УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Бобан Карапетровић

ОПЕРАТОР ХИЛБЕРТОВЕ МАТРИЦЕ И ЛИБЕРИН ОПЕРАТОР НА ПРОСТОРИМА ХОЛОМОРФНИХ ФУНКЦИЈА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Београд, 2017.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Boban Karapetrović

HILBERT MATRIX OPERATOR AND LIBERA OPERATOR ON SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS

DOCTORAL DISSERTATION

Belgrade, 2017.

МЕНТОР

- др Владимир Божин, доцент,
  Математички факултет, Универзитет у Београду

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ

- проф. др Мирољуб Јевтић, редовни професор у пензији

- проф. др Миодраг Матељевић, редовни професор и дописни члан САНУ,
  Математички факултет, Универзитет у Београду

- проф. др Милош Арсеновић, редовни професор,
  Математички факултет, Универзитет у Београду

ОПЕРАТОР ХИЛБЕРТОВЕ МАТРИЦЕ И ЛИБЕРИН ОПЕРАТОР НА ПРОСТОРИМА ХОЛОМОРФНИХ ФУНКЦИЈА

• **РЕЗИМЕ.** У овој тези, проучавамо дејство бесконачне Хилбертове матрице као оператора, који зовемо оператор Хилбертове матрице и означавамо са H и дејство Либериног оператора, означеног са $\mathcal{L}$, на класичним просторима холоморфних функција на јединичном диску у комплексној равни.

Познато је да оператор Хилбертове матрице H дејствује као ограничен оператор из Бергмановог простора A^p у простор A^p ако и само ако је $2 < p < \infty$. Такође, познато је да је норма оператора Хилбертове матрице H на Бергмановом простору A^p једнака $\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}}$, када је $4 \leq p < \infty$ и изнета је хипотеза да важи

$$\|H\|_{A^p \to A^p} = \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}},$$

и у случају $2 < p < 4$. У овој тези доказујемо претходну хипотезу. Налазимо и доње ограничење за норму оператора Хилбертове матрице H на тежинским Бергмановим просторима $A^{p,\alpha}$,

$$\|H\|_{A^{p,\alpha} \to A^{p,\alpha}} \geq \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}, \text{ за } 1 < \alpha + 2 < p.$$

Показујемо да у случају када је $4 \leq 2(\alpha+2) \leq p$, важи

$$\|H\|_{A^{p,\alpha} \to A^{p,\alpha}} = \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}},$$

док је у случају $2 \leq \alpha + 2 < p < 2(\alpha+2)$, добијено горње ограничење за норму $\|H\|_{A^{p,\alpha} \to A^{p,\alpha}}$, боље од претходно познатих. Доказујемо да је оператор Хилбертове матрице H ограничен на просторима Бесова $H_\nu^{p,q,\alpha}$ ако и само ако важи $0 < \kappa_{p,\alpha,\nu} = \nu - \alpha - \frac{1}{p} + 1 < 1$. Посебно, оператор H је ограничен на Бергмановом простору $A^{p,\alpha}$ ако и само ако је $1 < \alpha + 2 < p$ и ограничен је на Дирихлеовом простору $\mathcal{D}_\alpha^p = A_1^{p,\alpha}$ ако и само ако је $\max\{-1, p-2\} < \alpha < 2p - 2$. Такође, показујемо да ако је $\alpha > 2$ и $0 < \varepsilon \leq \alpha - 2$, тада се логаритамско тежински Бергманов простор $A^2_{\log^\alpha}$ пресликава са оператором Хилбертове матрице H у простор $A^2_{\log^{\alpha-2-\varepsilon}}$. Ако је $\alpha \in \mathbb{R}$, тада оператор Хилбертове матрице H пресликава логаритамско тежински Блохов простор $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$ у $\mathcal{B}_{\log^{\alpha+1}}$. Доказујемо и да оператор H пресликава логаритамско тежински Харди-Блохов простор $\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$, када је $\alpha \geq 0$, у простор $\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}$ и да је овакво дејство оператора H најбоље могуће. Осим тога, простор $VMOA$ се оператором Хилбертове матрице H не пресликава у Блохов простор $\mathcal{B}$.

Са друге стране, налазимо да је Либерин оператор $\mathcal{L}$ ограничен на просторима Бесова $H_\nu^{p,q,\alpha}$ ако и само ако важи $0 < \kappa_{p,\alpha,\nu} = \nu - \alpha - \frac{1}{p} + 1$. Поред тога, доказујемо да ако је $\alpha > 1$, тада се логаритамско тежински Бергманов простор $A^2_{\log^\alpha}$ пресликава са Либериним оператором $\mathcal{L}$ у простор $A^2_{\log^{\alpha-1}}$, док у случају када је $\alpha \in \mathbb{R}$, Либерин оператор $\mathcal{L}$ пресликава логаритамско тежински Блохов простор $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$ у самог себе.

Ако је $\alpha > 0$, имамо да оператор $\mathcal{L}$ пресликава логаритамско тежински Харди-Блохов простор $\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$ у $\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}$ и показујемо да је овакво дејство оператора $\mathcal{L}$ најбоље могуће.

Позната Коренблумова хипотеза која се односи на принцип максимума у класичним Бергмановим просторима A^p гласи:
Нека је $0 < p < \infty$. Тада постоји константа $0 < c < 1$ са следећим својством. Ако су f и g холоморфне функције у јединичном диску $\mathbb{D}$, такве да је $|f(z)| \leq |g(z)|$ за све $c < |z| < 1$, тада важи $\|f\|_{A^p} \leq \|g\|_{A^p}$.
Хајман је доказао Коренблумову хипотезу у случају када је $p = 2$ и Хинканен је уопштио његов резултат, показујући да је хипотеза тачна за све $1 \leq p < \infty$. Случај $0 < p < 1$ претходне хипотезе остао је отворен. У овој тези, разрешавамо претходни отворен случај Коренблумове хипотезе, тако што показујемо да Коренблумов принцип максимума у Бергмановим просторима A^p не важи у случају када је $0 < p < 1$.

• **КЉУЧНЕ РЕЧИ.** Хилбертова матрица, Либерин оператор, принцип максимума, Хардијеви простори, Бергманови простори, простори Бесова.

• **НАУЧНА ОБЛАСТ.** Математика.

• **УЖА НАУЧНА ОБЛАСТ.** Комплексна анализа.

• **УДК.** 517.544.7(043.3).

• **AMS КЛАСИФИКАЦИЈА.** 47B35, 47B38, 47G10, 30H10, 30H20, 30H25, 30H30.

HILBERT MATRIX OPERATOR AND LIBERA OPERATOR ON SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS

• **ABSTRACT.** In this thesis, we study the infinite Hilbert matrix viewed as an operator, called the Hilbert matrix operator and denoted by H and Libera operator, denoted by $\mathcal{L}$, on the classical spaces of holomorphic functions on the unit disk in the complex plane.

It is well known that the Hilbert matrix operator H is a bounded operator from the Bergman space A^p into A^p if and only if $2 < p < \infty$. Also, it is known that the norm of the Hilbert matrix operator H on the Bergman space A^p is equal $\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}}$, when $4 \leq p < \infty$, and it was conjectured that

$$\|H\|_{A^p \to A^p} = \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}},$$

when $2 < p < 4$. In this thesis we prove this conjecture. We find the lower bound for the norm of the Hilbert matrix operator H on the weighted Bergman space $A^{p,\alpha}$,

$$\|H\|_{A^{p,\alpha} \to A^{p,\alpha}} \geq \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}, \text{ for } 1 < \alpha + 2 < p.$$

We show that if $4 \leq 2(\alpha+2) \leq p$, then

$$\|H\|_{A^{p,\alpha} \to A^{p,\alpha}} = \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}},$$

while in the case $2 \leq \alpha+2 < p < 2(\alpha+2)$, upper bound for the norm $\|H\|_{A^{p,\alpha} \to A^{p,\alpha}}$, better then known, is obtained. We prove that the Hilbert matrix operator H is bounded on the Besov spaces $H_\nu^{p,q,\alpha}$ if and only if $0 < \kappa_{p,\alpha,\nu} = \nu - \alpha - \frac{1}{p} + 1 < 1$. In particular, operator H is bounded on the Bergman space $A^{p,\alpha}$ if and only if $1 < \alpha + 2 < p$ and it is bounded on the Dirichlet space $\mathcal{D}_\alpha^p = A_1^{p,\alpha}$ if and only if $\max\{-1, p-2\} < \alpha < 2p-2$. We also show that if $\alpha > 2$ and $0 < \varepsilon \leq \alpha - 2$, then the logarithmically weighted Bergman space $A^2_{\log^\alpha}$ is mapped by the Hilbert matrix operator H into the space $A^2_{\log^{\alpha-2-\varepsilon}}$. If $\alpha \in \mathbb{R}$, then the Hilbert matrix operator H maps logarithmically weighted Bloch space $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$ into $\mathcal{B}_{\log^{\alpha+1}}$. We also prove that operator H maps logarithmically weighted Hardy-Bloch space $\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$, when $\alpha \geq 0$, into $\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}$ and that this result is sharp. Also, we have that the space $VMOA$ is not mapped by the Hilbert matrix operator H into the Bloch space $\mathcal{B}$.

On the other hand, we find that the Libera operator $\mathcal{L}$ is bounded on the Besov space $H_\nu^{p,q,\alpha}$ if and only if $0 < \kappa_{p,\alpha,\nu} = \nu - \alpha - \frac{1}{p} + 1$. Then, we prove that if $\alpha > 1$, then the logarithmically weighted Bergman space $A^2_{\log^\alpha}$ is mapped by the Libera operator $\mathcal{L}$ into the space $A^2_{\log^{\alpha-1}}$, while if $\alpha \in \mathbb{R}$, then the Libera operator $\mathcal{L}$ maps logarithmically weighted Bloch space $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$ into itself. If $\alpha > 0$, we have that operator $\mathcal{L}$ maps logarithmically weighted Hardy-Bloch space $\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$ into $\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}$ and we show that this result is sharp.

The well known conjecture due to Korenblum about maximum principle in Bergman space A^p states:
Let $0 < p < \infty$. Then there exists a constant $0 < c < 1$ with the following property. If f and g are holomorphic functions in the unit disk $\mathbb{D}$, such that $|f(z)| \leq |g(z)|$ for all $c < |z| < 1$, then $\|f\|_{A^p} \leq \|g\|_{A^p}$.

Hayman proved Korenblum's conjecture for $p = 2$ and Hinkkanen generalized this result, by proving conjecture for all $1 \leq p < \infty$. The case $0 < p < 1$ of conjecture still remains open. In this thesis we resolve this case of the Korenblum's conjecture, by proving that Korenblum's maximum principle in Bergman space A^p does not hold when $0 < p < 1$.

• **KEYWORDS.** Hilbert matrix, Libera operator, maximum principle, Hardy spaces, Bergman spaces, Besov spaces.

• **SCIENTIFIC AREA.** Mathematics.

• **SCIENTIFIC FIELD.** Complex analysis.

• **UDC.** 517.544.7(043.3).

• **AMS CLASSIFICATION.** 47B35, 47B38, 47G10, 30H10, 30H20, 30H25, 30H30.

Садржај

Увод

Први пут уведена од стране Давида Хилберта у раду [25], бесконачна матрица чији су елементи дати са $(n+k+1)^{-1}$, где је $n, k \geq 0$, најпре је разматрана у теорији апроксимација. У поменутом раду Хилберт показује и прве неједнакости са низовима индуковане елементима његове матрице. Након тога, већи број аутора разматра дејство Хилбертове матрице на елементарним просторима низова. Спектар Хилбертове матрице која дејствује на простору ℓ^2, описан је од стране Магнуса (видети рад [39]). Наиме, Магнус је показао да је непрекидни део спектра Хилбертове матрице интервал $[0, \pi]$ и да је то заправо цео спектар Хилбертове матрице. У класичној монографији [21] испитује се понашање Хилбертове матрице на ℓ^p просторима низова, где се и уопштавају претходно познате класичне Хилбертове неједнакости на простору ℓ^2. Између осталог, показује се и да је норма Хилбертове матрице $H : \ell^p \to \ell^p$, једнака $\|H\|_{\ell^p \to \ell^p} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$ за све $1 < p < \infty$. Са развојем теорије Ханкелових оператора, уопштавају се до тада познати резултати који се односе на оператор Хилбертове матрице, имајући у виду да оператор Хилбертове матрице заправо припада простору Ханкелових оператора. За више информација о теорији Ханкелових оператора видети монографију [53]. Модерна теорија посвећена Хилбертовој матрици, која пре свега обухвата дејство оператора Хилбертове матрице на неким класичним просторима холоморфних функција на јединичном диску, почиње са радом [13], у којем аутори Диамантопулос и Сискакис разматрају оператор Хилбертове матрице на Хардијевим просторима H^p. Они показују да је оператор Хилбертове матрице H ограничен на Хардијевом простору H^p ако и само ако важи $1 < p < \infty$. У случају када је $2 \leq p < \infty$, добијају следећу оцену одозго за норму Хилбертове матрице која дејствује на Хардијевим просторима $\|H\|_{H^p \to H^p} \leq \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$, док у случају $1 < p < 2$, налазе исту оцену, али под неким додатно наметнутим условима. Осим тога, они износе и претпоставку да је вредност $\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$, заправо, тачна норма оператора $H : H^p \to H^p$. Са друге стране, Диамантопулос испитује и понашање Хилбертове матрице на Бергмановим просторима A^p. У свом раду [12], показује да је оператор $H : A^p \to A^p$ ограничен ако и само ако важи $2 < p < \infty$. У случају $4 \leq p < \infty$, показује да важи $\|H\|_{A^p \to A^p} \leq \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}}$, док у случају $2 < p < 4$, добија слабије горње ограничење. Коначно, у свом раду [14], аутори Достанић, Јевтић и Вукотић разрешавају претходно наведена отворена питања. Наиме, они као последицу једне теореме Нехаријевог типа, добијају горње ограничење $\|H\|_{H^p \to H^p} \leq \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$ за све $1 < p < \infty$ и налазе доње ограничење $\|H\|_{H^p \to H^p} \geq \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$, такође за све $1 < p < \infty$. На тај начин, у потпуности затварају питање норме оператора Хилбертове матрице на Хардијевим просторима. Они такође, добијају доње ограничење $\|H\|_{A^p \to A^p} \geq \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}}$ за све $2 < p < \infty$, показавши на тај начин да је норма $\|H\|_{A^p \to A^p}$ једнака $\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}}$, за све $4 \leq p < \infty$. Међутим, након тог рада, као отворен проблем и даље је остало питање тачне норме оператора Хилбертове матрице $H : A^p \to A^p$, у случају када је $2 < p < 4$. Након тога, већи број аутора се бавио разним уопштењима Хилбертове матрице (пре свега уопштавајући поједине елементе у њеној интегралној репрезенатцији) која дејствује на просторима холоморфних функција (видети [8, 18, 19, 52]). Такође, у последње време, од интереса је и разматрање мултипликативне варијанте Хилбертове матрице (за више информација погледати рад [7]). У [38], аутори Лануча, Новак и Павловић, испитују између осталог и дејство оператора Хилбертове матрице на логаритамско тежинским Бергмановим просторима. Показују да у случају када је $\alpha > 3$, оператор H, пресликава логаритамско тежински Бергманов простор $A^2_{\log^\alpha}$ у Бергманов простор A^2. Такође, они испитују и ограниченост оператора Хилбертове матрице на неким просторима мешовите норме и налазе да је оператор $H : H^{p,\infty,\alpha} \to H^{p,\infty,\alpha}$ ограничен ако и само ако важи $\alpha + \frac{1}{p} < 1$. Поред оператора Хилбертове матрице H, аутори Галанопулос, Гирела, Пелаез и Сискакис, посматрају и модификовани Хилбертов оператор $\widetilde{H}$ на тежинским Бергмановим и Дирихлеовим просторима (видети [19]). Наиме, доказују да ако важи $p > 1$ и $-1 < \alpha < p-2$, тада је оператор $\widetilde{H} : A^{p,\alpha} \to A^{p,\alpha}$ ограничен, док у случају када је $p > 1$ и $p - 2 < \alpha \leq p - 1$, добијају ограниченост оператора $\widetilde{H} : \mathcal{D}^p_\alpha \to \mathcal{D}^p_\alpha$. У оба случаја, потпуна карактеризација ограничености модификованог Хилбертовог оператора, као и оператора Хилбертове матрице, на претходно наведеним просторима остала је отворена.

Првих шест глава ове докторске дисертације посвећено је оператору Хилбертове матрице и његовом дејству на просторима холоморфних функција. Наведени су пре свега, сви нови резултати добијени од стране аутора овог текста, М. Јевтића и В. Божина. Прва глава је уводног карактера, састоји се од познатих и класичних резултата који се односе на Ханкелове операторе и дејство Хилбертове матрице као оператора на просторима низова, пре свега на ℓ^p просторима. Доказана је теорема Нехарија и одређена норма $\|H\|_{\ell^p \to \ell^p}$ за све $1 < p < \infty$. Осим тога, показано је на који начин се из теореме Нехарија добија класична Хардијева неједнакост. Друга глава је посвећена дејству Хилбертове матрице на Хардијевим просторима и доказу да је норма $\|H\|_{H^p \to H^p}$ једнака $\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}$ за све $1 < p < \infty$. Глава се ослања на радове [12, 13] (Диамантопулос и Сискакис) и пре свега на рад [14] (Достанић, Јевтић и Вукотић). Међутим, и поред тога, један део друге главе је оригиналан. Наиме, наведен је потпуно нови доказ за доње ограничење $\|H\|_{H^p \to H^p} \geq \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}$ за све $1 < p < \infty$, при чему је примењена нова техника која користи хипергеометријске функције. Наведени доказ је преузет из рада [33] (Карапетровић) и једноставнији је и елегантнији од оног већ постојећег из рада [14]. Главни резултат треће главе је коначно разрешење отвореног проблема који се односи на норму оператора Хилбертове матрице на Бергмановом простору A^p у случају када је $2 < p < 4$. Наиме, доказано је да важи $\|H\|_{A^p \to A^p} = \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{p}}$ за $2 < p < 4$, при чему је доказ преузет из рада [5] (Божин, Карапетровић) и у коме је примењена једна нова техника, која се базира на новом приступу монотоности интегралних средина холоморфних функција. Са друге стране, користећи технику хипергеометријских функција, дат је нов и оригиналан доказ за доње ограничење $\|H\|_{A^p \to A^p} \geq \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{p}}$ за све $2 < p < \infty$, који је такође преузет из рада [5]. Наведени доказ је знатно упростио претходно постојећи доказ из рада [14]. Остатак треће главе се базира на резултатима рада [12]. Четврта глава доноси потпуну карактеризацију ограничености оператора Хилбертове матрице на просторима Бесова и просторима мешовите норме и тиме разрешава још један претходно наведени отворен проблем који датира из радова [19] (Галанопулос, Гирела, Пелаез и Сискакис) и [38] (Лануча, Новак и Павловић). Резултати ове главе су публиковани у раду [30] (Јевтић, Карапетровић).

Наиме, главни резултат ове главе јесте да су оператор Хилбертове матрице H, али уједно и модификовани Хилбертов оператор $\widetilde{H}$, ограничени на простору $H_\nu^{p,q,\alpha}$ ако и само ако важи $0 < \kappa_{p,\alpha,\nu} = \nu - \alpha - \frac{1}{p} + 1 < 1$. Директна последица претходног резултата јесте да су оператори H и $\widetilde{H}$ ограничени на тежинском Бергмановом простору $A^{p,\alpha}$ ако и само ако важи $1 < \alpha + 2 < p$. Такође, последица наведеног резултата јесте ограниченост оператора H и $\widetilde{H}$ на Дирихлеовом простору $\mathcal{D}_\alpha^p$ ако и само ако важи $\max\{-1, p-2\} < \alpha < 2p-2$. У петој глави се разматра дејство оператора Хилбертове матрице на логаритамско тежинским просторима Бергмана, Блоха и Харди-Блоха. Као што смо већ навели, претходно познат резултат о дејству Хилбертове матрице на логаритамско тежинском Бергмановом простору $A^2_{\log^\alpha}$, јесте да у случају $\alpha > 3$, важи $H : A^2_{\log^\alpha} \to A^2$. Овај резултат је најпре побољшан у раду [28] (Јевтић, Карапетровић), где је показано да важи $H : A^2_{\log^\alpha} \to A^2$ за све $\alpha > 2$. Међутим, у петој глави је наведен резултат из рада [32] (Карапетровић), који уопштава претходно наведене резултате. Наиме, покзано је да у случају када је $\alpha > 2$ и $0 < \varepsilon \le \alpha - 2$ оператор Хилбертове матрице H пресликава логаритамско тежински Бергманов простор $A^2_{\log^\alpha}$ у простор $A^2_{\log^{\alpha-2-\varepsilon}}$. Осим тога, показано је да ако важи $\alpha \in \mathbb{R}$, тада оператор Хилбертове матрице H пресликава логаритамско тежински Блохов простор $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$ у простор $\mathcal{B}_{\log^{\alpha+1}}$. Такође, оператор H пресликава логаритамско тежински Харди-Блохов простор $\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$, када је $\alpha \ge 0$, у простор $\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}$ и овакво дејство оператора H је најбоље могуће. Сви резултати ове главе су преузети из рада [32] (Карапетровић). Коначно, у шестој глави се, између осталог, описује дејство оператора Хилбертове матрице на просторима Бесова. Резултати ове главе преузети су из рада [28] (Јевтић, Карапетровић). Један од главних резултата добијених у овој глави јесте да оператор Хилбертове матрице H не пресликава простор $VMOA$ у Блохов простор $\mathcal{B}$. Такође, разматра се и дејство оператора H на потпросторима простора H^1. Један од првих резултата о понашању Хилбертове матрице H на простору H^1 добијен је у раду Диамантопулоса и Сискакиса ([13]), где је показано да је H неограничен оператор на простору H^1. Поред тога, у [38] је показано да оператор Хилбертове матрице H дејствује као ограничен оператор из простора H^1 у простор H^p за све $0 < p < 1$. Међутим, у шестој глави, ове дисертације показано је да важи $H : H^1 \to H^{p,\infty,1/p'}$ за све $1 < p < \infty$, при чему је $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ и да оператор H не пресликава простор $H_1^{1,1,1}$ у простор $H^{p,q,1/p'}$ за било које $q \in (0, \infty)$. Напоменимо да је у свом раду [9] аутор Сима доказао да оператор Хилбертове матрице H пресликава простор H^1 у простор Кошијевих трансформација мера на јединичној кружници $\mathbb{T}$. Осим тога, у том случају је показана и инјективност оператора Хилбертове матрице H.

Либера је у свом раду [37] посматрао оператор $g(z) \mapsto \frac{2}{z}\int_0^z g(\zeta)d\zeta$ и показао његов значај у теорији једновалентних функција. Заправо, Либера је показао да претходни оператор пресликава једну посебну класу једновалентних функција у саму себе. Након тог рада, публиковано је много радова на тему сличних оператора. Уопштени Либерин оператор $\Lambda_a g(z) = \frac{1}{a-z}\int_z^a g(\zeta)d\zeta$, где је $a \in \overline{\mathbb{D}}$, уведен је и проучаван са тачке гледишта функционалне анализе у радовима Сискакиса [57, 58], а затим и у раду [11]. Уколико је $a \in \mathbb{D}$, тада је оператор Λ_a дефинисан на простору $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, а самим тим и на класичним просторима Хардија, Бергмана и Бесова и може се показати да има скоро иста линеарна тополошка својства као и оператор $g(z) \mapsto \int_0^z g(\zeta)d\zeta$. Самим тим, проучавање једног таквог оператора није било од интереса са тачке гледишта функционалне анализе. Према томе, од већег интереса је било разматрање случаја када је $a \in \partial\mathbb{D}$. Уосталом, тада се може претпоставити да је $a = 1$, односно, долазимо до оператора $\Lambda_1 g(z) = \frac{1}{1-z}\int_z^1 g(\zeta)d\zeta$. Показује се да је оператор Λ_1 добро дефинисан на простору $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ и да пресликава простор $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ у $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$, при чему важи $\Lambda_1 g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\widehat{g}(k)}{k+1}\right)z^n = \int_0^1 g(t+(1-t)z)dt$ за све $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{g}(n)z^n \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$. Напоменимо да се тада са $\mathcal{L}$ означава Либерин оператор $\mathcal{L}g(z) = \int_0^1 g(t+(1-t)z)dt$ за све $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{g}(n)z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ када претходно наведени интеграл конвергира равномерно на компактним подскуповима јединичног диска $\mathbb{D}$. За више информација о Либерином оператору и за нека друга његова својства видети [44] (Новак, Павловић). У свом раду [50] Павловић испитује ограниченост Либериног оператора $\mathcal{L}$ на просторима Бесова и просторима мешовите норме. Наиме, он показује да је Либерин оператор $\mathcal{L}$ ограничен на просторима $H_{\nu}^{p,q,\alpha}$ ако и само ако важи $0 < \kappa_{p,\alpha,\nu} = \nu - \alpha - \frac{1}{p} + 1$, али само у случају када је $p \geq 1$ и када ν пролази скупом ненегативних целих бројева. Потпуна карактеризација ограничености Либериног оператора остаје отворена. Са друге стране, Павловић у свом раду [49] испитује дејство Либериног оператора на логаритамско тежинским просторима Харди-Блоха. Наиме, он доказује да ако важи $\alpha > 0$, тада Либерин оператор $\mathcal{L}$ пресликава логаритамско тежински Харди-Блохов простор $\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha}}$ у простор $\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}$.

Седма и осма глава ове докторске дисертације су посвећене разматрању Либериног оператора на просторима холоморфних функција. У седмој глави је дата потпуна карактеризација ограничености Либериног оператора $\mathcal{L}$ на просторима $H_{\nu}^{p,q,\alpha}$. Наиме, показано је да је Либерин оператор ограничен на простору $H_{\nu}^{p,q,\alpha}$ ако и само ако важи $0 < \kappa_{p,\alpha,\nu} = \nu - \alpha - \frac{1}{p} + 1$, при чему је уклоњена одговарајућа рестрикција да је $p \geq 1$ и да ν пролази скупом ненегативних целих бројева из рада [50]. Резултати ове главе су публиковани у раду [29] аутора Јевтића и Карапетровића. У осмој глави се посматра дејство Либериног оператора на логаритамско тежинским просторима Бергмана, Блоха и Харди-Блоха. Доказано је да ако важи $\alpha > 1$, тада се логаритамско тежински Бергманов простор $A^2_{\log^{\alpha}}$ пресликава са Либериним оператором $\mathcal{L}$ у простор $A^2_{\log^{\alpha-1}}$, док у случају када је $\alpha \in \mathbb{R}$, Либерин оператор $\mathcal{L}$ пресликава логаритамско тежински Блохов простор $\mathcal{B}_{\log^{\alpha}}$ у самог себе. Са друге стране, показано је и да је претходно наведени резултат о дејству Либериног оператора $\mathcal{L}$ на логаритамско тежинским просторима Харди-Блоха из рада [49], у извесном смислу најбољи могућ. Резултати осме главе преузети су из рада [32] (Карапетровић).

Кортенблум је у свом раду [34] изнео следећу хипотезу о принципу максимума у Бергмановим просторима.

Принцип максимума у Бергмановим просторима. *Нека је $0 < p < \infty$. Тада постоји константа $0 < c < 1$ са следећим својством. Ако су f и g холоморфне функције у јединичном диску $\mathbb{D}$, такве да је $|f(z)| \leq |g(z)|$ за све $c < |z| < 1$, тада важи*

$$\|f\|_{A^p} \leq \|g\|_{A^p}.$$

У поменутом раду [34], Коренблум је доказао принцип максимума за $p = 2$ и $c < \frac{1}{2}e^{-2}$, под додатном претпоставком да је g/f холоморфна функција и након тога је уследила серија парцијалних резултата од стране већег броја аутора (видети радове [35, 36, 40, 56]). Хејман је у свом раду [22], први доказао тачност хипотезе у случају $p = 2$. Убрзо након тога, Хинканен је у раду [26], доказао тачност хипотезе за све $1 \leq p < \infty$. Случај $0 < p < 1$ хипотезе је остао нерешен. Такође, у [26], Хинканен је поставио питање да ли је принцип максимума у Бергмановим просторима валидан и у случају када је $0 < p < 1$. Након тога, у [62], Ванг је доказао да принцип максимума у Бергмановим просторима важи у случају $0 < p < 1$, али под додатном претпоставком да функција g има просту нулу у тачки 0 у јединичном диску $\mathbb{D}$. Осим тога, најбоља вредност константе c, за коју важи Коренблумов принцип максимума за $1 \leq p < \infty$, чак и у случају $p = 2$, још увек је непозната. За више информација која се односе на ограничења за Коренблумову константу видети радове Шустера и Ванга [55, 60, 61, 63, 64].

Девета глава ове докторске дисертације је посвећена одговору на отворено питање тачности Коренблумовог принципа максимума у Бергмановим просторима A^p код којих је $0 < p < 1$ и разрешењу преосталог дела Коренблумове хипотезе. Наиме, пратећи рад [6] аутора Божина и Карапетровића, у деветој глави заправо доказујемо да Коренблумов принцип максимума не важи у Бергмановим просторима A^p код којих је $0 < p < 1$. Осим тога, пратећи радове [26, 55, 64] аутора Хинканена, Шустера и Ванга, у деветој глави доказујемо тачност Коренблумовог принципа максимума у Бергмановим просторима A^p код којих је $1 \leq p < \infty$.

Велику захвалност дугујем, пре свега, свом професору Мирољубу Јевтићу на увођењу у научни рад, на одабиру теме, на издвојеном времену, на његовој изузетној посвећености и свим корисним саветима и сугестијама. Посебну захвалност дугујем и професору Владимиру Божину на преузетим обавезама ментора, на бројним саветима и његовој истрајности у заједничком раду. Захваљујем се и својим првим професорима комплексне анализе Миодрагу Матељевићу и Миљану Кнежевићу, као и професору анализе и члану комисије Милошу Арсеновићу на корисним коментарима и уложеном труду. Такође, задовољство ми је да се захвалим свом професору Ђорђу Кртинићу, као и Марији Микић, на правим саветима и подршци. Ипак, највећу захвалност дугујем својој породици.

Ивањица, мај 2017. *Бобан Карапетровић*

Основни појмови, тврђења и ознаке

У овој, пре свега уводној глави, дат је кратак преглед неких основних појмова, као и тврђења, која ће се користити у наставку текста. Наведени су углавном резултати из класичне теорије Хардијевих и Бергманових простора, али и неки основни елементи комплексне и функционалне анализе. Такође, фиксирана је и нотација која ће бити коришћена у наредним поглављима. Глава је подељена на секције у зависности од појма, тврђења или ознаке на коју се односи. У појединим секцијама дате су и референце везане за појам на који се секција односи.

• *Јединични диск $\mathbb{D}$ и јединична кружница $\mathbb{T}$ у комплексној равни $\mathbb{C}$*

Диск полупречника $r > 0$ са центром у тачки z_0 комплексне равни $\mathbb{C}$ означавамо са $D(z_0, r)$, односно важи $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$. Јединични диск $D(0,1)$ означавамо са $\mathbb{D}$. За границу $\partial\mathbb{D}$ јединичног диска $\mathbb{D}$, односно, за јединичну кружницу, користимо ознаку $\mathbb{T}$. Дакле, важи $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

• *Простори $h(\mathbb{D})$ и $\mathcal{H}(\mathbb{D})$*

Простор свих холоморфних функција на јединичном диску $\mathbb{D}$ означава се са $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, док је $h(\mathbb{D})$ простор свих хармонијских функција у јединичном диску $\mathbb{D}$. Простор $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ снабдевамо са топологијом индукованом равномерном конвергенцијом на компактним подскуповима диска $\mathbb{D}$. Тада се дуал простора $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ поистивећује са простором $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$, где $g \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ значи да је функција g холоморфна у некој околини затвореног јединчног диска $\overline{\mathbb{D}}$ (која зависи од избора функције g). Одговарајуће спаривање је дато са

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)},$$

где је $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ и $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{g}(n)z^n \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$.

• *Тејлорови коефицијенти*

Низ Тејлорових коефицијената функције $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ означава се са $\{\widehat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty}$, односно $\widehat{f}(n) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ за све $n \geq 0$. Тејлоров ред функције f

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)z^n, \ z \in \mathbb{D},$$

конвергира у јединичном диску $\mathbb{D}$. Са друге стране, уколико холоморфну функцију $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)z^n$ поистоветимо са њеним низом Тејлорових коефицијената, односно са низом $\{\widehat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty}$, тада посматране просторе холоморфних функција можемо видети и као одговарајуће просторе низова.

• *Константе*

Позитивну константу означавамо са C, при чему она може да узима разне вредности у зависности од контекста у којем се налази. Уколико константа зависи од једног параметра α, пишемо C_α, при чему C_α означава константну величину за фиксну вредност параметра α, док за различите вредности параметра α и константа C_α може да узима разне вредности. За две величине M и N, кажемо да су упоредиве и пишемо $M \asymp N$, уколико постоји позитивна константа C, таква да важи $C^{-1}N \leq M \leq CN$. Ако постоји позитивна константа C, таква да је $M \leq CN$, тада користимо ознаку $M \lesssim N$. Уколико се упоређују две фунцкије, обично подразумевамо да су константе које су им придружене независне од избора функција и избора њихових аргумената.

• *L^p простори*

Две мерљиве функције, у односу на мерљив простор (X, μ), где је μ позитивна мера на одговарајућој σ-алгебри простора X, поистовећујемо, уколико се оне поклапају скоро свуда на простору X у односу на дату меру μ. Функција f, којом се репрезентује једна тако добијена класа еквиваленције, припада простору $L^p(X, \mu)$, уколико важи

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \text{ за } 0 < p < \infty;$$

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|.$$

Простори $L^p(X, \mu)$ су Банахови простори за све $1 \leq p \leq \infty$ ($\| \cdot \|_p$ није норма када је $0 < p < 1$, али је у овом случају са $d_p(f, g) = \|f - g\|_p^p$ дефинисана транслаторно инваријантна метрика на простору $L^p(X, \mu)$). Такође, $L^2(X, \mu)$ је Хилбертов простор у односу на скаларан производ (који је сагласан са претходно уведеном нормом), дефинисан на следећи начин

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu(x).$$

Нека је $1 \leq p \leq \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тада, за две мерљиве функције f и g, у односу на мерљив простор (X, μ), важи Хелдерова неједнакост

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Специјално, у случају када је $p = q = 2$, добијамо Коши-Шварцову неједнакост

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

• *ℓ^p простори*

Простор ℓ^p дефинишемо као простор $L^p(X, \mu)$, при чему је $X = \mathbb{N}_0$ и μ мера која сваком подскупу скупа $\mathbb{N}_0$ придружује његову кардиналност (бројачка мера). То значи да је ℓ^p простор низова $a = \{a_n\}_{n=0}^\infty$, таквих да важи

$$\|a\|_{\ell^p} = \|a\|_p = \left(\sum_{n=0}^\infty |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ за } 0 < p < \infty;$$

$$\|a\|_{\ell^\infty} = \|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |a_n|.$$

Скаларни производ на простору ℓ^2 дефинисан је на следећи начин

$$\langle a, b\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n},$$

где је $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $b = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$.

• *Хардијеви простори h^p и H^p*

За $0 < p \leq \infty$ дефинишемо Хардијев простор H^p као простор свих функција $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, таквих да важи

$$\|f\|_{H^p} = \|f\|_p = \sup_{0\leq r<1} M_p(r, f) < \infty,$$

где је

$$M_p(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \text{ за } 0 < p < \infty;$$

$$M_\infty(r, f) = \sup_{0\leq t<2\pi} |f(re^{it})|.$$

Такође, за $0 < p \leq \infty$ дефинишемо хармонијски Хардијев простор h^p као простор свих функција $u \in h(\mathbb{D})$, таквих да важи

$$\|u\|_{H^p} = \|u\|_p = \sup_{0\leq r<1} M_p(r, u) < \infty.$$

Функције из Хардијевог простора задовољавају Фејер–Рисову неједнакост. Наиме, за функцију $f \in H^p$, где је $p > 0$, важи следећа неједнакост

$$\int_{-1}^{1} |f(t)|^p dt \leq \pi \|f\|_{H^p}.$$

Нека је $f \in H^p$, $f \not\equiv 0$ и нека је $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ свих нула функције f у диску $\mathbb{D}$ (укључујући и вишеструкости). Тада, Блашкеов производ

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n|}{\lambda_n} \frac{\lambda_n - z}{1 - \overline{\lambda_n} z},$$

равномерно конвергира на компактним подскуповима диска $\mathbb{D}$. Осим тога, важи $|B| \leq 1$ у диску $\mathbb{D}$, $|B| = 1$ скоро свуда на $\mathbb{T}$ и све нуле функције B су $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. Класична референца за теорију Хардијевих простора је монографија [16]. Такође, видети и монографије [31, 47, 48].
Потпростор простора H^∞ који се састоји од оних функција које су такође и непрекидне на затвореном јединичном диску $\overline{\mathbb{D}}$, снабдевен са супремум нормом, зове се диск алгебра и обележава са $\mathcal{A}$.

• *Рисова факторизација у Хардијевим просторима*

Нека је $f \in H^p$. Тада постоји јединствена факторизација функције $f = \lambda BS[f]$, где је $\lambda \in \mathbb{T}$, B је Блашкеов производ који одговара нулама функције f, S је сингуларна унутрашња функција (S је холоморфна функција у диску $\mathbb{D}$, $0 < |S| \leq 1$ у $\mathbb{D}$, $S(0) > 0$ и $|S| = 1$ скоро свуда на $\mathbb{T}$) и

$$[f](z) = \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\xi + z}{\xi - z} \log|f(\xi)| dm(\xi)\right) \text{ за све } z \in \mathbb{D}.$$

Осим тога, тада важи $[f] \in H^p$ и $|[f]| = |f|$ скоро свуда на $\mathbb{T}$. Једна од директних последица претходне факторизације у Хардијевим просторима може се исказати на следећи начин. Нека је $f \in H^p$ и $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Тада постоје функције $g \in H^q$ и $h \in H^r$, такве да је $f = gh$ и $\|g\|_{H^q}^q = \|h\|_{H^r}^r = \|f\|_{H^p}^p$. Наиме, довољно је изабрати $g = \lambda BS[f]^{\frac{p}{q}}$ и $h = [f]^{\frac{p}{r}}$, из претходно наведене факторизације функције f.

• *Оператор Рисове пројекције*

Оператор $R_+ : L^p(\mathbb{T}) \to H^p$ дефинисан на следећи начин

$$R_+u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(t)}{1 - ze^{-it}}dt, \ z \in \mathbb{D},$$

зове се оператор Рисове пројекције. На основу резултата из [27] оператор Рисове пројекције је ограничен за $1 < p < \infty$ и важи

$$\|R_+\|_{L^p(\mathbb{T})\to H^p} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{p}}.$$

Уколико је $f \in L^p(\mathbb{T})$ и $f(\xi) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\xi^n$ за $\xi \in \mathbb{T}$, где је

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}f(e^{it})dt \text{ за све } n \in \mathbb{Z},$$

тада важи

$$R_+f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\xi^n.$$

На овај начин оператор Рисове пројекције R_+ видимо као оператор из простора $L^p(\mathbb{T})$ у простор $H^p(\mathbb{T})$ (одговарајући Хардијев простор на јединичној кружници $\mathbb{T}$) који је изоморфан простору H^p.

• *Простори $BMOA$ и $VMOA$*

Простор $BMOA$ се састоји од функција $f \in H^1$, чије су граничне вредности $f(e^{it})$ ограничене средње осцилације на јединичној кружници $\mathbb{T}$, односно, које задовољавају следећи услов

$$\sup_I \frac{1}{|I|}\int_I \left|f(e^{it}) - f_I\right| dt < \infty,$$

где се супремум узима по свим интервалима $I \subset \mathbb{T}$ и где је

$$f_I = \frac{1}{|I|}\int_I f(e^{it})dt.$$

Уколико важи

$$\lim_{|I|\to 0} \frac{1}{|I|}\int_I \left|f(e^{it}) - f_I\right| dt = 0,$$

тада кажемо да функција f припада простору $VMOA$. Овде, као што је уобичајено, користимо ознаку $|I|$ да означимо дужину лука, односно интервала I на јединичној кружници $\mathbb{T}$. Може се показати да се дуал простора H^1 идентификује са простором $BMOA$ (Феферманова теорема) и да се дуал простора $VMOA$ идентификује са H^1. За више информација о овим просторима видети [31].

• *Бергманови простори A^p и тежински Бергманови простори $A^{p,\alpha}$*

Нормализована Лебегова мера на јединичном диску $\mathbb{D}$ означава се са A, односно важи

$$dA(z) = \frac{1}{\pi}dxdy = \frac{1}{\pi}rdrd\theta, \text{ где је } z = x + iy = re^{i\theta}.$$

За $0 < p < \infty$ и $\alpha > -1$, тежински Бергманов простор $A^{p,\alpha} = A^{p,\alpha}(\mathbb{D})$ дефинишемо као простор $\mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, где је

$$dA_\alpha(z) = (\alpha + 1)\left(1 - |z|^2\right)^\alpha dA(z).$$

Ако $f \in A^{p,\alpha} = \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, тада пишемо

$$\|f\|_{A^{p,\alpha}} = \|f\|_{p,\alpha} = \left((\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \left(1 - |z|^2\right)^\alpha dA(z)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Простор $A^p = A^{p,0}$ је Бергманов простор. За више информација о Бергмановим просторима видети [17, 23, 31, 47, 48].

• *Простори $H^{p,q,\alpha}$ и $H^{p,q,\alpha}_\nu$ (специјално, простори Бесова и Липшица)*

Функција $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ припада простору $H^{p,q,\alpha}$, где је $0 < p, q \leq \infty$ и $0 < \alpha < \infty$, уколико важи

$$\|f\|_{H^{p,q,\alpha}} = \|f\|_{p,q,\alpha} = \left(\int_0^1 M_p^q(r,f)(1-r)^{q\alpha-1}dr\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,\ 0 < q < \infty;$$

$$\|f\|_{H^{p,\infty,\alpha}} = \|f\|_{p,\infty,\alpha} = \sup_{0\leq r<1}(1-r)^\alpha M_p(r,f) < \infty.$$

Није тешко проверити да $f \in A^{p,\alpha}$ ако и само ако важи

$$\|f\|^p_{p,p,\frac{\alpha+1}{p}} = \int_0^1 (1-r)^\alpha M_p^p(r,f)dr < \infty.$$

Такође, норма $\|f\|_{p,\alpha}$ је упоредива са нормом $\|f\|_{p,p,\frac{\alpha+1}{p}}$, односно важи

$$\|f\|_{A^{p,\alpha}} \asymp \|f\|_{H^{p,p,\frac{\alpha+1}{p}}}.$$

Према томе, важи $A^{p,\alpha} = H^{p,p,\frac{\alpha+1}{p}}$.

Уколико је $t \in \mathbb{R}$, користимо ознаку D^t за низ $\{(n+1)^t\}_{n=0}^\infty$. Ако је $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ низ и X простор низова (приметимо да уколико поистоветимо холоморфну функцију $f(z) = \sum_{n=0}^\infty \widehat{f}(n)z^n$ са низом њених Тејлорових коефицијената $\{\widehat{f}(n)\}_{n=0}^\infty$, тада можемо посматрати сваки простор холоморфних функција као простор низова), тада пишемо

$$\lambda X = \left\{\lambda * x = \{\lambda_n x_n\}_{n=0}^\infty : x = \{x_n\}_{n=0}^\infty \in X\right\}.$$

На пример, важи $\{a_n\}_{n=0}^\infty \in D^1\ell^1$ ако и само ако је $\sum_{n=0}^\infty \frac{|a_n|}{n+1} < \infty$. Простор $D^t H^{p,q,\alpha}$, где је $t \neq 0$, означавамо са $H^{p,q,\alpha}_{-t}$. Према томе, за свако $\nu \in \mathbb{R}$, имамо да важи $H^{p,q,\alpha}_\nu = D^{-\nu}H^{p,q,\alpha}$.

Међу просторима $H^{p,q,\alpha}_s$, где је $0 < s < \infty$, простори $H^{p,q,1}_{1+s}$ су од специјалног интереса и представљају просторе Бесова када је $0 < q < \infty$ и Липшицове просторе када је $q = \infty$.

Осим тога, у неким изворима, на пример у [48], простори функција $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, таквих да је $D^n f \in H^{p,q,n-\alpha}$, где је $\alpha \in \mathbb{R}$ (или еквивалентно $f^{(n)} \in H^{p,q,n-\alpha}$), за неки ненегативан цео број n, такав да је $n-\alpha > 0$, представљају просторе Бесова и означавају се са $\mathcal{B}^{p,q}_{\alpha}$. Упоређујући све претходно наведено са дефиницијом датом изнад, налазимо да је $\mathcal{B}^{p,q}_{\alpha} = H^{p,q,-\alpha}$ за све $\alpha < 0$ и $\mathcal{B}^{p,q}_{\alpha} = H^{p,q,1}_{1+\alpha}$ за све $\alpha \geq 0$.

- *Блохов простор* $\mathcal{B}$

За функцију $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ кажемо да припада Блоховом простору $\mathcal{B}$ ако важи

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)| < \infty,$$

односно, ако је Блохова полунорма $\|f\|_{\mathcal{B}}$ коначна. Са друге стране, норма на Блоховом простору $\mathcal{B}$ може бити дефинисана као $\|f\|_{\mathcal{B}} + |f(0)|$. Није тешко проверити да је ова норма еквивалентна норми $\|D^1 f\|_{\infty,\infty,1}$. Према томе, Блохов простор $\mathcal{B}$ можемо видети и на следећи начин

$$\mathcal{B} = H^{\infty,\infty,1}_{1}.$$

Важно својство Блохове полунорме је њена конформна инваријантност. Наиме, ако је $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, где је $z \in \mathbb{D}$ и $a \in \mathbb{D}$, аутоморфизам јединичног диска, тада важи

$$\|f \circ \varphi_a\|_{\mathcal{B}} = \|f\|_{\mathcal{B}}.$$

Такође, важи $H^{\infty} \subset \mathcal{B}$. Заправо, ако $f \in H^{\infty}$, тада је

$$\|f\|_{\mathcal{B}} \leq \|f\|_{\infty}.$$

Имајући у виду да је $H^{\infty,\infty,1}$ комплетан простор и да је $\mathcal{B} = H^{\infty,\infty,1}_{1}$, можемо закључити да је Блохов простор $\mathcal{B}$, заправо један Банахов простор.

- *Харди-Блохови простори* $\mathcal{B}^{p,q}_{0}$

Простори $\mathcal{B}^{p,q}_{0}$, где је $0 < p, q \leq \infty$, зову се Харди-Блохови простори. Тада важи

$$\mathcal{B}^{p,q}_{0} = H^{p,q,1}_{1}.$$

Према томе, Харди-Блохов простор $\mathcal{B}^{p,q}_{0}$ је простор свих функција $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, таквих да је

$$\int_0^1 M_p^q(r,f')(1-r)^{q-1}dr < \infty, \quad \text{за} \quad 0 < q < \infty$$

и

$$\sup_{0\leq r<1}(1-r)M_p(r,f') < \infty, \quad \text{за} \quad q = \infty.$$

- *Хипергеометријске функције*

Бета функција је дефинисана на следећи начин

$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{(1+x)^{s+t}}dx,$$

где су s и t комплексни бројеви, такви да је $\operatorname{Re} s > 0$ и $\operatorname{Re} t > 0$. Вредност $B(s,t)$ може бити изражена преко Гама функције, односно важи $B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$. Осим тога, познато је да Гама функција задовољава следећу функционалну једначину

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

за све комплексне бројеве $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, тј. за све комплексне бројеве који не припадају скупу целих бројева. Хипергеометријска функција $F(a, b, c; z)$, $z \in \mathbb{D}$, са параметрима a, b и c, дефинише се на следећи начин

$$F(a, b, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(k+b)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(k+c)} \frac{z^k}{k!}.$$

Хипергеометријске функције задовољавају следећу интегралну репрезентацију

$$F(a, b, c; z) = \frac{1}{B(a, c-a)} \int_0^1 \frac{t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}}{(1-tz)^b} dt,$$

која важи када је испуњен услов $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$.

• *Штурмов низ полинома и Штурмова теорема*

Нека је $P(x)$ полином и нека је $P_0(x) = P(x)$ и $P_1(x) = P'(x)$. Конструишимо низ полинома, на следећи начин

$$\begin{aligned} P_2 &= -\operatorname{rem}(P_0, P_1), \\ P_3 &= -\operatorname{rem}(P_1, P_2), \\ &\vdots \\ P_n &= -\operatorname{rem}(P_{n-2}, P_{n-1}), \\ 0 &= -\operatorname{rem}(P_{n-1}, P_n), \end{aligned}$$

где је $\operatorname{rem}(P_j, P_{j+1})$ остатак при дељењу полинома P_j са полиномом P_{j+1}, за све $0 \leq j \leq n-1$, при чему је n број таквих дељења полинома потребних да се добије остатак 0 (број n не може бити већи од степена $\deg P$ полинома P). Имајући у виду да је $\deg P_{j+1} < \deg P_j$ за све $j \geq 0$, овај алгоритам се завршава након коначног броја корака. Низ полинома $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ зовемо *Штурмов низ полинома* $P(x)$. Доказ следеће класичне теореме може се наћи у [54].

Штурмова теорема

Нека је $w(x)$ број промена знака у Штурмовом низу

$$P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x),$$

полинома $P(x)$. Тада је број нула полинома $P(x)$ на интервалу (a, b) (не рачунајући вишеструкости), где је $P(a) \neq 0$, $P(b) \neq 0$ и $a < b$, једнак $w(a) - w(b)$.

Глава 1

Оператор Хилбертове матрице на просторима низова

1.1 Ханкелови оператори и теорема Нехарија

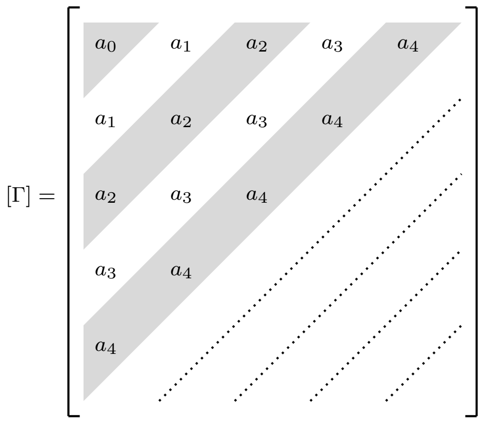
Пресликавање Γ из једног простора низова X, у други простор низова Y, одређено матрицом пресликавања $[\Gamma] = [\gamma_{nk}]_{n,k=0}^{\infty}$, дефинисано је на следећи начин

$$\Gamma : \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \{y_n\}_{n=0}^{\infty},$$

где је $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in X$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in Y$, при чему важи

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{nk} x_k, \text{ за све } n \geq 0.$$

Матрица $[\Gamma]$ пресликавања Γ је *Ханкелова матрица*, ако има исте елементе на свакој споредној дијагонали, односно ако важи $\gamma_{nk} = a_{n+k}$ за све $n, k \geq 0$ и за неки низ комплексних бројева $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Другим речима, елементи Ханкелове матрице зависе само од збира својих координата.



Слика 1.1.1 На слици је приказана Ханкелова матрица $[\Gamma] = [a_{n+k}]_{n,k=0}^{\infty}$. Елементи на споредним дијагоналама матрице $[\Gamma]$ су исти.

Дефиниција 1.1.1 *Пресликавање Γ из једног простора низова X, у други простор низова Y, је Ханкелов оператор ако је матрица тог пресликавања $[\Gamma] = [\gamma_{nk}]_{n,k=0}^{\infty}$ Ханкелова матрица, односно ако постоји низ комплексних бројева $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, такав да важи $\gamma_{nk} = a_{n+k}$ за све $n, k \geq 0$.* ♢

Услов да је Γ Ханкелов оператор можемо представити и као идентитет између оператора, при чему узимамо да је простор X инваријантан у односу на оператор десног померања који је дефинисан на следећи начин

$$D(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$$

и да је простор Y инваријантан у односу на оператор левог померања који је дефинисан на следећи начин

$$L(y_0, y_1, \dots) = (y_1, y_2, \dots).$$

Наиме, под претпоставком да је Γ Ханкелов оператор, важи

$$\begin{aligned}
\Gamma D(x_0, x_1, \dots) &= \Gamma(0, x_0, x_1, \dots) \\
&= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{nk} x_{k-1} \right\}_{n=0}^{\infty} \\
&= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{n,k+1} x_k \right\}_{n=0}^{\infty} \\
&= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k+1} x_k \right\}_{n=0}^{\infty}
\end{aligned}$$

и такође, важи

$$\begin{aligned}
L\Gamma(x_0, x_1, \dots) &= L \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{nk} x_k \right\}_{n=0}^{\infty} \\
&= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{nk} x_k \right\}_{n=1}^{\infty} \\
&= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{n+1,k} x_k \right\}_{n=0}^{\infty} \\
&= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k+1} x_k \right\}_{n=0}^{\infty},
\end{aligned}$$

где је $(x_0, x_1, \dots)$ произвољно одабран елемент простора X. Према томе, на основу претходног, закључујемо да ако је оператор Γ Ханкелов оператор, онда важи једнакост

$$\Gamma D = L\Gamma.$$

Са друге стране, ако оператор Γ задовољава једнакост $\Gamma D = L\Gamma$, тада је

$$\gamma_{n,k+1} = \gamma_{n+1,k} \text{ за све } n, k \geq 0.$$

Уколико сада дефинишемо низ $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ на следећи начин

$$a_n = \gamma_{n,0} \text{ за све } n \geq 0,$$

добијамо да је

$$\gamma_{nk} = \gamma_{n+1,k-1} = \dots = \gamma_{n+k,0} = a_{n+k} \text{ за све } n, k \geq 0.$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dashed, "\Gamma"] \arrow[d, "D"'] & Y \arrow[d, dashed, "L"] \\
X \arrow[r, "\Gamma"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Слика 1.1.2 Оператор Γ је Ханкелов ако и само ако дијаграм комутира, тј. ако и само ако важи $\Gamma D = L\Gamma$.

Следи да је оператор Γ, заправо Ханкелов оператор. Из свега претходног, закључујемо да је оператор Γ Ханкелов оператор ако и само ако важи следећи идентитет између оператора $\Gamma D = L\Gamma$.

Нека је $F : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ оператор дефинисан на следећи начин

$$Ff(e^{it}) = f(e^{-it}).$$

Није тешко проверити да је оператор F сурјективна, линеарна изометрија простора $L^2(\mathbb{T})$. Са друге стране, за дату функцију $g \in L^\infty(\mathbb{T})$, нека је оператор $M_g : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ дефинисан као

$$M_g f(e^{it}) = f(e^{it}) g(e^{it}).$$

Такође, нека је $g(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(n) z^n$ за $z \in \mathbb{T}$, где је

$$\widehat{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} g(e^{it}) dt \text{ за све } n \in \mathbb{Z}.$$

Тада важи

$$\|M_g f\|_2 \leq \|g\|_\infty \|f\|_2,$$

за све $f \in L^2(\mathbb{T})$. Осим тога, нека је $R_+ : L^2(\mathbb{T}) \to H^2$ оператор Рисове пројекције. Тада, можемо дефинисати оператор H_g, као композицију три претходно дефинисана оператора, односно, добијамо да важи

$$H_g = R_+ M_g F : H^2 \to H^2,$$

при чему подразумевамо да уместо оператора F, посматрамо његову рестрикцију $F|_{H^2}$, на потпростор H^2 простора $L^2(\mathbb{T})$. Такође, треба напоменути да су простори $H^2(\mathbb{T})$ и H^2 изоморфни простори, тако да их можемо поистоветити. Оператор H_g јесте ограничен и линеаран оператор, као композиција таквих оператора. Покажимо да је оператор H_g Ханкелов оператор. Нека је $f \in H^2$ произвољно одабрана функција. Тада посматрајући све на јединичној кружници $\mathbb{T}$, тј. за $z \in \mathbb{T}$, имамо да важи

$$\begin{tikzcd} L^2(\mathbb{T}) \arrow[r, "M_g"] & L^2(\mathbb{T}) \arrow[d, "R_+"] \\ H^2 \arrow[u, "F"] \arrow[r, dashed, "H_g"'] & H^2 \end{tikzcd}$$

Слика 1.1.3 Комутативан дијаграм којим се описује конструкција Ханкеловог оператора $H_g : H^2 \to H^2$ индукованог функцијом $g \in L^\infty(\mathbb{T})$.

$$H_g f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) H_g(z^k).$$

Са друге стране, добијамо да је

$$\begin{aligned} H_g(z^k) &= R_+ M_g F(z^k) \\ &= R_+ M_g(\overline{z}^k) \\ &= R_+(\overline{z}^k g(z)) \\ &= R_+\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(n) z^{n-k}\right) \\ &= R_+\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(n+k) z^{n}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{g}(n+k) z^n. \end{aligned}$$

Према томе, добијамо да важи

$$H_g f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{g}(n+k) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{g}(n+k) \widehat{f}(k) \right) z^n.$$

Следи да је матрица $[H_g] = [\widehat{g}(n+k)]_{n,k=0}^{\infty}$ Ханкелова матрица, односно оператор H_g је Ханкелов оператор.

Следећа класична теорема, резултат Нехарија, потврђује да је тачан и обрат претходног разматрања. Наиме, сваки ограничен Ханкелов оператор $\mathcal{H}$ на простору H^2 (односно на простору ℓ^2 који је изометрички изоморфан са простором H^2), јесте облика H_g, за неку функцију $g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Иако функција g са овим својством није јединствено одређена, можемо је одабрати тако да важи $\|\mathcal{H}\|_{H^2 \to H^2} = \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$.

Теорема 1.1.2 ([31, Нехари]) *Нека је $\mathcal{H}$ ограничен Ханкелов оператор на простору H^2. Тада постоји функција $g \in L^\infty(\mathbb{T})$, таква да је*

$$\mathcal{H} = H_g = R_+ M_g F.$$

Осим тога, функција g може бити изабрана на такав начин, да важи

$$\|\mathcal{H}\|_{H^2 \to H^2} = \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Доказ. Нека је $[\mathcal{H}] = [a_{n+k}]_{n,k=0}^{\infty}$ матрица ограниченог Ханкеловог оператора $\mathcal{H}$ на простору H^2 (који је изометрички изоморфан Хилбертовом простору ℓ^2). Тада, за произвољне целе бројеве $n, k \geq 0$, важи

$$\langle \mathcal{H} z^n, z^k \rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+j} z^j, z^k \right\rangle = a_{n+k} = \left\langle \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+k+j} z^j, 1 \right\rangle = \langle \mathcal{H} z^{n+k}, 1 \rangle.$$

Са друге стране, користећи линеарност оператора $\mathcal{H}$ и претходно доказану једнакост $\langle \mathcal{H} z^n, z^k \rangle = \langle \mathcal{H} z^{n+k}, 1 \rangle$ за све $n, k \geq 0$, добијамо да за два произвољно одабрана полинома

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} p_n z^n \text{ и } Q(z) = \sum_{k=0}^{K} q_k z^k,$$

важи

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{H}(PQ), 1 \rangle &= \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{K} p_n q_k \langle \mathcal{H} z^{n+k}, 1 \rangle \\
&= \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{K} p_n q_k \langle \mathcal{H} z^n, z^k \rangle \\
&= \left\langle \sum_{n=0}^{N} p_n \mathcal{H} z^n, \sum_{k=0}^{K} \overline{q_k} z^k \right\rangle \\
&= \langle \mathcal{H} P, \overline{FQ} \rangle.
\end{aligned}$$

Према томе, из претходног, за два произвољно одабрана полинома P и Q, добијамо да важи $\langle \mathcal{H}(PQ), 1 \rangle = \langle \mathcal{H} P, \overline{FQ} \rangle$. Нека је ϕ функционал дефинисан са $\phi(f) = \langle \mathcal{H} f, 1 \rangle$. Из линеарности Ханкеловог оператора $\mathcal{H}$ и скаларног производа, следи линеарност функционала ϕ. Осим тога, применом Коши-Шварцове неједнакости, добијамо да је

$$|\phi(PQ)| = |\langle \mathcal{H}(PQ), 1 \rangle| = |\langle \mathcal{H} P, \overline{FQ} \rangle| \leq \|\mathcal{H} P\|_2 \|\overline{FQ}\|_2 \leq \|\mathcal{H}\|_{H^2 \to H^2} \cdot \|P\|_2 \cdot \|Q\|_2.$$

Нека су $g, h \in H^2$ произвољне функције. Тада, будући да су полиноми густи у простору H^2, постоје низови полинома $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$, такви да је

$$\lim_{n \to \infty} \|P_n - g\|_2 = 0 \text{ и } \lim_{n \to \infty} \|Q_n - h\|_2 = 0.$$

Према томе, на основу претходног, закључујемо да важи

$$|\phi(gh)| \leq \|\mathcal{H}\|_{H^2 \to H^2} \cdot \|g\|_2 \cdot \|h\|_2.$$

Ако је $f \in H^1$ произвољна функција, тада на основу Рисове теореме о факторизацији у Хардијевим просторима, постоје функције $g, h \in H^2$, такве да је $\|g\|_2^2 = \|h\|_2^2 = \|f\|_1$. Следи да је

$$|\phi(f)| \leq \|\mathcal{H}\|_{H^2 \to H^2} \|f\|_1,$$

односно, ϕ је ограничен линеаран функционал на простору H^1. На основу теореме Хан-Банаха, функционал ϕ се проширује до функционала на простору $L^1(\mathbb{T})$, без промене норме. Применом Рисове теореме о репрезентацији ограничених линеарних функционала на простору $L^1(\mathbb{T})$, добијамо да постоји функција $u \in L^\infty(\mathbb{T})$, таква да важи

$$\phi(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})u(e^{it})dt.$$

Са друге стране, следи да је

$$a_{n+k} = \langle \mathcal{H}z^{n+k}, 1\rangle = \phi(z^{n+k}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n+k)t}u(e^{it})dt = \widehat{u}(-(n+k)),$$

за све $n, k \geq 0$. Закључујемо да је $a_n = \widehat{u}(-n)$ за све $n \geq 0$. Коначно, нека је $g = Fu$. Тада $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ и $a_n = \widehat{g}(n)$ за све $n \geq 0$. Следи да је $[\mathcal{H}] = [\widehat{g}(n+k)]_{n,k=0}^\infty$, односно важи $\mathcal{H} = H_g$. Такође, важи

$$\|g\|_\infty = \|Fu\|_\infty = \|u\|_\infty$$

и

$$\|\phi\| = \|u\|_\infty,$$

односно, добијамо да је

$$\|g\|_\infty \leq \|\mathcal{H}\|_{H^2\to H^2}.$$

Међутим, са друге стране, имамо да је

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}\|_{H^2\to H^2} &= \|H_g\|_{H^2\to H^2} \\
&= \|R_+M_gF\|_{H^2\to H^2} \\
&\leq \|R_+\|_{L^2(\mathbb{T})\to H^2}\cdot\|M_g\|_{L^2(\mathbb{T})\to L^2(\mathbb{T})}\cdot\|F\|_{H^2\to L^2(\mathbb{T})} \\
&\leq \tfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\cdot\|g\|_\infty \\
&= \|g\|_\infty,
\end{aligned}$$

односно, важи $\|\mathcal{H}\|_{H^2\to H^2} \leq \|g\|_\infty$. Из свега претходног добијеног, закључујемо да је $\|\mathcal{H}\|_{H^2\to H^2} = \|g\|_\infty$. Тиме је доказ теореме завршен. ■

1.2 Хилбертова матрица као оператор

У скупу Ханкелових матрица посебно место заузима Хилбертова матрица. Она је свакако један од најзначајних представника скупа Ханкелових матрица, јер омогућава интеракцију већег броја математичких дисциплина, као што су теорија бројева, затим линеарна алгебра, теорија оператора и комплексна анализа. У поглављима која следе разматрамо дејство Хилбертове матрице на просторима низова, међу којима су и најзначајнији простори холоморфних функција.

Дефиниција 1.2.1 *Оператор Хилбертове матрице H јесте оператор индукован Хилбертовом матрицом*

$$[H] = [h_{nk}]_{n,k=0}^\infty = \left[\frac{1}{n+k+1}\right]_{n,k=0}^\infty.$$

◊

Оператор Хилбертове матрице H можемо видети и као оператор који дејствује на просторима холоморфних функција, будући да се свакој холоморфној функцији може придружити одговарајући низ њених Тејлорових коефицијената. Према томе, ако је $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n)z^n$ холоморфна функција у јединичном диску $\mathbb{D}$, тада важи

$$Hf(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}h_{nk}\widehat{f}(k)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\widehat{f}(k)}{n+k+1}z^n.$$

Ако је $g\in L^{\infty}(\mathbb{T})$, тада је матрица оператора $H_g=R_+M_gF$, заправо одређена коефицијентима у развоју функције g, односно важи $[H_g]=[\widehat{g}(n+k)]_{n,k=0}^{\infty}$. Осим тога, као у доказу Теореме 1.1.2, закључујемо да важи $\|H_g\|_{\ell^2\to\ell^2}\le\|g\|_{\infty}$, будући да су простори ℓ^2 и H^2 изометрички изоморфни.

Нека је $g(e^{it})=ie^{-it}(\pi-t)$ за све $0\le t<2\pi$. Тада важи $\|g\|_{\infty}=\pi$ и $g\in L^{\infty}(\mathbb{T})$. За произвољно одабран цео број $n\ge 0$, добијамо да важи

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(n) &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-int}g(e^{it})dt\\
&= \tfrac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i(n+1)t}(\pi-t)dt\\
&= \tfrac{i}{2\pi}\left[\pi\int_0^{2\pi}e^{-i(n+1)t}dt-\int_0^{2\pi}te^{-i(n+1)t}dt\right]\\
&= \tfrac{1}{2\pi(n+1)}\int_0^{2\pi}td\left(e^{-i(n+1)t}\right)\\
&= \tfrac{1}{2\pi(n+1)}\left[te^{-i(n+1)t}\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}e^{-i(n+1)t}dt\right]\\
&= \tfrac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Следи да је $[H_g]=[\widehat{g}(n+k)]_{n,k=0}^{\infty}=\left[\frac{1}{n+k+1}\right]_{n,k=0}^{\infty}$, односно оператор H_g је заправо оператор Хилбертове матрице H, тј. важи $H_g=H$. Према томе, закључујемо да важи следећа неједнакост

$$\|H\|_{\ell^2\to\ell^2}=\|H_g\|_{\ell^2\to\ell^2}\le\|g\|_{\infty}=\pi.$$

Нешто касније, у следећем поглављу, показаћемо да у претходној неједнакости важи једнакост, односно да је $\|H\|_{\ell^2\to\ell^2}=\pi$.

Са друге стране, за произвољно одабрану функцију $g\in L^{\infty}(\mathbb{T})$, нека је оператор $\Lambda_g:H^1\to\ell^1$ дефинисан на следећи начин

$$\Lambda_g f(z)=\left\{\widehat{f}(n)\widehat{g}(n)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

Под додатном претпоставком да је $\widehat{g}(n)\ge 0$ за све $n\ge 0$, користећи резултате из [24] закључујемо да важи

$$\|H_g\|_{\ell^2\to\ell^2}=\|\Lambda_g\|_{H^1\to\ell^1}.$$

Специјално је

$$\|\Lambda_g f\|_{\ell^1}\le\|\Lambda_g\|_{H^1\to\ell^1}\|f\|_{H^1}=\|H_g\|_{\ell^2\to\ell^2}\|f\|_{H^1}\le\|g\|_{\infty}\|f\|_{H^1},$$

за све $f\in H^1$, односно важи

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\widehat{f}(n)\widehat{g}(n)\right|\le\|g\|_{\infty}\|f\|_{H^1}\ \text{ за све }\ f\in H^1. \tag{1.2.1}$$

Уколико узмемо да је $g(e^{it}) = ie^{-it}(\pi - t)$, где је $0 \leq t < 2\pi$, као последицу неједнакости (1.2.1), добијамо класичну *Хардијеву неједнакост*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\widehat{f}(n)|}{n+1} \leq \pi \|f\|_{H^1} \text{ за све } f \in H^1. \tag{1.2.2}$$

Уколико пак, изаберемо да је $g(e^{it}) = i\pi e^{-\frac{it}{2}}$, где је $0 \leq t < 2\pi$, тада је $\|g\|_\infty = \pi$ и $g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Такође, за сваки цео број $n \geq 0$, важи

$$\begin{aligned} \widehat{g}(n) &= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} g(e^{it}) dt \\ &= \tfrac{i}{2} \int_0^{2\pi} e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} dt \\ &= \tfrac{i}{2} \frac{e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)} \Bigg|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Применом неједнакости (1.2.1) на претходно одабрану функцију $g \in L^\infty(\mathbb{T})$, добијамо неједнакост која представља побољшање Хардијеве неједнакости (1.2.2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\widehat{f}(n)|}{n+\frac{1}{2}} \leq \pi \|f\|_{H^1} \text{ за све } f \in H^1. \tag{1.2.3}$$

За више информација о претходним неједнакостима видети [14, 31].

1.3 Хилбертова матрица на ℓ^p просторима

Дејство оператора Хилбертове матрице H на ℓ^p просторима може се исказати на следећи начин

$$H : \{a_n\}_{n=0}^\infty \mapsto \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n+k+1} \right\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{за све } \{a_n\}_{n=0}^\infty \in \ell^p.$$

Циљ овог поглавља јесте одређивање норме оператора Хилбертове матрице H на ℓ^p просторима, односно норме $\|H\|_{\ell^p \to \ell^p}$. У наставку нам од користи може бити следећа класична неједнакост.

Теорема 1.3.1 ([21, Хилбертова неједнакост]) *Нека је $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ако је $f \in L^p(0,\infty)$ и $g \in L^q(0,\infty)$, тада важи*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)g(y)|}{x+y} dx dy \leq \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} \left(\int_0^\infty |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty |g(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.3.1}$$

Специјално, ако је $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^p$ и $\{b_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^q$, тада важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_n b_k|}{n+k} \leq \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.3.2}$$

Осим тога, константа $\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$ у претходним неједнакостима је најбоља могућа.

Доказ. Применом Хелдерове неједнакости за спрегнуте експоненте p и q, добијамо да важи

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|f(x)g(y)|}{x+y}dxdy &= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|f(x)g(y)|}{(x+y)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}dxdy \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty |f(x)|\frac{1}{(x+y)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{pq}}|g(y)|\frac{1}{(x+y)^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{pq}}dxdy \\
&\le \left(\int_0^\infty |f(x)|^p\int_0^\infty \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{q}}}{x+y}dydx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_0^\infty |g(y)|^q\int_0^\infty \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{p}}}{x+y}dxdy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= B\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\left(\int_0^\infty |f(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty |g(y)|^qdy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}\left(\int_0^\infty |f(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty |g(y)|^qdy\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

На тај начин смо доказали неједнакост (1.3.1). Специјално, применом ове неједнакости на функције $f(x)$ и $g(y)$, такве да је $f(x) = a_n$ за све $x \in (n-1, n]$, где је $n \in \mathbb{N}$ и $g(y) = b_k$ за све $y \in (k-1, k]$, где је $k \in \mathbb{N}$, добијамо да важи

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_nb_k|\int_{n-1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x+y}dxdy \le \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Међутим, како важи

$$\int_{n-1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x+y}dxdy \ge \frac{1}{n+k} \text{ за све } n,k \ge 1,$$

из претходне две неједнакости добијамо да је

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_nb_k|}{n+k} \le \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Будући да из неједнакости (1.3.1) следи неједнакост (1.3.2), довољно је још показати да је константа $\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$ најбоља могућа у неједнакости (1.3.2). Нека је S произвољно одабран број мањи од $\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$ и нека је $0 < \varepsilon < \frac{q}{2p}$. Такође, нека је

$$a_n = n^{-\frac{1+\varepsilon}{p}} \text{ и } b_k = k^{-\frac{1+\varepsilon}{q}} \text{ за све } n,k \in \mathbb{N}.$$

У наставку, користимо ознаку $O(1)$ за величину која може да зависи од p и ε, али која је ограничена када је p фиксирано и $\varepsilon \to 0$. Такође, користићемо ознаку $o(1)$ за величину која може да зависи од p и ε, али која тежи нули када је p фиксирано и $\varepsilon \to 0$. Тада важи

$$\frac{1}{\varepsilon} = \int_1^\infty x^{-1-\varepsilon}dx < \sum_{n=1}^{\infty}n^{-1-\varepsilon} < 1 + \int_1^\infty x^{-1-\varepsilon}dx = 1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Следи да је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p = \frac{1}{\varepsilon} + O(1)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k^q = \frac{1}{\varepsilon} + O(1)$. Осим тога, добијамо да је

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{a_n b_k}{n+k} &> \int_1^{\infty}\int_1^{\infty} x^{-\frac{1+\varepsilon}{p}} y^{-\frac{1+\varepsilon}{q}} \tfrac{dxdy}{x+y} \\
&= \int_1^{\infty} x^{-1-\varepsilon} \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \tfrac{u^{-\frac{1+\varepsilon}{q}}}{1+u} dudx \\
&\geq \int_1^{\infty} x^{-1-\varepsilon} \int_0^{\infty} \tfrac{u^{-\frac{1+\varepsilon}{q}}}{1+u} dudx - \int_1^{\infty} x^{-1-\varepsilon} \int_0^{\frac{1}{x}} u^{-\frac{1+\varepsilon}{q}} dudx \\
&= \int_1^{\infty} x^{-1-\varepsilon} \int_0^{\infty} \tfrac{u^{-\frac{1+\varepsilon}{q}}}{1+u} dudx - \int_1^{\infty} \tfrac{1}{\beta x^{\beta}} x^{-1-\varepsilon} dx,
\end{aligned}$$

при чему је $\beta = 1 - \frac{1+\varepsilon}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon}{q}$. Приметимо да је тада $\alpha = \frac{1}{2p} < \beta$ и самим тим је

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\beta x^{\beta}} x^{-1-\varepsilon} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha}} x^{-1-\varepsilon} dx \leq \frac{1}{\alpha^2}.$$

Према томе, добијамо да је

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{a_n b_k}{n+k} &> \int_1^{\infty} x^{-1-\varepsilon} \int_0^{\infty} \tfrac{u^{-\frac{1+\varepsilon}{q}}}{1+u} dudx + O(1) \\
&= \tfrac{1}{\varepsilon}\left[\tfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} + o(1)\right] + O(1) \\
&= \tfrac{1}{\varepsilon}\left[\tfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} + o(1)\right].
\end{aligned}$$

Коначно, за довољно мало ε, имајући у виду да је број S мањи од $\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$, следи да је

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{a_n b_k}{n+k} &> \tfrac{1}{\varepsilon}\left[\tfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} + o(1)\right] \\
&\geq S\left(\tfrac{1}{\varepsilon} + O(1)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\tfrac{1}{\varepsilon} + O(1)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= S\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

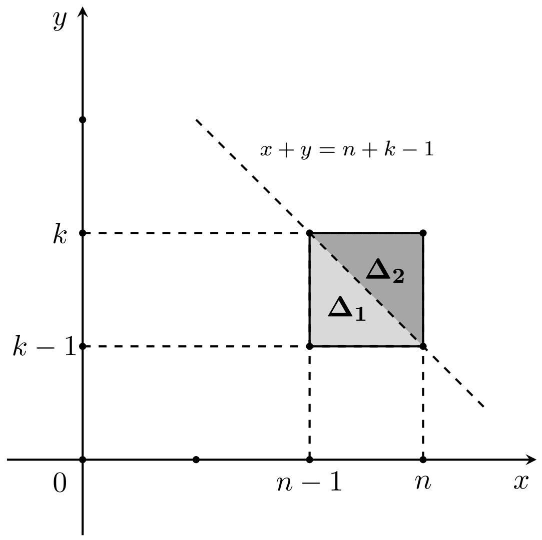
чиме се потврђује да је константа $\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$ у неједнакости (1.3.2) најбоља могућа. ■

Са друге стране, из интегралне неједнакости (1.3.1) можемо добити још једну варијанту Хилбертове неједнакости за низове. Нека су $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^p$ и $\{b_k\}_{k=0}^{\infty} \in \ell^q$ произвољно одабрани низови. Тада као у доказу Теореме 1.3.1 закључујемо да важи

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n-1}b_{k-1}| \int_{n-1}^{n}\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x+y} dxdy \leq \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n-1}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_{k-1}|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Међутим, користећи поделу квадрата $[n-1,n]\times[k-1,k]$ на троуглове Δ_1 и Δ_2 (видети Слику 1.3.1), добијамо да је

$$\begin{aligned}
\int_{n-1}^{n}\int_{k-1}^{k} \tfrac{1}{x+y} dxdy &= \int_{[n-1,n]\times[k-1,k]} \tfrac{1}{x+y} dxdy \\
&= \int_{\Delta_1} \tfrac{1}{x+y} dxdy + \int_{\Delta_2} \tfrac{1}{x+y} dxdy.
\end{aligned}$$



Слика 1.3.1 На слици је приказана подела квадрата $[n-1,n]\times[k-1,k]$ на троуглове Δ_1 и Δ_2, по којима се интеграли функција $\frac{1}{x+y}$ у циљу доказивања неједнакости $\int_{[n-1,n]\times[k-1,k]}\frac{dxdy}{x+y}\geq\frac{1}{n+k-1}$.

Следи да је

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_1}\frac{1}{x+y}dxdy &= \int_{n-1}^{n}\int_{k-1}^{n+k-1-x}\frac{1}{x+y}dydx\\ &= \int_0^1\int_{k-1}^{k-u}\frac{1}{u+n-1+y}dydu\\ &= \int_0^1\int_0^{1-u}\frac{1}{n+k-1-(1-u-v)}dvdu.\end{aligned}$$

Слично, добијамо да важи

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_2}\frac{1}{x+y}dxdy &= \int_{n-1}^{n}\int_{n+k-1-x}^{k}\frac{1}{x+y}dydx\\ &= \int_0^1\int_{k-1+u}^{k}\frac{1}{n-u+y}dydu\\ &= \int_0^1\int_0^{1-u}\frac{1}{n+k-1+(1-u-v)}dvdu.\end{aligned}$$

Користећи неједнакост $\frac{1}{n+k-1-\alpha}+\frac{1}{n+k-1+\alpha}\geq\frac{2}{n+k-1}$, која важи за све $0<\alpha<1$, добијамо да је

$$\begin{aligned}\int_{n-1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x+y}dxdy &= \int_0^1\int_0^{1-u}\left(\frac{1}{n+k-1-(1-u-v)}+\frac{1}{n+k-1+(1-u-v)}\right)dvdu\\ &\geq \frac{2}{n+k-1}\int_0^1\int_0^{1-u}dvdu\\ &= \frac{1}{n+k-1},\end{aligned}$$

за све $n,k\geq 1$. Следи да је

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_{n-1}b_{k-1}|}{n+k-1}\leq\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n-1}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|b_{k-1}|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

односно важи

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_nb_k|}{n+k+1}\leq\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},\tag{1.3.3}$$

за све $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\in\ell^p$ и $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}\in\ell^q$ и осим тога, константа $\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$ у претходној неједнакости је најбоља могућа.

Теорема 1.3.2 ([31]) *Нека је $1 < p < \infty$. Тада за оператор Хилбертове матрице H који дејствује на простору ℓ^p важи*

$$\|H\|_{\ell^p \to \ell^p} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}.$$

Доказ. Нека је $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^p$. Тада имамо да оператор Хилбертове матрице H низ $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^p$ пресликава у низ $\left\{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n+k+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$. Према томе, довољно је показати да важи неједнакост

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|}{n+k+1}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

и да је константа $\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}$ у претходној неједнакости оптимална. У наставку, нека је $b_n = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|}{n+k+1}\right)^{p-1}$ за све $n \ge 0$. Применом неједнакости (1.3.3) закључујемо да важи

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|}{n+k+1}\right)^p &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k b_n|}{n+k+1}\\
&\le \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|}{n+k+1}\right)^p\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

при чему је $\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}$ оптимална константа. Коначно, из претходне неједнакости следи

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|}{n+k+1}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

и константа $\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}$ је оптимална. ■

Напомена 1.3.3 Обично се у литератури под Хилбертовом неједнакошћу сматра неједнакост (1.3.2) када је $p = q = 2$. Односно, то је неједнакост

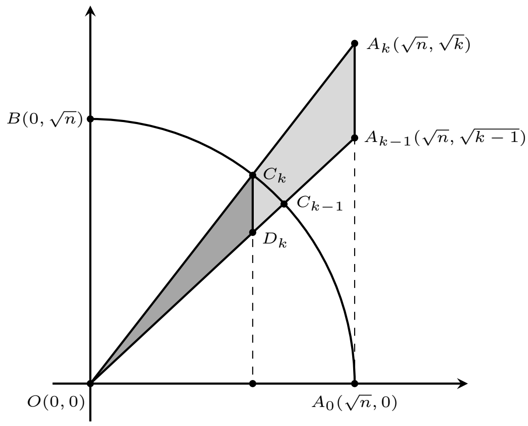
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_n b_k|}{n+k} \le \pi\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2},$$

која важи за свака два низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ из простора ℓ^2. Интересантно је да се ова неједнакост може показати на нешто елементарнији и више геометријски начин него што је то урађено у општем случају у доказу Теореме 1.3.1, при чему је у једном тренутку потребно искористити и Коши-Шварцову неједнакост. Наиме, најпре покажимо да за сваки природан број n, важи следећа неједнакост

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}(n+k)} \le \pi. \tag{1.3.4}$$

У наставку, пратећи [45], дајемо један потпуно елементаран, геометријски доказ ове неједнакости. У координатној равни уочимо тачке $O(0,0)$, $B(0,\sqrt{n})$ и $A_k(\sqrt{n},\sqrt{k})$ за све $k = 0, 1, \ldots$ (видети Слику 1.3.2). Нека је C_k тачка која настаје у пресеку дужи

OA_k и кружног лука са центром у тачки O, полупречника $\sqrt{n}$, који је одређен тачкама A_0 и B (за све $k = 0, 1, \ldots$). Такође, нека је за све $k = 1, 2, \ldots$, са D_k означен пресек дужи OA_{k-1} и нормале из тачке C_k на дуж OA_0. Затим, нека је са P означена површина кружног исечка одређеног тачкама O, A_0 и B (тј. површина четвртине круга са центром у тачки O полупречника $\sqrt{n}$) и нека је P_k површина кружног исечка одређеног тачкама O, C_k и C_{k-1} за све $k = 1, 2, \ldots$. Осим тога, у наставку, површину произвољно одабраног троугла ΔMNQ означавамо са $P_{\Delta MNQ}$. Најпре, приметимо да је



Слика 1.3.2 На слици је приказана конструкција која се користи за извођење једног елементараног и геометријског доказа неједнакости $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}(n+k)} \leq \pi$.

$$\frac{\pi n}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} P_k \geq \sum_{k=1}^{\infty} P_{\Delta C_k O D_k}.$$

Са друге стране, користећи претходну неједнакост и имајући у виду да за све целе бројеве $k \geq 1$ важи

$$\begin{aligned}
P_{\Delta C_k O D_k} &= \left(\frac{|OC_k|}{|OA_k|}\right)^2 P_{\Delta A_k O A_{k-1}} \\
&= \frac{n}{|OA_0|^2 + |A_0 A_k|^2} \frac{|OA_0| \cdot |A_{k-1} A_k|}{2} \\
&= \frac{n}{n+k} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})}{2} \\
&\geq \frac{n\sqrt{n}}{4\sqrt{k}(n+k)},
\end{aligned}$$

добијамо да је $\frac{\pi n}{4} \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{4\sqrt{k}(n+k)}$, одакле следи неједнакост (1.3.4). Коначно, применом неједнакости Коши-Шварца и неједнакости (1.3.4), добијамо да важи

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_n b_k|}{n+k} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{k}\sqrt{n+k}} |a_n| \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt[4]{n}\sqrt{n+k}} |b_k| \\
&\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}(n+k)} |a_n|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}(n+k)} |b_k|^2} \\
&\leq \pi \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2},
\end{aligned}$$

што је и требало показати. ♢

Напомена 1.3.4 Хилбертова неједнакост за низове може се исказати и у нешто другачијем облику. Наиме, уколико је $g \in L^{\infty}(\mathbb{T})$, $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$ и $b = \{b_k\}_{k=0}^{\infty} \in \ell^2$, тада важи

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{g}(n+k) a_n b_k \right| \leq \|g\|_{\infty} \|a\|_{\ell^2} \|b\|_{\ell^2}. \tag{1.3.5}$$

Заправо, приметимо да се применом Коши-Шварцове неједнакости, добија следећа неједнакост

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{g}(n+k)a_nb_k\right| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i(n+k)t}g(e^{it})a_nb_kdt\right|\\ &= \left|\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(e^{it})\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{-int}\sum_{k=0}^{\infty}b_ke^{-ikt}dt\right|\\ &\le \|g\|_\infty\left|\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{-int}\sum_{k=0}^{\infty}b_ke^{-ikt}dt\right|\\ &\le \|g\|_\infty\sqrt{\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{-int}\right|^2dt}\sqrt{\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}b_ke^{-ikt}\right|^2dt}.\end{aligned}$$

Како је

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{-int}\right|^2dt=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 \text{ и } \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}b_ke^{-ikt}\right|^2dt=\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|^2,$$

то претходна неједнакост постаје

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{g}(n+k)a_nb_k\right|\le\|g\|_\infty\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|g\|_\infty\|a\|_{\ell^2}\|b\|_{\ell^2},$$

што је и требало доказати. Применом неједнакости (1.3.5) на функцију дефинисану са $g(e^{it})=ie^{-it}(\pi-t)$ за $0\le t<2\pi$ (као у доказу Хардијеве неједнакости (1.2.2)) добијамо варијанту класичне Хилбертове неједнакости

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_nb_k|}{n+k+1}\le\pi\|a\|_{\ell^2}\|b\|_{\ell^2}.$$

Са друге стране, применом неједнакости (1.3.5) на функцију која је дефинисана са $g(e^{it})=i\pi e^{-\frac{it}{2}}$, где је $0\le t<2\pi$ (као у доказу неједнакости (1.2.3)), добијамо побољшање претходне неједнакости

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_nb_k|}{n+k+\frac{1}{2}}\le\pi\|a\|_{\ell^2}\|b\|_{\ell^2}.$$

$\diamondsuit$

Тиме смо завршили разматрање које се односи на дејство оператора Хилбертове матрице на основним просторима низова. Имајући у виду да се свакој холоморфној функцији може једнозначно придружити низ њених Тејлорових коефицијената, следи да простори холоморфних функција постају простори низова. У наредним главама испитујемо понашање оператора Хилбертове матрице на неким посебним просторима холоморфних функција на јединичном диску, међу којима су Хардијеви и Бергманови простори, али и други значајни простори. Резултати у наредним главама су новијег датума и углавном оригинални.

Глава 2

Хилбертова матрица на Хардијевим просторима

2.1 Дејство Хилбертове матрице H на H^p просторима

Нека је f функција из Хардијевог простора H^p, где је $0 < p \leq \infty$ и нека је $\{\widehat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ њен низ Тејлорових коефицијената. Тада оператор Хилбертове матрице H дејствује на простору H^p на следећи начин

$$Hf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{n+k+1} \right) z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

У овој глави одређујемо норму Хилбертове матрице која дејствује на Хардијевим просторима. За разлику од норме $\|H\|_{\ell^p \to \ell^p}$, одређивање норме $\|H\|_{H^p \to H^p}$ је нешто компликованије и захтева примену других техника. Осим тога, анализираћемо и како се оператор Хилбертове матрице H понаша на Хардијевим просторима H^p, у зависноти од параметра $0 < p \leq \infty$. Наиме, показаћемо да је оператор $H : H^p \to H^p$ ограничен ако и само ако је $1 < p < \infty$ и у случају ограничености одердићемо његову тачну норму. Дакле, у случају када је $p = \infty$, оператор $H : H^\infty \to H^\infty$ није ограничен. Такође, ни оператор $H : H^1 \to H^1$ није ограничен. Интересантно је да у случају када је $0 < p < 1$, оператор Хилбертове матрице H не пресликава Хардијев простор H^p чак ни у простор $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ холоморфних функција у јединичном диску, што ће између осталог и бити показано у наредним разматрањима.

Међутим, пре свега, уочимо да на H^p просторима оператор Хилбертове матрице има специјалну интегралну репрезентацију која ће бити од вишеструке користи у даљем испитивању тог оператора.

Лема 2.1.1 ([13, 31]) *Нека је $f \in H^p$, где је $1 \leq p \leq \infty$. Тада важи*

$$Hf(z) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-tz} dt. \tag{2.1.1}$$

Доказ. Конвергенција интеграла у једнакости (2.1.1) следи директно, применом Фејер–Рисове неједнакости и чињенице да је функција $t \mapsto \frac{1}{1-tz}$ ограничена за све $z \in \mathbb{D}$. Према томе, имајући у виду конвергенцију интеграла $\int_0^1 \frac{f(t)}{1-tz} dt$ и развој функције f у Тејлоров ред $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) z^k$, за све $z \in \mathbb{D}$, добијамо да важи

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \tfrac{f(t)}{1-tz} dt &= \int_0^1 f(t) \sum_{n=0}^{\infty} (tz)^n dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) t^k \sum_{n=0}^{\infty} t^n z^n dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) \int_0^1 t^{n+k} dt \right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{\widehat{f}(k)}{n+k+1} \right) z^n \\
&= Hf(z),
\end{aligned}$$

што је и требало доказати. ■

2.1.1 Оператор H на простору H^∞

У овој секцији показујемо да оператор Хилбертове матрице H није ограничен на простору H^∞. Наиме, показаћемо да оператор H не пресликава простор H^∞ у себе (на основу теореме о затвореном графику, то је еквивалентно чињеници да H није ограничен оператор на простору H^∞). Константна функција $f \equiv 1$ припада простору H^∞. Са друге стране, користећи интегралну репрезентацију (2.1.1), следи да је

$$Hf(z) = \int_0^1 \frac{1}{1-tz} dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n z^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1} = \frac{1}{z} \log \frac{1}{1-z},$$

при чему подразумевамо отклоњив сингуларитет у нули функције $\frac{1}{z} \log \frac{1}{1-z}$. Међутим, функција

$$Hf(z) = \frac{1}{z} \log \frac{1}{1-z}$$

није ограничена холоморфна функција у јединичном диску $\mathbb{D}$, односно $Hf \notin H^\infty$. Према томе, оператор H не пресликава простор H^∞ у самог себе.

2.1.2 Оператор H на простору H^1

Такође, покажимо и да оператор $H : H^1 \to H^1$ није ограничен. Опет је довољно показати да оператор Хилбертове матрице H не пресликава простор H^1 у себе. Нека је f функција дефинисана у јединичном диску $\mathbb{D}$ на следећи начин

$$f(z) = \frac{z^2}{(1-z) \log^2 \frac{1}{1-z}}.$$

Најпре, покажимо да функција f припада простору H^1. Наиме, у случају када је $z = e^{i\theta}$ и $\theta \to 0$, добијамо

$$|1-z| = |1-e^{i\theta}| \asymp |\theta| \quad \text{и} \quad \left| \log \frac{1}{1-z} \right| \asymp \log \frac{1}{|1-z|} \asymp \log \frac{1}{|\theta|}.$$

Следи,

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |f(e^{i\theta})| d\theta \asymp \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\theta \log^2 \theta} = \int_{-\infty}^{\log \frac{\pi}{4}} \frac{dt}{t^2} < \infty.$$

Према томе, имајући у виду конвергентност претходног интеграла, закључујемо да важи $f \in H^1$. Са друге стране, претпоставимо да $Hf \in H^1$. Приметимо да је

$$\begin{aligned} Hf(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{n+k+1} \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) \int_0^1 t^{n+k} dt \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 t^n f(t) dt \right) z^n. \end{aligned}$$

Тада, на основу Хардијеве неједнакости (1.2.2), добијамо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n f(t) dt \leq \pi \|Hf\|_{H^1} < \infty.$$

Међутим, важи

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n f(t) dt &= \int_0^1 f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+1} dt \\ &= \int_0^1 \frac{f(t)}{t} \log \frac{1}{1-t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t}{(1-t) \log \frac{1}{1-t}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-s}{s \log \frac{1}{s}} ds \\ &= \infty, \end{aligned}$$

што је немогуће. Према томе, почетна претпоставка је погрешна, тако да мора бити $Hf \notin H^1$. Дакле, оператор Хилбертове матрице H није ограничен на простору H^1.

2.1.3 Оператор H на H^p просторима када је $0 < p < 1$

Нека је $0 < p < 1$. Покажимо да у том случају оператор Хилбертове матрице H не пресликава Хардијев простор H^p у простор холоморфних функција $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ на јединичном диску. Тим пре, закључујемо да оператор Хилбертове матрице H није ограничен на просторима H^p у овом случају. Штавише, постоји функција f из простора H^p, где је $0 < p < 1$, таква да ред $Hf(0)$ дивергира. Наиме, посматрајмо функцију дефинисану на следећи начин

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \quad \text{за све } \ z \in \mathbb{D}.$$

Тада је $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ и важи

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0 \leq r < 1} M_p(r, f) = \sup_{0 \leq r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1 - re^{it}|^p} dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

имајући у виду да је $0 < p < 1$. Са друге стране, како је

$$Hf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{n+k+1} \right) z^n,$$

то налазимо да је

$$Hf(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(n)}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.$$

Самим тим, долазимо до закључка да претходно добијена функција Hf не припада простору холоморфних функција $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Према томе, на основу претходних разматрања оператор Хилбертове матрице H није ограничен на Хардијевим просторима H^p у случају када је $0 < p \leq 1$ и $p = \infty$. Стога, у наставку нам је од интереса да посматрамо дејство оператора H само на Хардијевим просторима H^p код којих је $1 < p < \infty$. Показаћемо да је у том случају оператор Хилбертове матрице ограничен и одредићемо његову норму. Такође, напоменимо да су у раду [13], Диамантопулос и Сискакис први доказали неограниченост оператора Хилбертове матрице на Хардијевом простору H^p у случају када је $p = 1$ и $p = \infty$.

2.2 Норма $\|H\|_{H^p \to H^p}$ када је $1 < p < \infty$

У овом поглављу, нешто касније, показаћемо да је у случају $1 < p < \infty$, оператор Хилбертове матрице $H : H^p \to H^p$ ограничен. Наиме, испоставља се да важи следећа неједнакост

$$\|H\|_{H^p \to H^p} \leq \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}},$$

у случају када је $1 < p < \infty$. Осим тога, претходно горње ограничење ће бити и тачна норма оператора Хилбертове матрице H на Хардијевом простору H^p када је $1 < p < \infty$.

2.2.1 Једна теорема Нехаријевог типа

У овој секцији покажимо ограниченост оператора Хилбертове матрице на простору H^p када је $1 < p < \infty$. Заправо, доказаћемо нешто општије тврђење. Наиме, уколико је H_g Ханкелов оператор придружен функцији $g \in L^\infty(\mathbb{T})$, што значи да је оператор H_g заправо индукован матрицом $[\widehat{g}(n+k)]_{n,k=0}^\infty$ (видети прву главу), тада је H_g ограничен оператор на Хардијевом простору H^p, за све $1 < p < \infty$, односно важи

$$\|H_g\|_{H^p \to H^p} \leq \frac{\|g\|_\infty}{\sin \frac{\pi}{p}}.$$

Кључна ствар у доказу претходне неједнакости, јесте чињеница да Ханкелов оператор H_g има репрезентацију $H_g = R_+ M_g F$ (видети поглавље 1.1), где је $R_+ : L^p(\mathbb{T}) \to H^p$ оператор Рисове пројекције, дефинисан на следећи начин

$$R_+ u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(t)}{1 - ze^{-it}} dt, \quad z \in \mathbb{D},$$

при чему је познато да важи

$$\|R_+\|_{L^p(\mathbb{T}) \to H^p} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{p}},$$

за све $1 < p < \infty$ (видети [27]). Такође, оператор $M_g : L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$ јесте дефинисан као

$$M_g f(e^{it}) = f(e^{it}) g(e^{it}),$$

при чему важи

$$\|M_g f\|_p \leq \|g\|_\infty \|f\|_p,$$

односно,

$$\|M_g\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})} \leq \|g\|_\infty.$$

Коначно, оператор $F : H^p \to L^p(\mathbb{T})$ јесте изометрички оператор конјуговања на јединичној кружници $\mathbb{T}$, односно

$$Ff(e^{it}) = f(e^{-it}),$$

где је

$$\|F\|_{H^p\to L^p(\mathbb{T})} = 1.$$

Матрица Ханкеловог оператора H_g јесте дата преко коефицијената у развоју функције $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ на следећи начин $[H_g] = [\widehat{g}(n+k)]_{n,k=0}^\infty$. Дакле, ако је $f(z) = \sum_{k=0}^\infty \widehat{f}(k)z^k$ холоморфна функција у јединичном диску $\mathbb{D}$, тада важи

$$H_g f(z) = \sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{k=0}^\infty \widehat{g}(n+k)\widehat{f}(k) \right) z^n.$$

Пратећи резултате Достанића, Јевтића и Вукотића из рада [14], у наставку доказујемо следећу теорему Нехаријевог типа.

Теорема 2.2.1 ([14]) *Нека је $1 < p < \infty$ и $g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Тада за Ханкелов оператор H_g који дејствује на Хардијевом простору H^p важи $H_g = R_+ M_g F$ и*

$$\|H_g\|_{H^p\to H^p} \leq \frac{\|g\|_\infty}{\sin\frac{\pi}{p}}.$$

$$\begin{tikzcd} L^p(\mathbb{T}) \arrow[r, dashed, "M_g"] & L^p(\mathbb{T}) \arrow[d, dashed, "R_+"] \\ H^p \arrow[u, dashed, "F"] \arrow[r, "H_g"'] & H^p \end{tikzcd}$$

Слика 2.2.1 Комутативан дијаграм којим се описује представљање Ханкеловог оператора $H_g : H^p \to H^p$ индукованог функцијом $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ као композиције оператора Рисове пројекције R_+, мултипликационог оператора M_g и изометричког оператора конјуговања F.

Доказ. Нека је $f \in H^p$ и нека је са $S_m f$ означен m-ти Тејлоров полином функције f, односно нека је $S_m f(z) = \sum_{k=0}^m \widehat{f}(k)z^k$, где је $z \in \mathbb{D}$. Следи да је $\|S_m f - f\|_{H^p} \to 0$ када $m \to \infty$. Са друге стране, најпре покажимо да ред $H_g f$ конвергира у јединичном диску $\mathbb{D}$. Довољно је показати да важи

$$\left| \sum_{k=0}^\infty \widehat{g}(n+k)\widehat{f}(k) \right| \leq \|g\|_\infty \|f\|_{H^p}. \qquad (2.2.1)$$

Најпре, покажимо да претходна неједнакост важи када се функција f замени са својим m-тим Тејлоровим полиномом $S_m f$. Након тога, уколико пустимо да $m \to \infty$ добићемо тражену неједнакост. Најпре, имајући у виду чињеницу да је оператор F изометрија простора H^p у простор $L^p(\mathbb{T})$ и одговарајућом применом Хелдерове неједнакости, добијамо да заправо важи следећа неједнакост

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^m \widehat{g}(n+k)\widehat{f}(k) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it})e^{-int} \sum_{k=0}^m \widehat{f}(k)e^{-ikt}dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it})e^{-int}(FS_m f)(e^{it})dt \right| \\ &\leq \|g\|_\infty \|S_m f\|_{H^p}. \end{aligned}$$

На сличан начин добијамо и одговарајућу неједнакост за разлику $S_m f - S_j f$, одакле закључујемо да је

$$\left\{\sum_{k=0}^{m} \widehat{g}(n+k)\widehat{f}(k)\right\}_{m=0}^{\infty}$$

један Кошијев низ. Према томе, уколико сада у претходно добијеној неједнакости $\left|\sum\limits_{k=0}^{m} \widehat{g}(n+k)\widehat{f}(k)\right| \le \|g\|_\infty \|S_m f\|_{H^p}$ пустимо да $m \to \infty$ добићемо неједнакост (2.2.1). Даље, приметимо да важи

$$\begin{aligned} H_g S_m f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} \widehat{g}(n+k)\widehat{f}(k) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} \widehat{f}(k)\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{it}) e^{-i(n+k)t} dt z^n \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{it}) \sum_{k=0}^{m} \widehat{f}(k) e^{-ikt} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-int} z^n dt \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tfrac{g(e^{it}) S_m f(e^{-it})}{1-ze^{-it}} dt \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tfrac{(M_g F S_m f)(e^{it})}{1-ze^{-it}} dt \\ &= R_+ M_g F S_m f(z). \end{aligned}$$

На исти начин се показује да важи једнакост $H_g(S_m f - S_j f) = R_+ M_g F(S_m f - S_j f)$, одакле имајући у виду ограниченост оператора R_+, M_g и F, закључујемо да је $\{H_g S_m f\}_{m=0}^{\infty}$ Кошијев низ у простору H^p. Коначно, уколико у једнакости $H_g S_m f = R_+ M_g F S_m f$ пустимо да $m \to \infty$, добијамо да је

$$H_g f = R_+ M_g F f,$$

за све $f \in H^p$. Следи да је

$$\|H_g\|_{H^p\to H^p} \le \|R_+\|_{L^p(\mathbb{T})\to H^p} \|M_g\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})} \|F\|_{H^p \to L^p(\mathbb{T})} \le \frac{\|g\|_\infty}{\sin\frac{\pi}{p}},$$

што је и требало доказати. ∎

2.2.2 Горње ограничење за $\|H\|_{H^p\to H^p}$ када је $1 < p < \infty$

Директна последица претходне теореме Нехаријевог типа је оцена одозго норме оператора Хилбертове матрице H на Хардијевом простору H^p када је $1 < p < \infty$.

Последица 2.2.2 *Нека је* $1 < p < \infty$. *Тада норма оператора Хилбертове матрице* H *који дејствује на Хардијевом простору* H^p *задовољава следећу оцену одозго*

$$\|H\|_{H^p\to H^p} \le \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}.$$

Доказ. Тражена неједнакост следи применом Теореме 2.2.1 на функцију из простора $L^\infty(\mathbb{T})$ дефинисану са $g(e^{it}) = ie^{-it}(\pi - t)$, где је $0 \le t < 2\pi$. ∎

Напоменимо да је прво горње ограничење норме оператора Хилбертове матрице H који дејствује на Хардијевим просторима H^p, у случају када је $1 < p < \infty$, изведено од стране Диамантопулоса и Сискакиса у раду [13]. Наиме, у том раду је показано да важи оцена $\|H\|_{H^p\to H^p} \le \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$, али само у случају када је $2 \le p < \infty$, док је у случају $1 < p < 2$ добијено нешто слабије горње ограничење.

2.2.3 Доње ограничење за $\|H\|_{H^p\to H^p}$ када је $1 < p < \infty$

Теорема која следи даје одговарајуће доње ограничење оператора Хилбертове матрице H који дејствује на Хардијевом простору H^p у случају када је $1 < p < \infty$. Први доказ ове теореме изведен је од стране Достанића, Јевтића и Вукотића у раду [14]. Међутим, доказ који следи је оригиналан доказ аутора овог текста, користи хипергеометријске функције и једноставнији је од претходно поменутог доказа (за више информација видети [33]).

Теорема 2.2.3 ([14, 33]) *Нека је $1 < p < \infty$. Тада норма оператора Хилбертове матрице H који дејствује на Хардијевом простору H^p задовољава следећу оцену одоздо*

$$\|H\|_{H^p\to H^p} \geq \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}.$$

Доказ. Нека је $0 < \gamma < 1 < p$ и $f_\gamma(z) = (1-z)^{-\frac{\gamma}{p}}$ за $z \in \mathbb{D}$. Након једноставног рачуна и користећи хипергеометријске функције (видети одељак у уводном делу посвећен хипергеометријским функцијама и одговарајуће ознаке) добијамо да је

$$\|f_\gamma\|_{H^p}^p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2\left(k+\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \frac{1}{(k!)^2} = F\left(\frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma}{2}, 1; 1\right).$$

На основу Стирлингове формуле, закључујемо да важи

$$\frac{\Gamma^2\left(k+\frac{\gamma}{2}\right)}{(k!)^2} \sim \frac{1}{(k+1)^{2-\gamma}} \text{ када } k\to\infty.$$

Следи да је $\|f_\gamma\|_{H^p} < \infty$ и $\|f_\gamma\|_{H^p} \to \infty$ када $\gamma \to 1$. Са друге стране, користећи интегралну репрезентацију хипергеометријских функција и формулу (2.1.1), добијамо да је

$$Hf_\gamma(z) = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{\frac{\gamma}{p}}(1-tz)} = B\left(1, 1-\frac{1}{p}\right) F\left(1, 1, 2-\frac{\gamma}{p}; z\right).$$

Односно, важи

$$Hf_\gamma(z) = \Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right)\Gamma\left(1-\frac{\gamma}{p}\right)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(k+1)}{\Gamma\left(k+2-\frac{\gamma}{p}\right)\Gamma\left(k+\frac{\gamma}{p}\right)} \frac{\Gamma\left(k+\frac{\gamma}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right)} \frac{z^k}{k!}.$$

Како је

$$\frac{\Gamma^2(k+1)}{\Gamma\left(k+2-\frac{\gamma}{p}\right)\Gamma\left(k+\frac{\gamma}{p}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{k+1}\right),$$

то добијамо

$$Hf_\gamma(z) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi\gamma}{p}}\left(f_\gamma(z) + g_\gamma(z)\right),$$

при чему важи

$$\sup_{0<\gamma<1}\|g_\gamma\|_{H^p} \leq \sup_{0<\gamma<1}\|g_\gamma\|_{H^\infty} \leq C_p < \infty,$$

Сада је

$$\|H\|_{H^p\to H^p} \geq \frac{\|Hf_\gamma\|_{H^p}}{\|f_\gamma\|_{H^p}} \geq \frac{\pi}{\sin\frac{\pi\gamma}{p}} \frac{\|f_\gamma\|_{H^p} - \|g_\gamma\|_{H^p}}{\|f_\gamma\|_{H^p}}.$$

Коначно, када $\gamma \to 1$, добијамо да важи

$$\|H\|_{H^p \to H^p} \geq \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}},$$

што је и требало доказати. Тиме је доказ завршен. ■

Коначно, на основу претходних разматрања можемо одредити норму оператора Хилбертове матрице $H : H^p \to H^p$ у случају када је $1 < p < \infty$.

Теорема 2.2.4 *Нека је* $1 < p < \infty$. *Тада за норму оператора Хилбертове матрице* H *на Хардијевом простору* H^p *важи*

$$\|H\|_{H^p \to H^p} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}.$$

Доказ. Тачну норму $\|H\|_{H^p \to H^p} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}$ добијамо директно на основу Теореме 2.2.3 и Последице 2.2.2. ■

Након претходно наведеног детаљног испитивања на који начин заправо оператор Хилбертове матрице дејствује на Хардијевим просторима, природно је видети на који начин Хилбертова матрица дејствује на Бергмановим просторима. То је циљ наредне главе. Ипак, као што ћемо убрзо приметити, ситуација код Бергманових простора је нешто сложенија и захтева примену нових техника.

Глава 3

Хилбертова матрица на Бергмановим просторима

3.1 Хилбертова матрица на Бергмановим просторима A^p

У овој глави одредићемо тачну норму Хилбертове матрице H на Бергмановим просторима A^p на којима је тај оператор ограничен. Осим тога, испитаћемо и норму оператора Хилбертове матрице на тежинским Бергмановим просторима. Испоставља се да је одређивање тачне норме оператора Хилбертове матрице на Бергмановим просторима нешто теже и компликованије у односу на случај Хардијевих простора. За функцију $f \in A^p$ важи

$$\|f\|_{A^p} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} = \left(2 \int_0^1 r M_p^p(r, f) dr \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Према томе, следи да је $H^p \subset A^p$. Осим тога, познато је да важи $H^p \subset A^{2p}$ (видети [31]). На неки начин функције из Бергманових простора имају слична својства као функције из одговарајућих Хардијевих простора, али је њихово испитивање обично нешто компликованије. Такође, код већине оператора и функционала дефинисаних на Хардијевим и Бергмановим просторима је уочено да се норма на Бергмановом простору добија дуплирањем одговарајуће величине која учествује у норми оператора или функционала на одговарајућем Хардијевом простору. Као што ћемо видети, то ће бити случај и код оператора Хилбертове матрице.

Најпре, приметимо да оператор Хилбертове матрице није ограничен на простору A^2. Довољно је показати да оператор H не пресликава простор A^2 у себе. Штавише, ситуација је још неповољнија. Наиме, постоји функција f из Бергмановог простора A^2, таква да не само да Hf не припада простору A^2, већ је ред одређен са $Hf(0)$ дивергентан. Заиста, посматрајмо функцију дефинисану на следећи начин

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Тада је

$$\|f\|_{A^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\log^2(n+1)} < \infty,$$

одакле следи да $f \in A^2$. Са друге стране, важи

$$Hf(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} = \infty.$$

На основу претходног, оператор Хилбертове матрице H у наставку посматрамо само на Бергмановим просотрима A^p код којих је $2 < p < \infty$. Нека је $f \in A^p$, где је $2 < p < \infty$. Тада, имајући у виду да низ $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$ припада простору множилаца (A^p, ℓ^1) (видети [31]), то постоји позитивна константа C, таква да важи

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\widehat{f}(n)|}{n+1} \leq C\|f\|_{A^p},$$

где је $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n$ за $z \in \mathbb{D}$. Према томе, за сваку такву функцију f следећи ред

$$Hf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{n+k+1} \right) z^n,$$

има ограничен низ коефицијената, што значи да је његов полупречник конвергенције најмање један, односно Hf је добро дефинисана холоморфна функција у јединичном диску $\mathbb{D}$. У наставку, од корисити нам може бити следећа лема којом се даје једна интегрална репрезентација оператора Хилбертове матрице на A^p просторима (такође, видети [12]).

Лема 3.1.1 ([12]) *Нека је $f \in A^p$, где је $2 < p < \infty$. Тада важи*

$$Hf(z) = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-t)z} f\left(\frac{t}{1-(1-t)z}\right) dt.$$

Доказ. За $z \in \mathbb{D}$ и $0 < r < 1$ дефинишимо

$$C_r f(z) = \int_0^r \frac{f(t)}{1-tz} dt.$$

Тада на основу интегралне репрезентације (2.1.1) закључујемо да је

$$Hf(z) = \lim_{r \to 1} C_r f(z).$$

Уколико за дато $z \in \mathbb{D}$ изаберемо следећу стазу интеграције

$$t = t(s) = \frac{rs}{1-r(1-s)z}, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

добијамо да важи

$$\begin{aligned} C_r f(z) &= \int_0^r \tfrac{f(t)}{1-tz} dt \\ &= \int_0^1 f(t(s)) \tfrac{1}{1-t(s)z} t'(s) ds \\ &= \int_0^1 \tfrac{r}{1-r(1-s)z} f\left(\tfrac{rs}{1-r(1-s)z}\right) ds. \end{aligned}$$

Са друге стране, нека је

$$h_r(s) = \frac{r}{1-r(1-s)z} f(\phi_{r,s}(z)),$$

где је

$$\phi_{r,s}(z) = \frac{rs}{1-r(1-s)z}.$$

Приметимо да је $\phi_{r,s} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно пресликавање, за све $0 \leq r, s \leq 1$. Такође, важи

$$\frac{r}{|1 - r(1-s)z|} \leq \frac{1}{|1-z|} \leq \frac{2}{1-|z|^2}.$$

Функција f задовољава следећу неједнакост

$$|f(z)| \leq \left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)^{\frac{2}{p}} \|f\|_{A^p}, \tag{3.1.1}$$

за све $z \in \mathbb{D}$ (видети [59]). Осим тога, свака холоморфна функција $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, индукује ограничен композициони оператор $C_\phi : f \to f \circ \phi$ на простору A^p и важи

$$\|C_\phi\|_{A^p \to A^p} \leq \left(\frac{1 + |\phi(0)|}{1 - |\phi(0)|}\right)^{\frac{2}{p}} \quad \text{(видети [10])}.$$

Користећи неједнакост (3.1.1) и претходну неједнакост, добијамо да је

$$|f(\phi_{r,s}(z))| \leq \left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)^{\frac{2}{p}} \|f \circ \phi_{r,s}\|_{A^p}$$

и такође

$$\begin{aligned} \|f \circ \phi_{r,s}\|_{A^p} &\leq \left(\tfrac{1+|\phi_{r,s}(0)|}{1-|\phi_{r,s}(0)|}\right)^{\frac{2}{p}} \|f\|_{A^p} \\ &= \left(\tfrac{1+rs}{1-rs}\right)^{\frac{2}{p}} \|f\|_{A^p} \\ &\leq \left(\tfrac{1+s}{1-s}\right)^{\frac{2}{p}} \|f\|_{A^p}. \end{aligned}$$

Користећи две претходно добијене неједнакости, закључујемо да је

$$|h_r(s)| \leq \frac{2}{(1-|z|^2)^{1+\frac{2}{p}}} \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^{\frac{2}{p}} \|f\|_{A^p}.$$

Како је $p > 2$, то је десна страна претходне неједнакости интеграбилна функција по s. Коначно, користећи Лебегову теорему о доминантној конвергенцији, добијамо да важи

$$Hf(z) = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-s)z} f\left(\frac{s}{1-(1-s)z}\right) ds,$$

што је и требало доказати. ■

3.2 Норма $\|H\|_{A^p \to A^p}$ када је $2 < p < \infty$

Из претходне Леме 3.1.1 добили смо следећу интегралну репрезентацију оператора Хилбертове матрице на Бергмановим просторима A^p, где је $2 < p < \infty$,

$$Hf(z) = \int_0^1 T_t f(z) dt, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3.2.1}$$

при чему је $T_t f(z) = \omega_t(z) f(\phi_t(z))$, $\omega_t(z) = \frac{1}{1-(1-t)z}$ и $\phi_t(z) = \frac{t}{1-(1-t)z}$. Претходно добијену интегралну репрезентацију, употребићемо у оцени норме Хилбертове матрице $H : A^p \to A^p$ одозго и одоздо, у циљу добијања тачне норме. Наиме, доказаћемо да важи

$$\|H\|_{A^p \to A^p} = \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{p}},$$

за све $2 < p < \infty$.

3.2.1 Горње ограничење за $\|H\|_{A^p\to A^p}$ када је $4 \leq p < \infty$

У овом поглављу направићемо горње ограничење за норму оператора Хилбертове матрице H на Бергмановим просторима A^p у случају када је $4 \leq p < \infty$. Наиме, показаћемо да важи

$$\|H\|_{A^p\to A^p} \leq \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}} \text{ када је } 4 \leq p < \infty.$$

Теорема која следи добијена је од стране Диамантопулоса у раду [12]. Међутим, као што ћемо видети техника која је примењена, укључујући и интегралну репрезентацију оператора Хилбертове матрице добијену у претходном поглављу, није била довољна да обухвати и случај $2 < p < 4$.

Теорема 3.2.1 ([12]) *Нека је $4 \leq p < \infty$. Тада за норму оператора Хилбертове матрице H на Бергмановом простору A^p важи*

$$\|H\|_{A^p\to A^p} \leq \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}}.$$

Доказ. Нека је $f \in A^p$ произвољно одабрана функција. Користећи интегралну неједнакост Минковског и интегралну репрезентацију (3.2.1) добијамо да је

$$\begin{aligned}
\|Hf\|_{A^p} &= \left(\int_{\mathbb{D}}\left|\int_0^1 T_tf(z)dt\right|^p dA(z)\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \int_0^1\left(\int_{\mathbb{D}}|T_tf(z)|^p dA(z)\right)^{\frac{1}{p}} dt\\
&= \int_0^1 \|T_tf\|_{A^p}dt,
\end{aligned}$$

где је $T_tf(z) = \omega_t(z)f(\phi_t(z))$. Са друге стране, увођењем смене $w = \phi_t(z)$, где је $z \in \mathbb{D}$, добијамо да важи

$$\begin{aligned}
\|T_tf\|^p_{A^p} &= \int_{\mathbb{D}} |T_tf(z)|^p dA(z)\\
&= \int_{\mathbb{D}} |\omega_t(z)|^p|f(\phi_t(z))|^p dA(z)\\
&= \int_{\phi_t(\mathbb{D})} |\omega_t(\phi_t^{-1}(w))|^p|f(w)|^p\frac{1}{|\phi_t'(\phi_t^{-1}(w))|^2}dA(w)\\
&= \frac{t^{2-p}}{(1-t)^2}\int_{D_t}|w|^{p-4}|f(w)|^p dA(w),
\end{aligned}$$

где је $D_t = \phi_t(\mathbb{D})$. Имајући у виду да је $D_t \subset \mathbb{D}$ и $p \geq 4$, следи да је

$$\begin{aligned}
\|T_tf\|^p_{A^p} &\leq \frac{t^{2-p}}{(1-t)^2}\int_{\mathbb{D}}|w|^{p-4}|f(w)|dA(w)\\
&\leq \frac{t^{2-p}}{(1-t)^2}\int_{\mathbb{D}}|f(w)|^p dA(w)\\
&= \frac{t^{2-p}}{(1-t)^2}\|f\|^p_{A^p},
\end{aligned}$$

односно, важи

$$\|T_tf\|_{A^p} \leq \frac{t^{\frac{2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{2}{p}}}\|f\|_{A^p}.$$

Коначно, користећи претходно добијене неједнакости, закључујемо да је

$$\begin{aligned}\|Hf\|_{A^p} &\le \int_0^1 \|T_t f\|_{A^p} dt \\ &\le \int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1}(1-t)^{-\frac{2}{p}} dt \cdot \|f\|_{A^p} \\ &= B\left(\tfrac{2}{p}, 1-\tfrac{2}{p}\right)\|f\|_{A^p} \\ &= \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}}\|f\|_{A^p}.\end{aligned}$$

Тиме је доказ завршен. ■

3.2.2 Горње ограничење за $\|H\|_{A^p\to A^p}$ када је $2 < p < 4$

Као што смо видели, техника примењена у претходном поглављу не даје оцену одозго норме оператора Хилбертове матрице на Бергмановим просторима у случају када је $2 < p < 4$. Међутим, природно је претпоставити да претходно наведена оцена одозго норме оператора Хилбертове матрице

$$\|H\|_{A^p\to A^p} \le \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}} \text{ када је } 4 \le p < \infty,$$

важи и у случају $2 < p < 4$. Таква хипотеза изнета је у раду [14] од стране Достанића, Јевтића и Вукотића и представљала је један отворен проблем. Пратећи рад [5], који је зараво заједнички рад В. Божина и аутора овог текста, у наставку дајемо доказ те хипотезе. Међутим, доказ је нешто компликованији и захтева примену неких других техника. Заправо, у наставку нам је циљ да покажемо следећу неједнакост која се односи на Бета функцију

$$\left(\frac{4-p}{2} + \frac{p-2}{2}s^4\right) B\left(\frac{2}{p}, 1-\frac{2}{p}\right) \le \int_0^1 \psi_p(t) \max\left\{s^2, t^2\right\}^{p-2} dt,$$

где је $2 < p < 4$, $s \in [0,1]$ и $\psi_p(t) = t^{\frac{2}{p}-1}(1-t)^{-\frac{2}{p}}$. Доказ претходне неједнакости, у којој учествује и Бета функција, захтева примену већег броја различитих техника. Најпре, коришћењем Штурмове теореме из елементарне теорије полинома (видети одељак у уводном делу посвећен Штурмовој теореми и Штурмовом низу полинома) доказаћемо следеће тврђење које ће бити од користи при извођењу једне помоћне неједнакости у којој учествује Бета функција. Након тога, прелазимо на доказ претходно наведене неједнакости за Бета функцију, која ће бити кључна у доказивању тражене оцене одозго норме оператора Хилбертове матрице на Бергмановим просторима A^p у случају када је $2 < p < 4$.

Лема 3.2.2 *Полиноми $\eta(x)$ и $\xi(x)$, дефинисани на следећи начин,*

$$\eta(x) = x^6 - 11x^5 + 39x^4 - 25x^3 - 117x^2 + 171x + 2,$$

$$\xi(x) = 2x^7 - 25x^6 + 104x^5 - 103x^4 - 302x^3 + 565x^2 + x - 2,$$

су позитивни на интервалу $(2,4)$.

Доказ. Директно проверавамо да је $\eta(2) = 12$ и $\eta(4) = 30$. Према томе, довољно је показати да полином $\eta(x)$ нема нула на интервалу $(2,4)$. Конструишимо Штурмов низ који одговара полиному $\eta(x)$:

$$\begin{aligned}
\eta_0(x) &= x^6 - 11x^5 + 39x^4 - 25x^3 - 117x^2 + 171x + 2,\\
\eta_1(x) &= 6x^5 - 55x^4 + 156x^3 - 75x^2 - 234x + 171,\\
\eta_2(x) &= \tfrac{1}{36}(137x^4 - 1266x^3 + 3633x^2 - 2556x - 1953),\\
\eta_3(x) &= \tfrac{2\cdot 36^2}{18769}(-262x^3 - 6552x^2 + 36537x - 46231),\\
\eta_4(x) &= \tfrac{18769^2}{2^2\cdot 36^3\cdot 17161}(-256149x^2 + 1245415x - 1510428),\\
\eta_5(x) &= \tfrac{2^3\cdot 36^5\cdot 17161^2}{18769^3\cdot 65612310201}(-122409971x + 322732527),\\
\eta_6(x) &= \tfrac{18769^5\cdot 65612310201}{2^5\cdot 36^8\cdot 17161^3}\cdot\tfrac{111119185452762355014}{14984201000220841}.
\end{aligned}$$

Тада, након једноставног рачуна, добијамо следећу табелу

	$\eta_0(x)$	$\eta_1(x)$	$\eta_2(x)$	$\eta_3(x)$	$\eta_4(x)$	$\eta_5(x)$	$\eta_6(x)$	$w_\eta(x)$
$x=2$	+	-	-	-	-	+	+	2
$x=4$	+	+	-	-	-	-	+	2

Табела 1. Табела промена знака у Штурмовом низу полинома $\eta(x)$, када је $x = 2$ и $x = 4$, где је $w_\eta(x)$ број промена знака у Штурмовом низу $\eta_0(x), \eta_1(x), \ldots, \eta_6(x)$.

Добијамо да је $w_\eta(2) - w_\eta(4) = 0$ и на основу Штурмове теореме, закључујемо да полином $\eta(x)$ нема нула на интервалу $(2,4)$.

Са друге стране, налазимо да је $\xi(2) = 180$ и $\xi(4) = 210$. Према томе, такође је довољно показати да полином $\xi(x)$ нема нула на интервалу $(2,4)$. Тада, слично као у претходном случају, након једноставног рачуна, долазимо до следеће табеле

	$\xi_0(x)$	$\xi_1(x)$	$\xi_2(x)$	$\xi_3(x)$	$\xi_4(x)$	$\xi_5(x)$	$\xi_6(x)$	$\xi_7(x)$	$w_\xi(x)$
$x=2$	+	-	-	-	-	+	+	+	2
$x=4$	+	+	-	-	-	-	+	+	2

Табела 2. Табела промена знака у Штурмовом низу полинома $\xi(x)$, када је $x = 2$ и $x = 4$, где је $w_\xi(x)$ број промена знака у Штурмовом низу $\xi_0(x), \xi_1(x), \ldots, \xi_7(x)$.

Следи да је $w_\xi(2) - w_\xi(4) = 0$ и користећи Штурмову теорему, добијамо да полином $\xi(x)$ нема нула на интервалу $(2,4)$. Тиме је доказ завршен. ■

Напомена 3.2.3 Користећи програмски језик *Mathematica*, може се лако видети да су полиноми $\eta(x)$ и $\xi(x)$ позитивни на интервалу $(2,4)$. ♢

Следеће елементарно и једноставно тврђење биће нам од користи у неким даљим разматрањима и у доказу једне неједнакости која се односи на Бета функцију.

Лема 3.2.4 *Нека је* $\alpha \in (0,1] \cup (2,3)$ *и* $t \in (0,1)$. *Тада важи*

$$(1-t)^\alpha \le 1 - \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2.$$

Доказ. Приметимо да важи

$$\begin{aligned}(1-t)^{\alpha} &= 1-\alpha t+\tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2-\left(\tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3-\tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}t^4+\dots\right)\\ &\leq 1-\alpha t+\tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2,\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

где смо искористили да је израз у претходној загради позитиван. ■

Осим тога, биће нам потребно и следеће познато својство Бета функције.

Лема 3.2.5 ([15, Теорема 3, стр. 114]) *Нека је* $0<x,y\leq 1$. *Тада важи*

$$B(x,y)\leq \frac{1}{xy}.$$

Последично, коришћењем претходних резултата, долазимо до следеће значајне неједнакости која се односи на Бета функцију.

Лема 3.2.6 *Нека је* $2<p<4$. *Тада важи*

$$B\left(\frac{2}{p},2(p-2)\right)\leq\frac{1}{(p-2)(4-p)}.$$

Доказ. **(1) Случај $2<p\leq\frac{5}{2}$.** Како вредности $\frac{2}{p}$ и $2(p-2)$ припадају интервалу $(0,1]$, то на основу Леме 3.2.5, добијамо да је

$$B\left(\frac{2}{p},2(p-2)\right)\leq\frac{1}{\frac{2}{p}\cdot 2(p-2)}=\frac{4-(p-2)^2}{4(p-2)(4-p)}\leq\frac{1}{(p-2)(4-p)}.$$

(2) Случај $p\in\left(\frac{5}{2},3\right]\cup\left(\frac{7}{2},4\right)$. Како $2p-5\in(0,1]\cup(2,3)$, то применом неједнакости (3.2.2), добијамо

$$\begin{aligned}B\left(\tfrac{2}{p},2(p-2)\right) &= \int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1}(1-t)^{2p-5}dt\\ &\leq \int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1}\left(1-(2p-5)t+\tfrac{(2p-5)(2p-6)}{2}t^2\right)dt\\ &= \tfrac{p}{2}-\tfrac{2p-5}{\frac{2}{p}+1}+\tfrac{(p-3)(2p-5)}{\frac{2}{p}+2}\\ &= \tfrac{p}{2}-\tfrac{p(2p-5)}{p+2}+\tfrac{p(p-3)(2p-5)}{2(p+1)}.\end{aligned}$$

Према томе, довољно је показати да важи

$$p\left[\frac{1}{2}-\frac{2p-5}{p+2}+\frac{(p-3)(2p-5)}{2(p+1)}\right]\leq\frac{1}{(p-2)(4-p)}. \tag{3.2.3}$$

Није тешко приметити да је неједнакост (3.2.3) тачна ако и само ако важи

$$\eta(p)=p^6-11p^5+39p^4-25p^3-117p^2+171p+2\geq 0,$$

где је $2<p<4$. Међутим, на основу Леме 3.2.2, следи да је $\eta(p)\geq 0$ за све $2<p<4$. Коначно, неједнакост (3.2.3) је тачна.

(3) Случај $3<p\leq\frac{7}{2}$. Тада је $2p-6\in(0,1]$. Поново, користећи неједнакост (3.2.2), налазимо да је

$$\begin{aligned}B\left(\tfrac{2}{p},2(p-2)\right) &= \tfrac{2(p-2)-1}{\frac{2}{p}+2(p-2)-1}B\left(\tfrac{2}{p},2p-5\right)\\ &= \tfrac{p(2p-5)}{(p-2)(2p-1)}\int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1}(1-t)^{2p-6}dt\\ &\leq \tfrac{p(2p-5)}{(p-2)(2p-1)}\int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1}\left(1-(2p-6)t+\tfrac{(2p-6)(2p-7)}{2}t^2\right)dt\\ &= \tfrac{p(2p-5)}{(p-2)(2p-1)}\left[\tfrac{p}{2}-\tfrac{2p(p-3)}{p+2}+\tfrac{p(p-3)(2p-7)}{2(p+1)}\right].\end{aligned}$$

Дакле, довољно је доказати да важи

$$\frac{p^2(2p-5)}{2p-1}\left[\frac{1}{2}-\frac{2(p-3)}{p+2}+\frac{(p-3)(2p-7)}{2(p+1)}\right]\le\frac{1}{4-p}. \tag{3.2.4}$$

Једноставан рачун, показује да је неједнакост (3.2.4) тачна ако и само ако важи

$$\xi(p)=2p^7-25p^6+104p^5-103p^4-302p^3+565p^2+p-2\ge 0,$$

где је $2<p<4$. Поновном применом Леме 3.2.2, следи да је $\xi(p)\ge 0$ за све $2<p<4$. Према томе, (3.2.4) је тачна неједнакост. Овим је доказ леме завршен. ■

Коначно смо у могућности, коришћењем претходних резултата, да покажемо тражену неједнакост за Бета функцију.

Лема 3.2.7 *Нека је $2<p<4$ и $s\in[0,1]$. Тада важи*

$$\left(\frac{4-p}{2}+\frac{p-2}{2}s^4\right)B\left(\frac{2}{p},1-\frac{2}{p}\right)\le\int_0^1\psi_p(t)\max\left\{s^2,t^2\right\}^{p-2}dt,$$

где је $\psi_p(t)=t^{\frac{2}{p}-1}(1-t)^{-\frac{2}{p}}$.

Доказ. Нека је

$$F_p(s)=\left(\frac{4-p}{2}+\frac{p-2}{2}s^4\right)B\left(\frac{2}{p},1-\frac{2}{p}\right)-\int_0^1\psi_p(t)\max\left\{s^2,t^2\right\}^{p-2}dt. \tag{3.2.5}$$

Наш циљ је да покажемо да је $F_p(s)\le 0$ за све $s\in[0,1]$. Најпре, налазимо да је

$$F_p(s)=\left(\frac{4-p}{2}+\frac{p-2}{2}s^4\right)B\left(\frac{2}{p},1-\frac{2}{p}\right)-s^{2(p-2)}\int_0^s\psi_p(t)dt-\int_s^1\psi_p(t)t^{2(p-2)}dt.$$

Тада, након једноставног рачуна, добијамо да је

$$\begin{aligned}F_p'(s)&=2(p-2)B\left(\tfrac{2}{p},1-\tfrac{2}{p}\right)s^3-2(p-2)s^{2(p-2)-1}\textstyle\int_0^s\psi_p(t)dt\\&=2(p-2)s^{2p-5}\left[B\left(\tfrac{2}{p},1-\tfrac{2}{p}\right)s^{8-2p}-\textstyle\int_0^s\psi_p(t)dt\right].\end{aligned}$$

Према томе, важи

$$F_p'(s)=2(p-2)s^{2p-5}G_p(s), \tag{3.2.6}$$

где смо означили

$$G_p(s)=B\left(\frac{2}{p},1-\frac{2}{p}\right)s^{8-2p}-\int_0^s\psi_p(t)dt. \tag{3.2.7}$$

Даље, добијамо

$$\begin{aligned}G_p'(s)&=B\left(\tfrac{2}{p},1-\tfrac{2}{p}\right)(8-2p)s^{7-2p}-\psi_p(s)\\&=\tfrac{1}{s^{1-\frac{2}{p}}(1-s)^{\frac{2}{p}}}\left[2(4-p)B\left(\tfrac{2}{p},1-\tfrac{2}{p}\right)s^{8-2p-\frac{2}{p}}(1-s)^{\frac{2}{p}}-1\right]\\&=\tfrac{2(4-p)B\left(\frac{2}{p},1-\frac{2}{p}\right)}{s^{1-\frac{2}{p}}(1-s)^{\frac{2}{p}}}\left[s^{8-2p-\frac{2}{p}}(1-s)^{\frac{2}{p}}-\tfrac{1}{2(4-p)B\left(\frac{2}{p},1-\frac{2}{p}\right)}\right]\\&=\tfrac{2(4-p)B\left(\frac{2}{p},1-\frac{2}{p}\right)}{s^{1-\frac{2}{p}}(1-s)^{\frac{2}{p}}}E_p(s),\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

где је

$$E_p(s) = s^{8-2p-\frac{2}{p}}(1-s)^{\frac{2}{p}} - \frac{1}{2(4-p)B\left(\frac{2}{p}, 1-\frac{2}{p}\right)}. \tag{3.2.9}$$

Диференцирањем, налазимо

$$\begin{aligned} E_p'(s) &= \left(8-2p-\tfrac{2}{p}\right) s^{7-2p-\frac{2}{p}}(1-s)^{\frac{2}{p}} - \tfrac{2}{p} s^{8-2p-\frac{2}{p}}(1-s)^{\frac{2}{p}-1} \\ &= s^{7-2p-\frac{2}{p}}(1-s)^{\frac{2}{p}-1}\left[2\left(4-p-\tfrac{1}{p}\right)(1-s) - \tfrac{2}{p}s\right] \\ &= \tfrac{2s^{7-2p-\frac{2}{p}}}{(1-s)^{1-\frac{2}{p}}}\left[4-p-\tfrac{1}{p} - \left(4-p-\tfrac{1}{p}\right)s - \tfrac{1}{p}s\right] \\ &= \tfrac{2s^{7-2p-\frac{2}{p}}}{(1-s)^{1-\frac{2}{p}}}\left[4-p-\tfrac{1}{p} - (4-p)s\right] \\ &= \tfrac{2(4-p)s^{7-2p-\frac{2}{p}}}{(1-s)^{1-\frac{2}{p}}}\left[\tfrac{4-p-\frac{1}{p}}{4-p} - s\right]. \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

(1) Случај $2+\sqrt{3} \le p < 4$. У овом случају, важи неједнакост $4-p-\frac{1}{p} \le 0$ и самим тим је $E_p' \le 0$ on $[0,1]$, одакле следи да је E_p нерастућа функција на интервалу $[0,1]$. Ако је $4-p-\frac{1}{p} < 0$, односно ако важи $2+\sqrt{3} < p < 4$, тада, користећи једнакост (3.2.9), добијамо да је $\lim\limits_{s\to 0^+} E_p(s) = +\infty$. Ако је пак $4-p-\frac{1}{p} = 0$, односно ако важи $p = 2+\sqrt{3}$, тада налазимо

$$\begin{aligned} E_p(0) &= 1 - \tfrac{1}{2(4-p)B\left(\frac{2}{p}, 1-\frac{2}{p}\right)} \\ &= 1 - \tfrac{1}{2(2-\sqrt{3})\pi} \sin\tfrac{2\pi}{2+\sqrt{3}} \\ &> 1 - \tfrac{2}{\pi}\sin\tfrac{2\pi}{2+\sqrt{3}} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Са друге стране, важи

$$E_p(1) = -\frac{1}{2(4-p)B\left(\frac{2}{p}, 1-\frac{2}{p}\right)} < 0.$$

Према томе, постоји $s_0 \in (0,1)$, тако да је $E_p > 0$ на $[0, s_0)$, $E_p(s_0) = 0$ и $E_p < 0$ на $(s_0, 1]$. Из (3.2.8), закључујемо да је

$$G_p' \ge 0 \text{ на } [0, s_0] \text{ и } G_p' \le 0 \text{ на } [s_0, 1].$$

Дакле, функција G_p је неопадајућа на $[0, s_0]$ и нерастућа на $[s_0, 1]$. Како важи,

$$G_p(0) = 0 \text{ и } G_p(1) = B\left(\frac{2}{p}, 1-\frac{2}{p}\right) - \int_0^1 \psi_p(t)dt = 0,$$

то је $G_p \ge 0$ на $[0,1]$. Сада, из једнакости (3.2.6), следи да је $F_p' \ge 0$ на $[0,1]$. Самим тим, F_p је неопадајућа функција на $[0,1]$. Осим тога, важи

$$\begin{aligned} F_p(1) &= \left(\tfrac{4-p}{2} + \tfrac{p-2}{2}\right) B\left(\tfrac{2}{p}, 1-\tfrac{2}{p}\right) - \textstyle\int_0^1 \psi_p(t)dt \\ &= B\left(\tfrac{2}{p}, 1-\tfrac{2}{p}\right) - B\left(\tfrac{2}{p}, 1-\tfrac{2}{p}\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

одакле је $F_p(s) \leq F_p(1) = 0$ за све $s \in [0,1]$.

(2) Случај $2 < p < 2+\sqrt{3}$. Тада је $4 - p - \frac{1}{p} > 0$ и самим тим, налазимо да $p_0 = \frac{4-p-\frac{1}{p}}{4-p} \in (0,1)$. Користећи (3.2.10), добијамо

$$E_p'(s) = \frac{2(4-p)s^{7-2p-\frac{2}{p}}}{(1-s)^{1-\frac{2}{p}}}\left(p_0 - s\right).$$

Како је $E_p' \geq 0$ на $[0,p_0]$ и $E_p' \leq 0$ на $[p_0,1]$, то следи да је функција E_p неопадајућа на $[0,p_0]$ и нерастућа на $[p_0,1]$. Према томе, $E_p(p_0) = \max\limits_{0\leq s\leq 1} E_p(s)$. Користећи једнакост (3.2.9), добијамо да је

$$E_p(0) = E_p(1) = -\frac{1}{2(4-p)B\left(\frac{2}{p}, 1-\frac{2}{p}\right)} < 0.$$

Тврдимо да важи $E_p(p_0) > 0$. Претпоставимо супротно, да је $E_p(p_0) \leq 0$. Тада је $E_p(s) \leq 0$ за све $s \in [0,1]$. Сада, из (3.2.8), закључујемо да је $G_p' \leq 0$ on $[0,1]$ и самим тим, G_p је нерастућа функција на $[0,1]$. Како је $G_p(0) = G_p(1) = 0$, то следи да је $G_p \equiv 0$, што заправо повлачи да је $G_p' \equiv 0$. Користећи (3.2.8), добијамо да је $E_p \equiv 0$ на $[0,1]$ и према томе, важи $E_p' \equiv 0$ на $[0,1]$. Ово је у контрадикцији са једнакости (3.2.10).

Дакле, доказали смо да важи $E_p(p_0) > 0$. Такође, већ смо показали да је $E_p(0) < 0$ и $E_p(1) < 0$ и да је функција E_p неопадајућа на $[0,p_0]$ и нерастућа $[p_0,1]$. На основу претходног, постоји $p_1 \in (0,p_0)$, тако да је

$$E_p < 0 \text{ на } [0,p_1),\ \ E_p(p_1) = 0 \text{ и } E_p > 0 \text{ на } (p_1,p_0],$$

и постоји $p_2 \in (p_0,1)$, тако да је

$$E_p > 0 \text{ на } [p_0,p_2),\ \ E_p(p_2) = 0 \text{ и } E_p < 0 \text{ на } (p_2,1].$$

Стога, важи

$$E_p \leq 0 \text{ на } [0,p_1],\ \ E_p \geq 0 \text{ на } [p_1,p_2] \text{ и } E_p \leq 0 \text{ на } [p_2,1].$$

Користећи (3.2.8), закључујемо да је

$$G_p' \leq 0 \text{ на } [0,p_1],\ \ G_p' \geq 0 \text{ на } [p_1,p_2] \text{ и } G_p' \leq 0 \text{ на } [p_2,1].$$

Дакле, функција G_p је нерастућа на $[0,p_1]$, неопадајућа на $[p_1,p_2]$ и нерастућа на $[p_2,1]$. Користећи једнакост (3.2.7), имамо да је $G_p(0) = G_p(1) = 0$. Према томе, постоји $p_3 \in (p_1,p_2)$, тако да важи

$$G_p \leq 0 \text{ на } [0,p_3),\ \ G_p(p_3) = 0 \text{ и } G_p \geq 0 \text{ на } (p_3,1].$$

Самим тим је,

$$G_p \leq 0 \text{ на } [0,p_3] \text{ и } G_p \geq 0 \text{ на } [p_3,1].$$

Из једнакости (3.2.6), налазимо да је

$$F_p' \leq 0 \text{ на } [0,p_3] \text{ и } F_p' \geq 0 \text{ на } [p_3,1].$$

Дакле, функција F_p је нерастућа на $[0,p_3]$ и F_p је неопадајућа на $[p_3,1]$. Ако $s\in[0,p_3]$, тада важи

$$F_p(s)\le F_p(0),$$

и ако $s\in[p_3,1]$, тада је

$$F_p(s)\le F_p(1)=0.$$

Према томе, да би показали да је $F_p(s)\le 0$ за све $s\in[0,1]$, довољно је још показати да је $F_p(0)\le 0$. Поменута неједнакост следи из наредног разматрања

$$\begin{aligned}
F_p(0) &= \tfrac{4-p}{2}B\left(\tfrac{2}{p},1-\tfrac{2}{p}\right)-\textstyle\int_0^1\psi_p(s)t^{2(p-2)}dt\\
&= \tfrac{4-p}{2}B\left(\tfrac{2}{p},1-\tfrac{2}{p}\right)-\textstyle\int_0^1 t^{\frac{2}{p}+2(p-2)-1}(1-t)^{-\frac{2}{p}}dt\\
&= \tfrac{4-p}{2}B\left(\tfrac{2}{p},1-\tfrac{2}{p}\right)-B\left(\tfrac{2}{p}+2(p-2),1-\tfrac{2}{p}\right)\\
&= \tfrac{4-p}{2}B\left(\tfrac{2}{p},1-\tfrac{2}{p}\right)-\tfrac{\Gamma\left(\frac{2}{p}+2(p-2)\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{p}\right)}{\Gamma(2(p-2)+1)}\\
&= \tfrac{4-p}{2}B\left(\tfrac{2}{p},1-\tfrac{2}{p}\right)-\tfrac{\Gamma\left(\frac{2}{p}+2(p-2)\right)\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{p}\right)}{2(p-2)\Gamma(2(p-2))\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}\\
&= \tfrac{4-p}{2}B\left(\tfrac{2}{p},1-\tfrac{2}{p}\right)-\tfrac{1}{2(p-2)}\tfrac{1}{B\left(\frac{2}{p},2(p-2)\right)}B\left(\tfrac{2}{p},1-\tfrac{2}{p}\right)\\
&= \tfrac{B\left(\frac{2}{p},1-\frac{2}{p}\right)}{2}\left[4-p-\tfrac{1}{(p-2)B\left(\frac{2}{p},2(p-2)\right)}\right]\\
&= \tfrac{(4-p)B\left(\frac{2}{p},1-\frac{2}{p}\right)}{2B\left(\frac{2}{p},2(p-2)\right)}\left[B\left(\tfrac{2}{p},2(p-2)\right)-\tfrac{1}{(p-2)(4-p)}\right],
\end{aligned}$$

и користећи Лему 3.2.6, закључујемо да је

$$F_p(0)=\frac{(4-p)B\left(\frac{2}{p},1-\frac{2}{p}\right)}{2B\left(\frac{2}{p},2(p-2)\right)}\left[B\left(\frac{2}{p},2(p-2)\right)-\frac{1}{(p-2)(4-p)}\right]\le 0,$$

за све $2<p<4$. Овим је доказ комплетиран. ■

У наредним разматрањима показујемо да важи неједнакост $\|H\|_{A^p\to A^p}\le\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}}$ за све $2<p<4$. Биће нам потребна следеће познато и елементарно тврђење.

Лема 3.2.8 *Нека је $x>0$, $y>0$ и $\alpha\in(0,1)$. Тада важи*

$$x^\alpha-y^\alpha\le\alpha y^{\alpha-1}(x-y).$$

Доказ. Нека је $y>0$ фиксирано и означимо

$$g(x)=x^\alpha-y^\alpha-\alpha y^{\alpha-1}(x-y),$$

где је $x>0$. Тада важи

$$g'(x)=\alpha x^{\alpha-1}-\alpha y^{\alpha-1}=\alpha\left(\frac{1}{x^{1-\alpha}}-\frac{1}{y^{1-\alpha}}\right).$$

Из претходног, закључујемо да је

$$g'>0 \ \text{на}\ (0,y),\ \ g'<0\ \text{на}\ (y,\infty)\ \text{и}\ g'(y)=0.$$

Према томе, функција g је растућа на $(0, y)$ и опадајућа на (y, ∞), односно, налазимо да је $g(y) = \max\limits_{0<x<\infty} g(x)$. Самим тим, важи

$$g(x) \leq g(y) = y^{\alpha} - y^{\alpha} - \alpha y^{\alpha-1}(y - y) = 0,$$

или еквивалентно

$$x^{\alpha} - y^{\alpha} \leq \alpha y^{\alpha-1}(x - y),$$

за све $x > 0$ и $y > 0$. ■

Теорема 3.2.9 ([5]) *Нека је $2 < p < 4$. Тада за норму оператора Хилбертове матрице H на Бергмановом простору A^p важи*

$$\|H\|_{A^p \to A^p} \leq \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{p}}.$$

Доказ. Нека је $f \in A^p$, где је $2 < p < 4$. Потребно је доказати да важи неједнакост $\|Hf\|_{A^p} \leq \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{p}} \|f\|_{A^p}$. Без смањења општости можемо претпоставити да је $f \not\equiv 0$. Означимо

$$\varphi(r) = 2M_p^p(r, f),$$

где је $0 \leq r < 1$ и нека је

$$\chi(r) = \varphi(r) - \varphi(0).$$

Како је f холоморфна функција у диску $\mathbb{D}$, добијамо да је φ једна неопадајућа и диференцијабилна функција на $(0, 1)$ и важи $\varphi \not\equiv 0$. Према томе, функција χ је неопадајућа и диференцијабилна на интервалу $(0, 1)$. Стога, важи

$$\chi' \geq 0 \text{ на } (0, 1),$$

и

$$\chi(r) = \int_0^r \chi'(s) ds,$$

где је $0 < r < 1$. На основу једнакости (3.2.1), имамо да је

$$Hf(z) = \int_0^1 T_t f(z) dt,$$

при чему је

$$T_t f(z) = \omega_t(z) f(\phi_t(z)), \;\; \omega_t(z) = \frac{1}{1 - (1 - t)z} \text{ и } \phi_t(z) = \frac{t}{1 - (1 - t)z}.$$

Штавише,

$$\|Hf\|_{A^p} \leq \int_0^1 \|T_t f\|_{A^p} dt, \tag{3.2.11}$$

где је

$$\|T_t f\|_{A^p} = \frac{t^{\frac{2}{p}-1}}{(1 - t)^{\frac{2}{p}}} \left(\int_{D_t} |w|^{p-4} |f(w)|^p dA(w) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2.12}$$

У претходној једнакости је уведена следећа ознака

$$D_t = \phi_t(\mathbb{D}).$$

Такође, није тешко проверити да тада заправо важи

$$D_t = D\left(\frac{1}{2-t}, \frac{1-t}{2-t}\right),$$

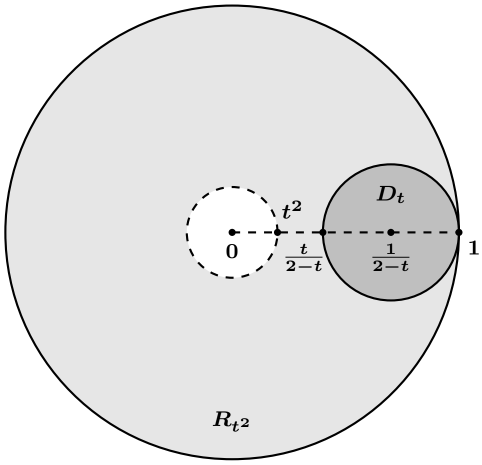
односно, D_t је диск са центром у тачки $\frac{1}{2-t}$ полупречника $\frac{1-t}{2-t}$. Са друге стране, нека је

$$R_{t^2} = \left\{z \in \mathbb{C} : t^2 < |z| < 1\right\}.$$

Како важи

$$\frac{1}{2-t} - \frac{1-t}{2-t} = \frac{t}{2-t} \geq t^2,$$

то је $D_t \subset R_{t^2}$ (видети Слику 3.2.1). Из (3.2.11) и (3.2.12), добијамо да је заправо довољно показати да важи следећа неједнакост



Слика 3.2.1 Уместо интеграције по диску $D_t = \phi_t(\mathbb{D}) = D\left(\frac{1}{2-t}, \frac{1-t}{2-t}\right)$ у једнакости (3.2.12), прелазимо на интеграцију по прстену $R_{t^2} = \left\{z \in \mathbb{C} : t^2 < |z| < 1\right\}$ који садржи диск D_t, јер је $t^2 \leq \frac{t}{2-t}$.

$$\int_0^1 \psi_p(t) \left(\int_{R_{t^2}} |w|^{p-4}|f(w)|^p dA(w)\right)^{\frac{1}{p}} dt \leq \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}}\|f\|_{A^p}. \tag{3.2.13}$$

Како је

$$\begin{aligned}
\tfrac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}}\|f\|_{A^p} &= B\left(\tfrac{2}{p}, 1-\tfrac{2}{p}\right)\|f\|_{A^p} \\
&= \textstyle\int_0^1 \psi_p(t)dt\|f\|_{A^p} \\
&= \textstyle\int_0^1 \psi_p(t)\left(\int_0^1 r\varphi(r)dr\right)^{\frac{1}{p}} dt,
\end{aligned}$$

и

$$\int_{R_{t^2}} |w|^{p-4}|f(w)|^p dA(w) = \int_{t^2}^1 r^{p-3}\varphi(r)dr,$$

добијамо да (3.3.1) важи, ако је заправо следећа неједнакост тачна

$$\int_0^1 \psi_p(t)\left(\int_{t^2}^1 r^{p-3}\varphi(r)dr\right)^{\frac{1}{p}} dt \leq \int_0^1 \psi_p(t)\left(\int_0^1 r\varphi(r)dr\right)^{\frac{1}{p}} dt. \tag{3.2.14}$$

Користећи Лему 3.2.8, налазимо да је

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_0^1 \psi_p(t)\left[\left(\int_{t^2}^1 r^{p-3}\varphi(r)dr\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_0^1 r\varphi(r)dr\right)^{\frac{1}{p}}\right] dt \\
&\leq \tfrac{1}{p}\left(\textstyle\int_0^1 r\varphi(r)dr\right)^{\frac{1}{p}-1} \textstyle\int_0^1 \psi_p(t)\left[\int_{t^2}^1 r^{p-3}\varphi(r)dr - \int_0^1 r\varphi(r)dr\right] dt.
\end{aligned}$$

Самим тим, неједнакост (3.3.2) важи, ако је

$$\int_0^1 \psi_p(t)\left[\int_{t^2}^1 r^{p-3}\varphi(r)dr - \int_0^1 r\varphi(r)dr\right] dt \leq 0, \tag{3.2.15}$$

или еквивалентно

$$\int_0^1 \psi_p(t)\int_{t^2}^1 r^{p-3}\chi(r)drdt+\varphi(0)\left[\int_0^1 \psi_p(t)\int_{t^2}^1 r^{p-3}drdt-\int_0^1 \psi_p(t)\int_0^1 rdrdt\right] \leq \int_0^1 \psi_p(t)\int_0^1 r\chi(r)drdt. \tag{3.2.16}$$

Подсетимо се да је $F_p(s)$ функција дефинисана у (3.2.5). Применом Леме 3.2.7, добијамо да је

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \psi_p(t)\int_{t^2}^1 r^{p-3}drdt-\int_0^1 \psi_p(t)\int_0^1 rdrdt\\
&=\int_0^1 \psi_p(t)\tfrac{1-t^{2(p-2)}}{p-2}dt-\tfrac{1}{2}\int_0^1 \psi_p(t)dt\\
&=\tfrac{1}{p-2}\left[\int_0^1 \psi_p(t)dt-\int_0^1 \psi_p(t)t^{2(p-2)}dt-\tfrac{p-2}{2}\int_0^1 \psi_p(t)dt\right]\\
&=\tfrac{1}{p-2}\left[\tfrac{4-p}{2}B\left(\tfrac{2}{p},1-\tfrac{2}{p}\right)-\int_0^1 \psi_p(t)t^{2(p-2)}dt\right]\\
&=\tfrac{F_p(0)}{p-2}\\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Дакле, доказ неједнакости (3.2.16), редукујемо на доказ неједнакости

$$\int_0^1 \psi_p(t)\int_{t^2}^1 r^{p-3}\chi(r)drdt \leq \int_0^1 \psi_p(t)\int_0^1 r\chi(r)drdt. \tag{3.2.17}$$

Користећи Фубинијеву теорему, налазимо да је

$$\begin{aligned}
\int_{t^2}^1 r^{p-3}\chi(r)dr &= \int_{t^2}^1 r^{p-3}\int_0^r \chi'(s)dsdr\\
&= \int_0^1 \chi'(s)\int_{\max\{s,t^2\}}^1 r^{p-3}drds\\
&= \int_0^1 \chi'(s)\tfrac{1-\max\left\{s,t^2\right\}^{p-2}}{p-2}ds,
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r\chi(r)dr &= \int_0^1 r\int_0^r \chi'(s)dsdr\\
&= \int_0^1 \chi'(s)\int_s^1 rdrds\\
&= \int_0^1 \tfrac{1-s^2}{2}\chi'(s)ds.
\end{aligned}$$

Према томе, уместо (3.2.17), довољно је доказати да важи

$$\int_0^1 \frac{\chi'(s)}{p-2}\int_0^1 \psi_p(t)\left[1-\max\left\{s,t^2\right\}^{p-2}\right]dtds \leq \int_0^1 \psi_p(t)dt\int_0^1 \frac{1-s^2}{2}\chi'(s)ds,$$

или еквивалентно

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \tfrac{\chi'(s)}{p-2}\left[\left(\tfrac{4-p}{2}+\tfrac{p-2}{2}s^2\right)B\left(\tfrac{2}{p},1-\tfrac{2}{p}\right)-\int_0^1 \psi_p(t)\max\left\{s,t^2\right\}^{p-2}dt\right]ds\\
&=\int_0^1 \tfrac{\chi'(s)}{p-2}F_p(\sqrt{s})ds\\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Међутим, претходна неједнакост је тачна, јер је $\chi'(s)\geq 0$ за све $s\in(0,1)$ и $F_p(\sqrt{s})\leq 0$ за све $s\in(0,1)$, на основу Леме 3.2.7. Тиме је доказ теореме завршен. ■

Последица 3.2.10 *Нека је $2 < p < \infty$. Тада норма оператора Хилбертове матрице H на Бергмановом простору A^p задовољава*

$$\|H\|_{A^p \to A^p} \leq \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{p}}.$$

Доказ. Тврђење следи на основу Теореме 3.2.1 и Теореме 3.2.9. ∎

3.2.3 Доње ограничење за $\|H\|_{A^p \to A^p}$ када је $2 < p < \infty$

За одговарајућу оцену одоздо оператора Хилбертове матрице H на Бергмановим просторима A^p када је $2 < p < \infty$, користићемо хипергеометријске функције (видети одговарајућу секцију у уводној глави за потребна тврђења и ознаке које се односе на хипергеометријске функције). Наиме, пратећи рад [5], дајемо оригиналан доказ неједнакости $\|H\|_{A^p \to A^p} \geq \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{p}}$ у случају када је $2 < p < \infty$. За нешто другачији приступ и првобитан доказ претходне неједнакости, који је нешто компликованији од доле наведеног доказа и захтева примену неких других техника, видети [14].

Теорема 3.2.11 ([14, 31]) *Нека је $2 < p < \infty$. Тада за норму оператора Хилбертове матрице H на Бергмановом простору A^p важи*

$$\|H\|_{A^p \to A^p} \geq \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{p}}.$$

Доказ. Нека је $1 < \gamma < 2 < p$ и

$$f_\gamma(z) = (1-z)^{-\frac{\gamma}{p}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k + \frac{\gamma}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right)} \frac{z^k}{k!},$$

за $z \in \mathbb{D}$. Тада, користећи хипергеометријске функције, након једноставног рачуна, добијамо да је

$$\|f_\gamma\|_{A^p}^p = \int_{\mathbb{D}} (1-z)^{-\frac{\gamma}{2}} (1-\overline{z})^{-\frac{\gamma}{2}} \, dA(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2\left(k+\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma(k+2)} \frac{1}{k!} = F\left(\frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma}{2}, 2; 1\right).$$

На основу Стирлингове формуле, следи да је

$$\frac{\Gamma^2\left(k+\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma(k+2)} \frac{1}{k!} \sim \frac{1}{(k+1)^{3-\gamma}}, \ k \to \infty.$$

Стога важи $\|f_\gamma\|_{A^p} < \infty$, јер је $3 - \gamma > 1 \Leftrightarrow \gamma < 2$ и важи $\lim\limits_{\gamma \to 2} \|f_\gamma\|_{A^p} = \infty$. Користећи интегралну репрезентацију (2.1.1) (која важи и у Бергмановим просторима), добијамо да важи

$$H f_\gamma(z) = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{\frac{\gamma}{p}}(1-tz)} = B\left(1, 1-\frac{\gamma}{p}\right) F\left(1, 1, 2-\frac{\gamma}{p}; z\right).$$

Према томе,

$$H f_\gamma(z) = \Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right) \Gamma\left(1-\frac{\gamma}{p}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(k+1)}{\Gamma\left(k+2-\frac{\gamma}{p}\right)\Gamma\left(k+\frac{\gamma}{p}\right)} \frac{\Gamma\left(k+\frac{\gamma}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right)} \frac{z^k}{k!}.$$

Како је
$$\frac{\Gamma^2(k+1)}{\Gamma\left(k+2-\frac{\gamma}{p}\right)\Gamma\left(k+\frac{\gamma}{p}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{k+1}\right),$$
са униформном константом за $0 < \frac{\gamma}{p} < 1$, добијамо
$$Hf_\gamma(z) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi\gamma}{p}}\left(f_\gamma(z) + g_\gamma(z)\right),$$
за све $z \in \mathbb{D}$, при чему је
$$\|g_\gamma\|_\infty \leq \frac{C}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(k+\frac{\gamma}{p}\right)}{(k+1)!} \leq C_p < \infty,$$
где, користећи $\frac{1}{p} < \frac{\gamma}{p} < \frac{2}{p} < 1$, имамо константу која зависи само од p. Самим тим, налазимо да је
$$\sup_{1<\gamma<2}\|g_\gamma\|_{A^p} \leq C_p.$$
Дакле, важи
$$\|H\|_{A^p\to A^p} \geq \frac{\|Hf_\gamma\|_{A^p}}{\|f_\gamma\|_{A^p}} \geq \frac{\pi}{\sin\frac{\pi\gamma}{p}}\frac{\|f_\gamma\|_{A^p} - \|g_\gamma\|_{A^p}}{\|f_\gamma\|_{A^p}}.$$
Уколико пустимо да $\gamma \to 2$, добијамо
$$\|H\|_{A^p\to A^p} \geq \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}},$$
и тиме је доказ завршен. ■

На крају, применом претходно добијених резултата налазимо норму оператора Хилбертове матрице H на Бергмановим просторима A^p када је $2 < p < \infty$.

Последица 3.2.12 *Нека је $2 < p < \infty$. Тада норма оператора Хилбертове матрице H на Бергмановом простору A^p задовољава*
$$\|H\|_{A^p\to A^p} = \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{p}}.$$

Доказ. На основу Последице 3.2.10 и претходне Теореме 3.2.11 долазимо до траженог резултата. ■

3.3 Хилбертова матрица на тежинским Бергмановим просторима $A^{p,\alpha}$

Нешто касније, у петој глави *Хилбертова матрица на просторима Бергмановог типа* показаћемо да за оператор Хилбертове матрице H који дејствује на тежинским Бергмановим просторима, важи

$$\text{оператор } H : A^{p,\alpha} \to A^{p,\alpha} \text{ је ограничен ако и само ако је } 1 < \alpha + 2 < p.$$

Циљ овог поглавља јесте оцењивање норме $\|H\|_{A^{p,\alpha}\to A^{p,\alpha}}$. Као што је и очекивано, ситуација је нешто компликованија у односу на класичне Бергманове просторе (код којих је $\alpha=0$). Резултати овог поглавља су преузети из рада [33] аутора овог текста. Напоменимо, да се у овом раду први пут разматра норма Хилбертове матрице на тежинским Бергмановим просторима код којих је $\alpha\neq 0$ и осим тога, добијена је тачна норма у случају када је $\alpha\geq 0$ и $p\geq 2(\alpha+2)$, док су у осталим случајевима добијени парцијални резултати. Слично као код класичних Бергманових простора, показујемо да важи следећа теорема, у којој користећи хипергеометријске функције, налазимо одговарајућу оцену одоздо за норму оператора Хилбертове матрице на тежинским Бергмановим просторима.

Теорема 3.3.1 ([33]) *Нека је $1<\alpha+2<p$. Тада за оператор Хилбертове матрице H, који дејствује на тежинском Бергмановом простору $A^{p,\alpha}$, важи*

$$\|H\|_{A^{p,\alpha}\to A^{p,\alpha}}\geq \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}.$$

Доказ. У доказу (слично као код класичних Бергманових простора, између осталог, користимо хипергеометријске функције и интегралну репрезентацију оператора H). Наиме, нека је $1<\gamma<\alpha+2<p$ и $f_\gamma(z)=(1-z)^{-\frac{\gamma}{p}}$ за све $z\in\mathbb{D}$. Након једноставног рачуна, добијамо да важи

$$\|f_\gamma\|^p_{A^{p,\alpha}}=F\left(\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2},\alpha+2;1\right).$$

На основу Стирлингове формуле, следи

$$\frac{\Gamma^2\left(k+\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma(k+\alpha+2)}\sim\frac{k!}{(k+1)^{\alpha+3-\gamma}}\ \text{ када }\ k\to\infty.$$

Према томе, важи $\|f_\gamma\|_{A^{p,\alpha}}<\infty$, јер је $\alpha+3-\gamma>1\Leftrightarrow\gamma<\alpha+2$ и такође, важи $\lim\limits_{\gamma\to\alpha+2}\|f_\gamma\|_{A^{p,\alpha}}=\infty$. Користећи интегралне репрезенатције оператора Хилбертове матрице и хипергеометријских функција, налазимо да је

$$Hf_\gamma(z)=\int_0^1\frac{dt}{(1-t)^{\frac{\gamma}{p}}(1-tz)}=B\left(1,1-\frac{\gamma}{p}\right)F\left(1,1,2-\frac{\gamma}{p};z\right).$$

Следи,

$$Hf_\gamma(z)=\Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right)\Gamma\left(1-\frac{\gamma}{p}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2(k+1)}{\Gamma\left(k+2-\frac{\gamma}{p}\right)\Gamma\left(k+\frac{\gamma}{p}\right)}\frac{\Gamma\left(k+\frac{\gamma}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{p}\right)}\frac{z^k}{k!}.$$

Како је

$$\frac{\Gamma^2(k+1)}{\Gamma\left(k+2-\frac{\gamma}{p}\right)\Gamma\left(k+\frac{\gamma}{p}\right)}=1+O\left(\frac{1}{k+1}\right),$$

добијамо

$$Hf_\gamma(z)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi\gamma}{p}}\left(f_\gamma(z)+g_\gamma(z)\right),$$

где је

$$\sup_{1<\gamma<\alpha+2}\|g_\gamma\|_\infty\leq C_{p,\alpha}<\infty,$$

и самим тим је

$$\sup_{1<\gamma<\alpha+2} \|g_\gamma\|_{p,\alpha} \leq C_{p,\alpha}.$$

Према томе, закључујемо да важи

$$\|H\|_{A^{p,\alpha}\to A^{p,\alpha}} \geq \frac{\|Hf_\gamma\|_{A^{p,\alpha}}}{\|f_\gamma\|_{A^{p,\alpha}}} \geq \frac{\pi}{\sin\frac{\pi\gamma}{p}} \frac{\|f_\gamma\|_{A^{p,\alpha}} - \|g_\gamma\|_{A^{p,\alpha}}}{\|f_\gamma\|_{A^{p,\alpha}}}.$$

Коначно, уколико пустимо да $\gamma \to \alpha+2$, добијамо

$$\|H\|_{A^{p,\alpha}\to A^{p,\alpha}} \geq \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}},$$

и тиме је доказ завршен. ■

Ситуација је нешто сложенија уколико се норма $\|H\|_{A^{p,\alpha}\to A^{p,\alpha}}$ оцењује одозго. Тада, у случају када је $\alpha \geq 0$, важи следећа теорема.

Теорема 3.3.2 ([33]) *Нека је $\alpha \geq 0$ и $p > \alpha+2$. Тада*

(i) *Ако је $p \geq 2(\alpha+2)$, важи*

$$\|H\|_{A^{p,\alpha}\to A^{p,\alpha}} \leq \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}};$$

(ii) *Ако је $2\alpha+3 \leq p < 2(\alpha+2)$, важи*

$$\|H\|_{A^{p,\alpha}\to A^{p,\alpha}} \leq 2^{\frac{\alpha+1}{p}} \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}};$$

(iii) *Ако је $\alpha+2 < p < 2\alpha+3$, важи*

$$\|H\|_{A^{p,\alpha}\to A^{p,\alpha}} \leq \left(1+2^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1}\right) \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}.$$

Доказ. Користићемо следећу интегралну репрезентацију оператора H, коју смо раније изводили (видети представљање (3.2.1)),

$$Hf(z) = \int_0^1 T_t f(z)dt, \quad z \in \mathbb{D},$$

при чему је $T_t f(z) = \omega_t(z) f(\phi_t(z))$, $\omega_t(z) = \frac{1}{1-(1-t)z}$ и $\phi_t(z) = \frac{t}{1-(1-t)z}$. Користећи интегралну неједнакост Минковског, добијамо

$$\begin{aligned} \|Hf\|_{A^{p,\alpha}} &= \left((\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} |Hf(z)|^p \left(1-|z|^2\right)^\alpha dA(z)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\alpha+1)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{D}} \left|\int_0^1 T_t f(z) \left(1-|z|^2\right)^{\frac{\alpha}{p}} dt\right|^p dA(z)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (\alpha+1)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{D}} |T_t f(z)|^p \left(1-|z|^2\right)^\alpha dA(z)\right)^{\frac{1}{p}} dt \\ &= \int_0^1 \|T_t f\|_{A^{p,\alpha}} dt. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Увођењем билинеарне смене координата $w = \phi_t(z)$, где је $z \in \mathbb{D}$, налазимо

$$
\begin{aligned}
\|T_t f\|^p_{A^{p,\alpha}} &= (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} |\omega_t(z)|^p |f(\phi_t(z))|^p \left(1-|z|^2\right)^\alpha dA(z)\\
&= (\alpha+1)\int_{\phi_t(\mathbb{D})} \left|\omega_t(\phi_t^{-1}(w))\right|^p \frac{|f(w)|^p}{\left|\phi_t'(\phi_t^{-1}(w))\right|^2} \left(1-|\phi_t^{-1}(w)|^2\right)^\alpha dA(w)\\
&= \frac{t^{2-p}}{(1-t)^2}(\alpha+1)\int_{\phi_t(\mathbb{D})} |w|^{p-4}|f(w)|^p \left(1-\left|\frac{w-t}{(1-t)w}\right|^2\right)^\alpha dA(w).
\end{aligned}
$$

Према томе, важи

$$
\|T_t f\|_{A^{p,\alpha}} = \frac{t^{\frac{2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{2}{p}}}\left((\alpha+1)\int_{D_t} |w|^{p-4}|f(w)|^p \left(1-\left|\frac{w-t}{(1-t)w}\right|^2\right)^\alpha dA(w)\right)^{\frac{1}{p}}.
$$

где је $D_t = \phi_t(\mathbb{D})$. Тада је $D_t = D\left(\frac{1}{2-t}, \frac{1-t}{2-t}\right)$, где је $D\left(\frac{1}{2-t}, \frac{1-t}{2-t}\right)$ диск полупречника $\frac{1-t}{2-t}$ са центром у тачки $\frac{1}{2-t}$ комплексне равни. Са друге стране, важи

$$
\begin{aligned}
1-\left|\frac{w-t}{(1-t)w}\right|^2 &= \frac{(1-t)^2|w|^2-|w-t|^2}{(1-t)^2|w|^2}\\
&= \frac{2t\operatorname{Re} w - t^2 - t(2-t)|w|^2}{(1-t)^2|w|^2}\\
&= \frac{t}{1-t}\cdot\frac{2\operatorname{Re} w - t-(2-t)|w|^2}{(1-t)|w|^2}.
\end{aligned}
$$

Следи,

$$
\|T_t f\|_{A^{p,\alpha}} = \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}}\left((\alpha+1)\int_{D_t} |w|^{p-4}|f(w)|^p g_t(w)^\alpha dA(w)\right)^{\frac{1}{p}},
$$

где је

$$
g_t(w) = \frac{2\operatorname{Re} w - t-(2-t)|w|^2}{(1-t)|w|^2} \ \text{ за } \ w \in D_t.
$$

Користећи неједнакост

$$
\begin{aligned}
g_t(w) &\le \frac{2|w|-t-(2-t)|w|^2}{(1-t)|w|^2}\\
&\le \frac{1+|w|^2-t-(2-t)|w|^2}{(1-t)|w|^2}\\
&= \frac{1-|w|^2}{|w|^2}
\end{aligned}
$$

и претпоставку да је $\alpha \ge 0$, добијамо

$$
g_t(w)^\alpha \le |w|^{-2\alpha}\left(1-|w|^2\right)^\alpha.
$$

Према томе, важи

$$
\|T_t f\|_{A^{p,\alpha}} \le \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}}\left((\alpha+1)\int_{D_t} |w|^{p-2(\alpha+2)}|f(w)|^p \left(1-|w|^2\right)^\alpha dA(w)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.3.2}
$$

***Случај* (i).** $p \geq 2(\alpha+2)$. Користећи (3.3.2) и чињеницу да је у овом случају $|w|^{p-2(\alpha+2)} \leq 1$ за све $w \in D_t \subset \mathbb{D}$, закључујемо да је

$$\begin{aligned}
\|T_t f\|_{A^{p,\alpha}} &\leq \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \left((\alpha+1)\int_{D_t} |f(w)|^p \left(1-|w|^2\right)^\alpha dA(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \left((\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p \left(1-|w|^2\right)^\alpha dA(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \|f\|_{A^{p,\alpha}}.
\end{aligned}$$

На основу (3.3.1), следи

$$\begin{aligned}
\|Hf\|_{A^{p,\alpha}} &\leq \int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} dt \cdot \|f\|_{A^{p,\alpha}} \\
&= B\left(\frac{\alpha+2}{p}, 1-\frac{\alpha+2}{p}\right) \|f\|_{A^{p,\alpha}} \\
&= \Gamma\left(\frac{\alpha+2}{p}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha+2}{p}\right) \|f\|_{A^{p,\alpha}} \\
&= \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}} \|f\|_{A^{p,\alpha}}.
\end{aligned}$$

Према томе, у овом случају, добијамо да важи

$$\|H\|_{A^{p,\alpha}\to A^{p,\alpha}} \leq \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}.$$

***Случај* (ii).** $2\alpha+3 \leq p < 2(\alpha+2)$. У овом случају важи $|w|^{p-2(\alpha+2)} \leq \frac{1}{|w|}$ за све $w \in D_t \subset \mathbb{D}$. Тада, користећи (3.3.2), налазимо да је

$$\|T_t f\|_{A^{p,\alpha}} \leq \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \left((\alpha+1)\int_{D_t} \frac{1}{|w|}|f(w)|^p \left(1-|w|^2\right)^\alpha dA(w)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Након тога, добијамо

$$\begin{aligned}
\int_{D_t} \frac{1}{|w|}|f(w)|^p \left(1-|w|^2\right)^\alpha dA(w) &\leq \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|w|}|f(w)|^p \left(1-|w|^2\right)^\alpha dA(w) \\
&= 2\int_0^1 \left(1-r^2\right)^\alpha M_p^p(r,f)dr \\
&\leq 2^{\alpha+1}\int_0^1 (1-r)^\alpha M_p^p(r,f)dr \\
&= 2^{\alpha+2}\int_0^1 r(1-r^2)^\alpha M_p^p(r^2,f)dr \\
&\leq 2^{\alpha+2}\int_0^1 r(1-r^2)^\alpha M_p^p(r,f)dr \\
&= 2^{\alpha+1}\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p \left(1-|w|^2\right)^\alpha dA(w).
\end{aligned}$$

У претходном смо користили чињеницу да је $M_p(\cdot, f)$ растућа функција. Тада је

$$\begin{aligned} \|T_t f\|_{A^{p,\alpha}} &\leq 2^{\frac{\alpha+1}{p}} \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \left((\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p \left(1-|w|^2\right)^{\alpha} dA(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{\frac{\alpha+1}{p}} \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \|f\|_{A^{p,\alpha}}. \end{aligned}$$

На основу (3.3.1), добијамо

$$\|Hf\|_{A^{p,\alpha}} \leq 2^{\frac{\alpha+1}{p}} \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}} \|f\|_{A^{p,\alpha}}.$$

Односно, важи

$$\|H\|_{A^{p,\alpha}\to A^{p,\alpha}} \leq 2^{\frac{\alpha+1}{p}} \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}.$$

***Случај* (iii).** $\alpha+2 < p < 2\alpha+3$. Директно се проверава да важи $|w| \geq \frac{t}{2-t}$ за све $w \in D_t$. Тада, у овом случају, налазимо да је $|w|^{p-2(\alpha+2)} \leq \left(\frac{2-t}{t}\right)^{2(\alpha+2)-p}$ за све $w \in D_t \subset \mathbb{D}$. Даље, користећи (3.3.2), добијамо

$$\begin{aligned} \|T_t f\|_{A^{p,\alpha}} &\leq \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \left(\frac{2-t}{t}\right)^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1} \left((\alpha+1)\int_{D_t} |f(w)|^p (1-|w|^2)^{\alpha} dA(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{(2-t)^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1}}{t^{\frac{\alpha+2}{p}}(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \cdot \|f\|_{A^{p,\alpha}}. \end{aligned}$$

Са друге стране, важи

$$\begin{aligned} \frac{(2-t)^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1}}{t^{\frac{\alpha+2}{p}}(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} &= \frac{(t+2(1-t))^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1}}{t^{\frac{\alpha+2}{p}}(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \\ &\leq \frac{t^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1} + 2^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1}(1-t)^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1}}{t^{\frac{\alpha+2}{p}}(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \\ &= \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} + 2^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1} \frac{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{t^{\frac{\alpha+2}{p}}}. \end{aligned}$$

Овде смо искористили неједнакост $(x+y)^{\beta} \leq x^{\beta} + y^{\beta}$ која важи за све $x, y \geq 0$ и $\beta \in (0,1)$. Самим тим је

$$\|T_t f\|_{A^{p,\alpha}} \leq \left[\frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} + 2^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1} \frac{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{t^{\frac{\alpha+2}{p}}}\right] \|f\|_{A^{p,\alpha}},$$

и користећи (3.3.1), добијамо

$$\|Hf\|_{A^{p,\alpha}} \leq \left(1 + 2^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1}\right) \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}} \|f\|_{A^{p,\alpha}},$$

јер је

$$\int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} dt = \int_0^1 \frac{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{t^{\frac{\alpha+2}{p}}} dt = \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}.$$

Коначно, следи да је

$$\|H\|_{A^{p,\alpha}\to A^{p,\alpha}} \leq \left(1 + 2^{\frac{2(\alpha+2)}{p}-1}\right) \frac{\pi}{\sin \frac{(\alpha+2)\pi}{p}}.$$

Тиме је доказ завршен. ■

Коначно, на основу претходних резултата долазимо да тачне норме оператора Хилбертове матрице H на тежинским Бергмановим просторима $A^{p,\alpha}$, у случају када је $\alpha \geq 0$ и $p \geq 2(\alpha+2)$. Наиме, имамо следећи резултат.

Последица 3.3.3 *Нека је $\alpha \geq 0$ и $p \geq 2(\alpha+2)$. Тада за оператор Хилбертове матрице H који дејствује на тежинском Бергмановом простору $A^{p,\alpha}$, важи*

$$\|H\|_{A^{p,\alpha}\to A^{p,\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \frac{(\alpha+2)\pi}{p}}.$$

Доказ. Тражени закључак директно следи применом претходних резултата, односно, применом Теореме 3.3.1 и Теореме 3.3.2 (i). ■

Осим тога, природно је претпоставити да важи

$$\|H\|_{A^{p,\alpha}\to A^{p,\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \frac{(\alpha+2)\pi}{p}},$$

у општем случају када је $1 < \alpha + 2 < p$. Међутим, разрешавање тачности једне такве претпоставке захтева нека додатна разматрања.

У наредној глави испитаћемо ограниченост оператора Хилбертове матрице на просторима мешовите норме $H_{\nu}^{p,q,\alpha}$. Између осталог, као једну од последица, имаћемо и претходно најављени резултат који каже да је оператор H ограничен на простору $A^{p,\alpha}$ ако и само ако важи $1 < \alpha + 2 < p$.

Глава 4

Хилбертова матрица на просторима Бергмановог типа

4.1 Ограниченост оператора H на $H_\nu^{p,q,\alpha}$ просторима

Циљ овог поглавља је испитивање ограничености оператора Хилбертове матрице H на просторима $H_\nu^{p,q,\alpha}$. Наиме, показаћемо да је оператор Хилбертове матрице H (као и одговарајући модификовани Хилбертов оператор $\widetilde{H}$) ограничен на простору $H_\nu^{p,q,\alpha}$ ако и само ако важи $0 < \kappa_{p,\alpha,\nu} = \nu - \alpha - \frac{1}{p} + 1 < 1$. Као последицу претходног резултата имаћемо да је оператор H, као и оператор $\widetilde{H}$, ограничен на тежинском Бергмановом простору $A^{p,\alpha}$ ако и само ако важи $1 < \alpha + 2 < p$ и ограничен на Дирихлеовом простору $\mathcal{D}_\alpha^p = A_1^{p,\alpha}$ ако и само ако је $\max\{-1, p-2\} < \alpha < 2p - 2$. Резултати из овог поглавља су публиковани у раду [30] (заједнички рад М. Јевтића и аутора овог текста). Осим тога, пре наведених резултата, постојали су само одређени парцијални резултати који се тичу када је оператор Хилбертове матрице H ограничен на $H_\nu^{p,q,\alpha}$ просторима. Наиме, Ланучa, Новак и Павловић (видети [38]) су показали да је оператор $H : H^{p,\infty,\alpha} \to H^{p,\infty,\alpha}$ ограничен ако и само ако важи $\alpha + \frac{1}{p} < 1$. Такође, у раду [19], аутора Галанопулоса, Гиреле, Пелаеза и Сискакиса су доказани само парцијални резултати који се тичу ограничености модификованог Хилбертовог оператора $\widetilde{H}$ на тежинским Бергмановим просторима $A^{p,\alpha}$, као и на Дирихлеовим просторима $\mathcal{D}_\alpha^p = A_1^{p,\alpha}$. Осим претходно наведених парцијалних резултата у овој области, као једна мотивација за доказивање претходно наведеног главног резултата који се односи на питање када је оператор H ограничен на просторима $H_\nu^{p,q,\alpha}$, послужио је и одговарајући резултат који се односи на Либерин оператор. Наиме, Либерин оператор јесте оператор дефинисан на следећи начин

$$\mathcal{L}f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k+1} z^n, \text{ за } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

У раду [29] (заједнички рад М. Јевтића и аутора овог текста) и у раду [50] (аутора М. Павловића) је показано да је Либерин оператор $\mathcal{L}$ ограничен на простору $H_\nu^{p,q,\alpha}$ ако и само ако важи $0 < \kappa_{p,\alpha,\nu}$ (за више информација о Либерином оператору видети одговарајућа поглавља у наставку која се на њега односе). Имајући у виду овај резултат, одговарајући резултат који се односи на ограниченост оператора Хилбертове матрице на $H_\nu^{p,q,\alpha}$ просторима јесте неочекиван. Међутим, резултат који се односи на ограниченост Либериног оператора послужио је као главна мотивација за извођење нашег резултата о ограничености оператора Хилбертове матрице на $H_\nu^{p,q,\alpha}$ просторима. Наш главни резултат овог поглавља јесте следећа теорема.

Теорема 4.1.1 ([30]) *Оператор Хилбертове матрице H је ограничен на простору $H_\nu^{p,q,\alpha}$ ако и само ако важи* $0 < \kappa_{p,\alpha,\nu} = \nu - \alpha - \frac{1}{p} + 1 < 1$.

Као директну последицу Теореме 4.1.1, имајући у виду да је $A^{p,\alpha} = H^{p,p,\frac{\alpha+1}{p}}$, налазимо да важи

$$H : A_\nu^{p,\alpha} \to A_\nu^{p,\alpha} \text{ ако и само ако } 0 < \nu - \frac{\alpha+2}{p} + 1 < 1.$$

Посебно, важи

$$H : A^{p,\alpha} \to A^{p,\alpha} \text{ ако и само ако } 1 < \alpha + 2 < p.$$

Дејство модификованог Хилбертовог оператора $\widetilde{H}$, дефинисаног са

$$\widetilde{H}f(z) = \int_0^1 \frac{|f(r)|}{1-rz}dr, \ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),$$

на просторима $A^{p,\alpha}$ и $A_1^{p,\alpha}$ (који се означава са $\mathcal{D}_\alpha^p$) је разматрано у [19]. Разматрањем доказа Теореме 4.1.1 закључићемо да заправо она остаје на снази и када се оператор Хилбертове матрице H замени са својом модификацијом $\widetilde{H}$, односно добићемо да важи следећа теорема.

Теорема 4.1.2 ([30]) *Модификовани Хилбертов оператор $\widetilde{H}$ је ограничен на $H_\nu^{p,q,\alpha}$ ако и само ако важи* $0 < \kappa_{p,\alpha,\nu} < 1$.

Приметимо да се сличан феномен јавља када се посматра оператор тежинске Бергманове пројекције. Оператор тежинске Бергманове пројекције је ограничен на простору $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ ако и само ако је његова модификована верзија ограничена на истом простору (видети [17, 23, 31, 65]).

У циљу доказивања Теореме 4.1.1, најпре наводимо неколико уводних резултата који ће бити потребни у извођењу доказа те теореме.

Уколико $f(z) = \sum_{n=0}^\infty \widehat{f}(n)z^n \in D^1\ell^1$, тада је $Hf \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. На основу Хардијеве неједнакости 1.2.2 важи $H^1 \subseteq D^1\ell^1$. Према томе, оператор Хилбертове матрице H је добро дефинисан на простору H^1, иако није ограничен на њему (он је ограничен на Хардијевом простору H^p само ако је $1 < p < \infty$, као што смо раније показивали). Стога, у наставку, најпре одређујемо индексе p, q, α, ν за које важи $H_\nu^{p,q,\alpha} \subseteq D^1\ell^1$. Прво, наводимо још неколико потребних појмова и резултата који се на њих односе.

Ако су X и Y простори низова, кажемо да је низ $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ множилац из простора X у простор Y и пишемо $\lambda \in (X, Y)$, ако за сваки низ $x = \{x_n\}_{n=0}^\infty$ важи $\lambda * x = \{\lambda_n x_n\}_{n=0}^\infty \in Y$.

Такође, биће нам потребни и генералисани простори низова $\ell(u, v)$. Наиме, низ комплексних бројева $a = \{a_n\}_{n=0}^\infty$ припада простору $\ell(u, v)$, где је $0 < u, v \leq \infty$, ако важи

$$\|a\|_{\ell(u,v)}^v = \|a\|_{u,v}^v = \sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{k \in I_n} |a_k|^u \right)^{\frac{v}{u}} < \infty,$$

где је $I_0 = \{0\}$ и $I_n = \{k \in \mathbb{N} : 2^{n-1} \leq k < 2^n\}$ за $n \geq 1$. У случајевима када u или v узимају вредност бесконачно, одговарајућу суму у претходно наведеном услову мењамо са супремумом. Осим тога користићемо и следећу нотацију. Заправо, нека је $0 < u \leq \infty$ и $0 < q \leq \infty$. Уколико је $q \leq u$, тада пишемо $q * u = \infty$, а уколико је $q > u$, тада је $\frac{1}{q*u} = \frac{1}{u} - \frac{1}{q}$. Требаће нам и следећа теорема из [31].

Теорема 4.1.3 ([31])
(а) *Ако је* $0 < p \le 1$, *тада важи* $(H^{p,q,\alpha}, \ell(u,v)) = D^{1-\frac{1}{p}-\alpha}\ell(u, q*v)$.
(б) *Ако је* $2 \le p \le \infty$, *тада важи* $(H^{p,q,\alpha}, \ell(u,v)) = D^{-\alpha}\ell(2*u, q*v)$.
(в) *Ако је* $1 < p < 2$, *тада важи* $D^{-\alpha}\ell(p'*u, q*v) \subseteq (H^{p,q,\alpha}, \ell(u,v)) \subseteq D^{-\alpha}\ell(2*u, q*v)$, *при чему је* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Користећи претходну теорему, у наредној теореми одређујемо индексе p, q, α, ν за које важи $H^{p,q,\alpha}_{\nu} \subseteq D^1\ell^1$. За више информација видети [29].

Теорема 4.1.4 ([29])
(1) *Нека је* $0 < p < 2$.
(1а) *Ако је* $0 < q \le 1$, *тада важи* $H^{p,q,\alpha}_{\nu} \subseteq D^1\ell^1$ *ако и само ако је* $\kappa_{p,\alpha,\nu} \ge 0$.
(1б) *Ако је* $1 < q \le \infty$, *тада важи* $H^{p,q,\alpha}_{\nu} \subseteq D^1\ell^1$ *ако и само ако је* $\kappa_{p,\alpha,\nu} > 0$.
(2) *Нека је* $2 \le p \le \infty$.
(2а) *Ако је* $0 < q \le 1$, *тада важи* $H^{p,q,\alpha}_{\nu} \subseteq D^1\ell^1$ *ако и само ако је* $\nu - \alpha \ge -\frac{1}{2}$.
(2б) *Ако је* $1 < q \le \infty$, *тада важи* $H^{p,q,\alpha}_{\nu} \subseteq D^1\ell^1$ *ако и само ако је* $\nu - \alpha > -\frac{1}{2}$.

Доказ. **Случај (1).** У овом случају најпре претпоставимо да важи $0 < p \le 1$. Нека је $f(z) = \frac{1}{1-z}$ за све $z \in \mathbb{D}$. Тада користећи Теорему 4.1.4 налазимо да је

$$\begin{aligned} H^{p,q,\alpha}_{\nu} \subseteq D^1\ell^1 \quad &\Leftrightarrow \quad f \in (H^{p,q,\alpha}_{\nu}, D^1\ell^1) \\ &\Leftrightarrow \quad f \in (D^{-\nu}H^{p,q,\alpha}, D^1\ell^1) \\ &\Leftrightarrow \quad f \in D^{\nu+1}(H^{p,q,\alpha}, \ell^1) \\ &\Leftrightarrow \quad f \in D^{\nu+1}(H^{p,q,\alpha}, \ell(1,1)) \\ &\Leftrightarrow \quad f \in D^{\nu+1+1-\frac{1}{p}-\alpha}\ell(1, q*1) \\ &\Leftrightarrow \quad D^{\alpha+\frac{1}{p}-2-\nu} f \in \ell(1, q*1). \end{aligned}$$

Уколико важи $0 < q \le 1$, тада је $q*1 = \infty$. На основу претходног, следи да је

$$\begin{aligned} H^{p,q,\alpha}_{\nu} \subseteq D^1\ell^1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{(n+1)^{\alpha+\frac{1}{p}-2-\nu}\right\}_{n=0}^{\infty} \in \ell(1,\infty) \\ &\Leftrightarrow \quad \sup_{n\ge 0} \sum_{k\in I_n} (k+1)^{\alpha+\frac{1}{p}-2-\nu} < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad \sup_{n\ge 0} 2^{n\left(\alpha+\frac{1}{p}-1-\nu\right)} < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha + \frac{1}{p} - 1 - \nu \le 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \kappa_{p,\alpha,\nu} \ge 0, \end{aligned}$$

односно важи $H^{p,q,\alpha}_{\nu} \subseteq D^1\ell^1 \Leftrightarrow \kappa_{p,\alpha,\nu} \ge 0$, што је и заправо и требало показати.
Са друге стране, уколико је $1 < q \le \infty$, тада важи

$$q*1 = q',$$

при чему је $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$. Добијамо

$$\begin{aligned}
H_\nu^{p,q,\alpha}\subseteq D^1\ell^1 \quad &\Leftrightarrow \quad \Big\{(n+1)^{\alpha+\frac{1}{p}-2-\nu}\Big\}_{n=0}^{\infty}\in \ell(1,q')\\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k\in I_n}(k+1)^{\alpha+\frac{1}{p}-2-\nu}\right)^{q'}<\infty\\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}2^{n\left(\alpha+\frac{1}{p}-1-\nu\right)q'}<\infty\\
&\Leftrightarrow \quad \alpha+\frac{1}{p}-1-\nu<0\\
&\Leftrightarrow \quad \kappa_{p,\alpha,\nu}>0.
\end{aligned}$$

Даље, размотримо случај када је $1<p<2$. Опет нека је $f(z)=\frac{1}{1-z}$ за све $z\in\mathbb{D}$. Тада важи $H_\nu^{p,q,\alpha}\subseteq D^1\ell^1$ ако и само ако је $f\in D^{\nu+1}(H^{p,q,\alpha},\ell^1)$. На основу Теореме 4.1.4 важи $D^{\nu+1-\alpha}\ell(p'*1,q*1)\subseteq D^{\nu+1}(H^{p,q,\alpha},\ell^1)$. Према томе, да би показали да важи $H_\nu^{p,q,\alpha}\subseteq D^1\ell^1$, довољно је показати да $f\in D^{\nu+1-\alpha}\ell(p'*1,q*1)$. Приметимо да је $p'*1=p$.

Ако је $0<q\le 1$, тада важи $q*1=\infty$. Добијамо

$$\begin{aligned}
f\in D^{\nu+1-\alpha}\ell(p,\infty) \quad &\Leftrightarrow \quad \big\{(n+1)^{\alpha-\nu-1}\big\}_{n=0}^{\infty}\in\ell(p,\infty)\\
&\Leftrightarrow \quad \sup_{n\ge 0}\left(\sum_{k\in I_n}(k+1)^{(\alpha-\nu-1)p}\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\\
&\Leftrightarrow \quad \sup_{n\ge 0}2^{n((\alpha-\nu-1)p+1)\frac{1}{p}}<\infty\\
&\Leftrightarrow \quad \sup_{n\ge 0}2^{n\left(\alpha-\nu-1+\frac{1}{p}\right)}<\infty\\
&\Leftrightarrow \quad \alpha-\nu-1+\frac{1}{p}\le 0\\
&\Leftrightarrow \quad \kappa_{p,\alpha,\nu}\ge 0,
\end{aligned}$$

што је и требало показати. Са друге стране, ако је $1<q\le\infty$, тада имамо $q*1=q'$. Следи да је

$$\begin{aligned}
f\in D^{\nu+1-\alpha}\ell(p,\infty) \quad &\Leftrightarrow \quad \big\{(n+1)^{\alpha-\nu-1}\big\}_{n=0}^{\infty}\in\ell(p,q')\\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k\in I_n}(k+1)^{(\alpha-\nu-1)p}\right)^{\frac{q'}{p}}<\infty\\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}2^{n((\alpha-\nu-1)p+1)\frac{q'}{p}}<\infty\\
&\Leftrightarrow \quad \sup_{n\ge 0}2^{n\left(\alpha-\nu-1+\frac{1}{p}\right)q'}<\infty\\
&\Leftrightarrow \quad \alpha-\nu-1+\frac{1}{p}<0\\
&\Leftrightarrow \quad \kappa_{p,\alpha,\nu}>0.
\end{aligned}$$

Случај (2). У овом случају имамо да је $2\le p\le\infty$ и нека је $f(z)=\frac{1}{1-z}$ за све $z\in\mathbb{D}$.

Тада, на основу Теореме 4.1.4, важи

$$\begin{aligned} H_\nu^{p,q,\alpha} \subseteq D^1\ell^1 \quad &\Leftrightarrow \quad f \in (H_\nu^{p,q,\alpha}, D^1\ell^1) \\ &\Leftrightarrow \quad f \in (D^{-\nu}H^{p,q,\alpha}, D^1\ell^1) \\ &\Leftrightarrow \quad f \in D^{\nu+1}(H^{p,q,\alpha}, \ell^1) \\ &\Leftrightarrow \quad f \in D^{\nu+1-\alpha}\ell(2*1, q*1) \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{(n+1)^{\alpha-\nu-1}\right\}_{n=0}^{\infty} \in \ell(2, q*1). \end{aligned}$$

Уколико је $0 < q \leq 1$, тада је $q * 1 = \infty$ и добијамо

$$\begin{aligned} H_\nu^{p,q,\alpha} \subseteq D^1\ell^1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{(n+1)^{\alpha-\nu-1}\right\}_{n=0}^{\infty} \in \ell(2, \infty) \\ &\Leftrightarrow \quad \sup_{n\geq 0}\left(\sum_{k\in I_n}(k+1)^{2(\alpha-\nu-1)}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad \sup_{n\geq 0} 2^{n(2(\alpha-\nu-1)+1)\frac{1}{2}} < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad \sup_{n\geq 0} 2^{n\left(\alpha-\nu-\frac{1}{2}\right)} < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha-\nu-\tfrac{1}{2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \nu-\alpha \geq -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Са друге стране, ако је $1 < q \leq \infty$, тада важи $q * 1 = q'$ и самим тим је

$$\begin{aligned} H_\nu^{p,q,\alpha} \subseteq D^1\ell^1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{(n+1)^{\alpha-\nu-1}\right\}_{n=0}^{\infty} \in \ell(2, q') \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k\in I_n}(k+1)^{2(\alpha-\nu-1)}\right)^{\frac{q'}{2}} < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(2(\alpha-\nu-1)+1)\frac{q'}{2}} < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n\left(\alpha-\nu-\frac{1}{2}\right)q'} < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha-\nu-\tfrac{1}{2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \nu-\alpha > -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Тиме је доказ теореме завршен. ■

Као последицу претходне теореме, налазимо да ако је $0 < p \leq 2$ и $\kappa_{p,\alpha,\nu} > 0$, тада важи

$$H : H_\nu^{p,q,\alpha} \to \mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

Такође, ако је $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ и $\int_0^1 |f(r)|dr < \infty$, тада је

$$Hf(z) = \int_0^1 \frac{f(r)}{1-rz}dr \in \mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

Осим тога, користићемо чињеницу да ако је $s - t = \alpha - \beta$ и $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, тада важи

$$\|D^s f\|_{p,q,\alpha} \asymp \|D^t f\|_{p,q,\beta}, \tag{4.1.1}$$

и чињеницу да ако је $0 < p < q \leq \infty$ и $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, следи

$$M_q(r, f) \leq \frac{C\|f\|_p}{(1-r)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}.$$

За доказ претходне неједнакости видети [16, Теорема 5.9].

Са друге стране нека је сада $2 < p \leq \infty$, $\kappa_{p,\alpha,\nu} > 0$ и $f \in H_\nu^{p,\infty,\alpha}$. Користећи једнакост (4.1.1), налазимо да је

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(r)|dr &\leq \int_0^1 M_\infty(r, f)dr \\
&\asymp \int_0^1 M_\infty(r, D^\nu f)(1-r)^\nu dr \\
&\lesssim \int_0^1 M_p(r, D^\nu f)(1-r)^{\nu-\frac{1}{p}} dr \\
&\lesssim \int_0^1 (1-r)^{\nu-\frac{1}{p}-\alpha} dr \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

јер је $\nu - \alpha - \frac{1}{p} > -1$. Према томе, важи $H : H_\nu^{p,\infty,\alpha} \to \mathcal{H}(\mathbb{D})$, ако је $2 < p \leq \infty$ и $\kappa_{p,\alpha,\nu} > 0$ и самим тим је $H : H_\nu^{p,q,\alpha} \to \mathcal{H}(\mathbb{D})$, јер је $H_\nu^{p,q,\alpha} \subseteq H_\nu^{p,\infty,\alpha}$. Приметимо да ако је $2 < p \leq \infty$ и $\nu - \alpha + \frac{1}{2} < 0 < \nu - \alpha - \frac{1}{p} + 1$, тада $H_\nu^{p,q,\alpha}$ није подскуп од $D^1\ell^1$, али ипак важи $H : H_\nu^{p,q,\alpha} \to \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

У разматрањима која следе користимо и низ полинома $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ конструисан на следећи начин (видети [31, 47]):
Нека је ω функција класе C^∞ на $\mathbb{R}$ таква да је
$\omega(t) = 1$ за $t \leq 1$;
$\omega(t) = 0$ за $t \geq 2$;
ω је опадајућа и позитивна на интервалу (1,2).
Нека је $\varphi(t) = \omega\left(\frac{t}{2}\right) - \omega(t)$ и $V_0(z) = 1 + z$ и за $n \geq 1$, дефинишимо

$$V_n(z) = \sum_{k=2^{n-1}}^{2^{n+1}} \varphi\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) z^k.$$

Претходно конструисани полиноми имају следећа својства

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (V_n * g)(z) \text{ за } g \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),$$

$$\|V_n * g\|_p \leq C_p \|g\|_p \text{ за } g \in H^p,\ p > 0,$$

$$\|V_n\|_p \asymp 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)},\ 0 < p \leq \infty.$$

Такође, биће нам потребно следећих неколико познатих лема.

Лема 4.1.5 ([31, 47]) *Нека је $0 < p, q \leq \infty$, $\alpha > 0$ и $\nu \in \mathbb{R}$. Функција $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ припада простору $H_\nu^{p,q,\alpha}$ ако и само ако важи*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(\nu-\alpha)q} \|V_n * g\|_p^q < \infty \text{ за } 0 < q < \infty,$$

и ако је $q = \infty$, тада $g \in H_\nu^{p,\infty,\alpha}$ ако и само ако важи

$$\|V_n * g\|_p = O\left(2^{n(\alpha-\nu)}\right).$$

Лема 4.1.6 ([29, 47]) *Нека је n позитиван цео број, $P(z) = \sum_{k=n}^{4n} \lambda_k z^k$, где је $\{\lambda_k\}$ низ комплексних бројева и $Q(z) = \sum_{k=n}^{4n} \log^\delta(k+1)\lambda_k z^k$, где је $\delta \in \mathbb{R}$. Тада постоји апсолутна константа C која зависи само од δ, таква да је*

$$C^{-1}\|Q\|_p \leq \log^\delta(n+1)\|P\|_p \leq C\|Q\|_p, \text{ где је } 0 < p < \infty.$$

Лема 4.1.7 ([31, Лема 7.3.1]) *Нека је $0 < s+1 < b$. Тада важи*

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^s}{(1-tx)^b} dx \leq C_{s,b}(1-t)^{s-b+1}, \text{ где је } 0 \leq t < 1.$$

Лема 4.1.8 ([31, Став 7.3.2]) *Нека је $b > a > 0$, $c > 0$, $c - b + a > 0$ и нека је $f : [0,1) \to [0,\infty)$ мерљива функција. Претпоставимо да је $0 < q < 1$ и f је растућа функција или да је $1 \leq q < \infty$. Тада важи*

$$\int_0^1 (1-\rho)^{qa-1} \left(\int_0^1 \frac{(1-r)^{c-1} f(r)}{(1-r\rho)^b} dr \right)^q d\rho \leq C \int_0^1 (1-\rho)^{q(a-b+c)-1} f^q(\rho) d\rho.$$

Коначно, прелазимо на доказ Теореме 4.1.1. Најпре, показујемо један смер, тј. показујемо да ако је оператор Хилбертове матрице H ограничен на простору $H_\nu^{p,q,\alpha}$, тада је $0 < \kappa_{p,\alpha,\nu} = \nu - \alpha - \frac{1}{p} + 1 < 1$.

Доказ импликације

$$\boldsymbol{\textit{оператор } H : H_\nu^{p,q,\alpha} \to H_\nu^{p,q,\alpha} \textit{ је ограничен} \Rightarrow 0 < \kappa_{p,\alpha,\nu} < 1,}$$

у Теореми 4.1.1.

Заправо довољно је показати да ако је $\kappa_{p,\alpha,\nu} \geq 1$ или $\kappa_{p,\alpha,\nu} \leq 0$, тада оператор Хилбертове матрице H не пресликава простор $H_\nu^{p,q,\alpha}$ у простор $H_\nu^{p,q,\alpha}$. У наставку разликујемо више могућности.

Случај 1. $\kappa_{p,\alpha,\nu} > 1$ (еквивалентно $\alpha + \frac{1}{p} - \nu < 0$).

Ако је $f(z) \equiv C$ (где је C константа), тада важи $Hf(z) = \frac{C}{z}\log\frac{1}{1-z} = C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}$. Очигледно је $f \in H_\nu^{p,q,\alpha}$. Користећи Лему 4.1.5 закључујемо

$$\sup_n 2^{n(\nu-\alpha)}\|V_n * Hf\|_p \asymp \sup_n 2^{n(\nu-\alpha-\frac{1}{p})} = \infty,$$

јер је $\nu - \alpha - \frac{1}{p} > 0$. Дакле, важи $Hf \notin H_\nu^{p,\infty,\alpha}$ и самим тим је $Hf \notin H_\nu^{p,q,\alpha}$, јер важи $H_\nu^{p,q,\alpha} \subseteq H_\nu^{p,\infty,\alpha}$. Према томе, оператор H не пресликава простор $H_\nu^{p,q,\alpha}$ у простор $H_\nu^{p,q,\alpha}$ у овом случају.

Случај 2. $\kappa_{p,\alpha,\nu} = 1$.

Случај 2(а). $\kappa_{p,\alpha,\nu} = 1 \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{p} - \nu = 0$, $q = \infty$.
Слично претходним разматрњима добијамо

$$f(z) = \frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+1} \in H_\nu^{p,\infty,\alpha} \text{ ако } \nu - \alpha - \frac{1}{p} = 0.$$

Такође, важи $Hf \notin H_\nu^{p,\infty,\alpha}$, што следи из

$$\begin{aligned} Hf(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{(k+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{(n+k+1)(k+1)} z^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{(k+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n} z^n. \end{aligned}$$

Случај 2(б). $\kappa_{p,\alpha,\nu} = 1$ (еквивалентно $\alpha + \frac{1}{p} - \nu = 0$), $0 < q < \infty$.

Користећи Лему 4.1.5 и Лему 4.1.6, закључујемо да функција

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)\log^{\varepsilon}(n+2)}, \text{ где је } \max\left\{\frac{1}{q}, 1\right\} < \varepsilon \leq 1 + \frac{1}{q},$$

припада простору $H_\nu^{p,q,\alpha}$, док функција

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log^{1-\varepsilon}(n+2)}{n+1} z^n \notin H_\nu^{p,q,\alpha}.$$

Како важи

$$\widehat{Hg}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log^{-\varepsilon}(k+2)}{(n+k+1)(k+1)} \asymp \widehat{h}(n), \text{ (видети [32])},$$

закључујемо да $Hg \notin H_\nu^{p,q,\alpha}$.

Случај 3. $\kappa_{p,\alpha,\nu} \leq 0$.

Случај 3(а). $\kappa_{p,\alpha,\nu} \leq 0 \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{p} - \nu \geq 1$, $q = \infty$.

Нека је $f_\beta(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^\beta}$, где је $\beta > 0$. Скуп $\left\{f_\beta : 0 < \beta < \frac{1}{2}\right\}$ је униформно ограничен подскуп од $H_\nu^{p,\infty,\alpha}$, односно,

$$\sup_{0<\beta<\frac{1}{2}} \|D^\nu f_\beta\|_{p,\infty,\alpha} < \infty \text{ (Лема 4.1.5).}$$

Ако би оператор H могао да се продужи до ограниченог оператора из простора $H_\nu^{p,\infty,\alpha}$ у простор $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, имали би да је

$$\sup_{0<\beta<\frac{1}{2}} |Hf_\beta(0)| < \infty,$$

јер је $f \to f(0)$ непрекидан линеаран оператор на простору $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Међутим, важи

$$Hf_\beta(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{\beta+1}} \text{ и } \lim_{\beta\to 0} Hf_\beta(0) = \infty,$$

што је контрадикција.

Случај 3(б). $\kappa_{p,\alpha,\nu} < 0 \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{p} - \nu > 1$, $0 < q < \infty$.

Изаберимо $0 < \beta < \alpha$, тако да је $\kappa_{p,\beta,\nu} = 0$. Тада важи $H_\nu^{p,\infty,\beta} \subseteq H_\nu^{p,q,\alpha}$. У складу са претходним случајем 3(а), оператор H не може бити продужен до ограниченог оператора из простора $H_\nu^{p,\infty,\beta}$ у простор $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ и самим тим, не може бити продужен до ограниченог оператора из простора $H_\nu^{p,q,\alpha}$ у простор $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Случај 3(в). $\kappa_{p,\alpha,\nu} = 0$ (еквивалентно $\alpha + \frac{1}{p} - \nu = 1$), $0 < q < \infty$.
Нека је

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\log^{\varepsilon}(n+2)}, \text{ где је } \max\left\{\frac{1}{q}, 1\right\} < \varepsilon \leq 1 + \frac{1}{q}.$$

Применом Леме 4.1.6 добијамо

$$\begin{aligned} \|D^{\nu} f\|_{p,q,\alpha} &\asymp \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n\left(\nu-\alpha+1-\frac{1}{p}\right)} (n+2)^{-\varepsilon q} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^{\varepsilon q}} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

јер је $\varepsilon q > 1$.
Са друге стране, функција Hf је добро дефинисана, јер је $\varepsilon > 1$, одакле следи

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\log^{\varepsilon}(n+2)} < \infty.$$

Сада, покажимо да $Hf \notin H_{\nu}^{p,q,\alpha}$. На основу Леме 3.3 из [50] имамо да важи $H_{\nu}^{p,q,\alpha} \subseteq H_{\nu}^{\infty,q,\beta}$, где је $\beta = \alpha + \frac{1}{p}$. Нека је n позитиван цео број, такав да је $n > \nu$ и $\gamma = \beta + n - \nu$. Тада важи $H_{\nu}^{\infty,q,\beta} = H_{n}^{\infty,q,\gamma}$. Покажимо да $Hf \notin H_{n}^{\infty,q,\gamma}$ и самим тим, добићемо да $Hf \notin H_{\nu}^{p,q,\alpha}$. Довољно је показати да је $\|(Hf)^{(n)}\|_{\infty,q,\gamma} = \infty$. Такође, приметимо да важи $\kappa_{\infty,\gamma,n} = 0$. Како су коефицијенти $\widehat{(Hf)^{(n)}}(k)$ функције $(Hf)^{(n)}$ ненегативни, налазимо да $Hf \in H_{n}^{\infty,q,\gamma}$ (еквивалентно $(Hf)^{(n)} \in H^{\infty,q,\gamma}$) ако и само ако је

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{(Hf)^{(n)}}(k) r^k\right)^q (1-r)^{q\gamma-1} dr < \infty,$$

што је еквивалентно са

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\gamma q} \left(\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \widehat{(Hf)^{(n)}}(j)\right)^q < \infty.$$

Како је $\widehat{(Hf)^{(n)}}(k) \asymp (k+1)^n \widehat{Hf}(k)$, то је претходна неједнакост еквивалентна са

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(\gamma-n)q} \left(\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \widehat{Hf}(j)\right)^q < \infty.$$

Такође, важи $\widehat{Hf}(j) \downarrow 0$ када $j \to \infty$, тако да добијамо еквивалентан услов

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(\gamma-n-1)q} \left(\widehat{Hf}\left(2^k\right)\right)^q = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\widehat{Hf}\left(2^k\right)\right)^q < \infty.$$

Међутим, претходни услов није задовољен, јер важи

$$\begin{aligned} \widehat{Hf}\left(2^k\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\left(2^k+j+1\right)\log^{\varepsilon}(j+2)} \\ &\asymp (k+1)^{1-\varepsilon} \end{aligned}$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{(1-\varepsilon)q} = \infty,$$

јер је $(\varepsilon - 1)q \leq 1$. ■

Доказ импликације

$$\mathbf{0 < \kappa_{p,\alpha,\nu} < 1 \Rightarrow} \textbf{\textit{ оператор }} \boldsymbol{H : H_\nu^{p,q,\alpha} \to H_\nu^{p,q,\alpha}} \textbf{\textit{ је ограничен,}}$$

у Теореми 4.1.1.

Нека је сада $0 < \kappa_{p,\alpha,\nu} < 1$ (или еквивалентно $0 < \alpha + \frac{1}{p} - \nu < 1$) и такође, нека је $f \in H_\nu^{p,q,\alpha}$. Као што је раније доказано, важи $Hf \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Нека је n позитиван цео број. Очигледно, тада је

$$M_\infty\left(\rho, (Hf)^{(n)}\right) \leq C(n)\int_0^1 \frac{|f(r)|}{(1-r\rho)^{n+1}}dr, \;\; n = 1, 2, \ldots. \tag{4.1.2}$$

Ако је $1 \leq p < \infty$, користећи теорему Фубинија, налазимо да је

$$\begin{aligned} M_p\left(\rho, (Hf)^{(n)}\right) &\leq C\int_0^1 |f(r)|\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left|1-r\rho e^{i\theta}\right|^{p(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p}}dr \\ &\leq C\int_0^1 \frac{M_\infty(r,f)}{(1-r\rho)^{n+1-\frac{1}{p}}}dr, \;\; n = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

У претходном смо користили да важи

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|1-te^{i\theta}|^s} = O\left(\frac{1}{(1-t)^{s-1}}\right), \;\; s > 1 \text{ (видети [16, Лема, стр. 65]).} \tag{4.1.4}$$

Нека је $0 < p < 1$ и $r_k = 1 - \frac{1}{2^k}$ за $k = 0, 1, 2, \ldots$. Посматрајмо само позитивне целе бројеве n, такве да је $n > \frac{1}{p} - 1$. Тада важи

$$\begin{aligned} M_p\left(\rho, (Hf)^{(n)}\right) &\leq C\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\frac{|f(r)|dr}{\left|1-r\rho e^{i\theta}\right|^{n+1}}\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\int_{r_k}^{r_{k+1}}\frac{|f(r)|dr}{\left|1-r\rho e^{i\theta}\right|^{n+1}}\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{-kp}M_\infty^p(r_{k+1},f)}{(1-r_{k+1}\rho)^{p(n+1)-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C\left(\int_0^1\frac{M_\infty^p(r,f)(1-r)^{p-1}}{(1-r\rho)^{p(n+1)-1}}dr\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

У претходном смо поново користили (4.1.4) и чињеницу да важи

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\right)^p \leq \sum_{k=0}^{\infty}a_k^p, \;\; \text{где је } \; 0 < p < 1 \; \text{ и } \; a_k \geq 0, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Случај 1. $q = \infty$.
Ако $f \in H_\nu^{p,\infty,\alpha}$, да би показали да $Hf \in H_\nu^{p,\infty,\alpha}$, довољно је показати да је

$$M_p\left(\rho, (Hf)^{(n)}\right) = O\left((1-\rho)^{-\alpha-n+\nu}\right),$$

где је n довољно велики позитиван цео број.

Случај 1(а). $p = \infty$.
Прво, приметимо да је $\alpha - \nu > 0$ и

$$M_\infty(\rho, D^\nu f) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\alpha}\right) \quad \Leftrightarrow \quad M_\infty(\rho, f) = O\left(\frac{1}{(1-r)^{\alpha-\nu}}\right).$$

Користећи претходно и (4.1.2), налазимо да важи

$$\begin{aligned} M_\infty\left(\rho, (Hf)^{(n)}\right) &\leq C\int_0^1 \frac{M_\infty(r,f)dr}{(1-r\rho)^{n+1}} \\ &\leq C\int_0^1 \frac{(1-r)^{\nu-\alpha}dr}{(1-r\rho)^{n+1}} \\ &\leq \frac{C}{(1-\rho)^{n+\alpha-\nu}}, \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Напоменимо да смо овде користили Лему 4.1.7 и претпоставку да је $\nu - \alpha > -1 \Leftrightarrow \alpha - \nu < 1$.

Случај 1(б). $1 \leq p < \infty$.
Из

$$M_p(r, D^\nu f) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\alpha}\right),$$

закључујемо да важи

$$M_\infty(r, f) = O\left(\frac{1}{(1-r)^{\alpha+\frac{1}{p}-\nu}}\right).$$

Приметимо да је $\alpha + \frac{1}{p} - \nu > 0$ (или еквивалентно $\kappa_{p,\alpha,\nu} < 1$). Сада, користећи 4.1.3, добијамо да важи

$$\begin{aligned} M_p\left(\rho, (Hf)^{(n)}\right) &\leq C\int_0^1 \frac{M_\infty(r,f)dr}{(1-r\rho)^{n+1-\frac{1}{p}}} \\ &\leq C\int_0^1 \frac{(1-r)^{\nu-\alpha-\frac{1}{p}}dr}{(1-r\rho)^{n+1-\frac{1}{p}}}, \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

У претходном смо користили да је $\kappa_{p,\alpha,\nu} > 0$. На основу Леме 4.1.7, следи

$$M_p\left(\rho, (Hf)^{(n)}\right) \leq \frac{C}{(1-\rho)^{n-\nu+\alpha}},$$

односно, важи $Hf \in H_\nu^{p,\infty,\alpha}$.

Случај 1(в). $0 < p < 1$.
Можемо претпоставити да је $n > \frac{1}{p}$. Користећи (4.1.5) и Лему 4.1.7, добијамо

$$\begin{aligned} M_p\left(\rho, (Hf)^{(n)}\right) &\leq C\left(\int_0^1 \frac{M_\infty^p(r,f)(1-r)^{p-1}dr}{(1-r\rho)^{p(n+1)-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C\left(\int_0^1 \frac{(1-r)^{p\left(-\alpha-\frac{1}{p}+\nu+1\right)-1}dr}{(1-r\rho)^{p(n+1)-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{C}{(1-\rho)^{n+\alpha-\nu}}. \end{aligned}$$

Случај 2. $0 < q < \infty$.

Претпоставимо да $f \in H_\nu^{p,q,\alpha}$ или еквивалентно $f^{(n)} \in H^{p,q,\alpha+n-\nu}$, при чему је n довољно велики позитиван цео број. Да би показали да $Hf \in H_\nu^{p,q,\alpha}$, довољно је показати да $(Hf)^{(n)} \in H^{p,q,\alpha+n-\nu}$.

Случај 2(а). $p = \infty$.

У овом случају, користећи (4.1.2) и Лему 4.1.8 добијамо

$$\begin{aligned} \left\|(Hf)^{(n)}\right\|^q_{\infty,q,\alpha+n-\nu} &= \int_0^1 M^q_\infty\left(\rho,(Hf)^{(n)}\right)(1-\rho)^{q(n+\alpha-\nu)-1}d\rho \\ &\le C\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{M_\infty(r,f)dr}{(1-r\rho)^{n+1}}\right)^q(1-\rho)^{q(n+\alpha-\nu)-1}d\rho \\ &\le C\int_0^1 M^q_\infty(\rho,f)(1-\rho)^{q(\alpha-\nu)-1}d\rho. \end{aligned}$$

Користећи (4.1.1), закључујемо да је последњи интеграл коначан, јер је интеграл

$$\int_0^1 M^q_\infty\left(\rho,f^{(n)}\right)(1-\rho)^{q(n+\alpha-\nu)-1}d\rho$$

коначан.

Овде је Лема 4.1.8 примењена у случају $a = n+\alpha-\nu$, $b = n+1$ и $c = 1$. Приметимо да је $a > 0$, $b > a$ због $\alpha-\nu < 1$ (еквивалентно $\kappa_{\infty,\alpha,\nu} = \nu-\alpha+1 > 0$). Штавише, $c = 1 > 0$ и

$$c-b+a > 0 \Leftrightarrow \alpha-\nu > 0 \Leftrightarrow \nu-\alpha+1 < 1 \Leftrightarrow \kappa_{\infty,\alpha,\nu} < 1.$$

Случај 2(б). $1 \le p < \infty$.

Слично као у претходном случају, користећи сада (4.1.3) и Лему 4.1.8, видимо да важи

$$\begin{aligned} \left\|(Hf)^{(n)}\right\|^q_{p,q,n+\alpha-\nu} &= \int_0^1 M^q_p\left(\rho,(Hf)^{(n)}\right)(1-\rho)^{q(n+\alpha-\nu)-1}d\rho \\ &\le C\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{M_\infty(r,f)dr}{(1-r\rho)^{n+1-\frac{1}{p}}}\right)^q(1-\rho)^{q(n+\alpha-\nu)-1}d\rho \\ &\le C\int_0^1 M^q_\infty(\rho,f)(1-\rho)^{q\left(\alpha+\frac{1}{p}-\nu\right)-1}d\rho. \end{aligned}$$

Последњи интеграл је коначан, јер је интеграл

$$\int_0^1 M^q_p\left(\rho,f^{(n)}\right)(1-\rho)^{q(n+\alpha-\nu)-1}d\rho$$

коначан.

Овде је Лема 4.1.8 примењена у случају када је $a = \alpha+n-\nu$, $b = n+1-\frac{1}{p}$ и $c = 1$. Приметимо да је

$$a > 0,\ \ c > 0,\ \ b-a = \nu-\alpha-\frac{1}{p}+1 = \kappa_{p,\alpha,\nu} > 0$$

и

$$a-b+c = \alpha+\frac{1}{p}-\nu > 0 \Leftrightarrow \kappa_{p,\alpha,\nu} = \nu-\alpha-\frac{1}{p}+1 < 1.$$

Случај 2(в). $0 < p < 1$.

Можемо претпоставити да је $n > \frac{1}{p}$. Сада користимо (4.1.5) и Лему 4.1.8. Следи

$$\begin{aligned} \left\|(Hf)^{(n)}\right\|^q_{p,q,n+\alpha-\nu} &\le C\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{M^p_\infty(r,f)(1-r)^{p-1}dr}{(1-r\rho)^{p(n+1)-1}}\right)^{\frac{q}{p}}(1-\rho)^{q(n+\alpha-\nu)-1}d\rho \\ &\le C\int_0^1 M^q_\infty(\rho,f)(1-\rho)^{\frac{q}{p}(1+p(\alpha-\nu))-1}d\rho \\ &< \infty, \end{aligned}$$

јер је
$$\int_0^1 M_p^q\left(\rho, f^{(n)}\right)(1-\rho)^{q(n+\alpha-\nu)-1} d\rho<\infty.$$
Овде је Лема 4.1.8 примењена у случају када је $a=p(n+\alpha-\nu)$, $b=p(n+1)-1$, $c=p$ и са $\frac{q}{p}$ уместо q. Добијамо да важи
$$a>0,\;\; c>0,\;\; b-a=p-1-p(\alpha-\nu)>0 \Leftrightarrow \kappa_{p,\alpha,\nu}>0$$
и
$$a-b+c=p(\alpha-\nu)+1>0 \Leftrightarrow \kappa_{p,\alpha,\nu}<1.$$
Тиме је завршен доказ и ове импликације. ∎

4.2 Примена дуалности

У овом поглављу показујемо да импликација
$$0<\kappa_{p,\alpha,\nu}<1 \Rightarrow \text{ оператор } H: H_\nu^{p,q,\alpha} \rightarrow H_\nu^{p,q,\alpha} \text{ је ограничен}$$
може бити доказана и коришћењем дуалности. Овде дајемо детаљан доказ само у случају када је $1<p,q<\infty$. Биће нам потребна и следећа теорема.

Теорема 4.2.1 ([31, 47]) *Нека је $1<p,q<\infty$ и нека су p' и q' конјуговани експоненти за p и q, тим редом. Тада се дуал простора $H_{1+\alpha}^{p',q',1}$, где је $\alpha>0$ може поистиветити са простором $H^{p,q,\alpha}$. Одговарајуће дуално упаривање је дато са*
$$\langle g, f\rangle=\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{g}(n) \overline{\widehat{f}(n)},$$
где је $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \in H^{p,q,\alpha}$ и $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{g}(n) z^n \in H_{1+\alpha}^{p',q',1}$.

Доказ импликације

$$\mathbf{0<\kappa_{p,\alpha,\nu}<1 \Rightarrow} \textbf{\textit{ оператор }} \boldsymbol{H: H_\nu^{p,q,\alpha} \rightarrow H_\nu^{p,q,\alpha}} \textbf{\textit{ је ограничен,}}$$

у случају када је $\mathbf{1<p,q<\infty}$.

Нека је $f \in H_\nu^{p,q,\alpha}$ и $h \in H_{1+\alpha}^{p',q',1}$. Као што смо раније приметили, оператор Хилбертове матрице H је добро дефинисан на простору $H_\nu^{p,q,\alpha}$. Тада важи
$$\begin{aligned}
|\langle h, D^\nu H f\rangle| & =|\langle H f, D^\nu h\rangle| \\
& =\left|\int_{\mathbb{D}} H f(z) \overline{D^{\nu+1} h(z)} d A(z)\right| \\
& =\left|\int_0^1 f(t) \overline{\left(\int_{\mathbb{D}} \frac{D^{\nu+1} h(z)}{1-t \bar{z}} d A(z)\right) d t}\right| \\
& =\left|\int_0^1 f(t) \overline{\left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 r \int_0^{2\pi} \frac{D^{\nu+1} h\left(r e^{i \theta}\right)}{1-t r e^{-i \theta}} d \theta d r\right) d t}\right| \\
& \leq C \int_0^1|f(t)| G(t) d t,
\end{aligned}$$
где је $G(t)=\int_0^1\left|D^{\nu+1} h(r^2 t)\right| r d r$.

Нека је сада $\delta = \alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \nu$. Како је $0 < \alpha + \frac{1}{p} - \nu < 1$, то добијамо $-1 < \delta q < q - 1$. Користећи Хелдерову неједнакост, налазимо

$$\begin{aligned} |\langle h, D^\nu H f\rangle| &\le C\left\{\int_0^1 |f(t)|^q (1-t)^{\delta q} dt\right\}^{\frac{1}{q}} \left\{\int_0^1 G^{q'}(t)(1-t)^{-\delta q'} dt\right\}^{\frac{1}{q'}} \\ &= C I_1 I_2, \end{aligned}$$

при чему је $I_1 = \left\{\int_0^1 |f(t)|^q (1-t)^{\delta q} dt\right\}^{\frac{1}{q}}$ и $I_2 = \left\{\int_0^1 G^{q'}(t)(1-t)^{-\delta q'} dt\right\}^{\frac{1}{q'}}$. Следи да је

$$\begin{aligned} I_1^q &\le \int_0^1 M_\infty^q(t, f)(1-t)^{\delta q} dt \\ &\asymp \int_0^1 M_\infty^q\left(t, D^\nu f\right)(1-t)^{\delta q + q\nu} dt \\ &\le C\int_0^1 M_p^q\left(t, D^\nu f\right)(1-t)^{\delta q - \frac{q}{p} + \nu q} dt \\ &= C\int_0^1 M_p^q\left(t, D^\nu f\right)(1-t)^{q\alpha - 1} dt. \end{aligned}$$

Односно, важи $I_1 \le C\left\|D^\nu f\right\|_{p,q,\alpha}$.

Даље, оцењујемо I_2. Можемо писати,

$$I_2^{q'} = I_{21} + I_{22}, \tag{4.2.1}$$

где је

$$I_{21} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \left|D^{\nu+1} h(r^2 t)\right| r dr\right)^{q'} (1-t)^{-\delta q'} dt$$

и

$$I_{22} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^1 \left|D^{\nu+1} h(r^2 t)\right| r dr\right)^{q'} (1-t)^{-\delta q'} dt.$$

Није тешко видети да важи

$$\begin{aligned} I_{21} &\le C M_\infty^{q'}\left(\tfrac{1}{2}, D^{\nu+1} h\right) \\ &\le C\int_0^1 M_\infty^{q'}\left(t, D^{\nu+1} h\right)(1-t)^{-\delta q' + q'} dt. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Овде смо искористили чињеницу да је $M_\infty^{q'}\left(t, D^{\nu+1} h\right)$ растућа функција, јер је функција $M_\infty\left(t, D^{\nu+1} h\right)$ растућа.

У наставку, оцењујемо I_{22}.

$$\begin{aligned} I_{22} &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(2t)^{q'}} \left(\int_0^t \left|D^{\nu+1} h(s)\right| ds\right)^{q'} (1-t)^{-\delta q'} dt \\ &\le \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^t M_\infty\left(s, D^{\nu+1} h\right) ds\right)^{q'} (1-t)^{-\delta q'} dt \\ &\le \int_0^1 \left(\int_{1-t}^1 M_\infty\left(1-s, D^{\nu+1} h\right) ds\right)^{q'} (1-t)^{-\delta q'} dt \\ &\le C\int_0^1 M_\infty^{q'}\left(t, D^{\nu+1} h\right)(1-t)^{-\delta q' + q'} dt. \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

У претходном смо искористили неједнакост

$$\int_0^1 \left(\int_{1-t}^1 \varphi(r) dr\right)^m (1-t)^{k-1} dt \le \left(\frac{m}{k}\right)^m \int_0^1 \left(\varphi(1-t)\right)^m (1-t)^{m+k-1} dt,$$

где је φ ненегативна функција на интервалу $(0,1)$, $1 < m < \infty$ и $k > 0$ (ово је специјалан случај једне варијанте класичне Хардијеве неједнакости (видети [19, стр. 242] и одговарајуће референце које су тамо наведене)).

Користећи (4.2.1), (4.2.2) и (4.2.3), добијамо да је

$$\begin{aligned} I_2^{q'} &\leq C\int_0^1 M_\infty^{q'}\left(t, D^{\nu+1}h\right)(1-t)^{-\delta q'+q'}dt \\ &\leq C\int_0^1 M_{p'}^{q'}\left(t, D^{\nu+1}h\right)(1-t)^{-\delta q'+q'-\frac{q'}{p'}}dt \\ &\asymp C\int_0^1 M_{p'}^{q'}\left(t, D^{1+\alpha}h\right)(1-t)^{-\delta q'+q'-\frac{q'}{p'}+q'(\alpha-\nu)}dt \\ &= C\int_0^1 M_{p'}^{q'}\left(t, D^{1+\alpha}h\right)(1-t)^{q'-1}dt \\ &= C\left\|D^{1+\alpha}h\right\|_{p',q',1}^{q'}. \end{aligned}$$

Према томе, важи

$$|\langle h, D^\nu Hf\rangle| \leq C\left\|D^\nu f\right\|_{p,q,\alpha}\left\|D^{1+\alpha}h\right\|_{p',q',1},$$

и самим тим је $\|D^\nu Hf\|_{p,q,\alpha} < \infty$, на основу Теореме 4.2.1, односно, следи да важи $Hf \in H_\nu^{p,q,\alpha}$. ■

Да би показали да је оператор $H : H_\nu^{\infty,q,\alpha} \to H_\nu^{\infty,q,\alpha}$ ограничен, где је $1 < q < \infty$, у случају када важи $0 < \alpha - \nu < 1$, можемо поступити као у претходном разматрању уз коришћење дуалности $\left(H_{1+\alpha}^{1,q',1}\right)' = H^{\infty,q,\alpha}$ (видети [1, 31]). У случају када је $p = 1$ и $1 < q < \infty$, можемо користити дуалност $\left(H_{1+\alpha}^{\infty,q',1}\right)' = H^{1,q,\alpha}$ (видети [1, 31]).

У претходним главам испитивали смо понашање оператора Хилбертове матрице на неким класичним просторима холоморфних функција на јединичном диску. У наставку проширујемо претходна разматрања, тако што неке од наших претходно поменутих простора холоморфних функција на јединичном диску снабдевамо са неком логаритамском тежином. Дакле, у наредној глави испитујемо оператор Хилбертове матрице на логаритамско тежинским просторима.

Глава 5

Хилбертова матрица на логаритамско тежинским просторима

Сврха ове главе јесте испитивање дејства оператора Хилбертове матрице H на неким од класичних простора холоморфних функција на јединичном диску, али који су снабдевени са логаритамском тежином. Наиме, показаћемо да ако је $\alpha > 2$ и $0 < \varepsilon \leq \alpha - 2$, тада оператор Хилбертове матрице H пресликава логаритамско тежински Бергманов простор $A^2_{\log^\alpha}$ у простор $A^2_{\log^{\alpha-2-\varepsilon}}$. Тај резултат јесте уопштење претходно познатих резултата. Заправо, у раду [38] (Лануча, Новак, Павловић) јесте доказано да у случају када је $\alpha > 3$, оператор H пресликава логаритамско тежински простор $A^2_{\log^\alpha}$ у Бергманов простор A^2. Са друге стране, показано је да важи $H : A^2_{\log^\alpha} \to A^2$ и у случају када је $\alpha > 2$ (видети [28], заједнички рад М. Јевтића и аутора овог текста). Такође, показаћемо да се за све $\alpha \in \mathbb{R}$ логаритамско тежински Блохов простор $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$, оператором Хилбертове матрице, пресликава у простор $\mathcal{B}_{\log^{\alpha+1}}$ (на овај начин су такође уопштени неки одговарајући резултати из петог поглавља рада [38]). Осим тога, оператор Хилбертове матрице H, за све $\alpha \geq 0$, пресликава логаритамско тежински Харди-Блохов простор $\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$ у простор $\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}$, при чему за свако $\varepsilon > 0$, постоји функција $f \in \mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$, таква да је $Hf \notin \mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1+\varepsilon}}$. Сви резултати из ове главе су оригинални и публиковани у раду [32] аутора овог текста.

5.1 Неки помоћни резултати

У овом поглављу доказаћемо неколико уводних и помоћних резултата који ће нам бити од користи у разматрањима која следе.

Лема 5.1.1 *Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$ и $a \geq 2$. Тада важи*

$$\int_{\log a}^{\infty} t^\alpha e^{-t} dt \leq C_\alpha \frac{\log^\alpha a}{a},$$

при чему је C_α константа која не зависи од a.

Доказ. (1) Случај $\alpha \leq 0$. Следи да је

$$\int_{\log a}^{\infty} t^\alpha e^{-t} dt \leq \log^\alpha a \int_{\log a}^{\infty} e^{-t} dt = \frac{\log^\alpha a}{a}.$$

(2) Случај $\alpha > 0$. Применом парцијалне интеграције добијамо да важи

$$\begin{array}{rcl} \int_{\log a}^{\infty} t^{\alpha}e^{-t}dt & = & \frac{\log^{\alpha} a}{a} + \alpha \int_{\log a}^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt \\ & = & \frac{\log^{\alpha} a}{a} + \alpha \frac{\log^{\alpha-1} a}{a} + \alpha(\alpha-1)\int_{\log a}^{\infty} t^{\alpha-2}e^{-t}dt \\ & \leq & C_{\alpha}\frac{\log^{\alpha} a}{a} + \alpha(\alpha-1)\int_{\log a}^{\infty} t^{\alpha-2}e^{-t}dt. \end{array}$$

Настављајући претходни поступак, добијамо да је

$$\begin{array}{rcl} \int_{\log a}^{\infty} t^{\alpha}e^{-t}dt & \leq & C_{\alpha}\frac{\log^{\alpha} a}{a} + \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-\lfloor\alpha\rfloor)\int_{\log a}^{\infty} t^{\alpha-\lfloor\alpha\rfloor-1}e^{-t}dt \\ & \leq & C_{\alpha}\frac{\log^{\alpha} a}{a} + \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-\lfloor\alpha\rfloor)\frac{\log^{\alpha-\lfloor\alpha\rfloor-1} a}{a} \\ & \leq & C_{\alpha}\frac{\log^{\alpha} a}{a}, \end{array}$$

где је $\lfloor\alpha\rfloor$ највећи цео број који не прелази α. ■

Користећи претходну лему долазимо до следећег корисног резултата.

Лема 5.1.2 *Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$ и нека је n ненегативан цео број. Тада важи*

$$\int_0^1 r^n \log^{\alpha}\frac{2}{1-r}dr \asymp \frac{\log^{\alpha}(n+2)}{n+1},$$

при чему је одговарајућа константа независна од n, односно, постоји константа C_{α} независна од n, таква да је

$$\frac{1}{C_{\alpha}}\frac{\log^{\alpha}(n+2)}{n+1} \leq \int_0^1 r^n \log^{\alpha}\frac{2}{1-r}dr \leq C_{\alpha}\frac{\log^{\alpha}(n+2)}{n+1}.$$

Доказ. (1) Случај $\alpha \geq 0$. Најпре, налазимо да је

$$\begin{array}{rcl} \int_0^1 r^n \log^{\alpha}\frac{2}{1-r}dr & \geq & \int_{1-\frac{1}{n+1}}^1 r^n \log^{\alpha}\frac{2}{1-r}dr \\ & \geq & \log^{\alpha}(n+2)\int_{1-\frac{1}{n+1}}^1 r^n dr \\ & = & \frac{\log^{\alpha}(n+2)}{n+1}\left(1-(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}\right) \\ & \geq & C\frac{\log^{\alpha}(n+2)}{n+1}. \end{array}$$

Са друге стране, користећи Лему 5.1.1, добијамо да важи

$$\begin{array}{rcl} \int_{1-\frac{1}{n+1}}^1 r^n \log^{\alpha}\frac{2}{1-r}dr & \leq & \int_{1-\frac{1}{n+1}}^1 \log^{\alpha}\frac{2}{1-r}dr \\ & = & 2\int_{\log(2n+2)}^{\infty} t^{\alpha}e^{-t}dt \\ & \leq & 2\int_{\log(n+2)}^{\infty} t^{\alpha}e^{-t}dt \\ & \leq & C_{\alpha}\frac{\log^{\alpha}(n+2)}{n+1} \end{array}$$

и

$$\begin{array}{rcl} \int_0^{1-\frac{1}{n+1}} r^n \log^{\alpha}\frac{2}{1-r}dr & \leq & C_{\alpha}\log^{\alpha}(n+2)\int_0^{1-\frac{1}{n+1}} r^n dr \\ & = & C_{\alpha}\frac{\log^{\alpha}(n+2)}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ & \leq & C_{\alpha}\frac{\log^{\alpha}(n+2)}{n+1}. \end{array}$$

Према томе, следи да је

$$\int_0^1 r^n \log^\alpha \frac{2}{1-r} dr \leq C_\alpha \frac{\log^\alpha(n+2)}{n+1}.$$

(2) Случај $\alpha < 0$. Нека је $\varphi(r) = r \log^\alpha \frac{2}{r}$, где је $0 < r \leqslant 1$. Тада је φ ненегативна, неопадајућа функција на интервалу $(0, 1]$ и важи

$$t^{1-2\alpha}\varphi(r) \leq \varphi(tr) \leq t\varphi(r),$$

за све $0 < t < 1$. Користећи Лему 4.1 из [41], добијамо да је

$$\int_0^1 r^n \frac{\varphi(1-r)}{1-r} dr \asymp \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Коначно, важи

$$\int_0^1 r^n \log^\alpha \frac{2}{1-r} dr \asymp \frac{\log^\alpha(n+2)}{n+1},$$

што је и требало доказати. ∎

Следећа теорема је последица Теореме 2.31 на страни 192 класичне монографије [67], стога ће њен доказ бити изостављен.

Теорема 5.1.3 ([67])
(а) *За све $\alpha \in \mathbb{R}$, Тејлорови коефицијенти $\widehat{F}(n)$ функције*

$$F(z) = \frac{1}{1-z} \log^\alpha \frac{2}{1-z},$$

задовољавају,

$$\widehat{F}(n) \asymp \log^\alpha(n+2),$$

при чему је одговарајућа константа независна од n.
(б) *За све $\alpha \in \mathbb{R}$, Тејлорови коефицијенти $\widehat{G}(n)$ функције*

$$G(z) = \log^\alpha \frac{2}{1-z},$$

задовољавају,

$$\widehat{G}(n) \asymp \frac{\log^{\alpha-1}(n+2)}{n+1},$$

при чему је одговарајућа константа независна од n.

Користећи претходну теорему долазимо до још једног корисног тврђења.

Лема 5.1.4 *Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$ и нека је k ненегативан цео број. Тада важи*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log^\alpha(n+2)}{(n+1)(n+k+1)} \asymp \frac{\log^{\alpha+1}(k+2)}{k+1},$$

при чему је одговарајућа константа независна од k, односно, постоји константа C_α независна од k, таква да је

$$\frac{1}{C_\alpha}\frac{\log^{\alpha+1}(k+2)}{k+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log^\alpha(n+2)}{(n+1)(n+k+1)} \leq C_\alpha \frac{\log^{\alpha+1}(k+2)}{k+1}.$$

Доказ. Користећи Лему 5.1.2 и Теорему 5.1.3 (б), добијамо да важи

$$\begin{aligned}
\tfrac{\log^{\alpha+1}(k+2)}{k+1} &\asymp \textstyle\int_0^1 r^k \log^{\alpha+1} \tfrac{2}{1-r} dr \\
&\asymp \textstyle\int_0^1 r^k \sum\limits_{n=0}^{\infty} \tfrac{\log^{\alpha}(n+2)}{n+1} r^n dr \\
&= \textstyle\sum\limits_{n=0}^{\infty} \tfrac{\log^{\alpha}(n+2)}{n+1} \int_0^1 r^{n+k} dr \\
&= \textstyle\sum\limits_{n=0}^{\infty} \tfrac{\log^{\alpha}(n+2)}{(n+1)(n+k+1)},
\end{aligned}$$

при чему је одговарајућа константа независна од k. ■

5.2 Оператор $\boldsymbol{H}$ на логаритамско тежинским Бергмановим просторима

Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада дефинишемо логаритамско тежински Бергманов простор $A^2_{\log^\alpha}$ на следећи начин,

$$A^2_{\log^\alpha} = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \|f\|^2_{A^2_{\log^\alpha}} = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \log^\alpha \frac{2}{1-|z|^2} dA(z) < \infty \right\}.$$

Приметимо да је $A^2_{\log^\alpha} \subset A^2$ за све $\alpha > 0$ и $A^2_{\log^0} = A^2$.

Лема 5.2.1 ([28, 32]) *Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$ и $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \in A^2_{\log^\alpha}$. Тада важи*

$$\|f\|^2_{A^2_{\log^\alpha}} \asymp \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \frac{\log^\alpha(n+2)}{n+1},$$

при чему је одговарајућа константа независна од избора функције f, односно, постоји константа C независна од избора функције f, таква да је

$$\frac{1}{C} \|f\|^2_{A^2_{\log^\alpha}} \le \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \frac{\log^\alpha(n+2)}{n+1} \le C \|f\|^2_{A^2_{\log^\alpha}}.$$

Доказ. Применом Парсевалове формуле на функцију $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \in A^2_{\log^\alpha}$ и применом Леме 5.1.2, налазимо да је

$$\|f\|^2_{A^2_{\log^\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \int_0^1 r^n \log^\alpha \frac{2}{1-r} dr \asymp \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \frac{\log^\alpha(n+2)}{n+1},$$

што је и требало доказати. ■

Сада смо могућности да опишемо понашање оператора Хилбертове матрице H на логаритамско тежинским Бергмановим просторима $A^2_{\log^\alpha}$, када је $\alpha > 2$. Следећа теорема уопштава одговарајуће резултате из радова [28] и [38].

Теорема 5.2.2 ([32]) *Нека је $\alpha > 2$ и $0 < \varepsilon \leq \alpha - 2$. Тада је оператор Хилбертове матрице H добро дефинисан на логаритамско тежинском Бергмановом простору $A^2_{\log^\alpha}$ и пресликава га у простор $A^2_{\log^{\alpha-2-\varepsilon}}$.*

Доказ. Нека је $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \in A^2_{\log^\alpha}$. Тада, на основу Коши-Шварцове неједнакости, закључујемо да важи

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\widehat{f}(n)|}{n+1} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \frac{\log^\alpha(n+2)}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\log^\alpha(n+2)} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

јер је $\alpha > 2$. Према томе, оператор H је добро дефинисан на простору $A^2_{\log^\alpha}$. Са друге стране, користећи опет Коши-Шварцову неједнакост и Лему 5.1.4, добијамо да важи

$$\begin{aligned}
\|Hf\|^2_{A^2_{\log^{\alpha-2-\varepsilon}}} &\asymp \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{Hf}(n)|^2 \tfrac{\log^{\alpha-2-\varepsilon}(n+2)}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{\widehat{f}(k)}{n+k+1} \right|^2 \tfrac{\log^{\alpha-2-\varepsilon}(n+2)}{n+1} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{|\widehat{f}(k)|^2 \log^\alpha(k+2)}{n+k+1} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{(n+k+1)\log^\alpha(k+2)} \tfrac{\log^{\alpha-2-\varepsilon}(n+2)}{n+1} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \tfrac{\log^\alpha(k+2)}{k+1} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{\log^\alpha(k+2)} \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\log^{\alpha-2-\varepsilon}(n+2)}{(n+1)(n+k+1)} \\
&\leq C\|f\|^2_{A^2_{\log^\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{\log^\alpha(k+2)} \tfrac{\log^{\alpha-1-\varepsilon}(k+2)}{k+1} \\
&= C\|f\|^2_{A^2_{\log^\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{(k+1)\log^{1+\varepsilon}(k+2)} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Самим тим, следи да $Hf \in A^2_{\log^{\alpha-2-\varepsilon}}$. ∎

5.3 Оператор H на логаритамско тежинским Блоховим просторима

За $\alpha \in \mathbb{R}$ логаритамско тежински Блохов простор $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$ дефинише се на следећи начин

$$\mathcal{B}_{\log^\alpha} = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : |f'(z)|(1-|z|) = \mathcal{O}\left(\log^\alpha \frac{2}{1-|z|} \right) \right\}.$$

Норма у простору $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$ дата је са

$$\|f\|_{\mathcal{B}_{\log^\alpha}} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} |f'(z)|(1-|z|) \log^{-\alpha} \frac{2}{1-|z|}.$$

Осим тога, приметимо да је $\mathcal{B}_{\log^0}$ заправо Блохов простор $\mathcal{B}_0^{\infty,\infty} = \mathcal{B}$. Следећа теорема описује понашање оператора Хилбертове матрице H на логаритамско тежинским Блоховим просторима $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$ за све $\alpha \in \mathbb{R}$. Осим тога, она уопштава претходно постојеће резултате који се односе на дејство Хилбертове матрице на логаритасмко тежинским просторима Блоха (видети [38]).

Теорема 5.3.1 ([32]) *Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада је оператор Хилбертове матрице H добро дефинисан оператор на простору $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$ и пресликава га у простор $\mathcal{B}_{\log^{\alpha+1}}$.*

Доказ. На основу Теореме 2.1 (а) из [49], налазимо да ако је функција $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \in \mathcal{B}_{\log^\alpha}$, тада важи $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\widehat{f}(n)|}{n+1} < \infty$. Следи да је оператор Хилбертове матрице H добро дефинисан оператор на простору $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$. Са друге стране, нека је $f \in \mathcal{B}_{\log^\alpha}$, при чему без смањења општости, можемо додатно претпоставити да је $f(0) = 0$. Тада, применом Леме 4.2.8 из [65], добијамо да важи

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f'(w)(1-|w|^2)}{\overline{w}(1-\overline{w}z)^2} dA(w),$$

за све $z \in \mathbb{D}$. Такође, имамо да је

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{z^k |z|^{2n}}{1-\overline{z}} dA(z) = \frac{1}{n+k+1},$$

за све ненегативне целе бројеве n и k. Према томе,

$$\int_{\mathbb{D}} f(z) \frac{|z|^{2n}}{1-\overline{z}} dA(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{n+k+1} = \widehat{Hf}(n).$$

Стога, важи

$$\begin{aligned}
|\widehat{Hf}(n)| &= \left| \int_{\mathbb{D}} f(z) \tfrac{|z|^{2n}}{1-\overline{z}} dA(z) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{D}} \tfrac{f'(w)(1-|w|^2)}{\overline{w}} \int_{\mathbb{D}} \tfrac{|z|^{2n}}{(1-\overline{w}z)^2(1-\overline{z})} dA(z) dA(w) \right| \\
&= \tfrac{1}{\pi} \left| \int_{\mathbb{D}} \tfrac{f'(w)(1-|w|^2)}{\overline{w}} \int_0^1 r^{2n+1} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{(1-\overline{w}re^{i\theta})^2(1-re^{-i\theta})} d\theta dr dA(w) \right| \\
&= \tfrac{1}{\pi} \left| \int_{\mathbb{D}} \tfrac{f'(w)(1-|w|^2)}{\overline{w}} \int_0^1 r^{2n+1} \tfrac{2\pi}{(1-r^2\overline{w})^2} dr dA(w) \right| \\
&\leq C \int_{\mathbb{D}} \tfrac{|f'(w)|(1-|w|)}{|w|} \int_0^1 \tfrac{r^{2n+1}}{|1-r^2 w|^2} dr dA(w) \\
&\leq C \int_{\mathbb{D}} \tfrac{\log^\alpha \frac{2}{1-|w|}}{|w|} \int_0^1 \tfrac{r^{2n+1}}{|1-r^2 w|^2} dr dA(w) \\
&= C \int_0^1 r^{2n+1} \int_{\mathbb{D}} \tfrac{\log^\alpha \frac{2}{1-|w|}}{|w||1-r^2 w|^2} dA(w) dr \\
&= C \int_0^1 r^{2n+1} \int_0^1 \log^\alpha \tfrac{2}{1-\rho} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{|1-r^2\rho e^{i\theta}|^2} d\theta d\rho dr \\
&\leq C \int_0^1 r^{2n+1} \int_0^1 \tfrac{1}{1-r^2\rho} \log^\alpha \tfrac{2}{1-\rho} d\rho dr \\
&= C \int_0^1 \log^\alpha \tfrac{2}{1-\rho} \int_0^1 \tfrac{r^n}{1-r\rho} dr d\rho.
\end{aligned}$$

Осим тога, важи

$$\int_0^1 \frac{r^n}{1-r\rho} dr = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{n+k+1}.$$

Самим тим, користећи Лему 5.1.2 и Лему 5.1.4, добијамо

$$\begin{aligned}
|\widehat{Hf}(n)| &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{n+k+1} \int_0^1 \rho^k \log^{\alpha} \tfrac{2}{1-\rho} d\rho \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{\log^{\alpha}(k+2)}{(k+1)(n+k+1)} \\
&\leq C \tfrac{\log^{\alpha+1}(n+2)}{n+1}.
\end{aligned}$$

Самим тим, важи

$$\begin{aligned}
|(Hf)'(z)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} n \widehat{Hf}(n) z^{n-1} \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n |\widehat{Hf}(n)| |z|^{n-1} \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{n}{n+1} \log^{\alpha+1}(n+2) |z|^{n-1} \\
&\leq C \sum_{n=0}^{\infty} \log^{\alpha+1}(n+3) |z|^{n} \\
&\leq C \sum_{n=0}^{\infty} \log^{\alpha+1}(n+2) |z|^{n}.
\end{aligned}$$

Користећи Теорему 5.1.3(a), следи

$$\frac{1}{1-|z|} \log^{\alpha+1} \frac{2}{1-|z|} \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \log^{\alpha+1}(n+2)|z|^n.$$

Коначно је

$$\begin{aligned}
|(Hf)'(z)| &\leq C \sum_{n=0}^{\infty} \log^{\alpha+1}(n+2)|z|^n \\
&\leq C \tfrac{1}{1-|z|} \log^{\alpha+1} \tfrac{2}{1-|z|}.
\end{aligned}$$

Односно, важи $Hf \in \mathcal{B}_{\log^{\alpha+1}}$. ■

5.4 Оператор H на логаритамско тежинским Харди-Блоховим просторима

Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада дефинишемо логаритамско тежински Харди-Блохов простор $\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha}}$ на следећи начин,

$$\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha}} = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \|f\|_{\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha}}} = |f(0)| + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)| \log^{\alpha} \frac{2}{1-|z|} dA(z) < \infty \right\}.$$

Ако је $\alpha = 0$, тада је $\mathcal{B}^1_{\log^0}$ Харди-Блохов простор $\mathcal{B}^{1,1}_0$. Такође, приметимо да ако је $\alpha \geq 0$, тада важи $\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha}} \subseteq \mathcal{B}^{1,1}_0 \subseteq H^1$ и ако је $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \in H^1$, тада је

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\widehat{f}(n)|}{n+1} < \infty$ (на основу Хардијеве неједнакости (1.2.2)). У наставку разматрања од користи нам може бити следећа теорема која је доказана у [49].

Теорема 5.4.1 ([49]) *Нека је $\alpha \geq -1$ и нека је $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, при чему важи $\widehat{f}(n) \downarrow 0$ када $n \to \infty$. Тада*

$$f \in \mathcal{B}^1_{\log^\alpha} \text{ ако и само ако } \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) \frac{\log^\alpha(n+2)}{n+1} < \infty.$$

Штавише, постоји константа C независна од функције f, таква да је

$$\frac{1}{C} \|f\|_{\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) \frac{\log^\alpha(n+2)}{n+1} \leq C \|f\|_{\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}}.$$

Теорема која следи описује понашање Хилбертове матрице H на логаритамско тежинским Харди-Блоховим просторима. За више информација видети [32].

Теорема 5.4.2 ([32]) *Нека је $\alpha \geq 0$.*
(а) *Тада је оператор Хилбертове матрице H добро дефиниан на простору $\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$ и пресликава га у простор $\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}$.*
(б) *Ако је $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n$, при чему важи $\widehat{f}(n) \downarrow 0$ када $n \to \infty$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(n)}{n+1} < \infty$, тада $Hf \in \mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}$ повлачи $f \in \mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$.*
(в) *Резултат из дела* (а) *је најбољи могућ у смислу да за свако $\varepsilon > 0$ постоји функција $f \in \mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$, таква да важи $Hf \notin \mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1+\varepsilon}}$.*
(г) *Ако је $\alpha < 0$, тада се оператор H не може проширити до непрекидног оператора из простора $\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$ у простор $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.*

Доказ. (а) На основу Теореме 2.1 (б) из [49], имамо да ако $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \in \mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$, $\alpha \geq 0$, тада је $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\widehat{f}(n)|}{n+1} < \infty$. Самим тим, оператор H је добро дефинисан на $\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$. Са друге стране, нека је $f \in \mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$, при чему без смањења општости, можемо претпоставити да је $f(0) = 0$. Тада, на основу Леме 4.2.8 из [65], добијамо да важи

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f'(w)(1-|w|^2)}{\overline{w}(1-\overline{w}z)^2} dA(w),$$

за све $z \in \mathbb{D}$. Нека је $S = \int_{\mathbb{D}} |(Hf)'(z)| \log^{\alpha-1} \frac{2}{1-|z|} dA(z)$. Тада, користећи интегралну репрезентацију оператора Хилбетове матрице $Hf(z) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-tz} dt$, налазимо да је

$$\begin{aligned}
S &\leq \int_{\mathbb{D}} \int_0^1 \frac{|f(t)|}{|1-tz|^2} \log^{\alpha-1} \frac{2}{1-|z|} dt dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \int_0^1 \frac{1}{|1-tz|^2} \left| \int_{\mathbb{D}} \frac{f'(w)(1-|w|^2)}{\overline{w}(1-\overline{w}t)^2} dA(w) \right| \log^{\alpha-1} \frac{2}{1-|z|} dt dA(z) \\
&\leq C \int_{\mathbb{D}} \frac{|f'(w)|(1-|w|)}{|w|} \int_{\mathbb{D}} \log^{\alpha-1} \frac{2}{1-|z|} \int_0^1 \frac{dt}{|1-tz|^2 |1-tw|^2} dA(z) dA(w) \\
&\leq C \int_{\mathbb{D}} \frac{|f'(w)|(1-|w|)}{|w|} \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-zw|^3} \log^{\alpha-1} \frac{2}{1-|z|} dA(z) dA(w) \\
&\leq C \int_{\mathbb{D}} \frac{|f'(w)|}{|w|} \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-zw|^2} \log^{\alpha-1} \frac{2}{1-|z|} dA(z) dA(w) \\
&\leq C \int_{\mathbb{D}} \frac{|f'(w)|}{|w|} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}w|^2} \log^{\alpha-1} \frac{2}{1-r} dr dA(w) \\
&\leq C \int_{\mathbb{D}} \frac{|f'(w)|}{|w|} \int_0^1 \frac{1}{1-r|w|} \log^{\alpha-1} \frac{2}{1-r} dr dA(w).
\end{aligned}$$

Користећи Лему 5.1.2 и Теорему 5.1.3 (б), следи да је

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tfrac{1}{1-r|w|}\log^{\alpha-1}\tfrac{2}{1-r}dr &= \sum_{n=0}^{\infty}|w|^n\int_0^1 r^n\log^{\alpha-1}\tfrac{2}{1-r}dr\\ &\asymp \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{\log^{\alpha-1}(n+2)}{n+1}|w|^n\\ &\asymp \log^{\alpha}\tfrac{2}{1-|w|}.\end{aligned}$$

Последично, добијамо да важи

$$\begin{aligned}S &\leq C\int_{\mathbb{D}}\tfrac{|f'(w)|}{|w|}\log^{\alpha}\tfrac{2}{1-|w|}dA(w)\\ &\leq C\int_{\mathbb{D}}|f'(w)|\log^{\alpha}\tfrac{2}{1-|w|}dA(w)\\ &< \infty,\end{aligned}$$

односно, имамо да $Hf\in\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}$.

(б) Важи $Hf(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\widehat{Hf}(n)z^n$, при чему $\widehat{Hf}(n)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\widehat{f}(k)}{n+k+1}\downarrow 0$ када $n\to\infty$. Тада, користећи Теорему 5.4.1, налазимо да важи

$$\|Hf\|_{\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}}\asymp\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{Hf}(n)\frac{\log^{\alpha-1}(n+2)}{n+1},$$

при чему је одговарајућа константа независна од функције f. Са друге стране, користећи Лему 5.1.4, добијамо

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{Hf}(n)\tfrac{\log^{\alpha-1}(n+2)}{n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{\widehat{f}(k)}{n+k+1}\tfrac{\log^{\alpha-1}(n+2)}{n+1}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}(k)\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{\log^{\alpha-1}(n+2)}{(n+1)(n+k+1)}\\ &\asymp \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}(k)\tfrac{\log^{\alpha}(k+2)}{k+1}.\end{aligned}$$

Према томе, важи

$$\|Hf\|_{\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}}\asymp\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n)\frac{\log^{\alpha}(n+2)}{n+1},$$

при чему је одговарајућа константа независна од функције f. Тада је

$$\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n)\frac{\log^{\alpha}(n+2)}{n+1}<\infty,$$

и користећи Теорему 5.4.1, закључујемо да $f\in\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha}}$.

(в) Нека је $\varepsilon>0$ и дефинишимо $\widehat{f}(n)=\frac{1}{\log^{\alpha+1+\varepsilon/2}(n+2)}$ за све $n\geqslant 0$. Тада важи $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widehat{f}(n)}{n+1}<\infty$ и $\widehat{f}(n)\downarrow 0$ када $n\to\infty$. Такође, налазимо да је

$$\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n)\frac{\log^{\alpha}(n+2)}{n+1}<\infty\quad \text{и}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n)\frac{\log^{\alpha+\varepsilon}(n+2)}{n+1}=\infty.$$

Нека је $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n$. Тада $f \in \mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$ на основу Теореме 5.4.1 и $Hf \notin \mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1+\varepsilon}}$, јер би у супротном важило

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) \frac{\log^{\alpha+\varepsilon}(n+2)}{n+1} < \infty,$$

на основу дела (б) ове теореме, што је контрадикција.

(г) Како важи $\mathcal{B}^1_{\log^\alpha} \subset \mathcal{B}^1_{\log^\beta}$ за све $\beta < \alpha$, то можемо узети да је $-1 < \alpha < 0$. Нека је сада

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\log(n+2)}.$$

За свако $r \in (0,1)$ функција $f_r(z) = f(rz)$ припада простору $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ и на основу Теореме 5.4.1, скуп $\{f_r : r \in (0,1)\}$ је ограничен у простору $\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$. Са друге стране, важи

$$Hf_r(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{(k+1)\log(k+2)} \to \infty \quad \text{када} \quad r \uparrow 1.$$

Ово је у контрадикцији са чињеницом да ако је скуп $X \subset \mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$ ограничен и ако је H ограничен на $\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$, тада је и скуп $\{Hf(0) : f \in X\}$ ограничен, јер је функционал $h \to h(0)$ непрекидан на простору $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Тиме је доказ комплетиран. ■

Последица 5.4.3 *Нека је $\alpha \geq 0$ и $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n$, где је $\widehat{f}(n) \geq 0$ за све ненегативне целе бројеве n, при чему важи $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(n)}{n+1} < \infty$. Тада*

$$Hf \in \mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}} \text{ ако и само ако } \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) \frac{\log^\alpha(n+2)}{n+1} < \infty.$$

Штавише, постоји константа C независна од избора функције f, таква да је

$$\frac{1}{C} \|Hf\|_{\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) \frac{\log^\alpha(n+2)}{n+1} \leq C \|Hf\|_{\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}}.$$

Доказ. Важи $\widehat{Hf}(n) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{n+k+1} \downarrow 0$ када $n \to \infty$, јер је $\widehat{f}(k) \geq 0$ за све целе бројеве $k \geqslant 0$. Сада тражени доказ следи директно из доказа дела (б) Теореме 5.4.2. ■

Последица 5.4.4 *Нека је $\alpha \geq 0$ и нека је функција $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, при чему важи*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)| \frac{\log^\alpha(n+2)}{n+1} < \infty.$$

Тада $Hf \in \mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}$.

Доказ. Нека је $x_n = \operatorname{Re} \widehat{f}(n)$ и $y_n = \operatorname{Im} \widehat{f}(n)$, за све ненегативне целе бројеве n. Тада су функције

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n \text{ и } h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n,$$

холоморфне у јединичном диску $\mathbb{D}$. Даље, нека је

$$x_n^+ = \frac{|x_n| + x_n}{2} \text{ и } x_n^- = \frac{|x_n| - x_n}{2},$$

за све $n = 0, 1, \ldots$. Тада важи $x_n^\pm \geq 0$, $x_n^\pm \leq |x_n| \leq |\widehat{f}(n)|$ и $x_n^+ - x_n^- = x_n$. Према томе, функције $g^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^+ z^n$ и $g^-(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^- z^n$ су холоморфне у јединичном диску $\mathbb{D}$ и важи

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^\pm \frac{\log^\alpha(n+2)}{n+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)| \frac{\log^\alpha(n+2)}{n+1} < \infty.$$

Стога, користећи Последицу 5.4.3, налазимо да

$$Hg^+ \in \mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}} \quad \text{и} \quad Hg^- \in \mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}.$$

Тада добијамо да важи

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} |(Hg)'(z)| \log^{\alpha-1} \tfrac{2}{1-|z|} dA(z) \\ = \ & \int_{\mathbb{D}} |(Hg^+)'(z) - (Hg^-)(z)| \log^{\alpha-1} \tfrac{2}{1-|z|} dA(z) \\ \leq \ & \int_{\mathbb{D}} (|(Hg^+)'(z)| + |(Hg^-)(z)|) \log^{\alpha-1} \tfrac{2}{1-|z|} dA(z) \\ < \ & \infty, \end{aligned}$$

односно, важи $Hg \in \mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}$. На исти начин, показујемо да $Hh \in \mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}$. Такође, важи $Hf = Hg + iHh$, јер је $f = g + ih$. Следи,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} |(Hf)'(z)| \log^{\alpha-1} \tfrac{2}{1-|z|} dA(z) \\ = \ & \int_{\mathbb{D}} |(Hg)'(z) + i(Hh)'(z)| \log^{\alpha-1} \tfrac{2}{1-|z|} dA(z) \\ \leq \ & \int_{\mathbb{D}} (|(Hg)'(z)| + |(Hh)'(z)|) \log^{\alpha-1} \tfrac{2}{1-|z|} dA(z) \\ < \ & \infty. \end{aligned}$$

Самим тим је $Hf \in \mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}$, чиме је доказ завршен. ■

Нешто касније, у односу на претходно добијене резултате који говоре о дејству Хилбертове матрице на логаритамско тежинским просторима, добијамо неке сличне резултате за Либерин оператор који дејствује на поменутим просторима. Мотивација за испитивање ова два оператора на логаритамско тежинским просторима холоморфних функција био је рад [49], у којем је између осталог разматрано и дејство Либериног оператора на тим просторима.

Глава 6

Хилбертова матрица на просторима Бесова

6.1 Хилбертова матрица на простору $VMOA$

Показаћемо да ако је $0 < p \leq \infty$ и $1 < q \leq \infty$, тада оператор Хилбертове матрице H не пресликава простор Бесова $H^{p,q,1}_{1+1/p}$ у Блохов простор $\mathcal{B}$. Као последицу претходног резултата имаћемо да оператор Хилбертове матрице H не пресликава простор $VMOA$ у Блохов простор $\mathcal{B}$. Заправо, оператор Хилбертове матрице није ограничен на простору H^∞, али пресликава простор H^∞ у простор $\mathcal{B}$ (или прецизније у простор $BMOA$). Са друге стране, оператор H не пресликава простор $BMOA$ у простор $\mathcal{B}$. У овом поглављу побољшавамо претходни резултат. Наиме, показаћемо да се простор Бесова $H^{p,q,1}_{1+1/p}$, који је потпростор простора $BMOA$, осим у случају када је $p = \infty$ и $2 < q \leq \infty$, не пресликава у Блохов простор $\mathcal{B}$ са оператором Хилбертове матрице H ако је $1 < q \leq \infty$. Резултати из овог поглавља су публиковани у раду [28], који је заједнички рад М. Јевтића и аутора овог текста. Најпре, биће нам потребан следећи познат резултат о дуалности одговарајућих простора (видети [4]).

Теорема 6.1.1 ([4]) *Ако је $g \in \mathcal{B}$, тада је са*

$$\varphi_g(f) = \lim_{r\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)} r^n, \quad f \in H^{1,1,1}_1$$

дефинисан ограничен линеаран функционал на простору $H^{1,1,1}_1$ и важи

$$\|\varphi_g\| \leq C\|D^1 g\|_{\infty,\infty,1}.$$

Обрнуто, ако је $\varphi \in \left(H^{1,1,1}_1\right)'$, тада постоји јединствена функција $g \in \mathcal{B}$, таква да важи

$$\varphi(f) = \varphi_g(f) = \lim_{r\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)} r^n,$$

за све функције $f \in H^{1,1,1}_1$ и

$$\|D^1 g\|_{\infty,\infty,1} \leq C\|\varphi\|.$$

Сада смо у могућности да користећи наш претходно наведени резултат дуалности покажемо следећу теорему.

Теорема 6.1.2 ([28])
(а) *Ако је* $0 < q \leq 1$, *тада оператор* H *пресликава простор* $H^{p,q,1}_{1+1/p}$, *где је* $0 < p \leq \infty$, *у простор* $BMOA$.
(б) *Ако је* $1 < q \leq \infty$, *тада оператор* H *не пресликава простор* $H^{p,q,1}_{1+1/p}$, *при чему је* $0 < p \leq \infty$, *у простор* $\mathcal{B}$.

Доказ. (а) За оператор Хилбертове матрице H који дејствује на Хардијевом простору H^p, где је $1 \leq p$, важи

$$Hf = R_+ MgFf,$$

где је $Ff(e^{it}) = f(e^{-it})$, $M_g u = gu$ за све $u \in L^\infty(\mathbb{T})$, $g(e^{it}) = ie^{-it}(\pi - t)$ за $0 \leq t < 2\pi$ и R_+ је оператор Рисове пројекције дат са

$$R_+ u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(e^{it})}{1 - ze^{-it}} dt.$$

Како је простор $BMOA$ заправо Рисова пројекција простора $L^\infty(\mathbb{T})$, налазимо да је оператор Хилбертове матрице H ограничен оператор из простора H^∞ у простор $BMOA$.

Ако је $0 < q \leq 1$, тада важи $H^{p,q,1}_{1+1/p} \subseteq H^{\infty,1,1}_1$. У наставку, показујемо да важи $H^{\infty,1,1}_1 \subseteq \mathcal{A}$. Нека је $f \in H^{\infty,1,1}_1$ произвољно одабрана функција. Тада је

$$f(z) = \int_0^1 D^1 f(\rho z) d\rho.$$

Да би показали да $f \in \mathcal{A}$, довољно је показати да интеграл на десној страни претходне једнакости равномерно конвергира у односу на $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Међутим, ово добијамо из неједнакости

$$\left| \int_r^1 D^1 f(\rho z) d\rho \right| \leq \int_r^1 M_\infty(\rho, D^1 f) d\rho, \ \ 0 < r < 1, \ \ z \in \overline{\mathbb{D}},$$

и чињенице да је $\int_0^1 M_\infty(\rho, D^1 f) d\rho < \infty$ (видети [20, Теорема 4, стр. 754]). Према томе, важи $H^{p,q,1}_{1+1/p} \subseteq \mathcal{A}$ за све $0 < q \leq 1$. Самим тим, ако је $0 < q \leq 1$, тада важи $H : H^{p,q,1}_{1+1/p} \to BMOA$.

(б) Ако је $0 < p_1 < p_2 \leq \infty$, тада важи $H^{p_1,q,1}_{1+1/p_1} \subseteq H^{p_2,q,1}_{1+1/p_2}$. Претходну чињеницу користићемо у наставку.

Случај $q = \infty$. У [38] је показано да ако $f \in \mathcal{B}$, тада важи

$$\left|(Hf)'(z)\right| (1 - |z|) = O\left(\log \frac{2}{1 - |z|}\right), \ \ z \in \mathbb{D}.$$

Претходна оцена не може бити побољшана као што показује функција $g(z) = \log \frac{2}{1-z}$. Покажимо да сада важи $g \in H^{p,\infty,1}_{1+1/p}$. Како је

$$\left| g^{(n)}(z) \right| \leq \frac{C}{|1 - z|^n}, \ \ n \geq 1,$$

то за $\frac{1}{n} < p \leq \frac{1}{n-1}$, $n \geq 2$, закључујемо да важи

$$\|g^{(n)}\|_{p,\infty,n-1/p} \leq \sup_{0 \leq r < 1} (1 - r)^{n-1/p} \left(\int_0^{2\pi} \frac{C dt}{|1 - re^{it}|^{np}} \right)^{1/p} \leq C.$$

Осим тога, како је $H^{p,\infty,1}_{1+1/p} \subseteq H^{\infty,\infty,1}_1 = \mathcal{B}$, то добијамо да оператор H не пресликава простор $H^{p,\infty,1}_{1+1/p}$ у простор $\mathcal{B}$ и следећа оцена

$$\left|(Hf)'(z)\right|(1-|z|) = O\left(\log\frac{2}{1-|z|}\right), \quad z \in \mathbb{D}, \quad f \in H^{p,\infty,1}_{1+1/p}$$

не може бити побољшана.

Случај $1 < q < \infty$. Можемо претпоставити да је $\frac{1}{n} < p \leq \frac{1}{n-1}$, где је $n \geqslant 2$ цео број. Нека је

$$h(z) = \left(\log\frac{2}{1-z}\right)^{\gamma-1},$$

где је $1 < \gamma < 2$ и $q(2-\gamma) > 1$. Показаћемо да тада важи $h \in H^{p,q,1}_{1+1/p}$ и $Hh \notin \mathcal{B}$. Прво, ако $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, тада је $\|D^{1+1/p}f\|_{p,q,1} < \infty$ ако и само ако је $\|f^{(n)}\|_{p,q,n-1/p} < \infty$. Према томе, довољно је доказати да тада важи $\|h^{(n)}\|_{p,q,n-1/p} < \infty$. Није тешко видети да је

$$\left|h^{(n)}(z)\right| \leq \frac{C}{|1-z|^n\left(\log\frac{2}{1-|z|}\right)^{2-\gamma}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Следи

$$\begin{aligned} ||h^{(n)}||^q_{p,q,n-1/p} &\leq C\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\frac{dt}{|1-re^{it}|^{np}\left(\log\frac{2}{1-r}\right)^{(2-\gamma)p}}\right)^{q/p}(1-r)^{q(n-1/p)-1}dr \\ &\leq C\int_0^1\frac{dr}{(1-r)\left(\log\frac{2}{1-r}\right)^{(2-\gamma)q}} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

У претходним разматрањима смо користили да важи

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{|1-re^{it}|^\alpha} = O\left(\frac{1}{(1-r)^{\alpha-1}}\right), \quad \alpha > 1.$$

Даље, нека је

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)\left(\log\frac{2}{1-z}\right)^\gamma}.$$

Слично претходним разматрањима показује се да тада важи $f \in H^{1,1,1}_1$ (видети [47, 51]). Са друге стране, важи

$$\begin{aligned} \lim_{r\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n)\overline{\widehat{Hh}(n)}r^n &= \lim_{r\to1^-}\int_0^1 f(rt)\overline{h(t)}dt \\ &= \lim_{r\to1^-}\int_0^1\frac{1}{(1-rt)\left(\log\frac{2}{1-rt}\right)^\gamma}\left(\log\frac{2}{1-t}\right)^{\gamma-1}dt \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Коначно, на основу Теореме 6.1.1 важи $Hh \notin \mathcal{B}$. ■

Последица претходне теореме јесте понашање оператора Хилбертове матрице H на простору $VMOA$. Заправо, испоставља се да Хилбертова матрице не пресликава простор $VMOA$ у Блохов простор $\mathcal{B}$.

Последица 6.1.3 *Оператор Хилбертове матрице H не пресликава простор $VMOA$ у Блохов простор $\mathcal{B}$.*

Доказ. Користећи [47, Теорема 6.8, стр. 186], налазимо да је $H_1^{\infty,2,1} \subseteq VMOA$. Са друге стране, важи $H_{1+1/p}^{p,q,1} \subseteq H_1^{\infty,2,1}$ за све $0 < q \leq 2$. Применом Теореме 6.1.2, добијамо да оператор Хилбертове матрице H не пресликава простор $VMOA$ у Блохов простор $\mathcal{B}$. Тиме је доказ завршен. ■

Напомена 6.1.4 У [38] је показано да ако је $f \in H_{1+1/p}^{p,p,1}$, где је $1 < p < \infty$, тада важи

$$\left|(Hf)'(z)\right|(1-|z|) = O\left(\left(\log\frac{2}{1-|z|}\right)^{\frac{1}{p'}}\right), \;\; z \in \mathbb{D}, \;\; p + p' = pp'.$$

Приметимо да се применом Теореме 6.1.2, може закључити да се претходна оцена не може заменити са оценом

$$\left|(Hf)'(z)\right|(1-|z|) = O(1), \;\; z \in \mathbb{D},$$

за сваку функцију $f \in H_{1+1/p}^{p,p,1}$, где је $1 < p < \infty$. ♢

6.2 Хилбертова матрица на потпросторима простора H^1

Знамо да оператор Хилбертове матрице H није ограничен на простору H^1. Ипак, показаћемо да оператор Хилбертове матрице H пресликава простор H^1 у простор $H^{p,\infty,1/p'}$, где је $1 < p < \infty$ и $p + p' = pp'$, али не у простор $H^{p,q,1/p'}$ за било које $0 < q < \infty$. Приметимо да важи $H^1 \subset H^{p,q,1/p'} \subset H^{p,\infty,1/p'}$ за све $1 < p, q < \infty$. Користићемо следећу теорему (видети [47]).

Теорема 6.2.1 ([47]) *Нека је $1 < p, q < \infty$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада је дуал простора $\mathcal{B}_\alpha^{p,q}$ изоморфан простору $\mathcal{B}_{-\alpha}^{p',q'}$, $p + p' = pp'$, $q + q' = qq'$, у односу на спаривање*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}, \;\; f \in \mathcal{B}_\alpha^{p,q} \;\; g \in \mathcal{B}_{-\alpha}^{p',q'},$$

при чему претходни ред конвергира.

Сада смо у могућности да докажемо претходно најављени резултат користећи између осталог и претходно наведену теорему.

Теорема 6.2.2 ([28]) *Нека је $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Тада важи*
(а) $H : H^1 \to H^{p,\infty,1/p'}$.
(б) *H не пресликава простор $H_1^{1,1,1}$ у простор $H^{p,q,1/p'}$ за било које $q \in (0, \infty)$.*

Доказ. (а) Нека је $f \in H^1$ произвољно одабрана функција. Тада је $Hf(z) = \int_0^1 \frac{f(r)}{1-rz}dr$ за све $z \in \mathbb{D}$. Користећи интегралну неједнакост Минковског и неједнакост Фејер-Риса, налазимо да важи

$$\begin{aligned} M_p(\rho, Hf) &\leq \int_0^1 |f(r)|dr \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{|1-r\rho e^{it}|^p}\right)^{1/p} \\ &\leq ||f||_1 \frac{C}{(1-\rho)^{1/p'}}. \end{aligned}$$

(б) Како важи $H^{p,q_1,1/p'} \subseteq H^{p,q_2,1/p'}$ за $0 < q_1 < q_2 < \infty$, то можемо претпоставити да је $1 < q < \infty$. Као и обично, означимо $q + q' = qq'$. Нека је $f \in H^{p',q',1}_{1+1/p'}$ и претпоставимо да $Hg \in H^{p,q,1/p'}$ за свако $g \in H^{1,1,1}_1$. Тада за свако $g \in H^{1,1,1}_1$ ред

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{Hg}(k)\overline{\widehat{f}(k)}$$

конвергира на основу Теореме 6.2.1 и самим тим је

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{Hg}(k)\overline{\widehat{f}(k)} &= \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{Hg}(k)\overline{\widehat{f}(k)}r^k \\ &= \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\widehat{g}(n)}{k+n+1}\overline{\widehat{f}(k)}r^k. \end{aligned}$$

Како важи $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|\widehat{g}(n)|}{n+k+1} \le \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|\widehat{g}(n)|}{n+1} < \infty$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\widehat{f}(k)|r^k < \infty$, налазимо да је

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{g}(n)}{k+n+1}\overline{\widehat{f}(k)}r^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{\widehat{f}(k)}r^k}{n+k+1}\widehat{g}(n),$$

за све $r \in (0,1)$. Према томе,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{Hg}(k)\overline{\widehat{f}(k)} &= \lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{\overline{\widehat{f}(k)}r^k}{n+k+1}\widehat{g}(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{\overline{\widehat{f}(k)}}{n+k+1}\widehat{g}(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\widehat{Hf}(n)}\widehat{g}(n). \end{aligned}$$

Применом Теореме 6.1.1, закључујемо да важи $Hf \in \mathcal{B}$. Ово је у контрадикцији са Теоремом 6.1.2 (б). ■

Напомена 6.2.3 (1) На основу [38, Последица 2.2] важи

$$H : H^1 \to H^{p,q,1/p'+\varepsilon},$$

где је $1 < p, q < \infty$ и $\varepsilon > 0$. Како важи $H^{p,q,1/p'+\varepsilon} \supseteq H^{p,q,1/p'}$, то Теорема 6.2.2 (б) показује да

$$H : H^1 \to H^{p,q,1/p'+\varepsilon}$$

не важи када је $\varepsilon = 0$.
(2) Важи $H^{1,1,1}_1 \subset H^1 \subset H^{1,2,1}_1 \subset H^{p,2,1/p'}$, где је $1 < p < \infty$. Према томе, као последицу Теореме 6.2.2 имамо да оператор Хилбертове матрице H не пресликава простор $H^{1,1,1}_1$ у простор $H^{1,2,1}_1$. Са друге стране, до истог закључка можемо доћи уколико користимо чињеницу да је дуал простора $H^{1,2,1}_1$ изоморфан простору $H^{\infty,2,1}_1$ (видети [1]) и Теорему 6.1.2. ♢

Напомена 6.2.4 Један од првих резултата о понашању Хилбертове матрице H на простору H^1 добијен је у раду Диамантопулоса и Сискакиса ([13]), где је показано да је H неограничен оператор на простору H^1. Са друге стране, у [38] (Лануча, Новак, Павловић), је показано да оператор Хилбертове матрице H дејствује као ограничен оператор из простора H^1 у простор H^p за све $0 < p < 1$. Као што је у претходном наведено, у раду [28] (Јевтић, Карапетровић), показано је да важи $H : H^1 \to H^{p,\infty,1/p'}$ за све $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Коначно, у раду [9] (Сима), доказано је да оператор Хилбертове матрице H пресликава простор H^1 у простор Кошијевих трансформација мера на јединичној кружници $\mathbb{T}$. Осим тога, у том случају је показана и инјективност оператора Хилбертове матрице H. За нешто више информација о тим резултатима и њиховим доказима погледати рад [9]. $\diamondsuit$

Са друге стране, са овом главом завршавамо испитивање оператора Хилбертове матрице на просторима холоморфних функција на јединичном диску $\mathbb{D}$. У наредним главама пажњу посвећујемо Либерином оператору и његовом дејству на нашим горе поменутим просторима.

Глава 7

Либерин оператор на просторима мешовите норме

7.1 Дефиниција Либериног оператора

Као што смо нагласили у уводном делу $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ означава простор свих холоморфних функција у јединичном диску $\mathbb{D}$ у комплексној равни који је снабдевен са топологијом индукованом равномерном конвергенцијом на компактним подскуповима јединичног диска $\mathbb{D}$. Осим тога, тада се дуал простора $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ поистовећује са простором $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$, при чему $g \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ значи да је функција g холоморфна у некој околини затвореног диска $\overline{\mathbb{D}}$ (која зависи од избора функције g). Одговарајуће дуално упаривање је дато на следећи начин

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)},$$

где је $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ и $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{g}(n) z^n \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$.

Тада дефинишемо Либерин оператор на следећи начин

$$\overline{\mathcal{L}}g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\widehat{g}(k)}{k+1} \right) z^n = \int_0^1 g(t + (1-t)z)dt,$$

при чему је $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{g}(n) z^n \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ и осим тога, у том случају није тешко проверити да овај оператор пресликава простор $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ у простор $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$.

Такође, означавамо са $\mathcal{L}$ оператор

$$\mathcal{L}g(z) = \int_0^1 g(t + (1-t)z)dt,$$

где је $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{g}(n) z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, увек када претходно наведени интеграл конвергира равномерно на компактним подскуповима јединичног диска $\mathbb{D}$. Заправо, равномерна конвергенција значи да је гранична вредност

$$\lim_{r \to 1^-} \int_0^r g(t + (1-t)z)dt$$

равномерна у односу на z на било којем компактном подскупу јединичног диска $\mathbb{D}$. Претходна претпоставка гарантује да је функција $\mathcal{L}g$ холоморфна у јединичном диску $\mathbb{D}$. Такође, оператор $\mathcal{L}$ зовемо Либерин оператор, будући да важи једнакост $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$ у простору $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$.

Наведимо и кратак историјат који се односи на увођење Либериног оператора. Први пут Либерин оператор јесте проучаван у раду [37]. Заправо, тада је уведен оператор

$$g(z) \mapsto \frac{2}{z}\int_0^z g(\zeta)d\zeta$$

и показан је његов значај у теорији једновалентних функција. Посебно, показано је да претходни оператор пресликава једну посебну класу једновалентних функција у себе. Након тог рада, публиковано је много радова на тему Либериног оператора. Уопштени Либерин оператор

$$\Lambda_a g(z) = \frac{1}{a-z}\int_z^a g(\zeta)d\zeta, \text{ где је } a \in \overline{\mathbb{D}},$$

уведен је и проучаван са тачке гледишта функционалне анализе у радовима [57, 58], а затим и у раду [11]. Уколико је $a \in \mathbb{D}$, тада је оператор Λ_a дефинисан на простору $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, а самим тим и на класичним просторима Хардија, Бергмана и Бесова и може се показати да има скоро иста линеарна тополошка својства као и оператор

$$g(z) \mapsto \int_0^z g(\zeta)d\zeta.$$

Према томе, проучавање једног таквог оператора није интересантно са тачке гледишта функционалне анализе. Стога, од већег интереса јесте разматарње случаја $a \in \partial\mathbb{D}$. Тада можемо претпоставити да је $a = 1$, односно посматрамо оператор

$$\Lambda_1 g(z) = \frac{1}{1-z}\int_z^1 g(\zeta)d\zeta.$$

Заправо, није тешко проверити да је оператор Λ_1 добро дефинисан на простору $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ и да пресликава простор $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ у $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$, при чему важи

$$\Lambda_1 g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\widehat{g}(k)}{k+1}\right)z^n = \int_0^1 g(t+(1-t)z)dt,$$

за све $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{g}(n)z^n \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$. Према томе, оператор Λ_1, јесте заправо наш претходно уведени Либерин оператор $\overline{\mathcal{L}}$.

Након овог увода који се односи на Либерин оператор, прелазимо на изучавање неких његових својстава. Заправо, интересује нас на којим просторима мешовите норме $H_\nu^{p,q,\alpha}$ је Либерин оператор ограничен. Осим тога, за више информација о Либерином оператору и за нека друга његова својства видети [44] (Новак, Павловић).

7.2 Либерин оператор на просторима $H_\nu^{p,q,\alpha}$

Основна сврха овог поглавља јесте да покажемо да је Либерин оператор $\mathcal{L}$ ограничен на простору $H_\nu^{p,q,\alpha}$ ако и само ако важи $\kappa_{p,\alpha,\nu} = \nu - \alpha - \frac{1}{p} + 1 > 0$. Доказ тог тврђења публикован је у раду [29] (Јевтић, Карапетровић), при чему је као главна мотивација послужио рад [50] (Павловић), у којем је између осталог доказано да наведено тврђење важи у случају када је $p \geq 1$ и када ν пролази скупом ненегативних целих бројева. Најпре, наведимо нека помоћна тврђења која ће нам бити од користи у наставку. Користићемо ознаке и резултате наведене у поглављу 4.1. Прво, покажимо следећу лему (за више информација видети [48]).

Лема 7.2.1 *Нека је n позитиван цео број,*

$$P(z) = \sum_{k=n}^{4n} \lambda_k z^k,$$

при чему је $\{\lambda_k\}$ низ комплексних бројева и нека је

$$Q(z) = \sum_{k=n}^{4n} \log^\delta(k+1)\lambda_k z^k, \text{ где је } \delta \in \mathbb{R}.$$

Тада постоји апсолутна константа C која зависи само од δ, таква да важи

$$C^{-1}\|Q\|_p \le \log^\delta(n+1)\|P\|_p \le C\|Q\|_p, \text{ где је } 0 < p < \infty.$$

Доказ. У доказу користимо следеће познате резултате (за више информација и за доказе наведених тврђења видети [31, 48]).

(1) *Нека је $f(z) = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k z^k$, $0 \le m \le n$. Тада важи*

$$r^n\|f\|_p \le M_p(r,f) \le r^m\|f\|_p, \ 0 < r < 1.$$

(2) *Ако је $f \in H^p$ и $g \in H^q$, где је $0 < p \le 1$ и $p \le q$, тада важи*

$$M_q(r, f * g) \le (1-r)^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_p\|g\|_q, \ 0 < r < 1.$$

(3) *Нека је ψ функција класе C^∞ са носачем у $[a,b]$, тако да је $b-a \ge 1$ и нека је $p > 0$. Тада за сваки цео број N, $Np > 1$, постоји константа $C = C_{p,N}$, таква да важи*

$$\|W_\psi\|_p \le C\|\psi^{(N)}\|_\infty (b-a)^{N+1-\frac{1}{p}},$$

где је $W_\psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(k) z^k$.

Најпре, претпоставимо да је $0 < p \le 1$. Нека је φ функција класе C^∞ са носачем у интервалу $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$, таква да је $\varphi(x) = 1$ за $x \in [1,4]$ и означимо $\lambda_k = 0$ за све $k \notin \{n, n+1, \ldots, 4n\}$. Посматрајмо функцију $\psi(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right)\log^\delta(x+1)$. Тада за Q можемо писати

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\log^\delta(k+1)\lambda_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\psi(k)\lambda_k z^k.$$

Такође, приметимо да је $\operatorname{supp}\psi \subset \left(\frac{n}{2}, 5n\right)$. Стога, важи

$$\begin{aligned}
\|Q\|_p = \|W_\psi * P\|_p &\le Cn^{\frac{1}{p}-1}\|W_\psi\|_p\|P\|_p \\
&\le Cn^{\frac{1}{p}-1}\|\psi^{(N)}\|_\infty n^{N+1-\frac{1}{p}}\|P\|_p \\
&= Cn^N\|\psi^{(N)}\|_\infty\|P\|_p.
\end{aligned}$$

У циљу процене норме $\|\psi^{(N)}\|_\infty$, користићемо Лајбницово правило извода и следећу лако доказиву неједнакост

$$\left|\left(\log^\delta(x+1)\right)^{(j)}\right| \le C\frac{\log^\delta(n+1)}{n^j}, \ \frac{n}{2} \le x \le 5n, \ j = 0, 1, \ldots,$$

одакле добијамо

$$\begin{aligned} \left|\psi^{(N)}(x)\right| &\leq C\sum_{j=0}^{N}\left|\varphi^{(N-j)}\left(\tfrac{x}{n}\right)\right| n^{j-N}\frac{\log^{\delta}(n+1)}{n^{j}} \\ &\leq Cn^{-N}\log^{\delta}(n+1), \end{aligned}$$

при чему је константа C независна од n. Према томе, важи

$$\|Q\|_p \leq C\log^{\delta}(n+1)\|P\|_p.$$

У циљу доказивања неједнакости у другом смеру, запишимо P на следећи начин

$$P(z) = \sum_{k=n}^{4n}\log^{-\delta}(k+1)\xi_k z^k,$$

где је $\xi_k = \lambda_k\log^{\delta}(k+1)$. Поступајући као у горе наведеном случају, налазимо да важи

$$\|P\|_p \leq C\log^{-\delta}(n+1)\|Q\|_p,$$

чиме је доказ комплетиран у случају када је $0 < p \leq 1$.
Ако је $p > 1$, тада користимо неједнакост

$$\|Q\|_p = \|W_\psi * P\|_p \leq \|W_\psi\|_1\|P\|_p$$

и

$$\|W_\psi\|_1 \leq C\log^{\delta}(n+1) \ \text{(претходни случај } p=1\text{)},$$

чиме завршавамо доказ леме. ■

У наставку користимо следећи познат резултат. За доказ тог тврђења видети [16].

Лема 7.2.2
(а) *Важи* $H_\nu^{p,q,\alpha} \subseteq h_\nu^{p,\infty,\alpha} \subseteq H_\nu^{p,\infty,\alpha}$ *за све* $0 < q < \infty$.
(б) *Нека је* $0 < p < u \leq \infty$ *и* $\beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{u} + \alpha$. *Тада је* $H_\nu^{p,q,\alpha} \subsetneq H_\nu^{u,q,\beta}$.

Осим тога, биће нам потребна следећа тврђења која су доказана у [50].

Лема 7.2.3 *Ако су* a *и* b *позитивни реални бројеви, такви да је* $a + b \leq 1$ *и* $g \in H^p$, *где је* $0 < p \leq \infty$, *тада важи*

$$\left(\int_0^{2\pi}\left|g(a+be^{it})\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{2a+b}{b}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{2\pi}\left|g((a+b)e^{it})\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лема 7.2.4 *Нека је* $0 < q < 1$, $\beta > 0$ *и нека је* $u : (0,1) \to [0,\infty)$ *неопадајућа функција. Тада је*

$$\left(\int_r^1 u(s)(1-s)^{\beta-1}ds\right)^q \leq C\int_r^1 u^q(s)(1-s)^{q\beta-1}ds,$$

при чему је C *константа која не зависи од* u.

Лема 7.2.5 *Нека је* $1 < q < \infty$, $1 + \delta > \varepsilon > 0$ *и нека је* $u \geq 0$ *мерљива функција дефинисана на интервалу* $(r, 1)$. *Тада важи*

$$\left(\int_r^1 u(s)(1-s)^{\delta}ds\right)^q \leq C(1-r)^{\varepsilon q}\int_r^1 u^q(s)(1-s)^{(1+\delta-\varepsilon)q-1}ds.$$

Поред тога, покажимо да важе следећа два корисна става, које ћемо користити у доказу главног резултата у овој глави. Међутим, најпре, подсетимо се да простор свих аналитичких полинома $\mathcal{P}$ није густ у простору $H^{p,\infty,\alpha}$. Наиме, затворење простора полинома $\mathcal{P}$ у простору $H^{p,\infty,\alpha}$ јесте простор

$$h^{p,\infty,\alpha} = \left\{ f \in H^{p,\infty,\alpha} : M_p(r,f) = o\left((1-r)^{-\alpha}\right) \text{ када } r \to 1 \right\}.$$

Став 7.2.6 *Нека је* $0 < p \leq \infty$.
(а) *Ако је* $\kappa_{p,\alpha,\nu} = \nu - \alpha - \frac{1}{p} + 1 \leq 0$, *тада се оператор* $\overline{\mathcal{L}}$ *не може проширити до ограниченог оператора из простора* $h_\nu^{p,\infty,\alpha}$ *у простор* $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ *и самим тим не може се проширити до ограниченог оператора из простора* $H_\nu^{p,\infty,\alpha}$ *у простор* $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.
(б) *Ако је* $\kappa_{p.\alpha,\nu} < 0$ *и* $0 < q < \infty$, *тада се оператор* $\overline{\mathcal{L}}$ *не може проширити до ограниченог оператора из простора* $H_\nu^{p,q,\alpha}$ *у простор* $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Доказ. (а) Нека је $f_\rho(z) = \frac{1}{1-\rho z}$ и нека је n позитиван цео број, такав да је $n > \alpha + \frac{1}{p} - 1$.

Ако је $0 < p < \infty$, имамо да важи

$$M_p(r, f_\rho^{(n)}) \leq C \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - r\rho e^{i\theta}|^{(n+1)p}} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{(1-r\rho)^{n+1-\frac{1}{p}}}.$$

Према томе, добијамо

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} (1-r)^{\alpha+n-\nu} M_p(r, f_\rho^{(n)}) \leq C \sup_{0 \leqslant r < 1} \frac{(1-r)^{\alpha+n-\nu}}{(1-r\rho)^{n+1-\frac{1}{p}}} \leqslant C,$$

јер је $\alpha - \nu + \frac{1}{p} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \kappa_{p,\alpha,\nu} = \nu - \alpha + \frac{1}{p} + 1 \leq 0$.

Ако је $p = \infty$, тада важи

$$(1-r)^{\alpha+n-\nu} M_\infty(r, f_\rho^{(n)}) \leq C \frac{(1-r)^{\alpha+n-\nu}}{(1-r\rho)^{n+1}} \leq C.$$

На основу претходног закључујемо да је скуп $\{f_\rho : 0 < \rho < 1\}$ ограничен у простору $h_\nu^{p,\infty,\alpha}$. Самим тим, уколико би оператор $\overline{\mathcal{L}}$ имао проширење до ограниченог оператора из простора $h_\nu^{p,\infty,\alpha}$ у простор $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, то би значило да је скуп $\{\overline{\mathcal{L}} f_\rho(0)\}$ ограничен, јер је функционал $g \to g(0)$ непрекидан на простору $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Међутим, важи

$$\overline{\mathcal{L}} f_\rho(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n+1} \to \infty \text{ када } \rho \to 1,$$

што представља контрадикцију.

(б) Нека је $\kappa_{p,\alpha,\nu} < 0$ и $0 < q < \infty$. Изаберимо $0 < \beta < \alpha$, тако да је $\kappa_{p,\beta,\nu} = 0$. Тада имамо да важи $H_\nu^{p,\infty,\beta} \subseteq H_\nu^{p,q,\alpha}$. Сада на основу претходно доказаног дела (а), оператор $\overline{\mathcal{L}}$ не може бити проширен до ограниченог оператора из простора $H_\nu^{p,\infty,\beta}$ у простор $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ и самим тим, не може бити проширен до ограниченог оператора из простора $H_\nu^{p,q,\alpha}$ у простор $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. ■

Став 7.2.7 *Нека је* $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$ *и* $\kappa_{p,\alpha,\nu} = 0$. *Тада функција*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\log^\varepsilon(n+2)}, \quad \text{где је } \max\left\{\frac{1}{q}, 1\right\} < \varepsilon \leq 1 + \frac{1}{q},$$

припада простору $H_\nu^{p,q,\alpha}$. *Осим тога, функција* $\mathcal{L}f$ *је добро дефинисана, али* $\mathcal{L}f$ *не припада простору* $H_\nu^{p,q,\alpha}$.

Доказ. Најпре, покажимо да $f \in H_{\nu}^{p,q,\alpha}$. Користећи Лему 4.1.5, Лему 7.2.1 и својства низа полинома $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ конструисаног у поглављу 4.1 , налазимо да важи

$$\begin{aligned}\|D^{\nu}f\|_{p,q,\alpha}^{q} &\asymp \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(\nu-\alpha)q}\|V_n * f\|_p^q \\ &\asymp \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(\nu-\alpha)q}\left(\log^{-\varepsilon}(2^{n+1})\right)^q\|V_n\|_p^q \\ &\asymp \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(\nu-\alpha)q}(n+1)^{-\varepsilon q}2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)q} \\ &\asymp \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-\varepsilon q} \\ &< \infty,\end{aligned}$$

јер је $\varepsilon q > 1$. Према томе, важи $f \in H_{\nu}^{p,q,\alpha}$.

Са друге стране, покажимо да важи $\mathcal{L}f \notin H_{\nu}^{p,q,\alpha}$. На основу Леме 7.2.2, налазимо да је

$$H_{\nu}^{p,q,\alpha} \subseteq H_{\nu}^{\infty,q,\beta}, \text{ где је } \beta = \alpha + \frac{1}{p},$$

и самим тим довољно је показати да важи $\mathcal{L}f \notin H_{\nu}^{\infty,q,\beta}$.

Нека је n позитиван цео број, такав да је $n > \nu$ и $\gamma = \beta + n - \nu$. Тада важи $H_{\nu}^{\infty,q,\beta} = H_{n}^{\infty,q,\gamma}$. Покажимо да важи $\mathcal{L}f \notin H_{n}^{\infty,q,\gamma}$ и имаћемо да је $\mathcal{L}f \notin H_{\nu}^{p,q,\alpha}$. Приметимо да је функција $\mathcal{L}f$ добро дефинисана, јер је $\varepsilon > 1$, што повлачи

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\log^{\varepsilon}(k+2)} < \infty.$$

Такође, приметимо да је $\kappa_{\infty,\gamma,n} = 0$. Како су коефицијенти c_k функције $(\mathcal{L}f)^{(n)}$ ненегативни, видимо да функција $\mathcal{L}f$ припада простору $H_{n}^{\infty,q,\gamma}$ ако и само ако важи

$$\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_k r^k\right)^q(1-r)^{q\gamma-1}dr < \infty,$$

што је еквивалентно са

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\gamma q}\left(\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1}c_j\right)^q < \infty.$$

Како важи $c_j \asymp (j+1)^n b_j$ $(j \to \infty)$, то је претходна неједнакост еквивалентна са

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k(\gamma-n)q}\left(\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1}b_j\right)^q < \infty,$$

где су b_j коефицијенти функције $\mathcal{L}f$. Осим тога, како $b_j \downarrow 0$ $(j \to \infty)$, добијамо одговарајући еквивалентан услов

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k(\gamma-n-1)q}b_{2^k}^q < \infty.$$

Међутим, претходни услов није задовољен, јер је $n - \gamma + 1 = 0$ и

$$b_{2^k} = \sum_{j=2^k}^{\infty}\frac{1}{(j+1)\log^{\varepsilon}(j+2)} \asymp (k+1)^{1-\varepsilon}$$

и самим тим важи

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{(1-\varepsilon)q} = \infty,$$

јер је $(\varepsilon - 1)q \leq 1$. ■

Коначно, сада смо у могућности да докажемо основни резултат овог поглавља, користећи претходно добијене резултате.

Теорема 7.2.8 ([29]) *Следећи искази су еквивалентни:*
(а) *Оператор* $\mathcal{L}$ *дејствује као ограничен оператор из простора* $H_\nu^{p,q,\alpha}$ *у* $H_\nu^{p,q,\alpha}$.
(б) *Важи* $\kappa_{p,\alpha,\nu} := \nu - \alpha - \frac{1}{p} + 1 > 0$.

Доказ. Најпре, покажимо да важи импликација (б) $\Rightarrow$ (а). Ова импликација јесте доказана у [50] за све $1 \leq p \leq \infty$ и све ненегативне целе бројеве ν. Ми ћемо показати да она важи за све $0 < p < 1$ и све $\nu \in \mathbb{R}$. Осим тога, наш доказ показује тачност наведене импликације и у случају када је $1 \leq p \leq \infty$ и $\nu \in \mathbb{R}$.

Нека је $\nu > \alpha + \frac{1}{p} - 1$, $0 < p < 1$ и $g \in H_\nu^{p,q,\alpha}$. Такође, нека је n позитиван цео број, такав да је $n - 1 < \nu \leq n$. Познато је да важи $\|D^\nu g\|_{p,q,\alpha} < \infty$ ако и само ако је $\|g^{(n)}\|_{p,q,\beta} < \infty$, где је $\beta = \alpha + n - \nu > 0$. Осим тога, иста еквиваленција важи и за функцију $\mathcal{L}g$. Према томе, довољно је доказати да важи $\|(\mathcal{L}g)^{(n)}\|_{p,q,\beta} < \infty$.

Нека је $r_k = 1 - \frac{1}{2^k}$ за све $k \geq 0$. Како важи

$$(\mathcal{L}g)^{(n)}(z) = \int_0^1 (1-t)^n g^{(n)}(t + (1-t)z)dt,$$

то добијамо да је

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \left|(\mathcal{L}g)^{(n)}(re^{i\theta})\right|^p d\theta &\leq \int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_0^1 (1-t)^n |g^{(n)}(t+(1-t)re^{i\theta})|dt\right)^p \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \left(\sum_{k=0}^{\infty}\int_{r_k}^{r_{k+1}} (1-t)^n |g^{(n)}(t+(1-t)re^{i\theta})|dt\right)^p \qquad (7.2.1)\\
&\leq C\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-knp-kp}\int_0^{2\pi} |g^{(n)}(t_k+(1-t_k)re^{i\theta})|^p d\theta,
\end{aligned}$$

при чему је $t_k \in [r_k, r_{k+1}]$. Користећи Лему 7.2.3, налазимо да је

$$\int_0^{2\pi} |g^{(n)}(t_k+(1-t_k)re^{i\theta})|^p d\theta \leq \frac{2t_k + (1-t_k)r}{(1-t_k)r}\int_0^{2\pi} |g^{(n)}((t_k+(1-t_k)r)e^{i\theta})|^p d\theta. \quad (7.2.2)$$

Користећи (7.2.1) и (7.2.2), добијамо да је

$$rM_p^p(r, (\mathcal{L}g)^{(n)}) \leq C\int_0^1 (1-t)^{np+p-2}M_p^p(t+(1-t)r, g^{(n)})dt. \quad (7.2.3)$$

Увођењем смене $t + (1-t)r = s$, следи

$$rM_p^p(r, (\mathcal{L}g)^{(n)}) \leq C(1-r)^{-np-p+1}\int_r^1 (1-s)^{np+p-2}M_p^p(s, g^{(n)})ds. \quad (7.2.4)$$

Случај $\mathbf{0 < q \leq p < 1}$**.** На основу Леме 7.2.4 и на основу (7.2.4), добијамо

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{L}g)^{(n)}\|_{p,q,\beta}^q &\asymp \int_0^1 r^{\frac{q}{p}}(1-r)^{q\beta-1}M_p^q(r, (\mathcal{L}g)^{(n)})dr \\
&\leq C\int_0^1 (1-r)^{q\beta-1-nq-q+\frac{q}{p}}\left(\int_r^1 (1-s)^{np+p-2}M_p^p(s, g^{(n)})ds\right)^{\frac{q}{p}}dr \\
&\leq C\int_0^1 (1-r)^{q\beta-1-nq-q+\frac{q}{p}}\int_r^1 (1-s)^{nq+q-\frac{q}{p}-1}M_p^q(s, g^{(n)})dsdr \qquad (7.2.5)\\
&= C\int_0^1 (1-s)^{nq+q-\frac{q}{p}-1}M_p^q(s, g^{(n)})ds\int_0^s (1-r)^{q\beta-1-nq-q+\frac{q}{p}}dr \\
&\leq C\int_0^1 (1-s)^{q\beta-1}M_p^q(s, g^{(n)})ds \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

У претходном смо користили теорему Фубинија и чињеницу да је $\nu > \alpha + \frac{1}{p} - 1$.

Случај $p \leq q < \infty$. У овом случају користимо (7.2.4) и Лему 7.2.5. Изаберимо $\varepsilon > 0$, тако да је $\nu > \alpha + \frac{1}{p} - 1 + \frac{\varepsilon}{p}$ и налазимо да важи

$$\begin{array}{ll} & \int_0^1 r^{\frac{q}{p}}(1-r)^{q\beta-1}M_p^q(r,(\mathcal{L}g)^{(n)})dr \\ \leq & C\int_0^1(1-r)^{q\beta-1-nq-q+\frac{q}{p}}(\int_r^1(1-s)^{np+p-2}M_p^p(s,g^{(n)})ds)^{\frac{q}{p}}dr \\ \leq & C\int_0^1(1-r)^{q\beta-1-nq-q+\frac{q}{p}+\frac{\varepsilon q}{p}}dr\int_r^1(1-s)^{(1+np+p-2-\varepsilon)\frac{q}{p}-1}M_p^q(s,g^{(n)})ds \\ = & C\int_0^1(1-s)^{nq+q-\frac{q}{p}-\frac{\varepsilon q}{p}-1}M_p^q(s,g^{(n)})ds\int_0^s(1-r)^{q\beta-1-nq-q+\frac{q}{p}+\frac{\varepsilon q}{p}}dr \\ \leq & C\int_0^1(1-s)^{q\beta-1}M_p^q(s,g^{(n)})ds \\ < & \infty. \end{array} \tag{7.2.6}$$

Случај $q = \infty$. Ако је $\sup\limits_{0\leq r<1}(1-r)^{\beta p}M_p^p(r,g^{(n)}) < \infty$, тада користећи (7.2.4), добијамо да је

$$\begin{array}{ll} & \sup\limits_{0\leqslant r<1}(1-r)^{\beta p}M_p^p(r,(\mathcal{L}g)^{(n)}) \\ \leq & C\sup\limits_{0\leqslant r<1}(1-r)^{\beta p-np-p+1}\int_r^1(1-s)^{np+p-2}M_p^p(s,g^{(n)})ds \\ \leq & C\sup\limits_{0\leqslant r<1}(1-r)^{\beta p-np-p+1}\int_r^1(1-s)^{-\beta p+np+p-2}ds \\ \leq & C. \end{array} \tag{7.2.7}$$

Финално, импликација (б) $\Rightarrow$ (а), у случају $0 < p < 1$, следи из (7.2.5), (7.2.6) и (7.2.7).

Са друге стране, докажимо и тачност импликације (а) $\Rightarrow$ (б). Наиме, довољно је показати да исказ (а) није тачан у следећа три случаја:

$$q = \infty,\ \ \nu - \alpha - \frac{1}{p} + 1 \leq 0; \tag{7.2.8}$$

$$0 < q < \infty,\ \ \nu - \alpha - \frac{1}{p} + 1 < 0; \tag{7.2.9}$$

$$0 < q < \infty,\ \ \nu - \alpha - \frac{1}{p} + 1 = 0. \tag{7.2.10}$$

Став 7.2.6 (а) показује да исказ (а) у нашој теореми није тачан ако важи (7.2.8), док из Става 7.2.6 (б) следи да исказ (а) наше теореме није тачан уколико важи (7.2.8). Коначно, Став 7.2.7 показује да ако (7.2.10) важи, тада исказ (а) није тачан. Тиме је доказ ове теореме у потпуности завршен. ■

У наставку доказујемо још једну значајну теорему.

Теорема 7.2.9 ([29])
Нека је $\kappa_{p,\alpha,\nu} \leq 0$. Тада су следећи искази међусобно еквивалентни:
(а) *Оператор $\mathcal{L}$ не може бити проширен до ограниченог оператора из простора $H_\nu^{p,q,\alpha}$ у простор $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.*
(б) *Оператор $\mathcal{L}$ дејствује као ограничен оператор из простора $H_\nu^{p,q,\alpha}$ у простор $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.*
(в) *Важи $H_\nu^{p,q,\alpha} \subseteq D^1 l^1$.*
(г) *Важи $0 < p \leq 2$, $0 < q \leq 1$ и $\kappa_{p,\alpha,\nu} = 0$.*

Доказ. Директно се проверава да импликације (в) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (а) и (г) $\Rightarrow$ (в) следе применом Теореме 4.1.4. Остаје нам још да покажемо импликацију (а) $\Rightarrow$ (г), односно, да исказ (а) не важи у следећим случајевима:

$$0 < p \leq \infty,\ \ 0 < q \leq \infty,\ \ \kappa_{p,\alpha,\nu} < 0; \tag{7.2.11}$$

$$0 < p \leq \infty, \;\; 1 < q \leq \infty, \;\; \kappa_{p,\alpha,\nu} = 0; \tag{7.2.12}$$

$$2 < p \leq \infty, \;\; 0 < q \leq 1, \;\; \kappa_{p,\alpha,\nu} = 0. \tag{7.2.13}$$

Применом Става 7.2.6 долазимо до закључка да исказ (а) није тачан уколико важе услови (7.2.11).

Случај $0 < p \leq \infty$, $1 < q \leq \infty$, $\kappa_{p,\alpha,\nu} = 0$.

На основу Става 7.2.6 можемо претпоставити да је $1 < q < \infty$.

Нека је

$$f_{\varepsilon,\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k z^k}{\log^{1+\varepsilon}(k+2)}, \;\; 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}, \;\; 0 < \rho < 1.$$

На исти начин као у доказу Става 7.2.7, налазимо да је

$$\|D^\nu f_{\varepsilon,\rho}\|_{p,q,\alpha}^q \leq C_q \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{-(1+\varepsilon)q} \leq C_q \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{-q} < \infty,$$

где је константа C_q независна од ε и ρ. Функција $f_{\varepsilon,\rho}$ припада простору $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ и скуп

$$\left\{ f_{\varepsilon,\rho} : 0 < \rho < 1, 0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \right\}$$

је ограничен у простору $H_\nu^{p,q,\alpha}$. Са друге стране, важи

$$\mathcal{L} f_{\varepsilon,\rho}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{(k+1)\log^{1+\varepsilon}(k+2)} \to \infty, \;\; \text{када} \;\; \rho \to 1 \;\; \text{и} \;\; \varepsilon \to 0.$$

одакле следи тражени закључак.

Ако је $2 < p \leq \infty$, $0 < q \leq 1$, $\kappa_{p,\alpha,\nu} = 0$, тада се оператор $\overline{\mathcal{L}}$ не може проширити до ограниченог оператора из простора $H_\nu^{p,q,\alpha}$ у простор $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, што заправо следи на основу Става 32 из [50]. Тиме је доказ теореме завршен. ■

Све претходно добијене резултате можемо исказати у следећој теореми.

Теорема 7.2.10 ([29]) *Нека је $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ и $\alpha > 0$. Тада важи*
(5.1) *Оператор $\mathcal{L}$ дејствује као ограничен оператор из простора $H_\nu^{p,q,\alpha}$ у простор $H_\nu^{p,q,\alpha}$ ако и само ако је $\kappa_{p,\alpha,\nu} > 0$.*
(5.2) *Оператор $\mathcal{L}$ дејствује као ограничен оператор из простора $H_\nu^{p,q,\alpha}$ у простор $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, али не и у простор $H_\nu^{p,q,\alpha}$, у случају када је $0 < p \leq 2$, $0 < q \leq 1$ и $\kappa_{p,\alpha,\nu} = 0$.*
(5.3) *Оператор $\mathcal{L}$ дејствује као ограничен оператор из простора $H_\nu^{p,q,\alpha}$ у простор $H_\nu^{p,q,\alpha}$, али $H_\nu^{p,q,\alpha}$ није подскуп од $D^1 l^1$, у случају када је $\kappa_{p,\alpha,\nu} > 0$ и*
$2 < p \leq \infty$ и $\nu - \alpha \leq -\frac{1}{2}$, када је $1 < q \leq \infty$
или
$2 < p \leq \infty$ и $\nu - \alpha < -\frac{1}{2}$, када је $0 < q \leq 1$.
(5.4) *Оператор $\overline{\mathcal{L}}$ не може бити проширен до ограниченог оператора из простора $H_\nu^{p,q,\alpha}$ у простор $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, у случају када важи*
(5.4.1) *$\kappa_{p,\alpha,\nu} < 0$*
или
(5.4.2) *$\kappa_{p,\alpha,\nu} = 0$, $2 < p \leq \infty$*
или
(5.4.3) *$\kappa_{p,\alpha,\nu} = 0$, $1 < q \leq \infty$.*

Доказ. Исказ (5.1) јесте последица Теореме 7.2.8, док је (5.2) последица Теореме 7.2.9. Са друге стране, део (5.3) следи применом Теореме 4.1.4 и Теореме 7.2.8. Што се тиче исказа (5.4), део (5.4.1) следи на основу Става 7.2.6, док део (5.4.2) следи применом Теореме 7.2.9 и део (5.4.3) следи такође, на основу Теореме 7.2.9. Тиме је доказ комплетиран. ■

На сличан начин као што смо проучавали дејство оператора Хилбертове матрице на логаритасмко тежинским просторима холоморфних функција на јединичном диску $\mathbb{D}$, у наредној глави разматрамо дејство Либериног оператора на тим просторима. Поред већ постојећих резултата публикованих у раду [49], наводимо и оригиналне резултате из рада [32].

Глава 8

Либерин оператор на логаритамско тежинским просторима

Испитујемо дејство Либериног оператора на просторима холоморфних функција на јединичном диску $\mathbb{D}$ снабдевених са логаритамском тежином. Наиме, показаћемо да у случају када је $\alpha > 1$, Либерин оператор $\mathcal{L}$, пресликава логаритамско тежински Бергманов простор $A^2_{\log^\alpha}$ у простор $A^2_{\log^{\alpha-1}}$. Такође, показујемо да $\mathcal{L}$ пресликава логаритамско тежински Блохов простор $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$ у себе, за све $\alpha \in \mathbb{R}$. Осим тога, у раду [49] (М. Павловић), показано је да Либерин оператор $\mathcal{L}$ пресликава логаритамско тежински Харди-Блохов простор $\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$ у простор $\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}$, за све $\alpha > 0$. Ми показујемо да је претходни резултат најбољи могућ, у смислу да за свако $\varepsilon > 0$, постоји функција $f \in \mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$, таква да важи $\mathcal{L}f \notin \mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1+\varepsilon}}$. Резултати ове главе публиковани су у раду [32] аутора овог текста.

8.1 Оператор $\mathcal{L}$ на логаритамско тежинским Бергмановим просторима

Подсетимо се да смо у Глави 5, за свако $\alpha \in \mathbb{R}$, дефинисали логаритамско тежински Бергманов простор $A^2_{\log^\alpha}$ на следећи начин,

$$A^2_{\log^\alpha} = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \|f\|^2_{A^2_{\log^\alpha}} = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \log^\alpha \frac{2}{1-|z|^2} dA(z) < \infty \right\}.$$

Такође, показали смо да ако $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \in A^2_{\log^\alpha}$, тада важи (видети Лему 5.2.1)

$$\|f\|^2_{A^2_{\log^\alpha}} \asymp \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \frac{\log^\alpha(n+2)}{n+1},$$

при чему је одговарајућа константа независна од избора функције f. Теорема која следи описује дејство Либериног оператора на логаритамско тежинским Бергмановим просторима.

Теорема 8.1.1 ([32]) *Нека је $\alpha > 1$. Тада је оператор $\mathcal{L}$ добро дефинисан на простору $A^2_{\log^\alpha}$ и пресликава га у простор $A^2_{\log^{\alpha-1}}$.*

Доказ. Нека је $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n)z^n\in A^2_{\log^\alpha}$. Тада, користећи Коши–Шварцову неједнакост, налазимо да важи

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\widehat{f}(n)|}{n+1}\leq\left(\sum_{n=0}^{\infty}|\widehat{f}(n)|^2\frac{\log^\alpha(n+2)}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\log^\alpha(n+2)}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

јер је $\alpha>1$. На основу претходног, добијамо да ако $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n)z^n\in A^2_{\log^\alpha}$, тада је $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\widehat{f}(n)|}{n+1}<\infty$. Према томе, Либерин оператор $\mathcal{L}$ јесте добро дефинисан на простору $A^2_{\log^\alpha}$. Користећи неједнакост (59) из рада [50], добијамо да важи

$$rM_2^2(r,\mathcal{L}f)\leq C(1-r)^{-1}\int_r^1 M_2^2(s,f)ds,$$

за све $0\leq r<1$. Самим тим, важи

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}}|\mathcal{L}f(z)|^2\log^{\alpha-1}\tfrac{2}{1-|z|^2}dA(z) &= 2\int_0^1 rM_2^2(r,\mathcal{L}f)\log^{\alpha-1}\tfrac{2}{1-r^2}dr\\
&\leq C\int_0^1\tfrac{1}{1-r}\int_r^1 M_2^2(s,f)ds\log^{\alpha-1}\tfrac{2}{1-r^2}dr\\
&= C\int_0^1 M_2^2(s,f)\int_0^s\tfrac{1}{1-r}\log^{\alpha-1}\tfrac{2}{1-r^2}drds\\
&\leq C\int_0^1 M_2^2(s,f)\int_0^s\tfrac{1}{1-r}\log^{\alpha-1}\tfrac{2}{1-r}drds\\
&= C\int_0^1 M_2^2(s,f)\left(\log^\alpha\tfrac{2}{1-s}-\log^\alpha 2\right)ds\\
&\leq C\int_0^1 M_2^2(s,f)\log^\alpha\tfrac{2}{1-s}ds\\
&= C\int_0^1 uM_2^2(u^2,f)\log^\alpha\tfrac{2}{1-u^2}du\\
&\leq C\int_0^1 uM_2^2(u,f)\log^\alpha\tfrac{2}{1-u^2}du\\
&= C\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^2\log^\alpha\tfrac{2}{1-|z|^2}dA(z)\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

У претходном смо увели смену $s=u^2$ и искористили чињеницу да је $M_2(\cdot,f)$ растућа функција. Следи да $\mathcal{L}f\in A^2_{\log^{\alpha-1}}$, што је и требало доказати. ∎

8.2 Оператор $\mathcal{L}$ на логаритамско тежинским Блоховим просторима

У Глави 5 смо, за свако $\alpha\in\mathbb{R}$, дефинисали логаритамско тежински Блохов простор $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$ на следећи начин,

$$\mathcal{B}_{\log^\alpha}=\left\{f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}):|f'(z)|(1-|z|)=\mathcal{O}\left(\log^\alpha\frac{2}{1-|z|}\right)\right\}.$$

Такође, норма у простору $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$ је дата са

$$\|f\|_{\mathcal{B}_{\log^\alpha}} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}}|f'(z)|(1-|z|)\log^{-\alpha}\frac{2}{1-|z|}.$$

Резултат који следи описује дејство Либериног оператора $\mathcal{L}$ на логаритамско тежинским Блоховим просторима $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$, за све $\alpha\in\mathbb{R}$.

Теорема 8.2.1 ([32]) *Нека је $\alpha\in\mathbb{R}$. Тада је оператор $\mathcal{L}$ добро дефинисан на простору $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$ и пресликава га у простор $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$.*

Доказ. Применом Теореме 2.1 (а) из [49], долазимо до закључка да за функцију $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n)z^n\in\mathcal{B}_{\log^\alpha}$ важи $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\widehat{f}(n)|}{n+1}<\infty$. Према томе, Либерин оператор $\mathcal{L}$ је добро дефинисан на простору $\mathcal{B}_{\log^\alpha}$.

Са друге стране, користећи Лему 22 из [50], за $\nu=1$ и $p=\infty$, налазимо да важи

$$M_\infty(r,(\mathcal{L}f)')\le(1-r)^{-2}\int_r^1(1-s)M_\infty(s,f')ds$$

за све $0\le r<1$. Тада, користећи Лему 5.1.1, налазимо да је

$$\begin{aligned}(1-r)M_\infty(r,(\mathcal{L}f)') &\le \tfrac{1}{1-r}\textstyle\int_r^1(1-s)M_\infty(s,f')ds\\ &\le C\tfrac{1}{1-r}\textstyle\int_r^1\log^\alpha\tfrac{2}{1-s}ds\\ &= C\tfrac{1}{1-r}\textstyle\int_{\log\frac{2}{1-r}}^{\infty}t^\alpha e^{-t}dt\\ &\le C\log^\alpha\tfrac{2}{1-r}.\end{aligned}$$

Коначно, добијамо $\mathcal{L}f\in\mathcal{B}_{\log^\alpha}$. Тиме је доказ комплетиран. ■

8.3 Оператор $\mathcal{L}$ на логаритамско тежинским Харди-Блоховим просторима

За $\alpha\in\mathbb{R}$ дефинишемо логаритамско тежински Харди-Блохов простор $\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$ на следећи начин (видети Главу 5),

$$\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}=\left\{f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}):\|f\|_{\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}}=|f(0)|+\int_{\mathbb{D}}|f'(z)|\log^\alpha\frac{2}{1-|z|}dA(z)<\infty\right\}.$$

У раду [49] је доказана следећа теорема, која описује дејство Либериног оператора $\mathcal{L}$ на Харди-Блоховим просторима $\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$, у случају када је $\alpha>0$.

Теорема 8.3.1 ([49]) *Нека је $\alpha>0$.*
(а) *Тада је Либерин оператор $\mathcal{L}$ добро дефинисан на простору $\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$ и пресликава га у простор $\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}$.*
(б) *Ако је $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n)z^n$, при чему важи $\widehat{f}(n)\downarrow 0$ када $n\to\infty$ и $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widehat{f}(n)}{n+1}<\infty$, тада $\mathcal{L}f\in\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}$ повлачи $f\in\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$.*
(в) *Ако је $\alpha<0$, тада Либерин оператор $\overline{\mathcal{L}}$ не може бити проширен до непрекидног оператора из простора $\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$ у простор $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.*

Доказ. За део (а) видети Теорему 2.3 из [49]. Исказ (б) следи на основу Теореме 1.1 и Теореме 1.2 из [49]. Део (в) је последица Теореме 2.1 из [49]. ■

Напомена 8.3.2 На основу дела (а) из Теореме 8.3.1 следи да у случају када је $\alpha > 0$, Либерин оператор $\mathcal{L}$ пресликава логаритамско тежински Харди-Блохов простор $\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$ у логаритамско тежински Харди-Блохов простор $\mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1}}$. Покажимо сада да је такав резултат најбољи могућ, у смислу да за свако $\varepsilon > 0$, постоји функција $f \in \mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$, таква да важи $\mathcal{L}f \notin \mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1+\varepsilon}}$. Наиме, нека је $\varepsilon > 0$ произвољно одабрано и дефинишимо

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{\log^{\alpha+1+\varepsilon/2}(n+2)},$$

за све $n \geqslant 0$. Тада важи $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(n)}{n+1} < \infty$ и $\widehat{f}(n) \downarrow 0$ када $n \to \infty$. Осим тога, налазимо да је

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) \frac{\log^\alpha(n+2)}{n+1} < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) \frac{\log^{\alpha+\varepsilon}(n+2)}{n+1} = \infty.$$

Нека је $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n$. Тада је $f \in \mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$ на основу Теореме 5.4.1 и важи $\mathcal{L}f \notin \mathcal{B}^1_{\log^{\alpha-1+\varepsilon}}$, јер би у супротном имали да је

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) \frac{\log^{\alpha+\varepsilon}(n+2)}{n+1} < \infty,$$

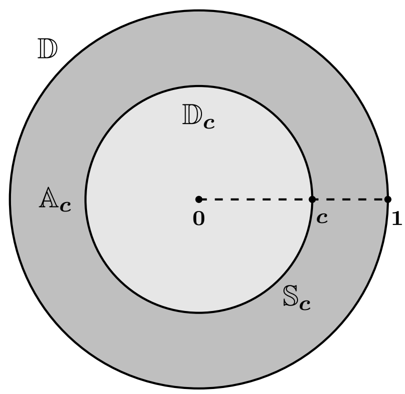
на основу дела (б) из Теореме 8.3.1, што је контрадикција. Тиме је наше разматрање у потпуности завршено. ♢

Глава 9

Принцип максимума у Бергмановим просторима

9.1 Принцип максимума у A^p просторима ако је $p \geq 1$

За $0 < c < 1$, нека је са $\mathbb{A}_c$ означен прстен одређен условом $c < |z| < 1$. Такође, нека је $\mathbb{D}_c = \{z : |z| < c\}$ и $\mathbb{S}_c = \{z : |z| = c\}$. Тада, принцип максимума модула каже, да ако је функција f холоморфна у јединичном диску $\mathbb{D}$ и ако је $|f| \leq M$ у прстену $\mathbb{A}_c$, за неку позитивну константу M и неки полупречник c, тада важи $|f| \leq M$ у јединичном диску $\mathbb{D}$. Према томе, добијамо да важи $\|f\|_{A^p} \leq M = \|M\|_{A^p}$. У том случају, поставља се природно питање да ли се константа M може заменити са произвољном холоморфном функцијом у јединичном диску $\mathbb{D}$ или другим речима, ако су f и g холоморфне функције у јединичном диску $\mathbb{D}$ и ако важи $|f(z)| \leq |g(z)|$ за $z \in \mathbb{A}_c$, да ли тада следи да је $\|f\|_{A^p} \leq \|g\|_{A^p}$? На пример, ако је функција f/g холоморфна у јединичном диску $\mathbb{D}$, тада на основу принципа максимума модула следи да је $|f(z)| \leq |g(z)|$ за све $z \in \mathbb{D}$ и самим тим важи $\|f\|_{A^p} \leq \|g\|_{A^p}$. У вези са тим, важан резултат у теорији Бергманових простора је Коренблумов принцип максимума, који представља принцип максимума у Бергмановим просторима и који гласи:



Слика 9.1.1 Подела јединичног диска $\mathbb{D}$ на диск $\mathbb{D}_c = \{z : |z| < c\}$, кружницу $\mathbb{S}_c = \{z : |z| = c\}$ и прстен $\mathbb{A}_c = \{z : c < |z| < 1\}$, при чему је $0 < c < 1$. За функције f и g холоморфне у јединичном диску $\mathbb{D}$ важи услов $|f(z)| \leq |g(z)|$ за све $z \in \mathbb{A}_c$.

Принцип максимума у Бергмановим просторима. Нека је $1 \leq p < \infty$. Тада постоји константа $0 < c < 1$ са следећим својством. Ако су f и g холоморфне функције у јединичном диску $\mathbb{D}$, такве да је $|f(z)| \leq |g(z)|$ за све $c < |z| < 1$, тада важи

$$\|f\|_{A^p} \leq \|g\|_{A^p}.$$

Први пут дефинисан од стране Коренблума (видети [34]), принцип максимума је доказао Хејман у [22] у случају када је $p = 2$ и то са константом $c = \frac{1}{25} = 0.04$. Напоменимо да је у свом раду [34], Коренблум доказао принцип максимума за $p = 2$ и $c < \frac{1}{2}e^{-2}$, под додатном претпоставком да је g/f холоморфна функција и након тога је уследила серија парцијалних резултата од стране већег броја аутора: Коренблум, О'Нил, Ричард и Жу (видети [35]), Коренблум и Ричард (видети [36]), Матеро (видети [40]), Швик (видети [56]) и други. Касније, Хинканен је у свом раду [26] побољшао Хејманову константу показавши да принцип максимума важи за $c = 0.15724$. Осим тога, он је показао да принцип максимума важи и у Бергмановим просторима A^p за све $1 \leq p < \infty$. У случају када је $p = 2$, један пример пронађен од стране Мартина (видети [34]), показује да важи $c < \frac{1}{\sqrt{2}}$. У овом случају, Ванг ([60]) је нашао горње ограничење $c < 0.69472$ и скорије, Ванг је у раду [63] показао да заправо важи $c < 0.6778994$. Са друге стране, у случају $p = 2$, Шустер је доказао да важи $c \geq 0.21$, користећи својства Мебијусовог псеудорастојања у прстену (видети [55]). Такође, у [61], Ванг је доказао да важи $c \geq 0.25018$ за све $1 \leq p < \infty$ и нешто скорије, Ванг је показао да важи $c \geq 0.23917$ за све $1 \leq p < \infty$ ([64]). У сваком случају, тачна вредност константе c, чак и у случају $p = 2$, још увек је непозната.

Заправо, Коренблум је изнео хипотезу да принцип максимума у Бергмановим просторима A^p важи за све $0 < p < \infty$. Такође, у [26], Хинканен је поставио питање да ли је принцип максимума у Бергмановим просторима валидан и у случају када је $0 < p < 1$. У [62], Ванг је доказао да принцип максимума у Бергмановим просторима важи и у случају $0 < p < 1$, али под додатном претпоставком да функција g има просту нулу у тачки 0 у јединичном диску $\mathbb{D}$. Са друге стране, као што ћемо видети касније у другој секцији ове главе, одговор на претходно постављено питање је негативан.

У наставку ове секције, показујемо да Коренблумов принцип максимума важи у Бергмановим просторима A^p код којих је $1 \leq p < \infty$. Доказ изводимо пратећи резултате из [26, 55, 64]. Пре свега, подсетимо се да ако је функција h субхармонијска у јединичном диску $\mathbb{D}$ и ако је $0 < r_1 < r_2 < 1$, тада важи

$$\int_0^{2\pi} h(r_1 e^{i\theta}) d\theta \leq \int_0^{2\pi} h(r_2 e^{i\theta}) d\theta.$$

Осим тога, потребна нам је и следећа елементарна лема.

Лема 9.1.1 ([64]) *Нека је α позитиван број и $0 \leq r \leq c \leq \rho < R$. Ако су g и h холоморфне функције у диску $|z| < R$ и ако функција h има најмање m нула у затвореном диску $|z| \leq c$ рачунајући и вишеструкости, тада важи*

$$\int_0^{2\pi} \left|g(re^{i\theta})\right|^\alpha \left|h(re^{i\theta})\right| d\theta \leq \left(\frac{r+c}{\rho + \frac{cr}{\rho}}\right)^m \int_0^{2\pi} \left|g(\rho e^{i\theta})\right|^\alpha \left|h(\rho e^{i\theta})\right| d\theta.$$

Доказ. Према претпоставци, можемо писати

$$h(z) = h_0(z) \prod_{k=1}^{m} (z - a_k),$$

где су $a_1, \ldots, a_m$ све нуле функције h у затвореном диску $|z| \leq c$ и функција h_0 је холоморфна у диску $|z| < R$. Нека је

$$H(z) = h_0(z) \prod_{k=1}^{m} \left(\rho - \frac{\overline{a_k} z}{\rho}\right).$$

Тада је H холоморфна функција у затвореном диску $|z| \leq \rho$ и важи $|h(z)| = |H(z)|$ за све $|z| = \rho$. Такође, није тешко проверити да на кружници $|z| = r$, важи

$$|z - a| \leq \frac{r+c}{\rho + \frac{cr}{\rho}} \left|\rho - \frac{\overline{a} z}{\rho}\right|,$$

за све $|a| \leq c$. Према томе, на кружници $|z| = r$, важи

$$|h(z)| \leq \left(\frac{r+c}{\rho + \frac{cr}{\rho}}\right)^m |H(z)|.$$

Имајући у виду да је функција $|g|^\alpha |H|$ субхармонијска (видети [26, стр. 336]), важи

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \left|g(re^{i\theta})\right|^\alpha \left|h(re^{i\theta})\right| d\theta &\leq \left(\tfrac{r+c}{\rho+\frac{cr}{\rho}}\right)^m \int_0^{2\pi} \left|g(re^{i\theta})\right|^\alpha \left|H(re^{i\theta})\right| d\theta \\
&\leq \left(\tfrac{r+c}{\rho+\frac{cr}{\rho}}\right)^m \int_0^{2\pi} \left|g(\rho e^{i\theta})\right|^\alpha \left|H(\rho e^{i\theta})\right| d\theta \\
&\leq \left(\tfrac{r+c}{\rho+\frac{cr}{\rho}}\right)^m \int_0^{2\pi} \left|g(\rho e^{i\theta})\right|^\alpha \left|h(\rho e^{i\theta})\right| d\theta,
\end{aligned}$$

што је и требало доказати. ■

Сада смо у могућности да покажемо главни резултат ове секције. Наиме, теорема која следи у наставку показује тачност принципа максимума у просторима A^p код којих је $1 \leq p < \infty$.

Теорема 9.1.2 [26, 55, 64] *Нека је $1 \leq p < \infty$. Тада постоји константа $0 < c < 1$ са следећим својством. Ако су f и g холоморфне функције у јединичном диску $\mathbb{D}$, такве да је $|f(z)| \leq |g(z)|$ за све $c < |z| < 1$, тада важи*

$$\|f\|_{A^p} \leq \|g\|_{A^p}.$$

Доказ. Најпре, нека је $0 < c < 1$ константа коју ћемо касније одредити и нека је $1 \leq p < \infty$, при чему са $\lfloor p \rfloor$ означавамо цео део броја p. Такође, нека су f и g холоморфне функције у јединичном диску $\mathbb{D}$ и нека важи $|f(z)| \leq |g(z)|$ за све $z \in \mathbb{A}_c$. Потребно је доказати да важи

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z) \leq \int_{\mathbb{D}} |g(z)|^p dA(z),$$

односно

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}_c} |f(z)|^p dA(z) + \int_{\mathbb{A}_c} |f(z)|^p dA(z) \leq \int_{\overline{\mathbb{D}}_c} |g(z)|^p dA(z) + \int_{\mathbb{A}_c} |g(z)|^p dA(z)$$

или еквивалентно

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}_c} (|f(z)|^p - |g(z)|^p) dA(z) \leq \int_{\mathbb{A}_c} (|g(z)|^p - |f(z)|^p) dA(z). \tag{9.1.1}$$

Можемо претпоставити да су норме $\|f\|_{A^p}$ и $\|g\|_{A^p}$ коначне, јер у супротном тражени закључак директно следи. Са друге стране, можемо претпоставити да функција g није идентички једнака 0 и да функција g има бар једну нулу у затвореном диску $\overline{\mathbb{D}}_c$, јер у супротном тражени резултат тривијално следи. Нека је $\omega(z) = f(z)/g(z)$ за све $z \in \mathbb{A}_c$. Тада је $|\omega(z)| \leq 1$ за све $z \in \mathbb{A}_c$. Даље, можемо претпоставити да важи $|\omega(z)| < 1$ за све $z \in \mathbb{A}_c$, јер у супрптном тражени закључак следи директно. Дефинишимо

$$\omega_0 = \omega_0(\rho) = \max\left\{|\omega(z)| : |z| = \rho\right\}.$$

За све $x \geq 0$, $y \geq 0$ и $p \geq 1$, важи следећа неједнакост (видети [21])

$$py^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x-y). \tag{9.1.2}$$

Осим тога, тада налазимо да важи

$$\begin{aligned} |f|^p - |g|^p &= \left(|f|^{\lfloor p\rfloor}\right)^{\frac{p}{\lfloor p\rfloor}} - \left(g^{\lfloor p\rfloor}\right)^{\frac{p}{\lfloor p\rfloor}} \\ &\le \tfrac{p}{\lfloor p\rfloor}|f|^{p-\lfloor p\rfloor}\left(|f|^{\lfloor p\rfloor} - |g|^{\lfloor p\rfloor}\right) \\ &\le \tfrac{p}{\lfloor p\rfloor}|f|^{p-\lfloor p\rfloor}\left|f^{\lfloor p\rfloor} - g^{\lfloor p\rfloor}\right|. \end{aligned} \tag{9.1.3}$$

Нека је сада $0 \le r \le c \le \rho < 1$. Како важи $|f| < |g|$ у прстену $\mathbb{A}_c$, то применом Рушеове теореме долазимо до закључка да функције $f^{\lfloor p\rfloor} - g^{\lfloor p\rfloor}$ и $g^{\lfloor p\rfloor}$ имају исти број нула у затвореном диску $\overline{\mathbb{D}}_c$, рачунајући и вишеструкости. Посебно, функција $f^{\lfloor p\rfloor} - g^{\lfloor p\rfloor}$ има најмање $\lfloor p\rfloor$ нула у диску $\overline{\mathbb{D}}_c$, јер смо претпоставили да функција g има најмање једну нулу у $\overline{\mathbb{D}}_c$. Према томе, користећи Лему 9.1.1 и неједнакост (9.1.3), налазимо да важи

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\left(|f|^p - |g|^p\right)(re^{i\theta})d\theta &\le \int_0^{2\pi}\tfrac{p}{\lfloor p\rfloor}\left(|f|^{p-\lfloor p\rfloor}\left|f^{\lfloor p\rfloor} - g^{\lfloor p\rfloor}\right|\right)(re^{i\theta})d\theta \\ &\le \left(\tfrac{r+c}{\rho+\frac{cr}{\rho}}\right)^{\lfloor p\rfloor}\int_0^{2\pi}\tfrac{p}{\lfloor p\rfloor}\left(|f|^{p-\lfloor p\rfloor}\left|f^{\lfloor p\rfloor} - g^{\lfloor p\rfloor}\right|\right)(\rho e^{i\theta})d\theta \\ &= \left(\tfrac{r+c}{\rho+\frac{cr}{\rho}}\right)^{\lfloor p\rfloor}\int_0^{2\pi}\tfrac{p}{\lfloor p\rfloor}\left(\tfrac{|\omega|^{p-\lfloor p\rfloor}\left|1-\omega^{\lfloor p\rfloor}\right|}{1-|\omega|^p}(|g|^p - |f|^p)\right)(\rho e^{i\theta})d\theta. \end{aligned}$$

Сада, на основу претходне неједнакости добијамо да важи

$$\int_0^{2\pi}\left(|f|^p - |g|^p\right)(re^{i\theta})d\theta \le \left(\frac{r+c}{\rho+\frac{cr}{\rho}}\right)^{\lfloor p\rfloor}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\left|1-\omega^{\lfloor p\rfloor}\right|}{1-|\omega|^{\lfloor p\rfloor}}(|g|^p - |f|^p)\right)(\rho e^{i\theta})d\theta.$$

Приметимо да за сваки природан број n и за све $|a| < 1$, важи следећа неједнакост

$$\frac{|1-a^n|}{1-|a|^n} \le \frac{|1-a|}{1-|a|}.$$

Према томе, на основу претходног добијамо да важи

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\left(|f|^p - |g|^p\right)(re^{i\theta})d\theta &\le \left(\tfrac{r+c}{\rho+\frac{cr}{\rho}}\right)^{\lfloor p\rfloor}\int_0^{2\pi}\left(\tfrac{|1-\omega|}{1-|\omega|}(|g|^p - |f|^p)\right)(\rho e^{i\theta})d\theta \\ &\le \left(\tfrac{r+c}{\rho+\frac{cr}{\rho}}\right)^{\lfloor p\rfloor}\gamma(\rho)\int_0^{2\pi}(|g|^p - |f|^p)(\rho e^{i\theta})d\theta, \end{aligned}$$

при чему функција $\gamma(\rho)$ задовољава

$$\gamma(\rho) \ge \max\left\{\frac{|1-\omega(z)|}{1-|\omega(z)|} : |z| = \rho\right\}.$$

Нека је ρ фиксирано. Затим, помножимо претходну неједнакост са r и интегралимо је по r у границама од 0 до c. Тада, добијамо да важи

$$\frac{1}{\gamma(\rho)\int_0^c\left(\frac{r+c}{\rho+\frac{cr}{\rho}}\right)^{\lfloor p\rfloor}rdr}\int_{\overline{\mathbb{D}}_c}(|f|^p - |g|^p)(z)dA(z) \le \int_0^{2\pi}(|g|^p - |f|^p)(\rho e^{i\theta})d\theta. \tag{9.1.4}$$

Даље, множимо неједнакост (9.1.4) са ρ и затим је интегралимо по ρ у границама од c до 1. Након тога, налазимо да је

$$\int_c^1\frac{\rho}{\gamma(\rho)\int_0^c\left(\frac{r+c}{\rho+\frac{cr}{\rho}}\right)^{\lfloor p\rfloor}rdr}d\rho\int_{\overline{\mathbb{D}}_c}(|f|^p - |g|^p)(z)dA(z) \le \int_{\mathbb{A}_c}(|g|^p - |f|^p)(z)dA(z).$$

Уколико покажемо да је могуће одабрати c, тако да важи

$$\int_c^1 \frac{\rho}{\gamma(\rho)\int_0^c \left(\frac{r+c}{\rho+\frac{cr}{\rho}}\right)^{\lfloor p\rfloor} rdr} d\rho \geq 1, \tag{9.1.5}$$

завршили смо доказ теореме. Заправо, како је $\lfloor p\rfloor \geq 1$, то је довољно показати да можемо одабрати c, тако да је

$$\int_c^1 \frac{\rho}{\gamma(\rho)\int_0^c \frac{r+c}{\rho+\frac{cr}{\rho}} rdr} d\rho \geq 1. \tag{9.1.6}$$

Најпре, одредимо одговарајуће ограничење за $\gamma(\rho)$. Пре свега, напоменимо да је псеудохиперболичко растојање d између тачака $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$, дефинисано на следећи начин

$$d(\alpha,\beta) = \left|\frac{\alpha-\beta}{1-\overline{\alpha}\beta}\right|.$$

У свом раду [55], Шустер је показао да важи

$$d(\omega(z),\omega_0) = \left|\frac{\omega(z)-\omega_0}{1-\omega_0\omega(z)}\right| \leq K(\rho) < 1,$$

за све $|z|=\rho$, при чему је

$$K(\rho) = 2\rho(1+\rho^{-2}c)\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\rho^2c^{2n-1}\right)\left(1+\rho^{-2}c^{2n+1}\right)\left(1+c^{2n}\right)^2}{\left(1+\rho^2c^{2n-2}\right)\left(1+\rho^{-2}c^{2n}\right)\left(1+c^{2n-1}\right)^2}.$$

Пратећи Хинканенов рад [26], нека је

$$\frac{\omega(z)-\omega_0}{1-\omega_0\omega(z)} = te^{i\theta},$$

где је $0 \leq t \leq K(\rho)$ и $0 \leq \theta < 2\pi$. Тада је

$$\omega(z) = \frac{\omega_0 + te^{i\theta}}{1+\omega_0 te^{i\theta}}.$$

Није тешко проверити да је услов $|\omega(z)| \leq \omega_0$ еквивалентан са

$$\cos\theta \leq -\frac{t(1+\omega_0^2)}{2\omega_0}.$$

Према томе, на основу претходних разматрања, добијамо да важи

$$\begin{aligned}
\tfrac{|1-\omega(z)|}{1-|\omega(z)|} &\leq \tfrac{(1+\omega_0)|1-\omega(z)|}{1-|\omega(z)|^2}\\
&= \tfrac{|1-te^{i\theta}|}{1-t^2}\sqrt{1+\omega_0^2t^2+2\omega_0 t\cos\theta}\\
&\leq \tfrac{1+t}{1-t^2}\sqrt{1-t^2}\\
&= \sqrt{\tfrac{1+t}{1-t}}\\
&\leq \sqrt{\tfrac{1+K(\rho)}{1-K(\rho)}},
\end{aligned}$$

за све $|z| = \rho$. Самим тим, добили смо да је

$$\max\left\{\frac{|1-\omega(z)|}{1-|\omega(z)|} : |z| = \rho\right\} \leq \sqrt{\frac{1+K(\rho)}{1-K(\rho)}},$$

тако да можемо одабрати да је

$$\gamma(\rho) = \sqrt{\frac{1+K(\rho)}{1-K(\rho)}}.$$

Користећи програмски језик *Mathematica*, добијамо да неједнакост (9.1.6) важи у случају када је $c = 0.23917$. На овај начин, доказ теореме је завршен. ■

За $1 \leq p < \infty$, означимо са c_p највећу вредност константе c за коју Коренблумов принцип максимума у Бергмановим просторима A^p важи. Тада на основу претходне теореме, добијамо једно доње ограничење $c_p \geq 0.23917$. То је тренутно најбоље доње ограничење за Коренблумову константу. Тачна вредност константе није позната.

Напомена 9.1.3 У раду [26] Хинканен је поставио питање да ли важи

$$c_p \to 1 \text{ када } p \to \infty.$$

Одговор је потврдан и следи из доказа Теореме 9.1.2. Наиме, на основу доказа претходне теореме принцип максимума важи ако за константу c важи неједнакост (9.1.5). Осим тога, приметимо да за леву страну неједнакости (9.1.5) важи

$$\int_c^1 \frac{\rho}{\gamma(\rho)\int_0^c \left(\frac{r+c}{\rho+\frac{cr}{\rho}}\right)^{\lfloor p \rfloor} rdr} d\rho \geq \frac{2}{c^2}\int_c^1 \frac{\rho}{\gamma(\rho)\left(\frac{2c\rho}{\rho^2+c^2}\right)^{\lfloor p \rfloor}} d\rho.$$

Такође, како важи

$$\frac{\gamma(\rho)}{\rho}\left(\frac{2c\rho}{\rho^2+c^2}\right)^{\lfloor p \rfloor} \to 0 \text{ када } p \to \infty,$$

при чему је претходна конвергенција равномерна, то интеграл

$$\frac{2}{c^2}\int_c^1 \frac{\rho}{\gamma(\rho)\left(\frac{2c\rho}{\rho^2+c^2}\right)^{\lfloor p \rfloor}} d\rho,$$

дивергира ка ∞ за све $c \in (0,1)$, када $p \to \infty$. На основу претходног разматрања долазимо до закључка да важи $c_p \to 1$ када $p \to \infty$. ♢

9.2 Принцип максимума у A^p просторима ако је $p < 1$

У овој секцији доказујемо главни резултат ове главе. Наиме, у теореми која следи, доказујемо да Коренблумов принцип максимума у Бергмановом простору A^p не важи у случају када је $0 < p < 1$. Резултати ове секције су преузети из рада [6] (Божин, Карапетровић). Пре свега, почињемо са прелиминарним резултатима. Потребан нам је следећи елементаран и користан резултат.

Лема 9.2.1 *Нека је* $0 < p < 1$ *и* $x \geq 0$. *Тада важи* $(1+x)^p \leq 1 + px$.

Доказ. Нека је $\varphi(x) = 1 + px - (1 + x)^p$, при чему је $x \geq 0$. Тада, имамо да важи

$$\varphi'(x) = p - p(1+x)^{p-1} = p\left(1 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^{1-p}\right) \geq 0,$$

јер је $0 < p < 1$. Стога, функција φ је неопадајућа на интервалу $[0, \infty)$. Према томе, налазимо да важи $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$ или еквивалентно, добијамо да важи $1 + px \geq (1 + x)^p$ за све $x \geq 0$. ■

Користећи претходну лему, доказујемо главни прелиминарни резултат.

Лема 9.2.2 *Нека је $0 < p < 1$ и $0 < c < 1$. Тада, постоје $n \in \mathbb{N}$ и $0 < \varepsilon < 1$, такви да важи*

$$1 + \frac{np}{2}\varepsilon^{np+2} > \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^n\right)^p.$$

Доказ. Имајући у виду да је $0 < p < 1$, можемо изабрати довољно велико $n \in \mathbb{N}$, тако да важи $p + \frac{2}{n} < 1$. Тада, налазимо да је $np + 2 < n$ или еквивалентно $n - (np + 2) > 0$. Према томе, добијамо да важи

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{n-(np+2)} = 0.$$

Самим тим, можемо изабрати довољно мало $0 < \varepsilon < 1$, тако да је

$$\varepsilon^{n-(np+2)} < \frac{nc^n}{2}. \tag{9.2.1}$$

Остаје нам још да покажемо да претходно изабрани n и ε задовољавају тражени услов. Наиме, користећи неједнакост (9.2.1), налазимо да је

$$\frac{n}{2}\varepsilon^{np+2} > \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^n,$$

или еквивалентно

$$1 + \frac{np}{2}\varepsilon^{np+2} > 1 + p\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^n. \tag{9.2.2}$$

Са друге стране, користећи Лему 9.2.1, добијамо

$$1 + p\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^n \geq \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^n\right)^p. \tag{9.2.3}$$

Коначно, користећи (9.2.2) и (9.2.3), налазимо да важи

$$1 + \frac{np}{2}\varepsilon^{np+2} > \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^n\right)^p.$$

Тиме је доказ леме комплетиран. ■

Сада смо у могућности да покажемо претходно најављени главни резултат ове главе, који каже да принцип максимума не важи у Бергмановим просторима малог експонента. Наиме, важи следећа теорема.

Теорема 9.2.3 ([6]) *Нека је $0 < p < 1$ и $0 < c < 1$. Тада, постоје функције f и g холоморфне у јединичном диску $\mathbb{D}$, такве да важи $|f(z)| < |g(z)|$ за све $c < |z| < 1$ и*

$$\|f\|_{A^p} > \|g\|_{A^p}.$$

Доказ. На основу Леме 9.2.2, за дате $0 < p < 1$ и $0 < c < 1$, постоје $n \in \mathbb{N}$ и $0 < \varepsilon < 1$, такви да важи

$$np + 2 < n \quad \text{и} \quad 1 + \frac{np}{2}\varepsilon^{np+2} > \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^n\right)^p. \tag{9.2.4}$$

Тада, можемо дефинисати функције f и g, на следећи начин

$$f(z) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^n}(z^n + \varepsilon^n) \quad \text{и} \quad g(z) = z^n,$$

за све $z \in \mathbb{D}$. Дакле, функције f и g су холоморфне у јединичном диску $\mathbb{D}$. Са друге стране, ако је $c < |z| < 1$, имамо да важи

$$\frac{\varepsilon^n}{c^n + \varepsilon^n} > \frac{\varepsilon^n}{|z|^n + \varepsilon^n},$$

и последично

$$\frac{c^n}{c^n + \varepsilon^n} = 1 - \frac{\varepsilon^n}{c^n + \varepsilon^n} < 1 - \frac{\varepsilon^n}{|z|^n + \varepsilon^n} = \frac{|z|^n}{|z|^n + \varepsilon^n},$$

или еквивалентно

$$\frac{c^n(|z|^n + \varepsilon^n)}{c^n + \varepsilon^n} < |z|^n.$$

Самим тим, ако је $c < |z| < 1$, тада, користећи претходну неједнакост, налазимо да важи

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^n}(z^n + \varepsilon^n)\right| \leq \frac{c^n(|z|^n + \varepsilon^n)}{c^n + \varepsilon^n} < |z|^n = |g(z)|.$$

Остаје нам још да покажемо, да за претходно одабране функције f и g, важи

$$\|f\|_{A^p} > \|g\|_{A^p},$$

или еквивалентно

$$\left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z)\right)^{\frac{1}{p}} > \left(\int_{\mathbb{D}} |g(z)|^p dA(z)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{9.2.5}$$

Видимо да (9.2.5) важи, ако је следећа неједнакост тачна

$$\int_{\mathbb{D}} \left|\frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^n}(z^n + \varepsilon^n)\right|^p dA(z) > \int_{\mathbb{D}} |z^n|^p dA(z),$$

која је еквивалентна са

$$\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^n\right)^p} \int_{\mathbb{D}} |z^n + \varepsilon^n|^p dA(z) > \int_{\mathbb{D}} |z|^{np} dA(z). \tag{9.2.6}$$

Према томе, уместо (9.2.6), довољно је показати да важи

$$\int_{\mathbb{D}} |z^n + \varepsilon^n|^p dA(z) > \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^n\right)^p \int_{\mathbb{D}} |z|^{np} dA(z). \tag{9.2.7}$$

Како је $\mathbb{D} = \mathbb{D}_\varepsilon \cup \mathbb{S}_\varepsilon \cup \mathbb{A}_\varepsilon$, при чему је $\mathbb{D}_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\}$, $\mathbb{S}_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \varepsilon\}$ и $\mathbb{A}_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < 1\}$, то налазимо да је довољно показати да важи

$$\int_{\mathbb{D}_\varepsilon} |z^n + \varepsilon^n|^p dA(z) + \int_{\mathbb{A}_\varepsilon} |z^n + \varepsilon^n|^p dA(z) > \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^n\right)^p \int_{\mathbb{D}} |z|^{np} dA(z). \tag{9.2.8}$$

Најпре, приметимо да је

$$\int_{\mathbb{D}} |z|^{np} dA(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{np} r dr d\theta = 2\int_0^1 r^{np+1} dr = \frac{2}{np+2}. \tag{9.2.9}$$

Са друге стране, имамо

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}_\varepsilon} |z^n+\varepsilon^n|^p dA(z) &= \int_{\mathbb{D}_\varepsilon} \left|\varepsilon^n\left(1+\left(\tfrac{z}{\varepsilon}\right)^n\right)\right|^p dA(z)\\ &= \varepsilon^{np}\int_{\mathbb{D}_\varepsilon} \left|1+\left(\tfrac{z}{\varepsilon}\right)^n\right|^p dA(z)\\ &= \varepsilon^{np}\int_{\mathbb{D}_\varepsilon} \left(1+\left(\tfrac{z}{\varepsilon}\right)^n\right)^{\frac{p}{2}}\left(1+\left(\tfrac{\overline{z}}{\varepsilon}\right)^n\right)^{\frac{p}{2}} dA(z).\end{aligned}$$

Приметимо да је $\left|\frac{z}{\varepsilon}\right| < 1$ за све $z\in\mathbb{D}_\varepsilon$. Самим тим, добијамо

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}_\varepsilon} |z^n+\varepsilon^n|^p dA(z) &= \varepsilon^{np}\int_{\mathbb{D}_\varepsilon}\sum_{k=0}^\infty \binom{p/2}{k}\left(\tfrac{z}{\varepsilon}\right)^{nk}\sum_{j=0}^\infty\binom{p/2}{j}\left(\tfrac{\overline{z}}{\varepsilon}\right)^{nj} dA(z)\\ &= \varepsilon^{np}\int_{\mathbb{D}_\varepsilon}\sum_{k=0}^\infty \binom{p/2}{k}\tfrac{1}{\varepsilon^{nk}} z^{nk}\sum_{j=0}^\infty\binom{p/2}{j}\tfrac{1}{\varepsilon^{nj}}\overline{z}^{nj} dA(z).\end{aligned}$$

Како важи

$$\int_{\mathbb{D}_\varepsilon} z^{nk}\overline{z}^{nj} dA(z) = 0, \text{ за све ненегативне целе бројеве } k\neq j,$$

то налазимо да је

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}_\varepsilon} |z^n+\varepsilon^n|^p dA(z) &= \varepsilon^{np}\sum_{k=0}^\infty \binom{p/2}{k}^2 \tfrac{1}{\varepsilon^{2nk}}\int_{\mathbb{D}_\varepsilon} z^{nk}\overline{z}^{nk} dA(z)\\ &= \varepsilon^{np}\sum_{k=0}^\infty \binom{p/2}{k}^2 \tfrac{1}{\varepsilon^{2nk}}\int_{\mathbb{D}_\varepsilon} |z|^{2nk} dA(z).\end{aligned} \tag{9.2.10}$$

Такође, имамо да је

$$\int_{\mathbb{D}_\varepsilon} |z|^{2nk} dA(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\varepsilon r^{2nk} r dr d\theta = 2\int_0^\varepsilon r^{2nk+1} dr = \frac{\varepsilon^{2nk+2}}{nk+1}, \tag{9.2.11}$$

за све ненегативне целе бројеве k. Користећи (9.2.10) и (9.2.11), следи

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}_\varepsilon} |z^n+\varepsilon^n|^p dA(z) &= \varepsilon^{np}\sum_{k=0}^\infty \binom{p/2}{k}^2 \tfrac{1}{\varepsilon^{2nk}}\tfrac{\varepsilon^{2nk+2}}{nk+1}\\ &= \varepsilon^{np+2}\sum_{k=0}^\infty \binom{p/2}{k}^2 \tfrac{1}{nk+1}.\end{aligned} \tag{9.2.12}$$

Слично, важи

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}_\varepsilon} |z^n+\varepsilon^n|^p dA(z) &= \int_{\mathbb{A}_\varepsilon} \left|z^n\left(1+\left(\tfrac{\varepsilon}{z}\right)^n\right)\right|^p dA(z)\\ &= \int_{\mathbb{A}_\varepsilon} |z|^{np}\left|1+\left(\tfrac{\varepsilon}{z}\right)^n\right|^p dA(z)\\ &= \int_{\mathbb{A}_\varepsilon} |z|^{np}\left(1+\left(\tfrac{\varepsilon}{z}\right)^n\right)^{\frac{p}{2}}\left(1+\left(\tfrac{\varepsilon}{\overline{z}}\right)^n\right)^{\frac{p}{2}} dA(z).\end{aligned}$$

Приметимо да је $\left|\frac{\varepsilon}{z}\right| < 1$ за све $z\in\mathbb{A}_\varepsilon$. Стога, налазимо да важи

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}_\varepsilon} |z^n+\varepsilon^n|^p dA(z) &= \int_{\mathbb{A}_\varepsilon} |z|^{np}\sum_{k=0}^\infty \binom{p/2}{k}\left(\tfrac{\varepsilon}{z}\right)^{nk}\sum_{j=0}^\infty\binom{p/2}{j}\left(\tfrac{\varepsilon}{\overline{z}}\right)^{nj} dA(z)\\ &= \int_{\mathbb{A}_\varepsilon} |z|^{np}\sum_{k=0}^\infty \binom{p/2}{k}\varepsilon^{nk}\tfrac{1}{z^{nk}}\sum_{j=0}^\infty\binom{p/2}{j}\varepsilon^{nj}\tfrac{1}{\overline{z}^{nj}} dA(z).\end{aligned}$$

Како је

$$\int_{\mathbb{A}_\varepsilon} |z|^{np} \frac{1}{z^{nk}} \frac{1}{\overline{z}^{nj}} dA(z) = 0, \text{ за све ненегативне целе бројеве } k \neq j,$$

то добијамо

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{A}_\varepsilon} |z^n + \varepsilon^n|^p dA(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p/2}{k}^2 \varepsilon^{2nk} \int_{\mathbb{A}_\varepsilon} |z|^{np} \frac{1}{z^{nk}} \frac{1}{\overline{z}^{nk}} dA(z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p/2}{k}^2 \varepsilon^{2nk} \int_{\mathbb{A}_\varepsilon} |z|^{np-2nk} dA(z). \end{aligned} \tag{9.2.13}$$

Након тога, следи

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{A}_\varepsilon} |z|^{np-2nk} dA(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 r^{np-2nk} r dr d\theta \\ &= 2 \int_\varepsilon^1 r^{np+1-2nk} dr \\ &= 2 \frac{1-\varepsilon^{np+2-2nk}}{np+2-2nk} \\ &= \frac{1-\varepsilon^{np+2-2nk}}{\frac{np+2}{2} - nk}, \end{aligned} \tag{9.2.14}$$

за све ненегативне целе бројеве k. Приметимо да важи $np+2 \neq 2nk$ за све ненегативне целе бројеве k, јер је $n > np + 2 > 2$. Такође, приметимо да је

$$\frac{1 - \varepsilon^{np+2-2nk}}{\frac{np+2}{2} - nk} = \int_{\mathbb{A}_\varepsilon} |z|^{np-2nk} dA(z) \geq 0,$$

за све ненегативне целе бројеве k. Користећи (9.2.13) и (9.2.14), имамо да је

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{A}_\varepsilon} |z^n + \varepsilon^n|^p dA(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p/2}{k}^2 \varepsilon^{2nk} \frac{1-\varepsilon^{np+2-2nk}}{\frac{np+2}{2} - nk} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p/2}{k}^2 \frac{\varepsilon^{2nk} - \varepsilon^{np+2}}{\frac{np+2}{2} - nk} \\ &= \varepsilon^{np+2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p/2}{k}^2 \frac{\varepsilon^{2nk-(np+2)} - 1}{\frac{np+2}{2} - nk}, \end{aligned} \tag{9.2.15}$$

при чему је

$$\frac{\varepsilon^{2nk-(np+2)} - 1}{\frac{np+2}{2} - nk} \geq 0, \text{ за све ненегативне целе бројеве } k.$$

Коначно, користећи (9.2.9), (9.2.12) и (9.2.15), доказ неједнакости (9.2.8) своди се на тачност следеће неједнакости

$$\varepsilon^{np+2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p/2}{k}^2 \left(\frac{1}{nk+1} + \frac{\varepsilon^{2nk-(np+2)} - 1}{\frac{np+2}{2} - nk} \right) > \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^n\right)^p \frac{2}{np+2},$$

или еквивалентно

$$\varepsilon^{np+2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k > \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^n\right)^p \frac{2}{np+2}, \tag{9.2.16}$$

где смо означили

$$a_k = \binom{p/2}{k}^2 \left(\frac{1}{nk+1} + \frac{\varepsilon^{2nk-(np+2)} - 1}{\frac{np+2}{2} - nk} \right) \geq 0,$$

за све ненегативне целе бројеве k. Приметимо да важи

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \geq a_0 = 1 + \frac{\varepsilon^{-(np+2)} - 1}{\frac{np+2}{2}} = 1 + \frac{2}{np+2}\left(\varepsilon^{-(np+2)} - 1\right). \tag{9.2.17}$$

Самим тим, користећи (9.2.17), уместо неједнакости (9.2.16) довољно је доказати да важи неједнакост

$$\varepsilon^{np+2}\left(1 + \frac{2}{np+2}\left(\varepsilon^{-(np+2)} - 1\right)\right) > \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^n\right)^p \frac{2}{np+2},$$

која је еквивалентна са

$$\frac{2}{np+2}\varepsilon^{np+2}\left(\frac{np}{2} + \varepsilon^{-(np+2)}\right) > \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^n\right)^p \frac{2}{np+2}$$

или еквивалентно

$$1 + \frac{np}{2}\varepsilon^{np+2} > \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^n\right)^p.$$

Међутим, претходна неједнакост је тачна, на основу (9.2.4). Тиме је доказ теореме у потпуности завршен. ■

Према томе, на основу Теореме 9.1.2 и Теореме 9.2.3 добијамо да Коренблумов принцип максимума у Бергмановим просторима A^p важи у случају када је $1 \leq p < \infty$, док у случају када је $0 < p < 1$, Коренблумова хипотеза није тачна.

Литература

[1] P. Ahern, M. Jevtić, *Duality and multipliers for mixed norm spaces*, Michigan Math. J. 30, 53–64 (1983).

[2] P. Ahern, M. Jevtić, *Mean modulus and the fractional derivative of an inner function*, Complex Variables Theory Appl. 3, 297–311 (1984).

[3] A. Aleman, A. Montes-Rodrı́guez, A. Sarafoleanu, *The eigenfunctions of the Hilbert matrix*, Constr. Approx. **36** (2012), no. 3, 353–374.

[4] J. M. Anderson, J. Clunie, C. Pommerenke, *On Bloch and normal functions*, J. Reine Angew. Math. **270** (1974), 12–37.

[5] V. Božin, B. Karapetrović, *Norm of the Hilbert matrix on Bergman spaces* (рад на рецензији).

[6] V. Božin, B. Karapetrović, *Failure of the Korenblum's maximum principle in Bergman spaces with small exponents* (рад на рецензији).

[7] O. F. Brevig, K. M. Perfekt, K. Seip, A. Siskakis, D. Vukotić, *The multiplicative Hilbert matrix*, Advances in Mathematics, vol. **302** (2016), 410–432.

[8] C. Chatzifountas, D. Girela, J. A. Peláez, *A generalized Hilbert matrix acting on Hardy spaces*, J. Math. Anal. Appl. **413** (2014), 154–168.

[9] J. A. Cima, *A type of Volterra operator*, Complex Analysis and its Synergies, **2:3** (2016).

[10] C. C. Cowen, B. D. MacCluer, *Composition operators on spaces of analytic functions*, Studied in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL (1995).

[11] N. Danikas, S. Ruscheweyh, A. G. Siskakis, *Metrical and topological properties of a generalized Libera transform*, Archiv der Mathematik, **63**, no. 6 (1994), 517–524.

[12] E. Diamantopoulos, *Hilbert matrix on Bergman spaces*, Illinois Journal of Mathematics, **48** (2004), no. 3, 1067–1078.

[13] E. Diamantopoulos, A.G. Siskakis, *Composition operators and the Hilbert matrix*, Studia Mathematica, **140**(2000), no. 2, 191–198.

[14] M. Dostanić, M. Jevtić, D. Vukotić, *Norm of the Hilbert matrix on Bergman and Hardy spaces and theorem of Nehari type*, J. Funct. Analysis, **254**(2008), 2800–2815.

[15] S. S. Dragomir, R. P. Agarwal, N. S. Barnett, *Inequalities for beta and gamma functions via some classical and new integral inequalities*, J. Inequal. Appl. **5** (2000), 103–165.

[16] P. L. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York (1970); reprinted with supplement by Dover Publications, Mineola, NY (2000).

[17] P. L. Duren, P. Schuster, *Bergman Spaces*, Mathematical Surveys and Monographs 100, American Mathematical Society, Providence, RI 2004.

[18] P. Galanopoulos, J. A. Peláez, *Hankel matrices on Hardy and Bergman spaces*, Studia Mathematica **200** (2010), 201–222.

[19] P. Galanopoulos, D. Girela, J. A. Peláez, A. G. Siskakis, *Generalized Hilbert operators*, Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica, **39** (2014), 231–258.

[20] T. M. Flett, *The Dual of an Inequality of Hardy and Littlewood and Some Related Inequalities*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **38** (1972), 746–765.

[21] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge (1952).

[22] W. K. Hayman, *On a conjecture of Korenblum*, Analysis (Munich) **19** (1999), 195–205.

[23] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman Spaces*, Graduate Text in Mathematics 199, Springer-Verlag, New York (2000).

[24] J. H. Hedlund, *Multipliers of H^1 and Hankel matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. **22** (1969), 20–23.

[25] D. Hilbert, *Ein Beitrag zur Theorie des Legendre'schen Polynoms*, Acta Mathematica **18** (1894), 155–159.

[26] A. Hinkkanen, *On a maximum principle in Bergman space*, Journal d'Analyse Mathématique **79** (1999), 335–344.

[27] B. Hollenbeck, I. Verbitsky, *Best Constants for the Riesz Projection*, J. Funct. Analysis, **175**(2000), 370–392.

[28] M. Jevtić, B. Karapetrović, *Hilbert matrix operator on Besov spaces*, Publicationes Mathematicae Debrecen, **90/3-4** (2017), 359–371.

[29] M. Jevtić, B. Karapetrović, *Libera operator on mixed norm spaces $H_\nu^{p,q,\alpha}$ when* $0 < p < 1$, Filomat (прихваћен за објављивање).

[30] M. Jevtić, B. Karapetrović, *Hilbert matrix on spaces of Bergman–type*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **453** (2017), 241–254.

[31] M. Jevtić, D. Vukotić, M. Arsenović, *Taylor Coefficients and Coefficient Multipliers of Hardy and Bergman–Type Spaces*, Springer, RSME Springer Series (2016).

[32] B. Karapetrović, *Libera and Hilbert matrix operator on logarithmically weighted Bergman, Bloch and Hardy-Bloch spaces*, Czechoslovak Mathematical Journal (прихваћен за објављивање).

[33] B. Karapetrović, *Norm of the Hilbert matrix operator on the weighted Bergman spaces* (рад на рецензији).

[34] B. Korenblum, *A maximum principle for the Bergman space*, Publ. Mat. **35** (1991), 479–486.

[35] B. Korenblum, R. O'Neil, K. Richards, K. Zhu, *Totally monotone functions with applications to the Bergman space*, Trans. Amer. Math. Soc **337** (1993), 795–806.

[36] B. Korenblum, K. Richards, *Majorization and domination in the Bergman space*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), 153–158.

[37] R. J. Libera, *Some classes of regular univalent functions*, Proceedings of the American Mathematical Society, **16** (1965), 755–758.

[38] B. Lanucha, M. Nowak, M. Pavlović, *Hilbert matrix operator on spaces of analytic functions*, Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica **37** (2012), 161–174.

[39] W. Magnus, *On the spectrum of Hilbert's matrix*, Amer. J. Math **72** (1950), 699–704.

[40] J. Matero, *On Korenblum's maximum principle for the Bergman space*, Arch. Mat. **64** (1995), 337–340.

[41] M. Mateljević, M. Pavlović, *L^p behaviour of the integral means of analytic functions*, Studia Math. **77** (1984), 219–237.

[42] N. K. Nikolski, *Operators, Functions and Systems: An Easy Reading, Volume 1: Hardy, Hankel and Toeplitz*, American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 92, Providence (2002).

[43] N. K. Nikolski, *Operators, Functions and Systems: An Easy Reading, Volume 2: Model Operators and Systems*, American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 93, Providence (2002).

[44] M. Nowak, M. Pavlović, *On the Libera operator*, J. Math. Anal. Appl. **370**, no. 2 (2010), 588–599.

[45] K. Oleszkiewicz, *An Elementary Proof of Hilbert's Inequality*, The American Mathematical Monthly, Vol. **100**, No. 3 (Mar., 1993), pp. 276–280.

[46] J. Partington, *An Introduction to Hankel Operators*, Cambridge University Press, Cambridge (1988).

[47] M. Pavlović, *Introduction to Function Spaces on the Disk*, Matematički Institut Sanu, Belgrade (2004).

[48] M. Pavlović, *Function Classes on the Unit Disc. An Introduction*, De Gruyter Studies in Mathematics **52** (2014).

[49] M. Pavlović, *Logarithmic Bloch space and its predual*, Publications de l'Institut Mathematique **100** (114), 1–16 (2016).

[50] M. Pavlović, *Definition and Properties of the Libera Operator on Mixed Norm Spaces*, Hindawi Publishing Corporation, The Scientific World Journal, Volume 2014, Article ID 590656, 15 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2014/590656.

[51] M. Pavlović, *Analytic functions with decreasing coefficients and Hardy and Bloch spaces*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, **56** (2013), 623–635.

[52] J. A. Peláez, J. Rättyä, *Generalized Hilbert operators on weighted Bergman spaces*, Advances in Mathematics **240** (2013), 227–267.

[53] V. V. Peller, *Hankel Operators and Their Applications*, Springer, Springer Monographs in Mathematics, New York (2003).

[54] V. V. Prasolov, *Polynomials*, Springer, Algorithms and Computation in Mathematics 11, New York (2010).

[55] A. Schuster, *The maximum principle for the Bergman space and the Möbius pseudo-distance for the annulus*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 3525–3530.

[56] W. Schwick, *On Korenblum's maximum principle*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2581–2587.

[57] A. G. Siskakis, *Composition semigroups and the Cesaro operator on H^p*, Journal of the London Mathematical Society, **36**, no. 2 (1987), 153–164.

[58] A. G. Siskakis, *Semigroups of composition operators in Bergman spaces*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, **35** (1987), 397–406.

[59] D. Vukotić, *A sharp estimate for A^p_α functions in $\mathbb{C}^n$*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), 753–756.

[60] C. Wang, *Refining the constant in a maximum principle for the Bergman space*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 853–855.

[61] C. Wang, *On Korenblum's maximum principle*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 2061–2066.

[62] C. Wang, *On a Maximum Principle for Bergman Spaces with Small Exponents*, Integral Equations Operator Theory **59** (2007), 597–601.

[63] C. Wang, *Domination in the Bergman space and Korenblum's constant*, Integral Equations Operator Theory **61** (2008), 423–432.

[64] C. Wang, *Some results on Korenblum's maximum principle*, J. Math. Anal. Appl. **373** (2011), 393–398.

[65] K. Zhu, *Operator theory in function spaces*, Dekker, New York (1990).

[66] K. Zhu, *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 138, American Mathematical Society, Providence, RI (2007).

[67] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Vol. **I**, Cambridge University Press, Cambridge 1959.

Списак симбола

$\mathcal{A}$	диск алгебра
$\mathbb{A}_c$	прстен $c < \|z\| < 1$ у комплексној равни, при чему је $0 < c < 1$
A^p	Бергманов простор
$A^{p,\alpha}$	тежински Бергманов простор
$A^2_{\log^\alpha}$	логаритамско тежински Бергманов простор A^2
$A(z)$	нормализована Лебегова мера на јединичном диску
$\mathcal{B}$	Блохов простор
$\mathcal{B}_{\log^\alpha}$	логаритамско тежински Блохов простор
$\mathcal{B}^{p,q}_\alpha$	простори Бесова
$\mathcal{B}^{p,q}_0$	Харди-Блохови простори
$\mathcal{B}^1_{\log^\alpha}$	логаритамско тежински Харди-Блохов простор
$B(z)$	Блашкеов производ
$B(s,t)$	Бета функција
$BMOA$	простор који се састоји од функција f из Хардијевог простора H^1 и чије су граничне вредности $f(e^{it})$ ограничене средње осцилације на јединичној кружници $\mathbb{T}$
$\mathbb{C}$	комплексна раван
C	позитивна константа
C_α	позитивна константа која зависи од параметра α
$\mathbb{D}$	јединични диск са центром у координатном почетку у комплексној равни $\mathbb{C}$
$\overline{\mathbb{D}}$	затворени јединични диск
$D(z_0, r)$	диск са центром у тачки $z_0 \in \mathbb{C}$ полупречника r
$\mathbb{D}_c$	диск $\|z\| < c$, при чему је $0 < c < 1$
$\overline{\mathbb{D}}_c$	затворени диск $\|z\| \le c$, при чему је $0 < c < 1$
D^t	низ $\big\{(n+1)^t\big\}_{n=0}^{\infty}$, где је t реалан број
D	оператор десног померања
Γ	гама функција
$\Gamma : X \to Y$	Ханкелов оператор из простора низова X у простор низова Y
$F(a,b,c;z)$	хипергеометријска функција са параметрима a,b,c, где је $z \in \mathbb{D}$
$\widehat{f}(n)$	n-ти Тејлоров коефицијент холоморфне функције f

F	сурјективна линеарна изометрија простора $L^2(\mathbb{T})$ дефинисана са $Ff(e^{it}) = f(e^{-it})$
H	Хилбертова матрица
$\mathcal{H}$	Ханкелов оператор
H_g	Ханкелов оператор индукован функцијом $g \in L^\infty(\mathbb{T})$
$\mathcal{H}(\mathbb{D})$	простор холоморфних функција на јединичном диску $\mathbb{D}$
$h(\mathbb{D})$	простор хармонијских функција на јединичном диску $\mathbb{D}$
H^p	Хардијев простор
$H^{p,q,\alpha}$	простори мешовите норме
$H^{p,q,\alpha}_\nu$	простори Бесова
$h^{p,\infty,\alpha}$	простор функција f из $H^{p,\infty,\alpha}$ за које важи $M_p(r,f) = o\left((1-r)^{-\alpha}\right)$ када $r \to 1$
$K(\rho)$	константа која зависи од полупречника $0 < \rho < 1$ и учествује у оцени псеудохиперболичког растојања на јединичном диску
$\kappa_{p,\alpha,\nu}$	ознака за величину $\nu - \alpha - \frac{1}{p} + 1$, где су p, α и ν параметри
L	оператор левог померања
$\mathcal{L}$	Либерин оператор
Λ_a	уопштени Либерин оператор, где је $a \in \overline{\mathbb{D}}$
L^p	простори мерљивих функција ограничене p-норме
ℓ^p	простори p-сумабилних низова
$\ell(u,v)$	уопштени простори низова
M_g	мултипликациони оператор индукован функцијом $g \in L^\infty(\mathbb{T})$
$M_p(r,f)$	интегрална средина реда p функције f на кружници полупречника r са центром у координатном почетку у комплексној равни
$M \asymp N$	ознака за постојање позитивне константе C, која задовољава услов $C^{-1}N \leq M \leq CN$
$M \lesssim N$	ознака за постојање позитивне константе C, која задовољава услов $M \leq CN$
$\mathbb{N}$	скуп природних бројева
$\mathbb{N}_0$	скуп $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathcal{P}$	простор аналитичких полинома
$\mathbb{R}$	скуп реалних бројева
R_+	оператор Рисове пројекције
R_{t^2}	прстен $t^2 < \|z\| < 1$ у комплексној равни, при чему је $0 < t < 1$
$\mathbb{S}_c$	кружница полупречника c у комплексној равни са центром у 0
$S_m f$	m-ти Тејлоров полином холоморфне функције f
$\mathbb{T}$	јединична кружница са центром у тачки 0 комплексне равни
$T_t f$	специјални композициони оператор холоморфне функције f, при чему је $0 < t < 1$

$VMOA$	потпростор простора $BMOA$ који садржи функције f за које важи услов $\lim\limits_{\lvert I\rvert\to 0}\frac{1}{\lvert I\rvert}\int_I \left\lvert f(e^{it})-f_I\right\rvert dt=0$
V_n	специјално конструисан низ полинома за које, између осталог, важи $\lVert V_n\rVert_p \asymp 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}$ када је $0<p\le\infty$
$V_n * g$	конволуција полинома V_n и функције g холоморфне у јединичном диску $\mathbb{D}$
$w_\xi(x)$	број промена знака у Штурмовом низу $\xi_0(x),\xi_1(x),\ldots$ полинома означеног са $\xi(x)$
$\psi_p(t)$	функција $t^{\frac{2}{p}-1}(1-t)^{-\frac{2}{p}}$, при чему је $2<p<4$ и $0<t<1$
$\omega(t)$	функција класе C^∞ на $\mathbb{R}$ таква да је $\omega(t)=1$ за $t\le 1$ $\omega(t)=0$ за $t\ge 2$ ω је опадајућа и позитивна на интервалу (1,2)
$\omega(z)$	функција $f(z)/g(z)$, где су f и g холоморфне функције у диску $\mathbb{D}$ и задовољавају услов $\lvert f\rvert<\lvert g\rvert$ у неком прстену $\mathbb{A}_c$
$\omega_0(\rho)$	$\max\{\lvert\omega(z)\rvert : \lvert z\rvert=\rho\}$
X	простор низова
X'	дуал простора X
(X,Y)	простор множилаца из једног простора низова X у други простор низова Y
$\mathbb{Z}$	скуп целих бројева

Биографија аутора

Бобан Карапетровић рођен је 8. јануара 1990. године у Ивањици, где је завршио основну и средњу школу, као ђак генерације и носилац Вукове дипломе. Током основне и средње школе, учествовао је на већем броју математичких такмичења, међу којима се издвајају Јуниорска Балканска Математичка Олимпијада (Грчка, 2005), Међународни Математички Турнир Градова (Русија, 2006), Балканска Математичка Олимпијада (Грчка, 2007), Интернационално Математичко Такмичење (Румунија, 2007) и Интернационална Математичка Олимпијада (Вијетнам, 2007). Током средње школе био је стипендиста Фонда за развој научног и уметничког подмлатка.

Основне студије Математичког факултета, Универзитета у Београду, уписао је 2009. године на смеру Теоријска математика и примене и завршио 2013. године са просечном оценом 10.00, као студент генерације. Мастер студије је завршио 2014. године са истом просечном оценом. Током студија, био је стипендиста Фонда за младе таленте Републике Србије. Од 2013. године запослен је на Математичком факултету, Универзитета у Београду на Катедри за реалну и комплексну анализу.

Списак објављених радова (сви у часописима са SCI листе).

• M. Jevtić, B. Karapetrović, *Hilbert matrix on spaces of Bergman–type*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **453** (2017), 241–254.

• B. Karapetrović, *Libera and Hilbert matrix operator on logarithmically weighted Bergman, Bloch and Hardy-Bloch spaces*, Czechoslovak Mathematical Journal (accepted for publication).

• M. Jevtić, B. Karapetrović, *Hilbert matrix operator on Besov spaces*, Publicationes Mathematicae Debrecen, **90/3-4** (2017), 359–371.

• M. Jevtić, B. Karapetrović, *Libera operator on mixed norm spaces* $H_\nu^{p,q,\alpha}$ *when* $0 < p < 1$, Filomat (accepted for publication).

Списак радова на рецензији.

• B. Karapetrović, *Norm of the Hilbert matrix operator on the weighted Bergman spaces.*

• V. Božin, B. Karapetrović, *Norm of the Hilbert matrix on Bergman spaces* (у овом раду решен је отворен проблем који се односи на одређивање норме оператора Хилбертове матрице H на Бергмановом простору A^p у случају када је $2 < p < 4$).

• V. Božin, B. Karapetrović, *Failure of the Korenblum's maximum principle in Bergman spaces with small exponents* (у овом раду решен је отворен проблем који се односи на Коренблумову хипотезу о принципу максимума у Бергмановим просторима A^p у случају када је $0 < p < 1$).

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Бобан Карапетровић

број уписа 2003/2014

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Оператор Хилбертове матрице и Либерин оператор

на просторима холоморфних функција

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 11. маја 2017.

Карапетровић Бобан

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Бобан Карапетровић

Број уписа 2003/2014

Студијски програм Математика

Наслов рада Оператор Хилбертове матрице и Либерин оператор на просторима холоморфних функција

Ментор др Владимир Божин

Потписани Бобан Карапетровић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 11. маја 2017.

Карапетровић Бобан

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Оператор Хилбертове матрице и Либерин оператор

на просторима холоморфних функција

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 11. маја 2017.

Каратеодоровић Зоран

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.