Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno - matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Nenad Morača

Kondenzacioni poredak, kondenzaciona ekvivalencija i reverzibilnost relacijskih struktura

— doktorska disertacija —

Mentor: dr Miloš S. Kurilić

Novi Sad, 2018.

Sadržaj

O ovoj disertaciji

Istorija i motivacija

Rajagopalan i Wilansky svoj rad [75] iz 1966. započinju ovom rečenicom:

„We propose to study a topological property which is not new, but seems not to have been systematically investigated."

Danas, 52 godine kasnije, ova rečenica i dalje verno oslikava stanje u literaturi po pitanju fenomena reverzibilnosti, kako topoloških prostora, tako i relacijskih struktura. Doyle i Hocking ([9]) su 1984. godine nastavili u istom smeru, u kojem su Rajagopalan i Wilansky krenuli, istražujući reverzibilnost i kondenzacionu ekvivalenciju topoloških prostora. Nakon toga, nije bilo ničeg novog u vezi s tom problematikom (barem ne sistematski i pod tim imenom), sve do pre nekoliko godina (videti [8, 5, 6, 7]). A pitanje da li inverzna funkcija neprekidne bijekcije mora biti neprekidna (što je jedna od ekvivalentnih definicija reverzibilnosti topološkog prostora), potpuno je prirodno i ovom autoru bilo je zanimljivo još kao srednjoškolcu i studentu.

Situacija je slična i po pitanju relacijskih struktura. Kukieła je 2009. godine, uopštavajući ideje iz [75, 9], krenuo paralelnim putem i uveo u literaturu koncept reverzibilnih poseta i kondenzaciono ekvivalentnih poseta ([27]). Nakon toga, dao je karakterizaciju nasledno reverzibilnih poseta ([28]). I to je, uz nedavno objavljeni rad autorovog mentora Kurilića [39], sve što se u literaturi može naći na temu reverzibilnosti relacijskih struktura. Fenomen reverzibilnosti binarnih struktura takođe ima svoju ekvivalentnu formulaciju koja može biti zanimljiva „široj publici". Naime, poznato je da, ako u Radoovom grafu (prebrojivom slučajnom grafu) obrišemo ili dodamo proizvoljan konačan broj ivica, da opet dobijamo Radoov graf (videti [3]), što, prema jednoj od ekvivalentnih definicija reverzibilnih struktura, znači da je Radoov graf nereverzibilna struktura. Fenomen reverzibilnosti nije samo brisanje ili dodavanje ivica u nekom beskonačnom grafu, to je jedan prirodan koncept od fundamentalnog značaja. Naime, reverzibilne relacijske strukture imaju svojstvo Cantor-Schröder-Bernstein (kraće, svojstvo CSB) za kondenzacije (bijektivne homomorfizme), zatim, svaka klasa reverzibilnih poseta daje nam odgovarajuću klasu reverzibilnih topoloških prostora (ako posmatramo topologiju čiju bazu čine glavni ideali), reverzibilnost je u vezi s veličinom klasa ekvivalencije koje odgovaraju izomorfizmu i kondenzacionoj ekvivalenciji, i, još, reverzibilnost je usko povezana sa strukturom i oblikom određenih poduređenja kondenzacionog poretka.

Da li su reverzibilne relacijske strukture pravilo ili izuzetak? Koje strukture su „lepše”, reverzibilne ili nereverzibilne? Jasno je kako su ova pitanja jako generalna. U ovoj disertaciji pokazano je kako na skupu $\mathbb{N}$ ima kontinuum mnogo reverzibilnih, i isto tako i kontinuum mnogo nereverzibilnih relacija ekvivalencije. Ali, ako ograničimo klasu struktura koje posmatramo na prebrojive grafove, i ako specificiramo pojmove „pravilo” i „izuzetak” pomoću koncepata iz teorije verovatnoće, možemo doći do odgovora na naše prvo pitanje. Erdős i Rényi su 1963. u [13] dokazali da, ako prebrojiv graf biramo slučajno, tako što ivice uzimamo nezavisno, s verovatnoćom $\frac{1}{2}$, da ćemo tada, s verovatnoćom 1, dobiti Radoov graf. Drugim rečima, ako ivice prebrojivog grafa biramo slučajno, verovatnoća da će on biti reverzibilan je 0.

Sada ćemo odgovoriti na drugo pitanje. Sve ukazuje na to kako su reverzibilne strukture „lepše” od nereverzibilnih. Naime, prve imaju svojstvo CSB za kondenzacije, što je svakako vrlina, dok druge to, u opštem slučaju nemaju (iako postoje i nereverzibilne strukture koje imaju svojstvo CSB za kondenzacije, tzv. slabo reverzibilne strukture). Zatim, ako posmatramo topološke prostore, klasa reverzibilnih prostora sadrži takve lepe predstavnike kao što su euklidski prostori i kompaktni Hausdorffovi prostori. Klasa reverzibilnih binarnih struktura takođe sadrži lepe predstavnike kao što su jako reverzibilne strukture (kod kojih je svaka bijekcija automorfizam, videti [16, str. 251]), turniri i specijalno, linearna uređenja. Za kraj, sa stanovišta teorije mere, čini se da reverzibilnih struktura ima manje.

Primetimo kako su kompaktni Hausdorffovi topološki prostori ekstremne strukture. Naime, kompaktne Hausdorffove topologije minimalne su među svim Hausdorffovim topologijama, ili ekvivalentno, maksimalne su među svim kompaktnim topologijama (videti [12, str. 126]). U potrazi za klasama reverzibilnih relacijskih struktura, detaljno ćemo istražiti ovaj fenomen kod $L_{\infty\omega}$-definabilnih interpretacija, i na taj način detektovaćemo mnoštvo primera reverzibilnih relacijskih struktura.

Što se tiče kondenzacionog pretporetka $\preccurlyeq_c$, u literaturi nismo našli rezultate koji su direktno vezani na tu temu (sa izuzetkom nabrojanih radova u kojima se spominje kondenzaciona ekvivalencija $\sim_c := \preccurlyeq_c \cap \succcurlyeq_c$). Što je delom zanimljivo i zagonetno, jer je „sestrinsko preduređenje" $\hookrightarrow$, nazovimo ga, *utopivi pretporedak*, naširoko i obimno istraženo, počev od Fraïsséa, preko Hagendorfa, Juliena, Pouzeta, Lavera i drugih (videti [16]). Sve je počelo neposredno nakon 2. svetskog rata, kad je Fraïssé dokazao niz zanimljivih teorema vezanih za tu problematiku, i takođe postavio niz hipoteza, koje su ostale zapamćene u literaturi kao *Fraïsséove hipoteze.* Sledi najpoznatija:

Fraïsséova hipoteza. $(*)$ ([15, 77]) U preduređenju $\langle \mathrm{LO}_\omega, \hookrightarrow\rangle$ ne postoje ni beskonačni opadajući lanci, ni beskonačni antilanci.

Pri tome, LO_ω označava klasu svih prebrojivih linearnih uređenja. Mnoge Fraïsséove hipoteze dokazane su od strane drugih matematičara (npr. $(*)$ je dokazao Laver [62]), neke su dobile kontraprimere (videti [24]), ali, u svakom slučaju, nesumnjivo je da je Fraïssé inspirisao mnoge matematičare da krenu putem koji je utabao. Da se tim putem ide i danas, svedoči i nedavni rezultat Laflamma, Pouzeta i Woodrowa ([60]) - karakterizacija rasutih linearnih uređenja koja imaju svojstvo CSB za utapanja, a da se i naš put ukrstio s tim putem, svedoči teorema 10.4.4.

Struktura disertacije

Neka je X neprazan skup i L neprazan relacijski jezik. Prvi cilj ove disertacije je da se istraži kondenzacioni pretporedak $\langle \mathrm{Int}_L(X), \preccurlyeq_c\rangle$, kao i njegov antisimetrični količnik, kondenzacioni poredak $\langle \mathrm{Int}_L(X)/\sim_c, \leq_c\rangle$, gde je $\sim_c$ relacija kondenzacione ekvivalencije na skupu $\mathrm{Int}_L(X) = \prod_{i\in I} P(X^{n_i})$ svih interpretacija jezika L nad domenom X. Pri tome, naglasak će biti stavljen na kondenzaciona svojstva L-struktura, i na odgovarajuće particije kondenzacionog poretka. U slučaju binarnog jezika $L = L_b$, naglasak će biti stavljen na istraživanje određenih poduređenja kondenzacionog poretka, kao i njihovih konveksnih zatvorenja.

Drugi cilj ove disertacije je da se istraži relacija kondenzacione ekvivalencije $\sim_c$. Naglasak će biti stavljen na upoređivanje relacije $\sim_c$ s raznim drugim sličnostima L-struktura iz [31]. U slučaju prebrojivih struktura prebrojivih jezika, naglasak će biti na ispitivanju deskriptivne složenosti odgovarajućih klasa ekvivalencije i relacije $\sim_c$, kao i veličine tih klasa.

Treći cilj ove disertacije je da se istraži fenomen reverzibilnosti L-struktura, kao i varijacija reverzibilnosti, i da se detektuje što više relevantnih klasa reverzibilnih L-struktura. Pri tome, posebno će biti proučene strukture koje su ekstremni elementi $L_{\infty\omega}$-definabilnih klasa, pri određenim sintaktičkim ograničenjima, a posebno nepovezane L_b-strukture.

Prvi deo

Disertacija je podeljena na tri dela. U prvom, uvodnom delu, nalazi se pregled matematičkih metoda i tehnika, koje će biti korišćene u drugom i trećem delu, kao i pregled relevantnih rezultata iz literature koji su usko vezani za temu disertacije. U ovom delu uglavnom nema originalnih tvrđenja (s nekoliko izuzetaka). Čitalac može preskočiti ovaj deo, i kasnije mu se, po potrebi, vraćati.

U prvoj glavi nalazi se pregled nekih relevantnih klasa relacijskih struktura, kao i pregled morfizama između tih struktura. U odeljku 1.1 dat je pregled definicija i karakterizacija morfizama L-struktura. Poseban naglasak stavljen je na rigidne, monomorfne i homogene strukture. U odeljku 1.2 dat je pregled definicija i tvrđenja vezanih za parcijalna uređenja i preduređenja. Poseban naglasak stavljen je na pojmove separativne modifikacije i separativnog količnika parcijalnog uređenja. U odeljku 1.3 dat je pregled definicija i tvrđenja vezanih za linearna uređenja (lance), s posebnim naglaskom na konačne kondenzacije lanaca, na Fraïsséovu hipotezu i na Laverov dokaz te hipoteze, kao i na Laverovu dekompoziciju rasutih linearnih uređenja. U odeljku 1.4 dat je izbor definicija i tvrđenja vezanih za Booleove algebre, s posebnim naglaskom na Booleovo kompletiranje parcijalnog uređenja.

U drugoj glavi data su neka tvrđenja iz teorije brojeva i teorije grafova koja se koriste u drugom i trećem delu. Takođe, uveden je pojam povezanosti L_b-struktura, koji igra ključnu ulogu u trećem delu. U odeljku 2.1 uveden je pojam nezavisnog skupa $K \subseteq \mathbb{N}$ i dokazana su neka njegova svojstva. U odeljku 2.2 naglasak je stavljen na ultrahomogene grafove i turnire, kao i na Ramseyevu teoremu. U odeljku 2.3 date su karakterizacije utapanja i kondenzacija između nepovezanih L_b-struktura, i uvedene su monotone kardinalne invarijante povezanih struktura, koje će odigrati bitnu ulogu u trećem delu.

U trećoj glavi dat je pregled nekih definicija i teorema iz matematičke logike i teorije modela. U odeljku 3.1 definisane su, između ostalog, neke specijalne klase L-formula i data je Lyndonova teorema o čuvanju formula morfizmima. U odeljku 3.2 naglasak je na Łoś-Vaughtovom testu, kao i na elementarnoj ekvivalenciji L-struktura i njenim svojstvima. U odeljku 3.3 date su definicije $L_{\infty\omega}$-formula, kao i nekih specijalnih klasa $L_{\infty\omega}$-formula. Definicije su propraćene nekim tvrđenjima, koja su analogna odgovarajućim tvrđenjima iz logike prvog reda.

U četvrtoj glavi dat je pregled odabranih rezultata iz deskriptivne teorije skupova. U odeljku 4.1 naglasak je stavljen na razne Hipoteze Kontinuuma koje važe u poljskim prostorima. U odeljku 4.2 predstavljena je

Borelova hijerarhija, a u odeljku 4.3 projektivna hijerarhija u poljskim prostorima. Navedena su i osnovna svojstva analitičkih skupova, s naglaskom na Hipotezu Kontinuuma.

U petoj glavi navedeni su rezultati iz literature koji su usko vezani za temu, i na koje se disertacija često direktno nadovezuje. U odeljku 5.1 nalaze se rezultati na temu kondenzacione ekvivalencije i reverzibilnosti (kako topoloških prostora tako i relacijskih struktura), izloženi hronološki s referencama. U odeljku 5.2 date su Scottova teorema i Lopez-Escobarova teorema za prebrojive L-strukture prebrojivih jezika, iz kojih sledi postojanje tzv. Scottove rečenice za spomenute strukture. U odeljku 5.3 navedeni su rezultati na temu poseta kopija, struktura koje su minimalne, odnosno maksimalne za kopije, kao i glavni Kurilićev rezultat iz [31], u kojem je data hijerarhija raznih sličnosti relacijskih struktura.

Drugi deo

U drugom delu disertacije nalaze se originalni rezultati na temu kondenzacionog pretporetka, kondenzacione ekvivalencije i kondenzacionog poretka.

U šestoj glavi nalaze se rezultati vezani za kondenzacioni poredak ([47]). U odeljku 6.1 dokazana su mnogobrojna svojstva kondenzacionog pretporetka i kondenzacione ekvivalencije. Između ostalog, klasa kondenzaciono ekvivalentnih interpretacija je konveksno zatvorenje klase izomorfnih interpretacija u Booleovoj mreži $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$. U odeljku 6.2 pokazano je kako nam kondenzaciona svojstva L-struktura pružaju odgovarajuće particije kondenzacionog poretka, i, za slučaj $L = L_b$, na taj način je data jedna gruba ali informativna particija kondenzacionog poretka na tri konveksna dela, od kojih su dva izomorfna. U odeljku 6.3 uvedena su i istražena pogodna poduređenja kondenzacionog poretka, kao i njihova konveksna zatvorenja. Pri tome, reverzibilnost i varijacije reverzibilnosti igraju istaknutu ulogu. U ovom odeljku ima dosta otvorenih pitanja.

U sedmoj glavi nalaze se rezultati na temu kondenzacione ekvivalencije ([48, 46]). U odeljku 7.1 dokazano je, za slučaj prebrojivih struktura prebrojivih jezika, da je klasa kondenzaciono ekvivalentnih interpretacija analitički skup, da je iste kardinalnosti kao i klasa izomorfnih interpretacija, i da je to neki kardinal iz $\{1, \omega, \mathfrak{c}\}$. U slučaju kad je to ω, interpretacija je reverzibilna. U odeljku 7.2 kondenzaciona ekvivalencija upoređena je s drugim sličnostima iz [31], za slučaj beskonačnih struktura neunarnih jezika. U odeljku 7.3 razmotreno je šta se događa u slučaju konačnih ili unarnih struktura.

Treći deo

U trećem i najvećem delu disertacije, istražena je reverzibilnost relacijskih struktura, kao i varijacije reverzibilnosti. Skoro svi rezultati u ovom delu su originalni.

U osmoj glavi istražene su tri varijacije reverzibilnosti, u odeljku 8.1 jaka reverzibilnost, u odeljku 8.2 reverzibilnost, a u odeljku 8.3 slaba reverzibilnost ([55]).

U devetoj glavi istražena je reverzibilnost ekstremnih struktura ([52]). U odeljku 9.1 pokazano je kako su ekstremne interpretacije u $L_{\infty\omega}$-definabilnim skupovima interpretacija reverzibilne. U odeljku 9.2 data su neka sintaktička ograničenja koja obezbeđuju da $L_{\infty\omega}$-definabilan skup interpretacija ima maksimalne, odnosno minimalne elemente. U odeljku 9.3, uopštenjem koncepta univerzalnih klasa iz [85, 87, 14], pokazano je kako nam zabranjivanje proizvoljnog broja konačnih podstruktura obezbeđuje veliki zoološki vrt reverzibilnih struktura. Međutim, jedna stvar je detektovati da ekstremne interpretacije postoje, a druga stvar je naći (odnosno okarakterisati) ih. Neka tvrđenja tog tipa nalaze se u ovom odeljku.

U desetoj i najvećoj glavi od svih, nalaze se rezultati na temu reverzibilnih nepovezanih L_b-struktura. U odeljku 10.1 dato je nekoliko potrebnih i dovoljnih uslova da nepovezana binarna struktura s reverzibilnim komponentama bude reverzibilna ([50]). Takođe, dati su ekvivalenti reverzibilnosti u nekim specijalnim klasama nepovezanih struktura, kao i bezbroj dovoljnih uslova za reverzibilnost takvih struktura ([54]). Koncept funkcija monotonih u odnosu na monomorfizme igra istaknutu ulogu u ovom odeljku ([51]). U odeljku 10.2 data je karakterizacija reverzibilnih nizova kardinala, i specijalno, reverzibilnih nizova prirodnih brojeva. Takođe, pokazano je kako je skup svih reverzibilnih funkcija, u Baireovom prostoru ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$, gust $F_{\sigma\delta\sigma}$-skup kardinalnosti $\mathfrak{c}$. U odeljku 10.3 data je karakterizacija reverzibilnih relacija ekvivalencije i sličnih struktura (tzv. RFM strukture) ([53]). U odeljku 10.4 data je karakterizacija reverzibilnih disjunktnih unija CSB lanaca graničnog tipa, i još je data karakterizacija reverzibilnih disjunktnih unija ordinala i inverznih ordinala ([49]).

U disertaciji se nalazi 11 ilustracija.

Zahvalnice

U kabinetu mog mentora profesora Miloša Kurilića nalazi se vitrina sa uredno složenim fasciklama u kojima se nalaze njegovi rukopisi, od kojih su neki objavljeni, a neki još nisu. Svakome ko baci pogled na tu vitrinu, upašće u oko jedna bela fascikla, dvostruko deblja od ostalih. U toj fascikli nalaze se njegovi rukopisi na temu kondenzacionog poretka, kondenzacione ekvivalencije i reverzibilnosti topoloških prostora, svi još neobjavljeni. U leto 2012. godine, nakon povratka iz Amerike, gde je, na konferenciji u gradu Lawrence, Kansas, držao predavanje na temu spomenute bele fascikle, rekao mi je: „Položio si pola ispita na doktorskim studijama, naučio si puno novog, vreme je da počneš da radiš nešto. Pogledaj ovu belu fasciklu. Sve to može da se radi i s relacijskim strukturama". Zajedno smo sišli u matematički rudnik i nakon 5 godina provedenih u njemu, imamo pregršt novih i zanimljivih rezultata, od kojih je jedan deo ugrađen u ovu disertaciju, a jedan deo se nalazi u našim nepublikovanim rukopisima (videti spisak literature na kraju). Tokom te saradnje, profesor Kurilić pokazao se kao vrhunski matematičar, nesebičan i požrtvovan mentor, i kao odličan pedagog. Ovom prilikom želim da mu se zahvalim na svemu što me je naučio, i za svu pomoć koju mi je pružio. Takođe, ovom prilikom želim da se zahvalim i ostalim članovima komisije, profesorici Rozáliji Madarász-Szilágyi, akademiku Stevi Todorčeviću, profesoru Predragu Tanoviću i profesoru Borisu Šobotu, na utrošenom vremenu i na konstruktivnim sugestijama koje su poboljšale izlaganje materije u disertaciji.

Zahvaljujem se i akademiku Olgi Hadžić na najboljim predavanjima iz matematike koja sam ikad slušao, i na velikoj podršci i pomoći koju mi je pružala tokom života. Zahvaljujem se i profesorici Ljiljani Gajić na dugogodišnjoj lepoj saradnji i prijateljstvu, kao i na mnogim satima provedenim u opuštenom razgovoru o matematici, i o životu. Zahvaljujem se i profesoru Petru Markoviću na mnogim zanimljivim matematičkim rezultatima za koje sam od njega saznao, na međunarodnim takmičenjima na koja me je kao studenta vodio, i još mu se zahvaljujem što mi je preporučio mentora i upoznao me s njim. Zahvaljujem se i profesorici Ljiljani Cvetković i profesoru Siniši Crvenkoviću što su mi tokom studentskih dana produbili ljubav prema matematici i razvili matematičku radoznalost. Mom drugu Marku Saviću zahvalnost dugujem na tehničkoj pomoći prilikom izrade ove disertacije.

I na kraju, najveću zahvalnost dugujem svojim roditeljima, Milanu i Senki, za sve strpljenje i podršku koju su mi u životu pružili.

Novi Sad, april 2018. godine Nenad Morača

Oznake

Pojmovi koje označavaju navedeni simboli, ne definišu se u daljnjem tekstu. Simboli, uvedeni u disertaciji, navedeni su u Indeksu simbola na kraju disertacije.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ - skupovi, redom, prirodnih, celih, racionalnih, iracionalnih, realnih i kompleksnih brojeva

$n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ - prirodan broj (konačan ordinal)

$\omega = \{0\} \cup \mathbb{N}$ - najmanji beskonačan ordinal

Ord, Card - klase, redom, ordinala i kardinala

Lim, Succ - klase, redom, graničnih ordinala i ordinala sledbenika

$\mathrm{Lim}_0 := \mathrm{Lim} \cup \{0\}$ - klasa graničnih ordinala s nulom

$A \dot{\cup} B$ - disjunktna unija skupova A i B

$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ - simetrična razlika skupova A i B

$A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$ - pravi podskup

$p \veebar q$ - isključiva disjunkcija iskaza p i q

$P(X)$ - partitivni skup skupa X

$|X|$ - kardinalnost skupa X

$[X]^\kappa := \{A \subseteq X : |A| = \kappa\}$, za $\kappa \in \mathrm{Card}$

$[X]^{<\kappa} := \{A \subseteq X : |A| < \kappa\}$, za $\kappa \in \mathrm{Card}$

$[X]^{\kappa,\lambda} := \{A \subseteq X : |A| = \kappa \wedge |X \setminus A| = \lambda\}$, za $\kappa, \lambda \in \mathrm{Card}$

$[X]^{<\kappa,\lambda} := \{A \subseteq X : |A| < \kappa \wedge |X \setminus A| = \lambda\}$, za $\kappa, \lambda \in \mathrm{Card}$

$[X]^{\kappa,<\lambda} := \{A \subseteq X : |A| = \kappa \wedge |X \setminus A| < \lambda\}$, za $\kappa, \lambda \in \mathrm{Card}$

i sl.

${}^X Y := \{f \mid f : X \to Y\}$ - skup funkcija s domenom X i kodomenom Y

$\mathrm{Inj}(X, Y)$ - skup svih injekcija iz ${}^X Y$

$\mathrm{Sur}(X, Y)$ - skup svih surjekcija iz ${}^X Y$

$\mathrm{Bij}(X,Y) := \mathrm{Inj}(X,Y) \cap \mathrm{Sur}(X,Y)$ - skup svih bijekcija iz ${}^XY$

$\mathrm{Sym}(X) := \mathrm{Bij}(X)$ - simetrična grupa[1]

$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ - uređena n-torka

$\langle x_i : i \in I \rangle$ - funkcija s domenom I, $x(i) = x_i$

$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n := \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle : \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}\ \ x_k \in X_k\}$ - Dekartov proizvod konačne familije skupova $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$

$\prod_{i \in I} X_i := \{\langle x_i : i \in I \rangle : \forall i \in I\ \ x_i \in X_i\}$ - Dekartov proizvod proizvoljne familije skupova $\{X_i : i \in I\}$

$X^n := \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n}$ - Dekartov n-ti stepen skupa X, za $n \in \mathbb{N}$

${}^nX := \{\langle x_i : i \in n \rangle : \forall i \in n\ \ x_i \in X\}$ - skup svih n-nizova (to nisu n-torke) u skupu X, za $n \in \omega$; ${}^0X = \{\emptyset\}$

${}^{<\omega}X := \bigcup_{n \in \omega} {}^nX$ - skup svih konačnih nizova u skupu X

${}^{\omega}X$ - skup svih ω-nizova u skupu X

$f^n := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n}$ - kompozicija funkcije $f : X \to X$, $f^n : X \to X$

$f^n := \underbrace{f \times f \times \cdots \times f}_{n}$ - Dekartov n-ti stepen[2] funkcije $f : X \to Y$, $f^n : X^n \to Y^n$

$f[A] := \{f(a) : a \in A\}$ - direktna slika skupa $A \subseteq X$ funkcijom $f : X \to Y$

$f^{-1}[B] := \{a \in X : f(a) \in B\}$ - inverzna slika skupa $B \subseteq Y$ funkcijom $f : X \to Y$

$f \restriction_A : A \to Y$ - restrikcija funkcije $f : X \to Y$ na skup $A \subseteq X$

$f|_A : A \to f[A]$ - surjektivna restrikcija funkcije $f : X \to Y$ na skup $A \subseteq X$

---

[1] Umesto $\mathrm{Inj}(X,X)$ pisaćemo kraće $\mathrm{Inj}(X)$, umesto $\mathrm{Sur}(X,X)$ pisaćemo kraće $\mathrm{Sur}(X)$, itd.

[2] U vezi sa oznakom f^n treba biti pažljiv i pratiti kontekst, jer postoji opasnost da dođe do zabune.

Deo I

Uvod

Glava 1

Relacijske strukture

1.1 Morfizmi relacijskih struktura

Neka je $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ neprazan *relacijski jezik*, gde je $\mathrm{ar}(R_i) = n_i \in \mathbb{N}$, za $i \in I$. Sa Mod_L obeležavaćemo klasu svih L-struktura. Za neprazan skup X, sa $\mathrm{Mod}_L(X) := \{\mathbb{X} \in \mathrm{Mod}_L : \mathrm{dom}(\mathbb{X}) = X\}$ obeležavaćemo skup svih L-struktura s domenom X, a sa

$$\mathrm{Int}_L(X) := \prod_{i\in I} P(X^{n_i})$$

skup svih *interpretacija jezika L nad domenom X*. Dakle, $\mathrm{Mod}_L(X) = \{\langle X, \rho\rangle : \rho \in \mathrm{Int}_L(X)\}$. Ako malo zloupotrebimo notaciju i, za dva elementa $\rho = \langle \rho_i : i \in I\rangle$ i $\sigma = \langle \sigma_i : i \in I\rangle$ iz $\mathrm{Int}_L(X)$, definišemo da je

$$\rho \subseteq \sigma \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall i \in I \;\; \rho_i \subseteq \sigma_i,$$

tada je $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle$ kompletna Booleova mreža. Ako još definišemo da je:

$$\rho \cap \sigma := \langle \rho_i \cap \sigma_i : i \in I\rangle,$$

$$\rho \cup \sigma := \langle \rho_i \cup \sigma_i : i \in I\rangle,$$

$$\rho^c := \langle X^{n_i} \setminus \rho_i : i \in I\rangle,$$

$$\emptyset := \langle \emptyset : i \in I\rangle, \quad 1 := \langle X^{n_i} : i \in I\rangle,$$

dobijamo odgovarajuću kompletnu Booleovu algebru $\langle \mathrm{Int}_L(X), \cap, \cup, \cdot^c, \emptyset, 1\rangle$, u kojoj su beskonačne operacije date sa $\bigcap_{j\in J} \rho^j := \langle \bigcap_{j\in J} \rho_i^j : i \in I\rangle$ i $\bigcup_{j\in J} \rho^j := \langle \bigcup_{j\in J} \rho_i^j : i \in I\rangle$. Algebra $\mathrm{Int}_L(X)$ je atomna,

$$\mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) = \bigcup_{i\in I} \left({}^{I\setminus\{i\}}\{\emptyset\} \times [X^{n_i}]^1 \right) \subseteq \prod_{i\in I} [X^{n_i}]^{\leq 1},$$

i, za beskonačan skup X, imamo da je $|\operatorname{At}(\operatorname{Int}_L(X)^+)| = |I| \cdot |X|$, što znači da je $\operatorname{Int}_L(X) \cong P(\kappa)$, gde je $\kappa = |I| \cdot |X|$. Specijalno, ako je L najviše prebrojiv jezik, tada je $\operatorname{Int}_L(\omega) \cong P(\omega)$.

Neka su $X, Y \neq \emptyset$, $f : X \to Y$ i neka je $n \geq 2$. *Dekartov n-ti stepen preslikavanja* f je preslikavanje $f^n = \underbrace{f \times f \times \cdots \times f}_{n} : X^n \to Y^n$ dato sa

$$f^n(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle) := \langle f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \rangle,$$

za svako $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in X^n$. Dokazi narednih tvrđenja su direktni, tako da ćemo ih izostaviti.

Tvrđenje 1.1.1 *Ako je $f : X \to Y$ i $n \geq 2$, tada imamo:*
(a) f je injekcija akko f^n je injekcija;
(b) f je surjekcija akko f^n je surjekcija;
(c) f je bijekcija akko f^n je bijekcija. Tada je $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$;
(d) Ako $g : Y \to Z$, tada je $(g \circ f)^n = g^n \circ f^n$.

Ako je $f : X \to Y$ i $\rho = \langle \rho_i : i \in I \rangle \in \operatorname{Int}_L(X)$, tada, za $i \in I$, imamo da je $\rho_i \subseteq X^{n_i}$ i $f^{n_i} : X^{n_i} \to Y^{n_i}$. Dakle, direktna slika skupa ρ_i, $f^{n_i}[\rho_i]$, je podskup skupa Y^{n_i}. Slično, ako $\sigma = \langle \sigma_i : i \in I \rangle \in \operatorname{Int}_L(Y)$, tada, za $i \in I$, imamo da je $\sigma_i \subseteq Y^{n_i}$, i inverzna slika skupa σ_i, $(f^{n_i})^{-1}[\sigma_i]$, je podskup skupa X^{n_i}. U skladu s tim, definisaćemo interpretacije $f[\rho] \in \operatorname{Int}_L(Y)$ i $f^{-1}[\sigma] \in \operatorname{Int}_L(X)$ na sledeći način:

$$f[\rho] := \langle f^{n_i}[\rho_i] : i \in I \rangle \quad \text{i} \quad f^{-1}[\sigma] := \langle (f^{n_i})^{-1}[\sigma_i] : i \in I \rangle.$$

Tvrđenje 1.1.2 *Ako je $f : X \to Y$, i ako $\rho, \rho', \rho^j \in \operatorname{Int}_L(X)$ i $\sigma, \sigma', \sigma^j \in \operatorname{Int}_L(Y)$, za $j \in J$, tada imamo:*
(a) $\rho \subseteq \rho' \Rightarrow f[\rho] \subseteq f[\rho']$, i „$\Leftarrow$" važi ako je f injekcija;
(b) $\sigma \subseteq \sigma' \Rightarrow f^{-1}[\sigma] \subseteq f^{-1}[\sigma']$, i „$\Leftarrow$" važi ako je f surjekcija;
(c) $\rho \subseteq f^{-1}[f[\rho]]$, i „$=$" važi ako je f injekcija;
(d) $f[f^{-1}[\sigma]] = \sigma \cap f[1]$, odakle je $f[f^{-1}[\sigma]] = \sigma$ ako je f surjekcija;
(e) $f[\bigcup_{j \in J} \rho^j] = \bigcup_{j \in J} f[\rho^j]$;
(f) $f[\bigcap_{j \in J} \rho^j] \subseteq \bigcap_{j \in J} f[\rho^j]$, i „$=$" važi ako je f injekcija;
(g) $f^{-1}[\bigcup_{j \in J} \sigma^j] = \bigcup_{j \in J} f^{-1}[\sigma^j]$;
(h) $f^{-1}[\bigcap_{j \in J} \sigma^j] = \bigcap_{j \in J} f^{-1}[\sigma^j]$;
(i) $f^{-1}[\rho^c] = (f^{-1}[\rho])^c$;
(j) Ako $g : Y \to Z$, tada je $(g \circ f)[\rho] = g[f[\rho]]$.

Neka su $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathrm{Mod}_L$ dve L-strukture, gde je $\mathbb{X} = \langle X, \rho \rangle$ i $\mathbb{Y} = \langle Y, \sigma \rangle$. Ako, za $\bar{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, uvedemo oznaku $f\bar{x} := \langle f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \rangle$, tada imamo da je preslikavanje $f : X \to Y$:

- *homomorfizam* iz $\mathbb{X}$ u $\mathbb{Y}$ akko za svako $i \in I$ važi
$$\forall \bar{x} \in X^{n_i} \ \ (\bar{x} \in \rho_i \Rightarrow f\bar{x} \in \sigma_i);$$
- *jak homomorfizam* iz $\mathbb{X}$ u $\mathbb{Y}$ akko za svako $i \in I$ važi
$$\forall \bar{x} \in X^{n_i} \ \ (\bar{x} \in \rho_i \Leftrightarrow f\bar{x} \in \sigma_i);$$
- *anti-homomorfizam* iz $\mathbb{X}$ u $\mathbb{Y}$ akko za svako $i \in I$ važi
$$\forall \bar{x} \in X^{n_i} \ \ (\bar{x} \notin \rho_i \Rightarrow f\bar{x} \notin \sigma_i);$$
- *monomorfizam* iz $\mathbb{X}$ u $\mathbb{Y}$ akko je injektivan homomorfizam; *utapanje* iz $\mathbb{X}$ u $\mathbb{Y}$ akko je injektivan jak homomorfizam; *epimorizam* iz $\mathbb{X}$ na $\mathbb{Y}$ akko je surjektivan homomorfizam; *kondenzacija* iz $\mathbb{X}$ na $\mathbb{Y}$ akko je bijektivan homomorfizam; *izomorfizam* iz $\mathbb{X}$ na $\mathbb{Y}$ akko je bijektivan jak homomorfizam.

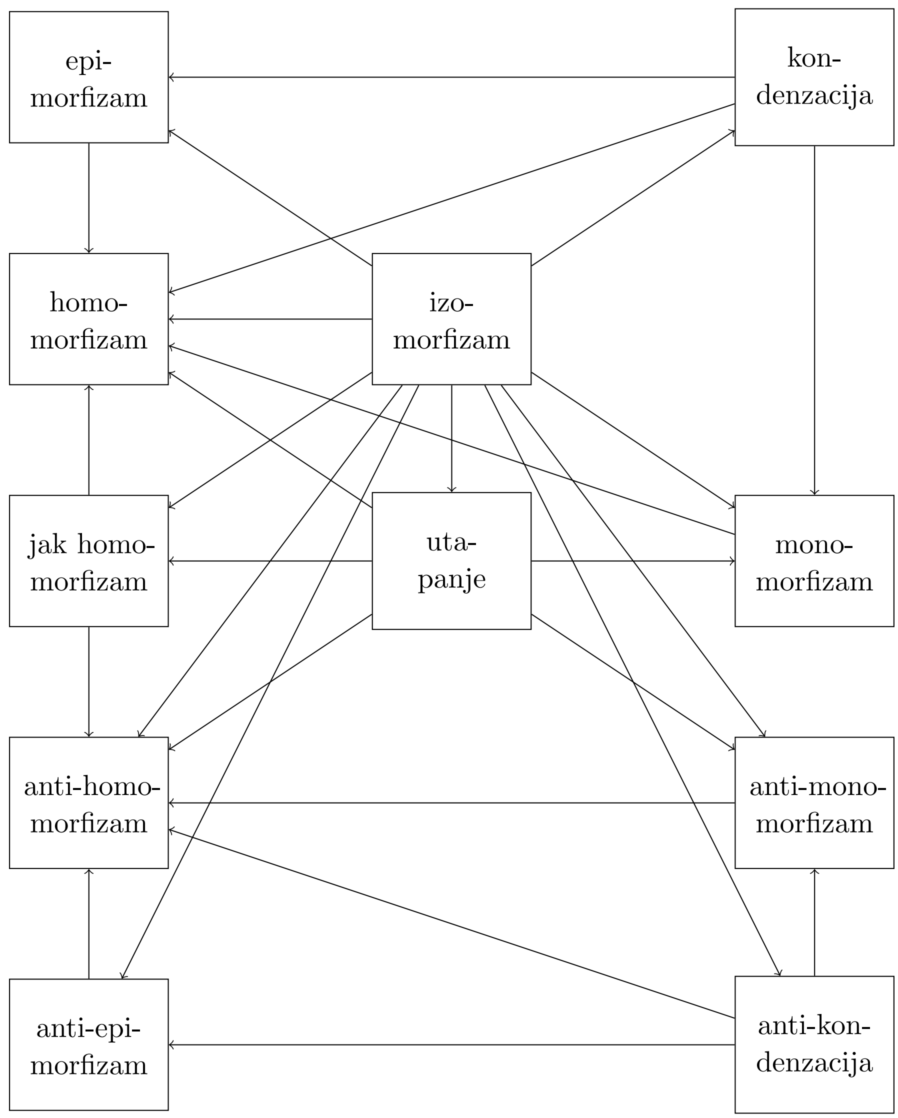
Homomorfizam strukture $\mathbb{X}$ u nju samu naziva se *endomorfizam*. Izomorfizam strukture $\mathbb{X}$ na nju samu naziva se *automorfizam*. Ako je $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ utapanje, pisaćemo $f : \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$. Sa $\mathrm{Hom}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\mathrm{SHom}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\mathrm{AHom}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\mathrm{Mono}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\mathrm{Epi}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\mathrm{Emb}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ i $\mathrm{Iso}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ obeležavaćemo redom skupove svih homomorfizama, jakih homomorfizama, anti-homomorfizama, monomorfizama, epimorfizama, kondenzacija, utapanja i izomorfizama $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$. Skupove $\mathrm{Hom}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$, $\mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$, $\mathrm{Emb}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ i $\mathrm{Iso}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ kraće ćemo označavati sa $\mathrm{End}(\mathbb{X})$, $\mathrm{Cond}(\mathbb{X})$, $\mathrm{Emb}(\mathbb{X})$ i $\mathrm{Aut}(\mathbb{X})$. Ako se ograničimo na skup $\mathrm{Mod}_L(X)$ L-struktura sa domenom X, umesto $\mathrm{End}(\langle X, \rho \rangle)$ pisaćemo samo $\mathrm{End}(\rho)$, umesto $\mathrm{Hom}(\langle X, \rho, \rangle, \langle X, \sigma \rangle)$ pisaćemo samo $\mathrm{Hom}(\rho, \sigma)$, i slično za druge skupove morfizama. Iz definicije direktno sledi da je

$$\mathrm{Hom}(\langle X, \rho \rangle, \langle Y, \sigma \rangle) = \textstyle\bigcap_{i \in I} \mathrm{Hom}(\langle X, \rho_i \rangle, \langle Y, \sigma_i \rangle),$$

$$\mathrm{End}(\langle X, \rho \rangle) = \textstyle\bigcap_{i \in I} \mathrm{End}(\langle X, \rho_i \rangle),$$

i slično za ostale skupove morfizama.

Dijagram na slici 1.1 prikazuje hijerarhiju morfizama L-struktura u opštem slučaju (za proizvoljan jezik L i za proizvoljne domene X i Y).



Slika 1.1: Dijagram hijerarhije morfizama L-struktura.

Tvrđenje 1.1.3 *Ako su X i Y neprazni skupovi, $\rho = \langle \rho_i : i \in I\rangle \in \mathrm{Int}_L(X)$ i $\sigma = \langle \sigma_i : i \in I\rangle \in \mathrm{Int}_L(Y)$, i ako su $\mathbb{X} = \langle X, \rho\rangle$ i $\mathbb{Y} = \langle Y, \sigma\rangle$ odgovarajuće L-strukture, onda imamo:*

(a) $\mathrm{Hom}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \{f \in {}^X Y : f[\rho] \subseteq \sigma\}$
$= \{f \in {}^X Y : \rho \subseteq f^{-1}[\sigma]\}$;

(b) $\mathrm{SHom}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \{f \in {}^X Y : \rho = f^{-1}[\sigma]\}$;

(c) $\mathrm{AHom}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \{f \in {}^X Y : f^{-1}[\sigma] \subseteq \rho\}$;

(d) $\mathrm{Mono}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \{f \in \mathrm{Inj}(X, Y) : f[\rho] \subseteq \sigma\}$
$= \{f \in \mathrm{Inj}(X, Y) : \rho \subseteq f^{-1}[\sigma]\}$;

(e) $\mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \{f \in \mathrm{Bij}(X, Y) : f[\rho] \subseteq \sigma\}$
$= \{f \in \mathrm{Bij}(X, Y) : \rho \subseteq f^{-1}[\sigma]\}$;

(f) $\mathrm{Emb}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \{f \in \mathrm{Inj}(X, Y) : \rho = f^{-1}[\sigma]\}$
$= \{f \in \mathrm{Inj}(X, Y) : f[\rho] = \sigma \cap f[1]\}$;

(g) $\mathrm{Iso}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \{f \in \mathrm{Bij}(X, Y) : \rho = f^{-1}[\sigma]\}$
$= \{f \in \mathrm{Bij}(X, Y) : f[\rho] = \sigma\}$.

Sa $\mathbb{X}^c := \langle X, \rho^c\rangle$ obeležavaćemo *komplement L-strukture* $\mathbb{X} = \langle X, \rho\rangle$.

Tvrđenje 1.1.4 *Ako su X i Y neprazni skupovi, $\rho = \langle \rho_i : i \in I\rangle \in \mathrm{Int}_L(X)$ i $\sigma = \langle \sigma_i : i \in I\rangle \in \mathrm{Int}_L(Y)$, onda imamo:*

(a) $\mathrm{AHom}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{X}^c, \mathbb{Y}^c)$;

(b) $\mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \{f \in \mathrm{Bij}(X, Y) : f^{-1} \in \mathrm{Cond}(\mathbb{Y}^c, \mathbb{X}^c)\}$
$= \{f \in \mathrm{Bij}(X, Y) : f^{-1} \in \mathrm{AHom}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})\}$;

(c) $\mathrm{Iso}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \mathrm{Iso}(\mathbb{X}^c, \mathbb{Y}^c) = \{f \in \mathrm{Bij}(X, Y) : f^{-1} \in \mathrm{Iso}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})\}$
$= \{f \in \mathrm{Bij}(X, Y) : f \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \wedge f^{-1} \in \mathrm{Cond}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})\}$.

L-strukture $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathrm{Mod}_L$ su *izomorfne* akko postoji izomorfizam $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$. Tada pišemo $\mathbb{X} \cong \mathbb{Y}$ (ili $\mathbb{X} \cong_f \mathbb{Y}$, ukoliko želimo da naglasimo funkciju f). *Tip* L-strukture $\mathbb{X}$ je klasa

$$\mathrm{type}(\mathbb{X}) := [\mathbb{X}]_{\cong} = \{\mathbb{Y} \in \mathrm{Mod}_L : \mathbb{X} \cong \mathbb{Y}\}.$$

L-strukture $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathrm{Mod}_L$ su *ekvimorfne* (ili *bi-utopive*) akko postoje utapanja $g : \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$ i $h : \mathbb{Y} \hookrightarrow \mathbb{X}$. Tada pišemo $\mathbb{X} \rightleftarrows \mathbb{Y}$. Jasno je da $\mathbb{X} \cong \mathbb{Y}$ implicira $\mathbb{X} \rightleftarrows \mathbb{Y}$, odakle sledi da je $[\mathbb{X}]_{\cong} \subseteq [\mathbb{X}]_{\rightleftarrows}$, za svako $\mathbb{X} \in \mathrm{Mod}_L$, gde je $[\mathbb{X}]_{\rightleftarrows} := \{\mathbb{Y} \in \mathrm{Mod}_L : \mathbb{X} \rightleftarrows \mathbb{Y}\}$. Ako se ograničimo na skup $\mathrm{Mod}_L(X)$ L-struktura sa istim domenom X, umesto $\langle X, \rho\rangle \cong \langle X, \sigma\rangle$ i $\langle X, \rho\rangle \rightleftarrows \langle X, \sigma\rangle$, pisaćemo samo $\rho \cong \sigma$ i $\rho \rightleftarrows \sigma$. Na taj način dobijamo dve relacije ekvivalencije na skupu $\mathrm{Int}_L(X)$. Odgovarajuće klase ekvivalencije, za $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$, obeležavaćemo sa $[\rho]_{\cong}$ i $[\rho]_{\rightleftarrows}$.

Tvrđenje 1.1.5 *Neka je X neprazan skup a L relacijski jezik. Ako $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$, tada imamo:*
(a) $[\rho]_{\cong} = \{f[\rho] : f \in \mathrm{Sym}(X)\} \subseteq \prod_{i\in I}[\rho_i]_{\cong}$;
(b) $[\rho]_{\cong} \subseteq [\rho]_{\rightleftarrows} \subseteq \prod_{i\in I}[\rho_i]_{\rightleftarrows}$.

Dokaz. Sledi iz tvrđenja 1.1.3. □

Rigidne strukture Za L-strukturu $\mathbb{X}$ reći ćemo da je *rigidna* akko je $\mathrm{Aut}(\mathbb{X}) = \{\mathrm{id}_X\}$. Skup rigidnih interpretacija $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$ označavaćemo sa $\mathrm{Rig}_L(X)$. Za L-strukturu $\mathbb{X}$ reći ćemo da je *endo-rigidna* akko je $\mathrm{End}(\mathbb{X}) = \{\mathrm{id}_X\}$. Dobro uređeni skupovi primer su rigidnih binarnih struktura, koje nisu endo-rigidne (za beskonačno X).

Teorema 1.1.6
(a) (Vopěnka, Pultr, Hedrlín [88]) Ako je $\kappa > 0$ proizvoljan kardinal, tada postoji irefleksivna binarna relacija $\rho \subseteq \kappa \times \kappa$ takva da je struktura $\langle \kappa, \rho\rangle$ endo-rigidna;
(b) (Dushnik, Miller [10]) Postoji gust podskup L skupa $\mathbb{R}$, kardinalnosti $\mathfrak{c}$, takav da je linearno uređenje $\langle L, <\rangle$ endo-rigidno.

Monomorfne i homogene strukture Ako $\mathbb{X} = \langle X, \rho\rangle \in \mathrm{Mod}_L$ i ako je $A \subseteq X$, tada ćemo sa $\mathbb{A}$ označavati odgovarajuću podstrukturu $\langle A, \rho\restriction_A\rangle$. Neka $n \in \omega$. L-struktura $\mathbb{X}$ je:

- *n-monomorfna* akko $\forall A, B \in [X]^n \;\; \mathbb{A} \cong \mathbb{B}$;
- *n-homogena* akko $\forall A, B \in [X]^n \;\; \forall \varphi \in \mathrm{Iso}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \;\; \exists f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{X}) \;\; \varphi \subseteq f$;
- *monomorfna* akko je n-monomorfna za svako $n \in \omega$;
- *ultrahomogena* (ili samo *homogena*) akko je n-homogena za sve $n \in \omega$.

Za grupu $\langle \mathrm{Aut}(\mathbb{X}), \circ, \mathrm{id}_X, \cdot^{-1}\rangle$ reći ćemo da je *n-skup-tranzitivna* akko

$$\forall A, B \in [X]^n \;\; \exists f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{X}) \;\; f[A] = B.$$

Tvrđenje 1.1.7 *(videti [16, str. 337]) Neka je L relacijski jezik i $\mathbb{X} \in \mathrm{Mod}_L$ L-struktura. Ako je $n < \min\{\omega, |X| + 1\}$, tada (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c), gde je:*
(a) Struktura $\mathbb{X}$ je n-monomorfna i n-homogena;
(b) Grupa $\mathrm{Aut}(\mathbb{X})$ je n-skup-tranzitivna;
(c) Struktura $\mathbb{X}$ je n-monomorfna.

1.2 Parcijalna uređenja

Neka je X neprazan skup i $L_b = \langle R \rangle$, gde je $\mathrm{ar}(R) = 2$, *binarni jezik*. Relacije $\emptyset$, X^2 i $\Delta_X := \{\langle x, x \rangle : x \in X\}$ nazivaju se, redom, *prazna relacija*, *puna relacija* i *dijagonala na skupu* X. Za binarne relacije $\rho, \sigma \subseteq X^2$ definišemo sledeće operacije:

- $\rho^{-1} := \{\langle y, x \rangle : \langle x, y \rangle \in \rho\}$ je *inverzna relacija* binarne relacije ρ;
- $\rho \circ \sigma := \{\langle x, y \rangle : \exists z\, (\langle x, z \rangle \in \rho \wedge \langle z, y \rangle \in \sigma)\}$ je *kompozicija relacija* ρ i σ.

Binarna relacija $\rho \subseteq X^2$ je: *refleksivna* akko je $\Delta_X \subseteq \rho$, *irefleksivna* akko je $\Delta_X \cap \rho = \emptyset$, *simetrična* akko je $\rho^{-1} = \rho$, *asimetrična* akko je $\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$, *antisimetrična* akko je $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_X$ i *tranzitivna* akko je $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

Za binarnu relaciju $\rho \subseteq X^2$ reći ćemo da je *(parcijalno) uređenje* akko je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Binarna struktura $\langle P, \leq \rangle$, gde je $\leq$ parcijalno uređenje na skupu P, naziva se *parcijalno uređen skup (poset)*.

Neka je $\emptyset \neq A \subseteq P$. Tada za $a \in P$ kažemo da je: *maksimalan element* skupa A akko $a \in A$ i $\forall x \in A\ (a \leq x \Rightarrow a = x)$; *maksimum (najveći element)* skupa A akko $a \in A$ i $\forall x \in A\ x \leq a$; *gornje ograničenje* skupa A akko $\forall x \in A\ x \leq a$; *supremum* skupa $A\,(\sup A)$ akko a je minimum skupa svih gornjih ograničenja skupa A. *Minimalan element* skupa A, *minimum (najmanji element)* skupa A, *donje ograničenje* skupa A i *infimum* skupa $A\,(\inf A)$ definišu se dualno.

Skup svih gornjih (donjih) ograničenja skupa A obeležavamo sa $\mathrm{Sup}\, A$ $(\mathrm{Inf}\, A)$. Skup svih maksimalnih (minimalnih) elemenata skupa A obeležavamo sa $\mathrm{Max}\, A$ $(\mathrm{Min}\, A)$. Ako postoje, maksimum skupa A obeležavamo sa $\max A$, a minimum sa $\min A$. Dakle, $\sup A = \min(\mathrm{Sup}\, A)$ a $\inf A = \max(\mathrm{Inf}\, A)$. Specijalno, $\sup \emptyset = \min P$, a $\inf \emptyset = \max P$.

Ako je $\leq$ relacija poretka na skupu P, i ako važi da je

$$\forall x, y \in P\ (x \leq y \vee y \leq x), \tag{1.1}$$

tada se struktura $\langle P, \leq \rangle$ naziva *linearno (ili totalno) uređen skup*. A ako važi da svaki neprazan podskup skupa P ima minimum, tada se struktura $\langle P, \leq \rangle$ naziva *dobro uređen skup*. Jasno je da je svaki dobro uređen skup totalno uređen. Poset $\langle T, \leq \rangle$ je *drvo* akko je podskup $\{y \in T : y \leq x\}$ dobro uređen relacijom $\leq$, za svako $x \in T$. Poset $\langle P, \leq \rangle$ je *gust* akko

$$\forall p, q \in P\ \ (\, p < q\ \Rightarrow\ \exists r \in P\ \ p < r < q\,),$$

gde je $p < q$ akko je $p \leq q$ i $p \neq q$, za $p, q \in P$.

Teorema 1.2.1 *(videti [23, str. 47]) (ZF) Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

(a) (Aksioma izbora) Ako je $I \neq \emptyset$ i ako su svi skupovi X_i, $i \in I$, neprazni, tada je i njihov Dekartov proizvod $\prod_{i \in I} X_i$ neprazan;

(b) (Zermeloova teorema) Na svakom skupu X postoji dobro uređenje;

(c) (Hausdorffov princip maksimalnosti) Ako je $\mathbb{P}$ parcijalno uređen skup, tada je svaki lanac (totalno uređen podskup) u $\mathbb{P}$ sadržan u nekom maksimalnom lancu;

(d) (Zornova lema) Ako u parcijalno uređenom skupu $\mathbb{P}$ svaki lanac ima gornje ograničenje, tada u $\mathbb{P}$ postoji maksimalan element.

Neka je $\mathbb{P} = \langle P, \leq \rangle$ parcijalno uređen skup i neka je $Q \subseteq P$. Definišimo sledeće skupove:

$$Q{\uparrow} := \{p \in P : \exists q \in Q \;\; q < p\} \quad \text{i} \quad Q{\downarrow} := \{p \in P : \exists q \in Q \;\; p < q\},$$

$$Q{\underline{\uparrow}} := \{p \in P : \exists q \in Q \;\; q \leq p\} \quad \text{i} \quad Q{\overline{\downarrow}} := \{p \in P : \exists q \in Q \;\; p \leq q\}.$$

Umesto $\{p\}{\uparrow}$, $\{p\}{\downarrow}$, $\{p\}{\underline{\uparrow}}$ i $\{p\}{\overline{\downarrow}}$ pisaćemo kraće, redom, $p{\uparrow}$, $p{\downarrow}$, $p{\underline{\uparrow}}$ i $p{\overline{\downarrow}}$. Za neprazan skup $I \subseteq P$ reći ćemo da je *ideal* akko

1. $\forall p, q \in I \;\; \exists r \in I \;\; (p \leq r \wedge q \leq r)$,
2. $\forall p \in I \;\; \forall q \in P \;\; (q \leq p \Rightarrow q \in I)$.

Za neprazan skup $\Phi \subseteq P$ reći ćemo da je *filter* akko

1. $\forall p, q \in \Phi \;\; \exists r \in \Phi \;\; (r \leq p \wedge r \leq q)$,
2. $\forall p \in \Phi \;\; \forall q \in P \;\; (p \leq q \Rightarrow q \in \Phi)$.

Ideal (filter) je *pravi* akko je pravi podskup skupa P. Ideal I je *prost* akko mu je komplement $P \setminus I$ filter. Analogno se definiše i prost filter. Najmanji ideal (filter) koji sadrži $p \in P$ je $p{\overline{\downarrow}}$ (odnosno $p{\underline{\uparrow}}$). Ovakve ideale (filtere) zovemo *glavnim*. Pravi ideal I je *maksimalan ideal* akko nije pravi podskup nijednog pravog ideala. Analogno se definiše i maksimalan filter (*ultrafilter*). Iz Zornove leme sledi da je svaki pravi ideal (filter) sadržan u nekom maksimalnom idealu (filteru).

Na skupu P definiše se relacija *nekompatibilnosti*:

$$p \perp q \iff p{\overline{\downarrow}} \cap q{\overline{\downarrow}} = \emptyset, \;\; \text{za } p, q \in P.$$

Dakle, p i q su *kompatibilni* (u oznaci $p \not\perp q$) akko $\exists r \in P \; (r \leq p \wedge r \leq q)$. Poset $\mathbb{P}$ je *separativan* akko za svake $p, q \in P$ za koje važi $p \not\leq q$ postoji $r \leq p$ takvo da je $r \perp q$. Za element a u posetu $\mathbb{P}$ reći ćemo da je *atom* akko $\neg \exists p, q \in a{\overline{\downarrow}} \;\; p \perp q$. Skup svih atoma u posetu $\mathbb{P}$ označava se sa $\mathrm{At}(\mathbb{P})$. Za podskup $Q \subseteq P$ reći ćemo da je:

- *(slab) antilanac* u $\mathbb{P}$ akko $\forall p, q \in Q\ (p \neq q \Rightarrow p \not\leq q \wedge q \not\leq p)$,
- *jak antilanac* u $\mathbb{P}$ akko $\forall p, q \in Q\ (p \neq q \Rightarrow p \perp q)$,
- *gust* u $\mathbb{P}$ akko $\forall p \in P\ \ Q \cap p\downarrow \neq \emptyset$,
- *kogust* u $\mathbb{P}$ akko $\forall p \in P\ \ Q \cap p\uparrow \neq \emptyset$,
- *konveksan* u $\mathbb{P}$ akko $\forall p, q \in Q\ \forall r \in P\ (p \leq r \leq q \Rightarrow r \in Q)$.

Konveksno zatvorenje skupa $Q \subseteq P$ u posetu $\mathbb{P}$ definiše se na sledeći način:

$$\mathrm{Conv}_{\mathbb{P}}(Q) := \bigcap \{C \subseteq P : Q \subseteq C \wedge C \text{ je konveksan u } \mathbb{P}\}.$$

Tvrđenje 1.2.2 *Neka je $\mathbb{P} = \langle P, \leq \rangle$ parcijalno uređen skup i $Q \subseteq P$. Tada važi:*

(a) $\mathrm{Conv}_{\mathbb{P}}(Q)$ *je najmanji konveksan skup u $\mathbb{P}$ koji sadrži Q;*

(b) $\mathrm{Conv}_{\mathbb{P}}(Q) = \bigcup_{p,q \in Q}(p\uparrow \cap q\downarrow)$.

Dokaz.

(a) Ovo sledi direktno iz definicije konveksnog zatvorenja i činjenice da je presek konveksnih skupova konveksan skup u posetu $\mathbb{P}$.

(b) Neka $x, y \in \bigcup_{p,q \in Q}(p\uparrow \cap q\downarrow)$, i neka je $x \leq z \leq y$, za neko $z \in P$. Tada postoje $p, q \in Q$, takvi da je $p \leq x \leq z \leq y \leq q$, što znači da $z \in \bigcup_{p,q \in Q}(p\uparrow \cap q\downarrow)$, pa je taj skup konveksan, i sadrži Q. Sada, prema (a), imamo da je $\mathrm{Conv}_{\mathbb{P}}(Q) \subseteq \bigcup_{p,q \in Q}(p\uparrow \cap q\downarrow)$. Druga inkluzija je direktna. $\square$

Za parcijalno uređen skup $\mathbb{P} = \langle P, \leq \rangle$ reći ćemo da je *lanac-kompletan* (redom, *dualno lanac-kompletan*) akko za svaki lanac $L \subseteq P$ postoji $\sup L$ (redom, $\inf L$) u $\mathbb{P}$.

Tvrđenje 1.2.3 *Ako je poset $\mathbb{P}$ lanac-kompletan (redom, dualno lanac-kompletan), tada je $\mathrm{Max}\,\mathbb{P}$ (redom, $\mathrm{Min}\,\mathbb{P}$) kogust (redom, gust) podskup skupa P.*

Dokaz. Ako je poset $\mathbb{P}$ lanac-kompletan i $x \in P$, na osnovu Hausdorffovog principa maksimalnosti (teorema 1.2.1 (c)), postoji maksimalan lanac $L \subseteq P$, takav da $x \in L$. Tada, zbog maksimalnosti L, imamo da $\sup L \in \mathrm{Max}\,\mathbb{P}$. Kako $x \in L$, sledi da je $x \leq \sup L$. Dokaz za dualne lanac-kompletne posete je dualan. $\square$

Schmerl je okarakterisao prebrojiva ultrahomogena parcijalna uređenja:

Teorema 1.2.4 *([79]) Prebrojivo strogo parcijalno uređenje je ultrahomogeno akko je izomorfno jednom od sledećih parcijalnih uređenja:*
- $\mathbb{A}_\omega$*, prebrojivi antilanac (tj. prazna relacija na* ω*),*
- $\mathbb{B}_n = n \times \mathbb{Q}$*, za* $1 \leq n \leq \omega$*, gde je*

$$\langle n_1, q_1 \rangle < \langle n_2, q_2 \rangle \iff n_1 = n_2 \wedge q_1 <_{\mathbb{Q}} q_2,$$

- $\mathbb{C}_n = n \times \mathbb{Q}$*, za* $1 \leq n \leq \omega$*, gde je* $\langle n_1, q_1 \rangle < \langle n_2, q_2 \rangle \Leftrightarrow q_1 <_{\mathbb{Q}} q_2$*,*
- $\mathbb{D}$*, jedinstveni prebrojivi ultrahomogeni univerzalni poset (slučajni poset).*

Preduređenja

Binarna relacija $\rho \subseteq X^2$ je *preduređenje* akko je refleksivna i tranzitivna. Naredna dva tvrđenja deo su folklora u teoriji parcijalnih uređenja.

Tvrđenje 1.2.5 *Neka je* P *neprazan skup i* $\preccurlyeq$ *preduređenje na* P*. Tada važi:*

(a) Relacija $\sim$ *na* P *definisana sa* $p \sim q \Leftrightarrow p \preccurlyeq q \wedge q \preccurlyeq p$ *je relacija ekvivalencije na skupu* P*;*

(b) Relacija $\leq$ *na* $P/\sim$*, definisana sa* $[p]_\sim \leq [q]_\sim \Leftrightarrow p \preccurlyeq q$*, je dobro definisana i* $\langle P/\sim, \leq \rangle$ *je parcijalno uređenje.*

Poset $\langle P / \sim, \leq \rangle$ naziva se *antisimetrični količnik* preduređenja $\langle P, \preccurlyeq \rangle$, u oznaci,

$$\operatorname{asq}\langle P, \preccurlyeq \rangle := \langle P/\sim, \leq \rangle.$$

Ako za preduređenja $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ važi $\mathbb{P} \cong \mathbb{Q}$, tada je $\operatorname{asq}\mathbb{P} \cong \operatorname{asq}\mathbb{Q}$. Za skup $C \subseteq P$ reći ćemo da je $\sim$*-invarijantan* akko za svako $x \in C$ važi da je $[x]_\sim \subseteq C$.

Tvrđenje 1.2.6 *Ako je* $\mathbb{P} = \langle P, \preccurlyeq \rangle$ *preduređenje i* $\operatorname{asq}\mathbb{P} = \langle P/\sim, \leq \rangle$ *antisimetrični količnik* $\mathbb{P}$*, tada, za proizvoljno* $C \subseteq P$*, važi:*

(a) Za $X = \{[p]_\sim \in P/\sim : C \cap [p]_\sim \neq \emptyset\}$ *imamo da je* $\operatorname{asq}\langle C, \preccurlyeq\upharpoonright_C \rangle \cong \langle X, \leq\upharpoonright_X \rangle$*, tj.* $\operatorname{asq}\mathbb{C} \hookrightarrow \operatorname{asq}\mathbb{P}$*;*

(b) Ako je C $\sim$*-invarijantan podskup skupa* P*, tada je* $\operatorname{asq}\mathbb{C}$ *poduređenje* $\operatorname{asq}\mathbb{P}$*, tj.* $\mathrm{id}_{C/\sim} : \operatorname{asq}\mathbb{C} \hookrightarrow \operatorname{asq}\mathbb{P}$ *je utapanje.*

Slab i jak antilanac, gust, kogust i konveksan skup u preduređenju $\langle P, \leq \rangle$ definišu se analogno kao i u parcijalnom uređenju. Funkcija $f : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$, gde su $\mathbb{P}_1 = \langle P_1, \leq_1 \rangle$ i $\mathbb{P}_2 = \langle P_2, \leq_2 \rangle$ preduređenja, je *gusto utapanje* akko (gu1) $p \leq_1 q \implies f(p) \leq_2 f(q)$, za sve $p, q \in P_1$,

(gu2) $p \perp_1 q \implies f(p) \perp_2 f(q)$, za sve $p, q \in P_1$,

(gu3) $f[P_1]$ je gust podskup skupa P_2.

Primetimo da gusto utapanje ne mora biti injektivno. Lako se može pokazati da ako (gu2) zamenimo sa

$$\text{(gu2')}\ \ p \perp_1 q \iff f(p) \perp_2 f(q), \ \text{ za sve } p, q \in P_1,$$

da dobijamo ekvivalentnu definiciju gustog utapanja. Ako postoji gusto utapanje $f : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$, tada su predurređenja $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ *forsing ekvivalentni* pojmovi forsinga, tj. proizvode iste generičke ekstenzije (videti [29, str. 221]).

Tvrđenje 1.2.7 *Neka je $\mathbb{P}$ separativno uređenje, a $\mathbb{Q}$ predurređenje. Ako je $h : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ gusto utapanje, tada je h utapanje.*

Dokaz. Neka, za proizvoljne $p, q \in P$, važi da je $f(p) \leq_{\mathbb{Q}} f(q)$. Ako pretpostavimo da je $p \not\leq_{\mathbb{P}} q$, tada, s obzirom da je uređenje $\mathbb{P}$ separativno, postoji $r \leq_{\mathbb{P}} p$ takvo da je $r \perp_{\mathbb{P}} q$. Kako je h gusto utapanje, na osnovu (gu2) sledi da je $f(p) \perp_{\mathbb{Q}} f(q)$, a to je kontradikcija s polaznom pretpostavkom. Dakle, na osnovu (gu1), za proizvoljne $p, q \in P$ važi

$$p \leq_{\mathbb{P}} q \iff f(p) \leq_{\mathbb{Q}} f(q),$$

što implicira, zbog antisimetričnosti uređenja $\mathbb{P}$, da je $h : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ injekcija, i da je jak homomorfizam. $\square$

Ako su $\mathbb{P}_i = \langle P_i, \leq_i \rangle$, $i \in I$, proizvoljna predurređenja, tada se njihov *direktni proizvod* definiše na sledeći način:

$$\prod_{i \in I} \langle P_i, \leq_i \rangle := \langle \prod_{i \in I} P_i, \leq \rangle,$$

gde je $\langle p_i : i \in I \rangle \leq \langle q_i : i \in I \rangle$ akko $p_i \leq_i q_i$, za sve $i \in I$. To je takođe predurređenje, a ako su $\mathbb{P}_i$, $i \in I$, parcijalna uređenja, tada je i $\prod_{i \in I} \mathbb{P}_i$ parcijalno uređenje.

Separativna modifikacija i separativni količnik

Neka je $\mathbb{P} = \langle P, \leq \rangle$ parcijalno uređenje. Definišimo relaciju $\leq^*$ na skupu P na sledeći način:

$$p \leq^* q \iff \forall r \leq p \;\; r \not\perp q. \tag{1.2}$$

Jasno je da je tada $\leq \, \subseteq \, \leq^* \, \subseteq \, \not\perp$, i lako se dokazuje da, za odgovarajuće relacije nekompatibilnosti, važi $\perp = \perp^*$. Dakle, imamo da je

$$p \not\leq^* q \iff \exists r \leq p \;\; r \perp^* q,$$

odakle zaključujemo da je $\leq \; = \; \leq^*$ akko je $\langle P, \leq \rangle$ separativno parcijalno uređenje. Naredna tvrđenja deo su folklora u teoriji parcijalnih uređenja (pogledati [23, str. 205]).

Tvrđenje 1.2.8 *Neka je $\mathbb{P} = \langle P, \leq \rangle$ parcijalno uređenje. Tada imamo:*

(a) Relacija $\leq^*$ na skupu P definisana sa

$$p \leq^* q \iff \forall r \leq p \;\; r \not\perp q,$$

je separativno preduređenje na P;

(b) $\langle P/{=^*}, \trianglelefteq \rangle$ je separativno parcijalno uređenje, gde su relacija ekvivalencije $=^*$ na skupu P, i relacija $\trianglelefteq$ na količniku $P/{=^*}$, definisane sa:

$$p =^* q \Leftrightarrow p \leq^* q \wedge q \leq^* p \quad i \quad [p] \trianglelefteq [q] \Leftrightarrow p \leq^* q; \tag{1.3}$$

(c) Prirodno količničko preslikavanje $h : P \to P/{=^*}$, dato sa $h(p) := [p]$, je epimorfizam koji očuvava kompatibilnost, tj.

(i) h je surjekcija,

(ii) $\forall p, q \in P \; (p \leq q \Rightarrow h(p) \trianglelefteq h(q))$,

(iii) $\forall p, q \in P \; (p \perp q \Leftrightarrow h(p) \perp_{P/=^*} h(q))$;

(d) $\langle P/{=^*}, \trianglelefteq \rangle$ je, do na izomorfizam, jedinstveno separativno parcijalno uređenje takvo da postoji funkcija h koja zadovoljava (i) – (iii);

(e) Poset $\langle P, \leq \rangle$, preduređenje $\langle P, \leq^* \rangle$ i poset $\langle P/{=^*}, \trianglelefteq \rangle$ su forsing ekvivalentni pojmovi forsinga.

Separativna modifikacija parcijalnog uređenja $\mathbb{P} = \langle P, \leq \rangle$ je separativno preduređenje $\operatorname{sm}\mathbb{P} := \langle P, \leq^* \rangle$, gde je $\leq^*$ dato sa (1.2). *Separativni količnik* parcijalnog uređenja $\mathbb{P} = \langle P, \leq \rangle$ je separativno parcijalno uređenje $\operatorname{sq}\mathbb{P} := \langle P/{=^*}, \trianglelefteq \rangle$, gde su relacija ekvivalencije $=^*$ na skupu P i relacija $\trianglelefteq$ na količniku $P/\sim$ date sa (1.3).

Tvrđenje 1.2.9 *Neka je X beskonačan skup a $\mathcal{I} \subsetneq P(X)$ ideal takav da je $\mathcal{I} \neq \{\emptyset\}$. Tada imamo:*

(a) Parcijalno uređenje $\langle P(X) \setminus \mathcal{I}, \subseteq \rangle$ nije separativno;

(b) $\mathrm{sm}\langle P(X) \setminus \mathcal{I}, \subseteq \rangle = \langle P(X) \setminus \mathcal{I}, \subseteq_{\mathcal{I}} \rangle$, gde je $A \subseteq_{\mathcal{I}} B \Leftrightarrow A \setminus B \in \mathcal{I}$;

(c) $\mathrm{sq}\langle P(X) \setminus \mathcal{I}, \subseteq \rangle = \langle (P(X) / =_{\mathcal{I}})^+, \leq_{\mathcal{I}} \rangle$, pri čemu je $(P(X) / =_{\mathcal{I}})^+ = (P(X) / =_{\mathcal{I}}) \setminus \{[\emptyset]\}$, $A =_{\mathcal{I}} B \Leftrightarrow A \triangle B \in \mathcal{I}$ i $[A] \leq_{\mathcal{I}} [B] \Leftrightarrow A \setminus B \in \mathcal{I}$;

(d) Poset $\langle P(X) \setminus \mathcal{I}, \subseteq \rangle$, preduređenje $\langle P(X) \setminus \mathcal{I}, \subseteq_{\mathcal{I}} \rangle$, kao i poset $\langle (P(X) / =_{\mathcal{I}})^+, \leq_{\mathcal{I}} \rangle$ (standardna oznaka: $(P(X)/\mathcal{I})^+$) su forsing ekvivalentni pojmovi forsinga.

Na primer, parcijalno uređenje $\langle [\omega]^\omega, \subseteq \rangle = \langle P(\omega) \setminus \mathrm{Fin}, \subseteq \rangle$ nije separativno. Njegova separativna modifikacija je $\mathrm{sm}\langle [\omega]^\omega, \subseteq \rangle = \langle [\omega]^\omega, \subseteq_{\mathrm{Fin}} \rangle$, a separativni količnik je $\mathrm{sq}\langle [\omega]^\omega, \subseteq \rangle = \langle (P(\omega)/\mathrm{Fin})^+, \leq_{\mathrm{Fin}} \rangle$.

Tvrđenje 1.2.10 *Neka su $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ i $\mathbb{P}_i, i \in I$, parcijalna uređenja. Tada važi:*

(a) Ako je $\mathbb{P} \cong \mathbb{Q}$, onda je $\mathrm{sm}\,\mathbb{P} \cong \mathrm{sm}\,\mathbb{Q}$ i $\mathrm{sq}\,\mathbb{P} \cong \mathrm{sq}\,\mathbb{Q}$;

(b) $\mathrm{sm} \prod_{i \in I} \mathbb{P}_i = \prod_{i \in I} \mathrm{sm}\,\mathbb{P}_i$;

(c) $\mathrm{sq} \prod_{i \in I} \mathbb{P}_i \cong \prod_{i \in I} \mathrm{sq}\,\mathbb{P}_i$.

1.3 Linearna uređenja

U ovom odeljku razmatraćemo stroga (irefleksivna) linearna uređenja (tj. *lance*). Ako je $\mathbb{L} = \langle L, < \rangle$ linearno uređenje, njegovo *inverzno linearno uređenje* $\mathbb{L}^*$ definiše se sa:

$$\mathbb{L}^* = \langle L, < \rangle^* := \langle L, > \rangle,$$

gde je $x > y$ akko je $y < x$, za $x, y \in L$. *Uređajni tip* linearnog uređenja $\mathbb{L}$ definiše se kao

$$\mathrm{otp}(\mathbb{L}) := \mathrm{type}(\mathbb{L}) = [\mathbb{L}]_{\cong}.$$

Standardne oznake za neke uređajne tipove su sledeće:

$$\omega := \mathrm{otp}(\langle \mathbb{N}, < \rangle), \quad \omega^* := \mathrm{otp}(\langle \mathbb{Z}^-, < \rangle), \quad \zeta := \mathrm{otp}(\langle \mathbb{Z}, < \rangle),$$

$$\eta := \mathrm{otp}(\langle \mathbb{Q}, < \rangle), \quad \theta := \mathrm{otp}(\langle \mathbb{I}, < \rangle), \quad \lambda := \mathrm{otp}(\langle \mathbb{R}, < \rangle).$$

Ako su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ disjunktna linearna uređenja, njihova *suma*, $\mathbb{C} := \mathbb{A} + \mathbb{B}$, definiše se na sledeći način:

$$\mathbb{C} := \langle C, <_C \rangle, \quad C := A \cup B, \quad <_C := <_A \cup <_B \cup (A \times B).$$

Ako linearna uređenja $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ nisu disjunktna, tada je $\mathrm{otp}(\mathbb{A}) + \mathrm{otp}(\mathbb{B}) := \mathrm{otp}(\mathbb{C})$, gde je $\mathbb{C} := \mathbb{A}' + \mathbb{B}'$, za proizvoljne disjunktne predstavnike $\mathbb{A}' \in \mathrm{otp}(\mathbb{A})$ i $\mathbb{B}' \in \mathrm{otp}(\mathbb{B})$. Dakle, imamo da je $\zeta = \omega^* + \omega$. Na sličan način definiše se i suma konačno mnogo linearnih uređenja, kao i beskonačno mnogo linearnih uređenja $\sum_{i \in L} \mathbb{A}_i$, pri čemu je $\mathbb{L} = \langle L, <_L \rangle$ neko linearno uređenje (videti [77, str. 19]). *Proizvod dva linearna uređenja* definiše se na sledeći način:

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} := \sum_{\mathbb{B}} \mathbb{A}.$$

Na osnovu toga je $2 \cdot \omega = \sum_\omega 2 = \omega$ i $\omega \cdot 2 = \sum_2 \omega = \omega + \omega \neq \omega$.

Lema 1.3.1 *Neka je $\mathbb{L}$ linearno uređenje a $\mathbb{P}$ parcijalno uređenje. Tada imamo:*

(a) Ako su $\mathbb{L} = \langle L, \leq_{\mathbb{L}} \rangle$ i $\mathbb{P} = \langle P, \leq_{\mathbb{P}} \rangle$ nestroga (refleksivna) uređenja, tada je $\mathrm{Mono}(\mathbb{L}, \mathbb{P}) = \mathrm{Emb}(\mathbb{L}, \mathbb{P})$*;*

(b) Ako su $\mathbb{L} = \langle L <_{\mathbb{L}} \rangle$ i $\mathbb{P} = \langle P, <_{\mathbb{P}} \rangle$ stroga (irefleksivna) uređenja, tada je $\mathrm{Hom}(\mathbb{L}, \mathbb{P}) = \mathrm{Emb}(\mathbb{L}, \mathbb{P})$.

Dokaz.

(a) Neka je $f : \mathbb{L} \to \mathbb{P}$ monomorfizam. Ako $x, y \in L$, $x \neq y$, i ako je $f(x) \leq_{\mathbb{P}} f(y)$, tada bi $y \leq_{\mathbb{L}} x$ impliciralo da je $f(y) \leq_{\mathbb{P}} f(x)$, tj. da je $f(x) = f(y)$, pa f ne bi bilo injekcija, što je kontradikcija. Dakle, s obzirom da je $\mathbb{L}$ linearno uređenje, imamo da je $x \leq_{\mathbb{L}} y$, što znači da je f jak homomorfizam. Kako je f injekcija, to je utapanje.

(b) Neka je $f : \mathbb{L} \to \mathbb{P}$ homomorfizam. Ako $x, y \in L$, $x \neq y$, tada je $x <_{\mathbb{L}} y$, ili je $y <_{\mathbb{L}} x$. U prvom slučaju imamo da je $f(x) <_{\mathbb{P}} f(y)$, a u drugom da je $f(y) <_{\mathbb{P}} f(x)$. U svakom slučaju je $f(x) \neq f(y)$, što znači da je f injekcija. Dakle, $\mathrm{Hom}(\mathbb{L}, \mathbb{P}) = \mathrm{Mono}(\mathbb{L}, \mathbb{P})$. Sada se, analogno kao pod (a), dokazuje da je $\mathrm{Mono}(\mathbb{L}, \mathbb{P}) = \mathrm{Emb}(\mathbb{L}, \mathbb{P})$. □

Teorema 1.3.2 *(Cantor, videti [77, str. 26])*

(a) Racionalna linija $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ je univerzalno prebrojivo linearno uređenje, tj. ono sadrži kopiju svakog prebrojivog linearnog uređenja;

(b) Svako prebrojivo gusto linearno uređenje bez minimuma i maksimuma izomorfno je racionalnoj liniji $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$;

(c) Prebrojivo linearno uređenje je ultrahomogeno akko je izomorfno racionalnoj liniji $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$.

Za linearno uređenje $\mathbb{L} = \langle L, < \rangle$ reći ćemo da je *n-tranzitivno* akko

$$\forall r \leq n \ \ \forall A, B \in [L]^r \ \ \exists f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{L}) \ \ f[A] = B.$$

Tvrđenje 1.3.3 *(videti [77, str. 31])*

(a) Linearno uređenje koje ima minimum ili maksimum nije n-tranzitivno ni za jedno $n \in \mathbb{N}$;

(b) Racionalna linija $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ je n-tranzitivna za svako $n \in \mathbb{N}$;

(c) Svako 2-tranzitivno linearno uređenje je gusto;

(d) Celobrojna linija $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ je 1-tranzitivna, ali nije 2-tranzitivna;

(e) Za dato $n \in \mathbb{N}$ postoji gusto linearno uređenje bez minimuma i maksimuma koje nije n-trazitivno.

Tvrđenje 1.3.4 *Neka je $\mathbb{L}$ beskonačno linearno uređenje. Ako je $n \geq 2$, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) Grupa $\mathrm{Aut}(\mathbb{L})$ je n-skup-tranzitivna;

(b) Linearno uređenje $\mathbb{L}$ je n-tranzitivno;

(c) Linearno uređenje $\mathbb{L}$ je n-homogeno.

Dokaz.

(a)$\Rightarrow$(b) Ako je grupa $\mathrm{Aut}(\mathbb{L})$ n-skup-tranzitivna, tada je jasno da $\mathbb{L}$ nema ni minimum ni maksimum. Uzmimo $r < n$ i $A, B \in [L]^r$. Dovoljno je dokazati da postoji $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{L})$ takvo da je $f[A] = B$. Neka je $x := \min(A \cup B)$. Tada, pošto $\mathbb{L}$ nema minimum, postoje $x_1, x_2, \ldots, x_{n-r} \in L$ takvi da je $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-r} < x$. Kako je grupa $\mathrm{Aut}(\mathbb{L})$ n-skup tranzitivna, postoji $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{L})$ takvo da je $f[\{x_1, \ldots, x_{n-r}\} \cup A] = \{x_1, \ldots, x_{n-r}\} \cup B$. Pošto je $x_1 = \min(\{x_1, \ldots, x_{n-r}\} \cup A)$, imamo da je $f(x_1) = \min(\{x_1, \ldots, x_{n-r}\} \cup B) = x_1$. Slično tako dobijamo da je $f(x_2) = x_2$, $f(x_3) = x_3, \ldots, f(x_{n-r}) = x_{n-r}$. Dakle, $f[A] = B$.

(b)$\Rightarrow$(c) Neka $A, B \in [L]^n$ i neka $\varphi \in \mathrm{Iso}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$. Tada, s obzirom da su konačna linearna uređenja rigidne strukture, imamo da je $\mathrm{Iso}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \{\varphi\}$. Kako je linearno uređenje $\mathbb{L}$ n-tranzitivno, postoji $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{L})$ takvo da je $f[A] = B$. Tada $f|_A \in \mathrm{Iso}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \{\varphi\}$, odakle sledi da je $\varphi \subseteq f$, tj. da je struktura $\mathbb{L}$ n-homogena.

(c)$\Rightarrow$(a) Ovo sledi iz činjenice da su svaka dva konačna linearna uređenja iste veličine izomorfna. $\square$

Tvrđenje 1.3.5 *(videti [77, str. 31]) Za svako linearno uređenje $\mathbb{L}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $\mathbb{L}$ je 2-tranzitivno;

(b) $\mathbb{L}$ je n-tranzitivno za neko $n \geq 2$;

(c) $\mathbb{L}$ je n-tranzitivno za svako $n \geq 1$.

Neka je $\mathbb{L} = \langle L, < \rangle$ proizvoljno linearno uređenje. Tada je binarna relacija $\sim$ na L, definisana na sledeći način:

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; |[\min\{x,y\}, \max\{x,y\}]| < \omega, \tag{1.4}$$

relacija ekvivalencije, koja se naziva *(konačna) kondenzaciona ekvivalencija*[1] na L. Klase ekvivalencije $[x]_\sim$ su konveksni skupovi (intervali) u $\mathbb{L}$, i imamo da je struktura $\langle L/\sim, \lhd \rangle$ takođe linearno uređenje, gde je relacija $\lhd$ na količniku $L/\sim$ data sa $[x]_\sim \lhd [y]_\sim \Leftrightarrow x < y$. Linearno uređenje $\langle L/\sim, \lhd\rangle$ naziva se *(konačna) kondenzacija* linearnog uređenja $\mathbb{L}$.

Za linearno uređenje $\mathbb{L}$ reći ćemo da je *rasuto* (engl. *scattered*) akko se $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \not\hookrightarrow \mathbb{L}$. Klasu rasutih linearnih uređenja obeležavaćemo sa Scatt. Za linearno uređenje $\mathbb{L}$ reći ćemo da je *σ-rasuto* akko je unija najviše prebrojivo mnogo rasutih linearnih uređenja, drugim rečima, akko postoji particija $L = \bigcup_{i \in I} L_i$, takva da je $|I| \leq \omega$, i da $\mathbb{L}_i \in$ Scatt, za sve $i \in I$. Specijalno, svako prebrojivo linearno uređenje je σ-rasuto. Klasu σ-rasutih linearnih uređenja obeležavaćemo sa σ- Scatt.

Tvrđenje 1.3.6 *(videti [77, str. 71]) Neka je $\mathbb{L} = \langle L, < \rangle \in$ Scatt rasuto linearno uređenje i neka je $\sim$ relacija konačne kondenzacione ekvivalencije na L. Ako je $L/\sim\, = \{L_t : t \in T\}$, gde smo konačnu kondenzaciju $\mathbb{L}$ označili sa $\mathbb{T} = \langle T, \lhd \rangle$, tada je $\mathbb{T}$ takođe rasuto linearno uređenje, i imamo da je $\mathbb{L} = \sum_{t \in T} \mathbb{L}_t$, pri čemu* $\mathrm{otp}(\mathbb{L}_t) \in \mathbb{N} \cup \{\omega, \omega^*, \zeta\}$*, za sve $t \in T$.*

Za preduređenje $\mathbb{X} = \langle X, \preceq \rangle$ reći ćemo da je *dobro preduređenje* (ili *dobro kvazi-uređenje*, engl. *well-quasi-order*, skr. *wqo*)[2] akko u $\mathbb{X}$ ne postoji beskonačan opadajući lanac $x_0 \succ x_1 \succ x_2 \succ \cdots$, kao ni beskonačan antilanac $\{x_n : n \in \omega\}$ (tj. $x_i \parallel x_j$, za $i \neq j$)[3]. Ako klasu prebrojivih linearnih uređenja označimo sa LO_ω, a klasu prebrojivih rasutih linearnih uređenja sa Scatt_ω, tada originalna *Fraïsséova hipoteza* ([15]) kaže:

$$\langle \mathrm{LO}_\omega, \hookrightarrow \rangle \text{ je dobro preduređenje.}$$

Na osnovu teoreme 1.3.2 (a) dati iskaz ekvivalentan je iskazu da je $\langle \mathrm{Scatt}_\omega, \hookrightarrow \rangle$ dobro preduređenje. U [62] Laver je pokazao da je $\langle \sigma\text{- Scatt}, \hookrightarrow \rangle$ dobro preduređenje, i time je dokazao Fraïsséovu hipotezu. S obzirom da je $\mathrm{LO}_\omega \subseteq \sigma$- Scatt, dokazao je i više od toga[4].

[1] Ovu relaciju ekvivalencije ne treba brkati sa istoimenom relacijom ekvivalencije $\sim_c$ na skupu $\mathrm{Int}_L(X)$, koja je glavna tema drugog dela ove disertacije.

[2] Pojmovi preduređenje i kvazi-uređenje su sinonimi. To je binarna relacija koja je refleksivna i tranzitivna.

[3] Imamo da je $x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y \wedge y \npreceq x$ i da je $x \parallel y \Leftrightarrow x \npreceq y \wedge y \npreceq x$.

[4] Laver je u [62] dokazao kako je, u stvari, $\langle \sigma\text{- Scatt}, \hookrightarrow \rangle$ *bolje preduređenje* (engl. *better-quasi-order*, skr. *bqo*), što je još jači rezultat.

Klasa $\mathcal{H}$ *nasledno aditivno nedekompozabilnih* linearnih uređenja je najmanja klasa uređajnih tipova linearnih uređenja koja sadrži jednoelementni uređajni tip, $\mathbf{1}$, i koja sadrži κ-sumu, $\sum_\kappa \mathbb{L}_\alpha$, kao i κ^*-sumu, $\sum_{\kappa^*} \mathbb{L}_\alpha$, za svaki regularan kardinal κ i svaki niz $\langle \mathbb{L}_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle$ u $\mathcal{H}$, za koji važi

$$\forall \alpha \in \kappa \ \ |\{\beta \in \kappa : \mathbb{L}_\alpha \hookrightarrow \mathbb{L}_\beta\}| = \kappa.$$

Teorema 1.3.7 *(Laver [61, str. 104]) Ako* $\mathbb{L} \in \mathrm{Scatt}$*, tada je* $\mathbb{L}$ *konačna suma nasledno aditivno nedekompozabilnih linearnih uređenja, tj.* $\mathbb{L} = \mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_2 + \cdots + \mathbb{H}_n$*, za neko* $n \in \mathbb{N}$*. pri čemu* $\mathbb{H}_k \in \mathcal{H}$*, za sve* $k \leq n$*.*

Za rasuto linearno uređenje $\mathbb{L} \in \mathrm{Scatt}$ reći ćemo da je *graničnog tipa* (engl. *of a limit type*) akko postoji linearno uređenje $\mathbb{S} \in \mathrm{Scatt}$, i linearna uređenja $\mathbb{L}_s$, $s \in S$, takva da $\mathrm{otp}(\mathbb{L}_s) \in \{\omega, \omega^*\}$, za sve $s \in S$, i takva da je

$$\mathbb{L} \rightleftarrows \textstyle\sum_{s \in S} \mathbb{L}_s.$$

Granični ordinali i celobrojna linija $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ primer su takvih linearnih uređenja, dok ordinali sledbenici nisu. $\mathbb{L} = \omega\omega^* + 1$ takođe je graničnog tipa, zato što je $\mathbb{L} \rightleftarrows \omega\omega^*$.

Teorema 1.3.8 *(Laver [61, str. 112]) Ako je* $\mathbb{L} \in \mathrm{Scatt}$ *rasuto linearno uređenje, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) $\mathbb{L}$ *je graničnog tipa;*

(b) Ne postoji $x \in L$ *takvo da je* $f(x) = x$ *za svako* $f \in \mathrm{Emb}(\mathbb{L})$*;*

(c) Nijedan sabirak $\mathbf{1}$ *ne pojavljuje se u izrazu za* $\mathbb{L}$ *kao minimalna suma nasledno aditivno nedekompozabilnih linearnih uređenja.*

1.4 Booleove mreže (algebre)

Booleove mreže

Parcijalno uređen skup $\langle L, \leq \rangle$, u kojem za sve $x, y \in L$ postoje $\inf\{x, y\}$ i $\sup\{x, y\}$, naziva se *mreža.* U mreži za svaki neprazan konačan podskup $M \subseteq L$ postoje $\inf M$ i $\sup M$. Uvodimo sledeće oznake za $x, y \in L$ i $M \subseteq L$:

$$x \wedge y := \inf\{x, y\}, \quad x \vee y := \sup\{x, y\},$$

$$\bigwedge M := \inf M, \quad \bigvee M := \sup M.$$

Element $x \in L$ je:

- $\wedge$-*razloživ* (engl. *meet reducible*) akko postoje $a, b \in L$ takvi da $x \notin \{a, b\}$ i da je $x = a \wedge b$. U suprotnom, x je $\wedge$-*nerazloživ.*
- $\vee$-*razloživ* (engl. *join reducible*) akko postoje $a, b \in L$ takvi da $x \notin \{a, b\}$ i da je $x = a \vee b$. U suprotnom, x je $\vee$-*nerazloživ.*

U svakoj mreži sledeća dva identiteta su ekvivalentna:

(distr1) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, (distr2) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Mreža $\langle L, \leq \rangle$ je:

- *distributivna* akko u njoj važi bilo koji od identiteta (distr1) ili (distr2);
- *ograničena* akko postoje $0 := \min L$ i $1 := \max L$;
- *komplementirana* akko je ograničena i za svako $x \in L$ postoji njegov *komplement* (tj. element x' za koji važi $x \wedge x' = 0$ i $x \vee x' = 1$);
- *jednoznačno komplementirana* akko je ograničena i svaki element ima tačno jedan komplement.

Distributivna komplementirana mreža $\langle B, \leq \rangle$ zove se *Booleova mreža.* Može se pokazati kako je svaka Booleova mreža jednoznačno komplementirana.

Booleove algebre

Definišimo, za Booleovu algebru $\mathbb{B}_{alg} = \langle B, \wedge, \vee, \cdot^c, 0, 1 \rangle$, sledeći „operator”:

$$\mathrm{Lattice}(\mathbb{B}_{alg}) := \langle B, \leq \rangle, \text{ gde je } \ p \leq q \overset{def}{\Longleftrightarrow} p \wedge q = p.$$

Tada je Lattice($\mathbb{B}_{alg}$) Booleova mreža. Definišimo sada, za Booleovu mrežu $\mathbb{B}_{latt} = \langle B, \leq \rangle$, sledeći „operator”:

$$\mathrm{Algebra}(\mathbb{B}_{latt}) := \langle B, \wedge, \vee, \cdot^c, 0, 1 \rangle,$$

gde je $p \wedge q := \inf\{p, q\}$, $p \vee q := \sup\{p, q\}$, p^c je jedinstveni komplement elementa p, $0 := \min B$, $1 := \max B$. Tada je Algebra($\mathbb{B}_{latt}$) Booleova algebra. Štaviše, imamo da je:

$$\mathrm{Algebra}(\mathrm{Lattice}(\mathbb{B}_{alg})) = \mathbb{B}_{alg}, \qquad \mathrm{Lattice}(\mathrm{Algebra}(\mathbb{B}_{latt})) = \mathbb{B}_{latt}.$$

Dakle, između klase Booleovih mreža i klase Booleovih algebri postoji prirodna „bijekcija”. Za odgovarajuće elemente u ovoj korespodenciji kažemo da su *dualni*, i ubuduće ćemo ih, po potrebi, poistovećivati.

U Booleovim algebrama važi i sledeći *princip dualnosti*:

Teorema 1.4.1 *(videti [26, str. 13]) Neka je* $L_{\mathrm{BA}} = \langle \wedge, \vee, \cdot^c, 0, 1 \rangle$ *jezik Booleovih algebri. Ako je* φ *identitet na jeziku* L_{BA}*, i ako je* φ^* *identitet koji se dobija od* φ *zamenom* $\wedge \leftrightarrow \vee$ *i* $0 \leftrightarrow 1$*, onda je*

$$\vdash_{\mathrm{BA}} \varphi \ \textit{akko} \ \vdash_{\mathrm{BA}} \varphi^*.$$

Booleova algebra $\mathbb{B}$ je *σ-algebra* akko svaki prebrojiv podskup $A \subseteq B$ ima infimum (ili, ekvivalentno, supremum). Booleova algebra $\mathbb{B}$ je *kompletna* akko svaki podskup $A \subseteq B$ ima infimum (ili ekvivalentno, supremum).

Teorema 1.4.2 *(videti [26, str. 26]) Ako je* $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ *topološki prostor, tada je* $\langle \mathrm{ro}(X), \wedge, \vee, \cdot', \emptyset, X \rangle$ *kompletna Booleova algebra*[5]*, gde su operacije definisane sa*

$$U \wedge V := U \cap V, \qquad U \vee V := \mathrm{Int}\, \overline{A \cup B}, \qquad U' := \overline{U}^c.$$

Pri tome, prirodni poredak je inkluzija, i za $W_i \in \mathrm{ro}(X), i \in I$*, važi da je*

$$\bigwedge_{i \in I} W_i = \mathrm{Int}\, \overline{\bigcap_{i \in I} W_i}, \qquad \bigvee_{i \in I} W_i = \mathrm{Int}\, \overline{\bigcup_{i \in I} W_i}.$$

Podskup Booleove algebre, koji je zatvoren u odnosu na sve operacije, je jedna *podalgebra*. Podskup Booleove σ-algebre, koji je zatvoren u odnosu na sve operacije i koji je zatvoren u odnosu na prebrojive infimume i supremume, je jedna *pod-σ-algebra*. Podskup kompletne Booleove algebre, koji je zatvoren u odnosu na sve operacije i koji je zatvoren u odnosu na beskonačne infimume i supremume, je jedna *pod-kompletna algebra*.

Za datu Booleovu mrežu $\mathbb{B} = \langle B, \leq \rangle$ definisaćemo poset

$$\mathbb{B}^+ := \langle B \setminus \{0\}, \leq \rangle = \langle B^+, \leq \rangle.$$

Lako se dokazuje da je $\mathrm{At}(\mathbb{B}^+) = \mathrm{Min}(\mathbb{B}^+)$. Za Booleovu algebru (mrežu) $\mathbb{B}$ reći ćemo da je *atomna* akko je skup $\mathrm{At}(\mathbb{B}^+)$ gust u posetu $\mathbb{B}^+$; da je *neatomna* akko nije atomna; da je *bezatomna* akko je $\mathrm{At}(\mathbb{B}^+) = \emptyset$.

Tvrđenje 1.4.3 *Ako je* $\mathbb{B}$ *atomna Booleova algebra, onda za svako* $p \in B$ *važi*

$$p = \sup \Big(\mathrm{At}(\mathbb{B}^+) \cap p\bar{\downarrow} \Big).$$

[5] $\mathrm{ro}(X)$ je familija *regularno otvorenih* skupova u topološkom prostoru $\langle X, \mathcal{O} \rangle$, tj. skupova $U \in \mathcal{O}$ za koje važi $U = \mathrm{Int}\, \overline{U}$.

Teorema 1.4.4 *(videti [26, str. 30], odnosno [4, str. 39])*
(a) Booleova algebra $\mathbb{B}$ je kompletna atomna Booleova algebra akko je

$$\mathbb{B} \cong \langle P(\mathrm{At}(\mathbb{B}^+)), \cap, \cup, \cdot^c, \emptyset, \mathrm{At}(\mathbb{B}^+)\rangle;$$

(b) Svake dve prebrojive bezatomne Booleove algebre su izomorfne.

Booleova algebra $\mathbb{B}$ zadovoljava c.c.c. (*the countable chain condition*) akko je svaki jak antilanac u $\mathbb{B}^+$ najviše prebrojiv. Ako je $\mathbb{B}$ c.c.c. Booleova σ-algebra, tada je $\mathbb{B}$ kompletna Booleova algebra. Svojstvo c.c.c. nije očuvano pri homomorfizmima. Na primer Booleova algebra $P(\omega)$ ima c.c.c., dok Booleova algebra $P(\omega)/\,\mathrm{Fin}$ nema c.c.c. Neprebrojivi jaki antilanci su m.a.d.f. (*maximal almost disjoint families*).

Teorema 1.4.5 *Neka je $\mathbb{B}$ c.c.c. Booleova algebra. Tada je svaki dobro uređen lanac u $\mathbb{B}$ najviše prebrojiv. Ako je $\mathbb{B}$ σ-algebra, tada važi i obratno.*

Booleovo kompletiranje parcijalnog uređenja

Naredna tvrđenja deo su folklora u teoriji Booleovih algebri i teoriji parcijalnih uređenja (pogledati [23, str. 205] i [26, str. 54]). Definisaćemo topologiju $\mathcal{O}_\mathbb{P}$ na proizvoljnom parcijalno uređenom skupu $\mathbb{P}$:

Tvrđenje 1.4.6 *Neka je $\mathbb{P} = \langle P, \leq\rangle$ parcijalno uređen skup. Tada važi:*
(a) $\mathcal{B}_\mathbb{P} = \{p\downarrow : p \in P\}$ je baza neke topologije $\mathcal{O}_\mathbb{P}$ na skupu P;
(b) Za proizvoljnu funkciju $f : P \to P$ imamo da

$$f \in \mathrm{End}(\mathbb{P}) \iff f : \langle P, \mathcal{O}_\mathbb{P}\rangle \to \langle P, \mathcal{O}_\mathbb{P}\rangle \text{ je neprekidna funkcija};$$

(c) Preslikavanje $h_0 : P \to \mathcal{B}_\mathbb{P}$, definisano sa $h_0(p) := p\downarrow$, je izomorfizam poseta $\langle P, \leq\rangle$ i $\langle \mathcal{B}_\mathbb{P}, \subseteq\rangle$;
(d) $\mathcal{B}_\mathbb{P} \subseteq \mathrm{ro}(P, \mathcal{O}_\mathbb{P})$ akko je parcijalno uređenje $\mathbb{P}$ separativno.

U topološkom prostoru $\langle P, \mathcal{O}_\mathbb{P}\rangle$ najmanja okolina tačke $p \in P$ je $p\downarrow$. Na osnovu toga, za $p, q \in P$ i $Q \subseteq P$, imamo da je

$$p \perp q \iff p\downarrow \cap\, q\downarrow = \emptyset \iff p \notin \overline{q\downarrow} \iff q \notin \overline{p\downarrow},$$

i da

$$p \in \mathrm{Int}\, Q \iff p\downarrow \subseteq Q.$$

Kompletna Booleova algebra $\mathbb{B}$ je *Booleovo kompletiranje parcijalnog uređenja* $\mathbb{P}$ akko postoji gusto utapanje $h : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{B}^+$.

Tvrđenje 1.4.7 *Neka je $\mathbb{P} = \langle P, \leq \rangle$ parcijalno uređen skup. Tada je preslikavanje $h : P \to \mathrm{ro}(P, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})^+$, dato sa $h(p) := \mathrm{Int}\,\overline{p\downarrow}$, gusto utapanje.*

Dakle, svako parcijalno uređenje $\mathbb{P}$ ima Booleovo kompletiranje $\mathrm{ro}(P, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$.

Tvrđenje 1.4.8 *Kompletna Booleova algebra $\mathbb{B}$ je Booleovo kompletiranje separativnog parcijalnog uređenja $\mathbb{P}$ akko postoji utapanje $h : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{B}^+$ takvo da je skup $h[P]$ gust u $\mathbb{B}^+$.*

Ako je $\mathbb{P}$ separativno parcijalno uređenje, tada je njegovo Booleovo kompletiranje jedinstveno do na izomorfizam.

Tvrđenje 1.4.9 *Neka je $\mathbb{P} = \langle P, \leq \rangle$ separativno parcijalno uređenje. Tada imamo:*

(a) Preslikavanje $h_0 : \mathbb{P} \to \mathrm{ro}(P, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})^+$, dato sa $h_0(p) := p\downarrow$, je utapanje i skup $\mathcal{B}_{\mathbb{P}} = h_0[P]$ je gust u $\mathrm{ro}(P, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})^+$;

(b) Ako je $\mathbb{B}$ Booleovo kompletiranje poseta $\mathbb{P}$, tada je $\mathbb{B} \cong \mathrm{ro}(P, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$.

Kao posledicu imamo da je poset $\mathbb{P}$ separativan akko je izomorfan gustom poduređenju poseta $\mathbb{B}^+$, za neku (kompletnu) Booleovu algebru $\mathbb{B}$.

Tvrđenje 1.4.10 *Neka je $\mathbb{B}$ Booleova algebra. Tada važi:*

(a) $\mathbb{B}$ nije separativno parcijalno uređenje, $\mathrm{sq}\,\mathbb{B} \cong 1$ i $\mathrm{ro}\,\mathrm{sq}\,\mathbb{B} \cong 2$;

(b) $\mathbb{B}^+$ je separativno parcijalno uređenje.

Kompletna Booleova algebra $\mathbb{A}$ je *Booleovo kompletiranje Booleove algebre* $\mathbb{B}$ akko postoji injekcija $i : \mathbb{B} \hookrightarrow \mathbb{A}$, koja očuvava komplemente i sve postojeće supremume, takva da je skup $i[B^+]$ gust u $\mathbb{A}^+$.

Tvrđenje 1.4.11 *Ako je $\mathbb{B}$ Booleova algebra, tada je $\mathrm{ro}(\mathbb{B}^+, \mathcal{O}_{\mathbb{B}^+})$ Booleovo kompletiranje Booleove algebre $\mathbb{B}$.*

Neka Poset, Sep, CBA i CBA^+ označavaju redom klase svih (nestrogih) poseta, separativnih poseta, kompletnih Booleovih algebri i kompletnih Booleovih algebri bez nule. Neka je $q : \mathrm{Poset} \to \mathrm{Poset}/\cong$ prirodno količničko preslikavanje koje svakom posetu $\mathbb{P}$ dodeljuje njegov tip $[\mathbb{P}]_{\cong}$.

Tvrđenje 1.4.12

(a) $\mathrm{Poset} \supseteq \mathrm{Sep} \supseteq \mathrm{CBA}^+$ *i* $\mathrm{Poset}/\cong\ \supseteq \mathrm{Sep}/\cong\ \supseteq \mathrm{CBA}^+/\cong$*;*

(b) Preslikavanja $\mathrm{Poset} \xrightarrow{\mathrm{sq}} \mathrm{Sep} \xrightarrow{\mathrm{ro}^+} \mathrm{CBA}^+$ *i* $\mathrm{Poset}/\cong\ \xrightarrow{\mathrm{sq}_1} \mathrm{Sep}/\cong\ \xrightarrow{\mathrm{ro}_1^+} \mathrm{CBA}^+/\cong$*, gde je*

$\mathrm{sq}(\mathbb{P}) := \mathrm{sq}\,\mathbb{P}$, *za svako* $\mathbb{P} \in \mathrm{Poset}$,
$\mathrm{ro}^+(\mathbb{P}) := \mathrm{ro}(P, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})^+$, *za svako* $\mathbb{P} \in \mathrm{Sep}$,
$\mathrm{sq}_1([\mathbb{P}]_{\cong}) := [\mathrm{sq}\,\mathbb{P}]_{\cong}$, *za svako* $[\mathbb{P}]_{\cong} \in \mathrm{Poset}\,/\cong$,
$\mathrm{ro}_1^+([\mathbb{P}]_{\cong}) := [\mathrm{ro}(P, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})^+]_{\cong}$, *za svako* $[\mathbb{P}]_{\cong} \in \mathrm{Sep}\,/\cong$,

su dobro definisana, i pri tome je $\mathrm{sq}_1 \circ q = q \circ \mathrm{sq}$ *i* $\mathrm{ro}_1^+ \circ q = q \circ \mathrm{ro}^+$.

Glava 2

Teorija brojeva i teorija grafova

2.1 Teorija brojeva

Neka $n, m \in \mathbb{N}$, i neka su $n = \prod_{p \text{ prost}} p^{a_{p,n}}$ i $m = \prod_{p \text{ prost}} p^{a_{p,m}}$ (gde je najviše konačno mnogo $a_{p,n} \neq 0$, i najviše konačno mnogo $a_{p,m} \neq 0$) odgovarajuće faktorizacije na proste činioce. Tada je

$$\mathrm{NZD}\{n, m\} = \prod_{p \text{ prost}} p^{\min\{a_{p,n}, a_{p,m}\}} \quad \text{i} \quad \mathrm{NZS}\{n, m\} = \prod_{p \text{ prost}} p^{\max\{a_{p,n}, a_{p,m}\}},$$

gde smo sa $\mathrm{NZD}\{n, m\}$ označili *najveći zajednički delilac*, a sa $\mathrm{NZS}\{n, m\}$ *najmanji zajednički sadržalac* brojeva $n, m \in \mathbb{N}$. Odatle direktno sledi da je

$$\mathrm{NZD}\{n, m\} \cdot \mathrm{NZS}\{n, m\} = nm, \quad \text{za } n, m \in \mathbb{N}.$$

Tvrđenje 2.1.1 *(Bézoutov identitet)*

(a) Ako $n, m \in \mathbb{N}$, tada postoje $a, b \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$\mathrm{NZD}\{n, m\} = an + bm;$$

(b) Ako $n_i \in \mathbb{N}$, za $i \leq k$, tada postoje $a_i \in \mathbb{Z}$, za $i \leq k$, takvi da je

$$\mathrm{NZD}\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} = \textstyle\sum_{i \leq k} a_i n_i.$$

Dokaz.

(a) Sledi direktno iz Euklidovog algoritma.

(b) Ovo induktivno sledi iz (a) i činjenice da je

$$\mathrm{NZD}\{n_1, n_2, \dots, n_k\} = \mathrm{NZD}\{n_1, \mathrm{NZD}\{n_2, \dots, n_k\}\}.$$

□

Za dati skup prirodnih brojeva K, neka $\langle K\rangle$ označava potpolugrupu aditivne polugrupe $\langle \mathbb{N}, +\rangle$, generisanu skupom K. Za skup $K \subseteq \mathbb{N}$ reći ćemo da je *nezavisan* akko

$$\forall n \in K \;\; n \notin \langle K \setminus \{n\}\rangle.$$

Sa $d\mathbb{N}$ označićemo skup $\{dn : n \in \mathbb{N}\}$.

Tvrđenje 2.1.2 *Neka je K neprazan podskup $\mathbb{N}$, i neka je $d = \mathrm{NZD}(K)$. Tada imamo:*

(a) Postoji konačan podskup $K' \subseteq K$ takav da je $\mathrm{NZD}(K') = \mathrm{NZD}(K)$;

(b) Ako je $d = 1$, tada postoji $M \in \mathbb{N}$ takvo da je $[M, \infty)_{\mathbb{N}} \subseteq \langle K\rangle$;

(c) Ako je $d > 1$, tada postoji $M \in \mathbb{N}$ takvo da je

$$[dM, \infty)_{\mathbb{N}} \cap d\mathbb{N} \subseteq \langle K\rangle \subseteq d\mathbb{N};$$

(d) Svaki nezavisan skup je konačan;

(e) $\{n, n+1, \dots, 2n-1\}$ je nezavisan skup veličine n.

Dokaz.

(a) Za dato $n \in \mathbb{N}$, neka je $n = \prod_{p \text{ prost}} p^{a_{p,n}}$ (gde je najviše konačno mnogo $a_{p,n} \neq 0$) odgovarajuća faktorizacija na proste činioce. Tada je

$$\mathrm{NZD}(K) = \prod_{p \text{ prost}} p^{\min\{a_{p,n} : n \in K\}} = p_0^{a_{p_0,n_0}} \cdot p_1^{a_{p_1,n_1}} \cdot \dots \cdot p_s^{a_{p_s,n_s}}.$$

Jasno je da, za $K' := \{n_0, n_1, \dots, n_s\} \subseteq K$, važi da je $\mathrm{NZD}(K') = \mathrm{NZD}(K)$.

(b) Na osnovu (a) postoji $K' = \{n_r : 0 \leq r \leq s\} \subseteq K$ takvo da je $\mathrm{NZD}(K') = 1$. Na osnovu tvrđenja 2.1.1 (b) postoje $a_r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r \leq s$, takvi da je

$$\sum_{r=0}^{s} a_r n_r = 1. \tag{2.1}$$

Za $M := n_0 \sum_{r=0}^{s} |a_r| n_r$, i za proizvoljno $m \in \{0, 1, \dots, n_0 - 1\}$, prema (2.1) imamo da je

$$M + m = \sum_{r=0}^{s} (n_0|a_r| + m a_r) n_r \in \langle K'\rangle.$$

Na osnovu toga je $[M, M+n_0)_{\mathbb{N}} \subseteq \langle K' \rangle$. Pošto $kn_0 \in \langle K' \rangle$, takođe je

$$[M+kn_0, M+(k+1)n_0)_{\mathbb{N}} \subseteq \langle K' \rangle,$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Dakle, $[M, \infty)_{\mathbb{N}} \subseteq \langle K' \rangle \subseteq \langle K \rangle$.

(c) Očigledno je $\langle K \rangle \subseteq d\mathbb{N}$. Prema (a) postoji $K' = \{n_r : 0 \leq r \leq s\} \subseteq K$ takvo da je $\mathrm{NZD}(K') = d$. Tada je $K' = \{dm_r : 0 \leq r \leq s\}$, gde je $\mathrm{NZD}(\{m_r : 0 \leq r \leq s\}) = 1$. Na osnovu (b) postoji $M \in \mathbb{N}$ takvo da je $[M, \infty)_{\mathbb{N}} \subseteq \langle \{m_r : 1 \leq r \leq s\} \rangle$, pa je

$$[dM, \infty)_{\mathbb{N}} \cap d\mathbb{N} \subseteq \langle K' \rangle \subseteq \langle K \rangle.$$

(d) Ako je K beskonačan skup, tada, prema (a), postoji konačan skup $K' \subseteq K$ takav da je $\mathrm{NZD}(K') = \mathrm{NZD}(K) = d$. Pošto je $K \setminus K' \subseteq d\mathbb{N}$ beskonačan skup, za svako $M \in \mathbb{N}$ imamo da je $(K \setminus K') \cap [dM, \infty)_{\mathbb{N}} \cap d\mathbb{N} \neq \emptyset$. Na osnovu (c) postoji $M \in \mathbb{N}$ takvo da je $[dM, \infty)_{\mathbb{N}} \cap d\mathbb{N} \subseteq \langle K' \rangle$. Tada je

$$(K \setminus K') \cap \langle K' \rangle \supseteq (K \setminus K') \cap [dM, \infty)_{\mathbb{N}} \cap d\mathbb{N} \neq \emptyset.$$

Uzmimo $n \in (K \setminus K') \cap \langle K' \rangle$. Tada $n \in K$ i $n \in \langle K' \rangle \subseteq \langle K \setminus \{n\} \rangle$, što znači da skup K nije nezavisan.

(e) Ovo je očigledno. □

2.2 Teorija grafova

Grafovi

Koristićemo dve ekvivalentne definicije grafova:

- Uređeni par $\mathbb{G} = \langle G, \rho \rangle$ je *graf* akko je $\rho \subseteq [G]^2$;
- L_b-struktura $\mathbb{G} = \langle G, \rho \rangle$ je *graf* akko je relacija ρ irefleksivna i simetrična.

Elemente skupa G zvaćemo *čvorovi*, a neuređene parove iz ρ zvaćemo *ivice* grafa $\mathbb{G}$. *Grafovski komplement* grafa $\mathbb{G} = \langle G, \rho \rangle$, u oznaci $\mathbb{G}^{gc}$, je graf $\langle G, [G]^2 \setminus \rho \rangle$. *Stepen čvora* $x \in G$ je broj ivica koje su incidentne s tim čvorom, tj.

$$\deg_{\mathbb{G}}(x) := \Big| \Big\{ \{a, b\} \in \rho : x \in \{a, b\} \Big\} \Big|.$$

Stepen grafa $\mathbb{G}$ je $\mathrm{Deg}(\mathbb{G}) := \sup_{x \in G} \deg_{\mathbb{G}}(x)$. Za graf $\mathbb{G}$ reći ćemo da je *κ-regularan* akko je $\deg_{\mathbb{G}}(x) = \kappa$, za svako $x \in G$. Graf je *regularan* akko je κ-regularan za neko $\kappa \in \mathrm{Card}$.

Ako je $\rho = [G]^2$, tada je $\mathbb{G}$ *kompletan graf* veličine $\nu = |G|$, u oznaci $\mathbb{K}_\nu$. *Prazan graf* veličine ν je graf $\mathbb{E}_\nu := \mathbb{K}_\nu^{gc}$. *Linearni graf* $\mathbb{G}_n$ i *ciklični graf* $\mathbb{C}_n^{sym}$, za $n \in \mathbb{N}$, simetrizacije su odgovarajućih linearnih digrafa $\mathbb{D}_n$ i cikličnih digrafa $\mathbb{C}_n$ (videti naredni pododeljak). Postoje i dva beskonačna linearna grafa, $\mathbb{G}_\omega (= \mathbb{G}_{\omega^*})$ i $\mathbb{G}_\zeta$.

Ako postoji particija $G = G_1 \cup G_2$, takva da je $\rho \subseteq [G]^2 \setminus ([G_1]^2 \cup [G_2]^2)$, tada je graf $\mathbb{G}$ *bipartitan*. Ako je $\rho = [G]^2 \setminus ([G_1]^2 \cup [G_2]^2)$, graf $\mathbb{G}$ je *kompletan bipartitan graf*, u oznaci $\mathbb{K}_{\mu,\nu}$, gde je $|G_1| = \mu$, a $|G_2| = \nu$. Graf $\mathbb{K}_{1,\nu}$ zvaćemo *graf zvezda* i obeležavati sa $\mathbb{S}_\nu$. Slično se definišu i *κ-partitni grafovi*, kao i *kompletni κ-partitni grafovi*, za proizvoljan kardinal $\kappa > 2$.

Tvrđenje 2.2.1 *(videti [78, str. 11]) Graf $\mathbb{G}$ je bipartitan akko se $\mathbb{C}_{2n+1}^{sym} \not\hookrightarrow \mathbb{G}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.*

Ako je $\mathbb{G} = \langle G, \rho \rangle$ graf, i ako je $K \subseteq H \in [G]^{<\omega}$, tada je *orbita grafa* $\mathbb{G}$ skup

$$G_K^H := \Big\{ x \in G \setminus H : \{y \in H : \{x,y\} \in \rho\} = K \Big\}.$$

Radoov graf Erdős i Rényi ([13]) i Rado ([74]) nezavisno su uočili postojanje objekta koji danas zovemo *Radoov graf*, ili *Erdős-Rényijev graf*, ili *prebrojivi slučajni graf*[1]. Radoov graf ima mnogobrojne karakterizacije:

Teorema 2.2.2 *(videti [3]) Ako je $\mathbb{G} = \langle G, \rho \rangle$ prebrojiv graf, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) Za svaki par disjunktnih podskupova $H, K \in [G]^{<\omega}$, postoji $x \in G \setminus (H \cup K)$ takvo da $\{x,y\} \in \rho$ za sve $y \in H$, i da $\{x,z\} \notin \rho$ za sve $z \in K$;

(b) $G_K^H \neq \emptyset$ kad god je $K \subseteq H \in [G]^{<\omega}$;

(c) $|G_K^H| = \omega$ kad god je $K \subseteq H \in [G]^{<\omega}$.

Postoji prebrojiv graf $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$ koji zadovoljava date uslove, i on je jedinstven, do na izomorfizam.

Radoov graf takođe se može okarakterisati kao jedinstveni prebrojivi ultrahomogeni univerzalni graf ([59]), ili kao *Fraïsséov limes* amalgamacione klase svih konačnih grafova ([16]). Pored toga, ako verovatnoću datog slučajnog događaja A označimo sa $p(A)$, Erdős i Rényi su u [13] dokazali da, za dati prebrojiv slučajan graf $\mathbb{G} = \langle G, \rho \rangle$, važi sledeće:

$$\Big(\forall \{x,y\} \in [G]^2 \;\; p\Big(\{x,y\} \in \rho\Big) = \tfrac{1}{2} \Big) \implies p\Big(\mathbb{G} \cong \mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}\Big) = 1.$$

[1]Za dati graf $\mathbb{G}$ reći ćemo da je *rasut* (engl. *scattered*) akko se $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}} \not\hookrightarrow \mathbb{G}$.

U preglednom radu [3] prikazana su mnogobrojna zanimljiva graf-teoretska, model-teoretska i topološka svojstva Radoovog grafa. U narednoj teoremi nabrojaćemo neka osnovna od tih svojstava.

Teorema 2.2.3 *(videti [3]) Neka je $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}} = \langle G, \rho \rangle$ Radoov graf. Tada važi:*

(a) (Homogenost) Svaki izomorfizam između konačnih podgrafova grafa $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$ može se produžiti do automorfizma grafa $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$;

(b) (Univerzalnost) Svaki prebrojiv graf može se utopiti u $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$;

(c) (ω-regularnost) Radoov graf je ω-regularan;

(d) (ω-kategoričnost) Ako je prebrojiv graf $\mathbb{R}$ elementarno ekvivalentan $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$, tada je $\mathbb{R} \cong \mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$;

(e) (Slučajnost orbita) Ako je $F \subseteq G$ konačan skup, tada je $G = F \cup \bigcup_{S \subseteq F} G^F_S$ particija Radoovog grafa na jedan konačan graf i na konačno mnogo Radoovih grafova;

(f) (Jaka nedeljivost) Ako je $G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$ particija, tada je $\mathbb{G}_i \cong \mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$ za neko $i \leq k$. Kao posledicu imamo da je svaki kokonačan podgraf Radoovog grafa Radoov graf;

(g) (Nereverzibilnost)[2] *Ako u Radoovom grafu dodamo (ili obrišemo) konačan broj ivica, opet dobijamo Radoov graf;*

(h) (Samokomplementarnost) $\mathbb{G}^{gc}_{\mathrm{Rado}} \cong \mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$.

Hensonovi grafovi Za graf $\mathbb{G}$ reći ćemo da je $\mathbb{K}_n$-*slobodan*, gde $n \in \mathbb{N}$, akko se $\mathbb{K}_n \not\hookrightarrow \mathbb{G}$. Henson je dokazao sledeću teoremu:

Teorema 2.2.4 *([21]) Za $n \geq 3$ postoji prebrojiv $\mathbb{K}_n$-slobodan graf $\mathbb{G}$ takav da je*

$$G^H_K \neq \emptyset \text{ za sve } K \subseteq H \in [G]^{<\omega} \text{ takve da je podgraf } \mathbb{K}\ \mathbb{K}_n\text{-slobodan.} \quad (2.2)$$

Ako je $\mathbb{G}'$ prebrojiv $\mathbb{K}_n$-slobodan graf koji zadovoljava (2.2), tada je $\mathbb{G} \cong \mathbb{G}'$.

Jedinstveni prebrojivi graf iz prethodne teoreme naziva se *Hensonov graf*, u oznaci $\mathbb{H}_n$, pri čemu je $n \geq 3$. Hensonov graf $\mathbb{H}_n$ takođe se može okarakterisati kao jedinstveni prebrojivi ultrahomogeni univerzalni $\mathbb{K}_n$-slobodni graf ([59]). Iz univerzalnosti i homogenosti, slično kao i za Radoov graf, sledi da su Hensonovi grafovi ω-regularni.

Lachlan i Woodrow su okarakterisali prebrojive ultrahomogene grafove:

[2] Radoov graf primer je fenomena koji je detaljno istražen u trećem delu ove disertacije.

Teorema 2.2.5 *([59]) Prebrojiv graf je ultrahomogen akko je izomorfan jednom od sledećih grafova:*

- $\mathbb{G}_{\kappa,\lambda}$, unija κ disjunktnih kopija grafa $\mathbb{K}_\lambda$, gde je $\kappa \cdot \lambda = \omega$;

- $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$, jedinstveni prebrojivi ultrahomogeni univerzalni graf (Radoov graf ili Erdős-Rényijev graf ili prebrojivi slučajni graf);

- $\mathbb{H}_n$, za $n \geq 3$, jedinstveni prebrojivi ultrahomogeni univerzalni $\mathbb{K}_n$-slobodni graf (Hensonov graf);

- Grafovski komplementi ovih grafova.

Usmereni grafovi

Binarna struktura $\mathbb{D} = \langle D, \rho\rangle$ je *usmereni graf* (ili *digraf*) akko je relacija ρ irefleksivna i asimetrična[3]. Elemente skupa D zvaćemo *čvorovi*, a uređeni par $\langle x, y\rangle \in \rho$ zvaćemo *ivica* digrafa $\mathbb{D}$, usmerena od x do y. *Izlazni stepen čvora* $x \in D$ je broj ivica koje „izlaze" iz čvora x, tj.

$$\deg^+_{\mathbb{D}}(x) := \Big|\rho \cap (\{x\} \times D)\Big|,$$

a *ulazni stepen čvora* $x \in D$ je broj ivica koje „ulaze" u čvor x, tj.

$$\deg^-_{\mathbb{D}}(x) := \Big|\rho \cap (D \times \{x\})\Big|.$$

Izlazni i ulazni stepen digrafa $\mathbb{D}$ definišu se sa $\mathrm{Deg}^+(\mathbb{D}) := \sup_{x\in D} \deg^+_{\mathbb{D}}(x)$, i sa $\mathrm{Deg}^-(\mathbb{D}) := \sup_{x\in D} \deg^-_{\mathbb{D}}(x)$, redom.

Linearni digrafi $\mathbb{D}_n$, za $n \in \mathbb{N}$, dati su sa

$$\mathbb{D}_n := \langle n, \rho_{\mathbb{D}_n}\rangle, \text{ gde je } \rho_{\mathbb{D}_n} := \bigcup_{0<m<n}\{\langle m-1, m\rangle\}, \tag{2.3}$$

a *ciklični digrafi* $\mathbb{C}_n$, za $n \geq 3$, sa

$$\mathbb{C}_n := \langle n, \rho_{\mathbb{C}_n}\rangle, \text{ gde je } \rho_{\mathbb{C}_n} := \rho_{\mathbb{D}_n} \cup \{\langle n-1, 0\rangle\}.$$

Postoje i tri beskonačna linearna digrafa $\mathbb{D}_\omega$, $\mathbb{D}_{\omega^*}$ i $\mathbb{D}_\zeta$. Digrafi u kojima su svaka dva čvora uporediva zovu se *turniri*. Jasno je kako su tranzitivni turniri stroga linearna uređenja, i kako je digraf $\mathbb{C}_3$ netranzitivan turnir.

Tvrđenje 2.2.6 *Ako je $|X| > 3$ i ako je $\mathbb{X} = \langle X, \rho\rangle$ turnir koji je 3-monomorfan, tada je $\mathbb{X}$ linearno uređenje.*

[3] U nekim situacijama, proizvoljnu binarnu strukturu $\mathbb{X} = \langle X, \rho\rangle$ smatraćemo *digrafom u širem smislu.*

Dokaz. Pretpostavimo da relacija ρ nije tranzitivna. Tada postoje različiti $x, y, z \in X$, takvi da je $x\rho y$, $y\rho z$ i $z\rho x$. Uzmimo $w \in X \setminus \{x, y, z\}$. Pošto je struktura $\mathbb{X}$ 3-monomorfna, sledi da ni $\rho\restriction_{\{x,y,w\}}$ nije tranzitivna, odakle sledi da je $y\rho w$. Isto tako, imamo da $\rho\restriction_{\{y,w,z\}}$ takođe nije tranzitivna, odakle sledi da je $w\rho y$. A to je nemoguće, zato što je ρ turnir. Dakle, turnir ρ je tranzitivan, što znači da je to linearno uređenje. □

Lema 2.2.7 *Ako su $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ turniri, tada je* $\mathrm{Hom}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \mathrm{Emb}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Dokaz. Slično dokazu leme 1.3.1 (b). □

Lachlan je okarakterisao prebrojive ultrahomogene turnire:

Teorema 2.2.8 *([58]) Prebrojiv turnir je ultrahomogen akko je izomorfan jednom od sledećih turnira:*

- $\mathbb{Q} = \langle Q, < \rangle$, racionalna linija;

- $\mathbb{T}^\infty$, jedinstveni prebrojivi ultrahomogeni univerzalni turnir (slučajni turnir);

- $\mathbb{Q}^* = \langle D, \to \rangle$, gde je $D = \{e^{i\varphi} : \varphi \in (-\pi, \pi)_\mathbb{Q}\}$, i $z_1 \to z_2$ akko $\arg \frac{z_2}{z_1} \in (0, \pi)$, za $z_1, z_2 \in D$ (lokalno gusto uređenje ili kružni turnir).

Ramseyeva teorema

Beskonačna verzija Ramseyeve teoreme kaže da, ako ivice kompletnog grafa s prebrojivo mnogo čvorova obojimo u konačno mnogo boja, tada postoji beskonačan monohromatski podgraf. To se, na jeziku teorije skupova, može formulisati na sledeći način:

Teorema 2.2.9 *(Ramsey [76]) Neka $n \in \mathbb{N}$ i neka je $[\omega]^2 = \bigcup_{k=1}^n H_n$ konačna particija skupa $[\omega]^2$. Tada postoji podskup $X \subseteq \omega$ kardinalnosti ω takav da je $[X]^2 \subseteq H_i$, za neko $i \in \{1, 2, ..., n\}$.*

Ramseyeva teorema se može uopštiti. Naime, ako umesto $[\omega]^2$ i $[X]^2$ stavimo $[\omega]^m$ i $[X]^m$, za proizvoljno $m \in \mathbb{N}$ (tj. ako posmatramo *hipergrafove* umesto grafova), tvrđenje će ostati tačno. A da li se umesto ω može staviti ω_α za $\alpha > 0$, a da tvrđenje ostane tačno? Za slučaj kad je ω_α kardinal sledbenik, negativni odgovor dao je Sierpiński.

Teorema 2.2.10 *(Sierpiński [81]) Neka je α ordinal sledbenik. Tada postoji particija $[\omega_\alpha]^2 = H_1 \cup H_2$, takva da za svaki podskup $X \subseteq \omega_\alpha$ kardinalnosti ω_α važi $[X]^2 \cap H_1 \neq \emptyset$ i $[X]^2 \cap H_2 \neq \emptyset$.*

Erdős i Tarski su 1961. odgovorili šta se događa u slučaju kad je ω_α granični kardinal (pogledati [63]). U narednom tvrđenju data je jedna primena Ramseyeve teoreme na binarne relacijske strukture.

Tvrđenje 2.2.11 *Neka je ρ irefleksivna binarna relacija na skupu X, pri čemu je $|X| \geq 2$. Tada važi:*

(a) Ako je struktura $\mathbb{X}$ 2-monomorfna, tada je ρ ili prazna relacija $\emptyset$, ili kompletan graf $(X \times X) \setminus \Delta_X$, ili turnir;

(b) Ako je skup X beskonačan i ako je struktura $\mathbb{X}$ 3-monomorfna, tada je ρ ili prazna relacija $\emptyset$, ili kompletan graf $(X \times X) \setminus \Delta_X$, ili linearno uređenje;

(c) Ako je struktura $\mathbb{X}$ monomorfna, tada je ρ ili prazna relacija $\emptyset$, ili kompletan graf $(X \times X) \setminus \Delta_X$, ili netranzitivni troelementni turnir, ili linearno uređenje.

Dokaz.

(a) Uzmimo $x, y \in X$, takve da je $x \neq y$. Tada je moguće:

1. $\neg x\rho y \wedge \neg y\rho x$,
2. $x\rho y \wedge y\rho x$,
3. $x\rho y \veebar y\rho x$.

Pošto je struktura $\mathbb{X}$ 2-monomorfna i irefleksivna, u prvom slučaju ρ je prazna relacija, u drugom slučaju ρ je kompletan graf, a u trećem slučaju ρ je turnir.

(b) Uzmimo $Y \in [X]^\omega$, i neka je $H_0 = \{\{x,y\} \in [Y]^2 : \neg x\rho y \wedge \neg y\rho x\}$, $H_1 = \{\{x,y\} \in [Y]^2 : x\rho y \wedge y\rho x\}$ i $H_3 = \{\{x,y\} \in [Y]^2 : x\rho y \veebar y\rho x\}$. Na osnovu Ramseyeve teoreme (teorema 2.2.9) postoji $Z \in [Y]^\omega$ takvo da je $[Z]^2 \subseteq H_i$, za neko $i \in \{0,1,2\}$. Uzmimo $A \in [Z]^3$ proizvoljno. Kako je struktura $\mathbb{X}$ 3-monomorfna, zaključujemo da je $\rho = \emptyset$ ako je $i = 0$, da je $\rho = (X \times X) \setminus \Delta_X$ ako je $i = 1$, i da je ρ turnir ako je $i = 2$. Ako je ρ turnir, preostaje još samo primeniti tvrđenje 2.2.6. Jasno je da su i prazna relacija, i kompletan graf i linearna uređenja n-monomorfne strukture, za svako $n \in \mathbb{N}$.

(c) Ako $|X| \in \{2,3\}$, tada, s obzirom da je struktura $\mathbb{X}$ monomorfna, na osnovu (a) zaključujemo kako je ρ ili prazna relacija, ili kompletan graf, ili turnir. Kako su dvoelementni turniri i tranzitivni troelementni turniri linearna uređenja, u ovom slučaju imamo da je ρ ili prazna relacija, ili kompletan graf, ili netranzitivni troelementni turnir, ili linearno uređenje. A ako je $|X| > 3$, tada, s obzirom da je struktura $\mathbb{X}$ monomorfna, na osnovu (a) i tvrđenja 2.2.6 zaključujemo kako je u ovom slučaju ρ ili prazna relacija, ili kompletan graf, ili linearno uređenje. $\square$

2.3 Povezanost binarnih struktura

Kako je presek proizvoljne familije relacija ekvivalencije relacija ekvivalencije, za proizvoljnu relaciju ρ na skupu X postoji najmanja relacija ekvivalencije ρ_{rst} koja je sadrži. Konstruktivno, ρ_{rst} se dobija kao tranzitivno zatvorenje relacije $\rho_{rs} := \rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_X$:

$$\rho_{rst} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\rho_{rs} \circ \rho_{rs} \circ \cdots \circ \rho_{rs}}_{n}.$$

Klase ekvivalencije relacije ρ_{rst} zvaćemo *komponente povezanosti* L_b-strukture $\langle X, \rho \rangle$. L_b-struktura $\langle X, \rho \rangle$ je *povezana* akko ima jednu komponentu povezanosti[4]. Inače je *nepovezana*. Relacije ekvivalencije su prototip nepovezanih L_b-struktura. Među ostalim istaknutim primerima su nepovezani prebrojivi ultrahomogeni grafovi i poseti (videti teoreme 1.2.4 i 2.2.5), kao i višekorenska drveta.

Tvrđenje 2.3.1 *([33]) Ako je $\mathbb{X}$ L_b-struktura, tada je barem jedna od struktura $\mathbb{X}$ i $\mathbb{X}^c$ povezana.*

Dakle, sa stanovišta povezanosti, postoje tri klase L_b-struktura: 1. $\mathbb{X}$ je povezana i $\mathbb{X}^c$ je nepovezana struktura; 2. $\mathbb{X}$ je nepovezana i $\mathbb{X}^c$ je povezana struktura; 3. I $\mathbb{X}$ i $\mathbb{X}^c$ su povezane strukture. Za strukture iz poslednje klase reći ćemo da su *bi-povezane* (engl. *biconnected*).

Ako sa $[x]$ označimo komponentu povezanosti elementa $x \in X$, tada imamo sledeću lemu:

Lema 2.3.2 *([46]) Neka su $\langle X, \rho \rangle$ i $\langle Y, \sigma \rangle$ binarne strukture i neka je $f : \langle X, \rho \rangle \to \langle Y, \sigma \rangle$ homomorfizam. Tada važi:*
(a) $f : \langle X, \rho_{rst} \rangle \to \langle Y, \sigma_{rst} \rangle$ je homomorfizam;
(b) $f[[x]] \subseteq [f(x)]$, za sve $x \in X$;
(c) $f\restriction_{[x]} : [x] \to [f(x)]$ je homomorfizam, za sve $x \in X$.

Ako su $\mathbb{X}_i = \langle X_i, \rho_i \rangle$, $i \in I$, povezane i po parovima disjunktne L_b-strukture, tada se struktura

$$\bigcup_{i \in I} \mathbb{X}_i := \left\langle \bigcup_{i \in I} X_i, \bigcup_{i \in I} \rho_i \right\rangle$$

naziva *disjunktna unija struktura* $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, i strukture $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, su njene komponente povezanosti. Ako komponente $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, nisu po parovima

[4] Binarna struktura $\mathbb{X}$ je povezana akko je odgovarajući digraf (u širem smislu) *slabo povezan*.

disjunktne, tada je $\mathrm{type}(\bigcup_{i\in I}\mathbb{X}_i) := \mathrm{type}(\bigcup_{i\in I}\mathbb{X}'_i)$, gde su $\mathbb{X}' \in \mathrm{type}(\mathbb{X}_i)$, $i \in I$, po parovima disjunktne strukture.

Kurilić je okarakterisao utapanja između dve nepovezane L_b-strukture:

Tvrđenje 2.3.3 *([31]) Neka su $\mathbb{X}_i = \langle X_i, \rho_i\rangle$, $i \in I$, i $\mathbb{Y}_j = \langle Y_j, \sigma_j\rangle$, $j \in J$, dve familije po parovima disjunktnih i povezanih L_b-struktura, i neka su $\mathbb{X} = \langle X, \rho\rangle$ i $\mathbb{Y} = \langle Y, \sigma\rangle$ njihove unije. Tada $F \in \mathrm{Emb}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ akko postoji funkcija $f : I \to J$ i utapanja $g_i : \mathbb{X}_i \hookrightarrow \mathbb{Y}_{f(i)}$, $i \in I$, takva da je $F = \bigcup_{i\in I} g_i$ i $\langle g_i(x), g_{i'}(x')\rangle \notin \sigma_{rs}$, kad god je $i \neq i'$, $x \in X_i$ i $x' \in X_{i'}$.*

U narednom tvrđenju, daćemo karakterizaciju kondenzacija između dve nepovezane L_b-strukture.

Tvrđenje 2.3.4 *([46]) Neka su $\mathbb{X}_i = \langle X_i, \rho_i\rangle$, $i \in I$, i $\mathbb{Y}_j = \langle Y_j, \sigma_j\rangle$, $j \in J$, dve familije po parovima disjunktnih i povezanih L_b-struktura, i neka su $\mathbb{X} = \langle X, \rho\rangle$ i $\mathbb{Y} = \langle Y, \sigma\rangle$ njihove unije. Tada $F \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ akko postoji surjekcija $f : I \to J$ i monomorfizmi $g_i : \mathbb{X}_i \to \mathbb{Y}_{f(i)}$, $i \in I$, takvi da je $F = \bigcup_{i\in I} g_i$ i da je*

(i) $g_i[X_i] \cap g_{i'}[X_{i'}] = \emptyset$, za različite $i, i' \in I$;

(ii) $\bigcup_{i\in f^{-1}[\{j\}]} g_i[X_i] = Y_j$, za svako $j \in J$.

Dokaz.

($\Rightarrow$) Neka $F \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Skupovi X_i, $i \in I$, su komponente povezanosti strukture $\mathbb{X}$, a skupovi Y_j, $j \in J$, su komponente povezanosti strukture $\mathbb{Y}$. Na osnovu leme 2.3.2 (b), za $i \in I$ i $x \in X_i$ imamo da je $F[[x]] \subseteq [F(x)]$, pa postoji (jedinstveno) $f(i) \in J$ takvo da je $F[X_i] \subseteq Y_{f(i)}$. Na osnovu leme 2.3.2 (c) i pošto je F injekcija, $g_i := F\restriction_{X_i}: \mathbb{X}_i \to \mathbb{Y}_{f(i)}$ je monomorfizam. Jasno je da je $F = \bigcup_{i\in I} g_i$, i pošto je F surjekcija, $f : I \to J$ je takođe surjekcija, i (ii) je ispunjeno. (i) je ispunjeno zato što je F injekcija.

($\Leftarrow$) Neka je $F = \bigcup_{i\in I} g_i$, gde funkcije $f : I \to J$ i $g_i : \mathbb{X}_i \to \mathbb{Y}_{f(i)}$, $i \in I$, zadovoljavaju date uslove. Na osnovu (i) i pošto su funkcije g_i injekcije, F je takođe injekcija. Na osnovu (ii) i pošto je $f : I \to J$ surjekcija, F je takođe surjekcija. Dokažimo još da je F homomorfizam. Ako $u, v \in X$ i $u\rho v$, tada su u i v u istoj komponenti strukture $\mathbb{X}$, tj. postoji $i \in I$ tako da $u, v \in X_i$. Kako je g_i homomorfizam, imamo da je

$$F(u) = g_i(u)\sigma_{f(i)}g_i(v) = F(v),$$

odakle je $F(u)\sigma F(v)$. $\square$

Monotone kardinalne invarijante

Za kardinalnu funkciju θ, koja za domen ima klasu povezanih L_b-struktura, reći ćemo da je *monotona u odnosu na monomorfizme* akko zadovoljava sledeći uslov:

$$\mathrm{Mono}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \neq \emptyset \implies \theta(\mathbb{X}) \leq \theta(\mathbb{Y}), \tag{2.4}$$

za proizvoljne povezane L_b-strukture $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathrm{Mod}_{L_b}$. Jasno je kako je svaka takva funkcija $\cong$-invarijantna.

Ako je $\mathbb{A} = \langle A, \rho \rangle$ L_b-struktura, sa $\mathbb{A}_{sym}$ označavaćemo njenu *simetrizaciju* $\langle A, \rho \cup \rho^{-1} \rangle$.

Tvrđenje 2.3.5 *([51])*
(a) Ako je $\mathbb{F}$ L_b-struktura, tada su kardinalne funkcije

$$\theta^{\mathbb{F}}(\mathbb{X}) := \left| \left\{ A \subseteq X : \mathrm{Cond}(\mathbb{F}, \mathbb{A}) \neq \emptyset \right\} \right|,$$

$$\theta^{\mathbb{F}}_{sym}(\mathbb{X}) := \left| \left\{ A \subseteq X : \mathrm{Cond}(\mathbb{F}, \mathbb{A}_{sym}) \neq \emptyset \right\} \right|,$$

monotone u odnosu na monomorfizme;

(b) Ako su θ_j, $j \in J$, kardinalne funkcije koje su monotone u odnosu na monomorfizme, i ako su κ_j, $j \in J$, proizvoljni kardinali, tada su sledeće kardinalne funkcije

$$\theta_1(\mathbb{X}) := \sup\{\kappa_j : j \in J \wedge \theta_j(\mathbb{X}) \neq 0\},$$

$$\theta_2(\mathbb{X}) := \sup\{\kappa_j \cdot \theta_j(\mathbb{X}) : j \in J\},$$

$$\theta_3(\mathbb{X}) := \textstyle\sum_{j \in J} \kappa_j \cdot \theta_j(\mathbb{X},)$$

monotone u odnosu na monomorfizme.

Dokaz.
(a) Neka su $\mathbb{F}, \mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ L_b-strukture i neka je $\mathrm{Mono}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \neq \emptyset$. Neka je $f \in \mathrm{Mono}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ proizvoljno. Jasno je da tada, za dato $A \subseteq X$, imamo da $f|_A \in \mathrm{Cond}(\mathbb{A}, f[A])$, odakle sledi da i $f|_A \in \mathrm{Cond}(\mathbb{A}_{sym}, (f[A])_{sym})$. Dakle, ako $g \in \mathrm{Cond}(\mathbb{F}, \mathbb{A})$, tada $f|_A \circ g \in \mathrm{Cond}(\mathbb{F}, f[A])$, pa

$$\mathrm{Cond}(\mathbb{F}, \mathbb{A}) \neq \emptyset \implies \mathrm{Cond}(\mathbb{F}, f[A]) \neq \emptyset.$$

Odatle sledi da je

$$\Big\{f[A] : A \subseteq X \wedge \mathrm{Cond}(\mathbb{F}, \mathbb{A}) \neq \emptyset\Big\} \subseteq \Big\{B : B \subseteq Y \wedge \mathrm{Cond}(\mathbb{F}, \mathbb{B}) \neq \emptyset\Big\},$$

što, uz činjenicu da je $f[\cdot] : P(X) \to P(Y)$ injekcija, daje

$$\begin{aligned}\theta^{\mathbb{F}}(\mathbb{X}) &= \Big|\Big\{A : A \subseteq X \wedge \mathrm{Cond}(\mathbb{F}, \mathbb{A}) \neq \emptyset\Big\}\Big| \\ &= \Big|\Big\{f[A] : A \subseteq X \wedge \mathrm{Cond}(\mathbb{F}, \mathbb{A}) \neq \emptyset\Big\}\Big| \\ &\leq \Big|\Big\{B : B \subseteq Y \wedge \mathrm{Cond}(\mathbb{F}, \mathbb{B}) \neq \emptyset\Big\}\Big| = \theta^{\mathbb{F}}(\mathbb{Y}).\end{aligned}$$

A ako $g \in \mathrm{Cond}(\mathbb{F}, \mathbb{A}_{sym})$, tada $f|_A \circ g \in \mathrm{Cond}(\mathbb{F}, (f[A])_{sym})$, pa

$$\mathrm{Cond}(\mathbb{F}, \mathbb{A}_{sym}) \neq \emptyset \implies \mathrm{Cond}(\mathbb{F}, (f[A])_{sym}) \neq \emptyset.$$

Odatle, kao iznad, sledi da je $\theta^{\mathbb{F}}_{sym}(\mathbb{X}) \leq \theta^{\mathbb{F}}_{sym}(\mathbb{Y})$.

(b) Neka su $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ L_b-strukture i neka je $\mathrm{Mono}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \neq \emptyset$. Ako za neko $j \in J$ važi da je $\theta_j(\mathbb{X}) \neq 0$, tada, zbog monotonosti kardinalne funkcije θ_j, imamo da je $\theta_j(\mathbb{Y}) \neq 0$. Dakle,

$$\{\kappa_j : j \in J \wedge \theta_j(\mathbb{X}) \neq 0\} \subseteq \{\kappa_j : j \in J \wedge \theta_j(\mathbb{Y}) \neq 0\},$$

odakle sledi da je $\theta_1(\mathbb{X}) \leq \theta_1(\mathbb{Y})$. Dokaz monotonosti kardinalnih funkcija θ_2 i θ_3 ide slično. $\square$

Primer 2.3.6 Neka su date sledeće L_b-strukture:

$$\mathbb{F}_0 := \langle 1, \emptyset\rangle,$$

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_1 &:= \langle 1, \{\langle 0,0\rangle\}\rangle, \\ \mathbb{F}_2 &:= \langle 2, \{\langle 0,1\rangle\}\rangle, \\ \mathbb{F}_3 &:= \langle 2, \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\}\rangle.\end{aligned}$$

Neka je dalje $\mathbb{X} = \langle X, \rho\rangle$ proizvoljna L_b-struktura. Tada su, na osnovu tvrđenja 2.3.5, sledeće kardinalne funkcije monotone u odnosu na monomorfizme:

- $\theta^{\mathbb{F}_0}(\mathbb{X}) = |X|$ - veličina domena,
- $\theta^{\mathbb{F}_1}(\mathbb{X}) = |\rho \cap \Delta_X|$ - broj petlji u digrafu (u širem smislu) $\mathbb{X}$,
- $\theta^{\mathbb{F}_3}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2} \cdot |(\rho \setminus \Delta_X) \cap (\rho \setminus \Delta_X)^{-1}|$ - broj dvostrukih ivica u digrafu (u širem smislu) $\mathbb{X}$ (pri tome je $\frac{1}{2} \cdot \kappa := \kappa$, za $\kappa \geq \omega$),

• $\theta^{\mathbb{C}_n}_{sym}(\mathbb{X})$ - broj ciklusa $\mathbb{C}_n$, za $n \geq 3$, u simetrizaciji digrafa (u širem smislu) $\mathbb{X}$,

• $\theta(\mathbb{X}) = \theta^{\mathbb{F}_1}(\mathbb{X}) + \theta^{\mathbb{F}_2}(\mathbb{X}) + \theta^{\mathbb{F}_3}(\mathbb{X}) = |\rho|$ - veličina relacije,

• $\theta(\mathbb{X}) = \sup\{n \in \mathbb{N} : \theta^{\mathbb{C}_n}_{sym}(\mathbb{X}) \neq 0\}$ - supremum dužina svih ciklusa u simetrizaciji digrafa (u širem smislu) $\mathbb{X}$.

Za $\kappa \in \mathrm{Card}$, obeležimo sa $\mathbb{S}^*_\kappa$ L_b-strukturu koja se dobija od grafa zvezde $\mathbb{S}_\kappa (= \mathbb{K}_{1,\kappa})$ refleksivizacijom centralnog čvora. Definišimo sada sledeću klasu L_b-struktura:

$$\mathcal{F} := \bigcup_{\kappa \in \mathrm{Card}} \Big\{\mathbb{F} \in \mathrm{Mod}_{L_b}(\kappa + 1) : \mathbb{F}_{sym} \cong \mathbb{S}_\kappa \vee \mathbb{F}_{sym} \cong \mathbb{S}^*_\kappa\Big\}.$$

Tada je sledeća kardinalna funkcija monotona u odnosu na monomorfizme:

• $\theta(\mathbb{X}) = \sup\Big\{|R^{\mathbb{F}}| : \mathbb{F} = \langle F, R^{\mathbb{F}}\rangle \in \mathcal{F} \wedge \theta^{\mathbb{F}}(\mathbb{X}) \neq 0\Big\} = \mathrm{Deg}^{\pm}(\mathbb{X})$ - ukupni stepen digrafa (u širem smislu) $\mathbb{X}$.

Glava 3

Logika i teorija modela

3.1 Sintaksa i semantika

Jezik (prvog reda) L je niz simbola. Razlikujemo tri vrste simbola, tj.

$$L = \langle R_i : i \in I \rangle \cup \langle F_j : j \in J \rangle \cup \langle C_k : k \in K \rangle,$$

pri čemu su skupovi I, J i K po parovima disjunktni. Simbole R_i zvaćemo *relacijski simboli*, simbole F_j zvaćemo *funkcijski simboli*, a simbole C_k zvaćemo *simboli konstanti*. Svakom jeziku pridružena je funkcija

$$\mathrm{ar} : L[I \cup J \cup K] \to \omega,$$

koja se zove *signatura*, i za koju važi $\mathrm{ar}[L[I \cup J]] \subseteq \mathbb{N}$, kao i $\mathrm{ar}[L[K]] \subseteq \{0\}$. *Moć jezika* L je

$$\|L\| := \max\{|I \cup J \cup K|, \omega\}.$$

L-model (ili *L-struktura*) je uređeni par $\langle X, \mathcal{I} \rangle$, gde je X neprazan skup koji se zove *domen* (ili *nosač*), a $\mathcal{I}$ je tzv. *funkcija interpretacije* s domenom $I \cup J \cup K$, takva da, za svako $i \in I$, $\rho_i = \mathcal{I}(i)$ je relacija na X arnosti $\mathrm{ar}(R_i)$, za svako $j \in J$, $f_j = \mathcal{I}(j)$ je operacija na X arnosti $\mathrm{ar}(F_j)$, i za svako $k \in K$, $c_k := \mathcal{I}(k)$ je element skupa X (tj. operacija arnosti 0).

Nadalje ćemo raditi samo s *relacijskim jezicima* $L = \langle R_i : i \in I \rangle$. Jezik $L = \langle R_i : i \in I \rangle$, za koji je $n_i = \mathrm{ar}(R_i) = 1$, za svako $i \in I$, zvaćemo *unaran jezik*, jezik $L_u = \langle R \rangle$, gde je $\mathrm{ar}(R) = 1$, zvaćemo *monounarni jezik*, a jezik $L_b = \langle R \rangle$, gde je $\mathrm{ar}(R) = 2$, zvaćemo *binarni jezik*. Model $\mathbb{X}'$ je *podmodel* modela $\mathbb{X}$ akko je $X' \subseteq X$, i, za svako $i \in I$, relacija ρ_i' je restrikcija relacije ρ_i na skup X', tj. $\rho_i' = \rho_i \cap (X')^{n_i}$. Tada je model $\mathbb{X}$ *ekstenzija* modela $\mathbb{X}'$. Pogledati odeljak 1.1 za definiciju i svojstva raznih morfizama između relacijskih struktura.

Za dati relacijski jezik $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ i niz promenljivih $\langle v_k : k \in \omega\rangle$, *atomne L-fomule* su $v_k = v_l$ za $k, l \in \omega$, i $R_i(v_{k_1}, v_{k_2}, \ldots, v_{k_{n_i}})$ za $i \in I$ i $k_1, k_2, \ldots k_{n_i} \in \omega$. Atomne formule i negacije atomnih formula nazivaju se *literali*. Sledi rekurzivna definicija *L-formula (prvog reda)*:

1. Atomne L-formule su L-formule;

2. Ako su φ i ψ L-formule i x neka promenljiva, tada su i $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$, $\neg\varphi$, $(\forall x)\varphi$ i $(\exists x)\varphi$ L-formule;

3. Sve L-formule dobijaju se u konačno mnogo koraka primenom 1. i 2.

L-formule u kojima se ne pojavljuje negacija nazivaju se *pozitivne L-formule*, a one u kojima se negacija pojavljuje samo unutar podformula $\neg v_k = v_l$ nazivaju se *R-pozitivne L-formule*. Sada ćemo definisati još neke specijalne klase formula. L-formula u kojoj se ne pojavljuju kvantifikatori naziva se Σ^0_0 (ili Π^0_0) formula. L-formula φ je Σ^0_{n+1} (redom, Π^0_{n+1}) formula akko je φ oblika $(\exists x_1 \ldots \exists x_m)\, \psi$ (redom, $(\forall x_1 \ldots \forall x_m)\, \psi$), gde je ψ Π^0_n (redom, Σ^0_n) formula. Skup $\bigcup_{n\in\omega}(\Sigma^0_n \cup \Pi^0_n)$ je skup L-formula u tzv. *preneks normalnoj formi*.

Pojavljivanje promenljive x u datoj formuli zovemo *vezano* akko je to pojavljivanje oblika $(\forall x)$ ili $(\exists x)$, ili se promenljiva x nalazi u oblasti dejstva nekog kvantifikatora $(\forall x)$ ili $(\exists x)$. Ono pojavljivanje promenljive x koje nije vezano zove se *slobodno* pojavljivanje. Sa $\varphi(v_{k_0}, v_{k_1}, \ldots, v_{k_n})$ označavaćemo formulu čije slobodne promenljive su iz skupa $\{v_{k_0}, v_{k_1}, \ldots, v_{k_n}\}$. *L-rečenica* je L-formula bez slobodnih promenljivih.

U formalnoj teoriji koja se zove *predikatski račun prvog reda*, za L-formulu φ kažemo da je *deducibilna* iz skupa formula Σ akko se φ može izvesti u konačno mnogo koraka iz logičkih aksioma i formula iz Σ pomoću dva pravila zaključivanja:

1. *Modus Ponens*: Iz φ i $\varphi \Rightarrow \psi$ zaključujemo ψ.

2. *Generalizacija*: Iz φ zaključujemo $(\forall x)\, \varphi$, za datu promenljivu x.

L-formula φ je *teorema* akko je deducibilna iz praznog skupa formula. Da je φ teorema označavamo sa $\vdash \varphi$, a da je φ deducibilna iz Σ označavamo sa $\Sigma \vdash \varphi$. Skup L-rečenica Σ je *nekonzistentan* akko je svaka L-formula deducibilna iz Σ. Inače je *konzistentan*. Skup L-rečenica Σ je *maksimalno konzistentan* akko je Σ konzistentan i svaki skup L-rečenica Σ', za koji važi $\Sigma \subsetneq \Sigma'$, je nekonzistentan. Lindenbaumova teorema kaže da je svaki konzistentan skup L-rečenica sadržan u nekom maksimalno konzistentnom skupu L-rečenica.

Tvrđenje 3.1.1 *(videti [4, str. 25])*

(a) Σ je konzistentan akko je svaki konačan $\Sigma' \subseteq \Sigma$ konzistentan;

(b) $\Sigma \cup \{\varphi\}$ je nekonzistentan akko $\Sigma \vdash \neg\varphi$;

(c) Ako je Σ maksimalno konzistentan, tada za sve L-rečenice φ i ψ važi: $\Sigma \vdash \varphi$ akko $\varphi \in \Sigma$; $\varphi \notin \Sigma$ akko $\neg\varphi \in \Sigma$; $\varphi \wedge \psi \in \Sigma$ akko $\varphi \in \Sigma$ i $\psi \in \Sigma$;

(d) (Teorema dedukcije) Ako je φ L-rečenica, a ψ L-formula, tada važi da je $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ akko je $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \psi$.

U teoriji modela, formulama se priča o modelima. U srži te priče je definicija *istinitosne vrednosti formule* koju je dao Tarski. Neka je $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ relacijski jezik i neka je $\mathbb{X} = \langle X, \rho\rangle$, gde $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$, L-struktura. *Valuacija u* $\mathbb{X}$ je svaki niz $\bar{a} : \omega \to X$. Promenljive v_i u valuaciji $\bar{a}$ uzimaju vrednosti a_i, za $i \in \omega$. Sa $\bar{a}_{\langle n,b\rangle}$ označavamo valuaciju koja se dobija od $\bar{a}$ zamenom a_n sa b, tj. $\bar{a}_{\langle n,b\rangle} := \langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b, a_{n+1}, \ldots\rangle$. Neka je dalje φ L-formula s proizvoljno mnogo slobodnih promenljiivih. Sada ćemo rekurzivno definisati šta to znači da je L-formula φ *istinita u valuaciji* $\bar{a}$ *u* $\mathbb{X}$ (kažemo još i da *valuacija* $\bar{a}$ *zadovoljava* φ *u* $\mathbb{X}$), u oznaci $\mathbb{X} \models \varphi[\bar{a}]$:

1. $\mathbb{X} \models (v_k = v_l)[\bar{a}]$ akko je $a_k = a_l$,
2. $\mathbb{X} \models R_i(v_{k_1}, v_{k_2}, \ldots, v_{k_{n_i}})[\bar{a}]$ akko $\langle a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_{n_i}}\rangle \in \rho_i$,
3. $\mathbb{X} \models \neg\varphi[\bar{a}]$ akko nije $\mathbb{X} \models \varphi[\bar{a}]$,
4. $\mathbb{X} \models (\varphi \wedge \psi)[\bar{a}]$ akko je $\mathbb{X} \models \varphi[\bar{a}]$ i $\mathbb{X} \models \psi[\bar{a}]$,
5. $\mathbb{X} \models (\varphi \vee \psi)[\bar{a}]$ akko je $\mathbb{X} \models \varphi[\bar{a}]$ ili je $\mathbb{X} \models \psi[\bar{a}]$,
6. $\mathbb{X} \models (\varphi \Rightarrow \psi)[\bar{a}]$ akko ako $\mathbb{X} \models \varphi[\bar{a}]$ onda $\mathbb{X} \models \psi[\bar{a}]$,
7. $\mathbb{X} \models (\varphi \Leftrightarrow \psi)[\bar{a}]$ akko je $\mathbb{X} \models \varphi[\bar{a}]$ akko $\mathbb{X} \models \psi[\bar{a}]$,
8. $\mathbb{X} \models (\forall v_k)\, \varphi[\bar{a}]$ akko je za svako $b \in X$, $\mathbb{X} \models \varphi[\bar{a}_{\langle k,b\rangle}]$,
9. $\mathbb{X} \models (\exists v_k)\, \varphi[\bar{a}]$ akko postoji $b \in X$, takvo da je $\mathbb{X} \models \varphi[\bar{a}_{\langle k,b\rangle}]$.

Ako je φ L-rečenica i $\bar{a}, \bar{b} \in {}^{\omega}X$ dve valuacije u $\mathbb{X}$, tada je $\mathbb{X} \models \varphi[\bar{a}]$ akko je $\mathbb{X} \models \varphi[\bar{b}]$. Shodno tome, kažemo da je L-rečenica φ *istinita u* $\mathbb{X}$ (ili da je $\mathbb{X}$ *model za* φ, u oznaci $\mathbb{X} \models \varphi$) akko je $\mathbb{X} \models \varphi[\bar{a}]$ za neku (ili ekvivalentno, za svaku) valuaciju $\bar{a}$ u $\mathbb{X}$. Ako je Σ skup L-rečenica, kažemo da je $\mathbb{X}$ model za Σ (u oznaci $\mathbb{X} \models \Sigma$) akko je $\mathbb{X}$ model za svako $\varphi \in \Sigma$. Skup L-rečenica je *zadovoljiv* akko ima bar jedan model. L-rečenicu φ koja je istinita u svakom $\mathbb{X} \in \mathrm{Mod}_L$ zvaćemo *valjana*, u oznaci $\models \varphi$. L-rečenica φ je *posledica* skupa rečenica Σ, u oznaci $\Sigma \models \varphi$, akko je svaki model Σ i model φ.

Neka su $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ L-strukture, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ homomorfizam, i neka je $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ L-formula. Kažemo da f *očuvava* φ akko

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in X \; \Big(\mathbb{X} \models \varphi[x_1, \ldots, x_n] \Rightarrow \mathbb{Y} \models \varphi[f(x_1), \ldots, f(x_n)]\Big).$$

Kažemo da je φ *apsolutna u odnosu na* f akko

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in X \Big(\mathbb{X} \models \varphi[x_1, \ldots, x_n] \Leftrightarrow \mathbb{Y} \models \varphi[f(x_1), \ldots, f(x_n)] \Big).$$

Teorema 3.1.2 *(Lyndon [64]; videti takođe [20, str. 498]) Neka je L relacijski jezik a φ L-formula. Tada imamo:*

(a) φ je očuvana epimorfizmima akko je φ logički ekvivalentna nekoj pozitivnoj L-formuli;

(b) φ je očuvana kondenzacijama akko je φ logički ekvivalentna nekoj R-pozitivnoj L-formuli.

3.2 Zatvorenost, kompletnost, kompaktnost i kategoričnost

Neka je $L = \langle R_i : i \in I \rangle$ relacijski jezik. Skup L-rečenica naziva se *L-teorija*. L-teorija je *zatvorena* akko je jednaka skupu svojih posledica. Sve zatvorene teorije različite od Sent_L su konzistentne, gde Sent_L označava skup svih L-rečenica. Ako je Σ proizvoljna teorija, tada je teorija

$$\Sigma^{\models} := \Big\{ \varphi \in \mathrm{Sent}_L : \Sigma \models \varphi \Big\}$$

zatvorena. L-teorija Σ je *kompletna* akko je skup svih njenih posledica $\Sigma^{\models}$ maksimalno konzistentan. Ako su S i T dve L-teorije sa istim skupom posledica, tada kažemo da je S *skup aksioma za* T (ili da je T skup aksioma za S). L-teorija je *konačno aksiomatizabilna* akko ima konačan skup aksioma. Ako je $\mathbb{X} \in \mathrm{Mod}_L$ L-struktura, *teorija strukture* $\mathbb{X}$ je skup svih L-rečenica koje su istinite u $\mathbb{X}$, tj.

$$\mathrm{Th}(\mathbb{X}) := \Big\{ \varphi \in \mathrm{Sent}_L : \mathbb{X} \models \varphi \Big\}.$$

Teorija $\mathrm{Th}(\mathbb{X})$ je zatvorena i kompletna za svako $\mathbb{X} \in \mathrm{Mod}_L$. U nastavku slede neke fundamentalne teoreme iz teorije modela[1].

Teorema 3.2.1 *(Teorema kompletnosti)*

(a) (Gödel, videti [4, str. 67]) L-rečenica φ je teorema akko je valjana;

(b) (Maljcev, videti [4, str. 66]) L-teorija Σ je konzistentna akko ima model.

Kao posledicu imamo sledeću teoremu.

[1] Iako su ovde navedene u kontekstu relacijskih jezika, sve fundamentalne teoreme teorije modela važe za proizvoljan jezik L.

Teorema 3.2.2 *(Teorema kompaktnosti, videti [4, str. 67]) L-teorija Σ ima model akko svaka konačna podteorija $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ima model.*

Za L-teoriju Σ reći ćemo da je *κ-kategorična*, gde je κ nenula kardinal, akko postoji, do na izomorfizam, tačno jedan model teorije Σ veličine κ.

Teorema 3.2.3 *(Łoś-Vaughtov test, videti [4, str. 139]) Neka konzistentna teorija Σ ima samo beskonačne modele, i neka je Σ κ-kategorična za neki beskonačan kardinal $\kappa \geq \|L\|$. Tada je Σ kompletna teorija.*

Na primer, teorija gustih linearnih uređenja bez krajnjih tačaka je kompletna, jer je, na osnovu Cantorove teoreme (teorema 1.3.2 (b)), ω-kategorična i nema konačnih modela. Takođe, teorija bezatomnih Booleovih algebri je kompletna, jer je, na osnovu teoreme 1.4.4 (b), ω-kategorična, i nema konačnih modela. Takođe, teorija jedne relacije ekvivalencije s beskonačno mnogo klasa, tako da je svaka klasa beskonačan skup, je kompletna, jer je ω-kategorična i nema konačnih modela.

Rezimiraćemo ekvivalentne sintaktičke i semantičke pojmove u sledećoj tabeli:

Sintaksa	Semantika
φ je teorema ($\vdash \varphi$)	φ je valjana ($\models \varphi$)
Σ je konzistentna	Σ je zadovoljiva
φ je deducibilna iz Σ ($\Sigma \vdash \varphi$)	φ je posledica Σ ($\Sigma \models \varphi$)

Elementarna ekvivalencija

Za dva L-modela $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ reći ćemo da su *elementarno ekvivalentni*, u oznaci $\mathbb{X} \equiv \mathbb{Y}$, akko za svaku L-rečenicu φ važi $\mathbb{X} \models \varphi$ akko $\mathbb{Y} \models \varphi$. Drugim rečima,

$$\mathbb{X} \equiv \mathbb{Y} \iff \mathrm{Th}(\mathbb{X}) = \mathrm{Th}(\mathbb{Y}).$$

$\cong$ i $\equiv$ su "relacije ekvivalencije" na klasi Mod_L, i odgovarajuće klase ekvivalencije označavaćemo sa $[\mathbb{X}]_{\cong}$ i $[\mathbb{X}]_{\equiv}$.

Tvrđenje 3.2.4 *(videti [4, str. 32]) Za svako $\mathbb{X} \in \mathrm{Mod}_L$ je $[\mathbb{X}]_{\cong} \subseteq [\mathbb{X}]_{\equiv}$, a ako je $\mathbb{X}$ konačna struktura, tada je $[\mathbb{X}]_{\cong} = [\mathbb{X}]_{\equiv}$.*

Ako se ograničimo na modele iz $\mathrm{Mod}_L(X)$, za $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}_L(X)$ pisaćemo $\rho \equiv \sigma$ akko je $\langle X, \rho\rangle \equiv \langle X, \sigma\rangle$. Tada je $\equiv$ relacija ekvivalencije na $\mathrm{Int}_L(X)$. Ako su skup X i jezik L prebrojivi, *Vaughtova hipoteza* kaže da

$$|[\rho]_{\equiv}/\cong| > \omega \implies |[\rho]_{\equiv}/\cong| = \mathfrak{c}.$$

Ako je X neprazan skup, L relacijski jezik i $\mathcal{T}$ neka L-teorija, uvedimo sledeći *skup definabilnih interpretacija* jezika L nad domenom X:

$$\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X) := \Big\{\rho \in \mathrm{Int}_L(X) : \langle X, \rho\rangle \models \mathcal{T}\Big\}.$$

Tvrđenje 3.2.5 *Neka je L relacijski jezik. Tada imamo:*

(a) Ako je X neprazan skup i ako $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$, tada je

$$[\rho]_{\equiv} = \mathrm{Int}_L^{\mathrm{Th}(\langle X,\rho\rangle)}(X); \tag{3.1}$$

(b) Ako je $\mathcal{T}$ kompletna L-teorija i ako su L-strukture $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ modeli $\mathcal{T}$, tada je $\mathbb{X} \equiv \mathbb{Y}$.

Dokaz.

(a) Imamo da $\sigma \in \mathrm{Int}_L^{\mathrm{Th}(\langle X,\rho\rangle)}(X)$ akko $\forall \varphi \in \mathrm{Th}(\langle X, \rho\rangle)$ $\langle X, \sigma\rangle \models \varphi$, što je ekvivalentno sa $\mathrm{Th}(\langle X, \rho\rangle) \subseteq \mathrm{Th}(\langle X, \sigma\rangle)$, a to, s obzirom da su teorije $\mathrm{Th}(\langle X, \rho\rangle)$ i $\mathrm{Th}(\langle X, \sigma\rangle)$ zatvorene i kompletne, važi akko je $\mathrm{Th}(\langle X, \rho\rangle) = \mathrm{Th}(\langle X, \sigma\rangle)$, odnosno $\sigma \equiv \rho$, tj. $\sigma \in [\rho]_{\equiv}$, čime smo dokazali tvrđenje.

(b) Imamo da je $\mathbb{X} \models \mathcal{T}$ akko je $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Th}(\mathbb{X})$. Pošto je teorija $\mathrm{Th}(\mathbb{X})$ zatvorena, to implicira da je $\mathcal{T}^{\models} \subseteq \mathrm{Th}(\mathbb{X})$, odakle, s obzirom da je teorija $\mathcal{T}$ kompletna, sledi da je $\mathcal{T}^{\models} = \mathrm{Th}(\mathbb{X})$. Analogno se dokazuje da važi i $\mathcal{T}^{\models} = \mathrm{Th}(\mathbb{Y})$, pa je $\mathrm{Th}(\mathbb{X}) = \mathrm{Th}(\mathbb{Y})$, odnosno, $\mathbb{X} \equiv \mathbb{Y}$. □

3.3 Infinitarna logika $L_{\infty\omega}$

Neka je $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ relacijski jezik, κ beskonačan kardinal, i $\mathrm{Var}_\kappa = \{v_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ skup promenljivih. Sa At_L označavaćemo odgovarajući skup *atomnih formula*, tj.

$$\mathrm{At}_L := \{v_\alpha = v_\beta : \alpha, \beta \in \kappa\} \cup \{R_i(v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_{n_i}}) : i \in I \wedge \langle v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_{n_i}}\rangle \in \kappa^{n_i}\}.$$

Klasa $L_{\infty\omega}$*-formula* je klasa $\mathrm{Form}_{L_{\infty\omega}} := \bigcup_{\xi \in \mathrm{Ord}} \mathrm{Form}_\xi$, pri čemu je

$$\begin{aligned}
\mathrm{Form}_0 &:= \mathrm{At}_L,\\
\mathrm{Form}_{\xi+1} &:= \mathrm{Form}_\xi \cup \{\neg\varphi : \varphi \in \mathrm{Form}_\xi\}\\
&\quad\ \cup \{\forall v_\alpha\, \varphi : \alpha \in \kappa \wedge \varphi \in \mathrm{Form}_\xi\} \cup \{\exists v_\alpha\, \varphi : \alpha \in \kappa \wedge \varphi \in \mathrm{Form}_\xi\}\\
&\quad\ \cup \{\textstyle\bigwedge \Phi : \Phi \subseteq \mathrm{Form}_\xi\} \cup \{\textstyle\bigvee \Phi : \Phi \subseteq \mathrm{Form}_\xi\},\\
\mathrm{Form}_\gamma &:= \textstyle\bigcup_{\xi<\gamma} \mathrm{Form}_\xi, \text{ za granični ordinal } \gamma.
\end{aligned}$$

Neka je $\mathbb{X} = \langle X, \langle R_i^{\mathbb{X}} : i \in I\rangle\rangle$ L-struktura i $\mathbf{x} = \langle x_\alpha : \alpha \in \kappa\rangle \in {}^\kappa X$ valuacija. Ako $\beta \in \kappa$ i $x' \in X$, sa $\mathbf{x}_{\langle \beta, x'\rangle}$ označavaćemo valuaciju $\mathbf{y} \in {}^\kappa X$, definisanu sa: $y_\alpha = x_\alpha$, za sve $\alpha \neq \beta$, i $y_\beta = x'$. *Relacija zadovoljivosti* $\models$ za $L_{\infty\omega}$-formule definiše se na standardan način: $\mathbb{X} \models (v_\alpha = v_\beta)[\mathbf{x}]$ akko je $x_\alpha = x_\beta$; $\mathbb{X} \models (R(v_{\alpha_1} \dots, v_{\alpha_{n_i}}))[\mathbf{x}]$ akko $\langle x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{n_i}} \rangle \in R_i^{\mathbb{X}}$; $\mathbb{X} \models (\neg\varphi)[\mathbf{x}]$ akko nije $\mathbb{X} \models \varphi[\mathbf{x}]$; $\mathbb{X} \models (\forall v_\alpha\, \varphi)[\mathbf{x}]$ akko je $\mathbb{X} \models \varphi[\mathbf{x}_{\langle \alpha, x \rangle}]$, za svako $x \in X$; $\mathbb{X} \models (\exists v_\alpha\, \varphi)[\mathbf{x}]$ akko je $\mathbb{X} \models \varphi[\mathbf{x}_{\langle \alpha, x \rangle}]$, za neko $x \in X$; $\mathbb{X} \models (\bigwedge \Phi)[\mathbf{x}]$ akko je $\mathbb{X} \models \varphi[\mathbf{x}]$ za sve $\varphi \in \Phi$; $\mathbb{X} \models (\bigvee \Phi)[\mathbf{x}]$ akko je $\mathbb{X} \models \varphi[\mathbf{x}]$ za neko $\varphi \in \Phi$.

Za $L_{\infty\omega}$-formule φ i ψ reći ćemo da su *logički ekvivalentne*, u oznaci $\varphi \leftrightarrow \psi$, akko su ekvivalentne u svim L-strukturama, tj. akko, za svaku L-strukturu $\mathbb{X}$, imamo:

$$\forall \mathbf{x} \in {}^\kappa X \; \Big(\mathbb{X} \models \varphi[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbb{X} \models \psi[\mathbf{x}]\Big). \tag{3.2}$$

Ako su $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ L-strukture, za homomorfizam $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ reći ćemo da *očuvava $L_{\infty\omega}$-formulu* φ akko

$$\forall \mathbf{x} \in {}^\kappa X \; \Big(\mathbb{X} \models \varphi[\mathbf{x}] \Rightarrow \mathbb{Y} \models \varphi[f\mathbf{x}]\Big), \tag{3.3}$$

gde je $f\mathbf{x} := \langle f(x_\alpha) : \alpha \in \kappa \rangle$. Reći ćemo da je *$L_{\infty\omega}$-formula φ apsolutna u odnosu na f* akko

$$\forall \mathbf{x} \in {}^\kappa X \; \Big(\mathbb{X} \models \varphi[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \mathbb{Y} \models \varphi[f\mathbf{x}]\Big). \tag{3.4}$$

$L_{\infty\omega}$-formula je *pozitivna* akko se $\neg$ ne pojavljuje nigde u njoj, a *pozitivna egzistencijalna* (ili Σ_1^+) akko je i pozitivna i egzistencijalna (tj. Σ_1).

Tvrđenje 3.3.1 *(videti [67, 20]) Neka su $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ L-strukture, $f : X \to Y$ i $\varphi \in \mathrm{Form}_{L_{\infty\omega}}$. Tada imamo:*

Ako je $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$	*f očuvava φ*	*φ je apsolutno pod f*	*Dokaz*
izomorfizam	*sve*	*sve*	*[67, str. 13]*
utapanje	Σ_1	Σ_0	*[20, str. 48]*
epimorfizam	*pozitivne*	-	*[20, str. 49]*
homomorfizam	Σ_1^+	-	*[20, str. 49]*

Definišimo klasu *R-pozitivnih $L_{\infty\omega}$-formula* sa $\mathcal{P} := \bigcup_{\xi \in \mathrm{Ord}} \mathcal{P}_\xi$, gde je

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_0 &:= \mathrm{At}_L \cup \{\neg v_\alpha = v_\beta : \alpha, \beta \in \kappa\}, \\
\mathcal{P}_{\xi+1} &:= \mathcal{P}_\xi \,\cup\, \{\forall v_\alpha\, \varphi : \alpha \in \kappa \wedge \varphi \in \mathcal{P}_\xi\} \,\cup\, \{\exists v_\alpha\, \varphi : \alpha \in \kappa \wedge \varphi \in \mathcal{P}_\xi\} \\
&\qquad \cup \{\textstyle\bigwedge \Phi : \Phi \subseteq \mathcal{P}_\xi\} \,\cup\, \{\textstyle\bigvee \Phi : \Phi \subseteq \mathcal{P}_\xi\}, \\
\mathcal{P}_\gamma &:= \textstyle\bigcup_{\xi < \gamma} \mathcal{P}_\xi, \text{ za granični ordinal } \gamma,
\end{aligned}$$

kao i klasu *R-negativnih $L_{\infty\omega}$-formula* sa $\mathcal{N} := \bigcup_{\xi\in\mathrm{Ord}} \mathcal{N}_\xi$, gde je

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_0 &:= \{\neg R_i(v_{\alpha_1},\dots,v_{\alpha_{n_i}}) : i \in I \wedge \langle \alpha_1,\dots,\alpha_{n_i}\rangle \in \kappa^{n_i}\}\\
&\cup \{v_\alpha = v_\beta : \alpha,\beta \in \kappa\} \cup \{\neg v_\alpha = v_\beta : \alpha,\beta \in \kappa\},\\
\mathcal{N}_{\xi+1} &:= \mathcal{N}_\xi \cup \{\forall v_\alpha\, \varphi : \alpha \in \kappa \wedge \varphi \in \mathcal{N}_\xi\} \cup \{\exists v_\alpha\, \varphi : \alpha \in \kappa \wedge \varphi \in \mathcal{N}_\xi\}\\
&\cup \{\bigwedge \Phi : \Phi \subseteq \mathcal{N}_\xi\} \cup \{\bigvee \Phi : \Phi \subseteq \mathcal{N}_\xi\},\\
\mathcal{N}_\gamma &:= \bigcup_{\xi<\gamma} \mathcal{N}_\xi, \text{ za granični ordinal } \gamma.
\end{aligned}$$

Da bismo napravili korespodenciju između interpretacija i njihovih komplemenata, svakoj $L_{\infty\omega}$-formuli φ pridružićemo formulu φ^c, definisanu na sledeći način:

$(v_\alpha = v_\beta)^c := v_\alpha = v_\beta$ i $(R_i(v_{\alpha_1},\dots,v_{\alpha_{n_i}}))^c := \neg R_i(v_{\alpha_1},\dots,v_{\alpha_{n_i}})$;

Ako $\xi \in \mathrm{Ord}$ i φ^c je definisano, za neku formulu $\varphi \in \mathrm{Form}_\xi$, tada je

$(\neg\varphi)^c := \neg\varphi^c$, $(\forall v_\alpha\, \varphi)^c := \forall v_\alpha\, \varphi^c$ i $(\exists v_\alpha\, \varphi)^c := \exists v_\alpha\, \varphi^c$;

Ako je $\Phi \subseteq \mathrm{Form}_\xi$ i φ^c je definisano, za svaku formulu $\varphi \in \Phi$, tada je

$(\bigwedge \Phi)^c := \bigwedge \Phi^c$ i $(\bigvee \Phi)^c := \bigvee \Phi^c$,

gde, za skup $L_{\infty\omega}$-formula Φ, Φ^c označava skup $\{\varphi^c : \varphi \in \Phi\}$.

Bijektivne anti-homomorfizme zvaćemo anti-kondenzacije.

Tvrđenje 3.3.2 *([52])*

(a) R-pozitivne $L_{\infty\omega}$-formule su očuvane kondenzacijama;

(b) R-negativne $L_{\infty\omega}$-formule su očuvane anti-kondenzacijama;

(c) $\mathcal{N} = \{\varphi^c : \varphi \in \mathcal{P}\}$.

Dokaz.

(a) Neka su $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ L-strukture i $f : X \to Y$ kondenzacija. Indukcijom ćemo pokazati da (3.3) važi za svaku formulu $\varphi \in \mathcal{P}$. Jasno je da homomorfizmi očuvavaju sve atomne formule. Ako $\mathbf{x} \in {}^\kappa X$ i $\mathbb{X} \models (\neg v_\alpha = v_\beta)[\mathbf{x}]$, tj. $x_\alpha \neq x_\beta$, tada, pošto je f injekcija, imamo da je $f(x_\alpha) \neq f(x_\beta)$, tj. da je $\mathbb{Y} \models (\neg v_\alpha = v_\beta)[f\mathbf{x}]$.

Pretpostavimo da (3.3) važi za neku formulu $\varphi \in \mathcal{P}$, i neka $\mathbf{x} \in {}^\kappa X$. Ako je $\mathbb{X} \models (\forall v_\alpha\, \varphi)[\mathbf{x}]$, tada, za svako $x \in X$, imamo da je $\mathbb{X} \models \varphi[\mathbf{x}_{\langle\alpha,x\rangle}]$, i, prema (3.3), $\mathbb{Y} \models \varphi[f\mathbf{x}_{\langle\alpha,f(x)\rangle}]$. Kako je f surjekcija, za svako $y \in Y$ postoji $x \in X$ takvo da je $y = f(x)$, i stoga je $\mathbb{Y} \models \varphi[f\mathbf{x}_{\langle\alpha,y\rangle}]$. Dakle, $\mathbb{Y} \models (\forall v_\alpha\, \varphi)[f\mathbf{x}]$. Ako je $\mathbb{X} \models (\exists v_\alpha\, \varphi)[\mathbf{x}]$, tada, za neko $x \in X$, imamo da je $\mathbb{X} \models \varphi[\mathbf{x}_{\langle\alpha,x\rangle}]$, i, prema (3.3), $\mathbb{Y} \models \varphi[f\mathbf{x}_{\langle\alpha,f(x)\rangle}]$. Dakle, za $y = f(x) \in Y$ imamo da je $\mathbb{Y} \models \varphi[f\mathbf{x}_{\langle\alpha,y\rangle}]$, odnosno da je $\mathbb{Y} \models (\exists v_\alpha\, \varphi)[f\mathbf{x}]$.

Neka $\Phi \subseteq \mathcal{P}$, i pretpostavimo da (3.3) važi za svaku formulu $\varphi \in \Phi$. Neka $\mathbf{x} \in {}^\kappa X$. Ako je $\mathbb{X} \models (\bigwedge \Phi)[\mathbf{x}]$, tada, za svako $\varphi \in \Phi$, imamo da je $\mathbb{X} \models \varphi[\mathbf{x}]$, i, prema (3.3), $\mathbb{Y} \models \varphi[f\mathbf{x}]$, što znači da je $\mathbb{Y} \models (\bigwedge \Phi)[f\mathbf{x}]$. Ako je

$\mathbb{X} \models (\bigvee \Phi)[\mathbf{x}]$, tada, za neko $\varphi \in \Phi$, imamo da je $\mathbb{X} \models \varphi[\mathbf{x}]$, i, prema (3.3), $\mathbb{Y} \models \varphi[f\mathbf{x}]$, što znači da je $\mathbb{Y} \models (\bigvee \Phi)[f\mathbf{x}]$.

(b) Slično dokazu tvrđenja pod (a).

(c) ($\supseteq$) Pokazaćemo da, za svako $\xi \in \mathrm{Ord}$ i za svako $\varphi \in \mathcal{P}_\xi$, imamo da $\varphi^c \in \mathcal{N}_\xi$. Za $\xi = 0$ imamo: $(v_\alpha = v_\beta)^c := v_\alpha = v_\beta \in \mathcal{N}_0$, $(\neg v_\alpha = v_\beta)^c := \neg(v_\alpha = v_\beta)^c := \neg v_\alpha = v_\beta \in \mathcal{N}_0$, i $(R_i(v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_{n_i}}))^c := \neg R_i(v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_{n_i}}) \in \mathcal{N}_0$.

Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za sve $\xi < \zeta$. Ako je ζ granični ordinal, tada je jasno da je tvrđenje tačno i za ζ. Neka je $\zeta = \xi + 1$. Ako $\varphi \in \mathcal{P}_\xi$, tada $\varphi^c \in \mathcal{N}_\xi$, i, na osnovu toga, $(\forall v_\alpha\, \varphi)^c := \forall v_\alpha\, \varphi^c \in \mathcal{N}_{\xi+1}$ i $(\exists v_\alpha\, \varphi)^c := \exists v_\alpha\, \varphi^c \in \mathcal{N}_{\xi+1}$.

Ako je $\Phi \subseteq \mathcal{P}_\xi$, tada $\varphi^c \in \mathcal{N}_\xi$ za svako $\varphi \in \Phi$, i, na osnovu toga, imamo $(\bigwedge \Phi)^c = \bigwedge\{\varphi^c : \varphi \in \Phi\} \in \mathcal{N}_{\xi+1}$, i $(\bigvee \Phi)^c = \bigvee\{\varphi^c : \varphi \in \Phi\} \in \mathcal{N}_{\xi+1}$.

($\subseteq$) Pokazaćemo da, za svako $\xi \in \mathrm{Ord}$ i svako $\psi \in \mathcal{N}_\xi$, postoji $\varphi \in \mathcal{P}_\xi$ takvo da je $\psi = \varphi^c$. Tako je $v_\alpha = v_\beta$ formula $(v_\alpha = v_\beta)^c$, $\neg v_\alpha = v_\beta$ je formula $(\neg v_\alpha = v_\beta)^c$, i $\neg R_i(v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_{n_i}})$ je formula $(R_i(v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_{n_i}}))^c$.

Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za sve $\xi < \zeta$. Ako je ζ granični ordinal, tada je jasno da je tvrđenje tačno i za ζ. Neka je $\zeta = \xi + 1$. Ako $\psi \in \mathcal{N}_\xi$, tada postoji $\varphi \in \mathcal{P}_\xi$ takvo da je $\psi = \varphi^c$. Sada je $\forall v_\alpha\, \psi = \forall v_\alpha\, \varphi^c = (\forall v_\alpha\, \varphi)^c$ i $\forall v_\alpha\, \varphi \in \mathcal{P}_{\xi+1}$. Takođe, $\exists v_\alpha\, \psi = \exists v_\alpha\, \varphi^c = (\exists v_\alpha\, \varphi)^c$ i $\exists v_\alpha\, \varphi \in \mathcal{P}_{\xi+1}$.

Ako $\Phi \subseteq \mathcal{N}_\xi$, tada, za svako $\psi \in \Phi$, postoji $\varphi_\psi \in \mathcal{P}_\xi$ takvo da je $\psi = \varphi_\psi^c$. Tada $\bigwedge\{\varphi_\psi : \psi \in \Phi\} \in \mathcal{P}_{\xi+1}$ i

$$\Big(\bigwedge\{\varphi_\psi : \psi \in \Phi\}\Big)^c = \bigwedge\{\varphi_\psi^c : \psi \in \Phi\} = \bigwedge \Phi.$$

Takođe, $\bigvee\{\varphi_\psi : \psi \in \Phi\} \in \mathcal{P}_{\xi+1}$ i

$$\Big(\bigvee\{\varphi_\psi : \psi \in \Phi\}\Big)^c = \bigvee\{\varphi_\psi^c : \psi \in \Phi\} = \bigvee \Phi.$$

□

Glava 4

Deskriptivna teorija skupova

4.1 Poljski prostori

Separabilan kompletno metrizabilan topološki prostor zvaćemo *poljski prostor*. Svaki poljski prostor zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti i stoga mu je kardinalnost najviše $\mathfrak{c}$. Ako je $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ topološki prostor, skup $A \subseteq X$ je G_δ-skup akko je A presek najviše prebrojive familije otvorenih skupova.

Tvrđenje 4.1.1 *(videti [25, str. 13 i 17])*
(a) Potprostor poljskog prostora je poljski prostor akko je G_δ-skup;[1]
(b) Proizvod niza poljskih prostora je poljski prostor.

Poljski prostori su, do na homeomorfizam, upravo G_δ-podskupovi Hilbertove kocke ${}^\omega[0,1]$, ili zatvoreni podskupovi prostora ${}^\omega\mathbb{R}$.

Tvrđenje 4.1.2 *(videti [25, str. 18]) Kompaktan metrizabilan topološki prostor je poljski prostor.*

Slede neki primeri poljskih prostora:

- $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, {}^\omega\mathbb{R}$, i ${}^\omega\mathbb{C}$;
- Interval $[0,1]$, n-dimenzionalna kocka $[0,1]^n$, i Hilbertova kocka ${}^\omega[0,1]$;
- Za svaki diskretan prostor A, proizvod ${}^\omega A$ je kompletno metrizabilan, a ako je A i prebrojiv, onda je ${}^\omega A$ poljski prostor. Od posebne važnosti su *Cantorov prostor* ${}^\omega 2$ i *Baireov prostor* ${}^\omega\omega$.[2]

[1] Za skup A u topološkom prostoru $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ reći ćemo da je G_δ-skup akko je A presek najviše prebrojivo mnogo otvorenih skupova.

[2] Cantorov prostor homeomorfan je Cantorovom skupu (koji čine svi brojevi iz intervala $[0,1]$ koji se u ternarnom zapisu mogu prikazati preko cifara 0 i 2) s relativnom topologijom realne prave, dok je Baireov prostor homeomorfan skupu iracionalnih brojeva $\mathbb{I}$ s relativnom topologijom realne prave.

Tvrđenje 4.1.3 *(videti [25, str. 29]) Neka je X Hausdorffov lokalno kompaktan prostor. Tada je X poljski prostor akko zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.*

Tačka $x \in X$ je *izolovana tačka* akko je singlton $\{x\}$ otvoren skup. Tačka $x \in X$ je *tačka nagomilavanja* akko nije izolovana tačka. Skup tačaka nagomilavanja u X obeležavaćemo sa X' i zvati *izvodni skup* skupa X. Tačka $x \in X$ je *tačka kondenzacije* akko je svaka otvorena okolina tačke x neprebrojiva. Skup tačaka kondenzacije u X obeležavaćemo sa X^*. Topološki prostor je *savršen* akko nema izolovanih tačaka. Podskup P prostora X je *savršen u X* akko je zatvoren i savršen u svojoj relativnoj topologiji.

Teorema 4.1.4 *(videti [25, str. 31]) Neka je X neprazan savršen poljski prostor. Tada se Cantorova kocka utapa u X, i, kao posledicu, imamo da je $|X| = \mathfrak{c}$.*

Specijalno, neprazan savršen podskup poljskog prostora ima kardinalnost $\mathfrak{c}$. *Cantor-Bendixsonova teorema* kaže kako se svaki poljski prostor može na jedinstven način razbiti kao $X = P \dot\cup C$, gde je P savršen podskup prostora X, a C je najviše prebrojiv otvoren skup. Tada je $P = X^*$ najveći savršen podskup prostora X (tzv. *savršeno jezgro* prostora X), a C je unija svih najviše prebrojivih baznih otvorenih skupova (za proizvoljnu bazu prostora X). Kao posledicu dobijamo da svaki neprebrojiv poljski prostor sadrži kopiju Cantorove kocke i da mu je kardinalnost $\mathfrak{c}$. Specijalno, svaki neprebrojiv F_σ ili G_δ-skup u poljskom prostoru X sadrži kopiju Cantorove kocke i kardinalnost mu je $\mathfrak{c}$.

Tvrđenje 4.1.5

(a) Skup $\mathrm{Sym}(\omega)$ je G_δ-podskup Baireovog prostora ${}^\omega\omega$;

(b) $|\mathrm{Sym}(\omega)| = \mathfrak{c}$.

Dokaz.

(a) Imamo da je $\mathrm{Sym}(\omega)^c = \mathrm{Inj}(\omega)^c \cup \mathrm{Sur}(\omega)^c$ tj. da je

$$\mathrm{Sym}(\omega)^c = \left[\bigcup_{i \neq j} \Big(\bigcup_{k \in \omega} (\pi_i^{-1}[\{k\}] \cap \pi_j^{-1}[\{k\}]) \Big)\right] \bigcup \left[\bigcup_{i \in \omega} \Big(\bigcap_{j \in \omega} \pi_j^{-1}[\{i\}^c] \Big)\right],$$

gde su $\pi_n : {}^\omega\omega \to \omega$, $n \in \omega$, koordinatne projekcije. Prvi skup je otvoren pa i F_σ, jer je prostor ${}^\omega\omega$ metrizabilan. Kako je i drugi skup F_σ, sledi da je i $\mathrm{Sym}(\omega)^c$ F_σ-skup u prostoru ${}^\omega\omega$.

(b) Primenom Cantorovog dijagonalnog argumenta dokazuje se da je skup $\mathrm{Sym}(\omega)$ neprebrojiv, pa, na osnovu (a) i Hipoteze Kontinuuma za G_δ-skupove u poljskim prostorima, sledi da je $|\mathrm{Sym}(\omega)| = \mathfrak{c}$. $\square$

4.2 Borelovi skupovi

Neka je $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ topološki prostor. *Borelova σ-algebra* $B(X, \mathcal{O})$ (kraće $B(X)$ ili $B(\mathcal{O})$) je najmanja σ-algebra na X koja sadrži sve otvorene skupove. Elemente algebre $B(X)$ zvaćemo *Borelovi skupovi* u X. Neka je dalje $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ poljski prostor (što, specijalno, znači da je svaki zatvoren skup G_δ). Ako, za $\mathcal{E} \subseteq P(X)$, uvedemo sledeće oznake:

$$\mathcal{E}_\sigma := \Big\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N} \Big\}, \qquad \mathcal{E}_\delta := \Big\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N} \Big\},$$

tada se klase $\Sigma^0_\xi(X)$ i $\Pi^0_\xi(X)$ (u savremenoj logičkoj notaciji), za $1 \le \xi < \omega_1$, definišu transfinitnom rekurzijom, na sledeći način:

$$\Sigma^0_1(X) := \mathcal{O},\ \ \Pi^0_\xi(X) := \Big\{ A^c : A \in \Sigma^0_\xi(X) \Big\},\ \ \Sigma^0_\xi(X) := \Big(\bigcup_{\zeta<\xi} \Pi^0_\zeta(X) \Big)_\sigma,\ \xi > 1.$$

Definišimo još i $\Delta^0_\xi(X) := \Sigma^0_\xi(X) \cap \Pi^0_\xi(X)$. Jasno je da važi

$$\Pi^0_\xi(X) = \Big(\bigcup_{\zeta<\xi} \Sigma^0_\zeta(X) \Big)_\delta, \ \text{ za }\ \xi > 1.$$

Dakle, $\Sigma^0_1(X)$ je klasa otvorenih skupova u X, $\Pi^0_1(X)$ je klasa zatvorenih skupova u X, $\Delta^0_1(X)$ je klasa zotvorenih (engl. clopen) skupova u X, $\Sigma^0_2(X)$ je klasa F_σ-skupova u X, a $\Pi^0_2(X)$ je klasa G_δ-skupova u X. Sledeća hijerarhija Borelovih skupova naziva se *Borelova hijerarhija*, i ona ima ω_1 nivoa:

$$\underbrace{\begin{matrix} & \Sigma^0_1 & & \Sigma^0_2 & & & \Sigma^0_\omega & & \Sigma^0_{\omega+1} & & & \Sigma^0_\xi & \\ \Delta^0_1 & & \Delta^0_2 & & \cdots & \Delta^0_\omega & & \Delta^0_{\omega+1} & & \cdots & \Delta^0_\xi & & \cdots \\ & \Pi^0_1 & & \Pi^0_2 & & & \Pi^0_\omega & & \Pi^0_{\omega+1} & & & \Pi^0_\xi & \end{matrix}}_{\mathrm{B(X)}}$$

pri čemu je $\omega + 1 < \xi < \omega_1$, i svaka klasa sadržana je u proizvoljnoj klasi desno od nje. Specijalno, $\Sigma^0_\xi(X) \cup \Pi^0_\xi(X) \subseteq \Delta^0_{\xi+1}(X)$. Kako je ω_1 regularan kardinal, za svaki prebrojiv podskup $X \subseteq \omega_1$ imamo da je $\sup X < \omega_1$, odakle sledi da se svaki Borelov skup nalazi u Borelovoj hijerarhiji, tj.

$$B(X) = \bigcup_{\xi<\omega_1} \Sigma^0_\xi(X) = \bigcup_{\xi<\omega_1} \Pi^0_\xi(X) = \bigcup_{\xi<\omega_1} \Delta^0_\xi(X).$$

U klasičnoj notaciji, klasa otvorenih skupova u X obeležava se sa $G(X)$ a klasa zatvorenih skupova sa $F(X)$. Tada je $\Sigma^0_1 = G$, $\Pi^0_1 = F$, $\Sigma^0_2 = (\Pi^0_1)_\sigma =$

F_σ, $\Pi^0_2 = (\Sigma^0_1)_\delta = G_\delta$, $\Sigma^0_3 = (\Pi^0_2)_\sigma = G_{\delta\sigma}$, $\Pi^0_3 = (\Sigma^0_2)_\delta = F_{\sigma\delta}, \ldots$ Borelova hijerarhija u klasičnoj notaciji izgleda ovako:

$$\underbrace{\begin{matrix} & G & & F_\sigma & & G_{\delta\sigma} & & F_{\sigma\delta\sigma} & \\ G\cap F & & F_\sigma \cap G_\delta & & G_{\delta\sigma}\cap F_{\sigma\delta} & & F_{\sigma\delta\sigma}\cap G_{\delta\sigma\delta} & & \cdots \\ & F & & G_\delta & & F_{\sigma\delta} & & G_{\delta\sigma\delta} & \end{matrix}}_{\mathrm{B(X)}}$$

Za Borelove skupove u poljskim prostorima važi Hipoteza Kontinuuma.

Teorema 4.2.1 *(Alexandrov, Hausdorff, videti [25, str. 83]) Neka je X poljski prostor i $A \subseteq X$ Borelov skup. Ako je A neprebrojiv, tada A sadrži homeomorfnu kopiju Cantorove kocke, i, kao posledicu, imamo da je $|A| = \mathfrak{c}$.*

4.3 Analitički skupovi

Neka je X poljski prostor. Za skup $A \subseteq X$ reći ćemo da je *analitički* akko postoji poljski prostor Y i neprekidno preslikavanje $f : Y \to X$ takvo da je $f[Y] = A$. Prazan skup je analitički ako uzmemo $Y = \emptyset$. Ako je $Y \neq \emptyset$, bez ograničenja opštosti, možemo uzeti da je $Y = {}^\omega\omega$. Klasa analitičkih skupova u X, u savremenoj logičkoj notaciji označava se sa $\Sigma^1_1(X)$ (klasična oznaka je $A(X)$). Imamo da je $B(X) \subseteq \Sigma^1_1(X)$, i ova inkluzija je prava u neprebrojivim poljskim prostorima.

Teorema 4.3.1 *(Souslin, videti [25, str. 85]) Neka je X neprebrojiv poljski prostor. Tada je*

$$B(X) \subsetneq \Sigma^1_1(X).$$

Komplemente analitičkih skupova zvaćemo *koanalitički* skupovi. Klasu koanalitičkih skupova u X označavaćemo sa $\Pi^1_1(X)$. Za $1 \leq n < \omega$ definisaćemo rekurzijom sledeće klase: $\Sigma^1_1(X) := \{A \subseteq X : A \text{ je analitički skup}\}$, $\Pi^1_n(X) := \{A^c : A \in \Sigma^1_n(X)\}$, $\Sigma^1_{n+1}(X)$ su neprekidne slike skupova iz $\Pi^1_n(X)$. Definišimo još i da je $\Delta^1_n(X) := \Sigma^1_n(X) \cap \Pi^1_n(X)$, za $n \in \mathbb{N}$. Skupove iz $\Delta^1_1(X)$ zvaćemo *bianalitički* skupovi.

Sledeća hijerarhija naziva se *projektivna hijerarhija*, i ona ima ω nivoa:

$$\underbrace{\begin{matrix} & \Sigma^1_1 & & \Sigma^1_2 & & & \Sigma^1_n & & \Sigma^1_{n+1} & \\ \Delta^1_1 & & \Delta^1_2 & & \cdots & \Delta^1_n & & \Delta^1_{n+1} & & \cdots \\ & \Pi^1_1 & & \Pi^1_2 & & & \Pi^1_n & & \Pi^1_{n+1} & \end{matrix}}_{\mathrm{P(X)}}$$

pri čemu je $1 < n < \omega$, i svaka klasa je sadržana u proizvoljnoj klasi desno od nje. Specijalno, $\Sigma^1_n(X) \cup \Pi^1_n(X) \subseteq \Delta^1_{n+1}(X)$. Klasa *projektivnih skupova* definiše se na sledeći način:

$$P(X) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma^1_n(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Pi^1_n(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta^1_n(X).$$

U klasičnoj notaciji, klasa analitičkih skupova u X obeležava se sa $A(X)$ a klasa koanalitičkih skupova sa $CA(X)$. Tada je $\Sigma^1_1 = A$, $\Pi^1_1 = CA$, $\Sigma^1_2 = PCA$, $\Pi^1_2 = CPCA, ...$ Projektivna hijerarhija u klasičnoj notaciji izgleda ovako:

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} & A & & PCA & \\ A\cap CA & & PCA\cap CPCA & & \cdots \\ & CA & & CPCA & \end{array}}_{\text{P(X)}}$$

Slede osnovna svojstva analitičkih skupova:

Tvrđenje 4.3.2 *(videti [25, str. 86])*
(a) Ako je X poljski prostor i ako su $A_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, analitički skupovi, tada su i $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ analitički skupovi;
(b) Ako su X i Y poljski prostori i $f : X \to Y$ Borelova funkcija, tada za analitičke skupove $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$, imamo da su i skupovi $f[A]$ i $f^{-1}[B]$ analitički.

Teorema 4.3.3 *(Souslin, videti [25, str. 88]) Neka je X poljski prostor. Tada je*

$$B(X) = \Delta^1_1(X).$$

Za analitičke skupove u poljskim prostorima takođe važi Hipoteza Kontinuuma.

Teorema 4.3.4 *(Souslin, videti [25, str. 88]) Neka je X poljski prostor i $A \subseteq X$ analitički skup. Ako je A neprebrojiv, tada A sadrži homeomorfnu kopiju Cantorove kocke, i kao posledicu, imamo da je $|A| = \mathfrak{c}$.*

Glava 5

Relevantni rezultati iz literature

5.1 Kondenzaciona ekvivalencija i reverzibilnost

Rajagopalan i Wilansky su 1966. uveli pojam *reverzibilnog topološkog prostora.*

Tvrđenje 5.1.1 *([75]) Ako je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) Za svaku topologiju $\mathcal{O}'$ na X, takvu da je $\langle X, \mathcal{O} \rangle \cong \langle X, \mathcal{O}' \rangle$, važi

$$\mathcal{O}' \not\subsetneq \mathcal{O} \;\; i \;\; \mathcal{O} \not\subsetneq \mathcal{O}';$$

(b) Svaka neprekidna bijekcija $f : \langle X, \mathcal{O} \rangle \to \langle X, \mathcal{O} \rangle$ je homeomorfizam.

Topološki prostor je reverzibilan akko zadovoljava uslov (a), ili (b), iz prethodnog tvrđenja ([75]). U istom radu pokazano je kako je reverzibilnost topološko svojstvo koje ne sledi iz drugih topoloških svojstava kao što su: povezanost, lokalna kompaktnost i druga aksioma prebrojivosti. Takođe je pokazano da reverzibilnost nije nasledna, kao i da nije očuvana proizvodima topoloških prostora.

Doyle i Hocking su 1984. u [9] uveli pojam *kondenzacione ekvivalencije* topoloških prostora. Za dva topološka prostora $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$ i $\langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle$, reći ćemo da su kondenzaciono ekvivalentni[1], u oznaci $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle \sim_c \langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle$, akko postoje neprekidne bijekcije (kondenzacije) $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$. U istom

[1] U originalnom radu [9] umesto termina „kondenzaciona ekvivalencija” korišćen je termin „bijektivna korelacija”.

radu pokazano je da, ako je topološki prostor $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$ reverzibilan, tada, za proizvoljan topološki prostor $\langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle$, važi

$$\langle X, \mathcal{O}_X \rangle \sim_c \langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle \implies \langle X, \mathcal{O}_X \rangle \cong \langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle. \tag{5.1}$$

Takođe, pokazano je da reverzibilnost nije potreban uslov za (5.1)[2]. Doyle i Hocking su postavili i jedno zanimljivo pitanje: da li postoji topološki prostor $\langle X, \mathcal{O} \rangle$, takav da je

$$1 < \Big| [\langle X, \mathcal{O} \rangle]_{\sim_c} / \cong \Big| < \omega \,?$$

Ovo pitanje jednako je interesantno i za relacijske strukture, i još je otvoreno.

Kukieła je 2009. godine, uopštavajući ideje iz [75, 9], u [27] uveo pojam *reverzibilnih poseta* i *kondenzaciono ekvivalentnih poseta*. Naime, poset $\mathbb{P} := \langle P, \leq \rangle$ je reverzibilan akko je $\mathrm{Cond}(\mathbb{P}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$. Poseti $\mathbb{P}$ i $\mathbb{R}$ su kondenzaciono ekvivalentni, u oznaci $\mathbb{P} \sim_c \mathbb{R}$, akko postoje bijektivni homomorfizmi (kondenzacije) $f \in \mathrm{Cond}(\mathbb{P}, \mathbb{R})$ i $g \in \mathrm{Cond}(\mathbb{R}, \mathbb{P})$.

Tvrđenje 5.1.2 *([27]) Ako za poset $\mathbb{P}$ važi da je*

$$|\,\mathrm{Cond}(\mathbb{P})| < \omega, \tag{5.2}$$

tada je poset $\mathbb{P}$ reverzibilan.

U našoj terminologiji, relacijske strukture $\mathbb{X}$ za koje važi (5.2) zvaćemo *finitarno reverzibilne*. U istom radu, Kukieła je dao i primer nereverzibilnog poseta $\mathbb{P}$ za koji je $[\mathbb{P}]_{\sim_c} = [\mathbb{P}]_{\cong}$, gde je $[\mathbb{P}]_{\sim_c} := \{\mathbb{R} \in \mathrm{Mod}_{L_b} : \mathbb{R} \sim_c \mathbb{P}\}$. Takve relacijske strukture, u našoj terminologiji biće nazvane *slabo reverzibilne*.

Podsetimo se kako je poset $\mathbb{P}$ *dobro fundiran* akko se $\omega^* \not\hookrightarrow \mathbb{P}$. Dobro fundiran poset $\mathbb{P}$ je *dobro parcijalno uređenje* akko se $\mathbb{A}_\omega \not\hookrightarrow \mathbb{P}$, gde je $\mathbb{A}_\omega$ prebrojivi antilanac. Za poset $\mathbb{P}$ reći ćemo da je *lokalno konačan* akko je skup $p\updownarrow := p\downarrow \cup\, p\uparrow$ konačan, za svako $p \in P$.

Teorema 5.1.3 *([27])*

(a) Booleove mreže su reverzibilni poseti;

(b) Dobro fundirani poseti s konačnim nivoima su reverzibilni;

(c) Lokalno konačni povezani poseti, kod kojih svaki bijektivni endomorfizam ima fiksnu tačku, su reverzibilni.

[2] U terminologiji ove disertacije, to znači da postoje slabo reverzibilni topološki prostori koji nisu reverzibilni.

U [27] uveden je još i pojam *nasledno reverzibilnog poseta*: poset $\mathbb{P}$ je nasledno reverzibilan akko je $\mathbb{P}'$ reverzibilan poset za svako $P' \subseteq P$. Kao posledicu tvrđenja 5.1.3 imamo da su dobra parcijalna uređenja nasledno reverzibilni poseti. U svom narednom radu [28], Kukieła je dao karakterizaciju nasledno reverzibilnih poseta. Naime, poset $\mathbb{P}$ je nasledno reverzibilan akko ne sadrži kopiju datih 14 nereverzibilnih poseta.

Spomenimo ovom prilikom kako je i koncept jako reverzibilnih relacija (u terminologiji ove disertacije) poznat u literaturi, i to pod imenom *konstantne relacije* (videti [16, str. 251]).

Kurilić je 2017. godine u [39] uveo pojam *reverzibilnih L-struktura*, gde je $L = \langle R_i : i \in I \rangle$ proizvoljan neprazan relacijski jezik. Podsetimo se, ako je $\mathbb{Y} \in \mathrm{Mod}_L$ L-struktura i ako $n \in \mathbb{N}$, tada je *orbita n-torke $\bar{x} \in Y^n$*, sledeći skup:

$$\mathrm{orb}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{Y})}(\bar{x}) := \Big\{ \bar{y} \in Y^n : \exists f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Y}) \;\; \bar{y} = f\bar{x} \Big\}. \tag{5.3}$$

U datom radu su, između ostalog, dokazani sledeći rezultati:

Teorema 5.1.4 *([39]) Ako je $\mathbb{Y} = \langle Y, \to \rangle$ ultrahomogen turnir, tada je* $\mathrm{orb}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{Y})}(\bar{x})$ *reverzibilna n-arna relacija na skupu Y, za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $\bar{x} \in Y^n$.*

Podsetimo se kako je struktura $\mathbb{Y} = \langle Y, \rho \rangle$ *m-uniforman hipergraf* akko je $\rho \subseteq Y^m$ i za svako $\langle y_1, \dots, y_m \rangle \in \rho$ važi: (irrefl) $y_r \neq y_s$, za $r \neq s$; (symm) $\langle y_{\pi(1)}, \dots, y_{\pi(n)} \rangle \in \rho$, za svako $\pi \in \mathrm{Sym}(n)$.

Teorema 5.1.5 *([39]) Ako je $\mathbb{Y} = \langle Y, \rho \rangle$ reverzibilan ultrahomogen m-uniforman hipergraf, tada je* $\mathrm{orb}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{Y})}(\bar{x})$ *reverzibilna n-arna relacija na skupu Y, za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $\bar{x} \in Y^n$.*

Teorema 5.1.6 *([39]) Ako je $\mathbb{Y} = \langle Y, \to \rangle$ reverzibilan ultrahomogen digraf, tada je* $\mathrm{orb}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{Y})}(\bar{x})$ *reverzibilna n-arna relacija na skupu Y, za sve $n \in \mathbb{N}$ i $\bar{x} \in Y^n$, takve da je skup* $\mathrm{orb}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{Y})}(\bar{x})$ *definabilan L-formulom koja nije R-negativna.*

Kurilić je takođe dao i primer da se dodatna pretpostavka iz teoreme 5.1.6 ne može izostaviti. Ako je $\mathcal{T}$ proizvoljan skup konačnih turnira veličine $n \geq 3$, tako da su svaka dva neuporediva u smislu utapanja, tada je klasa $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ svih konačnih digrafa u koje se ne utapa nijedan element iz $\mathcal{T}$ slobodna amalgamaciona klasa, i njen Fraïsséov limes $\mathbb{Y}_{\mathcal{T}} = \langle Y, \to \rangle$ je jedan ultrahomogen digraf. Ovakvi digrafi zovu se *Hensonovi digrafi*, i u [39] je pokazano kako su to reverzibilne strukture. Takođe je pokazano da je skup $\mathrm{orb}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{Y}_\mathcal{T})}(\bar{x})$ definabilan R-negativnom formulom kad god je

$$\bar{x} = \langle x_1, x_2\rangle \in Y^2, \text{ takvo da je } x_1 \neq x_2,\ x_1 \not\to x_2 \text{ i } x_2 \not\to x_1.$$

U tom slučaju, binarna relacija $\mathrm{orb}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{Y}_\mathcal{T})}(\bar{x})$ na skupu Y je Radoov graf, pa nije reverzibilna.

Navešćemo sada još jedan Kurilićev rezultat koji još nije objavljen. Spomenimo pre toga kako je, na osnovu poznatog rezultata Fraïsséa i Pouzeta ([16]), beskonačna L-struktura $\mathbb{X} = \langle X, \langle \rho_i : i \in I\rangle\rangle$ monomorfna akko je *lančljiva* (engl. *chainable*) tj. akko postoji linearno uređenje $\prec$ na njenom domenu X, takvo da su sve relacije ρ_i definabilne u strukturi $\langle X, \prec\rangle$ formulama bez kvantifikatora i parametara. Pomoću Ramseyeve teoreme dokazuje se da su sve monomorfne (tj. lančljive) beskonačne binarne strukture jako reverzibilne ili linearna uređenja, što znači da su sve reverzibilne (videti tvrđenje 2.2.11 (c)). Kurilić je u [40] ovo tvrđenje uopštio na slučaj proizvoljnog relacijskog jezika L.

Teorema 5.1.7 *([40]) Neka je $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ relacijski jezik, i neka je $\mathbb{X} \in \mathrm{Mod}_L$ L-struktura. Ako je $\mathbb{X}$ monomorfna (tj. lančljiva) struktura, tada je $\mathbb{X}$ reverzibilna struktura.*

5.2 Deskriptivna složenost u teoriji modela

Neka je $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ neprazan najviše prebrojiv relacijski jezik, gde je $\mathrm{ar}(R_i) = n_i \in \mathbb{N}$, za $i \in I$. Definišimo funkciju

$$\chi : \mathrm{Int}_L(\omega) \to \prod_{i\in I} {}^{\omega^{n_i}}2,$$

na sledeći način: za $\rho = \langle \rho_i : i \in I\rangle \in \mathrm{Int}_L(\omega)$ neka je $\chi(\rho) := \langle \chi_{\rho_i} : i \in I\rangle$, pri čemu je $\chi_{\rho_i} \in {}^{\omega^{n_i}}2$ karakteristična funkcija skupa $\rho_i \subseteq \omega^{n_i}$, za $i \in I$. Tada je χ bijekcija, pa svaki element skupa $\mathrm{Int}_L(\omega)$ možemo identifikovati sa odgovarajućim elementom prostora $\prod_{i\in I} {}^{\omega^{n_i}}2$, koji je homeomorfan Kantorovom prostoru ${}^{\omega}2$. U skladu s tim, za skup $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Int}_L(\omega)$, reći ćemo da je otvoren (Borelov, analitički) akko je njegova direktna slika $\chi[\mathcal{S}]$ otvoren (Borelov, analitički) skup u poljskom prostoru $\prod_{i\in I} {}^{\omega^{n_i}}2$.

Teorema 5.2.1 *(videti [25, str. 96]) Neka je L najviše prebrojiv relacijski jezik, i neka je $\cong$ relacija izomorfizma na skupu $\mathrm{Int}_L(\omega)$. Tada je skup $\cong$ analitički u prostoru $\mathrm{Int}_L(\omega) \times \mathrm{Int}_L(\omega)$.*

U opštem slučaju, skup $\cong$ nije Borelov (videti odeljak 27.D u [25]).

Teorema 5.2.2 *(Scott, videti [25, str. 96]) Neka je L najviše prebrojiv relacijski jezik, i neka $\rho \in \mathrm{Int}_L(\omega)$. Tada je klasa izomorfnih interpretacija $[\rho]_{\cong}$ Borelov skup u prostoru $\mathrm{Int}_L(\omega)$.*

Sledeća teorema daje nam karakterizaciju Borelovih $\cong$-invarijantnih podskupova prostora $\mathrm{Int}_L(\omega)$.

Teorema 5.2.3 *(Lopez-Escobar, videti [25, str. 97]) Neka je L najviše prebrojiv relacijski jezik. Skup $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Int}_L(\omega)$ je Borelov i $\cong$-invarijantan akko postoji $L_{\omega_1\omega}$-rečenica φ takva da je $\mathcal{S} = \{\rho \in \mathrm{Int}_L(\omega) : \langle \omega, \rho \rangle \models \varphi\}$.*

Kao posledicu poslednje dve teoreme, imamo postojanje tzv. *Scottove rečenice* za datu interpretaciju $\rho \in \mathrm{Int}_L(\omega)$.

Posledica 5.2.4 *(Scott, videti [25, str. 98]) Neka je L najviše prebrojiv relacijski jezik, i neka $\rho \in \mathrm{Int}_L(\omega)$. Tada postoji $L_{\omega_1\omega}$-rečenica φ_ρ takva da je*

$$[\rho]_{\cong} = \Big\{\sigma \in \mathrm{Int}_L(\omega) : \langle \omega, \sigma \rangle \models \varphi_\rho\Big\}.$$

5.3 Razne sličnosti relacijskih struktura

Poset kopija

Neka je L neprazan relacijski jezik, $\mathbb{X} \in \mathrm{Mod}_L$ L-struktura, i neka je

$$\mathbb{P}(\mathbb{X}) := \Big\{f[X] : f \in \mathrm{Emb}(\mathbb{X})\Big\}.$$

Tada je $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}), \subseteq \rangle$ *poset kopija* strukture $\mathbb{X}$ unutar $\mathbb{X}$. Poset $\langle \mathbb{P}(\mathbb{X}), \subseteq \rangle$ izomorfan je inverzu desnog Greenovog poretka na $\mathrm{Emb}(\mathbb{X})$.[3]

[3] *Desni Greenov pretporedak* $\preceq^R$ na monoidu $\langle \mathrm{Emb}(\mathbb{X}), \circ, \mathrm{id}_X \rangle$ definiše se na sledeći način: $f \preceq^R g$ akko je $g = f \circ h$, za neko $h \in \mathrm{Emb}(\mathbb{X})$. *Desna Greenova ekvivalencija* $\approx^R$ na $\mathrm{Emb}(\mathbb{X})$, data sa $f \approx^R g$ akko je $f \preceq^R g$ i $g \preceq^R f$, određuje antisimetrični količnik

$$\mathrm{asq}\langle \mathrm{Emb}(\mathbb{X}), \preceq^R \rangle = \langle \mathrm{Emb}(\mathbb{X})/\approx^R, \leq^R \rangle,$$

gde je $\leq^R$ *desni Greenov poredak*, $[f] \leq^R [g] \Leftrightarrow f \preceq^R g$. Za $f, g \in \mathrm{Emb}(\mathbb{X})$ imamo da je $f \approx^R g$ akko je $f[X] = g[X]$. Lako se vidi da je

$$\langle \mathrm{Emb}(\mathbb{X})/\approx^R, \leq^R \rangle \cong \langle \mathbb{P}(\mathbb{X}), \supseteq \rangle,$$

odakle sledi da $\langle \mathrm{Emb}(\mathbb{X}), \circ, \mathrm{id}_X \rangle \cong \langle \mathrm{Emb}(\mathbb{Y}), \circ, \mathrm{id}_Y \rangle \implies \langle \mathbb{P}(\mathbb{X}), \subseteq \rangle \cong \langle \mathbb{P}(\mathbb{Y}), \subseteq \rangle$.

Za L-strukturu $\mathbb{X}$ reći ćemo da je *minimalna za kopije* akko je $\mathbb{P}(\mathbb{X}) = \{X\}$. Jasno je da to važi akko je $\mathrm{Emb}(\mathbb{X}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{X})$. Linearni digraf $\mathbb{D}_\zeta$ i linearni graf $\mathbb{G}_\zeta$ primeri su takvih binarnih struktura. Strukture koje su rigidne za utapanja (tj. $\mathrm{Emb}(\mathbb{X}) = \{\mathrm{id}_X\}$) minimalne su za kopije. Teorema 5.3.1, koju je dokazao Kurilić, daje nam karakterizaciju unarnih struktura koje su minimalne za kopije. Za dodatne primere L-struktura koje su minimalne za kopije, pogledati [30].

Za L-strukturu $\mathbb{X}$ reći ćemo da je *maksimalna za kopije* akko je $\mathbb{P}(\mathbb{X}) = [X]^{|X|}$. Gibson, Pouzet i Woodrow su u [17] dokazali kako je L-struktura $\mathbb{X} = \langle X, \langle \rho_i : i \in I\rangle\rangle$ veličine $\kappa \geq \omega$ maksimalna za kopije akko je κ*-lančljiva* (engl. κ*-chainable*), tj. akko postoji linearno uređenje $\prec$ na skupu X takvo da je $\langle X, \prec\rangle \cong \langle \kappa, <\rangle$, i takvo da su sve relacije ρ_i definabilne u strukturi $\langle X, \prec\rangle$ formulama bez kvantifikatora i parametara. Ako je $L = L_b$ binarni jezik i κ beskonačan kardinal, tada, do na izomorfizam, postoji tačno osam L_b-struktura $\langle \kappa, \rho\rangle$, koje su maksimalne za kopije (videti [33, 38]).

Svaka familija podskupova skupa X (tj. unarnih relacija na skupu X), $\{X_i : i \in I\}$, na prirodan način indukuje relaciju ekvivalencije na tom skupu:

$$x \approx y \ \text{ akko } \ \forall i \in I\, (x \in X_i \Leftrightarrow y \in X_i).$$

Ako je $\{X_i : i \in I\}$ particija skupa X, tada je $X/\!\approx\, = \{X_i : i \in I\}$.

Teorema 5.3.1 *([31]) Ako je $\mathbb{X} = \langle X, \langle \rho_i : i \in I\rangle\rangle$ unarna struktura, i $\approx$ relacija ekvivalencije na skupu X data sa $x \approx y \Leftrightarrow \forall i \in I\ (x \in \rho_i \Leftrightarrow y \in \rho_i)$, i ako je $X/\!\approx\, = \{X_j : j \in J\}$ odgovarajuća particija, pri čemu je $|X_j| = \kappa_j$, za $j \in J$, tada imamo:*

(i) Ako je $J_0 := \{j \in J : \kappa_j < \omega\} = J$, tada je $\mathbb{P}(\mathbb{X}) = \{X\}$;

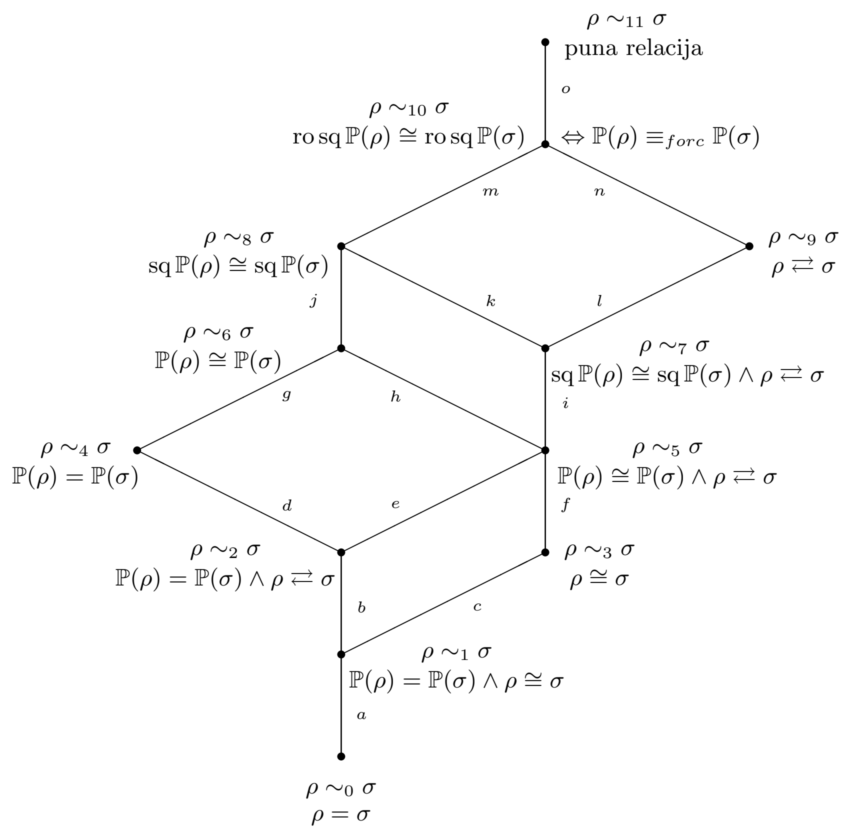
(ii) Ako je $J_0 \neq J$, tada je poset $\mathbb{P}(\mathbb{X})$ bezatoman i važi da je

$$\mathbb{P}(\mathbb{X}) \cong \prod_{j \in J \setminus J_0} \langle [\kappa_j]^{\kappa_j}, \subseteq\rangle \quad i \quad \mathrm{sq}\,\mathbb{P}(\mathbb{X}) \cong \prod_{j \in J \setminus J_0} (P(\kappa_j)/[\kappa_j]^{<\kappa_j})^+.$$

Razne sličnosti na $\mathrm{Int}_L(\kappa)$

Neka je $\kappa > 0$ kardinal i $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ neprazan relacijski jezik. Za $\rho = \langle \rho_i : i \in I\rangle \in \mathrm{Int}_L(\kappa)$, umesto $\langle \mathbb{P}(\langle \kappa, \rho\rangle), \subseteq\rangle$, kraće ćemo pisati samo $\mathbb{P}(\rho)$, kad god kontekst to dozvoljava. Takođe, umesto $\langle \kappa, \rho\rangle \cong \langle \kappa, \sigma\rangle$ pisaćemo samo $\rho \cong \sigma$, i slično za ekvimorfizam $\rightleftarrows$. Na taj način, dobili smo dve relacije ekvivalencije (sličnosti) na skupu $\mathrm{Int}_L(\kappa)$.

Slika 5.1 iz [31] opisuje hijerarhiju između 12 relacija ekvivalencije (sličnosti) na skupu $\mathrm{Int}_L(\kappa)$: jednakost, izomorfizam, ekvimorfizam, puna relacija, četiri sličnosti struktura indukovane odgovarajućim sličnostima monoida samoutapanja, kao i preseci nabrojanih relacija ekvivalencije. Na primer, linija n označava tvrđenje da ekvimorfne strukture imaju forsing ekvivalentne posete kopija.



Slika 5.1: Implikacije između sličnosti na skupu $\mathrm{Int}_L(\kappa)$

Prema [31], što se tiče broja različitih sličnosti i oblika odgovarajućeg Hasseovog dijagrama, klasa svih struktura cepa se na tri dela:

1. beskonačne strukture neunarnih jezika (kod kojih su sve sličnosti različite),
2. konačne strukture (kod kojih dijagram kolapsira na 3 tačke, ako je $\kappa > 1$),
3. beskonačne strukture unarnih jezika (kod kojih dijagram takođe kolapsira).

Sledi glavni rezultat iz datog rada:

Teorema 5.3.2 *([31]) Ako je $\kappa \geq \omega$ kardinal i L neunaran relacijski jezik, tada su, na dijagramu sa slike 5.1 koji opisuje sličnosti $\sim_k$ na skupu $\mathrm{Int}_L(\kappa)$, sve implikacije a – o prave i nema novih implikacija (osim onih koje slede iz tranzitivnosti).*

Deo II

Kondenzacioni poredak i kondenzaciona ekvivalencija

Glava 6

Kondenzacioni poredak

6.1 Kondenzacioni pretporedak, kondenzaciona ekvivalencija i kondenzacioni poredak

Neka je $L = \langle R_i : i \in I \rangle$ neprazan relacijski jezik, gde je $\mathrm{ar}(R_i) = n_i \in \mathbb{N}$, za $i \in I$, i neka je X neprazan skup. Definisaćemo binarnu relaciju $\preccurlyeq_c$ na skupu svih interpretacija jezika L nad domenom X,

$$\mathrm{Int}_L(X) := \prod_{i \in I} P(X^{n_i}),$$

na sledeći način: $\rho \preccurlyeq_c \sigma$ akko postoji kondenzacija $f : \langle X, \rho \rangle \to \langle X, \sigma \rangle$.

Tvrđenje 6.1.1 *Neka je L relacijski jezik i X neprazan skup. Tada važi:*
(a) Za sve $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}_L(X)$ imamo da je

$$\rho \preccurlyeq_c \sigma \iff \exists \rho' \in \mathrm{Int}_L(X)\ \rho \cong \rho' \subseteq \sigma;$$

(b) Relacija $\preccurlyeq_c$ je preduređenje na skupu $\mathrm{Int}_L(X)$;
(c) $\langle \mathrm{Int}_L(X) \,/ \sim_c, \leq_c \rangle$ je parcijalno uređenje, gde su relacija ekvivalencije $\sim_c$ na skupu $\mathrm{Int}_L(X)$ i relacija $\leq_c$ na količniku $\mathrm{Int}_L(X) \,/ \sim_c$, definisane sa:

$$\rho \sim_c \sigma \Leftrightarrow \rho \preccurlyeq_c \sigma \wedge \sigma \preccurlyeq_c \rho \quad i \quad [\rho]_{\sim_c} \leq_c [\sigma]_{\sim_c} \Leftrightarrow \rho \preccurlyeq_c \sigma.$$

Dokaz.
(a) Ako $f \in \mathrm{Cond}(\rho, \sigma)$, tada, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) i tvrđenja 1.1.3 (e), imamo da je $\rho \cong f[\rho] \subseteq \sigma$. Obratno, ako je $\rho \cong \rho' \subseteq \sigma$, tada, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $\rho' = f[\rho]$, i, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e), imamo da $f \in \mathrm{Cond}(\rho, \sigma)$.

(b) Neka $\rho, \sigma, \tau \in \mathrm{Int}_L(X)$. Kako je $\mathrm{id}_X : \langle X, \rho\rangle \to \langle X, \rho\rangle$ kondenzacija, imamo da je $\rho \preccurlyeq_c \rho$. Dakle, relacija $\preccurlyeq_c$ je refleksivna. Ako je $\rho \preccurlyeq_c \sigma$ i $\sigma \preccurlyeq_c \tau$, i ako su $f : \langle X, \rho\rangle \to \langle X, \sigma\rangle$ i $g : \langle X, \sigma\rangle \to \langle X, \tau\rangle$ odgovarajuće kondenzacije, tada je $g \circ f : \langle X, \rho\rangle \to \langle X, \tau\rangle$ kondenzacija, što znači da je $\rho \preccurlyeq_c \tau$. Dakle, relacija $\preccurlyeq_c$ je tranzitivna.

c) Sledi iz (b) na osnovu tvrdjenja 1.2.5. □

Ako je $\rho \sim_c \sigma$, reći ćemo da su interpretacije ρ i σ *kondenzaciono ekvivalentne*. Takođe, pisaćemo $\rho \prec_c \sigma$ akko je $\rho \preccurlyeq_c \sigma$ i $\rho \not\sim_c \sigma$ (ili ekvivalentno $\rho \preccurlyeq_c \sigma$ i $\sigma \not\preccurlyeq_c \rho$), i pisaćemo $\rho \parallel_c \sigma$ akko je $\rho \not\preccurlyeq_c \sigma$ i $\sigma \not\preccurlyeq_c \rho$. Relaciju $\preccurlyeq_c$ zvaćemo *kondenzacioni pretporedak* na $\mathrm{Int}_L(X)$, a relaciju $\leq_c$ zvaćemo *kondenzacioni poredak* na $\mathrm{Int}_L(X) / \sim_c$. Kondenzacioni pretporedak na klasi L-struktura Mod_L definišemo na sličan način: $\mathbb{X} \preccurlyeq_c \mathbb{Y}$ akko je $\mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \neq \emptyset$. Kondenzaciona ekvivalencija na Mod_L je relacija ekvivalencije definisana sa $\mathbb{X} \sim_c \mathbb{Y}$ akko je $\mathbb{X} \preccurlyeq_c \mathbb{Y}$ i $\mathbb{Y} \preccurlyeq_c \mathbb{X}$. Takođe, $\mathbb{X} \prec_c \mathbb{Y}$ akko je $\mathbb{X} \preccurlyeq_c \mathbb{Y}$ i $\mathbb{X} \not\sim_c \mathbb{Y}$, i $\mathbb{X} \parallel_c \mathbb{Y}$ akko je $\mathbb{X} \not\preccurlyeq_c \mathbb{Y}$ i $\mathbb{Y} \not\preccurlyeq_c \mathbb{X}$.

Tvrđenje 6.1.2 *Neka je L relacijski jezik i X neprazan skup. Tada važi:*

(a) $\rho \preccurlyeq_c \sigma \Leftrightarrow \sigma^c \preccurlyeq_c \rho^c$ i $\rho \sim_c \sigma \Leftrightarrow \rho^c \sim_c \sigma^c$, za sve $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}_L(X)$;

(b) $\rho \subseteq \sigma \Rightarrow [\rho]_{\sim_c} \leq_c [\sigma]_{\sim_c}$, za sve $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}_L(X)$;

(c) $[\rho]_{\sim_c} \leq_c [\sigma]_{\sim_c}$ akko postoje $\rho' \in [\rho]_{\sim_c}$ i $\sigma' \in [\sigma]_{\sim_c}$ takvi da je $\rho' \subseteq \sigma'$;

(d) $\rho \cong \sigma \Rightarrow \rho \sim_c \sigma$, za sve $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}_L(X)$, i prema tome je $[\rho]_{\cong} \subseteq [\rho]_{\sim_c}$;

(e) Ako $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$ i ako je $|\rho_i| < \omega$ za svako $i \in I$, tada je $[\rho]_{\cong} = [\rho]_{\sim_c}$. Specijalno, ako je X konačan skup, tada je $[\rho]_{\cong} = [\rho]_{\sim_c}$ za svako $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$;

(f) Ako je $L = L_b$ binarni jezik, i ako binarne strukture $\langle X, \rho\rangle$ i $\langle X, \sigma\rangle$ imaju redom κ i λ komponenata povezanosti, tada $\rho \sim_c \sigma$ implicira da je $\kappa = \lambda$.

Dokaz.

(a) $\rho \preccurlyeq_c \sigma$ akko postoji $f \in \mathrm{Cond}(\rho, \sigma)$, što je, na osnovu tvrđenja 1.1.4 (b), ekvivaletno sa $f^{-1} \in \mathrm{Cond}(\sigma^c, \rho^c)$, tj. $\sigma^c \preccurlyeq_c \rho^c$. Druga ekvivalencija sledi iz prve.

(b) Ako je $\rho \subseteq \sigma$, tada je $\rho \cong \rho \subseteq \sigma$, odakle je, na osnovu tvrđenja 6.1.1 (a), $\rho \preccurlyeq_c \sigma$, ili ekvivalentno $[\rho]_{\sim_c} \leq_c [\sigma]_{\sim_c}$.

(c) Ako je $[\rho]_{\sim_c} \leq_c [\sigma]_{\sim_c}$, tada je $\rho \cong \rho' \subseteq \sigma$ za neko $\rho' \in \mathrm{Int}_L(X)$. Za $\rho' \in [\rho]_{\sim_c}$ i $\sigma' := \sigma \in [\sigma]_{\sim_c}$ imamo da je $\rho' \subseteq \sigma'$. Obrat je dokazan pod (b).

(d) Ako je $\rho \cong \sigma$, tada je $\rho \cong \sigma \subseteq \sigma$ i $\sigma \cong \rho \subseteq \rho$, dakle $\rho \preccurlyeq_c \sigma$ i $\sigma \preccurlyeq_c \rho$, tj. $\rho \sim_c \sigma$.

(e) Ako je $|\rho_i| < \omega$ za svako $i \in I$, i ako je $\rho \sim_c \sigma$, gde $\sigma \in \mathrm{Int}_L(X)$, tada, na osnovu tvrđenja 6.1.1 (a) i tvrđenja 1.1.5 (a), postoje bijekcije

$f, g \in \mathrm{Sym}(X)$ takve da je $f[\rho] \subseteq \sigma$ i $g[\sigma] \subseteq \rho$. Dakle, za svako $i \in I$ imamo da je $f^{n_i}[\rho_i] \subseteq \sigma_i$ i $g^{n_i}[\sigma_i] \subseteq \rho_i$, odakle sledi da je

$$|\rho_i| = |f^{n_i}[\rho_i]| \leq |\sigma_i| = |g^{n_i}[\sigma_i]| \leq |\rho_i|.$$

Pošto je $f^{n_i}[\rho_i] \subseteq \sigma_i$, i ovi skupovi su konačni i iste veličine, zaključujemo da je $f^{n_i}[\rho_i] = \sigma_i$. Dakle $f[\rho] = \sigma$, i, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), imamo da je $\rho \cong \sigma$.

(f) Ako $F \in \mathrm{Cond}(\rho, \sigma)$, tada, na osnovu tvrđenja 2.3.4, postoji surjekcija $f : \kappa \to \lambda$. A ako $G \in \mathrm{Cond}(\sigma, \rho)$, tada postoji surjekcija $g : \lambda \to \kappa$. Dakle, imamo da je $\kappa = \lambda$. $\Box$

Tvrđenje 6.1.3 *Neka je L relacijski jezik, X neprazan skup i neka je $n \geq 2$. Tada, za sve $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \in \mathrm{Int}_L(X)$, važi*

$$[\rho_1]_{\sim_c} \leq_c [\rho_2]_{\sim_c} \leq_c \cdots \leq_c [\rho_n]_{\sim_c}$$

akko postoje $\rho'_i \in [\rho_i]_{\sim_c}$, za $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, takvi da je

$$\rho'_1 \subseteq \rho'_2 \subseteq \cdots \subseteq \rho'_n.$$

Dokaz.

($\Leftarrow$) Sledi na osnovu tvrđenja 6.1.2 (b).

($\Rightarrow$) Dokaz ovog smera ide indukcijom. Baza indukcije dokazana je u tvrđenju 6.1.2 (c). Neka je sad $[\rho_1]_{\sim_c} \leq_c [\rho_2]_{\sim_c} \leq_c \cdots \leq_c [\rho_n]_{\sim_c}$, za neke $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \in \mathrm{Int}_L(X)$. Tada, na osnovu indukcijske hipoteze, postoje $\rho'_i \in [\rho_i]_{\sim_c}$, za $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, takvi da je $\rho'_1 \subseteq \rho'_2 \subseteq \cdots \subseteq \rho'_{n-1}$. Kako je $[\rho'_{n-1}]_{\sim_c} \leq_c [\rho_n]_{\sim_c}$, na osnovu tvrđenja 6.1.1 (a) i tvrđenja 1.1.5 (a) postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $\rho'_{n-1} \cong f[\rho'_{n-1}] \subseteq \rho_n$. Tada je, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (a) i (j), $\rho'_{n-1} \subseteq f^{-1}[\rho_n]$. Sada, za $\rho'_n := f^{-1}[\rho_n] \in [\rho_n]_{\sim_c}$, imamo da je $\rho'_1 \subseteq \rho'_2 \subseteq \cdots \subseteq \rho'_{n-1} \subseteq \rho'_n$. $\Box$

Primer 6.1.4 Postoje relacije $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$ takve da je $\rho \sim_c \sigma$ i $\rho \ncong \sigma$.

Neka su $\rho, \tau \in \mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$ relacije ekvivalencije koje odgovaraju, redom, sledećim particijama skupa ω:

$$\bigcup_{k \in \omega} \Big\{\{4k, 4k+1, 4k+2\}, \{4k+3\}\Big\},$$

$$\bigcup_{k \in \omega} \Big\{\{8k, 8k+1, 8k+2\}, \{8k+3\}, \{8k+4\}, \{8k+5\}, \{8k+6\}, \{8k+7\}\Big\}.$$

Neka je $\sigma := \tau \cup \{\langle 4,5\rangle\}$. Za pogodno konstruisanu bijekciju $f : \omega \to \omega$ imamo da je $\tau = f[\rho]$, dakle $\rho \cong \tau \subseteq \sigma$, tj. $\rho \preccurlyeq_c \sigma$. Takođe, $\sigma \subseteq \rho$ implicira da je $\sigma \preccurlyeq_c \rho$. Dakle, imamo da je $\rho \sim_c \sigma$, ali je $\rho \not\cong \sigma$, zato što je ρ relacija ekvivalencije, a relacija σ nije simetrična.

Tvrđenje 6.1.5 *Neka je L relacijski jezik, X neprazan skup i neka $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$. Tada je*

$$[\rho]_{\sim_c} = \mathrm{Conv}_{\langle \mathrm{Int}_L(X),\subseteq\rangle}([\rho]_{\cong}).$$

Dokaz.

($\supseteq$) Neka $\rho_1,\rho_2 \in [\rho]_{\sim_c}$, $\sigma \in \mathrm{Int}_L(X)$, i neka je $\rho_1 \subseteq \sigma \subseteq \rho_2$. Na osnovu tvrđenja 6.1.2 (b) imamo da je $[\rho_1]_{\sim_c} \le_c [\sigma]_{\sim_c} \le_c [\rho_2]_{\sim_c}$, tj. da je $[\rho]_{\sim_c} \le_c [\sigma]_{\sim_c} \le_c [\rho]_{\sim_c}$. Kako je relacija $\le_c$ antisimetrična, imamo da $\sigma \in [\sigma]_{\sim_c} = [\rho]_{\sim_c}$, što znači da je skup $[\rho]_{\sim_c}$ konveksan u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X),\subseteq\rangle$. Na osnovu tvrđenja 6.1.2 (d) je $[\rho]_{\cong} \subseteq [\rho]_{\sim_c}$, odakle sledi da je

$$\mathrm{Conv}_{\langle \mathrm{Int}_L(X),\subseteq\rangle}([\rho]_{\cong}) \subseteq [\rho]_{\sim_c}.$$

($\subseteq$) Uzmimo sada $\sigma \in [\rho]_{\sim_c}$. Tada je $\rho \sim_c \sigma$, i, na osnovu tvrđenja 6.1.1 (a) i tvrđenja 1.1.5 (a), postoje bijekcije $f,g \in \mathrm{Sym}(X)$ takve da je $\rho \cong f[\rho] \subseteq \sigma \cong g[\sigma] \subseteq \rho$. Sada, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (j) i (a) imamo da

$$[\rho]_{\cong} \ni f[\rho] \subseteq \sigma = g^{-1}[g[\sigma]] \subseteq g^{-1}[\rho] \in [\rho]_{\cong},$$

što implicira da $\sigma \in \mathrm{Conv}_{\langle \mathrm{Int}_L(X),\subseteq\rangle}([\rho]_{\cong})$, čime je dokazana i druga inkluzija. $\square$

Tvrđenje 6.1.6 *Neka je L relacijski jezik i X neprazan skup. Ako je $q_{\sim_c} : \mathrm{Int}_L(X) \to \mathrm{Int}_L(X)\,/\sim_c$ prirodna projekcija, i ako $F \in \prod_{[\rho]_{\sim_c} \in \mathrm{Int}_L(X)/\sim_c} [\rho]_{\sim_c}$ proizvoljno, tada imamo:*

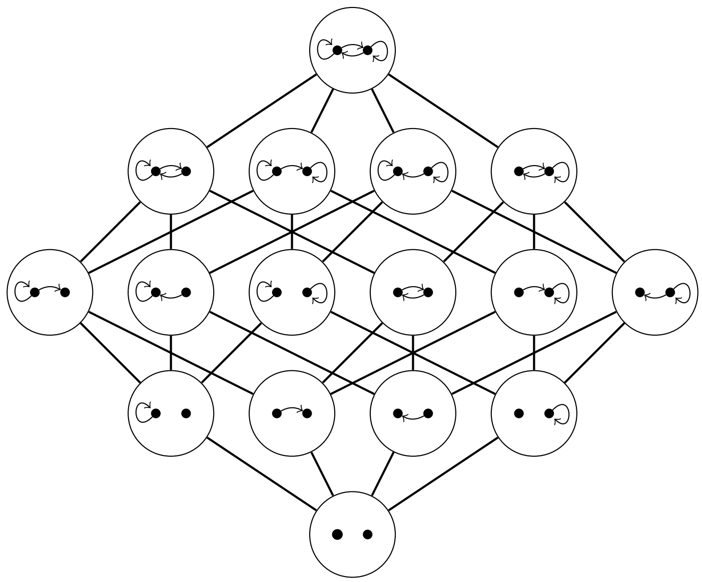
(a) Ako je skup $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Int}_L(X)$ $\cong$-invarijantan, tada važi

$$q_{\sim_c}[\mathrm{Min}\,\mathcal{C}] \subseteq \mathrm{Min}(q_{\sim_c}[\mathcal{C}]),$$

$$q_{\sim_c}[\mathrm{Max}\,\mathcal{C}] \subseteq \mathrm{Max}(q_{\sim_c}[\mathcal{C}]);$$

(b) Ako je $\mathcal{W}$ antilanac u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X)\,/\sim_c, \le_c\rangle$, tada je $\{F([\rho]_{\sim_c}) : [\rho]_{\sim_c} \in \mathcal{W}\}$ antilanac u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X),\subseteq\rangle$;

(c) Ako je $\mathcal{S}$ jak antilanac u posetu $\langle (\mathrm{Int}_L(X)\,/\sim_c) \setminus \{[\emptyset]_{\sim_c}\}, \le_c\rangle$, tada je $\{F([\rho]_{\sim_c}) : [\rho]_{\sim_c} \in \mathcal{S}\}$ jak antilanac u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X) \setminus \{\emptyset\},\subseteq\rangle$.



Slika 6.1: Poset $\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X), \subseteq\rangle$ je Booleova mreža.

Dokaz.

(a) Neka $\rho \in \mathrm{Min}\,\mathcal{C}$ i neka je $[\sigma]_{\sim_c} \leq_c [\rho]_{\sim_c}$, za neko $\sigma \in \mathcal{C}$. Na osnovu tvrđenja 6.1.1 (a) i tvrđenja 1.1.5 (a), postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $\sigma \cong f[\sigma] \subseteq \rho$. Kako je skup $\mathcal{C}$ $\cong$-invarijantan, imamo da $f[\sigma] \in \mathcal{C}$, odakle, na osnovu minimalnosti ρ, dobijamo da je $f[\sigma] = \rho$. Dakle, $[\sigma]_{\sim_c} = [f[\sigma]]_{\sim_c} = [\rho]_{\sim_c}$, što znači da je $q_{\sim_c}(\rho) = [\rho]_{\sim_c} \in \mathrm{Min}(q_{\sim_c}[\mathcal{C}])$, čime smo dokazali prvu inkluziju. Druga inkluzija dokazuje se slično.

(b) Sledi na osnovu tvrđenja 6.1.2 (b).

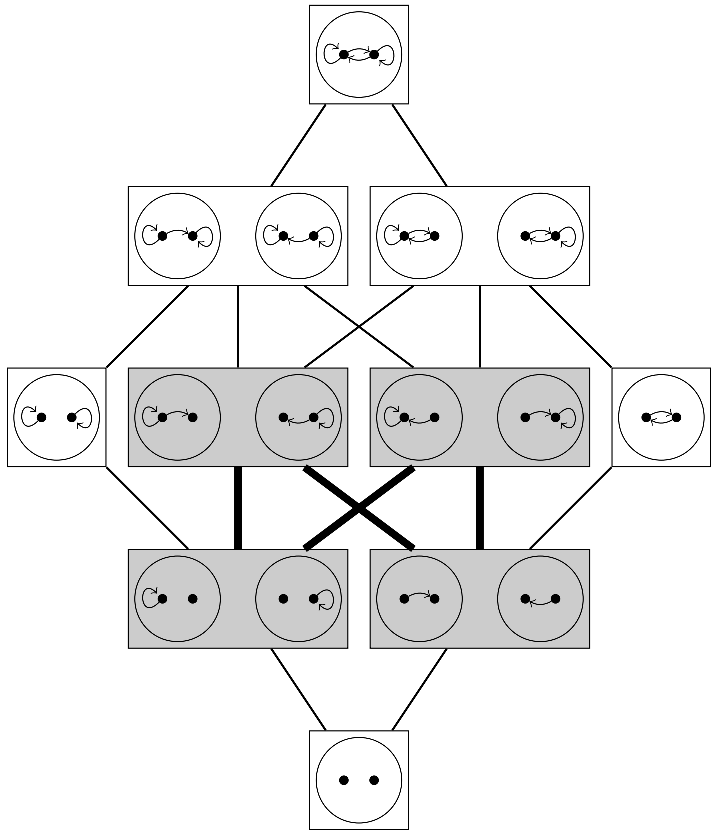
(c) Ako pretpostavimo da $\{F([\rho]_{\sim_c}) : [\rho]_{\sim_c} \in \mathcal{S}\}$ nije jak antilanac u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq\rangle$, tada postoje $[\rho]_{\sim_c}, [\sigma]_{\sim_c} \in \mathcal{S}$, takvi da je

$$\rho' := F([\rho]_{\sim_c}) \not\perp F([\sigma]_{\sim_c}) =: \sigma'.$$

Tada je $\tau := \rho' \cap \sigma' \neq \langle \emptyset : i \in I\rangle$, i, na osnovu tvrđenja 6.1.2 (b), imamo da je $[\tau]_{\sim_c} \leq_c [\rho']_{\sim c} = [\rho]_{\sim_c}$ i $[\tau]_{\sim_c} \leq_c [\sigma']_{\sim c} = [\sigma]_{\sim_c}$, tj. $[\rho]_{\sim_c} \not\perp_c [\sigma]_{\sim_c}$. Dakle, $\mathcal{S}$ nije jak antilanac u posetu $\langle (\mathrm{Int}_L(X) \,/ \sim_c) \setminus \{[\emptyset]_{\sim_c}\}, \leq_c\rangle$. □

Ako je $\mathcal{C} = [\rho]_{\cong}$, gde je $\rho \in \mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$ binarna relacija iz primera 6.1.4, tada imamo da je $\mathrm{Min}\,\mathcal{C} = \mathrm{Max}\,\mathcal{C} = \emptyset$, dok je

$$\mathrm{Min}(q_{\sim_c}[\mathcal{C}]) = \mathrm{Min}(\{[\rho]_{\sim_c}\}) = [\rho]_{\sim_c},$$



Slika 6.2: Poset $\langle \mathrm{Int}_L(X)\,/\!\sim_c, \leq_c\rangle$ nije ni $\wedge$-polumreža, ni $\vee$-polumreža.

i isto tako je

$$\mathrm{Max}(q_{\sim_c}[\mathcal{C}]) = \mathrm{Max}(\{[\rho]_{\sim_c}\}) = [\rho]_{\sim_c}.$$

Dakle, obe inkluzije u tvrđenju 6.1.6 (a), mogu biti prave.

Primer 6.1.7 Poset $\langle \mathrm{Int}_L(X)\,/\!\sim_c, \leq_c\rangle$ nije ni $\wedge$-polumreža, ni $\vee$-polumreža.

Neka je $X = \{0, 1\}$. Tada je $|\,\mathrm{Int}_{L_b}(X)| = |P(X \times X)| = 2^{2^2} = 16$. Kako je X konačan skup, na osnovu tvrđenja 6.1.2 (e) imamo da je $\mathrm{Int}_{L_b}(X)\,/\!\sim_c = \mathrm{Int}_{L_b}(X)\,/\!\cong$ i

$$|\,\mathrm{Int}_{L_b}(X)\,/\!\sim_c| = |\,\mathrm{Int}_{L_b}(X)\,/\!\cong| = 10.$$

Pomoću Hasseovog dijagrama poseta $\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X), \subseteq\rangle$ (videti sliku 6.1) i tvrđenje 6.1.2 (c)), dobijamo Hasseov dijagram poseta $\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X)\,/\!\sim_c, \leq_c\rangle$ (videti sliku 6.2).

Tvrđenje 6.1.8 *Neka je L relacijski jezik i neka su X i Y neprazni skupovi takvi da je $|X| = |Y|$. Tada je*

$\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle \cong \langle \mathrm{Int}_L(Y), \subseteq\rangle$,

$\langle \mathrm{Int}_L(X), \preccurlyeq_c\rangle \cong \langle \mathrm{Int}_L(Y), \preccurlyeq_c\rangle$,

$\langle \mathrm{Int}_L(X) \,/\sim_c, \leq_c\rangle \cong \langle \mathrm{Int}_L(Y)\,/\sim_c, \leq_c\rangle$,

pa, bez ograničenja opštosti, možemo razmatrati samo strukture $\langle \mathrm{Int}_L(\kappa), \subseteq\rangle$, $\langle \mathrm{Int}_L(\kappa), \preccurlyeq_c\rangle$ i $\langle \mathrm{Int}_L(\kappa)\,/\sim_c, \leq_c\rangle$, gde je $\kappa > 0$ kardinal.

Dokaz. Neka je $f : X \to Y$ bijekcija. Tada je, na osnovu tvrđenja 1.1.1 (c), i $f^n : X^n \to Y^n$ bijekcija, za $n \in \mathbb{N}$. Na osnovu tvrđenja 1.1.2 (j) imamo da je $f^{-1}[f[\rho]] = \rho$ i $f[f^{-1}[\sigma]] = \sigma$, za sve $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$, $\sigma \in \mathrm{Int}_L(Y)$, odakle zaključujemo da je i $f[\cdot] : \mathrm{Int}_L(X) \to \mathrm{Int}_L(Y)$ takođe bijekcija. Na osnovu tvrđenja 1.1.2 (a) imamo da je $\rho \subseteq \rho'$ akko je $f[\rho] \subseteq f[\rho']$, za sve $\rho, \rho' \in \mathrm{Int}_L(X)$, što znači da je $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle \cong_{f[\cdot]} \langle \mathrm{Int}_L(Y), \subseteq\rangle$.

Neka je sad $\rho \preccurlyeq_c \rho'$ za neke $\rho, \rho' \in \mathrm{Int}_L(X)$ i neka $g \in \mathrm{Cond}(\langle X, \rho\rangle, \langle X, \rho'\rangle)$. Tada $h := f \circ g \circ f^{-1} \in \mathrm{Sym}(Y)$, i, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (a) i (j), kao i tvrđenja 1.1.3 (e), imamo da je

$$h[f[\rho]] = f[g[\rho]] \subseteq f[\rho'],$$

dakle $h \in \mathrm{Cond}(\langle Y, f[\rho]\rangle, \langle Y, f[\rho']\rangle)$, tj. $f[\rho] \preccurlyeq_c f[\rho']$. A ako je $f[\rho] \preccurlyeq_c f[\rho']$, tada je

$$\rho = f^{-1}[f[\rho]] \preccurlyeq_c f^{-1}[f[\rho']] = \rho'.$$

Dakle, $\langle \mathrm{Int}_L(X), \preccurlyeq_c\rangle \cong_{f[\cdot]} \langle \mathrm{Int}_L(Y), \preccurlyeq_c\rangle$.

Definišimo $F : \mathrm{Int}_L(X)\,/\sim_c \to \mathrm{Int}_L(Y)\,/\sim_c$ sa $F([\rho]_{\sim_c}) := [f[\rho]]_{\sim_c}$. Imamo da je $[\rho]_{\sim_c} \leq_c [\rho']_{\sim_c}$ akko je $\rho \preccurlyeq_c \rho'$, a to, na osnovu gore dokazanog, važi akko je $f[\rho] \preccurlyeq_c f[\rho']$, ili ekvivalentno $[f[\rho]]_{\sim_c} \leq_c [f[\rho']]_{\sim_c}$. Odatle sledi da je F dobro definisano, injekcija, kao i utapanje. Jasno je da je F surjekcija, pa je $\langle \mathrm{Int}_L(X)\,/\sim_c, \leq_c\rangle \cong_F \langle \mathrm{Int}_L(Y)\,/\sim_c, \leq_c\rangle$. □

6.2 Kondenzaciona svojstva i particije kondenzacionog poretka

Kondenzaciona svojstva

Neformalno govoreći, ako je L relacijski jezik, svojstvo $\mathcal{P}$ je relevantno za L-strukture akko je očuvano izomorfizmima. Formalnije govoreći, uzimajući ZFC kao meta teoriju, za ZFC formulu $\mathcal{P}(u, v)$ (tj. formulu na jeziku teorije skupova $L = \langle \in\rangle$) reći ćemo da je *svojstvo relevantno za L-strukture* akko je

$$\forall X, Y \;\; \forall \rho \in \mathrm{Int}_L(X) \;\; \forall \sigma \in \mathrm{Int}_L(Y) \;\; \Big(\mathcal{P}(X, \rho) \wedge \exists f : \mathbb{X} \xrightarrow{\text{iso}} \mathbb{Y} \;\Rightarrow\; \mathcal{P}(Y, \sigma)\Big)$$

teorema ZFC. Lako je videti da je gornji uslov ekvivalentan zahtevu da

$$\forall X,Y\ \forall\rho\in \mathrm{Int}_L(X)\ \forall\sigma\in \mathrm{Int}_L(Y)\ \Big(\exists f:\mathbb{X}\xrightarrow{\mathrm{iso}}\mathbb{Y}\ \Rightarrow\Big(\mathcal{P}(X,\rho)\ \Leftrightarrow\ \mathcal{P}(Y,\sigma)\Big)\Big)$$

bude teorema ZFC. U nastavku, „svojstvo” će označavati „svojstvo relevantno za L-strukture”. Umesto $\mathcal{P}(X,\rho)$, pisaćemo „$\langle X,\rho\rangle$ ima $\mathcal{P}$”.

Za svojstvo $\mathcal{P}$ reći ćemo da je *očuvano kondenzacijama (između L-struktura)* akko za svake dve L-strukture $\mathbb{X},\mathbb{Y}\in \mathrm{Mod}_L$ i za svako $f:X\to Y$ važi

$$\mathbb{X} \text{ ima } \mathcal{P}\ \wedge\ f\in \mathrm{Cond}(\mathbb{X},\mathbb{Y})\ \Longrightarrow\ \mathbb{Y} \text{ ima } \mathcal{P}.$$

Na sličan način definišemo kada je svojstvo $\mathcal{P}$ očuvano monomorfizmima, epimorfizmima, utapanjima, bijekcijama, injekcijama, surjekcijama itd.

Neka je u nastavku L neprazan relacijski jezik. Za svojstvo $\mathcal{P}$ reći ćemo da:

- je *rastuće* akko za sve $X\neq\emptyset$ i $\rho,\sigma\in \mathrm{Int}_L(X)$ važi

$$\langle X,\rho\rangle \text{ ima } \mathcal{P}\ \wedge \rho\subseteq\sigma\ \Longrightarrow\ \langle X,\sigma\rangle \text{ ima } \mathcal{P};$$

- je *opadajuće* akko za sve $X\neq\emptyset$ i $\rho,\sigma\in \mathrm{Int}_L(X)$ važi

$$\langle X,\rho\rangle \text{ ima } \mathcal{P}\ \wedge \rho\supseteq\sigma\ \Longrightarrow\ \langle X,\sigma\rangle \text{ ima } \mathcal{P};$$

- *implicira neuporedivost* akko za sve $X\neq\emptyset$ i $\rho,\sigma\in \mathrm{Int}_L(X)$ važi

$$\langle X,\rho\rangle \text{ ima } \mathcal{P}\ \wedge\langle X,\sigma\rangle \text{ ima } \mathcal{P}\ \wedge\ \rho\subseteq\sigma\ \Longrightarrow\ \rho=\sigma;$$

- je *konveksno* akko za sve $X\neq\emptyset$ i $\rho,\sigma,\tau\in \mathrm{Int}_L(X)$ važi

$$\langle X,\rho\rangle \text{ ima } \mathcal{P}\ \wedge\langle X,\tau\rangle \text{ ima } \mathcal{P}\ \wedge\ \rho\subseteq\sigma\subseteq\tau\ \Longrightarrow\ \langle X,\sigma\rangle \text{ ima } \mathcal{P};$$

- je *kondenzaciono svojstvo* akko za sve $X\neq\emptyset$ i $\rho,\sigma\in \mathrm{Int}_L(X)$ važi

$$\langle X,\rho\rangle \text{ ima } \mathcal{P}\ \wedge\ \rho\sim_c\sigma\ \Longrightarrow\ \langle X,\sigma\rangle \text{ ima } \mathcal{P}.$$

Bijektivne anti-homomorfizme zvaćemo anti-kondenzacije. Skup svih anti-kondenzacija $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ obeležavaćemo sa $\mathrm{ACond}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

Tvrđenje 6.2.1 *Za neprazan relacijski jezik L i za svako svojstvo $\mathcal{P}$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*
(a) $\mathcal{P}$ je rastuće;
(b) $\neg\mathcal{P}$ je opadajuće;
(c) $\mathcal{P}$ je očuvano kondenzacijama;
(d) $\neg\mathcal{P}$ je očuvano anti-kondenzacijama.

Dokaz.

(a)$\Leftrightarrow$(b) $\mathcal{P}$ je rastuće akko

$$\forall X \neq \emptyset \ \ \forall \rho, \sigma \in \mathrm{Int}_L(X) \ \ \Big(\rho \subseteq \sigma \ \Rightarrow \ \Big(\langle X, \rho\rangle \text{ ima } \mathcal{P} \ \Rightarrow \ \langle X, \sigma\rangle \text{ ima } \mathcal{P}\Big)\Big),$$

a to je evivalentno sa

$$\forall X \neq \emptyset \ \ \forall \rho, \sigma \in \mathrm{Int}_L(X) \ \ \Big(\sigma \supseteq \rho \ \Rightarrow \ \Big(\langle X, \sigma\rangle \text{ ima } \neg\mathcal{P} \ \Rightarrow \ \langle X, \rho\rangle \text{ ima } \neg\mathcal{P}\Big)\Big),$$

što važi akko je $\neg\mathcal{P}$ opadajuće.

(a)$\Rightarrow$(c) Pretpostavimo da $\langle X, \rho\rangle$ ima $\mathcal{P}$ i neka je $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ kondenzacija. Tada je, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (g), $\langle X, \rho\rangle \cong_f \langle Y, f[\rho]\rangle$, pa kako je $\mathcal{P}$ svojstvo relevantno za L-strukture, sledi da $\langle Y, f[\rho]\rangle$ takođe ima $\mathcal{P}$. Pošto $f \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e) je $f[\rho] \subseteq \sigma$, pa kako je $\mathcal{P}$ rastuće svojstvo, sledi da $\langle Y, \sigma\rangle$ ima $\mathcal{P}$.

(c)$\Rightarrow$(a) Ako $\langle X, \rho\rangle$ ima $\mathcal{P}$ i ako je $\rho \subseteq \sigma$, tada je, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e), $\mathrm{id}_X : \langle X, \rho\rangle \to \langle X, \sigma\rangle$ kondenzacija, pa kako je svojstvo $\mathcal{P}$ očuvano kondenzacijama, sledi da $\langle X, \sigma\rangle$ takođe ima $\mathcal{P}$.

(c)$\Leftrightarrow$(d) $\mathcal{P}$ je očuvano kondenzacijama akko

$$\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathrm{Mod}_L \ \ \forall f \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \ \Big(\mathbb{X} \text{ ima } \mathcal{P} \ \Rightarrow \ \mathbb{Y} \text{ ima } \mathcal{P}\Big),$$

a to je, za $g = f^{-1}$, na osnovu tvrđenja 1.1.4 (b) ekvivalentno sa

$$\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathrm{Mod}_L \ \ \forall g \in \mathrm{ACond}(\mathbb{Y}, \mathbb{X}) \ \Big(\mathbb{Y} \text{ ima } \neg\mathcal{P} \ \Rightarrow \ \mathbb{X} \text{ ima } \neg\mathcal{P}\Big),$$

što važi akko je $\neg\mathcal{P}$ očuvano anti-kondenzacijama. $\square$

Tvrđenje 6.2.2 *Za neprazan relacijski jezik L i za svako svojstvo $\mathcal{P}$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $\mathcal{P}$ je i rastuće i opadajuće;

(b) Za svaki neprazan skup X važi: ili $\langle X, \rho\rangle$ ima $\mathcal{P}$ za svako $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$, ili $\langle X, \rho\rangle$ ima $\neg\mathcal{P}$ za svako $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$.

Dokaz. Ako je svojstvo $\mathcal{P}$ i rastuće i opadajuće, tada je, na osnovu tvrđenja 6.2.1, svojstvo $\neg\mathcal{P}$ takođe i rastuće i opadajuće. Neka je X proizvoljan neprazan skup. Tada važi: ili $\langle X, \emptyset\rangle$ ima $\mathcal{P}$, ili $\langle X, \emptyset\rangle$ ima $\neg\mathcal{P}$. Kako su i $\mathcal{P}$ i $\neg\mathcal{P}$ rastuća svojstva, ili $\langle X, \rho\rangle$ ima $\mathcal{P}$ za svako $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$, ili $\langle X, \rho\rangle$ ima $\neg\mathcal{P}$ za svako $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$. Dakle, (a) implicira (b). Dokaz drugog smera je direktan. $\square$

Tvrđenje 6.2.3 *Za neprazan relacijski jezik L imamo:*

(a) Rastuća svojstva su konveksna;

(b) Opadajuća svojstva su konveksna;

(c) Svojstva koja impliciraju neuporedivost su konveksna;

(d) Konveksna svojstva su kondenzaciona svojstva.

Dokaz.

(a) i (b) se dokazuje direktno.

(c) Neka $\langle X, \rho \rangle$ i $\langle X, \tau \rangle$ imaju $\mathcal{P}$, i neka je $\rho \subseteq \sigma \subseteq \tau$, gde je $\mathcal{P}$ svojstvo koje implicira neuporedivost. Tada je $\rho = \tau$, odakle sledi da je $\rho = \sigma = \tau$, pa i $\langle X, \sigma \rangle$ ima $\mathcal{P}$.

(d) Neka $\langle X, \rho \rangle$ ima $\mathcal{P}$, i neka je $\rho \sim_c \sigma$, gde je $\mathcal{P}$ konveksno svojstvo. Na osnovu tvrđenja 6.1.5 je

$$[\rho]_{\sim_c} = \mathrm{Conv}_{\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle}([\rho]_{\cong}).$$

Sada, na osnovu tvrđenja 1.2.2 (b) sledi da postoje $\rho_1, \rho_2 \in [\rho]_{\cong}$, takvi da je $\rho_1 \subseteq \sigma \subseteq \rho_2$. Pošto je svojstvo $\mathcal{P}$ relevantno za L-strukture, sledi da $\langle X, \rho_1 \rangle$ i $\langle X, \rho_2 \rangle$ imaju $\mathcal{P}$. Kako je svojstvo $\mathcal{P}$ konveksno, zaključujemo da i $\langle X, \sigma \rangle$ ima $\mathcal{P}$. □

Neformalno govoreći, ako su $\mathcal{P}_i$, $i \in I$, svojstva relevantna za L-strukture, tada ćemo reći da L-struktura $\mathbb{X}$ ima $\bigwedge_{i \in I} \mathcal{P}_i$ (redom, $\bigvee_{i \in I} \mathcal{P}_i$) akko $\mathbb{X}$ ima $\mathcal{P}_i$, za sve $i \in I$ (redom, za neko $i \in I$).

Tvrđenje 6.2.4

(a) Kolekcija rastućih svojstava zatvorena je u odnosu na proizvoljne konjunkcije i disjunkcije;

(b) Kolekcija opadajućih svojstava zatvorena je u odnosu na proizvoljne konjunkcije i disjunkcije;

(c) Ako postoji $i_0 \in I$ takvo da svojstvo $\mathcal{P}_{i_0}$ implicira neuporedivost, tada i svojstvo $\bigwedge_{i \in I} \mathcal{P}_i$ implicira neuporedivost;

(d) Kolekcija konveksnih svojstava zatvorena je u odnosu na proizvoljne konjunkcije;

(e) Kolekcija kondenzacionih svojstava zatvorena je u odnosu na proizvoljne konjunkcije i disjunkcije, i u odnosu na negaciju.

Dokaz.

(a) Neka je $\rho \subseteq \sigma$ i neka $\langle X, \rho \rangle$ ima $\bigwedge_{i \in I} \mathcal{P}_i$, gde su $\mathcal{P}_i$, $i \in I$, rastuća svojstva. Tada $\langle X, \rho \rangle$ ima rastuće svojstvo $\mathcal{P}_i$, za svako $i \in I$, pa i $\langle X, \sigma \rangle$ ima $\mathcal{P}_i$, za svako $i \in I$, čime smo dokazali da je $\bigwedge_{i \in I} \mathcal{P}_i$ rastuće svojstvo.

Slično se dokazuje i da je proizvoljna disjunkcija rastućih svojstava rastuće svojstvo.

(b) Analogno (a).

(c) Neka je $\rho \subseteq \sigma$ i neka $\langle X, \rho\rangle$ i $\langle X, \sigma\rangle$ imaju $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{P}_i$. Tada $\langle X, \rho\rangle$ i $\langle X, \sigma\rangle$ imaju $\mathcal{P}_{i_0}$, pa kako je $\rho \subseteq \sigma$ i svojstvo $\mathcal{P}_{i_0}$ implicira neuporedivost, sledi da je $\rho = \sigma$.

(d) Neka je $\rho \subseteq \sigma \subseteq \tau$ i neka $\langle X, \rho\rangle$ i $\langle X, \tau\rangle$ imaju $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{P}_i$, gde su $\mathcal{P}_i$, $i \in I$, konveksna svojstva. Tada $\langle X, \rho\rangle$ i $\langle X, \tau\rangle$ imaju konveksno svojstvo $\mathcal{P}_i$, za svako $i \in I$, pa $\langle X, \sigma\rangle$ ima $\mathcal{P}_i$, za svako $i \in I$, čime smo dokazali da je $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{P}_i$ konveksno svojstvo.

(e) Prvi deo ide analogno (a). $\mathcal{P}$ je kondenzaciono svojstvo akko

$$\forall X \neq \emptyset \;\; \forall \rho, \sigma \in \mathrm{Int}_L(X) \;\; \Big(\rho \sim_c \sigma \;\Rightarrow\; \Big(\langle X, \rho\rangle \text{ ima } \mathcal{P} \;\Rightarrow\; \langle X, \sigma\rangle \text{ ima } \mathcal{P}\Big)\Big),$$

što je ekvivalentno sa

$$\forall X \neq \emptyset \;\; \forall \rho, \sigma \in \mathrm{Int}_L(X) \;\; \Big(\sigma \sim_c \rho \;\Rightarrow\; \Big(\langle X, \sigma\rangle \text{ ima } \neg\mathcal{P} \;\Rightarrow\; \langle X, \rho\rangle \text{ ima } \neg\mathcal{P}\Big)\Big),$$

a to važi akko je $\neg\mathcal{P}$ kondenzaciono svojstvo. □

Primer 6.2.5 Neka je $L = L_b$ binarni jezik. Refleksivnost ($\Delta_X \subseteq \rho$) je rastuće svojstvo, ali irefleksivnost nije. Dakle, kolekcija rastućih svojstava nije zatvorena u odnosu na negaciju. Antisimetričnost ($\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_X$) je opadajuće svojstvo, ali neantisimetričnost nije. Dakle, kolekcija opadajućih svojstava nije zatvorena u odnosu na negaciju. Refleksivnost i antisimetričnost su konveksna svojstva, ali svojstvo „refleksivnost ili antisimetričnost" nije konveksno. Dakle, kolekcija konveksnih svojstava nije zatvorena u odnosu na disjunkcije. Svojstvo „ρ je dijagonala" ($\rho = \Delta_X$) je konveksno, ali svojstvo „ρ nije dijagonala" nije konveksno. Dakle, kolekcija konveksnih svojstava nije zatvorena u odnosu na negaciju.

Particije skupa $\mathrm{Int}_L(X)\,/\!\sim_c$

Ako je X neprazan skup, L relacijski jezik i $\mathcal{P}$ svojstvo relevantno za L-strukture, uvedimo oznaku

$$\mathcal{P}_X := \Big\{\rho \in \mathrm{Int}_L(X) : \langle X, \rho\rangle \text{ ima } \mathcal{P}\Big\}.$$

Tada je jasno da je svojstvo $\mathcal{P}$ rastuće akko je, za svaki skup X, skup $\mathcal{P}_X$ zatvoren u odnosu na nadskupove u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle$, da je svojstvo $\mathcal{P}$ konveksno akko je, za svaki skup X, skup $\mathcal{P}_X$ konveksan u posetu

$\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle$, da svojstvo $\mathcal{P}$ implicira neuporedivost akko je, za svaki skup X, skup $\mathcal{P}_X$ antilanac u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle$, i slično.

Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu A, i neka je $q_\sim : A \to A/\sim$ odgovarajuća prirodna projekcija, $q_\sim(a) = [a]_\sim$, za sve $a \in A$. Za skup $S \subseteq A$ reći ćemo da je $\sim$*-invarijantan* akko je $[a]_\sim \subseteq S$, za sve $a \in S$. Za particiju $\{S_i : i \in I\}$ skupa A reći ćemo da je $\sim$*-invarijantna* akko su svi skupovi S_i, $i \in I$, $\sim$-invarijantni. Jasno je da je skup $S \subseteq A$ $\sim$-invarijantan akko je particija $\{S, A \setminus S\}$ $\sim$-invarijantna.

Lema 6.2.6 *Za particiju $\{S_i : i \in I\}$ skupa A sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $\{S_i : i \in I\}$ je $\sim$-invarijantna particija;

(b) Za svako $a \in A$ postoji $i \in I$ takvo da je $[a]_\sim \subseteq S_i$ (tj. particija $\{[a]_\sim : a \in A\}$ profinjuje particiju $\{S_i : i \in I\}$);

(c) $\{q_\sim[S_i] : i \in I\}$ je particija skupa $A/\sim$;

(d) $q_\sim^{-1}[q_\sim[S_i]] = S_i$, za svako $i \in I$.

Dokaz.

(a)⇒(b) Kako je $\{S_i : i \in I\}$ particija skupa A, za svako $a \in A$ postoji $i \in I$ takvo da $a \in S_i$. Kako je ta particija $\sim$-invarijantna, imamo da je $[a]_\sim \subseteq S_i$.

(b)⇒(c) Imamo da je

$$\textstyle\bigcup_{i\in I} q_\sim[S_i] = q_\sim[\bigcup_{i\in I} S_i] = q_\sim[A] = A/\sim .$$

Ako $[a]_\sim \in q_\sim[S_i] \cap q_\sim[S_j]$ za neke $a \in A$, $i, j \in I$, $i \neq j$, tada, na osnovu (b), postoji $k \in I$ takvo da je $[a]_\sim \subseteq S_k$. Tada je $S_k \cap S_i \supseteq [a]_\sim \cap S_i \neq \emptyset$ i $S_k \cap S_j \supseteq [a]_\sim \cap S_j \neq \emptyset$, što je nemoguće. Dakle, skupovi $q_\sim[S_i]$, $i \in I$, su disjunktni.

(c)⇒(d) Uvek važi $q_\sim^{-1}[q_\sim[S_i]] \supseteq S_i$, gde je $i \in I$ proizvoljno. Na osnovu (c), za svako $j \in I \setminus \{i\}$ imamo da je

$$q_\sim^{-1}[q_\sim[S_i]] \cap S_j \subseteq q_\sim^{-1}[q_\sim[S_i]] \cap q_\sim^{-1}[q_\sim[S_j]] = q_\sim^{-1}[q_\sim[S_i] \cap q_\sim[S_j]] = q_\sim^{-1}[\emptyset] = \emptyset.$$

Kako je $\{S_i : i \in I\}$ particija skupa A, imamo da je $q_\sim^{-1}[q_\sim[S_i]] \subseteq S_i$, tj. $q_\sim^{-1}[q_\sim[S_i]] = S_i$.

(d)⇒(a) Za $a \in S_i$ imamo da je

$$[a]_\sim = q_\sim^{-1}[\{q_\sim(a)\}] \subseteq q_\sim^{-1}[q_\sim[S_i]] = S_i.$$

□

Tvrđenje 6.2.7 *Ako je X neprazan skup, L relacijski jezik i $\mathcal{P}$ svojstvo relevantno za L-strukture, tada je skup $\mathcal{P}_X$ $\cong$-invarijantan i $\{q_{\cong}[\mathcal{P}_X], q_{\cong}[\neg\mathcal{P}_X]\}$ je particija skupa* $\mathrm{Int}_L(X)\,/\cong$.

Dokaz. Uzmimo $\rho \in \mathcal{P}_X$ i $\sigma \in [\rho]_{\cong}$. Tada $\langle X, \rho\rangle$ ima $\mathcal{P}$ i $\langle X, \rho\rangle \cong \langle X, \sigma\rangle$, pa kako je svojstvo $\mathcal{P}$ relevantno za L-strukture, sledi da i $\langle X, \sigma\rangle$ ima $\mathcal{P}$. Dakle, $[\rho]_{\cong} \subseteq \mathcal{P}_X$, što znači da je skup $\mathcal{P}_X$ $\cong$-invarijantan. Tada je particija $\{\mathcal{P}_X, \mathrm{Int}_L(X) \setminus \mathcal{P}_X\} = \{\mathcal{P}_X, \neg\mathcal{P}_X\}$ $\cong$-invarijantna, pa lema 6.2.6 (c) kompletira dokaz. □

Tvrđenje 6.2.8 *Ako je $\mathcal{P}$ svojstvo relevantno za L-strukture, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) $\mathcal{P}$ je kondenzaciono svojstvo;

(b) Za svako $X \neq \emptyset$ skup $\mathcal{P}_X$ je $\sim_c$-invarijantan podskup skupa $\mathrm{Int}_L(X)$*;*

(c) Za svako $X \neq \emptyset$ $\{q_{\sim_c}[\mathcal{P}_X], q_{\sim_c}[\neg\mathcal{P}_X]\}$ je particija skupa $\mathrm{Int}_L(X)\,/\sim_c$.

Dokaz.

(a)⇒(b) Uzmimo $\rho \in \mathcal{P}_X$ i $\sigma \in [\rho]_{\sim_c}$. Tada $\langle X, \rho\rangle$ ima $\mathcal{P}$ i $\rho \sim_c \sigma$, pa kako je $\mathcal{P}$ kondenzaciono svojstvo, sledi da i $\langle X, \sigma\rangle$ ima $\mathcal{P}$. Dakle, $[\rho]_{\sim_c} \subseteq \mathcal{P}_X$, što znači da je skup $\mathcal{P}_X$ $\sim_c$-invarijantan.

(b)⇒(c) Ako je skup $\mathcal{P}_X$ $\sim_c$-invarijantan, tada je particija

$$\{\mathcal{P}_X, \mathrm{Int}_L(X) \setminus \mathcal{P}_X\} = \{\mathcal{P}_X, \neg\mathcal{P}_X\}$$

$\sim_c$-invarijantna, pa tvrđenje sledi na osnovu leme 6.2.6 (c).

(c)⇒(a) Neka je $X \neq \emptyset$ proizvoljno i neka su $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}_L(X)$ takvi da $\langle X, \rho\rangle$ ima $\mathcal{P}$ i da je $\rho \sim_c \sigma$. Kako je $[\rho]_{\sim_c} = q_{\sim_c}(\rho) \in q_{\sim_c}[\mathcal{P}_X]$, na osnovu leme 6.2.6 (d) imamo da

$$\sigma \in [\rho]_{\sim_c} = q_{\sim_c}^{-1}[\{[\rho]_{\sim_c}\}] \subseteq q_{\sim_c}^{-1}[q_{\sim_c}[\mathcal{P}_X]] = \mathcal{P}_X,$$

pa $\langle X, \sigma\rangle$ takođe ima $\mathcal{P}$, što znači da je $\mathcal{P}$ kondenzaciono svojstvo. □

Primer 6.2.9 Ako je $\mathcal{P}(u, v)$ ZFC-formula koja izražava da je v simetrična relacija na u, tada imamo da

$$q_{\sim_c}[\mathcal{P}_\omega] \ni [\rho]_{\sim_c} = [\sigma]_{\sim_c} \in q_{\sim_c}[\neg\mathcal{P}_\omega],$$

gde su $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$ binarne relacije iz primera 6.1.4. Dakle,

$$q_{\sim_c}[\mathcal{P}_\omega] \cap q_{\sim_c}[\neg\mathcal{P}_\omega] \neq \emptyset.$$

Posledica 6.2.10 *Neka je L relacijski jezik i neka su $\mathcal{P}_i$, $i \in I$, kondenzaciona svojstva. Ako je X neprazan skup takav da je $\{(\mathcal{P}_i)_X : i \in I\}$ particija skupa $\mathrm{Int}_L(X)$, tada je $\{q_{\sim_c}[(\mathcal{P}_i)_X] : i \in I\}$ particija skupa $\mathrm{Int}_L(X)\,/\sim_c$.*

Dokaz. Na osnovu tvrđenja 6.2.8 (b), particija $\{(\mathcal{P}_i)_X : i \in I\}$ je $\sim_c$-invarijantna. Sada, na osnovu leme 6.2.6 (c), sledi da je $\{q_{\sim_c}[(\mathcal{P}_i)_X] : i \in I\}$ particija skupa $\mathrm{Int}_L(X)\,/\sim_c$. □

Dalje nas zanima sledeće pitanje: ako skup $\Pi \subseteq \mathrm{Int}_L(X)$ ima neko svojstvo u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle$, da li njegova direktna slika $q_{\sim_c}[\Pi]$ ima odgovarajuće svojstvo u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X)\,/\sim_c, \leq_c\rangle$?

Primer 6.2.11 Neka je $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, i neka je

$$\rho = \{\langle 1, 2\rangle\},\ \sigma = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\} \text{ i } \tau = \{\langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 5\rangle\}.$$

Imamo da je skup $\Pi = \{\rho, \tau\}$ konveksan u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle$, ali skup $q_{\sim_c}[\Pi] = \{[\rho]_{\sim_c}, [\tau]_{\sim_c}\}$ nije konveksan u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X)\,/\sim_c, \leq_c\rangle$, zato što je $[\rho]_{\sim_c} \leq [\sigma]_{\sim_c} \leq [\tau]_{\sim_c}$ i $[\sigma]_{\sim_c} \notin q_{\sim_c}[\Pi]$.

Tvrđenje 6.2.12 *Neka je L relacijski jezik. Ako je skup $\Pi \subseteq \mathrm{Int}_L(X)$ $\cong$-invarijantan, tada važi:*

(a) Ako je Π konveksan, tada je i $q_{\sim_c}[\Pi]$ konveksan;

(b) Ako je Π zatvoren na dole, tada je i $q_{\sim_c}[\Pi]$ zatvoren na dole;

(c) Ako je Π zatvoren na gore, tada je i $q_{\sim_c}[\Pi]$ zatvoren na gore.

Dokaz.

(a) Ako je skup Π $\cong$-invarijantan i konveksan, tada je, na osnovu tvrđenja 6.1.5, skup Π takođe i $\sim_c$-invarijantan. Neka $[\rho]_{\sim_c}, [\tau]_{\sim_c} \in q_{\sim_c}[\Pi]$, i neka je $[\rho]_{\sim_c} \leq_c [\sigma]_{\sim_c} \leq_c [\tau]_{\sim_c}$. Na osnovu tvrđenja 6.1.3 postoje $\rho_1 \in [\rho]_{\sim_c}$, $\sigma_1 \in [\sigma]_{\sim_c}$ i $\tau_1 \in [\tau]_{\sim_c}$, takvi da je $\rho_1 \subseteq \sigma_1 \subseteq \tau_1$. Na osnovu leme 6.2.6 (d) imamo da

$$\rho_1, \tau_1 \in [\rho]_{\sim_c} \cup\ [\tau]_{\sim_c} = q_{\sim_c}^{-1}[\{[\rho]_{\sim_c}, [\tau]_{\sim_c}\}] \subseteq q_{\sim_c}^{-1}[q_{\sim_c}[\Pi]] = \Pi,$$

pa kako je skup Π konveksan, sledi da $\sigma_1 \in \Pi$, tj. $[\sigma]_{\sim_c} = q_{\sim_c}(\sigma_1) \in q_{\sim_c}[\Pi]$.

(b) i (c) Dokaz ide analogno (a). □

Tvrđenje 6.2.13 *Neka je L relacijski jezik i neka je $\mathcal{P}$ kondenzaciono svojstvo. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) $\mathcal{P}$ je konveksno svojstvo;

(b) Za svako $X \neq \emptyset$, skup $\mathcal{P}_X$ je konveksan u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle$;

(c) Za svako $X \neq \emptyset$, skup $q_{\sim_c}[\mathcal{P}_X]$ je konveksan u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X)\,/\sim_c, \leq_c\rangle$.

Dokaz.

(a)$\Leftrightarrow$(b) Dokaz ovoga je direktan.

(b)$\Rightarrow$(c) Sledi na osnovu tvrđenja 6.2.7 i tvrđenja 6.2.12 (a).

(c)$\Rightarrow$(b) Neka $\rho, \tau \in \mathcal{P}_X$ i neka je $\rho \subseteq \sigma \subseteq \tau$. Tada $[\rho]_{\sim_c}, [\tau]_{\sim_c} \in q_{\sim_c}[\mathcal{P}_X]$, i, na osnovu tvrđenja 6.1.2 (b), je $[\rho]_{\sim_c} \leq_c [\sigma]_{\sim_c} \leq_c [\tau]_{\sim_c}$. Pošto je skup $q_{\sim_c}[\mathcal{P}_X]$ konveksan, $[\sigma]_{\sim_c} \in q_{\sim_c}[\mathcal{P}_X]$, pa, na osnovu tvrđenja 6.2.8 (b) i leme 6.2.6 (d), imamo da

$$\sigma \in [\sigma]_{\sim_c} = q_{\sim_c}^{-1}[\{[\sigma]_{\sim_c}\}] \subseteq q_{\sim_c}^{-1}[q_{\sim_c}[\mathcal{P}_X]] = \mathcal{P}_X.$$

Dakle, skup $\mathcal{P}_X$ je konveksan. $\square$

Tvrđenje 6.2.14 *Neka je L relacijski jezik i neka je $\mathcal{P}$ kondenzaciono svojstvo. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) Svojstvo $\mathcal{P}$ je opadajuće (redom, rastuće);

(b) Za svako $X \neq \emptyset$, skup $\mathcal{P}_X$ je zatvoren na dole (redom, na gore) u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$;

(c) Za svako $X \neq \emptyset$, skup $q_{\sim_c}[\mathcal{P}_X]$ je zatvoren na dole (redom, na gore) u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X) \,/\sim_c, \leq_c \rangle$.

Dokaz. Analogno dokazu tvrđenja 6.2.13. $\square$

Primer 6.2.15 Za date kardinale μ i ν, neka je $\mathcal{P}_\mu$ svojstvo $|\rho| = \mu$, a $\mathcal{P}_{\mu,\nu}$ svojstvo $|\rho| = \mu \wedge |\rho^c| = \nu$. Tada su $\mathcal{P}_\mu$ i $\mathcal{P}_{\mu,\nu}$ konveksna (pa, na osnovu tvrđenja 6.2.3 (d), i kondenzaciona) svojstva. Za neprazan skup X, na osnovu posledice 6.2.10, imamo sledeće particije:

$$\mathrm{Int}_{L_b}(X) \,/\sim_c = \bigcup_{\mu \in \mathrm{Card} \,\wedge\, \mu \leq |X \times X|} q_{\sim_c}\Big[(|\rho| = \mu)_X\Big],$$

$$\mathrm{Int}_{L_b}(X) \,/\sim_c = \bigcup_{\mu,\nu \in \mathrm{Card} \,\wedge\, \mu+\nu = |X \times X|} q_{\sim_c}\Big[(|\rho| = \mu \wedge |\rho^c| = \nu)_X\Big].$$

Na osnovu tvrđenja 6.2.13, to su particije skupa $\mathrm{Int}_{L_b}(X) \,/\sim_c$ koje se sastoje od konveksnih skupova.

Jedna particija skupa $\mathrm{Int}_{L_b}(X) \,/\sim_c$

Sada ćemo uvesti jednu grubu, ali informativnu particiju kondenzacionog poretka $\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X) \,/\sim_c, \leq_c \rangle$. Za skup X uvedimo oznake

$$\mathrm{Refl}_X := \{\rho \in \mathrm{Int}_{L_b}(X) : \Delta_X \subseteq \rho\},$$

$$\mathrm{Irrefl}_X := \{\rho \in \mathrm{Int}_{L_b}(X) : \rho \cap \Delta_X = \emptyset\}.$$

Lema 6.2.16 *Za $\rho, \sigma \in \mathrm{Irrefl}_X$, $A, B \subseteq X$ i $f : X \to X$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $f : \langle X, \rho\rangle \to \langle X, \sigma\rangle$ je kondenzacija i $f[A] \subseteq B$;

(b) $f : \langle X, \rho \cup \Delta_A\rangle \to \langle X, \sigma \cup \Delta_B\rangle$ je kondenzacija.

Dokaz.

(a)⇒(b) Na osnovu tvrđenja 1.1.2 (e) i tvrđenja 1.1.3 (e), imamo da je

$$f[\rho \cup \Delta_A] = f[\rho] \cup f[\Delta_A] = f[\rho] \cup \Delta_{f[A]} \subseteq \sigma \cup \Delta_B.$$

Kako je f bijekcija, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e) opet, zaključujemo da je $f : \langle X, \rho \cup \Delta_A\rangle \to \langle X, \sigma \cup \Delta_B\rangle$ kondenzacija.

(b)⇒(a) Na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e) je $f[\rho] \cup \Delta_{f[A]} \subseteq \sigma \cup \Delta_B$. Pošto $\rho, \sigma \in \mathrm{Irrefl}_X$, ako presečemo obe strane date jednakosti sa Δ_X^c, dobijamo da je $f[\rho] \subseteq \sigma$, pa kako je f bijekcija, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e) opet, imamo da je $f : \langle X, \rho\rangle \to \langle X, \sigma\rangle$ kondenzacija. A ako obe strane gornje jednakosti presečemo sa Δ_X, dobijamo da je $\Delta_{f[A]} \subseteq \Delta_B$, tj. da je $f[A] \subseteq B$. □

Tvrđenje 6.2.17 *Neka je X neprazan skup. Tada važi:*

(a) Preslikavanje $F : \langle \mathrm{Irrefl}_X, \subseteq\rangle \to \langle \mathrm{Refl}_X, \subseteq\rangle$, definisano sa $F(\rho) := \rho \cup \Delta_X$, je izomorfizam;

(b) $\{q_{\sim_c}[\mathrm{Refl}_X], q_{\sim_c}[\mathrm{Irrefl}_X], q_{\sim_c}[\neg\,\mathrm{Refl}_X \cap \neg\,\mathrm{Irrefl}_X]\}$ je particija poseta $\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X) / \sim_c, \leq_c\rangle$ koja se sastoji od konveksnih skupova. Štaviše, skup $q_{\sim_c}[\mathrm{Refl}_X]$ je zatvoren na gore, a skup $q_{\sim_c}[\mathrm{Irrefl}_X]$ je zatvoren na dole;

(c) Preslikavanje $G : \langle q_{\sim_c}[\mathrm{Irrefl}_X], \leq_c\rangle \to \langle q_{\sim_c}[\mathrm{Refl}_X], \leq_c\rangle$, definisano sa $G([\rho]_{\sim_c}) = [\rho \cup \Delta_X]_{\sim_c}$, je izomorfizam.

Dokaz.

(a) Dokaz ovoga je direktan.

(b) Kako su refleksivnost i irefleksivnost, redom, rastuće i opadajuće svojstvo, na osnovu tvrđenja 6.2.3 to su kondenzaciona svojstva. Na osnovu tvrđenja 6.2.4 (e) i posledice 6.2.10, imamo da je

$$\Big\{q_{\sim_c}[\mathrm{Refl}_X], q_{\sim_c}[\mathrm{Irrefl}_X], q_{\sim_c}[\neg\,\mathrm{Refl}_X \cap \neg\,\mathrm{Irrefl}_X]\Big\}$$

particija poseta $\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X) / \sim_c, \leq_c\rangle$. Na osnovu tvrđenja 6.2.13 (c) skup $q_{\sim_c}[\neg\,\mathrm{Refl}_X \cap \neg\,\mathrm{Irrefl}_X]$ je konveksan, i, na osnovu tvrđenja 6.2.14 (c), skup $q_{\sim_c}[\mathrm{Refl}_X]$ je zatvoren na gore, a skup $q_{\sim_c}[\mathrm{Irrefl}_X]$ je zatvoren na dole.

(c) Za $\rho, \sigma \in \mathrm{Irrefl}_X$, na osnovu tvrđenja 6.1.2 (c), tvrđenja 6.1.5 i tvrđenja 1.1.5 (a), imamo da je $[\rho]_{\sim_c} \leq_c [\sigma]_{\sim_c}$ akko je $f[\rho] \subseteq g[\sigma]$ za neke $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$, a to važi akko je

$$f[\rho \cup \Delta_X] = f[\rho] \cup \Delta_X \subseteq g[\sigma] \cup \Delta_X = g[\sigma \cup \Delta_X]$$

za neke $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$, ili ekvivalentno $[\rho \cup \Delta_X]_{\sim_c} \leq_c [\sigma \cup \Delta_X]_{\sim_c}$. Dakle, preslikavanje $G : \langle q_{\sim_c}[\mathrm{Irrefl}_X], \leq_c\rangle \to \langle q_{\sim_c}[\mathrm{Refl}_X], \leq_c\rangle$ je dobro definisano, injekcija, kao i utapanje. Surjektivnost preslikavanja G direktna je posledica surjektivnosti preslikavanja F, pa imamo da je G izomorfizam. $\square$

Zaključujemo kako se poset $\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X) / \sim_c, \leq_c\rangle$ sastoji od dva izomorfna konveksna dela, $q_{\sim_c}[\mathrm{Refl}_X]$ i $q_{\sim_c}[\mathrm{Irrefl}_X]$, i od srednjeg dela, konveksnog skupa $q_{\sim_c}[\neg\,\mathrm{Refl}_X \cap \neg\,\mathrm{Irrefl}_X]$. Dakle, sa uređajno-teoretskog stanovišta, podurеđenja $q_{\sim_c}[\mathrm{Refl}_X]$ i $q_{\sim_c}[\mathrm{Irrefl}_X]$ su ista, i dovoljno je istražiti jedno od njih.

6.3 Neka podurеđenja kondenzacionog poretka

Za binarnu relaciju $\rho \in \mathrm{Int}_{L_b}(X)$ reći ćemo da je *jako reverzibilna* akko je $[\rho]_{\cong} = \{\rho\}$; da je *reverzibilna* akko je $[\rho]_{\cong}$ antilanac u Booleovoj mreži $\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X), \subseteq\rangle$; da je *slabo reverzibilna* akko je $[\rho]_{\cong}$ konveksan skup u Booleovoj mreži $\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X), \subseteq\rangle$. Sa $\mathrm{Rev}_{L_b}(X)$ (redom sa $\mathrm{sRev}_{L_b}(X)$, $\mathrm{wRev}_{L_b}(X)$), označavaćemo skup svih reverzibilnih (redom, jako reverzibilnih, slabo reverzibilnih) relacija $\rho \in \mathrm{Int}_{L_b}(X)$. Na osnovu tvrđenja 8.1.1 (d) imamo da važi

$$\rho \in \mathrm{sRev}_{L_b}(X) \iff \mathrm{Cond}(\rho) = \mathrm{Sym}(X). \tag{6.1}$$

A na osnovu tvrđenja 8.2.1 (e) imamo da važi

$$\rho \in \mathrm{Rev}_{L_b}(X) \cap \mathrm{Rig}_{L_b}(X) \iff \mathrm{Cond}(\rho) = \{\mathrm{id}_X\}. \tag{6.2}$$

Za više informacija o reverzibilnosti (i njenim varijacijama), pogledati treći deo disertacije. Rezultati iz ovog odeljka dokazani su u [47].

Skupovi D_ρ

U cilju istraživanja srednjeg dela $q_{\sim_c}[\neg\,\mathrm{Refl}_X \cap \neg\,\mathrm{Irrefl}_X]$ kondenzacionog poretka $\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X) / \sim_c, \leq_c\rangle$, u nastavku ćemo, za $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$, razmotriti skup $D_\rho \subseteq \mathrm{Int}_{L_b}(X) / \sim_c$ definisan na sledeći način:

$$D_\rho := \Big\{[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} : A \subseteq X\Big\}.$$

Tvrđenje 6.3.1 *Neka je X neprazan skup i neka $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Tada važi:*

(a) Relacija $\preccurlyeq_\rho$ na skupu $P(X)$, definisana sa $A \preccurlyeq_\rho B$ akko je $\rho \cup \Delta_A \preccurlyeq_c \rho \cup \Delta_B$, je preduređenje;

(b) Za $A, B \subseteq X$ imamo da je $A \preccurlyeq_\rho B$ akko postoji $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$ takvo da je $f[A] \subseteq B$;

(c) $\langle P(X)\,/\equiv_\rho, \leq_\rho\rangle$ *je parcijalno uređenje, gde su relacija ekvivalencije* $\equiv_\rho$ *na* $P(X)$ *i relacija* $\leq_\rho$ *na količniku* $P(X)\,/\equiv_\rho$ *date sa*

$$A \equiv_\rho B \;\Leftrightarrow\; A \preccurlyeq_\rho B \wedge B \preccurlyeq_\rho A \quad i \quad [A]_{\equiv_\rho} \leq_\rho [B]_{\equiv_\rho} \;\Leftrightarrow\; A \preccurlyeq_\rho B.$$

Dokaz.
(a) Ovo sledi iz činjenice da je $\preccurlyeq_c$ preduređenje na $\mathrm{Int}_{L_b}(X)$.
(b) Ovo sledi na osnovu leme 6.2.16.
(c) Ovo sledi iz (a) na osnovu tvrđenja 1.2.5. □

Ako je $\mathbb{X} = \langle X, \rho\rangle \in \mathrm{Mod}_L$ L-struktura, tada ćemo, za $A \subseteq X$, odgovarajuću podstrukturu obeležavati sa $\mathbb{A} := \langle A, \rho\restriction_A\rangle$.

Tvrđenje 6.3.2 *Neka je* X *neprazan skup i neka* $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. *Tada imamo:*
(a) Za $A, B \subseteq X$ *važi*

$$A \subseteq B \implies A \preccurlyeq_\rho B.$$

(b) Sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) $\preccurlyeq_\rho = \subseteq$, *(ii)* $\equiv_\rho = \Delta_{P(X)}$, *(iii)* $\rho \in \mathrm{Rev}_{L_b}(X) \cap \mathrm{Rig}_{L_b}(X)$;[1]

(c) Ako su $A, B \subseteq X$ *konačni skupovi, tada važi*

$$A \equiv_\rho B \implies \mathbb{A} \cong \mathbb{B};^{2}$$

(d) Ako su $A, B \subseteq X$ *konačni skupovi iste veličine, tada važi:*

$$A \preccurlyeq_\rho B \;\Leftrightarrow\; A^c \preccurlyeq_\rho B^c \quad i \quad A \equiv_\rho B \;\Leftrightarrow\; A^c \equiv_\rho B^c.$$

Dokaz.
(a) Ako je $A \subseteq B$, tada, s obzirom da $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Cond}(\rho)$, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b) imamo da je $A \preccurlyeq_\rho B$.
(b) (i)⇒(ii) Dokaz ovoga je direktan.
(ii)⇒(iii) Pretpostavimo suprotno, kako je $\equiv_\rho = \Delta_{P(X)}$, ali kako $\rho \notin \mathrm{Rev}_{L_b}(X) \cap \mathrm{Rig}_{L_b}(X)$. Tada, prema (6.2), postoji $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$ takvo da je $f \neq \mathrm{id}_X$. Tada postoje $x, y \in X$, takvi da je $x \neq y$ i $f(x) = y$, odakle, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b), imamo da je $\{x\} \preccurlyeq_\rho \{y\}$. Moguće je:

[1] Na osnovu ZFC rezultata Vopěnke, Pultra i Hedrlína ([88]), na svakom skupu X postoji irefleksivna endo-rigidna binarna relacija, tj. relacija ρ takva da je $\mathrm{End}(\rho) = \{\mathrm{id}_X\}$. Jasno je da je tada $\mathrm{Cond}(\rho) = \{\mathrm{id}_X\}$, što, prema (6.2), znači da je ρ reverzibilna i rigidna. Takođe, dobra uređenja su reverzibilne i rigidne relacije koje nisu endo-rigidne, za $|X| \geq \omega$.

[2] Ako je $\mathbb{X} = \langle X, \rho\rangle$ L-struktura i $A \subseteq X$, tada $\mathbb{A} := \langle A, \rho\restriction_A\rangle$ označava odgovarajuću podstrukturu strukture $\mathbb{X}$.

1. Postoji $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ takvo da je $f^n(x) = x$. Tada je $f^{n-1}(y) = x$, pa, kako $f^{n-1} \in \mathrm{Cond}(\rho)$, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b) imamo da je $\{y\} \preccurlyeq_\rho \{x\}$, tj. $\{x\} \equiv_\rho \{y\}$, a to je kontradikcija s našom pretpostavkom.

2. Za svako $n \in \mathbb{N}$ je $f^n(x) \neq x$. Sada se lako zaključuje kako je niz $\langle f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\rangle$ jedan-jedan, odakle sledi da, za $A = \{f^n(x) : n \in \omega\}$ i $B = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, imamo da je $A \neq B$. Kako je $B \subseteq A$, na osnovu (a) je $B \preccurlyeq_\rho A$. A kako je $f[A] \subseteq B$, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b) je $A \preccurlyeq_\rho B$. Dakle, $A \equiv_\rho B$, a to je kontradikcija s našom pretpostavkom.

(iii)$\Rightarrow$(i) Dovoljno je dokazati da $A \preccurlyeq_\rho B \Rightarrow A \subseteq B$, a to sledi iz tvrđenja 6.3.1 (b) na osnovu (6.2).

(c) Ako je $A \equiv_\rho B$, tada, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b), postoje $f, g \in \mathrm{Cond}(\rho)$ takvi da je $f[A] \subseteq B$ i $g[B] \subseteq A$. Tada je $|A| \leq |B|$ i $|B| \leq |A|$, tj. $|A| = |B|$. Pošto su skupovi A i B konačni, imamo da je $f[A] = B$ i $g[B] = A$. Dakle, $f|_A : A \to B$ i $g|_B : B \to A$ su bijekcije. Sada, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (f) i tvrđenja 1.1.3 (e), imamo da je

$$f|_A[\rho \cap A^2] = f[\rho \cap A^2] = f[\rho] \cap B^2 \subseteq \rho \cap B^2,$$

što implicira da je $|\rho \cap A^2| \leq |\rho \cap B^2|$. Takođe,

$$g|_B[\rho \cap B^2] = g[\rho \cap B^2] = g[\rho] \cap A^2 \subseteq \rho \cap A^2,$$

što implicira da je $|\rho \cap B^2| \leq |\rho \cap A^2|$, tj. $|\rho \cap A^2| = |\rho \cap B^2|$. Kako su skupovi A i B konačni, imamo da je $f|_A[\rho \cap A^2] = \rho \cap B^2$, odakle, prema tvrđenju 1.1.3 (g), sledi da je $f|_A : \langle A, \rho \cap A^2\rangle \to \langle B, \rho \cap B^2\rangle$ izomorfizam.

(d) Dovoljno je dokazati prvu ekvivalenciju, zato što druga sledi iz prve. Neka je $A \preccurlyeq_\rho B$. Tada, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b), postoji $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$ takvo da je $f[A] \subseteq B$. Pošto su skupovi A i B konačni i iste veličine, imamo da je $f[A] = B$, odnosno, s obzirom da je f bijekcija, $f[A^c] = B^c$. Sada, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b) opet, sledi da je $A^c \preccurlyeq_c B^c$. Druga implikacija, dokazuje se slično. $\square$

Primer 6.3.3 Neka je $\mathbb{C}_3 := \langle\{0,1,2\}, \rho\rangle$, gde je $\rho = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,0\rangle\}$. Struktura $\mathbb{C}_3$ je ciklični troelementni digraf, i to je, do na izomorfizam, jedinstveni netranzitivni troelementni turnir. Tada imamo da je

$$\mathrm{Aut}(\rho) = \mathrm{Cond}(\rho) = \left\{ \begin{pmatrix} 0\,1\,2 \\ 0\,1\,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\,1\,2 \\ 2\,0\,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\,1\,2 \\ 1\,2\,0 \end{pmatrix} \right\}$$

n-skup-tranzitivna podgrupa simetrične grupe $\mathrm{Sym}(\{0,1,2\})$, za $n \leq 3$, i, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b), lako zaključujemo da, za $A, B \subseteq \{0,1,2\}$, važi

$$A \equiv_\rho B \iff |A| = |B|.$$

Primer 6.3.4 Neka je $\mathbb{X} = \langle X, \rho \rangle = \langle \mathbb{Q}, < \rangle$ racionalna linija. Tada, na osnovu tvrđenja 1.3.3 i 1.3.2, imamo da je $\mathbb{X}$ do na izomorfizam jedinstveno prebrojivo 2-tranzitivno linearno uređenje[3]. Neka je $A = \mathbb{Z}$, a $B = (0,1)_{\mathbb{Q}}$. Tada važi

$$|A| = |B| = \omega \quad \wedge \quad |X \setminus A| = |X \setminus B| = \omega.$$

Ali, $A \not\equiv_\rho B$, zato što je, prema tvrđenju 6.3.1 (b), $A \not\preccurlyeq_\rho B$, kao i $B \not\preccurlyeq_\rho A$.

Sada ćemo dokazati kako je podurеđenje $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$ izomorfno gore uvedenom količniku partitivnog skupa $P(X)$.

Tvrđenje 6.3.5 *Neka je X neprazan skup i neka $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Tada je preslikavanje $F : P(X) \,/ \equiv_\rho \to D_\rho$, dato sa $F([A]_{\equiv_\rho}) := [\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}$, dobro definisano, i pri tome je*

$$\langle P(X) \,/ \equiv_\rho, \leq_\rho \rangle \cong_F \langle D_\rho, \leq_c \rangle.$$

Dokaz. Za $A, B \subseteq X$ imamo da je $[A]_{\equiv_\rho} \leq_\rho [B]_{\equiv_\rho}$ akko je $A \preccurlyeq_\rho B$, a to važi akko je $\rho \cup \Delta_A \preccurlyeq_c \rho \cup \Delta_B$, ili ekvivalentno $[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} \leq_c [\rho \cup \Delta_B]_{\sim_c}$. Dakle, preslikavanje $F : P(X) \,/ \equiv_\rho \to D_\rho$ je dobro definisano, injekcija, kao i utapanje. Jasno je da je F surjekcija, pa je $\langle P(X) \,/ \equiv_\rho, \leq_\rho \rangle \cong_F \langle D_\rho, \leq_c \rangle$.
$\square$

Neka je X skup i neka je $\doteqdot$ relacija ekvivalencije na $P(X)$, definisana na sledeći način:

$$A \doteqdot B \iff |A| = |B| \wedge |X \setminus A| = |X \setminus B|.$$

Ako za $\mu, \nu \in \mathrm{Card}$ važi $\mu + \nu = |X|$, za $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$ definisaćemo skup

$$D_\rho^{\mu,\nu} := \Big\{ [\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} : A \in [X]^{\mu,\nu} \Big\}.$$

Tvrđenje 6.3.6 *Neka je X neprazan skup i neka $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Tada imamo:*
(a) Za $A, B \subseteq X$ važi

$$A \equiv_\rho B \implies A \doteqdot B,$$

i, kao posledicu, imamo da particija $\{[A]_{\equiv_\rho} : A \in P(X)\}$ profinjuje particiju $\{[X]^{\mu,\nu} : \mu, \nu \in \mathrm{Card} \wedge \mu + \nu = |X|\}$;
(b) $|D_\rho^{\mu,\nu}| = |[X]^{\mu,\nu} \,/ \equiv_\rho|$, za sve $\mu, \nu \in \mathrm{Card}$, takve da je $\mu + \nu = |X|$;
(c) $\{D_\rho^{\mu,\nu} : \mu, \nu \in \mathrm{Card} \wedge \mu + \nu = |X|\}$ je particija skupa D_ρ na konveksne skupove u posetu $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$.

[3] Ako je ρ 2-tranzitivno linearno uređenje, tada je, na osnovu tvrđenja 1.3.5, ρ n-tranzitivno za svako $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz.

(a) Ako je $A \equiv_\rho B$, tada, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b), imamo da postoje kondenzacije $f, g \in \mathrm{Cond}(\rho)$, takve da je $f[A] \subseteq B$ i $g[B] \subseteq A$, pa, s obzirom da su f i g bijekcije, na osnovu toga je i $f[A^c] \supseteq B^c$ i $g[B^c] \supseteq A^c$. Tada je $|A| \leq |B|$ i $|B| \leq |A|$, dakle $|A| = |B|$. Takođe je $|A^c| \geq |B^c|$ i $|B^c| \geq |A^c|$, dakle $|A^c| = |B^c|$.

(b) Neka je funkcija $F : [X]^{\mu,\nu} / \equiv_\rho \to D_\rho^{\mu,\nu}$ definisana na sledeći način: $F([A]_{\equiv_\rho}) := [\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}$. Tada, za $A, B \in [X]^{\mu,\nu}$ imamo da je $A \equiv_\rho B$ akko je $\rho \cup \Delta_A \sim_c \rho \cup \Delta_B$, što je ekvivalentno sa $[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} = [\rho \cup \Delta_B]_{\sim_c}$. Zaključujemo kako je funkcija F dobro definisana i injekcija. Jasno je kako je F surjekcija, što znači da je F bijekcija.

(c) Na osnovu (a) je $D_\rho^{\mu_1,\nu_1} \cap D_\rho^{\mu_2,\nu_2} = \emptyset$, kad god je $\langle \mu_1, \nu_1 \rangle \neq \langle \mu_2, \nu_2 \rangle$. Jasno je da je

$$D_\rho = \bigcup_{\mu,\nu \in \mathrm{Card} \,\wedge\, \mu+\nu=|X|} D_\rho^{\mu,\nu},$$

pa je $\{D_\rho^{\mu,\nu} : \mu, \nu \in \mathrm{Card} \wedge \mu + \nu = |X|\}$ particija skupa D_ρ.

Preostaje još dokazati kako su svi skupovi $D_\rho^{\mu,\nu}$ konveksni u posetu $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$. Neka su $\mu, \nu \in \mathrm{Card}$ takvi da je $\mu + \nu = |X|$, i neka su $A, B \in [X]^{\mu,\nu}$ takvi da je

$$[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} \leq_c [\rho \cup \Delta_C]_{\sim_c} \leq_c [\rho \cup \Delta_B]_{\sim_c},$$

za neko $C \subseteq X$. Tada, $\rho \cup \Delta_A \preccurlyeq_c \rho \cup \Delta_C$ na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b) implicira da je $|A| \leq |C|$ i da je $|A^c| \geq |C^c|$. Slično tako, $\rho \cup \Delta_C \preccurlyeq_c \rho \cup \Delta_B$ implicira da je $|C| \leq |B|$ i da je $|C^c| \geq |B^c|$. Dakle, $\mu \leq |C| \leq \mu$, kao i $\nu \geq |C^c| \geq \nu$, odakle sledi da $C \in [X]^{\mu,\nu}$, odnosno da $[\rho \cup \Delta_C]_{\sim_c} \in D_\rho^{\mu,\nu}$. $\square$

Tvrđenje 6.3.7 *Neka je X neprazan skup i neka je $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$ reverzibilna relacija. Ako su $A, B \subseteq X$ konačni ili kokonačni skupovi takvi da je $A \doteqdot B$, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) $A \preccurlyeq_\rho B$; *(b) $B \preccurlyeq_\rho A$;* *(c) $A \equiv_\rho B$.*

Dokaz.

(a)$\Rightarrow$(c) Ako je $A \preccurlyeq_\rho B$, tada, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b) i tvrđenja 8.2.1 (e), sledi da postoji $f \in \mathrm{Aut}(\rho)$ takvo da je $f[A] \subseteq B$, pa kako je f bijekcija, samim tim je i $f[A^c] \supseteq B^c$. S obzirom da su skupovi A i B konačni ili kokonačni, i da je $A \doteqdot B$, u svakom slučaju imamo da je tada $f[A] = B$, i, kao posledicu, da je $f^{-1}[B] = A$. Pošto $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\rho)$, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b) opet, sledi da je $B \preccurlyeq_\rho A$, tj. da je $A \equiv_\rho B$.

(c)$\Rightarrow$(a) Ovaj smer je direktan.

Dokazali smo da je (a)$\Leftrightarrow$(c). Analogno se dokazuje i da je (b)$\Leftrightarrow$(c). $\square$

Teorema 6.3.8 *Neka je X neprazan skup i neka $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) $A \equiv_\rho B \Leftrightarrow A \doteqdot B$, za sve $A, B \subseteq X$;

(b) $|D_\rho^{\mu,\nu}| = 1$, za sve $\mu, \nu \in \mathrm{Card}$, takve da je $\mu + \nu = |X|$;

(c) Relacija ρ je jako reverzibilna[4], ili je ρ netranzitivni troelementni turnir.

Dokaz.

(a)⇔(b) Ova ekvivalencija sledi direktno na osnovu tvrđenja 6.3.6 (b).

(c)⇒(a) Ako je ρ netranzitivni troelementni turnir, tada tvrđenje sledi na osnovu primera 6.3.3. A ako je relacija ρ jako reverzibilna, tada je, za $A, B \subseteq X$, na osnovu tvrđenja 6.3.6 (a), dovoljno dokazati da $A \doteqdot B \;\Rightarrow\; A \equiv_\rho B$. Ako je $A \doteqdot B$, tada je jasno da postoje bijekcije $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$, takve da je $f[A] = B$ i $g[B] = A$. Na osnovu (6.1) imamo da $f, g \in \mathrm{Cond}(\rho)$, odakle, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b), sledi da je $A \equiv_\rho B$.

(a)⇒(c) Prvo ćemo dokazati naredna dva stava:

Stav 6.3.9 *Ako je $\equiv_\rho \,=\, \doteqdot$, tada je relacija ρ monomorfna (pa i reverzibilna), i pri tome je grupa $\mathrm{Aut}(\rho) = \mathrm{Cond}(\rho)$ n-skup-tranzitivna, za svako $n < \min\{\omega, |X| + 1\}$.*

Dokaz. Neka $A, B \in [X]^n$, za neko $n \in \mathbb{N}$, takvo da je $n \leq |X|$. Tada imamo da je $A \doteqdot B$, što, na osnovu pretpostavke, znači da je $A \equiv_\rho B$. Sada, na osnovu tvrđenja 6.3.2 (c), imamo da je $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$, što znači da je struktura $\mathbb{X}$ monomorfna. Kurilić je u [40] dokazao kako su sve monomorfne strukture reverzibilne, pa, na osnovu tvrđenja 8.2.1 (e), imamo da je $\mathrm{Aut}(\rho) = \mathrm{Cond}(\rho)$. Sada, s obzirom da su skupovi A i B konačni i iste veličine, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b) $A \equiv_\rho B$ implicira da postoji $f \in \mathrm{Aut}(\rho)$, takvo da je $f[A] = B$. A to znači da je grupa $\mathrm{Aut}(\rho)$ n-skup-tranzitivna za svako $n \in \mathbb{N}$. □

Stav 6.3.10 *Ako je $|X| \geq \omega$, i ako je $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$ linearno uređenje, tada je*

$$\left| D_\rho^{\omega,|X|} \right| > 1.$$

Dokaz. Ako $\mathbb{X}$ ima minimum, označimo ga sa 0, uzmimo $A, B \in [X]^{\omega,|X|}$, takve da $0 \in A$ i $0 \notin B$. Neka je $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$ proizvoljno. Kako su, na osnovu primera 9.3.9, linearna uređenja reverzibilne strukture, na osnovu

[4] Na osnovu primera 8.1.4 prazna relacija $\emptyset$ i kompletan graf $(X \times X) \setminus \Delta_X$ jedini su primeri irefleksivnih jako reverzibilnih binarnih relacija na skupu X.

tvrđenja 8.2.1 (e) imamo da $f \in \mathrm{Aut}(\rho)$, što implicira da je $f(0) = 0$, pa imamo da $f[A] \not\subseteq B$. Sada, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b) sledi da je $A \not\preccurlyeq_\rho B$, odnosno da je $\rho \cup \Delta_A \not\preccurlyeq_c \rho \cup \Delta_B$, što znači da je $[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} \neq [\rho \cup \Delta_B]_{\sim_c}$, pa je $\left|D_\rho^{\omega,|X|}\right| > 1$. Ako $\mathbb{X}$ ima maksimum, na sličan način dokazuje se da je $\left|D_\rho^{\omega,|X|}\right| > 1$. A ako $\mathbb{X}$ nema ni minimum ni maksimum, tada postoje disjunktni lanci $A, B \subseteq X$, takvi da je $\mathbb{A} \cong \omega$ i $\mathbb{B} \cong \omega^*$. Ako bismo pretpostavili da postoji $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$, takvo da je $f[A] \subseteq B$, imali bismo da $f \restriction_A \in \mathrm{Mono}(\mathbb{A}, \mathbb{X})$, pa kako je, na osnovu leme 1.3.1 (b), $\mathrm{Mono}(\mathbb{A}, \mathbb{X}) = \mathrm{Emb}(\mathbb{A}, \mathbb{X})$, imali bismo da se

$$\omega \cong \mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{B} \cong \omega^*,$$

što je nemoguće. Sada, iz tvrđenja 6.3.1 (b) sledi da je $\rho \cup \Delta_A \not\preccurlyeq_c \rho \cup \Delta_B$, što implicira da je $[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} \neq [\rho \cup \Delta_B]_{\sim_c}$, i kao posledicu imamo da je opet $\left|D_\rho^{\omega,|X|}\right| > 1$. □

Sada ćemo dokazati implikaciju (a)⇒(c). Ako je $|X| = 1$, tada je $\rho = \emptyset \in \mathrm{sRev}_{L_b}(X)$. A ako je $|X| \geq 2$, tada, s obzirom da je, na osnovu stava 6.3.9, struktura $\mathbb{X}$ monomorfna, na osnovu tvrđenja 2.2.11 (c) i primera 8.1.4 zaključujemo kako je relacija ρ jako reverzibilna, ili je ρ netranzitivni troelementni turnir, ili je ρ linearno uređenje. Ako je skup X konačan, tada ρ ne može biti linearno uređenje, zato što su konačna linearna uređenja reverzibilne i rigidne strukture, pa bismo, na osnovu tvrđenja 6.3.2 (b), imali da je $\equiv_\rho = \Delta_{P(X)} \neq \div$. A ako je skup X beskonačan, tada ρ takođe ne može biti linearno uređenje, zato što bismo u tom slučaju, na osnovu stava 6.3.10, imali da je $\left|D_\rho^{\omega,|X|}\right| > 1$, što bi, na osnovu tvrđenja 6.3.6 (b), impliciralo da je $\equiv_\rho \neq \div$, a to je kontradikcija. □

Teorema 6.3.11 *Neka je X neprazan skup i neka $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Ako je relacija ρ reverzibilna, tada je preslikavanje $F : D_\rho \to D_\rho$, definisano sa $F([\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}) := [\rho \cup \Delta_{A^c}]_{\sim_c}$ dobro definisano, i pri tome je*

$$\langle D_\rho, \leq_c\rangle \cong_F \langle D_\rho, \leq_c\rangle^*.$$

Dokaz. Neka je $A, B \subseteq X$. Ako je $[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} \leq_c [\rho \cup \Delta_B]_{\sim_c}$, tada je $\rho \cup \Delta_A \preccurlyeq_c \rho \cup \Delta_B$, odakle, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b) i tvrđenja 8.2.1 (e), postoji $f \in \mathrm{Aut}(\rho)$ takvo da je $f[A] \subseteq B$, odnosno, s obzirom da je f bijekcija, $f[A^c] \supseteq B^c$. Tada imamo da $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\rho)$ i da je $f^{-1}[B^c] \subseteq A^c$, što, prema tvrđenju 6.3.1 (b) opet, implicira da je $\rho \cup \Delta_{B^c} \preccurlyeq_c \rho \cup \Delta_{A^c}$, tj.

da je $[\rho \cup \Delta_{A^c}]_{\sim_c} \geq_c [\rho \cup \Delta_{B^c}]_{\sim_c}$. Analogno, $[\rho \cup \Delta_{A^c}]_{\sim_c} \geq_c [\rho \cup \Delta_{B^c}]_{\sim_c}$ implicira da je $[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} \leq_c [\rho \cup \Delta_B]_{\sim_c}$. Dakle, imamo da je

$$[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} \leq_c [\rho \cup \Delta_B]_{\sim_c} \iff [\rho \cup \Delta_{A^c}]_{\sim_c} \geq_c [\rho \cup \Delta_{B^c}]_{\sim_c},$$

što znači da je $F : \langle D_\rho, \leq_c \rangle \to \langle D_\rho, \geq_c \rangle = \langle D_\rho, \leq_c \rangle^*$ dobro definisano, injekcija, kao i utapanje. Jasno je da je F surjekcija, što znači da je F izomorfizam. $\square$

U određenom smislu, važi i obrat teoreme 6.3.11. Naime, za $|X| < \omega$, definišimo da je $\widetilde{D}_\rho := D_\rho$. A ako je $|X| \geq \omega$, neka je tada

$$\widetilde{D}_\rho := \bigcup_{n\in\omega} D_\rho^{n,|X|} \cup \bigcup_{n\in\omega} D_\rho^{|X|,n}.$$

Teorema 6.3.12 *Neka je X beskonačan skup i $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$, i neka je preslikavanje $G : \widetilde{D}_\rho \to \widetilde{D}_\rho$ dato sa $G([\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}) := [\rho \cup \Delta_{A^c}]_{\sim_c}$. Tada imamo:*

(a) Preslikavanje G je dobro definisano i bijekcija;

(b) $\langle \widetilde{D}_\rho, \leq_c \rangle \cong_G \langle \widetilde{D}_\rho, \leq_c \rangle^*$ akko je relacija ρ reverzibilna.

Dokaz.

(a) Ako je $\rho \cup \Delta_A \sim_c \rho \cup \Delta_B$, za neke $A, B \in [X]^{<\omega,|X|} \cup [X]^{|X|,<\omega}$, tada i samo tada je $A \equiv_\rho B$, što je, na osnovu tvrđenja 6.3.2 (d), ekvivalentno sa $A^c \equiv_\rho B^c$, odnosno sa $[\rho \cup \Delta_{A^c}]_{\sim_c} = [\rho \cup \Delta_{B^c}]_{\sim_c}$. Zaključujemo kako je preslikavanje G dobro definisano, i kako je injekcija. Jasno je da je G i surjekcija, što znači da je $G : \widetilde{D}_\rho \to \widetilde{D}_\rho$ bijekcija.

(b) ($\Leftarrow$) Ako je relacija ρ reverzibilna, tada, na osnovu teoreme 6.3.11, imamo da je $\langle D_\rho, \leq_c \rangle \cong_F \langle D_\rho, \leq_c \rangle^*$, i pri tome je $G = F|_{\widetilde{D}_\rho}$. Odatle direktno sledi da je $\langle \widetilde{D}_\rho, \leq_c \rangle \cong_G \langle \widetilde{D}_\rho, \leq_c \rangle^*$.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo suprotno, da je $\langle \widetilde{D}_\rho, \leq_c \rangle \cong_G \langle \widetilde{D}_\rho, \leq_c \rangle^*$, ali da relacija ρ nije reverzibilna. Tada, na osnovu tvrđenja 8.2.1 (g), postoji $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$, takvo da je $f[\rho] \subsetneq \rho$. Neka je $\{x, y\} \in [X]^2$ takvo da $\langle x, y \rangle \notin \rho$, a da $\langle z, w \rangle := \langle f(x), f(y) \rangle \in \rho$. Tada je

$$\Big|\rho \restriction_{\{z,w\}}\Big| > \Big|(f[\rho]) \restriction_{\{z,w\}}\Big| = \Big|(f[\rho]) \restriction_{f[\{x,y\}]}\Big| = \Big|\rho \restriction_{\{x,y\}}\Big|. \tag{6.3}$$

Kako je f bijekcija i $f[\{x, y\}] = \{z, w\}$, imamo da je $f[\{x, y\}^c] = \{z, w\}^c$, pa kako $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b) imamo da je $\rho \cup \Delta_{\{x,y\}^c} \preccurlyeq_c \rho \cup \Delta_{\{z,w\}^c}$, tj. $[\rho \cup \Delta_{\{x,y\}^c}]_{\sim_c} \leq_c [\rho \cup \Delta_{\{z,w\}^c}]_{\sim_c}$. Kako je $G : \langle \widetilde{D}_\rho, \leq_c \rangle \to \langle \widetilde{D}_\rho, \geq_c \rangle$ izomorfizam, imamo da je $[\rho \cup \Delta_{\{x,y\}}]_{\sim_c} \geq_c [\rho \cup \Delta_{\{z,w\}}]_{\sim_c}$, odnosno da je $\rho \cup \Delta_{\{x,y\}} \succcurlyeq_c \rho \cup \Delta_{\{z,w\}}$. Sada, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b) sledi da postoji $g \in \mathrm{Cond}(\rho)$, takvo da je $g[\{z,w\}] = \{x,y\}$. Tada je $g[\rho] \subseteq \rho$, pa važi

$$\left|\rho\restriction_{\{x,y\}}\right| \geq \left|(g[\rho])\restriction_{\{x,y\}}\right| = \left|(g[\rho])\restriction_{g[\{z,w\}]}\right| = \left|g[\rho\restriction_{\{z,w\}}]\right| = \left|\rho\restriction_{\{z,w\}}\right|,$$

a to je kontradikcija sa (6.3). □

Tvrđenje 6.3.13 *Neka je X neprazan skup i neka $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Tada, za $n \in \omega$, imamo da je preslikavanje $H : D_\rho^{n,|X|-n} \to D_\rho^{|X|-n,n}$, definisano sa $H([\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}) := [\rho \cup \Delta_{A^c}]_{\sim_c}$, dobro definisano i bijekcija, i pri tome važi*

$$\langle D_\rho^{n,|X|-n}, \leq_c\rangle \cong_H \langle D_\rho^{|X|-n,n}, \leq_c\rangle. \tag{6.4}$$

Dokaz. Za $A, B \in [X]^{n,|X|-n}$ imamo da je $[\rho \cup \Delta_A] \leq_c [\rho \cup \Delta_B]_{\sim_c}$ akko je $\rho \cup \Delta_A \preccurlyeq_c \rho \cup \Delta_B$, tj. $A \preccurlyeq_\rho B$, a to je, na osnovu tvrđenja 6.3.2 (d), ekvivalentno sa $A^c \preccurlyeq_\rho B^c$, što je dalje ekvivalentno sa $\rho \cup \Delta_{A^c} \preccurlyeq_c \rho \cup \Delta_{B^c}$, odnosno sa $[\rho \cup \Delta_{A^c}]_{\sim_c} \leq_c [\rho \cup \Delta_{B^c}]_{\sim_c}$. Dakle, $H : \langle D_\rho^{n,|X|-n}, \leq_c\rangle \to \langle D_\rho^{|X|-n,n}, \leq_c\rangle$ je dobro definisano, injekcija, kao i utapanje. Jasno je da je H surjekcija, što znači da je H izomorfizam. □

Tvrđenje 6.3.14 *Neka je X neprazan skup i neka $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Tada, za svako $n < \min\{\omega, |X|+1\}$, imamo:*

(a) Relacija ρ je reverzibilna $\Rightarrow$ poset $\langle D_\rho^{n,|X|-n}, \leq_c\rangle$ je antilanac;

(b) Relacija ρ je reverzibilna $\Rightarrow$ poset $\langle D_\rho^{|X|-n,n}, \leq_c\rangle$ je antilanac.

Ako je $n \geq 2$, tada, i pod (a) i pod (b), umesto „$\Rightarrow$" imamo „$\Leftrightarrow$".

Dokaz.

(a) ($\Rightarrow$) Pretpostavimo suprotno, da $\rho \in \mathrm{Rev}_{L_b}(X)$ ali da $\langle D_\rho^{n,|X|-n}, \leq_c\rangle$ nije antilanac. Tada postoje $A, B \in [X]^{n,|X|-n}$ takvi da je $\rho \cup \Delta_A \prec_c \rho \cup \Delta_B$. Tada je $A \preccurlyeq_\rho B$, pa, na osnovu tvrđenja 6.3.7, imamo da je $A \equiv_\rho B$, tj. $\rho \cup \Delta_A \sim_c \rho \cup \Delta_B$, a to je kontradikcija.

($\Leftarrow$) Dokazaćemo kontrapoziciju. Ako $\rho \notin \mathrm{Rev}_{L_b}(X)$, tada, na osnovu tvrđenja 8.2.1 (g), postoji $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$ takvo da je $f[\rho] \subsetneq \rho$. Neka je $\{x,y\} \in [X]^2$ takvo da $\langle x,y\rangle \notin \rho$, a da $\langle z,w\rangle := \langle f(x), f(y)\rangle \in \rho$. Uzmimo proizvoljne $A, B \in [X]^{n,|X|-n}$ takve da je $\{x,y\} \subseteq A$, $\{z,w\} \subseteq B$ i $f[A] = B$. Pošto su skupovi A i B konačni, tada je

$$\left|\rho\restriction_B\right| > \left|(f[\rho])\restriction_B\right| = \left|(f[\rho])\restriction_{f[A]}\right| = \left|f[\rho\restriction_A]\right| = \left|\rho\restriction_A\right|. \tag{6.5}$$

Takođe, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b) je $\rho \cup \Delta_A \preccurlyeq_c \rho \cup \Delta_B$. Dokazaćemo da je $\rho \cup \Delta_B \not\preccurlyeq_c \rho \cup \Delta_A$. Ako pretpostavimo suprotno, tada, na osnovu tvrđenja

6.3.1 (b) opet, postoji $g \in \mathrm{Cond}(\rho)$ takvo da je $g[B] \subseteq A$, pa kako su A i B konačni skupovi iste veličine, imamo da je $g[B] = A$. Tada je $g[\rho] \subseteq \rho$, pa važi

$$\Big|\rho\upharpoonright_A\Big| \geq \Big|(g[\rho])\upharpoonright_A\Big| = \Big|(g[\rho])\upharpoonright_{g[B]}\Big| = \Big|g[\rho\upharpoonright_B]\Big| = \Big|\rho\upharpoonright_B\Big|,$$

a to je kontradikcija sa (6.5). Dakle, imamo da je $\rho\cup\Delta_A \prec_c \rho\cup\Delta_B$, što znači da su $[\rho\cup\Delta_A]_{\sim_c}$ i $[\rho\cup\Delta_B]_{\sim_c}$ različiti uporedivi elementi u $\langle D_\rho^{n,|X|-n}, \leq_c\rangle$, pa taj poset nije antilanac.

(b) Sledi na osnovu (a) i tvrđenja 6.3.13. $\Box$

Primer 6.3.15 Relacija $\rho \in \mathrm{Irrefl}_\omega \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega)$, takva da je poset $\langle D_\rho^{1,\omega}, \leq_c\rangle$ antilanac.

Neka je $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}} := \langle \omega, \rho\rangle$ jedinstveni prebrojivi ultrahomogeni univerzalni graf (Radoov graf, ili Erdős-Rényiev graf [13, 74]). Tada struktura $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$ nije reverzibilna (videti tvrđenje 2.2.3 (g)). Kako je struktura $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$ irefleksivna, za proizvoljne $A, B \in [\omega]^{1,\omega}$ imamo da postoji $\varphi \in \mathrm{Iso}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$. Pošto je $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$ ultrahomogena struktura, zaključujemo da postoji $f \in \mathrm{Aut}(\rho)$, takvo da je $\varphi \subseteq f$. Tada je $f[A] = B$, pa, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b), sledi da je $A \preccurlyeq_\rho B$. Analogno se dokazuje da je i $B \preccurlyeq_\rho A$, dakle, $A \equiv_\rho B$. Sada, na osnovu tvrđenja 6.3.6 (b), imamo da je

$$|D_\rho^{1,\omega}| = \Big|[\omega]^{1,\omega} / \equiv_\rho\Big| = 1,$$

što znači da je poset $\langle D_\rho^{1,\omega}, \leq_c\rangle$ antilanac.

Ako u Radoovom grafu dodamo konačan broj ivica, opet ćemo dobiti Radoov graf (videti [3]). Odatle, s obzirom da je Radoov graf univerzalni ultrahomogeni prebrojivi graf, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b) lako zaključujemo kako su poseti $\langle D_\rho^{2,\omega}, \leq_c\rangle$ i $\langle D_\rho^{3,\omega}, \leq_c\rangle$ lanci tipa, redom, 2 i 4, dok poseti $\langle D_\rho^{n,\omega}, \leq_c\rangle$, za $n \geq 4$, nisu ni lanci ni antilanci.

Ako je κ konačan kardinal, neka je $\theta_\kappa := \mathrm{otp}(\kappa+1)$. A ako je κ beskonačan kardinal, neka je

$$\theta_\kappa := \mathrm{otp}\left(\Big\langle \{\mu \in \mathrm{Card} : \mu \leq \kappa\}, \leq \Big\rangle + \Big\langle \{\mu \in \mathrm{Card} : \mu < \kappa\}, \leq \Big\rangle^*\right).$$

Tada imamo da je, za $\alpha \in \mathrm{Ord}$,

$$\theta_{\omega_\alpha} = \mathrm{otp}(\omega+\alpha+1+(\omega+\alpha)^*) = \mathrm{otp}(\omega+\alpha+1+\alpha^*+\omega^*). \qquad (6.6)$$

Specijalno, $\theta_\omega = \mathrm{otp}(\omega+1+\omega^*)$.

Tvrđenje 6.3.16 *Neka je X neprazan skup i neka $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Tada poset $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$ sadrži lanac tipa $\theta_{|X|}$.*

Dokaz. Neka je $|X| = \kappa > 0$. Ako je $\kappa = n \in \mathbb{N}$, i ako je $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, neka je tada

$$\mathcal{L} := \{\emptyset, \{x_0\}, \{x_0, x_1\}, \ldots, \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}\}.$$

A ako je $\kappa \geq \omega$, izaberimo tada skup $\mathcal{L} \subseteq P(X)$ na sledeći način: za proizvoljno $Y \in [X]^{\kappa,\kappa}$ i za proizvoljne bijekcije $f : \kappa \to Y$ i $g : \kappa \to X \setminus Y$, neka je

$$\mathcal{L} := \{f[\alpha] : \alpha \in \kappa \cap \mathrm{Card}\} \cup \{Y\} \cup \{X \setminus g[\beta] : \beta \in \kappa \cap \mathrm{Card}\}.$$

Tada je jasno kako je $\langle \mathcal{L}, \subseteq \rangle$ lanac tipa $\theta_{|X|}$ u posetu $\langle P(X), \subseteq \rangle$, i kako je $|\mathcal{L} \cap [X]^{\mu,\nu}| = 1$, za sve $\mu, \nu \in \mathrm{Card}$, takve da je $\mu + \nu = |X|$. Definišimo preslikavanje $G : P(X) \to D_\rho$ na sledeći način: $G(A) := [\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}$, za $A \subseteq X$. Ako je $A \subseteq B$, tada je $\rho \cup \Delta_A \subseteq \rho \cup \Delta_B$, pa je, na osnovu tvrđenja 6.1.2 (b),

$$G(A) = [\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} \leq_c [\rho \cup \Delta_B]_{\sim_c} = G(B).$$

Dakle, imamo da $G \in \mathrm{Hom}(\langle P(X), \subseteq \rangle, \langle D_\rho, \leq_c \rangle)$. Ako je $G(A) = G(B)$, za neke $A, B \in \mathcal{L}$, $A \neq B$, tada je $\rho \cup \Delta_A \sim_c \rho \cup \Delta_B$, što je ekvivalentno sa $A \equiv_\rho B$, odakle, prema tvrđenju 6.3.6 (a), sledi da je $A \doteqdot B$, a to implicira da je $|\mathcal{L} \cap [X]^{|A|,|X \setminus A|}| \geq 2$, što je kontradikcija. Dakle, $G \restriction_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to D_\rho$ je injekcija, odakle sledi da $G \restriction_{\mathcal{L}} \in \mathrm{Mono}(\langle \mathcal{L}, \subseteq \rangle, \langle D_\rho, \leq_c \rangle)$. Kako je, na osnovu leme 1.3.1 (a),

$$\mathrm{Mono}\Big(\langle \mathcal{L}, \subseteq \rangle, \langle D_\rho, \leq_c \rangle\Big) = \mathrm{Emb}\Big(\langle \mathcal{L}, \subseteq \rangle, \langle D_\rho, \leq_c \rangle\Big),$$

imamo da se $\langle \mathcal{L}, \subseteq \rangle \hookrightarrow \langle D_\rho, \leq_c \rangle$, i pri tome je $\mathrm{otp}(\langle \mathcal{L}, \subseteq \rangle) = \theta_{|X|}$. □

Primer 6.3.17 Relacija $\rho \in \mathrm{Irrefl}_\omega$, takva da poset $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$ sadrži lanac tipa θ_{ω_1}.

Neka je prebrojiva binarna struktura $\mathbb{X} = \langle \omega, \rho \rangle$ disjunktna unija

$$\mathbb{X} := \bigcup_\omega \mathbb{G}_\omega \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_\omega \cup \bigcup_\omega \mathbf{1},$$

gde je $\mathbb{D}_\omega$ ω-linearni digraf (videti (2.3)), a $\mathbb{G}_\omega$ ω-linearni graf. Tada je struktura $\mathbb{X}$ irefleksivna i nereverezibilna. Neka su $A, B, C \in [\omega]^{\omega,\omega}$, takvi da je

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{G}_\omega, \quad \mathbb{B} \cong \mathbb{D}_\omega, \quad \mathbb{A} \cong \bigcup_\omega \mathbf{1}, \quad \text{i} \quad \langle \omega \setminus A, \rho\restriction_{\omega \setminus A} \rangle \cong \mathbb{X}.$$

Tada je jasno kako su skupovi A, B i C po parovima disjunktni, i, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b), imamo da je

$$\rho \cup \Delta_A \prec_c \rho \cup \Delta_B \prec_c \rho \cup \Delta_C. \tag{6.7}$$

Neka su $f : \omega \to A$ i $g : \omega \to C^c$ bijekcije. Definišimo skupove $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq P(\omega)$ na sledeći način:

$$\mathcal{A} := \{f[n] : n \in \omega\} \cup \{A, B, C\} \cup \{\omega \setminus g[m] : m \in \omega\},$$

$$\mathcal{B} := \{f[n] : n \in \omega\} \cup \{A\},$$

$$\mathcal{C} := \{C\} \cup \{\omega \setminus g[m] : m \in \omega\}.$$

Tada su $\langle \mathcal{B}, \subseteq \rangle$ i $\langle \mathcal{C}, \subseteq \rangle$ lanci tipa $\omega + 1$ i, redom, $1 + \omega^*$ u posetu $\langle P(X), \subseteq \rangle$, i važi da je $|\mathcal{A} \cap [\omega]^{\omega,\omega}| = 3$, kao i da je $|\mathcal{B} \cap [\omega]^{\mu,\nu}| = |\mathcal{C} \cap [\omega]^{\mu,\nu}| \leq 1$, za sve $\mu, \nu \in \mathrm{Card}$, takve da je $\mu + \nu = \omega$. Ako definišemo preslikavanje $G : \langle P(X), \subseteq \rangle \to \langle D_\rho, \leq_c \rangle$ sa $G(A) := [\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}$, tada, na isti način kao u dokazu tvrđenja 6.3.16, zaključujemo kako su $G \upharpoonright_{\mathcal{B}}$ i $G \upharpoonright_{\mathcal{C}}$ utapanja. Tada imamo da je

$$G[\mathcal{A}] = G[\mathcal{B} \cup \{A, B, C\} \cup \mathcal{C}] = G[\mathcal{B}] \cup G[\{A, B, C\}] \cup G[\mathcal{C}] =$$

$$= G[\mathcal{B}] \cup \Big\{ [\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}, [\rho \cup \Delta_B]_{\sim_c}, [\rho \cup \Delta_C]_{\sim_c} \Big\} \cup G[\mathcal{C}].$$

Sada, imamo da je $[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}$ maksimum u lancu $G[\mathcal{B}]$, i minimum u lancu $G[\{A, B, C\}]$, i isto tako, imamo da je $[\rho \cup \Delta_C]_{\sim_c}$ minimum u lancu $G[\mathcal{C}]$, i maksimum u lancu $G[\{A, B, C\}]$. Odatle, s obzirom da je $\mathrm{otp}(\mathcal{B}) = \omega + 1$ i $\mathrm{otp}(\mathcal{C}) = 1 + \omega^*$, na osnovu (6.7) zaključujemo kako je $G[\mathcal{A}]$ lanac u posetu $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$, tipa $\theta_{\omega_1} = \mathrm{otp}(\omega + 3 + \omega^*)$.

Uvedimo, za $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$ i za $A, B \subseteq X$, sledeću oznaku:

$$A \prec_\rho B \iff A \preccurlyeq_\rho B \wedge A \not\equiv_\rho B.$$

Primer 6.3.18 Relacija $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$, takva da poset $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$ sadrži lanac tipa $\zeta := \mathrm{otp}(\langle \mathbb{Z}, < \rangle)$.

Neka je $\mathbb{X} := \langle \mathbb{Z}, \rho \rangle$ prebrojiva binarna struktura, pri čemu je $\rho \in \mathrm{Irrefl}_\mathbb{Z}$ dato sa

$$\rho := \{\langle n, n+1 \rangle : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\langle n+1, n \rangle : n \in \omega\}.$$

Ako, za dato $k \in \mathbb{Z}$, definišemo funkciju $f_k \in \mathrm{Sym}(\mathbb{Z})$ na sledeći način:

$$f_k(n) := n + k, \quad \text{za} \ \ n \in \mathbb{Z},$$

tada imamo da je $\mathrm{Aut}(\rho) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}\}$, dok je $\mathrm{Cond}(\rho) = \{f_k : k \in \omega\}$. Dakle, relacija ρ je rigidna, ali nije reverzibilna. Na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b) i tvrđenja 6.3.2 (d), lako se vidi da važi

$$A \equiv_\rho B \iff A = B, \quad \text{za sve } A, B \in [\mathbb{Z}]^{<\omega,\omega} \cup [\mathbb{Z}]^{\omega,<\omega},$$

pa je, na osnovu tvrđenja 6.3.6 (b), $|D_\rho^{n,\omega}| = |[\mathbb{Z}]^{n,\omega}| = \omega$, i takođe je $|D_\rho^{\omega,n}| = |[\mathbb{Z}]^{\omega,n}| = \omega$, za sve $n \in \omega$. Tada, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b), imamo da važi

$$\cdots \prec_\rho \{-2\} \prec_\rho \{-1\} \prec_\rho \{0\} \prec_\rho \{1\} \prec_\rho \{2\} \prec_\rho \cdots,$$

što znači kako je $\{[\rho \cup \{\langle k, k\rangle\}]_{\sim_c} : k \in \mathbb{Z}\}$ lanac tipa ζ u posetu $\langle D_\rho^{1,\omega}, \leq_c\rangle$. Sada se lako se vidi kako i u posetu $\langle D_\rho^{n,\omega}, \leq_c\rangle$ takođe postoji lanac tipa ζ, za $n \geq 2$, pa, na osnovu tvrđenja 6.3.13, imamo da i u posetu $\langle D_\rho^{\omega,n}, \leq_c\rangle$ postoji lanac tipa ζ, za svako $n \in \mathbb{N}$. Na kraju, ako definišemo skupove $A_k := (-\infty, k]_{\mathbb{Z}}$, za $k \in \mathbb{Z}$, tada važi

$$\cdots A_{-2} \prec_\rho A_{-1} \prec_\rho A_1 \prec_\rho A_2 \prec_\rho \cdots,$$

što znači da i u posetu $\langle D_\rho^{\omega,\omega}, \leq_c\rangle$ takođe postoji lanac tipa ζ.

Poset $\langle D_\rho, \leq_c\rangle$ može biti maksimalan (u smislu tvrđenja 6.3.5), kao i minimalan (u smislu tvrđenja 6.3.16).

Teorema 6.3.19 *Neka je X neprazan skup i neka $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Tada imamo:*
(a) Ako je $G : P(X) \to D_\rho$ dato sa $G(A) := [\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}$, tada važi:

$$G \text{ je injekcija} \iff \text{relacija } \rho \text{ je reverzibilna i rigidna.}$$

U tom slučaju je $\langle P(X), \subseteq\rangle \cong_G \langle D_\rho, \leq_c\rangle$
(b) Ako je relacija ρ jako reverzibilna, ili je ρ netranzitivni troelementni turnir, tada je $\langle D_\rho, \leq_c\rangle \cong \theta_{|X|}$.

Dokaz.
(a) Imamo da je G injekcija akko važi $A = B \Leftrightarrow [\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} = [\rho \cup \Delta_B]_{\sim_c}$, odnosno $A = B \Leftrightarrow A \equiv_\rho B$, a to je, na osnovu tvrđenja 6.3.2 (b), ispunjeno akko $\rho \in \mathrm{Rev}_{L_b}(X) \cap \mathrm{Rig}_{L_b}(X)$.

U tom slučaju, imamo da je $G : P(X) \to D_\rho$ bijekcija, i na osnovu tvrđenja 6.3.2 (b), sledi da je $\preccurlyeq_\rho = \subseteq$. Sada, za $A, B \subseteq X$, imamo da je $A \subseteq B$ akko je $A \preccurlyeq_\rho B$, a to važi akko je $\rho \cup \Delta_A \preccurlyeq_c \rho \cup \Delta_B$, ili ekvivalentno

$$G(A) = [\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} \leq_c [\rho \cup \Delta_B]_{\sim_c} = G(B),$$

što znači da je $G : \langle P(X), \subseteq\rangle \to \langle D_\rho, \leq_c\rangle$ izomorfizam.

(b) Ako je relacija ρ jako reverzibilna, ili je ρ netranzitivni troelementni turnir, na osnovu teoreme 6.3.8 imamo da je $\equiv_\rho\, = \,\doteqdot$. Tada, na osnovu tvrđenja 6.3.5, imamo da je

$$\langle D_\rho, \leq_c\rangle \cong \langle P(X)\,/\equiv_\rho, \leq_\rho\rangle = \langle P(X)\,/\doteqdot, \leq_\rho\rangle = \langle\{[X]^{\mu,\nu} : \mu+\nu = |X|\}, \leq_\rho\rangle.$$

Neka je $h : P(X) \to P(X)\,/\doteqdot$ prirodno količničko preslikavanje. Ako je $A \subseteq B$, za neke $A, B \subseteq X$, tada je, na osnovu tvrđenja 6.3.2 (a),

$$[A]_{\doteqdot} = [A]_{\equiv_\rho} \leq_\rho [B]_{\equiv_\rho} = [B]_{\doteqdot},$$

što znači da $h \in \mathrm{Hom}(\langle P(X), \subseteq\rangle, \langle P(X)\,/\doteqdot, \leq_\rho\rangle)$. Neka je dalje $\mathcal{L}$ lanac tipa $\theta_{|X|}$ u posetu $\langle P(X), \subseteq\rangle$, takav da je $|\mathcal{L} \cap [X]^{\mu,\nu}| = 1$, za sve $\mu, \nu \in \mathrm{Card}$, takve da je $\mu + \nu = |X|$ (videti dokaz tvrđenja 6.3.16). Ako je $h(A) = h(B)$ za neke $A, B \in \mathcal{L}$, $A \neq B$, tada je $A \doteqdot B$, a to implicira da je $|\mathcal{L} \cap [X]^{|A|,|X\setminus A|}| \geq 2$, što je kontradikcija. Dakle, $h \restriction_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to P(X)\,/\doteqdot$ je injekcija, što znači da $h \restriction_{\mathcal{L}} \in \mathrm{Mono}(\langle \mathcal{L}, \subseteq\rangle, \langle P(X)\,/\doteqdot, \leq_\rho\rangle)$. Kako je, na osnovu leme 1.3.1 (a),

$$\mathrm{Mono}\Big(\langle \mathcal{L}, \subseteq\rangle, \langle P(X)\,/\doteqdot, \leq_\rho\rangle\Big) = \mathrm{Emb}\Big(\langle \mathcal{L}, \subseteq\rangle, \langle P(X)\,/\doteqdot, \leq_\rho\rangle\Big),$$

imamo da je $h \restriction_{\mathcal{L}} : \langle \mathcal{L}, \subseteq\rangle \hookrightarrow \langle P(X)\,/\doteqdot, \leq_\rho\rangle$ utapanje, i, s obzirom da je h surjekcija, to je izomorfizam, što kompletira dokaz. □

Primer 6.3.20 Primer 6.3.17 je poučan, ali, ako iskoristimo teoremu 6.3.19 (a), možemo zaključiti puno više. Neka je $\rho \in \mathrm{Irrefl}_\omega$ endo-rigidna binarna relacija na skupu ω (tj. $\mathrm{End}(\rho) = \{\mathrm{id}_\omega\}$, videti [88]). Jasno je da je tada i $\mathrm{Cond}(\rho) = \{\mathrm{id}_\omega\}$, pa, na osnovu (6.2), imamo da je relacija ρ irefleksivna, reverzibilna i rigidna. Sada, na osnovu teoreme 6.3.19 (a) imamo da je $\langle D_\rho, \leq_c\rangle \cong \langle P(\omega), \subseteq\rangle$.

Pokazaćemo da poset $\langle D_\rho, \leq_c\rangle$ sadrži lanac tipa θ_{ω_α}, za svako $\alpha < \omega_1$, tako što ćemo konstruisati lanac tog tipa u posetu $\langle P(\omega), \subseteq\rangle$. Neka je $\alpha < \omega_1$ dati prebrojiv ordinal. Neka je dalje $\omega = A \cup B$ particija skupa ω, pri čemu $A, B \in [\omega]^{\omega,\omega}$, i neka su $f : \omega + \alpha \to A$ i $g : \omega + \alpha \to B$ bijekcije. Tada imamo da je

$$\mathcal{L} := \{f[\beta] : \beta < \omega + \alpha\} \cup \{A\} \cup \{\omega \setminus g[\gamma] : \gamma < \omega + \alpha\}$$

lanac tipa $\theta_{\omega_\alpha} = \mathrm{otp}(\omega + \alpha + 1 + (\omega + \alpha)^*)$ u posetu $\langle P(\omega), \subseteq\rangle$.

A da li u posetu $\langle D_\rho, \leq_c\rangle$ postoji lanac tipa θ_{ω_β}, za neko $\beta \geq \omega_1$? Odgovor na ovo pitanje je negativan, zato što bi u suprotnom postojao neprebrojiv dobro uređen lanac u c.c.c. Booleovoj algebri (mreži) $\langle P(\omega), \subseteq\rangle$, a to je kontradikcija s teoremom 1.4.5.

U vezi s teoremom 6.3.19 (a), postavlja se pitanje da li postoji $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$, takvo da je $\langle D_\rho, \leq_c \rangle \cong \langle P(X), \subseteq \rangle$, a da pri tome relacija ρ nije reverzibilna, ili da ρ nije rigidna. Ako takva struktura $\mathbb{X}$ postoji, tada X mora biti beskonačan skup.

Tvrđenje 6.3.21 *Ako je skup X konačan i ako $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$, tada imamo da je $\langle D_\rho, \leq_c \rangle \cong \langle P(X), \subseteq \rangle$ akko je relacija ρ rigidna*[5].

Dokaz.

($\Leftarrow$) Pošto su sve konačne relacije reverzibilne, ovaj smer sledi direktno na osnovu teoreme 6.3.19 (a).

($\Rightarrow$) Neka je $|X| = n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da relacija ρ nije rigidna. Tada je, na osnovu tvrđenja 6.3.2 (b), $\Delta_{P(X)} \subsetneq \equiv_\rho$, pa postoji $B \subseteq X$ takvo da je $|[B]_{\equiv_\rho}| \geq 2$. Kako je

$$2^n = |P(X)| = \left| \bigcup_{[A]_{\equiv_\rho} \in P(X)/\equiv_\rho} [A]_{\equiv_\rho} \right| = \sum_{[A]_{\equiv_\rho} \in P(X)/\equiv_\rho} |[A]_{\equiv_\rho}|,$$

na osnovu toga, s obzirom da su sve klase neprazni skupovi, i da postoji jedna koja nije singlton, zaključujemo kako je $|P(X) / \equiv_\rho| < 2^n$. Na osnovu tvrđenja 6.3.5 imamo da je

$$|D_\rho| = |P(X) / \equiv_\rho| < 2^n,$$

odakle sledi da je $\langle D_\rho, \leq_c \rangle \ncong \langle P(X), \subseteq \rangle$. $\square$

U vezi s teoremom 6.3.19 (b), postavljaju se sledeća otvorena pitanja:

1. Da li postoji $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$, takvo da je $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$ lanac koji nije tipa $\theta_{|X|}$? U nastavku ćemo pokazati da, ako takva struktura $\mathbb{X}$ postoji, da tada skup X mora biti beskonačan, i da relacija ρ mora biti nereverzibilna, kao i da mora važiti $\left| D_\rho^{1,|X|} \right| = 1$ (videti teoremu 6.3.22 i teoremu 6.3.23). U primeru 6.3.15 pokazano je kako relacije koje zadovoljavaju navedene uslove postoje.

2. Da li postoji $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$, takvo da je $\langle D_\rho, \leq_c \rangle \cong \theta_{|X|}$, pri čemu je $\equiv_\rho \neq \div$? Ili ekvivalentno, da li postoji relacija $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$ koja nije jako reverzibilna, i koja nije netranzitivni troelementni turnir, za koju je $\langle D_\rho, \leq_c \rangle \cong \theta_{|X|}$? U nastavku ćemo pokazati, ako takva struktura $\mathbb{X}$ postoji, da tada relacija ρ mora biti nereverzibilna, i da skup X mora biti prilično velik. Naime, tada mora biti $|X| \geq \omega_\omega$ (pogledati teoremu 6.3.25).

[5] Primetimo kako su sve konačne relacijske strukture reverzibilne.

Teorema 6.3.22 *Neka je X neprazan skup i neka je $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$ reverzibilna relacija. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) Poset $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$ je lanac;

(b) $\langle D_\rho, \leq_c \rangle \cong \theta_{|X|}$;

(c) Relacija ρ je jako reverzibilna, ili je ρ netranzitivni troelementni turnir.

Dokaz. (c)⇒(b) sledi na osnovu teoreme 6.3.19 (b), a (b)⇒(a) je direktno.

(a)⇒(c) Ako je $|X| = 1$, tada je $\rho = \emptyset \in \mathrm{sRev}_{L_b}(X)$. A ako je $|X| \geq 2$, tada, pošto je ρ reverzibilna, na osnovu tvrđenja 6.3.14 (a), imamo da je poset $\langle D_\rho^{n,|X|-n}, \leq_c \rangle$ antilanac, koji je sadržan u lancu $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$. Dakle, to je singlton, pa, na osnovu tvrđenja 6.3.6 (b), sledi da je

$$\left| [X]^{n,|X|-n} / \equiv_\rho \right| = \left| D_\rho^{n,|X|-n} \right| = 1,$$

za $n < \min\{\omega, |X| + 1\}$. To znači da, za proizvoljne $A, B \in [X]^{n,|X|-n}$, imamo da je $A \equiv_\rho B$, odakle, na osnovu tvrđenja 6.3.2 (c), sledi da je $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$. Dakle, struktura $\langle X, \rho \rangle$ je monomorfna, pa, na osnovu tvrđenja 2.2.11 (c) i primera 8.1.4, zaključujemo kako je tada relacija ρ jako reverzibilna, ili je ρ netranzitivni troelementni turnir, ili je ρ linearno uređenje.

Ako pretpostavimo da je ρ linearno uređenje, pri čemu je $|X| \geq 2$, tada je moguće:

1. $\omega^* \not\hookrightarrow \langle X, \rho \rangle$. To znači da je ρ dobro uređenje, tj. rigidna i reverzibilna relacija, pa je, na osnovu tvrđenja 6.3.19 (a), $\langle D_\rho, \leq_c \rangle \cong \langle P(X), \subseteq \rangle$, a to je kontradikcija.

2. $\omega \not\hookrightarrow \langle X, \rho \rangle$. Tada opet, slično kao iznad, dobijamo kontradikciju.

3. $\omega \hookrightarrow \langle X, \rho \rangle$ i $\omega^* \hookrightarrow \langle X, \rho \rangle$. Tada postoje disjunktni lanci $A, B \subseteq X$, takvi da je $\mathbb{A} \cong \omega$ i $\mathbb{B} \cong \omega^*$. Sada se, na isti način kao u dokazu stava 6.3.10, dokazuje da je $\rho \cup \Delta_A \not\preccurlyeq_c \rho \cup \Delta_B$, i da je $\rho \cup \Delta_B \not\preccurlyeq_c \rho \cup \Delta_A$, što znači da su $[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}$ i $[\rho \cup \Delta_B]_{\sim_c}$ dva različita neuporediva elementa u lancu $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$, a to je kontradikcija.

Dakle, relacija ρ je jako reverzibilna, ili je ρ netranzitivni troelementni turnir. □

Uvedimo, za $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$ i za $A, B \subseteq X$, sledeću oznaku:

$$A \parallel_\rho B \iff A \not\preccurlyeq_\rho B \wedge B \not\preccurlyeq_\rho A.$$

Teorema 6.3.23 *Neka je X neprazan skup i neka $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Ako je poset $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$ lanac, tada je $\left| D_\rho^{1,|X|-1} \right| = \left| D_\rho^{|X|-1,1} \right| = 1$.*

Dokaz. Ako je X konačan skup, tada je ρ reverzibilna relacija, pa, ako je $\langle D_\rho, \leq_c\rangle$ lanac, na osnovu teoreme 6.3.22 imamo da je relacija ρ jako reverzibilna, ili je ρ netranzitivni troelementni turnir. Odatle je, prema teoremi 6.3.8,

$$\left|D_\rho^{1,|X|-1}\right| = \left|D_\rho^{|X|-1,1}\right| = 1.$$

Pretpostavimo stoga da je X beskonačan skup, i pretpostavimo suprotno[6], da je $\langle D_\rho, \leq_c\rangle$ lanac i da je $\left|D_\rho^{1,|X|}\right| > 1$. Razmotrićemo sledeće slučajeve:

1. $\left|D_\rho^{1,|X|}\right| = 2$. Tada je, na osnovu tvrđenja 6.3.6 (b),

$$[X]^{1,|X|}/\equiv_\rho = \Big\{[\{x\}]_{\equiv_\rho}, [\{y\}]_{\equiv_\rho}\Big\},$$

gde je $|[\{x\}]_{\equiv_\rho}| = \kappa$, $|[\{y\}]_{\equiv_\rho}| = \lambda$ i $\kappa + \lambda = \left|[X]^{1,|X|}\right| = |X|$, i neka je pri tome, bez ograničenja opštosti,

$$\{x\} \prec_\rho \{y\}. \tag{6.8}$$

Moguće je:

• $\kappa \leq \lambda = |X|$. Neka je tada $A := \bigcup[\{x\}]_{\equiv_\rho}$ i $B := \bigcup \mathcal{B}$, gde je $\mathcal{B} \in \Big[[\{y\}]_{\equiv_\rho}\Big]^{\kappa,\lambda}$ proizvoljno. Tada je, na osnovu (6.8) i tvrđenja 6.3.1 (b), jasno da je $B \not\preccurlyeq_\rho A$. Ako bismo pretpostavili da je $A \preccurlyeq_\rho B$, tada bismo, prema tvrđenju 6.3.1 (b) opet, imali da postoji $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$ takvo da je $f[A] \subseteq B$, odakle bi sledilo da je

$$f^{-1}[A] \subseteq A^c = \bigcup[\{y\}]_{\equiv_\rho},$$

a to je, zbog (6.8), nemoguće. Dakle, imamo da je $A \parallel_\rho B$, što znači da su $[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}$ i $[\rho \cup \Delta_B]_{\sim_c}$ različiti neuporedivi elementi u lancu $\langle D_\rho^{\kappa,|X|}, \leq_c\rangle$, a to je kontradikcija.

• $|X| = \kappa > \lambda$. Neka je tada $B := \bigcup[\{y\}]_{\equiv_\rho}$ i $A := \bigcup \mathcal{A}$, gde je $\mathcal{A} \in \Big[[\{x\}]_{\equiv_\rho}\Big]^{\lambda}$ proizvoljno. Tada je, zbog (6.8), $A^c \not\preccurlyeq_\rho B^c$. Ako bismo pretpostavili da je $B^c \preccurlyeq_\rho A^c$, tada bi postojalo $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$, takvo da je $f[B^c] \subseteq A^c$, odakle bi sledilo da je $f^{-1}[A] \subseteq B$, a to je, zbog (6.8), nemoguće. Dakle, imamo da je $A^c \parallel_\rho B^c$, što znači da su $[\rho \cup \Delta_{A^c}]_{\sim_c}$ i $[\rho \cup \Delta_{B^c}]_{\sim_c}$ različiti neuporedivi elementi u lancu $\langle D_\rho^{|X|,\lambda}, \leq_c\rangle$, a to je kontradikcija.

[6] Na osnovu tvrđenja 6.3.13 je $|D_\rho^{1,|X|}| = |D_\rho^{|X|,1}|$.

2. $\left|D_\rho^{1,|X|}\right| = 3$. Tada je, na osnovu tvrđenja 6.3.6 (b),

$$[X]^{1,|X|}/\equiv_\rho = \Big\{[\{x\}]_{\equiv_\rho}, [\{y\}]_{\equiv_\rho}, [\{z\}]_{\equiv_\rho}\Big\},$$

gde je $|[\{x\}]_{\equiv_\rho}| = \kappa$, $|[\{y\}]_{\equiv_\rho}| = \lambda$, $|[\{z\}]_{\equiv_\rho}| = \mu$ i $\kappa + \lambda + \mu = \left|[X]^{1,|X|}\right| = |X|$, i neka je pri tome, bez ograničenja opštosti,

$$\{x\} \prec_\rho \{y\} \prec_\rho \{z\}. \tag{6.9}$$

Moguće je:

• $|[\{y\}]_{\equiv_\rho}| \geq 2$. Uzmimo tada različite singltone $\{y_1\}, \{y_2\} \in [\{y\}]_{\equiv_\rho}$. Sada se, na osnovu (6.9) i tvrđenja 6.3.1 (b), lako dokazuje da je $\{x, z\} \parallel_\rho \{y_1, y_2\}$, što znači da su $[\rho \cup \Delta_{\{x,z\}}]_{\sim_c}$ i $[\rho \cup \Delta_{\{y_1,y_2\}}]_{\sim_c}$ različiti neuporedivi elementi u lancu $\langle D_\rho^{2,|X|}, \leq_c\rangle$, a to je kontradikcija.

• $[\{y\}]_{\equiv_\rho} = \{\{y\}\}$. Tada je $\kappa + \mu = |X|$. Sada se, na sličan način kao u prvom slučaju, uz razmatranje slučajeva $\kappa \leq \mu = |X|$ i $|X| = \kappa > \mu$, dobija kontradikcija (naime, singlton $\{y\} = \bigcup[\{y\}]_{\equiv_\rho}$ ne može ništa da pokvari).

3. $\left|D_\rho^{1,|X|}\right| \geq 4$. Tada postoje $x, y, z, w \in X$ takvi da je

$$\{x\} \prec_\rho \{y\} \prec_\rho \{z\} \prec_\rho \{w\}. \tag{6.10}$$

Sada se, pomoću (6.10) i tvrđenja 6.3.1 (b), lako dokazuje da je $\{x, w\} \parallel_\rho \{y, z\}$, što znači da su $[\rho \cup \Delta_{\{x,w\}}]_{\sim_c}$ i $[\rho \cup \Delta_{\{y,z\}}]_{\sim_c}$ različiti neuporedivi elementi u lancu $\langle D_\rho^{2,|X|}, \leq_c\rangle$, a to je kontradikcija.

Kako smo u svim slučajevima dobili kontradikciju, zaključujemo da je $\left|D_\rho^{1,|X|}\right| = 1$, odakle, na osnovu tvrđenja 6.3.13, sledi da je i $\left|D_\rho^{|X|,1}\right| = 1$, i dokaz je završen. $\square$

Lema 6.3.24 *Neka je skup X beskonačan i neka $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Ako je $\left|D_\rho^{\omega,|X|}\right| = \left|D_\rho^{|X|,\omega}\right| = 1$, tada je relacija ρ jako reverzibilna, ili je ρ netranzitivan turnir.*

Dokaz. Neka $A, B \in [X]^{\omega,|X|}$. Tada $A^c, B^c \in [X]^{|X|,\omega}$. Na osnovu tvrđenja 6.3.6 (b) imamo da je

$$\left|[X]^{\omega,|X|}/\equiv_\rho\right| = \left|D_\rho^{\omega,|X|}\right| = 1 \quad \text{i} \quad \left|[X]^{|X|,\omega}/\equiv_\rho\right| = \left|D_\rho^{|X|,\omega}\right| = 1.$$

To znači da je $A \equiv_\rho B$, kao i da je $A^c \equiv_\rho B^c$. Sada, na osnovu tvrđenja 6.3.1 (b) zaključujemo da postoje kondenzacije $f, g \in \mathrm{Cond}(\rho)$, takve da je

$f[B] \subseteq A$ i $g[A^c] \subseteq B^c$, odnosno, s obzirom da je g bijekcija, $g[A] \supseteq B$. Tada, na osnovu tvrđenja 1.1.4 (b) imamo da $g^{-1} \in \mathrm{ACond}(\rho)$, i pri tome je $g^{-1}[B] \subseteq A$. Dakle, zaključujemo kako za sve $A, B \in [X]^{\omega,|X|}$ imamo da

$$\exists f \in \mathrm{Cond}(\rho) \;\; f[B] \subseteq A, \tag{6.11}$$

kao i da

$$\exists h \in \mathrm{ACond}(\rho) \;\; h[B] \subseteq A. \tag{6.12}$$

Uzmimo $Y \in [X]^{\omega,|X|}$, i neka je $H_0 = \{\{x, y\} \in [Y]^2 : \neg x\rho y \wedge \neg y\rho x\}$, $H_1 = \{\{x, y\} \in [Y]^2 : x\rho y \wedge y\rho x\}$ i $H_2 = \{\{x, y\} \in [Y]^2 : x\rho y \veebar y\rho x\}$. Na osnovu Ramseyeve teoreme (teorema 2.2.9) postoji $A \in [Y]^\omega \subseteq [X]^{\omega,|X|}$ takvo da je $[A]^2 \subseteq H_i$, za neko $i \in \{0, 1, 2\}$:

1. Ako je $i = 0$, tada je struktura $\mathbb{A}$ prazna relacija. Za proizvoljno $B \in [X]^{\omega,|X|}$, na osnovu (6.11) zaključujemo kako je $\mathbb{B}$ takođe prazna relacija. Dakle, struktura $\langle X, \rho\rangle$ je prazna relacija.

2. Ako je $i = 1$, tada je struktura $\mathbb{A}$ kompletan graf. Za proizvoljno $B \in [X]^{\omega,|X|}$, na osnovu (6.12) zaključujemo kako je $\mathbb{B}$ takođe kompletan graf. Dakle, struktura $\langle X, \rho\rangle$ je kompletan graf.

3. Ako je $i = 2$, tada je struktura $\mathbb{A}$ turnir. Za proizvoljno $B \in [X]^{\omega,|X|}$, na osnovu (6.11) i (6.12) zaključujemo kako je $\mathbb{B}$ takođe turnir. Dakle, struktura $\langle X, \rho\rangle$ je turnir. U tom slučaju, na osnovu stava 6.3.10 imamo da relacija ρ nije tranzitivna. □

Teorema 6.3.25 *Neka je $|X| < \omega_\omega$ i neka $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Tada imamo da je $\langle D_\rho, \leq_c\rangle \cong \theta_{|X|}$ akko je relacija ρ jako reverzibilna, ili je ρ netranzitivni troelementni turnir.*

Dokaz. Ako je X konačan skup, tada, s obzirom da su konačne relacije reverzibilne, tvrđenje sledi na osnovu teoreme 6.3.22. Pretpostavimo dalje da je skup X beskonačan, i da je $|X| < \omega_\omega$. Tada imamo da je $|X| = \omega_k$, za neko $k \in \omega$. Sada, na osnovu (6.6) imamo da je

$$\theta_{|X|} = \mathrm{otp}(\omega + k + 1 + k + \omega^*) = \mathrm{otp}(\omega + l + \omega^*), \;\text{ gde je } l = 2k + 1 \in \mathbb{N}.$$

($\Leftarrow$) Ovaj smer sledi na osnovu tvrđenja 6.3.19 (b).

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je $\langle D_\rho, \leq_c\rangle \cong \theta_{|X|}$. Tada imamo da je

$$\langle D_\rho, \leq_c\rangle \cong_H \mathbb{P} + \mathbb{Q} + \mathbb{R}, \tag{6.13}$$

gde je $\mathbb{P} \cong \omega$, $\mathbb{R} \cong \omega^*$, a $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{l-1}\}$, pri čemu je $q_0 < q_1 < q_2 < \cdots < q_{l-1}$.

Stav 6.3.26 *Ako je* $|A| \geq \omega$ *i* $|A^c| \geq \omega$*, tada* $H([\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}) \in Q$*.*

Dokaz. Neka je $|A| = \kappa \geq \omega$ i $|A^c| = \lambda \geq \omega$, pri čemu je $\kappa + \lambda = |X|$. S obzirom da je

$$D_\rho = H^{-1}[P] \cup H^{-1}[Q] \cup H^{-1}[R]$$

particija lanca $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$ na tri konveksna dela, imamo sledeće mogućnosti:

1. $[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} \in H^{-1}[P] \cong \omega$. Tada, s obzirom da je $A \neq \emptyset$, imamo da je $([\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c})\downarrow \cong \langle n, \leq \rangle$, za neko $n \in \mathbb{N}$. Ako je $f : \kappa \to A$ bijekcija, jasno je kako je tada $\mathcal{L}_1 := \{f[\alpha] : \alpha \in \kappa \cap \mathrm{Card}\}$ dobro uređen lanac u $\langle P(X), \subseteq \rangle$, takav da je $\mathrm{otp}(\mathcal{L}_1) \geq \omega$, i takav da je $|\mathcal{L}_1 \cap [X]^{\mu,\nu}| \leq 1$, za sve $\mu, \nu \in \mathrm{Card}$, takve da je $\mu + \nu = |X|$. Ako definišemo preslikavanje $G : P(X) \to D_\rho$ na sledeći način: $G(A) := [\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}$, za $A \subseteq X$, tada se, na isti način kao u dokazu tvrđenja 6.3.16, dokazuje da

$$G \restriction_{\mathcal{L}_1} \in \mathrm{Emb}(\langle \mathcal{L}_1, \subseteq \rangle, \langle D_\rho, \leq_c \rangle).$$

Kako je A gornje ograničenje za lanac $\mathcal{L}_1$ u posetu $\langle P(X), \subseteq \rangle$, i kako $G \in \mathrm{Hom}(\langle P(X), \subseteq \rangle, \langle D_\rho, \leq_c \rangle)$, i $f[\alpha] \not\sim A$ za $\alpha \in \kappa \cap \mathrm{Card}$, zaključujemo da se

$$\mathcal{L}_1 \hookrightarrow ([\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c})\downarrow \cong \langle n, \leq \rangle,$$

a to je kontradikcija s činjenicom da je $\mathrm{otp}(\mathcal{L}_1) \geq \omega$.

2. $[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} \in H^{-1}[R] \cong \omega^*$. Tada, s obzirom da je $A \neq X$, imamo da je $([\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c})\uparrow \cong \langle n, \leq \rangle^*$, za neko $n \in \mathbb{N}$. Ako je $g : \lambda \to A^c$ bijekcija, jasno je kako je tada $\mathcal{L}_2 := \{X \setminus g[\beta] : \beta \in \lambda \cap \mathrm{Card}\}$ inverzno dobro uređen lanac u $\langle P(X), \subseteq \rangle$, takav da je $\mathrm{otp}(\mathcal{L}_2^*) \geq \omega$, i takav da je $|\mathcal{L}_2 \cap [X]^{\mu,\nu}| \leq 1$, za sve $\mu, \nu \in \mathrm{Card}$, takve da je $\mu + \nu = |X|$. Za preslikavanje $G : P(X) \to D_\rho$, definisano u 1. slučaju, takođe imamo da

$$G \restriction_{\mathcal{L}_2} \in \mathrm{Emb}(\langle \mathcal{L}_2, \subseteq \rangle, \langle D_\rho, \leq_c \rangle).$$

Kako je A^c donje ograničenje za lanac $\mathcal{L}_2$ u posetu $\langle P(X), \subseteq \rangle$, i kako $G \in \mathrm{Hom}(\langle P(X), \subseteq \rangle, \langle D_\rho, \leq_c \rangle)$, i $X \setminus f[\beta] \not\sim A^c$ za $\beta \in \lambda \cap \mathrm{Card}$, zaključujemo da se

$$\mathcal{L}_2 \hookrightarrow ([\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c})\uparrow \cong \langle n, \leq \rangle^* \cong \langle n, \leq \rangle,$$

a to je kontradikcija s činjenicom da je $\mathrm{otp}(\mathcal{L}_2^*) \geq \omega$.

3. $[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} \in H^{-1}[Q]$. Tada $H([\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}) \in Q$. □

Na osnovu stava 6.3.26 imamo da je $H[\bigcup_{\mu,\nu \geq \omega \wedge \mu+\nu=|X|} D_\rho^{\mu,\nu}] \subseteq Q$, odakle, s obzirom da su svi skupovi $D_\rho^{\mu,\nu}$ neprazni, sledi da je

$$l = |Q| \geq \Big| \bigcup_{\mu,\nu \geq \omega \wedge \mu+\nu=|X|} D_\rho^{\mu,\nu} \Big| = \sum_{\mu,\nu \geq \omega \wedge \mu+\nu=|X|} |D_\rho^{\mu,\nu}| =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} |D_\rho^{\omega_i,\omega_k}| + |D_\rho^{\omega_k,\omega_k}| + \sum_{i=0}^{k-1} |D_\rho^{\omega_k,\omega_i}| \geq 2k+1 = l,$$

a to implicira da je

$$|D_\rho^{\mu,\nu}| = 1, \text{ za sve } \mu,\nu \geq \omega, \text{ takve da je } \mu+\nu = |X|. \tag{6.14}$$

Specijalno, imamo da je $\left|D_\rho^{\omega,|X|}\right| = \left|D_\rho^{|X|,\omega}\right| = 1$, odakle, na osnovu leme 6.3.24, sledi da je relacija ρ jako reverzibilna, ili je ρ netranzitivan turnir. Na osnovu primera 9.3.9 zaključujemo kako je, u svakom slučaju, relacija ρ reverzibilna. Sada, na osnovu teoreme 6.3.22 imamo da je relacija ρ jako reverzibilna. □

Skupovi $\mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}}$

Neka je X neprazan skup i neka je $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Irrefl}_X$. Definišimo tada skup $\mathcal{D}_\mathcal{R} := \bigcup_{\sigma\in\mathcal{R}} D_\sigma$. Specijalno, ako je $\mathcal{R} = [\rho]_{\sim_c}$ za neko $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$, imamo da je

$$\mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}} = \bigcup\nolimits_{\sigma\in[\rho]_{\sim_c}} D_\sigma.$$

Tvrđenje 6.3.27 *Neka je X neprazan skup, i neka $\rho,\sigma \in \mathrm{Irrefl}_X$. Tada imamo:*

(a) $D_\rho \cap D_\sigma \neq \emptyset \Leftrightarrow \rho \sim_c \sigma$;

(b) $\rho \cong \sigma \Rightarrow D_\rho = D_\sigma$. Ako $\rho \in \mathrm{wRev}_{L_b}(X)$, tada važi i obrat;

(c) $\{[\rho]_{\sim_c}, [\rho\cup\Delta_X]_{\sim_c}\} \subseteq \bigcap_{\sigma\in[\rho]_{\sim_c}} D_\sigma$.

Dokaz.

(a) ($\Leftarrow$) Ako je $\rho \sim_c \sigma$, tada $[\rho]_{\sim_c} = [\sigma]_{\sim_c} \in D_\rho \cap D_\sigma$.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je $[\rho\cup\Delta_A]_{\sim_c} = [\sigma\cup\Delta_B]_{\sim_c}$, za neke $A, B \subseteq X$, tj. da je $\rho\cup\Delta_A \sim_c \sigma\cup\Delta_B$. Tada, na osnovu leme 6.2.16 postoje kondenzacije $f \in \mathrm{Cond}(\rho,\sigma)$ i $g \in \mathrm{Cond}(\sigma,\rho)$, što znači da je $\rho \sim_c \sigma$.

(b) Neka je $\rho \cong \sigma$, i neka $[\rho\cup\Delta_A]_{\sim_c} \in D_\rho$, za neko $A \subseteq X$. Tada, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $\rho = f[\sigma]$. Sada je, za $B := f^{-1}[A]$, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (e),

$$f[\sigma\cup\Delta_B] = f[\sigma]\cup f[\Delta_B] = \rho\cup\Delta_{f[B]} = \rho\cup\Delta_A,$$

odakle je, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) opet, $\rho\cup\Delta_A \cong \sigma\cup\Delta_B$, što implicira da je $\rho\cup\Delta_A \sim_c \sigma\cup\Delta_B$, tj.

$$[\rho\cup\Delta_A]_{\sim_c} = [\sigma\cup\Delta_B]_{\sim_c} \in D_\sigma.$$

Dakle, imamo da je $D_\rho \subseteq D_\sigma$. Druga inkluzija dokazuje se analogno, pa je $D_\rho = D_\sigma$.

Obratno, ako $\rho \in \mathrm{wRev}_{L_b}(X)$ i ako je $D_\rho = D_\sigma$, tada, na osnovu (a) sledi da $\sigma \in [\rho]_{\sim_c}$. Na osnovu tvrđenja 8.3.1 imamo da je $[\rho]_{\sim_c} = [\rho]_{\cong}$, pa je $\rho \cong \sigma$.

(c) Neka je $\sigma \in [\rho]_{\sim_c}$ proizvoljno. Tada je $[\rho]_{\sim_c} = [\sigma]_{\sim_c} \in D_\sigma$. Na osnovu leme 6.2.16, $\rho \sim_c \sigma$ implicira da je $\rho \cup \Delta_X \sim_c \sigma \cup \Delta_X$, pa je

$$[\rho \cup \Delta_X]_{\sim_c} = [\sigma \cup \Delta_X]_{\sim_c} \in D_\sigma.$$

Dakle, $\{[\rho]_{\sim_c}, [\rho \cup \Delta_X]_{\sim_c}\} \subseteq D_\sigma$, za svako $\sigma \in [\rho]_{\sim_c}$. □

U vezi s tvrđenjem 6.3.27 postavljaju se sledeća otvorena pitanja:

1. Da li važi $\rho \cong \sigma \Leftrightarrow D_\rho = D_\sigma$, za sve $\rho, \sigma \in \mathrm{Irrefl}_X$? Ili ekvivalentno, da li postoje relacije $\rho \notin \mathrm{wRev}_{L_b}(X)$ i $\sigma \in [\rho]_{\sim_c} \setminus [\rho]_{\cong}$ takve da je $D_\rho = D_\sigma$?
2. Da li postoje relacije $\rho \notin \mathrm{wRev}_{L_b}(X)$ i $\sigma \in [\rho]_{\sim_c} \setminus [\rho]_{\cong}$ takve da je $D_\rho \cap D_\sigma = \{[\rho]_{\sim_c}, [\rho \cup \Delta_X]_{\sim_c}\}$?

Primer 6.3.28 Dve relacije $\rho_0, \sigma_0 \in \mathrm{Irrefl}_\omega$, takve da je $\rho_0 \sim_c \sigma_0$, ali da je pri tome $D_{\rho_0} \neq D_{\sigma_0}$ i $\mathcal{D}_{[\rho_0]_{\sim_c}} \neq D_{\rho_0}$.

Neka su ρ i σ binarne relacije iz primera 6.1.4. Definišimo da je $\rho_0 := \rho \setminus \Delta_\omega$, i da je $\sigma_0 := \sigma \setminus \Delta_\omega$. Tada $\rho_0, \sigma_0 \in \mathrm{Irrefl}_\omega$, i važi $\rho_0 \sim_c \sigma_0$, ali je $\rho_0 \ncong \sigma_0$. Sada imamo da

$$[\sigma_0 \cup \{\langle 4,4\rangle\}]_{\sim_c} \in D_{\sigma_0} \subseteq \mathcal{D}_{[\rho_0]_{\sim_c}},$$

ali $[\sigma_0 \cup \{\langle 4,4\rangle\}]_{\sim_c} \notin D_{\rho_0}$. Ako bismo pretpostavili da $[\sigma_0 \cup \{\langle 4,4\rangle\}]_{\sim_c} \in D_{\rho_0}$, tada bismo imali da je $[\sigma_0 \cup \{\langle 4,4\rangle\}]_{\sim_c} = [\rho_0 \cup \{\langle k,k\rangle\}]_{\sim_c}$, za neko $k \in \omega$, odnosno da je $\rho_0 \cup \{\langle k,k\rangle\} \sim_c \sigma_0 \cup \{\langle 4,4\rangle\}$, što je, na osnovu leme 6.2.16, nemoguće. Dakle, imamo da je $D_{\rho_0} \neq D_{\sigma_0}$ i $\mathcal{D}_{[\rho_0]_{\sim_c}} \neq D_{\rho_0}$.

Tvrđenje 6.3.29 *Neka je X neprazan skup. Tada je*

$$\mathrm{Int}_{L_b}(X)\,/\sim_c = \bigcup\nolimits_{\rho \in \mathrm{Irrefl}_X} D_\rho \tag{6.15}$$

particija skupa $\mathrm{Int}_{L_b}(X)\,/\sim_c$ akko je skup X konačan. U tom slučaju, to je particija na konveksne skupove u posetu $\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X)\,/\sim_c, \leq_c\rangle$.

Dokaz.

($\Leftarrow$) Jasno je da je $\mathrm{Int}_{L_b}(X)\,/\sim_c = \bigcup_{\rho \in \mathrm{Irrefl}_X} D_\rho$. Neka su $\rho, \sigma \in \mathrm{Irrefl}_X$ takvi da je $D_\rho \cap D_\sigma \neq \emptyset$. Tada, na osnovu tvrđenja 6.3.27 (a) imamo da je $\rho \sim_c \sigma$, odakle, s obzirom da je skup X konačan, na osnovu tvrđenja 6.1.2

(e) zaključujemo da je $\rho \cong \sigma$. Sada, na osnovu tvrđenja 6.3.27 (b) imamo da je $D_\rho = D_\sigma$, što znači da je $\{D_\rho : \rho \in \mathrm{Irrefl}_X\}$ particija skupa $\mathrm{Int}_{L_b}(X)\,/\sim_c$.

($\Rightarrow$) Dokazaćemo kontrapoziciju. Ako je skup X beskonačan, uzmimo $A \in [X]^{\omega,|X|}$, i uzmimo proizvoljnu bijekciju $f : \omega \to A$. Definišimo relacije $\rho, \sigma \in \mathrm{Irrefl}_X$ na sledeći način: $\rho := f[\rho_0]$ i $\sigma := f[\sigma_0]$, gde su ρ_0 i σ_0 irefleksivne binarne relacije iz primera 6.3.28. Tada je $\rho \sim_c \sigma$, odakle, na osnovu tvrđenja 6.3.27 (a), sledi da je $D_\rho \cap D_\sigma \neq \emptyset$. Ali, na isti način kao u primeru 6.3.28, pokazuje se da je $D_\rho \neq D_\sigma$, što znači da (6.15) nije particija skupa $\mathrm{Int}_{L_b}(X)\,/\sim_c$.

Ako je skup X konačan, dokazaćemo kako je skup D_ρ konveksan za proizvoljno $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Pretpostavimo da je

$$[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} \leq_c [\sigma \cup \Delta_B]_{\sim_c} \leq_c [\rho \cup \Delta_C]_{\sim_c}.$$

Tada, na osnovu leme 6.2.16, sledi da je $[\rho]_{\sim_c} \leq_c [\sigma]_{\sim_c} \leq_c [\rho]_{\sim_c}$, tj. $[\rho]_{\sim_c} = [\sigma]_{\sim_c}$, odakle, na osnovu tvrđenja 6.1.2 (e), imamo da je $\rho \cong \sigma$. Sada, na osnovu tvrđenja 6.3.27 (b) imamo da $[\sigma \cup \Delta_B]_{\sim_c} \in D_\sigma = D_\rho$, čime smo kompletirali dokaz. $\Box$

Tvrđenje 6.3.30 *Neka je X neprazan skup. Tada je*

$$\mathrm{Int}_{L_b}(X)\,/\sim_c = \bigcup\nolimits_{[\rho]_{\sim_c} \in q_{\sim_c}[\mathrm{Irrefl}_X]} \mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}} \tag{6.16}$$

particija skupa $\mathrm{Int}_{L_b}(X)\,/\sim_c$ na konveksne skupove u posetu $\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X)\,/\sim_c, \leq_c\rangle$.

Dokaz. Imamo da (6.15), koje važi za svako $X \neq \emptyset$, implicira (6.16). Pretpostavimo sada da je $\mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}} \cap \mathcal{D}_{[\sigma]_{\sim_c}} \neq \emptyset$, za neke $[\rho]_{\sim_c}, [\sigma]_{\sim_c} \in q_{\sim_c}[\mathrm{Irrefl}_X]$. Tada postoje $\pi \in [\rho]_{\sim_c}$ i $\tau \in [\sigma]_{\sim_c}$, takvi da je $D_\pi \cap D_\tau \neq \emptyset$. Sada, na osnovu tvrđenja 6.3.27 (a) imamo da je $\pi \sim_c \tau$, što implicira da je $\rho \sim_c \sigma$, a to znači da je $\mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}} = \mathcal{D}_{[\sigma]_{\sim_c}}$. Dakle, (6.16) je particija skupa $\mathrm{Int}_{L_b}(X)\,/\sim_c$. Sada ćemo dokazati da je skup $\mathcal{D}_{[\pi]_{\sim_c}}$ konveksan, za proizvoljno $[\pi]_{\sim_c} \in q_{\sim_c}[\mathrm{Irrefl}_X]$. Pretpostavimo da je

$$[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} \leq_c [\sigma \cup \Delta_B]_{\sim_c} \leq [\tau \cup \Delta_C]_{\sim_c},$$

pri čemu $[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}, [\tau \cup \Delta_C]_{\sim_c} \in \mathcal{D}_{[\pi]_{\sim_c}}$. Kako $[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} \in \mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}}$ i $[\tau \cup \Delta_C]_{\sim_c} \in \mathcal{D}_{[\tau]_{\sim_c}}$, i s obzirom da je (6.16) particija, zaključujemo da je $[\rho]_{\sim_c} = [\tau]_{\sim_c} = [\pi]_{\sim_c}$. Tada, na osnovu leme 6.2.16 sledi da je

$$[\pi]_{\sim_c} = [\rho]_{\sim_c} \leq_c [\sigma]_{\sim_c} \leq_c [\tau]_{\sim_c} = [\pi]_{\sim_c},$$

što implicira da je $[\sigma]_{\sim_c} = [\pi]_{\sim_c}$. Sada imamo da $[\sigma \cup \Delta_B]_{\sim_c} \in \mathcal{D}_{[\sigma]_{\sim_c}} = \mathcal{D}_{[\pi]_{\sim_c}}$, čime smo kompletirali dokaz. $\Box$

Teorema 6.3.31 *Neka je X neprazan skup i neka $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Tada je*

$$\mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}} = \mathrm{Conv}_{\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X)/\sim_c, \leq_c \rangle}(D_\rho). \tag{6.17}$$

Dokaz. Kako je $D_\rho \subseteq \mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}}$, i s obzirom da je, na osnovu tvrđenja 6.3.30, skup $D_{[\rho]_{\sim_c}}$ konveksan u posetu $\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X) \,/\sim_c, \leq_c \rangle$, imamo da je

$$\mathrm{Conv}_{\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X)/\sim_c, \leq_c \rangle}(D_\rho) \subseteq \mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}}.$$

Da bismo dokazali obratnu inkluziju, uzmimo $[\sigma \cup \Delta_A]_{\sim_c} \in \mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}}$. Tada, s obzirom da $[\sigma \cup \Delta_A]_{\sim_c} \in \mathcal{D}_{[\sigma]_{\sim_c}}$, i da je (6.16) particija, na osnovu tvrđenja 6.1.5 imamo da

$$\sigma \in [\sigma]_{\sim_c} = [\rho]_{\sim_c} = \mathrm{Conv}_{\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X), \subseteq \rangle}([\rho]_{\cong}).$$

Sada, na osnovu tvrđenja 1.2.2 (b) i tvrđenja 1.1.5 (a) imamo da postoje bijekcije $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$, takve da je $f[\rho] \subseteq \sigma \subseteq g[\rho]$, što implicira da je

$$f[\rho] \cup \Delta_A \subseteq \sigma \cup \Delta_A \subseteq g[\rho] \cup \Delta_A,$$

odakle, prema tvrđenju 6.1.2 (b) i tvrđenju 6.3.27 (c), imamo

$$D_\rho = D_{f[\rho]} \ni [f[\rho] \cup \Delta_A]_{\sim_c} \leq_c [\sigma \cup \Delta_A]_{\sim_c} \leq_c [g[\rho] \cup \Delta_A]_{\sim_c} \in D_{g[\rho]} = D_\rho.$$

To znači da $[\sigma \cup \Delta_A]_{\sim_c} \in \mathrm{Conv}_{\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X)/\sim_c, \leq_c \rangle}(D_\rho)$, pa kako je $[\sigma \cup \Delta_A]_{\sim_c} \in \mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}}$ bilo proizvoljno, time smo dokazali (6.17). □

Teorema 6.3.32 *Neka je X neprazan skup i neka je $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$ slabo reverzibilna relacija. Tada je $\mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}} = D_\rho$.*

Dokaz. Ako je relacija ρ slabo reverzibilna, tada, na osnovu tvrđenja 8.3.1, imamo da je $[\rho]_{\sim_c} = [\rho]_{\cong}$, pa, na osnovu tvrđenja 6.3.27 (b), sledi da je

$$\mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}} = \bigcup_{\sigma \in [\rho]_{\cong}} D_\sigma = \bigcup_{\sigma \in [\rho]_{\cong}} D_\rho = D_\rho.$$

□

U vezi s teoremom 6.3.32 postavljaju se sledeća otvorena pitanja:

1. Da li važi obrat? U narednoj teoremi, daćemo odgovor na to pitanje u specijalnom slučaju.
2. Ako, u opštem slučaju, ne važi obrat, da li tada možda važi sledeće: ako je $\mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}} = D_\rho$ za neko $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$, da li je tada i $\mathcal{D}_{[\sigma]_{\sim_c}} = D_\sigma$, za svako $\sigma \in [\rho]_{\sim_c}$?

Teorema 6.3.33 *Neka je X neprazan skup i neka je $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$ simetrična relacija. Tada važi:*

$$\mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}} = D_\rho \iff \text{relacija } \rho \text{ je reverzibilna.}$$

Dokaz. Ako je skup X konačan, tvrđenje je trivijalno tačno. Pretpostavimo zato da je skup X beskonačan. Dokažimo prvo sledeći stav:

Stav 6.3.34 *Neka je X neprazan skup i neka $\rho, \sigma \in \mathrm{Irrefl}_X$. Tada, za $A, B \subseteq X$, imamo:*

(a) $\rho \cup \Delta_A \sim_c \sigma \cup \Delta_B \Rightarrow A \doteqdot B$;

(b) Ako su skupovi A i B konačni, tada važi:

$$\rho \cup \Delta_A \sim_c \sigma \cup \Delta_B \implies \langle A, \rho\restriction_A\rangle \cong \langle B, \sigma\restriction_B\rangle.$$

Dokaz.

(a) Ako je $\rho \cup \Delta_A \sim_c \sigma \cup \Delta_B$, tada, na osnovu leme 6.2.16, postoji $f \in \mathrm{Cond}(\rho, \sigma)$ takvo da je $f[A] \subseteq B$, i postoji $g \in \mathrm{Cond}(\sigma, \rho)$ takvo da je $g[B] \subseteq A$. S obzirom da su f i g bijekcije, na osnovu toga je i $f[A^c] \supseteq B^c$ i $g[B^c] \supseteq A^c$. Tada je $|A| \leq |B|$ i $|B| \leq |A|$, dakle, $|A| = |B|$. Takođe je $|A^c| \geq |B^c|$ i $|B^c| \geq |A^c|$, dakle, $|A^c| = |B^c|$.

(b) Ako je $\rho \cup \Delta_A \sim_c \sigma \cup \Delta_B$, tada je, na osnovu (a), $A \doteqdot B$. Sada, pošto su skupovi A i B konačni i iste veličine, na osnovu leme 6.2.16 sledi da postoji $f \in \mathrm{Cond}(\rho, \sigma)$, takvo da je $f[A] = B$, i postoji $g \in \mathrm{Cond}(\sigma, \rho)$, takvo da je $g[B] = A$. Dakle, $f|_A : A \to B$ i $g|_B : B \to A$ su bijekcije. Sada, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (f) i tvrđenja 1.1.3 (e), imamo da je

$$f|_A[\rho \cap A^2] = f[\rho \cap A^2] = f[\rho] \cap B^2 \subseteq \sigma \cap B^2,$$

što implicira da je $|\rho \cap A^2| \leq |\sigma \cap B^2|$. Takođe,

$$g|_B[\sigma \cap B^2] = g[\sigma \cap B^2] = g[\sigma] \cap A^2 \subseteq \rho \cap A^2,$$

što implicira da je $|\sigma \cap B^2| \leq |\rho \cap A^2|$, tj. $|\rho \cap A^2| = |\sigma \cap B^2|$. Kako su skupovi A i B konačni, imamo da je $f|_A[\rho \cap A^2] = \sigma \cap B^2$, odakle, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (g), sledi da je $f|_A : \langle A, \rho \cap A^2\rangle \to \langle B, \sigma \cap B^2\rangle$ izomorfizam. □

Sada ćemo dokazati teoremu. Smer „$\Leftarrow$" sledi na osnovu teoreme 6.3.32. Da bismo dokazali „$\Rightarrow$", pretpostavimo suprotno, kako je $\mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}} = D_\rho$ i kako relacija ρ nije reverzibilna. Tada, na osnovu tvrđenja 8.2.1 (g), postoji $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$ takvo da je $f[\rho] \subsetneq \rho$. Neka je $\{x, y\} \in [X]^2$ takvo da $\langle x, y\rangle \notin \rho$, a da $\langle z, w\rangle := \langle f(x), f(y)\rangle \in \rho$. Pošto je relacija ρ simetrična, zaključujemo da tada i $\langle y, x\rangle \notin \rho$ i $\langle w, z\rangle \in \rho$. Definišimo relaciju $\sigma := \rho \setminus \{\langle w, z\rangle\}$. Tada je $f[\rho] \subseteq \sigma \subseteq \rho$, pa, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) i tvrđenja 6.1.5, zaključujemo da $\sigma \in [\rho]_{\sim_c}$. Sada, na osnovu pretpostavke imamo da je

$$D_\sigma \subseteq \mathcal{D}_{[\sigma]_{\sim_c}} = \mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}} = D_\rho.$$

To znači da, za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $B \in [X]^n$, postoji $A \in [X]^n$ takvo da je $[\sigma \cup \Delta_B]_{\sim_c} = [\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}$. Tada, na osnovu stava 6.3.34 (b), imamo da je $\langle A, \rho \cap A^2\rangle \cong \langle B, \sigma \cap B^2\rangle$. Ako uzmemo da je $B = \{z, w\}$, tada sledi da postoji $A \in [X]^2$ takvo da je

$$\langle A, \rho \cap A^2\rangle \cong \langle B, \sigma \cap B^2\rangle = \langle \{z, w\}, \{\langle z, w\rangle\}\rangle.$$

A to je nemoguće zato što je prva struktura simetrična, a druga nije. Dakle, relacija ρ je reverzibilna. □

U nastavku slede neke teoreme koje su posledica teoreme 6.3.32 i odgovarajućih teorema vezanih za skupove D_ρ.

Teorema 6.3.35 *Neka je X neprazan skup i neka $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Ako je relacija ρ reverzibilna, tada je $\langle \mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}}, \leq_c\rangle \cong \langle \mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}}, \leq_c\rangle^*$.*

Dokaz. Ovo sledi na osnovu teoreme 6.3.32 i teoreme 6.3.11. □

S obzirom da je $D_\rho \subseteq \mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}}$, na osnovu tvrđenja 6.3.16 imamo da i poset $\langle \mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}}, \leq_c\rangle$ sadrži lanac tipa $\theta_{|X|}$.

Teorema 6.3.36 *Neka je X neprazan skup i neka $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Tada imamo:*

(a) Ako je relacija ρ reverzibilna i rigidna, tada je $\langle \mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}}, \leq_c\rangle \cong \langle P(X), \subseteq\rangle$;

(b) Ako je relacija ρ jako reverzibilna, ili je ρ netranzitivni troelementni turnir, tada je $\langle \mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}}, \leq_c\rangle \cong \theta_{|X|}$.

Dokaz.

(a) Ovo sledi na osnovu teoreme 6.3.32 i teoreme 6.3.19 (a).

(b) Ovo sledi na osnovu primera 6.3.3 i teoreme 6.3.32, i na osnovu teoreme 6.3.19 (b). □

Lema 6.3.37 *Neka je X neprazan skup i neka $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Ako važi da je $\langle \mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}}, \leq_c\rangle \cong \theta_{|X|}$, tada je i $\langle D_\rho, \leq_c\rangle \cong \theta_{|X|}$.*

Dokaz. Ako je skup X konačan, tada je ρ reverzibilna relacija, pa, na osnovu teoreme 6.3.32, imamo da je $\mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}} = D_\rho$, odakle sledi tvrđenje. Pretpostavimo dalje da je $|X| = \omega_\alpha$, za neko $\alpha \in \mathrm{Ord}$. Tada je, prema (6.6), $\theta_{|X|} = \mathrm{otp}(\omega + \alpha + 1 + (\omega + \alpha)^*)$. Neka je $\omega + \alpha = \gamma + k$ jedinstvena dekompozicija ordinala $\omega + \alpha$ na granični ordinal $\gamma \in \mathrm{Lim}$ i prirodan broj ili nula $k \in \omega$. Tada je

$$\theta_{|X|} = \mathrm{otp}(\gamma+k+1+k+\gamma^*) = \mathrm{otp}(\gamma+l+\gamma^*), \text{ gde } \gamma \in \mathrm{Lim},\ l = 2k+1 \in \mathbb{N}.$$

Tvrđenje leme slediće iz narednog stava i tvrđenja 6.3.16:

Stav 6.3.38 *Neka je $\mathbb{A}$ lanac tipa $\gamma + l + \gamma^*$, gde $\gamma \in \mathrm{Lim}$, i $l \in \mathbb{N}$. Ako je $C \subseteq A$ takvo da je $\mathbb{C} \cong \gamma + l + \gamma^*$, tada za svako $C \subseteq B \subseteq A$ važi da je $\mathbb{B} \cong \gamma + l + \gamma^*$.*

Dokaz. Neka je $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_3$, gde je $\mathbb{A}_1 \cong \gamma$, $\mathbb{A}_3 \cong \gamma^*$ i $A_2 = \{a_0, a_1, \ldots, a_{l-1}\}$, pri čemu je $a_0 < a_1 < \cdots < a_{l-1}$. Neka je isto tako $\mathbb{C} = \mathbb{C}_1 + \mathbb{C}_2 + \mathbb{C}_3$, gde je $\mathbb{C}_1 \cong \gamma$, $\mathbb{C}_3 \cong \gamma^*$ i $C_2 = \{c_0, c_1, \ldots, c_{l-1}\}$, pri čemu je $c_0 < c_1 < \cdots < c_{l-1}$. Na osnovu pretpostavke imamo da je

$$C_1 \cup C_2 \cup C_3 \subseteq A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

Ako bi bilo $C_1 \cap (A_2 \cup A_3) \neq \emptyset$, tada bi u lancu $\mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_3 \cong (\gamma + l)^*$ postojao beskonačan rastući podlanac, što je nemoguće. Dakle, imamo da je $C_1 \subseteq A_1$, i na osnovu leme 10.4.5 (b), sledi da je skup C_1 neograničen odozgo u lancu $\mathbb{A}_1$, a to implicira da je $C_2 \subseteq A_2 \cup A_3$. Na sličan način zaključujemo kako je $C_3 \subseteq A_3$, i kako je skup C_3 neograničen odozdo u lancu $\mathbb{A}_3$, što implicira da je $C_2 \subseteq A_1 \cup A_2$. Sada imamo da je

$$C_2 \subseteq (A_1 \cup A_2) \cap (A_2 \cup A_3) = A_2,$$

pa, pošto su skupovi A_2 i C_2 konačni i iste veličine, zaključujemo da je $A_2 = C_2$. Ako uvedemo oznake $B_1 := B \cap A_1$, $B_2 := B \cap A_2$ i $B_3 := B \cap A_3$, tada, s obzirom da je $C \subseteq B \subseteq A$, imamo da je $C_1 \subseteq B_1 \subseteq A_1$, $C_2 = B_2 = A_2$ i $C_3 \subseteq B_3 \subseteq A_3$. Dakle, $\mathbb{B}_1$ je dobro uređen lanac, i pri tome je

$$\gamma = \mathrm{otp}(\mathbb{C}_1) \leq \mathrm{otp}(\mathbb{B}_1) \leq \mathrm{otp}(\mathbb{A}_1) = \gamma,$$

dakle, $\mathrm{otp}(\mathbb{B}_1) = \gamma$. Na sličan način dokazuje se da je $\mathrm{otp}(\mathbb{B}_3) = \gamma^*$, pa imamo da je $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2 + \mathbb{B}_3 \cong \gamma + l + \gamma^*$. □

Teorema 6.3.39 *Neka je $|X| < \omega_\omega$ i neka $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Tada imamo da je $\langle \mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}}, \leq_c \rangle \cong \theta_{|X|}$ akko je relacija ρ jako reverzibilna, ili je ρ netranzitivni troelementni turnir.*

Dokaz.

($\Leftarrow$) Ako je ρ jako reverzibilna relacija, ili je ρ netranzitivni troelementni turnir, tada je relacija ρ reverzibilna, pa na osnovu teoreme 6.3.32 imamo da je $\mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}} = D_\rho$. Tvrđenje sada sledi na osnovu teoreme 6.3.25.

($\Rightarrow$) Ako je $\langle \mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}}, \leq_c \rangle \cong \theta_{|X|}$, tada je na osnovu leme 6.3.37 i $\langle D_\rho, \leq_c \rangle \cong \theta_{|X|}$. Tvrđenje opet sledi na osnovu teoreme 6.3.25. $\square$

Glava 7

Kondenzaciona ekvivalencija

7.1 Složenost i veličina klasa ekvivalencije prebrojivih struktura prebrojivih jezika

Deskriptivna složenost relacije $\sim_c$ i klasa ekvivalencije

Neka je $L = \langle R_i : i \in I \rangle$ neprazan najviše prebrojiv relacijski jezik, pri čemu je $\mathrm{ar}(R_i) = n_i \in \mathbb{N}$, za $i \in I$. Posmatraćemo interpretacije takvog jezika nad prebrojivim domenom. Bez ograničenja opštosti, neka su to elementi poljskog prostora

$$\mathrm{Int}_L(\omega) = \prod_{i \in I} P(\omega^{n_i}),$$

koji je homeomorfan Kantorovom prostoru ${}^{\omega}2$. Rezultati iz ovog odeljka dokazani su u [48]. Prvo, imamo analogon teoreme 5.2.1 za kondenzacionu ekvivalenciju $\sim_c$.

Teorema 7.1.1 *Neka je $L = \langle R_i : i \in I \rangle$ najviše prebrojiv relacijski jezik. Tada je skup $\sim_c$ analitički u poljskom prostoru $\mathrm{Int}_L(\omega) \times \mathrm{Int}_L(\omega)$.*

Dokaz. Kako je $\sim_c = \preccurlyeq_c \cap \preccurlyeq_c^{-1} = \preccurlyeq_c \cap \succcurlyeq_c$, na osnovu tvrđenja 4.3.2 (a) dovoljno je dokazati da je skup $\preccurlyeq_c$ analitički u prostoru $\mathrm{Int}_L(\omega)^2$. Neka je

$$\Xi := \Big\{ \langle f, \rho, \sigma \rangle \in \mathrm{Sym}(\omega) \times \mathrm{Int}_L(\omega)^2 : f[\rho] \subseteq \sigma \Big\}.$$

Dokazaćemo da je skup Ξ zatvoren u $\mathrm{Sym}(\omega) \times \mathrm{Int}_L(\omega)^2$. Kako se radi o metrizabilnom prostoru, dovoljno je dokazati da je skup Ξ sekvencijalno zatvoren. Neka $\langle f^n, \rho^n, \sigma^n \rangle \in \Xi$, za $n \in \mathbb{N}$, i neka $\langle f^n, \rho^n, \sigma^n \rangle \to \langle f, \rho, \sigma \rangle$, $n \to \infty$, tj.

$$f^n \to f, \quad \rho^n \to \rho, \quad \sigma^n \to \sigma, \quad n \to \infty.$$

Tada, za svako, $i \in I$ imamo da

$$\rho_i^n \to \rho_i, \quad \sigma_i^n \to \sigma_i, \quad n \to \infty, \text{ u } \mathrm{Int}_{\langle R_i \rangle}(\omega),$$

gde je $\rho^n = \langle \rho_i^n : i \in I \rangle$ i $\sigma^n = \langle \sigma_i^n : i \in I \rangle$, za $n \in \mathbb{N}$. Treba dokazati da je $f[\rho] \subseteq \sigma$. Fiksirajmo $i \in I$ proizvoljno. Neka $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n_i} \rangle \in \rho_i$, i neka je $f(a_j) = b_j$, za $j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$. Kako $\rho_i^n \to \rho_i$, $n \to \infty$, u $\mathrm{Int}_{\langle R_i \rangle}(\omega) \cong {}^{\omega^{n_i}}2$, postoji $N_1 \in \mathbb{N}$, takvo da za $n \geq N_1$ važi $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n_i} \rangle \in \rho_i^n$. Kako $f^n \to f$, $n \to \infty$, u $\mathrm{Sym}(\omega) \subseteq {}^{\omega}\omega$, postoji $N_2 \in \mathbb{N}$, takvo da za $n \geq N_2$ važi $f^n(a_j) = b_j$, za $j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$. Neka je $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$. Pošto $\langle f^n, \rho^n, \sigma^n \rangle \in \Xi$, $n \in \mathbb{N}$, za $n \geq N_0$ važi

$$\langle b_1, b_2, \ldots, b_{n_i} \rangle = \langle f^n(a_1), f^n(a_2), \ldots, f^n(a_{n_i}) \rangle \in f^n[\rho_i^n] \subseteq \sigma_i^n.$$

Kako $\sigma_i^n \to \sigma_i$, $n \to \infty$, u $\mathrm{Int}_{\langle R_i \rangle}(\omega)$, sledi da $\langle b_1, b_2 \ldots, b_{n_i} \rangle \in \sigma_i$. Dakle, $f[\rho_i] \subseteq \sigma_i$, pa kako je $i \in I$ bilo proizvoljno, imamo da je $f[\rho] \subseteq \sigma$. Dakle, skup Ξ je (sekvencijalno) zatvoren.

Na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e), za $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}_L(\omega)$ imamo da je $\rho \preccurlyeq_c \sigma$ akko postoji $f \in \mathrm{Sym}(\omega)$, takvo da je $f[\rho] \subseteq \sigma$, odakle sledi da je

$$\preccurlyeq_c \; = \; \pi_{\mathrm{Int}_L(\omega)^2}[\Xi].$$

Na osnovu tvrđenja 4.1.5 (a), $\mathrm{Sym}(\omega)$ je G_δ-podskup Baireovog prostora ${}^{\omega}\omega$, pa je, na osnovu tvrđenja 4.1.1 (a), to poljski prostor. Kako je Ξ zatvoren, pa i G_δ-podskup poljskog prostora $\mathrm{Sym}(\omega) \times \mathrm{Int}_L(\omega)^2$, to je poljski prostor, što znači da je $\preccurlyeq_c$ analitički skup u prostoru $\mathrm{Int}_L(\omega)^2$. □

Kao posledicu, imamo da su klase kondenzaciono ekvivalentnih interpretacija analitički skupovi.

Teorema 7.1.2 *Neka je L najviše prebrojiv relacijski jezik, i neka $\rho \in \mathrm{Int}_L(\omega)$. Tada je klasa kondenzaciono ekvivalentnih interpretacija $[\rho]_{\sim_c}$ analitički skup u poljskom prostoru $\mathrm{Int}_L(\omega)$.*

Dokaz. Ako sa $\pi_1 : \mathrm{Int}_L(\omega)^2 \to \mathrm{Int}_L(\omega)$ označimo prvu koordinatnu projekciju, tada imamo da je

$$[\rho]_{\sim_c} = \pi_1\Big[\sim_c \cap \Big(\mathrm{Int}_L(\omega) \times \{\rho\} \Big) \Big].$$

Kako je, na osnovu teoreme 7.1.1, skup $\sim_c$ analitički, i s obzirom da je skup $\mathrm{Int}_L(\omega) \times \{\rho\}$ zatvoren (pa i analitički) u prostoru $\mathrm{Int}_L(\omega)^2$, na osnovu tvrđenja 4.3.2 (a) i (b) imamo da je $[\rho]_{\sim_c}$ analitički skup u prostoru $\mathrm{Int}_L(\omega)$.
□

Otvoreno je pitanje u vezi s klasom kondenzaciono ekvivalentnih interpretacija $[\rho]_{\sim_c}$, da li je skup $[\rho]_{\sim_c}$ Borelov (kao što je $[\rho]_{\cong}$, videti teoremu 5.2.2) u poljskom prostoru $\mathrm{Int}_L(\omega)$, za svako $\rho \in \mathrm{Int}_L(\omega)$.

Veličina klasa ekvivalencije

U ovom pododeljku, rešićemo problem veličine klasa $[\rho]_{\cong}$ i $[\rho]_{\sim_c}$ za proizvoljnu interpretaciju $\rho \in \mathrm{Int}_L(\omega)$, gde je L najviše prebrojiv relacijski jezik. Za $n \in \mathbb{N}$ definisaćemo fukciju $\mu : \omega^n \to \omega$ na sledeći način:

$$\mu(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle) := \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \text{ za } \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in \omega^n. \quad (7.1)$$

Ako je, za neko $X \subseteq \omega^n$, skup $\mu[X]$ ograničen podskup skupa ω, reći ćemo da je *minimalna koordinata elemenata skupa X ograničena.*

Neka je dalje $n \geq 2$ i neka je $M_n := \{0,1\}^{\{\langle k,l \rangle : 1 \leq k < l \leq n\}}$, i neka je, za $c = \langle c_{k,l} : 1 \leq k < l \leq n \rangle \in M_n$, $L_\emptyset$-formula[1] $\psi_c(v_1, \ldots, v_n)$ definisana sa

$$\psi_c(v_1, \ldots, v_n) := \bigwedge\nolimits_{1 \leq k < l \leq n} (v_k = v_l)^{c_{k,l}}, \quad (7.2)$$

gde je, za formulu η, $\eta^0 := \neg\eta$ i $\eta^1 := \eta$. Neka je dalje, za $L_\emptyset$-formulu $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$,

$$D_\varphi := \Big\{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \omega^n : \omega \models \varphi[x_1, \ldots, x_n]\Big\}$$

odgovarajuća n-arna relacija na skupu ω definisana formulom φ . Lako se vidi da važi

$$\forall c, c' \in M_n \ (c \neq c' \Rightarrow D_{\psi_c} \cap D_{\psi_{c'}} = \emptyset) \quad \text{i} \quad \omega^n = \bigcup\nolimits_{c \in M_n} D_{\psi_c}, \quad (7.3)$$

drugima rečima, $\{D_{\psi_c} : c \in M_n\}$ je particija skupa ω^n.

Lema 7.1.3 *Neka je S_0 podgrupa simetrične grupe* $\mathrm{Sym}(\omega)$ *koja ima konačno mnogo levih koseta $S_k = f_k \circ S_0$ (gde je $f_k \in S_k$ proizvoljno), za $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Neka je $n \geq 2$, i neka $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in \omega^n$ proizvoljno. Tada minimalna koordinata elemenata skupa $\{f^n(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle) : f \in S_0\}$ nije ograničena.*

---

[1]Za dati niz promenljivih $\langle v_k : k \in \omega \rangle$, *atomne $L_\emptyset$-fomule* su $v_k = v_l$ za $k, l \in \omega$. Sledi rekurzivna definicija *formula praznog jezika (prvog reda)* (tj. $L_\emptyset$-formula):

1. Atomne $L_\emptyset$-formule su $L_\emptyset$-formule;
2. Ako su φ i ψ $L_\emptyset$-formule i x neka promenljiva, tada su i $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$, $\neg\varphi$, $(\forall x)\varphi$ i $(\exists x)\varphi$ $L_\emptyset$-formule;
3. Sve $L_\emptyset$-formule dobijaju se u konačno mnogo koraka primenom 1. i 2.

Dokaz. Neka $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in \omega^n$ proizvoljno. Na osnovu (7.3) postoji $c_0 \in M_n$, takvo da $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in D_{\psi_{c_0}}$. Dokažimo sada da

$$\forall c \in M_n \;\; \forall \bar{y}, \bar{z} \in D_{\psi_c} \;\; \exists f \in \mathrm{Sym}(\omega) \;\; f^n(\bar{y}) = \bar{z}. \tag{7.4}$$

Neka $c \in M_n$ i $\bar{y}, \bar{z} \in D_{\psi_c}$. Definišimo funkciju

$$g := \Big\{ \langle y_1, z_1 \rangle, \langle y_2, z_2 \rangle, \ldots, \langle y_n, z_n \rangle \Big\}.$$

Kako je $\psi_c[\bar{y}]$, za $1 \leq k < l \leq n$ imamo da je $y_k = y_l$ akko je $c_{k,l} = 1$, što, uz $\psi_c[\bar{z}]$, važi akko je $z_k = z_l$. Odatle zaključujemo kako je g funkcija, $g : \{y_1, \ldots, y_n\} \to \{z_1, \ldots, z_n\}$, koja je bijekcija. Ako je $f \in \mathrm{Sym}(\omega)$ proizvoljna ekstenzija funkcije g, tada je jasno da f zadovoljava (7.4).

Iz (7.4) sledi da je $D_{\psi_{c_0}} \subseteq \{f^n(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle) : f \in \mathrm{Sym}(\omega)\}$. Na osnovu stava 8.1.2 (iii), relacija $D_{\psi_{c_0}}$ je jako reverzibilna, te, za proizvoljno $f \in \mathrm{Sym}(\omega)$, imamo da $f^n(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle) \in f^n[D_{\psi_{c_0}}] = D_{\psi_{c_0}}$. Dakle, $D_{\psi_{c_0}} \supseteq \{f^n(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle) : f \in \mathrm{Sym}(\omega)\}$, pa zaključujemo da važi

$$D_{\psi_{c_0}} = \Big\{ f^n(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle) : f \in \mathrm{Sym}(\omega) \Big\}. \tag{7.5}$$

Neka je $S_k = \{f_k^i : i \in I_k\}$, za $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Pretpostavimo suprotno, da je minimalna koordinata elemenata skupa

$$\Big\{ f^n(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle) : f \in S_0 \Big\} = \Big\{ (f_0^i)^n(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle) : i \in I_0 \Big\}$$

ograničena. Tada je i minimalna koordinata elemenata skupa

$$\Big\{ (f_k^i)^n(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle) : i \in I_k \Big\} = \Big\{ (f_k \circ f_0^i)^n(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle) : i \in I_0 \Big\}$$

ograničena, za $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Tada, na osnovu (7.5), i s obzirom da je $\mathrm{Sym}(\omega) = \bigcup_{k=0}^m S_k$ particija, zaključujemo da je i minimalna koordinata elemenata skupa

$$D_{\psi_{c_0}} = \Big\{ f^n(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle) : f \in \mathrm{Sym}(\omega) \Big\} = \bigcup_{k=0}^{m} \Big\{ (f_k^i)^n(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle) : i \in I_k \Big\}$$

takođe ograničena, što je kontradikcija. $\square$

Lema 7.1.4 *Neka $n \in \mathbb{N}$ i neka je $L_n = \langle R_n \rangle$, pri čemu je $\mathrm{ar}(R_n) = n$. Tada, za proizvoljnu relaciju $\rho \in \mathrm{Int}_{L_n}(\omega)$ važi, ako je $|[\rho]_{\cong}| < \omega$, tada je $|[\rho]_{\cong}| = 1$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je $[\rho_0]_\cong = \{\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_m\}$, za neko $\rho_0 \in \mathrm{Int}_{L_n}(\omega)$ i neko $m \in \mathbb{N}$. Tada, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), možemo razbiti skup $\mathrm{Sym}(\omega)$ na sledeći način:

$$\mathrm{Sym}(\omega) = \bigcup_{k=0}^{m} S_k,$$

gde je $S_k = \{f_k^i : i \in I_k\}$, tako da je $f_k^j[\rho_0] = \rho_k$ za svako $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, i za svako $j \in I_k$. Tada je S_0 podgrupa simetrične grupe $\mathrm{Sym}(\omega)$, a $S_k = f_k \circ S_0$ (gde je $f_k \in S_k$ proizvoljno) su odgovarajući levi koseti za $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Jasno je da imamo $f_k \circ S_0 \subseteq S_k$. A za $f_k^j \in S_k$, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (j) imamo da je

$$(f_k^{-1} \circ f_k^j)[\rho_0] = f_k^{-1}[\rho_k] = (f_k^{-1} \circ f_k)[\rho_0] = \rho_0,$$

tj. da je $f_k^{-1} \circ f_k^j = f_0 \in S_0$, čime je dokazana druga inkluzija.

Za proizvoljno $l \in \omega$ imamo da je

$$\left|\left\{ f_0^i(l) : i \in I_0 \right\}\right| = \omega. \tag{7.6}$$

Ako bismo pretpostavili suprotno, da je skup $\{f_0^i(l) : i \in I_0\}$ konačan, tada bi i skupovi $\{f_k^i(l) : i \in I_k\} = \{f_k \circ f_0^i(l) : i \in I_0\}$ bili konačni za $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, pa bi i skup

$$\omega = \left\{ f(l) : f \in \mathrm{Sym}(\omega) \right\} = \bigcup_{k=0}^{m} \left\{ f_k^i(l) : i \in I_k \right\}$$

bio konačan, što je kontradikcija.

Razmotrimo prvo slučaj $n = 1$. Ako $\rho_0 \in \{\emptyset, \omega\}$, tada je ρ_0 jako reverzibilna relacija, pa je $|[\rho_0]_\cong| = 1$, što je u suprotnosti s pretpostavkom. Dakle, $\emptyset \subsetneq \rho_0 \subsetneq \omega$. Neka $l \in \rho_0$. Na osnovu (7.6), skup $X := \{f_0^i(l) : i \in I_0\}$ je beskonačan. Za proizvoljno $i \in I_0$ imamo da $f_0^i(l) \in f_0^i[\rho_0] = \rho_0$, dakle, $X \subseteq \rho_0$. Enumerišimo njegove elemente: $X = \{x_k : k \in \omega\}$. Uzmimo sada $y_0 \in \omega \setminus \rho_0$, i definišimo bijekcije $g_i \in \mathrm{Sym}(\omega)$ kao inverzije y_0 i x_i, za $i \in \{0, 1, \ldots, m+1\}$. Tada su, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), $g_i[\rho_0]$, $i \in \{0, 1, \ldots, m+1\}$, različiti elementi iz $[\rho_0]_\cong$, pa je $|[\rho_0]_\cong| > m + 1$, što je kontradikcija s polaznom pretpostavkom.

Razmotrimo sada slučaj $n \geq 2$. Na osnovu (7.3) imamo da je

$$\rho_0 = \rho_0 \cap \left(\bigcup_{c \in M_n} D_{\psi_c} \right) = \bigcup_{c \in M_n} (\rho_0 \cap D_{\psi_c}).$$

Ako bi, za svako $c \in M_n$, imali da $\rho_0 \cap D_{\psi_c} \in \{\emptyset, D_{\psi_c}\}$, tada bi, na osnovu stava 8.1.2 (iii), relacija ρ_0 bila jako reverzibilna, što je u suprotnosti s pretpostavkom. Dakle, postoji $c_0 \in M_n$, takvo da je $\emptyset \subsetneq \rho_0 \cap D_{\psi_{c_0}} \subsetneq D_{\psi_{c_0}}$. Neka $\langle l_1, l_2, \dots, l_n \rangle \in \rho_0 \cap D_{\psi_{c_0}}$, i neka je

$$X := \Big\{ (f_0^i)^n(\langle l_1, l_2, \dots, l_n \rangle) : i \in I_0 \Big\}.$$

Kako je, na osnovu stava 8.1.2, relacija $D_{\psi_{c_0}}$ jako reverzibilna, za proizvoljno $i \in I_0$ imamo da je

$$(f_0^i)^n(\langle l_1, l_2, \dots, l_n \rangle) \in (f_0^i)^n[\rho_0 \cap D_{\psi_{c_0}}] = (f_0^i)^n[\rho_0] \cap (f_0^i)^n[D_{\psi_{c_0}}] = \rho_0 \cap D_{\psi_{c_0}},$$

dakle $X \subseteq \rho_0 \cap D_{\psi_{c_0}}$. Na osnovu leme 7.1.3 minimalna koordinata elemenata skupa X nije ograničena. Neka $\bar{x}_0 = \langle x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0 \rangle \in X$ proizvoljno. Izaberimo $\bar{x}_1 = \langle x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1 \rangle \in X$ tako da je $\mu(\bar{x}_1) > \max\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}$, gde je funkcija μ definisana sa (7.1). Izaberimo sada $\bar{x}_2 = \langle x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2 \rangle \in X$ tako da je $\mu(\bar{x}_2) > \max\{x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1\}$, itd. Na ovaj način dobijamo beskonačan podskup $Y = \{\bar{x}_k : k \in \omega\}$ skupa X, takav da su svi brojevi x_k^i, $i \in \omega$, međusobno različiti, za sve $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Uzmimo sada $\bar{y} = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle \in D_{\psi_{c_0}} \setminus \rho_0$. Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da $y_k \notin \{x_k^i : i \in \omega\}$, za $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Za $i \in \{0, 1, \dots, m+1\}$, s obzirom da $\bar{y}, \bar{x}_i \in D_{\psi_{c_0}}$, možemo definisati bijekciju $g_i \in \mathrm{Sym}(\omega)$ kao inverziju y_k i x_k^i, za sve $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sada se lako vidi kako su svi skupovi $g_i[\rho_0] \cap D_{\psi_{c_0}}$, $i \in \{0, 1, \dots, m+1\}$, međusobno različiti, pa su $g_i[\rho_0]$, $i \in \{0, 1, \dots, m+1\}$, međusobno različiti elementi iz $[\rho_0]_{\cong}$, što znači da je $|[\rho_0]_{\cong}| > m+1$. A to je kontradikcija s polaznom pretpostavkom. □

Teorema 7.1.5 *Neka je $L = \langle R_i : i \in I \rangle$ neprazan relacijski jezik. Tada, za proizvoljnu interpretaciju $\rho \in \mathrm{Int}_L(\omega)$ važi, ako je $|[\rho]_{\cong}| < \omega$, tada je $|[\rho]_{\cong}| = 1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $[\rho]_{\cong}$ konačan skup za neko $\rho = \langle \rho_i : i \in I \rangle \in \mathrm{Int}_L(\omega)$. Na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) imamo da je

$$[\rho]_{\cong} = \Big\{ f[\rho] : f \in \mathrm{Sym}(\omega) \Big\} = \Big\{ \langle f^{n_i}[\rho_i] : i \in I \rangle : f \in \mathrm{Sym}(\omega) \Big\},$$

odakle sledi da je $\pi_i\Big[[\rho]_{\cong}\Big] = [\rho_i]_{\cong}$, za $i \in I$. Dakle, $|[\rho_i]_{\cong}| \leq |[\rho]_{\cong}| < \omega$, za $i \in I$, pa je, na osnovu leme 7.1.4, $[\rho_i]_{\cong} = \{\rho_i\}$ za $i \in I$. Sada, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) zaključujemo da je $[\rho]_{\cong} = \{\rho\}$. □

Teorema 7.1.6 *Neka je $L = \langle R_i : i \in I \rangle$ neprazan relacijski jezik. Tada, za proizvoljnu interpretaciju $\rho \in \mathrm{Int}_L(\omega)$ važi, ako je $|[\rho]_{\sim_c}| < \omega$, tada je $|[\rho]_{\sim_c}| = 1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $[\rho]_{\sim_c}$ konačan skup za neko $\rho \in \mathrm{Int}_L(\omega)$. Kako je $[\rho]_{\cong} \subseteq [\rho]_{\sim_c}$, imamo da je i $[\rho]_{\cong}$ konačan skup, pa na osnovu teoreme 7.1.5 sledi da je $[\rho]_{\cong} = \{\rho\}$. Sada je, na osnovu tvrđenja 6.1.5,

$$[\rho]_{\sim_c} = \mathrm{Conv}_{\langle \mathrm{Int}_L(\omega), \subseteq \rangle}([\rho]_{\cong}) = \{\rho\}$$

□

Teorema 7.1.7 *Neka je L najviše prebrojiv relacijski jezik, i neka $\rho \in \mathrm{Int}_L(\omega)$. Tada imamo:*

(a) $|[\rho]_{\cong}| \in \{1, \omega, \mathfrak{c}\}$;

(b) $|[\rho]_{\sim_c}| \in \{1, \omega, \mathfrak{c}\}$.

Dokaz.

(a) Ako je $|[\rho]_{\cong}| < \omega$, tada, na osnovu teoreme 7.1.5, imamo da je $|[\rho]_{\cong}| = 1$. Pošto je, na osnovu teoreme 5.2.2, $[\rho]_{\cong}$ Borelov skup u $\mathrm{Int}_L(\omega)$, ako je $|[\rho]_{\cong}| > \omega$, iz teoreme 4.2.1 sledi da mora biti $|[\rho]_{\cong}| = \mathfrak{c}$.

(b) Ako je $|[\rho]_{\sim_c}| < \omega$, tada, na osnovu teoreme 7.1.6, imamo da je $|[\rho]_{\sim_c}| = 1$. Pošto je, na osnovu teoreme 7.1.2, $[\rho]_{\sim_c}$ analitički skup u $\mathrm{Int}_L(\omega)$, ako je $|[\rho]_{\sim_c}| > \omega$, iz teoreme 4.3.4 sledi da mora biti $|[\rho]_{\cong}| = \mathfrak{c}$. □

U nastavku ćemo dokazati da su, kod prebrojivih struktura prebrojivih jezika, klase $[\rho]_{\cong}$ i $[\rho]_{\sim_c}$ uvek iste veličine. Uvedimo u tom cilju, za slučaj $L = L_n = \langle R_n \rangle$, gde je $\mathrm{ar}(R_n) = n \in \mathbb{N}$, sledeće ad hoc oznake, koje ćemo koristiti u narednim lemama. Za $\rho \in \mathrm{Int}_{L_n}(\omega)$ i $k \in \omega$, definišimo $\rho_k \in \mathrm{Int}_{L_n}(\omega)$ na sledeći način:

$$\rho_k := \Big\{ \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in \rho : x_n = k \Big\}.$$

Dakle, $\rho = \bigcup_{k \in \omega} \rho_k$ je particija skupa ρ. Ako je $n \geq 2$ i $k \in \omega$, definišimo $\rho' \in \mathrm{Int}_{L_{n-1}}(\omega)$ sa

$$\rho' := \Big\{ \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle \in \omega^{n-1} : \exists x_n \in \omega \ \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in \rho \Big\},$$

i $\rho'_k \in \mathrm{Int}_{L_{n-1}}(\omega)$ sa

$$\rho'_k := (\rho_k)' = \Big\{ \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle \in \omega^{n-1} : \langle x_1, \ldots, x_{n-1}, k \rangle \in \rho \Big\}.$$

Lako se vidi da, za $\rho \in \mathrm{Int}_{L_n}(\omega)$, $f \in \mathrm{Sym}(\omega)$ i $k \in \omega$, imamo da je:

$$f[\rho'] = (f[\rho])', \tag{7.7}$$

$$f[\rho_k] = (f[\rho])_{f(k)}, \tag{7.8}$$

$$f[\rho'_k] = (f[\rho])'_{f(k)}. \tag{7.9}$$

Lema 7.1.8 *Neka je $n \geq 2$ i $\rho \in \mathrm{Int}_{L_n}(\omega)$. Ako je $|[\rho]_{\cong}| = \omega$, tada je:*

(a) $|[\rho_k]_{\cong}| \leq \omega$, za svako $k \in \omega$;

(b) $|[\rho']_{\cong}| \leq \omega$.

Dokaz.

(a) Pretpostavimo suprotno, da je $|[\rho]_{\cong}| = \omega$, za neko $\rho \in \mathrm{Int}_{L_n}(\omega)$, i da je $|[\rho_k]_{\cong}| > \omega$, za neko $k \in \omega$. Tada je, na osnovu teoreme 7.1.7 (a), $|[\rho_k]_{\cong}| = \mathfrak{c}$. Definišimo skupove S_i, $i \in \omega$, na sledeći način:

$$S_i = \Big\{ f \in \mathrm{Sym}(\omega) : f(k) = i \Big\}, \quad i \in \omega.$$

Tada, za svako $i \in \omega$, imamo da je $|S_i| = |\mathrm{Sym}(\omega)| = \mathfrak{c}$, i $\mathrm{Sym}(\omega) = \bigcup_{i \in \omega} S_i$ je particija skupa $\mathrm{Sym}(\omega)$. Na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) imamo da je

$$[\rho_k]_{\cong} = \Big\{ f[\rho_k] : f \in \mathrm{Sym}(\omega) \Big\} = \bigcup_{i \in \omega} \Big\{ f[\rho_k] : f \in S_i \Big\}.$$

Dakle, postoji $j \in \omega$ takvo da je $|\{f[\rho_k] : f \in S_j\}| = \mathfrak{c}$. Neka je $S'_j \subseteq S_j$ takvo da je $\{f[\rho_k] : f \in S'_j\} = \{f[\rho_k] : f \in S_j\}$, i da za sve $f, g \in S'_j$, $f \neq g$, važi $f[\rho_k] \neq g[\rho_k]$. Tada, na osnovu (7.8), za $f, g \in S'_j$, $f \neq g$, imamo da je $f[\rho_k] = (f[\rho])_{f(k)} = (f[\rho])_j$ i $g[\rho_k] = (g[\rho])_{g(k)} = (g[\rho])_j$. Kako je $f[\rho_k] \neq g[\rho_k]$, imamo da je $(f[\rho])_j \neq (g[\rho])_j$, pa je i $f[\rho] \neq g[\rho]$. Dakle,

$$|[\rho]_{\cong}| = \Big| \Big\{ f[\rho] : f \in \mathrm{Sym}(\omega) \Big\} \Big| \geq \Big| \Big\{ f[\rho] : f \in S'_j \Big\} \Big| = |S'_j| = \mathfrak{c},$$

a to je kontradikcija s polaznom pretpostavkom.

(b) Na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) i na osnovu (7.7), imamo da je

$$[\rho']_{\cong} = \Big\{ f[\rho'] : f \in \mathrm{Sym}(\omega) \Big\} = \Big\{ (f[\rho])' : f \in \mathrm{Sym}(\omega) \Big\} = \Psi[[\rho]_{\cong}],$$

gde je $\Psi : \omega^n \to \omega^{n-1}$ dato sa $\Psi(\rho) := \rho'$, za $\rho \in \omega^n$. Dakle,

$$|[\rho']_{\cong}| \leq |[\rho]_{\cong}| = \omega.$$

□

Lema 7.1.9 *Neka je $n \geq 2$ i $\rho \in \mathrm{Int}_{L_n}(\omega)$. Ako je $|[\rho]_{\cong}| = \omega$, tada važi:*

(a) Skup $\{[\rho'_k]_{\cong} : k \in \omega\}$ je konačan;

(b) Ako je $\{[\rho'_k]_{\cong} : k \in \omega\} = \{[\rho'_{k_i}]_{\cong} : i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$, tada za particiju $\omega = \bigcup_{i=1}^{m} P_i$, gde je $P_i := \{k \in \omega : [\rho'_k]_{\cong} = [\rho'_{k_i}]_{\cong}\}$, za $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, važi da je tačno jedan od skupova P_i, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, beskonačan.

Dokaz.

(a) Pretpostavimo suprotno, da je $|[\rho]_{\cong}| = \omega$, za neko $\rho \in \mathrm{Int}_{L_n}(\omega)$, i da je skup $\{[\rho'_k]_{\cong} : k \in \omega\}$ beskonačan. Neka je $P \subseteq \omega$ takvo da je $\{[\rho'_k]_{\cong} : k \in P\} = \{[\rho'_k]_{\cong} : k \in \omega\}$, i da za sve $i, j \in P$, $i \neq j$, važi

$$[\rho'_i]_{\cong} \neq [\rho'_j]_{\cong}. \tag{7.10}$$

Za $f \in \mathrm{Sym}(P)$ uvedimo oznaku $\tilde{f} := f \cup \mathrm{id}_{P^c} \in \mathrm{Sym}(\omega)$. Dokažimo sledeće:

$$\forall f, g \in \mathrm{Sym}(P) \ \Big(f \neq g \Rightarrow \tilde{f}[\rho] \neq \tilde{g}[\rho]\Big). \tag{7.11}$$

Uzmimo bijekcije $f, g \in \mathrm{Sym}(P)$ takve da je $f \neq g$. Tada je i $f^{-1} \neq g^{-1}$, pa postoji $m \in P$ takvo da je $f^{-1}(m) \neq g^{-1}(m)$. Sada, na osnovu (7.9) imamo da je

$$\tilde{f}[\rho'_{f^{-1}(m)}] = (\tilde{f}[\rho])'_{\tilde{f}(f^{-1}(m))} = (\tilde{f}[\rho])'_m,$$

i da je

$$\tilde{g}[\rho'_{g^{-1}(m)}] = (\tilde{g}[\rho])'_{\tilde{g}(g^{-1}(m))} = (\tilde{g}[\rho])'_m.$$

Dakle, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) imamo da je

$$[(\tilde{f}[\rho])'_m]_{\cong} = [\tilde{f}[\rho'_{f^{-1}(m)}]]_{\cong} = [\rho'_{f^{-1}(m)}]_{\cong},$$

i da je

$$[(\tilde{g}[\rho])'_m]_{\cong} = [\tilde{g}[\rho'_{g^{-1}(m)}]]_{\cong} = [\rho'_{g^{-1}(m)}]_{\cong}.$$

Kako je $f^{-1}(m) \neq g^{-1}(m)$, na osnovu (7.10) imamo da je $[\rho'_{f^{-1}(m)}]_{\cong} \neq [\rho'_{g^{-1}(m)}]_{\cong}$. Dakle, $[(\tilde{f}[\rho])'_m]_{\cong} \neq [(\tilde{g}[\rho])'_m]_{\cong}$, što implicira da je $\tilde{f}[\rho] \neq \tilde{g}[\rho]$, čime smo dokazali (7.11). Na kraju, prema tvrđenju 1.1.5 (a) imamo da je

$$|[\rho]_{\cong}| \geq \Big|\Big\{\tilde{f}[\rho] : f \in \mathrm{Sym}(P)\Big\}\Big| = |\,\mathrm{Sym}(P)| = |\,\mathrm{Sym}(\omega)| = \mathfrak{c},$$

a to je kontradikcija s polaznom pretpostavkom.

(b) Neka je

$$\Big\{[\rho'_k]_{\cong} : k \in \omega\Big\} = \Big\{[\rho'_{k_i}]_{\cong} : i \in \{1, 2, \ldots, m\}\Big\},$$

i neka je $\omega = \bigcup_{i=1}^m P_i$ particija skupa ω, gde je $P_i := \{k \in \omega : [\rho'_k]_{\cong} = [\rho'_{k_i}]_{\cong}\}$, za $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Tada je jasno da postoji $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ takvo da je $|P_j| = \omega$. Pretpostavimo suprotno, da postoji i $l \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{j\}$ takvo da je $|P_l| = \omega$. Definišimo funkciju $\Phi : \mathrm{Int}_{L_n}(\omega) \to \Big(\mathrm{Int}_{L_{n-1}}(\omega)/\cong\Big)^P$, gde je $P := P_j \cup P_l$, na sledeći način:

$$\Phi(\sigma) = \Big\langle [\sigma'_k]_{\cong} : k \in P \Big\rangle, \text{ za } \sigma \in \mathrm{Int}_{L_n}(\omega).$$

Neka je niz $\mathcal{L} \subseteq \{[\rho'_{k_j}]_{\cong}, [\rho'_{k_l}]_{\cong}\}^P$ dat sa

$$\mathcal{L} := \Big\{ F \in \{[\rho'_{k_j}]_{\cong}, [\rho'_{k_l}]_{\cong}\}^P : |F^{-1}[\{[\rho'_{k_j}]_{\cong}\}]| = |F^{-1}[\{[\rho'_{k_l}]_{\cong}\}]| = \omega \Big\}.$$

Jasno je da važi $|\mathcal{L}| = \Big|\Big\{[\rho'_{k_j}]_{\cong}, [\rho'_{k_l}]_{\cong}\Big\}^P\Big| = \mathfrak{c}$, i da, za proizvoljno $G \in \mathcal{L}$, imamo da je

$$\mathcal{L} = \Big\{ G \circ f^{-1} : f \in \mathrm{Sym}(P) \Big\}. \tag{7.12}$$

Na osnovu definicije skupa P, funkcije Φ i skupa $\mathcal{L}$, imamo da $\Phi(\rho) \in \mathcal{L}$. Za $f \in \mathrm{Sym}(P)$ uvedimo oznaku $\tilde{f} := f \cup \mathrm{id}_{P^c} \in \mathrm{Sym}(\omega)$. Sada, na osnovu (7.9) i na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), za $f \in \mathrm{Sym}(P)$ imamo da je

$$\Phi(\tilde{f}[\rho]) = \Big\langle \Big[(\tilde{f}[\rho])'_k\Big]_{\cong} : k \in P \Big\rangle = \Big\langle \Big[(\tilde{f}[\rho])'_{\tilde{f}(f^{-1}(k))}\Big]_{\cong} : k \in P \Big\rangle =$$

$$= \Big\langle \Big[\tilde{f}[\rho'_{f^{-1}(k)}]\Big]_{\cong} : k \in P \Big\rangle = \Big\langle [\rho'_{f^{-1}(k)}]_{\cong} : k \in P \Big\rangle =$$

$$= \Big\langle [\rho'_k]_{\cong} : k \in P \Big\rangle \circ f^{-1} = \Phi(\rho) \circ f^{-1}.$$

Dakle, na osnovu (7.12) imamo da je

$$\Phi\Big[\Big\{\tilde{f}[\rho] : f \in \mathrm{Sym}(P)\Big\}\Big] = \Big\{\Phi(\rho) \circ f^{-1} : f \in \mathrm{Sym}(P)\Big\} = \mathcal{L},$$

odakle sledi da je

$$|[\rho]_{\cong}| = \Big|\Big\{f[\rho] : f \in \mathrm{Sym}(\omega)\Big\}\Big| \geq \Big|\Big\{\tilde{f}[\rho] : f \in \mathrm{Sym}(P)\Big\}\Big| \geq |\mathcal{L}| = \mathfrak{c},$$

a to je kontradikcija s polaznom pretpostavkom. $\square$

Lema 7.1.10 *Neka $n \in \mathbb{N}$ i $\rho \in \mathrm{Int}_{L_n}(\omega)$. Ako je $|[\rho]_{\cong}| = \omega$, tada je relacija ρ reverzibilna.*

Dokaz. Dokaz ide indukcijom po n. Ako je $n = 1$, tada imamo da

$$|[\rho]_{\cong}| = \Big|\Big\{f[\rho] : f \in \mathrm{Sym}(\omega)\Big\}\Big| = \omega$$

implicira da $\rho \in [\omega]^{<\omega}$ ili da $\rho^c \in [\omega]^{<\omega}$. U svakom slučaju, na osnovu tvrđenja 8.2.2 (c) imamo da je ρ reverzibilna relacija. Pretpostavimo sada da, za svako $\rho \in \mathrm{Int}_{L_n}(\omega)$, važi da, ako je $|[\rho]_{\cong}| = \omega$, tada je relacija ρ reverzibilna. Neka dalje $\rho \in \mathrm{Int}_{L_{n+1}}(\omega)$ i neka je $|[\rho]_{\cong}| = \omega$. Tada, na osnovu leme 7.1.8, za svako $k \in \omega$ imamo da je $|[\rho'_k]_{\cong}| \leq \omega$. Ako je $|[\rho'_k]_{\cong}| = \omega$, tada je, na osnovu indukcijske hipoteze, relacija ρ'_k reverzibilna. A ako je $|[\rho'_k]_{\cong}| < \omega$, tada, na osnovu leme 7.1.4, imamo da je $[\rho'_k]_{\cong} = \{\rho'_k\}$, što znači da je relacija ρ'_k jako reverzibilna. U svakom slučaju, sve relacije ρ'_k, $k \in \omega$, su reverzibilne.

Pretpostavimo suprotno, da relacija ρ nije reverzibilna. Tada, na osnovu tvrđenja 8.2.1 (g), postoji $f \in \mathrm{Sym}(\omega)$ takvo da je $f[\rho] \subsetneq \rho$. Imamo da je

$$\rho = \bigcup_{k\in\omega} \rho_k = \bigcup_{k\in\omega} (\rho'_k \times \{k\}).$$

Tada je $f[\rho] = \bigcup_{k\in\omega}(f[\rho'_k] \times \{f(k)\})$, pa je

$$\bigcup_{k\in\omega} \Big(f[\rho'_k] \times \{f(k)\} \Big) \subsetneq \bigcup_{k\in\omega} \Big(\rho'_k \times \{k\} \Big) = \bigcup_{k\in\omega} \Big(\rho'_{f(k)} \times \{f(k)\} \Big).$$

Dakle, za svako $k \in \omega$ imamo da je

$$f[\rho'_k] \subseteq \rho'_{f(k)}, \tag{7.13}$$

i postoji $k_0 \in \omega$ takvo da je

$$f[\rho'_{k_0}] \subsetneq \rho'_{f(k_0)}. \tag{7.14}$$

Razmotrićemo dva slučaja:

1. Skup $\{f^l(k_0) : l \in \mathbb{N}\}$ je konačan, gde je $f^l = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{l}$. Tada postoji $m \in \mathbb{N}$ takvo da je $f^m(k_0) = k_0$. Na osnovu (7.13) i (7.14) imamo da je

$$f^m[\rho'_{k_0}] \subsetneq f^{m-1}[\rho'_{f(k_0)}] \subseteq f^{m-2}[\rho'_{f^2(k_0)}] \subseteq \cdots \subseteq f[\rho'_{f^{m-1}(k_0)}] \subseteq \rho'_{f^m(k_0)}.$$

Dakle, $f^m[\rho'_{k_0}] \subsetneq \rho'_{k_0}$, a to je kontradikcija s tvrđenjem 8.2.1 (g).

2. Skup $\{f^l(k_0) : l \in \mathbb{N}\}$ je beskonačan. Tada su u nizu $\langle f^l(k_0) : l \in \mathbb{Z}\rangle$ svi članovi međusobno različiti (gde je $f^0 = \mathrm{id}_\omega$ i $f^{-m} := (f^{-1})^m$ za $m \in \mathbb{N}$). Na osnovu leme 7.1.9 postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $[\rho'_{f^{-i}(k_0)}]_{\cong} = [\rho'_{f^j(k_0)}]_{\cong}$. Na osnovu (7.13) i (7.14) imamo da je

$$f^{i+j}[\rho'_{f^{-i}(k_0)}] \subseteq f^{i+j-1}[\rho'_{f^{-(i-1)}(k_0)}] \subseteq \cdots \subseteq f^{j+1}[\rho'_{f^{-1}(k_0)}] \subseteq f^j[\rho'_{k_0}] \subsetneq$$

$$\subsetneq f^{j-1}[\rho'_{f(k_0)}] \subseteq f^{j-2}[\rho'_{f^2(k_0)}] \subseteq \cdots \subseteq f[\rho'_{f^{j-1}(k_0)}] \subseteq \rho'_{f^j(k_0)}.$$

Dakle, imamo da je $f^{i+j}[\rho'_{f^{-i}(k_0)}] \subsetneq \rho'_{f^j(k_0)}$, i pri tome, $f^{i+j}[\rho'_{f^{-i}(k_0)}]$ i $\rho'_{f^j(k_0)}$ pripadaju antilancu $[\rho'_{f^{-i}(k_0)}]_{\cong} = [\rho'_{f^j(k_0)}]_{\cong}$, što je kontradikcija.

Kako smo u oba slučaja dobili kontradikciju, zaključujemo da je relacija ρ reverzibilna. □

Teorema 7.1.11 *Neka je $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ neprazan relacijski jezik i neka $\rho \in \mathrm{Int}_L(\omega)$. Ako je $|[\rho]_{\cong}| = \omega$, tada je interpretacija ρ reverzibilna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $|[\rho]_{\cong}| = \omega$, za neko $\rho = \langle \rho_i : i \in I\rangle \in \mathrm{Int}_L(\omega)$. Na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) imamo da je

$$[\rho]_{\cong} = \Big\{ f[\rho] : f \in \mathrm{Sym}(\omega) \Big\} = \Big\{ \langle f^{n_i}[\rho_i] : i \in I\rangle : f \in \mathrm{Sym}(\omega) \Big\},$$

odakle sledi da je $\pi_i\Big[[\rho]_{\cong}\Big] = [\rho_i]_{\cong}$, za $i \in I$. Dakle, $|[\rho_i]_{\cong}| \leq |[\rho]_{\cong}| = \omega$, za svako $i \in I$. Ako je $|[\rho_i]_{\cong}| = \omega$, tada, na osnovu leme 7.1.10, imamo da je relacija ρ_i reverzibilna. A ako je $|[\rho_i]_{\cong}| < \omega$, tada, na osnovu leme 7.1.4, imamo da je $[\rho_i]_{\cong} = \{\rho_i\}$, tj. da je relacija ρ_i jako reverzibilna. U svakom slučaju, sve relacije ρ_i, $i \in I$, su reverzibilne, pa, na osnovu tvrđenja 8.2.2 (a), zaključujemo da je interpretacija ρ reverzibilna. □

Primer 7.1.12 Neka je $L = L_b$ binarni jezik, i neka je $\rho = <_\omega \in \mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$ prirodni poredak na skupu ω. Tada je ρ reverzibilna relacija, i pri tome je

$$|[\rho]_{\cong}| = \Big| \Big\{ f[\rho] : f \in \mathrm{Sym}(\omega) \Big\} \Big| = \mathfrak{c}.$$

Dakle, ne važi obrat teoreme 7.1.11.

Teorema 7.1.13 *Neka je L najviše prebrojiv relacijski jezik i neka $\rho \in \mathrm{Int}_L(\omega)$. Tada je $|[\rho]_{\cong}| = |[\rho]_{\sim_c}|$.*

Dokaz. Po teoremi 7.1.7 imamo da $|[\rho]_{\cong}| \in \{1, \omega, \mathfrak{c}\}$. Ako je $|[\rho]_{\cong}| = 1$, tada je ρ jako reverzibilna interpretacija, što implicira da je $[\rho]_{\sim_c} = [\rho]_{\cong}$. Ako je $|[\rho]_{\cong}| = \omega$, tada je, na osnovu teoreme 7.1.11, interpretacija ρ reverzibilna, što implicira da je $[\rho]_{\sim_c} = [\rho]_{\cong}$. A ako je $|[\rho]_{\cong}| = \mathfrak{c}$, tada imamo da je

$$\mathfrak{c} = |[\rho]_{\cong}| \leq |[\rho]_{\sim_c}| \leq \mathfrak{c}.$$

□

Primer 7.1.14 Neka je $L = L_b$ binarni jezik, i neka su relacije $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$ date sa

$$\rho_1 := \Delta_\omega, \quad \rho_2 := \{\langle 0, 0\rangle\}, \text{ i } \rho_3 := X \times X,$$

gde je $X \subseteq \omega$ skup parnih brojeva. Tada je

$$[\rho_1]_{\cong} = [\rho_1]_{\sim_c} = \{\rho_1\},$$

$$[\rho_2]_{\cong} = [\rho_2]_{\sim_c} = \{\{\langle n, n\rangle\} : n \in \omega\},$$

$$[\rho_3]_{\cong} = \Big\{Y \times Y : Y \subseteq \omega \wedge |Y| = |\omega \setminus Y| = \omega\Big\}.$$

Dakle, imamo da je

$$|[\rho_1]_{\cong}| = |[\rho_1]_{\sim_c}| = 1, \quad |[\rho_2]_{\cong}| = |[\rho_2]_{\sim_c}| = \omega, \text{ i } |[\rho_3]_{\cong}| = |[\rho_3]_{\sim_c}| = \mathfrak{c}.$$

Primer 7.1.15 Neka je $L = L_b$ binarni jezik, i neka $\rho \in \mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$. Binarnu strukturu $\langle \omega, \rho\rangle$ možemo identifikovati s digrafom (u širem smislu) čiji skup čvorova je ω. Čvorovi a i b spojeni su ivicom, usmerenom od a ka b, akko je $a\rho b$. Za $a = b$ imamo petlju. Izlazni stepen čvora n u digrafu $\langle \omega, \rho\rangle$ je broj ivica koje napuštaju čvor n. Drugim rečima,

$$\deg^+_\rho(n) = \Big|\Big\{\langle a, b\rangle \in \rho : a = n\Big\}\Big|.$$

Za $\rho \in \mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$ i $n \in \omega$, imamo da $\deg^+_\rho(n) \in \omega \cup \{\omega\}$. Sledeći uslovi impliciraju da, za $\rho \in \mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$, važi da je $|[\rho]_{\cong}| = |[\rho]_{\sim_c}| = \mathfrak{c}$:

(i) Skup $D = \{\deg^+_\rho(n) : n \in \omega\}$ je beskonačan;

(ii) Skup $D = \{\deg^+_\rho(n) : n \in \omega\} = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$ je konačan, i postoje $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $i \neq j$, takvi da je

$$\Big|\Big\{n \in \omega : \deg^+_\rho(n) = d_i\Big\}\Big| = \Big|\Big\{n \in \omega : \deg^+_\rho(n) = d_j\Big\}\Big| = \omega;$$

(iii) Postoji $n \in \omega$ takvo da je $\deg^+_\rho(n) = \deg^+_{\rho^c}(n) = \omega$.

Isto važi i za ulazni stepen

$$\deg^-_\rho(n) = \Big|\Big\{\langle a, b\rangle \in \rho : b = n\Big\}\Big|.$$

7.2 Kondenzaciona ekvivalencija i druge sličnosti beskonačnih struktura neunarnih jezika

Neka je L neunaran relacijski jezik, i κ beskonačan kardinal. U ovom odeljku, na dijagram sa slike 5.1 dodaćemo binarne relacije $\sim_c$ i $\equiv$ na skupu $\mathrm{Int}_L(\kappa)$, i dokazati sledeću teoremu. Rezultati iz ovog i narednog odeljka dokazani su u [46].

Teorema 7.2.1 *Ako je $\kappa \geq \omega$ kardinal i L neunaran relacijski jezik, tada važi:*

(a) Na dijagramu na slici 7.1 sve implikacije a – q su prave i nema novih implikacija (osim onih koje slede iz tranzitivnosti);

(b) Ako je $\kappa = \omega$, tada je pozicija elementarne ekvivalencije $\equiv$ u odnosu na sličnosti $\sim_k$, $k \leq 11$, ista kao pozicija kondenzacione ekvivalencije $\sim_c$ na dijagramu na slici 7.1. Pored toga, ove dve sličnosti su neuporedive.

Primedba 7.2.2 Na osnovu teoreme 3.7 iz [31] (teorema 5.3.2), tvrđenje (a) tačno je za onaj deo dijagrama koji opisuje odnos između sličnosti $\sim_k$, za $k \leq 11$. Implikacija p sledi iz tvrđenja 6.1.2 (d), implikacija q je trivijalna, i jasno je da to nisu ekvivalencije. Dakle, da bismo pokazali da nema novih implikacija (osim onih koje slede iz tranzitivnosti), dovoljno je pokazati da $\sim_2 \not\Rightarrow \sim_c$ (što implicira da $\sim_k \not\Rightarrow \sim_c$, za $k \geq 4$), i da $\sim_c \not\Rightarrow \sim_{10}$ (što implicira da $\sim_c \not\Rightarrow \sim_k$, za $k \leq 10$). Slično, za dokaz tvrđenja (b) dovoljno je dokazati da $\sim_2 \not\Rightarrow \equiv$, i da $\equiv \not\Rightarrow \sim_{10}$, kao i da su sličnosti $\sim_c$ i $\equiv$ neuporedive.

Prvo ćemo uraditi posao za skup $\mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$, tako što ćemo konstruisati odgovarajuće strukture s prebrojivim domenom (koje se lako mogu transformisati u strukture s domenom ω).

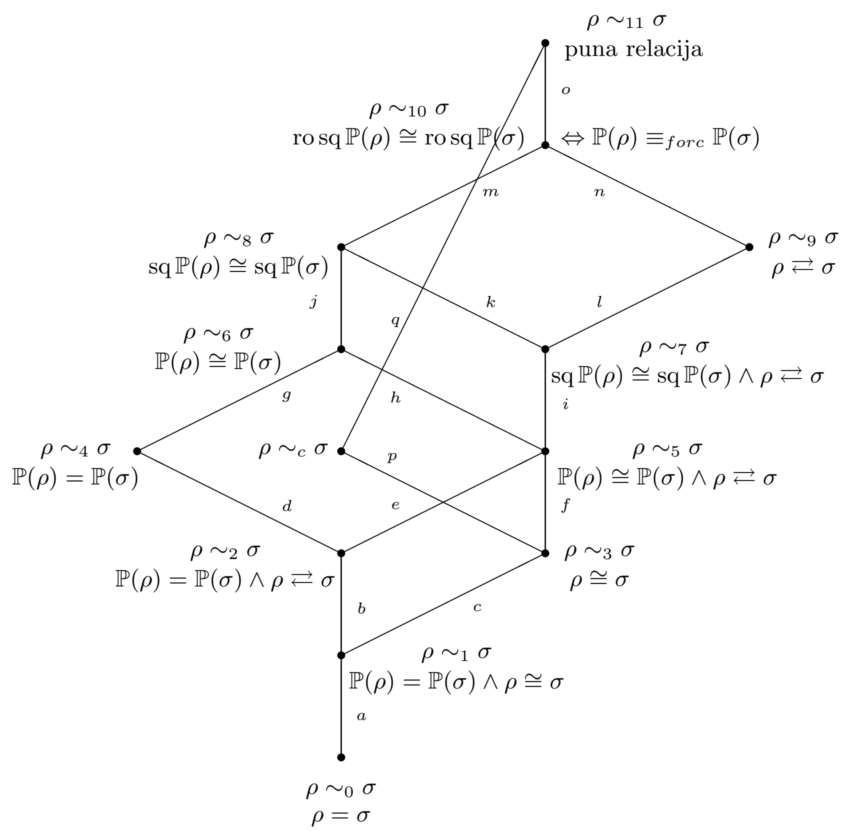
Primer 7.2.3 $\sim_2 \;\not\Longrightarrow\; \sim_c$ (i, na osnovu toga, $\sim_k \;\not\Longrightarrow\; \sim_c$, za $k \geq 4$) na $\mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$.

Neka $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$, gde je

$$\rho := \Big\{\langle n, n+1\rangle : n \in \omega\Big\} \cup \Big\{\langle 2n, 2n\rangle : n \in \omega\Big\},$$

$$\sigma := \Big\{\langle n, n+1\rangle : n \in \omega\Big\} \cup \Big\{\langle 2n+1, 2n+1\rangle : n \in \omega\Big\}.$$

Tada je $\mathbb{P}(\rho) = \mathbb{P}(\sigma) = \{[2n, \infty)_\omega : n \in \omega\}$ i $\rho \rightleftarrows \sigma$, dakle, $\rho \sim_2 \sigma$. Pretpostavimo da je $\rho \sim_c \sigma$ i da $f \in \mathrm{Cond}(\rho, \sigma)$. Tada, pošto $\langle 0, 0\rangle \in \rho$,



Slika 7.1: Implikacije između sličnosti na skupu $\mathrm{Int}_L(\kappa)$

imamo da $\langle f(0), f(0)\rangle \in \sigma$, pa je $f(0) = 2n + 1$, za neko $n \in \omega$. Pošto je f surjekcija, postoji $m \in \omega$ takvo da je $f(m) = 0$, i, na osnovu prethodno zaključenog, imamo da je $m > 0$. S obzirom da $\langle m - 1, m\rangle \in \rho$, sledi da $\langle f(m-1), f(m)\rangle \in \sigma$, tj. da $\langle f(m-1), 0\rangle \in \sigma$, što nije tačno. Dakle, $\rho \not\sim_c \sigma$.

Primer 7.2.4 $\sim_c \;\not\Rightarrow\; \sim_{10}$ (i, na osnovu toga, $\equiv \;\not\Rightarrow\; \sim_k$, za $k \leq 10$) na skupu $\mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$.

Umesto ω, uzećemo skup $X = A \cup B \cup Q$, gde je Q skup racionalnih brojeva, skupovi A, B i Q su po parovima disjunktni, i $|A| = |B| = \omega$. Neka je $<_{\mathbb{Q}}$ uobičajeni linearni poredak na Q, neka je $\mathbb{Q} = \langle Q, <_{\mathbb{Q}}\rangle$, i neka su interpretacije $\rho, \rho', \sigma \in \mathrm{Int}_{L_b}(X)$ definisane na sledeći način:

$$\rho' = A^2,\ \sigma = A^2 \cup <_{\mathbb{Q}}, \quad \text{i} \quad \rho = (A \cup Q)^2.$$

Tada je $\rho \cong \rho'$, i, kako je $\rho' \subseteq \sigma \subseteq \rho$, na osnovu tvrđenja 6.1.1 (a) imamo da je $\rho \sim_c \sigma$. Lako se vidi da je

$$\mathbb{P}(\rho) := \Big\{ U \cup V : U \in [A \cup Q]^\omega \wedge V \in [B]^\omega \Big\},$$

dakle $\mathbb{P}(\rho) \cong \langle [\omega]^\omega, \subseteq \rangle^2$, i, na osnovu tvrđenja 1.2.10 (c) i 1.2.9 (c), je

$$\operatorname{sq} \mathbb{P}(\rho) \cong ((P(\omega)/\operatorname{Fin})^+)^2. \tag{7.15}$$

Komponente povezanosti strukture $\langle X, \sigma \rangle$ su skupovi A, Q, i $\{b\}$ za $b \in B$. Dakle, ako $f \in \operatorname{Emb}(\langle X, \sigma \rangle)$, na osnovu tvrđenja 2.3.3 i pošto f očuvava (i)refleksivnost, imamo da je $f[A] \subseteq A$ i $f[Q] \subseteq Q$. Ako $b \in B$, tada iz $\langle b, b \rangle \notin \sigma$ sledi da $f(b) \notin A$. $f(b) \in Q$ bi impliciralo da je $f(b) \leq_{\mathbb{Q}} f(0)$ ili $f(0) \leq_{\mathbb{Q}} f(b)$, i pošto je f jak homomorfizam, $\langle b, 0 \rangle \in \sigma$ ili $\langle 0, b \rangle \in \sigma$, što je netačno. Dakle, $f[B] \subseteq B$. Na osnovu tvrđenja 2.3.3 opet, imamo da

$$f \upharpoonright_A \in \operatorname{Emb}(A, A^2) = \operatorname{Inj}(A), \quad f \upharpoonright_B \in \operatorname{Emb}(B, \emptyset) = \operatorname{Inj}(B), \quad \text{i} \quad f \upharpoonright_Q \in \operatorname{Emb}(\mathbb{Q}),$$

što implicira da je

$$\mathbb{P}(\sigma) = \Big\{ U \cup V \cup W : U \in [A]^\omega \wedge V \in [B]^\omega \wedge W \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}) \Big\} \cong \langle [\omega]^\omega, \subseteq \rangle^2 \times \mathbb{P}(\mathbb{Q}),$$

i odatle je, na osnovu tvrđenja 1.2.10 (c) i 1.2.9 (c),

$$\operatorname{sq} \mathbb{P}(\sigma) \cong ((P(\omega)/\operatorname{Fin})^+)^2 \times \operatorname{sq} \mathbb{P}(\mathbb{Q}).$$

Na osnovu rezultata Kurilića i Todorčevića ([57]), forsing $\mathbb{P}(\mathbb{Q})$ (pa i $\mathbb{P}(\sigma)$) proizvodi Sacksov realan broj, dok je, na osnovu (7.15), forsing $\mathbb{P}(\rho)$ forsing ekvivalentan ω_1-zatvorenom posetu[2], pa ne proizvodi nove realne brojeve. Dakle, $\mathbb{P}(\rho) \not\equiv_{forc} \mathbb{P}(\sigma)$, tj. $\rho \not\sim_{10} \sigma$.

Primer 7.2.5 $\sim_2 \not\Rightarrow \equiv$ (i, na osnovu toga, $\sim_k \not\Rightarrow \equiv$, za $k \geq 4$) na skupu $\operatorname{Int}_{L_b}(\omega)$.

Za interpretacije ρ i σ, definisane u primeru 7.2.3, imamo da je $\rho \sim_2 \sigma$, ali $\langle \omega, \rho \rangle \not\equiv \langle \omega, \sigma \rangle$, zato što, za rečenicu

$$\varphi := \exists v_1 \; (R(v_1, v_1) \wedge \forall v_2 \; (R(v_2, v_1) \Rightarrow v_2 = v_1)),$$

imamo da je $\langle \omega, \rho \rangle \models \varphi$, ali je $\langle \omega, \sigma \rangle \models \neg\varphi$.

[2]Poset $\mathbb{P}$ je *λ-zatvoren*, gde $\lambda \in \operatorname{Card}$, akko svaki inverzno dobro uređen lanac u $\mathbb{P}$ kardinalnosti $< \lambda$ ima donje ograničenje. Poset $\mathbb{P}$ je σ-zatvoren akko je ω_1-zatvoren (videti [29, str. 214]).

Primer 7.2.6 $\equiv \;\not\Rightarrow\; \sim_{10}$ (i, na osnovu toga, $\equiv \;\not\Rightarrow\; \sim_k$, za $k \leq 10$) na skupu $\mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$.

Neka je $\mathbb{X}$ linearno uređenje $\langle \omega, < \rangle$. Poznato je da, za linearno uređenje $\mathbb{Y} = \omega + \mathbb{Q} \cdot \mathbb{Z}$, imamo da je $\mathbb{X} \equiv \mathbb{Y}$, i, bez ograničenja opštosti, možemo pretpostaviti da strukture $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ imaju isti domen ω. Za odgovarajuće interpretacije, recimo ρ i σ, imamo da $\rho \not\sim_{10} \sigma$, zato što je poset $\mathbb{P}(\mathbb{X})$ forsing ekvivalentan posetu $(P(\omega)/\,\mathrm{Fin})^+$, pa ne proizvodi nove realne brojeve, dok je $\mathbb{Y}$ nerasuto linearno uređenje i, na osnovu rezultata Kurilića i Todorčevića ([57]), poset $\mathbb{P}(\mathbb{Y})$ je forsing ekvivalentan dvokoračnoj iteraciji $\mathbb{S} * \pi$, gde je $\mathbb{S}$ Sacksov forsing a π je $\mathbb{S}$-ime za ω_1-zatvoren forsing. Dakle, forsing pomoću $\mathbb{P}(\mathbb{Y})$ proizvodi Sacksov realan broj.

Primer 7.2.7 Sličnosti $\equiv$ i $\sim_c$ su neuporedive na skupu $\mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$.

Ako su $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ linearna uređenja iz primera 7.2.6, tada je $\mathbb{X} \equiv \mathbb{Y}$. Za proizvoljna linearna uređenja $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$, na osnovu leme 1.3.1, važi $\mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \mathrm{Iso}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, pa bi $\mathbb{X} \sim_c \mathbb{Y}$ impliciralo da je $\mathbb{X} \cong \mathbb{Y}$, što nije tačno. Dakle, $\mathbb{X} \not\sim_c \mathbb{Y}$.

Sada ćemo pokazati da $\sim_c$ ne implicira $\equiv$. Neka je Z skup celih brojeva, i, za $n \in Z$, definisaćemo $\rho_n \in \mathrm{Int}_{L_b}(Z)$ na sledeći način:

$$\rho_n := \Big\{ \langle 2k, 2k+1 \rangle : k \in Z \Big\} \cup \Big\{ \langle k, k \rangle : k \geq 2n \Big\}.$$

Ako je $\sigma_n = \rho_n \setminus \{\langle 2n, 2n \rangle\}$, tada imamo da je $\rho_1 \subseteq \sigma_0 \subseteq \rho_0$, i, na osnovu tvrđenja 6.1.1 (a), je $\rho_0 \sim_c \sigma_0$. Ako je φ L_b-rečenica

$$\forall v_1, v_2 \; (R(v_1, v_2) \wedge R(v_2, v_2) \Rightarrow R(v_1, v_1)),$$

tada je $\langle Z, \rho_0 \rangle \models \varphi$ i $\langle Z, \sigma_0 \rangle \models \neg\varphi$. Dakle, $\rho_0 \not\equiv \sigma_0$.

Ako je $\mathbb{X} = \langle X, \rho \rangle$ L_b-struktura, sa $\mathbb{X}_{re}$ označavaćemo njenu *refleksivizaciju* $\langle X, \rho \cup \Delta_X \rangle$.

Tvrđenje 7.2.8 *([31]) Ako je $\mathbb{X}$ L-struktura, tada je $\mathbb{P}(\mathbb{X}) = \mathbb{P}(\mathbb{X}^c)$. Ako je $L = L_b$ i ako je struktura $\mathbb{X}$ irefleksivna, tada je $\mathbb{P}(\mathbb{X}) = \mathbb{P}(\mathbb{X}_{re})$.*

Tvrđenje 7.2.9 *Ako su L_b-strukture $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ irefleksivne, tada je*

$$\mathbb{X} \equiv \mathbb{Y} \iff \mathbb{X}_{re} \equiv \mathbb{Y}_{re}.$$

Dokaz. Pridružićemo rekurzijom svakoj L_b-formuli $\psi(v_1, \ldots, v_k)$ L_b-formulu $\psi^{re}(v_1, \ldots, v_k)$ na sledeći način: $(v_i = v_j)^{re} := v_i = v_j$, $(R(v_i, v_j))^{re} :=$

$R(v_i, v_j)$, za $i \neq j$, $(R(v_i, v_i))^{re} := \neg R(v_i, v_i)$, $(\neg\psi)^{re} := \neg\psi^{re}$, $(\psi_1 \wedge \psi_2)^{re} := \psi_1^{re} \wedge \psi_2^{re}$, $(\exists v\ \psi)^{re} := \exists v\ \psi^{re}$. Jednostavnom indukcijom po složenosti formule, pokazuje se da za svaku irefleksivnu L_b-strukturu $\mathbb{X}$, za svaku L_b-strukturu $\mathbb{Y}$, i za svaku L_b-formulu $\psi(v_1, \ldots, v_k)$ imamo

$$\forall x_1, \ldots, x_k \in X\ (\mathbb{X} \models \psi[x_1, \ldots, x_k] \Leftrightarrow \mathbb{X}_{re} \models \psi^{re}[x_1, \ldots, x_k]), \tag{7.16}$$

$$\forall y_1, \ldots, y_k \in Y\ (\mathbb{Y} \models (\psi^{re})^{re}[y_1, \ldots, y_k] \Leftrightarrow \mathbb{Y} \models \psi[y_1, \ldots, y_k]), \tag{7.17}$$

Dakle, ako je $\mathbb{X} \equiv \mathbb{Y}$, tada, za svaku L_b-rečenicu ψ, imamo da je $\mathbb{X}_{re} \models \psi$ akko je $\mathbb{X}_{re} \models (\psi^{re})^{re}$ akko je $\mathbb{X} \models \psi^{re}$ akko je $\mathbb{Y} \models \psi^{re}$ akko je $\mathbb{Y}_{re} \models (\psi^{re})^{re}$ akko je $\mathbb{Y}_{re} \models \psi$, pa je $\mathbb{X}_{re} \equiv \mathbb{Y}_{re}$. Obratno, ako je $\mathbb{X}_{re} \equiv \mathbb{Y}_{re}$, tada, za svaku L_b-rečenicu ψ, imamo da je $\mathbb{X} \models \psi$ akko je $\mathbb{X}_{re} \models \psi^{re}$ akko je $\mathbb{Y}_{re} \models \psi^{re}$ akko je $\mathbb{Y} \models \psi$, pa je $\mathbb{X} \equiv \mathbb{Y}$. □

Tvrđenje 7.2.10 *Ako je L relacijski jezik i $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathrm{Mod}_L$, tada je*

$$\mathbb{X} \equiv \mathbb{Y} \iff \mathbb{X}^c \equiv \mathbb{Y}^c.$$

Dokaz. Pridružićemo rekurzijom svakoj L-formuli $\psi(v_1, \ldots, v_k)$ L-formulu $\psi^c(v_1, \ldots, v_k)$ na sledeći način: $(v_i = v_j)^c := v_i = v_j$, $(R_i(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n_i}}))^c := \neg R_i(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n_i}})$, $(\neg\psi)^c := \neg\psi^c$, $(\psi_1 \wedge \psi_2)^c := \psi_1^c \wedge \psi_2^c$, $(\exists v\ \psi)^c := \exists v\ \psi^c$. Jednostavnom indukcijom po složenosti formule, pokazuje se da, za svaku strukturu $\mathbb{X} \in \mathrm{Mod}_L$ i svaku L-formulu $\psi(v_1, \ldots, v_k)$, imamo

$$\forall x_1, \ldots, x_k \in X\ (\mathbb{X} \models \psi[x_1, \ldots, x_k] \Leftrightarrow \mathbb{X}^c \models \psi^c[x_1, \ldots, x_k]), \tag{7.18}$$

$$\forall x_1, \ldots, x_k \in X\ (\mathbb{X} \models (\psi^c)^c[x_1, \ldots, x_k] \Leftrightarrow \mathbb{X} \models \psi[x_1, \ldots, x_k]), \tag{7.19}$$

Dakle, ako je $\mathbb{X} \equiv \mathbb{Y}$, tada, za svaku L-rečenicu ψ, imamo da je $\mathbb{X}^c \models \psi$ akko je $\mathbb{X}^c \models (\psi^c)^c$ akko je $\mathbb{X} \models \psi^c$ akko je $\mathbb{Y} \models \psi^c$ akko je $\mathbb{Y}^c \models (\psi^c)^c$ akko je $\mathbb{Y}^c \models \psi$, pa je $\mathbb{X}^c \equiv \mathbb{Y}^c$. Obratno, ako je $\mathbb{X}^c \equiv \mathbb{Y}^c$, tada, za svaku L-rečenicu ψ, imamo da je $\mathbb{X} \models \psi$ akko je $\mathbb{X}^c \models \psi^c$ akko je $\mathbb{Y}^c \models \psi^c$ akko je $\mathbb{Y} \models \psi$, pa je $\mathbb{X} \equiv \mathbb{Y}$. □

Za kardinal $\lambda \geq \omega$, definisaćemo sledeći skup binarnih relacija

$$\mathrm{Int}^*_{L_b}(\lambda) := \Big\{\rho \subseteq \lambda^2 : \langle \lambda, \rho \rangle \text{ je povezana struktura } \wedge\ \rho \cap \Delta_\lambda \neq \emptyset\Big\}.$$

Sledeće tvrđenje koristićemo u dokazu teoreme 7.2.1.

Teorema 7.2.11 *Ako su $\kappa \geq \lambda \geq \omega$ kardinali, $L = \langle R_i : i \in I \rangle$ neunaran relacijski jezik, tada postoji preslikavanje $\tau : \mathrm{Int}^*_{L_b}(\lambda) \to \mathrm{Int}_L(\kappa)$ takvo da za sve $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}^*_{L_b}(\lambda)$ važi*

(a) $\rho \sim_k \sigma \Leftrightarrow \tau_\rho \sim_k \tau_\sigma$, za svako $k \leq 11$;

(b) $\rho \sim_c \sigma \Leftrightarrow \tau_\rho \sim_c \tau_\sigma$;

(c) $\rho \equiv \sigma \Leftrightarrow \tau_\rho \equiv \tau_\sigma$, ako je $\lambda = \kappa$.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $\lambda < \kappa$. Tada je $|\kappa \setminus \lambda| = \kappa$. Na osnovu teoreme 1.1.6 ([88]), na svakom skupu X postoji irefleksivna binarna relacija θ, takva da je id_X jedini endomorfizam strukture $\langle X, \theta \rangle$. Fiksirajmo irefleksivnu binarnu relaciju $\theta \subseteq (\kappa \setminus \lambda)^2$, takvu da je $\mathrm{End}(\kappa \setminus \lambda, \theta) = \{\mathrm{id}_{\kappa \setminus \lambda}\}$. Tada je

$$\mathrm{Cond}(\kappa \setminus \lambda, \theta) = \{\mathrm{id}_{\kappa \setminus \lambda}\}, \tag{7.20}$$

i još možemo pretpostaviti da je relacije θ povezana i irefleksivna. Naime, ako θ nije povezana, tada je, prema tvrđenju 2.3.1, relacija θ^c povezana (i refleksivna). Na osnovu tvrđenja 1.1.4 (b), imamo da je $\mathrm{Cond}(\kappa \setminus \lambda, \theta^c) = \{\mathrm{id}_{\kappa \setminus \lambda}\}$, odakle zaključujemo da je relacija $\theta^c \setminus \Delta_{\kappa \setminus \lambda}$ povezana i irefleksivna, i da je $\mathrm{Cond}(\kappa \setminus \lambda, \theta^c \setminus \Delta_{\kappa \setminus \lambda}) = \{\mathrm{id}_{\kappa \setminus \lambda}\}$.

Kako jezik L nije unaran, postoji $i_0 \in I$ takvo da je $n_{i_0} \geq 2$. Sada ćemo, za dato $\rho \in \mathrm{Int}^*_{L_b}(\lambda)$, definisati interpretaciju $\tau_\rho = \langle \tau_i^\rho : i \in I \rangle \in \mathrm{Int}_L(\kappa)$ na sledeći način:

$$\tau_i^\rho := \begin{cases} (\rho \cup \theta) \times \kappa^{n_{i_0} - 2} & \text{ako je } i = i_0 \text{ i } n_{i_0} > 2, \\ \rho \cup \theta & \text{ako je } i = i_0 \text{ i } n_{i_0} = 2, \\ \emptyset & \text{ako je } i \neq i_0. \end{cases} \tag{7.21}$$

Radi jednostavnijeg zapisa, za $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}^*_{L_b}(\lambda)$ pisaćemo $\mathrm{Cond}(\rho, \sigma)$ umesto $\mathrm{Cond}(\langle \lambda, \rho \rangle, \langle \lambda, \sigma \rangle)$, i $\mathrm{Cond}(\tau_\rho, \tau_\sigma)$ umesto $\mathrm{Cond}(\langle \kappa, \tau_\rho \rangle, \langle \kappa, \tau_\sigma \rangle)$.

Stav 7.2.12 $\mathrm{Cond}(\tau_\rho, \tau_\sigma) = \{f \cup \mathrm{id}_{\kappa \setminus \lambda} : f \in \mathrm{Cond}(\rho, \sigma)\}$, *za $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}^*_{L_b}(\lambda)$.*

Dokaz. Radi jednostavnijeg zapisa, neka je $\pi_\rho := \rho \cup \theta$, za $\rho \in \mathrm{Int}^*_{L_b}(\lambda)$. Prvo ćemo dokazati da je

$$\mathrm{Cond}\Big(\langle \kappa, \pi_\rho \rangle, \langle \kappa, \pi_\sigma \rangle\Big) = \Big\{f \cup \mathrm{id}_{\kappa \setminus \lambda} : f \in \mathrm{Cond}(\rho, \sigma)\Big\}. \tag{7.22}$$

Po konstrukciji, $\langle \kappa, \pi_\rho \rangle = \langle \lambda, \rho \rangle \cup \langle \kappa \setminus \lambda, \theta \rangle$ i $\langle \kappa, \pi_\sigma \rangle = \langle \lambda, \sigma \rangle \cup \langle \kappa \setminus \lambda, \theta \rangle$ su particije binarnih struktura $\langle \kappa, \pi_\rho \rangle$ i $\langle \kappa, \pi_\sigma \rangle$ na njihove komponente povezanosti. Ako $F \in \mathrm{Cond}(\langle \kappa, \pi_\rho \rangle, \langle \kappa, \pi_\sigma \rangle)$, tada, na osnovu tvrđenja 2.3.4, imamo da je $F = g_1 \cup g_2$, gde ili $g_1 \in \mathrm{Mono}(\langle \lambda, \rho \rangle, \langle \kappa \setminus \lambda, \theta \rangle)$, ili $g_1 \in \mathrm{Mono}(\langle \lambda, \rho \rangle, \langle \lambda, \sigma \rangle)$.

Prvi slučaj nije moguć, zato što je relacija θ irefleksivna i $\rho \cap \Delta_\lambda \neq \emptyset$, što znači da $g_1 \in \mathrm{Mono}(\langle \lambda, \rho\rangle, \langle \lambda, \sigma\rangle)$. Pošto je funkcija f iz tvrđenja 2.3.4 surjekcija, imamo da $g_2 \in \mathrm{Mono}(\langle \kappa \setminus \lambda, \theta\rangle, \langle \kappa \setminus \lambda, \theta\rangle)$, i pošto je F surjekcija, g_1 i g_2 su takođe surjekcije. Dakle, $g_1 \in \mathrm{Cond}(\rho, \sigma)$ i $g_2 \in \mathrm{Cond}(\kappa \setminus \lambda, \theta) = \{\mathrm{id}_{\kappa\setminus\lambda}\}$, čime je dokazana inkluzija „$\subseteq$" u (7.22). Inkluzija „$\supseteq$" sledi iz tvrđenja 2.3.4.

Sada ćemo dokazati da je

$$\mathrm{Cond}\left(\langle \kappa, \tau^\rho_{i_0}\rangle, \langle \kappa, \tau^\sigma_{i_0}\rangle\right) = \left\{ f \cup \mathrm{id}_{\kappa\setminus\lambda} : f \in \mathrm{Cond}(\rho, \sigma)\right\}. \tag{7.23}$$

Ako je $F : \kappa \to \kappa$ bijekcija, tada $F \in \mathrm{Cond}(\langle \kappa, \tau^\rho_{i_0}\rangle, \langle \kappa, \tau^\sigma_{i_0}\rangle)$ akko za sve $x_1, x_2, \ldots, x_{n_{i_0}} \in \kappa$ imamo da

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_{n_{i_0}}\rangle \in \pi_\rho \times \kappa^{n_{i_0}-2} \Rightarrow \langle F(x_1), F(x_2), \ldots, F(x_{n_{i_0}})\rangle \in \pi_\sigma \times \kappa^{n_{i_0}-2}$$

akko za sve $x_1, x_2 \in \kappa$ imamo: $\langle x_1, x_2\rangle \in \pi_\rho \Rightarrow \langle F(x_1), F(x_2)\rangle \in \pi_\sigma$ akko $F \in \mathrm{Cond}(\langle \kappa, \pi_\rho\rangle, \langle \kappa, \pi_\sigma\rangle)$. Sada (7.23) sledi iz (7.22).

Jasno je da $F \in \mathrm{Cond}(\tau_\rho, \tau_\sigma)$ akko $F \in \mathrm{Cond}(\langle \kappa, \tau^\rho_i\rangle, \langle \kappa, \tau^\sigma_i\rangle)$ za svako $i \in I$. Na osnovu (7.21) to je ispunjeno akko $F \in \mathrm{Cond}(\langle \kappa, \tau^\rho_{i_0}\rangle, \langle \kappa, \tau^\sigma_{i_0}\rangle)$, i sada još preostaje primeniti (7.23). □

Sada ćemo dokazati teoremu. Tvrđenje (a) dokazano je u teoremi 3.20. u [31].

(b) Ako je $\rho \sim_c \sigma$, tada postoje $f \in \mathrm{Cond}(\rho, \sigma)$ i $g \in \mathrm{Cond}(\sigma, \rho)$, što, na osnovu stava 7.2.12, implicira da

$$f \cup \mathrm{id}_{\kappa\setminus\lambda} \in \mathrm{Cond}(\tau_\rho, \tau_\sigma) \ \text{ i } \ g \cup \mathrm{id}_{\kappa\setminus\lambda} \in \mathrm{Cond}(\tau_\sigma, \tau_\rho),$$

tj. da je $\tau_\rho \preccurlyeq_c \tau_\sigma$ i $\tau_\sigma \preccurlyeq_c \tau_\rho$, dakle, $\tau_\rho \sim_c \tau_\sigma$. Obratno, ako je $\tau_\rho \sim_c \tau_\sigma$, tada postoji $F \in \mathrm{Cond}(\tau_\rho, \tau_\sigma)$, i, na osnovu stava 7.2.12, $F \restriction_\lambda \in \mathrm{Cond}(\rho, \sigma)$, što znači da je $\rho \preccurlyeq_c \sigma$. Slično, imamo da je $\sigma \preccurlyeq_c \rho$, pa je $\rho \sim_c \sigma$.

Ovim je teorema dokazana za $\lambda < \kappa$. Ako je $\lambda = \kappa$, tada definišemo τ_ρ tako što u (7.21) zamenimo $\rho \cup \theta$ sa ρ, i nastavimo dalje na isti način.

(c) Neka je $\lambda = \kappa$, i neka je τ_ρ definisano sa (7.21), pri čemu je $\rho \cup \theta$ zamenjeno sa ρ. Prvo ćemo, za svaku L_b-formulu $\psi(v_1, \ldots, v_k)$, definisati L-formulu $\varphi_\psi(v_1, \ldots, v_k)$ na sledeći način: $\varphi_{v_i = v_j} := v_i = v_j$, $\varphi_{R(v_i, v_j)} := R_{i_0}(v_i, v_j, v_j, \ldots, v_j)$, $\varphi_{\neg\psi} := \neg\varphi_\psi$, $\varphi_{\psi_1 \wedge \psi_2} := \varphi_{\psi_1} \wedge \varphi_{\psi_2}$, $\varphi_{\exists v\, \psi} := \exists v\ \varphi_\psi$. Ako $\rho \in \mathrm{Int}^*_{L_b}(\lambda)$, tada se jednostavnom indukcijom po složenosti formule pokazuje da za svaku L_b-formulu $\psi(v_1, \ldots, v_k)$ imamo

$$\forall y_1, \ldots, y_k \in \lambda\ (\langle \lambda, \rho\rangle \models \psi[y_1, \ldots, y_k] \Leftrightarrow \langle \lambda, \tau_\rho\rangle \models \varphi_\psi[y_1, \ldots, y_k]). \tag{7.24}$$

Dakle, ako $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}^*_{L_b}(\lambda)$ i $\tau_\rho \equiv \tau_\sigma$, tada, za svaku L_b-rečenicu ψ, imamo da je $\langle \lambda, \rho \rangle \models \psi$ akko je $\langle \lambda, \tau_\rho \rangle \models \varphi_\psi$ akko je $\langle \lambda, \tau_\sigma \rangle \models \varphi_\psi$ akko je $\langle \lambda, \sigma \rangle \models \psi$, što znači da je $\rho \equiv \sigma$.

Da bismo dokazali obratnu implikaciju, za svaku L-formulu $\eta(v_1, \dots, v_k)$ definisaćemo L_b-formulu $\psi_\eta(v_1, \dots, v_k)$ na sledeći način: $\psi_{v_i = v_j} := v_i = v_j$, $\psi_{R_{i_0}(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i n_{i_0}})} := R(v_{i_1}, v_{i_2})$, $\psi_{R_i(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i n_i})} := \neg v_{i_1} = v_{i_1}$, za $i \neq i_0$, $\psi_{\neg \eta} := \neg \psi_\eta$, $\psi_{\eta_1 \wedge \eta_2} := \psi_{\eta_1} \wedge \psi_{\eta_2}$, $\psi_{\exists v\, \eta} := \exists v\ \psi_\eta$. Ako $\rho \in \mathrm{Int}^*_{L_b}(\lambda)$, tada se opet, indukcijom po složenosti formule, pokazuje da za svaku L-formulu $\eta(v_1, \dots, v_k)$ imamo

$$\forall y_1, \dots, y_k \in \lambda \ (\langle \lambda, \rho \rangle \models \psi_\eta[y_1, \dots, y_k] \Leftrightarrow \langle \lambda, \tau_\rho \rangle \models \eta[y_1, \dots, y_k]). \quad (7.25)$$

Dakle, ako $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}^*_{L_b}(\lambda)$ i ako je $\rho \equiv \sigma$, tada, za svaku L-rečenicu η, imamo da je $\langle \lambda, \tau_\rho \rangle \models \eta$ akko je $\langle \lambda, \rho \rangle \models \psi_\eta$ akko je $\langle \lambda, \sigma \rangle \models \psi_\eta$ akko je $\langle \lambda, \tau_\sigma \rangle \models \eta$, što znači da je $\tau_\rho \equiv \tau_\sigma$. $\Box$

Dokaz teoreme 7.2.1

(a) U skladu s primedbom 7.2.2, pokazaćemo da, na dijagramu za skup $\mathrm{Int}_L(\kappa)$, imamo da $\sim_2 \not\Rightarrow \sim_c$ i da $\sim_c \not\Rightarrow \sim_{10}$.

Na osnovu primera 7.2.3 postoje interpretacije $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}^*_{L_b}(\omega)$, takve da je $\rho \sim_2 \sigma$ i $\rho \not\sim_c \sigma$. Na osnovu teoreme 7.2.11 (a) i (b), imamo da $\tau_\rho, \tau_\sigma \in \mathrm{Int}_L(\kappa)$, i da je $\tau_\rho \sim_2 \tau_\sigma$ i $\tau_\rho \not\sim_c \tau_\sigma$. Dakle, $\sim_2 \not\Rightarrow \sim_c$ na dijagramu za skup $\mathrm{Int}_L(\kappa)$.

Na osnovu primera 7.2.4 postoje interpretacije $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$, takve da je $\rho \sim_c \sigma$ i $\rho \not\sim_{10} \sigma$. Strukture $\langle X, \rho \rangle$ i $\langle X, \sigma \rangle$ nisu povezane, ali, na osnovu tvrđenja 2.3.1, strukture $\langle X, \rho^c \rangle$ i $\langle X, \sigma^c \rangle$ su povezane. Kako za $b \in B$ imamo da $\langle b, b \rangle \in \rho^c \cap \sigma^c$, identifikacijom skupova X i ω dobijamo da $\rho^c, \sigma^c \in \mathrm{Int}^*_{L_b}(\omega)$. Sada, na osnovu tvrđenja 6.1.2 (a), $\rho \sim_c \sigma$ implicira da je $\rho^c \sim_c \sigma^c$, pa, na osnovu teoreme 7.2.11 (b), imamo da je $\tau_{\rho^c} \sim_c \tau_{\sigma^c}$. S druge strane, na osnovu tvrđenja 7.2.8 imamo da je

$$\mathbb{P}(\rho^c) = \mathbb{P}(\rho) \quad \text{i} \quad \mathbb{P}(\sigma^c) = \mathbb{P}(\sigma),$$

pa $\rho \not\sim_{10} \sigma$, tj. $\mathbb{P}(\rho) \not\equiv_{forc} \mathbb{P}(\sigma)$, implicira da je $\rho^c \not\sim_{10} \sigma^c$, što je, na osnovu teoreme 7.2.11 (a), ekvivalentno sa $\tau_{\rho^c} \not\sim_{10} \tau_{\sigma^c}$. Dakle, $\sim_c \not\Rightarrow \sim_{10}$ na dijagramu za skup $\mathrm{Int}_L(\kappa)$.

(b) U vezi s pozicijom elementarne ekvivalencije na dijagramu, za skup $\mathrm{Int}_L(\omega)$, uočimo prvo da $\sim_3 \Rightarrow \equiv \Rightarrow \sim_{11}$.

Za interpretacije $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}^*_{L_b}(\omega)$ razmatrane u primeru 7.2.5, imamo da je $\rho \sim_2 \sigma$ i $\rho \not\equiv \sigma$, pa, na osnovu teoreme 7.2.11 (a) i (c), imamo da $\tau_\rho, \tau_\sigma \in \mathrm{Int}_L(\omega)$, i da je $\tau_\rho \sim_2 \tau_\sigma$ i $\tau_\rho \not\equiv \tau_\sigma$. Dakle, $\sim_2 \not\Rightarrow \equiv$ na dijagramu za skup $\mathrm{Int}_L(\omega)$.

Interpretacije $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$, razmatrane u primeru 7.2.6, su irefleksivne i važi da je $\rho \equiv \sigma$ i $\rho \not\sim_{10} \sigma$. Njihove refleksivizacije ρ_{re} i σ_{re} su u $\mathrm{Int}^*_{L_b}(\omega)$, i, na osnovu tvrđenja 7.2.9 i 7.2.8, imamo da je $\rho_{re} \equiv \sigma_{re}$ i $\rho_{re} \not\sim_{10} \sigma_{re}$, što, na osnovu teoreme 7.2.11 (c) i (a), implicira da je $\tau_{\rho_{re}} \equiv \tau_{\sigma_{re}}$ i $\tau_{\rho_{re}} \not\sim_{10} \tau_{\sigma_{re}}$. Dakle, $\equiv \not\Rightarrow \sim_{10}$ na dijagramu za skup $\mathrm{Int}_L(\omega)$. Na osnovu primera 7.2.7, isti par struktura pokazuje da $\equiv \not\Rightarrow \sim_c$.

Konačno, interpretacije $\rho_0, \sigma_0 \in \mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$, razmatrane u primeru 7.2.7, su nepovezane, $\rho_0 \sim_c \sigma_0$ i $\rho_0 \not\equiv \sigma_0$. Na osnovu tvrđenja 2.3.1, njihovi komplementi ρ_0^c i σ_0^c su u $\mathrm{Int}^*_{L_b}(\omega)$, pa, na osnovu tvrđenja 6.1.2 (a), imamo da je $\rho_0^c \sim_c \sigma_0^c$, a, na osnovu tvrđenja 7.2.10, imamo da $\rho_0^c \not\equiv \sigma_0^c$. Na osnovu teoreme 7.2.11 (b) i (c), imamo da je $\tau_{\rho_0^c} \sim_c \tau_{\sigma_0^c}$ i $\tau_{\rho_0^c} \not\equiv \tau_{\sigma_0^c}$. Dakle, $\sim_c \not\Rightarrow \equiv$ na dijagramu za skup $\mathrm{Int}_L(\omega)$. □

Što se tiče uzajamnog odnosa kondenzacione ekvivalencije, elementarne ekvivalencije i ekvimorfizma, primeri 7.2.3 – 7.2.7 pokazuju da su, kod beskonačnih struktura neunarnih jezika, ove sličnosti u parovima neuporedive. Naredni primeri pokazuju da važi i više od toga, sličnosti $\rightleftarrows \wedge \sim_c$, $\sim_c \wedge \equiv$ i $\equiv \wedge \rightleftarrows$ su u parovima neuporedive, i važi još da je njihov presek $\equiv \wedge \rightleftarrows \wedge \sim_c$ različit od izomorfizma (videti sliku 7.2).

Primer 7.2.13 $\rightleftarrows \wedge \sim_c \not\Longrightarrow \equiv$.

Neka $\mathbb{G}_n$, za $n \in \mathbb{N}$, označava linearni graf sa n čvorova, i, uz pretpostavku da su sve unije disjunktne, definišimo prebrojive L_b-strukture

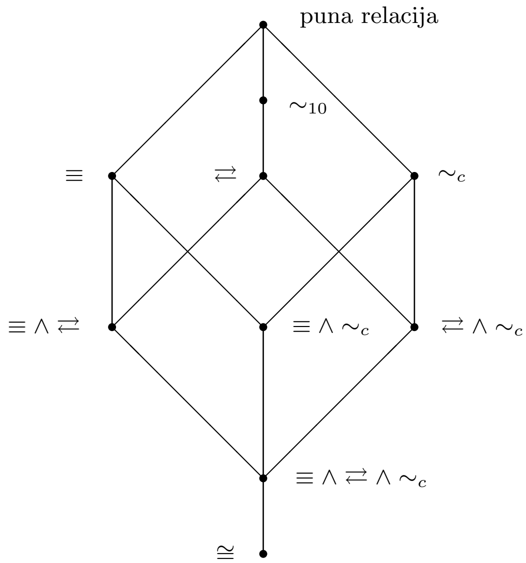
$$\mathbb{X} = \bigcup_\omega \mathbb{G}_3 \cup \bigcup_\omega \mathbb{G}_1 \quad \text{i} \quad \mathbb{Y} = \bigcup_\omega \mathbb{G}_3 \cup \bigcup_\omega \mathbb{G}_2 \cup \bigcup_\omega \mathbb{G}_1.$$

Na osnovu tvrđenja 2.3.3 imamo da je $\mathbb{X} \rightleftarrows \mathbb{Y}$, i, na osnovu tvrđenja 6.1.1 (a), imamo da je $\mathbb{X} \sim_c \mathbb{Y}$. Ali $\mathbb{X} \not\equiv \mathbb{Y}$, zato što graf $\mathbb{Y}$ ima komponentu s tačno dva elementa.

Primer 7.2.14 $\sim_c \wedge \equiv \not\Longrightarrow \rightleftarrows$.

Poznato je kako je L_b-teorija $\mathcal{T}_e$ jedne relacije ekvivalencije s beskonačno mnogo klasa ekvivalencije, takva da je svaka klasa beskonačna, kompletna teorija (jer je ω-kategorična i nema konačnih modela pa možemo primeniti Łoś-Vaughtov test, pogledati teoremu 3.2.3). Neka je $\{A, B\} \cup \{C_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ particija skupa ω_1, gde je $|A| = |B| = \omega_1$ i $|C_\alpha| = \omega$ za $\alpha < \omega_1$, i neka je $\mathbb{X} = \langle \omega_1, \rho \rangle$ i $\mathbb{Y} = \langle \omega_1, \sigma \rangle$, gde su $\rho, \sigma \subseteq \omega_1 \times \omega_1$ relacije ekvivalencije na ω_1, koje redom odgovaraju particijama

$$\Pi_\rho := \Big\{A \cup B\Big\} \cup \Big\{C_\alpha : \alpha < \omega_1\Big\} \;\text{ i }\; \Pi_\sigma := \Big\{A, B\Big\} \cup \Big\{C_\alpha : \alpha < \omega_1\Big\}.$$



Slika 7.2: Sličnosti beskonačnih binarnih struktura

Tada je jasno da su $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ modeli $\mathcal{T}_e$, pa je $\mathbb{X} \equiv \mathbb{Y}$. Pošto je $\sigma \subseteq \rho$, imamo da je $\sigma \preccurlyeq_c \rho$. Neka je $\{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ particija skupa B, gde je $|B_\alpha| = \omega$, za $\alpha < \omega_1$, i neka je ρ' relacija ekvivalencije na ω_1 koja odgovara particiji

$$\Pi_{\rho'} := \Big\{A\Big\} \cup \Big\{B_\alpha : \alpha < \omega_1\Big\} \cup \Big\{C_\alpha : \alpha < \omega_1\Big\}.$$

Tada je $\rho \cong \rho' \subseteq \sigma$, i, na osnovu tvrđenja 6.1.1 (a), imamo da je $\rho \preccurlyeq_c \sigma$, pa je $\rho \sim_c \sigma$. Na osnovu tvrđenja 2.3.3 imamo da se $\mathbb{Y} \not\hookrightarrow \mathbb{X}$, pa je $\mathbb{X} \not\rightleftarrows \mathbb{Y}$.

Primer 7.2.15 $\equiv \wedge \rightleftarrows \;\not\Rightarrow\; \sim_c$.

Poznato je da je L_b-teorija $\mathcal{T}_l$ linearnih uređenja u kojima svaki element ima direktnog prethodnika i direktnog sledbenika kompletna (videti [20, str. 74]). Dakle, ako su $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ modeli teorije $\mathcal{T}_l$ definisani sa

$$\mathbb{X} := \sum_{\omega} \mathbb{Z} \cdot (\omega + \mathbb{Z}) \quad \text{i} \quad \mathbb{Y} := \sum_{\omega} \mathbb{Z} \cdot (\mathbb{Z} + \omega)\,,$$

tada je $\mathbb{X} \equiv \mathbb{Y}$, i jasno je da je $\mathbb{X} \rightleftarrows \mathbb{Y}$. Kako linearno uređenje $\mathbb{Y}$ nema početni segment izomorfan sa ω^*, imamo da je $\mathbb{X} \not\cong \mathbb{Y}$, i, kao u primeru 7.2.7, zaključujemo da je $\mathbb{X} \not\sim_c \mathbb{Y}$.

Primer 7.2.16 $\rightleftarrows \wedge \sim_c \wedge \equiv \not\Rightarrow \cong$.

Neka je X skup veličine $\aleph_\omega$, i neka su $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}_{L_b}(X)$ relacije ekvivalencije na X, koje, redom, odgovaraju sledećim particijama

$$\Pi_\rho := \Big\{X_{2n+1} : n \in \omega\Big\} \cup \Big\{C_\alpha : \alpha < \aleph_\omega\Big\},$$

$$\Pi_\sigma := \Big\{X_{2n+2} : n \in \omega\Big\} \cup \Big\{D_\alpha : \alpha < \aleph_\omega\Big\},$$

gde je $|X_k| = \aleph_k$ za $k \in \mathbb{N}$, i $|C_\alpha| = |D_\alpha| = \omega$, za $\alpha < \aleph_\omega$. Tada je $\rho \equiv \sigma$ (videti primer 7.2.14), i, na osnovu tvrđenja 2.3.3, imamo da je $\rho \rightleftarrows \sigma$ i $\rho \not\cong \sigma$.

Izaberimo skupove $Y_{2n+1} \in [X_{2n+2}]^{\aleph_{2n+1}}$, za $n \in \omega$, i razbijmo uniju

$$\bigcup_{n\in\omega} X_{2n+2} \setminus Y_{2n+1}$$

na $\aleph_\omega$ disjunktnih prebrojivih skupova E_α, $\alpha < \aleph_\omega$. Neka je $\rho' \in \mathrm{Int}_{L_b}(X)$ relacija ekvivalencije na X koja odgovara particiji

$$\Pi_{\rho'} := \Big\{Y_{2n+1} : n \in \omega\Big\} \cup \Big\{E_\alpha : \alpha < \aleph_\omega\Big\} \cup \Big\{D_\alpha : \alpha < \aleph_\omega\Big\}.$$

Tada je $\rho \cong \rho' \subseteq \sigma$, pa je, na osnovu tvrđenja 6.1.1 (a), $\rho \preccurlyeq_c \sigma$.

Izaberimo sada skupove $Z_{2n+2} \in [X_{2n+3}]^{\aleph_{2n+2}}$, za $n \in \omega$, i razbijmo uniju

$$X_1 \cup \bigcup_{n\in\omega} X_{2n+3} \setminus Z_{2n+2}$$

na $\aleph_\omega$ disjunktnih prebrojivih skupova F_α, $\alpha < \aleph_\omega$. Neka je $\sigma' \in \mathrm{Int}_{L_b}(X)$ relacija ekvivalencije na X, koja odgovara particiji

$$\Pi_{\sigma'} := \Big\{Z_{2n+2} : n \in \omega\Big\} \cup \Big\{F_\alpha : \alpha < \aleph_\omega\Big\} \cup \Big\{C_\alpha : \alpha < \aleph_\omega\Big\}.$$

Tada je $\sigma \cong \sigma' \subseteq \rho$, pa je, na osnovu tvrđenja 6.1.1 (a), $\sigma \preccurlyeq_c \rho$. Dakle, $\rho \sim_c \sigma$.

7.3 Kondenzaciona ekvivalencija i druge sličnosti konačnih i unarnih struktura

Sličnosti konačnih struktura

Kurilić je u [31] pokazao da, ako je L neprazan relacijski jezik a κ konačan kardinal, tada dijagram koji opisuje odnos sličnosti $\sim_k$, za $k \leq 11$, kolapsira na dijagram dat na slici 7.3, pri čemu je $\sim_0 = \sim_1$ akko je $\kappa = 1$. Na osnovu tvrđenja 6.1.2 (e) i tvrđenja 3.2.4, dodaćemo sličnosti $\sim_c$ i $\equiv$ na dati dijagram, pri čemu je

$$\sim_c = \equiv = \cong .$$

$\bullet$ $\sim_4 = \sim_6 = \sim_8 = \sim_{10} = \sim_{11} =$ puna relacija

$\bullet$ $\sim_1 = \sim_2 = \sim_3 = \sim_5 = \sim_7 = \sim_9 = \sim_c = \equiv =$ izomorfizam

$\bullet$ $\sim_0 =$ jednakost

Slika 7.3: Sličnosti na skupu $\mathrm{Int}_L(\kappa)$, za $1 < \kappa < \omega$

Sličnosti unarnih struktura

Sada ćemo razmotriti šta se događa kod beskonačnih struktura unarnih jezika. Za proizvoljan unaran jezik L i beskonačan kardinal κ, na osnovu teoreme 3.5 iz [31], imamo da dijagram na slici 7.4 opisuje hijerarhiju sličnosti $\sim_k$, za $k \notin \{8, 10\}$, na skupu $\mathrm{Int}_L(\kappa)$, pri čemu je $\sim_8 \neq \sim_{11}$. Štaviše, sve implikacije su prave, i nema novih implikacija (osim onih koje slede iz tranzitivnosti). Pozicija sličnosti $\sim_8$ i $\sim_{10}$ na dijagramu zavisi od modela teorije skupova u kojem živimo. Ako je κ regularan kardinal i $2^\kappa = \kappa^+$, tada je $\sim_8 \neq \sim_{10}$. Specijalno, na osnovu teoreme 3.6. iz [31], ako je $L = L_u$ jezik koji sadrži samo jedan unaran relacijski simbol, tada na $\mathrm{Int}_L(\omega)$ imamo da je $\sim_8 = \sim_6$ i da je

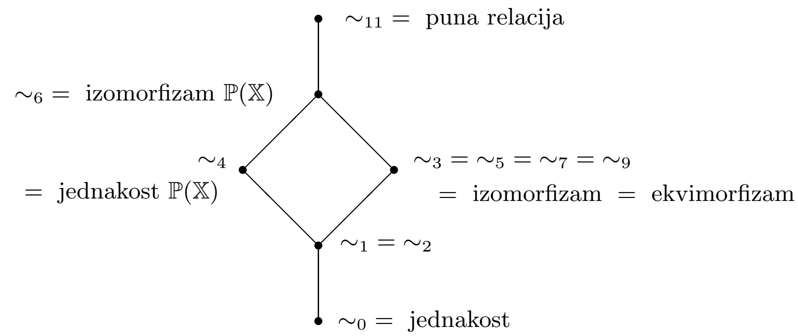
$$\sim_{10} = \begin{cases} \sim_{11} & \text{ako je poset } (P(\omega)/\mathrm{Fin})^+ \text{ forsing ekvivalentan svom kvadratu,} \\ \sim_6 & \text{inače.} \end{cases}$$

Dakle, na osnovu rezultata Shelaha i Spinasa [80], jednakost $\sim_8 = \sim_{10}$ nezavisna je od ZFC.

Što se tiče pozicije sličnosti $\sim_c$ i $\equiv$ na dijagramu, primetimo da ih izomorfizam implicira, i da one impliciraju $\sim_{11}$. Sledeći primer pokazuje da, za neke unarne jezike i beskonačne domene, imamo da je $\sim_c = \equiv = \cong$.

Primer 7.3.1 $\sim_c = \equiv = \cong$.

Neka je $L_u = \langle R \rangle$, gde je $\mathrm{ar}(R) = 1$, i neka $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}_L(\omega)$. Ako je $\rho \sim_c \sigma$, tada, na osnovu tvrđenja 6.1.1 (a), postoje bijekcije $f, g \in \mathrm{Sym}(\omega)$, takve



Slika 7.4: Sličnosti na skupu $\mathrm{Int}_L(\kappa)$ za unarno L i beskonačno κ

da je $f[\rho] \subseteq \sigma$ i $g[\sigma] \subseteq \rho$, što implicira da je $|\rho| = |\sigma|$. Na osnovu tvrđenja 6.1.2 (a) imamo da je $\rho^c \sim_c \sigma^c$, i slično zaključujemo da je $|\rho^c| = |\sigma^c|$. Ako je $F \in \mathrm{Sym}(\omega)$ takvo da je $F[\rho] = \sigma$, tada je jasno da $F \in \mathrm{Iso}(\rho, \sigma)$, što implicira da je $\rho \cong \sigma$.

Ako je $\rho \equiv \sigma$, tada, pošto je $\mathrm{Th}(\langle \omega, \rho \rangle)$ ω-kategorična teorija, imamo da je $\rho \cong \sigma$.

Sledeći primer pokazuje da je, za neke unarne jezike, implikacija $\cong\, \Rightarrow\, \sim_c$ prava, i pokazuje još da $\sim_c$ ne implicira $\sim_{10}$, odakle sledi da $\sim_c \not\Rightarrow \sim_k$, za $k \leq 10$.

Primer 7.3.2 $\sim_c \;\not\!\!\Longrightarrow \sim_{10}$, i, na osnovu toga, $\sim_c \;\not\!\!\Longrightarrow \sim_k$, za $k \leq 10$.

Neka je Q skup racionalnih brojeva, i $L = \langle R_q : q \in Q \rangle$ unaran jezik. Neka su $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}_L(Q)$ interpretacije definisane sa

$$\rho := \Big\langle (-\infty, q] : q \in Q \Big\rangle,$$

$$\sigma := \Big\langle (-\infty, q-1] : q < 0 \Big\rangle \cup \Big\langle (-\infty, q] : q \geq 0 \Big\rangle.$$

Ako $f \in \mathrm{Sym}(Q)$, gde je $f(q) = q - 1$, tada, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), imamo da je

$$\rho \cong f[\rho] = \Big\langle (-\infty, q-1] : q \in Q \Big\rangle \subseteq \sigma,$$

i kako je $\sigma \subseteq \rho$, na osnovu tvrđenja 6.1.1 (a) zaključujemo da je $\rho \sim_c \sigma$. Sada imamo da se particija iz teoreme 5.3.1 koja odgovara strukturi $\langle Q, \rho \rangle$ sastoji od singltona, pa je $\mathbb{P}(\langle Q, \rho \rangle) = \{Q\}$ trivijalni forsing. S druge strane, particija koja odgovara strukturi $\langle Q, \sigma\rangle$ sastoji se od intervala $[-1,0]_Q$ i singltona $\{q\}$, gde $q \in Q \setminus [-1,0]_Q$, pa je

$$\mathbb{P}(\langle Q, \sigma\rangle) \equiv_{forc} (P(\omega)/\mathrm{Fin})^+.$$

Dakle, $\rho \not\sim_{10} \sigma$.

Tvrđenje 7.3.3 $\sim_4 \not\Rightarrow \sim_c$, *i prema tome* $\sim_k \not\Rightarrow \sim_c$ *za* $k \in \{4, 6, 8, 10, 11\}$, *za proizvoljan unaran jezik* $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ *i beskonačan skup* X.

Dokaz. Neka je $\mathbb{X} := \langle X, \rho\rangle$ i $\mathbb{Y} := \langle X, \sigma\rangle$, gde je $\rho = \langle \emptyset : i \in I\rangle$ i $\sigma = \langle X : i \in I\rangle$. Tada je $\mathbb{P}(\mathbb{X}) = \mathbb{P}(\mathbb{Y}) = [X]^{|X|}$, ali je jasno da je $\rho \not\sim_c \sigma$. □

Sledeća dva primera pokazuju da su, za neke unarne jezike i beskonačne domene, elementarna ekvivalencija i kondenzaciona ekvivalencija neuporedive sličnosti.

Primer 7.3.4 $\sim_c \not\Leftrightarrow \equiv$.

Neka je Z skup celih brojeva i $L = \langle R_n : n \in Z\rangle$ unaran jezik. Neka su $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}_L(Z)$ interpretacije definisane sa

$$\rho := \Big\langle (-\infty, n] : n \in Z \Big\rangle,$$

$$\sigma := \Big\langle (-\infty, n-1] : n < 0 \Big\rangle \cup \Big\langle (-\infty, n] : n \geq 0 \Big\rangle.$$

Ako $f \in \mathrm{Sym}(Z)$, gde je $f(n) = n - 1$, tada, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), imamo da je

$$\rho \cong f[\rho] = \Big\langle (-\infty, n-1] : n \in Z \Big\rangle \subseteq \sigma,$$

i, kako je $\sigma \subsetneq \rho$, na osnovu tvrđenja 6.1.1 (a) zaključujemo da je $\rho \sim_c \sigma$. Ali $\rho \not\equiv \sigma$, zato što za rečenicu

$$\varphi := \exists v_0, v_1\ (v_0 \neq v_1 \wedge R_0(v_0) \wedge R_0(v_1) \wedge \neg R_{-1}(v_0) \wedge \neg R_{-1}(v_1))$$

imamo da je $\langle Z, \sigma\rangle \models \varphi$ i $\langle Z, \rho\rangle \models \neg\varphi$.

Primer 7.3.5 $\equiv \not\Leftrightarrow \sim_c$, i na osnovu toga $\equiv \not\Leftrightarrow \rightleftarrows$.

Neka je L jezik koji sadrži samo jedan unarni relacijski simbol U, i neka je $\mathcal{T}_u$ L-teorija koja kaže da su i U i njen komplement beskonačni skupovi. Jasno je da je $\mathcal{T}_u$ ω-kategorična teorija koja ima samo beskonačne modele, pa je, na osnovu Łoś-Vaughtovog testa, kompletna. Neka je $\mathbb{X} := \langle \omega_1, \rho\rangle$ i $\mathbb{Y} := \langle \omega_1, \sigma\rangle$, gde je $\rho, \sigma \subseteq \omega_1$ i $|\rho| = |\omega_1 \setminus \rho| = \omega_1$, ali je $|\sigma| = \omega$. Tada je $\mathbb{X} \equiv \mathbb{Y}$, tj. $\rho \equiv \sigma$, ali $\rho \not\preccurlyeq_c \sigma$, što implicira da $\rho \not\sim_c \sigma$.

Deo III

Reverzibilnost

Glava 8

Varijacije reverzibilnosti

Ako je L relacijski jezik i X neprazan skup, za interpretaciju $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$ reći ćemo da je *jako reverzibilna* akko je $[\rho]_{\cong} = \{\rho\}$; da je *reverzibilna* akko je $[\rho]_{\cong}$ antilanac u Booleovoj mreži $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$; da je *slabo reverzibilna* akko je $[\rho]_{\cong}$ konveksan skup u Booleovoj mreži $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$. Sa $\mathrm{Rev}_L(X)$ (redom, $\mathrm{sRev}_L(X)$, $\mathrm{wRev}_L(X)$) označavaćemo skup svih reverzibilnih (redom, jako reverzibilnih, slabo reverzibilnih) interpretacija $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$. Za L-strukturu $\mathbb{X} = \langle X, \rho \rangle$ reći ćemo da je reverzibilna (redom, jako reverzibilna, slabo reverzibilna) akko je interpretacija $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$ reverzibilna (redom jako reverzibilna, slabo reverzibilna)[1].

Ako je $\mathcal{C}$ klasa struktura i $\sim$ relacija ekvivalencije na $\mathcal{C}$, tada ćemo za svojstvo $\mathcal{P}$ (relevantno za strukture iz $\mathcal{C}$) reći da je $\sim$-*invarijantno* akko za sve $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathcal{C}$ imamo: ako $\mathbb{X}$ ima $\mathcal{P}$ i $\mathbb{X} \sim \mathbb{Y}$, tada i $\mathbb{Y}$ ima $\mathcal{P}$. Za skup interpretacija $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Int}_L(X)$ analogno definišemo $\sim$-invarijantna svojstva (interpretacija). Jasno je da, ako su $\sim_1$ i $\sim_2$ relacije ekvivalencije na $\mathcal{C}$, i ako je $\sim_1 \subseteq \sim_2$, tada je svaka $\sim_2$-invarijanta i $\sim_1$-invarijanta.

Rezultati iz ove glave dokazani su u [55].

Tvrđenje 8.0.1 *Neka je X neprazan skup i L relacijski jezik. Tada važi:*

(a) $\mathrm{sRev}_L(X) \subseteq \mathrm{Rev}_L(X) \subseteq \mathrm{wRev}_L(X)$*;*

(b) Jaka reverzibilnost, reverzibilnost i slaba reverzibilnost su $\sim_c$-invarijante (pa i $\cong$-invarijante) na skupu $\mathrm{Int}_L(X)$.

Dokaz.

[1] Kukieła je u [28] uveo još jednu varijaciju reverzibilnosti. Naime, relacijska struktura $\mathbb{X} = \langle X, \rho \rangle$ je *nasledno reverzibilna* akko je svaka njena podstruktura $\mathbb{X}'$ reverzibilna. U [28] data je karakterizacija nasledno reverzibilnih poseta.

(a) Prva inkluzija je trivijalna, a druga sledi iz činjenice da je svaki antilanac konveksan skup u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$.

(b) Neka je $\rho \sim_c \sigma$. Ako je interpretacija ρ jako reverzibilna, tada, na osnovu tvrđenja 6.1.5, $\sigma \in [\rho]_{\sim_c} = \{\rho\}$. Dakle, interpretacija $\sigma = \rho$ je jako reverzibilna. Ako je interpretacija ρ reverzibilna, tada je $[\sigma]_{\sim_c} = [\rho]_{\sim_c}$ antilanac u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$, pa je i σ takođe reverzibilna. Konačno, ako je interpretacija ρ slabo reverzibilna, tada $\sigma \in [\rho]_{\sim_c} = [\rho]_{\cong}$, pa je $[\sigma]_{\cong} = [\rho]_{\cong}$ konveksan skup u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$, što znači da je interpretacija σ slabo reverzibilna. □

8.1 Jaka reverzibilnost

Koncept jako reverzibilnih relacija poznat je u literaturi pod imenom *konstantne relacije* (videti [16, str. 251])

Tvrđenje 8.1.1 *Neka je X neprazan skup i $L = \langle R_i : i \in I \rangle$ relacijski jezik. Za svaku interpretaciju $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) ρ je jako reverzibilna;

(b) $[\rho]_{\sim_c} = \{\rho\}$;

(c) $\mathrm{Aut}(\rho) = \mathrm{Sym}(X)$;

(d) $\mathrm{Cond}(\rho) = \mathrm{Sym}(X)$;

(e) $f[\rho] = \rho$, za svako $f \in \mathrm{Sym}(X)$;

(f) Relacija ρ_i je jako reverzibilna za svako $i \in I$;

(g) Za svako $i \in I$, relacija ρ_i je podskup skupa X^{n_i} definabilan formulom praznog jezika $L_\emptyset$, bez kvantifikatora i parametara.

Dokaz.

(a)⇒(b) Ako je $[\rho]_{\cong} = \{\rho\}$, tada je, na osnovu tvrđenja 6.1.5,

$$[\rho]_{\sim_c} = \mathrm{Conv}_{\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle}(\{\rho\}) = \{\rho\}.$$

(b)⇒(c) Ako je $[\rho]_{\sim_c} = \{\rho\}$ i $f \in \mathrm{Sym}(X)$, tada, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) i tvrđenja 6.1.2 (d), imamo da $f[\rho] \in [\rho]_{\cong} \subseteq [\rho]_{\sim_c}$, što implicira da je $f[\rho] = \rho$. Na osnovu tvrđenja 1.1.3 (g), imamo da $f \in \mathrm{Aut}(\rho)$.

(c)⇒(d) Ovaj smer je trivijalan.

(d)⇒(a) Ako je $\mathrm{Cond}(\rho) = \mathrm{Sym}(X)$, tada, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e), imamo da je

$$f[\rho] \subseteq \rho, \quad \text{za svako } f \in \mathrm{Sym}(X). \tag{8.1}$$

Ako bismo pretpostavili da postoji $g \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $g[\rho] \subsetneq \rho$, tada bismo, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (a) i (j), imali da je $\rho \subsetneq g^{-1}[\rho]$, odakle bi, na osnovu (8.1), sledilo da je $g^{-1}[\rho] \subseteq \rho \subsetneq g^{-1}[\rho]$, što je nemoguće. Dakle, $f[\rho] = \rho$ za svako $f \in \mathrm{Sym}(X)$, odakle, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), sledi da je interpretacija ρ jako reverzibilna.

(c)$\Leftrightarrow$(e) Ova ekvivalencija sledi iz tvrđenja 1.1.3 (g).

(c)$\Leftrightarrow$(f) Imamo da je $\mathrm{Aut}(\rho) = \mathrm{Sym}(X)$ akko je $\bigcap_{i\in I} \mathrm{Aut}(\rho_i) = \mathrm{Sym}(X)$ akko je $\mathrm{Aut}(\rho_i) = \mathrm{Sym}(X)$ za svako $i \in I$, što, na osnovu ekvivalencije (a)$\Leftrightarrow$(c), važi akko su sve relacije ρ_i jako reverzibilne.

(f)$\Leftrightarrow$(g) Neka je $M_n := \{0,1\}^{\{\langle k,l\rangle : 1\leq k<l\leq n\}}$, za $n \geq 2$. Neka je, za $c = \langle c_{k,l} : 1 \leq k < l \leq n\rangle \in M_n$, $L_\emptyset$-formula $\psi_c(v_1, \dots, v_n)$ definisana sa

$$\psi_c(v_1, \dots, v_n) := \bigwedge\nolimits_{1\leq k<l\leq n} (v_k = v_l)^{c_{k,l}}, \tag{8.2}$$

gde je, za formulu η, $\eta^0 := \neg\eta$ i $\eta^1 := \eta$. Neka je dalje, za datu $L_\emptyset$-formulu $\varphi(v_1, \dots, v_n)$,

$$D_\varphi := \Big\{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in X^n : X \models \varphi[x_1, \dots, x_n]\Big\}$$

odgovarajuća n-arna relacija na skupu X definisana formulom φ, i neka je

$$\mathcal{D}_{X,n} := \Big\{\emptyset\Big\} \cup \Big\{D_\varphi : \varphi \text{ je disjunkcija nekih formula oblika (8.2)}\Big\}.$$

Neka je još $\mathcal{D}_{X,1} := \{\emptyset, X\}$. Lako se vidi da važi

$$\forall c, c' \in M_n\ (c \neq c' \Rightarrow D_{\psi_c} \cap D_{\psi_{c'}} = \emptyset) \quad \text{i} \quad X^n = \bigcup\nolimits_{c\in M_n} D_{\psi_c}, \tag{8.3}$$

kao i da je $\mathcal{D}_{X,n}$ Booleova algebra $L_\emptyset$-definabilnih podskupova skupa X^n. Ekvivalencija (f)$\Leftrightarrow$(g) sada će slediti iz narednog stava:

Stav 8.1.2 *Za svako $n \in \mathbb{N}$ i $\rho \subseteq X^n$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*
(i) ρ je jako reverzibilna;
(ii) $f^n[\rho] = \rho$, za svako $f \in \mathrm{Sym}(X)$;
(iii) $\rho \in \mathcal{D}_{X,n}$.

Dokaz.

(i)$\Leftrightarrow$(ii) Ovo je specijalan slučaj ekvivalencije uslova (a) i (e).

(ii)$\Rightarrow$(iii) Za $n = 1$, ako je $f[\rho] = \rho$ za sve $f \in \mathrm{Sym}(X)$, tada je jasno da $\rho \in \{\emptyset, X\}$. Neka je $n \geq 2$ i $\emptyset \neq \rho \subseteq X^n$, gde je $f^n[\rho] = \rho$, za sve $f \in \mathrm{Sym}(X)$. Prema (8.3), da bi dokazali kako $\rho \in \mathcal{D}_{X,n}$, dovoljno je dokazati da važi

$$\forall c \in M_n\ \ (\rho \cap D_{\psi_c} \neq \emptyset \Rightarrow D_{\psi_c} \subseteq \rho). \tag{8.4}$$

Prvo ćemo dokazati da, za svako $n \geq 2$, imamo

$$\forall c \in M_n \; \forall \bar{x}, \bar{y} \in X^n \; (\psi_c[\bar{x}] \wedge \psi_c[\bar{y}] \Rightarrow \exists f \in \mathrm{Sym}(X) \; f^n(\bar{x}) = \bar{y}). \tag{8.5}$$

Neka $c \in M_n$ i neka $\bar{x}, \bar{y} \in X^n$, tako da je $\psi_c[\bar{x}]$ i $\psi_c[\bar{y}]$. Definišimo

$$g := \Big\{ \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle, \ldots, \langle x_n, y_n \rangle \Big\}.$$

Kako je $\psi_c[\bar{x}]$, za $1 \leq k < l \leq n$ imamo da je $x_k = x_l$ akko je $c_{k,l} = 1$, što, uz $\psi_c[\bar{y}]$, važi akko je $y_k = y_l$. Odatle zaključujemo da je g funkcija, $g : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{y_1, \ldots, y_n\}$, koja je bijekcija. Ako je $f \in \mathrm{Sym}(X)$ proizvoljna ekstenzija funkcije g, tada je jasno da f zadovoljava (8.5).

Sada ćemo dokazati (8.4). Neka $c \in M_n$, $\bar{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \rho \cap D_{\psi_c}$ i $\bar{y} = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle \in D_{\psi_c}$. Tada je $\psi_c[\bar{x}]$ i $\psi_c[\bar{y}]$, pa, na osnovu (8.5), postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $f(x_k) = y_k$, za sve $k \leq n$. Sada, na osnovu (ii), imamo da je $\bar{y} = f^n(\bar{x}) \in f^n[\rho] = \rho$.

(iii)$\Rightarrow$(ii) Za $n = 1$ tvrđenje je očigledno. Neka je $n \geq 2$, $\rho \in \mathcal{D}_{X,n}$ i $f \in \mathrm{Sym}(X)$. Jasno je da je $f^n[\emptyset] = \emptyset$. Pokazaćemo sada da je $f^n[D_{\psi_c}] = D_{\psi_c}$, za $c \in M_n$. Kako je f injekcija, za sve $x, x' \in X$ imamo da je $x = x'$ akko je $f(x) = f(x')$. Dakle, za svako $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in X^n$ imamo da je

$$\bigwedge_{1 \leq k < l \leq n} (x_k = x_l)^{c_{k,l}} \;\text{ akko je }\; \bigwedge_{1 \leq k < l \leq n} (f(x_k) = f(x_l))^{c_{k,l}},$$

tj. $\psi_c[x_1, \ldots, x_n]$ akko je $\psi_c[f(x_1), \ldots, f(x_n)]$, ili ekvivalentno $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in D_{\psi_c}$, a to važi akko $f^n(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle) \in D_{\psi_c}$. Ovo znači da je $D_{\psi_c} = (f^n)^{-1}[D_{\psi_c}]$, i pošto je f (pa, na osnovu tvrđenja 1.1.1 (c), i f^n) bijekcija, dobijamo da je $f^n[D_{\psi_c}] = D_{\psi_c}$.

Konačno, ako je $\rho = D_\varphi$, gde je $\varphi = \bigvee_{j \in J} \psi_{c^j}$, tada je $D_\varphi = \bigcup_{j \in J} D_{\psi_{c^j}}$, i, na osnovu prethodne analize, imamo da je

$$f^n[D_\varphi] = \bigcup_{j \in J} f^n[D_{\psi_{c^j}}] = \bigcup_{j \in J} D_{\psi_{c^j}} = D_\varphi.$$

□

Ovim je završen dokaz tvrđenja. □

Primedba 8.1.3 Ako na skupu $\mathrm{Int}_L(X)$ definišemo preduređenje $\preceq_{A,A}$ (tzv. *skup-automorfni pretporedak*) na sledeći način:

$$\rho \preceq_{A,A} \sigma \iff \mathrm{Aut}(\rho) \subseteq \mathrm{Aut}(\sigma),$$

i, ako odgovarajući antisimetrični količnik obeležimo sa

$$\Big\langle \operatorname{Int}_L(X)\,/\approx_{A,A}\,,\ \leq_{A,A}\Big\rangle,$$

tada, na osnovu tvrđenja 8.1.1 (c), imamo da je $\operatorname{sRev}_L(X)$ najveći, a $\operatorname{Rig}_L(X)$ najmanji element u posetu $\langle \operatorname{Int}_L(X)\,/\approx_{A,A}, \leq_{A,A}\rangle$.

Primer 8.1.4 Za neprazan skup X, proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, i relacijski jezik $L_n = \langle R_n \rangle$, gde je $\operatorname{ar}(R_n) = n$, skup $\operatorname{sRev}_{L_n}(X) = \mathcal{D}_{X,n}$ jako reverzibilnih n-arnih relacija na X je konačna podalgebra Booleove algebre $\operatorname{Int}_{L_n}(X)$. Za $n = 1$ imamo da je $\operatorname{sRev}_{L_1}(X) = \{\emptyset, X\}$, dok za $n = 2$ imamo da je

$$\operatorname{sRev}_{L_b}(X) = \Big\{\emptyset, \Delta_X, \Delta_X^c, X^2\Big\}.$$

Dakle, jedini jako reverzibilni elementi u $\operatorname{Int}_{L_b}(X)$ su prazna relacija, dijagonala, kompletan graf i puna relacija.

Posledica 8.1.5 *Neka je X neprazan skup i $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ relacijski jezik. Tada je $\operatorname{sRev}_L(X) = \prod_{i\in I} \mathcal{D}_{X,n_i}$ pod-kompletna algebra kompletne Booleove algebre $\operatorname{Int}_L(X)$.*

Dokaz. Ovo sledi iz činjenice da su $\mathcal{D}_{X,n_i}$ konačne podalgebre (pa samim tim i pod-kompletne algebre) kompletne Booleove algebre $\operatorname{Int}_{\langle R_i\rangle}(X)$, za $i \in I$. □

Lema 8.1.6 *Neka je X neprazan skup, $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ relacijski jezik i neka $\rho, \sigma \in \operatorname{Int}_L(X)$, pri čemu je $\rho \sim_c \sigma$. Ako $\tau \in \operatorname{sRev}_L(X)$, tada je:*

(a) $\rho \cup \tau \sim_c \sigma \cup \tau$;

(b) $\rho \cap \tau \sim_c \sigma \cap \tau$;

(c) $\rho \setminus \tau \sim_c \sigma \setminus \tau$.

Dokaz.

(a) Na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e), imamo da je $\rho \preccurlyeq_c \sigma$ akko postoji $f \in \operatorname{Sym}(X)$ takvo da je $f[\rho] \subseteq \sigma$. Pošto je interpretacija τ jako reverzibilna, na osnovu tvrđenja 8.1.1 (e) imamo da je $f[\tau] = \tau$, pa je, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (e),

$$f[\rho \cup \tau] = f[\rho] \cup f[\tau] = f[\rho] \cup \tau \subseteq \sigma \cup \tau,$$

što znači da je $\rho \cup \tau \preccurlyeq_c \sigma \cup \tau$. Slično tako, imamo da je $\sigma \cup \tau \preccurlyeq_c \rho \cup \tau$, pa je $\rho \cup \tau \sim_c \sigma \cup \tau$.

Dokaz tvrđenja (b) i (c) ide slično. □

8.2 Reverzibilnost

Tvrđenje 8.2.1 *Neka je X neprazan skup i $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ relacijski jezik. Za svaku interpretaciju $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*
(a) ρ je reverzibilna;
(b) $[\rho]_{\sim_c}$ je antilanac u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle$;
(c) $\forall \sigma \in [\rho]_{\cong} \setminus \{\rho\}$ $(\sigma \not\subseteq \rho \wedge \rho \not\subseteq \sigma)$;
(d) $\forall \sigma \in [\rho]_{\sim_c} \setminus \{\rho\}$ $(\sigma \not\subseteq \rho \wedge \rho \not\subseteq \sigma)$;
(e) $\mathrm{Aut}(\rho) = \mathrm{Cond}(\rho)$;
(f) $\mathrm{Cond}(\rho)$ je podgrupa simetrične grupe $\mathrm{Sym}(X)$;
(g) $\forall f \in \mathrm{Sym}(X)$ $(f[\rho] \subseteq \rho \Rightarrow f[\rho] = \rho)$.

Dokaz.
(a)⇒(b) Ako je $[\rho]_{\cong}$ antilanac u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle$, tada, na osnovu tvrđenja 6.1.5, imamo da je

$$[\rho]_{\sim_c} = \mathrm{Conv}_{\langle \mathrm{Int}_L(X),\subseteq\rangle}([\rho]_{\cong}) = [\rho]_{\cong},$$

pa je i $[\rho]_{\sim_c}$ antilanac u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle$.

(b)⇒(c) Neka je $[\rho]_{\sim_c}$ antilanac u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle$, i neka $\sigma \in [\rho]_{\cong} \setminus \{\rho\}$. Na osnovu tvrđenja 6.1.2 (d) imamo da je $[\rho]_{\cong} \subseteq [\rho]_{\sim_c}$, pa su ρ i σ različiti elementi skupa $[\rho]_{\sim_c}$, i na osnovu toga neuporedivi.

(c)⇒(d) Pretpostavimo suprotno, da je neko $\sigma \in [\rho]_{\sim_c} \setminus \{\rho\}$ $\subseteq$-uporedivo sa ρ. Na osnovu tvrđenja 6.1.5 imamo da $\sigma \in \mathrm{Conv}_{\langle \mathrm{Int}_L(X),\subseteq\rangle}([\rho]_{\cong})$, pa, na osnovu tvrđenja 1.2.2 (b), postoje $\rho_1, \rho_2 \in [\rho]_{\cong}$ takvi da je $\rho_1 \subseteq \sigma \subseteq \rho_2$. Ako je $\sigma \subsetneq \rho$, tada je $\rho_1 \subsetneq \rho$, što je, prema (c), nemoguće. A ako je $\rho \subsetneq \sigma$, tada je $\rho \subsetneq \rho_2$, što je isto nemoguće.

(d)⇒(e) Ako $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$, tada, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e), imamo da je $f[\rho] \subseteq \rho$. Na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) i na osnovu tvrđenja 6.1.2 (d) imamo da $f[\rho] \in [\rho]_{\cong} \subseteq [\rho]_{\sim_c}$, odakle je, na osnovu (d), $f[\rho] = \rho$. Sada, iz tvrđenja 1.1.3 (g) sledi da $f \in \mathrm{Aut}(\rho)$.

(e)⇒(f) Ovaj smer je trivijalan.

(f)⇒(g) Pretpostavimo suprotno, da postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $f[\rho] \subsetneq \rho$. Tada, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e), imamo da $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$, a na osnovu tvrđenja 1.1.2 (a) i (j), imamo da je

$$\rho \subsetneq f^{-1}[\rho]. \tag{8.6}$$

Kako je $\mathrm{Cond}(\rho)$ podgrupa simetrične grupe $\mathrm{Sym}(X)$, sledi da $f^{-1} \in \mathrm{Cond}(\rho)$, odakle, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e), sledi da je $f^{-1}[\rho] \subseteq \rho$, što, zajedno sa (8.6), implicira da je $f^{-1}[\rho] \subsetneq f^{-1}[\rho]$, a to je kontradikcija.

(g)⇒(a) Neka $\rho_1, \rho_2 \in [\rho]_{\cong}$ i neka je $\rho_1 \subseteq \rho_2$. Na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) postoje $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$ takvi da je $\rho_1 = f[\rho]$ i $\rho_2 = g[\rho]$. Na osnovu tvrđenja 1.1.2 (j) i (a) imamo da je

$$(g^{-1} \circ f)[\rho] = g^{-1}[f[\rho]] \subseteq g^{-1}[g[\rho]] = \rho.$$

Kako $g^{-1} \circ f \in \mathrm{Sym}(X)$, na osnovu (g) zaključujemo da je $(g^{-1} \circ f)[\rho] = \rho$, odakle sledi da je $f[\rho] = g[\rho]$, tj. da je $\rho_1 = \rho_2$. □

Neka $P_{fcf}(X)$ označava konačno-kokonačnu podalgebru algebre partitivnog skupa $P(X)$. Jasno je da je $\mathrm{Fcf}_L(X) := \prod_{i \in I} P_{fcf}(X^{n_i})$ podalgebra Booleove algebre $\mathrm{Int}_L(X) = \prod_{i \in I} P(X^{n_i})$. Imamo da je

$$\mathrm{Fcf}_L(X) = \Big\{\rho \in \mathrm{Int}_L(X) : \forall i \in I \ (|\rho_i| < \omega \vee |X^{n_i} \setminus \rho_i| < \omega)\Big\}.$$

Tvrđenje 8.2.2 *Neka je X neprazan skup i $L = \langle R_i : i \in I \rangle$ relacijski jezik. Tada, za svaku interpretaciju $\rho = \langle \rho_i : i \in I \rangle \in \mathrm{Int}_L(X)$, imamo:*

(a) Ako su sve relacije $\rho_i \subseteq X^{n_i}$, $i \in I$, reverzibilne, tada je interpretacija ρ reverzibilna;

(b) ρ je reverzibilna akko je ρ^c reverzibilna;

(c) $\mathrm{Fcf}_L(X) \subseteq \mathrm{Rev}_L(X)$, odakle sledi da, za konačan skup X, imamo da je $\mathrm{Rev}_L(X) = \mathrm{Int}_L(X)$;

(d) Ako je $L = \langle R_1, R_2 \rangle$, gde je $\mathrm{ar}(R_1) = \mathrm{ar}(R_2) = n \in \mathbb{N}$, tada, za svaki beskonačan skup X i svako $\rho_1 \subseteq X^n$, imamo da

$$\rho := \langle \rho_1, X^n \setminus \rho_1 \rangle \in \mathrm{Rev}_L(X).$$

Dokaz.

(a) Neka je $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $f[\rho] \subseteq \rho$. Tada je, za svako $i \in I$, $f^{n_i}[\rho_i] \subseteq \rho_i$, odakle, na osnovu tvrđenja 8.2.1 (g), sledi da je, za svako $i \in I$, $f^{n_i}[\rho_i] = \rho_i$, tj. $f[\rho] = \rho$. Na osnovu tvrđenja 8.2.1 (g) opet, zaključujemo da je ρ reverzibilna interpretacija.

(b) Neka je interpretacija ρ reverzibilna i neka je $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $f[\rho^c] \subseteq \rho^c$. Kako je f bijekcija, imamo da je $f[\rho^c] = (f[\rho])^c$, i stoga je $(f[\rho])^c \subseteq \rho^c$, tj. $\rho \subseteq f[\rho]$. Na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) ρ i $f[\rho]$ pripadaju antilancu $[\rho]_{\cong}$, odakle zaključujemo da je $f[\rho] = \rho$. Dakle,

$$f[\rho^c] = (f[\rho])^c = \rho^c,$$

pa je, prema tvrđenju 8.2.1 (g), interpretacija ρ^c reverzibilna. Obrat sledi iz jednakosti $\rho = (\rho^c)^c$.

(c) Neka $\rho = \langle \rho_i : i \in I \rangle \in \mathrm{Fcf}_L(X)$. Prema (a) i na osnovu tvrđenja 8.2.1 (g), dovoljno je dokazati da, za svako $i \in I$ i $f \in \mathrm{Sym}(X)$, važi

$$f^{n_i}[\rho_i] \subseteq \rho_i \implies f^{n_i}[\rho_i] = \rho_i. \tag{8.7}$$

Na osnovu tvrđenja 1.1.1 (c), $f^{n_i} : X^{n_i} \to X^{n_i}$ je bijekcija, pa ako je $|\rho_i| < \omega$, (8.7) je očigledno. A ako je $|X^{n_i} \setminus \rho_i| < \omega$, tada je $X^{n_i} \setminus \rho_i$ reverzibilna relacija, pa je, na osnovu (b), i relacija ρ_i reverzibilna.

(d) Neka je $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $f[\rho] \subseteq \rho$, tj. da je $f^n[\rho_1] \subseteq \rho_1$ i $f^n[X^n \setminus \rho_1] \subseteq X^n \setminus \rho_1$. Na osnovu tvrđenja 1.1.1 (c), $f^n : X^n \to X^n$ je bijekcija, pa imamo da je $f^n[\rho_1] = \rho_1$ i $f^n[X^n \setminus \rho_1] = X^n \setminus \rho_1$, tj. $f[\rho] = \rho$. Na osnovu tvrđenja 8.2.1 (g), interpretacija ρ je reverzibilna. $\square$

Primer 8.2.3 Obrat tvrđenja 8.2.2 (a) ne važi. Neka objekti L, X i ρ_1 zadovoljavaju pretpostavke tvrđenja 8.2.2 (d). Ako je A beskonačan i kobeskonačan podskup skupa X i ako je $\rho_1 = \Delta_A$, gde je

$$\Delta_A := \Big\{ \langle a, a, \ldots, a \rangle \in X^n : a \in A \Big\}, \text{ za } A \subseteq X,$$

tada relacija ρ_1 nije reverzibilna, ali interpretacija $\rho := \langle \rho_1, X^n \setminus \rho_1 \rangle$ jeste. Uočimo kako su Δ_X i $\Delta_\emptyset$ jako reverzibilne relacije, dok je relacija Δ_A reverzibilna za konačan ili kokonačan podskup $A \subseteq X$.

Primedba 8.2.4 Ako na skupu $\mathrm{Int}_L(X)$ definišemo preduređenje $\preceq_{C,C}$ (tzv. *skup-kondenzacioni pretporedak*) na sledeći način:

$$\rho \preceq_{C,C} \sigma \iff \mathrm{Cond}(\rho) \subseteq \mathrm{Cond}(\sigma),$$

i ako odgovarajući antisimetrični količnik obeležimo sa

$$\Big\langle \mathrm{Int}_L(X) \,/\!\approx_{C,C} , \leq_{C,C} \Big\rangle,$$

tada, na osnovu tvrđenja 8.1.1 (d), imamo da je $\mathrm{sRev}_L(X)$ najveći, a na osnovu tvrđenja 8.2.1 (e), da je $\mathrm{Rev}_L(X) \cap \mathrm{Rig}_L(X)$ najmanji element u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X) \,/ \approx_{C,C}, \leq_{C,C} \rangle$. Na osnovu tvrđenja 8.2.1 (f) sledi da je skup $\mathrm{Rev}_L(X)$ $\approx_{C,C}$-invarijantan, tj. $\mathrm{Rev}_L(X) \,/\!\approx_{C,C} \subseteq \mathrm{Int}_L(X) \,/\!\approx_{C,C}$, i još imamo da je

$$\mathrm{Int}_L(X) \,/\!\approx_{C,C} = \mathrm{Conv}_{\langle \mathrm{Int}_L(X)/\approx_{C,C}, \leq_{C,C} \rangle} \Big(\mathrm{Rev}_L(X) \,/\!\approx_{C,C} \Big).$$

Na sličan način kao u dokazu teoreme 8.3.28, dokazuje se da su, za $\rho, \sigma \in \mathrm{Int}_L(X)$, sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $\rho \approx_{C,C} \sigma$;
(ii) $\mathrm{Cond}(\rho) = \mathrm{Cond}(\sigma)$;
(iii) $f[\rho] \subseteq g[\rho] \iff f[\sigma] \subseteq g[\sigma]$, za sve $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$;
(iv) $\langle [\rho]_{\cong}, \subseteq\rangle \cong_F \langle [\sigma]_{\cong}, \subseteq\rangle$, gde je preslikavanje $F : [\rho]_{\cong} \to [\sigma]_{\cong}$ dato na sledeći način: $F(f[\rho]) := f[\sigma]$, za $f \in \mathrm{Sym}(X)$, i pri tome je F dobro definisano.

Tvrđenje 8.2.5 *Neka su $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ L-strukture. Ako je $\mathbb{X}$ reverzibilna struktura i $\mathbb{X} \sim_c \mathbb{Y}$, tada je $\mathbb{X} \cong \mathbb{Y}$ (pa je i $\mathbb{Y}$ reverzibilna struktura), i pri tome je* $\mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \mathrm{Iso}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Dokaz. Neka je $\mathbb{X} = \langle X, \rho\rangle$ i $\mathbb{Y} = \langle Y, \sigma\rangle$, gde $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$, $\sigma \in \mathrm{Int}_L(Y)$. Neka $f \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ i $g \in \mathrm{Cond}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$. Tada, na osnovu tvrđenja 8.2.1 (e), imamo da $f \circ g \in \mathrm{Cond}(\mathbb{Y}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Y})$. Sada, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e) i (g), imamo da je $f[\rho] \subseteq \sigma$, $g[\sigma] \subseteq \rho$ i $(f \circ g)[\sigma] = \sigma$. Dakle,

$$\sigma = f[g[\sigma]] \subseteq f[\rho] \subseteq \sigma,$$

pa je $f[\rho] = \sigma$, što, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (g), znači da $f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Dakle, $\mathbb{X} \cong \mathbb{Y}$, i kako je $f \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ bilo proizvoljno, imamo da je $\mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subseteq \mathrm{Iso}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, tj. $\mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \mathrm{Iso}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. □

8.3 Slaba reverzibilnost

Za intepretaciju $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$ reći ćemo da ima *svojstvo Cantor-Schröder-Bernstein za kondenzacije* akko kad god su $f : \langle X, \rho\rangle \to \langle X, \sigma\rangle$ i $g : \langle X, \sigma\rangle \to \langle X, \rho\rangle$ kondenzacije, imamo da je $\rho \cong \sigma$ (odnosno, kad god je $\rho \preccurlyeq_c \sigma$ i $\sigma \preccurlyeq_c \rho$, imamo da je $\rho \cong \sigma$), gde je $\sigma \in \mathrm{Int}_L(X)$ proizvoljno.

Tvrđenje 8.3.1 *Neka je X neprazan skup i $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ relacijski jezik. Za svaku interpretaciju $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*
(a) ρ je slabo reverzibilna;
(b) ρ ima svojstvo Cantor-Schröder-Bernstein za kondenzacije;
(c) $[\rho]_{\sim_c} = [\rho]_{\cong}$;
(d) $(\sigma\!\uparrow \cap\, \rho\!\downarrow) \cup (\rho\!\uparrow \cap\, \sigma\!\downarrow) \subseteq [\rho]_{\cong}$, za svako $\sigma \in [\rho]_{\cong}$;[2]
(e) $\sigma\!\uparrow \cap\, \rho\!\downarrow \subseteq [\rho]_{\cong}$, za svako $\sigma \in [\rho]_{\cong}$.

Dokaz.

[2]Uslov (d) iz tvrđenja 8.3.1 kaže da je skup $[\rho]_{\cong}$ *ρ-zvezdast* u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle$.

(a)⇒(b) Ako su $f : \langle X, \rho\rangle \to \langle X, \sigma\rangle$ i $g : \langle X, \sigma\rangle \to \langle X, \rho\rangle$ kondenzacije, tada je $\rho \preccurlyeq_c \sigma$ i $\sigma \preccurlyeq_c \rho$, tj. $\rho \sim_c \sigma$. Na osnovu tvrđenja 6.1.5 i (a),

$$\sigma \in [\rho]_{\sim_c} = \mathrm{Conv}_{\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle}([\rho]_{\cong}) = [\rho]_{\cong},$$

tj. $\rho \cong \sigma$.

(b)⇒(c) Neka $\sigma \in [\rho]_{\sim_c}$. Tada postoje kondenzacije $f : \langle X, \rho\rangle \to \langle X, \sigma\rangle$ i $g : \langle X, \sigma\rangle \to \langle X, \rho\rangle$, pa, na osnovu (b), $\sigma \in [\rho]_{\cong}$, tj. $[\rho]_{\sim_c} \subseteq [\rho]_{\cong}$. Druga inkluzija sledi iz tvrđenja 6.1.2 (d).

(c)⇒(d) Na osnovu tvrđenja 6.1.5 i (c) je $[\rho]_{\cong} = \mathrm{Conv}_{\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle}([\rho]_{\cong})$, tj. skup $[\rho]_{\cong}$ je konveksan u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle$, što implicira (d).

(d)⇒(e) Ovaj smer je trivijalan.

(e)⇒(a) Neka $\rho_1, \rho_2 \in [\rho]_{\cong}$ i $\sigma \in \mathrm{Int}_L(X)$ tako da je $\rho_1 \subseteq \sigma \subseteq \rho_2$. Na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), postoje bijekcije $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$ takve da je $\rho_1 = f[\rho] \subseteq \sigma \subseteq g[\rho] = \rho_2$. Tada je, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (j) i (a),

$$(g^{-1} \circ f)[\rho] = g^{-1}[f[\rho]] \subseteq g^{-1}[\sigma] \subseteq \rho.$$

Kako $g^{-1} \circ f \in \mathrm{Sym}(X)$, na osnovu (e) i tvrđenja 1.1.5 (a) imamo da $g^{-1}[\sigma] \in [\rho]_{\cong}$, pa i $\sigma \in [\rho]_{\cong}$, što znači da je skup $[\rho]_{\cong}$ konveksan u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle$.
□

Primer 8.3.2 $\mathrm{sRev}_{L_b}(\omega) \subsetneq \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega) \subsetneq \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega) \subsetneq \mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$.

Neka je $\rho_0 \in \mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$ relacija ekvivalencije ρ iz primera 6.1.4 i neka je $\rho_1 \in \mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$ dato sa

$$\rho_1 := \Big\{ \langle n, n+1\rangle : n \in \{3k : k \in \omega\} \Big\}.$$

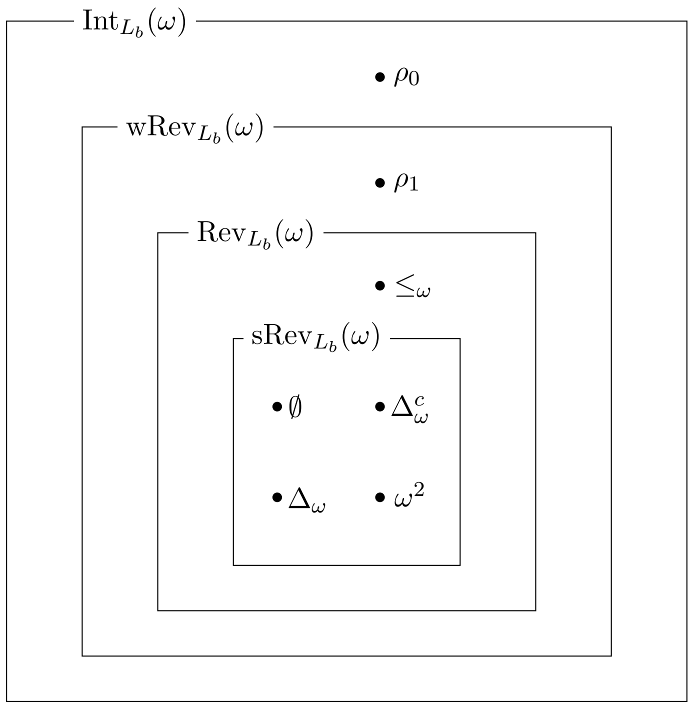
Kako je $[\rho_0]_{\cong} \neq [\rho_0]_{\sim_c}$, relacija ρ_0 nije slabo reverzibilna. Relacija ρ_1 nije reverzibilna (zato što je $\rho_1 \cong \rho_1 \setminus \{\langle 0, 1\rangle\}$). Primenom tvrđenja 8.3.1 (e), lako zaključujemo kako je relacija ρ_1 slabo reverzibilna. Ako sa $\leq_\omega$ označimo prirodni poredak na skupu ω, tada je $\leq_\omega$ jedna reverzibilna relacija, koja nije jako reverzibilna, jer je, na osnovu primera 8.1.4, $\mathrm{sRev}_{L_b}(\omega) = \{\emptyset, \Delta_\omega, \Delta_\omega^c, \omega^2\}$. Videti sliku 8.1.

Tvrđenje 8.3.3 *Neka je X neprazan skup i $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ relacijski jezik. Tada, za svaku interpretaciju $\rho = \langle \rho_i : i \in I\rangle \in \mathrm{Int}_L(X)$, imamo:*

(a) Ako postoji $i_0 \in I$ takvo da je relacija ρ_{i_0} slabo reverzibilna, i da su sve relacije $\rho_i \subseteq X^{n_i}$, $i \in I \setminus \{i_0\}$, jako reverzibilne, tada je interpretacija ρ slabo reverzibilna;

(b) ρ je slabo reverzibilna akko je ρ^c slabo reverzibilna;

(c) Ako je binarna relacija $\rho \in \mathrm{Int}_{L_b}(X)$ (i)refleksivna, simetrična i slabo reverzibilna, tada je ρ reverzibilna.



Slika 8.1: $\mathrm{sRev}_{L_b}(\omega) \subsetneq \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega) \subsetneq \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega) \subsetneq \mathrm{Int}_{L_b}(\omega)$.

Dokaz.

(a) Neka $\rho^1, \rho^2 \in [\rho]_{\cong}$ i $\sigma \in \mathrm{Int}_L(X)$, tako da je $\rho^1 \subseteq \sigma \subseteq \rho^2$. Na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), postoje bijekcije $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$ takve da je

$$\rho^1 = f[\rho] \subseteq \sigma \subseteq g[\rho] = \rho^2.$$

Tada je $\rho_i^1 = f^{n_i}[\rho_i] \subseteq \sigma_i \subseteq g^{n_i}[\rho_i] = \rho_i^2$, za sve $i \in I$. Kako je relacija ρ_{i_0} slabo reverzibilna, sledi da $\sigma_{i_0} \in [\rho_{i_0}]_{\cong}$, tj. da postoji $h \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $\sigma_{i_0} = h^{n_{i_0}}[\rho_{i_0}]$. Kako su sve relacije $\rho_i \subseteq X^{n_i}$, $i \in I \setminus \{i_0\}$, jako reverzibilne, na osnovu tvrđenja 8.1.1 (e) imamo da je $f^{n_i}[\rho_i] = \rho_i$ i $g^{n_i}[\rho_i] = \rho_i$, pa je $\sigma_i = \rho_i$ za $i \in I \setminus \{i_0\}$. Tada je, na osnovu tvrđenja 8.1.1 (e), $\sigma = h[\rho] \in [\rho]_{\cong}$, pa je skup $[\rho]_{\cong}$ konveksan.

(b) Neka je ρ slabo reverzibilna, i neka su $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$ i $\sigma \in \mathrm{Int}_L(X)$ takvi da je $f[\rho^c] \subseteq \sigma \subseteq g[\rho^c]$. Kako je f bijekcija, imamo da je

$$f[\rho^c] = (f[\rho])^c \ \text{ i } \ g[\rho^c] = (g[\rho])^c,$$

pa je $(f[\rho])^c \subseteq \sigma \subseteq (g[\rho])^c$, tj. $g[\rho] \subseteq \sigma^c \subseteq f[\rho]$. Na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), $f[\rho]$ i $g[\rho]$ pripadaju konveksnom skupu $[\rho]_{\cong}$, pa i $\sigma^c \in [\rho]_{\cong}$, odakle, prema tvrđenju 1.1.5 (a), postoji $h \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $\sigma^c = h[\rho]$. Tada je

$$\sigma = (h[\rho])^c = h[\rho^c] \in [\rho^c]_{\cong},$$

pa je, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) opet, skup $[\rho^c]_{\cong}$ konveksan. Obrat sledi iz jednakosti $\rho = (\rho^c)^c$.

(c) Pretpostavimo suprotno, da relacija ρ nije reverzibilna. Tada, na osnovu tvrđenja 8.2.1 (g). postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $f[\rho] \subsetneq \rho$. Neka $\langle x, y\rangle \in \rho$ i $\langle x, y\rangle \notin f[\rho]$. Kako su binarne relacije ρ i $f[\rho]$ (i)refleksivne, zaključujemo da je $x \neq y$. A kako su binarne relacije ρ i $f[\rho]$ simetrične, zaključujemo da $\langle y, x\rangle \in \rho$ i $\langle y, x\rangle \notin f[\rho]$. Neka je $\sigma := f[\rho] \cup \{\langle x, y\rangle\}$. Tada je $f[\rho] \subseteq \sigma \subseteq \rho$, pa, na osnovu tvrđenja 6.1.5, imamo da

$$\sigma \in [\rho]_{\sim_c} = \mathrm{Conv}_{\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X), \subseteq\rangle}([\rho]_{\cong}) = [\rho]_{\cong}.$$

Dakle, $\rho \cong \sigma$, što je nemoguće zato što relacija σ nije simetrična. □

Primer 8.3.4 Ako u tvrđenju 8.3.3 (a) jaku reverzibilnost zamenimo s reverzibilnošću, tvrđenje više ne važi.

Neka je $L = \langle R_1, R_2\rangle$, gde je $\mathrm{ar}(R_1) = \mathrm{ar}(R_2) = 2$, neka su

$$\rho_1 := \bigcup_{k\in\omega} \Big\{\langle 8k, 8k+1\rangle, \langle 8k+2, 8k+3\rangle\Big\},$$

$$\rho_2 := \bigcup_{k\in\omega} \Big\{\langle 4k, 4k+1\rangle, \langle 4k+1, 4k+2\rangle, \langle 4k+2, 4k+3\rangle\Big\},$$

dve binarne relacije na skupu ω, i neka je $\rho := \langle \rho_1, \rho_2\rangle \in \mathrm{Int}_L(\omega)$. Na osnovu tvrđenja 8.3.1 (e) zaključujemo da je relacija ρ_1 slabo reverzibilna, a na osnovu tvrđenja 8.2.1 (g) da je relacija ρ_2 reverzibilna. Pretpostavimo da je interpretacija ρ slabo reverzibilna. Neka je $f \in \mathrm{Sym}(\omega)$ takvo da je $f[\rho_2] = \rho_2$ i $f[\rho_1] = \rho_1 \setminus \{\langle 0, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$. Neka je $\sigma_1 := \rho_1 \setminus \{\langle 2, 3\rangle\}$ i $\sigma_2 := \rho_2$. Tada za interpetaciju $\sigma := \langle \sigma_1, \sigma_2\rangle$ imamo da je $f[\rho] \subseteq \sigma \subseteq \rho$. Na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), i uz pretpostavku da je skup $[\rho]_{\cong}$ konveksan, zaključujemo da $\sigma \in [\rho]_{\cong}$, pa na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) opet, postoji $g \in \mathrm{Sym}(\omega)$ takvo da je $\sigma = g[\rho]$, tj. $\sigma_1 = g[\rho_1]$ i $\sigma_2 = g[\rho_2]$. Kako $\langle 0, 1\rangle \in \sigma_1$, imamo da $\langle g^{-1}(0), g^{-1}(1)\rangle \in g^{-1}[\sigma_1] = \rho_1$, pa je

$$g^{-1}(0) = 8k, \text{ ili je } g^{-1}(0) = 8k+2, \text{ za neko } k \in \omega. \tag{8.8}$$

Kako je $g[\rho_2] = \rho_2$, imamo da je $\{\langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\} \subseteq g[\rho_2]$, odakle sledi da je

$$\Big\{\langle g^{-1}(0), g^{-1}(1)\rangle, \langle g^{-1}(1), g^{-1}(2)\rangle, \langle g^{-1}(2), g^{-1}(3)\rangle\Big\} \subseteq \rho_2,$$

pa, na osnovu (8.8), zaključujemo da je

$$g^{-1}(0) = 8k, g^{-1}(1) = 8k{+}1, g^{-1}(2) = 8k{+}2 \text{ i } g^{-1}(3) = 8k{+}3, \text{ za neko } k \in \omega.$$

Ali tada, iz $\langle 8k+2, 8k+3\rangle \in \rho_1$ dobijamo da je

$$\langle 2,3\rangle = \langle g(8k+2), g(8k+3)\rangle \in g[\rho_1] = \sigma_1,$$

što je kontradikcija. Dakle, interpretacija ρ nije slabo reverzibilna.

Neka je X neprazan skup i $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ neprazan relacijski jezik. Podsetimo se da je Booleova mreža $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle$ atomna, i da važi

$$\mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) = \bigcup_{i\in I}\Big({}^{I\setminus\{i\}}\{\emptyset\} \times [X^{n_i}]^1\Big) \subseteq \prod_{i\in I}[X^{n_i}]^{\leq 1}.$$

Imajući na umu malu zloupotrebu notacije, koja je objašnjena u odeljku 1.1, za proizvoljnu interpretaciju $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$, definisaćemo $\rho^* \in \mathrm{Int}_L(X)$ na sledeći način:

$$\rho^* := \bigcup\Big\{\sigma \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho\!\downarrow\; : \; \rho \cong \rho \setminus \sigma\Big\}. \tag{8.9}$$

Specijalno, ako je $L = L_n = \langle R\rangle$, gde je $\mathrm{ar}(R) = n$, tada imamo da je

$$\rho^* = \Big\{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \in \rho \; : \; \rho \cong \rho \setminus \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle\}\Big\}. \tag{8.10}$$

Tvrđenje 8.3.5 *Ako* $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$ *i* $f \in \mathrm{Sym}(X)$, *tada je* $f[\rho^*] = (f[\rho])^*$.

Dokaz. Neka je

$$\sigma \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap f[\rho^*]\!\downarrow\; \subseteq \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap f[\rho]\!\downarrow$$

proizvoljno. Tada, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (a) i (c), imamo da

$$\sigma' := f^{-1}[\sigma] \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho^*\!\downarrow\; .$$

Prema tvrđenju 1.1.5 (a) i na osnovu (8.9) je

$$f[\rho] \cong \rho \cong \rho \setminus \sigma' \cong f[\rho \setminus \sigma'] = f[\rho] \setminus \sigma.$$

Kako je $\sigma \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap f[\rho]\downarrow$, na osnovu (8.9) je $\sigma \subseteq (f[\rho])^*$, što znači da je

$$\mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap f[\rho^*]\downarrow \subseteq \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap (f[\rho])^*\downarrow .$$

Sada, pošto je Booleova mreža $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle$ atomna, na osnovu tvrđenja 1.4.3 imamo da je

$$f[\rho^*] = \bigcup \Big(\mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap f[\rho^*]\downarrow\Big) \subseteq \bigcup \Big(\mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap (f[\rho])^*\downarrow\Big) = (f[\rho])^*,$$

čime smo dokazali jednu inkluziju. Na osnovu toga i tvrđenja 1.1.2 (c) je

$$f^{-1}[(f[\rho])^*] \subseteq (f^{-1}[f[\rho]])^* = \rho^*,$$

odnosno $(f[\rho])^* \subseteq f[\rho^*]$, čime smo dokazali i drugu inkluziju. □

Tvrđenje 8.3.6 *Neka je X neprazan skup, $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ relacijski jezik i neka $\rho = \langle \rho_i : i \in I\rangle \in \mathrm{wRev}_L(X)$. Tada imamo:*

(a) $\rho^* = \langle \emptyset : i \in I\rangle \iff \rho \in \mathrm{Rev}_L(X)$;

(b) $\rho^* \subseteq \langle (\rho_i)^* : i \in I\rangle$;

(c) $\forall i \in I \ \Big((\rho^*)_i \neq \emptyset \Rightarrow |(\rho^*)_i| \geq \omega\Big)$;

(d) Ako je $L = L_n = \langle R\rangle$, gde je $\mathrm{ar}(R) = n$, tada važi

$$\rho^* \neq \emptyset \implies |\rho^*| \geq \omega.$$

Dokaz.

(a) ($\Rightarrow$) Dokazaćemo kontrapoziciju. Ako $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$, tada, prema tvrđenju 8.2.1 (g), postoji $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$ takvo da je $f[\rho] \subsetneq \rho$. S obzirom da je Booleova mreža $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq\rangle$ atomna, zaključujemo da postoji $\sigma \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+)$ takvo da je $\sigma \subseteq \rho \setminus f[\rho]$. Tada je $f[\rho] \subseteq \rho \setminus \sigma \subseteq \rho$, pa kako je interpretacija ρ slabo reverzibilna, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) i tvrđenja 8.3.1 (e) dobijamo da je $\rho \cong \rho \setminus \sigma$, odakle, s obzirom da je $\sigma \subseteq \rho$, na osnovu 8.9 sledi da je $\rho^* \supseteq \sigma \neq \langle \emptyset : i \in I\rangle$.

($\Leftarrow$) Ovaj smer sledi direktno na osnovu tvrđenja 8.2.1 (c).

(b) Neka $j \in I$. Treba dokazati da je $(\rho^*)_j \subseteq (\rho_j)^*$. Na osnovu (8.9) imamo da $\langle x_1, x_2, \ldots, x_{n_j}\rangle \in (\rho^*)_j$ akko postoji

$$\sigma = \langle \sigma_i : i \in I\rangle \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+)$$

takvo da je $\rho \cong \rho \setminus \sigma$ i da je $\sigma_i = \emptyset$ za $i \in I \setminus \{j\}$, a

$$\sigma_j = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_{n_j}\rangle\} \subseteq \rho_j.$$

To implicira da je $\rho_j \cong \rho_j \setminus \sigma_j$, što, na osnovu (8.10), znači da

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_{n_j} \rangle \in (\rho_j)^*.$$

(c) Ako je $(\rho^*)_j \neq \emptyset$, tada, na osnovu (8.9), postoji $\pi \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+)$, pri čemu je $\pi_i = \emptyset$, za $i \in I \setminus \{j\}$, takvo da je $\pi \subseteq \rho$, i da je $\rho \cong \rho \setminus \pi$. Sada, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $\rho \setminus \pi = f[\rho]$. Tada je $f[\rho_j] \subsetneq \rho_j$. Sada je lako dokazati indukcijom[3] da je $|\rho_j \setminus f^n[\rho_j]| \geq n$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Neka je $m \in \mathbb{N}$ proizvoljno. Za $\sigma = \rho_j \setminus f^m[\rho_j]$ imamo da je $|\sigma| \geq m$. Neka su

$$\langle x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n_j}^k \rangle, \ \ k \in \{1, 2, \dots, m\},$$

različiti elementi skupa σ. Za proizvoljno $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ imamo da je

$$f^m[\rho] \subseteq \rho \setminus \tau \subseteq \rho,$$

gde je $\tau = \langle \tau_i : i \in I \rangle$, pri čemu je $\tau_i = \emptyset$ za sve $i \in I \setminus \{j\}$, i $\tau_j = \{\langle x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n_j}^k \rangle\}$. Kako je interpretacija ρ slabo reverzibilna, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) i tvrđenja 8.3.1 (e) imamo da je $\rho \cong \rho \setminus \tau$, odakle, na osnovu (8.9), s obzirom da $\tau \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+)$ i da je $\tau \subseteq \rho$, sledi da je $\tau \subseteq \rho^*$. Sada je $\tau_j \subseteq (\rho^*)_j$, odnosno imamo da $\langle x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n_j}^k \rangle \in (\rho^*)_j$. S obzirom da je $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ bilo proizvoljno, zaključujemo da je $|(\rho^*)_j| \geq m$. A kako je $m \in \mathbb{N}$ takođe bilo proizvoljno, imamo da je $|(\rho^*)_j| \geq \omega$.

(d) Ovo sledi direktno iz (c). □

Primedba 8.3.7 Ako je X neprazan skup i $L = L_b$ binarni jezik, tada, za binarnu relaciju $\rho \in \mathrm{Int}_{L_b}(X)$, imamo da je

$$\rho^* = \Big\{ \langle x, y \rangle \in \rho \ : \ \rho \cong \rho \setminus \{\langle x, y \rangle\} \Big\}.$$

Ako je binarna struktura $\langle X, \rho \rangle$ slabo reverzibilna, tada, na osnovu tvrđenja 8.9 (d) važi da

$$\rho^* \neq \emptyset \implies |\rho^*| \geq \omega.$$

Drugim rečima, ako slabo reverzibilna binarna struktura $\mathbb{X}$ ima uklonjivu ivicu, tada ona ima beskonačno mnogo uklonjivih ivica. U [69] dokazano je kako analogno tvrđenje važi i za drveta, a, u [71], dokazano je kako analogno tvrđenje važi i za nepovezane L_b-strukture s konačnim komponentama.

[3] Ovde je $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n}$, a ne $f^n = \underbrace{f \times f \times \cdots \times f}_{n}$.

Primedba 8.3.8 Neka je binarna relacija $\rho \in \mathrm{Int}_{L_b}(X)$ takva da je struktura $\langle X, \rho\rangle$ nešto od sledećeg:

- relacija ekvivalencije,
- graf,
- gusto parcijalno uređenje,
- drvo $\mathbb{T}$ za koje važi $|\,\mathrm{Max}\,\mathbb{T}\,| < \omega$,
- separativan poset $\mathbb{P}$ za koji važi $|\,\mathrm{Min}\,\mathbb{P}\,| < \omega$,
- mreža u kojoj je svaki element (osim, eventualno, najvećeg) $\wedge$-razloživ,
- mreža u kojoj je svaki element (osim, eventualno, najmanjeg) $\vee$-razloživ.

Tada, na osnovu tvrđenja 8.3.6 (a) za slučaj $L = L_b$, zaključujemo da važi:

$$\rho \in \mathrm{wRev}_{L_b}(X) \iff \rho \in \mathrm{Rev}_{L_b}(X).$$

Dakle, u navedenim klasama struktura, reverzibilnost i slaba reverzibilnost su ekvivalentna svojstva[4].

Primer 8.3.9 Klasa $\mathrm{wRev}_{L_b}(\omega) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega)$ sadrži raznovrsne strukture.

1. Ako je $\mathbb{X}_1 = \langle \omega, \rho_1\rangle := \bigcup_\omega \mathbb{L}_2 \cup \bigcup_\omega \mathbf{1}$, gde $\mathbb{L}_n$, $n \in \mathbb{N}$, označava n-elementni lanac, tada $\rho_1 \in \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega)$, i struktura $\mathbb{X}_1$ je višekorensko drvo.

2. Ako je $\mathbb{X}_2 = \langle \omega, \rho_2\rangle := \mathbf{1} + \mathbb{X}_1$, tada $\rho_2 \in \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega)$, i struktura $\mathbb{X}_2$ je jednokorensko drvo.

3. Ako je $\mathbb{X}_3 = \langle \omega, \rho_3\rangle := (\mathbb{A}_\omega + \mathbf{1}) \cup \bigcup_\omega \mathbf{1}$, gde $\mathbb{A}_\omega$ označava antilanac veličine ω, tada $\rho_3 \in \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega)$, i struktura $\mathbb{X}_3$ je separativno parcijalno uređenje.

4. Ako je $\mathbb{X}_4 = \langle \omega, \rho_4\rangle := \mathbf{1} + \left(\bigcup_\omega \mathbb{L}_4 \cup \bigcup_\omega \mathbb{B}_2\right) + \mathbf{1}$, gde je $\mathbb{B}_2 \cong \langle P(\{0,1\}), \subseteq\rangle$, tada $\rho_4 \in \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega)$, i struktura $\mathbb{X}_4$ je mreža.

5. Struktura $\mathbb{X}_1$ je nepovezana.

6. Struktura $\mathbb{X}_1^c = \langle \omega, \rho_1^c\rangle$ je jednostruko povezana, i, na osnovu tvrđenja 8.2.2 (b) i 8.3.3 (b), $\rho_1^c \in \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega)$.

7. Struktura $\mathbb{X}_2$ je bi-povezana.

U vezi s primerom 8.3.9, postavlja se pitanje, koje je i dalje otvoreno, da li postoji $\rho \in \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega)$ takvo da je struktura $\langle \omega, \rho\rangle$ rigidna? A ultrahomogena?

[4] Npr. u mreži $\langle \mathbb{N}, |\rangle$ svaki element je $\wedge$-razloživ, pa $| \not\in \mathrm{wRev}_{L_b}(\mathbb{N}) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(\mathbb{N})$.

Primer 8.3.10 ρ^* i ρ^c.

Lako se pokazuje da, za $\rho \in \mathrm{Int}_{L_b}(X)$, važi

$$(\rho^c)^* = \Big\{ \langle x, y\rangle \in \rho^c \ : \ \rho \cong \rho \cup \{\langle x, y\rangle\}\Big\}.$$

Ako je $\mathbb{X} = \langle \omega, \rho\rangle := \bigcup_\omega \mathbb{L}_2 \cup \bigcup_\omega \mathbf{1}$, tada $\rho \in \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega)$, i pri tome je $\rho^* = \rho$ (pa i $(\rho^*)^* = \rho^*$), ali imamo da je $(\rho^c)^* \neq (\rho^*)^c = \rho^c$, kao i da je $\emptyset = ((\rho^c)^*)^* \neq (\rho^c)^*$. Videti još i primer 8.3.41

Tvrđenje 8.3.11 *Neka je X neprazan skup, $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ relacijski jezik i neka $\rho = \langle \rho_i : i \in I\rangle \in \mathrm{wRev}_L(X)$. Tada imamo:*

(a) Ako je $(\rho^*)_j \neq \emptyset$, za neko $j \in I$, tada je

$$\Big|\mathrm{Cond}(\rho_j) \cap \bigcap\nolimits_{i\in I\setminus\{j\}} \mathrm{Aut}(\rho_i)\Big| \geq \omega. \tag{8.11}$$

(b) Specijalno, ako $\rho \notin \mathrm{Rev}_L(X)$, tada je $|\,\mathrm{Aut}(\rho_i)| \geq \omega$ za sve, osim eventualno jednog, $i \in I$.

Dokaz.

(a) Ako je $(\rho^*)_j \neq \emptyset$, tada je, na osnovu tvrđenja 8.3.6 (c), $|(\rho^*)_j| \geq \omega$. Neka su π^k_j, za $k \in \omega$, različiti elementi iz $[(\rho^*)_j]^1$. Definišimo, za $k \in \omega$, atome

$$\sigma^k = \langle \sigma^k_i : i \in I\rangle \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+)$$

na sledeći način: $\sigma^k_j = \pi^k_j$, i $\sigma^k_i = \emptyset$, za $i \in I \setminus \{j\}$. Tada, na osnovu (8.9), imamo da je $\rho \cong \rho \setminus \sigma^k$, za sve $k \in \omega$, pa, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), postoji $f_k \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $\rho \setminus \sigma^k = f_k[\rho]$. Tada je, za $k \in \omega$, $f_k[\rho_j] = \rho_j \setminus \sigma^k_j$ i $f_k[\rho_i] = \rho_i$, za $i \in I \setminus \{j\}$. Dakle,

$$f_k \in \mathrm{Cond}(\rho_j) \cap \bigcap\nolimits_{i\in I\setminus\{j\}} \mathrm{Aut}(\rho_i),$$

za svako $k \in \omega$, pa kako su f_k, $k \in \omega$, različite bijekcije iz $\mathrm{Sym}(X)$, imamo da važi (8.11).

(b) Ovo sledi direktno na osnovu (a) i na osnovu tvrđenja 8.3.6 (a). $\square$

Ovde se postavljaju zanimljiva pitanja, koja su i dalje otvorena. Naime, neka je $L = \langle R_1, R_2\rangle$, gde je $\mathrm{ar}(R_1) = \mathrm{ar}(R_2) = 2$:

1. Da li postoji $\rho = \langle \rho_1, \rho_2\rangle \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$ takvo da je

$$\{\rho_1, \rho_2\} \cap \Big(\mathrm{wRev}_{L_b}(X) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(X)\Big) = \emptyset?$$

2. Da li postoji $\rho = \langle \rho_1, \rho_2\rangle \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$ takvo da je

$$\{\rho_1, \rho_2\} \cap \mathrm{sRev}_{L_b}(X) = \emptyset?$$

Tvrđenje 8.3.12 *Neka je X neprazan skup, $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ relacijski jezik i neka $\rho = \langle \rho_i : i \in I\rangle \in \mathrm{Int}_L(X)$. Definišimo relaciju ekvivalencije na I,*

$$i \approx_\rho j \iff \rho_i = \rho_j.$$

Tada, ako je $|(\rho_i)^*| < \omega$, za sve $i \in I_\rho := \{j \in I : |[j]_{\approx_\rho}| = 1\}$, imamo da

$$\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \iff \rho \in \mathrm{Rev}_L(X).$$

Specijalno, to važi ako su sve relacije ρ_i, $i \in I_\rho$, reverzibilne.

Dokaz. Neka je $|(\rho_i)^*| < \omega$, za sve $i \in I_\rho := \{j \in I : |[j]_{\approx_\rho}| = 1\}$.

($\Leftarrow$) Ovaj smer je trivijalan.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo suprotno, da $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$. Tada, na osnovu tvrđenja 8.3.6 (b) i (c), imamo da je $(\rho^*)_i = \emptyset$, za sve $i \in I_\rho$. Na osnovu tvrđenja 8.3.6 (a) postoji $k \in I \setminus I_\rho$ takvo da je $(\rho^*)_k \neq \emptyset$. Neka je

$$\sigma = \langle \sigma_i : i \in I\rangle \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+),$$

pri čemu je $\sigma_k \in [(\rho^*)_k]^1$ proizvoljno, i $\sigma_i = \emptyset$, za $i \in I \setminus \{k\}$. Tada je, prema (8.9), $\rho \cong \rho \setminus \sigma$, pa, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$, takvo da je $\rho \setminus \sigma = f[\rho]$, odnosno,

$$f[\rho_k] \subsetneq \rho_k, \qquad f[\rho_i] = \rho_i, \ \text{ za } i \in I \setminus \{k\}. \tag{8.12}$$

S obzirom da $k \notin I_\rho$, možemo uzeti $l \in [k]_{\approx_\rho} \setminus \{k\}$. Tada je $\rho_k = \rho_l$, i, na osnovu (8.12), imamo da je

$$\rho_l = f[\rho_l] = f[\rho_k] \subsetneq \rho_k,$$

a to je kontradikcija. □

Primer 8.3.13 Neka je X neprazan skup i $L = \langle R_1, R_2, R_3\rangle$ relacijski jezik, pri čemu je $\mathrm{ar}(R_1) = \mathrm{ar}(R_2) = \mathrm{ar}(R_3) = 2$. Ako $\rho \in \mathrm{Int}_{L_b}(X)$ proizvoljno, tada, na osnovu tvrđenja 8.3.12 imamo da

$$\langle \rho, \rho, \rho\rangle \in \mathrm{wRev}_L(X) \iff \langle \rho, \rho, \rho\rangle \in \mathrm{Rev}_L(X).$$

Isto važi i za interpretaciju $\langle \rho, \rho, \sigma\rangle$, gde je $\sigma \in \mathrm{Rev}_{L_b}(X)$ proizvoljno.

Ako $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$, tada, kao posledicu tvrđenja 8.3.5, imamo da je

$$\mathrm{Aut}(\rho) \subseteq \mathrm{Aut}(\rho^*) \quad \text{i} \quad \mathrm{Aut}(\rho) \subseteq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*). \tag{8.13}$$

U nastavku sledi još rezultata sličnog ukusa, za slučaj kad $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$.

Tvrđenje 8.3.14 *Neka je X neprazan skup i L relacijski jezik, i neka $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$. Tada važi:*
(a) Za svako $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$ imamo da je

$$f[\rho^*] \subseteq \rho^* \quad i \quad f[\rho \setminus \rho^*] \supseteq \rho \setminus \rho^*;$$

(b) Za svako $f \in \mathrm{Cond}(\rho) \setminus \mathrm{Aut}(\rho)$ imamo da je $f[\rho^*] \subsetneq \rho^*$;
(c) $\mathrm{Cond}(\rho) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho^*)$ i $\mathrm{Cond}(\rho) \setminus \mathrm{Aut}(\rho) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho^*) \setminus \mathrm{Aut}(\rho^*)$;
(d) $\mathrm{Cond}(\rho) \subseteq \mathrm{ACond}(\rho \setminus \rho^*)$;
(e) Interpretacija ρ^* nije reverzibilna;
(f) Interpretacija $\rho \setminus \rho^*$ nije finitarno reverzibilna[5];
(g) $\rho \not\cong \sigma$, pa i $\rho \not\sim_c \sigma$, za svako $\sigma \subseteq \rho \setminus \rho^*$.

Dokaz.
(a) Neka je $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$ proizvoljno. Tada važi:

$$(f[\rho])^* \subseteq f[\rho] \subseteq \rho. \tag{8.14}$$

Pretpostavimo suprotno, da $f[\rho^*] \not\subseteq \rho^*$, odnosno, na osnovu tvrđenja 8.3.5, da $(f[\rho])^* \not\subseteq \rho^*$. Tada, s obzirom da je Booleova mreža $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$ atomna, i, na osnovu (8.14), imamo da postoji $\sigma \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+)$ takvo da je

$$\sigma \subseteq (f[\rho])^* \setminus \rho^* = ((f[\rho])^* \setminus \rho^*) \cap \rho = (f[\rho])^* \cap (\rho \setminus \rho^*). \tag{8.15}$$

Ako definišemo interpretaciju $\tau := f[\rho] \setminus \sigma$, tada, s obzirom da je σ atom za koji važi $\sigma \subseteq (f[\rho])^*$, imamo da je $\tau \cong f[\rho] \cong \rho$. Sada, na osnovu (8.14) imamo da je $\tau \subseteq \rho \setminus \sigma \subseteq \rho$, pa, na osnovu tvrđenja 8.3.1 (e), sledi da je $\rho \cong \rho \setminus \sigma$. Kako je σ atom za koji važi $\sigma \subseteq \rho$, na osnovu (8.9) imamo da je $\sigma \subseteq \rho^*$. Sada, na osnovu (8.15) sledi da je

$$\sigma \subseteq \rho^* \cap (\rho \setminus \rho^*) = \langle \emptyset : i \in I \rangle,$$

a to je kontradikcija. Dakle, dokazali smo da je

$$f[\rho^*] \subseteq \rho^*. \tag{8.16}$$

Da bismo dokazali da je $f[\rho \setminus \rho^*] \supseteq \rho \setminus \rho^*$, na osnovu (8.16), dovoljno je dokazati da je

$$\rho \setminus \rho^* \subseteq f[\rho]. \tag{8.17}$$

[5]Za interpretaciju $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$ reći ćemo da je *finitarno reverzibilna*, u oznaci $\rho \in \mathrm{fRev}_L(X)$, akko je $|\mathrm{Cond}(\rho)| < \omega$. Lako se pokazuje kako je svaka finitarno reverzibilna interpretacija reverzibilna, dok obrat ne važi (videti ([27])).

Pretpostavimo suprotno, da $\rho \setminus \rho^* \not\subseteq f[\rho]$. Tada postoji $\sigma \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+)$ takvo da je

$$\sigma \subseteq (\rho \setminus \rho^*) \setminus f[\rho]. \tag{8.18}$$

Tada je $\sigma \subseteq \rho \setminus f[\rho]$, odakle sledi da je $f[\rho] \subseteq \rho \setminus \sigma \subseteq \rho$, pa, na osnovu tvrđenja 8.3.1 (e) sledi da je $\rho \cong \rho \setminus \sigma$. Kako je σ atom za koji važi $\sigma \subseteq \rho$, na osnovu (8.9) imamo da je $\sigma \subseteq \rho^*$. Sada, na osnovu (8.18) sledi da je

$$\sigma \subseteq \rho^* \cap (\rho \setminus \rho^*) = \langle \emptyset : i \in I \rangle,$$

a to je kontradikcija. Dakle, dokazali smo (8.17).

(b) Ako $f \in \mathrm{Cond}(\rho) \setminus \mathrm{Aut}(\rho)$, tada, prema (a), imamo da je $f[\rho^*] \subseteq \rho^*$. Pretpostavimo suprotno, da je $f[\rho^*] = \rho^*$. Na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e) i (g), imamo da je $f[\rho] \subsetneq \rho$, pa, kako je $f[\rho] = f[\rho^*] \cup f[\rho \setminus \rho^*]$, na osnovu pretpostavke je

$$f[\rho^*] \cup f[\rho \setminus \rho^*] \subsetneq \rho^* \cup (\rho \setminus \rho^*) = f[\rho^*] \cup (\rho \setminus \rho^*),$$

odakle, s obzirom da je $f[\rho^*] \cap f[\rho \setminus \rho^*] = \langle \emptyset : i \in I \rangle$, sledi da je $f[\rho \setminus \rho^*] \subsetneq \rho \setminus \rho^*$, a to je kontradikcija s tvrđenjem (a).

(c) Ovo sledi iz (a), i redom, iz (b), na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e).

(d) Ovo sledi iz (a), na osnovu tvrđenja 1.1.3 (c).

(e) Kako $\rho \notin \mathrm{Rev}_L(X)$, na osnovu tvrđenja 8.2.1 (e) postoji $f \in \mathrm{Cond}(\rho) \setminus \mathrm{Aut}(\rho)$. Tada, na osnovu (b) imamo da je $f[\rho^*] \subsetneq \rho^*$, pa, na osnovu tvrđenja 8.2.1 (g), sledi da $\rho^* \notin \mathrm{Rev}_L(X)$.

(f) Pošto $\rho \notin \mathrm{Rev}_L(X)$, imamo da $\rho \notin \mathrm{fRev}_L(X)$, što znači da je $|\,\mathrm{Cond}(\rho)| \geq \omega$. Na osnovu (d), sledi da je $|\,\mathrm{ACond}(\rho \setminus \rho^*)| \geq \omega$, pa kako je, na osnovu tvrđenja 1.1.4 (b), $|\,\mathrm{Cond}(\rho \setminus \rho^*)| = |\,\mathrm{ACond}(\rho \setminus \rho^*)|$, zaključujemo da $\rho \setminus \rho^* \notin \mathrm{fRev}_L(X)$.

(g) Bez ograničenja opštosti, dovoljno je dokazati da $\rho \not\cong \rho \setminus \rho^*$. Pretpostavimo suprotno, da je $\rho \cong \rho \setminus \rho^*$. Tada, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) i tvrđenja 8.3.6 (a), imamo da postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je

$$\rho \setminus \rho^* = f[\rho] \subsetneq \rho. \tag{8.19}$$

Sada, pošto je f bijekcija, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (a) imamo da je

$$f[\rho \setminus \rho^*] = f[f[\rho]] \subsetneq f[\rho] = \rho \setminus \rho^*,$$

a to, s obzirom da $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$, je kontradikcija s tvrđenjem (a). $\square$

Posledica 8.3.15 *Neka je X neprazan skup, L relacijski jezik i neka je interpretacija $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$ slabo reverzibilna. Tada važi:*

$$\rho \in \mathrm{Rev}_L(X) \iff \rho^* \in \mathrm{Rev}_L(X).$$

Tada je $\rho^* = \langle \emptyset : i \in I \rangle$.

Dokaz. Ovo sledi direktno na osnovu tvrđenja 8.3.14 (e). □

Tvrđenje 8.3.16 *Neka je X neprazan skup, L relacijski jezik i neka je interpetacija $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$ slabo reverzibilna. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) $\rho^* = \rho$; *(b) $\rho^* \cong \rho$;* *(c) $\rho^* \sim_c \rho$.*

Dokaz. Implikacija (a)⇒(b) je trivijalna, a implikacija (b)⇒(c) je posledica tvrđenja 6.1.2 (d).

(c)⇒(a) Ako je $\rho^* = \emptyset$ tvrđenje je trivijalno tačno. A ako je $\rho^* \neq \emptyset$, tada $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$. Sada, $\rho^* \sim_c \rho$ implicira da postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$, takvo da je $f[\rho] \subseteq \rho^* \subseteq \rho$. Na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e), sledi da $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$. Tada, na osnovu tvrđenja 8.3.14 (a) imamo da je

$$\rho^* \supseteq f[\rho] \supseteq f[\rho \setminus \rho^*] \supseteq \rho \setminus \rho^*,$$

odakle sledi da je $\rho \setminus \rho^* = \emptyset$, tj. $\rho^* = \rho$. □

Tvrđenje 8.3.17 *Neka je X neprazan skup, L relacijski jezik i neka je interpetacija $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$ slabo reverzibilna. Ako je $\mathrm{Cond}(\rho^*) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho)$ i $\rho^* \subseteq \sigma \subseteq \rho$, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) $\rho^* = \sigma$; *(b) $\rho^* \cong \sigma$.*

Dokaz.

(a)⇒(b) Ova implikacija je trivijalna.

(b)⇒(a) Ako je $\rho^* = \emptyset$ tvrđenje je trivijalno tačno. A ako je $\rho^* \neq \emptyset$, tada $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$. Pretpostavimo suprotno, da je $\rho^* \cong \sigma$ i da je $\rho^* \subsetneq \sigma \subseteq \rho$. Tada, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), imamo da postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$, takvo da je

$$f[\rho^*] \subsetneq f[\sigma] = \rho^*. \tag{8.20}$$

Na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e), sledi da $f \in \mathrm{Cond}(\rho^*) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho)$, i, odatle, $f[\rho] \subseteq \rho$. Sada, na osnovu tvrđenja 8.3.14 (a) imamo da je

$$f[\rho] = f[\sigma] \cup f[\rho \setminus \rho^*] \supseteq \rho^* \cup (\rho \setminus \rho^*) = \rho,$$

što znači da je $f[\rho] = \rho$. Odatle, na osnovu tvrđenja 8.3.5, imamo da je

$$f[\rho^*] = (f[\rho])^* = \rho^* = f[\sigma],$$

a to je kontradikcija sa (8.20). □

Tvrđenje 8.3.18 *Neka je X neprazan skup, L relacijski jezik i neka $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$. Ako je $\mathrm{Cond}(\rho) \subseteq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$, tada važi:*

(a) $|\mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)| \geq \omega$;

(b) $\rho \setminus f[\rho] = \rho^* \setminus f[\rho^*]$, za svako $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$;

(c) $(\rho^*)^* = \rho^*$;

(d) Za svako $n \in \mathbb{N}$ i za sve $\sigma_k \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho^*\downarrow$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, važi da je $\rho \cong \rho \setminus \sigma$, gde je $\sigma := \bigcup_{k \leq n} \sigma_k$;

(e) Ako je $L = L_n = \langle R \rangle$, gde je $\mathrm{ar}(R) = n$, tada je $\rho \cong \rho \setminus \sigma$, za sve $\sigma \in [\rho^*]^{<\omega}$.

Dokaz.

(a) Interpretacija ρ nije reverzibilna, pa nije ni finitarno reverzibilna. Sada, na osnovu pretpostavke imamo da je

$$|\mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)| \geq |\mathrm{Cond}(\rho)| \geq \omega.$$

(b) Uzmimo proizvoljno $f \in \mathrm{Cond}(\rho) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho^*)$. Tada, na osnovu pretpostavke, $f \in \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$, pa je $f[\rho \setminus \rho^*] = \rho \setminus \rho^*$. Sada, imamo da je

$$\rho \setminus f[\rho] = \Big(\rho^* \cup (\rho \setminus \rho^*)\Big) \setminus \Big(f[\rho^*] \cup f[\rho \setminus \rho^*]\Big) =$$

$$= \Big(\rho^* \cup (\rho \setminus \rho^*)\Big) \setminus \Big(f[\rho^*] \cup (\rho \setminus \rho^*)\Big) = \rho^* \setminus f[\rho^*].$$

(c) Neka $\sigma \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho^*\downarrow$ proizvoljno. Tada je $\rho \cong \rho \setminus \sigma$, pa, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $\rho \setminus \sigma = f[\rho]$. Tada, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e), imamo da $f \in \mathrm{Cond}(\rho) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho^*)$, odakle, na osnovu (b), imamo da je

$$\sigma = \rho \setminus f[\rho] = \rho^* \setminus f[\rho^*],$$

odnosno da je $\rho^* \setminus \sigma = f[\rho^*] \cong \rho^*$. Dakle, $\sigma \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap (\rho^*)^*\downarrow$, pa je

$$\mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho^*\downarrow \subseteq \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap (\rho^*)^*\downarrow .$$

Sada, pošto je Booleova mreža $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$ atomna, na osnovu tvrđenja 1.4.3 imamo da je

$$\rho^* = \bigcup \Big(\mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho^*\downarrow \Big) \subseteq \bigcup \Big(\mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap (\rho^*)^*\downarrow \Big) = (\rho^*)^*,$$

odakle sledi da je $\rho^* = (\rho^*)^*$.

(d) Pretpostavimo, bez ograničenja opštosti, kako su svi atomi σ_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, različiti. Sada ćemo tvrđenje dokazati indukcijom. Ako je $n = 1$, tvrđenje je tačno na osnovu (8.9). Ako $\sigma_k \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho^*\downarrow$, za $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tada, na osnovu baze indukcije, postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $\rho \setminus \sigma_1 = f[\rho]$. Dakle, $f \in \mathrm{Cond}(\rho) \subseteq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$. Tada je, prema tvrđenju 8.3.5 i na osnovu (b),

$$(f[\rho])^* = f[\rho^*] = \rho^* \setminus \sigma_1.$$

Dakle, pošto su atomi σ_k različiti, imamo da je $\sigma_k \subseteq (f[\rho])^*$, za $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Uzmimo $g \in \mathrm{Cond}(f[\rho])$ proizvoljno. Tada je

$$g[f[\rho]] \subseteq f[\rho] \subseteq \rho,$$

pa $g \circ f \in \mathrm{Cond}(\rho) \subseteq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$. Sada, na osnovu tvrđenja 8.3.5 imamo

$$g\Big[f[\rho] \setminus (f[\rho])^*\Big] = g[f[\rho \setminus \rho^*]] = \rho \setminus \rho^* = f[\rho \setminus \rho^*] = f[\rho] \setminus (f[\rho])^*.$$

Dakle, $g \in \mathrm{Aut}(f[\rho] \setminus (f[\rho])^*\Big)$, pa je

$$\mathrm{Cond}(f[\rho]) \subseteq \mathrm{Aut}\Big(f[\rho] \setminus (f[\rho])^*\Big).$$

Sada, na osnovu indukcijske hipoteze imamo da je $f[\rho] \cong f[\rho] \setminus \sigma'$, gde je $\sigma' = \bigcup_{2 \leq k \leq n} \sigma_k$, tj.

$$\rho \cong f[\rho] \cong f[\rho] \setminus \sigma' = (\rho \setminus \sigma_1) \setminus \sigma' = \rho \setminus \sigma,$$

gde je $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma' = \bigcup_{k \leq n} \sigma_k$.

(e) Ovo sledi direktno na osnovu (d). $\square$

Tvrđenje 8.3.19 *Neka je X neprazan skup, L relacijski jezik i neka $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$. Neka su, dalje, dati sledeći uslovi:*

(a) $\mathrm{Cond}(\rho^*) \subseteq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$*;*

(b) $\rho^* \sim_c \sigma \iff \rho^* = \sigma$*, za sve* $\rho^* \subseteq \sigma \subseteq \rho$*;*

(c) $\mathrm{Cond}(\rho) \subsetneq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$*;*

(d) $\rho \setminus \rho^* \in \mathrm{Rev}_L(X)$*.*

Tada, (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longleftarrow$ (d), i, kao posledicu, imamo da bilo koji od uslova (a) – (d), implicira bilo koji od uslova (a) – (e) u tvrđenju 8.3.18.

Dokaz.

(a)$\Rightarrow$(b) Pretpostavimo suprotno, da je $\rho^* \sim_c \sigma$, za neko $\rho^* \subsetneq \sigma \subseteq \rho$. Tada, postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je

$$f[\rho^*] \subsetneq f[\sigma] \subseteq \rho^*.$$

Sada, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e), $f \in \mathrm{Cond}(\rho^*) \subseteq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$, pa je $f[\rho \setminus \rho^*] = \rho \setminus \rho^*$. Na osnovu toga, imamo da je

$$\langle \emptyset : i \in I \rangle \subsetneq f[\sigma] \setminus f[\rho^*] = f[\sigma \setminus \rho^*] \subseteq f[\rho \setminus \rho^*] = \rho \setminus \rho^*.$$

Dakle,

$$\langle \emptyset : i \in I \rangle \subsetneq f[\sigma] \setminus f[\rho^*] \subseteq \rho^* \cap (\rho \setminus \rho^*) = \langle \emptyset : i \in I \rangle,$$

a to je kontradikcija.

(b)$\Rightarrow$(c) Prema tvrđenja 8.2.1 (f) imamo da je $\mathrm{Cond}(\rho) \neq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$, pa je dovoljno dokazati da je $\mathrm{Cond}(\rho) \subseteq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$. Pretpostavimo suprotno, da postoji $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$ takvo da $f \notin \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$. Tada, na osnovu tvrđenja 8.3.14 (d) imamo da

$$f \in \mathrm{ACond}(\rho \setminus \rho^*) \setminus \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*),$$

odnosno, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (c) i (g), da je $f[\rho \setminus \rho^*] \supsetneq \rho \setminus \rho^*$. Kako je $f[\rho] \subseteq \rho$, imamo da je

$$f[\rho^*] \subsetneq f[\rho^*] \cup \Big(f[\rho \setminus \rho^*] \setminus (\rho \setminus \rho^*) \Big) = f[\rho] \setminus (\rho \setminus \rho^*) \subseteq \rho \setminus (\rho \setminus \rho^*) = \rho^*.$$

Ako interpretaciju τ definišemo sa

$$\tau := f[\rho^*] \cup \Big(f[\rho \setminus \rho^*] \setminus (\rho \setminus \rho^*) \Big),$$

tada je jasno da je $\tau \subseteq f[\rho]$, pa imamo da je

$$\rho^* = f^{-1}[f[\rho^*]] \subsetneq f^{-1}[\tau] \subseteq f^{-1}[f[\rho]] = \rho.$$

Tada, za $\sigma := f^{-1}[\tau]$, važi da je $\rho^* \subsetneq \sigma$ i $f[\sigma] = \tau \subseteq \rho^*$, odnosno da je $\rho^* \sim_c \sigma$, i pri tome je $\rho^* \subsetneq \sigma \subseteq \rho$, što je kontradikcija sa (b).

(c)$\Leftarrow$(d) Ako $\rho \setminus \rho^* \in \mathrm{Rev}_L(X)$, tada, na osnovu tvrđenja 8.2.2 (b), imamo da i $(\rho \setminus \rho^*)^c \in \mathrm{Rev}_L(X)$, pa je, prema tvrđenju 1.1.4 (a) i (c) i tvrđenju 8.2.1 (e),

$$\mathrm{ACond}(\rho \setminus \rho^*) = \mathrm{Cond}((\rho \setminus \rho^*)^c) = \mathrm{Aut}((\rho \setminus \rho^*)^c) = \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*).$$

Sada, na osnovu tvrđenja 8.3.14 (d) i tvrđenja 8.2.1 (f) zaključujemo da je $\mathrm{Cond}(\rho) \subsetneq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$. $\square$

Tvrđenje 8.3.20 *Neka je X neprazan skup, L relacijski jezik i neka $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni*[6]*:*
(a) $\mathrm{Cond}(\rho^*) \subsetneq \mathrm{Cond}(\rho \setminus \rho^*)$*;*
(b) $\mathrm{Cond}(\rho^*) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho \setminus \rho^*)$*;*
(c) $\mathrm{Cond}(\rho^*) \subsetneq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$*;*
(d) $\mathrm{Cond}(\rho^*) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho)$ *i* $\rho^* \in \mathrm{wRev}_L(X)$*.*
Specijalno, to važi ako $\rho \setminus \rho^* \in \mathrm{sRev}_L(X)$*.*

Dokaz.
(a)$\Rightarrow$(b) Ovaj smer je trivijalan.
(b)$\Rightarrow$(c) Neka $f \in \mathrm{Cond}(\rho^*)$ proizvoljno. Tada, na osnovu pretpostavke, $f \in \mathrm{Cond}(\rho \setminus \rho^*)$, pa, prema tvrđenju 1.1.3 (e), imamo da je

$$f[\rho] = f[\rho^*] \cup f[\rho \setminus \rho^*] \subseteq \rho^* \cup (\rho \setminus \rho^*) = \rho,$$

odakle, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e) opet, imamo da $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$. Sada, prema tvrđenju 8.3.14 (d), $f \in \mathrm{ACond}(\rho \setminus \rho^*)$, pa, na osnovu tvrđenja 1.1.4 (b) i (c) imamo da $f \in \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$. Dakle, $\mathrm{Cond}(\rho^*) \subseteq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$, pa, na osnovu tvrđenja 8.3.14 (e) i tvrđenja 8.2.1 (f), zaključujemo da je $\mathrm{Cond}(\rho^*) \subsetneq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$.
(c)$\Rightarrow$(a) Ovaj smer je trivijalan.
(c)$\Rightarrow$(d) Uzmimo sada proizvoljno $f \in \mathrm{Cond}(\rho^*) \subsetneq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$, kao i proizvoljno $\tau \in \mathrm{Int}_L(X)$ takvo da je $f[\rho^*] \subseteq \tau \subseteq \rho^*$. Tada je

$$f[\rho] = f[\rho^*] \cup f[\rho \setminus \rho^*] = f[\rho^*] \cup (\rho \setminus \rho^*) \subseteq \tau \cup (\rho \setminus \rho^*) \subseteq \rho^* \cup (\rho \setminus \rho^*) = \rho.$$

Odatle sledi da $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$, tj. da je $\mathrm{Cond}(\rho^*) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho)$, i još, pošto je interpretacija ρ slabo reverzibilna, imamo da je $\rho \cong \tau \cup (\rho \setminus \rho^*)$, što, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), znači da postoji $g \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $g[\rho] = \tau \cup (\rho \setminus \rho^*) \subseteq \rho$, pa, prema tvrđenju 8.3.14 (c) i pretpostavci, važi

$$g \in \mathrm{Cond}(\rho) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho^*) \subsetneq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*).$$

Sada imamo da je

$$\tau \cup (\rho \setminus \rho^*) = g[\rho] = g[\rho^*] \cup g[\rho \setminus \rho^*] = g[\rho^*] \cup (\rho \setminus \rho^*),$$

odakle, s obzirom da su interpetacije τ i $\rho \setminus \rho^*$ disjunktne, i da su interpretacije $g[\rho^*]$ i $\rho \setminus \rho^*$ takođe disjunktne, zaključujemo da je $\tau = g[\rho^*]$, tj. $\tau \in [\rho^*]_{\cong}$. Sada, na osnovu tvrđenja 8.3.1 (e) imamo da $\rho^* \in \mathrm{wRev}_L(X)$.

[6] Imamo da bilo koji od uslova (a) – (d) u tvrđenju 8.3.20 implicira bilo koji od uslova (a) – (e) u tvrđenju 8.3.18.

(d)⇒(b) Pretpostavimo suprotno, da važi (d) i da postoji

$$f \in \mathrm{Cond}(\rho^*) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho) \subseteq \mathrm{ACond}(\rho \setminus \rho^*)$$

(gde smo primenili tvrđenje 8.3.14 (d)), takvo da $f \notin \mathrm{Cond}(\rho \setminus \rho^*)$. Tada je $f[\rho \setminus \rho^*] \supsetneq \rho \setminus \rho^*$, pa se, na isti način kao u dokazu smera (b)⇒(c) u tvrđenju 8.3.19, pokazuje da postoji $\rho^* \subsetneq \sigma \subseteq \rho$ takvo da je $\rho^* \sim_c \sigma$. Na osnovu pretpostavke $\rho^* \in \mathrm{wRev}_L(X)$, pa je $[\rho^*]_{\sim_c} = [\rho^*]_{\cong}$, odakle sledi da je $\rho^* \cong \sigma$, a to je kontradikcija s tvrđenjem 8.3.17.

Za kraj, ako $\rho \setminus \rho^* \in \mathrm{sRev}_L(X)$, tada je, na osnovu tvrđenja 8.1.1 (d), $\mathrm{Cond}(\rho \setminus \rho^*) = \mathrm{Sym}(X)$, pa je uslov (b) trivijalno zadovoljen. □

U vezi s tvrđenjem 8.3.20, postavlja se otvoreno pitanje da li postoji $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$ takvo da je $\mathrm{Cond}(\rho^*) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho)$, i takvo da $\rho^* \notin \mathrm{wRev}_L(X)$? Videti i primedbu 8.3.29, kao i tvrđenje 8.3.21.

Tvrđenje 8.3.21 *Neka je X neprazan skup, L relacijski jezik i neka $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$. Ako je $\mathrm{Cond}(\rho^*) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho)$, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) $\rho^* \in \mathrm{wRev}_L(X)$;

(b) $\mathrm{Cond}(\rho) \subsetneq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$;

(c) $\rho^* \sim_c \sigma \iff \rho^* = \sigma$, *za sve* $\rho^* \subseteq \sigma \subseteq \rho$.

Dokaz.

(c)⇒(b) Ovo sledi na osnovu tvrđenja 8.3.19.

(b)⇒(a) Na osnovu pretpostavki imamo da je $\mathrm{Cond}(\rho^*) \subsetneq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$, pa, na osnovu tvrđenja 8.3.20, sledi da $\rho^* \in \mathrm{wRev}_L(X)$.

(a)⇒(c) Na osnovu pretpostavki, imamo da je $\mathrm{Cond}(\rho^*) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho)$ i da $\rho^* \in \mathrm{wRev}_L(X)$, pa je, prema tvrđenju 8.3.20, $\mathrm{Cond}(\rho^*) \subsetneq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$. Sada, na osnovu tvrđenja 8.3.19 imamo da važi (c). □

Tvrđenje 8.3.22 *Neka je X neprazan skup, L relacijski jezik i neka $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$. Ako je $\mathrm{ACond}(\rho \setminus \rho^*) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho)$, tada važi da je*

$$\mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*) \subsetneq \mathrm{Cond}(\rho), \tag{8.21}$$

što implicira negaciju svih uslova (a) – (d) iz tvrđenja 8.3.19, kao i negaciju svih uslova (a) – (d) iz tvrđenja 8.3.20.

Dokaz. (8.21) sledi na osnovu pretpostavke, činjenice da je

$$\mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*) \subseteq \mathrm{ACond}(\rho \setminus \rho^*)$$

i tvrđenja 8.2.1 (f). S obzirom da su svi uslovi (a) – (d) iz tvrđenja 8.3.20 ekvivalentni uslovu (a) iz tvrđenja 8.3.19, da bismo dokazali ostatak tvrđenja, dovoljno je dokazati kako (8.21) implicira negaciju uslova (c) u tvrđenju 8.3.19. A to je očigledno. □

Tvrđenje 8.3.23 *Neka je X neprazan skup, L relacijski jezik i neka je interpretacija ρ slabo reverzibilna. Ako je i interpretacija ρ^* slabo reverzibilna, tada je $(\rho^*)^* = \rho^*$.*

Dokaz. Neka je $\sigma \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho^*\!\downarrow$ proizvoljno. Tada je $\rho \cong \rho \setminus \sigma$, pa, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $\rho \setminus \sigma = f[\rho]$. Tada, na osnovu tvrđenja 8.3.14 (a), imamo da je $f[\rho^*] \subseteq \rho^*$, tj. $f[\rho^*] \subseteq \rho^* \setminus \sigma$. Dakle, imamo da je

$$f[\rho^*] \subseteq \rho^* \setminus \sigma \subseteq \rho^*,$$

pa, kako je interpretacija ρ^* slabo reverzibilna, na osnovu tvrđenja 8.3.1 (e), važi da $\rho^* \setminus \sigma \in [\rho^*]_{\cong}$, tj. $\rho^* \cong \rho^* \setminus \sigma$. Sada, na osnovu (8.9), imamo da $\sigma \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap (\rho^*)^*\!\downarrow$, pa je

$$\mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho^*\!\downarrow \subseteq \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap (\rho^*)^*\!\downarrow .$$

Pošto je Booleova mreža $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$ atomna, na osnovu tvrđenja 1.4.3 imamo da je

$$\rho^* = \bigcup \Big(\mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho^*\!\downarrow \Big) \subseteq \bigcup \Big(\mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap (\rho^*)^*\!\downarrow \Big) = (\rho^*)^*,$$

odakle sledi da je $\rho^* = (\rho^*)^*$. □

Posledica 8.3.24 *Neka je X neprazan skup, L relacijski jezik i neka $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$. Ako $\rho \setminus \rho^* \in \mathrm{sRev}_L(X)$, tada važi:*

(a) $\mathrm{Cond}(\rho^*) = \mathrm{Cond}(\rho)$;

(b) $\rho^* \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$;

(c) $(\rho^*)^* = \rho^*$.

Dokaz.

(a) Ovo je posledica tvrđenja 8.3.20 i tvrđenja 8.3.14 (c).

(b) Ovo je posledica tvrđenja 8.3.20 i tvrđenja 8.3.14 (e).

(c) Ovo je posledica tvrđenja 8.3.20 i tvrđenja 8.3.18 (c). □

Primer 8.3.25 $\rho_k \in \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega)$, za $k \in \{1,2,3,4\}$.

1. Ako je $\mathbb{X}_1 = \langle \omega, \rho_1 \rangle := \bigcup_\omega \mathbb{D}_2 \cup \bigcup_\omega \mathbf{1}$, tada je

$$\rho_1^* = \rho_1 \in \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega), \qquad \rho_1 \setminus \rho_1^* = \emptyset \in \mathrm{sRev}_{L_b}(\omega)$$

$$\mathrm{Cond}(\rho_1) = \mathrm{Cond}(\rho_1^*), \qquad (\rho_1^*)^* = \rho_1^*.$$

2. Ako je $\mathbb{X}_2 = \langle \omega, \rho \rangle := \mathbb{G}_2 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2 \cup \bigcup_\omega \mathbf{1}$, tada

$$\rho_2^* \in \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega), \quad \rho_2 \setminus \rho_2^* \in \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega) \setminus \Big(\mathrm{sRev}_{L_b}(\omega) \cup \mathrm{fRev}_{L_b}(\omega) \Big),$$

$$\mathrm{Cond}(\rho_2) \subsetneq \mathrm{Cond}(\rho_2^*), \qquad (\rho_2^*)^* = \rho_2^*.$$

3. Ako je $\mathbb{X}_3 = \langle \omega, \rho_3 \rangle := \bigcup_\omega \mathbb{G}_2 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2$, tada

$$\rho_3^* \notin \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega), \qquad \rho_3 \setminus \rho_3^* \cong \rho_1 \in \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega),$$

$$\mathrm{Cond}(\rho_3) \subsetneq \mathrm{Cond}(\rho_3^*), \qquad \emptyset = (\rho_3^*)^* \subsetneq \rho_3^*.$$

4. Ako je $\mathbb{X}_4 = \langle \omega, \rho_4 \rangle = \bigcup_\omega \mathbb{C}_3 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_3$, tada

$$\rho_4^* \notin \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega), \qquad \rho_4 \setminus \rho_4^* \notin \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega),$$

$$\mathrm{Cond}(\rho_4) \subsetneq \mathrm{Cond}(\rho_4^*), \qquad \emptyset = (\rho_4^*)^* \subsetneq \rho_4^*.$$

U vezi s primerom 8.3.25, postavljaju se sledeća otvorena pitanja:

1. Da li postoji $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$ takvo da $\rho^* \in \mathrm{wRev}_L(X)$ i da $\rho \setminus \rho^* \notin \mathrm{Rev}_L(X)$?
2. Da li postoji $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$ takvo da $\rho^* \notin \mathrm{wRev}_L(X)$ i da $\rho \setminus \rho^* \in \mathrm{Rev}_L(X)$?

Tvrđenje 8.3.26 *Neka je X neprazan skup, L relacijski jezik i neka $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$. Tada za $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$ imamo:*

$$f[\rho] \subseteq g[\rho] \implies f[\rho^*] \subseteq g[\rho^*], \tag{8.22}$$

$$f[\rho] \subsetneq g[\rho] \implies f[\rho^*] \subsetneq g[\rho^*]. \tag{8.23}$$

Dokaz. Neka je $f[\rho] \subseteq g[\rho]$, za neke $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$. Tada, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (a) i (j), imamo da je $(g^{-1} \circ f)[\rho] \subseteq \rho$, što znači da $g^{-1} \circ f \in \mathrm{Cond}(\rho)$. Sada, na osnovu tvrđenja 8.3.14 (a) važi da je $(g^{-1} \circ f)[\rho^*] \subseteq \rho^*$, odnosno, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (a) i (j) opet, $f[\rho^*] \subseteq g[\rho^*]$.

Implikacija (8.23) dokazuje se slično, samo umesto tvrđenja 8.3.14 (a) treba iskoristiti tvrđenje 8.3.14 (b). $\square$

Teorema 8.3.27 *Neka je X neprazan skup, L relacijski jezik i neka $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$. Definišimo preslikavanje $F : [\rho]_{\cong} \to [\rho^*]_{\cong}$ na sledeći način: $F(f[\rho]) := f[\rho^*]$, za $f \in \mathrm{Sym}(X)$. Tada imamo:*

(a) Preslikavanje F je dobro definisano i surjekcija;

(b) $F : \langle [\rho]_{\cong}, \subseteq \rangle \to \langle [\rho^*]_{\cong}, \subseteq \rangle$ je epimorfizam koji očuvava lance, tj. za svaki lanac $\mathcal{L}$ u posetu $\langle [\rho]_{\cong}, \subseteq \rangle$ važi

$$F \restriction_{\mathcal{L}} : \langle \mathcal{L}, \subseteq \rangle \hookrightarrow \langle [\rho^*]_{\cong}, \subseteq \rangle.$$

Dokaz.

(a) Ako je $f[\rho] = g[\rho]$, za neke $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$, tada je $(f[\rho])^* = (g[\rho])^*$, ili, na osnovu tvrđenja 8.3.5, $f[\rho^*] = g[\rho^*]$, a to znači da je preslikavanje $F : [\rho]_{\cong} \to [\rho^*]_{\cong}$ dobro definisano. Na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) sledi da je F surjekcija.

(b) Na osnovu (a) i (8.23) imamo da je $F : \langle [\rho]_{\cong}, \subseteq \rangle \to \langle [\rho^*]_{\cong}, \subseteq \rangle$ epimorfizam.

Neka je sada $\mathcal{L}$ lanac u posetu $\langle [\rho]_{\cong}, \subseteq \rangle$, i neka su $f[\rho]$ i $g[\rho]$ dva proizvoljna različita elementa iz $\mathcal{L}$, gde $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$. Neka je tada, bez ograničenja opštosti, $f[\rho] \subsetneq g[\rho]$. Sada, na osnovu (8.23) imamo da je $f[\rho^*] \subsetneq g[\rho^*]$, što znači da je $F \restriction_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to [\rho^*]_{\cong}$ injekcija. Dakle,

$$F \restriction_{\mathcal{L}} \in \mathrm{Mono}\Big(\langle \mathcal{L}, \subseteq \rangle, \langle [\rho^*]_{\cong}, \subseteq \rangle \Big),$$

pa, s obzirom da je, na osnovu leme 1.3.1 (a),

$$\mathrm{Mono}\Big(\langle \mathcal{L}, \subseteq \rangle, \langle [\rho^*]_{\cong}, \subseteq \rangle \Big) = \mathrm{Emb}\Big(\langle \mathcal{L}, \subseteq \rangle, \langle [\rho^*]_{\cong}, \subseteq \rangle \Big),$$

imamo da je $F \restriction_{\mathcal{L}} : \langle \mathcal{L}, \subseteq \rangle \hookrightarrow \langle [\rho^*]_{\cong}, \subseteq \rangle$ utapanje. $\square$

Teorema 8.3.28 *Neka je X neprazan skup, L relacijski jezik i neka $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) $\mathrm{Cond}(\rho^*) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho)$;

(b) $f[\rho] \subseteq g[\rho] \iff f[\rho^*] \subseteq g[\rho^*]$, za sve $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$;

(c) $\langle [\rho]_{\cong}, \subseteq \rangle \cong_F \langle [\rho^*]_{\cong}, \subseteq \rangle$, gde je preslikavanje $F : [\rho]_{\cong} \to [\rho^*]_{\cong}$ dato na sledeći način: $F(f[\rho]) := f[\rho^*]$, za $f \in \mathrm{Sym}(X)$.

Specijalno, to važi ako $\rho \setminus \rho^* \in \mathrm{sRev}_L(X)$.

Dokaz.

(a)⇒(b) Jedna implikacija sledi na osnovu (8.22). Da bismo dokazali drugu, pretpostavimo da je $f[\rho^*] \subseteq g[\rho^*]$ za neke $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$. Tada, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (a) i (j), imamo da je $(g^{-1}\circ f)[\rho^*] \subseteq \rho^*$, što, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e), znači da

$$g^{-1}\circ f \in \mathrm{Cond}(\rho^*) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho).$$

Sada, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e) opet, sledi da je $(g^{-1}\circ f)[\rho] \subseteq \rho$, odnosno, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (a) i (j) opet, $f[\rho] \subseteq g[\rho]$.

(b)⇒(a) Uzmimo $f \in \mathrm{Cond}(\rho^*)$ proizvoljno. Tada je, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e), $f[\rho^*] \subseteq \rho^*$, što, prema (b) za $g = \mathrm{id}_X$, implicira da je $f[\rho] \subseteq \rho$, tj. $f \in \mathrm{Cond}(\rho)$. Dakle, $\mathrm{Cond}(\rho^*) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho)$.

(b)⇔(c) Da je preslikavanje F dobro definisano dokazuje se na isti način kao u dokazu teoreme 8.3.27 (a), a da je surjekcija, sledi na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a). Sada je ekvivalencija (b)⇔(c) očigledna.

Pretpostavimo sada kako je interpretacija $\rho \setminus \rho^*$ jako reverzibilna. Tada je, za svako $h \in \mathrm{Sym}(X)$, na osnovu tvrđenja 8.1.1 (e), $h[\rho \setminus \rho^*] = \rho \setminus \rho^*$, pa, za proizvoljno $h \in \mathrm{Cond}(\rho^*)$, imamo da je

$$h[\rho] = h[\rho^*] \cup h[\rho \setminus \rho^*] \subseteq \rho^* \cup (\rho \setminus \rho^*) = \rho,$$

odakle, prema tvrđenju 1.1.3 (e), sledi da $h \in \mathrm{Cond}(\rho)$. Dakle, $\mathrm{Cond}(\rho^*) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho)$. □

Primedba 8.3.29 Ako je interpretacija $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$ reverzibilna, tada je poset $\langle [\rho]_{\cong}, \subseteq\rangle$ antilanac. Jasno je da tada, za proizvoljno $\sigma \in \mathrm{Int}_L(X)$, važi:

$$\langle [\rho]_{\cong}, \subseteq\rangle \cong \langle [\sigma]_{\cong}, \subseteq\rangle \implies \text{interpretacija } \sigma \text{ je reverzibilna.}$$

Postavlja se pitanje, da li isto važi i za slabo reverzibilne interpretacije. Tj. ako $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X)$ i ako je $\langle [\rho]_{\cong}, \subseteq\rangle \cong \langle [\sigma]_{\cong}, \subseteq\rangle$, za neko $\sigma \in \mathrm{Int}_L(X)$, da li tada interpretacija σ mora biti slabo reverzibilna? Ovo pitanje i dalje je otvoreno.

Slabo reverzibilne interpretacije i $L_{\infty\omega}$-rečenice

Tvrđenje 8.3.30 *Neka je X neprazan skup, $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ relacijski jezik i neka $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$. Neka je dalje $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ R-negativna $L_{\infty\omega}$-formula, a $\phi(x_1, \dots, x_n)$ proizvoljna konjunkcija R-atomnih formula. Tada, za $L_{\infty\omega}$-rečenicu*

$$\psi := \forall x_1 \cdots \forall x_n \Big(\varphi(x_1, \dots, x_n) \vee \phi(x_1, \dots, x_n)\Big),$$

imamo

$$\langle X, \rho\rangle \models \psi \implies \langle X, \rho \setminus \rho^*\rangle \models \psi.$$

Dokaz. Neka je ψ $L_{\infty\omega}$-rečenica koja zadovoljava sintaktička ograničenja iz pretpostavki tvrđenja. Pretpostavimo suprotno, da je

$$\langle X, \rho \rangle \models \psi \quad \text{i} \quad \langle X, \rho \setminus \rho^* \rangle \models \neg\psi. \tag{8.24}$$

Kako je $\neg\psi$ logički ekvivalentna $L_{\infty\omega}$-rečenici

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \Big(\neg\varphi(x_1, \dots, x_n) \wedge \neg\phi(x_1, \dots, x_n) \Big),$$

imamo da postoji $\{a_1, \dots, a_n\} \in [X]^{\leq n}$ tako da je

$$\langle X, \rho \setminus \rho^* \rangle \models \neg\varphi[a_1, \dots, a_n] \quad \text{i} \quad \langle X, \rho \setminus \rho^* \rangle \models \neg\phi[a_1, \dots, a_n]. \tag{8.25}$$

Kako je ϕ konjunkcija R-atomnih formula, zaključujemo da postoji $j \in I$ takvo da je $\langle X, \rho \setminus \rho^* \rangle \models \neg R_j(x_{k_1}, \dots, x_{k_{n_j}})[a_1, \dots, a_n]$, tj. da $\sigma \not\subseteq \rho \setminus \rho^*$, gde je atom

$$\sigma = \langle \sigma_i : i \in I \rangle \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+)$$

dat sa: $\sigma_j = \{\langle a_{k_1}, \dots, a_{k_{n_j}} \rangle\}$ i $\sigma_i = \emptyset$, za $i \in I \setminus \{j\}$. Na osnovu (8.25) i tvrđenja 3.3.2 (b), imamo da je $\langle X, \rho \rangle \models \neg\varphi[a_1, \dots, a_n]$, pa, iz (8.24), sledi da je $\langle X, \rho \rangle \models \phi[a_1, \dots, a_n]$, a to implicira da je

$$\langle X, \rho \rangle \models R_j(x_{k_1}, \dots, x_{k_{n_j}})[a_1, \dots, a_n],$$

odnosno, $\sigma \subseteq \rho$. Pošto je σ atom i $\sigma \not\subseteq \rho \setminus \rho^*$, zaključujemo da je $\sigma \subseteq \rho^*$, pa, prema (8.9), imamo da je $\rho \cong \rho \setminus \sigma$. Sada, na osnovu (8.24) i tvrđenja 3.3.1, sledi da je $\langle X, \rho \setminus \sigma \rangle \models \psi$. Pošto $\sigma \not\subseteq \rho \setminus \sigma$, imamo da je

$$\langle X, \rho \setminus \sigma \rangle \models \neg R_j(x_{k_1}, \dots, x_{k_{n_j}})[a_1, \dots, a_n],$$

pa je i $\langle X, \rho \setminus \sigma \rangle \models \neg\phi[a_1, \dots, a_n]$, što znači da mora biti $\langle X, \rho \setminus \sigma \rangle \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$. Kako je $L_{\infty\omega}$-formula φ R-negativna, i, s obzirom da je

$$\mathrm{id}_X : \langle X, \rho \setminus \sigma \rangle \to \langle X, \rho \setminus \rho^* \rangle$$

anti-kondenzacija, na osnovu tvrđenja 3.3.2 (b) sledi da je $\langle X, \rho \setminus \rho^* \rangle \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$, a to je kontradikcija sa (8.25). $\Box$

Posledica 8.3.31 *Neka je X neprazan skup, i neka je $\rho \in \mathrm{wRev}_{L_b}(X) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(X)$ strogo parcijalno uređenje. Tada je i $\rho \setminus \rho^*$ takođe strogo parcijalno uređenje.*

Dokaz. Kako je relacija ρ irefleksivna, jasno je da je tada i $\rho \setminus \rho^*$ irefleksivna. Imamo da je ρ tranzitivna akko je $\langle X, \rho \rangle \models \varphi_{tr}$, pri čemu L_b-rečenica

$$\varphi_{tr} := \forall x_1 \, \forall x_2 \, \forall x_3 \, \Big((\neg R(x_1, x_2) \vee \neg R(x_2, x_3)) \vee R(x_1, x_3) \Big)$$

zadovoljava sintaktička ograničenja iz tvrđenja 8.3.30. Dakle, na osnovu spomenutog tvrđenja je $\langle X, \rho \setminus \rho^* \rangle \models \varphi_{tr}$, čime smo kompletirali dokaz. □

Ako je X neprazan skup, L relacijski jezik i $\mathcal{T}$ neka $L_{\infty\omega}$-teorija, uvedimo sledeći *skup $L_{\infty\omega}$-definabilnih interpretacija* jezika L nad domenom X:

$$\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X) := \Big\{ \rho \in \mathrm{Int}_L(X) : \langle X, \rho \rangle \models \mathcal{T} \Big\}.$$

Ako je $\kappa > 0$ kardinal, za $L_{\infty\omega}$-teoriju $\mathcal{T}$ reći ćemo da je *κ-kategorična* akko su svaka dva modela te teorije veličine κ izomorfna.

Teorema 8.3.32 *Neka je X neprazan skup veličine $\kappa \geq \omega$, L relacijski jezik i $\mathcal{T}$ neka κ-kategorična $L_{\infty\omega}$-teorija takva da svako $\psi \in \mathcal{T}$, do na logičku ekvivalenciju, zadovoljava sintaktička ograničenja iz tvrđenja 8.3.30. Tada, za proizvoljno $\rho \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ imamo da*

$$\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \iff \rho \in \mathrm{Rev}_L(X).$$

Dokaz.

($\Leftarrow$) Ovaj smer je trivijalan.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo suprotno, da $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$. Tada, za proizvoljno $\psi \in \mathcal{T}$, na osnovu pretpostavke teoreme, i, s obzirom da je $\langle X, \rho \rangle \models \psi$, na osnovu tvrđenja 8.3.30 imamo da je i $\langle X, \rho \setminus \rho^* \rangle \models \psi$. Dakle, $\langle X, \rho \setminus \rho^* \rangle \models \mathcal{T}$, pa, kako je $L_{\infty\omega}$-teorija $\mathcal{T}$ κ-kategorična, zaključujemo da je $\langle X, \rho \rangle \cong \langle X, \rho \setminus \rho^* \rangle$. Što je kontradikcija s tvrđenjem 8.3.14 (g). □

Teorema 8.3.33 *Neka je X neprazan skup, $L = \langle R_i : i \in I \rangle$ neprazan relacijski jezik i neka $\rho = \langle \rho_i : i \in I \rangle \in \mathrm{Int}_L(X)$. Neka su, dalje, za svako $j \in I_\rho := \{ i \in I : \rho_i \notin \mathrm{Rev}_{\langle R_i \rangle}(X) \}$, date $L_{\infty\omega}$-rečenice:*

$$\psi_j := \forall x_1 \cdots \forall x_{m_j} \Big(\varphi_j(x_1, \ldots, x_{m_j}) \vee R_j(x_1, \ldots, x_{n_j}) \Big), \quad \textit{gde je } m_j > n_j,$$

$$\phi_j := \forall x_1 \cdots \forall x_{n_j} \Big[R_j(x_1, \ldots, x_{n_j}) \implies$$
$$\exists x_{n_j+1} \cdots \exists x_{m_j} \Big(\bigwedge_{k \leq n_j < l} x_k \neq x_l \; \wedge \; \neg \varphi_j(x_1, \ldots, x_{m_j}) \Big) \Big],$$

pri čemu je $\varphi_j(x_1,\dots,x_{m_j})$ *neka* $L_{\infty\omega}$*-formula bez kvantifikatora, takva da se u svakoj njenoj* R_j*-atomnoj podformuli pojavljuje neka promenljiva iz* $\{x_{n_j+1},\dots,x_{m_j}\}$*. Ako je* $\langle X,\rho\rangle \models \mathcal{T}$*, gde je* $\mathcal{T} = \bigcup_{j\in I_\rho}\{\psi_j,\phi_j\}$ *odgovarajuća* $L_{\infty\omega}$*-teorija, tada imamo da*

$$\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \iff \rho \in \mathrm{Rev}_L(X).$$

Dokaz.

($\Leftarrow$) Ovaj smer je trivijalan.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo suprotno, da $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$. Tada, na osnovu tvrđenja 8.3.6 (a) i (b), postoji $j \in I_\rho$ takvo da je

$$(\rho_j)^* \supseteq (\rho^*)_j \supsetneq \emptyset.$$

Uzmimo proizvoljan atom

$$\sigma = \langle \sigma_i : i \in I\rangle \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho^*\downarrow,$$

takav da je $\sigma_i = \emptyset$ za $i \in I \setminus \{j\}$. Tada je, na osnovu (8.9), $\rho \cong \rho \setminus \sigma$. Ako je, pri tome, $\sigma_j = \{\langle a_1,\dots,a_{n_j}\rangle\}$, tada, s obzirom da je $\sigma \subseteq \rho$ i da je $\langle X,\rho\rangle \models \phi_j$, zaključujemo da postoje $a_{n_j+1},\dots,a_{m_j} \in X$, takvi da su skupovi $\{a_1,\dots,a_{n_j}\}$ i $\{a_{n_j+1},\dots,a_{m_j}\}$ disjunktni, i takvi da je $\langle X,\rho\rangle \models \neg\varphi[a_1,\dots,a_{m_j}]$. Sada, s obzirom da se u svakoj R_j-atomnoj podformuli formule φ pojavljuje neka promenljiva iz $\{x_{n_j+1},\dots,x_{m_j}\}$, jednostavnom indukcijom po složenosti formule, pokazuje se da je i $\langle X,\rho\setminus\sigma\rangle \models \neg\varphi[a_1,\dots,a_{m_j}]$. Jasno je kako je

$$\langle X,\rho\setminus\sigma\rangle \models \neg R_j(x_1,\dots,x_{n_j})[a_1,\dots,a_{m_j}],$$

pa zaključujemo da je $\langle X,\rho\setminus\sigma\rangle \models \neg\psi_j$, odakle je, prema tvrđenju 3.3.1, $\rho \ncong \rho\setminus\sigma$, što je kontradikcija. □

Posledica 8.3.34 *Neka je* X *neprazan skup,* $L = L_b = \langle R\rangle$ *binarni jezik i neka* $\rho \in \mathrm{Int}_{L_b}(X)$*. Ako je relacija* ρ *gusto strogo parcijalno uređenje, tada*

$$\rho \notin \mathrm{wRev}_{L_b}(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X).$$

Dokaz. Definišimo sledeće L-rečenice:

$$\psi := \forall x_1\,\forall x_2\,\forall x_3\,\Big(\neg(R(x_1,x_3)\wedge R(x_3,x_2)) \vee R(x_1,x_2)\Big),$$

$$\phi := \forall x_1\,\forall x_2\,\Big(R(x_1,x_2) \;\Rightarrow\; \exists x_3\,\Big(\bigwedge_{k\le 2} x_k \neq x_3 \;\wedge\; (R(x_1,x_3)\wedge R(x_3,x_2))\Big)\Big).$$

S obzirom da je ρ gusto strogo parcijalno uređenje, imamo da je $\langle X,\rho\rangle \models \{\psi,\phi\}$, pa, kako ψ i ϕ zadovoljavaju sintaktička ograničenja iz teoreme 8.3.33, tvrđenje sledi na osnovu spomenute teoreme. □

Lema 8.3.35 *Neka je X neprazan skup, $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ relacijski jezik i neka $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$. Ako je $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ $L_{\infty\omega}$-formula bez kvantifikatora, tada, za $a_1,\dots,a_n \in X$, važi*

$$\langle X,\rho\rangle \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \iff \langle A,\rho\restriction_A\rangle \models \varphi[a_1,\dots,a_n], \tag{8.26}$$

gde je $A = \{a_1,\dots,a_n\} \in [X]^{\leq n}$.

Dokaz. Indukcijom po složenosti formule φ. Ako je $\varphi(x_1,\dots,x_n) := x_k = x_l$, tada je i leva i desna strana (8.26) ekvivalentna sa $a_k = a_l$. Ako je, dalje, $\varphi(x_1,\dots,x_n) := R_i(x_{k_1},\dots,x_{k_{n_i}})$, tada je leva strana (8.26) ekvivalentna sa $\langle a_{k_1},\dots,a_{k_{n_i}}\rangle \in \rho_i$, a desna strana je ekvivalentna sa $\langle a_{k_1},\dots,a_{k_{n_i}}\rangle \in (\rho\restriction_A)_i$ $= \rho_i\restriction_A$. Pretpostavimo sada da (8.26) važi za neko $\varphi(x_1,\dots,x_n)$. Tada je $\langle X,\rho\rangle \models \neg\varphi[a_1,\dots,a_n]$ akko nije $\langle X,\rho\rangle \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$, a to važi akko nije $\langle A,\rho\restriction_A\rangle \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$, ili, ekvivalentno, $\langle A,\rho\restriction_A\rangle \models \neg\varphi[a_1,\dots,a_n]$.

Neka je sada Φ skup $L_{\infty\omega}$-formula bez kvantifikatora sa slobodnim promenljivama iz skupa $\{x_1,\dots,x_n\}$, i pretpostavimo da (8.26) važi za svako $\varphi \in \Phi$. Tada je $\langle X,\rho\rangle \models (\bigwedge\Phi)[a_1,\dots,a_n]$ akko je $\langle X,\rho\rangle \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$ za svako $\varphi \in \Phi$, ili, ekvivalentno, $\langle A,\rho\restriction_A\rangle \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$ za svako $\varphi \in \Phi$, a to važi akko je $\langle A,\rho\restriction_A\rangle \models (\bigwedge\Phi)[a_1,\dots,a_n]$. I na kraju, imamo da je $\langle X,\rho\rangle \models (\bigvee\Phi)[a_1,\dots,a_n]$ akko je $\langle X,\rho\rangle \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$ za neko $\varphi \in \Phi$, ili, ekvivalentno, $\langle A,\rho\restriction_A\rangle \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$ za neko $\varphi \in \Phi$, a to važi akko je $\langle A,\rho\restriction_A\rangle \models (\bigvee\Phi)[a_1,\dots,a_n]$. $\Box$

Tvrđenje 8.3.36 *Neka je X neprazan skup i $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ konačan relacijski jezik. Neka je interpretacija $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X)\setminus\mathrm{Rev}_L(X)$ takva da je $\mathrm{Cond}(\rho) \subseteq \mathrm{Aut}(\rho\setminus\rho^*)$ (što, specijalno, važi ako $\rho\setminus\rho^* \in \mathrm{Rev}_L(X)$). Neka je, dalje, $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ R-negativna $L_{\infty\omega}$-formula, a $\phi(x_1,\dots,x_n)$ $L_{\infty\omega}$-formula bez kvantifikatora. Tada, za $L_{\infty\omega}$-rečenicu*

$$\psi := \forall x_1\cdots\forall x_n\,\Big(\varphi(x_1,\dots,x_n)\vee\phi(x_1,\dots,x_n)\Big),$$

imamo

$$\langle X,\rho\rangle \models \psi \implies \langle X,\rho\setminus\rho^*\rangle \models \psi.$$

Dokaz. Neka je ψ $L_{\infty\omega}$-rečenica koja zadovoljava sintaktička ograničenja iz pretpostavki tvrđenja. Pretpostavimo suprotno, da je

$$\langle X,\rho\rangle \models \psi \quad \text{i} \quad \langle X,\rho\setminus\rho^*\rangle \models \neg\psi. \tag{8.27}$$

Kako je $\neg\psi$ logički ekvivalentna $L_{\infty\omega}$-rečenici

$$\exists x_1\cdots\exists x_n\,\Big(\neg\varphi(x_1,\dots,x_n)\wedge\neg\phi(x_1,\dots,x_n)\Big),$$

imamo da postoje $a_1, \dots, a_n \in X$ takvi da je

$$\langle X, \rho \setminus \rho^* \rangle \models \neg\varphi[a_1, \dots, a_n] \quad \text{i} \quad \langle X, \rho \setminus \rho^* \rangle \models \neg\phi[a_1, \dots, a_n]. \tag{8.28}$$

Ako označimo da je $A := \{a_1, \dots, a_n\} \in [X]^{\leq n}$, tada, s obzirom da je jezik L konačan, zaključujemo da je skup $\mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(A)^+) \cap (\rho^* \restriction_A)\downarrow$ najviše konačan. Ako je $\rho^* \restriction_A = \langle \emptyset : i \in I \rangle$, definišimo da je $\sigma := \rho^* \restriction_A = \langle \emptyset : i \in I \rangle$. A ako je $\rho^* \restriction_A \neq \langle \emptyset : i \in I \rangle$, pri čemu je

$$\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\} = \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(A)^+) \cap (\rho^* \restriction_A)\downarrow \subseteq \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho^*\downarrow,$$

definišimo, tada, da je $\sigma := \bigcup_{k \leq m} \sigma_k = \rho^* \restriction_A$. U svakom slučaju, na osnovu pretpostavke i prema tvrđenju 8.3.18 (d), imamo da je $\rho \cong \rho \setminus \sigma$, i pri tome važi da je

$$(\rho \setminus \sigma) \restriction_A = (\rho \restriction_A) \setminus \sigma = (\rho \restriction_A) \setminus (\rho^* \restriction_A) = (\rho \setminus \rho^*) \restriction_A.$$

Pošto je $\rho \cong \rho \setminus \sigma$, prema (8.27) i tvrđenju 3.3.1 je

$$\langle X, \rho \setminus \sigma \rangle \models \psi. \tag{8.29}$$

Sada, pošto je $\sigma \subseteq \rho^*$, na osnovu (8.28) i tvrđenja 3.3.2 (b) imamo da je $\langle X, \rho \setminus \sigma \rangle \models \neg\varphi[a_1, \dots, a_n]$, pa, iz (8.29), sledi da je $\langle X, \rho \setminus \sigma \rangle \models \phi[a_1, \dots, a_n]$, a to je, prema lemi 8.3.35, ekvivalentno sa $\langle A, (\rho \setminus \sigma) \restriction_A \rangle \models \phi[a_1, \dots, a_n]$, odnosno sa

$$\langle A, (\rho \setminus \rho^*) \restriction_A \rangle \models \phi[a_1, \dots, a_n],$$

što je, na osnovu leme 8.3.35 opet, kontradikcija sa (8.28). □

Tvrđenje 8.3.37 *Neka je X neprazan skup veličine $\kappa \geq \omega$, L konačan relacijski jezik i $\mathcal{T}$ neka κ-kategorična $L_{\infty\omega}$-teorija takva da svako $\psi \in \mathcal{T}$, do na logičku ekvivalenciju, zadovoljava sintaktička ograničenja iz tvrđenja 8.3.36. Tada, za proizvoljno $\rho \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ važi*

$$\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X) \implies \mathrm{Cond}(\rho) \not\subseteq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*).$$

Specijalno, tada imamo da $\rho \setminus \rho^* \notin \mathrm{Rev}_L(X)$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji neko $\rho \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ takvo da $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$, i da je $\mathrm{Cond}(\rho) \subseteq \mathrm{Aut}(\rho \setminus \rho^*)$. Tada, za proizvoljno $\psi \in \mathcal{T}$, prema tvrđenju 8.3.36, $\langle X, \rho \rangle \models \psi$ implicira da je $\langle X, \rho \setminus \rho^* \rangle \models \psi$. Dakle, s obzirom da je $L_{\infty\omega}$-teorija $\mathcal{T}$ κ-kategorična, imamo da

$$\rho \setminus \rho^* \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X) = [\rho]_{\cong},$$

a to je kontradikcija s tvrđenjem 8.3.14 (g). □

Varijacije slabe reverzibilnosti

Svojstvo CSB za kokonačne kondenzacije Ako je L neprazan relacijski jezik, definisaćemo, za L-strukture $\mathbb{X} = \langle X, \rho \rangle$ i $\mathbb{Y} = \langle Y, \sigma \rangle$, i za $n \in \omega$, sledeće skupove kondenzacija:

$$\mathrm{Cond}^n(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) := \Big\{ f \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) : \Big| \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap (\sigma \setminus f[\rho]) \downarrow \Big| = n \Big\},$$

$$\mathrm{Cond}^{<\omega}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) := \Big\{ f \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) : \Big| \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap (\sigma \setminus f[\rho]) \downarrow \Big| < \omega \Big\}.$$

Tada je $\mathrm{Cond}^0(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \mathrm{Iso}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. U slučaju kad je $L = L_n = \langle R \rangle$, gde je $\mathrm{ar}(R) = n$, imamo da je

$$\mathrm{Cond}^n(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \Big\{ f \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) : \Big| \sigma \setminus f[\rho] \Big| = n \Big\}, \quad n \in \omega,$$

$$\mathrm{Cond}^{<\omega}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \Big\{ f \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) : \Big| \sigma \setminus f[\rho] \Big| < \omega \Big\}.$$

Primer 8.3.38 Neka je

$$\rho := \Big\{ \langle n, n+1 \rangle : n \in \mathbb{Z} \Big\} \cup \Big\{ \langle n, n \rangle : n \in \omega \Big\}.$$

Tada $\rho \notin \mathrm{wRev}_{L_b}(\mathbb{Z})$, i lako se vidi da važi:

$$\mathrm{Cond}(\rho) = \mathrm{Cond}^{<\omega}(\rho).$$

Otvoreno je pitanje da li, za neko $X \neq \emptyset$, postoji $\rho \in \mathrm{wRev}_{L_b}(X) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(X)$ takvo da je $\mathrm{Cond}(\rho) = \mathrm{Cond}^{<\omega}(\rho)$.

Skup $\mathrm{Cond}^{<\omega}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ zvaćemo skup *kokonačnih kondenzacija* iz strukture $\mathbb{X}$ u strukturu $\mathbb{Y}$. Za L-strukturu $\mathbb{X}$ reći ćemo da ima *svojstvo Cantor-Schröder-Bernstein za kokonačne kondenzacije* akko važi da

$$\mathrm{Cond}^{<\omega}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \neq \emptyset \ \wedge \ \mathrm{Cond}^{<\omega}(\mathbb{Y}, \mathbb{X}) \neq \emptyset \implies \mathbb{X} \cong \mathbb{Y},$$

za proizvoljno $\mathbb{Y} \in \mathrm{Mod}_L$. Ako je X neprazan skup, za interpretaciju $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$ reći ćemo da ima svojstvo CSB za kokonačne kondenzacije akko struktura $\langle X, \rho \rangle$ ima to svojstvo. Jasno je da, ako $\mathbb{X}$ ima svojstvo CSB za kondenzacije, tada $\mathbb{X}$ ima i svojstvo CSB za kokonačne kondenzacije. Obrat ne važi (videti primer 8.3.39).

Primer 8.3.39 Postoji relacija $\sigma \notin \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega)$ koja ima svojstvo CSB za kokonačne kondenzacije.

Neka je $\mathbb{X} = \langle \omega, \sigma \rangle \cong \mathbb{Y} \cup \bigcup_\omega \mathbf{1}$, gde je $\mathbb{Y} := \langle \omega, \omega^2 \setminus \Delta_\omega \rangle$. Tada je jasno da relacija σ nije slabo reverzibilna, ali, pošto je $\mathrm{Cond}^{<\omega}(\sigma) = \mathrm{Aut}(\sigma)$, lako se pokazuje da σ ima svojstvo CSB za kokonačne kondenzacije. Pri tome je $\sigma^* = \emptyset$.

Otvoreno pitanje je da li postoji $\rho \notin \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega)$ koje ima svojstvo CSB za kokonačne kondenzacije, takvo da je $\mathrm{Cond}^{<\omega}(\rho) \supsetneq \mathrm{Aut}(\rho)$ (ili, ekvivalentno, takvo da je $\rho^* \neq \emptyset$)?

Tvrđenje 8.3.40 *Neka je X neprazan skup, L relacijski jezik i neka $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) $\rho^* = \rho$;

(b) Za svako $n \in \mathbb{N}$ i za sve $\sigma_k \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho\downarrow$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, važi da je $\rho \cong \rho \setminus \sigma$, gde je $\sigma := \bigcup_{k \leq n} \sigma_k$;

(c) Za svako $\tau \in \mathrm{Int}_L(X)$ važi

$$\mathrm{Cond}^{<\omega}(\tau, \rho) \neq \emptyset \implies \rho \cong \tau.$$

Pored toga, bilo koji od uslova (a) – (c) implicira sledeći uslov:

(d) Interpretacija ρ ima svojstvo CSB za kokonačne kondenzacije.

Dokaz.

(a)$\Rightarrow$(b) Pretpostavimo, bez ograničenja opštosti, kako su svi atomi σ_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, različiti. Sada ćemo tvrđenje dokazati indukcijom. Ako je $n = 1$, tvrđenje je tačno na osnovu (a) i (8.9). Ako $\sigma_k \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho\downarrow$, za $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tada, na osnovu baze indukcije, postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $\rho \setminus \sigma_1 = f[\rho]$. Tada je, na osnovu tvrđenja 8.3.5 i na osnovu (a),

$$(f[\rho])^* = f[\rho^*] = f[\rho].$$

Pošto su atomi σ_k različiti, imamo da je $\sigma_k \subseteq f[\rho]$, za $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Sada, na osnovu indukcijske hipoteze imamo da je $f[\rho] \cong f[\rho] \setminus \sigma'$, gde je $\sigma' = \bigcup_{2 \leq k \leq n} \sigma_k$, tj.

$$\rho \cong f[\rho] \cong f[\rho] \setminus \sigma' = (\rho \setminus \sigma_1) \setminus \sigma' = \rho \setminus \sigma,$$

gde je $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma' = \bigcup_{k \leq n} \sigma_k$.

(b)$\Rightarrow$(c) Neka $f \in \mathrm{Cond}^{<\omega}(\tau, \rho)$. Tada je $f[\tau] \subseteq \rho$, i

$$\left| \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap (\rho \setminus f[\tau])\downarrow \right| = n, \quad \text{za neko } n \in \omega.$$

Ako je $n = 0$, tada, s obzirom da je Booleova mreža $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$ atomna, imamo da je $\rho = f[\tau] \cong \tau$. A ako je $n > 0$, neka je

$$\mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap (\rho \setminus f[\tau])\downarrow = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\},$$

i neka je $\sigma := \bigcup_{k \leq n} \sigma_k$. Na osnovu tvrđenja 1.4.3, imamo da je

$$\rho \setminus f[\tau] = \bigcup \Big(\mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap (\rho \setminus f[\tau])\downarrow \Big) = \bigcup_{k \leq n} \sigma_k = \sigma.$$

Odatle, s obzirom da je $f[\tau] \subseteq \rho$, imamo da je $f[\tau] = \rho \setminus \sigma$, pa, na osnovu (b), imamo da je $\rho \cong f[\tau] \cong \tau$.

(c)⇒(a) Neka je $\sigma \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho\downarrow$ proizvoljno. Tada imamo da $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Cond}^{<\omega}(\rho \setminus \sigma, \rho)$, pa, na osnovu (c), sledi da je $\rho \cong \rho \setminus \sigma$, što znači da $\sigma \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho^*\downarrow$. Dakle,

$$\mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho\downarrow \subseteq \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho^*\downarrow .$$

Sada, pošto je Booleova mreža $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$ atomna, na osnovu tvrđenja 1.4.3 imamo da je

$$\rho = \bigcup \Big(\mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho\downarrow \Big) \subseteq \bigcup \Big(\mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho^*\downarrow \Big) = \rho^*,$$

odakle sledi da je $\rho^* = \rho$.

(d) Ovo je direktna posledica (c). □

U vezi s tvrđenjem 8.3.40, postavlja se otvoreno pitanje da li postoji relacija $\rho \notin \mathrm{wRev}_L(X)$ za koju važi $\rho^* = \rho$? Uporediti s primedbom 8.3.46.

Primer 8.3.41 $\rho \in \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega)$ takvo da $\rho^* \notin \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega)$ ima svojstvo CSB za kokonačne kondenzacije.

Ako je $\mathbb{X} = \langle \omega, \rho \rangle := \bigcup_\omega \mathbb{L}_2 \cup \bigcup_\omega \mathbf{1}$, i ako je $\mathbb{Y} = \langle \omega, \tau \rangle := \mathbb{X}^c$, tada, na osnovu tvrđenja 8.3.3 (b), imamo da je relacija τ slabo reverzibilna. Pri tome je $\tau^* \cong \sigma$, gde je σ relacija iz primera 8.3.39. Dakle, $\tau^* \notin \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega)$ ima svojstvo CSB za kokonačne kondenzacije. Pri tome je $\emptyset = (\tau^*)^* \neq \tau^*$, odakle, na osnovu tvrđenja 8.3.19 i 8.3.18 (c), sledi da $\tau \setminus \tau^* \notin \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega)$. Takođe, lako se vidi da je $\mathrm{Cond}(\tau) \subsetneq \mathrm{Cond}(\tau^*)$.

Grafovska slaba reverzibilnost Ako je X neprazan skup, L relacijski jezik i $\mathcal{T}$ neka $L_{\infty\omega}$-teorija, na osnovu teoreme 9.1.2 (a), skup

$$\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X) = \Big\{ \rho \in \mathrm{Int}_L(X) : \langle X, \rho \rangle \models \mathcal{T} \Big\}$$

je $\cong$-invarijantan, pa možemo definisati sledeći skup L-interpretacija:

$$\mathrm{wRev}_L^{\mathcal{T}}(X) := \Big\{\rho \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X) : [\rho]_{\cong} \text{ je konveksan skup u posetu } \langle \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X), \subseteq\rangle\Big\}.$$

Jasno je da je

$$\mathrm{wRev}_L(X) \cap \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X) \subseteq \mathrm{wRev}_L^{\mathcal{T}}(X),$$

pri čemu inkluzija može biti prava (pogledati primer 8.3.43).

Za interpretaciju $\rho \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ reći ćemo da ima *svojstvo Cantor-Scröder-Bernstein za kondenzacije u klasi* $\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ akko važi da

$$\rho \preccurlyeq_c \sigma \quad \wedge \quad \sigma \preccurlyeq_c \rho \quad \Longrightarrow \quad \rho \cong \sigma,$$

za proizvoljno $\sigma \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$.

Tvrđenje 8.3.42 *Neka je X neprazan skup, L relacijski jezik i neka je $\mathcal{T}$ $L_{\infty\omega}$-teorija. Ako $\rho \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*
(a) $\rho \in \mathrm{wRev}_L^{\mathcal{T}}(X)$;
(b) ρ ima svojstvo CSB za kondenzacije u klasi $\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$.

Dokaz.
(a)$\Rightarrow$(b) Neka je $\sigma \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ proizvoljno, i pretpostavimo da je $\rho \preccurlyeq_c \sigma$ i $\sigma \preccurlyeq_c \rho$. Tada, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e), postoje bijekcije $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$ takve da je $f[\rho] \subseteq \sigma$ i $g[\sigma] \subseteq \rho$. Tada, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (a) i tvrđenja 1.1.1 (d), imamo da je

$$(g \circ f)[\rho] = g[f[\rho]] \subseteq g[\sigma] \subseteq \rho,$$

pa, kako je $g[\sigma] \cong \sigma \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$, i s obzirom da je skup $[\rho]_{\cong}$ konveksan u posetu $\langle \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X), \subseteq\rangle$, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) imamo da $g[\sigma] \in [\rho]_{\cong}$, odnosno da je $\sigma \cong g[\sigma] \cong \rho$.

(b)$\Rightarrow$(a) Pretpostavimo da je $\rho_1 \subseteq \sigma \subseteq \rho_2$, za proizvoljne $\rho_1, \rho_2 \in [\rho]_{\cong}$ i $\sigma \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$. Tada, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), postoje bijekcije $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$ takve da je $\rho_1 = f[\rho]$ i $\rho_2 = g[\rho]$. Dakle, $f[\rho] \subseteq \sigma \subseteq g[\rho]$, pa, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (a) i tvrđenja 1.1.1 (d), imamo da je $g^{-1}[\sigma] \subseteq \rho$, odnosno da je $\rho \preccurlyeq_c \sigma$ i $\sigma \preccurlyeq_c \rho$, odakle, na osnovu (b), sledi da $\sigma \in [\rho]_{\cong}$, što znači da je skup $[\rho]_{\cong}$ konveksan u posetu $\langle \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X), \subseteq\rangle$. $\square$

Neka je, dalje, $L = L_b$ binarni jezik, i neka je

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{graph} = \Big\{\varphi_{irr}, \varphi_{sym}\Big\}$$

teorija grafova. Ako $\rho \in \mathrm{wRev}_{L_b}^{\mathcal{T}_{graph}}(X)$ reći ćemo da je relacija ρ *grafovski slabo reverzibilna*.

Primer 8.3.43 $\mathrm{wRev}_{L_b}(\omega) \cap \mathrm{Int}^{\mathcal{T}_{graph}}_{L_b}(\omega) \subsetneq \mathrm{wRev}^{\mathcal{T}_{graph}}_{L_b}(\omega)$.
Jasno je da je

$$\mathrm{wRev}_{L_b}(\omega) \cap \mathrm{Int}^{\mathcal{T}_{graph}}_{L_b}(\omega) \subseteq \mathrm{wRev}^{\mathcal{T}_{graph}}_{L_b}(\omega).$$

Neka je

$$\mathbb{G} = \langle \omega, \rho \rangle := \bigcup_{\omega} \mathbb{G}_2 \cup \bigcup_{\omega} \mathbf{1}.$$

Tada, na osnovu tvrđenja 8.3.3 (c), imamo da

$$\rho \in \mathrm{wRev}^{\mathcal{T}_{graph}}_{L_b}(\omega) \setminus \mathrm{wRev}_{L_b}(\omega) = \mathrm{wRev}^{\mathcal{T}_{graph}}_{L_b}(\omega) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(\omega).$$

Teorema 8.3.44 *Ako je $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}} = \langle G, \rho \rangle$ Radoov graf, tada imamo da*

$$\rho \notin \mathrm{wRev}^{\mathcal{T}_{graph}}_{L_b}(G).$$

Dokaz. Definišimo niz $\langle m_n : n \in \omega \rangle \in {}^{\omega}\mathbb{N}$ na sledeći način:

$$m_0 := 1, \quad m_n := 2^{\sum_{k<n} m_k}, \ \text{ za } n > 0.$$

Tada je

$$\langle m_n : n \in \omega \rangle = \langle 1, 2, 2^3, 2^{11}, 2^{2059}, \ldots \rangle.$$

Neka je R proizvoljan prebrojiv skup, i neka je $R = \bigcup_{k\in\omega} R_k$ particija skupa R, takva da je $|R_k| = m_k$, za $k \in \omega$. Definišimo funkciju $h : R \to \omega$ na sledeći način: $h[R_k] := \{k\}$, za $k \in \omega$. Izaberimo, za svako $n \in \omega$, proizvoljnu bijekciju $g_n : R_n \to P(\bigcup_{k<n} R_k)$, i neka je

$$g := \bigcup_{n\in\omega} g_n : R \to P(R).$$

Definišimo sada graf $\mathbb{R} := \langle R, \rho \rangle$, gde je $\rho \subseteq [R]^2$, na sledeći način:

$$\rho := \Big\{ \{x, y\} \in [R]^2 : y \in g(x) \Big\}.$$

Na osnovu teoreme 2.2.2 (b), lako se pokazuje da je $\mathbb{R}$ Radoov graf. Neka je $R_0 = \{x_0\}$ i $R_1 = \{x_1, x_2\}$. Definišimo, dalje, graf $\mathbb{S} := \langle S, \sigma \rangle$, gde je $S := R$, i

$$\sigma := \rho \cup \Big\{ \{x, x_0\} : x \in \bigcup_{k\geq 2} R_k \ \wedge \ \{x_1, x_2\} \subseteq g(x) \Big\}.$$

Tada je $S_{R_1}^{R_0 \cup R_1} = \emptyset$, pa, na osnovu teoreme 2.2.2 (b), sledi da $\mathbb{S}$ nije Radoov graf. Definišimo, dalje, graf $\mathbb{T} := \langle T, \tau \rangle$, gde je $T := S = R$, i

$$\tau := \sigma \cup \Big\{ \{x, x_2\} : h(x) \in 2\mathbb{N} \ \wedge \ g(x) \cap (R_0 \cup R_1) = \{x_1\} \Big\}.$$

Na osnovu teoreme 2.2.2 (b), lako se pokazuje da je tada $\mathbb{T}$ Radoov graf. Dakle, uz malu zloupotrebu notacije, za $G = R$ imamo da $\rho, \sigma, \tau \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}_{graph}}(G)$, i, pri tome je $\rho \cong \tau$, dok $\sigma \notin [\rho]_{\cong}$. Zaključujemo da skup $[\rho]_{\cong}$ nije konveksan u posetu $\langle \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}_{graph}}(G), \subseteq \rangle$, odnosno da

$$\rho \notin \mathrm{wRev}_{L_b}^{\mathcal{T}_{graph}}(G).$$

$\Box$

Ako je $\mathbb{G} = \langle G, \rho \rangle$ graf, pri čemu je $\rho \subseteq [G]^2$, definišimo $\rho^\star \subseteq [G]^2$ na sledeći način:

$$\rho^\star := \Big\{ \{x, y\} \in \rho : \langle G, \rho \rangle \cong \langle G, \rho \setminus \{\{x, y\}\} \rangle \Big\}.$$

Dakle, $\rho^\star$ je skup uklonjivih ivica u grafu $\mathbb{G}$.

Tvrđenje 8.3.45 *Neka je G neprazan skup i neka je $\rho \subseteq [G]^2$. Ako, uz malu zloupotrebu notacije, $\rho \in \mathrm{wRev}_{L_b}^{\mathcal{T}_{graph}}(G)$, onda imamo:*
(a) $\rho^\star = \emptyset \iff \rho \in \mathrm{Rev}_{L_b}(G)$;
(b) $\rho^\star \neq \emptyset \implies |\rho^\star| \geq \omega$.

Dokaz. Slično dokazu tvrđenja 8.3.6 (za slučaj $L = L_b$). $\Box$

Primedba 8.3.46 Ako je $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}} = \langle G, \rho \rangle$ Radoov graf, pri čemu je $\rho \subseteq [G]^2$, tada je $\rho^\star = \rho$ (videti [3]), i, uz malu zloupotrebu notacije, imamo da $\rho \notin \mathrm{wRev}_{L_b}^{\mathcal{T}_{graph}}(G)$.

Glava 9

Reverzibilnost ekstremnih struktura

9.1 Reverzibilnost ekstremnih interpretacija

Podsetimo se, za skup $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Int}_L(X)$ reći ćemo da je *izomorfizam-invarijantan*, ili kratko $\cong$*-invarijantan*, akko

$$\forall \rho \in \mathcal{C} \quad [\rho]_{\cong} \subseteq \mathcal{C}. \tag{9.1}$$

Sa $\mathcal{C}^c$ označavaćemo skup $\{\rho^c : \rho \in \mathcal{C}\}$. Jasno je da je $\mathcal{C}^c \neq \mathrm{Int}_L(X) \setminus \mathcal{C}$. Sa $\mathrm{Max}\,\mathcal{C}$ i $\mathrm{Min}\,\mathcal{C}$ označavaćemo, redom, skupove maksimalnih i minimalnih elemenata skupa $\mathcal{C}$ u posetu $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$. Poset $\langle \mathcal{C}, \subseteq \rangle$ često ćemo, radi kraćeg zapisa, označavati samo sa $\mathcal{C}$. Rezultati iz ove glave dokazani su u [52].

Teorema 9.1.1 *Neka je L relacijski jezik i X neprazan skup. Ako je $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Int}_L(X)$ $\cong$-invarijantan skup, i $\tau \in \mathrm{Max}\,\mathcal{C}$ (redom, $\tau \in \mathrm{Min}\,\mathcal{C}$), tada važi:*

(a) τ je reverzibilna interpretacija;

(b) $[\tau]_{\cong} = [\tau]_{\sim_c}$ je antilanac u $\mathcal{C}$, i $[\tau]_{\cong} \subseteq \mathrm{Max}\,\mathcal{C}$ (redom, $[\tau]_{\cong} \subseteq \mathrm{Min}\,\mathcal{C}$);

(c) Skup $\mathcal{C}^c$ je $\cong$-invarijantan, i pri tome važi da $\tau \in \mathrm{Max}\,\mathcal{C}$ akko $\tau^c \in \mathrm{Min}\,\mathcal{C}^c$, za proizvoljno τ.

Dokaz.

(a) Pretpostavimo da τ nije reverzibilna. Tada, na osnovu tvrđenja 8.2.1 (g), postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $f[\tau] \subsetneq \tau$, odakle, na osnovu tvrđenja 1.1.2 (a) i (j), imamo da je $\tau \subsetneq f^{-1}[\tau]$. Na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a) i (9.1) imamo da $f^{-1}[\tau] \in [\tau]_{\cong} \subseteq \mathcal{C}$, što je nemoguće zbog maksimalnosti τ. Dokaz za slučaj $\tau \in \mathrm{Min}\,\mathcal{C}$ je dualan.

(b) Na osnovu (a) i (9.1), $[\tau]_{\cong}$ je antilanac u $\mathcal{C}$. Na osnovu tvrđenja 6.1.5 imamo da je $[\tau]_{\cong} = [\tau]_{\sim_c}$. Pretpostavimo da postoje $\tau_1 \in [\tau]_{\cong}$ i $\rho \in \mathcal{C}$ takvi da je $\tau_1 \subsetneq \rho$. Tada, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je $f[\tau_1] = \tau$, što, zajedno sa (9.1), implicira da je $\tau \subsetneq f[\rho] \in \mathcal{C}$. Ali to je nemoguće zbog maksimalnosti τ. Dokaz za slučaj $\tau \in \mathrm{Min}\,\mathcal{C}$ je dualan.

(c) Pokazaćemo da, za $\rho \in \mathcal{C}$, važi da je $[\rho^c]_{\cong} \subseteq \mathcal{C}^c$. Ako $\sigma \in [\rho^c]_{\cong}$, tada, na osnovu tvrđenja 1.1.5 (a), postoji $f \in \mathrm{Sym}(X)$ takvo da je

$$\sigma = f[\rho^c] = (f[\rho])^c.$$

Kako $f[\rho] \in [\rho]_{\cong} \subseteq \mathcal{C}$, imamo da $\sigma \in \mathcal{C}^c$. Neka $\tau \in \mathrm{Int}_L(X)$. Tada $\tau^c \in \mathrm{Min}\,\mathcal{C}^c$ akko je $\tau^c = \rho^c$ za neko $\rho \in \mathcal{C}$, i, za svako $\sigma \in \mathcal{C}$, imamo da $\sigma^c \subseteq \tau^c \Rightarrow \sigma^c = \tau^c$. Drugim rečima, $\tau = \rho$ za neko $\rho \in \mathcal{C}$, i, za svako $\sigma \in \mathcal{C}$, imamo da $\tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau = \sigma$, što znači da $\tau \in \mathrm{Max}\,\mathcal{C}$. □

Uočimo da je interpretacija $\tau \in \mathrm{Int}_L(X)$ reverzibilna akko $\tau \in \mathrm{Max}\,\mathcal{C}$ za neki $\cong$-invarijantan skup $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Int}_L(X)$. Naime, preostala implikacija je trivijalna: ako je τ reverzibilna, tada

$$\tau \in [\tau]_{\cong} = \mathrm{Max}\,[\tau]_{\cong}.$$

Sada ćemo razmotriti $L_{\infty\omega}$-definabilne skupove interpretacija. Podsetimo se, ako je $\mathcal{T}$ neka $L_{\infty\omega}$-teorija, sa $\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ označavamo skup svih L-interpretacija nad X koje zadovoljavaju dati skup $L_{\infty\omega}$-rečenica $\mathcal{T}$.

Teorema 9.1.2 *Ako je L relacijski jezik, X neprazan skup i $\mathcal{T}$ $L_{\infty\omega}$-teorija, tada imamo:*

(a) Skup $\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ je $\cong$-invarijantan;

(b) $(\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X))^c = \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}^c}(X)$, i ovaj skup je $\cong$-invarijantan;

(c) Maksimalni i minimalni elementi skupa $\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ su reverzibilne interpretacije;

(d) $\tau \in \mathrm{Max}(\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X))$ akko $\tau^c \in \mathrm{Min}(\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}^c}(X))$, za $\tau \in \mathrm{Int}_L(X)$.

Dokaz.

(a) Ako $\rho \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ i $\sigma \in [\rho]_{\cong}$, tada postoji izomorfizam $f : \langle X, \rho\rangle \to \langle X, \sigma\rangle$. Kako, za svaku rečenicu $\varphi \in \mathcal{T}$, imamo da je $\langle X, \rho\rangle \models \varphi$, i kako je, na osnovu tvrđenja 3.3.1, svaka $L_{\infty\omega}$-formula apsolutna u odnosu izomorfizme, imamo da je $\langle X, \sigma\rangle \models \varphi$. Dakle, $\sigma \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ i (9.1) je tačno.

(b) Prvo ćemo indukcijom dokazati naredni stav.

Stav 9.1.3 *Za svaku L-strukturu $\langle X, \rho\rangle$ i za svaku formulu $\varphi \in \mathrm{Form}_{L_{\infty\omega}}$ imamo*

$$\forall \mathbf{x} \in {}^{\kappa}X\ \Big(\langle X, \rho^c\rangle \models \varphi^c[\mathbf{x}] \Leftrightarrow \langle X, \rho\rangle \models \varphi[\mathbf{x}]\Big). \tag{9.2}$$

Dokaz. Neka $\mathbf{x} \in {}^{\kappa}X$. Tada je $\langle X, \rho^c \rangle \models (v_\alpha = v_\beta)^c[\mathbf{x}]$ akko je $\langle X, \rho^c \rangle \models (v_\alpha = v_\beta)[\mathbf{x}]$ akko je $x_\alpha = x_\beta$ akko je $\langle X, \rho \rangle \models (v_\alpha = v_\beta)[\mathbf{x}]$. Takođe, $\langle X, \rho^c \rangle \models (R_i(v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_{n_i}}))^c[\mathbf{x}]$ akko je $\langle X, \rho^c \rangle \models \neg R_i(v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_{n_i}})[\mathbf{x}]$ akko $\langle x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{n_i}} \rangle \notin \rho_i^c$ akko $\langle x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{n_i}} \rangle \in \rho_i$ a to važi akko je $\langle X, \rho \rangle \models R_i(v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_{n_i}})[\mathbf{x}]$.

Pretpostavimo da (9.2) važi za formulu φ, i neka $\mathbf{x} \in {}^{\kappa}X$. Tada je $\langle X, \rho^c \rangle \models (\neg\varphi)^c[\mathbf{x}]$ akko nije $\langle X, \rho^c \rangle \models \varphi^c[\mathbf{x}]$ akko nije $\langle X, \rho \rangle \models \varphi[\mathbf{x}]$, akko je $\langle X, \rho \rangle \models (\neg\varphi)[\mathbf{x}]$. Takođe, $\langle X, \rho^c \rangle \models (\forall v_\alpha\, \varphi)^c[\mathbf{x}]$ akko je $\langle X, \rho^c \rangle \models (\forall v_\alpha\, \varphi^c)[\mathbf{x}]$ akko, za svako $x \in X$, imamo da je $\langle X, \rho^c \rangle \models \varphi^c[\mathbf{x}_{\langle \alpha, x \rangle}]$, tj. prema (9.2), da je $\langle X, \rho \rangle \models \varphi[\mathbf{x}_{\langle \alpha, x \rangle}]$, što važi akko je $\langle X, \rho \rangle \models (\forall v_\alpha\, \varphi)[\mathbf{x}]$. Konačno, $\langle X, \rho^c \rangle \models (\exists v_\alpha\, \varphi)^c[\mathbf{x}]$ akko je $\langle X, \rho^c \rangle \models (\exists v_\alpha\, \varphi^c)[\mathbf{x}]$ akko, za neko $x \in X$, imamo da je $\langle X, \rho^c \rangle \models \varphi^c[\mathbf{x}_{\langle \alpha, x \rangle}]$, tj. prema (9.2), da je $\langle X, \rho \rangle \models \varphi[\mathbf{x}_{\langle \alpha, x \rangle}]$, što važi akko je $\langle X, \rho \rangle \models (\exists v_\alpha\, \varphi)[\mathbf{x}]$.

Neka $\Phi \subseteq \mathrm{Form}_{L_{\infty\omega}}$ i pretpostavimo da (9.2) važi za svaku formulu $\varphi \in \Phi$. Sada imamo da je $\langle X, \rho^c \rangle \models (\bigwedge \Phi)^c[\mathbf{x}]$ akko je $\langle X, \rho^c \rangle \models (\bigwedge \Phi^c)[\mathbf{x}]$ akko, za svako $\varphi \in \Phi$, imamo da je $\langle X, \rho^c \rangle \models \varphi^c[\mathbf{x}]$, tj. prema (9.2), da je $\langle X, \rho \rangle \models \varphi[\mathbf{x}]$, a to važi akko je $\langle X, \rho \rangle \models (\bigwedge \Phi)[\mathbf{x}]$. I na kraju, $\langle X, \rho^c \rangle \models (\bigvee \Phi)^c[\mathbf{x}]$ akko je $\langle X, \rho^c \rangle \models (\bigvee \Phi^c)[\mathbf{x}]$ akko, za neko $\varphi \in \Phi$, imamo da je $\langle X, \rho^c \rangle \models \varphi^c[\mathbf{x}]$, tj. prema (9.2), da je $\langle X, \rho \rangle \models \varphi[\mathbf{x}]$, a to važi akko je $\langle X, \rho \rangle \models (\bigvee \Phi)[\mathbf{x}]$. □

Na osnovu stava 9.1.3 skupovi $(\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X))^c = \{\rho^c : \forall \varphi \in \mathcal{T}\ \langle X, \rho \rangle \models \varphi\}$ i $\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}^c}(X) = \{\rho^c : \forall \varphi \in \mathcal{T}\ \langle X, \rho^c \rangle \models \varphi^c\}$ su jednaki.

(c) Sledi na osnovu (a) i teoreme 9.1.1 (a).

(d) Sledi na osnovu (b) i teoreme 9.1.1 (c). □

Primer 9.1.4 Reverzibilnost, kompletne teorije i elementarna ekvivalencija.

Ako $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$ i $\mathrm{Th}(X, \rho)$ je odgovarajuća teorija prvog reda, tada je, na osnovu tvrđenja 3.2.5 (a),

$$[\rho]_\equiv = \mathrm{Int}_L^{\mathrm{Th}(\langle X, \rho \rangle)}(X),$$

gde je $[\rho]_\equiv$ skup svih interpretacija $\sigma \in \mathrm{Int}_L(X)$ takvih da su strukture $\langle X, \rho \rangle$ i $\langle X, \sigma \rangle$ elementarno ekvivalentne. Što se tiče odnosa skupova $[\rho]_\equiv$ i $\mathrm{Rev}_L(X)$, pokazaćemo da je sve moguće.

1. Ako je $\mathbb{Q} = \langle Q, \rho \rangle$ racionalna prava, tada je $\mathrm{Th}(\mathbb{Q})$ teorija gustih linearnih uređenja bez krajnjih tačaka, koja je ω-kategorična, pa je

$$[\rho]_\equiv = [\rho]_\cong \subseteq \mathrm{Rev}_L(Q).$$

Kako je $[\rho]_{\cong} = \mathrm{Int}_L^{\mathrm{Th}(\mathbb{Q})}(Q)$ antilanac, svaki element skupa $\mathrm{Int}_L^{\mathrm{Th}(\mathbb{Q})}(Q)$ je istovremeno i maksimalan i minimalan element tog skupa.

2. Ako je $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}} = \langle G, \rho \rangle$ jedinstveni prebrojivi ultrahomogeni univerzalni graf (tzv. Radoov graf ili Erdős-Rényijev graf [13, 74]), tada je teorija $\mathrm{Th}(\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}})$ ω-kategorična, pa je $[\rho]_{\cong} = \mathrm{Int}_L^{\mathrm{Th}(\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}})}(G)$. Struktura $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$ nije reverzibilna (zato što brisanjem jedne ivice u Radoovom grafu opet dobijamo Radoov graf, videti [3]). Dakle,

$$\mathrm{Int}_L^{\mathrm{Th}(\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}})}(G) \cap \mathrm{Rev}_L(G) = \emptyset,$$

i skup $\mathrm{Int}_L^{\mathrm{Th}(\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}})}(G)$ nema ni minimalan ni maksimalan element.

3. Poznato je da je teorija $\mathcal{T}$ jedne relacije ekvivalencije koja ima tačno jednu klasu ekvivalencije veličine n, za svako $n \in \mathbb{N}$, kompletna. Za kardinal $\kappa \leq \omega$, neka je $\mathbb{E}_\kappa = \langle \omega, \rho_k \rangle$ prebrojiv model teorije $\mathcal{T}$, koji ima tačno κ beskonačnih klasa ekvivalencije. Poznato je da je

$$[\rho_0]_{\equiv} = \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(\omega) = \bigcup_{\kappa \leq \omega} [\rho_\kappa]_{\cong},$$

što znači da $\mathcal{T}$ nije ω-kategorična teorija. Na osnovu teoreme 10.3.1 i tvrđenja 10.2.3, relacija ekvivalencije je reverzibilna akko je broj klasa ekvivalencije iste veličine konačan, ili su sve klase ekvivalencije konačne i njihove veličine formiraju reverzibilan niz prirodnih brojeva. Dakle, strukture $\mathbb{E}_n$, $n < \omega$, su reverzibilne, dok $\mathbb{E}_\omega$ nije (čak ni slabo) reverzibilna. Odatle imamo da je

$$\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(\omega) \cap \mathrm{Rev}_L(\omega) = \bigcup_{n \in \omega} [\rho_n]_{\cong} \quad \text{i} \quad \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(\omega) \setminus \mathrm{Rev}_L(\omega) = [\rho_\omega]_{\cong}.$$

Pokazaćemo da je

$$\mathrm{Max}(\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(\omega)) = [\rho_0]_{\cong} \cup [\rho_1]_{\cong}.$$

Pretpostavimo da $n \in \{0, 1\}$, i da je $\rho_n \subsetneq \sigma \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(\omega)$. Za $k \in \mathbb{N}$, neka je C_k jedinstvena klasa ekvivalencije veličine k, određena sa ρ_n. Pošto je $\rho_n \subsetneq \sigma$, klase ekvivalencije koje odgovaraju σ su unije onih koje odgovaraju ρ, i dodatno, postoji najmanje k_0 takvo da je, u $\langle \omega, \sigma \rangle$, klasa C_{k_0} spojena s nekom drugom ρ-klasom. Ali tada ne postoji σ-klasa veličine k_0, što je kontradikcija s našom pretpostavkom da $\sigma \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(\omega)$. Ako je $\kappa \geq 2$, tada je $\rho_\kappa \subsetneq \sigma$ za neko $\sigma \in [\rho_1]_{\cong}$ (spojimo κ beskonačnih klasa u jednu). Slično se pokazuje da je $\mathrm{Min}(\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(\omega)) = [\rho_0]_{\cong}$, i da za $\kappa \geq 1$ nema minimalnih elemenata skupa $\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(\omega)$ ispod ρ_κ (podelimo beskonačne ρ_κ-klase na beskonačne delove).

Pošto je $\rho_m \preccurlyeq_c \rho_n$, za $1 \leq n \leq m \leq \omega$, poduređenje

$$\left\{[\rho]_{\sim_c} : \rho \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(\omega)\right\} = \left\{[\rho_n]_{\cong} : n \in \omega\right\} \cup \left\{[\rho_\omega]_{\sim_c}\right\}$$

kondenzacionog poretka $\langle \mathrm{Int}_L(\omega) / \sim_c, \leq_c\rangle$ izomorfno je disjunktnoj uniji jednoelementnog poseta (koji odgovara $[\rho_0]_{\cong}$) i lanca tipa $1 + \omega^*$, s maksimumom $[\rho_1]_{\cong}$ i minimumom $[\rho_\omega]_{\sim_c}$.

9.2 Teorije koje imaju ekstremne interpretacije

Primer 9.1.4 pokazuje da neki skupovi oblika $\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ nemaju ni minimalne ni maksimalne elemente. U ovom odeljku daćemo neke sintaktičke uslove, u obliku klasa $L_{\infty\omega}$-formula $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$, koji obezbeđuju da, kad god je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{F}$ (redom, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}$) skup $\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ ima maksimalne, (redom, minimalne elemente). Spomenimo, ovom prilikom, kako naš cilj nije da damo sintaktičku karakterizaciju najvećih klasa $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$, koje imaju gore spomenuto svojstvo. Razlog tome je što, ako je, na primer, jezik L prebrojiv, tada je, na osnovu posledice 5.2.4, svaki $\cong$-invarijantan skup $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Int}_L(X)$ oblika $\mathrm{Int}_L^{\{\varphi\}}(\omega)$, gde je φ disjunkcija Scottovih rečenica svih struktura koje pripadaju skupu $\mathcal{C}$. Tada skup $\mathrm{Int}_L^{\{\varphi\vee\varphi_m\}}(\omega)$, gde je $\varphi_m := \bigwedge_{i\in I} \forall\bar{v}\; R_i(\bar{v})$, trivijalno ima najveći element, to je interpretacija $\langle X^{n_i} : i \in I\rangle$. Naš cilj je da nađemo razumno velike klase $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$, koje će nam pružiti netrivijalne i relevantne primere reverzibilnih struktura.

Neka je, dalje, $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ relacijski jezik, gde je $\mathrm{ar}(R_i) = n_i \in \mathbb{N}$, za $i \in I$, neka je κ beskonačan kardinal i $\mathrm{Var}_\kappa := \{v_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ skup promenljivih. Sa $\mathcal{P}$ i $\mathcal{N}$ označavaćemo, redom, klase R-pozitivnih i R-negativnih $L_{\infty\omega}$-formula. Prvo, da bismo obezbedili maksimalne interpretacije definisaćemo klasu $L_{\infty\omega}$-formula $\mathcal{F} := \bigcup_{\xi\in\mathrm{Ord}} \mathcal{F}_\xi$, gde je

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_0 &:= \mathcal{P} \cup \{\neg R_i(v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_{n_i}}) : i \in I \wedge \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_i}\rangle \in \kappa^{n_i}\},\\
\mathcal{F}_{\xi+1} &:= \mathcal{F}_\xi \,\cup\, \{\forall v_\alpha\, \varphi : \alpha \in \kappa \wedge \varphi \in \mathcal{F}_\xi\}\\
&\quad\; \cup \{\textstyle\bigwedge \Phi : \Phi \subseteq \mathcal{F}_\xi\} \,\cup\, \{\textstyle\bigvee \Phi : \Phi \subseteq \mathcal{F}_\xi \wedge |\Phi| < \omega\},\\
\mathcal{F}_\gamma &:= \textstyle\bigcup_{\xi<\gamma} \mathcal{F}_\xi, \text{ za granični ordinal } \gamma.
\end{aligned}$$

Što se tiče minimalnih interpretacija, definisaćemo klasu $L_{\infty\omega}$-formula $\mathcal{G} := \bigcup_{\xi\in\mathrm{Ord}} \mathcal{G}_\xi$, gde je

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_0 &:= \mathcal{N} \cup \{R_i(v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_{n_i}}) : i \in I \wedge \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_i}\rangle \in \kappa^{n_i}\},\\
\mathcal{G}_{\xi+1} &:= \mathcal{G}_\xi \,\cup\, \{\forall v_\alpha\, \varphi : \alpha \in \kappa \wedge \varphi \in \mathcal{G}_\xi\}\\
&\quad\; \cup \{\textstyle\bigwedge \Phi : \Phi \subseteq \mathcal{G}_\xi\} \,\cup\, \{\textstyle\bigvee \Phi : \Phi \subseteq \mathcal{G}_\xi \wedge |\Phi| < \omega\},\\
\mathcal{G}_\gamma &:= \textstyle\bigcup_{\xi<\gamma} \mathcal{G}_\xi, \text{ za granični ordinal } \gamma.
\end{aligned}$$

Za skup L-interpretacija $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Int}_L(X)$ reći ćemo da je *kompletan u odnosu na unije lanaca* (redom, *kompletan u odnosu na preseke lanac*) akko $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{C}$ (redom, $\bigcap \mathcal{L} \in \mathcal{C}$) za svaki lanac $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$.

Teorema 9.2.1 *Neka je L relacijski jezik, X neprazan skup i neka je $\mathcal{T}$ $L_{\infty\omega}$-teorija takva da je $\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X) \neq \emptyset$. Tada imamo:*

(a) Ako je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{F}$, tada je skup $\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ kompletan u odnosu na unije lanaca, i $\mathrm{Max}(\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X))$ je njegov kogust podskup koji se sastoji od reverzibilnih interpretacija;

(b) Ako je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}$, tada je skup $\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ kompletan u odnosu na preseke lanaca, i $\mathrm{Min}(\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X))$ je njegov gust podskup koji se sastoji od reverzibilnih interpretacija.

Dokaz ćemo dati u nastavku. Pre toga, dokazaćemo sledeći stav:

Stav 9.2.2

(a) $\mathcal{G} = \{\varphi^c : \varphi \in \mathcal{F}\}$, do na logičku ekvivalenciju;

(b) Za svaku formulu $\varphi \in \mathcal{F}$, svaki lanac $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Int}_L(X)$ i svaku valuaciju $\mathbf{x} \in {}^{\kappa}X$ imamo

$$\Big(\forall \rho \in \mathcal{L}\ \ \langle X, \rho\rangle \models \varphi[\mathbf{x}]\Big) \Rightarrow \langle X, \bigcup \mathcal{L}\rangle \models \varphi[\mathbf{x}]. \tag{9.3}$$

Dokaz.

(a) ($\supseteq$) Pokazaćemo da, za svako $\xi \in \mathrm{Ord}$ i svako $\varphi \in \mathcal{F}_\xi$, imamo da $\varphi^c \in \mathcal{G}_\xi$. Za $\xi = 0$, ako $\varphi \in \mathcal{P}$, tada, na osnovu tvrđenja 3.3.2 (b), $\varphi^c \in \mathcal{N} \subseteq \mathcal{G}_0$, i $(\neg R_i(v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_{n_i}}))^c$ je formula $\neg\neg R_i(v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_{n_i}})$, koja je logički ekvivalentna formuli $R_i(v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_{n_i}}) \in \mathcal{G}_0$. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za sve $\xi < \zeta$. Ako je ζ granični ordinal, tada je jasno da je tvrđenje tačno i za ζ. Neka je $\zeta = \xi + 1$. Ako $\varphi \in \mathcal{F}_\xi$, tada $\varphi^c \in \mathcal{G}_\xi$, i stoga $(\forall v_\alpha\, \varphi)^c := \forall v_\alpha\, \varphi^c \in \mathcal{G}_{\xi+1}$.

Ako je $\Phi \subseteq \mathcal{F}_\xi$, tada $\varphi^c \in \mathcal{G}_\xi$ za sve $\varphi \in \Phi$, pa imamo da $(\bigwedge \Phi)^c := \bigwedge\{\varphi^c : \varphi \in \Phi\} \in \mathcal{G}_{\xi+1}$, i $(\bigvee \Phi)^c := \bigvee\{\varphi^c : \varphi \in \Phi\} \in \mathcal{G}_{\xi+1}$, za $|\Phi| < \omega$.

($\subseteq$) Pokazaćemo da, za svako $\xi \in \mathrm{Ord}$ i svako $\psi \in \mathcal{G}_\xi$, postoji $\varphi \in \mathcal{F}_\xi$, takvo da je $\psi = \varphi^c$. Za $\xi = 0$, ako $\psi \in \mathcal{N}$, treba primeniti tvrđenje 3.3.2 (b). Takođe, $R_i(v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_{n_i}})$ je ekvivalentno formuli $(\neg R_i(v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_{n_i}}))^c$.

Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za sve $\xi < \zeta$. Ako je ζ granični ordinal, tada je jasno da je tvrđenje tačno i za ζ. Neka je $\zeta = \xi + 1$. Ako $\psi \in \mathcal{G}_\xi$, tada postoji $\varphi \in \mathcal{F}_\xi$ takvo da je $\psi = \varphi^c$. Tada imamo da je $\forall v_\alpha\, \psi = \forall v_\alpha\, \varphi^c = (\forall v_\alpha\, \varphi)^c$, i da $\forall v_\alpha\, \varphi \in \mathcal{F}_{\xi+1}$.

Ako je $\Phi \subseteq \mathcal{G}_\xi$, tada, za svako $\psi \in \Phi$, postoji $\varphi_\psi \in \mathcal{F}_\xi$ takvo da je $\psi = \varphi_\psi^c$. Dakle, $\bigwedge\{\varphi_\psi : \psi \in \Phi\} \in \mathcal{F}_{\xi+1}$ i

$$\left(\bigwedge\left\{\varphi_\psi : \psi \in \Phi\right\}\right)^c = \bigwedge\left\{\varphi_\psi^c : \psi \in \Phi\right\} = \bigwedge \Phi.$$

Ako je $|\Phi| < \omega$, tada $\bigvee\{\varphi_\psi : \psi \in \Phi\} \in \mathcal{F}_{\xi+1}$ i

$$\left(\bigvee\left\{\varphi_\psi : \psi \in \Phi\right\}\right)^c = \bigvee\left\{\varphi_\psi^c : \psi \in \Phi\right\} = \bigvee \Phi.$$

(b) Neka je $\mathcal{L}$ neprazan lanac u $\mathrm{Int}_L(X)$ i neka $\mathbf{x} \in {}^\kappa X$. Uočimo da je tada

$$\bigcup \mathcal{L} = \Big\langle \bigcup_{\rho \in \mathcal{L}} \rho_i : i \in I \Big\rangle = \langle \tau_i : i \in I \rangle =: \tau \in \mathrm{Int}_L(X),$$

i da je, za $i \in I$, skup $\mathcal{L}_i := \{\rho_i : \rho \in \mathcal{L}\}$ lanac u posetu $\langle \mathrm{Int}_{\langle R_i \rangle}(X), \subseteq \rangle$.

Neka $\varphi \in \mathcal{P}$ i pretpostavimo da je $\langle X, \rho \rangle \models \varphi[\mathbf{x}]$, za svako $\rho \in \mathcal{L}$. Ako $\rho \in \mathcal{L}$, tada je, na osnovu tvrđenja 1.1.3 (e), identičko preslikavanje $\mathrm{id}_X : \langle X, \rho \rangle \to \langle X, \bigcup \mathcal{L} \rangle$ kondenzacija, i, na osnovu tvrđenja 3.3.2 (a), očuvava φ. Kako je $\langle X, \rho \rangle \models \varphi[\mathbf{x}]$, sledi da je $\langle X, \bigcup \mathcal{L} \rangle \models \varphi[\mathbf{x}]$.

Ako je $\varphi := \neg R_i(v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_{n_i}})$, tada, za proizvoljno $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$, imamo da je $\langle X, \rho \rangle \models \varphi[\mathbf{x}]$ akko $\langle x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{n_i}} \rangle \notin \rho_i$. Sada, ako $\langle x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{n_i}} \rangle \notin \rho_i$ za svako $\rho \in \mathcal{L}$, tada $\langle x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{n_i}} \rangle \notin \tau_i$, tj. $\langle X, \bigcup \mathcal{L} \rangle \models \varphi[\mathbf{x}]$.

Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za neku formulu $\varphi \in \mathcal{F}_\xi$. Neka je $\mathcal{L}$ lanac u $\mathrm{Int}_L(X)$ i neka $\mathbf{x} \in {}^\kappa X$. Ako, za svako $\rho \in \mathcal{L}$, imamo da je $\langle X, \rho \rangle \models (\forall v_\alpha\, \varphi)[\mathbf{x}]$, tj. da je $\langle X, \rho \rangle \models \varphi[\mathbf{x}_{\langle \alpha, y \rangle}]$ za svako $y \in X$, tada, za svako $y \in X$ i svako $\rho \in \mathcal{L}$, imamo da je $\langle X, \rho \rangle \models \varphi[\mathbf{x}_{\langle \alpha, y \rangle}]$, pa, na osnovu indukcijske hipoteze (9.3), sledi da je $\langle X, \bigcup \mathcal{L} \rangle \models \varphi[\mathbf{x}_{\langle \alpha, y \rangle}]$. Ovo važi za svako $y \in X$, pa je $\langle X, \bigcup \mathcal{L} \rangle \models (\forall v_\alpha\, \varphi)[\mathbf{x}]$.

Neka je $\Phi \subseteq \mathcal{F}_\xi$ i pretpostavimo da je tvrđenje tačno za svaku formulu $\varphi \in \Phi$. Neka je $\mathcal{L}$ lanac u $\mathrm{Int}_L(X)$ i neka $\mathbf{x} \in {}^\kappa X$.

Ako, za svako $\rho \in \mathcal{L}$, imamo da je $\langle X, \rho \rangle \models (\bigwedge \Phi)[\mathbf{x}]$, tj. da je $\langle X, \rho \rangle \models \varphi[\mathbf{x}]$ za svako $\varphi \in \Phi$, tada, za svako $\varphi \in \Phi$ i svako $\rho \in \mathcal{L}$, imamo da je $\langle X, \rho \rangle \models \varphi[\mathbf{x}]$, pa je, na osnovu indukcijske hipoteze, $\langle X, \bigcup \mathcal{L} \rangle \models \varphi[\mathbf{x}]$. Dakle, $\langle X, \bigcup \mathcal{L} \rangle \models (\bigwedge \Phi)[\mathbf{x}]$.

Ako je $\Phi = \{\psi_k : k \leq n\}$ i, za svako $\rho \in \mathcal{L}$, imamo da je $\langle X, \rho \rangle \models (\bigvee_{k=1}^n \psi_k)[\mathbf{x}]$, tada, i u slučaju kad je $\mathcal{L}$ konačan i u slučaju kad je $\mathcal{L}$ beskonačan, postoje $k_0 \leq n$ i kofinalan podskup $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$ takav da je $\langle X, \rho \rangle \models \psi_{k_0}[\mathbf{x}]$ za svako $\rho \in \mathcal{L}_0$, pa je, na osnovu indukcijske hipoteze, $\langle X, \bigcup \mathcal{L}_0 \rangle \models \psi_{k_0}[\mathbf{x}]$. Zbog kofinalnosti $\mathcal{L}_0$ imamo da je $\bigcup \mathcal{L}_0 = \bigcup \mathcal{L}$, i, na osnovu toga, je $\langle X, \bigcup \mathcal{L} \rangle \models (\bigvee_{k=1}^n \psi_k)[\mathbf{x}]$. □

Dokaz teoreme 9.2.1

(a) Neka je $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ lanac. Ako $\varphi \in \mathcal{T}$, tada, za svako $\rho \in \mathcal{L}$, imamo da $\rho \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$, i stoga je $\langle X, \rho \rangle \models \varphi$, što, na osnovu (9.3), implicira da je $\langle X, \bigcup \mathcal{L} \rangle \models \varphi$. Dakle, $\bigcup \mathcal{L} \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$, pa je skup $\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ kompletan u odnosu na unije lanaca. Drugo tvrđenje sledi na osnovu tvrđenja 1.2.3 i teoreme 9.1.2 (c).

(b) Ako je $\mathcal{L}$ lanac u posetu $\langle \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X), \subseteq \rangle$, tada, na osnovu teoreme 9.1.2 (b), imamo da je

$$\mathcal{L}^c = \Big\{ \rho^c : \rho \in \mathcal{L} \Big\} \subseteq \Big\{ \rho^c : \rho \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X) \Big\} = (\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X))^c = \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}^c}(X).$$

Kako je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}$, prema stavu 9.2.2 (a), bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $\mathcal{T} \subseteq \{\varphi^c : \varphi \in \mathcal{F}\}$, i odatle je

$$\mathcal{T}^c \subseteq \Big\{ (\varphi^c)^c : \varphi \in \mathcal{F} \Big\}.$$

Na osnovu tvrđenja 9.1.3, za svaku interpretaciju $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$ i svaku $L_{\infty\omega}$-rečenicu φ imamo: $\langle X, \rho \rangle \models \varphi$ akko je $\langle X, \rho \rangle \models (\varphi^c)^c$, pa opet, bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $\mathcal{T}^c \subseteq \mathcal{F}$. Jasno je da je $\mathcal{L}^c$ lanac u posetu $\langle \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}^c}(X), \subseteq \rangle$, pa je, na osnovu (a),

$$\bigcup \mathcal{L}^c = \bigcup_{\rho \in \mathcal{L}} \rho^c = \Big(\bigcap_{\rho \in \mathcal{L}} \rho \Big)^c \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}^c}(X).$$

Na osnovu teoreme 9.1.2 (b) imamo da je $\bigcap \mathcal{L} = \bigcap_{\rho \in \mathcal{L}} \rho \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$. Drugo tvrđenje sledi na osnovu tvrđenja 1.2.3 i teoreme 9.1.2 (c). □

Primer 9.2.3 Ekstremna parcijalna uređenja.

Jasno je da, za skup aksioma teorije strogih parcijalnih uređenja, $\mathcal{T}_{poset} = \{\varphi_{irr}, \varphi_{tr}\} \subseteq \mathrm{Sent}_{L_b}$, gde je $\varphi_{irr} := \forall v_0 \, \neg R(v_0, v_0)$, i $\varphi_{tr} := \forall v_0, v_1, v_2 \, (\neg R(v_0, v_1) \vee \neg R(v_1, v_2) \vee R(v_0, v_2))$, imamo da je $\mathcal{T}_{poset} \subseteq \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, i, na osnovu toga, poset

$$\mathbb{P} := \Big\langle \mathrm{Int}_{L_b}^{\mathcal{T}_{poset}}(X), \subseteq \Big\rangle$$

svih strogih parcijalnih uređenja na X ima sva svojstva iz (a) i (b) teoreme 9.2.1. Očigledno je kako je $\mathrm{Min}\, \mathbb{P} = \{\emptyset\}$, i, na osnovu primera 8.1.4, ovo uređenje antilanca jedinstveno je jako reverzibilno strogo parcijalno uređenje na X.

Maksimalni elementi poseta $\mathbb{P}$ baš su stroga linearna uređenja. Naime, jasno je da, ako je $\langle X, \rho \rangle$ strogo linearno uređenje i $\rho \subsetneq \rho'$, da tada ρ' nije strogo parcijalno uređenje. S druge strane, na osnovu Principa ekstenzije poretka (tj. na osnovu Szpilrajnove teoreme ekstenzije [84]), ako je ρ strogo parcijalno uređenje na X, tada postoji strogo linearno uređenje ρ' na X takvo da je $\rho' \supseteq \rho$.

Uočimo da, na osnovu poznate teoreme Dushnika i Millera [11], poset $\mathbb{P}$ ima sledeće svojstvo: svaka interpretacija $\rho \in \mathrm{Int}_{L_b}^{\mathcal{T}_{poset}}(X)$ presek je familije maksimalnih elemenata poseta $\mathbb{P}$, i minimalna veličina takve familije zove se *Dushnik-Millerova dimenzija* poseta $\langle X, \rho \rangle$. U [11], za dati poset kaže se da je *reverzibilan* akko je njegova dimenzija ≤ 2. Lako se vidi da je ovaj pojam nevezan s našom definicijom reverzibilnosti. Npr. poset $\mathbb{X} := \langle \mathbb{Z}, \rho \rangle$, gde je $\rho := \{\langle 2n-1, 2n \rangle : n \in \mathbb{N}\}$ dimenzije je 2, ali nije reverzibilan u našem smislu. U [27], Kukieła je pokazao kako su Booleove mreže reverzibilni poseti (u našem smislu), ali jasno je da mnoge od njih imaju dimenziju > 2.

Primer 9.2.4 Poset interpretacija prebrojivih povezanih grafova kompletan je u odnosu na unije lanaca ali nije kompletan u odnosu na preseke lanaca, iako njegovi minimalni elementi čine gust podskup.

Za skup aksioma teorije grafova $\mathcal{T}_{graph} = \{\varphi_{irr}, \varphi_{sym}\}$, gde je $\varphi_{irr} := \forall v_0\, \neg R(v_0, v_0)$ i $\varphi_{sym} := \forall v_0, v_1\, (\neg R(v_0, v_1) \vee R(v_1, v_0))$, imamo da je $\mathcal{T}_{graph} \subseteq \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ i $L_{\infty\omega}$-rečenica

$$\varphi_{conn} := \forall u, v\Big(u = v \vee \bigvee_{n \geq 2} \exists v_1, \ldots, v_n\, (u = v_1 \wedge v = v_n \wedge \bigwedge_{k=1}^{n-1} R(v_k, v_{k+1})\Big),$$

koja izražava da je graf povezan, pripada $\mathcal{P}$. Dakle, $\mathcal{T}_{graph} \cup \{\varphi_{conn}\} \subseteq \mathcal{F}$, i, na osnovu teoreme 9.2.1 (a), poset $\langle \mathrm{Int}_{L_b}^{\mathcal{T}_{graph} \cup \{\varphi_{conn}\}}(\omega), \subseteq \rangle$ je kompletan u odnosu na unije lanaca. S obzirom da je graf *stablo* akko je to minimalan povezan graf, minimalni elementi našeg poseta baš su stabla na skupu X. Pošto svaki povezan graf sadrži *pokrivajuće stablo* (to je jednostavna primena Zornove leme; videti [83]), naš poset ima gust skup minimalnih elemenata. Za $k \in \omega$, neka je $\mathbb{G}_k := \langle \omega \cup \{\omega\}, \rho_k \rangle$, gde je

$$\rho_k := \Big\{\{n, n+1\} : n \in \omega\Big\} \cup \Big\{\{n, \omega\} : n \geq k\Big\}.$$

Očigledno je da su grafovi $\mathbb{G}_k$ povezani i da je $\rho_0 \supsetneq \rho_1 \supsetneq \rho_2 \supsetneq \cdots$, ali graf $\mathbb{G}_\omega := \langle \omega \cup \{\omega\}, \bigcap_{k \in \omega} \rho_k \rangle$ nije povezan, što znači da poset

$$\Big\langle \mathrm{Int}_{L_b}^{\mathcal{T}_{graph} \cup \{\varphi_{conn}\}}(\omega), \subseteq \Big\rangle$$

nije kompletan u odnosu na preseke lanaca.

9.3 Zabranjivanje konačnih podstruktura

Ako je L konačan relacijski jezik, za klasu L-struktura $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}_L$ reći ćemo da je *univerzalna klasa* akko je aksiomatizabilna konačnim skupom univerzalnih rečenica (Π^0_1 rečenica) akko postoji konačan skup konačnih L-struktura $\{\mathbb{F}_k : k \leq n\} \subseteq \mathrm{Mod}_L$ takav da važi

$$\mathbb{X} \in \mathcal{K} \iff \mathbb{F}_k \not\hookrightarrow \mathbb{X} \text{ za sve } k \leq n,$$

(videti [85, 87, 14, 16]). U ovom odeljku uopštićemo taj koncept, i, na taj način, pokazaćemo kako nam zabranjivanje proizvoljnog broja konačnih podstruktura obezbeđuje veliku džunglu reverzibilnih struktura.

Tvrđenje 9.3.1 *Neka je L neprazan relacijski jezik. Za svaku konačnu L-strukturu $\mathbb{F}$ postoji $L_{\infty\omega}$-rečenica $\psi_{\mathbb{F}\hookrightarrow}$ takva da, za svaku L-strukturu $\mathbb{Y}$, imamo: $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{Y}$ akko je $\mathbb{Y} \models \psi_{\mathbb{F}\hookrightarrow}$. Ako je pored toga jezik L konačan, tada je rečenica $\neg\psi_{\mathbb{F}\hookrightarrow}$ logički ekvivalentna nekoj Π^0_1 rečenici $\eta_{\mathbb{F}\not\hookrightarrow}$.*

Dokaz. Neka je $L = \langle R_i : i \in I\rangle$, gde je $\mathrm{ar}(R_i) = n_i$, za $i \in I$, i, bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da je

$$\mathbb{F} = \langle m, \langle R_i^{\mathbb{F}} : i \in I\rangle\rangle \in \mathrm{Mod}_L,$$

gde je $m = \{0, 1, \dots, m-1\} \in \mathbb{N}$. Neka su dalje $\chi_{R_i^{\mathbb{F}}} : m^{n_i} \to 2$, $i \in I$, karakteristične funkcije skupova $R_i^{\mathbb{F}} \subseteq m^{n_i}$, i neka je $\varphi_{\mathbb{F}}(v_0, \dots, v_{m-1})$ $L_{\infty\omega}$-formula definisana sa

$$\varphi_{\mathbb{F}}(\bar{v}) := \bigwedge_{0\leq j<k<m} v_j \neq v_k \;\wedge\; \bigwedge_{i\in I} \bigwedge_{\bar{x}\in m^{n_i}} R_i(v_{x_0}, \dots, v_{x_{n_i-1}})^{\chi_{R_i^{\mathbb{F}}}(\bar{x})}, \tag{9.4}$$

gde je, po definiciji, $\eta^0 := \neg\eta$ i $\eta^1 := \eta$. Prvo ćemo pokazati da je

$$\mathbb{F} \models \varphi_{\mathbb{F}}[0, 1, \dots, m-1]. \tag{9.5}$$

Za $j < m$, promenljiva v_j u valuaciji $\langle 0, 1, \dots, m-1\rangle$ dobija vrednost j, te je $\mathbb{F} \models (\bigwedge_{0\leq 1<k<m} v_j \neq v_k)[0, 1, \dots, m-1]$ tačno. Neka $i \in I$ i $\bar{x} = \langle x_0, \dots, x_{n_i-1}\rangle \in m^{n_i}$. Tada je $\mathbb{F} \models R_i(v_{x_0}, \dots, v_{x_{n_i-1}})^{\chi_{R_i^{\mathbb{F}}}(\bar{x})}[0, 1, \dots, m-1]$ akko je $\mathbb{F} \models R_i[x_0, \dots, x_{n_i-1}]^{\chi_{R_i^{\mathbb{F}}}(\bar{x})}$ akko je

$$\Big(\chi_{R_i^{\mathbb{F}}}(\bar{x}) = 1 \;\wedge\; \bar{x} \in R_i^{\mathbb{F}}\Big) \;\vee\; \Big(\chi_{R_i^{\mathbb{F}}}(\bar{x}) = 0 \;\wedge\; \bar{x} \notin R_i^{\mathbb{F}}\Big),$$

što je tačno. Time je (9.5) dokazano.

Neka je $\psi_{\mathbb{F}\hookrightarrow} := \exists \bar{v}\ \varphi_{\mathbb{F}}(\bar{v})$. Ako $\mathbb{Y} \in \mathrm{Mod}_L$ i $f : \mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{Y}$, tada, na osnovu (9.5), imamo da je $\mathbb{Y} \models \varphi_{\mathbb{F}}[f(0), \ldots, f(m-1)]$, i, s obzirom da $\bar{y} := \langle f(0), \ldots, f(m-1)\rangle \in Y^m$, imamo da je $\mathbb{Y} \models \exists \bar{v}\, \varphi_{\mathbb{F}}(\bar{v})$, tj. da je $\mathbb{Y} \models \psi_{\mathbb{F}\hookrightarrow}$. Obratno, neka $\bar{y} = \langle y_0, \ldots, y_{m-1}\rangle \in Y^m$ i neka je $\mathbb{Y} \models \varphi_{\mathbb{F}}[\bar{y}]$. S obzirom da u valuaciji $\bar{y}$ promenljiva v_j dobija vrednost y_j, na osnovu (9.4), $y_0, \ldots, y_{m-1}$ su različiti elementi skupa Y, pa je preslikavanje $f : m \to Y$ definisano sa $f(j) = y_j$, za $j < m$, injekcija. Za dokaz da je $f : \mathbb{F} \to \mathbb{Y}$ jak homomorfizam, uzećemo $i \in I$ i $\bar{x} := \langle j_0, \ldots, j_{n_i-1}\rangle \in m^{n_i}$, i pokazati da

$$\langle j_0, \ldots, j_{n_i-1}\rangle \in R_i^{\mathbb{F}} \Longleftrightarrow \langle y_{j_0}, \ldots, y_{j_{n_i-1}}\rangle \in R_i^{\mathbb{Y}}.$$

Kako je $\mathbb{Y} \models \varphi_{\mathbb{F}}[\bar{y}]$, prema (9.4), imamo da je $\mathbb{Y} \models R_i(v_{j_0}, \ldots, v_{j_{n_i-1}})^{\chi_{R_i^{\mathbb{F}}}(\bar{x})}[\bar{y}]$ za $\bar{x}$, tj. da je $\mathbb{Y} \models R_i[y_{j_0}, \ldots, y_{j_{n_i-1}}]^{\chi_{R_i^{\mathbb{F}}}(\langle j_0, \ldots, j_{n_i-1}\rangle)}$, pa $\langle y_{j_0}, \ldots, y_{j_{n_i-1}}\rangle \in R_i^{\mathbb{Y}}$ ako i samo ako je $\chi_{R_i^{\mathbb{F}}}(\langle j_0, \ldots, j_{n_i-1}\rangle) = 1$ akko $\langle j_0, \ldots, j_{n_i-1}\rangle \in R_i^{\mathbb{F}}$, i to je to.

Ako je $|L| < \omega$, tada je rečenica $\neg\psi_{\mathbb{F}\hookrightarrow}$ ekvivalentna Π^0_1 rečenici

$$\eta_{\mathbb{F}\not\hookrightarrow} := \forall \bar{v}\ \Big(\bigvee_{0 \le j < k < m} v_j = v_k\ \vee \bigvee_{i \in I} \bigvee_{\bar{x} \in m^{n_i}} R_i(v_{x_0}, \ldots, v_{x_{n_i-1}})^{1-\chi_{R_i^{\mathbb{F}}}(\bar{x})}\Big). \quad \Box$$

Teorema 9.3.2 *Neka je L konačan jezik, $\mathcal{T}$ $L_{\infty\omega}$-teorija, i neka su $\mathbb{F}_j$, $j \in J$, konačne L-strukture takve da je poset $\mathbb{P} := \langle \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}\cup\{\eta_{\mathbb{F}_j\not\hookrightarrow} : j \in J\}}(X), \subseteq\rangle$ neprazan. Tada imamo:*

(a) Ako je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{F}$, tada je poset $\mathbb{P}$ kompletan u odnosu na unije lanaca, i $\mathrm{Max}\,\mathbb{P}$ je kogust skup u $\mathbb{P}$ koji se sastoji od reverzibilnih interpretacija;

(b) Ako je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}$, tada je poset $\mathbb{P}$ kompletan u odnosu na preseke lanaca, i $\mathrm{Min}\,\mathbb{P}$ je gust skup u $\mathbb{P}$ koji se sastoji od reverzibilnih interpretacija;

(c) $\tau \in \mathrm{Max}\Big(\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}\cup\{\eta_{\mathbb{F}_j\not\hookrightarrow} : j \in J\}}(X)\Big)$ akko $\tau^c \in \mathrm{Min}\Big(\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}^c\cup\{\eta_{\mathbb{F}_j^c\not\hookrightarrow} : j \in J\}}(X)\Big)$.

Dokaz. S obzirom da je $\Pi^0_1 \subseteq \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, (a) i (b) slede iz tvrđenja 9.3.1 i teoreme 9.2.1.

(c) Lako je proveriti da, za svako $p \in \{0, 1\}$, imamo da je

$$(R_i(\bar{v})^{1-p})^c \longleftrightarrow R_i(\bar{v})^p,$$

i da je, takođe, $\chi_{R_i^{\mathbb{F}}}(\bar{x}) = 1 - \chi_{R_i^{\mathbb{F}^c}}(\bar{x})$, što implicira da je $(\eta_{\mathbb{F}\not\hookrightarrow})^c \leftrightarrow \eta_{\mathbb{F}^c\not\hookrightarrow}$. Sada tvrđenje sledi iz teoreme 9.1.2 (d). $\Box$

Jedna stvar je dokazati da ekstremne interpretacije postoje, a druga stvar je naći, odnosno, okarakterisati ih. U nastavku slede neki rezultati na tu temu.

Maksimalni $\mathbb{K}_n$-slobodni grafovi

U nastavku biće nam pogodno da, za dati graf $\mathbb{X} = \langle X, \rho \rangle$, relaciju ρ identifikujemo sa odgovarajućim skupom dvoelementnih podskupova skupa X,

$$\Big\{\{x, y\} \in [X]^2 : \langle x, y \rangle \in \rho\Big\}.$$

Neka $\mathbb{X}^{gc} := \langle X, [X]^2 \setminus \rho \rangle$ označava grafovski komplement grafa $\mathbb{X}$. Podgraf $\langle Y, \rho \restriction_Y \rangle$, gde je $Y \subseteq X$, ponekad ćemo označavati samo sa Y. Za kardinal ν, $\mathbb{K}_\nu$ će označavati kompletan graf sa ν čvorova, dok će $\mathbb{E}_\nu$ označavati graf bez ivica sa ν čvorova. Jasno je da je $\mathbb{E}_\nu = \mathbb{K}_\nu^{gc}$.

Ako je $\mathbb{F}$ konačan graf koji nije kompletan, tada je $X^2 \setminus \Delta_X$, trivijalno, jedinstveni maksimalni element poseta $\langle \mathrm{Int}_{L_b}^{\mathcal{T}_{graph} \cup \{\eta_{\mathbb{F}} \not\leftrightarrow\}}(X), \subseteq \rangle$. Razmatraćemo dalje šta dobijamo zabranjivanjem $\mathbb{K}_n$-ova. Na osnovu teoreme 9.3.2 poset

$$\Big\langle \mathrm{Int}_{L_b}^{\mathcal{T}_{graph} \cup \{\eta_{\mathbb{K}_n} \not\leftrightarrow\}}(X), \subseteq \Big\rangle$$

ima maksimalne elemente koji su reverzibilni, i jasno je da su oni različiti od $X^2 \setminus \Delta_X$. Podsetimo se da se za graf kaže kako je $\mathbb{K}_n$-*slobodan* akko nema podgrafova izomorfnih $\mathbb{K}_n$. Trivijalno, grafovi $\mathbb{K}_m$, $m < n$, su maksimalni $\mathbb{K}_n$-slobodni grafovi.

Tvrđenje 9.3.3 *Neka je $n \geq 3$, i neka je $\mathbb{X} = \langle X, \rho \rangle$ $\mathbb{K}_n$-slobodan graf. Tada važi:*

(a) $\mathbb{X}$ je maksimalan $\mathbb{K}_n$-slobodan graf akko je $\mathbb{X}^c$ minimalan $\langle n, \Delta_n \rangle$-slobodan refleksivni graf akko je $\mathbb{X}^{gc}$ minimalni $\mathbb{E}_n$-slobodni graf;

(b) $\mathbb{X}$ je maksimalan $\mathbb{K}_n$-slobodan graf akko

$$\forall \{x, y\} \in [X]^2 \setminus \rho \quad \exists K \in [X]^n \quad [K]^2 \setminus \rho = \{\{x, y\}\}; \tag{9.6}$$

(c) Ako je $\mathbb{X}$ maksimalan $\mathbb{K}_n$-slobodan graf i $|X| \geq n - 1$, tada

$$\forall x \in X \quad \exists K \in [X \setminus \{x\}]^{n-2} \quad \{x\} \cup K \cong \mathbb{K}_{n-1}; \tag{9.7}$$

(d) Ako je $\mathbb{X}$ maksimalan $\mathbb{K}_n$-slobodan graf, $|X| \geq n - 1$, $\{Y_x : x \in X\}$ je familija nepraznih skupova, $Y := \bigcup_{x \in X} \{x\} \times Y_x$ i

$$\sigma = \Big\{\{\langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle\} \in [Y]^2 : \{x, x'\} \in \rho\Big\}, \tag{9.8}$$

tada je $\mathbb{Y} = \langle Y, \sigma \rangle$ maksimalan $\mathbb{K}_n$-slobodan graf.

Dokaz.

(a) Jasno je kako, do na logičku ekvivalenciju, imamo da je $\mathcal{T}^c_{graph} = \{\varphi_{refl}, \varphi_{sym}\}$ i $\mathbb{K}^c_n \cong \langle n, \Delta_n \rangle$. Sada, prvo tvrđenje sledi na osnovu teoreme 9.3.2 (c), a drugo tvrđenje sledi iz prvog.

(b) Ako je $|X| < n$, tada je (9.6) zadovoljeno akko je $\rho = [X]^2$ akko je $\langle X, \rho \rangle \cong \mathbb{K}_{|X|}$. Neka je dalje $|X| \geq n$. Ako je $\mathbb{X}$ maksimalan $\mathbb{K}_n$-slobodan graf i $\{x, y\} \in [X]^2 \setminus \rho$, tada graf $\langle X, \rho \cup \{\{x, y\}\} \rangle$ nije $\mathbb{K}_n$-slobodan, što znači da postoji skup $K \in [X]^n$ takav da $x, y \in K$, i da je

$$\Big\langle K, (\rho \cup \{\{x, y\}\}) \restriction_K \Big\rangle \cong \mathbb{K}_n,$$

što implicira da je $[K]^2 \setminus \rho = \{\{x, y\}\}$.

Obratno, ako je (9.6) zadovoljeno, tada, za proizvoljno $\{x, y\} \in [X]^2 \setminus \rho$, postoji $K \in [X]^n$ takvo da je

$$\Big\langle K, (\rho \cup \{\{x, y\}\}) \restriction_K \Big\rangle \cong \mathbb{K}_n,$$

pa je $\mathbb{X}$ maksimalan $\mathbb{K}_n$-slobodan graf.

(c) Ako je $|X| = n - 1$, tada je $\mathbb{X} \cong \mathbb{K}_{n-1}$ i (9.7) je očigledno. Neka je dalje $|X| \geq n$ i neka $x \in X$. Ako $\{x, y\} \notin \rho$ za neko $y \in X \setminus \{x\}$, tada, na osnovu (9.6), postoji skup $K' = \{x, y, x_1, \ldots, x_{n-2}\} \in [X]^n$ takav da je $[K']^2 \setminus \rho = \{\{x, y\}\}$, i, za skup $K := \{x_1, \ldots, x_{n-2}\} \in [X \setminus \{x\}]^{n-2}$, imamo da je $\{x\} \cup K \cong \mathbb{K}_{n-1}$.

Ako $\{x, y\} \in \rho$ za svako $y \in X \setminus \{x\}$, tada, s obzirom da je $|X| \geq n$, postoji par $\{u, v\} \in [X \setminus \{x\}]^2 \setminus \rho$, i, na osnovu (9.6), postoji skup

$$K = \{u, v, x_1, \ldots, x_{n-2}\} \in [X]^n$$

takav da je $[K]^2 \setminus \rho = \{\{u, v\}\}$. Sada, ako je $x = x_j$ za neko $j \leq n - 2$, tada je

$$\{x\} \cup \{u, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_{n-2}\} \cong \mathbb{K}_{n-1}$$

i (9.7) je zadovoljeno. A ako $x \notin \{x_1, \ldots, x_{n-2}\}$, imamo da je

$$\{x\} \cup \{x_1, \ldots, x_{n-2}\} \cong \mathbb{K}_{n-1}$$

i (9.7) je opet zadovoljeno.

(d) Pretpostavimo da je $\{\langle x_i, y_i \rangle : 1 \leq i \leq n\}$ kopija $\mathbb{K}_n$ u $\mathbb{Y}$. Tada bi, na osnovu (9.8), $\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ bila kopija $\mathbb{K}_n$ u $\mathbb{X}$, što je u kontradikciji s našom pretpostavkom. Dakle, $\mathbb{Y}$ je $\mathbb{K}_n$-slobodan graf.

Pretpostavimo da je $\langle Y, \tau \rangle$ $\mathbb{K}_n$-slobodan graf, pri čemu je $\sigma \subsetneq \tau$. Neka $\{\langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle\} \in \tau \setminus \sigma$. Ako je $x = x'$, tada, na osnovu (c), postoji skup

$K = \{x_1, \dots, x_{n-2}\} \in [X \setminus \{x\}]^{n-2}$ takav da je $\{x\} \cup K \cong \mathbb{K}_{n-1}$. Za $j \leq n-2$ izaberimo $y_j \in Y_{x_j}$. Tada, na osnovu (9.8), imamo da je

$$\Big\{\langle x, y\rangle, \langle x', y'\rangle\Big\} \cup \Big\{\langle x_j, y_j\rangle : j \leq n-2\Big\}$$

kopija $\mathbb{K}_n$ u $\langle Y, \tau\rangle$, što je u suprotnosti s našom pretpostavkom.

Ako je $x \neq x'$, tada $\{x, x'\} \in [X]^2 \setminus \rho$, pa, na osnovu (b), postoji skup

$$K = \{x, x', x_1, \dots, x_{n-2}\} \in [X]^n$$

takav da je $[K]^2 \setminus \rho = \{\{x, x'\}\}$. Ponovo, za $j \leq n-2$, izaberimo $y_j \in Y_{x_j}$. Tada, na osnovu (9.8), imamo da je

$$\Big\{\langle x, y\rangle, \langle x', y'\rangle\Big\} \cup \Big\{\langle x_j, y_j\rangle : j \leq n-2\Big\}$$

kopija $\mathbb{K}_n$ u $\langle Y, \tau\rangle$, što je u suprotnosti s našom pretpostavkom. Dakle, $\mathbb{Y}$ je maksimalan $\mathbb{K}_n$-slobodan graf. □

Primer 9.3.4 Tvrđenje 9.3.3 pruža nam veliku džunglu ekstremnih, pa samim tim i reverzibilnih struktura. Ako je $n \geq 3$, $\mathbb{X} \cong \mathbb{K}_{n-1}$, i ako je $\{Y_x : x \in X\}$ familija nepraznih skupova, tada je graf $\mathbb{Y}$, definisan u tvrđenju 9.3.3 (d), maksimalan $\mathbb{K}_n$-slobodan graf. Uočimo kako je $\mathbb{Y}$ u stvari kompletan $(n-1)$-partitni graf, i kako je $\mathbb{Y}^{gc}$ disjunktna unija $n-1$ kompletnih grafova, što je minimalan $\mathbb{E}_n$-slobodan graf. Ako je $|Y_x| = \omega$, za svako $x \in X$, tada je $\mathbb{Y}^{gc}$ reverzibilan prebrojiv ultrahomogeni graf s liste Lachlana i Woodrowa (videti primedbu 9.3.6).

Za $n = 3$, kompletni bipartitni grafovi $K_{\nu\omega}$, $\nu \leq \omega$, su maksimalni prebrojivi grafovi bez trouglova. Specijalno, graf zvezda $\mathbb{S}_\omega := \mathbb{K}_{1,\omega}$ je maksimalan graf bez trouglova. Dalje, imamo da neki maksimalni grafovi bez trouglova nisu bipartitni, na primer ciklični graf $\mathbb{C}_5^{sym}$. Takođe, ako uzmemo da je $X \cong \mathbb{C}_5^{sym}$ u tvrđenju 9.3.3 (d), dobijamo beskonačne maksimalne $\mathbb{K}_3$-slobodne grafove koji nisu bipartitni.

Naravno, postoje reverzibilni $\mathbb{K}_3$-slobodni grafovi koji nisu maksimalni $\mathbb{K}_3$-slobodni. Na primer, *linearni graf* $\mathbb{G}_\omega := \langle \omega, \tau\rangle$, gde je

$$\tau = \Big\{\{n, n+1\} : n \in \omega\Big\},$$

je reverzibilan zato što brisanjem bilo koje ivice dobijamo nepovezan graf.

Maksimalni $\mathbb{K}_n$-slobodni grafovi sa svim čvorovima beskonačnog stepena

U okviru teorije grafova, $L_{\infty\omega}$-rečenica

$$\varphi_\infty := \forall v \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \exists v_1,\dots,v_n \Big(\bigwedge_{1\le i<j\le n} v_i \ne v_j \ \wedge \bigwedge_{1\le i\le n} R(v,v_i)\Big)$$

kaže da svaki čvor datog grafa ima beskonačno mnogo suseda. S obzirom da $\varphi_\infty \in \mathcal{P}$, na osnovu teoreme 9.3.2 poset $\langle \mathrm{Int}_{L_b}^{\mathcal{T}_{graph}\cup\{\varphi_\infty,\eta_{\mathbb{K}_n\not\hookrightarrow}\}}(X), \subseteq\rangle$ ima kogust skup maksimalnih elemenata, i to su reverzibilne interpretacije. Neke takve interpretacije već su spomenute u primeru 9.3.4.

Primer 9.3.5 Hensonov graf $\mathbb{H}_n$ je maksimalan $\mathbb{K}_n$-slobodan graf sa svim čvorovima beskonačnog stepena.

Za $n \ge 3$, $\mathbb{H}_n$ označava jedinstveni prebrojivi ultrahomogeni univerzalni $\mathbb{K}_n$-slobodni graf (Hensonov graf, videti [21]). Da bismo se podsetili pogodne karakterizacije grafa $\mathbb{H}_n$, uvedimo sledeću notaciju: ako je $\mathbb{G} = \langle G,\rho\rangle$ graf i $n \ge 3$, neka je

$$C_n(\mathbb{G}) := \Big\{\langle H,K\rangle : K \subseteq H \in [G]^{<\omega} \wedge K \text{ je } \mathbb{K}_{n-1}\text{-slobodan}\Big\}$$

i za $\langle H,K\rangle \in C_n(\mathbb{G})$ definišimo orbitu

$$G_K^H := \Big\{v \in G\setminus H : \forall k\in K\ \{v,k\}\in\rho \wedge \forall h\in H\setminus K\ \{v,h\}\notin\rho\Big\}.$$

Tada, prema [21], imamo: prebrojiv graf $\mathbb{G} = \langle G,\rho\rangle$ izomorfan je $\mathbb{H}_n$ akko je $\mathbb{G}$ $\mathbb{K}_n$-slobodan i $G_K^H \ne \emptyset$, za svako $\langle H,K\rangle \in C_n(\mathbb{G})$.

Sada ćemo pokazati kako je Hensonov graf $\mathbb{H}_n = \langle G,\rho\rangle$ maksimalan $\mathbb{K}_n$-slobodan graf. Pretpostavimo da je $\langle G,\rho'\rangle$ $\mathbb{K}_n$-slobodan graf, pri čemu je $\rho \subsetneq \rho'$ i $\{a_1,a_2\} \in \rho'\setminus\rho$. Konstruišimo rekurzijom različite elemente $a_3,a_4,\dots,a_n \in G\setminus\{a_1,a_2\}$ takve da važi

$$\forall k\in\{3,4,\dots,n\}\ \ \forall i\in\{1,2,\dots,k-1\}\ \ \{a_i,a_k\}\in\rho. \tag{9.9}$$

Neka $k \in \{3,4,\dots,n\}$ i pretpostavimo da niz $a_1,a_2,\dots,a_{k-1}$ zadovoljava (9.9). Tada, pošto $\{a_1,a_2\}\notin\rho$, za $H = K := \{a_1,a_2,\dots,a_{k-1}\}$ imamo da se $\mathbb{K}_{n-1} \not\hookrightarrow \langle K,\rho\restriction_K\rangle$, što znači da $\langle H,K\rangle \in C_n(\mathbb{H}_n)$, pa, na osnovu gore navedene karakterizacije, postoji $a_k \in G\setminus\{a_1,a_2,\dots,a_{k-1}\}$ takvo da $\{a_i,a_k\}\in\rho$ za svako $i<k$. Dakle, niz $a_1,a_2,\dots,a_k$ zadovoljava (9.9) i rekurzija radi. Ali kako $\{a_1,a_2\}\in\rho'$, čvorovi $a_1,a_2,\dots,a_n$ određuju podgraf grafa $\langle G,\rho'\rangle$ izomorfan $\mathbb{K}_n$, što je u kontradikciji s našom pretpostavkom.

S obzirom da je graf $\mathbb{S}_\omega$ (videti primer 9.3.4) $\mathbb{K}_n$-slobodan, zbog univerzalnosti Hensonovog grafa $\mathbb{H}_n$, postoji kopija $\mathbb{S}_\omega$ u $\mathbb{H}_n$, odakle sledi da $\mathbb{H}_n$ sadrži čvor beskonačnog stepena. Zbog ultrahomogenosti $\mathbb{H}_n$, svi čvorovi u $\mathbb{H}_n$ moraju biti beskonačnog stepena.

Primedba 9.3.6 Prema opštepoznatoj karakterizaciji Lachlana i Woodrowa [59], svaki prebrojiv ultrahomogeni graf izomorfan je nekom od sledećih grafova:

• $\mathbb{G}_{\mu\nu}$ - unija μ disjunktnih kopija $\mathbb{K}_\nu$, gde je $\mu\nu = \omega$. $\mathbb{G}_{\mu\nu}$ je reverzibilan akko je $\mu < \omega$ ili je $\nu < \omega$ (videti teoremu 10.3.1 i teoremu 10.2.1);

• $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$ - Radoov graf. $\mathbb{G}_{\mathrm{Rado}}$ nije reverzibilan (videti primer 9.1.4);

• $\mathbb{H}_n$ - Hensonov graf (za $n \geq 3$). $\mathbb{H}_n$ je reverzibilan (videti primer 9.3.5);

• Grafovski komplementi ovih grafova. Graf je reverzibilan akko je njegov grafovski komplement reverzibilan (to je jednostavna posledica tvrđenja 8.2.2 (b)).

Zabranjivanje ekstremnih konačnih struktura

Lako se vidi da će minimalni elementi skupa $\mathrm{Int}_L^{\{\eta_{\mathbb{F}}\not\leftrightarrow\}}(X)$, koji ćemo u nastavku kraće označavati sa $\mathrm{Int}_L^{\eta_{\mathbb{F}}\not\leftrightarrow}(X)$, biti različiti od trivijalne interpretacije $\langle \emptyset : i \in I\rangle$ akko je zabranjena struktura $\mathbb{F}$ minimalna, tj. izomorfna $\langle m, \langle \emptyset : i \in I\rangle\rangle$, za neko $m \in \mathbb{N}$. Dualno,

$$\mathrm{Max}\left(\mathrm{Int}_L^{\eta_{\mathbb{F}}\not\leftrightarrow}(X)\right) \neq \left\{\langle X, \langle X^{n_i} : i \in I\rangle\rangle\right\} \iff \mathbb{F} \cong \left\langle m, \langle m^{n_i} : i \in I\rangle\right\rangle.$$

U nastavku daćemo neke primere takvih ograničenja.

Lema 9.3.7 *Neka $m, n \in \mathbb{N}$, i neka je $L_n = \langle R\rangle$, gde je $\mathrm{ar}(R) = n$. Tada važi:*

(a) Ako $\rho \in \mathrm{Int}_{L_n}^{\eta_{\langle m,\emptyset\rangle}\not\leftrightarrow}(X)$, tada $\rho \in \mathrm{Min}(\mathrm{Int}_{L_n}^{\eta_{\langle m,\emptyset\rangle}\not\leftrightarrow}(X))$ akko

$$\forall \bar{x} \in \rho \ \ \exists K \in [X]^m \ \ \rho \cap K^n = \{\bar{x}\}; \tag{9.10}$$

(b) Ako $\rho \in \mathrm{Int}_{L_n}^{\eta_{\langle m,m^n\rangle}\not\leftrightarrow}(X)$, tada $\rho \in \mathrm{Max}(\mathrm{Int}_{L_n}^{\eta_{\langle m,m^n\rangle}\not\leftrightarrow}(X))$ akko

$$\forall \bar{x} \in X^n \setminus \rho \ \ \exists K \in [X]^m \ \ K^n \setminus \rho = \{\bar{x}\}; \tag{9.11}$$

Dokaz.

(a) Ako postoji $\bar{x} \in \rho$ takvo da je $\rho \cap K^n \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$, za svako $K \in [X]^m$ koje zadovoljava $\bar{x} \in K^n$, tada $\rho \setminus \{\bar{x}\} \in \mathrm{Int}_{L_n}^{\eta_{\langle m,\emptyset\rangle}\not\leftrightarrow}(X)$, pa ρ nije minimalna.

Pretpostavimo da je (9.10) zadovoljeno i da je $\rho \supsetneq \sigma \in \mathrm{Int}_{L_n}^{\eta_{\langle m,\emptyset\rangle \not\hookrightarrow}}(X)$. Tada, prema (9.10), za $\bar{x} \in \rho \setminus \sigma$ postoji $K \in [X]^m$ takvo da je $\rho \cap K^n = \{\bar{x}\}$, pa imamo da je $\sigma \cap K^n = \emptyset$, što je nemoguće jer se $\langle m, \emptyset\rangle \not\hookrightarrow \langle X, \sigma\rangle$.

(b) Sledi iz (a) i teoreme 9.3.2 (c). $\square$

Sada ćemo pokazati kako se minimalne binarne strukture, u kojima je zabranjena minimalna struktura $\langle m, \emptyset\rangle$, mogu okarakterisati preko maksimalnih $\mathbb{K}_m$-slobodnih grafova.

Tvrđenje 9.3.8 *Ako je $|X| \geq m \geq 2$, tada $\rho \in \mathrm{Min}(\mathrm{Int}_{L_b}^{\eta_{\langle m,\emptyset\rangle \not\hookrightarrow}}(X))$ akko je ρ oblika*

$$\rho = \Delta_R \cup \sigma_{X\setminus R},$$

gde je $R \subsetneq X$, $|X \setminus R| \geq m-1$ i $\sigma_{X\setminus R}$ je proizvoljna orijentacija grafovskog komplementa nekog maksimalnog $\mathbb{K}_m$-slobodnog grafa $\langle X \setminus R, \tau_{X\setminus R}\rangle$.

Dokaz.

($\Rightarrow$) Neka $\rho \in \mathrm{Min}(\mathrm{Int}_{L_b}^{\eta_{\langle m,\emptyset\rangle \not\hookrightarrow}}(X))$ i neka je $R := \{x \in X : \langle x, x\rangle \in \rho\}$. Ako bi bilo $|X \setminus R| \leq m-2$, tada bismo, za svako $K \in [X]^m$, imali da je $|K \cap R| \geq 2$, i, na osnovu toga, da je $|\rho \cap K^2| \geq 2$, što je nemoguće prema (9.10). Dakle, $|X \setminus R| \geq m-1$.

Prema (9.10), za $\langle x, y\rangle \in \rho \cap (R \times X)$ postoji $K \in [X]^m$, takvo da je $\rho \cap K^2 = \{\langle x, y\rangle\}$, i, s obzirom da $\langle x, x\rangle \in \rho \cap K^2$, imamo da je $x = y$. Odatle zaključujemo da je $\rho \cap (R \times X) = \Delta_R$, i, slično tako, da je $\rho \cap (X \times R) = \Delta_R$, što znači da je $\rho = \Delta_R \cup \sigma_{X\setminus R}$, gde je $\sigma_{X\setminus R} := \rho \cap (X \setminus R)^2$.

Prema (9.10), za $\langle x, y\rangle \in \sigma_{X\setminus R}$ postoji $K \in [X]^m$, tako da je $\rho \cap K^2 = \{\langle x, y\rangle\}$, i, s obzirom da je $x \neq y$, imamo da $\langle y, x\rangle \notin \sigma_{X\setminus R}$. Prema tome, $\sigma_{X\setminus R} \cap \sigma_{X\setminus R}^{-1} = \emptyset$. Štaviše, kako je $x \neq y$, imamo da je $K \cap R = \emptyset$, tj. $K \in [X \setminus R]^m$. Sada, na osnovu leme 9.3.7 (a), imamo da

$$\sigma_{X\setminus R} \in \mathrm{Min}\left(\mathrm{Int}_{L_b}^{\eta_{\langle m,\emptyset\rangle \not\hookrightarrow}}(X \setminus R)\right).$$

Dakle, $\langle X \setminus R, \sigma_{X\setminus R}\rangle$ je minimalan irefleksivan digraf u kojem je zabranjena struktura $\langle m, \emptyset\rangle$, te je njegova simetrizacija $\langle X \setminus R, \sigma_{X\setminus R} \cup \sigma_{X\setminus R}^{-1}\rangle$ minimalan $\mathbb{E}_m$-slobodan graf. Na osnovu tvrđenja 9.3.3 (a), grafovski komplement $\tau_{X\setminus R}$ grafa $\sigma_{X\setminus R} \cup \sigma_{X\setminus R}^{-1}$ je maksimalan $\mathbb{K}_m$-slobodan graf, i $\sigma_{X\setminus R}$ je orijentacija njegovog grafovskog komplementa.

($\Leftarrow$) Neka $K \in [X]^m$. Ako je $K \cap R \neq \emptyset$, tada je $\rho \cap K^2 \neq \emptyset$, a ako je $K \cap R = \emptyset$, tada je $\rho \cap K^2 \neq \emptyset$, zato što graf $\tau_{X\setminus R}$ inače ne bi bio $\mathbb{K}_m$-slobodan. Odatle imamo da $\rho \in \mathrm{Int}_{L_b}^{\eta_{\langle m,\emptyset\rangle \not\hookrightarrow}}(X)$. Neka je $\rho' \subsetneq \rho$

i neka $\langle x, y\rangle \in \rho \setminus \rho'$. Ako je $x = y$, uzmimo $Z \in [X \setminus R]^{m-1}$ takvo da je $\rho \cap Z^2 = \emptyset$ (takvo Z postoji zato što je $|X \setminus R| \geq m-1$ i graf $\tau_{X\setminus R}$ je maksimalan $\mathbb{K}_m$-slobodan, pa, na osnovu tvrđenja 9.3.3 (c), nije $\mathbb{K}_{m-1}$-slobodan). Tada je $\rho' \cap (Z \cup \{x\})^2 = \emptyset$, pa $\rho' \notin \mathrm{Int}_{L_b}^{\eta_{\langle m,\emptyset\rangle}\not\leftrightarrow}(X)$. Ako je $x \neq y$, tada $x, y \in X \setminus R$, $\{x, y\} \notin \tau_{X\setminus R}$, i pošto je graf $\tau_{X\setminus R}$ maksimalan $\mathbb{K}_m$-slobodan, postoji $Z \subseteq X \setminus R$ takvo da $x, y \in Z$ i da je

$$\left\langle Z, (\tau_{X\setminus R} \cup \{x, y\}) \cap Z^2 \right\rangle \cong \mathbb{K}_m.$$

Sada je $\rho' \cap Z^2 = \emptyset$, pa $\rho' \notin \mathrm{Int}_{L_b}^{\eta_{\langle m,\emptyset\rangle}\not\leftrightarrow}(X)$. Dakle, $\rho \in \mathrm{Min}(\mathrm{Int}_{L_b}^{\eta_{\langle m,\emptyset\rangle}\not\leftrightarrow}(X))$. $\square$

Primer 9.3.9 Na osnovu tvrđenja 9.3.8, za $m = 2$ imamo sledeće karakterizacije:

$$\mathrm{Min}\left(\mathrm{Int}_{L_b}^{\eta_{\langle 2,\emptyset\rangle}\not\leftrightarrow}(X)\right) = \left\{\Delta_R \cup \sigma_{X\setminus R} : R \subsetneq X \wedge \langle X \setminus R, \sigma_{X\setminus R}\rangle \text{ je turnir}\right\},$$

$$\mathrm{Max}\left(\mathrm{Int}_{L_b}^{\eta_{\langle 2,2^2\rangle}\not\leftrightarrow}(X)\right) = \left\{X^2 \setminus (\Delta_R \cup \sigma_{X\setminus R}) : R \subsetneq X \wedge \langle X \setminus R, \sigma_{X\setminus R}\rangle \text{ je turnir}\right\}.$$

Dakle, za $R = \emptyset$ dobijamo reverzibilnost turnira i refleksiviziranih turnira, i, u specijalnom slučaju, dobijamo reverzibilnost strogih i refleksivnih linearnih uređenja. Ako uzmemo da je $R = X \setminus \{x\}$ za neko $x \in X$, dobijamo reverzibilnost dijagonale bez jedne tačke i reverzibilnost kompletnog grafa s jednom refleksiviziranom tačkom. Uočimo kako su kompletni grafovi sa n refleksiviziranih tačaka takođe reverzibilni, ali za $n \geq 2$ oni sadrže kopiju strukture $\langle 2, 2^2\rangle$.

Maksimalni grafovi bez cikličkih podgrafova

Za $n \geq 4$, i u vezi s beskonačnim grafovima, pun graf je jedini maksimalan graf koji ne sadrži kopiju $\mathbb{C}_n^{sym}$. Za $n = 3$ imamo da je $\mathbb{C}_3^{sym} = \mathbb{K}_3$, pa dobijamo maksimalne $\mathbb{K}_3$-slobodne grafove koje smo već razmatrali. Ako

$$3 \in A \subseteq \omega \setminus 3,$$

tada dobijamo netrivijalne maksimalne interpretacije koje ne sadrže kopije $\mathbb{C}_n^{sym}$, za $n \in A$. U krajnjem slučaju, ako uzmemo da je $A = \omega \setminus 3$, dobijamo grafove bez cikličkih podgrafova. Maksimalni takvi grafovi su stabla (povezani grafovi bez ciklusa). Na osnovu tvrđenja 2.2.1, ako uzmemo da je $A = \{3, 5, 7, \ldots\}$, dobijamo bipartitne grafove, i maksimalni takvi su kompletni bipartitni grafovi.

Lokalna kardinalna ograničenja

Neka je $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ konačan relacijski jezik, gde je $\mathrm{ar}(R_i) = n_i$ za $i \in I$, neka je $M \subseteq \mathbb{N}$ i neka su

$$k = \left\langle k^i_m : m \in M \wedge i \in I \right\rangle \quad \text{i} \quad l = \left\langle l^i_m : m \in M \wedge i \in I \right\rangle$$

nizovi u ω, takvi da za svako $m \in M$ i $i \in I$ imamo da je

$$0 \leq k^i_m \leq l^i_m \leq m^{n_i}.$$

Tada je skup L-rečenica

$$\mathcal{T}^{k,l}_M := \bigcup_{m\in M} \left\{ \eta_{\langle m,\sigma\rangle\not\hookrightarrow} : \sigma \in \mathrm{Int}_L(m) \wedge \exists i \in I \ (|\sigma_i| < k^i_m \vee |\sigma_i| > l^i_m) \right\}$$

jedna Π^0_1 teorija, i, za neprazan skup X i $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$, imamo da

$$\rho \in \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}^{k,l}_M}(X) \iff \forall m \in M \ \ \forall K \in [X]^m \ \ \forall i \in I \ \ k^i_m \leq |\rho_i \cap K^{n_i}| \leq l^i_m$$

(veličina komponenata interpretacije ρ restrikovanih na m-elementne podskupove skupa X je ograničena). Na osnovu teoreme 9.3.2, ako je $\mathcal{T}$ neka $L_{\infty\omega}$-teorija i ako je poset $\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}\cup\mathcal{T}^{k,l}_M}(X)$ neprazan, tada on ima gust skup minimalnih i kogust skup maksimalnih elemenata.

Primer 9.3.10 Teorija grafova ne prihvata dva netrivijalna ograničenja.

Ako je $\langle m, \sigma\rangle$ graf, tada je, zbog irefleksivnosti, $0 \leq |\sigma| \leq m^2 - m$. Neka je $L = L_b$, $M = \{3\}$ i neka je $0 < k \leq l < 6$. Ako je

$$\mathcal{T}^{k,l}_{\{3\}} = \left\{ \eta_{\langle 3,\sigma\rangle\not\hookrightarrow} : \sigma \in [3^2]^{<k} \cup [3^2]^{>l} \right\},$$

tada je $\mathcal{T} := \mathcal{T}_{graph} \cup \mathcal{T}^{k,l}_{\{3\}}$ jedna Π^0_1 teorija, i $\rho \in \mathrm{Int}^{\mathcal{T}}_{L_b}(\omega)$ akko je struktura $\mathbb{X} = \langle \omega, \rho\rangle$ graf takav da je $k \leq |\rho \cap K^2| \leq l$, za svako $K \in [\omega]^3$, što (na osnovu simetričnosti) znači da svaki 3-elementni podgraf grafa $\mathbb{X}$ ima jednu ili dve grane. Ali ovo je nemoguće, zato što, na osnovu Ramseyeve teoreme (teorema 2.2.9), graf $\mathbb{X}$ mora sadržati beskonačan prazan podgraf, ili beskonačan kompletan podgraf. S druge strane, ako uzmemo da je $k = 0$, tada, za $l \in \{4, 5\}$, uslov $|\rho \cap K^2| \leq l$ znači da je graf bez trouglova. Neki takvi maksimalni grafovi opisani su u primerima 9.3.4 i 9.3.5. Za $l \in \{2, 3\}$, maksimalne interpretacije koje zadovoljavaju $|\rho \cap K^2| \leq l$ su $\bigcup_\omega \mathbb{K}_2$ i $\mathbb{K}_1 \cup \bigcup_\omega \mathbb{K}_2$.

Glava 10

Reverzibilne nepovezane binarne strukture

10.1 Reverzibilne nepovezane strukture

U ovom odeljku daćemo nekoliko ekvivalentnih uslova za reverzibilnost u klasi nepovezanih binarnih struktura, kao i u nekim njenim potklasama. Kako za datu strukturu $\mathbb{X}$ imamo da je $\mathbb{X}$ reverzibilna akko je $\mathbb{X}^c$ reverzibilna (videti tvrđenje 8.2.2 (b)), spomenuti rezultati mogu se konvertovati u odgovarajuća tvrđenja o reverzibilnosti povezanih struktura koje nisu bipovezane. Podsetimo se kako je bar jedna od struktura $\mathbb{X}$ i $\mathbb{X}^c$ povezana (videti tvrđenje 2.3.1). Rezultati iz ovog odeljka dokazani su u [50], u [54], i u [51].

Teorema 10.1.1 *Ako su $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, po parovima disjunktne i povezane L_b-strukture, tada je struktura $\bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$ reverzibilna akko je struktura $\bigcup_{i\in J} \mathbb{X}_i$ reverzibilna za svaki neprazan skup $J \subseteq I$.*

Dakle, ako je $\bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$ reverzibilna struktura, tada su sve komponente $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, reverzibilne.

Dokaz. Neka je $\mathbb{X}_i = \langle X_i, \rho_i\rangle$, za $i \in I$, i $\mathbb{X} = \langle X, \rho\rangle := \langle \bigcup_{i\in I} X_i, \bigcup_{i\in I} \rho_i\rangle$.

Implikacija „$\Leftarrow$” je trivijalna. Da bismo dokazali „$\Rightarrow$”, pretpostavimo da postoji neprazan skup $J \subseteq I$ i

$$f \in \mathrm{Cond}(\bigcup_{i\in J} \mathbb{X}_i) \setminus \mathrm{Aut}(\bigcup_{i\in J} \mathbb{X}_i).$$

Tada postoje $x, y \in \bigcup_{i \in J} X_i$ takvi da

$$\langle x, y \rangle \notin \bigcup_{i \in J} \rho_i \quad \text{i} \quad \langle f(x), f(y) \rangle \in \bigcup_{i \in J} \rho_i.$$

Tada je, za

$$F := f \cup \mathrm{id}_{\bigcup_{i \in I \setminus J} X_i} \in \mathrm{Sym}(X),$$

lako proveriti da $F \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X})$, pri čemu par $\langle x, y \rangle$ pokazuje da $F \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{X})$. Dakle, $\mathbb{X}$ nije reverzibilna struktura. □

Naredna teorema od velikog je teorijskog značaja za (ne)reverzibilne nepovezane L_b-strukture, zato što je dala dosta interesantnih posledica. Neke od njih biće viđene u nastavku[1].

Teorema 10.1.2 *Neka su $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, po parovima disjunktne i povezane L_b-strukture. Tada je struktura $\bigcup_{i \in I} \mathbb{X}_i$ reverzibilna akko kad god je $f : I \to I$ surjekcija, $g_i \in \mathrm{Mono}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_{f(i)})$, za $i \in I$, i*

$$\forall j \in I \ \left(\left\{ g_i[X_i] : i \in f^{-1}[\{j\}] \right\} \textit{ je particija skupa } X_j \right), \tag{10.1}$$

imamo da

$$f \in \mathrm{Sym}(I) \ \wedge \ \forall i \in I \ \ g_i \in \mathrm{Iso}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_{f(i)}). \tag{10.2}$$

Dokaz. Neka je $\mathbb{X}_i = \langle X_i, \rho_i \rangle$, za $i \in I$, i

$$\mathbb{X} = \langle X, \rho \rangle := \langle \bigcup_{i \in I} X_i, \bigcup_{i \in I} \rho_i \rangle.$$

Pretpostavimo da je $\mathbb{X}$ reverzibilna struktura, i neka preslikavanja f i g_i, $i \in I$, zadovoljavaju pretpostavke teoreme. Tada, na osnovu tvrđenja 2.3.4, imamo da

$$F := \bigcup_{i \in I} g_i \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{X})$$

i, na osnovu tvrđenja 2.3.3, imamo da $g_i \in \mathrm{Emb}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_{f(i)})$, za sve $i \in I$. Pretpostavimo da postoje različiti $i_1, i_2 \in I$ takvi da je $f(i_1) = f(i_2) = j$. Uzmimo $x_1 \in X_{i_1}$ i $x_2 \in X_{i_2}$. Kako je struktura $\mathbb{X}_j$ povezana, postoje $y_1, \ldots, y_n \in X_j$ takvi da je

$$g_{i_1}(x_1) = y_1 (\rho_j)_s y_2 \ldots (\rho_j)_s y_n = g_{i_2}(x_2),$$

odakle sledi da postoji $k < n$, takvo da su y_k i y_{k+1} u različitim elementima particije $\{g_i[X_i] : i \in f^{-1}[\{j\}]\}$, recimo $y_k = g_i(x) \in g_i[X_i]$ i $y_{k+1} = g_{i'}(x') \in$

[1] Za još jednu primenu teoreme 10.1.2 na nereverzibilna drveta, pogledati [69].

$g_{i'}[X_{i'}]$, pri čemu je $i \neq i'$. Ali tada $\langle g_i(x), g_{i'}(x')\rangle \in \rho_{rs}$, što je, prema tvrđenju 2.3.3, nemoguće. Dakle, f je bijekcija i, prema (10.1), imamo da je $g_i[X_i] = X_{f(i)}$, za svako $i \in I$, što implicira da $g_i \in \mathrm{Iso}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_{f(i)})$.

Obratno, dokazaćemo da $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{X})$ za svako $F \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X})$. Na osnovu tvrđenja 2.3.4 i pretpostavke teoreme, imamo da je $F = \bigcup_{i\in I} g_i$, gde $f \in \mathrm{Sym}(I)$ i $g_i \in \mathrm{Iso}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_{f(i)})$, za sve $i \in I$. Na osnovu tvrđenja 2.3.3 imamo da $F \in \mathrm{Emb}(\mathbb{X})$, pa kako je F surjekcija, sledi da $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{X})$. □

Neka je, dalje, $\langle \mathbb{X}_i : i \in I\rangle$ niz po parovima disjunktnih L_b-struktura, i neka je

$$\mathcal{X} := \{\mathbb{X}_i : i \in I\}.$$

Pre navođenja naredne karakterizacije reverzibilnih nepovezanih binarnih struktura, daćemo dve definicije. Prvo, za niz $\langle \mathbb{X}_i : i \in I\rangle$ reći ćemo da je *reverzibilan niz struktura* akko

$$\neg\exists f \in \mathrm{Sur}(I) \setminus \mathrm{Sym}(I) \ \ \forall j \in I \ \ \bigcup_{i\in f^{-1}[\{j\}]} \mathbb{X}_i \preccurlyeq_c \mathbb{X}_j. \tag{10.3}$$

Drugo, za preslikavanje $i : \mathbb{Z} \to I$, koje ćemo obeležavati sa $\langle i_k : k \in \mathbb{Z}\rangle$, reći ćemo da je $\mathbb{Z}$-*kondenzacioni niz u* I akko je injekcija i

$$\forall k, l \in \mathbb{Z} \ \ (k \leq l \Rightarrow \mathbb{X}_{i_k} \preccurlyeq_c \mathbb{X}_{i_l}), \tag{10.4}$$

što je, na osnovu tranzitivnosti relacije $\preccurlyeq_c$, ekvivalentno postojanju niza kondenzacija $g_k : \mathbb{X}_{i_k} \to \mathbb{X}_{i_{k+1}}$, za $k \in \mathbb{Z}$. Ako je, pored toga, $\mathbb{X}_{i_k} \sim_c \mathbb{X}_{i_l}$, za sve $k, l \in \mathbb{Z}$, za $\mathbb{Z}$-kondenzacioni niz $\langle i_k : k \in \mathbb{Z}\rangle$ reći ćemo da je *trivijalan*[2].

Kako, na osnovu teoreme 10.1.1, komponente date reverzibilne strukture moraju biti reverzibilne, to ograničenje ćemo uključiti među pretpostavke naredne teoreme.

Teorema 10.1.3 *Neka su $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, po parovima disjunktne, povezane i reverzibilne L_b-strukture. Struktura $\mathbb{X} := \bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$ je reverzibilna akko je $\langle \mathbb{X}_i : i \in I\rangle$ reverzibilan niz struktura i svaki $\mathbb{Z}$-kondenzacioni niz u I je trivijalan.*

Dokaz.

[2] Primetimo kako je $\langle i_k : k \in \mathbb{Z}\rangle$ $\mathbb{Z}$-kondenzacioni niz u I akko je $k \mapsto \mathbb{X}_{i_k}$ monomorfizam iz linearnog uređenja $\langle \mathbb{Z}, \leq\rangle$ u kondenzaciono preduređenje $\langle \mathcal{X}, \preccurlyeq_c\rangle$. Ako su $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, reverzibilne strukture, niz $\langle i_k : k \in \mathbb{Z}\rangle$ je trivijalan akko su sve strukture $\mathbb{X}_{i_k}$ u istoj $\cong$-klasi (videti tvrđenje 8.2.5).

($\Leftarrow$) Ako $\mathbb{X}$ nije reverzibilna struktura, tada, na osnovu teoreme 10.1.2, postoje $f \in \mathrm{Sur}(I)$ i $g_i \in \mathrm{Mono}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_{f(i)})$, za $i \in I$, tako da je ispunjeno (10.1) i $\neg$(10.2). Na osnovu (10.1) i tvrđenja 2.3.4, imamo da

$$\bigcup_{i \in f^{-1}[\{j\}} g_i \in \mathrm{Cond}(\bigcup_{i \in f^{-1}[\{j\}]} \mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j), \quad \text{za sve } \ j \in I.$$

Dakle, ako $f \notin \mathrm{Sym}(I)$, tada imamo $\neg$(10.3).

Ako $f \in \mathrm{Sym}(I)$, tada, prema $\neg$(10.2), $g_{i_0} \notin \mathrm{Iso}(\mathbb{X}_{i_0}, \mathbb{X}_{f(i_0)})$, za neko $i_0 \in I$. Kako $g_{i_0} \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}_{i_0}, \mathbb{X}_{f(i_0)})$, i kako je struktura $\mathbb{X}_{i_0}$ reverzibilna, $\mathbb{X}_{i_0} \cong \mathbb{X}_{f(i_0)}$ bi, na osnovu tvrđenja 8.2.5, impliciralo da je

$$\mathrm{Cond}(\mathbb{X}_{i_0}, \mathbb{X}_{f(i_0)}) = \mathrm{Iso}((\mathbb{X}_{i_0}, \mathbb{X}_{f(i_0)})),$$

odakle zaključujemo da mora biti $\mathbb{X}_{i_0} \ncong \mathbb{X}_{f(i_0)}$.

Neka je $i_k := f^k(i_0)$, za $k \in \mathbb{Z}$. Tada je $\mathbb{X}_{i_0} \ncong \mathbb{X}_{i_1}$, i, za svako $k \in \mathbb{Z}$, imamo da je $f^{-1}[\{i_{k+1}\}] = \{i_k\}$, odakle, na osnovu (10.1), sledi da $g_{i_k} \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}_{i_k}, \mathbb{X}_{i_{k+1}})$. Pretpostavimo da je $i_k = i_l$ za neke $k < l$. Tada je $f^l(i_0) = f^k(i_0)$, odakle sledi da je $i_{l-k} = f^{l-k}(i_0) = i_0$, gde je $l - k \geq 1$. Dakle,

$$\mathbb{X}_{i_0} \preccurlyeq_c \mathbb{X}_{i_1} \preccurlyeq_c \cdots \preccurlyeq_c \mathbb{X}_{i_{l-k}} = \mathbb{X}_{i_0},$$

što implicira da je $\mathbb{X}_{i_0} \sim_c \mathbb{X}_{i_1}$. Kako je $\mathbb{X}_{i_0}$ reverzibilna struktura, na osnovu tvrđenja 8.2.5 imali bismo da je $\mathbb{X}_{i_0} \cong \mathbb{X}_{i_1}$, što je nemoguće. Dakle, $\langle i_k : k \in \mathbb{Z}\rangle$ je injekcija, i pošto je $\mathbb{X}_{i_0} \ncong \mathbb{X}_{i_1}$, to je netrivijalan $\mathbb{Z}$-kondenzacioni niz u I.

($\Rightarrow$) Ako postoje $f \in \mathrm{Sur}(I) \setminus \mathrm{Sym}(I)$ i $G_j \in \mathrm{Cond}(\bigcup_{i \in f^{-1}[\{j\}]} \mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)$, za $j \in I$, tada je jasno da

$$g_i := G_{f(i)} \restriction_{X_i} \in \mathrm{Mono}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_{f(i)}), \quad \text{za sve } \ i \in I,$$

i (10.1) je tačno. Kako $f \notin \mathrm{Sym}(I)$, prema teoremi 10.1.2 struktura $\mathbb{X}$ nije reverzibilna.

Pretpostavimo da je $\langle i_k : k \in \mathbb{Z}\rangle$ $\mathbb{Z}$-kondenzacioni niz u I, i da $\mathbb{X}_{i_r} \ncong \mathbb{X}_{i_{r+1}}$, za neko $r \in \mathbb{Z}$. Tada je funkcija $f : I \to I$, definisana sa $f(i) := i$, za $i \in I \setminus \{i_k : k \in \mathbb{Z}\}$ i $f(i_k) := i_{k+1}$, za $k \in \mathbb{Z}$, bijekcija. Neka je $g_i := \mathrm{id}_{X_i}$, za $i \in I \setminus \{i_k : k \in \mathbb{Z}\}$, i neka $g_{i_k} \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}_{i_k}, \mathbb{X}_{i_{k+1}})$, za $k \in \mathbb{Z}$. Tada $g_i \in \mathrm{Mono}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_{f(i)})$, za sve $i \in I$, i (10.1) je ispunjeno. Ali $g_{i_r} \notin \mathrm{Iso}(\mathbb{X}_{i_r}, \mathbb{X}_{i_{r+1}})$, pa, na osnovu teoreme 10.1.2, struktura $\mathbb{X}$ nije reverzibilna. $\square$

Posledica 10.1.4 *L_b-struktura koja ima konačno mnogo komponenata je reverzibilna akko su sve njene komponente reverzibilne.*

Dokaz. Neka je $\mathbb{X} = \bigcup_{i \in I} \mathbb{X}_i$, gde je $|I| < \omega$ i $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, su po parovima disjunktne i povezane L_b-strukture. Implikacija „$\Rightarrow$" sledi iz teoreme 10.1.1. Ako su strukture $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, reverzibilne, tada, s obzirom da je $\mathrm{Sur}(I) = \mathrm{Sym}(I)$ i s obzirom da nema $\mathbb{Z}$-kondenzacionih nizova u I, struktura $\mathbb{X}$ je reverzibilna na osnovu teoreme 10.1.3. □

Posledica 10.1.5 *Ako su $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, po parovima disjunktne, povezane i konačne L_b-strukture, tada je struktura $\mathbb{X} := \bigcup_{i \in I} \mathbb{X}_i$ reverzibilna akko je $\langle \mathbb{X}_i : i \in I \rangle$ reverzibilan niz struktura i ne postoje beskonačne klase $[\mathbb{X}_i]_{\cong}, [\mathbb{X}_j]_{\cong} \in \mathcal{X} / \cong$ takve da je $\mathbb{X}_i \prec_c \mathbb{X}_j$.*

Dokaz. S obzirom da su konačne strukture reverzibilne, na osnovu teoreme 10.1.3 dovoljno je dokazati sledeći stav:

Stav 10.1.6 *Ako su $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, po parovima disjunktne, povezane i konačne L_b-strukture, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) Svaki $\mathbb{Z}$-kondenzacioni niz u I je trivijalan;

(b) Ne postoje beskonačne klase $[\mathbb{X}_i]_{\cong}, [\mathbb{X}_j]_{\cong} \in \mathcal{X} / \cong$ takve da je $\mathbb{X}_i \prec_c \mathbb{X}_j$.

Dokaz. Implikacija „$\Rightarrow$" je trivijalna. Da bismo dokazali „$\Leftarrow$", posmatrajmo netrivijalan $\mathbb{Z}$-kondenzacioni niz $\langle i_k : k \in \mathbb{Z} \rangle$ u I. Tada je

$$\cdots \preccurlyeq_c \mathbb{X}_{i_{-2}} \preccurlyeq_c \mathbb{X}_{i_{-1}} \preccurlyeq_c \mathbb{X}_{i_0} \preccurlyeq_c \mathbb{X}_{i_1} \preccurlyeq_c \mathbb{X}_{i_2} \preccurlyeq_c \cdots \tag{10.5}$$

i $\mathbb{X}_{i_l} \prec_c \mathbb{X}_{i_{l+1}}$, za neko $l \in \mathbb{Z}$. Prema (10.5) i, s obzirom da su strukture $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, konačne, postoji $r \leq l$ takvo da je $\mathbb{X}_{i_k} \cong \mathbb{X}_{i_r}$, za sve $k \leq r$, i postoji $s \geq l+1$ takvo da je $\mathbb{X}_{i_k} \cong \mathbb{X}_{i_s}$, za sve $k \geq s$. Sada imamo da je $\mathbb{X}_{i_r} \prec \mathbb{X}_{i_s}$, i, pri tome, klase $[\mathbb{X}_{i_r}]_{\cong}$ i $[\mathbb{X}_{i_s}]_{\cong}$ su beskonačne. □

Sada ćemo dati potreban i dovoljan uslov da disjunktna unija turnira (redom, specijalno, linearnih uređenja) bude reverzibilan digraf (redom, poset.)

Posledica 10.1.7 *Ako su $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, po parovima disjunktna linearna uređenja (ili, opštije, turniri), tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) Poset (odnosno, digraf) $\bigcup_{i \in I} \mathbb{X}_i$ je reverzibilan;

(b) $\langle \mathbb{X}_i : i \in I \rangle$ je reverzibilan niz struktura;

(c) Ne postoji $f \in \mathrm{Sur}(I) \setminus \mathrm{Sym}(I)$, takvo da se svaka komponenta $\mathbb{X}_j$ može razbiti na kopije $\mathbb{X}_i$, gde $i \in f^{-1}[\{j\}]$.

Dokaz.

(a)$\Rightarrow$(b) Kako su turniri povezane i reverzibilne strukture, ovo sledi na osnovu teoreme 10.1.3.

(b)⇒(c) Kontrapozicija je očigledna.

(c)⇒(a) Pretpostavimo da unija $\bigcup_{i\in I}\mathbb{X}_i$ nije reverzibilna. Pošto su turniri povezane i revezibilne strukture, i, s obzirom da, za bilo koja dva turnira $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$, na osnovu leme 2.2.7, imamo da je $\mathrm{Cond}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \mathrm{Iso}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, zaključujemo da su svi $\mathbb{Z}$-kondenzacioni nizovi u I trivijalni, pa, na osnovu teoreme 10.1.3, sledi da postoji $f \in \mathrm{Sur}(I)\setminus\mathrm{Sym}(I)$ takvo da, za svako $j \in I$, postoji $G_j \in \mathrm{Cond}(\bigcup_{i\in f^{-1}[\{j\}]}\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)$. Tada, za $i \in f^{-1}[\{j\}]$ i $A_i := G_j[X_i]$, imamo da

$$G_j\restriction_{X_i} \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}_i, \mathbb{A}_i) = \mathrm{Iso}(\mathbb{X}_i, \mathbb{A}_i),$$

i $\{A_i : i \in f^{-1}[\{j\}]\}$ je particija skupa X_j. □

Jedna klasifikacija nepovezanih binarnih struktura

U ovom pododeljku dokazaćemo neke dovoljne uslove za reverzibilnost nepovezanih L_b-struktura koji će nam pružiti jednu klasifikaciju takvih struktura, i još ćemo generisati raznovrsne primere reverzibilnih i nereverzibilnih nepovezanih struktura, koji odgovaraju datoj klasifikaciji.

Ako je I neprazan skup, za I-niz nenula kardinala $\langle \kappa_i : i \in I\rangle$ reći ćemo da je *reverzibilan* akko

$$\neg\exists f \in \mathrm{Sur}(I) \setminus \mathrm{Sym}(I)\ \ \forall j \in I\ \ \textstyle\sum_{i\in f^{-1}[\{j\}]}\kappa_i = \kappa_j. \tag{10.6}$$

Za karakterizaciju reverzibilnih nizova kardinala, pogledati odeljak 10.2.

Neka je $\langle \mathbb{X}_i : i \in I\rangle$ niz po parovima disjunktnih L_b-struktura. Za preslikavanje $i : \omega \to I$, koje ćemo obeležavati sa $\langle i_k : k \in \omega\rangle$, reći ćemo da je *$\omega^*$-kondenzacioni niz u I* akko je injekcija i

$$\forall k, l \in \omega\ \ (k \le l \Rightarrow \mathbb{X}_{i_l} \preccurlyeq_c \mathbb{X}_{i_k}), \tag{10.7}$$

što je, na osnovu tranzitivnosti relacije $\preccurlyeq_c$, ekvivalentno postojanju niza kondenzacija $g_k : \mathbb{X}_{i_{k+1}} \to \mathbb{X}_{i_k}$, za $k \in \omega$. Ako je, pored toga, $\mathbb{X}_{i_1} \sim_c \mathbb{X}_{i_0}$, za ω^*-kondenzacioni niz $\langle i_k : k \in \omega\rangle$ reći ćemo da je *trivijalan*[3].

Za niz L_b-struktura $\langle \mathbb{X}_i : i \in I\rangle$ reći ćemo da je *bogat za monomorfizme* akko

$$\forall i, j \in I\ \ \forall A \in [X_j]^{|X_i|}\ \ \exists g \in \mathrm{Mono}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)\ \ g[X_i] = A. \tag{10.8}$$

[3]Primetimo kako je $\langle i_k : k \in \omega\rangle$ ω^*-kondenzacioni niz u I akko je $k \mapsto \mathbb{X}_{i_k}$ monomorfizam iz linearnog uređenja $\omega^* = \langle \omega, \ge\rangle$ u kondenzaciono preduređenje $\langle \mathcal{X}, \preccurlyeq_c\rangle$. Ako su $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, reverzibilne strukture, niz $\langle i_k : k \in \omega\rangle$ je trivijalan akko je $\mathbb{X}_{i_1} \cong \mathbb{X}_{i_0}$ (videti tvrđenje 8.2.5).

Tvrđenje 10.1.8 *Neka su $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, po parovima disjunktne, povezane i reverzibilne L_b-strukture. Neka su dati sledeći uslovi:*

(a1) $\langle \mathbb{X}_i : i \in I \rangle$ *je reverzibilan niz struktura;*

(a2) $\langle |X_i| : i \in I \rangle$ *je reverzibilan niz kardinala;*

(a3) Za sve $j \in I$ i $K \subseteq I$, nejednakost $\bigcup_{i \in K} \mathbb{X}_i \preccurlyeq_c \mathbb{X}_j$ implicira da je $|K| = 1$;

(a4) Za sve $j \in I$ i $K \subseteq I$, jednakost $\sum_{i \in K} |X_i| = |X_j|$ implicira da je $|K| = 1$;

(a5) $\mathrm{Mono}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j) = \mathrm{Cond}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)$ *za sve $i, j \in I$, takve da je $i \neq j$.*

Neka su, još, dati i sledeći uslovi:

(b1) Svaki $\mathbb{Z}$-kondenzacioni niz u I je trivijalan;

(b2) Svaki ω^*-kondenzacioni niz u I je trivijalan;

(b3) Kondenzaciono uporedive komponente su izomorfne;

(b4) Komponente iste veličine su izomorfne;

(b5) Niz $\langle \mathbb{X}_i : i \in I \rangle$ je bogat za monomorfizme.

Tada, bilo koji od uslova (a1) – (a5), zajedno s bilo kojim od uslova (b1) – (b5), implicira da je struktura $\bigcup_{i \in I} \mathbb{X}_i$ reverzibilna.

Primedba 10.1.9 Pod pretpostavkama tvrđenja 10.1.8 važi (b3)$\Leftrightarrow$(b3'), gde je

(b3') $\mathrm{Cond}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j) = \mathrm{Iso}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)$ *za sve $i, j \in I$, takve da je $i \neq j$.*

Očigledno je da (b3') $\Rightarrow$(b3). Dok druga implikacija sledi iz tvrđenja 8.2.5.

Dokaz. Dokazaćemo da

$$\begin{array}{ccccc} (a5) & \Rightarrow & (a3) & \Rightarrow & (a1) \\ & & \Uparrow & & \Uparrow \\ & & (a4) & \Rightarrow & (a2) \end{array} \quad \text{i da} \quad (b5) \Rightarrow (b4) \Rightarrow (b3) \Rightarrow (b2) \Rightarrow (b1),$$

što, zajedno s teoremom 10.1.3, kompletira dokaz.

(a2)$\Rightarrow$(a1) Ako $f \in \mathrm{Sur}(I) \setminus \mathrm{Sym}(I)$ i, za svako $j \in I$, imamo da je $\bigcup_{i \in f^{-1}[\{j\}]} \mathbb{X}_i \preccurlyeq_c \mathbb{X}_j$, tada je jasno da je $\sum_{i \in f^{-1}[\{j\}]} |X_i| = |X_j|$, za sve $i \in J$. Dakle, niz kardinala $\langle |X_i| : i \in I \rangle$ nije reverzibilan.

(a3)$\Rightarrow$(a1) Ako $f \in \mathrm{Sur}(I)$ tako da je $\bigcup_{i \in f^{-1}[\{j\}]} \mathbb{X}_i \preccurlyeq_c \mathbb{X}_j$ za sve $j \in J$, tada, na osnovu (a3), imamo da je $|f^{-1}[\{j\}]| = 1$ za sve $j \in I$, tj. da $f \in \mathrm{Sym}(I)$.

(a4)⇒(a2) Ako $f \in \mathrm{Sur}(I)$ tako da je $\sum_{i\in f^{-1}[\{j\}]} |X_i| = |X_j|$ za sve $j \in J$, tada, na osnovu (a4), imamo da je $|f^{-1}[\{j\}]| = 1$ za sve $j \in I$, tj. $f \in \mathrm{Sym}(I)$.

(a4)⇒(a3) Ako, za neko $K \subseteq I$, imamo da je $\bigcup_{i\in K} \mathbb{X}_i \preccurlyeq_c \mathbb{X}_j$, tada je $\sum_{i\in K} |X_i| = |X_j|$, odakle, na osnovu (a4), imamo da je $|K| = 1$.

(a5)⇒(a3) Ako je $|K| > 1$ i $\bigcup_{i\in K} \mathbb{X}_i \preccurlyeq_c \mathbb{X}_j$, za neko $j \in I$, uzmimo $G \in \mathrm{Cond}(\bigcup_{i\in K} \mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)$. Tada, za bilo koje $i \in K \setminus \{j\}$, imamo da $G \restriction_{X_i} \in \mathrm{Mono}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j) \setminus \mathrm{Cond}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)$.

(b2)⇒(b1) Ako je $\langle i_k : k \in \mathbb{Z}\rangle$ netrivijalan $\mathbb{Z}$-kondenzacioni niz u I, tada postoji $l \in \mathbb{Z}$ takvo da $\mathbb{X}_{i_l} \not\cong \mathbb{X}_{i_{l+1}}$. Ako definišemo $j_k := i_{l+1-k}$ za $k \in \omega$, tada imamo da je $\langle j_k : k \in \omega\rangle$ netrivijalan ω^*-kondenzacioni niz u I.

(b3)⇒(b2) Ako je $\langle i_k : k \in \omega\rangle$ ω^*-kondenzacioni niz u I, tada je $\mathbb{X}_{i_1} \preccurlyeq_c \mathbb{X}_{i_0}$, odakle je, prema (b3), $\mathbb{X}_{i_1} \cong \mathbb{X}_{i_0}$, što znači da je dati ω^*-kondenzacioni niz trivijalan.

(b4)⇒(b3) Ako je $\mathbb{X}_i \preccurlyeq_c \mathbb{X}_j$ za neke $i, j \in I$, tada je, specijalno, $|X_i| = |X_j|$. Na osnovu (b4), imamo da je $\mathbb{X}_i \cong \mathbb{X}_j$.

(b5)⇒(b4) Ako je $|X_i| = |X_j|$, za neke $i, j \in I$, tada, prema (10.8), postoje $f \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)$ i $g \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}_j, \mathbb{X}_i)$. Dakle, $\mathbb{X}_i \sim_c \mathbb{X}_j$, pa, s obzirom da su strukture $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, reverzibilne, na osnovu tvrđenja 8.2.5 imamo da je $\mathbb{X}_i \cong \mathbb{X}_j$. □

Primedba 10.1.10

(i) Tvrđenje 10.1.8 važi i u slučaju kad su komponente $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, konačne, i u slučaju kad su neke od njih beskonačne (i reverzibilne). Međutim, u slučaju kada postoji beskonačna komponenta, uslov (a2) (pa, takođe, i (a4)) sam implicira reverzibilnost unije $\bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$. Naime, ako je $\langle |X_i| : i \in I\rangle$ reverzibilan niz kardinala, i ako je $|X_{i_0}| \geq \omega$ za neko $i_0 \in I$, tada, na osnovu teoreme 10.2.1, sledi da je niz $\langle |X_i| : i \in I\rangle$ konačno-jedan. Tvrđenje sada sledi na osnovu posledice 10.1.18.

(ii) Ako su komponente $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, linearna uređenja (ili, opštije, turniri) proizvoljne veličine, tada je zadovoljen uslov (b3'), pa bilo koji od uslova (a1) – (a5) sam implicira reverzibilnost poseta (digrafa) $\bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$. Isto važi ako su $\mathbb{X}_i = \langle X_i, \rho_i\rangle$, $i \in I$, konačne strukture sa sledećim svojstvom:

$$\forall i, j \in I \;\; |X_i| = |X_j| \Rightarrow |\rho_i| = |\rho_j|. \tag{10.9}$$

Koristeći dovoljne uslove iz tvrđenja 10.1.8, u nastavku ćemo generisati veliki zoološki vrt reverzibilnih nepovezanih L_b-struktura. Definišimo, za dato $n \in \mathbb{N}$ i date $0 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n$, sledeće konačne povezane L_b-strukture:

$$\mathbb{D}_n^{n_1,\ldots,n_k} := \langle n, \rho_{\mathbb{D}_n^{n_1,\ldots,n_k}} \rangle, \quad \text{gde je } \rho_{\mathbb{D}_n^{n_1,\ldots,n_k}} := \rho_{\mathbb{D}_n} \cup \{\langle n_1, n_1\rangle, \ldots, \langle n_k, n_k\rangle\},$$

pri čemu su $\mathbb{D}_n := \langle n, \rho_{\mathbb{D}_n} \rangle$ konačni linearni digrafi, definisani sa (2.3).

U dokazu tvrđenja 10.1.8 dokazali smo sledeće dijagrame, gde smo sa $\top$ označili uslov koji je zadovoljen za svaki neprazan niz po parovima disjunktnih, povezanih i reverzibilnih L_b-struktura:

$$\begin{array}{ccccccc}
(\text{a}5) & \Longrightarrow & (\text{a}3) & \Longrightarrow & (\text{a}1) & \Longrightarrow & \top, \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \\
(\text{a}2 \wedge \text{a}5) & \Longrightarrow & (\text{a}2 \wedge \text{a}3) & \Longrightarrow & (\text{a}2) & & \\
\Uparrow & & \Uparrow & & & & \\
(\text{a}4 \wedge \text{a}5) & \Longrightarrow & (\text{a}4) & & & &
\end{array} \tag{10.10}$$

$$(\text{b}4) \Longrightarrow (\text{b}3) \Longrightarrow (\text{b}2) \Longrightarrow (\text{b}1) \Longrightarrow \top, \tag{10.11}$$

Sve unije u tabeli 1 su disjunktne. Strukture koje se nalaze u $\neg\,$(a1)($\top$) redu ne zadovoljavaju uslov (a1). Strukture koje se nalaze u (ax) redu zadovoljavaju uslov (ax), i uslove koje (ax) implicira na dijagramu (10.10), i samo te među uslovima s dijagrama (10.10). Strukture koje se nalaze u (ax&ay) redu zadovoljavaju uslov (ax&ay), i uslove koje (ax&ay) implicira na dijagramu (10.10), i samo te među uslovima s dijagrama (10.10). Strukture koje se nalaze u $\neg\,$(b1)($\top$) koloni ne zadovoljavaju uslov (b1). A strukture koje se nalaze u (bx) koloni zadovoljavaju uslov (bx), i uslove koje (bx) implicira na dijagramu (10.11), i samo te među uslovima (b1) – (b4). Ćelije koje sadrže nereverzibilne strukture obojane su sivo.

Za datu familiju $\mathcal{X} = \{\mathbb{X}_i : i \in I\}$ po parovima disjunktnih i povezanih L_b-struktura, definišimo skup

$$I^* := \Big\{ i \in I : |[\mathbb{X}_i]_{\cong}| \geq \omega \Big\},$$

gde $[\mathbb{X}_i]_{\cong} \in \mathcal{X}/\cong$. Jasno je da, ako je skup I^* neprazan, tada on mora biti beskonačan.

	$\neg$ b1 ($\top$)	b1	b2	b3	b4
$\neg$ a1 ($\top$)	$\bigcup_\omega(\mathbb{D}_2 \cup \mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_4)$	$\mathbb{D}_4^0 \cup \bigcup_\omega(\mathbb{D}_2 \cup \mathbb{D}_4)$	$\mathbb{D}_2 \cup \bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_4^{0,2})$	$\mathbb{D}_2^1 \cup \bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_4^{0,2})$	$\bigcup_\omega(\mathbb{D}_2 \cup \mathbb{D}_4)$
a1	$\mathbb{D}_2 \cup \bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_2^{0,1} \cup \mathbb{D}_4^0)$	$\mathbb{D}_4^{0,2} \cup \bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_4^0)$	$\mathbb{D}_2 \cup \bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_4^0)$	$\mathbb{D}_2^1 \cup \bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_4^{0,3})$	$\mathbb{D}_4 \cup \bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_6^0)$
a2	$\mathbb{D}_4 \cup \bigcup_\omega(\mathbb{D}_2 \cup \mathbb{D}_2^0)$	$\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_4 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2$	$\mathbb{D}_2 \cup \mathbb{D}_4^0 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2^0$	$\mathbb{D}_2^1 \cup \mathbb{D}_4^{0,2} \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2^0$	$\mathbb{D}_4 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2$
a3	$\bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_2^{0,1} \cup \mathbb{D}_4^0)$	$\mathbb{D}_2^{0,1} \cup \bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_4^0)$	$\mathbb{D}_2^0 \cup \bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^{0,1} \cup \mathbb{D}_4^0)$	$\mathbb{D}_2^0 \cup \bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^1 \cup \mathbb{D}_4^0)$	$\bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_4^0)$
a2&a3	$\mathbb{D}_4^0 \cup \bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_2^{0,1})$	$\mathbb{D}_2^{0,1} \cup \mathbb{D}_4^0 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2^0$	$\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_4^0 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2^{0,1}$	$\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_4^0 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2^1$	$\mathbb{D}_4^0 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2^0$
a4	$\mathbb{D}_3 \cup \bigcup_\omega(\mathbb{D}_2 \cup \mathbb{D}_2^0)$	$\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_3 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2$	$\mathbb{D}_2 \cup \mathbb{D}_3 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2^0$	$\mathbb{D}_2^1 \cup \mathbb{D}_3^0 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2^0$	$\mathbb{D}_3 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2$
a5	$\bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_2^{0,1} \cup \mathbb{D}_4)$	$\mathbb{D}_2^{0,1} \cup \bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_4)$	$\mathbb{D}_2^0 \cup \bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^{0,1} \cup \mathbb{D}_4)$	$\mathbb{D}_2^0 \cup \bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^1 \cup \mathbb{D}_4)$	$\bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_4)$
a2&a5	$\mathbb{D}_4 \cup \bigcup_\omega(\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_2^{0,1})$	$\mathbb{D}_2^{0,1} \cup \mathbb{D}_4 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2^0$	$\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_4 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2^{0,1}$	$\mathbb{D}_2^0 \cup \mathbb{D}_4 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2^1$	$\mathbb{D}_4 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2^0$
a4&a5	$\bigcup_\omega(\mathbb{D}_2 \cup \mathbb{D}_2^0)$	$\mathbb{D}_2^0 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2$	$\mathbb{D}_2 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2^0$	$\mathbb{D}_2^1 \cup \bigcup_\omega \mathbb{D}_2^0$	$\bigcup_\omega \mathbb{D}_2$

Tabela 1: Različite reverzibilne i nereverzibilne (sivo) nepovezane L_b-strukture

Primedba 10.1.11

(i) Dovoljni uslovi za reverzibilnost nepovezanih L_b-struktura iz tvrđenja 10.1.8 pružaju nam odgovarajuću klasifikaciju nepovezanih L_b-struktura s reverzibilnim komponentama (kao što je opisano u pasusu koji prethodi ovoj primedbi). Naime, svaka ćelija u tabeli 1 sadrži predstavnika odgovarajuće potklase. Jasno je da su sve te potklase disjunktne, i da je njihova unija cela klasa nepovezanih L_b-struktura s reverzibilnim komponentama. Tabela 1 demonstrira da su sve te potklase neprazne. Dakle, imamo jednu particiju[4].

(ii) Uslov (b5) iz tvrđenja 10.1.8 nije uključen u tabelu 1 zato što, za razliku od uslova (b1) – (b4), nije nezavisan u odnosu na uslove (a1) – (a5). Naime, ako struktura $\mathbb{X} = \bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$ zadovoljava (b5), tada, prema tvrđenju 10.1.8 i prema teoremi 10.3.1 (b), bilo koji uslov među (a1) – (a5) implicira (a2).

(iii) Ako je $I = I^*$, tada, za strukturu $\mathbb{X} = \bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$, imamo da je (a1)⇔(a3) i (a2)⇔(a4), i takođe (b1)⇔(b3). Dakle, takva struktura $\mathbb{X}$ ne može se naći u (a1), (a2), (a2&a3) i (a2&a5) redovima, kao ni u (b1) i (b2) kolonama tabele 1.

ω^*-mono nizovi u I

U ovom i u narednim pododeljcima razmatraćemo neke uslove koji impliciraju reverzibilnost nepovezanih L_b-struktura. Ako su $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ L_b-strukture i ako postoji monomorfizam $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ pisaćemo $\mathbb{X} \preccurlyeq_m \mathbb{Y}$. Preduređenje $\preccurlyeq_m$ na klasi Mod_{L_b} zvaćemo *mono pretporedak*.

Neka je $\langle \mathbb{X}_i : i \in I\rangle$ niz po parovima disjunktnih L_b-struktura. Za preslikavanje $i : \omega \to I$, koje ćemo obeležavati sa $\langle i_k : k \in \omega\rangle$, reći ćemo da je *$\omega^*$-mono niz u I* akko je injekcija i

$$\forall k, l \in \omega \ \ (k \le l \Rightarrow \mathbb{X}_{i_l} \preccurlyeq_m \mathbb{X}_{i_k}), \tag{10.12}$$

što je, na osnovu tranzitivnosti relacije $\preccurlyeq_m$, ekvivalentno postojanju niza monomorfizama $g_k : \mathbb{X}_{i_{k+1}} \to \mathbb{X}_{i_k}$, za $k \in \omega$. Ako je pored toga $\mathrm{Mono}(\mathbb{X}_{i_1}, \mathbb{X}_{i_0}) = \mathrm{Iso}(\mathbb{X}_{i_1}, \mathbb{X}_{i_0})$, za ω^*-mono niz $\langle i_k : k \in \omega\rangle$ reći ćemo da je *trivijalan*[5].

---

[4] Specijalno, tabela 1 pokazuje kako su u direktnom proizvodu dijagrama (10.10) i dijagrama (10.11) sve implikacije prave, i kako nema novih implikacija osim onih koje slede iz tranzitivnosti.

[5] Primetimo kako je $\langle i_k : k \in \omega\rangle$ ω^*-mono niz u I akko je $k \mapsto \mathbb{X}_{i_k}$ monomorfizam iz linearnog uređenja $\omega^* = \langle \omega, \ge\rangle$ u preduređenje $\langle \mathcal{X}, \preccurlyeq_m\rangle$. Niz $\langle i_k : k \in \omega\rangle$ je netrivijalan akko možemo izabrati $g_0 : \mathbb{X}_{i_1} \to \mathbb{X}_{i_0}$ koje nije izomorfizam. Specijalno, to važi ako je $\mathbb{X}_{i_1} \not\cong \mathbb{X}_{i_0}$.

Lema 10.1.12 *Ako je $f : I \to I$ surjekcija, i ako $j \in I$, tako da je $|f^{-1}[\{j\}]| > 1$, tada, za $O(j) := \{f^n(j) : n \in \omega\}$, važi da je*

$$\left| f^{-1}[\{j\}] \cap O(j) \right| \leq 1.$$

Dokaz. Ako postoji $i \in f^{-1}[\{j\}] \cap O(j)$, tada je $i = f^k(j)$, za neko $k \in \omega$, pa je $j = f(i) = f^{k+1}(j)$. Dakle, postoji $l := \min\{m \in \mathbb{N} : f^m(j) = j\}$.

Ako je $l = 1$, tj. $f(j) = j$, tada je $O(j) = \{j\}$ i tvrđenje je tačno.

Ako je $l > 1$, tada je $f(f^{l-1}(j)) = f^l(j) = j$, pa imamo da $f^{l-1}(j) \in f^{-1}[\{j\}] \cap O(j)$. Jasno je da je $f^{ql}(j) = j$, za sve $q \in \omega$. Dakle, ako je $n = ql + r$, gde $q \in \omega$ i $r < l$, tada je $f^n(j) = f^r(f^{ql}(j)) = f^r(j)$, pa imamo da je $O(j) = \{f^n(j) : n \leq l - 1\}$. Ako bismo pretpostavili da $f^n(j) \in f^{-1}[\{j\}] \cap O(j)$, za neko $n < l - 1$, tada bismo imali da je $f^{n+1}(j) = j$ i $n + 1 < l$, što je kontradikcija s minimalnošću l. Dakle, $f^{-1}[\{j\}] \cap O(j) = \{f^{l-1}(j)\}$ i dokaz je gotov. $\square$

Teorema 10.1.13 *Neka su $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, po parovima disjunktne, povezane i reverzibilne L_b-strukture. Ako je svaki ω^*-mono niz u I trivijalan, struktura $\mathbb{X} := \bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$ je reverzibilna.*

Dokaz. Ako struktura $\mathbb{X}$ nije reverzibilna, tada, na osnovu teoreme 10.1.3, imamo sledeće dve mogućnosti:

1. Postoji $\mathbb{Z}$-kondenzacioni niz $\langle i_k : k \in \mathbb{Z}\rangle$ u I, takav da je $\mathbb{X}_{i_{-1}} \not\cong \mathbb{X}_{i_0}$. Neka je $j_k := i_{-k}$, za $k \in \mathbb{Z}$. Tada, za svako $k \in \omega$, imamo da je

$$\mathrm{Mono}(\mathbb{X}_{j_{k+1}}, \mathbb{X}_{j_k}) \supseteq \mathrm{Cond}(\mathbb{X}_{i_{-(k+1)}}, \mathbb{X}_{i_{-k}}) \neq \emptyset,$$

odakle sledi da je $\langle j_k : k \in \omega\rangle$ ω^*-mono niz u I, i pri tome je $\mathrm{Mono}(\mathbb{X}_{i_1}, \mathbb{X}_{i_0}) \neq \mathrm{Iso}(\mathbb{X}_{i_1}, \mathbb{X}_{i_0}) = \emptyset$.

2. Postoji $f \in \mathrm{Sur}(I) \setminus \mathrm{Sym}(I)$ takvo da, za svako $j \in I$, postoji $G_j \in \mathrm{Cond}(\bigcup_{i\in f^{-1}[\{j\}]} \mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)$. Neka $j^* \in I$, tako da je $|f^{-1}[\{j^*\}]| > 1$. Na osnovu leme 10.1.12 postoji

$$i^* \in f^{-1}[\{j^*\}] \setminus \{f^n(j^*) : n \in \omega\}. \tag{10.13}$$

Pošto je $f : I \to I$ surjekcija, postoji niz $\langle i_k : k \in \omega\rangle \in {}^{\omega}I$, takav da je $i_0 = j^*$, $i_1 = i^*$ i $f(i_{k+1}) = i_k$, za svako $k \in \omega$. Pretpostavimo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takvo da $i_k \in \{f^n(j^*) : n \in \omega\}$, i neka je k najmanji takav prirodan broj. Na osnovu (10.13) je $k > 1$. Dakle, $i_k = f^n(j^*)$, za neko $n \in \omega$, odakle sledi da je $i_{k-1} = f(i_k) = f^{n+1}(j^*)$, što je kontradikcija s minimalnošću k. Zaključujemo da je

$$\{i_k : k \in \mathbb{N}\} \cap \{f^n(j^*) : n \in \omega\} = \emptyset. \tag{10.14}$$

Pretpostavimo da $i : \omega \to I$ nije injekcija i neka je r najmanji element skupa ω takav da je $i_r = i_s$, za neko $s > r$. $r = 0$ bi impliciralo da je $i_s = i_0 = j^* \in \{f^n(j^*) : n \in \omega\}$, što je nemoguće na osnovu (10.14). Sada imamo da je $i_{r-1} = f(i_r) = f(i_s) = i_{s-1}$, što je nemoguće zbog minimalnosti r. Dakle, $i : \omega \to I$ je injekcija.

Za $k \in \omega$ imamo da $G_{i_k} \in \mathrm{Cond}(\bigcup_{i \in f^{-1}[\{i_k\}]} \mathbb{X}_i, \mathbb{X}_{i_k})$ i $i_{k+1} \in f^{-1}[\{i_k\}]$, pa $G_{i_k} \restriction X_{i_{k+1}} \in \mathrm{Mono}(\mathbb{X}_{i_{k+1}}, \mathbb{X}_{i_k})$. S obzirom da je $|f^{-1}[\{i_0\}]| > 1$, sledi da

$$G_{i_0} \restriction X_{i_1} \in \mathrm{Mono}(\mathbb{X}_{i_1}, \mathbb{X}_{i_0}) \setminus \mathrm{Iso}(\mathbb{X}_{i_1}, \mathbb{X}_{i_0}).$$

Dakle, $\langle i_k : k \in \omega \rangle$ je netrivijalan ω^*-mono niz u I. $\square$

Primer 10.1.14 Obrat teoreme 10.1.13 ne važi. Naime, relacija ekvivalencije $\bigcup_{i \in \omega} \mathbb{X}_i$, gde je $|X_i| = 2$ za parne indekse i, a $|X_i| = 3$ za neparne indekse i, reverzibilna je na osnovu teoreme 10.3.1 (b) i teoreme 10.2.1, ali niz $\langle 1, 0, 2, 4, 6, \ldots \rangle$ je netrivijalan ω^*-mono niz u ω.

Primedba 10.1.15 Ako je svaki ω^*-mono niz u I trivijalan, tada imamo sledeće dve mogućnosti:

1. Postoji ω^*-mono niz $\langle i_k : k \in \omega \rangle$ u I. Tada postoji $g_0 \in \mathrm{Mono}(\mathbb{X}_{i_1}, \mathbb{X}_{i_0}) = \mathrm{Iso}(\mathbb{X}_{i_1}, \mathbb{X}_{i_0})$, što implicira da je $\mathbb{X}_{i_1} \cong \mathbb{X}_{i_0}$ i $\mathrm{Mono}(\mathbb{X}_{i_0}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{X}_{i_0})$. Generalno govoreći, ako je $\mathbb{X}$ struktura za koju važi $\mathrm{Mono}(\mathbb{X}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{X})$, tada je

$$\mathrm{Cond}(\mathbb{X}) = \mathrm{Emb}(\mathbb{X}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{X}),$$

pa je struktura $\mathbb{X}$ reverzibilna i minimalna za kopije (videti [30] za primere). Jasno je da, za sve konačne strukture $\mathbb{X}$, važi da je $\mathrm{Mono}(\mathbb{X}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{X})$, i linearni graf $\mathbb{G}_\zeta$ primer je beskonačne, povezane i reverzibilne strukture za koju je $\mathrm{Mono}(\mathbb{X}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{X})$. Spomenimo ovom prilikom kako su Dushnik i Miller u [10] konstruisali endo-rigidna gusta podurađenja $\mathbb{L}$ realne prave (videti još [77, str. 147]) veličine $\mathfrak{c}$, i slični primeri mogu se konstruisati koristeći ZFC rezultat Vopěnke, Pultra i Hedrlína ([88]) koji kaže da na svakom skupu postoji endo-rigidna irefleksivna binarna relacija.

Indukcijom dalje dobijamo da je

$$\cdots \cong \mathbb{X}_{i_3} \cong \mathbb{X}_{i_2} \cong \mathbb{X}_{i_1} \cong \mathbb{X}_{i_0},$$

što znači da niz tipova $\langle [\mathbb{X}_i]_{\cong} : i \in I \rangle$ nije konačno-jedan.

2. ω^*-mono nizovi u I uopšte ne postoje. Jasno je kako je tada niz tipova $\langle [\mathbb{X}_i]_{\cong} : i \in I \rangle$ konačno-jedan. Ova situacija detaljnije je razmotrena u nastavku.

Monotone funkcije

Podsetimo se kako se uređeni par $\mathcal{W} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ zove *dobro fundirana relacija* (pisaćemo $\mathcal{W} \in \mathrm{Wfr}$) akko je $\mathcal{A}$ klasa, $\mathcal{R}$ je binarna klasa-relacija na $\mathcal{A}$ i svaki neprazan skup $X \subseteq \mathcal{A}$ ima $\mathcal{R}$-minimalan element, tj.

$$\forall X \ \Big(\emptyset \neq X \subseteq \mathcal{A} \ \Rightarrow \ \exists y \in X \ \ \neg \exists z \in X \ \ z \,\mathcal{R}\, y\Big)^6. \tag{10.15}$$

Uočimo kako je tada relacija $\mathcal{R}$ na $\mathcal{A}$ irefleksivna i asimetrična („klasa-digraf”), i njenu refleksivizaciju $\leq_{\mathcal{R}}$ definisaćemo na sledeći način:

$$a \leq_{\mathcal{R}} b \ \Leftrightarrow \ a = b \ \vee \ a \,\mathcal{R}\, b.$$

Ako je, pored toga, $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Mod}_{L_b}$ klasa L_b-struktura, za (klasa-) funkciju $\theta : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ reći ćemo da je *monotona u odnosu na monomorfizme* akko

$$\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathcal{C} \ \ \Big(\mathbb{X} \preccurlyeq_m \mathbb{Y} \Rightarrow \theta(\mathbb{X}) \leq_{\mathcal{R}} \theta(\mathbb{Y})\Big) \tag{10.16}$$

i klasu takvih funkcija (koje su, u stvari, homomorfizmi iz preduređenja $\langle \mathcal{C}, \preccurlyeq_m \rangle$ u refleksivizaciju $\mathcal{W}$) nadalje ćemo označavati sa $\mathcal{M}(\mathcal{C}, \mathcal{W})$.

Ako je $\mathcal{X} = \{\mathbb{X}_i : i \in I\}$ familija po parovima disjunktnih L_b-struktura, uvedimo oznaku $\mathcal{M}(\mathcal{X}) := \bigcup_{\mathcal{W} \in \mathrm{Wfr}} \mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathcal{W})$. Za $\theta \in \mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathcal{W})$ i $a \in \mathcal{A}$, neka je

$$I_a^\theta := \Big\{ i \in I : \theta(\mathbb{X}_i) = a \Big\}. \tag{10.17}$$

Teorema 10.1.16 *Ako je $\mathcal{X} = \{\mathbb{X}_i : i \in I\}$ familija po parovima disjunktnih, povezanih i reverzibilnih L_b-struktura, i ako postoji $\theta \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ takvo da, za svako $a \in \theta[\mathcal{X}]$, ne postoje ω^*-mono nizovi u I_a^θ, tada je $\mathbb{X} := \bigcup_{i \in I} \mathbb{X}_i$ reverzibilna struktura. Specijalno, to važi ako je niz $\langle \theta(\mathbb{X}_i) : i \in I \rangle$ konačno-jedan (tj. ako su skupovi I_a^θ, $a \in \theta[\mathcal{X}]$, konačni).*

Dokaz. Dokazaćemo prvo sledeći stav.

Stav 10.1.17 *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*
(i) Postoji ω^*-mono niz u I;
(ii) $\forall \theta \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \ \ \exists a \in \theta[\mathcal{X}] \ \ \exists \omega^* - mono$ niz u I_a^θ;
(iii) $\exists \theta \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \ \ \exists a \in \theta[\mathcal{X}] \ \ \exists \omega^* - mono$ niz u I_a^θ.

[6] Pogodnosti radi, koristimo opšte pojmove iz teorije skupova. Klase $\mathcal{A}$ i $\mathcal{R}$ su kolekcije skupova definisane nekim formulama, npr. $A(x)$ i $R(x,y)$, na jeziku teorije skupova, $L = \langle \in \rangle$. Npr. $\mathcal{A}$ je klasa svih ordinala, a $\mathcal{R}$ je uobičajeni strogi linearni poredak na toj klasi.

Dokaz.

(i)$\Rightarrow$(ii) Neka je $\langle i_k : k \in \omega \rangle$ ω^*-mono niz u I, $\mathcal{W} \in \mathrm{Wfr}$ i $\theta \in \mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathcal{W})$. Pošto je $X = \{\theta(\mathbb{X}_{i_k}) : k \in \omega\}$ neprazan podskup klase $\mathcal{A}$, na osnovu (10.15) postoji $k_0 \in \omega$ takvo da

$$\forall k \in \omega \;\; \neg \theta(\mathbb{X}_{i_k}) \, \mathcal{R} \, \theta(\mathbb{X}_{i_{k_0}}). \tag{10.18}$$

Sada, za $k \geq k_0$, imamo da je $\mathbb{X}_{i_k} \preccurlyeq_m \mathbb{X}_{i_{k_0}}$, što, prema (10.16), implicira da je $\theta(\mathbb{X}_{i_k}) \leq_{\mathcal{R}} \theta(\mathbb{X}_{i_{k_0}}) =: a$, odakle, na osnovu (10.18), sledi da je $\theta(\mathbb{X}_{i_k}) = \theta(\mathbb{X}_{i_{k_0}})$. Dakle, $\theta(\mathbb{X}_{i_k}) = a$, za sve $k \geq k_0$, tj. $\{i_k : k \geq k_0\} \subseteq I^\theta_a$ i $\langle i_{k_0+k} : k \in \omega \rangle$ je ω^*-mono niz u I^θ_a.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Ako sa Card označimo klasu svih kardinala, tada je jasno da $\mathcal{W} = \langle \mathrm{Card}, < \rangle \in \mathrm{Wfr}$, i, za funkciju $\theta : \mathcal{X} \to \mathrm{Card}$ definisanu sa $\theta(\mathbb{X}_i) = |X_i|$, imamo da $\theta \in \mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathcal{W})$. Na osnovu (ii) postoji kardinal κ i ω^*-mono niz u I^θ_κ.

(iii)$\Rightarrow$(i) Ovo je trivijalno, zato što je svaki ω^*-mono niz u I^θ_a i ω^*-mono niz u I. $\Box$

Sada, na osnovu pretpostavke teoreme, imamo da važi $\neg$(ii), pa ne postoje ω^*-mono nizovi u I, odakle, na osnovu teoreme 10.1.13, sledi da je struktura $\mathbb{X}$ reverzibilna. $\Box$

Posledica 10.1.18 *Neka su $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, po parovima disjunktne, povezane i reverzibilne L_b-strukture. Ako je niz $\langle |X_i| : i \in I \rangle$ konačno-jedan, tada je struktura $\bigcup_{i \in I} \mathbb{X}_i$ reverzibilna.*

Primedba 10.1.19 Umesto monotone kardinalne invarijante $\theta(\mathbb{X}) = |X|$, u posledici 10.1.18 možemo, na primer, iskoristiti bilo koju od monotonih kardinalnih invarijanata razmotrenih u odeljku 2.3.

U slučaju nepovezanih L_b-struktura s konačnim komponentama, uslov koji implicira reverzibilnost strukture $\bigcup_{i \in I} \mathbb{X}_i$ iz teoreme 10.1.16 ekvivalentan je jednostavnijem uslovu.

Tvrđenje 10.1.20 *Ako su $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, po parovim disjunktne, povezane i konačne L_b-strukture, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) Niz $\langle |X_i| : i \in I \rangle$ je konačno-jedan;

(b) $\exists \theta \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \;\; \forall a \in \theta[\mathcal{X}] \;\; \neg \exists \omega^* -$ mono niz u I^θ_a.

Bilo koji od njih implicira reverzibilnost strukture $\bigcup_{i \in I} \mathbb{X}_i$.

Dokaz.

(a)$\Rightarrow$(b) je trivijalno: uzmimo $\theta : \mathcal{X} \to \mathrm{Card}$, gde je $\theta(\mathbb{X}_i) := |X_i|$.

$\neg$(a)$\Rightarrow$ $\neg$(b) Neka je $J \subseteq I$ i $n \in \mathbb{N}$, gde je $|J| \geq \omega$ i $|X_i| = n$, za sve $i \in J$. Tada, s obzirom da su strukture $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, konačne, postoji $K \subseteq J$, takvo da je $|K| \geq \omega$, i $\mathbb{X}_i \cong \mathbb{X}_j$, za sve $i, j \in K$. Fiksirajmo $i_0 \in K$. Neka $\theta \in \mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathcal{W})$, i neka je $a \in \theta[\mathcal{X}]$ takvo da je $\theta(\mathbb{X}_{i_0}) = a$. Sada, ako $i \in K$, tada je $\mathbb{X}_i \cong \mathbb{X}_{i_0}$, odakle sledi da je $\mathbb{X}_i \preccurlyeq_m \mathbb{X}_{i_0} \preccurlyeq_m \mathbb{X}_i$, što implicira da je

$$\theta(\mathbb{X}_i) \leq_{\mathcal{R}} \theta(\mathbb{X}_{i_0}) \leq_{\mathcal{R}} \theta(\mathbb{X}_i),$$

tj. $\theta(\mathbb{X}_i) = a$, odnosno $i \in I^{\theta}_a$. Dakle, $K \subseteq I^{\theta}_a$, pa ako uzmemo injekciju $i : \omega \to K$ dobijamo ω^*-mono niz $\langle i_k : k \in \omega \rangle$ u I^{θ}_a (zato što $\mathbb{X}_{i_{k+1}} \cong \mathbb{X}_{i_k}$ daje $\mathbb{X}_{i_{k+1}} \preccurlyeq_m \mathbb{X}_{i_k}$). $\square$

Konačni dijagonalni proizvodi monotonih funkcija

Klasa Wfr nije zatvorena u odnosu na direktne proizvode (u beskonačnom proizvodu dvoelementnih lanaca ${}^{\omega}2$, skup $X = \{x_n : n \in \omega\}$, gde $x_n = \langle 0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots \rangle$ ima n nula, nema minimalan element). Ali klasa Wfr je zatvorena u odnosu na konačne proizvode.

Teorema 10.1.21 *Neka $n \in \mathbb{N}$, i neka $\mathcal{W}_k = \langle \mathcal{A}_k, \mathcal{R}_k \rangle \in \mathrm{Wfr}$, za $k < n$. Tada imamo*

(a) $\langle \prod_{k<n} \mathcal{A}_k, \mathcal{R} \rangle \in \mathrm{Wfr}$, gde, za $a = \langle a_k \rangle, b = \langle b_k \rangle \in \prod_{k<n} \mathcal{A}_k$, imamo

$$a \, \mathcal{R} \, b \iff \forall k < n \ (a_k = b_k \ \vee \ a_k \, \mathcal{R} \, b_k) \ \wedge \ \exists k < n \ a_k \, \mathcal{R} \, b_k; \tag{10.19}$$

(b) Ako je $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Mod}_{L_b}$, i $\theta_k \in \mathcal{M}(\mathcal{C}, \mathcal{W}_k)$, $k < n$, tada $\theta \in \mathcal{M}(\mathcal{C}, \prod_{k<n} \mathcal{A}_k)$, gde je θ dijagonalno preslikavanje $\theta := \Delta_{k<n} \theta_k : \mathcal{C} \to \prod_{k<n} \mathcal{A}_k$, dato sa

$$\theta(\mathbb{X}) := \Big\langle \theta_k(\mathbb{X}) : k < n \Big\rangle; \tag{10.20}$$

(c) Ako je $\mathcal{C} = \mathcal{X} = \{\mathbb{X}_i : i \in I\}$ familija po parovima disjunktnih L_b-struktura, tada za $a = \langle a_k : k < n \rangle \in \theta[\mathcal{X}]$ imamo da je

$$I^{\theta}_a = \Big\{ i \in I : \forall k < n \ \theta_k(\mathbb{X}_i) = a_k \Big\} = \bigcap\nolimits_{k<n} I^{\theta_k}_{a_k}. \tag{10.21}$$

Dakle, imamo da particija $\{I^{\theta}_a : a \in \theta[\mathcal{X}]\}$ skupa I profinjuje sve particije $\{I^{\theta_k}_{a_k} : a_k \in \theta_k[\mathcal{X}]\}$, za $k < n$, pa niz $\langle \theta(\mathbb{X}_i) : i \in I \rangle$ ima više šanse da bude konačno-jedan (videti teoremu 10.1.16).

Dokaz.

(a) Pretpostavimo da neprazan skup $X \subseteq \prod_{k<n} \mathcal{A}_k$ nema $\mathcal{R}$-minimalan element. Tada postoje $a^r \in X$, $r \in \omega$, takvi da, za svako $r \in \omega$, imamo $a^{r+1} \, \mathcal{R} \, a^r$, i, na osnovu (10.19), postoji $k < n$ koje zadovoljava $a_k^{r+1} \, \mathcal{R}_k \, a_k^r$. Dakle, postoji $k^* < n$ i rastući niz $\langle r_s : s \in \omega \rangle$ u ω tako da je

$$\forall s \in \omega \;\; a_{k^*}^{r_s+1} \, \mathcal{R}_{k^*} \, a_{k^*}^{r_s}, \tag{10.22}$$

$$\forall r \in \omega \setminus \{r_s : s \in \omega\} \;\; a_{k^*}^{r+1} = a_{k^*}^r. \tag{10.23}$$

Ako $r \in \omega$ i $s^* := \min\{s \in \omega : r_s \geq r\}$, tada je $r_{s^*} \geq r$ i, na osnovu (10.22) i (10.23), imamo da je

$$a_{k^*}^{r_{s^*}+1} \, \mathcal{R}_{k^*} \, a_{k^*}^{r_{s^*}} = a_{k^*}^{r_{s^*}-1} = a_{k^*}^{r_{s^*}-2} = \cdots = a_{k^*}^r.$$

Ovo implicira da podskup $\{a_{k^*}^r : r \in \omega\}$ skupa $\mathcal{A}_{k^*}$ nema $\mathcal{R}_{k^*}$-minimalan element, što je kontradikcija s pretpostavkom da $\mathcal{W}_{k^*} \in \mathrm{Wfr}$.

(b) Ako $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathcal{C}$ i $\mathbb{X} \preccurlyeq_m \mathbb{Y}$, tada, na osnovu pretpostavke, za svako $k < n$ imamo da je $\theta_k(\mathbb{X}) = \theta_k(\mathbb{Y})$ ili je $\theta_k(\mathbb{X}) \, \mathcal{R}_k \, \theta_k(\mathbb{Y})$. Dakle, ako je $\theta_k(\mathbb{X}) = \theta_k(\mathbb{Y})$, za sve $k < n$, tada je, na osnovu (10.20), $\theta(\mathbb{X}) = \theta(\mathbb{Y})$. Inače, postoji $k < n$ takvo da je $\theta_k(\mathbb{X}) \, \mathcal{R}_k \, \theta_k(\mathbb{Y})$, odakle je, na osnovu (10.19), $\theta(\mathbb{X}) \, \mathcal{R} \, \theta(\mathbb{Y})$.

(c) Ovo sledi na osnovu (10.20) i (10.17). □

Neka PO, LO, Ord i Ord* označavaju, redom, klase strogih parcijalnih uređenja, linearnih uređenja, ordinala i inverza ordinala.

Lema 10.1.22 *Neka* $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathrm{PO}$. *Tada važi:*

(a) $\{\mathbb{L} \in \mathrm{LO} : \mathbb{L} \preccurlyeq_m \mathbb{X}\} = \{\mathbb{L} \in \mathrm{LO} : \mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{X}\}$;

(b) Ako je $\mathbb{X} \preccurlyeq_m \mathbb{Y}$, *tada je* $\{\mathbb{L} \in \mathrm{LO} : \mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{X}\} \subseteq \{\mathbb{L} \in \mathrm{LO} : \mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{Y}\}$.

Dokaz.

(a) Ovo sledi na osnovu leme 1.3.1 (b).

(b) Ako $\mathbb{L} \in \mathrm{LO}$ i ako $\mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{X}$, tada imamo da je $\mathbb{L} \preccurlyeq_m \mathbb{X}$, odakle, na osnovu tranzitivnosti $\preccurlyeq_m$, sledi da je $\mathbb{L} \preccurlyeq_m \mathbb{Y}$, što je, na osnovu (a), ekvivalentno sa $\mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{Y}$. □

Neka su (klasa-) funkcije $\theta_0, \theta_1 : \mathrm{PO} \to \mathrm{Ord}$ definisane sa:

$$\theta_0(\mathbb{X}) := \sup\{\alpha \in \mathrm{Ord} : \alpha \hookrightarrow \mathbb{X}\}, \quad \text{i} \quad \theta_1(\mathbb{X}) := \sup\{\alpha \in \mathrm{Ord} : \alpha^* \hookrightarrow \mathbb{X}\}.$$

Tvrđenje 10.1.23 *Ako su* $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, *po parovima disjunktna, povezana i reverzibilna stroga parcijalna uređenja, i ako je niz*

$$\Big\langle \langle \theta_0(\mathbb{X}_i), \theta_1(\mathbb{X}_i) \rangle : i \in I \Big\rangle$$

konačno-jedan, tada je poset $\bigcup_{i \in I} \mathbb{X}_i$ *reverzibilan.*

Dokaz. Ako $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathrm{PO}$, i ako je $\mathbb{X} \preccurlyeq_m \mathbb{Y}$, tada je, prema lemi 10.1.22 (b),

$$\{\alpha \in \mathrm{Ord} : \alpha \hookrightarrow \mathbb{X}\} \subseteq \{\alpha \in \mathrm{Ord} : \alpha \hookrightarrow \mathbb{Y}\},$$

i, na osnovu toga, je $\theta_0(\mathbb{X}) \leq \theta_0(\mathbb{Y})$. Dakle, $\theta_0 \in \mathcal{M}(\mathrm{PO}, \mathrm{Ord})$ i slično zaključujemo da $\theta_1 \in \mathcal{M}(\mathrm{PO}, \mathrm{Ord})$. Na osnovu teoreme 10.1.21 (b) imamo da $\theta \in \mathcal{M}(\mathrm{PO}, \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord})$, gde je $\theta : \mathrm{PO} \to \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}$ definisano sa $\theta(\mathbb{X}) := \langle \theta_0(\mathbb{X}), \theta_1(\mathbb{X}) \rangle$. Tvrđenje sada sledi na osnovu teoreme 10.1.16. □

Primer 10.1.24 Neka je I skup uređenih parova prebrojivo beskonačnih ordinala, tj. $I = (\omega_1 \setminus \omega)^2$, i neka su $\mathbb{X}_{\langle \alpha, \beta \rangle}$, za $\langle \alpha, \beta \rangle \in I$, disjunktna parcijalna uređenja takva da je, koristeći oznake iz tvrđenja 10.1.23, $\theta_0(\mathbb{X}_{\langle \alpha, \beta \rangle}) = \alpha$ i $\theta_1(\mathbb{X}_{\langle \alpha, \beta \rangle}) = \beta$. Tada je $\bigcup_{\langle \alpha, \beta \rangle \in I} \mathbb{X}_{\langle \alpha, \beta \rangle}$ reverzibilan poset. Ako je, specijalno, $\mathbb{X}_{\langle \alpha, \beta \rangle} \cong \beta^* + \alpha$, to takođe sledi iz posledice 10.4.3. Uočimo kako ovde nizovi $\langle \theta_0(\mathbb{X}_i) : i \in I \rangle$ i $\langle \theta_1(\mathbb{X}_i) : i \in I \rangle$ nisu konačno-jedan, ali niz $\langle \theta(\mathbb{X}_i) : i \in I \rangle$ je jedan-jedan.

10.2 Reverzibilni nizovi kardinala

Ako je $\mathbb{X}$ binarna struktura, i ako su $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, njene komponente povezanosti, tada je jasno da je niz kardinala $\langle |X_i| : i \in I \rangle$ invarijantan u odnosu na izomorfizme, i, u nekim klasama struktura (na primer u klasi relacija ekvivalencije), ta kardinalna invarijanta karakteriše strukturu do na izomorfizam. U takvim klasama reverzibilnost strukture, koja je takođe izomorfizam-invarijantna, može se smatrati svojstvom odgovarajućeg niza kardinala. Rezultati iz ovog odeljka dokazani su u [53].

U nastavku, dokazaćemo da sledeće svojstvo niza kardinala (koje smo takođe nazvali reverzibilnost) karakteriše reverzibilnost u klasi relacija ekvivalencije: Podsetimo se, ako je I neprazan skup, za I-niz nenula kardinala $\langle \kappa_i : i \in I \rangle$ reći ćemo da je reverzibilan akko

$$\neg \exists f \in \mathrm{Sur}(I) \setminus \mathrm{Sym}(I) \;\; \forall j \in I \;\; \textstyle\sum_{i \in f^{-1}[\{j\}]} \kappa_i = \kappa_j. \tag{10.24}$$

Glavni rezultat ovog odeljka sledeća je karakterizacija reverzibilnih nizova kardinala. Da bismo je naveli, podsetimo se prvo nekih definicija. Za podskup K skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, sa $\langle K \rangle$ označavaćemo potpolugrupu aditivne polugrupe $\langle \mathbb{N}, + \rangle$, generisanu skupom K. Za skup K reći ćemo da je nezavisan akko

$$\forall n \in K \quad n \notin \langle K \setminus \{n\} \rangle. \tag{10.25}$$

Ako je $\langle \kappa_i : i \in I \rangle$ niz kardinala, i κ neki kardinal, uvedimo oznaku

$$I_\kappa := \Big\{ i \in I : \kappa_i = \kappa \Big\}.$$

Teorema 10.2.1 *Niz nenula kardinala $\langle \kappa_i : i \in I \rangle$ je reverzibilan akko*

- ili je skup I_κ konačan za svaki kardinal κ,

- ili $\kappa_i \in \mathbb{N}$ za svako $i \in I$, $K := \{m \in \mathbb{N} : |I_m| \geq \omega\}$ je neprazan i nezavisan skup, i $\mathrm{NZD}(K)$ deli najviše konačno mnogo elemenata skupa $\{\kappa_i : i \in I\}$.

Dokaz. Dokaz sledi iz tvrđenja 10.2.3 i teoreme 10.2.6 datih u nastavku. □

Primer 10.2.2 *Ako je I neprazan skup bilo koje veličine i $\langle n_i : i \in I \rangle \in {}^I\mathbb{N}$, tada, na osnovu teoreme 10.2.1, imamo:*

- *ako je $K = \emptyset$ (što je moguće ako je $|I| \leq \omega$), tada je niz $\langle n_i \rangle$ reverzibilan;*
- *ako je $K = \{2, 5\}$, tada je niz $\langle n_i \rangle$ reverzibilan akko je skup $\{n_i : i \in I\}$ konačan;*
- *ako je $K = \{4, 10\}$, tada je niz $\langle n_i \rangle$ reverzibilan akko skup $\{n_i : i \in I\}$ sadrži najviše konačno mnogo parnih brojeva.*

Tvrđenje 10.2.3 *Niz nenula kardinala $\langle \kappa_i : i \in I \rangle$ je reverzibilan akko je skup I_κ konačan za svaki kardinal κ, ili $\langle \kappa_i : i \in I \rangle \in {}^I\mathbb{N}$ i ovaj niz prirodnih brojeva je reverzibilan.*

Dokaz. Implikacije „$\Leftarrow$" i „$\Rightarrow$" slede iz stavova 10.2.4 i 10.2.5, redom. □

Stav 10.2.4 *Ako je skup I_κ konačan za svaki kardinal κ, tada je niz nenula kardinala $\langle \kappa_i : i \in I \rangle$ reverzibilan.*

Dokaz. Neka je $|I_\kappa| < \omega$ za svako $\kappa \in \mathrm{Card}$. Skup $\{\kappa_i : i \in I\}$ je dobro uređen, pa postoji ordinal ζ i enumeracija $\{\kappa_i : i \in I\} = \{\kappa_\xi : \xi < \zeta\}$, tako da $\xi < \xi'$ implicira $\kappa_\xi < \kappa_{\xi'}$. Ako pretpostavimo da je $f : I \to I$ surjekcija koja zadovoljava (10.24), pokazaćemo da tada f mora biti bijekcija. Dokazaćemo prvo indukcijom da je

$$\forall \xi < \zeta \;\; f[I_{\kappa_\xi}] = I_{\kappa_\xi}. \tag{10.26}$$

Ako $j \in I_{\kappa_0}$, tada, na osnovu (10.24), za $i \in f^{-1}[\{j\}]$ imamo $\kappa_i \leq \kappa_j = \kappa_0$, odakle, zbog minimalnosti κ_0, dobijamo da je $\kappa_i = \kappa_0$, tj. $i \in I_{\kappa_0}$. Dakle, $f^{-1}[\{j\}] \subseteq I_{\kappa_0}$, za svako $j \in I_{\kappa_0}$, pa je $f^{-1}[I_{\kappa_0}] \subseteq I_{\kappa_0}$. Pošto je f surjekcija, imamo da je $I_{\kappa_0} = f[f^{-1}[I_{\kappa_0}] \subseteq f[I_{\kappa_0}]$, stoga je $|I_{\kappa_0}| \leq |f[I_{\kappa_0}]| \leq |I_{\kappa_0}|$, odakle sledi $|f[I_{\kappa_0}]| = |I_{\kappa_0}|$. Kako je skup I_{κ_0} konačan, i važi $I_{\kappa_0} \subseteq f[I_{\kappa_0}]$, imamo da je $f[I_{\kappa_0}] = I_{\kappa_0}$.

Ako pretpostavimo da je $\eta < \zeta$, i da je $f[I_{\kappa_\xi}] = I_{\kappa_\xi}$, za svako $\xi < \eta$, dokazaćemo da je tada i $f[I_{\kappa_\eta}] = I_{\kappa_\eta}$. Ako $j \in I_{\kappa_\eta}$, tada, na osnovu (10.24), za $i \in f^{-1}[\{j\}]$ imamo da je $\kappa_i \leq \kappa_j = \kappa_\eta$. Nejednakost $\kappa_i < \kappa_\eta$ značila bi da je $\kappa_i = \kappa_\xi$ za neko $\xi < \eta$, pa bi imali da $i \in I_{\kappa_\xi}$, i, na osnovu indukcijske hipoteze, da je $f(i) = j \in I_{\kappa_\xi}$, što nije tačno. Stoga, $\kappa_i = \kappa_\eta$ tj. $i \in I_{\kappa_\eta}$. Dakle, imamo da je $f^{-1}[\{j\}] \subseteq I_{\kappa_\eta}$, za svako $j \in I_{\kappa_\eta}$, pa je $f^{-1}[I_{\kappa_\eta}] \subseteq I_{\kappa_\eta}$. Sada, kao i gore, zaključujemo da mora biti $f[I_{\kappa_\eta}] = I_{\kappa_\eta}$, čime smo dokazali (10.26).

Kako su skupovi I_{κ_ξ} konačni, na osnovu (10.26) dobijamo da su restrikcije $f\restriction_{I_{\kappa_\xi}}\colon I_{\kappa_\xi} \to I_{\kappa_\xi}$, $\xi < \zeta$, bijekcije. Kako je $\{I_{\kappa_\xi} : \xi < \zeta\}$ particija skupa I, f je takođe bijekcija. □

Stav 10.2.5 *Ako je $\langle \kappa_i : i \in I\rangle$ niz nenula kardinala i postoji neki koji je beskonačan, tada imamo:*

$$\langle \kappa_i : i \in I\rangle \textit{ je reverzibilan } \iff |I_\kappa| < \omega \textit{ za svako } \kappa \in \mathrm{Card}\,.$$

Dokaz. Neka $i^* \in I$, pri čemu je $\kappa_{i^*} \geq \omega$. Na osnovu stava 10.2.4 preostaje dokazati implikaciju „$\Rightarrow$”. Dokazaćemo njenu kontrapoziciju. Pretpostavimo da je $|I_{\kappa_0}| \geq \omega$, za neki kardinal κ_0.

Ako je $\kappa_0 \leq \kappa_{i^*}$, izaberimo različite $i_n \in I_{\kappa_0} \setminus \{i^*\}$, $n \in \omega$, i definišimo surjekciju $f : I \to I$ na sledeći način:

$$f(i) = \begin{cases} i^*, & \text{ako } i \in \{i^*, i_0\},\\ i_{n-1}, & \text{ako } i = i_n \text{ i } n \geq 1,\\ i, & \text{ako } i \in I \setminus (\{i^*\} \cup \{i_n : n \in \omega\}). \end{cases}$$

Sada, za $j \in I \setminus (\{i^*\} \cup \{i_n : n \in \omega\})$ imamo da je $f^{-1}[\{j\}] = \{j\}$. Za $n \in \mathbb{N}$ imamo da je $f^{-1}[\{i_{n-1}\}] = \{i_n\}$ i $\kappa_{i_{n-1}} = \kappa_{i_n} = \kappa_0$. I na kraju, $f^{-1}[\{i^*\}] = \{i^*, i_0\}$ i $\kappa_{i^*} = \kappa_{i^*} + \kappa_0 = \kappa_{i^*} + \kappa_{i_0}$. Dakle, (10.24) je tačno, i, s obzirom da f nije bijekcija, niz $\langle \kappa_i : i \in I\rangle$ nije reverzibilan.

Ako je $\kappa_0 > \kappa_{i^*}$, tada izaberimo različite $i_n \in I_{\kappa_0}$, za $n \in \omega$, i definišimo neinjektivnu surjekciju $f : I \to I$ na sledeći način:

$$f(i) = \begin{cases} i_0, & \text{ako } i \in \{i_0, i_1\},\\ i_{n-1}, & \text{ako } i = i_n \text{ i } n \geq 2,\\ i, & \text{ako } i \in I \setminus \{i_n : n \in \omega\}. \end{cases}$$

Pošto je $f^{-1}[\{i_0\}] = \{i_0, i_1\}$, i kako je κ_0 beskonačni kardinal, imamo da je $\kappa_{i_0} = \kappa_0 = \kappa_0 + \kappa_0 = \kappa_{i_0} + \kappa_{i_1}$. Dakle, (10.24) je tačno, i niz $\langle \kappa_i : i \in I\rangle$ opet nije reverzibilan. □

Reverzibilni nizovi prirodnih brojeva

Dakle, jedini zanimljivi primeri reverzibilnih nizova kardinala mogu se naći među reverzibilnim nizovima prirodnih brojeva. U ovom pododeljku daćemo karakterizaciju takvih nizova. Ako $\langle n_i : i \in I\rangle \in {}^I\mathbb{N}$, tada je $I = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} I_m$, gde je

$$I_m = \Big\{i \in I : n_i = m\Big\}.$$

Teorema 10.2.6 *Niz $\langle n_i : i \in I\rangle \in {}^I\mathbb{N}$ je reverzibilan ako i samo ako je skup $K := \{m \in \mathbb{N} : |I_m| \geq \omega\}$ nezavisan, i ako je K neprazan, tada je najviše konačno mnogo elemenata skupa $\{n_i : i \in I\}$ deljivo sa* NZD(K).

Dokaz smera „⇒” teoreme 10.2.6 Neka je $\langle n_i : i \in I\rangle$ reverzibilan niz.

Prvo, pretpostavimo da skup K nije nezavisan. Tada, za neko $m \in K$, postoje $s > 0$, $k_r \in \mathbb{N}$ i različiti $m_r \in K \setminus \{m\}$, za $0 \leq r < s$, tako da je

$$m = \textstyle\sum_{0\leq r<s} k_r m_r. \tag{10.27}$$

Uzmimo prebrojive podskupove s jedan-jedan enumeracijama

$$I'_m = \{j_l : l \in \omega\} \subseteq I_m,$$

$$I'_{m_r} = \{i^r_l : l \in \omega\} \subseteq I_{m_r}, \text{ za } r < s,$$

i definišimo $f : I \to I$ sa

$$f(i) = \begin{cases} j_0, & \text{ako je } i = i^r_l, \text{ gde je } r < s \text{ i } l < k_r,\\ i^r_{l-k_r}, & \text{ako je } i = i^r_l \text{ gde je } r < s \text{ i } l \geq k_r,\\ j_{l+1}, & \text{ako je } i = j_l, \text{ gde } l \in \omega,\\ i, & \text{ako } i \in I \setminus (I'_m \cup \bigcup_{r<s} I'_{m_r}). \end{cases}$$

Lako se vidi da je $f[I'_m \cup \bigcup_{r<s} I'_{m_r}] = I'_m \cup \bigcup_{r<s} I'_{m_r}$, pa je f neinjektivna surjekcija koja zadovoljava (10.39), što je kontradikcija. Dakle, skup K je nezavisan, pa, na osnovu tvrđenja 2.1.2 (d), imamo da je $|K| < \omega$.

Pretpostavimo sada da je $K \neq \emptyset$, i da je $|\{n_i : i \in I\} \cap d\mathbb{N}| = \omega$, gde je $d :=$ NZD(K).

Stav 10.2.7 *Postoji niz $\langle q_r : r \in \omega\rangle$ u skupu $\{n_i : i \in I\} \cap \langle K\rangle \setminus K$, takav da*

$$\forall r \in \omega \;\; q_{r+1} - q_r \in \langle K\rangle. \tag{10.28}$$

Dokaz. Kako je K konačan skup, na osnovu tvrđenja 2.1.2 (c), postoji $M \in \mathbb{N}$ takvo da je $M > \max K$ i da je

$$\langle K \rangle \cap [dM, \infty) = d\mathbb{N} \cap [dM, \infty) = \{dm : m \geq M\}. \tag{10.29}$$

Dakle, skup

$$\{n_i : i \in I\} \cap \langle K \rangle \cap [dM, \infty) = \{n_i : i \in I\} \cap d\mathbb{N} \cap [dM, \infty)$$

je beskonačan. Neka je

$$\{n_i : i \in I\} \cap \langle K \rangle \cap [dM, \infty) = \{n_{i_k} : k \in \omega\},$$

gde je $n_{i_0} < n_{i_1} < n_{i_2} < \cdots$. Sada je rekurzijom lako definisati niz $\langle k_r : r \in \omega \rangle$ u skupu ω, takav da je $n_{i_{k_{r+1}}} - n_{i_{k_r}} \geq dM$, što implicira da $n_{i_{k_r}} \in \langle K \rangle \setminus K$ i da $n_{i_{k_{r+1}}} - n_{i_{k_r}} \in \langle K \rangle$. Sad još treba definisati da je $q_r := n_{i_{k_r}}$, za $r \in \omega$, i time smo završili dokaz stava 10.2.7. $\square$

Za $r \in \omega$ biramo $i_r \in I$ takvo da

$$q_r = n_{i_r} \in \langle K \rangle \setminus K. \tag{10.30}$$

Tada je, na osnovu (10.28) i (10.30), $\{I_m : m \in K\} \cup \{I_{n_{i_r}} : r \in \omega\}$ jedna familija po parovima disjunktnih podskupova skupa I. Za svako $m \in K$ biramo prebrojivo beskonačan-kobeskonačan podskup I'_m skupa I_m, i jedan-jedan enumeraciju skupa I'_m, tj.

$$I'_m = \{i^m_l : l \in \omega\} \subseteq I_m \quad \wedge \quad |I'_m| = \omega \quad \wedge \quad |I_m \setminus I'_m| \geq \omega, \tag{10.31}$$

i, na taj način, dobijamo „jedan-jedan matrično indeksiranje" $\{i^m_l : \langle m, l \rangle \in K \times \omega\}$ skupa $\bigcup_{m \in K} I'_m$.

Sada, na osnovu (10.28) i (10.30), i, s obzirom da su skupovi I'_m beskonačni, možemo izabrati neprazne skupove L_r, za $r \in \omega$, takve da je

(l1) $L_r \in [K \times \omega]^{<\omega}$,
(l2) $r_1 \neq r_2 \Rightarrow L_{r_1} \cap L_{r_2} = \emptyset$,
(l3) $q_0 = n_{i_0} = \sum_{\langle m,l \rangle \in L_0} n_{i^m_l}$,
(l4) $q_{r+1} - q_r = n_{i_{r+1}} - n_{i_r} = \sum_{\langle m,l \rangle \in L_{r+1}} n_{i^m_l}$, za $r \in \omega$.

Prvo, ako za svako $r \in \omega$ definišemo

(g1) $g(i_r) = i_{r+1}$,
(g2) $g(i^m_l) = i_r$, za sve $\langle l, m \rangle \in L_r$,

na osnovu (l2) dobijamo surjekciju

$$g : \{i^m_l : \langle m, l \rangle \in \bigcup_{r \in \omega} L_r\} \cup \{i_r : r \in \omega\} \to \{i_r : r \in \omega\}. \tag{10.32}$$

Kako je $g^{-1}[\{i_0\}] = \{i_l^m : \langle m,l\rangle \in L_0\}$, prema (l3) imamo da je

$$n_{i_0} = \sum_{\langle m,l\rangle \in L_0} n_{i_l^m} = \sum_{i\in g^{-1}[\{i_0\}]} n_i. \tag{10.33}$$

Kako je $g^{-1}[\{i_{r+1}\}] = \{i_r\} \cup \{i_l^m : \langle m,l\rangle \in L_{r+1}\}$, prema (l4) imamo da je

$$n_{i_{r+1}} = n_{i_r} + \sum_{\langle m,l\rangle \in L_{r+1}} n_{i_l^m} = \sum_{i\in g^{-1}[\{i_{r+1}\}]} n_i. \tag{10.34}$$

Prema (10.30) imamo da $n_{i_0} \notin K$, pa je, na osnovu (10.33), $|L_0| > 1$, odakle sledi da je g neinjektivna surjekcija. Takođe, na osnovu (10.33) i (10.34),

$$\forall j \in \{i_r : r \in \omega\} \;\; n_j = \sum_{i\in g^{-1}[\{j\}]} n_i. \tag{10.35}$$

Za svako $m \in K$ je $I_m \cap \{i_{l'}^{m'} : \langle m', l'\rangle \in \bigcup_{r\in\omega} L_r\} \subseteq I'_m$, pa, prema (10.31), imamo da je $|I_m| = |I_m \setminus \{i_{l'}^{m'} : \langle m', l'\rangle \in \bigcup_{r\in\omega} L_r\}|$, odakle sledi da postoje bijekcije

$$g_m : I_m \setminus \{i_{l'}^{m'} : \langle m', l'\rangle \in \textstyle\bigcup_{r\in\omega} L_r\} \to I_m. \tag{10.36}$$

Dakle, za $j \in I_m$ imamo da je $g_m^{-1}[\{j\}] = \{i_j\}$, za neko $i_j \in \operatorname{dom} g_m$, i, pošto $i_j \in I_m$,

$$\forall j \in I_m \;\; n_j = n_{i_j} = \sum_{i\in g_m^{-1}[\{j\}]} n_i. \tag{10.37}$$

Prema (10.32) i prema (10.36), funkcija $g \cup \bigcup_{m\in K} g_m$ slika skup $\bigcup_{m\in K} I_m \cup \{i_r : r \in \omega\}$ na samog sebe, pa, ako definišemo funkciju,

$$f = g \cup \textstyle\bigcup_{m\in K} g_m \cup \mathrm{id}_{I\setminus(\bigcup_{m\in K} I_m \cup \{i_r : r\in\omega\})}, \tag{10.38}$$

na osnovu (10.35) i (10.37) dobijamo da je $f : I \to I$ neinjektivna surjekcija koja zadovoljava (10.39). To je kontradikcija s našom pretpostavkom da je niz $\langle n_i : i \in I\rangle$ reverzibilan. Time smo dokazali implikaciju „$\Rightarrow$" teoreme 10.2.6. $\square$

Dokaz smera „$\Leftarrow$" teoreme 10.2.6 Neka je K nezavisan skup i, ako je $K \neq \emptyset$, neka je $|\{n_i : i \in I\} \cap d\mathbb{N}| < \omega$, gde je $d := \mathrm{NZD}(K)$.

Pretpostavimo da niz $\langle n_i : i \in I\rangle$ nije reverzibilan. Tada, na osnovu stava 10.2.4 imamo da je $K \neq \emptyset$, i odatle sledi da je $|\{n_i : i \in I\} \cap d\mathbb{N}| < \omega$. Neka je $f : I \to I$ surjekcija takva da važi

$$\forall j \in I \;\; n_j = \sum_{i\in f^{-1}[\{j\}]} n_i, \tag{10.39}$$

$$J := \{j \in I : |f^{-1}[\{j\}]| > 1\} \neq \emptyset. \tag{10.40}$$

Stav 10.2.8

(a) Za svako $i \in I$ imamo da je $n_i \leq n_{f(i)}$.

(b) Za svako $j \in I$ postoji niz $\langle i_k^j : k \in \mathbb{N}\rangle$ u skupu I takav da je

$$f(i_1^j) = j \quad \wedge \quad \forall k \in \mathbb{N}\ f(i_{k+1}^j) = i_k^j, \tag{10.41}$$

$$\cdots \leq n_{i_{k+1}^j} \leq n_{i_k^j} \leq \cdots \leq n_{i_3^j} \leq n_{i_2^j} \leq n_{i_1^j} \leq n_j. \tag{10.42}$$

(c) Štaviše, ako u (10.42) važi $n_{i_1^j} < n_j$, tada je $i_k^j \neq i_l^j$, kad god je $k \neq l$.

Dokaz.

(a) Sledi na osnovu (10.39).

(b) Ako $j \in I$, tada, s obzirom da je f surjekcija, postoji $i_1^j \in I$ takvo da je $f(i_1^j) = j$, postoji $i_2^j \in I$ takvo da je $f(i_2^j) = i_1^j$, postoji $i_3^j \in I$ takvo da je $f(i_3^j) = i_2^j$, i tako dalje. Na ovaj način dobijamo niz $\langle i_k^j : k \in \mathbb{N}\rangle \in {}^{\mathbb{N}}I$ koji zadovoljava (10.41), što zajedno sa (a), daje (10.42).

(c) Ako je $n_{i_1^j} < n_j$, tada je, na osnovu (10.42), $n_{i_k^j} < n_j$, za svako $k \in \mathbb{N}$, i prema tome

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \ i_k^j \neq j. \tag{10.43}$$

Ako pretpostavimo suprotno, neka je k minimalni element skupa $\mathbb{N}$ takav da je $i_k^j = i_l^j$, za neko $l > k$. Tada bismo, na osnovu (10.41), za $k = 1$ imali da je $i_{l-1}^j = f(i_l^j) = f(i_k^j) = i_j$, što je nemoguće prema (10.43). Dakle, $k > 1$, pa imamo da je $i_{l-1}^j = f(i_l^j) = f(i_k^j) = i_{k-1}^j$, što je kontradikcija s minimalnošću k. □

Stav 10.2.9 *Postoji niz $\langle p_r : r \in \omega\rangle$ u skupu $\mathbb{N}$ takav da, pri čemu ćemo, pogodnosti radi, definisati da je $p_{-1} := 0$, za svako $r \in \omega$ važi:*

(i) $p_r = \min\{n_j : j \in J \cap n_j > p_{r-1}\}$;

(ii) $\forall j \in I_{p_r} \cap J\ \ \forall i \in f^{-1}[\{j\}]\ \ n_i \in K \cup \{p_s : 0 \leq s < r\}$;

(iii) $p_r \in \langle K\rangle \setminus K$;

(iv) $\exists i \in I_{p_r}\ \ (f(i) \in J \wedge n_{f(i)} > p_r)$;

(v) $\{n_j : j \in J\} \cap [1, p_r] = \{p_s : 0 \leq s \leq r\}$.

Dokaz. Konstruisaćemo traženi niz rekurzijom.

(i) Prvo, na osnovu (10.40) imamo da je $J \neq \emptyset$ i

$$\emptyset \neq \{n_j : j \in J\} = \{n_j : j \in J \wedge n_j > 0\} \subseteq \mathbb{N},$$

pa, ako definišemo da je

$$p_0 := \min\{n_j : j \in J\}, \tag{10.44}$$

dobijamo niz $\langle p_0 \rangle$ koji zadovoljava (i).

(ii) Neka $j \in I_{p_0} \cap J$ i $i \in f^{-1}[\{j\}]$. Tada, s obzirom da $j \in J$, na osnovu (10.40) imamo da je $|f^{-1}[\{j\}]| > 1$, i, prema (10.39), je $n_j = \sum_{i' \in f^{-1}[\{j\}]} n_{i'}$, pa je $n_i < n_j$. Definišimo sad, kao u stavu 10.2.8, $i^j_k \in I$ za $k \in \mathbb{N}$, tako da je zadovoljeno $i^j_1 := i$, (10.41) i (10.42). Dakle, imamo da je

$$\cdots \leq n_{i^j_3} \leq n_{i^j_2} \leq n_{i^j_1} < n_j.$$

Ako bismo pretpostavili da je $n_{i^j_{k+1}} < n_{i^j_k}$ za neko $k \in \mathbb{N}$, s obzirom da je $f(i^j_{k+1}) = i^j_k$, prema (10.39) imali bismo da $i^j_k \in J$ i da je $n_{i^j_k} < n_j = p_0$, što je, prema (10.44), nemoguće. Stoga, postoji $m \in \mathbb{N}$ takvo da je $n_{i^j_k} = m$, za sve $k \in \mathbb{N}$. Na osnovu stava 10.2.8 (c) imamo da je $i_k \neq i_l$ kad god je $k \neq l$, pa je $|I_m| \geq \omega$, tj. $m \in K$. Dakle, $n_i = n_{i^j_1} = m \in K$.

(iii) Prema (ii) i (10.39), imamo da $p_0 = n_j \in \langle K \setminus \{p_0\} \rangle$, pa, kako je skup K nezavisan, sledi da $p_0 \notin K$.

(iv) Na osnovu (iii), imamo da $p_0 \notin K$, tj. $|I_{p_0}| < \omega$. Pretpostavimo da je $f[I_{p_0}] \subseteq I_{p_0}$. Tada je, prema (10.39), $f \restriction I_{p_0}$ injekcija, pa, kako je skup I_{p_0} konačan, imamo da je $f[I_{p_0}] = I_{p_0}$. Prema (10.44) postoji $j \in I_{p_0} \cap J$, i, na osnovu prethodnog zaključka, je $j = f(i)$, za neko $i \in I_{p_0}$, što implicira da je $n_i = n_j = p_0$. Ali ovo je u kontradikciji s činjenicom da $j \in J$. Dakle, postoji $i \in I_{p_0}$ takvo da $f(i) \notin I_{p_0}$, pa je $n_{f(i)} > n_i = p_0$ i $f(i) \in J$.

(v) Na osnovu (10.44) imamo da je $\{n_j : j \in J\} \cap [1, p_0] = \{p_0\}$.

Pretpostavimo da je $\langle p_0, p_1, \dots, p_r \rangle$ niz koji zadovoljava (i) – (v), i konstruišimo niz $\langle p_0, p_1, \dots, p_{r+1} \rangle$ koji zadovoljava (i) – (v).

(i) Na osnovu (iv), postoji $j \in J$ takvo da je $n_j > p_r$. Ako definišemo

$$p_{r+1} := \min\{n_j : j \in J \wedge n_j > p_r\}, \tag{10.45}$$

imamo (i).

(ii) Neka $j \in I_{p_{r+1}} \cap J$ i $i \in f^{-1}[\{j\}]$. Tada, s obzirom da $j \in J$, na osnovu (10.40) imamo da je $|f^{-1}[\{j\}]| > 1$, i, prema (10.39), je $n_j = \sum_{i' \in f^{-1}[\{j\}]} n_{i'}$, pa je $n_i < n_j$. Definišimo opet, kao u stavu 10.2.8, $i^j_k \in I$ za $k \in \mathbb{N}$, tako da je zadovoljeno $i^j_1 := i$, (10.41) i (10.42). Dakle, imamo da je

$$\cdots \leq n_{i^j_3} \leq n_{i^j_2} \leq n_{i^j_1} < n_j.$$

Ako je $n_{i^j_{k+1}} < n_{i^j_k}$ za neko $k \in \mathbb{N}$, neka je k minimalno takvo k. Tada je

$$n_{i^j_{k+1}} < n_{i^j_k} = \cdots = n_{i^j_2} = n_{i^j_1} = n_i < n_j = p_{r+1}. \tag{10.46}$$

Štaviše, kako je $f(i^j_{k+1}) = i^j_k$, na osnovu (10.39) imamo da $i^j_k \in J$, što implicira da $n_{i^j_k} \in \{n_j : j \in J\} \cap [1, p_{r+1})$, odakle, na osnovu (10.45), $n_{i^j_k} \in \{n_j : j \in J\} \cap [1, p_r]$. Dakle, na osnovu (v), postoji $s_0 \leq r$ takvo da je $n_{i^j_k} = p_{s_0}$, odakle, na osnovu (10.46), imamo da je

$$n_i = p_{s_0} \in \{p_s : 0 \leq s < r + 1\}.$$

Inače, postoji $m \in \mathbb{N}$ takvo da je $n_{i^j_k} = m$, za sve $k \in \mathbb{N}$. Na osnovu stava 10.2.8 (c) imamo da je $i_k \neq i_l$ kad god je $k \neq l$, pa je $|I_m| \geq \omega$, tj. $m \in K$. Dakle, $n_i = n_{i^j_1} = m \in K$.

(iii) Na osnovu (10.45) postoji $j \in J$ takvo da je $p_{r+1} = n_j > p_r$. Dakle, $j \in I_{p_{r+1}} \cap J$, pa je, na osnovu (ii) i (10.39), n_j zbir barem dva prirodna broja iz $K \cup \{p_s : 0 \leq s \leq r\}$. Na osnovu (iii) indukcijske hipoteze, imamo da $p_s \in \langle K \rangle$, za $0 \leq s \leq r$, odakle sledi da $p_{r+1} \in \langle K \setminus \{p_{r+1}\} \rangle$. S obzirom da je skup K nezavisan, imamo da $p_{r+1} \notin K$.

(iv) Na osnovu (iii), imamo da $p_{r+1} \notin K$, tj. $|I_{p_{r+1}}| < \omega$. Pretpostavimo da je $f[I_{p_{r+1}}] \subseteq I_{p_{r+1}}$. Tada je, prema (10.39), $f \restriction_{I_{p_{r+1}}}$ injekcija, pa kako je skup $I_{p_{r+1}}$ konačan, imamo da je $f[I_{p_{r+1}}] = I_{p_{r+1}}$. Prema (10.45) postoji $j \in I_{p_{r+1}} \cap J$, i, na osnovu prethodnog zaključka, je $j = f(i)$, za neko $i \in I_{p_{r+1}}$, što implicira da je $n_i = n_j = p_{r+1}$. Ali ovo je u kontradikciji s činjenicom da $j \in J$. Dakle, postoji $i \in I_{p_{r+1}}$ takvo da $f(i) \notin I_{p_{r+1}}$, pa je $n_{f(i)} > n_i = p_{r+1}$ i $f(i) \in J$.

(v) Prema (10.45) i indukcijskoj hipotezi, imamo da je

$$\{n_j : j \in J\} \cap [1, p_{r+1}] = \{p_s : 0 \leq s \leq r + 1\}.$$

Dakle, rekurzija radi. □

Sada, na osnovu stava 10.2.9 (v), (iii) i (i), imamo da je

$$\{n_j : j \in J\} = \{p_r : r \in \omega\} \subseteq \langle K \rangle \setminus K,$$

i da je $p_0 < p_1 < \cdots < p_r < \cdots$, što implicira da je $|\{n_i : i \in I\} \cap \langle K \rangle| = \omega$. Kako je, na osnovu tvrđenja 2.1.2 (c), $\langle K \rangle \subseteq d\mathbb{N}$, imamo da je

$$|\{n_i : i \in I\} \cap d\mathbb{N}| = \omega,$$

a to je kontradikcija. □

Reverzibilne funkcije u Baireovom prostoru

Svaki prebrojiv niz prirodnih brojeva $\langle n_i : i \in \mathbb{N}\rangle$ može se posmatrati kao funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gde je $\varphi(i) = n_i$, za $i \in \mathbb{N}$, dakle kao element Baireovog prostora ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$, sa standardnom topologijom (videti [25]). U skladu s tim, razmatraćemo skup reverzibilnih funkcija koje pripadaju ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$:

$$({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})_{\mathrm{rev}} := \Big\{\varphi \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} : \neg\exists f \in \mathrm{Sur}(\mathbb{N})\backslash\mathrm{Sym}(\mathbb{N}) \;\; \forall j \in \mathbb{N} \sum_{i\in f^{-1}[\{j\}]} \varphi(i) = \varphi(j)\Big\}.$$

Teorema 10.2.10 $({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})_{\mathrm{rev}}$ *je gust* $F_{\sigma\delta\sigma}(=\Sigma^0_4)$*-podskup Baireovog prostora* ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ *veličine* $\mathfrak{c}$.

Dokaz. Ako je $B = \bigcap_{k\leq n} \pi_{i_k}^{-1}[\{j_k\}]$ bazni otvoren skup, tada, s obzirom da se konačna funkcija $p = \{\langle i_k, j_k\rangle : k \leq n\}$ može produžiti do konačno-jedan funkcije $\varphi \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$, i, s obzirom da, na osnovu teoreme 10.2.6, $\varphi \in ({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})_{\mathrm{rev}}$, sledi da je $B \cap ({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})_{\mathrm{rev}} \neq \emptyset$, dakle, skup $({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})_{\mathrm{rev}}$ je gust u ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$. Kako ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$, na osnovu tvrđenja 4.1.5 (b), sadrži $\mathfrak{c}$ mnogo bijekcija, sledi da je $|({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})_{\mathrm{rev}}| = \mathfrak{c}$.

Neka je $\mathcal{I}$ skup nepraznih nezavisnih podskupova skupa $\mathbb{N}$, i neka je $d := \mathrm{NZD}(K)$, za dato $K \in \mathcal{I}$. Tada je, na osnovu teoreme 10.2.6,

$$({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})_{\mathrm{rev}} = A \cup \textstyle\bigcup_{K\in\mathcal{I}}(B_K \cap C_K \cap D_K), \tag{10.47}$$

gde je

$$\begin{aligned}
A &:= \Big\{\varphi \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} \;\; (\varphi(i) = m \text{ za } <\omega\text{-mnogo } i \in \mathbb{N})\Big\},\\
&= \textstyle\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{i\geq k} \pi_i^{-1}[\mathbb{N} \setminus \{m\}],\\
B_K &:= \Big\{\varphi \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} : \forall m \in K \;\; (\varphi(i) = m \text{ za } \omega\text{-mnogo } i \in \mathbb{N})\Big\},\\
&= \textstyle\bigcap_{m\in K} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\geq k} \pi_i^{-1}[\{m\}],\\
C_K &:= \Big\{\varphi \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} \setminus K \;\; (\varphi(i) = m \text{ za } <\omega\text{-mnogo } i \in \mathbb{N})\Big\},\\
&= \textstyle\bigcap_{m\in\mathbb{N}\setminus K} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{i\geq k} \pi_i^{-1}[\mathbb{N} \setminus \{m\}],\\
D_K &:= \Big\{\varphi \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} : \varphi(i) \in d\mathbb{N} \setminus K \text{ za } <\omega\text{-mnogo } i \in \mathbb{N}\Big\}\\
&= \textstyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{i\geq k} \pi_i^{-1}[\mathbb{N} \setminus (d\mathbb{N} \setminus K)].
\end{aligned}$$

Dakle, za $K \in \mathcal{I}$ imamo da $B_K \in G_\delta \subseteq F_{\sigma\delta}$, $D_K \in F_\sigma \subseteq F_{\sigma\delta}$ i $C_K \in F_{\sigma\delta}$, što implicira da $B_K \cap C_K \cap D_K \in F_{\sigma\delta}$. Sada, s obzirom da je $\mathcal{I} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$, na osnovu tvrđenja 2.1.2 (d) imamo da

$$\bigcup_{K\in\mathcal{I}}(B_K\cap C_K\cap D_K)\in F_{\sigma\delta\sigma}.$$

Pošto $A\in F_{\sigma\delta}\subseteq F_{\sigma\delta\sigma}$, prema (10.47) sledi da $({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})_{\mathrm{rev}}\in F_{\sigma\delta\sigma}=\Sigma^0_4$. $\square$

Primedba 10.2.11 Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ definisana na sledeći način: $\varphi\sim\psi$ akko postoji $f\in\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ takvo da je $\varphi=\psi\circ f$. Očigledno je da je skup $({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})_{\mathrm{rev}}$ $\sim$-invarijantan, tj. $\psi\sim\varphi\in({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})_{\mathrm{rev}}$ implicira da $\psi\in({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})_{\mathrm{rev}}$.

Ali $({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})_{\mathrm{rev}}$ nije potpolugrupa polugrupe $\langle{}^{\mathbb{N}}\mathbb{N},\circ\rangle$. Neka su $\mathbb{N}\setminus\{2\}=A\cup B$ i $\mathbb{N}=C\cup D\cup E$ particije, pri čemu $A,B,C,D,E\in[\mathbb{N}]^\omega$ i

$$|A\cap(2\mathbb{N}+1)|=|B\cap(2\mathbb{N}+1)|=\omega.$$

Tada, na osnovu teoreme 10.2.6,

$$\varphi=\{\langle 2,2\rangle\}\cup(A\times\{3\})\cup(B\times\{5\})\in({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})_{\mathrm{rev}}.$$

Ako su $\psi_{DA}:D\to A\cap(2\mathbb{N}+1)$ i $\psi_{EB}:E\to B\cap(2\mathbb{N}+1)$ bijekcije, tada, na osnovu teoreme 10.2.6 opet,

$$\psi=(C\times\{2\})\cup\psi_{DA}\cup\psi_{EB}\in({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})_{\mathrm{rev}}.$$

Ali $\varphi\circ\psi\notin({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})_{\mathrm{rev}}$, zato što skup $\{2,3,5\}$ nije nezavisan.

10.3 Reverzibilne relacije ekvivalencije i slične strukture

Podsetimo se, za niz L_b-struktura $\langle\mathbb{X}_i:i\in I\rangle$ reći ćemo da je bogat za monomorfizme akko

$$\forall i,j\in I\ \ \forall[X_j]^{|X_i|}\ \ \exists g\in\mathrm{Mono}(\mathbb{X}_i,\mathbb{X}_j)\ \ g[X_i]=A. \tag{10.48}$$

Na osnovu teoreme 10.1.1, potreban uslov za reverzibilnost nepovezane binarne strukture je reverzibilnost njenih komponenata. U skladu s tim, označimo sa RFM klasu nizova $\langle\mathbb{X}_i:i\in I\rangle$ (gde je I neprazan skup) po parovima disjunktnih, povezanih i reverzibilnih L_b-struktura, koji su bogati za monomorfizme. Rezultati iz ovog odeljka dokazani su u [53].

Prvo ćemo pokazati da reverzibilnost nepovezane strukture kod koje niz komponenata pripada klasi RFM zavisi samo od odgovarajućeg niza kardinalnosti tih komponenata.

Teorema 10.3.1 *Ako* $\langle \mathbb{X}_i : i \in I\rangle \in \mathrm{RFM}$*, tada važi*

(a) Strukture $\mathbb{X}_i$ *i* $\mathbb{X}_j$ *iste veličine su izomorfne;*

(b) $\bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$ *je reverzibilna struktura akko* $\langle |X_i| : i \in I\rangle$ *je reverzibilan niz kardinala.*

Dokaz.

(a) Ako je $|X_i| = |X_j|$, tada, na osnovu (10.48), postoje kondenzacije $f \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)$ i $g \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}_j, \mathbb{X}_i)$. Dakle, $\mathbb{X}_i \sim_c \mathbb{X}_j$, odakle, na osnovu tvrđenja 8.2.5, sledi da je $\mathbb{X}_i \cong \mathbb{X}_j$.

(b) ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da niz kardinala $\langle |X_i| : i \in I\rangle$ nije reverzibilan, i neka je $f : I \to I$ neinjektivna surjekcija takva da, za svako $j \in I$, važi $|X_j| = \sum_{i\in f^{-1}[\{j\}]} |X_i|$. Tada, za $j \in I$, postoji particija

$$\{A_i^j : i \in f^{-1}[\{j\}]\}$$

skupa X_j takva da je $|A_i^j| = |X_i|$, za svako $i \in f^{-1}[\{j\}]$, i, na osnovu (10.48), postoje monomorfizmi $g_i : \mathbb{X}_i \to \mathbb{X}_j = \mathbb{X}_{f(i)}$ za koje važi $g_i[X_i] = A_i^j$. Na osnovu teoreme 10.1.2 struktura $\bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$ nije reverzibilna.

($\Leftarrow$) Neka je $\langle |X_i| : i \in I\rangle$ reverzibilan niz kardinala. Neka je, dalje, $f : I \to I$ surjekcija, i neka $g_i \in \mathrm{Mono}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_{f(i)})$ za $i \in I$, tako da je $\{g_i[X_i] : i \in f^{-1}[\{j\}]\}$ particija skupa X_j, za svako $j \in I$. Kako su funkcije g_i injekcije, imamo da je $|X_i| = |g_i[X_i]|$, za svako $i \in I$. Dakle, za svako $j \in I$ je $|X_j| = \sum_{i\in f^{-1}[\{j\}]} |X_i|$, i, s obzirom da je niz $\langle |X_i| : i \in I\rangle$ reverzibilan, imamo da $f \in \mathrm{Sym}(I)$. Odatle sledi da je $g_i[X_i] = X_{f(i)}$, što implicira da $g_i \in \mathrm{Cond}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_{f(i)})$ i $|X_i| = |X_{f(i)}|$. S obzirom da su strukture $\mathbb{X}_i$ reverzibilne, na osnovu tvrđenja 8.2.5 je

$$\mathrm{Cond}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_{f(i)}) = \mathrm{Iso}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_{f(i)}),$$

pa $g_i \in \mathrm{Iso}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_{f(i)})$, za svako $i \in I$, odakle, na osnovu teoreme 10.1.2, sledi da je struktura $\bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$ reverzibilna. □

Teorema 10.3.2 *Neka je* $\sim$ *relacija ekvivalencije na skupu* X *i neka je* $X/\!\sim\, = \{X_i : i \in I\}$ *odgovarajuća particija. Tada je struktura* $\mathbb{X} := \langle X, \sim\rangle$ *reverzibilna akko je* $\langle |X_i| : i \in I\rangle$ *reverzibilan niz kardinala.*

Isto važi za grafove (redom, posete) oblika $\mathbb{X} = \bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$*, gde su* $\mathbb{X}_i$*,* $i \in I$*, po parovima disjunktni kompletni grafovi (redom, kardinali* $\leq \omega$*).*

Dokaz. Bilo koji niz L_b-struktura koji sadrži po parovima disjunktne pune relacije, ili kompletne grafove, ili kardinale $\leq \omega$, pripada klasi RFM, pa možemo primeniti teoremu 10.3.1. □

Primedba 10.3.3 Postoji $\mathfrak{c}$ mnogo neizomorfnih prebrojivih reverzibilnih i $\mathfrak{c}$ mnogo neizomorfnih prebrojivih nereverzibilnih relacija ekvivalencije (isto važi i za klase grafova i poseta iz teoreme 10.3.2).

Na osnovu teorema 10.3.2 i 10.2.1, ako je $\langle n_i : i \in \mathbb{N}\rangle \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ jedan rastući niz, tada je struktura $\mathbb{X}_{\langle n_i\rangle}$ s relacijom ekvivalencije na skupu $\mathbb{N}$ za koju je $|C_i| = n_i$, $i \in \mathbb{N}$, gde je $\{C_i : i \in \mathbb{N}\}$ odgovarajuća particija, reverzibilna. Takođe, ako je $\langle n_i : i \in \mathbb{N}\rangle \neq \{n'_i : i \in \mathbb{N}\}$, imamo da je $\mathbb{X}_{\langle n_i\rangle} \not\cong \mathbb{X}_{\langle n'_i\rangle}$. Za $A \in [\mathbb{N}]^\omega$, neka je $\langle n_i^A : i \in \mathbb{N}\rangle$ rastuća enumeracija skupa A. Tada su strukture $\mathbb{X}_{\langle n_i^A\rangle}$, $A \in [\mathbb{N}]^\omega$, neizomorfne, prebrojive i reverzibilne.

Definišimo, sada, za $A \in [\mathbb{N}]^\omega$, sledeće strukture:

$$\mathbb{Y}_{\langle n_i^A\rangle} := \mathbb{X}_{\langle n_i^A\rangle} \cup \bigcup_\omega \langle \mathbb{N}, \mathbb{N}^2\rangle.$$

Tada su strukture $\mathbb{Y}_{\langle n_i^A\rangle}$ relacije ekvivalencije, i, bez ograničenja opštosti, možemo pretpostaviti da im je domen skup $\mathbb{N}$. Lako se vidi da su strukture $\mathbb{Y}_{\langle n_i^A\rangle}$, $A \in [\mathbb{N}]^\omega$, neizomorfne, prebrojive i nereverzibilne.

Još nizova struktura iz klase RFM

Podsetimo se kako za relacijsku strukturu $\mathbb{X}$ kažemo da je monomorfna akko su svake dve konačne podstrukture strukture $\mathbb{X}$ iste veličine izomorfne. Na osnovu poznatih teorema Fraïséa (za konačne jezike) i Pouzeta (za jezike i strukture proizvoljne veličine), videti [16], beskonačna struktura $\mathbb{X}$ je monomorfna akko je lančljiva, tj. postoji linearno uređenje $\prec$ na njenom domenu X, takvo da su relacije strukture $\mathbb{X}$ definabilne u strukturi $\langle X, \prec\rangle$ formulama prvog reda bez kvantifikatora i parametara. U tom slučaju, reći ćemo da $\prec$ lanča $\mathbb{X}$, ili da je struktura $\mathbb{X}$ lančljiva uređenjem $\prec$. Takođe, za strukturu $\mathbb{X}$ reći ćemo da je maksimalna za kopije (redom, *maksimalna za mono-opsege*) akko za svako $A \in [X]^{|X|}$ postoji utapanje (redom, monomorfizam) $g : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ takvo da je $g[X] = A$.

Na osnovu (10.48) i prema teoremi 10.3.1 (a), i pošto je svaki skup kardinala dobro uređen, dati niz $\langle \mathbb{X}_i : i \in I\rangle \in$ RFM može se opisati na sledeći način: Postoje ordinal η i niz povezanih reverzibilnih L_b-struktura $\langle \mathbb{Y}_\xi : \xi < \eta\rangle$ (*opseg*) tako da, ako definišemo $\kappa_\xi := |Y_\xi|$, imamo:

(r1) $\xi < \zeta < \eta \implies \kappa_\xi < \kappa_\zeta$,
(r2) Struktura $\mathbb{Y}_\xi$ je maksimalna za mono-opsege, za svako $\xi < \eta$,
(r3) $\xi < \zeta < \eta \implies \forall A \in [Y_\zeta]^{\kappa_\xi}\ \mathrm{Cond}(\mathbb{Y}_\xi, \mathbb{A}) \neq \emptyset$,

i postoji surjekcija $h : I \to \eta$ takva da, za sve $\xi < \eta$ i $i \in h^{-1}[\{\xi\}]$, imamo da je $\mathbb{X}_i \cong \mathbb{Y}_\xi$, i $X_i \cap X_j = \emptyset$, za $i \neq j$. Tada, na osnovu teoreme

10.3.1 (b), imamo da je struktura $\bigcup_{i\in I}\mathbb{X}_i$ reverzibilna akko je niz kardinala $\langle \kappa_{h(i)} : i \in I\rangle$ reverzibilan. Sada ćemo detaljnije razmotriti uslove (r2) i (r3).

Uslov (r2) Jasno je da će uslov (r2) biti zadovoljen akko su strukture $\mathbb{Y}_\xi$ konačne ili maksimalne za kopije. Na osnovu rezultata Gibsona, Pouzeta i Woodrowa [17] imamo da je struktura $\mathbb{X}$ veličine $\kappa \geq \omega$ maksimalna za kopije akko je κ-lančljiva, tj. postoji linearno uređenje $\prec$ na skupu X koje lanča $\mathbb{X}$, i pri tome je $\langle X, \prec\rangle \cong \langle \kappa, <\rangle$. S druge strane, jednostavna primena Ramseyeve teoreme pokazuje da postoji, do na izomorfizam, samo osam prebrojivih binarnih struktura maksimalnih za kopije. Isto važi i za neprebrojive strukture (videti, još, [33, 38]). Šest povezanih među njima su

$$\langle \kappa, \kappa^2\rangle,\ \langle \kappa, \kappa^2 \setminus \Delta_\kappa\rangle,\ \langle \kappa, <\rangle,\ \langle \kappa, \leq\rangle,\ \langle \kappa, >\rangle \text{ i } \langle \kappa, \geq\rangle,$$

i sve su reverzibilne. Pored toga, s obzirom da su u klasi linearnih uređenja monomorfizmi utapanja, linearna uređenja koja su maksimalna za mono-opsege maksimalna su i za kopije. Dakle, jedina četiri linearna uređenja veličine κ koja su maksimalna za mono-opsege nabrojana su iznad. Sledeći primer pokazuje kako klasa parcijalnih uređenja koja su maksimalna za mono-opsege nije tako restriktivna.

Primer 10.3.4 Poseti oblika $\mathbb{X}_{\lambda,\kappa} := \mathbb{A}_\lambda + \mathbb{L}_\kappa$, gde je $2 \leq \lambda < \kappa \geq \omega$, $\mathbb{A}_\lambda$ je antilanac veličine λ, i $\mathbb{L}_\kappa \cong \langle \kappa, <\rangle$, nisu maksimalni za kopije, ali jesu maksimalni za mono-opsege (ako $S \in [X]^\kappa$, tada je $S \cong \mathbb{A}_\mu + \mathbb{L}_\kappa$, za neko $\mu \leq \lambda$, i pri tome je lako konstruisati monomorfizam iz $\mathbb{X}_{\lambda,\kappa}$ na S). Ako je $\lambda < \omega$, tada je $\mathbb{X}_{\lambda,\kappa}$ dobro fundiran poset s konačnima nivoima, pa je na osnovu [27] reverzibilan.

Uslov (r3) Sve strukture razmatrane u teoremi 10.3.2 - disjunktne unije: (a) komponenata s punim relacijama, (b) kompletnih grafova i (c) kardinala $\leq \omega$, daju primere nizova koji zadovoljavaju (r3), i sve od njih imaju monomorfne komponente[7]. Naredni primer pokazuje kako taj uslov nije neophodan za primenu teoreme 10.3.1 (b).

[7] Ako $\langle \mathbb{X}_i : i \in I\rangle \in \mathrm{RFM}$, pri čemu su sve komponente $\mathbb{X}_i$ monomorfne, i ako je

$$[\mathrm{Th}(\mathbb{X})]^2 \cap \Big\{\{\varphi_{re}, \varphi_{sym}\}, \{\varphi_{irr}, \varphi_{sym}\}, \{\varphi_{re}, \varphi_{as}\}, \{\varphi_{irr}, \varphi_{as}\}\Big\} \neq \emptyset,$$

gde je $\mathbb{X} = \bigcup_{i\in I}\mathbb{X}_i$, tada, kao posledicu Ramseyeve teoreme (teorema 2.2.9), imamo da $\langle \mathbb{X}_i : i \in I\rangle \in \mathrm{RFE}$, tj. dati niz struktura je *bogat za utapanja*.

Primer 10.3.5 Strukture iz klase RFM s komponentama koje nisu monomorfne. Neka važi:

- $\mathbb{T}_3$ je troelementno drvo $\langle\{0,1,2\},\{\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle\}\rangle$,
- $\mathbb{L}_5$ je petoelementno linearno uređenje,
- $\mathbb{K}_6^*$ je kompletan graf sa 6 čvorova, od kojih su 3 refleksivizirana (petlje),
- $\mathbb{F}_8$ je osmoelementna struktura s punom relacijom.

Neka su dalje κ i λ beskonačni kardinali, $m,n\in\omega$ i neka je $\mathbb{X}$ disjunktna unija κ-mnogo kopija $\mathbb{T}_3$, λ-mnogo kopija $\mathbb{L}_5$, m kopija $\mathbb{K}_6^*$ i n kopija $\mathbb{F}_8$. Tada niz $\langle\mathbb{T}_3,\mathbb{L}_5,\mathbb{K}_6^*,\mathbb{F}_8\rangle$ zadovoljava uslove (r1) – (r3), odgovarajući niz komponenata strukture $\mathbb{X}$ pripada klasi RFM, pri čemu, u oznakama teoreme 10.2.6 imamo da je $K=\{3,5\}$, i $\{n_i : i\in I\}=\{3,5,6,8\}$ je konačan skup. Dakle, struktura $\mathbb{X}$ je reverzibilna na osnovu teoreme 10.3.1 (b).

Primer 10.3.6 Struktura iz klase RFM koja nema nijednu monomorfnu komponentu.

Neka su $\mathbb{X}_{2,\kappa}=\mathbb{A}_2+\mathbb{L}_\kappa$, za $1\leq\kappa\leq\omega$, parcijalna uređenja definisana u primeru 10.3.4. Lako je videti da $\langle\mathbb{X}_{2,\kappa}:1\leq\kappa\leq\omega\rangle\in\mathrm{RFM}$. S obzirom da je odgovarajući niz kardinalnosti komponenata $\langle 3,4,5,\dots,\omega\rangle$ konačno-jedan, i, na osnovu toga, reverzibilan, poset $\mathbb{X}:=\bigcup_{1\leq\kappa\leq\omega}\mathbb{X}_{2,\kappa}$ je reverzibilan. Pri tome, jasno je da njegove komponente $\mathbb{X}_{2,\kappa}$ nisu 2-monomorfne.

Klase RFM, RSC i RU

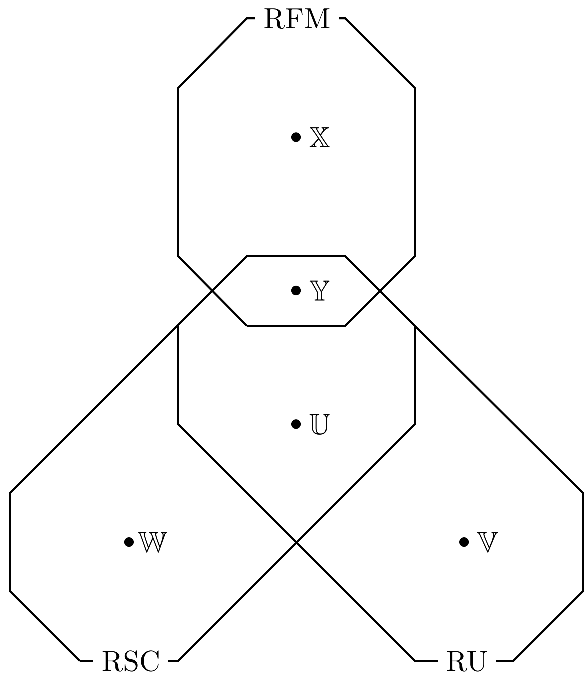
Ako sa RSC (redom RU) označimo klasu nizova $\langle\mathbb{X}_i : i\in I\rangle$ po parovima disjunktnih, povezanih i reverzibilnih L_b-struktura, takvih da je $\langle|X_i| : i\in I\rangle$ reverzibilan niz kardinala (redom, da je unija $\bigcup_{i\in I}\mathbb{X}_i$ reverzibilna struktura), tada, na osnovu teoreme 10.3.1 (b), imamo da je $\mathrm{RFM}\cap\mathrm{RU}=\mathrm{RFM}\cap\mathrm{RSC}$. Sledeći primer pokazuje kako je, što se tiče odnosa klasa RFM, RSC i RU, data jednakost jedino ograničenje (videti i sliku 10.1).

Primer 10.3.7

(a) $\mathrm{RFM}\setminus(\mathrm{RU}\cup\mathrm{RSC})\neq\emptyset$. Ako je $\mathbb{X}_i\cong\langle\omega,<\rangle$, za $i\in\omega$, tada, na osnovu teoreme 10.2.1, niz kardinala $\langle\omega,\omega,\omega,\dots\rangle$ nije reverzibilan, ali, s obzirom da je $\langle A,<\restriction_A\rangle\cong\langle\omega,<\rangle$, za svako $A\in[\omega]^\omega$, niz $\langle\mathbb{X}_i : i\in I\rangle$ je bogat za monomorfizme. Lako se vidi da struktura $\bigcup_{i\in I}\mathbb{X}_i$ nije reverzibilna.

(b) $\mathrm{RFM}\cap\mathrm{RU}=\mathrm{RFM}\cap\mathrm{RSC}\neq\emptyset$. Za $\mathbb{Y}$ možemo uzeti poset iz primera 10.3.6.

(c) $(\mathrm{RU}\cap\mathrm{RSC})\setminus\mathrm{RFM}\neq\emptyset$. Neka je I ordinal $\omega+2=\omega\cup\{\omega,\omega+1\}$, i neka je $\mathbb{U}:=\bigcup_{i\in\omega+2}\mathbb{U}_i$, gde su $\mathbb{U}_i$ po parovima disjunktna linearna uređenja



Slika 10.1: $\mathrm{RFM} \cap \mathrm{RU} = \mathrm{RFM} \cap \mathrm{RSC}$.

takva da je $\mathbb{U}_i \cong i+1$, za $i \in \omega$, $\mathbb{U}_\omega \cong \omega$, i $\mathbb{U}_{\omega+1} \cong \mathbb{Q}$. Odgovarajući niz kardinala $\langle 1, 2, \ldots, \omega, \omega \rangle$ je konačno-jedan, pa je, na osnovu teoreme 10.2.1, reverzibilan. Na osnovu primedbe 10.1.10 (ii) unija $\bigcup_{i \in I} \mathbb{U}_i$ je takođe reverzibilna. Kako je $\omega \not\cong \mathbb{Q}$, iz teoreme 10.3.1 (a) sledi da $\langle \mathbb{U}_i : i \in I \rangle \notin$ RFM.

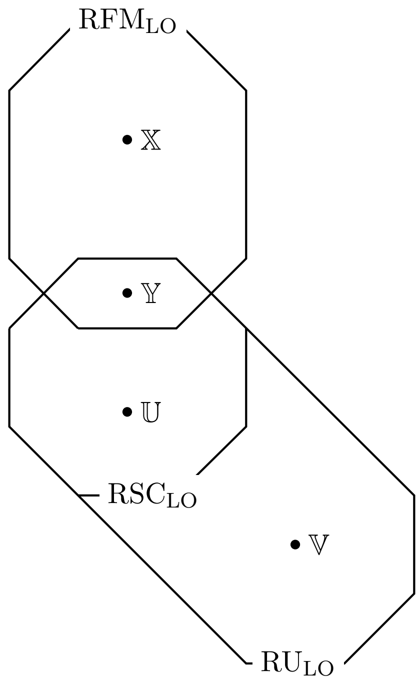
(d) $\mathrm{RU} \setminus (\mathrm{RFM} \cup \mathrm{RSC}) \neq \emptyset$. Neka je $\mathbb{V} := \langle \mathbb{Z}, \rho \rangle$, za

$$\rho := \Big\{ \langle i, i \rangle : i < 0 \Big\} \cup \Big\{ \langle 2i, 2i+1 \rangle : i \geq 0 \Big\}.$$

Tada imamo da je $\mathbb{V} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{V}_i$, gde je $\mathbb{V}_i = \langle \{i\}, \{\langle i, i \rangle\} \rangle$, za $i < 0$, i $\mathbb{V}_i = \langle \{2i, 2i+1\}, \{\langle 2i, 2i+1 \rangle\} \rangle$, za $i \geq 0$. Odgovarajući niz kardinala

$$\Big\langle \ldots, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, \ldots \Big\rangle$$

nije reverzibilan, zato što skup $K = \{1, 2\}$ nije nezavisan. S obzirom da je $\mathrm{Mono}(\mathbb{V}_{-1}, \mathbb{V}_0) = \emptyset$, imamo da $\langle \mathbb{V}_i : i \in \mathbb{Z} \rangle \notin$ RFM. Ali, na osnovu tvrđenja



Slika 10.2: $\mathrm{RFM}_{\mathrm{LO}} \cap \mathrm{RU}_{\mathrm{LO}} = \mathrm{RFM}_{\mathrm{LO}} \cap \mathrm{RSC}_{\mathrm{LO}}$ i $\mathrm{RSC}_{\mathrm{LO}} \subseteq \mathrm{RU}_{\mathrm{LO}}$.

8.2.1, struktura $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{V}_i$ je reverzibilna. Naime, ako je $\sigma \subsetneq \rho$, tada struktura $\langle \mathbb{Z}, \sigma\rangle$ ima jednoelementnu komponentu s praznom relacijom, pa $\langle \mathbb{Z}, \sigma\rangle \not\cong \mathbb{V}$.

(e) $\mathrm{RSC} \setminus (\mathrm{RFM} \cup \mathrm{RU}) \neq \emptyset$. Neka je $\mathbb{W} := \langle \mathbb{Z}, \rho\rangle$, za $\rho := \{\langle i, i\rangle : i \geq 0\}$. Tada je $\mathbb{W} = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{W}_i$, gde je $\mathbb{W}_i = \langle \{i\}, \emptyset\rangle$, za $i < 0$, i $\mathbb{W}_i = \langle \{i\}, \{\langle i, i\rangle\}\rangle$, za $i \geq 0$. Odgovarajući niz kardinala je reverzibilan, i, s obzirom da je

$$\mathbb{W} \cong \langle \mathbb{Z}, \rho \setminus \{\langle 0, 0\rangle\}\rangle,$$

na osnovu tvrđenja 8.2.1 struktura $\bigcup_{i\in I} \mathbb{W}_i$ nije reverzibilna. Kako je $\mathbb{W}_{-1} \not\cong \mathbb{W}_0$, na osnovu teoreme 10.3.1 (a) niz struktura $\langle \mathbb{W}_i : i \in \mathbb{Z}\rangle$ nije bogat za monomorfizme.

Obeležimo sa $\mathrm{RFM}_{\mathrm{LO}}$, $\mathrm{RSC}_{\mathrm{LO}}$ i $\mathrm{RU}_{\mathrm{LO}}$ klase nizova linearnih uređenja $\langle \mathbb{L}_i : i \in I\rangle$ koji pripadaju, redom, klasama RFM, RSC i RU. Sada, na osnovu primedbe 10.1.10 (ii) imamo još jedno ograničenje: $\mathrm{RSC}_{\mathrm{LO}} \subseteq \mathrm{RU}_{\mathrm{LO}}$, i sledeći primer pokazuje da, u opštem slučaju, nema dodatnih ograničenja (videti i sliku 10.2).

Primer 10.3.8

(a) $\mathrm{RFM}_{\mathrm{LO}} \setminus \mathrm{RU}_{\mathrm{LO}} \neq \emptyset$. Ovde za $\mathbb{X}$ možemo uzeti poset $\bigcup_\omega \omega$ iz primera 10.3.7 (a).

(b) $\mathrm{RFM}_{\mathrm{LO}} \cap \mathrm{RU}_{\mathrm{LO}} = \mathrm{RFM}_{\mathrm{LO}} \cap \mathrm{RSC}_{\mathrm{LO}} \neq \emptyset$. Ovde za $\mathbb{Y}$ možemo uzeti poset $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} n$.

(c) $\mathrm{RSC}_{\mathrm{LO}} \setminus \mathrm{RFM}_{\mathrm{LO}} \neq \emptyset$. Ovde za $\mathbb{U}$ možemo uzeti poset $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} n \cup \omega \cup \mathbb{Q}$ iz primera 10.3.7 (c).

(d) $\mathrm{RU}_{\mathrm{LO}} \setminus \mathrm{RSC}_{\mathrm{LO}} \neq \emptyset$. Ovde za $\mathbb{V}$ možemo uzeti poset $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \omega n$.

10.4 Reverzibilne disjunktne unije lanaca

Podsetimo se kako se, za topološki prostor $\mathcal{X} = \langle X, \mathcal{O}\rangle$, kaže da je reverzibilan akko je svaka neprekidna bijekcija $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ homeomorfizam. Klasa reverzibilnih topoloških prostora sadrži euklidske prostore ($\mathbb{R}^n$), kompaktne Hausdorffove prostore i mnoge druge relevantne klase topoloških prostora (videti [75, 9, 8]). Ako je $\mathbb{P} = \langle P, \leq\rangle$ parcijalno uređenje i $\mathcal{O}_\mathbb{P}$ topologija na skupu P generisana bazom $\{B_p : p \in P\}$, gde je $B_p := \{q \in P : q \leq p\}$, tada su, na osnovu tvrđenja 1.4.6 (b), endomorfizmi poseta $\mathbb{P}$ upravo neprekidna preslikavanja prostora $\langle P, \mathcal{O}_\mathbb{P}\rangle$ u samog sebe. Dakle, poset $\mathbb{P}$ je reverzibilan akko je $\langle P, \mathcal{O}_\mathbb{P}\rangle$ reverzibilan topološki prostor, pa, s obzirom da je poset $\langle P, \leq\rangle$ reverzibilan akko je poset $\langle P, <\rangle$ reverzibilan, rezultati iz ovog odeljka mogu se interpretirati i kao karakterizacija reverzibilnosti u klasi topoloških prostora oblika $\langle P, \mathcal{O}_\mathbb{P}\rangle$, gde je $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \mathbb{L}_i$, a $\mathbb{L}_i$, $i \in I$, su odgovarajuća (stroga) linearna uređenja. Jasno je kako je svaki takav prostor $\langle P, \mathcal{O}_\mathbb{P}\rangle$ T_0-prostor, i kako su skupovi L_i, $i \in I$, njegove komponente povezanosti.

Rezultati iz ovog odeljka dokazani su u [50] i u [49].

σ-rasuti lanci

Podsetimo se kako se, za linearno uređenje (lanac) $\mathbb{L}$, kaže da je rasuto, i piše $\mathbb{L} \in \mathrm{Scatt}$, akko $\mathbb{L}$ ne sadrži gusto poduređenje (što je ekvivalentno sa $\langle \mathbb{Q}, <\rangle \not\hookrightarrow \mathbb{L}$). Za $\mathbb{L}$ se kaže da je σ-rasuto, i piše $\mathbb{L} \in \sigma\text{-}\mathrm{Scatt}$, akko je $\mathbb{L}$ najviše prebrojiva unija rasutih linearnih uređenja.

Tvrđenje 10.4.1 *Ako je $\mathcal{X} = \{\mathbb{L}_i : i \in I\}$, familija po parovima disjunktnih σ-rasutih linearnih uređenja, tada važi:*

$$\text{niz } \langle [\mathbb{L}_i]_{\rightleftarrows} : i \in I\rangle \text{ je konačno-jedan}^8 \implies \text{poset } \bigcup_{i\in I} \mathbb{L}_i \text{ je reverzibilan.}$$

[8] tj. ne postoji beskonačan skup $J \subseteq I$ takav da je $\mathbb{L}_i \rightleftarrows \mathbb{L}_j$, za sve $i, j \in J$.

Dokaz. Jasno je da je $\langle \sigma\text{-}\mathrm{Scatt}, \hookrightarrow\rangle$ preduređenje, i da je relacija ekvimorfizma $\rightleftarrows$ definisana na σ-Scatt sa:

$$\mathbb{L} \rightleftarrows \mathbb{L}' \iff \mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{L}' \wedge \mathbb{L}' \hookrightarrow \mathbb{L},$$

relacija ekvivalencije. Ako klasu ekvivalencije strukture $\mathbb{L}$ označimo sa $[\mathbb{L}]_{\rightleftarrows}$, dobijamo odgovarajući antisimetrični količnik, $\langle \sigma\text{-}\mathrm{Scatt}/\rightleftarrows, \leq_e\rangle$, gde je parcijalno uređenje $\leq_e$ definisano sa

$$[\mathbb{L}]_{\rightleftarrows} \leq_e [\mathbb{L}']_{\rightleftarrows} \iff \mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{L}'.$$

Ako definišemo da je

$$\mathbb{L} \prec_e \mathbb{L}' \iff \mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{L}' \wedge \mathbb{L}' \not\hookrightarrow \mathbb{L},$$

odgovarajuće strogo parcijalno uređenje je $\langle \sigma\text{-}\mathrm{Scatt}/\rightleftarrows, <_e\rangle$, gde je

$$[\mathbb{L}]_{\rightleftarrows} <_e [\mathbb{L}']_{\rightleftarrows} \iff \mathbb{L} \prec_e \mathbb{L}'.$$

Na osnovu klasičnog Laverovog rezultata (da je $\langle \sigma\text{-}\mathrm{Scatt}, \hookrightarrow\rangle$ dobro preduređenje, videti [62, 61]) sledi da u klasi σ-Scatt ne postoje beskonačni opadajući nizovi oblika $\mathbb{L}_0 \succ_e \mathbb{L}_1 \succ_e \mathbb{L}_2 \succ_e \ldots$. Ako bismo pretpostavili da $\langle \sigma\text{-}\mathrm{Scatt}/\rightleftarrows, <_e\rangle \notin \mathrm{Wfr}$, tada bismo imali da postoji neprazan skup $X \subseteq \sigma\text{-}\mathrm{Scatt}/\rightleftarrows$, takav da, za svako $y \in X$, postoji $z \in X$ koje zadovoljava $z <_e y$, pa bi, na osnovu toga, postojao beskonačan opadajući niz $y_0 >_e y_1 >_e y_2 >_e \ldots$. Ako bismo izabrali $\mathbb{L}_i \in y_i$, za $i \in \omega$, dobili bismo opadajući niz $\mathbb{L}_0 \succ_e \mathbb{L}_1 \succ_e \mathbb{L}_2 \succ_e \ldots$, što je nemoguće. Dakle, $\langle \sigma\text{-}\mathrm{Scatt}/\rightleftarrows, <_e\rangle \in \mathrm{Wfr}$.

Neka je $\theta : \mathcal{X} \to \sigma\text{-}\mathrm{Scatt}/\rightleftarrows$ dato sa $\theta(\mathbb{L}_i) := [\mathbb{L}_i]_{\rightleftarrows}$. Ako je $\mathbb{L}_i \preccurlyeq_m \mathbb{L}_j$, tada je, pošto su monomorfizmi između linearnih uređenja utapanja (lema 1.3.1 (b)), $\mathbb{L}_i \hookrightarrow \mathbb{L}_j$, i, na osnovu toga, je $[\mathbb{L}_i]_{\rightleftarrows} \leq_e [\mathbb{L}_j]_{\rightleftarrows}$. Dakle, (10.16) je tačno, pa $\theta \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, i još ostaje da se primeni teorema 10.1.16. ($I^{\theta}_{[\mathbb{L}]_{\rightleftarrows}} = \{i \in I : \mathbb{L}_i \rightleftarrows \mathbb{L}\}$, $\mathbb{L} \in \sigma$-Scatt, su konačni skupovi.) $\square$

Primer 10.4.2 Ako su $\mathbb{L}_i$, $i \in I$, proizvoljna linearna uređenja veličine $\leq \omega$ takva da je niz $\langle [\mathbb{L}_i]_{\rightleftarrows} : i \in I\rangle$ konačno-jedan, tada je $\bigcup_{i\in I} \mathbb{L}_i$ reverzibilan poset. Ovo sledi na osnovu tvrđenja 10.4.1, zato što $\mathbb{L} \in \sigma$-Scatt za svako najviše prebrojivo linearno uređenje $\mathbb{L}$. Primetimo kako u tom slučaju $\mathbb{L}_i \in$ Scatt, za sve, osim, eventualno, konačno mnogo $i \in I$, zato što je, na osnovu Cantorove teoreme (teorema 1.3.2 (a)), svako prebrojivo nerasuto linearno uređenje ekvimorfno sa $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$.

CSB lanci graničnog tipa

Podsetimo se da je uređajni tip lanca $\mathbb{L}$ klasa $\mathrm{otp}(\mathbb{L}) := [\mathbb{L}]_{\cong}$ svih linearnih uređenja izomorfnih $\mathbb{L}$. Za linearno uređenje $\mathbb{L}$ reći ćemo da ima *svojstvo Cantor-Schröder-Bernstein (za utapanja, ili ekvivalentno, za monomorfizme)* akko za svako linearno uređenje $\mathbb{L}'$ koje zadovoljava $\mathbb{L}' \rightleftarrows \mathbb{L}$ imamo da je $\mathbb{L}' \cong \mathbb{L}$, tj. da je $[\mathbb{L}]_{\rightleftarrows} = [\mathbb{L}]_{\cong}$. Sada, kao direktnu posledicu tvrđenja 10.4.1, imamo:

Posledica 10.4.3 *Ako su $\mathbb{L}_i$, $i \in I$, po parovima disjunktna σ-rasuta CSB linearna uređenja, tada važi:*

$$\textit{niz } \langle \mathrm{otp}(\mathbb{L}_i) : i \in I \rangle \textit{ je konačno-jedan}^{9} \implies \textit{poset } \bigcup_{i \in I} \mathbb{L}_i \textit{ je reverzibilan.}$$

Podsetimo se kako se za rasuto linearno uređenje $\mathbb{L}$ kaže da je graničnog tipa akko je

$$\mathbb{L} \rightleftarrows \sum_{s \in S} \mathbb{L}_s,$$

gde $S \in \mathrm{Scatt}$ i $\mathbb{L}_s \cong \omega$ ili je $\mathbb{L}_s \cong \omega^*$, za svako $s \in S$. $\mathbb{L} \in \mathrm{Scatt}$ je graničnog tipa akko $\mathbb{L}$ nema tačaka koje su fiksne za svako $f \in \mathrm{Emb}(\mathbb{L})$, a to važi akko se $\mathbf{1}$ ne pojavljuje u izrazu za $\mathbb{L}$ kao minimalna suma nasledno aditivno nedekompozabilnih linearnih uređenja; videti [61, str. 112]. Npr. linearno uređenje $\mathbb{L} = \omega\omega^* + 1$ je graničnog tipa zato što je $\mathbb{L} \rightleftarrows \omega\omega^*$, ali kako je $\mathbb{L} \ncong \omega\omega^*$, $\mathbb{L}$ nije CSB. Ordinali sledbenici su CSB, ali nisu graničnog tipa. Granični ordinali su CSB graničnog tipa.

Neka $\mathcal{W}$ označava klasu dobrih uređenja, $\mathcal{L}$ klasu dobrih uređenja koja su izomorfna graničnim ordinalima, $\mathcal{Z}$ klasu linearnih uređenja koja su izomorfna $\omega^\theta\omega^* + \omega^\delta$, gde su θ i δ ordinali koji zadovoljavaju $1 \leq \theta < \delta$, i neka $\mathcal{W}^*$, $\mathcal{L}^*$ i $\mathcal{Z}^*$ označavaju klase čiji elementi su, redom, inverzi elemenata iz $\mathcal{W}$, $\mathcal{L}$ i $\mathcal{Z}$. Jasno je da je

$$(\omega^\theta\omega^* + \omega^\delta)^* = (\omega^\delta)^* + (\omega^\theta)^*\omega.$$

Laflamme, Pouzet i Woodrow su u [60] pokazali kako je rasuto linearno uređenje CSB (za utapanja) akko je izomorfno konačnoj sumi linearnih uređenja iz $\mathcal{W} \cup \mathcal{W}^* \cup \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}^*$. U nastavku ćemo dati karakterizaciju CSB linearnih uređenja graničnog tipa.

---

[9] tj. ne postoji beskonačan skup $J \subseteq I$ takav da je $\mathbb{L}_i \cong \mathbb{L}_j$, za sve $i, j \in J$.

Teorema 10.4.4

(a) Linearno uređenje $\mathbb{L}$ je CSB graničnog tipa akko je izomorfno konačnoj sumi linearnih uređenja iz $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}^* \cup \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}^*$.

(b) Ako su $\mathbb{L}_i$, $i \in I$, po parovima disjunktna CSB linearna uređenja graničnog tipa, tada imamo:

$$\text{poset } \bigcup_{i\in I} \mathbb{L}_i \text{ je reverzibilan} \iff \text{niz } \langle \operatorname{otp}(\mathbb{L}_i) : i \in I\rangle \text{ je konačno-jedan.}$$

Dokaz.

(a) Na osnovu gore spomenutog nedavnog rezultata Laflamma, Pouzeta i Woodrowa ([60]), rasuto linearno uređenje je CSB akko je izomorfno konačnoj sumi linearnih uređenja iz $\mathcal{W} \cup \mathcal{W}^* \cup \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}^*$. Neka je $\mathbb{L}$ CSB linearno uređenje graničnog tipa, i neka je $\mathbb{L}$ predstavljeno kao suma

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2 + \cdots + \mathbb{L}_n, \text{ gde } \mathbb{L}_i \in \mathcal{W} \cup \mathcal{W}^* \cup \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}^*, \text{ za } i \leq n.$$

Neka je, pored toga, ovo reprezentacija $\mathbb{L}$ u kojoj se pojavljuje najmanji broj sabiraka iz $\mathcal{W} \cup \mathcal{W}^* \cup \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}^*$. Pretpostavimo da, za neko $i \leq n$, imamo da $\mathbb{L}_i \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{L}$, tj. da je $\mathbb{L}_i = \mathbb{A} + \mathbb{B}$, gde je $\mathbb{A} \cong \gamma \in \operatorname{Lim} \cup \{0\}$, $B = \{b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}\}$, za neko $k \in \mathbb{N}$ i $b_0 < b_1 < \cdots < b_{k-1}$. S obzirom da je $\mathbb{L}$ CSB graničnog tipa, b_0 pripada konveksnom delu C linearnog uređenja $\mathbb{L}$, takvom da je $C \cong \omega$ ili da je $C \cong \omega^*$.

Ako je $C \cong \omega$, tada je $C_1 := C \cap b_{k-1}\uparrow_{\mathbb{L}}$ konveksan deo linearnog uređenja $\mathbb{L}$ tipa ω i $b_k := \min C_1 = \min \mathbb{L}_{i+1}$, što implicira da $\mathbb{L}_{i+1} \in \mathcal{W}$, zato što linearna uređenja iz $(\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}^* \cup \mathcal{W}^*) \setminus \mathcal{W}$ nemaju minimum. Odatle sledi da $\mathbb{L}_i + \mathbb{L}_{i+1} \in \mathcal{W}$, što je kontradikcija s minimalnošću n.

Ako je $C \cong \omega^*$, tada je $\gamma = 0$, $i > 1$, $\mathbb{L}_{i-1} \notin \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}^*$ (zato što linearna uređenja iz $\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}^*$ nemaju maksimum), pa $\mathbb{L}_{i-1} \in \mathcal{W}^*$ i $\mathbb{L}_{i-1} + \mathbb{L}_i \in \mathcal{W}^*$, što je opet kontradikcija s minimalnošću n.

Zaključujemo kako $\mathbb{L}_i \in \mathcal{W}$ implicira da $\mathbb{L}_i \in \mathcal{L}$, i, slično, imamo kako $\mathbb{L}_i \in \mathcal{W}^*$ implicira da $\mathbb{L}_i \in \mathcal{L}^*$.

Obratno, neka je

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2 + \cdots + \mathbb{L}_n, \text{ gde } \mathbb{L}_i \in \mathcal{L} \cup \mathcal{L}^* \cup \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}^*, \text{ za } i \leq n,$$

i neka je n minimalan broj sabiraka iz $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}^* \cup \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}^*$. Poznato je kako je binarna relacija $\sim$ na skupu L definisana sa:

$$x \sim y \iff \Big|[\min\{x,y\}, \max\{x,y\}]\Big| < \omega,$$

relacija ekvivalencije i kako je (videti [77, str. 71]) $\mathbb{L} = \sum_{t\in T} \mathbb{L}_t$, gde $\mathbb{T} \in$ Scatt, $L/\sim = \{L_t : t \in T\}$ i $\operatorname{otp}(\mathbb{L}_t) \in \mathbb{N} \cup \{\omega, \omega^*, \zeta\}$, za svako $t \in T$ (gde je $\zeta := \mathrm{otp}(\mathbb{Z})$). Dakle, pošto svako $x \in L$ pripada konveksnom podskupu C linearnog uređenja L, koji je, ili izomorfan ω (ako $x \in L_i$ i $\mathbb{L}_i \in \mathcal{L} \cup \mathcal{Z}$), ili je izomorfan ω^* (ako $x \in L_i$ i $\mathbb{L}_i \in \mathcal{L}^* \cup \mathcal{Z}^*$), imamo da $\mathrm{otp}(L_t) \notin \mathbb{N}$, za svako $t \in T$. Sledi da se $\mathbb{L}$ može predstaviti kao suma linearnih uređenja izomorfnih ω, ω^* ili $\zeta = \omega^* + \omega$, što implicira da je $\mathbb{L}$ graničnog tipa.

(b) ($\Leftarrow$) Ova implikacije sledi iz posledice 10.4.3.

($\Rightarrow$) Ako niz $\langle \mathrm{otp}(\mathbb{L}_i) : i \in I\rangle$ nije konačno-jedan, neka je

$$J = \{i_k : k \in \omega\} \subseteq I,$$

gde je $i_k \neq i_l$ i $\mathbb{L}_{i_k} \cong \mathbb{L}_{i_l}$, za različite $k, l \in \omega$. Na osnovu pretpostavke, imamo da je $\mathbb{L}_{i_0} \cong \sum_{s\in S} \mathbb{L}_s$, gde je $\mathbb{L}_s \cong \omega$ ili je $\mathbb{L}_s \cong \omega^*$. Za $s \in S$ neka je $L_s = \{a_0^s, a_1^s, a_2^s, \dots\}$ enumeracija takva da je $a_0^s < a_1^s < a_2^s < \cdots$, ako je $\mathbb{L}_s \cong \omega$, odnosno $a_0^s > a_1^s > a_2^s > \cdots$, ako je $\mathbb{L}_s \cong \omega^*$. Tada, ako definišemo

$$A_0 := \{a_{2n}^s : s \in S \wedge n \in \omega\} \ \text{ i } \ A_1 := \{a_{2n+1}^s : s \in S \wedge n \in \omega\},$$

imamo da je $\mathbb{A}_0 \cong \mathbb{A}_1 \cong \mathbb{X}_{i_0}$ i $\{A_0, A_1\}$ je particija skupa X_{i_0}. Definišimo $f \in \mathrm{Sur}(I) \setminus \mathrm{Sym}(I)$ na sledeći način: $f(i_0) = f(i_1) = i_0$, $f(i_k) = i_{k-1}$, za $k \in \mathbb{N}$, i $f(i) = i$, za $i \in I \setminus \{i_k : k \in \omega\}$. Tada je skup X_{i_0} razbijen na kopije X_{i_0} i X_{i_1}, pa, na osnovu posledice 10.1.7, poset $\bigcup_{i\in I} \mathbb{L}_i$ nije reverzibilan. $\Box$

Dobra uređenja

Primetimo kako nam teorema 10.4.4 (b), u specijalnom slučaju, daje karakterizaciju reverzibilnosti u klasi poseta oblika $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \mathbb{L}_i$, gde $\mathbb{L}_i \in \mathcal{L} \cup \mathcal{L}^*$, za $i \in I$. Odgovarajuća karakterizacija, u slučaju kada $\mathbb{L}_i \in \mathcal{W} \cup \mathcal{W}^*$, za $i \in I$, data je u ovom i u narednom pododeljku.

Lema 10.4.5 *Za svako* $\gamma \in \mathrm{Lim}$ *imamo:*

(a) Ako je $1 \leq \lambda \leq \omega$, *tada postoji particija* $\{A_k : k < \lambda\}$ *ordinala* γ *takva da je* $\mathbb{A}_k \cong \gamma$, *za sve* $k < \lambda$;

(b) Ako $m, n \in \omega$ *i* $f : \gamma + m \hookrightarrow \gamma + n$, *tada je* $f[\gamma]$ *neograničen podskup* γ *i* $f[m] \subseteq n$;

(c) Ako je $\alpha \leq \gamma$, *tada postoji particija* $\{A, B\}$ *ordinala* γ, *takva da je* $\mathbb{A} \cong \alpha$ *i* $\mathbb{B} \cong \gamma$.

Dokaz.

(a) Podsetimo se (videti [77, str. 71]) da, ako je $\mathbb{L} = \langle L, <\rangle$ linearno uređenje i $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu L definisana sa:

$$x \sim y \iff \Big|[\min\{x, y\}, \max\{x, y\}]\Big| < \omega,$$

da je tada $\mathbb{L} = \sum_{t\in T} \mathbb{L}_t$, gde je $L/\!\sim = \{L_t : t \in T\}$ i

$$\operatorname{otp}(\mathbb{L}_t) \in \mathbb{N} \cup \{\omega, \omega^*, \zeta\}, \ \ \text{za svako} \ \ t \in T.$$

Dakle, imamo da je $\gamma = \sum_{t\in T} \mathbb{L}_t$, gde je $\mathbb{L}_t \cong \omega$. Izaberimo, za $t \in T$, particiju $\{A_t^k : k < \lambda\}$ skupa L_t takvu da je $|A_t^k| = \omega$, za sve $k < \lambda$. Jasno je da je tada $\mathbb{A}_t^k \cong \omega$, i, na osnovu toga, je

$$\mathbb{A}_k := \sum_{t\in T} \mathbb{A}_t^k \cong \sum_{t\in T} \mathbb{L}_t = \gamma.$$

(b) Pošto $\gamma \in \mathrm{Lim}$ imamo da je $f[\gamma] \subseteq \gamma$. Ako bismo pretpostavili da je $f[\gamma] \subseteq \alpha$, za neko $\alpha < \gamma$, imali bismo da je $\gamma = \operatorname{otp} f[\gamma] \leq \alpha < \gamma$, što je nemoguće. Dakle, $f[\gamma]$ je neograničen podskup γ, i odatle sledi da je $f[m] \subseteq n$.

(c) Na osnovu (a) postoji particija $\{A_0, A_1\}$ ordinala γ, takva da je $\mathbb{A}_0 \cong \mathbb{A}_1 \cong \gamma$. Pošto je $\alpha \leq \gamma$, postoji $A \subseteq A_0$ takvo da je $\mathbb{A} \cong \alpha$, i tada imamo da je

$$\gamma \cong A_1 \subseteq B := \gamma \setminus A \subseteq \gamma$$

što implicira da je $\mathbb{B} \cong \gamma$. □

U nastavku ćemo pretpostaviti da je I neprazan skup, i da je $\langle \alpha_i : i \in I\rangle$ I-niz nenula ordinala. Za $i \in I$, $\alpha_i = \gamma_i + n_i$ biće jedinstvena dekompozicija ordinala α_i, takva da $\gamma_i \in \mathrm{Lim}_0 := \mathrm{Lim} \cup \{0\}$ i da $n_i \in \omega$. Pored toga, pretpostavićemo kako su $\mathbb{L}_i$, $i \in I$, po parovima disjunktna dobra uređenja, pri čemu je $\mathbb{L}_i = \mathbb{L}_i' + \mathbb{L}_i''$, $\mathbb{L}_i' \cong \gamma_i$, $\mathbb{L}_i'' \cong n_i$, dakle $\mathbb{L}_i \cong \alpha_i$. Posmatraćemo poset $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \mathbb{L}_i$, koji ćemo često označavati sa $\bigcup_{i\in I} \alpha_i$, ili sa $\bigcup_{i\in I} \gamma_i + n_i$, kad god ne postoji opasnost od zabune.

Takođe, definisaćemo skupove

$$I_\alpha := \{i \in I : \alpha_i = \alpha\}, \ \ \text{za } \alpha \in \mathrm{Ord},$$

$$J_\gamma := \{j \in I : \gamma_j = \gamma\}, \ \ \text{za } \gamma \in \mathrm{Lim}_0,$$

i, u nastavku, dokazaćemo sledeću karakterizaciju:

Teorema 10.4.6 *Poset $\bigcup_{i\in I} \alpha_i$ je reverzibilan akko je ispunjen tačno jedan od sledeća dva slučaja:*

(I) Niz $\langle \alpha_i : i \in I\rangle$ je konačno-jedan,

(II) Postoji $\gamma := \max\{\gamma_i : i \in I\}$, za $\alpha \leq \gamma$ imamo da je $|I_\alpha| < \omega$, i niz prirodnih brojeva $\langle n_i : i \in J_\gamma \setminus I_\gamma\rangle$ je reverzibilan, ali nije konačno-jedan.

Isto važi i za poset $\bigcup_{i\in I} \alpha_i^*$.

Lema 10.4.7 *Poset* $\bigcup_{i\in I}\gamma+n_i$ *je reverzibilan akko je* $|I_\gamma|<\omega$ *i niz prirodnih brojeva* $\langle n_i : i\in I\setminus I_\gamma\rangle$ *je reverzibilan.*

Dokaz. Neka je $\mathbb{P} := \bigcup_{i\in I}\mathbb{L}_i$, gde su

$$\mathbb{L}_i = \mathbb{L}_i' + \mathbb{L}_i'' \cong \gamma + n_i, \text{ za } i\in I,$$

disjunktna dobra uređenja. Dokazaćemo kontrapoziciju tvrđenja.

Neka je poset $\mathbb{P}$ nereverzibilan i neka je $|I_\gamma|<\omega$. Tada, na osnovu posledice 10.1.7, postoji $f\in \mathrm{Sur}(I)\setminus \mathrm{Sym}(I)$ takvo da, za svako $j\in I$, postoji particija $\{A_i : i\in f^{-1}[\{j\}]\}$ skupa L_j takva da je $\mathbb{A}_i=\mathbb{A}_i'+\mathbb{A}_i''$, gde je

$$\mathbb{A}_i'\cong \mathbb{L}_i' \text{ i } \mathbb{A}_i''\cong\mathbb{L}_i'', \text{ za sve } i\in f^{-1}[\{j\}].$$

Ako $i\in I\setminus I_\gamma$, tada je $\mathbb{L}_i$ ordinal sledbenik koji je veći od γ, pa, s obzirom da se $\mathbb{L}_i\hookrightarrow\mathbb{L}_{f(i)}$, imamo da $f(i)\in I\setminus I_\gamma$. Dakle, $f[I\setminus I_\gamma]\subseteq I\setminus I_\gamma$, i, pošto je $|f[I_\gamma]|<\omega$ i f je surjekcija, imamo da je $f[I\setminus I_\gamma]=I\setminus I_\gamma$, što implicira da je

$$f[I_\gamma]=I_\gamma \text{ i } f\restriction_{I\setminus I_\gamma}\in \mathrm{Sur}(I\setminus I_\gamma)\setminus\mathrm{Sym}(I\setminus I_\gamma). \tag{10.49}$$

Ako $j\in I\setminus I_\gamma$, $i\in f^{-1}[\{j\}]$ i $g_i:\mathbb{L}_i\hookrightarrow\mathbb{L}_j$, gde je $g_i[L_i]=A_i$, tada, na osnovu (10.49), imamo da $i\in I\setminus I_\gamma$ pa je, na osnovu leme 10.4.5 (b),

$$g_i[L_i']=A_i'\subseteq L_j' \text{ i } g_i[L_i'']=A_i''\subseteq L_j''.$$

Kako je $\{A_i : i\in f^{-1}[\{j\}]\}$ particija skupa L_j sledi da je $\{A_i'' : i\in f^{-1}[\{j\}]\}$ particija skupa L_j''. Sada, s obzirom da je $\mathbb{A}_i''\cong n_i$ i $\mathbb{L}_j''\cong n_j$, imamo da je $\sum_{i\in f^{-1}[\{j\}]}n_i=n_j$, za sve $j\in I\setminus I_\gamma$, pa niz prirodnih brojeva $\langle n_i : i\in I\setminus I_\gamma\rangle$ nije reverzibilan.

Obratno, ako je $|I_\gamma|\geq\omega$, tada je $\gamma>0$, i poset $\bigcup_{i\in I_\gamma}\mathbb{L}_i$ nije reverzibilan na osnovu teoreme 10.4.4 (b). Sada, poset $\mathbb{P}$ nije reverzibilan na osnovu teoreme 10.1.1.

Ako niz prirodnih brojeva $\langle n_i : i\in I\setminus I_\gamma\rangle$ nije reverzibilan pokazaćemo da unija $\bigcup_{i\in I\setminus I_\gamma}\mathbb{L}_i$ nije reverzibilan poset, što će, na osnovu teoreme 10.1.1, značiti da poset $\mathbb{P}$ takođe nije reverzibilan. B.o.o. pretpostavimo da je $I_\gamma=\emptyset$ i neka $f\in\mathrm{Sur}(I)\setminus\mathrm{Sym}(I)$, pri čemu je $\sum_{i\in f^{-1}[\{j\}]}n_i=n_j$, za sve $j\in I$. Tada, za $j\in I$, imamo da je $|f^{-1}[\{j\}]|<\omega$, pa, na osnovu leme 10.4.5 (a), postoji particija $\{A_i' : i\in f^{-1}[\{j\}]\}$ skupa $L_j'\cong\gamma$ takva da je

$$\mathbb{A}_i'\cong\gamma\cong\mathbb{L}_i', \text{ za sve } i\in f^{-1}[\{j\}].$$

Pošto je $\sum_{i\in f^{-1}[\{j\}]} n_i = n_j$, postoji particija $\{A''_i : i \in f^{-1}[\{j\}]\}$ skupa $L''_j \cong n_j$ takva da je

$$\mathbb{A}''_i \cong n_i \cong \mathbb{L}''_i, \text{ za sve } i \in f^{-1}[\{j\}].$$

Ako sada definišemo da je $A_i := A'_i \cup A''_i$, za $i \in f^{-1}[\{j\}]$, dobićemo particiju $\{A_i : i \in f^{-1}[\{j\}]\}$ skupa L_j, pri čemu je

$$\mathbb{A}_i \cong \gamma + n_i \cong \mathbb{L}_i, \text{ za sve } i \in f^{-1}[\{j\}].$$

Na osnovu posledice 10.1.7 poset $\bigcup_{i\in I} \mathbb{L}_i$ nije reverzibilan. □

Teorema 10.4.8 *Poset $\bigcup_{i\in I} \alpha_i$ nije reverzibilan akko je ispunjen bar jedan od sledeća dva slučaja:*
(A) Postoje $i \in I$ i $\alpha \leq \gamma_i$ takvi da je $|I_\alpha| \geq \omega$,
(B) Postoji $\gamma \in \mathrm{Lim}_0$ takvo da je $|J_\gamma \setminus I_\gamma| \geq \omega$ i niz prirodnih brojeva $\langle n_i : i \in J_\gamma \setminus I_\gamma\rangle$ nije reverzibilan.

Dokaz.
($\Leftarrow$) Neka $i_0 \in I$, $\alpha \leq \gamma_{i_0}$ i neka je $|I_\alpha| \geq \omega$. Neka je $\langle i_k : k \in \mathbb{N}\rangle$ jedan-jedan niz u $I_\alpha \setminus \{i_0\}$ i neka je $I' := \{i_k : k \in \omega\}$. Tada $f \in \mathrm{Sur}(I') \setminus \mathrm{Sym}(I')$, gde je $f(i_0) = f(i_1) = i_0$ i $f(i_{k+1}) = i_k$, za $k \geq 1$. Sada imamo da je $f^{-1}[\{i_0\}] = \{i_0, i_1\}$, i, s obzirom da je $\alpha \leq \gamma_{i_0} \cong \mathbb{L}'_{i_0}$, na osnovu leme 10.4.5(c) postoji particija $\{A, B\}$ skupa L'_{i_0}, takva da je je $\mathbb{A}_{i_1} := \mathbb{A} \cong \alpha \cong \mathbb{L}_{i_1}$ i $\mathbb{B} \cong \gamma_{i_0}$. Dakle,

$$\mathbb{A}_{i_0} := \mathbb{B} + \mathbb{L}''_{i_0} \cong \gamma_{i_0} + n_{i_0} \cong \mathbb{L}_{i_0}$$

i $\{A_{i_0}, A_{i_1}\}$ je particija skupa L_{i_0}. Za $k \geq 1$ imamo da je $f^{-1}[\{i_k\}] = \{i_{k+1}\}$ i $\mathbb{L}_{i_k} \cong \alpha \cong \mathbb{L}_{i_{k+1}}$. Na osnovu posledice 10.1.7 unija $\bigcup_{i\in I'} \mathbb{L}_i$ nije reverzibilna, odakle, na osnovu teoreme 10.1.1, sledi da poset $\mathbb{P}$ nije reverzibilan.

Neka $\gamma \in \mathrm{Lim}_0$, pri čemu je $|J_\gamma \setminus I_\gamma| \geq \omega$ i pretpostavimo da niz prirodnih brojeva $\langle n_i : i \in J_\gamma \setminus I_\gamma\rangle$ nije reverzibilan. Tada, na osnovu leme 10.4.7, unija $\bigcup_{i\in J_\gamma} \mathbb{L}_i$ nije reverzibilna, pa poset $\mathbb{P}$ nije reverzibilan na osnovu teoreme 10.1.1.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da unija $\bigcup_{i\in I} \alpha_i$ nije reverzibilna i da (A) nije ispunjeno, tj. da važi

$$\forall i \in I \ \ \forall \alpha \leq \gamma_i \ \ |I_\alpha| < \omega. \tag{10.50}$$

Na osnovu posledice 10.4.3 imamo da je $K = \{\alpha \in \mathrm{Ord} : |I_\alpha| \geq \omega\} \neq \emptyset$, pa je, na osnovu (10.50),

$$\forall i \in I \ \ \forall \alpha \in K \ \ \gamma_i < \alpha, \tag{10.51}$$

što implicira da postoji $\gamma^\star = \max\{\gamma_i : i \in I\} \in \mathrm{Lim}_0$ takvo da, za svako $i \in \bigcup_{\alpha \in K} I_\alpha$, važi da je $\gamma_i = \gamma^\star$, tj. da je $\alpha_i = \gamma^\star + n_i$.

Neka je $A := \{\alpha_i : i \in I \wedge \alpha_i < \gamma^\star\}$ i neka je $\langle \alpha_\xi : \xi < \zeta \rangle$ rastuća enumeracija skupa A. Tada je

$$I = J_{\gamma^\star} \cup \bigcup_{\xi<\zeta} I_{\alpha_\xi}$$

particija skupa I, i, na osnovu (10.50), je $|I_{\alpha_\xi}| < \omega$, za $\xi < \zeta$.

Na osnovu posledice 10.1.7 postoji $f \in \mathrm{Sur}(I) \setminus \mathrm{Sym}(I)$ takvo da se, za svako $j \in I$, skup α_j može razbiti na kopije α_i, za $i \in f^{-1}[\{j\}]$. Pošto se $\alpha_i \hookrightarrow \alpha_{f(i)}$, imamo da je

$$\forall i \in I \ \ \alpha_i \leq \alpha_{f(i)}. \tag{10.52}$$

Dokazaćemo indukcijom da je

$$\forall \xi < \zeta \quad f[I_{\alpha_\xi}] = I_{\alpha_\xi}. \tag{10.53}$$

Ako $j \in I_{\alpha_0}$, tada, na osnovu (10.52), za $i \in f^{-1}[\{j\}]$ imamo da je $\alpha_i \leq \alpha_j = \alpha_0$, što, na osnovu minimalnosti α_0, implicira da je $\alpha_i = \alpha_0$, tj. da $i \in I_{\alpha_0}$. Dakle, $f^{-1}[\{j\}] \subseteq I_{\alpha_0}$, za sve $j \in I_{\alpha_0}$, pa je $f^{-1}[I_{\alpha_0}] \subseteq I_{\alpha_0}$. S obzirom da je f surjekcija, imamo da je

$$I_{\alpha_0} = f[f^{-1}[I_{\alpha_0}]] \subseteq f[I_{\alpha_0}],$$

odakle sledi da je $|I_{\alpha_0}| \leq |f[I_{\alpha_0}]| \leq |I_{\alpha_0}|$. Dakle, $|I_{\alpha_0}| = |f[I_{\alpha_0}]|$, što, s obzirom da je skup I_{α_0} konačan i $I_{\alpha_0} \subseteq f[I_{\alpha_0}]$, implicira da je $f[I_{\alpha_0}] = I_{\alpha_0}$.

Ako pretpostavimo da je $\eta < \zeta$ i da je $f[I_{\alpha_\xi}] = I_{\alpha_\xi}$, za sve $\xi < \eta$, dokazaćemo da je $f[I_{\alpha_\eta}] = I_{\alpha_\eta}$. Ako $j \in I_{\alpha_\eta}$ i $i \in f^{-1}[\{j\}]$, tada, na osnovu (10.52), imamo da je $\alpha_i \leq \alpha_j = \alpha_\eta$. Nejednakost $\alpha_i < \alpha_\eta$ bi implicirala da je $\alpha_i = \alpha_\xi$, za neko $\xi < \eta$, tj. da $i \in I_{\alpha_\xi}$, odakle bismo, prema indukcijskoj hipotezi, imali da $j = f(i) \in I_{\alpha_\xi}$, što je netačno. Dakle, $\alpha_i = \alpha_\eta$ i, prema tome, $i \in I_{\alpha_\eta}$. Odatle sledi da je $f^{-1}[\{j\}] \subseteq I_{\alpha_\eta}$, za sve $j \in I_{\alpha_\eta}$, pa imamo da je $f^{-1}[I_{\alpha_\eta}] \subseteq I_{\alpha_\eta}$. Sada se, isto kao iznad, pokazuje da je $f[I_{\alpha_\eta}] = I_{\alpha_\eta}$ i (10.53) je time dokazano.

Na osnovu (10.53) i, s obzirom da je $|I_{\alpha_\xi}| < \omega$, za $\xi < \zeta$, restrikcije $f|I_{\alpha_\xi} : I_{\alpha_\xi} \to I_{\alpha_\xi}$, $\xi < \zeta$, su bijekcije, pa je

$$f|_{\bigcup_{\xi<\zeta} I_{\alpha_\xi}} : \bigcup_{\xi<\zeta} I_{\alpha_\xi} \to \bigcup_{\xi<\zeta} I_{\alpha_\xi}$$

takođe bijekcija. Ne osnovu (10.52) imamo da je $f[J_{\gamma^\star}] \subseteq J_{\gamma^\star}$, pa, kako je $f : I \to I$ neinjektivna surjekcija, zaključujemo da je $f|_{J_{\gamma^\star}} : J_{\gamma^\star} \to J_{\gamma^\star}$

takođe neinjektivna surjekcija. Na osnovu posledice 10.1.7 unija $\bigcup_{i\in J_{\gamma^\star}} \alpha_i$ nije reverzibilna, pa je, prema lemi 10.4.7, $|I_{\gamma^\star}| \geq \omega$ ili niz prirodnih brojeva $\langle n_i : i \in J_{\gamma^\star} \setminus I_{\gamma^*}\rangle$ nije reverzibilan. Ali $|I_{\gamma^\star}| \geq \omega$ bi impliciralo da $\gamma^\star \in K$, što je, prema (10.51), nemoguće. Dakle, (B) je tačno. $\square$

Dokaz teoreme 10.4.6 Očigledno je da se uslovi (I) i (II) međusobno isključuju.

($\Rightarrow$) Neka je $\mathbb{P} := \bigcup_{i\in I} \alpha_i$ reverzibilan poset i pretpostavimo da niz $\langle \alpha_i : i \in I\rangle$ nije konačno-jedan, tj. da je $K = \{\alpha \in \mathrm{Ord} : |I_\alpha| \geq \omega\} \neq \emptyset$. Na osnovu teoreme 10.4.8 imamo $\neg$(A) i $\neg$(B). Sada ćemo, isto kao u dokazu teoreme 10.4.8, naći $\gamma^\star \in \mathrm{Lim}_0$ takvo da, za svako $i \in \bigcup_{\alpha\in K} I_\alpha$, imamo da je $\gamma_i = \gamma^\star$, tj. da je $\alpha_i = \gamma^\star + n_i$, i da je $\gamma_i \leq \gamma^\star$, za sve $i \in I$. Dakle, $\gamma^\star = \max\{\gamma_i : i \in I\}$. Na osnovu $\neg$(A) imamo da je $|I_\alpha| < \omega$, za sve $\alpha \leq \gamma^\star$. Pored toga,

$$I = J_{\gamma^\star} \cup \bigcup\nolimits_{\xi<\zeta} I_{\alpha_\xi}$$

je particija skupa I i $|I_{\alpha_\xi}| < \omega$, za $\xi < \zeta$. Ako bi skup $J_{\gamma^\star} = \{i \in I : \alpha_i \geq \gamma^\star\}$ bio konačan, tada bi niz $\langle \alpha_i : i \in I\rangle$ bio konačno-jedan, što je u suprotnosti s našom pretpostavkom. Dakle, $|J_{\gamma^\star}| \geq \omega$, i, s obzirom da iz $\neg$(A) sledi da je $|I_{\gamma^\star}| < \omega$, imamo da je $|J_{\gamma^\star} \setminus I_{\gamma^\star}| \geq \omega$, što, zajedno sa $\neg$(B), implicira da je niz prirodnih brojeva $\langle n_i : i \in J_{\gamma^\star} \setminus I_{\gamma^\star}\rangle$ reverzibilan.

($\Leftarrow$) Na osnovu posledice 10.4.3, uslov (I) implicira da je poset $\mathbb{P}$ reverzibilan.

Ako pretpostavim da je (II) ispunjeno, dokazaćemo $\neg$(A) i $\neg$(B). Prvo, ako $i \in I$ i ako je $\alpha \leq \gamma_i$, tada, s obzirom da je $\gamma_i \leq \gamma$, na osnovu (II) imamo da je $|I_\alpha| < \omega$ i $\neg$(A) je tačno.

Drugo, pretpostavimo da je (B) tačno. Tada postoji $\gamma' \in \mathrm{Lim}_0$, pri čemu je $|J_{\gamma'} \setminus I_{\gamma'}| \geq \omega$ i niz prirodnih brojeva $\langle n_i : i \in J_{\gamma'} \setminus I_{\gamma'}\rangle$ nije reverzibilan. Na osnovu teoreme 10.2.6, ovaj niz nije konačno-jedan, što znači da postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $|I_{\gamma'+n}| \geq \omega$. Prema (II) imamo da je $\gamma' < \gamma$, i, na osnovu toga, je $\alpha := \gamma' + n < \gamma$. Sada, prema (II) opet, imamo da je $|I_\alpha| < \omega$ što je kontradikcija. Dakle, $\neg$(B) je tačno. $\square$

Primer 10.4.9 Na osnovu teoreme 10.4.6 poset $\mathbb{P}$ je reverzibilan, zato što zadovoljava (II), gde je

$$\mathbb{P} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n \cup \bigcup_{14} \omega \cup \bigcup_{\omega_1} (\omega+4) \cup \bigcup_{\omega_3} (\omega+6) \cup \bigcup_{n\in\omega} (\omega+2n+1).$$

S druge strane, ako je

$$\mathbb{P}_1 := \bigcup_{\omega} 1 \cup \omega \quad \text{i} \quad \mathbb{P}_2 := \bigcup_{\omega} (\omega+2) \cup \bigcup_{\omega} (\omega+4),$$

tada, prema teoremi 10.4.8, poset $\mathbb{P}_1$ nije reverzibilan, zato što zadovoljava (A) i poset $\mathbb{P}_2$ nije reverzibilan, zato što zadovoljava (B).

Primedba 10.4.10 Ako je „granični deo" $\bigcup_{i\in I}\gamma_i$ unije $\bigcup_{i\in I}\alpha_i$ reverzibilan i $\gamma_i \geq \omega$, za sve $i \in I$, tada je unija $\bigcup_{i\in I}\alpha_i$ takođe reverzibilna. Naime, na osnovu teoreme 10.4.4(b), niz $\langle \gamma_i : i \in I\rangle$ je konačno-jedan, pa je i niz $\langle \alpha_i : i \in I\rangle$ takođe konačno-jedan. Sada još preostaje primeniti posledicu 10.4.3.

Dobra uređenja i njihovi inverzi

Neka je $\mathbb{P} := \bigcup_{i\in I}\mathbb{L}_i$, pri čemu $\mathbb{L}_i \in \mathcal{W}\cup\mathcal{W}^*$, za sve $i \in I$, i neka je

$$\begin{aligned} I_{fin} &:= \{i \in I : |L_i| < \omega\}, \\ I_{\mathcal{W}} &:= \{i \in I : \mathbb{L}_i \in \mathcal{W} \wedge |L_i| \geq \omega\}, \\ I_{\mathcal{W}^*} &:= \{i \in I : \mathbb{L}_i \in \mathcal{W}^* \wedge |L_i| \geq \omega\}. \end{aligned}$$

Jasno je da je $\{I_{\mathcal{W}^*}, I_{fin}, I_{\mathcal{W}}\}$ particija skupa I. Ako definišemo da je

$$\mathbb{P}_{\mathcal{W}} := \bigcup_{i\in I_{fin}\cup I_{\mathcal{W}}}\mathbb{L}_i \quad \text{i} \quad \mathbb{P}_{\mathcal{W}^*} := \bigcup_{i\in I_{fin}\cup I_{\mathcal{W}^*}}\mathbb{L}_i,$$

vidimo da je $\mathbb{P}_{\mathcal{W}}$ (redom $\mathbb{P}_{\mathcal{W}^*}$) disjunktna unija dobrih uređenja (redom, inverza dobrih uređenja) i reverzibilnost ovih poseta okarakterisana je u teoremi 10.4.6. Dakle, ako je $I_{\mathcal{W}} = \emptyset$ ili je $I_{\mathcal{W}^*} = \emptyset$, primenjujemo teoremu 10.4.6.

Teorema 10.4.11 *Ako je $\mathbb{P} := \bigcup_{i\in I}\mathbb{L}_i$, pri čemu $\mathbb{L}_i \in \mathcal{W}\cup\mathcal{W}^*$, za sve $i \in I$, i $I_{\mathcal{W}} \neq \emptyset$ kao i $I_{\mathcal{W}^*} \neq \emptyset$, tada je poset $\mathbb{P}$ reverzibilan akko su poseti $\mathbb{P}_{\mathcal{W}}$ i $\mathbb{P}_{\mathcal{W}^*}$ reverzibilni.*

Dokaz.

($\Rightarrow$) Ova implikacija sledi na osnovu teoreme 10.1.1.

($\Leftarrow$) Ako pretpostavimo da su poseti $\mathbb{P}_{\mathcal{W}}$ i $\mathbb{P}_{\mathcal{W}^*}$ reverzibilni, na osnovu teoreme 10.4.6 imamo sledeća dva slučaja:

Slučaj 1. Barem jedan među posetima $\mathbb{P}_{\mathcal{W}}$ i $\mathbb{P}_{\mathcal{W}^*}$ zadovoljava (II). Ako $\mathbb{P}_{\mathcal{W}}$ zadovoljava (II), tada je $\gamma = \max\{\gamma_i : i \in I_{\mathcal{W}}\} \geq \omega$, i, za $n < \omega$, imamo da je $|I_n| < \omega$. Prema posledici 10.1.7, ako pretpostavimo da $f \in \mathrm{Sur}(I)$ i da, za svako $j \in I$, postoji particija $\{A_i : i \in f^{-1}[\{j\}]\}$ skupa L_j takva da je

$$\forall i \in f^{-1}[\{j\}] \;\; \mathbb{L}_i \cong \mathbb{A}_i, \tag{10.54}$$

pokazaćemo da $f \in \mathrm{Sym}(I)$. Neka je $\{n_k : k < \mu\}$ rastuća enumeracija skupa $\{|L_i| : i \in I \wedge |L_i| < \omega\}$. Jasno je da je $\mu \leq \omega$ i $|I_{n_k}| < \omega$, za sve $k < \mu$. Pošto je f surjekcija, jednostavnom indukcijom dokazuje se da je $f[I_{n_k}] = I_{n_k}$, za sve $k < \mu$, odakle sledi da je

$$f[I_{fin}] = \bigcup_{k<\mu} f[I_{n_k}] = I_{fin}.$$

Očigledno je da je $f[I_{\mathcal{W}}] \subseteq I_{\mathcal{W}}$, i da je $f[I_{\mathcal{W}^*}] \subseteq I_{\mathcal{W}^*}$, što, s obzirom da je f surjekcija, implicira da je $f[I_{\mathcal{W}}] = I_{\mathcal{W}}$ i da je $f[I_{\mathcal{W}^*}] = I_{\mathcal{W}^*}$. Dakle, $f[I_{fin} \cup I_{\mathcal{W}}] = I_{fin} \cup I_{\mathcal{W}}$, tj.

$$f_{I_{fin}\cup I_{\mathcal{W}}} := f \restriction_{I_{fin}\cup I_{\mathcal{W}}} \in \mathrm{Sur}(I_{fin} \cup I_{\mathcal{W}}).$$

Pošto je $f[I_{\mathcal{W}^*}] = I_{\mathcal{W}^*}$, za $j \in I_{fin} \cup I_{\mathcal{W}}$ imamo da je $f^{-1}[\{j\}] = f^{-1}_{I_{fin}\cup I_{\mathcal{W}}}[\{j\}]$. Sada, s obzirom da je poset $\mathbb{P}_{\mathcal{W}}$ reverzibilan, koristeći posledicu 10.1.7 dobijamo da

$$f \restriction_{I_{fin}\cup I_{\mathcal{W}}} \in \mathrm{Sym}(I_{fin} \cup I_{\mathcal{W}}),$$

što implicira da $f \restriction_{I_{fin}} \in \mathrm{Sym}(I_{fin})$ i da $f \restriction_{I_{\mathcal{W}}} \in \mathrm{Sym}(I_{\mathcal{W}})$. Slično, imamo da

$$f \restriction_{I_{fin}\cup I_{\mathcal{W}^*}} \in \mathrm{Sym}(I_{fin} \cup I_{\mathcal{W}^*}),$$

što implicira da $f \restriction_{I_{\mathcal{W}^*}} \in \mathrm{Sym}(I_{\mathcal{W}^*})$. Sada zaista imamo da $f \in \mathrm{Sym}(I)$.

Ako $\mathbb{P}_{\mathcal{W}^*}$ zadovoljava (II) dokaz je sličan.

Slučaj 2. Poseti $\mathbb{P}_{\mathcal{W}}$ i $\mathbb{P}_{\mathcal{W}^*}$ zadovoljavaju (I). Tada su nizovi tipova $\langle \mathrm{otp}(\mathbb{L}_i) : i \in I_{fin} \cup I_w \rangle$ i $\langle \mathrm{otp}(\mathbb{L}_i) : i \in I_{fin} \cup I_{w^*} \rangle$ konačno-jedan, pa je i niz tipova $\langle \mathrm{otp}(\mathbb{L}_i) : i \in I \rangle$ takođe konačno-jedan. Poset $\mathbb{P}$ je sada reverzibilan na osnovu posledice 10.4.3. $\square$

Primedba 10.4.12 Rajagopalan i Wilansky su u [75, Question 9.I] postavili sledeće pitanje:

„Da li je proizvod diskretne dvotačke i reverzibilnog topološkog prostora $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ reverzibilan?”,

i dali su pozitivan odgovor na to pitanje u slučaju kad je prostor $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ povezan. U nastavku ćemo dati pozitivan odgovor na to pitanje u jednom drugom specijalnom slučaju, kad je, naime, prostor $\langle X, \mathcal{O} \rangle = \langle P, \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \rangle$, za $\mathbb{P} := \bigcup_{i \in I} \mathbb{L}_i$, pri čemu $\mathbb{L}_i \in \mathcal{W} \cup \mathcal{W}^*$, za $i \in I$ (videti uvodni pasus u ovom odeljku). Grubo govoreći, ako je $\langle x_i : i \in I \rangle$ neki I-niz, sa $2 \times \langle x_i : i \in I \rangle$ označavaćemo niz $\langle x_i^k : \langle k, i \rangle \in 2 \times I \rangle$, gde je $x_i^0 = x_i^1 = x_i$, za sve $i \in I$. Tada, na osnovu teoreme 10.2.6 imamo da je niz $\langle n_i \rangle \in {}^I\mathbb{N}$ reverzibilan akko je niz $2 \times \langle n_i \rangle$ reverzibilan. Sada, na osnovu teoreme 10.4.6 zaključujemo da je unija $\bigcup_{i\in I}\alpha_i$ reverzibilna akko je unija $\bigcup_{\langle k,i\rangle\in 2\times I}\alpha_i^k$ reverzibilna. Dakle, ako $\mathbb{L}_i\in\mathcal{W}\cup\mathcal{W}^*$, za $i\in I$, tada je, na osnovu teoreme 10.4.11, poset $\mathbb{P}=\bigcup_{i\in I}\mathbb{L}_i$ reverzibilan akko je poset $\mathbb{P}\cup\mathbb{P}=\bigcup_{\langle k,i\rangle\in 2\times I}\mathbb{L}_i^k$ reverzibilan. Lako se pokazuje da je topološki prostor koji odgovara posetu $\mathbb{P}\cup\mathbb{P}$ homeomorfan $2\times\langle P,\mathcal{O}_\mathbb{P}\rangle$, odakle sledi da je prostor $\langle P,\mathcal{O}_\mathbb{P}\rangle$ reverzibilan akko je prostor $2\times\langle P,\mathcal{O}_\mathbb{P}\rangle$ reverzibilan.

Primedba 10.4.13 Jasno je da su poseti oblika $\mathbb{P}:=\bigcup_{i\in I}\mathbb{L}_i$, gde $\mathbb{L}_i\in\mathcal{W}$, za $i\in I$, u stvari, drveta. Dakle, teorema 10.4.6 može se razumeti kao karakterizacija reverzibilnosti u klasi takvih drveta, i pomoću nje možemo konstruisati reverzibilna drveta proizvoljne veličine i visine, kod kojih su svi nivoi beskonačni. Podsetimo se kako su, na osnovu rezultata iz [27], dobro fundirani poseti s konačnim nivoima reverzibilni.

Poseti koji su istraženi u ovom i u prethodnom pododeljku su disjunktne unije rasutih linearnih uređenja. Prirodno se postavlja pitanje šta se događa u slučaju kada neki među lancima $\mathbb{L}_i$, $i\in I$, nisu rasuti. Sledeći primer u vezi je s tim pitanjem.

Primer 10.4.14 Ako je $\mathbb{P}:=\bigcup_{i\in\omega}\mathbb{L}_i$, pri čemu su $\mathbb{L}_i$, $i\in\omega$, po parovima disjunktna prebrojiva linearna uređenja, $\mathbb{L}_0=\mathbb{Q}$ i $\mathbb{L}_i$ je CSB linearno uređenje, za $i>0$, dokazaćemo da tada važi:

$$\text{poset } \mathbb{P} \text{ je reverzibilan} \iff \text{niz } \langle \mathrm{otp}(\mathbb{L}_i) : i\in\omega\rangle \text{ je konačno-jedan.}$$

Pošto su prebrojiva CSB linearna uređenja rasuta, za $i>0$ imamo da $\mathbb{L}_i\in$ Scatt i $\mathrm{otp}(\mathbb{L}_i)=[\mathbb{L}_i]_{\rightleftarrows}$. Dakle, ako je niz $\langle\mathrm{otp}(\mathbb{L}_i):i\in\omega\rangle$ konačno-jedan, niz $\langle[\mathbb{L}_i]_{\rightleftarrows}:i\in\omega\rangle$ je takođe konačno-jedan, i poset $\mathbb{P}$ je reverzibilan na osnovu tvrđenja 10.4.1.

Obratno, ako niz $\langle\mathrm{otp}(\mathbb{L}_i):i\in\omega\rangle$ nije konačno-jedan i ako je $|I_\tau|=\omega$, za neki uređajni tip τ, tada je τ rasut tip. Neka je $i_0:=0$ i neka je $\langle i_k:k\in\mathbb{N}\rangle$ jedan-jedan niz u I_τ. Neka je $g:\mathbb{L}_{i_1}\hookrightarrow\mathbb{Q}=\mathbb{L}_{i_0}$. Lako se vidi da je $Q\setminus g[L_{i_1}]$ gusto linearno uređenje bez krajnjih tačaka, pa je, na osnovu Cantorove teoreme, $\mathbb{Q}\cong Q\setminus g[L_{i_1}]$. Sada, ako definišemo

$$f\in\mathrm{Sur}(\{i_k:k\in\omega\})\setminus\mathrm{Sym}(\{i_k:k\in\omega\})$$

na sledeći način: $f(i_0)=f(i_1)=i_0$ i $f(i_{k+1})=i_k$, za $k\in\mathbb{N}$, koristeći posledicu 10.1.7 zaključujemo da poset $\bigcup_{k\in\omega}\mathbb{L}_{i_k}$ nije reverzibilan, odakle, na osnovu teoreme 10.1.1, sledi da poset $\mathbb{P}$ takođe nije reverzibilan. Time je tvrđenje dokazano.

Naravno, dato tvrđenja važi i u nešto opštijoj situaciji, kada imamo konačno mnogo prebrojivih lanaca koji nisu rasuti, jedan od njih sadrži konveksnu kopiju $\mathbb{Q}$, i sve rasute komponente, osim eventualno konačno mnogo, su prebrojiva CSB linearna uređenja.

Razni koncepti reverzibilnih nizova

Sada ćemo prodiskutovati nekoliko koncepata „reverzibilnih nizova” koji su u vezi sa ovom tematikom. Prvo, uslov (10.3) definiše *reverzibilan niz struktura*, a uslov (10.24) definiše *reverzibilan niz kardinala* (i specijalno, kada su svi kardinali konačni, *reverzibilan niz prirodnih brojeva*). Pored toga, za niz nenula ordinala $\langle \alpha_i : i \in I\rangle$ reći ćemo da je *reverzibilan niz ordinala* akko zadovoljava, ili (I), ili (II), iz teoreme 10.4.6. Tada imamo sledeće:

Tvrđenje 10.4.15 *Za svaki niz nenula kardinala $\bar{\kappa} = \langle \kappa_i : i \in I\rangle$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) Poset $\bigcup_{i\in I} \kappa_i$ je reverzibilna struktura;

(b) $\bar{\kappa}$ je reverzibilan niz struktura;

(c) $\bar{\kappa}$ je reverzibilan niz ordinala;

(d) $\bar{\kappa}$ je reverzibilan niz kardinala;

(e) $\bar{\kappa}$ je konačno-jedan niz ili je to reverzibilan niz prirodnih brojeva.

Dokaz. Ekvivalencija (a)$\Leftrightarrow$(b) sledi na osnovu posledice 10.1.7, (a)$\Leftrightarrow$(c) je teorema 10.4.6, a (d)$\Leftrightarrow$(e) je tvrđenje 10.2.3.

(d)$\Rightarrow$(b) Dokazaćemo kontrapoziciju. Ako $f \in \mathrm{Sur}(I) \setminus \mathrm{Sym}(I)$ i ako, za svako $j \in I$, imamo da je $\bigcup_{i\in f^{-1}[\{j\}]} \kappa_i \preccurlyeq_c \kappa_j$, tada je jasno da važi $\sum_{i\in f^{-1}[\{j\}]} \kappa_i = \kappa_j$, za sve $j \in J$.

(c)$\Rightarrow$(e) Ako $\bar{\kappa}$ zadovoljava (I), tada je (e) tačno. A ako $\bar{\kappa}$ zadovoljava (II), tada postoji $\gamma = \max\{\gamma_i : i \in I\}$, i, pri tome, niz prirodnih brojeva $\langle n_i : i \in J_\gamma \setminus I_\gamma\rangle$ nije konačno-jedan, što implicira da je $|J_\gamma \setminus I_\gamma| \geq \omega$. Pošto su beskonačni kardinali granični ordinali, zaključujemo da je $\gamma = 0$. Dakle, $\bar{\kappa} \in {}^I\mathbb{N}$ i $I_\gamma = \emptyset$, što implicira da je $J_\gamma \setminus I_\gamma = I$, pa je, na osnovu (II), niz prirodnih brojeva $\bar{\kappa} = \langle n_i : i \in I\rangle$ reverzibilan. $\square$

Primedba 10.4.16 Ako pretpostavimo da je niz po parovima disjunktnih, povezanih i reverzibilnih L_b-struktura $\langle \mathbb{X}_i : i \in I\rangle$ bogat za monomorfizme (RFM), tada, na osnovu teoreme 10.3.1 (b), imamo da važi sledeće:

unija $\bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$ je reverzibilna $\iff$ niz kardinala $\langle |X_i| : i \in I\rangle$ je reverzibilan.

Specijalno, ovim su okarakterisane reverzibilne relacije ekvivalencije i disjunktne unije kardinala $\leq \omega$, i kompletirana je karakterizacija reverzibilnih prebrojivih ultrahomogenih grafova (videti primedbu 9.3.6). Primetimo kako ekvivalencija (a)$\Leftrightarrow$(d) iz tvrđenja 10.4.15 pokazuje da karakterizacija data u teoremi 10.3.1 (b) važi u klasi (nizova) struktura koja je šira od klase RFM (na primer, $\langle \omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots \rangle \notin$ RFM)[10].

Tvrđenje 10.4.17 *Za svaki niz nenula ordinala $\bar{\alpha} = \langle \alpha_i : i \in I \rangle$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*
(a) Poset $\bigcup_{i \in I} \alpha_i$ je reverzibilna struktura;
(b) $\bar{\alpha}$ je reverzibilan niz struktura;
(c) $\bar{\alpha}$ je reverzibilan niz ordinala.
Pored toga, bilo koji od uslova (a) – (c) posledica je sledećeg uslova:
(d) $\langle |\alpha_i| : i \in I \rangle$ je reverzibilan niz kardinala.

Dokaz. Ekvivalencija (a)$\Leftrightarrow$(b) sledi na osnovu posledice 10.1.7, a (a)$\Leftrightarrow$(c) je teorema 10.4.6.

Ako je (d) tačno, tada, na osnovu tvrđenja 10.4.15, ili je niz kardinala $\langle |\alpha_i| : i \in I \rangle$ konačno-jedan, pa je i niz ordinala $\langle \alpha_i : i \in I \rangle$ isto konačno-jedan, ili je

$$\langle |\alpha_i| : i \in I \rangle = \langle \alpha_i : i \in I \rangle \in {}^I\mathbb{N}$$

reverzibilan niz prirodnih brojeva. U svakom slučaju, (a) je tačno na osnovu teoreme 10.4.6. $\Box$

Primer 10.4.18 (c) $\not\Rightarrow$ (d) u tvrđenju 10.4.17: $\langle \omega + n : n \in \omega \rangle$ je reverzibilan niz ordinala, ali $\langle \omega : n \in \omega \rangle$ nije reverzibilan niz kardinala.

[10] Još jedan primer nizova struktura koji ne pripadaju klasi RFM, a za koje važi teorema 10.3.1 (b), su nizovi konačnih linearnih digrafa $\mathbb{D}_n$, za $n \in \mathbb{N}$, definisani sa (2.3).

Bibliografija

[1] B. Balcar, P. Simon, Disjoint refinement, in: J. D. Monk and R. Bonet (Eds.), Handbook of Boolean algebras, Vol. 2, 333–388, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1989.

[2] B. Balcar, P. Vopěnka, On systems of almost disjoint sets, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 20 (1972) 421–424.

[3] P. J. Cameron, The random graph, The mathematics of Paul Erdős II, Algorithms Combin. 14 (Springer, Berlin, 1997) 333–351.

[4] C. C. Chang, H. J. Keisler, Model theory, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 73. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973.

[5] V. A. Chatyrko, S. E. Han, Y. Hattori, On hereditarily reversible spaces, Topology Appl. 225 (2017) 53–56.

[6] V. A. Chatyrko, Y. Hattori, On reversible and bijectively related topological spaces, Topology Appl. 201 (2016) 432–440.

[7] V. A. Chatyrko, A. Karassev, Reversible spaces and products, Topology Proc. 49 (2017) 317–320.

[8] A. Dow, R. Hernández-Gutiérrez, Reversible filters, Topology Appl. 225 (2017) 34–45.

[9] P. C. Doyle, J. G. Hocking, Bijectively related spaces, I. Manifolds. Pacific J. Math. 111, 1 (1984) 23–33.

[10] B. Dushnik, E. W. Miller, Concerning similarity transformations of linearly ordered sets, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940) 322–326

[11] B. Dushnik, E. W. Miller, Partially ordered sets, Amer. J. Math. 63 (1941) 600–610.

[12] R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[13] P. Erdős, A. Rényi, Asymmetric graphs, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 14 (1963) 295–315.

[14] R. Fraïssé, La classe universelle: Une notion á la limite de la logique et de la théorie des relations, Publ. Dép. Math. (Lyon) 4,3 (1967) 55–61.

[15] R. Fraïssé, Sur la comparaison des types d'ordres, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér A 226 (1948) 1330–1331.

[16] R. Fraïssé, Theory of relations, Revised edition, With an appendix by Norbert Sauer, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 145. North-Holland, Amsterdam, (2000)

[17] P. C. Gibson, M. Pouzet, R. E. Woodrow, Relational structures having finitely many full-cardinality restrictions, Discrete Math. 291, 1–3 (2005) 115–134.

[18] J. G. Hagendorf, Extensions de chaines, Thesis, Marseilles: U. Aix-Marseilles, 1975.

[19] P. R. Halmos, Lectures on Boolean Algebras, D. Van Nostrand Company, INC. Princeton, New Jersey, 1963.

[20] W. Hodges, Model theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[21] C. W. Henson, A family of countable homogeneous graphs, Pacific J. Math. 38,1 (1971) 69–83.

[22] C. W. Henson, Countable homogeneous relational structures and $\aleph_0$-categorical theories, J. Symbolic Logic 37 (1972) 494–500.

[23] T. Jech, Set Theory, 3rd Edition, Springer, Berlin, 2006.

[24] P. Julien, Contribution a l'étude des types d'ordres dispersées, Thesis, Marseilles: U. Aix-Marseilles, 1969.

[25] A. S. Kechris, Classical Descriptive Set Theory, Graduate Texts in Mathematics, 156. Springer-Verlag, New York, 1995.

[26] S. Koppelberg, General Theory of Boolean Algebras, in: J. D. Monk and R. Bonnet (Eds.), Handbook of Boolean Algebras, Part I, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1989.

[27] M. Kukieła, Reversible and bijectively related posets, Order 26,2 (2009) 119–124.

[28] M. Kukieła, Characterization of hereditarily reversible posets, Math. Slovaca 66,3 (2016) 539–544.

[29] K. Kunen, Set Theory An Introduction to Independence Proofs, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[30] M. S. Kurilić, Copy-minimal and embedding-rigid structures, (očekuje se).

[31] M. S. Kurilić, Different similarities, Arch. Math. Logic, 54,7-8 (2015) 839–859.

[32] M. S. Kurilić, Forcing with copies of countable ordinals, Proc. Amer. Math. Soc. 143,4 (2015) 1771–1784.

[33] M. S. Kurilić, From A_1 to D_5: Towards a forcing-related classification of relational structures, J. Symbolic Logic 79,1 (2014) 279–295.

[34] M. S. Kurilić, Isomorphic and strongly connected components, Arch. Math. Logic, 54,1-2 (2015) 35–48.

[35] M. S. Kurilić, Maximal chains of copies of the rational line, Order, 30,3 (2013) 737–748.

[36] M. S. Kurilić, Maximally embeddable components, Arch. Math. Logic 52,7 (2013) 793–808.

[37] M. S. Kurilić, Posets of copies of countable scattered linear orders, Ann. Pure Appl. Logic 165 (2014) 895–912.

[38] M. S. Kurilić, Posets of isomorphic substructures of relational structures, Selected topics in combinatorial analysis (M. S. Kurilić and S. Todorčević, editors), Zb. Rad. (Beogr.) 17 (25) (2015) 117–144.

[39] M. S. Kurilić, Retractions of reversible structures, J. Symbolic Logic 82,4 (2017) 1422–1437.

[40] M. S. Kurilić, Reversibility of definable relations, (očekuje se).

[41] M. S. Kurilić, The minimal size of infinite maximal antichains in direct products of partial orders, Order 34 (2017), no. 2, 235–251.

[42] M. S. Kurilić, B. Kuzeljević, Maximal chains of isomorphic subgraphs of countable ultrahomogeneous graphs, Adv. Math. 264 (2014) 762–775.

[43] M. S. Kurilić, B. Kuzeljević, Maximal chains of isomorphic subgraphs of the Rado graph, Acta Math. Hungar. 141,1-2 (2013) 1–10.

[44] M. S. Kurilić, P. Marković, Maximal atichains of isomorphic subgraphs of the Rado graph, Filomat 29 (2015), no. 9, 1919–1923.

[45] M. S. Kurilić, N. Morača, Chain and filtered completeness of $L_{\infty\omega}$-definable sets of interpretations, (očekuje se).

[46] M. S. Kurilić, N. Morača, Condensational equivalence, equimorphism, elementary equivalence and similar similarities, Ann. Pure Appl. Logic 168,6 (2017) 1210–1223.

[47] M. S. Kurilić, N. Morača, Condensational order on relations, (očekuje se).

[48] M. S. Kurilić, N. Morača, Reversibility and the size of the equivalence classes, (očekuje se).

[49] M. S. Kurilić, N. Morača, Reversible disjoint unions of well-orders and their inverses, Order (revidirana verzija na recenziji). https://arxiv.org/abs/1711.07053

[50] M. S. Kurilić, N. Morača, Reversibility of disconnected structures, (očekuje se). https://arxiv.org/abs/1711.01426

[51] M. S. Kurilić, N. Morača, Reversible disconnected structures: Monotone cardinal functions, (očekuje se).

[52] M. S. Kurilić, N. Morača, Reversibility of extreme relational structures, Arch. Math. Logic (revidirana verzija na recenziji). https://arxiv.org/abs/1803.09619

[53] M. S. Kurilić, N. Morača, Reversible sequences of cardinals, reversible equivalence relations, and similar structures, (očekuje se). https://arxiv.org/abs/1709.09492

[54] M. S. Kurilić, N. Morača, Reversible structures having finite components, (očekuje se).

[55] M. S. Kurilić, N. Morača, Variations of reversibility, (očekuje se).

[56] M. S. Kurilić, S. Todorčević, Copies of the random graph, Adv. Math. 317 (2017), 526–552.

[57] M. S. Kurilić, S. Todorčević, Forcing by non-scattered sets, Ann. Pure Appl. Logic 163 (2012) 1299–1308.

[58] A. H. Lachlan, Countable homogeneous tournaments, Trans. Amer. Math. Soc. 284,2 (1984) 431–461.

[59] A. H. Lachlan, R. E. Woodrow, Countable ultrahomogeneous undirected graphs, Trans. Amer. Math. Soc. 262,1 (1980) 51–94.

[60] C. Laflamme, M. Pouzet, R. Woodrow, Equimorphy: the case of chains, Arch. Math. Logic 56, 7–8 (2017) 811–829.

[61] R. Laver, An order type decomposition theorem Ann. of Math. 98,1 (1973) 96–119.

[62] R. Laver, On Fraïssé's order type conjecture, Ann. of Math. 93,2 (1971) 89–111.

[63] A. Levy, Basic Set Theory, Dover Publications, Mineola, New York, 2002.

[64] R. C. Lyndon, Properties preserved under homomorphism, Pacific J. Math. 9 (1959) 143–154.

[65] D. Macpherson, A survey of homogeneous structures, Discrete Math. 311, 15 (2011) 143–154.

[66] A. Marcja, C. Toffalori, A guide to classical and modern model theory, Trends in Logic - Studia Logica Library, 19, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[67] D. Marker, Model theory. An Introduction, Graduate Texts in Mathematics, 217, Springer-Verlag, New York, 2002.

[68] S. Milić, Elementi matematičke logike i teorije skupova, Univerzitet u Novom Sadu, 1990.

[69] N. Morača, Nonreversible trees having a removable edge, Filomat, (u štampi).

[70] N. Morača, Nonreversible trees having a removable finite set of edges, (očekuje se).

[71] N. Morača, Condensations of disconnected structures with finite components, (očekuje se).

[72] Y. N. Moschovakis, Descriptive Set Theory, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[73] C. St. J. A. Nash-Williams, On well-quasi-ordering infinite trees, Proc. Camb. Phil. Soc. 61 (1965) 697–720.

[74] R. Rado, Universal graphs and universal functions, Acta Arith. 9 (1964) 331–340.

[75] M. Rajagopalan, A. Wilansky, Reversible topological spaces, J. Austral. Math. Soc. 6 (1966) 129–138.

[76] F. P. Ramsey, On a problem of formal logic, Proc. London Math. Soc. 30 (1930) 264–286.

[77] J. G. Rosenstein, Linear orderings, Pure and Applied Mathematics, 98, Academic Press, Inc., Harcourt Brace Jovanovich Publishers, New York-London, 1982.

[78] V. Petrović, Teorija grafova, Edicija: „Univerzitetski udžbenik”, Novi Sad, 1998.

[79] J. H. Schmerl, Countable homogeneous partially ordered sets, Algebra Univers. 9,3 (1979) 317-321.

[80] S. Shelah, O. Spinas, The distributivity numbers of $P(\omega)/\text{fin}$ and its square, Trans. Amer. Math. Soc. 352, 5 (2000) 2023–2047.

[81] W. Sierpinski, Sur un probléme de la théorie des relations, Annali R. Scuola Normale Superiore de Pisa, Ser. 2 2 (1933), 285–287.

[82] R. Sikorski, Boolean algebras, Springer-Verlag, second edition, Berlin, 1964.

[83] L. Soukup, Infinite combinatorics: from finite to infinite, Horizons of combinatorics, 189–213, Bolyai Soc. Math. Stud., 17, Springer, Berlin, 2008.

[84] E. Szpilrajn, Sur l'extension de l'ordre partiel, Fund. Math. 16 (1930) 386–389.

[85] A. Tarski, Contributions to the theory of models. III. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 58 (1955) 56–64=Indagationes Math. 17 (1955) 56–64.

[86] S. Todorčević, Trees and linearly ordered sets, Handbook of of Set-theoretic Topology (K. Kunen and J. E. Vaughan, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1984.

[87] R. L. Vaught, Remarks on universal classes of relational systems. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 57=Indagationes Math. 16 (1954) 589–591.

[88] P. Vopěnka, A. Pultr, Z. Hedrlín, A rigid relation exists on any set, Comment. Math. Univ. Carolinae 6 (1965) 149–155.

Indeks simbola

Indeks pojmova

Extended abstract

Condensational order

Let $L = \langle R_i : i \in I \rangle$ be a nonempty relational language, where $\mathrm{ar}(R_i) = n_i \in \mathbb{N}$, for $i \in I$, and let X be a nonempty set. We define the condensational preorder on the set $\mathrm{Int}_L(X)$ of all interpretations of the language L over the domain X, in the following way: $\rho \preccurlyeq_c \sigma$ iff there exists a condensation (bijective homomorphism) $f : \langle X, \rho \rangle \to \langle X, \sigma \rangle$. The corresponding antisymmetric quotient $\langle \mathrm{Int}_L(X) \,/ \sim_c, \leq_c \rangle$ is called the condensational order. We have that $[\rho]_{\sim_c} \leq_c [\sigma]_{\sim_c}$ iff there exist $\rho' \in [\rho]_{\sim_c}$ and $\sigma' \in [\sigma]_{\sim_c}$ such that $\rho' \subseteq \sigma'$. The condensational preorder on the class Mod_L of all L-structures is defined in the similar way: $\mathbb{X} \preccurlyeq_c \mathbb{Y}$ iff $\mathrm{Cond}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \neq \emptyset$. The condensational equivalence $\sim_c$ on the class Mod_L is an equivalence relation defined by $\mathbb{X} \sim_c \mathbb{Y}$ iff $\mathbb{X} \preccurlyeq_c \mathbb{Y}$ and $\mathbb{Y} \preccurlyeq_c \mathbb{X}$.

Proposition 1 *Let L be a relational language and X a nonempty set. For any $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$ we have that*

$$[\rho]_{\sim_c} = \mathrm{Conv}_{\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle}([\rho]_{\cong}).$$

An L-interpretation $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$ is said to be strongly reversible (respectively reversible, weakly reversible) iff the class $[\rho]_{\cong}$ (or, equivalently, the class $[\rho]_{\sim_c}$) is a singleton (respectively, an antichain, a convex set) in the Boolean lattice $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$.

Some suborders of the condensational order

Informally speaking, a property $\mathcal{P}(u, v)$ is relevant for L-structures iff it is preserved by isomorphisms between L-structures. In the sequel, "property" will denote "property relevant for L-structures", and instead of $\mathcal{P}(X, \rho)$ we shall write "$\langle X, \rho \rangle$ has $\mathcal{P}$". For a property $\mathcal{P}$, denoting

$$\mathcal{P}_X := \Big\{ \rho \in \mathrm{Int}_L(X) : \langle X, \rho \rangle \text{ has } \mathcal{P} \Big\},$$

we shall say that $\mathcal{P}$ is increasing (respectively decreasing, implies incomparability, convex, condensational) iff the set $\mathcal{P}_X$ is closed upwards (respectively closed downwards, an antichain, convex, $\sim_c$-invariant) in the Boolean lattice $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$. We have that increasing and decreasing properties, as well as properties that imply incomparability are convex, and we have that convex properties are condensational properties. If $q_{\sim_c} : \mathrm{Int}_L(X) \to \mathrm{Int}_L(X) \,/ \sim_c$ denotes the natural projection, we have the following:

Proposition 2 *([47]) Let L be a relational language and $\mathcal{P}_i$, $i \in I$, condensational properties. If X is a nonempty set such that $\{(\mathcal{P}_i)_X : i \in I\}$ is a partition of the set $\mathrm{Int}_L(X)$, then $\{q_{\sim_c}[(\mathcal{P}_i)_X] : i \in I\}$ is a partition of the set $\mathrm{Int}_L(X) \,/ \sim_c$.*

Therefore, $\{q_{\sim_c}[\mathrm{Refl}_X], q_{\sim_c}[\mathrm{Irrefl}_X], q_{\sim_c}[\neg \mathrm{Refl}_X \cap \neg \mathrm{Irrefl}_X]\}$ is a partition of the poset $\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X) \,/ \sim_c, \leq_c \rangle$ (consisting of convex sets). Parts $q_{\sim_c}[\mathrm{Refl}_X]$ and $q_{\sim_c}[\mathrm{Irrefl}_X]$ are isomorphic, hence, from the order-theoretic aspect it is enough to investigate one of them. In order to better understand what is going on in the middle part, for $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$ we introduce the set:

$$D_\rho := \Big\{ [\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} : A \subseteq X \Big\},$$

and, we define a preorder on $P(X)$: $A \preccurlyeq_\rho B$ iff $\rho \cup \Delta_A \preccurlyeq_c \rho \cup \Delta_B$, where $\langle P(X) \,/ \equiv_\rho, \leq_\rho \rangle$ denotes the corresponding antisymmetric quotient. If κ is a finite cardinal, let $\theta_\kappa := \mathrm{otp}(\kappa + 1)$. Also, let $\theta_{\omega_\alpha} := \mathrm{otp}(\omega + \alpha + 1 + (\omega + \alpha)^*)$, for $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

Proposition 3 *([47]) Let X be a nonempty set and let $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$:*

(a) The mapping $F : P(X) \,/ \equiv_\rho \to D_\rho$, given by $F([A]_{\equiv_\rho}) := [\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}$ is well defined, and we have that

$$\langle P(X) \,/ \equiv_\rho, \leq_\rho \rangle \cong_F \langle D_\rho, \leq_c \rangle \,;$$

(b) The poset $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$ contains a chain of the type $\theta_{|X|}$.

The phenomenon of reversibility of relational structures plays a prominent role in the investigation of the poset $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$.

Theorem 4 *Let X be a nonempty set and $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. If the relation ρ is reversible, then the mapping $F : D_\rho \to D_\rho$, defined by $F([\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c}) := [\rho \cup \Delta_{A^c}]_{\sim_c}$, is well defined, and we have that*

$$\langle D_\rho, \leq_c \rangle \cong_F \langle D_\rho, \leq_c \rangle^*.$$

Next, the poset $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$ can be maximal possible (in the sense of Proposition 3 (a)).

Theorem 5 *([47]) Let X be a nonempty set and $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Then:*

$$\rho \text{ is reversible and rigid } \Longrightarrow \langle D_\rho, \leq_c \rangle \cong \langle P(X), \subseteq \rangle. \tag{10.55}$$

In the case X is finite, we have $\Leftrightarrow$ instead of $\Rightarrow$ in (10.55).

It is an open question whether we have $\Leftrightarrow$ instead of $\Rightarrow$ in (10.55). Also, the poset $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$ can be minimal possible (in the sense of Proposition 3 (b)).

Theorem 6 *([47]) Let X be a nonempty set and $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Then:*

$$\rho \text{ is strongly reversible or a nontransitive threeelement tournamet } \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \langle D_\rho, \leq_c \rangle \cong \theta_{|X|}. \tag{10.56}$$

In the case $|X| < \aleph_\omega$, we have $\Leftrightarrow$ instead of $\Rightarrow$ in (10.56).

It is an open question whether we have $\Leftrightarrow$ instead of $\Rightarrow$ in (10.56). If, for $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$, we define $\mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}} := \bigcup_{\sigma \in [\rho]_{\sim_c}} D_\sigma$, we have that

$$\mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}} = \mathrm{Conv}_{\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X)/\sim_c, \leq_c \rangle}(D_\rho),$$

and the following holds:

Theorem 7 *([47]) Let X be a nonempty set and $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$. Then:*

$$\rho \text{ is weakly reversible } \Longrightarrow \mathcal{D}_{[\rho]_{\sim_c}} = D_\rho. \tag{10.57}$$

In the case ρ is symmetric, we have $\Leftrightarrow$ instead of $\Rightarrow$ in (10.57).

It is an open question whether we have $\Leftrightarrow$ instead of $\Rightarrow$ in (10.57).

Condensational equivalence

Descriptive complexity and the size of the equivalence classes

In the case of at most countable relational language L and countable domain $X = \omega$, the relations $\cong$ and $\sim_c$ on the set $\mathrm{Int}_L(\omega)$ have the same descriptive complexity in the Polish space $\mathrm{Int}_L(\omega) \times \mathrm{Int}_L(\omega)$.

Theorem 8 *([48]) Let $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ be at most countable relational language. Then:*

(a) The relation $\sim_c$ is an analytic set in the Polish space $\mathrm{Int}_L(\omega) \times \mathrm{Int}_L(\omega)$;

(b) For any $\rho \in \mathrm{Int}_L(\omega)$, the class $[\rho]_{\sim_c}$ is an analytic set in the Polish space $\mathrm{Int}_L(\omega)$.

It is an open question whether, for all $\rho \in \mathrm{Int}_L(\omega)$, the class $[\rho]_{\sim_c}$ is a Borel set (like the class $[\rho]_{\cong}$ is) in the Polish space $\mathrm{Int}_L(\omega)$.

In the case of at most countable language and countable domain, we have solved the problem of the size of the classes $[\rho]_{\cong}$ and $[\rho]_{\sim_c}$.

Theorem 9 *([48]) Let $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ be at most countable relational language and let $\rho \in \mathrm{Int}_L(\omega)$. Then:*

$$\Big|[\rho]_{\cong}\Big| = \Big|[\rho]_{\sim_c}\Big| \in \Big\{1, \omega, \mathfrak{c}\Big\}.$$

The phenomenon of reversibility of relational structures is also related to the size of the equivalence classes.

Theorem 10 *([48]) Let $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ be at most countable relational language and let $\rho \in \mathrm{Int}_L(\omega)$. If $|[\rho]_{\cong}| = \omega$ (or, equivalently, $|[\rho]_{\sim_c}| = \omega$) then the interpretation ρ is reversible.*

The converse fails to be true (the natural order, $<_\omega$, on the set ω is the counterexample).

Condensational equivalence and other similarities of relational structures

Next, the hierarchy between the condensational equivalence, the elementary equivalence, the equimorphism (bi-embedability) and the other similarities of L-structures, determined by some similarities of their self-embedding monoids, is investigated. Let $\kappa > 0$ be a cardinal and $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ a nonempty relational language. For $\rho = \langle \rho_i : i \in I\rangle \in \mathrm{Int}_L(X)$, instead of $\langle \mathbb{P}(\langle \kappa, \rho\rangle), \subseteq\rangle$, we shall, shortly, write just $\mathbb{P}(\rho)$, where

$$\mathbb{P}(\mathbb{X}) := \Big\{f[X] : f \in \mathrm{Emb}(\mathbb{X})\Big\}$$

is the poset of copies of the structure $\mathbb{X}$ inside $\mathbb{X}$. Also, instead of $\langle \kappa, \rho\rangle \cong \langle \kappa, \sigma\rangle$, we shall, shortly, write just $\rho \cong \sigma$, and similarly for the condensational equivalence $\sim_c$, the elementary equivalence $\equiv$, and the equimorphism (bi-embedability) $\rightleftarrows$. That way, we have four equivalence relations on the set $\mathrm{Int}_L(\kappa)$. Additional four are defined, respectively, by: $\mathbb{P}(\rho) = \mathbb{P}(\sigma)$, $\mathbb{P}(\rho) \cong \mathbb{P}(\sigma)$, $\mathrm{sq}\,\mathbb{P}(\rho) \cong \mathrm{sq}\,\mathbb{P}(\sigma)$, and $\mathrm{ro}\,\mathrm{sq}\,\mathbb{P}(\rho) \cong \mathrm{ro}\,\mathrm{sq}\,\mathbb{P}(\sigma)$, where $\mathrm{sq}\,\mathbb{P}(\rho)$ denotes the separative quotient of the poset $\mathbb{P}(\rho)$, and $\mathrm{ro}\,\mathrm{sq}\,\mathbb{P}(\rho)$ denotes the (unique) Boolean completion of the separative poset $\mathrm{sq}\,\mathbb{P}(\rho)$. Adding the empty relation, the full relation and the equality to those equivalence relations, we obtain the corresponding Hasse diagram depicting the hierarchy between them. According to [46], and regarding the number of the different similarities, as well as the shape of the corresponding Hasse diagram, the class of all structures splits into three parts:

1. infinite structures of nonunary languages (where all the similarities are different),
2. finite structures (where the diagram collapses to 3 points, if $\kappa > 1$),
3. infinite structures of unary languages (where the diagram also collapses).

The main result here is the following theorem:

Theorem 11 *([46]) If $\kappa \geq \omega$ is a cardinal and L a nonunary language, then we have:*

(a) In the diagram in Figure 7.1 all the implications a – q are proper, and there are no new implications (except the ones following from transitivity);

(b) If $\kappa = \omega$, then the position of the elementary equivalence, $\equiv$, with respect to the similarities $\sim_k$, $k \leq 11$, is the same as the position of the condensational equivalence, $\sim_c$, in Figure7.1. In addition, these two similarities are incomparable.

Concerning the interplay between the condensational equivalence, the elementary equivalence, and the equimorphism, the diagram in Figure 7.2 shows that, when infinite structures of nonunary languages are in question, these three similarities are pairwise incomparable. The same diagram shows that, moreover, their pairwise intersections, the similarities $\rightleftarrows \wedge \sim_c$, $\sim_c \wedge \equiv$, and $\equiv \wedge \rightleftarrows$ are pairwise incomparable as well, and that, moreover again, the intersection $\equiv \wedge \rightleftarrows \wedge \sim_c$ is different from the isomorphism.

Variations of reversibility

By $\mathrm{sRev}_L(X)$ (respectively, $\mathrm{Rev}_L(X)$, $\mathrm{wRev}_L(X)$) we denote the set of strongly reversible (respectively, reversible, weakly reversible) interpretations of the language L over the domain X. Also,

$$\mathrm{fRev}_L(X) := \Big\{\rho \in \mathrm{Int}_L(X) : |\,\mathrm{Cond}(\rho)| < \omega\Big\}$$

denotes the set of finitary reversible interpretations. If $L = L_b$ and the set X is infinite, we have that

$$\mathrm{sRev}_{L_b}(X) \mathbin{\dot\cup} \mathrm{fRev}_{L_b}(X) \subsetneq \mathrm{Rev}_{L_b}(X) \subsetneq \mathrm{wRev}_{L_b}(X) \subsetneq \mathrm{Int}_{L_b}(X).$$

Strong reversibility

Strongly reversible relations are known in the literature under the name of constant relations (see [16, pp. 251]).

Proposition 12 *([55]) Let X be a nonempty set and $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ a relational language. For each interpretation $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$, the following conditions are equivalent:*

(a) ρ is strongly reversible;

(b) ρ^c is strongly reversible;

(c) $\mathrm{Aut}(\rho) = \mathrm{Sym}(X)$*;*

(d) $\mathrm{Cond}(\rho) = \mathrm{Sym}(X)$*;*

(e) The relation ρ_i is strongly reversible for each $i \in I$;

(f) For each $i \in I$, the relation ρ_i is a subset of X^{n_i}, definable by a formula of the empty language $L_\emptyset$, without quantifiers and parameters.

Therefore, we have that $\mathrm{sRev}_{L_b}(X) = \{\emptyset, \Delta_X, \Delta_X^c, X^2\}$.

Reversibility

Proposition 13 *([55]) Let X be a nonempty set and $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ a relational language. For each interpretation $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$, the following conditions are equivalent:*

(a) ρ is reversible;

(b) ρ^c is reversible;

(c) $\mathrm{Aut}(\rho) = \mathrm{Cond}(\rho)$*;*

(d) $\mathrm{Cond}(\rho)$ *is a subgroup of the symmetric group* $\mathrm{Sym}(X)$.

We have that $\mathrm{Fcf}_L(X) \subseteq \mathrm{Rev}_L(X)$, where

$$\mathrm{Fcf}_L(X) = \Big\{\rho \in \mathrm{Int}_L(X) : \forall i \in I\ (|\rho_i| < \omega \vee |X^{n_i} \setminus \rho_i| < \omega)\Big\}.$$

Therefore, if the set X is finite, we have that $\mathrm{Rev}_L(X) = \mathrm{Int}_L(X)$.

Weak reversibility

An interpretation $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$ has the property Cantor-Schröder-Bernstein (shortly, the property CSB) for condensations iff whenever $\rho \preccurlyeq_c \sigma$ and $\sigma \preccurlyeq_c \rho$, we have that $\rho \cong \sigma$, for any $\sigma \in \mathrm{Int}_L(X)$.

Proposition 14 *([55]) Let X be a nonempty set and $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ a relational language. For each interpretation $\rho \in \mathrm{Int}_L(X)$, the following conditions are equivalent:*

(a) ρ is weakly reversible;

(b) $[\rho]_{\cong} = [\rho]_{\sim_c}$;

(c) ρ^c is weakly reversible;

(d) ρ has the property Cantor-Schröder-Bernstein for condensations.

For $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X)$, by slightly abusing notation, let us define:

$$\rho^* := \bigcup \Big\{ \sigma \in \mathrm{At}(\mathrm{Int}_L(X)^+) \cap \rho\bar{\downarrow} \ : \ \rho \cong \rho \setminus \sigma \Big\}.$$

In particular, if $L = L_b$, we have that

$$\rho^* = \Big\{ \langle x, y\rangle \in \rho \ : \ \rho \cong \rho \setminus \{\langle x, y\rangle\} \Big\}.$$

Proposition 15 *([55]) Let X be a nonempty set and $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ a relational language. For each interpretation $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X)$ we have:*

(a) $\rho^* = \langle \emptyset : i \in I\rangle \iff \rho \in \mathrm{Rev}_L(X)$;

(b) $\forall i \in I \ \Big((\rho^*)_i \neq \emptyset \ \Rightarrow \ |(\rho^*)_i| \geq \omega \Big)$.

In particular, if $L = L_b$, a weakly reversible relation ρ either has none or it has infinitely many removable edges. As a consequence, in the following classes of binary structures, reversibility and weak reversibility are equivalent properties: equivalence relations, graphs, dense partial orders, trees having at most finitely many maximal elements, separative posets having at most finitely many minimal elements, lattices where all elements (except, possibly, the largest) are $\wedge$-reducible, and, dually, lattices where all elements (except, possibly, the smallest) are $\vee$-reducible.

Proposition 16 *([55]) Let X be a nonempty set and $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ a relational language. For each interpretation $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$ we have:*

(a) $\mathrm{Cond}(\rho) \subseteq \mathrm{Cond}(\rho^*)$ and $\mathrm{Cond}(\rho) \subseteq \mathrm{ACond}(\rho \setminus \rho^*)$;

(b) The interpretation ρ^* is not reversible;

(c) The interpretation $\rho \setminus \rho^*$ is not finitary reversible;

(e) $\rho \ncong \sigma$, and, hence, $\rho \not\sim_c \sigma$, for all $\sigma \subseteq \rho \setminus \rho^*$.

Proposition 17 *Let X be a nonempty set, $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ a relational language, and let $\rho \in \mathrm{wRev}_L(X) \setminus \mathrm{Rev}_L(X)$. If $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ is an R-negative $L_{\infty\omega}$-formula, and $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ arbitrary conjunction of R-atomic formulae, then, for the sentence,*

$$\psi := \forall x_1 \cdots \forall x_n \Big(\varphi(x_1, \ldots, x_n) \vee \phi(x_1, \ldots, x_n)\Big),$$

we have

$$\langle X, \rho\rangle \models \psi \implies \langle X, \rho \setminus \rho^*\rangle \models \psi.$$

As a consequence, if $\rho \in \mathrm{wRev}_{L_b}(X) \setminus \mathrm{Rev}_{L_b}(X)$ is a partial order, then $\rho \setminus \rho^*$ is also a partial order.

Reversibility of extreme structures

Let us recall, that a set $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Int}_L(X)$ is said to be $\cong$-invariant iff $[\rho]_{\cong} \subseteq \mathcal{C}$, for each $\rho \in \mathcal{C}$.

Theorem 18 *([52]) Let L be a relational language and X a nonempty set. If $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Int}_L(X)$ is an $\cong$-invariant set, and if $\tau \in \mathrm{Max}\,\mathcal{C}$ (respectively, $\tau \in \mathrm{Min}\,\mathcal{C}$), we have:*

(a) The interpretation τ is reversible;

(b) $[\tau]_{\cong} = [\tau]_{\sim_c}$ is an antichain in $\mathcal{C}$, and $[\tau]_{\cong} \subseteq \mathrm{Max}\,\mathcal{C}$ (respectively, $[\tau]_{\cong} \subseteq \mathrm{Min}\,\mathcal{C}$).

In particular, theorem 18 holds when

$$\mathcal{C} = \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X) = \Big\{\rho \in \mathrm{Int}_L(X) : \langle X, \rho\rangle \models \mathcal{T}\Big\},$$

where $\mathcal{T}$ is some $L_{\infty\omega}$-theory. Next, we give some sufficient syntactical conditions for an $L_{\infty\omega}$-definable set of interpretations to have maximal (and, dually, minimal) elements. Let $L = \langle R_i : i \in I\rangle$ be a relational language, where $\mathrm{ar}(R_i) = n_i \in \mathbb{N}$, for $i \in I$, let κ be an infinite cardinal and $\mathrm{Var}_\kappa := \{v_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ the set of variables. If $\mathcal{P}$ (respectively, $\mathcal{N}$) denotes the class of R-positive (respectively, R-negative) $L_{\infty\omega}$-formulae, let us, in order to provide maximal interpretations, define the class $\mathcal{F} := \bigcup_{\xi \in \mathrm{Ord}} \mathcal{F}_\xi$ of $L_{\infty\omega}$-formulae:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_0 &:= \mathcal{P} \cup \{\neg R_i(v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_{n_i}}) : i \in I \wedge \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_i}\rangle \in \kappa^{n_i}\},\\
\mathcal{F}_{\xi+1} &:= \mathcal{F}_\xi \cup \{\forall v_\alpha\, \varphi : \alpha \in \kappa \wedge \varphi \in \mathcal{F}_\xi\}\\
&\quad \cup \{\textstyle\bigwedge \Phi : \Phi \subseteq \mathcal{F}_\xi\} \cup \{\textstyle\bigvee \Phi : \Phi \subseteq \mathcal{F}_\xi \wedge |\Phi| < \omega\},\\
\mathcal{F}_\gamma &:= \textstyle\bigcup_{\xi<\gamma} \mathcal{F}_\xi, \text{ for a limit ordinal } \gamma.
\end{aligned}$$

Also, in order to provide minimal interpretations, let us define the class $\mathcal{G} := \bigcup_{\xi \in \mathrm{Ord}} \mathcal{G}_\xi$ of $L_{\infty\omega}$-formulae:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0 &:= \mathcal{N} \cup \{R_i(v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_{n_i}}) : i \in I \wedge \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n_i} \rangle \in \kappa^{n_i}\}, \\ \mathcal{G}_{\xi+1} &:= \mathcal{G}_\xi \cup \{\forall v_\alpha \, \varphi : \alpha \in \kappa \wedge \varphi \in \mathcal{G}_\xi\} \\ &\quad \cup \{\textstyle\bigwedge \Phi : \Phi \subseteq \mathcal{G}_\xi\} \cup \{\textstyle\bigvee \Phi : \Phi \subseteq \mathcal{G}_\xi \wedge |\Phi| < \omega\}, \\ \mathcal{G}_\gamma &:= \textstyle\bigcup_{\xi < \gamma} \mathcal{G}_\xi, \text{ for a limit ordinal } \gamma. \end{aligned}$$

A set of L-interpretations $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Int}_L(X)$ will be called union-complete (respectively, intersection-complete) iff $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{C}$ (respectively, $\bigcap \mathcal{L} \in \mathcal{C}$) for each chain $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$.

Theorem 19 *([52]) Let L be a relational language, X a nonempty set, and $\mathcal{T}$ an $L_{\infty\omega}$-theory such that $\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X) \neq \emptyset$. Then we have:*

(a) If $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{F}$, then the set $\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ is union-complete, and $\mathrm{Max}(\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X))$ is its codense subset consisting of reversible interpretations;

(b) If $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}$, the set $\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X)$ is intersection-complete, and $\mathrm{Min}(\mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}}(X))$ is its dense subset consisting of reversible interpretations.

Forbidding arbitrarily many finite substructures provides us with a large jungle of reversible interpretations.

Proposition 20 *([52]) Let L be a nonempty relational language. For each finite L-structure $\mathbb{F}$ there is an $L_{\infty\omega}$-sentence $\psi_{\mathbb{F}\hookrightarrow}$ such that, for each L-structure $\mathbb{Y}$, we have: $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{Y}$ iff $\mathbb{Y} \models \psi_{\mathbb{F}\hookrightarrow}$. If, in addition, the language L is finite, the sentence $\neg\psi_{\mathbb{F}\hookrightarrow}$ is logically equivalent to a Π^0_1 sentence $\eta_{\mathbb{F}\not\hookrightarrow}$.*

Since $\Pi^0_1 \subseteq \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, for an $L_{\infty\omega}$-theory $\mathcal{T}$ and finite L-structures $\mathbb{F}_j$, $j \in J$, in the case of a finite language L, we have that $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{F}$ iff $\mathcal{T} \cup \{\eta_{\mathbb{F}_j\not\hookrightarrow} : j \in J\} \subseteq \mathcal{F}$, and, also, that $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}$ iff $\mathcal{T} \cup \{\eta_{\mathbb{F}_j\not\hookrightarrow} : j \in J\} \subseteq \mathcal{G}$. In particular, if $L = L_b$ and $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{graph} = \{\varphi_{irr}, \varphi_{symm}\}$, and if $\mathbb{F} := \langle n, \Delta_n^c \rangle$ is the complete graph $\mathbb{K}_n$, by Theorem 19 (a) we have that the poset

$$\left\langle \mathrm{Int}_L^{\mathcal{T}_{graph} \cup \{\eta_{\mathbb{K}_n\not\hookrightarrow}\}}(X), \subseteq \right\rangle$$

has a codense set of maximal elements, which are reversible graphs. Similarly, by forbidding all cycle graphs $\{\mathbb{C}_n^{sym} : n \in \omega \setminus 3\}$ we obtain that complete bipartite graphs are reversible, and so on.

Remark 21 By a well-known characterization of Lachlan and Woodrow [59], each countable ultrahomogeneous graph is isomorphic to one of the following:

• $\mathbb{G}_{\mu\nu}$, the union of μ disjoint copies of $\mathbb{K}_\nu$. where $\mu\nu = \omega$ - reversible iff $\mu < \omega$ or $\nu < \omega$ (see Theorems 31, 27 and 28);

• $\mathbb{G}_{\text{Rado}}$, the Rado graph (or the Erdős-Rényi graph) - nonreversible (since, by deleting any edge, we again obtain the Rado graph, see [3]);

• $\mathbb{H}_n$, the Henson graph, for $n \geq 3$ - reversible, since it is, by [55], a maximal $\mathbb{K}_n$-free graph;

• Graph-complements of these graph - a graph is reversible iff its graph-complement is.

Next, we show how the minimal L_b-structures, obtained by forbidding the empty structure $\langle m, \emptyset\rangle$, can be characterized using the maximal $\mathbb{K}_m$-free graphs.

Proposition 22 *([52]) If $|X| \geq m \geq 2$, then $\rho \in \operatorname{Min}(\operatorname{Int}_{L_b}^{\eta_{\langle m,\emptyset\rangle \not\hookrightarrow}}(X))$ iff ρ is of the form:*

$$\rho = \Delta_R \cup \sigma_{X\setminus R},$$

where $R \subsetneq X$, $|X \setminus R| \geq m-1$, and $\sigma_{X\setminus R}$ is arbitrary orientation of the graph-complement of some maximal $\mathbb{K}_m$-free graph $\langle X \setminus R, \tau_{X\setminus R}\rangle$.

In particular, from Proposition 22 we obtain reversibility of tournaments and reflexivized tournaments.

Reversible disconnected binary structures

If $\mathbb{X} = \langle X, \rho\rangle$ is an L_b-structure, then the transitive closure ρ_{rst} of the relation $\rho_{rs} := \Delta_X \cup \rho \cup \rho^{-1}$ is the smallest equivalence relation on X containing ρ. The corresponding equivalence classes, $[x]$, $x \in X$, are called the components of $\mathbb{X}$, and the structure $\mathbb{X}$ is called connected if $|X/\rho_{rst}| = 1$. If $\mathbb{X}_i = \langle X_i, \rho_i\rangle$, $i \in I$, are connected L_b-structures, and $X_i \cap X_j = \emptyset$, for different $i, j \in I$, then the structure

$$\bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i := \left\langle \bigcup_{i\in I} X_i, \bigcup_{i\in I} \rho_i \right\rangle$$

is the disjoint union of the structures $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, and the structures $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, are its components.

We give several equivalents for reversibility in the class of disconnected L_b-structures.

Theorem 23 *([50]) If $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, are pairwise disjoint and connected L_b-structures, then $\bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$ is reversible iff $\bigcup_{i\in J} \mathbb{X}_i$ is reversible for each non-empty set $J \subseteq I$.*

Thus, if $\bigcup_{i\in I}\mathbb{X}_i$ *is reversible, then all the components* $\mathbb{X}_i$*,* $i \in I$*, are reversible.*

By Theorem 23 the components of a reversible structure must be reversible, and, hence, that assumption will appear in several theorems in the sequel.

Theorem 24 *([50]) Let* $\mathbb{X}_i$*,* $i \in I$*, be pairwise disjoint and connected* L_b*-structures. Then the structure* $\bigcup_{i\in I}\mathbb{X}_i$ *is reversible iff whenever* $f : I \to I$ *is a surjection,* $g_i \in \mathrm{Mono}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_{f(i)})$*, for* $i \in I$*, and*

$$\forall j \in I \ \ \Big(\Big\{g_i[X_i] : i \in f^{-1}[\{j\}]\Big\} \text{ is a partition of } X_j\Big),$$

we have that

$$f \in \mathrm{Sym}(I) \ \wedge \ \forall i \in I \ \ g_i \in \mathrm{Iso}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_{f(i)}).$$

Before stating the next characterization, we shall give two definitions. First, a sequence of L_b-structures $\langle \mathbb{X}_i : i \in I\rangle$ is said to be a reversible sequence of structures iff

$$\neg\exists f \in \mathrm{Sur}(I) \setminus \mathrm{Sym}(I) \ \ \forall j \in I \ \ \textstyle\bigcup_{i\in f^{-1}[\{j\}]}\mathbb{X}_i \preccurlyeq_c \mathbb{X}_j.$$

Second, assuming $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, are pairwise disjoint L_b-structures, a mapping $i : \mathbb{Z} \to I$, usually denoted by $\langle i_k : k \in \mathbb{Z}\rangle$, will be called a $\mathbb{Z}$-condensation-sequence in I iff it is an injection and

$$\forall k, l \in \mathbb{Z} \ \ (k \leq l \Rightarrow \mathbb{X}_{i_k} \preccurlyeq_c \mathbb{X}_{i_l}).$$

If, in addition, $\mathbb{X}_{i_k} \sim_c \mathbb{X}_{i_l}$, for all $k, l \in \mathbb{Z}$, the $\mathbb{Z}$-condensation-sequence $\langle i_k : k \in \mathbb{Z}\rangle$ will be called trivial.

Theorem 25 *([50]) Let* $\mathbb{X}_i$*,* $i \in I$*, be pairwise disjoint, connected and reversible* L_b*-structures. Then the structure* $\bigcup_{i\in I}\mathbb{X}_i$ *is reversible iff* $\langle \mathbb{X}_i : i \in I\rangle$ *is a reversible sequence of structures and each* $\mathbb{Z}$*-condensation-sequence in* I *is trivial.*

Before stating a sufficient condition for reversibility of disconnected L_b-structures, we give two more definitions. First, for L_b-structures $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathrm{Mod}_{L_b}$ we write $\mathbb{X} \preccurlyeq_m \mathbb{Y}$ iff $\mathrm{Mono}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \neq \emptyset$. Second, assuming $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, are pairwise disjoint L_b-structures, a mapping $i : \omega \to I$, usually denoted by $\langle i_k : k \in \omega\rangle$, will be called an ω^*-mono-sequence in I iff it is an injection and

$$\forall k, l \in \omega \ \ (k \leq l \Rightarrow \mathbb{X}_{i_l} \preccurlyeq_m \mathbb{X}_{i_k}).$$

If, in addition, $\mathrm{Mono}(\mathbb{X}_{i_1}, \mathbb{X}_{i_0}) = \mathrm{Iso}(\mathbb{X}_{i_1}, \mathbb{X}_{i_0})$, the ω^*-mono-sequence $\langle i_k : k \in \omega\rangle$ will be called trivial.

Theorem 26 *([50]) Let $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, be pairwise disjoint, connected and reversible L_b-structures. If each ω^*-mono-sequence in I is trivial, then the structure $\bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$ is reversible.*

Reversible sequences of cardinals

If $\mathbb{X}$ is an L_b-structure, and if $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, are its components, then it's clear that the sequence of cardinals $\langle |X_i| : i \in I\rangle$ is isomorphism-invariant, and, in some classes of structures (like, for example, the equivalence relations), that cardinal invariant characterizes the structure (up to the isomorphism). In such classes, reversibility of the structure, being isomorphism-invariant as well, can be regarded as the property of the corresponding sequence of cardinals.

If I is a nonempty set, an I-sequence $\langle \kappa_i : i \in I\rangle$ of nonzero cardinals is said to be reversible iff

$$\neg\exists f \in \mathrm{Sur}(I) \setminus \mathrm{Sym}(I) \ \ \forall j \in I \ \ \textstyle\sum_{i\in f^{-1}[\{j\}]} \kappa_i = \kappa_j .$$

It turns out the only interesting reversible sequences of cardinals can be found among reversible sequences of natural numbers.

Theorem 27 *([53]) A sequence of nonzero cardinals $\langle \kappa_i : i \in I\rangle$ is reversible iff it is a finite-to-one sequence, or a reversible sequence of natural numbers.*

Before stating the characterization of reversible sequences of natural numbers, let us recall some definitions. For a subset $K \subseteq \mathbb{N}$, by $\langle K\rangle$ we denote the subsemigroup of the additive semigroup $\langle \mathbb{N}, +\rangle$, generated by the set K. We say that the set K is independent iff

$$\forall n \in K \ \ n \notin \langle K \setminus \{n\}\rangle.$$

If $\langle \kappa_i : i \in I\rangle$ is a sequence of cardinals and $\kappa \in \mathrm{Card}$, let us denote

$$I_\kappa := \Big\{ i \in I : \kappa_i = \kappa \Big\}.$$

Theorem 28 *([53]) A sequence $\langle n_i : i \in I\rangle \in {}^I\mathbb{N}$ is reversible iff the set $K := \{m \in \mathbb{N} : |I_m| \geq \omega\}$ is independent, and, if K is nonempty, then at most finitely many elements of the set $\{n_i : i \in I\}$ are divisible by* $\mathrm{GCD}(K)$.

If, by $({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})_{\mathrm{rev}}$, we denote the set of reversible functions (sequences) from the Baire spaice ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$, we have the following:

Theorem 29 *([53]) $({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})_{\mathrm{rev}}$ is a dense $F_{\sigma\delta\sigma}(=\Sigma^0_4)$ subset of the Baire space ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$, of the size $\mathfrak{c}$.*

Reversible equivalence relations and similar structures

We shall say that a sequence of L_b-structures $\langle \mathbb{X}_i : i \in I\rangle$ is rich for monomorphisms iff

$$\forall i, j \in I \;\; \forall A \in [X_j]^{|X_i|} \;\; \exists g \in \mathrm{Mono}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j) \;\; g[X_i] = A.$$

Theorem 30 *([53]) Let $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, be pairwise disjoint, connected and reversible L_b-structures. If the sequence $\langle \mathbb{X}_i : i \in I\rangle$ is rich for monomorphisms, we have:*

(a) The structures $\mathbb{X}_i$ and $\mathbb{X}_j$ of the same size are isomorphic;

(b) $\bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$ is reversible iff $\langle |X_i| : i \in I\rangle$ is a reversible sequence of cardinals.

As a consequence, we have the following:

Theorem 31 *([53]) Let $\sim$ be an equivalence relation on a set X, let $\mathbb{X} := \langle X, \sim\rangle$, and let $\{X_i : i \in I\rangle$ be the corresponding partition. Then the structure $\mathbb{X}$ is reversible iff $\langle |X_i| : i \in I\rangle$ is a reversible sequence of cardinals.*

The same holds for the graphs (resp. posets) of the form $\mathbb{X} = \bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$, where $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, are pairwise disjoint complete graphs (resp. cardinals $\leq \omega$).

Next, we isolate some classes of disconnected structures in which the reversibility of the sequence of cardinalities of the components implies the reversibility of the structure.

Theorem 32 *([53]) If $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, are disjoint tournaments and the sequence of cardinals $\langle |X_i| : i \in I\rangle$ is reversible, then the digraph $\bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$ is reversible.*

This statement holds if, in particular, $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, are disjoint linear orders. Then $\bigcup_{i\in I} \mathbb{X}_i$ is a reversible disconnected partial order.

Reversible disjoint unions of chains

A linear order $\mathbb{L}$ is called scattered, we shall write $\mathbb{L} \in \mathrm{Scatt}$, iff $\mathbb{Q} \not\hookrightarrow \mathbb{L}$. $\mathbb{L}$ is said to be σ-scatterd, we shall write $\mathbb{L} \in \sigma\text{-}\mathrm{Scatt}$, if $\mathbb{L}$ is at most countable union of scattered linear orders. A linear order $\mathbb{L}$ will be called Cantor-Schröder-Bernstein (for embeddings) iff, for each linear order $\mathbb{L}'$ satisfying $\mathbb{L}' \rightleftarrows \mathbb{L}$, we have $\mathbb{L}' \cong \mathbb{L}$, that is, $[\mathbb{L}]_{\rightleftarrows} = [\mathbb{L}]_{\cong}$.

Proposition 33 *([50]) Let $\mathbb{L}_i$, $i \in I$, be pairwise disjoint σ-scattered linear orders. Then we have:*

$$\langle [\mathbb{L}_i]_{\rightleftarrows} : i \in I\rangle \text{ is a finite-to-one sequence} \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} \mathbb{L}_i \text{ is a reversible poset.}$$

If, in addition, $\mathbb{L}_i$, $i \in I$, are CSB linear orders, then

$$\langle [\mathbb{L}_i]_{\cong} : i \in I\rangle \text{ is a finite-to-one sequence} \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} \mathbb{L}_i \text{ is a reversible poset.}$$

A scattered linear order $\mathbb{L}$ is said to be of a limit type iff $\mathbb{L} \rightleftarrows \sum_{s\in S} \mathbb{L}_s$, where $\mathbb{S} \in \mathrm{Scatt}$ and $\mathbb{L}_s \cong \omega$ or $\mathbb{L}_s \cong \omega^*$, for each $s \in S$. Successor ordinals are CSB, but not of a limit type; limit ordinals are CSB of a limit type.

In order to describe CSB chains of a limit type let $\mathcal{W}$ denote the class of well orders, $\mathcal{L}$ the class of well orders isomorphic to limit ordinals, $\mathcal{Z}$ the class of linear orders isomorphic to $\omega^\theta\omega^* + \omega^\delta$, where θ and δ are ordinals satisfying $1 \leq \theta < \delta$. $\mathcal{W}^*$, $\mathcal{L}^*$, and $\mathcal{Z}^*$ will denote the classes of the inverses of elements of $\mathcal{W}$, $\mathcal{L}$, and $\mathcal{Z}$, respectively. By the recent result of Laflamme, Pouzet, and Woodrow ([60]) it follows that a scattered linear order is CSB iff it is isomorphic to a finite sum of linear orders from $\mathcal{W} \cup \mathcal{W}^* \cup \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}^*$.

Theorem 34 *([50])*

(a) A linear order is CSB of a limit type iff it is isomorphic to a finite sum of linear orders from $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}^* \cup \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}^*$;

(b) If $\mathbb{L}_i$, $i \in I$, are pairwise disjoint CSB linear orders of a limit type, then we have:

$$\bigcup_{i\in I} \mathbb{L}_i \text{ is a reversible poset} \Longleftrightarrow \langle [\mathbb{L}_i]_{\cong} : i \in I\rangle \text{ is a finite-to-one sequence.}$$

In particular, Theorem 34 (b) gives a characterization of reversibility in the class of posets of the form $\mathbb{P} := \bigcup_{i\in I} \mathbb{L}_i$, where $\mathbb{L}_i \in \mathcal{L} \cup \mathcal{L}^*$, for $i \in I$. The corresponding characterization, when $\mathbb{L}_i \in \mathcal{W} \cup \mathcal{W}^*$, for $i \in I$, is given in the sequel.

We assume that I is a nonempty set and $\langle \alpha_i : i \in I\rangle$ an I-sequence of nonzero ordinals. For $i \in I$, $\alpha_i = \gamma_i + n_i$ will be the unique decomposition of α_i, where $\gamma_i \in \mathrm{Lim}_0 := \mathrm{Lim} \cup \{0\}$, and $n_i \in \omega$. All the unions are considered to be disjoint. Also, we define:

$$I_\alpha := \{i \in I : \alpha_i = \alpha\}, \quad \text{for } \alpha \in \mathrm{Ord},$$

$$J_\gamma := \{j \in I : \gamma_j = \gamma\}, \quad \text{for } \gamma \in \mathrm{Lim}_0 .$$

Theorem 35 *([49])* $\bigcup_{i \in I} \alpha_i$ *is a reversible poset iff exactly one of the following is true:*

(I) $\langle \alpha_i : i \in I \rangle$ *is a finite-to-one sequence,*

(II) There exists $\gamma := \max\{\gamma_i : i \in I\}$*, for* $\alpha \leq \gamma$ *we have* $|I_\alpha| < \omega$*, and the sequence* $\langle n_i : i \in I_\gamma \setminus J_\gamma \rangle$ *is reversible, but not finite-to-one.*

The same holds for the poset $\bigcup_{i \in I} \alpha_i^*$.

Let $\mathbb{P} := \bigcup_{i \in I} \mathbb{L}_i$, where $\mathbb{L}_i \in \mathcal{W} \cup \mathcal{W}^*$, for $i \in I$, and let

$$I_{fin} := \{i \in I : |L_i| < \omega\},$$

$$I_{\mathcal{W}} := \{i \in I : \mathbb{L}_i \in \mathcal{W} \wedge |L_i| \geq \omega\},$$
$$I_{\mathcal{W}^*} := \{i \in I : \mathbb{L}_i \in \mathcal{W}^* \wedge |L_i| \geq \omega\}.$$

Clearly, $\{I_{\mathcal{W}^*}, I_{fin}, I_{\mathcal{W}}\}$ is a partition of I. Defining

$$\mathbb{P}_{\mathcal{W}} := \bigcup_{i \in I_{fin} \cup I_{\mathcal{W}}} \mathbb{L}_i, \text{ and } \mathbb{P}_{\mathcal{W}^*} := \bigcup_{i \in I_{fin} \cup I_{\mathcal{W}^*}} \mathbb{L}_i,$$

we have the following:

Theorem 36 *([49]) If* $\mathbb{P} := \bigcup_{i \in I} \mathbb{L}_i$*, where* $\mathbb{L}_i \in \mathcal{W} \cup \mathcal{W}^*$*, for all* $i \in I$*, and* $I_{\mathcal{W}} \neq \emptyset$ *and* $I_{\mathcal{W}^*} \neq \emptyset$*, then the poset* $\mathbb{P}$ *is reversible iff the posets* $\mathbb{P}_{\mathcal{W}}$ *and* $\mathbb{P}_{\mathcal{W}^*}$ *are reversible.*

Biografija

Rođen sam 17. avgusta 1983. godine u Novom Sadu, u Srbiji. Osnovnu školu završio sam u Čelarevu, a Matematičku gimnaziju „J. J. Zmaj” u Novom Sadu, kao nosilac Diplome „Vuk Stefanović Karadžić” i Povelje „Jovan Jovanović Zmaj”. Diplomirao sam 2006. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Primenjena matematika, odbranivši pri tome diplomski rad pod naslovom „H-matrice i lokalizacija spektra”. Nosilac sam Povelje za najboljeg studenta Prirodno-matematičkog fakulteta i Povelje za najboljeg studenta Univerziteta u Novom Sadu za akademsku 2006/07. godinu.

Od 2011. godine radim kao istraživač saradnik na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, a od 2014. godine kao asistent. Od 2013. godine vodim mentorsku grupu za obdarene učenike u Matematičkoj gimnaziji „J. J. Zmaj” u Novom Sadu. Član sam istraživačkog projekta Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije *„Teorija skupova, teorija modela i skup-teoretska topologija”*, broj projekta: 174006. Autor sam više naučnih radova. Učestvovao sam s naučnim saopštenjima na mnogobrojnim međunarodnim konferencijama. Bio sam član organizacionog tima nekoliko međunarodnih konferencija iz teorije skupova i topologije koje su se održavale na Univerzitetu u Novom Sadu.

Novi Sad, april 2018. god. Nenad Morača

Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Ključna dokumentacijska informacija

Redni broj (RBR):	
Identifikacioni broj (IBR):	
Tip dokumentacije (TD):	Monografska dokumentacija
Tip zapisa (TZ):	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada (VR):	Doktorska disertacija
Autor (AU):	Nenad Morača
Mentor (MN):	dr Miloš S. Kurilić
Naslov rada (NR):	„Kondenzacioni poredak, kondenzaciona ekvivalencija i reverzibilnost relacijskih struktura"
Jezik publikacije (JP):	srpski (latinica)
Jezik izvoda (JI):	srpski/engleski
Zemlja publikovanja (ZP):	Srbija
Uže geografsko područje (UGP):	Vojvodina
Godina (GO):	2018.
Izdavač (IZ):	Autorski reprint
Mesto i adresa (MA):	Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
Fizički opis rada (FO):	10/305/88/3/11/0/3 (broj poglavlja / broj strana / broj liter. citata / broj tabela, broj slika / broj grafika / broj priloga)
Naučna oblast (NO):	Matematika
Naučna disciplina (ND):	Teorija relacija
Predmetna odrednica / Ključne reči (PO):	morfizmi L-struktura, elementarna ekvivalencija, infinitarna logika $L_{\infty\omega}$, deskriptivna složenost, kondenzacioni poredak, kondenzaciona ekvivalencija, reverzibilnost L-struktura, svojstvo Cantor-Schröder-Bernstein za kondenzacije, ekstremne strukture, nepovezane L_b-strukture, Fraïsséova hipoteza

UDK:

Čuva se (ČU): Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

Važna napomena (VN):

Izvod (IZ):

Ako je L relacijski jezik, kondenzacioni pretporedak na skupu $\mathrm{Int}_L(X)$ svih interpretacija jezika L nad domenom X, dat je sa: $\rho \preccurlyeq_c \sigma$ akko postoji bijektivni homomorfizam (kondenzacija) $f : \langle X, \rho \rangle \to \langle X, \sigma \rangle$. Antisimetrični količnik $\langle \mathrm{Int}_L(X) \,/ \sim_c, \leq_c \rangle$ naziva se kondenzacioni poredak. Za proizvoljnu L-interpretaciju ρ, klasa $[\rho]_{\sim_c}$ je konveksno zatvorenje klase $[\rho]_{\cong}$ u Booleovoj mreži $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$. Za L-interpretaciju ρ reći ćemo da je jako reverzibilna (redom, reverzibilna, slabo reverzibilna) akko je klasa $[\rho]_{\cong}$ (ili, ekvivalentno, klasa $[\rho]_{\sim_c}$) singlton (redom, antilanac, konveksan skup) u Booleovoj mreži $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$. U cilju ispitivanja poseta $\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X) \,/ \sim_c, \leq_c \rangle$, za $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$ uveden je skup $D_\rho := \{[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} : A \subseteq X\}$, i pokazano je kako je podurećenje $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$ izomorfno određenom količniku partitivnog skupa $P(X)$. Fenomen reverzibilnosti relacijskih struktura igra istaknutu ulogu u istraživanju tog podurećenja. Dovoljan uslov (koji je, za $|X| < \omega$, i potreban) da podurećenje $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$ bude maksimalno (tj. izomorfno $\langle P(X), \subseteq \rangle$) je da relacija ρ bude reverzibilna i rigidna. A dovoljan uslov (koji je, za $|X| < \aleph_\omega$, i potreban) da podurećenje $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$ bude minimalno (tj. lanac specijalnog tipa $\theta_{|X|}$) je da relacija ρ bude jako reverzibilna ili netranzitivni troelementni turnir. Dalje, dovoljan uslov (koji je, u slučaju simetrične relacije ρ, i potreban) da skup D_ρ bude konveksan u kondenzacionom poretku je da relacija ρ bude slabo reverzibilna.

U slučaju prebrojivog jezika L i prebrojivog domena X, ispitana je deskriptivna složenost relacije kondenzacione ekvivalencije $\sim_c$, kao i odgovarajućih klasa $[\rho]_{\sim_c}$. Pokazano je kako su $\sim_c$ i $[\rho]_{\sim_c}$ analitički skupovi u poljskim prostorima, redom, $\mathrm{Int}_L(\omega)\times\mathrm{Int}_L(\omega)$ i $\mathrm{Int}_L(\omega)$, koji su homeomorfni Kantorovoj kocki ${}^{\omega}2$. Pomoću toga, rešen je problem veličine klasa $[\rho]_{\sim_c}$. Naime, u slučaju prebrojivog jezika i domena, klase $[\rho]_{\cong}$ i $[\rho]_{\sim_c}$ su iste veličine, i to je neki kardinal iz $\{1, \omega, \mathfrak{c}\}$. Ako je to ω, tada je interpretacija ρ reverzibilna (dok obrat ne važi). Dalje je istražena hijerarhija između kondenzacione ekvivalencije, elementarne ekvivalencije, ekvimorfizma (bi-utopivosti) i drugih sličnosti L-struktura određenih nekim sličnostima njihovih monoida samoutapanja. Ispostavilo se kako odgovarajući Hasseov dijagram koji opisuje hijerarhiju tih relacija ekvivalencije, restrikovanih na skup $\mathrm{Int}_L(\kappa)$, značajno kolapsira u slučaju kad je κ konačan kardinal, ili kad je jezik L unaran, dok, u slučaju beskonačnog domena i neunarnog jezika, imamo veliku raznovrsnost.

Naposletku, temeljno je istražen fenomen reverzibilnosti L-struktura. Data je karakterizacija jako reverzibilnih L-intepretacija kao onih čije su komponentne relacije definabilne formulama praznog jezika $L_\emptyset$, bez kvantifikatora i parametara. Pokazano je kako su slabo reverzibilne interpretacije upravo one koje imaju svojstvo Cantor-Schröder-Bernstein (kraće, svojstvo CSB) za kondenzacije. Dalje, za slabo reverzibilnu interpretaciju ρ uveden je skup ρ^*, kao unija svih „uklonjivih atoma”, u Booleovoj mreži $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$. Pri tome, interpretacija ρ^* nije reverzibilna, dok $\rho \setminus \rho^*$ nije finitarno reverzibilna, i svaka komponenta ρ^* je ili prazan, ili beskonačan skup. Specijalno, za $L = L_b$, ako slabo reverzibilna relacija ρ ima

uklonjivu ivicu, tada ρ ima beskonačno mnogo uklonjivih ivica. Pomoću toga, pokazano je kako su, u mnogim klasama struktura, reverzibilnost i slaba reverzibilnost ekvivalentna svojstva, dok je primerima ilustrovano da, u nekim drugim klasama, to nije slučaj.
Poseban naglasak, stavljen je na detektovanje relevantnih klasa reverzibilnih struktura. Pri tome, prvo su proučene strukture koje su ekstremni elementi $L_{\infty\omega}$-definabilnih klasa, pri određenim sintaktičkim ograničenjima, gde su dati dovoljni uslovi da $L_{\infty\omega}$-definabilna klasa interpretacija na datom skupu X ima maksimalne (i, dualno, minimalne) elemente. Izdvojene su određene elementarne klase koje zadovoljavaju data sintaktička ograničenja, i, dodatno, za neke od tih klasa, data je karakterizacija odgovarajućih ekstremnih interpretacija. Primenom tih rezultata okarakterisani su reverzibilni prebrojivi ultrahomogeni grafovi (s liste Lachlana i Woodrowa).
U nastavku su istražene nepovezane L_b-strukture. Pri tome, dato je nekoliko ekvivalenata za njihovu reverzibilnost. Ovi rezultati primenjeni su na određene relevantne klase L_b-struktura, kao što su relacije ekvivalencije (i, opštije, strukture koje su bogate za monomorfizme) i disjunktne unije lanaca. Kako su relacije ekvivalencije, do na izomorfizam, okarakterisane nizom kardinalnosti klasa ekvivalencije (tj. komponenata), njihova reverzibilnost može se smatrati svojstvom odgovarajućeg niza kardinala (koje je isto nazvano reverzibilnost). Pokazano je kako se jedini zanimljivi primeri reverzibilnih nizova kardinala mogu naći među reverzibilnim nizovima prirodnih brojeva, pri čemu je data karakterizacija takvih nizova. Još je pokazano kako je u određenim klasama nepovezanih struktura (kao što su disjunktne unije lanaca,

	ili, opštije, turnira) reverzibilnost niza kardinalnosti komponenata dovoljan uslov za reverzibilnost strukture. Na kraju, primenom skorog rezultata Laflamma, Pouzeta i Woodrowa – karakterizacija rastutih lanaca koji imaju svojstvo CSB (za utapanja), okarakterisani su CSB lanci graničnog tipa, te je, primenom Laverovog dokaza Fraïsséove hipoteze, data karakterizacija reverzibilnih disjunktnih unija takvih lanaca (i, specijalno, disjunktnih unija graničnih ordinala). Na samom kraju, data je karakterizacija reverzibilnih disjunktnih unija proizvoljnih ordinala i inverza ordinala.
Datum prihvatanja teme od strane NN veća (DP):	26. februar 2018.
Datum odbrane (DO):	
Članovi komisije (KO):	**Predsednik:** dr Rozália Madarász-Szilágyi, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu **Mentor:** dr Miloš S. Kurilić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu **Član:** Akademik Stevo Todorčević, direktor istraživanja Kanade, Departman za matematiku, Univerzitet u Torontu i direktor istraživanja CNRS, Pariz (Institut de Mathématique de Jussieu – PRG, UMR 7586), član Srpske akademije nauka i umetnosti i Kanadskog kraljevskog društva, Akademije umetnosti i nauka **Član:** dr Predrag Tanović, naučni savetnik, Matematički institut Srpske akademije nauka i umetnosti, i vanredni profesor, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu **Član:** dr Boris Šobot, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

University of Novi Sad
Faculty of Science
Key words documentation

Accession number (ANO):	
Identification number (INO):	
Document type (DT):	Monograph type
Type of record (TR):	Printed text
Contents code (CC):	PhD dissertation
Author (AU):	Nenad Morača
Mentor (MN):	Prof. Miloš S. Kurilić, PhD
Title (TI):	"Condensational order, condensational equivalence and reversibility of relational structures"
Language of text (LT):	Serbian (latinic alphabet)
Language of abstract (LA):	Serbian/English
Country of publication (CP):	Serbia
Locality of publication (LP):	Vojvodina
Publication year (PY):	2018
Publisher (PU):	Author's reprint
Publication place (PP):	Novi Sad, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4
Physical description (PD):	10/305/88/3/11/0/3
Scientific field (SF):	Mathematics
Scientific discipline (SD):	Theory of relations
Subject / Key words (SKW):	morphisms of L-structures, elementary equivalence, infinitary logic $L_{\infty\omega}$, descriptive complexity, condensational order, condensational equivalence, reversibility of L-structures, the property Cantor-Schröder-Bernstein for condensations, extreme structures, disconnected L_b-structures, Fraïssé hypothesis

UC:

Holding data (HD): The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

Note (N):

Abstract (AB):

If L is a relational language, the condensational preorder on the set $\mathrm{Int}_L(X)$ of all L-interpretations over the domain X, is given with: $\rho \preccurlyeq_c \sigma$ iff there exists a bijective homomorphism (condensation) $f : \langle X, \rho \rangle \to \langle X, \sigma \rangle$. The antisymmetric quotient $\langle \mathrm{Int}_L(X) \,/\sim_c, \leq_c \rangle$ will be called the condensational order. For any L-interpretation ρ, the class $[\rho]_{\sim_c}$ is the convex closure of the class $[\rho]_{\cong}$ in the Boolean lattice $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$. An L-interpretation ρ is said to be strongly reversible (respectively reversible, weakly reversible) iff the class $[\rho]_{\cong}$ (or, equivalently, $[\rho]_{\sim_c}$) is a singleton (respectively, an antichain, a convex set) in $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$. In order to investigate the poset $\langle \mathrm{Int}_{L_b}(X) \,/\sim_c, \leq_c \rangle$, for $\rho \in \mathrm{Irrefl}_X$ the following set is defined: $D_\rho := \{[\rho \cup \Delta_A]_{\sim_c} : A \subseteq X\}$. It is shown that the suborder $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$ is isomorphic to certain quotient of the power set $P(X)$. The phenomenon of reversibility plays prominent role in the investigation of that suborder. A sufficient condition (which is, for $|X| < \omega$, also necessary) for the suborder $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$ to be maximal (that is, isomorphic to $\langle P(X), \subseteq \rangle$) is for the relation ρ to be reversible and rigid. A sufficient condition (which is, for $|X| < \aleph_\omega$, also necessary) for the suborder $\langle D_\rho, \leq_c \rangle$ to be minimal (that is, a chain of the special type $\theta_{|X|}$) is for the relation ρ to be strongly reversible or a nontransitive threeelement tournament. Furthermore, a sufficient condition (which is, for a symmetric relation ρ, also necessary) for the set D_ρ to be convex in the condensational order is for the relation ρ to be weakly reversible.

In the case of a countable language and domain, descriptive complexity of condensational equivalence $\sim_c$ and of the corresponding classes $[\rho]_{\sim_c}$ is investigated. It is shown that $\sim_c$ and $[\rho]_{\sim_c}$ are analytic sets in the Polish spaces, respectively, $\mathrm{Int}_L(\omega) \times \mathrm{Int}_L(\omega)$ and $\mathrm{Int}_L(\omega)$, that are homeomorphic to the Cantor cube ${}^{\omega}2$. Using those results, in the case of a countable language and domain, it is shown that classes $[\rho]_{\cong}$ and $[\rho]_{\sim_c}$ are of the same size, and that it is a cardinal from $\{1, \omega, \mathfrak{c}\}$. If it is ω, the interpretation ρ is reversible (whereas the converse is false). Next, the hierarchy between condesational equivalence, elementary equivalence, equimorphism (bi-embedability) and other similarities of L-structures, determined by some similarities of their self-embedding monoids, is investigated. It turns out the Hasse diagram describing the hierarchy between those equivalence relations, restricted to the set $\mathrm{Int}_L(\kappa)$, collapses significantly in the case of a finite cardinal κ, or a unary language L, whereas, in the case of an infinite domain and a nonunary language, we have a large diversity.

In the last part, the phenomenon of reversibility of L-structures is investigated. Strongly reversible interpretations are characterized as those whose component relations are definable by $L_{\emptyset}$-formulae, without quantifiers and parameters. It is shown that weakly reversible interpretations are those having the property Cantor-Schröder-Bernstein (shorter, CSB) for condensations. Next, for a weakly reversible interpretation ρ the set ρ^*, which is the union of “removable atoms”, in the Boolean lattice $\langle \mathrm{Int}_L(X), \subseteq \rangle$, is introduced. It is shown that the interpretation ρ^* is not reversible, whereas $\rho \setminus \rho^*$ is not finitary reversible, and each component of ρ^* is either empty or an infinite set.

In particular, if $L = L_b$, a weakly reversible relation ρ either has none or infinitely many removable edges. As a consequence, it follows that, in many classes of structures, weak reversibility is equivalent to reversibility. It is illustrated by examples that in other classes it is not the case.

Particular emphasis is put on detecting relevant classes of reversible structures. First, the structures that are extreme elements of $L_{\infty\omega}$-definable classes, under certain syntactical restrictions, are investigated. Sufficient conditions that an $L_{\infty\omega}$-definable class of interpretations over a set X has maximal (and, dually, minimal) elements are given. Some elementary classes satisfying those restrictions are isolated, and, for some of them, the characterization of the corresponding extreme interpretations is given. Using those results, reversible countable ultrahomogeneous graphs (the list of Lachlan and Woodrow) are characterized.

Following that, disconnected L_b-structures are investigated, where several equivalents for reversibility of such structures are proven. These results are applied to some relevant classes of L_b-structures, like equivalence relations (or, more generally, structures that are rich for monomorphisms) and disjoint unions of chains. Since equivalence relations are, up to the isomorphism, characterized by the sequence of cardinalities of the equivalence classes, their reversibility can be regarded as the property of the corresponding sequence of cardinals (which is also called reversibility). It is shown that the only interesting examples of reversible sequences of cardinals can be found among reversible sequences of natural numbers, where the characterization of such sequences is given. It is also shown that, in some classes of disconnected structures (such as disjoint unions of chains, or tournaments), reversibility of the sequence of cardinalities of the components implies reversibility of the structure. Lastly, by applying the recent result of Laflamme, Pouzet and Woodrow – characterization of scattered chains that are CSB (for embeddings), the characterization of CSB chains of a limit type is obtained, and, applying Laver's proof of the Fraïssé hypothesis, reversible disjoint unions of such chains are characterized. In particular, that characterizes reversible disjoint unions of limit ordinals. Finally, the characterization of reversible disjoint unions of arbitrary ordinals and their inverses is obtained.

Accepted by the Scientific Board on (ASB): 26th February 2018

Defended (DE):

Thesis defend board (DB):

President: Rozália Madarász-Szilágyi, PhD, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Mentor: Miloš S. Kurilić, PhD, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Academician Stevo Todorčević, PhD, Canada Research Chair Professor, Department of Mathematics, University of Toronto and Senior Research Director, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris (Institut de Mathématique de Jussieu – PRG, UMR 7586), Member of the Serbian Academy of Sciences and Arts and Fellow of The Royal Society of Canada, The Academies of Arts, Humanities and Sciences of Canada

Member: Predrag Tanović, PhD, Scientific Advisor, Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts, and Associate Professor, Mathematical Faculty, University of Belgrade

Member: Boris Šobot, PhD, Associate Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad