НАУЧНО-НАСТАВНОМ ВЕЋУ
МАТЕМАТИЧКОГ ФАКУЛТЕТА
У БЕОГРАДУ

На 330. седници Наставно-научног већа одржаној у петак 18. 3. 2016. године, именовани смо за чланове комисије за преглед и оцену рукописа „*Формализација различитих модела геометрије и примене у верификацији аутоматских доказивача теорема*“ кандидаткиње Данијеле Симић као докторске тезе. Комисија је предати рукопис пажљиво прочитала и подноси следећи

Извештај

1 Биографија кандидата

Данијела Симић (рођена Петровић) рођена је 26.09.1986. године у Ваљеву. Основну школу „Жикица Јовановић Шпанац” и „Ваљевску гимназију” завршила је као ђак генерације и носилац Вукове дипломе. Током средње и основне школе била је ученик многих такмичења из математике, физике, програмирања и освојила је бројне награде од којих су најважније трећа награда на савезном такмичењу из физике у четвртој години средње школе, као и трећа награда на републичком такмичењу из програмирања у четвртом разреду средње школе.

Године 2005. уписала је Математички факултет, уневерзитета у Београду, смер Рачунарство и Информатика. Студије је завршила 2009. године са просечном оценом 9.86. Била је стипендиста Министарства за науку и технологију. Докторске академске студије на смеру Информатика уписала је октобра 2009. године. Све испите предвиђене планом студија положила је са оценом 10. Учествовала у организацији више научних скупова у земљи које је организовала Ар⑽о ⑽ру ііі а Математичког факултета, чији је члан од 2010. године. До сада је у два циклуса била учесник научних пројеката које је финансирало Министарство просвете, науке и технолошког развоја Владе Републике Србије.

Основна област интересовања јој је аутоматско резоновање, са акцентом на аутоматско и интерактивно доказивање у геометрији. Имала је излагања на неколико конференција и радионица у земљи и иностранству.

Од октобра 2009. године била је запослена као сарадник у настави, а од октобра 2011. године као асистент на Катедри за рачунарство и информатику Математичког факултета Универзитета у Београду. Током досадашњег рада на Математичком факултету држала је вежбе из 6 предмета.

2 Област рукописа

Рукопис „*Формализација различитих модела геометрије и примене у верификацији аутоматских доказивача теорема*“ кандидаткиње Данијеле Симић припада широј области аутоматског резоновања и спаја уже области интерактивног доказивања теорема и рачунарски подржаног резоновања у геометрији.

Аутоматско резоновање представља спој области математичке логике, вештачке интелигенције и алгоритмике. Оно је важна и широко распрострањена област којом се бави неколико хиљада истраживача у свету. Главне примене аутоматског резоновања су у верификацији софтвера, верификацији хардвера, аутоматском доказивању математичких теорема, решавању оптимизационих и комбинаторних проблема итд.

Интерактивно доказивање теорема је област резоновања у којој човек доказује математичка тврђења уз помоћ интерактивних доказивача теорема (енгл. interactive theorem provers) тј. помоћника у доказивању (енгл. proof assistants). Најпознатији доказивачи теорема данас су Coq, Isabelle/HOL, Mizar, HOL Light и други. У овим системима се математичке теорије формализују задавањем дефиниција појмова обично у оквиру богатог и изражајног формалног оквира логике вишег реда и формулисањем тврђења (лема, теорема) која се затим доказују, обично кроз неку варијанту формалног система природне дедукције. Доказе које корисник задаје рачунар проверава, притом помажући тако што самостално доказује једноставнија тврђења која може да докаже, попуњавајући на тај начин недостајуће делове формалног доказа. Интерактивно доказивање теорема се интензивно користи у формализацији математике и верификацији софтвера. Механички проверени докази исправљају непрецизности које обично постоје у класичним математичким дефиницијама и доказима и упућују на дубљу анализу теме која се изучава. Такође, приликом примена у верификацији, механичка провера осигурава да софтвер не садржи грешке, што је изузетно битно у случајевима у којима грешке у софтверу имају недопустиве последице (нпр. медицински уређаји, контрола лета, нуклеарне електране и слично).

Аутоматско резоновање у геометрији подразумева доказивање геометријских теорема уз помоћ рачунара. Иако зачеци ове области датирају још од времена Тарског, највећи прогрес је направљен 1970-их година када је Ву предложио алгебарску методу за доказивање теорема у Еуклидској геометрији која је могла да докаже и веома сложене геометријске теореме. Још једна алгебарска метода која се развила у исто време је метода Гребнерових база. Ове методе користе аналитички приступ у доказивању и заснивају се на репрезентацији тачака координатама. Модерни доказивачи теорема који се заснивају на овим методама су коришћени да се докажу стотине нетривијалних теорема. Ипак, велика мана ових система је што производе доказе који нису читљиви. Деведесетих година XX-ог века постојало је више покушаја да се овај проблем реши и развијене су нове методе засноване на аксиоматизацији синтетичке геометрије – метода површина, метода пуног угла. Ипак, њихова главна мана је што су далеко мање ефикасни у односу на алгебарске методе.

У оквиру тезе се из перспективе рачунарства анализирају класичне математичке области и кандидаткиња у раду користи елементе математичке логике, геометрије и комплексне анализе.

3 Структура рукописа и кратак приказ

Рукопис има 214 страна и користи 173 библиографске јединице. Сачињен је од следећих глава:

У наставку је укратко описан садржај свих глава.

1. **Увод**

   У овој глави укратко се описују области којој теза припада, наводе се циљиве тезе, набрајају се доприноси тезе и описује структура текста који следи.

2. **Интерактивни доказивачи теорема**

   У овој глави даје се кратак преглед области интерактивног доказивања теорема. Описују се логичке основе интерактивних доказивача теорема (природна дедукција, λ–рачун и Кари-Хауард-ов изоморфизам) и даје се преглед њиховог развоја и основних карактеристика. Нако тога се даје кратак приказ најпознатијих доказивача и најзначајнијих резултата који су до сада у овој области постигнути. На крају ове главе је прилично детаљно описан доказивач Isabelle/HOL, који је коришћен у формализацијама описаним у наставку тезе.

3. **Рачунарски подржано доказивање у геометрији**

   У овој глави даје се преглед најзначајнијих резултата у области аутоматског и интерактивног доказивања теорема у геометрији. Описују се аутоматски алгебарски доказивачи теорема засновани на Вуовој методи и методи површина, затим аутоматски полусинтетички доказивачи засновани на методи површина и њеним проширењима и аутоматски синтетички доказивачи засновани на кохерентној логици. Укратко се описују и системи за аутоматско проналажење геометријских конструкција и њихова примена у образовању. У склопу описа формализација геометрије у интерактивним доказивачима теорема описују се интерактивне формализације делова геометрије Хилберта и Тарског, као и још неких мање познатих геометрија. На крају се описују неке примене аутоматских доказивача теорема у оквиру интерактивних формализација геометрије.

4. **Формализација аналитичке геометрије**

   У овој глави описује се прва од неколико оригиналних формализација геометријских теорија које представљају основу тезе. У оквиру доказивача Isabelle/HOL даје се формализација Декартове равни уз коришћење ригорозног приступа, али на начин који је суштински близак уобичајеном увођењу Декартове равни у образовању. Дају се различите дефиниције основних појмова геометрије (на пример, различите дефиниције правих) и показује се да су све оне еквивалентне. Уводе се изометрије и описују се њихова основна својства. Након тога, формално се уводе и аксиоме Тарског и формално се доказује да уведена Декартова раван задовољава све аксиоме (укључујући и аксиому непрекидности). Након тога се уводе и аксиоме Хилберта и формално се доказује да уведена Декартова раван задовољава све аксиоме Хилберта (осим аксиома у којима се помињу углови).

5. **Формализација хиперболичке геометрије**

   За разлику од формализације из претходне главе која уводи тачке Декартове равни као парове реалних бројева, у овој глави се прелази на формализацију модела геометрије у оквиру комплексне равни. Уводи се проширена комплексна раван и задаје се у облику комплексне пројективне праве (помоћу хомогених координата), али и у облику Риманове сфере и стереографске пројекције, након чега се успостављају везе између ове две дефиниције и доказује се њихова еквивалентност. Након тога се формално уводе Мебијусове трансформације проширене комплексне равни. Уводи се група Мебијусових трансформација и њене важне подгрупе. Уводи се појам уопштених кружница (кругоправих). Формално се доказују многа својства Мебијусових трансформација, укључујући чињеницу да се кругоправе пресликавају на кругоправе, као и да су та пресликавања конформна. Анализира се појам дворазмере и показује се да се она чува Мебијусовим трансформацијама. Уводи се оријентација и посебно се разматра група Мебијусових трансформација која чува јединичну кружницу, сликајући унутрашњост јединичног диска самог на себе. Анализирају се фиксне тачке Мебијусових трансформација и даје се њихова класификација. Формализација је заснована на потпуно алгебарском приступу, а кандидаткиња у дискусији описује предности таквог приступа формализацији у односу на приступ који би био више синтетички. Изграђена формализација проширене комплексне равни и Мебијусових трансформација омогућава једноставно дефинисање Поенкареовог диск модела (његових тачки, правих, релације између и подударно и трансформација). Показује се да тако дефинисан модел задовољава шест од девет аксиома геометрије Тарског.

6. **Алгебарски методи и стереометрија**

   У овој глави се описују алгебарски методи у геометрији и у оквиру система Isabelle/HOL се дефинишу функције којима се планиметријска конструкција и геометријско тврђење задато у специјално уведеној термовској синтакси преводи у низ полиномијалних једнакости. Након тога, даје се опис свођења стереометријских тврђења на алгебарски облик и описује се имплементација аутоматског доказивача стереометријских теорема заснованог на овом свођењу и методи Гребнерових база. На крају се анализира примена овог система на решавање корпуса стереометријскх задатака из средњошколских збирки задатака и збирки задатака са такмичења и приказују се постигнути резултати.

7. **Закључци и даљи рад.**

   У овој глави кандидаткиња резимира основне закључке своје тезе и даје смернице за даљи рад.

4 Анализа рукописа и оригиналних доприноса

У склопу тезе, кандидаткиња је направила одличан преглед области интерактивног доказивања теорема и рачунарски подржаног резоновања у геометрији, што указује на њену способност да систематизује и прикаже знање из актуелних истраживачких области. Поред тога, рукопис доноси неколико оригиналних научних резултата.

- Формализована је аналитичка геометрија тј. Декартова раван у оквиру система за интерактивно доказивање теорема Isabelle/HOL. Дато је неколико различитих дефиниција Декартове координатне равни и доказано је да су све дефиниције еквивалентне. Дефиниције су преузете из стандардних уџбеника, али је подигнут ниво ригорозности. Формално је доказано да Декартова координатна раван задовољава све аксиоме Тарског и већину аксиома Хилберта (укључујући и аксиому непрекидности). Анализирани су докази и који од два система аксиома је лакши за формализацију. Формално је доказано да је аналитичка геометрија модел синтетичке геометрије и анализирано је колико су докази заиста једноставни.
- Формализована је теорија проширене комплексне равни (дате у виду комплексне пројективне праве и у виду Риманове сфере), њених објеката (кругова и правих) и њених трансформација (на пример, инверзија или Мебијусових трансформација). Ова формализација може да служи као веома важан блок за изградњу будућих формалних модела различитих геометрија (нпр. Поенкареовог диск модела хиперболичке геометрије). Рад на формализацији је захтевао обједињавање различитих извора у једну јединствену, формалну репрезентацију и пребацивање у јединствен језик узевши да су описи били првобитно дати на много различитих начина. Један од најзначајнијих доприноса је управо расветљавање ових непрецизности и креирање уобличне, потпуно формализоване теорије.
- Дата је дефиниција релације *између* и доказана су нека њена основна својства у оквиру Поенкареовог диск модела. Извршена је формализација аксиома Тарског у оквиру Поенкареовог диск модела и формално је доказано да Поенкареов диск задовољава шест аксиома Тарског (оних у којима се не јавља потреба за проналажењем пресека линија).
- У циљу изградње формално верификованог система за аутоматско доказивање у геометрији који користи метода Гребнерових база или Вуову методу, имплементиран је корак превођења планиметријских тврђења у алгебарску форму у оквиру система Isabelle/HOL. Поред тога, направљен је и прототип система за доказивање тврђења у стереометрији (на чијој се верификацији и даље ради). Направљен је софтвер који омогућава опис стереометријских конструкција и тврђења у једноставном облику који је разумљив човеку, а потом превођење тог записа у систем полинома на који се примењује Вуова метода или метода Гребнерових база. Систем је тестиран кроз неколико различитих задатака из уџбеника за средње школе и факултете и задатака са математичких такмичења, и анализирана је ефикасност оваквог приступа.

Из рада на овој тези проистекли су следећи радови (један објављен у часопису категорије M23).

1. Danijela Simić: *Using Small-Step Refinement for Algorithm Verification in Computer Science Education*. The International Journal for Technology in Mathematics Education (IJTME), November 2015, doi: 10.1564/tme_v22.4.03, 10.1564/tme_v22.4.03, M51

2. Filip Marić, Danijela Petrović: *Formalizing Complex Plane Geometry*, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, November 2014. doi: 10.1007/s10472-041-9436-4, M23
3. Filip Marić, Ivan Petrović, Danijela Petrović, Predrag Janičić: *Formalization and Implementation of Algebraic Methods in Geometry*, Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science 79, pp. 63–81. doi: 10.4204/EPTCS.79.4, M33

Поред тога, кандидаткиња је имала излагања на неколико конференција из области рачунарства, од којих је најзначајније излагање на конференцији *Automated Deduction in Geometry (ADG)*, која је најрелевантнија конференција из области аутоматског резоновања у геометрији којом се теза бави.

Као чланови комисије пратили смо писање овог рукописа и током рада и након читања првих верзија дали смо аутору низ захтева и сугестија које је он обрадио и усвојио.

5 Закључак

Рукупос „*Формализација различитих модела геометрије и примене у верификацији аутоматских доказивача теорема*“ кандидаткиње Данијеле Симић садржи одличан приказ аутоматског и интерактивног доказивања теорема, нарочито у области геометрије, али и опис неколико разрађених формализација класичних математичких теорија.

Прву основну компонентну тезе представљају формализације геометрије Декартове равни, формализација геометрије комплексне равни и формализација Поенкареовог диска унутар комплексне равни, као и докази да они представљају моделе одговарајућих синтетичких геометрија (геометрије Тарског и геометрије Хилберта).

Другу основну компоненту чини формална анализа алгебарских метода (пре свега корака алгебризације тј. изградње полинома на основу задате геометријске конструкције и пратећег тврђења), као и проширење алгебарских метода на решавање проблема у геометрији простора.

Кандидаткиња у тези описује тешкоће са којима се суочила приликом покушаја формалног доказивања да Поенкареов диск модел задовољава одређени број аксиома Тарског и ту формализацију најављује као даљи рад. Иако због ових потешкоћа Поенкареов диск модел није у потпуности формализован, комисија сматра да и у овом сегменту теза садржи значајне оригиналне доприносе.

Својим радом на рукопису и на формализацији описаних математичких теорија кандидаткиња Данијела Симић је показала висок степен истраживачке зрелости и могућност успешног рада на решавању теоријских и практичних проблема из области аутоматског резоновања и интерактивног доказивања теорема. Делови тезе досада су објављени у три научна рада. Поред овога кандидаткиња је своје резултате саопштила на неколико конференција и радних скупова уско специјализованих за област којом се бави.

На основу свега наведеног, како су испуњени и сви формални услови, предлажемо да се рукопис:

“*Формализација различитих модела геометрије и примене у верификацији аутоматских доказивача теорема*”

Данијеле Симић

прихвати као докторска дисертација из рачунарства и да се закаже његова јавна одбрана.

У Београду,

22. 5. 2017.

Комисија:

ванр. проф. Математичког факултета Универзитета у Београду,
др Филип Марић, ментор

ред. проф. Математичког факултета Универзитета у Београду,
др Предраг Јаничић

ванр. проф. Математички факултета Универзитета у Београду,
др Срђан Вукмировић

research Fellow, Imperial College London,
научни сарадник, Математички институт САНУ

др Петар Максимовић