



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU



Zoltan Pap

Projektivni postupci tipa konjugovanih gradijenata za rešavanje nelinearnih monotonih sistema velikih dimenzija

- doktorska disertacija -

Novi Sad, 2019.

Predgovor

Mnogi realni problemi iz oblasti tehnologije, industrije i prirodnih nauka modeliraju se sistemima nelinearnih jednačina i zato se velika pažnja posvećuje njihovom rešavanju. Među ovim sistemima posebnu klasu čine nelinearni monotoni sistemi koji se javljaju kao potproblemi nekih praktičnih i teorijskih problema, pa je iz tog razloga rešavanje ovakvih sistema veoma aktuelno.

Sistemi nelinearnih jednačina su u bliskoj vezi sa problemima optimizacije. Naime, rešavanje nelinearnih sistema ekvivalentno je određivanju globalnog minimuma funkcije cilja definisane kao kvadrat norme funkcije sistema, te se globalizacija mnogih iterativnih postupaka za rešavanje sistema nelinearnih jednačina bazira na minimizaciji ove funkcije cilja. Pod određenim uslovima, ovakav pristup garantuje da je svaka tačka nagomilavanja niza koji je generisan iterativnim postupkom, stacionarna tačka posmatrane funkcije cilja. Međutim, bez regularnosti ne može se garantovati da je stacionarna tačka rešenje problema minimizacije i ujedno i rešenje sistema. Da bi se osigurala egzistencija tačke nagomilavanja, potrebna je pretpostavka o ograničenosti nivo skupa posmatrane funkcije cilja, pa time i ograničenosti skupa rešenja, a osim toga, bez regularnosti, u opštem slučaju se ne može pokazati konvergencija celog niza generisanog iterativnim postupkom ka rešenju sistema čak i kada niz vrednosti funkcije cilja teži ka nuli. Upravo iz ovih razloga javila se potreba za metodama koje ne koriste funkciju cilja.

Kada je u pitanju rešavanje monotonih sistema, projekтивna metoda zbog osobine monotonosti omogućava jednostavnu globalizaciju. Za razliku od klasičnih postupaka koji koriste linijsko pretraživanje sa funkcijom cilja, kod projekтивne metode, tehnika linijskog pretraživanja se koristi u cilju konstrukcije hiperravni koja trenutnu iteraciju razdvaja od skupa rešenja sistema. Naredna iteracija se dobija projek-

tovanjem trenutne iteracije na datu hiperravan. Na ovaj način postiže se globalna konvergencija algoritma. Upotreba linijskog pretraživanja, koje ne koristi funkciju cilja i koje je bazirano samo na izračunavanju vrednosti funkcije sistema, omogućava globalnu konvergenciju algoritma bez bilo kakvih pretpostavki o regularnosti. Sa druge strane, metode konjugovanih gradijenata i njihove modifikacije zahtevaju malo računarske memorije, pa su pogodne za rešavanje problema velikih dimenzija.

Predmet istraživanja disertacije je rešavanje nelinearnih monotonihi sistema velikih dimenzija. Posebna pažnja je posvećena postupcima koji kombinuju projektnu metodu sa pravcima pretraživanja tipa konjugovanih gradijenata koji ne koriste izvode. Prednost ovih algoritama ogleda se u tome što projektna metoda omogućava jednostavnu globalizaciju zbog osobine monotonosti sistema, a zahvaljujući pravcima pretraživanja tipa konjugovanih gradijenata ovi algoritmi koriste malo memorije te su prikladni za rešavanje problema velikih dimenzija. Pošto su bazirani samo na izračunavanju vrednosti funkcije sistema i ne koriste funkciju cilja, globalna konvergencija se postiže bez pretpostavke o regularnosti, te se zato mogu upotrebiti i za rešavanje sistema sa singularnim rešenjima. S obzirom da ne koriste izvode, tj. ne zahtevaju diferencijabilnost funkcije, ovi postupci su primenljivi i za rešavanje neglatkih monotonihi sistema.

Prvi deo disertacije obuhvata pregled osnovnih oznaka, definicija i teorema neophodnih za praćenje rada. U drugom poglavlju su prikazani najpoznatiji iterativni postupci za rešavanje nelinearnih sistema. Treći deo je posvećen metodama konjugovanih gradijenata i njihovim modifikacijama za rešavanje problema optimizacije bez ograničenja. U četvrtom poglavlju prikazana je projektna metoda za rešavanje nelinearnih monotonihi sistema. U petom delu su predstavljene projektivne metode tipa konjugovanih gradijenata za rešavanje nelinearnih monotonihi sistema. Originalni deo disertacije je izložen u ovom i u šestom poglavlju. Definisana su tri pravca pretraživanja tipa Flečer-Rivs¹ i dva hibridna pravca pretraživanja tipa Hu-Stori². Formulisani su projektni postupci sa predloženim pravcima pretraživanja i dokazana je njihova globalna konvergencija. U šestom poglavlju su ilustrovani numerički rezultati dobijeni testiranjem predstavljenih postupaka na relevantnim numeričkim primerima. Poređeni su novi postupci sa

¹R. Fletcher, C. M. Reeves

²Z. F. Hu, C. Storey

postojećim projektivnim postupcima poznatim iz literature. Zaključak je dat u sedmom poglavlju, dok su radi potpunosti, u dodatku prikazane tabele sa detaljnim podacima o rezultatima numeričkog testiranja.

U okviru istraživanja odrađenog u cilju izrade ove disertacije, formulisani su i testirani i tročlani pravci tipa Hestenes-Stifel³ i dokazana je globalna konvergencija projektivnih postupaka sa ovim pravcima pretraživanja. Međutim, projektivni postupci sa pravcima tipa Hestenes-Stifel nisu pokazali dovoljno dobre računarske performanse, pa stoga nisu predstavljeni u disertaciji.



Mnogo sam zahvalan svom mentoru dr Sanji Rapajić, vanrednom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, koja je svojim idejama, savetima i sugestijama pomagala izradu moje doktorske disertacije. Takođe joj se zahvaljujem na razumevanju i moralnoj podršci za vreme mog studiranja na doktorskim studijama kao i na iskustvu koje sam stekao tokom našeg zajedničkog rada.

Zahvaljujem se dr Nataši Krejić, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu na korisnim sugestijama.

Zahvaljujem se dr Nataši Krklec Jerinkić, docentu Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu na pokazanom interesovanju, korisnim sugestijama i primedbama prilikom izrade ove teze.

Dr Zoranu Ovcinu, docentu Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu, dugujem zahvalnost na korisnim sugestijama kojim je doprineo poboljšanju kvaliteta ove disertacije.

Želim da se zahvalim svojoj porodici, supruzi Eriki i ćerki Kristini na strpljenju i razumevanju, a zatim kolegama na pruženoj podršci.

Novi Sad, 12. mart 2019.

Zoltan Pap

³M.R. Hestenes, E. Stiefel

Sadržaj

Predgovor	i
1. Uvod	1
1.1. Oznake, definicije i teoreme	1
2. Iterativni postupci za rešavanje nelinearnih sistema	9
2.1. Njutnov postupak	10
2.2. Netačni Njutnovi postupci	12
2.3. Kvazi-Njutnovi postupci	13
2.4. Postupci za globalizaciju	17
2.5. Regularizovani Njutnovi postupci	22
2.6. Spektralni postupci	23
3. Postupci konjugovanih gradijenata	27
3.1. Nelinearni CG postupci	28
3.2. Hibridni postupci	32
3.3. Familija postupaka tipa DL	34
4. Projekтивni postupci za rešavanje nelinearnih monotonih sistema	37
4.1. Hibridni projekтивni netačni Njutnov postupak	38
4.2. Projekтивni postupak spektralnog gradijenta	41
5. Projekтивni postupci tipa konjugovanih gradijenata	43
5.1. Pravci pretraživanja tipa PRP	44
5.2. Pravci pretraživanja tipa DL	46
5.3. Pravci pretraživanja tipa FR	46
5.4. Pravci pretraživanja tipa HuS	49
5.5. Projekтивni CG algoritam	51

5.6. Analiza konvergenције	53
6. Numerički rezultati	67
6.1. Test primeri	67
6.2. Metodologija upoređivanja algoritama	70
6.3. Ulazne vrednosti algoritama i kriterijumi zaustavljanja .	72
6.4. Analiza numeričkih rezultata	73
7. Zaključak	89
8. Dodatak	91
Literatura	113
Biografija	121
Ključna dokumentacijska informacija	123

1 Uvod

Predmet istraživanja disertacije je rešavanje nelinearnih monotonih sistema algoritmima koji kombinuju projektnu metodu sa pravcima pretraživanja tipa konjugovanih gradijenata. Ovi algoritmi pripadaju klasi iterativnih postupaka za rešavanje nelinearnih sistema. Razumevanje teorije iterativnih postupaka za rešavanje nelinearnih sistema i teorijske osnove na kojoj se zasniva projektna metoda zahteva elementarno znanje iz linearne algebre, matematičke, funkcionalne i numeričke analize.

S ciljem da se obezbedi lakše praćenje disertacije, ovo poglavlje je posvećeno pregledu osnovnih oznaka, definicija i teorema koristeći [2, 22, 24, 32, 39, 57, 71, 72].

1.1 Oznake, definicije i teoreme

\mathbb{N} - skup prirodnih brojeva

\mathbb{N}_0 - skup prirodnih brojeva proširen nulom

\mathbb{R} - skup realnih brojeva

\mathbb{C} - skup kompleksnih brojeva

\mathbb{R}^n - skup n -dimenzionalnih realnih vektora

$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ - n -dimenzionalni vektor

x_i - i -ta komponenta vektora $x \in \mathbb{R}^n$

X_F^* - skup rešenja sistema $F(x) = 0$

e_1, e_2, \dots, e_n - vektori standardne baze prostora \mathbb{R}^n

e - n -dimenzionalni vektor čiji su svi elementi jedinice

$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ - matrica formata $m \times n$ sa elementima $a_{ij} \in \mathbb{R}$,

$i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$

I - jedinična matrica

A^{-1} - inverzna matrica

$\{x_k\}$ - niz n -dimenzionalnih realnih vektora

$\text{card}(S)$ - kardinalni broj, odnosno broj elementa skupa S

Definicija 1.1. Neka je X vektorski prostor nad \mathbb{R} . Skup $K \subseteq X$ je konveksan ako za svako $x, y \in K$ segment $\{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$ pripada skupu K .

Definicija 1.2. Neka je X vektorski prostor nad \mathbb{R} . Preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ je skalarni proizvod na prostoru X ako ima osobine

- $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ za svako $x_1, x_2, y \in X$,
- $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ i $x, y \in X$,
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ za svako $x \in X$,
- $\langle x, x \rangle = 0$ ako i samo ako je $x = 0$.

Definicija 1.3. Neka je X vektorski prostor nad \mathbb{R} . Preslikavanje $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ je vektorska norma nad X ako ima osobine

- $\|x\| \geq 0$ za svako $x \in X$,
- $\|x\| = 0$ ako i samo ako $x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ i $x \in X$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ za svako $x, y \in X$.

U disertaciji ćemo posmatrati Euklidski prostor n -dimenzionalnih realnih vektora u kojem je skalarni proizvod za svako $x, y \in \mathbb{R}^n$ definisan sa

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

a vektorska norma sa

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Lema 1.1 (Koši-Švarc⁴). U Euklidskom n -dimenzionalnom prostoru za svako $x, y \in \mathbb{R}^n$ važi Koši-Švarcova nejednakost

$$|x^T y| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad (1.1)$$

⁴A.L. Cauchy, H.A. Schwarz

Lema 1.2. U Euklidskom n -dimenzionalnom prostoru za svako $x, y \in \mathbb{R}^n$ važi nejednakost

$$x^T y \leq \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (1.2)$$

Teorema 1.1 (Bolcano-Vajerštras⁵). Svaki ograničeni niz vektora u Euklidskom prostoru ima bar jednu tačku nagomilavanja u \mathbb{R}^n .

Definicija 1.4. Preslikavanje $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ je matrična norma ako ima osobine

- $\|A\| \geq 0$ za svako $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,
- $\|A\| = 0$ ako i samo ako $A = 0$,
- $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ i $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ za svako $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Definicija 1.5. Funkcija $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je monotona funkcija, ako za svako $x, y \in \mathbb{R}^n$ važi

$$(F(x) - F(y))^T(x - y) \geq 0.$$

Definicija 1.6. Neka je Y^m linearni vektorski potprostor dimenzije m u prostoru \mathbb{R}^n . Skup $a + Y^m$, gde je $a \in \mathbb{R}^n$, naziva se linearna mnogostrukost dimenzije m . Mnogostrukost dimenzije $n - 1$ se naziva hiperravan, a linearna mnogostrukost dimenzije 1 je prava.

Definicija 1.7 ([71]). Skup

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \gamma, c \in \mathbb{R}^n, c \neq 0, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

je hiperravan prostora \mathbb{R}^n . Vektor c je vektor normale hiperravni H .

Definicija 1.8. Matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitivno semidefinitna ako

$$x^T A x \geq 0 \quad \text{za svaki vektor } x \in \mathbb{R}^n,$$

a pozitivno definitna ako

$$x^T A x > 0 \quad \text{za svaki nenula vektor } x \in \mathbb{R}^n.$$

⁵B. Bolzano, K. Weierstrass

Definicija 1.9. Vektori $x, y \in \mathbb{R}^n$ su konjugovani u odnosu na matricu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ako važi

$$x^T A y = 0.$$

Skup vektora $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je konjugovan u odnosu na matricu A ako važi

$$x_i^T A x_j = 0, \quad i \neq j.$$

Lema 1.3 (Šerman-Morison-Wudburi⁶ [22]). Neka su $u, v \in \mathbb{R}^n$ i neka je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regularna matrica. Matrica $A + uv^T$ je regularna ako i samo ako je $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$. Takođe važi

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + v^T A^{-1} u} A^{-1} u v^T A^{-1}.$$

Definicija 1.10. Neka je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Tada se problem linearnih najmanjih kvadrata definiše kao problem određivanja vektora $x \in \mathbb{R}^n$ koji minimizira $\|b - Ax\|$.

Teorema 1.2 ([72]). Neka je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$ i $b \in \mathbb{R}^m$. Tada je vektor $x \in \mathbb{R}^n$ rešenje problema najmanjih kvadrata ako i samo ako važi

$$A^T (b - Ax) = 0,$$

ili ekvivalentno

$$A^T A x = A^T b. \tag{1.3}$$

Linearni sistem (1.3) ima dimenziju $n \times n$ i naziva se normalna jednačina. Ovaj sistem je regularan ako i samo ako je matrica A punog ranga. Dakle, rešenje problema najmanjih kvadrata je jedinstveno ako i samo ako je matrica A punog ranga.

Definicija 1.11. Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je konveksna funkcija ako je njen domen D konveksan skup i za svako $x, y \in D$ važi

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad \text{za svako } \alpha \in [0, 1].$$

Funkcija f je strogo konveksna ako za svako $x, y \in D$, $x \neq y$ važi

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad \text{za svako } \alpha \in (0, 1).$$

⁶J. Sherman, W.J. Morrison, M.A. Woodbury

Definicija 1.12. Neka je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i $D \in \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Za nenula vektor $p \in \mathbb{R}^n$, izvod u pravcu p funkcije f u tački $x \in D$ je granična vrednost (ukoliko postoji)

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon p) - f(x)}{\varepsilon}.$$

Definicija 1.13. Izvod funkcije $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ u pravcu vektora e_i , $i = 1, 2, \dots, n$ u tački $x \in \mathbb{R}^n$, tj. granična vrednost

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon e_i) - f(x)}{\varepsilon}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

(ukoliko postoji) se naziva i -ti parcijalni izvod funkcije f u tački x .

Definicija 1.14. Nепrekidna funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je neprekidno diferencijabilna u tački $x \in \mathbb{R}^n$ ako postoje parcijalni izvodi $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ koji su neprekidni. Gradijent funkcije f u tački x se definiše sa

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right]^T.$$

Funkcija f je neprekidno diferencijabilna u otvorenoj oblasti $D \subset \mathbb{R}^n$ i označava se sa $f \in C^1(D)$ ako je neprekidno diferencijabilna u svakoj tački $x \in D$.

Lema 1.4 ([22]). Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna na otvorenom i konveksnom skupu $D \in \mathbb{R}^n$. Tada za svako $x \in D$ i nenula vektor $p \in \mathbb{R}^n$ postoji izvod po pravcu p funkcije f u tački x . Za njega važi $\frac{\partial f}{\partial p}(x) = \nabla f(x)^T p$. Takođe, za svako $x, x + p \in D$ važi

$$f(x + p) - f(x) = \int_0^1 \nabla f(x + tp)^T p dt = \int_x^{x+p} \nabla f(z) dz$$

i postoji $z \in (x, x + p)$ tako da važi

$$f(x + p) - f(x) = \nabla f(z)^T p.$$

Definicija 1.15. Nепrekidno diferencijabilna funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je dva puta neprekidno diferencijabilna u tački $x \in \mathbb{R}^n$ ako postoje parcijalni izvodi drugog reda $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ koji su neprekidni. Hesijan funkcije f u tački x je matrica parcijalnih izvoda drugog reda formata $n \times n$ oblika

$$H(x) = \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Funkcija f je dva puta neprekidno diferencijabilna u otvorenoj oblasti $D \in \mathbb{R}^n$ i označava se sa $f \in C^2(D)$ ako je dva puta neprekidno diferencijabilna u svakoj tački oblasti D .

Lema 1.5 ([22]). Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dva puta neprekidno diferencijabilna na otvorenom i konveksnom skupu $D \in \mathbb{R}^n$. Tada za svako $x \in D$ i nenula vektor $p \in \mathbb{R}^n$ postoji izvod drugog reda po pravcu p funkcije f u tački x koji se definiše sa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial p}(x + \varepsilon p) - \frac{\partial f}{\partial p}(x)}{\varepsilon}$$

i on je jednak sa $p^T H(x)p$. Za svako $x, x + p \in D$ postoji $z \in (x, x + p)$ takvo da

$$f(x + p) = f(x) + \nabla f(x)^T p + \frac{1}{2} p^T H(z)p.$$

Definicija 1.16. Preslikavanje $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je F -diferencijabilno u tački x iz unutrašnjosti D ako postoji linearno preslikavanje $F'(x)$ takvo da je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(x + h) - F(x) - F'(x)h\|}{\|h\|} = 0.$$

Linearno preslikavanje $F'(x)$, gde je

$$F'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

se naziva Jakobijan funkcije F , pri čemu su F_i komponente preslikavanja F , tj. $F(x) = [F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)]^T$.

Lema 1.6 ([22]). Neka je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilna na otvorenom i konveksnom skupu $D \subset \mathbb{R}^n$. Tada za svako $x, x + p \in D$ važi

$$F(x + p) - F(x) = \int_0^1 F'(x + tp)p dt \equiv \int_x^{x+p} F'(z) dz.$$

Definicija 1.17. Preslikavanje $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je Lipšić⁷ neprekidno sa konstantom L nad oblasti D ako za svako $x, y \in D$ važi

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

⁷R. Lipschitz

Skup svih preslikavanja koja zadovoljavaju prethodnu definiciju označavamo sa $Lip_L(D)$.

Definicija 1.18. Neka niz $\{x_k\}$ konvergira ka x^* , i neka su g i h neprekidne, nenegativne realne funkcije. Uvode se oznake

- $g(x_k) = o(h(x_k))$ kad $k \rightarrow \infty$, ako je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(x_k)}{h(x_k)} = 0,$$

- $g(x_k) = \mathcal{O}(h(x_k))$ kad $k \rightarrow \infty$, ako je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(x_k)}{h(x_k)} < \infty.$$

Definicija 1.19. Neka je $\{x_k\} \in D$ i $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$. Tada niz $\{x_k\}$ konvergira ka x^*

- q -linearno, ako postoji konstanta $c \in (0, 1)$ takva da je

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c \|x_k - x^*\|,$$

- q -superlinearno, ako je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = 0,$$

- sa q -redom bar α , $\alpha > 1$ ako postoji konstanta $c > 0$ takva da je

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c \|x_k - x^*\|^\alpha,$$

- q -kvadratno ako postoji konstanta $c > 0$ takva da je

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c \|x_k - x^*\|^2,$$

Dakle, niz $\{x_k\}$ konvergira ka x^*

- q -superlinearno, ako je $\|x_{k+1} - x^*\| = o(\|x_k - x^*\|)$,
- q -kvadratno ako, ako je $\|x_{k+1} - x^*\| = \mathcal{O}(\|x_k - x^*\|^2)$,

Definicija 1.20. *Iterativni metod za izračunavanje rešenja x^* nelinearnog sistema $F(x) = 0$ je lokalno (q -linearno, q -superlinearno, q -kvadratno) konvergentan ako niz iteracija $\{x_k\}$ konvergira ka x^* (q -linearno, q -superlinearno, q -kvadratno), pri čemu je početna iteracija dovoljno blizu rešenja x^* .*

U daljem tekstu su navedeni termini korišćeni bez prefiksa q .

Definicija 1.21. *Za iterativni postupak kažemo da je Afino invarijantan (na kodomeni) ako primenjen na probleme $\bar{f} \equiv TF(x) = 0$ i $F(x) = 0$, gde je T regularna matrica, daje identične iterativne nizove za svaku početnu aproksimaciju.*

2 Iterativni postupci za rešavanje nelinearnih sistema

Matematički modeli mnogih realnih problema svode se na nelinearne sisteme, pa je njihovo rešavanje od izuzetnog značaja.

Neka je dat sistem nelinearnih jednačina

$$F(x) = 0, \quad (2.1)$$

pri čemu je preslikavanje $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nelinearno. Svaki vektor $x^* \in D$ za koji važi $F(x^*) = 0$ naziva se rešenje sistema (2.1). Rešenje x^* sistema (2.1) je degenerisano ako je Jakobijan $F'(x^*)$ singularna matrica, u suprotnom je rešenje sistema nedegenerisano. Sistem (2.1) u opštem slučaju ne mora imati rešenje, može imati jedno ili beskonačno mnogo rešenja. Pregled uslova egzistencije i jedinstvenosti rešenja sistema (2.1) je dat u [53].

Većina nelinearnih sistema se ne može rešiti tačno, pa se rešavaju približno nekim numeričkim postupkom. U ovom poglavlju će biti dat kratak pregled najpoznatijih iterativnih postupaka za rešavanje nelinearnih sistema.

Za početnu aproksimaciju rešenja $x_0 \in D$, iterativnim postupkom generiše se niz vektora $\{x_k\}$ pomoću iterativnog pravila

$$x_{k+1} = M(x_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

gde je $M : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funkcija koraka. Kada iterativni niz $\{x_k\}$ konvergira ka tačnom rešenju x^* , kaže se da iterativni postupak konvergira. Prilikom analize iterativnih postupaka, javljaju se dva problema: problem dobre definisanosti postupka i problem konvergencije. U opštem slučaju nije moguće odrediti skup svih početnih aproksimacija za koji je iterativni postupak dobro definisan. Međutim, postoje uslovi koji garantuju da će za neke početne aproksimacije iterativni postupak

biti dobro definisan. Teoreme o lokalnoj konvergenciji pretpostavljaju postojanje rešenja nelinearnog sistema i tvrde da postoji okolina tog rešenja tako da za sve početne aproksimacije iz te okoline niz iteracija konvergira ka rešenju sistema (2.1). Pod globalnom konvergencijom se podrazumeva da iterativni niz konvergira ka rešenju sistema za proizvoljnu početnu aproksimaciju x_0 iz domena D funkcije F .

Ukoliko iterativni postupak konvergira, postavlja se pitanje brzine konvergencije. Analizira se ponašanje iterativnog niza $\{x_k\}$ za veliko $k \in \mathbb{N}$, odnosno kada je x_k blizu rešenja x^* .

2.1 Njutnov postupak

Njutnov⁸ postupak je najpoznatiji postupak za rešavanje nelinearnih sistema. Zasniva se na aproksimaciji funkcije F linearnim modelom M i pronalaženju korena ove funkcije. Za neprekidno diferencijabilnu funkciju F prema Lemi 1.6 važi jednakost

$$F(x_k + d_k) = F(x_k) + \int_{x_k}^{x_k + d_k} F'(z) dz.$$

U Njutnovoj metodi se funkcija $F(x_k + d_k)$ aproksimira linearnim modelom oblika

$$M_k(x_k + d_k) = F(x_k) + F'(x_k)d_k$$

i rešava se linearna jednačina

$$M_k(x_k + d_k) = 0$$

po d_k . Dakle, vektor d_k koji se naziva Njutnov pravac je rešenje linearnog sistema

$$F'(x_k)d_k = -F(x_k). \quad (2.2)$$

Linearni sistem (2.2) je u literaturi poznat pod nazivom Njutnova jednačina. Naredna aproksimacija x_{k+1} rešenja x^* se dobija formulom

$$x_{k+1} = x_k + d_k. \quad (2.3)$$

Njutnov metod se može zapisati u obliku sledećeg algoritma.

Budući da se Njutnov postupak zasniva na aproksimaciji funkcije linearnim modelom, kada je preslikavanje F linearno, rešenje se dostiže

⁸I. Newton

Algoritam 1 Njutnov postupak

- K0** Izaberi $x_0 \in \mathbb{R}^n$, stavi $k = 0$.
- K1** Reši linearni sistem jednačina $F'(x_k)d_k = -F(x_k)$ po d_k .
- K2** Izračunaj $x_{k+1} = x_k + d_k$.
- K3** Stavi $k = k + 1$ i vrati se na korak **K1**.

u jednom koraku. Kod nelinearnih sistema, kod kojih je neka komponenta od funkcije F linearna, u svakoj iteraciji se dobija tačno rešenje po toj komponenti. Njutnov metod je popularan zbog njegove lokalne kvadratne konvergencije.

Teorema 2.1 ([52]). *Neka je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilna na otvorenom i konveksnom skupu $D \subset \mathbb{R}^n$ i neka postoji nedegenerisano rešenje $x^* \in \mathbb{R}^n$ sistema (2.1). Ako je član x_k niza iteracija $\{x_k\}$ generisan Algoritmom 1 dovoljno blizu rešenju x^* , onda važi*

$$\|x_{k+1} - x^*\| = o(\|x_k - x^*\|), \quad (2.4)$$

odnosno niz iteracija konvergira superlinearno ka rešenju sistema. Osim toga, ako je funkcija F' Lipšic neprekidna u okolini x^ , onda za svako x_k dovoljno blizu x^* važi*

$$\|x_{k+1} - x^*\| = \mathcal{O}(\|x_k - x^*\|^2). \quad (2.5)$$

Dakle, niz iteracija konvergira kvadratno ka rešenju sistema.

Prednosti Njutnovog postupka su brza lokalna konvergencija i Afina invarijantnost. Međutim, Njutnov postupak ima i neke nedostatke, a to su izračunavanje Jakobijana $F'(x_k)$ u svakoj iteraciji, kao i tačno rešavanje linearnog sistema u svakoj iteraciji što je skupo kad je reč o sistemima velikih dimenzija.

U cilju prevazilaženja ovih nedostataka, razvile su se mnogobrojne modifikacije Njutnovog postupka, u koje spadaju netačni Njutnovi postupci i kvazi-Njutnovi postupci.

2.2 Netačni Njutnovi postupci

Tačno rešavanje linearnog sistema u svakom koraku Njutnovog postupka može zahtevati veliki broj operacija, naročito ako je dimenzija problema velika. Da bi se otklonio ovaj nedostatak Njutnove metode, razvili su se netačni Njutnovi postupci koji se zasnivaju na ideji da se linearni sistem koji se javlja u Njutnovoju jednačini rešava približno. Dakle, Njutnova jednačina (2.2), rešava se približno, tj. pravac d_k se određuje tako da važi

$$\|F(x_k) + F'(x_k)d_k\| \leq \eta_k \|F(x_k)\|, \quad \text{za neko } \eta_k \in [0, \eta], \quad (2.6)$$

gde je $\eta \in [0, 1]$. Niz nenegativnih brojeva $\{\eta_k\}$ reguliše nivo tačnosti rešenja linearnog sistema (2.2) i u literaturi se često naziva "forcing term". Dakle, pravac d_k koji zadovoljava uslov (2.6) predstavlja aproksimaciju Njutnovog pravca. Neka je $r_k = F(x_k) + F'(x_k)d_k$ rezidual. Tada se netačni Njutnov postupak može zapisati u obliku Algoritma 2.

Algoritam 2 Netačni Njutnov postupak

- K0** Izaberi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i niz nenegativnih brojeva $\{\eta_k\}$. Stavi $k = 0$.
- K1** Reši linearni sistem jednačina $F'(x_k)d_k = -F(x_k) + r_k$ po d_k tako da važi $\|r_k\| \leq \eta_k \|F(x_k)\|$.
- K2** Izračunaj $x_{k+1} = x_k + d_k$.
- K3** Stavi $k = k + 1$ i vrati se na korak **K1**.
-

Lokalna konvergencija netačnog Njutnovog postupka je dokazana pod pretpostavkom da je niz $\{\eta_k\}$ uniformno manji od jedinice.

Teorema 2.2 ([20]). *Neka je funkcija $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilna u okolini rešenja $x^* \in \mathbb{R}^n$ i neka je $F'(x^*)$ regularna. Neka je $\eta_k \leq \eta_{max} < t < 1$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takvo da ako $\|x_0 - x^*\| \leq \varepsilon$, onda niz iteracija generisan Algoritmom 2 konvergira ka rešenju x^* sistema (2.1). Konvergencija je linearna u normi $\|\cdot\|_*$, tj.*

$$\|x_{k+1} - x^*\|_* \leq t \|x_k - x^*\|_*,$$

pri čemu je $\|y\|_* = \|F'(x^*)y\|$.

Uslovi za superlinearnu konvergenciju netačnog Njutnovog postupka dati su u sledećoj teoremi.

Teorema 2.3 ([20]). *Ako niz iteracija $\{x_k\}$ dobijen netačnim Njutnovim postupkom konvergira ka x^* , konvergencija je superlinearna ako i samo ako je*

$$\|r_k\| = o(\|F(x_k)\|), \quad \text{kad } k \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Brzina konvergencije netačnog Njutnovog postupka zavisi od izbora niza $\{\eta_k\}$ u uslovu (2.6), a ne od tehnike određivanja pravca d_k . Iz uslova (2.6), definicije reziduala i (2.7) sledi da niz iteracija $\{x_k\}$ dobijen Algoritmom 2 konvergira superlinearno ka rešenju x^* ako niz η_k teži ka nuli, kada $k \rightarrow \infty$.

2.3 Kvazi-Njutnovi postupci

Jedan od nedostataka Njutnovog postupka jeste izračunavanje n^2 elemenata matrice Jakobijana u svakoj iteraciji, što poskupljuje postupak kad je n veliko, tj. kad je reč o sistemima velikih dimenzija. Kvazi-Njutnovi postupci su nastali sa ciljem da se eliminiše ovaj nedostatak koji se javlja pri rešavanju sistema velikih dimenzija. Ideja ovih postupaka je aproksimiranje Jakobijana matricom koja je jednostavnija i jeftinija za izračunavanje, jer ne zahteva računanje izvoda.

Najjednostavnija modifikacija Njutnovog postupka, koja spada u kvazi-Njutnove postupke, je fiksni Njutnov postupak. Kod ovog postupka se Jakobijan $F'(x_k)$ u svakoj iteraciji aproksimira konstantnom matricom, pa se na taj način postiže ušteda u broju operacija u jednoj iteraciji postupka.

Postoje kvazi-Njutnovi postupci kod kojih se aproksimacija Jakobijana ili inverznog Jakobijana menja u svakoj iteraciji. Svi ovi postupci su jeftiniji od Njutnovog postupka u smislu potrebnih operacija za izvršavanje jedne iteracije. Međutim, ovi postupci imaju sporiju konvergenciju, naime kvazi-Njutnovi postupci su linearno ili superlinearno konvergentni.

Funkcija $F(x_k + d_k)$ se aproksimira linearnim modelom oblika

$$M_k(x_k + d_k) = F(x_k) + B_k d_k,$$

gde je B_k aproksimacija Jakobijana koja se može menjati u svakoj iteraciji. Pravac d_k predstavlja rešenje linearnog sistema

$$B_k d_k = -F(x_k). \quad (2.8)$$

Dakle, kvazi-Njutnov postupak se može zapisati u obliku Algoritma 3.

Algoritam 3 Kvazi-Njutnov postupak

- K0** Izaberi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i regularnu početnu aproksimaciju B_0 Jakobijana. Stavi $k = 0$.
- K1** Reši linearni sistem jednačina $B_k d_k = -F(x_k)$ po d_k .
- K2** Izračunaj $x_{k+1} = x_k + d_k$.
- K3** Odredi matricu B_{k+1} .
- K4** Stavi $k = k + 1$ i vrati se na korak **K1**.
-

Uz pretpostavku o regularnosti matrice B_k , pravac d_k se iz (2.8) može odrediti formulom

$$d_k = B_k^{-1} F(x_k). \quad (2.9)$$

Postoji mnogo načina za odabir matrice B_k . Iz Leme 1.6 sledi

$$F(x_k + d) - F(x_k) = \int_0^1 F'(x_k + td) d dt \approx F'(x_k + d) d + o(\|d\|). \quad (2.10)$$

Neka je $s_k = x_{k+1} - x_k$ i $y_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$. Ako se uzme da je $d = s_k$, onda se iz izraza (2.10) dobija

$$y_k = \int_0^1 F'(x_k + ts_k) s_k dt \approx F'(x_k + s_k) s_k + o(\|s_k\|).$$

Odavde sledi

$$y_k \approx F'(x_k + s_k) s_k. \quad (2.11)$$

Ideja je da se matrica B_{k+1} bira tako da dobro aproksimira Jakobijan $F'(x_k + s_k)$ i da se jednostavno izračunava na osnovu B_k .

Dakle, na osnovu (2.11), nameće se uslov da matrica B_{k+1} treba da zadovoljava jednačinu sečice

$$y_k = B_{k+1} s_k. \quad (2.12)$$

Kvazi-Njutnovi postupci koji zadovoljavaju jednačinu sečice se često primenjuju.

Jednačina sečice (2.12) se može posmatrati kao linearni sistem koji se sastoji od n jednačina i n^2 nepoznatih, gde su nepoznate elementi matrice B_{k+1} . Za $n > 1$ rešenje ovog sistema nije jedinstveno pa ni sama matrica B_{k+1} nije jedinstvena. Jedan od najpoznatijih kvazi-Njutnovih postupaka koji zadovoljavaju jednačinu sečice je Brojdenov⁹ metod u kojem se B_{k+1} računa na sledeći način

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k) s_k^T}{s_k^T s_k}. \quad (2.13)$$

Za B_{k+1} koja je određena sa (2.13), važi sledeća lema.

Lema 2.1 ([22]). *Među svim matricama B koje zadovoljavaju jednačinu sečice $Bs_k = y_k$, matrica B_{k+1} data sa (2.13) minimizira $\|B - B_k\|$.*

Određujući matricu B_{k+1} formulom (2.13), dobija se Brojdenov postupak, koji je superlinearno konvergentan.

Algoritam 4 Brojdenov postupak

K0 Izaberi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i regularnu početnu aproksimaciju Jakobijana B_0 . Stavi $k = 0$.

K1 Reši linearni sistem jednačina

$$B_k d_k = -F(x_k) \quad (2.14)$$

po d_k .

K2 Izračunaj $x_{k+1} = x_k + d_k$.

K3 Stavi $s_k = x_{k+1} - x_k$ i $y_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$.

K4 Izračunaj B_{k+1} pomoću (2.13).

K5 Stavi $k = k + 1$ i vrati se na korak **K1**.

⁹C.G. Broyden

Teorema 2.4 ([52]). *Neka je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilna na otvorenom i konveksnom skupu $D \subset \mathbb{R}^n$ i neka postoji nedegenerisano rešenje $x^* \in \mathbb{R}^n$ sistema (2.1) i neka Jakobijan zadovoljava Lipšicov uslov u x^* . Tada postoje konstante $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ takve da ako početna iteracija x_0 i početna aproksimacija Jakobijana B_0 zadovoljavaju*

$$\|x_0 - x^*\| \leq \varepsilon \quad \text{i} \quad \|B_0 - F'(x^*)\| \leq \delta,$$

onda je niz iteracija $\{x_k\}$ generisan Algoritmom 4 dobro definisan i konvergira superlinearno ka x^ .*

Dobar izbor B_0 može značajno poboljšati performanse Brojdenovog postupka. Međutim, određivanje dovoljno dobre početne aproksimacije Jakobijana $F'(x^*)$ u praksi može biti problematično. Neke praktične implementacije uzimaju $B_0 = F'(x_0)$ ili aproksimaciju Jakobijana $F'(x_0)$ pomoću konačnih razlika.

U slučaju velike dimenzije sistema (2.1) rešavanje linearnog sistema (2.14) može biti skupo, stoga Brojdenov postupak može biti neefikasan. Tada se pravac pretraživanja d_k određuje na sledeći način

$$d_k = -B_k^{-1}F(x_k), \quad (2.15)$$

gde se aproksimacija inverznog Jakobijana računa formulom

$$B_{k+1}^{-1} = B_k^{-1} + \frac{(s_k - B_k^{-1}y_k)s_k^T B_k^{-1}}{s_k^T B_k^{-1}y_k}. \quad (2.16)$$

Formula (2.16) se dobija iz (2.13) koristeći Lemu 1.3. Dakle, za određivanje pravca d_k u koraku **K1** Algoritma 4 se koristi (2.15), a u koraku **K4** se izračunava B_{k+1}^{-1} pomoću (2.16).

U opštem slučaju, matrice B_k su guste čak i kada je Jakobijan retka matrica. Dakle, u slučaju velike dimenzije sistema (2.1) ne mogu se primeniti tehnike skladištenja retkih matrica i operacija nad ovim matricama. Stoga se koriste kvazi-Njutnove metode sa ograničenom memorijom¹⁰ koje su izučavane u radovima [8,21,38,49–51]. Kod ovih postupaka se matrica B_k skladišti u obliku N vektora dimenzije n , gde je $N < n$. Broj N zavisi od raspoložive količine računarske memorije. Ideja je da kada se popuni raspoloživa količina memorije, briše se najranije skladišteni vektor koji nosi deo informacije matrice B_k i umesto njega se pamti vektor koji je poslednji izračunat.

¹⁰engl.: limited-memory quasi-Newton methods

2.4 Postupci za globalizaciju

Teoreme o konvergenciji Njutnovog, netačnih Njutnovih i kvazi-Njutnovih postupaka su lokalnog karaktera u smislu da ovi postupci generišu niz iteracija koji konvergira ka rešenju x^* sistema (2.1) samo ako je početna iteracija x_0 dovoljno blizu rešenja. Ovi postupci se mogu globalizovati tako da konvergiraju za proizvoljnu početnu aproksimaciju. Većina postupaka za globalizaciju koristi funkciju cilja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ koja meri kvalitet naredne iteracije u odnosu na trenutnu iteraciju u smislu napretka ka rešenju sistema (2.1). Za ovu svrhu se najčešće koristi funkcija

$$f(x) = \frac{1}{2} \|F(x)\|^2. \quad (2.17)$$

Problem rešavanja sistema (2.1) je ekvivalentan rešavanju problema minimizacije bez ograničenja

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad (2.18)$$

gde je $f(x)$ definisana sa (2.17). Za svako rešenje sistema (2.1) važi $f(x^*) = 0$ i budući da je $f(x) \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}^n$, to svako x^* minimizira funkciju f . Međutim, ako je funkcija f strogo pozitivna u tačkama u kojima dostiže lokalni minimum, onda te tačke nisu rešenja sistema (2.1). Uprkos ovom nedostatku, ovaj pristup, u kojem se za rešavanje sistema (2.1) koristi neki globalni metod za rešavanje problema minimizacije (2.18), je implementiran u raznim softverskim paketima i u praksi se često uspešno primenjuje. Osnovna ideja ovih globalnih postupaka za rešavanje (2.18) je da se u trenutnoj tački x_k bira pravac d_k duž kojeg će se vrednost funkcije f smanjiti. Sledeća iteracija x_{k+1} se dobija iz trenutne iteracije x_k krećući se u pravcu d_k tako da važi $f(x_{k+1}) < f(x_k)$. Ovakav pravac se naziva opadajući pravac iz tačke x_k , tj. za njega važi

$$\nabla f(x_k)^T d_k < 0. \quad (2.19)$$

Iz (2.17) sledi da je $\nabla f(x_k) = F'(x_k)^T F(x_k)$, pa se uslov (2.19) može zapisati u obliku

$$F(x_k)^T F'(x_k) d_k < 0. \quad (2.20)$$

Kada za pravac pretraživanja d_k važi (2.20), onda za svako dovoljno malo $\alpha > 0$ važi $f(x_k + \alpha d_k) < f(x_k)$. Broj α se naziva dužina koraka.

Naredna iteracija x_{k+1} se može odrediti pomoću trenutne iteracije x_k , pravca pretraživanja d_k i dužine koraka α_k sledećom formulom

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k. \quad (2.21)$$

Pravac pretraživanja i dužina koraka se najčešće određuju pomoću postupka oblasti poverenja ili pomoću linijskog pretraživanja.

U postupku oblasti poverenja u k -toj iteraciji se za funkciju f formira kvadratni model oblika

$$m_k(p) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T p + \frac{1}{2} p^T H_k p, \quad (2.22)$$

gde je H_k Hesijan ili aproksimacija Hesijana u tački x_k . Često se Hesijan aproksimira sa $F'(x_k)^T F'(x_k)$. Tada se kvadratni model (2.22) može zapisati u obliku

$$m_k(p) = f(x_k) + F(x_k)^T F'(x_k) p + \frac{1}{2} p^T F'(x_k)^T F'(x_k) p. \quad (2.23)$$

Postupak koji koristi ovu ideju se naziva Gaus-Njutnov¹¹ postupak. Da bi se odredio pravac pretraživanja, model m_k se minimizira u onoj oblasti, za koju se veruje da m_k dobro aproksimira funkciju f . Dakle, rešava se problem minimizacije sa ograničenjem

$$\min_{\|p\| \leq \Delta_k} m_k(p), \quad (2.24)$$

gde je Δ_k maksimalna dužina koraka u k -toj iteraciji, odnosno poluprečnik oblasti poverenja. Ukoliko je rešenje p_k potproblema (2.24) takvo da $x_k + p_k$ dovoljno smanjuje vrednost funkcije f , onda se uzima $x_{k+1} = x_k + p_k$. U suprotnom se smanjuje poluprečnik oblasti poverenja i za takvo Δ_k se ponovo rešava potproblem (2.24). Detaljnije objašnjenje metode i osobine ovog postupka se mogu naći u [22].

Postupci linijskog pretraživanja odgovaraju procedurama za izbor dužine koraka α_k . Dužina koraka kojom se duž pravca d_k dobija najveće smanjenje vrednosti funkcije $f(x_k)$ je rešenje sledećeg problema minimizacije

$$\min_{\alpha > 0} f(x_k + \alpha d_k), \quad (2.25)$$

gde je pravac pretraživanja d_k opadajući, tj. važi (2.19). Međutim, rešavanje problema (2.25) je skupo, te se dužina koraka α_k najčešće

¹¹C.F. Gauss, I. Newton

određuje približno. Pri određivanju dužine koraka, nameću se uslovi koji garantuju da važi $f(x_{k+1}) < f(x_k)$. Armižov¹² uslov [5] dat je sa

$$f(x_k + \alpha d_k) \leq f(x_k) + \eta \alpha \nabla f(x_k)^T d_k, \quad (2.26)$$

odnosno sa

$$f(x_k + \alpha d_k) \leq f(x_k) + \eta \alpha F(x_k)^T F'(x_k) d_k, \quad (2.27)$$

gde je $\eta \in (0,1)$. U praksi se obično uzima $\eta = 10^{-4}$. Pošto je Armižov uslov (2.26) zadovoljen za svako $\alpha > 0$ dovoljno malo, nameće se i uslov krivine¹³

$$\nabla f(x_k + \alpha d_k)^T d_k \geq \eta_2 \nabla f(x_k)^T d_k, \quad (2.28)$$

koji se može zapisati i u obliku

$$F(x_k + \alpha d_k)^T F'(x_k + \alpha d_k) d_k \geq \eta_2 F(x_k)^T F'(x_k) d_k, \quad (2.29)$$

gde je $\eta_2 \in (\eta, 1)$. Kada se pravac pretraživanja određuje Njutnovim, netačnim Njutnovim ili kvazi-Njutnovim postupkom, uzima se $\eta_2 = 0.9$. Uslov krivine garantuje da dužina koraka neće biti previše mala jer niz iteracija $\{x_k\}$ može sporo napredovati ka rešenju sistema (2.1) ako se koristi samo Armižov uslov. Armižov uslov i uslov krivine se zajedno nazivaju Volfovim¹⁴ uslovima.

Teorema 2.5 ([52]). *Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna i ograničena odozdo duž pravca $\{x_k + \alpha d_k : \alpha > 0\}$, gde je d_k opadajući pravac za funkciju f u tački x_k . Tada za parametre $\eta \in (0,1)$ i $\eta_2 \in (\eta, 1)$ postoji $a > 0$ takvo da svako $\alpha \in (0, a)$ zadovoljava Volfove uslove.*

Ako dužina koraka zadovoljava Volfove uslove, onda važi naredna teorema o konvergenciji.

Teorema 2.6 ([52]). *Neka je Jakobijan $F'(x)$ Lipšic neprekidan u okolini D nivo skupa $\mathcal{L} = \{x : f(x) \leq f(x_0)\}$ i neka su $\|F'(x)\|$ i $\|F(x)\|$ ograničene odozgo na D . Neka je niz iteracija $\{x_k\}$ generisan iterativnim pravilom (2.21) u kojem je pravac pretraživanja opadajući pravac i dužina koraka zadovoljava Volfove uslove. Tada važi*

$$\sum_{k \geq 0} \cos^2 \theta_k \|F'(x_k)^T F(x_k)\|^2 < \infty, \quad (2.30)$$

¹²L. Armijo

¹³engl.: curvature condition

¹⁴P. Wolfe

gde je θ_k ugao između pravca pretraživanja d_k i vektora $-\nabla f(x_k)$, odnosno

$$\cos \theta_k = \frac{-\nabla f(x_k)^T d_k}{\|\nabla f(x_k)\| \|d_k\|} = \frac{-F(x_k)^T F'(x_k) d_k}{\|F'(x_k) F(x_k)\| \|d_k\|}.$$

Kada za niz iteracija važi $\cos \theta_k \geq \delta$ za neko $\delta \in (0, 1)$ i svaki dovoljno veliki indeks k , onda iz Teoreme 2.6 sledi da $F'(x_k)^T F(x_k) \rightarrow 0$, tj. niz iteracija konvergira ka stacionarnoj tački funkcije $f(x) = \frac{1}{2} \|F(x)\|^2$. Ako se dodatno pretpostavi da je $\|F'(x_k)^{-1}\|$ ograničeno, onda važi $\|F(x_k)\| \rightarrow 0$, tj. niz iteracija konvergira ka rešenju sistema (2.1).

Postupak linijskog pretraživanja koji određuje dužinu koraka tako da ona zadovoljava Volfove uslove, za maksimalnu dozvoljenu dužinu koraka $\alpha_{\max} > 0$ određuje podinterval intervala $(0, \alpha_{\max})$, u kojem se nalaze dužine koraka koje zadovoljavaju Volfove uslove. Potom se, koristeći interpolaciju, određuje dužina koraka. Maksimalna dozvoljena dužina koraka se bira u zavisnosti od toga koji postupak se koristi za određivanje pravca pretraživanja. Za Njutnov metod, netačni Njutnov metod i kvazi-Njutnov metod se uzima $\alpha_{\max} = 1$, dok se kod metoda konjugovanih gradijenata uzimaju druge vrednosti.

Zbog komplikovanosti ovog postupka, u praksi se često primenjuje bektreking¹⁵ postupak, u kojem se posmatra samo Armižov uslov. Ovaj postupak dat u Algoritmu 5 smanjuje inicijalnu dužinu koraka sve dok Armižov uslov ne postane ispunjen. Na ovaj način se dobija dužina koraka koja nije previše mala, a zadovoljava Armižov uslov. Linijsko pretraživanje dato u Algoritmu 5 se često primenjuje pri numeričkom rešavanju problema minimizacije bez ograničenja (2.18), međutim, ako se za funkciju $f(x)$ uzme funkcija (2.17), ovaj postupak se može koristiti i za numeričko rešavanje sistema nelinearnih jednačina (2.1).

U slučaju da pravac pretraživanja d_k nije opadajući ili bektreking procedura u linijskom pretraživanju daje previše male dužine koraka, koristi se nemonotona tehnika za globalizaciju. Ova tehnika dopušta da funkcija $f(x)$ u nekim iteracijama poraste u odnosu na prethodne. Prva nemonotona tehnika za rešavanje problema minimizacije bez ograničenja data je u radu [29] u kojem je predstavljen GLL uslov oblika

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq \max_{0 \leq j \leq M-1} f(x_{k-j}) + \gamma \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k, \quad (2.31)$$

¹⁵engl.: backtracking

Algoritam 5 Linijsko pretraživanje

K0 Izaberi $\alpha > 0, \rho, \eta \in (0, 1)$.

K1 Dokle god je

$$f(x_k + \alpha d_k) > f(x_k) + \eta \alpha \nabla f(x_k)^T d_k,$$

stavi $\alpha = \rho \alpha$.

K2 Stavi $\alpha_k = \alpha$.

gde je M prirodan broj i $\gamma \in (0, 1)$. Od tada su se razvile mnogobrojne nemonotone tehnike globalizacije postupaka za rešavanje nelinearnih sistema [7,11,30,40,41,44,63].

S druge strane, budući da postupci linijskog pretraživanja koji zahtevaju izračunavanje izvoda nisu uvek pogodni, razvili su se mnogobrojni algoritmi za rešavanje problema minimizacije bez ograničenja (2.18) kao i za rešavanje nelinearnih sistema (2.1), koji koriste razne tehnike linijskog pretraživanja bez izvoda [7,30,40–44,65].

U radu [44] predstavljeno je nemonotono linijsko pretraživanje koje se koristi za rešavanje nelinearnih sistema sa LF uslovom oblika

$$\|F(x_k + \alpha_k d_k)\| \leq (1 + \eta_k) \|F(x_k)\| - \gamma \alpha_k^2 \|d_k\|^2, \quad (2.32)$$

gde je $\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k < \infty$ i $\gamma \in (0, 1)$. Ovo linijsko pretraživanje sa LF uslovom ne koristi izvode.

U disertaciji će biti predstavljeni numerički postupci za rešavanje nelinearnih monotoni sistema velikih dimenzija koji ne koriste izvode. Naime, za određivanje koraka α_k koristiće se linijsko pretraživanje oblika

$$-F(x_k + \alpha_k d_k)^T d_k \geq \sigma \alpha_k \|F(x_k + \alpha_k d_k)\| \|d_k\|^2, \quad (2.33)$$

gde je $\sigma > 0$. Ovo linijsko pretraživanje je definisano u [73] i ono je zasnovano samo na izračunavanju vrednosti funkcije sistema $F(x)$, ne koristi izvode niti funkciju cilja $f(x)$, a zahteva da pravac d_k zadovoljava uslov dovoljnog pada. U svakoj iteraciji, dužina koraka α_k određivaće se narednim algoritmom.

Algoritam 6 Linijsko pretraživanje bez izvoda

K0 Izaberi inicijalnu dužinu koraka $s > 0$ i parametre $\sigma > 0, \rho \in (0, 1)$.

K1 Odredi najmanje $m \in \mathbb{N}_0$ tako da važi

$$-F(x_k + s\rho^m d_k)^T d_k \geq \sigma s \rho^m \|F(x_k + s\rho^m d_k)\| \|d_k\|^2.$$

K2 Stavi $\alpha_k = s\rho^m$.

2.5 Regularizovani Njutnovi postupci

U slučaju kada je Jakobijan $F'(x)$ singularan ili loše uslovljen u okolini D nivo skupa $\mathcal{L} = \{x : f(x) \leq f(x_0)\}$, onda je $\cos \theta_k \approx 0$ i u opštem slučaju ne može se tvrditi da $F'(x_k)^T F(x_k) \rightarrow 0$, tj. algoritam koji generiše niz iteracija iterativnim pravilom (2.21) ne mora konvergirati ka rešenju sistema (2.1). Tada se koristi pravac pretraživanja koji je rešenje regularizovanog linearnog sistema

$$(F'(x_k)^T F'(x_k) + \mu_k I) d_k = -F'(x_k)^T F(x_k). \quad (2.34)$$

Parametar regularizacije $\mu_k > 0$ se bira tako da matrica

$$(F'(x_k)^T F'(x_k) + \mu_k I) \quad (2.35)$$

bude regularna i dobro uslovljena. Za ugao θ_k koji sklapa $-\nabla f(x_k)$ i pravac pretraživanja

$$d_k = -(F'(x_k)^T F'(x_k) + \mu_k I)^{-1} F'(x_k)^T F(x_k) \quad (2.36)$$

koji je rešenje regularizovanog sistema (2.34) važi $\cos \theta_k \geq \delta$ za neko $\delta \in (0, 1)$, pa postupak konvergira ka rešenju sistema (2.1). Ovaj postupak se naziva Levenberg-Markartov¹⁶ postupak.

Nedostatak ovog postupka leži u načinu izbora parametra regularizacije μ_k . Naime, ako je vrednost ovog parametra prevelika, kviri se brza konvergencija postupka. Ako je μ_k previše malo, onda postupak može biti neefikasan.

¹⁶K. Levenberg, D. Marquardt

Algoritam 7 Regularizovani Njutnov postupak

- K0** Izaberi konstante c_1, c_2 tako da $0 < c_1 < \frac{1}{2}$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Stavi $k = 0$.
- K1** Ako je matrica $F'(x)$ singularna ili loše uslovljena, izvrši regularizaciju (2.35).
Odredi pravac pretraživanja d_k iz Njutnove jednačine (2.2), netačne Njutnove jednačine (2.6) ili kvazi-Njutnove jednačine (2.8), koristeći matricu $F'(x_k)$ ili regularizovanu matricu (2.35).
- K2** Ako inicijalna dužina koraka $\alpha = 1$ zadovoljava Volfove uslove (2.27) i (2.29), stavi $\alpha_k = 1$.
Inače linijskim pretraživanjem odredi dužinu koraka $\alpha_k > 0$ koja zadovoljava (2.27) i (2.29).
- K3** Stavi $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$.
- K4** Stavi $k = k + 1$ i vrati se na korak **K1**.

2.6 Spektralni postupci

Kada je dimenzija sistema (2.1) velika, rešavanje linearnog sistema u Njutnovom i u Brojdenovom postupku može biti skupo. Naime, rešavanje linearnih sistema u ovim postupcima zahteva $\mathcal{O}(n^3)$ operacija. Ako se koristi postupak u kojem se pravac pretraživanja d_k određuje sa (2.15), gde je matrica B_k^{-1} određena sa (2.16), potrebno je $\mathcal{O}(n^2)$ operacija, što je u slučaju sistema velikih dimenzija još uvek neprihvatljivo. Tada se koristi kvazi-Njutnov postupak sa ograničenom memorijom, koji u svakoj iteraciji zahteva $\mathcal{O}(Nn)$ operacija, gde je N mnogo manje od n . Međutim, postoje i drugi postupci koji su pogodni za rešavanje sistema velikih dimenzija i to su spektralni postupci.

Spektralne metode aproksimiraju Jakobijan matricom jednostavnog oblika $B_{k+1} = \lambda_{k+1}I$, gde je $\lambda_{k+1} \in \mathbb{R}$. Broj λ_{k+1} se određuje tako da matrica B_{k+1} aproksimira jednačinu sečice (2.12), tj. važi

$$y_k = \lambda_{k+1} s_k, \quad (2.37)$$

gde je $s_k = x_{k+1} - x_k$, $y_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$. Budući da jednačina (2.37) u opštem slučaju nema rešenja, problem određivanja broja λ_{k+1} se re-

formuliše u problem najmanjih kvadrata

$$\lambda_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\lambda} \|\lambda s_k - y_k\|^2,$$

koji se može zapisati u obliku normalnih jednačina $\lambda s_k^T s_k = s_k^T y_k$. Odavde je

$$\lambda_{k+1} = \frac{s_k^T y_k}{s_k^T s_k}. \quad (2.38)$$

Prema Lemi 1.6 važi

$$y_k = \int_0^1 F'(x_k + t s_k) s_k dt,$$

pa je λ_{k+1} dato sa (2.38) Rejljev¹⁷ količnik vektora s_k s obzirom na srednju vrednost Jakobijana $\int_0^1 F'(x_k + t s_k) dt$. Kada je s_k karakteristični vektor srednje vrednosti Jakobijana, onda je λ_{k+1} karakteristični koren te matrice. Dakle, spektralni koeficijent λ_{k+1} se nalazi između najmanjeg i najvećeg karakterističnog korena srednje vrednosti Jakobijana, stoga se ovaj postupak opravdano naziva spektralna metoda.

Pravac pretraživanja ima oblik $d_k = -\frac{1}{\lambda_k} F(x_k)$, pa se niz iteracija može odrediti pravilom

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{\lambda_k} F(x_k) = x_k - \frac{s_{k-1}^T s_{k-1}}{s_{k-1}^T y_{k-1}} F(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.39)$$

Za određivanje sledeće iteracije (2.39) potrebno je $\mathcal{O}(n)$ operacija, što sugeriše da je ovaj metod pogodan za rešavanje sistema velikih dimenzija.

Jednačina sečice (2.12) se može zapisati i u obliku $B_{k+1}^{-1} y_k = s_k$, odnosno

$$\frac{1}{\lambda_{k+1}} y_k = s_k. \quad (2.40)$$

Pošto jednačina (2.40) u opštem slučaju takođe nema rešenje, ona se približno rešava tako što se reformuliše u problem najmanjih kvadrata

$$\lambda_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\lambda} \left\| \frac{1}{\lambda} y_k - s_k \right\|.$$

¹⁷L. Rayleigh

Zapisujući normalne jednačine u obliku $y_k^T y_k \frac{1}{\lambda} = y_k^T s_k$, dobija se spektralni koeficijent

$$\lambda_{k+1} = \frac{y_k^T y_k}{y_k^T s_k}. \quad (2.41)$$

Dakle, niz iteracija se može odrediti formulom

$$x_{k+1} = x_k - \frac{s_{k-1}^T y_{k-1}}{y_{k-1}^T y_{k-1}} F(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.42)$$

U radu [41] predstavljen je spektralni postupak za rešavanje nelinearnih sistema koji ne zahteva izračunavanje izvoda i koji u linijskom pretraživanju koristi kombinaciju GLL i LF uslova

$$f(x_{k+1}) \leq \max_{0 \leq j \leq M-1} f(x_{k-j}) + \eta_k - \gamma \alpha_k^2 f(x_k), \quad (2.43)$$

gde je $f(x) = \|F(x)\|$ ili $f(x) = \|F(x)\|^2$, M prirodan broj i $\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k < \infty$, $\gamma \in (0, 1)$.

Ovaj postupak se može zapisati u obliku Algoritma 8, koji je globalno konvergentan.

Teorema 2.7 ([41]). *Neka je niz $\{x_k\}$ generisan Algoritmom 8 i neka postoji tačka nagomilavanja $x^* \in \mathbb{R}^n$ niza $\{x_k\}$ takva da je $F(x^*) = 0$. Tada važi*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = 0.$$

Odavde sledi da je svaka tačka nagomilavanja niza $\{x_k\}$ rešenje sistema (2.1).

Algoritam 8 DF-SANE

K0 Izaberi konstante $\gamma \in (0, 1)$, $0 < \tau_{min} < \tau_{max} < 1$, $0 < \lambda_{min} < \lambda_{max} < \infty$. Neka je $M \in \mathbb{N}$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Stavi $k = 0$.

K1 Izaberi λ_k tako da $|\lambda_k| \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ (spektralni koeficijent). Stavi $d = -\lambda_k F(x_k)$, $\alpha_+ = 1$ i $\alpha_- = 1$.

K2 Ako važi

$$f(x_k + \alpha_+ d) \leq \max_{0 \leq j \leq M-1} f(x_{k-j}) + \eta_k - \gamma \alpha_+^2 f(x_k),$$

tada $d_k = d$, $\alpha_k = \alpha_+$, $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$.

Inače, ako važi

$$f(x_k - \alpha_- d) \leq \max_{0 \leq j \leq M-1} f(x_{k-j}) + \eta_k - \gamma \alpha_-^2 f(x_k),$$

tada $d_k = -d$, $\alpha_k = \alpha_-$, $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$.

Inače, izaberi $\alpha_+ \in [\tau_{min} \alpha_+, \tau_{max} \alpha_+]$, $\alpha_- \in [\tau_{min} \alpha_-, \tau_{max} \alpha_-]$ i vrati se na početak koraka **K2**.

K3 Stavi $k = k + 1$ i idi na korak **K1**.

3 Postupci konjugovanih gradijenata

Postupci konjugovanih gradijenata su pogodni za rešavanje linearnih sistema, kao i za rešavanje problema nelinearne optimizacije bez ograničenja. Metod konjugovanih gradijenata prvi put je predstavljen u radu [36] u kojem je posmatran problem rešavanja simetričnog, pozitivno definitnog linearnog sistema. Predloženi postupak daje rešenje sistema u najviše n koraka, gde je n dimenzija sistema. Međutim, ako matrica sistema, tj. njen spektar ima pogodnu strukturu, ovaj iterativni postupak daje rešenje u mnogo manje koraka.

Prvi metod konjugovanih gradijenata za rešavanje problema nelinearne optimizacije bez ograničenja (2.18), predložili su Flečer i Rivs u svom radu [26]. Pretpostavljajući da se u okolini minimuma problema (2.18) funkcija cilja može razviti u konveksnu, kvadratnu funkciju, oni su predstavili postupak koji u konačno mnogo koraka daje tačan minimum te funkcije. Od objavljivanja njihovog rada, postupci konjugovanih gradijenata za rešavanje problema (2.18) doživljavaju pravu ekspanziju. Glavna karakteristika ovih postupaka se ogleda u jednostavnosti i u minimalnoj količini memorije koju zahtevaju. Zahvaljujući ovoj osobini, postupci konjugovanih gradijenata su pogodni za rešavanje problema velikih dimenzija. Od sada nadalje postupci konjugovanih gradijenata će kraće biti označeni kao CG postupci.

3.1 Nelinearni CG postupci

Neka je dat problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad (3.1)$$

gde je funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nelinearna, neprekidno diferencijabilna, ograničena sa donje strane. CG postupci generišu niz iteracija $\{x_k\}$ za proizvoljnu početnu iteraciju $x_0 \in \mathbb{R}^n$, iterativnim pravilom

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.2)$$

gde je $\alpha_k > 0$ dužina koraka koja se dobija linijskim pretraživanjem, dok se pravac pretraživanja d_k određuje formulom

$$d_0 = -\nabla f(x_0), \quad d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) + \beta_k d_k. \quad (3.3)$$

U zavisnosti od toga na koji način se bira CG parametar $\beta_k \in \mathbb{R}$, dobijaju se različiti postupci koji pripadaju klasi metoda konjugovanih gradijenata. Ovi postupci imaju različite teorijske osobine i efikasnost. U radu [34] dat je detaljan pregled postupaka nelinearnih konjugovanih gradijenata.

S obzirom da će u ovoj disertaciji biti posmatrani postupci koji za pravac pretraživanja koriste pravce tipa konjugovanih gradijenata, najpre će biti navedeni neki za nas značajni postupci nelinearnih konjugovanih gradijenata.

- Hestenes-Stifel (HS) postupak:

Originalno, predložen je za rešavanje simetričnih, pozitivno definitnih linearnih sistema. CG parametar ovog postupka definisan je sa

$$\beta_k^{HS} = \frac{\nabla f(x_{k+1})^T y_k}{d_k^T y_k}, \quad (3.4)$$

gde je $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$.

- Flečer-Rivs (FR) postupak:

Ovo je prvi metod konjugovanih gradijenata za rešavanje problema optimizacije bez ograničenja (3.1), prikazan u radu [26]. CG parametar ovog postupka je oblika

$$\beta_k^{FR} = \frac{\|\nabla f(x_{k+1})\|^2}{\|\nabla f(x_k)\|^2}. \quad (3.5)$$

- Polak-Ribier-Poljak¹⁸ (PRP) postupak:

Ovaj postupak je predstavljen u [58] i [59]. CG parametar ovog postupka se može zapisati u obliku

$$\beta_k^{PRP} = \frac{\nabla f(x_{k+1})^T y_k}{\|\nabla f(x_k)\|^2}. \quad (3.6)$$

Ako je funkcija f strogo konveksna, kvadratna, i ako se koristi tačno linijsko pretraživanje, onda su ova tri CG parametara jednaka [33].

Kod CG postupaka zbog konvergencije je bitno za početni pravac pretraživanja uzeti pravac najbržeg pada

$$d_0 = -\nabla f(x_0). \quad (3.7)$$

Naime, u radu [12] pokazano je da ako za početni pravac pretraživanja nije uzet ovaj pravac, tada brzina konvergencije ne može biti veća od linearne, čak ni kada je funkcija cilja strogo konveksna, kvadratna.

U svakoj iteraciji CG postupka potrebno je odrediti dužinu koraka $\alpha_k \geq 0$ koja se bira kao što je to opisano u odeljku 2.4. Dakle, približno se rešava jednodimenzionalan problem optimizacije

$$\min_{\alpha \geq 0} f(x_k + \alpha d_k). \quad (3.8)$$

Na osnovu (3.3) sledi

$$\nabla f(x_k)^T d_k = -\|\nabla f(x_k)\|^2 + \beta_{k-1} \nabla f(x_k)^T d_{k-1}. \quad (3.9)$$

Ako se problem (3.8) tačno rešava, onda je $\nabla f(x_k)^T d_{k-1} = 0$, pa iz (3.9) sledi da pravac pretraživanja mora biti opadajući, tj. za svaki indeks $k \in \mathbb{N}_0$ važi

$$\nabla f(x_k)^T d_k < 0. \quad (3.10)$$

Pravac pretraživanja zadovoljava uslov dovoljnog pada, ako postoji konstanta $c > 0$ takva da za svaki indeks $k \in \mathbb{N}_0$ važi

$$\nabla f(x_k)^T d_k \leq -c \|\nabla f(x_k)\|^2. \quad (3.11)$$

Ako linijsko pretraživanje nije tačno i ako je $\beta_{k-1} > 0$, onda drugi član desne strane u (3.9) može dominirati i tada je $\nabla f(x_k)^T d_k > 0$, tj. pravac

¹⁸E. Polak, G. Ribière, B.T. Polyak

pretraživanja je rastući. Da se ovo ne bi desilo, u linijskom pretraživanju se često nameće neka varijanta Volfovih uslova, kao što su standardni Volfovi uslovi dati sa (2.26) i (2.28) ili jaki Volfovi uslovi gde se umesto uslova krivine (2.28) zahteva

$$|\nabla f(x_k + \alpha d_k)^T d_k| \leq -\eta_2 \nabla f(x_k)^T d_k. \quad (3.12)$$

Pojedini nelinearni CG postupci globalno konvergiraju kada se koriste standardni Volfovi uslovi, dok neki postupci zahtevaju korišćenje jakih Volfovih uslova.

Pri analizi konvergenije postupaka nelinearnih konjugovanih gradijenata obično se nameću pretpostavke o ograničenosti nivo skupa i Lipšic neprekidnosti gradijenta funkcije.

(A1) Nivo skup $\mathcal{L}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\}$ je ograničen.

(A2) U nekoj okolini \mathcal{N} nivo skupa $\mathcal{L}(x_0)$ gradijent $\nabla f(x)$ je Lipšic neprekidan.

Pri dokazivanju globalne konvergenije, često se koristi naredna teorema.

Teorema 3.1 ([34]). *Neka je niz iteracija $\{x_k\}$ generisan iterativnim pravilom (3.2) pri čemu je d_k opadajući pravac pretraživanja, tj. važi (3.10) i neka dužina koraka α_k zadovoljava standardne Volfove uslove. Ako važi pretpostavka (A2), onda važi*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nabla f(x_k)^T d_k)^2}{\|d_k\|^2} < \infty. \quad (3.13)$$

Analiza globalne konvergenije postupaka nelinearnih konjugovanih gradijenata se često zasniva na Teoremi 3.1, na dokazu da je pravac pretraživanja ograničen, tj. da postoji konstanta $\beta > 0$ takvo da $\|d_k\|^2 \leq \beta k$ i da važi uslov dovoljnog pada (3.11). Naime, tada iz (3.13) proizilazi

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

Za nelinearne CG postupke u kojima su zadovoljeni jaki Volfovi uslovi važi teorema o globalnoj konvergenciji.

Teorema 3.2 ([34]). *Neka je niz iteracija $\{x_k\}$ generisan iterativnim pravilom (3.2) pri čemu je d_k opadajući pravac pretraživanja, tj. važi (3.10) i*

neka dužina koraka α_k zadovoljava jake Volfove uslove. Ako važi pretpostavka (A2), onda važi

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0 \quad \text{ili} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|\nabla f(x_k)\|^4}{\|d_k\|^2} < \infty.$$

Pri dokazivanju globalne konvergencije FR postupka, bitno je pokazati da FR pravac zadovoljava uslov dovoljnog pada.

Lema 3.1 ([52]). Neka je linijsko pretraživanje implementirano u FR postupku tako da važe jaki Volfovi uslovi sa parametrima $0 < \eta_1 < \eta_2 < \frac{1}{2}$. Tada FR postupak generiše niz pravaca $\{d_k\}$ za koji važi

$$-\frac{1}{1 - \eta_2} \leq \frac{\nabla f(x_k)^T d_k}{\|\nabla f(x_k)\|^2} \leq \frac{2\eta_2 - 1}{1 - \eta_2} \quad \text{za svako } k \in \mathbb{N}_0.$$

Koristeći Lemu 3.1, u radu [4] dokazana je globalna konvergencija FR postupka.

Teorema 3.3 ([4]). Neka je niz iteracija $\{x_k\}$ generisan FR postupkom i neka su zadovoljene pretpostavke (A1) i (A2). Neka je linijsko pretraživanje implementirano u FR postupku takvo da važe jaki Volfovi uslovi sa parametrima $0 < \eta_1 < \eta_2 < \frac{1}{2}$. Tada važi

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

Da bi PRP postupak globalno konvergirao, potrebna je dodatna pretpostavka. Naime, razlika iteracija $\|x_{k+1} - x_k\|$ mora težiti ka nuli.

Teorema 3.4 ([61]). Neka je niz iteracija generisan PRP postupkom i neka važi pretpostavka (A1), neka je $\nabla f(x)$ neprekidna na \mathbb{R}^n . Tada, ako se u PRP postupku koristi tačno linijsko pretraživanje i ako $\|x_{k+1} - x_k\|$ teži ka nuli, onda važi

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

3.2 Hibridni postupci

U radu [61] ukazano je na jedan nedostatak FR postupka. Naime, FR postupak sa tačnim linijskim pretraživanjem podložan je zaglavljivanju. Pod time se podrazumeva fenomen kada algoritam generiše niz suviše kratkih koraka bez značajnog progressa ka minimumu funkcije $f(x)$. Pretpostavimo da se u k -tom koraku FR postupka dobio pravac lošeg kvaliteta u smislu da je on skoro ortogonalan u odnosu na $-\nabla f(x_k)$, tj. $\cos \theta_k \approx 0$, gde je θ_k ugao između d_k i pravca najbržeg pada. Tada je $\cos \theta_k = \frac{\nabla f(x_k)^T d_k}{\|d_k\|^2}$ i prema Lemi 3.1 važi

$$\frac{1 - 2\eta_2}{1 - \eta_2} \cdot \frac{\|\nabla f(x_k)\|}{\|d_k\|} \leq \cos \theta_k \leq \frac{1}{1 - \eta_2} \cdot \frac{\|\nabla f(x_k)\|}{\|d_k\|}, \quad \text{za svako } k \in \mathbb{N}_0.$$

Odavde se zaključuje da je $\cos \theta_k \approx 0$ ako i samo ako je $\|\nabla f(x_k)\| \ll \|d_k\|$. Budući da je pravac d_k skoro ortogonalan sa gradijentom funkcije, dužina koraka će biti mala, tj. $x_{k+1} \approx x_k$. Dakle, javlja se fenomen zaglavljivanja.

Kod PRP postupka ovaj fenomen nije prisutan, jer PRP postupak poseduje osobinu ugrađenog restarta. Naime, kada je dužina koraka $x_{k+1} - x_k$ mala, tada $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$ teži ka nuli, pa je $\beta_k = \frac{\nabla f(x_{k+1})^T y_k}{\|\nabla f(x_k)\|^2} \approx 0$. Dakle, u ovom slučaju je novi pravac pretraživanja jednak pravcu najbržeg pada, tj. $d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1})$.

U praksi se pokazalo da PRP metod u opštem slučaju ima bolje performanse u odnosu na FR metod. Međutim, kada razlika iteracija $x_{k+1} - x_k$ ne teži ka nuli, onda u opštem slučaju PRP algoritam ne konvergira.

Teorema 3.5 ([52]). *Za PRP postupak sa tačnim linijskim pretraživanjem postoji dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ i početna tačka $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tako da za niz gradijenata $\{\|\nabla f(x_k)\|\}$ generisan PRP postupkom važi*

$$\|\nabla f(x_k)\| > 0, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dakle, konvergencija PRP postupka je nesigurna. Analiza PRP postupka izvedena u radu [62] pokazala je da ako u formuli (3.3) za izračunavanje pravca pretraživanja d_k član $\beta_{k-1}d_{k-1}$ dominira u odnosu na član $-\nabla f(x_k)$, onda pravci vektora d_{k-1} i d_k mogu biti suprotni, tj. može se desiti da $\beta_k^{PRP} < 0$. Stoga je predložen CG parametar oblika

$$\beta_k^{PRP+} = \max\{\beta_k^{PRP}, 0\}. \quad (3.14)$$

Globalna konvergencija ovog postupka pokazana je u [28]. Štaviše, dokazana je globalna konvergencija cele klase CG postupaka sa pozitivnim CG parametrom.

Teorema 3.6 ([28]). *Neka je niz $\{x_k\}$ generisan ma kojim CG postupkom definisanim sa (3.2) i (3.3) tako da važi*

- (a) $\beta_k \geq 0$,
- (b) pravac pretraživanja d_k zadovoljava osobinu dovoljnog pada (3.11),
- (c) važi uslov (3.13),
- (d) neka za svaki indeks $k \geq 0$ važi $0 < \gamma \leq \|\nabla f(x_k)\| \leq \bar{\gamma}$, gde su $\gamma, \bar{\gamma} > 0$ i neka postoje konstante $b > 1$ i $\lambda > 0$ takve da za svaki indeks $k \in \mathbb{N}$

$$|\beta_k| \leq b \quad i \quad \|s_k\| \leq \lambda \quad implicira \quad |\beta_k| \leq \frac{1}{2b}.$$

Ako važe pretpostavke (A1) i (A2), tada je niz iteracija generisan gore opisanim CG postupkom globalno konvergentan.

Iz prethodno navedene teoreme proističe da ako pravac pretraživanja zadovoljava uslov dovoljnog pada i ako se u linijskom pretraživanju koriste standardni Volfovi uslovi, tada PRP+ metod globalno konvergira. Dakle, ovaj metod je predložen sa ciljem da poboljša slabe teorijske karakteristike PRP postupka.

Kao što je pomenuto, Teorema 3.3 garantuje globalnu konvergenciju FR postupka. U radu [35] dokazana je globalna konvergencija cele klase CG postupaka za koju važi da je odgovarajući CG parametar β_k ograničen sa FR parametrom β_k^{FR} .

Teorema 3.7 ([35]). *Neka je $\{x_k\}$ niz generisan CG postupkom definisanim sa (3.2) i (3.3) koji koristi linijsko pretraživanje sa jakim Volfovim uslovima i parametrom $\eta_2 \leq \frac{1}{2}$. Ako važi pretpostavka (A2) i $2\eta_2|\beta_k| \leq \beta_k^{FR}$, onda je niz $\{x_k\}$ globalno konvergentan i pravci pretraživanja su opadajući pravci.*

Slično kao kod PRP+ postupka, u cilju prevazilaženja nedostataka pojedinih CG postupaka, često se posmatraju određene kombinacije CG parametara. Ovakvi CG postupci se nazivaju hibridni postupci. Prvi hibridni CG postupak je predložen u radu [68]. Rukovodeći se idejom o konstrukciji postupka koji zadovoljava uslove Teoreme 3.6 o

konvergenciji postupaka sa pozitivnim CG parametrima i Teoreme 3.7 o konvergenciji postupaka konjugovanih gradijenata čiji je CG parametar ograničen sa FR parametrom, autori su pokazali konvergenciju postupka sa CG parametrom oblika

$$\beta_k^{TAS} = \begin{cases} \beta_k^{PRP} & , \text{ ako je } 0 \leq \beta_k^{PRP} \leq \beta_k^{FR}, \\ \beta_k^{FR} & , \text{ inače.} \end{cases} \quad (3.15)$$

Ideja ove metode je da se koristi FR postupak kadgod bi PRP postupak divergirao. U ostalim slučajevima se koristi PRP postupak zbog njegove veće efikasnosti.

Iz istih razloga, sa ciljem da se iskoriste prednosti FR i PRP postupka, u radu [37] je predložen hibridni postupak koji na sledeći način kombinuje PRP i FR parametre

$$\beta_k^{HuS} = \max\{0, \min\{\beta_k^{PRP}, \beta_k^{FR}\}\}. \quad (3.16)$$

Dakle, ukoliko dođe do zaglavlivanja, koristi se PRP pravac ako je $\beta_k^{PRP} > 0$, a pravac najbržeg pada ako je $\beta_k^{PRP} \leq 0$. U ostalim situacijama se koristi FR pravac pretraživanja. Razlika između CG parametara (3.15) i (3.16) se ogleda u tome, da ako je $\beta_k^{PRP} < 0$, onda je $\beta_k^{TAS} = \beta_k^{FR}$, dok je $\beta_k^{HuS} = 0$. Takođe se vidi da su CG parametri β_k^{TAS} i β_k^{HuS} ograničeni sa β_k^{FR} . Za ovakve CG parametre važi sledeća teorema.

Teorema 3.8 ([28]). *Neka je niz $\{x_k\}$ generisan ma kojim CG postupkom definisanim sa (3.2) i (3.3) sa CG parametrom za koji važi $|\beta_k| \leq \beta_k^{FR}$ i neka dužina koraka određena linijskim pretaživanjem zadovoljava jake Volfove uslove sa $0 < \eta_1 < \eta_2 < \frac{1}{2}$. Ako važe pretpostavke (A1) i (A2), onda je*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

3.3 Familija postupaka tipa DL

U radu [14] predstavljena je familija CG postupaka sa parametrom oblika

$$\beta_k^{DL} = \beta_k^{HS} - t \frac{\nabla f(x_{k+1})^T s_k}{d_k^T y_k}, \quad (3.17)$$

gde je $t \in [0, \infty)$ i $s_k = x_{k+1} - x_k$. Nadalje će ovi postupci biti označavani sa DL. Primetimo da se postupak za $t = 0$ svodi na HS postupak. Autori su pokazali da kadgod HS pravac pretraživanja zadovoljava uslov

dovoljnog pada, onda i DL pravac zadovoljava taj uslov. Takođe su pokazali globalnu konvergenciju za uniformno konveksne funkcije.

Teorema 3.9 ([14]). *Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna i neka važe pretpostavke (A1) i (A2). Neka je niz $\{x_k\}$ generisan DL postupkom (3.2), (3.3) i (3.17) pri čemu je d_k opadajući pravac i dužina koraka $\alpha_k > 0$ zadovoljava jake Volfove uslove. Ako je funkcija f uniformno konveksna, tj. postoji konstanta $\mu > 0$ takva da*

$$(\nabla f(x) - \nabla f(\bar{x}))^T (x - \bar{x}) \geq \mu \|x - \bar{x}\|^2, \quad \text{za svako } x, \bar{x} \in \mathcal{L}(x_0),$$

onda važi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla f(x_k) = 0.$$

Primetimo da kada je $\nabla f(x_k)^T d_{k-1} = 0$, onda se ovaj postupak svodi na PRP postupak, pa u opštem slučaju se može desiti da ne konvergira, o čemu je već bilo reči. Upravo, iz ovog razloga je posmatrajući problem minimizacije bez ograničenja (3.1) sa opštom nelinearnom funkcijom, koristeći se idejom PRP+ postupka, predložen CG parametar oblika

$$\beta_k^{DL+} = \max\{\beta_k^{HS}, 0\} - t \frac{\nabla f(x_{k+1})^T s_k}{d_k^T y_k}. \quad (3.18)$$

Za ovako definisanu verziju DL postupka važi sledeća teorema o globalnoj konvergenciji.

Teorema 3.10 ([14]). *Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna i neka važe pretpostavke (A1) i (A2). Neka je niz $\{x_k\}$ generisan DL postupkom (3.2), (3.3) i (3.18) pri čemu d_k zadovoljava uslov dovoljnog pada i dužina koraka $\alpha_k > 0$ zadovoljava jake Volfove uslove. Tada važi*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla f(x_k) = 0.$$

U radu [33] predstavljena je adaptivna verzija DL postupka, koja će biti označavana kao HZ postupak. CG parametar ovog postupka je definisan sa

$$\beta_k^{HZ}(\theta_k) = \frac{\nabla f(x_{k+1})^T y_k}{d_k^T y_k} - \theta_k \frac{\|y_k\|^2}{d_k^T y_k} \frac{\nabla f(x_{k+1})^T d_k}{d_k^T y_k}, \quad (3.19)$$

gde je $\theta_k \geq \frac{1}{4}$. Autori ovog rada su pokazali da postupak koji koristi CG parametar oblika

$$\bar{\beta}_k^{HZ} = \max\{\beta_k^{HZ}, \eta_k\}, \quad (3.20)$$

gde je

$$\eta_k = -\frac{1}{\|d_k\| \min\{\eta, \|\nabla f(x_k)\|\}}, \quad \eta > 0,$$

generiše pravce pretraživanja koji zadovoljavaju uslov dovoljnog pada (3.11). Tačnije, za $\theta_k = 2$ pokazali su da pravac pretraživanja zadovoljava uslov dovoljnog pada (3.11).

Teorema 3.11 ([33]). *Ako je $d_k^T y_k \neq 0$ i $d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) + cd_k$, $d_0 = \nabla f(x_0)$ za svako $c \in [\beta_k^{HZ}, \max\{\beta_k^{HZ}, 0\}]$, onda je*

$$\nabla f(x_{k+1})^T d_{k+1} \leq -\frac{7}{8} \|\nabla f(x_{k+1})\|^2.$$

Osim toga, pokazana je globalna konvergencija za strogo konveksne i Lipšic neprekidne funkcije f , odnosno za opšte nelinearne, Lipšic neprekidne funkcije.

Teorema 3.12 ([33]). *Neka je funkcija f uniformno konveksna i Lipšic neprekidna na nivo skupu $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\}$. Ako je CG postupak (3.3) i (3.19) implementiran tako da linijsko pretraživanje zadovoljava Volfove uslove, onda za neki indeks k važi $\nabla f(x_k) = 0$ ili*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla f(x_k) = 0.$$

Teorema 3.13 ([33]). *Neka je funkcija f Lipšic neprekidna na ograničenom nivo skupu $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\}$. Ako je CG postupak (3.3) i (3.20) implementiran tako da linijsko pretraživanje zadovoljava Volfove uslove, onda za neki indeks k važi $\nabla f(x_k) = 0$ ili*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \nabla f(x_k) = 0.$$

U radu [13] je pokazano da HZ familija CG postupaka (3.3) i (3.20) ima najbolji učinak za $\theta_k = 1$.

4 Projektivni postupci za rešavanje nelinearnih monotoni sistema

Nelinearni monotoni sistemi se često javljaju kao potproblemi u mnogim oblastima, pa je zato rešavanje ovakvih sistema aktuelno. Monotonost sistema sugerise primenu projektivne metode pogodne za rešavanje ovakvih sistema jer omogućava jednostavnu globalizaciju. Kod projektivne metode, linijsko pretraživanje se koristi u cilju konstrukcije hiperravni koja trenutnu iteraciju razdvaja od skupa rešenja sistema. Naime, linijskim pretraživanjem u datom pravcu određuje se dužina koraka i nakon toga generise pomoćna iteracija koja služi za konstrukciju hiperravni koja razdvaja trenutnu iteraciju od rešenja sistema jedinačina. Naredna iteracija dobija se projektovanjem trenutne iteracije na datu hiperravan. Na ovaj način se postiže globalna konvergencija.

Projektivna metoda za monotone sisteme prvi put je predstavljena u radu [65] u kojem je predložen hibridni projektivni netačni Njutnov postupak koji kombinuje projektivnu metodu sa Njutnovim pravcem pretraživanja. Glavna karakteristika ovog postupka jeste da čitav niz iteracija generisan algoritmom globalno konvergira ka rešenju sistema bez pretpostavke o regularnosti.

Pošto ova projektivna metoda predstavlja osnov za čitavu klasu projektivnih postupaka, sada će biti izložena osnovna ideja.

4.1 Hibridni projektivni netačni Njutnov postupak

Neka je dat nelinearan sistem

$$F(x) = 0, \quad (4.1)$$

gde je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno preslikavanje koje zadovoljava uslov monotonosti

$$(F(x) - F(y))^T(x - y) \geq 0 \quad \text{za svako } x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (4.2)$$

Skup rešenja ovakvog sistema je konveksan, ukoliko sistem ima rešenje.

Ideja hibridnog projektivnog netačnog Njutnovog postupka je da se u prvom koraku rešava regularizovana Njutnova jednačina

$$F(x_k) + G_k(x - x_k) + \mu_k(x - x_k) = 0, \quad (4.3)$$

gde je $\mu_k > 0$ parametar regularizacije, a G_k pozitivno semidefinitna matrica. Jednačina (4.3) se može zapisati i u obliku

$$F(x_k) + (G_k + \mu_k I)(x - x_k) = 0. \quad (4.4)$$

Budući da je jednačina (4.4) linearna, Njutnov postupak određuje rešenje ove jednačine u jednom koraku, tj. važi $x = x_k + d_k$, gde je vektor d_k Njutnov pravac. Kada su u pitanju sistemi velikih dimenzija zgodno je koristiti netačni Njutnov postupak kojim se određuje pravac pretraživanja d_k rešavanjem netačne Njutnove jednačine

$$F(x_k) + (G_k + \mu_k I)d_k + e_k = 0,$$

gde je

$$\|e_k\| \leq \rho_k \mu_k \|d_k\|,$$

$\rho_k \in [0, 1)$. Na osnovu pravca d_k potrebno je odrediti pomoćnu iteraciju z_k koja služi za generisanje hiperravnini

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n : F(z_k)^T(x - z_k) = 0\}. \quad (4.5)$$

Tačka z_k se određuje na taj način da hiperravan H_k koja je generisana tom tačkom razdvaja trenutnu iteraciju x_k od skupa rešenja sistema

(4.1). Međutim, ako je tačka z_k određena punim Njutnovim ili punim netačnim Njutnovim korakom $z_k = x_k + d_k$, hiperravan H_k u opštem slučaju ne razdvaja trenutnu iteraciju od skupa rešenja sistema. Stoga je potrebno koristiti linijsko pretraživanje koje određuje dužinu koraka α_k tako da hiperravan H_k generisana sa $z_k = x_k + \alpha_k d_k$ striktno razdvaja trenutnu iteraciju od skupa rešenja. Da bi se ovo postiglo, nameće se uslov

$$F(z_k)^T(x_k - z_k) > 0 \quad (4.6)$$

koji garantuje ovu osobinu tačke z_k . Sa druge strane, iz monotonosi funkcije F , za svako rešenje $x^* \in X_F^*$ sistema (4.1) važi

$$F(z_k)^T(x^* - z_k) = (F(z_k) - F(x^*))^T(x^* - z_k) \leq 0. \quad (4.7)$$

Iz (4.6) i (4.7) sledi da hiperravan H_k striktno razdvaja trenutnu iteraciju x_k od rešenja x^* . Naredna iteracija x_{k+1} se dobija projekcijom trenutne iteracije x_k na hiperravan H_k , na sledeći način

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(z_k)^T(x_k - z_k)}{\|F(z_k)\|^2} F(z_k). \quad (4.8)$$

U radu [65] je predložen Algoritam 9 za rešavanje monotonih sistema, koji koristi opisanu ideju.

Algoritam 9 je globalno konvergentan, tj. za proizvoljnu početnu iteraciju $x_0 \in \mathbb{R}^n$ generiše niz iteracija koji konvergira ka rešenju sistema (4.1). Ova konvergencija se postiže bez bilo kakvih pretpostavki o regularnosti.

Teorema 4.1 ([65]). *Neka je funkcija F neprekidna i monotona i neka je niz $\{x_k\}$ generisan Algoritmom 9. Tada za svaku tačku x^* za koju je $F(x^*) = 0$ važi*

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

i niz $\{x_k\}$ je ograničen. Osim toga, važi da je niz $\{x_k\}$ ili konačan i poslednja iteracija je rešenje sistema (4.1) ili je niz $\{x_k\}$ beskonačan i važi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{k+1} - x_k\| = 0. \quad (4.9)$$

Ako je niz $\{x_k\}$ beskonačan, $\limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_k < 1$ i postoje pozitivne konstante C_1, C_2, C_3 takve da $\|G_k\| \leq C_1$ za svako k i počev od nekog indeksa k_0 važi $C_2 \geq \mu_k \geq C_3 \|F(x_k)\|$, onda niz $\{x_k\}$ konvergira ka rešenju x^ sistema (4.1).*

Algoritam 9 Hibridni projekivni netačni Njutnov postupak

K0 Izaberi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i konstante $\beta, \lambda \in (0, 1)$. Stavi $k = 0$.

K1 Izaberi pozitivno semidefinitnu matricu $G_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, parametar regularizacije $\mu_k > 0$ i $\rho_k \in [0, 1)$.
Odredi pravac pretraživanja d_k rešavajući približno jednačinu (4.4), tj. reši problem

$$F(x_k) + (G_k + \mu_k I)d_k + e_k = 0,$$

gde je

$$\|e_k\| \leq \rho_k \mu_k \|d_k\|.$$

K2 Ako je $d_k = 0$, STOP, inače idi na korak **K3**.

K3 Odredi najmanji broj $m \in \mathbb{N}_0$ za koji važi

$$-F(x_k + \beta^m d_k)^T d_k \geq \lambda(1 - \rho_k) \mu_k \|d_k\|^2.$$

Odredi $z_k = x_k + \alpha_k d_k$, gde je $\alpha_k = \beta^m$.

K4 Izračunaj

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(z_k)^T (x_k - z_k)}{\|F(z_k)\|^2} F(z_k).$$

K5 Stavi $k = k + 1$ i vrati se na korak **K1**.

Ako je funkcija F diferencijabilna u rešenju x^* sistema (4.1), $F'(x^*)$ regularna i ako se parametri algoritma pogodno izaberu, dobija se superlinearna konvergencija.

Teorema 4.2 ([65]). *Neka je funkcija F neprekidna i monotona na \mathbb{R}^n i neka je x^* jedinstveno rešenje sistema (4.1) u kojem je funkcija F diferencijabilna i $F'(x^*)$ regularna. Neka je F' lokalno Lipšic neprekidna u okolini x^* . Ako se pretpostavi da je počev od nekog indeksa k_0 , matrica G_k izabrana tako da $G_k = F'(x_k)$ i ako važi*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{-1} \|F(x_k)\| = 0,$$

onda niz $\{x_k\}$ generisan Algoritmom 9 konvergira superlinearno ka rešenju

x^* .

Ako počev od nekog indeksa k_0 , $\mu_k = \gamma_1 \|F(x_k)\|^{1/2}$ i $\rho_k = \gamma_2 \|F(x_k)\|^{1/2}$ za neke pozitivne konstante γ_1 i γ_2 , onda je red konvergencije barem 1.5.

Uopštenje ovog postupka za rešavanje monotonih sistema sa singularnim rešenjima dato je u [81], dok je projekтивna metoda za monotone sisteme kombinovana sa BFGS i LBFGS metodom u [79,80], a u radu [75] je kombinovana sa postupkom spektralnog gradijenta.

4.2 Projekтивni postupak spektralnog gradijenta

Postupak spektralnog gradijenta nije skup, pa je pogodan za rešavanje problema velikih dimenzija. U radu [75] je predstavljen postupak koji je prikladan za rešavanje monotonih sistema velikih dimenzija, a koji kombinuje projekтивnu metodu i metodu spektralnog gradijenta. Ovaj postupak je prikazan u obliku Algoritma 10.

Na osnovu osobine monotonosti sistema važi

$$\begin{aligned} y_{k-1}^T s_{k-1} &= (F(x_k) - F(x_{k-1}))^T (x_k - x_{k-1}) + r s_{k-1}^T s_{k-1} \\ &\geq r s_{k-1}^T s_{k-1} > 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ako je funkcija F Lipšic neprekidna sa konstantom L , onda je

$$\begin{aligned} y_{k-1}^T s_{k-1} &= (F(x_k) - F(x_{k-1}))^T (x_k - x_{k-1}) + r s_{k-1}^T s_{k-1} \\ &\leq (L + r) s_{k-1}^T s_{k-1}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Iz (4.10), (4.11) i (4.12) sledi da je pravac pretraživanja ograničen, tj. važi

$$\frac{\|F(x_k)\|}{L + r} \leq \|d_k\| \leq \frac{\|F(x_k)\|}{r}.$$

Ovo implicira da će za dovoljno malu dužinu koraka α_k , korak **K3** u algoritmu biti dobro definisan, pa je time i Algoritam 10 dobro definisan.

Projektivni postupak spektralnog gradijenta je globalno konvergentan.

Algoritam 10 Projekтивni postupak spektralnog gradijenta (PSG)

K0 Izaberi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i konstante $\rho, \sigma \in (0, 1)$, $r > 0$. Stavi $k = 0$.

K1 Izračunaj pravac pretraživanja

$$d_k = \begin{cases} -F(x_k) & , \text{ ako je } k = 0, \\ -\theta_k F(x_k) & , \text{ inače,} \end{cases} \quad (4.10)$$

gde je $\theta_k = \frac{s_{k-1}^T s_{k-1}}{y_{k-1}^T s_{k-1}}$, $s_{k-1} = x_k - x_{k-1}$ i

$$y_{k-1} = F(x_k) - F(x_{k-1}) + r s_{k-1}.$$

K2 Ako je $d_k = 0$, STOP.

K3 Odredi dužinu koraka $\alpha_k = \rho^{m_k}$, gde je m_k najmanji broj $m \in \mathbb{N}_0$ za koji važi

$$-F(x_k + \rho^m d_k)^T d_k \geq \sigma \rho^m \|d_k\|^2.$$

Stavi $z_k = x_k + \alpha_k d_k$.

K4 Izračunaj

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(z_k)^T (x_k - z_k)}{\|F(z_k)\|^2} F(z_k).$$

K5 Stavi $k = k + 1$ i vrati se na korak **K1**.

Teorema 4.3 ([75]). *Neka je funkcija F monotona i Lipšic neprekidna, neka sistem (4.1) ima rešenje i neka je niz $\{x_k\}$ generisan Algoritmom 10. Tada za svako x^* za koje je $F(x^*) = 0$ važi*

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

i niz $\{x_k\}$ je ograničen. Osim toga, ili je niz $\{x_k\}$ konačan i poslednja iteracija je rešenje sistema (4.1), ili je niz $\{x_k\}$ beskonačan, i važi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{k+1} - x_k\| = 0.$$

Štaviše, $\{x_k\}$ konvergira ka rešenju x^ sistema (4.1).*

5 Projektivni postupci tipa konjugovanih gradijenata

U ovom odeljku će biti predstavljeni postupci za rešavanje nelinearnih monotonih sistema velikih dimenzija koji kombinuju projektivnu metodu i pravce pretraživanja tipa konjugovanih gradijenata.

Rešava se nelinearan sistem

$$F(x) = 0, \quad (5.1)$$

gde je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno i monotono preslikavanje. Projektivna metoda omogućava jednostavnu globalizaciju zbog monotonosti sistema, a pravci pretraživanja tipa konjugovanih gradijenata zahtevaju malo računarske memorije, pa su prikladni za rešavanje problema velikih dimenzija. Osim toga, ovi postupci ne koriste izvode i funkciju cilja i zasnovani su samo na izračunavanju vrednosti funkcije sistema, pa su zbog toga pogodni i za rešavanje neglatkih monotonih sistema, kao i sistema sa singularnim rešenjima.

Originalni doprinos disertacije izložen je u ovom i u šestom poglavlju, a deo originalnih rezultata predstavljen je u [55].

Najpre su se razvile metode konjugovanih gradijenata koje predstavljaju široku klasu postupaka za rešavanje problema optimizacije bez ograničenja, o kojima je bilo reči u odeljku 3, a zatim je taj pristup počeo da se uopštava za nelinearne sisteme. Detaljan pregled literature o CG postupcima za probleme minimizacije bez ograničenja dat je u [34], a mnogobrojne CG metode i njihove modifikacije prikazane su u radovima [17,18,26,27,37,47,58–61]. Mala računarska složenost čini ove postupke prikladnim za rešavanje problema velikih dimenzija. Motivisani ovim, pojedini autori su prilagodili CG tehnike rešavanju nelinearnih sistema. U radovima [1,3,10,46,55,73] predstavljeni su projektivni postupci koji koriste pravce pretraživanja tipa konjugovanih gradijenata.

Globalizacija ovih postupaka je zasnovana na primeni linijskog pretraživanja duž pravca d_k koji zadovoljava uslov dovoljnog pada

$$F(x_k)^T d_k \leq -c \|F(x_k)\|^2, \quad (5.2)$$

gde je $c > 0$.

Nadalje, radi jednostavnosti uvodimo oznaku $F(x_k) = F_k$.

5.1 Pravci pretraživanja tipa PRP

Efikasnost postupaka konjugovanih gradijenata tipa PRP za rešavanje problema optimizacije bez ograničenja motivisala je pojedine autore da izvrše generalizaciju ovih postupaka za rešavanje monotonihi sistema. Najpre će biti predstavljeni neki pravci pretraživanja tipa PRP koji se koriste u tu svrhu.

U radu [10] definisan je pravac pretraživanja oblika

$$d_k^{PRP} = \begin{cases} -F_k & , \text{ ako je } k = 0, \\ -F_k + \beta_k^{PRP} d_{k-1} & , \text{ ako je } k > 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

gde je CG parametar dat sa

$$\beta_k^{PRP} = \frac{F_k^T y_{k-1}}{\|F_{k-1}\|^2}, \quad (5.4)$$

a $y_{k-1} = F_k - F_{k-1}$. Budući da ovako definisani pravac u opštem slučaju ne zadovoljava uslov dovoljnog pada (5.2), on je modifikovan na sledeći način

$$d_k = \begin{cases} d_k^{PRP} & , \text{ ako je } F_k^T d_k^{PRP} \leq -c \|F_k\|^2, \\ -F_k & , \text{ inače.} \end{cases} \quad (5.5)$$

Dakle, ako d_k^{PRP} definisan sa (5.3) i (5.4) ne zadovoljava uslov dovoljnog pada, koristi se pravac negativnog gradijenta. U datom radu predstavljen je projektivni postupak sa navedenim pravcem pretraživanja (5.5) i on će biti nazvan PRP postupak.

U radu [3] formulisana su dva modifikovana tročlana pravca tipa PRP, oblika

$$d_k = \begin{cases} -F_k & , \text{ ako je } k = 0, \\ -F_k + \beta_k^{PRP} w_{k-1} - \theta_k y_{k-1} & , \text{ ako je } k > 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

gde je β_k^{PRP} definisan sa (5.4), $y_k = F_k - F_{k-1}$, $w_k = z_k - x_k = \alpha_k d_k$, $z_k = x_k + \alpha_k d_k$ je pomoćna iteracija definisana u odeljku 4.1, a θ_k je parametar određen tako da pravac d_k zadovoljava uslov dovoljnog pada (5.2).

U zavisnosti od načina izračunavanja θ_k , predstavljena su dva postupka koji kombinuju projektivnu metodu sa pravcem (5.6). To su DFPB1 postupak u kome je pravac pretraživanja definisan sa (5.6), pri čemu je

$$\theta_k = \frac{(F_k^T y_{k-1}) \|w_{k-1}\|^2}{\|F_{k-1}\|^4} \quad (5.7)$$

i DFPB2 postupak u kome je pravac pretraživanja definisan sa (5.6), gde je

$$\theta_k = \frac{F_k^T w_{k-1}}{\|F_{k-1}\|^2} + \frac{(F_k^T y_{k-1}) \|y_{k-1}\|^2}{\|F_{k-1}\|^4}. \quad (5.8)$$

Ovako definisani pravci pretraživanja zadovoljavaju uslov dovoljnog pada (5.2). Naime, za DFPB1 pravac definisan sa (5.6) i (5.7) važi

$$\begin{aligned} F_k^T d_k &= \frac{-\|F_k\|^2 \|F_{k-1}\|^4 + (F_k^T y_{k-1}) \|F_{k-1}\|^2 (F_k^T w_{k-1})}{\|F_{k-1}\|^4} \\ &\quad - \theta_k \frac{(F_k^T y_{k-1}) \|F_{k-1}\|^4}{\|F_{k-1}\|^4}. \end{aligned}$$

Uzimajući $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \|F_{k-1}\|^2 F_k$ i $v = \sqrt{2} (F_k^T y_{k-1}) w_{k-1}$ i koristeći nejednakost (1.2), sledi

$$\begin{aligned} F_k^T d_k &\leq -\frac{3}{4} \|F_k\|^2 + \frac{(F_k^T y_{k-1})^2 \|w_{k-1}\|^2 - \theta_k (F_k^T y_{k-1}) \|F_{k-1}\|^4}{\|F_{k-1}\|^4} \\ &= -\frac{3}{4} \|F_k\|^2, \end{aligned}$$

a za DFPB2 pravac definisan sa (5.6) i (5.8) važi

$$F_k^T d_k = -\|F_k\|^2 - \frac{(F_k^T y_{k-1})^2 \|y_{k-1}\|^2}{\|F_{k-1}\|^4} \leq -\|F_k\|^2.$$

U radu [46] definisan je dvočlani pravac pretraživanja tipa PRP oblika

$$d_k = \begin{cases} -F_k & , \text{ ako je } k = 0, \\ -F_k + \beta_k^{PRP} \left(I - \frac{F_k F_k^T}{F_k^T F_k} \right) d_{k-1} & , \text{ ako je } k > 0, \end{cases} \quad (5.9)$$

koji zadovoljava uslov dovoljnog pada (5.2) i predstavljen je postupak koji kombinuje projektivnu metodu sa ovim pravcem. Dati postupak iz rada [46] će nadalje biti nazvan Li-Li postupak.

5.2 Pravci pretraživanja tipa DL

Motivisani postupcima tipa DL iz rada [6] za rešavanje problema optimizacije bez ograničenja, u radu [1] autori su definisali pravac pretraživanja tipa DL oblika

$$d_k = \begin{cases} -F_k & , \text{ ako je } k = 0, \\ -F_k + \beta_k^{DL} d_{k-1} & , \text{ ako je } k > 0, \end{cases} \quad (5.10)$$

gde je DL parametar dat sa

$$\begin{aligned} \beta_k^{DL} &= \frac{F_k^T y_{k-1}}{y_{k-1}^T d_{k-1}} - t_k \frac{F_k^T w_{k-1}}{y_{k-1}^T d_{k-1}}, \\ t_k &= p \frac{\|y_{k-1}\|^2}{w_{k-1}^T y_{k-1}} - q \frac{w_{k-1}^T y_{k-1}}{\|w_{k-1}\|^2}, \quad p \geq \frac{1}{4}, \quad q \leq 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$y_k = F_{k+1} - F_k$, $w_k = z_k - x_k = \alpha_k d_k$. Dati pravac zadovoljava uslov dovoljnog pada, tj. važi naredna lema.

Lema 5.1 ([1]). *Za pravac pretraživanja definisan sa (5.10) i (5.11) važi*

$$F_k^T d_k = -\lambda_k \|F_k\|^2,$$

gde je $\lambda_k > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$.

U radu [1] predstavljen je projektivni postupak sa navedenim pravcem pretraživanja (5.10) i (5.11) i on će nadalje biti označen kao DLPM postupak.

5.3 Pravci pretraživanja tipa FR

Sada će biti formulisana tri nova pravca pretraživanja tipa FR koji će se koristiti u postupcima za rešavanje nelinearnih monotonih sistema. Posmatrajući problem minimizacije bez ograničenja (3.1), u [77]

je predstavljen pravac pretraživanja koji zadovoljava uslov dovoljnog pada bez obzira koje linijsko pretraživanje se koristi. Motivisani ovim, mi smo definisali tročlani pravac pretraživanja

$$d_k = \begin{cases} -F_k & , \text{ ako je } k = 0, \\ -F_k + \beta_k^{FR} w_{k-1} - \theta_k F_k & , \text{ ako je } k > 0, \end{cases} \quad (5.12)$$

gde je CG parametar β_k^{FR} prilagođen rešavanju nelinearnih sistema, definisan sa

$$\beta_k^{FR} = \frac{\|F_k\|^2}{\|F_{k-1}\|^2}, \quad (5.13)$$

$w_k = z_k - x_k = \alpha_k d_k$, a parametar θ_k se određuje tako da pravac (5.12) zadovoljava uslov dovoljnog pada (5.2). U zavisnosti od vrednosti parametra θ_k , navodimo tri verzije tročlanog pravca tipa FR.

M3TFR1 pravac:

Iz (5.12) i (5.13) sledi

$$F_k^T d_k = -\|F_k\|^2 + \frac{\|F_k\|^2}{\|F_{k-1}\|^2} F_k^T w_{k-1} - \theta_k \|F_k\|^2. \quad (5.14)$$

Da bi važio uslov dovoljnog pada (5.2), dovoljno je izjednačiti drugi i treći član na desnoj strani (5.14). Na taj način se dobija

$$\theta_k = \frac{F_k^T w_{k-1}}{\|F_{k-1}\|^2}. \quad (5.15)$$

Ovaj izbor parametra θ_k implicira $F_k^T d_k = -\|F_k\|^2$. Dakle, M3TFR1 pravac određen sa (5.12), (5.13) i (5.15) zadovoljava uslov dovoljnog pada (5.2) za $c = 1$.

M3TFR2 pravac:

Množeći i deleći (5.14) sa $\|F_{k-1}\|^4$, dobija se

$$\begin{aligned} F_k^T d_k &= -\frac{\|F_k\|^2 \|F_{k-1}\|^4}{\|F_{k-1}\|^4} \\ &+ \frac{\|F_k\|^2 \|F_{k-1}\|^2 F_k^T w_{k-1}}{\|F_{k-1}\|^4} \\ &- \frac{\theta_k \|F_k\|^2 \|F_{k-1}\|^4}{\|F_{k-1}\|^4}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Uzimajući $u = \frac{1}{\sqrt{2}}\|F_{k-1}\|^2 F_k$ i $v = \sqrt{2}\|F_k\|^2 w_{k-1}$ i koristeći nejednakost (1.2), iz (5.16) sledi

$$\begin{aligned}
F_k^T d_k &\leq -\frac{\|F_k\|^2 \|F_{k-1}\|^4}{\|F_{k-1}\|^4} \\
&+ \frac{\frac{1}{2}\|F_{k-1}\|^4 \|F_k\|^2 + 2\|F_k\|^4 \|w_{k-1}\|^2}{2\|F_{k-1}\|^4} \\
&- \frac{\theta_k \|F_k\|^2 \|F_{k-1}\|^4}{\|F_{k-1}\|^4} \\
&= -\|F_k\|^2 + \frac{1}{4}\|F_k\|^2 + \frac{\|F_k\|^4}{\|F_{k-1}\|^4} \|w_{k-1}\|^2 - \theta_k \|F_k\|^2 \\
&= -\frac{3}{4}\|F_k\|^2 + \frac{\|F_k\|^4}{\|F_{k-1}\|^4} \|w_{k-1}\|^2 - \theta_k \|F_k\|^2. \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Izjednačavajući drugi i treći član na desnoj strani (5.17), dobija se

$$\theta_k = \frac{\|F_k\|^2 \|w_{k-1}\|^2}{\|F_{k-1}\|^4}. \tag{5.18}$$

Uvrštavajući dobijeni parametar θ_k sledi $F_k^T d_k \leq -\frac{3}{4}\|F_k\|^2$. Dakle, M3TFR2 pravac određen sa (5.12), (5.13) i (5.18) zadovoljava (5.2), tj. važi uslov dovoljnog pada za $c = \frac{3}{4}$.

M3TFR3 pravac:

Parametar θ_k se sastoji iz dva sabirka. Prvi sabirak je (5.15), a drugi je pogodno izabran tako da važi uslov dovoljnog pada (5.2). Na taj način se dobija θ_k oblika

$$\theta_k = \frac{F_k^T w_{k-1}}{\|F_{k-1}\|^2} + \frac{\|F_k\|^2}{\|F_{k-1}\|^4} \tag{5.19}$$

i za takav izbor θ_k važi $F_k^T d_k \leq -\|F_k\|^2 - \frac{\|F_k\|^4}{\|F_{k-1}\|^4} \leq -\|F_k\|^2$. Dakle, M3TFR3 pravac određen sa (5.12), (5.13) i (5.19) takođe zadovoljava uslov dovoljnog pada (5.2) za $c = 1$.

Lema 5.2. *Pravci pretraživanja M3TFR1, M3TFR2 i M3TFR3 zadovoljavaju uslov dovoljnog pada (5.2) za svako $k \in \mathbb{N}_0$.*

Dokaz. Za $k = 0$ važi $F_0^T d_0 = -\|F_0\|^2$ kod svih pravaca pretraživanja, stoga je uslov dovoljnog pada ispunjen za $c = 1$.

Za $k > 0$ M3TFR1 i M3TFR3 pravci zadovoljavaju uslov dovoljnog pada za $c = 1$ na osnovu prethodno izvedene tehnike određivanja parametra θ_k , dok pravac M3TFR2 zadovoljava uslov dovoljnog pada za $c = \frac{3}{4}$ takođe na osnovu prethodnog razmatranja.

□

5.4 Pravci pretraživanja tipa HuS

U ovom odeljku biće definisana dva nova hibridna pravca pretraživanja tipa HuS. Dobar izbor CG parametra je ključna stvar svake CG metode. Kao što je pomenuto u odeljku 3, postupci tipa FR za rešavanje problema optimizacije bez ograničenja su konvergentni, ali su podložni zaglavljivanju u smislu da generišu suviše kratke korake koji onemogućavaju napredak ka rešenju. Nasuprot tome postupci tipa PRP imaju dobre praktične performanse, ali se kod njih u opštem slučaju može javiti problem konvergencije. Sa ciljem da se iskoriste prednosti FR i PRP postupaka nastali su hibridni postupci. Jedan od prvih hibridnih postupaka za rešavanje problema optimizacije bez ograničenja formulisali su Hu i Stori u radu [37] koristeći CG parametar oblika

$$\beta_k^{HuS} = \max\{0, \min\{\beta_k^{PRP}, \beta_k^{FR}\}\}. \quad (5.20)$$

Mi smo ovaj pristup uopštili za rešavanje nelinearnih monotonihih sistema, uvodeći dva hibridna pravca pretraživanja tipa HuS.

Najpre smo definisali pravac

$$d_k^{HuS} = \begin{cases} -F_k & , \text{ ako je } k = 0, \\ -F_k + \beta_k^{HuS} w_{k-1} & , \text{ ako je } k > 0, \end{cases} \quad (5.21)$$

gde je β_k^{HuS} dat sa (5.20), $\beta_k^{FR} = \frac{\|F_k\|^2}{\|F_{k-1}\|^2}$, $\beta_k^{PRP} = \frac{F_k^T y_{k-1}}{\|F_{k-1}\|^2}$, $y_{k-1} = F_k - F_{k-1}$ i $w_k = z_k - x_k = \alpha_k d_k$. Ovako definisani pravac u opštem slučaju ne zadovoljava uslov dovoljnog pada (5.2), pa se zato mora modifikovati. Dakle, ukoliko d_k^{HuS} ne zadovoljava uslov dovoljnog pada, koristi se pravac najbržeg pada, koji ga zadovoljava, tj. na sledeći način definišemo

nedostatak, a iskoristile dobre praktične performanse postupaka tipa PRP, radi se sledeće: ukoliko dođe do zaglavljivanja koristi se PRP pravac ako je $\beta_k^{PRP} > 0$, a pravac najbržeg pada ako je $\beta_k^{PRP} \leq 0$. U ostalim slučajevima se koristi FR pravac.

5.5 Projektivni CG algoritam

U ovom delu biće predstavljeni postupci koji kombinuju projekktivnu metodu sa novim pravcima pretraživanja definisanim u odeljcima 5.3 i 5.4.

Zbog osobine monotonosti sistema projektivna metoda omogućava jednostavnu globalizaciju, a novi pravci pretraživanja tipa konjugovanih gradijenata imaju malu računarsku složenost pa su efikasni za rešavanje problema velikih dimenzija.

Rešavanje nelinearnog sistema (5.1) ekvivalentno je traženju globalnog minimuma funkcije cilja $f(x) = \frac{1}{2}\|F(x)\|^2$. Globalizacija mnogih iterativnih postupaka koji se koriste za rešavanje (5.1), bazira se upravo na minimizaciji ove funkcije cilja. Svaka tačka nagomilavanja niza generisanog iterativnim postupkom je stacionarna tačka funkcije cilja $f(x)$, ali bez pretpostavke o regularnosti ne može se tvrditi da je ona i rešenje sistema (5.1). Pretpostavka o ograničenosti nivo skupa funkcije $f(x)$, a time i ograničenosti skupa rešenja, neophodna je da bi se osiguralo postojanje tačke nagomilavanja, a osim toga, bez regularnosti ne može se dokazati konvergencija celog niza generisanog iterativnim postupkom ka rešenju sistema. Zbog svega navedenog, javila se potreba za postupcima koji ne koriste funkciju $f(x)$.

Nasuprot klasičnim postupcima koji koriste linijsko pretraživanje sa funkcijom $f(x)$, kod projektivne metode, linijsko pretraživanje se koristi u cilju konstruisanja hiperravni koja trenutnu iteraciju razdvaja od rešenja sistema. Dakle, projektivnom metodom generiše se niz $\{z_k\}$ pravilom $z_k = x_k + \alpha_k d_k$, gde je x_k trenutna iteracija, a dužina koraka α_k se određuje linijskim pretraživanjem duž pravca d_k tako da važi

$$F(z_k)^T(x_k - z_k) > 0.$$

S druge strane, monotonost funkcije F implicira da za svako rešenje x^* sistema važi

$$F(z_k)^T(x^* - z_k) \leq 0.$$

Iz ovoga je jasno da hiperravan

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n : F(z_k)^T(x - z_k) = 0\}$$

striktno razdvaja trenutnu iteraciju x_k od rešenja x^* . Naredna iteracija dobija se projekcijom x_k na hiperravan H_k na sledeći način

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(z_k)^T(x_k - z_k)}{\|F(z_k)\|^2} F(z_k). \quad (5.24)$$

Računarska složenost algoritma umnogome zavisi od definisanja pravca pretraživanja d_k i dužine koraka α_k , pa je odabir odgovarajuće tehnike linijskog pretraživanja od velikog značaja. Mi ćemo upotrebiti linijsko pretraživanje bazirano samo na izračunavanju vrednosti funkcije sistema $F(x)$, bez funkcije $f(x)$ i bez izvoda, oblika

$$-F(x_k + \alpha_k d_k)^T d_k \geq \sigma \alpha_k \|F(x_k + \alpha_k d_k)\| \|d_k\|^2, \quad (5.25)$$

u kome je $\sigma > 0$, a pravac d_k treba da zadovoljava uslov dovoljnog pada (5.2).

Sad će biti predstavljen projekтивni postupak tipa konjugovanih gradijenata.

Algoritam 11 Projekтивni CG algoritam (PCG)

K0 Izaberi početnu iteraciju $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i konstante $\sigma, c > 0, \rho \in (0, 1)$. Stavi $k = 0$.

K1 Ako je $\|F_k\| = 0$ STOP, inače idi na **K2**.

K2 Odredi pravac d_k koji zadovoljava uslov dovoljnog pada (5.2).

K3 Linijsko pretraživanje:
Odredi inicijalnu dužinu koraka $s > 0$.
Odredi dužinu koraka $\alpha_k > 0$ primenjujući Algoritam 6.

K4 Izračunaj $z_k = x_k + \alpha_k d_k$.
Ako je $\|F(z_k)\| = 0$, tada $x_{k+1} = z_k$, STOP. Inače

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(z_k)^T(x_k - z_k)}{\|F(z_k)\|^2} F(z_k).$$

K5 Stavi $k = k + 1$, idi na korak **K1**.

Na osnovu Leme 5.2 i Leme 5.3 jasno je da novi tročlani pravci pretraživanja tipa FR definisani u odeljku 5.3 i hibridni pravci tipa HuS definisani u odeljku 5.4 zadovoljavaju uslov dovoljnog pada (5.2), pa će biti upotrebljeni u koraku **K2** Algoritma 11. Na taj način smo formulisali nove projektivne postupke tipa konjugovanih gradijenata. Algoritam 11 sa pravcem M3TFR1 definisanim sa (5.12), (5.13) i (5.15) biće nazvan M3TFR1 postupak, Algoritam 11 sa pravcem M3TFR2 definisanim sa (5.12), (5.13) i (5.18) biće nazvan M3TFR2 postupak i Algoritam 11 sa pravcem M3TFR3 definisanim sa (5.12), (5.13) i (5.19) biće nazvan M3TFR3 postupak. Algoritam 11 sa HuS pravcem (5.22) biće nazvan HuS postupak, a Algoritam 11 sa 2HuS pravcem (5.23) biće nazvan 2HuS postupak.

5.6 Analiza konvergencije

U ovom poglavlju, pod standardnim pretpostavkama biće dokazana globalna konvergencija novih postupaka: M3TFR1, M3TFR2, M3TFR3, HuS i 2HuS. Naime, biće dokazana globalna konvergencija PCG Algoritma 11 sa pravcima M3TFR1, M3TFR2, M3TFR3, HuS i 2HuS, pod sledećim pretpostavkama:

- (P1) Funkcija F je monotona na \mathbb{R}^n .
- (P2) Skup rešenja X_F^* problema (5.1) je neprazan.
- (P3) Funkcija F je Lipšic neprekidna na \mathbb{R}^n .

Na osnovu Leme 5.2 i Leme 5.3 jasno je da svi pravci M3TFR1, M3TFR2, M3TFR3, HuS i 2HuS zadovoljavaju uslov dovoljnog pada. Osim toga, biće pokazana ograničenost nizova $\{x_k\}$ i $\{d_k\}$ generisanih Algoritmom 11 sa bilo kojim od navedenih pravaca, zatim dobra definisanost Algoritma 11 i na kraju globalna konvergencija celog niza $\{x_k\}$ generisanog Algoritmom 11 sa ma kojim od navedenih pravaca.

Iz pretpostavke (P1) i (P2) sledi naredna lema.

Lema 5.4 ([65]). *Neka važe pretpostavke (P1) i (P2) i neka su vektori $x, y \in \mathbb{R}^n$ takvi da važi*

$$F(y)^T(x - y) > 0 \quad (5.26)$$

i neka je

$$x^+ = x - \frac{F(y)^T(x - y)}{\|F(y)\|^2} F(y). \quad (5.27)$$

Tada za svako rešenje $x^* \in X_F^*$ sistema (5.1) važi

$$\|x^+ - x^*\|^2 \leq \|x - x^*\|^2 - \|x^+ - x\|^2. \quad (5.28)$$

Dokaz. Iz monotonosti funkcije F za svako rešenje $x^* \in X_F^*$ i za svaki vektor $y \in \mathbb{R}^n$ važi

$$F(y)^T(y - x^*) = (F(y) - F(x^*))^T(y - x^*) \geq 0,$$

tj.

$$F(y)^T(x^* - y) \leq 0. \quad (5.29)$$

Neka je $H = \{s \in \mathbb{R}^n : F(y)^T(s - y) = 0\}$ hiperravan koja striktno razdvaja x od x^* . Tada x pripada $\{s \in \mathbb{R}^n : F(y)^T(s - y) > 0\}$, a sa druge strane $x^* \in \{s \in \mathbb{R}^n : F(y)^T(s - y) \leq 0\}$. Vektor x^+ takođe pripada $\{s \in \mathbb{R}^n : F(y)^T(s - y) \leq 0\}$. Naime,

$$\begin{aligned} F(y)^T(x^+ - y) &= F(y)^T\left(x - \frac{F(y)^T(x - y)}{\|F(y)\|^2}F(y) - y\right) \\ &= F(y)^T(x - y) - F(y)^T(x - y) = 0. \end{aligned}$$

Koristeći (5.26), (5.27) i (5.29), može se pokazati da je $(x - x^+)^T(x^+ - x^*) \geq 0$.

$$\begin{aligned} &(x - x^+)^T(x^+ - x^*) = \\ &= \frac{F(y)^T(x - y)}{\|F(y)\|^2}F(y)^T\left(x - \frac{F(y)^T(x - y)}{\|F(y)\|^2}F(y) - x^*\right) \\ &= \frac{F(y)^T(x - y)}{\|F(y)\|^2}F(y)^T\left(x - y - \frac{F(y)^T(x - y)}{\|F(y)\|^2}F(y) - x^* + y\right) \\ &= \frac{F(y)^T(x - y)}{\|F(y)\|^2}\left[F(y)^T(x - y) - F(y)^T(x^* - y) - F(y)^T(x - y)\right] \\ &= -\frac{F(y)^T(x - y)}{\|F(y)\|^2}F(y)^T(x^* - y) \geq 0. \end{aligned}$$

Oдавde sledi

$$\begin{aligned} \|x - x^*\|^2 &= \|x - x^+ + x^+ - x^*\|^2 \\ &= \|x - x^+\|^2 + \|x^+ - x^*\|^2 + 2(x - x^+)^T(x^+ - x^*) \\ &\geq \|x - x^+\|^2 + \|x^+ - x^*\|^2, \end{aligned}$$

što znači da važi (5.28). □

Naredna lema garantuje da je niz $\{x_k - x^*\}$ opadajući i konvergentan i da je niz iteracija $\{x_k\}$ ograničen. Dokazuje se koristeći Lemu 5.4 datu u [65].

Lema 5.5. *Neka važe pretpostavke (P1) - (P3) i neka je niz $\{x_k\}$ generisan PCG Algoritmom 11 sa ma kojim pravcem pretraživanja M3TFR1, M3TFR2, M3TFR3, HuS ili 2HuS. Tada za svako rešenje x^* sistema (5.1) važi*

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x_k\|^2, \quad (5.30)$$

i niz $\{x_k\}$ je ograničen. Osim toga ili je $\{x_k\}$ konačan i poslednja iteracija je rešenje x^* ili je $\{x_k\}$ beskonačan i važi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{k+1} - x_k\| = 0. \quad (5.31)$$

Dokaz. Algoritam 11 se prekida u k -toj iteraciji ako je $\|F(x_k)\| = 0$ ili $\|F(z_k)\| = 0$, što znači da je tad x_k ili z_k rešenje sistema.

Pretpostavimo da je $\|F(x_k)\| \neq 0$ i $\|F(z_k)\| \neq 0$, tj. pretpostavimo da je niz $\{x_k\}$ beskonačan. Tada iz uslova linijskog pretraživanja (5.25) i definicije niza $\{z_k\}$ sledi

$$\begin{aligned} F(z_k)^T(x_k - z_k) &= F(x_k + \alpha_k d_k)^T(x_k - x_k - \alpha_k d_k) \\ &= -\alpha_k F(x_k + \alpha_k d_k)^T d_k \\ &\geq \sigma \alpha_k^2 \|F(x_k + \alpha_k d_k)\| \|d_k\|^2 > 0, \end{aligned}$$

tj. važi uslov (5.26). Po konstrukciji niza $\{x_k\}$ takođe se vidi da je uslov (5.27) zadovoljen, pa na osnovu Leme 5.4 sledi (5.30).

Iz ocene (5.30) proizilazi da je niz $\{\|x_k - x^*\|\}$ opadajući i ograničen, pa je konvergentan, a odavde je i niz $\{x_k\}$ ograničen i važi (5.31). \square

Ako je niz iteracija $\{x_k\}$ generisan PCG Algoritmom 11 sa bilo kojim pravcem d_k koji zadovoljava (5.2), onda je niz $\{\|F_k\|\}$ ograničen, tj. važi naredna lema.

Lema 5.6. *Neka važe pretpostavke (P1) - (P3) i neka je niz $\{x_k\}$ generisan PCG Algoritmom 11 sa pravcem pretraživanja M3TFR1, M3TFR2, M3TFR3, HuS ili 2HuS. Onda je niz $\{\|F_k\|\}$ ograničen, tj. postoji konstanta $\kappa > 0$ takva da za svako $k \in \mathbb{N}_0$ važi $\|F_k\| \leq \kappa$.*

Dokaz. Ako važe uslovi **(P1)** - **(P3)**, onda je prema Lemi 5.5 niz $\{\|x_k - x^*\|\}$ opadajući, pa sledi $\|x_k - x^*\| \leq \|x_0 - x^*\|$. Odavde i iz pretpostavke **(P3)** proizilazi

$$\|F(x_k)\| = \|F(x_k) - F(x^*)\| \leq L\|x_k - x^*\| \leq L\|x_0 - x^*\|.$$

Uzimajući $\kappa = L\|x_0 - x^*\|$, dobija se tvrđenje. □

Ako je niz iteracija $\{x_k\}$ generisan PCG Algoritmom 11 sa ma kojim pravcem pretraživanja M3TFR1, M3TFR2, M3TFR3, HuS ili 2HuS, onda važi naredna lema koja će biti od koristi pri dokazivanju ograničenosti pravaca pretraživanja.

Lema 5.7. *Neka važe pretpostavke **(P1)** - **(P3)** i neka je niz pravaca $\{d_k\}$ generisan PCG Algoritmom 11 sa M3TFR1, M3TFR2, M3TFR3, HuS ili 2HuS pravcem. Tada važi*

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \alpha_k \|d_k\| \quad (5.32)$$

i

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \|d_k\| = 0. \quad (5.33)$$

Dokaz. Iz pravila (5.24) za generisanje iterativnog niza $\{x_k\}$, definicije niza $\{z_k\}$ i iz uslova linijskog pretraživanja (5.25) sledi

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_k\| &= \frac{|F(z_k)^T(x_k - z_k)|}{\|F(z_k)\|} = \frac{|\alpha_k F(z_k)^T d_k|}{\|F(z_k)\|} \\ &\geq \frac{\alpha_k^2 \sigma \|F(z_k)\| \|d_k\|^2}{\|F(z_k)\|} = \sigma \alpha_k^2 \|d_k\|^2 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

pa prethodna nejednakost i (5.31) impliciraju graničnu vrednost (5.33). S druge strane, koristeći Koši-Švarcovu nejednakost dobija se

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \frac{|\alpha_k F(z_k)^T d_k|}{\|F(z_k)\|} \leq \frac{\alpha_k \|F(z_k)\| \|d_k\|}{\|F(z_k)\|} = \alpha_k \|d_k\|,$$

tj. važi (5.32). □

Sledeća teorema tvrdi da su pravci pretraživanja M3TFR1, M3TFR2 i M3TFR3 ograničeni.

Teorema 5.1. *Neka važe pretpostavke (P1) - (P3) i neka je niz pravaca $\{d_k\}$ generisan PCG Algoritmom 11 sa M3TFR1, M3TFR2 ili M3TFR3 pravcem. Neka je $\varepsilon_0 > 0$ tako da za svaki indeks $k \in \mathbb{N}_0$ važi*

$$\|F_k\| \geq \varepsilon_0. \quad (5.34)$$

Tada je niz pravaca $\{d_k\}$ ograničen, tj. postoji $M > 0$ takvo da za svako $k \in \mathbb{N}_0$ važi

$$\|d_k\| \leq M. \quad (5.35)$$

Dokaz. Za $k = 0$ i sva tri pravca pretraživanja, pošto je $d_0 = -F_0$, na osnovu Leme 5.6 važi ograničenost.

Za $k > 0$ posebno ćemo pokazati ograničenost pravaca M3TFR1, M3TFR2 i M3TFR3.

M3TFR1 pravac:

Na osnovu definicije M3TFR1 pravca pretraživanja date sa (5.12), (5.13) i (5.15), iz (5.34) i Leme 5.6 sledi

$$\begin{aligned} \|d_k\| &= \left\| -F_k + \frac{\|F_k\|^2}{\|F_{k-1}\|^2} w_{k-1} - \frac{F_k^T w_{k-1}}{\|F_{k-1}\|^2} F_k \right\| \\ &\leq \|F_k\| + \frac{\|F_k\|^2}{\|F_{k-1}\|^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| + \frac{\|F_k\|^2}{\|F_{k-1}\|^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| \\ &= \|F_k\| + 2 \frac{\|F_k\|^2}{\|F_{k-1}\|^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| \\ &\leq \kappa + 2 \frac{\kappa^2}{\varepsilon_0^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| \end{aligned} \quad (5.36)$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Iz granične vrednosti (5.33) date u Lemi 5.7, sledi da za svako $\varepsilon_1 > 0$ postoji indeks k_0 takav da je $\alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| < \varepsilon_1$ za svako $k > k_0$. Ako se izabere $\varepsilon_1 = \varepsilon_0^2$ i $M = \max\{\|d_0\|, \|d_1\|, \dots, \|d_{k_0}\|, M_1\}$, gde je $M_1 = \kappa(1 + 2\kappa)$, tada važi $\|d_k\| \leq M$ za svako $k \in \mathbb{N}$.

M3TFR2 pravac:

Na sličan način, na osnovu definicije M3TFR2 pravca date sa (5.12), (5.13) i (5.18) za svako $k \in \mathbb{N}$ sledi

$$\begin{aligned}
\|d_k\| &= \left\| -F_k + \frac{\|F_k\|^2}{\|F_{k-1}\|^2} w_{k-1} - \frac{\|F_k\|^2 \|w_{k-1}\|^2}{\|F_{k-1}\|^4} F_k \right\| \\
&\leq \|F_k\| + \frac{\|F_k\|^2}{\|F_{k-1}\|^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| + \frac{\|F_k\|^3}{\|F_{k-1}\|^4} (\alpha_{k-1} \|d_{k-1}\|)^2 \\
&\leq \kappa + \frac{\kappa^2}{\varepsilon_0^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| + \frac{\kappa^3}{\varepsilon_0^4} (\alpha_{k-1} \|d_{k-1}\|)^2. \tag{5.37}
\end{aligned}$$

Iz (5.33) date u Lemi 5.7 sledi da za svako $\varepsilon_1 > 0$ postoji k_0 takvo da je $\alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| < \varepsilon_1$ za svako $k > k_0$.

Neka je $\varepsilon_1 = \varepsilon_0^2$ i $M = \max\{\|d_0\|, \|d_1\|, \dots, \|d_{k_0}\|, M_1\}$, gde je $M_1 = \kappa(1 + \kappa + \kappa^2)$. Tada je pravac M3TFR2 ograničen, tj. $\|d_k\| \leq M$ za svako $k \in \mathbb{N}$.

M3TFR3 pravac:

Rezonojući analogno, na osnovu definicije M3TFR3 pravca date sa (5.12), (5.13) i (5.19), za svaki indeks $k \in \mathbb{N}$ važi

$$\begin{aligned}
\|d_k\| &= \left\| -F_k + \frac{\|F_k\|^2}{\|F_{k-1}\|^2} w_{k-1} - \left(\frac{F_k^T w_{k-1}}{\|F_{k-1}\|^2} + \frac{\|F_k\|^2}{\|F_{k-1}\|^4} \right) F_k \right\| \\
&\leq \|F_k\| + 2 \frac{\|F_k\|^2}{\|F_{k-1}\|^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| + \frac{\|F_k\|^3}{\|F_{k-1}\|^4} \\
&\leq \kappa + 2 \frac{\kappa^2}{\varepsilon_0^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| + \frac{\kappa^3}{\varepsilon_0^4}. \tag{5.38}
\end{aligned}$$

Iz (5.33), za svako $\varepsilon_1 > 0$ postoji k_0 takvo da je $\alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| < \varepsilon_1$ za svako $k > k_0$. Biramo $\varepsilon_1 = \varepsilon_0^2$ i $M = \max\{\|d_0\|, \|d_1\|, \dots, \|d_{k_0}\|, M_1\}$, gde je $M_1 = \kappa(1 + 2\kappa + \frac{\kappa^2}{\varepsilon_0^4})$. Tada je pravac M3TFR3 ograničen, tj. važi $\|d_k\| \leq M$, za svako $k \in \mathbb{N}$. □

Ograničenost pravaca pretraživanja HuS i 2HuS dokazana je u narednoj teoremi.

Teorema 5.2. Neka važe pretpostavke **(P1)** - **(P3)** i neka je niz pravaca $\{d_k\}$ generisan PCG Algoritmom 11 sa HuS ili 2HuS pravcem. Neka je $\varepsilon_0 > 0$ takvo da za svaki indeks $k \in \mathbb{N}_0$ važi $\|F_k\| \geq \varepsilon_0$. Tada je niz pravaca $\{d_k\}$ ograničen, tj. postoji konstanta $M > 0$ takva da za svako $k \in \mathbb{N}_0$ važi $\|d_k\| \leq M$.

Dokaz. Posebno ćemo pokazati ograničenost pravaca HuS i 2HuS.

HuS pravac:

Zbog definicije parametra β_k^{HuS} moramo posebno razmatrati tri slučaja.

- Ako je $k = 0$ ili $\beta_k^{HuS} = 0$ ili pravac d_k^{HuS} ne zadovoljava uslov dovoljnog pada (5.2), onda je $d_k = -F_k$. Na osnovu Leme 5.6, $\|F_k\|$ je ograničena, tj. postoji konstanta $\kappa > 0$ takva da je $\|F_k\| \leq \kappa$. Odavde sledi

$$\|d_k\| = \|-F_k\| \leq \kappa. \quad (5.39)$$

- Ako je $\beta_k^{HuS} = \beta_k^{PRP}$ i pravac d_k^{HuS} zadovoljava uslov dovoljnog pada, tada je $d_k = -F_k + \beta_k^{PRP} w_{k-1}$. Na osnovu pretpostavke **(P3)**, Leme 5.6, Leme 5.7 i (5.34) sledi

$$\begin{aligned} \|d_k\| &= \|-F_k + \beta_k^{PRP} w_{k-1}\| \\ &\leq \|F_k\| + \frac{|F_k^T y_{k-1}|}{\|F_{k-1}\|^2} \|w_{k-1}\| \\ &\leq \|F_k\| + \frac{\|F_k^T\| \|y_{k-1}\|}{\|F_{k-1}\|^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| \\ &= \|F_k\| + \frac{\|F_k\| \|F_k - F_{k-1}\|}{\|F_{k-1}\|^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| \\ &\leq \kappa + \frac{\kappa L \|x_k - x_{k-1}\|}{\varepsilon_0^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| \\ &\leq \kappa + \frac{\kappa L \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\|}{\varepsilon_0^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| \\ &= \kappa + \frac{\kappa L}{\varepsilon_0^2} \alpha_{k-1}^2 \|d_{k-1}\|^2 \\ &= \kappa \left(1 + \frac{L}{\varepsilon_0^2} \alpha_{k-1}^2 \|d_{k-1}\|^2 \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Iz granične vrednosti (5.33) za svako $\varepsilon_1 > 0$ sledi da postoji indeks k_0 takav da je $\alpha_{k-1}\|d_{k-1}\| < \varepsilon_1$ za svako $k > k_0$. Ako izaberemo $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ i $M_1 = \max\{\|d_0\|, \|d_1\|, \dots, \|d_{k_0}\|, \tilde{M}_1\}$, gde je $\tilde{M}_1 = \kappa(1 + L)$, važi

$$\|d_k\| \leq M_1 \quad (5.41)$$

za svako $k \in \mathbb{N}$.

- Ako je $\beta_k^{HuS} = \beta_k^{FR}$ i pravac d_k^{HuS} zadovoljava uslov dovoljnog pada, tada je $d_k = -F_k + \beta_k^{FR}w_{k-1}$. Na osnovu Leme 5.6, Leme 5.7 i (5.34) važi

$$\begin{aligned} \|d_k\| &= \|-F_k + \beta_k^{FR}w_{k-1}\| \\ &\leq \|F_k\| + \frac{\|F_k\|^2}{\|F_{k-1}\|^2} \|w_{k-1}\| \\ &\leq \kappa + \frac{\kappa^2}{\varepsilon_0^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| \\ &= \kappa \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon_0^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| \right) \end{aligned} \quad (5.42)$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Prema graničnoj vrednosti (5.33) za svako $\varepsilon_1 > 0$ postoji k_0 takvo da $\alpha_{k-1}\|d_{k-1}\| < \varepsilon_1$ za svako $k > k_0$. Ako izaberemo $\varepsilon_1 = \varepsilon_0^2$ i $M_2 = \max\{\|d_0\|, \|d_1\|, \dots, \|d_{k_0}\|, \tilde{M}_2\}$, gde je $\tilde{M}_2 = \kappa(1 + \kappa)$, onda važi

$$\|d_k\| \leq M_2 \quad (5.43)$$

za svako $k \in \mathbb{N}$.

Iz (5.39), (5.41) i (5.43) sledi da je HuS pravac d_k ograničen, tj. $\|d_k\| \leq M$, za svako $k \in \mathbb{N}_0$, gde je $M = \max\{\kappa, M_1, M_2\}$.

2HuS pravac:

Slično kao kod dokaza ograničenosti HuS pravca, i sada posmatramo tri slučaja.

- Ako je $k = 0$ ili $\beta_k^{HuS} = 0$, onda je $d_k = -F_k$. Na osnovu Leme 5.6, $\|F_k\|$ je ograničena, tj. postoji konstanta $\kappa > 0$ takva da je $\|F_k\| \leq \kappa$. Odatve sledi

$$\|d_k\| = \|-F_k\| \leq \kappa. \quad (5.44)$$

- Ako je $\beta_k^{HuS} = \beta_k^{PRP}$, onda je $d_k = -F_k + \beta_k^{PRP} \left(I - \frac{F_k F_k^T}{F_k^T F_k} \right) w_{k-1}$.
Na osnovu pretpostavke **(P3)**, Leme 5.6, Leme 5.7 i (5.34) sledi

$$\begin{aligned}
\|d_k\| &= \left\| -F_k + \beta_k^{PRP} \left(I - \frac{F_k F_k^T}{F_k^T F_k} \right) w_{k-1} \right\| \\
&\leq \|F_k\| + \frac{|F_k^T y_{k-1}|}{\|F_{k-1}\|^2} \left\| \left(I - \frac{F_k F_k^T}{F_k^T F_k} \right) w_{k-1} \right\| \\
&\leq \|F_k\| + \frac{|F_k^T y_{k-1}|}{\|F_{k-1}\|^2} \|w_{k-1}\| \\
&\leq \|F_k\| + \frac{\|F_k^T\| \|y_{k-1}\|}{\|F_{k-1}\|^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| \\
&= \|F_k\| + \frac{\|F_k\| \|F_k - F_{k-1}\|}{\|F_{k-1}\|^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| \\
&\leq \kappa + \frac{\kappa L \|x_k - x_{k-1}\|}{\varepsilon_0^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| \\
&\leq \kappa + \frac{\kappa L \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\|}{\varepsilon_0^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| \\
&= \kappa + \frac{\kappa L}{\varepsilon_0^2} \alpha_{k-1}^2 \|d_{k-1}\|^2 \\
&= \kappa \left(1 + \frac{L}{\varepsilon_0^2} \alpha_{k-1}^2 \|d_{k-1}\|^2 \right) \tag{5.45}
\end{aligned}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Iz (5.33) sledi da za svako $\varepsilon_1 > 0$ postoji indeks k_0 takav da $\alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| < \varepsilon_1$ za svako $k > k_0$. Ako izaberemo $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ i $M_1 = \max\{\|d_0\|, \|d_1\|, \dots, \|d_{k_0}\|, \tilde{M}_1\}$, gde je $\tilde{M}_1 = \kappa(1 + L)$, onda sledi

$$\|d_k\| \leq M_1 \tag{5.46}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$.

- Ako je $\beta_k^{HuS} = \beta_k^{FR}$, tada je $d_k = -F_k + \beta_k^{FR} \left(I - \frac{F_k F_k^T}{F_k^T F_k} \right) w_{k-1}$. Iz

Leme 5.6, Leme 5.7 i relacije (5.34) sledi

$$\begin{aligned}
\|d_k\| &= \left\| -F_k + \beta_k^{FR} \left(I - \frac{F_k F_k^T}{F_k^T F_k} \right) w_{k-1} \right\| \\
&\leq \|F_k\| + \frac{\|F_k\|^2}{\|F_{k-1}\|^2} \left\| \left(I - \frac{F_k F_k^T}{F_k^T F_k} \right) w_{k-1} \right\| \\
&\leq \|F_k\| + \frac{\|F_k\|^2}{\|F_{k-1}\|^2} \|w_{k-1}\| \\
&\leq \kappa + \frac{\kappa^2}{\varepsilon_0^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| \\
&= \kappa \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon_0^2} \alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| \right)
\end{aligned} \tag{5.47}$$

za svaki indeks $k \in \mathbb{N}$. Budući da $\alpha_k \|d_k\| \rightarrow 0$ kada $k \rightarrow \infty$, za svako $\varepsilon_1 > 0$ postoji indeks k_0 takav da važi $\alpha_{k-1} \|d_{k-1}\| < \varepsilon_1$ za svako $k > k_0$. Birajući $\varepsilon_1 = \varepsilon_0^2$ i $M_2 = \max\{\|d_0\|, \|d_1\|, \dots, \|d_{k_0}\|, \tilde{M}_2\}$, gde je $\tilde{M}_2 = \kappa(1 + \kappa)$, sledi

$$\|d_k\| \leq M_2 \tag{5.48}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$.

Iz (5.44), (5.46) i (5.48), proizilazi da je 2HuS pravac pretraživanja d_k u Algoritmu 11 ograničen, tj. $\|d_k\| \leq M$ za svako $k \in \mathbb{N}_0$, gde je $M = \max\{\kappa, M_1, M_2\}$. □

Na osnovu Leme 5.2, Leme 5.3, Teoreme 5.1 i Teoreme 5.2 sledi da su svi pravci M3TFR1, M3TFR2, M3TFR3, HuS i 2HuS ograničeni i zadovoljavaju uslov dovoljnog pada (5.2). S obzirom na to, uvek postoji dovoljno mali korak α_k za koji važi (5.25), što znači da je linijsko pretraživanje (5.25) dobro definisano, pa je time i PCG Algoritam 11 dobro definisan. Naredna lema dokazuje se analogno kao u [3].

Lema 5.8. *Ako važe pretpostavke (P1) - (P3), onda je linijsko pretraživanje (5.25) u PCG Algoritmu 11 sa M3TFR1, M3TFR2, M3TFR3, HuS ili 2HuS pravcem dobro definisano.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da se linijsko pretraživanje u PCG Algoritmu 11 završava u konačno mnogo koraka sa dužinom koraka $\alpha_k > 0$. Pretpostavimo suprotno da postoji indeks \hat{k} za koji se uslov (5.25) nikad neće ispuniti. Posmatrajmo dužinu koraka $\alpha_{\hat{k}}^{(m)} = s\rho^m$. Za ovakvu dužinu koraka važi

$$-F(x_{\hat{k}} + \alpha_{\hat{k}}^{(m)} d_{\hat{k}})^T d_{\hat{k}} < \sigma \alpha_{\hat{k}}^{(m)} \|F(x_{\hat{k}} + \alpha_{\hat{k}}^{(m)} d_{\hat{k}})\| \|d_{\hat{k}}\|^2 \quad (5.49)$$

za svako $m \in \mathbb{N}_0$. Pošto svi pravci pretraživanja koji su navedeni u tvrđenju leme zadovoljavaju uslov dovoljnog pada (5.2), iz (5.49) i pretpostavke **(P3)** za svako $m \in \mathbb{N}_0$ sledi

$$\begin{aligned} c\|F(x_{\hat{k}})\|^2 &\leq -F(x_{\hat{k}})^T d_{\hat{k}} \\ &= \left(F(x_{\hat{k}} + \alpha_{\hat{k}}^{(m)} d_{\hat{k}}) - F(x_{\hat{k}}) - F(x_{\hat{k}} + \alpha_{\hat{k}}^{(m)} d_{\hat{k}}) \right)^T d_{\hat{k}} \\ &= \left(F(x_{\hat{k}} + \alpha_{\hat{k}}^{(m)} d_{\hat{k}}) - F(x_{\hat{k}}) \right)^T d_{\hat{k}} - F(x_{\hat{k}} + \alpha_{\hat{k}}^{(m)} d_{\hat{k}})^T d_{\hat{k}} \\ &< \|F(x_{\hat{k}} + \alpha_{\hat{k}}^{(m)} d_{\hat{k}}) - F(x_{\hat{k}})\| \|d_{\hat{k}}\| \\ &\quad + \sigma \alpha_{\hat{k}}^{(m)} \|F(x_{\hat{k}} + \alpha_{\hat{k}}^{(m)} d_{\hat{k}})\| \|d_{\hat{k}}\|^2 \\ &\leq L \alpha_{\hat{k}}^{(m)} \|d_{\hat{k}}\|^2 + \sigma \alpha_{\hat{k}}^{(m)} \|F(x_{\hat{k}} + \alpha_{\hat{k}}^{(m)} d_{\hat{k}})\| \|d_{\hat{k}}\|^2 \\ &= \left(L + \sigma \|F(x_{\hat{k}} + \alpha_{\hat{k}}^{(m)} d_{\hat{k}})\| \right) \alpha_{\hat{k}}^{(m)} \|d_{\hat{k}}\|^2. \end{aligned} \quad (5.50)$$

S druge strane, na osnovu pretpostavke **(P3)**, Teoreme 5.1, Teoreme 5.2 i Leme 5.6 važi

$$\begin{aligned} \|F(x_{\hat{k}} + \alpha_{\hat{k}}^{(m)} d_{\hat{k}})\| &= \|F(x_{\hat{k}} + \alpha_{\hat{k}}^{(m)} d_{\hat{k}}) \pm F(x_{\hat{k}})\| \\ &\leq \|F(x_{\hat{k}} + \alpha_{\hat{k}}^{(m)} d_{\hat{k}}) - F(x_{\hat{k}})\| + \|F(x_{\hat{k}})\| \\ &\leq L \alpha_{\hat{k}}^{(m)} \|d_{\hat{k}}\| + \kappa \\ &= L \rho^m s \|d_{\hat{k}}\| + \kappa \\ &\leq sLM + \kappa = \bar{\kappa}, \end{aligned} \quad (5.51)$$

gde je $\bar{\kappa} = sLM + \kappa$. Poslednja nejednakost u (5.51) važi jer je $\rho \in (0, 1)$. Kombinujući (5.50) i (5.51) i koristeći Teoremu 5.1 i Teoremu 5.2, dobija

se da za svako $m \in \mathbb{N}_0$ važi

$$\begin{aligned} \alpha_{\hat{k}}^{(m)} &> \frac{c\|F(x_{\hat{k}})\|^2}{\left(L + \sigma\|F(x_{\hat{k}} + \alpha_{\hat{k}}^{(m)}d_{\hat{k}})\|\right)\|d_{\hat{k}}\|^2} \\ &\geq \frac{c\varepsilon_0^2}{(L + \sigma\bar{\kappa})M^2} > 0, \end{aligned} \quad (5.52)$$

što je u kontradikciji sa činjenicom da $\alpha_{\hat{k}}^{(m)}$ teži nuli, jer se po pretpostavci uslov (5.25) nikad neće ispuniti za indeks \hat{k} . Dakle, ne postoji indeks \hat{k} za koji se uslov (5.25) nikad neće ispuniti. Stoga će procedura linijskog pretraživanja PCG Algoritma 11 u konačno mnogo koraka uvek odrediti dužinu koraka $\alpha_k > 0$ koja zadovoljava uslov (5.25). \square

Globalna konvergencija PCG Algoritma 11 sa pravcima M3TFR1, M3TFR2, M3TFR3, HuS ili 2HuS se dokazuje slično kao u [3].

Teorema 5.3. *Neka važe pretpostavke (P1) - (P3) i neka je niz $\{x_k\}$ generisan PCG Algoritmom 11 sa M3TFR1, M3TFR2, M3TFR3, HuS ili 2HuS pravcem. Tada je*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|F_k\| = 0. \quad (5.53)$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da ne važi (5.53). Tada postoji $\varepsilon_0 > 0$ tako da je $\|F_k\| \geq \varepsilon_0$ za svako $k \in \mathbb{N}_0$. Na osnovu Leme 5.2 i Leme 5.3 pravci M3TFR1, M3TFR2, M3TFR3, HuS i 2HuS zadovoljavaju uslov dovoljnog pada (5.2), za svako $k \in \mathbb{N}_0$, pa važi $c\|F_k\|^2 \leq -F_k^T d_k \leq \|F_k\|\|d_k\|$. Oдавde je $\|d_k\| \geq c\|F_k\| \geq c\varepsilon_0 > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}_0$, a na osnovu toga i (5.33) sledi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0. \quad (5.54)$$

Na osnovu koraka **K3** Algoritma 11, lako se uočava da za prethodno $\tilde{\alpha}_k > \alpha_k$, tj. za $\tilde{\alpha}_k = \rho^{-1}\alpha_k$ uslov (5.25) ne važi, tj. važi

$$-F(x_k + \tilde{\alpha}_k d_k)^T d_k < \sigma \tilde{\alpha}_k \|F(x_k + \tilde{\alpha}_k d_k)\| \|d_k\|^2. \quad (5.55)$$

Kako je na osnovu Leme 5.5 niz $\{x_k\}$ ograničen, on po Bolcano-Vajershtrasovoj teoremi ima tačku nagomilavanja x^* i postoji beskonačan skup indeksa K takav da važi $x_k \rightarrow x^*$ za $k \rightarrow \infty$, $k \in K$. Na osnovu Teoreme 5.1 i Teoreme 5.2 $\|d_k\|$ je ograničen za svako $k \in \mathbb{N}_0$, pa niz

$\{d_k\}$ takođe ima tačku nagomilavanja d^* , tj. postoji beskonačan skup indeksa $\bar{K} \subset K$ za koji važi da $d_k \rightarrow d^*$, kada $k \rightarrow \infty$, $k \in \bar{K}$.

Posmatrajući graničnu vrednost leve i desne strane u (5.55) kada $k \rightarrow \infty$, $k \in \bar{K}$, dobija se

$$\lim_{k \rightarrow \infty, k \in \bar{K}} (-F(x_k + \tilde{\alpha}_k d_k)^T d_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty, k \in \bar{K}} \sigma \tilde{\alpha}_k \|F(x_k + \tilde{\alpha}_k d_k)\| \|d_k\|^2.$$

Uzimajući u obzir da važi (5.54), sledi

$$-F(x^*)^T d^* \leq 0. \quad (5.56)$$

Međutim, na osnovu (5.2) za svako $k \in \mathbb{N}_0$ sledi

$$-F(x_k)^T d_k \geq c \|F(x_k)\|^2 \geq c \varepsilon_0^2 > 0,$$

pa uzimajući graničnu vrednost prethodne nejednakosti kada $k \rightarrow \infty$, $k \in \bar{K}$, dobija se

$$-F(x^*)^T d^* > 0,$$

što je u kontradikciji sa (5.56). Dakle, važi tvrdjenje teoreme. \square

Značajna posledica Teoreme 5.3 je da čitav niz iteracija generisan PCG Algoritmom 11 globalno konvergira ka rešenju sistema bez pretpostavke o regularnosti.

Teorema 5.4. *Neka važe pretpostavke (P1) - (P3) i neka je niz $\{x_k\}$ generisan PCG Algoritmom 11 sa M3TFR1, M3TFR2, M3TFR3, HuS ili 2HuS pravcem. Tada ceo niz $\{x_k\}$ globalno konvergira ka rešenju x^* sistema (5.1).*

Dokaz. Kako je prema Lemi 5.5 niz iteracija $\{x_k\}$ ograničen, a prema Teoremi 5.3 $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|F_k\| = 0$, iz neprekidnosti funkcije F sledi da niz $\{x_k\}$ ima tačku nagomilavanja x^* za koju važi $F(x^*) = 0$. Pošto na osnovu Leme 5.5 niz $\{\|x_k - x^*\|\}$ konvergira, s obzirom da je x^* tačka nagomilavanja niza $\{x_k\}$, sledi da $x_k \rightarrow x^*$, kada $k \rightarrow \infty$. Dakle, ceo niz iteracija $\{x_k\}$ globalno konvergira ka rešenju x^* sistema (5.1). \square

Dakle, prema Teoremi 5.4 postupci M3TFR1, M3TFR2, M3TFR3 HuS i 2HuS su globalno konvergentni.

6 Numerički rezultati

U ovoj glavi su predstavljeni numerički rezultati testiranja iterativnih postupaka za rešavanje nelinearnih monotonih sistema. Numerički eksperimenti su rađeni u programskom paketu Matlab R2015b na personalnom računaru sa 8 GB memorije i Intel Core i7 860 procesorom koji ima radni takt od 2.8 GHz.

Testiranje iterativnih postupaka je rađeno na devet sistema, pri čemu je svaki sistem posmatran u više dimenzija sa osam početnih iteracija. Isti sistemi sa različitim dimenzijama i različitim početnim iteracijama su tretirani kao različiti problemi. Projektivni postupci tipa konjugovanih gradijenata koji predstavljaju originalan deo disertacije poređeni su sa postupcima poznatim iz literature [1,3,10,46]. Pri upoređivanju numeričkih postupaka posmatran je broj iteracija, broj evaluacija vrednosti funkcije i procesorsko (CPU) vreme potrebno da se zadovolji neki od izlaznih kriterijuma. Globalna konvergencija postupaka testirana je na svim primerima sa osam različitih početnih aproksimacija rešenja.

6.1 Test primeri

U numeričkim eksperimentima korišćeni su relevantni test primeri iz radova [10,53,73,75,79].

Primer 1. [75]: Funkcija $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je definisana je sa

$$\begin{aligned}F_1 &= 2x_1 + \sin x_1 - 1 \\F_i &= -2x_{i-1} + 2x_i + \sin x_i - 1, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \\F_n &= 2x_n + \sin x_n - 1.\end{aligned}$$

Sistem je posmatran u tri različite dimenzije $n = 1000$, $n = 20000$ i $n = 50000$.

Primer 2. [79]: Funkcija $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je definisana sa

$$F_i = 2x_i - \sin x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Sistem je posmatran u tri različite dimenzije $n = 1000$, $n = 20000$ i $n = 50000$.

Primer 3. [79] : Funkcija $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je definisana sa

$$F_i = 2x_i - \sin |x_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ovako definisana funkcija F nije diferencijabilna u tački $x = 0$. Algoritmi su testirani na ovom sistemu sa dimenzijama $n = 1000$, $n = 20000$ i $n = 50000$.

Primer 4. [10]: Funkcija $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je linearna i definisana je sa $F = Ax + b$, pri čemu je matrica sistema simetrična i data je sa

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{5}{2} \end{bmatrix}_{n \times n},$$

a slobodan član je $b = -e^{n \times 1}$. I ovaj sistem je testiran u tri različite dimenzije $n = 1000$, $n = 20000$ i $n = 50000$.

Primer 5. [10]: Funkcija $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je linearna i definisana je sa $F = Ax + b$, pri čemu je matrica sistema data sa

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{bmatrix}_{n \times n},$$

a slobodan član je $b = [-1, -2, \dots, -n]^T$. Ovaj sistem je testiran u dve dimenzije $n = 1000$ i $n = 5000$.

Primer 6. [73]: Funkcija $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je definisana sa

$$F_i = x_i - \frac{1}{n}x_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

pri čemu je dimenzija sistema $n = 1000$.

Primer 7. [73]: Funkcija $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je definisana na sledeći način

$$\begin{aligned} F_1 &= x_1 - \exp\left(\cos\frac{x_1 + x_2}{n+1}\right) \\ F_i &= x_i - \exp\left(\cos\frac{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}}{n+1}\right), \quad i = 2, \dots, n-1 \\ F_n &= x_n - \exp\left(\cos\frac{x_{n-1} + x_n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Dati sistem testiran je u tri dimenzije $n = 1000$, $n = 20000$ i $n = 50000$.

Primer 8. [73]: Funkcija $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je definisana sa

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{3}x_1^3 + \frac{1}{2}x_2^2 \\ F_i &= -\frac{1}{2}x_i^2 + \frac{i}{3}x_i^3 + \frac{1}{2}x_{i+1}^2, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \\ F_n &= -\frac{1}{2}x_n^2 + \frac{n}{3}x_n^3. \end{aligned}$$

Tokom testiranja algoritama uzete su u obzir dimenzije $n = 1000$ i $n = 3000$.

Primer 9. [53]: Posmatrana je diskretizacija graničnog problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = g(x, y, u), & (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0, & (x, y) \in \partial\Omega, \end{cases}$$

gde je Δ Laplasov¹⁹ operator, $g(x, y, u) = -u^3 + 10$ i $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Diskretizacija se vrši primenom diferencnih količnika. Neka je $x_i = ih$, $y_j = jh$, $h = \frac{1}{r+1}$, $i, j = 0, 1, \dots, r+1$ i $u_{ij} = u(x_i, y_j)$. Tada se aproksimacija $\Delta u(x_i, y_j)$ vrši diferencnim količnikom na sledeći način

$$\Delta u(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{ij} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}),$$

gde $i = 1, 2, \dots, r$ i $j = 1, 2, \dots, r$. Diskretna forma graničnog problema se može zapisati u obliku monotonog sistema

$$F(x) \equiv Ax + h^2X - 10h^2e = 0,$$

¹⁹P.S. Laplace

gde je $x = [x_1, \dots, x_n]^T = [u_{11}, \dots, u_{1r}, u_{21}, \dots, u_{2r}, u_{31}, \dots, u_{rr}]^T$, $X = [x_1^3, \dots, x_n^3]^T$, $e = 1^{n \times 1}$, $n = r^2$ i

$$A = \begin{bmatrix} B & -I & & & & \\ -I & B & -I & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -I & \\ & & & -I & B & \end{bmatrix}_{n \times n},$$

gde je B matrica data sa

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix}_{r \times r}.$$

Ovaj sistem je posmatran sa $n = 20164$.

6.2 Metodologija upoređivanja algoritama

Tri nova postupka tipa FR i dva nova hibridna postupka tipa HuS, koji su predstavljani u disertaciji poređeni su sa projektivnim postupcima tipa PRP i DL iz radova [1,3,10,46]. Dakle, postupci: M3TFR1, M3TFR2, M3TFR3, HuS i 2HuS su poređeni sa PRP postupkom iz rada [10], tročlanim postupcima DFPB1 i DFPB2 iz [3], sa Li-Li postupkom prikazanim u [46] i DLPM postupkom iz rada [1].

Kao standardna metodologija za upoređivanje efikasnosti i robusnosti postupaka, korišćen je profil performansi predstavljen u [23].

Neka postupak s pripada skupu postupaka \mathcal{S} , a problem p pripada skupu test problema \mathcal{P} . Neka je m_p^s mera performanse postupka s za rešavanje problema p . Za meru performansi posmatran je broj iteracija, broj evaluacija vrednosti funkcije i procesorsko (CPU) vreme. Pri određivanju profila performansi svakog postupka, prvo je potrebno izračunati količnik performansi postupka s nad problemom p i performansi najboljeg postupka za rešavanje tog problema. Dakle, količnik

performansi se može zapisati u obliku

$$r_p^s = \begin{cases} \frac{m_p^s}{\min\{m_p^s : s \in \mathcal{S}\}} & , \text{ ako je postupak } s \text{ uspešno rešio problem } p, \\ r_M & , \text{ inače,} \end{cases}$$

gde je parametar r_M izabran tako da $r_M \geq r_p^s$ za svaki postupak $s \in \mathcal{S}$ i problem $p \in \mathcal{P}$. Pri izvođenju numeričkih eksperimenata, uzeto je $r_M = 1000$. Ukoliko posmatrani postupak s ima najbolje performanse na problemu p posmatrajući sve postupke iz \mathcal{S} , onda je $r_p^s = 1$. Verovatnoća da količnik performansi postupka s neće biti veći od faktora $\tau \in \mathbb{R}$ je data sa

$$\rho_s(\tau) = \frac{1}{n_p} \text{card}(\{p \in \mathcal{P} : r_p^s \leq \tau\}),$$

gde je n_p ukupan broj svih testiranih problema. Funkcija $\rho_s : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ naziva se kumulativna funkcija raspodele količnika performansi r_p^s i ona prikazuje performanse postupka s , tj. predstavlja profil performansi postupka s . Pri analizi postupka s , njegov profil performansi daje informacije o efikasnosti i o robusnosti postupka. Pod efikasnošću postupka podrazumeva se procenat problema koje je posmatrani postupak najbrže rešio (sa najmanjim brojem iteracija, najmanjim brojem evaluacija funkcije ili u najkraćem CPU vremenu). Najefikasniji postupak \bar{s} je onaj koji najveći procenat problema rešava najbrže, odnosno za koji važi

$$\rho_{\bar{s}}(1) = \max_{s \in \mathcal{S}} \rho_s(1).$$

Robusnost postupka se predstavlja faktorom $\bar{\tau} \in [1, r_M]$ za koji je $\rho_s(\bar{\tau}) = 1$, tj. za koji posmatrani postupak rešava sve probleme iz skupa test problema. Najrobusniji postupak \hat{s} je onaj, za koji važi

$$\bar{\tau}_{\hat{s}} = \min_{s \in \mathcal{S}} \{\bar{\tau}_s : \rho_s(\bar{\tau}_s) = 1\},$$

tj. onaj postupak čija kumulativna funkcija raspodele količnika performansi najbrže dostiže vrednost jedan.

U našem slučaju skup \mathcal{S} sadrži 10 postupaka, a skup \mathcal{P} sadrži 168 problema, jer kao što je rečeno isti sistemi sa različitim dimenzijama i različitim početnim iteracijama su tretirani kao različiti problemi.

6.3 Ulazne vrednosti algoritama i kriterijumi zaustavljanja

Numeričke karakteristike postupaka testirane su na primerima određenih dimenzija navedenim u odeljku 6.1, pri čemu je svaki test primer posmatran sa osam različitih početnih iteracija, definisanih na sledeći način:

$$\begin{aligned}x_1 &= 10e \\x_2 &= -10e \\x_3 &= e \\x_4 &= -e \\x_5 &= 0.1e \\x_6 &= [1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}]^T \\x_7 &= [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1]^T \\x_8 &= e - [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1]^T,\end{aligned}$$

gde broj n predstavlja dimenziju sistema.

U numeričkim eksperimentima korišćen je sledeći izlazni kriterijum

$$\|F(x_k)\| \leq \varepsilon, \quad \text{ili} \quad \|F(z_k)\| \leq \varepsilon,$$

gde je $\varepsilon = 10^{-4}$. Ukoliko je on zadovoljen tada postupak konvergira. Ako je broj iteracija u algoritmu prevelik, tj. kada je $k > k_{max}$, gde je $k_{max} = 500000$ maksimalan broj iteracija, tada se postupak prekida i smatra se da divergira ili sporo konvergira.

Osim početnih aproksimacija rešenja sistema (5.1), u PCG Algoritmu 11 potrebno je definisati i neke druge parametre. U koraku **K3** PCG Algoritma 11, tj. u proceduri linijskog pretraživanja u numeričkim eksperimentima uzeto je $\sigma = 0.3$ i $\rho = 0.7$. Za inicijalnu dužinu koraka s_k u k -toj iteraciji upotrebljena je aproksimacija za $|\frac{F(x_k)^T d_k}{d_k^T F'(x_k) d_k}|$, pri čemu se Jakobijan $F'(x_k)$ aproksimira konačnim razlikama i na taj način se dobija

$$s_k = \left| \frac{F(x_k)^T d_k}{((F(x_k + t d_k) - F(x_k))^T d_k) / t} \right|, \quad (6.1)$$

gde je $t = 10^{-8}$. Slična početna dužina koraka je korišćena u [3] i [46] a ideja potiče iz [70].

Za parametar c koji se javlja u formuli (5.5) i (5.22), tj. koji se koristi u PRP postupku, kao i u HuS postupku, uzeto je $c = 10^{-8}$.

Pri računanju pravca pretraživanja (5.23) u 2HuS postupku korišćen je ekvivalentan oblik

$$d_k = \begin{cases} -F_k & , \text{ ako je } k = 0, \\ -F_k + \beta_k^{HuS} \left(w_{k-1} - \frac{F_k^T w_{k-1}}{F_k^T F_k} F_k \right) & , \text{ ako je } k > 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

jer ovaj način izračunavanja pravca pretraživanja zahteva manje računarske memorije, pošto nije potrebno čuvati matricu $F_k F_k^T$ u memoriji računara.

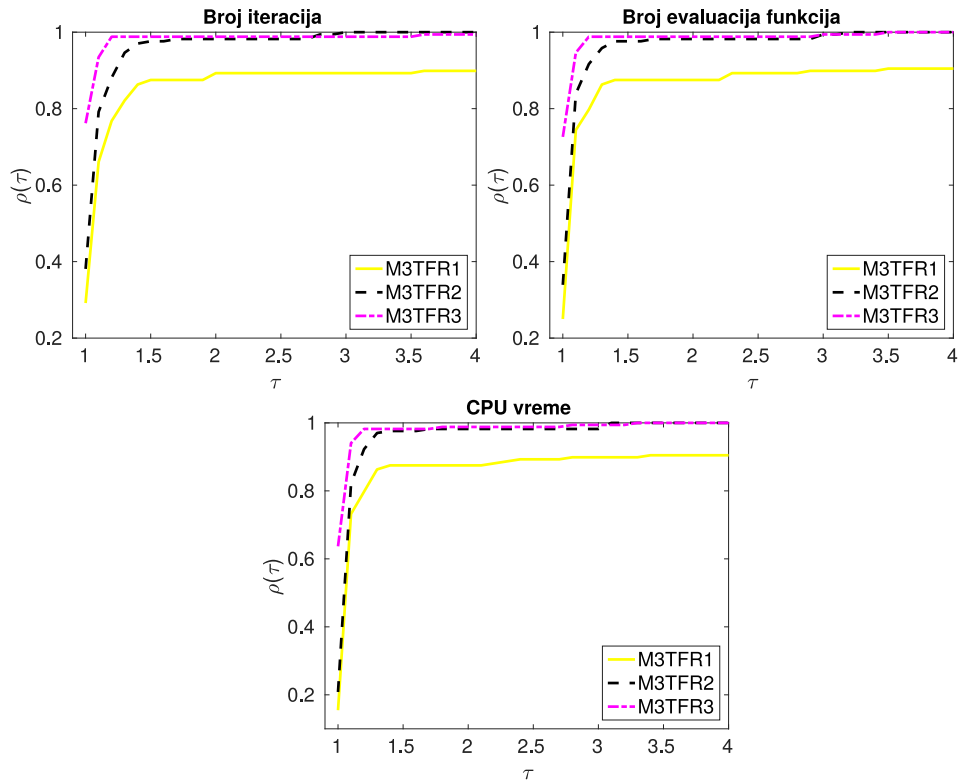
U DLPM postupku, pri izračunavanju β_k^{DL} u (5.11), uzeto je $p = 0.8$ i $q = -0.1$. U proceduri linijskog pretraživanja uzete su iste vrednosti parametara i inicijalna dužina koraka kao u PCG Algoritmu 11.

6.4 Analiza numeričkih rezultata

Kao što je pomenuto, za poređenje numeričkih karakteristika postupaka posmatrani su profili performansi za broj iteracija, broj evaluacija funkcije i CPU vreme, a detaljan pregled rezultata u vidu tabela dat je u dodatku disertacije. Pri analizi numeričkih rezultata koji se odnose na CPU vreme, korišćeno je prosečno vreme izmereno tokom deset ponavljanja numeričkog eksperimenta.

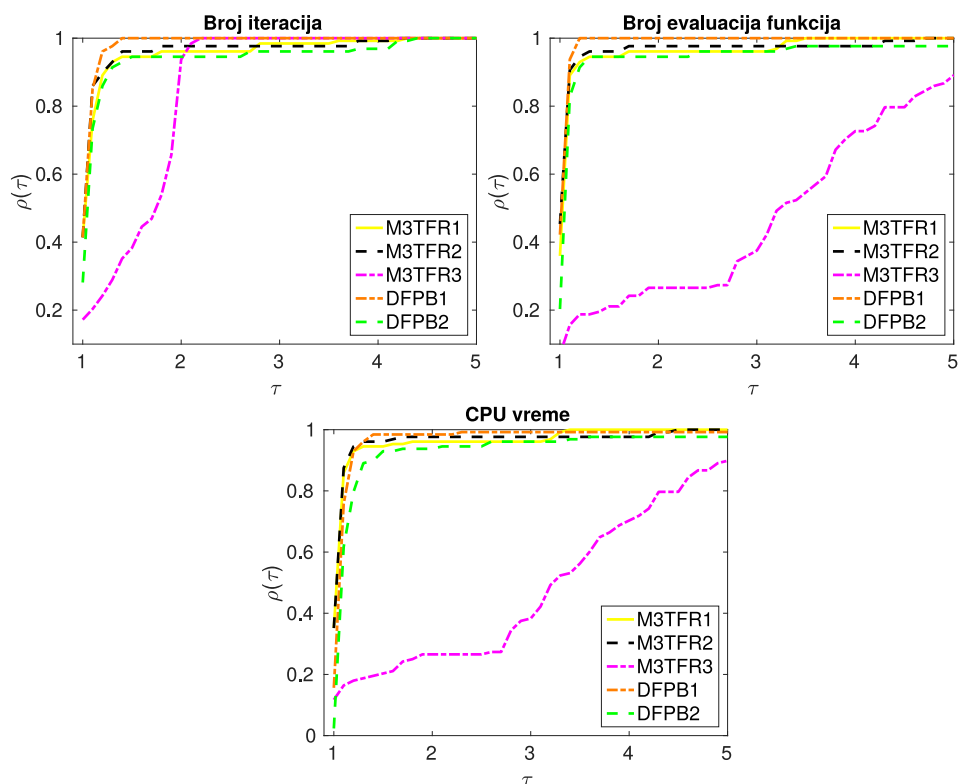
Prvo će biti međusobno poređeni postupci tipa FR: M3TFR1, M3TFR2 i M3TFR3. Profili performansi ovih postupaka prikazani su na Slici 6.1 sa koje se vidi da je M3TFR3 postupak najefikasniji u sva tri slučaja. Naime, on je rešio 78% problema sa najmanjim brojem iteracija, 75% problema sa najmanjim brojem evaluacija funkcija i 64% problema u najkraćem vremenu. Osim toga, u sva tri slučaja uočava se velika i slična robusnost postupaka M3TFR2 i M3TFR3.

Treba naglasiti da ako su se postupci zaustavili sa istim brojem iteracija, ili istim brojem evaluacija funkcija ili za isto vreme, onda su svi oni pobednici.



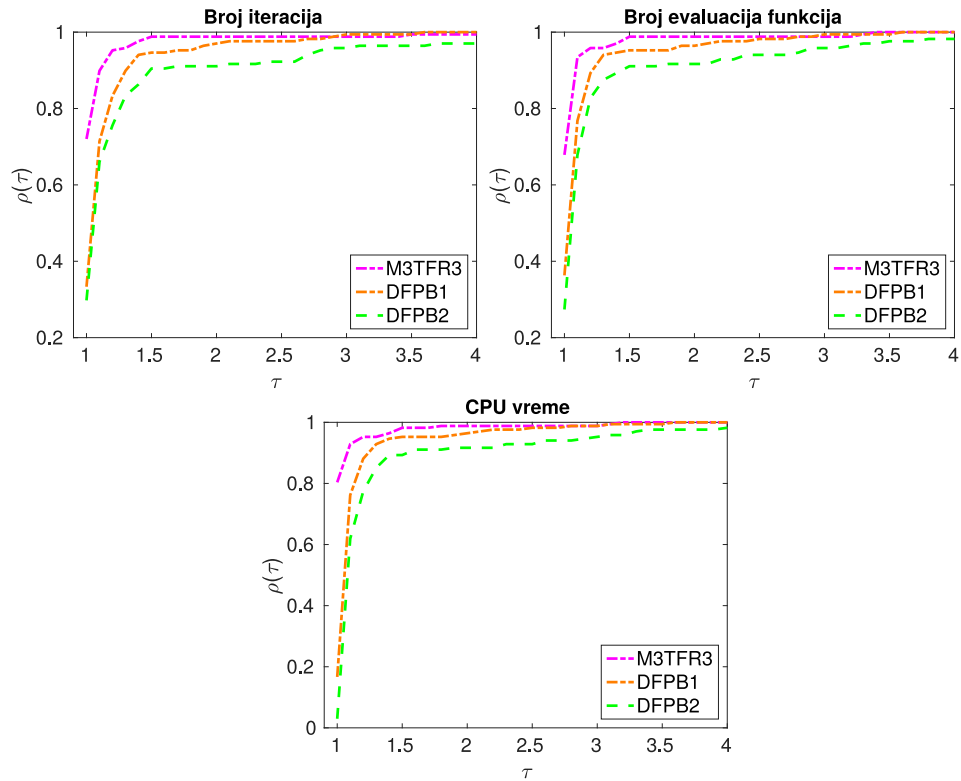
Slika 6.1: Profili performansi postupaka: M3TFR1, MRTFR2 i M3TFR3

Novi postupci M3TFR1, M3TFR2 i M3TFR3, koji koriste tročlane pravce pretaživanja tipa FR, poređeni su sa DFPB1 i DFPB2 postupcima koji su izloženi u [3] i koji koriste modifikovane tročlane pravce pretaživanja tipa PRP. Na Slici 6.2 se vidi da je M3TFR2 postupak najefikasniji u sva tri slučaja. Naime, on rešava oko 40% svih problema sa najmanjim brojem iteracija, 45% problema sa najmanjim brojem evaluacija funkcija i 38% svih problema u najkraćem vremenu. Osim toga, uočava se da je M3TFR3 postupak najrobusniji kada je u pitanju broj iteracija, M3TFR2 najrobusniji ako je posmatra CPU vreme, a u slučaju broja evaluacija funkcija najrobusniji je DFPB1, a odmah nakon njega sledi M3TFR2.



Slika 6.2: Profili performansi postupaka: M3TFR1, M3TFR2, M3TFR3, DFPB1 i DFPB2

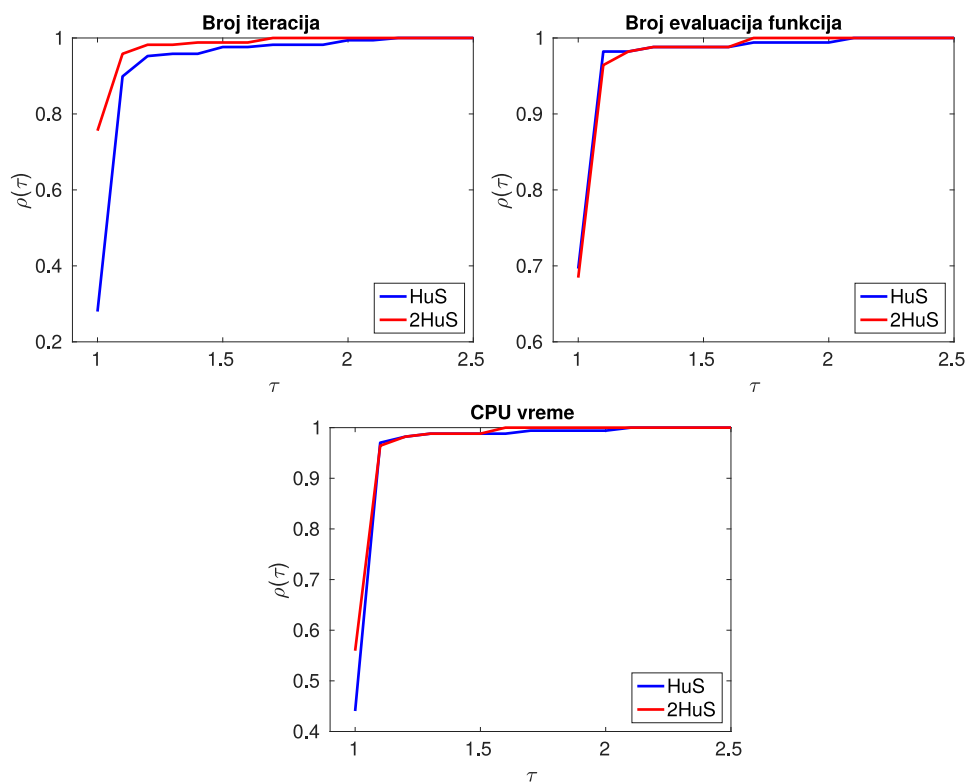
Pošto M3TFR3 postupak ima veoma dobre karakteristike među posmatranim postupcima FR tipa, sada ćemo zbog preglednosti porediti ovaj postupak sa DFPB1 i DFPB2 postupcima. Na Slici 6.3 se vidi da je M3TFR3 postupak najefikasniji i najrobusniji bilo da je u pitanju broj iteracija, ili broj evaluacija funkcija ili CPU vreme. M3TFR3 postupak rešava oko 70% problema sa najmanjim brojem iteracija i najmanjim brojem evaluacija funkcija, a 80% problema u najkraćem vremenu.



Slika 6.3: Profili performansi postupaka: M3TFR3, DFPB1 i DFPB2

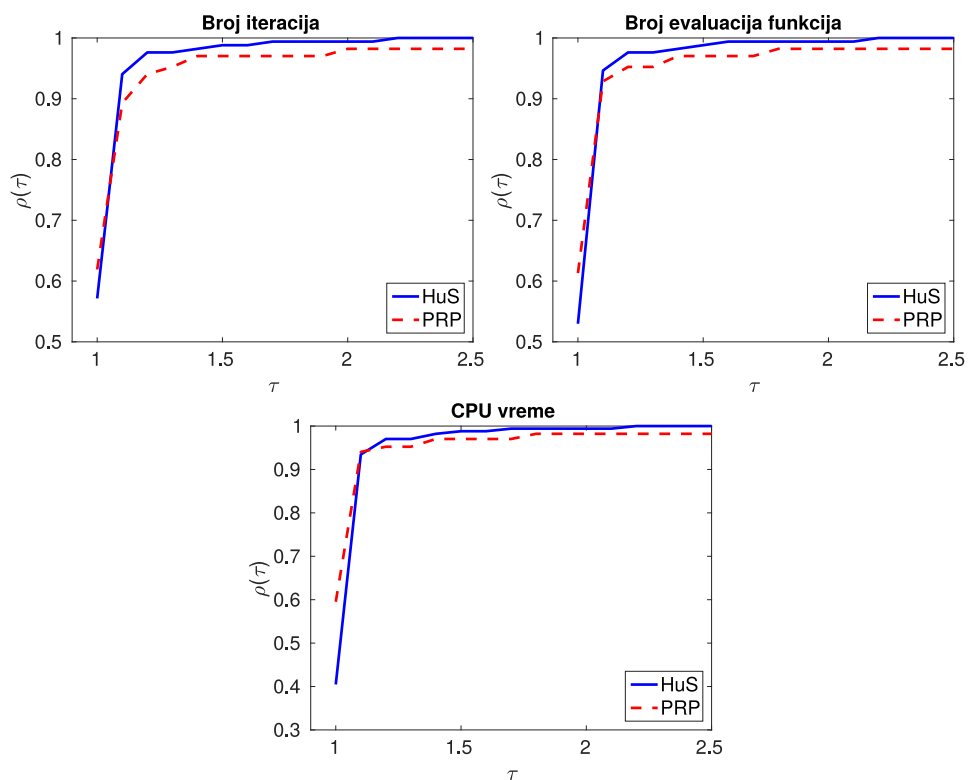
Pored postupaka M3TFR1, M3TFR2 i M3TFR3, originalni doprinos disertacije čine i postupci HuS i 2HuS. Prvo poredimo ova dva postupka međusobno, budući da koriste isti CG parametar. Na Slici 6.4 prikazani su profili performansi ovih postupaka, pri čemu se zaključuje da je 2HuS postupak efikasniji od HuS postupka kada je u pitanju broj iteracija i CPU vreme, dok oba postupka imaju sličnu efikasnost kada je u pitanju broj evaluacija funkcije. 2HuS postupak 75% test problema rešava sa najmanjim brojem iteracija, dok za najkraće vreme rešava oko 56% svih problema. Osim toga, oba postupka su izuzetno robusna, s tim da je 2HuS postupak za nijansu robusniji u sva tri slučaja.

Pošto pravac dat sa (5.21) u opštem slučaju ne zadovoljava uslov dovoljnog pada (5.2), u HuS postupku se koristi pravac (5.22). Interesantno je napomenuti da se u test primerima ni u jednoj iteraciji nije desilo da pravac (5.21) ne zadovoljava uslov (5.2).



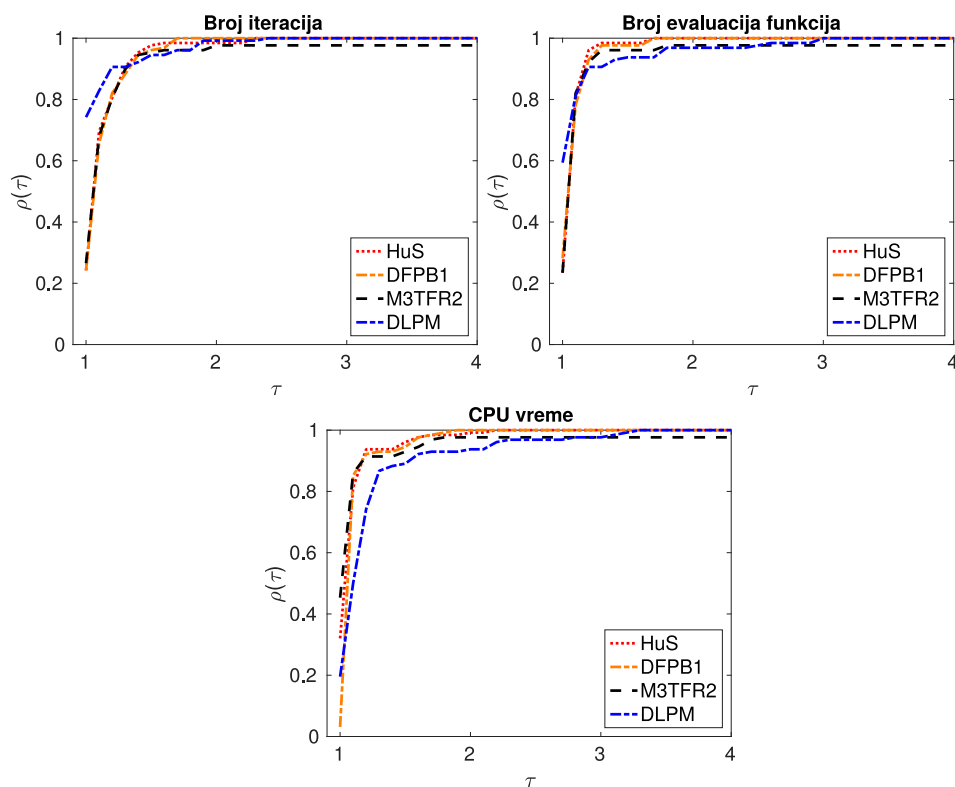
Slika 6.4: Profili performansi postupaka: HuS i 2HuS

Sada će biti upoređivan HuS postupak sa PRP postupkom iz rada [10]. Profili performansi ovih postupaka su prikazani na Slici 6.5 sa koje se vidi da je HuS postupak robusniji od PRP postupka u sva tri slučaja bilo da je u pitanju broj iteracija, broj evaluacija funkcija ili CPU vreme. Naime, grafik kumulativne funkcije raspodele količnika performansi HuS postupka brže dostiže vrednost jedan od PRP postupka. Slika 6.5 ukazuje na činjenicu da oba postupka imaju sličnu efikasnost kada je u pitanju broj iteracija, dok je PRP postupak efikasniji u preostala dva slučaja.



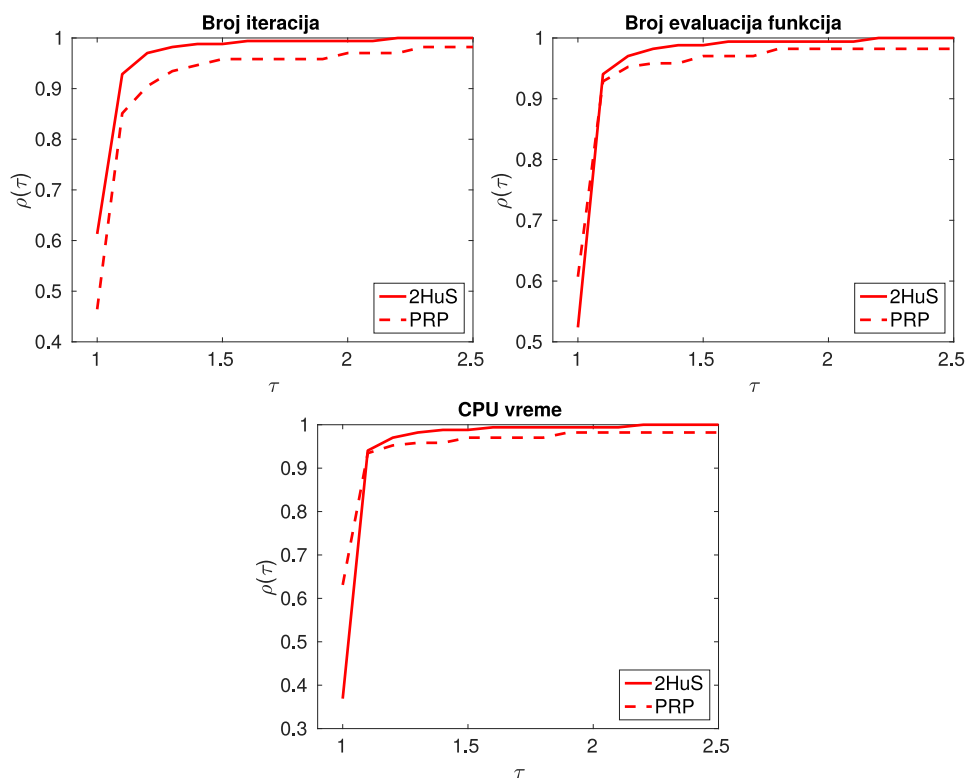
Slika 6.5: Profili performansi postupaka: HuS i PRP

HuS postupak je upoređivan sa DLPM postupkom iz rada [1] i sa tročlanim postupcima: DFPB1 postupkom iz rada [3] i M3TFR2 postupkom. Profili performansi ovih postupaka prikazani su na Slici 6.6. Uočava se da je HuS postupak najrobustniji u svim slučajevima. DLPM je najefikasniji kad je u pitanju broj iteracija i broj evaluaciju funkcija, dok je M3TFR2 najefikasniji kad je u pitanju CPU vreme, pri čemu odmah za njim sledi HuS postupak.



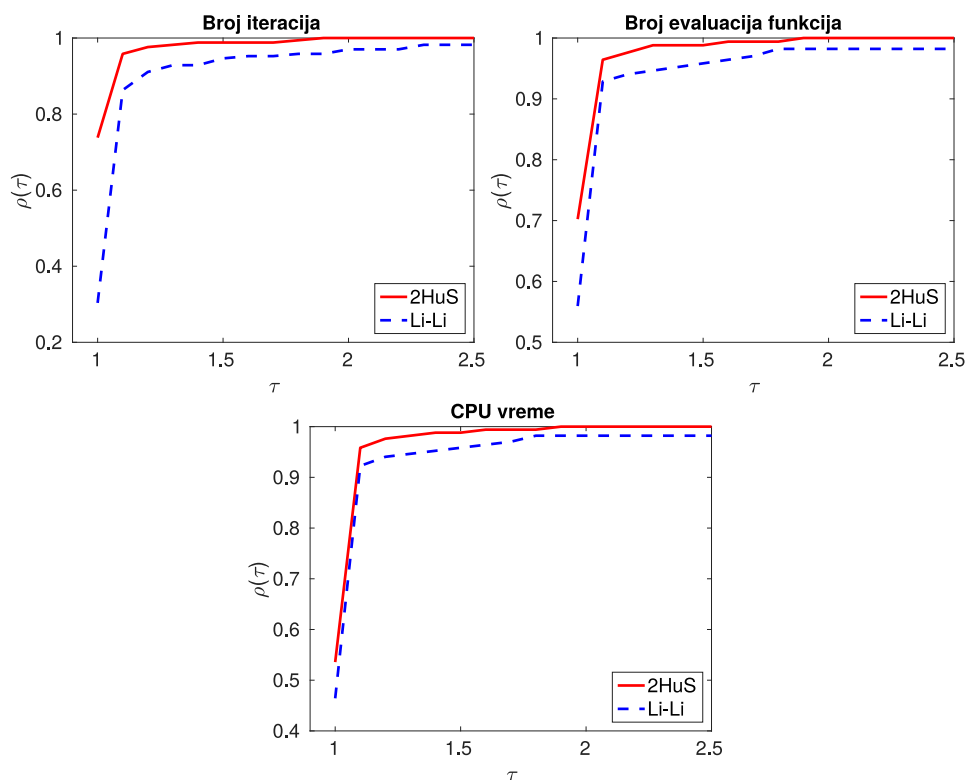
Slika 6.6: Profili performansi postupaka: HuS, DFPB1, M3TFR2 i DLPM

Profili performansi 2HuS i PRP postupaka dati su na Slici 6.7, na kojoj se vidi da je 2HuS postupak efikasniji ako se posmatra broj iteracija, jer 62% problema rešava sa manjim brojem iteracija, dok je u ostalim slučajevima PRP postupak efikasniji. Osim toga, uočava se da je 2HuS postupak robusniji od PRP postupka uzimajući u obzir broj iteracija, broj evaluacija funkcija i CPU vreme.



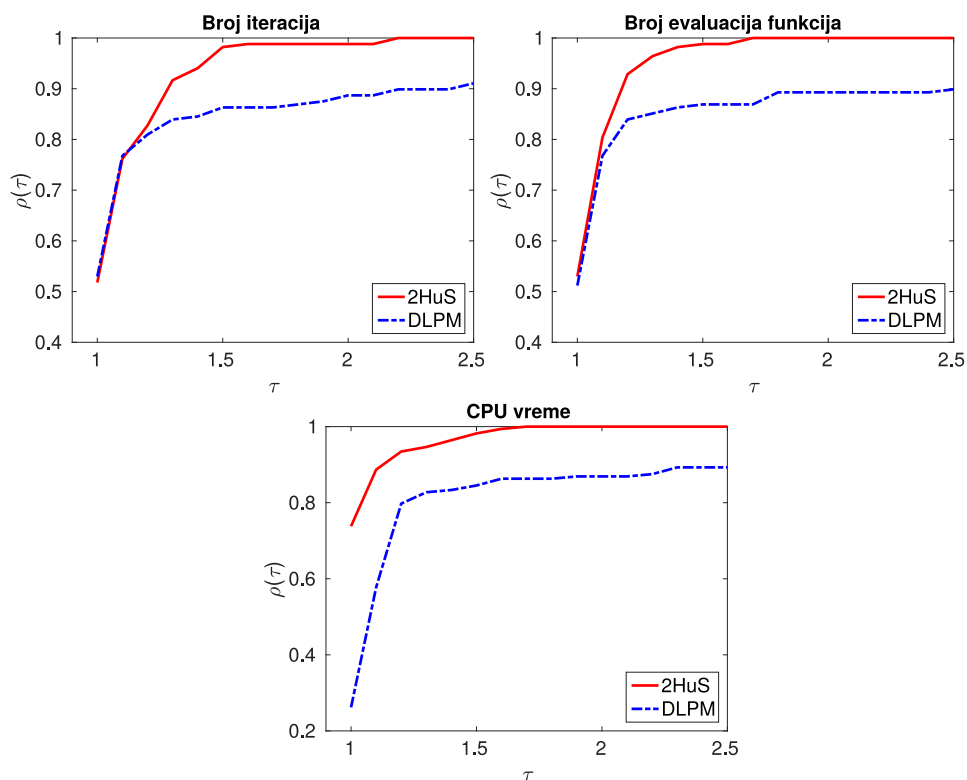
Slika 6.7: Profili performansi postupaka: 2HuS i PRP

S obzirom da 2HuS i Li-Li postupak koriste dvočlane pravce pret-raživanja sličnog oblika, ova dva postupka su upoređivana na Slici 6.8 sa koje se vidi da je 2HuS postupak i efikasniji i robusniji od Li-Li postupka u sva tri slučaja. Naime, uočava se da kod 75% svih test problema 2HuS postupak daje dovoljno tačno rešenje u manje iteracija, dok 70% test problema rešava sa manjim brojem evaluacija funkcija, a 53% problema sa kraćim CPU vremenom.



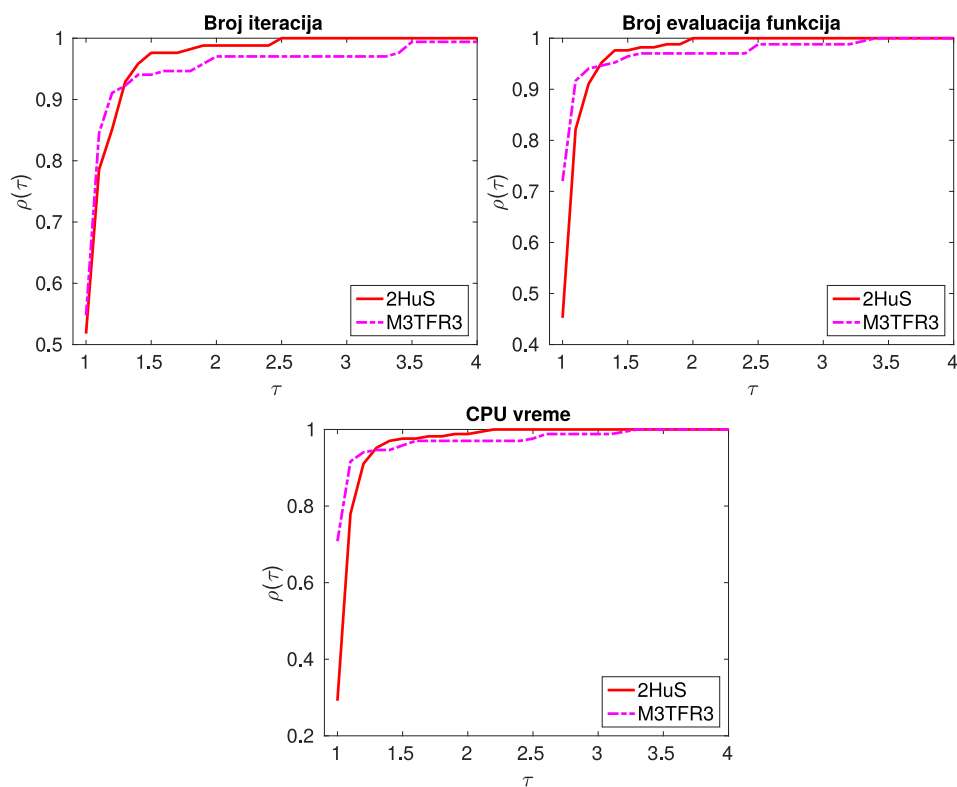
Slika 6.8: Profili performansi postupaka: 2HuS i Li-Li

Efikasnost i robusnost 2HuS postupka poređena je sa DLPM postupkom iz rada [1]. Profili performansi ovih postupaka prikazani su na Slici 6.9. Ako za meru performansi posmatramo broj potrebnih iteracija za konvergenciju postupka i broj evaluacija funkcija, na Slici 6.9 se vidi da oba postupka imaju sličnu efikasnost. Međutim, ako nam je bitno CPU vreme potrebno za rešavanje test problema sa zadovoljavajućom tačnošću, onda je 2HuS postupak mnogo efikasniji. Naime, 2HuS postupak oko 75% svih test problema rešava brže od DLPM postupka. Na Slici 6.9 se takođe vidi da je 2HuS postupak znatno robusniji od DLPM algoritma, bilo da je u pitanju broj iteracija ili broj evaluacija funkcija ili CPU vreme.



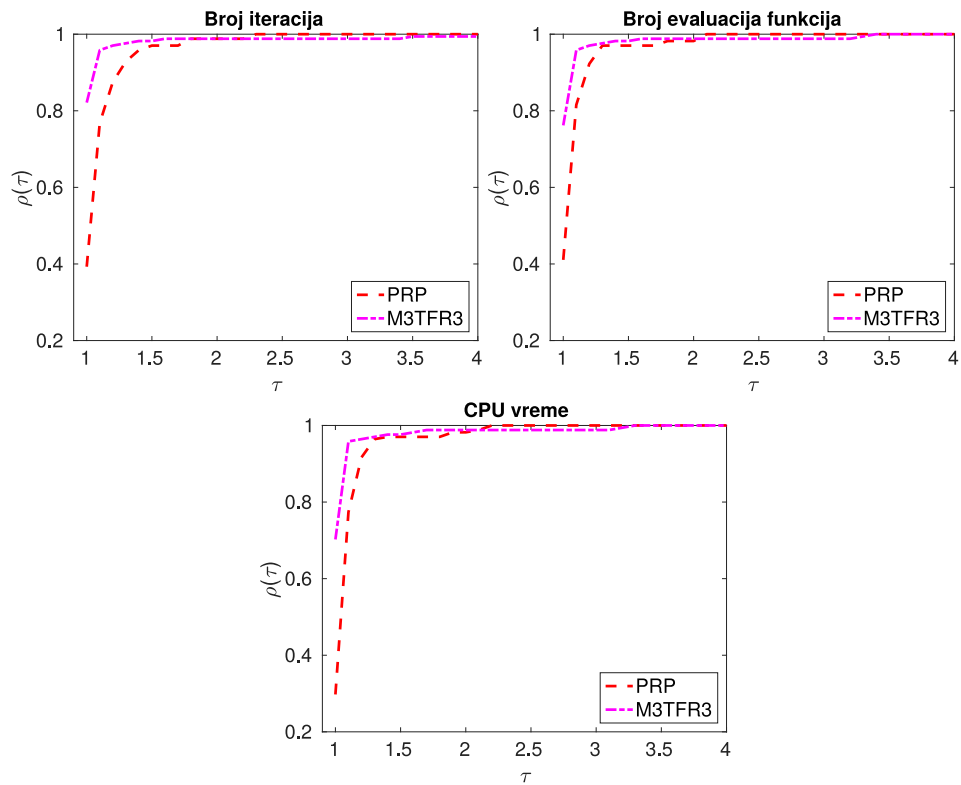
Slika 6.9: Profili performansi postupaka: 2HuS i DLPM

Na osnovu prethodne analize efikasnosti i robusnosti novih postupaka zapaža se da među postupcima tipa FR veoma dobre karakteristike ima M3TFR3 postupak, dok se 2HuS postupak pokazao kao bolji kad su u pitanju hibridni postupci tipa HuS. To nas je navelo da poređimo i ova dva postupka. Posmatrajući Sliku 6.10 na kojoj su prikazani profili performansi ovih postupaka, uočava se da je M3TFR3 postupak efikasniji od 2HuS postupka u sva tri slučaja. Naime, M3TFR3 postupak rešava oko 71% test problema sa manjim brojem evaluacija funkcija i za kraće vreme, a 55% problema sa manjim brojem iteracija. Sa Slike 6.10 se takođe vidi da je 2HuS postupak robusniji od M3TFR3 postupka u svim slučajevima.



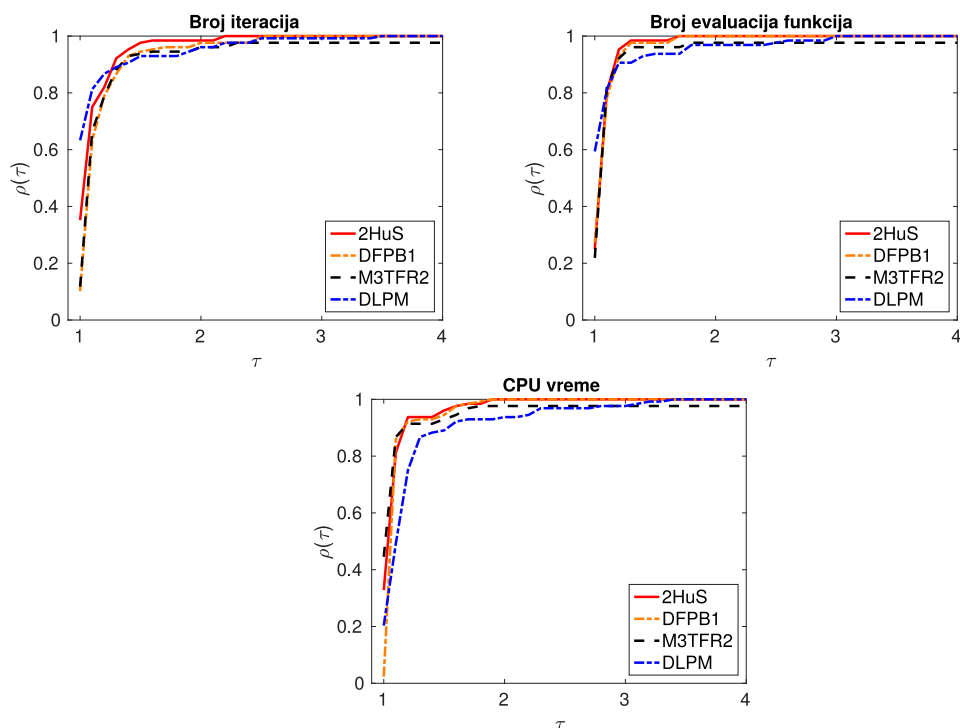
Slika 6.10: Profili performansi postupaka: M3TFR3 i 2HuS

Profili performansi M3TFR3 i PRP postupka predstavljeni su na Slici 6.11, na kojoj se zapaža da je M3TFR3 postupak efikasniji od PRP postupka u svim slučajevima. Naime, M3TFR3 postupak rešava 83% problema sa manjim brojem iteracija, 78% problema sa manjim brojem evaluacija funkcija i 70% problema brže od PRP postupka. Osim toga, uočava se slična robusnost oba postupka u sva tri slučaja.



Slika 6.11: Profili performansi postupaka: M3TFR3 i PRP

Radi potpunije analize performanse 2HuS postupka, on će biti upoređen sa DFPB1, M3TFR2 i DLPM postupkom. Slika 6.12, koja prikazuje profile performansi navedenih postupaka, ukazuje na činjenicu da je 2HuS postupak najrobusniji u svim slučajevima. DLPM postupak je najefikasniji kada je u pitanju broj iteracija i broj evaluacija funkcija, a odmah za njim sledi 2HuS postupak, dok je M3TFR2 postupak najefikasniji kad je u pitanju CPU vreme, pri čemu ga prati 2HuS postupak.



Slika 6.12: Profili performansi postupaka: 2HuS, DFPB1, M3TFR2 i DLPM

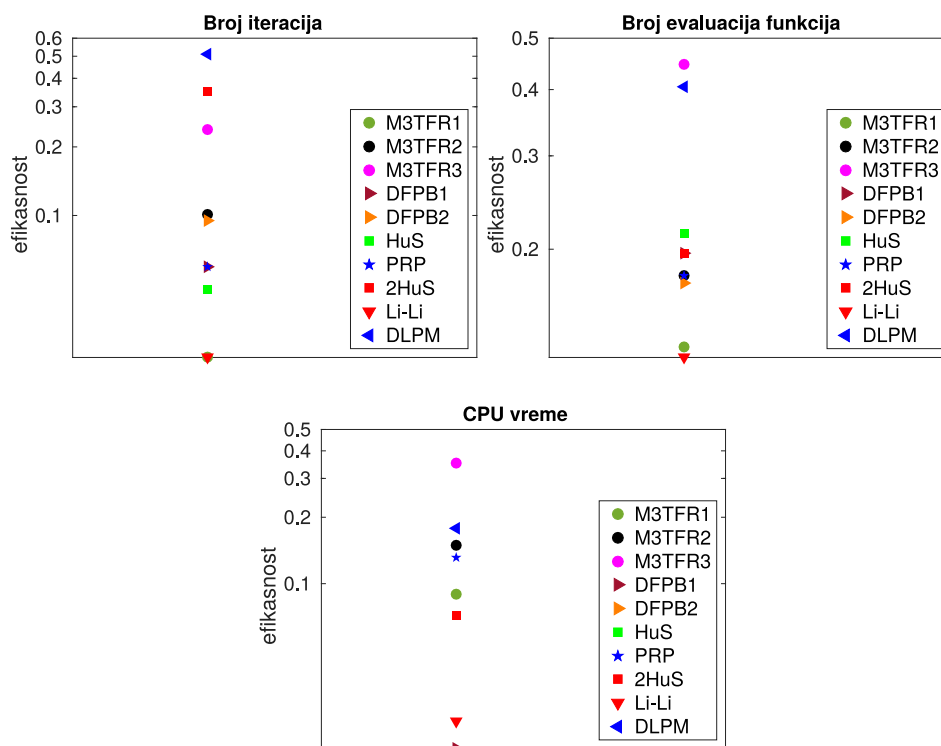
Na kraju će biti prikazano poređenje svih postupaka posmatranih u disertaciji, u cilju sticanja potpunije slike o njihovim performansama.

Slika 6.13 prikazuje efikasnost, tj. verovatnoće pobede pojedinačnih postupaka, koje su jednake vrednosti funkcije $\rho_s(\tau)$, za $\tau = 1$.

Posmatrajući broj iteracija, sa Slike 6.13 se vidi da je DLPM postupak 50% svih problema rešio sa najmanjim brojem iteracija. Odmah za njim sledi 2HuS postupak koji je sa najmanjim brojem iteracija rešio 35% svih problema, dok je na trećem mestu po efikasnosti M3TFR3 postupak koji je 22% svih problema rešio sa najmanjim brojem iteracija.

Ako se za meru performanse posmatra broj evaluacija vrednosti funkcije, onda je M3TFR3 postupak najefikasniji. Naime, ovaj postupak je 45% svih problema rešio sa najmanjim brojem evaluacija vrednosti funkcije. Sledeći po efikasnosti je DLPM postupak, dok su HuS i 2HuS postupak na trećem i četvrtom mestu, respektivno.

Posmatrajući CPU vreme, na Slici 6.13 se uočava da je najbolji M3TFR3



Slika 6.13: Efikasnost svih postupaka

postupak, koji je 35% svih problema rešio najbrže. Za njim sledi DLPM postupak, dok je na trećem mestu M3TFR2 postupak.

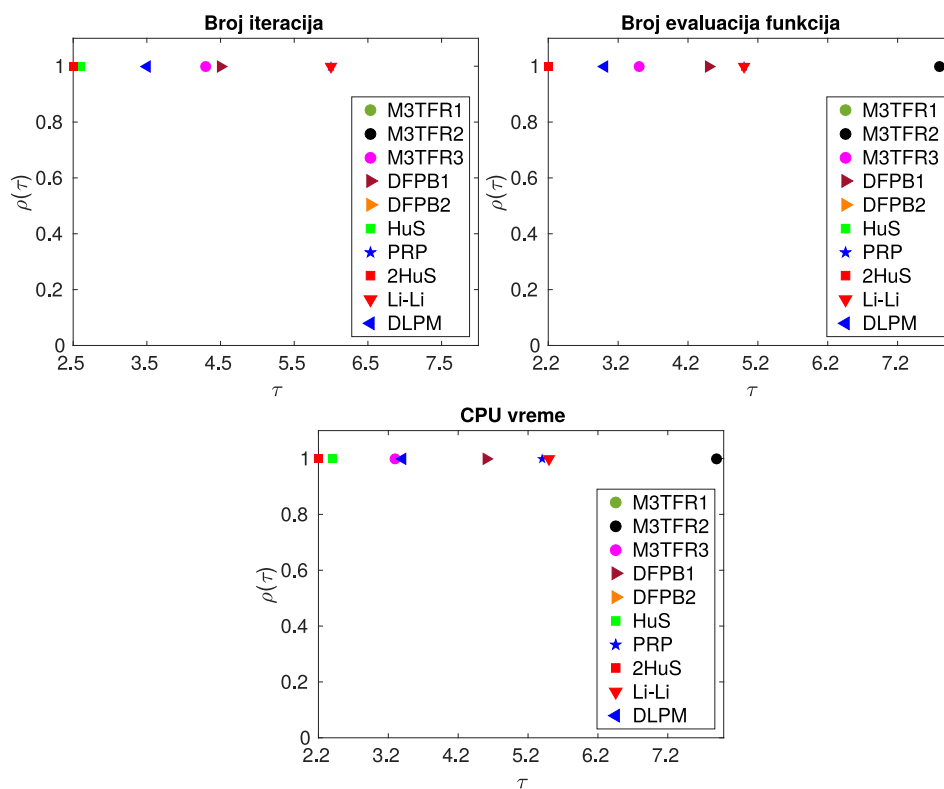
Robusnost svih posmatranih postupaka analizirana je na Slici 6.14, na kojoj su prikazane vrednosti τ za koje profil performansi svakog postupka dostiže vrednost 1. Najrobustniji je onaj postupak čija funkcija $\rho(\tau)$ dostiže vrednost 1 za najmanje τ .

Posmatrajući broj iteracija, sa Slike 6.14 se vidi da je 2HuS postupak najrobustniji. Drugi po robusnosti je HuS postupak, a za njim slede postupci DLPM i M3TFR3.

Kada je u pitanju broj evaluacija vrednosti funkcije, najrobustniji postupci su 2HuS i HuS, a za njima ponovo slede DLPM i M3TFR3 respektivno.

Ako se pak za meru performansi posmatra CPU vreme, sa Slike 6.14 se uočava da je opet 2HuS postupak najrobustniji, dok su postupci HuS i M3TFR3 drugi i treći po robusnosti.

Analiza efikasnosti i robusnosti svih projektivnih postupaka tipa



Slika 6.14: Robusnost svih postupaka

konjugovanih gradijenata predstavljenih u disertaciji potvrđuje da novi postupci imaju dobre performanse i da su uporedivi sa postojećim postupcima poznatim iz literature. Uočava se izuzetna robusnost novih hibridnih postupaka tipa HuS, posebno 2HuS postupka, kao i velika efikasnost M3TFR3 postupka.

7 Zaključak

U disertaciji su posmatrani projektni postupci tipa konjugovanih gradijenata (PCG) za rešavanje nelinearnih monotonih sistema velikih dimenzija. Ovi postupci predstavljaju kombinaciju projektnih metoda i pravca pretraživanja tipa konjugovanih gradijenata, sa ciljem da se iskoriste njihove dobre osobine. Naime, zbog monotonosti sistema projektna metoda omogućava jednostavnu globalizaciju koja je zasnovana na linijskom pretraživanju koje ne koristi funkciju cilja i izvode. S druge strane, pravci tipa konjugovanih gradijenata koriste malo računarske memorije, jednostavni su za implementaciju i takođe ne zahtevaju računanje izvoda funkcije kada se primenjuju na nelinearne sisteme. Ove osobine postupaka čine ih pogodnim za rešavanje monotonih sistema velikih dimenzija. Osim toga, ovi postupci su bazirani samo na izračunavanju vrednosti funkcije sistema, pa pošto ne koriste izvode prikladni su i za rešavanje neglatkih sistema. Pošto linijsko pretraživanje ne koristi funkciju cilja, globalna konvergencija se dokazuje bez pretpostavke o regularnosti, pa se iz tog razloga ovi postupci mogu koristiti i za rešavanje sistema sa singularnim rešenjima.

U originalnom delu disertacije predložena su tri nova tročlana pravca pretraživanja tipa FR i dva hibridna pravca tipa HuS. Svi pravci su konstruisani tako da zadovoljavaju uslov dovoljnog pada. Pokazana je ograničenost svih ovih pravaca. Formulisan je PCG algoritam sa navedenim novim pravcima pretraživanja i dokazana je globalna konvergencija pod pretpostavkama da postoji rešenje sistema i da je funkcija F Lipšic neprekidna i monotona. Značajna osobina ovog algoritma je da pod navedenim pretpostavkama ceo niz iteracija globalno konvergira ka rešenju sistema bez pretpostavki o regularnosti i diferencijabilnosti.

Numeričke karakteristike novih postupaka M3TFR1, M3TFR2, M3TFR3, HuS i 2HuS upoređene su sa poznatim projektnim postupcima tipa konjugovanih gradijenata koji su predstavljeni u radovima [1,3,10,

46]. Svi postupci su testirani na relevantnim primerima iz literature [10,53,73,75,79] sa različitim dimenzijama i svaki sa po osam različitih početnih iteracija. Za upoređivanje efikasnosti i robusnosti postupaka korišćen je profil performansi.

Numerički rezultati ukazuju na činjenicu da se novi postupci uspešno mogu primeniti za rešavanje monotonih sistema velikih dimenzija, da su robusni i efikasni i uporedivi sa postojećim postupcima koji se koriste u tu svrhu. Novi postupci imaju dobre računarske performanse, pri čemu posebno treba istaći robusnost 2HuS postupka i efikasnost M3TFR3 postupka. Osim što su prikladni za rešavanje monotonih sistema velikih dimenzija, oni se mogu upotrebiti i za rešavanje neglatkih sistema jer ne koriste izvode i ne zahtevaju diferencijabilnost funkcije.

Osim predstavljenih pet pravaca pretraživanja, u okviru istraživanja koje je odrađeno u cilju izrade ove disertacije, formulisano je i testirano još nekoliko novih pravaca tipa konjugovanih gradijenata. Međutim, PCG algoritam sa nekim od njih nije pokazao dovoljno dobre numeričke performanse, a sa pojedinim teorijske rezultate, pa iz tog razloga ti pravci nisu izloženi u disertaciji.

Pored postojećih metoda koje pripadaju ovoj klasi postupaka koji kombinuju projektnu metodu i pravce pretraživanja tipa konjugovanih gradijenata i dalje postoji veliki prostor za istraživanje i kreiranje novih postupaka sa ciljem da budu jeftiniji, efikasniji i robusniji od postojećih.

8 Dodatak

Detaljan prikaz numeričkih rezultata u vidu tabela je predstavljen u ovom odeljku. Svaka tabela sadrži informaciju o konvergenciji, broju iteracija, broju evaluacija funkcija i CPU vremenu koji su potrebni za postizanje dovoljno tačne aproksimacije rešenja posmatranog problema. Konvergencija postupaka je u tabelama označena sa +, dok se divergencija ili spora konvergencija označava sa –.

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	5720	2430	1838	1891	1853	1853	1841	1839
	br. eval	24673	13812	7265	7577	7359	7371	7300	7289
	cpu	2.49	1.33	0.69	0.71	0.70	0.70	0.69	0.69
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	5683	2145	1818	1834	1821	1847	1823	1805
	br. eval	24632	12636	7205	7405	7267	7350	7246	7185
	cpu	2.46	1.20	0.67	0.68	0.68	0.69	0.67	0.66
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	5719	2377	1745	1763	1750	1755	1752	1746
	br. eval	24676	13631	6984	7192	7050	7076	7032	7008
	cpu	2.47	1.32	0.66	0.68	0.68	0.68	0.67	0.66
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	5528	2118	1880	1924	1871	1877	1894	1868
	br. eval	24899	11435	7390	7676	7416	7441	7459	7374
	cpu	2.60	1.14	0.72	0.75	0.73	0.74	0.73	0.72
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	5686	2223	1855	1873	1887	1851	1866	1877
	br. eval	24655	12867	7316	7522	7464	7365	7375	7403
	cpu	2.62	1.31	0.75	0.77	0.77	0.75	0.75	0.75
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	5523	2137	1909	1921	1906	1925	1915	1874
	br. eval	24886	11491	7477	7666	7520	7584	7522	7392
	cpu	2.66	1.19	0.77	0.79	0.79	0.78	0.77	0.76
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	5537	2110	1882	1916	1886	1884	1880	1879
	br. eval	24920	11386	7395	7651	7462	7461	7418	7408
	cpu	2.59	1.15	0.73	0.76	0.76	0.75	0.74	0.74
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	5522	2151	1925	1932	1928	1909	1931	1874
	br. eval	24886	11536	7528	7702	7589	7539	7573	7395
	cpu	2.60	1.17	0.75	0.77	0.78	0.76	0.76	0.74
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	5531	2193	1894	1936	1919	1927	1925	1924
	br. eval	24896	11695	7431	7711	7560	7590	7553	7543
	cpu	2.56	1.16	0.73	0.75	0.75	0.75	0.74	0.74
<u>DLPM</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	8143	3105	1741	1753	1740	1749	1757	1746
	br. eval	33475	29563	6999	7322	7136	7134	7061	7020
	cpu	4.07	3.13	0.82	0.85	0.84	0.85	0.88	0.86

Tabela 8.1: Numerički rezultati za Primer 1 sa $n = 1000$

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115785	92720	8641	8611	8531	7316	7221	7270
	br. eval	466889	515014	32429	33471	32542	28945	28421	28565
	cpu	657.60	721.86	43.97	44.49	43.40	38.65	38.12	38.12
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	114772	26214	8670	8697	8626	7095	7043	7094
	br. eval	462938	179335	32518	33725	32817	28283	27884	28038
	cpu	660.18	260.52	44.82	45.48	44.42	38.30	38.01	38.04
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115590	93546	6418	6486	6433	6450	6430	6434
	br. eval	466118	520148	25763	27080	26228	26342	26044	26058
	cpu	655.05	724.47	34.49	36.16	35.04	35.23	34.90	34.88
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	111362	27354	8549	8558	8591	7594	7395	7574
	br. eval	450195	161794	32153	33309	32710	29777	28940	29477
	cpu	651.57	236.94	44.80	46.06	45.42	41.29	40.14	41.03
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	114880	99158	8385	8461	8617	7446	7353	7398
	br. eval	463366	552448	31663	33019	32788	29335	28816	28949
	cpu	681.07	801.91	45.43	47.09	46.96	41.91	41.30	41.53
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	111362	27424	8575	8481	8511	7888	7819	7883
	br. eval	450198	161990	32231	33077	32470	30659	30212	30403
	cpu	636.52	233.11	43.34	44.36	43.59	41.14	40.60	40.98
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	111380	27192	8551	8469	8659	7265	7243	7270
	br. eval	450253	161029	32154	33042	32915	28790	28484	28564
	cpu	635.83	231.11	43.05	44.11	44.03	38.52	38.17	38.28
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	111363	27527	8498	8561	8468	7807	7775	7797
	br. eval	450204	162302	32003	33320	32344	30419	30083	30148
	cpu	635.70	233.55	43.13	44.79	43.47	40.91	40.55	40.66
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	111379	27376	8493	8498	8497	7807	7907	7825
	br. eval	450251	161579	31980	33128	32428	30416	30476	30228
	cpu	640.98	233.08	43.23	44.54	43.70	41.09	41.25	40.91
<u>DLPM</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	157634	48636	6406	6495	6390	6438	6400	6426
	br. eval	633222	478409	25776	27201	27130	26538	26236	26049
	cpu	1009.17	727.71	38.33	40.22	40.15	39.35	39.02	38.70

Tabela 8.2: Numerički rezultati za Primer 1 sa n= 20000

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	289306	267046	10055	10218	10078	9312	9287	9313
	br. eval	1162793	1492382	38633	41108	39484	37277	36788	36867
	cpu	3815.52	5031.23	121.23	126.99	122.24	116.12	114.68	114.21
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	286742	62287	10147	10354	10284	9148	9121	9203
	br. eval	1152635	433333	38911	41518	40097	36779	36282	36528
	cpu	3842.53	1507.77	124.58	131.05	126.85	116.98	115.44	115.43
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	288765	267376	8261	8385	8304	8314	8283	8288
	br. eval	1160624	1485769	33246	35598	34154	34272	33764	33782
	cpu	3807.02	4921.35	103.64	109.94	106.05	106.24	104.78	105.04
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	278138	64605	10116	10224	10123	9961	9964	9798
	br. eval	1119090	449783	38815	41126	39614	39217	38813	38310
	cpu	3789.65	1539.44	125.00	131.32	127.23	125.88	124.74	123.23
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	286971	271829	10091	10141	10099	9519	9430	9533
	br. eval	1153535	1466957	38740	40878	39546	37896	37209	37520
	cpu	3966.28	5057.33	129.18	134.90	131.19	125.76	123.72	124.65
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	278140	64773	10145	10126	10078	10335	10158	10096
	br. eval	1119098	450233	38902	40832	39481	40339	39394	39203
	cpu	3681.80	1515.72	121.19	126.30	122.65	125.20	122.59	121.97
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	278204	64475	10026	10218	10131	9541	9451	9441
	br. eval	1119346	448546	38545	41109	39639	37957	37273	37239
	cpu	3687.26	1509.85	119.92	126.86	122.97	117.70	115.69	115.71
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	278139	64756	10031	10253	10048	10350	10151	10027
	br. eval	1119099	450185	38563	41216	39394	40387	39376	38999
	cpu	3687.17	1517.96	120.52	127.97	122.71	125.74	122.74	121.73
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	278204	64584	10059	10222	10116	10187	10184	10305
	br. eval	1119343	448873	38644	41119	39593	39894	39471	39830
	cpu	3726.99	1519.02	121.40	128.35	124.12	124.88	123.86	124.89
<u>DLPM</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	388736	117713	8270	8398	8261	8289	8262	8257
	br. eval	1559305	1285928	33294	35745	34849	34508	33846	34040
	cpu	5750.90	4553.74	113.82	120.88	118.51	117.49	115.46	116.30

Tabela 8.3: Numerički rezultati za Primer 1 sa n= 50000

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115	115	13	13	2	14	16	16
	br. eval	1530	1530	88	88	6	49	76	76
	cpu	0.15	0.14	0.01	0.01	0.00	0.00	0.01	0.01
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115	115	13	13	2	21	16	16
	br. eval	1530	1530	88	88	6	70	76	76
	cpu	0.14	0.14	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115	115	13	13	2	7	13	13
	br. eval	1530	1530	88	88	6	22	63	63
	cpu	0.15	0.14	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115	115	14	14	2	5	9	9
	br. eval	1530	1530	92	92	6	15	46	46
	cpu	0.15	0.14	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115	115	13	13	2	21	24	24
	br. eval	1530	1530	88	88	6	77	108	108
	cpu	0.15	0.14	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115	115	14	14	2	3	8	8
	br. eval	1530	1530	92	92	6	9	43	43
	cpu	0.15	0.15	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115	115	13	13	2	12	16	16
	br. eval	1530	1530	88	88	6	45	77	77
	cpu	0.15	0.14	0.01	0.01	0.00	0.00	0.01	0.01
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	114	114	13	13	1	2	7	7
	br. eval	1530	1530	93	93	6	9	43	43
	cpu	0.15	0.15	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115	115	13	13	2	12	16	16
	br. eval	1530	1530	88	88	6	45	77	77
	cpu	0.15	0.14	0.01	0.01	0.00	0.00	0.01	0.01
<u>DLPM</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115	115	12	12	2	7	15	15
	br. eval	1541	1541	86	86	6	22	77	77
	cpu	0.16	0.16	0.01	0.01	0.00	0.00	0.01	0.01

Tabela 8.4: Numerički rezultati za Primer 2 sa $n=1000$

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	506	506	52	52	6	14	39	39
	br. eval	8833	8833	564	564	32	49	329	329
	cpu	12.15	12.18	0.59	0.58	0.03	0.05	0.33	0.34
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	506	506	51	51	6	19	38	38
	br. eval	8833	8833	560	560	32	64	325	325
	cpu	12.20	12.22	0.59	0.58	0.03	0.06	0.33	0.33
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	506	506	51	51	7	7	36	36
	br. eval	8832	8832	560	560	37	22	316	316
	cpu	12.15	12.14	0.58	0.58	0.04	0.02	0.32	0.32
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	506	506	52	52	6	5	31	31
	br. eval	8832	8832	565	565	32	15	296	296
	cpu	12.22	12.25	0.60	0.60	0.03	0.01	0.31	0.30
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	506	506	52	52	7	21	44	44
	br. eval	8832	8832	565	565	37	77	349	349
	cpu	12.30	12.37	0.60	0.60	0.04	0.08	0.37	0.37
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	506	506	51	51	6	3	31	31
	br. eval	8833	8833	560	560	32	9	296	296
	cpu	12.17	12.17	0.58	0.58	0.03	0.01	0.30	0.30
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	506	506	51	51	7	12	38	38
	br. eval	8832	8832	560	560	36	45	325	325
	cpu	12.09	12.20	0.58	0.58	0.04	0.04	0.33	0.33
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	505	505	50	50	5	2	30	30
	br. eval	8833	8833	560	560	32	9	296	296
	cpu	12.14	12.21	0.59	0.58	0.03	0.01	0.30	0.30
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	506	506	51	51	6	12	38	38
	br. eval	8833	8833	560	560	32	45	325	325
	cpu	12.16	12.20	0.60	0.59	0.03	0.05	0.33	0.33
<u>DLPM</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	509	509	51	51	5	5	37	37
	br. eval	8993	8993	580	580	29	16	318	318
	cpu	12.60	12.70	0.66	0.66	0.03	0.02	0.36	0.37

Tabela 8.5: Numerički rezultati za Primer 2 sa $n=20000$

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	795	795	81	81	9	14	55	55
	br. eval	14872	14872	994	994	57	49	539	539
	cpu	47.79	47.91	2.34	2.35	0.13	0.11	1.23	1.24
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	795	795	81	81	9	19	54	54
	br. eval	14872	14872	994	994	56	64	535	535
	cpu	48.11	48.12	2.38	2.37	0.13	0.14	1.24	1.24
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	795	795	81	81	9	7	52	52
	br. eval	14871	14871	994	994	57	22	526	526
	cpu	47.71	47.89	2.35	2.35	0.13	0.05	1.22	1.21
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	795	795	81	81	9	5	47	47
	br. eval	14871	14871	994	994	57	15	506	506
	cpu	48.12	48.20	2.39	2.39	0.13	0.03	1.19	1.19
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	795	795	81	81	9	21	60	60
	br. eval	14871	14871	995	995	57	77	559	559
	cpu	48.41	48.58	2.43	2.42	0.14	0.19	1.34	1.34
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	795	795	81	81	9	3	47	47
	br. eval	14871	14871	995	995	57	9	506	506
	cpu	47.67	48.07	2.35	2.36	0.13	0.02	1.17	1.18
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	795	795	81	81	9	12	54	54
	br. eval	14871	14871	995	995	56	45	535	535
	cpu	47.72	47.88	2.35	2.36	0.13	0.10	1.22	1.24
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	794	794	80	80	8	2	46	46
	br. eval	14872	14872	994	994	56	9	506	506
	cpu	47.81	47.92	2.35	2.36	0.13	0.02	1.16	1.17
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	795	795	81	81	9	12	54	54
	br. eval	14872	14872	995	995	56	45	535	535
	cpu	47.77	47.93	2.37	2.36	0.13	0.10	1.23	1.25
<u>DLPM</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	797	797	80	80	8	5	54	54
	br. eval	15089	15089	1008	1008	53	16	543	543
	cpu	49.31	49.42	2.53	2.54	0.14	0.04	1.33	1.35

Tabela 8.6: Numerički rezultati za Primer 2 sa n= 50000

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115	123	13	18	2	22	14	14
	br. eval	1530	1666	88	112	6	70	69	69
	cpu	0.14	0.15	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115	122	13	17	2	24	14	14
	br. eval	1530	1662	88	108	6	75	69	69
	cpu	0.14	0.15	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115	125	13	20	2	26	12	12
	br. eval	1530	1675	88	121	6	81	60	60
	cpu	0.14	0.15	0.01	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115	123	14	16	2	25	14	14
	br. eval	1530	1666	92	104	6	78	69	69
	cpu	0.14	0.15	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115	122	13	17	2	23	18	18
	br. eval	1530	1662	88	108	6	82	85	85
	cpu	0.14	0.15	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115	123	14	17	2	24	31	31
	br. eval	1530	1666	92	108	6	75	115	115
	cpu	0.14	0.15	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115	122	13	17	2	25	27	27
	br. eval	1530	1662	88	108	6	78	104	104
	cpu	0.14	0.15	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	114	121	13	16	1	23	30	30
	br. eval	1530	1662	93	108	6	75	115	115
	cpu	0.14	0.15	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115	123	13	17	2	25	27	27
	br. eval	1530	1666	88	108	6	78	104	104
	cpu	0.14	0.15	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01
<u>DLPM</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	115	119	12	18	2	15	14	14
	br. eval	1531	1580	83	138	6	63	69	69
	cpu	0.16	0.16	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01

Tabela 8.7: Numerički rezultati za Primer 3 sa $n = 1000$

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	506	518	52	56	6	22	52	52
	br. eval	8833	9275	564	604	32	70	363	363
	cpu	12.10	12.59	0.59	0.62	0.03	0.07	0.36	0.36
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	506	513	51	57	6	24	53	53
	br. eval	8833	9255	560	608	32	75	366	366
	cpu	12.13	12.62	0.59	0.64	0.03	0.08	0.37	0.37
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	506	518	51	59	7	26	54	54
	br. eval	8832	9276	560	616	37	81	369	369
	cpu	12.12	12.61	0.58	0.64	0.04	0.08	0.37	0.37
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	506	513	52	59	6	25	55	55
	br. eval	8832	9255	565	616	32	78	372	372
	cpu	12.18	12.69	0.60	0.65	0.03	0.08	0.38	0.38
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	506	515	52	55	7	25	52	52
	br. eval	8832	9263	565	600	37	88	362	362
	cpu	12.31	12.81	0.61	0.65	0.04	0.10	0.39	0.38
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	506	513	51	59	6	24	55	55
	br. eval	8833	9255	560	616	32	75	372	372
	cpu	12.14	12.62	0.59	0.64	0.03	0.08	0.38	0.37
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	506	513	51	58	7	25	53	53
	br. eval	8832	9255	560	612	36	78	366	366
	cpu	12.11	12.60	0.58	0.64	0.04	0.08	0.37	0.37
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	505	513	50	55	5	23	54	54
	br. eval	8833	9259	560	604	32	75	372	372
	cpu	12.14	12.66	0.58	0.63	0.03	0.08	0.38	0.38
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	506	514	51	56	6	25	55	55
	br. eval	8833	9259	560	604	32	78	372	372
	cpu	12.14	12.61	0.58	0.63	0.03	0.08	0.38	0.38
<u>DLPM</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	506	517	52	57	5	16	38	38
	br. eval	8873	9174	584	672	29	70	330	330
	cpu	12.46	12.77	0.67	0.76	0.04	0.09	0.37	0.39

Tabela 8.8: Numerički rezultati za Primer 3 sa $n=20000$

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	795	792	81	86	9	22	69	69
	br. eval	14872	15263	994	1040	57	70	576	576
	cpu	47.67	48.46	2.37	2.46	0.13	0.15	1.32	1.32
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	795	791	81	84	9	24	69	69
	br. eval	14872	15259	994	1032	56	75	576	576
	cpu	47.85	48.65	2.40	2.46	0.13	0.17	1.34	1.34
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	795	791	81	86	9	26	71	71
	br. eval	14871	15259	994	1040	57	81	582	582
	cpu	47.50	48.46	2.36	2.47	0.13	0.18	1.33	1.34
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	795	791	81	85	9	25	71	71
	br. eval	14871	15259	994	1036	57	78	582	582
	cpu	47.90	48.81	2.41	2.50	0.13	0.18	1.36	1.36
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	795	791	81	89	9	25	68	68
	br. eval	14871	15259	995	1053	57	88	572	572
	cpu	48.20	49.14	2.43	2.58	0.14	0.22	1.38	1.37
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	795	791	81	87	9	24	71	71
	br. eval	14871	15259	995	1044	57	75	582	582
	cpu	47.53	48.45	2.37	2.47	0.13	0.16	1.33	1.33
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	795	792	81	86	9	25	69	69
	br. eval	14871	15263	995	1040	56	78	576	576
	cpu	47.50	48.51	2.36	2.47	0.13	0.17	1.32	1.32
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	794	792	80	86	8	23	70	70
	br. eval	14872	15267	994	1044	56	75	582	582
	cpu	47.60	48.56	2.37	2.48	0.13	0.16	1.34	1.34
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	795	791	81	84	9	25	71	71
	br. eval	14872	15259	995	1032	56	78	582	582
	cpu	47.60	48.60	2.37	2.47	0.13	0.17	1.34	1.35
<u>DLPM</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	811	815	80	87	8	19	54	54
	br. eval	15339	15565	988	1158	53	89	542	542
	cpu	50.05	50.50	2.51	2.98	0.14	0.23	1.36	1.35

Tabela 8.9: Numerički rezultati za Primer 3 sa $n= 50000$

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	156	169	37	51	33	30	32	31
	br. eval	1680	1778	170	254	130	121	133	130
	cpu	0.27	0.28	0.03	0.04	0.02	0.02	0.02	0.02
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	149	165	36	51	40	30	32	32
	br. eval	1660	1767	166	254	151	122	133	133
	cpu	0.26	0.28	0.03	0.04	0.02	0.02	0.02	0.02
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	149	156	32	45	31	30	31	31
	br. eval	1660	1740	155	236	124	122	130	130
	cpu	0.26	0.28	0.03	0.04	0.02	0.02	0.02	0.02
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	160	167	38	53	41	32	31	33
	br. eval	1692	1772	172	260	154	127	130	136
	cpu	0.27	0.29	0.03	0.04	0.03	0.02	0.02	0.02
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	158	160	34	57	34	31	33	32
	br. eval	1686	1752	161	272	133	125	136	133
	cpu	0.27	0.29	0.03	0.05	0.02	0.02	0.02	0.02
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	152	165	38	57	40	31	32	31
	br. eval	1669	1766	173	272	151	125	133	130
	cpu	0.27	0.29	0.03	0.05	0.03	0.02	0.02	0.02
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	155	159	35	49	41	31	31	33
	br. eval	1678	1749	164	248	154	123	130	136
	cpu	0.27	0.28	0.03	0.04	0.03	0.02	0.02	0.02
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	163	161	38	54	36	29	30	30
	br. eval	1705	1758	176	266	142	122	130	130
	cpu	0.28	0.29	0.03	0.04	0.02	0.02	0.02	0.02
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	154	165	36	47	34	30	32	31
	br. eval	1674	1766	166	242	132	120	133	130
	cpu	0.27	0.28	0.03	0.04	0.02	0.02	0.02	0.02
<u>DLPM</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	149	156	32	45	31	30	31	31
	br. eval	1660	1740	155	236	124	122	130	130
	cpu	0.30	0.31	0.04	0.05	0.02	0.02	0.03	0.03

Tabela 8.10: Numerički rezultati za Primer 4 sa $n=1000$

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	538	560	67	103	46	50	46	46
	br. eval	8890	9316	521	890	186	228	282	281
	cpu	19.39	20.31	1.14	1.93	0.41	0.50	0.62	0.61
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	537	562	77	98	43	41	46	46
	br. eval	8887	9322	551	874	178	200	282	281
	cpu	19.41	20.42	1.21	1.91	0.40	0.44	0.62	0.61
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	531	554	60	92	35	37	46	46
	br. eval	8870	9298	500	857	154	189	282	282
	cpu	19.35	20.27	1.09	1.87	0.34	0.41	0.61	0.62
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	545	566	69	111	48	45	46	46
	br. eval	8911	9334	527	913	192	213	282	281
	cpu	19.57	20.52	1.16	2.01	0.42	0.47	0.62	0.62
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	549	569	72	103	43	41	47	47
	br. eval	8924	9343	535	889	177	200	285	285
	cpu	19.66	20.58	1.19	1.97	0.40	0.45	0.64	0.64
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	539	572	73	106	40	39	46	47
	br. eval	8893	9352	539	899	168	194	282	285
	cpu	19.43	20.41	1.17	1.96	0.37	0.42	0.61	0.62
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	550	576	86	102	47	44	46	47
	br. eval	8926	9364	578	887	189	210	282	284
	cpu	19.46	20.42	1.26	1.93	0.41	0.45	0.62	0.62
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	538	569	69	105	45	38	45	45
	br. eval	8894	9346	530	899	187	194	282	282
	cpu	19.41	20.45	1.16	1.96	0.41	0.42	0.62	0.62
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	548	576	74	106	44	54	49	47
	br. eval	8921	9364	542	898	181	239	291	285
	cpu	19.44	20.48	1.18	1.96	0.40	0.52	0.64	0.62
<u>DLPM</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	531	554	60	92	35	37	46	46
	br. eval	8870	9298	500	857	154	189	282	282
	cpu	19.73	20.69	1.15	1.94	0.37	0.45	0.66	0.66

Tabela 8.11: Numerički rezultati za Primer 4 sa $n = 20000$

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	833	882	90	143	51	54	59	65
	br. eval	15074	15965	844	1466	223	290	431	450
	cpu	92.36	130.68	7.24	12.62	1.90	2.48	3.68	3.85
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	833	879	94	134	51	56	59	58
	br. eval	15074	15955	856	1439	223	295	432	429
	cpu	92.63	130.68	7.36	12.42	1.91	2.52	3.71	3.69
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	822	864	83	129	38	44	58	58
	br. eval	15041	15911	823	1425	184	260	429	429
	cpu	92.21	131.49	7.07	12.29	1.57	2.22	3.68	3.67
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	833	879	95	137	43	54	58	65
	br. eval	15074	15955	859	1448	199	290	428	450
	cpu	101.62	132.54	7.41	12.53	1.70	2.48	3.66	3.87
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	832	872	96	142	54	53	57	57
	br. eval	15071	15935	861	1463	231	286	425	425
	cpu	101.99	132.94	7.45	12.70	1.99	2.47	3.67	3.68
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	831	876	94	138	50	48	58	59
	br. eval	15068	15947	855	1452	220	271	429	432
	cpu	101.36	132.81	7.32	12.47	1.87	2.30	3.65	3.68
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	838	869	89	145	48	50	59	59
	br. eval	15089	15926	840	1472	214	277	432	432
	cpu	101.44	132.85	7.18	12.65	1.80	2.35	3.67	3.68
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	832	870	95	135	50	47	58	59
	br. eval	15074	15932	861	1445	223	271	431	435
	cpu	99.61	133.26	7.38	12.43	1.89	2.29	3.65	3.69
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	832	870	90	138	52	59	58	58
	br. eval	15071	15929	844	1451	226	305	428	429
	cpu	99.20	134.05	7.22	12.49	1.91	2.59	3.63	3.65
<u>DLPM</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	822	864	83	129	38	44	58	58
	br. eval	15041	15911	823	1425	184	260	429	429
	cpu	86.55	91.32	4.80	8.26	1.11	1.57	2.54	3.14

Tabela 8.12: Numerički rezultati za Primer 4 sa $n=50000$

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	14733	14985	14787	14843	14894	14880	14888	14816
	br. eval	77574	81796	79304	79796	79769	79757	79660	79509
	cpu	13.84	14.38	13.97	14.13	14.05	14.08	13.97	13.98
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	14743	14835	14782	14773	14837	14832	14866	14830
	br. eval	77605	81337	79277	79521	79533	79536	79596	79541
	cpu	13.65	14.18	13.84	13.90	13.89	13.92	13.84	13.86
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	14072	14263	14159	14177	14167	14168	14162	14165
	br. eval	75595	79634	77423	77802	77592	77625	77486	77560
	cpu	13.36	14.03	13.66	13.75	13.68	13.65	13.61	13.63
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	14705	14905	14793	14815	14777	14838	14800	14802
	br. eval	77421	81487	79242	79643	79349	79550	79317	79387
	cpu	13.87	14.54	14.13	14.22	14.13	14.25	14.09	14.12
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	14718	14935	14860	14817	14795	14818	14795	14813
	br. eval	77530	81647	79523	79730	79485	79572	79382	79490
	cpu	14.08	14.87	14.43	14.46	14.41	14.48	14.35	14.39
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	14718	14889	14827	14811	14840	14948	14902	14803
	br. eval	77461	81439	79353	79631	79538	79879	79632	79390
	cpu	14.07	14.71	14.38	14.48	14.40	14.57	14.40	14.36
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	14718	14841	14730	14773	14702	14776	14820	14732
	br. eval	77450	81286	79054	79518	79125	79364	79377	79168
	cpu	13.93	14.51	14.12	14.29	14.13	14.27	14.15	14.13
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	14783	14913	14852	14843	14823	14825	14826	14882
	br. eval	77659	81513	79432	79730	79490	79514	79408	79629
	cpu	14.07	14.62	14.27	14.36	14.35	14.35	14.25	14.30
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	14671	14871	14835	14793	14863	14928	14816	14820
	br. eval	77309	81375	79368	79577	79607	79820	79365	79431
	cpu	14.05	14.51	14.19	14.21	14.23	14.32	14.14	14.16
<u>DLPM</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	14099	14291	14187	14204	14194	14195	14190	14193
	br. eval	76590	80634	78424	78796	78586	78607	78487	78550
	cpu	14.57	15.33	15.00	15.14	14.98	15.00	14.99	15.01

Tabela 8.13: Numerički rezultati za Primer 5 sa n= 1000

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	73311	73872	74229	73812	73518	74758	73838	73942
	br. eval	1600346	1618806	1604170	1605371	1617265	1614999	1597702	1613466
	cpu	980.54	989.87	984.18	1003.07	1006.09	989.16	980.25	991.27
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	72768	73226	72621	72554	72436	73985	73072	72425
	br. eval	1599470	1616682	1604752	1605511	1607249	1614102	1611793	1602412
	cpu	1003.25	991.39	1011.86	1011.15	999.50	1002.36	1000.41	1009.10
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	70457	70895	70655	70700	70671	70676	70652	70670
	br. eval	1567746	1605154	1596417	1576156	1601475	1604720	1599089	1599940
	cpu	979.26	993.52	1006.48	992.15	985.43	982.57	981.30	1007.02
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	72131	72458	72031	72286	72205	72332	72115	72168
	br. eval	1586153	1594885	1602383	1595235	1560101	1561044	1592361	1594681
	cpu	997.31	1004.39	1000.03	1007.17	986.89	979.34	1003.70	1004.08
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	74304	74132	73696	76087	73499	73223	73849	73398
	br. eval	1607103	1611632	1586032	1611720	1581559	1604366	1606099	1604467
	cpu	987.90	1004.79	1005.34	1008.90	997.16	987.55	1000.96	1001.48
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	72141	72534	72198	72165	73755	72716	72244	71810
	br. eval	1582413	1591495	1595310	1553266	1593193	1567998	1595924	1570632
	cpu	981.71	986.62	974.95	967.61	991.18	973.75	991.33	957.06
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	71897	72519	71942	72169	72141	72149	72522	72064
	br. eval	1583937	1584663	1544566	1572241	1589469	1559860	1599085	1584954
	cpu	960.93	988.26	964.87	970.25	973.11	962.85	976.95	986.07
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	74102	73166	74081	72517	72828	72179	72285	72508
	br. eval	1606255	1567309	1594815	1574997	1568275	1557096	1590045	1590528
	cpu	994.57	983.96	994.95	978.64	975.89	972.32	993.77	977.17
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	72229	72685	72540	76151	72816	73103	72260	72161
	br. eval	1597552	1600610	1572179	1582718	1595177	1558500	1575725	1589718
	cpu	997.00	1000.34	985.80	993.36	995.06	983.69	978.68	997.09
<u>DLPM</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	68464	68919	68684	68728	68699	68696	68695	68696
	br. eval	1772167	1783982	1776463	1777695	1777456	1777929	1776353	1777147
	cpu	1157.70	1164.58	1160.36	1159.68	1161.25	1160.84	1157.24	1158.07

Tabela 8.14: Numerički rezultati za Primer 5 sa n= 5000

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	3794	3632	3732	3711	3705	3718	3727	3724
	br. eval	85865	81747	84056	83621	83814	83834	84013	83887
	cpu	643.68	610.21	637.21	628.35	630.73	632.54	629.35	626.74
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	3795	3641	3730	3710	3723	3720	3723	3716
	br. eval	85867	81778	84053	83621	83879	83848	84002	83869
	cpu	644.60	611.29	639.76	628.29	630.95	631.92	628.62	627.53
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	3789	3632	3719	3703	3712	3711	3718	3713
	br. eval	85856	81753	84021	83602	83848	83822	83990	83864
	cpu	642.82	609.84	634.44	627.92	628.98	630.47	626.99	626.41
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	3802	3642	3729	3715	3727	3727	3724	3725
	br. eval	85892	81784	84050	83635	83894	83867	84004	83898
	cpu	648.02	613.90	645.52	634.83	631.88	633.24	631.88	629.42
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	3793	3642	3726	3717	3726	3722	3726	3721
	br. eval	85863	81775	84038	83640	83885	83851	84007	83884
	cpu	645.06	610.65	638.21	629.32	627.72	629.20	628.32	626.73
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	3801	3645	3735	3712	3724	3730	3736	3721
	br. eval	85889	81788	84067	83627	83880	83875	84037	83886
	cpu	642.01	609.99	635.22	635.06	629.52	629.03	627.20	625.55
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	3800	3647	3738	3716	3728	3719	3731	3725
	br. eval	85887	81802	84076	83642	83901	83848	84026	83897
	cpu	645.99	613.47	638.69	636.51	636.22	632.03	632.60	632.35
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	3800	3639	3729	3705	3729	3721	3728	3723
	br. eval	85890	81774	84053	83611	83899	83853	84019	83895
	cpu	643.51	610.57	632.98	628.78	628.89	631.27	629.72	628.92
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	3798	3646	3735	3716	3720	3723	3726	3733
	br. eval	85878	81794	84067	83637	83869	83854	84010	83918
	cpu	644.54	608.82	634.06	626.47	629.61	627.29	629.10	631.04
<u>DLPM</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	3780	3591	3696	3679	3688	3687	3697	3687
	br. eval	82794	78013	80657	80184	80452	80427	80625	80472
	cpu	608.43	574.41	592.83	589.31	591.59	592.68	594.11	591.05

Tabela 8.15: Numerički rezultati za Primer 6 sa n= 1000

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	84	148	20	48	33	34	33	29
	br. eval	1054	2082	173	478	310	323	272	256
	cpu	0.14	0.27	0.02	0.06	0.04	0.04	0.04	0.03
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	84	147	20	44	32	36	28	28
	br. eval	1054	2078	173	462	306	331	252	252
	cpu	0.14	0.27	0.02	0.06	0.04	0.04	0.03	0.04
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	86	146	21	47	33	37	32	29
	br. eval	1062	2074	177	474	310	335	268	256
	cpu	0.14	0.27	0.02	0.06	0.04	0.05	0.04	0.03
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	84	147	24	44	33	35	31	29
	br. eval	1054	2078	189	462	310	327	264	256
	cpu	0.14	0.27	0.03	0.06	0.04	0.04	0.04	0.03
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	88	146	22	44	31	34	28	29
	br. eval	1070	2074	181	462	302	323	252	256
	cpu	0.14	0.27	0.03	0.06	0.04	0.04	0.03	0.04
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	85	149	23	45	34	36	28	31
	br. eval	1058	2086	185	466	314	331	252	264
	cpu	0.14	0.28	0.03	0.06	0.04	0.05	0.03	0.04
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	90	147	21	44	31	39	30	32
	br. eval	1078	2078	177	462	302	343	260	268
	cpu	0.14	0.27	0.02	0.06	0.04	0.05	0.04	0.04
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	84	148	22	44	30	35	29	28
	br. eval	1058	2086	185	466	302	331	260	256
	cpu	0.14	0.27	0.03	0.06	0.04	0.05	0.04	0.04
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	86	147	23	46	33	38	30	31
	br. eval	1062	2078	185	470	310	339	260	264
	cpu	0.14	0.27	0.03	0.06	0.04	0.05	0.04	0.04
<u>DLPM</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	91	153	27	50	38	39	33	33
	br. eval	1083	2103	202	487	331	344	273	273
	cpu	0.16	0.30	0.03	0.07	0.05	0.05	0.04	0.04

Tabela 8.16: Numerički rezultati za Primer 7 sa $n=1000$

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	369	650	88	192	134	139	116	115
	br. eval	6197	11959	1116	2841	1866	1962	1553	1549
	cpu	13.12	25.57	2.45	6.07	3.97	4.15	3.29	3.28
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	370	652	89	190	133	140	115	115
	br. eval	6201	11967	1120	2833	1862	1966	1549	1549
	cpu	13.17	25.68	2.46	6.03	3.96	4.17	3.27	3.28
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	369	652	87	189	135	140	115	119
	br. eval	6197	11967	1112	2829	1870	1966	1549	1565
	cpu	13.13	25.56	2.46	6.01	3.96	4.15	3.27	3.30
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	369	651	87	189	136	140	115	116
	br. eval	6197	11963	1112	2829	1874	1966	1549	1553
	cpu	13.24	25.63	2.45	6.02	4.00	4.18	3.29	3.30
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	370	651	87	192	133	141	115	115
	br. eval	6201	11963	1112	2841	1862	1970	1549	1549
	cpu	13.27	25.70	2.47	6.11	4.00	4.21	3.31	3.31
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	369	650	88	189	135	139	115	115
	br. eval	6197	11959	1116	2829	1870	1962	1549	1549
	cpu	13.14	25.39	2.44	6.01	3.95	4.15	3.28	3.27
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	370	652	87	192	135	139	114	114
	br. eval	6201	11967	1112	2841	1870	1962	1545	1545
	cpu	13.15	25.40	2.46	6.03	3.95	4.15	3.26	3.26
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	368	649	87	191	134	141	114	114
	br. eval	6197	11959	1116	2841	1870	1974	1549	1549
	cpu	13.16	25.50	2.46	6.05	3.96	4.18	3.27	3.28
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	369	650	88	192	135	142	115	115
	br. eval	6197	11959	1116	2841	1870	1974	1549	1549
	cpu	13.16	25.53	2.43	6.03	3.96	4.18	3.28	3.28
<u>DLPM</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	374	655	92	194	138	144	119	119
	br. eval	6217	11979	1132	2849	1882	1982	1565	1565
	cpu	13.39	25.79	2.44	6.16	4.07	4.30	3.40	3.39

Tabela 8.17: Numerički rezultati za Primer 7 sa $n = 20000$

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	590	1018	139	302	212	220	180	180
	br. eval	10682	19976	1962	4897	3240	3384	2650	2650
	cpu	54.04	101.12	9.93	24.79	16.40	17.14	13.40	13.42
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	589	1019	139	302	214	220	180	180
	br. eval	10678	19980	1962	4897	3248	3384	2650	2650
	cpu	54.14	101.28	9.95	24.84	16.46	17.19	13.43	13.44
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	589	1020	141	302	212	220	180	184
	br. eval	10678	19984	1970	4897	3240	3384	2650	2666
	cpu	54.02	101.09	9.96	24.71	16.35	17.09	13.39	13.48
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	590	1018	140	301	212	227	180	180
	br. eval	10682	19976	1966	4893	3240	3412	2650	2650
	cpu	54.34	101.52	10.00	24.85	16.45	17.35	13.48	13.48
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	589	1020	140	301	212	221	179	179
	br. eval	10678	19984	1966	4893	3240	3388	2646	2646
	cpu	54.51	101.96	10.05	24.96	16.57	17.34	13.54	13.55
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	590	1018	139	302	212	220	180	180
	br. eval	10682	19976	1962	4897	3240	3384	2650	2650
	cpu	54.08	101.17	9.91	24.77	16.37	17.14	13.41	13.43
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	589	1019	141	303	212	220	180	180
	br. eval	10678	19980	1970	4901	3240	3384	2650	2650
	cpu	54.10	101.17	9.95	24.81	16.39	17.11	13.40	13.41
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	589	1017	138	301	211	219	179	179
	br. eval	10682	19976	1962	4897	3240	3384	2650	2650
	cpu	54.13	101.13	9.94	24.80	16.41	17.15	13.42	13.42
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	590	1018	139	302	212	220	180	180
	br. eval	10682	19976	1962	4897	3240	3384	2650	2650
	cpu	54.13	101.18	9.94	24.78	16.39	17.13	13.41	13.42
<u>DLPM</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	593	1022	143	305	216	224	183	183
	br. eval	10694	19992	1978	4909	3256	3400	2662	2662
	cpu	54.98	103.86	10.28	25.33	16.81	17.49	13.73	13.71

Tabela 8.18: Numerički rezultati za Primer 7 sa $n=50000$

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	64407	2176	13140	4695	86393	146809	4047	211779
	br. eval	194244	9443	39438	14104	260419	443432	12145	637220
	cpu	41.04	2.08	8.34	3.10	54.82	93.45	2.60	135.01
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	980	144	907	94	854	1390	89	1010
	br. eval	3861	1298	2757	300	2602	4267	271	3095
	cpu	0.80	0.28	0.57	0.06	0.54	0.89	0.06	0.65
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	678	146	793	95	659	1206	89	947
	br. eval	2966	1304	2407	303	1991	3704	271	2935
	cpu	0.62	0.28	0.51	0.07	0.42	0.78	0.06	0.62
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	2013	180	1611	111	1882	1152	89	1878
	br. eval	7190	1416	5159	352	5897	3688	271	5965
	cpu	1.53	0.31	1.11	0.08	1.26	0.79	0.06	1.28
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	3275	193	2080	106	1788	1418	88	2895
	br. eval	11246	1462	6664	338	5734	4555	268	9169
	cpu	2.47	0.32	1.47	0.08	1.26	1.00	0.06	2.04
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	920	146	681	96	730	1432	89	767
	br. eval	3705	1304	2075	306	2208	4368	271	2388
	cpu	0.80	0.29	0.46	0.07	0.49	0.97	0.06	0.53
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	954	154	509	101	756	893	91	1026
	br. eval	3766	1328	1551	320	2289	2749	277	3154
	cpu	0.80	0.29	0.34	0.07	0.50	0.59	0.06	0.70
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	1256	145	1094	95	1173	1150	88	700
	br. eval	4733	1304	3355	306	3547	3521	271	2184
	cpu	1.02	0.28	0.73	0.07	0.77	0.77	0.06	0.48
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	735	154	857	102	632	1149	91	1097
	br. eval	3085	1328	2611	323	1950	3538	277	3358
	cpu	0.65	0.29	0.56	0.07	0.42	0.76	0.06	0.74
<u>DLPM</u>	konv.	-	-	-	-	+	+	-	-
	br. iter	3	3	500001	500001	1281	793	500001	500001
	br. eval	19	19	1500007	1500007	3924	2509	1500006	1500006
	cpu	0.01	0.00	351.41	365.20	0.99	0.64	365.94	357.29

Tabela 8.19: Numerički rezultati za Primer 8 sa n= 1000

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	57635	2282	181449	675	20273	236035	2829	220503
	br. eval	178498	10780	548123	2403	60819	711915	8505	661988
	cpu	99.89	6.30	307.10	1.43	34.16	399.10	4.78	370.51
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	1114	238	966	85	903	1340	110	821
	br. eval	5293	2595	3028	311	2748	4122	348	2550
	cpu	2.95	1.51	1.69	0.18	1.54	2.31	0.19	1.43
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	1103	240	586	89	695	1276	110	944
	br. eval	5261	2601	1880	323	2093	3932	348	2926
	cpu	2.93	1.51	1.05	0.19	1.17	2.21	0.20	1.64
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	1863	288	2082	103	1811	2306	111	1721
	br. eval	7702	2756	6622	371	5674	7287	351	5509
	cpu	4.35	1.61	3.77	0.22	3.23	4.14	0.20	3.13
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	3039	553	1651	91	1118	2575	108	1201
	br. eval	11561	3880	5446	346	3726	8435	342	3904
	cpu	6.65	2.29	3.15	0.21	2.16	4.88	0.20	2.26
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	1054	241	1016	93	611	922	110	1261
	br. eval	5152	2604	3174	335	1838	2830	348	3885
	cpu	2.90	1.52	1.81	0.20	1.05	1.61	0.20	2.21
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	1146	252	472	104	831	1263	116	863
	br. eval	5384	2637	1473	369	2510	3869	365	2674
	cpu	3.02	1.53	0.83	0.22	1.42	2.18	0.21	1.51
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	1187	240	602	92	676	1051	109	600
	br. eval	5531	2604	1936	335	2034	3239	348	1887
	cpu	3.11	1.51	1.10	0.20	1.16	1.84	0.20	1.07
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	855	252	858	104	1000	1053	116	1031
	br. eval	4508	2637	2633	369	3007	3245	365	3189
	cpu	2.52	1.53	1.50	0.22	1.70	1.84	0.21	1.80
<u>DLPM</u>	konv.	-	-	-	-	-	+	-	-
	br. iter	3	3	500001	500001	182515	1306	500001	500001
	br. eval	21	21	1500009	1500009	547562	4048	1500007	1500007
	cpu	0.01	0.01	876.65	887.65	330.16	2.42	912.58	908.48

Tabela 8.20: Numerički rezultati za Primer 8 sa n= 3000

Postupak	Učinak	Početne tačke							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
<u>M3TFR1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	81690	88198	72628	81945	69818	63386	25120	24364
	br. eval	311336	335633	267767	305330	258159	240706	96802	94533
	cpu	1317.90	1422.88	1137.78	1292.28	1103.23	1013.79	404.57	393.86
<u>M3TFR2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	70526	75241	58492	68542	56406	55131	22614	22428
	br. eval	277842	296757	225362	265124	217926	215943	89285	88726
	cpu	1179.80	1262.97	960.52	1132.25	931.50	917.39	374.15	371.60
<u>M3TFR3</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	64247	69000	49870	59482	48710	50551	21436	21435
	br. eval	259008	278043	199497	237945	194840	202204	85751	85747
	cpu	1094.76	1178.13	849.77	1010.12	828.80	849.63	357.43	357.02
<u>DFPB1</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	80710	85225	70124	82746	68019	64325	24777	24351
	br. eval	308362	326679	260257	307735	252766	243525	95775	94496
	cpu	1324.98	1405.84	1124.48	1342.72	1092.77	1037.54	404.19	398.63
<u>DFPB2</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	81718	88370	72221	82978	69674	63673	24573	24735
	br. eval	311424	336141	266546	308429	257727	241567	95161	95646
	cpu	1355.87	1464.26	1185.99	1396.34	1122.32	1041.36	405.67	407.67
<u>HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	82005	86072	72591	86043	69767	65128	25088	24682
	br. eval	312247	329221	267657	317625	258009	245934	96708	95488
	cpu	1312.69	1439.04	1198.91	1374.01	1096.61	1039.87	404.04	398.81
<u>PRP</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	74973	78883	62153	73878	60317	59578	23750	23492
	br. eval	291162	307655	236344	281132	229662	229286	92694	91919
	cpu	1230.75	1303.44	1016.00	1190.62	976.99	967.09	387.31	384.01
<u>2HuS</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	81758	86837	72287	86657	69916	64988	24930	24814
	br. eval	311508	331517	266748	319470	258459	245517	96237	95887
	cpu	1323.41	1405.47	1133.64	1358.95	1095.41	1034.90	402.92	400.56
<u>Li-Li</u>	konv.	+	+	+	+	+	+	+	+
	br. iter	81004	86020	71841	86805	70234	65224	25080	24828
	br. eval	309255	329065	265407	319910	259411	246223	96684	95927
	cpu	1322.52	1396.77	1135.70	1363.35	1103.40	1040.34	404.75	402.14
<u>DLPM</u>	konv.	+	-	+	+	+	+	+	+
	br. iter	64154	201	49863	59474	48686	50557	21420	21419
	br. eval	258658	2626	199468	237912	194741	202206	85686	85682
	cpu	1115.52	11.37	862.26	1025.37	844.96	882.43	367.41	366.82

Tabela 8.21: Numerički rezultati za Primer 9 sa $n = 20164$

Literatura

- [1] A.B. Abubakar, P. Kumam, *A descent Dai-Liao conjugate gradient method for nonlinear equations*, Numer. Algor. (2018), <https://doi.org/10.1007/s11075-018-0541-z>.
- [2] D. Adnađević, Z. Kadelburg, *Matematička analiza I*, Nauka - Studentski trg, Beograd, 1995.
- [3] M. Ahookhosh, K. Amini, S. Bahrami, *Two derivative-free projection approaches for systems of large-scale nonlinear monotone equations*, Numer. Algor. 64 (2013), pp. 21–42.
- [4] M. Al-Baali, *Descent property and global convergence of the Fletcher-Reeves method with inexact line search*, IMA J. Numer. Anal. 5 (1985), pp. 121–124.
- [5] L. Armijo, *Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives*, Pacific J. Math. 16 (1966), pp. 1–3.
- [6] S. Babaie-Kafaki, R. Gambari, *A descent family of Dai-Liao conjugate gradient methods*, Optim. Meth. Soft. 29 (2014), pp. 583–591.
- [7] E. Birgin, N. Krejić, J.M. Martínez, *Globally convergent inexact quasi-Newton methods for solving nonlinear systems*, Numer. Algorithms 32 (2003), pp. 249–260.
- [8] R.H. Byrd, J. Nocedal, R.B. Schnabel, *Representation of quasi-Newton matrices and their use in limited memory methods*, Math. Program. 63 (1994), pp. 129–156.
- [9] W. Cheng, *A two-term PRP-based descent method*, Numer. Func. Anal. Opt. 28 (2007), pp. 1217–1230.

-
- [10] W. Cheng, *A PRP type method for systems of monotone equations*, Math. Comput. Modell. 50 (2009), pp. 15–20.
- [11] W. Cheng, D.H. Li, *A derivative-free nonmonotone line search and its application to the spectral residual method*, IMA J. Numer. Anal. 29 (2008), pp. 814–825.
- [12] H.P. Crowder, P. Wolfe, *Linear convergence of the conjugate gradient method*, IBM J. Res. Dev., 16 (1969), pp. 431–433.
- [13] Y.H. Dai, C.X. Kou, *A nonlinear conjugate gradient algorithm with an optimal property and an improved Wolfe line search*, SIAM J. Optim. 23 (2013), pp. 296–320.
- [14] Y.H. Dai, L.Z. Liao, *New conjugacy conditions and related nonlinear conjugate gradient methods*, Appl. Math. Optim. 43 (2001), pp. 87–101.
- [15] Y.H. Dai, Y. Yuan, *Convergence properties of the Fletcher-Reeves method*, IMA J. Numer. Anal. 16 (1996), pp. 155–164.
- [16] Y.H. Dai, Y. Yuan, *Convergence of the Fletcher-Reeves method under a generalized Wolfe search*, J. Comput. Math. 2 (1996), pp. 142–148.
- [17] Y.H. Dai, Y. Yuan, *A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence property*, SIAM J. Optim. 10 (1999), pp. 177–182.
- [18] Y.H. Dai, Y. Yuan, *An efficient hybrid conjugate gradient method for unconstrained optimization*, Ann. Oper. Res. 103 (2001), pp. 33–47.
- [19] Y.H. Dai, J.Y. Han, G.H. Liu, D.F. Sun, H.X. Yin, Y. Yuan, *Convergence properties of nonlinear conjugate gradient methods*, SIAM J. Optim. 10 (1999), pp. 345–358.
- [20] R.S. Dembo, S. Eisenstat, T. Steihaug, *Inexact Newton methods*, SIAM J. Numer. Anal., 19 (1982), pp. 400–408.
- [21] J. Dennis, J. Moré, *Quasi-Newton methods, motivation and theory*, SIAM Review, 19 (1977), pp. 46–89.
- [22] J.E. Dennis Jr., R.B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, SIAM Classics in Applied Mathematics, 1996.

- [23] E.D. Dolan, J.J. Moré, *Benchmarking optimization software with performance profiles*, Math. Program. Ser. A 91 (2002), pp. 201–213.
- [24] F. Facchinei, J.S. Pang, *Springer Series in Operations Research, Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems Vol. I*, Springer-Verlag New York, Inc., 2003.
- [25] D. Feng, M. Sun, X. Wang, *A family of conjugate gradient methods for large-scale nonlinear equations*, J. Inequal. Appl. (2017), <https://doi.org/10.1186/s13660-017-1510-0>.
- [26] R. Fletcher, C. Reeves, *Function minimization by conjugate gradients*, Comput. J. 7 (1964), pp. 149–154.
- [27] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization, Unconstrained Optimization Vol. I*, John Wiley & Sons Inc., 1987.
- [28] J.C. Gilbert, J. Nocedal, *Global convergence properties of conjugate gradient methods for optimization*, SIAM J. Optim. 2 (1992), pp. 21–42.
- [29] L. Grippo, F. Lampariello, S. Lucidi, *A nonmonotone line search technique for Newton's method*, SIAM J. Numer. Anal. 23 (1986), pp. 707–716.
- [30] L. Grippo, M. Sciandrone, *Nonmonotone derivative-free methods for nonlinear equations*, Comput. Optim. Appl. 37 (2007), pp. 297–328.
- [31] A. Griewank, *The global convergence of Broyden-like methods with a suitable line search*, J. Austral. Math. Soc. Ser. B 28 (1986), pp. 75–92.
- [32] O. Hadžić, S. Pilipović, *Uvod u funkcionalnu analizu*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1996.
- [33] W.W. Hager, H. Zhang, *A new conjugate gradient method with guaranteed descent and an efficient line search*, SIAM J. Optim. 16 (2005), pp. 170–192.
- [34] W.W. Hager, H. Zhang, *A survey of nonlinear conjugate methods*, Pacific J. Optim. 2 (2006), pp. 35–58.
- [35] J.Y. Han, G.H. Liu, H.X. Yin, *Convergence properties of conjugate gradient methods with strong Wolfe linesearch*, Systems Sci. Math. Sci. 11 (1998), pp. 112–116.

- [36] M.R. Hestenes, E.L. Stiefel, *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*, J. Research Nat. Bur. Standards 49 (1952), pp. 409–436.
- [37] Y.F. Hu, C. Storey, *Global convergence result for conjugate gradient methods*, J. Optim. Theory Appl. 71 (1991), pp. 399–405.
- [38] C.T. Kelley, *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, Frontiers in Applied Mathematics 16, SIAM, Philadelphia, PA, 1995.
- [39] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza - Elementi teorije operatora*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- [40] W. La Cruz, M. Raydan, *Nonmonotone spectral methods for large-scale nonlinear systems*, Optim. Methods Softw. 18 (2003), pp. 583–599.
- [41] W. La Cruz, J.M. Martínez, M. Raydan, *Spectral residual method without gradient information for solving large-scale nonlinear systems of equations*, Math. Comput. 75 (2006), pp. 1429–1448.
- [42] D.H. Li, M. Fukushima, *A derivative-free line search and DFP method for symmetric equations with global and superlinear convergence*, Numer. Funct. Anal. Optim., 20 (1999), pp. 59–77.
- [43] D.H. Li, M. Fukushima, *A globally and superlinearly convergent Gauss-Newton-based BFGS method for symmetric nonlinear equations*, SIAM J. Numer. Anal., 37 (1999), pp. 152–172.
- [44] D.H. Li, M. Fukushima, *A derivative-free line search and global convergence of Broyden-like method for nonlinear equations*, Optim. methods Softw. 13 (2000), pp. 181–201.
- [45] D.H. Li, M. Fukushima, *On the global convergence of the BFGS method for nonconvex unconstrained optimization problems*, SIAM J Optim. 11 (2001), pp. 1054–1064.
- [46] Q. Li, D. H. Li, *A class of derivative-free methods for large-scale nonlinear monotone equations*, IMA J. Numer. Anal. 31 (2011), pp. 1625–1635.
- [47] Y. Liu, C. Storey, *Efficient generalized conjugate gradient algorithms, part 1: theory*, J. Optim. Theory Appl. 69 (1991), pp. 129–137.

-
- [48] G. H. Liu, J. Y. Han, H. X. Yin, *Global convergence of the Fletcher-Reeves algorithm with an inexact line search*, Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B 10 (1995), pp. 75–82.
- [49] J.M. Martínez, *Practical quasi-Newton methods for solving nonlinear systems*, J. Comput. Appl. Math. 124 (2000), pp. 97–121.
- [50] J. Nocedal, *Updating quasi-Newton matrices with limited storage*, Math. Comput. 35 (1980), pp. 773–782.
- [51] J. Nocedal, *Theory of algorithms for unconstrained optimization*, Acta Numerica 1 (1991), pp. 199–242.
- [52] J. Nocedal, S. Wright, *Numerical Optimization*, Springer-Verlag New York, 2006.
- [53] J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.
- [54] A.M. Ostrowski, *Solution of Equations in Euclidean and Banach Space*, Academic Press, New York and London, 1973.
- [55] Z. Papp, S. Rapajić, *FR type methods for systems of large-scale nonlinear monotone equations*, Appl. Math. Comput. 269 (2015), pp. 816–823.
- [56] Z. Papp, S. Rapajić, *Hybrid Hu-Storey type methods for large-scale nonlinear monotone systems*, submitted.
- [57] D. Perišić, S. Pilipović, M. Stojanović, *Funkcije više promenljivih; Diferencijalni i integralni račun*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno matematički fakultet, Novi Sad, 1997.
- [58] E. Polak, G. Ribière, *Note sur la convergence de directions conjuguées*, Rev. Francaise Informat Recherche Opertionelle 16 (1969), pp. 35–43.
- [59] B.T. Polyak, *The conjugate gradient method in extreme problems*, USSR Comp. Math. Math. Phys. 9 (1969), pp. 94–112.
- [60] M.J.D. Powell, *Some convergence properties of the conjugate gradient method*, Math. Prog. 11 (1976), pp.42–49.

- [61] M.J.D. Powell, *Restart procedures of the conjugate gradient method*, Math. Prog. 12 (1977), pp. 241–254.
- [62] M.J.D. Powell, *Convergence properties of algorithms for nonlinear optimization*, SIAM Review 28 (1986), pp. 487–500.
- [63] S. Rapajić, Z. Papp, *A nonmonotone Jacobian smoothing inexact Newton method for NCP*, Comput. Optim. Appl. 66 (2017), pp. 507–532.
- [64] R.T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim. 14 (1976), pp. 877–898.
- [65] M.V. Solodov, B.F. Svaiter, *A globally convergent inexact Newton method for systems of monotone equations*, in *Reformulation: Nonsmooth, Piecewise Smooth, Semismooth and Smoothing Methods*, M. Fukushima and L. Qi eds., Kluwer Academic Publishers 1998, pp. 355–369.
- [66] M. V. Solodov, B. F. Svaiter, *A hybrid projection-proximal point algorithm*, J. Convex. Anal. 6 (1999), pp. 59–70.
- [67] Z. Stojaković, D. Herceg, *Numeričke metode linearne algebre*, Iro Građevinska knjiga, Beograd, 1988.
- [68] D. Touati-Ahmed, C. Storey, *Efficient hybrid conjugate gradient techniques*, J. Optim. Theory Appl. 64 (1990), pp. 379–397.
- [69] J. Sun, Y.X Yuan, *Optimization Theory and Methods: Nonlinear Programming*, Springer Optimization and Its Applications, VOL. 1, 2006.
- [70] J. Sun, J. Zhang, *Global convergence of conjugate gradient methods without line search*, Ann. Oper. Res. 103 (2001), pp. 161–173.
- [71] K. Surla, Z. Lozanov-Crvenković, *Operaciona istraživanja*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2002.
- [72] L.N. Trefethen, D. Bau III, *Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- [73] Q. R. Yan, X.Z. Peng, D.H. Li, *A globally convergent derivative-free method for solving large-scale nonlinear monotone equations*, J. Comput. Appl. Math. 234 (2010), pp. 649–657.

-
- [74] Y.X Yuan, *Analysis on the conjugate gradient method*, Optim. Methods Softw. 2 (1993), pp. 19–29.
- [75] L. Zhang, W. Zhou, *Spectral gradient projection method for solving nonlinear monotone equations*, J. Comput. Appl. Math. 196 (2006), pp. 478–484.
- [76] L. Zhang, W. Zhou, D. Li, *Global convergence of a modified Fletcher–Reeves conjugate gradient method with Armijo-type line search*, Numer. Math. 104 (2006), pp. 561–572.
- [77] L. Zhang, W. Zhou, D. Li, *Some descent three-term conjugate gradient methods and their global convergence*, Optim. Methods. Softw. 22 (2007), pp. 697–711.
- [78] Y. B. Zhao, D. Li, *Monotonicity of fixed point and normal mapping associated with variational inequality and its application*, SIAM J. Optim. 4 (2001), pp. 962–973.
- [79] W. J. Zhou, D. H. Li, *Limited memory BFGS method for nonlinear monotone equations*, J. Comput. Math. 25 (2007), pp. 89–96.
- [80] W. Zhou, D. Li, *A globally convergent BFGS method for nonlinear monotone equations without any merit functions*, Math. Comput. 77 (2008), pp. 2231–2240.
- [81] G. Zhou, K.C. Toh, *Superlinear convergence of a Newton-type algorithm for monotone equations*, J. Optim. Theory. Appl. 125 (2005), pp. 205–221.
- [82] G. Zoutendijk, *Nonlinear Programming, Computational Methods*, in *Integer and Nonlinear Programming*, J. Abadie, ed., North-Holland, Amsterdam, 1970, pp. 37–86.

Biografija



Rođen sam 23. oktobra 1979. godine u Bačkoj Topoli. U rodnom gradu sam završio osnovnu školu i gimnaziju. Studije sam upisao 1998. godine u Novom Sadu na Prirodno-matematičkom fakultetu na Departmanu za matematiku i informatiku, smer diplomirani matematičar - matematika finansija. Diplomirao sam 2003. godine sa radom na temu „Regresiona analiza sa primenama na vremenske serije na Produktnoj berzi u Novom Sadu" i time završio osnovne studije sa prosečnom ocenom 9.12.

Magistarske studije, smer primenjena matematika, sam upisao na istom fakultetu. Predviđene ispite sam položio sa prosečnom ocenom 9.88, a 2009. godine sam odbranio magistarsku tezu pod naslovom „Komparativna analiza matematičkih modela setve na području Vojvodine". Godine 2012. sam upisao doktorske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Ispite sam položio sa prosečnom ocenom 9.42. Deo originalnog naučnog doprinosa iz disertacije je publikovan u međunarodnom časopisu. Koautor sam više naučnih radova i učestvovao sam na nekoliko međunarodnih i nacionalnih konferencija.

Od 2008. godine radim na Visokoj tehničkoj školi u Subotici. Kao predavač držim predavanja i vežbe iz matematičkih i nekih informatičkih predmeta.

Novi Sad, mart 2019.

Zoltan Pap

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Doktorska disertacija

VR

Autor: Zoltan Pap

AU

Mentor: Dr Sanja Rapajić

MN

Naslov rada: Projektivni postupci tipa konjugovanih gradijenata za rešavanje nelinearnih monotonih sistema velikih dimenzija

MR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s/e

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2019

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada:

(8, 128, 82, 21, 14, 0, 0)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Numerička matematika

ND

Ključne reči: nelinearni monotoni sistemi, projektivna metoda, linijsko pretraživanje koje ne koristi izvode, pravci pretraživanja tipa konjugovanih gradijenata

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Novi Sad

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: U disertaciji su posmatrani projektivni postupci tipa konjugovanih gradijenata za rešavanje nelinearnih monotoni sistema velikih dimenzija. Ovi postupci kombinuju projektivnu metodu sa pravcima pretraživanja tipa konjugovanih gradijenata. Zbog osobine monotosti sistema, projektivna metoda omogućava jednostavnu globalizaciju, a pravci pretraživanja tipa konjugovanih gradijenata zahtevaju malo računarske memorije pa su pogodni za rešavanje sistema velikih dimenzija. Projektivni postupci tipa konjugovanih gradijenata ne koriste izvode niti funkciju cilja i zasnovani su samo na izračunavanju vrednosti funkcije sistema, pa su pogodni i za rešavanje neglatkih monotoni sistema. Pošto se globalna konvergencija dokazuje bez pretpostavki o regularnosti, ovi postupci se mogu koristiti i za rešavanje sistema sa singularnim rešenjima.

U disertaciji su definisana tri nova tročlana pravca pretraživanja tipa Flečer-Rivs i dva nova hibridna pravca tipa Hu-Stori. Formulirani su projektivni postupci sa novim pravcima pretraživanja i dokazana je njihova globalna konvergencija. Numeričke performanse postupaka testirane su na relevantnim primerima i poređene sa poznatim postupcima iz literature. Numerički rezultati potvrđuju da su novi postupci robusni, efikasni i uporedivi sa postojećim postupcima.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 14. maj 2018.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Nataša Krejić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Sanja Rapajić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Nataša Krklec Jerinkić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Zoran Ovcin, docent, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: PhD thesis

CC

Author: Zoltan Pap

AU

Mentor: Dr. Sanja Rapajić

MN

Title: Projection based CG methods for large-scale nonlinear monotone systems

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: Serbian/English

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2019

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Faculty of Sciences, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description:

(8, 128, 82, 21, 14, 0, 0)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Numerical mathematics

SD

Key words: nonlinear monotone systems, hyperplane projection method, derivative-free line search, conjugate gradient search directions

SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: Projection based CG methods for solving large-scale nonlinear monotone systems are considered in this thesis. These methods combine hyperplane projection technique with conjugate gradient (CG) search directions. Hyperplane projection method is suitable for monotone systems, because it enables simply globalization, while CG directions are efficient for large-scale nonlinear systems, due to low memory. Projection based CG methods are function-value based, they don't use merit function and derivatives, and because of that they are also suitable for solving nonsmooth monotone systems. The global convergence of these methods are ensured without additional regularity assumptions, so they can be used for solving singular systems.

Three new three-term search directions of Fletcher-Reeves type and two new hybrid search directions of Hu-Storey type are defined. PCG algorithm with five new CG type directions is proposed and its global convergence is established. Numerical performances of methods are tested on relevant examples from literature. These results point out that new projection based CG methods have good computational performances. They are efficient, robust and competitive with other methods.

AB

Accepted by the Scientific Board on: May 14, 2018

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: Nataša Krejić, PhD, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Sanja Rapajić, PhD, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Nataša Krklec Jerinkić, PhD, Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Zoran Ovcin, PhD, Assistant Professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad