УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

мр Душан Ђукић

Унутрашњост скраћених усредњених гаусовских квадратура и оцена грешке Гаус-Кронродових квадратура

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ментор: проф. др Миодраг М. Спалевић

Крагујевац, 2017.

УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

мр Душан Ђукић

Унутрашњост скраћених усредњених гаусовских квадратура и оцена грешке Гаус-Кронродових квадратура

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ментор: проф. др Миодраг М. Спалевић

Крагујевац, 2017.

Идентификациона страница докторске дисертације

Аутор

- Име и презиме: Душан Ђукић
- Датум и место рођења: 31.5.1981, Београд
- Запослење: асистент на Машинском факултету Универзитета у Београду

Докторска дисертација

- Наслов: Унутрашњост скраћених усредњених гаусовских квадратура и оцена грешке Гаус-Кронродових квадратура
- Број страна: 86
- Број слика и табела: 4 слике, 11 табела
- Установа у којој је израђена: Природно-математички факултет, Крагујевац
- Научна област (УДК): Математика 51
- Ментор: др Миодраг Спалевић, редовни професор на Машинском факултету Универзитета у Београду

Оцена и одбрана

- Датум пријаве теме: 29.5.2017.
- Број одлуке и датум прихватања теме дисертације: 440/IX-1, 14.6.2017.
- Комисија за оцену подобности теме и кандидата: број одлуке IV-01-704/13, 12.7.2017.
  - др Миодраг Спалевић, редовни професор, Машински факултет Универзитета у Београду
  - др Марија Станић, ванредни професор, Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу (председник комисије)
  - др Александар Пејчев, доцент, Машински факултет Универзитета у Београду
- Комисија за оцену и одбрану дисертације: број одлуке IV-01-1124/15, 13.12.2017.
  - др Марија Станић, редовни професор, Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу (председник комисије)
  - др Дејан Бојовић, ванредни професор, Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу
  - др Бранислав Поповић, ванредни професор, Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу
  - др Татјана Томовић, доцент, Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу
  - др Александар Пејчев, доцент, Машински факултет Универзитета у Београду
- Датум одбране докторске дисертације: ...

Сажетак

Онда када функција није позната аналитички, већ су познате само њене вредности добијене експериментално у неким тачкама, или пак њен интеграл није елементарно израчунљив, на располагању су различите методе квадратуре, тј. нумеричке интеграције. Многе од ових метода одређују приближну вредност интеграла коришћењем вредности функције у појединим тачкама - чворовима. Проблеми који се при томе јављају су разноврсни: од проналажења оптималних чворова и тежинских коефицијената (који су често такође нумерички одређени), преко што тачнијег израчунавања вредности функције у тим чворовима (ако је у њима функција уопште дефинисана), до процене грешке квадратурне формуле (која зависи како од квадратурне формуле, тако и од природе функције).

Једна од метода процене квадратурне грешке користи Гаус-Кронродова раширења Гаусових квадратурних формула. У овој дисертацији је разматрана једна модификација Гаусових квадратура, у виду тзв. уопштене усредњене гаусовске квадратуре, која може послужити као замена онда када Гаус-Кронродова квадратура не постоји или није практична. За ове квадратуре дати су неки услови под којима су сви њихови чворови унутар интервала интеграције. Такође су посматране Гаус-Кронродове формуле за тзв. Бернштајн-Сегеове тежинске функције и у тим случајевима су дате експлицитне оцене квадратурне грешке.

Abstract

When a function is not known analytically but only by a set of sampled values, or its integral is not an elementary function, various methods for quadrature, i.e. numerical integration can be used instead. Many of these methods use the values of the function at a finite set of points (nodes) to compute the approximate value of the integral. A variety of problems can arise throughout the process. These include finding optimal nodes and weights (often numerically, as well), evaluating the function accurately enough at the nodes (provided that these nodes are actually in its domain), or finding effective bounds for the quadrature error (which clearly depends on natures of both the quadrature and the function itself).

One useful method of estimating the quadrature error involves Gauss-Kronrod extensions of Gaussian quadrature formulae. This thesis discusses a modification of Gaussian quadratures, known as generalized averaged Gaussian quadratures, which may serve as a substitute when Gauss-Kronrod quadratures are not available. For these quadratures, some conditions are given under which all their nodes lie inside the domain of integration. Also, the thesis studies Gauss-Kronrod quadrature formulae in the case of Bernstein-Szegő weight functions and gives explicit bounds for the quadrature error.

Предговор

Широка класа квадратурних формула за приближну интеграцију заснива се на коришћењу интерполационих функција једноставних за интеграцију. Нарочито чест избор тих интерполационих функција су полиноми. Немачки математичар Карл Фридрих Гаус је 1814. године увео интерполациону квадратурну формулу са највећим могућим степеном тачности, користећи резултате свог рада о хипергеометријским развојима. Ова формула, названа по њему, касније је заузела централно место у нумеричкој интеграцији и развијана је у разним правцима и истраживана са различитих аспеката математике (теорије апроксимација, теорије мере, функционалне анализе, итд.). Проблематика истраживања Гаусових квадратура је и данас веома актуелна. Веома значајан проблем је испитивање остатка у Гаусовим квадратурним формулама. Године 1964. руски математичар и инжењер Кронрод је у том циљу увео квадратуре, касније назване Гаус-Кронродове, оптималним додавањем чворова постојећим Гаусовим квадратурама. Ове квадратуре су често називане квадратурама 20. века. Ипак, у новије време се испоставило да у многим случајевима овакве квадратуре са реалним чворовима и позитивним тежинским коефицијентима не постоје, па су тражене њихове алтернативе. Једну од њих је 2007. године предложио Спалевић у [40] у виду усредњених оптималних гаусовских квадратура. Ове формуле постоје и могу се ефикасно конструисати у многим случајевима када за Гаус-Кронродове формуле то није случај. Када број чворова расте, оне попримају особине Гаус-Кронродових формула. Штавише, доказано је у [44] да се за једну широку класу тежинских функција ове квадратуре заправо поклапају. Једна варијанта усредњених гаусовских квадратура нашла је примену у испитивању особина електронских мрежа, како директних (Твитер, Википедија, итд.), тако и индиректних (и-мејл, интернет, Фејсбук, итд.), о чему се може прочитати у [34]. У недавно објављеном раду истраживача са Берклија [38] ове формуле се користе за убрзавање конвергенције предложених метода.

На почетку прве главе дефинисани су ортогонални полиноми у односу на дату тежинску функцију и доказана њихова основна својства, са посебним освртом на класичне и Бернштајн-Сегеове тежинске функције. Остатак главе бави се квадратурним формулама и њиховом везом са ортогоналним полиномима. Показана су основна својства Гаусових квадратура и уведене одговарајуће симетричне тродијагоналне Јакобијеве матрице J_ℓ^G.

Нумерички стабилан поступак Голуба и Велша за конструкцију Гаусових квадратура, предложен 1969. године у [13], заснован је на особинама Јакобијевих матрица. Дати су услови под којима квадратурни процес конвергира тачној вредности интеграла. Један такав услов је позитивност квадратуре, те су наведени резултати Персторфера о условима под којима је квадратурна формула максималне тачности са датим чворовима позитивна. Потом су уведене Гаус-Кронродове квадратуре и наведени неки од резултата у вези с њима. На крају главе показана су нека тврђења о оцени грешке у квадратури, прво за непрекидно диференцијабилне, а онда и за аналитичке функције.

Друга и трећа глава дисертације садрже оригиналне резултате, објављене у радовима [2] и [3].

У другој глави разматране су уопштене усредњене квадратуре, уведене у [40]. Овде се разматра проширење Јакобијеве матрице J_ℓ^G додавањем нових врста и колона до симетричне тродијагоналне матрице $J_{k+\ell,\ell}$ реда $k+\ell$. Овакве квадратуре понекад дају већу тачност од одговарајућих Гаусових, али могу да имају и један спољашњи чвор (тј. чвор ван интервала интеграције). Зато су у [35] уведене скраћене верзије ових квадратура, добијене уклањањем последњих врста и колона матрице $J_{2\ell-1,\ell-1}$. Ове квадратуре су испитане коришћењем резултата Персторфера [27] о позитивним квадратурама. Затим су детаљно испитане скраћене уопштене усредњене квадратуре добијене додавањем само једне врсте и колоне матрици J_ℓ^G, и у случају класичних тежинских функција испитани су услови под којима су сви чворови овакве квадратуре унутрашњи. На крају главе приказани су нумерички резултати који илуструју строгост изведене анализе и понашање испитаних квадратура.

Трећа глава се бави оценама грешке у Гаус-Кронродовим квадратурама помоћу контурних интеграла по конфокалним елипсама $\mathcal{E}_\rho$ са збиром полуоса ρ. Ове оцене су засноване на оценама језгра K_n које је блиско повезано са ортогоналним и Стилтјесовим полиномима, π_n и π_{n+1}^*. У случају Бернштајн-Сегеових тежинских функција, ови полиноми су експлицитно описани у [24]. У овој глави дати су експлицитни изрази за модул језгра са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама. Анализирано је асимптотско понашање модула језгра и доказано је да се за довољно велико ρ модул језгра максимизује на реалној или имагинарној оси, осим за мале вредности броја чворова n које су одвојено испитане. Нумеричким резултатима на крају главе упоређене су добијене оцене грешке са онима у [24].

Захвалница

Ова дисертација је рађена на Природно-математичком факултету у Крагујевцу под менторством др Миодрага Спалевића.

Веома сам захвалан свом ментору, др Миодрагу Спалевићу, на великој помоћи, мотивацији и стрпљењу током докторских студија. Захваљујем се и колеги др Александру Пејчеву на помоћи и подршци, као и др Марији Станић на добронамерности и корисним саветима. Најзад, захвалан сам и осталим члановима комисије, др Дејану Бојовићу, др Браниславу Поповићу и др Татјани Томовић на примедбама и предлозима.

Дугујем велику захвалност и свом професору и пријатељу др Владимиру Јанковићу на подршци и охрабрењу током година.

Посебну захвалност дугујем породици и пријатељима на великој подршци и мотивацији.

«празна страница»

Садржај

Глава 1: Ортогонални полиноми и квадратурне формуле

1.1 Тежинске функције и ортогонални полиноми

Теорија ортогоналних полинома је настала у другој половини 19. века из радова Чебишова[1] о верижним разломцима.

Функцију $w:(a,b)\to\mathbb{R}$ дефинисану на коначном интервалу (a,b) зовемо *тежинском функцијом* ако је ненегативна и интеграбилна са строго позитивним интегралом. У случају да је интервал (a,b) бесконачан (тј. $a=-\infty$ и/или $b=\infty$), додатни услов је да интеграли

$$C_k=\int_a^b x^k w(x)dx \quad (k\in\mathbb{N})$$

апсолутно конвергирају. Интеграле C_k зовемо *моментима* функције ω.

На векторском простору $\mathcal{P}$ свих алгебарских полинома може се увести скаларни производ формулом

$$\langle P,Q\rangle=\int_a^b P(x)Q(x)w(x)dx.$$

Природно уводимо и норму:

$$\|P\|=\sqrt{\langle P,P\rangle}.$$

Тако за низ полинома $(Q_k(x))_{k=0}^{\infty}$ кажемо да је *ортогоналан* у односу на тежинску функцију w ако је

$$\deg Q_k=k$$

и

$$\langle Q_k,Q_l\rangle=0 \quad \text{ако и само ако је} \quad k\neq l.$$

[1] Пафнутий Львович Чебышёв (1821-1894), руски математичар

Сваки полином степена n је линеарна комбинација полинома $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ са једнозначно одређеним коефицијентима:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k Q_k(x), \quad \text{где је} \quad c_k = \frac{\langle P, Q_k \rangle}{\langle Q_k, Q_k \rangle}\,.$$

Одавде видимо да је полином Q_n ортогоналан на све полиноме степена мањег од n.

Испоставља се да низ ортогоналних полинома у односу на тежинску функцију w постоји ако и само ако су све *момент-детерминанте*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_{k-1} \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{k-1} & C_k & \cdots & C_{2k-2} \end{vmatrix}$$

различите од нуле. Заиста, ако напишемо услове ортогоналности у еквивалентном облику

$$\langle x^i, Q_k \rangle = 0 \ \text{ за } \ i = 0, 1, \dots, k-1,$$
$$\langle x^k, Q_k \rangle = K,$$

онда за коефицијенте полинома

$$Q_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_k x^k$$

добијамо систем једначина

$$C_i a_0 + C_{i+1} a_1 + \cdots + C_{i+k} a_k = 0, \quad 0 \leqslant i < k,$$
$$C_k a_0 + C_{k+1} a_1 + \cdots + C_{2k} a_k = K,$$

а он има јединствено решење (a_i) управо ако је $\Delta_k \neq 0$. Овако добијамо полином Q_n у облику

$$Q_n(x) = \frac{1}{\Delta_{n+1}} \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1} & C_k & \cdots & C_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}.$$

У складу са овом једнакошћу, има смисла увести систем ортогоналних полинома *у односу на низ*

$$\mathbf{c} = (C_i)_{i=0}^{N}.$$

Ови полиноми зависе само од низа $\mathbf{c}$, не и од саме тежинске функције w. Ипак, и за низ $\mathbf{c}$ постоје извесна ограничења.

Посматрајмо линеарни функционал на скупу реалних полинома степена највише m:

$$\alpha_c \left(\sum_{i=0}^{N} a_i x^i \right) = \sum_{i=0}^{N} C_i a_i.$$

Природно се захтева да важи

$$\alpha_c(q) > 0 \quad \text{кад год је} \quad q \neq 0,\ \deg q \leqslant m \quad \text{и} \quad q(x) \geqslant 0 \text{ за } x \in [a,b].$$

За овакав низ **c** кажемо да је *позитивно дефинитан.* Између осталог, јасно је да је низ момената тежинске функције позитивно дефинитан.

Кажемо да је полином $P_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ортогоналан у односу на позитивно дефинитан низ **c** ($2n-1 \leqslant m \leqslant N$) ако је

$$\alpha_c(x^k P_n(x)) = \sum_{i=0}^{n} a_i C_{k+i} = 0 \quad \text{за} \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Ортогонални полиноми (како у односу на тежинску функцију, тако и у односу на позитивно дефинитан низ) су међусобно повезани рекурентном везом другог реда.

Теорема 1.1. Ортогонални полиноми Q_k задовољавају рекурентну релацију облика

$$Q_{k+1}(x) = (\alpha_k x + \beta_k) Q_k(x) - \gamma_k Q_{k-1}(x) \tag{1.1}$$

за неке коефицијенте $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in \mathbb{R}$.

Доказ. Одаберимо α_k тако да $Q_{k+1}(x) - \alpha_k x Q_k(x)$ буде полином степена k. Овај полином се може написати као линеарна комбинација полинома $Q_0, \ldots, Q_k$:

$$Q_{k+1}(x) - \alpha_k x Q_k(x) = \sum_{i=0}^{k} r_i Q_i(x).$$

Тада за $j = 0, 1, \ldots, k-2$ важи

$$\begin{aligned} 0 = \langle Q_{k+1}, Q_j \rangle - \alpha_k \langle Q_k, x Q_j \rangle \quad &= \langle Q_{k+1} - \alpha_k x Q_k, Q_j \rangle \\ &= \sum_{i=0}^{k} r_i \langle Q_i, Q_j \rangle = r_j \langle Q_j, Q_j \rangle, \end{aligned}$$

па је $r_j = 0$ за $j \leqslant k-2$. Остаје

$$Q_{k+1}(x) - \alpha_k x Q_k(x) = r_k Q_k(x) + r_{k-1} Q_{k-1}(x),$$

па се може узети $\beta_k = r_k$ и $\gamma_k = -r_{k-1}$. $\Box$

Ако све полиноме Q_k подесимо тако да буду монични, важиће $\alpha_k = 1$ за све k, па горња рекурентна веза постаје

$$Q_{k+1}(x) = (x + \beta_k) Q_k(x) - \gamma_k Q_{k-1}(x).$$

При томе је

$$\beta_k = \frac{\langle x Q_k, Q_k \rangle}{\|Q_k\|^2}$$

и

$$\gamma_k = \frac{\langle xQ_{k-1}, Q_k\rangle}{\|Q_{k-1}\|^2} = \frac{\|Q_k\|^2}{\|Q_{k-1}\|^2} > 0.$$

Међутим, не постоји једноставна експлицитна формула за ове коефицијенте у општем случају.

Важи и тврђење обратно тврђењу теореме 1.1.

Теорема 1.2. Ако низ полинома (Q_k) задовољава рекурентну релацију (1.1) за неке низове коефицијената (α_k), (β_k) и (γ_k) такве да је $\gamma_k > 0$ за све k, онда постоји тежинска функција w ограничене варијације у односу на коју су полиноми (Q_k) ортогонални. □

Ово тврђење је познато као *Фаварова*[2] *теорема* (1935), иако се веома слично тврђење појављује и у Стилтјесовим[3] радовима о верижним разломцима неколико деценија раније.

Наводимо тзв. *Кристофел*[4]*-Дарбуов*[5] *идентитет.*

Теорема 1.3. Ортогонални полиноми задовољавају релацију

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{Q_k(x)Q_k(t)}{\|Q_k\|^2} = \frac{1}{\alpha_n\|Q_n\|^2} \cdot \frac{Q_{n+1}(x)Q_n(t) - Q_n(x)Q_{n+1}(t)}{x-t}. \tag{1.2}$$

Доказ. Множење релације (1.1) са $Q_k(t)$ даје

$$Q_{k+1}(x)Q_k(t) = (\alpha_k x + \beta_k)Q_k(x)Q_k(t) - \gamma_k Q_{k-1}(x)Q_k(t). \tag{1.3}$$

Заменом места x и t у (1.3) и одузимањем добијене једнакости од (1.3) добијамо

$$\begin{aligned} Q_{k+1}(x)Q_k(t) - Q_k(x)Q_{k+1}(t) = \quad & \alpha_k(x-t)Q_k(x)Q_k(t) \\ & -\gamma_k[Q_{k-1}(x)Q_k(t) - Q_k(x)Q_{k-1}(t)]. \end{aligned}$$

Ако овде означимо

$$R_k = \frac{Q_{k+1}(x)Q_k(t) - Q_{k+1}(t)Q_k(x)}{\alpha_k\|Q_k\|^2},$$

претходна једнакост након дељења са $\alpha_k\|Q_k\|^2$ постаје

$$(x-t)\frac{Q_k(x)Q_k(t)}{\|Q_k\|^2} = R_k - R_{k-1}.$$

Остаје само да се ова једнакост сумира по k. □

[2] Jean Favard (1902-1965), француски математичар
[3] Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894), холандски математичар
[4] Elwin Bruno Christoffel (1829-1900), немачки математичар и физичар
[5] Jean-Gaston Darboux (1842-1917), француски математичар

Још једно важно својство ортогоналних полинома је да су све њихове нуле реалне и различите и међусобно испреплетане.

Теорема 1.4. Ако са $\xi_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ означимо нуле полинома Q_n, онда су $\xi_i^{(n)}$ реални бројеви и важи

$$\xi_1^{(n+1)} < \xi_1^{(n)} < \xi_2^{(n+1)} < \xi_2^{(n)} < \cdots < \xi_n^{(n+1)} < \xi_n^{(n)} < \xi_{n+1}^{(n+1)}.$$

Доказ. Сматраћемо да су полиноми Q_i монични.

Користимо индукцију по n. База $n = 0$ је тривијална. Претпоставимо да тврђење важи за $n - 1$, тј.

$$\xi_1^{(n)} < \xi_1^{(n-1)} < \xi_2^{(n)} < \cdots < \xi_n^{(n-1)} < \xi_{n+1}^{(n)}.$$

Одавде следи да су

$$Q_{n+1}(\xi_i^{(n)}) = -\gamma_n Q_{n-1}(\xi_i^{(n)}) \quad \text{и} \quad Q_{n+1}(\xi_{i+1}^{(n)}) = -\gamma_n Q_{n-1}(\xi_{i+1}^{(n)})$$

супротног знака, па између $\xi_i^{(n)}$ и $\xi_{i+1}^{(n)}$ постоји нула полинома Q_{n+1}.

Најзад, Q_{n+1} има по једну нулу у интервалима $(-\infty, \xi_1^{(n)})$ и $(\xi_n^{(n)}, \infty)$, јер је

$$Q_{n+1}(\xi_n^{(n)}) < 0 \quad \text{и} \quad (-1)^{n-1} Q_{n+1}(\xi_1^{(n)}) < 0,$$

чиме је индукција завршена. □

Испоставља се да важи и обратно тврђење: ако су нуле двају полинома P_n и P_{n-1} степена n и $n-1$ реалне и међусобно испреплетане, онда ови полиноми припадају систему ортогоналних полинома у односу на неку тежинску функцију.

1.2 Класичне и Бернштајн-Сегеове тежинске функције

1.2.1 Класичне тежинске функције

Тежинска функција w назива се *класичном* ако задовољава диференцијалну једначину

$$\frac{d}{dx}[A(x)w(x)] = B(x)w(x),$$

где је $B(x)$ опадајући линеаран полином, $B(a) > 0$ и $B(b) < 0$ (ако је a, односно b коначно) и

$$A(x) = \begin{cases} (b-x)(x-a), & |a|, |b| < \infty, \\ x - a, & |a| < b = \infty, \\ b - x, & |b| < -a = \infty, \\ 1, & -a = b = \infty. \end{cases}$$

Решење ове диференцијалне једначине је

$$w(x) = \frac{C}{A(x)} e^{\int \frac{B(x)}{A(x)} dx} = \begin{cases} (b-x)^\alpha (x-a)^\beta, & |a|, |b| < \infty, \\ (x-a)^s e^{rx}, & |a| < b = \infty, \\ (b-x)^t e^{-rx}, & |b| < -a = \infty, \\ e^{\int B(x) dx}, & -a = b = \infty, \end{cases}$$

где је

$$B(x) = rx + q$$

и

$$\alpha = \frac{B(b)}{b-a} - 1, \quad \beta = -\frac{B(a)}{b-a} - 1, \quad s = B(a) - 1 \quad \text{и} \quad t = -B(b) - 1.$$

Ако без смањења општости претпоставимо да је (a, b) један од интервала $(-1, 1)$, $(0, \infty)$, $(-\infty, \infty)$, за тежинску функцију се може узети

$$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad w(x) = x^s e^{-x}, \quad w(x) = e^{-x^2},$$

при чему су $\alpha, \beta, s > -1$.

Размотримо посебно случај

$$w(x) = w^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad x \in [-1, 1].$$

Из диференцијалне једначине налазимо да је

$$B(x) = (\beta - \alpha) - (\alpha + \beta + 2)x.$$

Одговарајући ортогонални полиноми $P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ се зову *Јакобијеви*[6] *полиноми*. Њихови специјални случајеви су (до на множење константом):

- за $\alpha = \beta = 0$: Лежандрови[7] полиноми $P_k(x)$
- за $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$: Чебишовљеви полиноми прве врсте $T_k(x)$;
- за $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$: Чебишовљеви полиноми друге врсте $U_k(x)$;
- за $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$: Гегенбауерови[8] полиноми $C_k^\lambda(x)$.

Чебишовљеви полиноми прве, друге, треће и четврте врсте, редом, дати су формулама

$$\begin{aligned} T_n(\cos\theta) &= \cos n\theta, & U_n(\cos\theta) &= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \\ V_n(\cos\theta) &= \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}, & W_n(\cos\theta) &= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \end{aligned} \tag{1.4}$$

и задовољавају исту рекурентну везу:

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x),$$

где је P било које од слова T, U, V, W.

[6] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), немачки математичар
[7] Adrien-Marie Legendre (1752-1833), француски математичар
[8] Leopold Gegenbauer (1849-1903), аустријски математичар

1.2.2 Бернштајн-Сегеове модификације

Уместо класичних, могу да се посматрају *Бернштајн*[9]-*Сегеове*[10] тежинске функције које се добијају дељењем класичних тежинских функција $w^{(\alpha,\beta)}(t)$ ($|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{2}$) произвољним квадратним полиномом $\rho(t)$ који је строго позитиван на интервалу $[-1, 1]$:

$$w^{(\pm\frac{1}{2})}(t) = \frac{(1-t^2)^{\pm\frac{1}{2}}}{\rho(t)} \quad \text{и} \quad w^{(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2})}(t) = \frac{(1-t)^{\pm\frac{1}{2}}(1+t)^{\mp\frac{1}{2}}}{\rho(t)}\,.$$

Реалан полином $\rho(t)$ тачног степена 2 је позитиван на интервалу $[-1, 1]$ ако и само ако је облика

$$\rho(t) = \beta(\beta - 2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta - \alpha)t + (\alpha^2 + \delta^2),$$

где је $0 < \alpha < \beta$ ($\beta \neq 2\alpha$) и $|\delta| < \beta - \alpha$. Ова карактеризација је показана у [9]. Специјално, за $\delta = 0$ полином $\rho(t)$ се своди на

$$\rho(t) = \alpha^2 \left(1 - \frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2} t^2\right),$$

где је $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}(\gamma + 1)$.

Природно се очекује да ортогонални полиноми $\pi_n^{(\pm\frac{1}{2})}$ и $\pi_n^{(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2})}$ у односу на Бернштајн-Сегеове тежинске функције буду у једноставној вези са ортогоналним полиномима за одговарајуће класичне тежниске функције. Заиста, испоставља се да важи

$$\begin{aligned}
\pi_n^{(-1/2)} &= \frac{1}{2^{n-1}}\left[T_n + \frac{2\delta}{\beta}T_{n-1} + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)T_{n-2}\right] \qquad (n \geqslant 2),\\
\pi_n^{(1/2)} &= \frac{1}{2^{n-1}}\left[U_n + \frac{2\delta}{\beta}U_{n-1} + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)U_{n-2}\right] \qquad (n \geqslant 1),\\
\pi_n^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})} &= \frac{1}{2^{n-1}}\left[W_n + \frac{2\delta}{\beta}W_{n-1} + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)W_{n-2}\right] \quad (n \geqslant 2),\\
\pi_n^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(t;\alpha,\beta,\delta) &= (-1)^n \pi_n^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(-t;\alpha,\beta,-\delta),
\end{aligned}$$

уз засебне случајеве

$$\pi_1^{(-1/2)}(t) = t + \frac{\delta}{\beta - \alpha} \qquad \text{и} \qquad \pi_1^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(t) = t + \frac{\alpha + \delta}{\beta}\,.$$

[9] Сергей Натанович Бернштейн (1880-1968), руски/совјетски математичар
[10] Gábor Szegő (1895-1985), мађарски математичар

1.3 Нумеричка интеграција

Претпоставимо да треба да израчунамо интеграл

$$\int_a^b f(x)dx,$$

где је f реална непрекидна функција на интервалу $[a, b]$. Сматраћемо без смањења општости да је $[a, b] = [-1, 1]$.

Наведени интеграл може да не буде елементарно израчунљив. Такође, функција f може да буде задата само табеларно, нпр. на основу неких експеримената или мерења. У таквим случајевима се мора прибећи нумеричкој интеграцији.

Природна идеја је да се функција f апроксимира полиномом. Једна могућност је да то буде Лагранжов[11] интерполациони полином. За дату функцију f и чворове $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-1, 1]$, Лагранжов интерполациони полином p_{n-1} је јединствени полином степена највише $n-1$ који у тачкама x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ узима вредности $f(x_i)$. Тај полином је дат формулом

$$p_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) f(x_i),$$

где је

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,. \tag{1.5}$$

Очекујемо да је тада

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \int_{-1}^{1} p_{n-1}(x)dx,$$

што даје *квадратурну формулу*, или скраћено *квадратуру*, реда n:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i), \tag{1.6}$$

где су

$$w_i = \int_{-1}^{1} L_i(x)dx \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

квадратурне тежине. Приметимо да вредности w_i не зависе од функције f, већ само од чворова квадратуре x_i.

У специјалном случају када су чворови равномерно размакнути, тј.

$$x_{i+1} = -1 + \frac{2i}{n-1} \quad \text{за} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

[11] Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), италијанско-француски математичар и астроном

добија се *Њутн*[12]*-Коутсова*[13] *квадратурна формула* реда n.

<u>*Пример 1.1.*</u> Размотримо Њутн-Коутсове формуле за мало n.

У случају $n = 2$ је $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $L_1(x) = \frac{1-x}{2}$, $L_2(x) = \frac{1+x}{2}$ и $w_1 = w_2 = 1$, па тада добијамо *трапезну формулу*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(a) + f(b).$$

У случају $n = 3$, када је $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, добија се *Симпсоново*[14] *правило*:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}\left(f(-1) + 4f(0) + f(1)\right).$$

Детаљније о Њутн-Коутсовим формулама може се видети у [19].

Кажемо да квадратура (1.6) има *алгебарски степен тачности* k ако је тачна кад год је f полином степена не већег од k. Јасно је да степен тачности формуле (1.6) није мањи од $n-1$. Ипак, уз погодан избор чворова x_i, могуће је постићи да степен тачности буде већи од $n-1$.

Уместо Лагранжовог, може се користити Ермитов[15] интерполациони полином. За дате чворове интерполације x_i и реалне вредности y_i и z_i ($i = 1, \ldots, n$), Ермитов интерполациони полином p_{2n-1} је јединствени полином степена $2n-1$ такав да је

$$p_{2n-1}(x_i) = y_i \quad \text{и} \quad p'_{2n-1}(x_i) = z_i,$$

и дат је формулом

$$p_{2n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i H_i(x) + z_i K_i(x)\right),$$

где су

$$\begin{aligned} H_i(x) &= L_i(x)^2[1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i)], \\ K_i(x) &= L_i(x)^2(x - x_i), \end{aligned}$$

а L_i је дефинисано као у (1.5).

Претпоставимо да је f непрекидна и диференцијабилна функција на интервалу $[-1, 1]$, и да је тежинска функција w позитивна, непрекидна и интеграбилна на $(-1, 1)$. У овом моменту, чворове квадратуре x_i нећемо фиксирати. Ако функцију f апроксимирамо Ермитовим полиномом, у квадратурној формули за приближно израчунавање интеграла

$$\int_{-1}^{1} f(x)w(x)dx$$

[12] Isaac Newton (1642-1727), енглески математичар, физичар и астроном

[13] Roger Cotes (1682-1716), енглески математичар

[14] Thomas Simpson (1710-1761), енглески математичар

[15] Charles Hermite (1822-1901), француски математичар

у општем случају учествоваће изводи $f'(x_i)$ чије вредности није увек лако одредити. Заиста,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)w(x) &\approx \int_{-1}^{1} p_{2n-1}(x)w(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} W_i f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} V_i f'(x_i),\end{aligned}$$

где су

$$W_i = \int_{-1}^{1} H_i(x)w(x)dx \quad \text{и} \quad V_i = \int_{-1}^{1} K_i(x)w(x)dx.$$

Пожељно је да имамо квадратурну формулу у којој се изводи не појављују, тј. у којој су коефицијенти V_i једнаки нули. Имамо

$$V_i = \int_{-1}^{1} L_i(x)^2(x-x_i)w(x)dx = C\int_{-1}^{1} \pi_n(x)L_i(x)w(x)dx,$$

где је C реална константа и

$$\pi_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

Према томе, да би важило $V_i = 0$ за све i, довољно је да полином π_n буде ортогоналан на све полиноме степена мањег од n у односу на тежинску функцију $w(x)$. Самим тим, π_n ће бити ортогоналан и на полином L_k јер је $\deg L_k = n-1$, те ће бити $V_k = 0$. Тако добијамо *Гаусову*[16] *квадратурну формулу*:

$$\int_{-1}^{1} f(x)w(x)dx \approx \mathcal{G}_n(f) = \sum_{i=1}^{n} W_i f(x_i). \tag{1.7}$$

1.4 Гаусове квадратурне формуле

И у овом одељку сматрамо да је интервал интеграције $[-1,1]$.

Гаусова квадратурна формула (1.7) има степен тачности $2n-1$ и то је једина квадратура са тим својством.

Теорема 1.5. Квадратурна формула (1.6) има степен тачности $2n-1$ ако и само ако су чворови x_i нуле полинома Q_n у систему ортогоналних полинома $(Q_i)_{i=0}^{\infty}$ у односу на тежинску функцију $w(x)$.

[16]Johan Carl Friedrich Gauß (1777-1855), немачки математичар

Доказ. Смер „ако” смо већ доказали.

За смер „само ако” довољно је приметити да за полином

$$\pi_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

важи

$$\int_{-1}^{1} x^m \pi_n(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^m \pi_n(x_i) = 0$$

за $m = 0, 1, \ldots, n-1$ (јер је степен полинома $x^m \pi_n(x)$ не већи од $2n-1$), што управо значи да је полином π_n ортогоналан. □

Пошто је $H_i(x) = L_i(x)^2 - 2L_i'(x_i)L_i(x)^2(x - x_i)$, интеграција сада даје

$$W_i = \int_{-1}^{1} H_i(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} L_i(x)^2 w(x)dx - 2L_i'(x_i)V_i = \int_{-1}^{1} L_i(x)^2 w(x)dx.$$

Одавде је $W_k > 0$ у (1.7).

Теорема 1.6. (а) Тежине W_i у Гаусовој квадратури могу се изразити формулом

$$W_k = \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \cdot \frac{\|Q_n\|^2}{Q_{n-1}(x_k)Q_n'(x_k)}\,, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где су α_i, γ_i коефицијенти из рекурентне везе (1.1).

(б) $\displaystyle\frac{1}{W_k} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{Q_i(x_k)^2}{\|Q_i\|^2}.$

Доказ. Ако се у Кристофел-Дарбуовој формули (1.2) замени $t = x_k$, а затим се добијена једнакост помножи са $w(x)$ и интеграли на $[-1, 1]$, добија се

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{Q_i(x_k)}{\|Q_i\|^2} \int_{-1}^{1} Q_i(x)w(x)dx = \frac{-Q_{n+1}(x_k)}{\alpha_n \|Q_n\|^2} \int_{-1}^{1} \frac{Q_n(x)}{x - x_k} w(x)dx,$$

па како је лева страна једнака 1, одавде је

$$W_k = -\frac{\alpha_n \|Q_n\|^2}{Q_n'(x_k)Q_{n+1}(x_k)}\,.$$

Тражена једнакост следи из једнакости $Q_{n+1}(x_k) = -\gamma_n Q_{n-1}(x_k)$.

Једнакост (б) добија се стављањем $x \to t = x_k$ у Кристофел-Дарбуов идентитет. □

1.4.1 Конструкција Гаусових квадратурних формула

Природно се поставља питање конструкције Гаусових квадратура. На први поглед, потребни параметри x_i и W_i могу се добити решавањем система једначина

$$\sum_{i=1}^{n} W_i x_i^k = C_k \quad \text{за} \quad k = 0, 1, \ldots, 2n-1,$$

где су C_k моменти тежинске функције w. Међутим, овакав приступ није погодан, најпре због *слабе условљености* овог система - другим речима, мале промене улазних величина (нпр. у овом случају коефицијената) могу да изазову велике промене у решењу.

Другачији приступ је описан у [13]. Систем моничних ортогоналних полинома $(Q_k)_{k=0}^{\infty}$ задовољава релацију

$$Q_{k+1} = (x - \beta_k)Q_k - \gamma_k Q_{k-1}.$$

Посматрајмо сада, уместо моничних, ортонормиране полиноме

$$\bar{Q}_k = \frac{Q_k}{\|Q_k\|}\,.$$

Знамо да је тада

$$\|Q_i\| = \sqrt{\gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_k}.$$

Тако се рекурентна веза за полиноме Q_k своди на

$$\sqrt{\gamma_{i+1}}\bar{Q}_{i+1}(x) = (x - \beta_i)\bar{Q}_i(x) - \sqrt{\gamma_i}\bar{Q}_{i-1}(x),$$

при чему је

$$\bar{Q}_{-1}(x) = 0 \quad \text{и} \quad \bar{Q}_0(x) = C_0^{-1/2}.$$

Према томе, вектори

$$\vec{q}_n(x) = \begin{bmatrix} \bar{Q}_0(x) & \bar{Q}_1(x) & \ldots & \bar{Q}_{n-1}(x) \end{bmatrix}^T$$

задовољавају једнакост

$$x\vec{q}_n(x) = J_n \vec{q}_n(x) + \sqrt{\gamma_n}\bar{Q}_n(x)\vec{e}_n,$$

где је $\vec{e}_n = [0 \ \ldots \ 0 \ 1]^T$ и J_n је тродијагонална симетрична матрица:

$$J_n = \begin{bmatrix} \beta_0 & \sqrt{\gamma_1} & & & 0 \\ \sqrt{\gamma_1} & \beta_1 & \sqrt{\gamma_2} & & \\ & \sqrt{\gamma_2} & \beta_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{\gamma_{n-1}} \\ 0 & & & \sqrt{\gamma_{n-1}} & \beta_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Матрица J_n је тзв. *Јакобијева матрица.*

Приметимо да за чворове x_k важи

$$J_n\vec{q}_n(x_k) = x_k\vec{q}_n(x_k),$$

тј. x_k је сопствена вредност, а $\vec{q}_n(x_k)$ сопствени вектор матрице J_n.

Тежине W_k се такође могу одредити ако су нам познати (ортонормирани) сопствени вектори $v_1, \ldots, v_n$ матрице J_n који одговарају вредностима $x_1, \ldots, x_n$, редом. Заиста, знамо да је

$$\frac{1}{W_k} = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{Q}_i(x_k)^2 = \vec{q}_n(x_i)^T\vec{q}_n(x_i);$$

при томе је

$$\vec{q}_n(x_k) = \alpha v_k$$

за неко $\alpha \in \mathbb{R}$ које се може одредити посматрањем последње координате:

$$\bar{Q}_n(x_k) = \vec{q}_n(x_k)^T \cdot e_n = \alpha v_k^T \cdot e_n.$$

На овај начин, проблем одређивања параметара Гаусове квадратуре се своди на налажење сопствених вредности и сопствених вектора симетричне тродијагоналне матрице, нпр. QR-алгоритмом.

1.5 Конвергенција квадратурних формула

Посматрајмо низ квадратурних формула

$$I(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx = \mathcal{K}_n(f) + \mathcal{R}_n(f), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где је

$$\mathcal{K}_n(f) = \sum_{i=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}). \tag{1.8}$$

Овде су $x_i^{(n)}$ чворови такви да је

$$a \leqslant x_1^{(n)} \leqslant x_2^{(n)} \leqslant \cdots \leqslant x_n^{(n)} \leqslant b,$$

а $A_k^{(n)}$ одговарајући тежински коефицијенти.

Нумеричка интеграција губи смисао ако се не можемо надати конвергенцији низа $\mathcal{K}_n(f)$. Зато је важно испитати под којим условима остатак $\mathcal{R}_n(f)$ тежи нули, тј. када важи

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{K}_n(f) = I(f). \tag{1.9}$$

Подсетимо се следећег основног тврђења из функционалне анализе, познатог и као *принцип униформне ограничености.*

Теорема 1.7 (*Банах*[17]-*Штајнхаус*[18]). Нека је X Банахов простор, Y нормиран простор, а $\mathcal{F}$ нека фамилија ограничених линеарних оператора из X у Y. Ако за свако $x \in X$ важи $\sup_{A\in\mathcal{F}} \|Ax\| < \infty$, онда је

$$\sup_{A\in\mathcal{F}} \|A\| < \infty. \square$$

Другим речима, ако је фамилија ограничених оператора ограничена у свакој тачки, онда је она униформно ограничена.

Теорема 1.8. Потребан и довољан услов да једнакост (1.9) важи за сваку непрекидну функцију f на интервалу $[a, b]$ је да (1.9) важи кад год је f полином, и да притом постоји константа $M > 0$ таква да је

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i^{(n)}| \leqslant M \quad \text{за свако} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказ. Једнакошћу (1.8) задат је линеаран функционал $\mathcal{K}_n$. Овај функционал је ограничен на простору $C[a, b]$ јер је

$$|\mathcal{K}_n(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |A_i^{(n)}| \cdot |f(x_i^{(n)})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |A_i^{(n)}| \cdot \|f\| = M\|f\|,$$

где је

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|.$$

Према томе,

$$|\mathcal{K}_n(f) \leqslant \|\mathcal{K}_n\| \cdot \|f\| \quad \text{за свако} \quad f \in C[a, b], \tag{1.10}$$

при чему је

$$\|\mathcal{K}_n\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |A_i^{(n)}|.$$

Да бисмо тачно одредили норму $\|\mathcal{K}_n\|$, изаберимо функцију $g \in C[a, b]$ такву да је

(i) $g(x_i^{(n)}) = \operatorname{sgn} A_i^{(n)}$ за свако i;
(ii) g је линеарна на $[x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]$;
(iii) g је константна на $[a, x_1^{(n)}]$ и $[x_n^{(n)}, b]$.

Тада је $\|g\| = 1$ и

$$\mathcal{K}_n(g) = \sum_{i=1}^{n} A_i^{(n)} \operatorname{sgn} A_i^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} |A_i^{(n)}|,$$

[17] Stefan Banach (1892-1945), пољски математичар
[18] Władysław Hugo Dionizy Steinhaus (1887-1972), пољски математичар

па из (1.10) за $f \equiv g$ добијамо $\|\mathcal{K}_n\| \geqslant \sum_{i=1}^{n} |A_i^{(n)}|$, те је заправо

$$\|\mathcal{K}_n\| = \sum_{i=1}^{n} |A_i^{(n)}|.$$

Како је скуп полинома свуда густ у $C[a,b]$, тврђење теореме следи на основу Банах-Штајнхаусове теореме. □

Последица. Ако су тежински коефицијенти $A_i^{(n)}$ ненегативни за све n и i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, онда једнакост (1.9) важи за свако $f \in C[a,b]$ ако и само ако важи за сваки полином.

Доказ. Заменом $f(x) \equiv 1$ у (1.9) добијамо

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^{(n)} = b - a,$$

па је услов претходне теореме испуњен за $M = b - a$, што завршава доказ. □

Из претходног одмах следи да Гаусове квадратурне формуле конвергирају ка $I(f)$.

С друге стране, услови тврђења нису задовољени у случају Њутн-Коутсових формула, јер су у њима за $n \geqslant 8$ неки од тежинских коефицијената негативни. У следећем примеру из [47], вредности које нам дају Њутн-Коутсове формуле заправо дивергирају - ово понашање је познато под именом *Рунгеов феномен.*

Пример 1.2. При покушају нумеричког израчунавања интеграла

$$I = \int_{-5}^{5} \frac{dx}{1+x^2} \tag{1.11}$$

применом Њутн-Коутсових формула са n чворова, равномерно размакнутих у интервалу $[-5,5]$, добијају се резултати I_n дати табелом 1.1.

Видели смо да Њутн-Коутсове квадратуре дају вредности интеграла Лагранжовог интерполационог полинома $p_n(x)$ степена n за функцију f са чворовима $x_0, \dots, x_n$. Међутим, испоставља се да Лагранжови интерполациони полиноми не обезбеђују добру апроксимацију функције $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ у овом примеру: важи

$$\lim_{n\to\infty} \max_{-5\leqslant x\leqslant 5} |f(x) - p_n(x)| = \infty.$$

Ово својство је последица понашања функције $f(x)$ у комплексној равни - ван интервала интеграције $[a,b] = [-5,5]$. Наиме, ако је f аналитичка

Табела 1.1: Вредности добијене израчунавањем интеграла (1.11) Њутн-Коутсовом формулом са n чворова.

n	I_n
1	0,38462
2	6,79487
3	2,08145
4	2,37401
5	2,30769
6	3,87045
7	2,89899
8	1,50049
9	2,39862
10	4,67330
11	3,24477
12	−0,31294
13	1,91980
14	7,89954
15	4,15556

функција у области $\mathcal{D}$ у комплексној равни у чијој се строгој унутрашњости налази интервал интеграције, показује се да важи

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z-x} \prod_{j=0}^{n} \frac{x - x_j}{z - x_j}\, dz,$$

где је C граница области $\mathcal{D}$. Специјално, ако се узме $r > |b-a|$ и

$$\mathcal{D} = \{z \mid (\exists t \in [a,b])|z-t| \leqslant r\},$$

а $M = \max_{z\in\mathcal{D}} |f(z)|$, одавде следи

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant \left(r + \frac{b-a}{\pi}\right) M \cdot \left(\frac{b-a}{r}\right)^{n+1},$$

што тежи нули када $n \to \infty$. Дакле, под овим условима низ полинома p_n равномерно конвергира ка функцији f, па и Њутн-Коутсове квадратуре конвергирају.

За функцију $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ови услови не могу бити задовољени: она има полове, тј. није аналитичка у области $\mathcal{D}$ ни за једно $r > |b-a| = 10$.

1.6 Генерисање позитивних квадратура

За квадратурну формулу

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^{n} d_i f(x_i)$$

кажемо да је *позитивна* ако су њене тежине d_i позитивне.

У одељку 1.5 смо видели да позитивне квадратуре обезбеђују конвергенцију када $n \to \infty$, што нам је веома важно. Позитивним квадратурним формулама се бавио Персторфер у свом раду [27]. У овом одељку биће приказани неки од његових резултата. Овде без смањења општости сматрамо да је интервал интеграције $(a, b) = (-1, 1)$.

Разуме се да ће у општем случају квадратура

$$\int_{-1}^{1} f(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^{n} d_i f(x_i),$$

где су

$$-1 < x_1 < \cdots < x_n < 1,$$

имати мањи степен тачности од Гаусове. Зваћемо је $(2n-1-m, n, w)$-квадратуром ако је тачна за све полиноме f степена не већег од $2n-1-m$.

Казаћемо да полином P_n степена n *генерише* $(2n-1-m, n, w)$-квадратуру ако P_n има n једноструких нула $x_1 < \cdots < x_n$ у интервалу $(-1, 1)$ и квадратура максималне тачности са овим чворовима има тачност бар $2n-1-m$. Познато је да полином P_n генерише $(2n-1-m, n, w)$-квадратуру ако и само ако је ортогоналан на све полиноме степена не већег од $n-1-m$.

Полиному q_n тачног степена n придружићемо полином $q_{n-1}^{[1]}$ дат изразом

$$q_{n-1}^{[1]}(x) = \int_{-1}^{1} \frac{q_n(x) - q_n(y)}{x - y} w(y)dy.$$

Полином $q_{n-1}^{[1]}$ има тачан степен $n-1$. Тада су тежине d_i у горњој квадратури дате формулама

$$d_i = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{(x - x_i)P_n'(x_i)} w(x)dx = \frac{P_{n-1}^{[1]}(x_i)}{P_n'(x_i)},$$

где је

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i).$$

Према томе, позитивност тежина d_i је еквивалентна испреплетаности нула полинома P_n и $P_{n-1}^{[1]}$.

Лако се проверава да је

$$P_{n-1}^{[1]}(x) = \alpha_c \left(\frac{P_n(x) - P_n(y)}{x - y} \right),$$

где је

$$\alpha_c \left(\sum_{i=0}^{N} a_i x^i \right) = \sum_{i=0}^{N} C_i \alpha_i,$$

а C_i су моменти тежинске функције w. Ови полиноми $P_n^{[1]}$ задовољавају рекурентну везу са коефицијентима помереним за једну позицију:

$$P_{-1}^{[1]}(x) = 0, \quad P_0^{[1]}(x) = 1$$

и

$$P_{n+1}^{[1]}(x) = (x - \beta_{n+1})P_n^{[1]}(x) - \gamma_{n+1}P_{n-1}^{[1]}(x).$$

Понављањем овог поступка могу да се уведу и низови полинома

$$P_n^{[k]} = \left(P_n^{[k-1]}\right)^{[1]}$$

за свако $k \geqslant 1$. Они очигледно задовољавају везе

$$P_{-1}^{[k]}(x) = 0, \quad P_0^{[k]}(x) = 1$$

и

$$P_{n+1}^{[k]}(x) = (x - \beta_{n+k})P_n^{[k]}(x) - \gamma_{n+k}P_{n-1}^{[k]}(x).$$

Ови полиноми су у међусобној вези:

$$P_{n+1}^{[k]} = (x - \beta_{k+1})P_n^{[k+1]} - \gamma_{k+2}P_{n-1}^{[k+2]}.$$

Такође, за $2j \leqslant n$ важи

$$P_n^{[k]} = A \cdot P_{n-j}^{[k]} - B \cdot P_{n-j-1}^{[k]} \quad \Longleftrightarrow \quad A = P_j^{[n+k-j]},\ B = \gamma_{n+k-j}P_{j-1}^{[n+k+1-j]}.$$

Показује се да важи

$$P_{n-1}P_{n-1}^{[1]} - P_nP_{n-2}^{[1]} = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{n-1},$$

што с обзиром на испреплетаност нула полинома P_n и P_{n-1} даје такође испреплетеност нула P_n и $P_{n-1}^{[1]}$. Штавише, нуле полинома $P_n^{[k]}$ су реалне и испреплетане, како са нулама $P_{n-1}^{[k]}$, тако и са нулама $P_{n-1}^{[k+1]}$.

Теорема 1.9. Нека су $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \leqslant n$, и нека је P_n моничан полином степена n. Следећа тврђења су еквивалентна:

- P_n генерише позитивну $(2n-1-m, n, w)$-квадратуру;
- P_n је ортогоналан полином у односу на неки позитивно дефинитни низ $(C_i)_{i=0}^{2n-1}$ такав да је

$$C_i = \int_{-1}^{1} x^i w(x)dx \quad \text{за} \quad i = 0, \ldots, 2n-1-m;$$

- P_n се је члан неког низа датог условима $P_{-1} = 0$, $P_0 = 1$ и рекурентним везама

$$P_{i+1}(x) = (x - \beta_i')P_i(x) - \gamma_i'P_{i-1}(x),$$

  при чему је

$$\gamma_i' > 0, \quad \beta_i' = \beta_i \ \text{ за } \ i \leqslant n - [\tfrac{m+1}{2}] \quad \text{и} \quad \gamma_i' = \gamma_i \ \text{ за } \ i \leqslant n - [\tfrac{m}{2}],$$

  и још $P_i(1) > 0$ и $(-1)^iP_i(-1) > 0$;

- ако је $k = [\frac{m+1}{2}]$, постоје монични полиноми q_k и g_{k-1} степена k и $k-1$ чије су нуле у $(-1,1)$, једноструке и међусобно испреплетане, такви да је
$$P_n = g_k \pi_{n-k} - \gamma_{n-k} g_{k-1} \pi_{n-k-1},$$
при чему је
$$\gamma'_{n-i} > 0, \quad \gamma'_{n-i} = \gamma_{n-i} \text{ за } m = 2i-1,$$
и још $P_n(1) > 0$ и $(-1)^n P_n(-1) > 0$. $\square$

1.7 Гаус-Кронродове квадратурне формуле

Један начин да се процени грешка $\mathcal{R}_n(f)$ у Гаусовој квадратури је да се посматрају две формуле, са m и n чворова ($m > n$) и да се узме

$$|\mathcal{R}_n(f)| \approx |\mathcal{G}_n(f) - \mathcal{G}_m(f)|.$$

Недостатак ове оцене је потреба за израчунавањем вредности функције у релативно великом броју нових чворова да би се добила прихватљива оцена $\mathcal{R}_n$. Нпр. за $m = n+1$ потребно је израчунати вредности функције f у $n+1$ нових чворова само да би се добила квадратура $\mathcal{G}_{n+1}$ тачности $2n+1$ уместо $2n-1$. Одавде проистиче потреба за увођењем оптималних квадратурних формула у којима су неки од чворова унутар интервала интеграције фиксирани. Овај случај је разматрао Кронрод[19] (1964).

Посматрајмо Гаусову квадратуру

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R_n(f) \tag{1.12}$$

која има алгебарски степен тачности $2n-1$. Њени чворови су нуле ортогоналног полинома Q_n. Претпоставимо да тражимо квадратуру са већим степеном тачности која користи све вредности функције које су коришћене и у (1.12). То би била квадратура облика

$$\int_a^b f(t)w(t)dt = \sum_{i=1}^{n} B_i f(x_i) + \sum_{j=1}^{m} C_j f(x_j^*) + R'_n(f) \tag{1.13}$$

са m нових чворова x_j^*. Треба одредити ових m нових чворова и $n+m$ тежина B_i $(i = 1, \ldots, n)$ и C_j $(j = 1, \ldots, m)$ тако да степен тачности формуле (1.13) буде максималан. То даје укупно $n+2m$ непознатих, па очекујемо да максималан степен тачности буде $n+2m-1$. Да бисмо побољшали Гаусову квадратуру (1.12), мора да важи $n+2m-1 > 2n-1$, тј. $m \geqslant [\frac{n}{2}] + 1$.

[19]Александр Семёнович Кронрод (1921-1986), совјетски математичар и информатичар

Посматрајмо полином

$$Q_m^*(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - x_i^*).$$

Нека је f произвољан полином степена не већег од $n + 2m - 1$. Постоје полиноми $g(x)$ и $h(x)$ такви да је

$$f(x) = Q_n(x)Q_m^*(x) \cdot g(x) + h(x), \tag{1.14}$$

и $\deg h \leqslant n + m - 1$ (тада је и $\deg g \leqslant m - 1$). Како у (1.13) имамо $R_n'(h) = 0$, заменом (1.14) у (1.13) следи да формула (1.13) има степен тачности $n+2m-1$ ако и само ако је полином

$$Q_n(x)Q_m^*(x)$$

ортогоналан на сваки полином g степена не већег од $m - 1$. Ово се своди на услове

$$\int_a^b x^k Q_n(x)Q_m^*(x)w(x)dx \quad \text{за} \quad k = 0, 1, \ldots, m - 1.$$

Испоставља се да овај систем услова може бити испуњен само за $m \geqslant n+1$.

Од интереса је случај $m = n + 1$. У том случају одговарајући полином Q_{n+1}^* је тзв. Стилтјесов (моничан) полином, а нови чворови x_i^* су његове нуле. Добијена формула

$$\int_a^b f(t)w(t)dt = \mathcal{Q}_n(f) + \mathcal{R}_n(f), \tag{1.15}$$

где је

$$\mathcal{Q}_n(f) = \sum_{i=1}^{n} W_i f(x_i) + \sum_{i=1}^{n+1} W_i^* f(x_i^*),$$

зове се Гаус-Кронродова квадратурна формула. Ове формуле је у [17, 18] увео Кронрод са циљем процене грешке у Гаусовим квадратурама.

Степен тачности Гаус-Кронродове квадратурне формуле $\mathcal{Q}_n$ је $d \geqslant 3n+1$. Очигледна предност употребе ове квадратуре у односу на Гаусову квадратуру $\mathcal{G}_{n+1}$ је што сада (уз претпоставку да нам је Гаусова квадратура $\mathcal{G}_n$ позната) израчунавањем $n+1$ нових вредности функције f добијамо квадратуру тачности бар $3n + 1$.

Међутим, главни проблем је што Гаус-Кронродове квадратуре не постоје за сваку тежинску функцију. Наиме, за разлику од ортогоналних полинома, нуле Стилтјесових полинома Q_{n+1}^* не морају да буду ни реалне, а ни садржане у интервалу $[a, b]$.

Сеге је доказао у [48] да Гаус-Кронродове формуле постоје за Гегенбауерове тежинске функције $w(x) = (1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ на интервалу $[-1, 1]$ кад год је $0 \leqslant \lambda \leqslant 2$. С друге стране, Персторфер и Петрас су доказали у [29] да за $\lambda > 3$ и довољно велико n овакве позитивне формуле не постоје.

Кронрод се прво бавио случајем тежинске функције $w(x) = 1$ на интервалу $[-1, 1]$. Мада је тада формула (1.15) тачна за све полиноме f степена не већег од $3n+1$, испоставља се да је за парно n алгебарски степен тачности формуле заправо $3n+2$.

Такође се поставља питање како ефикасно конструисати полиноме Q^*_{n+1}. За $w(x) = 1$, одговарајуће полиноме Q^*_{n+1} је још 1894. године разматрао Стилтјес, који је доказао да је за $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{\kappa_n(x)} = Q^*_{n+1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{x^i} \quad \text{за неке } a_i \in \mathbb{R},$$

где је κ_n Лежандрова функција друге врсте. Функција $y(x) = \kappa_n(x)$ задовољава Лежандрову диференцијалну једначину

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

и има облик

$$\kappa_n(x) = A(x) \ln \frac{1+x}{1-x} + B(x),$$

где су A и B редом полиноми степена n и $n-1$.

Монегато се у [20, 21] бавио позитивношћу Кронродових формула у општем случају и доказао да су у случају $w(x) = 1$ коефицијенти W_i и W_i^* у (1.15) позитивни.

У случају тежинских функција $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ и $w(x) = (1-x^2)^{1/2}$ на интервалу $(a, b) = (-1, 1)$, Монегато је доказао да су степени тачности редом $4n-1$ и $4n+1$. При томе, у случају $w(x) = (1-x^2)^{1/2}$ важи

$$Q^*_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x),$$

где је T_n Чебишовљев полином прве врсте (1.4). У том случају је

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{1/2} dx = \frac{\pi}{2(n+1)} \sum_{i=1}^{2n+1} (1-x_i^2) f(x_i) + R_{2n+1}(f),$$

где су

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{2(n+1)} \quad \text{за} \quad k = 1, \ldots, 2n+1.$$

Занимљиво је (видети [8]) да је још Скуч[20] у [39] (1894) указао на могућност добијања формуле степена тачности $3n+1$ допуном Гаусове квадратуре са $n+1$ чворова. Он је такође навео да се степен тачности Гаусове квадратуре не може поправити уметањем мање од $n+1$ чворова, што је касније доказао Монегато у [22]. Скуч је своју тврдњу поткрепио нумеричким израчунавањем интеграла $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x+3} = \ln 2$ на 11 децимала. Непознато је да ли је Стилтјес знао за овај рад; тек, у свом последњем писму Ермиту, он је разматрао ортогоналне полиноме у односу на тежинске функције променљивог знака, који заиста имају везе са Кронродовим квадратурама, али саме квадратуре није помињао.

[20] Rudolf Skutsch (1870-1929), немачки инжењер

1.8 Оцена грешке у квадратури

Видели смо да се при нумеричкој интеграцији јавља грешка - остатак квадратурне формуле $\mathcal{R}_n(f)$:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + \mathcal{R}_n(f).$$

Грешка се такође јавља при израчунавању суме

$$\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i),$$

али она зависи од тачности израчунавања.

У овом одељку укратко ће бити приказане две методе за оцену остатка квадратуре. Прва метода је применљива на непрекидно-диференцијабилне функције, а други на аналитичке функције.

Приметимо за почетак да је $\mathcal{R}_n$ линеаран функционал дефинисан на некој класи интеграбилних функција.

1.8.1 Непрекидно диференцијабилне функције

Теорема 1.10 (*Пеано*[21]). Претпоставимо да је $\mathcal{R}_n(f) = 0$ за сваки полином f степена не већег од m. Тада за сваку функцију $f \in C^{m+1}[a,b]$ важи

$$\mathcal{R}_n(f) = \int_a^b K_m(t) f^{m+1}(t)dt, \tag{1.16}$$

где је

$$K_m(t) = \frac{1}{m!}\mathcal{R}_n(u) \tag{1.17}$$

и

$$u(x) = (x-t)_+^m = \begin{cases} (x-t)^m, & \text{за } x \geqslant t, \\ 0, & \text{за } x < t. \end{cases} \tag{1.18}$$

Доказ. Познато нам је да се остатак E_m у Тејлоровом[22] развоју

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x-a)^m + E_m$$

може написати у облику

$$E_m = \frac{1}{m!}\int_a^x f^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt = \frac{1}{m!}\int_a^b f^{(m+1)}(t)(x-t)_+^m dt.$$

[21] Giuseppe Peano (1858-1932), италијански математичар

[22] Brook Taylor (1685-1731), енглески математичар

Одавде следи

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_n(f) = & \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)\mathcal{R}_n\left((x-a)^i\right) + \frac{1}{m!}\mathcal{R}_n\left(\int_a^b f^{(m+1)}(t)(x-t)_+^m dt\right) \\ = & \frac{1}{m!}\int_a^b f^{(m+1)}(t)\mathcal{R}_n(u)dt\end{aligned}$$

након замене места интеграла и оператора $\mathcal{R}_n$, јер је $\mathcal{R}_n\left((x-a)^i\right) = 0$. Тиме је доказ завршен. □

Функција $K_m(t)$ се назива *Пеаново језгро* за функционал $\mathcal{R}_n$. Једнакост (1.17) се може записати као

$$m!K_m(t) = \int_a^b (x-t)_+^m w(x)dx - \sum_{x_k>t} A_k(x_k-t)^m,$$

уз ознаку (1.18). У случају $w(x) \equiv 1$ то се своди на

$$m!K_m(t) = \frac{(b-t)^{m+1}}{m+1} \sum_{x_k>t} A_k(x_k-t)^m.$$

Последица. Ако језгро K_m не мења знак на интервалу $[a,b]$, онда је

$$\mathcal{R}_n(f) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\mathcal{R}_n\left(x^{m+1}\right)$$

за неко $\xi \in (a,b)$.

Доказ. По теореми о средњој вредности, из (1.16) следи да је

$$\mathcal{R}_n(f) = f^{(m+1)}(\xi)\int_a^b K_m(t)dt$$

за неко $\xi \in (a,b)$. С друге стране, убацивање функције $g(x) = x^{m+1}$ у (1.16) уместо функције f даје

$$\mathcal{R}_n(x^{m+1}) = (m+1)!\int_a^b K_m(t)dt.$$

Комбиновањем ове две једнакости следи тврђење. □

Пример 1.3. Одредимо остатак у трапезној формули: имамо $n=2$, $m=1$ и

$$\mathcal{R}_2(f) = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)).$$

У овом случају је

$$K_1(t) = \int_a^b (x-t)_+dx - \frac{b-a}{2}((a-t)_+ + (b-t)_+) = \frac{1}{2}(a-t)(b-t) \leqslant 0.$$

Сада последица теореме 1.10 даје

$$R_2(f) = \frac{1}{2} f''(\xi) R_2(x^2) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

за неко $\xi \in (a, b)$.

1.8.2 Аналитичке функције

Нека је сада f функција у комплексној равни која је регуларна у диску $|z| < 1$ и непрекидна на $\Gamma = \{z \mid |z| = 1\}$. Овакве функције чине Хилбертов[23] простор L^2 са скаларним производом

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma f(z) \overline{g(z)} ds,$$

где је s елемент дужине криве Γ. У овом простору систем функција $(z^n)_{n=0}^\infty$ је ортонормиран јер је

$$\langle z^m, z^n \rangle = \frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma z^m \bar{z}^n ds = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

па тако за норму функције

$$g(z) = \sum_{i=0}^\infty a_i z^i$$

важи

$$\|g\|_2^2 = \langle g, g \rangle = \sum_{k=0}^\infty |a_k|^2.$$

Претпостављамо да је

$$-1 < a < b < 1 \quad \text{и} \quad -1 < x_k < 1 \ \text{ за } \ k = 1, \ldots, n.$$

Теорема 1.11. Норма функционала $\mathcal{R}_n$ задовољава неједнакост

$$\|\mathcal{R}_n\|_2 \leqslant \left(\sum_{k=0}^\infty \left| \mathcal{R}_n(z^k) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Доказ. Пошто је по Кошијевој[24] формули (због $d\xi = 2\xi ds$)

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{1 - z\xi} ds,$$

следи

$$\mathcal{R}_n(f) = \frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma f(\xi) \mathcal{R}_n \left(\frac{1}{1 - z\xi} \right) ds.$$

[23] David Hilbert (1862-1943), немачки математичар
[24] Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), француски математичар и физичар

Одавде по Коши-Шварцовој[25] неједнакости имамо

$$|\mathcal{R}_n(f)|^2 \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\oint_\Gamma |f(\xi)|^2 ds \oint_\Gamma \left|\mathcal{R}_n\left(\frac{1}{1-z\xi}\right)\right| ds. \tag{1.19}$$

Како је

$$A = \mathcal{R}_n\left(\frac{1}{1-z\xi}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{R}_n(z^k)\bar{\xi}^k,$$

имамо

$$K^2 = \frac{1}{4\pi^2}\oint_\Gamma |Q|^2 ds = \frac{1}{2\pi}\|Q\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\mathcal{R}_n(z^k)\right|^2.$$

Тако се (1.19) своди на

$$|\mathcal{R}_n(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2 \cdot 4\pi^2 \cdot K^2,$$

одакле следи тврђење. □

Ако посматрамо f као функцију у простору X_r $(r > 1)$ аналитичких функција унутар диска $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\}$ за које важи $|f|_r < \infty$, где је

$$|f|_r = \sup\{|a_k| r^k \mid k \in \mathbb{N}_0, \mathcal{R}_n(t^k) \neq 0\},$$

онда ће на сличан начин $\mathcal{R}_n$ бити линеаран функционал на простору X_r са полунормом $|\cdot|_r$. Норма тог функционала ће бити

$$\|\mathcal{R}_n\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\mathcal{R}_n(t^k)|}{r^k},$$

тако да је

$$|\mathcal{R}_n(f)| \leqslant \|\mathcal{R}_n\| \cdot |f|_r,$$

Онда када је величину $|f|_r$ тешко израчунати, уместо ње може да се узме норма у L_2 или L_∞. Заиста,

$$|f|_r \leqslant \|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left(\int_{|z|=r} |f(z)|^2 |dz|\right)^{1/2},$$
$$|f|_r \leqslant \|f\|_\infty = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

У случају Гаус-Кронродових квадратура, ако чланови низа

$$\mathcal{R}_n(t^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

не мењају знак, ова норма се своди на

$$\|\mathcal{R}_n\| = r\left|\frac{1}{\pi_n(r)\pi_{n+1}^*(r)}\int_{-1}^{1} \frac{\pi_n(t)\pi_{n+1}^*(t)}{r-t} w(t) dt\right|.$$

[25] Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), немачки математичар

Ако се $|f|_r$ замени са $|f|_\infty$, ова оцена се може добити и помоћу контурних интеграла. Нека је Γ проста затворена крива у комплексној равни која окружује цео интервал $[-1,1]$, а $\mathcal{D}$ њена унутрашњост. Ако је функција f аналитичка у $\mathcal{D}$ и непрекидна у $\overline{\mathcal{D}}$, онда је

$$\mathcal{R}_n(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma K_n(z) f(z) dz,$$

где је језгро K_n дато формулом

$$K_n(z) = \frac{1}{\pi_n(z)\pi_{n+1}^*(z)}\int_{-1}^{1}\frac{\pi_n(t)\pi_{n+1}^*(t)}{z-t}w(t)dt.$$

Тако добијамо оцену грешке

$$|\mathcal{R}_n(f)| \leqslant \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi}\left(\max_{z\in\Gamma}|K_n(z)|\right)\|f\|_\infty,$$

где је са $\ell(\Gamma)$ означена дужина криве Γ.

За криву Γ често се узима:

- кружница $C_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ са полупречником $r > 1$, или
- елипса $\mathcal{E}_\rho$ са жижама у тачкама ± 1 и збиром полуоса $\rho > 1$:

$$\mathcal{E}_\rho = \left\{z \in \mathcal{C} \mid z = \frac{1}{2}\left(\rho e^{i\theta} + \rho^{-1}e^{-i\theta}\right),\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\right\}.$$

Глава 2: Скраћене усредњене гаусовске квадратуре

2.1 Увод

Нека је $d\sigma$ (ненегативна) мера и нека је $[a, b]$ најмањи затворени интервал који садржи носач мере $d\sigma$, при чему је $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Претпостављамо да дистрибутивна функција σ има бесконачно много тачака раста у овом интервалу. Ако је σ апсолутно непрекидна функција, онда је

$$d\sigma(x) = w(x)\, dx$$

на носачу $\mathrm{supp}(d\sigma)$, где је $w(x) \geqslant 0$ тежинска функција.

Са $\mathbb{P}_k$ означавамо скуп свих полинома степена највише k и уводимо квадратурну формулу

$$Q_n[f] = \sum_{j=1}^{n} \omega_j f(x_j)$$

са различитим реалним чворовима $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ и реалним тежинама ω_j. Нека је m цео број такав да је $0 \leqslant m \leqslant n$. За квадратуру Q_n кажамо да је $(2n - m - 1, n, d\sigma)$-квадратура ако за остатак $R_n[f]$, дат са

$$\int f(x)\, d\sigma(x) = Q_n[f] + R_n[f],$$

важи $R_n[f] = 0$ за све $f \in \mathbb{P}_{2n-m-1}$. Тада кажемо да квадратура Q_n има *алгебарски степен тачности* $2n-m-1$. Ако су при том све квадратурне тежине ω_j позитивне, кажемо да је Q_n *позитивна* $(2n - m - 1, n, d\sigma)$-квадратура. Даље, кажемо да полином

$$t_n = \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)$$

генерише $(2n - m - 1, n, d\sigma)$-квадратуру ско су његове нуле x_j реалне и једноструке и постоји $(2n - m - 1, n, d\sigma)$-квадратура са чворовима $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Квадратуру зовемо *унутрашњом* ако су сви њени чворови у затвореном интервалу $[a, b]$. Чворове ван интервала $[a, b]$ зовемо *спољашњим.*

Познато је да се Гаусова квадратурна формула са ℓ чворова придружена мери $d\sigma$ може представити реалном симетричном $\ell \times \ell$ тродијагоналном матрицом $J_\ell^G(d\sigma)$ одређеном коефицијентима у рекурентним релацијама првих ℓ ортогоналних полинома у односу на меру $d\sigma$; видети нпр. [7] или доле.

Спалевић [40] је предложио да се матрица $J_\ell^G(d\sigma)$ допуни њеном водећом тродијагоналном подматрицом $(\ell-1)\times(\ell-1)$ пресликаном одозго надоле и здесна налево. Тако добијена симетрична тродијагонална матрица $J_{2\ell-1,\ell-1}$ реда $2\ell-1$ одређује квадратурну формулу са $(2\ell-1)$ чворова познату као *уопштена усредњена гаусовска квадратура.* Спалевић је у [41] показао да овакве квадратурне формуле могу да дају мању квадратурну грешку од неких других формула истог алгебарског степена тачности. Ово чини уопштене усредњене гаусовске квадратуре привлачним за коришћење онда када се вредности интегранда могу једноставно израчунати у чворовима, али је компликовано одредити моменте који одређују Гаусову квадратуру.

Једна примена уопштених усредњених гаусовских квадратура у проблемима ове врсте показана је у [35], где су ове квадратуре коришћене у оцени неких битних величина у анализи мрежа. У наведеном случају, одређивање сваке врсте и колоне матрице $J_\ell^G(d\sigma)$ захтева множење вектора матрицом инциденције која одређује граф. Оваква множења изискују велики број операција ако је матрица инциденције велика.

Гаучи је у [7, поглавље 2.2], а такође и у [5], описао још неке примене у случајевима када коефицијенти у рекурентним везама за ортогоналне полиноме у односу на меру $d\sigma$ нису познати у експлицитном облику, тако да би се морали приближно израчунати како би се одредиле Гаусове квадратуре. Он је предложио превазилажење овог проблема дискретизацијом мере $d\sigma$. Тада се ови коефицијенти могу приближно израчунати Стилтјесовом методом за ову дискретну меру. Ипак, оваква израчунавања могу да буду компликована, нарочито ако је жељена Гаусова квадратура вишег степена, а дискретизација финија. У том случају, коришћење уопштених усредњених гаусовских квадратура уместо уобичајених Гаусових може да има предност, јер оне за исти скуп доступних коефицијената у рекурентним везама често дају већу тачност; неки примери су показани у одељку 2.5.

У овој глави ћемо описати проширења Гаусових формула у виду уопштених усредњених гаусовских квадратурних формула уведених у [40]. У одељку 2.2 разматра се проширење реалне симетричне тродијагоналне $\ell \times \ell$ матрице $J_\ell^G(d\sigma)$, придружене Гаусовој квадратури са ℓ чворова у односу на меру $d\sigma$, до реалне симетричне тродијагоналне матрице $J_{k+\ell,k}$ реда $k+\ell$ додавањем произвољне реалне симетричне тродијагоналне матрице реда k. Слично уопштеним усредњеним гаусовским формулама које је увео Спалевић у [40], и ова проширења могу да дају мању квадратурну грешку него гаусовске квадратуре са ℓ чворова од којих су настале.

Одељак 2.3 се бави могућим постојањем спољашњих чворова у уопштеним усредњеним гаусовским квадратурама. Познато је да чворови уобичајених Гаусових квадратурних формула леже у конвексном омотачу носача одговарајуће мере. Спалевић је показао у [40] да уопштене усредњене гаусовске квадратуре могу да имају један чвор лево или десно од конвексног омотача носача мере. Тако ове квадратурне формуле могу да буду неупотребљиве у случају да је домен подинтегралне функције ограничен на конвексни омотач носача. Ради превазилажења овог недостатка, у [35] су уведене скраћене уопштене усредњене гаусовске квадратурне формуле. Ове формуле се добијају уклањањем последњих неколико врста и колона реалне симетричне тродијагоналне матрице $J_{2\ell-1,\ell-1}$ придружене уопштеним усредњеним гаусовским формулама какве су описане у [40]. Ове скраћене квадратурне формуле имају исти алгебарски степен тачности као и нескраћене. Ове формуле ће овде бити истражене коришћењем резултата Персторфера у [27] о позитивним квадратурама.

У одељку 2.4 дата је детаљна анализа скраћених уопштених усредњених гаусовских квадратура добијених додавањем само једне врсте и колоне матрици $J_\ell^G(d\sigma)$ и, у случају класичних мера $d\sigma$, испитани су услови под којима су ове квадратуре унутрашње.

Најзад, у одељку 2.5 је приказано неколико рачунских примера, док су у одељку 2.6 дати закључци.

2.2 Уопштене усредњене гаусовске квадратурне формуле

Следеће тврђење које је доказао Персторфер [27, лема 1.1] је од значаја у испитивању уопштених усредњених гаусовских квадратурних формула. Тврђење користи својства такозваних придружених (асоцираних) полинома. Ови полиноми ће бити дефинисани касније.

Теорема 2.1. Нека су $n, m \in \mathbb{N}_0$. Тада полином $t_n \in \mathbb{P}_n$ одређује позитивну $(2n-1-m, n, d\sigma)$-квадратуру ако и само ако је t_n ортогоналан на потпростор $\mathbb{P}_{n-m-1}$ у односу на $d\sigma$, t_n има n једноструких нула у отвореном интервалу (a, b), и нуле полинома t_n и $t_{n-1}^{[1]}$ су испреплетане, где је $t_{n-1}^{[1]}$ полином придружен полиному t_n. □

Означимо са p_k монични полином степена k који је ортогоналан на простор $\mathbb{P}_{k-1}$ у односу на меру $d\sigma$, тј.

$$\int_a^b x^j p_k(x) d\sigma(x) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Зна се да низ полинома $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ задовољава рекурентну везу облика

$$p_{k+1}(x) = (x - \alpha_k) p_k(x) - \beta_k p_{k-1}(x), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2.1}$$

где је

$$p_{-1}(x) \equiv 0, \quad p_0(x) \equiv 1, \quad \alpha_k \in \mathbb{R} \ \text{ и } \ \beta_k > 0 \ \text{ за све } k;$$

детаљи се могу видети нпр. код Гаучија [7]. Највећи могући алгебарски степен тачности квадратурне формуле са ℓ чворова је $2\ell-1$. Гаусова квадратура са ℓ чворова

$$Q_\ell^G[f] = \sum_{j=1}^{\ell} \omega_j^G f\left(x_j^G\right) \tag{2.2}$$

је јединствена квадратура са ℓ чворова која има алгебарски степен тачности $2\ell-1$. Њени чворови су нуле полинома p_ℓ. Чворови и тежине могу се погодно израчунати Голуб–Велшовим алгоритмом [13]. Овај алгоритам је заснован на чињеници да су чворови сопствене вредности симетричне тродијагоналне матрице

$$J_\ell^G(d\sigma) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{\ell-1}} \\ 0 & & \sqrt{\beta_{\ell-1}} & \alpha_{\ell-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell\times\ell}$$

одређене коефицијентима у рекурентним везама (2.1), док су тежине пропорционалне квадратима првих координата сопствених вектора ове матрице. О овоме се може прочитати код Вилфа [49]. Овај алгоритам даје вредности чворова и тежина Гаусове квадратурне формуле (2.2) на основу матрице $J_\ell^G(d\sigma)$ у само $\mathcal{O}(\ell^2)$ аритметичких операција са покретним зарезом. Голуб-Велшов алгоритам је добро обрађен у скоријем чланку Голуба и Мерана [12].

Полиноми $p_k^{[j]}$, $k, j \in \mathbb{N}_0$, познати као полиноми придружени моничним ортогоналним полиномима p_k, у наставку ове главе имају важну улогу. Они су одређени шифтованим (помереним) рекурентним везама

$$p_{k+1}^{[j]}(x) = (x-\alpha_{k+j})p_k^{[j]}(x) - \beta_{k+j}p_{k-1}^{[j]}(x), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где су $p_{-1}^{[j]}(x) \equiv 0$ и $p_0^{[j]}(x) \equiv 1$.

Персторфер [27] је доказао да, за дате $0 \leqslant m \leqslant n$, полином t_n генерише позитивну $(2n-1-m, n, d\sigma)$-квадратуру ако и само ако је t_n члан неког низа полинома у коме је

$$t_{-1}(x) \equiv 0, \quad t_0(x) \equiv 1$$

и

$$(-1)^j \cdot t_j(a) > 0, \quad t_j(b) > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

и који задовољава рекурентне везе облика

$$t_{j+1}(x) = (x-\tilde{\alpha}_j)t_j(x) - \tilde{\beta}_j t_{j-1}(x), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

за неке коефицијенте $\tilde{\alpha}_j \in \mathbb{R}$ и $\tilde{\beta}_j > 0$ такве да је

$$\tilde{\alpha}_j = \alpha_j \quad \text{за} \quad j = 0, 1, \ldots, n-1-\left[\tfrac{m+1}{2}\right],$$
$$\tilde{\beta}_j = \beta_j \quad \text{за} \quad j = 0, 1, \ldots, n-1-\left[\tfrac{m}{2}\right],$$

Ова својства полинома t_j су еквивалентна услову да се полином t_n може представити (за $\ell := [\frac{m+1}{2}]$, $n \geqslant 2\ell$, тј. $n - \ell \geq \ell$) у облику

$$t_n = g_\ell p_{n-\ell} - \tilde{\beta}_{n-\ell} g_{\ell-1} p_{n-\ell-1}, \tag{2.3}$$

где су $g_{\ell-1}$ и g_ℓ чланови низа полинома у коме је $g_{-1}(x) \equiv 0$, $g_0(x) \equiv 1$ и

$$(-1)^j \cdot g_j(a) > 0, \quad g_j(b) > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \ell)$$

и који задовољава рекурентне везе

$$g_{j+1}(x) = (x - \tilde{\alpha}_{n-1-j}) g_j(x) - \tilde{\beta}_{n-j} g_{j-1}(x), \quad j = 0, 1, \ldots, \ell-1,$$

за неке коефицијенте $\tilde{\alpha}_j \in \mathbb{R}$ и $\tilde{\beta}_j > 0$, при чему је

$$\tilde{\beta}_{n-\ell} = \beta_{n-\ell} \ \text{ ако } \ m = 2\ell - 1;$$

видети доказ [27, теорема 3.2], посебно део $(d) \Longrightarrow (a)$.

Позитивне квадратурне формуле могу се увести на следећи начин. Нека је $d\mu$ (ненегативна) мера таква да њена одговарајућа дистрибуција μ има бесконачно много тачака раста. Означимо са $\tilde{p}_k$ монични полином степена k који је ортогоналан на $\mathbb{P}_{k-1}$ у односу на меру $d\mu$, тј.

$$\int x^j \tilde{p}_k(x) d\mu(x) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Тада полиноми $\{\tilde{p}_k\}_{k=0}^{\infty}$ задовољавају рекурентну везу облика

$$\tilde{p}_{k+1}(x) = (x - \gamma_k)\tilde{p}_k(x) - \lambda_k \tilde{p}_{k-1}(x), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где су

$$\tilde{p}_{-1}(x) \equiv 0, \quad \tilde{p}_0(x) \equiv 1, \quad \gamma_k \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \lambda_k \geqslant 0.$$

Посматрајмо позитивну $(2n-1-m, n, d\sigma, d\mu)$-квадратурну формулу у којој је

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{n-1-j} &= \gamma_j \quad \text{и} \quad \tilde{\beta}_{n-j} = \lambda_j \quad \text{за } j = 0, 1, \ldots, \ell-1, \\ \tilde{\beta}_{n-\ell} &= \begin{cases} \beta_{n-\ell}, & \text{ако је } m = 2\ell - 1; \\ \lambda_\ell, & \text{ако је } m = 2\ell. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Тада добијамо

$$g_j \equiv \tilde{p}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \ell.$$

Напомена. Избор (2.4) коефицијената $\tilde{\alpha}_{n-1-j}$ и $\tilde{\beta}_{n-j}$ у рекурентним везама предложен је у [40]. Овакав одабир даје квадратурну формулу са одређеним пожељним својствима. Ипак, постоје и друге могућности - видети нпр. одељак 2.5.

Обратно, за

$$g_\ell \equiv \tilde{p}_\ell \quad \text{и} \quad g_{\ell-1} \equiv \tilde{p}_{\ell-1} \tag{2.5}$$

добијамо везе (2.4). Према томе, ако важи (2.5) или (2.4), онда се (2.3) своди на

$$t_n = \tilde{p}_\ell \cdot p_{n-\ell} - \tilde{\beta}_{n-\ell}\, \tilde{p}_{\ell-1} \cdot p_{n-\ell-1},$$

па полином t_n генерише позитивну квадратуру коју ћемо означавати са $(2n-m-1, n, d\sigma, d\mu)$. Одговарајућа симетрична тродијагонална матрица

$$J_{n,\ell}(d\sigma, d\mu) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

је дата са

$$\begin{bmatrix}
\alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & & & & & & \\
\sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\
 & & \sqrt{\beta_{n-\ell-2}} & \alpha_{n-\ell-2} & \sqrt{\beta_{n-\ell-1}} & & & & & \\
 & & & \sqrt{\beta_{n-\ell-1}} & \alpha_{n-\ell-1} & \sqrt{\tilde{\beta}_{n-\ell}} & & & & \\
 & & & & \sqrt{\tilde{\beta}_{n-\ell}} & \gamma_{\ell-1} & \sqrt{\lambda_{\ell-1}} & & & \\
 & & & & & \sqrt{\lambda_{\ell-1}} & \gamma_{\ell-2} & \ddots & & \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & \sqrt{\lambda_1} & \\
 & & & & & & & \sqrt{\lambda_1} & \gamma_0 &
\end{bmatrix},$$

где је део матрице одређен мером $d\sigma$ уоквирен испрекиданом линијом.

Напомена. Специјалан случај $d\mu = d\sigma$ и $(n, \ell) = (2k-1, k-1)$ разматран је у [40, 41].

2.3 Квадратуре одређене скраћивањем матрице $J_{n,\ell}(d\sigma, d\mu)$

Можемо да уклонимо последњих i врста и колона тродијагоналне матрице $J_{n,\ell}(d\sigma, d\mu) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ уведене горе, где је $i \in \{1, \ldots, \ell-1\}$. Следеће тврђење показује да позитивна квадратурна формула $(2n-m-1, n-i, d\sigma, d\mu)$ са овако добијених $n-i$ чворова има исти алгебарски степен тачности као и полазна квадратурна формула.

Теорема 2.2. Квадратура $(2n_i-m_i-1, n_i, d\sigma, d\mu)$ добијена уклањањем последњих i врста и колона матрице $J_{n,\ell}(d\sigma, d\mu)$, где је

$$n_i = n - i, \quad \ell_i = \ell - i := \left[\frac{m_i+1}{2}\right],$$

има исти степен тачности као квадратура $(2n-m-1, n, d\sigma, d\mu)$.

Доказ. Прво ћемо испитати случај када је m непарно, тј. $m = 2\ell - 1$. Тада је $\tilde{\beta}_{n-\ell} = \beta_{n-\ell}$. У овом случају, алгебарски степен тачности квадратурне формуле $(2n - m - 1, n, d\sigma, d\mu)$ је једнак

$$d = 2n - m - 1 = 2n - 2\ell.$$

У квадратурнoj формули $(2n_i - m_i - 1, n_i, d\sigma, d\mu)$ број m_i је непаран, па је $m_i = 2\ell_i - 1 = 2(\ell - i) - 1$, пошто у овом случају важи

$$\tilde{\beta}_{n-\ell} = \beta_{n-\ell} = \beta_{n-i-(\ell-i)} = \beta_{n_i-\ell_i} = \tilde{\beta}_{n_i-\ell_i}.$$

Следи да је степен тачности квадратуре $(2n_i - m_i - 1, n_i, d\sigma, d\mu)$ једнак

$$d_i = 2n_i - m_i - 1 = 2n - 2\ell,$$

па је $d_i = d$.

Нека је сада m парно, тј. $m = 2\ell$. Тада имамо $\tilde{\beta}_{n-\ell} = \lambda_\ell$. Алгебарски степен тачности квадратуре $(2n - m - 1, n, d\sigma, d\mu)$ је

$$d = 2n - m - 1 = 2n - 2\ell - 1.$$

У квадратури $(2n_i - m_i - 1, n_i, d\sigma, d\mu)$ број m_i је паран, тј. $m_i = 2\ell_i = 2(\ell - i)$, јер је у овом случају

$$\tilde{\beta}_{n-\ell} = \lambda_\ell = \tilde{\beta}_{n-i-(\ell-i)} = \tilde{\beta}_{n_i-\ell_i}.$$

Следи да је степен тачности квадратуре $(2n_i - m_i - 1, n_i, d\sigma, d\mu)$ једнак

$$d_i = 2n_i - m_i - 1 = 2n - 2\ell - 1,$$

те је опет $d_i = d$. $\square$

Коришћењем резултата Персторфера [27] може се лако показати да је квадратурна формула $(2n - m - 1, n - i, d\sigma, d\mu)$ генерисана моничним полиномом t_{n-i} одређеним једнакостима

$$t_{n-i} = \tilde{p}_{\ell-i}^{[i]} p_{n-\ell} - \tilde{\beta}_{n-\ell}\, \tilde{p}_{\ell-i-1}^{[i]} p_{n-\ell-1}, \tag{2.6}$$

где је $\tilde{p}_k^{[j]}$ j-ти полином придружен полиному $\tilde{p}_k$. На пример, за $i = \ell - 1$ добијамо квадратурну формулу $(2n - m - 1, n - \ell + 1, d\sigma, d\mu)$. Пошто је $\tilde{p}_1^{[\ell-1]} = x - \gamma_{\ell-1}$, ова квадратурна формула је одређена моничним полиномом $t_{n-\ell+1}$ ($i = \ell - 1$ у (2.6)) задатим низом

$$t_{n-\ell+1}(x) = (x - \gamma_{\ell-1}) p_{n-\ell} - \tilde{\beta}_{n-\ell}\, p_{n-\ell-1}. \tag{2.7}$$

Напомена. Анализа и резултати Персторфера [27] остају примењиви и за $(2n - m - 1, n, d\sigma, d\mu)$-квадратуру када је $n - \ell \geqslant \ell$. Тада добијамо нову квадратуру $(2n_i - m_i - 1, n_i, d\sigma, d\mu)$ у којој је $n_i - \ell_i \geqslant \ell_i$. Ово следи из чињенице да је

$$n - \ell \geqslant \ell - i, \quad \text{тј.} \quad n - i - (\ell - i) \geqslant \ell - i.$$

У одељку 2.5 биће илустрована нека својства квадратурних формула из овог одељка.

2.4 Специјалне уопштене усредњене гаусовске квадратуре

Овде ћемо посмарати уопштене усредњене гаусовске квадратурне формуле настале додавањем само једне врсте и колоне матрици која одређује Гаусову квадратуру са $\ell+1$ чворова за меру $d\sigma$.

Размотримо специјалан случај (2.4),

$$\tilde{\alpha}_{n-1-j} = \alpha_j \quad \text{и} \quad \tilde{\beta}_{n-j} = \beta_j \quad \text{за } j = 0, 1, \ldots, \ell-1,$$
$$\tilde{\beta}_{n-\ell} = \begin{cases} \beta_{n-\ell}, & \text{ако је } m = 2\ell-1; \\ \beta_\ell, & \text{ако је } m = 2\ell. \end{cases}$$

добијен избором $n = 2\ell+1$. Ове формуле дају усредњене гаусовске квадратурне формуле које су уведене у [40] за $\tilde{\beta}_{\ell+1} = \beta_{\ell+1}$, са алгебарским степеном тачности $2\ell+2$. Скраћене варијанте ових квадратура, са истим алгебарским степеном тачности, биле су посматране у [35]. У овом одељку испитаћемо под којим условима су скраћене усредњене гаусовске квадратурне формуле за класичну тежинску функцију w, са само једним чвором више од одговарајуће Гаусове квадратуре, унутрашње. Рачунски примери у одељку 2.5 показују да ови резултати не важе за уопштене усредњене гаусовске квадратуре са два чвора више од одговарајућих Гаусових квадратура.

Из (2.7) следи да је најједноставнија скраћена уопштена усредњена гаусовска квадратура

$$\int f(x)\, d\sigma(x) = Q^{[1]}_{\ell+2}[f] + R^{[1]}_{\ell+2}[f],$$
$$Q^{[1]}_{\ell+2}[f] = \sum_{j=1}^{\ell+2} \omega_j f(\tau_j), \tag{2.8}$$

одређена нулама $\tau_j = \tau_j^{(\ell+2)}$ $(j = 1, 2, \ldots, \ell+2)$ полинома

$$t_{\ell+2}(x) = (x - \alpha_{\ell-1}) p_{\ell+1}(x) - \beta_{\ell+1}\, p_\ell(x), \tag{2.9}$$

и одговара симетричној тродијагоналној матрици

$$\hat{J}^{[1]}_{\ell+2}(d\sigma) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \sqrt{\beta_{\ell-1}} & \alpha_{\ell-1} & \sqrt{\beta_\ell} & \\ & & & \sqrt{\beta_\ell} & \alpha_\ell & \sqrt{\beta_{\ell+1}} \\ 0 & & & & \sqrt{\beta_{\ell+1}} & \alpha_{\ell-1} \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Приметимо да се матрица $\hat{J}^{[1]}_{\ell+2}(d\sigma)$ добија из матрице $J^G_{\ell+2}(d\sigma)$ заменом члана $\alpha_{\ell+1}$ са $\alpha_{\ell-1}$; дакле, додавањем одређене врсте и колоне матрици

$J_{\ell+1}^G(d\sigma)$. С обзиром на преплитање нула полинома $t_{\ell+2}$ и $p_{\ell+1}$, само најмања и највећа нула полинома $t_{\ell+2}$, које означавамо редом са $\tau_1 = \tau_1^{(\ell+2)}$ и $\tau_{\ell+2} = \tau_{\ell+2}^{(\ell+2)}$, могу се налазити ван интервала $[a,b]$. Занима нас под којим условима је квадратура (2.8) заправо унутрашња.

<u>*Теорема 2.3.*</u> Ако за коефицијенте $\alpha_{\ell-1}$ и $\alpha_{\ell+1}$ у трочланој рекурентној вези (2.1) важи $\alpha_{\ell-1} = \alpha_{\ell+1}$, онда је квадратурна формула (2.8) унутрашња.

Ако је $\alpha_{\ell-1} < \alpha_{\ell+1}$, онда је $(a <)\, \tau_{\ell+2} < b$, а ако је $\alpha_{\ell-1} > \alpha_{\ell+1}$, онда је $a < \tau_1\, (< b)$.

<u>*Доказ.*</u> Нека је $k = \ell + 1$ у (2.1). Тада имамо

$$p_{\ell+2}(x) = (x - \alpha_{\ell+1})p_{\ell+1}(x) - \beta_{\ell+1}p_\ell(x). \tag{2.11}$$

Одузимање (2.11) од (2.9) даје

$$t_{\ell+2}(x) - p_{\ell+2}(x) = (\alpha_{\ell+1} - \alpha_{\ell-1})p_{\ell+1}(x). \tag{2.12}$$

Ако је $\alpha_{\ell-1} = \alpha_{\ell+1}$, све нуле полинома $t_{\ell+2}(x) \equiv p_{\ell+2}(x)$ се налазе у интервалу (a,b). Према томе, квадратурна формула (2.8) је унутрашња.

С друге стране, ако је $\alpha_{\ell-1} < \alpha_{\ell+1}$, из (2.12) добијамо

$$t_{\ell+2}(b) - p_{\ell+2}(b) = (\alpha_{\ell+1} - \alpha_{\ell-1})p_{\ell+1}(b) > 0.$$

Одавде следи $t_{\ell+2}(b) > 0$ јер је $p_{\ell+2}(b) > 0$. Према томе, $\tau_{\ell+2} < b$.

Ако је $\alpha_{\ell-1} > \alpha_{\ell+1}$, из (2.12) добијамо

$$t_{\ell+2}(a) - p_{\ell+2}(a) = (\alpha_{\ell+1} - \alpha_{\ell-1})p_{\ell+1}(a). \tag{2.13}$$

У случају парног ℓ, пошто је

$$t_{\ell+2}(a) - p_{\ell+2}(a) > 0 \quad \text{и} \quad p_{\ell+2}(a) > 0,$$

из (2.13) следи да је $t_{\ell+2}(a) > 0$. Одавде следи да је $\tau_1 > a$.

Слично, за непарно ℓ, пошто је

$$t_{\ell+2}(a) - p_{\ell+2}(a) < 0 \quad \text{и} \quad p_{\ell+2}(a) < 0,$$

из (2.13) следи да је $t_{\ell+2}(a) < 0$, па је $\tau_1 > a$. □

<u>*Последица.*</u> Претпоставимо да је мера $d\sigma$ симетрична: $d\sigma(-x) = d\sigma(x)$ за $x \in [a,b] = [-c,c]$, где је $c > 0$. Тада је квадратурна формула (2.8) унутрашња.

Ако је низ коефицијената α_k $(k = 0,1,\dots)$ у рекурентној вези (2.1) растући, онда је $(a <)\, \tau_{\ell+2} < b$.

Слично, ако је низ коефицијената α_k $(k = 0,1,\dots)$ опадајући, онда је $a < \tau_1\, (< b)$.

Доказ. Ако је мера $d\sigma$ симетрична, сви коефицијенти α_k $(k = 0, 1, \dots)$ у рекурентној вези (2.1) су једнаки нули. $\square$

У наставку ћемо испитати када је квадратурна формула (2.8) унутрашња под претпоставком да је $d\sigma(x) = w(x)\,dx$ где је w нека од класичних тежинских функција. На основу последице теореме 2.3, квадратурна формула (2.8) је унутрашња ако је тежинска функција w парна. Између осталог, ово важи за Гегенбауерове тежинске функције $w(x) = (1-x^2)^\alpha$ за $x \in [-1, 1]$, где је $\alpha > -1$. Овај случај укључује следеће важне специјалне случајеве:

(а) $w(x) = 1$ за $x \in [-1, 1]$ (Лежандрова тежинска функција);

(б) $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ за $x \in [-1, 1]$ (Чебишовљева тежинска функција прве врсте);

(в) $w(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ за $x \in [-1, 1]$ (Чебишовљева тежинска функција друге врсте).

Сада се враћамо несиметричним тежинским функцијама.

2.4.1 Уопштене Лагерове тежинске функције

Нека је

$$w(x) = x^s\, e^{-x} \quad \text{за} \quad x \in [0, \infty),$$

где је $s > -1$ константа. За ову тежинску функцију важи

$$\begin{gathered} \alpha_\ell = 2\ell + s + 1, \qquad \beta_\ell = \ell(\ell + s), \\ p_\ell(0) = (-1)^\ell\, \ell! \binom{\ell + s}{\ell}; \end{gathered} \tag{2.14}$$

видети нпр. [1].

Прво ћемо претпоставити да је ℓ непарно. Квадратурна формула (2.8) је унутрашња, тј. најмања нула τ_1 полинома $t_{\ell+2}$ задовољава $\tau_1 \geq 0$ ако је (на основу (2.9))

$$t_{\ell+2}(0) = -\alpha_{\ell-1} p_{\ell+1}(0) - \beta_{\ell+1}\, p_\ell(0) \leqslant 0,$$

тј. ако је

$$-\alpha_{\ell-1} p_{\ell+1}(0) \leqslant \beta_{\ell+1}\, p_\ell(0).$$

Дељењем последње неједнакости десном страном (која је негативна) добијамо

$$\frac{-\alpha_{\ell-1} p_{\ell+1}(0)}{\beta_{\ell+1}\, p_\ell(0)} \geqslant 1. \tag{2.15}$$

Замена (2.14) у (2.15) даје

$$\ell \geqslant 2 - s. \tag{2.16}$$

На сличан начин, у случају парног ℓ добија се исти услов (2.16). Неједнакост (2.16) важи за $s \geqslant 0$ кад год је $\ell \geqslant 2$, а у случају $s \in (-1, 0)$ важи ако је $\ell \geqslant 3$. Услов (2.16) не важи у случају $s \in (-1, 0)$ и $\ell = 2$. Овако је доказано следеће тврђење.

Теорема 2.4. Квадратурна формула (2.8) са $\ell+2$ чворова за уопштену Лагерову тежинску функцију $w(x) = x^s\, e^{-x}$ $(s > -1)$ на интервалу $[0,\infty)$ је унутрашња ако је $s \geqslant 0$ и $\ell \geqslant 2$, или $s \in (-1,0)$ и $\ell \geqslant 3$.

За $s \in (-1,0)$ и $\ell = 2$ квадратурна формула је спољашња. □

Напоменимо да је одговарајућа (нескраћена) уопштена усредњена гаусовска квадратура дата матрицом $J_{2\ell-1,\ell-1}(d\sigma, d\sigma)$, обрађена у [40], унутрашња за уопштену Лагерову тежинску функцију са $s \geqslant 1$, а спољашња за $s \in (-1,1)$, где је $\ell \geqslant 1$ произвољно; видети [4].

2.4.2 Јакобијеве тежинске функције

Нека је

$$w^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \quad \text{за} \quad -1 < x < 1,$$

где су $\alpha, \beta > -1$ константе. Можемо да сматрамо да је $\alpha \neq \beta$, пошто је случај $\alpha = \beta$ већ покривен последицом теореме 2.3. Коефицијенти у рекурентним везама α_ℓ и β_ℓ, као и вредности моничних ортогоналних полинома $p_\ell^{(\alpha,\beta)}$ у крајевима интервала, познати су у експлицитном облику; видети нпр. [1]. Имамо

$$\begin{aligned} \alpha_\ell &= \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2\ell+\alpha+\beta)(2\ell+\alpha+\beta+2)}, \\ \beta_\ell &= \frac{4\ell(\ell+\alpha)(\ell+\beta)(\ell+\alpha+\beta)}{(2\ell+\alpha+\beta)^2\,((2\ell+\alpha+\beta)^2-1)}, \\ p_\ell^{(\alpha,\beta)}(1) &= \frac{2^\ell \binom{\ell+\alpha}{\ell}}{\binom{2\ell+\alpha+\beta}{\ell}}, \\ p_\ell^{(\alpha,\beta)}(-1) &= (-1)^\ell p_\ell^{(\beta,\alpha)}(1). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Нека је $\alpha^2 > \beta^2$. Тада је низ $\{\alpha_\ell\}_{\ell=0}^\infty$ растући. Из последице теореме 2.3 следи да је $\tau_{\ell+2} \leqslant 1$. Остаје да се испита под којим условима важи неједнакост $-1 \leqslant \tau_1$. Прво ћемо испитати случај када је ℓ непарно. У том случају квадратурна формула (2.8) је унутрашња, тј. најмања нула τ_1 полинома $t_{\ell+2}$ задовољава $\tau_1 \geq -1$ ако је (због (2.9))

$$t_{\ell+2}(-1) = (-1-\alpha_{\ell-1})p_{\ell+1}(-1) - \beta_{\ell+1}\, p_\ell(-1) \leqslant 0,$$

тј. ако је

$$-(1+\alpha_{\ell-1})p_{\ell+1}(-1) \leqslant \beta_{\ell+1}\, p_\ell(-1).$$

Дељењем последње неједнакости десном страном (која је негативна) добијамо

$$\frac{-(1+\alpha_{\ell-1})p_{\ell+1}(-1)}{\beta_{\ell+1}\, p_\ell(-1)} \geqslant 1. \tag{2.18}$$

Означимо

$$g(\alpha,\beta) := (\alpha+\beta+2\ell+2)(\alpha+\beta+2\ell+3).$$

Заменом вредности (2.17) у (2.18) добијамо неједнакост

$$\frac{\left[(\alpha+\beta+2\ell-2)(\alpha+\beta+2\ell)+\beta^2-\alpha^2\right]g(\alpha,\beta)}{2(\ell+1)(\ell+1+\alpha)(\alpha+\beta+2\ell-2)(\alpha+\beta+2\ell)} \geqslant 1\,. \tag{2.19}$$

У случају парног ℓ на сличан начин добија се исти услов (2.19).

Нека је сада $\alpha^2 < \beta^2$. Тада је низ $\{\alpha_\ell\}_{\ell=0}^{\infty}$ опадајући. Последица теореме 2.3 нам даје $\tau_1 \geqslant -1$, па остаје да се испита под којим условима важи и неједнакост $\tau_{\ell+2} \leq 1$. Ова неједнакост ће важити ако је

$$\frac{\left[(\alpha+\beta+2\ell-2)(\alpha+\beta+2\ell)-(\beta^2-\alpha^2)\right]g(\alpha,\beta)}{2(\ell+1)(\ell+1+\beta)(\alpha+\beta+2\ell-2)(\alpha+\beta+2\ell)} \geqslant 1, \tag{2.20}$$

где је $g(\alpha,\beta)$ уведено горе.

Приметимо да се заменом места параметара α и β услови $\alpha^2 > \beta^2$ и (2.19) претварају у услове $\alpha^2 < \beta^2$ и (2.20). Зато је довољно испитати само услове $\alpha^2 > \beta^2$ и (2.19); њима се бавимо у наставку.

Теорема 2.5. Квадратурна формула (2.8) са $\ell+2$ чворова за Јакобијеву тежинску функцију $w^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ на интервалу $[-1,1]$, где су $\alpha,\beta > -1$ и $\alpha \neq \beta$, је унутрашња за свако $\ell \geqslant 3$.

Доказ. Означимо $\alpha+\beta = s$ $(s > -2)$ и $\alpha-\beta = d$. Тада неједнакост (2.19) постаје

$$(s+2\ell-2)(s+2\ell+2)(s+2\ell)(s+\ell+2) \geqslant dP(s), \tag{2.21}$$

где је

$$\begin{aligned} P(s) &= s(s+2\ell+2)(s+2\ell+3)+(\ell+1)(s+2\ell-2)(s+2\ell) \\ &= s^3+(5\ell+6)s^2+(8\ell^2+12\ell+4)s+4\ell^3-4\ell, \end{aligned}$$

што се може записати као

$$P(s) = (s+\ell+2)(s+2\ell-2)(s+2\ell+6)-8(\ell-1)(s+2\ell+3). \tag{2.22}$$

Претпоставимо за сада да је $P(s) > 0$. Пошто је

$$P(s) < (s+\ell+2)(s+2\ell-2)(s+2\ell+6),$$

да би важило (2.19), довољно је да важи

$$d = \alpha-\beta \leq \frac{(s+2\ell+2)(s+2\ell)}{s+2\ell+6} = s+2\ell-4+\frac{24}{s+2\ell+6}\,,$$

тј.

$$\beta + \frac{12}{\alpha+\beta+2\ell+6} \geqslant 2-\ell.$$

Ако је $\ell \geqslant 3$, ова неједнакост очигледно важи за све $\alpha, \beta > -1$. За $\ell = 2$ она се своди

$$\beta + \frac{12}{\alpha+\beta+10} \geqslant 0. \tag{2.23}$$

Остаје да испитамо знак броја $P(s)$ за $s > -2$. Разликујемо неколико случајева.

(1°) Случај $\ell \geqslant 6$. Множењем неједнакости

$$\begin{aligned} s+2\ell+6 &\geqslant s+2\ell+3, \\ s+2\ell-2 &\geqslant \tfrac{8}{5}(\ell-1), \\ s+\ell+2 &\geqslant 6 \end{aligned}$$

добијамо

$$\begin{aligned} (s+\ell+2)(s+2\ell-2)(s+2\ell+6) &\geqslant \tfrac{48}{5}(\ell-1)(s+2\ell+3) \\ &> 8(\ell-1)(s+2\ell+3). \end{aligned}$$

Сада из (2.22) следи да је $P(s) > 0$.

(2°) Случај $\ell = 5$. Све нуле полинома

$$P(x) = x^3 + 31x^2 + 264x + 480$$

су мање од -2. Према томе, $P(s) > 0$ за све α, β.

(3°) Случај $\ell = 4$. Неједнакост (2.21) се своди на

$$(s+6)(s+6)(s+8)(s+10) \geqslant d(s^3 + 26s^2 + 180s + 240).$$

Како је $d = s - 2\beta$, ова неједнакост се може записати као

$$s^3 + 26s^2 + 180s + 240 + \frac{12}{\beta+2}(2s^2 + 27s + 80) \geqslant 0. \tag{2.24}$$

Ако је

$$P(s) = s^3 + 26s^2 + 180s + 240 < 0,$$

добијамо да је $s < -1{,}74$. Према томе, $\beta < -0{,}74$ и $\frac{12}{\beta+2} > 9{,}52$. Пошто је $2s^2 + 27s + 80 > 0$, а нуле полинома

$$s^3 + 26s^2 + 180s + 240 + 9{,}52 \cdot (2s^2 + 27s + 80)$$

су мање од -2, неједнакост (2.24) је тачна.

(4°) Случај $\ell = 3$. Слично као у случају (3°), неједнакост (2.21) се може записати као

$$s^3 + 21s^2 + 112s + 96 + \frac{4}{\beta+1}(5s^2 + 49s + 96) \geqslant 0, \tag{2.25}$$

док из

$$P(s) = s^3 + 21s^2 + 112s + 96 < 0$$

следи $s < -1{,}05$, $\beta < -0{,}05$ и $\frac{4}{\beta+1} > 4{,}21$. Тако је услов (2.25) задовољен јер је $5s^2 + 49s + 96 > 0$ и

$$s^3 + 21s^2 + 112s + 96 + 4{,}21 \cdot (5s^2 + 49s + 96) > 0$$

за све $s > -2$. $\square$

Овај одељак завршавамо анализом случаја $\ell = 2$. Тада се неједнакост (2.21) може записати као

$$f(\beta, s) = \beta(s^3 + 16s^2 + 60s + 24) + 4(4s^2 + 25s + 24) \geqslant 0. \tag{2.26}$$

Нека је $\beta \geqslant 0$. Тада је очигледно $s > -1$ и $\beta < s + 1$. Пошто је лева страна неједнакости (2.26) линеарна по β, вредност $f(\beta, s)$ лежи између вредности $f(0, s)$ и $f(s+1, s)$. При томе за $s > -1$ имамо

$$f(0, s) = 4(4s^2 + 25s + 24) > 0, \quad f(s + 1, s) = s^4 + 17s^3 + 92s^2 + 184s + 120 > 0,$$

па је неједнакост (2.26) тачна.

Даље, ако је $s > 0$, онда је

$$P(s) = (s + 2)(s + 4)(s + 10) - 8(s + 7) \geqslant 8(s + 10) - 8(s + 7) > 0.$$

У том случају важи (2.23).

Најзад, претпоставимо да је $-1 < \beta < 0$ и $-2 < s < 0$. Нуле функције

$$\frac{\partial f(\beta, s)}{\partial s} = 3\beta s^2 + 32(\beta + 1)s + 20(3\beta + 5)$$

су

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{16(\beta + 1) + 2\sqrt{19\beta^2 + 53\beta + 64}}{-3\beta}, \\ s_2 &= \frac{16(\beta + 1) - 2\sqrt{19\beta^2 + 53\beta + 64}}{-3\beta}, \end{aligned}$$

при чему је очигледно $s_1 > 0$. Услов $s_2 > -2$ је еквивалентан услову

$$5\beta + 8 > \sqrt{19\beta^2 + 53\beta + 64},$$

који је даље еквивалентан неједнакости $3\beta(2\beta + 9) > 0$, а она је немогућа. Према томе, $s_2 \leqslant -2$, одакле је $\frac{\partial f(\beta,s)}{\partial s} > 0$ и функција $f(\beta, s)$ је строго растућа по променљивој s у интервалу $(-2, 0)$. Следи да је

$$\begin{aligned} f(\beta, s) > f(\beta, \beta - 1) &= \beta^4 + 13\beta^3 + 47\beta^2 + 47\beta + 12 \\ &= (\beta + 1)(\beta + 4)(\beta^2 + 8\beta + 3). \end{aligned}$$

Дакле, имамо $f(\beta, s) > 0$ за $\beta \geqslant \sqrt{13} - 4 \approx -0{,}3944487245$.

Дискриминанта полинома

$$\begin{aligned} f(\beta, \alpha+\beta) &= \beta^4 + (3\alpha+16)\beta^3 + (3\alpha^2+32\alpha+76)\beta^2 \\ &\quad +(\alpha^3+16\alpha^2+92\alpha+124)\beta + (16\alpha^2+100\alpha+96), \end{aligned}$$

посматраног као полином по β, једнака је

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &= 64(993\alpha^6 + 24228\alpha^5 + 113200\alpha^4 - 10400\alpha^3 \\ &\quad -1021212\alpha^2 - 1982200\alpha - 1041580) \end{aligned}$$

и има јединствену нулу у интервалу $(-1, 0)$:

$$\alpha_0 \approx -0{,}9419540398.$$

Тада полином $f(\beta, \beta + \alpha_0)$ има тачно једну двоструку нулу у интервалу $(-1, 0)$, тако да је $f(\beta, s) > 0$ за $\beta \in (-1, 0)$ и $\alpha_0 < \alpha < 0$.

Закључујемо да, у случају да је $\alpha^2 > \beta^2$ $(\alpha \neq \beta)$ и $\ell = 2$, неједнакост (2.19) важи кад год је

$$\beta + \frac{12}{\alpha+\beta+10} > 0 \quad \text{и} \quad (\beta > \sqrt{13} - 4 \text{ или } \alpha > \alpha_0).$$

Слично, ако је $\beta^2 > \alpha^2$ $(\alpha \neq \beta)$ и $\ell = 2$, онда неједнакост (2.20) важи ако је

$$\alpha + \frac{12}{\alpha+\beta+10} > 0 \quad \text{и} \quad (\alpha > \sqrt{13} - 4 \text{ или } \beta > \alpha_0).$$

Ово су довољни услови да квадратурна формула (2.8) за $\ell = 2$ буде унутрашња.

2.5 Нумерички примери

У овом одељку илустрована су нека својства и понашање неких од квадратурних формула обрађених у претходним одељцима. Сви примери су имплементирани у Матлабу са израчунавањима на око 15 значајних цифара.

Пример 2.1. Овај пример показује да је могуће да, иако је уопштена усредњена Гаусова квадратура спољашња, одговарајућа скраћена квадратура буде унутрашња.

Посматрајмо Јакобијеву тежинску функцију

$$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad -1 < x < 1, \quad \alpha = -1/2, \quad \beta = 1.$$

Почнимо са случајем $\ell = 3$. Гаусова квадратурна формула Q_ℓ^G има све чворове у отвореном интервал $(-1, 1)$. Међутим, уопштена усредњена квадратура одређена матрицом $J_{2\ell-1,\ell-1}(d\sigma, d\sigma)$, при чему је $d\sigma(x) = w(x)dx$, као у [40], има чвор који је приближно једнак 1,003.

Квадратурна формула $Q^{(1)}_{\ell+1}$ дата са (2.8) и одређена матрицом (2.10) има све чворове унутар отвореног интервала $(-1, 1)$, сагласно са теоремом 2.5. Примећујемо да се иста квадратура могла добити и уклањањем последњих $\ell - 2$ врста и колона матрице $J_{2\ell-1,\ell-1}(d\sigma, d\sigma)$.

Размотримо сада квадратурну формулу $Q^{(2)}_{\ell+2}$ са $\ell+2$ чворова. Чворови и тежине квадратуре одређени су симетричном тродијагоналном матрицом добијеном уклањањем последњих $\ell - 3$ врста и колона матрице $J_{2\ell-1,\ell-1}(d\sigma, d\sigma)$. Квадратура $Q^{(2)}_{\ell+2}$ има један чвор већи од јединице. То показује да теорема 2.5 не важи за квадратурне формуле $Q^{(2)}_{\ell+2}$.

Лако се проналазе примери уопштених усредњених квадратурних формула одређених матрицом $J_{2\ell-1,\ell-1}(d\sigma, d\sigma)$ које нису унутрашње. Међутим, унутрашње квадратурне формуле се често ипак могу добити уклањањем само неколико последњих врста и колона. На пример, посматрајмо тежинску функцију

$$w(x) = (1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta}, \quad \alpha = -3/4, \quad \beta = 3/4,$$

и узмимо $\ell = 4$. Тада ће уопштена усредњена квадратура одређена матрицом $J_{2\ell-1,\ell-1}(d\sigma, d\sigma)$ имати један спољашњи чвор, приближно једнак 1,006. Показује се да су скраћене квадратуре добијене уклањањем последњих k врста и колона матрице $J_{2\ell-1,\ell-1}(d\sigma, d\sigma)$ унутрашње за $k = 1$ и $k = 2$.

Слично, за $\ell = 8$, уопштена усредњена квадратура одређена матрицом $J_{2\ell-1,\ell-1}(d\sigma, d\sigma)$ има један спољашњи чвор приближно једнак 1,001. Скраћене квадратуре добијене уклањањем последњих k врста и колона су унутрашње за $k = 5$ и $k = 6$.

Пример 2.2. Овде ћемо показати тачност при употреби квадратурних формула из претходног примера у нумеричком израчунавању интеграла

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx, \qquad f(x) = (5 - 10x)e^{x-x^2}. \tag{2.27}$$

Овде је свакако $d\sigma(x) = dx$, а тачна вредност интеграла је $1 - e^{-10}$.

Табела 2.1 приказује квадратурне грешке за:

- Гаусову квадратуру $Q^G_{\ell}[f]$ (2.2);
- уопштену усредњену Гаусову квадратуру $Q_{2\ell-1,\ell-1}[f]$ одређену тродијагоналном матрицом $J_{2\ell-1,\ell-1}(d\sigma, d\sigma)$;
- квадратуре $Q^{(1)}_{\ell+1}[f]$ и $Q^{(2)}_{\ell+2}[f]$ добијене уклањање последњих $\ell - 2$, односно $\ell - 3$ врста и колона матрице $J_{2\ell-1,\ell-1}(d\sigma, d\sigma)$.

Табела 2.1: Грешке при нумеричком израчунавању интеграла (2.27).

ℓ	$Q_\ell^G[f]$	$Q_{2\ell-1,\ell-1}[f]$	$Q_{\ell+1}^{(1)}[f]$	$Q_{\ell+2}^{(2)}[f]$
4	$4{,}84 \cdot 10^{-1}$	$-1{,}16 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}86 \cdot 10^{-1}$	$5{,}19 \cdot 10^{-2}$
5	$-1{,}86 \cdot 10^{-1}$	$-6{,}66 \cdot 10^{-4}$	$4{,}20 \cdot 10^{-2}$	$-7{,}29 \cdot 10^{-3}$
6	$4{,}20 \cdot 10^{-2}$	$5{,}19 \cdot 10^{-5}$	$-6{,}41 \cdot 10^{-3}$	$7{,}09 \cdot 10^{-4}$
7	$-6{,}41 \cdot 10^{-3}$	$-3{,}27 \cdot 10^{-6}$	$6{,}41 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}90 \cdot 10^{-5}$
8	$6{,}41 \cdot 10^{-4}$	$1{,}29 \cdot 10^{-7}$	$-2{,}40 \cdot 10^{-5}$	$-5{,}48 \cdot 10^{-6}$

Табела сугерише да је квадратурна грешка за квадратуру $Q_{2\ell-1,\ell-1}[f]$ реда величине квадрата грешке за квадратуру $Q_\ell^G[f]$, за све вредности ℓ. Примећује се да скраћене квадратуре $Q_{\ell+1}^{(1)}[f]$ и $Q_{\ell+2}^{(2)}[f]$ дају мању тачност него $Q_{2\ell-1,\ell-1}[f]$, али већу од Гаусове квадратуре $Q_\ell^G[f]$, за све вредности ℓ. Може се закључити да је квадратурну формулу $Q_{2\ell-1,\ell-1}[f]$ пожељно скраћивати само онда када је битно да квадратура буде унутрашња.

Пример 2.3. Полазећи од симетричне тродијагоналне матрице J_ℓ^G која одговара Гаусовој квадратурној формули Q_ℓ^G са ℓ чворова и од последњих елемената симетричне тродијагоналне матрице $J_{\ell+1}^G$ испод дијагонале, проширену симетричну матрицу $J_{2\ell-1,\ell-1}(d\sigma, d\mu)$ можемо да задамо на више начина. У овом примеру увешћемо матрицу $J_{2\ell-1,\ell-1}(d\sigma, d\mu)$ тако што ћемо свим елементима испод дијагонале у врстама $\ell+2, \ell+3, \ldots, 2\ell-1$ дати вредност једнаку последњем елементу матрице $J_{\ell+1}^G$ испод дијагонале, док ћемо дијагоналним елементима у врстама $\ell+1, \ell+2, \ldots, 2\ell-1$ дати вредност последњег дијагоналног елемента матрице J_ℓ^G. Овако добијену матрицу означићемо са $\widetilde{J}_{2\ell-1,\ell-1}$, а одговарајућу квадратурну формулу са $\widetilde{Q}_{2\ell-1,\ell-1}$. Дакле:

$$
\widetilde{J}_{2\ell-1,\ell-1} = \begin{bmatrix}
\alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & & & & & \\
\sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & & & & \mathbf{0} & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\
& & \sqrt{\beta_{\ell-2}} & \alpha_{\ell-2} & \sqrt{\beta_{\ell-1}} & & & & \\
& & & \sqrt{\beta_{\ell-1}} & \alpha_{\ell-1} & \sqrt{\beta_\ell} & & & \\
& & & & \sqrt{\beta_\ell} & \alpha_{\ell-1} & \sqrt{\beta_\ell} & & \\
& & & & & \sqrt{\beta_\ell} & \alpha_{\ell-1} & \ddots & \\
& \mathbf{0} & & & & & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_\ell} \\
& & & & & & & \sqrt{\beta_\ell} & \alpha_{\ell-1}
\end{bmatrix}.
$$

Користимо исту меру као у примеру 2.2. Табела 2.2 приказује квадратурне грешке. Видимо да квадратура $\widetilde{Q}_{2\ell-1,\ell-1}$ даје мању грешку од квадратуре $Q_{2\ell-1,\ell-1}$ за свако ℓ.

Табела 2.2: Грешке при нумеричком израчунавању интеграла (2.27).

ℓ	$Q_{2\ell-1,\ell-1}[f]$	$\widetilde{Q}_{2\ell-1,\ell-1}[f]$
4	$-1{,}16\cdot 10^{-2}$	$-5{,}95\cdot 10^{-3}$
5	$-6{,}66\cdot 10^{-4}$	$-1{,}11\cdot 10^{-4}$
6	$5{,}19\cdot 10^{-5}$	$1{,}05\cdot 10^{-5}$
7	$-3{,}27\cdot 10^{-6}$	$-6{,}44\cdot 10^{-7}$
8	$1{,}29\cdot 10^{-7}$	$2{,}75\cdot 10^{-8}$
9	$6{,}10\cdot 10^{-9}$	$1{,}40\cdot 10^{-9}$
10	$-1{,}85\cdot 10^{-9}$	$-4{,}37\cdot 10^{-10}$
11	$2{,}30\cdot 10^{-10}$	$5{,}61\cdot 10^{-11}$
12	$-2{,}14\cdot 10^{-11}$	$-5{,}35\cdot 10^{-12}$

Имало би смисла и да се матрица J_ℓ^G допуни са више врста и колона него у израчунавањима за табелу 2.2. На пример, табела 2.3 даје резултате за квадратурне формуле са $3\ell-1$ чворова добијених проширењем тродијагоналне матрице $\widetilde{J}_{2\ell-1,\ell-1}$ са n додатних врста и колона. Ове нове врсте и колоне су аналогне последњој врсти и колони матрице $\widetilde{J}_{2\ell-1,\ell-1}$. Овако добијену квадратурну формулу означаваћемо са $\widetilde{Q}_{3\ell-1,\ell-1}$. За мале вредности ℓ, ова квадратурна формула даје мању грешку него $\widetilde{Q}_{2\ell-1,\ell-1}$.

Табела 2.3: Грешке при нумеричком израчунавању интеграла (2.27) формулом $\widetilde{Q}_{3\ell-1,\ell-1}[f]$.

$\widetilde{Q}_{11,3}[f]$	$\widetilde{Q}_{14,4}[f]$	$\widetilde{Q}_{17,5}[f]$
$5{,}92\cdot 10^{-4}$	$-8{,}64\cdot 10^{-5}$	$9{,}00\cdot 10^{-6}$

Најзад, испоставило се да скраћивање матрице $\widetilde{J}_{2\ell-1,\ell-1}$ уклањањем последњих врста и колона даје квадратурну формулу са већом тачношћу него што је то случај код квадратуре $\widetilde{Q}_{2\ell-1,\ell-1}[f]$ ако је ℓ велико. На пример, уклањањем последњих $\ell-6$ врста и колона матрице $\widetilde{J}_{2\ell-1,\ell-1}$ добија се матрица $\widetilde{J}_{\ell+5,5}$ са одговарајућом квадратурном формулом $\widetilde{Q}_{\ell+5,5}$. Квадратурне грешке за ову квадратурну формулу приказане су у табели 2.4.

Табела 2.4: Грешке при нумеричком израчунавању интеграла (2.27) формулом $\widetilde{Q}_{\ell+5,5}[f]$.

$\widetilde{Q}_{14,5}[f]$	$\widetilde{Q}_{15,5}[f]$	$\widetilde{Q}_{16,5}[f]$
$-1{,}18\cdot 10^{-9}$	$-2{,}29\cdot 10^{-10}$	$4{,}18\cdot 10^{-11}$

Табеле 2.3 и 2.4 показују да и проширења Гаусових квадратурних фор-

мула различита од оних која су испитана у [4, 40] могу бити од интереса.

2.6 Закључак

У резултатима изложеним у глави 2 докторске дисертације представљена је анализа скраћених уопштених усредњених гаусовских квадратурних формула која даје одређене услове под којима су ове формуле унутрашње. Нумеричким примерима је показано да је анализа строга, у смислу да не може да се уопшти на проширења преко квадратуре $Q_{\ell+1}^{(1)}$. Остали примери показују понашање уопштених усредњених гаусовских квадратура и њихових скраћених верзија. Резултати ове главе су објављени у раду [3].

«празна страница»

Глава 3: Оцена грешке у Гаус-Кронродовим квадратурама за Бернштајн-Сегеове тежинске функције

3.1 Увод

Нека је w (ненегативна) тежинска функција на интервалу $[-1, 1]$. Са $\pi_n(\cdot)$ ћемо означити (моничан) ортогонални полином степена n у односу на тежинску функцију w, а са τ_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ његове нуле. Подсетимо се да су нуле τ_ν чворови одоварајуће Гаусове квадратурне формуле G_n са n чворова у односу на тежинску функцију w,

$$G_n[f] = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu f(\tau_\nu),$$

са алгебарским степеном тачности $2n - 1$.

Посматраћемо Гаус-Кронродове квадратурне формуле за тежинску функцију w на интервалу $[-1, 1]$,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(t)w(t)\,dt &= Q_n[f] + R_n(f), \\ Q_n[f] &= \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu f(\tau_\nu) + \sum_{\mu=1}^{n+1} \sigma_\mu^* f(\tau_\mu^*). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Чворови τ_μ^* и све тежине σ_ν, σ_μ^* одабрани су тако да формула (3.1) има највећи могући алгебарски степен тачности. Тај степен тачности је бар $3n+1$, дакле $R_n(f) = 0$ за све полиноме $f \in \mathcal{P}_{3n+1}$ (где $\mathcal{P}_k$ означава скуп свих полинома степена не већег од k.) Зна се да су чворови τ_μ^* нуле (моничног) полинома $\pi_{n+1}^*(\cdot; w)$ степена $n+1$, такозваног Стилтјесовог полинома, који задовољава релације ортогоналности

$$\int_{-1}^{1} \pi_{n+1}^*(t)\pi_n(t)t^k\, w(t)\, dt = 0,\ \ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Детаљан приказ Гаус-Кронродових квадратурних формула може се наћи у [26].

У овој глави w ће представљати једну од четири тежинске функције Бернштајн-Сегеовог типа

$$w(t) \equiv w_\gamma^{(\mp 1/2)}(t) = \frac{(1-t^2)^{\mp 1/2}}{1 - \dfrac{4\gamma}{(1+\gamma)^2}\, t^2}\,, \quad t \in (-1,1), \quad \gamma \in (-1,0], \tag{3.2}$$

$$w(t) \equiv w_\gamma^{(\mp 1/2, \pm 1/2)}(t) = \frac{(1-t)^{\mp 1/2}(1+t)^{\pm 1/2}}{1 - \dfrac{4\gamma}{(1+\gamma)^2}\, t^2}\,, \quad t \in (-1,1), \quad \gamma \in (-1,0]. \tag{3.3}$$

На пример, четири Чебишовљеве тежинске функције су специјални случајеви (3.2) и (3.3) за $\gamma = 0$.

Одговарајуће (моничне) ортогоналне полиноме у односу на тежинске функције (3.2) и (3.3) означаваћемо са

$$\pi_n^{(\mp 1/2)}(\cdot) = \pi_n(\cdot\,; w^{(\mp 1/2)})$$

и

$$\pi_n^{(\mp 1/2, \pm 1/2)}(\cdot) = \pi_n(\cdot\,; w^{(\mp 1/2, \pm 1/2)}),$$

редом. Осим тога, одговарајуће (моничне) Стилтјесове полиноме у односу на тежинске функције (3.2) и (3.3) означаваћемо са

$$\pi_{n+1}^{*(\mp 1/2)}(\cdot) = \pi_{n+1}^*(\cdot\,; w^{(\mp 1/2)})$$

и

$$\pi_{n+1}^{*(\mp 1/2, \pm 1/2)}(\cdot) = \pi_{n+1}^*(\cdot\,; w^{(\mp 1/2, \pm 1/2)}),$$

редом.

За аналитичке функције, остатак у квадратурној формули (3.1) може да се представи у облику контурног интеграла са комплексним језгром. Овде ћемо за дату квадратурну формулу проучити то језгро, узимајући за контуре интеграла елипсе са жижама у тачкама ∓ 1 и збиром полуоса $\rho > 1$. Полазећи од експлицитног израза за језгро, одредићемо тачке на елипсама у којима модул језгра узима максималну вредност. Тако ћемо извести употребљива ограничења за грешку у овој квадратурној формули. Нешто другачији приступ је предложио Нотарис [24]. Метода коју овде користимо употребљена је за добијање ограничења грешке за Гаусове квадратурне формуле у односу на тежинске функције (3.2) и (3.3) и њихова уопштења (видети [45], [46], [42], [30]). Примена ове методе на Гаус-Радау квадратурне формуле у односу на тежинске функције (3.2) и (3.3) може се наћи у

[33]. Такође, у [31], [32], [43] и тамошњим референцама, овом методом су испитане гаусовске квадратурне формуле са вишеструким чворовима.

Приметимо да чворови квадратуре (3.1) у односу на тежинске функције (3.2) и (3.3), припадају интервалу $[-1,1]$ (видети нпр. [9, теореме 5.1, 5.2, 5.3]).

Нека је Γ проста затворена крива у комплексној равни која окружује интервал $[-1,1]$ и нека је $\mathcal{D} = \operatorname{int} \Gamma$ (ограничена) област одређена овом кривом. Под претпоставком да је интегранд f аналитичка функција у области $\mathcal{D}$ и непрекидна на $\overline{\mathcal{D}}$, остатак $R_n(f)$ у формули (3.1) може да се представи у облику интеграла

$$R_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma K_n(z) f(z) dz. \tag{3.4}$$

Језгро K_n је дато формулом

$$K_n(z) \equiv K_n^{GK}(z; w) = \frac{\varrho_n(z)}{\pi_n(z)\pi_{n+1}^*(z)}, \quad z \notin [-1,1],$$

где је

$$\varrho_n(z) \equiv \varrho_{n,w}^{GK}(z) = \int_{-1}^{1} \frac{\pi_n(t)\pi_{n+1}^*(t)}{z-t} w(t) dt.$$

Јасно је да је модул језгра симетричан у односу на реалну осу:

$$|K_n(\overline{z})| = |K_n(z)|.$$

Интегрално представљање (3.4) даје оцену грешке

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi} \, \|K_n\|_\Gamma \, \|f\|_\Gamma \quad \left(\|\varphi\|_\Gamma = \max_{z\in\Gamma} |\varphi(z)| \right), \tag{3.5}$$

где је $\ell(\Gamma)$ дужина контуре Γ. Тако је, да би се проценила десна страна неједнакости (3.5), потребно ограничити одозго вредност $|K_n(z)|$ на кривој Γ.

Горње оцене остатка $|R_n(f)|$ за аналитичку функцију f разматране су у више радова. Два посебно често коришћена избора криве Γ су:

- круг C_r са центром у нули и полупречником $r > 1$, тј.

  $$C_r = \{z \mid |z| = r\}, \quad r > 1$$

  (видети нпр. [11], [23], [25], [24], [28]), и

- елипса $\mathcal{E}_\rho$ са жижама у тачкама ∓ 1 и збиром полуоса $\rho > 1$,

$$\mathcal{E}_\rho = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \ z = \frac{1}{2}\left(\rho\, e^{i\theta} + \rho^{-1} e^{-i\theta}\right), \ 0 \leq \theta \leqslant 2\pi \right\}. \tag{3.6}$$

Ако пустимо да $\rho \to 1$, елипса се дегенерише, тј. сужава до самог интервала $[-1,1]$. С друге стране, са порастом параметра ρ елипса постаје блиска кружници. Предност елиптичких контура у поређењу са кружним је што такав избор захтева да функција f буде аналитичка на мањој области у комплексној равни, нарочито када је ρ блиско јединици.

У овој глави, за криву Γ узимамо елипсу $\mathcal{E}_\rho$, при чему означавамо

$$\|\varphi\|_{\mathcal{E}_\rho} = \|\varphi\|_\rho \,.$$

У том случају израз (3.5) постаје

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{\ell(\mathcal{E}_\rho)}{2\pi} \, \|K_n\|_\rho \, \|f\|_\rho \,. \tag{3.7}$$

Дужина елипсе $\mathcal{E}_\rho$ је једнака $\ell(\mathcal{E}_\rho) = 4\varepsilon^{-1}E(\varepsilon)$, где је ε ексцентрицитет елипсе $\mathcal{E}_\rho$, тј. $\varepsilon = 2/(\rho + \rho^{-1})$. Овде је

$$E(\varepsilon) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta} \, d\theta$$

потпуни елиптички интеграл друге врсте. Тако се оцена (3.7) своди на

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{2E(\varepsilon)}{\pi\varepsilon} \, \|K_n\|_\rho \, \|f\|_\rho \,. \tag{3.8}$$

Примећујемо да је израз на десној страни неједнакости (3.8) функција од параметра ρ, те се може оптимизовати по $\rho > 1$.

Извођење употребљивих оцена за $|R_n(f)|$ коришћењем релације (3.8) захтева добре оцене израза $\max_{z\in\mathcal{E}_\rho} |K_n(z)|$. Од посебне користи било би лоцирање екстремалне тачке $\eta \in \mathcal{E}_\rho$ у којој је модул $|K_n|$ максималан. У том случају, уместо одређивања горње границе израза $\max_{z\in\mathcal{E}_\rho} |K_n(z)|$, било би довољно одредити $|K_n(\eta; w)|$. Ово у општем случају може да не буде једноставно изводљиво. Ипак, у случају Гаусових квадратурних формула постоје ефективни алгоритми за израчунавање вредности $K_n(z)$ у произвољној тачки z ван интервала $[-1, 1]$ (видети нпр. [11]). Другачији приступ оцењивању $R_n(f)$ може се наћи у [15].

Раније је оцена (3.8) дискутована у случају Гаусових квадратурних формула у односу на Чебишовљеве тежинске функције (видети [11], [10])

$$w_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad w_2(t) = \sqrt{1-t^2}, \quad w_3(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}, \quad w_4(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}.$$

Ову оцену је потом Шира проширио на симетричне тежинске функције уз услов монотоности (када је функција $w(t)\sqrt{1-t^2}$ растућа на интервалу $(0, 1)$ или је функција $w(t)/\sqrt{1-t^2}$ опадајућа на $(0, 1)$), што укључује неке Гегенбауерове тежинске функције (видети [37]), док су је Гаучи [6] и Хантер и Николов [16] проширили на Гаус-Радау и Гаус-Лобато квадратурне формуле.

У новије време (видети [42], [45], [46]), у односу на рационалне модификације Чебишовљевих тежинских функција, као што су Бернштајн-Сегеове тежинске функције $w_\gamma^{(\mp 1/2)}$ и $w_\gamma^{(\mp 1/2,\pm 1/2)}$, нађени су довољни услови под којима постоји

$$\rho^* = \rho_n^* = \rho_{n,\gamma}^*$$

такво да за свако $\rho \geqslant \rho^*$ језгро K_n на елипси $\mathcal{E}_\rho$ достиже максимум по модулу у тачки на реалној или на имагинарној оси. Ово питање је разматрано за Гаус-Радау квадратурне формуле у [33]. Нешто општија класа Бернштајн-Сегеових тежинских функција разматрана је у [30].

3.2 Експлицитни изрази за модул језгра Гаус-Кронродових квадратура са Бернштајн-Сегеовим тежинама

3.2.1 Гаус-Кронродова квадратурна формула са тежинском функцијом $w_\gamma^{(-1/2)}$

Посматрајмо формулу (3.1) са $w = w_\gamma^{(-1/2)}$,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(t) w_\gamma^{(-1/2)}(t)\, dt &= Q_n^{(-1/2)}[f] + R_n^{(-1/2)}(f), \\ Q_n^{(-1/2)}[f] &= \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu^{(-1/2)} f\left(\tau_\nu^{(-1/2)}\right) + \sum_{\mu=1}^{n+1} \sigma_\mu^{*(-1/2)} f\left(\tau_\mu^{*(-1/2)}\right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Према [24], за $n \geqslant 4$ имамо

$$\pi_n^{(-1/2)}(t)\pi_{n+1}^{*(-1/2)}(t) = (t^2-1)\left[\pi_{2n-1}^{(1/2)}(t) - \frac{\gamma}{4}\pi_{2n-3}^{(1/2)}(t)\right]$$

и

$$\pi_n^{(1/2)}(t) = \frac{1}{2^n}\left[U_n(t) - \gamma U_{n-2}(t)\right],$$

где је

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

Чебишовљев полином друге врсте. Ове две једнакости заједно дају

$$\pi_n^{(-1/2)}(t)\pi_{n+1}^{*(-1/2)}(t) = \frac{t^2-1}{2^{2n-1}}\left[U_{2n-1}(t) - 2\gamma U_{2n-3}(t) + \gamma^2 U_{2n-5}(t)\right].$$

Одатле је

$$K_n^{(-1/2)}(z) = \frac{-(1+\gamma)^2}{2^{2n+1}\gamma\pi_n^{(-1/2)}(z)\pi_{n+1}^{*(-1/2)}(z)}\left(A_{2n-1}(z) - 2\gamma A_{2n-3}(z) + \gamma^2 A_{2n-5}(z)\right), \tag{3.10}$$

где је

$$A_k(z)=\int_{-1}^{1}\frac{U_k(t)\sqrt{1-t^2}}{(z-t)(a^2+t^2)}\,dt=\int_0^{\pi}\frac{\sin(k+1)\theta\sin\theta\,d\theta}{(z-\cos\theta)(a^2+\cos^2\theta)}\,,$$

$$t=\cos\theta,\quad a^2=-\frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma}>0.$$

Познато је да важи (нпр. по [11, стр. 1177]; такође се може видети [14, једн. 3.613.3])

$$\int_{-1}^{1}\frac{U_k(t)\sqrt{1-t^2}}{z-t}\,dt=\pi\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^{k+1},$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{U_k(t)\sqrt{1-t^2}}{a^2+t^2}\,dt=\int_0^{\pi}\frac{\sin(k+1)\theta\sin\theta\,d\theta}{a^2+\cos^2\theta}$$

$$=\begin{cases}0, & k \text{ непарно},\\ \dfrac{(-1)^{k/2}\pi}{a}\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)^{k+1}, & k \text{ парно},\end{cases}$$

а одавде коришћењем идентитета

$$2tU_k=U_{k+1}+U_{k-1}$$

добијамо још и

$$\int_{-1}^{1}\frac{tU_k(t)\sqrt{1-t^2}}{a^2+t^2}\,dt=\begin{cases}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\pi\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)^{k+1}, & k \text{ непарно},\\ 0, & k \text{ парно}.\end{cases}$$

Сада из

$$\frac{1}{(z-t)(a^2+t^2)}=\frac{1}{z^2+a^2}\left(\frac{1}{z-t}+\frac{z+t}{a^2+t^2}\right)$$

следи да је

$$(z^2+a^2)A_k(z)=\begin{cases}\pi\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^{k+1}+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\pi\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)^{k+1}, & k \text{ непарно},\\ \pi\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^{k+1}+\dfrac{(-1)^{\frac{k}{2}}\pi z}{a}\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)^{k+1}, & k \text{ парно}.\end{cases}$$

Пошто је $c=\sqrt{a^2+1}-a$ у ствари једнако

$$c=\sqrt{\frac{4\gamma-(1+\gamma)^2}{4\gamma}}-\frac{1+\gamma}{\sqrt{-4\gamma}}=\frac{1-\gamma}{\sqrt{-4\gamma}}-\frac{1+\gamma}{\sqrt{-4\gamma}}=\sqrt{-\gamma},\tag{3.11}$$

горња формула се своди на

$$
\begin{aligned}
A_k(z) = &\int_{-1}^{1} \frac{U_k(t)\sqrt{1-t^2}}{(z-t)\left(t^2 - \frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma}\right)}\,dt \\
= &\begin{cases} \pi \dfrac{\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^{k+1} - \gamma^{\frac{k+1}{2}}}{z^2 - \frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma}}, & k \text{ непарно}, \\[2ex] \pi \dfrac{\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^{k+1} - \frac{2z}{1+\gamma}\gamma^{\frac{k+2}{2}}}{z^2 - \frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma}}, & k \text{ парно}. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Између осталог, важи $A_k(-1) = A_k(1)$ за непарно k, односно $A_k(-1) = -A_k(1)$ за парно k.

За свако $n \in \mathbb{N}$ важи (нпр. по [11, стр. 1177])

$$
U_n(z) = \frac{\xi^{n+1} - \xi^{-n-1}}{\xi - \xi^{-1}}, \quad \text{где је} \quad z = \frac{1}{2}\left(\xi + \xi^{-1}\right)
$$

$$
\left(\xi = z + \sqrt{z^2-1}, \quad \xi^{-1} = z - \sqrt{z^2-1}\right)
$$

и

$$
\begin{aligned}
&A_{2n-1}(z) - 2\gamma A_{2n-3}(z) + \gamma^2 A_{2n-5}(z) \\
= \;& \frac{\pi}{z^2+a^2}\left[\frac{1}{\xi^{2n}} - \frac{2\gamma}{\xi^{2n-2}} + \frac{\gamma^2}{\xi^{2n-4}} + (-1)^{n-1}c^{2n} \right. \\
&\qquad \left. - 2\gamma(-1)^{n-2}c^{2n-2} + \gamma^2(-1)^{n-3}c^{2n-4}\right] \\
= \;& \frac{\pi}{\frac{1}{4}\left(\xi^2+\xi^{-2}+2\right) - \frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma}}\left[\frac{1-2\gamma\xi^2+\gamma^2\xi^4}{\xi^{2n}} + (-1)^{n-3}c^{2n-4}\left(c^4+2\gamma c^2+\gamma^2\right)\right] \\
= \;& \frac{4\pi}{\xi^2+\xi^{-2} - \frac{1+\gamma^2}{\gamma}}\left[\frac{\left(1-\gamma\xi^2\right)^2}{\xi^{2n}} + (-1)^{n-3}c^{2n-4}\left(c^2+\gamma\right)^2\right] \\
= \;& \frac{4\pi\left(1-\gamma\xi^2\right)^2}{\xi^{2n}\left(\xi^2+\xi^{-2} - \frac{1+\gamma^2}{\gamma}\right)},
\end{aligned}
$$

где је c дато са (3.11). Такође је

$$
(-1)^{n-3}c^{2n-4}\left(c^2+\gamma\right)^2 = 0,
$$

јер је $c^2 + \gamma = 0$. Тако (3.10) постаје

$$
\begin{aligned}
K_n^{(-1/2)}(z) = &-\frac{4\pi(1+\gamma)^2\left(1-\gamma\xi^2\right)^2}{\xi^{2n}\left(\xi-\xi^{-1}\right)\left((1+\gamma)^2 - \gamma\left(\xi+\xi^{-1}\right)^2\right)} \\
&\times \frac{1}{\left[\left(\xi^{2n}-\xi^{-2n}\right) - 2\gamma\left(\xi^{2n-2}-\xi^{-2n+2}\right) + \gamma^2\left(\xi^{2n-4}-\xi^{-2n+4}\right)\right]}.
\end{aligned}
$$

Даље одређујемо $\left|K_n^{(-1/2)}(z)\right|$ на сличан начин као у [33, једначине (8)].

$$\left|K_n^{(-1/2)}(z)\right| =$$
$$\frac{2\sqrt{2}\pi\,(1+\gamma)^2\left(1+\gamma^2\rho^4-2\gamma\rho^2\cos 2\theta\right)}{\rho^{2n}\,(a_2-\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}}\left[(1+\gamma^2)^2-4\gamma\,(1+\gamma^2)\,a_2\cos 2\theta+2\gamma^2\,(a_4+\cos 4\theta)\right]^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}},$$

где је

$$\begin{aligned} p = \;& 2(a_{4n}-\cos 4n\theta)+8\gamma^2(a_{4n-4}-\cos(4n-4)\theta)+2\gamma^4(a_{4n-8}-\cos(4n-8)\theta) \\ & -8\gamma(a_{4n-2}\cos 2\theta-a_2\cos(4n-2)\theta)+4\gamma^2(a_{4n-4}\cos 4\theta-a_4\cos(4n-4)\theta) \\ & -8\gamma^3(a_{4n-6}\cos 2\theta-a_2\cos(4n-6)\theta), \end{aligned} \tag{3.13}$$

при чему смо означили $a_m = \frac{1}{2}\left(\rho^m+\rho^{-m}\right)$.

За мале вредности n добијају се следећи изрази.

Пошто је

$$\frac{1}{(z-t)(1-t^2)} = \frac{1}{(1-z^2)(z-t)} - \frac{1}{2(1+z)(-1-t)} - \frac{1}{2(1-z)(1-t)},$$

на основу (3.12) имамо

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}\frac{U_n(t)}{(z-t)(1-t^2)\left(t^2-\frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma}\right)}\sqrt{1-t^2}\,dt &= \frac{A_n(z)}{1-z^2}-\frac{A_n(-1)}{2(1+z)}-\frac{A_n(1)}{2(1-z)} \\ &= \frac{A_n(z)-A_n(1)}{1-z^2} \end{aligned}$$

за непарно n, тако да је

$$\begin{aligned} K_1^{(-1/2)}(z) &= \frac{1}{z^3-\frac{3+\gamma}{4}z}\int_{-1}^{1}\frac{t^3-\frac{3+\gamma}{4}t}{z-t}\,w_\gamma^{(-1/2)}(t)dt \\ &= \frac{-\frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma}}{8z^3-2(3+\gamma)z}\int_{-1}^{1}\frac{U_3(t)-(1+\gamma)U_1(t)}{(z-t)(1-t^2)\left(t^2-\frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma}\right)}\sqrt{1-t^2}dt \\ &= \frac{-\frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma}}{8z^3-2(3+\gamma)z}\cdot\frac{(A_3(z)-A_3(1))-(1+\gamma)(A_1(z)-A_1(1))}{1-z^2} \\ &= \frac{(1+\gamma)^2\,(A_3(z)-(1+\gamma)A_1(z))}{4\gamma(z^2-1)(8z^3-2(3+\gamma)z)}, \end{aligned}$$

што је једнако

$$\frac{\pi(1+\gamma)^2\left(\sqrt{z^2-1}-z\right)\left(\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^2-\gamma\right)}{4\gamma(4z^3-(3+\gamma)z)\left(z^2-\frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma}\right)\sqrt{z^2-1}}$$

$$= \frac{4\pi(1+\gamma)^2\left(-\rho^{-1}e^{-i\theta}\right)\left(\rho^{-2}e^{-2i\theta}-\gamma\right)}{\gamma(\rho^2e^{2i\theta}-\rho^{-2}e^{-2i\theta})(\rho^2e^{2i\theta}+\rho^{-2}e^{-2i\theta}-(1+\gamma))\left(\rho^2e^{2i\theta}+\rho^{-2}e^{-2i\theta}-\frac{1+\gamma^2}{\gamma}\right)}.$$

Према томе,

$$\left|\frac{\gamma K_1^{(-1/2)}(z)}{4\pi(1+\gamma)^2}\right|^2 = \frac{\rho^{-2}(\rho^{-4}-2\gamma\rho^{-2}\cos 2\theta+\gamma^2)}{8(a_4-\cos 4\theta)MN},$$

где су

$$M = a_4-2(1+\gamma)a_2\cos 2\theta+\cos 4\theta+\frac{(1+\gamma)^2}{2}$$

и

$$N = a_4-\frac{2(1+\gamma^2)}{\gamma}a_2\cos 2\theta+\cos 4\theta+\frac{(1+\gamma^2)^2}{2\gamma^2}.$$

Даље,

$$K_2^{(-1/2)}(z)$$

$$= \frac{-\frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma}}{z^5-\frac{3\gamma+6}{4}z^3+\frac{\gamma^2+5\gamma+4}{8}z}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{32}U_5(t)-\frac{3\gamma+2}{32}U_3(t)+\frac{2\gamma^2+4\gamma+1}{32}U_1(t)}{(z-t)(1-t^2)\left(t^2-\frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma}\right)}\sqrt{1-t^2}dt$$

$$= \frac{-\frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma}\left((A_5(z)-A_5(1))-(3\gamma+2)(A_3(z)-A_3(1)) + (2\gamma^2+4\gamma+1)(A_1(z)-A_1(1))\right)}{(1-z^2)(32z^5-24(\gamma+2)z^3+4(\gamma^2+5\gamma+4)z)}$$

$$= \frac{(1+\gamma)^2\left(A_5(z)-(3\gamma+2)A_3(z)+(2\gamma^2+4\gamma+1)A_1(z)\right)}{4\gamma(z^2-1)(32z^5-24(\gamma+2)z^3+4(\gamma^2+5\gamma+4)z)},$$

па у овом случају добијамо

$$\left|\frac{\gamma K_2^{(-1/2)}(z)}{4\rho\pi(1+\gamma)^2}\right|^2 = \frac{(4\gamma^4+4\gamma^3+\gamma^2)\rho^{12}-(\gamma^4+20\gamma^3+12\gamma^2+2\gamma)\rho^{10}\cos 2\theta+O(\rho^8)}{\rho^{36}+\left(\left(4\gamma+18-\frac{2}{\gamma}\right)\cos 2\theta-(12\gamma+24)\cos^3 2\theta\right)\rho^{34}+O(\rho^{32})}.$$

Најзад, за $n=3$ имамо

$$K_3^{(-1/2)}(z)$$

$$= \frac{(1+\gamma)^2\left(A_7(z)-(2\gamma+2)A_5(z)+(\gamma^2+3\gamma+1)A_3(z)-(\gamma^2+\gamma)A_1(z)\right)}{4\gamma(z^2-1)(128z^7-64(\gamma+4)z^5+8(\gamma^2+11\gamma+19)z^3-2(3\gamma^2+13\gamma+12)z)}$$

и

$$\left|\frac{\gamma K_3^{(-1/2)}(z)}{4\rho\pi(1+\gamma)^2}\right|^2 = \frac{P}{Q}\,, \tag{3.14}$$

где су

$$\begin{aligned} P = \ & [(\gamma^2+\gamma)\rho^2\cos 2\theta - (\gamma^2+3\gamma+1)\cos 4\theta]^2 + \\ & [(\gamma^2+\gamma)\rho^2\sin 2\theta - (\gamma^2+3\gamma+1)\sin 4\theta]^2 + O(1), \\ Q = \ & \rho^{10}\left(\rho^4 - \tfrac{2+2\gamma^2}{\gamma}\rho^2\cos 2\theta\right)(\rho^4 - 4\rho^2\cos 2\theta)\times \\ & \left[(\rho^7\cos 7\theta - (2\gamma+1)\rho^5\cos 5\theta)^2 + (\rho^7\sin 7\theta - (2\gamma+1)\rho^5\sin 5\theta)^2\right] + O(\rho^{28}). \end{aligned}$$

3.2.2 Гаус-Кронродова квадратурна формула са тежинском функцијом $w_\gamma^{(1/2)}$

Посматрајмо сада формулу (3.1) са $w = w_\gamma^{(1/2)}$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(t) w_\gamma^{(1/2)}(t)\,dt &= Q_n^{(1/2)}[f] + R_n^{(1/2)}(f), \\ Q_n^{(1/2)}[f] &= \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu^{(1/2)} f\left(\tau_\nu^{(1/2)}\right) + \sum_{\mu=1}^{n+1} \sigma_\mu^{*(1/2)} f\left(\tau_\mu^{*(1/2)}\right). \end{aligned} \tag{3.15}$$

За $n \geqslant 2$ имамо

$$\begin{aligned} \pi_n^{(1/2)}(t)\pi_{n+1}^{*(1/2)}(t) = \ & \pi_{2n+1}^{(1/2)}(t) - \frac{\gamma}{4}\pi_{2n-1}^{(1/2)}(t) \\ = \ & \frac{1}{2^{2n+1}}\left[U_{2n+1}(t) - 2\gamma U_{2n-1}(t) + \gamma^2 U_{2n-3}(t)\right]. \end{aligned}$$

Према томе,

$$K_n^{(1/2)}(z) = -\frac{(1+\gamma)^2}{2^{2n+3}\gamma\pi_n^{(1/2)}(z)\pi_{n+1}^{*(1/2)}(z)}\left(A_{2n+1}(z) - 2\gamma A_{2n-1}(z) + \gamma^2 A_{2n-3}(z)\right),$$

где су изрази $A_k(z)$ уведени горе. На основу претходног случаја добијамо

$$\begin{aligned} K_n^{(1/2)}(z) = \ & \frac{\pi\left(1+\gamma\right)^2\left(\xi-\xi^{-1}\right)\left(1-\gamma\xi^2\right)^2}{\xi^{2n+2}\left((1+\gamma)^2 - \gamma\left(\xi+\xi^{-1}\right)^2\right)} \\ & \times\frac{1}{\left[\left(\xi^{2n+2}-\xi^{-2n-2}\right) - 2\gamma\left(\xi^{2n}-\xi^{-2n}\right) + \gamma^2\left(\xi^{2n-2}-\xi^{-2n+2}\right)\right]} \end{aligned}$$

и

$$\left|K_n^{(1/2)}(z)\right| = \frac{\sqrt{2}\pi\left(1+\gamma\right)^2\left(a_2-\cos 2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\gamma^2\rho^4 - 2\gamma\rho^2\cos 2\theta\right)}{\rho^{2n+2}\left[\left(1+\gamma^2\right)^2 - 4\gamma\left(1+\gamma^2\right)a_2\cos 2\theta + 2\gamma^2\left(a_4+\cos 4\theta\right)\right]^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}},$$

где је

$$
\begin{aligned}
q = \quad & 2(a_{4n+4} - \cos(4n+4)\theta) + 8\gamma^2(a_{4n} - \cos 4n\theta) + 2\gamma^4(a_{4n-4} - \cos(4n-4)\theta) \\
& -8\gamma(a_{4n+2}\cos 2\theta - a_2\cos(4n+2)\theta) + 4\gamma^2(a_{4n}\cos 4\theta - a_4 \cos 4n\theta) \\
& -8\gamma^3(a_{4n-2}\cos 2\theta - a_2\cos(4n-2)\theta).
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

За $n = 1$ добијамо

$$
K_1^{(1/2)}(z) = \frac{1}{8z^3 - (4+2\gamma)z}\int_{-1}^{1}\frac{U_3(t) - \gamma U_1(t)}{z-t} w_\gamma^{(1/2)}(t)dt = \frac{A_3(z) - \gamma A_1(z)}{8z^3 - (4+2\gamma)z}
$$

и одатле

$$
\left|\frac{\gamma K_1^{(1/2)}(z)}{4\rho\pi(1+\gamma)^2}\right|^2 = \frac{P}{Q}\,, \tag{3.17}
$$

где су

$$
\begin{aligned}
P = \quad & (\rho^{-4}\cos 4\theta - \gamma\rho^{-2}\cos 2\theta)^2 + (\rho^{-4}\sin 4\theta - \gamma\rho^{-2}\sin 2\theta)^2, \\
Q = \quad & \rho^2\left(\rho^4 - \tfrac{2+2\gamma^2}{\gamma}\rho^2\cos 2\theta\right)\times \\
& \left[(\rho^3\cos 3\theta + (1-\gamma)\rho\cos\theta)^2 + (\rho^3\sin 3\theta + (1-\gamma)\rho\sin\theta)^2 + O(\rho^2)\right].
\end{aligned}
$$

3.2.3 Гаус-Кронродова квадратурна формула са тежинском функцијом $w_\gamma^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}$

Сада посматрамо формулу (3.1) са $w = w_\gamma^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}$:

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(t) w_\gamma^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}(t)\,dt \quad &= \quad Q_n^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}[f] + R_n^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}(f), \\
Q_n^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}[f] \quad &= \quad \sum_{\nu=1}^{n}\sigma_\nu^{(\pm 1/2,\mp 1/2)} f\left(\tau_\nu^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}\right) \\
& \quad + \sum_{\mu=1}^{n+1}\sigma_\mu^{*(\pm 1/2,\mp 1/2)} f\left(\tau_\mu^{*(\pm 1/2,\mp 1/2)}\right).
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Овде имамо

$$
\begin{aligned}
\pi_n^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}(t)\pi_{n+1}^{*(\pm 1/2,\mp 1/2)}(t) \quad &= (t\pm 1)\left[\pi_{2n}^{(1/2)}(t) - \frac{\gamma}{4}\pi_{2n-2}^{(1/2)}(t)\right] \\
&= \frac{t\pm 1}{2^{2n}}\left[U_{2n}(t) - 2\gamma U_{2n-2}(t) + \gamma^2 U_{2n-4}(t)\right],
\end{aligned}
$$

за $n \geqslant 3$.

Према томе,

$$K_n^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}(z) = \mp\frac{(1+\gamma)^2}{2^{2n+2}\gamma\pi_n^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}(z)\pi_{n+1}^{*(\pm 1/2,\mp 1/2)}(z)} \times \left(A_{2n}(z) - 2\gamma A_{2n-2}(z) + \gamma^2 A_{2n-4}(z)\right),$$

где су изрази $A_k(z)$ уведени горе. У овом случају на сличан начин добијамо

$$K_n^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}(z) = \pm\frac{\xi\mp 1}{\xi\pm 1}\cdot\frac{2\pi\,(1+\gamma)^2\left(1-\gamma\xi^2\right)^2}{\xi^{2n+1}\left((1+\gamma)^2-\gamma\left(\xi+\xi^{-1}\right)^2\right)} \times\frac{1}{\left[\left(\xi^{2n+1}-\xi^{-2n-1}\right)-2\gamma\left(\xi^{2n-1}-\xi^{-2n+1}\right)+\gamma^2\left(\xi^{2n-3}-\xi^{-2n+3}\right)\right]}$$

и

$$\left|K_n^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}(z)\right| = \left(\frac{a_1\mp\cos\theta}{a_1\pm\cos\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \times\frac{2\pi\,(1+\gamma)^2\left(1+\gamma^2\rho^4-2\gamma\rho^2\cos 2\theta\right)}{\rho^{2n+1}\left[\left(1+\gamma^2\right)^2-4\gamma\left(1+\gamma^2\right)a_2\cos 2\theta+2\gamma^2\left(a_4+\cos 4\theta\right)\right]^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}}},$$

где је

$$\begin{aligned} r = {} & 2(a_{4n+2}-\cos(4n+2)\theta)+8\gamma^2(a_{4n-2}-\cos(4n-2)\theta) \\ & + 2\gamma^4(a_{4n-6}-\cos(4n-6)\theta) \\ & - 8\gamma(a_{4n}\cos 2\theta - a_2\cos 4n\theta)+4\gamma^2(a_{4n-2}\cos 4\theta - a_4\cos(4n-2)\theta) \\ & - 8\gamma^3(a_{4n-4}\cos 2\theta - a_2\cos(4n-4)\theta). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Пошто је

$$\frac{1}{(z-t)(1+t)} = \frac{1}{(1+z)(z-t)} - \frac{1}{(1+z)(-1-t)},$$

имамо

$$\int_{-1}^{1}\frac{U_n(z)}{(z-t)(1+t)\left(t^2-\frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma}\right)}\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{A_n(z)-A_n(-1)}{1+z},$$

и одатле

$$K_1^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}(z) = \frac{P}{Q},$$

где су

$$Q = (z+1)\left(8z^3+4(2+\gamma)z^2-2z-(2+3\gamma+\gamma^2)\right)$$

и

$$\begin{aligned}
P = &\quad (z+1)\int_{-1}^{1} \frac{U_3(t)+(2+\gamma)U_2(t)+U_1(t)-(2\gamma+\gamma^2)}{(z-t)(1+t)\left(t^2-\frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma}\right)}\sqrt{1-t^2}\,dt \\
= &\quad (A_3(z)-A_3(-1))+(2+\gamma)(A_2(z)-A_2(-1)) \\
&\quad +(A_1(z)-A_1(-1))-(2\gamma+\gamma^2)(A_0(z)-A_0(-1)) \\
= &\quad A_3(z)+(2+\gamma)A_2(z)+A_1(z)-(2\gamma+\gamma^2)A_0(z)\,.
\end{aligned}$$

Одавде следи

$$\left|\frac{\gamma K_1^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}(z)}{4\rho\pi(1+\gamma)^2}\right|^2 = \frac{4}{\rho^2\left(\rho^4-\frac{2+2\gamma^2}{\gamma}\rho^2\cos 2\theta\right)}\cdot\frac{R}{S}\,, \tag{3.20}$$

где су

$$\begin{aligned}
R = &\quad ((\gamma^2+\gamma)+(\gamma^2+2\gamma)\rho^{-1}\cos\theta-\rho^{-2}\cos 2\theta)^2 \\
&\quad +((\gamma^2+2\gamma)\rho^{-1}\sin\theta-\rho^{-2}\sin 2\theta)^2+O(\rho^{-3})
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
S = &\quad (\rho^2+4\rho\cos\theta+4)\times \\
&\quad [(\rho^3\cos 3\theta+(\gamma+2)\cos 2\theta+2\rho\cos\theta)^2 \\
&\quad +(\rho^3\sin 3\theta+(\gamma+2)\sin 2\theta+2\rho\sin\theta)^2]+O(\rho^{11}).
\end{aligned}$$

На сличан начин добијамо

$$\left|\frac{\gamma K_2^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}(z)}{4\rho\pi(1+\gamma)^2}\right|^2 = \frac{4\gamma^6}{(1+\gamma)^4\rho^{21}}\left(\rho-\frac{6\gamma+2}{\gamma}\cos\theta+O(\rho^{-1})\right). \tag{3.21}$$

3.3 Максимум модула језгра Гаус-Кронродових квадратура с Бернштајн-Сегеовим тежинама

Доказаћемо следећа тврђења о понашању модула добијених језгара Гаус-Кронродових квадратура са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама $w^{(-1/2)}$, $w^{(1/2)}$, $w^{(-1/2,1/2)}$ и $w^{(1/2,-1/2)}$.

Теорема 3.1. За Гаус-Кронродову квадратурну формулу (3.1) за $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$ са тежинском функцијом $w_\gamma^{(-1/2)}(t)$, $\gamma \in (-1,0)$, тј. (3.9), постоји $\rho^* \in (1,+\infty)$ ($\rho^* = \rho_n^* = \rho^*(n,\gamma)$) такво да за свако $\rho \geqslant \rho^*$ модул језгра $\left|K_n^{(-1/2)}(z)\right|$ достиже максималну вредност на реалним полуосама ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$) ако је $\gamma \geqslant \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$, односно на позитивној имагинарној полуоси ($\theta = \frac{\pi}{2}$) ако је $\gamma < \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$.

Другим речима,

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}\left|K_n^{(-1/2)}(z)\right| = \left|K_n^{(-1/2)}\left(\tfrac{1}{2}(\rho+\rho^{-1})\right)\right| = \left|K_n^{(-1/2)}\left(-\tfrac{1}{2}(\rho+\rho^{-1})\right)\right|$$

за $\gamma \geqslant \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$, и

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}\left|K_n^{(-1/2)}(z)\right| = \left|K_n^{(-1/2)}\left(\tfrac{i}{2}(\rho-\rho^{-1})\right)\right|$$

за $\gamma < \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$.

Такође, важи

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}\left|K_1^{(-1/2)}(z)\right| = \left|K_1^{(-1/2)}\left(\tfrac{1}{2}(\rho+\rho^{-1})\right)\right| = \left|K_1^{(-1/2)}\left(-\tfrac{1}{2}(\rho+\rho^{-1})\right)\right|$$

за $\gamma \geqslant -\frac{1}{2}$, и

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}\left|K_1^{(-1/2)}(z)\right| = \left|K_1^{(-1/2)}\left(\tfrac{i}{2}(\rho-\rho^{-1})\right)\right|$$

за $\gamma < -\frac{1}{2}$;

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}\left|K_3^{(-1/2)}(z)\right| = \left|K_3^{(-1/2)}\left(\tfrac{1}{2}(\rho+\rho^{-1})\right)\right| = \left|K_3^{(-1/2)}\left(-\tfrac{1}{2}(\rho+\rho^{-1})\right)\right|$$

за $\gamma \geqslant \frac{-5+\sqrt{13}}{6}$, и

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}\left|K_3^{(-1/2)}(z)\right| = \left|K_3^{(-1/2)}\left(\tfrac{i}{2}(\rho-\rho^{-1})\right)\right|$$

за $\gamma < \frac{-5+\sqrt{13}}{6}$.

Доказ. У случају $n > 3$ треба да покажемо да постоји (довољно велико) ρ^* тако да за све $\rho > \rho^*$ и $\theta \in [0, \pi]$ важи

$$\frac{a^2}{bcp} \leqslant \frac{A^2}{BCP},$$

тј.

$$a^2 BCP \leqslant A^2 bcp,$$

где је

$$\begin{aligned} a =& \quad 1+\gamma^2\rho^4 - 2\gamma\rho^2\cos 2\theta, \\ b =& \quad a_2 - \cos 2\theta, \\ c =& \quad \left(1+\gamma^2\right)^2 - 4\gamma\left(1+\gamma^2\right)a_2\cos 2\theta + 2\gamma^2\left(a_4+\cos 4\theta\right), \end{aligned} \tag{3.22}$$

p је дато једначином (3.13), а A, B, C и P су редом вредности израза a, b, c и p за $\theta = 0$ $(\theta = \frac{\pi}{2})$.

Да бисмо ово доказали, довољно је да упоредимо мономе са највећим степенима ρ на обема странама последње неједнакости.

За $\theta = 0$ имамо

$$\begin{aligned}
A = &\quad 1 + \gamma^2\rho^4 - 2\gamma\rho^2, \\
B = &\quad a_2 - 1, \\
C = &\quad \left(1+\gamma^2\right)^2 - 4\gamma\left(1+\gamma^2\right)a_2 + 2\gamma^2\left(a_4+1\right), \\
P = &\quad 2(a_{4n}-1) + 8\gamma^2(a_{4n-4}-1) + 2\gamma^4(a_{4n-8}-1) \\
&\quad -8\gamma(a_{4n-2}-a_2) + 4\gamma^2(a_{4n-4}-a_4) - 8\gamma^3(a_{4n-6}-a_2).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Члан са највећим степеном ρ у производу a^2BCP је

$$\begin{aligned}
H_l = &\quad \gamma^2\rho^4 \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \frac{1}{2}\rho^2 \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \left(-4\gamma\rho^{4n-2}\right) \\
&+\gamma^2\rho^4 \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \tfrac{1}{2}\rho^2 \cdot \left(-2\gamma\left(1+\gamma^2\right)\rho^2\right) \cdot \rho^{4n} \\
&+\gamma^2\rho^4 \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot (-1) \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \rho^{4n} \\
&+2 \cdot \left(-2\gamma\cos 2\theta\rho^2\right) \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \tfrac{1}{2}\rho^2 \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \rho^{4n},
\end{aligned}$$

док је у изразу A^2bcp тај члан

$$\begin{aligned}
H_r = &\quad \gamma^2\rho^4 \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \frac{1}{2}\rho^2 \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \left(-4\gamma\cos 2\theta\rho^{4n-2}\right) \\
&+\gamma^2\rho^4 \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \tfrac{1}{2}\rho^2 \cdot \left(-2\gamma\left(1+\gamma^2\right)\cos 2\theta\rho^2\right) \cdot \rho^{4n} \\
&+\gamma^2\rho^4 \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot (-\cos 2\theta) \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \rho^{4n} \\
&+2 \cdot \left(-2\gamma\rho^2\right) \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \tfrac{1}{2}\rho^2 \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \rho^{4n}.
\end{aligned}$$

Неједнакост $H_l < H_r$ је еквивалентна услову

$$(1-\cos 2\theta)\left(-2\gamma^7 - \gamma^5\left(1+\gamma^2\right) - \gamma^6 + 2\gamma^5\right)\rho^{4n+12} < 0,$$

тј.

$$(1-\cos 2\theta)\gamma^5\left(-3\gamma^2-\gamma+1\right)\rho^{4n+12} < 0,$$

што очигледно важи за све $\theta \in (0,\pi)$ ако је задовољено $-3\gamma^2-\gamma+1>0$, тј. ако је $\gamma \in \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{6}, 0\right)$.

С друге стране, ако је $\gamma = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$, коришћењем Матлаба се добија да је члан највећег степена по ρ у изразу $a^2BCP - A^2bpc$ (а то је ρ^{2n+10}) негативан, што и у овом случају потврђује тачност тврђења.

Слично, за $\theta = \frac{\pi}{2}$ неједнакост $H_l < H_r$ је еквивалентна услову

$$(-1-\cos 2\theta)\gamma^5\left(-3\gamma^2-\gamma+1\right) < 0,$$

што очигледно важи за све $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ ако је $\gamma \in \left(-1, \frac{-1-\sqrt{13}}{6}\right)$.

Након развијања, неједнакост $|K_1^{(-1/2)}(\theta)| \leqslant |K_1^{(-1/2)}(0)|$ се своди на $P(\rho) \geqslant 0$ за довољно велико ρ, где је $P(\rho)$ неки полином са два водећа члана

$$2\gamma^2(2\gamma+1)(1-\cos 2\theta)\rho^{26} - 4\gamma(\gamma^3+\gamma^2+2\gamma+1)(1-\cos^2 2\theta)\rho^{24}.$$

Следи да је за $\gamma \geqslant -\frac{1}{2}$ и довољно велико ρ вредност израза $|K_1^{(-1/2)}(z)|$ максимална за $\theta = 0$, тј. на реалној оси.

Слично, неједнакост $|K_1^{(-1/2)}(\theta)| \leqslant |K_1^{(-1/2)}(\frac{\pi}{2})|$ је еквивалентна са $Q(\rho) \geqslant 0$ за довољно велико ρ, где је $Q(\rho)$ неки полином са водећим чланом

$$-2\gamma^2(2\gamma+1)(1+\cos 2\theta)\rho^{26}.$$

Према томе, за $\gamma < -\frac{1}{2}$ и довољно велико ρ, вредност израза $|K_1^{(-1/2)}(z)|$ је максимална за $\theta = \frac{\pi}{2}$, тј. на имагинарној оси.

Приметимо да се бројилац у изразу (3.14) може записати као

$$\begin{aligned}
& (\gamma^2+\gamma)^2\rho^4 - 2(\gamma^2+\gamma)(\gamma^2+3\gamma+1)\cos 2\theta\,\rho^2 + O(1) \\
= \;& \rho^2\left((\gamma^2+\gamma)^2\rho^2 - 2(\gamma^2+\gamma)(\gamma^2+3\gamma+1)\cos 2\theta\right) + O(1),
\end{aligned}$$

а именилац се може записати као

$$\begin{aligned}
& \left(\rho^2 - \frac{2+2\gamma^2}{\gamma}\cos 2\theta\right)(\rho^2 - 4\cos 2\theta)\left(\rho^{14} - 2\,(2\gamma+1)\,\rho^{12}\cos 2\theta\right) + O(\rho^{14}) \\
= \rho^{12} & \left(\rho^2 - \frac{2+2\gamma^2}{\gamma}\cos 2\theta\right)(\rho^2 - 4\cos 2\theta)\left(\rho^2 - 2\,(2\gamma+1)\cos 2\theta\right) + O(\rho^{14}).
\end{aligned}$$

Према томе, за $n = 3$ довољно је показати да је неједнакост

$$\begin{aligned}
& \frac{(\gamma^2+\gamma)^2\rho^2 - 2(\gamma^2+\gamma)(\gamma^2+3\gamma+1)\cos 2\theta}{\left(\rho^2 - \frac{2+2\gamma^2}{\gamma}\cos 2\theta\right)(\rho^2 - 4\cos 2\theta)\left[\rho^2 - 2\,(2\gamma+1)\cos 2\theta\right]} \\
\leqslant \;& \frac{(\gamma^2+\gamma)^2\rho^2 - 2(\gamma^2+\gamma)(\gamma^2+3\gamma+1)}{\left(\rho^2 - \frac{2+2\gamma^2}{\gamma}\right)(\rho^2 - 4)\left[\rho^2 - 2\,(2\gamma+1)\right]}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

задовољена за довољно велико ρ када је $\gamma \geqslant \frac{-5+\sqrt{13}}{6}$, као и да је неједнакост

$$\begin{aligned}
& \frac{(\gamma^2+\gamma)^2\rho^2 - 2(\gamma^2+\gamma)(\gamma^2+3\gamma+1)\cos 2\theta}{\left(\rho^2 - \frac{2+2\gamma^2}{\gamma}\cos 2\theta\right)(\rho^2 - 4\cos 2\theta)\left[\rho^2 - 2\,(2\gamma+1)\cos 2\theta\right]} \\
\leqslant \;& \frac{(\gamma^2+\gamma)^2\rho^2 + 2(\gamma^2+\gamma)(\gamma^2+3\gamma+1)}{\left(\rho^2 + \frac{2+2\gamma^2}{\gamma}\right)(\rho^2 + 4)\left[\rho^2 + 2\,(2\gamma+1)\right]}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

задовољена за довољно велико ρ када је $\gamma < \frac{-5+\sqrt{13}}{6}$.

На исти начин као у досадашњем делу доказа, добија се да је (3.24) асимптотски еквивалентно услову

$$\begin{aligned}
&\left(\gamma^2+\gamma\right)^2\cdot(-2(2\gamma+1))+\left(\gamma^2+\gamma\right)^2\cdot(-4)+\left(\gamma^2+\gamma\right)^2\cdot\left(\tfrac{-2\left(1+\gamma^2\right)}{\gamma}\right)\\
&-2\left(\gamma^2+\gamma\right)\left(\gamma^2+3\gamma+1\right)\cos 2\theta\\
<\ &\left(\gamma^2+\gamma\right)^2\cdot(-2(2\gamma+1)\cos 2\theta)+\left(\gamma^2+\gamma\right)^2\cdot(-4\cos 2\theta)\\
&+\left(\gamma^2+\gamma\right)^2\cdot\left(\tfrac{-2\left(1+\gamma^2\right)}{\gamma}\cos 2\theta\right)-2\left(\gamma^2+\gamma\right)\left(\gamma^2+3\gamma+1\right),
\end{aligned}$$

што се своди на

$$(1-\cos 2\theta)\left(-2(2\gamma+1)-4-\frac{2(1+\gamma^2)}{\gamma}+\frac{2\left(\gamma^2+3\gamma+1\right)}{\gamma^2+\gamma}\right)<0,$$

тј.

$$-\left(1-\cos 2\theta\right)\left(3\gamma^2+5\gamma+1\right)<0,$$

за све $\theta\in(0,\pi)$. Пошто је $-1<\gamma<0$, ово је еквивалентно услову

$$3\gamma^2+5\gamma+1>0,$$

тј. $\gamma\in\left(\frac{-5+\sqrt{13}}{6},0\right)$.

Слично, (3.25) је еквивалентно са

$$(1+\cos 2t)\left(3\gamma^2+5\gamma+1\right)<0,$$

чиме је доказ у случају $\gamma\neq\frac{-5+\sqrt{13}}{6}$ завршен.

Најзад, ако је $\gamma=\frac{-5+\sqrt{13}}{6}$, тврђење се директно проверава помоћу Матлаба. $\Box$

За $n=2$ модул језгра не достиже обавезно максимум на координатним осама за $\gamma\in(-1,0)$ и довољно велико ρ. Ипак, одговарајући резултати се могу добити на неким подинтервалима интервала $(-1,0)$. На пример, неједнакост

$$\left|K_2^{(-1/2)}(\theta)\right|\leqslant\left|K_2^{(-1/2)}(0)\right|$$

је еквивалентна са $P(\rho)\geqslant 0$ за довољно велико ρ, где је $P(\rho)$ неки полином чија су два водећа члана

$$\gamma^2\{(16\gamma^3+96\gamma^2+88\gamma+22)(\cos 2\theta-\cos^3 2\theta)+(32\gamma^3+48\gamma^2+20\gamma+2)(1-\cos^3 2\theta)\}\rho^{46}$$
$$+(96\gamma^5+432\gamma^4+624\gamma^3+312\gamma^2+48\gamma)(\cos^3 2\theta-\cos 2\theta)\rho^{44}.$$

Овде је водећи коефицијент једнак

$$A = -2\gamma^2(2\gamma+1)(4\gamma^2+22\gamma+11)(1-\cos 2\theta) + 12\gamma^2(2\gamma+1)^2(\gamma+2)(1-\cos^3 2\theta).$$

Ако је

$$\frac{\sqrt{77}-11}{4} < \gamma < -\frac{1}{2},$$

горњи израз је позитиван, те је $P(\rho) > 0$ за довољно велико ρ, тј. вредност модула $\left|K_2^{(-1/2)}(z)\right|$ је максимална за $\theta = 0$. У супротном, пошто је

$$1 - \cos 2\theta \leqslant \frac{4}{3}(1-\cos^3 2\theta),$$

довољан услов да A буде позитивно је неједнакост

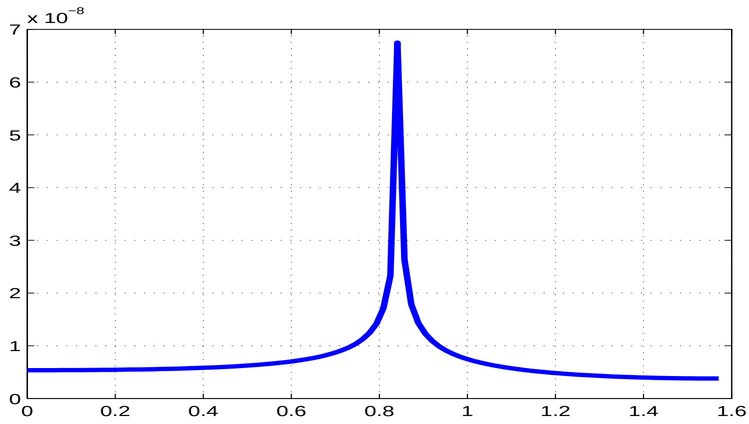
$$\begin{aligned} 0 &\leqslant -\frac{8}{3}(2\gamma+1)(4\gamma^2+22\gamma+11)(1-\cos^3 2\theta) + 12(2\gamma+1)^2(\gamma+2)(1-\cos^3 2\theta) \\ &= \frac{4}{3}(2\gamma+1)(10\gamma^2+\gamma-4)(1-\cos^3 2\theta), \end{aligned}$$

која је испуњена кад год је $\frac{-1-\sqrt{161}}{20} < \gamma < -\frac{1}{2}$.

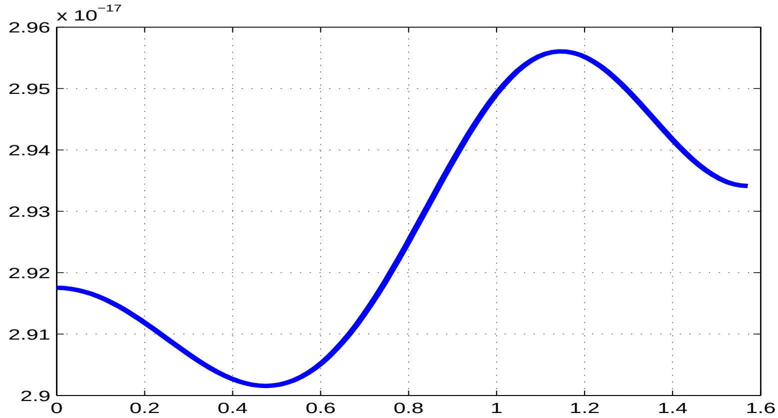
Графици на сликама 3.1-3.4 показују да тачка максимума израза

$$\zeta(\theta) = \zeta_{\rho,\gamma}(\theta) = \left|K_2^{(-1/2)}(z)\right|$$

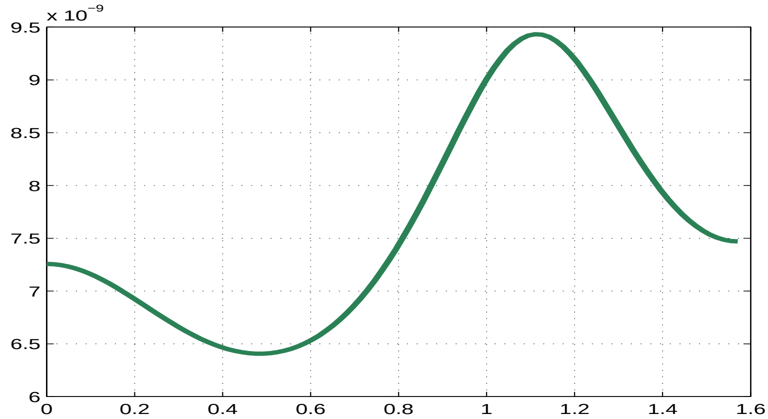
(где су ρ, γ фиксирани) може споро да конвергира када параметар ρ расте, као и да за неке вредности γ модул језгра не достиже максимум на координатној оси. Приметимо да се ово разматрање односи само на део елипсе $\mathcal{E}_\rho$ у првом квадранту, тј. на интервал $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, пошто је модул израза $K_2^{(-1/2)}$ симетричан у односу на обе координатне осе (као у нпр. [10, стр. 219]).



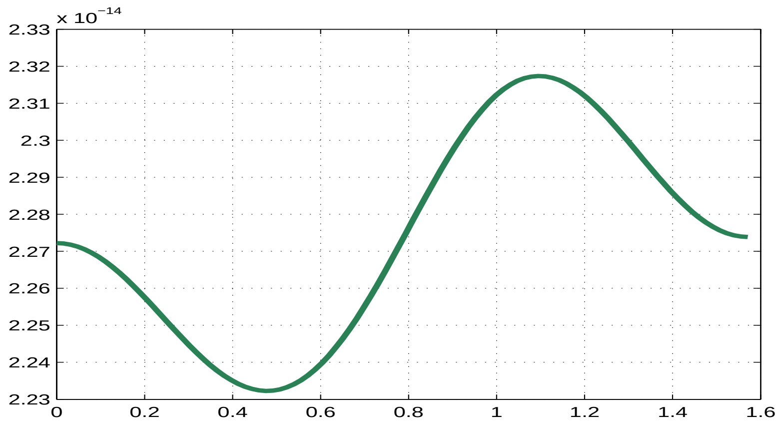
Слика 3.1: график модула језгра $\zeta(\theta) = \left|K_2^{(-1/2)}(z)\right|$ за $\rho = 5$, $\gamma = -0.01$



Слика 3.2: график модула језгра $\zeta(\theta) = \left|K_2^{(-1/2)}(z)\right|$ за $\rho = 25$, $\gamma = -0.01$



Слика 3.3: график модула језгра $\zeta(\theta) = \left|K_2^{(-1/2)}(z)\right|$ за $\rho = 5$, $\gamma = -0.2$



Слика 3.4: график модула језгра $\zeta(\theta) = \left|K_2^{(-1/2)}(z)\right|$ за $\rho = 15$, $\gamma = -0.2$

Теорема 3.2. За Гаус-Кронродову квадратурну формулу (3.1) са $n>1$ чворова за тежинску функцију $w_\gamma^{(1/2)}(t)$ и $\gamma\in(-1,0)$, тј. (3.15), постоји $\rho^*\in(1,+\infty)$ ($\rho^*=\rho_n^*=\rho^*(n,\gamma)$) такво да за свако $\rho\geqslant\rho^*$ модул језгра $\left|K_n^{(1/2)}(z)\right|$ достиже максимум на реалним полуосама ($\theta=0$ и $\theta=\pi$) ако је $\gamma\geqslant\frac{1-\sqrt{13}}{6}$, односно на позитивној имагинарној полуоси ($\theta=\frac{\pi}{2}$) ако је $\gamma<\frac{1-\sqrt{13}}{6}$.

Другим речима,

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}\left|K_n^{(1/2)}(z)\right|=\left|K_n^{(1/2)}\left(\tfrac12(\rho+\rho^{-1})\right)\right|=\left|K_n^{(1/2)}\left(-\tfrac12(\rho+\rho^{-1})\right)\right|$$

за $\gamma\geqslant\frac{1-\sqrt{13}}{6}$ и

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}\left|K_n^{(1/2)}(z)\right|=\left|K_n^{(1/2)}\left(\tfrac{i}{2}(\rho-\rho^{-1})\right)\right|$$

за $\gamma<\frac{1-\sqrt{13}}{6}$.

За $n=1$ важи

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}\left|K_1^{(1/2)}(z)\right|=\left|K_1^{(1/2)}\left(\tfrac{i}{2}(\rho+\rho^{-1})\right)\right|=\left|K_1^{(1/2)}\left(-\tfrac{i}{2}(\rho+\rho^{-1})\right)\right|.$$

Доказ. Ако је $n>1$, треба да покажемо да постоји ρ^* такво да за свако $\rho>\rho^*$ и $\theta\in[0,\pi]$ важи

$$\frac{a^2b}{cq}\leqslant\frac{A^2B}{CQ}\,,$$

тј.

$$a^2bCQ\leqslant A^2Bcq,$$

где су изрази a, b и c дати једнакостима (3.22), q је дато једначином (3.16), а A, B, C и Q су редом вредности параметара a, b, c и q за $\theta=0$ ($\theta=\frac{\pi}{2}$). То ћемо доказати упоређивањем чланова са највећим степеном по ρ на обема странама.

За $\theta=0$ имамо

$$\begin{aligned}Q=\;&2(a_{4n+4}-1)+8\gamma^2(a_{4n}-1)+2\gamma^4(a_{4n-4}-1)\\&-8\gamma(a_{4n+2}-a_2)+4\gamma^2(a_{4n}-a_4)-8\gamma^3(a_{4n-2}-a_2),\end{aligned}$$

где су A, B и C исти као у (3.23). Члан највећег степена по ρ у производу a^2bCQ је

$$\begin{aligned}H_l=\;&\frac12\rho^2\cdot\gamma^2\rho^4\cdot\gamma^2\rho^4\cdot\gamma^2\rho^4\cdot\left(-4\gamma\rho^{4n+2}\right)\\&+\tfrac12\rho^2\cdot\gamma^2\rho^4\cdot\gamma^2\rho^4\cdot\left(-2\gamma\left(1+\gamma^2\right)\rho^2\right)\cdot\rho^{4n+4}\\&+2\cdot\tfrac12\rho^2\gamma^2\rho^4\cdot\left(-2\gamma\cos2\theta\rho^2\right)\cdot\gamma^2\rho^4\cdot\rho^{4n+4}\\&+(-\cos2\theta)\cdot\gamma^2\rho^4\cdot\gamma^2\rho^4\cdot\gamma^2\rho^4\cdot\rho^{4n+4},\end{aligned}$$

док је у производу A^2Bcq тај члан

$$\begin{aligned} H_r = \quad & \frac{1}{2}\rho^2 \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \left(-4\gamma\rho^{4n+2}\cos 2\theta\right) \\ & +\tfrac{1}{2}\rho^2 \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \left(-2\gamma\left(1+\gamma^2\right)\cos 2\theta\rho^2\right) \cdot \rho^{4n+4} \\ & +2 \cdot \tfrac{1}{2}\rho^2\gamma^2\rho^4 \cdot \left(-2\gamma\rho^2\right) \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \rho^{4n+4} \\ & +(-1) \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \gamma^2\rho^4 \cdot \rho^{4n+4}. \end{aligned}$$

Неједнакост $H_l < H_r$ је еквивалентна са

$$\begin{aligned} & (1-\cos 2\theta)\left(-2\gamma^7 - \gamma^5\left(1+\gamma^2\right) + 2\gamma^5 + \gamma^6\right)\rho^{4n+16} \\ = \quad & (1-\cos 2\theta)\gamma^5\left(-3\gamma^2+\gamma+1\right)\rho^{4n+16} < 0, \end{aligned}$$

што очигледно важи за све $\theta \in (0,\pi)$ под условом да важи

$$-3\gamma^2+\gamma+1 > 0,$$

тј. $\gamma \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}, 0\right)$.

Тврђење важи и за $\gamma = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$. Заиста, уз помоћ Матлаба добија се да је коефицијент уз члан највећег степена по ρ у изразу $a^2BCP - A^2bcp$ (а то је коефицијент уз ρ^{2n+14}) негативан, што доказује тврђење у овом случају.

Слично, за $\theta = \pi/2$ неједнакост $H_l < H_r$ је еквивалентна са

$$(-1-\cos 2\theta)\gamma^5\left(-3\gamma^2+\gamma+1\right) < 0,$$

што очигледно важи за све $\theta \in [0,\pi/2)$ ако је $\gamma \in \left(-1, \frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)$.

Најзад, у случају $n=1$ бројилац у једнакости (3.17) може да се запише као

$$\rho^{-8} + \gamma^2\rho^{-4} - 2\gamma\rho^{-6}\cos 2\theta,$$

па треба да докажемо да важи

$$\frac{\rho^{-8}+\gamma^2\rho^{-4}-2\gamma\rho^{-6}\cos 2\theta}{R} \leqslant \frac{\rho^{-8}+\gamma^2\rho^{-4}+2\gamma\rho^{-6}}{\left(\rho^4+\frac{2+2\gamma^2}{\gamma}\rho^2\right)\left[(-\rho^3+(1-\gamma)\rho)^2+O(\rho^2)\right]}$$

за свако довољно велико ρ, где је

$$\begin{aligned} R = \quad & \left(\rho^4 - \tfrac{2+2\gamma^2}{\gamma}\rho^2\cos 2\theta\right) \times \\ & \left[(\rho^3\cos 3\theta+(1-\gamma)\rho\cos\theta)^2+(\rho^3\sin 3\theta+(1-\gamma)\rho\sin\theta)^2+O(\rho^2)\right]. \end{aligned}$$

Као и пре, ово је асимптотски еквивалентно неједнакости

$$\begin{aligned} & -2\gamma\cos 2\theta \cdot 1 \cdot 1 + \gamma^2 \cdot \tfrac{2\left(1+\gamma^2\right)}{\gamma} \cdot 1 + \gamma^2 \cdot 1 \cdot (-2(1-\gamma)) \\ \leqslant \quad & -2\gamma(-1) \cdot 1 \cdot 1 + \gamma^2 \cdot \left(-\tfrac{2\left(1+\gamma^2\right)}{\gamma}\cos 2\theta\right) \cdot 1 + \gamma^2 \cdot 1 \cdot (2(1-\gamma)\cos 2\theta), \end{aligned}$$

тј.

$$2\gamma\,(1+\cos 2\theta)\big(1+1+\gamma^2-\gamma(1-\gamma)\big)\leqslant 0$$

за свако $\theta\in[0,\pi]\setminus\{\pi/2\}$, а то је очигледно тачно јер је $2\gamma^2+2-\gamma>0$. Овим је доказ завршен. □

Теорема 3.3. За Гаус-Кронродову квадратурну формулу (3.1), $n\in\mathbb{N}/\{2\}$, са тежинском функцијом $w_\gamma^{(-1/2,1/2)}(t)$, $\gamma\in(-1,0)$, тј. формулу (3.18), постоји $\rho^*\in(1,+\infty)$ ($\rho^*=\rho_n^*=\rho^*(n,\gamma)$) такво да за свако $\rho\geqslant\rho^*$ модул језгра $\left|K_n^{(-1/2,1/2)}(z)\right|$ достиже максимум на позитивној реалној полуоси ($\theta=0$), тј.

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}\left|K_n^{(-1/2,1/2)}(z)\right|=\left|K_n^{(-1/2,1/2)}\left(\tfrac12(\rho+\rho^{-1})\right)\right|.$$

У случају $n=2$ важи

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}\left|K_2^{(-1/2,1/2)}(z)\right|=\left|K_2^{(-1/2,1/2)}\left(\tfrac12(\rho+\rho^{-1})\right)\right|$$

за $\gamma\geqslant-\frac13$ и

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}\left|K_2^{(-1/2,1/2)}(z)\right|=\left|K_2^{(-1/2,1/2)}\left(-\tfrac12(\rho+\rho^{-1})\right)\right|$$

за $\gamma<-\frac13$.

Доказ. Прво испитујемо случај $n>2$. Треба да докажемо да постоји ρ^* такво да за све $\rho>\rho^*$ и $\theta\in[0,\pi]$ важи

$$\frac{xa^2}{ycr}\leqslant\frac{XA^2}{YCR},$$

тј.

$$xa^2YCR\leqslant XA^2ycr,$$

где су a и c дати једначином (3.22),

$$x=a_1+\cos\theta,\quad y=a_1-\cos\theta,$$

а r је дато једначином (3.19), и притом су A,C,X,Y,R вредности израза a,c,x,y,r за $\theta=0$, тј.

$$\begin{aligned}X=&\ \ a_1+1,\\ Y=&\ \ a_1-1,\\ R=&\ \ 2(a_{4n+2}-1)+8\gamma^2(a_{4n-2}-1)+2\gamma^4(a_{4n-6}-1)\\ &-8\gamma(a_{4n}-a_2)+4\gamma^2(a_{4n-2}-a_4)-8\gamma^3(a_{4n-4}-a_2),\end{aligned}$$

а A и C су дати у (3.23).

Члан највећег степена по ρ у производу xa^2YCR је

$$H_l = \frac{1}{2}\rho\cdot\left(\gamma^2\rho^4\right)^2\cdot(-1)\cdot\gamma^2\rho^4\cdot\rho^{4n+2}+\cos\theta\cdot\left(\gamma^2\rho^4\right)^2\cdot\frac{1}{2}\rho\cdot\gamma^2\rho^4\cdot\rho^{4n+2}$$

док је у производу XA^2ycr одговарајући члан

$$H_r = \frac{1}{2}\rho\cdot\left(\gamma^2\rho^4\right)^2\cdot(-\cos\theta)\cdot\gamma^2\rho^4\cdot\rho^{4n+2}+\left(\gamma^2\rho^4\right)^2\cdot\frac{1}{2}\rho\cdot\gamma^2\rho^4\cdot\rho^{4n+2}.$$

Неједнакост $H_l < H_r$ је еквивалентна са

$$(\cos\theta-1)\gamma^6\rho^{2n+15}<0,$$

што очигледно важи за све $\theta\in(0,\pi]$.

Коришћењем једнакости (3.20) добија се да је одговарајућа неједнакост за $n=1$ еквивалентна неједнакости

$$2\left(\gamma^2+\gamma\right)\left(\gamma^2+2\gamma\right)(\cos\theta-1)\leqslant 0$$

за све $\theta\in(0,\pi)$, а то је очигледно тачно јер је

$$\left(\gamma^2+\gamma\right)\left(\gamma^2+2\gamma\right)=2\gamma^2(\gamma+1)(\gamma+2)>0$$

за свако $\gamma\in(-1,0)$.

Одговарајуће тврђење за $n=2$ директно следи из (3.21), изузев у сингуларном случају $\gamma=-\frac{1}{3}$ када је потребно користити Матлаб. $\square$

Најзад, како се израз $\left|K_n^{(1/2,-1/2)}(z)\right|$ добија из израза $\left|K_n^{(-1/2,1/2)}(z)\right|$ заменом θ са $\theta-\pi$, следеће тврђење не захтева доказ.

Теорема 3.4. За Гаус-Кронродову квадратурну формулу (3.1), $n\in\mathbb{N}/\{2\}$, са тежинском функцијом $w_\gamma^{(1/2,-1/2)}(t)$, $\gamma\in(-1,0)$, постоји $\rho^*\in(1,+\infty)$ ($\rho^*=\rho_n^*=\rho^*(n,\gamma)$) такво да за свако $\rho\geqslant\rho^*$ модул језгра $\left|K_n^{(1/2,-1/2)}(z)\right|$ достиже максимум на негативној реалној полуоси ($\theta=\pi$), тј.

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}\left|K_n^{(1/2,-1/2)}(z)\right|=\left|K_n^{(1/2,-1/2)}\left(-\tfrac{1}{2}(\rho+\rho^{-1})\right)\right|.$$

У случају $n=2$ важи

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}\left|K_2^{(1/2,-1/2)}(z)\right|=\left|K_2^{(1/2,-1/2)}\left(-\tfrac{1}{2}(\rho+\rho^{-1})\right)\right|$$

за $\gamma\geqslant-\frac{1}{3}$ и

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho}\left|K_2^{(1/2,-1/2)}(z)\right|=\left|K_2^{(1/2,-1/2)}\left(\tfrac{1}{2}(\rho+\rho^{-1})\right)\right|$$

за $\gamma<-\frac{1}{3}$. $\square$

3.4 Нумерички резултати

С практичне тачке гледишта, од значаја нам је да имамо процену (најмање) вредности параметра ρ^* чије постојање тврде теореме 3.1, 3.2, 3.3 и 3.4, пошто је за мање вредности ρ^* примена оцене (3.8) (уз знање приближног положаја тачке на елипси $\mathcal{E}_\rho$ у којој $|K_n|$ достиже максимум) могућа у већој области, те се тако могу добити тачнији резултати. Зато ће сва наша разматрања у вези с параметром ρ^* бити у односу на домен $(1, +\infty)$.

Нумеричко испитивање показује да је одговарајућа вредност параметра ρ^* веома блиско 1 за свако $\gamma \in (-1, 0)$ у случају тежинских функција $w_\gamma^{(-1/2)}$, $w_\gamma^{(\mp 1/2, \pm 1/2)}$, док је у случају тежинске функције $w_\gamma^{(1/2)}$ ова вредност мања од 2. За мале вредности n ово потврђују табеле 3.1, 3.2 и 3.3.

Табела 3.1: најмања могућа вредност ρ^* из теореме 3.1 добијена емпиријски у случају тежинске функције $w_\gamma^{(-1/2)}$ за $n = 10$.

γ	−0,99	−0,9	−0,8	−0,7	−0,6	−0,5	−0,4	−0,3	−0,2	−0,1
ρ^*	1,001	1,058	1,166	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001

Табела 3.2: најмања могућа вредност ρ^* из теореме 3.2 добијена емпиријски у случају тежинске функције $w_\gamma^{(1/2)}$ за $n = 10$.

γ	−0,99	−0,9	−0,8	−0,7	−0,6	−0,5	−0,4	−0,3	−0,2	−0,1
ρ^*	1,001	1,001	1,120	1,205	1,337	1,645	1,426	1,521	1,648	1,888

Табела 3.3: најмања могућа вредност ρ^* из теорема 3.3 и 3.4 добијена емпиријски у случају тежинских функција $w_\gamma^{(-1/2,1/2)}$ и $w_\gamma^{(1/2,-1/2)}$ за $n = 10$.

γ	−0,99	−0,9	−0,8	−0,7	−0,6	−0,5	−0,4	−0,3	−0,2	−0,1
ρ^*	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001

Посматрајмо нумеричко израчунавање интеграла

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\, w(t)\, dt, \tag{3.26}$$

за

$$w(t) = w_\gamma^{(-1/2)}(t), \quad w_\gamma^{(1/2)}(t), \quad w_\gamma^{(-1/2,1/2)}(t), \quad w_\gamma^{(1/2,-1/2)}(t)$$

са функцијом $f(t)$ као у [24].

Претпостављајући да је функција f аналитичка унутар елипсе $\mathcal{E}_{\rho_{\max}}$, из оцене (3.7) добијамо горњу оцену грешке

$$|R_n(f)| \leqslant \inf_{\rho_n^* < \rho < \rho_{\max}} \left[\frac{\ell(\mathcal{E}_\rho)}{2\pi} \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z)| \right) \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right) \right],$$

где је ρ_n^* одређено теоремом 3.1, 3.2, 3.3 или 3.4.

Дужина елипсе $\mathcal{E}_\rho$ (једначина (3.6)) може се ограничити одозго изразом (в. [36, (2.2)]):

$$\ell(\mathcal{E}_\rho) \leqslant 2\pi a_1 \left(1 - \frac{1}{4} a_1^{-2} - \frac{3}{64} a_1^{-4} - \frac{5}{256} a_1^{-6} \right), \quad a_1 = \frac{\rho + \rho^{-1}}{2}. \tag{3.27}$$

У складу са (3.27), предлажемо коришћење оцене грешке

$$|R_n(f)| \leqslant r(f), \tag{3.28}$$

где је

$$r(f) = \inf_{\rho_n^* < \rho < \rho_{\max}} \left\{ a_1 \left(1 - \frac{1}{4} a_1^{-2} - \frac{3}{64} a_1^{-4} - \frac{5}{256} a_1^{-6} \right) \times \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z)| \right) \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right) \right\}.$$

У случају тежинских функција $w_\gamma^{(-1/2)}(t)$, $w_\gamma^{(1/2)}(t)$ и $w_\gamma^{(\mp 1/2, \pm 1/2)}(t)$ редом добијамо горњу границу грешке у следећим облицима:

$$r(f) = \inf_{\rho_n^* < \rho < \rho_{\max}} \left\{ \frac{2\sqrt{2}\pi(1+\gamma)^2}{\rho^{2n}} a_1 \frac{A}{\sqrt{BCP}} \times \left(1 - \frac{1}{4} a_1^{-2} - \frac{3}{64} a_1^{-4} - \frac{5}{256} a_1^{-6} \right) \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right) \right\},$$

$$r(f) = \inf_{\rho_n^* < \rho < \rho_{\max}} \left\{ \frac{\sqrt{2}\pi(1+\gamma)^2}{\rho^{2n+2}} a_1 A \sqrt{\frac{B}{CQ}} \times \left(1 - \frac{1}{4} a_1^{-2} - \frac{3}{64} a_1^{-4} - \frac{5}{256} a_1^{-6} \right) \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right) \right\}$$

и

$$r(f) = \inf_{\rho_n^* < \rho < \rho_{\max}} \left\{ \frac{2\pi(1+\gamma)^2}{\rho^{2n+1}} a_1 \left(\frac{X}{Y} \right)^{\pm\frac{1}{2}} \frac{A}{\sqrt{CR}} \times \left(1 - \frac{1}{4} a_1^{-2} - \frac{3}{64} a_1^{-4} - \frac{5}{256} a_1^{-6} \right) \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right) \right\},$$

где су одговарајуће вредности A, B, C, X, Y, P, Q, R претходно уведене.

Сада ћемо упоредити добијену оцену грешке (3.28) са одговарајућом оценом изведеном у [24].

У случају функције $f_1(t) = e^{\omega t^2}$ из [24, пример 4.1] имамо

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho} |f_1(z)| = e^{\omega a_1^2} \qquad \left(a_1 = \frac{1}{2}\left(\rho + \rho^{-1}\right)\right), \quad \rho_{\max} = +\infty.$$

Вредности одговарајућих оцена су упоређене у табели 3.4.

Табела 3.4: поређење вредности $r(f_1)$ у случају тежинске функције $w_\gamma^{(1/2)}$ са одговарајућим вредностима из табеле 1 у [24].

n; ω	оцена (4.2) из [24]	оцена (4.3) из [24]	$r(f_1)$	стварна грешка
5; 0,5	6,385(−17)	5,210(−16)	5,211(−16)	6,368(−17)
10; 0,5	8,928(−38)	1,016(−36)	1,016(−36)	8,914(−38)
15; 0,5	7,643(−61)	1,060(−59)	1,060(−59)	7,635(−61)
20; 0,5	2,317(−85)	3,700(−84)	3,700(−84)	2,315(−85)
5; 2	1,429(−10)	1,199(−9)	1,200(−9)	1,366(−10)
10; 2	2,089(−25)	2,411(−24)	2,411(−24)	2,040(−25)
15; 2	1,873(−42)	2,621(−41)	2,622(−41)	1,843(−42)
20; 2	5,947(−61)	9,567(−60)	9,567(−60)	5,875(−61)
5; 4	4,107(−7)	3,623(−6)	3,632(−6)	3,748(−7)
10; 4	6,075(−19)	7,190(−18)	7,199(−18)	5,791(−19)
15; 4	5,545(−33)	7,894(−32)	7,899(−32)	5,368(−33)
20; 4	1,797(−48)	2,928(−47)	2,929(−47)	1,754(−48)
5; 8	3,729(−3)	3,623(−2)	3,593(−2)	3,079(−3)
10; 8	5,227(−12)	6,513(−11)	6,531(−11)	4,742(−12)
15; 8	4,736(−23)	6,978(−22)	6,992(−22)	4,436(−23)
20; 8	1,546(−35)	2,584(−34)	2,587(−34)	1,472(−35)
5; 16	4,834(+2)	5,507(+3)	4,347(+3)	3,140(+2)
10; 16	4,833(−4)	6,607(−3)	6,553(−3)	3,909(−4)
15; 16	3,884(−12)	6,094(−11)	6,107(−11)	3,373(−12)
20; 16	1,198(−21)	2,105(−20)	2,111(−20)	1,081(−21)

У случају функције

$$f_2(t) = \frac{\cos t}{\alpha^2 + t^2}$$

из [24, пример 4.2] имамо

$$\max_{z\in\mathcal{E}_\rho} |f_2(z)| = \frac{\cosh b_1}{\alpha^2 - b_1^2} \qquad \left(b_1 = \frac{1}{2}\left(\rho - \rho^{-1}\right)\right).$$

Свакако важи

$$b_1 < \alpha, \quad \text{тј.} \quad \rho < \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} = \rho_{\max}.$$

Поређење вредности одговарајућих оцена је дато табелом 3.5. Приметимо да су оцене из [24] непримењљиве у случају $\alpha = 0{,}75$.

Табела 3.5: поређење вредности $r(f_2)$ у случају тежинске функције $w_\gamma^{(1/2)} = w_{2\sqrt{2}-3}^{(1/2)}$ са одговарајућим вредностима из табеле 3 у [24].

n; ω	оцена (4.2) из [24]	оцена (4.3) из [24]	$r(f_1)$	стварна грешка
5; 0,75	–	–	1,136(−5)	1,984(−7)
10; 0,75	–	–	2,129(−11)	1,892(−13)
15; 0,75	–	–	3,028(−17)	1,805(−19)
20; 0,75	–	–	3,839(−23)	1,721(−25)
5; 1,5	1,421(−9)	5,378(−8)	2,425(−10)	3,926(−12)
10; 1,5	6,210(−18)	4,613(−16)	2,040(−20)	1,646(−22)
15; 1,5	2,714(−26)	3,006(−24)	1,284(−30)	6,898(−33)
20; 1,5	1,186(−34)	1,746(−32)	7,184(−41)	2,892(−43)
5; 3	1,166(−16)	3,114(−15)	8,594(−16)	2,846(−17)
10; 3	5,696(−32)	3,160(−30)	2,896(−31)	4,564(−33)
15; 3	2,783(−47)	2,346(−45)	7,083(−47)	7,320(−49)
20; 3	1,360(−62)	1,538(−60)	1,527(−62)	1,174(−64)
5; 6	3,226(−22)	6,822(−21)	4,928(−21)	2,270(−22)
10; 6	9,684(−44)	4,704(−42)	2,591(−42)	5,160(−44)
15; 6	2,907(−65)	2,212(−63)	9,245(−64)	1,173(−65)
20; 6	8,724(−87)	9,042(−85)	2,865(−85)	2,667(−87)

С друге стране, када се смањује $\alpha < 1$, а с њим и израз $\rho_{\max} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}$, интервал $I = (\rho^*, \rho_{\max})$ на коме вршимо оптимизацију је или веома мали или је $\rho^* > \rho_{\max}$. У случају да је $\rho^* > \rho_{\max}$, оцена $r(f)$ се не може употребити. Ако мали интервал I постоји, а ρ^* је веома блиско 1, што би значило да одговарајући модул језгра има велику вредност на I, у општем случају се може очекивати да оцена $r(f)$ буде неприхватљива. Тако оцена $r(f)$ може да буде за неколико редова величине већа од стварне грешке, нарочито за веће вредности n. Другим речима, оцена $r(f)$ остаје неприхватљива и ако се одабрана елипса знатно разликује од круга. У наведеном примеру је $\rho^* = 1{,}665$. Тако на пример у случају $\alpha = 0{,}25$, $\alpha = 0{,}5$, када је $\rho^* > \rho_{\max}$, оцена $r(f_2)$ није примењљива. С друге стране, експерименти са одговарајућим интервалима I за $\alpha < 1$ дали су нам прилично добре оцене грешке $r(f_2)$. Пример за $\alpha = 0{,}75$ је приказан у табели 3.5.

Постоје случајеви у којима је оцену (4.2) из [24] превише компликовано извести. За неке интегранде f оцена (4.3) из [24] је јача од $r(f)$, а за неке је слабија. У следећем примеру дајемо резултате за један од интегранада за који је оцена $r(f)$ знатно јача од оцене (4.3) из [24]. Објашњење је слично као у напомени 4 у [33].

Посматрајмо нумеричко израчунавање интеграла (3.26) са

$$f(t) = f_3(t) = e^{\cos \omega t},$$

где је $\omega > 0$. Функција $f_3(z)$ је цела и лако се може видети да је

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |e^{\cos \omega z}| = e^{\cosh(\omega b_1)} \qquad \left(b_1 = \frac{1}{2}\left(\rho - \rho^{-1}\right)\right), \quad \rho_{\max} = +\infty.$$

Знамо и да је

$$\max_{z \in \mathcal{C}_r} |e^{\cos \omega z}| = e^{\cosh(\omega r)}.$$

Оцене добијене за $n = 30$ и поједине вредности параметра γ приказане су у табели 3.6 и упоређене са одговарајућим оценама грешке (4.3) из [24]. За ову функцију одређивање оцене (4.2) из [24] је превише компликовано.

Табела 3.6: вредности оцене (4.3) из [24], $r(f_3)$ и стварна грешка за $n = 30$, неке вредности $\gamma \in (-1, 0)$ и $\omega = 2{,}4$ у случају тежинске функције $w_\gamma^{(1/2)}$.

γ	оцена (4.3) из [24]	$r(f_3)$	стварна грешка
−0,99	1,553(−50)	1,707(−59)	5,671(−61)
−0,95	3,780(−49)	4,038(−58)	1,342(−59)
−0,90	1,459(−48)	1,503(−57)	4,998(−59)
−0,8	5,394(−48)	5,150(−57)	1,713(−58)
−0,7	1,108(−47)	9,737(−57)	3,240(−58)
−0,6	1,771(−47)	1,417(−56)	4,719(−58)
−0,5	2,436(−47)	1,746(−56)	5,820(−58)
−0,4	3,004(−47)	1,971(−56)	6,246(−58)
−0,3	3,359(−47)	2,171(−56)	5,728(−58)
−0,2	3,378(−47)	2,135(−56)	4,025(−58)
−0,1	2,914(−47)	1,772(−56)	9,191(−59)
−0,01	1,955(−47)	1,083(−56)	3,238(−58)

3.5 Закључак

У резултатима изложеним у глави 3, за једну класу Бернштајн-Сегеових тежинских функција добили смо строге оцене грешке Гаус-Кронродових квадратурних формула Q_n под претпоставком да је интегранд аналитичка функција у области ограниченој конфокалним елипсама која садржи интервал интеграције. Спроведена је детаљна анализа, нарочито за веће вредности n у формули Q_n које су и од већег практичног значаја. Оцене грешке које су овде добијене упоредиве су са онима изведеним у [24], што потврђују и приказани нумерички резултати. Резултати ове главе објављени су у раду [2].

Библиографија

[1] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Washington, D.C. (1964).

[2] D.Lj. Djukić, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, *The error bounds of Gauss-Kronrod quadrature formulae for weight functions of Bernstein Szegŏ type*, Numer. Algor. (2017), DOI: 10.1007/s11075-017-0351-8.

[3] D.Lj. Djukić, L. Reichel, M.M. Spalević, *Truncated generalized averaged Gauss quadrature rules*, J. Comput. App. Math. 308 (2016) 408–418.

[4] S. Ehrich, *On stratified extensions of Gauss–Laguerre and Gauss–Hermite quadrature formulas*, J. Comput. Appl. Math. 140 (2002), 291–299.

[5] W. Gautschi, *On generating orthogonal polynomials*, SIAM J. Sci. Statist. Comput. 3 (1982), 289–317.

[6] W. Gautschi, *On the remainder term for analytic functions of Gauss-Lobatto and Gauss-Radau quadratures*, Rocky Mountain J. Math. 21 (1991), 209–226.

[7] W. Gautschi, *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*, Oxford University Press, Oxford (2004).

[8] W. Gautschi, *A historical note on Gauss-Kronrod quadrature*, Numer. Math. 100 (2005), 483–484.

[9] W. Gautschi, S.E. Notaris, *Gauss-Kronrod quadrature formulae for weight function of Bernstein-Szegő type*, J. Comput. Appl. Math. 25 (1989), 199–224; erratum in J. Comput. Appl. Math. 27 (1989), 429.

[10] W. Gautschi, E. Tychopoulos, R.S. Varga, *A note on the contour integral representation of the remainder term for a Gauss-Chebyshev quadrature rule*, SIAM J. Numer. Anal. 27 (1990), 219–224.

[11] W. Gautschi, R.S. Varga, *Error bounds for Gaussian quadrature of analytic functions*, SIAM J. Numer. Anal. 20 (1983), 1170–1186.

[12] G.H. Golub, G. Meurant, *Matrices, Moments and Quadrature with Applications*, Princeton University Press, Princeton (2010).

[13] G.H. Golub, J.H. Welsch, *Calculation of Gauss quadrature rules*, Math. Comp. 23 (1969), 221–230.

[14] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, 6th edn (A. Jeffrey and D. Zwillinger, eds), Academic Press, San Diego (2000).

[15] D.B. Hunter, *Some error expansions for Gaussian quadrature*, BIT 35 (1995), 64–82.

[16] D.B. Hunter, G. Nikolov, *On the error term of symmetric Gauss-Lobatto quadrature formulae for analytic functions*, Math. Comp. 69 (2000), 269–282.

[17] A.S. Kronrod, *Integration with control of accuracy* (in Russian), Soviet Physics - Doklady 9, No.1 (1964), 17–19.

[18] А.С. Кронрод, *Узлы и веса квадратурных формул; шестнадцатизначные таблицы*, Наука, Москва (1964).

[19] Г.М. Миловановић, *Нумеричка анализа* I-II део, Научна књига, Београд (1988).

[20] G. Monegato, *A note on extended Gausian quadrature rules*, Math. Comp. 30 (1976), 812–817.

[21] G. Monegato, *Positivity of weights of extended Gauss-Legendre quadrature rules*, Math. Comp. 32 (1978), 243–245.

[22] G. Monegato, *An overview of results and questions related to Kronrod schemes*, in: Numerische Integration, G. Hämmerlin (ed.), Internat. Ser. Numer. Math. Birkhäuser, Basel, 45 (1979), 231–240.

[23] S.E. Notaris, *The error norm of Gaussian quadrature formulae for weight functions of Bernstein-Szegő type*, Numer. Math. 57 (1990), 271–283.

[24] S.E. Notaris, *The error norm of Gauss-Kronrod quadrature formulae for weight functions of Bernstein-Szegő type*, Numer. Math. 103 (2006), 99-127.

[25] S.E. Notaris, *The error norm of quadrature formulae*, Numer. Algor. 60 (2012), 555–578.

[26] S.E. Notaris, *Gauss-Kronrod quadrature formulae – a survey of fifty years of research*, Electron. Trans. Numer. Anal. 45 (2016), 371–404.

[27] F. Peherstorfer, *On positive quadrature formulas*, in: Numerical Integration IV, eds. H. Brass, G. Hämmerlin, Intern. Ser. Numer. Math. #112, Birkhäuser, Basel, (1993), 297–313.

[28] F. Peherstorfer, *On the remainder of Gaussian quadrature formulas for Bernstein-Szegő weight functions*, Math. Comp. 60 (1993), 317–325.

[29] F. Peherstorfer, K. Petras, *Ultraspherical Gauss-Kronrod quadrature is not possible for* $\lambda > 3$, SIAM J. Numer. Anal. 73 (2000), 927–948.

[30] A.V. Pejčev, M.M. Spalević, *Error bounds for Gaussian quadrature formulae with Bernstein-Szegő weights that are rational modifications of Chebyshev weight functions of the second kind*, IMA J. Numer. Anal. 32 (2012), 1733–1754.

[31] A.V. Pejčev, M.M. Spalević, *Error bounds of Micchelli-Rivlin quadrature formula for analytic functions*, J. Approx. Theory 169 (2013), 23–34.

[32] A.V. Pejčev, M.M. Spalević, *Error bounds of the Micchelli-Sharma quadrature formula for analytic functions*, J. Comput. Appl. Math. 259 (2014), 48–56.

[33] A.V. Pejčev, M.M. Spalević, *The error bounds of Gauss-Radau quadrature formulae with Bernstein-Szegő weight functions*, Numer. Math. 133 (2016), 177–201.

[34] L. Reichel, G. Rodriguez, T. Tang, *New block quadrature rules for the approximation of matrix functions*, Linear Algebra Appl. 502 (2016), 299–326.

[35] L. Reichel, M.M. Spalević, T. Tang, *Generalized averaged Gauss quadrature rules for the approximation of matrix functionals*, BIT Numer. Math. 56 (2016), 1045–1057.

[36] R. Scherer, T. Schira, *Estimating quadrature errors for analytic functions using kernel representations and biorthogonal systems*, Numer. Math. 84 (2000), 497–518.

[37] T. Schira, *The remainder term for analytic functions of symmetric Gaussian quadratures*, Math. Comp. 66 (1997), 297–310.

[38] M. Shao, F.H. da Jornada, L. Lin, C. Yang, J. Deslippe, S.G. Louie, *A structure preserving Lanczos algorithm for computing the optical absorption spectrum*, arXiv:1611.02348v3 [math.NA] (5 Sep 2017).

[39] R. Skutsch, *Ueber Formelpaare der mechanischen Quadratur*, Arch. Math. Phys 13(2) (1894), 78–83.

[40] M.M. Spalević, *On generalized averaged Gaussian formulas*, Math. Comp. 76 (2007), 1483–1492.

[41] M.M. Spalević, *A note on generalized averaged Gaussian formulas*, Numer. Algor. 76 (2007), 253–264.

[42] M.M. Spalević, *Error bounds of Gaussian quadrature formulae for one class of Bernstein-Szegő weights*, Math. Comp. 82 (2013), 1037–1056.

[43] M.M. Spalević, *Error bounds and estimates for Gauss-Turán quadrature formulae of analytic functions*, SIAM J. Numer. Anal. 52 (2014), 443–467.

[44] M.M. Spalević, *On generalized averaged Gaussian formulas. II*, Math. Comp. 86 (2017), 1877–1885.

[45] M.M. Spalević, M.S. Pranić, *Error bounds of certain Gaussian quadrature formulae*, J. Comput. Appl. Math. 234 (2010), 1049–1057.

[46] M.M. Spalević, M.S. Pranić, A.V. Pejčev, *Maximum of the modulus of kernels of Gaussian quadrature formulae for one class of Bernstein-Szegő weight functions*, Appl. Math. Comput. 218 (2012), 5746–5756.

[47] E. Süli, D.F. Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University Press (2003).

[48] G. Szegő, *Über gewisse Polynome, die zu einer oszillierenden Belegungsfunktion gehören*, Math. Ann. 110 (1935), 501–513.

[49] H.S. Wilf, *Mathematics for the Physical Sciences*, Wiley, New York (1962).

Биографија

Душан Ђукић је рођен 31. маја 1981. године у Београду, од оца Љубомира и мајке Анђелке.

Од 1995. до 1999. године похађао је Математичку гимназију у Београду. Освојио је више награда на математичким такмичењима, укључујући и једну златну и две сребрне медаље на Међународним математичким олимпијадама. Дипломирао је 2003. године на Математичком факултету у Београду на смеру Теоријска математика и примене са просечном оценом 9,86. Године 2016. је одбранио магистарски рад на Универзитету Источно Сарајево на тему „Брзо растуће функције”. Исте године је уписао трећу годину докторских студије на Природно-математичком факултету у Крагујевцу.

Од 2010. године запослен је као асистент на Машинском факултету у Београду. Активно учествује у састављању задатака за математичка такмичења у земљи и свету, као и у припремању ученика за такмичења.

До сада има објављена или прихваћена за штампу 4 рада са SCI листа, од чега три категорије M21 и један категорије M22, један рад у националном часопису категорије M51, као и три саопштења на скуповима од међународног значаја (M34).

Референце:

(1) D.Lj. Djukić, L. Reichel, M.M. Spalević, *Truncated generalized averaged Gauss quadrature rules*, J. Comput. App. Math. 308 (2016) 408-418. ISSN: 0377-0427; IF(2016)=1.357; M21.

(2) D.Lj. Djukić, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, *The error bounds of Gauss-Kronrod quadrature formulae for weight functions of Bernstein-Szegő type*, Numer. Algor., DOI: 10.1007/s11075-017-0351-8. ISSN: 1017-1398; IF(2016)=1.241; M21.

(3) D.Lj. Djukić, L. Reichel, M.M. Spalević, J. Tomanović, *Internality of generalized averaged Gauss rules and their truncations for Bernstein-Szegő weights*, Electron. Trans. Numer. Anal. (ETNA) 45 (2016) 405-419. ISSN: 1068-9613; IF(2016)=0.925; M22.

(4) D.Lj. Djukić, Z. Kadelburg, S. Radenović, *Fixed points of Geraghty-type mappings in various generalized metric spaces*, Abstract Appl. Anal. Vol. 2011, Article ID 561245, 13 pgs. ISSN: 1085-3375; IF(2011)=1.318; M21a.

(5) D.Lj. Djukić, Lj. Paunović, S. Radenović, *Convergence of iterates with errors of uniformly quasi-Lipschitzian mappings in cone metric spaces*, Krag. J. Math. ISSN: 1450-9628; M51.

(6) D.Lj. Djukić, L. Reichel, M.M. Spalević, *Generalized averaged Gaussian quadratures with modified matrices*, Mathematical Conference of Republic of Srpska, Pale, Bosnia and Herzegovina, May 21-22, 2016.

(7) D.Lj. Djukić, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, *The error bounds of Gauss-Kronrod quadrature formulae for weight functions of Bernstein-Szegő type*, Mathematical Conference of Republic of Srpska, Pale, Bosnia and Herzegovina, May 21-22, 2016.

(8) D.Lj. Djukić, L. Reichel, M.M. Spalević, *Internality of truncated generalized averaged Gaussian quadratures*, ACTA 2017: Approximation and Computation - Theory and Applications, Belgrade, Serbia, November 30 - December 2, 2017.

Journal of Computational and Applied Mathematics 308 (2016) 408–418

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Computational and Applied Mathematics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/cam

Truncated generalized averaged Gauss quadrature rules

Dušan Lj. Djukić[a], Lothar Reichel[b], Miodrag M. Spalević[a,*]

[a] Department of Mathematics, University of Beograd, Faculty of Mechanical Engineering, Kraljice Marije 16, 11120 Belgrade 35, Serbia

[b] Department of Mathematical Sciences, Kent State University, Kent, OH 44242, USA

ARTICLE INFO

Article history:
Received 4 February 2016
Received in revised form 3 June 2016

MSC:
primary 65D30
secondary 65D32

Keywords:
Gauss quadrature
Averaged Gauss rules
Truncations of the generalized averaged Gauss quadrature rule

ABSTRACT

Generalized averaged Gaussian quadrature formulas may yield higher accuracy than Gauss quadrature formulas that use the same moment information. This makes them attractive to use when moments or modified moments are cumbersome to evaluate. However, generalized averaged Gaussian quadrature formulas may have nodes outside the convex hull of the support of the measure defining the associated Gauss rules. It may therefore not be possible to use generalized averaged Gaussian quadrature formulas with integrands that only are defined on the convex hull of the support of the measure. Generalized averaged Gaussian quadrature formulas are determined by symmetric tridiagonal matrices. This paper investigates whether removing some of the last rows and columns of these matrices gives quadrature rules whose nodes live in the convex hull of the support of the measure.

1. Introduction

Let $d\sigma$ be a nonnegative measure with infinitely many points of support. The smallest closed interval that contains the support of $d\sigma$ is denoted by $[a, b]$ with $-\infty \le a < b \le \infty$, and we assume that the distribution function σ has infinitely many points of increase in this interval. If σ is an absolutely continuous function, then $d\sigma(x) = w(x)\,dx$ on $\mathrm{supp}(d\sigma)$, where $w(x) \ge 0$ is a weight function. Let $\mathbb{P}_k$ denote the set of all polynomials of degree at most k and introduce the quadrature formula (abbreviated q.f.)

$$Q_n[f] = \sum_{j=1}^{n} \omega_j f(x_j)$$

with real distinct nodes $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ and real weights ω_j. We say that Q_n is a $(2n-m-1, n, d\sigma)$ q.f. if the remainder term $R_n[f]$, defined by

$$\int f(x)\,d\sigma(x) = Q_n[f] + R_n[f],$$

satisfies $R_n[f] = 0$ for all $f \in \mathbb{P}_{2n-m-1}$. The rule Q_n then is said to have *algebraic degree of precision* $2n-m-1$. Here m is an integer such that $0 \le m \le n$. If in addition all quadrature weights ω_j are positive, then Q_n is said to be a *positive* $(2n-m-1, n, d\sigma)$ q.f. Furthermore, we say that a polynomial $t_n = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j)$ generates a $(2n-m-1, n, d\sigma)$ q.f. if its zeros x_j are real and simple, and the q.f. with nodes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is a $(2n-m-1, n, d\sigma)$ q.f. A $(2n-m-1, n, d\sigma)$ q.f. is *internal* if all its nodes are in the closed interval $[a, b]$. A node not belonging to the interval $[a, b]$ is said to be *external*.

* Corresponding author.
E-mail addresses: ddjukic@mas.bg.ac.rs (D.L. Djukić), reichel@math.kent.edu (L. Reichel), mspalevic@mas.bg.ac.rs (M.M. Spalević).

http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2016.06.016
0377-0427/

Numer Algor
DOI 10.1007/s11075-017-0351-8

ORIGINAL PAPER

The error bounds of Gauss-Kronrod quadrature formulae for weight functions of Bernstein-Szegő type

Dušan Lj. Djukić[1] · Aleksandar V. Pejčev[1] · Miodrag M. Spalević[1]

Received: 13 January 2017 / Accepted: 21 May 2017

Abstract We consider the Gauss-Kronrod quadrature formulae for the Bernstein-Szegő weight functions consisting of any one of the four Chebyshev weights divided by the polynomial $\rho(t) = 1 - \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2} t^2, \quad t \in (-1, 1), \ -1 < \gamma \leq 0$. For analytic functions, the remainder term of this quadrature formula can be represented as a contour integral with a complex kernel. We study the kernel, on elliptic contours with foci at the points ∓ 1 and sum of semi-axes $\rho > 1$, for the given quadrature formula. Starting from the explicit expression of the kernel, we determine the locations on the ellipses where maximum modulus of the kernel is attained. So we derive effective error bounds for this quadrature formula. An alternative approach, which has initiated this research, has been proposed by S. Notaris (Numer. Math. **103**, 99–127, 2006).

Keywords Gauss-Kronrod quadrature formulae · Bernstein-Szegő weight functions · Contour integral representation · Remainder term for analytic functions · Error bound

Mathematics Subject Classification (2010) 65D32

The authors were supported in part by the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development (Research Project: "Methods of numerical and nonlinear analysis with applications" (No. #174002)).

✉ Dušan Lj. Djukić
ddjukic@mas.bg.ac.rs

[1] Department of Mathematics, Faculty of Mechanical Engineering, University of Beograd, Kraljice Marije 16, 11120 Belgrade 35, Belgrade, Serbia

Published online: 15 June 2017

Образац 1

ИЗЈАВА АУТОРА О ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Душан Ђукић, изјављујем да докторска дисертација под насловом:

Унутрашњост скраћених усредњених гаусовских квадратура и оцена грешке Гаус-Кронродових квадратура

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу представља *оригинално ауторско дело* настало као резултат *сопственог истраживачког рада*.

Овом Изјавом такође потврђујем:

- да сам *једини аутор* наведене докторске дисертације,
- да у наведеној докторској дисертацији *нисам извршио/ла повреду* ауторског нити другог права интелектуалне својине других лица,
- да умножени примерак докторске дисертације у штампаној и електронској форми у чијем се прилогу налази ова Изјава садржи докторску дисертацију истоветну одбрањеној докторској дисертацији.

У Крагујевцу, 22.12.2017. године,

потпис аутора

Образац 2

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСКОРИШЋАВАЊУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Душан Ђукић,

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам

Универзитетској библиотеци у Крагујевцу да начини два трајна умножена примерка у електронској форми докторске дисертације под насловом:

Унутрашњост скраћених усредњених гаусовских квадратура и оцена грешке Гаус-Кронродових квадратура

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу, и то у целини, као и да по један примерак тако умножене докторске дисертације учини трајно доступним јавности путем дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу и централног репозиторијума надлежног министарства, тако да припадници јавности могу начинити трајне умножене примерке у електронској форми наведене докторске дисертације путем *преузимања*.

Овом Изјавом такође

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам[1]

[1] Уколико аутор изабере да не дозволи припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци, то не искључује право припадника јавности да наведену докторску дисертацију користе у складу са одредбама Закона о ауторском и сродним правима.

припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од следећих *Creative Commons* лиценци:

1) Ауторство

2) Ауторство - делити под истим условима

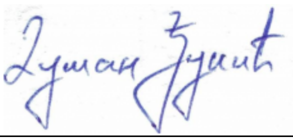
3) Ауторство - без прерада

4) Ауторство - некомерцијално

5) Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима

6) Ауторство - некомерцијално - без прерада[2]

У Крагујевцу, 22.12.2017. године,



потпис аутора

[2] Молимо ауторе који су изабрали да дозволе припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци да заокруже једну од понуђених лиценци. Детаљан садржај наведених лиценци доступан је на: http://creativecommons.org.rs/