УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Ненад О. Весић

Скоро геодезијска пресликавања генералисаних Риманових простора и уопштења

Докторска дисертација

Ниш, 2018.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

Nenad O. Vesić

Almost Geodesic Mappings of Generalized Riemannian Spaces and Their Generalizations

Doctoral Dissertation

Niš, 2018.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	Мића Станковић, доктор математичких наука, редовни професор, Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет
Наслов:	Скоро геодезијска пресликавања генералисаних Риманових простора и уопштења
Резиме:	У овој дисертацији су проучавана геодезијска, скоро геодезијска и конформна пресликавања простора несиметричне афине конексије. Истраживање је започето успостављањем веза међу различитим инваријантама геодезијских пресликавања простора несиметричне афине конексије. Након тога, размотрена су скоро геодезијска пресликавања простора несиметричне афине конексије другог и трећег типа. Инваријанте скоро геодезијских пресликавања трећег типа су добијене на крају другог поглавља. У трећем поглављу су одређене опште формуле инваријанти геометријских пресликавања простора несиметричне афине конексије. Те формуле су, као примери, примењене да бисмо одредили инваријанте неких пресликавања генералисаног Римановог простора (инваријанте специјалних скоро геодезијских пресликавања другог типа, инваријанте еквиторзионих скоро геодезијских пресликавања трећег типа и инваријанте конформних пресликавања). Примењујући формуле добијене на почетку трећег поглавља, одређене су инваријанте конформних пресликавања генералисаних Риманових простора без додатних претпоставки.
Научна област:	Математичке науке
Научна дисциплина:	Диференцијална геометрија
Кључне речи:	простор несиметричне афине конексије, генералисани Риманов простор, геодезијско пресликавање, скоро геодезијско пресликавање, конформно пресликавање, инваријанта
УДК:	514.764.3/.5 514.764.25
CERIF класификација:	P150 Geometry, algebraic topology
Тип лиценце Креативне заједнице:	**CC BY-NC-ND**

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Mića S. Stanković, Ph. D. in mathematical sciences, full professor, University of Niš, Faculty of Science and Mathematics
Title:	Almost Geodesic Mappings of Generalized Riemannian Spaces and Their Generalizations
Abstract:	Geodesic, almost geodesic and conformal mappings of non-symmetric affine connection spaces are studied in this thesis. At the start of this research, we obtained what are correlations between different invariants of geodesic mappings of a non-symmetric affine connection space. After that, we studied second and third type almost geodesic mappings of a non-symmetric affine connection space. Invariants of third type almost geodesic mappings are obtained at the end of the second section of this dissertation. Formulae for general invariants of geometric mappings of a non-symmetric affine connection space are presented at the start of the third section. We applied these formulas to find invariants of some mappings of a generalized Riemannian space (invariants of special second type almost geodesic mappings, invariants of equitorsion third type almost geodesic mappings, invariants of conformal mappings). Using these formulas, we obtained invariants of a conformal mapping of generalized Riemannian space without no one additional assumption.
Scientific Field:	Mathematics
Scientific Discipline:	Differential geometry
Key Words:	non-symmetric affine connection space, generalized Riemannian space, geodesic mapping, almost geodesic mapping, conformal mapping, invariant geometrical object
UDC:	514.764.3/.5 514.764.25
CERIF Classification:	P150 Geometry, algebraic topology
Creative Commons License Type:	**CC BY-NC-ND**

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Ненад О. Весић
Ментор, **МН**:	Мића С. Станковић
Наслов рада, **НР**:	СКОРО ГЕОДЕЗИЈСКА ПРЕСЛИКАВАЊА ГЕНЕРАЛИСАНИХ РИМАНОВИХ ПРОСТОРА И УОПШТЕЊА
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2018.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	3/
Научна област, **НО**:	Математичке науке
Научна дисциплина, **НД**:	Диференцијална геометрија
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	геодезијска пресликавања, скоро геодезијска пресликавања, конформна пресликавања, инваријанта, Томасов пројективни параметар, Вејлов пројективни тензор, Вејлов конформни тензор, инваријанта Томасовог типа, инваријанта Вејловог типа
УДК	514.764.3/.5 514.764.25
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:	Овом дисертацијом су обрађена геодезијска, скоро геодезијска и конформна пресликавања простора несиметричне афине конексије. Истраживање је започето успостављањем веза међу различитим инваријантама геодезијских пресликавања простора несиметричне афине конексије. Након тога, размотрена су скоро геодезијска пресликавања простора несиметричне афине конексије другог и трећег типа. Инваријанте скоро геодезијских пресликавања трећег типа су добијене на крају другог поглавља. У трећем поглављу су одређене опште формуле инваријанти геометријских пресликавања простора несиметричне афине конексије. Те формуле су, као примери, примењене да бисмо одредили инваријанте неких пресликавања генералисаног Римановог простора (инваријанте специјалних скоро геодезијских пресликавања другог типа, инваријанте еквиторзионих скоро геодезијских пресликавања трећег типа и инваријанте конформних пресликавања). Примењујући формуле добијене на почетку трећег поглавља, одређене су инваријанте конформних пресликавања генералисаних Риманових простора без додатних претпоставки.
Датум прихватања теме, **ДП**:	9. 02. 2015. године
Датум одбране, **ДО**:	
Комисија, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан:	
Члан, ментор:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual**
Contents code, **CC**:	**doctoral dissertation**
Author, **AU**:	**Nenad O. Vesić**
Mentor, **MN**:	**Mića S. Stanković**
Title, **TI**:	ALMOST GEODESIC MAPPINGS OF GENERALIZED RIEMANNIAN SPACES AND THEIR GENERALIZATIONS
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**English**
Country of publication, **CP**:	**Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2018**
Publisher, **PB**:	**author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	**3/111/106/0/0/0/0**
Scientific field, **SF**:	**mathematics**
Scientific discipline, **SD**:	**differential geometry**
Subject/Key words, **S/KW**:	non-symmetric affine connection space, generalized Riemannian space, geodesic mapping, almost geodesic mapping, conformal mapping, invariant geometrical object
UC	514.764.3/.5 514.764.25
Holding data, **HD**:	**library**
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:	Geodesic, almost geodesic and conformal mappings of non-symmetric affine connection spaces are studied in this thesis. At the start of this research, we obtained what are correlations between different invariants of geodesic mappings of a non-symmetric affine connection space. After that, we studied second and third type almost geodesic mappings of a non-symmetric affine connection space. Invariants of third type almost geodesic mappings are obtained at the end of the second section of this dissertation. Formulae for general invariants of geometric mappings of a non-symmetric affine connection space are presented at the start of the third section. We applied these formulas to find invariants of some mappings of a generalized Riemannian space (invariants of special second type almost geodesic mappings, invariants of equitorsion third type almost geodesic mappings, invariants of conformal mappings). Using these formulas, we obtained invariants of a conformal mapping of generalized Riemannian space without no one additional assumption.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	February 9, 2015
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member:	
Member, Mentor:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

ХВАЛА ВАМ НА ПОДРШЦИ!!!

Неизмерно сам захвалан мом Ментору проф. др Мићи Станковићу на уложеном времену и труду у раду са мном. Посебно му захваљујем на саветима које ми је давао и на могућем и немогућем да се добије на којима је инсистирао.

Уз ментора, посебну захвалност упућујем проф. др Милану Златановићу и проф. др Љубици Велимировић који су ми, заједно са ментором Мићом, открили лепоте математике и математичког размишљања сакривене у диференцијалној геометрији. Хвала проф. др Зорану Ракићу што ме је укључио у свој пројекат.

Изнад свега хвала мојој породици: Мами Горици, Тати Обраду и Брату Немањи на разумевању и на трпљењу мене свих ових година.

Велико Хвала мом пријатељу и колеги Душану Симјановићу на времену проведеном са мном и на лепотама каратеа и спорта уопште које ми је открио.

Хвала Јасмини Бараћ-Перовић, председници Нишког Удружења Студената са Хендикепом, као и осталима из тог удружења, на помоћи мени око добијања различитих стипендија за време студирања и на прелепом и незаборавном дружењу.

Желим да захвалим лекарима: др Драгани Обрадовић, неурологу ВМА; др Анђелки Илић, неурологу Клиничког Центра у Нишу; др Драгану Стојанову и др Весни Милојковић, радиолозима Клиничког Центра у Нишу, др Лани Мачукановић-Голубовић, хематологу Клиничког Центра у Нишу; др Слађани Божилов, реуматологу Института у Нишкој Бањи и осталима на томе што су моје здравствено стање одржавали и одржали стабилним. Хвала др Душици Илић и др Лани Мачукановић-Голубовић на саветима, критикама и питањима приликом израде нашег заједничког рада.

Садржај

Предговор

Диференцијална геометрија је дубоко уткана у различите примене математике у физици. Ајнштајнова теорија релативитета је заснована на несиметричној афиној конексији.

Инваријанте геометријских пресликавања играју значајну улогу у различитим теоријама попут теорије гравитације. Помоћу Вејловог пројективног тензора се одређује јачина гравитационог поља.

Ова дисертација има за циљ да уопшти приступ геометријским пресликавањима и унапреди методологију одређивања њихових инваријанти. Подељена је у три главе. Прва глава дисертације је увод и у њој су наведени основни појмови неопходни за даљи рад. У другој глави су проучавана пресликавања простора несиметричне афине конексије. Тим разматрањима су одређени односи међу инваријантама и инваријанте специјалних пресликавања. Трећа глава дисертације је посвећена општем одређивању инваријанти геометријских пресликавања. На почетку тог поглавља су одређене опште формуле инваријанти пресликавања са факторисаним тензором деформације. Након тога, те формуле су примењене на посебним пресликавањима генералисаног Римановог простора.

Још један допринос ове дисертације, приказан у трећој глави, јесте одређивање инваријанти конформног пресликавања генералисаног Римановог простора без додатних претпоставки. Ти резултати се налазе на крају дисертације, али су настали на почетку истраживања и били су мотивација за све оно што је добијено у трећем поглављу ове дисертације.

ПОГЛАВЉЕ 1

Увод

1.1 Диференцијабилне многострукости

Нека је $\mathcal{M}^N$ произвољан скуп чији се елементи зову **тачке** и нека за сваку тачку $P \in \mathcal{M}^N$ постоји подскуп $U_P, P \in U_P \subset \mathcal{M}^N$, који се пресликавањем φ бијективно и непрекидно пресликава на отворен подскуп Еуклидског простора $\mathbb{E}^N$.

Подскуп U_P је **околина тачке** $P = P(x^1, \ldots, x^N) = P(x)$ а уређен пар (U_P, φ) **локална карта** [36]. Под извесним условима, за које се претпоставља да су испуњени, скуп $\mathcal{M}^N$ је могуће прекрити околинама. Ако је (U'_P, φ') друга локална карта у околини тачке P, при чему се претпоставља да постоји пресликавање

$$\lambda : \varphi(U_P \cap U'_P) \to \varphi(U_P \cap U'_P), \tag{1.1.1}$$

важиће

$$\lambda : \varphi(P) \to \varphi'(P) \quad \text{тј.} \quad \lambda : (x^1, \ldots, x^N) \to (x^{1'}, \ldots, x^{N'}). \tag{1.1.2}$$

Овом пресликавању одговара **трансформација локалних координата**

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^N), \quad i' = 1', \ldots, N'. \tag{1.1.3}$$

Како је пресликавање λ бијекција, то инверзном пресликавању λ^{-1} одговара закон трансформације координата

$$x^i = x^i(x^{1'}, \dots, x^{N'}), \quad i = 1, \dots, N. \tag{1.1.4}$$

Дефиниција 1.1.1. [47] *Скуп $\mathcal{M}^N$, заједно са скупом $\{(U_P, \varphi)\}$ локалних карата, где функције* (1.1.3, 1.1.4) *трансформације локалних координата имају непрекидне парцијалне изводе сваког реда и*

$$\mathcal{J} = \frac{\partial(x^1, \dots, x^N)}{\partial(x^{1'}, \dots, x^{N'})} \neq 0, \tag{1.1.5}$$

јесте **диференцијабилна многострукост**. *Број N је димензија многострукости $\mathcal{M}^N$.*

Дефиниција 1.1.2. [47] **Крива** *на диференцијабилној многострукости $\mathcal{M}^N$ је скуп тачака у $\mathcal{M}^N$ чије су координате функције једног реалног параметра*

$$x^i = x^i(t), \qquad t \in (a, b) \subset \mathbb{R}, \tag{1.1.6}$$

под условом да сви dx^i/dt нису једнаки 0 *истовремено.*

1.2 Тангентни простор многострукости и тензори

Дефиниција 1.2.1. [47] **Тангентни вектор** *диференцијабилне многострукости, у тачки p те многострукости, је свако пресликавање*

$$X_p : \mathcal{F}(\mathcal{M}^N) \to \mathbb{R}, \tag{1.2.1}$$

које задовољава једначине

$$X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha X_p(f) + \beta X_p(g), \tag{1.2.2}$$
$$X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g), \tag{1.2.3}$$

где је $\mathcal{F}(\mathcal{M}^N)$ скуп свих диференцијабилних реалних функција дефинисаних на $\mathcal{M}^N$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M}^N)$. Особина (1.2.2) *назива се* линеарност *а особина* (1.2.3) диференцирање. *Тачка p је* **почетак вектора** *X_p.*

Дефиниција 1.2.2. [47] *Векторски простор чији су елементи сви тангентни вектори са почетком у тачки $p \in \mathcal{M}^N$ назива се* **тангентни простор многострукости** $\mathcal{M}^N$ *и означаваћемо га са* $T_p(\mathcal{M}^N)$.

Дефиниција 1.2.3. [47] *Пресликавање*

$$X : \mathcal{M}^N \to T\mathcal{M}^N,$$

где је $T\mathcal{M}^N = \left\{X_p | p \in \mathcal{M}^N, X_p \in T_p(\mathcal{M}^N)\right\}$, *назива се* **(тангентно) векторско поље** *на многострукости* $\mathcal{M}^N$.

Дефиниција 1.2.4. [47] *Тангентно векторско поље* X *многострукости* $\mathcal{M}^N$ *је диференцијабилно ако је функција* $Xf = X \circ f$ *диференцијабилна за свако* $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M}^N)$. *Скуп свих диференцијабилних векторских поља на многострукости* $\mathcal{M}^N$ *означаваћемо са* $\mathfrak{X}(\mathcal{M}^N)$.

База $(\partial_i) = (\partial/\partial x^i)$ простора $T_p(\mathcal{M}_N)$ јесте **координатна база**. Произвољан вектор v, у овој бази, представљен је једнакошћу $v = v^\alpha \partial_\alpha$, где су v^i компоненте вектора v у односу на базу (∂_i).

Примедба 1.2.1. *У представљању* $v = v^\alpha \partial_\alpha$ *вектора* v *искоришћена је Ајнштајнова конвенција о сабирању, тј.*

$$v^\alpha \partial_\alpha = \sum_{i=1}^{N} v^{(i)} \partial_{(i)}.$$

Када се жели да поновљен индекс не подлеже Ајнштајновој конвенцији он се, као у суми на десној страни претходне једначине, уписује између заграда.

Линеарно пресликавање

$$\omega : T_p(\mathcal{M}^N) \to \mathbb{R},$$

у тачки p, јесте коваријантни вектор (1-форма).

Диференцијали (dx^i) координатних функција у тачки p чине базу дуалног (котангентног) простора $T_p^*(\mathcal{M}^N)$.

По свим аргументима линеарно пресликавање

$$t^A_B : \underbrace{T^*_p(\mathcal{M}^N) \times \ldots \times T^*_p(\mathcal{M}^N)}_{A \text{ пута}} \times \underbrace{T_p(\mathcal{M}^N) \times \ldots \times T_p(\mathcal{M}^N)}_{B \text{ пута}} \to \mathbb{R}, \tag{1.2.4}$$

где су простори $T_p(\mathcal{M}^N)$ и $T^*_p(\mathcal{M}^N)$ генерисани базама (∂_i) и (dx^i), зове се **тензор типа** (A, B). Општије, уколико је $\mathbb{V}$ векторски простор димензије N и $\mathbb{V}^*$ њему дуални простор тада је по свим аргументима линеарно пресликавање

$$t^A_B : \underbrace{\mathbb{V}^* \times \ldots \times \mathbb{V}^*}_{A \text{ пута}} \times \underbrace{\mathbb{V} \times \ldots \times \mathbb{V}}_{B \text{ пута}} \to \mathbb{R} \tag{1.2.4'}$$

тензор типа (A, B) [47].

Примедба 1.2.2. *Полилинеарном функцијом* (1.2.4) *је задат тензор* $t^{i_1 \ldots i_A}_{j_1 \ldots j_B}$ *у координатном облику. Овако задат тензор се користи у инжењерству, нешто мање у физици.*

Функцијом (1.2.4') *задат је тензор над произвољним векторским простором* $\mathbb{V}$. *Овако дефинисан тензор пружа могућност детаљнијег проучавања закона тензорске алгебре.*

Примедба 1.2.3. *Елементи простора* $\mathbb{V}$ *су векторска поља и означавају се великим латиничним словима* $X, Y, Z, \ldots$ *док су елементи придруженог простора* $\mathbb{V}^*$ *векторска поља која означавамо малим словима* $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \ldots$

1.3 Простори афине конексије

Теоријом простора (несиметричне) афине конексије бавио се или се и даље бави велики број математичара. Најзначајнији од њих, из иностранства, који су својим радовима унапредили ову теорију су Л. П. Ајзенхарт [15], Ф. Граиф [20], С. Бохнер [9], К. Нитеску [54] и многи други. Од математичара из Србије, теорији простора афине конексије су највише допринели М. Првановић [62], С. М. Минчић [34–41, 45, 47, 50], М. С. Станковић [41, 43, 55, 56, 72–77], Љ. С. Велимировић [50, 81], М. Љ. Златановић [77, 81, 99, 100, 103].

Дефиниција 1.3.1. [47] **Афина конексија** *на многострукости* $\mathcal{M}^N$ *је пресликавање* $\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{M}^N) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}^N) \to \mathfrak{X}(\mathcal{M}^N)$*, које пару* (X, Y) *векторских поља придружује векторско поље* $\nabla_Y X$ *тако да важи*:

$$\mathcal{A}_1 : \nabla_Y(X_1 + X_2) = \nabla_Y X_1 + \nabla_Y X_2,$$

$$\mathcal{A}_2 : \nabla_Y(fX) = (Yf) \cdot X + f\nabla_Y X,$$

$$\mathcal{A}_3 : \nabla_{Y_1+Y_2} X = \nabla_{Y_1} X + \nabla_{Y_2} X,$$

$$\mathcal{A}_4 : \nabla_{fY} X = f\nabla_Y X.$$

Векторско поље $\nabla_{\partial_k}\partial_j$, у локалним координатама $(x^1 \ldots, x^N)$, по базним векторима ∂_i могуће је разложити као

$$\nabla_{\partial_k}\partial_j = L^\alpha_{jk}\partial_\alpha, \tag{1.3.1}$$

где су L^i_{jk} **коефицијенти афине конексије** ∇. Ти коефицијенти описују начин на који се базни вектори мењају од тачке до тачке. Применом једначине (1.3.1) на функције x^i добија се да је

$$(\nabla_{\partial_k}\partial_j)(x^i) = L^\alpha_{jk}\frac{\partial x^i}{\partial x^\alpha} = L^\alpha_{jk}\delta^i_\alpha = L^i_{jk}. \tag{1.3.2}$$

Дефиниција 1.3.2. [47] *Диференцијабилна многострукост* $\mathcal{M}^N$*, на којој је дефинисана афина конексија* ∇*, назива се* **простор афине конексије** *и означава се са* $\mathbb{GA}_N$*.*

У случају да се у простору $(\mathcal{M}_N, \nabla)$ са координата x^i у локалној карти $(\mathcal{U}, \varphi)$ пређе на координате $x^{i'}$ у локалној карти $(\mathcal{U}', \varphi')$, у тачкама пресека $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ ће важити веза

$$L^{i'}_{j'k'} = x^{i'}_i x^j_{j'} x^k_{k'} L^i_{jk} + x^{i'}_i x^i_{j'k'}, \tag{1.3.3}$$

као и инверзна веза

$$L^i_{jk} = x^i_{i'} x^{j'}_j x^{k'}_k L^{i'}_{j'k'} + x^i_{i'} x^{i'}_{jk}. \tag{1.3.4}$$

У једначинама (1.3.3, 1.3.4) су коришћене ознаке

$$x_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \quad \text{и} \quad x^i_{j'k'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}. \tag{1.3.5}$$

Дефиниција 1.3.3. *Геометријски објекат*

$$\overset{0}{\nabla}_Y X = \frac{1}{2}\big(\nabla_Y X + \nabla_X Y - [X,Y]\big), \tag{1.3.6}$$

где је $[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf), f \in \mathcal{F}(\mathcal{M}^N)$ *комутатор, назива се симетрични део афине конексије* ∇. *У координатном облику, симетрични део* $\overset{0}{\nabla}$ *афине конексије* ∇ *има форму*

$$L^i_{\underline{jk}} = \frac{1}{2}(L^i_{jk} + L^i_{kj}), \tag{1.3.7}$$

и зове се **симетрични део коефицијента афине конексије** L^i_{jk}.

Геометријски објекат

$$T(X,Y) = \frac{1}{2}\big(\nabla_Y X - \nabla_X Y + [X,Y]\big) \tag{1.3.8}$$

је **тензор торзије** *афине конексије* ∇. *Координатни облик тензора торзије је*

$$L^i_{\underset{\vee}{jk}} = \frac{1}{2}(L^i_{jk} - L^i_{kj}), \tag{1.3.9}$$

и зове се **антисиметрични део коефицијента афине конексије** L^i_{jk}.

Примедба 1.3.1. [12–14] *Симетрични део афине конексије* ∇ *односи се на гравитацију. Тензор торзије конексије* ∇ *се односи на електромагнетизам.*

Симетрични део $L^i_{\underline{jk}}$ коефицијента афине конексије L^i_{jk} задовољава једначину (1.3.3). Из тог се разлога диференцијабилна многострукост $\mathcal{M}^N$ снабдевена афином конексијом $\overset{0}{\nabla}$ назива **придружени простор** простора $\mathbb{GA}_N$ и означава се са $\mathbb{A}_N$.

Многи математичари су се бавили и још увек се баве изучавањем простора симетричне афине конексије. Неки од њих су Н. С. Синјуков [70], Ј. Микеш, В. Березовски, И. Хинтерлајтнер, О. Покорна, А. Ванжурова, Е. Степанова , Г. Старко и остали чланови истраживачког тима Јозефа Микеша [2–7, 28–33, 90], В. Ф. Каган [26] као и многи други.

Афина конексија $\nabla_Y X$ и претходно дефинисани објекти $\overset{0}{\nabla}_Y X$ и $T(X,Y)$ као и коефицијенти $L^i_{jk}, L^i_{\underline{jk}}, L^i_{\underset{\vee}{jk}}$ задовољавају једначину

$$\nabla_Y X = \overset{0}{\nabla}_Y X + T(X,Y) \quad \text{тј.} \quad L^i_{jk} = L^i_{\underline{jk}} + L^i_{\underset{\vee}{jk}}. \tag{1.3.10}$$

На основу афине конексије простора $\mathbb{GA}_N$ дефинисано је четири врсте коваријантног диференцирања [34, 36]:

$$X^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B\underset{1}{|}k} = X^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B,k} + \sum_{p=1}^{A} L^{i_p}_{\alpha k} X^{i_1\dots i_{p-1}\alpha i_{p+1}\dots i_A}_{j_1\dots j_B} - \sum_{q=1}^{B} L^{\alpha}_{j_q k} X^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_{q-1}\alpha j_{q+1}\dots j_B}, \tag{1.3.11}$$

$$X^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B\underset{2}{|}k} = X^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B,k} + \sum_{p=1}^{A} L^{i_p}_{k\alpha} X^{i_1\dots i_{p-1}\alpha i_{p+1}\dots i_A}_{j_1\dots j_B} - \sum_{q=1}^{B} L^{\alpha}_{k j_q} X^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_{q-1}\alpha j_{q+1}\dots j_B}, \tag{1.3.12}$$

$$X^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B\underset{3}{|}k} = X^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B,k} + \sum_{p=1}^{A} L^{i_p}_{\alpha k} X^{i_1\dots i_{p-1}\alpha i_{p+1}\dots i_A}_{j_1\dots j_B} - \sum_{q=1}^{B} L^{\alpha}_{k j_q} X^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_{q-1}\alpha j_{q+1}\dots j_B}, \tag{1.3.13}$$

$$X^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B\underset{4}{|}k} = X^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B,k} + \sum_{p=1}^{A} L^{i_p}_{k\alpha} X^{i_1\dots i_{p-1}\alpha i_{p+1}\dots i_A}_{j_1\dots j_B} - \sum_{q=1}^{B} L^{\alpha}_{j_q k} X^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_{q-1}\alpha j_{q+1}\dots j_B}, \tag{1.3.14}$$

где је парцијално диференцирање $\partial/\partial x^k$ означено зарезом. У случају да је $T(X,Y) = 0$, претходно дефинисане четри врсте коваријантног диференцирања се своде на

$$X^{i_1 i_2\dots i_A}_{j_1 j_2\dots j_B|k} = X^{i_1 i_2\dots i_A}_{j_1 j_2\dots j_B,k} + \sum_{p=1}^{A} L^{i_p}_{\underline{\alpha k}} X^{i_1\dots i_{p-1}\alpha i_{p+1}\dots i_A}_{j_1 j_2\dots j_B} \quad - \sum_{p=1}^{B} L^{\alpha}_{\underline{j_p k}} X^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_{p-1}\alpha j_{p+1}\dots j_B}. \tag{1.3.15}$$

Постоји један Ричијев идентитет изведен на основу коваријантног диференцирања подржаног афином конексијом придруженог простора [30, 32, 33, 70]. Из тог Ричијевог идентитета, добијен је један тензор кривине простора $\mathbb{A}_N$

$$R^i_{jmn} = L^i_{\underline{jm},n} - L^i_{\underline{jn},m} + L^{\alpha}_{\underline{jm}} L^i_{\underline{\alpha n}} - L^{\alpha}_{\underline{jn}} L^i_{\underline{\alpha m}}. \tag{1.3.16}$$

Операторски облик тог тензора кривине је

$$R(X;Y,Z)=\overset{0}{\nabla}_Z\overset{0}{\nabla}_Y X-\overset{0}{\nabla}_Y\overset{0}{\nabla}_Z X+\overset{0}{\nabla}_{[Y,Z]}X. \tag{1.3.17}$$

На основу коваријантних диференцирања (1.3.11, 1.3.12), С. Минчић је извео десет идентитета Ричијевог типа $X^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B\underset{\mu}{|}m\underset{\nu}{|}n}-X^{i_1\dots i_A}_{j_1\dots j_B\underset{\sigma}{|}m\underset{\tau}{|}n}$, $\mu,\nu,\sigma,\tau\in\{1,2\}$ у [34, 36]. Штавише, у раду [38], С. М. Минчић је извео нових десет идентитета Ричијевог типа на основу коваријантних диференцирања (1.3.13, 1.3.14). На основу тих идентитета, добијено је четири тензора кривине [34–37, 62]:

$$\underset{1}{R}{}^i_{jmn}=L^i_{jm,n}-L^i_{jn,m}+L^\alpha_{jm}L^i_{\alpha n}-L^\alpha_{jn}L^i_{\alpha m}, \tag{1.3.18}$$

$$\underset{2}{R}{}^i_{jmn}=L^i_{mj,n}-L^i_{nj,m}+L^\alpha_{mj}L^i_{n\alpha}-L^\alpha_{nj}L^i_{m\alpha}, \tag{1.3.19}$$

$$\underset{3}{R}{}^i_{jmn}=L^i_{jm,n}-L^i_{nj,m}+L^\alpha_{jm}L^i_{n\alpha}-L^\alpha_{nj}L^i_{\alpha m}+L^\alpha_{nm}\left(L^i_{\alpha j}-L^i_{j\alpha}\right), \tag{1.3.20}$$

$$\underset{4}{R}{}^i_{jmn}=L^i_{jm,n}-L^i_{nj,m}+L^\alpha_{jm}L^i_{n\alpha}-L^\alpha_{nj}L^i_{\alpha m}+L^\alpha_{mn}\left(L^i_{\alpha j}-L^i_{j\alpha}\right), \tag{1.3.21}$$

петнаест псеудотензора кривине [35, 36]:

$$\underset{1}{A}{}^i_{jmn}=L^i_{jm,n}-L^i_{jn,m}+L^\alpha_{jm}L^i_{n\alpha}-L^\alpha_{jn}L^i_{m\alpha}, \tag{1.3.22}$$

$$\underset{2}{A}{}^i_{jmn}=L^i_{jm,n}-L^i_{jn,m}+L^\alpha_{mj}L^i_{\alpha n}-L^\alpha_{nj}L^i_{\alpha m}, \tag{1.3.23}$$

$$\underset{3}{A}{}^i_{jmn}=L^i_{mj,n}-L^i_{nj,m}+L^\alpha_{mj}L^i_{\alpha n}-L^\alpha_{nj}L^i_{\alpha m}, \tag{1.3.24}$$

$$\underset{4}{A}{}^i_{jmn}=L^i_{mj,n}-L^i_{nj,m}+L^\alpha_{jm}L^i_{n\alpha}-L^\alpha_{jn}L^i_{m\alpha}, \tag{1.3.25}$$

$$\underset{5}{A}{}^i_{jmn}=L^i_{jm,n}-L^i_{nj,m}+L^\alpha_{jm}L^i_{\alpha n}-L^\alpha_{nj}L^i_{m\alpha}, \tag{1.3.26}$$

$$\underset{6}{A}{}^i_{jmn}=L^i_{jm,n}-L^i_{nj,m}+L^\alpha_{mj}L^i_{n\alpha}-L^\alpha_{jn}L^i_{\alpha m}, \tag{1.3.27}$$

$$\underset{7}{A}{}^i_{jmn}=L^i_{jm,n}-L^i_{jn,m}+L^\alpha_{jm}L^i_{\alpha n}-L^\alpha_{jn}L^i_{m\alpha}, \tag{1.3.28}$$

$$\underset{8}{A}{}^i_{jmn}=L^i_{jm,n}-L^i_{jn,m}+L^\alpha_{mj}L^i_{\alpha n}-L^\alpha_{jn}L^i_{\alpha m}, \tag{1.3.29}$$

$$\underset{9}{A}{}^i_{jmn}=L^i_{jm,n}-L^i_{nj,m}+L^\alpha_{jm}L^i_{\alpha n}-L^\alpha_{nj}L^i_{\alpha m}, \tag{1.3.30}$$

$$\underset{10}{A}{}^i_{jmn}=L^i_{jm,n}-L^i_{nj,m}+L^\alpha_{jm}L^i_{n\alpha}-L^\alpha_{jn}L^i_{\alpha m}, \tag{1.3.31}$$

$$\underset{11}{A}{}^{i}_{jmn} = L^{i}_{mj,n} - L^{i}_{jn,m} + L^{\alpha}_{mj} L^{i}_{n\alpha} - L^{\alpha}_{nj} L^{i}_{m\alpha}, \tag{1.3.32}$$

$$\underset{12}{A}{}^{i}_{jmn} = L^{i}_{mj,n} - L^{i}_{jn,m} + L^{\alpha}_{mj} L^{i}_{\alpha n} - L^{\alpha}_{nj} L^{i}_{m\alpha}, \tag{1.3.33}$$

$$\underset{13}{A}{}^{i}_{jmn} = L^{i}_{mj,n} - L^{i}_{nj,m} + L^{\alpha}_{mj} L^{i}_{n\alpha} - L^{\alpha}_{nj} L^{i}_{\alpha m}, \tag{1.3.34}$$

$$\underset{14}{A}{}^{i}_{jmn} = L^{i}_{mj,n} - L^{i}_{nj,m} + L^{\alpha}_{jm} L^{i}_{n\alpha} - L^{\alpha}_{nj} L^{i}_{m\alpha}, \tag{1.3.35}$$

$$\underset{15}{A}{}^{i}_{jmn} = L^{i}_{jm,n} - L^{i}_{nj,m} + L^{\alpha}_{jm} L^{i}_{n\alpha} - L^{\alpha}_{nj} L^{i}_{\alpha m}, \tag{1.3.36}$$

и осам изведених тензора кривине [36, 37]:

$$\underset{1}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn} = \frac{1}{2}(\underset{1}{A} + \underset{3}{A})^{i}_{jmn} = \frac{1}{2}(\underset{2}{A} + \underset{4}{A})^{i}_{jmn}, \tag{1.3.37}$$

$$\underset{2}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn} = \frac{1}{2}(\underset{7}{A} + \underset{13}{A})^{i}_{jmn} = \frac{1}{2}(\underset{9}{A} + \underset{11}{A})^{i}_{jmn}, \tag{1.3.38}$$

$$\underset{3}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn} = \frac{1}{2}(\underset{8}{A} + \underset{14}{A})^{i}_{jmn} = \frac{1}{2}(\underset{10}{A} + \underset{12}{A})^{i}_{jmn}, \tag{1.3.39}$$

$$\underset{4}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn} = \frac{1}{6}(\underset{3}{R} + \underset{11}{A} + \underset{13}{A})^{i}_{j[mn]} = \frac{1}{6}(\underset{3}{R} + \underset{12}{A} + \underset{14}{A})^{i}_{j[mn]}, \tag{1.3.40}$$

$$\underset{5}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn} = (\underset{1}{A} - \underset{7}{A})^{i}_{jmn} - \underset{13}{A}{}^{i}_{jnm} = -\underset{7}{A}{}^{i}_{jmn} - (\underset{11}{A} + \underset{15}{A})^{i}_{jnm}, \tag{1.3.41}$$

$$\underset{6}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn} = (\underset{2}{A} - \underset{8}{A})^{i}_{jmn} - \underset{14}{A}{}^{i}_{jnm} = -\underset{8}{A}{}^{i}_{jmn} - (\underset{12}{A} + \underset{15}{A})^{i}_{jnm}, \tag{1.3.42}$$

$$\underset{7}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn} = (\underset{3}{A} + \underset{7}{A})^{i}_{jmn} + \underset{13}{A}{}^{i}_{jnm} = \underset{9}{A}{}^{i}_{jmn} + (\underset{13}{A} - \underset{15}{A})^{i}_{jnm}, \tag{1.3.43}$$

$$\underset{8}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn} = (\underset{4}{A} + \underset{8}{A})^{i}_{jmn} + \underset{14}{A}{}^{i}_{jnm} = \underset{10}{A}{}^{i}_{jmn} + (\underset{14}{A} - \underset{15}{A})^{i}_{jnm}, \tag{1.3.44}$$

простора $\mathbb{GA}_N$. Као функције тензора кривине R^{i}_{jmn} и тензора торзије $L^{i}_{\underset{\vee}{jk}}$, изведени тензори кривине су:

$$\underset{1}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn} = R^{i}_{jmn} - L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}} + L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha m}}, \tag{1.3.45}$$

$$\underset{2}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn} = R^{i}_{jmn} + L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}} + L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha m}}, \tag{1.3.46}$$

$$\underset{3}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn} = R^{i}_{jmn} - L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}} - L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha m}}, \tag{1.3.47}$$

$$\underset{4}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn} = R^{i}_{jmn} - \frac{1}{3}\big(L^{i}_{\underset{\vee}{jm}|n} - L^{i}_{\underset{\vee}{jn}|m} + L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}} - L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha m}} + 2L^{\alpha}_{\underset{\vee}{mn}} L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha j}}\big), \tag{1.3.48}$$

$$\underset{5}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn} = R^{i}_{jmn} - L^{i}_{\underset{\vee}{jm}|n} + L^{i}_{\underset{\vee}{jn}|m} - 3L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}} - L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha m}}, \tag{1.3.49}$$

$$\underset{6}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn} = R^{i}_{jmn} - L^{i}_{\underset{\vee}{jm}|n} + L^{i}_{\underset{\vee}{jn}|m} + L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}} L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}} + 3L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jn}} L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha m}}, \tag{1.3.50}$$

$$\underset{7}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} + L^i_{\underset{\vee}{jm}|n} - L^i_{\underset{\vee}{jn}|m} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}} + 3L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}, \tag{1.3.51}$$

$$\underset{8}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} + L^i_{\underset{\vee}{jm}|n} - L^i_{\underset{\vee}{jn}|m} - 3L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}. \tag{1.3.52}$$

Коришћењем ознака

$$\mathcal{A} = L^i_{\underset{\vee}{jm}|n}, \quad \mathcal{B} = L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}, \quad \mathcal{C} = L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha j}}, \quad \mathcal{A}' = L^i_{\underset{\vee}{jn}|m}, \quad \mathcal{B}' = L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}, \tag{1.3.53}$$

тензори кривине (1.3.18–1.3.21) и тензори изведене кривине (1.3.45–1.3.52) представљају се у облику

$$K^i_{jmn} = R^i_{jmn} + u\mathcal{A} + u'\mathcal{A}' + v\mathcal{B} + v'\mathcal{B}' + w\mathcal{C}, \tag{1.3.54}$$

где је R^i_{jmn} тензор кривине придруженог простора $\mathbb{A}_N$ а $u, u', v, v', w \in \mathbb{R}$.

Међу тензорима кривине $\{\underset{1}{R}{}^i_{jmn}, \ldots, \underset{4}{R}{}^i_{jmn}, \underset{1}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn}, \ldots, \underset{8}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn}\}$ пет је линеарно независних [36, 39, 100]. Две од тих петорки линеарно независних тензора кривине су

$$\mathcal{R} = \big(\underset{1}{R}{}^i_{jmn}, \underset{2}{R}{}^i_{jmn}, \underset{3}{R}{}^i_{jmn}, \underset{4}{R}{}^i_{jmn}, \underset{2}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn}\big), \tag{1.3.55}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \big(\underset{1}{K}{}^i_{jmn}, \underset{2}{K}{}^i_{jmn}, \underset{3}{K}{}^i_{jmn}, \underset{4}{K}{}^i_{jmn} \underset{5}{K}{}^i_{jmn}\big) \\ &= \big(\underset{1}{R}{}^i_{jmn}, \underset{1}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn}, \underset{3}{R}{}^i_{jmn}, \underset{3}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn}, \frac{1}{4}(3\underset{4}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} + \underset{1}{R}{}^i_{jmn})\big). \end{aligned} \tag{1.3.56}$$

1.4 Генералисани Риманови простори

Посебна класа простора афине конексије сачињена је од многострукости у чијим је тачкама дефинисан метрички тензор.

Дефиниција 1.4.1. [17, 18, 45] *N-димензионална многострукост у чијој је свакој тачки p дефинисан метрички тензор $g\big(X(p), Y(p)\big)$ типа $(0, 2)$ такав да је $g\big(X(p), Y(p)\big) \neq g\big(Y(p), X(p)\big)$ назива се* **генералисани Риманов простор** *и обележава се са $\mathbb{GR}_N$.*

У координатном облику, метрички тензор $g(X, Y)$ је коваријантни тензор g_{ij} и несиметричан је по индексима i и j. Из тог разлога, симетрични и антисиметрични део метричког тензора g_{ij} су

$$g_{\underline{ij}} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}), \tag{1.4.1}$$

$$g_{\underset{\vee}{ij}} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji}). \tag{1.4.2}$$

Проучаваћемо регуларне генералисане Риманове просторе, тј. генералисане Риманове просторе у којима је задовољено $g = \det(g_{\underline{ij}})_{N\times N} \neq 0$. Подржано регуларношћу простора $\mathbb{GR}_N$, контраваријантни метрички тензор $g^{\underline{ij}}$ се дефинише као инверзна матрица $\big(g^{\underline{ij}}\big) = \big(g_{\underline{ij}}\big)^{-1}$. Због тога је $g^{\underline{i\alpha}}g_{\underline{j\alpha}} = \delta^i_j$, где је δ^i_j Кронекеров делта-симбол.

Важи наредна једначина [25]

$$g_{\underset{\vee}{ij}} = A^\alpha_i g_{\underline{\alpha j}} = -A^\alpha_j g_{\underline{i\alpha}}, \tag{1.4.3}$$

где је A^i_j тензор типа $(1,1)$. Штавише, одавде директно следи да је

$$A^i_j = g^{\underline{i\alpha}} g_{\underset{\vee}{j\alpha}}. \tag{1.4.4}$$

(Генералисани) Кристофелови симболи прве и друге врсте простора $\mathbb{GR}_N$ дефинисани су једначинама

$$\Gamma_{i.jk} = \frac{1}{2}(g_{ji,k} - g_{jk,i} + g_{ik,j}) \quad \text{и} \quad \Gamma^i_{jk} = g^{\underline{i\alpha}}\Gamma_{\alpha.jk}. \tag{1.4.5}$$

Симболи Γ^i_{jk} задовољавају закон трансформације координата (1.3.3) па они представљају коефицијенте афине конексије простора $\mathbb{GR}_N$.

Како је $\Gamma^i_{jk} \neq \Gamma^i_{jk}$, симетрични и антисиметрични део коефицијента Γ^i_{jk} су редом

$$\Gamma^i_{\underline{jk}} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj}), \tag{1.4.6}$$

$$\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}). \tag{1.4.7}$$

Многи аутори су проучавали, и још увек проучавају, теорију генералисаних Риманових простора [8, 10, 11, 15, 17, 18, 25, 36, 41, 42, 44–46, 48, 49, 51, 52, 57–61, 63–68, 75, 78–80, 82, 83, 85, 86, 89, 99, 101, 102, 104–106].

Ајнштајнова теорија релативитета [12–14] почива на несиметричној афиној конексији. У Ајнштајновим разматрањима, метрички тензор g_{ij} и коефицијенти афине конексије Γ^i_{jk} задовољавају Ајнштајнов метрички услов

$$g_{ij,k} - \Gamma^{\alpha}_{ik} g_{\alpha j} - \Gamma^{\alpha}_{kj} g_{i\alpha} = 0. \tag{1.4.8}$$

У просторима који задовољавају овај услов, могуће је дефинисати две врсте коваријантног диференцирања.

Т. Такасу [89] је разматрао генералисане Риманове просторе са тровалентном метриком. Милева Првановић је дала значајан допринос унапређењу теорије генералисаног Римановог простора у Такасуовом смислу [58].

Ми ћемо се ослонити на дефиницију генералисаних Риманових простора у Ајзенхартовом смислу $\Big($[15,17,18], Дефиниција 1.4.1.$\Big)$ у даљем раду.

И у $\mathbb{GR}_N$ је могуће дефинисати четири врсте коваријантног диференцирања и дванаест тензора кривине који се, од тензора кривине дефинисаних једначинама (1.3.18–1.3.21, 1.3.45–1.3.52), добијају заменом коефицијената L^i_{jk} коефицијентима Γ^i_{jk}.

Доказано је да су у простору $\mathbb{GR}_N$ задовољене наредне теореме:

Теорема 1.4.1. (Минчић, [36]) *У генералисаном Римановом простору* $\mathbb{GR}_N$ *важи:*

$$\Gamma^{\alpha}_{\underline{\alpha k}} = \Gamma^{\alpha}_{\underline{k\alpha}} = \frac{1}{2}\Big(\ln|g|\Big)_{,k} \quad и \quad L^{\alpha}_{\underset{\vee}{\alpha k}} = L^{\alpha}_{\underset{\vee}{k\alpha}} = 0, \tag{1.4.9}$$

где је g *детерминанта придруженог простора* $\mathbb{R}_N$, $\Gamma^i_{\underline{jk}}$ *симетрични део коефицијента* Γ^i_{jk} *и* $\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}$ *тензор торзије афине конексије простора* $\mathbb{GR}_N$. □

Теорема 1.4.2. (Минчић, [36]) *У простору* $\mathbb{GR}_N$, *тензор* $g_{\underline{ij}}$ *задовољава једначине*

$$g_{\underline{ij}\underset{s}{|}k} = 0, \tag{1.4.10}$$

за $s \in \{1, \ldots, 4\}$. □

Теорема 1.4.3. (Минчић, [36]) *У простору $\mathbb{GR}_N$, тензор $g_{\underline{ij}}$ задовољава једначине*

$$g^{\underset{-}{ij}|m}_{\ \ s} = 0, \tag{1.4.11}$$

за $s \in \{1, \ldots, 4\}$. □

Симетрични део $\Gamma^i_{\underline{jk}}$ Кристофеловог симбола Γ^i_{jk} задовољава једначину (1.3.3) па, из тог разлога, представља афину конексију придруженог (Римановог) простора $\mathbb{R}_N$.

Значајан допринос теорији Риманових простора и уопштењима дат је у радовима [1, 5, 16, 19, 21–24, 26–33, 47, 69–71].

1.5 Геодезијска пресликавања простора $\mathbb{A}_\mathbf{N}$

Геодезијске линије простора афине конексије су еквивалент правама у Еуклидском простору. Оне спајају, најкраћим путевима, различите тачке у просторима.

Дефиниција 1.5.1. [47] *Векторско поље $X(t)$ се паралелно помера дуж криве $\ell : (a, b) \to \mathcal{M}^N$ уколико заједно са тангентним векторским пољем $\lambda = \lambda(t) = d\ell/dt$ задовољава једначину*

$$\nabla_\lambda X = 0.$$

Дефиниција 1.5.2. [33, 47, 70] *Крива ℓ простора $\mathbb{A}_N$ чији тангентни вектор* $\mathbf{T}$ *при паралелном померању дуж ℓ остаје тангентни назива се* **геодезијска линија**.

Тангентни вектор λ геодезијске линије ℓ простора $\mathbb{A}_N$ задовољава диференцијалну једначину

$$\frac{d\lambda^i}{dt} + L^i_{\underline{\alpha\beta}}\lambda^\alpha\lambda^\beta = \rho\lambda^i. \tag{1.5.1}$$

Дефиниција 1.5.3. [28, 30, 32, 33, 70] *Дифеоморфизам $f : \mathbb{A}_N \to \overline{\mathbb{A}}_N$ је геодезијско пресликавање простора $\mathbb{A}_N$ на простор $\overline{\mathbb{A}}_N$ ако сваку геодезијску линију простора $\mathbb{A}_N$ преводи у геодезијску линију простора $\overline{\mathbb{A}}_N$.*

Коефицијенти $L^i_{\underline{jk}}$ и $\overline{L}^i_{\underline{jk}}$ афиних конексија простора $\mathbb{A}_N$ и $\overline{\mathbb{A}}_N$ повезани су једначином

$$\overline{L}^i_{\underline{jk}} = L^i_{\underline{jk}} + P^i_{\underline{jk}}, \tag{1.5.2}$$

где је $P^i_{\underline{jk}} = P^i_{\underline{kj}}$ **тензор деформације** геодезијског пресликавања f. Одатле, и из једначине (1.5.1), добија се да тензор деформације $P^i_{\underline{jk}}$ задовољава наредну једначину

$$P^i_{\underline{\alpha\beta}}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 2\psi\lambda^i, \tag{1.5.3}$$

при чему је $2\psi = \overline{\rho} - \rho$. Основна једначина геодезијског пресликавања $f : \mathbb{A}_N \to \overline{\mathbb{A}}_N$ је

$$\overline{L}^i_{\underline{jk}} = L^i_{\underline{jk}} + \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j, \tag{1.5.4}$$

где је ψ_i коваријантни вектор а δ^i_j Кронекеров делта-симбол.

Најзначајнији инваријантни геометријски објекти геодезијског пресликавања $f : \mathbb{A}_N \to \overline{\mathbb{A}}_N$ су Томасов пројективни параметар и Вејлов пројективни тензор. Томасов пројективни параметар дат је са

$$\overset{0}{T}(X,Y) = \overset{0}{\nabla}_Y X - \frac{1}{N+1}\Big(Tr\big\{U \to \overset{0}{\nabla}_Y UX\big\} + Tr\big\{U \to \overset{0}{\nabla}_X UY\big\}\Big), \tag{1.5.5}$$

тј. координатно

$$T^i_{jk} = L^i_{\underline{jk}} - \frac{1}{N+1}\left(\delta^i_j L^\alpha_{\underline{k\alpha}} + \delta^i_k L^\alpha_{\underline{j\alpha}}\right), \tag{1.5.6}$$

а Вејлов пројективни тензор са

$$\begin{aligned} W(X,Y,Z) = R(X;Y,Z) &+ \frac{1}{N+1}\Big(Ric(Y,Z) - Ric(Z,Y)\Big)X \\ &+ \frac{1}{N^2-1}\Big(\big(N\,Ric(X,Z) + Ric(Z,X)\big)Y \\ &\qquad - \big(N\,Ric(X,Y) + Ric(Y,X)\big)Z\Big), \end{aligned} \tag{1.5.7}$$

тј. координатно

$$W^i_{jmn} = R^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j R_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}R_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}R_{n]j}. \tag{1.5.8}$$

У случају Риманових простора, Вејлов пројективни тензор се редукује на

$$W(X,Y,Z) = R(X;Y,Z) + \frac{1}{N-1}\big(Ric(X,Z)Y - Ric(X,Y)Z\big), \tag{1.5.9}$$

тј. координатно

$$W^i_{jmn} = R^i_{jmn} + \frac{1}{N-1}\delta^i_{[m}R_{jn]}. \tag{1.5.10}$$

1.6 Скоро геодезијска пресликавања простора $\mathbb{A}_\mathbf{N}$

У настојању да генерализује концепт геодезијског пресликавања, Синјуков [70] је увео појмове скоро геодезијске линије и скоро геодезијског пресликавања. Крива $l : x^i = x^i(t)$ у простору $\mathbb{A}_N$ је **скоро геодезијска линија** простора $\overline{\mathbb{A}}_N$ ако тангентни вектор $\lambda^i(t) = dx^i/dt \neq 0$ те криве задовољава једнакости

$$\overline{\lambda}^i_{(2)} = \overline{a}(t)\lambda^i + \overline{b}(t)\overline{\lambda}^i_{(1)}, \quad \overline{\lambda}^i_{(1)} = \lambda^i_{||\alpha}\lambda^\alpha, \quad \overline{\lambda}^i_{(2)} = \overline{\lambda}^i_{(1)||\alpha}\lambda^\alpha, \tag{1.6.1}$$

где су $\overline{a}(t)$ и $\overline{b}(t)$ функције параметра t, а $||$ означава коваријантни извод у односу на афину конексију простора $\overline{\mathbb{A}}_N$.

Дефиниција 1.6.1. *Пресликавање $f : \mathbb{A}_N \to \overline{\mathbb{A}}_N$ које сваку геодезијску линију простора $\mathbb{A}_N$ преводи у скоро геодезијску линију простора $\overline{\mathbb{A}}_N$ назива се* **скоро геодезијско пресликавање**.

При скоро геодезијском пресликавању $f : \mathbb{A}_N \to \overline{\mathbb{A}}_N$, коефицијенти афине конексије задовољавају услов

$$\overline{L}^i_{\underline{jk}} = L^i_{\underline{jk}} + P^i_{\underline{jk}},$$

где је $P^i_{\underline{jk}}$ тензор деформације скоро геодезијског пресликавања f. Синјуков је доказао да је потребан и довољан услов да би пресликавање $f : \mathbb{A}_N \to \overline{\mathbb{A}}_N$ било скоро геодезијско то да тензор деформације $P^i_{\underline{jk}}$ тог пресликавања, заједно са скаларним инваријантама a и b, задовољава једначину

$$(P^i_{\underline{\alpha\beta}|\gamma} + P^i_{\underline{\delta\alpha}}P^\delta_{\underline{\beta\gamma}})\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = bP^i_{\underline{\alpha\beta}}\lambda^\alpha\lambda^\beta + a\lambda^i. \tag{1.6.2}$$

Синјуков је, на основу облика скаларне инваријанте b, уочио три врсте скоро геодезијских пресликавања [70]:

Први тип скоро геодезијских пресликавања (тип π_1) за

$$b = b_\alpha \lambda^\alpha, \tag{1.6.3}$$

при чему инваријанта a постаје

$$a = a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta. \tag{1.6.4}$$

У том случају једначина (1.6.2) добија облик

$$P^i_{\underline{jm}|n} + P^i_{\underline{nm}|j} + P^i_{\underline{\alpha j}} P^\alpha_{\underline{mn}} + P^i_{\underline{\alpha n}} P^\alpha_{\underline{mj}} = b_j P^i_{\underline{mn}} + b_n P^i_{\underline{mj}} + a_{jm}\delta^i_n + a_{nm}\delta^i_j, \tag{1.6.5}$$

где је b_j коваријантни вектор а a_{jm} симетричан коваријантни тензор. Ова једначина је основна једначина скоро геодезијског пресликавања $f : \mathbb{A}_N \to \overline{\mathbb{A}}_N$ типа π_1. Скоро геодезијско пресликавање првог типа задовољава **особину реципроцитета** уколико је њему инверзно пресликавање скоро геодезијско пресликавање типа π_1.

Други тип скоро геодезијских пресликавања (тип π_2) за

$$b = \frac{b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta}{\sigma_\gamma\lambda^\gamma}, \tag{1.6.6}$$

где је $\sigma_\gamma\lambda^\gamma \neq 0$. Тензор деформације $P^i_{\underline{jk}}$ задовољава једначину

$$P^i_{\underline{jk}} = \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j + \sigma_j F^i_k + \sigma_k F^i_j, \tag{1.6.7}$$

где је ψ_j коваријантни вектор а F^i_j мешовити тензор типа $(1,1)$. Тензор F^i_j ћемо звати **афинор**. У случају скоро геодезијског пресликавања f типа π_2, афинор F^i_j задовољава једначину [70]

$$F^i_{j|k} + F^i_{k|j} + F^i_\alpha F^\alpha_{j|k} + F^i_\alpha F^\alpha_{k|j} = \mu_j F^i_k + \mu_k F^i_j + \nu_j\delta^i_k + \nu_k\delta^i_j, \tag{1.6.8}$$

где су μ_j, ν_j коваријантни вектори. Једначине (1.6.7) и (1.6.8) су основне једначине скоро геодезијског пресликавања $f : \mathbb{A}_N \to \overline{\mathbb{A}}_N$ типа π_2. Скоро геодезијско пресликавање другог типа задовољава особину реципроцитета уколико очувава афинор F_j^i и њему инверзно пресликавање је скоро геодезијско пресликавање типа π_2.

Трећи тип скоро геодезијских пресликавања (тип π_3) за

$$b = \frac{b_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma}{\sigma_{uv}\lambda^u\lambda^v}, \tag{1.6.9}$$

где је $\sigma_{uv}\lambda^u\lambda^v \neq 0$. Аналогно као у претходна два случаја, добија се да важе једнакости

$$P^i_{\underline{jk}} = \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j + \sigma_{jk}\varphi^i, \tag{1.6.10}$$

$$\varphi^i_{|k} = \nu\delta^i_k + \mu_k\varphi^i, \tag{1.6.11}$$

где су ψ_j, μ_j коваријантни вектори, φ^i контраваријантни вектор и σ_{ij} коваријантни тензор другог реда симетричан по индексима i и j. Једначине (1.6.10) и (1.6.11) су основне једначине скоро геодезијског пресликавања $f : \mathbb{A}_N \to \overline{\mathbb{A}}_N$ типа π_3. Скоро геодезијско пресликавање трећег типа задовољава особину реципроцитета уколико је њему инверзно пресликавање скоро геодезијско пресликавање типа π_3.

Рад Синјукова наставили су Ј. Микеш [1–7, 33, 90], В. Березовски [2–7,33], А. Ванжурова [7,33], В. С. Собчук [33,71], Х. Вавринкова [90], О. Покорна [90], Г. Старко [90], Т. И. Хрихорјева [24] и многи други истраживачи.

1.7 Системи парцијалних диференцијалних једначина Кошијевог типа

Нека је $D \subset \mathbb{R}^n$ конвексан скуп и нека су $F_i^\alpha(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^N)$, $i = 1, \dots, n$, $\alpha = 1, \dots, N$, функције дефинисане на скупу $\widetilde{D} \subset D \times \mathbb{R}^N$ непрекидне по x и диференцијабилне по y на $\widetilde{D}$.

Дефиниција 1.7.1. *Систем парцијалних диференцијалних једначина* (ПДЈ)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y^\alpha(x)}{\partial x^i} = F_i^\alpha(x, y(x)), \quad \alpha = 1, \dots, N, i = 1, \dots, n, \\ y^\alpha(x_0) = y_0^\alpha \end{cases} \tag{1.7.1}$$

је **Кошијевог типа***, где су*

$$y(x) = (y^1(x), \dots, y^N(x))$$

непознате функције *и* $x_0 \in D$*. Услов* $y^\alpha(x_0) = y_0^\alpha$ *је почетни (Кошијев) услов.*

У случају да је почетна вредност

$$y^\alpha(x^0) = y_0^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, N, \tag{1.7.2}$$

где је $x_0 \in D$ и $(x_0, y_0^\alpha) \in \widetilde{D}$, систем (1.7.1) има највише једно решење

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, \dots, x^n), \tag{1.7.3}$$

класе C^1 тако да је $(x, y(x)) \in \widetilde{D}$. Одатле следи да опште решење система (1.7.1) зависи од $r \leq N$ реалних параметара.

Нека је $F_i^\alpha(x, y) \in C^1(\widetilde{D})$ и нека се решење тражи за $y^\alpha \in C^2(D)$. **Услови интеграбилности** система ПДЈ (1.7.1) су

$$\frac{\partial^2 y^\alpha(x)}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 y^\alpha(x)}{\partial x^k \partial x^j} = 0, \tag{1.7.4}$$

односно

$$\frac{\partial F_j^\alpha(x,y)}{\partial x^k} + \frac{\partial F_j^\alpha(x,y)}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^k} - \frac{\partial F_k^\alpha(x,y)}{\partial x^j} - \frac{\partial F_k^\alpha(x,y)}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} = 0. \tag{1.7.5}$$

За свако решење система (1.7.1) услов (1.7.5) је задовољен за произвољно $x \in D$. Овај услов је задовољен и за почетну вредност (1.7.2).

У систему (1.7.1) је могуће, уместо парцијалног, узети коваријантни извод. Зато се да посматрати систем ПДЈ у тензорској форми.

Нека је $D \in \mathbb{R}^N$ координатни домен у $\mathbb{GA}_N$. **Систем ПДЈ Кошијевог типа за коваријантни извод** s-те врсте, $s \in \{1, \dots, 4\}$, од M непознатих тензорских поља $\underset{\sigma}{\tau}{}^{i_1 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 \dots j_{q_\sigma}}(x), \sigma = 1, \dots, M$ типа (p_σ, q_σ) је систем облика

$$\underset{\sigma}{\tau}{}^{i_1 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 \dots j_{q_\sigma} \underset{s}{|} k}(x) = F^{i_1 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 \dots j_{q_\sigma} k}(x, \underset{1}{\tau}, \dots, \underset{M}{\tau}), \tag{1.7.6}$$

за $i_1, \dots, i_{p_\sigma}, j_1, \dots, j_{q_\sigma}, k = 1, \dots, N$.

Прва два идентитета Ричијевог типа добијена на основу афиних конексија (1.3.11) и (1.3.12) простора $\mathbb{GA}_N$ су:

$$\begin{aligned}\tau^{i_1 \dots i_A}_{j_1 \dots j_B \underset{1}{|} mn} - \tau^{i_1 \dots i_A}_{j_1 \dots j_B \underset{1}{|} nm} = &\sum_{p=1}^{A} \underset{1}{R}{}^{i_p}_{\alpha mn} \binom{\alpha}{i_p} \tau^{i_1 \dots i_1}_{j_1 \dots j_B} - \sum_{q=1}^{B} \underset{1}{R}{}^{\alpha}_{j_q mn} \binom{j_q}{\alpha} \tau^{i_1 \dots i_A}_{j_1 \dots j_B} \\ &- 2 L^{\alpha}_{\underset{\vee}{mn}} \tau^{i_1 \dots i_A}_{j_1 \dots j_B \underset{1}{|} \alpha},\end{aligned} \tag{1.7.7}$$

$$\begin{aligned}\tau^{i_1 \dots i_A}_{j_1 \dots j_B \underset{2}{|} mn} - \tau^{i_1 \dots i_A}_{j_1 \dots j_B \underset{2}{|} nm} = &\sum_{p=1}^{A} \underset{2}{R}{}^{i_p}_{\alpha mn} \binom{\alpha}{i_p} \tau^{i_1 \dots i_1}_{j_1 \dots j_B} - \sum_{q=1}^{B} \underset{2}{R}{}^{\alpha}_{j_q mn} \binom{j_q}{\alpha} \tau^{i_1 \dots i_A}_{j_1 \dots j_B} \\ &+ 2 L^{\alpha}_{\underset{\vee}{mn}} \tau^{i_1 \dots i_A}_{j_1 \dots j_B \underset{2}{|} \alpha},\end{aligned} \tag{1.7.8}$$

где је

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{i_p} \tau^{i_1 \dots i_A}_{j_1 \dots j_B} &= \tau^{i_1 \dots i_{p-1} \alpha i_{p+1} \dots i_A}_{j_1 \dots j_B}, \\ \binom{j_q}{\alpha} \tau^{i_1 \dots i_A}_{j_1 \dots j_B} &= \tau^{i_1 \dots i_A}_{j_1 \dots j_{q-1} \alpha j_{q+1} \dots j_B}.\end{aligned}$$

ПОГЛАВЉЕ 2

Геодезијска и скоро геодезијска пресликавања простора $\mathbb{GA}_\mathbf{N}$

У овом одељку биће приказана геодезијска и скоро геодезијска пресликавања простора $\mathbb{GA}_N$ са посебним освртима на њихове инваријанте и неке односе међу њима. Биће обрађена посебна пажња на пресликавања простора $\mathbb{GA}_N$ која очувавају тензор торзије и која се зову **еквиторзиона пресликавања**. Та пресликавања су дефинисали и почели да проучавају С. М. Минчић и М. С. Станковић [42].

2.1 Геодезијска пресликавања

Крива $\ell = \ell(t)$ је геодезијска линија простора $\mathbb{GA}_N$ [41, 75] уколико њен тангентни вектор $\lambda = d\ell/dt \neq 0$ задовољава једначину

$$\frac{d\lambda^i}{dt} + L^i_{\underline{\alpha\beta}}\lambda^\alpha\lambda^\beta = \rho\lambda^i. \tag{2.1.1}$$

Пресликавање $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ је **геодезијско пресликавање** простора $\mathbb{GA}_N$ уколико сваку геодезијску линију простора $\mathbb{GA}_N$ преводи у геодезијску линију простора $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$. Геодезијска пресликавања простора несиметричне афине конексије су проучавана у радовима [41, 43, 75, 77, 81, 87, 92, 99, 100].

Како је инверзно пресликавање $f^{-1}:\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N\to\mathbb{G}\mathbb{A}_N$ геодезијског пресликавања f такође геодезијско, закључујемо да је задовољено

$$\frac{d\lambda^i}{dt}+\overline{L}^i_{\underline{\alpha\beta}}\lambda^\alpha\lambda^\beta=\overline{\rho}\lambda^i, \tag{2.1.2}$$

где су $\overline{L}^i_{\underline{jk}}$ коефицијенти афине конексије придруженог простора $\overline{\mathbb{A}}_N$.

Одузимањем једначине (2.1.1) од једначине (2.1.2), добија се да је геодезијско пресликавање $f:\mathbb{G}\mathbb{A}_N\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ одређено једначином

$$\big(\overline{L}^i_{\underline{\alpha\beta}}-L^i_{\underline{\alpha\beta}}\big)\lambda^\alpha\lambda^\beta=2\psi\lambda^i, \tag{2.1.3}$$

при чему је $2\psi=\overline{\rho}-\rho$. Одатле следи да коефицијенти L^i_{jk} и $\overline{L}^i_{jk}$ афиних конексија простора $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$ и $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ задовољавају једначину

$$\overline{L}^i_{jk}=L^i_{jk}+\psi_j\delta^i_k+\psi_k\delta^i_j+\xi^i_{jk}, \tag{2.1.4}$$

где је $\xi^i_{jk}=-\xi^i_{kj}$ тензор деформације тензора торзије афине конексије ∇ простора $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$ а ψ_j коваријантни вектор. Операторски облик једначине (2.1.4) је

$$\overline{\nabla}(X,Y)=\nabla(X,Y)+\psi(X)Y+\psi(Y)X+\xi(X,Y), \tag{2.1.5}$$

где је $\overline{\nabla}$ афина конексија простора $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$.

Под претпоставком да је $T(X,Y)=0$, тј. $L^i_{\underset{\vee}{jk}}=0$, основне једначине (2.1.4, 2.1.5) постају

$$\overline{L}^i_{\underline{jk}}=L^i_{\underline{jk}}+\psi_j\delta^i_k+\psi_k\delta^i_j, \tag{2.1.6}$$

$$\overset{0}{\overline{\nabla}}(X,Y)=\overset{0}{\nabla}(X,Y)+\psi(X)Y+\psi(Y)X, \tag{2.1.7}$$

при чему су $\overset{0}{\nabla}$ и $\overset{0}{\overline{\nabla}}$ афине конексије придуржених простора $\mathbb{A}_N$ и $\overline{\mathbb{A}}_N$, редом. На основу једначина (1.5.4, 2.1.6) закључујемо да су Томасов пројективни параметар

$$\overset{0}{T}(X,Y) = \overset{0}{\nabla}_Y X - \frac{1}{N+1}\Big(\operatorname{Tr}\big\{U \to \overset{0}{\nabla}_X UY\big\} + \operatorname{Tr}\big\{U \to \overset{0}{\nabla}_Y UX\big\}\Big), \tag{2.1.8}$$

$$T^i_{jk} = L^i_{\underline{jk}} - \frac{1}{N+1}(L^\alpha_{\underline{j\alpha}}\delta^i_k + L^\alpha_{\underline{k\alpha}}\delta^i_j), \tag{2.1.9}$$

као и Вејлов пројективни тензор

$$\begin{aligned} W(X,Y,Z) = R(X;Y,Z) &+ \frac{1}{N+1}\Big(Ric(Y,Z) - Ric(Z,Y)\Big)X \\ &+ \frac{1}{N^2-1}\Big(\big(N\,Ric(X,Z) + Ric(Z,X)\big)Y \\ &\qquad - \big(N\,Ric(X,Y) + Ric(Y,X)\big)Z\Big), \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

$$W^i_{jmn} = R^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j R_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}R_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}R_{n]j}, \tag{2.1.11}$$

инваријанте геодезијског пресликавања f. У претходним једначинама,

$$R^i_{jmn} = L^i_{\underline{jm},n} - L^i_{\underline{jn},m} + L^\alpha_{\underline{jm}}L^i_{\underline{\alpha n}} - L^\alpha_{\underline{jn}}L^i_{\underline{\alpha m}} \quad \text{и} \quad R_{ij} = R^\alpha_{ij\alpha}, \tag{2.1.12}$$

тј. операторски

$$\begin{aligned} R(X;Y,Z) &= \overset{0}{\nabla}_Z\overset{0}{\nabla}_Y X - \overset{0}{\nabla}_Y\overset{0}{\nabla}_Z X + \overset{0}{\nabla}_{[Y,Z]}X \quad \text{и} \\ R(X,Y) &= \operatorname{Tr}\big\{U \to R(X;Y,U)\big\}, \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

су тензор кривине и Ричијев тензор придруженог простора $\mathbb{A}_N$.

Нека је $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ еквиторзионо геодезијско пресликавање. Основна једначина тог пресликавања је

$$\overline{L}^i_{jk} = L^i_{jk} + \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j, \tag{2.1.14}$$

где је ψ_j коваријантни вектор. У операторском облику, та једначина гласи

$$\overline{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + \psi(X)Y + \psi(Y)X. \tag{2.1.15}$$

У радовима [43, 75, 81, 100] добијене су инваријанте еквиторзионог геодезијског пресликавања простора $\mathbb{GA}_N$ изведене из тензора кривине (1.3.18–1.3.21, 1.3.45–1.3.52). Фамилија инваријанти еквиторзионог геодезијског пресликавања $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ изведена из промене фамилије тензора кривина (1.3.54) је

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^i_{jmn} = {} & K^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j K_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}K_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}K_{n]j} - \frac{u+u'}{N+1}L^{\alpha}_{[\underline{m\alpha}}L^{i}_{\underset{\vee}{jn}]} \\
& - \frac{1}{(N+1)^2(N-1)}L^{\alpha}_{\underline{m\alpha}}\big[2(N-1)u\delta^i_j L^{\beta}_{\underset{\vee}{\beta n}} + (u - Nu' - Nu - u')\delta^i_n L^{\beta}_{\underset{\vee}{j\beta}}\big] \\
& + \frac{1}{(N+1)^2(N-1)}L^{\alpha}_{\underline{n\alpha}}\big[2(N-1)u\delta^i_j L^{\beta}_{\underset{\vee}{\beta m}} + (u - Nu' - Nu - u')\delta^i_m L^{\beta}_{\underset{\vee}{j\beta}}\big] \\
& + \frac{N(u'-u)+u+u'}{(N+1)^2(N-1)}\delta^i_{[m}L^{\alpha}_{\underline{j\alpha}}L^{\beta}_{\underset{\vee}{n]\beta}} + \frac{1}{N+1}\big((u-u')L^{\alpha}_{\underline{j\alpha}}L^{i}_{\underset{\vee}{mn}} + 2(N-1)u\delta^i_j L^{\alpha}_{\underline{\beta\alpha}}L^{\beta}_{\underset{\vee}{mn}}\big) \\
& + \frac{1}{(N+1)^2}L^{\alpha}_{\underline{\beta\alpha}}\big[(Nu'+u'+Nu-u)\delta^i_m L^{\beta}_{\underset{\vee}{jn}} + 2u\delta^i_n L^{\beta}_{\underset{\vee}{jm}}\big],
\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

за одговарајуће реалне константе u и u'. Инваријанте добијене на основу линеарно независних тензора кривине (1.3.56) су

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\mathcal{E}}{}^{i}_{jmn} = {} & \underset{1}{K}{}^{i}{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{1}{K}{}_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{1}{K}{}_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{1}{K}{}_{n]j} \\
& + \frac{1}{(N+1)^2(N-1)}L^{\alpha}_{\underline{m\alpha}}\left((N-1)\,\delta^i_j L^{\beta}_{\underset{\vee}{\beta n}} + \delta^i_n L^{\beta}_{\underset{\vee}{j\beta}}\right) \\
& + \frac{1}{(N+1)^2(N-1)}L^{\alpha}_{\underline{n\alpha}}\left(-(N-1)\,\delta^i_j L^{\beta}_{\underset{\vee}{\beta m}} - \delta^i_m L^{\beta}_{\underset{\vee}{j\beta}}\right) \\
& + \frac{1}{(N+1)^2(N-1)}L^{\alpha}_{\underline{j\alpha}}\left(N\delta^i_{[m}L^{\beta}_{\underset{\vee}{\beta n]}} + \left(N^2-1\right)L^{i}_{\underset{\vee}{nm}}\right) \\
& + \frac{2}{(N+1)^2}L^{\beta}_{\underline{\alpha\beta}}\left(-(N-1)\delta^i_j L^{\alpha}_{\underset{\vee}{mn}} + \delta^i_m L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jn}} - \delta^i_n L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}\right),
\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

$$\underset{2}{\mathcal{E}}{}^{i}_{jmn} = \underset{2}{K}{}^{i}{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{2}{K}{}_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{2}{K}{}_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{2}{K}{}_{n]j}, \tag{2.1.18}$$

$$\begin{aligned}
\underset{3}{\mathcal{E}}{}^{i}_{jmn} = {} & \underset{3}{K}{}^{i}{}_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{3}{K}{}_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{3}{K}{}_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{3}{K}{}_{n]j} \\
& + \frac{1}{(N+1)^2(N-1)}L^{\alpha}_{\underline{m\alpha}}\left((N-1)\,\delta^i_j L^{\beta}_{\underset{\vee}{\beta n}} - \delta^i_n L^{\beta}_{\underset{\vee}{j\beta}} + (N^2-1)L^{i}_{\underset{\vee}{jn}}\right) \\
& - \frac{1}{(N+1)^2(N-1)}L^{\alpha}_{\underline{n\alpha}}\left((N-1)\,\delta^i_j L^{\beta}_{\underset{\vee}{\beta m}} - \delta^i_m L^{\beta}_{\underset{\vee}{j\beta}} - (N^2-1)L^{i}_{\underset{\vee}{jm}}\right) \\
& - \frac{1}{(N+1)^2(N-1)}L^{\alpha}_{\underline{j\alpha}}\delta^i_{[m}L^{\beta}_{\underset{\vee}{\beta n]}} \\
& - \frac{1}{(N+1)^2}L^{\beta}_{\underline{\alpha\beta}}\left((N-1)\delta^i_j L^{\alpha}_{\underset{\vee}{mn}} + N\delta^i_m L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jn}} + \delta^i_n L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}\right),
\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

$$\underset{4}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn} = \underset{4}{K}{}^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{4}{K}{}_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{4}{K}{}_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{4}{K}{}_{n]j}, \tag{2.1.20}$$

$$\underset{5}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn} = \underset{5}{K}{}^i_{jmn} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j \underset{5}{K}{}_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{5}{K}{}_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{5}{K}{}_{n]j}. \tag{2.1.21}$$

Дефиниција 2.1.1. [87] *Простор $\mathbb{GA}_N$ је s-ти раван простор, $s = 1, \ldots, 5$, уколико је s-ти од линеарно независних тензора кривине $\underset{s}{K}{}^i_{jmn}$, датих једначином* (1.3.56), *једнак* 0.

Придружени простор $\mathbb{A}_N$ је раван уколико је тензор кривине R^i_{jmn} тог простора једнак 0.

Дефиниција 2.1.2. [87] *Простор $\mathbb{GA}_N$ је s-ти пројективно раван простор, $s = 1, \ldots, 5$, уколико је инваријанта $\underset{s}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn}$ добијена на основу линеарно независног тензора кривине $\underset{s}{K}{}^i_{jmn}$ датог једначином* (1.3.56) *једнака* 0.

У раду [87] је успостављена веза између анулирања линеарно независних тензора кривине $\underset{s}{K}{}^i_{jmn}, s = 1, \ldots, 5$, простора $\mathbb{GA}_N$ и анулирања инваријанти еквиторзионих геодезијских пресликавања (2.1.17–2.1.21).

Линеарно независни тензори кривина (1.3.56) и тензор кривине R^i_{jmn} придруженог простора повезани су једначинама

$$\underset{1}{K}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} + L^i_{\underset{\vee}{jm}|n} - L^i_{\underset{\vee}{jn}|m} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}, \tag{2.1.22}$$

$$\underset{2}{K}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}, \tag{2.1.23}$$

$$\underset{3}{K}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} + L^i_{\underset{\vee}{jm}|n} + L^i_{\underset{\vee}{jn}|m} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}} - 2L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha j}}, \tag{2.1.24}$$

$$\underset{4}{K}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}, \tag{2.1.25}$$

$$\underset{5}{K}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} - \frac{1}{2} L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha j}}. \tag{2.1.26}$$

Из једначина (2.1.22-2.1.26) се добијају одговарајући Ричијеви тензори

$$\underset{1}{K}{}_{jm} = R_{jm} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}|\alpha} - L^\alpha_{\underset{\vee}{j\alpha}|m} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}} L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} + L^\alpha_{\underset{\vee}{j\beta}} L^\beta_{\underset{\vee}{m\alpha}}, \tag{2.1.27}$$

$$\underset{2}{K}{}_{jm} = R_{jm} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}} L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} - L^\alpha_{\underset{\vee}{j\beta}} L^\beta_{\underset{\vee}{m\alpha}}, \tag{2.1.28}$$

$$\underset{3}{K}_{jm} = R_{jm} + L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}|\alpha} + L^{\alpha}_{\underset{\vee}{j\alpha}|m} - L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}} L^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} + L^{\alpha}_{\underset{\vee}{j\beta}} L^{\beta}_{\underset{\vee}{m\alpha}}, \tag{2.1.29}$$

$$\underset{4}{K}_{jm} = R_{jm} - L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}} L^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} + L^{\alpha}_{\underset{\vee}{j\beta}} L^{\beta}_{\underset{\vee}{m\alpha}}, \tag{2.1.30}$$

$$\underset{5}{K}_{jm} = R_{jm} + \frac{1}{2} L^{\alpha}_{\underset{\vee}{m\beta}} L^{\beta}_{\underset{\vee}{j\alpha}}. \tag{2.1.31}$$

Коначно, из једначина (2.1.27-2.1.31), следи да важе једнакости

$$\underset{1}{K}_{[jm]} = R_{[jm]} + 2L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}|\alpha} - L^{\alpha}_{\underset{\vee}{j\alpha}|m} + L^{\alpha}_{\underset{\vee}{m\alpha}|j} + 2L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}} L^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}, \tag{2.1.32}$$

$$\underset{2}{K}_{[jm]} = R_{[jm]} - 2L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}} L^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}, \tag{2.1.33}$$

$$\underset{3}{K}_{[jm]} = R_{[jm]} + 2L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}|\alpha} + L^{\alpha}_{\underset{\vee}{j\alpha}|m} - L^{\alpha}_{\underset{\vee}{m\alpha}|j} - 2L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}} L^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}, \tag{2.1.34}$$

$$\underset{4}{K}_{[jm]} = R_{[jm]} - 2L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}} L^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}, \tag{2.1.35}$$

$$\underset{5}{K}_{[jm]} = R_{[jm]}. \tag{2.1.36}$$

На основу једначина (2.1.22–2.1.26, 2.1.27–2.1.31, 2.1.32–2.1.36) и одговарајућих од једначина (2.1.17–2.1.21) закључујемо да је задовољена наредна теорема.

Теорема 2.1.1. *Први раван простор $\mathbb{GA}_N$ је први пројективно-раван простор ако и само ако је задовољена једнакост*

$$\begin{aligned} &L^{\alpha}_{\underline{n\alpha}} \left((N-1)\delta^i_j L^{\beta}_{\underset{\vee}{\beta m}} + \delta^i_m L^{\beta}_{\underset{\vee}{j\beta}} \right) + (N-1) L^{\alpha}_{\underline{\beta\alpha}} \left((N-1)\delta^i_j L^{\beta}_{\underset{\vee}{mn}} + \delta^i_n L^{\beta}_{\underset{\vee}{jm}} \right) \\ &\quad = (N-1)\delta^i_m L^{\alpha}_{\underline{\beta\alpha}} + L^{\beta}_{\underset{\vee}{jn}} L^{\alpha}_{\underline{m\alpha}} \left((N-1)\delta^i_j L^{\beta}_{\underset{\vee}{\beta n}} + \delta^i_n L^{\beta}_{\underset{\vee}{j\beta}} \right) \\ &\quad + L^{\alpha}_{\underline{j\alpha}} \left(N\delta^i_{[m} L^{\beta}_{\underset{\vee}{\beta n]}} + (N^2-1) L^i_{\underset{\vee}{nm}} \right). \end{aligned} \tag{2.1.37}$$

Трећи раван простор $\mathbb{GA}_N$ је трећи пројективно-раван простор ако и само ако је задовољена једнакост

$$\begin{aligned} &L^{\alpha}_{\underline{m\alpha}} \left((N-1)\delta^i_j L^{\beta}_{\underset{\vee}{\beta n}} + (N^2-1) L^i_{\underset{\vee}{jn}} \right) + L^{\alpha}_{\underline{n\alpha}} \left(\delta^i_m L^{\beta}_{\underset{\vee}{j\beta}} + (N^2-1) L^i_{\underset{\vee}{jm}} \right) \\ &\quad = \delta^i_n L^{\alpha}_{\underline{m\alpha}} L^{\beta}_{\underset{\vee}{j\beta}} + (N-1)\delta^i_j L^{\alpha}_{\underline{n\alpha}} L^{\beta}_{\underset{\vee}{\beta m}} + \delta^i_{[m} L^{\alpha}_{\underline{j\alpha}} L^{\beta}_{\underset{\vee}{\beta n]}} \\ &\quad + (N-1) L^{\alpha}_{\underline{\beta\alpha}} \left((N-1)\delta^i_j L^{\beta}_{\underset{\vee}{mn}} + N\delta^i_m L^{\beta}_{\underset{\vee}{jn}} + \delta^i_n L^{\beta}_{\underset{\vee}{jm}} \right). \end{aligned} \tag{2.1.38}$$

Други,четврти и пети раван простор су други, четврти и пети пројективно равни простори редом. □

Докажимо наредну теорему:

Теорема 2.1.2. *Вејлов пројективни тензор* W^i_{jmn} *придруженог простора* $\mathbb{A}_N$ *и инваријанта* $\underset{1}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn}$ *еквиторзионог геодезијског пресликавања* $f:\mathbb{GA}_N\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *задата једначином* (2.1.17) *задовољавају једначину*

$$\underset{1}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn}=W^i_{jmn}+\underset{1}{\widetilde{\mathcal{V}}}{}^i_{jmn},\tag{2.1.39}$$

где је

$$\begin{aligned}\underset{1}{\widetilde{\mathcal{V}}}{}^i_{jmn}&=L^i_{\underset{\vee}{j[m|n]}}+L^\alpha_{\underset{\vee}{j[m}}L^i_{\underset{\vee}{\alpha n]}}+\frac{2}{N+1}\delta^i_j\Big(L^\alpha_{\underset{\vee}{mn|\alpha}}+L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}-\frac{1}{2}L^\alpha_{\underset{\vee}{[m\alpha|n]}}\Big)\\&+\frac{1}{N+1}\delta^i_{[m}\delta^\alpha_{n]}(L^\beta_{\underset{\vee}{j\alpha|\beta}}+L^\beta_{\underset{\vee}{j\alpha}}L^\gamma_{\underset{\vee}{\beta\gamma}})-\frac{1}{N+1}\delta^i_{[m}L^\alpha_{\underset{\vee}{j\beta}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha n]}}-\frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}L^\alpha_{\underset{\vee}{j\alpha|n]}}\\&+\frac{2}{(N+1)^2(N-1)}\big((N-1)\delta^i_jL^\alpha_{[\underline{m\alpha}}L^\beta_{\underset{\vee}{\beta n]}}-\delta^i_{[m}L^\alpha_{\underline{n]\alpha}}L^\beta_{\underset{\vee}{j\beta}}-N\delta^i_{[n}L^\alpha_{\underline{j\alpha}}L^\beta_{\underset{\vee}{n]\beta}}\big)\\&-\frac{2}{N+1}L^\alpha_{\underline{j\alpha}}L^i_{\underset{\vee}{mn}}-\frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}L^\alpha_{\underset{\vee}{n]\alpha|j}}.\end{aligned}$$

Вејлов пројективни тензор W^i_{jmn} *придруженог простора* $\mathbb{A}_N$ *и инваријанта* $\underset{2}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn}$ *еквиторзионог геодезијског пресликавања* $f:\mathbb{GA}_N\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *задата једначином* (2.1.18) *задовољавају једначину*

$$\underset{2}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn}=W^i_{jmn}+\underset{2}{\widetilde{\mathcal{V}}}{}^i_{jmn},\tag{2.1.40}$$

где је

$$\underset{2}{\widetilde{\mathcal{V}}}{}^i_{jmn}=-L^\alpha_{\underset{\vee}{j[m}}L^i_{\underset{\vee}{\alpha n]}}-\frac{2}{N+1}\delta^i_jL^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}-\frac{1}{N+1}\delta^i_{[m}L^\alpha_{\underset{\vee}{jn]}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}+\frac{1}{N-1}\delta^i_{[m}L^\alpha_{\underset{\vee}{\beta n]}}L^\beta_{\underset{\vee}{j\alpha}}.$$

Вејлов пројективни тензор W^i_{jmn} *придруженог простора* $\mathbb{A}_N$ *и инваријанта* $\underset{3}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn}$ *еквиторзионог геодезијског пресликавања* $f:\mathbb{GA}_N\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *задата једначином* (2.1.19) *задовољавају једначину*

$$\underset{3}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn}=W^i_{jmn}+\underset{3}{\widetilde{\mathcal{V}}}{}^i_{jmn},\tag{2.1.41}$$

где је

$$
\begin{aligned}
\underset{3}{\widetilde{\mathcal{V}}}{}^i_{jmn} = {} & L^i_{\underset{\vee}{jm}|n} + L^i_{\underset{\vee}{nj}|m} - L^\alpha_{\underset{\vee}{j[m}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha n]}} - 2L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha j}} + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\big(2L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}|\alpha} + L^\alpha_{[\underset{\vee}{m\alpha}|n]} - 2L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}} L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\big)\\
& + \frac{1}{N+1}\delta^i_{[m}\delta^\alpha_{n]}\big(L^\beta_{\underset{\vee}{j\alpha}|\beta} - L^\beta_{\underset{\vee}{j\alpha}} L^\gamma_{\underset{\vee}{\beta\gamma}} - L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}} L^\gamma_{\underset{\vee}{\beta j}}\big) + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m} L^\alpha_{\underset{\vee}{j\alpha}|n]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m} L^\alpha_{\underset{\vee}{n\alpha}|j}\\
& + \frac{2}{(N+1)^2(N-1)}\big((N-1)\delta^i_j L^\alpha_{[\underline{m\alpha}} L^\beta_{\underset{\vee}{\beta n]}} + \delta^i_{[m} L^\alpha_{\underline{n]\alpha}} L^\beta_{\underset{\vee}{j\beta}} - \delta^i_{[m} L^\alpha_{\underline{j\alpha}} L^\beta_{\underset{\vee}{\beta n]}}\big)\\
& - \frac{2}{(N+1)^2} L^\alpha_{\underline{\beta\alpha}}\big((N-1)\delta^i_j L^\beta_{\underset{\vee}{mn}} + N\delta^i_m L^\beta_{\underset{\vee}{jn}} + \delta^i_n L^\beta_{\underset{\vee}{jm}}\big)\\
& + \frac{2}{N+1}(L^\alpha_{\underline{m\alpha}} L^i_{\underset{\vee}{jn}} + L^\alpha_{\underline{n\alpha}} L^i_{\underset{\vee}{jm}}).
\end{aligned}
$$

Вејлов пројективни тензор W^i_{jmn} *придруженог простора* $\mathbb{A}_N$ *и инваријанта* $\underset{4}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn}$ *еквиторзионог геодезијског пресликавања* $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *задата једначином* (2.1.20) *задовољавају једначину*

$$
\underset{4}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn} = W^i_{jmn} + \underset{4}{\widetilde{\mathcal{V}}}{}^i_{jmn}, \tag{2.1.42}
$$

где је

$$
\begin{aligned}
\underset{4}{\widetilde{\mathcal{V}}}{}^i_{jmn} = {} & -L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}} - \frac{2}{N+1}\delta^i_j L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}} L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\\
& - \frac{1}{N+1}\delta^i_{[m} L^\alpha_{\underset{\vee}{jn]}} L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} + \frac{1}{N-1}\delta^i_{[m} L^\alpha_{\underset{\vee}{\beta n]}} L^\beta_{\underset{\vee}{j\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Вејлов пројективни тензор W^i_{jmn} *придруженог простора* $\mathbb{A}_N$ *и инваријанта* $\underset{5}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn}$ *еквиторзионог геодезијског пресликавања* $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *задата једначином* (2.1.21) *задовољавају једначину*

$$
\underset{5}{\mathcal{E}}{}^i_{jmn} = W^i_{jmn} + \frac{1}{2}\underset{5}{\widetilde{\mathcal{V}}}{}^i_{jmn}, \tag{2.1.43}
$$

где је

$$
\underset{5}{\widetilde{\mathcal{V}}}{}^i_{jmn} = -L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}} L^i_{\underset{\vee}{\alpha j}} - \frac{1}{N-1}\delta^i_{[m} L^\alpha_{\underset{\vee}{n]\beta}} L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha j}}.
$$

Доказ. Докажимо једначине (2.1.39, 2.1.40, 2.1.41). Преостале две се доказују аналогно.

На основу једначине (2.1.27) добијамо да је

$$\begin{aligned}
\frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{1}{K}_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{1}{K}_{n]j} = {} & \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}R_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}R_{n]} \\
& + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_m\big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}|\alpha} - L^\alpha_{\underset{\vee}{j\alpha}|n} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} - L^\alpha_{\underset{\vee}{j\beta}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha n}}\big) \\
& + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m\big(L^\alpha_{\underset{\vee}{nj}|\alpha} - L^\alpha_{\underset{\vee}{n\alpha}|j} + L^\alpha_{\underset{\vee}{nj}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} - L^\alpha_{\underset{\vee}{n\beta}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha j}}\big) \\
& - \frac{N}{N^2-1}\delta^i_n\big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}|\alpha} - L^\alpha_{\underset{\vee}{j\alpha}|m} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} - L^\alpha_{\underset{\vee}{j\beta}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha m}}\big) \\
& - \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n\big(L^\alpha_{\underset{\vee}{mj}|\alpha} - L^\alpha_{\underset{\vee}{m\alpha}|j} + L^\alpha_{\underset{\vee}{mj}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} - L^\alpha_{\underset{\vee}{m\beta}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha j}}\big) \\
& = \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}R_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}R_{n]j} + \frac{1}{N+1}\delta^i_{[m}\delta^\alpha_{n]}\big(L^\beta_{\underset{\vee}{j\alpha}|\beta} + L^\beta_{\underset{\vee}{j\alpha}}L^\gamma_{\underset{\vee}{\beta\gamma}}\big) \\
& - \frac{1}{N+1}\delta^i_{[m}L^\alpha_{\underset{\vee}{j\beta}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha n}]} - \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}L^\alpha_{\underset{\vee}{j\alpha}|n]} - \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}R^\alpha_{n]\alpha|j}.
\end{aligned}$$

Овај резултат, заједно са једначинама (2.1.17, 2.1.27, 2.1.32), доказује да важи једнакост (2.1.39).

Из једначина (2.1.18, 2.1.28, 2.1.33) директно следи да важи једначина (2.1.40).

Важи још и

$$\begin{aligned}
\frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{3}{K}_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}\underset{3}{K}_{n]j} = {} & \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}R_{jn]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}R_{n]j} \\
& + \frac{1}{N+1}\delta^i_m\big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}|\alpha} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} + L^\alpha_{\underset{\vee}{j\beta}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha n}} - 2L^\alpha_{\underset{\vee}{n\beta}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha j}}\big) \\
& - \frac{1}{N+1}\delta^i_n\big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}|\alpha} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} + L^\alpha_{\underset{\vee}{j\beta}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha m}} - 2L^\alpha_{\underset{\vee}{m\beta}}L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha j}}\big) \\
& + \frac{N}{N^2-1}\delta^i_{[m}L^\alpha_{\underset{\vee}{j\alpha}|n]} + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_{[m}L^\alpha_{\underset{\vee}{n]\alpha}|j}.
\end{aligned}$$

Ова једнакост, заједно са једнакостима (2.1.19, 2.1.29, 2.1.34) доказује тачност једначине (2.1.41). □

Последица 2.1.1 *Величине* $\underset{s}{\widetilde{\mathcal{V}}}{}^i_{jmn}, s = 1, 3,$ *дефинисане у претходној теореми, су параметри. Величине* $\underset{s}{\widetilde{\mathcal{V}}}{}^i_{jmn}, s = 2, 4, 5,$ *су тензори.* □

Мотивисано Ајнштајновим радом [12–14] и проучавањем Ф. Граиф [20], у раду [92] су добијене инваријанте еквиторзионог геодезијског пресликавања $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ простора несиметричне афине конексије у коме постоје две врсте коваријантног диференцирања:

$$(\nabla^+_Y \tau)(X) = (\overset{0}{\nabla}_Y \tau)(X) + T\big(\tau(X), Y\big) - \tau\big(T(X,Y)\big), \tag{2.1.44}$$

$$(\nabla^-_Y \tau)(X) = (\overset{0}{\nabla}_Y \tau)(X) - T\big(\tau(X), Y\big) + \tau\big(T(X,Y)\big). \tag{2.1.45}$$

На основу разлика

$$\nabla^+_Z \nabla^+_Y X - \nabla^+_Y \nabla^+_Z X, \quad \nabla^-_Z \nabla^-_Y X - \nabla^-_Y \nabla^-_Z X, \quad \nabla^-_Z \nabla^+_Y X - \nabla^+_Y \nabla^-_Z X,$$

добијају се тензори кривине

$$\begin{aligned} \underset{1}{R}(X;Y,Z) = R(X;Y,Z) &+ \big(\overset{0}{\nabla}_Z T\big)(X,Y) - \big(\overset{0}{\nabla}_Y T\big)(X,Z) \\ &+ T\big(T(X,Y),Z\big) - T\big(T(X,Z),Y\big), \end{aligned} \tag{2.1.46}$$

$$\begin{aligned} \underset{2}{R}(X;Y,Z) = R(X;Y,Z) &- \big(\overset{0}{\nabla}_Z T\big)(X,Y) + \big(\overset{0}{\nabla}_Y T\big)(X,Z) \\ &+ T\big(T(X,Y),Z\big) - T\big(T(X,Z),Y\big), \end{aligned} \tag{2.1.47}$$

$$\begin{aligned} \underset{3}{R}(X;Y,Z) = R(X;Y,Z) &+ \big(\overset{0}{\nabla}_Z T\big)(X,Y) + \big(\overset{0}{\nabla}_Y T\big)(X,Z) \\ &- T\big(T(X,Y),Z\big) + T\big(T(X,Z),Y\big) - 2T\big(T(Y,Z),X\big), \end{aligned} \tag{2.1.48}$$

где је $R(X;Y,Z)$ тензор кривине придруженог простора $\mathbb{A}_N$.

На основу инваријантности Вејловог пројективног тензора $W(X,Y,Z)$ придруженог простора $\mathbb{A}_N$ датог једначином (1.5.9), следи да тензори кривине $R(X;Y,Z)$ и $\overline{R}(X;Y,Z)$ придружених простора $\mathbb{A}_N$ и $\overline{\mathbb{A}}_N$ задовољавају једначину

$$\begin{aligned}\overline{R}(X;Y,Z) = R(X;Y,Z) &+ \frac{1}{N+1}\big(Ric(Y,Z) - Ric(Z,Y)\big)X \\ &- \frac{1}{N+1}\big(\overline{Ric}(Y,Z) - \overline{Ric}(Z,Y)\big)X \\ &+ \frac{1}{N^2-1}\big(NRic(X,Z) + Ric(Z,X)\big)Y \\ &- \frac{1}{N^2-1}\big(NRic(Y,Z) + Ric(Z,Y)\big)X \\ &- \frac{1}{N^2-1}\big(N\overline{Ric}(X,Z) + \overline{Ric}(Z,X)\big)Y \\ &+ \frac{1}{N^2-1}\big(N\overline{Ric}(Y,Z) + \overline{Ric}(Z,Y)\big)X,\end{aligned} \tag{2.1.49}$$

где је $Ric(X,Y) = \mathrm{Tr}\big\{U \to R(X;Y,U)\big\}$. На основу једначине (2.1.46) добија се да важи

$$\begin{aligned}Ric(X,Y) = \underset{1}{Ric}(X,Y) & \\ - \mathrm{Tr}\Big\{U \to \big(\overset{0}{\nabla}_U T\big)(X,Y)\Big\} &+ \mathrm{Tr}\Big\{U \to \big(\overset{0}{\nabla}_Y T\big)(X,U)\Big\} \\ - \mathrm{Tr}\Big\{U \to T\big(T(X,Y),U\big)\Big\} &+ \mathrm{Tr}\Big\{U \to T\big(T(X,U),Y\big)\Big\},\end{aligned} \tag{2.1.50}$$

где је $\underset{1}{Ric}(X,Y) = \mathrm{Tr}\big\{U \to \underset{1}{R}(X;Y,U)\big\}$.

Како је пресликавање f еквиторзионо, одређено је основном једначином (2.1.15), па је задовољена и једначина

$$\begin{aligned}\big(\overset{0}{\overline{\nabla}}_Z T\big)(X,Y) = \big(\overset{0}{\nabla}_Z T\big)(X,Y) - \overset{0}{\nabla}_{T(X,Y)}Z + T\big(\overset{0}{\nabla}_Z X, Y\big) + T\big(X, \overset{0}{\nabla}_Z Y\big) \\ + \overset{0}{\overline{\nabla}}_{\overline{T}(X,Y)}Z - \overline{T}\big(\overset{0}{\overline{\nabla}}_Z X, Y\big) - \overline{T}\big(X, \overset{0}{\overline{\nabla}}_Z Y\big).\end{aligned} \tag{2.1.51}$$

Резултатима (2.1.49, 2.1.50, 2.1.51), доказано је да важи

$$\begin{aligned}\overline{\underset{1}{R}}(X;Y,Z) = &\underset{1}{R}(X;Y,Z)\\ &+\frac{1}{N+1}\big(Ric(Y,Z)-Ric(Z,Y)-\overline{Ric}(Y,Z)+\overline{Ric}(Z,Y)\big)X\\ &+\frac{1}{N^2-1}\Big(\big(NRic(X,Z)+Ric(Z,X)\big)Y-\big(NRic(X,Y)+Ric(Y,X)\big)Z\Big)\\ &-\frac{1}{N^2-1}\Big(\big(N\overline{Ric}(X,Z)+\overline{Ric}(Z,X)\big)Y-\big(N\overline{Ric}(X,Y)+\overline{Ric}(Y,X)\big)Z\Big)\\ &+\big(\overset{0}{\overline{\nabla}}_Z T\big)(X,Y)-\big(\overset{0}{\nabla}_Z T\big)(X,Y)-\big(\overset{0}{\overline{\nabla}}_Y T\big)(X,Z)+\big(\overset{0}{\nabla}_Y T\big)(X,Z).\end{aligned}$$

Одавде следи да је задовољено

$$\overline{\underset{1}{\mathcal{W}}}(X,Y,Z)=\underset{1}{\mathcal{W}}(X,Y,Z),$$

где је

$$\begin{aligned}\underset{1}{\mathcal{W}}(X,Y,Z)=\underset{1}{R}(X;Y,Z)&+\frac{1}{N+1}\big(\underset{1}{Ric}(Y,Z)-\underset{1}{Ric}(Z,Y)\big)X\\ &+\frac{1}{N^2-1}\Big(\big(N\underset{1}{Ric}(X,Z)+\underset{1}{Ric}(Z,X)\big)Y\\ &\qquad\qquad-\big(N\underset{1}{Ric}(X,Y)+\underset{1}{Ric}(Y,X)\big)Z\Big)\\ &-\overset{0}{\nabla}_{T(X,Y)}Z+T\big(\overset{0}{\nabla}_Z X,Y\big)+T\big(X,\overset{0}{\nabla}_Z Y\big)\\ &+\overset{0}{\nabla}_{T(X,Z)}Y-T\big(\overset{0}{\nabla}_Y X,Z\big)-T\big(X,\overset{0}{\nabla}_Y Z\big)\\ &+\frac{2}{N+1}\operatorname{Tr}\big\{U\to T(\overset{0}{\nabla}_U Y,Z)-T(\overset{0}{\nabla}_U Z,Y)\big\}X\\ &+\frac{1}{N+1}\operatorname{Tr}\Big\{U\to\overset{0}{\nabla}_{T(U,Z)Y-T(U,Y)Z}X\Big\}\\ &-\frac{1}{N-1}\operatorname{Tr}\Big\{U\to T\big(\overset{0}{\nabla}_Z XY-\overset{0}{\nabla}_Y XZ,U\big)\Big\}.\end{aligned}\tag{2.1.52}$$

Аналогним поступком се добија да важи

$$\overline{\underset{2}{\mathcal{W}}}(X,Y,Z)=\underset{2}{\mathcal{W}}(X,Y,Z)\quad\text{и}\quad\overline{\underset{3}{\mathcal{W}}}(X,Y,Z)=\underset{3}{\mathcal{W}}(X,Y,Z),$$

где је

$$\begin{aligned}
\underset{2}{\mathcal{W}}(X,Y,Z) = &\underset{2}{R}(X;Y,Z) + \frac{1}{N+1}\big(\underset{2}{Ric}(Y,Z) - \underset{2}{Ric}(Z,Y)\big)X \\
&+ \frac{1}{N^2-1}\Big(\big(N\underset{2}{Ric}(X,Z) + \underset{2}{Ric}(Z,X)\big)Y \\
&\qquad\qquad - \big(N\underset{2}{Ric}(X,Y) + \underset{2}{Ric}(Y,X)\big)Z\Big) \\
&+ \overset{0}{\nabla}_{T(X,Y)}Z - T\big(\overset{0}{\nabla}_Z X, Y\big) - T\big(X, \overset{0}{\nabla}_Z Y\big) \\
&- \overset{0}{\nabla}_{T(X,Z)}Y + T\big(\overset{0}{\nabla}_Y X, Z\big) + T\big(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z\big) \\
&- \frac{2}{N+1}\operatorname{Tr}\big\{U \to T(\overset{0}{\nabla}_U Y, Z) - T(\overset{0}{\nabla}_U Z, Y)\big\}X \\
&- \frac{1}{N+1}\operatorname{Tr}\Big\{U \to \overset{0}{\nabla}_{T(U,Z)Y - T(U,Y)Z}X\Big\} \\
&+ \frac{1}{N-1}\operatorname{Tr}\Big\{U \to T\big(\overset{0}{\nabla}_Z XY - \overset{0}{\nabla}_Y XZ, U\big)\Big\},
\end{aligned} \tag{2.1.53}$$

$$\begin{aligned}
\underset{3}{\mathcal{W}}(X,Y,Z) = &\underset{3}{R}(X;Y,Z) + \frac{1}{N+1}\big(\underset{3}{Ric}(Y,Z) - \underset{3}{Ric}(Z,Y)\big)X \\
&+ \frac{1}{N^2-1}\Big(\big(N\underset{3}{Ric}(X,Z) + \underset{3}{Ric}(Z,X)\big)Y \\
&\qquad\qquad - \big(N\underset{3}{Ric}(X,Y) + \underset{3}{Ric}(Y,X)\big)Z\Big) \\
&- \overset{0}{\nabla}_{T(X,Y)}Z + T\big(\overset{0}{\nabla}_Z X, Y\big) + T\big(X, \overset{0}{\nabla}_Z Y\big) \\
&- \overset{0}{\nabla}_{T(X,Z)}Y + T\big(\overset{0}{\nabla}_Y X, Z\big) + T\big(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z\big) \\
&+ \frac{2}{N+1}\operatorname{Tr}\big\{U \to T(\overset{0}{\nabla}_U Y, Z) - T(\overset{0}{\nabla}_U Z, Y)\big\}X \\
&+ \frac{1}{N+1}\operatorname{Tr}\Big\{U \to \overset{0}{\nabla}_{T(U,Z)Y - T(U,Y)Z}X\Big\} \\
&+ \frac{1}{N-1}\operatorname{Tr}\Big\{U \to T\big(\overset{0}{\nabla}_Z XY - \overset{0}{\nabla}_Y XZ, U\big)\Big\}.
\end{aligned} \tag{2.1.54}$$

Теорема 2.1.3. *Нека је* $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *еквиторзионо геодезијско пресликавање. Геометријски објекти* $\underset{1}{\mathcal{W}}, \underset{2}{\mathcal{W}}, \underset{3}{\mathcal{W}}$*, задати једначинама* (2.1.52, 2.1.53, 2.1.54), *јесу инваријанте пресликавања* f. □

Последица 2.1.2 *Инваријанте* $\underset{1}{\mathcal{W}}(X,Y,Z), \underset{2}{\mathcal{W}}(X,Y,Z), \underset{3}{\mathcal{W}}(X,Y,Z)$ *и Вејлов пројективни тензор* $W(X,Y,Z)$ *задовољавају једначине:*

$$\begin{aligned}\underset{1}{\mathcal{W}}(X,Y,Z) &= W(X,Y,Z) + ZT(X,Y) - YT(X,Z)\\ &\quad + T\big(T(X,Y),Z\big) - T\big(T(X,Z),Y\big),\end{aligned} \tag{2.1.55}$$

$$\begin{aligned}\underset{2}{\mathcal{W}}(X,Y,Z) &= W(X,Y,Z) - ZT(X,Y) + YT(X,Z)\\ &\quad + T\big(T(X,Y),Z\big) - T\big(T(X,Z),Y\big),\end{aligned} \tag{2.1.56}$$

$$\begin{aligned}\underset{3}{\mathcal{W}}(X,Y,Z) &= W(X,Y,Z) + ZT(X,Y) + YT(X,Z)\\ &\quad - T\big(T(X,Y),Z\big) + T\big(T(X,Z),Y\big) - 2T\big(T(Y,Z),X\big).\end{aligned} \tag{2.1.57}$$

□

2.2 Скоро геодезијска пресликавања

Мотивисан појмовима скоро геодезијске линије и пресликавања (секција 1.6, Н. С. Синјуков [70]), М. С. Станковић је започео генерализацију те теорије [72–74]. На ту генерализацију, ослоњена су многа даља истраживања [55, 56, 76, 84, 88, 91].

На основу коваријантних диференцирања (1.3.11–1.3.14) закључујемо да је тангентни вектор $\lambda^i = d\lambda/dt$ криве $\ell = \ell(t)$ могуће коваријантно диференцирати на два начина. Из тог разлога, крива ℓ у простору $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ чији тангентни вектор $\lambda^i \neq 0$ задовољава систем диференцијабилних једначина

$$\underset{s}{\overline{\lambda}}{}^i_{(2)} = \underset{s}{\overline{a}}(t)\lambda^i + \underset{s}{\overline{b}}(t)\underset{s}{\overline{\lambda}}{}^i_{(1)}, \quad \underset{s}{\overline{\lambda}}{}^i_{(1)} = \lambda^i_{\underset{s}{\|}\alpha}\lambda^\alpha, \quad \underset{s}{\overline{\lambda}}{}^i_{(2)} = \underset{s}{\overline{\lambda}}{}^i_{(1)\underset{s}{\|}\alpha}\lambda^\alpha, \tag{2.2.1}$$

$s = 1, 2$, назива се **скоро геодезијска линија s-те врсте** простора $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$. Пресликавање $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ које сваку геодезијску линију простора $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$ трансформише у скоро геодезијску линију s-те врсте простора $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ назива се **скоро геодезијско пресликавање s-те врсте**.

Теорема 2.2.1. [72–74] *Пресликавање* $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *је скоро геодезијско пресликавање прве врсте ако и само ако тензор деформације* $P^i_{jk} = \overline{L}^i_{jk} - L^i_{jk}$ *коефицијената афине конексије простора* $\mathbb{GA}_N$ *и* $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *задовољава једначину*

$$(P^i_{\alpha\beta\underset{1}{|}\gamma} + P^i_{\delta\alpha}P^\delta_{\beta\gamma})\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = \underset{1}{b}P^i_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta + \underset{1}{a}\lambda^i, \tag{2.2.2}$$

где су $\underset{1}{a}$ *и* $\underset{1}{b}$ *скаларне функције.* □

Теорема 2.2.2. [72–74] *Пресликавање* $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *је скоро геодезијско пресликавање друге врсте ако и само ако тензор деформације* $P^i_{jk} = \overline{L}^i_{jk} - L^i_{jk}$ *коефицијената афине конексије простора* $\mathbb{GA}_N$ *и* $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *задовољава једначину*

$$(P^i_{\alpha\beta\underset{2}{|}\gamma} + P^i_{\alpha\delta}P^\delta_{\beta\gamma})\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = \underset{2}{b}P^i_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta + \underset{2}{a}\lambda^i, \tag{2.2.3}$$

где су $\underset{2}{a}$ *и* $\underset{2}{b}$ *скаларне функције.* □

На основу скалара $\underset{s}{b}$ у једначинама (2.2.2, 2.2.3) уочена су три типа скоро геодезијских пресликавања s-те врсте, $s = 1, 2$ [72–74]. Ако је

$$\begin{aligned}
&\underset{s}{b} = \underset{s}{b}_\alpha\lambda^\alpha;\\
&\underset{s}{b} = \frac{\underset{s}{b}_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta}{\sigma_\gamma\lambda^\gamma}, \sigma_\gamma\lambda^\gamma \neq 0;\\
&\underset{s}{b} = \frac{\underset{s}{b}_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma}{\sigma_{\delta\epsilon}\lambda^\delta\lambda^\epsilon}, \sigma_{\delta\epsilon}\lambda^\delta\lambda^\epsilon \neq 0,
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

скоро геодезијско пресликавање $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ је пресликавање типа $\underset{s}{\pi}_1, \underset{s}{\pi}_2, \underset{s}{\pi}_3$ редом.

2.2.1 Скоро геодезијска пресликавања типа $\underset{1}{\pi}_2$ и $\underset{2}{\pi}_2$

Скоро геодезијска пресликавања другог типа су уопштена у раду [73]. У овом одељку биће приказани резултати добијени у раду [88].

Нека је $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ скоро геодезијско пресликавање типа $\underset{1}{\pi}_2$. Тензор деформације $P^i_{jk} = \overline{L}^i_{jk} - L^i_{jk}$ задовољава једначину

$$P^i_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 2\sigma_\alpha\lambda^\alpha F^i_\beta\lambda^\beta + 2\psi_\alpha\lambda^\alpha\lambda^i.$$

Одатле следи да важи

$$(P^i_{\alpha\beta} - 2\sigma_\alpha F^i_\beta - 2\psi_\alpha\delta^i_\beta)\lambda^\alpha\lambda^\beta \equiv 0,$$

тј.

$$P^i_{\underline{jk}} = \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j + \sigma_j F^i_k + \sigma_k F^i_j,$$

где је $P^i_{\underline{jk}} = \overline{L}^i_{\underline{jk}} - L^i_{\underline{jk}}$. У увој једначини, ψ_i и σ_i су коваријантни вектори а F^i_j је афинор.

Због тога је

$$P^i_{jk} = \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j + \sigma_j F^i_k + \sigma_k F^i_j + \xi^i_{jk}. \tag{2.2.5}$$

У овој једначини, ξ^i_{jk} је тензор антисиметричан по индексима j и k.

На основу једначина (2.2.2, 2.2.5) добијамо да важи:

$$\begin{aligned} &F^i_{j\underset{1}{|}k} + F^i_{k\underset{1}{|}j} + F^i_\alpha F^\alpha_j\sigma_k + F^i_\alpha F^\alpha_k\sigma_j + \xi^i_{\alpha j}F^\alpha_k + \xi^i_{\alpha k}F^\alpha_j \\ &\qquad = \mu_j F^i_k + \mu_k F^i_j + \nu_j\delta^i_k + \nu_k\delta^i_j, \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

где су μ_i и ν_i коваријантни вектори.

Једначине (2.2.5) и (2.2.6) су *основне једначине* скоро геодезијског пресликавања $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ типа $\underset{1}{\pi}_2$.

Коришћењем претходног метода, добијамо да важи

$$\begin{aligned} &F^i_{j\underset{2}{|}k} + F^i_{k\underset{2}{|}j} + F^i_\alpha F^\alpha_j\sigma_k + F^i_\alpha F^\alpha_k\sigma_j + \xi^i_{j\alpha}F^\alpha_k + \xi^i_{k\alpha}F^\alpha_j \\ &\qquad = \mu_j F^i_k + \mu_k F^i_j + \nu_j\delta^i_k + \nu_k\delta^i_j, \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

где су μ_i, ν_i коваријантни вектори.

Једначине (2.2.5) и (2.2.7) су *основне једначине* скоро геодезијског пресликавања $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ типа $\underset{2}{\pi}_2$.

Примедба 2.2.1. *Уколико је, у једначини* (2.2.5), $\sigma_i \equiv 0$ *скоро геодезијско пресликавање* f *се своди на геодезијско. Уколико је, у тој једначини,* $\psi_i \equiv 0$ *скоро геодезијско пресликавање* f *постаје каноничко* [73]. *Уколико је, у основној једначини* (2.2.5), $\sigma_i \equiv 0$ *и* $\psi_i \equiv 0$ *скоро геодезијско пресликавање* f *се своди на тривијално геодезијско пресликавање.*

Скоро геодезијско пресликавање $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ типа $\underset{s}{\pi}_2, s \in \{1,2\}$, задовољава *особину реципроцитета* [73] уколико очувава афинор F^i_j и притом је њему инверзно пресликавање $f^{-1} : \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N \to \mathbb{GA}_N$ истог типа $\underset{s}{\pi}_2$.

Размотрићемо скоро геодезијско пресликавање $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ типа $\underset{1}{\pi}_2$. Аналогни резултат је, на једноставан начин, могуће добити приликом проучавања скоро геодезијских пресликавања типа $\underset{2}{\pi}_2$.

Како тензор деформације $\overline{P}^i_{jk} = L^i_{jk} - \overline{L}^i_{jk}$ инверзног пресликавања $f^{-1} : \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{GA}_N$ задовољава једначину

$$\overline{P}^i_{jk} = -P^i_{jk},$$

коваријантни вектори ψ_i, σ_i и афинор F^i_j у једначини (2.2.5) и одговарајући $\overline{\psi}_i, \overline{\sigma}_i, \overline{F}^i_j$ су повезани наредним једнакостима:

$$\overline{\psi}_i = -\psi_i, \quad \overline{\sigma}_i = -\sigma_i, \quad \overline{F}^i_j = F^i_j.$$

Пресликавање $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ типа $\underset{1}{\pi}_2$ задовољава особину реципроцитета ако и само ако афинор $\overline{F}^i_j = F^i_j$ простора $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ задовољава једначину облика (2.2.6), тј.

$$F^i_{\underset{1}{j||k}} + F^i_{\underset{1}{k||j}} - F^i_\alpha F^\alpha_j \sigma_k - F^i_\alpha F^\alpha_k \sigma_j - \xi^i_{\alpha j} F^\alpha_k - \xi^i_{\alpha k} F^\alpha_j = \overline{\mu}_j F^i_k + \overline{\mu}_k F^i_j + \overline{\nu}_j \delta^i_k + \overline{\nu}_k \delta^i_j, \quad (2.2.8)$$

где је са $\underset{1}{||}$ означена коваријантна деривација прве врсте на основу афине конексије простора $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$. Како је

$$\begin{aligned} F^i_{\underset{1}{j||k}} &= F^i_{j,k} + (L^i_{\alpha k} + P^i_{\alpha k}) F^\alpha_j - (L^\alpha_{jk} + P^\alpha_{jk}) F^i_\alpha \\ &= F^i_{\underset{1}{j|k}} + P^i_{\alpha k} F^\alpha_j - P^\alpha_{jk} F^i_\alpha, \end{aligned}$$

то на основу једначина (2.2.5, 2.2.8) следи да важи

$$F^i_\alpha F^\alpha_j \sigma_k + F^i_\alpha F^\alpha_k \sigma_j + \xi^i_{\alpha j} F^\alpha_k + \xi^i_{\alpha k} F^\alpha_j = \overline{\overline{\mu}}_j F^i_k + \overline{\overline{\mu}}_k F^i_j + \overline{\overline{\nu}}_j \delta^i_k + \overline{\overline{\nu}}_k \delta^i_j,$$

где су вектори $\overline{\overline{\mu}}_i, \overline{\overline{\nu}}_i$ функције вектора μ_i, ν_i, $\overline{\mu}_i$, $\overline{\nu}_i$, ψ_i, σ_i и афинора F^i_j. Како је $\sigma_i \not\equiv 0$, добија се да важи

$$F^i_\alpha F^\alpha_j = p\delta^i_j + qF^i_j, \tag{2.2.9}$$

где су p и q скаларне функције.

Претходним разматрањем је доказано да важи наредна теорема:

Теорема 2.2.3. *Једначином* (2.2.9) *дат је потребан и довољан услов да скоро геодезијско пресликавање* $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *типа* $\underset{s}{\pi}_2, s = 1, 2$, *задовољава особину реципроцитета.* □

Нека је афинор, у једначинама (2.2.5) и (2.2.6), облика

$$\tilde{F}^i_j = rF^i_j + s\delta^i_j \quad (r \neq 0).$$

Тада важи једначина

$$\tilde{F}^i_\alpha \tilde{F}^\alpha_j = \tilde{p}\delta^i_j + \tilde{q}\tilde{F}^i_j,$$

где је

$$\tilde{p} = r^2 p - s^2 - srq \quad \text{и} \quad \tilde{q} = 2s + rq.$$

Функције r и s је могуће одабрати тако да важи

$$\tilde{q} = 0 \quad \text{и} \quad \tilde{p} = \tilde{e}\ (= \pm 1, 0).$$

У том случају је

$$\tilde{F}^i_\alpha \tilde{F}^\alpha_j = \tilde{e}\delta^i_j.$$

Одатле следи да важи

$$F^i_\alpha F^\alpha_j = e\delta^i_j \qquad (e = \pm 1, 0). \tag{2.2.10}$$

Заменом резултата (2.2.10) у једначину (2.2.6), добијамо да је задовољено

$$F^i_{\underset{1}{j|k}} + F^i_{\underset{1}{k|j}} + \xi^i_{\alpha j}F^\alpha_k + \xi^i_{\alpha k}F^\alpha_j = \mu_j F^i_k + \mu_k F^i_j + \nu_j\delta^i_k + \nu_k\delta^i_j. \tag{2.2.11}$$

Због тога је скоро геодезијско пресликавање $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ типа $\underset{1}{\pi}_2$ које задовољава особину реципроцитета [72] одређено једначинама (2.2.5), (2.2.10) и (2.2.11). Таква пресликавања су елементи класе $\underset{1}{\pi}_2(e)$.

Скоро геодезијско пресликавање $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ типа $\underset{2}{\pi}_2$ које задовољава особину реципроцитета је одређено наредним једначинама:

$$P^i_{jk} = \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j + \sigma_j F^i_k + \sigma_k F^i_j + \xi^i_{jk}, \tag{2.2.12}$$

$$F^i_{\underset{2}{j|k}} + F^i_{\underset{2}{k|j}} - \xi^i_{\alpha j}F^\alpha_k - \xi^i_{\alpha k}F^\alpha_j = \mu_j F^i_k + \mu_k F^i_j + \nu_j\delta^i_k + \nu_k\delta^i_j, \tag{2.2.13}$$

$$F^i_\alpha F^\alpha_j = e\delta^i_j, \qquad (e = \pm 1, 0). \tag{2.2.14}$$

Таква скоро геодезијска пресликавања сачињавају класу $\underset{2}{\pi}_2(e)$.

Дефиниција 2.2.1. *Тензор* F^i_j *који задовољава једначине* (2.2.10) *и* (2.2.11) *се назива* **е-структура** *која одређује скоро геодезијско пресликавање* $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *типа* $\underset{1}{\pi}_2(e)$.

Теорема 2.2.4. *Произвољна е-структура* F^i_j *одређује скоро геодезијско пресликавање* $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *типа* $\underset{1}{\pi}_2(e), e = \pm 1$, *ако и само ако задовољава наредне једнакости*

$$F^i_{\underset{1}{j|k}} + F^i_{\underset{1}{k|j}} + \xi^i_{\alpha j}F^\alpha_k + \xi^i_{\alpha k}F^\alpha_j = \mu_j F^i_j + \mu_j F^i_k - \mu_\alpha F^\alpha_j\delta^i_j - \mu_\alpha F^\alpha_j\delta^i_k, \tag{2.2.15}$$

$$F^i_\alpha F^\alpha_j = e\delta^i_j, \tag{2.2.16}$$

где је μ_i *коваријантни вектор.*

Доказ. Коваријантним диференцирањем прве врсте једначине (2.2.16) у правцу x^k добијамо да је задовољено

$$F^i_{\underset{1}{\alpha|k}}F^\alpha_j + F^\alpha_{\underset{1}{j|k}}F^i_\alpha = 0. \tag{2.2.17}$$

Након симетризације једначине (2.2.17) по индексима j и k добијамо да важи

$$F^i_{\alpha\underset{1}{|}k}F^\alpha_j + F^i_{\alpha\underset{1}{|}j}F^\alpha_k + F^\alpha_{j\underset{1}{|}k}F^i_\alpha + F^\alpha_{k\underset{1}{|}j}F^i_\alpha = 0. \tag{2.2.18}$$

На основу једначина (2.2.11) и (2.2.18) следи да је

$$F^i_{\alpha\underset{1}{|}j}F^\alpha_k + F^i_{\alpha\underset{1}{|}k}F^\alpha_j + e\delta^i_j\mu_k + e\delta^i_k\mu_j + F^i_j\nu_k + F^i_k\nu_j + F^i_\alpha F^\beta_j\xi^\alpha_{k\beta} + F^i_\alpha F^\beta_k\xi^\alpha_{j\beta} = 0.$$

Композицијом претходне једначине са $F^k_{k'}$ добија се да важи

$$\begin{aligned} eF^i_{k'\underset{1}{|}j} + F^i_{\alpha\underset{1}{|}\beta}F^\alpha_j F^\beta_{k'} + e\delta^i_j\mu_\alpha F^\alpha_{k'} + e\mu_j F^i_{k'} + F^i_j\nu_\alpha F^\alpha_{k'} + e\delta^i_{k'}\nu_j \\ + F^i_j\nu_\alpha F^\alpha_{k'} + e\delta^i_{k'}\nu_j + F^i_\alpha F^\beta_j F^\gamma_{k'}\xi^\alpha_{\gamma\beta} + eF^i_\alpha\xi^\alpha_{jk'} = 0. \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Након симетризације једначине (2.2.19) по индексима j и k' следи да је задовољено

$$\begin{aligned} eF^i_{j\underset{1}{|}k'} + eF^i_{k'\underset{1}{|}j} + F^i_{\alpha\underset{1}{|}\beta}F^\alpha_j F^\beta_{k'} + F^i_{\alpha\underset{1}{|}\beta}F^\alpha_{k'}F^\beta_j + e\delta^i_j F^\alpha_{k'}\mu_\alpha + e\delta^i_{k'}F^\alpha_j\mu_\alpha \\ + e\mu_j F^i_{k'} + e\mu_{k'}F^i_j + \nu_\alpha F^i_j F^\alpha_{k'} + \nu_\alpha F^i_{k'}F^\alpha_j + e\delta^i_j\nu_{k'} + e\delta^i_{k'}\nu_j = 0. \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

На основу једначине (2.2.11), добија се да је

$$\begin{aligned} eF^i_{j\underset{1}{|}k'} + eF^i_{k'\underset{1}{|}j} + F^i_{\alpha\underset{1}{|}\beta}F^\alpha_j F^\beta_{k'} + F^i_{\alpha\underset{1}{|}\beta}F^\alpha_{k'}F^\beta_j = F^i_j(\nu_\beta F^\beta_{k'} + e\mu_{k'}) \\ + F^i_{k'}(\nu_\alpha F^\alpha_j + e\mu_j) + e\delta^i_j(\mu_\beta F^\beta_{k'} + \nu_{k'}) + e\delta^i_{k'}(\mu_\alpha F^\alpha_j + \nu_j). \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

На основу једначина (2.2.20) и (2.2.21) утврђујемо да важи једначина

$$F^i_j(F^\alpha_k\nu_\alpha + e\mu_k) + F^i_k(F^\alpha_j\nu_\alpha + e\mu_j) + e\delta^i_j(F^\alpha_k\mu_\alpha + \nu_k) + e\delta^i_k(F^\alpha_j\mu_\alpha + \nu_j) = 0.$$

Уређењем претходне једначине закључујемо да је задовољено

$$F^\alpha_j\mu_\alpha + \nu_j = 0, \quad \text{тј.} \quad \nu_j = -F^\alpha_j\mu_\alpha. \tag{2.2.22}$$

На основу једначина (2.2.22) и (2.2.11) следи да важи једначина (2.2.15), чиме је ова теорема доказана. □

У случају скоро геодезијских пресликавања типа $\underset{2}{\pi}_2(e)$ имамо следеће:

Дефиниција 2.2.2. *Афинор* F^h_i *који задовољава услове* (2.2.13, 2.2.14) *је* **е-структура** *која одређује скоро геодезијско пресликавање типа* $\underset{2}{\pi}_2(e)$.

Теорема 2.2.5. *Произвољна е-структура* F^i_j *одређује скоро геодезијско пресликавање типа* $\underset{2}{\pi}_2(e), e = \pm 1$, *ако и само ако задовољава наредне једначине*

$$F^i_{j\underset{2}{|}k} + F^i_{k\underset{2}{|}j} - \xi^i_{\alpha j}F^\alpha_k - \xi^i_{\alpha k}F^\alpha_j = \mu_j F^i_k + \mu_k F^i_j - \mu_\alpha F^\alpha_j \delta^i_k - \mu_\alpha F^\alpha_k \delta^i_j, \tag{2.2.23}$$

$$F^i_\alpha F^\alpha_j = e\delta^i_j, \tag{2.2.24}$$

где је μ_i *коваријантни вектор.* □

Теорема 2.2.6. *Произвољна е-структура* F^i_j *која одређује скоро геодезијско пресликавање типа* $\underset{1}{\pi}_2(e)$, $e = \pm 1$, *задовољава наредне једначине*

$$\begin{aligned} F^i_{j\underset{1}{|}(mn)} + \underset{1}{\xi}{}^i_{jmn} &= \mu_{(m\underset{1}{|}n)}F^i_j + \mu_{[j\underset{1}{|}n]}F^i_m + \mu_{[j\underset{1}{|}m]}F^i_n \\ &\quad - \mu_{\alpha\underset{1}{|}(m}F^\alpha_{n)}\delta^i_j + \mu_{\alpha\underset{1}{|}[j}F^\alpha_{n]}\delta^i_m + \mu_{\alpha\underset{1}{|}[j}F^\alpha_{m]}\delta^i_n + \overset{1}{\underset{1}{\theta}}{}^i_{jnm}, \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

где су са $[i, j]$ *и* (i, j) *означене антисиметризација и симетризација без дељења и*

$$\begin{aligned} \overset{1}{\underset{1}{\theta}}{}^i_{jnm} &= \overset{2}{\underset{1}{\theta}}{}^i_{jmn} + \overset{2}{\underset{1}{\theta}}{}^i_{jnm} - \overset{2}{\underset{1}{\theta}}{}^i_{mnj} \\ &\quad - \underset{1}{R}{}^i_{\alpha jm}F^\alpha_n + \underset{1}{R}{}^\alpha_{njm}F^i_\alpha - \underset{1}{R}{}^i_{\alpha jn}F^\alpha_m + \underset{1}{R}{}^\alpha_{mjn}F^i_\alpha + 2T^\alpha_{jm}F^i_{n\underset{1}{|}\alpha} + 2T^\alpha_{jn}F^i_{m\underset{1}{|}\alpha}, \\ \overset{2}{\underset{1}{\theta}}{}^i_{jmn} &= \mu_j F^i_{m\underset{1}{|}n} + \mu_m F^i_{j\underset{1}{|}n} - \mu_\alpha F^\alpha_{j\underset{1}{|}n}\delta^i_m - \mu_\alpha F^\alpha_{m\underset{1}{|}n}\delta^i_j - \xi^i_{\alpha j}F^\alpha_{m\underset{1}{|}n} - \xi^i_{\alpha m}F^\alpha_{j\underset{1}{|}n}, \\ \underset{1}{\xi}{}^i_{jmn} &= \xi^i_{\alpha[j\underset{1}{|}n]}F^\alpha_m + \xi^i_{\alpha[j\underset{1}{|}m]}F^\alpha_n + \xi^i_{\alpha(m\underset{1}{|}n))}F^\alpha_j, \end{aligned}$$

а $\underset{1}{R}{}^i_{jmn}$ *је тензор кривине задат једначином* (1.3.18).

Доказ. На основу коваријантног диференцирања прве врсте једначине

(2.2.15) у правцу x^n се добија да важи

$$\begin{aligned} & F^i_{j\underset{1}{|}mn} + F^i_{m\underset{1}{|}jn} + \xi^i_{\alpha j\underset{1}{|}n}F^\alpha_m + \xi^i_{\alpha m\underset{1}{|}n}F^\alpha_j \\ & \qquad = \mu_{j\underset{1}{|}n}F^i_m + \mu_{m\underset{1}{|}n}F^i_j - \mu_{\alpha\underset{1}{|}n}F^\alpha_j\delta^i_m - \mu_{\alpha\underset{1}{|}n}F^\alpha_m\delta^i_j + \overset{2}{\underset{1}{\theta}}{}^i_{jmn}. \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

Антисиметризацијом ове једначине по j и n и коришћењем првог Ричијевог идентитета, добијамо да важи

$$\begin{aligned} & F^i_{j\underset{1}{|}mn} - F^i_{n\underset{1}{|}mj} + \xi^i_{\alpha j\underset{1}{|}n}F^\alpha_m - \xi^i_{\alpha n\underset{1}{|}j}F^\alpha_m + \xi^i_{\alpha m\underset{1}{|}n}F^\alpha_j - \xi^i_{\alpha m\underset{1}{|}j}F^\alpha_n \\ & = \mu_{j\underset{1}{|}n}F^i_m - \mu_{n\underset{1}{|}j}F^i_m + \mu_{m\underset{1}{|}n}F^i_j - \mu_{m\underset{1}{|}j}F^i_n \\ & - \mu_{\alpha\underset{1}{|}n}F^\alpha_j\delta^i_m + \mu_{\alpha\underset{1}{|}j}F^\alpha_n\delta^i_m - \mu_{\alpha\underset{1}{|}n}F^\alpha_m\delta^i_j + \mu_{\alpha\underset{1}{|}j}F^\alpha_m\delta^i_n + \overset{3}{\underset{1}{\theta}}{}^i_{jmn}, \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

где је

$$\overset{3}{\underset{1}{\theta}}{}^i_{jmn} = \overset{2}{\underset{1}{\theta}}{}^i_{jmn} - \overset{2}{\underset{1}{\theta}}{}^i_{nmj} - \underset{1}{R}{}^i_{\alpha jn}F^\alpha_m + \underset{1}{R}{}^\alpha_{mjn}F^i_\alpha + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}F^i_{m\underset{1}{|}\alpha}.$$

Заменимо индексе m и n у једначини (2.2.27). Тада се добија да је

$$\begin{aligned} & F^i_{j\underset{1}{|}nm} - F^i_{m\underset{1}{|}nj} + \xi^i_{\alpha j\underset{1}{|}m}F^\alpha_n - \xi^i_{\alpha m\underset{1}{|}j}F^\alpha_n + \xi^i_{\alpha n\underset{1}{|}m}F^\alpha_j - \xi^i_{\alpha n\underset{1}{|}j}F^\alpha_m \\ & = \mu_{j\underset{1}{|}m}F^i_n - \mu_{m\underset{1}{|}j}F^i_n + \mu_{n\underset{1}{|}m}F^i_j - \mu_{n\underset{1}{|}j}F^i_m \\ & - \mu_{\alpha\underset{1}{|}m}F^\alpha_j\delta^i_n + \mu_{\alpha\underset{1}{|}j}F^\alpha_j\delta^i_n - \mu_{\alpha\underset{1}{|}m}F^\alpha_n\delta^i_j + \mu_{\alpha\underset{1}{|}j}F^\alpha_n\delta^i_m + \overset{3}{\underset{1}{\theta}}{}^i_{jnm}, \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

Сабирањем једначина (2.2.26) и (2.2.28), уз нешто једноставног рачуна, добија се да важи једначина (2.2.29). □

Аналогним поступком се добија да важи наредна теорема:

Теорема 2.2.7. *Произвољна е-структура F^i_j која одређује скоро геодезијско пресликавање типа $\underset{2}{\pi}_2(e)$, $e = \pm 1$, задовољава наредне једначине*

$$\begin{aligned} & F^i_{j\underset{2}{|}(mn)} + \underset{2}{\xi}{}^i_{jmn} = \mu_{(m\underset{2}{|}n)}F^i_j + \mu_{[j\underset{2}{|}n]}F^i_m + \mu_{[j\underset{2}{|}m]}F^i_n \\ & \qquad - \mu_{\alpha\underset{2}{|}(m}F^\alpha_{n)}\delta^i_j + \mu_{\alpha\underset{2}{|}[j}F^\alpha_{n]}\delta^i_m + \mu_{\alpha\underset{2}{|}[j}F^\alpha_{m]}\delta^i_n + \overset{1}{\underset{2}{\theta}}{}^i_{jnm}, \end{aligned} \tag{2.2.29}$$

где су са $[i,j]$ *и* (i,j) *означене антисиметризација и симетризација без дељења и*

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{\overset{1}{\theta}}{}^i_{jnm} &= \underset{2}{\overset{2}{\theta}}{}^i_{jmn} + \underset{2}{\overset{2}{\theta}}{}^i_{jnm} - \underset{2}{\overset{2}{\theta}}{}^i_{mnj} \\
&\quad - \underset{2}{R}{}^i_{\alpha jm} F^\alpha_n + \underset{2}{R}{}^\alpha_{njm} F^i_\alpha - \underset{2}{R}{}^i_{\alpha jn} F^\alpha_m + \underset{2}{R}{}^\alpha_{mjn} F^i_\alpha - 2L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}} F^i_{n\underset{2}{|}\alpha} - 2L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}} F^i_{m\underset{2}{|}\alpha}, \\
\underset{2}{\overset{2}{\theta}}{}^i_{jmn} &= \mu_j F^i_{m\underset{2}{|}n} + \mu_m F^i_{j\underset{2}{|}n} - \mu_\alpha F^\alpha_{j\underset{2}{|}n}\delta^i_m - \mu_\alpha F^\alpha_{m\underset{2}{|}n}\delta^i_j + \xi^i_{\alpha j} F^\alpha_{m\underset{2}{|}n} + \xi^i_{\alpha m} F^\alpha_{j\underset{2}{|}n}, \\
\underset{2}{\xi}{}^i_{jmn} &= -\xi^i_{\alpha[j\underset{2}{|}n]} F^\alpha_m - \xi^i_{\alpha[j\underset{2}{|}m]} F^\alpha_n - \xi^i_{\alpha(m\underset{2}{|}n)]} F^\alpha_j,
\end{aligned}
$$

а $\underset{2}{R}{}^i_{jmn}$ *је тензор кривине задат једначином* (1.3.19).

Дефиниција 2.2.3. *Скоро геодезијско пресликавање* $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *типа* $\underset{s}{\pi}_2(e)$, $s \in \{1,2\}$, *за које је задовољен услов* $F^\alpha_\alpha = 0$ *јесте скоро геодезијско пресликавање типа* $\underset{s}{\pi}_2(e,F)$.

Контракцијом индекса у алгебарском услову (2.2.16) добија се да важи једнакост

$$F^\alpha_\beta F^\beta_\alpha = eN.$$

Двоструки коваријантни извод s-те врсте, $s \in \{1,2\}$, претходне једначине у правцу $x^m x^n$ резултира са

$$F^\alpha_\beta F^\beta_{\alpha\underset{s}{|}mn} + F^\alpha_{\beta\underset{s}{|}m} F^\beta_{\alpha\underset{s}{|}n} = 0. \tag{2.2.30}$$

Након композиције једначине (2.2.29) са F^j_i, а на основу резултата (2.2.30), добијамо

$$
\begin{aligned}
-2F^\alpha_{\beta\underset{s}{|}m} F^\beta_{\alpha\underset{s}{|}n} + F^\alpha_\beta \xi^\beta_{\alpha mn} &= \mu_{(m\underset{s}{|}n)} eN - F^\beta_\beta \mu_{\alpha\underset{s}{|}(m} F^\alpha_{n)} + \mu_{(\alpha\underset{s}{|}\beta)} F^\alpha_n F^\beta_m \\
&\quad - e\mu_{(m\underset{s}{|}n)} + F^\alpha_\beta \underset{s}{\overset{1}{\theta}}{}^\beta_{\alpha nm}.
\end{aligned} \tag{2.2.31}
$$

Како је $F^\alpha_\alpha = 0$, то се на основу једначине (2.2.31) добија да важи

$$e(N-1)\mu_{(m\underset{s}{|}n)} + \mu_{(\alpha\underset{s}{|}\beta)} F^\alpha_m F^\beta_n = \underset{s}{\overset{4}{\theta}}{}_{mn}, \tag{2.2.32}$$

где је $\underset{s}{\overset{4}{\theta}}_{mn} = F^\alpha_\beta \underset{s}{\overset{1}{\theta}}{}^\beta_{\alpha nm} + 2F^\alpha_{\beta\underset{s}{|}m} F^\beta_{\alpha\underset{s}{|}n} - F^\alpha_\beta \xi^\beta_{\alpha mn}$. Композицијом једначине (2.2.32) са $F^m_{m'}F^n_{n'}$ добијамо да је

$$e(N-1)\mu_{(\alpha\underset{s}{|}\beta)} F^\alpha_m F^\beta_n + \mu_{(m\underset{s}{|}n)} = \underset{s}{\overset{4}{\theta}}_{\alpha\beta} F^\alpha_m F^\beta_n. \tag{2.2.33}$$

На основу једначина (2.2.32, 2.2.33) следи да важи

$$\mu_{(j\underset{s}{|}m)} = \underset{s}{\overset{5}{\theta}}_{jm}, \tag{2.2.34}$$

где је $\underset{s}{\overset{5}{\theta}}_{jm} = \dfrac{1}{N(2-N)}\left[\underset{s}{\overset{4}{\theta}}_{\alpha\beta} F^\alpha_j F^\beta_m - e(N-1)\underset{s}{\overset{4}{\theta}}_{jm}\right]$. Коваријантним диференцирањем s-те врсте једначине (2.2.34) по x^n се добија да је

$$\mu_{j\underset{s}{|}mn} + \mu_{m\underset{s}{|}jn} = \underset{s}{\overset{5}{\theta}}_{jm\underset{s}{|}n}. \tag{2.2.35}$$

Антисиметризујмо ову једначину по j и n. Тада закључујемо да је задовољено

$$\mu_{j\underset{s}{|}mn} - \mu_{n\underset{s}{|}mj} - \underset{s}{R}{}^\alpha_{jmn}\mu_\alpha + (-1)^s \cdot 2L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\mu_{j\underset{s}{|}\alpha} = \underset{s}{\overset{5}{\theta}}_{jm\underset{s}{|}n} - \underset{s}{\overset{5}{\theta}}_{nm\underset{s}{|}j}.$$

Заменом индекса m и n се добија

$$\mu_{j\underset{s}{|}nm} - \mu_{m\underset{s}{|}nj} - \underset{s}{R}{}^\alpha_{jnm}\mu_\alpha + (-1)^s \cdot 2L^\alpha_{\underset{\vee}{nm}}\mu_{j\underset{s}{|}\alpha} = \underset{s}{\overset{5}{\theta}}_{jn\underset{s}{|}m} - \underset{s}{\overset{5}{\theta}}_{mn\underset{s}{|}j}.$$

Сабирањем тог резултата са једначином (2.2.35), изводимо закључак да важи

$$\mu_{j\underset{s}{|}(mn)} + \mu_{m\underset{s}{|}[jn]} = \underset{s}{R}{}^\alpha_{jnm}\mu_\alpha + (-1)^{s-1} \cdot 2L^\alpha_{\underset{\vee}{nm}}\mu_{j\underset{s}{|}\alpha} + \underset{s}{\overset{5}{\theta}}_{jn\underset{s}{|}m} - \underset{s}{\overset{5}{\theta}}_{mn\underset{s}{|}j} + \underset{s}{\overset{5}{\theta}}_{jm\underset{s}{|}n}. \tag{2.2.36}$$

Коначно, добили смо систем диференцијалних једначина Кошијевог типа са коваријантним изводима по непознатим функцијама μ_i, μ_{ij}, F^i_j и F^i_{jk}:

$$\begin{aligned}
&F^i_{j\underset{s}{|}m} = F^i_{jm},\\
&F^i_{j(m\underset{s}{|}n)} = \overset{6}{\underset{s}{\theta}}{}^i_{jmn},\\
&\mu_{j\underset{s}{|}m} = \mu_{jm},\\
&\mu_{j\underset{s}{|}(mn)} + \mu_{m\underset{s}{|}[jn]} = \overset{7}{\underset{s}{\theta}}{}_{jmn},
\end{aligned} \tag{2.2.37}$$

где је

$$\begin{aligned}
\overset{6}{\underset{s}{\theta}}{}^i_{jmn} =& -\underset{s}{\xi}{}^i_{jmn} + \mu_{(m\underset{s}{|}n)} F^i_j + \mu_{[j\underset{s}{|}n]} F^i_m + \mu_{[j\underset{s}{|}m]} F^i_n - \mu_{\alpha\underset{s}{|}(m} F^\alpha_{n)} \delta^i_j \\
&+ \mu_{\alpha\underset{s}{|}[j} F^\alpha_{n]} \delta^i_m + \mu_{\alpha\underset{s}{|}[j} F^\alpha_{m]} \delta^i_n + \overset{1}{\underset{s}{\theta}}{}^i_{jnm},\\
\overset{7}{\underset{s}{\theta}}{}_{jmn} =& \underset{s}{R}{}^\alpha_{jnm} \mu_\alpha + 2L^\alpha_{\underset{\vee}{nm}} \mu_{j\underset{s}{|}\alpha} + \overset{5}{\underset{s}{\theta}}{}_{jn\underset{s}{|}m} - \overset{5}{\underset{s}{\theta}}{}_{mn\underset{s}{|}j} + \overset{5}{\underset{s}{\theta}}{}_{jm\underset{s}{|}n}.
\end{aligned}$$

Са друге стране, функције μ_i, μ_{ij}, F^i_j и F^i_{jk} задовољавају алгебарске формуле

$$\begin{aligned}
&F^i_{(j\underset{s}{|}m)} + \xi^i_{\alpha(j} F^\alpha_{m)} = \mu_{(j} F^i_{m)} - \mu_\alpha F^\alpha_{(j} \delta^i_{m)},\\
&F^i_\alpha F^\alpha_j = e\delta^i_j, \qquad \mu_{(jm)} = \overset{5}{\underset{s}{\theta}}{}_{jm}.
\end{aligned} \tag{2.2.38}$$

Систем (2.2.37) има највише једно решење зависно до почетних услова (2.2.38). Лако је уочити да почетни услови имају највише $\frac{1}{2}N(N^2-1)$ независних параметара. На тај начин је доказано да важе наредне теореме:

Теорема 2.2.8. *Једначине*

$$\begin{aligned}
&F^i_{j\underset{1}{|}m} = F^i_{jm},\\
&F^i_{j(m\underset{1}{|}n)} = \overset{6}{\underset{1}{\theta}}{}^i_{jmn},\\
&\mu_{j\underset{1}{|}m} = \mu_{jm},\\
&\mu_{j\underset{1}{|}(mn)} + \mu_{m\underset{1}{|}[jn]} = \overset{7}{\underset{1}{\theta}}{}_{jmn},
\end{aligned} \tag{2.2.39}$$

заједно са почетним условима

$$\begin{aligned} &F^i_{(j\underset{1}{|}m)} + \xi^i_{\alpha(j}F^\alpha_{m)} = \mu_{(j}F^i_{m)} - \mu_\alpha F^\alpha_{(j}\delta^i_{m)}, \\ &F^i_\alpha F^\alpha_j = e\delta^i_j, \qquad \mu_{(ij)} = \underset{1}{\overset{5}{\theta}}_{ij}, \end{aligned} \tag{2.2.40}$$

чине систем алгебарских диференцијалних једначина Кошијевог типа по коваријантним изводима непознатих функција μ_i, μ_{ij}, F^i_j и F^i_{jk}. Тај систем одређује све е-структуре F^i_j које генеришу скоро геодезијска пресликавања типа $\underset{1}{\pi}_2(e,F), e = \pm 1$ простора $\mathbb{GA}_N$. □

Теорема 2.2.9. *Једначине*

$$\begin{aligned} &F^i_{j\underset{2}{|}m} = F^i_{jm}, \\ &F^i_{j(m\underset{2}{|}n)} = \underset{2}{\overset{6}{\theta}}{}^i_{jmn}, \\ &\mu_{j\underset{2}{|}m} = \mu_{jm}, \\ &\mu_{j\underset{2}{|}(mn)} + \mu_{m\underset{2}{|}[jn]} = \underset{2}{\overset{7}{\theta}}_{jmn}, \end{aligned} \tag{2.2.41}$$

заједно са почетним условима

$$\begin{aligned} &F^i_{(j\underset{2}{|}m)} + \xi^i_{\alpha(j}F^\alpha_{m)} = \mu_{(j}F^i_{m)} - \mu_\alpha F^\alpha_{(j}\delta^i_{m)}, \\ &F^i_\alpha F^\alpha_j = e\delta^i_j, \qquad \mu_{(ij)} = \underset{2}{\overset{5}{\theta}}_{ij} \end{aligned} \tag{2.2.42}$$

чине систем алгебарских диференцијалних једначина Кошијевог типа по коваријантним изводима непознатих функција μ_i, μ_{ij}, F^i_j и F^i_{jk}. Тај систем одређује све е-структуре F^i_j које генеришу скоро геодезијска пресликавања типа $\underset{2}{\pi}_2(e,F), e = \pm 1$. □

Теорема 2.2.10. *Фамилија свих е-структура F^i_j које генеришу скоро геодезијска пресликавања типа $\underset{s}{\pi}_2(e,F), e = \pm 1, s \in \{1,2\}$ простора $\mathbb{GA}_N$, зависи од највише $\dfrac{1}{2}N(N^2-1)$ реалних параметара.* □

2.2.2 Скоро геодезијска пресликавања типа $\underset{1}{\pi}_3$ и $\underset{2}{\pi}_3$

Скоро геодезијска пресликавања трећег типа уопштена су у раду [74]. У овом одељку ће бити приказани резултати добијени у радовима [84, 91, 98].

Нека је $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ скоро геодезијско пресликавање типа $\underset{1}{\pi}_3$. Тензор деформације $P^i_{jk} = \overline{L}^i_{jk} - L^i_{jk}$ задовољава једначину

$$P^i_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = \sigma_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta + 2\psi_\alpha\lambda^\alpha\lambda^i,$$

где је σ_{ij} коваријантни тензор другог реда симетричан по индексима i и j. Одатле следи да важи

$$(P^i_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta} - 2\psi_\alpha\lambda^i_\beta)\lambda^\alpha\lambda^\beta \equiv 0,$$

тj.

$$P^i_{\underline{jk}} = \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j + \sigma_{jk}\varphi^i, \tag{2.2.43}$$

где је $P^i_{\underline{jk}} = \overline{L}^i_{\underline{jk}} - L^i_{\underline{jk}}$ а ψ_i коваријантни вектор.

Због тога, тензор деформације $P^i_{jk} = \overline{L}^i_{jk} - L^i_{jk}$ задовољава једначину

$$P^i_{jk} = \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j + \sigma_{jk}\varphi^i + \xi^i_{jk}. \tag{2.2.44}$$

У овој једначини, ξ^i_{jk} је тензор антисиметричан по индексима j и k.

На основу једначина (2.2.2, 2.2.44) добијено је да важи [74]:

$$\varphi^i_{\underset{1}{|}j} + \xi^i_{\alpha j}\varphi^\alpha = \nu_j\varphi^i + \mu\delta^i_j, \tag{2.2.45}$$

где је μ инваријанта, ν_j коваријантни вектор и $\xi^i_{jk} = \overline{L}^i_{\underset{\vee}{jk}} - L^i_{\underset{\vee}{jk}}$.

Једначине (2.2.44) и (2.2.45) су *основне једначине* скоро геодезијског пресликавања $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ типа $\underset{1}{\pi}_3$.

Коришћењем претходног метода, добијено је да за скоро геодезијско пресликавање типа $\underset{2}{\pi}_2$ и μ, ν_j, ξ^i_{jk} као у једначини (2.2.45) важи [74]

$$\varphi^i_{\underset{2}{|}j} - \xi^i_{\alpha j}\varphi^\alpha = \nu_j\varphi^i + \mu\delta^i_j. \tag{2.2.46}$$

Једначине (2.2.44) и (2.2.46) су *основне једначине* скоро геодезијског пресликавања $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ типа $\underset{2}{\pi}_2$.

Примедба 2.2.2. *Уколико је, у једначини* (2.2.44), $\sigma_{jk}\varphi^i \equiv 0$ *скоро геодезијско пресликавање* f *се своди на геодезијско. Уколико је, у тој једначини,* $\psi_i \equiv 0$ *скоро геодезијско пресликавање* f *постајеканоничко. Уколико је, у основној једначини* (2.2.44), $\psi_i \equiv 0$ *и* $\sigma_{jk}\varphi^i \equiv 0$ *скоро геодезијско пресликавање* f *се своди на тривијално геодезијско пресликавање.*

Скоро геодезијско пресликавање $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ типа $\underset{s}{\pi}_3, s \in \{1, 2\}$, задовољава *особину реципроцитета* [74] уколико је њему инверзно пресликавање $f^{-1} : \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N \to \mathbb{GA}_N$ скоро геодезијско пресликавање истог типа $\underset{s}{\pi}_3$.

Нека скоро геодезијско пресликавање $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_{\mathbb{N}}$ задовољава особину реципроцитета. Тада, због $\overline{\xi}^i_{jk} = -\xi^i_{jk}$ а на основу услова (2.2.45), важи наредна једначина

$$\varphi^i_{\underset{1}{||}j} - \xi^i_{\alpha j}\varphi^\alpha = \tilde{\nu}_j\varphi^i + \tilde{\mu}\delta^i_j, \tag{2.2.47}$$

где је $\tilde{\nu}_j$ вектор а $\tilde{\mu}$ инваријанта.

На основу те једначине закључујемо да важи

$$\xi^i_{\alpha j}\varphi^\alpha = \theta_j\varphi^i + \overline{\rho}\delta^i_j, \tag{2.2.48}$$

где је

$$\theta_j = \nu_j - \tilde{\nu}_j + \sigma_{\alpha j}\varphi^\alpha + \psi_j, \quad \overline{\rho} = \mu - \tilde{\mu} + \psi_\alpha\varphi^\alpha.$$

Величина $\overline{\rho}$ у овој једначини је инваријанта док је θ_j вектор.

Претпоставимо да је једначина (2.2.48) задовољена идентично по φ^i. Тада можемо посматрати посебну класу скоро геодезијских пресликавања типа $\underset{1}{\widetilde{\pi}}_3$. Основне једначине пресликавања те класе су

$$\overline{L}^i_{jk} = L^i_{jk} + \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j + \sigma_{jk}\varphi^i + \theta_k\delta^i_j - \theta_j\delta^i_k, \tag{2.2.49}$$

$$\varphi^i_{\underset{1}{|}j} = \zeta_j\varphi^i + \rho\delta^i_j, \tag{2.2.50}$$

где су θ_j, ζ_j вектори а ρ инваријанта.

Основне једначине скоро геодезијског пресликавања $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ типа $\underset{2}{\widetilde{\pi}}_3$ су

$$\overline{L}^i_{jk} = L^i_{jk} + \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j + \sigma_{jk}\varphi^i + \theta_k\delta^i_j - \theta_j\delta^i_k, \tag{2.2.51}$$

$$\varphi^i_{\underset{2}{|}j} = \zeta_j\varphi^i + \rho\delta^i_j, \tag{2.2.52}$$

где су θ_j, ζ_j вектори а ρ инваријанта.

Пропозиција 2.2.1. *Коваријантни извод $\varphi^i_{|j}$ вектора φ^i у простору $\mathbb{GA}_N$ на основу афине конексије придруженог простора $\mathbb{A}_N$ у поређењу са коваријантним изводом $\varphi^i_{\underset{1}{|}j}$ и једначином (2.2.50) је*

$$\varphi^i_{|j} = \rho\delta^i_j + \zeta_j\varphi^i - \underset{\vee}{L^i_{\alpha j}}\varphi^\alpha. \tag{2.2.53}$$

Коваријантни извод $\varphi^i_{|j}$ вектора φ^i у простору $\mathbb{GA}_N$ на основу афине конексије придруженог простора $\mathbb{A}_N$ добијен у поређењу са коваријантним изводом $\varphi^i_{\underset{2}{|}j}$ и једначином (2.2.52) је

$$\varphi^i_{|j} = \rho\delta^i_j + \zeta_j\varphi^i + \underset{\vee}{L^i_{\alpha j}}\varphi^\alpha. \tag{2.2.54}$$

Величине ρ, ζ_j и φ^i у претходним једначинама су инваријанта, коваријантни и контраваријантни вектор респективно. □

Пропозиција 2.2.2. *Нека је $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ скоро геодезијско пресликавање типа $\underset{s}{\widetilde{\pi}}_3, s \in \{1, 2\}$. Тензори торзија $\underset{\vee}{L^i_{jk}}$ и $\underset{\vee}{\overline{L}^i_{jk}}$ афиних конексија простора $\mathbb{GA}_N$ и $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ задовољавају једначину*

$$\begin{aligned}\underset{\vee}{\overline{L}^i_{jm||n}} &= \underset{\vee}{L^i_{jm|n}} + \delta^i_n\underset{\vee}{L^\alpha_{jm}}\psi_\alpha - \delta^i_m\big(\theta_{j|n} - \theta_n\psi_j - \theta_j\psi_n - \theta_\alpha\sigma_{jn}\varphi^\alpha\big)\\ &+ \delta^i_j\big(\theta_{m|n} - \theta_m\psi_n - \theta_n\psi_m + \sigma_{mn}\theta_\alpha\varphi^\alpha\big)\\ &+ \big(\underset{\vee}{L^\alpha_{jm}}\sigma_{\alpha n} + \theta_m\sigma_{jn} - \theta_j\sigma_{mn} - \theta_m\sigma_{jn} + \theta_j\sigma_{mn}\big)\varphi^i\\ &+ \underset{\vee}{L^i_{mn}}\psi_j - \underset{\vee}{L^i_{jm}}\psi_n - \underset{\vee}{L^i_{jn}}\psi_m + \big(\underset{\vee}{L^i_{\alpha j}}\sigma_{mn} - \underset{\vee}{L^i_{\alpha m}}\sigma_{jn}\big)\varphi^\alpha.\end{aligned} \tag{2.2.55}$$

Доказ. На основу једначине (2.2.44) имамо да је

$$\overline{L}^i_{\underset{\vee}{jk}} = L^i_{\underset{\vee}{jk}} + \theta_k \delta^i_j - \theta_j \delta^i_k. \tag{2.2.56}$$

Коваријантним диференцирањем ове једначине по x^n у смислу афине конексије придруженог простора $\mathbb{A}_N$ добијамо да важи

$$\overline{L}^i_{\underset{\vee}{jm}|n} - L^i_{\underset{\vee}{jm}|n} = \theta_{m|n}\delta^i_j - \theta_{j|n}\delta^i_m. \tag{2.2.57}$$

Још је и

$$\overline{L}^i_{\underset{\vee}{jm}||n} - \overline{L}^i_{\underset{\vee}{jm}|n} = P^i_{\underline{\alpha n}}\overline{L}^\alpha_{\underset{\vee}{jm}} - P^\alpha_{\underline{jn}}\overline{L}^i_{\underset{\vee}{\alpha m}} - P^\alpha_{\underline{mn}}\overline{L}^i_{\underset{\vee}{j\alpha}}.$$

Из ове једначине, а на основу (2.2.43, 2.2.56), следи да важи

$$\begin{aligned}\overline{L}^i_{\underset{\vee}{jm}||n} - \overline{L}^i_{\underset{\vee}{jm}|n} &= \delta^i_n L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\psi_\alpha + \delta^i_m\big(\theta_n\psi_j + \theta_j\psi_n + \theta_\alpha\sigma_{jn}\varphi^\alpha\big)\\ &- \delta^i_j\big(\theta_m\psi_n + \theta_n\psi_m + \sigma_{mn}\theta_\alpha\varphi^\alpha\big)\\ &+ \big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n} + \theta_m\sigma_{jn} - \theta_j\sigma_{mn} - \theta_m\sigma_{jn} + \theta_j\sigma_{mn}\big)\varphi^i\\ &+ L^i_{\underset{\vee}{mn}}\psi_j - L^i_{\underset{\vee}{jm}}\psi_n - L^i_{\underset{\vee}{jn}}\psi_m + \big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha j}}\sigma_{mn} - L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn}\big)\varphi^\alpha.\end{aligned} \tag{2.2.58}$$

Сабирањем једначина (2.2.57) и (2.2.58) добијамо да је ова пропозиција задовољена. □

Пропозиција 2.2.3. *Нека је* $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *скоро геодезијско пресликавање типа* $\underset{s}{\widetilde{\pi}}_3, s \in \{1, 2\}$. *Тензори торзије* $L^i_{\underset{\vee}{jk}}$ *и* $\overline{L}^i_{\underset{\vee}{jk}}$ *афиних конексија простора* $\mathbb{GA}_N$ *и* $\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *задовољавају једначину*

$$\begin{aligned}\overline{L}^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\overline{L}^i_{\underset{\vee}{\alpha n}} &= L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}} + \theta_m\theta_n\delta^i_j - \theta_j\theta_n\delta^i_m - L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\theta_\alpha\delta^i_n\\ &+ L^i_{\underset{\vee}{jm}}\theta_n + L^i_{\underset{\vee}{jn}}\theta_m - L^i_{\underset{\vee}{mn}}\theta_j.\end{aligned} \tag{2.2.59}$$

Доказ. На основу једначине (2.2.56) следи да важи

$$
\begin{aligned}
\overline{L}^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}\overline{L}^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}} =& L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}} + L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}\theta_n\delta^i_\alpha - L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}\theta_\alpha\delta^i_n + L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}}\theta_m\delta^\alpha_j + \theta_m\theta_n\delta^i_j - \theta_m\theta_\alpha\delta^\alpha_j\delta^i_n\\
&- L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}}\theta_j\delta^\alpha_m - \theta_j\theta_n\delta^i_m + \theta_j\theta_\alpha\delta^\alpha_m\delta^i_n\\
=& L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}} + L^{i}_{\underset{\vee}{jm}}\theta_n - L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}\theta_\alpha\delta^i_n + L^{i}_{\underset{\vee}{jn}}\theta_m - L^{i}_{\underset{\vee}{mn}}\theta_j\\
&+ \theta_m\theta_n\delta^i_j - \theta_m\theta_j\delta^i_n - \theta_j\theta_n\delta^i_m + \theta_j\theta_m\delta^i_n,
\end{aligned}
$$

што доказује ову пропозицију. □

Лема 2.2.1. *Уколико је $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ еквиторзионо скоро геодезијско пресликавање типа $\underset{s}{\widetilde{\pi}}_3, s \in \{1,2\}$, онда је $\theta_j = 0$.*

Доказ. Контракцијом једначине (2.2.56) по индексима i и j имамо да је

$$
\theta_k = \frac{1}{N-1}\big(\overline{L}^{\alpha}_{\underset{\vee}{\alpha k}} - L^{\alpha}_{\underset{\vee}{\alpha k}}\big).
$$

Одавде јасно следи да је, због еквиторзионости пресликавања, $\theta_k = 0$.□

Лема 2.2.2. *Нека је $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ скоро геодезијско пресликавање типа $\underset{1}{\widetilde{\pi}}_3$. Тензори кривине R^i_{jmn} придруженог простора $\mathbb{A}_N$ и $\overline{R}^i_{jmn}$ придруженог простора $\overline{\mathbb{A}}_N$ задовољавају једначину*

$$
\begin{aligned}
\overline{R}^i_{jmn} = & R^i_{jmn} - \big(\psi_{j|m} - \psi_j\psi_m - \sigma_{jm}(\rho + \varphi^\alpha\psi_\alpha)\big)\delta^i_n\\
&+ \big(\psi_{j|n} - \psi_j\psi_n - \sigma_{jn}(\rho + \varphi^\alpha\psi_\alpha)\big)\delta^i_m\\
&+ \big(\psi_{m|n} - \psi_{n|m}\big)\delta^i_j - (L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm} - L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn})\varphi^\alpha\\
&+ \big(\sigma_{jm|n} - \sigma_{jn|m} + \zeta_n\sigma_{jm} - \zeta_m\sigma_{jn} + \sigma_{jm}\sigma_{n\alpha}\varphi^\alpha - \sigma_{jn}\sigma_{m\alpha}\varphi^\alpha\big)\varphi^i,
\end{aligned}
\tag{2.2.60}
$$

за инваријанту ρ, коваријантни вектор ψ_j, контраваријантни вектор φ^i и тензор σ_{ij} симетричан по индексима i и j.

Доказ. На основу једначине (2.2.44) следи да је

$$
\overline{L}^i_{\underline{jm},n} = L^i_{\underline{jm},n} + \psi_{j,n}\delta^i_m + \psi_{m,n}\delta^i_j + \sigma_{jm,n}\varphi^i + \sigma_{jm}\varphi^i_{,n}.
$$

Тиме је доказано да важи

$$\begin{aligned}\overline{L}^i_{\underline{jm},n} - \overline{L}^i_{\underline{jn},m} &= L^i_{\underline{jm},n} - L^i_{\underline{jn},m} + \psi_{j,n}\delta^i_m - \psi_{j,m}\delta^i_n + (\psi_{m,n} - \psi_{n,m})\delta^i_j \\ &\quad + (\sigma_{jm,n} - \sigma_{jn,m})\varphi^i + \sigma_{jm}\varphi^i_{,n} - \sigma_{jn}\varphi^i_{,m}.\end{aligned} \tag{2.2.61}$$

Још је и

$$\begin{aligned}\overline{L}^\alpha_{\underline{jm}}\overline{L}^i_{\underline{\alpha n}} - \overline{L}^\alpha_{\underline{jn}}\overline{L}^i_{\underline{\alpha m}} &= L^\alpha_{\underline{jm}}L^i_{\underline{\alpha n}} - L^\alpha_{\underline{jn}}L^i_{\underline{\alpha m}} + L^\alpha_{\underline{jm}}(\psi_\alpha\delta^i_n + \sigma_{jn}\varphi^i) \\ &\quad - L^\alpha_{\underline{jn}}(\psi_\alpha\delta^i_m + \sigma_{\alpha m}\varphi^i) + L^i_{\underline{\alpha n}}\sigma_{jm}\varphi^\alpha - L^i_{\underline{\alpha m}}\sigma_{jn}\varphi^\alpha \\ &\quad + \psi_j\psi_m\delta^i_n - \psi_j\psi_n\delta^i_m + \psi_\alpha\sigma_{jm}\varphi^\alpha\delta^i_n - \psi_\alpha\sigma_{jn}\varphi^\alpha\delta^i_m \\ &\quad + \sigma_{jm}\sigma_{\alpha n}\varphi^\alpha\varphi^i - \sigma_{jn}\sigma_{\alpha m}\varphi^\alpha\varphi^i.\end{aligned} \tag{2.2.62}$$

Збир једначина (2.2.61, 2.2.62), заједно са основном једначином (2.2.45), доказује ову лему. □

Лема 2.2.3. *Нека је $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ скоро геодезијско пресликавање типа $\underset{2}{\widetilde{\pi}}_3$. Тензори кривине R^i_{jmn} придруженог простора $\mathbb{A}_N$ и $\overline{R}^i_{jmn}$ придруженог простора $\overline{\mathbb{A}}_N$ задовољавају једначину*

$$\begin{aligned}\overline{R}^i_{jmn} &= R^i_{jmn} - \big(\psi_{j|m} - \psi_j\psi_m - \sigma_{jm}(\rho + \varphi^\alpha\psi_\alpha)\big)\delta^i_n \\ &\quad + \big(\psi_{j|n} - \psi_j\psi_n - \sigma_{jn}(\rho + \varphi^\alpha\psi_\alpha)\big)\delta^i_m \\ &\quad + \big(\psi_{m|n} - \psi_{n|m}\big)\delta^i_j + (L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm} - L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn})\varphi^\alpha \\ &\quad + \big(\sigma_{jm|n} - \sigma_{jn|m} + \zeta_n\sigma_{jm} - \zeta_m\sigma_{jn} + \sigma_{jm}\sigma_{n\alpha}\varphi^\alpha - \sigma_{jn}\sigma_{m\alpha}\varphi^\alpha\big)\varphi^i,\end{aligned} \tag{2.2.63}$$

за инваријанту ρ, коваријантни вектор ψ_j, контраваријантни вектор φ^i и тензор σ_{ij} симетричан по индексима i и j. □

Уколико је

$$\begin{aligned}\psi_{ij} &= \psi_{i;j} - \psi_i\psi_j - \sigma_{ij}(\rho + \varphi^\alpha\psi_\alpha) \\ \sigma_{ijk} &= \sigma_{ij;k} - \sigma_{ik;j} + \sigma_{ij}\eta_k - \sigma_{ik}\eta_j + \sigma_{ij}\sigma_{k\alpha}\varphi^\alpha - \sigma_{ik}\sigma_{j\alpha}\varphi^\alpha,\end{aligned} \tag{2.2.64}$$

једначине (2.2.60, 2.2.63) постају

$$\begin{aligned}\overline{R}{}^i_{jmn} &= R^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j + \sigma_{jmn}\varphi^i \\ &\quad - \sigma_{jm}L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\varphi^\alpha + \sigma_{jn}L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\varphi^\alpha,\end{aligned} \tag{2.2.65}$$

$$\begin{aligned}\overline{R}{}^i_{jmn} &= R^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j + \sigma_{jmn}\varphi^i \\ &\quad + \sigma_{jm}L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\varphi^\alpha - \sigma_{jn}L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\varphi^\alpha.\end{aligned} \tag{2.2.66}$$

Теорема 2.2.11. *Нека је* $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *скоро геодезијско пресликавање типа* $\underset{1}{\widetilde{\pi}}_3$. *Фамилија* (1.3.54) *тензора кривине простора* $\mathbb{GA}_N$ *се трансформише по закону*

$$\begin{aligned}\overline{K}{}^i_{jmn} &= K^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j + \big(\sigma_{jmn} + uL^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n} + u'L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i \\ &\quad - \big((u-1)L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn} + (u'+1)L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm} - (u+u')L^i_{\underset{\vee}{\alpha j}}\sigma_{mn}\big)\varphi^\alpha \\ &\quad + \big(u(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_n + \psi_n\theta_j + \sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha) + L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(u'\psi_\alpha - v'\theta_\alpha) - (v-w)\theta_j\theta_n\big)\delta^i_m \\ &\quad + \big(u'(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_m + \psi_m\theta_j + \sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha) + L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(u\psi_\alpha - v\theta_\alpha) - (v'+w)\theta_j\theta_m\big)\delta^i_n \\ &\quad - \big((u+u')(L^\alpha_{\underline{mn}}\theta_\alpha + \psi_m\theta_n + \psi_n\theta_m + \sigma_{mn}\theta_\alpha\varphi^\alpha) - (v+v')\theta_m\theta_n + wL^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\theta_\alpha\big)\delta^i_j \\ &\quad + L^i_{\underset{\vee}{mn}}\big((u-u')\psi_j - (v-v'-w)\theta_j\big) - L^i_{\underset{\vee}{jm}}\big((u+u')\psi_n - (v+v'-w)\theta_n\big) \\ &\quad - L^i_{\underset{\vee}{jn}}\big((u+u')\psi_m - (v+v'+w)\theta_m\big),\end{aligned} \tag{2.2.67}$$

за величине ψ_{ij} *и* σ_{jmn} *задате једначином* (2.2.64)

Доказ. Ова формула следи директно на основу једначине (1.3.54), којом је задата фамилија тензора кривине простора $\mathbb{GR}_N$, и закона трансформације (2.2.55, 2.2.59, 2.2.65). □

Последица 2.2.1 *Нека је* $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *еквиторзионо скоро геодезијско пресликавање типа* $\underset{1}{\widetilde{\pi}}_3$. *Фамилија* (1.3.54) *тензора кривине простора* $\mathbb{GA}_N$ *се трансформише по закону*

$$\begin{aligned}\overline{K}{}^i_{jmn} &= K^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j + \big(\sigma_{jmn} + uL^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n} + u'L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i \\ &\quad - \big((u-1)L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn} + (u'+1)L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm} - (u+u')L^i_{\underset{\vee}{\alpha j}}\sigma_{mn}\big)\varphi^\alpha \\ &\quad + u'L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\psi_\alpha\delta^i_m + uL^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\psi_\alpha\delta^i_n + (u-u')L^i_{\underset{\vee}{mn}}\psi_j - (u+u')L^i_{\underset{\vee}{jm}}\psi_n - (u+u')L^i_{\underset{\vee}{jn}}\psi_m,\end{aligned} \tag{2.2.68}$$

за величине ψ_{ij} *и* σ_{jmn} *задате једначином* (2.2.64). □

Последица 2.2.2 *Нека је* $f:\mathbb{GA}_N\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *скоро геодезијско пресликавање типа* $\underset{1}{\widetilde{\pi}}_3$. *Тензори кривине* $\underset{1}{R}{}^i_{jmn},\dots,\underset{4}{R}{}^i_{jmn}$ *дати једначинама* (1.3.18–1.3.21) *и изведени тензори кривине* $\underset{1}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn},\dots,\underset{8}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn}$ *дати једначинама* (1.3.45–1.3.52) *се трансформишу по наредним законима:*

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i_{jmn}+\psi_{jn}\delta^i_m-\psi_{jm}\delta^i_n+\psi_{[mn]}\delta^i_j+\big(\sigma_{jmn}+L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n}-L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i\\
&+\big(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha+\psi_j\theta_n+\psi_n\theta_j+\sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha-L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(\psi_\alpha+\theta_\alpha)-\theta_j\theta_n\big)\delta^i_m\\
&-\big(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha+\psi_j\theta_m+\psi_m\theta_j+\sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha-L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_\alpha-\theta_\alpha)-\theta_j\theta_m\big)\delta^i_n\\
&+2L^i_{\underset{\vee}{mn}}\big(\psi_j-\theta_j\big),
\end{aligned}\tag{2.2.69}$$

$$\begin{aligned}
\underset{2}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{2}{R}{}^i_{jmn}+\psi_{jn}\delta^i_m-\psi_{jm}\delta^i_n+\psi_{[mn]}\delta^i_j+\big(\sigma_{jmn}-L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n}+L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i\\
&+2\big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn}-L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm}\big)\varphi^\alpha-2L^i_{\underset{\vee}{mn}}\big(\psi_j+\theta_j\big)\\
&-\big(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha+\psi_j\theta_n+\psi_n\theta_j+\sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha-L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(\psi_\alpha+\theta_\alpha)+\theta_j\theta_n\big)\delta^i_m\\
&+\big(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha+\psi_j\theta_m+\psi_m\theta_j+\sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha-L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_\alpha+\theta_\alpha)+\theta_j\theta_m\big)\delta^i_n,
\end{aligned}\tag{2.2.70}$$

$$\begin{aligned}
\underset{3}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{3}{R}{}^i_{jmn}+\psi_{jn}\delta^i_m-\psi_{jm}\delta^i_n+\psi_{[mn]}\delta^i_j+\big(\sigma_{jmn}+L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n}+L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i\\
&-2\big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm}-L^i_{\underset{\vee}{\alpha j}}\sigma_{mn}\big)\varphi^\alpha-2L^i_{\underset{\vee}{jm}}\big(\psi_n-\theta_n\big)-2L^i_{\underset{\vee}{jn}}\big(\psi_m+\theta_m\big)\\
&+\big(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha+\psi_j\theta_n+\psi_n\theta_j+\sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha+L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(\psi_\alpha-\theta_\alpha)-\theta_j\theta_n\big)\delta^i_m\\
&+\big(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha+\psi_j\theta_m+\psi_m\theta_j+\sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha+L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_\alpha+\theta_\alpha)+\theta_j\theta_m\big)\delta^i_n\\
&-2\big(L^\alpha_{\underline{mn}}\theta_\alpha+\psi_m\theta_n+\psi_n\theta_m+\sigma_{mn}\theta_\alpha\varphi^\alpha-L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\theta_\alpha\big)\delta^i_j,
\end{aligned}\tag{2.2.71}$$

$$\begin{aligned}
\underset{4}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{4}{R}{}^i_{jmn}+\psi_{jn}\delta^i_m-\psi_{jm}\delta^i_n+\psi_{[mn]}\delta^i_j+\big(\sigma_{jmn}+L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n}+L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i\\
&-2\big((L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm}-L^i_{\underset{\vee}{\alpha j}}\sigma_{mn})\varphi^\alpha+L^i_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_n+\theta_n)+L^i_{\underset{\vee}{jn}}\big(\psi_m-\theta_m\big)\big)\\
&+4L^i_{\underset{\vee}{mn}}\theta_j+\big(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha+\psi_j\theta_n+\psi_n\theta_j+\sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha+L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(\psi_\alpha-\theta_\alpha)+\theta_j\theta_n\big)\delta^i_m\\
&+\big(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha+\psi_j\theta_m+\psi_m\theta_j+\sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha+L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_\alpha+\theta_\alpha)-3\theta_j\theta_m\big)\delta^i_n\\
&-2\big(L^\alpha_{\underline{mn}}\theta_\alpha+\psi_m\theta_n+\psi_n\theta_m+\sigma_{mn}\theta_\alpha\varphi^\alpha+L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\theta_\alpha\big)\delta^i_j,
\end{aligned}\tag{2.2.72}$$

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\widetilde{\widetilde{R}}}{}^{i}_{jmn} &= \underset{1}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn}+\psi_{jn}\delta^i_m-\psi_{jm}\delta^i_n+\psi_{[mn]}\delta^i_j+\sigma_{jmn}\varphi^i-\big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm}-L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn}\big)\varphi^\alpha \\
&- \big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\theta_\alpha-\theta_j\theta_n\big)\delta^i_m+\big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\theta_\alpha-\theta_j\theta_m\big)\delta^i_n+2L^i_{\underset{\vee}{mn}}\theta_j,
\end{aligned} \tag{2.2.73}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{\widetilde{\widetilde{R}}}{}^{i}_{jmn} &= \underset{2}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn}+\psi_{jn}\delta^i_m-\psi_{jm}\delta^i_n+\psi_{[mn]}\delta^i_j+\sigma_{jmn}\varphi^i-\big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm}-L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn}\big)\varphi^\alpha \\
&- \big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\theta_\alpha+\theta_j\theta_n\big)\delta^i_m-\big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\theta_\alpha+\theta_j\theta_m\big)\delta^i_n+2\theta_m\theta_n\delta^i_j \\
&+ 2(L^i_{\underset{\vee}{jm}}\theta_n+L^i_{\underset{\vee}{jn}}\theta_m),
\end{aligned} \tag{2.2.74}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{3}{\widetilde{\widetilde{R}}}{}^{i}_{jmn} &= \underset{3}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn}+\psi_{jn}\delta^i_m-\psi_{jm}\delta^i_n+\psi_{[mn]}\delta^i_j+\sigma_{jmn}\varphi^i-\big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm}-L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn}\big)\varphi^\alpha \\
&+ \big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\theta_\alpha+\theta_j\theta_n\big)\delta^i_m+\big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\theta_\alpha+\theta_j\theta_m\big)\delta^i_n-2\theta_m\theta_n\delta^i_j \\
&+ 2(L^i_{\underset{\vee}{jm}}\theta_n+L^i_{\underset{\vee}{jn}}\theta_m),
\end{aligned} \tag{2.2.75}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{4}{\widetilde{\widetilde{R}}}{}^{i}_{jmn} &= \underset{4}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn}+\psi_{jn}\delta^i_m-\psi_{jm}\delta^i_n+\psi_{[mn]}\delta^i_j \\
&+ \Big(\sigma_{jmn}-\frac{1}{3}(L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n}-L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m})\Big)\varphi^i+\frac{4}{3}\big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn}-L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm}\big)\varphi^\alpha \\
&+ \frac{2}{3}\big(L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\theta_\alpha\delta^i_j-L^i_{\underset{\vee}{mn}}\psi_j+L^i_{\underset{\vee}{jm}}\theta_n-L^i_{\underset{\vee}{jn}}\theta_m\big) \\
&- \frac{1}{3}\big(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha+\psi_j\theta_n+\psi_n\theta_j+\sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha-L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(\psi_\alpha-\theta_\alpha)+\theta_j\theta_n\big)\delta^i_m \\
&+ \frac{1}{3}\big(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha+\psi_j\theta_m+\psi_m\theta_j+\sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha-L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_\alpha-\theta_\alpha)+\theta_j\theta_m\big)\delta^i_n,
\end{aligned} \tag{2.2.76}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{5}{\widetilde{\widetilde{R}}}{}^{i}_{jmn} &= \underset{5}{\widetilde{R}}{}^{i}_{jmn}+\psi_{jn}\delta^i_m-\psi_{jm}\delta^i_n+\psi_{[mn]}\delta^i_j+\big(\sigma_{jmn}-L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n}+L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i \\
&- \big(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha+\psi_j\theta_n+\psi_n\theta_j+\sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha-L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(\psi_\alpha+\theta_\alpha)-3\theta_j\theta_n\big)\delta^i_m \\
&+ \big(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha+\psi_j\theta_m+\psi_m\theta_j+\sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha-L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_\alpha-3\theta_\alpha)+\theta_j\theta_m\big)\delta^i_n \\
&- 4\theta_m\theta_n\delta^i_j-2L^i_{\underset{\vee}{mn}}\big(\psi_j-\theta_j\big)-4(L^i_{\underset{\vee}{jm}}\theta_n+L^i_{\underset{\vee}{jn}}\theta_m) \\
&- 2\big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm}-L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn}\big)\varphi^\alpha,
\end{aligned} \tag{2.2.77}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{6}{\widetilde{\widetilde{R}}}{}^i_{jmn} = {} & \underset{6}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j + \big(\sigma_{jmn} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i \\
& - \big(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_n + \psi_n\theta_j + \sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(\psi_\alpha - 3\theta_\alpha) + \theta_j\theta_n\big)\delta^i_m \\
& + \big(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_m + \psi_m\theta_j + \sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_\alpha + \theta_\alpha) - 3\theta_j\theta_m\big)\delta^i_n \\
& + 4\big(\theta_m\theta_n\delta^i_j + L^i_{\underset{\vee}{jm}}\theta_n + L^i_{\underset{\vee}{jn}}\theta_m\big) - 2L^i_{\underset{\vee}{mn}}\big(\psi_j - \theta_j\big) \\
& - 2\big(\sigma_{jm}L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}} - \sigma_{jn}L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\big)\varphi^\alpha,
\end{aligned} \tag{2.2.78}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{7}{\widetilde{\widetilde{R}}}{}^i_{jmn} = {} & \underset{7}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j + \big(\sigma_{jmn} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i \\
& + \big(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_n + \psi_n\theta_j + \sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(\psi_\alpha + 3\theta_\alpha) - \theta_j\theta_n\big)\delta^i_m \\
& - \big(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_m + \psi_m\theta_j + \sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_\alpha - \theta_\alpha) + 3\theta_j\theta_m\big)\delta^i_n \\
& + 4\big(\theta_m\theta_n\delta^i_j + L^i_{\underset{\vee}{jm}}\theta_n + L^i_{\underset{\vee}{jn}}\theta_m\big) + 2L^i_{\underset{\vee}{mn}}\big(\psi_j + \theta_j\big),
\end{aligned} \tag{2.2.79}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{8}{\widetilde{\widetilde{R}}}{}^i_{jmn} = {} & \underset{8}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j + \big(\sigma_{jmn} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i \\
& + \big(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_n + \psi_n\theta_j + \sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(\psi_\alpha - \theta_\alpha) + 3\theta_j\theta_n\big)\delta^i_m \\
& - \big(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_m + \psi_m\theta_j + \sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_\alpha + 3\theta_\alpha) - \theta_j\theta_m\big)\delta^i_n \\
& - 4\big(\theta_m\theta_n\delta^i_j + L^i_{\underset{\vee}{jm}}\theta_n + L^i_{\underset{\vee}{jn}}\theta_m\big) + 2L^i_{\underset{\vee}{mn}}\big(\psi_j + \theta_j\big),
\end{aligned} \tag{2.2.80}
$$

где су геометријски објекти ψ_{ij} *и* σ_{ijk} *задати једначином* (2.2.64). □

Уведимо коваријантни вектор вектор q_i такав да он и контраваријантни вектор φ^i из једначине (2.2.44) задовољавају једначину

$$\varphi^\alpha q_\alpha = e \quad (e = \pm 1). \tag{2.2.81}$$

Нека је $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ еквиторзионо скоро геодезијско пресликавање типа $\underset{1}{\widetilde{\pi}}_3$. У том случају основна једначина (2.2.44) постаје

$$\overline{L}^i_{jk} = L^i_{jk} + \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j + \sigma_{jk}\varphi^i. \tag{2.2.82}$$

Пратећи резултате добијене у раду [98], ми ћемо одредити инваријанте еквиторзионих скоро геодезијских пресликавања типа $\underset{2}{\widetilde{\pi}}_3$ на основу промена тензора кривине K^i_{jmn} код којих је $u = u' = 0$. У том случају, једначина (2.2.68) постаје

$$\begin{aligned}\overline{K}^i_{jmn} &= K^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j + \sigma_{jmn}\varphi^i \\ &+ L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn}\varphi^\alpha - L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm}\varphi^\alpha\end{aligned} \tag{2.2.83}$$

Важи наредна теорема.

Теорема 2.2.12. [76] *Тензор σ_{jk} из једначине (2.2.82) задовољава једначину*

$$\sigma_{jk} = \overline{s}_{jk} - s_{jk}, \tag{2.2.84}$$

где је

$$\begin{aligned}s_{jk} = -q_{j\underset{1}{|}k} &- \frac{1}{N}\big(L^\alpha_{\alpha j} + e\varphi^\alpha q_{\alpha\underset{1}{|}j}\big)q_k\big) - \frac{1}{N}\big(L^\alpha_{\alpha k} + e\varphi^\alpha q_{\alpha\underset{1}{|}k}\big)q_j\big) \\ &- \frac{2e}{N^2-N}\big(\varphi^\beta L^\alpha_{\alpha\beta} + e\varphi^\alpha\varphi^\beta q_{\alpha\underset{1}{|}\beta}\big)q_j q_k.\end{aligned} \tag{2.2.85}$$

и одговарајуће $\overline{s}_{jk}$.

Доказ. Композицијом једначине (2.2.82) са q_i добијамо да важи

$$\overline{L}^\alpha_{jk}q_\alpha = L^\alpha_{jk}q_\alpha + \psi_j q_k + \psi_k q_j + e\sigma_{jk}.$$

Одатле следи да је

$$q_{j\underset{1}{||}k} = q_{j\underset{1}{|}k} - \psi_j q_k - \psi_k q_j - e\sigma_{jk}. \tag{2.2.86}$$

Компоновањем ове једначине са φ^j добијамо да је задовољено

$$\varphi^\alpha\big(q_{\alpha\underset{1}{||}k} - q_{\alpha\underset{1}{|}k}\big) = -\psi_\alpha\varphi^\alpha q_k - e\psi_k - e\sigma_{\alpha k}\varphi^\alpha. \tag{2.2.87}$$

Контракцијом једначине (2.2.82) по i и j закључујемо да важи

$$\overline{L}^\alpha_{\alpha k} = L^\alpha_{\alpha k} + (N+1)\psi_k + \sigma_{\alpha k}\varphi^\alpha. \tag{2.2.88}$$

На основу једначина (2.2.87, 2.2.88) следи да је

$$N\psi_k = \overline{L}^\alpha_{\alpha k} - L^\alpha_{\alpha k} + e\psi_\alpha\varphi^\alpha q_k + e\varphi^\alpha\big(q_{\alpha\underset{1}{||}k} - q_{\alpha\underset{1}{|}k}\big). \tag{2.2.89}$$

Одатле следи да је

$$(N-1)\psi_\alpha\varphi^\alpha = \varphi^\beta\big(\overline{L}^\alpha_{\alpha\beta} - L^\alpha_{\alpha\beta}\big) + e\varphi^\alpha\varphi^\beta\big(q_{\alpha\underset{1}{\|}\beta} - q_{\alpha\underset{1}{|}\beta}\big). \tag{2.2.90}$$

На основу једначина (2.2.89, 2.2.90) добијамо да је

$$\begin{aligned}\psi_j &= \frac{1}{N}\big(\overline{L}^\alpha_{\alpha k} - L^\alpha_{\alpha k}\big) + \frac{e}{N}\varphi^\alpha\big(q_{\alpha\underset{1}{\|}k} - q_{\alpha\underset{1}{|}k}\big)\\ &+ \frac{e}{N^2-N}\Big(\varphi^\beta\big(\overline{L}^\alpha_{\alpha\beta} - L^\alpha_{\alpha\beta}\big) + e\varphi^\alpha\varphi^\beta\big(q_{\alpha\underset{1}{\|}\beta} - q_{\alpha\underset{1}{|}\beta}\big)\Big)q_k.\end{aligned} \tag{2.2.91}$$

На основу једначине (2.2.86) имамо да је

$$\sigma_{jk} = -q_{j\underset{1}{\|}k} + q_{j\underset{1}{|}k} - \psi_j q_k - \psi_k q_j,$$

што заједно са једначином (2.2.91) доказује ову теорему. □

Нека је

$$G^i_{jmn} = G^i_{(1)jmn} = \overline{K}^i_{jmn} - K^i_{jmn}.$$

Композицијом једначине (2.2.83) са q_i добијамо да важи

$$\sigma_{jmn} = eG^\alpha_{jmn}q_\alpha - e\psi_{jn}q_m + e\psi_{jm}q_n - e\psi_{[mn]}q_j - eL_m\sigma_{jn} + eL_n\sigma_{jm}, \tag{2.2.92}$$

где је $L_m = L^\beta_{\underset{\vee}{\alpha m}}q_\beta\varphi^\alpha$. На основу једначина (2.2.83, 2.2.92) следи да је задовољено

$$\begin{aligned}G^i_{jmn} &= eG^\alpha_{jmn}q_\alpha\varphi^i + \psi_{jn}\big(\delta^i_m - eq_m\varphi^i\big) - \psi_{jm}\big(\delta^i_n - eq_n\varphi^i\big) + \psi_{[mn]}\big(\delta^i_j - eq_j\varphi^i\big)\\ &- \sigma_{jn}\big(eL_m\varphi^i - L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\varphi^\alpha\big) + \sigma_{jm}\big(eL_n\varphi^i - L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\varphi^\alpha\big).\end{aligned} \tag{2.2.93}$$

Контракцијом ове једначине по i и j добијамо да важи

$$\begin{aligned}G^\alpha_{\alpha mn} &= eG^\beta_{\alpha mn}q_\beta\varphi^\alpha + \psi_{[mn]} - eq_m\psi_{\alpha n}\varphi^\alpha + eq_n\psi_{\alpha m}\varphi^\alpha + (N-1)\psi_{[mn]}\\ &- \sigma_{\alpha n}\big(eL_m\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{\beta m}}\varphi^\beta\big) + \sigma_{\alpha m}\big(eL_n\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{\beta n}}\varphi^\beta\big).\end{aligned}$$

Сређивањем те једначине добијамо да важи

$$\begin{aligned} N\psi_{[mn]} &= G^{\alpha}_{\alpha mn} - eq_{\beta}G^{\beta}_{\alpha mn}\varphi^{\alpha} \\ &\quad + e\big(q_m\tilde{\psi}_n - q_n\tilde{\psi}_m\big) + e\big(\tilde{\sigma}_n L_m - \tilde{\sigma}_m L_n\big) - \widetilde{\sigma}_{[mn]} \end{aligned} \tag{2.2.94}$$

где је $\tilde{\psi}_j = \psi_{\alpha j}\varphi^{\alpha}, \tilde{\sigma}_j = \sigma_{\alpha j}\varphi^{\alpha}, \widetilde{\sigma}_{mn} = \sigma_{\alpha m}L^{\alpha}_{\underset{\vee}{\beta n}}\varphi^{\beta}$.

Контракцијом једначине (2.2.93) по индексима i и n добијамо да важи

$$\begin{aligned} G^{\alpha}_{jm\alpha} &= \big(e(G^{\beta}_{jm\alpha}q_{\beta} - \sigma_{j\alpha}L_m) + \sigma_{j\beta}L^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha m}} - \sigma_{jm}L^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\big)\varphi^{\alpha} \\ &\quad - e\big(\hat{\psi}_j q_m + \hat{\psi}_m q_j - \tilde{\psi}_m q_j\big) - (N-2)\psi_{jm} - \psi_{[jm]}, \end{aligned} \tag{2.2.95}$$

где је $\hat{\psi}_j = \psi_{j\alpha}\varphi^{\alpha}$. На основу ове једначине је

$$\begin{aligned} (N-2)\psi_{jm} &= -\psi_{[jm]} - e\big(\hat{\psi}_j q_m + \hat{\psi}_m q_j - \tilde{\psi}_m q_j\big) \\ &\quad - G^{\alpha}_{jm\alpha} + \big(e(G^{\beta}_{jm\alpha}q_{\beta} - \sigma_{j\alpha}L_m) + \sigma_{j\beta}L^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha m}} - \sigma_{jm}L^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\big)\varphi^{\alpha}. \end{aligned} \tag{2.2.96}$$

Композицијом ове једначине редом са $\varphi^j, \varphi^m, \varphi^j\varphi^m$ добијамо да је

$$\begin{aligned} (N-2)\tilde{\psi}_m &= -e\hat{\psi}_{\alpha}\varphi^{\alpha}q_m - G^{\beta}_{\alpha m\beta}\varphi^{\alpha} \\ &\quad + \big(e(G^{\gamma}_{\beta m\alpha}q_{\gamma} - \sigma_{\beta\alpha}L_m) + \sigma_{\beta\gamma}L^{\gamma}_{\underset{\vee}{\alpha m}} - \sigma_{\beta m}L^{\gamma}_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}}\big)\varphi^{\alpha}\varphi^{\beta}, \end{aligned} \tag{2.2.97}$$

$$N\hat{\psi}_j = \tilde{\psi}_j - G^{\beta}_{j\alpha\beta}\varphi^{\alpha} + \big(eG^{\gamma}_{j\alpha\beta}q_{\gamma} - \sigma_{j\alpha}L^{\gamma}_{\underset{\vee}{\beta\gamma}}\big)\varphi^{\alpha}\varphi^{\beta}, \tag{2.2.98}$$

$$(N-1)\hat{\psi}_{\alpha}\varphi^{\alpha} = -G^{\gamma}_{\alpha\beta\gamma}\varphi^{\alpha}\varphi^{\beta} + \big(eG^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}q_{\delta} - \sigma_{\alpha\beta}L^{\delta}_{\underset{\vee}{\gamma\delta}}\big)\varphi^{\alpha}\varphi^{\beta}\varphi^{\gamma}. \tag{2.2.99}$$

На основу једначина (2.2.84, 2.2.97, 2.2.99) добијамо да је

$$\tilde{\psi}_m = \overline{\mathcal{A}}_m - \mathcal{A}_m \quad \text{и} \quad \hat{\psi}_m = \overline{\mathcal{B}}_m - \mathcal{B}_m, \tag{2.2.100}$$

где је

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m &= \frac{e}{(N-1)(N-2)}q_m\big(K_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha}\varphi^{\beta} - (eK^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}q_{\delta} - s_{\alpha\beta}L^{\delta}_{\underset{\vee}{\gamma\delta}})\varphi^{\alpha}\varphi^{\beta}\varphi^{\gamma}\big) \\ &\quad - \frac{1}{N-2}K_{\alpha m}\varphi^{\alpha} + \frac{1}{N-2}\big(e(K^{\gamma}_{\beta m\alpha}q_{\gamma} - s_{\alpha\beta}L_m) + s_{\beta\gamma}L^{\gamma}_{\underset{\vee}{\alpha m}} - s_{\beta m}L^{\gamma}_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}}\big)\varphi^{\alpha}\varphi^{\beta}, \end{aligned} \tag{2.2.101}$$

$$\mathcal{B}_m = \frac{1}{N}\Big(\mathcal{A}_m - K_{m\alpha}\varphi^{\alpha} + \big(eK^{\gamma}_{m\alpha\beta}q_{\gamma} - s_{m\alpha}L^{\gamma}_{\underset{\vee}{\beta\gamma}}\big)\varphi^{\alpha}\varphi^{\beta}\Big), \tag{2.2.102}$$

и s_{jk} дато једначином (2.2.85) као и одговарајуће $\overline{\mathcal{A}}_m, \overline{\mathcal{B}}_m, \overline{s}_{jk}$.

Одатле, и на основу једначине (2.2.94), следи да је

$$\begin{aligned}\psi_{[mn]} &= \frac{1}{N}\big(\overline{K}^{\alpha}_{\alpha mn} - e\overline{K}^{\beta}_{\alpha mn} q_\beta \varphi^\alpha\big) - \frac{1}{N}\big(K^{\alpha}_{\alpha mn} - eK^{\beta}_{\alpha mn} q_\beta \varphi^\alpha\big)\\ &+ \frac{e}{N}\big(q_m\overline{\mathcal{A}}_n - q_n\overline{\mathcal{A}}_m + (\overline{s}_{\alpha n}L_m - \overline{s}_{\alpha m}L_n)\varphi^\alpha - e\overline{s}_{\alpha m}L^{\alpha}_{\underset{\vee}{\beta n}}\varphi^\beta\big)\\ &- \frac{e}{N}\big(q_m\mathcal{A}_n - q_n\mathcal{A}_m + (s_{\alpha n}L_m - s_{\alpha m}L_n)\varphi^\alpha - es_{\alpha m}L^{\alpha}_{\underset{\vee}{\beta n}}\varphi^\beta\big).\end{aligned} \tag{2.2.103}$$

На основу једначине (2.2.96) имамо да је

$$\begin{aligned}\psi_{jm} &= -\frac{1}{N(N-2)}\big(\overline{K}^{\alpha}_{\alpha jm} - e\overline{K}^{\beta}_{\alpha jm} q_\beta \varphi^\alpha\big) + \frac{1}{N(N-2)}\big(K^{\alpha}_{\alpha jm} - eK^{\beta}_{\alpha jm} q_\beta \varphi^\alpha\big)\\ &- \frac{e}{N(N-2)}\big(q_m\overline{\mathcal{A}}_n - q_n\overline{\mathcal{A}}_m + (\overline{s}_{\alpha m}L_j - \overline{s}_{\alpha j}L_m)\varphi^\alpha - e\overline{s}_{\alpha j}L^{\alpha}_{\underset{\vee}{\beta m}}\varphi^\beta\big)\\ &+ \frac{e}{N(N-2)}\big(q_m\mathcal{A}_n - q_n\mathcal{A}_m + (s_{\alpha m}L_j - s_{\alpha j}L_m)\varphi^\alpha - es_{\alpha j}L^{\alpha}_{\underset{\vee}{\beta m}}\varphi^\beta\big)\\ &- \frac{e}{N-2}\Big(\frac{1}{N}\big(\overline{\mathcal{B}}_j q_m - \overline{\mathcal{B}}_m q_j\big) - \frac{1}{N-2}\overline{\mathcal{A}}_m q_j\Big)\\ &+ \frac{e}{N-2}\Big(\frac{1}{N}\big(\mathcal{B}_j q_m - \mathcal{B}_m q_j\big) - \frac{1}{N-2}\mathcal{A}_m q_j\Big)\\ &- \frac{1}{N-2}\Big(\overline{K}_{jm} - \big(e(\overline{K}^{\beta}_{jm\alpha} q_\beta - \overline{s}_{j\alpha}L_m) - \overline{s}_{j\beta}L^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha m}} + \overline{s}_{jm}L^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\big)\varphi^\alpha\Big)\\ &+ \frac{1}{N-2}\Big(K_{jm} - \big(e(K^{\beta}_{jm\alpha} q_\beta - s_{j\alpha}L_m) - s_{j\beta}L^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha m}} + s_{jm}L^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\big)\varphi^\alpha\Big).\end{aligned} \tag{2.2.104}$$

На основу једначина (2.2.93, 2.2.103, 2.2.104) добијамо да је

$$\underset{(3)}{\overline{\mathcal{W}}}{}^i_{(1)jmn} = \underset{(3)}{\mathcal{W}}{}^i_{(1)jmn},$$

где је

$$\begin{aligned}\underset{(3)}{\mathcal{W}}{}^i_{(1)jmn} &= K^i_{jmn} + eK^{\alpha}_{jmn}q_\alpha\varphi^i + \mathcal{U}_{jn}\big(\delta^i_m - eq_m\varphi^i\big) - \mathcal{U}_{jm}\big(\delta^i_n - eq_n\varphi^i\big)\\ &+ \mathcal{V}_{[mn]}\big(\delta^i_j - eq_j\varphi^i\big) - s_{jn}\big(eL_m\varphi^i - L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\varphi^\alpha\big) + s_{jm}\big(eL_n\varphi^i - L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\varphi^\alpha\big),\end{aligned} \tag{2.2.105}$$

и одговарајуће $\underset{(3)}{\overline{\mathcal{W}}}{}^{i}_{(1)jmn}$ при чему је

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{jm} &= \frac{1}{N(N-2)}\big(K^{\alpha}_{\alpha jm} - eK^{\beta}_{\alpha jm}q_{\beta}\varphi^{\alpha}\big)\\
&+ \frac{e}{N(N-2)}\big(q_m\mathcal{A}_n - q_n\mathcal{A}_m + (s_{\alpha m}L_j - s_{\alpha j}L_m)\varphi^{\alpha} - es_{\alpha j}L^{\alpha}_{\underset{\vee}{\beta m}}\varphi^{\beta}\big)\\
&+ \frac{e}{N-2}\Big(\frac{1}{N}\big(\mathcal{B}_j q_m - \mathcal{B}_m q_j\big) - \frac{1}{N-2}\mathcal{A}_m q_j\Big)\\
&+ \frac{1}{N-2}\Big(K_{jm} - \big(e(K^{\beta}_{jm\alpha}q_{\beta} - s_{j\alpha}L_m) - s_{j\beta}L^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha m}} + s_{jm}L^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\big)\varphi^{\alpha}\Big),\\
\mathcal{V}_{[mn]} &= -\frac{1}{N}\big(K^{\alpha}_{\alpha mn} - eK^{\beta}_{\alpha mn}q_{\beta}\varphi^{\alpha}\big)\\
&\quad - \frac{e}{N}\big(q_m\mathcal{A}_n - q_n\mathcal{A}_m + (s_{\alpha n}L_m - s_{\alpha m}L_n)\varphi^{\alpha} - es_{\alpha m}L^{\alpha}_{\underset{\vee}{\beta n}}\varphi^{\beta}\big).
\end{aligned}$$

Теорема 2.2.13. *Геометријски објекат* $\underset{(3)}{\mathcal{W}}{}^{i}_{(1)jmn}$ *задат једначином* (2.2.105) *је инваријанта еквиторзионог скоро геодезијског пресликавања* $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *типа* $\underset{1}{\widetilde{\pi}}_3$. □

На основу Пропозиције 2.2.2. закључујемо да промена врсте скоро геодезијског пресликавања $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ типа $\underset{s}{\widetilde{\pi}}_3$ не утиче на законе промене коваријантног извода тензора торзије по афиној конекцији придруженог простора. Пропозицијом 2.2.3. је доказано да промена врсте скоро геодезијског пресликавања не утиче на промену закона трансформације тензора торзије.

Са друге стране, на основу Лема 2.2.2. и 2.2.3. закључујемо да промена врсте скоро геодезијског пресликавања $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ утиче на промену закона трансформације тензора кривине придруженог простора $\mathbb{A}_N$. Уколико тензори кривине R^i_{jmn} и $\overline{R}^i_{jmn}$ придружених простора $\mathbb{A}_N$ и $\overline{\mathbb{A}}_N$ задовољавају једначине

$$\overline{R}^i_{jmn} = R^i_{jmn} + \underset{s}{\widetilde{\mathcal{Z}}}{}^i_{jmn}, \tag{2.2.106}$$

за $s \in \{1, 2\}$, добијамо да важи

$$\underset{2}{\widetilde{\mathcal{Z}}}{}^i_{jmn} = \underset{1}{\widetilde{\mathcal{Z}}}{}^i_{jmn} + 2(L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm} - L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn})\varphi^{\alpha}. \tag{2.2.107}$$

Из тог разлога, наредна два тврђења наводимо без доказа.

Теорема 2.2.14. *Нека је* $f:\mathbb{GA}_N\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *скоро геодезијско пресликавање типа* $\underset{2}{\widetilde{\pi}}_3$. *Фамилија* (1.3.54) *тензора кривине простора* $\mathbb{GA}_N$ *се трансформише по закону*

$$
\begin{aligned}
\overline{K}^i_{jmn} &= K^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j + \big(\sigma_{jmn} + uL^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n} + u'L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i\\
&- \big((u+1)L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn} + (u'-1)L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm} - (u+u')L^i_{\underset{\vee}{\alpha j}}\sigma_{mn}\big)\varphi^\alpha\\
&+ \big(u(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha+\psi_j\theta_n+\psi_n\theta_j+\sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha)+L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(u'\psi_\alpha-v'\theta_\alpha)-(v-w)\theta_j\theta_n\big)\delta^i_m\\
&+ \big(u'(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha+\psi_j\theta_m+\psi_m\theta_j+\sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha)+L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(u\psi_\alpha-v\theta_\alpha)-(v'+w)\theta_j\theta_m\big)\delta^i_n\\
&- \big((u+u')(L^\alpha_{\underline{mn}}\theta_\alpha+\psi_m\theta_n+\psi_n\theta_m+\sigma_{mn}\theta_\alpha\varphi^\alpha)-(v+v')\theta_m\theta_n+wL^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\theta_\alpha\big)\delta^i_j\\
&+ L^i_{\underset{\vee}{mn}}\big((u-u')\psi_j-(v-v'-w)\theta_j\big) - L^i_{\underset{\vee}{jm}}\big((u+u')\psi_n-(v+v'-w)\theta_n\big)\\
&- L^i_{\underset{\vee}{jn}}\big((u+u')\psi_m-(v+v'+w)\theta_m\big),
\end{aligned}
\tag{2.2.108}
$$

за величине ψ_{ij} *и* σ_{jmn} *задате једначином* (2.2.64). □

Последица 2.2.3 *Нека је* $f:\mathbb{GA}_N\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *скоро геодезијско пресликавање типа* $\underset{2}{\widetilde{\pi}}_3$. *Тензори кривине* $\underset{1}{R}{}^i_{jmn},\dots,\underset{4}{R}{}^i_{jmn}$ *дати једначинама* (1.3.18–1.3.21) *и изведени тензори кривине* $\underset{1}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn},\dots,\underset{8}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn}$ *дати једначинама* (1.3.45–1.3.52) *се трансформишу према наредним законима:*

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{1}{R}{}^i_{jmn}+\psi_{jn}\delta^i_m-\psi_{jm}\delta^i_n+\psi_{[mn]}\delta^i_j+\big(\sigma_{jmn}+L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i\\
&+ 2\big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm} - L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn}\big)\varphi^\alpha + 2L^i_{\underset{\vee}{mn}}\big(\psi_j-\theta_j\big)\\
&+ \big(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha+\psi_j\theta_n+\psi_n\theta_j+\sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha-L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(\psi_\alpha+\theta_\alpha)-\theta_j\theta_n\big)\delta^i_m\\
&- \big(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha+\psi_j\theta_m+\psi_m\theta_j+\sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha-L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_\alpha-\theta_\alpha)-\theta_j\theta_m\big)\delta^i_n,
\end{aligned}
\tag{2.2.109}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{\overline{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{2}{R}{}^i_{jmn}+\psi_{jn}\delta^i_m-\psi_{jm}\delta^i_n+\psi_{[mn]}\delta^i_j+\big(\sigma_{jmn}-L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n}+L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i\\
&- \big(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha+\psi_j\theta_n+\psi_n\theta_j+\sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha-L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(\psi_\alpha+\theta_\alpha)+\theta_j\theta_n\big)\delta^i_m\\
&+ \big(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha+\psi_j\theta_m+\psi_m\theta_j+\sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha-L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_\alpha+\theta_\alpha)+\theta_j\theta_m\big)\delta^i_n\\
&- 2L^i_{\underset{\vee}{mn}}\big(\psi_j+\theta_j\big),
\end{aligned}
\tag{2.2.110}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\underset{3}{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{3}{R}{}^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j + \big(\sigma_{jmn} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i \\
&- 2\big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn} + L^i_{\underset{\vee}{\alpha j}}\sigma_{mn}\big)\varphi^\alpha - 2L^i_{\underset{\vee}{jm}}\big(\psi_n - \theta_n\big) - 2L^i_{\underset{\vee}{jn}}\big(\psi_m + \theta_m\big) \\
&+ \big(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_n + \psi_n\theta_j + \sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha + L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(\psi_\alpha - \theta_\alpha) - \theta_j\theta_n\big)\delta^i_m \\
&+ \big(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_m + \psi_m\theta_j + \sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha + L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_\alpha + \theta_\alpha) + \theta_j\theta_m\big)\delta^i_n \\
&- 2\big(L^\alpha_{\underline{mn}}\theta_\alpha + \psi_m\theta_n + \psi_n\theta_m + \sigma_{mn}\theta_\alpha\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\theta_\alpha\big)\delta^i_j,
\end{aligned}
\tag{2.2.111}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\underset{4}{R}}{}^i_{jmn} &= \underset{4}{R}{}^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j + \big(\sigma_{jmn} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i \\
&- 2\big((L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn} + L^i_{\underset{\vee}{\alpha j}}\sigma_{mn})\varphi^\alpha + L^i_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_n + \theta_n) + L^i_{\underset{\vee}{jn}}\big(\psi_m - \theta_m)\big) \\
&+ \big(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_n + \psi_n\theta_j + \sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha + L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(\psi_\alpha - \theta_\alpha) + \theta_j\theta_n\big)\delta^i_m \\
&+ \big(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_m + \psi_m\theta_j + \sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha + L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_\alpha + \theta_\alpha) - 3\theta_j\theta_m\big)\delta^i_n \\
&- 2\big(L^\alpha_{\underline{mn}}\theta_\alpha + \psi_m\theta_n + \psi_n\theta_m + \sigma_{mn}\theta_\alpha\varphi^\alpha + L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\theta_\alpha\big)\delta^i_j + 4L^i_{\underset{\vee}{mn}}\theta_j,
\end{aligned}
\tag{2.2.112}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\underset{1}{\widetilde{R}}}{}^i_{jmn} &= \underset{1}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j + \sigma_{jmn}\varphi^i \\
&+ \big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm} - L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn}\big)\varphi^\alpha - \big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\theta_\alpha - \theta_j\theta_n\big)\delta^i_m \\
&+ \big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\theta_\alpha - \theta_j\theta_m\big)\delta^i_n + 2L^i_{\underset{\vee}{mn}}\theta_j,
\end{aligned}
\tag{2.2.113}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\underset{2}{\widetilde{R}}}{}^i_{jmn} &= \underset{2}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j + \sigma_{jmn}\varphi^i \\
&+ \big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm} - L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn}\big)\varphi^\alpha - \big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\theta_\alpha + \theta_j\theta_n\big)\delta^i_m \\
&- \big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\theta_\alpha + \theta_j\theta_m\big)\delta^i_n + 2(\theta_m\theta_n\delta^i_j + L^i_{\underset{\vee}{jm}}\theta_n + L^i_{\underset{\vee}{jn}}\theta_m),
\end{aligned}
\tag{2.2.114}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\underset{3}{\widetilde{R}}}{}^i_{jmn} &= \underset{3}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j + \sigma_{jmn}\varphi^i \\
&+ \big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm} - L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn}\big)\varphi^\alpha + \big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\theta_\alpha + \theta_j\theta_n\big)\delta^i_m \\
&+ \big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\theta_\alpha + \theta_j\theta_m\big)\delta^i_n - 2(\theta_m\theta_n\delta^i_j + L^i_{\underset{\vee}{jm}}\theta_n + L^i_{\underset{\vee}{jn}}\theta_m),
\end{aligned}
\tag{2.2.115}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{4}{\widetilde{\widetilde{R}}}{}^i_{jmn} &= \underset{4}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j \\
&+ \big(\sigma_{jmn} - \frac{1}{3}(L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m})\big)\varphi^i - \frac{2}{3}\big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn} - L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm}\big)\varphi^\alpha \\
&+ \frac{2}{3}\big(L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\theta_\alpha\delta^i_j - L^i_{\underset{\vee}{mn}}\psi_j + L^i_{\underset{\vee}{jm}}\theta_n - L^i_{\underset{\vee}{jn}}\theta_m\big) \\
&- \frac{1}{3}\big(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_n + \psi_n\theta_j + \sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(\psi_\alpha - \theta_\alpha) + \theta_j\theta_n\big)\delta^i_m \\
&+ \frac{1}{3}\big(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_m + \psi_m\theta_j + \sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_\alpha - \theta_\alpha) + \theta_j\theta_m\big)\delta^i_n,
\end{aligned}
\tag{2.2.116}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{5}{\widetilde{\widetilde{R}}}{}^i_{jmn} &= \underset{5}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j + \big(\sigma_{jmn} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i \\
&- \big(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_n + \psi_n\theta_j + \sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(\psi_\alpha + \theta_\alpha) - 3\theta_j\theta_n\big)\delta^i_m \\
&+ \big(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_m + \psi_m\theta_j + \sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_\alpha - 3\theta_\alpha) + \theta_j\theta_m\big)\delta^i_n \\
&- 4\theta_m\theta_n\delta^i_j - 2L^i_{\underset{\vee}{mn}}\big(\psi_j - \theta_j\big) - 4(L^i_{\underset{\vee}{jm}}\theta_n + L^i_{\underset{\vee}{jn}}\theta_m),
\end{aligned}
\tag{2.2.117}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{6}{\widetilde{\widetilde{R}}}{}^i_{jmn} &= \underset{6}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j + \big(\sigma_{jmn} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i \\
&- \big(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_n + \psi_n\theta_j + \sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(\psi_\alpha - 3\theta_\alpha) + \theta_j\theta_n\big)\delta^i_m \\
&+ \big(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_m + \psi_m\theta_j + \sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_\alpha + \theta_\alpha) - 3\theta_j\theta_m\big)\delta^i_n \\
&+ 4\big(\theta_m\theta_n\delta^i_j + L^i_{\underset{\vee}{jm}}\theta_n + L^i_{\underset{\vee}{jn}}\theta_m\big) - 2L^i_{\underset{\vee}{mn}}\big(\psi_j - \theta_j\big),
\end{aligned}
\tag{2.2.118}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{7}{\widetilde{\widetilde{R}}}{}^i_{jmn} &= \underset{7}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j + \big(\sigma_{jmn} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i \\
&+ \big(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_n + \psi_n\theta_j + \sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(\psi_\alpha + 3\theta_\alpha) - \theta_j\theta_n\big)\delta^i_m \\
&- \big(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_m + \psi_m\theta_j + \sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_\alpha - \theta_\alpha) + 3\theta_j\theta_m\big)\delta^i_n \\
&+ 4\big(\theta_m\theta_n\delta^i_j + L^i_{\underset{\vee}{jm}}\theta_n + L^i_{\underset{\vee}{jn}}\theta_m\big) + 2L^i_{\underset{\vee}{mn}}\big(\psi_j + \theta_j\big) \\
&+ 2\big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm} - L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn}\big)\varphi^\alpha,
\end{aligned}
\tag{2.2.119}
$$

$$\begin{aligned}
\underset{8}{\widetilde{\overline{R}}}{}^i_{jmn} = {} & \underset{8}{\widetilde{R}}{}^i_{jmn} + \psi_{jn}\delta^i_m - \psi_{jm}\delta^i_n + \psi_{[mn]}\delta^i_j + \big(\sigma_{jmn} + L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\sigma_{\alpha n} - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^i \\
& + \big(L^\alpha_{\underline{jn}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_n + \psi_n\theta_j + \sigma_{jn}\theta_\alpha\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}(\psi_\alpha - \theta_\alpha) + 3\theta_j\theta_n\big)\delta^i_m \\
& - \big(L^\alpha_{\underline{jm}}\theta_\alpha + \psi_j\theta_m + \psi_m\theta_j + \sigma_{jm}\theta_\alpha\varphi^\alpha - L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}(\psi_\alpha + 3\theta_\alpha) - \theta_j\theta_m\big)\delta^i_n \\
& - 4\big(\theta_m\theta_n\delta^i_j + L^i_{\underset{\vee}{jm}}\theta_n + L^i_{\underset{\vee}{jn}}\theta_m\big) + 2L^i_{\underset{\vee}{mn}}\big(\psi_j + \theta_j\big) \\
& + 2\big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm} - L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn}\big)\varphi^\alpha,
\end{aligned} \tag{2.2.120}$$

где су геометријски објекти ψ_{ij} *и* σ_{ijk} *задати једначином* (2.2.64). □

Нека је $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ еквиторзионо скоро геодезијско пресликавање типа $\underset{2}{\widetilde{\pi}}_3$. На основу инваријантности $\underset{(3)}{\overline{\mathcal{W}}}{}^i_{(1)jmn} = \underset{(3)}{\mathcal{W}}{}^i_{(1)jmn}$ имамо да је

$$\begin{aligned}
G^i_{(1)jmn} = {} & -e\overline{K}{}^\alpha_{jmn}q_\alpha\varphi^i - \overline{\mathcal{U}}_{jn}\big(\delta^i_m - eq_m\varphi^i\big) + \overline{\mathcal{U}}_{jm}\big(\delta^i_n - eq_n\varphi^i\big) \\
& - \overline{\mathcal{V}}_{[mn]}\big(\delta^i_j - eq_j\varphi^i\big) + \overline{s}_{jn}\big(eL_m\varphi^i - L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\varphi^\alpha\big) - \overline{s}_{jm}\big(eL_n\varphi^i - L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\varphi^\alpha\big) \\
& + eK^\alpha_{jmn}q_\alpha\varphi^i + \mathcal{U}_{jn}\big(\delta^i_m - eq_m\varphi^i\big) - \mathcal{U}_{jm}\big(\delta^i_n - eq_n\varphi^i\big) \\
& + \mathcal{V}_{[mn]}\big(\delta^i_j - eq_j\varphi^i\big) - s_{jn}\big(eL_m\varphi^i - L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\varphi^\alpha\big) + s_{jm}\big(eL_n\varphi^i - L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\varphi^\alpha\big).
\end{aligned}$$

На основу једначина (2.2.106, 2.2.107) добијамо да важи

$$G^i_{(2)jmn} = G^i_{(1)jmn} + 2\big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\sigma_{jm} - L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\sigma_{jn}\big)\varphi^\alpha. \tag{2.2.121}$$

Одатле, и на основу једначине (2.2.84) следи да је

$$\begin{aligned}
\overline{K}{}^i_{jmn} = {} & K^i_{jmn} - e\overline{K}{}^\alpha_{jmn}q_\alpha\varphi^i - \overline{\mathcal{U}}_{jn}\big(\delta^i_m - eq_m\varphi^i\big) + \overline{\mathcal{U}}_{jm}\big(\delta^i_n - eq_n\varphi^i\big) \\
& - \overline{\mathcal{V}}_{[mn]}\big(\delta^i_j - eq_j\varphi^i\big) + \overline{s}_{jn}\big(eL_m\varphi^i - L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\varphi^\alpha\big) - \overline{s}_{jm}\big(eL_n\varphi^i - L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\varphi^\alpha\big) \\
& + eK^\alpha_{jmn}q_\alpha\varphi^i + \mathcal{U}_{jn}\big(\delta^i_m - eq_m\varphi^i\big) - \mathcal{U}_{jm}\big(\delta^i_n - eq_n\varphi^i\big) \\
& + \mathcal{V}_{[mn]}\big(\delta^i_j - eq_j\varphi^i\big) - s_{jn}\big(eL_m\varphi^i - L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\varphi^\alpha\big) + s_{jm}\big(eL_n\varphi^i - L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\varphi^\alpha\big) \\
& + 2\big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\overline{s}_{jm} - L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\overline{s}_{jn}\big)\varphi^\alpha - 2\big(L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}s_{jm} - L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}s_{jn}\big)\varphi^\alpha.
\end{aligned}$$

Тиме је доказано да је

$$\underset{(3)}{\overline{\mathcal{W}}}{}^i_{(2)jmn} = \underset{(3)}{\mathcal{W}}{}^i_{(2)jmn},$$

при чему је

$$\underset{(3)}{\mathcal{W}}{}^{i}_{(2)jmn} = K^i_{jmn} + eK^{\alpha}_{jmn} q_{\alpha}\varphi^i + \mathcal{U}_{jn}\big(\delta^i_m - eq_m\varphi^i\big) - \mathcal{U}_{jm}\big(\delta^i_n - eq_n\varphi^i\big)$$
$$+ \mathcal{V}_{[mn]}\big(\delta^i_j - eq_j\varphi^i\big) - s_{jn}\big(eL_m\varphi^i + L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\varphi^{\alpha}\big) + s_{jm}\big(eL_n\varphi^i + L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\varphi^{\alpha}\big). \tag{2.2.122}$$

Важи наредна теорема.

Теорема 2.2.15. *Геометријски објекат* $\underset{(3)}{\mathcal{W}}{}^{i}_{(2)jmn}$ *задат једначином* (2.2.122) *је инваријанта еквиторзионог скоро геодезијског пресликавања* $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *типа* $\underset{2}{\widetilde{\pi}}_3$. $\square$

ПОГЛАВЉЕ 3

Инваријанте скоро геодезијских и конформних пресликавања

Као што смо већ нагласили, класа генералисаних Риманових простора је подкласа класе простора несиметричне афине конексије. Због тога, сви резултати добијени у глави 2 ове дисертације могу се трансформисати у одговарајуће резултате који се односе на пресликавања простора $\mathbb{GR}_N$.

Ми ћемо, у овом поглављу, обратити посебну пажњу на инваријанте скоро геодезијских и конформних пресликавања простора $\mathbb{GR}_N$. Као увод за та разматрања, извешћемо формуле које ћемо касније користити и које се односе на инваријанте пресликавања простора $\mathbb{GA}_N$.

iИнваријанте геометријских пресликавања]

3.1 Инваријанте геометријских пресликавања

Нека је $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ пресликавање простора $\mathbb{GA}_N$ несиметричне афине конексије чији је тензор деформације P^i_{jk} једнак

$$P^i_{jk} = P^i_{\underline{jk}} + \xi^i_{jk} = \overline{\omega}^i_{jk} - \omega^i_{jk} + \overline{\tau}^i_{jk} - \tau^i_{jk}, \tag{3.1.1}$$

где је $P^i_{\underline{jk}} = \overline{L}^i_{\underline{kj}} - L^i_{\underline{jk}}, \omega^i_{jk} = \omega^i_{kj}, \overline{\omega}^i_{jk} = \overline{\omega}^i_{kj}, \tau^i_{jk} = -\tau^i_{kj}, \overline{\tau}^i_{jk} = -\overline{\tau}^i_{kj}, \xi^i_{jk} = -\xi^i_{kj}$, $\omega^i_{jk} \neq L^i_{\underline{jk}}, \overline{\omega}^i_{jk} \neq \overline{L}^i_{\underline{jk}}, \tau^i_{jk} \neq L^i_{\underset{\vee}{jk}}, \overline{\tau}^i_{jk} \neq \overline{L}^i_{\underset{\vee}{jk}}$.

Инваријанте геометријских пресликавања је могуће добити на основу одговарајућег закона трансформације коефицијената L^i_{jk}. Те инваријанте су *инваријанте Томасовог типа.* Поред тога, инваријанте геометријских пресликавања је могуће добити на основу одговарајућих трансформација тензора кривине. Те инваријанте су *инваријанте Вејловог типа.*

На основу једначине (3.1.1) следи да је

$$\begin{aligned} &P^i_{\underline{jk}} = \overline{L}^i_{\underline{jk}} - L^i_{\underline{jk}} = \overline{\omega}^i_{jk} - \omega^i_{jk} = \frac{1}{2}\overline{P}^i_{\underline{jk}} - \frac{1}{2}P^i_{\underline{jk}}, \\ &\xi^i_{jk} = \overline{L}^i_{\underset{\vee}{jk}} - L^i_{\underset{\vee}{jk}} = \overline{\tau}^i_{jk} - \tau^i_{jk}, \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

где је $\overline{P}^i_{\underline{jk}}$ симетрични део тензора деформације инверзног пресликавања $f^{-1} : \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N \to \mathbb{G}\mathbb{A}_N$. Нека је

$$\underset{(1)}{\omega}{}^i_{jk} = L^i_{\underline{jk}}, \quad \underset{(2)}{\omega}{}^i_{jk} = \omega^i_{jk}, \quad \underset{(3)}{\omega}{}^i_{jk} = -\frac{1}{2}P^i_{\underline{jk}}, \tag{3.1.3}$$

и одговарајуће $\underset{(p)}{\overline{\omega}}{}^i_{jk}, p = 1,2,3$. На основу једнакости (3.1.2) долазимо до закључка да важи

$$\underset{(p)}{\overline{\overset{0}{\mathcal{T}}}}{}^i_{jk} = \underset{(p)}{\overset{0}{\mathcal{T}}}{}^i_{jk}, \quad \overline{\hat{\mathcal{T}}}{}^i_{jk} = \hat{\mathcal{T}}^i_{jk}, \quad \underset{(p)}{\overline{\mathcal{T}}}{}^i_{jk} = \underset{(p)}{\mathcal{T}}{}^i_{jk},$$

где је

$$\underset{(p)}{\overset{0}{\mathcal{T}}}{}^i_{jk} = L^i_{\underline{jk}} - \underset{(p)}{\omega}{}^i_{jk}, \tag{3.1.4}$$

$$\hat{\mathcal{T}}^i_{jk} = L^i_{\underset{\vee}{jk}} - \tau^i_{jk}, \tag{3.1.5}$$

$$\underset{(p)}{\mathcal{T}}{}^i_{jk} = L^i_{jk} - \underset{(p)}{\omega}{}^i_{jk} - \tau^i_{jk}, \tag{3.1.6}$$

и одговарајуће $\underset{(p)}{\overline{\overset{0}{\mathcal{T}}}}{}^i_{jk}, \overline{\hat{\mathcal{T}}}{}^i_{jk}, \underset{(p)}{\overline{\mathcal{T}}}{}^i_{jk}$. Важи наредна теорема.

Теорема 3.1.1. *Нека је* $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *пресликавање чији је тензор деформације задат једначином* (3.1.1). *Геометријски објекти* $\underset{(p)}{\overset{0}{\mathcal{T}}}{}^i_{jk}, \hat{\mathcal{T}}^i_{jk}, \underset{(p)}{\mathcal{T}}{}^i_{jk}$, $p = 1,2,3$, *задати једначинама* (3.1.4–3.1.6) *су инваријанте Томасовог* *типа пресликавања f.* $\square$

Примедба 3.1.1. *Инваријанта* $\underset{(1)}{\overset{0}{\mathcal{T}}}{}^i_{jk}$ *је тривијална, док је* $\underset{(3)}{\overset{0}{\mathcal{T}}}{}^i_{jk} = \frac{1}{2}P^i_{\underline{jk}}$.

Уколико је пресликавање $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *еквиторзионо, инваријанта* (3.1.6) *се редукује на инваријанту* (3.1.4) *а инваријанта* (3.1.5) *се своди на тензор торзије.*

Инваријанте Томасовог типа (3.1.4, 3.1.6) *ћемо означавати са* $\overset{0}{\mathcal{T}}{}^i_{jk}$ *и* $\mathcal{T}^i_{jk}$ *при чему ћемо, по потреби, наглашавати на основу ког* $\underset{(p)}{\omega}{}^i_{jk}$ *су добијене.*

Инваријанта $\overset{0}{\mathcal{T}}{}^i_{jk}$ је **придружена инваријанта Томасовог типа**. Инваријанта $\hat{\mathcal{T}}^i_{jk}$ је **антисиметрична инваријанта Томасовог типа**. Инваријанта $\mathcal{T}^i_{jk}$ је **општа инваријанта Томасовог типа**.

Како је

$$\underset{(p)}{\overset{0}{\overline{\mathcal{T}}}}{}^i_{jm,n} - \underset{(p)}{\overset{0}{\overline{\mathcal{T}}}}{}^i_{jn,m} + \underset{(p)}{\overset{0}{\overline{\mathcal{T}}}}{}^\alpha_{jm}\underset{(p)}{\overset{0}{\overline{\mathcal{T}}}}{}^i_{\alpha n} - \underset{(p)}{\overset{0}{\overline{\mathcal{T}}}}{}^\alpha_{jn}\underset{(p)}{\overset{0}{\overline{\mathcal{T}}}}{}^i_{\alpha m} = \underset{(p)}{\overset{0}{\mathcal{T}}}{}^i_{jm,n} - \underset{(p)}{\overset{0}{\mathcal{T}}}{}^i_{jn,m} + \underset{(p)}{\overset{0}{\mathcal{T}}}{}^\alpha_{jm}\underset{(p)}{\overset{0}{\mathcal{T}}}{}^i_{\alpha n} - \underset{(p)}{\overset{0}{\mathcal{T}}}{}^\alpha_{jn}\underset{(p)}{\overset{0}{\mathcal{T}}}{}^i_{\alpha m}$$

закључујемо да тензори кривине R^i_{jmn} и $\overline{R}^i_{jmn}$ придружених простора $\mathbb{A}_N$ и $\overline{\mathbb{A}}_N$ задовољавају једначину

$$\begin{aligned}\overline{R}^i_{jmn} = R^i_{jmn} &+ \underset{(p)}{\overline{\omega}}{}^i_{jm||n} - \underset{(p)}{\overline{\omega}}{}^i_{jn||m} - \underset{(p)}{\overline{\omega}}{}^\alpha_{jm}\underset{(p)}{\overline{\omega}}{}^i_{\alpha n} + \underset{(p)}{\overline{\omega}}{}^\alpha_{jn}\underset{(p)}{\overline{\omega}}{}^i_{\alpha m}\\ &- \underset{(p)}{\omega}{}^i_{jm|n} + \underset{(p)}{\omega}{}^i_{jn|m} + \underset{(p)}{\omega}{}^\alpha_{jm}\underset{(p)}{\omega}{}^i_{\alpha n} - \underset{(p)}{\omega}{}^\alpha_{jn}\underset{(p)}{\omega}{}^i_{\alpha m}.\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Одатле следи да важи

$$\underset{(p)}{\overset{0}{\overline{\mathcal{W}}}}{}^i_{jmn} = \underset{(p)}{\overset{0}{\mathcal{W}}}{}^i_{jmn},$$

где је

$$\underset{(2)}{\overset{0}{\mathcal{W}}}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} - \underset{(2)}{\omega}{}^i_{jm|n} + \underset{(2)}{\omega}{}^i_{jn|m} + \underset{(2)}{\omega}{}^\alpha_{jm}\underset{(2)}{\omega}{}^i_{\alpha n} - \underset{(2)}{\omega}{}^\alpha_{jn}\underset{(2)}{\omega}{}^i_{\alpha m}, \tag{3.1.8}$$

$$\underset{(3)}{\overset{0}{\mathcal{W}}}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} + \frac{1}{2}P^i_{\underline{jm}|n} - \frac{1}{2}P^i_{\underline{jn}|m}, \tag{3.1.9}$$

и одговарајуће $\underset{(2)}{\overset{0}{\overline{\mathcal{W}}}}{}^i_{jmn}, \underset{(3)}{\overset{0}{\overline{\mathcal{W}}}}{}^i_{jmn}$. Инваријанта $\underset{(1)}{\overset{0}{\mathcal{W}}}{}^i_{jmn}$ је тривијална.

Примедба 3.1.2. *Ми ћемо, у наставку, инваријанте* $\overset{0}{\underset{(2)}{\mathcal{W}}}{}^{i}_{jk}$ *и* $\overset{0}{\underset{(2)}{\mathcal{W}}}{}^{i}_{jk}$ *означавати са* $\overset{0}{\mathcal{W}}{}^{i}_{jk}$. *По потреби ћемо се позивати на* $\underset{(p)}{\omega}{}^{i}_{jk}$ *на основу којег је инваријанта добијена.*

На основу разлике

$$\hat{\overline{\mathcal{T}}}{}^{\alpha}_{jm}\hat{\overline{\mathcal{T}}}{}^{i}_{\alpha n} - \hat{\mathcal{T}}^{\alpha}_{jm}\hat{\mathcal{T}}^{i}_{\alpha n} = 0$$

долазимо до закључка да се композиција $L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}}$ трансформише по закону

$$\begin{aligned}\overline{L}{}^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}\overline{L}{}^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}} &= L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}} + \overline{L}{}^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}\overline{\tau}{}^{i}_{\alpha n} + \overline{L}{}^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}}\overline{\tau}{}^{\alpha}_{jm} - \overline{\tau}{}^{\alpha}_{jm}\overline{\tau}{}^{i}_{\alpha n}\\ &- L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}\tau^{i}_{\alpha n} - L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}}\tau^{\alpha}_{jm} + \tau^{\alpha}_{jm}\tau^{i}_{\alpha n}.\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Још је и

$$\hat{\overline{\mathcal{T}}}{}^{i}_{jm||n} - \hat{\mathcal{T}}^{i}_{jm|n} = P^{i}_{\underline{\alpha n}}\hat{\mathcal{T}}^{\alpha}_{jm} - P^{\alpha}_{\underline{jn}}\hat{\mathcal{T}}^{i}_{\alpha m} - P^{\alpha}_{\underline{mn}}\hat{\mathcal{T}}^{i}_{j\alpha}.$$

Одатле следи да важи

$$\begin{aligned}\overline{L}{}^{i}_{\underset{\vee}{jm}||n} &= L^{i}_{\underset{\vee}{jm}|n} + \underset{(p)}{\overline{\omega}}{}^{i}_{\alpha n}(\overline{L}{}^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}} - \overline{\tau}{}^{\alpha}_{jm}) - \underset{(q)}{\overline{\omega}}{}^{\alpha}_{jn}(\overline{L}{}^{i}_{\underset{\vee}{\alpha m}} - \overline{\tau}{}^{i}_{\alpha m}) - \underset{(r)}{\overline{\omega}}{}^{\alpha}_{mn}(\overline{L}{}^{i}_{\underset{\vee}{j\alpha}} - \overline{\tau}{}^{i}_{j\alpha})\\ &- \underset{(p)}{\omega}{}^{i}_{\alpha n}(L^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}} - \tau^{\alpha}_{jm}) + \underset{(q)}{\omega}{}^{\alpha}_{jn}(L^{i}_{\underset{\vee}{\alpha m}} - \tau^{i}_{\alpha m}) + \underset{(r)}{\omega}{}^{\alpha}_{mn}(L^{i}_{\underset{\vee}{j\alpha}} - \tau^{i}_{j\alpha}),\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

где је $p, q, r \in \{1, 2\}$, за $\underset{(1)}{\omega}{}^{i}_{jk}$ и $\underset{(2)}{\omega}{}^{i}_{jk}$ задате једначином (3.1.3), одговарајуће $\underset{(1)}{\overline{\omega}}{}^{i}_{jk}$ и $\underset{(2)}{\overline{\omega}}{}^{i}_{jk}$ као и величине τ^{i}_{jk} и $\overline{\tau}{}^{i}_{jk}$ коришћене у једначини (3.1.1).

На основу једначине (1.3.54) и претходно добијених закона трансформације (3.1.7, 3.1.10, 3.1.11) добијамо да се фамилија K^{i}_{jmn} тензора кривине простора $\mathbb{GA}_N$ трансформише по закону

$$\overline{K}{}^{i}_{jmn} = K^{i}_{jmn} + \underset{(\rho)}{\overline{\mathcal{D}}}{}^{i}_{jmn} - \underset{(\rho)}{\mathcal{D}}{}^{i}_{jmn}, \tag{3.1.12}$$

где је $\rho = (p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2), p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2 \in \{1, 2\}$,

$$
\begin{aligned}
\underset{(\rho)}{\mathcal{D}}{}^i_{jmn} = {} & \underset{(2)}{\omega}{}^i_{jm|n} - \underset{(2)}{\omega}{}^i_{jn|m} - \underset{(2)}{\omega}{}^\alpha_{jm}\underset{(2)}{\omega}{}^i_{\alpha n} + \underset{(2)}{\omega}{}^\alpha_{jn}\underset{(2)}{\omega}{}^i_{\alpha m} \\
& + u\big(\underset{(p_1)}{\omega}{}^i_{\alpha n}(L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}} - \tau^\alpha_{jm}) - \underset{(q_1)}{\omega}{}^\alpha_{jn}(L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}} - \tau^i_{\alpha m}) - \underset{(r_1)}{\omega}{}^\alpha_{mn}(L^i_{\underset{\vee}{j\alpha}} - \tau^i_{j\alpha})\big) \\
& + u'\big(\underset{(p_2)}{\omega}{}^i_{\alpha m}(L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}} - \tau^\alpha_{jn}) - \underset{(q_2)}{\omega}{}^\alpha_{jm}(L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}} - \tau^i_{\alpha n}) - \underset{(r_2)}{\omega}{}^\alpha_{mn}(L^i_{\underset{\vee}{j\alpha}} - \tau^i_{j\alpha})\big) \\
& + v\big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\tau^i_{\alpha n} + L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\tau^\alpha_{jm} - \tau^\alpha_{jm}\tau^i_{\alpha n}\big) + v'\big(L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\tau^i_{\alpha m} + L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\tau^\alpha_{jn} - \tau^\alpha_{jn}\tau^i_{\alpha m}\big) \\
& + w\big(L^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\tau^i_{\alpha j} + L^i_{\underset{\vee}{\alpha j}}\tau^\alpha_{mn} - \tau^\alpha_{mn}\tau^i_{\alpha j}\big)
\end{aligned}
\tag{3.1.13}
$$

и одговарајуће $\underset{(\rho)}{\overline{\mathcal{D}}}{}^i_{jmn}$.

На основу једначине (3.1.12) имамо да важи

$$\underset{(\rho)}{\overline{\mathcal{W}}}{}^i_{jmn} = \underset{(\rho)}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn}$$

где је

$$\underset{(\rho)}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn} = K^i_{jmn} - \underset{(\rho)}{\mathcal{D}}{}^i_{jmn} \tag{3.1.14}$$

и одговарајуће $\underset{(\rho)}{\overline{\mathcal{W}}}{}^i_{jmn}$ за $\underset{(\rho)}{\mathcal{D}}{}^i_{jmn}$ задато једначином (3.1.13).

Теорема 3.1.2. *Нека је $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ пресликавање простора $\mathbb{GA}_N$ несиметричне афине конексије.*

Геометријски објекат $\overset{0}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn}$, дат једначинама (3.1.8, 3.1.9), је инваријанта Вејловог типа пресликавања f добијена на основу трансформације тензора кривине R^i_{jmn} придруженог простора $\mathbb{A}_N$.

Скуп чији су елементи фамилије $\underset{(\rho)}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn}$ геометријских објеката, дате једначином (3.1.14), фамилија је инваријанти Вејловог типа пресликавања f добијена на основу трансформације фамилије тензора кривине K^i_{jmn} простора $\mathbb{GA}_N$. □

Последица 3.1.1. *Нека је $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ еквиторзионо пресликавање простора $\mathbb{GA}_N$ несиметричне афине конексије. Скуп чији су елементи фамилије*

$$\underset{(\rho)}{\widetilde{\mathcal{W}}}{}^i_{jmn} = K^i_{jmn} - \underset{(\rho)}{\widetilde{\mathcal{D}}}{}^i_{jmn}, \tag{3.1.15}$$

где је

$$\begin{aligned}
\underset{(\rho)}{\widetilde{\mathcal{D}}}{}^i_{jmn} &= \underset{(2)}{\omega}{}^i_{jm|n} - \underset{(2)}{\omega}{}^i_{jn|m} - \underset{(2)}{\omega}{}^\alpha_{jm}\underset{(2)}{\omega}{}^i_{\alpha n} + \underset{(2)}{\omega}{}^\alpha_{jn}\underset{(2)}{\omega}{}^i_{\alpha m}\\
&+ u\big(\underset{(p_1)}{\omega}{}^i_{\alpha n}\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{jm} - \underset{(q_1)}{\omega}{}^\alpha_{jn}\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha m} - \underset{(r_1)}{\omega}{}^\alpha_{mn}\underset{\vee}{L}{}^i_{j\alpha}\big)\\
&+ u'\big(\underset{(p_2)}{\omega}{}^i_{\alpha m}\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{jn} - \underset{(q_2)}{\omega}{}^\alpha_{jm}\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha n} - \underset{(r_2)}{\omega}{}^\alpha_{mn}\underset{\vee}{L}{}^i_{j\alpha}\big),
\end{aligned}$$

скуп је фамилија инваријанти пресликавања f. □

Последица 3.1.2. *Елементи скупа чији су елементи фамилије инваријанти* (3.1.14) *и инваријанта* (3.1.8) *задовољавају једначину*

$$\begin{aligned}
\underset{(\rho)}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn} &= \overset{0}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn} + u\underset{\vee}{L}{}^i_{jm|n} + u'\underset{\vee}{L}{}^i_{jn|m} + v\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{jm}\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha n} + v'\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{jn}\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha m} + w\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{mn}\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha j}\\
&- u\big(\underset{(p_1)}{\omega}{}^i_{\alpha n}(\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{jm} - \tau^\alpha_{jm}) - \underset{(q_1)}{\omega}{}^\alpha_{jn}(\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha m} - \tau^i_{\alpha m}) - \underset{(r_1)}{\omega}{}^\alpha_{mn}(\underset{\vee}{L}{}^i_{j\alpha} - \tau^i_{j\alpha})\big)\\
&- u'\big(\underset{(p_2)}{\omega}{}^i_{\alpha m}(\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{jn} - \tau^\alpha_{jn}) - \underset{(q_2)}{\omega}{}^\alpha_{jm}(\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha n} - \tau^i_{\alpha n}) - \underset{(r_2)}{\omega}{}^\alpha_{mn}(\underset{\vee}{L}{}^i_{j\alpha} - \tau^i_{j\alpha})\big) \qquad (3.1.16)\\
&- v\big(\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{jm}\tau^i_{\alpha n} + \underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha n}\tau^\alpha_{jm} - \tau^\alpha_{jm}\tau^i_{\alpha n}\big) - v'\big(\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{jn}\tau^i_{\alpha m} + \underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha m}\tau^\alpha_{jn} - \tau^\alpha_{jn}\tau^i_{\alpha m}\big)\\
&- w\big(\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{mn}\tau^i_{\alpha j} + \underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha j}\tau^\alpha_{mn} - \tau^\alpha_{mn}\tau^i_{\alpha j}\big),
\end{aligned}$$

где су u, u', v, v', w *реалне константе.* □

Последица 3.1.3. *Елементи скупа фамилија инваријанти* (3.1.15) *и инваријанта* (3.1.8) *задовољавају једначину*

$$\begin{aligned}
\underset{(\rho)}{\widetilde{\mathcal{W}}}{}^i_{jmn} &= \overset{0}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn} + u\underset{\vee}{L}{}^i_{jm|n} + u'\underset{\vee}{L}{}^i_{jn|m} + v\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{jm}\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha n} + v'\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{jn}\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha m} + w\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{mn}\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha j}\\
&- u\big(\underset{(p_1)}{\omega}{}^i_{\alpha n}\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{jm} - \underset{(q_1)}{\omega}{}^\alpha_{jn}\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha m} - \underset{(r_1)}{\omega}{}^\alpha_{mn}\underset{\vee}{L}{}^i_{j\alpha}\big) \qquad (3.1.17)\\
&- u'\big(\underset{(p_2)}{\omega}{}^i_{\alpha m}\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{jn} - \underset{(q_2)}{\omega}{}^\alpha_{jm}\underset{\vee}{L}{}^i_{\alpha n} - \underset{(r_2)}{\omega}{}^\alpha_{mn}\underset{\vee}{L}{}^i_{j\alpha}\big),
\end{aligned}$$

где су u, u', v, v', w *реалне константе.* □

Последица 3.1.4. *Уколико је геометријски објекат*

$$\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} - \overset{\circ}{\mathcal{D}}{}^i_{jmn} \qquad (3.1.18)$$

инваријанта Вејловог типа пресликавања $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ *простора* $\mathbb{GA}_N$ *добијена на основу трансформације тензора кривине* R^i_{jmn} *придруженог* *простора $\mathbb{A}_N$, фамилија геометријских објеката*

$$\begin{aligned}\underset{(\rho)}{\overset{\circ}{W}}{}^i_{jmn} = K^i_{jmn} - \overset{\circ}{\mathcal{D}}{}^i_{jmn} - \underset{(\rho)}{\mathcal{D}}{}^i_{jmn} \\ + \underset{(2)}{\omega}{}^i_{jm|n} - \underset{(2)}{\omega}{}^i_{jn|m} - \underset{(2)}{\omega}{}^\alpha_{jm}\underset{(2)}{\omega}{}^i_{\alpha n} + \underset{(2)}{\omega}{}^\alpha_{jn}\underset{(2)}{\omega}{}^i_{\alpha m}\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

јесте фамилија инваријанти Вејловог типа пресликавања f добијена на основу трансформације фамилије тензора кривине (1.3.54). □

Последица 3.1.5. *Уколико је геометријски објекат* (3.1.18) *инваријанта Вејловог типа еквиторзионог пресликавања $f : \mathbb{GA}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ простора $\mathbb{GA}_N$ добијена на основу трансформације тензора кривине R^i_{jmn} придруженог простора $\mathbb{A}_N$, фамилија геометријских објеката*

$$\begin{aligned}\underset{(\rho)}{\overset{\circ}{\widetilde{W}}}{}^i_{jmn} = K^i_{jmn} - \overset{\circ}{\mathcal{D}}{}^i_{jmn} - \underset{(\rho)}{\widetilde{\mathcal{D}}}{}^i_{jmn} \\ + \underset{(2)}{\omega}{}^i_{jm|n} - \underset{(2)}{\omega}{}^i_{jn|m} - \underset{(2)}{\omega}{}^\alpha_{jm}\underset{(2)}{\omega}{}^i_{\alpha n} + \underset{(2)}{\omega}{}^\alpha_{jn}\underset{(2)}{\omega}{}^i_{\alpha m}\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

јесте елемент скупа фамилија инваријанти Вејловог типа пресликавања f добијена на основу трансформације фамилије тензора кривине K^i_{jmn} дате једначином (1.3.54). □

Последица 3.1.6. *Фамилије инваријанти* (3.1.19) *и инваријанта* (3.1.18) *задовољавају једначину*

$$\begin{aligned}\underset{(\rho)}{\overset{\circ}{W}}{}^i_{jmn} = \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn} + uL^i_{\underset{\vee}{jm}|n} + u'L^i_{\underset{\vee}{jn}|m} + vL^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}} + v'L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}} + wL^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}L^i_{\underset{\vee}{\alpha j}} \\ - \underset{(\rho)}{\mathcal{D}}{}^i_{jmn} + \underset{(2)}{\omega}{}^i_{jm|n} - \underset{(2)}{\omega}{}^i_{jn|m} - \underset{(2)}{\omega}{}^\alpha_{jm}\underset{(2)}{\omega}{}^i_{\alpha n} + \underset{(2)}{\omega}{}^\alpha_{jn}\underset{(2)}{\omega}{}^i_{\alpha m}.\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

Фамилије инваријанти (3.1.20) *и инваријанта* (3.1.18) *задовољавају једначину*

$$\begin{aligned}\underset{(\rho)}{\overset{\circ}{\widetilde{W}}}{}^i_{jmn} = \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn} + uL^i_{\underset{\vee}{jm}|n} + u'L^i_{\underset{\vee}{jn}|m} + vL^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}L^i_{\underset{\vee}{\alpha n}} + v'L^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}L^i_{\underset{\vee}{\alpha m}} + wL^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}L^i_{\underset{\vee}{\alpha j}} \\ - \underset{(\rho)}{\widetilde{\mathcal{D}}}{}^i_{jmn} + \underset{(2)}{\omega}{}^i_{jm|n} - \underset{(2)}{\omega}{}^i_{jn|m} - \underset{(2)}{\omega}{}^\alpha_{jm}\underset{(2)}{\omega}{}^i_{\alpha n} + \underset{(2)}{\omega}{}^\alpha_{jn}\underset{(2)}{\omega}{}^i_{\alpha m}.\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

Величине u, u', v, v', w у претходним једначинама су реалне константе. □

Инваријанта $\overset{0}{\mathcal{W}}{}^{i}_{jmn}$, задата једначинама (3.1.8, 3.1.9), је **придружена инваријанта Вејловог типа**. Инваријанта $\underset{(\rho)}{\mathcal{W}}{}^{i}_{jmn}$, задата једначином (3.1.14), је **општа инваријанта Вејловог типа**. Инваријанта $\underset{(\rho)}{\widetilde{\mathcal{W}}}{}^{i}_{jmn}$, задата једначином (3.1.15), је **еквиторзиона инваријанта Вејловог типа**. Инваријанте $\underset{(\rho)}{\overset{0}{W}}{}^{i}_{jmn}$ и $\underset{(\rho)}{\overset{0}{\widetilde{W}}}{}^{i}_{jmn}$ задате једначинама (3.1.21, 3.1.22) су **изведена општа инваријанта Вејловог типа** и **изведена еквиторзиона инваријанта Вејловог типа** (на основу инваријанте $\overset{0}{\mathcal{W}}{}^{i}_{jmn}$).

Примедба 3.1.3. *У случају простора симетричне афине конексије, општа инваријанта Вејловог типа и еквиторзиона инваријанта Вејловог типа* (3.1.14, 3.1.15) *се своде на придружену инваријанту Вејловог типа* (3.1.8). *У том случају, изведена општа инваријанта Вејловог типа и изведена еквиторзиона инваријанта Вејловог типа* (3.1.19, 3.1.20) *се своде на инваријанту* (3.1.18).

Примедба 3.1.4. *Изведена општа инваријанта Вејловог типа и изведена еквиторзиона инваријанта Вејловог типа на основу инваријанте* (3.1.8) *су општа инваријанта Вејловог типа и еквиторзиона инваријанта Вејловог типа.*

Примедба 3.1.5. *Уколико желимо да директно добијемо општу инваријанту Вејловог типа и еквиторзиону инваријанту Вејловог типа, користићемо једначине* (3.1.14, 3.1.15). *Уколико желимо да уопштимо постојећу инваријанту Вејловог типа, користићемо једначине* (3.1.21, 3.1.22).

Пример 3.1.1. *Нека је* $f : \mathbb{A}_N \to \overline{\mathbb{A}}_N$ *скоро геодезијско пресликавање првог типа одређено једначином* (1.6.5) *где је* $b_j = 0$ [2–7, 33, 70]. *Основна једначина тог пресликавања је*

$$P^i_{\underline{jm}|n} + P^i_{\underline{nm}|j} + P^\alpha_{\underline{jm}} P^i_{\underline{\alpha n}} + P^\alpha_{\underline{nm}} P^i_{\underline{\alpha j}} = \delta^i_j a_{mn} + \delta^i_n a_{mj}, \tag{3.1.23}$$

где је $a_{ij} = a_{ji}$. *Заменом индекса* m *и* n *у претходној једначини добијамо да је*

$$P^i_{\underline{jn}|m} + P^i_{\underline{mn}|j} + P^\alpha_{\underline{jn}} P^i_{\underline{\alpha m}} + P^\alpha_{\underline{mn}} P^i_{\underline{\alpha j}} = \delta^i_j a_{nm} + \delta^i_m a_{nj}. \tag{3.1.24}$$

Одузимањем једначина (3.1.23)−(3.1.24) *добијамо да је*

$$P^i_{\underline{jm}|n} - P^i_{\underline{jn}|m} = -P^\alpha_{\underline{jm}} P^i_{\underline{\alpha n}} + P^\alpha_{\underline{jn}} P^i_{\underline{\alpha m}} + \delta^i_n a_{jm} - \delta^i_m a_{jn}. \tag{3.1.25}$$

На основу једначине (3.1.9), *а на основу инваријантности* $\overline{P}^\alpha_{\underline{jm}} \overline{P}^i_{\underline{\alpha n}} = P^\alpha_{\underline{jm}} P^i_{\underline{\alpha n}}$, *добијамо да је геометријски објекат*

$$\overset{0}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} + \frac{1}{2}\delta^i_n a_{jm} - \frac{1}{2}\delta^i_m a_{jn}, \tag{3.1.26}$$

за геометријски објекат a_{jk} *коришћен у једначинама* (3.1.23, 3.1.24), *инваријанта пресликавања* f.

Контракцијом једнакости

$$\overline{\overset{0}{\mathcal{W}}}{}^i_{jmn} - \overset{0}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn} = \overline{R}^i_{jmn} - R^i_{jmn} + \frac{1}{2}\delta^i_n \big(\overline{a}_{jm} - a_{jm}\big) - \frac{1}{2}\delta^i_m \big(\overline{a}_{jn} - a_{jn}\big) = 0,$$

за $\overline{a}_{jm} \overset{f}{\leftarrow} a_{jm}$, *по индексима* i *и* n *добијамо да је*

$$\overline{R}_{jm} - R_{jm} + \frac{N-1}{2}\big(\overline{a}_{jm} - a_{jm}\big) = 0. \tag{3.1.27}$$

Одатле следи да је геометријски објекат

$$\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn} = R^i_{jmn} + \frac{2}{N-1}\delta^i_{[m} R_{jn]}, \tag{3.1.28}$$

инваријанта пресликавања f.

Пример 3.1.2. [92] *Нека је генералисани Риманов простор* $\mathbb{GR}_3$ *одређен несиметричном матрицом*

$$\big(g_{ij}\big) = \big(g_{ij}(x^1, x^2, x^3)\big) = \begin{bmatrix} 1 & e^{x^1} & -e^{-x^2} \\ -e^{x^1} & 1 & -e^{x^3} \\ e^{-x^2} & e^{x^3} & 1 \end{bmatrix}$$

и нека је $f : \mathbb{GR}_3 \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_3$ *еквиторзионо геодезијско пресликавање тог простора.*

Симетрични и антисиметрични део метричког тензора $\big(g_{ij}\big)$ *су, редом:*

$$\big(g_{\underline{ij}}\big)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad и\quad \big(g_{\underset{\vee}{ij}}\big)=\begin{bmatrix}0&e^{x^1}&-e^{-x^2}\\-e^{x^1}&0&-e^{x^3}\\e^{-x^2}&e^{x^3}&0\end{bmatrix}.$$

Симетрични део $\big(g_{\underline{ij}}\big)$ *метричког тензора* $\big(g_{ij}\big)$ *је константа. Из тог разлога, тензор кривине* R^i_{jmn} *придруженог простора* $\mathbb{R}_3$ *је једнак* 0*. Штавише, координате Вејловог пројективног тензора* W^i_{jmn} *придруженог простора* $\mathbb{R}_3$ *су* $W^i_{jmn}=0$*. Координате тензора торзије* $\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}$ *афине конексије простора* $\mathbb{GR}_3$ *су*

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{\underset{\vee}{23}}=\frac12e^{-x^2},\Gamma^1_{\underset{\vee}{32}}=-\frac12e^{-x^2},\Gamma^2_{\underset{\vee}{13}}=\frac12e^{-x^2},\\ \Gamma^2_{\underset{\vee}{31}}=-\frac12e^{-x^2},\Gamma^3_{\underset{\vee}{12}}=\frac12e^{-x^2},\Gamma^3_{\underset{\vee}{21}}=-\frac12e^{-x^2}\end{aligned}$$

и $\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}=0,i,j,k=1,2,3,$ *у свим осталим случајевима.*

Намењено примени овом примеру, координате $\underset{1}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn},\underset{2}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn},\underset{3}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn},$ $i,j,m,n=1,2,3,$ *инваријанти пресликавања* f *датих једначинама* (2.1.52, 2.1.53, 2.1.54) *су:*

$$\begin{aligned}\underset{1}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn}&=W^i_{jmn}+\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm},n}-\Gamma^i_{\underset{\vee}{jn},m}+\Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}-\Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha m}},\\ \underset{2}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn}&=W^i_{jmn}-\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm},n}+\Gamma^i_{\underset{\vee}{jn},m}+\Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}-\Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha m}},\\ \underset{3}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn}&=W^i_{jmn}+\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm},n}+\Gamma^i_{\underset{\vee}{jn},m}-\Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}+\Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}-2\Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha j}},\end{aligned}$$

за претходно добијене $\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}$. *Једноставним израчунавањем добијамо да је*:

$$\underset{1}{\mathcal{W}}:\begin{cases}\underset{1}{\mathcal{W}}{}^1_{223}=\underset{1}{\mathcal{W}}{}^2_{123}=\underset{1}{\mathcal{W}}{}^2_{312}=\underset{1}{\mathcal{W}}{}^3_{221}=\frac{1}{2}e^{-x^2}\\ \underset{1}{\mathcal{W}}{}^1_{221}=\underset{1}{\mathcal{W}}{}^1_{331}=\underset{1}{\mathcal{W}}{}^2_{112}=\underset{1}{\mathcal{W}}{}^2_{332}=\underset{1}{\mathcal{W}}{}^3_{131}=\underset{1}{\mathcal{W}}{}^3_{232}=\frac{1}{4}e^{-2x^2}\\ \underset{1}{\mathcal{W}}{}^1_{232}=\underset{1}{\mathcal{W}}{}^2_{132}=\underset{1}{\mathcal{W}}{}^2_{321}=\underset{1}{\mathcal{W}}{}^3_{212}=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\\ \underset{1}{\mathcal{W}}{}^1_{212}=\underset{1}{\mathcal{W}}{}^1_{313}=\underset{1}{\mathcal{W}}{}^2_{121}=\underset{1}{\mathcal{W}}{}^2_{323}=\underset{1}{\mathcal{W}}{}^3_{113}=\underset{1}{\mathcal{W}}{}^3_{223}=-\frac{1}{4}e^{-2x^2}\end{cases}$$

$$\underset{2}{\mathcal{W}}:\begin{cases}\underset{2}{\mathcal{W}}{}^1_{232}=\underset{2}{\mathcal{W}}{}^2_{132}=\underset{2}{\mathcal{W}}{}^2_{321}=\underset{2}{\mathcal{W}}{}^3_{212}=\frac{1}{2}e^{-x^2}\\ \underset{2}{\mathcal{W}}{}^1_{221}=\underset{2}{\mathcal{W}}{}^1_{331}=\underset{2}{\mathcal{W}}{}^2_{112}=\underset{2}{\mathcal{W}}{}^2_{332}=\underset{2}{\mathcal{W}}{}^3_{131}=\underset{2}{\mathcal{W}}{}^3_{232}=\frac{1}{4}e^{-2x^2}\\ \underset{2}{\mathcal{W}}{}^1_{223}=\underset{2}{\mathcal{W}}{}^2_{123}=\underset{2}{\mathcal{W}}{}^2_{312}=\underset{2}{\mathcal{W}}{}^3_{221}=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\\ \underset{2}{\mathcal{W}}{}^1_{212}=\underset{2}{\mathcal{W}}{}^1_{313}=\underset{2}{\mathcal{W}}{}^2_{121}=\underset{2}{\mathcal{W}}{}^2_{323}=\underset{2}{\mathcal{W}}{}^3_{113}=\underset{2}{\mathcal{W}}{}^3_{223}=-\frac{1}{4}e^{-2x^2}\end{cases}$$

$$\underset{3}{\mathcal{W}}:\begin{cases}\underset{3}{\mathcal{W}}{}^1_{322}=e^{-x^2},\underset{3}{\mathcal{W}}{}^3_{122}=-e^{-x^2},\underset{3}{\mathcal{W}}{}^1_{212}=\underset{3}{\mathcal{W}}{}^2_{121}=\underset{3}{\mathcal{W}}{}^3_{131}=\underset{3}{\mathcal{W}}{}^3_{232}=\frac{3}{4}e^{-2x^2}\\ \underset{3}{\mathcal{W}}{}^2_{312}=\underset{3}{\mathcal{W}}{}^2_{321}=\frac{1}{2}e^{-x^2},\\ \underset{3}{\mathcal{W}}{}^1_{221}=\underset{3}{\mathcal{W}}{}^1_{331}=\underset{3}{\mathcal{W}}{}^2_{112}=\underset{3}{\mathcal{W}}{}^2_{332}=\frac{1}{4}e^{-2x^2}\\ \underset{3}{\mathcal{W}}{}^1_{223}=\underset{3}{\mathcal{W}}{}^2_{232}=\underset{3}{\mathcal{W}}{}^2_{123}=\underset{3}{\mathcal{W}}{}^2_{132}=\underset{3}{\mathcal{W}}{}^3_{212}=\underset{3}{\mathcal{W}}{}^3_{221}=\underset{3}{\mathcal{W}}{}^3_{311}=\underset{3}{\mathcal{W}}{}^3_{322}=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\\ \underset{3}{\mathcal{W}}{}^1_{313}=\underset{3}{\mathcal{W}}{}^2_{323}=\underset{3}{\mathcal{W}}{}^3_{113}=\underset{3}{\mathcal{W}}{}^3_{223}=-\frac{1}{4}e^{-2x^2}\end{cases}$$

и $\underset{\theta}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn}=0,\theta,i,j,m,n=1,2,3,$ *у свим осталим случајевима.*

3.2 Инваријанте пресликавања простора $\mathbb{GR}_\mathbf{N}$

Тензор кривине придруженог простора $\mathbb{R}_N$ је

$$R^i_{jmn}=\Gamma^i_{\underline{jm},n}-\Gamma^i_{\underline{jn},m}+\Gamma^\alpha_{\underline{jm}}\Gamma^i_{\underline{\alpha n}}-\Gamma^\alpha_{\underline{jn}}\Gamma^i_{\underline{\alpha m}}. \tag{3.2.1}$$

На основу друге од једначина (1.4.5) добијамо да је тензор торзије $\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}$ афине конексије простора $\mathbb{GR}_N$, дат једначином (1.4.7), једнак

$$\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}=\frac{1}{2}g^{\underline{i\alpha}}\big(g_{\underset{\vee}{j\alpha},k}-g_{\underset{\vee}{k\alpha},j}-g_{\underset{\vee}{jk},\alpha}\big). \tag{3.2.2}$$

Пропозиција 3.2.1. *Тензор торзије афине конексије простора* $\mathbb{GR}_N$ *једнак је*

$$\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}} = \frac{1}{2} g^{\underline{i\alpha}} \big(g_{\underset{\vee}{j\alpha}|k} - g_{\underset{\vee}{k\alpha}|j} - g_{\underset{\vee}{jk}|\alpha} \big). \tag{3.2.3}$$

Доказ. Имамо да је

$$\begin{aligned} g_{\underset{\vee}{ji}|k} - g_{\underset{\vee}{ki}|j} - g_{\underset{\vee}{jk}|i} &= g_{\underset{\vee}{ji},k} - g_{\underset{\vee}{ki},j} - g_{\underset{\vee}{jk},i} \\ &\underbrace{-\Gamma^\alpha_{\underline{jk}} g_{\underset{\vee}{\alpha i}} - \Gamma^\alpha_{\underline{ik}} g_{\underset{\vee}{j\alpha}} + \Gamma^\alpha_{\underline{kj}} g_{\underset{\vee}{\alpha i}} + \Gamma^\alpha_{\underline{ij}} g_{\underset{\vee}{k\alpha}} + \Gamma^\alpha_{\underline{ji}} g_{\underset{\vee}{\alpha k}} + \Gamma^\alpha_{\underline{ki}} g_{\underset{\vee}{j\alpha}}}_{=0}. \end{aligned}$$

Композицијом ове једначине са $\frac{1}{2} g^{\underline{ip}}$ и коришћењем једначине (1.4.5) доказујемо да ова пропозиција важи. □

Фамилија тензора кривине простора $\mathbb{GR}_N$ аналогна фамилији (1.3.54) је

$$K^i_{jmn} = R^i_{jmn} + u\Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}|n} + u'\Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}|m} + v\Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha n}} + v'\Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha m}} + w\Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{mn}}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha j}}, \tag{3.2.4}$$

где су u, u', v, v', w реалне константе.

3.2.1 Инваријанте специјалних скоро геодезијских пресликавања другог типа

У овом одељку ћемо приказати резултате добијене у чланку (Весић, Станковић, [97]).

Скоро геодезијско пресликавање $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ другог типа s-те врсте, $s \in \{1, 2\}$, које задовољава особину реципроцитета одређено је системом једначина

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \psi_j \delta^i_k + \psi_k \delta^i_j + 2F^i_j \sigma_k + 2F^i_k \sigma_j + \xi^i_{jk}, \tag{3.2.5}$$

$$F^i_{j\underset{s}{|}k} + F^i_{k\underset{s}{|}j} + (-1)^{s-1}\big(\xi^i_{\alpha j} F^\alpha_k + \xi^i_{\alpha k} F^\alpha_j\big) = F^i_k \mu_j + F^i_j \mu_k + \nu_j \delta^i_k + \nu_k \delta^i_j, \tag{3.2.6}$$

$$F^i_\alpha F^\alpha_j = e\delta^i_j, \quad (e = \pm 1, 0), \tag{3.2.7}$$

где су $\psi_j, \sigma_j, \mu_j, \nu_j$ коваријантни вектори, F^i_j афинорна структура и $\xi^i_{jk} = -\xi^i_{kj}$. Основне једначине инверзног пресликавања $f^{-1} : \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N \to \mathbb{GR}_N$

су

$$\Gamma^i_{jk} = \overline{\Gamma}^i_{jk} + \overline{\psi}_j\delta^i_k + \overline{\psi}_k\delta^i_j + 2\overline{F}^i_j\overline{\sigma}_k + 2\overline{F}^i_k\overline{\sigma}_j + \overline{\xi}^i_{jk}, \tag{3.2.8}$$

$$\overline{F}^i_{\underset{s}{j||k}} + \overline{F}^i_{\underset{s}{k||j}} + (-1)^{s-1}\big(\overline{\xi}^i_{\alpha j}\overline{F}^\alpha_k + \overline{\xi}^i_{\alpha k}\overline{F}^\alpha_j\big) = \overline{F}^i_k\overline{\mu}_j + \overline{F}^i_j\overline{\mu}_k + \overline{\nu}_j\delta^i_k + \overline{\nu}_k\delta^i_j, \tag{3.2.9}$$

$$\overline{F}^i_\alpha\overline{F}^\alpha_j = e\delta^i_j, \quad (e = \pm 1, 0). \tag{3.2.10}$$

Размотримо скоро геодезијска пресликавања простора $\mathbb{GR}_N$ другог типа s-те врсте која задовољавају особину реципроцитета и која су одређена афинорном структуром

$$F^i_j = \frac{1}{2}g^{\underline{i\alpha}}g_{\underset{\vee}{j\alpha}}.$$

Та пресликавања су елементи класе $\underset{s}{\widetilde{\pi}}{}^F_2$. Овако задат афинор задовољава једначину

$$F^\alpha_\alpha = F = g^{\underline{\alpha\beta}}g_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} = 0. \tag{3.2.11}$$

На основу једначина (3.2.5) и (3.2.8) закључујемо да је

$$\overline{F}^i_j = F^i_j, \quad \overline{\sigma}_j = -\sigma_j, \quad \overline{\psi}_j = -\psi_j, \quad \overline{\xi}^i_{jk} = -\xi^i_{jk}. \tag{3.2.12}$$

Из прве и друге од ових једнакости следи да важи

$$2F^i_j\sigma_k = F^i_j\sigma_k - \overline{F}^i_j\overline{\sigma}_k,$$

тј. основна једначина (3.2.5) се трансформише у

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j - \overline{F}^i_j\overline{\sigma}_k - \overline{F}^i_k\overline{\sigma}_j + F^i_j\sigma_k + F^i_k\sigma_j + \xi^i_{jk}.$$

Контракцијом ове једначине по индексима i и k, на основу једначине (3.2.11) и коришћењем особине (1.4.7) по којој се тензор торзије $\Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{j\alpha}}$ анулира долазимо до закључка да је

$$\psi_j = \frac{1}{N+1}\big(\overline{\Gamma}^\alpha_{\underline{j\alpha}} + \overline{F}^\alpha_j\overline{\sigma}_\alpha\big) - \frac{1}{N+1}\big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}} + F^\alpha_j\sigma_\alpha\big).$$

Због тога се, на основу основне једначине (3.2.5), добија да важи

$$\overline{\Gamma}^i_{\underline{jk}} = \Gamma^i_{\underline{jk}} + \underset{(r)}{\overline{\omega}}{}^i_{jk} - \underset{(r)}{\omega}{}^i_{jk}, \tag{3.2.13}$$

$r \in \{1,2\}$, где је

$$\underset{(1)}{\omega}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{\underline{jk}}, \tag{3.2.14}$$

$$\underset{(2)}{\omega}{}^i_{jk} = -F^i_k\sigma_j - F^i_j\sigma_k + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\big(\Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}} + F^\alpha_k\sigma_\alpha\big) + \frac{1}{N+1}\delta^i_k\big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}} + F^\alpha_j\sigma_\alpha\big), \tag{3.2.15}$$

и одговарајуће $\underset{(1)}{\overline{\omega}}{}^i_{jk}$ и $\underset{(2)}{\overline{\omega}}{}^i_{jk}$.

Како је $\overline{F}^i_j = F^i_j$, то на основу једначине (3.2.3) следи да важи

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^i_{\underset{\vee}{jk}} - \Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}} &= \overline{\Gamma}^i_{\underline{\alpha k}}\overline{F}^\alpha_j - \overline{\Gamma}^i_{\underline{\alpha j}}\overline{F}^\alpha_k - \Gamma^i_{\underline{\alpha k}}F^\alpha_j + \Gamma^i_{\underline{\alpha j}}F^\alpha_k - \frac{1}{2}\big(\overline{g}^{i\alpha}\overline{F}_{jk\|\alpha} - g^{\underline{i\alpha}}g_{\underset{\vee}{jk}|\alpha}\big)\\ &= P^i_{\underline{\alpha k}}F^\alpha_j - P^i_{\underline{\alpha j}}F^\alpha_k - \frac{1}{2}\big(\overline{g}^{\underline{i\alpha}}\overline{g}_{\underset{\vee}{jk}\|\alpha} - g^{\underline{i\alpha}}g_{\underset{\vee}{jk}|\alpha}\big).\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Докажимо наредну пропозицију.

Пропозиција 3.2.2. *Нека је $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ скоро геодезијско пресликавање типа $\underset{s}{\pi}{}^F_2$, $s \in \{1,2\}$.*

Кристофелови симболи $\overline{\Gamma}^i_{\underline{jk}}$ и $\Gamma^i_{\underline{jk}}$ задовољавају једначину

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^i_{\underline{jk}} = \Gamma^i_{\underline{jk}} &+ \overline{F}^i_k\overline{\sigma}_j + \overline{F}^i_j\overline{\sigma}_k - \frac{1}{N+1}\big(\delta^i_j(\overline{\Gamma}^\alpha_{\underline{k\alpha}} + \overline{F}^\alpha_k\overline{\sigma}_\alpha) + \delta^i_k(\overline{\Gamma}^\alpha_{\underline{j\alpha}} + \overline{F}^\alpha_j\overline{\sigma}_\alpha)\big)\\ &- F^i_k\sigma_j - F^i_j\sigma_k + \frac{1}{N+1}\big(\delta^i_j(\Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}} + F^\alpha_k\sigma_\alpha) + \delta^i_k(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}} + F^\alpha_j\sigma_\alpha)\big).\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Тензори торзије $\overline{\Gamma}^i_{\underset{\vee}{jk}}$ и $\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}$ еквивалентно задовољавају наредне једначине

$$\overline{\Gamma}^i_{\underset{\vee}{jk}} = \Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}} + \underset{(p)}{\overline{\tau}}{}^i_{jk} - \underset{(p)}{\tau}{}^i_{jk}, \tag{3.2.18}$$

$p \in \{1, \dots, 4\}$, *где је*

$$\underset{(1)}{\tau}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{\underline{\alpha k}} F^\alpha_j - \Gamma^i_{\underline{\alpha j}} F^\alpha_k - \frac{1}{2} g^{\underline{i\alpha}} g_{\underset{\vee}{jk}|\alpha}, \tag{3.2.19}$$

$$\begin{aligned} \underset{(2)}{\tau}{}^i_{jk} = &\frac{1}{N+1}\big(\delta^i_k(\Gamma^\beta_{\underline{\alpha\beta}} F^\alpha_j + (N+1)e\sigma_j) - \delta^i_j(\Gamma^\beta_{\underline{\alpha\beta}} F^\alpha_k + (N+1)e\sigma_k)\big) \\ &- \frac{1}{N+1}\big(F^i_j(\Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}} + F^\alpha_k\sigma_\alpha) - F^i_k(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}} + F^\alpha_j\sigma_\alpha)\big) \\ &+ (F^i_k F^\alpha_j - F^i_j F^\alpha_k)\sigma_\alpha - \frac{1}{2} g^{\underline{i\alpha}} g_{\underset{\vee}{jk}|\alpha}, \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

$$\begin{aligned} \underset{(3)}{\tau}{}^i_{jk} = &e\delta^i_k\sigma_j - \frac{1}{N+1}\delta^i_j\big(\Gamma^\beta_{\underline{\alpha\beta}} F^\alpha_k + e\sigma_k\big) \\ &+ \Gamma^i_{\underline{\alpha k}} F^\alpha_j + F^i_j F^\alpha_k\sigma_\alpha - \frac{1}{N+1} F^i_k\big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}} + F^\alpha_j\sigma_\alpha\big) - \frac{1}{2} g^{\underline{i\alpha}} g_{\underset{\vee}{jk}|\alpha}, \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

$$\begin{aligned} \underset{(4)}{\tau}{}^i_{jk} = &-e\delta^i_j\sigma_k + \frac{1}{N+1}\delta^i_k\big(\Gamma^\beta_{\underline{\alpha\beta}} F^\alpha_j + e\sigma_j\big) \\ &- \Gamma^i_{\underline{\alpha j}} F^\alpha_k - F^i_k F^\alpha_j\sigma_\alpha + \frac{1}{N+1} F^i_j\big(\Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}} + F^\alpha_k\sigma_\alpha\big) - \frac{1}{2} g^{\underline{i\alpha}} g_{\underset{\vee}{jk}|\alpha}. \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

Доказ. На основу једначина (3.2.13, 3.2.16) добијамо да је

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}{}^i_{\underset{\vee}{jk}} = &\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}} + \underset{(p)}{\overline{\omega}}{}^i_{\alpha k}\overline{F}{}^\alpha_j - \underset{(q)}{\overline{\omega}}{}^i_{\alpha j}\overline{F}{}^\alpha_k - \frac{1}{2}\overline{g}^{i\alpha}\overline{F}_{jk||\alpha} \\ &- \underset{(p)}{\omega}{}^i_{\alpha k} F^\alpha_j + \underset{(q)}{\omega}{}^i_{\alpha j} F^\alpha_k + \frac{1}{2} g^{i\alpha} F_{jk|\alpha}, \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

$p, q \in \{1, 2\}$, као и

$$\underset{(2)}{\omega}{}^i_{\alpha k} F^\alpha_j = -e\delta^i_j\sigma_k - F^i_k F^\alpha_j\sigma_\alpha + \frac{1}{N+1}\delta^i_k\big(\Gamma^\beta_{\underline{\alpha\beta}} F^\alpha_j + e\sigma_j\big) + \frac{1}{N+1} F^i_j(\Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}} + F^\alpha_k\sigma_\alpha).$$

Ти резултати, заједно са једначинама (3.2.14, 3.2.15), доказују да ова пропозиција важи. □

На основу једначина (3.1.4, 3.1.5, 3.1.6) као и (3.2.14, 3.2.15, 3.2.19–3.2.22) имамо да важи наредна лема.

Лема 3.2.1. *Нека је* $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ *скоро геодезијско пресликавање типа* $\underset{s}{\pi}{}^F_2$, $s \in \{1, 2\}$. *Геометријски објекти*

$$
\begin{aligned}
\underset{(1)}{\mathcal{T}}{}^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk} + F^i_k\sigma_j + F^i_j\sigma_k - \Gamma^i_{\underline{\alpha k}}F^\alpha_j + \Gamma^i_{\underline{\alpha j}}F^\alpha_k + \frac{1}{2}g^{\underline{i\alpha}}g_{\underset{\vee}{jk}|\alpha} \\
&\quad - \frac{1}{N+1}\delta^i_j\big(\Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}} + F^\alpha_k\sigma_\alpha\big) - \frac{1}{N+1}\delta^i_k\big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}} + F^\alpha_j\sigma_\alpha\big),
\end{aligned}
\tag{3.2.24}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{(2)}{\mathcal{T}}{}^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk} + F^i_k\sigma_j + F^i_j\sigma_k - (F^i_kF^\alpha_j - F^i_jF^\alpha_k)\sigma_\alpha + \frac{1}{2}g^{\underline{i\alpha}}g_{\underset{\vee}{jk}|\alpha} \\
&\quad + \frac{1}{N+1}F^i_j(\Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}} + F^\alpha_k\sigma_\alpha) - \frac{1}{N+1}F^i_k(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}} + F^\alpha_j\sigma_\alpha) \\
&\quad + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\big(\Gamma^\beta_{\underline{\alpha\beta}}F^\alpha_k + (N+1)e\sigma_k - \Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}} - F^\alpha_k\sigma_\alpha\big) \\
&\quad - \frac{1}{N+1}\delta^i_k\big(\Gamma^\beta_{\underline{\alpha\beta}}F^\alpha_j + (N+1)e\sigma_j + \Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}} + F^\alpha_j\sigma_\alpha\big),
\end{aligned}
\tag{3.2.25}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{(3)}{\mathcal{T}}{}^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk} + F^i_k\sigma_j + F^i_j\sigma_k - \Gamma^i_{\underline{\alpha k}}F^\alpha_j - F^i_jF^\alpha_k\sigma_\alpha + \frac{1}{2}g^{\underline{i\alpha}}g_{\underset{\vee}{jk}|\alpha} \\
&\quad + \frac{1}{N+1}F^i_k\big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}} + F^\alpha_j\sigma_\alpha\big) - \frac{1}{N+1}\delta^i_k\big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}} + F^\alpha_j\sigma_\alpha + (N+1)e\sigma_j\big) \\
&\quad + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\big(\Gamma^\beta_{\underline{\alpha\beta}}F^\alpha_k + e\sigma_k - \Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}} - F^\alpha_k\sigma_\alpha\big),
\end{aligned}
\tag{3.2.26}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{(4)}{\mathcal{T}}{}^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk} + F^i_k\sigma_j + F^i_j\sigma_k + \Gamma^i_{\underline{\alpha j}}F^\alpha_k + F^i_kF^\alpha_j\sigma_\alpha + \frac{1}{2}g^{\underline{i\alpha}}g_{\underset{\vee}{jk}|\alpha} \\
&\quad - \frac{1}{N+1}F^i_j\big(\Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}} + F^\alpha_k\sigma_\alpha\big) - \frac{1}{N+1}\delta^i_j\big(\Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}} + F^\alpha_k\sigma_\alpha - (N+1)e\sigma_k\big) \\
&\quad - \frac{1}{N+1}\delta^i_k\big(\Gamma^\beta_{\underline{\alpha\beta}}F^\alpha_j + e\sigma_j + \Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}} + F^\alpha_j\sigma_\alpha\big),
\end{aligned}
\tag{3.2.27}
$$

јесу опште инваријанте Томасовог типа пресликавања f. □

Последица 3.2.1. *Фамилије инваријанти $\{\underset{(p)}{\mathcal{T}}{}^i_{jk}\}_{p\in\{1,2,3,4\}}$, скоро геодезијског пресликавања $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ типа $\underset{s}{\pi}{}^F_2, s \in \{1,2\}$ су линеарно независне без обзира на реални параметар e.*

Доказ. Нека је

$$
\begin{aligned}
&\underset{(1)}{U}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{\underline{jk}}, \quad \underset{(2)}{U}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}}, \quad \underset{(3)}{U}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{\underline{\alpha k}}F^\alpha_j, \quad \underset{(4)}{U}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{\underline{\alpha j}}F^\alpha_k, \quad \underset{(5)}{U}{}^i_{jk} = g^{\underline{i\alpha}}g_{\underset{\vee}{jk}|\alpha}, \\
&\underset{(6)}{U}{}^i_{jk} = F^i_kF^\alpha_j\sigma_\alpha, \quad \underset{(7)}{U}{}^i_{jk} = F^i_jF^\alpha_k\sigma_\alpha, \quad \underset{(8)}{U}{}^i_{jk} = F^i_j\Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}}, \quad \underset{(9)}{U}{}^i_{jk} = F^i_k\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}}, \quad \underset{(10)}{U}{}^i_{jk} = \delta^i_j\Gamma^\beta_{\underline{\alpha\beta}}F^\alpha_k, \\
&\underset{(11)}{U}{}^i_{jk} = \delta^i_k\Gamma^\beta_{\underline{\alpha\beta}}F^\alpha_j, \quad \underset{(12)}{U}{}^i_{jk} = \delta^i_j\sigma_k, \quad \underset{(13)}{U}{}^i_{jk} = \delta^i_k\sigma_j, \quad \underset{(14)}{U}{}^i_{jk} = F^i_k\sigma_j, \quad \underset{(15)}{U}{}^i_{jk} = F^i_j\sigma_k, \\
&\underset{(16)}{U}{}^i_{jk} = \delta^i_j\Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}}, \quad \underset{(17)}{U}{}^i_{jk} = \delta^i_k\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}}, \quad \underset{(18)}{U}{}^i_{jk} = \delta^i_jF^\alpha_k\sigma_\alpha, \quad \underset{(19)}{U}{}^i_{jk} = \delta^i_kF^\alpha_j\sigma_\alpha.
\end{aligned}
$$

Инваријанте $\underset{(p)}{\mathcal{T}}{}^i_{jk}, p = 1, \ldots, 4$, су елементи фамилије

$$\mathcal{T}^i_{jk} = \sum_{p=1}^{4} \sum_{q=1}^{19} \underset{(p)}{a}{}_q \underset{(q)}{U}{}^i_{jk},$$

где су $\underset{(p)}{a}{}_q$ одговарајуће константе, $q \in \{1, \ldots, 21\}, p \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ранг матрице

$$M = \begin{bmatrix} \underset{(1)}{a}{}_1 & \cdots & \underset{(1)}{a}{}_{19} \\ \underset{(2)}{a}{}_1 & \cdots & \underset{(2)}{a}{}_{19} \\ \underset{(3)}{a}{}_1 & \cdots & \underset{(3)}{a}{}_{19} \\ \underset{(4)}{a}{}_1 & \cdots & \underset{(4)}{a}{}_{19} \end{bmatrix}$$

типа 4×19 је 4 за произвољно $e = \pm 1, 0$, што је и требало доказати. □

Последица 3.2.2. *У случају придруженог простора $\mathbb{R}_N$, инваријанте $\underset{(1)}{\mathcal{T}}{}^i_{jk}, \ldots, \underset{(4)}{\mathcal{T}}{}^i_{jk}$ се редукују на пројективну инваријанту Томасовог типа*

$$\begin{aligned} \overset{0}{\mathcal{T}}{}^i_{jk} &= \Gamma^i_{\underline{jk}} + F^i_k \sigma_j + F^i_j \sigma_k \\ &\quad - \frac{1}{N+1} \delta^i_j \big(\Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}} + F^\alpha_k \sigma_\alpha\big) - \frac{1}{N+1} \delta^i_k \big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}} + F^\alpha_j \sigma_\alpha\big), \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

док се инваријанте $\underset{(1)}{\hat{\mathcal{T}}}{}^i_{jk}, \ldots, \underset{(4)}{\hat{\mathcal{T}}}{}^i_{jk}$ своде на тривијалну инваријанту. □

На основу једначине (1.4.9) којом је изражена вредност Кристофеловог симбола $\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}}$ закључујемо да у простору $\mathbb{GR}_N$ важи једнакост

$$\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}|k} = \Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}|j}. \tag{3.2.29}$$

Због тога, и на основу једначина (3.1.8, 3.2.15), важи наредна теорема.

Теорема 3.2.1. *Нека је* $f : \mathbb{G}\mathbb{R}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ *скоро геодезијско пресликавање типа* $\underset{s}{\widetilde{\pi}}_2, s \in \{1,2\}$. *Геометријски објекат*

$$\begin{aligned}\overset{*}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn} = {} & R^i_{jmn} + \big(F^i_m\sigma_j + F^i_j\sigma_m\big)_{|n} - \big(F^i_n\sigma_j + F^i_j\sigma_n\big)_{|m}\\ & + \frac{1}{(N+1)^2}\delta^i_n\Big((N+1)\big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}|m} + F^\alpha_{j|m}\sigma_\alpha - \Gamma^\beta_{\underline{\alpha\beta}}(F^\alpha_m\sigma_j + F^\alpha_j\sigma_m)\big)\\ & \qquad + \Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}}\Gamma^\beta_{\underline{m\beta}} + \Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}}F^\beta_m\sigma_\beta + \Gamma^\alpha_{\underline{m\alpha}}F^\beta_j\sigma_\beta\Big)\\ & - \frac{1}{(N+1)^2}\delta^i_m\Big((N+1)\big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}|n} + F^\alpha_{j|n}\sigma_\alpha - \Gamma^\beta_{\underline{\alpha\beta}}(F^\alpha_n\sigma_j + F^\alpha_j\sigma_n)\big)\\ & \qquad + \Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}}\Gamma^\beta_{\underline{n\beta}} + \Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}}F^\beta_n\sigma_\beta + \Gamma^\alpha_{\underline{n\alpha}}F^\beta_j\sigma_\beta\Big)\\ & - \frac{1}{N+1}\delta^i_j(F^\alpha_{m|n} - F^\alpha_{n|m})\sigma_\alpha,\end{aligned} \tag{3.2.30}$$

је придружена инваријанта Вејловог типа пресликавања f. □

Последица 3.2.3. *Геометријски објекат*

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{W}{}^i_{jmn} = {} & R^i_{jmn} + \big(F^i_m\sigma_j + F^i_j\sigma_m\big)_{|n} - \big(F^i_n\sigma_j + F^i_j\sigma_n\big)_{|m}\\ & + \frac{1}{N-1}\delta^i_n\Big(R_{jm} + \big(F^\alpha_m\sigma_j + F^\alpha_j\sigma_m\big)_{|\alpha} - F^\alpha_j\sigma_{\alpha|m} - F^\alpha_{j|m}\sigma_\alpha\Big)\\ & - \frac{1}{N-1}\delta^i_m\Big(R_{jn} + \big(F^\alpha_n\sigma_j + F^\alpha_j\sigma_n\big)_{|\alpha} - F^\alpha_j\sigma_{\alpha|n} - F^\alpha_{j|n}\sigma_\alpha\Big)\\ & - \frac{1}{N^2-1}\delta^i_n(F^\alpha_{j|m} - F^\alpha_{m|j})\sigma_\alpha + \frac{1}{N^2-1}\delta^i_m(F^\alpha_{j|n} - F^\alpha_{n|j})\sigma_\alpha\\ & + \frac{1}{N+1}\delta^i_j\big(F^\alpha_m\sigma_{\alpha|n} + F^\alpha_{m|n}\sigma_\alpha - F^\alpha_n\sigma_{\alpha|m} - F^\alpha_{n|m}\sigma_\alpha\big),\end{aligned} \tag{3.2.31}$$

је инваријанта скоро геодезијског пресликавања $f : \mathbb{G}\mathbb{R}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ *типа* $\underset{s}{\widetilde{\pi}}{}^F_2$.

Доказ. Контракцијом једнакости $\overset{*}{\overline{\mathcal{W}}}{}^i_{jmn} = \overset{*}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn}$ по индексима i и j добијамо да је

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^\alpha_{\underline{m\alpha}||n} - \overline{\Gamma}^\alpha_{\underline{n\alpha}||m} + (\overline{F}^\alpha_{m||n} - \overline{F}^\alpha_{n||m})\overline{\sigma}_\alpha = {} & \Gamma^\alpha_{\underline{m\alpha}|n} - \Gamma^\alpha_{\underline{n\alpha}|m} + (F^\alpha_{m|n} - F^\alpha_{n|m})\sigma_\alpha\\ & + R^\alpha_{\alpha mn} + F^\alpha_m\sigma_{\alpha|n} + F^\alpha_{m|n}\sigma_\alpha - F^\alpha_n\sigma_{\alpha|m} - F^\alpha_{n|m}\sigma_\alpha\\ & - \overline{R}^\alpha_{\alpha mn} - \overline{F}^\alpha_m\overline{\sigma}_{\alpha||n} - \overline{F}^\alpha_{m||n}\overline{\sigma}_\alpha + \overline{F}^\alpha_n\overline{\sigma}_{\alpha||m} + \overline{F}^\alpha_{n||m}\overline{\sigma}_\alpha.\end{aligned}$$

Контракцијом једнакости $\overset{*}{\overline{\mathcal{W}}}{}^i_{jmn} = \overset{*}{\mathcal{W}}{}^i_{jmn}$ по индексима i и n закључујемо да важи

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(N+1)^2}\Big((N{+}1)\big(\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\underline{j\alpha}||m}{+}\overline{F}^{\alpha}_{j||m}\overline{\sigma}_{\alpha}{-}\overline{\Gamma}^{\beta}_{\underline{\alpha\beta}}(\overline{F}^{\alpha}_{m}\overline{\sigma}_{j}{+}\overline{F}^{\alpha}_{j}\overline{\sigma}_{m})\big)+\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\underline{j\alpha}}\overline{\Gamma}^{\beta}_{\underline{m\beta}}{+}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\underline{j\alpha}}\overline{F}^{\beta}_{m}\overline{\sigma}_{\beta}{+}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\underline{m\alpha}}\overline{F}^{\beta}_{j}\overline{\sigma}_{\beta}\Big)\\
&=\frac{1}{(N+1)^2}\Big((N{+}1)\big(\Gamma^{\alpha}_{\underline{j\alpha}|m}{+}F^{\alpha}_{j|m}\sigma_{\alpha}{-}\Gamma^{\beta}_{\underline{\alpha\beta}}(F^{\alpha}_{m}\sigma_{j}{+}F^{\alpha}_{j}\sigma_{m})\big){+}\Gamma^{\alpha}_{\underline{j\alpha}}\Gamma^{\beta}_{\underline{m\beta}}{+}\Gamma^{\alpha}_{\underline{j\alpha}}F^{\beta}_{m}\sigma_{\beta}{+}\Gamma^{\alpha}_{\underline{m\alpha}}F^{\beta}_{j}\sigma_{\beta}\Big)\\
&+\frac{1}{N-1}\Big(R_{jm}+\big(F^{\alpha}_{m}\sigma_{j}+F^{\alpha}_{j}\sigma_{m}\big)_{|\alpha}-F^{\alpha}_{j}\sigma_{\alpha|m}-F^{\alpha}_{j|m}\sigma_{\alpha}\Big)\\
&-\frac{1}{N-1}\Big(\overline{R}_{jm}+\big(\overline{F}^{\alpha}_{m}\overline{\sigma}_{j}+\overline{F}^{\alpha}_{j}\overline{\sigma}_{m}\big)_{||\alpha}-\overline{F}^{\alpha}_{j}\overline{\sigma}_{\alpha||m}-\overline{F}^{\alpha}_{j||m}\overline{\sigma}_{\alpha}\Big)\\
&+\frac{1}{N^2-1}\big(\Gamma^{\alpha}_{\underline{j\alpha}|m}-\Gamma^{\alpha}_{\underline{m\alpha}|j}-(F^{\alpha}_{j|m}-F^{\alpha}_{m|j})\sigma_{\alpha}\big)-\frac{1}{N^2-1}\big(\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\underline{j\alpha}||m}-\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\underline{m\alpha}||j}-(\overline{F}^{\alpha}_{j||m}-\overline{F}^{\alpha}_{m||j})\overline{\sigma}_{\alpha}\big).
\end{aligned}
$$

На основу једначине (3.2.29), и последично $R^{\alpha}_{\alpha mn}=0$, следи да ово тврђење важи. $\square$

На основу једначина (3.1.13, 3.1.14) и четири различита $\underset{1}{\tau}^{i}_{jk},\dots,\underset{4}{\tau}^{i}_{jk}$ датих једначинама (3.2.19–3.2.22) следи да важи наредна теорема.

Теорема 3.2.2. *Нека је $f:\mathbb{GR}_N\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ скоро геодезијско пресликавање типа $\underset{s}{\widetilde{\pi}}{}^{F}_{2}, s\in\{1,2\}$. Скуп чији су елементи фамилије геометријских објеката*

$$
\begin{aligned}
\underset{(Z)}{\underset{(\rho)}{\overset{*}{\mathcal{W}}}}{}^{i}_{jmn}=\overset{*}{\mathcal{W}}{}^{i}_{jmn}&+u\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{jm}|n}+u'\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{jn}|m}+v\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}}+v'\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{jn}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{\alpha m}}+w\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{mn}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{\alpha j}}\\
&-u\big(\underset{(p_1)}{\omega}{}^{i}_{\alpha n}(\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}-\underset{(z_1)}{\tau}{}^{\alpha}_{jm})-\underset{(q_1)}{\omega}{}^{\alpha}_{jn}(\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{\alpha m}}-\underset{(z_1)}{\tau}{}^{i}_{\alpha m})-\underset{(r_1)}{\omega}{}^{\alpha}_{mn}(\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{j\alpha}}-\underset{(z_1)}{\tau}{}^{i}_{j\alpha})\big)\\
&-u'\big(\underset{(p_2)}{\omega}{}^{i}_{\alpha m}(\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{jn}}-\underset{(z_2)}{\tau}{}^{\alpha}_{jn})-\underset{(q_2)}{\omega}{}^{\alpha}_{jm}(\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}}-\underset{(z_2)}{\tau}{}^{i}_{\alpha n})-\underset{(r_2)}{\omega}{}^{\alpha}_{mn}(\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{j\alpha}}-\underset{(z_2)}{\tau}{}^{i}_{j\alpha})\big)\\
&-v\big(\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}\underset{(z_4)}{\tau}{}^{i}_{\alpha n}+\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}}\underset{(z_3)}{\tau}{}^{\alpha}_{jm}-\underset{(z_3)}{\tau}{}^{\alpha}_{jm}\underset{(z_4)}{\tau}{}^{i}_{\alpha n}\big)\\
&-v'\big(\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{jn}}\underset{(z_6)}{\tau}{}^{i}_{\alpha m}+\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{\alpha m}}\underset{(z_5)}{\tau}{}^{\alpha}_{jn}-\underset{(z_5)}{\tau}{}^{\alpha}_{jn}\underset{(z_6)}{\tau}{}^{i}_{\alpha m}\big)\\
&-w\big(\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{mn}}\underset{(z_8)}{\tau}{}^{i}_{\alpha j}+\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{\alpha j}}\underset{(z_7)}{\tau}{}^{\alpha}_{mn}-\underset{(z_7)}{\tau}{}^{\alpha}_{mn}\underset{(z_8)}{\tau}{}^{i}_{\alpha j}\big),
\end{aligned}
\tag{3.2.32}
$$

за $Z=(z_1,\dots,z_8), z_1,\dots,z_8\in\{1,\dots,4\}, p_u,q_v\in\{1,2\}$ и $\overset{*}{\mathcal{W}}{}^{i}_{jmn}$ задато једначином (3.2.30), је општа инваријанта Вејловог типа пресликавања f.
$\square$

3.2.2 Инваријанте еквиторзионих скоро геодезијских пресликавања трећег типа

У овом одељку ћемо приказати резултате добијене у раду (Весић, [95]). Ти резултати се односе на инваријанте еквиторзионих скоро геодезијских пресликавања трећег типа генералисаног Римановог простора.

Нека је $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ еквиторзионо скоро геодезијско пресликавање типа $\underset{s}{\pi}_3, s \in \{1, 2\}$, које задовољава особину реципроцитета. Како је $\xi^i_{jk} = 0$, основне једначине тог пресликавања су

$$\underset{s}{\pi}_3 : \begin{cases} \overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \psi_j \delta^i_k + \psi_k \delta^i_j + 2\sigma_{jk}\varphi^i, \\ \varphi^i_{\underset{s}{|}j} = \nu_j \varphi^i + \mu \delta^i_j, \end{cases} \tag{3.2.33}$$

где је μ скалар, ψ, ν коваријантни вектори, φ^i контраваријантни вектор и σ_{jk} коваријантни тензор типа $(0, 2)$ симетричан по индексима j и k. Како пресликавање f задовољава особину реципроцитета, основне једначине инверзног пресликавања $f^{-1} : \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N \to \mathbb{GR}_N$ су

$$\underset{s}{\pi}_3 : \begin{cases} \Gamma^i_{jk} = \overline{\Gamma}^i_{jk} + \overline{\psi}_j \delta^i_k + \overline{\psi}_k \delta^i_j + 2\overline{\sigma}_{jk}\overline{\varphi}^i, \\ \overline{\varphi}^i_{\underset{s}{||}j} = \overline{\nu}_j \overline{\varphi}^i + \overline{\mu} \delta^i_j, \end{cases} \tag{3.2.34}$$

где је $\overline{\mu}$ скалар, $\overline{\psi}_j, \overline{\nu}_j$ коваријантни вектори, $\overline{\varphi}^i$ контраваријантни вектор и $\overline{\sigma}_{jk}$ тензор типа $(0, 2)$ симетричан по индексима j и k.

На основу основних једначина (3.2.33, 3.2.34) добијамо да је

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} = \psi_j \delta^i_k + \psi_k \delta^i_j + 2\sigma_{jk}\varphi^i = -\overline{\psi}_j \delta^i_k - \overline{\psi}_k \delta^i_j - 2\overline{\sigma}_{jk}\overline{\varphi}^i. \tag{3.2.35}$$

Геометријски објекти

$$\psi_j \delta^i_k + \psi_k \delta^i_j \quad \text{и} \quad \sigma_{jk}\varphi^i$$

су линеарно независни. У супротном, скоро геодезијско пресликавање f би се свело на геодезијско. Због тога, а на основу последње једнакости у (3.2.35), закључујемо да важи

$$\overline{\psi}_j\delta^i_k + \overline{\psi}_k\delta^i_j = -\psi_j\delta^i_k - \psi_k\delta^i_j \quad \text{и} \quad \overline{\sigma}_{jk}\overline{\varphi}^i = -\sigma_j\varphi^i,$$

тј. $\overline{\psi}_j = -\psi_j$ и

$$2\sigma_{jk}\varphi^i = \sigma_{jk}\varphi^i - \overline{\sigma}_{jk}\overline{\varphi}^i. \tag{3.2.36}$$

На основу претходног долазимо до закључка да је

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j + \sigma_{jk}\varphi^i - \overline{\sigma}_{jk}\overline{\varphi}^i. \tag{3.2.37}$$

Након симетризације ове једначине по индексима j и k и контракције симетризоване једначине по i и k добијамо да важи

$$\psi_j = \frac{1}{N+1}(\overline{\Gamma}^\alpha_{\underline{j\alpha}} - \Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}} + \overline{\sigma}_{j\alpha}\overline{\varphi}^\alpha - \sigma_{j\alpha}\varphi^\alpha).$$

Увођењем ове представке у једначину (3.2.37) закључујемо да је задовољено

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} &+ \frac{1}{N+1}\big((\overline{\Gamma}^\alpha_{\underline{j\alpha}} + \overline{\sigma}_{j\alpha}\overline{\varphi}^\alpha)\delta^i_k + (\overline{\Gamma}^\alpha_{\underline{k\alpha}} + \overline{\sigma}_{j\alpha}\overline{\varphi}^\alpha)\delta^i_j\big) - \overline{\sigma}_{jk}\overline{\varphi}^i\\ &- \frac{1}{N+1}\big((\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}} + \sigma_{j\alpha}\varphi^\alpha)\delta^i_k + (\Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}} + \sigma_{j\alpha}\varphi^\alpha)\delta^i_j\big) + \sigma_{jk}\varphi^i.\end{aligned} \tag{3.2.38}$$

На основу те једначине закључујемо да је у овом случају

$$\underset{(2)}{\omega}{}^i_{jk} = \frac{1}{N+1}\big((\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}} + \sigma_{j\alpha}\varphi^\alpha)\delta^i_k + (\Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}} + \sigma_{j\alpha}\varphi^\alpha)\delta^i_j\big) - \sigma_{jk}\varphi^i, \tag{3.2.39}$$

тј. да важи наредна лема.

Лема 3.2.2. *Нека је $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ еквиторзионо скоро геодезијско пресликавање типа $\underset{s}{\pi}_3, s \in \{1,2\}$, које задовољава особину реципроцитета. Геометријски објекат*

$$\mathcal{T}^i_{jk} = \Gamma^i_{\underline{jk}} - \frac{1}{N+1}\big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}}\delta^i_k + \Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}}\delta^i_j\big) - \frac{1}{N+1}\varphi^\alpha\big(\sigma_{j\alpha}\delta^i_k + \sigma_{k\alpha}\delta^i_j\big) + \sigma_{jk}\varphi^i \tag{3.2.40}$$

је еквиторзиона инваријанта Томасовог типа тог пресликавања. □

Геометријски објекат $\underset{(2)}{\omega}{}^i_{jk}$ задат једначином (3.2.39) задовољава наредне једначине

$$\begin{aligned}\underset{(2)}{\omega}{}^\alpha_{jm}\underset{(2)}{\omega}{}^i_{\alpha n}-\underset{(2)}{\omega}{}^\alpha_{jn}\underset{(2)}{\omega}{}^i_{\alpha m}=&\big(\sigma_{jm}\sigma_{\alpha n}-\sigma_{jn}\sigma_{\alpha m}\big)\varphi^\alpha\varphi^i\\ &-\frac{1}{N+1}\varphi^i\big(\sigma_{jm}(\Gamma^\alpha_{\underline{n\alpha}}+\sigma_{n\alpha}\varphi^\alpha)-\sigma_{jn}(\Gamma^\alpha_{\underline{m\alpha}}+\sigma_{m\alpha}\varphi^\alpha)\big)\\ &+\frac{1}{N+1}\big(\Gamma^\beta_{\underline{\alpha\beta}}+\sigma_{\alpha\beta}\varphi^\beta\big)(\delta^i_m\sigma_{jn}-\delta^i_n\sigma_{jm})\varphi^\alpha\\ &-\frac{1}{(N+1)^2}(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}}+\sigma_{j\alpha}\varphi^\alpha)\big(\delta^i_m(\Gamma^\beta_{\underline{n\beta}}+\sigma_{n\beta}\varphi^\beta)-\delta^i_n(\Gamma^\beta_{\underline{m\beta}}+\sigma_{m\beta}\varphi^\beta)\big),\end{aligned}\tag{3.2.41}$$

$$\begin{aligned}-\underset{(2)}{\omega}{}^i_{jm|n}+\underset{(2)}{\omega}{}^i_{jn|m}=&-\sigma_{jm|n}\varphi^i+\sigma_{jn|m}\varphi^i-\sigma_{jm}\varphi^i_{|n}+\sigma_{jn}\varphi^i_{|m}\\ &+\frac{1}{N+1}\delta^i_j(\Gamma^\alpha_{\underline{n\alpha}|m}-\Gamma^\alpha_{\underline{m\alpha}|n})-\frac{1}{N+1}\delta^i_m\Big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}|n}+\sigma_{j\alpha|n}\varphi^\alpha+\sigma_{j\alpha}\varphi^\alpha_{|n}\Big)\\ &+\frac{1}{N+1}\delta^i_n\Big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}|m}+\sigma_{j\alpha|m}\varphi^\alpha+\sigma_{j\alpha}\varphi^\alpha_{|m}\Big)\\ &+\frac{1}{N+1}\delta^i_j\Big(\sigma_{n\alpha|m}\varphi^\alpha-\sigma_{m\alpha|n}\varphi^\alpha+\sigma_{n\alpha}\varphi^\alpha_{|m}-\sigma_{m\alpha}\varphi^\alpha_{|n}\Big).\end{aligned}\tag{3.2.42}$$

Величина $\sigma_{ij}\sigma_{mn}\varphi^p\varphi^q$ је инваријанта скоро геодезијског пресликавања трећег типа чије су основне једначине (3.2.33). То следи директно из претходно добијеног односа међу величинама $\sigma_{jk}\varphi^i$ и $\overline{\sigma}_{jk}\overline{\varphi}^i$:

$$\overline{\sigma}_{ij}\overline{\sigma}_{mn}\overline{\varphi}^p\overline{\varphi}^q=\big(-\sigma_{ij}\varphi^p\big)\cdot\big(-\sigma_{mn}\varphi^q\big)=\sigma_{ij}\sigma_{mn}\varphi^p\varphi^q.$$

Одатле, и на основу једначина (3.1.8, 3.2.41, 3.2.42), закључујемо да важи наредна теорема.

Теорема 3.2.3. *Нека је $f:\mathbb{GR}_N\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ еквиторзионо скоро геодезијско пресликавање трећег типа које задовољава особину реципроцитета.*

Ако је, $f\in\underset{1}{\pi}_3$ геометријски објекат

$$\begin{aligned}\underset{(1)}{\overset{\star}{\mathcal{W}}}{}^i_{jmn}=&R^i_{jmn}+\delta^i_j\underset{(1)}{\overset{\star}{\eta}}{}_{[mn]}-\frac{1}{N+1}\delta^i_m\big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}|n}-(N+1)(\underset{(1)}{\overset{\star}{\eta}}{}_{jn}+\mu\sigma_{jn})\big)\\ &+\frac{1}{N+1}\delta^i_n\big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}|m}-(N+1)(\underset{(1)}{\overset{\star}{\eta}}{}_{jm}+\mu\sigma_{jm})\big)\\ &-\big(\sigma_{jm|n}-\sigma_{jn|m}\big)\varphi^i+\sigma_{jm}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\varphi^\alpha-\sigma_{jn}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\varphi^\alpha,\end{aligned}\tag{3.2.43}$$

где је

$$\begin{aligned}\underset{(1)}{\overset{\star}{\eta}}{}_{jk} = {} & \frac{1}{(N+1)^2}\Big((N+1)\Gamma^\beta_{\underline{\alpha\beta}}\varphi^\alpha\sigma_{jk} - \Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}}\Gamma^\beta_{\underline{k\beta}} - \Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}}\varphi^\beta\sigma_{k\beta} - \Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}}\varphi^\beta\sigma_{j\beta}\Big)\\ & - \frac{1}{N+1}\big(\sigma_{j\alpha|k}\varphi^\alpha + \sigma_{jk}\mu + \sigma_{j\alpha}(\nu_k\varphi^\alpha - \Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{\beta k}}\varphi^\beta)\big),\end{aligned}$$

и μ скалар, је придружена инваријанта Вејловог типа пресликавања f.

Ако је, $f \in \underset{2}{\pi}_3$ геометријски објекат

$$\begin{aligned}\underset{(2)}{\overset{\star}{\mathcal{W}}}{}^i_{jmn} = {} & R^i_{jmn} + \delta^i_j \underset{(2)}{\overset{\star}{\eta}}{}_{[mn]} - \frac{1}{N+1}\delta^i_m\big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}|n} - (N+1)(\underset{(2)}{\overset{\star}{\eta}}{}_{jn} + \mu\sigma_{jn})\big)\\ & + \frac{1}{N+1}\delta^i_n\big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}|m} - (N+1)(\underset{(2)}{\overset{\star}{\eta}}{}_{jm} + \mu\sigma_{jm})\big)\\ & - \big(\sigma_{jm|n} - \sigma_{jn|m}\big)\varphi^i - \sigma_{jm}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\varphi^\alpha + \sigma_{jn}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\varphi^\alpha,\end{aligned} \tag{3.2.44}$$

где је

$$\begin{aligned}\underset{(2)}{\overset{\star}{\eta}}{}_{jk} = {} & \frac{1}{(N+1)^2}\Big((N+1)\Gamma^\beta_{\underline{\alpha\beta}}\varphi^\alpha\sigma_{jk} - \Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}}\Gamma^\beta_{\underline{k\beta}} - \Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}}\varphi^\beta\sigma_{k\beta} - \Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}}\varphi^\beta\sigma_{j\beta}\Big)\\ & - \frac{1}{N+1}\big(\sigma_{j\alpha|k}\varphi^\alpha + \sigma_{jk}\mu + \sigma_{j\alpha}(\nu_k\varphi^\alpha + \Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{\beta k}}\varphi^\beta)\big),\end{aligned}$$

и μ скалар, је придружена инваријанта Вејловог типа пресликавања f. $\square$

На основу овог тврђења и једначине (3.1.15) долазимо до закључка да важи наредна теорема.

Теорема 3.2.4. *Нека је $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ еквиторзионо скоро геодезијско пресликавање трећег типа које задовољава особину реципроцитета.*

Ако је $f \in \underset{1}{\pi}_3$, фамилија геометријских објеката

$$\begin{aligned}\underset{(1)}{\overset{\star}{\widetilde{\mathcal{W}}}}{}^i_{jmn} = {} & K^i_{jmn} + \delta^i_j \underset{(1)}{\overset{\star}{\eta}}{}_{[mn]} - \frac{1}{N+1}\delta^i_m\big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}|n} - (N+1)(\underset{(1)}{\overset{\star}{\eta}}{}_{jn} + \mu\sigma_{jn})\big)\\ & + \frac{1}{N+1}\delta^i_n\big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}|m} - (N+1)(\underset{(1)}{\overset{\star}{\eta}}{}_{jm} + \mu\sigma_{jm})\big)\\ & - \big(\sigma_{jm|n} - \sigma_{jn|m}\big)\varphi^i + \sigma_{jm}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\varphi^\alpha - \sigma_{jn}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\varphi^\alpha\\ & - u\big(\underset{(p_1)}{\omega}{}^i_{\alpha n}\Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{jm}} - \underset{(q_1)}{\omega}{}^\alpha_{jn}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha m}} - \underset{(r_1)}{\omega}{}^\alpha_{mn}\Gamma^i_{\underset{\vee}{j\alpha}}\big) - u'\big(\underset{(p_2)}{\omega}{}^i_{\alpha m}\Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{jn}} - \underset{(q_2)}{\omega}{}^\alpha_{jm}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha n}} - \underset{(r_2)}{\omega}{}^\alpha_{mn}\Gamma^i_{\underset{\vee}{j\alpha}}\big),\end{aligned} \tag{3.2.45}$$

за $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2 \in \{1, 2\}$, *је фамилија еквиторзионих инваријанти Вејловог типа пресликавања* f.

Ако је $f \in \underset{2}{\pi}_3$, *геометријски објекат*

$$\begin{aligned}
\overset{\star}{\widetilde{\mathcal{W}}}{}^i_{\underset{(2)}{}jmn} &= K^i_{jmn} + \delta^i_j \underset{(2)}{\overset{\star}{\eta}}{}_{[mn]} - \frac{1}{N+1}\delta^i_m \big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}|n} - (N+1)(\underset{(2)}{\overset{\star}{\eta}}{}_{jn} + \mu\sigma_{jn})\big) \\
&+ \frac{1}{N+1}\delta^i_n \big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}|m} - (N+1)(\underset{(2)}{\overset{\star}{\eta}}{}_{jm} + \mu\sigma_{jm})\big) \\
&- \big(\sigma_{jm|n} - \sigma_{jn|m}\big)\varphi^i - \sigma_{jm}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\varphi^\alpha + \sigma_{jn}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\varphi^\alpha \\
&- \big(\sigma_{jm|n} - \sigma_{jn|m}\big)\varphi^i + \sigma_{jm}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha n}}\varphi^\alpha - \sigma_{jn}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha m}}\varphi^\alpha \\
&- u\big(\underset{(p_1)}{\omega}{}^i_{\alpha n}\Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{jm}} - \underset{(q_1)}{\omega}{}^\alpha_{jn}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha m}} - \underset{(r_1)}{\omega}{}^\alpha_{mn}\Gamma^i_{\underset{\vee}{j\alpha}}\big) - u'\big(\underset{(p_2)}{\omega}{}^i_{\alpha m}\Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{jn}} - \underset{(q_2)}{\omega}{}^\alpha_{jm}\Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha n}} - \underset{(r_2)}{\omega}{}^\alpha_{mn}\Gamma^i_{\underset{\vee}{j\alpha}}\big),
\end{aligned} \tag{3.2.46}$$

за $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2 \in \{1, 2\}$, *је фамилија еквиторзионих инваријанти Вејловог типа пресликавања* f. $\square$

3.2.3 Инваријанте конформних пресликавања

Пресликавања Римановних простора која очувавају локалне углове су **конформна пресликавања**. Та пресликавања играју значајну улогу у различитим применама диференцијалне геометрије.

Конформно пресликавање $f : \mathbb{R}_N \to \overline{\mathbb{R}}_N$ међу Римановим просторима трансформише метрички тензор g_{ij} простора $\mathbb{R}_N$ по правилу [30, 32, 33, 70]

$$\overline{g}_{\underline{ij}} = e^{2\psi} g_{\underline{ij}}, \tag{3.2.47}$$

где је ψ скаларна функција. На основу те једначине следи да важи

$$\overline{\Gamma}^i_{\underline{jk}} = \Gamma^i_{\underline{jk}} + \psi_j \delta^i_k + \psi_k \delta^i_j - \psi^i g_{jk}, \tag{3.2.48}$$

где је $\psi_j = \partial\psi/\partial x^j$ и $\psi^i = g^{i\alpha}\psi_\alpha$.

У даљем проучавању је добијено да су геометријски објекти

$$\begin{aligned}C^i_{jmn} = R^i_{jmn} + \frac{1}{N-2}\big(\delta^i_n R_{jm} - \delta^i_m R_{jn} + R^i_n g_{\underline{jm}} - R^i_m g_{\underline{jn}}\big)\\ + \frac{R}{(N-1)(N-2)}\big(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}\big),\end{aligned} \tag{3.2.49}$$

$$\begin{aligned}C_{ijmn} = R_{ijmn} + \frac{1}{N-2}\big(R_{jm} g_{\underline{in}} - R_{jn} g_{\underline{im}} + R_{in} g_{\underline{jm}} - R_{im} g_{\underline{jn}}\big)\\ + \frac{R}{(N-1)(N-2)}\big(g_{\underline{im}} g_{\underline{jn}} - g_{\underline{in}} g_{\underline{jm}}\big),\end{aligned} \tag{3.2.50}$$

где је $R^i_j = g^{i\alpha} R_{j\alpha}, R = R^\alpha_\alpha$, инваријанте конформног пресликавања.

Теорија конформних пресликавања Римановых простора је проширена на теорију конформних пресликавања генералисаних Риманових простора [82]. Пресликавање $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ које метрички тензор g_{ij} простора $\mathbb{GR}_N$ трансформише по закону

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\psi} g_{ij}, \tag{3.2.51}$$

где је ψ скаларна функција, назива се **конформно пресликавање** простора $\mathbb{GR}_N$. Добијено је да се Кристофелови симболи Γ^i_{jk} простора $\mathbb{GR}_N$ трансформишу по закону

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \psi_j \delta^i_k + \psi_k \delta^i_j - \psi^i g_{\underline{jk}} + \xi^i_{jk}, \tag{3.2.52}$$

где је $\psi_j = \partial\psi/\partial x^j, \psi^i = g^{\underline{i\alpha}}\psi_\alpha, \xi^i_{jk} = -\xi^i_{kj}$.

Основна једначина еквиторзионог конформног пресликавања $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ је

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \psi_j \delta^i_k + \psi_k \delta^i_j - \psi^i g_{\underline{jk}}. \tag{3.2.53}$$

На основу те једначине, у раду [82] је генералисан Вејлов конформни тензор (3.2.49):

$$
\begin{aligned}
C^i_{jmn} &= K^i_{jmn} + \frac{1}{N-2}\big(\delta^i_m K_{jn} - \delta^i_n K_{jm} - K^i_n g_{\underline{jm}} + K^i_m g_{\underline{jn}}\big)\\
&+ \frac{K}{(N-1)(N-2)}\big(\delta^i_m g_{\underline{jn}} - \delta^i_n g_{\underline{jm}}\big)\\
&- \frac{u}{N(N-2)}\big(\delta^i_m \Gamma_{\underset{\vee}{n.j\alpha}} - \delta^i_n \Gamma_{\underset{\vee}{m.j\alpha}} - \Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha n}} g_{\underline{jm}} + \Gamma^i_{\underset{\vee}{\alpha m}} g_{\underline{jn}}\big) g^{\underline{\alpha\beta}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \ln g \qquad (3.2.54)\\
&- \frac{u+u'}{2N}\big(\delta^i_m \Gamma^\alpha_{\underset{\vee}{jn}} + \Gamma^i_{\underset{\vee}{\beta n}} g^{\underline{\alpha\beta}} g_{\underline{jm}} - \delta^\alpha_n \Gamma^i_{\underset{\vee}{jm}} - \delta^\alpha_m \Gamma^i_{\underset{\vee}{jn}} + \Gamma^i_{\underset{\vee}{j\beta}} g^{\underline{\alpha\beta}} g_{\underline{mn}}\big) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln g\\
&- \frac{u-u'}{2N}\big(\delta^\alpha_j \Gamma^i_{\underset{\vee}{mn}} - \Gamma^\beta_{\underset{\vee}{jm}} g^{\underline{i\alpha}} g_{\underline{\beta n}}\big) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln g,
\end{aligned}
$$

где је $K^i_j = g^{i\alpha} K_{j\alpha}$ и $g = \det[g_{ij}]$. М. С. Најдановић, М. Љ. Златановић и И. Хинтерлајтнер [53] су установили да, да би генерализовали Вејлов конформни тензор (3.2.49), није потребно претпостављати еквиторзионост конформног пресликавања уколико је то пресликавање међу еквидистантним просторима.

Ми ћемо, у даљем раду, пронаћи аналогије међу инваријантама конформних и геодезијских пресликавања простора $\mathbb{GR}_N$. Поред тога, одговорићемо на питање да ли је ишта додатно потребно претпоставити да би генерализовали Вејлов конформни тензор (3.2.49) приказивањем резултата добијених у радовима (Весић, [93, 96]).

Нека је $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ конформно пресликавање. Симетризацијом и антисиметризацијом једначине (3.2.51) по индексима i и j закључујемо да важи

$$\overline{g}_{\underline{ij}} = e^{2\psi} g_{\underline{ij}} \quad \text{и} \quad \overline{g}_{\underset{\vee}{ij}} = e^{2\psi} g_{\underset{\vee}{ij}}. \qquad (3.2.55)$$

На основу прве од ових једнакости имамо да је

$$\overline{g}^{\underline{ij}} = e^{-2\psi} g^{\underline{ij}}. \qquad (3.2.56)$$

Одатле следи да важи

$$\overline{g}^{\underline{ij}} \overline{g}_{mn} = e^{-2\psi} g^{\underline{ij}} \cdot e^{2\psi} g_{mn} = g^{\underline{ij}} g_{mn}. \qquad (3.2.57)$$

Тиме је доказано да је геометријски објекат $g^{\underline{ij}}g_{mn}$ инваријанта конформног пресликавања $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$. На основу тога закључујемо да је геометријски објекат $g^{\underline{ij}}g_{\underset{\vee}{mn}}$ такође инваријанта конформног пресликавања f.

Уколико искористимо то да је $\psi^i = g^{\underline{i\alpha}}\psi_\alpha$, симетризујемо једначину (3.2.52) по индексима j и k и контрахујемо симетризовану једначину по индексима i и k добијамо да је

$$\psi_j = \frac{1}{N}\big(\overline{\Gamma}^\alpha_{\underline{j\alpha}} - \Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}}\big).$$

Одавде следи да је, у случају конформних пресликавања,

$$\underset{(2)}{\omega}{}^i_{jk} = \frac{1}{N}\big(\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}}\delta^i_k + \Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}}\delta^i_j - \Gamma^\beta_{\underline{\alpha\beta}}g^{\underline{i\alpha}}g_{\underline{jk}}\big). \tag{3.2.58}$$

Како је метрички тензор g^{ij} коваријантно константан у смислу коваријантног диференцирања подржаног афином конексијом придруженог простора $\mathbb{R}_N$, закључујемо да је једначина (3.2.3) еквивалентна једначини

$$\Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}} = \frac{1}{2}\Big(\big(g^{\underline{i\alpha}}g_{\underset{\vee}{j\alpha}}\big)_{|k} - \big(g^{\underline{i\alpha}}g_{\underset{\vee}{k\alpha}}\big)_{|j} - \big(g^{\underline{i\alpha}}g_{\underset{\vee}{jk}}\big)_{|\alpha}\Big). \tag{3.2.59}$$

Одатле следи да се, ако је $r = (t_1, \dots, r_5), r_1, \dots, r_5 \in \{1, 2\}$, тензор торзије трансформише по закону

$$\overline{\Gamma}^i_{\underset{\vee}{jk}} = \Gamma^i_{\underset{\vee}{jk}} + \underset{(r)}{\overline{\tau}}{}^i_{jk} - \underset{(r)}{\tau}{}^i_{jk}, \tag{3.2.60}$$

где је

$$\underset{(r)}{\tau}{}^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{\underline{\alpha\beta}}\big(\underset{(r_1)}{\omega}{}^i_{\alpha k}g_{\underset{\vee}{j\beta}} - \underset{(r_2)}{\omega}{}^i_{\alpha j}g_{\underset{\vee}{k\beta}} - \underset{(r_3)}{\omega}{}^i_{\alpha\beta}g_{\underset{\vee}{jk}} + \underset{(r_4)}{\omega}{}^\gamma_{j\beta}g_{\underset{\vee}{\gamma k}}\delta^i_\alpha - \underset{(r_5)}{\omega}{}^\gamma_{k\beta}g_{\underset{\vee}{\gamma j}}\delta^i_\alpha\big) \tag{3.2.61}$$

и одговарајуће $\underset{(r)}{\overline{\tau}}{}^i_{jk}$. Важи наредна лема.

Лема 3.2.3. *Фамилија геометријских објеката*

$$\underset{(r)}{\mathcal{T}}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{1}{N}\big(\delta^i_j\Gamma^\alpha_{\underline{k\alpha}} + \delta^i_k\Gamma^\alpha_{\underline{j\alpha}} - \Gamma^\beta_{\underline{\alpha\beta}}g^{\underline{i\alpha}}g_{\underline{jk}}\big) - \underset{(r)}{\tau}{}^i_{jk}, \tag{3.2.62}$$

за објекте $\underset{(r)}{\tau}{}^{i}_{jk}$ *дефинисане једначином* (3.2.61), *јесте фамилија општих инваријанти Томасовог типа конформног пресликавања* $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$.

Пресликавање $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ *је конформно ако и само ако је неки од геометријских објеката* $\underset{(r_0)}{\mathcal{T}}{}^{i}_{jk}$ *датих једначином* (3.2.62) *инваријанта тог пресликавања. Ако је неко* $\underset{(r_0)}{\mathcal{T}}{}^{i}_{jk}$ *инваријанта пресликавања* $f : \mathbb{GR}_N \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ *онда је свако* $\underset{(r)}{\mathcal{T}}{}^{i}_{jk}, r = (r_1, \dots, r_5), r_1, \dots, r_5 \in \{1, 2\}$, *задато једначином* (3.2.62) *инваријанта пресликавања* f.

Доказ. Први део ове леме следи директно из једначине (3.1.6) и различитих $\underset{(r)}{\tau}{}^{i}_{jk}$ датих једначином (3.2.61).

Други део ове леме је директна последица теореме о егзистенцији и јединствености решења система диференцијалних једначина. □

С обзиром на законе трансформације (3.2.60) и инваријанте (3.2.62), закључујемо да важи

$$\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}\overline{\Gamma}^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}} = \Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}} + \overline{\Theta}^{i}_{\substack{r^1\\ r^2}jmn} - \Theta^{i}_{\substack{r^1\\ r^2}jmn}, \tag{3.2.63}$$

где је $r^p = (r^p_1, \dots, r^p_5), p \in \{1, 2\}, r^p_1, \dots, r^p_5 \in \{1, 2\}$, за

$$\Theta^{i}_{\substack{r^1\\ r^2}jmn} = \Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}}\underset{(r^2)}{\tau}{}^{i}_{\alpha n} + \Gamma^{i}_{\underset{\vee}{\alpha n}}\underset{(r^1)}{\tau}{}^{\alpha}_{jm} - \underset{(r^1)}{\tau}{}^{\alpha}_{jm}\underset{(r^2)}{\tau}{}^{i}_{\alpha n}$$

и одговарајуће $\overline{\Theta}^{i}_{\substack{r^1\\ r^2}jmn}$. Такође је задовољено

$$\overline{\Gamma}^{i}_{\underset{\vee}{jm||n}} = \Gamma^{i}_{\underset{\vee}{jm|n}} + \underset{\substack{(r)\\ (s)}}{\overline{\sigma}}{}^{i}_{jmn} - \underset{\substack{(r)\\ (s)}}{\sigma}{}^{i}_{jmn}, \tag{3.2.64}$$

где је $r = (r_1, \dots, r_5), s = (s_1, s_2, s_3), r_u, s_v \in \{1, 2\}$,

$$\underset{\substack{(r)\\ (s)}}{\sigma}{}^{i}_{jmn} = \underset{(r)}{\tau}{}^{i}_{jm|n} + \underset{(s_1)}{\omega}{}^{i}_{\alpha n}(\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}} - \underset{(r)}{\tau}{}^{\alpha}_{jm}) - \underset{(s_2)}{\omega}{}^{\alpha}_{jn}(\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{\alpha m}} - \underset{(r)}{\tau}{}^{i}_{\alpha m}) - \underset{(s_3)}{\omega}{}^{\alpha}_{mn}(\Gamma^{i}_{\underset{\vee}{j\alpha}} - \underset{(r)}{\tau}{}^{i}_{j\alpha})$$

и одговарајуће $\underset{\substack{(r)\\ (s)}}{\overline{\sigma}}{}^{i}_{jmn}$.

Важи наредна теорема и њена последица.

Теорема 3.2.5. *Нека је $f:\mathbb{GR}_N\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ конформно пресликавање генералисаног Римановог простора $\mathbb{GR}_N$. Фамилије геометријских објеката*

$$\begin{aligned}
\underset{(\rho)}{C}{}^{i}_{jmn}&=K^{i}_{jmn}+\frac{1}{N-2}(\delta^{i}_{m}K_{jn}-\delta^{i}_{n}K_{jm}+K^{i}_{m}g_{\underline{jn}}-K^{i}_{n}g_{\underline{jm}})\\
&+\frac{K}{(N-1)(N-2)}(\delta^{i}_{m}g_{\underline{jn}}-\delta^{i}_{n}g_{\underline{jm}})\\
&-\frac{u}{N-2}\big(\delta^{i}_{m}\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{jn}|\alpha}-\delta^{i}_{n}\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}|\alpha}+g^{\underline{i\alpha}}\Gamma^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha m}|\beta}g_{\underline{jn}}-g^{\underline{i\alpha}}\Gamma^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha n}|\beta}g_{\underline{jm}}\big)\\
&-\frac{v'+w}{N-2}\big(\delta^{i}_{m}\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{j\beta}}\Gamma^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha n}}-\delta^{i}_{n}\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{j\beta}}\Gamma^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha m}}+g^{\underline{i\alpha}}\Gamma^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha\gamma}}(\Gamma^{\gamma}_{\underset{\vee}{\beta m}}g_{\underline{jn}}-\Gamma^{\gamma}_{\underset{\vee}{\beta n}}g_{\underline{jm}})\big)\\
&-\frac{v'+w}{(N-1)(N-2)}\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{\gamma\beta}}\Gamma^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha\delta}}g^{\underline{\gamma\delta}}(\delta^{i}_{m}g_{\underline{jn}}-\delta^{i}_{n}g_{\underline{jm}})\\
&-u\underset{(s^1)}{\underset{(r^1)}{\sigma}}{}^{i}_{jmn}-u'\underset{(s^2)}{\underset{(r^2)}{\sigma}}{}^{i}_{jnm}-v\underset{(r^4)}{\underset{(r^3)}{\Theta}}{}^{i}_{jmn}-v'\underset{(r^6)}{\underset{(r^5)}{\Theta}}{}^{i}_{jnm}-w\underset{(r^8)}{\underset{(r^7)}{\Theta}}{}^{i}_{mnj},
\end{aligned}\tag{3.2.65}$$

чине скуп фамилија изведених општих инваријанти Вејловог типа пресликавања f. □

Последица 3.2.4. *Нека је $f:\mathbb{GR}_N\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_N$ конформно пресликавање генералисаног Римановог простора $\mathbb{GR}_N$. Фамилије геометријских објеката*

$$\begin{aligned}
\underset{(\rho)}{C}{}_{ijmn}&=K_{ijmn}+\frac{1}{N-2}(K_{jn}g_{\underline{im}}-K_{jm}g_{\underline{in}}+K_{im}g_{\underline{jn}}-K_{in}g_{\underline{jm}})\\
&+\frac{K}{(N-1)(N-2)}(g_{\underline{im}}g_{\underline{jn}}-g_{\underline{in}}g_{\underline{jm}})\\
&-\frac{u}{N-2}\big(\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{jn}|\alpha}g_{\underline{im}}-\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{jm}|\alpha}g_{\underline{in}}+\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{im}|\alpha}g_{\underline{jn}}-\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{in}|\alpha}g_{\underline{jm}}\big)\\
&-\frac{v'+w}{N-2}\big(\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{j\beta}}\Gamma^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha n}}g_{\underline{im}}-\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{j\beta}}\Gamma^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha m}}g_{\underline{in}}+\Gamma^{\beta}_{\underset{\vee}{i\gamma}}\Gamma^{\gamma}_{\underset{\vee}{\beta m}}g_{\underline{jn}}-\Gamma^{\beta}_{\underset{\vee}{i\gamma}}\Gamma^{\gamma}_{\underset{\vee}{\beta n}}g_{\underline{jm}}\big)\\
&-\frac{v'+w}{(N-1)(N-2)}\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{\gamma\beta}}\Gamma^{\beta}_{\underset{\vee}{\alpha\delta}}g^{\underline{\gamma\delta}}(g_{\underline{im}}g_{\underline{jn}}-g_{\underline{in}}g_{\underline{jm}})\\
&-u\underset{(s^1)}{\underset{(r^1)}{\sigma}}{}_{ijmn}-u'\underset{(s^2)}{\underset{(r^2)}{\sigma}}{}_{ijnm}-v\underset{(r^4)}{\underset{(r^3)}{\Theta}}{}_{ijmn}-v'\underset{(r^6)}{\underset{(r^5)}{\Theta}}{}_{ijnm}-w\underset{(r^8)}{\underset{(r^7)}{\Theta}}{}_{imnj},
\end{aligned}\tag{3.2.66}$$

где је $r^p=(r^p_1,\dots,r^p_5), s^p=(s^p_1,s^p_2,s^p_3), r^u_v,s^u_v\in\{1,2\}$, $\underset{(s)}{\underset{(r)}{\sigma}}{}_{ijmn}=g_{i\alpha}\underset{(s)}{\underset{(r)}{\sigma}}{}^{\alpha}_{jmn}$ и $\underset{(r^q)}{\underset{(r^p)}{\Theta}}{}_{ijmn}=g_{i\alpha}\underset{(r^q)}{\underset{(r^p)}{\Theta}}{}^{\alpha}_{jmn}$, чине скуп фамилија коваријантних изведених општих инваријанти Вејловог типа пресликавања f. □

Литература

[1] R. J. K. Al Lami, M. Škodová, J. Mikeš, *On Holomorphically Projective Mappings from Equiaffine Generally Recurrent Spaces onto Kählerian Spaces*, Archivum Mathematicum (Brno), Tomus 42 (2006), Supplement, 291–299.

[2] V. E. Berezovsky, J. Mikeš, *On the classification of almost geodesic mappings of affine connected spaces*, Proc. of Conf. Diff. Geom. and Appl., 1988, Dubrovnik, Yugoslavia, Novi sad (1989), 41–48.

[3] V. E. Berezovsky, J. Mikeš, *On a Classification of Almost Geodesic Mappings of Affine Connection Spaces*, Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica 35 (1996), 21–24.

[4] V. E. Berezovsky, J. Mikeš, *On Special Almost Geodesic Mappings of Type* π_1 *of Spaces with Affine Connection*, Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica 43 (2004), 21–26.

[5] V. E. Berezovsky, J. Mikeš, *Almost Geodesic Mappings of Type* π_1 *onto Generalized Ricci-symmetric Spaces* (in Russian), Kazan. Gos. Univ. Uchen. Zap. Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2009, Volume 151, Book 4, 9–14.

[6] V. E. Berezovsky, J. Mikeš, *Canonical almost geodesic mappings of the first type of manifolds with affine connection* (in Russian), Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 2014, Number 2, 3–8.

[7] V. E. Berezovsky, J. Mikeš, A. Vanžurová, *Fundamental PDE's of the Canonical Almost Geodesic Mappings of Type* $\widetilde{\pi}_1$, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., Ser. 2, (2014), Vol. 37, No. 3, 647–659.

[8] S. Bochner, *Curvature and Betti Numbers II*, Ann. Math. (2), Vol. 50, No. 1, 77–93.

[9] S. Bochner, K. Yano, *Tensor-fields in non-symmetric connections*, Annals of Mathematics, Vol. 56, 3, (1952), 504–519.

[10] M. D. Cvetković, M. Lj. Zlatanović, *New Cartan's Tensors and Pseudotensors in a Generalized Finsler Space*, Filomat 28:1 (2014), 107–117.

[11] M. S. Ćirić, M. Lj. Zlatanović, M. S. Stanković, Lj. S. Velimirović, *On geodesic mappings of equidistant generalized Riemannian spaces*, Applied Mathematics and Computation 218, 12 (2012), 6648–6655.

[12] A. Einstein, *A Generalization of the Relativistic Theory of Gravitation*, Annals of Mathematics, Princeton, 46, (1945), 576–584.

[13] A. Einstein, *Bianchi Identities in the Generalized Theory of Gravitation*, Canadian Journal of Mathematics, 2, (1950), 120–128.

[14] A. Einstein, *Relativistic Theory of the Non-symmetric field*, Appendix II in the Book: The Meaning of Relativity 5^{th} edit., Princeton, 49, 1955.

[15] L. P. Eisenhart, *Non-Riemannian geometry*, New York, 1927.

[16] Л. П. Эйзенхарт, *Риманова Геометрия*, Государственное Издательство Иностранной Литературы, Москва, 1948.

[17] L. P. Eisenhart, *Generalized Riemannian spaces*, Proceeding of the National Academy of Sciences of the USA, Vol. 37, (1951), 311–315.

[18] L. P. Eisenhart, *Generalized Riemannian spaces, Part II*, Proceeding of the National Academy of Sciences of the USA, Vol. 38, (1952), 505–508.

[19] P. Finsler, *Über Kurven and Flächen in Allgemeinen Räumen*, Dissertation, Göttingen, 1918.

[20] F. Graiff, *Formule di commutazione e trasporto ciclico nei recenti spazi di Einstein*, Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. Mat. Natur., III., Ser., 87 (1954), No. 1, 105–110.

[21] I. Hinterleitner, J. Mikeš, *Geodesic mappings and Einstein Spaces*, Geometric Methods in Physics, Trends in Mathematics, (2013), pp. 331–335.

[22] I. Hinterleitner, J. Mikeš, *Geodesic Mappings of (Pseudo-) Riemannian Manifolds Preserve Class of Differentiability*, Miskolc Mathematical Notes HU ISSN 1787-2405 Vol. 14 (2013), No. 2, pp. 575–582.

[23] I. Hinterleitner, J. Mikeš, P. Peška, *On F_2^{ε}-Planar Mappings of (Pseudo-) Riemannian Manifolds*, Archivum Mathematicum (Brno), Tomus 50 (2014), 287–295.

[24] T. I. Hryhor'eva, *Invariant Geometric Objects of the Canonical Almost-Geodesic Mapping* $\pi_2(e=0)$, Ukrainian Mathematical Journal, October 2002, Volume 54, Issue 10, pp. 1602–1610.

[25] S. Ivanov, M. Zlatanović, *Connections on Non-symmetric (Generalized) Riemannian Manifold and Gravity*, Classical and Quantum Gravity, Vol. 33, No. 7, 075016.

[26] В. Ф. Каган, *Субпроективные пространства*, М.: Физматгиз, 1961.

[27] J. Mikeš, *Geodesic mappings of Einstein spaces*, Math. Notes 28, 922–923, (1981); translation from Mat. Zametki 28, (1980), 935–938.

[28] J. Mikeš, *Geodesic Mappings of Affine Connected and Riemannian Spaces*, J. Math. Sci., New York, 78, 3 (1996), 311–333.

[29] J. Mikeš, *Holomorphically projective mappings and their generalizations*, J. Math Sci., New York, 89, 3 (1998), 1334–1353.

[30] J. Mikeš, V. Kiosak, A. Vanžurová, *Geodesic Mappings of Manifolds with Affine Connection*, Palacký University, Olomouc, 2008.

[31] J. Mikeš, O. Pokorná, G. Starko, *On almost geodesic mappings $\pi_2(e)$ onto Riemannian spaces*, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Serie II, Suppl. 72 (2004), 151–157.

[32] J. Mikeš, A. Vanžurová, I. Hinterleitner, *Geodesic Mappings and Some Generalizations*, Palacký University, Olomouc, 2009.

[33] J. Mikeš, E. Stepanova, A. Vanžurová et al., *Differential Geometry of Special Mappings*, Palacký University, Olomouc, 2015.

[34] S. M. Minčić, *Ricci identities in the space of non-symmetric affine connection*, Matematički Vesinik, 10(25), Vol. 2, (1973), 161–172.

[35] S. M. Minčić, *On curvature tensors and pseudotensors of the spaces with non-symmetric affine connection*, Mathematica Balkanica, 4, 76, (1974), 427–430.

[36] С. М. Минчић, *Генералисани Риманови простори*, докторска дисертација, Природно-Математички Факултет, Нови Сад, 1975.

[37] S. M. Minčić, *Curvature tensors of the space of non-symmetric affine connexion, obtained from the curvature pseudotensors*, Matematički Vesnik, 13, (28), (1976), 421–435.

[38] S. M. Minčić, *New commutation formulas in the non-symmetric affine connection space*, Publ. Inst. Math. (Beograd)(N.S.) 22(36)(1977) 189–199.

[39] S. M. Minčić, *Independent curvature tensors and pseudotensors of spaces with non-summetric affine connexion*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolayai, 31, Differential Geometry, Budapest (Hungary), (1979), 445–460.

[40] S. M. Minčić, *Symmetry properties of curvature tensors of the space with non-symmetric affine connexion and generalized Riemannian space*, Zbornik radova Filozofskog fakulteta, Serija Matematika, Niš, 1 (11) (1987), 69–78.

[41] S. M. Minčić, M. S. Stanković, *On geodesic mappings of general affine connection spaces and of generalized Riemannian spaces*, Matematički vesnik, 49 (1997), 27–33.

[42] S. M. Minčić, M. S. Stanković, *Equitorsion geodesic mappings of generalized Rimannian spaces*, Publications de L'Institut Mathématique, 61 (75) (1997), 97–104.

[43] S. M. Minčić, M. S. Stanković, *New special geodesic mappings of general affine connection spaces*, Filomat, 14 (2000), 19–31.

[44] S. M. Minčić, M. S. Stanković, Lj. S. Velimirović, *Generalized Kahlerian Spaces*, Filomat 15 (2001), 167–174.

[45] S. M. Minčić, M. S. Stanković, Lj. S. Velimirović, *Generalized Riemannian Spaces and Spaces of Non-symmetric Affine Connection*, Faculty of Science and Mathematics Niš, 2013.

[46] S. M. Minčić, M. S. Stanković, M. Lj. Zlatanović, *Ricci Coefficients of Rotation of Generalized Finsler Spaces*, Miskolc Mathematical Notes, Vol. 16 (2015), No. 2, pp. 1025–1039.

[47] S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, *Diferencijalna geometrija mnogostrukosti*, Faculty of Science and Mathematics, Niš, 2011.

[48] S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, M. S. Stanković, *Integrability conditions of derivational equations of a submanifold of a generalized Riemannian space*, Applied Mathematics and Computation, 01(2014) 226, 3–9.

[49] S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, M. S. Stanković, *New Integrability Conditions of Derivational Equations of a Submanifold in a Generalized Riemannian Space*, FILOMAT, 24:4(2010),137–146.

[50] S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, M. S. Stanković, *On spaces with non-symmetric affine connection, containing subspaces without torsion*, Applied Mathematics and Computation, 01(2013); 219(9): 4346–4353.

[51] S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, M. S. Stanković, *Integrability conditions of derivational equations of a submanifold of a generalized Riemannian space*, Applied Mathematics and Computation, 226, 01(2014), 3–9.

[52] R. S. Mishra, *Subspaces of a generalized Riemannian space*, Bull. Acad. Roy. Belgique, (1954), 1058–1071.

[53] M. S. Najdanović, M. Lj. Zlatanović, I. Hinterleitner, *Conformal and Geodesic Mappings of Generalized Equidistant Spaces*, Publications de L'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 98 (112) (2015), 71–84.

[54] C. Nitescu, *Bianchi identities in a Non-symmetric Connection Space*, The Bulletin of the Politehnic Institute of Jassy, (N. S.) 20 (24) (1974), Fasc. 1-2, Sect. I, 69–72.

[55] M. Z. Petrović, M. S. Stanković, *Special almost geodesic mappings of the first type of non-symmetric affine connection spaces*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., Ser. 2, 2015, Vol. 40, No. 3, 1353–1362.

[56] M. Z. Petrović, M. S. Stanković, *On almost geodesic mappings of the second type between manifolds with non-symmetric linear connection*, Filomat, accepted for publication.

[57] M. Prvanović, *Equations de Gauss d'un sous-espace plongé dans l'espase Riemannien généralisé*, Buletin de La Classe des Sciences de L'academie Royal de Belguiqe, (1955), 615–621.

[58] M. Prvanović, *Konformne i projektivne transformacije generalisanih Riemanovih prostora u smislu T. Takasu-a*, Godišnjak Filozofskog Fakulteta, Novi Sad, knjiga III (1958), 265–272.

[59] M. Prvanović, *Une connexion non-symétrique associée a l'espace Riemannien*, Publications de L'Institut Mathématique, N. S., Vol. 19 (24), (1970), 53–64.

[60] M. Prvanović, *On pseudo metric semi-symmetric connections*, Publications de L'Institut Mathématique, N. S., Vol.18(32), (1975), 157–164.

[61] M. Prvanović, *Holomorphically semi-symmetric connexion*, Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu knjiga 9 (1979), 91–99.

[62] М. Прванович, *Четыре тензора кривиыны несимметрической связности*, Из зборнике 150 лет геометрии Лобачевского Касань, 1976, Москва 1977, 199–205.

[63] M. Prvanović, *A note on holomorphically projective transformations of the Kähler space*, Tensor, N. S., Vol. 35, (1981), 99–104.

[64] M. Prvanović, *Some special product semisymmetric and some special holomorphically semisymmetric F-connections*, Publications de L'Institut Mathématique, N. S., Vol. 35 (49), (1984), 139–152.

[65] M. Prvanović, *π-Projective Curvature Tensors*, Analles Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, Lublin - Polonia, XLI, 16, (1986), 123–133.

[66] M. Prvanović, *Complex conformal connection on the locally conformal Kähler manifolds*, Kragujevac Journal of Mathematics, 25 (2003), 127–138.

[67] M. Prvanović, *Locally conformally Kähler manifolds of constant type and J-invariant curvature tensor*, , Facta Universitatis, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics, Vol.3, No.14, (2003), 791–804.

[68] M. Prvanović, *Holomorphically projective curvature tensors*, Kragujevac Journal of Mathematics, 28 (2005), 97–111.

[69] B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, (1854), Ges. Math. Werke, Leipzig, (1892), reproduced by Dover Publications (1953), 272–287.

[70] Н. С. Синюков, *Геодезические Отображения Римановых Пространств*, Москва, "Наука", 1979.

[71] В. С. Собчук, *Почти геодезические отображения Римановых пространств на симметрические Римановы пространства*, Матем. заметки, 17 No5, 1975, 757–763.

[72] M. S. Stanković, *First type almost geodesic mappings of general affine connection spaces*, Novi Sad J. Math., 29 No. 3, (1999), 313–323.

[73] M. S. Stanković, *On a canonic almost geodesic mappings of the second type of affine spaces*, FILOMAT 13, (1999), 105–114.

[74] M. S. Stanković, *On a special almost geodesic mappings of the third type of affine spaces*, Novi Sad J. Math., 31 No. 2, (2001), 125–135.

[75] М. С. Станковић, *Нека пресликавања простора несиметричне афине конексије*, докторска дисертација, Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет, 2001.

[76] M. S. Stanković, *Special equitorsion almost geodesic mappings of the third type of non-symmetric affine connection spaces*, Appl. Math. and Computation, 244 (2014), 595–701.

[77] M. S. Stanković, M. S. Ćirić, M. Lj. Zlatanović, *Geodesic mappings of equiaffine and anti-equiaffine general affine connection spaces preserving torsion*, Filomat, Vol. 26, No. 3 (2012), 439–451.

[78] M. S. Stanković, S. M. Minčić, *New special geodesic mappings of generalized Riemannian space*, Publications de L'Institut Mathématique, N. S., Vol. 67 (81), (2000), 92–102.

[79] M. S. Stanković, S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, *On Holomorphically Projective Mappings of Generalized Kahlerian Spaces*, Matematicki Vesnik 54(2002), 195–202.

[80] M. S. Stanković, S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, *On equitorsion holomorphically projective mappings of generalised Kahlerian spaces*, Czechoslovak Mathematical Journal, 54 (129) (2004), No. 3, 701–715.

[81] M. S. Stanković, S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, M. Lj. Zlatanović, *On equitorsion geodesic mappings of general affine connection spaces*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 124 (2010), 77–90.

[82] M. S. Stanković, Lj. S. Velimirović, S. M. Minčić, M. Lj. Zlatanović, *Equitorsion conform mappings of generalized Riemannian spaces*, Matematički Vesnik, 61 (2009), 119–129.

[83] M. S. Stanković, Lj. S. Velimirović, M. Lj. Zlatanović, *Some relation in the generalized Kahlerian spaces of the second kind*, Filomat 23:2 (2009), 82–89.

[84] M. S. Stanković, **N. O. Vesić**, *Some relations in non-symmetric affine connection spaces with regard to a special almost geodesic mappings of the third type*, Filomat, 29:9 (2015), 1941–1951.

[85] M. S. Stanković, M. Lj. Zlatanović, Lj. S. Velimirović, *Equitorsion holomorphically projective mappings of generalized Kahlerian space of the first kind*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 60, No. 3 (2010), 635–653.

[86] M. S. Stanković, M. Lj. Zlatanović, Lj. S. Velimirović, *Equitorsion holomorphically projective mappings of generalized Kahlerian space of the second kind*, International Electronic Journal of Geometry, Vol. 3, No. 2 (2010), 26–39.

[87] M. S. Stanković, M. Lj. Zlatanović, **N. O. Vesić**, *Some properties of ET-projective tensors obtained from Weyl projective tensor*, Filomat 29:3 (2015), 573–584.

[88] M. S. Stanković, M. Lj. Zlatanović, **N. O. Vesić**, *Basic Equations of G-Almost Geodesic Mappings of the Second Type, Which Have the Property of Reciprocity*, Czech Mathematical Journal, (2015) Vol. 65, No. 3, pp. 787–799.

[89] T. Takasu, *Generalized Riemannian geometry*, The Yokohama Mathematical Journal, Vol. V, No. 2 (1957), 115–169.

[90] H. Vavříková, J. Mikeš, O. Pokorná, G. Starko, *On Fundamental Equations of Almost Geodesic Mappings of Type* $\pi_2(e)$, Russ. Math. 51, No. 1, 8–12 (2007); translation from Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat. 2007, No. 1, 10–15 (2007).

[91] **N. O. Vesić**, *Curvature Tensors and the Third Type Almost Geodesic Mappings*, Facta Universitatis, 2014, Vol. 29, No. 4, 445–460.

[92] **N. O. Vesić**, *Weyl Projective Objects* $\underset{1}{\mathcal{W}}, \underset{2}{\mathcal{W}}, \underset{3}{\mathcal{W}}$ *for Equitorsion Geodesic Mappings*, Miskolc Mathematical Notes, accepted for publication.

[93] **N. O. Vesić**, *Some Invariants of Conformal Mappings of a Generalized Riemannian Space*, Filomat, accepted for publication.

[94] **N. O. Vesić**, *Generalized Weyl Conformal Curvature Tensor of Generalized Riemannian Space*, submited.

[95] **N. O. Vesić**, *Invariants of Third Type Almost Geodesic Mappings of Generalized Riemannian Space*, submited.

[96] **N. O. Vesić**, *Generalized Weyl Conformal Curvature tensor of Generalized RIemannian Space*, submited.

[97] **N. O. Vesić**, M. S. Stanković, *Invariants of Special Second Type Almost Geodesic Mappings of Generalized Riemannian space*, sumited.

[98] **N. O. Vesić**, Lj. S. Velimirović, M. S. Stanković, *Some Invariants of Equitorsion Third Type Almost Geodesic Mappings*, Mediterranean Journal of Mathematics, (2016), Vol. 13, No. 6, pp. 4581–4590.

[99] M. Lj. Zlatanović, *On equitorsion geodesic mappings of general affine connection spaces onto generalized Riemannian spaces*, Applied Mathematics Letters, Vol. 24, No. 5, 665–671.

[100] M. Lj. Zlatanović, *New projective tensors for equitorsion geodesic mappings*, Applied Mathematics Letters, Vol. 25, No. 5, (2012), 890–897.

[101] M. Lj. Zlatanović, I. Hinterleitner, M. S. Najdanović, *Geodesic mappings onto Kahlerian spaces of the first kind*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 64, No. 4, 2014, pp. 1113–1122.

[102] M. Lj. Zlatanović, I. Hinterleitner, M. Najdanović, *On Equitorsion Concircular Tensors of Generalized Riemannian Spaces*, Filomat 28:3 (2014), 463–471.

[103] M. Lj. Zlatanović, S. M. Minčić, Lj. S. Velimirović, *On Integrability Conditions of Derivation Equations in a Subspace of Assymetric Affine Connection Space*, Filomat 29:10 (2015), 2421–2427.

[104] M. Lj. Zlatanović, V. M. Stanković, *Geodesic mapping onto Kählerian space of the third kind*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 450 (2017), 480–489.

[105] M. Lj. Zlatanović, V. M. Stanković, *Some invariants of holomorphically projective mappings of generalized Kählerian spaces*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 458 (2018), 601–610.

[106] M. Lj. Zlatanović, Lj. S. Velimirović, M. S. Stanković, *Necessary and sufficient conditions for equitorsion geodesic mapping*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 435 (2016), 578–592.

Биографија

Ненад Весић је рођен 24. августа 1985. године у Прокупљу, општина Прокупље, Република Србија. У Прокупљу је завршио Основну школу ,,Никодије Стојановић Татко” и Музичку школу ,,Корнелије Станковић”, одсек хармоника, у класи наставника Томислава Вељковића.

За време основношколског образовања је, почев од школске 1993/94. године, учествовао на општинским и окружним такмичењима из математике. Школске 1999/2000. године је освојио трећу награду на Републичком и похвалу на Савезном такмичењу из математике. Почев од школске 1997/98. године је учествовао и на општинским и окружним такмичењима из физике. Школске 1999/2000. године је био члан оркестра музичке школе на завршном концерту. Носилац је Вукове Дипломе на основу успеха у основношколском образовању.

Школске 2000/01. године је уписао Гимназију Светозар Марковић у Нишу, одељење за надарене математичаре. Средњу школу је завршио школске 2003/04. године. Учествовао је на такмичењима из математике и физике. Школске 2001/02. је био учесник зимског математичког семинара у Петници.

Природно-математички факултет у Нишу (ПМФ) је уписао школске 2004/05. године. Дипломирао је 2009. године под менторством проф. др Љубице Велимировић, редовног професора на ПМФ-у, на тему *Инверзија различитих простора* са просечном оценом 9,54.

Докторске студије на ПМФ-у је уписао колске 2009/10. године. Све испите, положио је са просечном оценом 9,60. Објавио је неопходне научне и стручне радове. НСВ Универзитета у Нишу му је одобрило тему 9. 2. 2015. године.

У различитим периодима, био је стипендиран од стране Владе Републике Србије и Привредне Банке Београд.

Од 2005. године је члан Нишког Удружења Студената са Хендикепом. Године 2012. је учествовао у пројекту ,,На игру личи, живот се зове", секција глума, под менторством Томе Бибића, глумца Луткарског Позоришта у Нишу. Ненад Весић је учествовао у завршној перформанс-представи 23. марта 2012. године.

Од 2011. године је запослен на ПМФ-у као истраживач на пројекту ,,Геометрија, образовање и визуелизација са применама".

Библиографија

Ненад Весић има објављених или прихваћених за штампу шест радова у часописима на СЦИ листи (самостално или у коауторству):

1. M. S. Stanković, **N. O. Vesić**, *Some relations in non-symmetric affine connection spaces with regard to a special almost geodesic mappings of the third type*, Filomat, 29:9 (2015), 1941–1951, **M21**.

2. M. S. Stanković, M. Lj. Zlatanović, **N. O. Vesić**, *Some properties of ET-projective tensors obtained from Weyl projective tensor*, Filomat 29:3 (2015), 573–584, **M21**.

3. M. S. Stanković, M. Lj. Zlatanović, **N. O. Vesić**, *Basic Equations of G-Almost Geodesic Mappings of the Second Type, Which Have the Property of Reciprocity*, Czech Mathematical Journal, (2015) Vol. 65, No. 3, pp. 787–799, **M23**.

4. **N. O. Vesić**, *Weyl Projective Objects* $\underset{1}{\mathcal{W}}, \underset{2}{\mathcal{W}}, \underset{3}{\mathcal{W}}$ *for Equitorsion Geodesic Mappings*, Miskolc Mathematical Notes, accepted for publication, **M23**.

5. **N. O. Vesić**, *Some Invariants of Conformal Mappings of a Generalized Riemannian Space*, Filomat, accepted for publication, **M22**.

6. **N. O. Vesić**, Lj. S. Velimirović, M. S. Stanković, *Some Invariants of Equitorsion Third Type Almost Geodesic Mappings*, Mediterranean Journal of Mathematics, (2016), Vol. 13, No. 6, pp. 4581–4590, **M21**.

У вези са докторатом, Ненад Весић је самостално објавио један рад у часопису чији је издавач Универзитет у Нишу а који није на СЦИ листи:

1. **N. O. Vesić**, *Curvature Tensors and the Third Type Almost Geodesic Mappings*, Facta Universitatis, 2014, Vol. 29, No. 4, 445–460.

Поред ових радова, Ненад Весић је у коауторству објавио два научна рада који нису тема његове докторске дисертације:

1. **N. O. Vesić**, L. Mačukanović-Golubović, D. Ilić, *Mathematically Universalized Estimations of Medical Results*, Matematički Bilten Skopje, 2017, 41 (LXVII), No. 2, 54–73.
2. **N. O. Vesić**, D. J. Simjanović, *Matrix-based algorithm for text-data hiding and information processing*, Military Technical Courier, 2014., Vol. LXII, No. 1, pp. 42–57.

Ненад Весић је, самостално или у коауторству, учествовао на конференцијама: XVII Geometrical Seminar, XVIII Geometrical Seminar, XIX Geometrical Seminar, InfoTex 2012, ICTEC, Peta Matematička Konferencija Republike Srpske. Присуствовао на десет DAAD-курсева. Одржао је једно предавање по позиву.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

СКОРО ГЕОДЕЗИЈСКА ПРЕСЛИКАВАЊА ГЕНЕРАЛИСАНИХ РИМАНОВИХ ПРОСТОРА И УОПШТЕЊА

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио ауторска права, нити злоупотребио интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 05.02.2018. године

Потпис аутора дисертације:

Ненад О. Весић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

СКОРО ГЕОДЕЗИЈСКА ПРЕСЛИКАВАЊА ГЕНЕРАЛИСАНИХ РИМАНОВИХ ПРОСТОРА И УОПШТЕЊА

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде **(CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу, 25. 02. 2018. године

Потпис аутора дисертације:

Весић

Ненад О. Весић

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

СКОРО ГЕОДЕЗИЈСКА ПРЕСЛИКАВАЊА ГЕНЕРАЛИСАНИХ РИМАНОВИХ ПРОСТОРА И УОПШТЕЊА

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 05.02.2018. године

Потпис аутора дисертације:

Ненад О. Весић