) Aggregate production planning in the automotive industry with special consideration of workforce flexibility, *International Journal of Production Research*, 49(17),50555078.
141. Sison, C.P. and Glaz, J. (1995) Simultaneous confidence intervals and sample size determination for multinomial proportions, *J.Amer. Statist. Assoc.* 90 (429), 366–369.
142. Sugeno, M. (1985) An introductory survey of fuzzy control, *Inf. Sci.*, vol. 36, pp. 59–83.
143. Tadei, R., Trubian, J.L., Avendano, F., Croce, D. and Menga, G. (1995) Aggregate planning and scheduling in the food industry: A case study, *Eur. J. Oper. Res.*, 87, 564–573.
144. Tang, J., and Wang, D. (1997) An interactive approach based on a genetic algorithm for a type of quadratic programming problems with fuzzy objective and resources, *Computers Ops Res.* Vol. 24, No. 5, pp. 413–422.
145. Tang, J., Wang, D., Fung, R.Y.K. and Yung, K.L. (2004) UNDERSTANDING OF FUZZY OPTIMIZATION: THEORIES AND METHODS, *Journal of Systems Science and Complexity*, Vol. 17 No. 1.
146. Tang, J., Wang, D. and Fung, R.Y.K. (2000) Fuzzy formulation for multi-product aggregate production planning, *Prod. Plan. Control*, 11, 670–676.
147. Tang, J., Wang, D. and Fung, R.Y.K. (2010) Fuzzy formulation for multi-product aggregate production planning, *Production planning and Control* 11 (7) 670-676, DOI: 10.1080/095372800432133.
148. Tanaka, H., Asai, K. (1984) Fuzzy linear programming with fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems* 13, 1–10.
149. Tanaka, H., Okuda, T. and Asai, K. (1974) On fuzzy mathematical programming, *The Journal of Cybernetics*, 3, 37-46.
150. Taubert, W.H. (1968) A search decision rule for the aggregate scheduling problem. *Manag. Sci.*, 14, 343–359.
151. Teodorovic, D. and Vukadinovic, K., (1998) Traffic Control and Transport Planning: A Fuzzy Sets and Neural Networks Approach.
152. Thanaka, H., Uejina, S. and Asai, K. (1982) Linear Regression Analysis with Fuzzy Model, *IEEE Trans Systems Man Cybernetics*, 12, 903-907.
153. Tiwari, R.N., Dharmar, S. and Rao, J.R., (1987) Fuzzy goal programming - An additive model, *Fuzzy Sets and Systems* 24, 27-34.
154. Torabi, S.A. and Hassini, E. (2008) An interactive possibilistic programming approach for multiple objective supply chain master planning, *Fuzzy Sets and Systems* 159, Elsevier, 193–214.

155. Trappey, J.F.C., Liu, C.R. and Chang, T.C. (1988) Fuzzy non-linear programming: Theory and application in manufacturing. *Int. J. Prod. Res.*, 26, 957-985.
156. Turkay, M., Saracoglu, O. and Arslan, M.C. (2016) Sustainability in Supply Chain Management: Aggregate Planning from Sustainability Perspective, *PLOS ONE* | DOI:10.1371/journal.pone.0147502.
157. Veinott, A.F. (2005) Lectures in Supply-Chain Optimization, Management Science and Engineering 361, Department of Management Science and Engineering Stanford, University Stanford, California 94305.
158. Wang, R.C. and Fang, H-H. (2001) Aggregate production planning with multiple objectives in a fuzzy environment, *European Journal of Operational Research* 133, 521-536, DOI:10.1016/S0377-2217(00)00196-X.
159. Wang, R.C. and Liang, T.F. (2004) Application of fuzzy multi-objective linear programming to aggregate production planning, *Computer and Industrial Engineering* 46, 17-41.
160. Wang, R.C. and Liang, T.F. (2005) Applying possibilistic linear programming to aggregate production planning, *International Journal of Production Economics* 98, 328–341.
161. Wang, R.C. and Liang, T.F. (2007) Application of interactive possibilistic linear programming to aggregate production planning with multiple imprecise objectives, *Production Planning and Control* 18, 548-560.
162. Wulan, M. and Petrovic, D., (2012) A fuzzy logic based system for risk analysis and evaluation within enterprise collaboration, *Computers in Industry* 63, 739-748.
163. Yazdani-Chamzini, A. (2014) An integrated fuzzy multi criteria group decision making model for handling equipment selection, *Journal of Civil Engineering and Management*, 20(5), 660-673.
164. Yazdani, M., Hashemkhani Z.S., Zavadskas, E.K. (2016) New integration of MCDM methods and QFD in the selection of green suppliers, *Journal of Business Economics and Management*, 1-17.
165. Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy sets, *Information and Control* 8, 338–353.
166. Zadeh, L. (1971) Similarity relations and fuzzy orderings, *Inf. Sci.*, vol. 3, pp. 177–200.
167. Zadeh, L.A. (1978) Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy sets and systems* 1, 3-28.
168. Zadeh, L. (1979) A theory of approximate reasoning, in J. Hayes, D. Michie, and L. Mikulich (eds.), *Machine Intelligence*, Halstead Press, New York, pp. 149–194.
169. Zarandi, M.H.F., Zarani, M.M.F. and Saghiri, S. (2007) Five crisp and fuzzy models for supply chain of an automotive manufacturing system, *International Journal of Management Science and Engineering Management*, Vol. 2 No. 3, pp. 178-196.
170. Zhang, A. (2016) Statistical analysis of fuzzy linear regression model based on centroid method, *Applied Mathematics*, 7, 579-586.
171. Zimmermann, H.-J. (1976) Description and optimization of fuzzy system, *Int. J. of General System*, 2: 209–216.
172. Zimmermann, H. J. (1978) Fuzzy programming and linear programming with several objective functions, *Fuzzy Sets and Systems*, 1(1), pp. 45-56.
173. Zimmermann, H.-J. (1985) Application of fuzzy set theory to mathematical programming, *Information Sciences*, 36: 29–58.

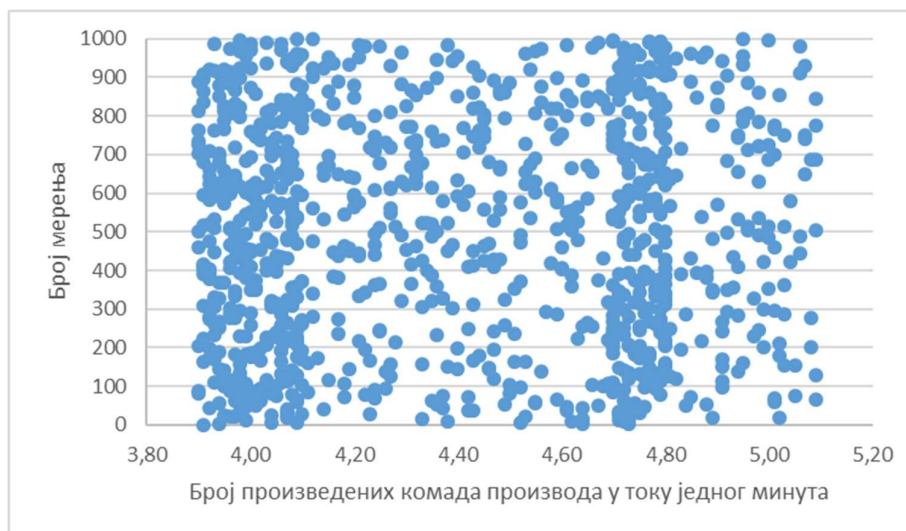


## Прилози

## Прилог А. Генерисање фази времена производње коришћењем података из праксе

### Први добављач

Да би се генерисао фази скуп  $\tilde{n}_p$ , који представља неизвестан број произведених комада производа на једној производној линији за више купаца, стварни подаци у предузећу добављача су снимљени. Мерење је поновљено 1000 пута. Сва мерења су представљена на слици 1.



Слика А-1. Број произведених комада производа у току једног минута на једној производној линији у предузећу првог добављача

На основу прикупљених података 4 интервала су идентификована, као што су интервали  $[3,9, 4,1]$ ,  $[4,1, 4,7]$ ,  $[4,7, 4,8]$ ,  $[4,8, 5,1]$ . Вероватноћа идентификованих интервала је израчуната на основу фреквенције понављања  $p_i = n_i/N$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , где је  $n_i$  број података у једном интервалу, и  $N$  је укупан број прикупљених података; и у изведеном снимању у предузећу то је  $N = 1000$  и  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) = (0,348, 0,318, 0,208, 0,126)$ . Међутим, расподела вероватноће је дефинисана само на једном узорку прикупљених података. Различити фази скупови могу бити генерисани из различитих узорака дефинисаних на једној расподели вероватноће. Стога, примењен је метод предложен у (Masson and Depoieux, 2006), који генерише јединствен фази скуп на прикупљеним подацима из праксе.

Табела А-1. Интервал расподеле вероватноће  $[p_i^-, p_i^+]$  за интервал  $i = 1, \dots, 4$  снимљених података у предузећу првог добављача

Редни број интервала, $i$	Доња граница расподеле вероватноће, $p_i^-$	Горња граница расподеле вероватноће, $p_i^+$
1	0,275	0,348
2	0,313	0,389
3	0,208	0,275
4	0,079	0,126

Размотрена су сва 4 интервала снимљених података како би се одредили параметри одговарајуће непознате расподеле вероватноће. Параметри  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  припадају интервалу  $[p_i^-, p_i^+]$  са истим степеном поверења  $1 - \alpha$ , при чему је постављено  $\alpha = 0,1$ .

Ово значи да је вероватноћа припадности траженог параметра  $p_i$  интервалу  $[p_i^-, p_i^+]$  једнака  $100(1 - \alpha)\%$ . Вредности интервала  $[p_i^-, p_i^+]$  су дате у табели А-1.

Конечно, функција припадности фази скупа, односно расподела могућности  $\pi$  која доминира над свим расподелама вероватноће из интервала  $[p_i^-, p_i^+]$ , представљених у табели 1, је добијена. Ово је, такође неизвесан процес где је неизвесност изражена са интервалом поверења  $1 - \alpha$ , тако да тражена функција припадности доминира над расподелом вероватноће.

Добијена функција припадности је по деловима линеарна функција (енгл. piece-wise) са степеном припадности представљеним на слици 5-1.

### Други добављач

Прикупљање података о времену производње у предузећу другог добављача је спроведено у периоду од 20 недеља. Анализиран је број произведених комада у току једног сата за пет месеци, односно 20 недеља. Из тог разлога идентификовано је пет класа, свака класа је једнака периоду од месец дана производње (табела А-2).

Табела А- 2. Анализа времена производње у предузећу другог добављача

Месец	Број произво дних дана у месецу	Број произведени х јед.производ а у месецу	Број произведених јед.производа у дану	Број произведени х јед.производ а у смени	Број произведених јед.производа у сату	Време производ ње у минутама
јануар	20	56562	2828	943	21	0,35
фебруар	23	76810	3340	1113	25	0,41
март	26	86340	3321	1107	25	0,41
април	23	78250	3402	1134	25	0,42
мај	25	87640	3506	1169	26	0,43

Како је разматрано пет класа вектор вероватноће је  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (0,17, 0,15, 0,22, 0,25, 0,21)$ . Као и код првог добављача примењен је метод предложен у раду (Masson and Denoeux, 2006), који генерише јединствен фази скуп на прикупљеним емпиријским подацима.

Табела А-3. Интервал расподеле вероватноће  $[p_i^-, p_i^+]$  за интервал  $i = 1, \dots, 5$  снимљених података у предузећу другог добављача

Редни број интервала, $i$	Доња граница расподеле вероватноће, $p_i^-$	Горња граница расподеле вероватноће, $p_i^+$
1	0,10	0,29
2	0,11	0,32
3	0,11	0,32
4	0,13	0,34
5	0,13	0,34

Размотрено је свих 5 интервала снимљених података како би се одредили параметри одговарајуће непознате расподеле вероватноће. Параметри  $p_i, i = 1, \dots, 5$  припадају интервалу

$[p_i^-, p_i^+]$  са истим степеном поверења  $1 - \alpha$ , при чему је постављено,  $\alpha = 0,1$ . Коришћен је исти праг толеранције као и код првог добављача.

Вероватноћа припадности траженог параметра  $p_i$  интервалу  $[p_i^-, p_i^+]$  једнака је  $100(1 - \alpha)\%$ . Вредности интервала  $[p_i^-, p_i^+]$  су дате у табели А-3.

Користећи метод трансформације расподеле вероватноће у расподелу могућности (поглавље 3.2.7) представљен у раду (Masson and Denoeux, 2006), функција припадности, односно расподела могућности,  $\pi$  која доминира над свим расподелама вероватноће из интервала  $[p_i^-, p_i^+]$  је добијена. Добијена функција припадности је по деловима линеарна функција са степеном припадности представљеним на слици 5-17.

## Прилог Б. Програмски код С++ за експеримент „основни случај“

```
Input: m = 12 // број недеља у периоду планирања
Input: hMin // минимална вредност степена изводљивости
Input: hMax // максимална вредност степена изводљивости
Input: hStep // корак степена изводљивости
Input: h95 // степен изводљивости за 95%
Input: h99 // степен изводљивости за 90%
Input: h1 // степен изводљивости за 100%
Input: Np[] // вектор фази броја произведених комада производа у једној минути
Input: nNp = 4 // димензија Np[] вектора
Input: Tt[] // вектор фази времена припреме испоруке за купца
Input: nTt = 4 // димензија Tt[] вектора
Input: Ts[] // вектор фази времена складиштења сигурносних залиха
Input: nTs = 4 // димензија Ts[] вектора
Input: Wp2[] // вектор средине фази фактора неизвесне произведене количине
Input: nWp2 = m // димензија Wp2[] вектора
Input: Wd2[] // вектор средине фази фактора неизвесне купчеве потражње са флукуацијом око
прогнозиране количине
Input: nWd2 = m // димензија Wd2[] вектора
Input: Fi[] // вектор девијације купчеве потражње од прогнозиране потражње у периоду
планирања
Input: nFi = m // димензија Fi[] вектора
Input: Di[] // вектор купчеве потражње у периоду планирања
Input: nDi = m // димензија Di[] вектора
Declaration: Tp[] // вектор фази времена производње
Declaration: nTp = 4 // димензија Tp[] вектора
For i = 1 : 4
    Tp[i] = 1 / Np[i]
End
Declaration: TpMean // дефазификована вредност фази времена производње
TpMean = ( Sum Of Tp[] ) / nTp
Declaration: TtMean // дефазификована вредност фази времена припреме испоруке за купца
TtMean = ( Sum Of Tt[] ) / nTt
Declaration: TsMean // дефазификована вредност фази времена складиштења сигурносних залиха
TsMean = ( Sum Of Ts[] ) / nTs
Declaration: Wp1[] // лева страна фази фактора неизвесне произведене количине
Declaration: nWp1 = m // димензија Wp1[] вектора
For i = 1 : m
```

```

    Wp1[m] = Wp2[m] - 0.1
End
Declaration: Wp3[] // десна страна фази фактора неизвесне произведене количине
Declaration: nWp3 = m // димензија Wp3[] вектора
For i = 1 : m
    Wp3[m] = Wp2[m] + 0.1
End
Declaration: Wp_E1[] // очекивана вредност леве стране фази фактора неизвесне произведене
количине
Declaration: nWp_E1 = m // димензија Wp_E1[] вектора
For i = 1 : m
    Wp_E1[m] = ( Wp1[m] + Wp2[m] ) / 2
End
Declaration: Wp_E2[] // очекивана вредност десне стране фази фактора неизвесне произведене
количине
Declaration: nWp_E2 = m // димензија Wp_E2[] вектора
For i = 1 : m
    Wp_E2[m] = ( Wp2[m] + Wp3[m] ) / 2
End
Declaration: Wd1[] // лева страна фази фактора неизвесне купчеве потражње са флукуацијом око
прогнозиране количине
Declaration: nWd1 = m // димензија Wd1[] вектора
For i = 1 : m
    Wd1[m] = Wd2[m] - Fi[m]
End
Declaration: Wd3[] // десна страна фази фактора неизвесне купчеве потражње са флукуацијом око
прогнозиране количине
Declaration: nWd3 = m // димензија Wd3[] вектора
For i = 1 : m
    Wd3[m] = Wd2[m] + Fi[m]
End
Declaration: Wd_E1[] // очекивана вредност леве стране фази фактора неизвесне купчеве
потражње са флукуацијом око прогнозиране количине
Declaration: nWd_E1 = m // димензија Wd_E1[] вектора
For i = 1 : m
    Wd_E1[m] = ( Wd1[m] + Wd2[m] ) / 2
End
Declaration: Wd_E2[] // очекивана вредност десне стране фази фактора неизвесне купчеве
потражње са флукуацијом око прогнозиране количине
Declaration: nWd_E2 = m // димензија Wd_E2[] вектора
For i = 1 : m
    Wd_E2[m] = ( Wd2[m] + Wd3[m] ) / 2
End
//set number of h calculations
Declaration: H[] // вектор степена изводљивости
Declaration: nH = 0 // почетна вредност димензије H[] вектора
For h = hMin : hMax, hStep
    Add h to H[]
    nH +1
End
Add h95 to H[]

```

```

nH +1
Add h99 to H[]
nH +1
Add h1 to H[]
nH +1
Declaration: ObjFun = 0 // почетна вредност циљне функције крисп проблема линеарног програмирања
Declaration: Ssi[] // вектор променљиве сигурносне залихе робе
Declaration: nSsi = m // димензија Ssi[] вектора
Declaration: Pi[] // вектор променљиве произведена количине робе
Declaration: nPi = m // димензија Pi[] вектора
Declaration: Qi[] // вектор променљиве испоручена количине робе купцу
Declaration: nQi = m // димензија Qi[] вектора
Declaration: Tu = 1 // минимум “дана залиха” у магацину
Declaration: Tl = 3/5 // максимум “дана залиха” у магацину
Declaration: C = 19000 // машински капацитет
Declaration: Constraints[] // ограничења крисп проблема линеарног програмирања
Declaration: Ssi_sum[] // вектор суме променљиве сигурносне залихе робе
Declaration: nSsi_sum = nH // димензија Ssi_sum[] вектора
Declaration: Pi_sum[] // вектор суме променљиве произведена количине робе
Declaration: nPi_sum = nH // димензија Pi_sum[] вектора
Declaration: Qi_sum[] // вектор суме променљиве испоручена количина робе купцу
Declaration: nQi_sum = nH // димензија Qi_sum[] вектора
Declaration: Z1[] // вектор крајње леве стране трапезоидне фази функције толеранције
Declaration: nZ1 = nH // димензија Z1[] вектора
Declaration: Z2[] // вектор леве стране средине трапезоидне фази функције толеранције
Declaration: nZ2 = nH // димензија Z2[] вектора
Declaration: Z3[] // вектор десне стране средине трапезоидне фази функције толеранције
Declaration: nZ3 = nH // димензија Z3[] вектора
Declaration: Z4[] // вектор крајње десне стране трапезоидне фази функције толеранције
Declaration: nZ4 = nH // димензија Z4[] вектора
Declaration: Zmean[] // вектор дефазификоване вредности трапезоидне фази функције толеранције
Declaration: nZmean = nH // димензија Zmean[] вектора
For i = 1 : m
    Add ( TpMean*Pi[i] + TtMean*Qi[i] + TsMean*Ssi[i] ) to ObjFun
End
For k = 1 : nH
Declaration: h = H[k]
    //add constraints
    For i = 1 : m
        Add constraint to Constraints: Ssi[i] + ((1-h)*Wp_E2[i] + h*Wp_E1[i])*Pi[i] >=
(h*Wd_E2[i] +(1-h)*Wd_E1[i])*Di[i]
    End
    For i = 1 : m
        Add constraint to Constraints: ((1-h)*Wp_E2[i]+h*Wp_E1[i])*Pi[i] = Ssi[i+1] - Ssi[i] + ((1-
h)*Wd_E2[i] + h*Wd_E1[i])*Qi[i]
    End
    For i = 1 : m
        Add constraint to Constraints: ((1-h)*Wp_E2[i] + h*Wp_E1[i])*Pi[i] >= 0
    End

```

```

For i = 1 : m
    Add constraint to Constraints: C >= ((1-h)*Wp_E2[i] + h*Wp_E1[i])*Pi[i]
End
For i = 1 : m
    Add constraint to Constraints: Ssi[i] >= Tl[i] * (h*Wd_E2[i] + (1-h)*Wd_E1[i])*Di[i]
End
For i = 1 : m
    Add constraint to Constraints: Ssi[i] <= Tu[i]*(h*Wd_E2[i] + (1-h)*Wd_E1[i])*Di[i]
End
For i = 1 : m
    Add constraint to Constraints: Qi[i] = (h*Wd_E2[i] + (1-h)Wd_E1[i])*Di[i]
End
For i = 1 : m
    Add constraint to Constraints: Ssi[i] >= 0
End
For i = 1 : m
    Add constraint to Constraints: Pi[i] >= 0
End
For i = 1 : m
    Add constraint to Constraints: Qi[i] >= 0
End
//call solver
Ssi[], Pi[], Qi[] ← solveLPproblem(ObjFun, Constraints)
//calculate sums
Ssi_sum[k] = Sum of Ssi[]
Pi_sum[k] = Sum of Pi[]
Qi_sum[k] = Sum of Qi[]
//calculate
Z1[k] = Ssi_sum[k]*Ts[1] + Pi_sum[k]*Tp[1] + Qi_sum[k]*Tt[1]
Z2[k] = Ssi_sum[k]*Ts[2] + Pi_sum[k]*Tp[2] + Qi_sum[k]*Tt[2]
Z3[k] = Ssi_sum[k]*Ts[3] + Pi_sum[k]*Tp[3] + Qi_sum[k]*Tt[3]
Z4[k] = Ssi_sum[k]*Ts[4] + Pi_sum[k]*Tp[4] + Qi_sum[k]*Tt[4]
//calculate
Zmean[k] = ( Z1[k] + Z2[k] + Z3[k] + Z4[k] ) / 4
End
Declaration: Kg[] // вектор степена задовољења решења
Declaration: nKg = nH // димензија Kg[] вектора
For k = 1 : nH
    Kg[k] = ((Z4[nH] - Zmean[k]) / (Z4[nH] - Z1[1]))
End
Declaration: UD[] // вектор баланса између степена изводљивости и степена задовољења решења
проблема
Declaration: nUD = nH // димензија UD[] вектора
For k = 1 : nH
    UD[k] = G[k] * H[k]
End
Declaration: UDmax = 0 // почетна вредност максимума вектора баланса између степена
изводљивости и степена задовољења решења проблема
Declaration: UDmaxIndex
For k = 1 : nUD
    If (UD[k] > UDmax)

```

```

UDmax = UD[k]
UDmaxIndex = k
End
print(ObjFun)
print(Ssi[UDmaxIndex])
print(Pi[UDmaxIndex])
print(Qi[UDmaxIndex])

```

**Прилог В. Програмски код C++ за експеримент „неизвесност у произведеној количини је 50% мања него у експерименту у основном случају“**

\*Програмски код је идентичан као у прилогу Б, једино се разликује у једном сегменту који је исписан испод.

**Declaration:** Wp1[] // лева страна фази фактора неизвесне произведене количине

**Declaration:** nWp1 = m // димензија Wp1[] вектора

For i = 1 : m

Wp1[m] = Wp2[m] - 0.1\*0.5

End

**Declaration:** Wp3[] // десна страна фази фактора неизвесне произведене количине

**Declaration:** nWp3 = m // димензија Wp3[] вектора

For i = 1 : m

Wp3[m] = Wp2[m] + 0.1\*0.5

End

**Прилог Г. Програмски код C++ за експеримент „неизвесност у произведеној количини је 50% већа него у експерименту у основном случају“**

\*Програмски код је идентичан као у прилогу Б, једино се разликује у једном сегменту који је исписан испод.

**Declaration:** Wp1[] // лева страна фази фактора неизвесне произведене количине

**Declaration:** nWp1 = m // димензија Wp1[] вектора

For i = 1 : m

Wp1[m] = Wp2[m] - 0.1\*1.5

End

**Declaration:** Wp3[] // десна страна фази фактора неизвесне произведене количине

**Declaration:** nWp3 = m // димензија Wp3[] вектора

For i = 1 : m

Wp3[m] = Wp2[m] + 0.1\*1.5

End

**Прилог Д. Програмски код C++ за експеримент „неизвесност у одступању купчеве потражње је 50% мања него у основном случају“**

\*Програмски код је идентичан као у прилогу Б, једино се разликује у једном сегменту који је исписан испод.

**Declaration:** Wd1[] // лева страна фази фактора неизвесне купчеве потражње са флукуацијом око прогнозиране количине

**Declaration:** nWd1 = m // димензија Wd1[] вектора

For i = 1 : m

Wd1[m] = Wd2[m] - Fi[m]\*0.5

End

**Declaration:** Wd3[] // десна страна фази фактора неизвесне купчеве потражње са флукуацијом око прогнозиране количине

**Declaration:** nWd3 = m // димензија Wd3[] вектора



```

For i = 1 : m
    Wd3[m] = Wd2[m] + Fi[m]*0.5
End

```

**Прилог Ђ. Програмски код C++ за експеримент „неизвесност у одступању купчеве потражње је 50% већа него у основном случају“**

\*Програмски код је идентичан као у прилогу Б, једино се разликује у једном сегменту који је исписан испод.

**Declaration:** Wd1[] // лева страна фази фактора неизвесне купчеве потражње са флукуацијом око прогнозиране количине

**Declaration:** nWd1 = m // димензија Wd1[] вектора

```

For i = 1 : m
    Wd1[m] = Wd2[m] - Fi[m]*1.5
End

```

**Declaration:** Wd3[] // десна страна фази фактора неизвесне купчеве потражње са флукуацијом око прогнозиране количине

**Declaration:** nWd3 = m // димензија Wd3[] вектора

```

For i = 1 : m
    Wd3[m] = Wd2[m] + Fi[m]*1.5
End

```

**Прилог Е. Програмски код C++ за експеримент „сигурносне залихе између 2 и 4 дана“**

\*Програмски код је идентичан као у прилогу Б, једино се разликује у једном сегменту који је исписан испод.

**Declaration:** Tu = 4/5 // минимум “дана залиха” у магацину

**Declaration:** Tl = 2/5 // максимум “дана залиха” у магацину

**Прилог Ж. Програмски код C++ за експеримент „сигурносне залихе између 1 и 3 дана“**

\*Програмски код је идентичан као у прилогу Б, једино се разликује у једном сегменту који је исписан испод.

**Declaration:** Tu = 3/5 // минимум “дана залиха” у магацину

**Declaration:** Tl = 1/5 // максимум “дана залиха” у магацину

**Прилог З. Програмски код C++ за модел прогнозе потражње купаца методом ФЛРА**

**Input:** m = 12 // укупан број недеља у периоду планирања

**Input:** hMin // минимална вредност степена изводљивости

**Input:** hMax // максимална вредност степена изводљивости

**Input:** hStep // корак степена изводљивости

**Input:** Week [] // вектор улазне вредности ФЛР

**Input:** Quantity [] // вектор излазне вредности ФЛР

//set number of calculations

**Declaration:** Calc[] //vector of all possible combinations of h,H,e parameters

**Declaration:** nCalc = 0 // димензија Calc[] вектора

```

For h = hMin : hMax, hStep
    Add h to Calc[]

```

```

    nCalc + 1

```

```

End

```

**Declaration:** ObjFun = 0 // циљна функција

**Declaration:** p0 // средина независног члана регресионе праве у

**Declaration:** p1 // средина коефицијента регресионе праве у

```

Declaration: c0 // ширина (лева и десна страна троугластог фази броја) независног члана
регресионе праве у
Declaration: c1 // ширина (лева и десна страна троугластог фази броја) коефицијента
регресионе праве у,
Add m*c0 + ( Sum Of Week [] ) *c1 to ObjFun
For i = 1 : nCalc
    Declaration: Constraints[] // вектор ограничења модела ФЛР
    Declaration: h = Calc[i].h
    //add constraints
    For j = 1 : m
        Add constraint to Constraints: p0 + Week[j]*p1 + (1-h)*(c0 + Week[j]*c1) >=
Quantity[j]
        Add constraint to Constraints: p0 + Week[j]*p1 - (1-h)*(c0 + Week[j]*c1) <=
Quantity[j]
    End
    Add constraint to Constraints: c1 >= 0
    //call solver
    p0,p1,c0,c1 ← solveLPproblem(ObjFun, Constraints)
    print(ObjFun)
    print(p0,p1,c0,c1)
End

```