UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU

MREŽNO VREDNOSNE INTUICIONISTIČKE PREFERENCIJSKE STRUKTURE I PRIMENE

DOKTORSKA DISERTACIJA

mr Marija Đukić

Mentor: Prof. dr Andreja Tepavčević

Novi Sad, 2018. godine

Sadržaj

1 Uređeni skupovi **4**

1.1 Osnovni pojmovi, definicije i oznake 4

1.2 Mreža 10

1.3 Operator zatvaranja, parcijalni operator zatvaranja i kompletiranje 15

2 Rasplinuti skupovi **20**

2.1 Osnovni pojmovi 20

2.2 Mrežno vrednosni rasplinuti skupovi 25

2.3 Poset-vrednosni rasplinuti skupovi 30

3 IL-vrednosni i IP-vrednosni rasplinuti skupovi **35**

3.1 Različite definicije IL-vrednosnih rasplinutih skupova 39

3.2 IP-vrednosni rasplinuti skupovi 42

3.3 Intuicionističke rasplinute relacije 54

4 Vrednosne relacije preferencije **63**

4.1 Preferencije u klasičnom smislu i poset-vrednosne relacije preferencije 64

4.2 Jake poset-vrednosne relacije reciprociteta 67

4.3 Intuicionističke poset-vrednosne rasplinute relacije preferencije 72

5 Primene **84**

5.1 Primene IL-vrednosnih i IP-vrednosnih relacija 84

5.2 Mreža intervala kao kodomen IP-vrednosnog rasplinutog skupa i relacije preferencije 88

5.2.1 Intuicionistički rasplinuti skupovi ocena 90

6 Zaključak **95**

Literatura **98**

Uvod

Od kada je L. A. Zadeh 60.-ih godina prošlog veka u svom radu „Fuzzy sets"[131] uveo pojam *rasplinutog skupa*, kao preslikavanje skupa u interval $[0,1]$, došlo je do mnogobrojnih uopštenja. J. A. Goguen 1967. u radu [50] uvodi pojam *mrežno-vrednosnog rasplinutog skupa* u kome umesto intervala $[0,1]$, kao kodomena funkcije pripadanja, uvodi mrežu kao opštiju strukturu. Kasnija uopštenja idu u pravcu uvođenja poset-vrednosnih rasplinutih skupova [117], intervalno-vrednosnih rasplinutih skupova i dr. Atanassov 1983. godine uvodi *intuicionistički rasplinuti skup* [1] koji predstavlja uopštenje rasplinutog skupa, gde pored funkcije pripadanja uvodi funkciju nepripadanja i nivo neodređenosti. 1984. godine Atanassov i Stoeva daju generalizaciju početne definicije uvodeći intuicionističke L-rasplinute skupove, kasnije intuicionističke intervalno-vrednosne rasplinute skupove, intuicionističke L-rasplinute skupove tipa 2 i dr.

Polazeći od prvobitne definicije intuicionističkog L-rasplinutog skupa koja zahteva postojanje antitone involucije na posmatranoj mreži, T. Gerstenkorn i A. Tepavčević [47, 48] daju nekoliko uopštenja kojima, do određene mere, prevazilaze njene nedostatke i ublažavaju zahteve uvođenjem funkcije linearizacije. U radovima [54, 55] M. Gorjanac Ranitović i A. Tepavčević uvode intuicionistički L-rasplinuti skup sa kodomenom $[0,1]^I$ kao najopštiji koncept ovakvih skupova.

Cilj ovog istraživanja bio je da se razvije definicija kojom će se otkloniti postojeći nedostaci, koja će važiti za što veću klasu uređenih struktura, pa samim tim i mreže, i koja će biti pogodna za istraživanje sa stanovišta preferencijskih struktura.

U prvom poglavlju navedene su osnovne definicije i tvrđenja iz teorije uređenih skupova i teorije mreža. U trećem delu ovog poglavlja date su definicije i osnovna svojstva operatora zatvorenja i parcijalnih operatora zatvaranja.

U drugom poglavlju dat je pregled teorije rasplinutih skupova, sa posebnim akcentom na mrežno-vrednosne i poset-vrednosne rasplinute skupove na koje se nadovezuju rezultati ove teze. Prikazani su potrebni i dovoljni uslovi pod kojima je familija podskupova $\mathcal{F}$ nekog skupa X upravo familija nivoa poset-vrednosnog rasplinutog skupa.

U prvom delu trećeg poglavlja iznete su različite definicije i uopštenja intuicionističkih rasplinutih skupova i njihovi nedostaci. Drugi i treći deo trećeg, četvrto i peto poglavlje su originalni rezultati dobijeni u saradnji sa mentorom prof. dr Andrejom Tepavčević.

U drugom delu trećeg poglavlja istraživani su intuicionistički poset-vrednosni rasplinuti skupovi. Kodomen funkcije pripadanja i nepripadanja je proizvoljan konačan poset koji je predstavljen kao podskup dobro odabrane distributivne mreže. Ispitivana su svojstva dve familije nivo skupova. Dati su potrebni i dovoljni uslovi pod kojima dve familije podskupova skupa X su familije nivoa intuicionističkog poset-vrednosnog rasplinutog skupa. Predloženi model omogućava dalja istraživanja funkcije pripadanja i funkcije nepripadanja bez uključivanja komplementa na posetu. Takođe, pokazano je da ne postoje dodatni uslovi po pitanju strukture poseta koji je kodomen, kao što su ograničenost, postojanje antitone involucije i sl. Ovi rezultati objavljeni su u radu [41].

U trećem delu trećeg poglavlja istraživane su intuicionističke mrežno-vrednosne i poset-vrednosne relacije. Uvedene su nove definicije ovih relacija koje su u skladu sa uvedenom definicijom intuicionističkog poset-vrednosnog rasplinutog skupa iz drugog dela ove glave. Za ovako definisane relacije uvedeni su rasplinuti x-blokovi pripadanja i nepripadanja, i njihovi nivoi. Pokazano je da par rasplinutog x-bloka pripadanja i nepripadanja zadovoljava uslove intuicionističkog mrežno-vrednosnog (poset-vrednosnog) skupa. Data je Teorema sinteze intuicionističke mrežno-vrednosne relacije na osnovu dve familije familija nepraznih podskupova skupa X koje zadovoljavaju određene uslove.

Četvrto poglavlje prikazuje intuicionističke rasplinute relacije preferencije, koje su pogodne u slučaju kada postoji početni nedostatak informacija. U drugom delu četvrtog poglavlja dato je uopštenje relacija reciprociteta kroz jake poset-vrednosne relacije reciprociteta. Istraživana su neka svojstva ovakvih relacija i pokazano je da svaka jaka poset-vrednosna relacija reciprociteta zadovoljava uslove poset-vrednosne relacije preferencije. U trećem delu uvedene su intuicionističke poset-vrednosne rasplinute relacije reciprociteta i intuicionističke poset-vrednosne rasplinute relacije preferencije koje predstavljaju uopštenje rasplinutih relacija sa jedne strane i relacije reciprociteta sa druge strane. Dokazana su neka svojstva ovakvih relacija.

Peto poglavlje daje mogućnosti primene uvedenih relacija iz Glave 4. Uvođenjem intuicionističkih mrežno-vrednosnih i poset-vrednosnih relacija preferencije se omogućava prevazilaženje početnog nedostatka informacija. Dati su primeri kojima se ilustruje mogućnost primene oba tipa intuicionističkih relacija koje su definisane u prethodnom poglavlju.

Prvo, želim da se zahvalim svojoj porodici **Anđeli, Sofiji i Ivanu** koji su mi svih ovih godina bili snaga i ljubav bez koje ne bi bilo ni ove disertacije.

Želim da izrazim zahvalnost svom mentoru, **prof. dr Andreji Tepavčević** na nesebičnoj pomoći, strpljenju, razumevanju i podršci koju mi je pružala svih ovih godina u kojima smo radile zajedno. Velika mi je čast da sam imala priliku da sa njom sarađujem.

Hvala **prof. dr Branimiru Šešelji** koji je pažljivo i detaljno pročitao rad, ukazao na greške i svojim savetima i sugestijama uticao na poboljšanje kvaliteta konačne verzije ove disertacije.

Zahvaljujem se i **prof. dr Veri Lazarević**, sa kojom godinama sarađujem, na mnogim korisnim savetima.

Zahvaljujem se i **prof. dr Ivici Bošnjaku** koji je detaljno pročitao materijal i pomogao u njegovom poboljšanju.

mr Marija Đukić
Čačak, maj 2018.

Glava 1

Uređeni skupovi

1.1 Osnovni pojmovi, definicije i oznake

U ovom poglavlju predstavljen je koncept teorije mreža i uređenih skupova i dati su neki rezultati koji će se koristiti u kasnijim poglavljima. Sama prezentacija ovog dela je ne toliko formalna i daje jedan opisni uvod u samu teoriju. U ovom delu najviše je korišćena notacija i poznate činjenice iz [9, 10, 27, 51, 109].

Parcijalno uređeni skup (skraćeno poset) je uređeni par $(P, \leq)$, gde je P neprazan skup i $\leq$ relacija poretka (refleksivna, antisimetrična i tranzitivna). Kažemo da je P uređen ovom relacijom[1].

Za poset $(P, \leq)$ **dualni poredak** $\geq$ na skupu P definisan je kao

$$x \geq y \text{ ako i samo ako } y \leq x.$$

Dualni poredak je takođe refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija na P, a uređeni skup $(P, \leq)$ dualan je uređenom skupu $(P, \geq)$.

Ako je $x \leq y$ ili $y \leq x$ kažemo da su x i y **uporedivi** u odnosu na poredak (relaciju) $\leq$, u ostalim slučajevima su **neuporedivi**.

[1] Kažemo da je P uređen relacijom $\leq$, ali to ne znači da je poredak nužno linearan.

Poset P je **linearno** uređen ako su svaka dva njegova elementa uporediva. Sveobuhvatnija prezentacija poseta može se naći npr. u [38]. Linearno uređen skup zove se **lanac**. Poset P u kome nema netrivijalno neuporedivih elemenata zovemo **anti-lanac**. U anti-lancu važi da ako je $x \leq y$ onda je $x = y$, za $x, y \in P$.

Definicija 1.1. Za $a, b \in P$ kažemo da b **pokriva** a ili da je a **pokriveno** sa b i zapisujemo $a \prec b$ ako je $a < b$ i ako važi: $a \leq c \leq b$ povlači da je ili $a = c$ ili $b = c$.

Jedno od pogodnih svojstava poseta jeste da se mogu crtati, tj. da se svakom konačnom posetu može pridružiti dijagram (**Hase dijagram**).

Neprazan podskup Q uređenog skupa $(P, \leq)$ je uređen skup. Poredak $\leq_Q$ definisan je sa:

$$(\forall x, y \in Q)(x \leq_Q y \text{ ako i samo ako je } x \leq y).$$

Relacija $\leq_Q$ je restrikcija poretka $\leq$ na Q, pa se indeks Q izostavlja. Kažemo da je poredak na Q **indukovan** poretkom iz P.

Podskup I poseta P je **polu-ideal** ako za sve $x, y \in P$ važi:

$$\text{iz } x \in I \text{ i } y \leq x, \text{ sledi } y \in I.$$

Neka je $a \in P$, onda je skup

$$a\!\downarrow := \{x \in P \mid x \leq a\}$$

polu-ideal u P i zove se **glavni ideal** generisan elementom a.

Slično, podskup F uređenog skupa P je njegov **polu-filter** ako za sve $x, y \in P$ važi:

$$\text{iz } x \in F \text{ i } x \leq y, \text{ sledi } y \in F.$$

Neka je $a \in P$, onda je skup

$$a\!\uparrow := \{x \in P \mid a \leq x\}$$

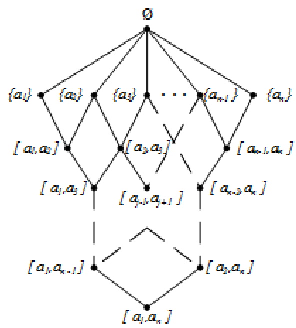
polu-filter u P i zove se **glavni filter** generisan elementom a.

Skup svih polu-ideala skupa P označićemo sa $\mathcal{I}(P)$, a skup polu-filtera sa $\mathcal{F}(P)$.

Definicija 1.2. [109] Neka je $(P, \leq)$ uređen skup i $a, b \in P$ takvi da je $a \leq b$. **Interval** je $[a, b] := \{x \in P \mid a \leq x \leq b\}$.

Interval $[a, b] = \{a, b\}$ je **prost** i tada važi $[a, b] = \{a, b\} \Leftrightarrow a \prec b$. Jednočlani skup $\{a\}$ je interval oblika $[a, a]$.

***Primer* 1.1.** Neka je $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ konačan lanac i $\mathfrak{I}^*(A)$ skup svih njegovih intervala, koji su u ovom slučaju lanci. Neka je $\mathfrak{I}(A) = \mathfrak{I}^*(A) \cup \{\emptyset\}$ (Slika1.1). Ovaj skup je uređen u odnosu na obrnutu inkluziju, ograničen elementima $A = [a_1, a_n]$ koji je njegov najmanji element i praznim skupom koji je najveći. Atomi su maksimalni „pravi"podlanci uređenog skupa A.



Slika 1.1: $(\mathfrak{I}(A), \supseteq)$.

Funkcija $f : P \to P$ je **involucija** ako je za svako $x \in P$, $f(f(x)) = x$.

Neka su dati poseti $(P, \leq)$ i $(Q, \leq)$. Funkcija $f : P \to Q$ je **izotona** ako za $x, y \in P$ važi:

$$\text{ako je } x \leq y \text{ onda je } f(x) \leq f(y).$$

Funkcija $f : P \to Q$ je **antitona** ako za $x, y \in P$ važi:

$$\text{ako je } x \leq y \text{ onda je } f(x) \geq f(y).$$

Funkcija $f : P \to Q$ je **obostrano izotona**, ako važi:

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Ako je funkcija obostrano izotona, onda je ona injekcija. Ovakvo preslikavanje (obostrano izotono) zove se **potapanje** poseta P u poset Q, a bijektivno potapanje zove se **izomorfizam**.

Neka je $(P, \leq)$ poset i $a, b \in P$. Kažemo da je a **minimalan** element poseta ako za svako $x \in P$ važi: $x \leq a$ sledi $x = a$. Dualno, b **maksimalan** element poseta ako za svako $x \in P$ važi: $b \leq x$ sledi $x = b$. Element a je **najmanji** element poseta ako za svako $x \in P$ važi $a \leq x$. Element b je **najveći** element poseta ako za svako $x \in P$ važi $x \leq b$. Najmanji element je minimalan, najveći maksimalan; obrnuto ne važi. Ako postoji najmanji element, on se zove **nula** i označava sa 0, a ako postoji najveći element on se zove **jedinica** i označava sa 1.

Za svaki uređen skup koji ima najmanji i najveći element kažemo da je **ograničen**.

Ako poset P ima najmanji element 0, onda svaki element $a \in P$ koji pokriva najmanji element zovemo **atom**:

$$a \text{ je } \textbf{atom} \text{ ako i samo ako je } 0 \prec a.$$

Dualno, ako u posetu P postoji najveći element 1, onda se **koatom** definiše na sledeći način:

$$a \text{ je } \textbf{koatom} \text{ ako i samo ako je } a \prec 1.$$

Skup svih atoma (koatoma) poseta P je antilanac u odnosu na poredak definisan na posetu P.

Poset $(P, \leq)$ je **konačan** ako je skup P konačan. **Dužina** konačnog lanca poseta P je broj grana u njemu. **Maksimalni** lanci u P su maksimalni elementi poseta svih lanaca u odnosu na inkluziju.

Silazni (opadajući) lanac u posetu P je podskup $\{p_1, p_2, \cdots\}$ skupa P čiji elementi ispunjavaju uslov $p_1 > p_2 > \cdots$.

Visina $h(x)$ elementa x poseta P je najveća (ako postoji) dužina opadajućeg lanca koji počinje elementom x.

Skupove donjih i gornjih ograničenja definišemo na sledeći način: Neka je P uređen skup i $Q \subseteq P$, onda je:

Skup svih donjih ograničenja $Q^d := \{p \in P \mid p \leq q, \text{ za svako } q \in Q\}$;
Skup svih gornjih ograničenja $Q^g := \{p \in P \mid q \leq p, \text{ za svako } q \in Q\}$.

Posebno, ako posmatramo prazan skup, tada je $\emptyset^d = \emptyset^g = P$.

Najveći element skupa Q^d (ako postoji) zove se **infimum** podskupa Q, tj. $\inf(Q)$, a najmanji element skupa Q^d (ako postoji) zove se **supremum** podskupa Q, tj. $\sup(Q)$. Ako postoje, infimum i supremum datog skupa su jedinstveni.

Sledeća tvrđenja govore o očuvanju infimuma i supremuma u odnosu na izotona preslikavanja.

Tvrđenje 1.1. [109]*Neka je f izotono preslikavanje poseta P u poset P_1, $B \subseteq P$ i $f(B) = \{b_1 \in P_1 \mid b_1 = f(b), \text{ za neko } b \in P\}$.*

1. *Ako u P postoji $c = \inf(B)$, a u P_1 postoji $c_1 = \inf(f(B))$, onda je $f(c) \leq c_1$.*

2. *Ako u P postoji $d = \sup(B)$, a u P_1 postoji $d_1 = \sup(f(B))$, onda je $d_1 \leq f(d)$.* □

Tvrđenje 1.2. [109]*Neka je f izomorfizam iz poseta P u poset P_1 i $B \subseteq P$.*

1. *Ako u P postoji $c = \inf(B)$, onda je $f(c) = \inf(f(B))$.*

2. *Ako u P postoji $d = \sup(B)$, onda je $f(d) = \sup(f(B))$.* □

Tvrđenje 1.3. [109] (**Teorema reprezentacije**)*Svaki poset $(P, \leq)$ može se potopiti u partitivni skup $(\mathcal{P}(P), \subseteq)$ tako da postojećim infimumima odgovaraju skupovni preseci.*

Dokaz. Vršimo potapanje poseta P u $\mathcal{P}(P)$ tako što svakom elementu pridružujemo glavni ideal na sledeći način:

$$x \mapsto x\downarrow.$$

Ovakvo preslikavanje je injektivno iz P u $\mathcal{P}(P)$ i saglasno sa poretkom, pa je ovakvo preslikavanje potapanje.

Ako postoji $a = \inf(X)$, za $X \subseteq P$, onda se a izomorfizmom preslikava u

$$a{\downarrow} = \{y \in P \mid y \leq \inf(X)\} = \bigcap\{x{\downarrow} \mid x \in X\}.$$

Ovo pokazuje da obostrano izotona injekcija preslikava infimume koji postoje u P u odgovarajuće preseke glavnih ideala. □

Pored elemenata koji su infimumi ili supremumi nekog podskupa poseta P možemo govoriti i o elementima koji nisu infimum ili supremum nijednog podskupa sa bar dva elementa.

Neka je $(P, \leq)$ poset i $a \in P$. Element a je **potpuno i-nerazloživ** ako je različit od 1 (ako u posetu P postoji najveći element) i ispunjava uslov: za proizvoljnu familiju $\{x_i \mid i \in I\}$ elemenata iz P,

$$\text{iz } a = \inf\{x_i \mid i \in I\} \text{ sledi } a = x_i, \text{ za neko } i \in I.$$

Dualno, element a je **potpuno ili-nerazloživ** ako je različit od 0 (ako u posetu P postoji najmanji element) i ispunjava uslov: za proizvoljnu familiju $\{x_i \mid i \in I\}$ elemenata iz P,

$$\text{iz } a = \sup\{x_i \mid i \in I\} \text{ sledi } a = x_i, \text{ za neko } i \in I.$$

Element koji je potpuno i-nerazloživ i potpuno ili-nerazloživ je **potpuno nerazloživ**.

Kako na posetu ne postoji drugačiji tip nerazloživosti osim potpune ([109]), pridev *potpuno* ćemo u narednom izlaganju izostaviti. Kolekcije svih i-nerazloživih i ili-nerazloživih elemenata poseta P uređene su poretkom koji nasleđuju iz P.

Slede tvrđenja u kojima se dokazuje da je svaki element konačnog uređenog skupa određen skupom i-nerazloživih elemenata iznad njega.

Lema 1.4. [109]*Ako je u konačnom uređenom skupu element a pravi*[2] *infimum nekog dvoelementnog skupa, onda je a infimum skupa svih elemenata koji ga pokrivaju.*

[2] Pravi infimum je infimum skupa kome sam ne pripada.

Dokaz. Neka je $a = \inf\{b, c\}$, $a \neq b$, $a \neq c$ i neka su $a_1, \cdots, a_n$ elementi koji ga pokrivaju. Tada postoje $a_j \leq b$ i $a_k \leq c$. Element a je donje ograničenje familije $\{a_1, \cdots, a_n\}$. Neka je i d donje ograničenje iste familije. Tada je $d \leq a_j \leq b$ i $d \leq a_k \leq c$, pa je $d \leq a$ jer je a infimum skupa $\{b, c\}$. Odavde sledi da je a najveće donje ograničenje familije $\{a_1, \cdots, a_n\}$, tj. $a = \inf\{a_1, \cdots, a_n\}$. □

Tvrđenje 1.5. [109]*Svaki element a konačnog uređenog skupa P jednak je infimumu svih i-nerazloživih elemenata x iznad njega.* □

Može se formulisati i dualno tvrđenje: *Svaki element konačnog poseta P može se predstaviti kao supremum svih ili-nerazloživih elemenata ispod njega.*

Neka je $(P, \leq)$ uređen skup sa najmanjim elementom 0 i najvećim elementom 1. **Komplement** elementa $a \in P$ je element $a^c \in P$ takav da važi $\inf\{a, a^c\} = 0$ i $\sup\{a, a^c\} = 1$.

1.2 Mreža

Posebnu klasu parcijalno uređenih skupova čine mreže.

Definicija 1.3. [109] **Mreža** je uređeni skup u kome za svaka dva elementa a i b postoji $\inf\{a, b\}$ i $\sup\{a, b\}$.

Tvrđenje 1.6. [109]*Ako je $(L, \leq)$ mreža, onda za svaki konačni neprazni podskup $M \subseteq L$ postoje* $\inf M$ *i* $\sup M$. □

Definicija 1.4. Potpuna (kompletna mreža) je uređen skup u kome svaki podskup ima infimum i supremum.

Infimum i supremum skupa L su redom najmanji (0) i najveći (1) elemenat. Mreža L je **ograničena** ako je poset L ograničen.

Tvrđenje 1.7. [109]*Svaka kompletna mreža je ograničena.* □

Kako mreže čine posebnu klasu uređenih skupova, to se sva svojstva uređenih skupova prenose na mreže.

Tvrđenje 1.8. [109] *U svakoj mreži $(L, \leq)$ mogu se definisati dve binarne operacije $\wedge$ i $\vee$ na sledeći način:*

$$x \wedge y := \inf\{x, y\} \text{ } i \text{ } x \vee y := \sup\{x, y\}.$$

$\square$

Koristićemo oznake $x \wedge y$ za infimum i $x \vee y$ za supremum elemenata $x, y \in L$. Takođe, ako je $Q \subseteq L$ uvodimo oznake $\bigwedge M := \inf M$ i $\bigvee M := \sup M$.

Tvrđenje 1.9. [109] *Operacije $\wedge$ i $\vee$ definisane na proizvoljnoj mreži $(L, \leq)$ imaju sledeća svojstva:*

$$\textit{komutativnost:} \begin{cases} x \wedge y = y \wedge x \\ x \vee y = y \vee x \end{cases};$$
$$\textit{asocijativnost:} \begin{cases} x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \end{cases},$$
$$\textit{apsorpcija:} \begin{cases} x \wedge (x \vee y) = x \\ x \vee (x \wedge y) = x \end{cases}.$$

$\square$

Na osnovu činjenice da se supremum i infimum jednoelementnog skupa poklapaju sa tim elementom sledi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 1.10. [109] *U svakoj mreži važi:*

$$\textit{idempotentnost:} \begin{cases} x \wedge x = x \\ x \vee x = x \end{cases}.$$

$\square$

Tvrđenje 1.11. [109] *Uređeni skup $(A, \leq)$ u kome svaki podskup ima infimum (supremum) je potpuna mreža.*

Dokaz. Ako svaki podskup ima infimum, onda postoji i infimum praznog skupa, tj. $\inf \emptyset = 1$. Takođe $\inf A = 0$. Ovim je dokazana egzistencija najmanjeg i najvećeg elementa skupa A. Ako je $B \subseteq A$, onda skup B^g nije prazan jer sadrži bar 1, pa se jednostavno pokazuje da je $\sup B = \inf B^g$. $\square$

Posledica 1.12. [109]*Familija $\mathcal{F}$ podskupova nepraznog skupa A koja sadrži skup A i zatvorena je za preseke u odnosu na inkluziju je kompletna mreža.*$\square$

Supremum ove mreže se definiše na sledeći način:

$$\bigvee\{\mathcal{F}_1 \mid \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}\} = \bigcap\{B \in \mathcal{F} \mid \bigcup \mathcal{F}_1 \subseteq B\}. \tag{1.1}$$

Tvrđenje 1.13. [109]*Neka je A uređeni skup. Familija njegovih polu-ideala je potpuna mreža u odnosu na inkluziju.*

Dokaz. Presek neprazne familije polu-ideala je polu-ideal. Skup A je polu-ideal. Dokaz sledi direktno iz Posledice 1.12. $\square$

Vezu poretka ($\leq$) i operacija ($\wedge$ i $\vee$) na mreži L daje sledeće Tvrđenje.

Tvrđenje 1.14. [109]*U mreži je $x \leq y$ ekvivalentno sa svakom od jednakosti*

$$x \wedge y = x \ \text{ i } \ x \vee y = y.$$

$\square$

Definicija 1.5. [109] Neka je $L \neq \emptyset$ i $\wedge$ i $\vee$ binarne operacije definisane na L. Tada je $(L, \wedge, \vee)$ **mreža** ako važe sledeće aksiome:

$$\text{zakoni komutativnosti}: \begin{cases} x \wedge y = y \wedge x \\ x \vee y = y \vee x \end{cases};$$

$$\text{zakoni asocijativnosti:} \begin{cases} x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \end{cases};$$

$$\text{zakoni apsorpcije:} \begin{cases} x \wedge (x \vee y) = x \\ x \vee (x \wedge y) = x \end{cases}.$$

Ovako dobijenu strukturu zvaćemo mreža kao algebra i pokazaćemo da je ona mreža u smislu parcijalno uređenog skupa.

Lema 1.15. [109]*Na mreži* $(L, \wedge, \vee)$ *važi zakon idempotentnosti, tj.*

$$x \wedge x = x \text{ i } x \vee x = x.$$

□

Na svakoj mreži kao algebri može se definisati poredak uz pomoć binarnih operacija na sledeći način:

Lema 1.16. [109]*Ako je* $(L, \wedge, \vee)$ *mreža, onda je binarna relacija* $\leq$ *definisana sa:*

$$x \leq y \text{ ako i samo ako je } x \wedge y = x, \text{ relacija poretka.} \tag{1.2}$$

□

Lema 1.17. [109]*U mreži* $(L, \wedge, \vee)$ *je* $x \leq y$ *ako i samo ako je* $x \vee y = y$*.* □

Pokažimo sada da je $a \wedge b$ infimum, a $a \vee b$ supremum elemenata a i b.

Lema 1.18. [109]*U odnosu na poredak* $\leq$ *definisan sa* (1.2)*, svaki dvočlani podskup* $\{x, y\}$ *algebarske mreže* $(L, \wedge, \vee)$ *ima infimum i supremum i važi:* $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ *i* $x \vee y = \sup\{x, y\}$*.* □

Sledeće tvrđenje daje vezu između mreže kao uređenog skupa i mreže kao algebarske strukture.

Tvrđenje 1.19. [109]

(i) Svaka mreža $(L, \wedge, \vee)$ *je istovremeno i mreža kao uređeni skup* $(L, \leq)$ *ako je poredak definisan sa* (1.2)*.*

(ii) Svaka mreža $(L, \leq)$ *je mreža kao algebarska struktura* $(L, \wedge, \vee)$ *gde su operacije* $\wedge$ *i* $\vee$ *redom infimum i supremum.* □

Od sada sa L označavaćemo mrežu i kao algebarsku strukturu $(L, \wedge, \vee)$ i kao mrežu kao uređeni skup.

Definicija 1.6. [120] Mreža $(L_1, \wedge, \vee)$ je **podmreža** mreže $(L, \wedge, \vee)$, ako je $L_1 \subseteq L$, a operacije na L_1 su restrikcije operacija iz L.

Napomena. Pojam podmreže definiše samo za mrežu kao algebru, a ne za mrežu kao uređeni skup.

Ideal u mreži L je njen neprazni podskup I koji zadovoljava uslove:

(i) Iz $a, b \in I$ sledi $a \vee b \in I$;

(ii) Iz $a \in I$ i $c \leq a$ sledi $c \in I$.

Glavni ideal u mreži L, generisan elementom $a \in L$ definiše se kao:

$$a{\downarrow} = \{x \in L \mid x \leq a\}.$$

Filter u mreži L je njen neprazni podskup F koji zadovoljava uslove:

(i) Iz $a, b \in F$ sledi $a \wedge b \in F$;

(ii) Iz $a \in F$ i $a \leq c$ sledi $c \in F$.

Glavni filter u mreži L, generisan elementom $a \in L$ definiše se kao:

$$a{\uparrow} = \{x \in L \mid a \leq x\}.$$

Ideal (filter) u mreži L je **pravi** ako se ne poklapa sa L.

Definicija 1.7. [120] Mreža $(L, \wedge, \vee)$ je **modularna** ako ispunjava zakon modularnosti:

$$\text{iz } x \leq z \text{ sledi } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z. \tag{1.3}$$

Definicija 1.8. [120] Mreža L je **distributivna** ako u njoj važi bilo koji od identiteta:

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &= (x \vee y) \wedge (x \vee z), \\ x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \end{aligned}$$

Imajući u vidu da je mreža uređeni skup, ona je ograničena ako ima najmanji i najveći elemenat, redom (0) i (1). Iz osobina ovih elemenata važi:

Tvrđenje 1.20. [120]*U ograničenoj mreži za svako $x \in L$*

$$0 \vee x = x; \quad 1 \wedge x = x; \quad 0 \wedge x = 0; \quad 1 \vee x = 1.$$

□

Definicija 1.9. [120] U ograničenoj mreži L, x^c je komplement elementa x ako je $x \wedge x^c = 0$ i $x \vee x^c = 1$.

Mreža je **komplementirana** ako u njoj svaki element ima komplement. Mreža je **jednoznačno komplementirana** ako svaki njen element ima tačno jedan komplement.

1.3 Operator zatvaranja, parcijalni operator zatvaranja i kompletiranje

Sistem zatvaranja i operator zatvaranja

Definicija 1.10. [109] **Sistem zatvaranja** je kolekcija $\mathcal{F}$ podskupova nepraznog skupa A koja je zatvorena u odnosu na preseke i sadrži ceo skup A.

Tvrđenje 1.21. [109]*Sistem zatvaranja je u odnosu na inkluziju potpuna mreža.* □

Neka je $\mathcal{F}$ proizvoljan sistem zatvaranja na skupu A. Na skupu $\mathcal{P}(A)$ definišimo preslikavanje $X \mapsto \overline{X}$, takvo da je za $X \subseteq A$,

$$\overline{X} := \bigcap \{Y \mid Y \in \mathcal{F} \text{ i } X \subseteq Y\}. \tag{1.4}$$

Kako $X \subseteq A \in \mathcal{F}$ to bar skup A pripada familiji koja određuje presek u 1.4, pa je ovo preslikavanje dobro definisano i zadovoljava uslove:

C_1 $X \subseteq \overline{X}$;

C_2 $\overline{X} = \overline{\overline{X}}$;

C_3 ako je $X \subseteq Y$, onda je $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$.

Definicija 1.11. [109] **Operator zatvaranja** na skupu A je funkcija $X \mapsto \overline{X}$ iz $\mathcal{P}(A)$ u $\mathcal{P}(A)$ koja ispunjava uslove $C_1 - C_3$.

$\overline{X}$ je **zatvorenje** skupa $X \subseteq A$, a ako je $X = \overline{X}$, onda je X zatvoren podskup u odnosu na ovaj operator zatvaranja.

Tvrđenje 1.22. [109]*Ako je $X \mapsto \overline{X}$ operator zatvaranja na skupu A, onda je inkluzijom uređeni skup $\mathcal{F}$ zatvorenih podskupova skupa A u odnosu na taj operator sistem zatvaranja.* □

Posledica 1.23. [109]*Podskupovi skupa A koji su zatvoreni u odnosu na neki operator zatvaranja čine kompletnu mrežu u odnosu na inkluziju.* □

Tvrđenje 1.24. [109]*Za svaku potpunu mrežu L postoji skup i operator zatvaranja na njemu, tako da je L izomorfna odgovarajućoj mreži zatvorenih podskupova.* □

Kompletiranje

Kompletiranje poseta P je svako potapanje tog poseta u kompletnu mrežu. Svaki poset P se može potopiti u uređeni skup $(\mathcal{I}(P), \subseteq)$ preko glavnih ideala. Na ovaj način čuvaju se postojeći infimumi. Mreža polu-ideala uređenog skupa je kompletna, pa je preslikavanje $x \mapsto x{\downarrow}$ jedno kompletiranje.

Za poset $(P, \leq)$ možemo definisati specijalnu familiju njegovih podskupova $\mathbf{DM}(P)$:

$$\mathbf{DM}(P) := \{X \subseteq P \mid X^{gd} = X\}. \tag{1.5}$$

Tvrđenje 1.25. [109]*Neka je P uređen skup. Funkcija $f : P \to \mathbf{DM}(P)$ definisana sa $f(x) = x\downarrow$ je kompletiranje tog uređenog skupa i ono očuvava infimume i supremume ako postoje u P.* $\square$

Funkcija $f : P \to \mathbf{DM}(P)$ je **Dedekind-Meknil kompletiranje** ili **kompletiranje pomoću preseka** uređenog skupa P.

Parcijalni sistem zatvaranja i parcijalni operator zatvaranja

Veza između operatora i sistema zatvaranja može se posmatrati i na parcijalno uređenim skupovima. Deo ovih rezultata izložen je u radu Šešelja-Tepavčević [116].

Definicija 1.12. Neka je $S \neq \emptyset$ i $\mathcal{F}$ kolekcija njegovih podskupova koja zadovoljava uslov: za svako $x \in S$,

$$\bigcap\{X \in \mathcal{F} \mid x \in X\} \in \mathcal{F}. \tag{1.6}$$

Kolekcija $\mathcal{F}$ zove se **parcijalni sistem zatvaranja**.[3]

Tvrđenje 1.26. *Ako je $\mathcal{F}$ parcijalni sistem zatvaranja nepraznog skupa S, onda je $\bigcup \mathcal{F} = S$.*

Dokaz. Ako je $\mathcal{F}$ parcijalni sistem zatvaranja nepraznog skupa S onda važi 1.6. Tada je za svako $x \in S$, $x \in X$ povlači $\bigcap X \in \mathcal{F}$. Neka postoji $X \in \mathcal{F}$ takvo da je $x \in X$. Tada je $x \in \bigcap X$, za svako $x \in S$, pa je $S \subseteq \bigcap X \in \mathcal{F}$. Odatle je $\bigcup \mathcal{F} = S$.

Sa druge strane, ako postoji $x \in S$ koje ne pripada ni jednom $X \in \mathcal{F}$, onda je familija takvih X-eva prazna. Presek ove prazne familije je S, pa $S \subseteq \bigcap X \in \mathcal{F}$. Ponovo, $\bigcup \mathcal{F} = S$. $\square$

Neka je S neprazan skup i $C : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ parcijalno preslikavanje za koje važi:

[3] U literaturi se koristi i termin **centralizovani sistem.**

$\overline{C}_1$: ako je $C(X)$ definisano, onda je $X \subseteq C(X)$;

$\overline{C}_2$: ako su defnisani $C(X)$ i $C(Y)$, onda iz $X \subseteq Y$ sledi $C(X) \subseteq C(Y)$;

$\overline{C}_3$: ako je $C(X)$ definisano, onda je $C(C(X)) = C(X)$;

$\overline{C}_4$: $C(\{x\})$ je definisano za svako $x \in S$.

Parcijalno preslikavanje C je **parcijalni operator zatvaranja** na S. Ako je $X \subseteq S$ i $C(X) = X$, tada je X **zatvoreni** skup.

Tvrđenje 1.27. [109]*Kolekcija zatvorenih skupova parcijalnog operatora zatvaranja na skupu S je parcijalni sistem zatvaranja na S i obratno, za svaki parcijalni sistem zatvaranja $\mathcal{F}$ na S, postoji parcijalni operator zatvaranja na istom skupu, tako da je odgovarajuća kolekcija zatvorenih skupova upravo $\mathcal{F}$.* □

Svaki parcijalni sistem zatvaranja je uređeni skup u odnosu na inkluziju. Obrnuto tvrđenje može se formulisati i na sledeći način (teoremom reprezentacije uređenih skupova preko ideala).

Tvrđenje 1.28. [109]*Svaki uređeni skup $(P, \leq)$ izomorfan je nekom parcijalnom sistemu zatvaranja na P u odnosu na inkluziju.* □

Posledica 1.29. [109]*Neka je P uređeni skup i $C : \mathcal{P}(P) \to \mathcal{P}(P)$ preslikavanje definisano sa*

$$C(X) := q\downarrow \ \textit{ ako je } \bigcap\{p\downarrow \mid p \in P \textit{ i } X \subseteq p\downarrow\} = q\downarrow \ \textit{ za neko } q \in P,$$

u suprotnom, $C(X)$ nije definisano. Tada je C parcijalni operator zatvaranja na P. □

Može se pokazati da ako se parcijalni sistem zatvaranja dopuni nedostajućim presecima dobija se sistem zatvaranja koji se poklapa sa Dedekind-Meknil kompletiranjem.

Tvrđenje 1.30. [109]*Neka je $\mathcal{F}$ parcijalni sistem zatvaranja i C odgovarajući parcijalni operator zatvaranja na skupu S. Neka je*

$$\overline{\mathcal{F}} := \{S\} \cup \{X \subseteq S \mid X = \bigcap \mathcal{G}, \textit{ za } \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}\}.$$

Tada je $\overline{\mathcal{F}}$ sistem zatvaranja, a njemu odgovarajući operator zatvaranja $\overline{C}$ je (kao funkcija) jednak C na svakom podskupu iz S za koji je C definisano.

Pored toga, za svaki uređeni skup P je $\boldsymbol{DM}(P) = \overline{\mathcal{F}}(P)$.

Dokaz. Po konstrukciji $\overline{\mathcal{F}}$ je zatvoren za preseke i sadrži ceo skup S, pa je ova kolekcija sistem zatvaranja. Neka je $\overline{C}$ odgovarajući operator zatvaranja: za $X \subseteq S$,

$$\overline{C}(X) = \bigcap\{Y \in \overline{\mathcal{F}} \mid X \subseteq Y\}.$$

Potrebno je dokazati da za $X \subseteq S$, $\overline{C}(X) = C(X)$, ako je $C(X)$ definisano. Očigledno, $\overline{C}(X) \subseteq C(X)$, jer iz $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$ sledi

$$\bigcap\{Y \in \overline{\mathcal{F}} \mid X \subseteq Y\} \subseteq \bigcap\{Y \in \mathcal{F} \mid X \subseteq Y\}.$$

Sa druge strane, kako je

$$C(X) = \bigcap\{Y \in \mathcal{F} \mid X \subseteq Y\},$$

sledi da je $C(X) \subseteq Y$ za svako $Y \in \mathcal{F}$ takvo da je $X \subseteq Y$. Zbog $Y \in \overline{\mathcal{F}}$ je

$$Y = \bigcap\{T \in \mathcal{F}' \mid \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}\}.$$

Iz $X \subseteq Y$ sledi $X \subseteq \bigcap\{T \in \mathcal{F}' \mid \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}\}$, pa je $X \subseteq T$ za svako $T \in \mathcal{F}'$. Zato je $C(X) \subseteq T$ za svako $T \in \mathcal{F}'$ i

$$C(X) \subseteq \bigcap\{T \in \mathcal{F}' \mid \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}\}.$$

Odatle

$$C(X) \subseteq \bigcap\{Y \in \overline{\mathcal{F}} \mid X \subseteq Y\} = \overline{C}(X),$$

što daje $C(X) = \overline{C}(X)$.

Dokaz drugog dela. Ako je $A \subseteq P$, onda je

$$A^{gd} \bigcap\{a{\downarrow} \mid a \in A^g\}.$$

Po konstrukciji $\overline{\mathcal{F}}(P)$ sadrži sve preseke glavnih ideala iz P. Odatle je $\mathbf{DM}(P) \subseteq \overline{\mathcal{F}}$, kolekcija podskupova iz P $\mathbf{DM}(P)$ sadržana je u $\overline{\mathcal{F}}(P)$.

Sa druge strane, ako je $B \in \overline{\mathcal{F}}(P)$, onda je $B = \{a{\downarrow} \mid a \in A\}$, za neko $A \subseteq P$. Budući da je $\bigcap\{a{\downarrow} \mid a \in A\} = A^d$ i $(A^d)^{gd} = A^d$, sledi

$$(\bigcap\{a{\downarrow} \mid a \in A\})^{gd} = (A^d)^{gd} = A^d = B.$$

Odatle je $B \in \mathbf{DM}(P)$, što je obrnuta inkluzija, pa je $\mathbf{DM}(P) = \overline{\mathcal{F}}$. $\square$

Glava 2

Rasplinuti skupovi

2.1 Osnovni pojmovi

Lofti A. Zadeh je 1965. godine svojim radom „*Fuzzy sets*"[131] doveo do prekretnice u modernom shvatanju pojma neodređenosti. Ovakav koncept, tridesetak godina ranije, uveo je američki filozof Max Black u radu „*Vagueness: An exercise in logical analysis*"[26]. Zadeh u svom radu razvija teoriju, čiji su objekti *rasplinuti skupovi.* Pripadnost rasplinutom skupu nije strogo određena i ne svodi se na potvrđivanje ili odbacivanje, već se posmatra kroz *stepen* (pripadanja). Zadeh je 1989. na sledeći način opisao važnost rasplinutih skupova [87]: „*Ljudsko saznanje može se posmatrati kao kolekcija činjenica i pravila, gde se oni, pak, mogu posmatrati kao problemi rasplinutih relacija. Ovo pak znači da se celokupno znanje može posmatrati kao sistem rasplinutih relacijskih jednačina.*"

Sledeće definicije i tvrđenja preuzeti su iz [12, 67].

Definicija 2.1. Neka je A proizvoljan skup. Karakteristična funkcija je preslikavanje $k_A : A \to \{0, 1\}$ definisano na sledeći način:

$$k_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ ako } x \in A; \\ 0 \text{ ako } x \notin A. \end{cases} \tag{2.1}$$

Prirodna generalizacija karakteristične funkcije dovodi do toga da se vrednosti koje se pridružuju elementima univerzalnog skupa nalaze u okviru nekog intervala ili opsega, i na ovaj način opisuju do koje mere (ili stepena) posmatrani element pripada datom skupu. Ovakva funkcija zove se funkcija pripadanja (pripadnosti), a skup koji ona definiše zove se rasplinuti (fuzzy) skup.

Zadeh [131] definiše rasplinuti skup tako što mrežu $(\{0,1\},\leq)$ menja intervalom realnih brojeva $[0,1]$.

Definicija 2.2. Neka je X neprazan skup. Rasplinuti skup μ nad X definisan je funkcijom $\mu : X \to [0,1]$.

Sa $\mu(x)$ označavamo **stepen pripadanja** elementa $x \in X$ rasplinutom skupu μ.

Rasplinuti skup koji je definisan prethodnom definicijom naziva se običan (klasičan) rasplinuti skup. Posmatrajući ovakve rasplinute skupove i njihove reprezentacije, značajne rezultate daju mnogi istraživači, a neki od njih su Negoita i Ralescu ([84, 85, 92, 93]). Nedostatak prethodne definicije jeste što je „previše precizna", tj. što se svakom elementu posmatranog skupa pridružuje tačno jedan realan broj. Nekada je moguće odrediti vrednosti funkcije pripadanja samo približno, na primer odrediti donja i gornja ograničenja vrednosti funkcije pripadanja. Kasniji pristupi vrednostima funkcije pripadanja ne dodeljuju samo jedan realan broj, već zatvoren interval realnih brojeva. Rasplinut skup kod koga je funkcija pripadanja definisana na ovaj način zove se **intervalno-vrednosni rasplinuti skup**.

Definicija 2.3. [67] Intervalno-vrednosni rasplinuti skup μ nad skupom X definisan je funkcijom $\mu : X \to \varepsilon([0,1])$, gde je $\varepsilon([0,1])$ familija svih zatvorenih podintervala realnog intervala $[0,1]$.

Očigledno je da je $\varepsilon([0,1]) \subseteq \mathcal{P}([0,1])$.

Daljim uopštavanjem gubi se zahtev da se vrednosti funkcije pripadanja nalaze u intervalu $[0,1]$, već se prelazi na Bulovu algebru, a kasnije na parcijalno uređen skup P ili mrežu L. Dobijeni skupovi zovu se **poset-vrednosni rasplinuti skupovi** ili **mrežno-vrednosni rasplinuti skupovi**. Kasnija uopštenja išla su u pravcu zamene kodomena nekim bogatijim strukturama - rezidualnom mrežom ili Hejtingovom algebrom ([11]).

Definicija 2.4. [67] Dva rasplinuta skupa $\mu : X \to [0,1]$ i $\nu : X \to [0,1]$ nad skupom $X \neq \emptyset$ su **jednaka** ako su jednaki kao funkcije nad X.

Definicija 2.5. [67] Rasplinuti skup $\mu : X \to [0,1]$ je **rasplinuti podskup** rasplinutog skupa $\nu : X \to [0,1]$, u oznaci $\mu \subseteq \nu$, ako i samo ako je $\mu(x) \leq \nu(x)$, za svako $x \in X$.

Jedan od najvažnijih pristupa rasplinutim skupovima je koncept **nivoa** ili p**-nivoa**.

Definicija 2.6. [67] Neka je μ rasplinuti skup nad nepraznim skupom X i neka je $p \in [0,1]$. p**-nivo** je klasičan skup

$$\mu_p = \{x \in X \mid \mu(x) \geq p\} \subseteq X. \tag{2.2}$$

Svaki p-nivo određen je svojom karakterističnom funkcijom $\overline{\mu_p} : X \to \{0,1\}$ tako da je $\overline{\mu_p}(x) = 1$ ako i samo ako je $\mu(x) \geq p$.

Skup svih vrednosti funkcije $\mu : X \to [0,1]$ zove se **skup vrednosti rasplinutog skupa** u oznaci $\mu(X)$.

$$\mu(X) = \{p \mid \mu(x) = p \text{ za neko } x \in X\}. \tag{2.3}$$

Važno svojstvo p-nivoa koje sledi direktno iz definicije jeste da je poredak vrednosti $p \in [0,1]$ saglasan sa obrnutom inkluzijom odgovarajućih p-nivoa.

Tvrđenje 2.1. [67]*Neka je μ rasplinuti skup nad X i $p_1, p_2 \in [0,1]$. Ako je $p_1 \leq p_2$ onda je $\mu_{p_2} \subseteq \mu_{p_1}$.* □

Definicija 2.7. [67] **Komplement** μ^c rasplinutog skupa μ nad skupom X je rasplinut skup definisan na sledeći način: za svako $x \in X$

$$\mu^c(x) = 1 - \mu(x). \tag{2.4}$$

Skup svih $x \in X$ takvih da je $\mu(x) = \mu^c(x)$ zove se **ekvilibrijum**. Posmatrajući funkcije pripadanja, ekvilibrijum čine svi oni elementi skupa X za koje je $\mu(x) = 0,5$.

Definicija 2.8. [67] Neka su μ_1 i μ_2 rasplinuti skupovi nad skupom X. Rasplinuta unija $\mu_1 \cup \mu_2$ i rasplinuti presek $\mu_1 \cap \mu_2$ su takođe rasplinuti skupovi nad X i definišu se na sledeći način: za svako $x \in X$

$$\begin{aligned} (\mu_1 \cup \mu_2)(x) &= \max\{\mu_1(x), \mu_2(x)\}, \\ (\mu_1 \cap \mu_2)(x) &= \min\{\mu_1(x), \mu_2(x)\}. \end{aligned}$$

Dokaze sledećih tvrđenja nećemo navoditi, jer ćemo u daljem izlaganju navesti neka njihova uopštenja.

Tvrđenje 2.2. [67]*Neka su μ_1 i μ_2 rasplinuti skupovi nad skupom X. Sledeća tvrđenja važe za svako $p \in [0,1]$:*

(i) $(\mu_1 \cap \mu_2)_p = (\mu_1)_p \cap (\mu_2)_p$;

(ii) $(\mu_1 \cup \mu_2)_p = (\mu_1)_p \cup (\mu_2)_p$. □

Operacije unije i preseka mogu se uopštiti za proizvoljan broj skupova. Neka je data familija skupova $\{F_i \mid i \in I\}$. Tada je:

$$\bigcup_{i\in I} F_i = \{x \mid x \in F_i,\ \text{za neko } i \in I\} \quad \text{i} \quad \bigcap_{i\in I} F_i = \{x \mid x \in F_i,\ \text{za svako } i \in I\}.$$

Sledeće tvrđenje predstavlja uopštenje Tvrđenja 2.2 i odnosi se na uniju i presek nivo skupova beskonačne familije rasplinutih skupova nad nepraznim skupom X.

Tvrđenje 2.3. [67]*Neka je $\{\mu_i \mid i \in I\}$ familija rasplinutih skupova nad skupom $X \neq \emptyset$. Tada važi:*

$$\bigcup_{i\in I}(\mu_i)_p \subseteq (\bigcup_{i\in I} \mu_i)_p \ \ i \ \ \bigcap_{i\in I}(\mu_i)_p = (\bigcap_{i\in I} \mu_i)_p.$$

□

***Primer* 2.1.** U slučaju konačnog broja rasplinutih skupova unija njihovih p-nivoa jednaka je p-nivou unije. U beskonačnom slučaju jednakost ne važi. Neka je rasplinuti skup $\mu : [0,1] \to [0,1]$ i $\mu(x) = x$. Neka je familija $\{p \mid p \in [0,1] \setminus \{1\}\}$. Unija p-nivoa je otvoreni interval $[0,1)$, a p-nivo unije (sa desne strane) je supremum (u skupu realnih brojeva), pa je taj supremum 1, odnosno desno se dobije $[0,1]$ što nije isto. □

Tvrđenje 2.4. [11]*Neka su μ_1 i μ_2 rasplinuti skupovi nad skupom X. Tada za svako $p \in [0,1]$ važi:*

(i) $\mu_1 \subseteq \mu_2$ *ako i samo ako je* $(\mu_1)_p \subseteq (\mu_2)_p$;

(ii) $\mu_1 = \mu_2$ *ako i samo ako je* $(\mu_1)_p = (\mu_2)_p$.

Dokaz. (i) Neka je $\mu_1 \subseteq \mu_2$. Za svako $x \in X$, $\mu_1(x) \leq \mu_2(x)$. Tada za svako $p \in [0,1]$ iz $p \leq \mu_1(x)$ sledi $p \leq \mu_2(x)$, pa je $(\mu_1)_p \subseteq (\mu_2)_p$. Neka je sada $(\mu_1)_p \subseteq (\mu_2)_p$. Za svako $p \in [0,1]$ i svako $x \in X$ važi $\mu_1(x) \leq \mu_2(x)$, pa je $\mu_1 \subseteq \mu_2$.

(ii) Sledi direktno iz (i) jer je $\mu_1 = \mu_2$ ekvivalentno sa $\mu_1 \subseteq \mu_2$ i $\mu_2 \subseteq \mu_1$. □

Prethodno Tvrđenje pokazuje da su inkluzija i jednakost rasplinutih skupova saglasni sa nivoima.

Tvrđenje 2.5. [11]*Za svaki rasplinuti skup μ nad skupom X važi $\mu_p = \bigcap_{q<p} \mu_q$.* □

Možda najvažnija osobina p-nivoa u teoriji rasplinutih skupova je mogućnost da se njima prikaže rasplinuti skup, tj. svaki rasplinuti skup može se jednoznačno prikazati familijom svih svojih p-nivoa. Familija p-nivoa je pogodna za ispitivanje svojstava rasplinutih skupova i prikazivanje njihove dualne prirode (pogledati [67, 64]). Mnoge probleme vezane za reprezentaciju kolekcije podskupova, kao familije p-nivoa običnog rasplinutog skupa, formulisali su i rešili Jaballah i Saidi ([62, 61, 97, 96]).

Definicija 2.9. Svakom od p-nivoa rasplinutog skupa $\mu : X \to [0,1]$ odgovara specijalan rasplinuti skup μ^p takav da je za svako $x \in X$:

$$\mu^p(x) = p \cdot \overline{\mu_p}(x), \tag{2.5}$$

gde je $\cdot$ množenje u skupu realnih brojeva.

Tvrđenje 2.6. (Teorema dekompozicije rasplinutih skupova.) *Za svaki rasplinuti skup μ nad X važi:*

$$\mu = \bigcup_{p\in[0,1]} p \cdot \overline{\mu_p} = \bigcup_{p\in[0,1]} \mu^p, \tag{2.6}$$

gde je $\bigcup$ rasplinuta unija i $\overline{\mu_p}(x) = \begin{cases} 1, & ako\ x \in \mu_p \\ 0, & ako\ x \notin \mu_p \end{cases}$. □

Posledica 2.7. *Neka je μ rasplinuti skup nad X. Tada je*

$$\mu = \bigcup_{p \in \mu(X)} \mu^p. \tag{2.7}$$

□

2.2 Mrežno vrednosni rasplinuti skupovi

Interval $[0, 1]$ sa uređenjem $\leq$ je kompletna mreža. Jedno od uopštenja klasičnog rasplinutog skupa sa kodomenom $[0, 1]$ jesu mrežno-vrednosni rasplinuti skupovi.

Sledeći pojmovi, definicije i tvrđenja preuzeti su iz radova [77, 110, 111, 117, 122]. Koristićemo oznake i pojmove definisane u prethodnom delu i nećemo ih ponovo uvoditi.

Definicija 2.10. Neka je $X \neq \emptyset$ i $(L, \leq)$ kompletna mreža sa najmanjim elementom 0 i najvećim elementom 1. Preslikavanje $\mu : X \to L$ je mrežno vrednosni rasplinuti skup ili L-rasplinuti skup nad X.

Definicija 2.11. Dva L-rasplinuta skupa $\mu_1 : X \to (L, \leq)$ i $\mu_2 : X \to (L, \leq)$ nad skupom $X \neq \emptyset$ su **jednaka** ($\mu_1 = \mu_2$) ako su jednaki kao funkcije nad X.

Definicija 2.12. L-rasplinuti skup $\mu : X \to (L, \leq)$ je **rasplinuti podskup** L-rasplinutog skupa $\nu : X \to (L, \leq)$ ($\mu \subseteq \nu$) ako i samo ako je za svako $x \in X$, $\mu(x) \leq \nu(x)$ u odnosu na poredak $\leq$ na mreži L.

Definicija 2.13. Neka su $\mu_1 : X \to L$ i $\mu_2 : X \to L$ L-rasplinuti skupovi.

(i) Rasplinuti presek $\mu_1 \cap \mu_2 : X \to L$ je L-rasplinuti skup nad X takav da je: za svako $x \in X$

$$(\mu_1 \cap \mu_2)(x) = \mu_1(x) \wedge \mu_2(x). \tag{2.8}$$

(ii) Rasplinuta unija $\mu_1 \cup \mu_2 : X \to L$ je L-rasplinuti skup nad X takav da je: za svako $x \in X$

$$(\mu_1 \cup \mu_2)(x) = \mu_1(x) \vee \mu_2(x). \tag{2.9}$$

Oznake $\wedge$ i $\vee$ predstavljaju infimum i supremum na mreži L.

Ako je mreža L jedinstveno komplementirana tada **komplement** L-rasplinutog skupa $\mu : X \to L$ je L-rasplinuti skup $\mu^c : X \to L$ takav da je za svako $x \in X$

$$\mu^c(x) = (\mu(x))^c. \tag{2.10}$$

gde je ^{c} operacija komplementiranja na posmatranoj mreži L.

Nivo L-rasplinutog skupa $\mu : X \to L$ definiše se na isti način kao nivo klasičnog rasplinutog skupa:

$$\mu_p = \{x \in X \mid \mu(x) \geq p\} \subseteq X. \tag{2.11}$$

Sledeće tvrđenje analogno je Tvrđenju 2.6 za slučaj klasičnih rasplinutih skupova i govori da se svaki L-rasplinuti skup može predstaviti kolekcijom svojih nivoa.

Tvrđenje 2.8. [111]**(Teorema dekompozicije L-rasplinutih skupova.)** *Neka je $\mu : X \to L$ L-rasplinuti skup na X. Tada za $x \in X$ važi:*

$$\mu(x) = \bigvee_{p \in L} p \circ \overline{\mu_p}(x), \tag{2.12}$$

gde je $\bigvee$ supremum u L, a operacija $\circ$ definisana je kao:

$$p \circ 0 = 0 \in L \;\; i \; p \circ 1 = p \in L, \;\; za\ svako\ p \in L.$$

$\square$

Postoje uopštenja ovog tvrđenja za poset-vrednosne rasplinute skupove [122].

Skup svih p-nivoa rasplinutog skupa $\mu : X \to L$ označićemo sa $\mu_L = \{\mu_p \mid p \in L\}$. Ovaj skup uređen je u odnosu na inkluziju.

Tvrđenje 2.9. *Neka je $\mu : X \to L$ L-rasplinuti skup i neka je $(\mu_L, \subseteq)$ skup svih njegovih p-nivoa. Tada je:*

1. $\mu_0 = X$;

2. *Ako je $p \leq q$ onda je $\mu_q \subseteq \mu_p$;*

3. $\bigcap\limits_{p\in K} \mu_p = \mu_{\bigvee\limits_{p\in K} p}$, *gde je* $K \subseteq L$;

4. μ_L *je kompletna mreža u kojoj je infimum presek.*

Dokaz. 1. $\mu_0 = \{x \mid x \in X \text{ i } \mu(x) \geq 0\} = X$.

2. Neka je $p \leq q$ i neka $x \in \mu_q$, tj. $\mu(x) \geq q \geq p$. Tada je $x \in \mu_p$. Znači, $\mu_q \subseteq \mu_p$.

3. Ako $x \in \bigcap\limits_{p\in K} \mu_p$ tada za svako $p \in K$, $x \in \mu_p$, odnosno za svako $p \in K$, $\mu(x) \geq p$. Ovo važi ako i samo ako je $\mu(x) \geq \bigvee\limits_{p\in K} p$ (ovaj supremum uvek postoji, jer je L kompletna mreža), pa $x \in \mu_{\bigvee\limits_{p\in K} p}$.

4. Sledi direktno iz 1. i 3. □

Važi i obrat Tvrdjenja 2.9.

Tvrđenje 2.10. [111]*Neka je* $X \neq \emptyset$, L *kompletna mreža i* $\mu_L = \{\mu_p \mid p \in L\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *familija podskupova skupa* X *koja zadovoljava sledeće uslove:*

1. $\mu_L = (\{\mu_p \mid p \in L\}, \subseteq)$ *je kompletna mreža;*

2. $\bigcap\limits_{p\in K\subseteq L} \mu_p = \mu_{\bigvee\limits_{p\in K\subseteq L} p}$, *za svaki* $K \subseteq L$;

3. $\mu_0 = X$.

Tada je $\mu(x) = \bigvee\limits_{p\in L} p \circ \overline{\mu}_p(x)$ *rasplinuti skup na* X, *gde su* $\overline{\mu}_p$ *odgovarajuće karakteristične funkcije koje odgovaraju skupovima* μ_p, *a operacije* $\circ$ *i* $\vee$ *su kao u Tvrđenju 2.8, takav da za svako* $q \in L$ *važi:*

$$x \in \mu_q \text{ ako i samo ako } \mu(x) \geq q.$$

Dokaz. μ je rasplinuti skup na X po konstrukciji. Neka je $x \in X$, $q \in L$ i $x \in \mu_q$. Tada je $\mu(x) = \bigvee\limits_{p\in L} p \circ \overline{\mu}_p(x) \geq q$, jer je $\overline{\mu}_q(x) = 1$, pa je $q \circ \mu_q(x) = q$.

Obrnuto, neka je $\mu(x) \geq q$, odnosno, $q \leq \bigvee\limits_{p\in L} p \circ \overline{\mu_p}(x) = \bigvee\limits_{p\in\mu(X)} p$, gde je $\mu(X) = \{p \in L \mid \overline{\mu_p}(x) = 1\}$. $\mu(X) \neq \emptyset$, jer je bar $0 \in \mu(X)$, jer je $\overline{\mu_0}(x) = 1$, zbog 3. Iz $q \leq \bigvee\limits_{p\in L} p$ koristeći 2. sledi da je $\mu_{\bigvee\limits_{p\in L} p} \subseteq \mu_q$, i pošto je

$\overline{\mu_p}(x) = 1$ za $p \in \mu(X)$ sledi da $x \in \mu_p$, pa i $x \in \bigcap\limits_{p \in \mu(X)} \mu_p = \mu_{\bigvee\limits_{p\in\mu(X)} p} \subseteq \mu_q$, odnosno $x \in \mu_q$. $\square$

Za dati rasplinuti skup $\mu : X \to L$ možemo definisati relaciju $\approx$ na L:

$$p \approx q \text{ ako i samo ako } \mu_p = \mu_q. \tag{2.13}$$

Ova relacija je relacija ekvivalencije na L.

Tvrđenje 2.11. [117]*Ako je $\overline{\mu_p} \leq \overline{\mu_q}$ onda je $p \vee q \approx p$* $\square$

Sa $[p]_\approx$ označavamo klasu ekvivalencije po $\approx$ kojoj pripada $p \in L$ i neka je p_m supremum te klase: $p_m = \bigvee\limits_{q \in [p]_\approx} q$.

Tvrđenje 2.12. [111] $p_m \in [p]_\approx$.

Dokaz. Ako je $q \in [p]_\approx$, onda je:

$$\mu_p = \mu_q = \bigcap_{q \in [p]_\approx} \mu_q = \mu_{\bigvee\limits_{q\in[p]_\approx} q} = \mu_{p_m}, \text{ tj. } p \approx p_m.$$

$\square$

Tvrđenje 2.13. [117]*Preslikavanje $p \mapsto p_m$ je operacija zatvaranja na mreži L.*

Dokaz. Kako je $p \in [p]_\approx$ sledi da je $p \leq \bigvee\limits_{q \in [p]_\approx} q = p_m$. Ako je $p \leq q$ tada je $\mu_{q_m} = \mu_q \leq \mu_p = \mu_{p_m}$, odakle je $q_m \vee p_m \approx q_m$ i $q_m \vee p_m \in [q_m]_\approx$, odakle sledi $p_m \leq q_m$. Iz $[p]_\approx = [p_m]_\approx$ sledi da je $(p_m)_m = p_m$. $\square$

Neka je $\mu : X \to L$ L-rasplinuti skup. Skup svih vrednosti funkcije μ ovde ćemo označavati sa $\mu(X) \subseteq L$, tj.

$$\mu(X) = \{p \in L \mid p = \mu(x), \text{ za neko } x \in X\}.$$

Lema 2.14. [122]*Ako je $\mu : X \to L$ L-rasplinuti skup, tada za $p, q \in L$:*

$$p \approx q \text{ ako i samo ako } p\uparrow \cap \mu(X) = q\uparrow \cap \mu(X).$$

Dokaz. $p \approx q$ ako i samo ako $\mu_p = \mu_q$ ako i samo ako $\{x \in X \mid \mu(x) \geq p\} = \{x \in X \mid \mu(x) \geq q\}$ ako i samo ako $p\uparrow \cap \mu(X) = q\uparrow \cap \mu(X)$. □

Prethodna lema daje algoritam za konstruisanje $\approx$-klasa na L, kao i samog rasplinutog skupa ako je zadat skup $\mu(X)$.

Tvrđenje 2.15. [117]*Neka je L konačna mreža i $\mu : X \to L$ L-rasplinuti skup. Tada su svi p-nivoi različiti ako i samo ako svi i-nerazloživi elementi mreže L pripadaju skupu vrednosti $\mu(X)$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) $p \neq 1$ i p je i-nerazloživ. Neka $p \notin \mu(X)$. Kako je L konačna mreža, onda postoji jedinstveni element $q \in L$ takav da $p \prec q$. Tada je očigledno $p\uparrow \cap \mu(X) = q\uparrow \cap \mu(X)$, pa je $\overline{\mu_p} = \overline{\mu_q}$. Dakle, ako neki i-nerazloživ element nije vrednost funkcije μ, onda postoje dva jednaka nivoa, čime je ovaj pravac dokazan kontrapozicijom.
($\Leftarrow$) Pretpostavimo da svi i-nerazloživi elementi pripadaju skupu vrednosti funkcije $\mu(X)$. Neka su $p, q \in L$ i $p \neq q$.

(1) Neka su p ili q jednaki 1. Bez umanjenja opštosti neka je $p = 1 \neq q$. Tada postoji koatom, koji je i-nerazloživ element $r \in L$ takav da je $q \leq r < 1 = p$. Dakle, $r \in q\uparrow \cap \mu(X)$, pa je $\overline{\mu_p} \neq \overline{\mu_q}$.

(2) Neka su $p, q \neq 1$. Tada je

$$\begin{aligned} p &= \bigwedge\{r \in L \mid p \leq r < 1 \text{ i } r \text{ je } i\text{-nerazloživ}\}, \\ q &= \bigwedge\{s \in L \mid q \leq s < 1 \text{ i } s \text{ je } i\text{-nerazloživ}\}. \end{aligned}$$

Kako je $p \neq q$ sledi $p\uparrow \cap \mu(X) \neq q\uparrow \cap \mu(X)$, pa je $\overline{\mu_p} \neq \overline{\mu_q}$. □

U radu [54] Ranitović i Tepavčević razmatraju sledeći problem: Neka je L unapred zadata mreža. Pod kojim uslovima je familija $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ kolekcija nivoa rasplinutog skupa $\mu : X \to L$? Rešavajući ovaj problem daju uopštenje mrežno-vrednosnog rasplinutog skupa, posmatrano sa stanovištva nivoa, koji za kodomen ima konačnu mrežu $\{0, 1\}^n$, za pogodno odabrano n.

Tvrđenje 2.16. [54]*Neka su L i L_1 kompletne mreže i neka je $\varphi : L \to L_1$ injektivno preslikavanje iz L u L_1 koje preslikava najveći element mreže L u najveći element mreže L_1 i za sve vrednosti $x, y \in L$, $\varphi(x \wedge_L y) = \varphi(x) \wedge_{L_1} \varphi(y)$. Neka je $\mu : X \to L$ rasplinuti skup na X. Neka je rasplinuti skup $\nu : X \to L_1$ definisan kao $\nu(x) = \varphi(\mu(x))$. Tada rasplinuti skupovi μ i ν imaju iste familije nivoa i $\mu_p = \nu_{\varphi(p)}$, za svako $p \in L$.* □

Važi i dualno tvrđenje prethodnog tvrđenja koje se koristi u Glavi 3.

2.3 Poset-vrednosni rasplinuti skupovi

Definicija 2.14. [122] Neka je $X \neq \emptyset$ i $(P, \leq)$ parcijalno uređen skup. Preslikavanje $\mu : X \to P$ zove se **poset-vrednosni rasplinuti skup**.

Poset-vrednosni rasplinuti skup označavaćemo skraćeno P-rasplinuti skup.

Pojmovi p-nivoa i njihove osobine se analogno prenose i na ovo uopštenje rasplinutog skupa.

Definicija 2.15. p-nivo P-rasplinutog skupa μ je podskup skupa X tako da je

$$\mu_p = \{x \in X \mid \mu(x) \geq p\}. \tag{2.14}$$

Karakterističnu funkciju p-nivoa P-rasplinutog skupa $\mu : X \to P$ označavaćemo sa $\overline{\mu_p}$.

Definicija 2.16. Skup svih p-nivoa P-rasplinutog skupa μ označavaćemo sa $\mu_P = \{\mu_p \mid p \in P\}$.

Definicija 2.17. (i) Dva P-rasplinuta skupa su **jednaka** ako su jednaki kao funkcije nad X.

(ii) P-rasplinuti skup $\mu : X \to P$ je **rasplinuti podskup** P-rasplinutog skupa $\nu : X \to P$, u oznaci $\mu \subseteq \nu$ ako i samo ako za svako $x \in X$ važi $\mu(x) \leq \nu(x)$.

Tvrđenje 2.17. [122]**(Teorema dekompozicije P-rasplinutog skupa.)** *Neka je $\mu : X \to P$ P-rasplinuti skup nad nepraznim skupom X. Tada za svako $x \in X$:*

$$\mu(x) = \bigvee\{p \in P \mid \overline{\mu_p}(x) = 1\}, \tag{2.15}$$

gde je $\bigvee$ oznaka za supremum skupa $\{p \in P \mid \overline{\mu_p}(x) = 1\}$.

(Tvrđenje kaže da supremum sa desne strane postoji u P za svako $x \in X$ i jednak je $\mu(x)$.)

Dokaz. Neka je $\mu(x) = r \in P$. Tada je $\overline{\mu_r}(x) = 1$. Ako je za svako $p \in P$, $\overline{\mu_p}(x) = 1$, tada je $\mu(x) \geq p$, odnosno $r \geq p$. Sa druge strane, $r \in \{p \in P \mid \overline{\mu_p} = 1\}$, pa je r najveći element te familije. Sledi da je:

$$\mu(x) = r = \bigvee\{p \in P \mid \overline{\mu_p}(x) = 1\}.$$

□

Familija μ_P ima sledeća svojstva:

Tvrđenje 2.18. [122]*Za P-rasplinuti skup $\mu : X \to P$ važi sledeće:*

(1) *Ako $p, q \in P$ i $p \leq q$ onda $\mu_q \subseteq \mu_p$;*

(2) *Neka je $P_1 \subseteq P$ i neka postoji supremum skupa P_1 u P ($\bigvee\{p \mid p \in P_1\} \in P$. Tada*

$$\bigcap\{\mu_p \mid p \in P_1\} = \mu_{\bigvee\{p \mid p \in P_1\}};$$

(3) $\bigcup\{\mu_p \mid p \in P\} = X$;

(4) *Za svako $x \in X$, $\bigcap\{\mu_p \mid x \in \mu_p\} \in \mu_P$.*

Dokaz. Tvrđenje se dokazuje slično kao u slučaju mrežno-vrednosnih rasplinutih skupova. □

Koristeći se terminologijom parcijalno uređenih skupova deo (4) iz gornjeg Tvrđenja može glasiti: *Kolekcija svih nivoa P-rasplinutog skupa je parcijalni sistem zatvaranja u odnosu na inkluziju.*

Analogno kao u slučaju L-vrednosnog rasplinutog skupa, definišimo relaciju $\approx$ na P, takvu da za $p, q \in P$:

$$p \approx q \text{ ako i samo ako } \mu_p = \mu_q. \tag{2.16}$$

Relacija $\approx$ je relacija ekvivalencije na P.

Klase ekvivalencije označimo sa $[p]_\approx := \{q \in P \mid p \approx q\}$.

Slede važne osobine gore definisane relacije.

Lema 2.19. [122]*Neka je $\mu : X \to P$ P-rasplinuti skup na X, takav da za $p, q \in P$ važi:*

$$p \approx q \text{ ako i samo ako } p{\uparrow} \cap \mu(X) = q{\uparrow} \cap \mu(X).$$

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu Leme 2.14. $\square$

Lema 2.20. [122]*Neka je $\mu : X \to P$, P-rasplinuti skup nad X. Ako je $\mu(x) = p$, za neko $x \in X$, tada je p supremum klase kojoj pripada, tj. $p = \vee[p]_\approx$.*

Dokaz. Neka je $\mu(x) = p$, za $x \in X$. Ako $q \in [p]_\approx$, pošto je $\overline{\mu}_p(x) = 1$, i $\overline{\mu}_q(x) = 1$, pa je $p = \mu(x) \geq q$, tj. $p = \vee[p]_\approx$. $\square$

Lema 2.21. [122]*Neka je $\mu : X \to P$ P-rasplinuti skup. Tada za sve $p \in P$ i $x, y \in X$ važi*

$$\mu(x) \geq \mu(y) \text{ sledi } \overline{\mu_p}(x) \geq \overline{\mu_p}(y).$$

Dokaz. Neka je $\mu(x) \geq \mu(y)$. Ako je $\mu_p(x) = 0$ i $\mu_p(y) = 1$ za neko $p \in P$, tada je $\mu(y) \geq p$, pa i $\mu(x) \geq \mu(y) \geq p$, odnosno $\mu_p(x) = 1$ što je kontradikcija. $\square$

Poset $(P, \leq)$ može se predstaviti P-rasplinutim skupom $\mu : X \to P$ nad X ako je P dualno izomorfan sa posetom $(\mu_P, \subseteq)$ nivoa posmatranog P-rasplinutog skupa.

Lema 2.22. [117, 121]*Neka je $\mu : X \to P$ P-rasplinuti skup čiji su svi nivoi različiti. Ako $p, q \in P$ i postoji $p \vee q \in P$ tada*

$$\mu_q \subseteq \mu_p \text{ ako i samo ako } p \leq q.$$

$\square$

Lema 2.23. [117]*Neka je P proizvoljan poset i $\mu : X \to P$ P-rasplinuti skup kome su nivoi različiti. Neka je $p \in P$ pokriven samo jednim elementom iz P. Tada $p \in \mu(X)$.*

Dokaz. Neka rasplinuti skup μ i element $p \in P$ zadovoljavaju uslove leme. Neka $q \in P$ pokriva p. Kako je $p \neq q$ to je i $\mu_p \neq \mu_q$. Pretpostavimo da $p \notin \mu(X)$. Tada je $p{\uparrow} \cap \mu(X) = q{\uparrow} \cap \mu(X)$, pa prema Lemi 2.19 je $\mu_p = \mu_q$, što je nemoguće, čime je tvrđenje dokazano. □

Sledeća tvrđenja daju vezu izotonih funkcija na parcijalno uređenim skupovima i nivo-funkcija P-rasplinutog skupa. Takođe dat je potreban i dovoljan uslov pod kojim je funkcija koja elementima poseta P pridružuje odgovarajuće nivoe dualni izomorfizam uređenih skupova.

Definicija 2.18. [117] Poset $(P, \leq)$ je **određen kompletno i-nerazloživim elementima**, skraćeno CMI-poset, ako je svaki element u P infimum kompletno i-nerazloživih elemenata.

Dualno, poset $(P, \leq)$ je **određen kompletno ili-nerazloživim elementima**, skraćeno CJI-poset, ako je svaki element u P supremum kompletno ili-nerazloživih elemenata.

Tvrđenje 2.24. [117]*Neka je P CMI-poset, $X \neq \emptyset$ i $\mu : X \to P$ P-rasplinuti skup. Tada je preslikavanje $f : P \to \mu_P$, takvo da je $f(p) = \mu_p$ dualni izomorfizam između $(P \leq)$ i $(\mu_P, \subseteq)$ ako i samo ako kodomen $\mu(X)$ sadrži sve kompletno i-nerazložive elemente iz P.* □

U radu [119] razmatrani su i rešeni problemi postojanja P-rasplinutog skupa $\mu : X \to P$ kome je unapred zadata familija p-nivoa. Dati su potreban i dovoljan uslov pod kojim za datu familiju $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ i poset P postoji P-rasplinuti skup $\mu : X \to P$ takav da je familija njegovih nivoa upravo familija $\mathcal{F}$. Slični problemi ranije su rešeni za L-rasplinute skupove ([114, 115, 117]). Slične tehnike koristiće se u Glavi 3 za dokazivanje opštijeg slučaja za intuicionističke poset-vrednosne rasplinute skupove.

Lema 2.25. [119]*Neka je $\mu : X \to P$ P-rasplinuti skup i μ_P familija njegovih nivoa. Tada, za svako $x \in X$ važi:*

$$\mu_{\mu(x)} = \bigcap \{\mu_p \in \mu_P \mid x \in \mu_p\}. \tag{2.17}$$

Dokaz. Neka je $\mu(x) = p$. Tada $x \in \mu_p = \mu_{\mu(x)}$ i $\mu_{\mu(x)} \supseteq \bigcap\{\mu_p \in \mu_P \mid x \in \mu_p\}$. Prema Tvrđenju 2.18 pod (4) centralizovani presek nivoa je nivo, pa postoji $q \in P$ tako da je $\bigcap\{\mu_p \in \mu_P | x \in \mu_p\} = \mu_q$.

Kako $x \in \mu_q$, to je $\mu(x) \geq q$, pa je $\mu_{\mu(x)} = \mu_q$ i $\mu_{\mu(x)} = \bigcap\{\mu_p \in \mu_P \mid x \in \mu_p\}$. □

Tvrđenje 2.26. [119]*Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova nepraznog skupa X i neka je $Y = \{Z_x \mid x \in X \text{ i } Z_x = \bigcap\{f \in \mathcal{F} \mid x \in f\}\}$. Neka je $(P, \leq)$ proizvoljan poset.*

Tada postoji P-rasplinuti skup $\mu : X \to P$ tako da je $\mathcal{F}$ kolekcija njegovih nivoa ako i samo ako važi:

(1) $\mathcal{F}$ je zatvoren za centralizovane preseke.

(2) Postoji izotono preslikavanje $E : Y \to P$ poseta $(Y, \supseteq)$ u poset $(P, \leq)$ takvo da za svako $r \in P$, $\bigcup\{y \mid y \in E^{-1}(r{\uparrow} \cap E(Y))\} \in \mathcal{F}$ i preslikavanje $\Phi : P \to \mathcal{F}$ takvo da je $\Phi(r) = \bigcup\{y \mid y \in E^{-1}(r{\uparrow} \cap E(Y))\}$ je „na". □

Sledeće Tvrđenje daje dovoljan uslov za postojanje P-rasplinutog skupa čija je familija nivoa izomorfna zadatoj familiji podskupova datog skupa.

Tvrđenje 2.27. [119]*Neka je $(P, \leq)$ poset, $X \neq \emptyset$ i familija $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ takva da je zatvorena za centralizovane preseke. Neka postoji potapanje $\varphi : (\mathcal{F}, \supseteq) \to (P, \leq)$ takvo da za svako $r \in P$,*

$$r{\uparrow} \cap \varphi(\mathcal{F}) = \varphi(f){\uparrow} \text{ za neko } f \in \mathcal{F}. \tag{2.18}$$

Tada postoji P-rasplinuti skup $\mu : X \to P$ takav da je $\mathcal{F}$ familija njegovih nivoa. □

Glava 3

IL-vrednosni i IP-vrednosni rasplinuti skupovi

Od kada je 1965. godine L. A. Zadeh [131] predstavio koncept rasplinutih skupova (fuzzy sets), interesovanje za ovu oblast ne prestaje da raste. Danas se nauka i tehnologija oslanjaju na složene procese i sisteme. Za njihovo poznavanje i proučavanje potrebno je uključiti veliki broj parametara i podataka i često neki od njih nisu poznati u celini ili delimično. Zbog toga, da bi se prevazišao problem neodređenosti, razvijaju se matematički modeli koji se zasnivaju na teoriji rasplinutih skupova. Samo dve godine nakon uvođenja teorije rasplinutih skupova J. Goguen [50] vrši uopštenje i uvodi L-rasplinute skupove. Danas se mogu sresti mnoga druga proširenja rasplinutih skupova.

Jedno od uopštenja rasplinutih skupova zasniva se na posmatranju dve funkcije umesto jedne: funkcije pripadanja i funkcije nepripadanja. Početkom 1983. godine K. T. Atanassov uvodi pojam intuicionističkog rasplinutog skupa u [1, 2, 4].

Definicija 3.1. [4] **Intuicionistički rasplinuti skup** (skraćeno IRS) nad nepraznim skupom X je uređena trojka

$$\{(x, \mu(x), \nu(x)) \mid x \in X\}, \tag{3.1}$$

gde su funkcije:

$$\mu : X \to [0, 1]$$

i

$$\nu : X \to [0, 1]$$

takve da važi: za svako $x \in X$,

$$0 \leq \mu(x) + \nu(x) \leq 1. \tag{3.2}$$

Funkcije μ i ν redom zovemo **funkcija pripadanja** i **funkcija nepripadanja**, a vrednosti $\mu(x)$ i $\nu(x)$ **stepen pripadanja** i **stepen nepripadanja** elementa $x \in X$ posmatranom intuicionističkom rasplinutom skupu.

U literaturi se može sresti naziv bi-rasplinuti skup za ovakav objekat. Imajući u vidu mnoga uopštenja, ovakvu strukturu zvaćemo intuicionistički rasplinuti skup u klasičnom smislu ili samo intuicionistički rasplinuti skup.

Definicija 3.2. [4] Vrednost

$$\pi(x) = 1 - \mu(x) - \nu(x) \tag{3.3}$$

naziva se **stepen neodređenosti** elementa $x \in X$ u intuicionističkom rasplinutom skupu.

Treba napomenuti da se „obični" rasplinuti skupovi mogu posmatrati kao specijalan slučaj intuicionističkih rasplinutih skupova, tj. kada posmatramo slučaj $\{(x, \mu(x), 1 - \mu(x)) \mid x \in X\}$. Takođe, u ovom slučaju je $\pi(x) = 0$, za svako $x \in X$.

U daljem razmatranju, intuicionistički rasplinuti skup A nad nepraznim skupom X posmatraćemo kao uređenu trojku

$$A = (X, \mu, \nu),$$

gde funkcije pripadanja $\mu : X \to [0, 1]$ i nepripadanja $\nu : X \to [0, 1]$ zadovoljavaju uslov $\mu(x) + \nu(x) \leq 1$, za svako $x \in X$. Napomenimo da je ovakav objekat ekvivalentan objektu iz Definicije 3.1 koju je originalno uveo Atanassov.

Neka je $IRS(X)$ familija svih intuicionističkih rasplinutih skupova nad X.

Osnovne „skupovne"operacije i relacije jednakosti i pripadanja definisane na $IRS(X)$ predstavljaju uopštenje istih pojmova na familiji rasplinutih skupova.

Neka je X neprazan skup i neka su $A = (X, \mu_A, \nu_A)$ i $B = (X, \mu_B, \nu_B)$ dva IRS-a nad X. Tada se jednakost i inkluzija definišu na sledeći način [2]:

(*i*) $A = B$ ako i samo ako je za svako $x \in X$, $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ i $\nu_A(x) = \nu_B(x)$,

(*ii*) A je **intuicionistički rasplinuti podskup** od B, u oznaci $A \subseteq B$, ako i samo ako je za svako $x \in X$, $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ i $\nu_A(x) \geq \nu_B(x)$.

Važe i sledeća svojstva [2]:

(*i*) $A \subseteq A$;

(*ii*) $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ i $B \subseteq A$;

(*iii*) $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$ sledi $A \subseteq C$.

Prema navedenom, inkluzija je relacija poretka u familiji $IRS(X)$. U odnosu na ovakvo uređenje, najmanji element ove familije bio bi $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, a najveći $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$, gde su preslikavanja $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$ definisana sa $\mathbf{0}(x) = 0$ i $\mathbf{1}(x) = 1$, za svako $x \in X$. Familija svih intuicionističkih rasplinutih skupova nad X je kompletna mreža u odnosu na inkluziju.

Osnovne skupovne operacije koje su definisane za rasplinute skupove mogu se uopštiti za intuicionističke rasplinute skupove.

Za dva IRS-a A i B je [2]:

(1) $A \cap B = (X, \min\{\mu_A, \mu_B\}, \max\{\nu_A, \nu_B\})$;

(2) $A \cup B = (X, \max\{\mu_A, \mu_B\}, \min\{\nu_A, \nu_B\})$;

gde su funkcije $\min\{\mu_A, \mu_B\}, \max\{\mu_A, \mu_B\}, \min\{\nu_A, \nu_B\}, \max\{\nu_A, \nu_B\} : X \to [0, 1]$ i za svako $x \in X$ vrednost funkcija je:

$$\min\{\mu_A, \mu_B\}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$$

$$\max\{\mu_A, \mu_B\}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$$

$$\min\{\nu_A, \nu_B\}(x) = \min\{\nu_A(x), \nu_B(x)\},$$

$$\max\{\nu_A, \nu_B\}(x) = \max\{\nu_A(x), \nu_B(x)\}.$$

Unija i presek IRS-ova su komutative, asocijativne i distributivne operacije na familiji $IRS(X)$.

Atanassov u [2] uvodi nivo skupove (nivoe) intuicionističkog rasplinutog skupa. On uvodi tri oblika nivoa i to $\alpha\beta$ nivo, kojim se ograničavaju i funkcija pripadanja i funkcija nepripadanja, α nivo koji se odnosi samo na funkciju pripadanja i β nivo koji se odnosi samo na funkciju nepripadanja. Treba naglasiti da postoji značajna razlika između ovako definisanih nivoa i nivoa rasplinutih skupova, a ona se ogleda u tome što su ovako definisani nivoi IRS-ovi dok su nivoi rasplinutog skupa klasični skupovi.

Atanassov definiše intuicionistički rasplinuti skup $A = \{(x, \mu(x), \nu(x)) \mid x \in X\}$ kao skup uređenih trojki koji je podskup skupa $X \times [0,1] \times [0,1]$, takvih da je $\mu(x) + \nu(x) \leq 1$ [2].

Definicija 3.3. [2, 1] Neka su $\alpha, \beta \in [0,1]$ takvi da je $\alpha + \beta \leq 1$. **Skup $\alpha\beta$-nivoa** IRS-a A je IRS

$$A_{\alpha,\beta} = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) \mid x \in X,\ \mu_A(x) \geq \alpha \text{ i } \nu_A(x) \leq \beta\}.$$

Skup $A_\alpha = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) \mid x \in X \text{ i } \mu_A(x) \geq \alpha\}$ je **skup α niva pripadanja**, a $A^\beta = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) \mid x \in X \text{ i } \nu_A(x) \leq \beta\}$ je **skup β nivoa nepripadanja** IRS-a A.

Ovako definisani nivo skupovi su skupovi uređenih trojki i predstavljaju podskupove IRS-a $\{(x, \mu(x), \nu(x)) \mid x \in X\}$ iz koga su izbačene one trojke koje ne zadovoljavaju zadate uslove.

Između ovih skupova nivoa nekog IRS-a $A = \{(x, \mu(x), \nu(x)) \mid x \in X\}$ postoje sledeće veze ([2]) koje slede direktno iz prethodne definicije:

$$A_{\alpha,\beta} \subseteq \left\{ \begin{array}{c} A^\beta \\ A_\alpha \end{array} \right\} \subseteq A \quad \text{i} \quad A_{\alpha,\beta} = A_\alpha \cap A^\beta,$$

gde su $\subseteq$ i $\cap$ inkluzija i presek skupova uređenih trojki u klasičnom skupovnom smislu.

Ovakav zapis intuicionističkog rasplinutog skupa, kao skupa uređenih trojki, nećemo koristiti u daljem tekstu, već smo ga ovde naveli samo iz istorijskih razloga. Noviji zapis, koji će se i ovde koristiti je oblika (X, μ, ν).

Jedna od karakteristika rasplinutih skupova jesu nivo skupovi i neke njihove osobine date su u prethodnom poglavlju. Uopštavanjem koncepta nivo skupova rasplinutih skupova, gde su oni klasični podskupovi domena funkcije pripadanja, dolazi se do sledeće definicije nivo skupova IRS-a.

Definicija 3.4. Neka je $p \in [0,1]$ i $A = (X, \mu, \nu)$ intuicionistički rasplinuti skup. p-nivo skupovi pripadanja i nepripadanja, tim redom, su

$$\mu_p = \{x \in X \mid \mu(x) \geq p\} \quad \text{i} \quad \nu_p = \{x \in X \mid \nu(x) \leq p\}. \tag{3.4}$$

Ovako definisani nivo skupovi su klasični skupovi, za razliku od Definicije 3.3 i oni predstavljaju uopštenje rasplinutih nivoa. Osobine i veze ovako definisanih nivoa izvedene su i date za opštiji slučaj, intuicionističke poset-vrednosne rasplinute skupove, u Tvrđenju 3.2 na strani 44.

Ubuduće koristićemo nivoe definisane Definicijom 3.4.

Dalja uopštenja intuicionističkih rasplinutih skupova išle su u pravcu zamene skupa vrednosti funkcija pripadanja i nepripadanja bogatijim strukturama (npr. kompletnom mrežom, posetom itd).

3.1 Različite definicije IL-vrednosnih rasplinutih skupova

Po uzoru na Goguen-ovu definiciju mrežno-vrednosnog rasplinutog skupa, Atanassov i Stoeva [3] definišu intuicionistički mrežno-vrednosni rasplinuti skup (IL-vrednosni rasplinuti skup), gde je kodomen poseban slučaj kompletne mreže na kojoj je moguće definisati unarnu operaciju koja je antitona involucija.

Definicija 3.5. [3] Neka je $(L, \leq)$ kompletna mreža sa unarnom antitonom involucijom $\mathcal{N} : L \to L$ i $X \neq \emptyset$. Tada je **intuicionistički mrežno-vrednosni rasplinuti skup (IL-vrednosni rasplinuti skup)** nad X uređena trojka (X, μ, ν), gde su μ i ν funkcije $\mu : X \to L$, $\nu : X \to L$, takve da za svako $x \in X$,

$$\mu(x) \leq \mathcal{N}(\nu(x)). \tag{3.5}$$

Vrednosti funkcija $\mu(x)$ i $\nu(x)$ predstavljaju redom stepen pripadanja i nepripadanja elementa $x \in X$ IL-vrednosnom rasplinutom skupu.

Funkcija $\pi : X \to L$, koja predstavlja stepen neodređenosti, u ovom slučaju definiše se na sledeći način: za svako $x \in X$,

$$\pi(x) = \mathcal{N}(\sup\{\mu(x), \nu(x)\}). \tag{3.6}$$

Relacije inkluzije i jednakosti, kao i operacije infimuma (preseka) i supremuma (unije) IRS-ova važe i za IL-vrednosne rasplinute skupove.

(1) Za svako $x \in X$, $A = B$ ako i samo ako je $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ i $\nu_A(x) = \nu_B(x)$,

(2) $A \subseteq B$, ako i samo ako je za svako $x \in X$, $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ i $\nu_A(x) \geq \nu_B(x)$;

(3) $A \wedge B = (X, \inf\{\mu_A, \mu_B\}, \sup\{\nu_A, \nu_B\})$;

(4) $A \vee B = (X, \sup\{\mu_A, \mu_B\}, \inf\{\nu_A, \nu_B\})$.

Ovakva definicija IL-vrednosnog rasplinutog skupa imala je mnoge nedostatke. Mnoge operacije koje su ranije bile definisane za klasične intuicionističke rasplinute skupove u ovom slučaju se ne mogu definisati. T. Gerstenkorn i A. Tepavčević u redovima [48] i [55] prikazuju neke od nedostataka ovakve definicije. Na primer, zahtev za postojanje unarne antitone involucije je izuzetno jak zahtev, pa se tako IL-vrednosni rasplinuti skupovi ne mogu definisati za velike klase mreža. Zbog ovoga, autori predlažu nekoliko novih definicija intuicionističkih mrežno-vrednosnih rasplinutih skupova u radovima [47], [48] i [55].

Definicija koja je predložena u radu [47] uvedena je preko funkcije linearizacije, izotone bijekcije mreže na lanac, na sledeći način.

Neka je $\mathcal{L}$ mreža sa linearizacijom: $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, l)$, gde je $(L, \wedge, \vee)$ kompletna mreža sa najvećim elementom T i najmanjim elementom B, i l je preslikavanje iz L u realan interval $[0, 1]$ ($l : L \to [0, 1]$), tako da za $x \leq y$ važi $l(x) \leq l(y)$ i $l(T) = 1$ i $l(B) = 0$.

Definicija 3.6. [47] **Mrežno vrednosti bi-rasplinuti** (L-vrednosni intuistički rasplinuti) skup je uređena trojka (X, μ, ν) gde je X neprazan skup, μ i ν funkcije iz X u L i $\mathcal{L}$ je mreža sa funkcijom linearizacije tako da važi:

$$l(\mu(x) + \nu(x)) \leq 1. \tag{3.7}$$

Ovakav objekat zove se **intuicionistički rasplinuti skup tipa dva (IL-vrednosni rasplinuti skup 2)**.

Neke od važnih osobina ovakvih rasplinutih skupova, kao što su teorema sinteze, dekompozicije i druge, date su u [47]. Ipak, ovakva definicija imala je veliki nedostatak: nije dopuštala prirodno definisanje osnovnih skupovnih operacija. Zbog toga nova definicija intuicionističkih mrežno-vrednosnih (L-vrednosnih) rasplinutih skupova data je u radu [48].

Neka je L kompletna mreža sa najvećim elementom T i najmanjim elementom B i α homomorfizam iz L u $[0,1]$, takav da je $\alpha(T) = 1$ i $\alpha(B) = 0$. Kako je α mrežni homomorfizam $\alpha : L \to [0,1]$ važi

$$\alpha(x \wedge y) = min\{\alpha(x), \alpha(y)\} \quad \text{i} \quad \alpha(x \vee y) = max\{\alpha(x), \alpha(y)\}.$$

Ovako definisana funkcija α je funkcija linearizacije, pa se sledeća definicija može smatrati specijalnim slučajem IL-vrednosnog rasplinutog skupa 2.

Definicija 3.7. [48] **Intuicionistički mrežno-vrednosni rasplinuti skup tipa 3 (IL-vrednosni rasplinuti skup 3)** je uređena trojka (X, μ, ν), gde je X neprazan skup, funkcije μ i ν su funkcije iz X u L i $\mathcal{L}$ je mreža sa homomorfizmom α tako da važi:

$$\alpha(\mu(x)) + \alpha(\nu(x)) \leq 1. \tag{3.8}$$

Ova definicija intuicionističkih mrežno-vrednosnih rasplinutih skupova ima prednosti u odnosu na ranije definicije i predstavlja uopštenje običnih intuicionističkih rasplinutih skupova. Takođe, ima i bogatiju strukturu i osnovne operacije mogu biti uvedene na prirodan način. Ipak, za neke mreže ne postoji odgovarajući mrežni homomorfizam kojim se najveći element mreže preslikava u 1, a najmanji u 0. Nedostaci ovih definicija otklonjeni su u radu [55] u kom je dato, do tada, najbolje uopštenje i koncept za intuicionističke mrežno-vrednosne rasplinute skupove.

Definicija 3.8. [55] Intuicionistički mrežno-vrednosni rasplinuti skup na skupu X je uređena trojka (X, μ, ν) gde su μ i ν preslikavanja iz X u $L = [0,1]^I$, gde je I skup indeksa, tako da važi

$$\mu(x)(i) + \nu(x)(i) \leq 1, \tag{3.9}$$

za sve $x \in X$ i $i \in I$.

U radu [55] pokazano je da je intuicionistički mrežno-vrednosni rasplinuti skup sa kodomenom $[0,1]^I$ najopštiji koncept intuicionističkih mrežno-vrednosnih rasplinutih skupova (sa stanovištva nivoa). Ovo je formulisano u sledećoj teoremi.

Neka je L kompletna mreža i (X, μ, ν) IL-vrednosni rasplinuti skup definisan prethodnom definicijom. Nivo skupovi $\mu_p = \{x \in X \mid \mu(x) \geq p\}$ i $\nu_p = \{x \in X \mid \nu(x) \leq p\}$ ovakvog IL-rasplinutog skupa su isti kao nivoi dati u Definiciji 3.4. Familije nivo skupova su $\mathcal{M}_L = \{\mu_p \mid p \in L\}$ i $\mathcal{N}_L = \{\nu_p \mid p \in L\}$. Ovakvi nivo skupovi i njihove familije važe za sve pomenute oblike IL-vrednosnih rasplinutih skupova.

Važi sledeće:

1. $\mu_0 = X$ i $\nu_1 = X$;
2. ako je $p \leq q$ onda je $\mu_q \subseteq \mu_p$ i $\nu_p \subseteq \nu_q$;
3. $\mu(x) = \bigvee\{p \in L \mid x \in \mu_p\}$ i $\nu(x) = \bigwedge\{p \in L \mid x \in \nu_p\}$;
4. Ako je $K \subseteq L$ onda je $\bigcap\{\mu_p \mid p \in K\} = \mu_{\bigvee\{p \mid p \in K\}}$ i $\bigcap\{\nu_p \mid p \in K\} = \mu_{\bigwedge\{p \mid p \in K\}}$.
5. $\mathcal{M}_L$ i $\mathcal{N}_L$ su mreže u odnosu na inkluziju.

Uopštenje nivo skupova, njihovih veza i osobina dato je za intuicionističke poset-vrednosne rasplinute skupove kao originalni rezultat u Poglavlju 3.2.

Tvrđenje 3.1. [55]*Neka je (X, μ, ν) intuicionistički mrežno-vrednosni rasplinuti skup sa antitonom involucijom $\mathcal{N} : L \to L$, gde su μ i ν preslikavanja iz X u kompletnu mrežu L i važi $\mu(x) \leq \mathcal{N}(\nu(x))$. Tada postoji skup indeksa I i rasplinuti skup (X, μ', ν'), gde $\mu' : X \to [0,1]^I$ i $\nu' : X \to [0,1]^I$ tako da rasplinuti skupovi (X, μ, ν) i (X, μ', ν') imaju identične kolekcije nivoa.* □

3.2 IP-vrednosni rasplinuti skupovi

U ovom poglavlju dajemo novu definiciju intuicionističkog poset-vrednosnog rasplinutog skupa, predstavljajući konačan poset kao podskup skupa

$\{0,1\}^n$. Ovakva reprezentacija omogućava prirodnu definiciju ovog koncepta za svaki poset, korišćenjem *ili*-nerazloživih ($\vee$-nerazloživih) elemenata poseta (videti [118] za dualnu reprezentaciju preko *i*-nerazloživih elemenata). Svi rezultati ovoga poglavlja su originalni i objavljeni u radu [41].

Definicija 3.9. Neka je X neprazan skup i $(P, \leq)$ odgovarajući poset. Neka su $\mu : X \to P$ and $\nu : X \to P$ dve funkcije iz X u P.

Tada je (X, μ, ν) **intuicionistički poset-vrednosni rasplinuti skup** nad skupom X ako za svako $x \in X$,

$$\mu(x)\downarrow \cap\, \nu(x)\downarrow \subseteq S, \tag{3.10}$$

gde je $S = \{B\}$ ako poset P ima najmanji element B, u ostalim slučajevima $S = \emptyset$.

Intuicionistički poset-vrednosni rasplinuti skup označavaćemo skraćeno IP-vrednosni rasplinuti skup.

Kao i što je i do sada bio slučaj sa intuicionističkim rasplinutim skupovima, funkcija μ je **funkcija pripadanja**, gde $\mu(x)$ predstavlja stepen pripadanja elementa x intuicionističkom rasplinutom skupu i funkcija ν je **funkcija nepripadanja**, gde $\nu(x)$ predstavlja stepen nepripadanja elementa x intuicionističkom rasplinutom skupu.

Neka je $X \neq \emptyset$. Familiju svih IP-vrednosnih rasplinutih skupova nad skupom X označimo sa $IPRS(X)$. Neka su $A = (X, \mu_A, \nu_A)$ i $B = (X, \mu_B, \nu_B)$ dva IP-rasplinuta skupa. Definišimo jednakost i inkluziju na sledeći način:

1. $A = B$ ako i samo ako je $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ i $\nu_A(x) = \nu_B(x)$ za svako $x \in X$.

2. A je **intuicionistički rasplinuti podskup** od B ($A \leq B$) ako i samo ako je za svako $x \in X$, $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ i $\nu_A(x) \geq \nu_B(x)$.

Familija $IPRS(X)$ je parcijalno uređen skup u odnosu na inkluziju. Najmanji i najveći element ove familije postoje ako poset P ima najmanji i najveći element. Ako su T najveći element i B najmanji element poseta P, tada je najmanji element ove familije definisan sa (X, μ_0, ν_0), gde je $\mu_0(x) =$

B, a $\nu_0(x) = T$ za svako $x \in X$. Najveći element familije $IPRS(X)$ je (X, μ_1, ν_1), gde je $\mu_1(x) = T$ i $\nu_1(x) = B$ za svako $x \in X$.

Binarne operacije infimum i supremum mogu se definisati na sledeći način: neka su $A, B \in IPRS(X)$,

1. $A \wedge B$ je definisano ako postoje $\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$ i $\nu_A(x) \vee \nu_B(x)$ za svako $x \in X$ i definiše se kao: $A \wedge B = (X, \mu_A \wedge \mu_B, \nu_A \vee \nu_B)$.
2. $A \vee B$ je definisano ako postoje $\mu_A(x) \vee \mu_B(x)$ i $\nu_A(x) \wedge \nu_B(x)$ za svako $x \in X$ i definiše se kao: $A \vee B = (X, \mu_A \vee \mu_B, \nu_A \wedge \nu_B)$.

Definišimo odgovarajuće nivoe za IP-vrednosne rasplinute skupove.

Definicija 3.10. Za svako $p \in P$, mogu se definisati dva tipa nivo skupova IP-vrednosnog rasplinutog skupa (X, μ, ν) na sledeći način:

$$\mu_p = \{x \in X \mid \mu(x) \geq p\} \quad \text{i} \quad \nu_p = \{x \in X \mid \nu(x) \leq p\}. \tag{3.11}$$

Sa $\mathcal{M}_P$ i $\mathcal{N}_P$ označimo dve familije nivo skupova IP-vrednosnog rasplinutog skupa (X, μ, ν):

$$\mathcal{M}_P = \{\mu_p \mid p \in P\} \quad \text{i} \quad \mathcal{N}_P = \{\nu_p \mid p \in P\}. \tag{3.12}$$

Elemente iz $\mathcal{M}_P$ zovemo μ-nivoi i elemente iz $\mathcal{N}_P$ zovemo ν-nivoi.

U nastavku, nabrojana su svojstva za oba tipa nivoa. Neka od ovih svojstava su posledice poznatih osobina P-vrednosnih rasplinutih skupova. U dokazima za svojstva familije $\mathcal{N}_P$, koristili smo činjenicu da su ν-nivoi u suštini nivoi poset-vrednosnog rasplinutog skupa koji je preslikavanje iz X u dualan poset $P^d = (P, \geq)$.

Tvrđenje 3.2. *Neka je P poset, X neprazan skup i (X, μ, ν) je IP-vrednosni rasplinuti skup. Tada važi:*

(1) *Ako postoji najmanji element B poseta P, onda je $\mu_B = X$. Ako postoji najveći element T poseta P, onda je $\nu_T = X$.*

(2) *Ako je $p \leq q$, onda je $\mu_q \subseteq \mu_p$, i $\nu_p \subseteq \nu_q$.*

(3)

$$\mu(x) = \bigvee\{p \in P \mid x \in \mu_p\};$$
$$\nu(x) = \bigwedge\{p \in P \mid x \in \nu_p\}.$$

Ovo znači da infimum i supremum sa desne strane jednakosti postoje i jednakosti važe.

(4) *Ako je $P_1 \subseteq P$, podposet poseta P koji ima supremum, onda*

$$\bigcap(\mu_p \mid p \in P_1) = \mu_{\bigvee\{p|p\in P_1\}}$$

i slično, ako P_1 ima infimum, onda

$$\bigcap(\nu_p \mid p \in P_1) = \nu_{\bigwedge\{p|p\in P_1\}}.$$

(5) *$\mathcal{M}_P$ i $\mathcal{N}_P$ su centralizovani sistemi u odnosu na inkluziju.*

(6) $\bigcup\{\mu_p \mid p \in P\} = X$; $\bigcup\{\nu_p \mid p \in P\} = X$.

(7) *Za $x, y \in X$, $\mu(x) \leq \mu(y)$ ako i samo ako je $\mu_{\mu(y)} \subseteq \mu_{\mu(x)}$ i $\nu(x) \leq \nu(y)$ ako i samo ako je $\nu_{\nu(x)} \subseteq \nu_{\nu(y)}$.*

(8) *Za svako $p \in P$, $\mu_p \cap \nu_p \subseteq \nu^{-1}(B)$, ako postoji najmanji element B poseta, u suprotnom važi $\mu_p \cap \nu_p = \emptyset$.*

Dokaz. (1) Neka su B i T redom najmanji i najveći elementi poseta P. Tada je

$$\mu_B = \{x \in X \mid \mu(x) \geq B\} = X \qquad \text{i} \qquad \nu_T = \{x \in X \mid \nu(x) \leq T\} = X.$$

(2) Neka je $p \leq q$ i $x \in \mu_q$. Tada je $\mu(x) \geq q \geq p$, pa $x \in \mu_p$, tj. $\mu_q \subseteq \mu_p$. Slično, neka je $y \in \nu_p$. Tada je $\nu(x) \leq p \leq q$, pa $y \in \nu_q$, tj. $\nu_p \subseteq \nu_q$.

(3) Neka je $\mu(x) = r \in P$. Za svako $p \in P$, takvo da $x \in \mu_p$ sledi $\mu(x) = r \geq p$, pa $r \in \{p \in P \mid \mu(x) \geq p\}$. r je najveći element te familije pa je $\mu(x) = r = \bigvee\{p \in P \mid \mu(x) = p\}$. Neka je sada $\nu(x) = q \in P$. Za svako $p \in P$ takvo da $x \in \nu_p$ važi $\nu(x) = q \leq p$. Kako je $q \in \{p \in P \mid \nu(x) \leq p\}$ to je q infimum te familije, pa je $\nu(x) = q = \bigwedge\{p \in P \mid \nu(x) = p\}$.

(4) Pretpostavimo da je $P_1 \subseteq P$ takav da postoji infimum njegovih elemenata. Tada za $x \in X$, $x \in \nu_{\bigwedge\{p|p\in P_1\}}$ ako i samo ako $\nu(x) \leq \bigwedge\{p \mid p \in P_1\}$,

ekvivalentno $\nu(x) \leq p$ za svako $p \in P_1$, tj. $x \in \nu_p$. Time $x \in \bigcap\{\nu_p \mid p \in P_1\}$. Slično, neka postoji supremum skupa $P_1 \subseteq P$. Tada za $x \in X$, $x \in \mu_{\bigvee\{p \mid p \in P_1\}}$ ako i samo ako $\mu(x) \geq \bigvee\{p \mid p \in P_1\}$, ekvivalentno $\mu(x) \geq p$ za svako $p \in P_1$, tj. $x \in \mu_p$. Time $x \in \bigcap\{\mu_p \mid p \in P_1\}$.

(5) Neka je $x \in X$ i $x \in \mu_p$. Tada važi

$$\mu_{\bigvee\{p \mid x \in \mu_p\}} = \bigcap\{\mu_p \mid x \in \mu_p\},$$

pa je presek μ-nivoa takođe μ-nivo, tj.

$$\bigcap\{\mu_p \mid x \in \mu_p\} \in \mu_P.$$

Slično, $x \in X$ i $x \in \nu_p$. Tada važi

$$\nu_{\bigwedge\{p \mid x \in \nu_p\}} = \bigcap\{\nu_p \mid x \in \nu_p\},$$

pa je presek ν-nivoa ν-nivo, tj.

$$\bigcap\{\nu_p \mid x \in \nu_p\} \in \nu_P.$$

(6) Neka je $x \in X$ i $x \in \mu_p$. Tada $x \in \bigcup\{\mu_p \mid p \in P\}$, pa $X \subseteq \bigcup\{\mu_p \mid p \in P\}$. S druge strane, $\bigcup\{\mu_p \mid p \in P\} \subseteq X$, pa važi jednakost. Dokaz je identičan za $\bigcup\{\nu_p \mid p \in P\} = X$.

(7) Smer u levo je očigledan. Dokažimo smer u desno. Neka je $\mu_{\mu(y)} \subseteq \mu_{\mu(x)}$ i neka je $\mu(y) \ngeq \mu(x)$. Tada $y \notin \mu_{\mu(x)}$ što je nemoguće jer $y \in \mu_{\mu(y)}$. Slično, neka je $\nu_{\nu(x)} \subseteq \nu_{\nu(y)}$ i $\nu(x) \nleq \nu(y)$. Tada $x \notin \nu_{\nu(y)}$ što je nemoguće jer $x \in \nu_{\nu(x)}$.

(8) Neka je $p \in P$ i neka je x takvo da važi $x \in \mu_p \cap \nu_p$. Tada je $p \leq \mu(x)$ i $\nu(x) \leq p$, tj., $\nu(x) \leq \mu(x)$.

Sada je

$$\mu(x)\downarrow \cap\, \nu(x)\downarrow = \nu(x)\downarrow \subseteq S,$$

gde je $S = \{B\}$ ako poset P ima najmanji element B, inače $S = \emptyset$. Ovo znači da je $\nu(x)\downarrow \subseteq \{B\}$, otuda je $\nu(x) = B$, ili takvo x ne postoji. Tada je $x \in \nu^{-1}(B)$ i $\mu_p \cap \nu_p \subseteq \nu^{-1}(B)$. $\square$

Sada ćemo dati opravdanje za novouvedenu definiciju uzimajući u razmatranje slučaj konačnih kodomena.

Neka je $\mathcal{J}$ skup svih potpuno $\vee$-nerazloživih elemenata konačnog poseta P.

Neka je $|\mathcal{J}| = n$ i neka je preslikavanje (indeksiranje) $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathcal{J}$ bijekcija.

Posmatrajmo preslikavanje iz $F : P \to \{0, 1\}^n$ definisano na sledeći način $F(x) = (a_1, ..., a_n)$, gde je $a_i = 1$ ako i samo ako je $f(i) \leq x$.

Ako poset P ima najmanji element B, onda je $F(B) = (0, \ldots, 0)$, jer su svi potpuno $\vee$-nerazloživi elementi iznad njega. Slično, ako poset P ima najveći element T, tada je $F(T) = (1, ..., 1)$, jer su svi potpuno $\vee$-nerazloživi elementi ispod njega.

Ovako definisano preslikavanje F je dobro definisano, jer svaki element poseta P je jedinstveno predstavljen preko potpuno $\vee$-nerazloživih elemenata ispod njega (Tvrđenje 1.5). Ako poset P ima n $\vee$-nerazloživih elemenata, tada predstavljamo poset P kao podskup skupa $\{0, 1\}^n$.

U daljem tekstu, razmatraćemo konačan poset P kao podskup skupa $\{0, 1\}^{\mathcal{J}}$, gde skup $\vee$-nerazloživih elemenata poseta i skup indeksa $\mathcal{J}$ ima kardinalnost n.

Neka je $\mathcal{J}$ konačan skup kardinalnosti $|\mathcal{J}| = n$. Sa $\{0, 1\}^{\mathcal{J}}$ označavaćemo skup čiji su elementi uređene n-torke.

Neka je X neprazan skup. Sada, neka je poset P poset sa elementima iz $\{0, 1\}^{\mathcal{J}}$. Pokazaćemo da je IP-vrednosni rasplinuti skup nad skupom X uređena trojka (X, μ, ν), gde su μ i ν preslikavanja iz X u $P \subseteq \{0, 1\}^{\mathcal{J}}$, takva da važi

$$\mu(x)(i) + \nu(x)(i) \leq 1, \tag{3.13}$$

za svako $x \in X$ i svako $i \in \mathcal{J}$.

Drugim rečima, pokazaćemo da je suma vrednosti funkcije pripadanja i funkcije nepripadanja po svakoj koordinati manja ili jednaka 1.

U slučaju da je poset P mreža, ovakva definicija preko sume koordinata funkcije pripadanja i nepripadanja je, na neki način, uopštenje definicije intuicionističkog mrežno-vrednosnog rasplinutog skupa iz rada [55].

Tvrđenje 3.3. *Neka je X neprazan skup, $(P, \leq)$ konačan poset sa skupom $\vee$-nerazloživih elemenata $\mathcal{J}$, koji je predstavljen preko podskupa skupa $\{0,1\}^{\mathcal{J}}$ i neka su $\mu : X \to P$ i $\nu : X \to P$ dve odgovarajuće funkcije. Tada je (X, μ, ν) IP-vrednosni rasplinuti skup nad skupom X ako i samo ako je $\mu(x)(i) + \nu(x)(i) \leq 1$, za svako $x \in X$ i za svako $i \in \mathcal{J}$.*

Dokaz. Neka je P konačan poset kome odgovara podskup skupa $\{0,1\}^{\mathcal{J}}$, gde je skup $\vee$-nerazloživih elemenata poseta skup $\mathcal{J}$ kardinalnosti n. Kako je skup $\mathcal{J}$ uređen, to ćemo elemente poseta P posmatrati kao uređene n-torke sa koordinatama iz $\mathcal{J}$.

Neka je sada (X, μ, ν) uređena trojka, gde su $\mu : X \to P$ i $\nu : X \to P$ dve funkcije iz X u P. Kako je poset P predstavljen kao podskup skupa $\{0,1\}^{\mathcal{J}}$, to su njegovi elementi preslikavanja iz $\mathcal{J}$ u $\{0,1\}$. Tako, za svako $x \in X$ $\mu(x)$ i $\nu(x)$ su preslikavanja iz $\mathcal{J}$ u $\{0,1\}$, i sa $\mu(x)(i)$ i $\nu(x)(i)$ predstavljamo vrednosti za $\mu(x)$ i $\nu(x)$ za $i \in \mathcal{J}$. U ovakvom zapisu važi:

$$\mu(x)(i) + \nu(x)(i) \leq 1, \text{ za svako } x \in X \text{ i za svako } i \in \mathcal{J}.$$

Ovo znači da za neko $i \in \mathcal{J}$, ako je $\mu(x)(i) = 1$, onda je $\nu(x)(i) = 0$.

Tada važi da ako je i potpuno $\vee$-nerazloživ element, onda ako je $i \leq \mu(x)$, tada je $i \not\leq \nu(x)$ i obrnuto. Tada, $\mu(x)\downarrow \cap \nu(x)\downarrow \cap \mathcal{J} = \emptyset$. Dakle, ako postoji najmanji element B poseta P, tada je $\mu(x)\downarrow \cap \nu(x)\downarrow \subseteq \{B\}$, inače $\mu(x)\downarrow \cap \nu(x)\downarrow = \emptyset$, što pokazuje da je (X, μ, ν) IP-vrednosni rasplinuti skup.

Da bismo dokazali obrnut smer, ako je (X, μ, ν) IP-vrednosni rasplinuti skup, npr., ako je $\mu(x)\downarrow \cap \nu(x)\downarrow = \emptyset$ ili $\mu(x)\downarrow \cap \nu(x)\downarrow \subseteq \{B\}$, onda je $\mu(x)\downarrow \cap \nu(x)\downarrow \cap \mathcal{J} = \emptyset$. Ovo znači da ne postoje potpuno $\vee$-nerazloživi elementi koji su istovremeno ispod $\mu(x)$ i $\nu(x)$, što znači da posmatrajući svaku koordinatu pojedinačno, $\mu(x) = 1$ i $\nu(x) = 0$, ili $\mu(x) = 0$ i $\nu(x) = 1$, ili su obe vrednosti 0. Iz ovoga sledi da je $\mu(x)(i) + \nu(x)(i) \leq 1$ za svako x i za svako i. $\square$

Ovim smo pokazali da je definisanje intuicionističkih poset-vrednosnih rasplinutih skupova na ovaj način prirodno, kao i da ovakav pristup ima svoje prednosti jer je primenljiv na svaki konačan poset (kao i na konačnu mrežu, čime se otvara nov okvir za proučavanje intuicionističkih mrežno-vrednosnih rasplinutih skupova).

Sledeći primer ilustruje uvedene pojmove.

***Primer* 3.1.** Neka je $(P, \leq)$ poset dat na Slici 3.1. $\vee$-nerazloživi elementi ovog poseta označeni su punim kružićima (svi elementi osim elementa e, su *ili*-nerazloživi). Ove $\vee$-nerazložive elemente možemo indeksirati na sledeći način:

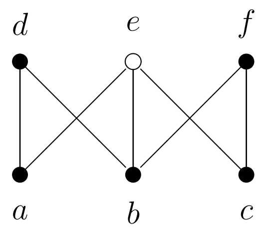
1	*2*	*3*	*4*	*5*
a	b	c	d	f

i dobijamo sledeće preslikavanje iz P u $\{0,1\}^5$:

$$\begin{aligned} F(a) &= (1,0,0,0,0),\\ F(b) &= (0,1,0,0,0),\\ F(c) &= (0,0,1,0,0),\\ F(d) &= (1,1,0,1,0),\\ F(e) &= (1,1,1,0,0),\\ F(f) &= (0,1,1,0,1), \end{aligned}$$

tj.,

a	b	c	d	e	f
10000	*01000*	*00100*	*11010*	*11100*	*01101*



Slika 3.1 $(P, \leq)$.

Neka je $X = \{x, y, z, u, v, w\}$ i neka su funkcije μ i ν definisane kao:

$$\mu(x) = \begin{pmatrix} x & y & z & u & v & w \\ d & d & f & a & b & c \end{pmatrix}; \ \nu(x) = \begin{pmatrix} x & y & z & u & v & w \\ c & c & a & b & c & a \end{pmatrix}.$$

Očigledno je da je uređena trojka (X, μ, ν) intuicionistički poset-vrednosni rasplinuti skup (na osnovu Tvrđenja 3.3).

Nivo skupovi ova dva rasplinuta skupa su:

$\mu_d = \{x, y\}, \nu_d = \{z, u, w\}$

$\mu_e = \emptyset,\ \nu_e = \{x, y, z, u, v, w\}$

$\mu_f = \{z\},\ \nu_f = \{x, y, u, v\}$

$\mu_a = \{x, y, u\},\ \nu_a = \{z, w\}$

$\mu_b = \{x, y, z, v\},\ \nu_b = \{u\}$

$\mu_c = \{z, w\},\ \nu_c = \{x, y, v\}$.

Može se proveriti da je Tvrđenje 3.2 tačno. Posebno uočimo da je $\mu_i \cap \nu_i = \emptyset$ za svako $i \in \{a, b, c, d, e, f\}$. □

Sada ćemo dati potrebne i dovoljne uslove pod kojima su dve familije podskupova skupa X istovremeno familije nivoa intuicionističkog poset-vrednosnog rasplinutog skupa.

Tvrđenje 3.4. *Neka je X skup i neka je P poset. Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ dve familije podskupova skupa X.*

Tada postoji IP-vrednosni rasplinuti skup nad X, sa kodomenom P, takav da su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ njegove familije nivoa (μ-nivoa i ν-nivoa tim redom)ako i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

1. *$\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ su zatvoreni u odnosu preseke po koordinatama (centralizovane preseke) i unija svake od familija je X.*

2. *Postoji izotono preslikavanje $E : Y \to P$ iz poseta $(Y, \supseteq)$ u $(P, \leq)$, gde je $Y = \{Z_x \mid Z_x = \bigcap\{f \in \mathcal{M} \mid x \in f\}\}$, tako da za svako $r \in P$, $\bigcup E^{-1}(r\!\uparrow \cap E(Y)) \in \mathcal{M}$, i preslikavanje $\Phi : P \to \mathcal{M}$, definisano kao $\Phi(r) = \bigcup E^{-1}(r\!\uparrow \cap E(Y))$ je „na”.*

3. *Postoji izotono preslikavanje $G : Y \to P$ iz poseta $(W, \supseteq)$ u $(P_d, \geq)$, gde je $W = \{T_x \mid T_x = \bigcap\{f \in \mathcal{N} \mid x \in f\}\}$, takva da sa svako $r \in P$,*

$\bigcup G^{-1}(r\uparrow \cap G(W)) \in \mathcal{N}$, i preslikavanje $\Psi : P \to \mathcal{F}$, definisano sa $\Psi(r) = \bigcup G^{-1}(r\uparrow \cap G(W))$ je „na".

4. *Za svako $x \in X$, $E(Z_x)\downarrow \cap G(T_x)\downarrow \subseteq S$, gde je $S = \{B\}$ ako P ima najmanji element B, i $S = \emptyset$ u ostalim slučajevima.*

   Ako je poset P konačan, tada je uslov (4) ekvivalentan sa:

5. *Za svako $x \in X$, $E(Z_x)(i) + G(T_x)(i) \leq 1$ po svakoj koordinati i, gde je poset P predstavljen kao podskup skupa $\{0,1\}^n$.*

Dokaz. Pretpostavimo da su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ dve familije nivo skupova IP-vrednosnog rasplinutog skupa nad skupom X, sa kodomenom P. Tada, uslov 1. je ispunjen na osnovu Tvrđenja 3.2 5., uslovi 2. i 3. su ispunjeni na osnovu Tvrđenja 2.26 i uslov 4. je ispunjen na osnovu Definicije 3.9 IP-vrednosnog rasplinutog skupa.

Da bismo dokazali suprotan smer posmatrajmo preslikavanja $\mu : X \to P$ i $\nu : X \to P_d$ koja su definisano kao $\mu(x) := E(Z_x)$ i $\nu(x) := G(T_x)$. P_d je dualan poset posetu $(P, \leq)$. Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ familije podskupova skupa X. Neka su ispunjeni uslovi 1., 2. i 3.. Treba dokazati da je $\mathcal{M}$ kolekcija nivo skupova P-vrednosnog rasplinutog skupa μ i $\mathcal{N}$ kolekcija nivoa P-vrednosnog rasplinutog skupa ν.

Pokažimo da za svako $r \in P$ važi $\mu_r = \Phi(r)$.

Neka je $r \in P$. Tada je $x \in \mu_r \Leftrightarrow \mu(x) \geq r \Leftrightarrow E(Z_x) \geq r$, pa je $E(Z_x) \in r\uparrow \cap E(Y)$ i $Z_x = E^{-1}(r\uparrow \cap E(Y))$. Kako $x \in Z_x$ imamo da $x \in \bigcup\{y \mid y \in E^{-1}(r\uparrow \cap E(Y))\}$.

Ovim je dokazano da je $\mu_r \subseteq \Phi(r)$.

Dokažimo obrnutu inkluziju. Neka je $x \in \Phi(r)$, tj. $x \in \bigcup\{y \mid y \in E^{-1}(r\uparrow \cap E(Y))\}$. Tada postoji $Z_y \in E^{-1}(r\uparrow \cap E(Y))$ takvo da $x \in Z_y$. Takođe, $E(Z_y) \in r\uparrow \cap E(Y))$, tj. $E(Z_y) \geq r$.

Iz $x \in Z_y$ sledi da je $Z_x \subseteq Z_y$. Kako je E izotono preslikavanje, to je $E(Z_x) \geq E(Z_y) \geq r$, pa je $E(Z_x) \geq r$, tj. $\mu(x) \geq r$. Odavde sledi da je $x \in \mu_r$.

Sada važi da za svako $r \in P$, $\mu_p = \Phi(r)$. Preslikavanje Φ je „na"pa je $\mathcal{M}$ kolekcija μ-nivoa.

Slično dokazujemo da je $\nu : X \to P_d$ poset-vrednosni rasplinuti skup sa familijom nivoa $\mathcal{N}$.

Sada, posmatramo uređenu trojku (X, μ, ν), koja ima familije nivoa μ i ν. Na osnovu uslova 4. imamo da je (X, μ, ν) poset-vrednosni intuitionistički rasplinuti skup nad X.

U slučaju konačnog poseta P, uslovi (4) i (5) su ekvivalentni na osnovu Tvrđenja 3.3. $\square$

***Primer* 3.2.** Neka je dat skup $X = \{x, y, z\}$ i neka su date dve familije njegovih podskupova $\mathcal{M} = \{\{x\}, \{y\}, \{x, z\}, \{x, y, z\}\}$ i $\mathcal{N} = \{\{y\}, \{x, z\}\}$. Poseti $(\mathcal{M}, \supseteq)$ i $(\mathcal{N}, \supseteq)$ dati su na Slikama 3.2 i 3.3 i oba su parcijalni sistemi zatvaranja skupa X.

Dalje, $Z_x = \{x\}$, $Z_y = \{y\}$ i $Z_z = \{x, z\}$ i ovi elementi određuju poset $(Y, \supseteq)$ koji je predstavljen popunjenim kružicima na Slici 3.2. Slično za poset $\mathcal{N}$ vrednosti $T_x = \{x, z\}$, $T_y = \{y\}$ i $T_z = \{x, z\}$ i poset $(W, \supseteq)$ predstavljen je punim kružićima na Slici 3.3.

Poset $(P, \leq)$ dat je na Slici 3.4.

Definišimo izotona preslikavanja $E : Y \to P$ i $G : W \to P_d$ na sledeći način: $E(Z_x) = a$, $E(Z_y) = b$, $E(Z_z) = c$, $G(T_x) = G(T_z) = e$ i $G(T_y) = d$. Sada definišimo preslikavanje $\Phi : P \to \mathcal{M}$ na sledeći način: $\Phi(a) = \Phi(f) = \{x\}$, $\Phi(b) = \Phi(e) = \{y\}$ i $\Phi(c) = \Phi(d) = \{x, z\}$ i ono je „na”. Prema Tvrđenju 2.26 postoji P-vrednosno rasplinuti skup $\mu : X \to P$ takvo da je $\mu(x) := E(Z_x)$, tj.

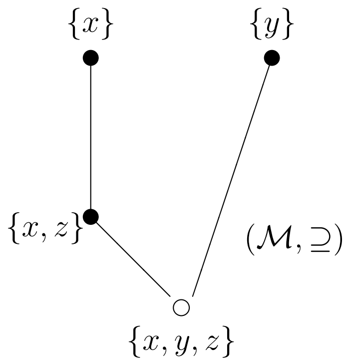
$$\mu(x) = a, \qquad \mu(y) = b, \qquad \mu(z) = c.$$

Kolekcija nivoa ovog P-rasplinutog skupa je:

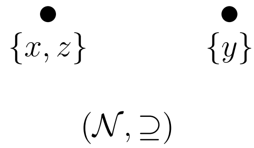
$$\mu_a = \mu_f = \{x\}, \qquad \mu_b = \mu_e = \{y\}, \qquad \mu_c = \mu_d = \{x, z\}.$$

Na sličan način definišimo izotono preslikavanje $\Psi : P_d \to \mathcal{N}$: $\Psi(a) = \Psi(c) = \Psi(d) = \Psi(f) = \{y\}$, $\Psi(b) = \Psi(e) = \{x, z\}$. Postoji P-vrednosni rasplinuti skup $\nu : X \to P_d$ definisan sa $\nu(x) := G(T_x)$, tj. $\nu(x) = \nu(z) = e$ i $\nu(y) = d$. Kolekcija nivoa je $\nu_a = \nu_c = \nu_d = \nu_f = \{y\}$ i $\nu_b = \nu_e = \{x, z\}$.

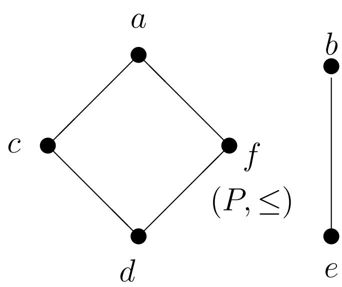
Primetimo da je $E(Z_x)\!\downarrow \cap\, G(T_x)\!\downarrow = \emptyset$, za svako $x \in X$.



Slika 3.2



Slika 3.3



Slika 3.4

Na ovaj način konstruisan je jedan IP-vrednosni rasplinuti skup (X, μ, ν) sa unapred zadatom kolekcijom nivo skupova.

Pokažimo da još važi 5. Tvrđenja 3.4. Poset P je konačan i ima 5 potpuno $\vee$-nerazloživih elemenata $\{b, c, d, e, f\}$, pa se može preslikati u $\{0, 1\}^5$ na sledeći način:

a	b	c	d	e	f
10111	*01001*	*10100*	*10000*	*01000*	*10010*

.

Predstavimo IP-vrednosni rasplinuti skup $(X, E(Z_x), G(T_x))$ sledećom tablicom

	x	y	z
$E(Z_x)$	*10111*	*01001*	*10100*
$G(T_x)$	*01000*	*10000*	*01000*

.

Očigledno je da $\forall x \in X$ i $\forall i \in \mathcal{I}$ važi $E(Z_x)(i) + G(T_x)(i) \leq 1$. $\square$

U ovom poglavlju data je nova definicija intuicionističkog poset-vrednosnog rasplinutog skupa, koristeći se, u konačnom slučaju, reprezentacijom poseta kao podskupa distributivne mreže. Na ovaj način, možemo proučavati i računati funkcije pripadanja i nepripadanja bez uvođenja kompleksnih problema kao što su definisanje komplementa na posetu ili antitone involucije. Takođe, u ovom okviru i ovom tehnikom, svaki konačan poset može biti kodomen intuicionističkog rasplinutog skupa.

Pored konačnih, ovo predstavljanje važi i za beskonačne prostorne posete (CJI posete iz Definicije 2.18), one kod kojih je svaki element supremum potpuno *ili*-nerazloživih elemenata. Dokazi za sva tvrđenja su identični jer se direktno koristi predstavljivost svakog elementa preko *ili*-nerazloživih elemenata.

3.3 Intuicionističke rasplinute relacije

U ovom poglavlju prikazane su intuicionističke rasplinute relacije i neka njihova uopštenja. Koristeći rezultate iz prethodnog poglavlja, date su nove definicije intuicionističkih mrežno-vrednosnih i poset-vrednosnih rasplinutih relacija. Dokazano je da za unapred zadate familije podskupova $\mathcal{M}_x$ i $\mathcal{N}_x$ nepraznog skupa X, koje zadovoljavaju određena svojstva, postoji mreža L i intuicionistička mrežno-vrednosna relacija R takva da su familije nepraznih nivoa x-blokova pripadanja i nepripadanja upravo zadate familije.

Intuicionistička rasplinuta relacija predstavlja specijalan slučaj intuicionističkog rasplinutog skupa. Ove relacije razvijali su Atanassov [1, 5, 6, 7], Stoyanova [107, 108], Bustince i Burillo [23, 24, 25] i mnogi drugi autori.

Sledeće definicije i direktne posledice preuzete su iz [1, 2, 23, 24, 87].

Definicija 3.11. [23, 24] **Intuicionistička rasplinuta relacija** R je intuicionistički rasplinuti skup nad $X \times Y$

$$R = (X \times Y, \mu, \nu), \tag{3.14}$$

gde $\mu : X \times Y \to [0,1]$ i $\nu : X \times Y \to [0,1]$ zadovoljavaju uslov

$$0 \leq \mu(x,y) + \nu(x,y) \leq 1$$

za svaki par $(x,y) \in X \times Y$.

Relacija R definisana na ovaj način zove se *Atanasovljeva intuicionistička rasplinuta relacija.* Označimo sa $\mathfrak{R}(X \times Y)$ familiju svih intuicionističkih rasplinutih relacija nad $X \times Y$. Familija svih IRS-ova nad nepraznim skupom $X \times Y$ uređena je inkluzijum i na njoj su definisane binarne operacije infimuma i supremuma (strana 37). Intuicionistička rasplinuta relacija je poseban oblik intuicionističkog rasplinutog skupa nad $X \times Y$, pa na osnovu prethodne definicije direktno važi: za $R, Q \in \mathfrak{R}(X \times Y)$,

(1) $R = Q$ ako i samo ako je za svako $(x,y) \in X \times Y$, $\mu_R(x,y) = \mu_Q(x,y)$ i $\nu_R(x,y) = \nu_Q(x,y)$;

(2) $R \leq Q$ ako i samo ako je za svako $(x,y) \in X \times Y$, $\mu_R(x,y) \leq \mu_Q(x,y)$ i $\nu_R(x,y) \geq \nu_Q(x,y)$;

(3) $R \vee Q = (X \times Y, \mu_R \vee \mu_Q, \nu_R \wedge \nu_Q)$;

(4) $R \wedge Q = (X \times Y, \mu_R \wedge \mu_Q, \nu_R \vee \nu_Q)$.

Definicija 3.12. [2] Relacija $R^{-1} \in \mathfrak{R}(Y \times X)$ je **inverzna** ili **transponovana** relacija relacije $R \in \mathfrak{R}(X \times Y)$ ako je $R^{-1} = (Y \times X, \mu_{R^{-1}}, \nu_{R^{-1}})$ i za svako $(x,y) \in X \times Y$, $\mu_{R^{-1}}(y,x) = \mu_R(x,y)$ i $\nu_{R^{-1}}(y,x) = \nu_R(x,y)$.

Slede direktne posledice ovako uvedenih relacija.

Posledica 3.5. *Neka $R, P, Q \in \mathfrak{R}(X \times Y)$. Tada važi:*

(1) $R \leq P \Rightarrow R^{-1} \leq P^{-1}$;

(2) $(R \vee P)^{-1} = R^{-1} \vee P^{-1}$;

(3) $(R \wedge P)^{-1} = R^{-1} \wedge P^{-1}$;

(4) $(R^{-1})^{-1} = R$;

(5) (a) $R \wedge (P \vee Q) = (R \wedge P) \vee (R \wedge Q)$;

(b) $R \vee (P \wedge Q) = (R \vee P) \wedge (R \vee Q)$.

Definicija 3.13. [33, 87] Neka je $R = (X \times Y, \mu_R, \nu_R) \in \mathfrak{R}(X \times Y)$ i $Q = (Y \times Z, \mu_Q, \nu_Q) \in \mathfrak{R}(Y \times Z)$.

$R \circ Q$ je kompozicija relacija R i Q ako je

$$R \circ Q = (X \times Z, \mu_{R\circ Q}, \nu_{R\circ Q}),$$

gde je

$$\mu_{R\circ Q}(x,z) = \bigvee_{y\in Y} (\mu_R(x,y) \wedge \mu_Q(y,z))$$

i

$$\nu_{R\circ Q}(x,z) = \bigwedge_{y\in Y} (\nu_R(x,y) \vee \nu_Q(y,z)).$$

Tvrđenje 3.6. [87]*Ako su $R \in \mathfrak{R}(X \times Y)$ i $S \in \mathfrak{R}(Y \times Z)$ onda je $R \circ S \in \mathfrak{R}(X \times Z)$.* □

Definicija 3.14. [23] Relacija $R \in \mathfrak{R}(X \times X)$ je:

(1) *refleksivna* ako za svako $x \in X$, $\mu(x,x) = 1$. Primetimo da je tada $\nu(x,x) = 0$.

(2) *antirefleksivna* ako za svako $x \in X$, $\mu(x,x) = 0$ i $\nu(x,x) = 1$.

(3) *simetrična* ako je $R = R^*$, tj. za sve $x, y \in X$

$$\mu(x,y) = \mu(y,x) \quad \text{i} \quad \nu(x,y) = \nu(y,x).$$

(4) *intuicionistički antisimetrična* ako za sve $x, y \in X$ i $x \neq y$, važi $\mu(x,y) \neq \mu(y,x)$, $\quad \nu(x,y) \neq \nu(y,x) \quad$ i $\quad \pi(x,y) \neq \pi(y,x)$.

Jedno od uopštenja intuicionističkih rasplinutih relacija jesu **intuicionističke mrežno-vrednosne rasplinute relacije** (IL-vrednosne rasplinute relacije) gde je interval $[0,1]$ zamenjem odgovarajućom kompletnom mrežom $(L, \leq)$ sa operacijom $\mathcal{N} : L \to L$ koja je antitona involucija.

Definicija 3.15. [3] IL-vrednosna rasplinuta relacija $R = (X \times Y, \mu, \nu)$ je IL-vrednosni rasplinuti skup nad $X \times Y$.

Sve navedeno za intuicionističke rasplinute relacije važi i za IL-vrednosne rasplinute relacije [87].

Osnovna svojstva IL-vrednosnih rasplinutih relacija, kao specijalnog slučaja IL-rasplinutih skupova, ispitivali su Gerstenkorn i Tepavčević u radu [49]. U pomenutom radu date su teoreme dekompozicije i sinteze.

Svi nedostaci definicija IL-rasplinutih skupova preneti su Definicijom 3.15 na IL-rasplinute relacije. Zbog toga, uvedimo originalnu definiciju **intuicionističke mrežno-vrednosne rasplinute relacije** koja je u skladu sa unapređenom Definicijom 3.9.

Definicija 3.16. Neka je $(L, \leq)$ kompletna mreža sa najmanjim elementom B i X i Y neprazni skupovi. **Intuicionistička mrežno-vrednosna rasplinuta relacija**

$$R = (X \times Y, \mu, \nu), \tag{3.15}$$

je IL-vrednosni rasplinuti skup nad $X \times Y$ takav da za svaki par $(x, y) \in X \times Y$, preslikavanja $\mu : X \times Y \to L$ i $\nu : X \times Y \to L$ zadovoljavaju uslov

$$\mu(x, y){\downarrow} \cap \nu(x, y){\downarrow} = \{B\}. \tag{3.16}$$

Za ovako definisanu IL-vrednosnu relaciju $R = (X \times Y, \mu, \nu)$ i za svako $x \in X$ možemo definisati dva L-vrednosna rasplinuta skupa $\mu[x] : Y \to L$ i $\nu[x] : Y \to L$ na sledeći način: za svako $y \in Y$,

$$\mu[x](y) := \mu(x, y) \quad \text{i} \quad \nu[x](y) := \nu(x, y). \tag{3.17}$$

L-vrednosne rasplinute skupove $\mu[x]$ i $\nu[x]$ zvaćemo **rasplinuti x-blok pripadanja** (x-blok pripadanja) i **rasplinuti x-blok nepripadanja** (x-blok nepripadanja). Za svako $x \in X$ iz Definicije 3.16 direktno sledi da je $\mu[x](y){\downarrow} \cap \nu[x](y){\downarrow} = \{B\}$, za svako $y \in Y$, pa je $R[x] = (Y, \mu[x], \nu[x])$ IL-vrednosni rasplinuti skup.

Za svako $x \in X$ i za svako $p \in L$ mogu se definisati dva tipa nivo skupova relacije R na sledeći način: $\mu[x]_p = \mu[x]^{-1}(p{\uparrow})$ i $\nu[x]_p = \nu[x]^{-1}(p{\downarrow})$ za koje prema Tvrđenju 3.2 važi $\mu[x]_p \cap \nu[x]_p \subseteq \nu[x]^{-1}(B)$, gde je B najmanji element mreže L.

U radu [63] Janiš i ostali pokazuju da za neprazan skup X i kolekcije njegovih nepraznih podskupova $\mathcal{R}_x$, koje su zatvorene za centralizovane preseke i sadrže skup X, postoje mreža L i L-vrednosna relacija R na X takva da za svako $x \in X$, $\mathcal{R}_x$ je kolekcija nepraznih nivoa bloka $R[x]$.

Tvrđenje 3.7. [63]*Neka je $X \neq \emptyset$ i neka je za svako $x \in X$, $\mathcal{R}_x$ kolekcija nepraznih podskupova skupa X zatvorena za centralizovane preseke koja sadrži X. Tada postoje mreža L i L-vrednosna relacija $R : X \times X \to L$, takva da je za svako $x \in X$, $\mathcal{R}_x$ kolekcija nepraznih nivoa x-bloka $R[x]$.* $\square$

Opis konstrukcije mreže L relacije R

Neka je $X \neq \emptyset$ i za svako $x \in X$, R_x familija njegovih podskupova koja zadovoljava uslove prethodnog tvrđenja. Svaku od familija R_x predstavimo u obliku $R_x = \{U_i^x \mid i \in I\}$, gde je broj elemenata svih familija jednak. Ovo se može postići ponavljanjem nekih elemenata familije sa manjim brojem elemenata, na primer može se ponavljati element X koji pripada svakoj familiji.

Za svako $x \in X$ definiše se nova familija $\tilde{R}_x$ podskupova skupa X^2, tako što se svaki element u iz svakog skupa familije R_x zameni uređenim parom (x, u). Formalno, $\tilde{U}_i^x := \{(x, u) \mid u \in U_i^x\}$ i $\tilde{R}_x := \{\tilde{U}_i^x \mid i \in I\}$.

Sada se konstruiše familija klasičnih relacija $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ na sledeći način: za svako $i \in I$, $\alpha_i := \bigcup\limits_{x \in X} \{\tilde{U}_i^x \mid \tilde{U}_i^x \in \tilde{R}_x\}$.

Kako je svaka polazna familija R_x bila zatvorena za centralizovane preseke, to je $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ poset sa uređenjem $\subseteq$. Kompletiranjem, zatvaranjem ove familije nedostajućim presecima, dobija se familija relacija C, a tražena kompletna mreža je $L = (C, \supseteq)$ (Tvrđenje 1.30 na strani 18).

Relacija $R : X^2 \to L$ definiše se tako što se vrednost $R(x, y)$ određuje kao presek svih relacija familije C koje sadrže uređeni par (x, y), tj. $R(x, y) := \bigcap\{\alpha \in C \mid (x, y) \in \alpha\}$.

Uopštimo sada ovo Tvrđenje u smislu IL-vrednosnih rasplinutih skupova i relacija.

Tvrđenje 3.8. *Neka je $X \neq \emptyset$ i neka su za svako $x \in X$, $\mathcal{M}_x$ i $\mathcal{N}_x$ kolekcije nepraznih podskupova skupa X zatvorene za centralizovane preseke koje sadrže X. Tada postoje mreža L i IL-vrednosna relacija $R = (X \times X, \mu, \nu)$, $\mu, \nu : X \times X \to L$, takva da za svako $x \in X$, $\mathcal{M}_x$ i $\mathcal{N}_x$ su kolekcije nepraznih nivoa x-blokova $\mu[x]$ i $\nu[x]$.* $\square$

Dokaz. Na osnovu Tvrđenja 3.7 postoje kompletne mreže $(L_1, \leq_1, 0_1, 1_1)$ i $(L_2, \leq_2, 0_2, 1_2)$ i L-vrednosne relacije $\mu : X^2 \to L_1$ i $\nu : X^2 \to L_2$ takve da za svako $x \in X$, $\mathcal{M}_x$ i $\mathcal{N}_x$ su kolekcije nepraznih nivoa x-blokova $\mu[x]$ i $\nu[x]$.

Neka je $L = L_1 \cup (L_2 \setminus \{0_2, 1_2\})$ skup na kome je definisan poredak $\leq$ na sledeći način: za sve $p, q \in L$,

$$p \leq q := \begin{cases} p \leq_1 q & \text{za } p, q \in L_1 \\ q \leq_2 p & \text{za } p, q \in L_2 \end{cases} \qquad \text{i} \qquad 0_1 \leq p \leq 1_1.$$

$(L, \leq)$ je kompletna mreža jer su L_1 i L_2 po konstrukciji kompletne mreže. Tada za svaka dva elementa $p, q \in L$ postoje infimum i supremum koji se može na osnovu poretka $\leq$ definisati na sledeći način:

$$p \wedge q = \begin{cases} p \wedge_1 q, & \text{za } p, q \in L_1; \\ p \vee_2 q, & \text{za } p, q \in L_2; \\ 0_1, & \text{za } p \in L_1 \text{ i } q \in L_2; \end{cases} \qquad \text{i} \qquad p \vee q = \begin{cases} p \vee_1 q, & \text{za } p, q \in L_1; \\ p \wedge_2 q, & \text{za } p, q \in L_2; \\ 1_1, & \text{za } p \in L_1 \text{ i } q \in L_2. \end{cases}$$

Neka su L-vrednosne relacije $\overline{\mu}, \overline{\nu} : X^2 \to L$, takve da je za sve $x, y \in X$,

$$\overline{\mu}(x, y) := \mu(x, y) \quad \text{i} \quad \overline{\nu}(x, y) := \begin{cases} \nu(x, y), & \text{ako } \nu(x, y) \in L_2 \setminus \{0_2, 1_2\} \\ 0_1, & \text{ako je } \nu(x, y) = 1_2 \\ 1_1, & \text{ako je } \nu(x, y) = 0_2 \end{cases}.$$

Tada za sve $x, y \in X$, $\overline{\mu}(x, y){\downarrow} \cap \overline{\nu}(x, y){\downarrow} = 0_1$ po konstrukciji mreže L, pa je na osnovu Definicije 3.16 $R = (X^2, \overline{\mu}, \overline{\nu})$ IL-vrednosna relacija i za svako $x \in X$ familije $\mathcal{M}_x$ i $\mathcal{N}_x$ su familije nepraznih x-blokova pripadanja i nepripadanja. $\square$

Ilustrujmo prethodno tvrđenje sledećim primerom.

***Primer* 3.3.** Neka je $X = \{a, b, c\}$ i neka su date dve familije $\mathcal{M} = \{\mu_a, \mu_b, \mu_c\}$ i $\mathcal{N} = \{\nu_a, \nu_b, \nu_c\}$ koje zadovoljavaju uslove prethodnog tvrđenja: $\mu_a = \{\{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$, $\mu_b = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, $\mu_c = \{\{c\}, \{a, b, c\}\}$, $\nu_a = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, $\nu_b = \{\{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ i $\nu_c = \{\{a\}, \{a, b, c\}\}$.

Posmatrajmo familiju $\mathcal{M}$. Sledeća konstrukcija mreže L_1 i relacije $\mu : X^2 \to L_1$ data je u radu [63] i koristićemo je u ovom primeru. Dopunimo familiju μ_c skupom $\{a, b, c\}$ da bi svi skupovi u familiji $\mathcal{M}$ imali isti broj elemenata. Za svako $x \in X$ svaku od kolekcija μ_x možemo zapisati u obliku $\mu_x = \bigcup\{U_i^x \mid i \in I\}$. U ovom primeru $I = \{1, 2, 3\}$ jer svaka familija ima 3 elementa. Konstruišimo relacije $\overline{\mu}_x$ na sledeći način: $\overline{\mu}_x := \{\overline{U}_i^x \mid i \in I\}$, i za svako $x \in X$, $\overline{U}_i^x := \{(x, u) \mid u \in U_i^x\}$.

Relacije $\overline{\mu}_a$, $\overline{\mu}_b$ i $\overline{\mu}_c$ dobijene na ovaj način su:
$\overline{\mu}_a = \{\{(a, a)\}, \{(a, b), (a, c)\}, \{(a, a), (a, b), (a, c)\}\}$,
$\mu_b = \{\{(b, a)\}, \{(b, a), (b, b)\}, \{(b, a), (b, b), (b, c)\}\}$,
$\mu_c = \{\{(c, c)\}, \{(c, a), (c, b), (c, c)\}, \{(c, a), (c, b), (c, c)\}\}$.

Konstruišimo sada familiju običnih relacija $\{\alpha_i \mid i \in I\}$, tako da za svako $i \in I$, $\alpha_i := \bigcup\limits_{x \in X} \{\overline{U}_i^x \mid \overline{U}_i^x \in \overline{\mu}_x\}$.

Dobijene relacije su:

$$\alpha_1 = \bigcup\{\overline{U}_1^x, \overline{U}_1^y, \overline{U}_1^y\} = \{(a, a)\} \cup \{(b, a)\} \cup \{(c, c)\} = \{(a, a), (b, a), (c, c)\},$$

$$\alpha_2 = \{(a, b), (a, c)\} \cup \{(b, a), (b, b)\} \cup \{(c, a), (c, b), (c, c)\} =$$

$$\{(a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b), (c, c)\},$$

$$\alpha_3 = \{(a, a), (a, b), (a, c)\} \cup \{(b, a), (b, b), (b, c)\} \cup \{(c, a), (c, b), (c, c)\} =$$

$$\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}.$$

Odredimo sve preseke familije $\{\alpha_i\}$: $\alpha_4 = \alpha_1 \cap \alpha_2 = \{(b, a), (c, c)\}$. Dobijene relacije date su sledećim tablicama:

α_1	a	b	c
a	1	0	0
b	1	0	0
c	0	0	1

α_2	a	b	c
a	0	1	1
b	1	1	0
c	1	1	1

α_3	a	b	c
a	1	1	1
b	1	1	1
c	1	1	1

α_4	a	b	c
a	0	0	0
b	1	0	0
c	0	0	1

Skup $L_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, a tražena mreža $(L_1, \supseteq_{L_1})$ je Bulova mreža sa atomima α_1 i α_2.

Rasplinuta relacija $\mu : X^2 \to L_1$ definisana je sa $\mu(x, y) := \bigcap\{\alpha \in L_1 \mid (x, y) \in \alpha\}$, pa je $\mu(a, a) = \alpha_1 \cap \alpha_3 = \alpha_1$, $\mu(a, b) = \alpha_2 \cap \alpha_2 = \alpha_2$,...

μ	a	b	c
a	α_1	α_2	α_2
b	α_4	α_2	α_3
c	α_2	α_2	α_4

Na isti način konstruišimo mrežu $(L_2, \supseteq_{L_2})$.

β_1	a	b	c
a	1	0	0
b	0	0	1
c	1	0	0

β_2	a	b	c
a	1	1	0
b	1	1	0
c	1	1	1

β_3	a	b	c
a	1	1	1
b	1	1	1
c	1	1	1

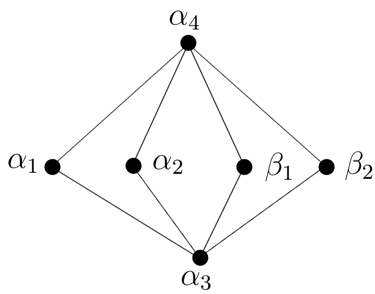
β_4	a	b	c
a	1	0	0
b	0	0	0
c	1	0	0

Skup $L_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$, tražena mreža je $(L_2, \supseteq_{L_2})$ je Bulova mreža sa atomima β_1 i β_2, a rasplinuta relacija $\nu : X^2 \to L_2$ je

ν	a	b	c
a	β_4	β_2	β_3
b	β_2	β_2	β_1
c	β_4	β_2	β_2

.

Skup $L = L_1 \cup (L_2 \setminus \{\beta_3, \beta_4\})$, a poredak na mreži $(L, \leq)$ definisan je kao u prethodnom tvrđenju.



Slika 3.5 Mreža L.

Intuicionistička relacija $R = (X^2, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ definisana je na sledeći način:

$$\tilde{\mu}(x,y) = \mu(x,y) \qquad \text{i} \qquad \tilde{\nu}(x,y) = \begin{cases} \nu(x,y), \text{ ako je } \nu(x,y) \notin \{\beta_3, \beta_4\} \\ \alpha_3, \text{ ako je } \nu(x,y) = \beta_4 \\ \alpha_4, \text{ ako je } \nu(x,y) = \beta_3 \end{cases},$$

pa je
$$\begin{array}{c|ccc} \tilde{\mu} & a & b & c \\ \hline a & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ b & \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ c & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_4 \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{c|ccc} \tilde{\nu} & a & b & c \\ \hline a & \alpha_3 & \beta_2 & \alpha_4 \\ b & \beta_2 & \beta_2 & \beta_1 \\ c & \alpha_3 & \beta_2 & \beta_2 \end{array}.$$

Familije nivoa x-blokova pripadanja i nepripadanja su redom:
$\mu_a = \{\{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$, $\mu_b = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, $\mu_c = \{\{c\}, \{a, b, c\}\}$, $\nu_a = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, $\nu_b = \{\{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ i $\nu_c = \{\{a\}, \{a, b, c\}\}$, a to su upravo zadate familije. □

Kao što je već rečeno, Definicija 3.9 intuicionističkog poset-vrednosnog rasplinutog skupa ima mnoge prednosti u odnosu na ranije definicije jer dopušta da kodomen funkcija pripadanja i nepripadanja bude proizvoljan poset (bez ograničenja po pitanju ograničenosti poseta ili postojanja antitone involucije na njemu). Koristeći ovu definiciju možemo definisati **intuicionističku poset-vrednosnu rasplinutu relaciju**.

Definicija 3.17. Neka je $(P, \leq)$ poset i X i Y neprazni skupovi. **Intuicionistička poset-vrednosna rasplinuta relacija**

$$R = (X \times Y, \mu, \nu), \tag{3.18}$$

je IP-vrednosni rasplinuti skup nad $X \times Y$ takav da za svaki par $(x, y) \in X \times Y$, preslikavanja $\mu : X \times Y \to P$ i $\nu : X \times Y \to P$ zadovoljavaju uslov

$$\mu(x, y){\downarrow} \cap \nu(x, y){\downarrow} = \{B\}, \tag{3.19}$$

gde je B najmanji element poseta P ako postoji, u suprotnom ovaj presek je prazan.

Ovakva definicija IP-vrednosne rasplinute relacije koristiće se u naredne dve glave za definisanje IL-vrednosnih i IP-vrednosnih relacija preferencije i za njihove primene.

Glava 4

Vrednosne relacije preferencije

Cilj ovog poglavlja je da se uvede koncept intuicionističke rasplinute relacije preferencije na mreži, i još uopštenije, na posetu. Bezdek je uveo pojam *relacije reciprociteta* [22]. Nurmi je preradio Bazdekovu definiciju relacije reciprociteta u [83]. Predloženi pristup predstavlja uopštenje relacije reciprociteta, poset-vrednosnih relacija preferencije, ali i samog koncepta preferentnosti.

Proces odlučivanja najčešće se vezuje za relacije preferencije, koje oslikavaju dominaciju neke alternative u odnosu na drugu alternativu. Relacije preferencije predstavljaju koristan alat kojim se izražavanju rezultati upoređivanja nad skupom alternativa i kao takve, možemo ih koristiti u različitim kontekstima: teoriji igara [35], različitim medicinskim i psihološkim istraživanjima i studijama [37], teoriji glasanja [52, 83], sociološkim teorijama [39, 35, 59, 70, 83]. Takođe, relacije preferencije mogu se primeniti i u procesu grupnog donošenja odluka gde predstavljaju preferencije grupe, tj. preferencije koje se zasnivaju i grade na individualnim preferencijama pojedinačnih donosilaca odluka, a kasnije se različitim metodama (metodom agregacije [43], teorijom konsenzusa [69]) pretvaraju u odluku grupe.

Pri donošenju odluke, sam donosilac odluke može biti siguran u preferentnost jedne alternative u odnosu na drugu, i tada govorimo o strogim preferencijama. Odnos između alternative x i alternative y, tj. preferentnost alternative x u odnosu na alternativu y može biti izražena numeričkom vrednošću, tj. brojem $R(x, y)$ koji je najčešće iz intervala $[0, 1]$. Vrednost

0 prikazivala bi potpunu dominaciju alternative y nad alternativom x, dok vrednost 1 predstavlja potpunu dominantnost alternative x nad alternativom y. Ovakav pristup je ograničavajući u slučajevima kada se stavovi donosioca odluke ne mogu izraziti numerički.

4.1 Preferencije u klasičnom smislu i poset-vrednosne relacije preferencije

Preferencije u klasičnom smislu predstavljaju klasične binarne relacije definisane nad skupom alternativa. Neka je A skup alternativa. Posmatramo klasične relacije $\{P, I, N\}$ kao podskupove skupa A^2, gde je P stroga preferentnost, I indiferentnost (neodređenost) i N neuporedivost [43, 94]. U ovom slučaju relacije P, I i N zajedno sadrže sve uređene parove elemenata iz A^2 i međusobno su disjunktne. Ovako posmatranje preferencija je dosta rigidno i isključivo. Za $(a, b) \in A^2$, ako $(a, b) \in P$, tada $(b, a) \notin P$, ako $(a, b) \in I$, tada i $(b, a) \in I$ i ako $(a, b) \in N$, tada je i $(b, a) \in N$. Posmatrajući preferencijsku strukturu u kojoj nema neuporedivih elemenata, razmatramo rasplinutu relaciju R koja uzima tri vrednosti: $R(a, b) = 1$, ako $(a, b) \in P$, $R(a, b) = \frac{1}{2}$, ako $(a, b) \in I$ i $R(a, b) = 0$, ako $(b, a) \in P$. Ovakva relacija je viševrednosna, pa predstavlja uopštenje pojma relacije u klasičnom smislu. Kao i u prethodnom slučaju sa relacijama P, I i N i ovakav postupak ocenjivanja preko „samo” tri vrednosti je nepraktičan i ne oslikava na pravi način mnoge realne situacije. Prirodniji pristup postiže se time što se relacija R posmatra na celom intervalu $[0, 1]$ (Menger [75]), umesto na tročlanom skupu $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Ovakvu relaciju nazivamo **relacija reciprociteta** i koristimo je za prikazivanje različitih preferencijskih modela [36, 44, 117].

Definicija 4.1. [45, 66] Neka je X neprazan skup. Preslikavanje $R : X^2 \to [0, 1]$ je **relacija reciprociteta** na X ako za sve $a, b \in X$

$$R(a, b) + R(b, a) = 1. \tag{4.1}$$

Tada direktno iz prethodne definicije sledi da je $R(b, a) = 1 - R(a, b)$ i ove dve vrednosti su komplementirane na intervalu $[0, 1]$.

Prethodnu definiciju možemo protumačiti na sledeći način. Za svako $a \in X$, $R(a, a) = \frac{1}{2}$. Vrednost $\frac{1}{2}$ predstavlja indiferentnost, tj. nemogućnost razlikovanja alternativa na intervalu $[0, 1]$, pa svaki par $(a, a) \in I$. Za proizvoljne vrednosti $a, b \in X$, jedna od vrednosti $R(a, b)$ ili $R(b, a)$ je u intervalu $[0, \frac{1}{2}]$, dok je druga u intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$, jer je $R(a, b) + R(b, a) = 1$. Ovo znači da je relacija R rasplinuta relacija kojoj pripadaju oba para (a, b) i (b, a). Takođe, ako su $a, b, c, d \in X$ i ako važi $R(a, b) \leq R(c, d)$, tada je $R(d, c) \leq R(b, a)$. Ovaj pristup preko rasplinute relacije R razlikuje sledeće situacije:

- $R(a, b) = \frac{1}{2}$, predstavlja indiferentnost između alternativa a i b. Tada iz $R(a, b) = \frac{1}{2}$ sledi da je i $R(b, a) = \frac{1}{2}$.
- $R(a, b) = 1$, predstavlja strogu preferentnost (prednost) alternative a nad alternativom b i tada je $R(b, a) = 0$ što je potpuno odsustvo preferencije.
- $R(a, b) > \frac{1}{2}$, predstavlja situaciju da je alternativa a preferentnija, tj, ima prednost, u odnosu na alternativu b.

Uvedimo sada direktno uopštenje relacije reciprociteta sa intervala $[0, 1]$ na lanac L sa neparnim brojem elemenata.

Neka je L konačan lanac sa najmanjim elementom B i najvećim elementom T. Na ovakvom lancu može se definisati preslikavanje $f : L \to L$, takvo da je $h(x)+h(f(x)) = f(T)$, gde je $h(x)$ visina elementa x u lancu L. Ovakvo preslikavanje je dobro definisano. Ako je $x \prec y$ tada je $h(y) = h(x) + 1$, pa svi elementi lanca imaju različite visine i svakom elementu x odgovara tačno jedan element x^* tako da je $h(x) + h(x^*) = h(T)$. Preslikavanje f je antitona involucija na lancu L.

Ako postoji element $s \in L$ takav da je $f(s) = s$, onda je s fiksna tačka[1] preslikavanja f i tada lanac L ima neparan broj elemenata. Element s možemo tumačiti kao „sredinu” lanca L i on, na neki način, odgovara vrednosti $\frac{1}{2}$ intervala $[0, 1]$.

Uvedimo sada L-vrednosnu relaciju reciprociteta.

Definicija 4.2. Neka je X neprazan skup i L lanac sa neparnim brojem elemenata i najvećim elementom T. Neka je $f : L \to L$ antitona involucija sa fiksnom tačkom $s \in L$. Tada je $R : X^2 \to L$ **L-vrednosna relacija reciprociteta** ako:

[1] x je nepokretna (fiksna) tačka funkcije f ako i samo ako je $f(x) = x$.

1. Za svako $a \in X$, $R(a,a) = s$;

2. Za sve $a, b \in X$ i $a \neq b$, ako je $R(a,b) = x$ onda je $R(b,a) = f(x)$.

Ovako definisana relacija R predstavlja direktno uopštenje relacije reciprociteta na intervalu $[0,1]$ jer vrednost $R(a,a)$ koja je bila $\frac{1}{2}$ sada postaje $s \in L$ i predstavlja sredinu lanca. Takođe važi i $h(R(a,a)) + h(R(a,a)) = h(T)$. Za parove vrednosti $R(a,b)$ i $R(b,a)$, $a \neq b$ važe slična svojstva kao u slučaju sa kodomenom $[0,1]$. Jedna od vrednosti $R(a,b)$ ili $R(b,a)$ je u intervalu $[s,T]$, dok je druga u intervalu $[B,s]$, gde je B najmanji element lanca L. Ova osobina odgovara osobini da je jedna od vrednosti $R(a,b)$ ili $R(b,a)$ u intervalu $[\frac{1}{2},1]$, dok je druga u intervalu $[0,\frac{1}{2}]$. Po definiciji važi da je $h(R(a,b)) + h(R(b,a)) = h(T)$, tj. da je $R(b,a) = f(R(a,b))$.

Motivisani prethodnim pristupom V. Janis i ostali u radu [66] razmatraju rasplinute relacije preferencije na ograničenom posetu, umesto na intervalu $[0,1]$, definišući novu preferencijsku strukturu. U ovakvoj strukturi, operacija sabiranja koja je bila karakteristična za interval $[0,1]$ zamenjena je operacijom supremum koja je karakteristična za novu strukturu. Relacije preferencije koje oni definišu imaju svojstva slična relacijama reciprociteta, ali mogućnosti njihove primene su znatno šire. U pomenutom radu istraživanja se vrše na ograničenom posetu $(P, \leq, 1, 0)$, gde je sa 0 označen najmanji element, a sa 1 najveći.

Definicija 4.3. [66] **Slabo ortokomplementirani poset** $(P, \leq, ^*, 1, 0)$ je ograničen poset sa unarnom operacijom * koja je antitona involucija i koja zadovoljava uslov: za svako $p \in P$, ako su p i p^* neuporedivi, onda postoji supremum $p \vee p^* = 1$.

Definicija 4.4. [66] Neka je $X \neq \emptyset$ i $(P, \leq, 1, 0)$ ograničen poset sa najvećim elementom 1 i najmanjim elementom 0. Preslikavanje $\mu : X^2 \to P$ je **poset-vrednosna rasplinuta reciprocijalna relacija preferencije** (skraćeno P-vrednosna relacija preferencije) na X ako za sve $a, b, c, d \in X$ važe sledeći uslovi:

$$\text{Ako je } \mu(a,b) \leq \mu(c,d) \text{ onda je } \mu(d,c) \leq \mu(b,a); \tag{4.2}$$

$$\text{Ako su } \mu(x,y) \text{ i } \mu(y,x) \text{ neuporedivi, onda je } \mu(x,y) \vee \mu(y,x) = 1. \tag{4.3}$$

Slede direktne posledice prethodne definicije ([66]). Za P-vrednosnu relaciju preferencije $\mu : X \times X \to P$ i za sve $a, b, c, d \in X$ važi:

1. $\mu(a,b) \leq \mu(c,d)$ ako i samo ako je $\mu(d,c) \leq \mu(b,a)$.

2. $\mu(a,b)$ i $\mu(c,d)$ su neuporedivi ako i samo ako su $\mu(d,c)$ i $\mu(b,a)$ neuporedivi.

3. $\mu(a,b) = \mu(c,d)$ ako i samo ako je $\mu(d,c) = \mu(b,a)$.

Skup elemenata poseta P kojima odgovaraju vrednosti $\mu(a,a)$ za svako $a \in X$ je **ekvilibrijum** relacije μ. U [66] je pokazano da ekvilibrijum ne može biti prazan, a ako je broj njegovih elemenata veći od jedan onda su ti elementi jednaki ili neuporedivi.

Veza između P-vrednosne relacije preferencije $\mu : X \times X \to P$ i antitone involucije sa nepraznim skupom fiksnih tačaka, koja je definisana na skupu vrednosti relacije μ, data je sledećim tvrđenjem.

Tvrđenje 4.1. [66] Neka je $(P, \leq, 1, 0)$ ograničen poset i $X \neq \emptyset$. Neka je $\mu : X^2 \to P$ P-vrednosna relacija na X.

Tada je μ P-vrednosna relacija preferencije na X ako i samo ako postoji antitona involucija * na $Q = \mu(X^2) \cup \{0,1\}$ takva da je $(Q, \leq, ^*, 1, 0)$ slabo ortokomplementirani poset u kome važi: za sve $x, y \in X$,

$$\text{ako je } \mu(x,y) = p \text{ onda je } \mu(y,x) = p^*. \tag{4.4}$$

$\square$

Treba naglasiti da su ovako razvijene P-vrednosne relacije preferencije definisane na posetu P koji mora biti ograničen i na kome je definisana unarna operacija koja je antitona involucija sa nepraznim skupom fiksnih tačaka. Uslov postojanja antitone involucije na posetu dosta je jak, pa se ovakve relacije ne mogu definisati za velike klase poseta.

4.2 Jake poset-vrednosne relacije reciprociteta

U ovom delu uopštićemo koncept relacije reciprociteta [43] i uvesti novu definiciju jake poset-vrednosne relacije reciprociteta. Rezultati ovog poglavlja biće objavljeni u radu *Poset valued intuitionistic preference relations* [42]. Krenućemo od poseta $(P, \leq)$ kao najopštije uređene strukture. Kako ovaj model treba da bude primenljiv na probleme preferencije, posmatraćemo konačan poset. Najmanji element poseta P (ako postoji) označavaćemo sa B, a najveći (ako postoji) sa T.

Koristeći tehnike iz Glave 3, posmatraćemo poset P i skup $\mathcal{J}_P$ svih njegovih potpuno *ili*-nerazloživih elemenata. Svaki element p konačnog poseta P jednak je supremumu svih potpuno *ili*-nerazloživih elemenata ispod njega (Tvrđenje 1.5).

Kao u Glavi 3 indeksiraćemo skup $\mathcal{J}_P$ na sledeći način: Neka je $|\mathcal{J}_P| = n$ i neka je preslikavanje $f : \{1, ..., n\} \to \mathcal{J}_P$ bijekcija.

Uočimo preslikavanje $F : P \to \{0, 1\}^n$, takvo da je $F(x) = (a_1, ..., a_n)$, i $a_i = 1$ ako i samo ako je $f(i) \leq x$.

Ako P ima najmanji element B, onda je $F(B) = (0, \ldots, 0)$, jer su svi *ili*-nerazloživi elementi iznad njega. Ako poset P ima najveći element T, onda je $F(T) = (1, ..., 1)$, jer su svi *ili*-nerazloživi elementi ispod njega.

Ako je preslikavanje f fiksirano, onda je preslikavanje F dobro definisano, jer je svaki element poseta P jedinstveno predstavljen supremumom kompletno *ili*-nerazloživih elemenata ispod njega.

Ovo preslikavanje je injekcija, jer je F potapanje (obostrano izotono preslikavanje) poseta P u podskup skupa $\{0, 1\}^n$. Na ovaj način možemo posmatrati svaki poset kao podskup skupa $\{0, 1\}^n$. Poredak elemenata $(x_1, ..., x_n)$ i $(y_1, ..., y_n)$ definisan je po koordinatama (komponentama) tako da važi $0 \leq 1$.

Sada ćemo uvesti novu definiciju jake poset-vrednosne relacije reciprociteta preko koje ćemo uvesti poset-vrednosnu relaciju preferencije.

Neka je P poset sa najmanjim elementom B i najvećim elementom T. Neka je $\mathcal{J}_P$ skup svih potpuno *ili*-nerazloživih elemenata poseta P indeksiran bijekcijom $f : \{1, ..., n\} \to \mathcal{J}_P$.

Uvešćemo uopštenje (u određenom smislu) relacije reciprociteta [43], gde je $R(a,b)$ inverzna relacija relacije $R(b,a)$ u posetu P.

Definicija 4.5. Neka je X konačan skup alternativa. Preslikavanje $R : X \times X \to P$ je **jaka poset-vrednosna relacija reciprociteta** nad X ako je za svako $a \in X$, $R(a,a) = B$, i za sve $a, b \in X$, $a \neq b$ važe uslovi:

$$R(a,b){\downarrow} \cap R(b,a){\downarrow} = B \tag{4.5}$$

i

$$\mathcal{J}_P \subseteq R(a,b){\downarrow} \cup R(b,a){\downarrow}. \tag{4.6}$$

Sledi opravdanje uvedene definicije. Neka je $R : X \times X \to \{0,1\}$ klašična binarna relacija reciprociteta nad X. Tada za $a, b \in X$, $R(a,b) = 1$ znači da je alternativa a preferentnija od alternative b i ako je $R(a,b) = 1$, onda je $R(b,a) = 0$. Posmatrajmo sad poset P kao podskup skupa $\{0,1\}^n$ i preslikavanje $F : P \to \{0,1\}^n$ definisano sa $F(x) = (a_1, \dots, a_n)$, gde je $a_i = 1$ ako i samo ako je $f(i) \leq x$. Najveći elemenat ovog poseta je $T = (1, ..., 1)$, a najmanji $B = (0, ..., 0)$.

Sada je $R(a,b) = (a_1, ..., a_n)$ i $a_1, ..., a_n \in \{0,1\}$. Na ovaj način možemo razmatrati n kriterijuma pod kojima je alternativa a preferentnija od alternative b. Na primer, neka postoje 4 kriterijuma po kojima se vrši upoređivanje i neka je $R(a,b) = (1,0,0,1)$. Tada je $R(b,a) = (0,1,1,0)$, pa je a preferentnija od b po prvom i četvrtom kriterijumu, a b je preferentnija od a po drugom i trećem kriterijumu.

Sledeća lema pokazuje da su $R(a,b)$ i $R(b,a)$ na neki način komplementirani na posetu (slično kao kod klasičnih rasplinutih skupova).

Lema 4.2. *Neka je P ograničen poset sa najvećim elementom T i najmanjim elementom B. Ako je $R : X \times X \to P$ jaka poset-vrednosna relacija reciprociteta nad X, tada za sve $a, b \in X$ i $a \neq b$,*

$$R(a,b) \vee R(b,a) = T \qquad i \qquad R(a,b) \wedge R(b,a) = B. \tag{4.7}$$

Dokaz. Neka je $p \in P$ i $p \neq T$ gornje ograničenje za $R(a,b)$ i $R(b,a)$, tj. $R(a,b) \leq p$ i $R(b,a) \leq p$. Iz $p \neq T$ sledi da postoji potpuno *ili*-nerazloživ element $i \leq T$, takav da $i \nleq p$. Međutim, ovo je nemoguće, jer

$\mathcal{J}_P \subseteq R(a,b)\downarrow \cup R(b,a)\downarrow$, pa svi potpuno *ili*-nerazloživi elementi poseta P su manji od p. Tada je T jedinstveno gornje ograničenje za $R(a,b)$ i $R(b,a)$ i $R(a,b) \vee R(b,a) = T$.

Dokažimo da je $R(a,b) \wedge R(b,a) = B$. Neka je q donje ograničenje za $R(a,b)$ i $R(b,a)$. Tada $q \in R(a,b)\downarrow \cap R(b,a)\downarrow$, pa je $q = B$, tj. $R(a,b) \wedge R(b,a) = B$. □

Napomena. Obrat ovog tvrđenja ne važi. Moguće je da je zadovoljen uslov $R(a,b) \vee R(b,a) = T$, ali da nije zadovoljen uslov $\mathcal{J}_P \subseteq R(a,b)\downarrow \cup R(b,a)\downarrow$. Primer bi bila mreža dijamant, čiji su atomi (i ko-atomi) x, y, z, najmanji element B i najveći element T. $\mathcal{J}_P = \{x, y, z\}$. Neka je $X = \{a, b\}$ i neka je $R(a,b) = x$ i $R(b,a) = y$. Tada je $R(a,b) \vee R(b,a) = T$, ali $z \notin R(a,b)\downarrow \cup R(b,a)\downarrow$.

Sledeće tvrđenje daje vezu između uvedene jake P-vrednosne relacije reciprociteta i P-vrednosne relacije preferencije iz rada [66].

Tvrđenje 4.3. *Neka je P ograničen poset sa najmanjim elementom B i najvećim elementom T. Ako je $R : X \times X \to P$ jaka poset-vrednosna relacija reciprociteta, tada R ispunjava uslove* (4.2) *i* (4.3) *P-vrednosne relacije preferencije, za $a \neq b$ i $c \neq d$.*

Dokaz. Neka je $R : X \times X \to P$ jaka poset-vrednosna relacija reciprociteta.

Neka je $\mathcal{J}_P$ skup svih potpuno *ili*-nerazloživih elemenata poseta P i za sve $a, b \in X$, definišimo

$$J(a,b) := R(a,b)\downarrow \cap \mathcal{J}_P. \tag{4.8}$$

$J(a,b)$ je skup svih potpuno *ili*-nerazloživih elemenata manjih od $R(a,b)$. Sada možemo formulisati uslove (4.5) i (4.6) Definicije 4.5 jake poset-vrednosne relacije reciprociteta koristeći $J(a,b)$ umesto $R(a,b)$.

Za sve $a, b \in X$, uslov (4.5) ekvivalentan je sa

$$J(a,b) \cap J(b,a) = \emptyset, \tag{4.9}$$

i uslov (4.6) ekvivalentan je sa

$$J(a,b) \cup J(b,a) = \mathcal{J}_P. \tag{4.10}$$

Sada, za sve $a, b \in X$, ako je R jaka poset-vrednosna relacija reciprociteta, onda skupovi $J(a, b)$ i $J(b, a)$ obrazuju particiju skupa $\mathcal{J}_P$.

Pretpostavimo da za $a, b, c, d \in X$, važi $R(a, b) \leq R(c, d)$. Kako je R jaka poset-vrednosna relacija reciprociteta onda važi $R(a, b){\downarrow} \cap R(b, a){\downarrow} = B$ i $\mathcal{J}_P \subseteq R(a, b){\downarrow} \cup R(b, a){\downarrow}$ i $R(c, d){\downarrow} \cap R(d, c){\downarrow} = B$ i $\mathcal{J}_P \subseteq R(c, d){\downarrow} \cup R(d, c){\downarrow}$. Iz $R(a, b) \leq R(c, d)$ sledi $R(a, b){\downarrow} \subseteq R(c, d){\downarrow}$.

Prema prethodnom razmatranju, $J(a, b)$ i $J(b, a)$ obrazuju particiju skupa $\mathcal{J}_P$, a takođe $J(c, d)$ i $J(d, c)$ obrazuju particiju skupa $\mathcal{J}_P$. Iz $R(a, b){\downarrow} \subseteq R(c, d){\downarrow}$ sledi da je $J(a, b) \subseteq J(c, d)$, pa je $J(d, c) \subseteq J(b, a)$, čime je dokazan uslov (4.2) Definicije 4.4.

Prema Lemi 4.2 implikacija: ako su $R(a, b)$ i $R(b, a)$ neuporedivi, onda je $R(a, b) \vee R(b, a) = T$ je uvek tačna, pa je uslov (4.3) Definicije 4.4 zadovoljen.

Ovim je dokazano tvrđenje. □

Ovim je dokazano da svaka jaka poset-vrednosna relacija reciprociteta ispunjava uslove P-vrednosne relacije preferencije (Definicija 4.4). Time većina osobina koje su dokazane u radu [66] važe i za ovako definisanu, novu relaciju osim za parove sa jednakim koordinatama. U ovom slučaju, preferencija za parove sa istim koordinatama je najmanji element jer ni jedan element nije preferentniji od samog sebe. Ova definicija je u skladu sa intuicionističkom verzijom poset-vrednosne relacije preferencije koja sledi.

Takođe, kako je pokazano u radu [66], kodomen relacije R je slabo ortokomplementirani poset na kome je definisana antitona involucija koja obezbeđuje komplementiranje. Sličan uslov potreban je i pri definisanju jake poset-vrednosne relacije reciprociteta, jer su uslovi (4.5) i (4.6) zahtevni. Da bi smo omogućili definisanje relacija sa sličnim osobinama, sa manje zahtevnim uslovima za kodomen, u sledeém poglavlju uvešćemo intuicionističke poset-vrednosne relacije reciprociteta. Ovakve relacije biće definisane na proizvoljnom posetu.

4.3 Intuicionističke poset-vrednosne rasplinute relacije preferencije

U ovom poglavlju dati su originalni rezultati uopštenja jake poset-vrednosne relacije reciprociteta u intuicionističku poset-vrednosnu relaciju reciprociteta, kao i intuicionističkih rasplinutih relacija i poset-vrednosnih rasplinutih relacija preferencije kroz intuicionističke poset-vrednosne rasplinute relacije preferencije.

Pojam neodređenosti i nepreciznosti je u velikoj meri prisutan u procesu odlučivanja i ocenjivanja. Često donosioci odluke nisu u potpunosti sigurni u tačnost ocene koju daju ili u preciznost i tačnost podataka sa kojima rade. Zbog toga, uvođenjem i dopuštanjem neodređenosti dobijamo novu strukturu, koja ima dve komponente: μ nivo u odnosu na koji je jedna alternativa preferentnija od druge i ν nivo u odnosu na koji nije preferentnija.

Relacije preferencije istraživali su mnogo autori, kako u slučaju klasičnih relacija tako i slučaju rasplinutih relacija. Uopštenje rasplinutih relacija preferencije daju Szmidt i ostali u radu *Using intuistionistic fuzzy sets in group decision making* [101] uvodeći intuicionističke rasplinute relacije preferencije. Dudziak i ostali u radu [33] proučavaju intuicionističke rasplinute relacije preferencije nad konačnim skupom alternativa, definišu ekvivalentne intuicionističke rasplinute relacije preferencije, kompoziciju i operatore koje je definisao Atanassov. Takođe, uvode *polu-svojstva* intuicionističkih rasplinutih relacija: polu-refleksivnost, polu-simetričnost, polu-antisimetričnost i polu-tranzitivnost i daju potrebne uslove pod kojima intuicionistička rasplinututa relacija preferencije ima pomenuta svojstva.

Navedimo sada poznatu definiciju intuicionističke rasplinute relacije preferencije.

Definicija 4.6. [33] Neka je X konačan skup i $|X| = n$. **Intuicionistička rasplinuta relacija preferencije** R nad X^2 predstavljena je matricom $R = (R_{ij})_{n\times n}$, gde je $R_{ij} = (\mu(i,j), \nu(i,j))$, za sve $i, j = 1, \cdots, n$. R_{ij} je intuicionistička rasplinuta vrednost, koja se sastoji od stepena $\mu(i,j)$ koji pokazuje koliko je alternativa x_i prihvatljivija od x_j i stepena $\nu(i,j)$ koji pokazuje koliko alternativa x_i nije prihvatljivija od x_j. Vrednosti $\mu(i,j)$ i $\nu(i,j)$ zadovoljavaju sledeće uslove: za sve $i, j = 1, \cdots, n$ važi

(1) $0 \leq \mu(i,j) + \nu(i,j) \leq 1$,

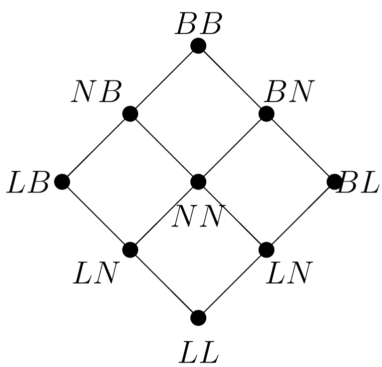
(2) $\mu(i,j) = \nu(j,i)$ i $\mu(j,i) = \nu(i,j)$,

(3) $\mu(i,i) = \nu(i,i) = 0,5$.

Xu u knjizi „*Intuitionistic Preference Modeling and Interactive Decision Making*"[128] daje nekoliko modela za određivanje najpoželjnije alternative u procesu grupnog donošenja odluke. On predlaže nekoliko modela kojima se intuicionističke rasplinute relacije preferencije transformišu u „matrice plasmana"(score matrices), a koje predstavljaju klasične (crisp) preferencije. Takođe, daje model kojim se intuicionističke rasplinute relacije preferencije transformišu u intervalno-vrednosne rasplinute relacije preferencije koje omogućavaju izračunavanje intuicionističkog rasplinutog broja pomoću koga se rangiraju alternative.

Navedimo sada opravdanje za uvođenje mreže i poseta kao kodomena intuicionističkih relacija preferencije.

Posmatrajmo situaciju u kojoj treba uporediti dve alternative $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ na osnovu dva kriterijuma K_1 i K_2. Neka je $\mu : \mathcal{A} \to \{B, N, L\}$, gde $\mu_K(A_1, A_2) = B$ znači da alternativa A_1 ima bolji plasman od alternative A_2 u odnosu na kriterijum K, $\mu_K(A_1, A_2) = N$ znači da alternativa A_1 ima jednak plasman kao alternativa A_2 u odnosu na kriterijum K i $\mu_K(A_1, A_2) = L$ znači da alternativa A_1 ima lošiji plasman od alternative A_2 u odnosu na kriterijum K. Ukupan plasman alternative A_1 u odnosu na alternativu A_2 (tim redom) kad se posmatraju oba kriterijuma je $(\mu_{K_1}(A_1, A_2), \mu_{K_2}(A_1, A_2))$. Skup svih mogućih plasmana SP dat je na Slici 4.1. U ovom kontekstu opravdano je koristiti mrežu kao kodomen relacije preferencije.

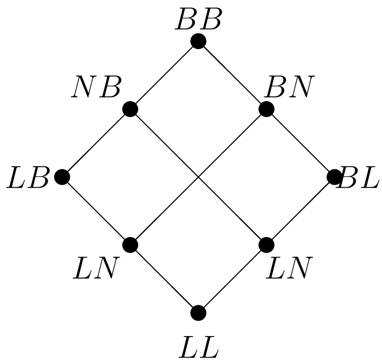


Slika 4.1 Skup SP.

Očigledno da je struktura na slici kompletna mreža sa poretkom koji je definisan na sledeći način: za $(p,q),(p_1,q_1) \in SP$,

$$(p,q) \leq (p_1,q_1) \quad \text{ako je} \quad p \leq p_1 \text{ i } q \leq q_1.$$

U ovoj situaciji postoji slučaj bez preferencije, tj. (N,N) kada se javlja neodlučnost. Posmatrajmo sada situaciju kada se ne dozvoljava neodlučnost po oba kriterijuma, tj. uređeni skup $SP \setminus \{(N,N)\}$. Ovakav uređen skup nije mreža (Slika 4.2). Ovaj primer bi mogao da ilustruje i opravda upotrebu poseta umesto mreže.



Slika 4.2 Skup $SP \setminus \{(N,N)\}$.

Broj kriterijuma kojima se ocenjuju alternative može biti proizvoljan.

***Primer* 4.1.** Ilustrujmo prethodno razmatranje jednim realnim primerom. Posmatrajmo situaciju u kojoj zbog porasta proizvodnje dolazi do pojačane emisije štetnih gasova koji imaju poguban uticaj na životnu sredinu. Da bi se očuvalo okruženje, ali i sačuvao obim proizvodnje i materijalna dobit, potrebno je pronaći tehnologiju koja će u najvećoj meri zadovoljavati sledeće kriterijume: smanjenje izduvnih gasova/otpadnih voda, efikasnost u proizvodnji, lako održavanje i jeftina proizvodnja. U ovom slučaju skup kriterijuma je četvoročlan. Skup alternativa $\mathcal{A}$ bio bi skup posmatranih tehnologija. Svaki par alternativa se upoređuje u odnosu na četiri kriterijuma tako što mu se pridružuju dve vrednosti za svaki kriterijum koje prikazuju povoljan uticaj i nepovoljan uticaj odgovarajućeg kriterijuma. Takođe, moguće je uključiti i treću vrednost koja bi predstavljala nivo neodređenosti ili nesigurnosti (hesitancy margin). Svaka od ovih vrednosti je vektor iz $\mathbf{R}^4$ kojim je predstavljen povoljan ili nepovoljan uticaj. Jasno je da se intenziteti ne mogu upoređivati linearno, već se posmatraju kao elementi parcijalno uređenog skupa. □

U prethodnom poglavlju definisana je jaka poset-vrednosna relacija reciprociteta koja ispunjava uslove poset-vrednosne relacije preferencije. Kako je već rečeno, postoje veliki zahtevi po pitanju poseta na kome je ova relacija definisana. Kako bismo omogućili definisanje poset-vrednosne relacije reciprociteta za svaki ograničen poset, a u isto vreme dopustili i mogućnost nepotpunih informacija (postojanja neodređenosti) uvedimo novu definiciju **intuicionističke poset-vrednosne relacije reciprociteta**[42].

Definicija 4.7. Neka je P ograničen poset sa najmanjim elementom B. Preslikavanje $R : X \times X \to P$ je **intuicionistička poset-vrednosna relacija reciprociteta** nad X ako je $R(a, a) = B$, za sve $a \in X$ i za sve $a, b \in X$ i $a \neq b$ važi sledeći uslov:

$$R(a, b)\!\downarrow \cap\, R(b, a)\!\downarrow = B. \tag{4.11}$$

Poset P može se posmatrati kao podskup skupa $\{0, 1\}^n$, a preslikavanje $F : P \to \{0, 1\}^n$ je definisano sa $F(x) = (a_1, ..., a_n)$ gde je $a_i = 1$ ako i samo ako je $f(i) \leq x$. Uslov $R(a, b)\!\downarrow \cap\, R(b, a)\!\downarrow = B$ znači da ne postoji potpuno *ili*-nerazloživ element koji je istovremeno manji i od $R(a, b)$ i od $R(b, a)$. To znači da ova dva elementa, kada se posmatraju kao n-torke, nemaju oba vrednost 1 kao istu koordinatu. Prethodna definicija je intuicionistička u smislu da je zbir vrednosti $R(a, b)(i) + R(b, a)(i) \leq 1$, za svako $1 \leq i \leq n$. Za razliku od jakih poset-vrednosnih relacija reciprociteta gde je zbir $R(a, b)(i) + R(b, a)(i) = 1$ za svaku koordinatu i, kod intuicionističkih poset-vrednosnih relacija reciprociteta vrednosti obe koordinate $R(a, b)(i)$ i $R(b, a)(i)$ mogu biti 0. Ovo možemo protumačiti kao stepen neodređenosti preferencije, gde nijedna alternativa nije preferentnija od druge posmatrajući kriterijum koji je predstavljen ovom koordinatom.

Ova definicija intuicionističke poset-vrednosne relacije reciprociteta primenljiva je za veliku klasu poseta. Jedini uslov koji posmatrani poset treba da zadovolji jeste da ima najmanji element. Zbog toga, ovakvu relaciju možemo definisati na svakoj mreži, jer svaka mreža ima najmanji element i zvaćemo je *intuicionistička mrežno-vrednosna relacija reciprociteta.*

Neka je $R : X \times X \to L$ intuicionistička mrežno-vrednosna relacija reciprociteta. Tada je ona:

1. *antirefleksivna*, jer je $R(a,a) = B$, za svako $a \in X$;

2. *antisimetrična*, jer je $R(a,b) \wedge R(b,a) = B$, za sve $a,b \in X$ i $a \neq b$.

Napomena. Relacija R nije tranzitivna u opštem slučaju. Neka je $X = \{a,b,c\}$ i $L = (\{0,1\}^3, \leq)$ Bulova mreža. Neka je relacija $R : X \times X \to L$ data sledećom tablicom:

R	a	b	c
a	000	100	010
b	010	000	101
c	100	000	000

Primetimo da ne važi $R(a,b) \wedge R(b,c) \leq R(a,c)$, tj. $100 \nleq 010$, pa relacija R nije tranzitivna.

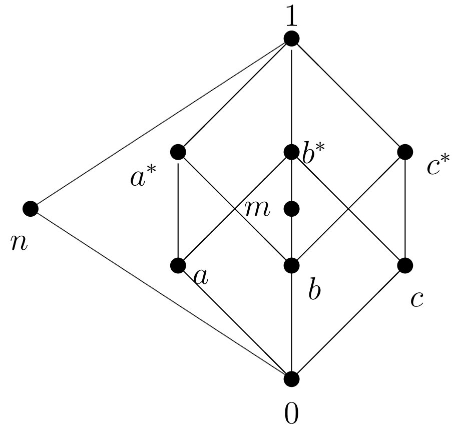
Posledica 4.4. *Neka je X neprazan skup i L konačan lanac sa najmanjim elementom B. Neka je $R : X \times X \to L$ intuicionistička L-vrednosna relacija reciprociteta. Tada je bar jedna od vrednosti $R(a,b)$ ili $R(b,a)$ jednaka B.*

Dokaz. Dokaz sledi direktno iz činjenice da za svaka dva elementa p i q konačnog lanca $(L, \leq)$ iz $p \leq q$ sledi $p{\downarrow} \subseteq q{\downarrow}$ i Definicije 4.7. $\square$

Neka je X neprazan skup i P poset sa najmanjim elementom B. Posmatrajmo sada IP-vrednosnu relaciju reciprociteta $\mu : X^2 \to P$ iz Definicije 4.7. Definišimo relaciju $\nu : X^2 \to P$ na sledeći način: za sve $a,b \in X$, $\nu(a,b) := \mu(b,a)$. IP-vrednosna relacija $R = (X^2, \mu, \nu)$ ovako definisana predstavlja uopštenje (na neki način) relacije preferencije iz prethodne Definicije 4.6, jer zadovoljava uslov da je $\mu(a,b){\downarrow} \cap \nu(a,b){\downarrow} = B$ koji je uopštenje uslova (1), uslov (2) je zadovoljen po konstrukciji, a uslov (3) zamenjen je uslovom $\mu(a,a) = \nu(a,a) = B$ koji mu odgovara u slučaju kada je kodomen odgovarajući poset, pa IP-vrednosnu relaciju reciprociteta možemo posmatrati i u obliku $R = (X^2, \mu, \nu)$ koji odgovara intuicionističkom zapisu, a koji je potpuno ekvivalentan.

Ilustrujmo prethodno uvedenu IP-vrednosnu relaciju reciprociteta jednim primerom.

***Primer* 4.2.** Neka je $X = \{a,b,c\}$ skup alternativa i P poset na Slici 4.3.



Slika 4.3 Poset P.

Neka je $\mu : X^2 \to P$ IP-vrednosna relacija reciprociteta koja zadovoljava uslove Definicije 4.7 zadata sledećom tablicom:

μ	x	y	z
x	0	a	m
y	c	0	c^*
z	n	a	0

.

Posmatrajmo sada poset P kao podskup skupa $\{0,1\}^7$, gde je skup potpuno *ili*-nerazloživih elemenata poseta P $\mathcal{J} = \{a, b, c, a^*, m, c^*, n\}$. Ako je indeksiranje f dato na sledeći način:

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a & b & c & a^* & m & c^* & n \end{pmatrix},$$

onda je funkcija $F : P \to \{0,1\}^7$ jednoznačno određena i relacija μ ima sledeće vrednosti:

$\mu(x, x) = \mu(y, y) = \mu(z, z) = 0000000,$

$\mu(x, y) = 1000000$ i $\mu(y, x) = 0010000,$

$\mu(x, z) = 0100100$ i $\mu(z, x) = 0000001,$

$\mu(y, z) = 0110010$ i $\mu(z, y) = 1000000.$

Vidimo da odgovarajući parovi vrednosti relacije μ nemaju istovremeno vrednost 1 kao istu koordinatu. U preferencijskom smislu, ovo znači da je jedna alternativa bolja od druge u odnosu na kriterijum koji se prikazuje tom koordinatom.

Takođe, možemo definisati preslikavanje $\nu : X^2 \to P$, takvo da je $\nu(x,y) := \mu(y,x)$, pa će relacija $R = (X^2, \mu, \nu)$ biti intuicionistička IP-relacija reciprociteta u smislu da je definisana preko dve funkcije i da je $\mu(x,y)(i) + \nu(x,y)(i) \leq 1$, za svako $i \in I$. □

Motivisani svojstvima relacije reciprociteta, a dopuštajući postojanje stepena neodređenosti, definišimo novi tip relacije preferencije koja će imati svojstva slična relaciji reciprociteta i P-vrednosnoj relaciji preferencije iz Definicije 4.4.

Definicija 4.8. Neka je $X \neq \emptyset$ i $(P, \leq, 1, 0)$ ograničen poset. **Intuicionistička poset-vrednosna rasplinuta relacija preferencije** $R = (X^2, \mu, \nu)$ nad X je intuicionistička poset-vrednosna rasplinuta relacija nad X takva da za sve $a, b, c, d \in X$ važi:

1. $\mu(a,b) \leq \mu(c,d) \Rightarrow \mu(d,c) \leq \mu(b,a)$;
2. $\nu(a,b) \geq \nu(c,d) \Rightarrow \nu(d,c) \geq \nu(b,a)$;
3. Ako su $\mu(a,b)$ i $\mu(b,a)$ neuporedivi tada postoji njihov supremum u P i važi
$$\mu(a,b) \vee \mu(b,a) = 1;$$
4. Ako su $\nu(a,b)$ i $\nu(b,a)$ neuporedivi tada postoji njihov infimum u P i važi
$$\nu(a,b) \wedge \nu(b,a) = 0.$$

Intuicionističku poset-vrednosnu rasplinutu relaciju preferencije skraćeno ćemo označavati IP-vrednosna relacija preferencije.

Ovako definisanu IP-vrednosnu relaciju preferencije R nad konačnim skupom X možemo predstaviti matricom $(R_{i,j})_{n\times n}$ na isti način kao u Definiciji 4.6 i $R_{i,j} = (\mu(i,j), \nu(i,j))$ zvaćemo preferencijska vrednost. Tada je $R_{i,j} \leq R_{k,l}$ ako i samo ako je $\mu(i,j) \leq \mu(k,l)$ i $\nu(i,j) \geq \nu(k,l)$ za sve $i, j, k, l = 1, \cdots, n$.

Familija IP-vrednosnih rasplinutih relacija preferencije je podfamilija familije IP-vrednosnih rasplinutih relacija.

Tvrđenje 4.5. *Ako je $R = (X^2, \mu, \nu)$ IP-vrednosna relacija preferencije nad X, tada za sve $a, b, c, d \in X$ važi:*

(1a) $\mu(a,b) \leq \mu(c,d) \Leftrightarrow \mu(d,c) \leq \mu(b,a)$;

(1b) $\nu(a,b) \geq \nu(c,d) \Leftrightarrow \nu(d,c) \geq \nu(b,a)$;

(2a) *$\mu(a,b)$ i $\mu(c,d)$ su neuporedivi ako i samo ako su $\mu(b,a)$ i $\mu(d,c)$ neuporedivi;*

(2b) *$\nu(a,b)$ i $\nu(c,d)$ su neuporedivi ako i samo ako su $\nu(b,a)$ i $\nu(d,c)$ neuporedivi.*

Dokaz. (1a) Neka je $\mu(a,b) \leq \mu(c,d)$, za $a, b \in X$. Tada na osnovu Definicije 4.8 važi

$$\mu(a,b) \leq \mu(c,d) \Rightarrow \mu(d,c) \leq \mu(b,a) \Rightarrow \mu(a,b) \leq \mu(c,d).$$

(1b) Dokaz je analogan dokazu pod (1a).

(2a) Neka su vrednosti $\mu(a,b)$ i $\mu(c,d)$ neuporedive na P. Pretpostavimo da su $\mu(b,a)$ i $\mu(d,c)$ uporedive. Tada važi jedan od poredaka $\mu(b,a) \leq \mu(d,c)$ ili $\mu(d,c) \leq \mu(b,a)$. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da važi poredak $\mu(b,a) \leq \mu(d,c)$. Tada na osnovu (1a) važi $\mu(c,d) \leq \mu(a,b)$ što je nemoguće jer su ove vrednosti neuporedive čime je dokazano da je pretpostavka o uporedivosti elemenata $\mu(b,a)$ i $\mu(d,c)$ netačna.

(2b) Dokaz je analogan dokazu pod (2a). □

Lema 4.6. *Neka je $X \neq \emptyset$ i $(P, \leq)$ ograničen poset. Ako je (X^2, μ, ν) IP-vrednosna relacija preferencije, tada za sve $a, b, c, d \in X$ važi:*

(1) $\mu(a,b) = \mu(c,d) \Leftrightarrow \mu(d,c) = \mu(b,a)$,

(2) $\nu(a,b) = \nu(c,d) \Leftrightarrow \nu(d,c) = \nu(b,a)$.

Dokaz. (1) Neka je $\mu(a,b) = \mu(c,d)$, tj. $\mu(a,b) \leq \mu(c,d)$ i $\mu(c,d) \leq \mu(a,b)$. Tada je $\mu(d,c) \leq \mu(b,a)$ i $\mu(b,a) \leq \mu(d,c)$, pa je $\mu(b,a) = \mu(d,c)$.

(2) Slično dokazu pod (1). □

Za razliku od relacija preferencije čije su vrednosti u jediničnom realnom intervalu $[0,1]$, IP-vrednosna relacija preferencije R ne mora imati samo jednu vrednost koja oslikava odsustvo preferencije. U slučaju da je kodomen realni interval $[0,1]$ vrednost $\frac{1}{2}$ oslikava odsustvo preferencije. Razmotrimo situaciju u kojoj je potrebno uporediti neku vrednost a sa samom sobom. Očigledno je, i krajnje prirodno, da je ovo slučaj *indiferentnosti*, jer određeni element ne može biti ni bolji ni lošiji od samog sebe. O vrednostima oblika $\mu(a,a)$ i $\nu(a,a)$ govori sledeća lema.

Lema 4.7. *Neka je $X \neq \emptyset$ i $(P,\leq)$ ograničen poset. Ako je R IP-vrednosna relacija preferencije nad X tada važi:*

(1) *vrednosti $\mu(a,a)$ i $\mu(b,b)$ su jednake ili neuporedive, za sve $a,b \in X$.*

(2) *vrednosti $\nu(a,a)$ i $\nu(b,b)$ su jednake ili neuporedive, za sve $a,b \in X$.*

Dokaz. (1) Pretpostavimo da su vrednosti $\mu(a,a)$ i $\mu(b,b)$ različite i uporedive za neke $a,b \in X$. Bez umanjenja opštosti neka važi $\mu(a,a) \leq \mu(b,b)$. Tada na osnovu Definicije 4.8 važi $\mu(b,b) \leq \mu(a,a)$, pa kako je poredak na P antisimetričan to je $\mu(a,a) = \mu(b,b)$ što je u suprotnosti sa pretpostavkom i vrednosti $\mu(a,a)$ i $\mu(b,b)$ su jednake ili neuporedive.

(2) Slično dokazu pod (1). □

Posmatrajmo sledeću osobinu rasplinute relacije preferencije čije su vrednosti u intervalu $[0,1]$. Vrednost $R(a,a) = \frac{1}{2}$ predstavlja odsustvo preferencije. Tada za sve $b,c \in X$ važi jedan od poredaka $R(b,c) \leq R(a,a) \leq R(c,b)$ ili $R(c,b) \leq R(a,a) \leq R(b,c)$. Sledeća tvrđenja opisuju veze između vrednosti $\mu(b,c)$, $\mu(c,b)$ i $\mu(a,a)$ i $\nu(b,c)$, $\nu(c,b)$ i $\nu(a,a)$ IP-vrednosne relacije preferencije.

Tvrđenje 4.8. *Neka je $R = (X^2, \mu, \nu)$ IP-vrednosna relacija preferencije.*

(1) *Ako su vrednosti $\mu(a,b)$ i $\mu(b,a)$ neuporedive za neke $a, b \in X$, onda su one neuporedive sa $\mu(c,c)$, za svako $c \in X$.*

(2) *Ako su vrednosti $\nu(a,b)$ i $\nu(b,a)$ neuporedive za neke $a, b \in X$, onda su one neuporedive sa $\nu(c,c)$, za svako $c \in X$.*

Dokaz. (1) Neka su $\mu(a,b)$ i $\mu(b,a)$ neuporedive vrednosti za neke $a, b \in X$. Pretpostavimo da važi $\mu(a,b) \leq \mu(c,c)$ za svako $c \in X$. Tada je $\mu(c,c) \leq \mu(b,a)$. Kako je poredak tranzitivan to je $\mu(a,b) \leq \mu(b,a)$ što je nemoguće jer su ove vrednosti neuporedive i ne važi pretpostavka o uporedivosti $\mu(a,b)$, $\mu(b,a)$ i $\mu(c,c)$.

(2) Slično dokazu pod (1). □

Tvrđenje 4.9. *Neka je $R = (X^2, \mu, \nu)$ proizvoljna IP-vrednosna relacija preferencije nad X.*

(1) *Ako za sve $a, b \in X$, postoje $c, d \in X$ i $c \neq d$ i ako je $\mu(a,b) \leq \mu(c,c)$ i $\mu(b,a) \leq \mu(d,d)$, onda je*

$$\mu(a,b) = \mu(b,a) = \mu(c,c) = \mu(d,d).$$

(2) *Ako je $\nu(a,b) \geq \nu(c,c)$ i $\nu(b,a) \geq \nu(d,d)$, onda je*

$$\nu(a,b) = \nu(b,a) = \nu(c,c) = \nu(d,d).$$

Dokaz. (1) Neka je $\mu(a,b) \leq \mu(c,c)$ i $\mu(b,a) \leq \mu(d,d)$. Tada je na osnovu Definicije 4.8 važi $\mu(c,c) \leq \mu(b,a)$ i $\mu(d,d) \leq \mu(a,b)$, pa je $\mu(a,b) = \mu(b,a) = \mu(c,c) = \mu(d,d)$.

(2) Dokaz za preslikavanje ν je sličan. □

Ovim je pokazano da su dve vrednosti kojima je opisana indiferentnost IP-vrednosne relacije preferencije (ako postoje) ili jednake ili neuporedive. Takođe, ako je vrednost $\mu(a,b)$ uporediva sa $\mu(c,c)$, onda je i $\mu(b,a)$ uporediva sa $\mu(c,c)$ i $\mu(c,c)$ je između $\mu(a,b)$ i $\mu(b,a)$, što je u skladu sa činjenicom da je samo jedan od slučajeva bolji, a drugi lošiji od neutralnog. Slično važi i za vrednosti $\nu(a,b)$, $\nu(b,a)$ i $\nu(c,c)$.

Klasa $\{\mu(a,a) \mid a \in X\}$ je **skup tačaka indiferentnosti (ekvilibrijum) funkcije pripadanja** μ, a $\{\nu(a,a) \mid a \in X\}$ je **skup tačaka indiferentnosti (ekvilibrijum) funkcije nepripadanja** ν.

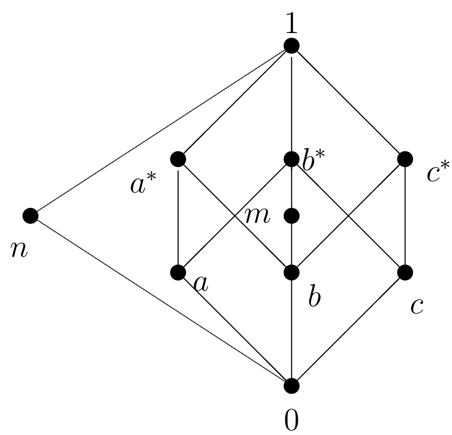
***Primer* 4.3.** Neka je $X = \{x,y,z\}$. Posmatrajmo poset P koji je dat na Slici 4.4 i IP-vrednosnu relaciju preferencije $R = (X^2,\mu,\nu)$ koja je data sledećom tablicom:

R	x	y	z
x	(m,n)	$(a,c*)$	$(c,a*)$
y	(a^*,c)	(n,m)	$(0,1)$
z	(c^*,a)	$(1,0)$	(m,n)

.

U ovom slučaju moraju postojati bar dva neuporediva elementa poseta P koji su vrednosti $\mu(x,x)$ i $\nu(x,x)$, za svako $x \in X$ i za koje važi $\mu(x,x)\!\downarrow \cap\, \nu(x,x)\!\downarrow = \{0\}$. Ovde su to m i n.

Ekvilibrijum funkcije pripadanja i funkcije nepripadanja je skup $\{m,n\}$. U ovom primeru ne postoje neuporedive vrednosti $\mu(x,y)$ i $\mu(y,x)$ i $\nu(x,y)$ i $\nu(y,x)$ za neke $x,y \in X$. $\square$



Slika 4.4 Poset P.

U ovoj glavi uvedena su dva tipa IP-vrednosnih relacija i to relacija reciprociteta (Definicija 4.7) i relacija preferencije (Definicija 4.8). Uslovi koje treba da zadovolji poset P za oba tipa relacija je da bude ograničen, za obe relacije odozdo, tj. da postoji najmanji element poseta B, a za drugu relaciju i odozgo, tj. da postoji najveći element T. Ove dve relacije razlikuju se u svim vrednostima koje odgovaraju tačkama oblika (a, a) jer je vrednost koja odgovara ovim tačkama po prvoj definiciji B, dok u slučaju druge relacije moraju postojati dve tačke poseta $p, q \in P$, takve da je $p\downarrow \cap\, q \downarrow = B$ i ni jedna od ovih vrednosti ne može biti B. Svaka od ovih tačaka p i q odgovara vrednostima relacija pripadanja i nepripadanja u tačkama oblika (a, a). Takođe, druga definicija zahteva dodatne uslove u smislu postojanja odgovarajućeg supremuma i infimuma neuporedivih vrednosti relacija pripadanja i nepripadanja za parove tačaka oblika (a, b) i (b, a). Iz navedenog se vidi da Definicija 4.7 ima prednosti u smislu da je kodomen manje zahtevan i da su uslovi same relacije manje zahtevni. Sa druge strane, Definicija 4.8 ima prednost u odnosu na Definiciju 4.7 u smislu da su relacije pripadanja i nepripadanja, u nekom smislu, nezavisne, tj. ne mora da važi $\nu(a, b) = \mu(b, a)$, što je slučaj sa relacijama iz Definicije 4.7.

Glava 5

Primene

5.1 Primene IL-vrednosnih i IP-vrednosnih relacija

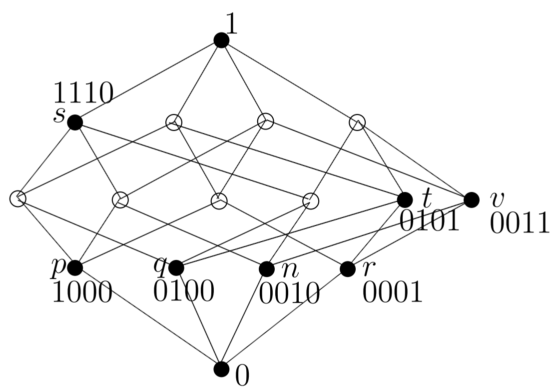
U ovoj glavi date su neke od mogućnosti primena uvedenih intuicionističkih mrežno-vrednosnih relacija reciprociteta i preferencije iz Glave 4, kao i intuicionističkih rasplinutih skupova na probleme određivanja kriterijuma i njihovih težinskih koeficijenata u procesu grupnog više-kriterijumskog odlučivanja.

***Primer* 5.1.** Prikažimo praktičan primer (koji je delimično preuzet iz [129] i prilagođen) primene intuicionističkih rasplinutih relacija reciprociteta.

Posmatra se provincija u Kini koja je poznata kao zemlja pirinča i ribe. Zbog svog dobrog geografskog položaja moguće je gajiti različite biljne kulture i životinjske vrste. Pored ovih povoljnih aspekata postoje i nepovoljni aspekti kao što su neprekidno smanjenje prirodnih resursa i porast broja stanovnika. Stanovnici ove provincije nezadovoljni su svojim položajem jer žele da sačuvaju kvalitet života koji imaju ili da ga unaprede, ali su u nemogućnosti da ubrzaju ekonomski razvoj zbog naglog propadanja kvaliteta i kvantiteta prirodnih resursa. Na osnovu kvaliteta i kvantiteta prirodnih resursa provincija je podeljena u 4 regiona $\{a, b, c, d\}$ koji se upoređuju na osnovu četiri kriterijuma: kvalitet vode k_1, zemljišta k_2, broj stanovnika k_3 i prosečna starost stanovnika k_4. Za određivanje preferencije među alternativama a, b, c, d koristićemo relaciju iz Definicije 4.7 na strani 75, koja zadovoljava uslov da je $R(a,b)\downarrow \cap R(b,a)\downarrow = 0$. Broj kriterijuma (koji su u ovom primeru međusobno nezavisni) određuje mrežu $(\{0,1\}^4, \subseteq)$. Tada je $R(a,b) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \{0,1\}^4$ i $x_i = 1$, $i \in \{1,2,3,4\}$, ako je alternativa a preferentnija od alternative b u odnosu na kriterijum k_i. Određena je matrica relacije R.

R	a	b	c	d
a	0000	0100	0011	1111
b	0001	0000	0010	0101
c	1000	0001	0000	1110
d	0000	1000	0001	0000

.



Slika 5.1 Mreža $\{0,1\}^4$.

Posmatrajmo samo elemente mreže $\{0,1\}^4$ koji pripadaju skupu vrednosti relacije R i koji su na Slici 5.1 označeni punim kružićima.

Relacija R je intuicionistička mrežno-vrednosna relacija reciprociteta. Da bismo na neki način poređali alternative možemo posmatrati za svako $x \in \{a,b,c,d\}$, x-blokove relacije R (Glava 3. strana 57):

$$\begin{array}{c|cccc} R[a] & a & b & c & d \\ \hline & 0 & q & v & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cccc} R[b] & a & b & c & d \\ \hline & r & 0 & n & t \end{array}, \quad \begin{array}{c|cccc} R[c] & a & b & c & d \\ \hline & p & r & 0 & s \end{array},$$

$$\begin{array}{c|cccc} R[d] & a & b & c & d \\ \hline & 0 & p & r & 0 \end{array}.$$

Analiziranjem nivo skupova x-blokova relacije R možemo razmatrati kakve su preferencije alternativa u odnosu na neki posmatrani nivo $p \in \{0,1\}^4$. Na primer, posmatrajmo s nivo skupove: $R[a]_s = \{d\}$, $R[b]_s = \emptyset$, $R[c]_s = \{d\}$ i $R[d]_s = \emptyset$. Odavde možemo zaključiti da su alternative a i c bolje od d, a da su sve tri neuporedive sa alternativom b posmatrajući nivo s koji odgovara kriterijumima k_1, k_2 i k_3. $\square$

Navedimo sada jednu od mogućnosti primene IP-vrednosne relacije preferencije.

Još je L. A. Zadeh krajem 70.-ih godina prošlog veka ukazao na mogućnost primene rasplinutih skupova u medicini [132]. Razvojem intuicionističkih rasplinutih skupova došlo je i do proširenja ove ideje [102, 103, 104]. Neki od autora koristili su rastojanja između IRS-ova za dijagnostikovanje bolesti na osnovu skupa simptoma, De i ostali [40] za isti problem koristili su $max - min - max$ kompoziciju, dok Steimann opravdava primenu rasplinutih skupova kroz kliničke studije [106].

Mi ćemo prikazati mogućnost primene IP-vrednosnih relacija preferencije na izbor lekova kojima se može lečiti određena bolest na osnovu skupa neželjenih dejstava leka. Neka je $A = \{a_1, ..., a_n\}$ skup lekova koji se primenjuju za lečenje određene bolesti. Neka je $P = \{p_1, ..., p_m\}$ skup određenih neželjenih dejstava (njihovih simptoma). Skup P je parcijalno uređen skup sa uređenjem $\leq$ definisanim na sledeći način: za $p_i, p_j \in P$, $p_i \leq p_j$ ako i samo ako simptom p_j podrazumeva postojanje simptoma p_i. Na primer, simptom p_i može biti „mučnina", a simptom p_j „povraćanje". Simptom p_j uključuje simptom p_i jer ako se javlja simptom p_j onda se javlja i simptom p_i.

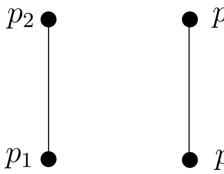
Neka je $R = (A^2, \mu, \nu)$ IP-vrednosna relacija definisana na sledeći način: $\mu, \nu : A^2 \to \{0,1\}^m$ i za svako $a, b \in A$ vrednost $\mu(a,b) = (x_1, ..., x_m)$ predstavlja preferenciju leka a nad lekom b, gde je $x_i = 1$ ako je a bolji od b u smislu da a ne izaziva, a b izaziva simptom p_i .

Vrednosti $\mu(a,b)$ i $\mu(b,a)$ su takve da je $\mu(a,b){\downarrow} \cap \mu(b,a){\downarrow} = (0, ..., 0)$ po Definiciji 4.7 iz Glave 4 (strana 75). Takođe $\mu(a,a) = (0, ..., 0)$, za svako $a \in A$.

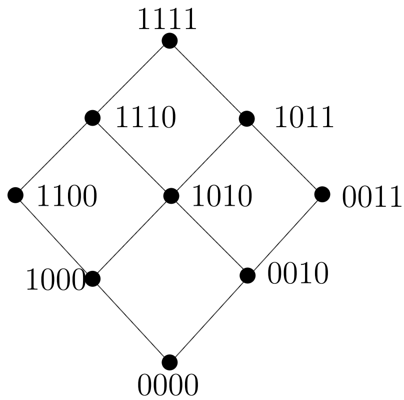
Preslikavanje ν definišimo na sledeći način: za sve $a, b \in A$, $\nu(a,b) :=$

$\mu(b, a)$. Na ovaj način vrednost $\nu(a, b)$ predstavlja nepovoljnu preferenciju alternative a nad alternativom b. Kao sto je već u Glavi 4 rečeno, ovako definisana relacija R je IP-vrednosna relacija preferencije jer važi $\mu(a, b)\!\downarrow \cap\, \nu(a, b)\!\downarrow = (0, ..., 0)$, za sve $a, b \in A$. Sledi mala ilustracija ove mogućnosti primene.

***Primer* 5.2.** Neka je skup neželjenih dejstava lekova $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ opisan sledećim simptomima : p_1 =„mučnina", p_2 =„povraćanje", p_3 =„glavobolja"i p_4 =„povišena temperatura" i skup lekova (alternativa) $A = \{a, b, c\}$.



Neželjena dejstva.



Skup mogućih vrednosti relacija μ i ν.

Slika 5.2

Vrednosti μ i ν relacije R date su sledećim tablicama.

μ	a	b	c
a	0000	1100	0010
b	0010	0000	0011
c	1000	1100	0000

i

ν	a	b	c
a	0000	0010	1000
b	1100	0000	1100
c	0010	0011	0000

.

Vrednost $\mu(a, b) = 1100$ značila bi da je lek a preferentniji od leka b kada su u pitanju simptomi neželjenih dejstava mučnina i povraćanje. Ovo znači da lek b izaziva ove simptome, dok ih lek a ne izaziva. Kada su u pitanju simptomi povišena temperatura i glavobolja lek a nije preferentniji od leka b, ali to ne znači da on sigurno izaziva ove simptome, a b ih ne izaziva.

Vrednost $\mu(b, a) = 0010$, znači da je lek b preferentniji od leka a kada se posmatra simptom glavobolja, tj. lek a izaziva glavobolju dok ga lek b

ne izaziva. Upoređivanjem vrednosti $\mu(a,b)$ i $\mu(b,a)$ dolazimo do zaključka da postoji neodređenost ove dve alternative u odnosu na simptop povišena temperatura, tj. nije određeno koji je od ovih lekova preferentniji u odnosu na ovaj simptom. Nakon naknadnih istraživanja i dobijanja nove informacije ovaj podatak bi se mogao naknadno priključiti.

Na ovaj način prikazali smo jednu od mogućnosti primene IP-relacije preferencije u medicini. $\square$

5.2 Mreža intervala kao kodomen IP-vrednosnog rasplinutog skupa i relacije preferencije

U ovom poglavlju razmatrana je mogućnost primene intuicionističkih rasplinutih skupova na probleme kvalitativnog ocenjivanja. Model koji predlažemo zasniva se na postojanju konačnog lanca određenih kvalitativnih karakteristika kojima se opisuju elementi nekog skupa i predstavlja uopštenje modela iz rada [8] u intuicionističkom smislu. Zatvoreni intervali ovog lanca predstavljaju skalne opise. Skup svih opisa u odnosu na inkluziju je *ili*-polumreža. Svaka ocena je L-vrednosni rasplinuti skup nad skupom koji se ocenjuje. Ako u proces ocenjivanja uvedemo dve karakteristike: povoljnu i nepovoljnu, koje su povezane na određeni način, dobijamo jedan intuicionistički rasplinuti skup.

Neka je A konačan lanac i $(\mathfrak{I}(A), \subseteq)$ uređen skup svih intervala lanca A (Definicija 1.2) uključujući i $\emptyset$ koji ćemo tretirati kao prazan interval. Relaciju inkluzije $\subseteq$ zvaćemo **relacija preciznosti**. Preciznost opada „na gore” u posetu $(\mathfrak{I}(A), \subseteq)$.

Neka su $[\underline{a}, \overline{a}], [\underline{b}, \overline{b}] \in \mathfrak{I}(A)$. Pokažimo da je najmanje gornje ograničenje ova dva intervala interval $[\min\{\underline{a}, \underline{b}\}, \max\{\overline{a}, \overline{b}\}]$. Oznake min i max su redom infimum i supremum na lancu A. $[\min\{\underline{a}, \underline{b}\}, \max\{\overline{a}, \overline{b}\}]$ je jednoznačno određen i pripada $\mathfrak{I}(A)$, jer su $\min\{\underline{a}, \underline{b}\} \in A$ i $\max\{\overline{a}, \overline{b}\} \in A$ jednoznačno određeni i važi $\min\{\underline{a}, \underline{b}\} \leq \max\{\overline{a}, \overline{b}\}$, pa $[\min\{\underline{a}, \underline{b}\}, \max\{\overline{a}, \overline{b}\}] \in \mathfrak{I}(A)$.

Skup svih gornjih ograničenja intervala $[\underline{a}, \overline{a}]$ i $[\underline{b}, \overline{b}]$ je uređen u odnosu na inkluziju, pa svaki njegov element je interval koji sadrži sve elemente iz ova dva intervala. Samim tim, svako gornje ograničenje mora imati podinterval oblika $[\min\{\underline{a},\underline{b}\},\max\{\overline{a},\overline{b}\}]$, najmanji od njih je upravo $[\min\{\underline{a},\underline{b}\},\max\{\overline{a},\overline{b}\}]$.

Dakle,

$$\sup\{[\underline{a},\overline{a}],[\underline{b},\overline{b}]\} = [\min\{\underline{a},\underline{b}\},\max\{\overline{a},\overline{b}\}].$$

Uvedimo oznaku $[\underline{a},\overline{a}] + [\underline{b},\overline{b}] = \sup\{[\underline{a},\overline{a}],[\underline{b},\overline{b}]\}$ koju ćemo zvati „nadovezivanje".

Kako su svi intervali skupovi koji su uređeni inkluzijom, najveće donje ograničenje dva intervala je interval čiji su elementi određeni presekom, tj.

$$\inf\{[\underline{a},\overline{a}],[\underline{b},\overline{b}]\} = [\underline{a},\overline{a}] \cap [\underline{b},\overline{b}] = \{x \in A \mid x \in [\underline{a},\overline{a}] \text{ i } x \in [\underline{b},\overline{b}]\}.$$

Pokažimo da je $[\underline{a},\overline{a}] \cap [\underline{b},\overline{b}] \in \mathfrak{I}(A)$, tj. da je ovaj presek interval. Neka je $[\underline{a},\overline{a}] \cap [\underline{b},\overline{b}] = \{a^1, ...a^m\}$, $m \leq n$. Tada ne postoji element $b \in A$ koji ne pripada preseku $[\underline{a},\overline{a}] \cap [\underline{b},\overline{b}]$ i za koji važi $a^i \leq b \leq a^j$, za neke $a^i, a^j \in [\underline{a},\overline{a}] \cap [\underline{b},\overline{b}]$. Takav element b morao bi pripadati intervalima $[\underline{a},\overline{a}]$ i $[\underline{b},\overline{b}]$ po definiciji intervala, a samim tim i preseku ovih intervala. Ovim je dokazano da je $[\underline{a},\overline{a}] \cap [\underline{b},\overline{b}]$ donje ograničenje intervala $[\underline{a},\overline{a}]$ i $[\underline{b},\overline{b}]$. Da bismo pokazali da je ovo najveće donje ograničenje iskoristimo činjenicu da ako postoji ograničenje koje je veće od ovoga, ono mora sadržati bar još jedan element lanca A koji će biti zajednički za oba intervala, a to je nemoguće jer su svi zajednički elementi u preseku.

Ovim je dokazano sledeće tvrđenje.

Skup intervala konačnog lanca je mreža u odnosu na inkluziju.

Najveći i najmanji elementi mreže $(\mathfrak{I}(A), \subseteq)$ su redom $T = A$ i $B = \emptyset$.

$(\mathfrak{I}(A), \cap, +)$ je mreža kao algebarska struktura sa dve binarne operacije. Za $p, q \in \mathfrak{I}(A)$ važi $p \cap q \neq \emptyset \Leftrightarrow p + q = p \cup q$, gde je $\cup$ unija skupova.

Napomena. Mreža $\mathfrak{I}(A)$ nije distributivna ni modularna za slučaj kada je $|A| \geq 3$. Neka je $A = \{a, b, c\}$ i $a \leq b \leq c$. Tada ne važi $\{a\} + (\{b\} \cap \{c\}) = (\{a\} + \{b\}) \cap (\{a\} + \{c\})$, jer je $\{a\} \neq [a, b]$, pa mreža nije distributivna. Takođe ne važi za $\{c\} \leq [b, c]$, $\{c\} + (\{a\} \cap [b, c]) = (\{c\} + \{a\}) \cap (\{c\} + [b, c])$, jer je $\{c\} \neq [b, c]$, pa mreža nije modularna. $\square$

Svi jednočlani skupovi $\{a\} = [a, a]$ su atomi mreže $\mathfrak{I}(A)$ i oni su najprecizniji „pravi” elementi.

Neka je $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Broj elemenata mreže $\mathfrak{I}(A)$ je $|\mathfrak{I}(A)| = n + (n-1) + \cdots + 1 + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

***Primer* 5.3.** Posmatrajmo slučaj kada je $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ lanac lingvističkih izraza i $a_1 < \cdots < a_n$, gde je $|A| = n \geq 2$ i $<$ poredak nad tim izrazima u odnosu na neku karakteristiku. Elementi skupa A su lingvistički izrazi koji, na primer, opisuju subjektivan osećaj temperature: „ledeno”, „veoma hladno”, „hladno”, „prijatno”, itd. □

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
ledeno	veoma hladno	hladno	prijatno	toplo	vrelo

Tabela 5.1: Značenja lingvističkih termina.

Neka je skup A dat u Tabeli 5.1. Svaki element mreže $\mathfrak{I}(A)$ ima svoje značenje. Na primer, $[a_2, a_4]$ znači „između veoma hladnog i prijatnog”, $[a_5, a_6]$ znači „između toplog i vrelog”ili „bar toplo”,... □

5.2.1 Intuicionistički rasplinuti skupovi ocena

Neka je $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ konačan lanac i $\mathfrak{I}(A)$ mreža njegovih intervala. Neka je $X = \{x_1, \cdots, x_m\}$ konačan skup.

Preslikavanje $\mu : X \to \mathfrak{I}(A)$ je L-vrednosni rasplinuti skup. Vrednost $\mu(x)$ je **ocena elementa** $x \in X$ preko elementa mreže $\mathfrak{I}(A)$, a skup vrednosti $\mu(X)$ je **ocena skupa** X.

Familiju svih L-rasplinutih skupova $\mu : X \to \mathfrak{I}(A)$ označavaćemo $\mathfrak{O}$ i zvaćemo je **prostor ocena** [89, 8].

Na familiji $\mathfrak{O}$ uvedimo binarnu relaciju $\leq_{\mathfrak{O}}$ preko poretka mreže $\mathfrak{I}(A)$ po koordinatama: $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{O}$,

$$\mu_1 \leq_{\mathfrak{O}} \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1(x) \subseteq \mu_2(x), \quad \forall x \in X.$$

Kako je $\subseteq$ relacija poretka, to direktno sledi da je i $\leq_{\mathfrak{O}}$ poredak na $\mathfrak{O}$, pa $(\mathfrak{O}, \leq)$ mreža.

Definišimo binarne operacije na mreži $(\mathfrak{O}, \leq)$ na sledeći način:

(1) $(\forall x \in X)$, $(\mu_1 +_{\mathfrak{O}} \mu_2)(x) := \sup\{\mu_1(x), \mu_2(x)\} = \mu_1(x) + \mu_2(x)$;

(2) $(\forall x \in X)$, $(\mu_1 \cap_{\mathfrak{O}} \mu_2)(x) := \inf\{\mu_1(x), \mu_2(x)\} = \mu_1(x) \cap \mu_2(x)$.

U daljem tekstu koristićemo oznake $+_{\mathfrak{O}} = +$ i $\cap_{\mathfrak{O}} = \cap$.

Zapis $\mu_1 \leq \mu_2$ imao bi značenje da je za svako $x \in X$ ocena $\mu_1(x)$ bar precizna kao ocena $\mu_2(x)$.

Kao što je već rečeno, vrednost $\mu(x)$ predstavlja stepen do koga određena alternativa zadovoljava postavljeni kriterijum. Sa stanovištva klasičnih rasplinutih skupova, $\mu : X \to [0,1]$, vrednost $\nu(x) = 1 - \mu(x)$ predstavlja nivo do koga određena alternativa ne zadovoljava isti kriterijum. Međutim, donosilac odluke često ne doživljava nivo nepripadanja kao komplement nivoa pripadanja [46], jer se u realnim situacijama lingvistička negacija i logička negacija ne poklapaju [90, 91]. U ovim situacijama kada je $\mu(x) + \nu(x) < 1$, pojavljuje se nivo neodređenosti (intuicionistički indeks) $\pi(x) = 1 - \mu(x) - \nu(x)$. Nedostatak informacija može uticati da se nivo neodređenosti poveća ili da se nivo pripadanja i nepripadanja odrede pogrešno. Davanje intervalnih ocena može do određene mere rešiti ovaj problem.

Neka su $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ konačan lanac sa uređenjem $a_1 \leq \cdots \leq a_n$, $\mathfrak{I}(A)$ odgovarajuća mreža intervala generisana lancem A i X neprazan skup. Struktura

$$O_{\mathfrak{I}}(A) = (X, \mu, \nu), \tag{5.1}$$

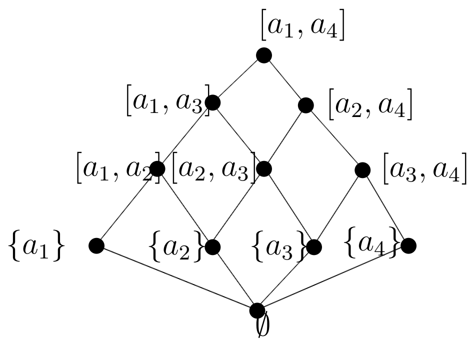
je IL-vrednosni rasplinuti skup nad X, gde $\mu, \nu : X \to \mathfrak{I}(A)$ i važi $\mu(x)\downarrow \cap \nu(x)\downarrow = \emptyset$ (Definicija 3.9).

Svaki IL rasplinuti skup $O_{\mathfrak{I}} : X \to \mathfrak{I}(A)$ je jedna **intuicionistička ocena** elemenata $x \in X$ preko elemenata mreže $\mathfrak{I}(A)$.

Skup svih intuicionističkih ocena elemenata skupa X preko elemenata mreže $\mathfrak{I}(A)$ označavaćemo sa $\mathfrak{O}_{\mathfrak{I}}$.

Ovakvo ocenjivanje koristeći (lingvističke) izraze dopušta „nepreciznost” informacija u samom postupku ocenjivanja. Takođe, dopušta donosiocu odluke da imaju različit nivo preciznosti datih ocena, dopušta davanje „nepoznate” ocene koja predstavlja najnepreciznij u ocenu. Na osnovu skupa jednočlanih skupova elemenata lanca A, koji predstavljaju najpreciznije ocene elemenata skupa koji se ocenjuje, konstruiše se mreža intervala koji predstavljaju iskaze, tj. manje precizne ocene. Intuicionistička ocena definiše se kao intuicionistički rasplinuti skup (X, μ, ν) i omogućava dalju analizu preferencija.

***Primer* 5.4.** Prikažimo jednostavan primer intuicionističkih ocena. Neka je skup $X = \{x_1, ..., x_5\}$, lanac $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ u poretku $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Primer intuicionističkih ocena $O^1_{\mathfrak{I}}$ i $O^2_{\mathfrak{I}}$ elemenata skupa X preko elemenata mreže $\mathfrak{I}(A)$ (Slika 5.3) date su u Tabeli 5.2. □



Slika 5.3 Mreža $\mathfrak{I}(A)$.

	μ_1	μ_2	ν_1	ν_2
x_1	$[a_2, a_3]$	$[a_3, a_4]$	$\{a_1\}$	$\{a_1\}$
x_2	$\{a_4\}$	$\{a_4\}$	$\{a_1\}$	$\{a_1\}$
x_3	$[a_2, a_3]$	$[a_3, a_4]$	$[a_4, a_4]$	$\{a_1\}$
x_4	$\{a_3\}$	$[a_3, a_4]$	$[a_1, a_2]$	$\{a_1\}$
x_5	$\{a_4\}$	$[a_2, a_4]$	$\{a_1\}$	$\{a_1\}$

Tabela 5.2: Tabela ocena $O^1_{\mathfrak{I}}$ i $O^2_{\mathfrak{I}}$ skupa X.

IL-vrednosne relacije reciprociteta na mreži $\mathfrak{I}(A)$

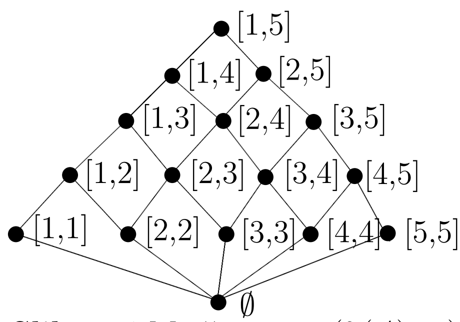
Posmatrajmo sada situaciju kada se vrednosti relacije preferencije ne mogu odrediti precizno, već postoji određeni stepen neodlučnosti koji se može opisati davanjem intervalnih ocena.

Neka je $A = \{a_1, ..., a_n\}$ konačan skup preciznih opisa takav da je $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$, i $(\mathfrak{I}(A), \subseteq)$ mreža intervala.

Iskoristimo razmatranje iz prethodnog dela za IL-vrednosne rasplinute skupove dato preko mreže $\mathfrak{I}(A)$. Za razliku od ovog slučaja gde su postojale vrednosti funkcija μ i ν, ovde ćemo imati samo jednu relaciju R koja će biti intuicionistička u smislu Definicije 4.7 iz Glave 4. Kao što smo u Glavi 4. pokazali ove relacije su pogodne za izražavanje preferencija donosioca odluke jer ne zahtevaju posebne uslove kodomena. Takođe preko samo jedne relacije moguće je opisati oba aspekta intuicionističke relacije-pripadanje i nepripadanje.

Donosilac odluke određuje intuicionističku mrežno-vrednosnu relaciju reciprociteta $R : X^2 \to \mathfrak{I}(A)$, koja zadovoljava uslov: za sve $a, b \in X$, $R(a,b){\downarrow} \cap R(b,a){\downarrow} = \emptyset$. Tada, ako se za neke alternative a i b pojavi vrednost $R(a,b) = [a_1, a_n]$ to znači da postoje velika nepreciznost, neodređenost ili neodlučnost donosioca odluke oko preferencije ovih alternativa i da se u ovom slučaju ne može odrediti preferencija, jer bi onda vrednost $R(b,a)$ morala biti $\emptyset$. Iz ovoga sledi da su najnepreciznije vrednosti koje se mogu koristiti za opisivanje preferencija oblika $[a_1, a_{n-1}]$ ili $[a_2, a_n]$.

***Primer* 5.5.** Neka je potrebno odrediti lokaciju za izgradnju novog tržnog centra. Posle sprovedenog istraživanja 4 lokacije a, b, c i d su izdvojene. Ove lokacije (alternative) upoređivane su na osnovu 3 kriterijuma: cena, površina zemljišta, postojeća infrastruktura. Donosilac odluke određivao je preferencije alternativa na osnovu svakog kriterijuma. Polazni lanac ocena kojima su prikazane precizne preferencije je $1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5$, gde je 1 najlošija ocena, a 5 najbolja. Posmatrana je mreža $\mathfrak{I}(A)$ na Slici 5.4.



Slika 5.4 Mreža ocena $(\mathfrak{I}(A), \subseteq)$.

Date su sledeće intuicionističke mrežno-vrednosne relacije reciprociteta R^1, R^2, R^3 u odnosu na kriterijume cena (1), površina zemljišta (2) i postojeća infrastruktura(3).

$$\begin{array}{c|cccc} R^1 & a & b & c & d \\ \hline a & \emptyset & [1,4] & [2,3] & [4,4] \\ b & [5,5] & \emptyset & [3,5] & [1,1] \\ c & [3,5] & [2,2] & \emptyset & [4,5] \\ d & [1,3] & [3,3] & [1,2] & \emptyset \end{array}, \quad \begin{array}{c|cccc} R^2 & a & b & c & d \\ \hline a & \emptyset & [2,4] & [2,3] & [3,3] \\ b & [5,5] & \emptyset & [3,4] & [2,5] \\ c & [1,1] & [1,2] & \emptyset & [2,4] \\ d & [4,4] & [1,1] & [1,1] & \emptyset \end{array},$$

$$\begin{array}{c|cccc} R^3 & a & b & c & d \\ \hline a & \emptyset & [1,2] & [1,4] & [2,5] \\ b & [3,4] & \emptyset & [3,4] & [1,3] \\ c & [5,5] & [1,2] & \emptyset & [2,5] \\ d & [1,1] & [4,4] & [1,1] & \emptyset \end{array}.$$

Primetimo da vrednosti $R^1(b,d)$, $R^2(b,d)$ i $R^3(b,d)$ prikazuju veliku neusklađenost, kao i $R^1(d,b)$, $R^2(d,b)$ i $R^3(d,b)$. Na ovaj način, moguće je analizirati preferencije ostalih parova alternativa. $\square$

IL-vrednosne relacije preferencije moguće je primenjivati i na grupno odlučivanje, gde bi se na osnovu pojedinačnih relacija svakog donosioca odluke, odredila relacije cele grupe nekom od poznatih metoda.

Ovde su date samo početne ideje u vezi sa mogućom primenom mreže intervala u kontekstu mrežno-vrednosnih intuicionističkih relacija preferencije. U planu su dalja istraživanja u ovom pravcu, ali to izlazi iz okvira ovog rada.

Glava 6

Zaključak

U ovom radu istraživani su intuicionistički mrežno-vrednosni i poset-vrednosni rasplinuti skupovi. Istorijski gledano, postojalo je više definicija IL-vrednosnog rasplinutog skupa [3, 2, 55, 47, 48] ali su sve ove definicije imale određene nedostatke. Cilj ovog rada bio je da se postavi nova definicija kojom će se otkloniti ovi nedostatci i koja će biti pogodna za uvođenje IL-relacija, a kasnije i IL-relacija preferencije. Razvijena je definicija *IP-vrednosnog rasplinutog skupa* [41], koja je opštiji slučaj IL-rasplinutog skupa i koja omogućava definisanje na svakom posetu. Ovom definicijom otklonjeni su mnogi problemi ranijih definicija, u smislu postojanje antitone involucije, funkcije linearizacije i drugih. Za ovako uvedenu definiciju razmatrani su nivoi funkcija pripadanja i nepripadanja i pokazano je da se sve osobine, koje su važile za nivoe P-vrednosnih rasplinutih skupova, važe i za ove IP-vrednosne rasplinute skupove. Takođe, proučavane su određene veze između familija nivoa ovih skupova i data je teorema sinteze na ovako definisane skupove, a koja je uopštenje teoreme sinteze P-vrednosnog rasplinutog skupa. Koristeći nivo skupove koji su klasični skupovi, moguće je dalje istraživati ovako definisane IP-vrednosne rasplinute skupove. Osnovna ideja ovakvog pristupa bila je da se konačan poset, koji je kodomen IP-vrednosnog rasplinutog skupa, posmatra kao podskup skupa $\{0,1\}^n$, koristeći se reprezentacijom poseta preko skupa njegovih potpuno *ili*-nerazloživih elemenata. Ova tehnika omogućava računanje sa n-torkama čije su kordinate nule ili jedinice.

Daljim istraživanje utvrđeno je da je ova unapređena definicija pogodna za definisanje IL-vrednosnih i IP-vrednosnih relacija koje se, takođe, mogu definisati na proizvoljnom posetu. Ovako uvedene relacije iskoristili smo za uvođenje dva tipa intuicionističkih relacija preferencije.

Sam pojam preferentnosti i relacije preferencije zastupljeni su u mnogim oblastima. Teorija rasplinutih skupova, kao i intuicionističkih rasplinutih skupova našla je primenu u gotovo svim oblastima: društvenim naukama, tehnici, ekonomiji, procesima odlučivanja. Imajući u vidu da su se gotovo sve primene zasnivale na intuicionističkim skupovima sa domenom koji je realan interval $[0, 1]$ ili na intuicionističkim intervalno-vrednosnim skupovima, uveli smo nove relacije preferencije koje će imati mrežu ili proizvoljan poset kao kodomen. Motiv za ovo uopštenje je bio da se sve vrednosti koje oslikavaju preferencije ne mogu međusobno upoređivati i da ovakva struktura to dopušta.

Relacije reciprociteta [22, 83] i P-vrednosne relacije preferencije [66] uopštene su, prvo kroz L-vrednosne relacije reciprociteta na konačnom lancu sa neparnim brojem elemenata, a kasnije kroz *jake poset-vrednosne rasplinute relacije reciprociteta*[42]. Pokazano je da svaka ovako definisana relacija zadovoljava neke uslove P-vrednosne relacije preferencije. Osnovna razlika između novouvedene jake poset-vrednosne rasplinute relacije reciprociteta i P-vrednosne relacije preferencije bila je u vrednostima tačaka oblika (a, a). Ostali uslovi su bili zadovoljeni. Pokazano je da su vrednosti oblika $R(a, b)$ i $R(b, a)$ na neki način komplementirane na posmatranom posetu. Ipak, novouvedena relacija imala je jake zahteve po pitanju poseta na kome je definisana, tako da ne možemo tvrditi da je ova definicija bolja ili lošija od definicije iz rada [66].

Da bismo omogućili da jake poset-vrednosne rasplinute relacije reciprociteta budu primenljive na veću klasu poseta, uvodimo *IP-vrednosnu rasplinutu relaciju reciprociteta* [42]. Ovakva relacija omogućava iskazivanje preferencije između alternativa i u slučajevima kada ne postoji stroga preferencija u odnosu na neki zadati kriterijum. Pokazano je da se ovakva relacija može transformisati u relaciju preko dve funkcije koja je ekvivalentna intuicionističkom zapisu i da predstavlja uopštenje (u određenom smislu) definicije intuicionističke relacije preferencije koja se sreće u literaturi [33]. Prednosti ove definicije su u tome što se može definisati na svakom posetu koji ima najmanji element. Takođe, reprezentacijom ovog poseta preko skupa njegovih potpuno *ili*-nerazloživih elemenata, možemo računati sa n-torkama čije koordinate tumačimo kao klasične relacije preferencije u odnosu na neki zadati kriterijum.

Drugo uopštenje koje uvodimo jesu *IP-vrednosne rasplinute relacije preferencije*. Ovakve relacije imaju veće zahteve od IP-vrednosne rasplinute relacije reciprociteta, u smislu postojanja tačaka kojima će se predstavljati vrednosti $\mu(a,a)$ i $\nu(a,a)$, a koje zadovoljavaju uslov da je $\mu(a,a)\downarrow \cap \nu(a,a)\downarrow = B$. Takođe postoje posebni zahtevi za neuporedive vrednosti $\mu(a,b)$ i $\mu(b,a)$, kao i $\nu(a,b)$ i $\nu(b,a)$. Ipak, ovakva definicija ima i svojih prednosti nad definicijom IP-vrednosne rasplinute relacije reciprociteta, a ona se ogleda u tome da vrednosti relacija μ i ν ne moraju biti određene jedne iz drugih i da donosilac odluke ima veću slobodu u iskazivanju preferencije preko funkcije pripadanja i nepripadanja. Kao otvoren problem daljeg istraživanja ostaje da se ispita veza između poseta koji je kodomen ovakve relacije i preslikavanja kojima se povezuju vrednosti tačaka oblika (a,b) i (b,a).

Koristeći definisane relacije, dato je nekoliko mogućnosti njihovih primena. Zbog mogućnosti da se pojavi početni nedostatak informacija, koristili smo strukturu $\mathfrak{I}(A)$ koja je u literaturi poznata kao prostor ocena [89] i kojom se opisuje nepreciznost informacija ili neodlučnost donosioca odluke. Ovakvi modeli primene mogli bi se proširiti na grupno donošenje odluka kroz razvijanje određenih metoda agregacije što je izvan opsega ovog rada.

Literatura

[1] Atanassov, K., *Intuitionistic fuzzy sets*, VII ITKR's Scientific Session, Sofia, Deposed in Central Sci-Techn. Library of Bulg. Acad. of Sci.,(1983), 1697/84 (in Bulg.).

[2] Atanassov, K., *Intuitionistic fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems 20, (1986.), 87-96.

[3] Atanassov, K., Stoeva, S., *Intuitionistic L-fuzzy sets*, In: R.Trappl (ed.) Cybernetics and Systems Research 2. Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), (1984.), 539-540.

[4] Atanassov, K., *Intuitionistic fuzzy sets. Theory and Applications*, Physica-Verlag/ A Springer Company. Heilderberg, New York, (1999.).

[5] Atanassov K., *Intuitionistic fuzzy relations*, Third Int. Symp. Automation and Sci. Instrumentation, Varna, Oct. 1984., Proc. part II, 56-57.

[6] Atanassov K., *Intuitionistic fuzzy relations*, First Sci. Session of the Mathematical Foundation of Artificial Intelligence Seminar, Sofia, October 10, 1989., Preprint IM-MFAIS-7-89, 1-3.

[7] Atanassov K., *Remark on the concept intuitionistic fuzzy relation*, Preprint MRL-MFAIS-10-94, Sofia, (1994.), 42-46.

[8] Agell, N., Sanchez, M., Prats, F., *L-Fuzzy sets for group linguistic preference modeling: an application to assess a firms performance*, A: IEEE International Conference on Fuzzy Systems. 2015 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2015), August 2-5, (2015.), Istanbul, Turkey. Estambul: 2015, 1-5.

[9] Balbes, R., Dwinger, P., *Distributive Lattices*, Univ. of Missouri Press, Columbia, (1974.).

[10] Birkhff, G., Lattice Theory, 3rd edition. Colloq. Publ. 25, Amer. Math. Soc., Providence, 1967.

[11] Belohlavek, R., Dauben, J. W., Klir, G. J., *Fuzzy Logic and Mathematics: A Historical Perspective*, Oxford Scholarship Online, (2017.).

[12] Brown, J. G., *A note on fuzzy sets*, Information and Control 18 (1971.), 32-39.

[13] Banerjee, A., *Rational choice under fuzzy preferences: The Orlovsky choice function*, Fuzzy Sets and Systems 54, (1993.), 295-299.

[14] Barrett, C.R., Pattanaik, P., Salles, M.,*On the structure of fuzzy social welfare functions*, Fuzzy Sets and Systems 19, (1986.), 1-10.

[15] Barrett, C.R., Prasanta, K., Pattanaik, M., *On choosing rationally when preferences are fuzzy*, Fuzzy Sets and Systems 34, (1990.), 197-212.

[16] Barrett, C.R., Prasanta, K., Pattanaik, M. Salles, *Rationality and aggregation of preferences in an ordinally fuzzy framework*, Fuzzy Sets and Systems 49, (1992.), 9-13.

[17] Barrett, C. R., *Fuzzy preferences and choice: A further progress report*, Fuzzy Sets and Systems 37, (1990.), 261-262.

[18] Barrett, C. R., Salles, M., *Social choice with fuzzy preferences-ch 20*, Handbook of social Chioce and Welfare, Elsevier, (2004.), 367-389.

[19] Basu, K., *Fuzzy Revealed Preference Theory*, Journal of Economic Theory 32, (1984.), 212-227.

[20] Bouyssou, D., *A note on the sum of differences choice function for fuzzy preference relations*, Fuzzy Sets and Systems 47, (1992.), 197-202.

[21] Bouyssou, D., *Acyclic fuzzy preferences and the Orlovsky choice function: A note*, Fuzzy Sets Syst 89, (1997.), 107-111.

[22] Bezdek, J., Spillman, B., Spillman, R., *A fuzzy relation space for group decision theory*, Fuzzy Sets Systems 1, (1978.), 255-268.

[23] Bustince, H., Burillo, P., *Structures on intuitionistic fuzzy relations*, Fuzzy Sets and Systems 78, (1996.), 293-303.

[24] Burillo, P., Sola, H. B., *Intuitionistic fuzzy relations. I*, Mathware and soft computing 2, (1995.), 5-38.

[25] Burillo, P., Bustince, H., Atanassov, K., *On the intuitionistic fuzzy relations*, Notes on IFS 1, (1995.), 87-92.

[26] Black, M., *Vagueness: An exercise in logical analysis*, Philosophy of Science 4, (1937.), 427-455.

[27] Crawley, P., Dilworth, R. P., *Algebraic Theory of Lattices*, Prentice-Hall, Englewood Cliks, (1973.).

[28] Chajda, I., *Complemented ordered sets*, Arch. Math. 28, Brno, (1992.), 25-34.

[29] Chen, S. M., *Similarity measure between vague sets and elements*, IEEE Trans.Systems Man Cybernt. 27, (1997.), 153-158.

[30] Chen, S. M., Tan, J. M., *Handling multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague sets*, Fuzzy SetsandSystems 67, (1994.), 163-172.

[31] Chen, T. Y., *A note on distances between intuitionistic fuzzy sets and/or interval-valued fuzzy sets based on the hausdorff metric*, Fuzzy Sets Syst 158, (2007.), 2523-2525.

[32] Deschrijver, G., Kerre, E. E., *On the relationship between intuitionistic fuzzy sets and some other extensions of fuzzy sets theory*, Fuzzy Sets and Systems 133, (2003.), 227-235.

[33] Dudziak, U., Pekala, B., *Intuitionistic fuzzy preference relations*, Proceedings of the 7th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology, EUSFLAT 2011 and French Days on Fuzzy Logic and Applications, LFA 2011

[34] Dutta, B., Panda, S. C., Pattanaik, P. K., *Exact choice and fuzzy preferences*, Mathematical Social Sciences 11, (1986.), 53-68.

[35] Dutta, B., Laslier, J.F., *Comparison functions and choice correspondences*, Soc. Choice Welfare 16, (1999.), 513-532.

[36] David, H., *The Method of Paired Comparisons*, Griffin's Statistical Monographs and Courses, 12, Charles Griffin and D. Ltd., (1963.).

[37] Doignon, J.P., Monjardet, B., Roubens, M., Vincke, Ph, *Biorder families, valued relations, and preference modelling*, J. Math. Psych. 30, (1986.), 435-480.

[38] Davey, B. A., Priestley, H.A., *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, (1992.).

[39] Dasgupta, M., Deb, R., *Fuzzy choice functions*, Soc. Choice Welfare 8, (1991.), 171-182.

[40] De, S. K., Biswas, R., Roy, A. R., *An application of intuitionistic fuzzy sets in medical diagnosis*, Fuzzy Sets and Systems 117, (2001.), 209 - 213.

[41] Đukić, M., Tepavčević, A., *Poset valued intuitionistic fuzzy sets*, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems 31, (2016), 547-553.

[42] Đukić, M., Tepavčević, A., *Poset valued intuitionistic preference relations*, Special Issue of ESCIM 2018, Springer, Series Studies in Computational Intelligence, (prihvaćen za štampu).

[43] Fodor, J., Roubens, M., *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*, Kluwer Academic Publishers, (1994.).

[44] Fishburn, P. C., *Binary choice probabilities: on the varieties of stochastic transitivity*, J. Math. Psychology 10, (1973.), 327-352.

[45] Flachsmeyer, J., *Note on orthocomplemented posets II*, In: Proc. 10th Winter School on Abstract Analysis (Z. Frolk, ed.), Circolo Matematico di Palermo, Palermo, (1982.), 67-74.

[46] Grzegorzewski, P., *Distances between intuitionistic fuzzy sets and/or interval-valued fuzzy sets based on the Hausdorff metric*, Fuzzy Sets and Systems 148, (2004.), 319-328.

[47] Gerstenkorn, T., Tepavčević, A., *Lattice valued bifuzzy sets* , In: G. Zollo (ed.) New Logic for the New Economy, VIII SIGEF Congress Proceedings, (2001.), 65-68.

[48] Gerstenkorn, T., Tepavčević, A., *Lattice valued intuitionistic fuzzy sets*, Central European Journal of Mathematics 2, (2004), 388-398.

[49] Gerstenkorn, T., Tepavčević, A. *Lattice valued intuitionistic fuzzy relations and applications*, Soft Computing Foundations and Theoretical Aspects, EXIT, Warszawa, (2004.), 221-234.

[50] Goguen, J., *L-fuzzy sets*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 18, (1967.), 145-174.

[51] Gratzer, G., *General Lattice Theory*, Pure and Applied Mathematics, 75, Academic Press, New York, (1978.), Mathematische Reihe, Band 52, Birkhauser Verlag, Basel; Akademie Verlag, Berlin, 1978.

[52] Garcia-Lapresta, J., Llamazares, B., *Aggregation of fuzzy preferences: some rules of the mean*, Soc. Choice Welfare 17, (2000.), 673-690.

[53] Georgescu, I., *Fuzzy Choice Functions-A Revealed Preference Approach*, Springer 214, (2007.).

[54] Gorjanac-Ranitović, M., Tepavčević, A., *General form of lattice-valued fuzzy sets under the cutworthy approach*, Fuzzy Sets and Systems 158, (2007.), 1213-1216.

[55] Gorjanac-Ranitović, M., Tepavčević, A., *General Form of Lattice Valued Intuitionistic Fuzzy Sets*, Computational Intelligence, Theory and Applications, Springer, (2006.), 375-381.

[56] Herrera, F., Martinez, L., *A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 8, (2000.), 746-752.

[57] Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Verdegay, J. L., *A Model of Consensus in group decision making under linguistic assessments*, Fuzzy Sets and Systems 78, (1996.), 73-87.

[58] Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Verdegay, J. L., *Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators*, Fuzzy Sets and Systems 79, (1996.), 175-190.

[59] Herrera-Viedma, E., Herrera, F., Chiclana, F., *A consensus model for multiperson decision making with different preference structures*, IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics 32, (2002.), 394-402.

[60] Hung, W. L., Yang, M. S., *Similarity measures of intuitionistic fuzzy sets based on Hausdorff distance*, Pattern Recognition Lett. 25, (2004.), 1603-1611.

[61] Jaballah, A., Saidi, F. B., *Uniqueness results in the representation of families of sets by fuzzy sets*, Fuzzy sets and systems 157, (2006.), 964-975.

[62] Jaballah, A., Saidi, F. B., *Uniqueness in the generalized representation by fuzzy sets*, Fuzzy sets and systems 159, (2008.), 2176-2184.

[63] Janiš, V., Renčova, M., Šešelja, B., Tepavčević, A., *Construction of Fuzzy Relation by Closure Systems*, In: Chaudhury S., Mitra S., Murthy C.A., Sastry P.S., Pal S.K. (eds) Pattern Recognition and Machine Intelligence. PReMI 2009. Lecture Notes in Computer Science, vol 5909. Springer, Berlin, Heidelberg

[64] Janiš, V., Tepavčević, A., Šešelja, B., *Non-standard cut classification of fuzzy sets*, Inform. Sci. 177, (2007.), 161-169.

[65] Jain, N., *Transitivity of fuzzy relations and rational choice*, Annals of Operations Research 23, (1990.), 265-278.

[66] Janiš, V., Montes, S., Šešelja, B., Tepavčević, A., *Poset-valued preference relations*, Kybernetika 51, (2015.), 747-764.

[67] Klir, G., Yuan, B., *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Prentice-Hall, Inc., (1995.).

[68] Kaufmann, A., *Introduction a' la theorie des sous-ensembes flous*, Vol 1 Elements theoriques de base., Masson et Cie., Paris, (1973.).

[69] Kacprzyk, J., Fedrizzi, M., Nurmi, H., *Group decision making and consensus under fuzzy preferences and fuzzy majority*, Fuzzy Sets and Systems 49, (1992.), 21-31.

[70] Klement, E. P., Mesiar, R., Pap, E., *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publishers, Boston - London - Dordrecht, (2000.).

[71] Kulik, B. A., Fridman, A., *N-ary relations for logical analysis of data and knowledge*, Hershey, PA IGI Global, (2018.).

[72] Liu, H.W., *New similarity measures between intuitionistic fuzzy sets and between elements*, Math Comput Modell 42, (2005.), 61-70.

[73] Liang,Z., Shi, P., *Similarity measures on intuitionistic fuzzysets*, Pattern Recognition Lett. 24, (2003.), 2687-2693.

[74] Li, D.F., Cheng, C.T., *New similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and application to pattern recognitions*, Pattern Recogn Lett 23, (2002.), 221-225.

[75] Lahiri, S., *Axiomatic characterizations of threshold choice functions for comparison functions*, Fuzzy Sets and Systems 132, (2002.), 77-82.

[76] Liu, Y.M., Luo, M.K., *Fuzzy Topology*, World Scientific, (1997.).

[77] Lazarević, V., *Bipolumrežno-vrednosni rasplinuti skupovi*, Magistarski rad, Novi Sad, (1997.).

[78] Li, D. F., *Multiattribute decision making models and methods using intuitionistic fuzzy sets*, Journal of Computer and System Sciences 70, (2005.), 73-85.

[79] Martinetti, D., *Fuzzy and probabilistic approaches to modelling individual choice or preference: rationality conditions and their relationships*, Doctoral Thesis, Programa de Doctorado en Matematica y Estadistica, Universidad de Oviedo, (2014.).

[80] Murali, V., Makamba, B.B., *On an equivalence of fuzzy subgroups I*, Fuzzy Sets and Systems 123, (2001.), 259-264.

[81] Monjardet, B., *A generalisation of probabilistic consistency: linearity conditions for valued preference relations. In: Non-conventional Preference Relations in Decision Making (J. Kacprzyk and M. Roubens, eds.)*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 301, Springer-Verlag, (1988.), DOI 10.1007978-3-642-51711-23

[82] Mitchell, H.B., *On the Dengfeng-Chuitian similarity measure and its application to pattern recognition*, Pattern Recognition Lett. 24, (2003.), 3101-3104.

[83] Nurmi, H., *Approaches to collective decision making with fuzzy preference relations*, Fuzzy Sets Systems 6, (1981.), 249-259.

[84] Negoita, C.V., Ralescu, D.A., *Representation theorems for fuzzy concepts*, Kybernetes, 4, (1975.), 169-174.

[85] Negoita, C.V., Ralescu, D.A., *Simulation, Knowledge-Based Computing, and Fuzzy Statistics*, Van Nostrand Reinhold, New York, (1987.), 89-91.

[86] Orlovsky, S.A., *Decision-making with a fuzzy preference relation*, Fuzzy Sets and Systems 1, (1978.), 155-167.

[87] Peeva, K., Kyosev, Y., *Fuzzy Relational Calculus: Theory, Applications and Software (with CD-ROM)*, Advances in fuzzy systems, World Scientific, (2004.).

[88] Prats, F., Roselló, L.,Sánchez, M., Agell, N., *On fuzzy-qualitative descriptions and entropy*, International Journal of Approximate Reasoning 75, (2016.), 93-107.

[89] Prats, F., Roselló, L., Sánchez, M., Agell, N., *Using L-fuzzy sets to introduce information theory into qualitative reasoning*, Fuzzy Sets and Systems 236, (2014.), 73-90.

[90] Pacholczyk, D., *A New Approach to Linguistic Negation based upon Compatibility Level and Tolerance Threshold*, Rough Sets and Current Trends in Computing, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, (1998.), 416-423.

[91] Pacholczyk, D., *An approach to linguistic negation offuzzy property combination*, Proc. Seventh European Congr. Intelligent Techniques Soft Comput. EUFIT 99, Aachen, (1999.)

[92] Ralescu, D.A., *A survey of the representation of fuzzy concepts and its applications*, Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications (M.M. Gupta, R.K. Ragade, and R. Yager (eds.)). North Holland, (1979.), 77-91.

[93] Ralescu, D.A., *A generalization of the representation theorem*, Fuzzy Sets and Systems, 51, (1992.), 309-311.

[94] Roubens, M., Vincke, Ph., *Preference Modelling*, Springer-Verlag, Berlin, (1985.).

[95] Roselló, L., Sánchez, M., Agell, N., Prats, F., Mazaira, F. A., *Using consensus and distances between generalized multi-attribute linguistic assessments for group decision-making, Information Fusion* 17, (2014.), 83-92.

[96] Saidi, F.B., Jaballah, A., *Existence and Uniqueness of Fuzzy Ideals*, Fuzzy sets and systems 149, (2005.), 527-541.

[97] Saidi, F.B., Jaballah, A., *Alternative characterizations for the representation of families of sets by fuzzy sets*, Information Sciences 178, (2008.), 2639-2647.

[98] Sanchez, E., *Resolution of Composite Fuzzy Relation Equations*, Information and Control 30, (1976.), 38-43.

[99] Samuelson, P. A., *Note on the pure theory of consumer's behaviour*, Economica 5, (1938.), 61-71.

[100] Samuelson, P. A., *Note on the pure theory of consumer's behaviour: an addendum*, Economica 5, (1938.), 353-354.

[101] Szmit, E., Kacprzyk, J., *Intuitionistic fuzzy sets in group decision making*, Notes on IFS 2, (1996.), 15-32.

[102] Szmidt, E., Kacprzyk, J., *On measuring distances between intuitionistic fuzzy sets*, Notes on IFS 3, (1997.), 1-13.

[103] Szmidt, E., J., Kacprzyk J., *Distances between intuitionistic fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems 114, (2000.), 505-518.

[104] Szmidt, E., J., Kacprzyk J., *Intuitionistic Fuzzy Sets in Some Medical Applications*, Fifth Int. Conf. on IFSs, 22-23 Sept. 2001 NIFS 7, (2001.), 58-64.

[105] Sen, A., *Choice functions and reveled preference*, Review of Economic Studies 38, (1971.), 307-317.

[106] Steimann, F., *Fuzzy set theory in medicine*, Editorial Fuzzy set theory in medicine, Artificial Intelligence in Medicine 11, (1997.), 1-7.

[107] Stoyanova, D., *More on Cartesian products over intuitionistic fuzzy sets*, BUSEFAL 54, (1993.), 9-13.

[108] Stoyanova D., *Compositions of intuitionistic fuzzy relations*, BUSEFAL 54, (1993.), 21-23.

[109] Šešelja, B., *Teorija Mreža*, Novi Sad: Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, (2006.).

[110] Šešelja, B., *Matematika informatike*, Institut za matematiku, Novi Sad, (1990.).

[111] Šešelja, B., Vojvodić, G., *Fuzzy sets on S as closure operations on $P(S)$*, Rev. Res. Fac. Sci. Univ., Novi Sad 14, (1984.), 117-127.

[112] Šešelja, B., Tepavčević, A., *Equivalent fuzzy sets*, Kybernetika 41, (2005.), 115-128.

[113] Šešelja, B., Tepavčević, A., *A note on natural equivalence relation on fuzzy power set*, Fuzzy Sets and Systems 148, (2004.), 201 - 210.

[114] Šešelja, B., Tepavčević, A., *On a construction of codes by P-fuzzy sets*, Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad $20, 2$ (1990.), 71-80.

[115] Šešelja, B., Tepavčević, A., *Completion of ordered structures by cuts of fuzzy sets: An overview*, Fuzzy Sets and Systems 136, (2003.), 1-19.

[116] Šešelja, B., Tepavčević, A., *Posets via Partial Closure Operators*, Contributiones to General Algebra 12, Vergal Johannes Heyn, Klagenfurt, (2000.), 371-376.

[117] Šešelja, B., Tepavčević, A., *Representing Ordered Structures by Fuzzy Sets, An Overview*, Fuzzy Sets and Systems 136, (2003.), 21-39.

[118] Šešelja, B., Tepavčević, A., *On generation of finite posets by meet-irreducibles*, Discrete Mathematics 186, (1998.), 269-275.

[119] Šešelja, B., Tepavčević, A., *On existence of P-valued fuzzy sets with a given collection of cuts*, Fuzzy Sets and Systems 161, (2010.), 763-768.

[120] Šešelja, B., Tepavčević, A., *Bulove algebre i funkcije: teorija i zadaci*, Novi Sad: PMF, (2014.).

[121] Šešelja, B., Tepavčević, A., *On a representation of posets by fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems 98, (1998.), 127-132.

[122] Tepavčević, A., *Mrežno vrednosne algebarske strukture i kodovi*, Magistarski rad, Novi Sad, (1990.).

[123] Tarski, A., *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften, I*, Monatsh. Math. Phys. 37, (1930.), 360-404.

[124] Uzawa, H., *Note on preferance and axioms of choice*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics 8, (1956.), 35-40.

[125] Waphare, B. N, Joshi, V. V., *On Uniquely Complemented Posets*, Order 22, (2005.), 11-20.

[126] Wang, W., Xin, X., *Distance measure between intuitionistic fuzzy sets*, Pattern Recognition Lett. 26, (2005.), 2063-2069.

[127] Wang, X., *A note on congruence conditions of fuzzy choice functions*, Fuzzy Sets and Systems 145, (2004.), 355-358.

[128] Xu, Z., *Intuitionistic preference modeling and interactive decision making*, Springer, Berlin, Studies in fuzziness and soft computing, (2014.).

[129] Xu, Z., *Intuitionistic preference relations and their application in group decision making*, Information Sciences 177, (2007.), 2363-2379.

[130] Yang,Y., Chiclana, F., *Consistency of 2d and 3d distances of intuitionistic fuzzy sets*, Expert Syst Appl 39, (2012.), 8665-8670.

[131] Zadeh, L., *Fuzzy sets*, Information and Control 8, (1965.), 338-353.

[132] Zadeh, L.A., *Biological application of the theory of fuzzy sets and systems*, in: Proc. Int. Symp. Biocybernetics of the Central Nerous System, Little, Brown and Co., Boston, (1969.) 199-212.

Biografija

Rođena sam 25. novembra 1975. u Čačku, gde sam završila osnovnu školu i Gimnaziju u Čačku. Na Matematičkom fakultetu u Beogradu diplomirala sam 2001. godine. Na Tehničkom fakultetu u Čačku upisala sam postdiplomske studije na smeru Matematički modeli u informatici i 2010. godine odbranila magistarsku tezu pod mentorstvom prof. dr Mališe Žižovića.

Od 2001. do 2012. radila sam u nekoliko osnovnih i srednjih škola u Čačku.
Od 2012. do 2015. radila sam na Fakultetu tehničkih nauka u Čačku kao asistent.
Od 2015. do danas radim na Visokoj školi tehničkih strukovnih studija u Čačku kao predavač.
Od 2004. angažovana sam u Regionalnom centru za talente kao jedan od mentora za matematiku.

Koautor sam nekoliko naučnih radova (jedan M22, dva M33, jedan M34 i drugi).

Koautor sam univerzitetskog udžbenika Lazarević, V., Đukić, M., *Inženjerska matematika: teorija i zadaci* ", FTN Čačak (2010.).

Udata sam i majka dvoje dece.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: RBR	
Identifikacioni broj: IBR	
Tip dokumentacije: TD	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: TZ	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada (dipl., mag., dokt.): VR	Doktorska disertacija
Ime i prezime autora: AU	Marija Đukić
Mentor (titula, ime, prezime, zvanje): MN	Dr Andreja Tepavčević, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Naslov rada: NR	Mrežno vrednosne intuicionističke preferencijske strukture i primene
Jezik publikacije: JP	Srpski
Jezik izvoda: JI	srp. / eng.
Zemlja publikovanja: ZP	Republika Srbija
Uže geografsko područje: UGP	Vojvodina
Godina: GO	2018.
Izdavač: IZ	Autorski reprint
Mesto i adresa: MA	Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 3

Fizički opis rada: FO	(broj poglavlja 5 / stranica 108 / slika 14 / grafikona 0 / referenci 132/ priloga 0)
Naučna oblast: NO	Matematika
Naučna disciplina: ND	Algebra
Predmetna odrednica, ključne reči: PO	Intuicionistički rasplinuti skupovi, mrežno-vrednosni intuicionistički rasplinuti skupovi, poset-vrednosni intuicionistički rasplinuti skupovi, intervalno-vrednosni intuicionistički rasplinuti skupovi, intuicionistička poset-vrednosna relacija preferencije
UDK	
Čuva se: ČU	U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, Trg D. Obradovića 4, Novi Sad
Važna napomena: VN	
Izvod: IZ	Intuicionistički rasplinuti skupovi su već proučavani i definisani u kontekstu mrežno-vrednosnih struktura, ali svaka od postojećih definicija imala je odgovarajuće nedostatke. U ovom radu razvijena je definicija intuicionističkog poset-vrednosnog rasplinutog skupa, kojom se poset predstavlja kao podskup distributivne mreže. Na ovaj način možemo ispitivati funkcije pripadanja i nepripadanja i njihove odnose bez upotrebe komplementiranja na posetu. Takođe, u ovako postavljenim okvirima, svaki poset (a samim tim i mreža) može biti kodomen intuicionističkog rasplinutog skupa (čime se isključuje uslov ograničenosti poseta). Primenom uvedene definicije razmatrane su IP-vrednosne rasplinute relacije, x-blokovi ovih relacija i familije njihovih nivoa. Razvijene su jake poset vrednosne relacije reciprociteta koje predstavljaju uopštenje relacija reciprociteta sa intervala [0,1]. Pokazano je da ovakve relacije imaju svojstva slična poset-vrednosnim relacijama preferencije. Međutim, postoje velika ograničenja za primenu ovakvih relacija jer su zahtevi dosta jaki. Uvedene su IP-vrednosne relacije reciprociteta

	koje se mogu definisati za veliku klasu poseta. Ovakve relacije pogodne su za opisivanje preferencija. Posmatrana je intuicionistička poset-vrednosna relacija preferencije, koja je refleksivna rasplinuta relacija, nad skupom alternativa. U samom procesu višekriterijumskog odlučivanja može se pojaviti situacija kada alternative nisu međusobno uporedive u odnosu na relaciju preferencije, kao i nedovoljna određenost samih alternativa. Da bi se prevazišli ovakvi problemi uvodi se intuicionistička poset-vrednosna relacija preferencije kao intuicionistička rasplinuta relacija na skupu alternativa sa vrednostima u uređenom skupu. Analizirana su neka njena svojstva. Ovakav model pogodan je za upoređivanje alternativa koje nisu, nužno, u linearnom poretku. Dato je nekoliko opravdanja za uvodjenje oba tipa definisanih relacija. Jedna od mogućnosti jeste preko mreže intervala elemenata iz konačnog lanca S, a koji predstavljaju ocene određene alternative. Relacije preferencije mogu uzimati vrednosti sa ove mreže i time se može prevazići nedostatak informacija ili neodlučnost donosioca odluke.
Datum prihvatanja teme od strane Senata: DP	23. februar 2012.
Datum odbrane: DO	
Članovi komisije: (ime i prezime / titula / zvanje / naziv organizacije / status) KO	1. dr Ivica Bošnjak, vanredni profesor, PMF u Novom Sadu- predsednik 2. dr Andreja Tepavčević, redovni profesor, PMF u Novom Sadu-mentor 3. dr Branimir Šešelja, redovni profesor, PMF u Novom Sadu- član 4. dr Vera Lazarević, vanredni profesor, FTN Čačak- član

University of Novi Sad
Faculty of sciences
Key word documentation

Accession number: ANO	
Identification number: INO	
Document type: DT	Monograph documentation
Type of record: TR	Textual printed material
Contents code: CC	PhD thesis
Author: AU	Marija Đukić
Mentor: MN	Dr Andreja Tepavčević, full professor, Faculty of Science, Novi Sad
Title: TI	Lattice-valued intuitionistic preference structures and applications
Language of text: LT	Srpski
Language of abstract: LA	srp. / eng.
Country of publication: CP	Republic of Serbia
Locality of publication: LP	Vojvodina
Publication year: PY	2018.
Publisher: PU	Author's reprint

Publication place: PP	Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 3

Physical description: PD	(chapters 5 / pages 108 / pictures 14 / references 132)
Scientific field SF	Mathematics
Scientific discipline SD	Algebra
Subject, Key words SKW	Intuitionistic fuzzy sets, lattice-valued intuitionistic fuzzy sets, poset-valued intuitionistic fuzzy sets, interval-valued intuitionistic fuzzy sets, intuitionistic poset-valued preference relations
UC	
Holding data: HD	In the library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Natural Sciences and Mathematics in Novi Sad, Square D. Obradovica 4, Novi Sad
Note: N	
Abstract: AB	Intuitionistic fuzzy sets have already been explored in depth and defined in the context of lattice-valued intuitionistic fuzzy sets, however, every existing definition has certain drawbacks. In this thesis, a definition of poset-valued intuitionistic fuzzy sets is developed, which introduces a poset as a subset of a distributive lattice. In this manner, functions of membership and non-membership can be examined as well as their relations without using complement in the poset. Also, in such framework, each poset (and the lattice) can be a co-domain of an intuitionistic fuzzy set (which excludes the condition of the bounded poset). Introduced definition defines IP-valued fuzzy relations, x-blocks of these relations and

	families of their levels. Strong IP-valued reciprocialy relations have been developed as a generalization of reciprocal relations from interval [0,1]. It has been shown that these relations have properties similar to the P-valued preferences relations. However, there are great constraints on the application of these relations because the requirements are quite strong. IP-valued reciprocial relations have been introduced, which can be defined for a large class of posets. Such relations are suitable for describing preferences. An intuitionistic poset-valued preference relation, which is a reflexive fuzzy relation, over the set of alternatives, has been examined. In the process of a multi-criteria decision making, a situation can occur that the alternatives cannot be compared by the preference relation, as well as insufficient determination of the mentioned alternatives. In order to overcome similar problems, we have introduced an intuitionistic poset-valued preference relation as an intuitionistic fuzzy set over the set of alternatives with values in a certain poset. We have analyzed some its performances. This model is suitable for comparing alternatives which are not necessarily linearly ordered. There are several justifications for the introduction of both types of defined relations. One of the possibilities is via the lattice of the intervals of elements from the finite chain S, which represent the preference of a particular alternative. Preferences relations can take values from this lattice and this can overcome the lack of informations or the decisiveness of the decision maker.
Accepted on Senate on: AS	23. February 2012.

Defended: DE	
Thesis Defend Board: DB	1. dr Ivica Bošnjak, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad - president 2. dr Andreja Tepavčević, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad - mentor 3. dr Branimir Šešelja, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad - member 4. dr Vera Lazarević, associate professor, Faculty of Technical Sciences, University of Kragujevac - member