



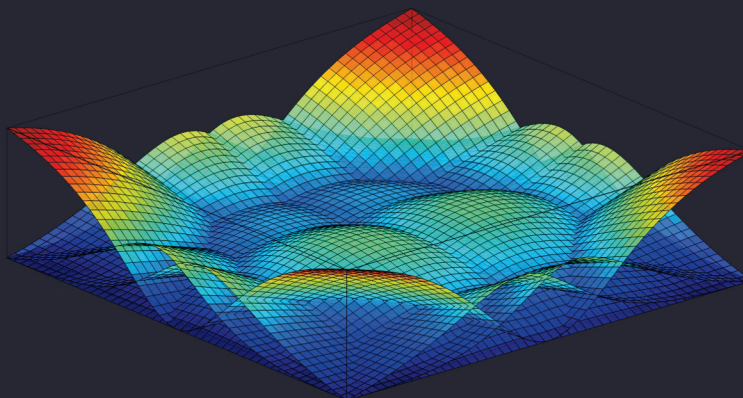
UNIVERZITET U NIŠU
MAŠINSKI FAKULTET U NIŠU



Predrag Đ. Milić

**RAZVOJ IZOGOMETRIJSKE METODE
KONAČNIH ELEMENATA I NJENA PRIMENA U
STRUKTURNOJ ANALIZI NOSEĆIH
STRUKTURA TRANSPORTNIH MAŠINA**

DOKTORSKA DISERTACIJA



Niš, 2018.



UNIVERZITET U NIŠU
MAŠINSKI FAKULTET U NIŠU



Predrag Đ. Milić

**RAZVOJ IZOGOMETRIJSKE METODE
KONAČNIH ELEMENATA I NJENA PRIMENA U
STRUKTURNOJ ANALIZI NOSEĆIH
STRUKTURA TRANSPORTNIH MAŠINA**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Niš, 2018.



UNIVERZITET U NIŠU
MAŠINSKI FAKULTET U NIŠU



Predrag Đ. Milić

**DEVELOPMENT OF ISOGEOMETRIC FINITE
ELEMENT METHOD AND ITS APPLICATION
IN STRUCTURAL ANALYSIS OF TRANSPORT
MACHINES**

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2018.

Podaci o doktorskoj disertaciji

Mentor:	Dr Dragan Marinković, vanredni profesor Univerzitet u Nišu – Mašinski fakultet u Nišu
Naslov:	Razvoj izogeometrijske metode konačnih elemenata i njena primena u strukturnoj analizi nosećih struktura transportnih mašina
Rezime:	<p>Predmet istraživanja doktorske disertacije je izogeometrijska strukturna analiza. Izogeometrijska analiza predstavlja poseban pravac u razvoju metode konačnih elemenata (MKE) koji ukida jaz između stvarne geometrije modeliranih struktura i geometrije koja se generiše diskretizacijom konačnim elementima. U izogeometrijskoj strukturnoj analizi, NURBS (neuniformni racionalni bazni splajn) funkcije najčešće čine osnovu za definisanje CAD geometrije, geometrije KE i interpolacionih funkcija modela KE. Bez obzira na gustinu mreže, geometrija modela KE je tačno opisana. Cilj disertacije je sistematizacija procedura i metoda potrebnih za izogeometrijsku strukturnu analizu formiranjem opštih matematičkih formi i programskih procedura. Modeli konačnih elemenata su definisani na osnovu izogeometrijske formulacije korišćenjem NURBS i T-splajn osnovnih funkcija. Formiran je izogeometrijski solid element kao i Kirchhoff-Love element tipa ljuske sa NURBS osnovnim funkcijama. Izložen je i metod modeliranja složenih struktura Kirchhoff-Love elementima, formiranih iz više površi. Rezultati izvršenih izogeometrijskih analiza upoređivani su sa analitičkim, ekeprimentalnim i rezultatima klasične metode konačnih elemenata. Formirani izogeometrijski modeli su testirani u oblasti linearne statičke analize, modalne analize i eksplicitne dinamičke analize. Poseban deo disertacije je posvećen oceni pogodnosti izogeometrijske analize u oblasti strukturne analize složenih struktura transportnih mašina. Zaključci o prednostima i nedostacima korišćenja NURBS i T-splajn osnovnih funkcija u metodi konačnih elemenata predstavljeni su kroz primere. U završnom delu predloženi su pravci daljih istraživanja.</p>
Naučna oblast:	Mašinsko inženjerstvo
Naučna disciplina:	Transportna tehnika i logistika
Ključne reči:	Izogeometrijska analiza, MKE, NURBS, Kirchhoff-Love ljuska, modalna analiza, eksplicitna dinamička analiza, kompleksne izogeometrijske strukture
UDK:	517.96:621.86/.87(043.3)
CERIF klasifikacija:	T210
Tip licence Kreativne zajednice:	CC BY-NC-ND

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	PhD Dragan Marinković, associate professor University of Niš - Faculty of Mechanical Engineering in Niš
Title:	Development of isogeometric finite element method and its application in structural analysis of transport machines
Abstract:	<p>The subject of doctoral dissertation is the isogeometric structural analysis. The isogeometric analysis represents a special approach in the finite element method (FEM) which aims at closing the gap between the actual geometry of modeled structures and the geometry generated upon the finite element discretization. In the isogeometric FE analysis, NURBS (non-uniform rational basis spline) functions usually form the basis for the definition of both the geometric models and interpolation functions of the FE models. Regardless of the mesh density, the geometry is exactly described in the FE model. The aim of the dissertation is the systematization of procedures and methods necessary for isogeometric analysis by creating general mathematical forms and program procedures. Isogeometric FE models are defined by using the NURBS and T-spline basis functions. An isogeometric solid element is formulated as well as a Kirchhoff-Love shell element with the NURBS basic functions. The method of modeling complex structures formed from several surfaces by using Kirchhoff-Love elements is presented. The results of the performed isogeometric analyses were compared with analytical results, the results yielded by the classical finite element method and experimental results. The developed isogeometric models were tested in the field of linear static, modal and explicit dynamic analyses. A particular part of the dissertation is dedicated to the benefits of isogeometric analysis in the field of structural analysis of transport machines complex structures. The conclusions related to advantages and disadvantages of NURBS and T-splines basis functions in the finite element method are presented through examples and tests done in this dissertation. The directions of further research are proposed.</p>
Scientific Field:	Mechanical engineering
Scientific Discipline:	Transport technics and logistics
Key Words:	Isogeometric analysis, FEM, NURBS, Kirchhoff-Love shell, modal analysis, explicit dynamic analysis, complex isogeometric structures
UDC:	517.96:621.86/.87(043.3)
CERIF Classification:	T210
Creative Commons License Type:	CC BY-NC-ND

Komisija za ocenu i odbranu doktorske disertacije

- Predsednik:* Dr Miomir Jovanović, redovni profesor
Univerzitet u Nišu - Mašinski fakultet u Nišu
Uža naučna oblast: Transportna tehnika i logistika
- Član:* Dr Dragoslav Janošević, redovni profesor
Univerzitet u Nišu - Mašinski fakultet u Nišu
Uža naučna oblast: Transportna tehnika i logistika
- Član:* Dr Predrag Rajković, redovni profesor
Univerzitet u Nišu - Mašinski fakultet u Nišu
Uža naučna oblast: Matematika i informatika
- Član:* Dr Mile Savković, redovni profesor
Univerzitet u Kragujevcu – Fakultet za mašinstvo i građevinarstvo u Kraljevu
Uža naučna oblast: Mehanizacija i noseće konstrukcije
- Mentor i član:* Dr Dragan Marinković, vanredni profesor
Univerzitet u Nišu - Mašinski fakultet u Nišu
Uža naučna oblast: Transportna tehnika i logistika

Datum odbrane: 11.05.2018.

Zahvalnost autora

Ova doktorska disertacija predstavlja rezultat višegodišnjeg obrazovanja i istraživačkog rada i iz tog razloga osećam potrebu da iskažem svoju iskrenu zahvalnost i poštovanje brojnim profesorima, kolegama, prijateljima i porodici koji su mi na tom putu pružili veliku pomoć i podršku.

Svoju duboku zahvalnost dugujem mentoru, dr Draganu Marinkoviću, vanrednom profesoru Mašinskog fakulteta u Nišu, za svestranu pomoć, istraživačku slobodu i korisne savete tokom izrade ove disertacije.

Želim da iskažem zahvalnost profesoru dr Miomiru Jovanoviću koji mi je preneo ljubav ka strukturnoj analizi i metodi konačnih elemenata kao i profesoru dr Dragoslavu Janoševiću na korisnim savetima i pomoći prilikom formiranja modela za proveru izometrijske metode na realnim složenim strukturama.

Posebnu zahvalnost dugujem profesoru Manfredu Zehnu sa Instituta za mehaniku Tehničkog Univerziteta u Berlinu što mi je omogućio da ispitivanja obavim u njihovoj laboratoriji.

Zahvalnost dugujem i svim članovima Katedre za transportnu tehniku i logistiku koji su mi tokom višegodišnjeg rada pružali bezrezervnu podršku.

Najdublju zahvalnost dugujem svojim roditeljima, sestri i svojoj porodici koja me je sa puno razumevanja podržavala u toku školovanja i tokom izrade doktorske disertacije.

U Nišu, maj 2018.

Predrag Milić

Sadržaj

1. Uvod.....	1
1.1 Izogeometrijski metod konačnih elemenata.....	1
1.2 Pregled dosadašnjih istraživanja	2
1.3 Naučni ciljevi (doprinos disertacije)	6
1.4 Organizacija sadržaja disertacije.....	6
2. Geometrijsko modeliranje sa neuniformnim racionalnim B-splajnovima	9
2.1 B-splajn osnovne funkcije.....	9
2.2 B-splajn geometrija	13
2.3 Definicija i osobine NURBS krivih	16
2.4 Definicija i osobine NURBS površi.....	20
2.5 Izvodi osnovnih NURBS funkcija.....	22
2.6 Algoritmi za promenu zapisa NURBS geometrije.....	26
2.6.1 Algoritam za ubacivanje jednog ili više čvorova u vektor čvorova.....	26
2.6.2 Algoritam za povećanje stepena osnovnih funkcija (degree elevation).....	29
2.6.3 K-rafinacija mreže.....	30
2.7 Modeliranje kružnog luka	32
2.8 NURBS geometrija formirana primenom više patch-eva	34
3. Metoda konačnih elemenata i izogeometrijski pristup.....	35
3.1 Klasični metod konačnih elemenata zasnovan na pomeranju	36
3.2 Izogeometrijski koncept	38
3.3 Osnovne razlike interpolacionih funkcija u klasičnoj metodi konačni elemenata i izogeometrijskoj metodi sa NURBS funkcijama oblika	42
4. Implementacija NURBS osnovnih funkcija u metodi konačnih elemenata.....	46
4.1 Izogeometrijska analiza 2D elementima u ravni.....	46
4.2 Izogeometrijska analiza 3D solid elementima u ravni	50
4.3 Softver za izogeometrijsku strukturnu analizu.....	54
4.4 Numerički primer pločice sa otvorom sa jedim i više patcheva	59
5. Model Kirchhoff-Love ljuske sa NURBS osnovnim funkcijama	67
5.1 Diferencijalna geometrija površi.....	68

5.2 Kinematika ljuske	71
5.3 Diskretizacija primenom metode konačnih elemen. sa NURBS funkcijama oblika ..	79
5.4 Formiranje modela sa više patch-eva primenom traka koje prenose savijanje.....	82
6. Strukturna izogeometrijska analiza sa T-splajn funkcijama oblika	89
6.1 T-splajn geometrija	90
6.2 T-splajn element.....	97
6.3 Proširena T-mreža	99
6.4 Bézier-ova ekstrakcija	101
6.5 Bézier-ova dekompozicija.....	105
6.6 Numerički primer pločice sa otvorom sa više T-splajn površi	109
7. Problem sopstvenih vrednosti i eksplicitna tranzijentna dinamička analiza.....	111
7.1 Problem sopstvenih vrednosti	111
7.2 Formiranje inercione matrice	112
7.3 Modalna analiza slobodno oslonjene pravougaone ploče.....	114
7.4 Eksperimentalno ispitivanje oscilovanja slobodno oslonjene pravougaone ploče ...	116
7.5 Eksplicitna dinamička izogeometrijska analiza	121
7.6 Određivanje kritične veličine koraka eksplicitne integracije.....	124
7.7 Eksplicitna dinamička analiza konzole	125
8. Primena izogeometrijske analize za rešavanje realnih problema	129
8.1 Analiza strele bagera BGH 250 NLC.....	129
8.2 Sopstveni oblici oscilovanja standardne kuke DIN 15 401	135
9. Zaključak.....	140
Literatura.....	143
Biografija autora	151

Pregled prikazanih slika

- Slika 1.1 Drafting splajn – tehnika crtanja pomoću drvenih letvica
- Slika 2.1 Trougaona šema za određivanje osnovnih funkcija višeg stepena (levo),
Određivanje $p+1$ osnovne funkcije različite od nule na rasponu $[\xi_j, \xi_{j+1})$ (desno)
- Slika 2.2 B-splajn osnovne funkcije za dati vektor čvorova $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{p+1}, 0.25, 0.5, 0.75, \xi_{m-p}, \xi_{m-p+1}, \xi_m\}$, gde je $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{p+1} = 0$ i $\xi_{m-p} = \xi_{m-p+1} = \dots = \xi_m = 1$, stepen osnovnih funkcija $p=1, 2, \dots, 6$.
- Slika 2.3 Izvodi osnovnih funkcija B-splajna trećeg stepena za vektor čvorova $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1, 1\}$
- Slika 2.4 Osobina konveksnog omotača B-splajn krive
- Slika 2.5 NURBS kriva sa vektorom čvorova $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0.5, 0.8, 0.8, 0.8, 1, 1, 1, 1\}$ i stepena $p=3$, osnovne funkcije i izvodi osnovnih funkcija
- Slika 2.6 Transformacija projekcijom – formiranje NURBS krive
- Slika 2.7 NURBS površ sa prikazanim tačkama kontrolnog poligona
- Slika 2.8 Osnovne funkcije NURBS površi. Prikaz osnovnih funkcija od $R_{0,2}$ do $R_{7,2}$ pojedinačno kao i pregled svih osnovnih funkcija u parametarskom prostoru $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$ $H = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$ $w_{0,0} = w_{3,3} = w_{3,0} = w_{0,3} = 1$, $w_{1,1} = w_{2,1} = w_{1,2} = w_{2,2} = 0.7$, $w_{0,1} = w_{0,2} = w_{3,1} = w_{3,2} = w_{1,0} = w_{2,0} = w_{1,3} = w_{2,3} = 0.8$
- Slika 2.9 Izvodi osnovnih funkcije NURBS površi. Prikaz izvoda osnovnih funkcija od $R'_{0,2}$ do $R'_{7,2}$ pojedinačno kao i pregled svih izvoda osnovnih funkcija u parametarskom prostoru
- Slika 2.10 Ubacivanje čvorova u vektor čvorova NURBS krive – knot insertion. U prvom redu je prikazana početna geometrija i njoj odgovarajuće osnovne funkcije. U drugom prikazana je geometrija i osnovne funkcije dobijene ubacivanjem čvora vrednosti 0.5 u vektor čvorova a u tečem ubacivanjem i čvorova 0.25 i 0.75. Crvenim krugovima su označene tačke kontrolnog poligona a plavim kvadratima su odvojeni elementi (segmenti) krive.
- Slika 2.11 Višestruko ubacivanje čvorova u vektor čvorova sa multipliciranjem pojedinih čvorova NURBS krive reda 3 sa vektorima čvorova: $\Xi_1 = \{0, 0, 0, 0, 0.5, 0.8, 0.8, 0.8, 1, 1, 1\}$ i $\Xi_2 = \{0, 0, 0, 0, 0.2, 0.4, 0.5, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.8, 0.8, 0.9, 1, 1, 1\}$
- Slika 2.12 Povećanje stepena osnovnih funkcija NURBS krive – degree elevation
U prvom redu je prikazana početna geometrija i njoj odgovarajuće osnovne funkcije. U drugom je prikazana geometrija i osnovne funkcije dobijene povećanjem stepena osnovnih funkcija na $p=3$ a u trećem redu povećanje stepena osnovnih funkcija na $p=4$. Crvenim krugovima su označene tačke kontrolnog poligona. Sve krive imaju samo jedan segment.
- Slika 2.13 Povećanje stepena osnovnih funkcija i naknadno ubacivanje čvorova u vektor čvorova NURBS krive – k rafinacija.

- Slika 2.14 Određivanje težinskih koeficijenata pri modeliranju kružnog luka
- Slika 2.15 Uticaj težinskih koeficijenata na geometriju NURBS krive
- Slika 2.16 Četvrtina sfere formirana od dva NURBS patcha sa po jednim elementom
- Slika 3.1 Postupak mapiranja u izogeometrijskoj i klasičnoj metodi konačnih elemenata.
- Slika 3.2 Veza indeksnog, parametarskog i fizičkog prostora u izogeometrijskoj analizi.
- Slika 3.3 Pregled aproksimacije funkcija polinomima a) nultog – konstantom b) prvog i c) drugog reda
- Slika 3.4 Prikaz kvadratnih, kubnih Lagrangeovih osnovnih funkcija kao i NURBS osnovnih funkcija trećeg stepena
- Slika 3.5 Razlika u tačnosti interpolacije Lagrangeovih funkcija (levo) i ponašanje B-a splajn osnovnih funkcija (desno)
- Slika 4.1 NURBS površ – 2d mreža
- Slika 4.2 NURBS solid– fizički i indeksni prostor
- Slika 4.3 Globalno (patcha) i lokalno (elementa) označavanje
- Slika 4.4 Šematski prikaz toka informacija kroz softver
- Slika 4.5 Šematski prikaz toka informacija kroz softver sa više patch-eva
- Slika 4.6 Pločica sa otvorom – a) fizički model, b) NURBS geometrija
- Slika 4.7 Mreža konačnih elemenata formirana u komercijalnom softveru
- Slika 4.8 Konvergencija rešenja izogeometrijske analize problema istežanja pločice sa otvorom za osnovne funkcije drugog i trećeg reda
- Slika 4.9 Polje pomeranja sračunato a) izogeometrijskom stuktornom analizom, b) komercijalnim softverskim paketom ANSYS
- Slika 4.10 Normalna komponenta napona σ_{xx} (N/cm²) sračunata a) izogeometrijskom stuktornom analizom, b) komercijalnim softverskim paketom ANSYS
- Slika 4.11 Model pločice sa otvorom sa više patcheva
- Slika 4.12 Referentni model pločice sa otvorom sa više patcheva
- Slika 4.13 Modeli pločice sa otvorom sa više patcheva i maksimalnom veličinom elementa
- Slika 4.14 Relativno odstupanje rezultata analize modela sa otvorom formiranim sa četiri patcha
- Slika 4.15 Uporedni prikaz rezultata analize pločice sa otvorom sa više patcheva (levo) i rezultata dobijenih referentnim modelom (desno)
- Slika 4.16 Matrica krutosti a) posle asembliranja b) posle optimizacije širine pojasa
- Slika 4.17 Složeniji geometrijski model sastavljen iz više patcheva
- Slika 5.1 Kovarijantni koordinatni sistem u određenoj tački površi
- Slika 5.2 Priraštaj luka površi
- Slika 5.3 Početni i trenutni položaj ljuske
- Slika 5.4 Model četvrtine cilindra, modeliranje graničnih uslova uklještenja i konturni prikaz pomeranja u z pravcu

- Slika 5.5 Rezultati analize konvergencije FEM modela sa NURBS osnovnim funkcijama različitog stepena
- Slika 5.6 Dodatni patch-evi za spajanje dva patcha, geometrija patcha
- Slika 5.7 Dodatni patch sa minimumom zahteva u pogledu stepena osnovnih funkcija
- Slika 5.8 Model dve četvrtine cilindra sa dva patcha i trakom za prenos momenta savijanja
- Slika 5.9 Konturni prikaz pomeranja u z-pravcu modela sa dva patcha i trakom za prenos momenta savijanja
- Slika 5.10 Pregled zavisnosti ugiba sredine cilindra u funkciji broja elementata i stepena osnovnih funkcija
- Slika 5.11 Zavisnost ugiba sredine modela i parametra širine trake koja prenosi savijanje
- Slika 5.12 Analize uticaja odnosa modula elastičnosti trake i osnovnog materijala na tačnost rezultata analize
- Slika 6.1 Poboljšanje mreže–NURBS (levo) i lokalno poboljšanje mreže T-splajn (desno)
- Slika 6.2 Linije čvorova za određivanje osnovnih funkcija $N_i(\xi, \eta)$
- Slika 6.3 Oblast definisanosti kubnog PB splajana sa četiri tačke kontrolnog poligona
- Slika 6.4 T-mreža
- Slika 6.5 Određivanje lokalnog vektora čvorova kod T-splajna sa neparnim stepenom
- Slika 6.6 Određivanje lokalnog vektora čvorova kod T-splajna sa parnim stepenom
- Slika 6.7 T-mreža bikubne T-splajn geometrije
- Slika 6.8 Zapreminiska T-splajn mreža
- Slika 6.9 Gore levo: T-mreža, Gore desno: T-splajn elementi na T-mreži elemenata, Dole: T-splajn površ sa tačkama kontrolnog poligona i T-splajn elementima
- Slika 6.10 T-mreža elementa br. 1 i kontrolne tačke za koje T-splajn osnovne funkcije imaju vrednost različitu od nule na oblasti definisanosti elementa
- Slika 6.11 Preslikavanja sa osnovnog domena, domena elementa i domena lokalnih osnovnih funkcija
- Slika 6.12 Primeri proširenja T-mreže u različitim pravcima
- Slika 6.13 Proširena T-mreža
- Slika 6.14 Bernstein-ovi polinomi prvog, drugog i trećeg reda
- Slika 6.15 Prikaz B-splajn krive i osnovnih funkcija
- Slika 6.16 Prikaz postupka Bézier-ove dekompozicije jednog elementa krive B-splajna sa transformacijom u Bézier-ovu krivu i povratnim određivanjem B-splajn osnovnih funkcija.
- Slika 6.17 NURBS kriva pre i posle postupka dekompozicije
- Slika 6.18 T-splajn model pločice sa otvorom
- Slika 6.19 Normalna komponenta napona σ_{xx} (N/cm²) - izogeometrijska stuktorna analiza na T-splajn geometriji formiranoj sa 4 patcha.
- Slika 7.1 Model pravougaone ploče

- Slika 7.2 Primer formiranih mreža sa uniformnim i neuniformnim vektorima čvorova
- Slika 7.3 Relativno odstupanje rezultata analize NURBS modela u odnosu na rezultate referentnog modela
- Slika 7.4 Postavka merne opreme
- Slika 7.5 Definisane tačke u kojima će se vršiti merenje
- Slika 7.6 Praćenje merenja
- Slika 7.7 Model konzole
- Slika 7.8 Mreža elemenata i tačke kontrolnog poligona modela sa uniformnim vektorima čvorova i osnovnim funkcijama drugog stepena (slika gore) i trećeg stepena (slika dole)
- Slika 7.9 Pregled rezultata tranzijentne dinamičke analize
- Slika 7.10 Pregled rezultata tranzijentne dinamičke analize - detalj
- Slika 8.1 Bager BGH 250 NLC
- Slika 8.2 CAD model strele bagera BGH 250 NLC
- Slika 8.3 Reakcije u članovima kinematičkog lanca bagera
- Slika 8.4 Modeli strele sa grubom i finom mrežom
- Slika 8.5 Modeli strele sa 87 patcheva i detaljem na kome su prikazani NURBS elementi.
- Slika 8.6 Deformacija strele bagera – slika gore model u komercijalnom softveru – slika dole model sa NUBRS osnovnim funkcijama
- Slika 8.7 Detalj deformacije strele bagera – slika levo model sa NUBRS osnovnim funkcijama – slika desno model u komercijalnom softveru
- Slika 8.8 Kuka po standardu DIN 15-401-1 izvođenje RF
- Slika 8.9 NURBS model kuke DIN 15-401-1 izvođenje RF
- Slika 8.10 Primer poprečnog preseka kuke sa tačkama kontrolnog poligona i elementima
- Slika 8.11 NURBS model kuke sa odgovarajućim poprečnim presecima

Pregled prikazanih tabela

- Tabela 3.1 Poređenje termina klasične metode konačnih elemenata i izogeometrijske metode konačnih elemenata sa NURBS osnovnim funkcijama
- Tabela 4.1 Pregled rezultata analize u funkciji stepena i broja osnovnih funkcija
- Tabela 4.2 Pregled rezultata analize pločice sa otvorom sa više patch-eva u funkciji stepena i broja osnovnih funkcija
- Tabela 6.1 Osobine Lagrangeovih, NURBS i T-splajn osnovnih funkcija u MKE
- Tabela 7.1 Pregled rezultata analize i merenja ploče od aluminijuma
- Tabela 7.2 Uporedni pregled sopstvenih oblika oscilovanja ploče
- Tabela 7.3 Uporedni pregled oscilovanja ploče
- Tabela 8.1 Osnovni podaci bagera BGH 250 NLC
- Tabela 8.2 Pregled parametara mreža
- Tabela 8.3 Pregled rezultata analize
- Tabela 8.4 Pregled oblika oscilovanja kuke modelirane NURBS elementima.
- Tabela 8.5 Uporedni pregled rezultata modalne analize

UVOD

Razvoj savremenih tehničkih sistema zasnovan je na primeni savremenih CAE (Computer Aided Engineering) tehnologija. Razvoj proizvodnih procesa omogućio je da dizajn savremenih tehničkih sistema dobije sve češće slobodnu formu. Softveri koji se koriste za projektovanje pomoću računara (CAD) omogućuju formiranje složenih geometrijskih modela. Formiran CAD model zbog svoje složenosti najčešće nije pogodan za primenu u softverima za strukturnu analizu primenom metode konačnih elemenata (MKE). Najčešće je potrebno prethodno pripremiti geometriju za generisanje mreže konačnih elemenata zanemarivanjem detalja koji nemaju značaj za strukturnu analizu. Korigovani CAD modeli služe kao osnova za generisanje mreže konačnih elemenata. Rezultujući domen mreže konačnih elemenata (MKE) predstavlja najčešće aproksimaciju CAD geometrije. Ta aproksimacija dovodi do pojave većih ili manjih grešaka koje povlače brojne konsekvence za sobom. Primera radi, stabilnost ljuski je veoma osetljiva na geometrijsku imperfekciju, precizno definisana geometrija adaptivno formirane mreže je preduslov visoke preciznosti. Visoka tačnost opisa geometrije je važna i u optimizaciji dizajna. Kontaktni problemi su takođe u direktnoj sprezi sa kvalitetom opisa geometrije modela MKE.

1.1 Izogeometrijski metod konačnih elemenata

Razvoj MKE se jednim pravcem bazira na primeni izoparametarskih elemenata koji podrazumevaju mapiranje konačnih elemenata iz realne geometrije u tzv. master element, odnosno iz globalnog koordinatnog sistema u tzv. prirodni koordinatni sistem. Pri tome se iste funkcije oblika, najčešće Lagrange-ovi polinomi, koriste kako za opis polja pomeranja tako i za opis geometrije. Kvalitet opisa geometrije time direktno zavisi od stepena izabranog polinoma i veličine elemenata, odnosno finoće mreže konačnih elemenata. Jedan od osnovnih nedostataka gore pomenutog pristupa u kombinaciji sa Lagrange-ovim polinomima kao

funkcijama oblika je u tome što oni ostvaruju C^0 kontinuitet na granicama elemenata dok mnogi elementi zahtevaju barem C^1 kontinuitet, npr. konačni elementi tipa grede, ploče ili ljuske.

U odnosu na gore opisane karakteristike klasične MKE, značajan iskorak bi predstavljala formulacija MKE koja omogućuje da se za formiranje diskretnih MKE modela direktno koristi CAD geometrija na način kako je opisana u CAD softverskim paketima. To bi omogućilo da model konačnih elemenata idealno opiše analiziranu geometriju, nezavisno od finoće mreže. Ovaj koncept MKE je poznat pod nazivom izogeometrijska analiza. Kao osnova za formiranje CAD modela mogu se koristiti različite tehnologije računske geometrije. Trenutno u inženjerskom dizajnu najširu primenu ima NURBS (neuniformni racionalni B-splajn). Osnovna prednost NURBS-a je pogodnost za definisanje slobodnih formi, tačno predstavljanje svih koničnih preseka (krugova, cilindara, sfera, elipsoida).

1.2 Pregled dosadašnjeg istraživanja

Inženjerski dizajn se danas teško može zamisliti bez primene savremenih računarskih sistema za geometrijsko projektovanje. Većina termina koji se i danas koriste potiču iz perioda početka prethodnog veka i vezani su uglavnom za geometrijsko modeliranje u oblasti projektovanja vazduhoplova, automobila i brodova. Početni geometrijski modeli su se najčešće pravili u glini, gipsu ili drvetu i to u prirodnoj veličini. Prenošenje ovako formiranog modela na papir je bilo izuzetno složeno. To je podrazumevalo određivanje koordinata odgovarajućih tačka modela u odnosu na odgovarajuću referentnu tačku u prostoru i kasnije prenošenje u razmeri na papir. Ovaj postupak je bio izuzetno složen i bilo je teško odrediti iz modela dovoljno veliki broj tačaka čijim bi se spajanjem dobila tražena geometrija a koja bi imala praktičnu primenu u procesu proizvodnje. Formiranje crteža na osnovu manjeg broja tačaka je moguć primenom elastičnih metalnih traka ili drvenih letvica pridržanih metalnim tegovima pod nazivom “ducks” postavljenih u mernim tačkama (slika 1.1). Linija dobijena ovom tehnikom poznata je pod nazivom spline (*drafting spline*).

Termin splajn kao matematički termin u oblasti interpolacije splajnovima prvi je predstavio I. J. Schoenberg [Sch46] u svojim radovima 1946. godine, a njegova primena u oblasti dizajna počinje sa razvojem tek 1960. godine. Rana istraživanja u oblasti kompjuterski podržanog projektovanja su se javila još krajem pedesetih godina prošlog veka i počela su simultano i u Evropi (Francuska, Norveška i Velikaj Britanija) i u SAD. U ovom periodu dolazi i do naglog razvoja kompjuterski podržanog projektovanja - CAD-a, prevashodno vođenog interesima velikih kompanija u oblasti avio inženjerstva, brodogradnje i auto industrije.



Slika 1.1 Drafting splajn – tehnika crtanja pomoću drvenih letvica

Istraživanja u SAD su bila pretežno usmerena ka razvoju interpolacionih tehnika za formiranje geometrije. Tu se može izdvojiti rad Coons-a [Coo64], Ferguson-a, Garabedian-a, Birkhoff-a [Bir90][Far89]. Coons je razvio pravougaone površinske patche-ve između datih glatkih površinskih kriva. Ovi patchevi su bili standardni alat šezdesetih godina ali im je glavni nedostatak bio pri spajanju više patcheva u jednu složeniju površ. Koliki je značaj imao razvoj CAD-a govori i činjenica da su ovi naučnici uglavnom radili za kompanije kao što su McDonnell Douglas, Ford, Boeing, General Motors...

Danas prevladava stav da je razvoj savremenih CAD softvera u osnovi započet sa radom francuskih auto inženjera Pierre Bézier-a (Renault) i Paul de Casteljaou-a (Citroën). Bézier je Bernstein-ove polinome (Bernstein 1912) koristio kao osnovu za modeliranje krivih i površi [Bez66, 67, 72, 89]. Casteljaou je došao do sličnih otkrića ali svoj rad nije naučno publikovao. Osnovna prednost ovog načina predstavljanja geometrije je mogućnost formiranja slobodnih oblika uz interakciju sa korisnikom. Promena oblika geometrije se lako vrši promenom položaja tačaka kontrolnog poligona. U odvojenim istraživanjima naučnici Cox i de Boor su 1972. razvili jednostavnu rekurzivnu formulu za određivanje B-splajn osnovnih funkcija [DeBo72]. B-splajn predstavlja skraćenicu od reči “basis spline” kao bazični tj. osnovni splajn. U ovom periodu razvijeni su i mnogi algoritmi koji su omogućili i praktičnu primenu splajnova (prevažadno algoritama za određivanje osnovnih funkcija i njihovih izvoda).

U doktorskom radu 1973. godine Riesenfeld (Univerzitet Syracuse - SAD) je prvi koristio B-splajn u oblasti kompjuterski podržanog geometrijskog modeliranja (CAD) [Rie73]. Nedugo zatim Versprille (Univerzitet u Syracuse - SAD) je u svojoj doktorskoj disertaciji predstavio neuniformne racionalne B-splajnovne koji su danas poznati pod skraćenicom NURBS [Ver75].

NURBS omogućuje tačno predstavljenje koničnih preseka koji se često koriste u inženjerskom dizajnu. Grupa naučnika E. Vohen, T. Lyche i R. Riesenfeld [CLR80] je 1980. na Univerzitetu u Oslu razvila algoritam za promenu matematičkog opisa NURBS geometrije bez uticaja na promenu geometrije. Ovaj algoritam koji se u literaturi sreće pod nazivom „Oslo algoritam“ omogućuje u izogeometrijskoj analizi promenu gustine mreže ili stepena osnovnih funkcija elementa - patcha.

Budući da NURBS ima i odgovarajuće nedostatke posebno kada je reč o rafinaciji mreže koja nije lokalna već se odnosi na ceo red ili kolonu tačaka kontrolnog poligona razvijeno je više vrsta takozvanih splajnova zasnovanih na tačkama kontrolnog poligona (PB – point based splajn). Poseban oblik PB splajna predstavlja T-splajn a koji predstavlja NURBS sa T spojevima (T-junctions). Ovaj vid geometrije prvi je predstavio Sederberg 2003 [SZB03] [SCF04]. T-spojevi omogućuju lokalnu promenu mreže.

Metoda konačnih elemenata nema tačno vreme nastanka. Određeni ključni elementi zaslužni za nastanak metode prvi put se sreću u radovima Hrennikoff-a [Hre41] i Courant-a [Cou43]. Formalna upotreba metode se vezuje za radove Argyris-a i Kelsey-a [AK60], Turner-a, Clough-a, Martin-a i Topp-a [TCM56]. Termin "finite element" (konačni element) je prvi uveo Clough 1960. godine [Clo60]. Linearni solid konačni element oblika tetraedra prvi su predstavili Gallagher i ostali 1962. godine [GPB62]. U svom radu iz 1961. godine Taig [Tai61] je razvio bilinearni četverostrani element i on predstavlja nagoveštaj razvoja izoparametarskih elemenata. Izoparametarski koncept će ubrzo razraditi u svojim radovima Irons [Iro66], Zienkiewicz i Cheung [ZC68]. Osnova izoparametarskog koncepta je da se razvije element na osnovnom domenu kao što je kvadrat ili kocka a koji u fizičkom prostoru može imati zakrivljeni, glatki oblik. Izoparametarski element se može razviti i za ostale topologije kao što su trougao, tetraedar. Ovako razvijeni elementi moraju da zadovolje matematičke kriterijume konvergencije kao i da imaju odgovarajuće mehaničke osobine. Ograničenje izoparametarskog koncepta je u tome što elementi ostvaruju C^0 kontinuitet na granici elementa. Više autora je razvilo izoparametarske elemente sa kontinuitetom C^1 ali je njihova implementacija bila komplikovana [CT65] [AFS68].

Koncept izogeometrijske analize prvi je predstavio Hughes i ostali [HCB05] [CHB09]. U izogeometrijskoj analizi geometrija mreže konačnih elemenata je identična CAD geometriji. Naučno istraživanje vezano za izogeometrijsku metodu može se grupisati u više celina. Prva grupa radova proučava koje mogućnosti nudi metoda za formiranje modela konačnih elemenata

kao i uticaj formiranih modela na tačnost analize [SKB11] [TJ11] [KWL12] [CMK10] [PSF06]. Formirani NURBS modeli mogu često prouzrokovati singularitet pri formiranju modela konačnih elemenata. Jedan od problema koji se javlja prilikom formiranja modela konačnih elemenata je u opisivanju graničnih uslova [KWL12] [LZ11].

U drugoj grupi radova mogu se izdvojiti radovi grupe autora [BBC06] [CHR07] [CHA07] koji razmataju uticaj stepena polinoma i mreže u indeksnom prostoru na tačnost dobijenih rezultata. S obzirom na to da se često koriste NURBS osnovne funkcije sa većim stepenom kontinuiteta na granici elemenata, grupa autora je istraživala optimalni stepen Gauss-ovih kvadrature formula neophodnih za određivanje integrala na domenu elementa [ACH12]. Često se u metodi konačnih elemenata za elemente tipa ljuske zbog problema „shear locking-a“ koriste redukovane Gauss-ove kvadrature formule [ABZ14] [ABZ15].

Promena geometrije određene NURBS ili T-splajn osnovnim funkcijama vrši se ili preko promene vektora čvorova ili promenom tačaka kontrolnog poligona. Za razliku od klasične metode konačnih elemenata, NURBS modelu je potreban mali broj tačaka kontrolnog poligona za definisanje početne relativno jednostavne geometrije (bez upotrebe algoritama za ubacivanje čvorova) a koja je zbog malog broja parametara pogodna za dimenzionu optimizaciju [ELA10] [LEA14] [KSW14]. Zbog geometrije slobodne forme koju nudi NURBS ona je pogodna i za izogeometrijsku topološku optimizaciju [DBH12].

Posebnu grupu radova čini implementacija NURBS i T-splajn funkcija oblika za definisanje određenih tipova elemenata koji se mogu implementirati u algoritme klasične metode konačnih elemenata [KBL09] [DKS13] [HRV13].

NURBS geometrija, a time i mreža konačnih elemenata, je definisana preko patcha. U izogeometrijskoj metodi konačnih elemenata često se koriste veći stepeni osnovnih funkcija a to povlači i veći pojas matrice krutosti strukture. Ako je reč o strukturi koja se formira preko više pacheva ovaj problem se dodatno uvećava i uslovljava primenu algoritama redukcije pojasa matrice krutosti kao i primenu odgovarajućih solvera [SDS12] [CDP13] [BEA13].

U oblasti dinamičke analize izogeometrijska analiza sa NURBS osnovnim funkcijama ima određene specifičnosti, sa obzirom na prostiranje osnovnih funkcija preko granica elemenata i većeg stepena kontinuiteta na granicama elementa [CRB06] [CNN14] [SIV12].

Zbog mogućnosti formiranja glatkih krivih, površi i solida izogeometrijska metoda sa NURBS i T-splajn funkcijama oblika predstavlja dobar alat za analizu ljudskih tkiva i kostiju sa obzirom na njihovu složenu i zakrivljenu geometriju [CBB08]. Ova osobina NURBS i T-splajn čini

pogodnim za kontaktnu analizu obzirom da geometrija elementa odgovara realnoj CAD geometriji [CR14].

Iako se u većini CAD softvera za modeliranje koristi NURBS kao osnova zapisa geometrije ona i dalje nije odgovarajuća za primenu u izogeometrijskoj analizi. Jedan od razloga je i taj što se koriste krive za odsecanje geometrije. Primena metode u okviru postojećih softverskih paketa još uvek nije ostvarena. Pojedini autori u okviru svojih naučnih istraživanja predstavljaju rešenja koja nisu realizovana na nivou celovitog softvera već na nivou zaokruženih rutina koja se implementiraju u odgovarajuće univerzalne matematičke softverske pakete [DB12] [FV11] [VHS10].

1.3 Naučni ciljevi (doprinosi) disertacije

S obzirom na karakteristike funkcija oblika primenjenih u izogeometrijskoj MKE, za očekivati je da primena izogeometrijske metode ima za posledicu veću tačnost opisa krutosti i inercije struktura složene geometrije. To međutim, povlači za sobom veću složenost numeričkih modela, pa time i njihovu manju numeričku efikasnost u odnosu na klasičnu MKE. Još važniji doprinos rada treba da bude odgovor na pitanje o prednostima i nedostacima izogeometrijske MKE u odnosu na klasičnu MKE, sa posebnim osvrtom na: tačnost rezultata (kako u statici, tako i u dinamici), numeričku efikasnost pristupa, probleme modeliranja (posebno kada je reč o složenim geometrijama kakve se susreću u transportnoj tehnici), granicama primenljivosti izogeometrijske MKE (u kojim slučajevima je racionalno koristiti izogeometrijsku MKE), itd. Za potrebe ove ocene, biće korišćeni primeri realnih konstrukcija iz oblasti transportne tehnike. Rezultat ocene metode bi koristio na ukazivanje daljih smerova razvoja izogeometrijske metode konačnih elemenata.

1.4 Organizacija sadržaja disertacije

Disertacija je organizovana u 9 poglavlja. U početnom delu dat je pregled razvoja splajnova i algoritama. Posebna pažnja je posvećena osnovnim funkcijama i geometriji B-splajna kao osnove za formiranje NURBS-a. U nastavku su date matematičke osnove formiranja NURBS osnovnih funkcija kao i pregled njihovih osobina. U ovom poglavlju su prikazane matematičke osnove formiranja NURBS krivih, površi, solid geometrije i predstavljeni su algoritmi za rafinaciju mreže. Sa obzirom na to da su osnovne funkcije NURBS geometrije ujedno i osnovne funkcije konačnih elemenata, algoritmi kojima se utiče na promenu zapisa NURBS geometrije bez promene same geometrije predstavljaju alat rafinacije mreže konačnih elemenata.

U nastavku je predstavljeno definisanje kružnih preseka kao i formiranje geometrije sa više patch-eva.

U trećem poglavlju date su osnove klasične metode konačnih elemenata kao i izogeometrijskog koncepta u metodi konačnih elemenata. U nastavku su date osnovne razlike funkcija oblika u klasičnoj metodi i u izogeometrijskoj metodi konačnih elemenata.

U četvrtom poglavlju predstavljena je izogeometrijska analiza ravanskog problema 2D elementima. U nastavku su prikazane osnovne jednačine za formiranje matrice krutosti za izogeometrijsku analizu 3D solid elementima. U ovom poglavlju su date osnove rada softvera za izogeometrijsku analizu. Prikazan je algoritam toka informacija kroz softver za rešavanje izogeometrijskih problema sa jednim i sa više patcheva. Tačnost formiranih algoritama je ocenjivana poređenjem rezultata dobijenih na modelima jednostavne geometrijske forme sa jednim i više patcheva, analitičkim rezultatima i rezultatima dobijenih primenom komercijalnih softvera za strukturnu analizu metodom konačnih elemenata.

U petom poglavlju predstavljen je razvijen izogeometrijski Kirchhoff-Love element tipa tankozidne ljuske sa NURBS osnovnim funkcijama. Rezultati dobijeni ovim tipom elementa su verifikovani poređenjem sa teorijskim i sa referentnim modelom formiranim u komercijalnom softveru. U ovom poglavlju je predstavljena i tehnika formiranja modela sa više patcheva uz korišćenje traka koje prenose savijanje, obzirom na to da ovaj tip elementa ima tri stepena slobode u čvoru.

U šestom poglavlju je predstavljena izogeometrijska analiza sa T-splaj geometrijom i funkcijama oblika. Na početku poglavlja su date osnove T-splajn geometrije kao i uslovi koje treba da ispuni T-splajn da bi imao linearno nezavisne funkcije oblika. U nastavku je data tehnika Bezierove ekstrakcije T-splajn geometrije kao i primeri izogeometrijske analize na T-splajn multi-patch modelu.

U sedmom poglavlju analizirano je dinamičko ponašanje modela sa NURBS osnovnim funkcijama. U prvom delu su analizirani sopstveni oblici i sopstvene vrednosti modela Reissner-Mindlin ploče a dobijeni rezultati su upoređeni sa vrednostima dobijenim merenjem i modelom formiranom u komercijalnom softveru. U nastavku su analizirane specifičnosti primene izogeometrijske metode u oblasti eksplicitne tranzijentne dinamičke analize.

U osmoj tački je prikazana primena izogeometrijske analize na rešavanje konkretnih primera u oblasti transportne tehnike. Statičkom analizom je posmatrano ponašanje strele bagera sa

utovarnom kašikom modeliranom Kirchhoff–Love elementima tipa ljuske sa trakama koje prenose savijanje. U nastavku je posmatrano dinamičko ponašanje standardne kuke DIN 15-401.

Na kraju rada izneto je mišljenje o pogodnosti primene izogeometrijske metode konačnih elemenata. Iznete su kritički pozitivne i negativne strane ove metode. Takođe su dati i pravci mogućih daljih istraživanja u okviru ove oblasti.

GEOMETRIJSKO MODELIRANJE SA NEUNIFORMNIM RACIONALNIM B-SPLAJNOVIMA

U ovom poglavlju biće dat pregled razvoja NURBS-a, definicije i osobine NURBS krivih, površi i zapremina kao i transformacija NURBS geometrije. Za formiranje i transformaciju NURBS geometrije u ovoj disertaciji korišćen je veći broj algoritama koji se mogu naći u radovima Piegela i Tiller-a [PT97], Rogers-a [Rog01], Farin-a [Far02]. NURBS predstavlja nadogradnju B-splajna i kako njegove osobine zavise od osobina B-splajn osnovnih funkcija u nastavku će najpre biti reči o definiciji B-splajna i o osnovnim funkcijama B-splajana.

2.1 B-splajn osnovne funkcije

B-splajn krive su nastale iz potrebe da se geometrija opiše sa manjim brojem informacija u odnosu na postojeće Bézier-ove krive. Osnovne funkcije koje se koriste u B-splajnu se iz tog razloga i zovu basis (osnovne) funkcije jer predstavljaju bazu i linearno su nezavisne. Za razliku od Bézier-ovih krivih, koje imaju sposobnost da se menjaju lokalno preko tačaka kontrolnog poligona, B-splajn krive omogućuju da ta promena bude i globalna na taj način što se kriva ne posmatra kao skup krivih. Tako na primer Bézier-ova kriva od tri segmenta koji su definisani sa po 4 kontrolne tačke definisana je sa ukupno 12 tačaka. Pritom je jasno da ako se želi postići kontinuitet C^0 potrebno je 10 tačaka jer su tačke prekida iste. Ako želimo postići kontinuitet C^1 u tačkama prekida potrebno je 8 tačaka a za kontinuitet C^2 potrebno je 6 tačaka. Jasno se vidi da se složenije krive mogu opisati sa manjim brojem kontrolnih tačaka od broja koji zahtevaju Bézier-ove krive. Nasuprot tome Bézier-ova kriva kroz n tačaka je stepena $(n-1)$.

Definicija i osobine osnovnih funkcija B splajna

B splajn predstavlja parametarsku krivu. Da bi se definisala B splajn kriva potrebno je definisati vektor čvorova $\Xi = \{\xi_0, \dots, \xi_m\}$ koji predstavlja neopadajući niz kooridanta u parametarskom prostoru gde su ξ_i realni brojevi takvi da ispunjavaju uslov $\xi_i \leq \xi_{i+1}$ $i=0, \dots, m-1$. Elementi ξ_i se

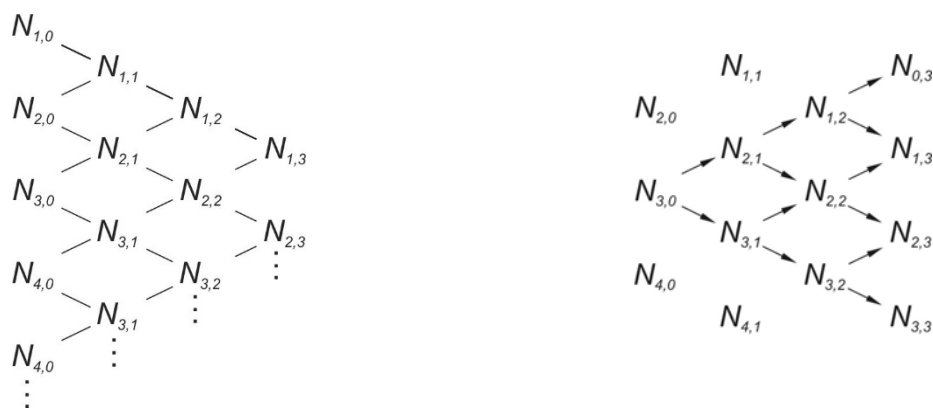
nazivaju čvorovi. Vektor čvorova može biti unifoman ukoliko su čvorovi ravnomerno raspoređeni u parametarskom prostoru ili neuniforman ukoliko to nije slučaj. Članovi vektora čvorova se mogu ponavljati tako da više članova može imati istu vrednost. Ponavljanje čvorova značajno utiče na osobine osnove (baze). Za vektor čvorova se kaže da je otvoren ukoliko prvi i poslednji član vektora čvora ima ponavljanje $p+1$ puta gde p predstavlja stepen osnovnih funkcija B splajna. Osnovna i -ta funkcija B-splajna stepena p u oznaci $N_{i,p}(\xi)$ može se odrediti na osnovu sledećih jednačina:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{u suprotnom} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2.2)$$

Jednačina 2.1 predstavlja B-splajn osnovnu funkciju nultog reda $N_{i,0}(\xi)$ i ona ima vrednost različitu od nule samo na polu otvorenom intervalu $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$;

Jednačina 2.2 predstavlja Cox-De Boor-ovu rekurzivnu formulu [DeBo72] koja se koristi za određivanje osnovnih funkcija stepena većeg od nule. Osnovna funkcija stepena p $N_{i,p}(\xi)$ se određuje kao linearna kombinacija dve osnove funkcije stepena $(p-1)$. $N_{i,p}(\xi)$ je polinom u delovima, definisan na celoj realnoj pravi. Za određivanje B-splajna samo je interval definisan prvim i poslednjim elementom vektora čvorova $[\xi_0, \xi_m]$ od interesa. Poluotvoreni interval $[\xi_i, \xi_{i+1})$ se naziva i -ti raspon čvora. Interval čvorova može biti jednak nuli ukoliko su elementi ξ_i i ξ_{i+1} isti zbog ponavljanja elemenata u vektoru čvorova. Za sračunavanje funkcija p -tog stepena na osnovu gore navedene formule može se koristiti trougaona forma prikazana na slici 2.1.



Slika 2.1 Trougaona šema za određivanje osnovnih funkcija višeg stepena (levo),
 Određivanje $p+1$ osnovne funkcije različite od nule na rasponu $[\xi_j, \xi_{j+1})$ (desno)

Na svakom rasponu između čvorova $[\xi_j, \xi_{j+1})$ postoji najmanje $p+1$ osnovna funkcija $N_{i,p}$ koja nije jednaka nuli u oznaci $N_{j-p,p} \dots N_{j,p}$. Tako na primer, ako je na rasponu $[\xi_3, \xi_4)$ $N_{3,0}$ različito od nule onda se mogu sračunati kubne funkcije ($p=3$) $N_{0,3} \dots N_{3,3}$. Ova osobina je ilustrovana preko šeme prikazane na slici 2.1.

Osnovne funkcije su nenegativne $N_{i,p}(\xi) \geq 0$ za svako i, p i ξ . Za proizvoljan raspon $[\xi_i, \xi_{i+1})$ važi $\sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(\xi) = 1$ za svako $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$. Osnovne funkcije B-splajna stepena od 1 do 6 za odgovarajući vektor čvorova prikazane su na slici 2.2.

Izvodi osnovnih funkcija se određuju po obrazcu:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = N'_{i,p} = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2.3)$$

Na sličan način se određuje i k -ti izvod:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) = N_{i,p}^{(k)}(\xi) = p \left(\frac{N_{i,p-1}^{(k-1)}}{\xi_{i+p} - \xi_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(k-1)}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \right) \quad (2.4)$$

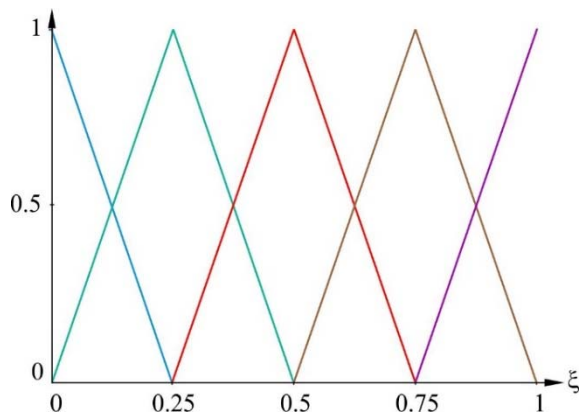
ili korišćenjem formule:

$$N_{i,p}^{(k)} = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k a_{k,j} N_{i+j,p-k} \quad (2.5)$$

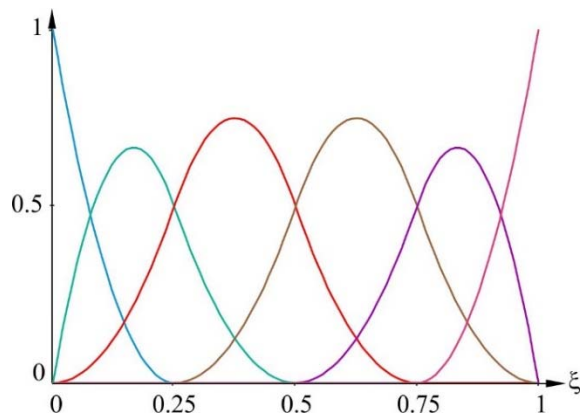
gde su:

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= 1 \\ a_{k,0} &= \frac{a_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i} \\ a_{k,j} &= \frac{a_{k-1,j} - a_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}} \quad j = 1, \dots, k-1 \\ a_{k,k} &= \frac{-a_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

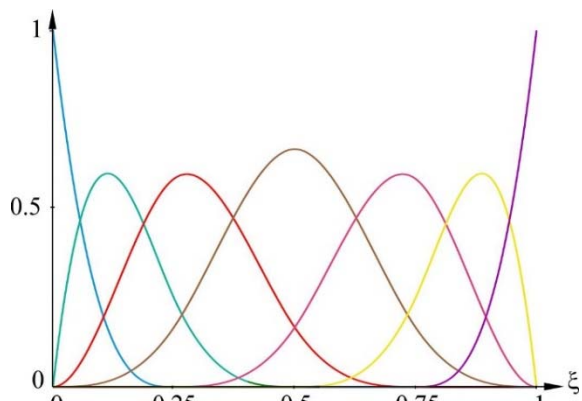
U jednačini 2.6 vrednost k ne sme preći vrednost stepena p i ukoliko je imenilac jednak nuli onda se taj količnik uzima da je nula. Primer izvoda osnovnih funkcija B-splajna prikazan je na slici 2.3.



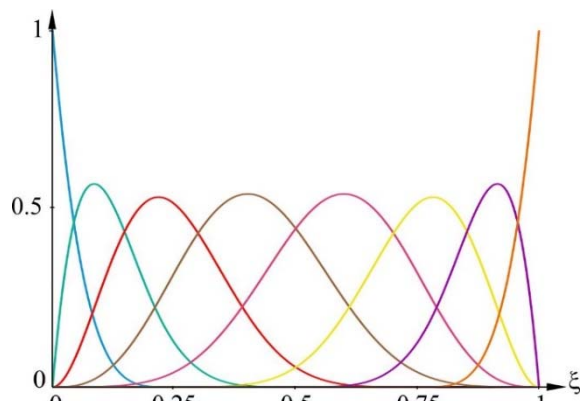
$$\Xi = \{0 \ 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1 \ 1\}, p=1$$



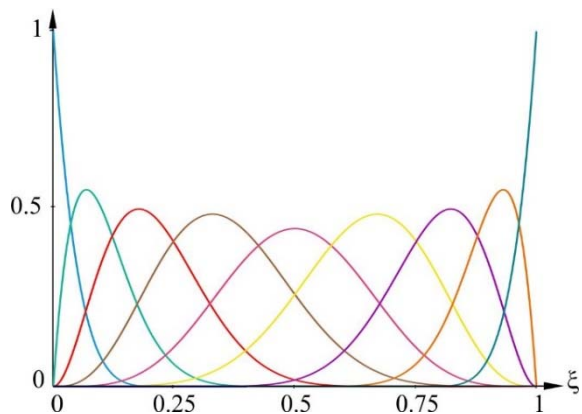
$$\Xi = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1 \ 1 \ 1\}, p=2$$



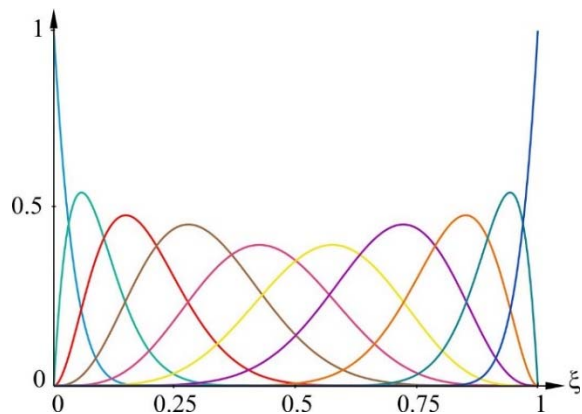
$$\Xi = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}, p=3$$



$$\Xi = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}, p=4$$



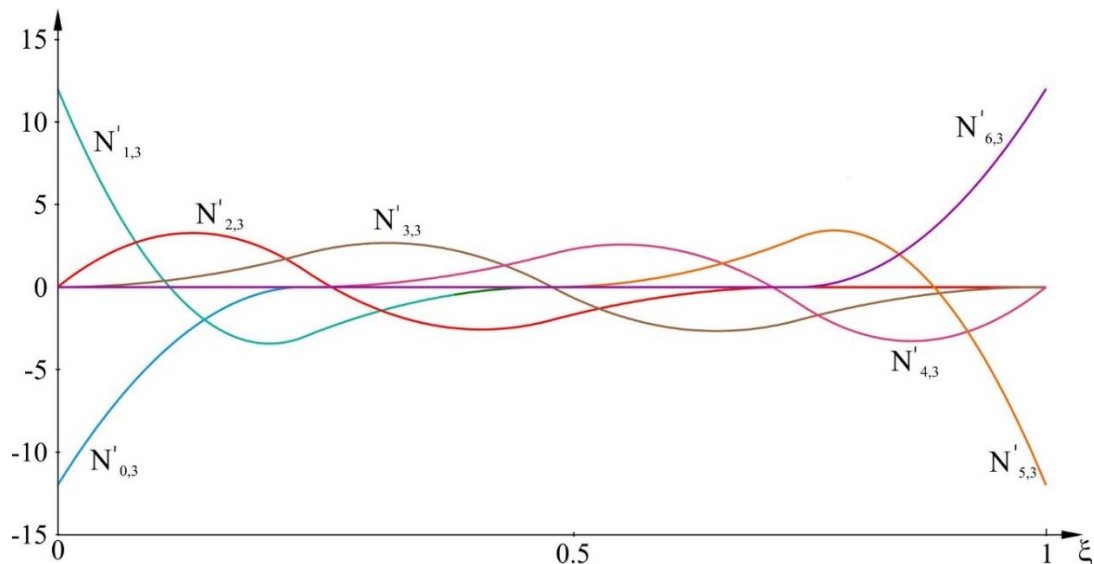
$$\Xi = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}, p=5$$



$$\Xi = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}, p=6$$

Slika 2.2 B-splajn osnovne funkcije za dati vektor čvorova

$\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{p+1}, 0.25, 0.5, 0.75, \xi_{m-p}, \xi_{m-p+1}, \xi_m\}$, gde je $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{p+1} = 0$ i $\xi_{m-p} = \xi_{m-p+1} = \dots = \xi_m = 1$, stepen osnovnih funkcija $p=1, 2, \dots, 6$.



Slika 2.3 Izvodi osnovnih funkcija B-splajna trećeg stepena za vektor čvorova $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$

Svi izvodi od $N_{i,p}(\xi)$ egzistiraju u okviru raspona između čvorova (gde je polinom). U čvoru $N_{i,p}(\xi)$ je $p-k$ puta neprekidno diferencijabilan gde je k – ponavljanje čvora. Sa porastom stepena raste kontinualnost a sa porastom ponavljanja čvorova smanjuje se kontinualnost. Ukoliko vektor čvorova ima oblik $\Xi = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ (u kome su 0 i 1 ponovljeni $p+1$ puta) B-splajn osnovne funkcije su jendake Bernsteinovim polinomima stepena p .

2.2 B-splajn geometrija

- Definicija i osobine B-spline krivih

B-splajn kriva stepena p može se predstaviti sledećom jednačinom:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) P_i \quad a \leq \xi \leq b \quad (2.7)$$

gde su $\{P_i\}$ kontrolne tačke a $\{N_{i,p}(\xi)\}$ B splajn bazne funkcije p -tog stepena definisane na otvorenom vektoru čvorova od $m+1$ člana:

$$\Xi = \{a, \dots, a, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, b, \dots, b\} \quad (2.8)$$

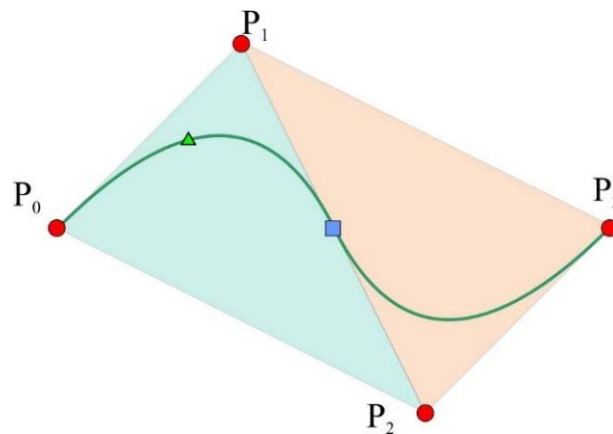
Ukoliko drugačije nije navedeno pretpostavlja se da je $a=0$ i $b=1$. Poligon formiran preko tačaka $\{P_i\}$ se naziva *kontrolni poligon*.

Potrebna su tri koraka da bi se sračunala tačka na B-splajn krivi za određenu vrednost parametra ξ .

1. naći raspon čvora u kome leži ξ .
2. sračunavanje bazičnih ne-nula funkcija,
3. množenje vrednosti bazičnih ne-nula funkcija sa kontrolnim tačkama.

Osobine B-splajn krivih

- $C(u)$ je po delovima polinomska kriva (sve dok su $N_{i,p}(\xi)$ po delovima polinomi) stepena p , broja kontrolnih tačaka $n+1$ i broja elemenata u vektoru čvorova $m=n+p+1$
- Krajnje tačke su interpolacione $C(0)=P_0$ i $C(1)=P_n$;
- Afina invariantnost: afine transformacije se primenjuju na krivoj preko kontrolnih tačaka.
- Svojstva konveksnog omotača (convex hull): kriva leži u konveksnom omotaču koji je definisan preko tačaka kontrolnog poligona. Ako je $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$, $p \leq i \leq m-p-1$, onda se tačka na krivi $C(\xi)$ u oznaci $P(\xi)$ nalazi u okviru konveksnog omotača koji je definisan preko tačaka $P_{i-p}, P_{i-p+1}, \dots, P_i$. Na slici 2.4 prikazano je svojstvo konveksnog omotača gde se za odgovarajuću tačku na krivoj drugog reda označenoj trouglom vidi da se nalazi u okviru konveksnog omotača definisanog preko tačaka P_0, P_1 i P_2 .



Slika 2.4 Osobina konveksnog omotača B-splajn krive

- Lokalna promena: pomeranjem tačke kontrolnog poligona P_i menja se kriva $C(\xi)$ samo na intervalu $[\xi_i, \xi_{i+p+1})$. Ovo proizilazi iz činjenice da je $N_{i,p}(\xi)=0$ za $\xi \notin [\xi_i, \xi_{i+p+1})$. Kontrolni poligon predstavlja u delovima linearnu aproksimaciju krive. Ova aproksimacija se poboljšava umetanjem čvora ili povećanjem stepena osnovnih funkcija. Što je niži stepen to B-splajn kriva bolje prati kontrolni poligon. Pomeranjem duž krive od $\xi=0$ do $\xi=1$ osnovne funkcije se ponašaju kao prekidači. Kako ξ prolazi neki čvor tako neke funkcije uzimaju vrednost $N_{i,p}(\xi)=0$ tj. "gase se" a neke dobijaju vrednost $N_{i,p}(\xi) \neq 0$.
- Svojstvo manje varijacije: Ne postoji ravan koja bi presecala krivu više puta nego što seče kontrolnu poligon liniju (podrazumeva da kriva ne može imati više promena savijanja od broja tačaka kontrolnog poligona). Kontinualnost i diferencijabilnost $C(\xi)$ proizilaze iz osobina osnovnih funkcija. Kriva $C(\xi)$ je neprekidno diferencijabilna $p-k$ puta na rasponu između čvorova ako je k ponavljanje čvora.

- Definicija i osobine B-spline površi

B-splajn površ se dobija formiranjem bidirekcionne mreže kontrolnih tačaka, dva vektora čvorova i proizvoda osnovnih funkcija B-splajna:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{i,j} \quad (2.9)$$

sa vektorima čvorova: $\Xi = \{0, \dots, 0, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, \dots, 1, \dots, 1\}$ sa ponavljanjem čvorova na krajevima $p+1$ i $H = \{0, \dots, 0, \eta_{q+1}, \dots, \eta_{s-q-1}, \dots, 1, \dots, 1\}$ sa ponavljanjem čvorova na krajevima $q+1$. Vektor Ξ ima $r+1$ a H ima $s+1$ članova. Broj elemenata vektora Ξ i H , r i s mogu se sračunati prema obrascu: $r=n+p+1$ kao i $s=m+q+1$, gde su p i q stepeni osnovnih funkcija za oba pravca a n i m broj tačaka kontrolnog poligona po pravcu.

Pet koraka su potrebna za sračunavanje tačke na B-splajn površi za fiksne parametre (ξ, η) :

- pronaći raspon između čvorova gde leži ξ , $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$;
- sračunavanje osnovnih funkcija koje nisu jednake nuli $N_{i-p,p}(\xi), \dots, N_{i,p}(\xi)$
- pronaći raspon između čvorova gde leži η , $\eta \in [\eta_i, \eta_{i+1})$;
- sračunavanje osnovnih funkcija koje nisu jednake nuli $N_{j-q,q}(\eta), \dots, N_{j,q}(\eta)$
- množenje vrednosti odgovarajućih osnovnih funkcija koje nisu jednake nuli sa odgovarajućim kontrolnim tačkama. Poslednji korak ima oblik:

$$S(\xi, \eta) = [N_p(\xi)]^T [P] [N_q(\eta)] \quad (2.10)$$

$[N_p(\xi)]^T$ je vektor skalarnih veličina dimenzije $(p+1)$ koji čine osnovne funkcije $N_{i-p,p}(\xi), \dots, N_{i,p}(\xi)$, $[P]$ je matrica tačaka kontrolnog poligona dimenzija $(p+1) \times (q+1)$ i $[N_q(\eta)]$ je vektor skalarnih veličina dimenzija $(q+1)$ koji čine osnovne funkcije $N_{j-q,q}(\eta), \dots, N_{j,q}(\eta)$.

Osnovne funkcije B-splajn površi imaju sledeće osobine:

- $N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \geq 0$ za svako i, j, p, q, ξ, η ;
- Zbir svih osnovnih funkcija $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) = 1$ za svako $(\xi, \eta) \in [0,1] \times [0,1]$;
- Ako je $n = p, m = q, \Xi = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ i $H = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ tada su osnovne funkcije B-splajn površi jednake proizvodu Berštajnovih osnovnih funkcija Bézier-ove površi $N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) = B_{i,n}(\xi) B_{j,m}(\eta)$ za svako i i j .
- $N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) = 0$ ukoliko se (ξ, η) nalaze van pravougaone oblasti $[\xi_i, \xi_{i+p+1}) \times [\eta_j, \eta_{j+q+1})$;

- Za svaku datu pravougaonu oblast $[\xi_{i_0}, \xi_{i_0+1}] \times [\eta_{j_0}, \eta_{j_0+1}]$ najmanje $(p+1)(q+1)$ osnovnih funkcija su različite od nule, $N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)$ za $i_0 - p \leq i \leq i_0$ i $j_0 - q \leq j \leq j_0$;
- Ako su $p > 0$ i $q > 0$, onda $N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)$ postiže samo jedan maksimum;
- U unutrašnjosti pravougaonika, formiranog preko ξ i η linija čvorova gde su funkcije polinomi sa dve promenljive, postoje svi parcijalni izvodi $N_{i,p}(\xi)$ i $N_{j,q}(\eta)$; u ξ čvoru (u η čvoru) površ je $p-k$ ($q-k$) puta diferencijabilna u ξ (η) pravcu, gde je sa k označeno ponavljanje čvorova;
- Površ interpolira kontrolne tačke na uglovima: $S(0,0)=P_{0,0}$, $S(1,0)=P_{n,0}$, $S(0,1)=P_{0,m}$, $S(1,1)=P_{n,m}$;
- Afina invarijantnost: affine transformacije primenjuju se na površi preko tačaka kontrolnog poligona;
- Svojstvo konveksnog omotača: ako su $(\xi, \eta) \in [\xi_{i_0}, \xi_{i_0+1}] \times [\eta_{j_0}, \eta_{j_0+1}]$, tada površ $S(\xi, \eta)$ leži u konveksnom omotaču koji je definisan preko kontrolnih tačaka $P_{i,j}$, $i_0 - p \leq i \leq i_0$ i $j_0 - q \leq j \leq j_0$;
- Šema lokalne promene: pomeranjem tačke kontrolnog poligona $P_{i,j}$ promena utiče na površ samo u pravougaonoj oblasti $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$;
- Kontinualnost i diferencijabilnost površi $S(\xi, \eta)$ je vezana za osnovne funkcije. Površ $S(\xi, \eta)$ je $p-k$ ($q-k$) puta diferencijabilna u ξ (η) pravcu u čvoru ξ (η) koji se ponavlja k puta.

2.3 Definicija i osobine NURBS krivih

NURBS kriva stepena p može se predstaviti preko sledećeg izraza:

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi)w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi)w_i} \quad a \leq u \leq b \quad (2.11)$$

gde su $\{P_i\}$ tačke kontrolnog poligona, $\{w_i\}$ su težinski koeficijenti, a $\{N_{i,p}(\xi)\}$ su B-splajn osnovne funkcije stepena p definisane na neuniformnom vektoru čvorova:

$$\Xi = \{a, \dots, a, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, b, \dots, b\} \quad (2.12)$$

gde su čvorovi sa vrednostima a i b ponavljeni $p+1$ puta. Ukoliko drugačije nije rečeno pretpostavlja se da je $a=0$, $b=1$ i $w_i > 0$ za svako i .

Označavajući NURBS osnovne funkcije sa $R_{i,p}(\xi)$:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(\xi)w_j} \quad (2.13)$$

NURBS kriva se može predstaviti:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(\xi) P_i \quad (2.14)$$

gde su $R_{i,p}(\xi)$ racionalne osnovne funkcije. Primer jedne NURBS krive različitog stepena kontinuiteta, sa osnovnim funkcijama i njihovim izvodima prikazana je na slici 2.5.

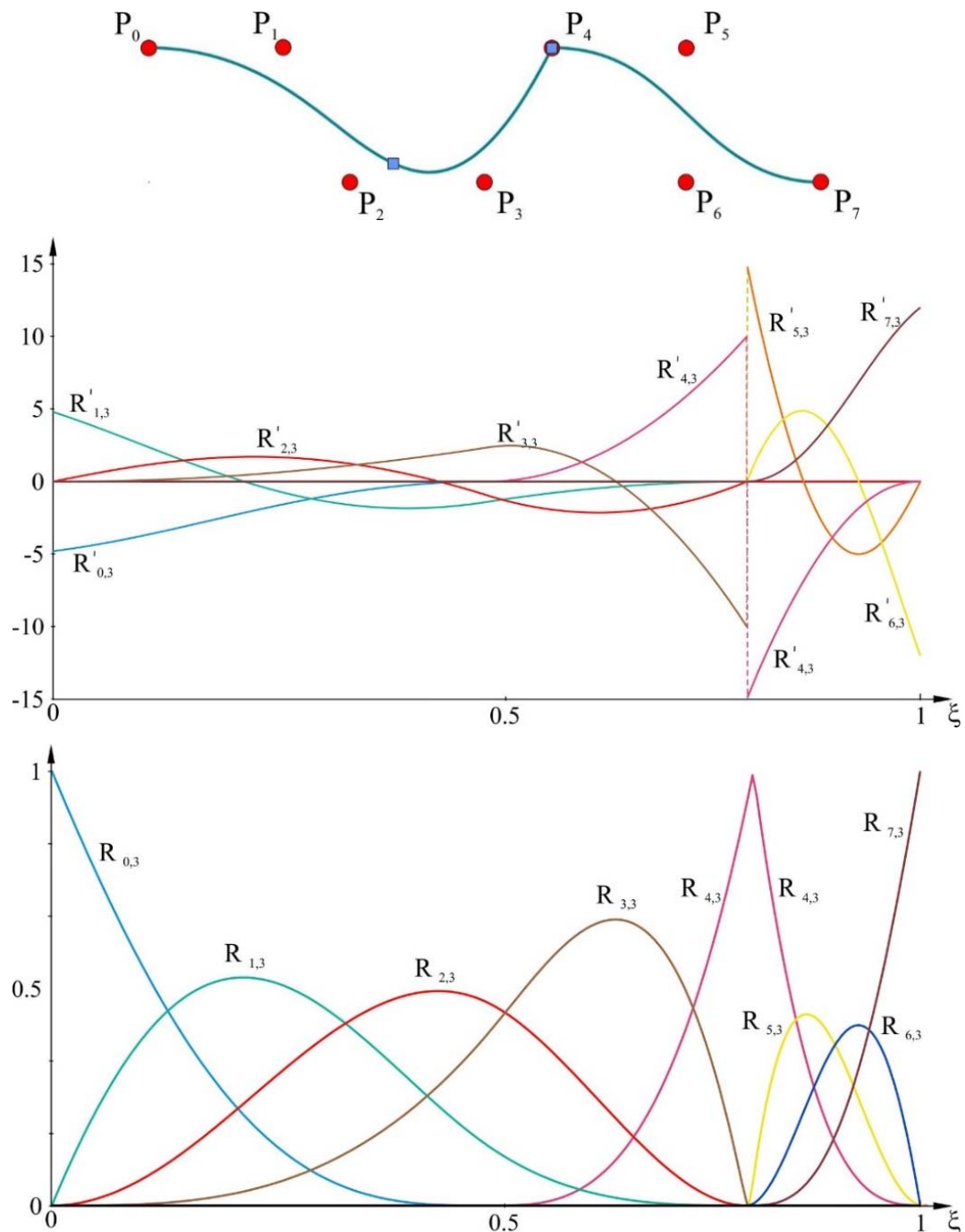
Na osnovu osobina B-splajn osnovnih funkcija i relacija 2.10, 2.11 i 2.12 mogu se izvesti sledeće osobine racionalnih osnovnih funkcija:

- $R_{i,p}(\xi) \geq 0$ za svako i, p i $\xi \in [0,1]$;
- $\sum_{i=0}^n R_{i,p}(\xi) = 1$ za svako $\xi \in [0,1]$;
- $R_{0,p}(0) = R_{n,p}(1) = 1$;
- Za $p > 0$, svi $R_{i,p}(\xi)$ postiže samo jedan maksimum na intervalu $\xi \in [0,1]$;
- Lokalna oblast delovanja: $R_{i,p}(\xi) = 0$ za oblast $\xi \notin [\xi_i, \xi_{i+p+1})$. Za svaki dati raspon čvorova najmanje $p+1$ od $R_{i,p}(\xi)$ su različite od nule ($R_{i-p,p}(\xi), \dots, R_{i,p}(\xi)$ su različite od nule na rasponu $[\xi_i, \xi_{i+1})$).
- Svi izvodi $R_{i,p}(\xi)$ egzistiraju unutar raspona čvorova, gde su racionalne funkcije sa imeniocem različitim od nule. U čvoru, $R_{i,p}(\xi)$ je $p-k$ puta kontinualno diferencijabilna gde je k ponavljanje čvora.
- Ako su $w_i = 1$ za svako i , onda je $R_{i,p}(\xi) = N_{i,p}(\xi)$ za svako i , t.j. $N_{i,p}(\xi)$ su specijalni slučaj $R_{i,p}(\xi)$.

Prethodne osobine dovode do sledećih važnih geometrijskih osobina NURBS kriva:

- $C(0) = P_0$ i $C(1) = P_n$
- Afina invarijantnost: affine transformacije koje se primenjuju na NURBS krivi se vrše preko tačaka kontrolnog poligona.
- Svojstvo konveksnog omotača: Ako je $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$, tada kriva $C(\xi)$ leži unutar konveksnog omotača od P_{i-p}, \dots, P_i tačaka kontrolnog poligona (ovo pravilo važi samo za pozitivne vrednosti težinskih koeficijenata).
- Kriva $C(\xi)$ je beskonačno diferencijabilna u okviru raspona čvorova i $p-k$ puta diferencijabilna u čvoru koji ima ponavljanje k .
- Svojstvo manje varijacije: ne postoji ravan koja ima više preseka sa krivom od preseka sa kontrolnim poligonom (za dvodimenzione krive umesto ravni reč je o pravoj);

- NURBS kriva bez unutrašnjih čvorova je Bézier-ova kriva obzirom da $N_{i,p}(\xi)$ prelazi u $B_{i,n}(\xi)$;
- Lokalni uticaj: ukoliko se tačka kontrolnog poligona P_i ili se težinski koeficijent w_i promeni te promene će uticati samo na deo krive na intervalu $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+p+1})$;



Slika 2.5 NURBS kriva sa vektorom čvorova $\Xi = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 0.8 \ 0.8 \ 0.8 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}$ i stepena $p=3$, osnovne funkcije i izvodi osnovnih funkcija

Kao i u slučaju Bézier-ovih krivih homogene koordinate nude efikasniji način prezentovanja NURBS krivih. Za dati skup kontrolnih tačaka $\{P_i\}$ i težina $\{w_i\}$ moguće je formirati skup težinskih kontrolnih tačaka $P_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$. Tada se može definisati ne-racionalna B-splajn kriva u četvorodimenzionom prostoru:

$$C^w(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) P_i^w \quad (2.15)$$

Striktno govoreći $C^w(\xi)$ nije racionalna kriva. Prethodna transformacija NURBS krive u B-splajn krivu u \mathbb{R}^{d+1} prostoru može se prikazati na sledeći način.

Neka su date koordinate tačaka kontrolnog poligona u oba oblika.

$$P_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad P_i^w = \begin{bmatrix} w_i \cdot x_i \\ w_i \cdot y_i \\ w_i \cdot z_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

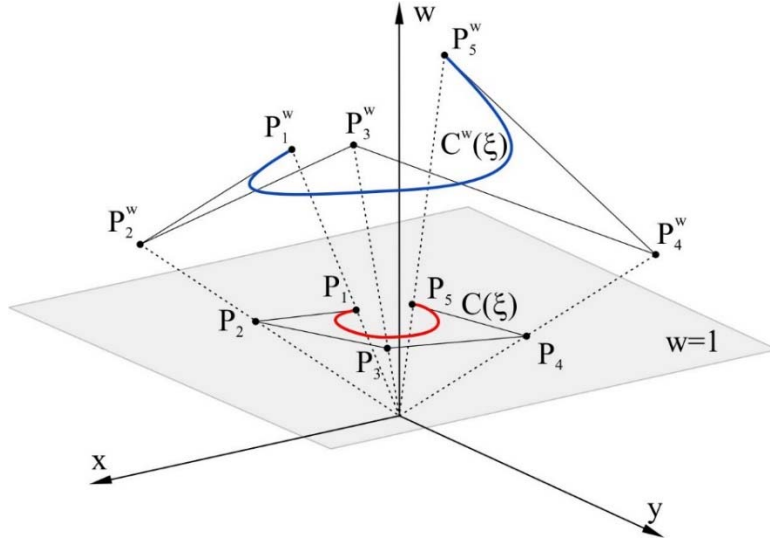
Ponderisana kriva C^w se za odgovarajuće ponderisane tačke P^w može predstaviti kao odgovarajuća B-splajn kriva u \mathbb{R}^{d+1} prostoru:

$$C^w(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) P_i^w = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \begin{bmatrix} w_i \cdot x_i \\ w_i \cdot y_i \\ w_i \cdot z_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) (w_i \cdot x_i) \\ \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) (w_i \cdot y_i) \\ \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) (w_i \cdot z_i) \\ \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Ukoliko krivu konvertujemo nazad u Dekartov koordinatni sistem potrebno je podeliti $C^w(\xi)$ četvrtom koordinatom. Dobijeni izraz predstavlja izraz za NURBS krivu.

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(\xi) w_j} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Na slici 2.6 predstavljena je NURBS kriva $C(\xi)$ kao i ponderisana kriva $C^w(\xi)$.



Slika 2.6 Transformacija projekcijom – formiranje NURBS krive

2.4 Definicija i osobine NURBS površi

NURBS površina stepena p u ξ pravcu i stepena q u η pravcu može se predstaviti:

$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad (2.19)$$

Tačke kontrolnog poligona $P_{i,j}$ formiraju kontrolnu mrežu u dva pravca, $\{w_{i,j}\}$ su težinski koeficijenti a $\{N_{i,p}(\xi)\}$ i $\{N_{j,q}(\eta)\}$ su ne-racionalne B-splajn osnovne funkcije definisane za odgovarajuće vektore čvorova:

$$\Xi = \{0, \dots, 0, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, 1, \dots, 1\} \text{ početni i krajnji elementi imaju ponavljanje } p+1 \text{ puta}$$

$$H = \{0, \dots, 0, \eta_{q+1}, \dots, \eta_{s-q-1}, 1, \dots, 1\} \text{ početni i krajnji elementi imaju ponavljanje } q+1 \text{ puta}$$

gde je $r=n+p+1$ i $s=m+q+1$.

Ako se sa $R_{i,j}(\xi, \eta)$ označi racionalna osnovna funkcija:

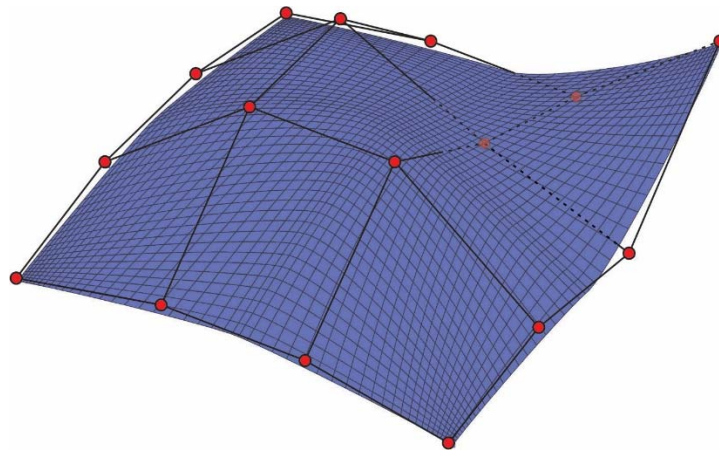
$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(\xi) N_{l,q}(\eta) w_{k,l}} \quad (2.20)$$

jednačina površi dobija oblik:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (2.21)$$

Primer jedne NURBS površi prikazan je na slici 2.7. Važne osobine funkcija $R_{i,j}(\xi, \eta)$ se grubo mogu predstaviti kao i kod osnovnih funkcija B-splajna $N_{i,p}(\xi), N_{j,q}(\eta)$.

- $R_{i,j}(\xi, \eta) \geq 0$ za svako i, j, ξ i η ;
- $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) = 1$ za svako $(\xi, \eta) \in [0,1] \times [0,1]$;
- Lokalni karakter: $R_{i,j}(\xi, \eta) = 0$ ako je (ξ, η) van pravougaone oblasti $(\xi, \eta) \in [\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$;
- U svakoj pravougaonoj oblasti oblika $[\xi_{i_0}, \xi_{i_0+1}] \times [\eta_{j_0}, \eta_{j_0+1}]$ najmanje $(p+1) \times (q+1)$ osnovnih funkcija su različite od nule, $R_{i,j}(\xi, \eta)$ za $i_0 - p \leq i \leq i_0$ i $j_0 - q \leq j \leq j_0$ su različite od nule;
- Za $p > 0$ i $q > 0$ $R_{i,j}(\xi, \eta)$ dostiže tačno jedan maksimum, $R_{0,0}(0,0) = R_{n,0}(1,0) = R_{0,m}(0,1) = R_{n,m}(1,1) = 1$;
- Diferencijabilnost: unutar pravougaonika formiranog za ξ i η linije čvorova svi parcijalni izvodi $R_{i,j}(\xi, \eta)$ egzistiraju. U ξ čvoru (η čvoru) je $p-k$ ($q-k$) puta diferencijabilna u ξ (η) pravcu, gde je k broj ponavljanja čvora.
- Ako je $w_{i,j} = a$ za $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m, i a \neq 0$, onda su $R_{i,j}(\xi, \eta) = N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)$ za svako i i j .



Slika 2.7 NURBS površ sa prikazanim tačkama kontrolnog poligona

Prethodne osobine racionalnih funkcija dovode do sledećih osobina NURBS površi:

- Krajnje tačke kontrolnog poligona leže na površi: $S(0,0) = P_{0,0}, S(1,0) = P_{n,0}, S(0,1) = P_{0,m}, S(1,1) = P_{n,m}$;
- Afina invarijantnost: afine transformacije na površi se primenjuju preko kontrolnih tačaka.

- Svojstvo konveksnog omotača: Pretpostavimo da je $w_{i,j} \geq 0$ za svako i i j . Ako je $(\xi, \eta) \in [\xi_{i_0}, \xi_{i_0+1}) \times [\eta_{j_0}, \eta_{j_0+1})$, tada $S(\xi, \eta)$ leži unutar konveksnog omotača od kontrolnih tačaka $P_{i,j}$, $i_0 - p \leq i \leq i_0$ i $j_0 - q \leq j \leq j_0$.
- Lokalna promena: ako se $P_{i,j}$ pomeri ili $w_{i,j}$ promeni to utiče na oblik površi samo u okvirima $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$;
- Neracionalna B-splajn površ, Bézier-ova površ i racionalna Bezieor-ova površ su specijalni slučajevi NURBS površi.
- Diferencijabilnost: NURBS površ $S(\xi, \eta)$ je p - k (q - k) puta diferencijabilna u odnosu na ξ (η) u čvoru vektora Ξ (H) gde je k broj ponavljanja čvora.

NURBS površ se može izraziti i preko homogenih koordinata:

$$S^w(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{i,j}^w \quad (2.22)$$

gde su $P_{i,j}^w = (w_{i,j}x_{i,j}, w_{i,j}y_{i,j}, w_{i,j}z_{i,j}, w_{i,j})$. Tada je $S(\xi, \eta) = H\{S^w(\xi, \eta)\}$. Oba načina zapisa površi su ravnopravna a razlika je u tome što je prvi način zapisa u delovima racionalna površ u trodimenzionom prostoru a drugi način zapisa je površ u četvorodimenzionom prostoru ($S^w(\xi, \eta)$).

2.5 Izvodi osnovnih NURBS funkcija:

Izvodi osnovnih funkcija NURBS **krive** preko osnovnih funkcija i izvoda B-splajna dati su jednačinom 2.23.

$$\frac{dR_{i,j}(\xi)}{d\xi} = \frac{N_{i,p}'(\xi)w_i}{\sum_{k=0}^n N_{k,p}(\xi)w_k} - \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{(\sum_{k=0}^n N_{k,p}(\xi)w_k)^2} \sum_{k=0}^n N_{k,p}'(\xi)w_k \quad (2.23)$$

Uvodeći smenu prethodna jednačina dobija oblik:

$$W(\xi) = \sum_{k=0}^n N_{k,p}(\xi)w_k \text{ kao i } W'(\xi) = \sum_{k=0}^n N_{k,p}'(\xi)w_k \quad (2.24)$$

$$\frac{dR_{i,j}(\xi)}{d\xi} = \frac{N_{i,p}'(\xi)w_i W(\xi) - N_{i,p}(\xi)w_i W'(\xi)}{W(\xi)^2}$$

Izvodi osnovnih funkcija NURBS **površ** za poznate vrednosti B-splajn osnovnih funkcija i izvoda osnovnih funkcija u oba pravca dati su jednačinom 2.25.

$$\frac{dR_{i,j}(\xi, \eta)}{d\xi} = \frac{N_{i,p}'(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m N_{k,p}(\xi)N_{l,q}(\eta)w_{k,l}} - \frac{N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{(\sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m N_{k,p}(\xi)N_{l,q}(\eta)w_{k,l})^2} \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m N_{k,p}'(\xi)N_{l,q}(\eta)w_{k,l} \quad (2.25)$$

Uvodeći smenu:

$$W(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(\xi)N_{l,q}(\eta)w_{k,l} \text{ kao i } W'(\xi, \eta) \\ = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}'(\xi)N_{l,q}(\eta)w_{k,l} \quad (2.26)$$

jednačina 2.25 dobija oblik:

$$\frac{dR_{i,j}(\xi, \eta)}{d\xi} = \frac{N_{i,p}'(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}W(\xi, \eta) - N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}W'(\xi, \eta)}{(W(\xi, \eta))^2} \quad (2.27)$$

Izvodi osnovnih funkcija NURBS **solida** za poznate vrednosti B-splajn osnovnih funkcija i izvoda osnovnih funkcija u sva tri pravca dati su jednačinom 2.28.

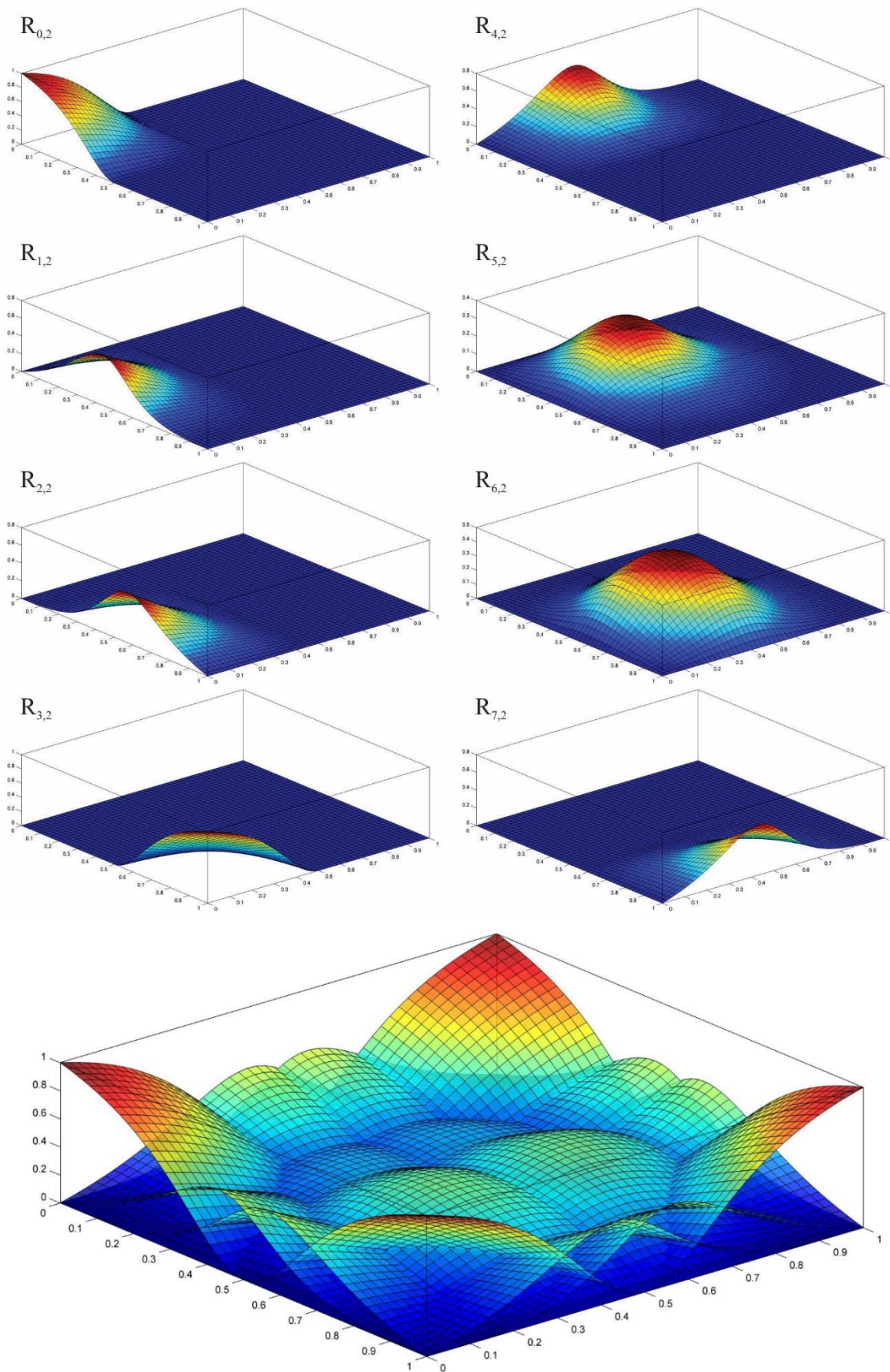
$$\frac{dR_{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta)}{d\xi} = \frac{N_{i,p}'(\xi)N_{j,q}(\eta)N_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \sum_{s=0}^l N_{k,p}(\xi)N_{l,q}(\eta)N_{s,r}(\zeta)w_{k,l,s}} \\ - \frac{N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)N_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{(\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \sum_{s=0}^l N_{k,p}(\xi)N_{l,q}(\eta)N_{s,r}(\zeta)w_{k,l,s})^2} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \sum_{s=0}^l N_{k,p}'(\xi)N_{l,q}(\eta)N_{s,r}(\zeta)w_{k,l,s} \quad (2.28)$$

Uvodeći smenu:

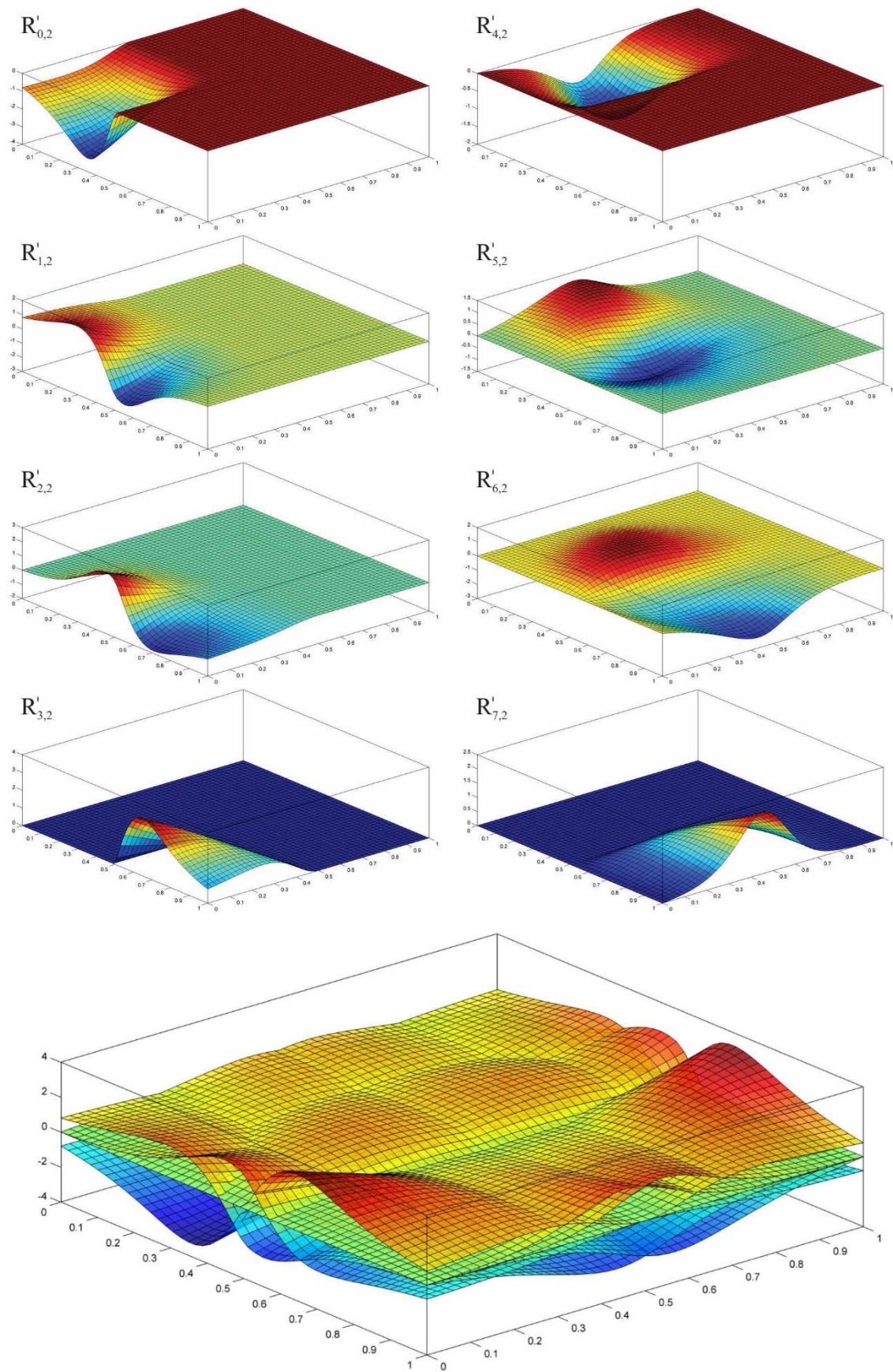
$$W(\xi, \eta, \zeta) = \\ = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \sum_{s=0}^l N_{k,p}(\xi)N_{l,q}(\eta)N_{s,r}(\zeta)w_{k,l,s} \text{ kao i } W'(\xi, \eta, \zeta) \\ = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \sum_{s=0}^l N_{k,p}'(\xi)N_{l,q}(\eta)N_{s,r}(\zeta)w_{k,l,s} \quad (2.29)$$

jednačina 2.28 dobija oblik:

$$\frac{dR_{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta)}{d\xi} \\ = \frac{N_{i,p}'(\xi)N_{j,q}(\eta)N_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}W(\xi, \eta, \zeta) - N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)N_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}W'(\xi, \eta, \zeta)}{(W(\xi, \eta, \zeta))^2} \quad (2.30)$$



Slika 2.8 Osnovne funkcije NURBS površi. Prikaz osnovnih funkcija od $R_{0,2}$ do $R_{7,2}$ pojedinačno kao i pregled svih osnovnih funkcija u parametarskom prostoru $\mathbb{E} = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$ $H = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$ $w_{0,0}=w_{3,3}=w_{3,0}=w_{0,3}=1$, $w_{1,1}=w_{2,1}=w_{1,2}=w_{2,2}=0.7$, $w_{0,1}=w_{0,2}=w_{3,1}=w_{3,2}=w_{1,0}=w_{2,0}=w_{1,3}=w_{2,3}=0.8$



Slika 2.9 Izvodi osnovnih funkcija NURBS površi. Prikaz izvoda osnovnih funkcija od $R'_{0,2}$ do $R'_{7,2}$ pojedinačno kao i pregled svih izvoda osnovnih funkcija u parametarskom prostoru

2.6 Algoritmi za promenu zapisa NURBS geometrije

Tokom razvoja B-splajna i NURBS-a veliki broj naučnika razvijao je metode za manipulaciju splajnovima kako bi se na osnovu početnog modela dobio željeni oblik [CLR80] [DeBo78] [Boe80][Coh85] [Pra84] [Pra91]. Posebnu grupu algoritama čine algoritmi kojima se ne menja početni oblik geometrije već se samo nizom transformacija utiče na promenu vektora čvorova, tačaka kontrolnog poligona i stepena polinoma osnovnih funkcija bez promene oblika same krive. Ovi algoritmi će u metodi konačnih elemenata imati ključnu ulogu za formiranje mreže konačnih elemenata a da se pritom zadrži početna geometrija. Ovde će pre svega biti reči o tri ključna algoritma i to:

- algoritam za ubacivanje jednog ili više čvorova u vektor čvorova (knot insertion, knot refinement),
- algoritam za podizanje stepena osnovnih funkcija (degree elevation),
- k-rafinacija mreže

2.6.1 Algoritam za ubacivanje jednog ili više čvorova u vektor čvorova

Prvi algoritam kojim se obogaćuje osnova B-splajna ili NURBS-a predstavlja algoritam za ubacivanje jednog čvora u vektor čvorova. Neka je NURBS kriva data preko ponderisanih tačaka kontrolnog poligona za vektor čvorova $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m\}$ na sledeći način:

$$C^w(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) P_i^w \quad (2.31)$$

gde je i -ta ponderisana tačka kontrolnog poligona $P_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$.

Korišćenjem ponderisanih tačaka kontrolnog poligona NURBS kriva u trodimenzionalnom prostoru se prevodi u B-splajn krivu u četvorodimenzionom prostoru.

Neka je $\bar{\xi} \in [\xi_k, \xi_{k+1})$ vrednost čvora koju želimo ubaciti u nov vektor čvorova tako da novoformirani vektor ima oblik:

$$\bar{\Xi} = \{\bar{\xi}_0 = \xi_0, \dots, \bar{\xi}_k = \xi_k, \bar{\xi}_{k+1} = \bar{\xi}, \bar{\xi}_{k+2} = \xi_{k+1}, \dots, \bar{\xi}_{m+1} = \xi_m\} \quad (2.32)$$

a da pritom kriva ostane istog oblika i dimenzija tako da je:

$$C^w(\xi) = \sum_{i=0}^{n+1} \hat{N}_{i,p}(\xi) Q_i^w \quad (2.33)$$

Pošto je reč o istoj krivoj važi jednakost:

$$\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) P_i^w = \sum_{i=0}^{n+1} \hat{N}_{i,p}(\xi) Q_i^w \quad (2.34)$$

Kako je promena osnovnih funkcija lokalna $N_{i,p}(\xi)=0$ za $\xi \notin [\xi_i, \xi_{i+p+1})$ i kako su one linearno nezavisne to se iz prethodne jednačine može zaključiti sledeće:

$$P_i^w = Q_i^w \quad i = 0, \dots, k-p-1 \quad (2.35)$$

$$P_i^w = Q_{i+1}^w \quad i = k+1, \dots, n$$

$N_{i,p}$ se mogu izraziti u funkciji od $\hat{N}_{i,p}$ za $i=k-p, \dots, k+1$ primenom jednakosti [DeBo78][Boe80]:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p+1} - \xi_i} \hat{N}_{i,p}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+2} - \xi}{\xi_{i+p+2} - \xi_{i+1}} \hat{N}_{i+1,p}(\xi) \quad (2.36)$$

Smenom osnovnih funkcija sa leve strane novim izrazom i rešavanjem jednačine po osnovnim funkcijama sa umetnutim elementom vektora čvorova dobija se:

$$Q_i^w = \alpha_i P_i^w + (1 - \alpha_i) P_{i-1}^w$$

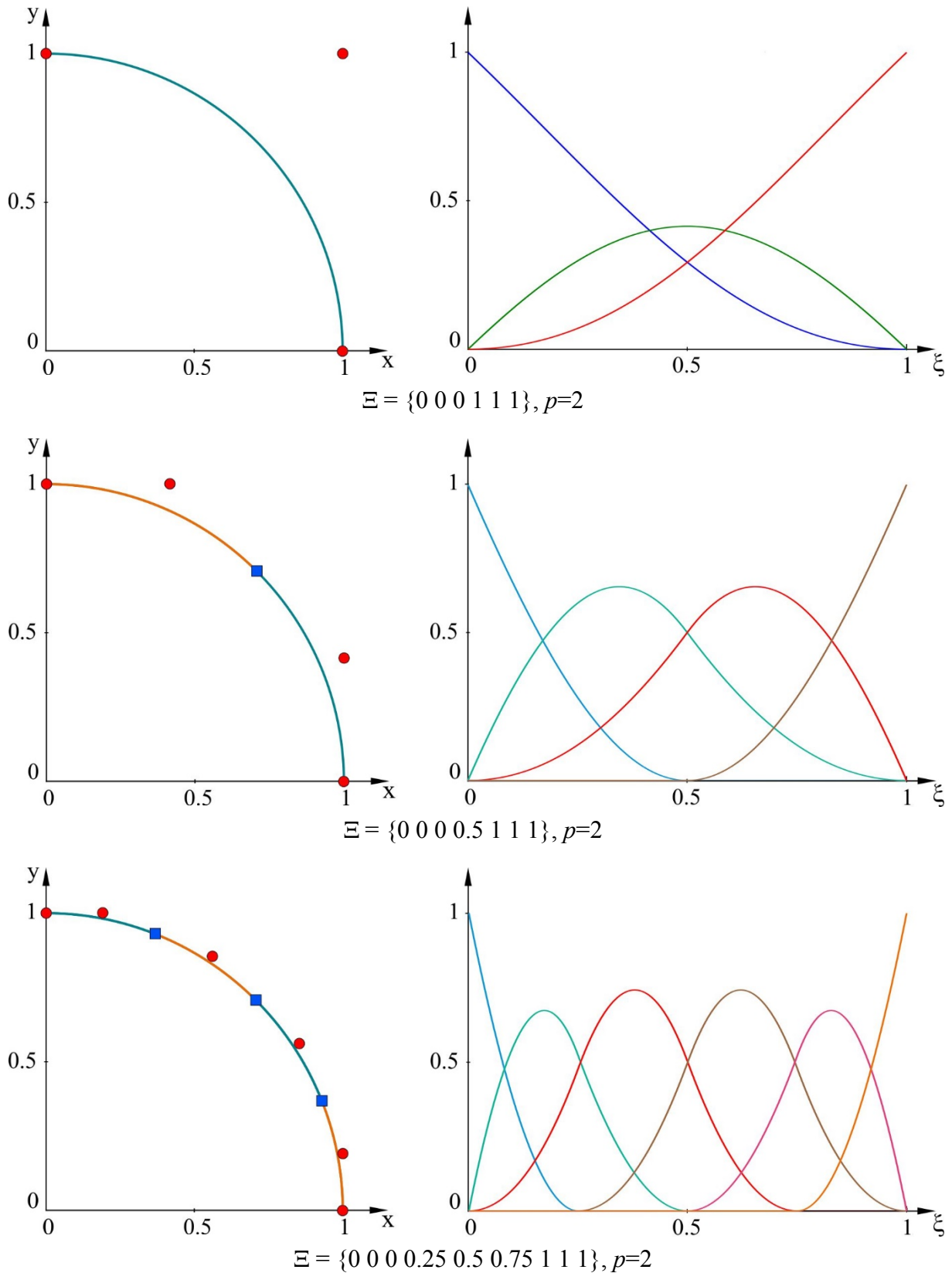
$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & i \leq k-p \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} & k-p+1 \leq i \leq k \\ 0 & i \geq k+1 \end{cases} \quad (2.37)$$

Jasno se vidi da se samo p novih tačaka kontrolnog poligona mora sračunati. Promene na krivoj i osnovne funkcije pre i posle ubacivanja jednog čvora u vektor čvorova mogu se videti na slici 2.10. Osim ubacivanja jednog čvora u vektor čvorova moguće je istovremeno ubaciti isti čvor sa stepenom ponavljanja r . Ukoliko je u početnom vektoru čvorova stepen ponavljanja bio s to ukupni broj ponavljanja čvora u vektoru čvorova ne sme biti veći od p tj. $s + r \leq p$.

$$Q_{i,r}^w = \alpha_{i,r} P_{i,r-1}^w + (1 - \alpha_{i,r}) P_{i-1,r-1}^w$$

$$\alpha_{i,r} = \begin{cases} 1 & i \leq k-p+r-1 \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} & k-p+r \leq i \leq k-s \\ 0 & i \geq k-s+1 \end{cases} \quad (2.38)$$

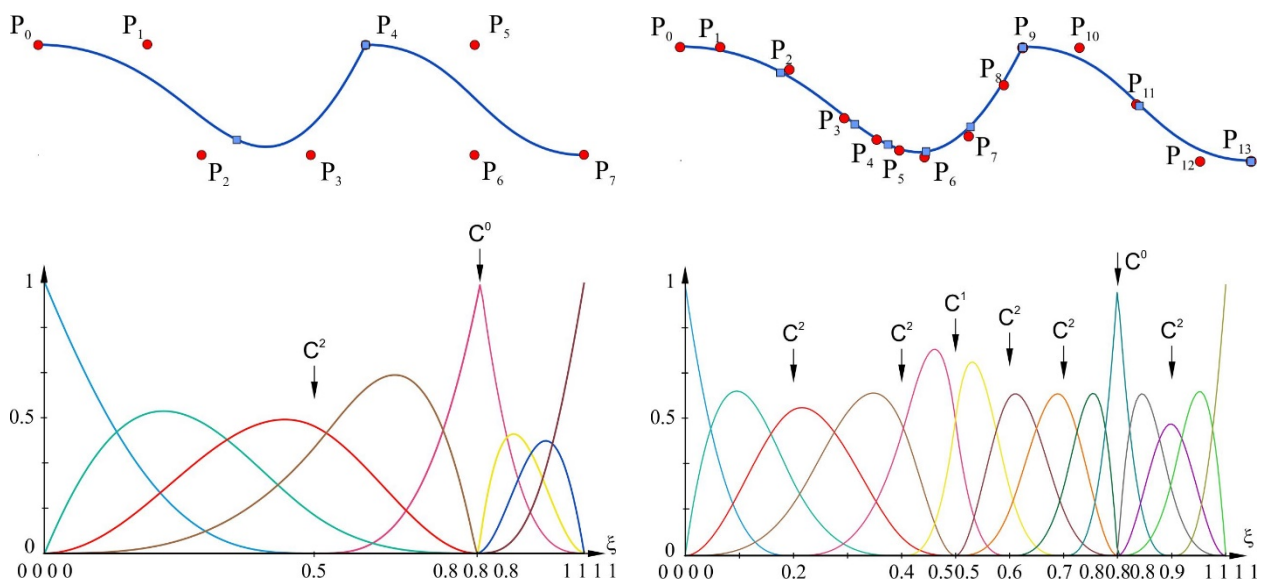
Rezultati ubacivanja više istih čvorova u vektor čvorova u vidu uporednog prikaza geometrije i osnovnih funkcija geometrijskih modela pre i posle ubacivanja čvorova prikazani su na slici 2.11. Postupkom ubacivanja čvorova ujedno se menja i broj segmenata krive. Prva kriva prikazana na slici 2.11 ima ukupno 8 tačaka kontrolnog poligona, 8 osnovnih funkcija i 3 segmenta. Druga kriva ima 14 tačaka kontrolnog poligona, 14 osnovnih funkcija i 8 segmenata. Ovim postupkom se menja mreža konačnih elemenata.



Slika 2.10 Ubacivanje čvorova u vektor čvorova NURBS krive – knot insertion
 U prvom redu je prikazana početna geometrija i njoj odgovarajuće osnovne funkcije. U drugom prikazana je geometrija i osnovne funkcije dobijene ubacivanjem čvora vrednosti 0.5 u vektor čvorova a u trećem ubacivanjem i čvorova 0.25 i 0.75. Crvenim krugovima su označene tačke kontrolnog poligona a plavim kvadratima su odvojeni elementi (segmenti) krive.

Menjajući broj elemenata kao i odnos između elemenata promenom stepena kontinuiteta vrši se rafinacija mreže koja se u klasičnoj metodi konačnih elemenata naziva „h“ rafinacijom mreže jer se odnosi samo na promenu gustine (veličine) elemenata mreže a ne i stepen osnovnih funkcija elemenata.

Algoritam ubacivanja čvorova predstavlja jedan od osnovnih alata za modeliranje mreže konačnih elemenata u izogeometrijskoj analizi sa B-splajn i NURBS osnovnim funkcijama. Ovim postupkom se utiče na mrežu konačnih elemenata povećavajući broj elemenata posebno u zonama u kojima se želi povećati tačnost početnog modela.



Slika 2.11 Višestruko ubacivanje čvorova u vektor čvorova sa multipliciranjem pojedinih čvorova NURBS krive reda 3 sa vektorima čvorova: $\Xi_1 = \{0\ 0\ 0\ 0\ 0.5\ 0.8\ 0.8\ 0.8\ 1\ 1\ 1\}$ i $\Xi_2 = \{0\ 0\ 0\ 0\ 0.2\ 0.4\ 0.5\ 0.5\ 0.6\ 0.7\ 0.8\ 0.8\ 0.8\ 0.9\ 1\ 1\ 1\}$.

2.6.2 Algoritam za povećanje stepena osnovnih funkcija (degree elevation)

Ovim postupkom se menja mreža konačnih elemenata povećanjem stepena osnovnih funkcija. Menjajući stepen osnovnih funkcija broj elemenata ostaje nepromenjen kao i sama geometrija. Promenom zapisa (vektora čvorova, mreže kontrolnog poligona i stepena osnovnih funkcija) novo formirana geometrija jednaka je početnoj. U klasičnoj metodi konačnih elemenata rafinacija mreže promenom stepena osnovnih funkcija naziva se „p“ rafinacija mreže.

Neka je $C_p^w(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi)P_i^w$ NURBS kriva data preko ponderisanih tačaka kontrolnog poligona definisana na vektoru čvorova Ξ . Kako je $C_p^w(\xi)$ u delovima polinomska kriva stepena p moguće je povećati stepen krive na $p+1$, tako da se dobije nova kriva definisana preko novih tačaka kontrolnog poligona Q_i^w i novog vektora čvorova $\hat{\Xi}$ uz ispunjenje uslova:

$$C_p^w(\xi) = C_{p+1}^w(\xi) = \sum_{i=0}^{\hat{n}} N_{i,p+1}(\xi) Q_i^w \quad (2.39)$$

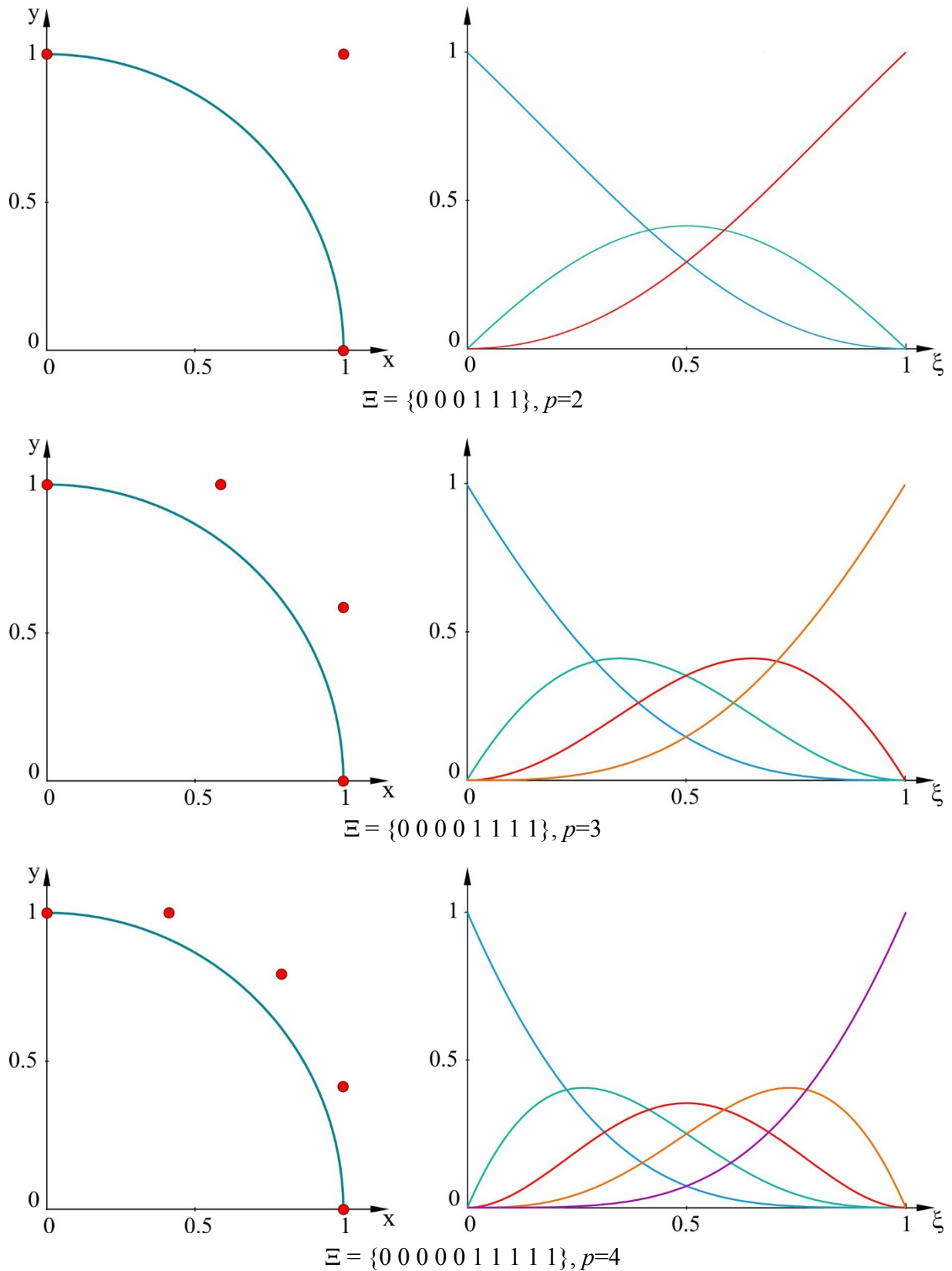
Početna kriva $C_p^w(\xi)$ i kriva dobijena povećanjem stepena osnovnih funkcija $C_{p+1}^w(\xi)$ predstavljaju geometrijski istu krivu. Kriva $C_{p+1}^w(\xi)$ je ustvari kriva $C_p^w(\xi)$ prikazana drugim vektorom čvorova, drugim tačkama kontrolnog poligona i stepenom osnovnih funkcija. Algoritam za promenu stepena osnovnih funkcija ustvari je algoritam za određivanje tačaka kontrolnog poligona Q_i^w i vektora čvorova $\hat{\Xi}$. Princip se može opisati u par koraka.

Prvo se parametarski domen deli na Bézier-ov tj. ponavljanjem čvorova se dovodi do kontinuiteta C^0 između elemenata. Na taj način broj elemenata ostaje nepromenjen. Potom se za svaki Bézier-ov segment podiže stepen na željeni. U sledećem koraku se uklanjaju suvišni elementi u vektoru čvorova kako bi se ponovo zadržao isti stepen kontinuiteta između elemenata. To znači da će se povećanjem stepena polinoma za dva svi elementi vektora čvorova biti ponovljeni za još dva puta jer se na taj način ostvaruje nepromenjen stepen kontinuiteta. Primer povećanja stepena osnovnih funkcija dat je slici 2.12.

2.6.3 K-rafinacija mreže

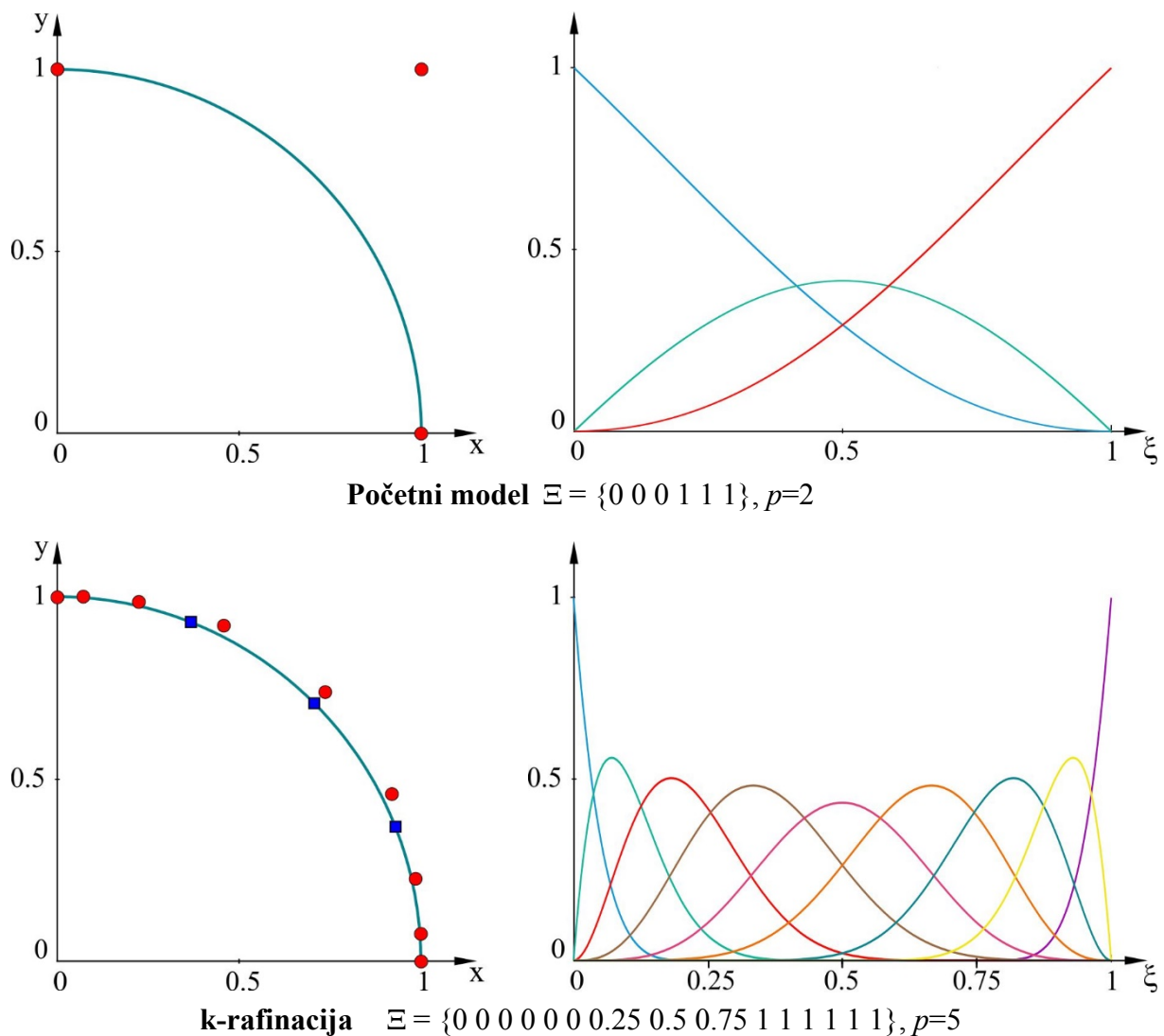
Rafinacija čvorova u vektoru čvorova kao i podizanje stepena osnovnih funkcija kriva ili površi predstavljaju moćne računске algoritme kojima se obogaćuje i menja NURBS osnova. Osim ovih procedura Hughes uvodi još jednu proceduru pod nazivom k-rafinacija mreže a predstavlja kombinaciju prethodnih procedura sa ciljem povećanja stepena osnovnih funkcija ali i povećanja kontinuiteta između elementa. Procedura podrazumeva da se najpre izvede povećanje stepena a kasnije ubacivanje novih čvorova u vektor čvorova. Ovom procedurom se izbegava multipliciranje čvorova procesom povećanja stepena. Da bi se na ovaj način ostvario najbolji učinak potrebno je opisati početnu geometriju sa vektorima čvorova koji, ukoliko je moguće, nemaju vrednosti različite od početnih i krajnjih tj. potrebno je da početni model bude opisan jednim elementom. Ovako formirani model sa jednim elementom imao bi maksimalni C^{p-1} kontinuitet na granicama elemenata. Ova procedura K-rafinacije nije u osnovi nova metoda rafinacije već se sama rafinacija postiže odgovarajućim redosledom ranije pomenutih metoda rafinacije.

Na slici 2.13 prikazani su početni model i model dobijen nakon k-rafinacije mreže. U prvom redu je prikazana početna geometrija i njoj odgovarajuće osnovne funkcije. U drugom prikazana je geometrija i osnovne funkcije dobijene povećanjem stepena osnovnih funkcija sa $p=2$ na $p=5$ i naknadnim ubacivanjem čvorova $\xi=(0.25, 0.5, 0.75)$ u vektor čvorova. Crvenim krugovima su označene tačke kontrolnog poligona a plavim kvadratima spoj segmenata krive.



Slika 2.12 Povećanje stepena osnovnih funkcija NURBS krive – degree elevation
 U prvom redu je prikazana početna geometrija i njoj odgovarajuće osnovne funkcije. U drugom
 je prikazana geometrija i osnovne funkcije dobijene povećanjem stepena osnovnih funkcija na
 $p=3$ a u trećem redu povećanje stepena osnovnih funkcija na $p=4$. Crvenim krugovima su
 označene tačke kontrolnog poligona. Sve krive imaju samo jedan segment.

Ovom rafinacijom je postignut veći stepen krive kao i veći stepen kontinuiteta krive. Ujedno je izvršena i h rafinacija pa je dobijen i veći broj segmenata krive (veći broj elemenata).

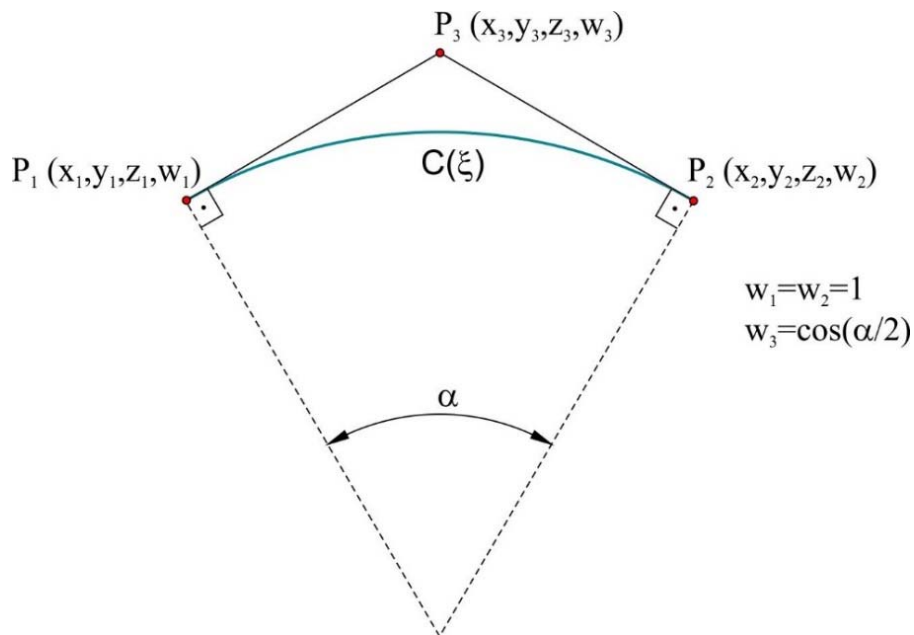


Slika 2.13 Povećanje stepena osnovnih funkcija i naknadno ubacivanje čvorova u vektor čvorova NURBS krive – k rafinacija.

2.7 Modeliranje kružnog luka

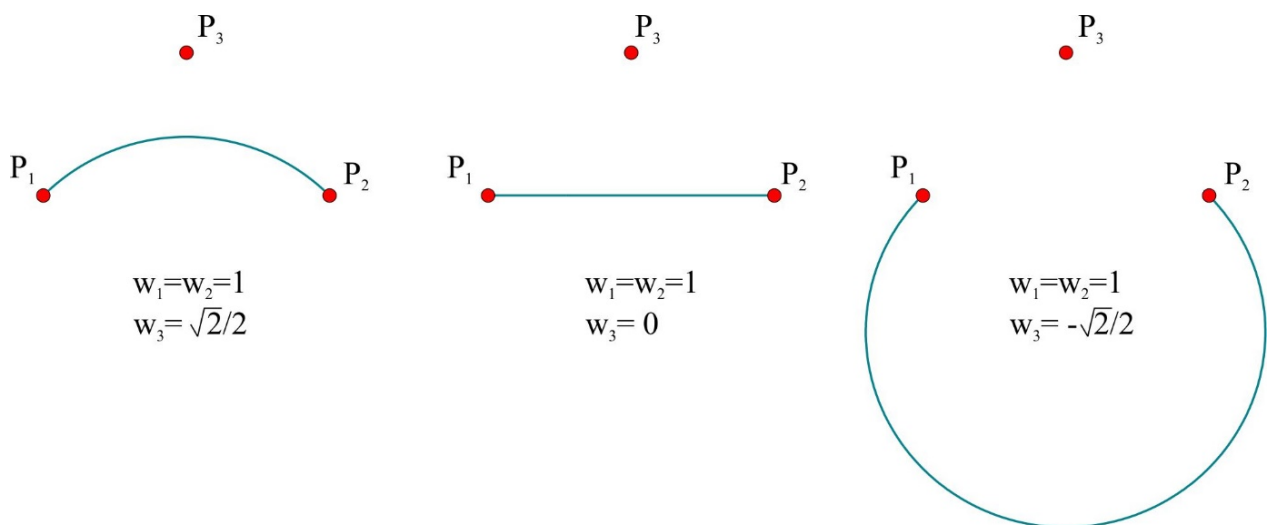
Većina teorijskih modela koji će biti korišćeni u disertaciji formirani su od ravnih površi ili iz površi formiranih na osnovu linija konusnih preseka. Jedna od prednosti NURBS-a je mogućnost tačnog opisa konusnih preseka koju B-splajn nema. Formiranje konusnih preseka biće objašnjeno preko modeliranja kružnog luka u ravni sa odgovarajućim tačkama kontrolnog poligona i odgovarajućim težinama. Luk mora biti deo kružnice sa uglom $\alpha < 180$. Luk sa uglom većim ili jednakim 180 može se modelirati NURBS-om ali se tom prilikom moraju koristiti negativni težinski koeficijenti [PT97].

Kružni luk se može opisati kvadratnim osnovnim funkcijama i sa vektorom čvorova $\Xi = \{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1\}$ za koji su krajnje tačke interpolacione. Problem definisanja kružnog luka se na ovaj način svodi na određivanje srednje tačke P_3 i njoj pridruženog težinskog koeficijenta w_3 (slika 2.14).



Slika 2.14 Određivanje težinskih koeficijenata pri modeliranju kružnog luka

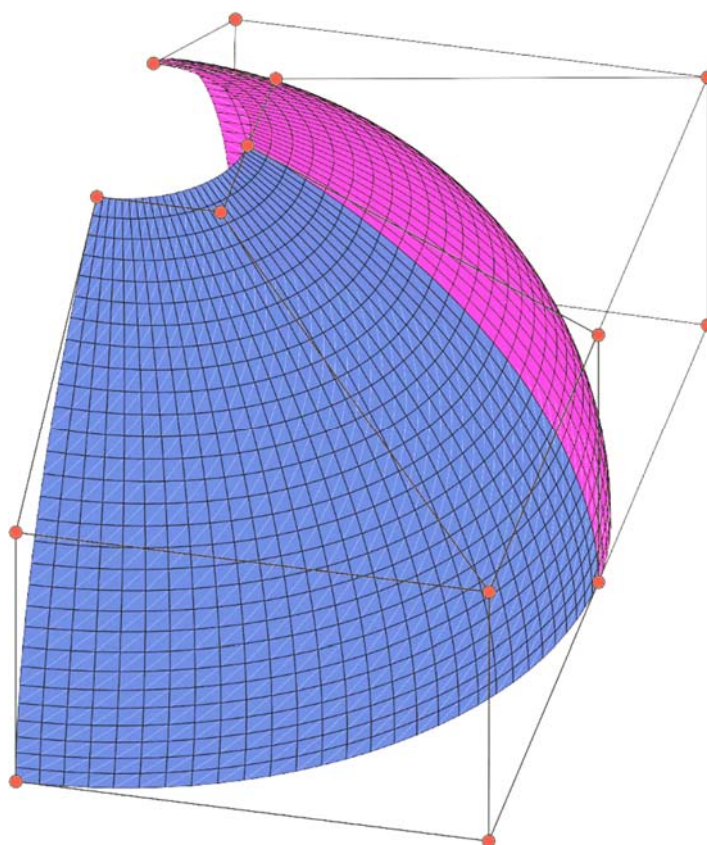
Kružnica se može opisati sa više lučnih segmenata. Na sličan način se može modelirati i deo sfere u dvoparametarskom prostoru. Težinski koeficijenti mogu biti i jednaki nuli ili čak i negativni. Ukoliko je težinski koeficijent jednak nuli to znači da tačka kontrolnog poligona sa ovim težinskim koeficijentom nema uticaja na formiranje geometrije. Ukoliko je negativan onda se kriva ili površ udaljava od te tačke (Slika 2.15). Primena negativnih težinskih koeficijenata nije preporučljiva i retko se koristi jer se tom prilikom narušava osobina konveksnog omotača.



Slika 2.15 Uticaj težinskih koeficijenata na geometriju NURBS krive

2.8 NURBS geometrija formirana primenom više patche-va

Formiranje složenih geometrijskih formi, formiranje modela sa različitim materijalima, modeliranje prekida i dr. zahteva modeliranje geometrije sa više patch-eva. Ukoliko se ne uvode dodatna ograničenja kontinuitet između patcheva je najčešće C^0 . U okviru ove teze koristiće se glatke NURBS multi patch površi i solidi sa kompatibilnom parametrizacijom duž zajedničkih stranica patcheva. Prilikom formiranja modela sa više patch-eva potrebno je voditi računa o tome da se tačke kontrolnog poligona poklapaju na ivici spoja dva patcha. Kako bi krajnje tačke kontrolnog poligona bile na geometriji najčešće se koriste otvoreni vektori čvorova. Tom prilikom se najčešće model formira tako da su težinski koeficijenti NURBS modela oba patcha koji se spajaju na granici patchava jednaki. Primer spajanja dva patcha oblika osmine sfere sa istim tačkama kontrolnog poligona na mestu spoja i sa istim težinskim koeficijentima u tačkama spoja kontrolnog poligona prikazan je na slici 2.16. Za model formiran na ovaj način moguće je naknadno vršiti rafinaciju mreže ali pritom vodeći računa o tome da ukoliko rafinacija mreže utiče i na promenu opisa geometrije u spoju patcheva onda se ona mora izvršiti u tom slučaju i na susedni patch.



Slika 2.16 Četvrtina sfere formirana od dva NURBS patcha sa po jednim elementom

METODA KONAČNIH ELEMENATA I IZOGEOMETRIJSKI PRISTUP

Analiza složenih fizičkih procesa je zahtevan zadatak. Kako je već naglašeno u uvodnom poglavlju, zbog kompleksnosti, fizički procesi se uglavnom ne posmatraju direktno već se prethodno formiraju modeli koji bi opisali glavne aspekte procesa. Za tako formirane modele potrebno je:

- dati matematički opis razvijenih modela
- numerički rešiti postavljeni matematički model.

Matematička formulacija modela dovodi do matematičkih jednačina koje su često diferencijalne jednačine u kojima su uvršćene promenljive uključene u proces. Razvoj matematičkog modela je zasnovan na našem iskustvu i na određenim pretpostavkama o tome kako se proces odvija.

Dok izvođenje jednačina u osnovi ne mora predstavljati težak zadatak, naći njihovo tačno (analitičko) rešenje sa druge strane je prilično komplikovan zadatak ukoliko je ono uopšte i moguće. Iz tog razloga numerička analiza ima značajnu ulogu nudeći alternativne načine za određivanje aproksimativnog rešenja. Razvijeno je mnogo različitih numeričkih metoda za rešavanje različitih tipova jednačina od kojih će ovde biti izdvojene samo one za rešavanje diferencijalnih jednačina.

Varijacioni metodi kao što su Rayleigh-Ritz-ov i Galerkin-ov metod pripadaju grupi metoda koje se najčešće sreću u naučnoj literaturi [Red93]. U okviru varijacionih metoda rešenje diferencijalnih jednačina se pretpostavlja u obliku linearne kombinacije odgovarajućih aproksimacionih funkcija ϕ_j i neodređenih koeficijenata c_j , $\sum \phi_j c_j$. Kako bi se obezbedio isti broj linearno nezavisnih algebarskih jednačina i nepoznatih koeficijenata, jednačina se transformiše u ekvivalentni oblik težinskog integrala. Aproksimacione funkcije ϕ_j moraju biti linearno nezavisne i moraju biti

izabrane tako da rešenje pretpostavljeno u formi zadovoljava geometrijske (kinematske) granične uslove sistema diferencijalnih jednačina. Varijacioni metodi (Rayleig-Ritz, Galerkin, najmanjih kvadrata...) razlikuju se međusobno u oblika integrala, težinskih i aproksimativnih funkcija [Red93]. Više varijacionih metoda je posledica težine formiranja aproksimacionih funkcija na posmatranom domenu.

Metod konačnih elemenata može se smatrati vrstom varijacionog metoda koji prevazilazi pomenute nedostatke uvođenjem sistematske procedure za primenu varijacione metode na podomenu. Široko je podržano mišljenje da on predstavlja najmoćniji alat od svih poznatih alata u strukturnoj analizi do sada. Metod je u stvari prvi put bio primenjen u strukturnoj mehanici ali nije prošlo mnogo vremena da bi se uvidelo da se on podjednako dobro može primeniti za rešavanje različitih klasa problema kao što su problemi u elektromagnetizmu, transferu toplote, mehanici fluida, mehanici loma, akustici... Kao što je Bathe naveo teško je tačno odrediti datum kada je metod nastao, ali se njegovo nastajanje vezuje za rad istraživačkih grupa u oblasti primenjene mehanike, fizike i inženjerstva u okviru kojeg je poslednja grupa dala značajan podsticaj za razvoj metode [Bat96]. Često se 1956. godina navodi kao godina nastanka metode. Te godine su Turner, Clough, Martin i Topp [TCRM56] objavili rad koji se odnosio na trougaoni element sa tri čvora i 6 stepeni slobode kretanja za ravansko naponsko stanje primenjen u strukturnoj analizi krila aviona proizvođača Boeing.

Ograničavajući se na oblast strukturne analize, koja je predmet interesovanja ove disertacije, metoda konačnih elemenata se i tad može koristiti na više različitih načina. Široko prihvaćena formulacija je metod konačnih elementa zasnovan na pomeranju. Većina softverskih rešenja koja se danas sreće rade na ovom principu zahvaljujući jednostavnosti i dobrim numeričkim osobinama. U ovom poglavlju biće ukratko objašnjen princip pomeranja u metodi konačnih elemenata i iznete osnove izogeometrijskog koncepta u metodi konačnih elemenata. U nastavku će biti analizirane osnovne razlike interpolacionih funkcija u klasičnoj metodi konačni elemenata i izogeometrijskoj metodi sa NURBS funkcijama oblika

3.1 Klasični metod konačnih elemenata zasnovan na pomeranju

Metoda konačnih elemenata se od dugih metoda razlikuje na osnovu više stvari koju ovu metodu čine jedinstvenom i to:

- *Diskretizacijom konačnim elementima.* Podela datog domena na skup jednostavnih poddomena nazvanih konačnim elementima je procedura koja obeležava ovu metodu. Ova procedura se naziva diskretizacijom domena. Skup elemenata se naziva mrežom

konačnih elemenata. Susjedni elementi su povezani međusobom čvorovima koji su sastavni deo elemenata i koji osim geometrijskih imaju i fizičke osobine.

- *Funkcije oblika elemenata.* Ukoliko se posmatra jedan konačni element, aproksimativne funkcije su tako izabrane koristeći ideju da se kontinualna funkcija može aproksimirati linearnom kombinacijom odgovarajućih linearno nezavisnih funkcija i nepoznatim koeficijentima. Osim ovih osobina funkcije moraju da zadovolje i druge osobine o kojima će kasnije biti reči. Zbog svojih pogodnosti algebarski polinomi su najčešće korišćene osnovne funkcije u klasičnoj metodi konačnih elemenata. Oni se određuju na osnovu interpolacione teorije, obzirom da su traženi koeficijenti vrednosti u čvorovima određene veličine (pomeranja).
- *Jednačine elementa i formiranje jednačina strukture (assembly-ranje).* Algebarske (diskretne) relacije po traženim koeficijentima jednog elementa se dobijaju zadovoljenjem diferencijalnih jednačina, obično u obliku težinskih integrala (slaba forma) na oblasti definisanosti elementa. U metodi konačnih elemenata zasnovanoj na pomeranju u strukturnoj analizi koeficijenti su čvorna pomeranja a diferencijalne jednačine se mogu izvesti na osnovu Hamiltonovog principa (princip stacionarne akcije i princip virtualnog rada) [Arn89]. Asembliranje jednačina elemenata se zasniva na ispunjenju uslova ravnoteže (u čvorovima) i kontinuiteta rešenja (C^0 kontinuitet) koji može biti proširen i kontinuitetom izvoda (C^1 , C^2 kontinuitet) na granicama između elemenata. Na taj način se formira sistem jednačina cele strukture. Sistem jednačina se rešava nakon uvođenja graničnih i/ili inicijalnih uslova koji omogućuju da broj jednačina odgovara broju nepoznatih u čvorovima a što omogućuje dobijanje jedinstvenog rešenja.

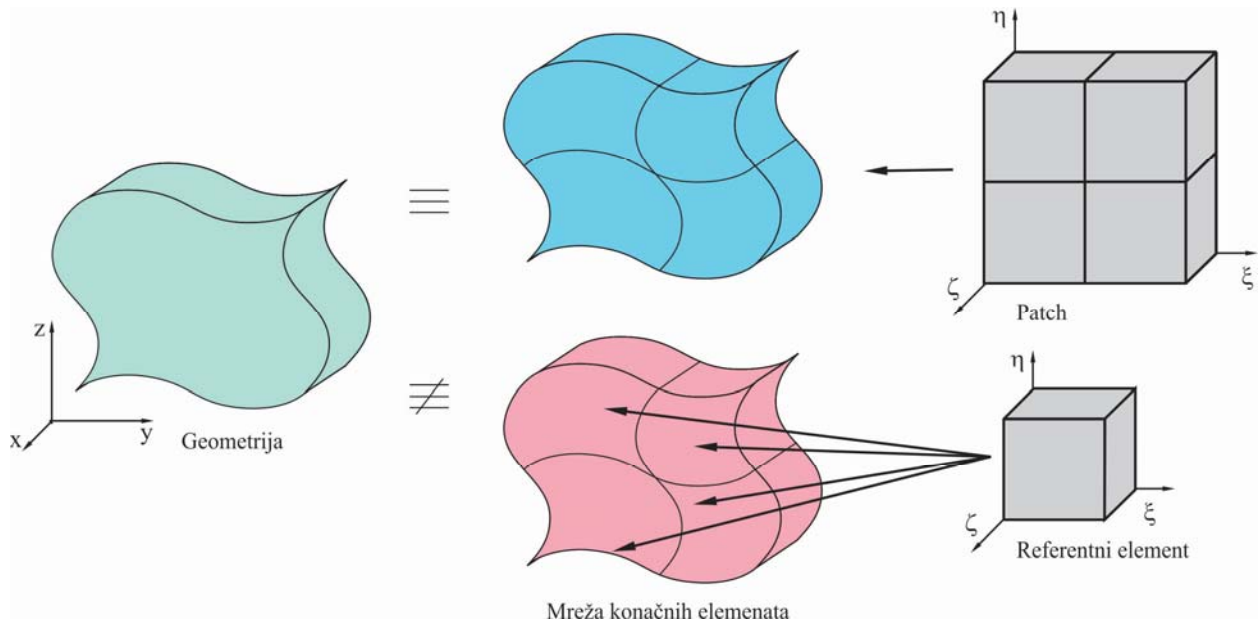
Kako bi dobili zadovoljavajuće rešenje aproksimacione funkcije elemenata moraju da zadovolje niz kriterijuma. Poznata su dva bitna uslova od početka nastanka metode. To su celovitost i kontinualnost. Prvi uslov celovitosti podrazumeva da ako se u klasičnoj metodi konačnih elemenata koriste polinomi kao funkcije oblika (Lagrange-ovi polinomi) moraju imati sve članove kako bi istovremeno mogli opisati složene promene neke promenljive pa sve do konstante u slučaju kretanja krutog tela. Uslov kontinualnosti nameće da algebarski polinomi moraju biti formirani tako da je njihova kontinualnost i kontinualnost njihovih izvoda, gde je to potrebno, osigurana u domenu elementa i na granicama između elemenata.

3.2 Izogeometrijski koncept

Osnovna ideja izogeometrijskog koncepta se sastoji u tome da se iste osnovne funkcije koriste za opisivanje CAD geometrije i za opisivanje prostora rešenja odgovarajućeg numeričkog metoda. U metodi konačnih elemenata se već duže vreme koristi izoparametarski metod koji se suštinski razlikuje od izogeometrijskog koncepta. Izoparametarski metod koristi osnovne funkcije za aproksimaciju prostora mogućeg rešenja i za aproksimaciju geometrije. Razvijeni su različiti tipovi izoparametarskih elemenata sa ugrađenim osnovnim funkcijama koje aproksimuju prostor rešenja ali i aproksimuju željenu geometriju. Kod izogeometrijske metode biraju se takve osnovne funkcije koje tačno opisuju željenu geometriju a pritom se koriste i za aproksimaciju prostora rešenja. Postupak formiranja modela konačnih elemenata se razlikuje pri formiranju izoparametarskog i izogeometrijskog modela. Izoparametarski metod zasnovan je na konačnom elementu koji je sposoban da opiše polja rešenja odgovarajućeg problema a geometrija je aproksimacija željene geometrije. Kod izogeometrijske metode polazi se od geometrije koja je tačno opisana i koja se može odgovarajućim tehnikama prilagoditi zahtevima analize konačnim elementima a da pritom ne izgubi na tačnosti geometrijskog opisa. U tradicionalnoj metodi konačnih elemenata za osnovne funkcije koriste se najčešće Lagrange-ovi polinomi, i to načešće polinomi niskog stepena (linearni, kvadratni) dok je geometrija u CAD softverima najčešće opisana pomoću splajn funkcija. Proces konverzije CAD modela u mrežu konačnih elemenata nailazi na niz problema. Ovim postupkom se gubi deo podataka o geometriji jer mreža konačnih elemenata uglavnom nije u mogućnosti da verno opiše željenu geometriju. Ona predstavlja samo aproksimaciju početne geometrije čiji kvalitet aproksimacije u velikoj meri zavisi od same geometrije, gustine mreže i stepena funkcija oblika. Osim toga prilikom formiranja mreže generatori mreže često nisu u mogućnosti da ostvare optimalne geometrijske odnose u konačnim elementima iako od njih zavisi tačnost analize. Kao izlaz često se daje i izveštaj o kvalitetu mreže da bi se na osnovu toga mogao dati zaključak o kvalitetu samih rezultata analize. Kod pojedinih tipova elementa kao što su tanke ljuske geometrijska imperfekcija znatno može uticati na rezultate analiza kao što je to slučaj kod analize gubitka stabilnosti.

Razvoj metode konačnih elemenata sa NURBS osnovnim funkcijama se deli u osnovi na dva pravca. U prvom pravcu posmatra se struktura koja je opisana sa jednim ili više patcheva. Model konačnih elemenata se formira za ceo NURBS model. Kako je NURBS definisan preko patcha-va koji nisu prepoznatljivi postojećim softverima za metodu konačnih elemenata moraju se razviti nova softverska rešenja. Kod drugog pristupa, primenom metoda Bezierove ekstrakcije, NURBS osnovne funkcije na domenu elementa se mogu opisati Bernstein-ovim polinomima. Ovom

procedurom se lokalizuju osnovne funkcije na domen elementa i kao takve se mogu koristiti u postojećim softverima. O ovoj proceduri biće više reči u poglavlju 6 sa primenom na T-splajnovima.

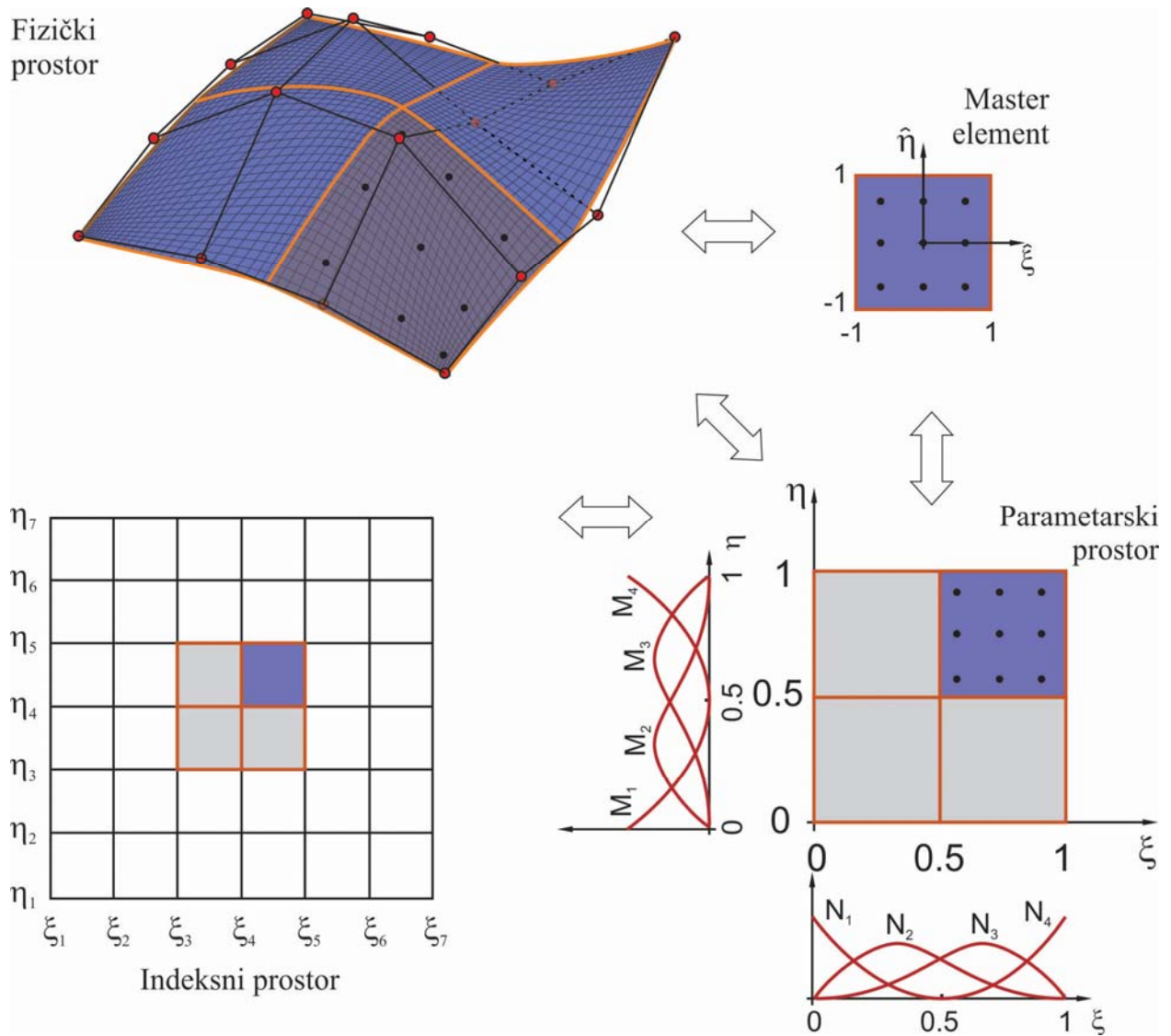


Slika 3.1 Postupak mapiranja u izogeometrijskoj i klasičnoj metodi konačnih elemenata.

Na prethodnoj slici može se uočiti osnovna razlika u formiranju modela klasičnom metodom konačnih elemenata i izogeometrijskom metodom. To je ujedno i razlog zašto se postojeći softveri ne mogu koristiti za izogeometrijsku analizu.

Izogeometrijska metoda zasnovana na NURBS funkcijama oblika ima sledeće karakteristike:

- *Opis geometrije.* Geometrija se opisuje tačkama kontrolnog poligona i osnovnim funkcijama za odgovarajući vektor čvorova. Geometrija je opisana u parametarskom obliku. Postoje parametarski domen i odgovarajući fizički domen. Veza između parametarskog i fizičkog domena prikazana je na slici 3.2 [CHB09].
- *Aproksimacija prostora rešenja.* Aproksimacija prostora rešenja odgovarajućeg problema kao što je polje pomeranja i naponsko stanje opisuje se istim funkcijama oblika kao i geometrija. Svakoju tački kontrolnog poligona se pridružuje odgovarajuća osnovna funkcija. Svakoju tački kontrolnog poligona se dodeljuje i odgovarajući stepen slobode kretanja za razliku od klasične metode konačnih elemenata kod koje se čvorovima dodeljuju odgovarajući stepeni slobode kretanja.



Slika 3.2 Veza indeksnog, parametarskog i fizičkog prostora u izogeometrijskoj analizi.

- *Definisanje mreže i elemenata.* Mreža se definiše proizvodom vektora čvorova. Elementi su definisani preko raspona čvorova. Postupcima ubacivanja čvorova može se vršiti rafinacija mreže. Na kvalitet mreže se takođe može uticati i povećanjem stepena osnovnih funkcija kao k -rafinacijom. Na slici 3.2 su senčenjem izdvojeni elementi u parametarskom i fizičkom domenu.
- *Oblast uticaja osnovnih funkcija.* Oblast uticaja osnovnih funkcija zavisi od stepena osnovnih funkcija i od vektora čvorova. Osnovne funkcije NURBS površi u oznaci $R_{ij, p, q}(\xi, \eta)$ reda p u jednom i q u drugom pravcu imaju vrednosti različite od nule samo na intervalu $[\xi_i, \xi_{i+p+1}) \times [\eta_j, \eta_{j+q+1})$.
- *Kontinuitet osnovnih funkcija.* Osnovne funkcije reda p su $p-k$ puta diferencijabilne u čvoru gde k predstavlja broj ponavljanja čvora u vektoru čvorova. Ukoliko se koristi kvadratni

NURBS sa stepenom ponavljanja 1 kontinuitet na granici elementa biće C^1 . Kod klasičnih konačnih elemenata najčešće je kontinualnost na granicama elementa C^0 . Ova osobina konačnim elementima sa NURBS osnovnim funkcijama daje niz prednosti i mogućnosti primene. Obzirom da su funkcije oblika racionalne funkcije za ξ i η linije čvorova svi parcijalni izvodi unutar elementa $R_{i,j}(\xi, \eta)$ egzistiraju.

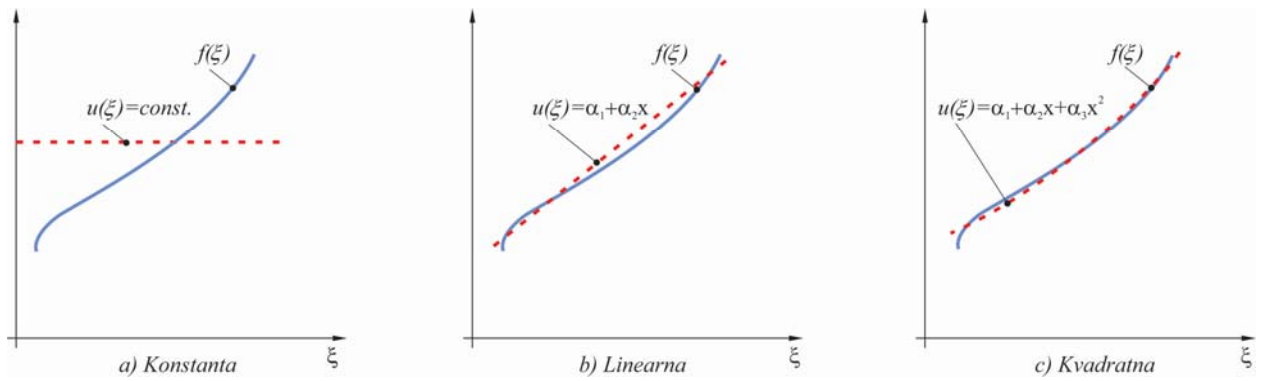
- *Rafinacija mreže.* Rafinacija mreže se može vršiti preko već spomenutih mogućnosti rafinacije NURBS baze kao što su ubacivanje čvorova (h-rafinacija), povećanje stepena osnovnih funkcija (p-rafinacija) ili k-rafinacija koja predstavlja poseban vid rafinacije svojstven B-splajn osnovnim funkcijama.
- *Implementacija graničnih uslova.* Kroneker delta svojstvo nije podržano NURBS osnovnim funkcijama. To podrazumeva da nije uvek slučaj da je vrednost osnovne funkcije vezane za određenu tačku kontrolnog poligona jednaka jedinici u toj tački kontrolnog poligona a da pritom ima vrednost nula za sve ostale. U klasičnoj metodi konačnih elemenata ovo svojstvo jeste podržano pa se zato i implementacija graničnih uslova može vezati za bilo koji čvor. Kod NURBS osnovnih funkcija ovo svojstvo jeste podržano samo za granične tačke kontrolnog poligona patcha i to za otvorene neperiodične vektore čvorova kod kojih je ponavljanje početnih i krajnjih elemenata vektora čvorova jednak $p+1$. Samo za ove tačke kontrolnog poligona osnovne funkcije tih tačaka kontrolnog poligona dostižu vrednost jednaku jedinici u tim tačkama. Ukoliko se želi unutar domena definisati neki granični uslov potrebno je tehnikama ubacivanja ili uklanjanja čvorova u vektoru čvorova dovesti da svojstvo Kroneker delta bude ispunjeno za odgovarajući čvor. Treba imati na umu da se pritom ponavljanjem elemenata u vektoru čvorova menja i kontinuitet na granicama elemenata.
- *Integracija konačnog elementa.* Integracija za element se vrši korišćenjem Gauss-ovih kvadrature formula za master element. Kako su granice integracije i master elementa $[-1, 1]$ to se za konkretni element u indeksnom prostoru mora vršiti prvo mapiranje jer su granice elementa u parametarskom domenu razlikuju od master elementa. Veličina elementa u parametarskom prostoru definisana je vektorima čvorova. Drugo mapiranje se vrši iz parametarskog u fizički domen. U naučnoj literaturi, posebno u radovima Hughes-a [HRS10], dat je predlog promene pravila integracije smanjujući broj integracionih tačaka ne narušavajući tačnost integracije. Posebna pažnja integraciji u domenu elementa je potrebno posvetiti kod konačnih elemenata tipa ljuske ili ploče jer se primenom tehnika redukovane integracije može uticati na smanjenje negativnog uticaja shear-locking-a.

- *Asembliranje matrice krutosti.* Asembliranje matrice krutosti se vrši na isti način kao i kod klasične metode konačnih elemenata. Kao i u klasičnoj metodi matrica krutosti je simetrična i pozitivno definitna. Kako se osnovne funkcije prostiru kroz više elemenata u zavisnosti od stepena osnovnih funkcija matrica krutosti ima obično širi pojas od matrice krutosti u klasičnoj metodi konačnih elemenata. To naročito dolazi do izražaja prilikom spajanja više patcheva u jednu strukturu. Povećanje matrice krutosti ima za posledicu povećanje procesorskog vremena prilikom rešavanja sistema jednačina.

Na slici 3.2 prikazana je NURBS površ u fizičkom prostoru sa mrežom kontrolnog poligona i označenim granicama elemenata kao i parametarski prostor koji se formira na osnovu indeksnog prostora. Površ je formirana sa kvadratnim NURBS osnovnim funkcijama koje se mogu odrediti na osnovu B-splajn osnovnih funkcija prikazanih na slici i težinskih koeficijenata. Na posebno izdvojenom elementu u parametarskom (i indeksnom) prostoru označene su odgovarajuće integracione tačke koje se mapiranjem sa master elementa prenose na domenu elementa u parametarskom prostoru a kasnije još jednim mapiranjem na domene elementa u fizičkom prostoru.

3.3 Osnovne razlike interpolacionih funkcija u klasičnoj metodi konačni elemenata i izogeometrijskoj metodi sa NURBS funkcijama oblika.

U klasičnoj metodi konačnih elemenata najčešće se za interpolacione funkcije koriste polinomi. Za to postoji više razloga. Polinomi sa matematički lako diferenciraju i integrale. Za interpolacione funkcije se mogu izabrati polinomi različitog stepena. Izbor stepena polinoma zavisi i od same promenljive koju opisujemo. Na slici je dat pimer jednodimenzione promenljive koju opisujemo polinomom stepena 0 (konstanta), 1 (linearni) i 2 (kvadratni). Od stepena NURBS osnovnih funkcija takodje zavisi mogućnost aproksimacije promenljive u polju elementa koju želimo da opišemo. Tako, na primer, kod ravanskih problema ukoliko je element pravougaona ploča koja se može opisati NURBS osnovnim funkcijama reda 1 ne znači da će one biti pogodne za opisivanje naponsko-deformacionog stanja u polju elementa ukoliko je njegova promena složena.



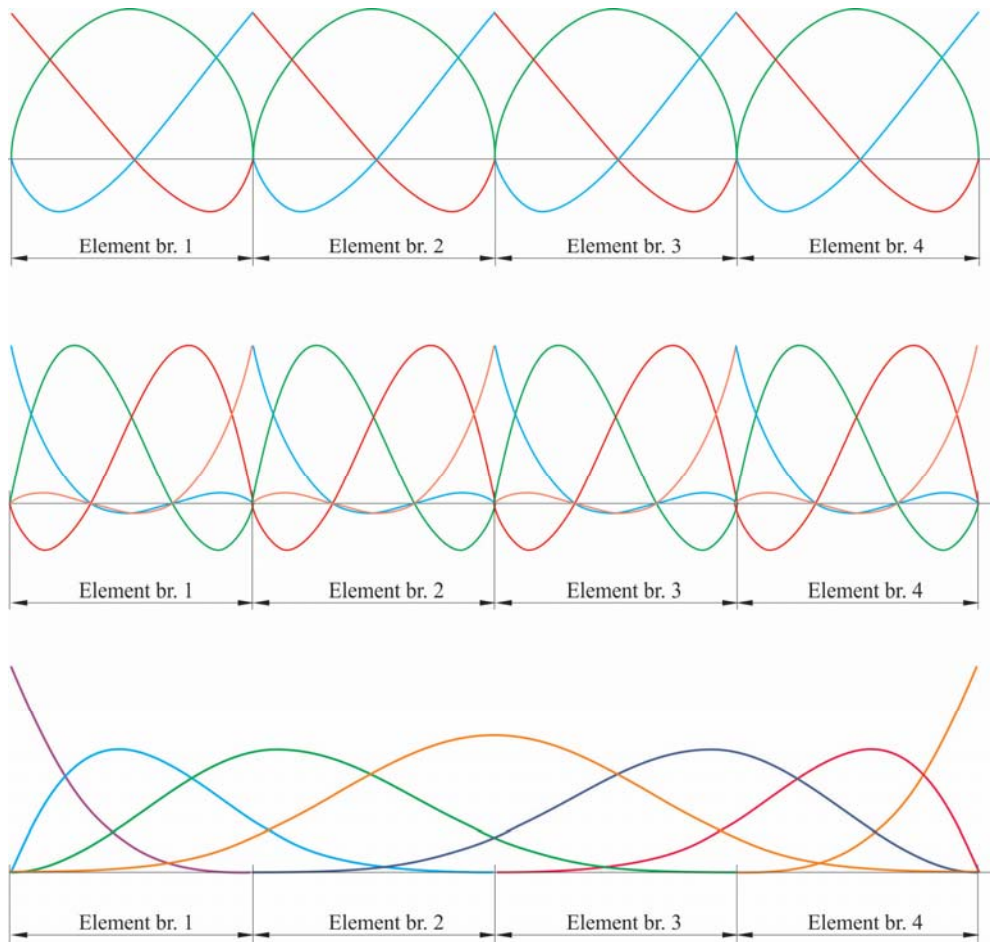
Slika 3.3 Pregled aproksimacije funkcija polinomima a) nultog – konstantom
b) prvog i c) drugog reda

U klasičnoj metodi konačnih elemenata najčešće se za funkcije oblika elementa koriste Lagrange-ovi polinomi. Lagrange-ovi polinomi jednodimenzionog problema određuju se po jednačini:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \frac{x - x_m}{x_k - x_m} \quad (3.1)$$

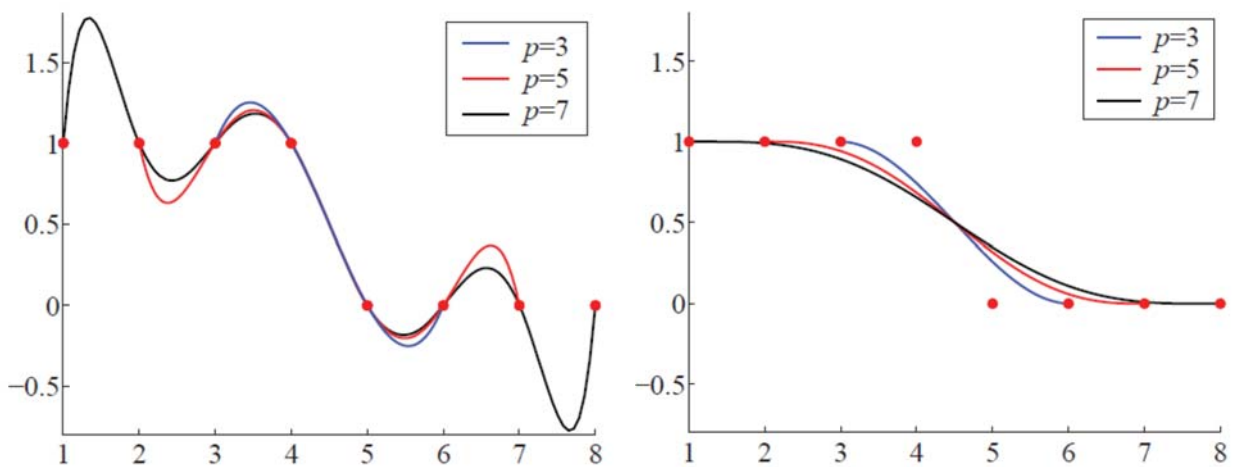
Na osnovu izraza je jasno da će vrednost polinoma osnovne funkcije k-tog čvora u tački k biti jednaka jedinici dok će u ostalim biti jednaka nuli. Ovo predstavlja jednu od značajnih osobina koju Lagrangeovi polinomi nude u metodi konačnih elemenata. Osnovne funkcije dvoparametarskih i troparametarskih elemenata formiraju se proizvodom Lagrange-ovih polinoma za svaki pravac. Ostale vrste osnovnih funkcija kao što su Serendipity osnovne funkcije koje se formiraju za elemente sa umanjenim brojem čvorova (najčešće čvorova u polju elementa) kao i Hermiteovi polinomi se ređe koriste. Na slici 3.4 za četiri elementa prikazane su Lagrangeove kvadratne i kubne osnovne funkcije kao i kubne NURBS osnovne funkcije. Sa slike se jasno vidi razlika oblasti delovanja osnovnih funkcija. Kod klasičnih Lagrangeovih osnovnih funkcija drugog i trećeg reda stepen kontinuiteta na granici elemenata je C^0 dok za NURBS osnovne funkcije stepen kontinuiteta na granicama elemenata je jednak $p-1$ tj. u ovom sličaju 2.

Na slici 3.5 prikazan je ilustrovani primer na kome Lagrange-ovi polinomi reda tri, četiri i pet interpoliraju osam podataka definisanih u \mathbb{R}^2 . Na slici se može primetiti da povećanjem stepen polinoma povećava se i odstupanje („oscilovanje“ poznato pod terminom Gibbs-ov fenomen) [HCB05]. NURBS funkcije oblika se ponašaju drugačije. Kod izogeometrijske metode konačnih elemenata dati set podataka se odnosi na vrednosti u tačkama kontrolnog poligona. Na slici 3.5 desno može se videti da NURBS funkcije oblika nisu interpolirajuće kao i da veća odstupanja nisu moguća zbog osobine konveksnog omotača koju imaju NURBS osnovne funkcije (poglavlje 2).



Slika 3.4 Prikaz kvadratnih, kubnih Lagrangeovih osnovnih funkcija kao i NURBS osnovnih funkcija trećeg stepena

U tabeli 3.1 dat je pregled termina i osobina koje se koriste u klasičnoj metodi konačnih elemenata i termina koji se koriste u izogeometrijskoj metodi konačnih elemenata.



Slika 3.5 Razlika u tačnosti interpolacije Lagrangeovih funkcija (levo) i ponašanje B-a splajn osnovnih funkcija (desno) [CHB09]

Tabela 3.1 Poređenje termina klasične metode konačnih elemenata i izogeometrijske metode konačnih elemenata sa NURBS osnovnim funkcijama [CHB09]

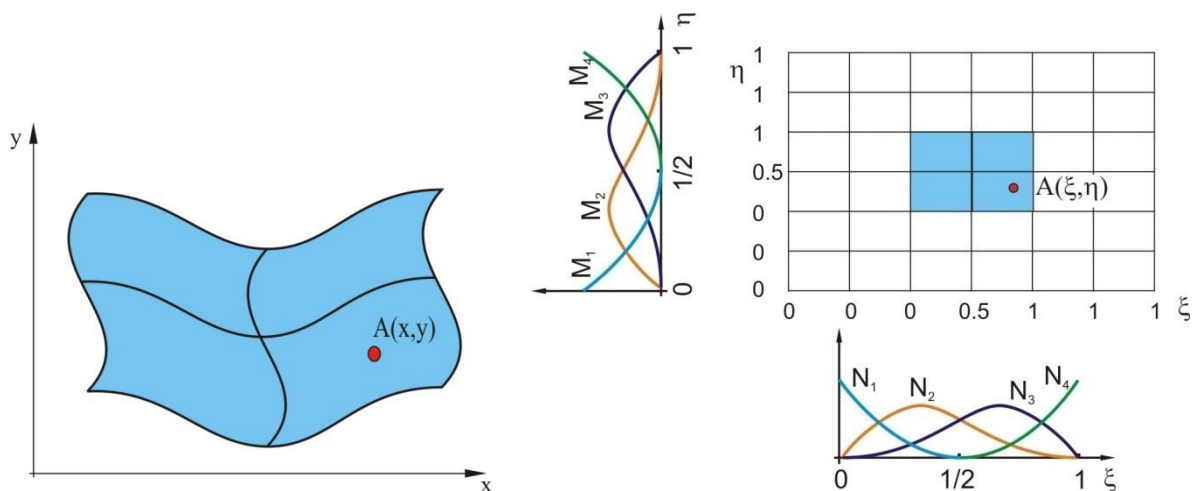
Klasična metoda konačnih elemenata	Izogeometrijska metoda konačnih elemenata sa NURBS funkcijama oblika
Čvorovi	Tačke kontrolnog poligona
Veličine u čvorovima	Veličine u tačkama kontrolnog poligona
Mreža	Vektori čvorova
Funkcije oblika interpoliraju veličine u čvorovima	Funkcije oblika ne interpoliraju veličine u tačkama kontrolnog poligona
Aproksimacija CAD geometrije	Tačna CAD geometrija
Funkcije oblika – polinomi	Funkcije oblika -NURBS
Gibbs-ov fenomen	Svojtvo konveksnog omotača
Subdomen	Patch
Kompaktna podrška - Compact support	
Partiton of unity Suma osnovnih funkcija u tački elementa jednaka je 1	
Izoparametarski pristup	
Affine transformacije	
Patch test zadovoljavaju	

**IMPLEMENTACIJA NURBS OSNOVNIH FUNKCIJA
U METODI KONAČNIH ELEMENATA**

U ovom poglavlju biće predstavljen metod konačnih elemenata sa NURBS osnovnim funkcijama primenjenih na ravanske 2d konačne elemente i konačne elemente tipa solida. Poseban osvrt će biti dat na modeliranje strukture sa jednim i više patch-eva. Rezultati analiza ovim elementima biće upoređivani sa rezultatima dobijenim u komercijalnim softverskim paketima. Posebno će biti naglašene pogodnosti i nedostaci metode sa NUBRS osnovim funkcijama.

4.1 Izogeometrijska analiza 2d elementima u ravni

Na slici 4.1 prkazana je NURBS površ u ravni u fizičkom i indeksnom prostoru.



Slika 4.1 NURBS površ – 2d mreža

Pomeranja u polju elementa u izogeometrijskoj analizi mogu se slično kao i kod izoparametarske analize odrediti na osnovu pomeranja u tačkama kontrolnog poligona i poznatih vrednosti osnovnih funkcija za odgovarajuće parametarske koordinate (za definisanu tačku u polju elementa). Za površ prikazanu na slici 4.1 polje pomeranja se može opisati:

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 u_1 + \dots + R_{en} u_{en} \\ R_1 v_1 + \dots + R_{en} v_{en} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{en} R_i a_i^{(e)} = \mathbf{R} \mathbf{a}^{(e)} \quad (4.1)$$

gde su u i v pomeranja određene tačke u polju elementa u pravcu x i y , u_i i v_i komponente pomeranja u tačkama kontrolnog poligona, R_i osnovne funkcije čija je vrednost različita od nule i en broj osnovnih funkcija različitih od nule. Prethodna jednačina je napisana u skraćenom obliku uvođenjem sledećih smena:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_{en}]; \quad \mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & R_i \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ \vdots \\ a_{en}^{(e)} \end{Bmatrix}; \quad a_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Ukupan broj osnovnih funkcija (ubof) NURBS bilo koje tačke na površi određuje se po jednačini:

$$\text{ubof} = (n-p-1) \cdot (m-q-1) \quad (4.3)$$

gde su sa m i n obeleženi brojevi elemenata vektora čvorova u ξ odnosno η pravcu. Od ukupnog broja samo su en osnovnih funkcija različite od nule. Broj tačaka kontrolnog poligona odgovara ukupnom broju funkcija ubof ali je samo pomeranje od en tačaka kontrolnog poligona uticajno za određivanje pomeranja određene tačke površi. Osnovne funkcije NURBS-a R_i se određuju po jednačini 2.20. Za određivanje osnovnih funkcija NURBS-a potrebno je prethodno odrediti vrednosti osnovnih funkcija B-splajna. Osnovne funkcije B-splajna u oba pravca prikazane su na slici 2.1. Za tačku na rasponu $[\zeta_i, \zeta_{i+1})$ postoji kao što je ranije naglašeno $p+1$ za ξ pravac (odnosno $q+1$ za η pravac) osnovna funkcija B-splajna koja je različita od nule, gde je p (odnosno q) stepen osnovnih funkcija B-splajna. Sa slike 4.1 se može primetiti da su osnovne funkcije B-splajna N_2 , N_3 i N_4 (M_1 , M_2 , M_3) u ξ pravcu (u η pravcu) različite od nule za prikazanu tačku površi. To znači da će ukupan broj funkcija NURBS-a na intervalu $[\zeta_i, \zeta_{i+1}) \times [\eta_j, \eta_{j+1})$ biti $(p+1)(q+1)$. Ukupan broj osnovnih funkcija B-splajna na celokupnom rasponu patcha u ξ i η pravcu određuju se na osnovu šeme koja je prikazana na slici 2.2.

Matrica osnovnih funkcija različitih od nule \mathbf{R} za odgovarajuću tačku u elementu (ξ, η) dimenzija je $2 \times 2en$. Pomeranja čvorova vezanih za odgovarajuće osnovne funkcije po Voight-ovoj notaciji je dimenzija $2en$. Vektor deformacije može se predstaviti preko komponentnih deformacija na sledeći način:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T \quad (4.4)$$

gde su komponentne deformacije date sledećim jednakostima:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.5)$$

Smenom vrednosti pomeranja u i v u prethodnim jednačinama dobija se jednačina za određivanje deformacije u polju elementa na osnovu pomeranja u tačkama kontrolnog poligona.

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n_{en}} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial R_i}{\partial x} u_i \\ \frac{\partial R_i}{\partial y} v_i \\ \frac{\partial R_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial R_i}{\partial x} v_i \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{n_{en}} \mathbf{B}_i a_i^{(e)} = \mathbf{B} a^{(e)} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{en}]$$

gde je matrica izvoda osnovnih funkcija \mathbf{B} :

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} R_{i,1} & 0 \\ 0 & R_{i,2} \\ R_{i,2} & R_{i,1} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

i gde su:

$$R_{i,1} = \frac{\partial R_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^2 \bar{J}_{1k}^{(e)} \frac{\partial R_i}{\partial \xi_k}; \quad R_{i,2} = \frac{\partial R_i}{\partial y} = \sum_{k=1}^2 \bar{J}_{2k}^{(e)} \frac{\partial R_i}{\partial \xi_k} \quad (4.8)$$

Transformacija izvoda osnovnih funkcija po indeksnim koordinatama u izvode u dekatrovnim koordinatama ostvaruje se primenom elemenata inverzne Jacoby-eve matrice $\bar{J}_{ij}^{(e)}$. Izraz za određivanje Jacoby-eve matrice dat je jednačinom 4.11. U prethodnim jednačinama korišćen je izvod osnovnih funkcija u globalnom koordinatnom sistemu. Izvodi osnovnih funkcija NURBS-a u lokalnom koordinatnom sistemu (indeksnim koordinatama) mogu se sračunati korišćenjem izraza 2.25. Vezu izvoda u odnosu na indeksni koordinatni sistem i izvoda u odnosu na globalni koordinatni sistem predstavljena je jednačinom 4.9:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial R_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R_i}{\partial \eta} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial R_i}{\partial x} \\ \frac{\partial R_i}{\partial y} \end{array} \right\} = \mathbf{J}^{(e)} \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.9)$$

Kako se položaj tačke na površi u polju elementa određuje na osnovu položaja tačaka kontrolnog poligona i osnovnih funkcija NURBS-a:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_{en}} R_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \mathbf{x}^{(e)} \quad (4.10)$$

Jacoby-eva matrica dobija oblik:

$$J^{(e)} = \sum_{i=1}^{n_{en}} \begin{bmatrix} \frac{\partial R_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial R_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial R_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial R_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Izvodi osnovnih funkcija u globalom koordinatnom sistemu mogu se sračunati na osnovu izvoda u lokalnom koordinatnom sistemu preko inverzne Jacoby-eve matrice:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial R_i}{\partial x} \\ \frac{\partial R_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J^{(e)}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial R_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Element matrice krutosti elementa $K_{ij}^{(e)}$ dat je izrazom:

$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \delta B_i^T D B_j dA \quad (4.13)$$

U prethodnom izrazu D predstavlja matricu materijala. Za ravanski model gde je $\sigma_z = 0$ i $\varepsilon_z \neq 0$ materijal se opisuje matricom:

$$D = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu^2)}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Za ravanski model gde sa $\sigma_z \neq 0$ i deformacijom $\varepsilon_z = 0$ materijal se opisuje matricom:

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Drugi model izotropnog materijala se koristi za ravanske probleme gde nema deformacije u z pravcu (npr. poprečni presek brane). Parametarske koordinate ξ i η se najčešće računaju preko vektora čvorova i lokalne koordinate elementa $\hat{\xi}, \hat{\eta}$:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_i + (\hat{\xi} + 1) \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i)}{2}; \quad \hat{\xi} \in [-1, 1] \\ \eta &= \eta_i + (\hat{\eta} + 1) \frac{(\eta_{i+1} - \eta_i)}{2}; \quad \hat{\eta} \in [-1, 1] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Elementarna površ preko lokalnih koordinata glasi:

$$dA = dx dy = |J^{(e)}| d\xi d\eta \quad (4.17)$$

Gde je $|J^{(e)}|$ determinanta Jacoby-eve matrice:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dx}{d\hat{\eta}} \\ \frac{dy}{d\xi} & \frac{dy}{d\hat{\eta}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\xi} \frac{d\xi}{d\hat{\xi}} & \frac{dx}{d\eta} \frac{d\eta}{d\hat{\eta}} \\ \frac{dy}{d\xi} \frac{d\xi}{d\hat{\xi}} & \frac{dy}{d\eta} \frac{d\eta}{d\hat{\eta}} \end{vmatrix} \quad (4.18)$$

Prethodna jednačina 4.13 nakon smene elementarne zapremine dobija oblik:

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \delta B_i^T(\xi, \eta) DB_j(\xi, \eta) |J^{(e)}| d\xi d\eta \quad (4.19)$$

Numerička integracija jednačine 4.13 se vrši najčešće primenom Gauss–Legendrovih kvadraturnih formula.

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B_i^T(\xi, \eta) DB_j(\xi, \eta) |J^{(e)}| d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.20)$$

gde je sa $f(\xi, \eta)$ označeno:

$$f(\xi, \eta) = B_i^T(\xi, \eta) DB_j(\xi, \eta) |J^{(e)}| \quad (4.21)$$

Primenom kvadratura prethodni izraz dobija oblik:

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} \sum_{p=1}^{n_p} W_p f(\xi_p, \eta) d\eta = \sum_{q=1}^{n_q} \sum_{p=1}^{n_p} W_p W_q f(\xi_p, \eta_q) \quad (4.22)$$

U prethodnoj jednačini sa ξ_p, η_q su označene koordinate Gauss-Legendrovih integracionih tačaka a sa $W_p W_q$ težinski koeficijenti. Gauss-ove kvadrature formule sa n integracionih tačaka su tačne za podintegralne funkcije stepena $2n-1$.

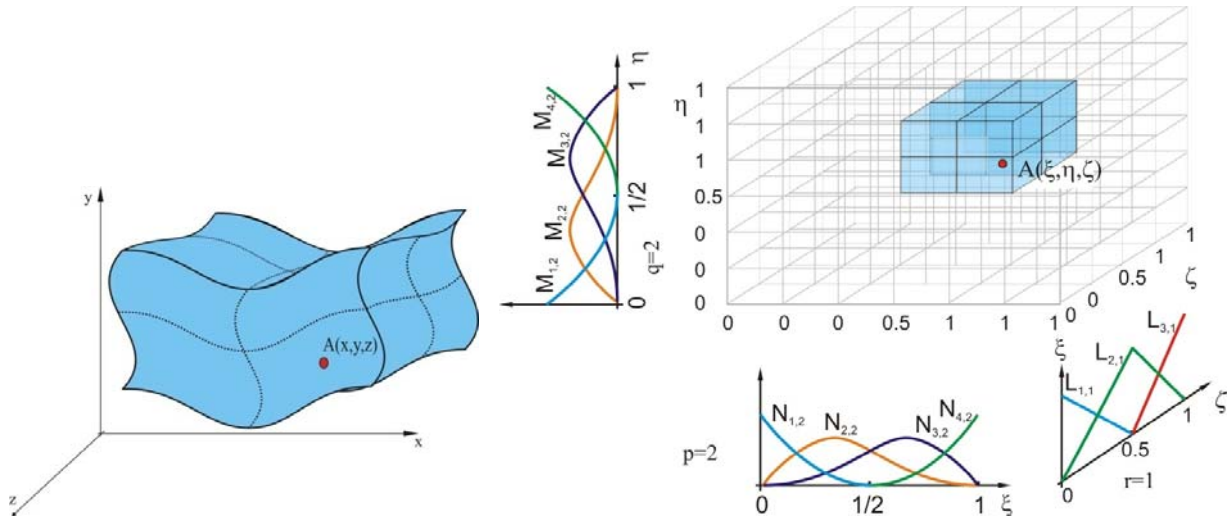
4.2 Izogeometrijska analiza 3D solid elementima

Na slici 4.2 prikazan je NURBS solid u fizičkom i indeksnom prostoru. Kao i kod problema u ravni deformacija u polju elementa kod izoparametarskog 3D solid (NURBS) elemenata može se odrediti na osnovu pomeranja u čvorovima i vrednostima osnovnih funkcija (*en* funkcija različitih od nule) za definisanu tačku u polju elementa:

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 u_1 + R_2 u_2 + \dots + R_{en} u_{en} \\ R_1 v_1 + R_2 v_2 + \dots + R_{en} v_{en} \\ R_1 w_1 + R_2 w_2 + \dots + R_{en} w_{en} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{en} R_i a_i^{(e)} = \mathbf{R} \mathbf{a}^{(e)} \quad (4.23)$$

gde su:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_{en}]; \quad \mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} R_i & 0 & 0 \\ 0 & R_i & 0 \\ 0 & 0 & R_i \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ \vdots \\ a_{en}^{(e)} \end{Bmatrix}; \quad a_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$



Slika 4.2 NURBS solid– fizički i indeksni prostor

Deformacija se može predstaviti preko komponentnih deformacija na sledeći način po Voight-ovoj notaciji:

$$\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T \quad (4.25)$$

gde su komponentne deformacije:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.26)$$

Smenom vrednosti pomeranja u , v i w u prethodnim jednačinama dobija se jednačina za određivanje deformacije na osnovu poznatih vrednosti pomeranja u tačkama kontrolnog poligona.

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n_{en}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_i}{\partial x} u_i \\ \frac{\partial R_i}{\partial y} v_i \\ \frac{\partial R_i}{\partial z} w_i \\ \frac{\partial R_i}{\partial z} v_i + \frac{\partial R_i}{\partial y} w_i \\ \frac{\partial R_i}{\partial z} u_i + \frac{\partial R_i}{\partial x} w_i \\ \frac{\partial R_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial R_i}{\partial x} v_i \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{n_{en}} \mathbf{B}_i a_i^{(e)} = \mathbf{B} \mathbf{a}^{(e)} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{en}]$$

gde je matrica izvoda osnovnih funkcija \mathbf{B} :

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} R_{i,1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{i,2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{i,3} \\ 0 & R_{i,3} & R_{i,2} \\ R_{i,3} & 0 & R_{i,1} \\ R_{i,2} & R_{i,1} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

gde su:

$$R_{i,1} = \frac{\partial R_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^3 \bar{J}_{1k}^{(e)} \frac{\partial R_i}{\partial \xi_k}; \quad R_{i,2} = \frac{\partial R_i}{\partial y} = \sum_{k=1}^3 \bar{J}_{2k}^{(e)} \frac{\partial R_i}{\partial \xi_k}; \quad R_{i,3} = \frac{\partial R_i}{\partial z} = \sum_{k=1}^3 \bar{J}_{3k}^{(e)} \frac{\partial R_i}{\partial \xi_k} \quad (4.29)$$

U prethodnim jednačinama korišćen je izvod osnovnih funkcija u globalnom koordinatnom sistemu. Izvodi osnovnih funkcija NURBS-a u lokalnom koordinatnom sistemu (indeksnim koordinatama) mogu se sračunati korišćenjem izraza 2.30. Vezu između izvoda u odnosu na indeksni koordinatni sistem i izvoda u odnosu na globalni koordinatni sistem daje matrica transformacije (Jacoby-eva matrica):

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial R_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial R_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial R_i}{\partial x} \\ \frac{\partial R_i}{\partial y} \\ \frac{\partial R_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{(e)} \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.30)$$

Kako se položaj tačke u solid elementu određuje na osnovu položaja tačaka kontrolnog poligona i osnovnih funkcija NURBS-a:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{x}^{(e)} \quad (4.31)$$

Jacoby-eva matrica dobija oblik:

$$\mathbf{J}^{(e)} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Izvod osnovne funkcije u globalom koordinatnom sistemu na osnovu izvoda u lokalnom koordinatnom sistemu mogu se predstaviti preko inverzne Jacoby-eve matrice:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial R_i}{\partial x} \\ \frac{\partial R_i}{\partial y} \\ \frac{\partial R_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{(e)}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial R_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial R_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

Element matrica krutosti elementa se može predstaviti izrazom:

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \iiint_{V^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dV \quad (4.34)$$

U prethodnom izrazu za matricu krutosti matrica u oznaci \mathbf{D} je matrica materijala koja za izotropni materijal ima oblik:

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Parametarske koordinate ξ , η i ζ se najčešće računaju preko vektora čvorova i lokalne koordinate elemenata $\hat{\xi}$, $\hat{\eta}$ i $\hat{\zeta}$:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_i + (\hat{\xi} + 1) \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i)}{2}; \quad \hat{\xi} \in [-1, 1] \\ \eta &= \eta_i + (\hat{\eta} + 1) \frac{(\eta_{i+1} - \eta_i)}{2}; \quad \hat{\eta} \in [-1, 1] \\ \zeta &= \zeta_i + (\hat{\zeta} + 1) \frac{(\zeta_{i+1} - \zeta_i)}{2}; \quad \hat{\zeta} \in [-1, 1] \end{aligned} \quad (4.36)$$

Elementarna zapremina se može izraziti preko lokalnih koordinata:

$$dV = dx dy dz = |\mathbf{J}^{(e)}| d\hat{\xi} d\hat{\eta} d\hat{\zeta} \quad (4.37)$$

Gde je $|\mathbf{J}^{(e)}|$ determinanta Jacobi-eve matrice:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dx}{d\hat{\eta}} & \frac{dx}{d\hat{\zeta}} \\ \frac{dy}{d\xi} & \frac{dy}{d\hat{\eta}} & \frac{dy}{d\hat{\zeta}} \\ \frac{dz}{d\xi} & \frac{dz}{d\hat{\eta}} & \frac{dz}{d\hat{\zeta}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\xi} \frac{d\xi}{d\hat{\xi}} & \frac{dx}{d\hat{\eta}} \frac{d\hat{\eta}}{d\eta} & \frac{dx}{d\hat{\zeta}} \frac{d\hat{\zeta}}{d\zeta} \\ \frac{dy}{d\xi} \frac{d\xi}{d\hat{\xi}} & \frac{dy}{d\hat{\eta}} \frac{d\hat{\eta}}{d\eta} & \frac{dy}{d\hat{\zeta}} \frac{d\hat{\zeta}}{d\zeta} \\ \frac{dz}{d\xi} \frac{d\xi}{d\hat{\xi}} & \frac{dz}{d\hat{\eta}} \frac{d\hat{\eta}}{d\eta} & \frac{dz}{d\hat{\zeta}} \frac{d\hat{\zeta}}{d\zeta} \end{vmatrix} = \frac{d\xi}{d\hat{\xi}} \frac{d\eta}{d\hat{\eta}} \frac{d\zeta}{d\hat{\zeta}} \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dx}{d\eta} & \frac{dx}{d\zeta} \\ \frac{dy}{d\xi} & \frac{dy}{d\eta} & \frac{dy}{d\zeta} \\ \frac{dz}{d\xi} & \frac{dz}{d\eta} & \frac{dz}{d\zeta} \end{vmatrix} \quad (4.38)$$

izraz za određivanje matrice krutosti elementa dobija oblik:

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B_A^T(\xi, \eta, \zeta) DB_B(\xi, \eta, \zeta) |J^{(e)}| d\xi d\eta d\zeta \quad (4.39)$$

Numerička integracija jednačine 4.34 se vrši najčešće primenom Gauss–Legendrovih kvadrature formula. Matrica krutosti određena izrazom 4.39 uvođenjem smene dobija oblik:

$$\begin{aligned} K_{ij}^{(e)} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B_i^T(\xi, \eta, \zeta) DB_j(\xi, \eta, \zeta) |J^{(e)}| d\xi d\eta d\zeta \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (4.40)$$

gde je sa $f(\xi, \eta, \zeta)$ označeno:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = B_i^T(\xi, \eta, \zeta) DB_j(\xi, \eta, \zeta) |J^{(e)}| \quad (4.41)$$

primenom kvadratura prethodni izraz dobija oblik:

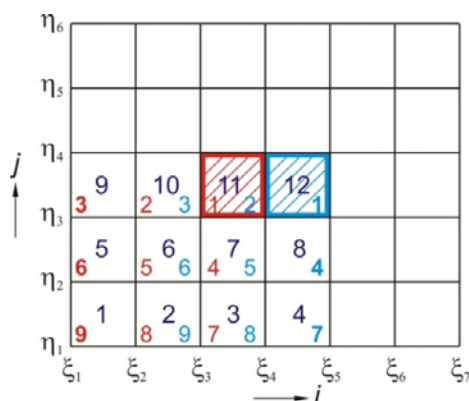
$$\begin{aligned} K_{ij}^{(e)} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \sum_{p=1}^{n_p} W_p f(\xi_p, \eta, \zeta) d\eta d\zeta \\ &= \int_{-1}^{+1} \sum_{q=1}^{n_q} \sum_{p=1}^{n_p} W_p W_q f(\xi_p, \eta_q, \zeta) d\zeta = \sum_{r=1}^{n_r} \sum_{q=1}^{n_q} \sum_{p=1}^{n_p} W_p W_q W_r f(\xi_p, \eta_q, \zeta_r) \end{aligned} \quad (4.42)$$

U prethodnoj jednačini sa ξ_p, η_q, ζ_r su označene koordinate Gauss-Legendrovih integracionih tačaka a sa $W_p W_q W_r$ težinski koeficijenti. U zavisnosti od broja integracionih tačaka na intervalu $x \in [-1, 1]$ razlikuju se i njihove koordinate i težinski koeficijenti.

4.3 Softver za izogeometrijsku strukturnu analizu

Algoritam softvera za izogeometrijsku strukturnu analizu u odnosu na algoritme primenjene u softverima klasične metode konačnih elemenata se u osnovi znatno razlikuje iako se većina procedura može prilagoditi izogeometrijskoj analizi [MMP14]. Ova razlika je posledica u posmatranju strukture preko patch-a kod izogeometrijske metode konačnih elemenata sa NURBS osnovnim funkcijama. Osnovne funkcije elementa su u osnovi funkcije NURBS patcha i mogu pripadati i drugim susednim elementima u zavisnosti od stepena osnovnih funkcija.

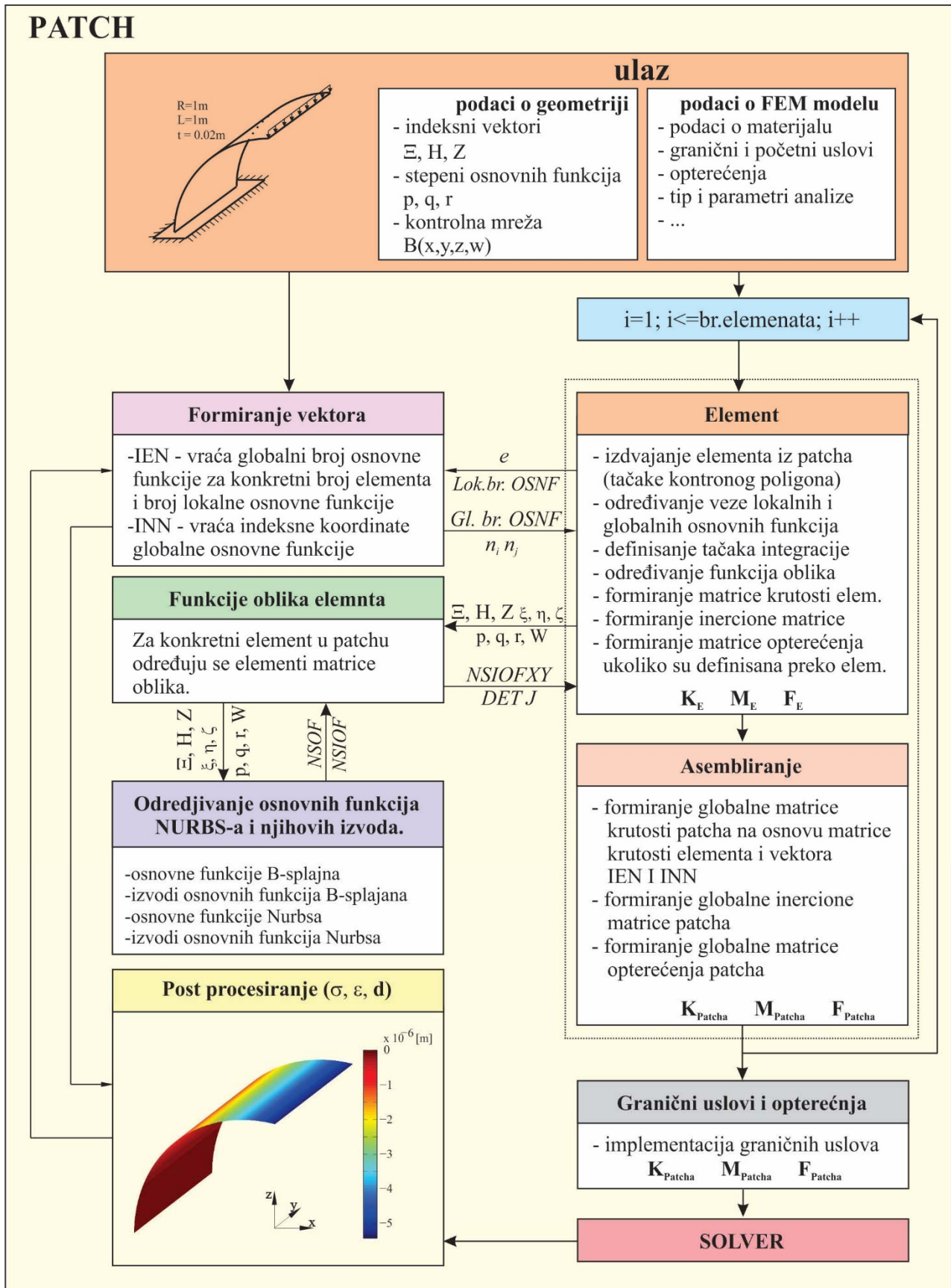
Pre posmatranja elementa kao dela strukture sa odgovarajućim mehaničkim svojstvima potrebno je definisati položaj elementa u okviru patcha. Ovo je potrebno uraditi ne samo da bi se kasnije izvršilo asembliranje elementa u strukturu već i da bi se odredila veza lokalnog broja i globalnog broja osnovnih funkcija [CHB09], tačaka kontrolnog poligona patcha i elementa kao i indeksnih koordinata elementa. Iz tog razloga se formiraju dva vektora IEN i INN. Vektor IEN daje vrednost globalnog broja osnovne funkcije za dati broj elementa i broj lokalne funkcije. Vektor INN daje indeksne koordinate za dati globalni broj osnovne funkcije. Sa slike 4.3 se vidi način numerisanja globalnih i lokalnih dvoparametarskih osnovnih funkcija. Za prvi element prikazan crvenom bojom lokalni broj osnovne funkcije označen je brojevima sa crvenom bojom. Globalna numeracija osnovnih funkcija je obeležena brojevima u centru kvadrata. Može se uočiti da je globalni broj osnovne funkcije 11 jednak lokalnom broju 1 za prvi element, odnosno lokalnom boju 2 za 2. element.



Slika 4.3 Globalno (patcha) i lokalno (elementa) označavanje

Elementi u okviru patcha egzistiraju ukoliko je proizvod intervala vektora čvorova za sve pravce različit od nule. To znači da element ima zapreminu (ukoliko se radi o solid elementu). Ukoliko u vektorima čvorova postoji ponavljanje elemenata vektora koje nije na početku ili kraju vektora javiće se elementi sa zapreminom (površinom ili dužinom) jednakoj nuli. Ovo je posledica promene stepena kontinuiteta patcha. Ovi elementi se u algoritmu ne uzimaju u obzir kao konačni elementi. Na ulazu u algoritam je datoteka sa podacima o geometriji patcha, podacima o materijalu, tipu analize, podacima neophodim za odgovarajuće tipove analize, podacima o graničnim i početnim uslovima (za dinamičku analizu), podacima o opterećenju.

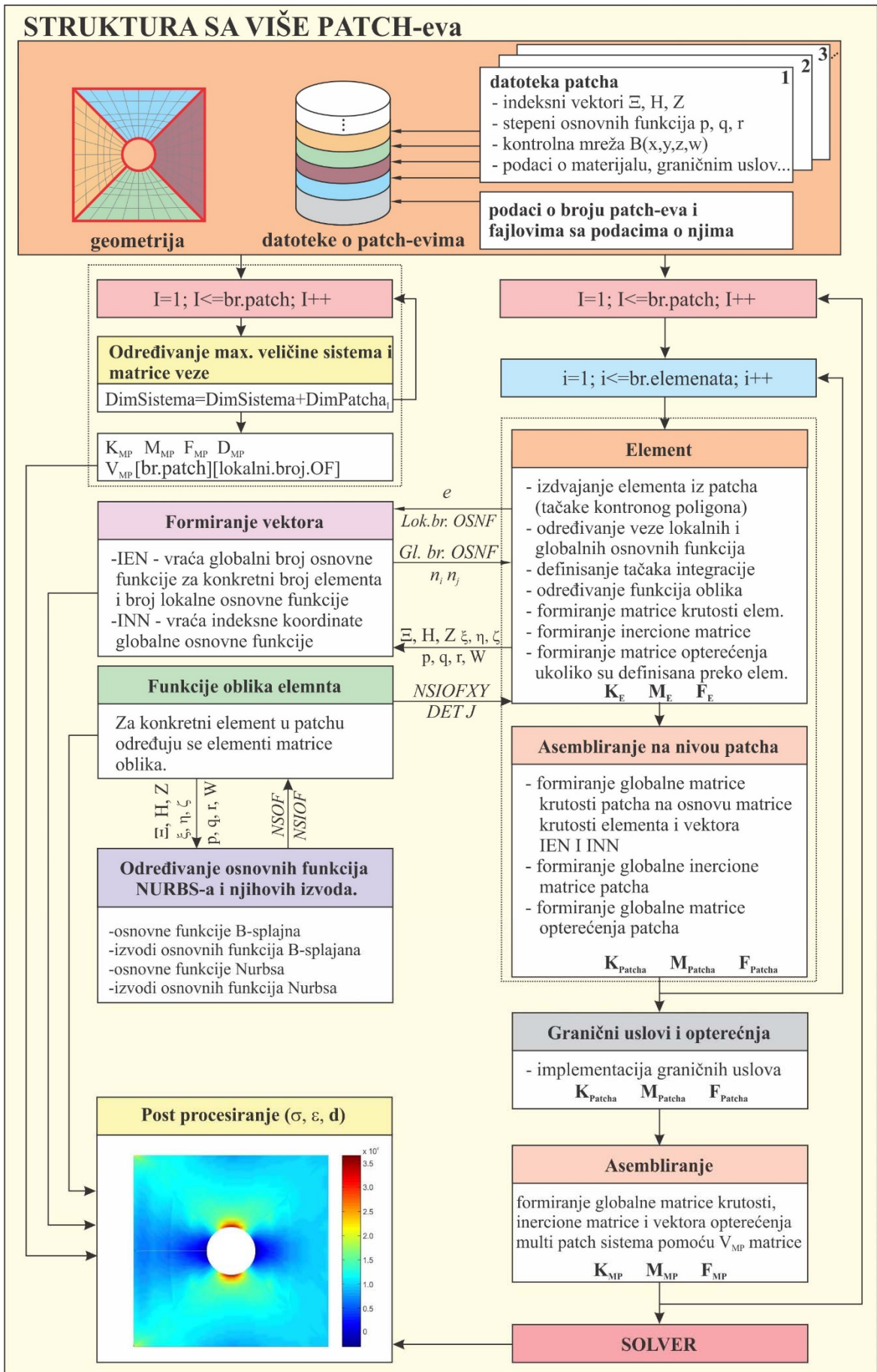
Za svaki element strukture se najpre određuje raspon u vektoru čvorova kome pripada kao i tačke kontrolnog poligona. Matrica krutosti elementa se sračunava po jednačini 4.42 numeričkom integracijom gde je za svaku integracionu tačku potrebno izračunati osnovne funkcije i izvode osnovnih funkcija NURBS-a (slika 4.4).



Slika 4.4 Šematski prikaz toka informacija kroz softver

Kao i kod klasične metode konačnih elemenata formiranje matrica krutosti, inercione matrice i vektora opterećenja se vrši na osnovu poznatih matrica krutosti i inercionih matrica elementa. Jedan od nedostataka NURBS geometrije je u tome što se formiranje složenije geometrije mora ostvariti sa više patch-eva. Ovako formirana geometrija ima smanjen stepen kontinuiteta na granicama patcheva u odnosu na stepen kontinuiteta unutar patch-a. Obzirom da patch ima matričnu formu to podrazumeva da broj i položaj tačaka kontrolnog poligona na granicama patcheva koji se spajaju mora biti isti. Ovo ima za posledicu da složena geometrija formirana NURBS patch-evima ima veći broj elemenata, tj. lokalno poboljšanje mreže (formiranje mreže veće gustine) nije moguće jer broj elemenata duž pravca mora ostati isti (ukoliko se zadrži isti stepen osnovnih funkcija). Ovo je moguće izbeći korišćenjem modifikacije NURBS-a tzv. T-splajnovima o kojima će biti više reči u poglavlju 6.

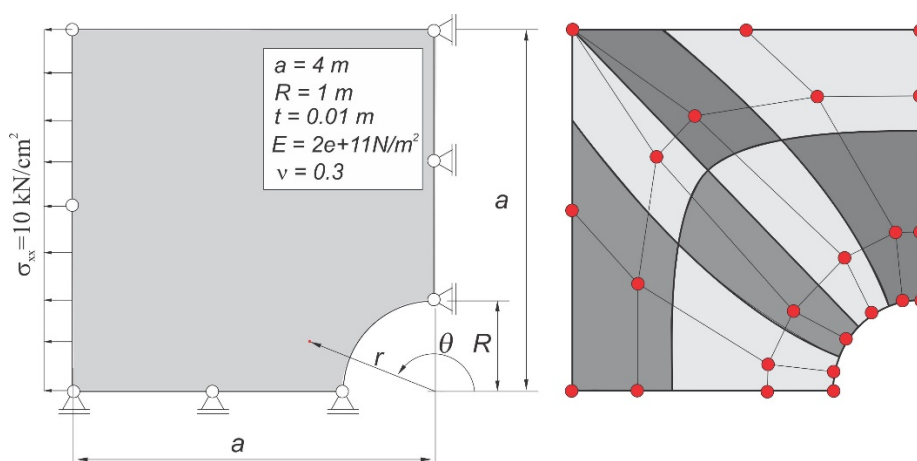
Osnovna struktura softvera za izogeometrijsku strukturnu analizu sa više patch-eva prikazana je na slici 4.5. Ulazni podaci u softver predstavljaju zbirna datoteka i pojedinačne datoteke svakog patcha. Zbirna datoteka sadrži podatke o broju patch-eva, nazivima datoteka o patch-evima kao i podatke o tipu analize i parametrima analize. Pojedinačne datoteke sadrže podatke o geometriji, materijalnim osobinama patch-a, graničnim uslovima, opterećenjima, početnim uslovima... Obzirom da broj patcheva može biti veći potrebno je prvo odrediti maksimalnu veličinu sistema kao i vezu globalnog broja tačaka kontrolnog poligona sistema i broja tačaka kontrolnog poligona pojedinačnih patcheva obzirom da se određene tačke kontrolnog poligona na spoju patcheva poklapaju. Vektor veze lokalnog broja u patch-u i globalnog broja u multi patch sistemu služi kao osnova u procesu asembliranja kao i u post procesiranju. Nakon definisanja vektora potrebno je formirati matrice krutosti i inercije svakog patcha posebno kao i vektor opterećenja patcha. Postupak je istovetan postupku sa jednim patchom. Globalne matrice i vektore multi patch sistema dobijaju se asembliranjem formiranih matrica patch-a u globalnu. Nakon formiranja matrice krutosti vrši se implementacija graničnih uslova i procesiranje. Rezultati statičke analize dobijaju se u vidu vektora pomeranja tačaka kontrolnog poligona sistema. U postupku post procesiranja vektor veze globalnog sistema i svakog patcha posebno daje vezu dobijenih rezultata sa pojedinačnim rezultatima svakog patcha. Dobijanje rezultata u određenoj tački polja patcha ostvaruje se na osnovu poznatih rezultata u tačkama kontrolnog poligona i vrednosti osnovnih funkcija za posmatranu tačku patcha.



Slika 4.5 Šematski prikaz toka informacija kroz softver sa više patch-eva

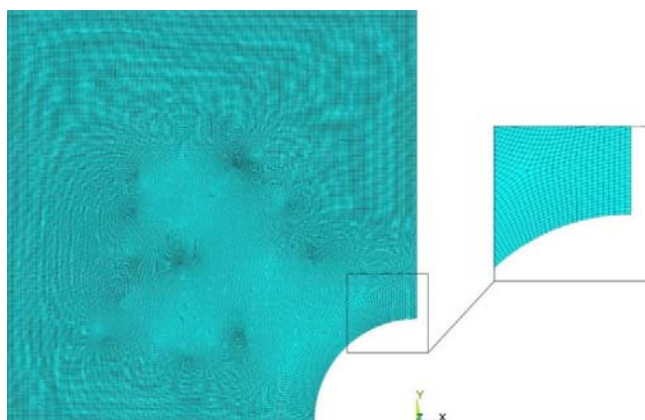
4.4 Numerički primer pločice sa otvorom sa jedim i više patcheva

Primena izogeometrijske analize sa solid elementima biće prikazana na relativno jednostavnom primeru linearne statičke analize [MM13-1,2]. Rezultati izogeometrijskih analiza su poređeni sa rezultatima dobijenim u komercijalnom softveru ANSYS. Na slici 4.6a prikazan je model četvrtine pločice sa otvorom. Oslonci u modelu su formirani tako da omogućuju simetriju modela. Geometrijski model je formiran kao trodimenzioni NURBS solid a opterećenje je definisano kao površinsko ineteziteteta 10kN/cm^2 . NURBS patch kao CAD model sa tačkama kontrolnog poligona i elementima je prikazan na slici 4.6b.



Slika 4.6 Pločica sa otvorom – a) fizički model, b) NURBS geometrija

Sa slike 4.6b se može primetiti da elementi u gornjem desnom uglu imaju dve tačke kontrolnog poligona koje su identične. Ovakva definicija NURBS konačnog elementa ima singularitet na mestu dvostruke tačke kontrolnog poligona. Ovaj singularitet neće uticati na formiranje modela obzirom da se integracija vrši unutar polja elementa. Kod mreže veće gustine uticaj singulariteta biće manji.



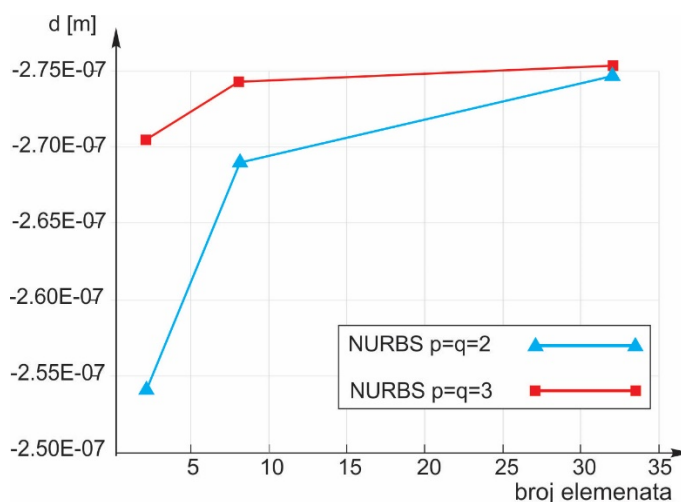
Slika 4.7 Mreža konačnih elemenata formirana u komercijalnom softveru

Konvergencija rešenja izogeometrijske metode konačnih elemenata je određena posmatranjem više različitih definicija geometrije (različite gustine mreže konačnih elemenata). Geometrijski modeli a samim tim i odgovarajući FEM modeli se razlikuju u stepenu NURBS osnovnih funkcija kao i vektorima čvorova (broju elemenata). Početni model je formiran sa što je moguće manjim stepenima osnovnih funkcija i brojem elemenata u vektorima čvorova. Na osnovu početnog modela tehnikama rafinacije mreže (povećanjem stepena osnovnih funkcija i ubacivanjem elemenata u vektor čvorova) dobijaju se složeniji modeli. U tabeli 4.1 prikazani su uporedni rezultati analiza.

Table 4.1. Pregled rezultata analize u funkciji stepena i broja osnovnih funkcija

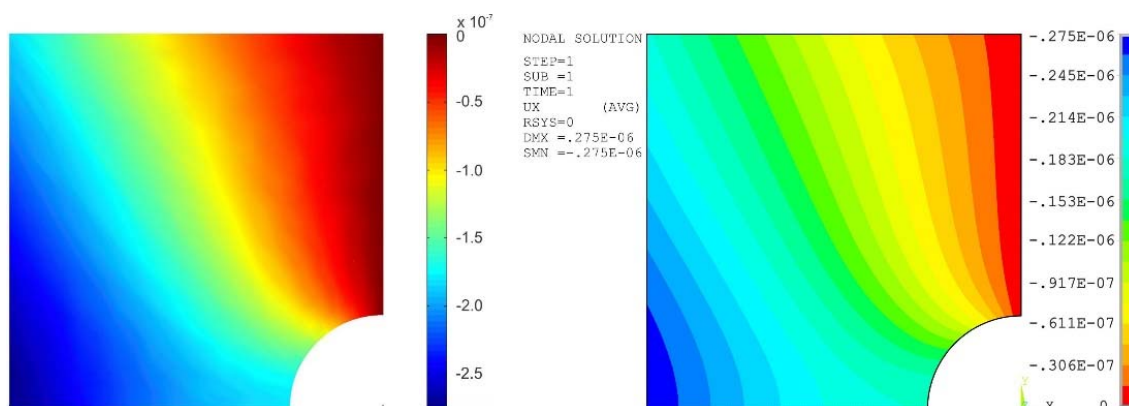
rb.	broj elemenata	stepen	broj osnovnih funkcija	izduženje u pravcu dejstva opterećenja [m]
1	2	2	24	-2.54158E-07
2	8		48	-2.69193E-07
3	32		120	-2.74696E-07
4	2	3	48	-2.70553E-07
5	8		80	-2.74405E-07
6	32		168	-2.75427E-07

Poređenjem rezultata izogeometrijske analize sa rezultatima dobijenim komercijalnim softverom znatno veće gustine mreže konačnih elemenata (32 NURBS elementa u poređenju sa 44235 elementa u softveru ANSYS), koji su prikazani na slici 4.9 i 4.10, može se primetiti da se oni neznatno razlikuju. Ovo pokazuje sposobnost NURBS osnovnih funkcija da precizno opisuju polje deformacija čak i sa malim brojem elemenata ali višeg stepena. Faktor koncentracije napona NURBS modela sa osnovnim funkcijama drugog reda i 32 elementa iznosi $K=3.6245$ što predstavlja razliku od 1.5% u odnosu na referentni model kod koga faktor koncentracije napona iznosi $K=3.57$.

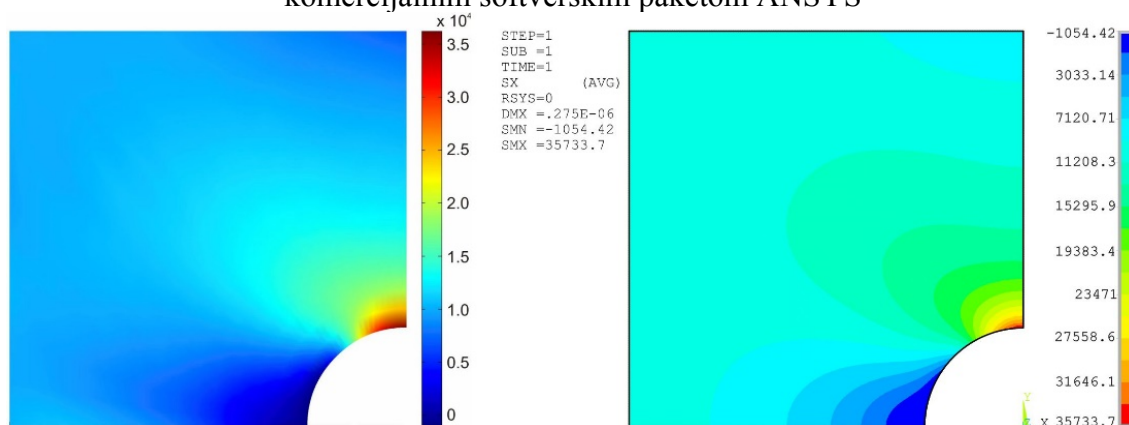


Slika 4.8 Konvergencija rešenja izogeometrijske analize problema istezanja pločice sa otvorom za osnovne funkcije drugog i trećeg reda

Na slici 4.8 prikazani su rezultati analiza šest modela različitih stepena i gustina mreže. Model formiran od elemenata sa funkcijama trećeg reda i sa malim brojem elemenata daje zadovoljavajuće rezultate.

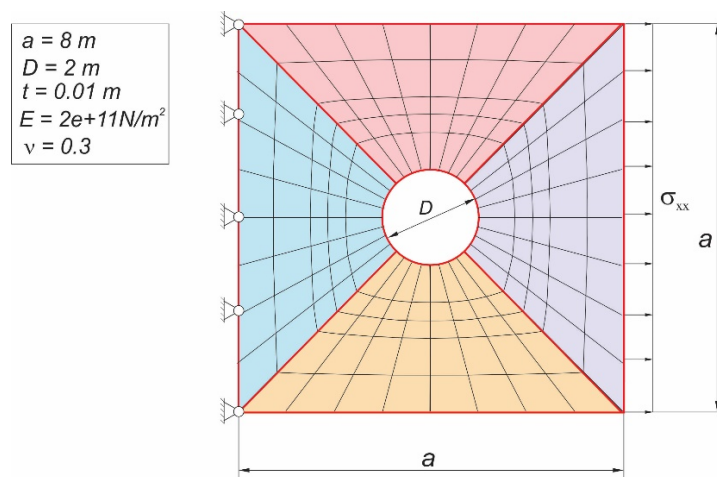


Slika 4.9 Polje pomeranja sračunato a) izogeometrijskom stuktornom analizom, b) komercijalnim softverskim paketom ANSYS



Slika 4.10 Normalna komponenta napona σ_{xx} (N/cm²) sračunata a) izogeometrijskom stuktornom analizom, b) komercijalnim softverskim paketom ANSYS

Sličan problem se može predstaviti i sa više patcheva. Model pločice sa otvorom sa četiri patcha prikazan je na slici 4.11.

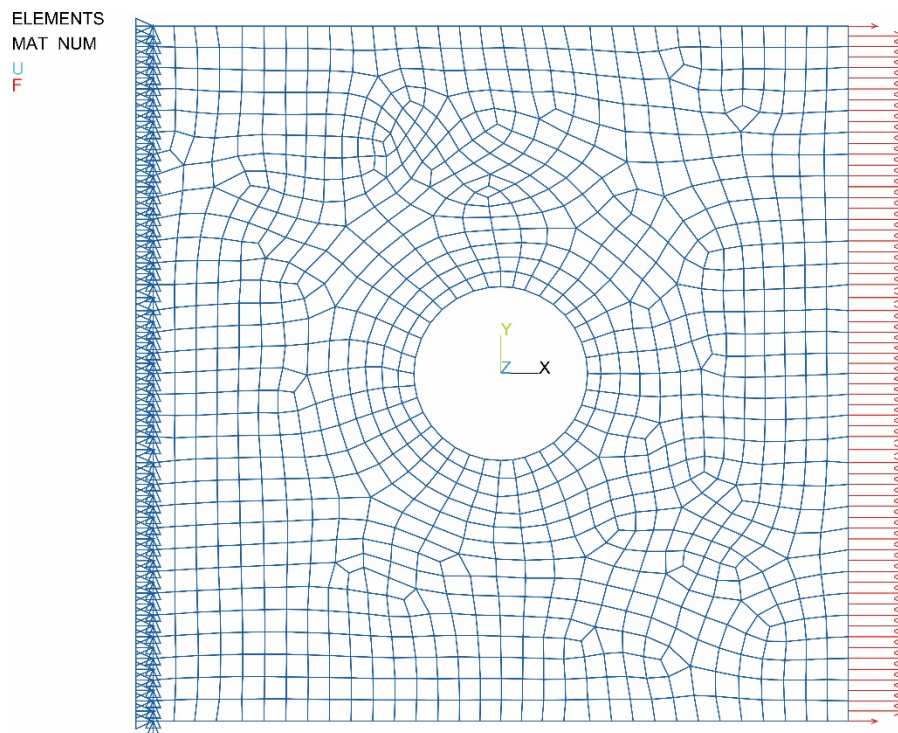


Slika 4.11 Model pločice sa otvorom sa više patcheva

Analitičko rešenje za ploču beskonačnih dimenzija sa kružnim otvorom, sa naponom zatezanja u jednom pravcu, predstavljeno u funkciji polarnih koordinata (r, θ) dato je sledećom jednačinom:

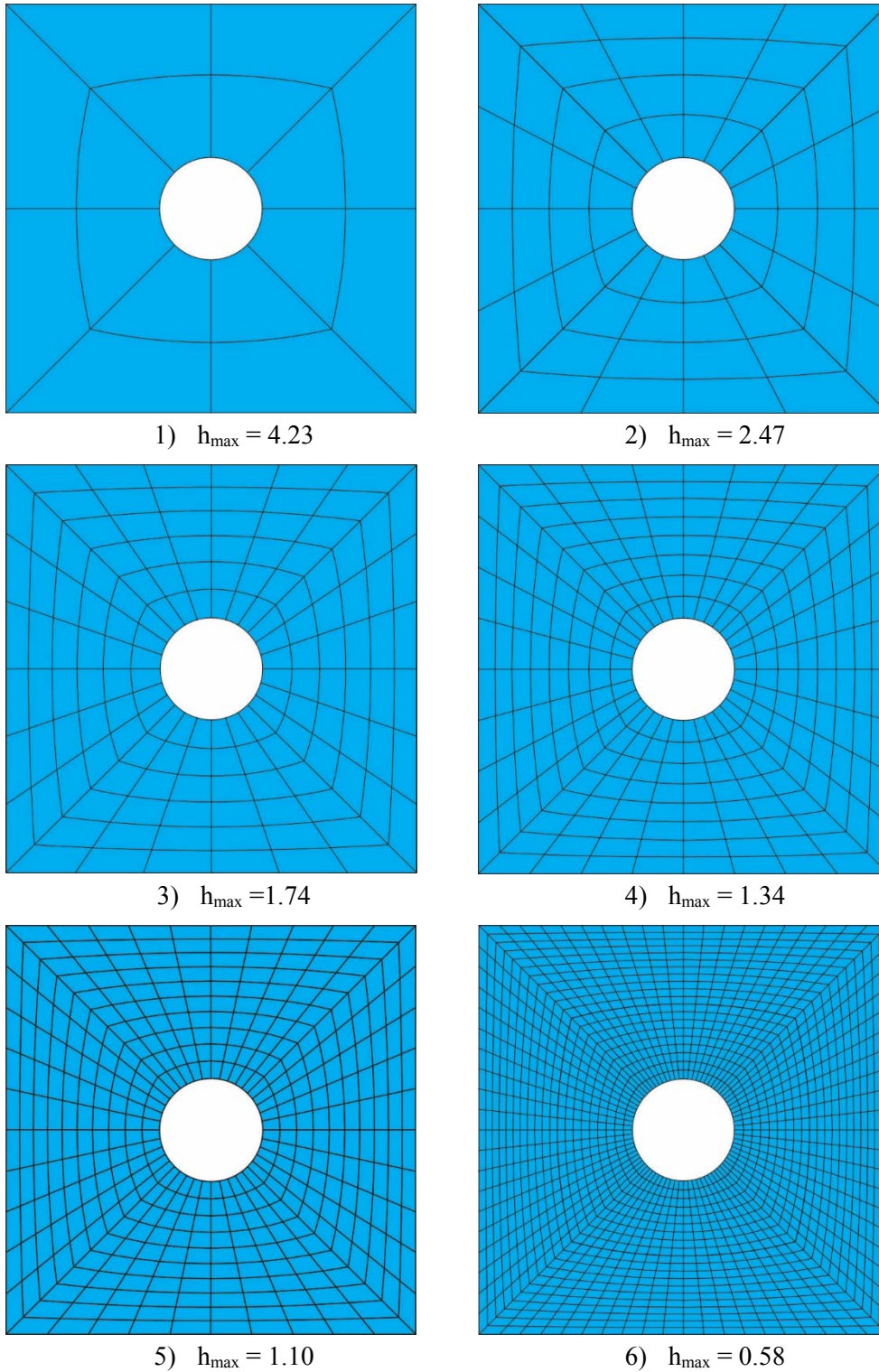
$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \theta) &= \frac{\sigma_x}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma_x}{2} \left(1 - 4 \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4}\right) \cos(2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{\sigma_x}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma_x}{2} \left(1 + 3 \frac{R^4}{r^4}\right) \cos(2\theta) \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= -\frac{\sigma_x}{2} \left(1 + 2 \frac{R^2}{r^2} - 3 \frac{R^4}{r^4}\right) \sin(2\theta)\end{aligned}\tag{4.41}$$

gde $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$ predstavljaju komponente napona u polarnom koordinatnom sistemu za odgovarajuće vrednosti koordinata (r, θ) . Smenom u jednačini 4.41 za vrednosti koordinata $r=R=\frac{D}{2}$, i $\theta=90^\circ$, a što predstavlja tačku sa izrazitom koncentracijom napona, dobija se da je factor koncentracije napona u pravcu dejstva opterećenja (tangentsnom pravcu) jednak $K=3$. Ovaj factor je u stvarnosti kod ploče sa konačnom širinom nešto veći i za odnos prečnika i širine ploče od 0.25 iznosi 3.24317 [WD08]. Imajući u obzir da je model konačne dužine za očekivati je da se factor koncentracije napona sračunat prema [WD08] razlikuje od faktora koncentracije napona kod izogeometrijskog i referentnog modela. Kao referentni model za ocenu dobijenih rezultata izogeometrijske analize korišćen je model prikazan na slici 4.12 sa kvadratinim solid elementima. (44235 elemenata tipa Plate 183).



Slika 4.12 Referentni model pločice sa otvorom sa više patcheva

Za predstavljen problem formirana su šest NURBS modela koji se sastoje od četiri patcha sa kvadratnim osnovnim funkcijama i četiri sa osnovnim funkcijama trećeg stepena. Na slici 4.13 prikazana je NURBS geometrija sa izdvojenim elementima. Parametar mreže u vidu najveće dimenzije elementa dat je za svaku mrežu.

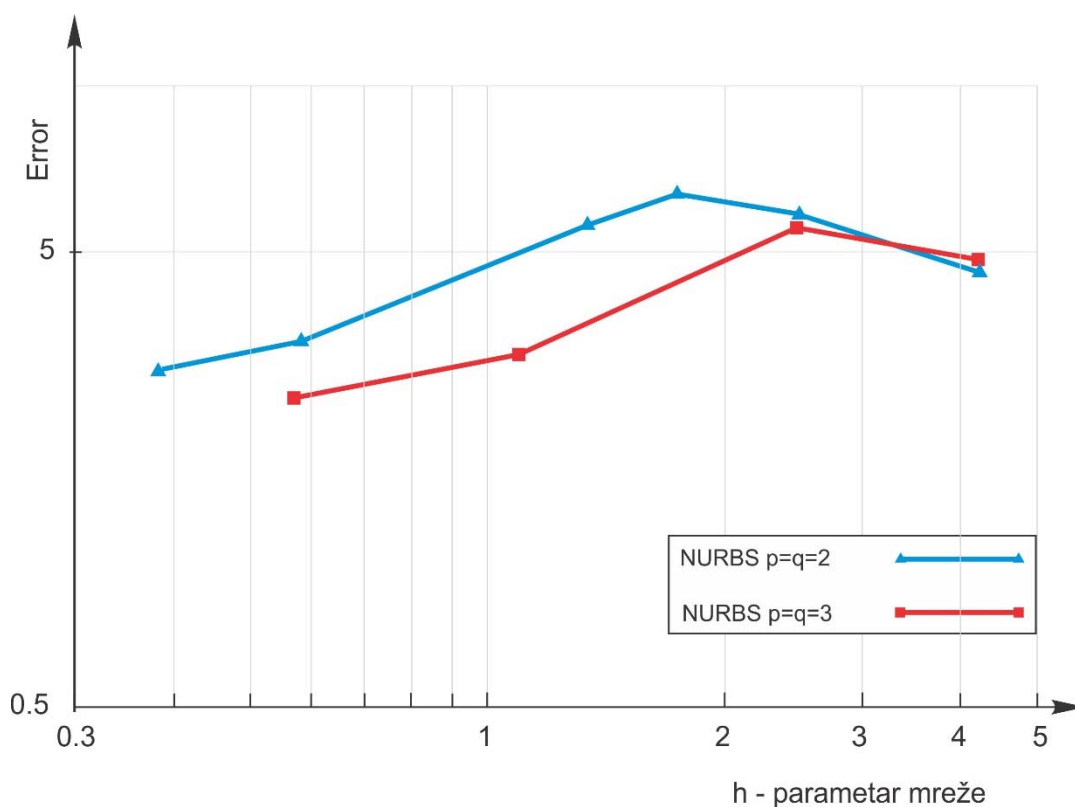


Slika 4.13 Modeli pločice sa otvorom sa više patcheva i maksimalnom veličinom elementa

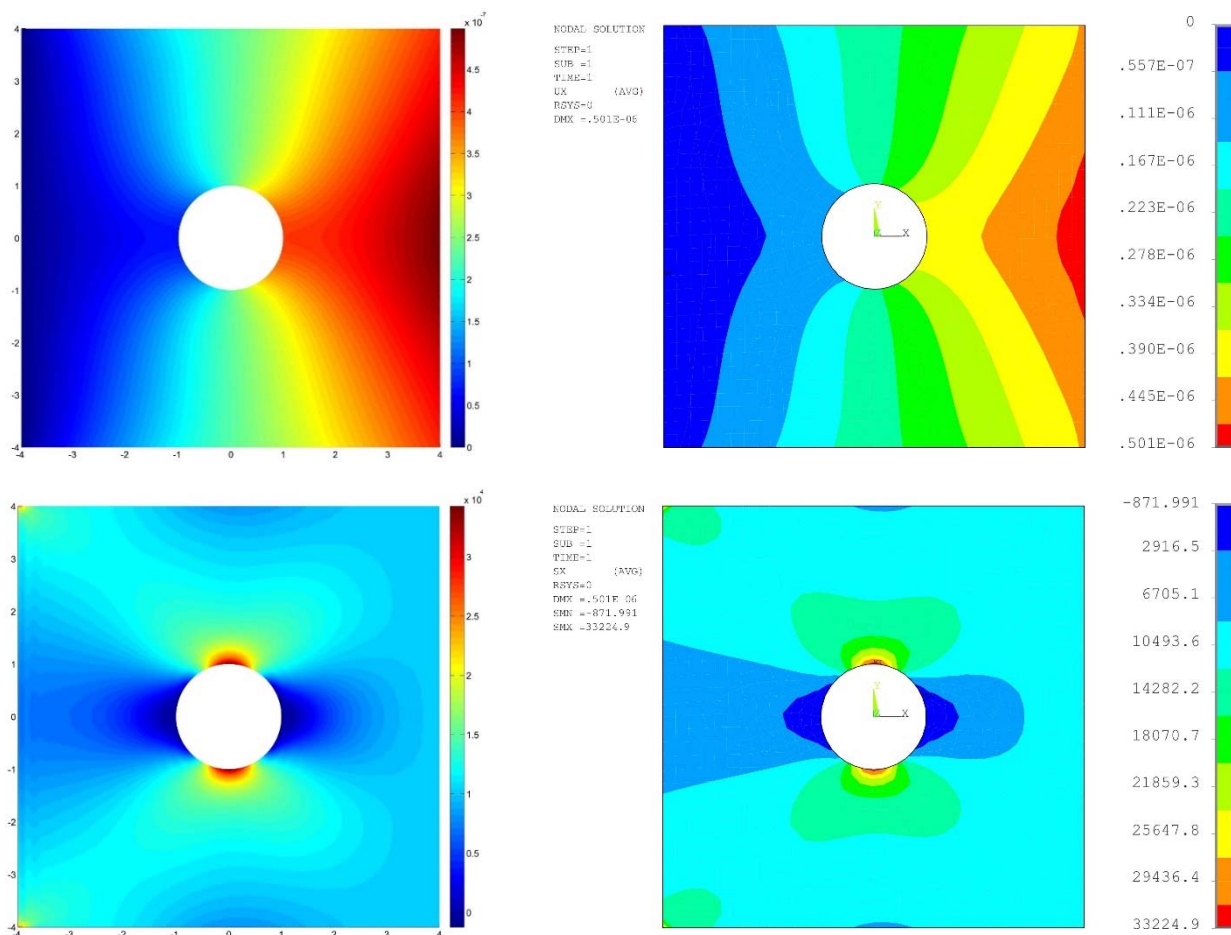
U tabeli 4.2 dat je pregled rezultata analize za modele sa kvadratnim i kubnim NURBS osnovnim funkcijama koji su i grafički prikazani dijagramom na slici

Table 4.2. Pregled rezultata analize pločice sa otvorom sa više patch-eva u funkciji stepena i broja osnovnih funkcija

rb.	broj elemenata	Stepen o.f.	broj osnovnih funkcija	izduženje u pravcu dejstva opterećenja [m]	Naponi u pravcu dejstva opterećenja
1	4	2	16	4.7381E-7	3.1739E+4
2	16		36	4.9157E-7	3.5228E+4
3	100		144	4.9820E-7	3.4856E+4
4	400		484	4.9872E-7	3.4284E+4
4	4	3	25	4.9121E-7	3.4814E+4
5	16		49	4.9738E-7	3.5084E+4
6	100		169	4.9869E-7	3.4215E+4

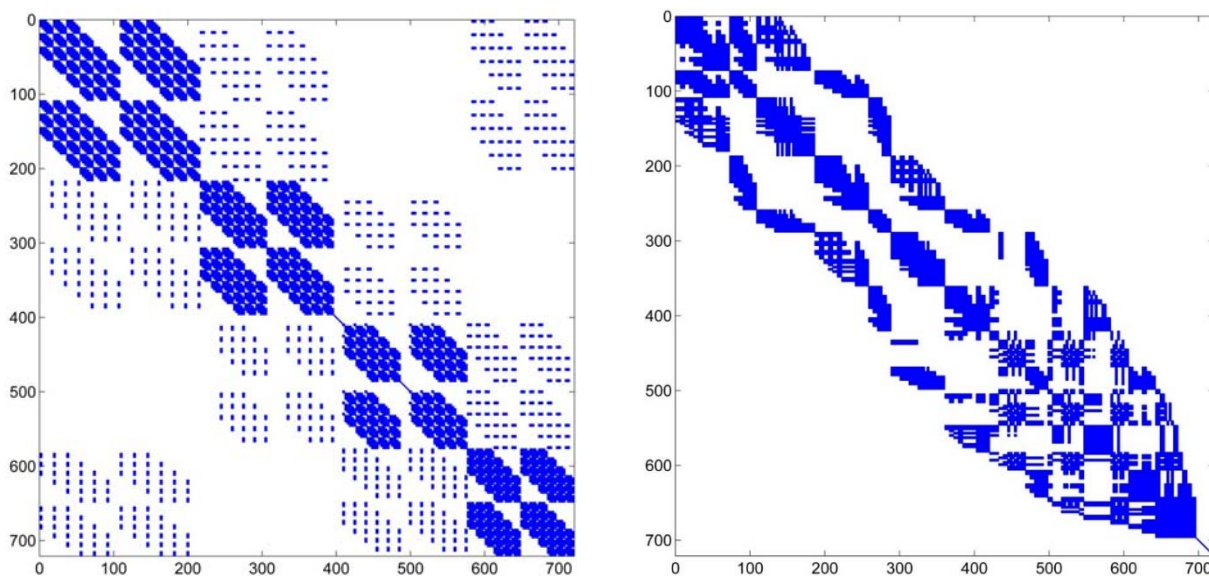


Slika 4.14 Relativno odstupanje rezultata analize modela sa otvorom formiranim sa četiri patcha



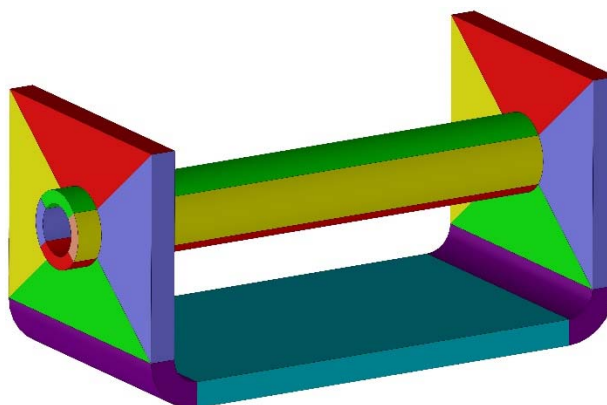
Slika 4.15 Uporedni prikaz rezultata analize pločice sa otvorom sa više patcheva (levo) i rezultata dobijenih referentnim modelom (desno)

Na slici 4.16 prikazan je oblik matrice krutosti strukture sastavljene od četiri patcha sa 16 elemenata drugog reda (slika 4.13.2). Na slici se jasno može izdvojiti uticaji pojedinačnih matrica krutosti



Slika 4.16 Matrica krutosti a) posle asembliranja b) posle optimizacije širine pojasa

na globalnu matricu krutosti sistema. Struktura formirana iz više patcheva često ima širok pojas matrice krutosti i inercione matrice koji sa porastom stepena osnovnih funkcija raste (kao i kod klasične metode konačnih elemenata). Obzirom da se u izogeometrijskoj metodi često koriste i viši stepeni osnovnih funkcija to se može negativno odraziti na procesorsko vreme rešavanja sistema jednačina jer je u tom slučaju pojas matrica širi. Za složenije probleme treba primeniti neki od algoritama za optimizaciju pojasa matrice krutosti. Na slici 4.16b predstavljen je optimizovan oblik matrice krutosti primenom Cuthill–McKee algoritma. Nakon optimizacije postignuta širina pojasa od 195 dok je u neoptimizovanom obliku bila 723. Širina pojasa matrice krutosti jednog patcha nakon optimizacije iznosi 121. Obzirom da se pojas matrice krutosti povećava sa primenom više patcheva složenije strukture treba oblikovati sa što je moguće manjim brojem patcheva. Na navedenom primeru je prikazana struktura gde svaki patch ima vezu samo sa dva susedna patcha što predstavlja relativno jednostavnu vezu. Na slici 4.17 dat je prikaz relativno proste strukture sastavljene od 15 patcheva kod koje postoje višestruke veze između patcheva a što prouzrokuje širok pojas matrice krutosti.



Slika 4.17 Složeniji geometrijski model sastavljen iz više patcheva

MODEL KIRCHHOFF-LOVE LJUSKE SA NURBS OSNOVNIM FUNKCIJAMA

Ukoliko se posmatraju strukture koje se sreću u inženjerskoj praksi 80% struktura pripada takozvanim tankozidnim strukturama sa odnosom raspona i debljine većim od 10. Najčešći pristup prilikom rešavanja problema analize ovih struktura je redukcija 3D polja na 2D. Nemački fizičar G. Kirchhoff je 1850. godine predstavio kinematske pretpostavke o deformaciji elastične ploče koja predstavlja nadogradnju hipoteze o ponašanju elastične grede pri savijanju koju je dao švajcarski matematičar i fizičar Bernoulli 1691. godine [Kir50]. Ova hipoteza podrazumeva da normala na srednju površ nedeformisanog modela ostaje normalna na srednju površ i neistegnuta i u deformisanom stanju, odnosno ovom teorijom se zanemaruje transversalno smicanje. Ovakvo ponašanje ploča odgovara prilično tankim strukturama gde je odnos raspona i debljine veći od 20 za izotropne materijale odnosno za određene kompozitne materijale i preko 100. Ovu teoriju Kirchhoffa je A.E.H. Love proširio i na zakrivljene površi [Lov88]. U 20. veku na bazi ove hipoteze (Kirchhoff-Love hipoteze) razvijeno je više različitih teorijskih modela za analizu ljuski. Hipoteza koja uvršćuje u proračun i transversalno smicanje na pojednostavljen način tako da se može koristiti i za deblje tankozidne strukture je Reissner-Mindlin hipoteza [Rei45][Min51]. U klasičnoj metodi konačnih elemenata je ovaj tip ljuske (Reissner-Mindlin) zastupljeniji zato što zahteva C^0 kontinuitet od interpolacionih funkcija (npr. Lagrange-ovi polinomi) na granicama elemenata.

Kirchhoff-ovi elementi zahtevaju postojanje C^1 kontinuiteta na granici između dva elementa zbog postojanja izvoda drugog reda u izrazu za virtuelni rad. Za razliku od klasične formulacije konačnih elemenata Lagrangeovim funkcijama oblika, izogeometrijska analiza nudi daleko veći kontinuitet na granici između elemenata pa se osnovnim funkcijama uticaji sa jednog elementa prenosi na susedni. Ukoliko se analiza radi za jedan patch NURBS površi i ukoliko su funkcije oblika najmanje kvadratne, bez ponavljanja elemenata u vektoru čvorova (bez smanjenje kontinuiteta od C^1), površ je pogodna za fomriranje elemenata tipa ljuske po Kirchhoff-Love

hipotezi. Ukoliko se struktura mora formirati iz više NURBS patcheva gubi se kontinuitet C^1 na granici patch-eva. Ostvarivanje kontinuiteta C^0 na granici patcha uslovljava korišćenje posebnih tehnika povezivanja patcheva uvođenjem i dodatnih elemenata [KBW10].

5.1 Diferencijalna geometrija površi

Za razumevanje kinematike ljuske o kojoj će kasnije biti reči neophodno je najpre definisati odgovarajuće veličine diferencijalne geometrije površi.

Tačka u prostoru se može definisati u globalnom Dekartovom koordinatnom sistemu na sledeći način:

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = x_i \mathbf{e}_i \quad (5.1)$$

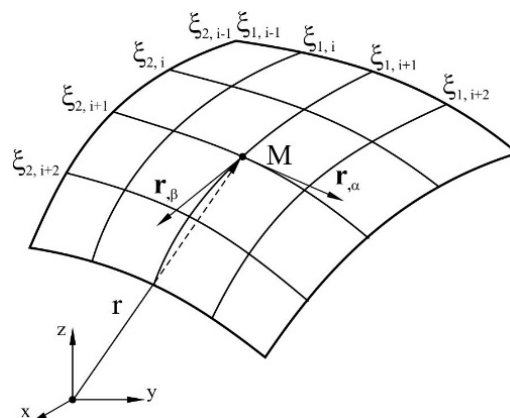
gde su \mathbf{e}_i globalni Cartesian jedinični vektori a x_i odgovarajuće koordinate. Gore navedno označavanje je po Einstein-ovoj notaciji kao i notaciji gde su latinicom označeni indeksi koji uzimaju vrednosti $\{1, 2, 3\}$ a grčkim alfabetom indeksi koji uzimaju vrednosti $\{1, 2\}$ [BW00].

Neka je površ definisana preko parametarskih koordinata ξ_1, ξ_2 .

Parcijalnim diferenciranjem vektora položaja po parametarskim koordinatama ξ_α dobijaju se tangenti (bazni) vektori na površ u pravcu indeksnih koordinata u posmatranoj tački površi.

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha} \quad (5.2)$$

gde je $\alpha=1, 2$ a sa $\mathbf{r}_{,\alpha}$ je označen prvi izvod vektora \mathbf{r} po ξ_α . Dobijene vrednosti parcijalnih izvoda vektora položaja \mathbf{g}_α predstavljaju osnovu kovarijantnog koordinatnog sistema. Komponente vektora $\mathbf{r}_{,\alpha}$ predstavljene su na slici 5.1.



Slika 5.1 Kovarijantni koordinatni sistem u određenoj tački površi

Vektori kovarijantnog koordinatnog sistema \mathbf{g}_1 i \mathbf{g}_2 ne moraju biti međusobno upravni. Treći vektor kovarijantnog koordinatnog sistema \mathbf{g}_3 dobija se vektorskim proizvodom prethodna dva vektora. To znači da je on upravan na prethodna dva kao i da je on vektor normale posmatrane površi u odgovarajućoj tački.

$$\mathbf{g}_3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\|} \quad (5.3)$$

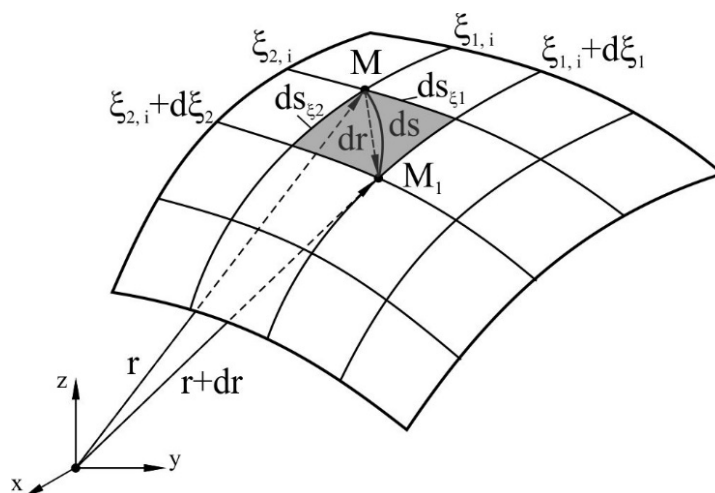
Pored kovarijantnog koordinatnog sistema potrebno je odrediti i kontravarijantni koordinatni sistem. Kontravarijantni koordinatni sistem se označava gonjim indeksom \mathbf{g}^α i u odnosu na kovarijantni koordinatni sistem važi relacija:

$$\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}^\beta = \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ 1 & \alpha = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (5.4)$$

Vektori kontravarijantnog koordinatnog sistema \mathbf{g}^α leže u ravni određenoj vektorima kovarijantnog koordinatnog sistema \mathbf{g}_α pa je i vektor normale na površ \mathbf{g}_3 kovarijantnog koordinatnog sistema jednak vektoru kontravarijantnog koordinatnog sistema \mathbf{g}^3 .

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}^3 \quad (5.5)$$

Ukoliko posmatramo elementarnu površ određenu priraštajima po indeksnim koordinatama $d\xi_1$ i $d\xi_2$, priraštaj luka ds na površi ljuske može se odrediti na osnovu priraštaja luka po indeksnim pravicima ds_{ξ_1} , ds_{ξ_2} . Ukoliko su priraštaji mali, priraštaj luka se može predstaviti priraštajem vektora $d\mathbf{r}$ (slika 5.2)



Slika 5.2 Priraštaj luka površi

Kvadrat priraštaja luka može se predstaviti:

$$ds^2 = |d\mathbf{r}|^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 (d\xi_1)^2 + 2\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 d\xi_1 d\xi_2 + \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 (d\xi_2)^2 \quad (5.6)$$

Ukoliko se za skalarne proizvode kovarijantnog koordinatnog sistema uvede smena:

$$\mathbf{g}_{11} = (\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1); \quad \mathbf{g}_{12} = (\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2); \quad \mathbf{g}_{22} = (\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2) \text{ odnosno } g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta; \quad (5.7)$$

Jednačina dužine luka dobija oblik:

$$ds^2 = g_{11}(d\xi_1)^2 + 2g_{12}d\xi_1 d\xi_2 + g_{22}(d\xi_2)^2 \quad (5.8)$$

Desni deo jednačine je poznat pod nazivom prva fundamentalna forma površi i ona sadrži bitne informacije o površi kao što su dužine baznih vektora i ugla između njih. Koeficijenti g_{11} , g_{12} i g_{22} predstavljaju elemente takozvanog metričkog tenzora ili fundamentalnog tenzora površi. Na regularnoj tački površi metrički tenzor je pozitivno definitan.

$$ds^2 = [d\xi_1 \quad d\xi_2] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{bmatrix} \quad (5.09)$$

Determinanta metričkog tenzora je jednaka:

$$g = \det g_{ij} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \quad (5.10)$$

Elementi metričkog tenzora srednje površi ljuske u odnosu na kontravarijantni koordinatni sistem se sračunavaju inverzijom matrice kovarijantnih koeficijenata metričkog tenzora:

$$[g^{\alpha\beta}] = [g_{\alpha\beta}]^{-1} \quad (5.11)$$

odnosno:

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} g_{33} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Vektori kontravarijantnog koordinatnog sistema se mogu sračunati:

$$\mathbf{g}^\alpha = g^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\beta \quad (5.12)$$

ili obratno:

$$\mathbf{g}_\alpha = g_{\alpha\beta} \mathbf{g}^\beta \quad (5.13)$$

Prva fundamentalna forma površi u oznaci **I** ne daje opis same površi – njen oblik. Oblik tj. krivinu površi u okolini određene tačke površi, određene presekom ravni koja sadrži vektor normale na površ i same površi (normalni presek), k_n opisuje druga fundamentalna forma površi u oznaci **II**. Krivina u normalnom preseku može se izraziti na sledeći način:

$$k_n = \frac{\mathbf{II}}{\mathbf{I}} = \frac{b_{11}(d\xi_1)^2 + 2b_{12}d\xi_1d\xi_2 + b_{22}(d\xi_2)^2}{g_{11}(d\xi_1)^2 + 2g_{12}d\xi_1d\xi_2 + g_{22}(d\xi_2)^2} \quad (5.14)$$

gde su koeficijenti tenzora krivine $b_{\alpha\beta}$:

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{g}_3 \quad (5.15)$$

Druga fundamentalna forma se može opisati na više načina. Diferenciranjem relacije [LCE10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_i} \cdot \mathbf{g}_3 &= 0 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \cdot \mathbf{g}_3 &= -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_i} \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial \xi_j} \end{aligned} \quad (5.16)$$

nakon sređivanja dobijamo:

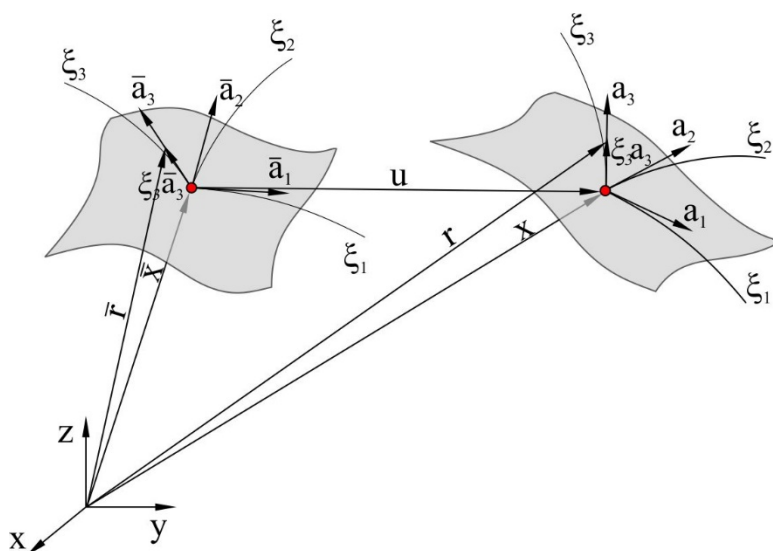
$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{g}_3 = -\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_{3,\beta} = -\mathbf{g}_\beta \cdot \mathbf{g}_{3,\alpha} \quad (5.17)$$

5.2 Kinematika ljuske

Na slici 5.3 prikazana su dva položaja ljuske (početni i deformisani položaj). Srednja površ ljuske u početnom položaju može se predstaviti preko parametarskih koordinata ξ_1, ξ_2 kao:

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\xi_1, \xi_2) \quad (5.18)$$

gde su ξ_1, ξ_2 parametarske koordinate.



Slika 5.3 Početni i trenutni položaj ljuske

Vektor položaja proizvoljne tačke ljuske početne konfiguracije određuje se po jednačini:

$$\bar{\mathbf{r}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \bar{\mathbf{x}}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \bar{\mathbf{a}}_3 \quad \text{gde je} \quad -\frac{t}{2} \leq \xi_3 \leq \frac{t}{2} \quad (5.19)$$

Ukoliko površ zadovoljava uslov da za svaki par koordinata (ξ_1, ξ_2) postoji jedinstven vektor položaja $\bar{\mathbf{x}}(\xi_1, \xi_2)$ i ukoliko je Jacobi-eva matrica \mathbf{J} (5.20) ranga 2 takva površ se naziva *regularnom*.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{r}_x}{\xi_1} & \frac{\bar{r}_x}{\xi_2} \\ \frac{\bar{r}_y}{\xi_1} & \frac{\bar{r}_y}{\xi_2} \\ \frac{\bar{r}_z}{\xi_1} & \frac{\bar{r}_z}{\xi_2} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Dalje posmatrane površi moraju zadovoljiti ove uslove da bi odgovarale Kirchhoffovoj formulaciji ljuske.

Prvi uslov je da površ ne seče samu sebe a drugi je postojanje tangetne ravni u bilo kojoj tački površi. Ukoliko u nekim tačkama površi Jakobian matrica ima rang manji od 2 takva površ ima singularitet u toj tački.

Osnovni vektori $\bar{\mathbf{a}}_\alpha$ koji određuju tangentnu ravan za početni položaj mogu se predstaviti kao prvi izvodi vektora položaja srednje površi po parametarskim koordinatama:

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \xi_\alpha} = \bar{\mathbf{x}}_{,\alpha} \quad \text{gde } \alpha = 1, 2 \quad (5.21)$$

Analogno (5.21) mogu se odrediti i osnovni vektori srednje površi u deformisanom položaju \mathbf{a}_α :

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_\alpha} = \mathbf{x}_{,\alpha} \quad \text{gde } \alpha = 1, 2 \quad (5.22)$$

Ako je P regularna tačka površi koja zadovoljava drugi uslov, onda su vektori \mathbf{a}_1 i \mathbf{a}_2 linearno nezavisni. Priraštaj vektora položaja po krivolinijskoj koordinati ξ_α određuje se:

$$d\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{a}}_\alpha d\xi_\alpha \quad (5.23)$$

Vektor normale na površ za početni i deformisani položaj određuje se preko vektorskog proizvoda osnovnih vektora $\bar{\mathbf{a}}_1$ i $\bar{\mathbf{a}}_2$ odnosno \mathbf{a}_1 i \mathbf{a}_2 .

$$\bar{\mathbf{a}}_3 = \frac{\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2}{\|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2\|} \quad \text{i} \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} \quad (5.24)$$

Kovariantni osnovni vektori ljustke u početnom i deformisanom položaju određuju se sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{g}}_\alpha &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \xi_\alpha} = \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \xi_3 \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} & \bar{\mathbf{g}}_3 &= \bar{\mathbf{a}}_3 \\ \mathbf{g}_\alpha &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_\alpha} = \mathbf{a}_\alpha + \xi_3 \mathbf{a}_{3,\alpha} & \mathbf{g}_3 &= \mathbf{a}_3\end{aligned}\quad (5.25)$$

Komponente metričkog tenzora ljustke izražene preko kovariantnog koordinatnog sistema određuju se proizvodima:

$$\bar{g}_{ij} = \bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j \text{ odnosno } g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (5.26)$$

Zamenom jednačina (5.25) u jednačinu (5.26) dobija se:

$$\begin{aligned}\bar{g}_{ij} &= \bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j = (\bar{\mathbf{a}}_i + \xi_3 \bar{\mathbf{a}}_{3,i}) \cdot (\bar{\mathbf{a}}_j + \xi_3 \bar{\mathbf{a}}_{3,j}) \\ &= \bar{\mathbf{a}}_i \cdot \bar{\mathbf{a}}_j + \xi_3 \bar{\mathbf{a}}_{3,i} \cdot \bar{\mathbf{a}}_j + \xi_3 \bar{\mathbf{a}}_i \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,j} + \xi_3^2 \bar{\mathbf{a}}_{3,i} \bar{\mathbf{a}}_{3,j}\end{aligned}\quad (5.27)$$

Zanemarivanjem kvadrata koordinate ξ_3 , jer je reč o tankoj ljustici $\xi_3^2 \approx 0$, prethodna jednačina dobija oblik:

$$\bar{g}_{ij} = \bar{\mathbf{a}}_i \cdot \bar{\mathbf{a}}_j + 2\xi_3 \bar{\mathbf{a}}_i \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,j} \quad (5.28)$$

gde je korišćena osobina druge fundamentalne forme površi $\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} = \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha}$.

Pomeranje tačke srednje površi predstavlja razliku vektora položaja srednje ravni u deformisanom i početnom položaju.

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \quad (5.29)$$

Određivanje priraštaja pomeranja (5.30) između deformisanog i početnog položaja vrši se pomoću deformacionog gradijenta \mathbf{F} . Deformacioni gradijent predstavlja primarnu meru deformacije [Hol00] koja se koristi u nelinearnoj analizi kontinua. Razlog korišćenja ove mere deformacije u linearnoj analizi od strane više autora [CB11][SF89] je taj što se diferencijalna geometrija ljustki i tenzorski račun lako ugrađuje i što se na jednostavan način može prevesti u linearni domen malih pomeranja. Deformacioni gradijent je tenzor drugog reda.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\bar{\mathbf{x}} \quad (5.30)$$

gde je $\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}})$, $d\bar{\mathbf{x}}$ i $d\mathbf{x}$ vektori priraštaja u pravcu tangenti na krivu $\xi = \text{const}$ u odgovarajućoj tački krive određenoj vektorom $\bar{\mathbf{x}}$ u početnoj konfiguraciji odnosno \mathbf{x} u deformisanoj konfiguraciji. Deformacioni gradijent se može definistati preko baznih vektora početne i deformisane konfiguracije u odgovarajućoj tački ljustke na sledeće načine [YD00]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \mathbf{g}_i \otimes \bar{\mathbf{g}}^i & \mathbf{F}^T &= \bar{\mathbf{g}}^i \otimes \mathbf{g}_i \\
\mathbf{F}^{-1} &= \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}^i & \mathbf{F}^{-T} &= \mathbf{g}^i \otimes \bar{\mathbf{g}}_i
\end{aligned}
\tag{5.31}$$

Determinanta deformacionog gradijenta je poznata pod nazivom Jacobi-eva determinatna i predstavlja odnos zapremine trenutne i početne konfiguracije.

$$J(\mathbf{X}, t) = \det(\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}})) > 0 \tag{5.32}$$

Green-Lagrange-ov tenzor deformacije izražen preko deformacionog gradijenta ima oblik [YD00]:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \tag{5.33}$$

Gde je \mathbf{C} desni Cauchy-Green tenzor deformacije koji je simetričan i pozitivno definitan. \mathbf{I} je jedinični tenzor. Kako su tenzori Cauchy-Green i \mathbf{I} simetrični to sledi da je i Green-Lagrange-ov tenzor simetričan.

Smenom u prethodnom izrazu jednačine (5.31) dobija se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left((\bar{\mathbf{g}}^i \otimes \mathbf{g}_i) \cdot \mathbf{g}_i \otimes \bar{\mathbf{g}}^i - g_{ij} \bar{\mathbf{g}}^i \otimes \bar{\mathbf{g}}^j \right) \\
\mathbf{E} &= \frac{1}{2} (g_{ij} - \bar{g}_{ij}) \bar{\mathbf{g}}^i \otimes \bar{\mathbf{g}}^j
\end{aligned}
\tag{5.34}$$

Green-Lagrange-ovi koeficijenti tenzora deformacije izračunavaju se na osnovu koeficijenata metričkog tenzora ljuske za deformisanu i početnu konfiguraciju [YD00] [Ge00]:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - \bar{g}_{ij}) = \alpha_{ij} + \xi_3 \beta_{ij} \tag{5.35}$$

gde su

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij} &= \frac{1}{2} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j - \bar{\mathbf{a}}_i \cdot \bar{\mathbf{a}}_j) \\
\beta_{ij} &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_{3,j} - \bar{\mathbf{a}}_i \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,j}
\end{aligned}
\tag{5.36}$$

Kako su $\bar{\mathbf{a}}_3$ i \mathbf{a}_3 jedinični vektori normalni na srednju ravan površi u početnom i deformisanom položaju važi sledeće:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha &= 0, \\
\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_\alpha &= 0, \\
\bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 &= \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1
\end{aligned}
\tag{5.37}$$

Shodno tome Green-Lagrange-ov tenzor deformacije (za membransku i savojnu deformaciju) biće dimenzija 2x2.

Koristeći drugu fundamentalnu formu površi:

$$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} = -\mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}_3 \quad (5.38)$$

jednačine (5.36) dobijaju oblik:

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta - \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta) \quad (5.39)$$

$$\beta_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}_3$$

Položaj određene tačke površi u deformisanom položaju, može se izraziti preko vektora položaja tačke u početnom položaju i pomeranja.

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = \bar{\mathbf{x}}(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{u}(\xi_1, \xi_2) \quad (5.40)$$

Vektori kovarijantnog koordinatnog sistema ljuske mogu se predstaviti:

$$\bar{\mathbf{g}}_\alpha = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \xi_\alpha} = \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \xi_3 \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \quad (5.41)$$

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_\alpha} = \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha} + \xi_3 \mathbf{a}_{3,\alpha}$$

Koristeći jednačine (5.41) komponente metričkog tenzora su:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = (\bar{\mathbf{a}}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha} + \xi_3 \mathbf{a}_{3,\alpha}) \cdot (\bar{\mathbf{a}}_\beta + \mathbf{u}_{,\beta} + \xi_3 \mathbf{a}_{3,\beta}) = \\ &= \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \mathbf{u}_{,\beta} + \xi_3 \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,\beta} + \xi_3 \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} \\ &\quad + \xi_3 \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \xi_3 \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,\beta} + \xi_3^2 \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} \quad (5.42) \\ \bar{g}_{\alpha\beta} &= \bar{\mathbf{g}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{g}}_\beta = (\bar{\mathbf{a}}_\alpha + \xi_3 \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha}) \cdot (\bar{\mathbf{a}}_\beta + \xi_3 \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta}) \\ &= \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \xi_3 \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \xi_3 \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} + \xi_3^2 \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} \end{aligned}$$

Zanemarivanjem kvadrata debljine ljuske jer je reč o tankoj ljuski, nakon smene u Green-Lagrange-ovom tenzoru deformacije dobija se:

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - \bar{g}_{\alpha\beta}) = \alpha_{\alpha\beta} + \xi_3 \beta_{\alpha\beta} \\ \alpha_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \mathbf{u}_{,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \mathbf{u}_{,\alpha} + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,\beta}) \quad (5.43) \\ \beta_{\alpha\beta} &= \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 - \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}_3 - \mathbf{u}_{,\alpha\beta} \cdot \mathbf{a}_3 \\ b_{\alpha\beta} &= -\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} = -\mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}_3 \end{aligned}$$

Za oblast **malih deformacija** u članu za membransku deformaciju izostavlja se član $\mathbf{u}_{,\alpha}\mathbf{u}_{,\beta}$.

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \mathbf{u}_{,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \mathbf{u}_{,\alpha}) \quad (5.44)$$

U matričnoj formi prethodna jednačina dobija oblik:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 2\alpha_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \mathbf{u}_{,1} \\ \bar{\mathbf{a}}_2 \cdot \mathbf{u}_{,2} \\ \bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \mathbf{u}_{,2} + \bar{\mathbf{a}}_2 \cdot \mathbf{u}_{,1} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Jednačina varijacije membranske deformacije ima oblik:

$$\begin{bmatrix} \delta\alpha_{11} \\ \delta\alpha_{22} \\ 2\delta\alpha_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \delta\mathbf{u}_{,1} \\ \bar{\mathbf{a}}_2 \cdot \delta\mathbf{u}_{,2} \\ \bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \delta\mathbf{u}_{,2} + \bar{\mathbf{a}}_2 \cdot \delta\mathbf{u}_{,1} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Jednačina varijacije savojne deformacije ima oblik:

$$\delta\beta_{\alpha\beta} = -\bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \cdot \delta\mathbf{a}_3 - \delta\mathbf{u}_{,\alpha\beta} \cdot \mathbf{a}_3 - \mathbf{u}_{,\alpha\beta} \cdot \delta\mathbf{a}_3 \quad (5.47)$$

Varijacija vektora normale \mathbf{a}_3 je:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{a}_3 &= \delta \left(\frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} \right) \\ &= \frac{(\delta\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \times \delta\mathbf{a}_2) - \mathbf{a}_3 \cdot (\delta\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) + \delta\mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1))}{\sqrt{\mathbf{a}}} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Uvodeći pomeranja osnovni vektori za deformisani položaj su:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \bar{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{u}_{,1} \\ \mathbf{a}_2 &= \bar{\mathbf{a}}_2 + \mathbf{u}_{,2} \end{aligned} \quad (5.49)$$

Vektorski proizvod $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ dobija oblik: $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2 + \mathbf{u}_{,1} \times \bar{\mathbf{a}}_2 + \bar{\mathbf{a}}_1 \times \mathbf{u}_{,2} + \mathbf{u}_{,1} \times \mathbf{u}_{,2}$

Zanemarivanjem člana višeg reda $\mathbf{u}_{,1} \times \mathbf{u}_{,2}$ izraz za varijaciju vektora normale glasi:

$$\delta\mathbf{a}_3 = \frac{(\delta\mathbf{u}_{,1} \times \bar{\mathbf{a}}_2 + \bar{\mathbf{a}}_1 \times \delta\mathbf{u}_{,2}) - \bar{\mathbf{a}}_3 \cdot (\delta\mathbf{u}_{,1}(\bar{\mathbf{a}}_2 \times \bar{\mathbf{a}}_3) + \delta\mathbf{u}_{,2}(\bar{\mathbf{a}}_3 \times \bar{\mathbf{a}}_1))}{\sqrt{\bar{\mathbf{a}}}} \quad (5.50)$$

Uvodeći u jednačini za varijaciju savojne deformacije izraz za varijaciju vektora normale jednačina (5.47) dobija oblik:

$$\begin{aligned} \delta\beta_{\alpha\beta} &= -\delta\mathbf{u}_{,\alpha\beta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 + \frac{(\delta\mathbf{u}_{,1} \cdot (\bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \times \bar{\mathbf{a}}_2) + \delta\mathbf{u}_{,2} \cdot (\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta}))}{\sqrt{\bar{\mathbf{a}}}} \\ &\quad + \frac{+\bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} (\delta\mathbf{u}_{,1}(\bar{\mathbf{a}}_2 \times \bar{\mathbf{a}}_3) + \delta\mathbf{u}_{,2}(\bar{\mathbf{a}}_3 \times \bar{\mathbf{a}}_1))}{\sqrt{\bar{\mathbf{a}}}} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Konstitutivna jednačina opisuje vezu između deformacija i napona preko odgovarajućeg modela materijala. Energetski ekvivalent Green-Lagrange-ovom tenzoru deformacije je drugi Piola Kirchhoff-ov (PK2) tenzor napona u oznaci \mathbf{S} . Može se odrediti na osnovu energije deformacije \mathcal{W}^{int} :

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}} \quad (5.52)$$

Odnos drugog Piola Kirchhoff-ovog napona i Green-Lagrange-ovog tenzora deformacije definiše tenzor elastičnosti \mathbf{C} koji se često naziva i tenzor materijala. To je tenzor četvrtog reda određen jednačinom:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 W^{int}}{\partial \mathbf{E}^2} \quad (5.53)$$

Jednačina ravnoteže opisuje balans između unutrašnjih i spoljašnjih sila. Za početnu konfiguraciju jednačina ravnoteže se može zapisati kao:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{B} = \operatorname{div}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) + \rho_0 \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (5.54)$$

Gde je \mathbf{P} prvi Piola Kirchhoff-ov napon i čija se veza sa Cauchy-evim tenzorom napona kao i sa drugim Piola Kirchhoff-ovim naponom data jednačinom:

$$\mathbf{P} = \det \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \quad (5.55)$$

\mathbf{B} predstavlja vektor zapreminskih sila a ρ_0 specifičnu masu u početnoj konfiguraciji.

Prethodna jednačina ravnoteže zajedno sa Green-Lagrange-ovim tenzorom deformacije predstavlja jaku formu problema graničnih vrednosti.

Razvijeni metod koji je predstavljen u okviru teze je zasnovan na principu virtualnog rada tj. na principu virtualnog pomeranja. To podrazumeva da ukoliko se u sistem koji je u ravnoteži uvede beskonačno malo pomeranje $\delta \mathbf{u}$ tada će zbir unutrašnjih i spoljašnjih radova izvršenih od strane spoljašnjih i unutrašnjih sila na virtualnom pomeranju biti jednak nuli tj.:

$$\delta W = \delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \quad (5.56)$$

gde su:

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= - \int_{\Omega} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, d\Omega \\ \delta W_{ext} &= \int_{\Gamma} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \end{aligned} \quad (5.57)$$

Gde su Ω domen elementa a Γ domen granice elementa u početnoj konfiguraciji, \mathbf{T} predstavlja vektor sila na granici elementa.

Varijacija rada unutrašnjih sila može se definisati preko drugog Piola-Kirchhoff-ovog napona i Green-Lagrange-ovog tenzora deformacije:

$$\begin{aligned}\delta W^{int} &= \int_V S_{\alpha\beta} \delta E_{\alpha\beta} dV = \int_V (S_{\alpha\beta} \delta \alpha_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta} \xi_3 \delta \beta_{\alpha\beta}) dV \\ &= \int_{\Omega} \int_{-t/2}^{t/2} (S_{\alpha\beta} \delta \alpha_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta} \xi_3 \delta \beta_{\alpha\beta}) d\xi_3 d\Omega\end{aligned}\quad (5.58)$$

Naponi se mogu podeliti na napone koji odgovaraju membranskoj deformaciji ($n^{\alpha\beta}$) i napone koji odgovaraju savojnoj deformaciji ($m^{\alpha\beta}$).

$$\begin{aligned}n^{\alpha\beta} &= \int_{-t/2}^{t/2} S_{\alpha\beta} d\xi_3 = \int_{-t/2}^{t/2} C^{\alpha\beta\gamma\delta} \alpha_{\gamma\delta} d\xi_3 \\ m^{\alpha\beta} &= \int_{-t/2}^{t/2} S_{\alpha\beta} \xi_3 d\xi_3 = \int_{-t/2}^{t/2} C^{\alpha\beta\gamma\delta} \beta_{\gamma\delta} (\xi_3)^2 d\xi_3\end{aligned}\quad (5.59)$$

Integraljenjem kroz debljinu ljuske dobijamo:

$$\begin{aligned}n^{\alpha\beta} &= t C^{\alpha\beta\gamma\delta} \alpha_{\gamma\delta} \\ m^{\alpha\beta} &= \frac{t^3}{12} C^{\alpha\beta\gamma\delta} \beta_{\gamma\delta}\end{aligned}\quad (5.59)$$

Smenom dobijenih izraza u jednačini za virtuelni rad dobijamo:

$$\delta W^{int} = \int_{\Omega} (n^{\alpha\beta} \delta \alpha_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} \delta \beta_{\alpha\beta}) d\Omega = \int_{\Omega} (\delta \mathbf{\alpha}^T \mathbf{n} + \delta \mathbf{\beta}^T \mathbf{m}) d\Omega \quad (5.60)$$

gde su naponi \mathbf{n} i \mathbf{m} vezani za membransku i savojnu deformaciju zapisani po Voigt-ovoj notaciji.

Za elastičan izotropni materijal sa Young-ovim modulom E , Poisson-ovim koeficijentom ν , I konstitutivna jednačina se može zapisati:

$$\begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{22} \\ n_{12} \end{bmatrix} = tD \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{bmatrix} = \frac{t^3}{12} D \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ 2\beta_{12} \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

gde je D konstitutivna matrica za izotropni materijal svedena na 2D slučaj Kirchhoff-Love ljuske transformisana iz lokalnog u globalni koordinatni sistem:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} (\bar{a}^{11})^2 & (\nu \bar{a}^{11} \bar{a}^{22} + (1-\nu)(\bar{a}^{12})^2) & \bar{a}^{11} \bar{a}^{12} \\ & (\bar{a}^{22})^2 & \bar{a}^{22} \bar{a}^{12} \\ \text{simet.} & & \left(\frac{1}{2} \left[(1-\nu) \bar{a}^{11} \bar{a}^{22} + \right] \right) \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

5.3 Diskretizacija primenom metode konačnih elemenata sa NURBS funkcijama oblika

Matrična formulacija membranske deformacije sa NURBS funkcijama oblika je:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 2\alpha_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1 \cdot (\mathbf{N}_{i,1} \mathbf{u}_i) \\ \bar{\mathbf{a}}_2 \cdot (\mathbf{N}_{i,2} \mathbf{u}_i) \\ \bar{\mathbf{a}}_1 \cdot (\mathbf{N}_{i,2} \mathbf{u}_i) + \bar{\mathbf{a}}_2 \cdot (\mathbf{N}_{i,1} \mathbf{u}_i) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N_{i,1} \bar{\mathbf{a}}_{1x} & N_{i,1} \bar{\mathbf{a}}_{1y} & N_{i,1} \bar{\mathbf{a}}_{1z} \\ N_{i,2} \bar{\mathbf{a}}_{1x} & N_{i,2} \bar{\mathbf{a}}_{1y} & N_{i,2} \bar{\mathbf{a}}_{1z} \\ N_{i,2} \bar{\mathbf{a}}_{1x} + N_{i,1} \bar{\mathbf{a}}_{2x} & N_{i,2} \bar{\mathbf{a}}_{1y} + N_{i,1} \bar{\mathbf{a}}_{2y} & N_{i,2} \bar{\mathbf{a}}_{1z} + N_{i,1} \bar{\mathbf{a}}_{2z} \end{bmatrix} \mathbf{u}_i \end{aligned} \quad (5.63)$$

Skraćeni zapis prethodne jednačine je:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{B}_i^m \mathbf{u}_i \quad (5.64)$$

Matrična formulacija savojne deformacije sa NURBS funkcijama oblika dobija se na osnovu jednačine:

$$\begin{aligned} \beta_{\alpha\beta} &= (-N_{i,\alpha\beta} \mathbf{u}_i) \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\bar{\mathbf{a}}}} \left[\left((\mathbf{N}_{i,1} \mathbf{u}_i) \cdot (\bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \times \bar{\mathbf{a}}_2) + (\mathbf{N}_{i,2} \mathbf{u}_i) \cdot (\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta}) \right) \right] \\ &+ \frac{\bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta}}{\sqrt{\bar{\mathbf{a}}}} \left((\mathbf{N}_{i,1} \mathbf{u}_i) \cdot (\bar{\mathbf{a}}_2 \times \bar{\mathbf{a}}_3) + (\mathbf{N}_{i,2} \mathbf{u}_i) \cdot (\bar{\mathbf{a}}_3 \times \bar{\mathbf{a}}_1) \right) \end{aligned} \quad (5.65)$$

i glasi:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ 2\beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1i x} & \mathbf{B}_{1i y} & \mathbf{B}_{1i z} \\ \mathbf{B}_{2i x} & \mathbf{B}_{2i y} & \mathbf{B}_{2i z} \\ \mathbf{B}_{3i x} & \mathbf{B}_{3i y} & \mathbf{B}_{3i z} \end{bmatrix} \mathbf{u}_i = \mathbf{B}_i^m \mathbf{u}_i \quad (5.66)$$

gde se elementi matrice B_{1i} dobijaju sa vrednostima indeksa $\alpha=1, \beta=1$, B_{2i} dobijaju sa vrednostima indeksa $\alpha=2, \beta=2$ i B_{3i} dobijaju sa vrednostima indeksa $\alpha=1, \beta=2$.

Zamenom prethodno definisanih matrica u jednačinu za varijaciju unutrašnjega rada dobija se:

$$\begin{aligned} \delta W^{int} &= \int_{\Omega} \left(\delta \boldsymbol{\alpha}^T \frac{Et}{(1-\nu^2)} \mathbf{D} \boldsymbol{\alpha} + \delta \boldsymbol{\beta}^T \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \mathbf{D} \boldsymbol{\beta} \right) d\Omega = \\ &= \delta \mathbf{u}_i^T \int_{\Omega} \left[(\mathbf{B}_i^m)^T \frac{Et}{(1-\nu^2)} \mathbf{D} \mathbf{B}_j^m + (\mathbf{B}_i^b)^T \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \mathbf{D} \mathbf{B}_j^b \right] d\Omega \mathbf{u}_j \end{aligned} \quad (5.67)$$

Na osnovu prethodne jednačine dolazi se do izraza za određivanje matrice krutosti elementa:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \left[(\mathbf{B}_e^m)^T \frac{Et}{(1-\nu^2)} \mathbf{D} \mathbf{B}_e^m + (\mathbf{B}_e^b)^T \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \mathbf{D} \mathbf{B}_e^b \right] d\Omega \quad (5.68)$$

Matrice elementa \mathbf{B}_e^m i \mathbf{B}_e^b dobijaju se na osnovu matrica \mathbf{B}_i^m i \mathbf{B}_i^b u tačkama kontrolnog poligona elementa:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_e^m &= [\mathbf{B}_1^m \quad \mathbf{B}_2^m \quad \dots \quad \mathbf{B}_n^m] \\ \mathbf{B}_e^b &= [\mathbf{B}_1^b \quad \mathbf{B}_2^b \quad \dots \quad \mathbf{B}_n^b]\end{aligned}\quad (5.69)$$

Prethodni integral po površini elementa se najčešće praktično rešava primenom Gauss-ove kvadrature. Kako granice integracije nisu normirane od -1 do 1 potrebno je uvesti determinantu Jacobian matrice.

$$\mathbf{K}^{(e)}_{ij} = \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{q=1}^{n_q} \left[(\mathbf{B}_i^m)^T \frac{Et}{(1-\nu^2)} \mathbf{D}\mathbf{B}_j^m + (\mathbf{B}_i^b)^T \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \mathbf{D}\mathbf{B}_j^b \right] \cdot |J^{(e)}| \cdot W_p W_q \quad (5.70)$$

Za razliku od Lagrangeovih interpolacionih funkcija kod primene NURBS interpolacionih funkcija oblast elementa nije normirana u prethodno pomenutim granicama. Iz tog razloga se i Jacoby-eva matrica sračunava kao:

$$|J^{(e)}| = \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\bar{\xi}} \right| = \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{d\bar{\xi}} \right| = |J^{(e)}_1| |J^{(e)}_2| = \sqrt{a} \cdot |J^{(e)}_2| \quad (5.71)$$

Parametarske koordinate se računaju za odgovarajuće integracione tačke $d\bar{\xi}$ i poznate granice elementa ξ_i i ξ_{i+1} kao i η_j i η_{j+1} na sledeći način:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_i + (\bar{\xi} + 1) \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i)}{2} = \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i) \cdot \bar{\xi} + (\xi_{i+1} + \xi_i)}{2} \\ \eta &= \eta_i + (\bar{\eta} + 1) \frac{(\eta_{i+1} - \eta_i)}{2} = \frac{(\eta_{i+1} - \eta_i) \cdot \bar{\eta} + (\eta_{i+1} + \eta_i)}{2}\end{aligned}\quad (5.72)$$

Pa je i shodno tome drugi element Jacobi-eve determinante jednak

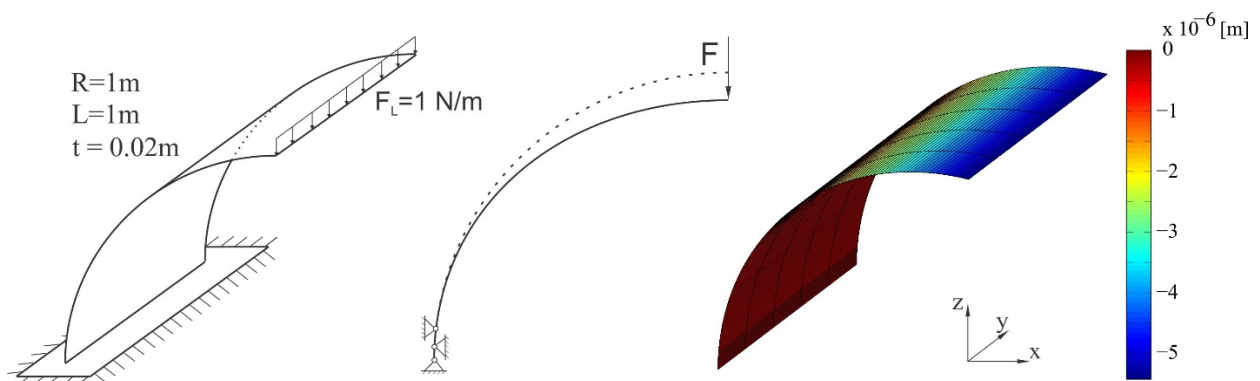
$$|J^{(e)}_2| = \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i)}{2} \cdot \frac{(\eta_{i+1} - \eta_i)}{2} \quad (5.73)$$

Matrica krutosti elementa dobija se na osnovu poznatih matrica $\mathbf{K}^{(e)}_{ij}$ za svaki par tačaka kontrolnog poligona elementa.

Konačni elementi tipa Kirchhoff-ove ljske imaju u čvoru, odnosno tačkama kontrolnog poligona tri stepena slobode kretanja (pomeranja u sva tri pravca). Uticaj unetih ograničenja pomeranja u tačkama kontrolnog poligona se razlikuje u zavisnosti od položaja tačke kontrolnog poligona. Ukoliko se tačka kontrolnog poligona nalazi na granici patcha i na površi, ograničenje pomeranja definisano u toj tački predstavlja i ograničenje tačke same površi. To znači da postoje parametarske koordinate ξ i η za koje osnovna funkcija pridružena toj tački kontrolnog poligona dostiže vrednost jedan a sve ostale osnovne funkcije patcha za date vrednosti parametarskih koordinata imaju

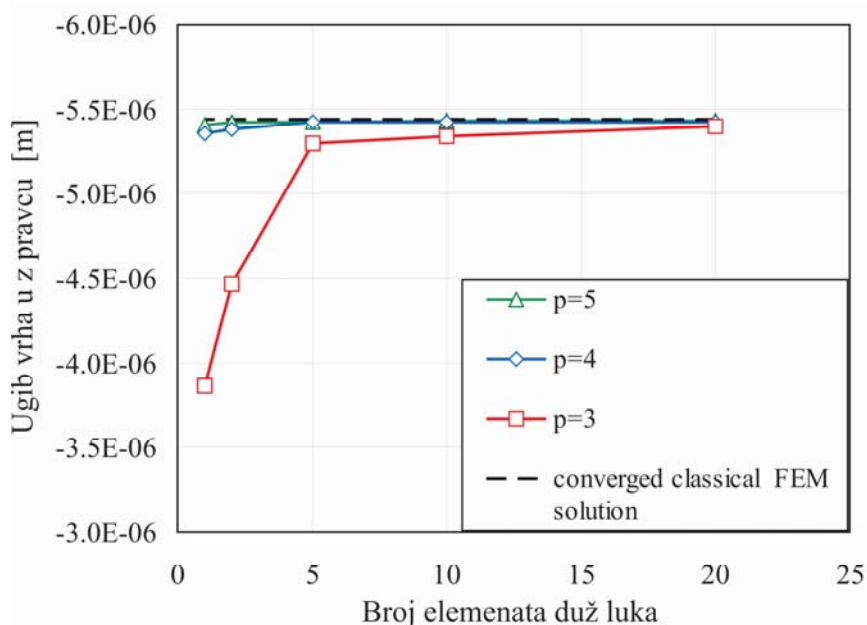
vrednost jednaku nuli. Ograničenje pomeranja definisano u tačkama kontrolnog poligona koje definišu granicu patcha, a ne nalaze se na površi, nemaju precizno definisanu tačku na površi na koju bi se to ograničenje odnosilo. To je posledica toga što osnovna funkcija koja odgovara taj tački kontrolnog poligona ne dostiže vrednost jedaku jedinici za bilo koje vrednosti parametarskih koordinata ξ i η pa samim tim ne postoji ni projekcija te tačke kontrolnog poligona na površ. Imajući ovo u vidu posebnu pažnju treba posvetiti modeliranju geometrije kako bi se u model uveli željeni granični uslovi.

Primer isogeometrijske analize četvrtine cilindra sa Kirchhoffovim elementom ljuske predstavljen je na slici 5.4. Model četvrtine cilindra je formiran kao jedan patch prečnika 1m, dužine 1m debljine zida 0.02m (slika 5.4 levo). Materijal cilindra je čelik Young-ovog modula elastičnosti $2 \cdot 10^{11}$ N/m² i Poisson-ovog koeficijenta 0.3. Kao što je prikazano na slici 5.4 (sredina) jedna izvodnica cilindra je uklještena a druga je opterećena uniformnim linijskim opterećenjem inteziteta 1N/m. Uklještenje je definisano kao ograničenje translacija u sva tri pravca za tri reda tačaka kontrolnog poligona. Rastojanje izmedju redova ljuske u kojima je dato ograničenje pomeranja je jednako debljini ljuske. Na slici 5.4 desno dat je prikaz pomeranja u z pravcu.



Slika 5.4 Model četvrtine cilindra, modeliranje graničnih uslova uklještenja i konturni prikaz pomeranja u z pravcu

Analiza konvergencije je sprovedena za mreže različitog broja konačnih elemenata i različitog stepena osnovnih funkcija. Posmatrano je pomeranja u z-pravcu opterećene ivice cilindra. Rezultati analize prikazani su na slici 5.5. Na slici 5.5 na apcisi se nalazi broj elemenata modela duž luka ne uzimajući u obzir elemente zanemarljive dužine koji su formirani da bi se realizovali granični uslovi uklještenja. Kako je i očekivano svi modeli različitog stepena osnovnih funkcija konvergiraju. Konvergencija je brža kod modela sa višim rednom osnovnih funkcija.



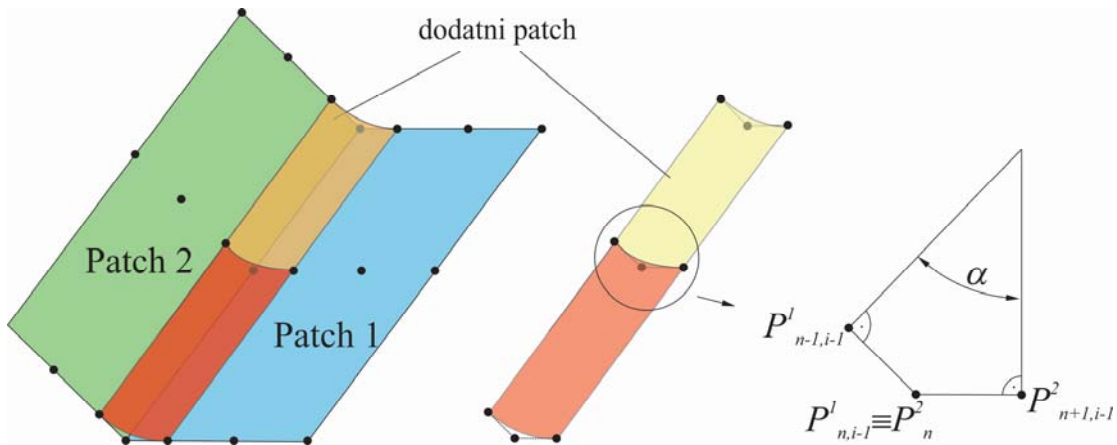
Slika 5.5 Rezultati analize konvergencije FEM modela sa NURBS osnovnim funkcijama različitog stepena

Rezultati su upoređeni sa rezultatima dobijenim u softveru NX Nastran sa 100 kvadratnih elemenata tipa CQUAD8. Element tipa CQUAD8 se bazira na osnovu Mindlin-Reissner kinematike. Rezultati konvergencije prikazuju visoko pokalpanje modela sa NURBS osnovnim funkcijama i modela sa CQUAD tipom elemenata.

5.4 Formiranje modela sa više patch-eva primenom traka koje prenose savijanje

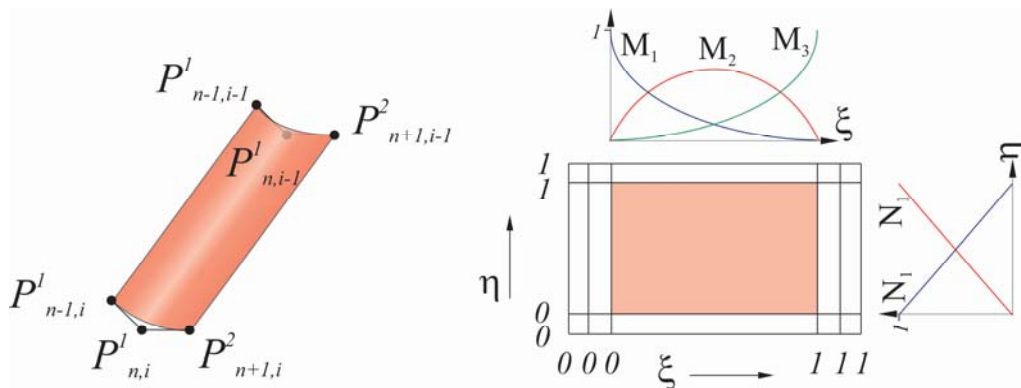
Za modeliranje složenije strukture potrebno je koristiti više patch-eva. Povezivanje više patch-eva u jednu celinu se ostvaruje modeliranjem patch-eva tako da tačke kontrolnog poligona koje se nalaze na liniji spoja patcheva dele isto geometrijsko mesto u prostoru. Formiranje globalne matrice krutosti i inercione matrice se vrši na osnovu jedinstvenih tačaka kontrolnog poligona svih patch-eva. Na taj način će se ostvariti prenos pomeranja na granici spoja dva patcha. Zbog prirode Kirchooff-ove ljuske ovako spojena dva patcha ne ostvaruju kontinuitet C^1 tj. ovaj spoj ne može preneti momente savijanja.

Kao jedna od mogućnosti prenosa momenta savijanja je definisanje još jednog patcha koji se formira u uskoj oblasti kontakta dva patcha [KBW10]. Primer formiranja dodatnih patch-eva koji bi preneli moment savijanja između dva patch-a u spoju prikazan je na slici 5.6 [MM15] [MMP15].



Slika 5.6 Dodatni patch-evi za spajanje dva patcha, geometrija patcha

Na slici 5.6 se može primetiti da se dva patcha Patch 1 i Patch 2 u kontaktu duž tačaka kontrolnog poligona $P^1_{n,i}, P^1_{n,i-1}, P^1_{n,i-2} \dots$. U bliskoj zoni kontakta dva patcha formirana su na svakom patchu po jedan red čvorova koji služe za konstrukciju dodatnih patcheva. Da bi se dva patcha spojila na ovaj način potrebno je da se prilikom definisanja svakog patcha vodi računa o tome da se tačke kontrolnog poligona jednog patcha po liniji spajanja poklapaju sa tačkama kontrolnog poligona drugog patcha. Za konstrukciju dodatnog patcha potrebno je ukupno šest tačaka kontrolnog poligona. Ovo je posledica toga da stepen osnovnih funkcija NURBS-a dodatnog patcha za pravac koji preseca liniju spoja mora biti najmanje kvadratni a da drugi pravac u pravcu linije spoja može biti i linijski (slika 5.7).



Slika 5.7 Dodatni patch sa minimumom zahteva u pogledu stepena osnovnih funkcija

Ivične tačke dodatnih patcheva imaju težinske koeficijente jednake 1. Težinski koeficijenti tačaka $P^1_{n,i}$ i $P^2_{n,i-1}$ se određuju na osnovu ugla α (slika 5.6) koji se određuje na osnovu definicije skalarnog proizvoda:

$$\alpha_{P_{1n,i}} = \arccos \left(\frac{\overrightarrow{P_{n-1,l}^1 P_{n,l}^1} \cdot \overrightarrow{P_{n,l}^1 P_{n+1,l}^2}}{\left| \overrightarrow{P_{n-1,l}^1 P_{n,l}^1} \right| \cdot \left| \overrightarrow{P_{n,l}^1 P_{n+1,l}^2} \right|} \right) \quad (5.74)$$

pa se shodno prethodno navedenom težinski koeficijent tačkaka izračunava:

$$w_{P_{1n,i}} = \cos \left(\frac{\alpha_{P_{1n,i}}}{2} \right) \quad (5.75)$$

Najmanji broj NUBRS osnovnih funkcija formiranog patcha je jednak šest. Oblik elemenata zavisi od oblika patcha koji se spajaju. U slučaju da su u kontaktu dva patcha u ravni onda je i element koji prenosi savijanje takođe ravanski. Za taj slučaj tačke kontrolnog poligona $P_{n-1,i}^1$, $P_{n,i}^1$ i $P_{n+1,i}^2$ nalaze se na pravoj (ugao α biće jednak nuli) pa je težinski koeficijent jednak jedinici (srednja tačka kontrolnog poligona dodatnog patcha se nalazi na površima koje se spajaju).

Osnovno pitanje koji se postavlja pri konstruisanju traka koje prenose savijanje je kolika treba da bude savojna krutost traka da bi se preneo moment savijanja. Traka koja prenosi savijanje ne treba da oslikava materijal osnovne konstrukcije već da prenese rotaciju jednog dela konstrukcije na drugi. Zato se savojna krutost uzima kao višestruka vrednost savojne krutosti od koga je konstrukcija napravljena. Velike vrednosti savojne krutosti nisu pogodne jer u tom slučaju može doći do loše uslovljenosti matrice krutosti. Za razliku od klasične definicije Kirchhoff-ove ljuske kod ovih traka se sračunava samo deo matrice krutosti koji se dobija na osnovu savojne krutosti [KBW10].

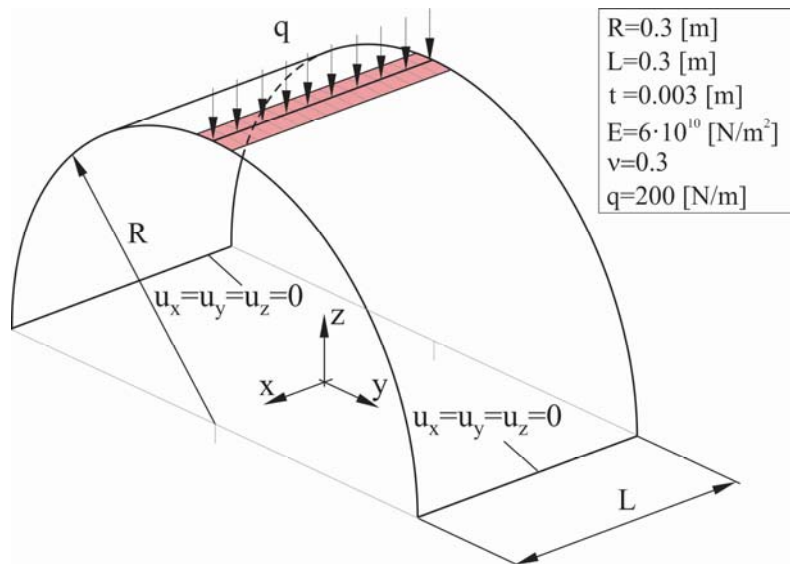
$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \left[(\mathbf{B}_e^b)^T \frac{t^3}{12} \mathbf{D}_S \mathbf{B}_e^b \right] d\Omega \quad (5.76)$$

Takodje i opis materijala se definiše preko Hukove matrice (constitutive material matrix) materijala savojne trake koja sadrži samo jedan element:

$$\mathbf{D}_S = \begin{bmatrix} E_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

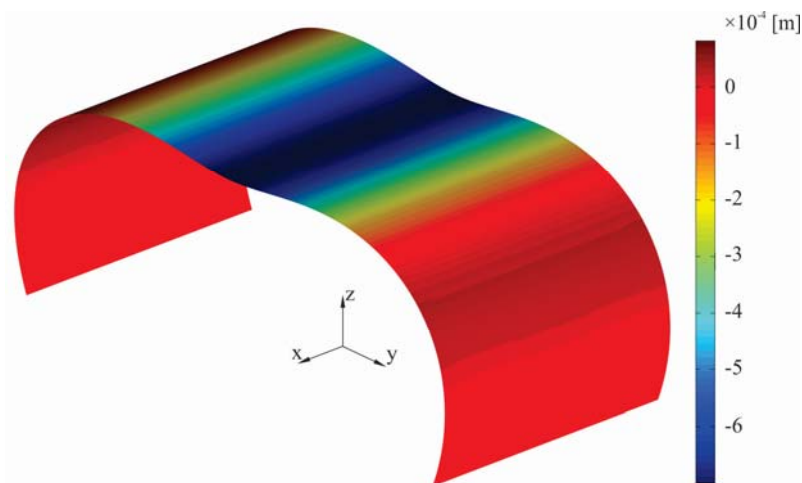
U prethodnoj jednačini E_S predstavlja savojnu krutost u odgovarajućem pravcu i njen odnos sa Young-ovim modulom elastičnosti može u pojedinim slučajevima biti i 10^{10} .

Na slici 5.8 prikazan je model koji se sastoji od dva patcha koji su povezani dodatnim patchom koji prenosi uticaj savijanja. Patch-evi predstavljaju četvrtinu cilindra poluprečnika 0.3m, dužine 0.3m debljine zida 0.003m. Materijal osnovnih patcheva je Young-ovog modula elastičnosti $6 \cdot 10^{10}$ N/m² i Poisson-ovog koeficijenta 0.3.



Slika 5.8 Model dve četvrtine cilindra sa dva patcha i trakom za prenos momenta savijanja

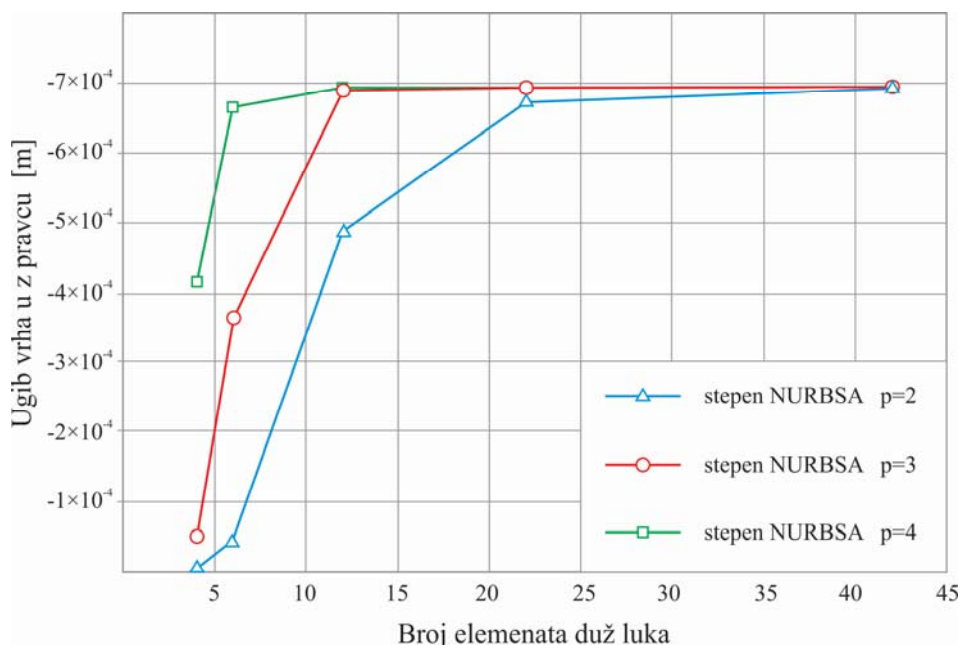
Granični uslovi su modelirani tako da ograničavaju pomeranja izvodnica koje su u kontaktu sa podlogom u sva tri pravca (slika 5.8). Granični uslovi definisani na ovaj način predstavljaju cilindrične oslonce čija se osa poklapa sa pravcem izvodnica koje su u kontaktu sa podlogom. Opterećenje je linijsko po izvodnici koja spaja segmente cilindra inteziteta 200N/m. Rezultati analize sa osnovnim funkcijama trećeg reda i sa 42 elementa u pravcu luka dati su konturnim prikazom pomernaja u z pravcu na slici 5.9. Za prikazani problem modelirano je više FEM modela.



Slika 5.9 Konturni prikaz pomernaja u z-pravcu modela sa dva patcha i trakom za prenos momenta savijanja

Prva grupa modela formirana sa ciljem da se odredi zavisnost stepena osnovnih funkcija i gustine mreže na tačnost rezultata za konstantnu vrednost modula elastičnosti i širine trake koja prenosi uticaj savijanja. Posmatrane su tri grupe modela sa stepenom osnovnih funkcija od 2 do 4. Za svaki

stepen osnovnih funkcija NURBS-a formirana su po pet modela sa različitim brojem elemenata. Broj elemenata kao parametar za ocenu tačnosti analize prikazan je na apcisi (slika 5.10). Kao parametar za ocenu tačnosti analize uzet je broj elemenata u pravcu luka obzirom da broj elemenata u pravcu izvodnice cilindra nema većeg uticaja na dobijene rezultate.

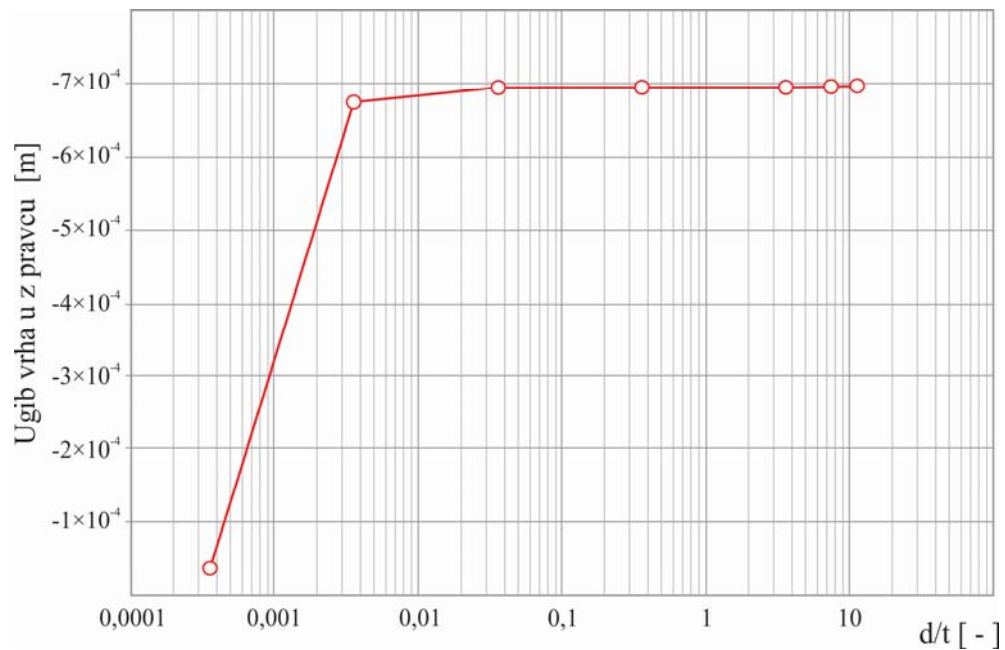


Slika 5.10 Pregled zavisnosti ugiba sredine cilindra u funkciji broja elementata i stepena osnovnih funkcija

Dobijene vrednosti ugiba na sredini cilindrične površine na mestu dejstva opterećenja u funkciji broja elemenata konvergiraju.

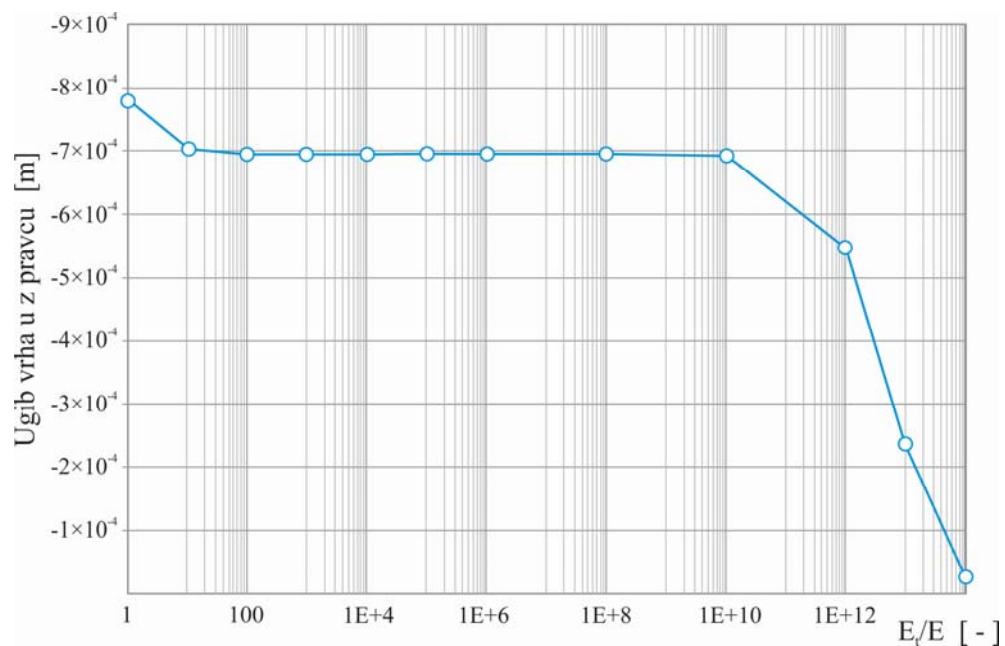
Na slici 5.11 prikazan je uticaj širine trake koja prenosi savijanje na rezultate analize. Posmatran je model sa NURBS osnovnim funkcijama četvrtog stepena. Na apcisi je dat odnos parametara širine trake (d) i debljine ljske (t). Za odnose d/t manje od 0.035, odnosno za veoma male dimenzije širine trake koja prenosi savijanje dolazi do većeg neslaganja dobijenih rezultata. Treba imati u vidu da je za konkretni posmatrani model sa debljinom ljske 3mm i odnosom $d/t = 0.03536$ polovina širina trake koja prenosi savijanje mala i iznosi 0,10608mm. Ova vrednost širine se dobija za razliku parametarskih koordinata u pravcu luka $\Delta\xi = 0.001$ koje određuju poslednji element patcha. Elementi male širine u odnosu na dužinu su nesrazmerni i neprecizni tako da ih u analizama treba izbegavati. Pritom treba izbegavati i trake veće širine jer se tada prenos uticaja savijanja ne prenosi lokalno na konstrukciju. Na slici 5.11 posmatran je uticaj odnosa d/t od 0.00035 do 11.094. Za vrednosti odnosa širine trake i debljine ljske od 0.035 do 11.094 analize su dale zadovoljavajuće rezultate. Prikazan model je jednostavnog oblika i traka koja prenosi savijanje se

formira tako da prati osnovnu geometriju što kod složenijih geometrijskih formi to ne mora biti slučaj i može biti izvor nepreciznosti.



Slika 5.11 Zavisnost ugiba sredine modela i parametra širine trake koja prenosi savijanje

Drugi parametar čiji je uticaj na tačnost rezultata posmatran je elastičnost materijala trake a koja je predstavljena preko odnosa modula elastičnosti trake i osnovnog materijala (patcheva koje spaja) E_t/E . Rezultati analize uticaja parametra E_t/E prikazani su na slici 5.12.



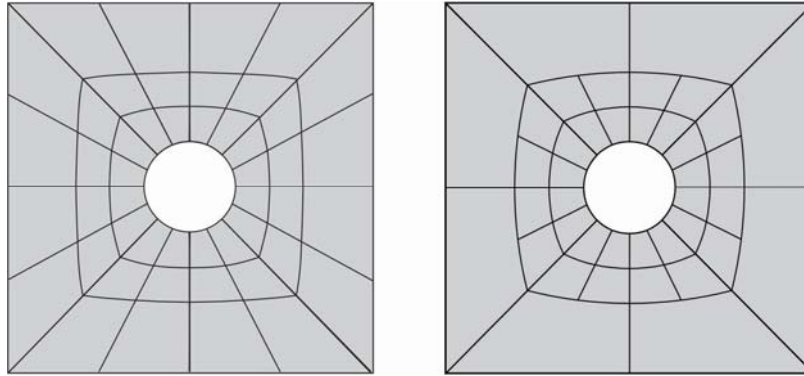
Slika 5.12 Analize uticaja odnosa modula elastičnosti trake i osnovnog materijala na tačnost rezultata analize

Sa slike 5.12 se može primetiti da se za odnose parametra između 10^2 do 10^{10} dobijaju zadovoljavajuće vrednosti ugiba na mestu spoja patcheva. Za vrednosti parametra od 10 do 100 postoji manje neslaganje u rezultatima dok su rezultati za manje vrednosti parametra nezadovoljavajući. Za vrednost parametra koji je veći od 10^{10} rezultati značajno odstupaju. Veće vrednosti parametra (veći od 10^{10}) negativno utiču na numeričku preciznost dobijenog rešenja. Trake koje prenose savijanje ne unose dodatnu krutost u konstrukciju. One uvode samo ograničenja u promeni ugla u trima tačkama kontrolnog poligona trake koje formiraju luk. Stoga i krutost E_t treba biti dovoljno velika da promenu ugla dozvoli samo u granicama tolerancije. Stoga se pri modeliranju traka treba voditi računa da vrednost odnosa bude višestruka ali ne i prevelika kako se ne bi ugrozila numerička stabilnost modela.

STRUKTURNA IZOGOMETRIJSKA ANALIZA SA T-SPLAJN FUNKCIJAMA OBLIKA

NURBS pored niza prethodno opisanih dobrih osobina ima i niz nedostataka. Jedan od glavnih nedostataka je taj što se za formiranje složenije geometrije mora koristiti više *patcheva* koji na mestu spoja najčešće ne ostvaruju kontinuitet koji se nalazi unutar patcha. Osim toga, obzirom da se formiranje finije mreže vrši ubacivanjem elementa u vektor čvorova patcha ili povećanjem stepena osnovnih funkcija za odgovarajući pravac, ta promena nije lokalna već se odnosi na ceo patch (odnosno na odgovarajući pravac). Na ovaj način znatno se usložnjava opis geometrije što podrazumeva i usložnjavanje mreže konačnih elemenata. NURBS površi koje se koriste u kompjuterskoj grafici često koriste tehniku odsecanja geometrije krivama (trimming curves) kako bi se formirala složenija geometrija a što predstavlja odgovarajuću poteškoću prilikom formiranja FE modela. Sve su ovo razlozi zašto NURBS geometrija kao takva nije uvek pogodna za izogeometrijsku strukturnu analizu.

Pojedini nedostaci NURBS-a mogu se prevazići korišćenjem T-splajnova. T-splajn predstavlja NURBS sa T-spojevima (T-junctions). Ovaj vid geometrije prvi je predstavio Sederberg 2003 [SZB03][SCF04]. T-spojevi omogućuju lokalnu promenu mreže. Oni bi u žargonu MKE predstavljali viseće čvorove („hanging nodes“) nekonformnih mreža konačnih elemenata. Nasuprot B-splajnu i NURBS-u, T-splajn nije striktno ograničen na strukturu tenzorskog proizvoda. Kod lokalnog poboljšanja mreže, nova kontrolna tačka u kontrolnom poligonu se može definisati bilo gde a da se pritom ne mora definisati red ili kolona kontrolnih tačaka (Slika 6.1). T-splajn se može koristiti za spajanje više B-splajn površina sa različitim vektorima čvorova u jednu celinu. Ovako dobijena površ je „nepropusna“ tj. nema otvora na granici spoja ovih površina a što nije slučaj pri spajanju više NURBS površina. U tabeli 6.1 dat je uporedni pregled mogućnosti koje nude NURBS, T-splajn i Lagrange-ove funkcije oblika (kontinuiteta C^0) koje su od značaja za formiranje mreže i geometrije konačnih elemenata [BCC10].



Slika 6.1 Poboljšanje mreže – NURBS (levo) i lokalno poboljšanje mreže T-spline (desno)

Tabela 6.1 Osobine Lagrangeovih, NURBS i T-spline osnovnih funkcija u MKE (M.A.Scott 2011)

	KE C^0 kontinuiteta Lagrange	NURBS	T-Spline
Linearna nezavisnost osnovnih funkcija	+	+	+
Suma osnovnih funkcija jednaka jedinici	+	+	+
Afina invarijantnost	+	+	+
Lokalna rafinacija mreže	+		+
Ubacivanje dodatnih tačaka – čvorova	+		+
Jednostavna integracija u FEM programu	+	+	+
Koristi se u CAD softverima		+	+
Obostrana kompatibilnost sa NURBS-om		+	+
Tačno predstavljanje koničnih preseka		+	+
Nepostojanje krivih za odsecanje geometrije			+
Glatkost višeg reda		+	+
Nepropusnost prilikom spajanja	+		+

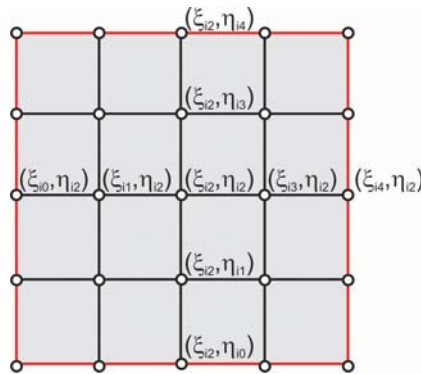
6.1 T-splajn geometrija

T-splajn pripada grupi splajnova zasnovanih na tačkama kontrolnog poligona (point-based splines) tj. tzv. PB-splajnovima [SZB03]. Kod PB-splajnova ne postoje topološke relacije između tačaka kontrolnog poligona kao kod B-splajnova. Ukoliko posmatramo jedan vektor čvorova B-splajna npr. $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1, 1]$, ukupan broj kubnih osnovnih funkcija B-splajna je 7. Osnovna funkcija $N_{1,3}(\xi)$ može se odrediti na osnovu lokalnog vektora čvorova $\Xi_1 = [0, 0, 0, 0, 0.25]$, itd. Za formiranje osnovnih funkcija nije potrebno da poznajemo ceo vektor čvorova kao što se vidi iz prethodnog primera već samo lokalne vektore. Ova osobina omogućuje formiranje splajna na osnovu tačaka kontrolnog poligona. Za svaku tačku kontrolnog

poligona površi potrebno je pridružiti po jedan par lokalnih vektora čvorova na osnovu kojih bi se formirale osnovne funkcije. Jednačina PB-površni glasi:

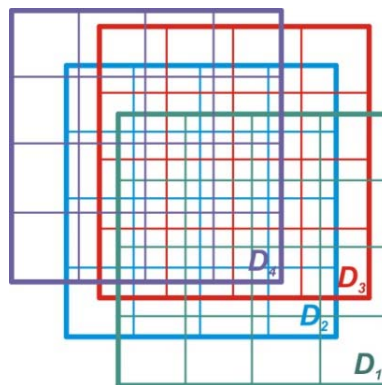
$$P(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=1}^n P_i N_i(\xi, \eta)}{\sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta)}, \quad (\xi, \eta) \in D \quad (6.1)$$

gde su P_i tačke kontrolnog poligona, $N_i(\xi, \eta) = N_i^3(\xi)M_i^3(\eta)$, $N_i^3(\xi)$ su osnovne funkcije kubnog B-splajna definisane na vektoru čvorova $\xi_i = [\xi_{i0}, \xi_{i1}, \xi_{i2}, \xi_{i3}, \xi_{i4}]$ a $M_i^3(\eta)$ osnovne funkcije kubnog B-splajna definisane na vektoru čvorova $\eta_i = [\eta_{i0}, \eta_{i1}, \eta_{i2}, \eta_{i3}, \eta_{i4}]$. Sivo obojena površ (Slika 6.2) $D_i = (\xi_{i0}, \xi_{i4}) \times (\eta_{i0}, \eta_{i4})$ prikazuje oblast uticaja jedne tačke kontrolnog poligona P_i . Osnovne funkcije B-splajna $N_i(\xi, \eta)$ kao i prvi i drugi izvodi imaju vrednosti nula izvan definisane oblasti D_i .



Slika 6.2. Linije čvorova za određivanje osnovnih funkcija $N_i(\xi, \eta)$

Kako je svaka tačka kontrolnog poligona definisana za odgovarajuću oblast D_i to se za određene vrednosti indeksnih koordinata ξ i η tačka površi može odrediti primenom jednačine (6.1) sumom samo za one tačke kontrolnog poligona kod kojih je ispunjen uslov $(\xi, \eta) \in D_i$. Domen D predstavlja domen na kome je celokupni PB splajn definisan [SZB03]. To podrazumeva da je $D \subset \{D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n\}$ a pritom ne mora biti pravougaoni (Slika 6.3).



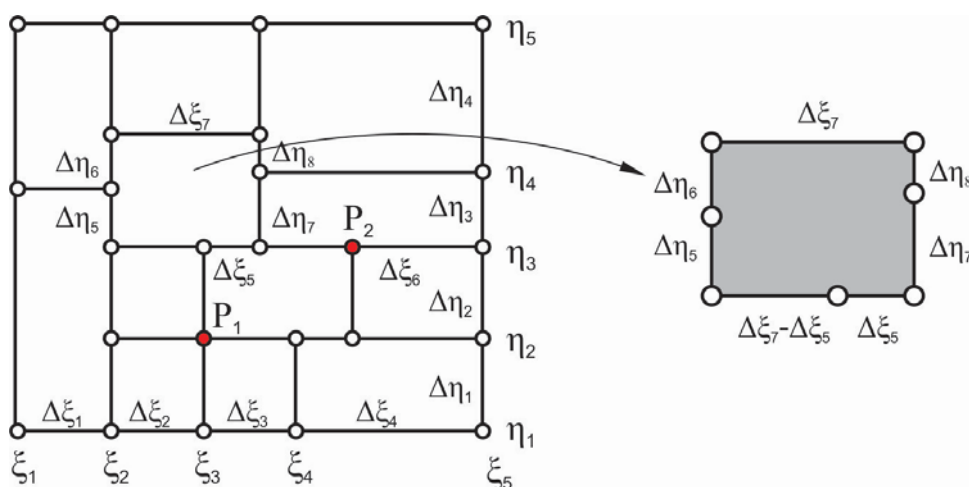
Slika 6.3. Oblast definisanosti kubnog PB splajna sa četiri tačke kontrolnog poligona

T-splajn predstavlja PB-splajn sa određenim ograničenjima koja se moraju poštovati prilikom formiranja mreže. T-splajn se najčešće posmatra kao nadogradnja B-splajna. Ako se posmatra kao nadogradnja NURBS-a može biti racionalna funkcija. Za razumevanje T-splajna uvodi se termin T-mreža koja predstavlja opis mreže kontrolnih tačaka u indeksnom prostoru. Mreža kontrolnih tačaka u prostoru naziva se T-splajn kontrolnom mrežom mada se kod većine autora često može sresti i naziv T-mreža. Ovde će se termin T-mreža uvek odnositi na mrežu u indeksnom prostoru. T-mreža je u osnovi pravougaona mreža koja ne mora imati kompletne redove ili kolone tj. može imati T-spojeve. T-mreža ima dve namene. Prvo, okrenuta je više ka korisniku nego što je to bio skup tačaka kod PB splajna. Drugo, vektori čvorova ξ_i i η_i se za svaku osnovnu funkciju dedukcijom dobijaju na osnovu T-mreže. Ako je T-mreža bez T-spojeva onda T-splajn prelazi u B-splajn. Svaka linija u T-mreži predstavlja ξ liniju sa konstantnom vrednošću ξ ili η liniju sa konstantnom vrednošću η . T-spojevi se mogu opisati kao tačka u T-mreži koju dele dve ξ linije i jedna η linija ili obratno. Svaka linija u T-mreži se označava intervalom čvorova uz poštovanje određenih pravila [SZB03]:

Pravilo 1. Zbir intervala čvorova na suprotnim stranicama mora biti jednak.

Pravilo 2. Ako se T-spoj na stranici mreže može spojiti sa T-spojem na suprotnoj stranici T-mreže bez narušavanja pravila 1 onda se ta stranica mora uključiti u mrežu.

Na slici 6.4 je prikazana jedna početna T-mreža za (ξ, η) parametarski prostor. Koordinata ξ_i označava ξ koordinatu a η_i koordinatu η određene stranice T-mreže, $\Delta\xi_i$ i $\Delta\eta_i$ označavaju interval čvorova. Svaka tačka mreže ima svoje koordinate u parametarskom prostoru a koje se mogu izraziti preko koordinata i intervala čvorova. Tako npr. tačka P_1 ima koordinate (ξ_3, η_2) a tačka P_2 ima koordinate $(\xi_5 - \Delta\xi_6, \eta_3)$.



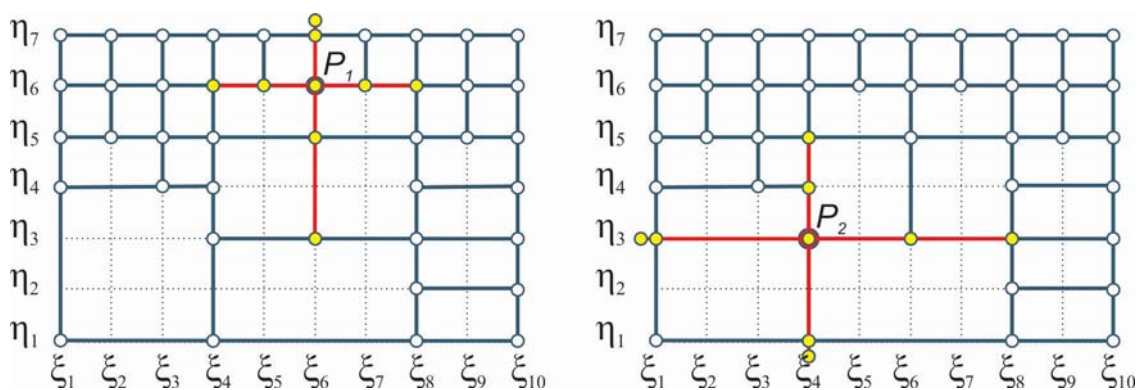
Slika 6.4. T-mreža

Poštujući pravilo 1 moraju biti zadovoljene sledeće jednakosti:

$$\Delta\eta_5 + \Delta\eta_6 = \Delta\eta_7 + \Delta\eta_8 \text{ kao i } \Delta\xi_2 + \Delta\xi_5 = \Delta\xi_7. \quad (6.2)$$

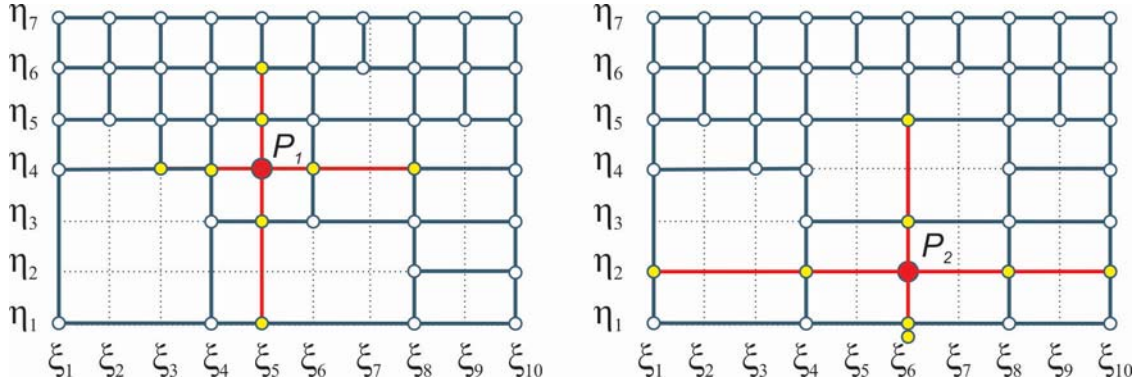
Lokalni vektor čvorova

Kako se za T-splajnove vezuju samo lokalni vektori čvorova to će se ovde pod pojmom vektori čvorova misliti na lokalne vektore čvorova. Vektor čvorova za odgovarajuću tačku kontrolnog poligona T-splajna određuje se različito u zavisnosti da li je stepen splajna parni ili neparni. Na primer za svaku tačku kontrolnog poligona P_i vezuje se osnovna funkcija trećeg stepena $B_i(\xi, \eta)$ definisana za vektor čvorova $\Xi_i = [\xi_{i0}, \xi_{i1}, \xi_{i2}, \xi_{i3}, \xi_{i4}]$ i $H_i = [\eta_{i0}, \eta_{i1}, \eta_{i2}, \eta_{i3}, \eta_{i4}]$. Kod T-splajnova se položaj bazične tačke vektora čvorova (anchor point) vezuje u zavisnosti od stepena T-splajna za odgovarajući čvor u mreži, kod splajnova sa neparnim stepenom, ili za sredinu ćelije T-mreže kod splajnova sa parnim stepenom.



Slika 6.5. Određivanje lokalnog vektora čvorova kod T-splajnova sa neparnim stepenom

Kod T-splajnova sa neparnim stepenom (na konkretnom primeru stepena $p=3$) za tačku P_1 bazična tačka se nalazu na sredini pa lokalni vektor čvorova ima oblik $\Xi_1 = [\dots, \xi_6, \dots]$ i $H_1 = [\dots, \eta_6, \dots]$ (slika 6.5). Ostali elementi vektora čvorova se određuju na taj način što iz pozicije čvora povučemo zrake u ξ i η pravcu, prema prethodno opisanoj proceduri. Lokalni vektori čvorova za tačke P_1 i P_2 su: $\Xi_1 = [\xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8]$ i $H_1 = [\eta_3, \eta_5, \eta_6, \eta_7, \eta_7]$ kao i $\Xi_2 = [\xi_1, \xi_1, \xi_4, \xi_6, \xi_8]$ i $H_2 = [\eta_1, \eta_1, \eta_3, \eta_4, \eta_5]$. Do ponavljanja indeksne koordinate u vektorima čvorova kao što su η_7 , ξ_1 , i η_1 dolazi zbog granice geometrije kada se kao i kod NURBS-a elementi vektora čvorova na granici geometrije ponavljaju.



Slika 6.6. Određivanje lokalnog vektora čvorova kod T-splajnova sa parnim stepenom

Kod T-splajnova sa parnim stepenom (na konkretnom primeru stepena $p=2$) za tačku P_1 i P_2 bazična tačka se nalazu na sredini ćelije (slika 6.6). Elementi lokalnog vektora čvorova se dobijaju presecanjem linija T-mreže zracima iz sredina ćelija. Broj elemenata vektora u svakom pravcu zraka se određuje izrazom $(p/2)+1$. Lokalni vektori čvorova za tačke P_1 i P_2 su: $\Xi_1 = [\xi_3, \xi_4, \xi_6, \xi_8]$ i $H_1 = [\eta_1, \eta_3, \eta_5, \eta_6]$ kao i $\Xi_2 = [\xi_1, \xi_4, \xi_8, \xi_{10}]$ i $H_3 = [\eta_1, \eta_1, \eta_3, \eta_5]$.

Svakom čvoru T-mreže je pridružena kontrolna tačka $P_A \in \mathbb{R}^{d_s}$ sa odgovarajućom težinom $w_A \in \mathbb{R}$ gde indeks A predstavlja globalni broj kontrolne tačke. Za prikaz principa formiranja T-mreže biće korišćen model prikazan na slici 6.7. Spljašniji prsten za koji je interval čvorova jednak nuli je pridružen mreži i ima sličan značaj kao i kod otvorenog vektora čvorova NURBS-a za ostvarivanje odgovarajućih graničnih uslova.

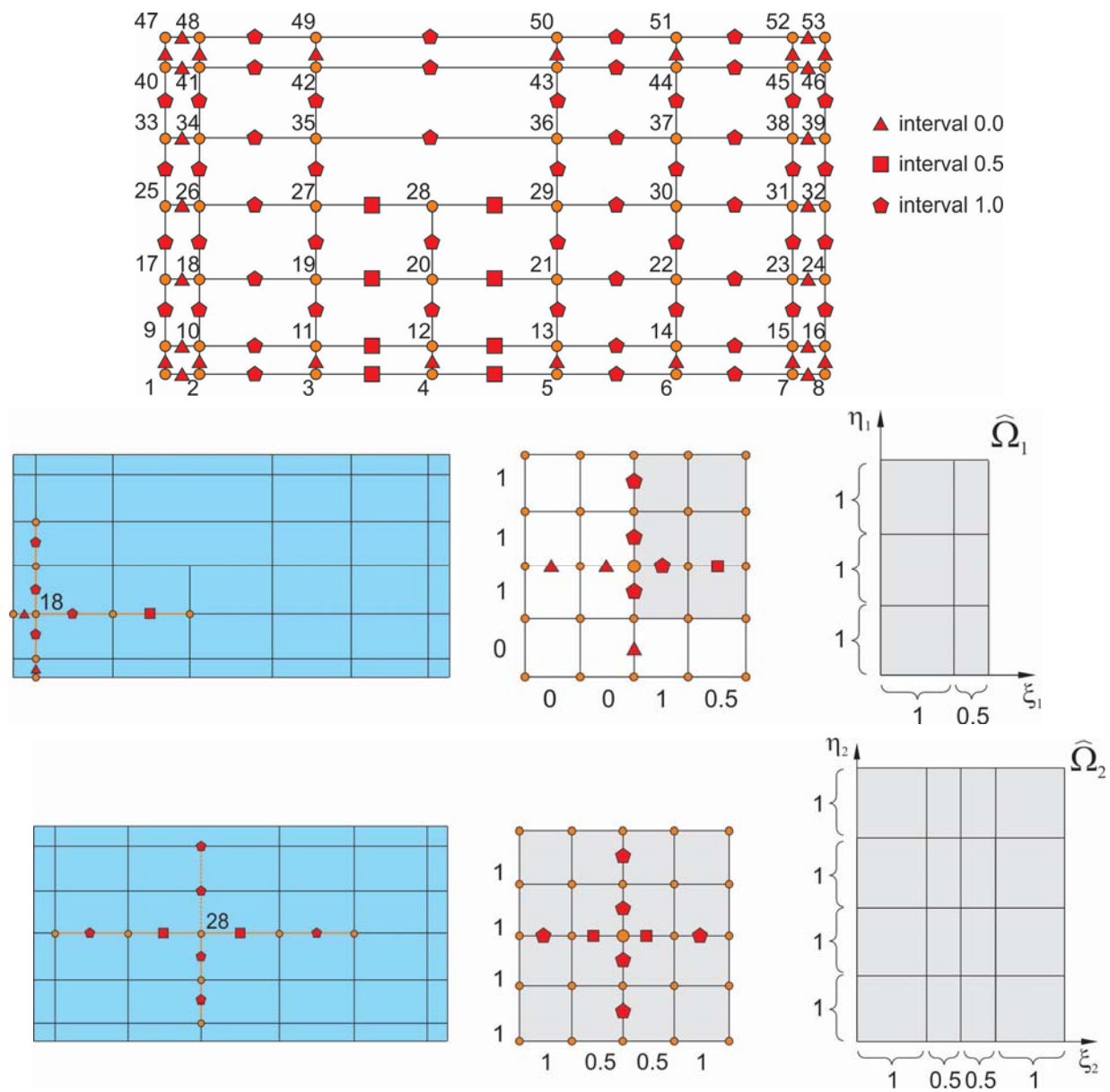
Oblast definisanosti lokalnih osnovnih funkcija T-splajna $\hat{\Omega}_A \subset \mathbb{R}^{d_p}$ određena je preko lokalnog vektora čvorova Ξ_A , [SBV11]. Oblast definisanosti može se predstaviti:

$$\hat{\Omega}_A = \bigotimes_{i=1}^{d_p} \hat{\Omega}_A^i \quad (6.3)$$

gde je $\hat{\Omega}_A^i = [0, \Delta\xi_1^i + \Delta\xi_2^i + \Delta\xi_3^i + \Delta\xi_4^i] \subset \mathbb{R}$. Na slici 6.7 prikazane su oblasti definisanosti odgovarajućih osnovnih funkcija. Osnovne funkcije T-splajna se mogu odrediti na osnovu T-mreže i odgovarajućeg intervala čvorova. One se vezuju za odgovarajuću tačku T-mreže $\xi_A = (\xi_A^1, \xi_A^2) = (\xi_A, \eta_A)$. Na svakoj oblasti definisanosti $\hat{\Omega}_A$ lokalne osnovne funkcije T-splajna definiše se osnovna funkcija T-splajna N_A preko proizvoda komponentnih (osnovnih funkcija za svaki pravac) osnovnih funkcija B-splajana:

$$N_A(\xi_A | \Xi_A) \equiv \prod_{i=1}^{d_p} N_A^i(\xi_A^i | \Xi_A^i) \quad (6.4)$$

Komponentne osnovne funkcije B-splajna se određuju prema ranije prikazanoj Cox-de Boor-ovoj rekurzivnoj fomruli. Odredjivanje oblasti definisanosti i raspona čvorova osnovnih funkcija prikazno je za dve tačke mreže T-splajna na slici 6.7.



Slika 6.7 T-mreža bikubne T-splajn geometrije

Za konstruisanje osnovnih funkcija odgovarajuće tačke u T-mreži potrebno je prvo odrediti intervale čvorova u okolini izabrane tačke. Kako se vezuju za odgovarajuću tačku T-mreže oni predstavljaju lokalni vektor intervala čvorova:

$$\Delta \Xi = \{\Delta \xi_1, \Delta \xi_2, \dots, \Delta \xi_{p+1}\} \quad (6.5)$$

gde je $\Delta \xi_i = \xi_{i+1} - \xi_i$, i gde se lokalni vektor čvorova dobija na osnovu vektora intervala čvorova i ima oblik $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p+2}\}$. Lokalni vektor intervala čvorova sadrži sve informacije o

lokalnom vektoru čvorova osim početne vrednosti. Primenom intervala čvorova u T-mreži dobijamo informacije o mreži u odgovarajućoj tački bez potrebe određivanja koordinatnog početka, odnosno početne vrednosti vektora čvorova. T-splajn metod intervala čvorova se generalno može primeniti za sve klasične B-splajn algoritme.

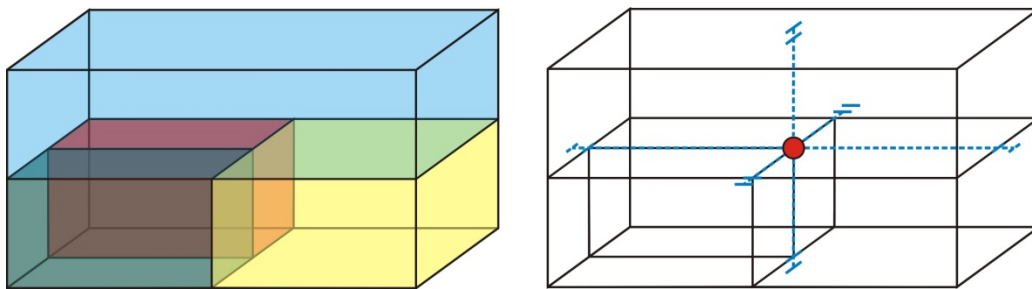
Lokalni intervali čvorova mogu se odrediti i za površi i solide kao $\Delta \Xi_A = \{\Delta \Xi_A^i\}$, $i=1, \dots, d_p$, a i odgovarajući lokalni vektor čvorova $\Xi_A = \{\Xi_A^i\}$, $i=1, \dots, d_p$. Lokalni vektor intervala čvorova, kao što je prethodno rečeno, se konstruiše povlačenjem zraka iz tačke kontrolne mreže za koju određujemo vektor do p-1 preseka sa kontrolnom mrežom u oba smera za odgovarajući pravac. Na slici 6.7 izdvojena su dva čvora mreže 18 i 28. Čvor 18 se nalazi na granici mreže. Ukoliko povučemo zrake u oba pravca mreže do preseka p-1=2 može se primetiti da će se zrak povučen ka granici mreže (leva strana) preseći mrežu samo jednom sa rasponom čvorova jednakim nuli. Da bi se dopunio vektor rapona čvorova biće uneta vrednost nula kako bi se zadovoljili uslovi na granici T-mreže. Formiranje raspona čvorova u svim pravcima mreže prikazan je na slici 6.7 sa desne strane. Ovako formirani vektori raspona čvorova imaće oblik:

$$\Delta \Xi_{18} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Na sličan način se mogu odrediti i vektori raspona čvorova tačke 28 sa tom razlikom što ova tačka predstavlja T-spoj. Formirani vektori imaju oblik:

$$\Delta \Xi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Zapreminski modeli T-splajna se dobijaju primenom slične procedure. U odnosu na površinske modele ovde je uvedena još jedna dimenzija T-splajna. Analogno površinskim modelima zapreminska mreža se formira primenom hexahedral-nih elemenata koji dozvoljavaju T-spjeve (slika 6.8).



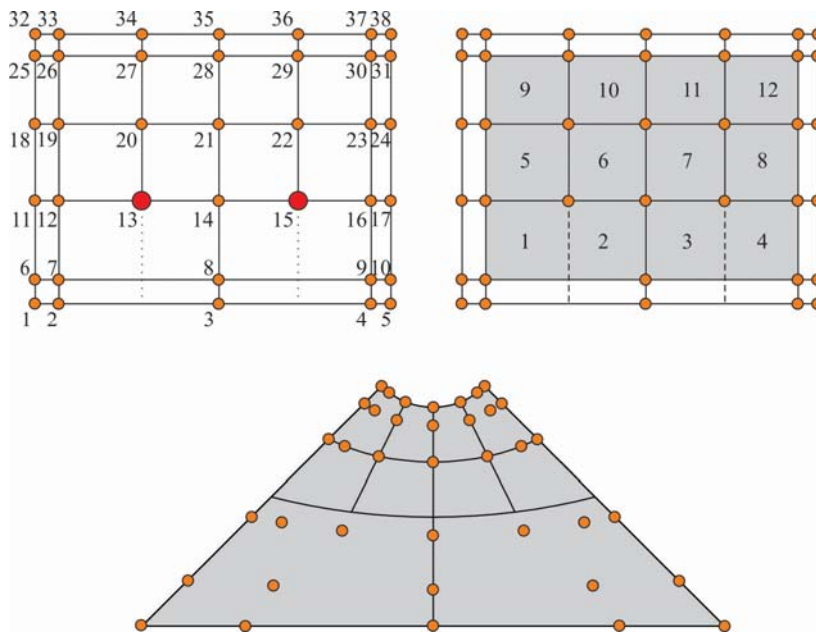
Slika 6.8 Zapreminiska T-splajn mreža

6.2 T-splajn element

T-splajn element $\Omega^e \subset \mathbb{R}^{d_s}$ je oblast u fizičkom prostoru, ograničen je linijama čvorova koje predstavljaju linije sa ograničenom kontinualnošću u T-splajn osnovi. Osnovne funkcije u unutrašnjosti T-splajn elementa imaju kontinualnost C^∞ .

T-mreža elemenata:

U opštem slučaju ne postoji direktna veza između elementa T-splajn mreže i T-splajn elementa. Element T-mreže je četvorostrani element u T-mreži ili T-splajn kontrolnoj mreži. T-splajn element je region T-splajn površi ograničen linijama sa smanjenom kontinualnošću u T-splajn osnovi.



Slika 6.9 Gore levo: T-mreža, Gore desno: T-splajn elementi na T-mreži elemenata,
Dole: T-splajn površ sa tačkama kontrolnog poligona i T-splajn elementima

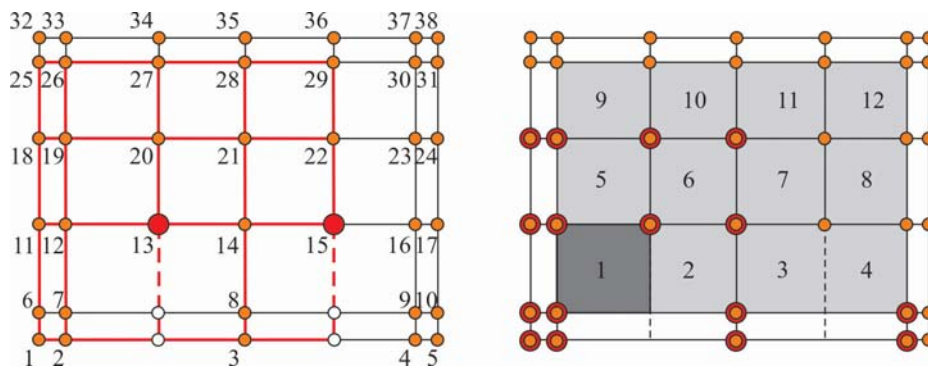
Na slici 6.9 gore levo prikazana je mreža lokalne funkcije tačke 13. Isprekidane linije su formirane za lokalnu funkciju tačke 13 ali one nisu deo T-mreže. Na osnovu T-mreže proširivanjem dobija se elementarna T-mreža. Isprekidane linije T-mreže elemenata predstavljaju linije sa smanjenom kontinualnošću.

U oblasti izogeometrijske analize T-splajn uvode autori Y. Bazilevs, T. W. Sederberg, J. A. Cottrell, T. Hughes, M. A. Scott, T. Sederberg i drugi [BCC10] [SCF04] [SLS12] [SBV11]. Metoda konačnih elemenata primenom T-splajn osnovnih funkcija ima specifičnosti u tome da delovanje osnovnih funkcija nije lokalno na oblast elementa i u korišćenju T-spojeva. Da bi se odredile osnovne funkcije elementa potrebno je formirati skup afinih transformacija [SBV11]:

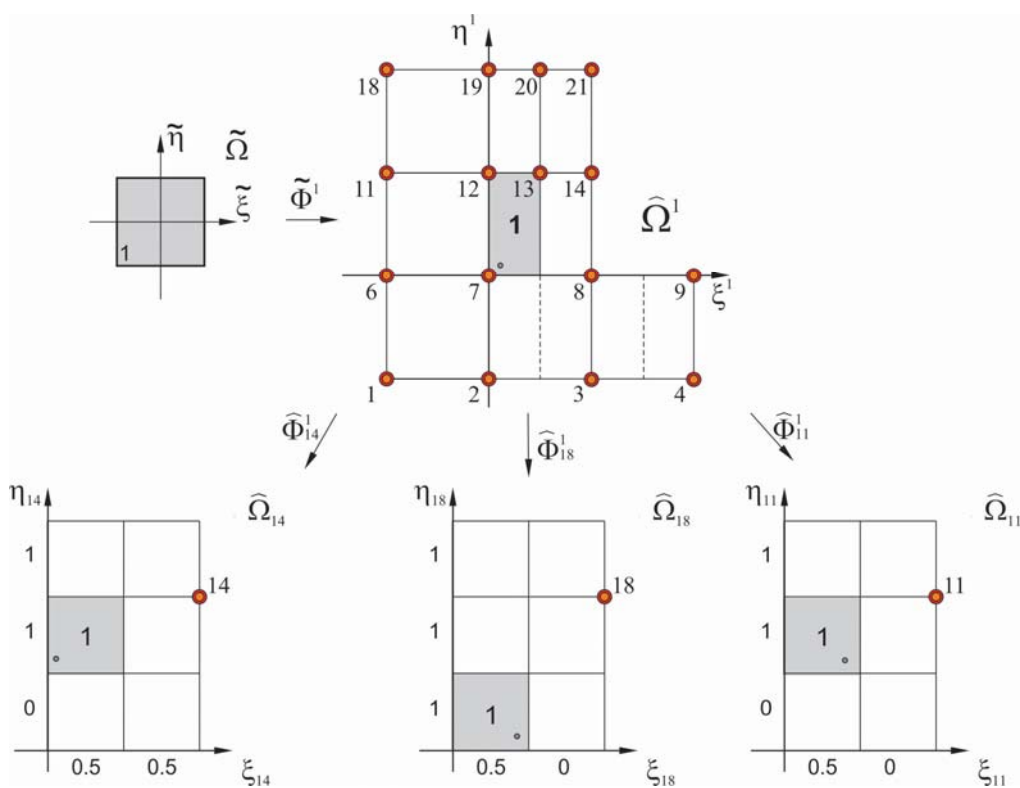
$$S^e = \{\tilde{\Phi}^e, \{\hat{\Phi}_a^e\}, a = 1, \dots, n_e.\} \quad (6.8)$$

gde sj: $\tilde{\Phi}^e: \tilde{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}^e$ afino preslikavanje jedan na jedan iz osnovnog domena elementa $\tilde{\xi}[-1.1]$ na oblast elementa određen tačnim vrednostima indeksnih koordinata $\xi^e = \tilde{\Phi}^e(\tilde{\xi})$, $\hat{\Phi}_a^e: \hat{\Omega}^e \rightarrow \hat{\Omega}_A$ za $a=1, \dots, n_e$ je afino preslikavanje jedan na jedan sa domena elementa u domen lokalnih osnovnih funkcija $\xi_A = \hat{\Phi}_a^e(\xi^e)$ gde je sa a označen lokalni broj osnovne funkcije, A – globalni broj osnovne funkcije, n_e -broj osnovnih funkcija elementa različitih od nule.

Za T-mrežu elementa broj 1 prikazanoj na slici 6.10 afina preslikavanja prethodno opisana prikazana su na slici 6.11.



Slika 6.10 T-mreža elementa br. 1 i kontrolne tačke za koje T-splajn osnovne funkcije imaju vrednost različitu od nule na oblasti definisanosti elementa



Slika 6.11 Preslikavanja sa osnovnog domena, domena elementa i domena lokalnih osnovnih funkcija

Određivanje koordinate na osnovu koordinata osnovnog domena elementa vrši se geometrijskim mapiranjem sa osnovnog domena elementa u fizički domen pomoću izraza [SBV11]:

$$x^e(\tilde{\xi}) = \frac{\sum_{a=1}^{n_e} P_a^e w_a^e N_a^e(\tilde{\xi})}{W^e(\tilde{\xi})} = \sum_{a=1}^{n_e} P_a^e R_a^e(\tilde{\xi}) \quad (6.9)$$

gde je :

$$W^e(\tilde{\xi}) = \sum_{a=1}^{n_e} w_a^e N_a^e(\tilde{\xi}) \quad (6.10)$$

P_a^e predstavljaju tačke kontrolnog poligona a w_a^e težinske koeficijente elementa odgovarajuće a -te T-splajn osnovne funkcije za oblast elementa e . R_a^e predstavlja racionalnu osnovnu funkciju T-splajna.

Jednačina (6.9) se može zapisati u matricnom obliku:

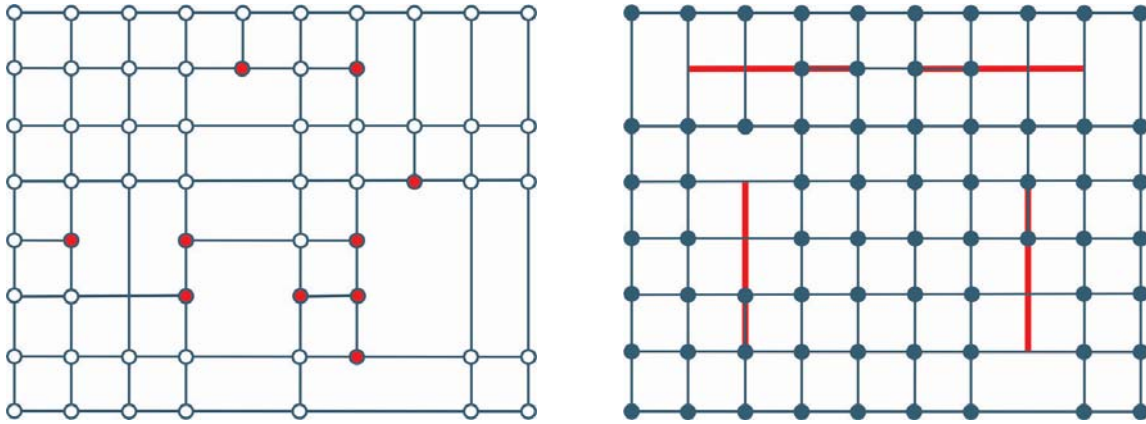
$$\mathbf{x}^e(\tilde{\xi}) = \frac{1}{(\mathbf{w}^e)^T \mathbf{N}^e(\tilde{\xi})} (\mathbf{P}^e)^T \mathbf{W}^e \mathbf{N}^e(\tilde{\xi}) = (\mathbf{P}^e)^T \mathbf{R}^e(\tilde{\xi}) \quad (6.11)$$

gde su: $\mathbf{w}^e = \{w_a^e\}$, $a = 1, \dots, n_e$, \mathbf{W}^e – dijagonalna matrica težina $\mathbf{W}^e = \text{diag}(\mathbf{w}^e)$ a \mathbf{P}^e matrica kontrolnih tačaka dimenzija $n_e \times d_s$ (proizvod broja elemenata i prostornih dimenzija). Analogno prethodnom \mathbf{N}^e i \mathbf{R}^e su vektori osnovnih funkcija različitih od nule na oblasti definisanosti elementa e .

Kako se za svaku tačku kontrolnog poligona vezuje odgovarajuća osnovna funkcija to je potrebno uspostaviti vezu izmedju broja globalne osnovne funkcije i lokalne osnovne funkcije elementa. Iz tog razloga se formira vektor IEN koji za svaki element daje vezu lokalnog broja osnovne funkcije i globalnog broja.

6.3 Proširena T-mreža

Proširenje T-mreže može se izvršiti na svakom T-spoju. Vršni se po sličnoj proceduri kao i kod određivanja lokalnog vektora čvorova. Ako T-spoj označimo sa $T = \{(\bar{i}, \bar{j})\}$ proširenje T-mreže se vrši za četiri uzastopna indeksa mreže npr. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ ili $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ gde se proširenje mreže vrši za dva indeksa levo ili desno u zavisnosti od položaja T-spoja u T-mreži kao i za jedan indeks u suprotnom smeru. Primer proširenja T-mreže dat je sledećoj slici.



Slika 6.12. Primeri proširenja T-mreže u različitim pravcima

Proširenje u pravcu T-spoja naziva se proširenje površi i izvodi se kao proširenje za vrednost dva preseka a proširenje u suprotnom smeru je proširenje stranice T-mreže i izvodi se za veličinu jednog preseka.

Uvođenjem proširenja T-spojeva u T-mreži izdvajaju se tri posebne vrste čvorova [XS14]. Prvu grupu čvorova predstavljaju čvorovi koji se nalaze u preseku proširenja površi (crossing vertices). Na slici 6.13 su presečni čvorovi označeni žutim kvadratima.

$$CV = \text{hext}(T) \cap \text{vext}(T) \quad (6.12)$$

Drugu grupu čvorova čine čvorovi koji su formirani u preseku proširenja površi i stranica T-mreže (OV overlap vertices). Na slici 6.13 su prikazani zelenim kvadratima.

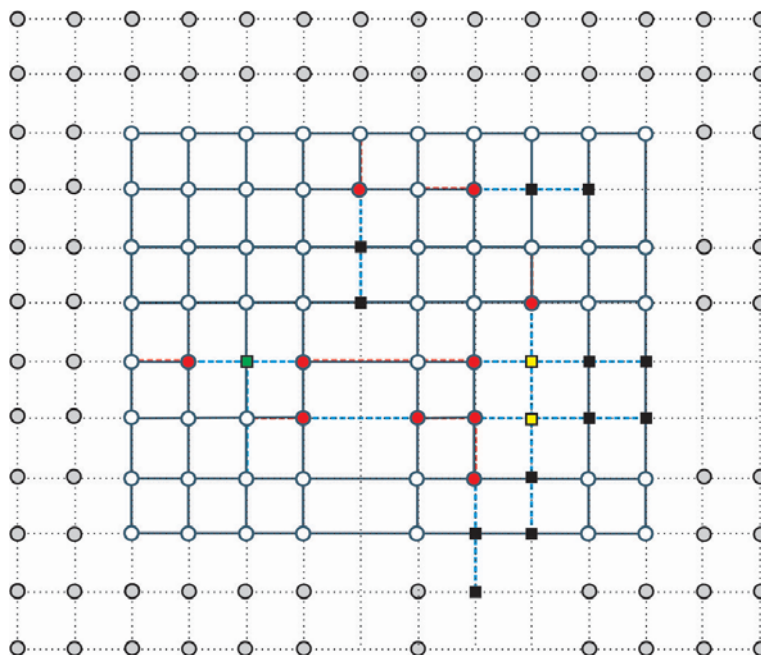
$$OV = \left(\left(\bigcap_{T_h \in J} \text{ext}^f(T_h) \right) \cap vS \right) \cup \left(\left(\bigcap_{T_v \in J} \text{ext}^f(T_v) \right) \cap hS \right) \quad (6.13)$$

Gde su sa ext^f označena proširenja površi (horizontalna T_h i vertikalna T_v) T –spojeva. Sa vS ili hS označene su stranice T-mreže u horizontalnom odnosno vertikalnom pravcu.

Treću grupu čvorova predstavljaju čvorovi koji su formirani u preseku proširenja površi sa T-mrežom izuzimajući čvorove koji su prethodno izdvojeni (extended vertices EV). Na slici 6.13 su prikazani crnim kvadratima.

$$EV = \left((\text{ext}^f(T) \cap S) \setminus OV \right) \cup (V \setminus A(T)) \quad (6.14)$$

gde su sa A označeni čvorovi koji pripadaju aktivnom regionu T-mreže (deo T-mreže iz kog su izuzeti ivični čvorovi kod kojih je raspon čvorova jednak nuli i koji su kao i kod B-splajna multiplicirani p+1 puta). Sa V označeni su svi čvorovi T-mreže.



Slika 6.13. Proširena T-mreža

T-splajn pogodan za strukturnu analizu

T-splajnovi koji su pogodni za strukturnu analizu predstavljaju podskup T-splajnova [SLS12]. Niz osobina koje T-splajn čini pogodnim za analizu dobija se od NURBS-a a koji predstavlja i njegovu osnovu. Neke od osobina koje su ranije bile navedene su: u svakoj tački površi zbir osnovnih funkcija iznosi jedan, afine transformacije se ostvaruju preko tačaka kontrolnog poligona, osnovne funkcije ne mogu imati negativne vrednosti, svojstvo konveksnog omotača. Iako je većina osnovnih funkcija T-splajnova linearno nezavisna postoje i T-splajnovi kod kojih to nije slučaj. Da bi se ti posebni slučajevi izdvojili koristi se proširena T-mreža.

T-splajn geometrija pogodna za strukturnu analizu je ona kod koje proširena T-mreža nema preseka horizontalnog proširenja T-spojeva sa vertikalnim proširenjem T-spojeva.

6.4 Bézier-ova ekstrakcija

Osnovne funkcije B-splajna i NURBS-a, imaju oblast definisanosti na celom patchu i vrednosti različite od nule na $p+1$ intervalu čvorova, za razliku od Lagranžeovih funkcija oblika koje su u klasičnoj metodi konačnih elemenata definisane samo na oblast elementa. Na sličan način se mogu posmatrati i osnovne funkcije određene tačke poligona T-splajna čiji uticaj nije lokalni tj. na oblast samo jednog elementa [SBV11]. Oblast definisanosti osnovnih funkcija je jedan od razloga nekompatibilnosti postojećih FEM softvera sa softverima za izogeometrijsku strukturnu analizu. Da bi se približio pristup izogeometrijske metode konačnih elemenata sa FEM softverima pošlo se od ideje da se postojeće izogeometrijske funkcije oblika predstave funkcijama koje su

definisane samo na oblast elementa ne gubeći pri tome prednosti koje nudi izogeometrijska analiza. Kao jedna od mogućnosti je predstavljanje T-splajn osnovnih funkcija pomoću Bézier-ovih funkcija. Ideja Bézier-ove ekstrakcije i predstavljanje složene T-splajn geometrije Bézier-ovim elementima pojavila se još sa pronalaskom T-splajna [SZB03]. Predstavljeni postupak Bézier-ove ekstrakciju u oblasti izogeometrijske analize NURBS i T-spline osnovnim funkcijama, izveli su Scott, Borden, Evans, Hughes i Sederberg [BSE11] [SBV11].

Obzirom da se i NURBS i T-splajn osnovne funkcije sračunavaju na osnovu B-splajn osnovnih funkcija ovaj postupak se svodi na određivanje B-splajn osnovnih funkcija u odnosu na drugu osnovu koja je definisana samo na oblast elementa [BSE11]. Ako se predstavljanje vrši Bézier-ovim elementima tada se za osnovne funkcije koriste Bernstein-ove osnovne funkcije. Bézier-ova kriva se može predstaviti sledećom jednačinom:

$$C(\xi) = \sum_{a=1}^{p+1} \mathbf{P}_a B_{a,p}(\xi) = \mathbf{P}^T \mathbf{B}(\xi), \quad \xi \in [0,1] \quad (6.15)$$

Skup Bernstein-ovih osnovnih funkcija prikazan matricom $\mathbf{B}(\xi) = \{B_{a,p}(\xi)\}$, ($a=1, \dots, p+1$), je za odgovarajući skup tačaka kontrolnog poligona $\mathbf{P} = \{P_a\}$, ($a=1, \dots, p+1$), $P_a \in \mathbb{R}^d$, predstavlja odgovarajuće tačke kontrolnog poligona gde je d broj prostornih dimenzija. Matrica \mathbf{P} dimenzija $(p+1) \times d$ može se predstaviti na sledeći način:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1^1 & P_1^2 & \dots & P_1^d \\ P_2^1 & P_2^2 & \dots & P_2^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{p+1}^1 & P_{p+1}^2 & \dots & P_{p+1}^d \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Bernstein-ovi polinomi se mogu odrediti rekursivnom formulom kao:

$$B_{a,p}(\xi) = (1 - \xi)B_{a,p-1}(\xi) + \xi B_{a-1,p-1}(\xi) \quad \xi \in [0, 1] \quad (6.17)$$

gde je

$$B_{1,0}(\xi) \equiv 1 \quad (6.18)$$

kao i

$$B_{a,p}(\xi) \equiv 0 \text{ ako je } a < 1 \text{ ili } a > p + 1 \quad (6.19)$$

ili direktno:

$$B_{a,p}(\xi) = \binom{p}{a-1} (1 - \xi)^{p-(a-1)} \xi^{a-1} \quad (6.20)$$

gde je $\binom{p}{a-1}$ binomni koeficijent a a ima vrednost $1 \leq a \leq p+1$.

Određivanje Bernstajn-ovih polinoma po (6.17 i 6.20) se vrši ukoliko su definisani na intervalu $\xi \in [0, 1]$. Kako se u metodi konačnih elemenata element najčešće opisuje preko prirodnog koordinatnog sistema, to i oblast definisanosti Bernstein-ovih polnoma treba biti $\xi \in [-1, 1]$.
 Određivanje Bernstein-ovih polinoma za interval $\xi \in [-1, 1]$ se vrši preko sledećih jednačina:

$$B_{a,p}(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)B_{a,p-q}(\xi) + \frac{1}{2}(1 + \xi)B_{a-1,p-1}(\xi) \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial B_{a,p}}{\partial \xi} = \frac{1}{2}p(B_{a-1,p-1}(\xi) - B_{a,p-1}(\xi))$$

ili direktno:

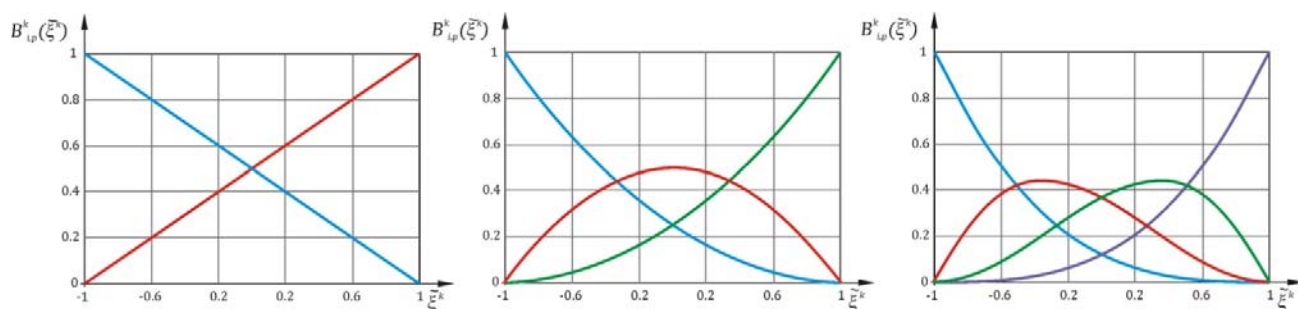
$$B_{a,p}(\xi) = \frac{1}{2^p} \binom{p}{a-1} (1 - \xi)^{p-(a-1)} (1 + \xi)^{a-1} \quad (6.22)$$

Bernstein-ovi polinomi funkcija sa više promenljivih (kada je reč o površima ili solidima) određuju se proizvodom osnovnih funkcija sa jednom promenljivom:

$$B_{A,p}(\xi) = B^1_{i,p}(\xi^1) B^2_{j,p}(\xi^2) \quad (6.23)$$

gde je A globalni broj Bernstein-ovog polinoma.

Linearni kvadratni i kubni Bernstajn-ovi polinomi prikazani su na slici 6.14.



Slika 6.14. Bernstein-ovi polinomi prvog, drugog i trećeg reda

Bernstein-ovi polinomi imaju sledeće osobine [PT97] [BSE11]:

- Zbir vrednosti Bernstein-ovih polinoma za svaku vrednost ξ na celokupnom intervalu $(-1,1)$ je jednaka 1.

$$\sum_{i=1}^{p+1} B_{i,p}(\xi) = 1 \quad \forall \xi \in (-1, 1) \quad (6.24)$$

- Vrednost polinoma na celokupnom intervalu $(-1,1)$ nije negativna:

$$B_{i,p}(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in (-1, 1) \quad (6.25)$$

- Polinomi imaju samo jedan maksimum na intervalu $(-1, 1)$ za vrednost parametra ξ :

$$\xi = 2 \frac{i-1}{p} - 1 \quad (6.26)$$

- Prvi i poslednji polinom za svaki nivo rekurzije dostiže vrednost 1 u tački $\xi=-1$ ili $\xi=1$.

$$B_{1,p}(-1) = B_{p+1,p}(1) = 1 \quad (6.27)$$

– Simetričnost polinoma oko ose $\xi = 0$:

$$B_{i,p}(\xi) = B_{p+1-i,p}(-\xi) \quad (6.28)$$

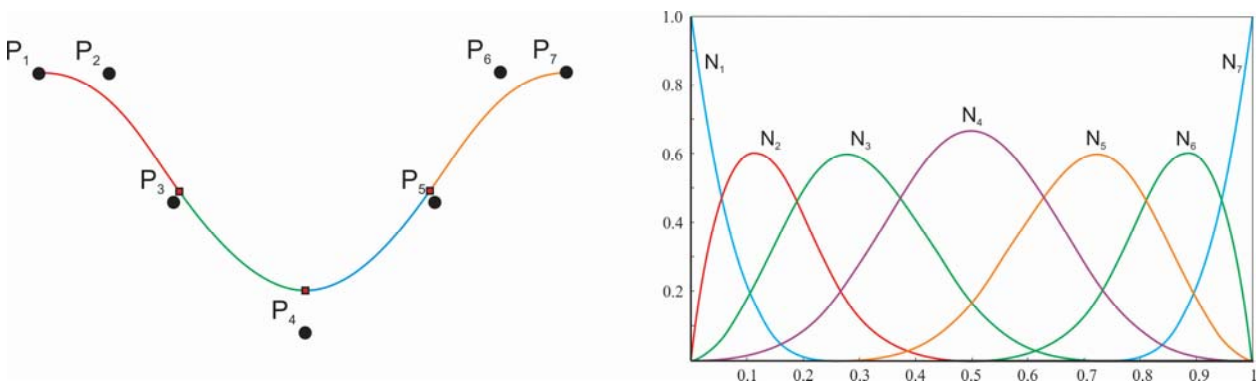
Bézier-ova ekstrakcija T-splajna podrazumeva tačno opisivanje T-splajn osnovnih funkcija na svakom T-splajn elementu u funkciji skupa Bernstein-ovih polinoma. Svaka T-splajn osnovna funkcija posmatrana samo lokalno na oblasti elementa može se predstaviti kao kombinacija Bernstein-ovih polinoma odgovarajućeg stepena (slika 6.14). Ekstrakcija osnovnih funkcija elementa e može se predstaviti:

$$N_a^e(\tilde{\xi}) = \sum_{b=1}^{(p+1)^{d_s}} c_{a,b}^e B_b(\tilde{\xi}) \quad (6.29)$$

gde su $N_a^e(\tilde{\xi})$ a -ta osnovna funkcija T-splajn elementa e , $B_b(\tilde{\xi})$ Bernstein-ova osnovna funkcija stepena p i $c_{a,b}^e$ ekstrakcioni operator a -te osnovne funkcije T-splajna za b -tu Bernstein-ovu osnovnu funkciju. Matrično se može zapisati:

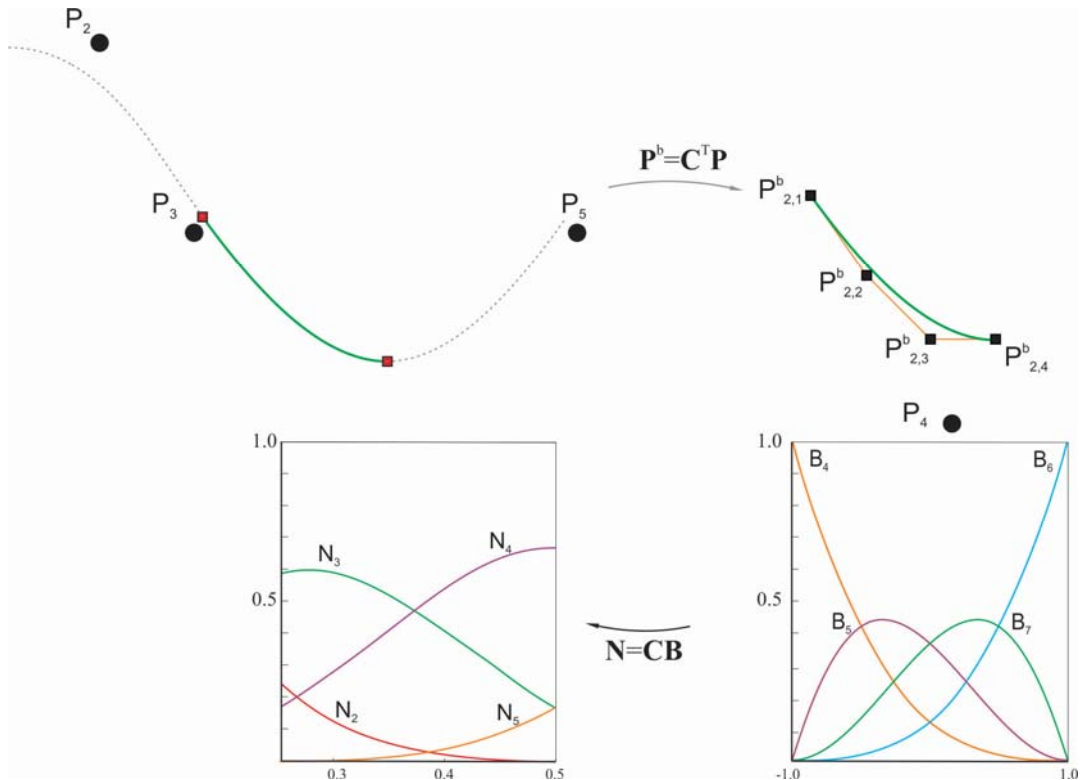
$$\mathbf{N}^e(\tilde{\xi}) = \mathbf{C}^e \mathbf{B}(\tilde{\xi}) \quad (6.30)$$

Bernstein-ovi polinomi su jednaki B-splajn osnovnim funkcijama na jednom rasponu čvorova sa ponavljanjem čvorova na oba kraja raspona koji odgovara stepenu polinoma. Operator Bézier-ove ekstrakcije preslikava u delovima bazu Bernstein-ovih polinoma u bazu B-splajna. Ova transformacija omogućava da se koriste po delovima C^0 Bézier-ovi elementi za predstavljanje konačnih elemenata za NURBS i T-splajn geometriju.



Slika 6.15. Prikaz B-spline krive i osnovnih funkcija

Da bi se opisao postupak ekstrakcije prvo je potrebno definisati postupak predstavljanja NURBS-a Bézier-ovim elementima preko postupaka Bézier-ove dekompozicije. Na slici 6.16 predstavljen je postupak Bézier-ove dekompozicije elementa B-splajn krive prikazane na slici 6.15.



Slika 6.16. Prikaz postupka Bézior-ove dekompozicije jednog elementa krive B-splajna sa transformacijom u Bézior-ovu krivu i povratnim određivanjem B-splajn osnovnih funkcija.

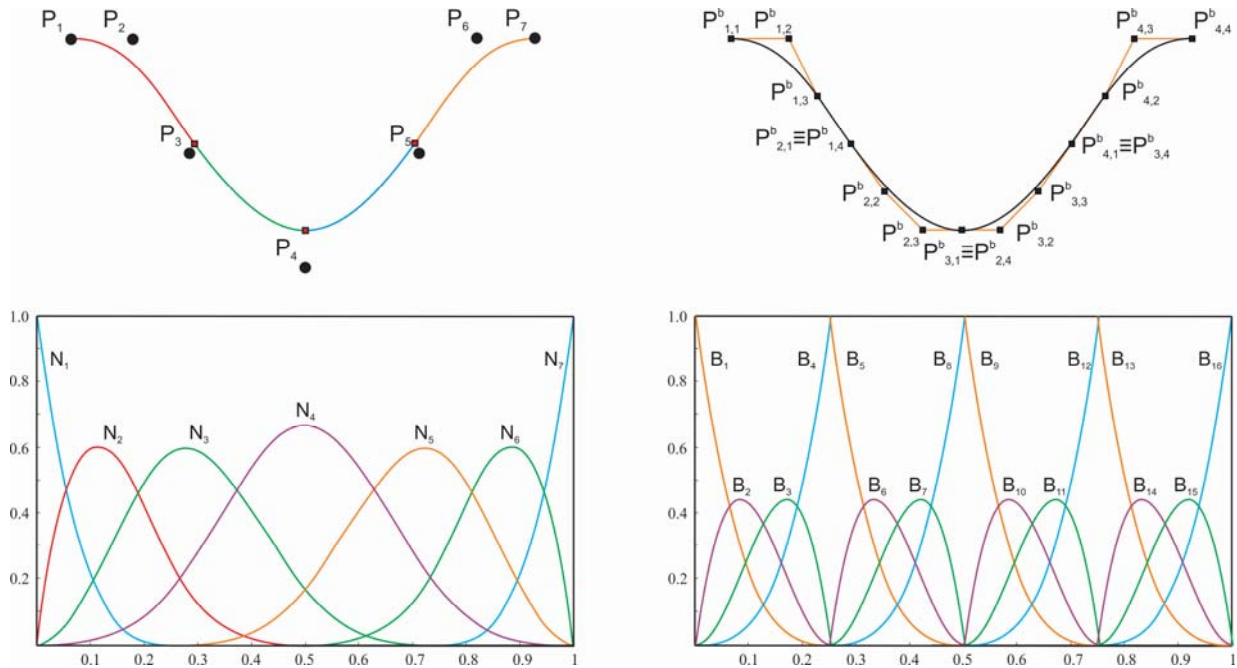
6.5 Bézior-ova dekompozicija

Tehnički postupak Bézior-ove dekompozicije se ostvaruje ponavljanjem svih unutrašnjih čvorova u vektoru čvorova dok se ne postigne stepen ponavljanja $p+1$ [BSE11]. Postupak ponavljanja čvorova se ostvaruje primenom algoritama za umetanje čvorova. Umetanje čvorova u vektor čvorova može se ostvariti bez promene geometrije krive (videti poglavlje 2.6.1). Neka je dat vektor čvorova $\Xi = \{\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{n+p+1}\}$. Ubacivanje novog čvora $\bar{\xi} \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$ gde je $k > p$ zahteva sračunavanje $n+1$ nove osnovne funkcije za novi vektor čvorova $\Xi = \{\xi_1, \xi_2 \dots \xi_k, \bar{\xi}, \xi_{k+1} \dots \xi_{n+p+1}\}$. Na osnovu postojećih tačaka kontrolnog poligona $\{P^A\}, A = 1, \dots, n$, formira se novih m ($m=n+1$) tačaka kontrolnog poligona $\{\bar{P}^A\}, A = 1, \dots, m$, primenom sledećih relacija:

$$\bar{P}^A = \begin{cases} P^1, & A = 1, \\ \alpha_A P^A + (1 - \alpha_A) P^{A-1}, & 1 < A < m \quad \text{gde su:} \\ P^n, & A = m, \end{cases}$$

$$\alpha_A = \begin{cases} 1, & 1 \leq A \leq k - p, \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_A}{\xi_{A+p} - \xi_A}, & k - p + 1 \leq A \leq k \\ 0, & A \geq k + 1, \end{cases} \quad (6.30)$$

Neka je kriva data preko vektora čvorova $\Xi = \{0,0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1,1\}$. Da bi sproveli Bézier-ovu dekompoziciju potrebno je ubaciti nove čvorove u vektor čvorova i to $\{0.25, 0.25, 0.5, 0.5, 0.75, 0.75\}$. Ubacivanje čvorova se vrši postepeno. Početne i krajnje osnovne funkcije (nakon ubacivanja svih čvorova) prikazane su na slici 6.17. Kao posledica dekompozicije krive na Bézier-ove elemente smanjuje se stepen kontinualnosti na mestu lokacije čvorova na C^0 .



Slika 6.17. NURBS kriva pre i posle postupka dekompozicije

Bézier-ov operator ekstrakcije

Da bi NURBS krivu predstavili pomoću Bézier-ovih elemenata potrebno je odrediti operator ekstrakcije. Neka je dat vektor čvorova $\Xi = \{\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{n+p+1}\}$ i skup kontrolnih tačaka $\{P_A\}$, $A = 1, \dots, n$, koji definišu B-splajn krivu. Neka je $\{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_m\}$ skup čvorova potrebnih za Bézier-ovu dekompoziciju B-splajna. Tada se za svaki čvor $\bar{\xi}_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, određuje α_A^j , $A=1, 2, \dots, n+j$ prema (6.30). Sada se može definisati operator koji preslikava skup tačaka kontrolnog poligona pre ubacivanja novog čvora u skup tačaka novog kontrolnog poligona. Operator $C^j \in \mathbb{R}^{(n+j-1) \times (n+j)}$ ima oblik [BSE11]:

$$C^j = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 - \alpha_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 - \alpha_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 1 - \alpha_4 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & \alpha_{(n+j-1)} & 1 - \alpha_{(n+j)} \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Uvođenjem oznake $\bar{P}^1 = P$ jedničina (6.30) može se predstaviti u matricnoj formi:

$$\bar{P}^{j+1} = (\mathbf{C}^j)^T \bar{P}^j \quad (6.32)$$

Skup tačaka koji se dobija posle ubacivanja poslednjeg čvora \bar{P}^{m+1} definiše Bézier-ove elemente dekompozicije. Ako se sa P^b označi poslednje sračunat skup tačaka \bar{P}^{m+1} i operator $\mathbf{C}^T = (\mathbf{C}^m)^T (\mathbf{C}^{m-1})^T \dots (\mathbf{C}^1)^T$ dobija se:

$$\mathbf{P}^b = \mathbf{C}^T \mathbf{P} \quad (6.33)$$

Obzirom da je početni vektor tačaka P imao dimenziju $n \times d$, matrica transformacije \mathbf{C}^T ima dimenziju $n \times (n+m)$ a krajnji skup kontrolnih tačaka P^b ima dimenziju $(n+m) \times d$.

NURBS kriva se može predstaviti:

$$T(\xi) = (\mathbf{P}^b)^T \mathbf{B}(\xi) = (\mathbf{C}^T \mathbf{P})^T \mathbf{B}(\xi) = \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi) = \mathbf{P}^T \mathbf{N}(\xi) \quad (6.34)$$

Obzirom da je skup tačaka proizvoljan, prethodna jednačina pokazuje da je određena nova osnova (baza) i linearni operator takav da je:

$$\mathbf{N}(\xi) = \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi) \quad (6.35)$$

Matrica \mathbf{C} se naziva operator Bézier-ove ekstrakcije.

Osnove funkcije NURBS se u vektorskom obliku mogu predstaviti na sledeći način:

$$\mathbf{R}(\xi) = \frac{1}{W(\xi)} \mathbf{W} \mathbf{N}(\xi) \quad (6.36)$$

gde je sa \mathbf{W} označena dijagonalna matrica težinskih koeficijenata.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

Koristeći Bézier-ov operator ekstrakcije dobijamo predstavljanje NURBS krive koristeći Bézier-ove osnovne funkcije [BSE11]:

$$\begin{aligned} T(\xi) &= \sum_{A=1}^n \mathbf{P}_A R_A(\xi) = \mathbf{P}^T \mathbf{R}(\xi) = \frac{1}{W(\xi)} \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{N}(\xi) = \frac{1}{W(\xi)} \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi) \\ &= \frac{1}{W(\xi)} (\mathbf{C}^T \mathbf{W} \mathbf{P})^T \mathbf{B}(\xi) \end{aligned} \quad (6.38)$$

Delilac u prethodnoj jednačini može se sračunati i za Bézier-ovu bazu na sledeći način:

$$W(\xi) = \sum_{A=1}^n w_A N_A(\xi) = \mathbf{w}^T \mathbf{N}(\xi) = \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi) = (\mathbf{C}^T \mathbf{w})^T \mathbf{B}(\xi) = (\mathbf{w}^b)^T \mathbf{B}(\xi) = W^b(\xi) \quad (6.39)$$

U prethodnoj jednačini sa \mathbf{w} označen je vektor težinskih koeficijenata $\mathbf{w} = \{w_A\}$, $A = 1, \dots, n$; $\mathbf{w}^b = \mathbf{C}^T \mathbf{w}$ predstavlja vektor težinskih koeficijenata vezanih za Bézier-ove osnovne funkcije.

Da bi sračunali tačke kontrolnog poligona Bézier-ovih elemenata potrebno je prvo definisati dijagonalnu matricu \mathbf{W}^b :

$$\mathbf{W}^b = \begin{bmatrix} w_1^b & & & \\ & w_2^b & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_{n+m}^b \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Imajući u vidu da je \mathbf{W}^b dijagonalna matrica, tačke kontrolnog poligona Bézier-ovih elemenata se sračunavaju na osnovu sledeće jednačine:

$$\mathbf{P}^b = (\mathbf{W}^b)^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \quad (6.41)$$

Na osnovu prethodnog izraza sledi:

$$\mathbf{W}^b \mathbf{P}^b = \mathbf{C}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \quad (6.42)$$

Odnosno smenom u jednačinu NURBS krive dobijamo:

$$T(\xi) = \frac{1}{W^b(\xi)} (\mathbf{W}^b \mathbf{P}^b)^T \mathbf{B}(\xi) = \sum_{A=1}^{n+m} \frac{\mathbf{P}_A^b w_A^b B_A(\xi)}{W^b(\xi)} \quad (6.43)$$

Bézier-ova ekstrakcija T-splajnova

Bézier-ova ekstrakcija T-splajna se neznatno razlikuje od ekstrakcije NURBS-a ili B-splajna [SBV11]. Osnovna razlika je u tome što NURBS i B-splajn imaju globalnu parametrizaciju dok T-splajn ima lokalnu. To ima za posledicu dve razlike u sračunavanju operatora ekstrakcije. Prva razlika je u tome što se kod T-splajna uglavnom ne radi sa otvorenim vektorima čvorova. Kako početni i krajnji element vektora čvorova treba da imaju stepen ponavljanja $p+1$ neophodno je proširiti vektore čvorova. Druga razlika se sastoji u tome što svaki lokalni vektor čvorova odgovara određenoj funkciji i kako se obrađuje tako se i sračnava po jedan red u ekstrakcionom operatoru

odgovarajućeg elementa. Proširenje lokalnog vektora čvorova, kako bi bio otvoren, ne utiče na parametarski opis početne T-splajn funkcije. Nakon proširenja posmatrana osnovna funkcija imaće numeraciju n_i+1 gde je n_i broj elemenata kojima je dopunjen lokalni vektor čvorova dodat na početku.

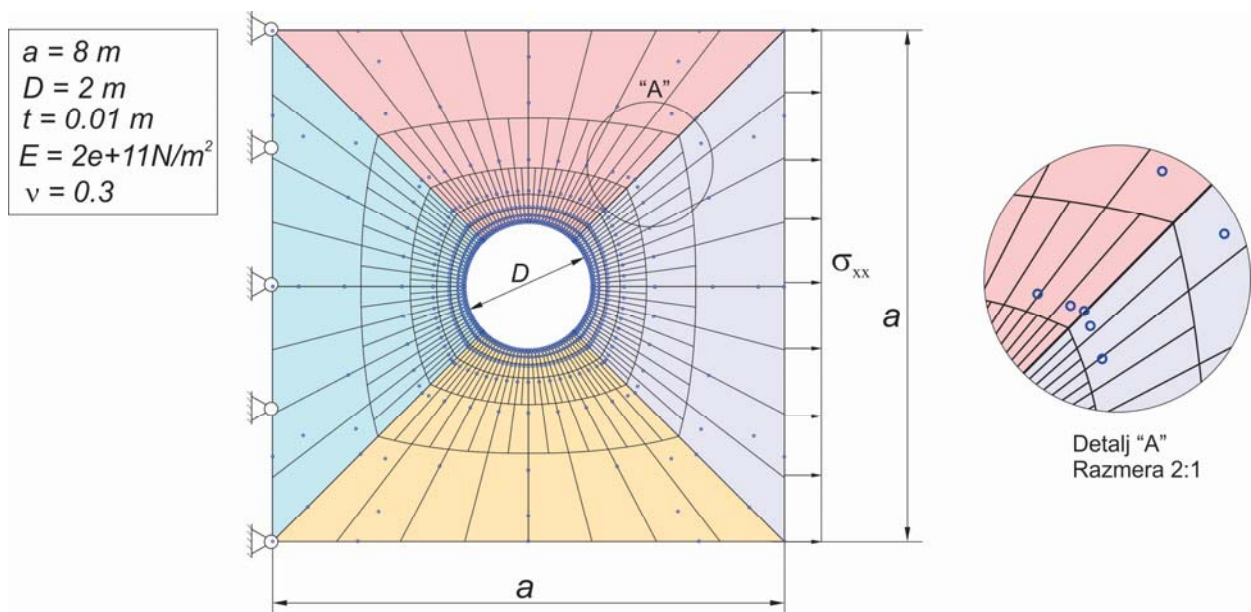
Kod T-splajna su uglavnom lokalni vektori čvorova otvoreni. Prošireni vektori čvorova se formiraju dodavanjem najčešće p puta početnog i krajnjeg elementa u vektoru čvorova kako bi se formirao vektor čvorova sa ponavljanjem početnog i krajnjeg elementa od $p+1$ puta. Nakon formiranja proširenog vektora čvorova Bézier-ova ekstrakcija jednog reda se vrši slično kao i kod NURBS-a:

$$N_A(\xi_A)|_e = N_a^e(\xi) = (c_a^e)^T B(\xi) \quad (6.44)$$

gde je sa A označen globalni broj a -te osnovne funkcije elementa e . Oznaka $|_e$ predstavlja ograničenje samo na domen Bézier-ovog elementa e .

6.6 Numerički primer pločice sa otvorom sa više T-splajn površi

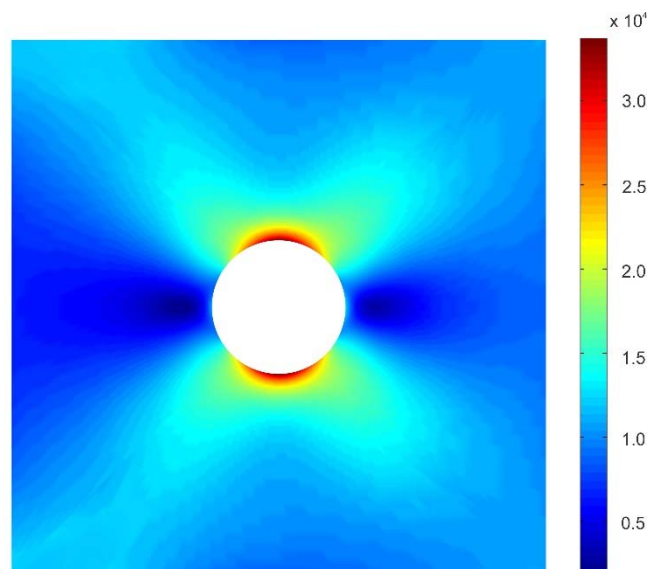
Primena izogeometrijske analize sa T-splajn osnovnim funkcijama biće prikazana na relativno prostom primeru linearne statičke analize ravanskog modela. Posmatrani model je kao i u četvrtom poglavlju pločica sa otvorom modelirana sa više T-splajn patcheva. Rezultati izogeometrijskih analiza su poređeni sa rezultatima dobijenim u komercijalnom softveru ANSYS i sa rezultatima modela sa NURBS osnovnim funkcijama. Na slici 6.18 prikazan je FE model pločice sa otvorom.



Slika 6.18. T-splajn model pločice sa otvorom

Opterećenje je definisano po liniji inteziteta 10kN/cm. Oslonci su definisani u tačkama kontrolnog poligona na suprotnoj stranici ograničavanjem pomeranja u svim pravcima. Na formiranom modelu mogu se primetiti tačke kontrolnog poligona koje se oko otvora nalaze na znatno manjem rastojanju od tačaka na spoljašnoj granici patcheva. Model je formiran sa četiri patcha od kojih svaki ima 187 čvorova i 152 elementa. Svaki element je određen sa 16 tačaka kontrolnog poligona, osnovnim funkcijama trećeg reda u oba pravca i operaterom Bézier-ove ekstrakcije (dimenzija 16x16). Na slici 6.18 na detalju modela mogu se videti formirani T-spojevi.

Rezultati analize prikazani su na slici 6.19. Najveća vrednost normalnog napona u pravcu dejstva opterećenja (mesto najveće koncentracije napona na delu kružnice) iznosi 33.7217 KN/cm². Upoređujući dobijene rezultate sa rezultatima analize pločiće sa otvorom sa četiri NURBS patcha prikazanoj u poglavlju četiri i modelom u ANSYS-u može se reći da u odnosu na komercijalni softver rezultati odstupaju 1.5% a u odnosu na NURBS model istog reda osnovnih funkcija i sa 400 elemenata po patchu odstupanje iznosi 1.46%. Dobijene vrednosti napona se nalaze između vrednosti dobijenih u komercijalnom softveru i sa NURBS modelom.



Slika 6.19. Normalna komponenta napona σ_{xx} (N/cm²) - izogeometrijska strukturna analiza na T-splajn geometriji formiranoj sa 4 patcha

PROBLEM SOPSTVENIH VREDNOSTI I EKSPLICITNA TRANZIJENTNA DINAMIČKA ANALIZA

U ovom poglavlju posebna pažnja će biti posvećena problemu sopstvenih vrednosti i eksplicitnoj tranzijentnoj dinamičkoj analizi. Razlog analize ponašanja izogeometrijskog modela sa NURBS osnovnim funkcijama u dinamičkim analizama je specifičnost osnovnih funkcija i organizacija strukture NURBS modela. U izogeometrijskoj analizi često se koriste osnovne funkcije višeg stepena koje se prostiru najčešće kroz više elemenata a što uslovljava veći stepen kontinuiteta na granici elemenata [CRB06]. Posmatranje strukture kao celine sa jednim patch-om predstavlja razliku u odnosu na klasičan metod konačnih elemenata.

7.1 Problem sopstvenih vrednosti

Analiza NURBS elementima sa kontinualnošću na granicama elementa jednakim ili većim od C^1 omogućuje da se dinamičko ponašanje konstrukcije posmatra kontinuirano kako u celosti tako i na nivou elemenata bez prekida. Kod većine tipova elementa u klasičnoj FEM kod kojih je kontinuitet na granicama elemenata jednak C^0 jasno se izdvajaju oblici oscilovanja strukture i elemenata (viši modovi oscilovanja).

Problem sopstvenih vrednosti posmatran u ovom poglavlju odnosi se na posebnu vrstu dinamičke analize, imajući u vidu da se ovaj problem može koristiti i u analizama stabilnosti statičkih sistema. Problem sopstvenih vrednosti može se formulisati preko rešenja dinamičke jednačine ravnoteže [Bat96]. Dinamička jednačina slobodnih neprigušenih oscilacija može se predstaviti u obliku [Bat96]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (7.1)$$

Gde je \mathbf{K} matrica krutosti a \mathbf{M} inerciona matrica sistema konačnih elemenata, \mathbf{U} i $\ddot{\mathbf{U}}$ predstavljaju pomeranja odnosno ubrzanja tačaka kontrolnog poligona patcha. Ukoliko se rešenje pretpostavi u obliku:

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Phi} \sin(\omega(t - t_0)) \quad (7.2)$$

gde su $\mathbf{\Phi}$ sopstveni vektori, prethodna jednačina dobija oblik

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{\Phi} = \lambda \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Phi} \quad (7.3)$$

gde je λ matrica sopstvenih vrednosti a $\mathbf{\Phi}$ matrica sopstvenih vektora. Sopstvene vrednosti λ_i predstavljaju kvadrate sopstvenih kružnih frekvencija ω_i^2 . Iz prethodne jednačine se može zaključiti da jednakost važi i ukoliko se obe strane jednačine pomnože konstantom odakle proizilazi da sopstveni vektori određuju samo oblik odgovarajućeg moda oscilovanja.

Jednačina (1) se može prikazati u obliku:

$$(\mathbf{K} - \lambda \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{\Phi} = \mathbf{0} \quad (7.4)$$

čijim se rešavanjem po nepoznatim sopstvenim vrednostima λ iste mogu odrediti:

$$|\mathbf{K} - \lambda \cdot \mathbf{M}| = 0 \quad (7.5)$$

Rešenje prethodne jednačine predstavlja traženje korena polinoma $p(\lambda)$ čiji stepen odgovara redu matrica \mathbf{K} i \mathbf{M} , a koji se kod složenijih sistema sa brojem nepoznatih većim od 4 (kakav je i slučaj u metodi konačnih elemenata) ne može rešiti analitičkim postupkom. Iz tog razloga je u metodi konačnih elemenata, u osnovi metoda koje se koriste za određivanje sopstvenih vrednosti iterativni postupak. U razvijenom softveru korišćen je subspace algoritam [Bat96] [Bat13].

Dobijeni sopstveni vektori treba da zadovolje uslov ortogonalnosti u odnosu na inercionu matricu \mathbf{M} tj.:

$$\mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi}_i = \delta_{ij} \quad (7.6)$$

gde je δ_{ij} Kronekerova delta funkcija. Na osnovu jednačine (7.3) i jednačine 7.6) proizilazi i ortogonalnost u odnosu na matricu krutosti \mathbf{K} :

$$\mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi}_i = \lambda_i \delta_{ij} \quad (7.7)$$

7.2 Formiranje inercione matrice

Inerciona matrica \mathbf{M} može se formirati na više načina [WLZ13] [SIV12] [LK13]. Najčešći oblik inercione matrice je takozvani *consistent* oblik. Modeliranje inercije sistema konzistentnim oblikom često se zamenjuje dijagonalnim (koncentrisanim) oblikom koji se u literaturi navodi kao *lumped* oblik. Oblik inercione matrice \mathbf{M} koja se koristi u direktoj je vezi sa vrstom analize koju želimo sprovesti, procesorskim vremenom potrebnim za rešavanje

problema i sa tačnošću analize. *Consistent* oblik inercione matrice je u opštem slučaju pozitivno semidefinitni gde su elementi glavne dijagonale $m_{ii} \geq 0$. Ukoliko svi elementi strukture imaju masu, *consistent inerciona matrica* \mathbf{M} će biti pozitivno definitna. *Lumped* oblik inercione matrice je pozitivno definitan samo u slučaju da su svi elementi na glavnoj dijagonali veći od nule. U opštem slučaju dijagonalni oblik inercione matrice je semidefinitan [Bat96].

Konzistentna inerciona matrica solid elementa određena je sledećim izrazom [Kol12]:

$$\mathbf{M}_e = \int_V \mathbf{N}_e^T \rho \mathbf{N}_e dV, \quad (7.8)$$

gde je \mathbf{N}_e interpolaciona matrica NURBS elementa a ρ predstavlja specifičnu masu materijala elementa [GV16]. Tipičan oblik matrice \mathbf{N}_e i-te tačke kontrolnog poligona elementa (u odnosu na jednačinu) predstavljena je jednačinom:

$$\mathbf{N}_{e_i} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

gde su sa N_i obeležene osnovne funkcije NURBS-a i-te tačke kontrolnog poligona elementa-odnosno patcha. Interpolaciona matrica elementa dimanzije $3n \times 3$ ima oblik:

$$\mathbf{N}_e = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

gde je sa n označen broj osnovnih funkcija elementa različitih od nule odnosno broj tačaka kontrolnog poligona koje se vezuju za odgovarajući element.

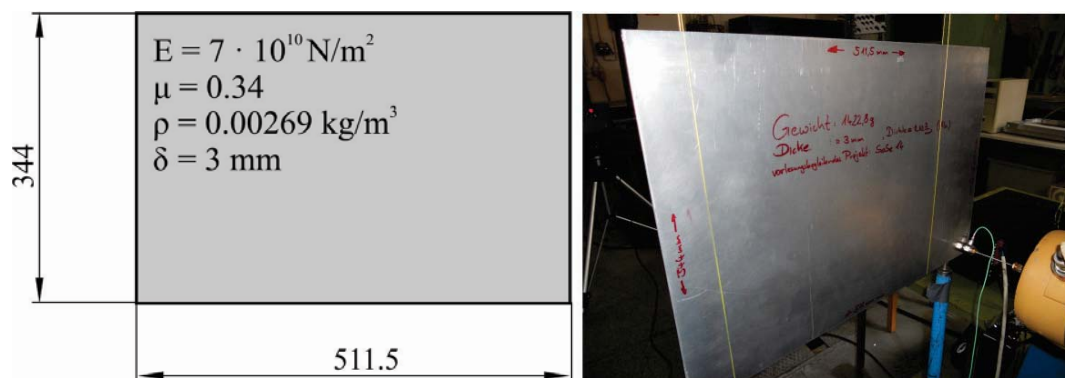
Inerciona matrica Reissner – Mindlin elementa tipa ploče može se odrediti na osnovu jednačine (7.8) gde se interpolacione matrice elemenata i-te tačke kontrolnog poligona \mathbf{N}_{e_i} mogu predstaviti kao [Mar07]:

$$\mathbf{N}_{e_i} = [\mathbf{N}_{e_i^T} \quad : \quad t_i \mathbf{N}_{e_i^R}] = \left[\begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad : \quad t_i \frac{h_i}{2} \begin{bmatrix} 0 & n_{3i} N_i & -m_{3i} N_i \\ -n_{3i} N_i & 0 & l_{3i} N_i \\ m_{3i} N_i & -l_{3i} N_i & 0 \end{bmatrix} \right] \quad (7.11)$$

gde su N_i označene osnovne funkcije NURBS-a i-te tačke kontrolnog poligona, t_i je lokalna koordinata u pravcu debljine ploče, h_i debljina ploče, l_{3i} , m_{3i} i n_{3i} određuju pravac normale površi u globalnom koordinatnom sistemu.

7.2 Modalna analiza slobodno oslonjene pravougaone ploče.

Kao model za jednostavnu demonstraciju primene izogeometrijske analize sa NURBS funkcijama oblika uzeta je pravugaona ploča od aluminijuma (slika 7.1). Dobijeni rezultati su upoređeni sa rezultatima analiza u komercijalnim softverima i sa eksperimentalnim rezultatima.



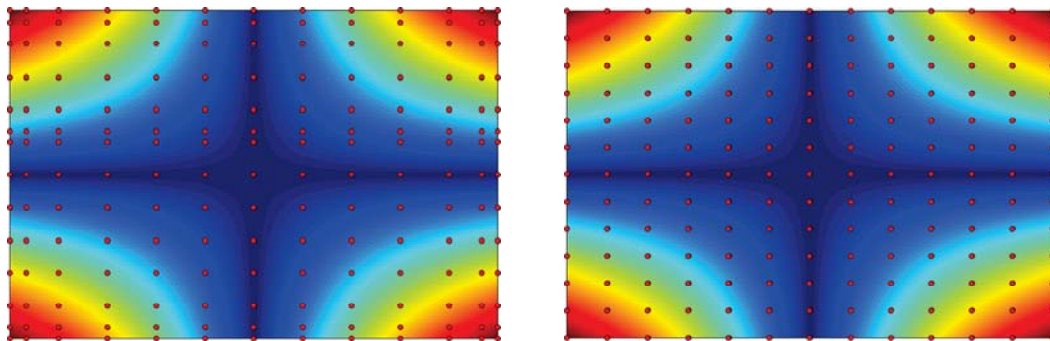
Slika 7.1 Model pravougaone ploče

Analizirano je šest modela sa NURBS osnovnim funkcijama različitih stepena i sa različitim vektorima čvorova. Rezultati analiza prikazani su tabelarno (Tabela 7.1). Ploča je diskretizovana sa 100 elemenata tipa Reissner Mindlin-ploče sa jednakim stepenima osnovnih funkcija u oba pravca $p = q = 2, 3$ i 4 . Ovako formirane mreže imaju različiti broj tačaka kontrolnog poligona (Tabela 7.1). Kao jedan od bitnih parametara kojim se utiče na rezultate analize je i vektor čvorova patcha. Broj elemenata vektora čvorova je uslovljen brojem elemenata patcha i kontinualnošću na granicama elemenata patcha. Preko vektora čvorova se utiče na raspored tačaka kontrolnog poligona.

Tabela 7.1 Pregled rezultata analize i merenja ploče od aluminijuma

		ANSYS	NURBS – ne uniformna mreža KE			NURBS – uniformna mreža KE			Merenje	
br. elem.		10x10	10x10	10x10	10x10*	10x10	10x10	10x10		
stepen. osn. funk.		2	2	3	4	2	3	4		
br. tačaka KP		-	12x12	13x13	14x14	12x12	13x13	14x14	Hz	odsupanje u odnosu na * %
Sopstveni oblik	7.	55.24	55.83	55.38	55.35	55.76	55.42	55.38	53.60	3.16
	8.	60.35	64.04	60.42	60.38	61.89	60.44	60.39	62.40	3.35
	9.	128.23	133.72	128.79	128.59	131.37	129.03	128.67	122.10	5.05
	10.	139.76	145.92	139.89	139.83	143.15	140.01	139.84	139.20	0.45
	11.	160.79	175.51	161.58	160.90	172.03	161.57	161.15	-	
	12.	189.41	223.41	190.34	189.55	207.93	190.45	189.80	182.80	3.56
	13.	239.68	276.96	241.61	239.99	261.24	241.76	240.63	233.20	2.83
	14.	273.57	286.19	275.04	274.34	281.77	275.92	274.63	267.30	2.57
	15.	342.86	-	354.40	342.55	415.76	344.58	343.64	334.80	2.26
	16.	376.78	436.09	379.67	376.86	433.37	378.99	377.71	376.20	0.18

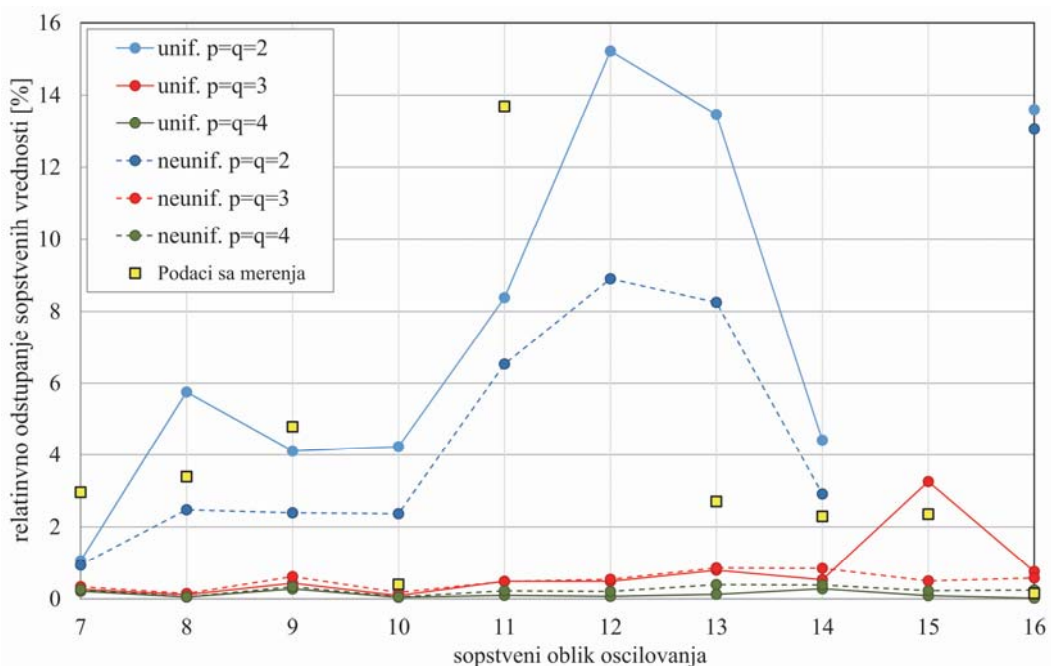
Ukoliko se za vektor čvorova uzme uniformni vektor sa jednakim rasponom između elemenata vektora čvorova (izuzimajući početne i krajnje elemente) kao rezultat se ne dobija ravnomeran raspored između tačaka kontrolnog poligona. Iz tog razloga u predstavljenoj analizi su posmatrane dve grupe modela, prva sa uniformnim vektorom čvorova i druga sa neuniformnim kod koje je vektor čvorova formiran sa ciljem da rastojanja između tačaka kontrolnog poligona budu što je moguće ravnomernija. Ovo nije moguće uvek postići zbog same prirode NURBS površi. Primer rasporeda tačaka kontrolnog poligona za stepen osnovnih funkcija 3 prikazan je na slici 7.2.



$$\mathbb{E} = \mathbb{H} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 2, \dots, 0.8, 0.9, 1, 1, 1, 1\} \quad \mathbb{E} = \mathbb{H} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 25, 0, 2501, 0, 251, 0, 499, 0, 5, 0, 501 \dots, 1, 1, 1, 1\}$$

Slika 7.2 Primer formiranih mreža sa uniformnim i neuniformnim vektorima čvorova

Dobijeni rezultati su poređeni sa rezultatima dobijenim u softveru Ansys sa kvadratnim elementom tipa SHELL 281 (referentni model). Na osnovu dobijenih rezultata može se zaključiti da sopstvene vrednosti modela sa NURBS kvadratnim osnovnim funkcijama u većoj meri odstupaju od rezultata modela sa NURBS funkcijama višeg stepena i od referentnog modela. Kao jedan od razloga može biti i modeliranje inercione matrice lumped oblikom.



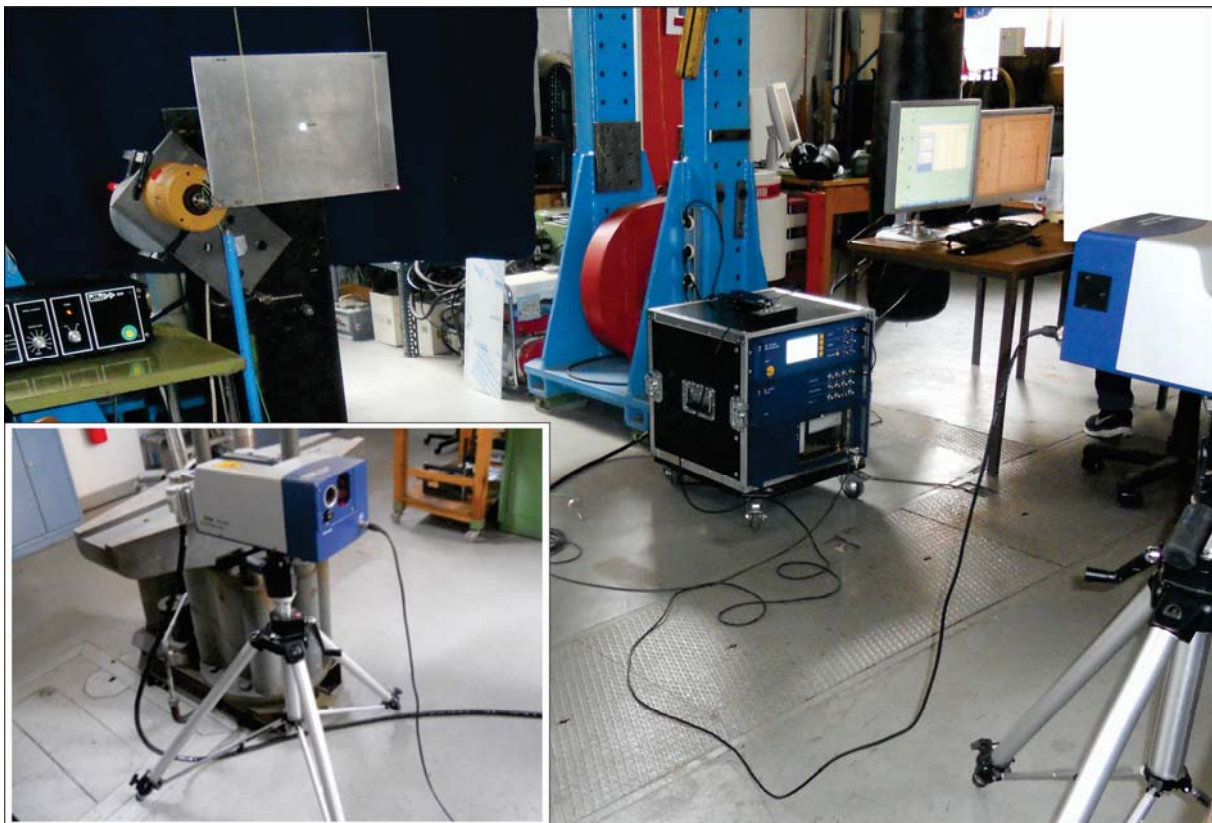
Slika 7.3 Relativno odstupanje rezultata analize NURBS modela u odnosu na rezultate referentnog modela

Rezultati dobijeni numeričkim putem sa NURBS elementima stepena većim od 2 odstupaju u odnosu na referentni model za manje od 0.5% za prvih 5 modova oscilovanja. Oblikom odgovaraju rezultatima dobijenim komercijalnim softverom. Uporedni sopstveni oblici merenja i analize sa NURBS osnovnim funkcijama prikazani su u Tabeli 7.2.

7.4 Eksperimentalno ispitivanje oscilovanja slobodno oslonjene pravougaone ploče

Eksperimentalnim ispitivanjem pravougaone ploče od aluminijuma modelirane u prethodnoj tački ima za cilj utvrđivanje sopstvenih vrednosti i sopstvenih oblika i poređenje sa rezultatima izogeometrijskih analiza. Korišćen je merni instrument za merenje vibracija koji radi na principu doplerovog efekta laserske svetlosti. Merenje je izvršeno u laboratoriji Instituta za mehaniku Tehničkog Univerziteta u Berlinu.

Korišćena merna oprema prikazana je na slici 7.4.



Slika 7.4 Postavka merne opreme

Korišćena oprema:

- Optički vibrometar: Polytec Optics- PSV-400 Vibrometer.
- Kontroler vibrometra - Polytec OFV 5000
- Softver za upravljanje i obradu rezultata merenja: PSV scanning vibrometer software

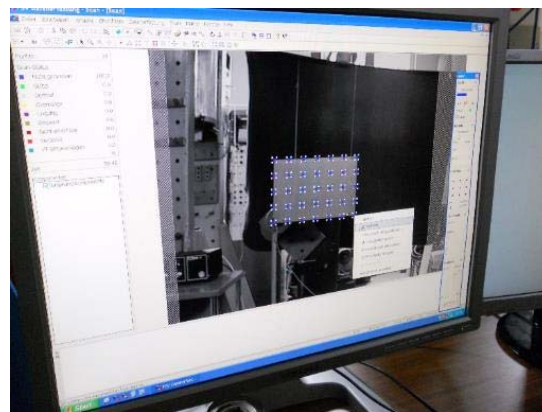
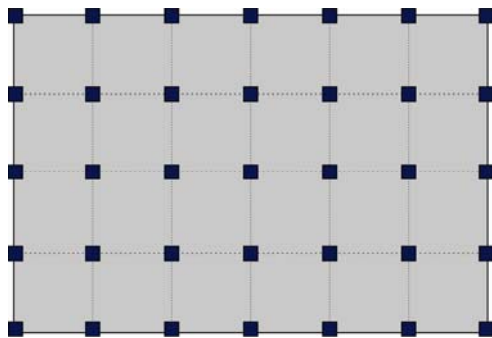
- Pobuđivač: Permanent Magnet Shaker V406
- Davač (pretvarač) sile: Force transducer Dytran 1051V3 81.363 mV/N

Objekat merenja:

Pravougaona ploča dimenzija 511.5 x 344 x 3 mm od aluminijuma specifične gustine 0.00269g/mm^3 modula elastičnosti $E=7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ puasonovog koeficijenta 0.34. (Slika 7.1).

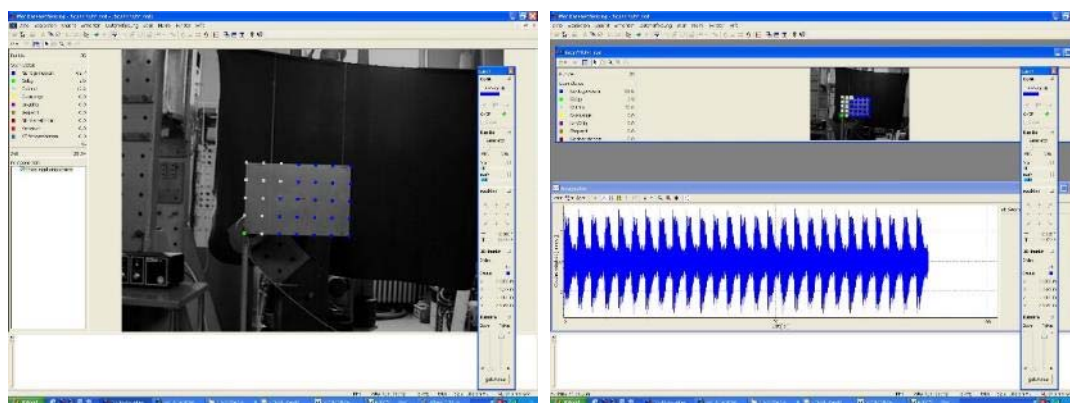
Tok merenja:

1. Objekat merenja je okačen tankim nitima zanemarljive mase za poprečnu gredu iznad ploče. Oslanjanje ploče izvedeno na ovaj način treba da simulira slobodno oslonjenu ploču. Pretpostavlja se da ovako izvedeno oslanjanje neće uticati značajno na oscilovanje ploče u pravcu normalnom na ravan ploče u domenu malih pomeranja.
2. U donjem levom uglu na rastojanju 10 mm od ivica je pričvršćen davač sile koji je sa druge strane pričvršćen za kotvu pobuđivača (shaker-a) (slika 7.4).
3. Pozicioniranje optičkog vibrometra se vrši kako po visini vibrometra tako i u podužnom pravcu objekta merenja. Pozicioniranje se vrši sa ciljem dobijanja maksimalnog inteziteta reflektovane svetlosti od objekta merenja.
4. Odredjivanje ravni merenja. Kako je merenje vršeno jednim optičkim vibrometrom, to se sva pomeranja određuju u odnosu na ravan merenja. Iz tog razloga je bilo bitno definisati ravan merenja i udaljenost od izvora svetlosnog zraka. To se postiže markiranjem laserskog zraka na rubne tačke merne ploče nakon čega uređaj određuje laserski rastojanje od svake tačke i na osnovu toga definiše ravan merenja.
5. Podešavanje parametara korišćenih perifernih uređaja predstavlja sledeći korak. U ovom delu potrebno je definisati karakteristike uređaja priključenih na vibro kontroler. Priljučeni uređaji su vibrometar PSV-400 koji meri brzinu kao i davač sile koji meri intezitet pobude i za koji je potrebno uneti vrednost faktora pretvarača.
6. Podešavanje frekventnog opsega u kojem se vrši merenje. Opseg merenja frekvencije je zadat od 0.045Hz do 2kHz. Na osnovu ovih podataka softver upravlja pobuđivačem menjajući pobudu u tom frekventnom opsegu prilikom prolaska laserske svetlosti kroz mernu tačku.
7. Ovim postupkom merenja ne dobijaju se rezultati u svakoj tački mernog objekta već samo u unapred definisanim tačkama. Na slici 7.5 prikazane su merne tačke plavim kvadratima.



Slika 7.5 Definisane tačkice u kojima će se vršiti merenje

8. Merenje: Softverski upravljano za svaku mernu tačku vrši se merenje promene brzine za definisani frekventni opseg (slika 7.6). Na osnovu dobijenih rezultata softver primenom brze Furijeove transformacije (FFT) određuje sopstvene vrednosti oscilovanja kao i pomeranja upravna na ravan merenja za svaku kontrolnu tačku.

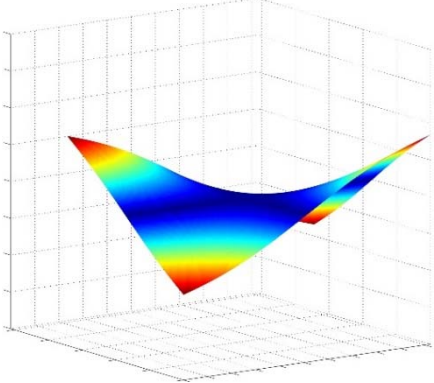
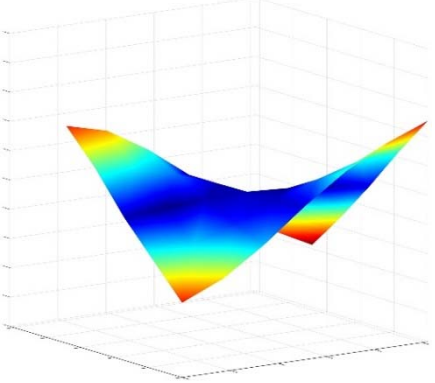
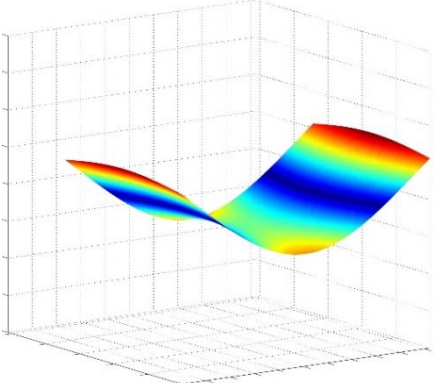
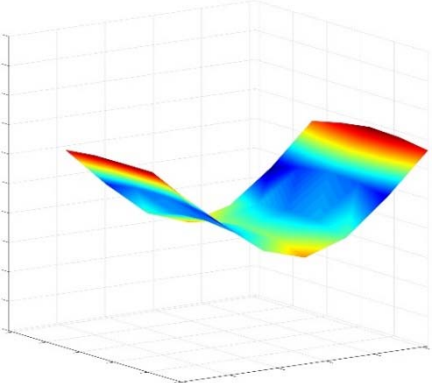
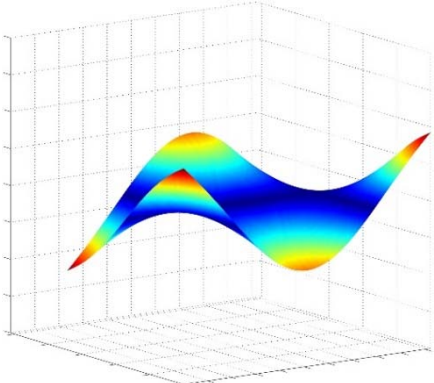
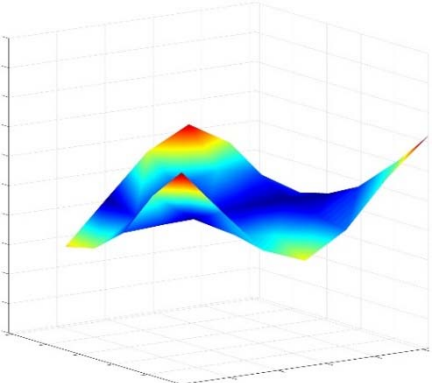
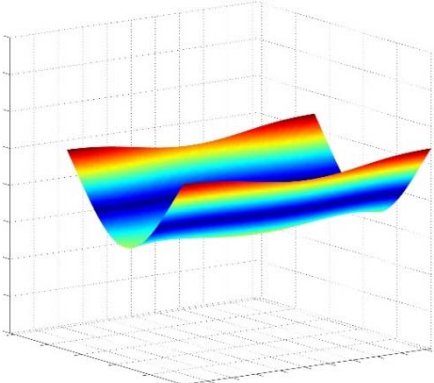
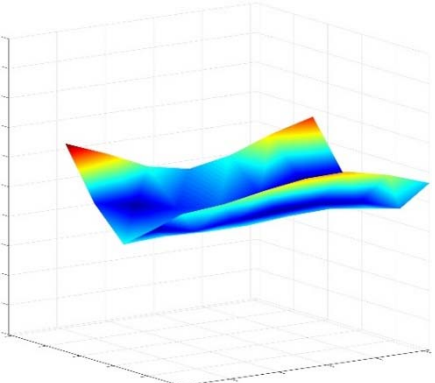


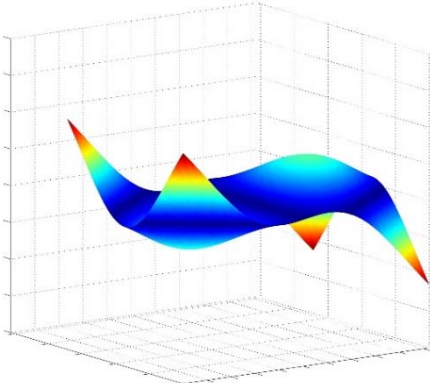
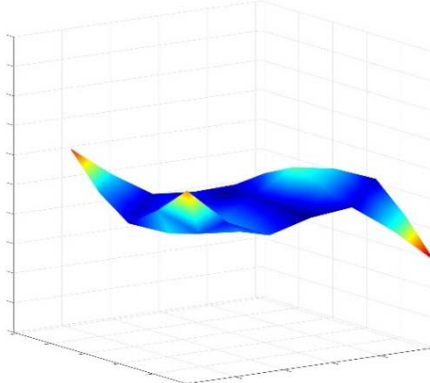
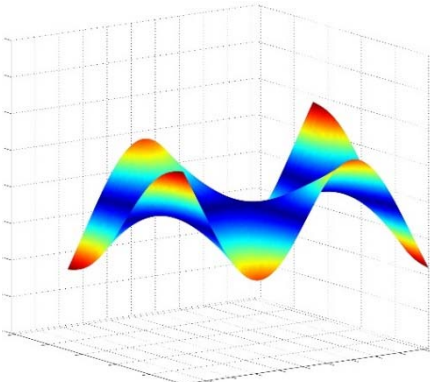
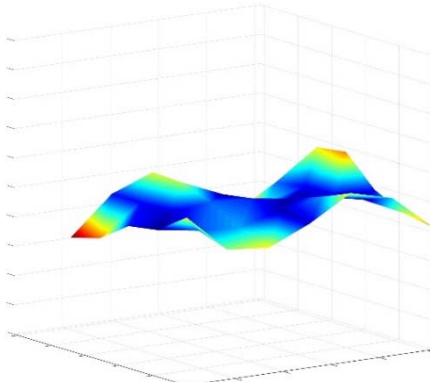
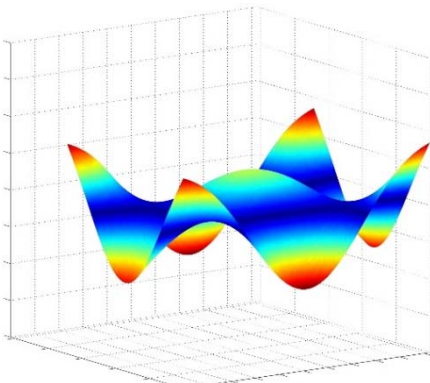
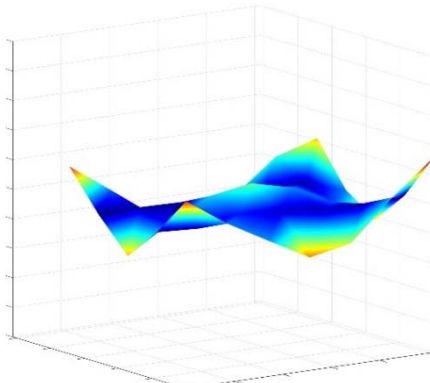
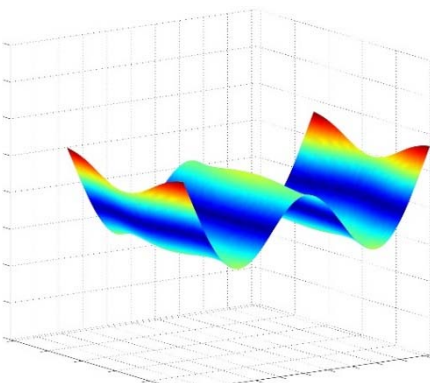
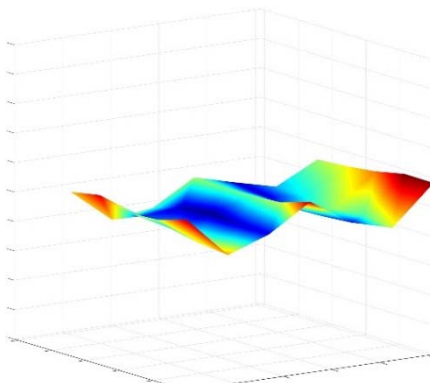
Slika 7.6 Praćenje merenja

Rezultati merenja:

Rezultati merenja su sopstvene vrednosti i sopstveni oblici oscilovanja. Sopstvene vrednosti slobodno oslonjene ploče (prvih osam vrednosti) date su tabelom 7.2. MAC analizom (Modal Assurance Criterion) utvrđeno je koji eksperimentalno utvrđeni oblici oscilovanja odgovaraju kojim numerički određenim modovima oscilovanja. Odstupanja sopstvenih vrednosti u odnosu na modele sa NURBS osnovnim funkcijama stepena 2 i 3 su najveća kod trećeg moda oscilovanja i njihovo relativno odstupanje iznosi 5.05%. Odstupanje treće sopstvene vrednosti dobijene u komercijalnom softveru u odnosu na rezultat modela sa NURBS osnovnim funkcijama, iznosi 4.7%. Odstupanje pojedinih tačkica u eksperimentalnom modelu od idealnog oblika su moguća zbog loše refleksije tačkica na ivici mernog objekta.

Tabela 7.2 Uporedni pregled sopstvenih oblika oscilovanja ploče

Oblici oscilovanja dobijeni izogeometrijskom analizom sa NURBS osnovnim funkcijama	Oblici oscilovanja dobijeni merenjem optičkim vibrometrom
 <p data-bbox="419 712 606 741">Mod 7. 55.38 Hz</p>	 <p data-bbox="991 712 1177 741">Mod 7. 53.60 Hz</p>
 <p data-bbox="419 1146 606 1176">Mod 8. 60.42 Hz</p>	 <p data-bbox="991 1146 1177 1176">Mod 8. 62.40 Hz</p>
 <p data-bbox="408 1581 617 1610">Mod 9. 128.79 Hz</p>	 <p data-bbox="979 1581 1189 1610">Mod 9. 122.10 Hz</p>
 <p data-bbox="400 2016 625 2045">Mod 10. 139.89 Hz</p>	 <p data-bbox="971 2016 1197 2045">Mod 10. 139.20 Hz</p>

Oblici oscilovanja dobijeni izogeometrijskom analizom sa NURBS osnovnim funkcijama	Oblici oscilovanja dobijeni merenjem optičkim vibrometrom
 <p data-bbox="399 660 622 689">Mod 12. 190.34 Hz</p>	 <p data-bbox="965 660 1189 689">Mod 12. 182.80 Hz</p>
 <p data-bbox="399 1093 622 1122">Mod 13. 241.61 Hz</p>	 <p data-bbox="965 1093 1189 1122">Mod 13. 233.20 Hz</p>
 <p data-bbox="399 1525 622 1554">Mod 14. 275.04 Hz</p>	 <p data-bbox="965 1525 1189 1554">Mod 14. 267.30 Hz</p>
 <p data-bbox="399 1957 622 1986">Mod 15. 354.40 Hz</p>	 <p data-bbox="965 1957 1189 1986">Mod 15. 334.80 Hz</p>

Kako je objekat merenja vezan preko dve niti za poprečnu traverzu, laserska svetlost koja dolazi neposredno do same ivice ploče može usled pomeranja pogoditi ivicu ploče i difuzno se odbiti. Ovo prouzrokuje rasipanje svetlosti od objekta merenja i nepreciznost merenja.

7.4 Eksplicitna dinamička izogeometrijska analiza

Razvijene procedure za integraciju osnovne dinamičke jednačine ravnoteže metodom konačnih elemenata mogu se podeliti u dve osnovne grupe metoda i to: metode direktne integracije i metode superponiranja modova oscilovanja. U metodama direktne integracije dinamička jednačina ravnoteže se integriraju procedurom korak po korak a prefiks direktna je dobila jer ne zahteva transformaciju dinamičkih jednačina u drugi oblik. Metode direktne integracije se dalje dele na grupu eksplicitnih i implicitnih metoda. Kod eksplicitnih metoda rešenje u vremenskom trenutku $t+\Delta t$ se određuje na osnovu jednačine ravnoteže u trenutku t (prošla informacija) dok implicitni metod koristi jednačinu ravnoteže u trenutku $t+\Delta t$. U pogledu rešavanja glavna razlika između njih je u „koštanju“ računarskih resursa za jedan vremenski korak kao i vrednosti vremenskog koraka u zavisnosti od kriterijuma stabilnosti rešanja. Implicitni metod je bezuslovno stabilan što i predstavlja njegovu glavnu prednost. Kod implicitne metode vremenski korak je uslovljen željom za tačnošću. Nasuprot implicitnoj, eksplicitni metod ne zahteva faktorizaciju matrice krutosti. Ova prednost eksplicitne metode se sa druge strane gubi zbog ograničenja u veličini vremenskog koraka koji mora biti manji od kritičnog a koji obezbeđuje stabilno rešenje. Vrednost kritičnog vremenskog koraka zavisi od najveće sopstvene vrednosti sistema konačnih elemenata a koja zavisi od diskretizacije (veličine elemenata). Ukoliko je analiza nelinearna, vrednost koraka se menja u toku vremena pošto zavisi od trenutne geometrije i osobina materijala. U eksplicitnoj tranzijentnoj analizi često se koristi dijagonalni (lumped) oblik inercione matrice i zanemaruje se uticaj matrice prigušenja C jer se time postiže jednostavan oblik za određivanje vektora deformacije u trenutku $t+\Delta t$ [Bat96].

Dinamička jednačina ravnoteže sistema konačnih elemenata u linearnom domenu može se predstaviti sledećom jednačinom:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (7.12)$$

Gde su \mathbf{M} , \mathbf{C} i \mathbf{K} inerciona matrica, matrica prigušenja i krutosti sistema konačnih elemenata a \mathbf{R} vektor spoljašnjeg opterećenja, \mathbf{U} , $\dot{\mathbf{U}}$ i $\ddot{\mathbf{U}}$ vektori pomeranja brzine i ubrzanja tačaka kontrolnog poligona sistema konačnih elemenata. U vremenskom trenutku t prethodna jednačina se može prikazati kao ravnoteža inercionih, prigušnih, elastičnih i spoljašnjih sila:

$$\mathbf{F}_I(t) + \mathbf{F}_D(t) + \mathbf{F}_E(t) = \mathbf{R}(t) \quad (7.13)$$

Solver za dinamičku eksplicitnu analizu najčešće primenjuje vremenski integracioni algoritam zasnovan na metodi centralne razilike. Po ovoj metodi ubrzanje i brzina se pretpostavljaju u funkciji pomeranja. Ubrzanje u trenutku t se može predstaviti:

$${}^t\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t^2} ({}^{t-\Delta t}\mathbf{U} - 2 {}^t\mathbf{U} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}) \quad (7.14)$$

Izraz za brzinu u trenutku t se može predstaviti:

$${}^t\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2\Delta t} (-{}^{t-\Delta t}\mathbf{U} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}) \quad (7.15)$$

Dinamička jednačina ravnoteže u trenutku t ima oblik:

$$\mathbf{M} {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} {}^t\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} {}^t\mathbf{U} = {}^t\mathbf{R} \quad (7.16)$$

gde se zamenom ranije definisanih vrednosti ubrzanja i pomeranja dolazi do jednačine:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{R} - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) {}^t\mathbf{U} - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} \quad (7.17)$$

u kojoj sračunavanje pomeranja ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ predstavlja rešenje koje se bazira na poznatim podacima u trenutku t . Za određivanje pomeranja ${}^{\Delta t}\mathbf{U}$ potrebno je znati pomeranja, brzine i ubrzanja u početnom trenutku $t = 0$ kao i u trenutku $-\Delta t$. Na osnovu prethodnih jednačina za određivanje brzine i ubrzanja u trenutku t i početnih uslova ${}^0\mathbf{U}$, ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ i ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$ mogu se odrediti pomeranja u trenutku ${}^{-\Delta t}\mathbf{U}$ po jednačini:

$${}^{-\Delta t}\mathbf{U}_i = {}^0\mathbf{U}_i - \Delta t {}^0\dot{\mathbf{U}}_i + \frac{\Delta t^2}{2} {}^0\ddot{\mathbf{U}}_i \quad (7.18)$$

gde je sa i označena i -ta komponenta posmatranog vektora.

Procedura eksplicitne dinamičke analize može se predstaviti sledećim algoritmom:

- Početna sračunavanja

1. Formiranje matrice krutosti \mathbf{K} , inercione matrice \mathbf{M} i matrice prigušenja \mathbf{C}
2. Definisanje početnih uslova
3. Određivanje koraka integracije i određivanje konstanti:

$$a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}; a_1 = \frac{1}{2\Delta t}; a_2 = 2a_0; a_3 = \frac{1}{a_2}$$

4. Sračunavanje vektora ${}^{-\Delta t}\mathbf{U}_i = {}^0\mathbf{U}_i - \Delta t {}^0\dot{\mathbf{U}}_i + \frac{\Delta t^2}{2} {}^0\ddot{\mathbf{U}}_i$
 5. Formiranje efektivne inercione matrice $\widehat{\mathbf{M}}: \widehat{\mathbf{M}} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$
 6. Faktorizacija matrice ako je consistent $\widehat{\mathbf{M}}: \widehat{\mathbf{M}} = \mathbf{LDL}^T$
-

- Sračunavanja u svakom vremenskom koraku

1. Sračunavanje efektivnog opterećenja u trenutku t po jednačini:

$${}^t\hat{\mathbf{R}} = {}^t\mathbf{R} - (\mathbf{K} - a_2\mathbf{M}) {}^t\mathbf{U} - (a_0\mathbf{M} - a_1\mathbf{C}) {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}$$

2. Sračunavanje pomeranja u trenutku $t + \Delta t$:

$$\mathbf{LDL}^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\hat{\mathbf{R}}$$

3. Sračunavanje ubrzanja i brzina u trenutku t :

$${}^t\ddot{\mathbf{U}} = a_0({}^{t-\Delta t}\mathbf{U} - 2 {}^t\mathbf{U} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{U})$$

$${}^t\dot{\mathbf{U}} = a_1(-{}^{t-\Delta t}\mathbf{U} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{U})$$

Prethodno prikazana procedura se može u znatnoj meri ubrzati ukoliko se koristi dijagonalni oblik matrice krutosti (*lumped*) i ukoliko se prigušenje vezano za brzinu oscilovanja zanemari. Ovim se metoda eksplicitne dinamičke analize u znatnoj meri ubrzava pa se u praksi često i koristi.

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\hat{\mathbf{R}} \quad (7.19)$$

Obzirom da je inverzna matrica dijagonalne matrice takodje dijagonalna matrica sa recipročnom vrednošću članova komponente vektora pomeranja se mogu sračunati na sledeći način:

$${}^{t+\Delta t}U_i = {}^t\hat{R}_i \left(\frac{\Delta t^2}{m_{ii}}\right) \quad (7.20)$$

Uslov stabilnosti metoda centralne razlike jeste da vrednost vremenskog koraka integracije mora biti manja od kritičnog koji se može sračunati po jednačini:

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{n \max}} = \frac{T_{n \min}}{\pi} \quad (7.21)$$

gde je $\omega_{n \max}$ najviša kružna sopstvena frekvencija sistema konačnih elemenata sa n stepeni slobode. Svi elementi glavne dijagonale inercione matrice moraju biti veći od nule jer bi nula član značio da postoji sopstvena vrednost sa periodom jednako nuli tj. da postoji sopstveni oblik sa beskonačno velikom učestalošću. Takođe, pri modeliranju strukture treba voditi računa da ne postoje elementi malih dimenzija u odnosu na ostale jer će u tom slučaju mala dužina elementa usloviti i postojanje veće sopstvene vrednosti a samim tim i stabilan korak integracije mora biti manji.

7.6 Određivanje kritične veličine koraka eksplicitne integracije

Određivanje vremenskog koraka eksplicitne analize u industrijskom softveru se najčešće određuje na osnovu najmanje veličine i tipa elementa [Bat96]. Ovo proizilazi iz pretpostavke

da svaki deo strukture (pa i do nivoa samog elementa) ima veću krutost od krutosti cele strukture. Drugim rečima maksimalna sopstvena vrednost lokalnog sistema je veća od maksimalne sopstvene vrednosti celog sistema tj.:

$$\max_{e \in [1, n]} \omega_{max}^e \geq \omega_{max} \quad (7.22)$$

Koristeći jednačinu (7.21) dolazi se do zaključka:

$$\Delta t_{max}^{element} = \min_{e \in [1, n]} \Delta t_{max}^e \leq \Delta t_{max} \quad (7.23)$$

Veličina koraka određena veličinom elementa zavisi i od korišćenih interpolacionih funkcija.

U osnovi vrednost koraka je funkcija:

$$\Delta t_{max}^{element} = f(L_e, c_0) \quad (7.24)$$

gde su L_e najmanja geometrijska veličina elementa, a c_0 brzina talasa kroz materijal ($c_0 = \sqrt{E/\rho}$) [CNN14] [HB15]. Kako su osobine homogenog materijala koje utiču na brzinu prostiranja mehaničkih talasa kroz materijal konstantne to se određivanje najvećeg stabilnog vremenskog koraka eksplicitne tranzijentne analize svodi na određivanje zavisnosti vremenskog koraka integracije od najmanje geometrijske veličine elementa, odnosno rastojanja između tačaka kontrolnog poligona. Znatno uticaj na veličinu koraka ima stepen interpolacionih funkcija kao i oblast definisanosti osnovnih funkcija. NURBS osnovne funkcije razlikuju se po obliku i oblasti definisanosti u zavisnosti da li su definisane na granici elementa ili u polju elementa. Oblast definisanosti funkcija se često prostire i kroz više elemenata. Takođe rastojanje između tačaka kontrolnog poligona u najvećem broju slučajeva ne predstavlja i rastojanje između dve tačke elementa jer tačke kontrolnog poligona se ne moraju nalaziti u polju elementa. Shodno tome određivanje maksimalne vrednosti stabilnog vremenskog koraka na osnovu veličine NURBS elementa nailazi na dosta poteškoća pa pojedini autori koriste i određene aproksimacije za određivanje vremenskog koraka u funkciji stepena polinoma, oblasti funkcije (na granici ili u polju elementa) kao i rastojanja između tačaka kontrolnog poligona [ABZ15].

Vrednost vremenskog koraka može se sa druge strane odrediti i na osnovu Gershgorin teoreme [ABZ15]. Teoremu koristimo za određivanje aproksimativne maksimalne sopstvene vrednosti proizvoda matrica $\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K}$. Kako matrica $\tilde{\mathbf{M}}^{-1}$ predstavlja inercionu dijagonalnu matricu Gershgorin teorema se koristi za određivanje gornje granice spektra matrice \mathbf{K} . Analogno dijagonalnoj matrici inercije može se formirati i dijagonalni oblik matrice krutosti $\tilde{\mathbf{K}}$:

$$\tilde{K}_{AA} = K_{AA} + \sum_{B \neq A} |K_{AB}| \quad \text{i} \quad \tilde{K}_{AB} = 0 \text{ za svako } A \neq B. \quad (7.25)$$

Maksimalne sopstvene vrednosti ovako formiranih matrica ispunjavaju sledeću nejednakost:

$$\omega_{\max}^{\tilde{M}^{-1}K} \leq \omega_{\max}^{\tilde{M}^{-1}\tilde{K}} \quad (7.26)$$

Obzirom da su dobijene matrice dijagonalne, maksimalne sopstvene vrednosti se mogu sračunati na sledeći način:

$$\omega_{\max}^{\tilde{M}^{-1}\tilde{K}} = \sqrt{\max_{i \in [1, n]} \frac{\tilde{K}_{AA}}{\tilde{M}_{AA}}} \quad (7.27)$$

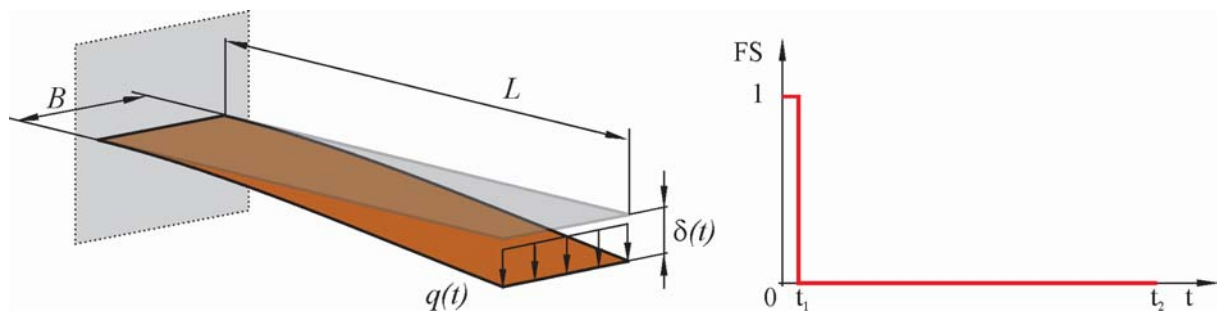
Granice sopstvenih vrednosti sistema konačnih elemenata sa dijagonalnim oblikom inercione matrice mogu se odrediti:

$$\omega_i^2 \leq \frac{1}{m_{ii}} \sum_{j=1}^n |k_{ij}| \quad (7.28)$$

od kojih se najveća vrednost koristi za određivanje vremenskog koraka analize po jednačini (7.21).

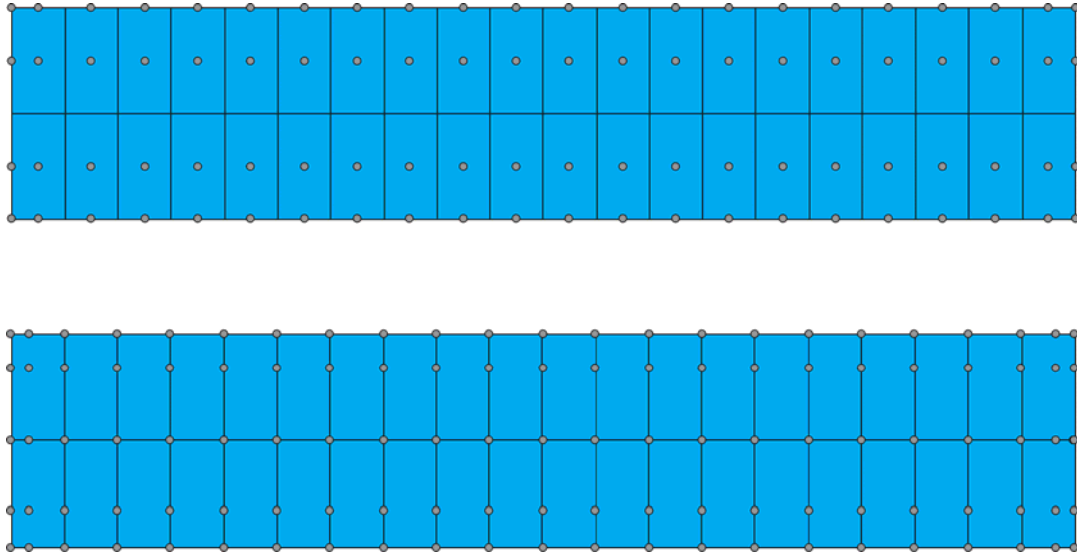
7.7 Eksplicitna dinamička analiza konzole

Ponašanje NURBS strukture u eksplicitnoj dinamičkoj analizi posmatrano je na modelu konzole prikazanoj na slici 7.7. i 7.8 Cilj analize je utvrditi dinamičko ponašanje ploče modelirane sa Reissner Mindlin elementima tipa ploče sa NURBS interpolacionim funkcijama različitih stepena osnovnih funkcija. Vremenski koraci integracije formiranih modela određeni su korišćenjem jednačina (7.28) i (7.21).



Slika 7.7 Model konzole

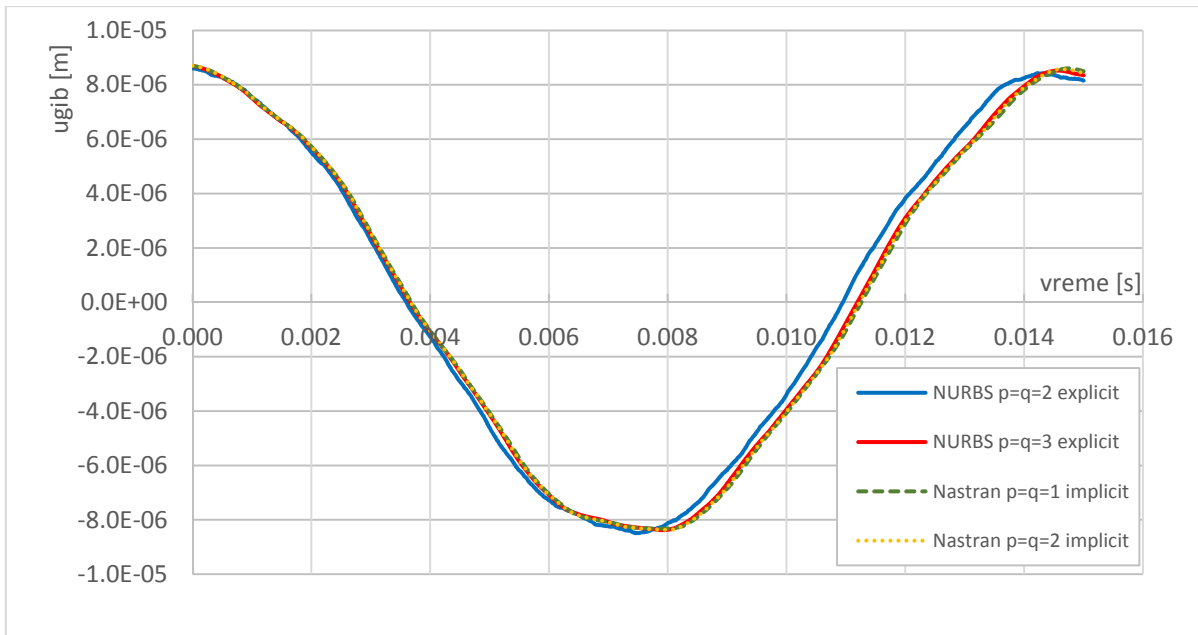
Konzola se u početnom trenutku nalazi u stanju ravnoteže pri dejstvu kontinualnog opterećenja na vrhu konzole. Početni uslovi su određeni položajem tačaka kontrolnog poligona pod dejstvom opterećenja $q(t_0)$. U trenutku $t_1=\Delta t$ opterećenje prestaje sa dejstvom $q(\Delta t)=0$. Ploča je dimenzija $L \times B=50 \times 10$ mm debljine 0.002 mm. Opeterećenje na vrhu konzole je zadato kao vremenski zavisno i u početnom trenutku je kontinualno inteziteta 0.01N/m.



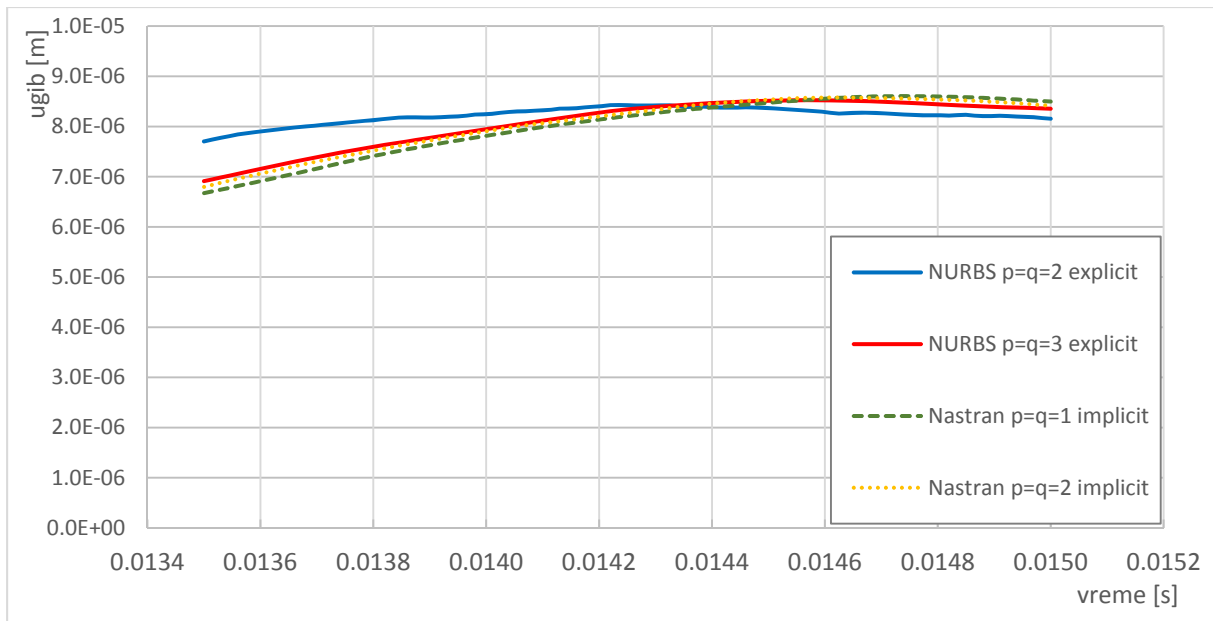
Slika 7.8 Mreža elemenata i tačke kontrolnog poligona modela sa uniformnim vektorima čvorova i osnovnim funkcijama drugog stepena (slika gore) i trećeg stepena (slika dole)

Trajanje simulacije je 0.015s. Vremenski korak integracije određen po jednačini 7.28 i 7.21 za model sa kvadratnim osnovnim funkcijama iznosi $\Delta t=4.327 \cdot 10^{-9}$ s dok za model sa osnovnim funkcijama trećeg stepena iznosi $\Delta t=2.477 \cdot 10^{-10}$ s. To podrazumeva da je ukupan broj koraka prvog modela jednak $3.47 \cdot 10^6$ a drugog modela $6.06 \cdot 10^7$.

Rezultati su upoređeni sa rezultatima implicitne tranzijentne analize u komercijalnim softverima sa istim brojem elemenata linijskih i kvadratnih funkcija oblika. Dobijeni rezultati prikazani su na slici 7.8.



Slika 7.9 Pregled rezultata tranzijentne dinamičke analize



Slika 7.10 Pregled rezultata tranzijentne dinamičke analize - detalj

Model sa kvadratnim osnovnim funkcijama NURBSA odstupa od rezultata dobijenih sa osnovnim funkcijama trećeg stepena kao i od rezultata implicitne analize u komercijalnim softverima.

Tabela 7.3 Uporedni pregled oscilovanja ploče

Model	Amplituda z_0 [m]	Amplituda $z_{0.015}$ [m]	$z_0 - z_t$ [m]	Amplituda z_T [m]	T [s]
NURBS $p=q=2$	$8.60146 \cdot 10^{-6}$	$8.15559 \cdot 10^{-6}$	$4.45870 \cdot 10^{-7}$	$8.42695 \cdot 10^{-6}$	0.014235
NURBS $p=q=3$	$8.68191 \cdot 10^{-6}$	$8.35187 \cdot 10^{-6}$	$3.30040 \cdot 10^{-7}$	$8.52141 \cdot 10^{-6}$	0.014565
Nastran linearni element	$8.69000 \cdot 10^{-6}$	$8.49829 \cdot 10^{-6}$	$1.91710 \cdot 10^{-7}$	$8.60470 \cdot 10^{-6}$	0.014745
Nastran kvadratni element	$8.70740 \cdot 10^{-6}$	$8.41558 \cdot 10^{-6}$	$2.91820 \cdot 10^{-7}$	$8.57820 \cdot 10^{-6}$	0.014610

Pregledom rezultata datim u tabeli 7.3 može se zaključiti da analiza sa NURBS elementima trećeg stepena ima malo odstupanje od rezultata dobijenih komercijalnim softverom sa kvadratnim elementima. Poređenjem rezultata ova dva modela može se zaključiti da je relativno odstupanje amplitude nakon prve periode 0.757% a odstupanje periode oscilovanja 0.37%.

Eksplicitna tranzijentna analiza ima uglavnom veliki broj koraka jer su veličine vremenskog koraka često male. Na prethodno prikazanom modelu oslonac – uklještenje je definisan penalty metodom koja podrazumeva da se za odgovarajući stepen slobode kretanja element matrice krutosti višestruko uveća, tj. uvodi se velika krutost u sistem koja simulira oslonac.

PRIMENA IZOGOMETRIJSKE ANALIZE ZA REŠAVANJE REALNIH PROBLEMA

U ovom poglavlju biće prikazana primena razvijenih numeričkih alata u rešavanju zadataka strukturne analize realnih konstrukcija. U prvom primeru je posmatrano ponašanje strele bagera BGH 250 NLC sa dubinskim manipulatorom pri statičkom spoljašnjem dejstvu [DJ04] U drugom primeru posmatrano je dinamičko ponašanje standardne kuke DIN 15 401. [DIN15 401].

8.1 Analiza strele bagera BGH 250 NLC

Na slici 8.1 prikazan je model bagera BGH 250 NLC proizvođača IMK 14. oktobar koji je razvijen u okviru projekta Ministarstva za nauku i tehnološki razvoj republike Srbije MIS.03.0087. Osnovni parametri mašine dati su u tabeli 8.1.

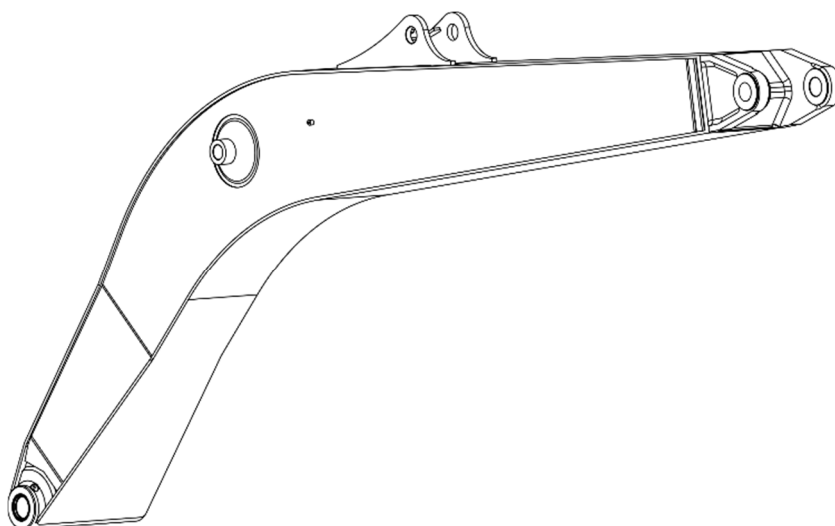


Slika 8.1 Bager BGH 250 NLC

Tabela 8.1 Osnovni podaci o mašini

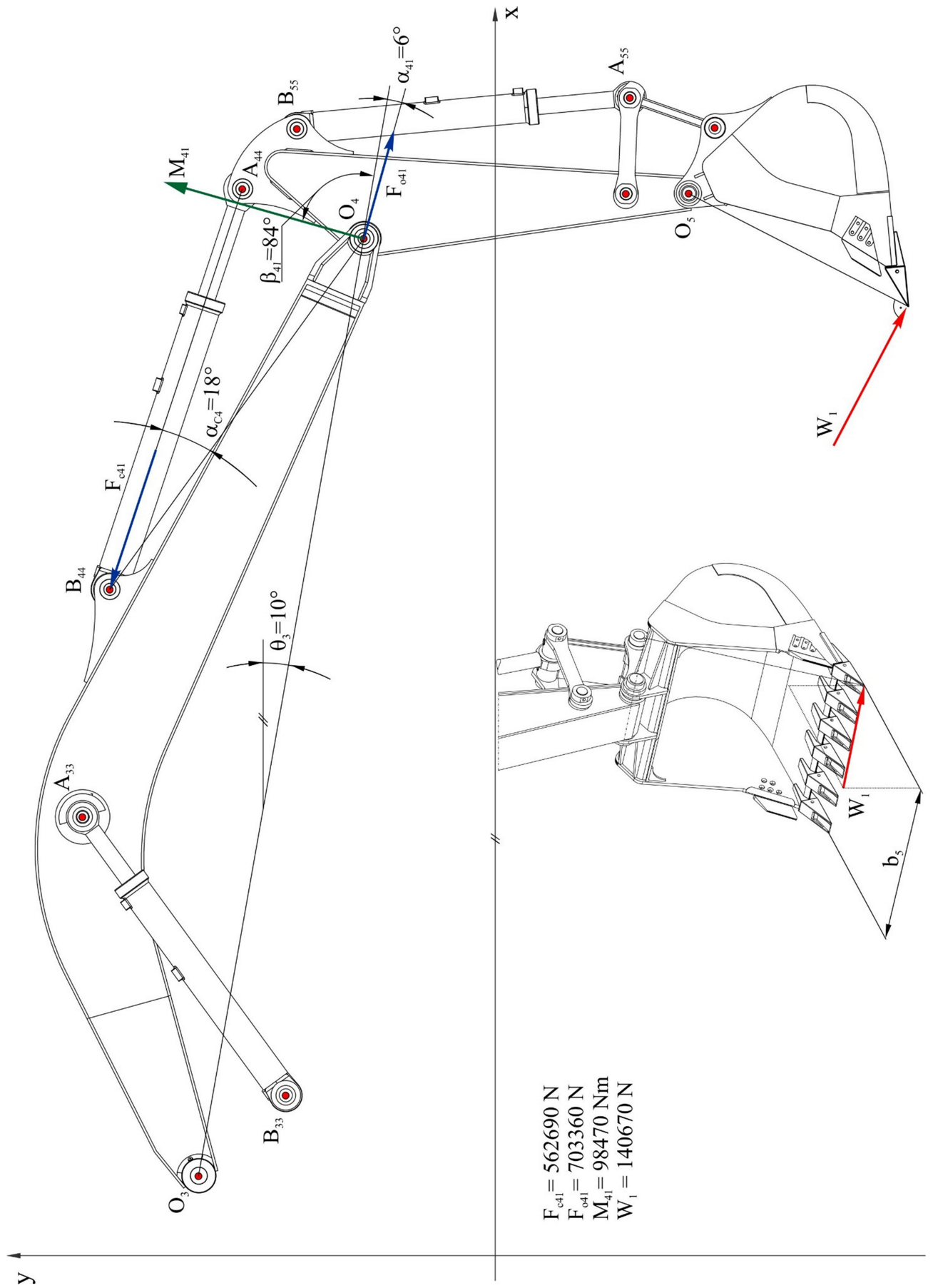
Oznaka bagera	BGH 250LC
Proizvođač	IMK 14. Oktobar - Kruševac
Masa bagera	25.000 kg
Snaga motora	125 kW
Zapremina dubinske kašike	1.25 m ³

Posebno je posmatran prvi element manipulatora – strela čiji je CAD model prikazan na slici 8.2. Osnova konstrukcija strele se sastoji od međusobno zavarenih limova različitih debljina. Posebno ojačana mesta konstrukcije čine masivni odlivci u cilindričnom zglobu za vezu strele sa obrtnom platformom, mesto vezivanja cilindra strele kao i cilindrični zglob veze strele i ruke.



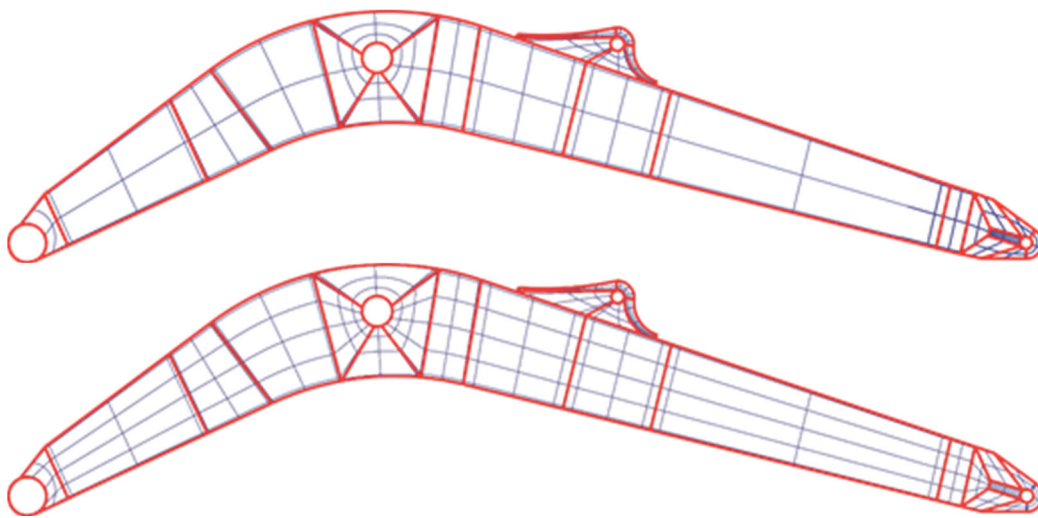
Slika 8.2 CAD model strele bagera BGH 250 NLC

Za prikazani model strele analiziran je slučaj opterećenja pri kopanju bagera ispod nivoa oslanjanja i on predstavlja samo jedan izdvojeni slučaj opterećenja strele bagera. Za izabrani položaj članova kinematičkog lanca mašine i smer otpora kopanja, intezitet mogućeg otpora kopanja određen je iz uslova stabilnosti bagera i maksimalnog radnog hidrauličnog pritiska u sistemu. Relativni položaji članova kinematičkog lanca manipulatora prikazani si na slici 8.3. Opterećenje na vrhu kašike modelirano je tako da deluje na kraju rezne ivice kašike i upravno je na ravan određenu osom zgloba kašike i reznom ivicom. Ekscentrično dejstvo otpora kopanja predstavlja nepovoljniji slučaj obzirom da se u zglobovima strele javljaju osim sila i moment savijanja. Pravac dejstva momenta na strelu u zglobu O_4 i sila F_{O4} i F_{C41} u zglobovima O_4 i B_{44} prikazani su na slici 8.3. U zglobovima O_3 i A_{33} formirani su oslonci. Opterećenje momentom u modele konačnih elemenata je uneto u tačkama kontrolnog poligona preko sprega sila u ušicama na vrhu strele.



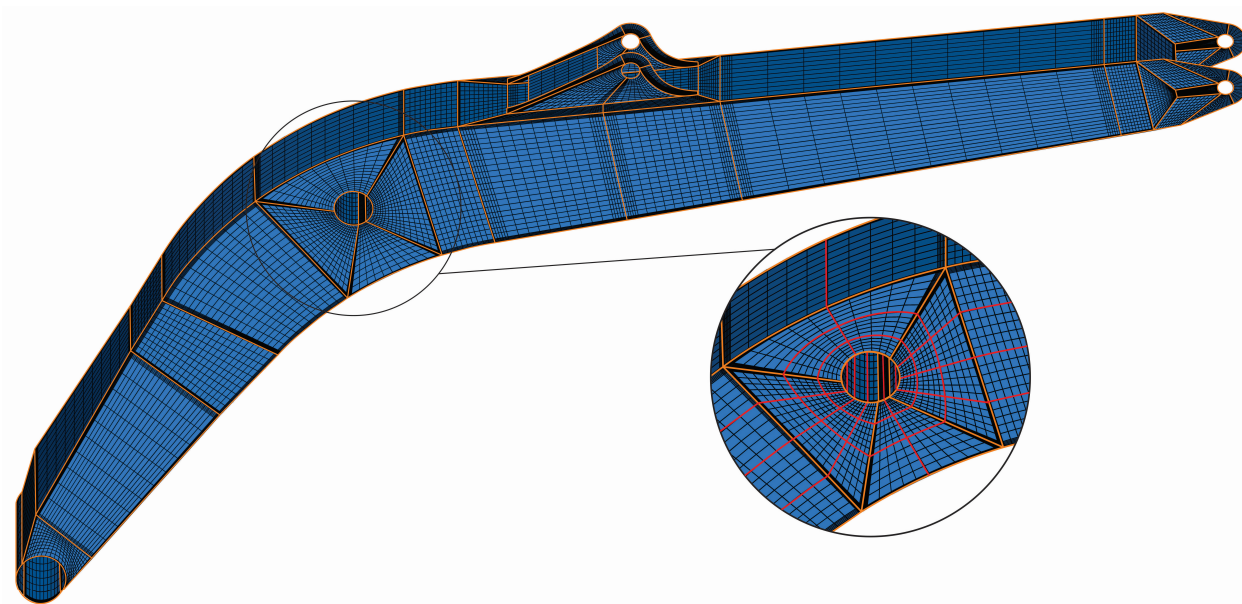
Slika 8.3 Reakcije u članovima kinematičkog lanca bagera

Za predstavljeni CAD model strele bagera modelirana su dva različita NURBS modela [MM15][MMP15]. Razlika u modelima je u gustini mreže konačnih elemenata (slika 8.4). Modeli su formirani sa 87 površinskih patcheva međusobno povezanih trakama koje prenose savijanje. Elementi su tipa Kirchhoff–Love ljuske i imaju stepen osnovnih funkcija u oba pravca jednak 3. Elementi su po debljini grupisani u 8 grupa. Osnovna razlika između dva formirana modela je u broju elemenata. Kako su modeli formirani sa trakama koje prenose savijanje to je određeni broj formiranih elemenata relativno malih dimenzija (reda debljine ljuske). Tako na primer ako je kod grube mreže broj elemenata prosečnog patcha jednak 12 većina od njih (8) su relativno malih dimenzija jer je drugi red tačaka kontrolnog poligona blizu granice patcha. U ovom slučaju sa stanovišta ocene gustine mreže može se reći da posmatrani patch konstrukcije ima 4 elementa iako u stvarnosti ima 12. Finija mreža je formirana sa ciljem da se bolje opiše deformacija savijanja strele pa je dobijena ubacivanjem po dva elementa u vektor čvorova u pravcu visine strele. Ovako formiran model ima 24 elementa u patchu. Ako se izuzmu elementi malih dimenzija (nastali prilikom formiranja elemenata koji prenose savijanje) može se govoriti o prosečnom patchu sa 8 elemenata.



Slika 8.4 Modeli strele sa grubom i finijom mrežom

Ulazni podaci su definisani sa 88 datoteka od kojih se u prvoj nalaze podaci o vezi ka ostalim datotekama. Svaki patch predstavlja nezavisnu strukturu sa osnovnim podacima o geometriji, materijalu, opterećenjima i ograničenjima koje se odnosi na konkretni patch. Softverom se najpre učitavaju svi patch-evi i generiše se jedinstven prostor tačaka kontrolnog poligona koji oni dele. Takođe se učitavanjem određuju i dodirne tačke kontrolnog poligona koje čine osnovu kasnijeg formiranja traka koje prenose savijanje. Na slici 8.5 prikazan je model strele sa finom mrežom konačnih elemenata. Na detalju prikazanom na slici 8.5 mogu se uočiti elementi patcheva koji su izdvojeni crvenom bojom. Uporedni pregled parametara grube i fine mreže dat je u tabeli 8.2.



Slika 8.5 Modeli strele sa 87 patcheva i detaljem na kome su prikazani i NURBS elementi.

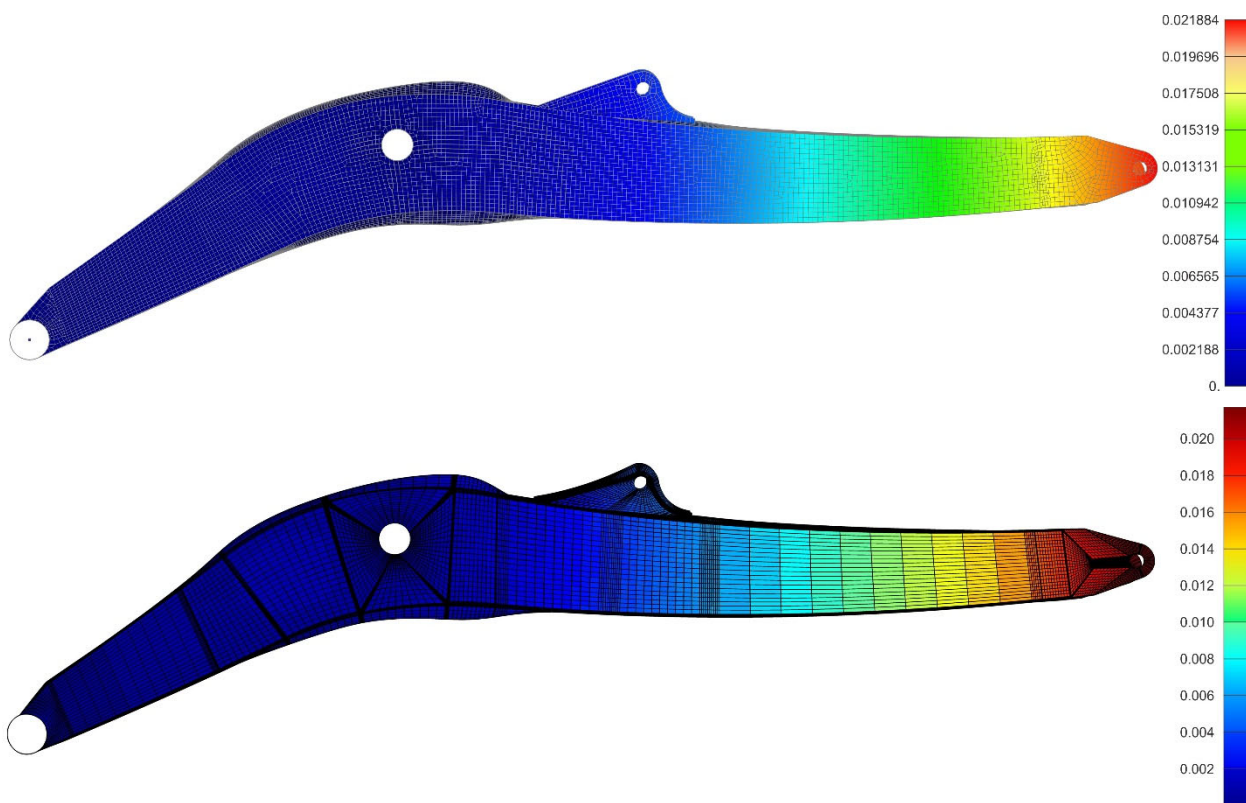
Tabela 8.2 Pregled parametara mreža

Br. modela	Broj patcheva	Ukupan br. elemenata	Broj elemenata bez ivičnih	Broj tačaka kont. poligona
I	87	1330	342	3121
II	87	1550	454	3437

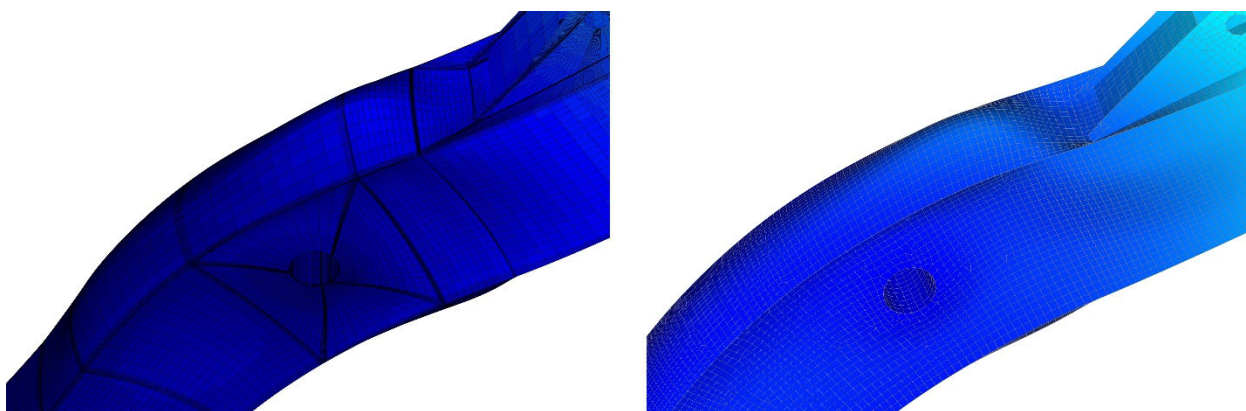
Kao referentni model za poređenje rezultata izogeometrijske analize sa NURBS osnovnim funkcijam korišćen je model formiran u komercijalnom softveru sa 21832 linearnih elemenata tipa Reissner-Mindlin ljuske sa 8 različitih debljina i 21826 čvorova. Na slici 8.6 prikazan je uporedni prikaz deformacije strele sa finom NURBS mrežom i mreže formirane u komercijalnom softveru.

Tabela 8.3 Pregled rezultata analize

Br. mod.	Model	Pomeranje vrha strele [m]	Odstupanje u odnosu na referentni model [%]	Broj stepeni slobode kretanja
I	NURBS – gruba mreža	0.0214847	1.8	9363
II	NURBS – fina mreža	0.02168275	0.92	10311
III	Komercijalni softver	0.021884	-	130956



Slika 8.6 Deformacija strele bagera – slika gore model u komercijalnom softveru
– slika dole model sa NUBRS osnovnim funkcijama



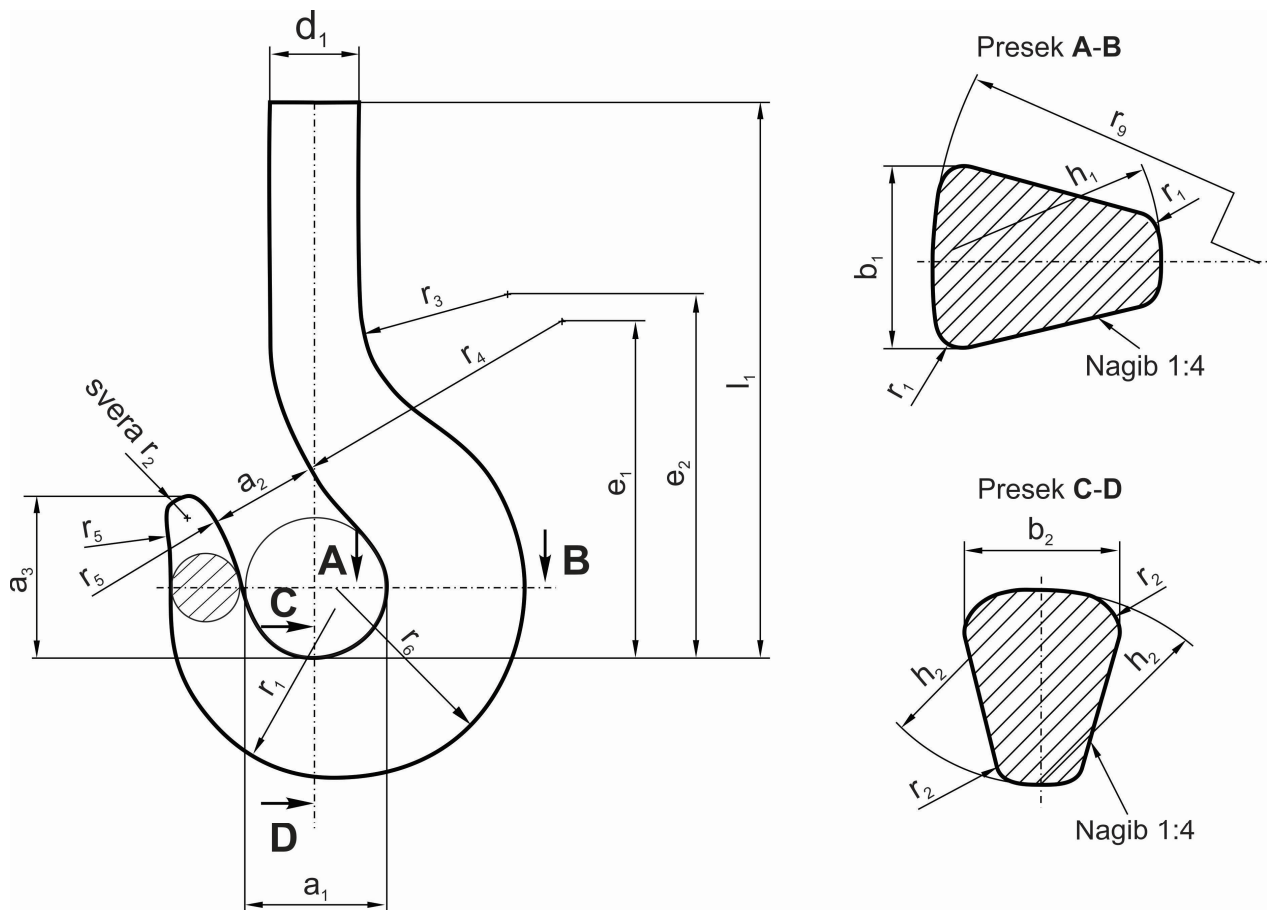
Slika 8.7 Detalj deformacije strele bagera – slika levo model sa NUBRS osnovnim funkcijama
– slika desno model u komercijalnom softveru

Dobijeni rezultati pokazuju da se sa znatno manje izogeometrijskih elemenata mogu dobiti rezultati koji po veličini i obliku dobijene deformacije malo odstupaju od rezultata dobijenih komercijalnim softverima. Navedeni broj elemenata se odnosi samo na elemente osnovne konstrukcije strele a njima treba dodati i elemente traka koje prenose savijanje. Formirane trake uzrokuju i znatno veći broj elemenata osnovne strukture strele jer zbog potrebe za formiranjem dodatnih redova tačaka kontrolnog poligona dodatno povećavaju model. Pojas matrice krutosti je veći u odnosu na klasične FEM modele i iznosi kod finije mreže 2586 a kod grublje je neznatno niži jer je poboljšanje mreže vršeno samo u jednom pravcu i iznosi 2532. Pojas matrice se može

naknadnim metodama redukcije smanjiti ali ne značajno kao kod klasične FEM metode. To je ujedno i razlog sporijeg rešavanja sistema jednačina - multi patch modela.

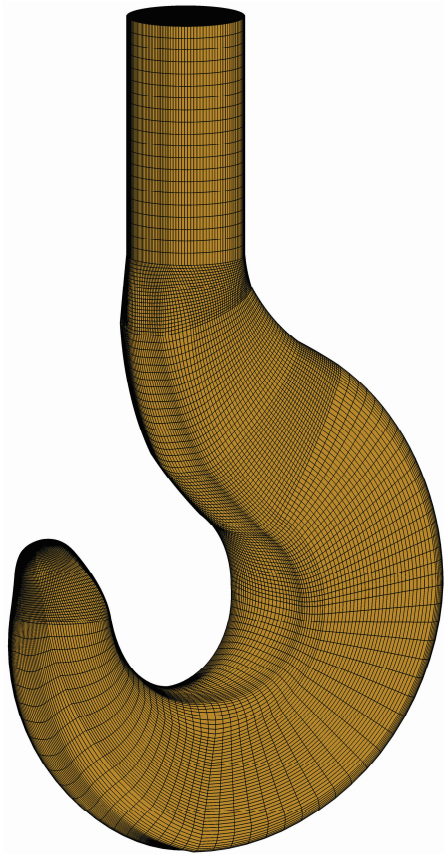
8.2 Sopstveni oblici oscilovanja standardne kuke DIN 15 401

Za drugi model izogeometrijske analize u oblasti modalne analize izabrana je kuka po standardu DIN 15-401-1[DIN82] izvođenje RF. Razlog izbora ovog geometrijskog modela za formiranje NURBS modela je u geometrijskoj složenosti koja se ogleda kako u složenosti cele strukture tako i u složenosti samih poprečnih preseka. Iako je tehničkim podacima definisana osnovna geometrija kuke ona i dalje nije jednoznačno definisana. Definisana je samo delimično u određenim poprečnim presecima a što je posledica geometrijske složenosti. Geometrijski model definisan po DIN standardu prikazan je na slici 8.8.



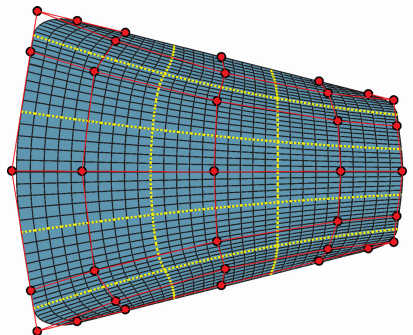
Slika 8.8 Kuka po standardu DIN 15-401-1 izvođenje RF

Model kuke modeliran NURBS elementima kao model sa više patcheva prikazan je na slici 8.9. Osnovna geometrija kuke formirana je sa 9 patch-eva.



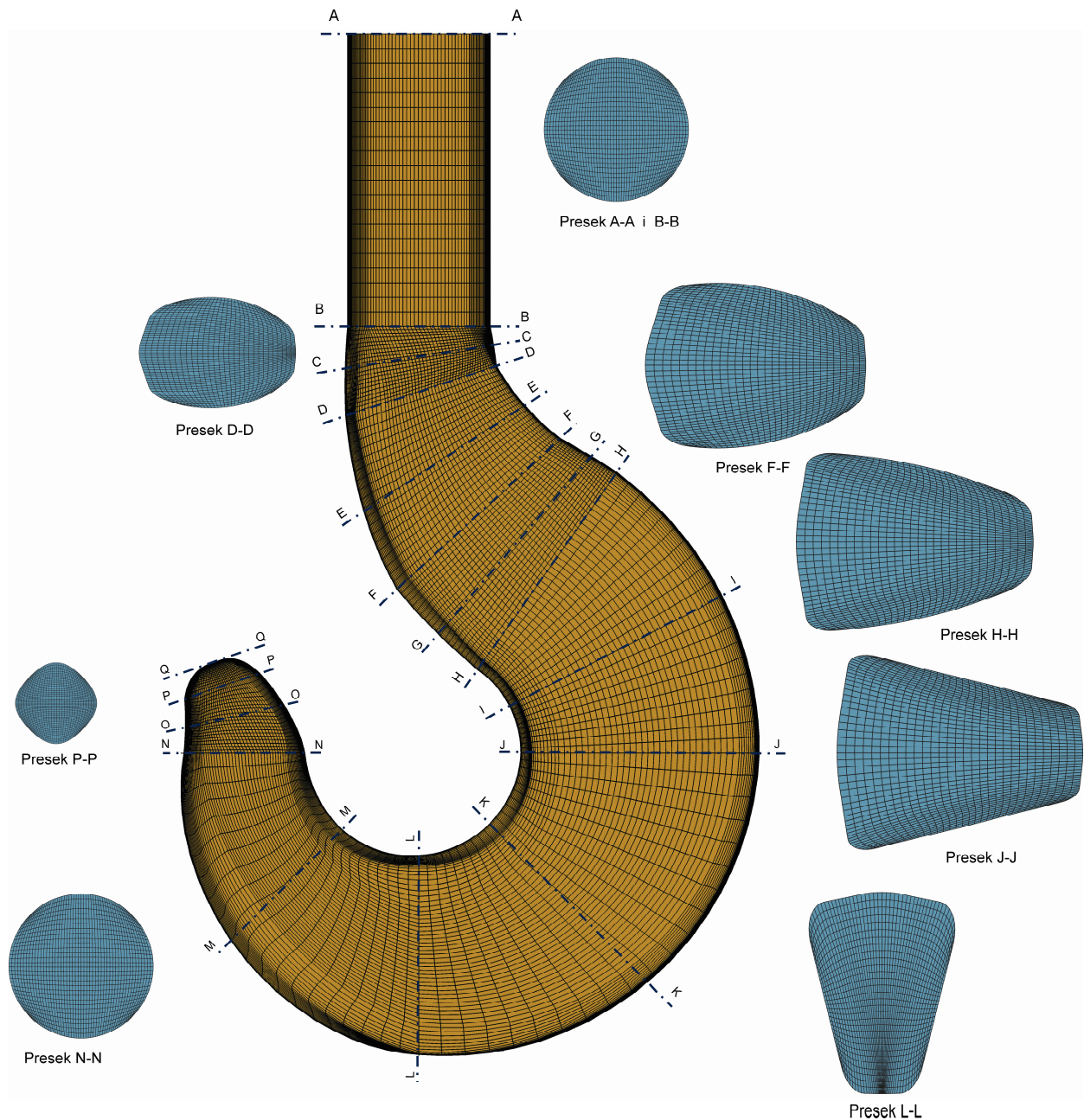
Slika 8.9 NURBS model kuke DIN 15-401-1 izvođenje RF

Osam patcheva su modelirani kao NURBS solidi drugog stepena osnovnih funkcija u sva tri pravca. Za ove patcheve su definisani početni i krajnji poprečni preseki kao i srednji poprečni presek obzirom da je i u tom pravcu formirana zakrivljena geometrija. Samo je prvi patch cilindričnog oblika formiran sa linearnim funkcijama oblika u uzdužnom pravcu i kvadratnim u ostala dva. Za definisani model kuke naknadno je postupkom ubacivanja čvorova u vektor čvorova povećan broj elemenata tako da svi definisani poprečni preseki imaju po 5 x 3 elementa. Ukupan broj elemenata krajnjeg modela iznosi 255 elemenata. Broj tačaka kontrolnog poligona celog modela iznosi 595.



Slika 8.10 Primer poprečnog preseka kuke sa tačkama kontrolnog poligona i elementima

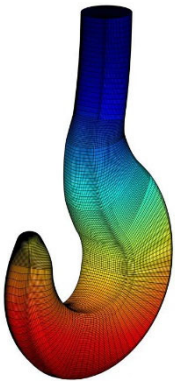
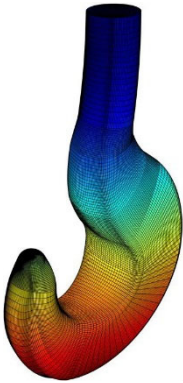

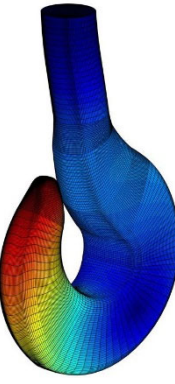
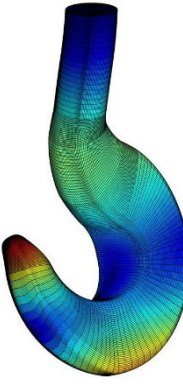
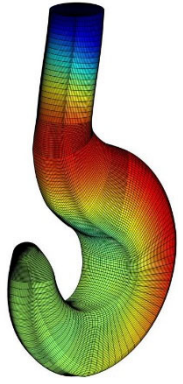
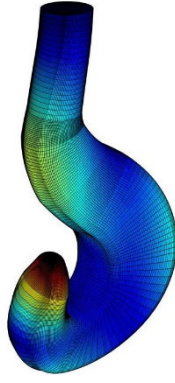
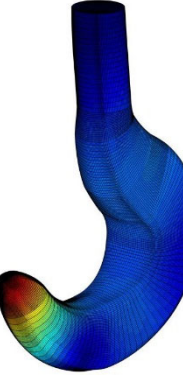
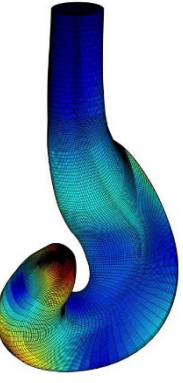
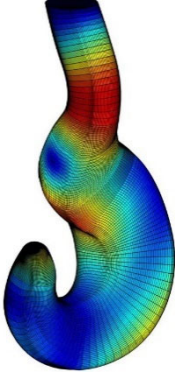
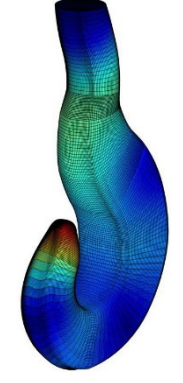
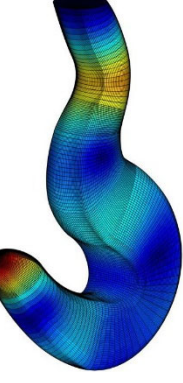
Na slici 8.11. prikazana je slika kuke sa odgovarajućim poprečnim preseccima potrebnim za formiranje NURBS modela.



Slika 8.11 NURBS model kuke sa odgovarajućim poprečnim preseccima

Za prikazani NURBS model kuke izvršena je modalna analiza a rezultati analize su poređeni sa rezultatima analiza dobijenim u komercijalnom softverskom paketu sa kvadratnim solid elementima oblika tetraedra sa 10 čvorova (broje elemenata 36760, broj čvorova 54978). NURBS model na granicama spoja patcheva ima niži stepen kontinuiteta obzirom da se u tim tačkama kontrolnog poligona izmedju patcheva prenosi samo pomeranje tačaka kontrolnog poligona. Dobijeni oblici oscilovanja prikazani su u tabeli 8.4.

Tabela 8.4 Pregled oblika oscilovanja kuke modelirane NURBS elementima.

		
Mod 1. 1.62 Hz	Mod 2. 1.62 Hz	Mod 3. 4.90 Hz
		
Mod 4. 11.31 Hz	Mod 5. 14.19 Hz	Mod 6. 16.05 Hz
		
Mod 7. 21.86 Hz	Mod 8. 29.03 Hz	Mod 9. 40.12 Hz
		
Mod 10. 52.85 Hz	Mod 11. 50.32 Hz	Mod 12. 66.89 Hz

Rezultati analize NURBS modela, modela formiranog komercijalnim softverom kao i relativno odstupanje rezultata dati su u tabeli 8.5.

Tabela 8.5 Uporedni pregled rezultata modalne analize

Mod	NURBS	Referentni model	$\delta\omega_i$ [%]
1.	1.61772	1.569	3.01
2.	1.62209	1.578	2.72
3.	4.90326	4.665	4.86
4.	11.3082	10.496	7.18
5.	14.1923	13.875	2.24
6.	16.0473	15.605	2.76
7.	21.8573	21.150	3.24
8.	29.0252	28.488	1.85
9.	40.1157	38.000	5.27
10.	52.8485	50.079	5.24

Odstupanja dobijenih rezultata su delimično očekivana zbog nejednakih gustina mreža, promene stepena kontinuiteta na spojevima patcheva kao i zbog izvesnih odstupanja geometrije obzirom da su dobijena odvojenim postupcima modeliranja. Model korišćen u komercijalnom softveru dobijen je u standardnim softverskim alatima koji za formiranje ovako složene geometrije koriste tehniku provlačenja poprečnih preseka duž krive a koja se ne može do detalja kontrolisati.

ZAKLJUČAK

Od pojave prvih radova u oblasti izogeometrijske analize prošlo je više od deset godina. Interesovanje naučne zajednice za ovu oblast metode konačnih elemenata bilo je veliko i još uvek traje. To se može zaključiti na osnovu velikog broja objavljenih radova. Iako je interesovanje u istraživanju ove oblasti veliko, činjenica je da ova metoda još uvek nije našla široku praktičnu primenu. Razlozi su višestruki i neki od njih, spoznati kroz izloženo istraživanje u ovoj disertaciji, će biti izneti u nastavku.

Ideja da se zaobiđe postupak formiranja mreže na postojećoj CAD geometriji, već da se sama geometrija posmatra kao inicijalna mreža konačnih elemenata, je revolucionarna za metodu konačnih elemenata. Ovim postupkom ne samo da je postignuto značajno smanjenje potrebnog vremena za realizaciju rešenja već se iz oblasti aproksimacije geometrije mrežom konačnih elemenata prešlo na potputno poklapanje CAD i FEM geometrije. Razvijenim algoritmima za rafinaciju mreže (povećanjem gustine elemenata, povećanjem stepena osnovnih funkcija ili k rafinacijom) se može do izvesne mere prilagoditi početni model. Nedostatak rafinacije je u tome što nije lokalna već globalna na nivou patcha (jednog pravca patcha) za NURBS osnovne funkcije. Ovo ima za posledicu nepotrebno povećanje broja elemenata.

Jedan od nedostataka je i taj što se CAD modeli ne mogu koristiti iz postojećih CAD modelera jer se u njima koriste posebne dodatne transformacije na NURBS površima (split i trimming curves npr.) zbog kojih se gubi osnovni matični zapis NURBS površi. Posebnu poteškoću predstavlja formiranje složenije geometrije preko dva ili više patch-eva. Dva patcha koja su spojena moraju imati istu parametrizaciju kako bi se preneli uticaji jednog na drugi. To povlači i probleme vezane za rafinaciju mreže jer se tada uticaj rafinacije mreže prenosi i sa jednog patcha na drugi. Ako parametri mreže na spoju oba patcha nisu isti posebnim procedurama se mogu spojiti patchevi ali one najčešće nisu pogodne za praktičnu primenu.

Modeli formirani sa više patch-eva imaju i nedostatak povećanja pojasa matrice krutosti sistema. Za razliku od klasične metode konačnih elemenata, gde su se uticaji prenosili između dva susedna elementa, ovde se uticaji prenose između patcheva. Nakon redukcije pojasa matrice krutosti sistema, pojas matrice krutosti će i dalje biti veći u odnosu na pojas matrice krutosti sistema problema klasične metode konačnih elemenata zbog prostiranja osnovnih funkcija kroz više elemenata u patchu.

Definisanje graničnih uslova u NURBS modelima dolazi do određenih poteškoća. Svakoj tački kontrolnog poligona NURBS površi pridružena je određena NURBS osnovna funkcija. Osnovne funkcije površi sa otvorenim vektorima čvorova postižu vrednost jednaku jedinici samo za početnu i krajnju tačku kontrolnog poligona za određeni pravac. To znači da oslonac u srednjoj tački kružnog luka nema projekciju u jednoj tački površi.

Zbog potrebe za smanjenjem modela kao i zbog sve češće modeliranih tankozidih konstrukcija sa složenom geometrijskom formom značajno mesto u upotrebi imaju konačni elementi tipa ljuske. U radu je dat pregled modeliranja Kirchhoff-Love elementa tipa ljuske. Ovaj tip elementa u izoparametaskoj analizi je često bio izbegavan zbog poteškoća oko modeliranja C^1 kontinuiteta na granici elemenata. NURBS i T-splajn izogeometrijski modeli nude niz prednosti za primenu ovog tipa elementa. Kod NURBS elemenata zbog česte potrebe da se složenija struktura formira sa više patch-eva neophodno je koristiti tehnike prenosa uticaja sa jednog na drugi patch jer je kontinuitet na mestu spoja patcheva C^0 . U disertaciji je prikazana upotreba traka koje prenose savijanje za prevazilažnje ovog problema. Takođe kao doprinos disertacije data je analiza uticaja parametara trake na dobijene rezultate. Dobijeni rezultati su korišćeni za formiranje složenijih modela prikazanih u poglavlju 8. Vrednosti parametara relativno jednostavnih modela korišćenih u tački 5 potrebno je korigovati pri primeni na trake realnih konstrukcija. Kod realnih konstrukcija formiranih sa više desetina patcheva i sa većim brojem tačaka kontrolnog poligona, povećanje krutosti sistema preko traka koje prenose savijanje (sa modulom elastičnosti višestruko većim od modula osnovne konstrukcije) dovodi do numerički loše uslovljenosti sistema. Iz tog razloga kod ovih konstrukcija treba koristiti niže preporučene (poglavlje 5) vrednosti modula elastičnosti a koji odgovara i modelu manje složenosti.

Nasuprot NURBS geometriji kod koje ne postoji lokalna rafinacija mreže, T-splajn geometrija nudi niz prednosti u tom pogledu. T-splajnom se, zahvaljujući T spojevima u patchu, mogu formirati i znatno složenije površi. Ovo omogućava formiranja matrica strukture sa znatno manjim pojasom nego što je to bio slučaj sa NURBS multi patch modelima. U komercijanim softverima T-splajn geometrijski modeleri se mogu naći kao posebni dodaci. T-splajn je manje zahtevan u pogledu

potreba za računarskim resursima jer se modeliranje ostvaruje sa manjim brojem patch-eva sa mogućnošću lokalne rafinacije mreže.

U oblasti dinamičke analize posmatran je uticaj stepena osnovnih funkcija NURBS-a na sopstvene vrednosti. Dobijeni rezultati su poredjeni sa rezultatima dobijenim merenjem kao i sa rezultatima dobijenim u komercijalnom softveru sa istim brojem elemenata (u odnosu na NURBS modele) sa kvadratnim osnovnim funkcijama. Rezultati dobijeni modelima sa većim stepenom osnovnih funkcija su u odnosu na rezultate modela formiranih u komercijalnom softveru imali mala odstupanja dok su modeli istih (nižeg) stepena imali značajna odstupanja. Uticaj na rezultate modalne analize osim stepena osnovnih funkcija ima i vektor čvorova i veličina elemenata. U oblasti dinamičke eksplicitne analize u disertaciji je posmatran uticaj osnovnih funkcija na određivanje kritičnog vremenskog koraka od koga zavisi stabilnost analize.

U disertaciji su prikazani i realni primeri struktura koje se sreću u oblasti transportne tehnike. Modeliranje ovih struktura bez pomoći CAD modelera već računski na osnovu osnovnih tehnika NURBS modeliranja predstavljao je poseban poduhvat. U oblasti linearne statičke analize rezultati NURBS modela su postigli dobro slaganje sa rezultatima mnogo složenijih modela komercijalnih softvera. Sa te strane se može zaključiti da su NURBS funkcije oblika pogodne za modeliranje ovakvih struktura. Sa stanovišta procesorskog vremena prednost je na strani klasične metode konačnih elemenata. Pritom treba imati u vidu da su komercijalni softveri opremljeni različitim algoritimima kojima se ubrzava rešavanje sistema jednačina.

U okviru daljeg razvoja izogeometrijske metode posebnu pažnju treba posvetiti njenoj praktičnoj primeni, razvoju algoritama za sprovođenje zahtevnih procedura geometrijskog modeliranja, rafinaciji mreže, definisanju graničnih i početnih uslova. Ovo predstavlja preduslov korišćenja metode od strane korisnika koji ne moraju vladati programerskim znanjima. Očekuje se i prilagođavanje procedure izogeometrijske analize za NURBS geometriju dobijenu odsecanjem početne geometrije. Razvoj T-splajana se takođe očekuje. Osim B-splajna, NURBS i T-splajna postoji veći broj novih tehnika predstavljanja geometrije koji su takođe predmet istraživanja. U oblasti izogeometrijske metode konačnih elemenata trenutno postoji više pravaca istraživanja. Dok se u izogeometrijskoj metodi ne izdvoje rešenja koja mogu naći praktičnu primenu a pritom nuditi značajnu prednost u odnosu na klasičnu metodu konačnih elemenata izogeometrijska metoda neće imati široku primenu.

LITERATURA

- [ABZ14] C. Adam, S. Bouabdallah, M. Zarroug, H. Maitournam, Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements, Part I: Beams, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volumes 279, pp. 1-28, 2014.
- [ABZ15] C. Adam, S. Bouabdallah, M. Yarroug, H. Maitournam, Stable time step estimates for NURBS-based explicit dynamics, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 295. (2015), pp. 581-605.
- [ABZ15] C. Adam, S. Bouabdallah, M. Zarroug, H. Maitournam, Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements, Part II: Plates and shells, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volumes 284, pp. 106-137, 2015.
- [ACH12] F. Auricchio, F. Calabrò, T.J.R. Hughes, A. Reali, G. Sangalli, A simple algorithm for obtaining nearly optimal quadrature rules for NURBS-based isogeometric analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volumes 249–252, pp. 15-27, 2012.
- [AFS68] Argyris, J., Fried, I., Scharpf, D.W., The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method. *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society*, vol.72, pp. 701–709, 1968.
- [AK60] Argyris, J.H., Kelsey, S., *Energy Theorems and Structural Analysis*. Butterworths, London, 1960, and Originally published in a series of articles in *Aircraft engineering 1954-1955*
- [Arn89] V.I. Arnold *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, second edition, Springer-Verlag - New York Inc., ISBN 0-387-96890-3, 1989.
- [Bat13] Klaus-Jurgen Bathe, The subspace iteration method-Revisited, *Computers and structures*, Vol. 126 (2013), pp.177-183.
- [Bat96] Klaus-Jurgen Bathe, *Finite element procedures*, Prentice-Hall, Inc. New Jersey, (1996), ISBN 0-13-301458-4
- [BBC06] Y. Bazilevs, L. Beirão Da Veiga, J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, G. Sangalli, Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol.16, Issue 07, pp. 1031-1090, 2006.

- [BCC10] Y. Bazilevs, V.M. Calo, J.A. Cottrell, J.A. Evans, T.J.R. Hughes, et al.. Isogeometric analysis using T-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, 2010, 199, pp.229-263.
- [BEA13] Robin Bouclier, Thomas Elguedj, Alain Combescure, Efficient isogeometric NURBS-based solid-shell elements: Mixed formulation and B-method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 267, pp. 86–110, 2013.
- [Bez66] Bézier P., D'efinition num'érique des courbes et surf'aces I. *Automatisme*, XI:625–632, (1966).
- [Bez67] Bézier P., D'efinition num'érique des courbes et surf'aces II. *Automatisme*, XII:17–21, (1967).
- [Bez72] Bézier P., *Numerical Control: Mathematics and Applications*. Wiley. Translated from the French by A. R. Forrest, Birkhoff G.,(1972).
- [Bez89] Bézier P. E., First steps of CAD, *Computer-Aided Design*, vol. 21(5), 1989, pp.259-261.
- [Bir90] Birkhoff G., Fluid dynamics, reactor computations, and surface representation In S. G. Nash, editor, *A history of scientific computing*, pp. 63-87.ACM Press, New York, 1990.
- [Boe80] Boehm, W., Inserting new knots into B-spline curves, *CAD*, Vol.12, No.4, pp. 199-201, 19
- [BSE11] M. J. Borden, M. A. Scott, J. A. Evans, T. J. R. Hughes, "Isogeometric finite element data structures based on Bézier extraction of NURBS", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, August 2011, Volume 87, Issue 1-5, pages 15–47.
- [BW00] Y. Basar, D. Weichert, *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids-Fundamental Mathematical and Physical Concepts*, ISBN 3-540-66601, Springer-Verlag, Berlin, Heildeberg 2000.
- [CB11] D. Chapelle, K. J. Bathe, *The Finite Element Analysis of Shells – Fundamentals*, ISBN 978-3-642-16407-1, Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 2011.
- [CBB08] Calo, V.M., Brasher, N.F., Bazilevs, Y., T. J. R. Hughes, Multiphysics model for blood flow and drug transport with application to patient-specific coronary artery flow, *Computational Mechanics*, Vol.43, Issue 1, pp. 161–177, 2008.
- [CDP13] Nathan Collier, Lisandro Dalcin, David Pardo, V. M. Calo, The Cost of Continuity: Performance of Iterative Solvers on Isogeometric Finite lements, *Methods and Algorithms for Scientific Computing*, *SIAM J. Sci. Comput.*, 35(2), A767–A784, 2013.
- [CHA07] J. Austin Cottrell, Thomas J.R. Hughes, Alessandro Reali, Giancarlo Sangalli, Isogeometric discretizations in structural dynamics and wave propagation, *ecomas Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, Rethymno, Crete, Greece, 13-16 June 2007.
- [CHB09] J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, and Y. Bazilevs. *Isogeometric analysis: Toward Integration of CAD and FEA*. Wiley, Chichester, 2009.
- [CHR07] J.A. Cottrell *, T.J.R. Hughes, A. Reali, Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, Issue 41-44, 4160-4183, 2007.

- [Clo60] Clough, R.W., The finite element method in plane stress analysis. Proceedings of the Second ASCE Conference on Electronic Computation. Pittsburgh, PA., September 1960
- [CLR80] Cohen, E, Lyche, T and Riesenfeld, R F 'Discrete B-splines and subdivision techniques in computer aided geometric design and computer graphics' Computer Graphics and Image Processing Vol 14 No 2, 1980, pp 87-111.
- [CMK10] E. Cohen, T. Martin, R.M. Kirby, T. Lyche, R.F. Riesenfeld, Analysis-aware modeling: Understanding quality considerations in modeling for isogeometric analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 199, 334-356, 2010.
- [CNN14] L. Chena, N. Nguyen-Thanh, H. Nguyen-Xuan, T. Rabczuk, S. P. A. Bordas, G. Limbert, Explicit finite deformation analysis of isogeometric membranes, Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 277(2014), pp. 104–130.
- [Coh85] Cohen, E., Lyche, T., Schumaker, L.L., Algorithms for degree-raising of splines, ACM TOG, Vol. 4. No. 3, pp. 171-181, 1985.
- [Coo64] Coons S. A., Surfaces for computer-aided design, Technical report, Massachusetts Institute of Technology, 1964.
- [Cou43] Courant, R., Variational methods for solution of equilibrium and vibration. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 49, pp. 1–43, 1943.
- [CR14] Callum J. Corbett, Roger A. Sauer, NURBS-enriched contact finite elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 275, pp. 55-75, 2014.
- [CRB06] J.A. Cottrell, A. Reali, Y. Bazilevs, T.J.R. Hughes, Isogeometric analysis of structural vibrations, Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 195 (2006), pp. 5257-5296.
- [CLR80] Elaine Cohen, Tom Lyche, Richard Riesenfeld, Discrete B-splines and subdivision techniques in computer-aided geometric design and computer graphics, Computer Graphics and Image Processing, Vol.14, Issue 2, pp. 87-111, 1980.
- [CT65] Clough, R.W., Tocher, J.L., Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending. Proceedings Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson A.F.B., 1965.
- [DB12] Daniel Rypl, Borek Patzak, From the finite element analysis to the isogeometric analysis in an object oriented computing environment, Advances in Engineering Software, vol. 44, pp. 116-125, 2012.
- [DBH12] Luca Dedè, Micheal J. Borden, Thomas J. R. Hughes, Isogeometric Analysis for Topology Optimization with a Phase Field Model, Archives of Computational Methods in Engineering, Volume 19, Issue 3, pp 427–465, 2012.
- [DeBo72] Carl De Boor, On Calculating with B-splines, Journal of approximation theory, Vol 6 (1972), pp.:50-62.
- [DeBo78] Carl De Boor, A practical guide to splines, New York: Springer-Verlag, 1978.

- [DIN82] Deutsche norm DIN 15 401 Part1. Lasthaken für Hebezeuge; Einfachhaken; Rohteile. UDC 621.86.061.1
- [DJ04] Dragoslav Janošević, Razvoj nove generacije građevinskih mašina, projekat tehnološkog razvoja MIS 03.0087.B koji je finansiralo Ministarstvo za nauku i zaštitu životne sredine Republike Srbije, Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu, 2002-2004, (ruvodilac projekta prof. dr Dragoslav Janošević).
- [DJ10] Dongdong Wang, Junchang Xuan, An improved NURBS-based isogeometric analysis with enhanced treatment of essential boundary conditions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, pp. 2425–2436, 2010.
- [DKS13] W. Dornisch, S. Klinkel, B. Simeon, Isogeometric Reissner–Mindlin shell analysis with exactly calculated director vectors, *Computational Methods in Engineering*, Vol.253, pp. 491-504. 2013.
- [ELA10] Espath Luis Felipe da Rosaa, Linn Renato Vazb, Awruch, Armando Miguelc, STRUCTURAL SHAPE OPTIMIZATION USING GRADIENT-BASED METHOD, *Mecánica Computacional Vol XXIX*, pp. 727-745, Buenos Aires, Argentina, 15-18 Noviembre 2010.
- [Far02] Farin G., *Curves and surfaces for CAGD: A practical guide*, Academic Press, San Diego, 2002.
- [Far89] Farin, G., Trends in curve and surface design. *Computer-Aided Design*, vol. 21(5):pp. 293-296, 1989.
- [FV11] C. de Falco, R.Vázquez, GeoPDEs: A research tool for Isogeometric Analysis of PDEs, *Advances in Engineering Software*, Vol. 42, Issue 12, pp. 1020-1034, 2011.
- [Ge00] Gerhard A. Holzapfel, *Nonlinear solid mechanics - A continuum approach for engineering*, John Wiley & Sons, LTD 2000.
- [Ger02] Gerald Farin, *Curves and Surfaces for CAGD-A Practical Guide*, 5 edition, The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics and Geometric Modeling, 2002
- [GPB62] Gallagher, R.H., Padlog, J., Bijlaard, P.P., Stress analysis of heated complex shapes. *American Rocket Society Journal*, vol. 32, pp.700–707, 1962.
- [GV16] S Gondegaon, H. Voruganti, Static structural and modal analysis using isogeometric analysis, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 46 No.4 (2016) pp. 36-75.
- [HB15] S. Hartmann, D. J. Benson, Mass scaling and stable time step estimates for isogeometric analysis, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 102, (2015), pp.:671-687.
- [HCB05] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, and Y. Bazilevs. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry, and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, 4135–4195, 2005.
- [Hol00] G. A. Holzapfel, *Nonlinear Solid Mechanics*, ISBN 0 471 82304. John Wiley & Sons, Inc. New York, 2000.

- [Höl03] Hölíg, K., Finite element methods with B-splines, Society for Industrial and Applied Mathematics – SIAM, ISBN 0-89871-533-4, 2003.
- [Hre41] Hrennikoff, A. P., Solution of problems in elasticity by the framework method, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of applied mechanics, vol.8 pp. A169-A175, 1941.
- [HRS10] T.J.R. Hughes, A. Reali, G. Sangalli, Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volumes 199, pp. 301-313, 2010.
- [HRV13] Saman Hosseini, Joris J. C. Remmers, Clemens V. Verhoosel and René de Borst, An isogeometric solid-like shell element for nonlinear analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.95, pp. 238–256, 2013.
- [Iro66] Irons, B. M., Engineering application of numerical integration in stiffness method, Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics - AIAA, 14, pp. 2035-2037, 1966.
- [KBL09] J. Kiendl, K.U. Bletzinger, J. Linhard, R. Wüchner, Isogeometric shell analysis with Kirchhoff–Love elements, Computational Methods in Engineering, Vol.198, pp. 3902–3914. 2009.
- [KBW10] J. Kiendl, Y. Bazilevs, M.-C. Hsu, R. Wüchner, K.-U. Bletzinger, The bending strip method for isogeometric analysis of Kirchhoff–Love shell structures comprised of multiple patches, Computational Methods in Engineering, Vol.199, pp. 2403-2416. 2010.
- [Kir50] G. Kirchhoff, Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, Journal für die reine und angewandte Mathematik. Volume 1850, Issue 40, pp. 51–88
- [Kol12] R. Kolman, Isogeometric free vibration of an elastic block, Engineering mechanics, Vol. 19. No. 4, (2012), pp. 279-291.
- [KSW14] J. Kiendl, R. Schmidt, R. Wüchner, K.-U. Bletzinger, Isogeometric shape optimization of shells using semi-analytical sensitivity analysis and sensitivity weighting, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 274, pp. 148-167, 2014.
- [KWL12] Yuki Kineri, Mingsi Wang, Hongwei Lin, Takashi Maekawa, B-spline surface fitting by iterative geometric interpolation/approximation algorithms, Computer-Aided Design, Vol. 44, 697-708, 2012.
- [LCE10] L. Lebedev, Cloud M., Eremeyev V., Tensor Analysis with Applications in Mechanics, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., ISBN 981-4313-12-2, Singapore 2010.
- [LEA14] R.V. Linn, L.F.R. Espath, A.M. Awruch, Optimal shape of axisymmetric solids using NURBS and automatic differentiation, Applied Mathematical Modelling, Vol. 38, pp. 1385–1402, 2014.
- [LK13] S. J. Lee, H. R. Kim, Vibration and Buckling of Thick Plates using Isogeometric Approach, Architectural research, Vol. 15, No. 1(March 2013). pp. 35-42, ISSN 1229-6163
- [Lov88] A.E.H. Love, The Small Free Vibrations and Deformations of Thin Elastic Shells. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A, Vol. 179. (1888),pp. 491-546.

- [LZ11] Jia Lu, Xianlian Zhou, Cylindrical element: Isogeometric model of continuum rod, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, 233-241, 2011.
- [Mar07] D. Marinković, A new finite composite shell element for piezoelectric active structures, doktorska disertacija, VDI Reihe 20 Nr. 406 Düsseldorf, (2007) ISBN 978-3-18-340620-3.
- [MM13-1] Predrag Milić, Dragan Marinković, Structural analysis using isogeometric fem based on NURBS functions, *The 2nd international conference Mechanical engineering in XXI century*, University of Niš, Faculty of mechanical engineering, pp. 343 - 346, issn: ISBN 978-86-6055-039-4, Србија, 20. - 21. Jun, 2013
- [MM13-2] Predrag Milić, Dragan Marinković, Isogeometric structural analysis based on NURBS shape functions, *Facta Universitatis, series Mechanical Engineering*, University of Niš, vol. 11, no. 2, pp. 193 - 202, issn: 0354-2025, 2013.
- [MM15] Predrag Milić, Dragan Marinković, Isogeometric FE analysis of complex thin-walled structures, *TRANSACTIONS OF FAMENA*, University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, vol. 39, no. 1, pp. 15 - 26, issn: 1333-1124, 2015.
- [MMP14] Predrag Milić, Dragan Marinković, Goran Petrović, Dragoslav Janošević, Softver za izogeometrijsku strukturnu analizu, *TEHNIČKO REŠENJE*, Razvijeno: u okviru projekta tehnološkog razvoja Teorijsko-eksperimentalna istraživanja transportnih mašinskih sistema - evidencioni broj 035049, Odluka Nastavno naučnog veća Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu br 612-96-1-10/2015 od 16.1.2015, godina realizacije: 2014, primena: Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu.
- [MMP15] Predrag Milić, Dragan Marinković, Goran Petrović, Isogeometric FE Analysis of Thin Walled Structures with Kirchhoff-Love Shell Element, *Mechanical Engineering in XXI Century*, 3rd International Conference, Mašinski fakultet Niš, pp. 407 - 410, issn: 978-86-6055-072-1, Србија, 17. - 18. Sep, 2015
- [Min45] R. D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, 1951, pp. 31–38.
- [NVN15] Nguyen-Thanha N., Valizadehb N., Nguyenc M.N., Nguyen-Xuand H., Zhuange X., Areiasf P., Zih G., Bazilevsg Y., Lorenzisa De L., Rabczukb T., An extended isogeometric thin shell analysis based on Kirchhoff–Love theory, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 284, 2015, pp. 265-291.
- [Pra84] Prautysch, H. Degree elevation of B-spline curves, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.1 No. 1, pp. 193-198, 1984.
- [Pra91] Prautzsch, H. Piper, B., A fast algorithm to raise the degree of spline curves, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.8, pp. 253-265, 1991.
- [PSF06] F. Perez-Arribas, J.A. Suarez-Suarez, L. Fernandez-Jambrina, Automatic surface modelling of a ship hull, *Computer-Aided Design*, Vol. 38, pp.584–594, 2006.

- [PT97] Piegl L., Tiller W., *The NURBS book (Monographs in visual communication)*, Springer, Berlin 1997.
- [Red93] Reddy, J. N., *An introduction to the finite element method*, McGraw-Hill, New York, 1993.
- [Rei45] E. Reissner, *The Effect of Transverse-Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates*, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 12 , 1945, pp. A69–A77.
- [Rie73] R.F. Riesenfeld, *Applications of B-Spline Approximation to Geometric Problems of Computer-Aided Design*, doctoral dissertation, Syracuse University, Syracuse, New York, 1973
- [Rog01] Rogers D., *An introduction to NURBS with historical perspective*, Academic Press, San Diego, 2001.
- [SBV11] M. A. Scott, M. J. Borden, C. V. Verhoosel, T. W. Sederberg, T. J. R. Hughes, "Isogeometric finite element data structures based on Bézier extraction of T-Splines", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, October 2011, Volume 88, Issue 2, pages 126-156.
- [SCF04] T. Sederberg, D. Cardon, G. Finnigan, N. North, J. Zheng, T. Lyche, "T-spline simplification and local refinement", *SIGGRAPH '04 Special Interest Group on Computer Graphics and Interactive Techniques*, *ACM SIGGRAPH 2004, ACM Transactions on Graphics (TOG) - Proceedings*, Volume 23 Issue 3, August 2004, Pages 276-283, ACM New York, NY, USA.
- [Sch46] Schoenberg I. J., *Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*, Parts A and B. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 4, 1946, pp. 45-99 i 112-141.
- [Sch46] Schoenberg I. J., *Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*, Parts A and B. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 4, 1946, pp. 45-99 i 112-141.]
- [SDS12] Dominik Schillinger, Luca Dedè, Michael A. Scott, John A. Evans, Michael J. Borden, Ernst Rank, Thomas J.R. Hughes, *An isogeometric design-through-analysis methodology based on adaptive hierarchical refinement of NURBS, immersed boundary methods, and T-spline CAD surfaces*, *Computational Methods in Engineering*, Vol.249-252, pp. 116-150. 2012.
- [SF89] J.C.Simo. D.D.Fox, *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and optimal parametrization*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 72, Issue 3, March 1989, Pages 267-304
- [SFL08] T. W. Sederberg, T. G. Finnigan, Xin Li, H. Lin, H. Ipson, "Wathertight trimmed NURBS", *SIGGRAPH '08 Special Interest Group on Computer Graphics and Interactive Techniques*, Los Angeles, CA, USA — August 11-15, 2008. Article No. 79, 978-1-4503-0112-1, doi. 10.1145/1399504.1360678 , *ACM Transactions on Graphics (TOG) - Proceedings of ACM SIGGRAPH 2008*, Volume 27 Issue 3, August 2008, Article No. 79 , ACM New York, NY, USA.
- [SIV12] S. Shojaee, E.Izadpanah, N.Valizadeh, J.Kiendl, *Free vibration analysis of thin plates by using a NURBS-based isogeometric approach*, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol.61, pp.23–34, 2012.

- [SKB11] R. Schmidt, J. Kiendl, K.-U. Bletzinger, R. Wüchner, Realization of an integrated structural design process: analysis-suitable geometric modelling and isogeometric analysis, *Computing and Visualization in Science*, Vol.13, Issue 7, pp.:315-330, 2011.
- [SLS12] M. A. Scott, X. Li, T. W. Sederberg, T. J. R. Hughes, Local Refinement of Analysis-Suitable T-splines, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volumes 213–216, 1 March 2012, Pages 206–222.
- [SZB03] T. W. Sederberg, J. Zheng, A. Bakenov, "T-splines and T-NURCCs", SIGGRAPH '03 Special Interest Group on Computer Graphics and Interactive Techniques, San Diego, CA, USA — July 27 - 31, 2003. Pages 477-484, ISBN: 1-58113-709-5, *ACM Transactions on Graphics (TOG) - Proceedings of ACM SIGGRAPH 2003*, Volume 22 Issue 3, July 2003, Pages 477-484, ACM New York, NY, USA.
- [Tai61] Taig, I.C., *Structural analysis by the matrix displacement method*, Technical report, English Electric Aviation, 1961.
- [TCM56] Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C., and Topp, L.J., Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of Aeronautical Sciences*, vol.23, pp. 805–823, 1956.
- [TJ11] T. Takacs, B. Jüttler, Existence of stiffness matrix integrals for singularly parameterized domains in isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, 3568-3582, 2011.
- [Ver75] K.J. Verspriue, *Computer-Aided Design Applications of the Rational B-Spline Approximation Form*, doctoral dissertation, Syracuse University, Syracuse, New York, 1975
- [VHS10] A.V. Vuong, Ch. Heinrich, B. Simeon, ISOGAT: A 2D tutorial MATLAB code for Isogeometric Analysis, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 27, pp. 644-655, 2010.
- [VK01] E. Ventsel, T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells, Theory, Analysis and Applications*, ISBN 0-8247-0575-0, CRC Press 2001.
- [WD08] Walter D. Pilkey, Deborah F. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, Wiley; 3 edition, 2008, ISBN-13: 978-0470048245
- [WLZ13] D. Wang, W.Liu, H. Zhang, Novel higher order mass matrices for isogeometric structural vibration analysis *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 260. (2013), pp. 92-108.
- [XS14] Xin Li, M. A. Scott, Analysis-suitable T-splines: Characterization, refineability, and approximation, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 24, No. 6 (2014) pp.1141–1164
- [YD00] Yavuz Basar, Dieter Weichert, *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids-fundamental mathematical and physical concepts*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2000
- [ZC68] Zienkiewicz, O.C., Cheung, Y.K., *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill, 1968.

Biografija autora

Predrag Đ. Milić, diplomirani inženjer mašinstva, rođen je 23.11.1975. godine u Prokuplju. Oženjen je, ima dva deteta, živi i radi u Nišu.

Završio je osnovnu školu "Nikodije Stojanović - Tatko" i srednju tehničku školu "15. Maj", smer mašinski tehničar u Prokuplju. Diplomirao je na Mašinskom fakultetu u Nišu, smer Mašinske konstrukcije i mehanizacija sa prosečnom ocenom 9.70 u toku studija i ocenom 10 na diplomskom radu pod naslovom „Stabilnost konstrukcije toranjske dizalice pri ekstremnom stacionarnom dejstvu“ iz predmeta „Projektovanje primenom računara i optimizacija konstrukcija“. Dobitnik je Povelje Univerziteta kao najbolji diplomirani student Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu u školskoj 2000/2001. godini. Poslediplomske studije upisao je na Mašinskom fakultetu – smer Mašinske konstrukcije i mehanizacija u Nišu 01.10.2001. godine i sve predviđene ispite položio je sa prosečnom ocenom 10. Doktorske studije na Mašinskom fakultetu u Nišu upisuje školske 2007/2008. godine. Na osnovu prethodno upisanih poslediplomskih studija upisuje se na drugu godinu studija. Položio je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom.

Od 2001. do 2006. godine stipendista je Ministarstva za nauku i tehnološki razvoj Republike Srbije na projektima tehnološkog razvoja Mašinskog fakulteta u Nišu kao istraživač-stipendista. Od 2006. do 2008. zaposlen je na Mašinskom fakultetu u Nišu kao stručni saradnik. U zvanje asistenta izabran je 2008. godine. Angažovan je za auditivne i eksperimentalne vežbe iz predmeta: CAD tehnologije, Mobilne mašine, Skladišna tehnika, Sistemi skladištenja i distribucije, CAD studio mašina i vozila, Ergonomija i industrijski dizajn, Strukturna analiza konstrukcija, Teorija kretanja vozila.

Objavio je više od 70 radova na skupovima i u časopisima nacionalnog i međunarodnog značaja. Učesnik je u pet projekata Tehnološkog razvoja Ministarstva za prosvetu, nauku i tehnološki razvoj Republike Srbije, dva međunarodna TEMPUS projekta, dva projekta bilateralne saradnje Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja i Službe za akademsku razmenu Savezne republike Nemačke i Erasmus+ projekta - Jean Monnet Module SIETLU.

Više puta je bio na studijskom usavršavanju u inostranstvu: Tehnički Univerzitet u Karlsruhe-u na Institutu za transportnu tehniku i logističke sisteme – Nemačka (2005. - 2006.); Univerzitet Otto-von-Guericke u Magdeburgu, Nemačka (2005), Tehnički univerzitet u Berlinu, Nemačka (2015. - 2018.).

U periodu od decembra 2002. godine do avgusta 2003. godine služio je vojni rok.

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ

Презиме, име једног родитеља и име	ПРЕДРАГ ЂУРО МИЛИЋ	МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ У НИШУ Примљено: 21.02.2018. Орг.јед. Број: 612-80-51/18 Вредности:
Датум и место рођења	23.11.1975. Прокупље	

Основне студије

Универзитет	Универзитет у Нишу
Факултет	Машински факултет у Нишу
Студијски програм	Машинске конструкције и механизација
Звање	Дипломирани машински инжењер
Година уписа	1994.
Година завршетка	2001.
Просечна оцена	9.70 (дипломски рад 10)

Магистарске студије, магистарске студије

Универзитет	Универзитет у Нишу
Факултет	Машински факултет у Нишу
Студијски програм	Машинске конструкције и механизација
Звање	-
Година уписа	2001.
Година завршетка	Прешао на докторске студије 2007.
Просечна оцена	10
Научна област	Техника транспорта
Наслов завршног рада	-

Докторске студије

Универзитет	Универзитет у Нишу
Факултет	Машински факултет у Нишу
Студијски програм	Транспорт, логистика, мотори и моторна возила
Година уписа	2007
Остварен број ЕСПБ бодова	460 (Члан 20, Правилник о докторским студијама Машинског факултета у Нишу)
Просечна оцена	9,67

НАСЛОВ ТЕМЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов теме докторске дисертације	Развој изометријске методе коначних елемената и њена примена у структурној анализи носећих структура транспортних машина
Име и презиме ментора, звање	Др Драган Маринковић, ванредни професор
Број и датум добијања сагласности за тему докторске дисертације	Број 612-484-6/2013 од 1.07.2013. (ННВ Машинског факултета у Нишу) Број 8/20-01-006/13-028 од 09.09.2013. (НСВ Универзитета у Нишу)

ПРЕГЛЕД ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Број страна	158 (нумерисано: 150, нунумерисано: 8)
Број поглавља	9/38/3 (број глава/поглавља/одељака)
Број слика (шема, графика)	91
Број табела	12
Број прилога	0

**ПРИКАЗ НАУЧНИХ И СТРУЧНИХ РАДОВА КАНДИДАТА
који садрже резултате истраживања у оквиру докторске дисертације**

Р. бр.	Аутор-и, наслов, часопис, година, број волумена, странице	Категорија
1	<p>Milić P., Marinković D., „Isogeometric FE analysis of complex thin-walled structures“, Transactions of famena, University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, vol. 39, no. 1, pp. 15 - 26, ISSN: 1333-1124, 2015. https://hrcak.srce.hr/138262 http://famena.fsb.unizg.hr</p> <p><i>Рад приказује примену изогеометријског концепта коначних елемената на танкозидне структуре описане Kirchhoff-Love формулацијом љуске и са NURBS основним функцијама. У раду су на почетку дате основе формирања NURBS геометрије, основних функција и извода основних функција. У наставку је дата имплементација NURBS основних функција у Kirchhoff-Love формулацију коначних елемената типа љуске. Примена формираног коначног елемента типа љуске приказана је на тест моделу. Сложеније геометријске форме се формирају помоћу више сегмената (patch-ева). У раду је приказана техника формирања сложене геометрије са више NURBS сегмената и тракама које преносе утицај савијања између сегмената. Као пример за решавање реалних проблема приказана је анализа стреле багера са више сегмената и Kirchhoff-Love изогеометријским коначним елементима.</i></p>	M23
2	<p>Jovanović M., Milenković D., Petrović G., Milić P., Milanović S., „Theoretical and Experimental analysis of Dynamic processes of pipe Branch for supply water to the Pelton turbine“, Thermal Science, Srbija, Institut za nuklearne nauke Vinča, vol. 16, no. 2, pp. S687 - S700, ISSN: 0354-9836, doi: 10.2298/TSCI120505196J, 2012. http://thermalscience.vinca.rs/pdfs/papers-2012/TSCI120505196J.pdf</p> <p><i>У раду је приказана анализа рачве Аб у хидроелектрани Перућица. Анализа стања рачве је одређивана експериментално и нумерички. Сложена геометријска форма рачве утицала је на анализу функција облика коначних елемената што је контролисано применом различитих типова елемената до добијања доброг слагања нумеричких и експерименталних резултата. Формирање сложеног модела је остварено са 1,688,800 коначних елемената типа линеарног тетраедра. Формирани геометријски модел приказан у овом раду није погодан за анализу класичном методом коначних елемената и представља добар пример за моделирање сплајн површина и за примену изогеометријског концепта. У раду су приказани и резултати тензометријског испитивања за различите радне услове.</i></p>	M23
3	<p>Milić P., Marinković D., „Isogeometric structural analysis based on NURBS shape functions“, Facta Universitatis, series Mechanical Engineering, University of Niš, vol. 11, no. 2, pp. 193 - 202, ISSN: 0354-2025, 2013. http://casopisi.junis.ni.ac.rs/index.php/FUMechEng/article/view/100</p> <p><i>Рад приказује основе изогеометријског концепта, формирање линијских, површинских и запреминских NURBS модела. Приказана је веза индексног, параметарског и физичког простора. У наставку је дата формирање раванских 2D NURBS елемената (формирање матрице крутости елемента и структуре). У раду је дат алгоритам формираног софтвера за изогеометријску структурну анализу. Формирани модел NURBS 2D равнаског елемента тестиран је на примеру плочице са отвором са различитом густином елемената и степеном основних функција NURBS-а. Добијени резултати су конвергентни и у сагласности са резултатима добијеним у комерцијалним софтверским пакетима.</i></p>	M51
4	<p>Janošević D., Marković D., Milić P., Nikolić V., „Optimization of kinematic chain parameters in hydraulic excavators“, Istraživanje i razvoj IMK 14, Institut IMK „14.oktobar“ Kruševac, vol. 18, no. 2, pp. 43 - 47, ISSN: 0354-6829, udc: 621, 2012. http://www.imk14-rad.com/index.php/en/journal/item/optimization-of-kinematic-chain-parameters-in-hydraulic-excavators</p> <p><i>Рад приказује процедуру за одређивање оптималних параметара чланова кинематичког ланца хидрауличног багера са трочланним раванским дубинским манипулатором. Приказаном процедуром се одређују кинематичке дужине чланова манипулатора. Рад је послужио за избор машине на којој би се вршило тестирање изогеометријске методе коначних елемената. Избор је извршен на бази закривљених геометријских облика које имају чланови кинематског манипулатора за копање.</i></p>	M53
5	<p>Jovanović M., Milić P., Janošević D., Petrović G., „Accuracy of FEM analysis in function of finite element type selection“, Facta Universitatis series Mechanical Engineering, University of Niš, vol. 8, no. 1, pp. 1 - 12, ISSN: 0354-2025, udc: 515.3 : 624.042.2, 2010. http://facta.junis.ni.ac.rs/me/me201001/me201001-01.pdf</p> <p><i>Рад се бави проблемом тачности примене коначног елемента тетраедра. Променљив успех у моделирању 3D континуума применом тетраедра и хексаедра приказан је кроз неколико примера. Анализе се баве истраживањем зависности тачности од типа коначног елемента и врсте примењене интерполационе функције. Радом су упоредно дати нумерички и аналитички резултати за познате проблеме из теорије еластичности. Показани примери дефинишу у којим случајевима је очувана тачност, а у којим случајевима постоји могућност велике грешке анализа.</i></p>	M51

6	<p>Marinković D., Marinković Z., Milić P., "Combined linear - geometrically nonlinear fem modeling for highly efficient dynamical simulations", Facta Universitatis, Series: Automatic Control and Robotics, University of Niš, 12, 1, pp. 9 - 18, ISSN:1820-6417, UDC:(681.511.4:531.39), (621.874.2), 2013. http://casopisi.junis.ni.ac.rs/index.php/FUAutContRob/article/view/18</p> <p><i>Софтверски алати за симулацију динамике система са више тела (multi-body system - MBS) у пракси представљају ефикасан алат за моделирање интеракције крутих и флексибилних тела. Софтверски пакети за симулацију понашања флексибилних тела у MBS системима су ограничени на област линеарног еластичног понашања тела. Чести су случајеви када структурно понашање укључује и геометријску нелинеарност која је ограничена на релативно мали структурни поддомен. У раду је изнет поступак комбиновања линеарног и геометријски нелинеарног FEM модела који нуди задовољавајућу тачност уз смањене нумеричке захтеве. Изнет поступак је у раду приказан на моделу торањске дизалице са висећим теретом.</i></p>	M52
7	<p>Jovanović M., Milić P., Petrović G., "Risk of selecting a tetrahedron for FEM structural modeling", MACHINE DESIGN 2010, Univerzitet u Novom Sadu – Fakultet Tehničkih nauka, pp. 169 - 174, ISSN:1821-1259, 2010. http://www.mdesign.ftn.uns.ac.rs/?pid=1001</p> <p><i>Рад се бави проблемом тачности примене коначних елемената типа тетраедра. Различит степен тачности резултата оствареног применом коначног елемента типа тетраедра представљен је кроз неколико примера. Анализа је усмерена на зависност тачности решења при примени основних типова солид елемената при различитом спољашњем дејству. Наведени су резултати бројних упоредних FEM анализа и контролних експерименталних анализа. Приказани примери показују где је прецизност дискретних модела генерисаних коначним елементима типа тетраедра условно прихватљива и упозоравају на могућност присуства великих грешака у анализама.</i></p>	-
8	<p>Milić P., Marinković D., „Structural analysis using isogeometric fem based on NURBS functions“, The 2nd international conference Mechanical engineering in XXI century, University of Niš, Faculty of mechanical engineering, pp. 343 - 346, issn: ISBN: 978-86-6055-039-4, Srbija, 20. - 21. Jun, 2013.</p> <p><i>Метод коначних елемената се користи као један од незаменљивих алата у структурној анализи. Рад наводи низ недостатака постојеће методе коначних елемената за различите области структурне анализе (анализе стабилности, контактне анализе...). Такође се као један од битних недостатака класичне методе коначних елемената наводи и проблем формирања мреже коначних елемената. Овај корак у процедури структурне анализе коначним елементима елегантно се решава применом изогеометријског концепта који дефинише мрежу из геометрије. Рад у наставку даје процедуру моделирања 2D NURBS коначних елемената за раванске проблеме као и примену на тест моделима.</i></p>	M33
9	<p>Milić P., Marinković D., Petrović G., „Isogeometric FE Analysis of Thin Walled Structures with Kirchhoff-Love Shell Element“, Mechanical Engineering in XXI Century, 3rd International Conference, Mašinski fakultet Niš, pp. 407 - 410, ISBN: 978-86-6055-072-1, Srbija, 17. - 18. Sep, 2015</p> <p><i>У раду је дат изогеометријски концепт коначних елемената типа љуске. Са обзиром на то да NURBS геометрија омогућује већи степен континуитета на граници елемената, погодна је за формирање елемента типа љуске по Kirchhoff-Love формулацији. У наставку рада приказан је поступак формирања матрице крутости елемента. Развијени тип елемента је примењен у формирању модела цилиндра којим је доказана конвергенција решења.</i></p>	M33
10	<p>Marinković D., Milić P., Marinković Z., "The Idea of Combined Linear – Geometrically Nonlinear FEM Modeling with Application on a Tower Crane", XI International Conference on System, Automatic Control and Measurements SAUM 2012, University of Niš, Faculty of Electronic Engineering, Faculty of Mechanical Engineering, pp. 282 - 285, ISBN: 978-86-6125-072-9, Srbija, 14. - 16. Nov, 2012</p> <p><i>Моделирање инжењерских структура подразумева истраживање алтернативних решења у циљу постизања задовољавајућег компромиса између комплексности модела и прецизности предвиђеног понашања. У многим случајевима, структурно понашање укључује геометријске нелинеарности које су ограничене на релативно мали поддомен. Рад се бави идејом комбинованог линеарног - геометријски нелинеарног FEM моделирања који има за циљ већу тачност уз рационалне нумеричке и рачунарске захтеве. Овај приступ је од великог значаја код практичних задатака када се обухвата реална геометрија структуре. Идеја је приказана у раду на примеру који укључује торањску дизалицу са теретом као клатном. Редукција нумеричког модела заснована на техници модалне суперпозиције се користи за линеарни део модела. То додатно побољшава нумеричку ефикасност. Проблем је решаван помоћу експлицитне временске интеграције.</i></p>	M33
11	<p>Janošević D., Petrović H., Milić P., Nikolić V., "Nominal mass criteria for manipulator optimization of mobile machines", The 7th International conference Research and development of mechanical elements and systems - IRMES 2011, Mechanical Engineering Faculty,</p>	M33

	University of Niš, pp. 521 - 524, ISBN: 978-86-6055-012-7, Srbija, 27. - 28. Apr, 2011 <i>Овај рад изучава структуре мобилних машина и погонских чланова манипулатора коришћених у дисертацији. Из урађених анализа сагледавани су критеријуми који утичу на оптималну синтезу чланова на бази чега се одређују унутрашња кинематска и динамичка стања чланова. Овај рад има и допунски циљ да се добије оптимално решење кинематског ланца (минимална маса).</i>	
12	Janošević D., Petrović N., Milić P., Nikolić V., "Modelling resistance of digging of hydraulic excavators", The seventh international triennial conference Heavy machinery HM 2011, ISBN: 978-86-82631-58-3, pp. 85 - 88, Srbija, 29. Jun - 02. Jul, 2011 <i>У раду су прво анализирани геометријске, кинематичке и динамичке променљиве које утичу на отпор копања хидрауличних багера са дубинским манипулатором. У наставку су дати развијени математички модели за одређивање отпора копања багера. Овакав модел је подлога за касније симулације које су реализоване у оквиру докторске дисертације.</i>	M33
13	Jovanović M., Manić M., Jovanović S., Janković P., Radoičić G., Milić P., "Research of dynamic characteristics of double-boom crane", The Sixth International Conference Transport and Logistics til2017, Mašinski fakultet u Nišu, pp. 60-66, ISBN: 978-86-6055-088-2, Niš, 25. - 26. May, 2017 http://til.masfak.ni.ac.rs/index.php/en/til-2016/proceedings <i>У оквиру ових истраживања анализирани су врсте коначних елемената погодних за транспортне машине. Изучаване су портално-обртне дизалице са двоструком стрелом које представљају типичне структуре дизалица за бродоградњу. Овим радом је дат преглед експерименталних и теоријских истраживања на систему за промену дохвата дизалица. Такође, рад показује најпогоднији начин теоријског моделирања носеће структуре и израчунавања унутрашњих динамичких параметара. Ова истраживања су коришћена за разматрање квалитета моделирања гредним елементом.</i>	M33
14	Jovanović M., Milić P., "The real responsible elements properties of transportation machines' supporting structures", "Innovation as a Function of Engineering Development", IDE 2011, Faculty of Civil Engineering and Architecture Niš, pp. 229 - 234, ISBN: 978-86-80295-98-5, Srbija, 25. - 26. Novembar, 2011. <i>У раду је приказана техника моделирања сложених структура транспортних машина моделираних различитим врстама коначних елемената и различитим врстама интерполационих функција. Анализа је изведена посматрањем структуре одлагача и његовог најоптерећенијег чвора. Анализом је тестирана топологија мреже чворова за реалну конструкцију одлагача у РББ Бор.</i>	M33
15	Jovanović V., Janošević D., Pavlović J., Milić P., "Dynamic simulation of hydraulic excavators with shovel manipulator", 3rd International Conference, Mechanical Engineering in XXI Century, University of Niš, Faculty of Mechanical Engineering, Niš, Serbia, pp. 422 - 426, ISBN: 978-86-6055-072-1, Serbia, 17. - 18. Sep, 2015 <i>У раду је приказан динамички математички модел багера са утоварним манипулатором. За овај модел развијен је софтвер за нумеричку симулацију рада багера и одређене типове задатака. Симулацијом су одређени кинематски и динамички параметри који су основа каснијих анализа у дисертацији. Као пример дати су резултати нумеричке динамичке симулације великог хидрауличног багера са утоварном кашиком запремине 4.4m³.</i>	M33

ИСПУЊЕНОСТ УСЛОВА ЗА ОДБРАНУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Кандидат испуњава услове за оцену и одбрану докторске дисертације који су предвиђени Законом о високом образовању, Статутом Универзитета и Статутом Факултета.

ДА НЕ

Образложење

Кандидат је положио предвиђене испите на магистарским и докторским студијама, има одобрену тему докторске дисертације, објавио је 15 научних и стручних радова у области пријављене теме. Кандидат је предао докторску дисертацију у прописаном року, у складу са пријављеном и одобреном темом, одговарајућег обима и квалитета израде.

ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Докторска дисертација кандидата Предрага Милића, дипломираног машинског инжињера, садржи укупно 158 страна формата А4. На почетку су општи подаци о дисертацији, садржај, преглед приказаних слика и табела. Тема дисертације је изложена кроз 9 глава и литературу од 109 цитираних библиографских јединица. Тема дисертације је изложена кроз следеће главе: 1. Увод, 2. Геометријско моделирање са неуниформним рационалним Б-сплајновима, 3. Метода коначних елемената и изогометријски приступ, 4. Имплементација NURBS основних функција у методи коначних елемената, 5. Модел Kirchhoff-Love љуске са NURBS основним функцијама, 6. Структурна изогометријска анализа са Т-сплајн функцијама облика, 7. Проблем сопствених вредности и експлицитна транзијентна динамичка анализа, 8. Примена изогометријске анализе за решавање реалних проблема и 9. Закључак.

Дисертација обухвата истраживања новог правца у методи коначних елемената којим се уводи реалан облик физичких облика у топологију коначних елемената. Иницијална геометрија носи са собом основу за формирање мреже коначних елемената, чиме се избегава раније уобичајен поступак генерисања мреже. Овај избор припреме модела за увођење у FEM анализу погодан је јер су CAD модели најчешће генерисани NURBS геометријом. На бази таквог приступа развијени су изогеометријски модели. Они подразумевају унапређење сплајнова у смислу дефиниције и параметарског моделирања и квалитета њихових основних функција. То је омогућило кандидату да развије више типова коначних елемената са NURBS и T-сплајн основом: 2D равански елемент, 3D солид, 2D Kirchhoff-Love љуска. Сваки од развијених елемената примењен је у теорији еластичности што је изложено од 4. до 6. поглавља. Тестирање развијених елемената је, даље, урађено кроз пробе сопствених вредности и експлицитну транзијентну динамичку анализу на тест примерима. Контрола квалитета развијених елемената проверавана је експериментално - мерењем сопствених фреквенција и сопствених модова осциловања. На крају је вршено тестирање развијених изогеометријских коначних елемената на конструктивним проблемима носећих структура транспортних машина које се одликују закривљеношћу геометрија и променљивом формом.

У уводу дисертације, кандидат објашњава приступ формирања CAD модела и неминовне апроксимације које доводе до разлика између физичке геометрије и геометрије коначног елемента. Образложен је избор изогеометријских модела као актуелан истраживачки правац. На четири стране је дат преглед досадашњих истраживања у овој области са обимном литературом, наведеном на крају рукописа. У оквиру главе 1 кратко су дати научни циљеви дисертације, преглед садржаја и приступ тематици дисертације.

Кандидат у другој глави износи основе геометријског моделирања NURBS-ом, математичке моделе B-сплајна, аналитички и графички интерпретиране са различитим степеном основних функција. Дефинисане су особине B-сплајн површи, NURBS крива, NURBS површ, изводи основних NURBS функција математички и графички интерпретирани и алгоритми за примену NURBS геометрије. Такође, дат је осврт на алгоритам за повећање степена основних функција, повећање густине мреже и к-рафинацију мрежа, чиме се врши припрема за генерисање мреже у методи коначних елемената.

У трећој глави изложен је приступ класичној варијационој FEM са непознатим величинама у облику деформација. Паралелно класичном концепту, изложен је изогеометријски концепт. Овај концепт подразумева коришћење NURBS основних функција као функција облика (shape function) у FEM методи. Изложена је разлика у понашању Lagrange-ових функција облика у конвенционалном приступу и NURBS функција облика - примењених у изогеометријском приступу. Ове разлике упућују на предности изогеометријског приступа. Рецимо, једна NURBS интерполациона функција може да буде заједничка за више узастопних коначних елемената док интерполирана Lagrange-ова функција може да услови Gibbs-ова осциловања. Предност NURBS-а је у бољем степену континуитета на границама елемената.

У глави четири, приказана је имплементација NURBS основних функција у методи коначних елемената са навођењем основних релација класичне теорије еластичности и изогеометријском анализом 3D солидом. Дате су полазне једначине за формирање интерполационих матрица и матрица крутости. Да би се реализовали примери, направљена је шема алгоритма изогеометријске процедуре за рад са *patch*-евима. Урађен је контролни пример моделирања и статичке анализе плочице са отвором у изогеометријском и класичном извођењу. Графички и нумерички су приказани резултати оба модела. Поређење указује на нову форму у којој су континуитет промене напона и деформација боље изражени, блиски теоријским решењима.

У петој глави се разматра модел Kirchhoff-ове љуске са NURBS основним функцијама. Овај тип љуске је изабран обзиром на ширину практичне примене и добре услове континуитета на границама елемената. Дефинисана је диференцијална геометрија површина, кинематика љуске, Green-Lagrange-ови тензори деформације љуске са применом на мале деформације и виртуелни рад померања. Посматран је модел четвртине цилиндра изогеометријском анализом формиран на бази Kirchhoff-Love љуске и различитим степенима NURBS основних функција. Показана је техника за формирање сложенијих структура са више сегмената и оригиналним примерима. Поређења деформација модела су упоредно представљена у виду дијаграма са различитим извођењем степена NURBS-а.

У шестој глави, разматрана је изогеометријска анализа са T-сплајн функцијама облика. Разматрани су недостаци изогеометријског моделирања условљени увођењем више *patch*-ева у геометријске моделе. Ово питање је уведено у рукопис обзиром да су ово познати разлози због чега NURBS није увек погодан за изогеометријску анализу. Недостаци NURBS-ева се могу превазићи коришћењем T-сплајнова, а то је NURBS са T спојевима. T спојеви омогућавају локалну промену мреже и нису ограничени на структуру тензорског производа јер су засновани на тачкама контролног полигона. Уведена је Cox-de Boor-ова рекурзивна формула примењена на T-сплајн геометрији. На бази резултата претходних истраживања T-сплајн елемента, Bezier-ове екстракције и декомпозиције, изведена је T-сплајн Bezier-ова екстракција са нумеричким примером плочице са отвором и више T-сплајн површи. Резултати примене T-сплајн површи су значајно бољи у односу на исте примере изведене класичним софтвером (ANSYS).

У седмој глави су разматране сопствене вредности и понашање изогеометријског елемента у експлицитној транзијентној динамичкој анализи. На почетку су дате фреквентне једначине и формирање инерционе матрице модела. За практичну проверу коришћена је висећа правоугаона алуминијумска плоча на којој је експериментално проверавана тачност теоријског изогеометријског модела. Резултати тих поређења и резултати примене класичне варијационе формулације FEM дате су графички, табеларно и сликовито. Мерење је обављено у лабораторији Института за механику ТУ Берлин. Коришћен је оптички виброметар Polytec Optics-PSV-400 и побуђивач Permanent magnet shaker V406 као и претварач силе Dvtran1051V3. Овај примен објективизације пал и $v_{p/h}$ пал

идентификована одступања (до 5%) која је кандидат добио изогеометријским моделирањем од експерименталних резултата. Резултати NURBS анализа и експерименталних испитивања графички су представљени сликама модова. Највиши ниво примене методе коначних елемената је транзијентна динамичка анализа. Изнет је теоријски модел експлицитне динамичке анализе и урађен је пример конзоле са ударом у облику *ramp* функције. Пробе са изогеометријским коначним елементима показују да се ефикасно може радити директна интеграција са врло малим временским корацима (10^{-10} s). Поређење са имплицитном динамичком анализом дато је графички и табеларно на примеру осциловања конзоле (плоче). За анализу временски променљивог стања осциловања чврстих материјалних структура, коришћена је метода директне нумеричке интеграције диференцијалних једначина кретања. За модалну анализу коришћена је *Lanczos* метода. За развој нумеричких и механичких модела и решавање свих задатака са изогеометријским елементима кандидат је развио сопствене софтвере на бази теорије еластичности.

У глави 8 приказана је примена изогеометријске анализе за решавање реалних проблема – анализа стреле хидрауличног багера произведеног у ИМК14 и теретне куке (према DIN15-401-1) као елемената са израженом геометријском закривљеношћу. Резултати су упоређени са класичним коначним елементима типа тетраедра библиотеке у PLM Siemens (NX Nastran). Ови резултати упућују на блискост решења и проверен степен одступања основних модова.

Финално, у глави девет, изнети су закључци о погодности коришћења NURBS моделирања у методи коначних елемената кроз примере и тестове урађене у овој тези. На основу тога су предложени закључци о примени методе и њеној ефикасности у техници.

ВРЕДНОВАЊЕ РЕЗУЛТАТА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ниво остваривања постављених циљева из пријаве докторске дисертације (до 200 речи)

Кандидат је своја истраживања, у складу са темом дисертације, усмерио ка теоријском моделирању сплајнова и њиховом увођењу у програмску реализацију методе коначних елемената. Најпре су формиран основни математички модели сплајна (ред основних функција, индексни вектори и тачке контролног полигона). Извршено је формирање основних функција *splajna* (*shape function*), за методу коначних елемената и израчунавање њихових вредности за сваку тачку интеграције структуре, одређену Gauss-овим квадратурним формама. Овим су дефинисани параметри коначног елемента произвољне структуре, а тиме и матрица крутости. За анализу изогеометријске структуре коначних елемената формирана је глобална матрица крутости структуре, вектори спољашњег дејства. Гранични услови су уведени кроз матрицу крутости. На овај начин је добијен систем алгебарских једначина који је решаван матричном алгебром. Извршеним избором, изогеометријске форме су дефинисане преко сплајнова и уведене у нумеричку анализу FEM. Истраживања су даље ишла у правцу примене различитих типова геометрија коначних елемената у техничким анализама. Овакав приступ је омогућио да се геометрија модела без апроксимација уведе у методу коначних елемената, чиме се не занемарује континуитет промене геометрије. На бази таквих дефиниција, вршене су контроле тачности решења једноставних изогеометријских модела поређењем са теоријским моделима и нумеричким решењима класичне методе коначних елемената. Предност избора, који је извршио кандидат, је потпуна верност геометрије објекта који се анализира и процедурална припремљеност геометријског модела за утврђену топологију мреже. У опративном смислу изогеометријска процедура поједностављује примену методе на геометријама са Kirchhoff-Love љуском и убрзава нумеричку процедуралност. Постављени циљеви истраживања су из домена статичких анализа проширени у домен динамичких, применом изогеометријске формулације на задацима одређивања сопствених вредности и динамичког одговора на произвољну побуду. Тиме је тестирање изогеометријске формулације комплетно обухваћено типичним техничким анализама у којима би се метода примењивала. Сходно пријави тезе, урађена је и једна експериментална проба утврђивања динамичких својстава модела ласерском технологијом мерења сопствених вредности (фреквенција и сопствених вектора) у пољу континуума што је објективизовало истраживања. Примена методе, постављене на овај начин, тестирана је на геометријским формама транспортних машина па су анализирана два карактеристична примера.

Реализовано је:

- Формиран су референтни математички модели за изогеометријску формулацију коначних елемената.
- Развијена је програмска процедуралност формирања B-сплајна и NURBS-а са елементима управљања.
- У глави три је упоређено понашање функција облика изогеометријског приступа сплајном и интерполационих функција на бази Lagrange-ових полинома.
- У глави четири показана је процедуралност увођења изогеометријске формулације у методу коначних елемената а за проблеме у равни и простору.
- Посматран је најактуелнији проблем рада са изогеометријском љуском која је најчешћи елемент у анализи континуума лаких носећих структура. Показана је математичка процедуралност добијања решења у статичким анализама а задатак је проширен увођењем трака које преносе савијање за проблеме са више геометријских *patch*-ева (модели могу да имају много коначних елемената али тек неколико *patch*-ева).
- У шестој глави, посматран је посебан облик NURBS-а (T-сплајн) који омогућава локалну рафинацију мреже. У 2D простору изведена је процедура примене T-сплајна у решавању техничког задатка концентрације напона у плочи са отвором, којом су одређене деформације упоредно са класичним и теоријским решењима. Поступак Bezier-ове декомпозиције и екстракције омогућио је налажење решења и њихово поређење са решењима у комерцијалном софтверу.

- У глави седам, посматрани су динамички проблеми. Урађена је модална, транзијентна и експериментална анализа једноставне плоче у фреквентном домену од 400 Hz. За транзијентну анализу је употребљен метод централне разлике и развијени су оригинални програмски модули за решавање задатака експлицитне динамичке анализе. Ти резултати су омогућили да се упореде решења постављена овом тезом (заснована на NURBS-у) и решења из комерцијалног софтвера Nastran. Дато је директно поређење модова са експериментом. Запажено је добро приближење експерименталних и изогометријских резултата.
- Оцењен је квалитет примене изогометријске формулације NURBS-ом на техничким проблемима стреле багера и теретне куке. Урађена је статичка и модална анализа са поређењем одступања у фреквентном домену од 50 Hz чиме је проверена могућност коришћења методе у техничким апликацијама.
- На крају је изнето истраживачко искуство у примени изогометријске формулације методе коначних елемената и вредности примене NURBS-а у анализама.
- Дисертацијом је извршена систематизација процедура и метода потребних за изогометријску анализу формирањем општих математичких форми и програмских процедура. Тиме су утврђена општа својстава поступка изогометријске анализе као теоријског правца нових структурних анализа.

Вредновање значаја и научног доприноса резултата дисертације (до 200 речи)

Научни резултати дисертације су:

- Математички су дефинисани параметарски модели коначних елемената заснованих на изогометријској FEM формулацији применом NURBS-а.
- Математички су дефинисане уске траке као специјални допунски коначни елементи структуре који побољшавају континуитет на границама *patch*-ева.
- Оперативно су показане процедуре формирања математичких модела и примене изогометријске анализе на техничким задацима, што омогућује увид у предности тестираних идеја.
- Нумерички су одређена одступања резултата постављеног изогометријског приступа од једног аналитичког модела и одступања од решења у класичној FEM анализи (комерцијални софтвери).
- Експериментално су верификовани резултати динамичког понашања типичног геометријског модела (плоче), заснованог на изогометријској анализи.
- На бази истраживања из дисертације, објављен је један научни рад. У тематику моделирања геометријских модела (за струјање флуида) објављен је други рад на SCI Clarivate Analytics листи. Поред тога, објављена су још три рада у области изогометријских коначних елемената и десетак везаних за примену различитих врста коначних елемената (напред наведених).

Као техничка решења из дисертације, са могућношћу примене у пракси, издвојени су:

- Софтверски пакет за изогометријску структурну анализу чврстог континуума за област линеарне статичке анализе. Софтверски пакет је прилагођен за сложене геометријске форме.
- Аналитичким путем је одређен колектив унутрашњих сила у структури багера који је изабран за тестирање новог типа коначног елемента. Пријављено техничко решење.

Оцена самосталности научног рада кандидата (до 100 речи)

Кандидат је закорачио значајно у област механике континуума примењене у структурним анализама техничких задатака. Кандидат поседује потребна знања из области механике континуума и софтверског моделирања математичких процедура. Самостално је увео NURBS и Т-сплајн функције облика у методу коначних елемената, формирао и решио алгебарски системи једначина у приказаним примерима. Применио је познате технике редукције појаса матрице крутости структуре. Израдио је анализу конвергенције развијеног изогометријског модела и добијене резултате упоредио са резултатима примене Mindlin-Reissner-овог типа љуске из комерцијалних софтвера. За Т-сплајнове кандидат је дефинисао процедуре одређивања основних функција потребних за анализу. Експериментална провера је реализована на Институту за механику - Департману за структурну анализу ТУ Берлин.

ЗАКЉУЧАК (до 100 речи)

Прегледом докторске дисертације и анализом приказаних резултата, Комисија доноси следеће закључке:


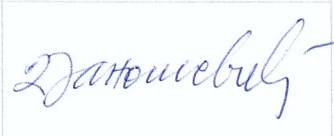

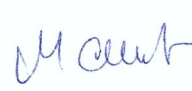

- Садржај докторске дисертације одговара пријављеној теми и садржају коју је верификовала Комисија за оцену научне заснованости и усвојило Наставно-научно веће Машинског факултета у Нишу.
- Докторска дисертација показује да кандидат изврсно познаје методе геометријског моделирања сплајнова, методе структурних анализа, нумеричке методе анализе механичких система и савремене софтвере.
- Кандидат је овим радом истражио вредности примене изогометријске анализе у методи коначних елемената и оценио употребљивост методе кроз више различитих врста анализа.
- Кандидат је обавио испитивања употребљивости неколико врста изогометријских коначних елемената на техничким проблемима закривљених геометрија.
- Рад је јасан, математички на високом нивоу, одсликава савремену методу коначних елемената и износи битне елементе обављених истраживања. Главна тематика је детаљно изложена, заснована на научним методама са закључцима који упућују на правилну примену истраживања у пракси.
- Приказани резултати су рецензирани и објављени у познатим међународним научним часописима. Материја се уклапа у научни тренд истраживања и има посебан значај јер су методе механике континуума базне за развој софтвера и инжењерску делатност.

На основу наведених закључака, чланови Комисије се слажу да анализирана докторска дисертација даје оригиналан научни допринос у области FEM-а и анализе носећих структура. Полазећи од тих вредности, Комисија са задовољством предлаже Наставно-научном већу Машинског факултета у Нишу да овај рад Предрага Милића, дипл. маш. инжињера под називом:

"Развој изогеометријске методе коначних елемената и њена примена у структурној анализи носећих структура транспортних машина"

прихвати као докторску дисертацију и кандидата позове на усмену јавну одбрану.

КОМИСИЈА

Број одлуке ННВ о именовану Комисије		612-596-5/2017		Датум именовања Комисије		22.12.2017. године	
Р. бр.	Име и презиме, звање					Потпис	
1.	Др Миомир Јовановић, редовни професор			председник			
	Транспортна техника и логистика (Научна област)	Универзитет у Нишу Машински факултет у Нишу (Установа у којој је запослен)					
2.	Др Драгослав Јаношевић, редовни професор			члан			
	Транспортна техника и логистика (Научна област)	Универзитет у Нишу Машински факултет у Нишу (Установа у којој је запослен)					
3.	Др Предраг Рајковић, редовни професор			члан			
	Математика и информатика (Научна област)	Универзитет у Нишу Машински факултет у Нишу (Установа у којој је запослен)					
4.	Др Миле Савковић, редовни професор			члан			
	Механизација и носеће конструкције (Научна област)	Универзитет у Крагујевцу – Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву (Установа у којој је запослен)					
5.	Др Драган Маринковић, ванредни професор			ментор, члан			
	Транспортна техника и логистика (Научна област)	Универзитет у Нишу Машински факултет у Нишу (Установа у којој је запослен)					

Датум и место: У Краљеву, Нишу и Берлину, Фебруара 2018. године

Izjava 1.

IZJAVA O AUTORSTVU

Izjavljujem da je doktorska disertacija, pod naslovom:

„Razvoj izogeometrijske metode konačnih elemenata i njena primena u strukturnoj analizi nosećih struktura transportnih mašina“

koja je odbranjena na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Nišu:

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada;
- da ovu disertaciju, ni u celini, niti u delovima, nisam prijavljivao na drugim fakultetima, niti univerzitetima;
- da nisam povredio autorska prava, niti zloupotrebio intelektualnu svojinu drugih lica.

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci, koji su u vezi sa autorstvom i dobijanjem akademskog zvanja doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada, i to u katalogu Biblioteke, Digitalnom repozitorijumu Univerziteta u Nišu, kao i u publikacijama Univerziteta u Nišu.

U Nišu, 11.05.2018.

Potpis autora disertacije:



Milić Predrag

Izjava 2.

**IZJAVA O ISTOVETNOSTI ELEKTRONSKOG I ŠTAMPANOG OBLIKA DOKTORSKE
DISERTACIJE**

Naslov disertacije:

**„Razvoj izogeometrijske metode konačnih elemenata i njena primena u strukturnoj analizi nosećih
struktura transportnih mašina“**

Izjavljujem da je elektronski oblik moje doktorske disertacije, koju sam predao za unošenje u **Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu**, istovetan štampanom obliku.

U Nišu, 11.05.2018.

Potpis autora disertacije:



Milić Predrag

Izjava 3:

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku „Nikola Tesla“ da u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu unese moju doktorsku disertaciju, pod naslovom:

„Razvoj izogeometrijske metode konačnih elemenata i njena primena u strukturnoj analizi nosećih struktura transportnih mašina“

Disertaciju sa svim prilogima predao sam u elektronskom obliku, pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju, unetu u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu, mogu koristiti svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučio.

1. Autorstvo (CC BY)

2. Autorstvo – nekomercijalno (CC BY-NC)

3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade (CC BY-NC-ND)

4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima (CC BY-NC-SA)

5. Autorstvo – bez prerade (CC BY-ND)

6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima (CC BY-SA)⁴

U Nišu, 11.05.2018.

Potpis autora disertacije:



Milić Predrag

⁴ Autor disertacije obavezan je da izabere i označi (zaokruži) samo jednu od šest ponuđenih licenci; opis licenci dat je u nastavku teksta.