

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ
EVALUATION REPORT OF THE DOCTORAL DISSERTATION

I	ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ
I	DATA OF THE COMMITTEE
1.	Датум и орган који је именовео комисију Наставно-научно веће Природно-математичког факултета на 4. седници одржаној 20.12.2018.
2.	Састав комисије са знаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен: <ul style="list-style-type: none"> • др Дора Селеши, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду, уже научна област: анализа и вероватноћа, изабрана у звање 17.10.2017. године – председник • Академик др Стеван Пилиповић, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду, уже научна област: анализа и вероватноћа, датум избора у звање 25.2.1988. године – ментор • др Michael Oberguggenberger, редовни професор Института за базичне науке у инжењерским наукама Универзитета у Инзбруку, уже научна област: математика, датум избора у звање 1987. година – ментор <i>Michael Oberguggenberger, PhD, Full Professor, Institute of Basic Science in Engineering Sciences, University of Innsbruck, habilitation gained in 1987 – advisor</i> • др Данијела Рајтер-Ћирић, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду, уже научна област: анализа и вероватноћа, изабрана у звање 5.3.2012. године – члан • др Љубица Опарица, ванредни професор Педагошког факултета у Сомбору, уже научна област: математичке науке, изабрана у звање 1.4.2015. године – члан
II	ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ
II	DATA OF THE CANDIDATE
1.	Име, име једног родитеља, презиме: Снежана, Славко, Гордић
2.	Датум рођења, општина, држава: 8.8.1984. Власеница, Босна и Херцеговина
3.	Назив факултета, назив студијског програма дипломских академских студија – мастер и стечени стручни назив: Природно-математички факултет, Мастер академске студије, Математика – модул: Теоријска математика, 2007-2009, Дипломирани математичар – мастер
4.	Година уписа на докторске студије и назив студијског програма докторских студија: први пут уписана 2009., поновни упис 2016., Докторске академске студије – Математика.
5.	Назив факултета, назив магистарске тезе, научна област и датум одбране: /
6.	Научна област из које је стечено академско звање магистра наука: /

**III НАСЛОВ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:
III TITLE OF THE DOCTORAL DISSERTATION:**

Уопштени стохастички процеси са применама у решавању једначина

Generalized Stochastic Processes with Applications in Equation Solving

**IV ПРЕГЛЕД ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:
IV OVERVIEW OF THE DOCTORAL DISSERTATION:**

Навести кратак садржај са назнаком броја страна, поглавља, слика, шема, графикана и сл.
Specify a short content with an indication of the number of pages, chapters, images, charts, etc.

Докторска дисертација написана је на енглеском језику на 171 страници А4 формата. Садржи седам поглавља и 3 додатка у следећем редоследу:

1. *Introduction* / Увод
 2. *An Overview of the Colombeau Theory* / Преглед Коломбоове теорије
 3. *Translation Invariant Colombeau Generalized Functions* / Транслационо инваријантне Коломбоове уопштене функције
 4. *Colombeau Stochastic Processes* / Коломбоови стохастички процеси
 5. *Probabilistic Properties of Colombeau Stochastic Processes* / Пробабилистичке особине Коломбоових стохастичких процеса
 6. *Applications* / Примене
 7. *Conclusion* / Закључак
- A *An Overview of Background Theory* / Преглед теорија у позадини
B *Notation and Abbreviations* / Ознаке и скраћенице
C *Biographical Index* / Биографски индекс

Дисертација садржи и библиографију са 95 библиографских јединица, биографију кандидата на српском и енглеском језику, предговор на српском и енглеском језику, 2 слике. Поред наведеног садржи и кључне документацијске информације на српском и енглеском језику, захвалницу, списак слика, као и проширен извод на српском језику.

The doctoral dissertation contains 171 pages and is written in English. It consists of 7 chapters and 3 appendix chapters as listed above. In addition, the dissertation contains a bibliography enlisting 95 references, a short biography of the candidate in Serbian and English, key words documentation both in Serbian and English, preface in Serbian and English, a list of 2 figures, and an extended abstract in Serbian.

V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:
V EVALUATION OF THE INDIVIDUAL PARTS OF THE DOCTORAL DISSERTATION:

Наслов докторске дисертације је јасно и прецизно формулисан, одражава текст и садржај истраживања.

The title of the dissertation is clear and precise and corresponds to the content and research presented in the dissertation.

У првом поглављу су дефинисани предмет и циљеви истраживања. Дат је преглед различитих типова уопштених стохастичких процеса.

The subject and aims of the research are defined in the first chapter. An overview of different types of generalized stochastic processes is given.

Друго поглавље садржи преглед неких основних појмова Коломбоове теорије који су потребни за праћење осталих поглавља у дисертацији. Дате су дефиниције и основне особине позитивних и позитивно-дефинитних Коломбоових уопштених функција. Наведени су резултати о решивости једначине $P(D)u=f$, где је f дата Коломбоова уопштена функција и $P(D)$ је диференцијални оператор реда k са уопштеним реалним коефицијентима.

The second chapter represents an overview of some basic concepts of Colombeau theory, which are necessary to understand the subsequent chapters of the dissertation. Definitions and the most important properties of positive and positive-definite Colombeau generalized functions are given. Results on the solvability of the equation $P(D)u=f$ where f is a given Colombeau generalized function and $P(D)$ is a differential operator of order k with generalized real constant coefficients, are recalled.

У трећем поглављу проучаване су транслационо инваријантне Коломбоове уопштене функције. Транслациона инваријантност је важна особина у теорији стационарних стохастичких процеса. Познато је да су транслационо инваријантне Коломбоове функције на \mathbb{R}^d уопштене константе. Главни резултат овог поглавља је теорема која тврди да су транслационо инваријантне Коломбоове функције на отвореном конвексном подскупу у \mathbb{R}^d уопштене константе.

The third chapter deals with translation invariant Colombeau generalized functions. Translation invariance is a very important property in the theory of stationary stochastic processes. It is known that a translation invariant Colombeau generalized function over \mathbb{R}^d must be a generalized constant. The main result of this chapter is the theorem that claims that a translation invariant Colombeau generalized function over an open convex subset of \mathbb{R}^d must be a generalized constant.

Четврто поглавље је оригинални допринос дисертације. Дефинисано је неколико класа Коломбоових стохастичких процеса и проучаване су њихове основне особине. Уведен је појам уопштене случајне променљиве. Затим је уведен појам вредности Коломбоовог стохастичког процеса у тачкама са компактним носачем. Доказана је мерљивост одговарајуће случајне променљиве са вредностима у Коломбоовој алгебри уопштених константи са компактним носачем, снабдевену топологијом генерисаном оштрим отвореним лоптама.

The fourth chapter represents original contributions of this dissertation. Several classes of Colombeau stochastic processes are defined and their basic properties are studied. The notion of generalized random variables is introduced. The notion of point values of Colombeau stochastic processes in compactly supported generalized points is established. The Colombeau algebra of a compactly supported generalized constants is endowed with the topology generated by sharp open balls. The measurability of the corresponding random variables with values in the Colombeau algebra of compactly supported generalized constants is shown.

Пето поглавље је такође оригиналан допринос дисертације. Дефинисани су уопштено очекивање, уопштена корелацијска функција и уопштена карактеристична функција Коломбоовог стохастичког

процеса и потом су изучаване њихове особине. Показано је да се карактеристична функција класичног стохастичког процеса може потопити у простор уопштених карактеристичних функција. Дати су примери уопштених карактеристичних функција гаусовских Коломбоових стохастичких процеса. Дана је структурна репрезентација уопштене корелацијске функције са носачем на дијагонали. Коломбоови стохастички процеси са независним вредностима су представљени. Изучавани су строго стационарни и слабо стационарни Коломбоови стохастички процеси. Коломбоови стохастички процеси са стационарним прираштајима су окарактерисани преко стационарности градијента процеса.

The fifth chapter is also an original contribution of this dissertation. The generalized expectation, the generalized correlation and the generalized characteristic function of Colombeau stochastic processes are introduced and their properties are investigated. It is shown that the characteristic functions of classical stochastic processes can be embedded into the space of generalized characteristic functions. Examples of generalized characteristic functions related to Gaussian Colombeau stochastic processes are given. The structural representation of the generalized correlation function which is supported on the diagonal is given. Colombeau stochastic processes with independent values are introduced. Strictly stationary and weakly stationary Colombeau stochastic processes are studied. Colombeau stochastic processes with stationary increments are characterized via the stationarity of the gradient of the process.

Шесто поглавље је посвећено решавању класе стохастичких парцијалних диференцијалних једначина у оквирима стационарних гаусовских Коломбоових стохастичких процеса. У овом поглављу су коришћене технике Фуријеове трансформације. Дат је потребан услов за постојање стационарног гаусовског решења једначине $P(D)u = f$, где је $P(D)$ диференцијални оператор реда k са уопштеним константним коефицијентима и f је слабо стационаран темперирани гаусовски Коломбоов стохастички процес. Метод презентован у овом поглављу је примењен на решавање стационарне Клајн – Гордонове једначине. Ово поглавље је такође оригинални допринос дисертације.

The sixth chapter is devoted to solving a class of stochastic partial differential equations in the framework of stationary Gaussian Colombeau stochastic processes. Techniques of the Fourier transform are used in this chapter. A necessary condition for the existence of a stationary Gaussian solution to $P(D)u = f$, where $P(D)$ is a differential operator of order k with generalized constant coefficients and f is a weakly stationary tempered Gaussian Colombeau stochastic process, is given. The method developed in this chapter is applied to solve the stationary Klein – Gordon equation driven by higher order derivatives of white noise. This chapter is also an original contribution of this dissertation.

Последње поглавље садржи закључак дисертације и могуће правце за будући рад.

The last chapter provides a conclusion to the dissertation and possible directions for future work.

Први прилог дисертације садржи преглед дефиниција и теорема из области које су релевантне за праћење резултата изложених у тези: реалне и функционалне анализе, теорије дистрибуција, теорије мере и вероватноће.

The first appendix of the dissertation contains an overview of definitions and theorems from the mathematical areas that are relevant for the content presented in the dissertation: real and functional analysis, distribution theory, measure and probability theory.

Други прилог садржи листу ознака и листу скраћеница коришћених у дисертацији.

The second appendix contains a list of notation and list of abbreviations used in the dissertation.

Трећи прилог је биографски индекс.

The third appendix is a biographical index.


VI СПИСАК НАУЧНИХ И СТРУЧНИХ РАДОВА КОЈИ СУ ОБЈАВЉЕНИ ИЛИ ПРИХВАЋЕНИ ЗА ОБЈАВЉИВАЊЕ НА ОСНОВУ РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА У ОКВИРУ РАДА НА ДОКТОРСКОЈ ДИСЕРТАЦИЈИ

VI LIST OF SCIENTIFIC PAPERS PUBLISHED OR ACCEPTED FOR PUBLISHING BASED ON RESEARCH RESULTS DURING THE DOCTORAL DISERTATION PREPARATION

Таксативно навести називе радова, где и када су објављени. Прво навести најмање један рад објављен или прихваћен за објављивање у часопису са ISI листе односно са листе министарства надлежног за науку када су у питању друштвено-хуманистичке науке или радове који могу заменити овај услов до 01. јануара 2012. године. У случају радова прихваћених за објављивање, таксативно навести називе радова, где и када ће бити објављени и приложити потврду о томе.

1. [M22] Gordić, S., Oberguggenberger, M., Pilipović, S., Seleši, D., *Probabilistic properties of generalized stochastic processes in algebras of generalized functions*. Monatshefte für Mathematik, Vol. 189, No. 4, 2018, 609-633.
2. [M21] Gordić, S., Oberguggenberger, M., Pilipović, S., Seleši, D., *Generalized stochastic processes in algebras of generalized functions: independence, stationarity and SPDEs*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, prihvaćen za štampu 9.11.2018. (JMAA-18-959R1)

Потврда о прихватању рада 2.:

Journal of **MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS** Contact us Help ?  Username: stevan.pilipovic@dmi.uns.ac.rs Switch To: Author Go to: My EES Hub

[home](#) | [main menu](#) | [submit paper](#) | [guide for authors](#) | [register](#) | [change details](#) | [log out](#)

View Letter

[Close](#)

Date: Nov 09, 2018
To: "stevan.pilipovic" stevan.pilipovic@dmi.uns.ac.rs
From: "JMAA (ELS)" eesserver@eesmail.elsevier.com
Reply To: "JMAA (ELS)" jmaa@elsevier.com
Subject: JMAA-18-959R1 Final Decision

Ms. No.: JMAA-18-959R1
Title: Generalized stochastic processes in algebras of generalized functions: independence, stationarity and SPDEs
Corresponding Author: Professor stevan pilipovic
Authors: snezana gordic; michael oberguggenberger; dora selesi

Dear Professor pilipovic,

We are pleased to inform you that your manuscript referenced above has been accepted for publication in the Journal of Mathematical Analysis and Applications.

Many thanks for submitting your fine paper to the Journal of Mathematical Analysis and Applications. We look forward to receiving additional papers from you in the future.

With kind regards,

Steven Krantz, PhD
Editor-in-Chief
Journal of Mathematical Analysis and Applications

VII ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА
VII CONCLUSION, I.E., RESULTS OF THE RESEARCH

Основни резултати добијени у овој дисертацији су:

1. Дефинисани су Коломбоови стохастички процеси. Уведен је појам вредности Коломбоовог стохастичког процеса у тачкама са компактним носачем. Доказана је мерљивост одговарајуће случајне променљиве са вредностима у Коломбоовој алгебри уопштених константи са компактним носачем, снабдевеној топологијом генерисаном оштрим отвореним лоптама.
2. Уопштено очекивање, уопштена корелацијска функција и уопштена карактеристична функција Коломбоовог стохастичког процеса су проучавани. Дефинисани су Коломбоови стохастички процеси са независним вредностима и дата је карактеризација таквих процеса. Проучаване су особине стационарних Коломбоових стохастичких процеса, при чему је направљена разлика између строге стационарности и слабе стационарности. Коломбоови стохастички процеси са стационарним прираштајима су дефинисани преко стационарности градијента процеса.
3. Дат је метод за решавање једне класе стохастичких парцијалних диференцијалних једначина у оквирима стационарних гаусовских темперираних Коломбоових стохастичких процеса.

The main results obtained in this dissertation are the following:

1. *Colombeau stochastic processes are defined. The notion of point values of Colombeau stochastic processes in compactly supported generalized points is introduced. Measurability of the corresponding random variable with values in a Colombeau algebra of compactly supported generalized constants, endowed with topology generated by sharp open balls, is proven.*
2. *Generalized expectation, generalized correlation functions and generalized characteristic functions of Colombeau stochastic processes are studied. Colombeau stochastic processes with independent values are defined and the characterization of such processes is given. The properties of stationary Colombeau stochastic processes are studied, distinguishing between strict stationarity and weak stationarity. Colombeau stochastic processes with stationary increments are defined via stationarity of the gradient of the process.*
3. *A method for solving a class of stochastic partial differential equations in framework of stationary Gaussian tempered Colombeau stochastic processes is presented.*

VIII ОЦЕНА НАЧИНА ПРИКАЗА И ТУМАЧЕЊА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА
VIII EVALUATION OF THE PRESENTATION AND INTERPRETATION OF THE RESULTS

Експлицитно навести позитивну или негативну оцену начина приказа и тумачења резултата истраживања.

Explicitly give a positive or negative evaluation of the presentation and interpretation of the research results.

Кандидаткиња је у целости обавила истраживања предвиђена планом датим у пријави теме докторске дисертације. Материјал приказан у тези је изложен на адекватан начин, јасно и разумљиво. Увидом у коришћену литературу закључујемо да је кандидаткиња пришла истраживању познајући шире теоријске аспекте проблема, као и да је упозната са досадашњим сазнањима у области истраживања.

Дисертација у целини, као и њени појединачни делови имају добро систематизовану структуру и план излагања. Уводни експозиторни део дисертације је добро организован, садржи све релевантне дефиниције и теореме потребне за разумевање даљих делова излагања. Излагање резултата је јасно и прецизно организовано у логичке целине. Проблематика истраживања је јасно формулисана и мотивисана. Сами резултати истраживања су прецизно изложени, теоријски добро засновани, уз илустрацију преко бројних примера. Трећа, четврта, пета и шеста глава дисертације садрже оригиналне резултате истраживања кандидата који припадају актуелним токовима науке. Добијени резултати су публиковани у часописима са СЦИ листе категорије М21 и М22 (видети референце 1. и 2. под тачком VI).

Област којој припада тема дисертације се данас сматра једном од водећих математичких области. Добијени резултати у дисертацији су актуелни и на високом теоријском нивоу, оригинални су, квалитетни, и од изузетног значаја за савремене токове науке што обезбеђује релевантност тезе. Приказ свих резултата истраживања је добро организован по логичким целинама, формулација резултата је математички прецизна, докази теорема су тачно изведени и дате су и илустрације кроз примере. Тумачење добијених резултата је коректно изведено, уз детаљну анализу која пружа одговор на велики број питања.

Комисија констатује да је кандидаткиња адекватно тумачила добијене резултате и да начин приказа резултата у потпуности одговара карактеру спроведеног истраживања. Докторска дисертација је прошла проверу плагијарности применом софтвера *iThenticate*, који је показао да кумулативни проценат сличности износи 23%. Увидом у добијене податке Комисија је утврдила да преклапање постоји само са публикованим радовима саме кандидаткиње (преклапање од 12% са радом 1. из тачке VI) али управо претходно публикавање се захтева као услов за одбрану дисертације, те се не сме рачунати као плагијат. Пошто преклапање преосталог дела дисертације са другим појединачним изворима износи свуда <1% и засновано је на погрешној идентификацији фрагмената реченица, Комисија закључује да је ова докторска дисертација оригинално дело и да не представља плагијат.

The candidate has fully accomplished the research foreseen by the plan given in the proposal of the topic of the dissertation. The material presented in the dissertation has been laid out in a suitable, clear and understandable manner. Based on the referenced literature, it is clear that the candidate has approached the research fully aware of the wider theoretical aspects of the problems in question, and that she is familiar with the scientific positions in the addressed fields of research.

The dissertation as a whole, as well as its individual parts, has a well systematized structure and exposition plan. The introductory expository part of the dissertation is well organized; it contains all relevant definitions and theorems needed to understand all further parts of the exposition. The third, fourth, fifth and sixth chapter of the dissertation contain original research results that belong to contemporary scientific fields. The exposition of the results is clearly and precisely organized into logical sections. The research goal is clearly formulated and motivated. The very results of the research are precisely stated, on a high theoretical level, with many illustrating examples. The obtained results are published in renowned scientific journals from the SCI list that are of categories M21 and M22 (see references 1. and 2. in section VI).

The field the dissertation belongs to is considered as one of the leading mathematical disciplines of today. The results obtained in the dissertation are up-to-date and on a high theoretical level, they are original, of high quality and of remarkable importance for contemporary scientific progresses, which provides relevance of the dissertation. The presentation of the research results is well organized into logical sections, the formulation of the results is mathematically precise, the proofs of theorems are correctly deduced and also some illustrations by examples are provided. The interpretation of the obtained results is correctly elaborated, with a detailed analysis providing answers to a large number of questions.

*This committee concludes that the candidate has interpreted the obtained results appropriately and that the presentation of the research results is in full accordance with the nature of the undertaken research. The thesis has been checked for plagiarism using the *iThenticate* software, that resulted in a cumulative similarity overlapping of 23%, of which 12% is overlapping with the candidate's own paper 1./VI and*

overlapping with other resources is <1% for each individual resource only in fragments of sentences. Thus the committee concludes that this dissertation is an original work and shows no elements of plagiarism.

IX КОНАЧНА ОЦЕНА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

IX FINAL EVALUATION OF THE DOCTORAL DISSERTATION:

Експлицитно навести да ли дисертација јесте или није написана у складу са наведеним образложењем, као и да ли она садржи или не садржи све битне елементе. Дати јасне, прецизне и концизне одговоре на 3. и 4. питање:

Explicitly state whether or not the dissertation is written in accordance with the provided elaboration, as well as whether or not it contains all of the relevant elements. Provide clear, precise, and concise answers to questions 3 and 4:

1. Да ли је дисертација написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме?
Is the dissertation written in accordance with the elaboration stated in the submission of the topic of the dissertation?

Дисертација је у потпуности написана у складу са образложењем датим у пријави теме.

The doctoral dissertation is, in its entirety, written in accordance with the elaboration stated in the submission of the topic of the dissertation.

2. Да ли дисертација садржи све битне елементе?
Does the dissertation contain all of the relevant elements?

Дисертација садржи све битне елементе. Дат је приказ претходних резултата на које се дисертација ослања, детаљан преглед добијених нових оригиналних резултата (поглавља 4, 5 и 6), као и исцрпан списак релевантних референци. Дисертација је прегледна и добро организована.

The dissertation contains all relevant elements. It provides a summary of previous results on which the dissertation is based upon, a detailed overview of the newly obtained original results (chapters 4, 5 and 6), as well as a comprehensive listing of relevant references. The dissertation is clearly written and is well-organized.

3. По чему је дисертација оригиналан допринос науци?
In what way does the dissertation constitute an original contribution to science?

Дисертација садржи оригиналан научни допринос из области стохастичке анализе. Пробабилитичке особине Коломбоових стохастичких процеса су проучаване. Метод за решавање класе стохастичких парцијалних диференцијалних једначина у оквирима стационарних гаусовских темперираних Коломбоових стохастичких процеса је дат. Дисертација доноси релевантне доприносе теорији Коломбоових стохастичких процеса.

The dissertation contains an original scientific contribution in the field of stochastic analysis. Probabilistic properties of Colombeau stochastic processes are studied. The method of solving a class of stochastic partial differential equations in the framework of a stationary Gaussian tempered Colombeau stochastic processes is given. The dissertation provides relevant contributions to the theory of Colombeau stochastic processes.

4. Недостаци дисертације и њихов утицај на резултат истраживања.
The shortcomings of the dissertation and their influence on the results of the research.

Дисертација нема недостатака.

The dissertation has no shortcomings.

X ПРЕДЛОГ КОМИСИЈЕ:
X PROPOSAL OF THE COMMITTEE:

На основу укупне оцене дисертације, комисија предлаже да се докторска дисертација кандидаткиње Снежане Гордић, под називом *Уопштени стохастички процеси са применама у решавању једначина*, прихвати, а кандидаткињи одобри одбрана.

Based on the overall evaluation of the dissertation, this committee suggests that the doctoral dissertation of the candidate Snežana Gordić, entitled Generalized Stochastic Processes with Applications in Equation Solving, be accepted, and the candidate be granted the right to defend it.

На основу укупне оцене дисертације, комисија предлаже:

- **да се докторска дисертација прихвати, а кандидату одобри одбрана**

Датум: 23.01.2019.

НАВЕСТИ ИМЕ И ЗВАЊЕ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ
ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ

др Дора Селеши, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду,
председник комисије

Академик др Стеван Пилиповић, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду, ментор

Michael Oberguggenberger, PhD, Full Professor,
Institute of Basic Science in Engineering Sciences,
University of Innsbruck, advisor

др Данијела Рајтер Ћирић, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду, члан

др Љубица Опарница, ванредни професор Педагошког факултета у Сомбору, члан