

Наставно–научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

Одлуком Наставно–научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду донетој на 336. седници одржаној 18. новембра 2016. године именовани смо за чланове комисије за преглед и оцену докторске дисертације „О прстену тригонометријских полинома са применама у теорији аналитичких неједнакости” кандидаткиње Милице Макрагић. После детаљног прегледа рукописа који је кандидаткиња предала комисији, подносимо Наставно–научном већу Математичког факултета следећи

ИЗВЕШТАЈ

1. Биографија кандидаткиње

Милица Макрагић рођена је 25.11.1986. године у Крушевцу. Основну школу „Нада Поповић” завршила је 2001. године и Гимназију, природно–математички смер, 2005. године у Крушевцу, оба пута као носилац Вукове дипломе.

Математички факултет Универзитета у Београду уписала је 2005. године, смер Професор математике и рачунарства. Дипломирала је 2009. године са просечном оценом 9,18. Новембра 2010. године уписала је докторске академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Алгебра. Све испите предвиђене планом и програмом докторских студија положила је са просечном оценом 9,88.

Добитник је стипендије Фонда за младе таленте Републике Србије за хиљаду најбољих студената завршних година (за школску 2008/2009. годину). По две године заредом добијала је стипендије Републике Србије и Фонда за младе таленте града Крушевца.

Од новембра 2010. године запослена је као асистент на Катедри за примењену математику Електротехничког факултета Универзитета у Београду. Током досадашњег рада на Електротехничком факултету држала је вежбе из четири предмета.

Објавила је три рада у међународним часописима са SCI листе: један у категорији M21 и два у категорији M22. Од два рада у категорији M22 један је самосталан ауторски рад. Учествовала је на четири конференције, једној међународној и три домаће. Од 2012. године до данас ангажована је на пројекту „Анализа и алгебра са применама” (пројекат основних истраживања бр. 174032), Министарства просвете, науке и технолошког развоја.

2. Научни и стручни рад

2.1. Објављене и прихваћене публикације у часописима са SCI листе

- [1] M. Makragić, *A method for proving some inequalities on mixed hyperbolic–trigonometric polynomial functions*, Journal of Mathematical Inequalities, 11 (2017), 817–829, (M22), доступно на <http://files.ele-math.com/articles/jmi-11-63.pdf>.
- [2] B. Malešević, M. Makragić, *A method for proving some inequalities on mixed trigonometric polynomial functions*, Journal of Mathematical Inequalities, 10 (2016), 849–876, (M22), доступно на <http://files.ele-math.com/articles/jmi-10-69.pdf>.
- [3] B. Banjac, M. Makragić, B. Malešević, *Some Notes on a Method for Proving Inequalities by Computer*, Results in Mathematics, 69 (2016), 161–176, (M21), доступно на <https://link.springer.com/article/10.1007/s00025-015-0485-8>.

2.2. Објављене и прихваћене публикације у часописима који нису на SCI листи

- [4] B. Malešević, I. Jovović, M. Makragić, B. Radičić, *A note on solutions of linear systems*, ISRN Algebra, 2013 (2013), Article ID 142124, 6 pages, (M51), доступно на <http://dx.doi.org/10.1155/2013/142124>.

2.3. Објављене публикације у зборницима

- [5] B. Malešević, I. Jovović, M. Makragić, B. Banjac, V. Katić, A. Jovanović, A. Pejović, *„Buchbergerov algoritam i vizuelizacija monomijalnih ideala”*, Zbornik radova drugog simpozijuma sa međunarodnim učešćem „Matematika i primene”, Matematički fakultet Beograd, 27. i 28. maj 2011, 117–125, (M63). (један од излагача)

2.4. Саопштења на конференцијама

- [6] M. Savatović, *„Prsteni trigonometrijskih polinoma”*, VIII simpozijum sa međunarodnim učešćem „Matematika i primene”, Matematički fakultet Beograd, 17. i 18. novembar 2017, (M64). (излагач)
- [7] B. Malešević, R. Obradović, B. Banjac, I. Jovović, M. Makragić, *„Application of polynomial texture mapping in process of digitalization of cultural heritage”*, XII konferencija NCD–2013 Nove tehnologije i standardi: Digitalizacija nacionalne baštine, Narodna biblioteka Srbije, Beograd, 31.10.–01.11.2013, (M64), доступно на http://www.ncd.org.rs/ncd_sr/Events/NCDbeograd2013/KnjigaApstrakata2013.pdf. (један од излагача)
- [8] B. Malešević, M. Makragić, *„About decidability of a problem in the theory of analytic inequalities”*, International conference Constructive mathematics–foundation and practice CMFP 2013, June 24–28, 2013, Faculty of Mechanical Engineering, Niš, Serbia, (M34). (излагач)

2.5. Учешће на пројектима

„Анализа и алгебра са применама”, Министарство просвете, науке и технолошког развоја, бр. 174032, (2012–).

3. Структура дисертације

Докторска дисертација „О прстену тригонометријских полинома са применама у теорији аналитичких неједнакости” написана је на $\text{xiii} + 142 + \text{v}$ страна. Структура рукописа је следећа:

Насловне стране, подаци о члановима комисије, сажетак, садржај, предговор

1. Факторизација у домену

- 1.1 Прости и максимални идеали
- 1.2 Факторизација и локализација
- 1.3 Факторизација у Нетериним и Дедекиндовим доменима
- 1.4 Крулови домени
- 1.5 Домени са слабијим особинама факторизације од једнозначности

2. Прстени тригонометријских полинома

- 2.1 Појам тригонометријског полинома
- 2.2 Прстен $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$
- 2.3 Прстен $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$
 - 2.3.1 Нерастављиви елементи
 - 2.3.2 Максимални идеали
- 2.4 Факторизација у потпрстенима прстена тригонометријских полинома
 - 2.4.1 Потпрстени прстена $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$
 - 2.4.2 Услови које задовољавају раширења прстена тригонометријских полинома
- 2.5 Алгоритми код тригонометријских полинома
 - 2.5.1 Дељење и факторизација у $\mathbb{Q}[s, c]/\langle s^2 + c^2 - 1 \rangle$
 - 2.5.2 Највећи заједнички делитељ два тригонометријска полинома

3. Прстени хиперболичко–тригонометријских полинома

- 3.1 Појам хиперболичко–тригонометријског полинома
- 3.2 Прстени $\mathbb{C}[\cosh x, \sinh x]$ и $\mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$
- 3.3 Алгоритми код ХТ–полинома

4. Метод доказивања класе неједнакости која обухвата мешовите тригонометријске полиномске функције

- 4.1 Помоћна тврђења и припрема за опис метода
- 4.2 Опис метода
 - 4.2.1 Побољшање метода
 - 4.2.2 Завршетак метода
- 4.3 Примене метода
 - 4.3.1 Доказ неједнакости из рада [16]
 - 4.3.2 Доказ неједнакости из рада [90]

5. Метод доказивања класе неједнакости која обухвата мешовите хиперболичко–тригонометријске полиномске функције

- 5.1 Помоћна тврђења и припрема за опис метода
- 5.2 Опис метода
- 5.3 Примене метода
 - 5.3.1 Доказ неједнакости из рада [50]
 - 5.3.2 Доказ неједнакости из рада [10]
 - 5.3.3 Доказ нове двоструке неједнакости

6. Закључци и даљи рад

Литература (број библиографских јединица је 110)

Биографија

4. Приказ садржаја дисертације

Глава 1 се бави основним појмовима и терминологијом из теорије комутативних прстена. Поред тога, наведене су познате теореме и тврђења која се користе у наставку рада и која су потребна за боље разумевање материје која следи. Сва тврђења дата су без доказа, уз наведене референце одакле су преузета.

Глава 2 се бави тригонометријским полиномима који су разматрани са алгебарског аспекта. Главна тема истраживања су својства факторизације у прстенима тригонометријских полинома.

Анализирајући својства факторизације у домену комплексних тригонометријских полинома, $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$, наведено је да је то домен са једнозначном факторизацијом. Приказан је облик нерастављивих елемената овог домена, као и факторизација елемената овог домена на атоме.

За домен реалних тригонометријских полинома, $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$, приказано је да није домен са једнозначном факторизацијом. Испоставља се да је то Дедекиндов полуфакторијалан домен. Описани су нерастављиви елементи овог домена, као и факторизација елемената овог домена на атоме. Такође, приказани су и максимални идеали овог домена, као и њихова веза са максималним идеалима домена $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$.

На крају ове главе приказани су алгоритми за дељење, факторисање, налажење највећег заједничког делитеља, као и за упрошћавање количника два тригонометријска полинома над пољем рационалних бројева.

Ова глава је прегледног карактера и у њој је обједињена већина резултата везаних за прстене тригонометријских полинома. Детаљно су приказани познати резултати релевантни за наставак рада.

У **глави 3**, по угледу на тригонометријске полиноме, дефинисани су хиперболичко-тригонометријски полиноми, скраћено ХТ-полиноми, као коначне линеарне комбинације функција $\sinh nx$ и $\cosh nx$, за $n \in \mathbb{N}$. Доказано је да реални, односно комплексни ХТ-полиноми образују прстен, штавише домен $\mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$, односно $\mathbb{C}[\cosh x, \sinh x]$. Испоставља се да су то домени са једнозначном факторизацијом. Одређени су нерастављиви елементи, као и облик максималних идеала оба ова домена.

У последњем одељку ове главе, разматрани су алгоритми код ХТ-полинома над пољем рационалних бројева, по угледу на алгоритме из друге главе. Слични резултати добијени су и за ХТ-полиноме, али за оне парове ХТ-полинома код којих је степен производа два ХТ-полинома једнак збиру степена његових чинилаца. Цела ова глава је оригинална.

У **глави 4** детаљно је изложен нов метод доказивања неједнакости облика $f(x) > 0$, над задатим коначним интервалом $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $a \leq 0 \leq b$, који коришћењем коначних Маклоренових развоја генерише полиномске апроксимације, када је $f(x)$ мешовит тригонометријски полином једне променљиве, тј. облика

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \cos^{q_i} x \sin^{r_i} x,$$

$\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$. Ови полиноми представљају елементе раширења прстена реалних тригонометријских полинома, у ознаци $\mathbb{R}[x, \cos x, \sin x]$.

Неједнакости овог типа су у великој мери заступљене у литератури посвећеној теорији аналитичких неједнакости. Значајан број њих је доказан на различите начине, док су многе од њих дате као отворени проблеми. Стога је настала идеја да се поступак доказивања ове класе неједнакости, у извесној мери, аутоматизује. Метод је илустрован на већем броју познатих и отворених проблема из теорије аналитичких неједнакости.

Ова глава базира се на раду [2], приликом чије израде је настала идеја доказивања наведених неједнакости. Ова идеја је у дисертацији даље развијана и примењивана у специфичним контекстима.

У глави 5 разматрано је проширење поступка описаног у претходној глави на класу реалних аналитичких функција која обухвата мешовите ХТ–полиноме једне променљиве, тј. полиноме облика

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \cosh^{q_i} x \sinh^{r_i} x,$$

$\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$. Овакви полиноми су елементи раширења прстена реалних хиперболичко–тригонометријских полинома, у ознаци $\mathbb{R}[x, \cosh x, \sinh x]$. Предмет истраживања пете главе је управо метод доказивања неједнакости облика $g(x) > 0$, за $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, $a \leq 0 \leq b$, који је настао прилагођавањем метода описаног у глави 4 овој новој класи неједнакости. Конкретни резултати овог метода приказани су кроз примере доказивања како познатих тако и нових неједнакости. Садржај ове главе је публикован у самосталном ауторском раду [1].

За методе доказивања описане у главама 4 и 5 испитана је и доказана њихова потпуност.

У глави 6 сумирани су закључци и наведени неки правци будућег рада.

5. Закључак и предлог

Рукопис „О прстену тригонометријских полинома са применама у теорији аналитичких неједнакости” кандидаткиње Милице Макрагић по садржају припада области алгебре, посебно теорији прстена тригонометријских полинома са применама. У раду је изучавана факторизација у доменима $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$, $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$, $\mathbb{C}[\cosh x, \sinh x]$ и $\mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$. Такође, развијани су методи доказивања неједнакости које обухватају мешовите тригонометријске и мешовите хиперболичко–тригонометријске полиномске функције, помоћу којих су доказани неки отворени проблеми из теорије аналитичких неједнакости. За изложене методе доказивања испитана је и доказана њихова потпуност.

Кандидаткиња је до сада објавила три рада на SCI листи. Један од ових радова је самосталан, а друга два су коауторска, при чему је један од њих са укупно два, а други са укупно три аутора. Резултати ових радова представљају значајан део ове дисертације.

На основу изложеног, комисија предлаже да се рукопис „О прстену тригонометријских полинома са применама у теорији аналитичких неједнакости” кандидаткиње Милице Макрагић **прихвати** као докторска дисертација, као и да се одреди комисија за њену одбрану.

Београд, 19.04.2018.

др Бранко Малешевић (ментор),
редовни професор Електротехничког факултета у Београду

др Александар Липковски,
редовни професор Математичког факултета у Београду

др Зоран Петровић,
редовни професор Математичког факултета у Београду

др Небојша Икодиновић,
ванредни професор Математичког факултета у Београду
