



UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA U
NOVOM SADU



Mirna Kapetina

**ADAPTIVNA ESTIMACIJA PARAMETARA
SISTEMA OPISANIH IRACIONALNIM
FUNKCIJAMA PRENOSA**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Novi Sad, 2017



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ • ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР:	
Идентификациони број, ИБР:	
Тип документације, ТД:	Монографска документација
Тип записа, ТЗ:	Текст, штампани материјал
Врста рада, ВР:	Докторска дисертација
Аутор, АУ:	Мирна Капетина
Ментор, МН:	др Милан Рапаић, ванредни професор
Наслов рада, НР:	Адаптивна естимација параметара система описаних ирационалним функцијама преноса
Језик публикације, ЈП:	Српски
Језик извода, ЈИ:	Српски/Енглески
Земља публикавања, ЗП:	Република Србија
Уже географско подручје, УГП:	АП Војводина
Година, ГО:	2017
Издавач, ИЗ:	Ауторски репринт
Место и адреса, МА:	Факултет техничких наука, 21 000 Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 6
Физички опис рада, ФО: <small>(поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)</small>	7/130/90/2/33/1
Научна област, НО:	Електротехничко и рачунарско инжењерство
Научна дисциплина, НД:	Аутоматика и управљање системима
Предметна одредница/Кључне речи, ПО:	Естимација параметара, идентификација модела, линеарни системи, метод најмањих квадрата, градијентни алгоритам, ирационалне функције преноса, фракциони системи, системи са кашњењем, системи са дистрибуираним параметрима, ЦНГ систем
УДК	
Чува се, ЧУ:	Библиотека Факултета техничких наука, Универзитет Нови Сад
Важна напомена, ВН:	
Извод, ИЗ:	Предмет истраживања је идентификацији и адаптивна естимација параметара широке класе линеарних система. Предложени алгоритми за адаптивну естимацију параметара су примењиви на системе који се описују функцијама преноса произвољног облика, што укључује системе са кашњењем, дистрибуираним параметрима, фракционе системе и друге системе описане ирационалним функцијама преноса. На послетку, дат је алгоритам за идентификацију ЦНГ система који се не извршава у реалном времену и претпоставља да структура модела није позната унапред.
Датум прихватања теме, ДП:	03.07.2017.
Датум одбране, ДО:	
Чланови комисије, КО:	Председник: др Бранко Ковачевић, редовни професор
	Члан: др Зоран Јеличић, редовни професор
	Члан: др Филип Кулић, редовни професор
	Члан: др Томислав Шекара, ванредни професор
	Члан, ментор: др Милан Рапаић, ванредни професор
	Потпис ментора



KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	Monographic documentation
Type of record, TR :	Text, printed material
Contents code, CC :	PhD thesis
Author, AU :	Mirna Kapetina
Mentor, MN :	Milan Rapaić, PhD, associate professor
Title, TI :	Adaptive Parameter Estimation in Systems described by Irrational Transfer Functions
Language of text, LT :	Serbian
Language of abstract, LA :	Serbian/ English
Country of publication, CP :	Republic of Serbia
Locality of publication, LP :	AP of Vojvodina
Publication year, PY :	2017
Publisher, PB :	Autor reprint
Publication place, PP :	Faculty of Technical Sciences, 21 000 Novi Sad, Trg DositejaObradovića 6
Physical description, PD : (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	7/130/90/2/33/1
Scientific field, SF :	Electrical and Computer Engineering
Scientific discipline, SD :	Automation and Control Systems
Subject/Key words, S/KW :	Parameter Estimation, Model Identification, Linear System, Least Square Method, Gradient Algorithm, Irrational Transfer Functions, Fractional Order Systems, Delayed Systems, Distributed Parameter, Systems CNG system
UC	
Holding data, HD :	Library of the Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad
Note, N :	
Abstract, AB :	The subject of this research is the system identification and adaptive parameter estimation in wide class of linear processes. Proposed approaches for adaptive parameter estimation can be applied to systems described by transfer functions of arbitrary form, including systems with delay, distributed-parameteter systems, fractional order systems, and other system described by irrational transfer functions. In the final part, an offline algorithm for identification of CNG system which does not assume any a priori known model structure is proposed.
Accepted by the Scientific Board on, ASB :	03.07.2017.
Defended on, DE :	
Defended Board, DB :	
President:	Branko Kovačević, PhD, full professor
Member:	Zoran Jeličić, PhD, full professor
Member:	Filip Kulić, PhD, full professor
Member:	Tomislav Šekara, PhD, associate professor
Member, Mentor:	Milan Rapaić, PhD, associate professor
	Menthor's sign

Sadržaj

Sadržaj	v
1 Uvod	1
2 Osnovni pojmovi i polazne osnove u istraživanju	4
2.1 Model i modeliranje	5
2.2 Identifikacija sistema	8
2.3 Osnovna notacije i definicije	13
2.4 Linearni sistemi	17
2.5 Stabilnost linearnih dinamičkih sistema	21
2.6 Neka pomoćne tvrđenja	26
3 Estimacija parametara linearnih sistema	28
3.1 Estimaciju parametara sistema sa racionalnom funkcijom prenosa	31
3.2 Metod najmanjih kvadrata	33
3.3 Estimacija parametara sistema sa iracionalnom funkcijom prenosa	40
3.4 Opis problema	51
4 Dvofazni adaptivni algoritam za estimaciju parametara	55
4.1 Dvofazni algoritam: osnovna ideja i koncept	56
4.2 Numerički primeri	62
5 Adaptivni algoritam za estimaciju zasnovan na gradijent- nom postupku	72
5.1 Osnovni algoritam	73
5.2 Pojednostavljeni algoritam sa prostoperiodičnom pobudom	79
5.3 Numerički primeri	85

5.4	Neke dalje modifikacije	101
6	Identifikacija frakcionog modela CNG sistema	104
6.1	Motori sa CNG sistemom	106
6.2	Identifikacija sistema ubrizgavanja	108
7	Zaključak	117
A	Dodatak	119
A.1	Makleod-ova teorema o srednjim vrednostima	119
A.2	Detaljan dizajn filtra propusnika opsega	120
A.3	Nastavak analize u sklopu Primera 3	121
	Bibliografija	122

GLAVA 1

Uvod

Ova disertacija je rezultat višegodišnjeg naučno-istraživačkog rada autora na problemima identifikacije i estimacije parametara sistema automatskog upravljanja, optimizacije i teorije upravljanja sistemima. Prema literaturi koja nam je bila dostupna i prema naučno-istručnim rezultatima, koji su pre istekli iz ovog rada, autor je ubeđen da su ideje i rezultati ove disertacije originalni i da se ovde prvi put na takav način predstavljaju.

Rad je u celini posvećen identifikaciji i estimaciji parametara sistema automatskog upravljanja koji se uspešno mogu modelovati funkcijama prenosa proizvodnje strukture, u racionalnoj ili iracionalnoj formi. Estimacija parametara kod sistema koji se opisuju iracionalnim funkcijama prenosa nije široko razmatrano u naučno-stručnoj literaturi, a po pravilu problemi, koji su obuhvaćeni u takvim istraživanjima su po svom karakteru specijalizovani za tačno određenu klasu linearnih sistema i ne pružaju mogućnost opštijeg pristupa koji je inavrijantan na matematički model sistema. Svesni smo da predložena rešenja iz ove disertacije, iako su opšta po svom karakteru, ne moraju biti bolja od partikularnih metoda za pojedine klase problema koje su bile predmet drugih istraživanja. Tako npr. postoji algoritam koji brže konvergira pri estimaciji kašnjenja ali takav algoritam se teško može primeniti na jednovremenu estimaciju parametara sistema koji obuhvataju i neceli red sistema i kašnjenje. Grubo govoreći, ovaj rad je podeljen u tri celine sa zajedničkim imeniteljem da se radi o tri različita pristupa estimacije parametara sistema koji se modeluje iracionalnim funkcijama prenosa.

U okviru prve celine predstavljen je algoritam za adaptivnu estimaciju parametara linearnih sistema opisanih funkcijama prenosa proizvoljne strukture, gde nepoznati parametri figurišu u linearnom ili nelinearnom obliku. Ovaj algoritam nazvali smo „dvofazni” jer se sva izračunavanja odvijaju u dve faze. Njegova markantna karakteristika je da ulaz u sistem mora biti kombinacija prostoperiodičnih signala različite učestanosti. U okviru prve faze algoritma koristi se rekuzivni metod najmanjih kvadrata sa faktorom zaboravljanja koji će kao izlaz imati procenu modula i argumenta funkcije prenosa za učestanosti definisane ulaznim signalom. Ovako dobijen izlaz predstavlja ulaz u drugu fazu algoritma u kojoj se konačne vrednosti nepoznatih parametara dobijaju direktnom inverzijom, kada je to moguće, odnosno primenom gradijentnog iterativnog postupka kada je neophodno rešavanje sistema nelinearnih jednačina. Može se primetiti da su obe ove faze numerički pogodne i za izvršavanja u realnom vremenu. Ova osobina, da su sva izračunavanja moguća *online*, odnosno u realnom vremenu, je zajednički imenitelj ovog novopredloženog „dvofaznog” algoritma i algoritma koji predstavlja drugu funkcionalnu celinu ove disertacije. Ključna osobina predloženog „dvofaznog” algoritma, po mišljenju autora, je pristup koji omogućuje da se na osnovu modula i argumenta iracionalne funkcije prenosa izvrši *online* identifikacija parametara sistema automatskog upravljanja.

U okviru druge celine ovog rada predstavljen je adaptivni algoritam za estimaciju parametara sistema zasnovan na gradijentnom postupku. Predloženi algoritam razmatran je u dve varijante, „osnovni algoritam” i „pojednostavljeni algoritam”. Osnovni algoritam ima ograničenja da broj izlaza iz sistema mora biti jednak ili veći od broja nepoznatih parametara, ali daje veće mogućnosti u izboru ulaznog signala. Pojednostavljeni algoritam nema ograničenja u vidu broja parametara i broja izlaza iz sistema, već se taj problem rešava izborom ulaznog signala koji je linearna kombinacija prostoperiodičnih signala uz projektovanje banke filtera propusnika opsega na izlazu sistema. Jasno je da se na ovaj način omogućuje estimacija većeg broja parametara i kod sistema sa jednim izlazom. Ovaj adaptivni algoritam, kao i prvi „dvofazni” algoritam, je bogato ilustrovan nizom numeričkih simulacija koje pored standardnih test primera za ovu klasu problema obuhvataju i realne inženjerske probleme. Tako npr. razmatrani su sistemi sa necelim izvodima, sa i bez vremenskog kašnjenja, difuzni procesi koji se opisuju parcijalnim diferencijalnim jednačinama sa graničnim uslovima različitog oblika, ili kako smo u naslovu ove disertacije nazvali sistemi koji se mogu opisati iracionalnom funkcijom prenosa. Važno je istaći da je studija adaptivnog algoritma za estimaciju

parametara zasnovanom na gradijentnom algoritmu pratila i duboka analiza konvergencije, stabilnosti predloženog postupka i analize uticaja početnih pogađanja i poremećaja na ovaj predloženi postupak.

Oba ova predložena algoritma, i „dvofazni” i adaptivni algoritam zasnovan na gradijentnom postupku, podrazumevaju da je struktura modela poznata, odnosno način na koji nepoznati parametri figurišu u modelu mora biti poznata unapred. Za prevazilaženje ovog problema predložen je metod koji je dat u trećem delu ove disertacije, koji pored parametarske identifikacije sadrži i identifikaciju strukture sistema koja nije moguća kod *online* procedura već se izučava kao poseban problem. Ovaj postupak je ilustrovan kroz praktičan primer određivanja matematičkog modela dela CNG sistema automobila, gde su na raspolaganju bili ulazni i izlazni podaci u vremenskom domenu, koji su poslužili za formiranje modela visokog reda ARX (eng. *Auto-Regressive with eXogenous input model*) strukture, čija frekvencijska karakteristika upućuje na strukturu frakcionog oblika. U poslednjem koraku nepoznati parametri odabrane frakcione strukture su izračunati uz primenu globalne optimizacione proceduru, konkretno PSO (engl. *Particle Swarm Optimization*) tipa.

Može se reći da je ova disertacija matematička po svojoj formi ali suštinski inženjerski primenjiva što je ilustrovano na brojnim primerima naglašavajući sve osobine koje su od značaja u inženjerskim izračunavanjima.

Formalno gledano ova disertacija je organizovana u sedam poglavlja. Posle prvog uvodnog poglavlja, u poglavlju 2 dati su osnovni pojmovi i definicije, notacija i leme koje će se koristiti u daljem tekstu. Neki od tih pojmova bez obzira što su formalni i intuitivno dobro poznati su ipak na ovakav način uvedeni da bi se lakše pratio tok teksta i upotpunio rad u jednu logičnu celinu.

U okviru poglavlja 3 date su teorijske osnove estimacije parametara linearnih sistema sa posebnim naglaskom na algoritme i postupke koji će biti od interesa u daljem radu.

Poglavja 4, 5 i 6 predstavljaju centralna poglavlja ovog rada gde su detaljno predstavljani „dvofazni” algoritam, adaptivni algoritam zasnovan na gradijentnom postupku i identifikacija frakcionog modela CNG sistema, respektivno.

Poglavlje 7 čine zaključna razmatranja, a neke od teorema i matematičkih izvođenja koja bi tekst činile manje čitljivim su date u Dodatku ove disertacije.

Osnovni pojmovi i polazne osnove u istraživanju

U okviru ovog uvodnog poglavlja biće predstavljene motivacioni razlozi za istraživanja ove oblasti, kao i sve osnovne pojmove koje će autor koristiti da bi temu svog istraživanja prikazao jasno i koncizno. Biće izložen pregled osnovnih pojmova i postupaka vezanih za modeliranje, identifikaciju i estimaciju parametara sistema, sa naglaskom na termine i algoritme koji će nam biti od značaja u daljem radu. Tu najpre mislimo na postupak estimacije parametara sistema koji je od primarnog interesa sa stanovišta ove teze. Malo je poznato da su prvi radovi vezani za identifikaciju sistema nastali iz oblasti statistike, ekonometrije i analize vremenskih serija. Smatra se da koreni teorije o estimaciji parametara leže u radovima Gausa (1809) i Fišera (1912). Od tada do danas, oblast estimacije i identifikacije je doživela buran razvoj kako u matematičkom smislu, tako i u aplikativnom delu. U nastavku teksta daćemo kratak prikaz literature i naučnih izvora od posebnog značaja za našu studiju i istorijski razvoj oblasti identifikacije i estimacije. Posle uvođenja osnovnih pojmova, sledi detaljniji pregled literature od interesa, koji bliže uvodi u temu istraživanja.

Literatura koja se bavi problemom modeliranja, identifikacijom i estimacijom parametara sistema i njihovim uticajem je obimna. Među opštim udžbenicima posvećenim ovoj tematici možemo izdvojiti knjige od Ejkofofa [1], Ljunga i Glada [2, 3], kao i knjigu autora Boša i Klauva [4], ali od značaja za matematičko uopštavanje ove teorije je knjiga od Soderstroma i Stoica [5]. Među skupom objavljenih radova o identifikaciji sistema izdvojićemo često citirane

radove Ljunga i Glada [6] i Astroma i Soderstroma [7]. Interesantan je i filozofski pogled na matematičko modeliranje, koji je razmatrao Poper 1934. godine [8]. Mnogi tekstovi se pored opšte teorije o modeliranju i identifikaciji bave i njihovom primenom u različitim oblastima, kao što su biologiji [9] ili ekonometrija [10].

Kratak repertorij o teoriji modeliranja, koji obuhvata definisanje pojma modela i osnovnih pristupa pri modeliranju dat je u odeljku 2.1. U odeljku 2.2 prikazaćemo opšti postupak pri identifikaciji sistema i pokazati da postoji više različitih pristupa kojim se možemo voditi u tom postupku. U okviru ovog poglavlja, u odeljku 2.3, uvodimo notaciju i terminologiju, kao i definicije, kojima ćemo se služiti u nastavku teze. Neki delovi su možda dati suviše detaljno, ali namera je da ova teza bude celovit tekst u okviru koje se nalaze svi neophodni elementi za puno razumevanje iste. U ovom kratkom pregledu, u okviru odeljka 2.4, biće definisan pojam linearnih sistema, dok će u odeljku 2.5 biti data osnovna svojstva stabilnosti sistema u smislu Ljapunova, sa naglaskom na svojstva na koja ćemo se pozivati u nastavku. U poslednjem odeljku 2.6 uvedene su leme koje su neophodne za dublje razumevanje materije od interesa.

2.1 Model i modeliranje

Sistemi sa kojima se susrećemo u svakodnevnom životu predstavljaju skup velikog broja elemenata sa mogućim većim brojem interakcija između njih. Ponašanje ovih sistema najčešće sa ispituje primenom modela. Postupak dobijanja modela koji opisuje pojave koje se odvijaju u realnom svetu, kao što su na primer fizički, hemijski ili elektrotehnički procesi naziva se modeliranje. Modeli mogu imati različite oblike i biti formulisani na različitim nivoima apstrakcije, ali suština modela je da on predstavlja pojednostavljenu prezentaciju realnog objekta ili fizičkog procesa u cilju rešavanja nekog problema. Sa jedne strane, ova prezentacija mora biti relativno jednostavna, a sa druge strane i dovoljno tačna. Koliko model treba biti precizan i detaljan određuje namena koja je definisana od strane kreatora modela. Jedan od modela, svima poznat, napravio je Nils Bor 1913. godine (Borov model atoma) gde su elektroni predstavljeni kao male naelektrisane čestice koje se vrte oko pozitivno naelektrisanog jezgra (planetarni model). Iako je on daleko od preciznog opisa realne situacije, on je do izvesnog stepena sasvim dobro mogao da nam pojašni interakciju atoma. Primena modeliranja nije ograničena samo na tehničke

processe (fizičke, hemijske, mehaničke, električke itd.), već se ona koristi u različitim oblastima, kao što su ekonomija, biologija, sociologija i druge. Postoji neograničen broj modela koji opisuju različite aspekte jedne realne pojave. Svi ti različiti pogledi na realnu pojavu rezultuju u različite modele. Suština postupka modeliranja je da se izaberu samo one osobine posmatranog procesa koje predstavljaju potrebne i dovoljne karakteristike da se proces opiše dovoljno tačno sa stanovišta namene modela. U svetlosti navedenog, zadatak modeliranja je da osvetli glavne osobine i fenomene realnog procesa i da ih prevede na neki apstraktan jezik, kao što je na primer jezik matematike. Na taj način, modeliranje predstavlja integralan deo nauke i tehnologije, koji zadire u skoro sve oblasti ljudskog delovanja [3, 4].

U svakodnevnom životu koriste se *mentalni modeli* koji se ne zasnivaju na matematičkim formalizmima. Međutim, za opisivanje osobina određenih sisteme primerenije je koristiti numeričke tabele i/ili grafove. Modeli tako opisanih sistema se nazivaju *grafički modeli*. Linearni vremenski invarijantni sistemi¹, na primer, mogu se jedinstveno opisati preko svog impulsnog ili jediničnog (odskočnog) odziva ili preko frekvencijskih karakteristika. Grafička reprezentacija ima široku upotrebu u različitim oblastima projektovanja. Za naprednije primene, neophodno je koristiti modele koji opisuju ponašanje i odnose u sistemima pomoću matematičkih izraza kao što su diferencijalne ili diferencne jednačine. Takvi modeli, u literaturi, nazivaju se *matematički (analitički) modeli*. Matematički modeli mogu se dalje okarakterisati brojnim pridevima (vremenski kontinualni ili vremenski diskretni, distribuirani sa koncentrisanim ili raspedeljenim parametrima, deterministički ili sohastički, linearni ili nelinerani, itd) označavajući tip diferencne ili diferencijalne jednačine koja ga opisuje. Upotreba matematičkih modela je svojstvena svim oblastima inženjerstva i fizike. Po pravilu, najveći deo inženjerskih disciplina, kao i teorija automatskog upravljanja, projektovanju pristupa u odnosu ili u skladu sa adekvatnim matematičkim modelom. Oni su, takođe i osnova za simulacije i predviđanje koje se intezivno koriste u svim oblastima, uključujući i netehničke oblasti kao što su ekonomija, ekologija i biologija [3].

Pojam modeliranja je neraskidivo povezan sa pojmom procesa ili sistema. U literaturi postoje različite objašnjenja pojmova sistema i procesa. U knjizi [4] pod sistemom se podrazumeva skup organizovanih i povezanih elemenata, realnih ili apstraktnih, predstavljenih kao celina koji služi zajedničkoj nameni. U svrhu funkcionisanja sistema, u njemu se odvija (realizuje) skup međusobno

¹ Pojam linearnog sistema, biće detaljno razmatran u nastavku teksta. Za sada ovaj pojam uvodimo intuitivno.

uslovljenih aktivnosti i događaja. Ova zbivanja u sistemu možemo nazvati procesom. Realni sistem i matematički model ne mogu se nikada poistovetiti. Model oslikava samo određeni aspekt fizičkog sistema, ali nikada ne možemo uspostaviti potpuno tačnu, već dovoljno tačnu vezu između njih. Naše prihvatanje modela se stoga vodi „korisnim” a ne „tačnim”. Ipak koncept „tačnog sistema” se koristi u smislu matematičkog opisa. Takva fikcija je korisna za osmišljavanje metoda identifikacije i razumevanja njihovih osobina. U tom kontekstu, pretpostavljamo da su podaci generisani prema nekom dobro definisanom matematičkom zakonu, koji je naravno idealizacija, dovoljno tačni. To znači da je sistem subjektivan pojam sa ograničenjima koja uključuju one osobine koje su najvažnije sa stanovišta kreatora modela, a isključuje osobine od manjeg značaja za opis posmatranog realnog procesa. Sistem je konačan deo beskonačnog prostora, a svi delovi koji nisu uključeni u sistem predstavlja njegovu okolinu. Prema tome, sistem karakterišu i granice koje ne trebaju biti suviše široke jer se može dogoditi da je model takvog sistema praktično nemoguće analizirati. Tada dobijamo složen model kod kog su mnoge važne osobine prekrivene nevažnim detaljima. Sa izborom granica koje su uske, model je suviše jednostavan i sve relevantne karakteristike realnog procesa neće biti obuhvaćene modelom, što će rezultovati u neadekvatnu analizu sistema na osnovu takvog modela. Na taj način, model predstavlja sredstvo za opisivanje najbitnijih karakteristika sistema koji se proučava. Dakle, svaki model oslikava komponente sistema, koji se nazivaju i objektima, veze i aktivnosti kojima objekti međusobno deluju, odnosno njihove interakcije, i potrebe onoga koji model kreira.

2.1.1 Izgradnja modela

Najvažniji korak u postupku modeliranja je izgradnja modela. Modeli mogu biti izgrađeni od podataka nastalih posmatranjem. Mentalni modeli, kao što je npr. model dinamike upravljanja automobilom, razvija se kroz vozačko iskustvo, dok su, na primer, grafički modeli najčešće napravljeni od skupa podataka dobijenih merenjem. Međutim, sa stanovišta inženjerske prakse, osnovni problem je izgradnja matematičkih modela koji opisuju dinamičke sisteme. U te svrhu mogu se koristiti dva pristupa (ili njihovo kombinovanje), [11]:

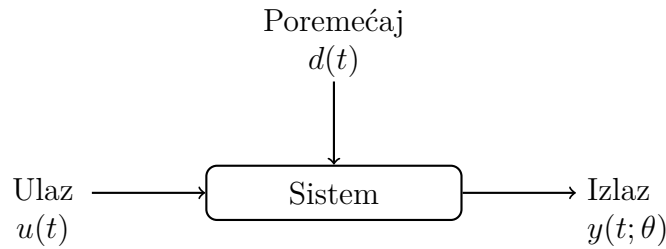
Deduktivni pristup. Ovaj pristup podrazumeva podelu sistema na podsisteme, čije ponašanje je utvrđeno na osnovu prethodnog iskustva, tj. oslanjajući se na emirijsko istraživanje i na osnovu opštih saznanja o fizici realnog

procesa i poznavanja idealizovanih fizičkih zakona kojima je približno opisano ponašanje posmatranog sistema. Potom se podsistemi primenom matematičkih formalizama integrišu u celinu čime se dolazi do kvalitativnog modela, kod koga su na osnovu poznatih fizičkih zakona definisane matematičke relacije između relevantnih fizičkih promenljivih. Ovakav pristup je poznat kao *modeliranje* i ne podrazumeva uvek izvođenje eksperimenata na stvarnom sistemu. Postupak modeliranja zavisi od primene i specifičnosti oblasti u kojoj se primenjuju.

Induktivni pristup. Drugi pristup za formiranje matematičkog modela je direktno zasnovan na eksperimentu, odnosno na upotrebi ulaznih i izlaznih signala iz sistema, koji se snimaju, a potom analiziraju kako bi se došlo do modela. Ovakav pravac naziva se *identifikacija sistema*. Pojam identifikacije široko se koristi u teoriji upravljačkih sistema. Pod njim se podrazumeva proces izgradnje matematičkog modela dinamičkog sistema na osnovu snimljenih podataka. Primenjuje se kada se ne raspolaže apriori sa informacijama, koje mogu dovesti do smislenih fizičkih zakonomernosti u cilju matematičkog prikaza relevantnih osobina posmatranog procesa koje bi opisale vezu ulaza sa izlazom iz sistema. Stoga, u ovom koraku se polazi od usvajanja strukture modela, koji je matematički opisana jednačinama. Često, parametri u ovakvoj strukturi nemaju fizičko tumačenje, zbog čega važan korak predstavlja *estimacija (procena) parametara* izabranog matematičkog modela razmatranog dinamičkog sistema na osnovu vrednosti signala posmatranog procesa.

2.2 Identifikacija sistema

Identifikacija je oblast u teoriji sistema u kojoj se razmatraju problemi izgradnje pogodnih matematičkih modela dinamičkih sistema, po pravilu objekta upravljanja, na osnovu eksperimentalnih podataka i analize tih podataka. Promenljive koje opisuju sistem najpre se podele na ulazne i izlazne promenljive, a potom se merenjem vrednosti tih ulaznih i izlaznih promenljivih dobijaju podaci na osnovu kojih treba identifikovati sistem, tj. razviti odgovarajući matematički model koji opisuje dinamiku sistema i odrediti njegove parametre. Koncept dinamičkog sistema prikazan je na slici 2.1. Sistemom se upravlja pomoću ulaznog signala $u(t)$, a uticaj spoljašnje sredine u vidu poremećaja označen je sa $d(t)$. Izlazni signal je promenljiva $y(t)$ koja obezbeđuje informacije o ponašanju sistema.



Slika 2.1: Blok šema dinamičkog sistem sa ulazom $u(t)$, izlazom $y(t)$ i poremećajem $d(t)$, gde t označava vreme.

Na ishod procesa identifikacije utiče niz faktora, koji su pobrojani i pojašnjeni u nastavku teksta. Neke od pojmova smo i ranije manje ili više intuitivno uveli, ali sada ih razmatrano na nivou, koji je potreban za puno razumevanje teorijskih i praktičnih postavki teksta koji sledi, [5].

Sistem \mathcal{S} . Realna pojava (fizička realnost) koja obezbeđuje eksperimentalne podatke naziva se proces. Da bi se izvršila teorijska analiza i identifikacije procesa neophodno je da se uvedu dodatne pretpostavke o podacima, kao što su ograničenja na karakteristike procesa, npr. opseg razmatranih fizičkih veličina koje su od značaja za dalju analizu. U tu svrhu uvodimo pojam sistema koji podrazumeva skup relacija između promenljivih i signala, odnosno predstavlja matematički opis procesa. Sistem se mora smatrati fiksni. On je „dat” u smislu da njegove osobine ne možemo mijenjati.

Struktura modela \mathcal{M} . Matematički modeli dinamičkih sistema mogu se klasifikovati na različite načine, zavisno od toga kako ulazni signal ili više njih utiče na ponašanje sistema tokom vremena. Moguća klasifikacija (tipovi) matematičkih modela date su u nastavku.

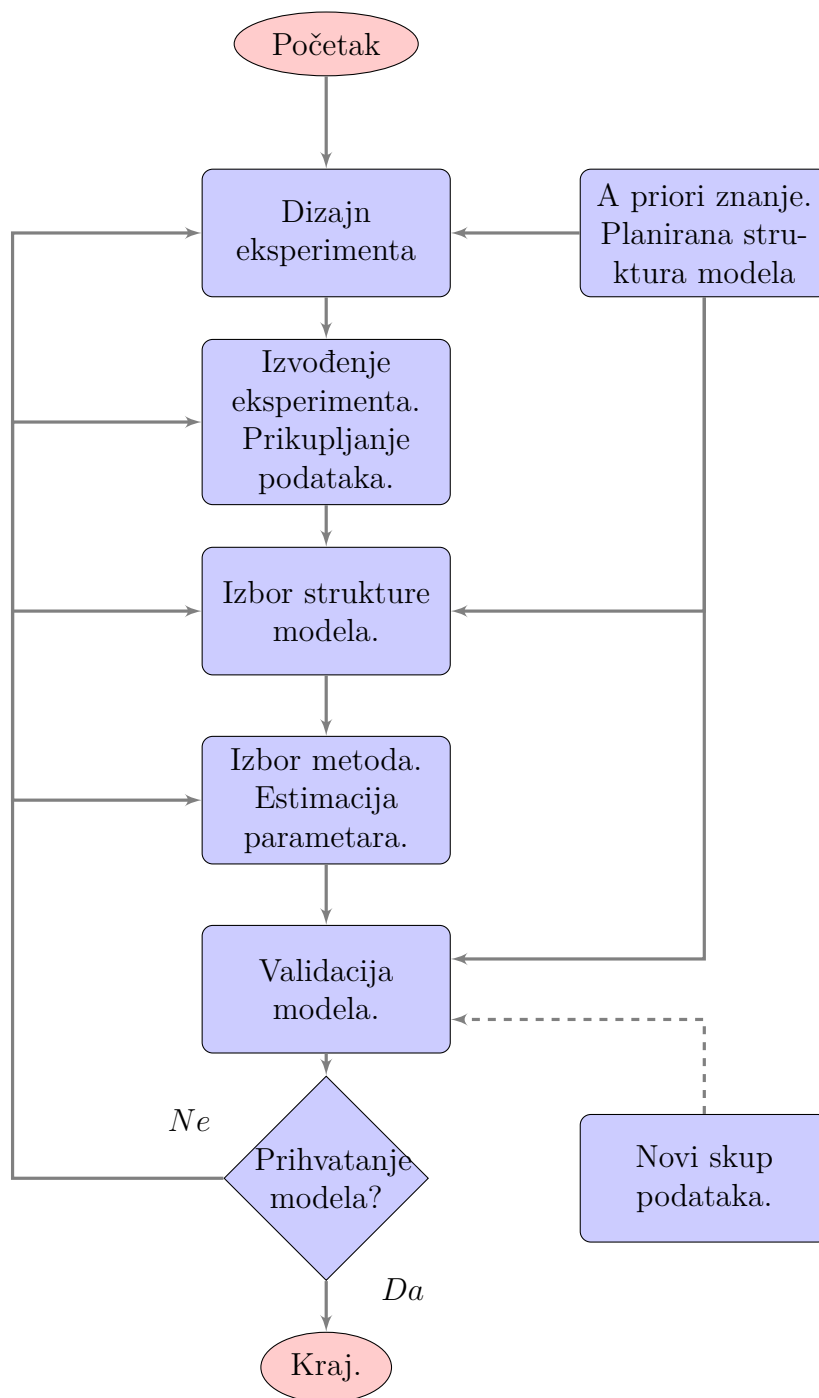
- *Monovarijabilni - multivarijabilni modeli.* Monovarijabilni modeli se odnose na procese koji se opisuju sa jednim ulaznim i jednim izlaznim signalom (*engl. Single Input – Single Output, SISO*). Kada se opisuje proces sa više ulaznih i/ili izlaznih signala tada se koriste multivarijabilni sistemi (*engl. Multi Input - Multi Output, MIMO*).
- *Linearnih i nelinearnih modeli.* Kod linearnih modela izlaz iz sistema linearno zavisi od ulaza, u suprotnom model je nelinearan. U sklopu ove teze biće razmatrani linearni vremenski invarijantni modeli.

- *Parametarski i neparametarski model.* U opštem slučaju reprezentacija modela sistema može biti parametarska (sa konačnim brojem parametara) ili neparametarska (sa beskonačnim brojem parametara). Neparametarski modeli se opisuju funkcijama, tabelama ili krivom, kao što je na primer odskočni odziv sistema koji sadrži informaciju o karakterističnim osobinama sistema. Impulsni odziv ili frekvencijski dijagrami (Bode ili Nikvist dijagrami [5]) su drugi primeri neparametarskih modela. Međutim, u mnogim slučajevim bolje je koristiti parametrizovane modele. Takve modele oslikava vektor parametara, koji označavamo sa θ , a odgovarajući model bi bio označen sa $\mathcal{M}(\theta)$. Kada je θ promenljivo unutar nekog skupa tada dobijamo skup modela ili strukturu modela \mathcal{M} . U okviru ove teze razmatrani su parametarski modeli.
- *Model u vremenskom, frekvencijskom i operatorskom domenu.* Dina-mički sistemi se najčešće opisuju diferencijalnim ili diferencnim jednačima, parcijalnim ili običnim. Za takve modele kažemo da su dati u vremenskom domenu. Linearni vremenski invarijantni modeli su u potpunosti određeni odzivima na prostoperiodične signale pa njih često modelujemo i u frekvencijskom domenu, npr. Bodeovi ili Nikvistovi dijagrami. Za linearne sisteme takođe je pogodno koristiti operatorske modele, kao što je funkcija prenosa, koje po nekada nazivamo modelima u kompleksnom domenu. U okviru ove teze biće od interesa prvenstveno modeli u kompleksnom domenu.
- *Vremenski diskretni i kontinualni modeli.* Diskretni modeli opisuju vezu između ulaza i izlaza u diskretnim vremenskim trenucima, dok se kod kontinualnih modela vrednosti menjaju vremenski kontinualno i ovakvi modeli biće od interesa u nastavku teze.
- *Deterministički i stohastički modeli.* Deterministički modeli su modeli čije se stanje može predvideti, tj. novo stanje je potpuno određeno prethodnim. Stohastički modeli su oni čije se ponašanje ne može predvideti, ali se može predvideti verovatnoća promene stanja. U okviru teze posmatrani su deterministički modeli.

Metod za identifikaciju \mathcal{S} . U literaturi može se naći veliki broj različitih metoda za identifikaciju. Izbor metode zavisi od samog sistema koji se identifikuje, od veličina u sistema čija su merenja dostupna, od forme modela koji se zahteva i dr. Neke, najvažnije, metode koje se odnose na estimaciju parametara biće razmatrane u nastavku.

Eksperimentalni uslovi \mathcal{H} . U opštem slučaju, eksperimentalni uslovi predstavlja opis kako se proces identifikacije izvodi. Taj proces uključuje izbor ulaznih podataka, mogućnost korišćenja zatvorene petlje, izbor vremena odabiranja podataka, prefiltriranje podataka pre procesa estimacije parametara i druge. Eksperimentalni uslovi često određuju kako se podaci prikupljaju iz procesa. Korisnik može uticati na to u velikoj meri, međutim, mogu postojati ograničenja kao što su bezbedonosni uslovi ili ograničenja radnog režima koja ograničavaju slobodan izbor eksperimentalnih uslova. Jednom kada su podaci prikupljeni, korisnik može izabrati metod identifikacije i strukturu modela. Nekoliko različitih izbora metoda i modela mogu biti primenjeni dok se ne dobiju prihvatljivi rezultati.

Uopšteno govoreći, proces identifikacije se započinje određivanjem koje će se osobine realnog procesa uzeti u obzir prilikom definisanja sistema, a potom se sistem pobuđuje koristeći određeni tip ulaznog signala, kao što je odskočni, prostoperiodični ili slučajno generisani signal. Merene vrednosti izlaznih i ulaznih podataka se prikupljaju i koriste u procesu identifikacije, odnosno procesu estimacije nepoznatih parametara usvojene strukture modela \mathcal{M} . Poslednji korak je validacija. U praksi, odabir strukture modela \mathcal{M} i metoda za estimacija parametara \mathcal{S} je iterativni postupak koji se može ponavljati dok se ne dobiju zadovoljavajući rezultati. Opisani postupak je prikazan i na slici 2.2. Ovako opisan postupak je od suštinskog razumevanje procedura identifikacije i estimacije i predstavlja zajednički imenitelj svih originalnih postupaka, koji su predloženi u okviru ove teze.



Slika 2.2: Dijagram toka procesa identifikacije sistema.

2.3 Osnovna notacije i definicije

Da bi označili skupove kompleksnih, realnih i prirodnih brojeva korist ćemo oznake \mathbb{C} , \mathbb{R} i \mathbb{N} .

Oznaka $B_r(c)$ će se koristiti da bi se označila zatvorenu loptu (u prostoru nepoznatih parametara) sa poluprečnikom $r > 0$ i centrom $c \in \mathbb{R}^q$, što se formalno matematički može zapisati kao

$$B_r(c) = \{\theta' \in \mathbb{R}^q : \|\theta' - c\| \leq r\} . \quad (2.1)$$

Ako je $\theta, \hat{\theta} \in \mathbb{R}^q$ par vektora u prostoru nepoznatih parametara, reći ćemo da $\xi \in \mathbb{R}^q$ pripada „otvorenom linijskom intervalu” koji povezuje θ i $\hat{\theta}$ ako postoji $\rho \in (0, 1)$ takvo da je

$$\xi = \rho\theta + (1 - \rho)\hat{\theta} . \quad (2.2)$$

Vektorske i matrice norme

Definicija 2.1. (Vektorska norma) Vektorska norma je svaka funkcija $\|\cdot\|$ koja preslikava $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i koja zadovoljava sledeća svojstva

- $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$, a jednakost vredi sako i samo ako je $x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$
- $\|x + y\| \geq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$.

U literaturi se najčešće koriste sledeće tri norme

- 1-norma ili ℓ_1 norma

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| , \quad (2.3)$$

- 2-norma, ℓ_2 norma ili Euklidiska norma

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} , \quad (2.4)$$

- ∞ -norma ili ℓ_∞ norma

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|. \quad (2.5)$$

Definicija 2.2. (Matrična norma) Matrična norma je svaka funkcija $\|\cdot\|$ koja preslikava $\mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ i koja zadovoljava sledeća svojstva

- $\|A\| \geq 0$, $\forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, a jednakost vredi ako i samo ako je $A = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{C}^{m \times n}$
- $\|A + B\| \geq \|A\| + \|B\|$, $\forall A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

Ako matricu A posmatramo kao vektor sa $m \times n$ elemenata, onda, direktna primena vektorskih normi (uz oznaku $a_{i,j}$ elementa matrice u i -toj vrsti i j -toj koloni) daje sledeće definicije:

- ℓ_1 norma

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|, \quad (2.6)$$

- ℓ_2 norma ili Euklidiska norma

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2}, \quad (2.7)$$

- ℓ_∞ norma

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m; j=1,\dots,n} |a_{i,j}|. \quad (2.8)$$

U tekstu ove teze, simbol $\|\cdot\|$ će označavati 2-Euklidisku normu kada se primenjuje na vektor i 2-normu kada se primeni na matricu.

Simetrična i transponovana matrica

Transponovanje matrice A dimenzija $m \times n$, koje se obično označava sa A^T , je matrica dimenzija $n \times m$ koja se od matrice A dobija tako što vrste matrice A zamene mesta s odgovarajućim kolonama.

Simetrična matrica je kvadratna matrica koja zadovoljava uslov

$$A^T = A. \quad (2.9)$$

Ukoliko matrica nije simetrična ona može da se simetrizuje (engl. *symmetric part of a matrix*), za šta se obično koristi notacija A^S da se označi simetrizacija matrice A , odnosno

$$A^S = \frac{1}{2}(A + A^T). \quad (2.10)$$

Sopstvene vredosti matrice

Neka je A kvadratna matrica reda n . Skalar λ je sopstvena vrednost matrice A (engl. *eigenvalue*) ako postoji nenulti vektor kolone $v \in \mathbb{R}^n$ takav da je

$$Av = \lambda v. \quad (2.11)$$

Definitnost matrice

Matrica A je:

- pozitivno definitna ako za svaki realan vektor $x \neq 0$ vredi da je $x^T Ax > 0$
- pozitivno semidefinitna ako za svaki realan vektor $x \neq 0$ vredi da je $x^T Ax \geq 0$
- negativno definitna ako za svaki realan vektor $x \neq 0$ vredi da je $x^T Ax < 0$
- negativno semidefinitna ako za svaki realan vektor $x \neq 0$ vredi da je $x^T Ax \leq 0$

Za dve simetrične matrice A i B , oznaka $A \geq B$ će se koristiti da bi označili da je $A - B$ pozitivno semidefinitno. Za proizvoljan realan broj m , $A \geq m$ će predstavljati skraćenu notaciju od $A \geq m\mathbf{I}$, gde je \mathbf{I} jedinična matrica odgovarajuće dimenzije. Prema tome, izraz $A \geq m$ je ekvivalentan sa tvrdjenjem da najmanja sopstvena vrednost od A nije manja od m .

Osobine signala: dovoljno bogatog i perzistentno pobuđujući

Definicija 2.3. Za signal $x(t) \in \mathbb{R}^n$ kažemo da je dovoljno bogat (engl. *sufficiently rich, SR*) sa redom n ako sadrži najmanje $\frac{n}{2}$ različitih nenulatih frekvencija.

Definicija 2.4. Za signal $x(t) \in \mathbb{R}^n$ kažemo da je perzistentno pobuđujući (engl. *persistently excited, PE*) sa redom α_0 ako je zadovoljeno

$$\int_t^{t+T_0} x(\tau)x^T(\tau)d\tau \geq \alpha_0 T_0 \mathbf{I} \quad (2.12)$$

za neko $\alpha_0 > 0$, $T_0 > 0$ i $\forall t \geq 0$.

Konveksnost funkcije

Funkcija $f(x)$ definisana nad n -dimenzionim prostorom je konveksna ako zadovoljava Jensenovu nejednakost, [12]

$$f\left(\sum_i^q p_i x_i\right) \leq \sum_i^q p_i f(x_i) \quad (2.13)$$

gde su p_1, \dots, p_q pozitivni brojevi i $\sum_i^q p_i = 1$. Ako je funkcija $f(x)$ dvostruko diferencijabilna i ako je Hesian matrica drugih izvoda $H(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$ pozitivno definitna možemo govoriti o konveksnosti funkcije.

Notacija i pojmovi korištena u algoritmima za estimaciju parametara

- Estimirana vrednost vektora θ u trenutku t biće obeležena sa $\hat{\theta}(t)$
- Pojam „*estimirani izlaz*” definisaćemo na sledeći način

$$\hat{y}(t; \hat{\theta}(t)) = G(s; \hat{\theta}(t))u(t) .$$

„*Estimirani izlaz*” je odziv sistema u slučaju kada bi vrednost stvarnih parametara sistema bila jedanaka trenutno estimiranim vrednostima, tj.

$$\hat{y}(t; \hat{\theta}(t)) = g(t; \hat{\theta}(t)) \star u(t) = \int_0^t g(\nu; \hat{\theta}(t))u(t - \nu)d\nu ,$$

gde se simbol \star koristi da označi konvoluciju ¹ između dva signala.

¹ Pojam konvolucije biće detaljno definisan u nastavku teksta.

- Simbol ($\tilde{\cdot}$) će se koristiti da označi grešku, tj. razliku između stvarnih i estimiranih vrednosti,

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t; \hat{\theta}(t)) &= y(t) - \hat{y}(t; \hat{\theta}(t)) , \\ \tilde{\theta}(t) &= \theta - \hat{\theta}(t) .\end{aligned}$$

2.4 Linearni sistemi

Vremenski invarijantni linearni sistemi (*engl. Linear time-invariant system, LTI*) čine najvažniju klasu dinamičkih sistemi. Ovakvim modelima se može opisati najveći broj procesa kako u tehničkim, tako i u ekonomskim i računarskim naukama. Činjenica je da oni predstavljaju idealizacije realnih procesa koji su u stvarnom životu generalno nelinearni. Aproksimacije koje se koriste da bi se sistem opisao linearnim modelom su često opravdane, a i teorija upravljanja i matematički aparati su dobro razvijeni za linearne modele.

Pod pojmom linearnog sistema podrazumeva se sistem koji zadovoljavaju princip slaganja dejstava (princip superpozicije, *eng. superposition principle*). Princip superpozicije podrazumeva da se odziv procesa na složenu pobudu može računati slaganjem odziva na pojedinačne komponente pobude. Formalnije rečeno, ukoliko je y_1 odziv procesa na pobudu u_1 , a y_2 odziv na pobudu u_2 , tada će odziv na $a_1u_1 + a_2u_2$ biti $ay_1 + by_2$, za bilo koja dva skalarna parametra a_1 i a_2 .

Princip superpozicije se može definisati i na uopšteniji način. Označimo sa $X[u]$ odziv linearnog procesa X na pobudni signal u . Neka su u_1, u_2, \dots ulazni signali, i neka su $y_1 = X[u_1], y_2 = X[u_2], \dots$ odgovarajući odzivi, a a_1, a_2, \dots skalarni parametri, tada je

$$X \left[\sum_{i=0}^{\infty} a_i u_i \right] = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X [u_i] = \sum_{i=0}^{\infty} a_i y_i . \quad (2.14)$$

Sledeća bitna osobina linearnih procesa je mogućnost upotrebe transformacionih metoda pri njihovoj analizi koje omogućavaju rešavanje različitih problema primenom algebarskih metoda. Celokupna analiza signala se zasniva na jednostavnoj ideji da se signali mogu razložiti na skup jednostavnih, elementarnih činilaca. U spektralnoj analizi signala sve signale razlažemo na elementarne, prostoperiodične oblike. Drugim rečima, osnovnim gradivnim činiocima smatramo prostoperiodične talase. Na osnovu principa slaganja dejstava neposredno sledi da se i ponašanje linearnih dinamičkih procesa

uspešno može proučavati na osnovu poznavanja njihovih odziva na prostoperiodične signale različitih učestanosti. Uz oslonac na ovu jednostavnu ali fundamentalnu činjenicu razvijen je niz transformacionih metoda koje značajno pojednostavljaju analizu i sintezu linearnih, stacionarnih procesa. U oblasti upravljanja, posebno značajnu ulogu ima Laplasova transformacija.

Konvolucija signala

Jedna od najznačajnijih operacija nad signalima jeste operacija konvolucije. Neka su f i g dve date funkcije. Njihova konvolucija, u oznaci $f \star g$, jeste preslikavanje definisano izrazom

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau . \quad (2.15)$$

U slučaju kada su funkcija čija se konvolucija računa **kauzalne**, tj. u slučaju kada su identički jednake nuli za $t < 0$, tada je integral izraza (2.15) jednak nuli za $\tau < 0$ i $\tau > t$. Stoga se granice integracije u izrazu (2.15) mogu uzeti od 0 do t , a izraz (2.15) se svodi na

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau . \quad (2.16)$$

Kauzalnost se odnosi na činjenicu da fizička veličinu posmatramo počev od nekog polaznog, inicijalnog vremenskog trenutka. Sa stanovišta upravljanja, to je obično trenutak od koga počinjemo da vršimo upravljanje, ali može biti i proizvoljan drugi, pogodno odabrani trenutak u vremenu. U tom duhu, pod pojmom linearnog dinamičkog sistema podrazumeva se sistem čiji se odziv sistema $y(t)$, gde je t nezavisno promenljiva koja označava vreme, na ulaznu pobudu $u(t)$ može opisati kao

$$y(t) = (g(\cdot, \theta) \star u(\cdot))(t) , \quad (2.17)$$

gde \star označava operaciju konvolucije.

Laplasova transformacija

Laplasova transformacija se može smatrati osnovnim alatom pri analizi i sintezi vremenski kontinualnih stacionarnih procesa. Da bi se označila Laplasovu transformaciju po vremenu t koristiće se oznaku \mathcal{L} . U tom smislu

Laplasova transformacija kauzalnog, eksponencijalno ograničenog signal¹ $f(t)$ se definiše kao

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(\tau) d\tau ,$$

gde $s \in \mathbb{C}$ označava Laplasovu promenljivu, (videti [13]).

Među najkorisnijim osobinama Laplasove transformacije jeste ta da je Laplasova transformacija konvolucije jednaka proizvodu Laplasovih transformacija

$$\mathcal{L}\{(f \star g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s) \quad (2.18)$$

Funkcija prenosa

Vežu između ulaza i izlaza linearnih, vremenski kontinualnih, stacionarnih procesa moguće je opisati jednom posebnom funkcijom Laplasove promenljive s koju nazivamo funkcija prenosa. Funkcija prenosa se definiše kao odnos Laplasovih transformacija ulaza i izlaza kada su svi početni uslovi jednaki nuli. Obeležimo li ulazni signal procesa sa $u(t)$, a izlazni sa $y(t)$ i njihove Laplasova transformacija sa $U(s)$ i $Y(s)$, tada se funkcija prenosa definiše izrazom

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} . \quad (2.19)$$

U opštem slučaju, u matematički model procesa se opisuju u obliku

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 u^{(1)} + b_0 u , \quad (2.20)$$

$y^{(i)}$ označava i -ti izvod signala y , te tako i za signal u . Funkcija prenosa ovako opisanih sistema je

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} . \quad (2.21)$$

Vidimo, dakle, da je funkcija prenosa procesa opisanog diferencijalnom jednačinom (2.20) **racionalna funkcija**, tj. količnik dva polinoma po Laplasovoj promenljivoj s .

¹ Signal je eksponencijalno ograničen (sa eksponencijalnim redom) ukoliko postoje konstante $M > 0$ i $\gamma > 0$ takve da je $|f(t)| < M e^{\gamma t}$

Postoje tehnički procesi kod kojih funkcija prenosa nije racionalna funkcija Laplasove promenljive s . Tu spadaju procesi sa kašnjenjem, frakcioni procesi (procesu necelog reda) kod kojih se u funkciji prenosa javljaju necelobrojni stepeni Laplasove promenljive. Funkcije prenosa takvih sistema nazavimo **iracionalne funkcije prenosa**. Iracionalne funkcije prenosa se obično koriste za potrebe opisivanja procesa sa prostorno raspodeljenim (distribuiranim) parametrima, odnosno procesa čije se veličine menjaju kako u vremenu, tako i u prostoru. Ovakvi procesi spadaju u klasu linearnih procesa sa beskonačno stepeni slobode.

Frekvencijska karakteristika sistema

Za svaki linearan dinamički sistem opisan funkcijom prenosa $G(s)$, bez obzira na njegovu strukturu i složenost, može se definisati frekvencijska karakteristika.

Ukoliko posmatramo proizvoljan linearan, stacionaran proces sa jednim ulazom u i jednim izlazom y , frekvencijska karakteristika procesa se definiše kao odnos frekvencijskih karakteristika izlaza i ulaza. Međutim, s obzirom da smo prethodno definisali pojam funkcije prenosa, to nam omogućava da frekvencijsku karakteristiku definišemo na malo drugačiji način, tj. da dobijemo frekvencijsku karakteristiku sistema $G(s)$ zamenom kompleksne promenljive s sa $j\omega$, time, frekvencijska karakteristika procesa je

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}. \quad (2.22)$$

Dobijanjem frekvencijske karakteristike, određeno je ponašanje sistema na svakoj, proizvoljno izabranoj učestanosti ω .

Ovako definisana frekvencijska karakteristika predstavlja kompleksnu funkciju kojoj možemo odrediti moduo $A(\omega) = |G(j\omega)|$ i argument $\varphi(\omega) = \angle(G(j\omega))$ u zavisnosti od učestanosti ω . Moduo frekvencijske karakteristike definiše pojačanje kojim sistem deluje na ulazni prostoperiodični signal, dok argument karakteristike određuje fazno kašnjenje. Podeljeno sa učestanošću ulaznog signala, fazno kašnjenje definiše vremenski pomeraj izlaznog signala u odnosu na ulazni.

2.5 Stabilnost linearnih dinamičkih sistema

Ovdje ćemo navesti osnovne pojmove i definicije vezane uz stabilnost autonomnih¹ vremenski kontinualan, stacionarnih procesa opisanih matematičkim modelom u prostoru stanja

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.23)$$

gde je $f : R^n \rightarrow R^n$.

2.5.1 Definicija stabilnosti

U cilju definisanja stabilnosti procesa najpre uvodimo pojam mirne radne tačke.

Pojam radne tačke procesa

Neformalno govoreći, mirna radna tačka (tačka ravnoteže ili tačka ekvilibrijuma) dinamičkog procesa jeste radno stanje u kome proces može ostati neograničeno dugo, pod pretpostavom da na njega ne deluju poremećaji [13].

Definicija 2.5. *Proces opisan matematičkim modelom*

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.24)$$

ima mirnu radnu tačku $x_0 \in R^n$ ukoliko je

$$f(x_0) = 0 \quad (2.25)$$

Drugim rečima, ukoliko je početno stanje $x(0) = x_0$ tada se stanje procesa neće menjati, tj. za svako $t \geq 0$ važiće $x(t) = x_0$. Proces, u opštem slučaju, može imati veći broj mirnih radnih tačaka.

Stabilnost radne tačke procesa

Pojam stabilnosti se odnosi na sposobnost procesa da pri malim perturbacijama ravnotežnog stanja, kretanje sistema ostaje unutar neke oblasti koja zavisi isključivo od veličine perturbacije. Stabilnost se može definisati na više načina, a u ovoj tezi ćemo definisati u smislu Ljapunova, [13, 14].

¹ Autonomni ili samostalni nazivaju se procesi koji nemaju spoljašnjih ulaznih veličina.

Definicija 2.6. *Mirna radna tačka x_0 procesa opisanog matematičkim modelom*

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.26)$$

je stabilna ukoliko za svako pozitivno ε , postoji pozitivan broj $\delta(\varepsilon)$ takav da ukoliko je početno stanje procesa udaljeno od ravnotežnog stanja manje od δ , tada će celokupna daljnja trajektorija procesa biti unutar ε -okoline ravnotežnog stanja, tj

$$\|x(0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_0\| < \varepsilon \quad (\forall t > 0) \quad (2.27)$$

Pojam stabilnosti po Ljapunovu se može izkazati i na sledeći način. Radna tačka (stacionarno stanje) sistema se naziva stabilnom, ako je pri zadatoj proizvoljno maloj oblasti ε oko te radne tačke moguće naći oblast δ , takvu da pri početnim uslovima unutar oblasti δ , prelaznom režimu odgovara trajektorija koja ne napušta oblast ε u prostoru stanja posle proizvoljno dugog vremena t od trenutka poremećaja početnih uslova.

Radne tačke u koje se proces vraća nakon dovoljno malog poremećaja nazivaju se atraktivnim radnim tačkama (atraktorima, eng. *attractors*). Ukoliko je atraktivna radna tačka jednovremeno i stabilna, tada se naziva asimptotski stabilnom radnom tačkom.

Definicija 2.7. *Radna tačka vremenski kontinualnog, stacionarnog, autonomnog procesa je asimptotski stabilna ukoliko je stabilna u smislu Ljapunova, te ukoliko se nakon dovoljno malog poremećaja proces asimptotski vraća u ravnotežno stanje. Drugim rečima, ukoliko postoji pozitivan broj δ_1 takav da važi*

$$\|x(0) - x_0\| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \quad (2.28)$$

Osim navedene definicije stabilnosti asimptotske stabilnosti, u savremenoj teoriji stabilnosti postoje i strožija svojstva po pitanju stabilnosti, kao što je eksponencijalna stabilnost koja podrazumeva stabilnost u smislu Ljapunova i asimptotsku stabilnost, ali i da se proces vraća u ustaljeno stanje eksponencijalno brzo.

Definicija 2.8. *Radna tačka vremenski kontinualnog, stacionarnog, autonomnog procesa je eksponencijalno stabilna ukoliko je stabilna u smislu Ljapunova i ukoliko postoje pozitivan broj δ_2 i striktno pozitivni brojevi M i λ takvi da je*

$$\|x(0) - x_0\| < \delta_2 \Rightarrow \|x(t) - x_0\| \leq M \|x(0) - x_0\| e^{-\lambda t} \quad (2.29)$$

Napominjemo da eksponencijalna stabilnost implicira asimptotsku stabilnost, dok obrnuto ne važi.

Definicija 2.9. *Ako asimptotska (ili eksponencijalna stabilnost) važi za svako početno stanje $x(0)$, tj. nezavisno od intenziteta poremećaja, tada kažemo da je radna tačka procesa globalno asimptotski (ili eksponencijalno) stabilna.*

S obzirom da nelinearni sistemi, u opštem slučaju, mogu imati veći broj (pa i bezbroj) stanja ravnoteže, potrebno je uvek ukazati u odnosu na koje stanje ravnoteže se odnosi stabilnost (nestabilnost).

2.5.2 Ispitivanje stabilnosti radne tačke procesa Ljapunovljevim „drugim (direktnim)” metodom

Ljapunov je predložio kriterijum stabilnosti takav da možemo zaključivati o stabilnosti sistema ne rešavajući njegovu diferencijalnu jednačinu i ne vršeći njenu linearizaciju u okolini stanja ravnoteže [14].

Posmatrajmo dinamički nelinearni sistem, opisan modelom

$$\dot{x}(t) = f(x) \quad (2.30)$$

čija je jedna radna tačka x_0 ($f(x_0) = 0$). Sa $V(x)$ označićemo skalarnu funkciju od interesa, koja će:

- biti pozitivno definitna u ε -okolini: $V(x) > 0$ za $\forall x \neq x_0$, $V(x) = 0$ za $x = x_0$
- Ako je izvod $V(x)$, duž trajektorija kretanja sistema, negativno semi-definitna funkcija, tj ako je

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0 \quad (2.31)$$

za $\forall x \neq x_0$ i $\dot{V}(x) = 0$ za $x = x_0$ tada kažemo da je posmatrana radna tačka stabilna u smislu Ljapunova i njeno kretanje će uvek ostajati u ε -okolini. Funkcija $V(x)$ naziva se funkcijom Ljapunova.

- Ako je izvod funkcije Ljapunova $\dot{V}(x)$ strogo negativno definitna funkcija tada je ravnotežno stanje, u posmatranoj δ -okolini, asimptotski stabilno.

- Ako se napred definisani uslovi ispunjavaju za ceo prostor stanja, i važe uslovi:

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{za} \quad \|x_i\| \rightarrow \infty; , \quad (2.32)$$

tada se za sistem kaže da je globalno stabilan, kada je $\dot{V}(x) \leq 0$, odnosno, globalno asimptotski stabilan za $\dot{V}(x) < 0$.

Za primenu takvog prilaza moraju biti ispunjeni uslovi da je vektor $f(x)$ neprekidna funkcija argumenta i da je funkcija Ljapunova realna funkcija i ima neprekidne diferencijale prvog reda.

Izbor funkcije Ljapunova nije jednostavan problem. Za jedan te isti sistem možemo imati veliki broj pozitivno definitnih funkcija $V(x)$. Neke od njih mogu imati negativno definitan izvod u određenim oblastima ravnotežnog stanja, druge - izvod jednak nuli ili pozitivno definitan. Zbog toga, pri izboru $V(x)$, možemo govoriti samo o kandidatu funkcije Ljapunova. Ako se uz tako odabranu funkciju može potvrditi važenje neke od Ljapunovih teorema o stabilnosti sistema, tada je $V(x)$ funkcija Ljapunova. Ako nismo u stanju da nađemo funkciju Ljapunova to još uvek ne znači da dati sistem nije stabilan. Ako smo odredili stabilnost sistema u ograničenoj oblasti, u okolini ravnotežnog stanja, to nikako ne znači da sistem nije stabilan i za početna stanja iz druge oblasti. To, pre svega, govori o tome da direktna metoda Ljapunova daje samo dovoljne ali ne i potrebne uslove stabilnosti, a zatim, i da izbor funkcije Ljapunova nije uvek jednostavan zadatak. Ipak za neke klase sistema razvijeni su prilazi koji omogućavaju relativno jednostavan postupak utvrđivanja stabilnosti sistema na osnovu unapred poznatog oblika kandidata funkcije Ljapunova. Jedan od dodatnih kriterijuma je LaSaleovo princip invarijantnosti.

2.5.3 LaSaleov princip invarijantnosti

Vidjeli smo da asimptotsku stabilnost možemo utvrditi samo u slučaju da je $\dot{V}(x)$ striktno negativno definitna funkcija. Ako je $\dot{V}(x)$ negativno semi-definitna funkcija, tada možemo primeniti LaSaleovo načelo za određivanje asimptotske stabilnosti za dinamičke sisteme. „LaSaleovo načelo invarijantnosti ima dve namene: može se zaključiti da je nešto asimptotski stabilno iako $\dot{V}(x)$ nije lokalna negativno definitna funkcija te se može dokazati da trajektorije diferencijalne jednačine koje počinju u jednom području konvergiraju u jednu od mnogih ravnotežnih tačaka u tom istom području. To načelo primarno vredi za autonomne i periodične sisteme”, [15].

Pre definisanja LaSaleovo načela, uvešćemo pojam inavrijantnog i atraktivnog skupa.

Definicija 2.10. *Skup G je inavrijantan skup za dinamički sistem ukoliko svaka trajektorija sistema koja polazi iz tačke koja pripada skupu G , ostaje u skupu G sve ostalo vreme.*

Definicija 2.11. *Skup G je atraktivan skup za dinamički sistem ukoliko svaka trajektorija sistema koja polazi iz tačke koja pripada skupu G , teži ka mirnoj radnoj tački.*

LaSaleovo načelo stabilnosti daćemo kroz sledeće teoreme, [14]

Teorema 2.1 (Teorema lokalno invarijantnog skupa). *Posmatrajmo autonomni sistem oblika (2.30), gde je f neprekidna funkcija i neka je $V(x)$ skalarna funkcija sa neprekidnim prvim izvodom. Pretpostavimo da je*

- *za neko $\ell > 0$, oblast Ω_ℓ ograničena sa $V(x) < \ell$*
- *$\dot{V}(x) \leq 0$ za svako x unutar Ω_ℓ*

Neka je R skup svih tačaka unutar oblasti Ω_ℓ gde je $\dot{V}(x) = 0$, i neka je M najveći inavrijantan skup u R . Tada svako rešenje $x(t)$ iz skupa Ω_ℓ teži u M kako $t \rightarrow \infty$.

Prethodni rezultat možemo proširiti tako da ima globalni karakter.

Teorema 2.2 (Teorema globalno invarijantnog skupa). *Posmatrajmo autonomni sistem oblika (2.30), gde je f neprekidna funkcija i neka je $V(x)$ skalarna funkcija sa neprekidnim prvim izvodom. Pretpostavimo da je*

- *$V(x) \rightarrow \infty$ kada $\|x\| \rightarrow \infty$*
- *$\dot{V}(x) \leq 0$ unutar celog prostora stanja*

Neka je R skup svih tačaka gde je $\dot{V}(x) = 0$, i neka je M najveći inavrijantan skup u R . Tada sva rešenja globalno asimptotski konvergiraju ka skupu M za $t \rightarrow \infty$.

2.6 Neka pomoćne tvrđenja

Lema 2.1. *Neka su $a, b, c > 0$ konstante, i neka je $V > 0$ vremenski promjenljiva veličina čiji izvod zadovoljava nejednakost*

$$\dot{V} \leq -(a\sqrt{V} - b)\sqrt{V}, \quad (2.33)$$

kad god je $\sqrt{V} < c$. Ako je $c > \frac{b}{a}$ tada je skup

$$\sqrt{V} < \eta \frac{b}{a} \quad (2.34)$$

inavrijantan i atraktivan u konačnom vremenu za svako $1 < \eta < \frac{ca}{b}$ i svako $\sqrt{V(0)} < c$. Dužina prelaznog režima T je ograničeno sa

$$T \leq \frac{2\sqrt{V(0)}}{(\eta - 1)b}. \quad (2.35)$$

Dokaz. Primetimo da kad god je

$$\frac{b}{a} < \sqrt{V} < c, \quad (2.36)$$

tada je \dot{V} negativno, a V opada. Tačka $\sqrt{V} = \frac{b}{a}$ predstavlja lokalni atraktor „sa gornje strane”, tj. kad god je $\frac{b}{a} < \sqrt{V} < c$, trajektorije će konvergirati ka $\sqrt{V} = \frac{b}{a}$. Prema tome, kada je $\eta < \frac{ca}{b}$ tada je skup $\sqrt{V} < \eta \frac{b}{a}$ inavrijantan. Šta više, taj skup je takode atraktivan u konačnom vremenu ako je $\sqrt{V(0)}$ takvo da $\eta \frac{b}{a} < \sqrt{V(0)} < c$, (2.33) što implicira

$$\dot{V}(t) \leq -(\eta - 1)b\sqrt{V},$$

i dalje dovodi do relacije

$$\sqrt{V(t)} - \sqrt{V(0)} \leq -\frac{1}{2}(\eta - 1)bt.$$

Gornja granica (2.35) se dobija na jednostavan način, uvrštavanjem $V(T) = 0$ u gornju jednačinu i rešavanjem po T . \square

Lema 2.2. *Neka je Γ simetrična, strogo pozitivno-definitna matrica i neka su γ_{\min} i γ_{\max} najveća i najmanja sopstvena vrednost. Neka je*

$$V(\tilde{\theta}) = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}, \quad (2.37)$$

za $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}^p$. Za svako $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$, sledeće nejednakosti važe,

$$\|\tilde{\theta}\| \leq \delta_1 \Rightarrow \sqrt{V} \leq \frac{\delta_1}{\sqrt{2\gamma_{\min}}}, \quad (2.38)$$

$$\sqrt{V} \leq \delta_2 \Rightarrow \|\tilde{\theta}\| \leq \delta_2 \sqrt{2\gamma_{\max}}. \quad (2.39)$$

Dokaz. Po definiciji za γ_{\min} i γ_{\max} , sledi

$$\frac{1}{2\gamma_{\max}} \|\tilde{\theta}\|^2 \leq V \leq \frac{1}{2\gamma_{\min}} \|\tilde{\theta}\|^2. \quad (2.40)$$

Koristeći nejednakosti (2.40) kada je $\|\tilde{\theta}\| < \delta_1$, dobijamo

$$V \leq \frac{1}{2\gamma_{\min}} \|\tilde{\theta}\|^2 < \frac{\delta_1^2}{2\gamma_{\min}},$$

iz čega odmah sledi (2.38). Na osnovu prve nejednakosti u (2.40), ako je $\sqrt{V} < \delta_2$, tada je

$$\frac{1}{2\gamma_{\max}} \|\tilde{\theta}\|^2 \leq V < \delta_2^2,$$

i $\|\tilde{\theta}\|^2 < 2\delta_2^2\gamma_{\max}$, što je ekvivalentno sa (2.39). \square

Lema 2.3. *Neka je D zatvoren, konveksan, podskup od \mathbb{R}^p , i neka sa D^0 označimo unutrašnjost tog podskupa. Pretpostavimo i da je $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno preslivanje nad skupom D i neprekidno diferencijabilno preslikavanje nad D^0 . Tada, za svake dve tačke $\theta_a, \theta_b \in D$ postoje $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ koji pripadaju otvorenom intervalu koji povezuje θ_a sa θ_b , i $r_1, r_2, \dots, r_n > 0$ takvi da je $r_1 + r_2 + \dots + r_n = 1$, pri čemu važi relacija*

$$f(\theta_b) - f(\theta_a) = \sum_{k=1}^n r_k \left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_{\theta=\xi_k} (\theta_b - \theta_a). \quad (2.41)$$

Dokaz. Neka je $f_1(\lambda) = f((1-\lambda)\theta_a + \lambda\theta_b)$. Kako je D konveksno, f_1 zadovoljava sve pretpostavke Makleod-ova (*McLeod*) teoreme o srednjoj vrednosti (videti Dodatak A.1 i [16]). Pošto se f_1' može smatrati direktnim izvodom od f duž $\theta_b - \theta_a$, što je ekvivalentno sa $\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta_b - \theta_a)$, stoga izraz (2.41) i Lema 2.3 slede direktno. \square

Estimacija parametara linearnih sistema

U okviru ovog odeljku daćemo pregled osnovnih metoda za parametarsku identifikaciju, tj. estimaciju parametara sistema. Biće prikazan osvrt na sisteme od interesa za problem estimacije parametara, njihovu strukturu kao i pregled algoritama koji su korišteni pri pronalaženju rešenja za neke od problema vezanih za estimaciju parametara linearnih vremenski invarijantnih sistema različite strukture. Kao što će biti prikazano, problemi su brojni, i iako su za neke od njih ponuđena rešenja, može se reći da ne postoji algoritam koji opšti po karakteru i primenljiv na široku klasu problema.

U literaturi pojam estimacije se definiše kao proces procene konačnog broja nepoznatih parametara u unapred usvojenoj strukturi modela sistema na osnovu dostupnih realnih merenja. Ovakav pristup je popularan u tehničkim naukama, s obzirom da linearni kontinualni i diskretni modeli vrlo dobro aproksimiraju ponašanje velikog broja tehnoloških procesa. Metode estimacije parametara modela sistema različite fizičke prirode, koji su dati u obliku linearnih vremenski invarijantnih sistema konačnog ili beskonačnog reda, predstavljaju izuzetno važan alat u nauci i tehnologiji. Ovako dobijeni modeli našli su široku primenu u različitim zadacima analize tehnoloških procesa, njihove simulacije, upravljanju tehnološkim i industrijskim procesima, kao i u oblastima ekonomije, računarskih telekomunikacija, finansijske matematike.

Kao generalni pristup za sintezu algoritama za estimaciju parametara obično se koristi metod greške predikcije (*engl. Prediction Error Methods, PEM*), koja predstavlja razliku između stvarne, izmerene, vrednosti izlaza

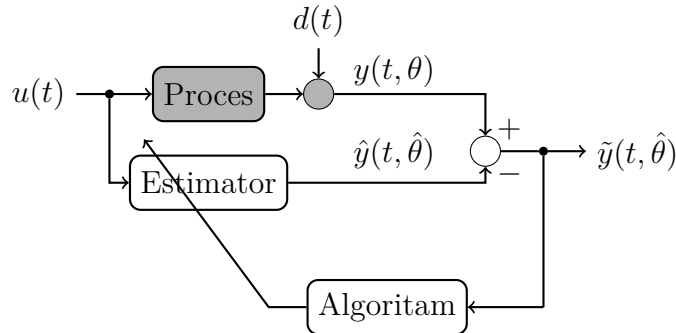
realnog sistema i estimirane vrednosti na osnovu samog modela. Ukoliko su greške između izmerenih izlaza i njihovih estimiranih vrednosti dovoljno male, takav model se može smatrati adekvatnim. Stoga, zadatak estimacije se postavlja kao problem optimizacije kriterijuma optimalnosti, koja predstavlja funkciju greške estimacije, odnosno pronalaska „najbolje” vrednosti vektora $\hat{\theta}$ koji minimizuje greške

$$\|y(t) - y(t, \hat{\theta})\| + P_\lambda(\theta), \quad (3.1)$$

gde je $y(t)$ mereni izlaz iz sistema, $\hat{y}(t)$ estimirani izlaz iz modela kada se na ulaz modela dovede isti signal kao na ulaz sistema, a $\|\cdot\|$ odgovarajuća norma. Posledice o odabiru različitih tipova normi u (3.1) razmatrane su [17]. Član $P_\lambda(\theta)$ je kaznena funkcija koja služi za kontrolu složenosti modela, i obezbeđuje kriterijume za izbor promenljivih i upoređivanje modela, kao i nametanjem nekih ograničenja na parametre. Njeni koeficijenti su indeksirani parametrom $\lambda > 0$. Kaznena funkcija malih vrednosti dovodi do velikih modela sa ograničenim biasom (sistemskom greškom), ali sa velikim varijacijama, dok velike kazne utiču na izbor modela sa manjom predikcijom i sa manjom varijansom (odstupanjem od srednje vrednosti). U literaturi se sreću kaznene funkcije različitih oblika.

Postavljeni optimizacioni problem, u opštem slučaju, ne može se rešiti analitički, u zatvorenoj formi, te je neophodno da se koriste alati numeričke matematike. Poželjno je da algoritam rešavanje postavljenog problema i procene parametara bude *online*, tj. da se izvršava u „realnom vremenu”, i *adaptivan*. Ove osobine ćemo objasniti u nastavku izlaganja. Opisani pristup grafički je prikazan na slici 3.1.

Postupak identifikacije može da se izvršava uporedo sa radom procesa, odnosno da se estimacija parametra modela vrši u svakom trenutku kada su novi podaci dostupni u toku rada procesa. Po ugledu na terminologiju iz literature, algoritme sa ovakvom osobinom nazvaćemo *online*. Drugi način estimacije parametara podrazumeva da se prvo izvrši skupljanje neophodnih podataka, najčešće ulaznih i izlaznih, a potom se vrši obrada svih skupljenih podataka i procena parametara modela, pod pretpostavkom da se model nije menjao, što ćemo u nastavku teze označavati kao *offline* postupak. Ukoliko se vrednost parametara menja tokom vremena tada oni jedino mogu da se estimiraju uz primenu *online* algoritma, dok se *offline* algoritmi ne mogu primeniti u takvim situacijam. Prednosti *offline* algoritama u odnosu na *online* se ogledaju u estimaciji kašnjenja, gde *online* algoritmi imaju ograničenu sposobnosti pri proceni kašnjenja.



Slika 3.1: Blok šema algoritama za estimaciju parametara zasnovanog na metodu greške predikcije

Algoritmi koji su *online* imaju mogućnost resetovanja procenjenih vrednosti u određenom vremenskom trenutku tokom izvršavanja algoritma. Potreba za resetovanjem se javlja kada sistem menja režim rada ili ako nismo zadovoljni procenom. Resetovanje postavlja model i parametre algoritma u početno stanje, dok ova opcija kod *offline* algoritama nije moguća.

Omogućavanje ili onemogućavanje estimacije je još jedna od osobina po kojoj su *online* algoritmi superiorni. Kod *offline* algoritma ne može se selektivno vršiti procena vrednosti parametara, a kompromisno rešenje se nalazi u predprocesiranju podataka, odnosno filtriraju ili uklanjaju delovi iz skupa podataka pre procene. Kod *online* algoritama moguće je odabrati vremenske intervale u kome će se omogućiti/onemogućiti procena.

Adaptivni algoritmi su algoritmi kod kojih se donešenje odluke, tj. procena parametara, prilagođava trenutnom stanju u sistemu, odnosno dostupnim informacijama. Na osnovu tih informacija i njihovim ispitivanjima osvežava zakon po kom se vrši procena parametara i time se vrši modifikovanje procene u relanom vremenu. Adaptivnost kod algoritama za estimaciju je jako bitna s obzirom da se osobine sistema često menjaju, a te promene se oslikavaju u promenama vrednosti parametara sistema. Zbog toga, zadatak algoritma za estimaciju je da se prilagodi, odnosno adaptivno menja tako da može na odgovarajući način da pratiti promene u dinamici sistema, odnosno promene vrednosti parametara.

Linearni dinamičkih sistemima predstavljaju osnovnu strukturu koja se koristi u teoriji estimacije parametara, čemu je ovaj rad i posvećen. Ovakvi modeli su najčešće poznati sa tačnošću do nepoznatih parametara, što kao posledicu im da je važan korak pri identifikaciji ovakvih sistema estimacija

parametara. Funkcija prenosa dinamičkih sistema može da bude racionalna i iracionalna. Ukoliko je posmatrani sistem konačne dimenzije, on se opisuje racionalnom funkcijom prenosa i uvek može biti napisan u obliku gde svi nepoznati parametri sistema imaju linearnu zavisnost. U slučaju kada je sistem linearan po parametrima, njihove vrednosti se mogu uvek proceniti uz uslov da je pobudni signal tako izabran da je dovoljno sadržajan ili bogat. Za jednovremenu, *online* estimaciju takvih parametara koriste se različiti rekuzivni algoritmi i drugi široko rasprostranjeni i lako primenljivi algoritmi u adaptivnom upravljanju.

Za razliku od sistema koji se opisuju racionalnim funkcijama prenosa, sistemi beskonačnog reda se opisuju iracionalnom funkcijom prenosa. Algoritmi za estimaciju parametara sistema koji se opisuju iracionalnim funkcijama prenosa su mnogo manje izučavani, što se posebno odnosi na adaptivnu, jednovremenu estimaciju parametara.

Postupak estimacije parametara sistema koji se opisuju racionalnim funkcijama prenosa u odeljku 3.1, sa naglaskom na metod najmanjih kvadrata koji je opisan u odeljku 3.2, dok će pregleda metoda razvijenih za rešavanje problema estimacije parametara različitih tipova sistema opisanih iracionalnim funkcijama prenosa biti izložen u odeljku 3.3. U okviru odeljka 3.4 definisaćemo osnovni problem estimacije parametara linearnih sistema kojim ćemo se baviti u okviru ovoga rada.

3.1 Estimaciju parametara sistema sa racionalnom funkcijom prenosa

Dinamički sistemi konačne dimenzije opisuju se linearnom diferencijalnom jednačinom oblika

$$\frac{d^q y}{dt^q} + a_{q-1} \frac{d^{q-1} y}{dt^{q-1}} + \dots + a_0 y = b_r \frac{d^r u}{dt^r} + b_{r-1} \frac{d^{r-1} u}{dt^{r-1}} + \dots + b_0 u \quad (3.2)$$

i imaju racionalnim funkcijama prenosa

$$G(s) = \frac{b_r s^r + \dots + b_0}{s^q + a_{q-1} s^{q-1} + \dots + a_0} . \quad (3.3)$$

Kod ovakvih sistema, iz (3.2) može da se vidi, da se izlaz uvek može zapisati u obliku linearne relacije [18]

$$y(t) = \varphi(t)^T \theta , \quad (3.4)$$

gde je $y(t)$ merena izlazna vrednost, $\varphi(t)$ je vektor poznatih vrednosti i θ je vektor od n -nepoznatih parametara, gde je $n = r + q + 1$. Elementi vektora $\varphi(t)$ se obično nazivaju regresori, dok se $y(t)$ naziva regresand, a θ vektor parametara. Jasno je, da se model (3.4) može proširiti i na multivarijabilne sisteme, i tada je

$$y(t) = \Phi(t)^T \theta, \quad (3.5)$$

gde je $y(t)$ vektor dimenzije p , $\Phi(t)$ matrica dimenzije pxn , θ n -dimenzioni vektor nepoznatih parametara, a T transponovanje. Karakter, promenljivih, skalar, vektor ili matrica je i intuitivno jasan i neće biti obeležavan posebno, npr bold (podebljana) notacija.

Da bi se estimirale vrednosti vektora parametara θ , potrebno je minimizirati funkciju koja je pokazatelj odstupanja estimiranog modela od merenja. Postoje različiti načini za formiranje funkcije koja se koristi kao kriterijum optimalnosti, odnosno kao mera za ocenu kvaliteta ponašanja ili validnosti modela,

$$J = \|y - \varphi^T(t)\hat{\theta}\|, \quad (3.6)$$

gde je $\hat{\theta}$ procenjena vrednost parametara, a y merena vrednost izlaza. Kako je struktura modela sistema unapred poznata i definisana funkcijom prenosa, u kriterijumu optimalnosti (3.6) izostavljen je član koji predstavlja kaznenu funkciju na složenost modela a prisutan je u (3.1).

Vrednosti parametara θ se u ovom slučaju uvek mogu proceniti da je pobudni signal tako izabran da će pobuditi sve relevantne režime sistema da bi se svi parametri odslikavali u odzivu sistema, odnosno da signal zadovoljava uslove da je dovoljno sadržajan ili bogat i uslov da je perzistentno pobuđujući (*engl. Persistence of Excitation, PE*), [18] (videti Definicije 2.4 i 2.3). Ukoliko se za normu $\|\cdot\|$ u (3.6) odabere kao 2 - Euklidska norma, odnosno suma kvadrata grešaka estimacije tada problem optimizacije poznat kao problem najmanjih kvadrata (*engl. Least Squares, LS*). Rešenje se može dobiti rešavanjem sistema jednačina, a može se naći i u zatvorenom obliku izračunavanjem Penrose-Moore-ove pseudo inverzija, [19].

Za jednovremenu estimaciju parametara u realnom vremenu (*engl. online*) koriste se rekuzivni algoritmi. Rešavanje postavljenog optimizacionog problema zahteva primenu određenih numeričkih algoritama i matematičkih alata, a jedan uobičajen postupci su Rekuzivni metod najmanjih kvadrata (*engl. Recursive Least Squares Method, RLS*) i njegove različite modifikacije, a najpoznatiji među njima je Kalmanov filter (*engl. Kalman filtering, KF*) [20] koji u novijoj istoriji sigurno najšire primenjivan algoritam za adaptivnu

estimaciju i biće opisani u nastavku. Detaljna studija adaptivnih algoritmima za estimaciju, njihova svojstva, implementaciji i modifikacijama može se naći u [18, 21].

3.2 Metod najmanjih kvadrata

Linearnu regresor je najjednostavniji oblik parametarskog modela. Odgovarajuća struktura modela može biti zapisana u obliku

$$y(t) = \varphi_1\theta_1 + \varphi_2\theta_2 + \cdots + \varphi_n\theta_n, \quad (3.7)$$

koji se može zapisati u obliku linearne relacije

$$y(t) = \varphi(t)^T\theta, \quad (3.8)$$

gde je $y(t)$ merene izlazna vrednost, $\varphi(t)$ je vektor poznatih vrednosti i θ je vektor od n -nepoznatih parametara. Elementi vektora $\varphi(t)$ se obično nazivaju regresione promenljive ili regresori, dok se $y(t)$ naziva regresand. Promenljiva t uzima vrednosti iz skupa celih brojevi, i najčešće označava vreme ali to nije nužno u svim slučajevima.

Kao osnovni problem postavlja se problem pronalaska estimiranih vrednosti $\hat{\theta}$ vektora parametara θ iz merenja $y(1), \dots, y(N)$ i $\varphi(1), \dots, \varphi(N)$. Korištenjem ovih merenja može se formirati sistem linearnih jednačina,

$$\begin{aligned} y(1) &= \varphi^T(1)\theta \\ y(2) &= \varphi^T(2)\theta \\ &\vdots \\ y(N) &= \varphi^T(N)\theta. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ovaj sistem u metričnoj notaciji može biti zapisan kao

$$y = \Phi\theta \quad (3.10)$$

Jedan način da se pronade vrednost parametara θ iz (3.10) je da je broj merenja N jednak n . Tada Φ postaje kvadratna marica. Ukoliko je ta matrica nesingularna, sistem linearnih jednačina (3.10) može biti lako rešiv po θ . U praksi, međutim, poremećaj i greške u modelu su dobar razlog da broj merenja

bude veći od n . Kada je $N > n$ sistem linearnih jednačina (3.9) postaje preodređen i tačno rešenje, u opštem slučaju, ne postoji.

Postavljeni problem estimacije vrednosti vektora parametara θ može se rešiti kao problem najmanjih kvadrata, odnosno minimizacijom kriterijum optimalnosti (3.6) primenjujući 2 - Euklidska norma, koji u tom slučaju dobija oblik

$$J = \sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k)^2 = \sum_{k=1}^N \left(y_k - \sum_{i=1}^n \varphi_{k,i} \hat{\theta}_i \right)^2, \quad (3.11)$$

Primenom elementarnih principa optimizacije nalazimo da se kriterijum (3.11) može minimizovati postavljanjem priraštaja funkcije, odnosno gradijenta, na nulu

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}_j} = 0 \quad (\forall j \in 1 \dots n), \quad (3.12)$$

lako nalazimo

$$\sum_{k=1}^N \left(y_k - \sum_{i=1}^n \varphi_{k,i} \hat{\theta}_i \right) \varphi_{k,j} = 0 \quad (\forall j \in 1 \dots n), \quad (3.13)$$

U tom slučaju potrebni i dovoljni uslovi optimalnosti su

$$\sum_{i=1}^n \hat{\theta}_i \sum_{k=1}^N \varphi_{k,i} \varphi_{k,j} = \sum_{k=1}^N y_k \varphi_{k,j} \quad (\forall j \in 1 \dots n) \quad (3.14)$$

Jasno je, da se rešenje može dobiti rešavanjem sistema jednačina (3.14), a može se naći i u zatvorenom obliku izračunavanjem Penrose-Moore-ove pseudoinverzije, [19], što će biti definisano u nastavku.

Uvođenjem matrice notacije kriterijum (3.11) dobija oblik

$$J = (y - \Phi \hat{\theta})^T (y - \Phi \hat{\theta}) \quad (3.15)$$

dok je gradijent oblika

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = -y^T \Phi + \hat{\theta}^T (\Phi^T \Phi). \quad (3.16)$$

Postavljanjem gradijenta (3.16) na nulu dobijaju se potrebni i dovoljni uslovi optimalnosti

$$\Phi^T \Phi \hat{\theta} = \Phi^T y \quad (3.17)$$

Jednačina (3.17) poznata je u literaturi kao „normalna jednačina”. Algoritam najmanjih kvadrata karakteriše uvođenje pseudoinverzije što je neophodno kada je matrica nije kvadratna ili nema puni rang. Kao što je već prethodno pomenuto, to se dešava kada matrica Φ nije kvadratna, odnosno $n \neq N$, tada je rešenje najmanjih kvadrata u zatvorenom obliku

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y = \Phi^\dagger y, \quad (3.18)$$

gde je matrica $(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T$ pseudoinverzija od Φ što se u literaturi obeležava sa Φ^\dagger i postoji ako inverzija $(\Phi^T \Phi)^{-1}$ postoji, tj ako je matrica Φ punog ranga.

Napomena 3.1. Izraz (3.18) za rešavanje problema najmanjih kvadrata može biti zapisan i u ekvivalentnom obliku

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \right]. \quad (3.19)$$

U mnogim slučajevima $\varphi(t)$ je poznata promenljiva u funkciji od t , zbog čega (3.19) je mnogo lakše implementirati nego (3.18) s obzirom da (3.19) ne zahteva računanje inverzija matrica velikih dimenzija.

Ako se umesto kriterijuma najmanjih kvadrata kao optimizacioni kriterijum za ocenu valjanosti modela usvoji sledeća, njegova, modifikacija, koja se naziva otežani metod najmanjih kvadrata

$$J = \sum_{i=1}^N \omega_i (y_i - \varphi^T \theta)^2 \quad (3.20)$$

gde su ω_i unapred zadate relativne težine pojedinih merenja, tada je matrični zapis kriterijuma

$$J = (y - \Phi \theta)^T W (y - \Phi \theta) \quad (3.21)$$

$$= y^T W y - \theta^T \Phi^T W Y - Y^T W \Phi \theta + \theta^T \Phi^T W \Phi \theta, \quad (3.22)$$

gde je

$$W = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

tada se iz uslova za minimizaciju kriterijuma (3.12) dobija rešenje otežanog metoda najmanjih kvadrata u zatvornom obliku

$$\hat{\theta} = (\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W y \quad (3.24)$$

3.2.1 Rekuzivni metod najmanjih kvadrata

Za jednovremenu estimaciju parametara u realnom vremenu (*engl. online*) koriste se rekuzivni algoritmi. Rešavanje postavljenog optimizacionog problema zahteva primenu određenih numeričkih algoritama i matematičkih alata, a jedan uobičajen postupci su Rekuzivni metod najmanjih kvadrata i njegove različite modifikacije, a najpoznatiji među njima je Kalmanov filter [20] koji u novijoj istoriji sigurno najšire primenjivan algoritam za adaptivnu estimaciju. Detaljna studija adaptivnih algoritmima za estimaciju, implementaciji i modifikacijama može se naći u [18, 21], a neka osnovna svojstva pomenutih algoritama biće data u nastavku.

Diskusiju o rekuzivnom metodu najmanjih kvadrata razmatraćemo nad skalarnim sistemom (3.8) ($\dim(y) = 1$), gde se parametri mogu estimirati primenom nerekuzivnim metodom najmanjih kvadrata (3.19)

$$\hat{\theta}_N = \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \right], \quad (3.25)$$

gde se N koristi da označi tekući trenutak za procenu parametara, odakle jednostavno sledi da se procena u prethodnom trenutku računa

$$\hat{\theta}_{N-1} = \left[\sum_{t=1}^{N-1} \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^{N-1} \varphi(t) y(t) \right], \quad (3.26)$$

Izraz (3.25) može da se računa rekuzivno. Uvedimo notaciju

$$P(N) = \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1}, \quad (3.27)$$

gde se P naziva matrica kovarijanse, iz čega se trivijalno dobija

$$P_N^{-1} = P_{N-1}^{-1} + \varphi(N) \varphi^T(N), \quad (3.28)$$

i sledi da je

$$\hat{\theta}_N = P_N \left[\sum_{t=1}^{N-1} \varphi(t)y(t) + \varphi(N)y(N) \right], \quad (3.29)$$

Uvrštavanjem izraza (3.26) i (3.28) u izraz (3.29) sledi

$$\hat{\theta}_N = P_N \left[P_{N-1}^{-1} \hat{\theta}_{N-1} + \varphi(N)y(N) \right] \quad (3.30)$$

$$= P_N \left[[P_N^{-1} - \varphi(N)\varphi^T(N)] \hat{\theta}_{N-1} + \varphi(N)y(N) \right] \quad (3.31)$$

$$= \hat{\theta}_{N-1} + P_N \varphi(N) \left[y(N) - \varphi^T(N) \hat{\theta}_{N-1} \right] \quad (3.32)$$

Na taj način, rekurzivni oblik linearnog metoda najmanjih kvadrata, koji se skraćeno označava i sa RLS, dat je sa

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} + K_N \varepsilon(N) \quad (3.33)$$

$$K_N = P_N \varphi(N) \quad (3.34)$$

$$\varepsilon(N) = y(N) - \varphi^T(N) \hat{\theta}_{N-1}. \quad (3.35)$$

Član $\varepsilon(N)$ može se implementirati kao greška predikcije. To je greška između izmerenog izlaza $y(N)$ i predviđanja jednog koraka unapred. Primena algoritma zahteva računanje inverzne matrice prilikom određivanja matrice kovarijanse P_N u svakom koraku. Da bi se to izbeglo, postupak za adaptaciju P_N može se pojednostaviti primenom leme o inverziji matrice koja je opisano u [5], pa se dobija alternativan izraz

$$P_N = P_{N-1} - \frac{P_{N-1} \varphi_N \varphi_N^T P_{N-1}}{1 + \varphi^T(N) P_{N-1} \varphi(N)} \quad (3.36)$$

U nastavku biće opisane neke modifikacije rekuzivnog algoritma koje su koriste za praćenje vremenski promenljivih parametara. Tada možemo govoriti o identifikaciji u realnom vremenu a dva uobičajna pristupa pri modifikaciji rekuzivnog algoritma najmanjih kvadrata su:

- Korišćenje faktora zaboravljanja
- Korišćenje Kalmanog filtra kao estimatora parametara

Faktor zaboravljanja

Faktor zaboravljanja se uvodi ukoliko se želi ograničiti „memorija” algoritma. Uvođenjem faktora zaboravljanja, estimacija se efektivno vrši samo na osnovu bliske prethodne istorije ponašanja procesa, a ne od trenutke u kome je započet proces estimacije. Ovakav pristup podrazumeva promenu kriterijuma optimalnosti koji je mera validnosti modela,

$$J = \sum_{i=1}^N \lambda^{N-i} (y_i - \varphi_i^T \theta)^2 \quad (3.37)$$

Faktor zaboravljanja, $\lambda \in (0, 1]$ definiše vremenski promenljivi težinski faktor koji favorizuje „skorija” merenja.

Na taj način, izborom faktora zaboravljanja λ , ali koji je blizak jediničnoj vrednosti, mogu se pratiti vremenski promenljivi parametri modela, čija je dinamika promene relativno spora. Međutim, praćenje naglih promena parametara, kao i vremenski brzo promenljivih parametara, zahteva da se faktor λ menja adaptivno u svakom vremenskom koraku. Naime, u opštem slučaju, što je vrednost λ više udaljena od 1, informacije iz prethodnih koraka će biti brže zaboravljene i algoritam će bolje pratiti brze promene parametara, ali će lošije pratiti konstantne i sporo promenljive parametre, dok će vrednost λ bliska 1 omogućiti dobro praćenje konstantnih i sporo promenljivih parametara, uz lošije praćenje relativno brzo promenljivih parametara modela. Na taj način, izbor vrednosti faktora λ zavisi od dinamike promene parametara.

Ponavljanjem procedure opisane za rekuzivni algoritam najmanjih kvadrata, modifikovani algoritam opisuju sledeći koraci

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_N &= \hat{\theta}_{N-1} + K_N \varepsilon(N) \\ \varepsilon(N) &= y(N) - \varphi^T(N) \hat{\theta}_{N-1} \\ K_N &= P_N \varphi(N) \\ P_N &= \frac{1}{\lambda} \left(P_{N-1} - \frac{P_{N-1} \varphi_N \varphi_N^T P_{N-1}}{\lambda + \varphi^T(N) P_{N-1} \varphi(N)} \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Kalmanov filter

Pretpostavimo da su parametri konstantni i da se osnovni model

$$y(t) = \varphi(t)^T \theta + e(t) \quad (3.39)$$

može zapisati kao model u prostoru stanja

$$x(t+1) = x(t) \quad (3.40)$$

$$y(t) = \varphi^T(t)x(t) + e(t) \quad (3.41)$$

gde je vektor stanja $x(t)$ ekvivalentan vektoru nepoznatih parametara θ . Estimacija optimalnih stanja $\hat{x}(t+1)$ može se izračunati u funkciji izlaznih merenja $y(1), \dots, y(t)$. Estimacija se vrši primenom Kalmanovog filtra, videti [20, 5, 18], i može se pokazati da Kalmanov filter obezbeđuje optimalnu estimaciju vektora stanja sistema. Primenom Kalmanovog filtra na model (3.41) daće osnovni rekurzivni algoritam najmanjih kvadrata. Jedan od načina za modifikaciju algoritma tako da se vremenski promenljivi parametri mogu pratiti jeste promena jednačina stanja (3.41) u

$$x(t+1) = x(t) + \nu(t) \quad (3.42)$$

gde je $\nu(t)$ Gausov beli šum sa nultom srednjom vrednošću i matricom kovarijanse,

$$E[\nu(t)\nu^T(s)] = R_1 \quad (3.43)$$

Ovakva, formalnija alternativa da se tretiraju varijabilni parametri je da se postuliše da stvarni vektor parametara u (3.41) nije konstantan, nego varira kao slučajni hod (engl. *random walk*). Matrica kovarijansi R_1 se može koristiti da opiše koliko brzo se očekuje da će različite komponente vektora θ da variraju.

Primena Kalmanovog filtra na model (3.43) formira rekurzivni algoritam koji se opisuje sledećim koracima

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_N &= \hat{\theta}_{N-1} + K_N \varepsilon(N) \\ \varepsilon(N) &= y(N) - \varphi^T(N) \hat{\theta}_{N-1} \\ K_N &= P_N \varphi(N) = P_{N-1} \frac{\varphi_N}{1 + \varphi^T(N) P_{N-1} \varphi(N)} \\ P_N &= P_{N-1} - \frac{P_{N-1} \varphi_N \varphi_N^T P_{N-1}}{1 + \varphi^T(N) P_{N-1} \varphi(N)} + R_1 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Može se primetiti da za oba algoritma (3.38) i (3.44) osnovni metod modifikovan tako da $P(t)$ neće težiti nuli. Na taj način se takođe sprečava da se pojačanje $K(t)$ neograničeno smanji, čime algoritam postaje neosetljiv na promene parametara procesa.

U algoritmu (3.44) promenljiva λ se bira proizvoljno. Matrica R_1 u algoritmu (3.38) ima sličnu ulogu kao λ u (3.44). Izbor vrednosti ovih promenljivi predstavlja kompromis između ažurnosti i mogućnosti praćenja brzih promena parametara s jedne strane i dobrih osobina konvergencije postupka i malih varijacija esimiranih vrđnosti s druge strane. Algoritam zasnovan na Kalmanovom filtru pruža više fleksibilnosti.

3.3 Estimacija parametara sistema sa iracionalnom funkcijom prenosa

Za razliku od sistema koji se opisuju racionalnim funkcijama prenosa, sistemi beskonačnog reda se opisuju iracionalnom funkcijom prenosa. U kontekstu iracionalnih sistema, princip estimacije parametara se primarno odnosi na sisteme opisane u nastavku.

3.3.1 Sistemi sa vremenskim kašnjenjem

Već od sedamdesetih godina dvadesetog veka, sistemi sa transportnim kašnjenjem (*engl. Time delay systems, TDS*), privlače veliku pažnju naučne i stručne javnosti, [22, 23, 24]. Naime, njihova pojava u robotici, dugačkim hidrauličnim, pneumatskim i električnim vodovima, dinamici letilica i velikim sistemima, podstakla je brojne naučnike da se njima intenzivno bave. Prisustvo transportnog kašnjenja, bez obzira da li je ono prisutno u upravljanju i/ili u nekom od stanja sistema može da proizvede neželjene prelazne karakteristike pa čak i nestabilnost celog sistema. Zbog toga je problem estimacije kašnjenja naišao na veliko interesovanje kod mnogih istraživača. Sistemi sa ulaznim kašnjenjem τ se opisuju funkcijama prenosa u obliku

$$G_0(s)e^{-s\tau}, \quad (3.45)$$

gde G_0 može da bude proizvoljno, ali najčešće je racionalan sistem, a s je operator Laplasove transformacije, kako je u teoriji sistema i uobičajno. Ako se takav sistem nalazi unutar zatvorene petlje, ili ukoliko se kašnjenje nalazi kao spojnica između različitih stanja sistema, tada operator kašnjenja $e^{-s\tau}$ može da konfiguriše i na mnogo komplikovaniji način, [25]. Kašnjenje je prisutno u mnogim industrijskim sistemima [26, 27, 28] i njegova pojava ograničava performanse sistema u zatvorenoj sprezi. Precizno znanje o kašnjenju je od

posebnog značaja pri realizaciji direktnih kompenzatora (*feedforward*) i u povratnoj sprezi (*feedback*), [29, 30, 31, 32].

To su neki od razloga zbog čega kašnjenje predstavlja poseban izazov za primenu algoritama za estimaciju, [33, 34, 35, 36]. Većina pomenutih algoritama, operator kašnjenja aproksimira racionalnom funkcijom pomoću neke od aproksimacija te namene, kao što je Pade (fr. *Padé*) aproksimacija [37], a potom primeni jedan od dobro poznatih algoritama za estimaciju linearnih parametara, npr. rekuzivni metod najmanjih kvadrata ili Kalmanov filter.

3.3.2 Sistemi sa distribuiranim parametrima.

Verovatno, najtipičniji primer sistema beskonačnog reda su sistemi sa distribuiranim parametrima (*engl. Distributed Parameter System, DPS*). Kod ovakvih sistema neophodno je uzeti u obzir promenu procesnih veličina i po prostornim koordinatama, tako da se kao nezavisno promenljive javljaju vreme i jedna ili više prostornih koordinata. Dinamički modeli ovakvih sistema se prikazuju jednom ili sistemom linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina (*linear partial differential equations - LPDE*), [38, 39]. Ukoliko se koncentrišemo samo na ulaz u sistem i izmereni izlaz u nekoj fiksiranoj prostornoj tački, tada je, pod određenim uslovima, neke sisteme sa distribuiranim parametrima moguće opisati iracionalnom funkcijom prenosa, kao što je opisano u [40, 41]. Dobijene funkcije prenosa obično sadrže članove kao što su

- \sqrt{s}
- $e^{-\sqrt{s}}$, $\cosh(\sqrt{s})$, $\sinh(\sqrt{s})$
- $e^{\sqrt{G(s)}}$

a često i kombinaciju ovakvih članova. Estimacija parametara ovakvih sistema obično se svodi na aproksimaciju koja opisani sistem parcijalnih jednačina svodi na sistem diferencijalnih jednačina koje ne zavise od pozicije. Veći broj jednačina rezultuje u tačniju aproksimaciju ali povećava i dimenzije modela. I pored toga, ovakvo uprošćenje je značajno pošto je numeričko rešavanje parcijalnih jednačina kompleksno i vremenski zahtevno. Detaljna diskusiju o estimaciji parametara ovakvih sistema može se naći u [42, 43, 44].

3.3.3 Frakcioni sistemi

Matematički modeli frakcionog reda (*engl. Fractional-order system, FOS*), tj matematički modeli formirani pomoću frakcionog računa, zauzimaju sve šire

i značajnije mesto u savremenoj nauci i tehnici i predstavljaju još jedan primer dinamičkih sistema koji se opisuju iracionalnim funkcijama prenosa, [45, 46]. Iako se frakcioni račun, tj. matematička teorija izvoda i integrala necelog reda, u velikoj meri formirao do kraja devetnaestog veka, neceli izvodi i integrali nalaze široku primenu u modelovanju fizičkih i tehničkih procesa tek u poslednjim decenijama dvadesetog veka u raznim oblastima kao što su visokoelastičnost, seizmologija, elektrohemija i drugim, što je detaljno navedeno u [47, 48, 49, 50, 51, 52]. Posledično, matematički modeli frakcionog reda se sve više sreću i u savremenoj teoriji upravljanja, [53, 54]. Osnovni član u funkciji prenosa frakcionog reda je s^α , gde je α relani red sistema. Takve sisteme nazivamo implicitni frakcioni sistemi. Mnogo kompleksniju klasu frakcionih sistema čine sistemi koji se opisuju funkcijama prenosa oblika $(G_0(s))^\alpha$, [55].

Pored sistema relanog reda, predmet istraživanja poslednjih godina su i sistemi sa kompleksnim redom, [56, 57]. U ovu grupu ubrajamo i frakcione sisteme distribuiranog reda, čija funkcija prenosa se opisuje u formi $\int f(\alpha)s^\alpha d\alpha$ (gde je f funkcija distribucije), koji su posebno analizirani u [58, 59, 51], kao i sisteme koje se opisuju linearnim frakcionim parcijalnim diferencijalnim jednačinama, čiji primeri se mogu naći u [53].

Uprkos širokoj savremenoj primeni frakcionog računa, još uvek ne postoji opšte prihvaćeni postupak za identifikaciju frakcionih procesa. Većina postojećih procesa zasniva se na pretpostavci da je struktura procesa poznata, tj. da svi frakcioni operatori koji učestvuju u formiranju modela procesa su poznatog reda. Postupci koji jednovremeno omogućavaju i identifikaciju reda frakcionih procesa još uvek su nedovoljno istraženi. Primer ovakvog postupka, koji se zasniva na nelinearnom programiranju može se naći u [60]. Postupak slične namene, u kome se klasična metoda najmanjih kvadrata kombinuje sa algoritmom roja čestica (*engl. Particle Swarm Optimization, PSO*) u cilju jednovremenog određivanja svih parametara frakcionog procesa prikazan je u [61], kao i u radovima [62, 63, 64, 65, 60].

3.3.4 Primeri realnih sistema opisani iracionalnim funkcijama prenosa

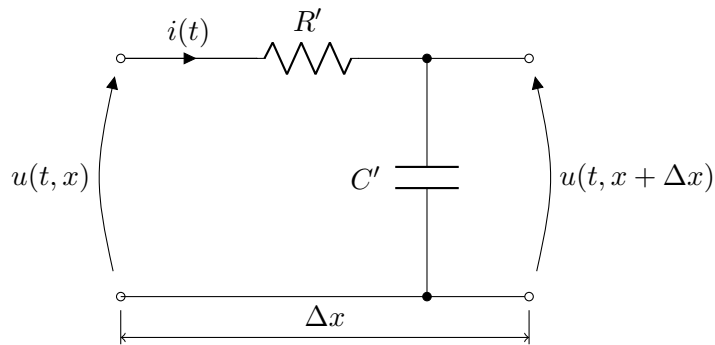
U ovom odeljku će biti dat prikaz nekoliko procesa koji se modeluju iracionalnim funkcijama prenosa. Biće analizirani sistemi sa distribuirani parametrima kao specijalni slučaj frakcionih sistema kao što su električni vodovi, difuzni procesi i slični sistemi.

Polubeskonačni vod

Kao primer procesa sa distribuiranim parametrima mogu služiti i električna kola sa raspodeljenim parametrima, među kojima najvažniju ulogu imaju prenosni električni vodovi. U opštem slučaju parametri kola mogu biti na različite načine raspodeljeni duž prostorne koordinate, ali u većini slučajeva možemo smatrati da su raspodeljeni duž prostorne koordinate i u tom slučaju parametri koji se javljaju u kolu računaju se po jedinici dužine. Ukoliko posmatramo jedan elementarni deo voda prikazan na slici 3.2 tada je

- $R' = \frac{R}{l}$ podužna otpornost
- $C' = \frac{C}{l}$ podužna kapacitivnost

gde su R i C posledica konačne provodljivosti materijala od koje je napravljen vod i ukupne kapacitivnosti kondenzatora koga obrazuju linije voda, respektivno, a l dužina voda.



Slika 3.2: Polubeskonačni vod RC tipa

Ako pretpostavimo da je dužina posmatranog dela voda mala, odnosno da $\Delta x \rightarrow 0$, tada se parametri mogu tretirati kao skoncentrisani, a posmatrani sistem se može opisati jednačinama koje povezuju struju i napon oblika, [66, 67]

$$-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = R' i(x, t), \quad (3.46)$$

$$-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = C' \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \quad (3.47)$$

Diferenciranjem jednačine (3.46) po x i ubacivanjem u (3.47) dobija se

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = R' C' \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \quad (3.48)$$

Dobijena parcijalna jednačina drugoga reda (3.48) sa konstantnim parametrima kojima se opisuje raspodela struje i napona duž voda i u toku vremena u literaturi je poznata pod imenom „jednačina telegrafčara”. Primenom konvencionalnih oznake sa i je predstavljena struju kroz neki element, a sa u napon na nekom elementu. Funkcija koje opisuju napon na poziciji x i u trenutku t dobija se rešavanjem parcijalne diferencijalne jednačine (3.48) uz odgovarajuće granične i početne uslove.

• **Početni uslov: Napon na ulaza određen naponom izvora U_0**

Ukoliko pretpostavimo da napon na početku voda mora biti jednak naponu izvora na koji je vod priključen i da je u pitanju polubeskonačni vod, tada su početni i granični uslovi

$$u(0, t) = U_0 \quad (3.49)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad (3.50)$$

Primenom Laplasovu transformacije po t na jednačinu (3.48) dolazimo do obične diferencijalne jednačine

$$\frac{\partial^2 U(s, x)}{\partial x^2} = R' C' s U(s, x), \quad (3.51)$$

čije opšte rešenje je

$$U(s, x) = C_1 e^{\sqrt{R' C' s} x} + C_2 e^{-\sqrt{R' C' s} x}. \quad (3.52)$$

Kako granični uslovi moraju biti zadovoljeni, ponašanje sistema u početnoj i krajnjoj tački je

$$U(s, 0) = C_1 + C_2 \quad (3.53)$$

$$U(s, \infty) = C_1 e^{\sqrt{R' C' s} \infty} + C_2 e^{-\sqrt{R' C' s} \infty}. \quad (3.54)$$

Uvrštavanjem prirodnih ograničenja na fizičke veličine, u smislu da ukupni napon mora biti ograničen, sledi da je $C_1 = 0$, i dobijamo da je

$$U(s, 0) = C_2. \quad (3.55)$$

U skladu sa jednačinama (3.50)-(3.55) dobijena je sledeća funkcija prenosa razmatranog polubeskonačnog voda koja opisuje odnos napona u tački x od napona u početnoj tački

$$G(s, x) = \frac{U(s, x)}{U(s, 0)} = e^{-x\sqrt{R'C's}}. \quad (3.56)$$

• **Početni uslov: Struja na ulaza određena strujom izvora I_0**

Ukoliko posmatramo polubeskonačni vod kod koga je struja na početku voda jednaka struji električnog izvora, tada su početni i granični uslovi

$$i(0, t) = I_0 \quad (3.57)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad (3.58)$$

koji se uvrštavanjem u jednačinu (3.46) svode na

$$-\frac{\partial U(0, t)}{\partial t} = R'I_0, \quad (3.59)$$

Uvažavajući početne i granične uslova, kao i prirodna ograničenja na fizičke veličine u (3.52), dolazimo do opšteg rešenja

$$U(s, x) = \sqrt{\frac{R'}{C'}} \frac{e^{-x\sqrt{R'C's}}}{\sqrt{s}} I_0. \quad (3.60)$$

Oдавde je funkcija prenosa koja opisuje odnos napona i struje izvora voda

$$G(s, x) = \sqrt{\frac{R'}{C'}} \frac{e^{-x\sqrt{R'C's}}}{\sqrt{s}}. \quad (3.61)$$

Napomena 3.2. Dobijena funkcija prenosa (3.61) čiji je opšti oblik

$$G(s, x) = \frac{k}{\sqrt{s}} e^{-\alpha\sqrt{s}}. \quad (3.62)$$

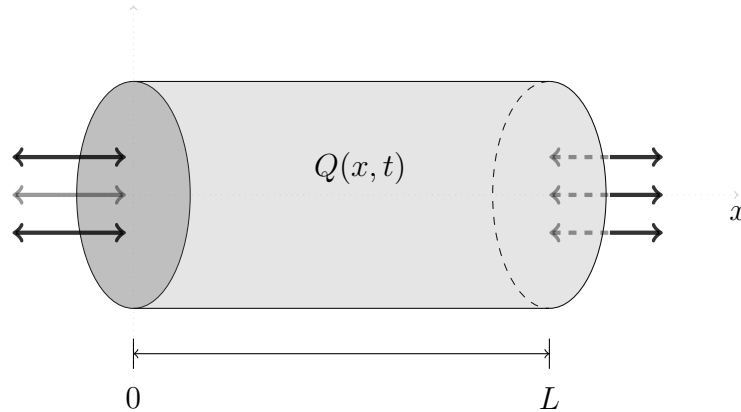
opisuje ponašanje svih difuznih procesa ρ sa graničnim uslovom zadatim u obliku

$$u = \left. \frac{\partial \rho(s, x)}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (3.63)$$

gde u označava ulaznu veličinu.

Proces difuzije toplote

Posmatrajmo homogeno telo prikazan na slici 3.3. Pretpostavićemo da je temperatura u svim tačkama u telu koje su obuhvaćene istim poprečnim presekom jednaka i da se temperatura menja prostorno duž x -ose. Označimo temperaturu poprečnog preseka sa prostornom koordinatom x u vremenskom trenutku t sa $Q(x, t)$. Dužinu tela ćemo označiti sa $L > 0$. Pretpostavićemo da je posmatrano telo idealno toplotno izolovano od svoje okoline, izuzev na граниčnim presecima $x = 0$ i $x = L$, odnosno da se van tela nalazi vakum, dok je unutar tela dozvoljeno da se generiše ili disipira toplotna energija. Mehanizam generisanja odnosno disipacije nije od interesa, već samo snaga, odnosno količina razmenjene energije u jedinici vremena. Od posebnog interesa je razmena toplote koja se dešava na granicama posmatranog tela, putem граниčnih preseka, [68].



Slika 3.3: Šematski prikaz čvrstog tela koje posmatramo. Telo je toplotno izolovano od svoje okoline, izuzev na krajevima. Temperatura se prostorno menja samo duž x -ose.

Klasičan model toplotnog provođenja dat je parcijalnom diferencijalnom jednačinom tzv. jednačinom toplotnog provođenja (*heat equation*) [40]

$$c\rho\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.64)$$

gde je Q temperatura poprečnog preseka, c specifična toplota, ρ gustina, a k koeficijent toplotne provodljivosti.

Jednačina toplotnog provođenja (3.64), takođe poznata i kao jednačina difuzije (*engl. diffusion equation*), je jedna od osnovnih jednačina matematičke fizike [57]. Ova jednačina se koristi se za opis široke klase procesa u kojima dolazi do prenosa mase, energije ili momenta. U novijoj literaturi razmatrana su različita uopštenja ove jednačine i drugih klasičnih parcijalnih jednačina koja uključuju operatore diferenciranja i integracije necelog stepena [49, 68]. Da bi rešenje jednačine (3.64), bilo jedinstveno moramo zadati početne granični uslovi koji se zadaju na osnovu podataka utvrđenih eksperimentalno (teren-skim merenjima) ili na osnovu inženjerskih pretpostavki. Granični uslovi (*boundary conditions, BC*) koji prate jednačinu toplotnog provođenja uključuju specificirane temperature i/ili toplotnih flukseva na krajevima. U nastavku će biti razmatrana tri tipa graničnih uslova: Dirihleov, Nojmanov i mešoviti.

- **Nojmanovi granični uslovi** (*engl. Neumann boundary condition*)

Granični uslovi koji prate jednačinu provođenja toplote (3.64) mogu biti zadati preko toplotnog fluksa, koji je na osnovu Furijeovog zakona proporcionalan gradijentu temperature $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Ukoliko je štap na kraju $x = 0$ izolovan, a drugim krajem $x = L$ se upravlja preko toplotnog fluksa, tada možemo govoriti o graničnim uslovima Nojmanovog tipa oblika

$$\frac{\partial Q(0, t)}{\partial x} = 0, \quad (3.65)$$

$$k \frac{\partial Q(L, t)}{\partial x} = u(t). \quad (3.66)$$

gde je $u(t)$ upravljačka veličina koja predstavlja kontrolisani toplotni fluks. Pretpostavimo da se temperatura meri u prostornoj kordinati $x_0 \in (0, L)$ i da predstavlja izlaz posmatranog procesa

$$y(t) = Q(x_0, t) \quad (3.67)$$

Posle primene Laplasove transformacije po t na izraz (3.64) dobijamo

granični problem

$$k \frac{\partial^2 \hat{Q}(x, s)}{\partial x^2} = \rho s \hat{Q}(x, s), \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial Q(0, s)}{\partial x} = 0, \quad (3.69)$$

$$k \frac{\partial Q(L, s)}{\partial x} = U(s). \quad (3.70)$$

Opšti oblik rešenja diferencijalne jednačine (3.68) izraženo preko hiperboličkih funkcija je

$$Q(x, s) = A \sinh\left(\frac{\sqrt{s}x}{\alpha}\right) + B \cosh\left(\frac{\sqrt{s}x}{\alpha}\right) \quad (3.71)$$

gde je $\alpha^2 = \frac{k}{c\rho}$ toplotna difuzivnost. Uvrštavanjem graničnih uslova u tako dobijeno rešenja nalazimo

$$Q(x, s) = \frac{\alpha \cosh\left(\frac{\sqrt{s}x}{\alpha}\right)}{k\sqrt{s} \sinh\left(\frac{\sqrt{s}x}{\alpha}\right)} U(s). \quad (3.72)$$

Kako je

$$Y(s) = Q(x_0, s), \quad (3.73)$$

funkcija prenosa posmatranog sistema dobija oblika

$$G_1(s) = \frac{\alpha \cosh\left(\frac{\sqrt{s}x}{\alpha}\right)}{k\sqrt{s} \sinh\left(\frac{\sqrt{s}x}{\alpha}\right)}. \quad (3.74)$$

- **Dirihleovi granični uslovi (engl. *Dirichlet boundary condition*)**

Granični uslovi Dirihleovog tipa uključuju da su specificirane temperature na krajevima, tako da je temperatura na inicijalnom poprečnom preseku $x = 0$ zadržana na osnovno nivou dok se temperaturom kranjeg poprečnog preseka može upravljati,

$$Q(0, t) = 0 \quad (3.75)$$

$$Q(L, t) = u(t). \quad (3.76)$$

Kao i u prethodnom slučaju temperatura meri u jednoj prostornoj koordinati x_0 , pa je posmatrana izlazna promenljiva

$$y(t) = Q(x_0, t) . \quad (3.77)$$

Funkcija prenosa ćemo dobiti rešavanjem diferencijalne jednačine (3.68) uz primenu jednačina

$$Q(0, s) = 0 \quad (3.78)$$

$$Q(L, s) = U(s) \quad (3.79)$$

koje predstavljaju Laplasovu transformaciju od (3.76). Funkcija prenosa koja opisuje razmatrani proces je

$$G_2(x_0, s) = \frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{s}x_0}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{\sqrt{s}L}{\alpha}\right)} \quad (3.80)$$

- **Mešoviti granični uslovi (engl. *Mixed boundary conditions*)**

Pretpostavimo opet da razmatramo proces difuziju toplote kroz štap opisan sa (3.64) kojim se upravlja na kraju štapa, u tački $x = L$, pomoću toplotnog fluksa, kao u (3.66), i meri temperatura u prostornoj koordinati $x = x_0$. Za razliku od Nojmanovih graničnih uslova, gde je temperatura na kraju $x = 0$ konstanta, sada pretpostavljamo da je ovaj kraj potpuno toplotno izolovano, pa su granični uslovi

$$Q(0, t) = 0 , \quad (3.81)$$

$$k \frac{\partial Q(L, t)}{\partial x} = u(t) . \quad (3.82)$$

Primenom Laplasove transformacije i rešavanjem parcijalne jednačine (3.68) dobijamo funkciju prenosa

$$G_3(x_0, s) = \frac{\alpha \sinh\left(\frac{\sqrt{s}x}{\alpha}\right)}{k\sqrt{s} \cosh\left(\frac{\sqrt{s}x}{\alpha}\right)} \quad (3.83)$$

Proces prostiranja talasa

Razmatraćemo prostiranje zvučnog talasa u cevi. Pritisak u cevi označen sa $p(x, t)$ i brzina kretanja čestica $v(x, t)$ su funkcije koje zavise od dve promenljive, prostora i vremena. Ako gustinu vazduha označimo sa ρ_0 , a brzinu prostiranja zvuka sa c tada se prostiranje zvuka može opisati sledećim parcijalnim diferencijalnim jednačinama

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad (3.84)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \quad (3.85)$$

Kombinovanjem ovih jednačina, možemo dobiti dobro poznatu jednačinu prostiranja talasa

$$\frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (3.86)$$

gde z može označavati pritisak, brzinu ili pomeraj.

Sa L ćemo označiti dužinu cevi. Postoje različiti načini za modelovanje graničnih uslova na krajevima $x = 0$ i $x = L$. U nastavku ćemo razmatrati najjednostavniji slučaj.

- **Polu-beskonačna cev (engl. *Semi-infinite duct*)**

Zvučnik predstavlja izvor buke na kraju $x = 0$ i može se posmatrati kao izvor brzine, pa je granični uslov dat kao

$$v(0, t) = u(t) \quad (3.87)$$

Najjednostavniji način za modelovanje uticaja drugog kraja je da pretpostavimo da je cev dovoljno dugačka, tako da možemo smatrati da se završava u beskonačnosti i na taj način zanemariti efekat tog kraja. Primenom Laplasove transformacije na jednačine (3.84)-(3.87) dobijamo sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$sp(x, s) = -c^2 \rho_0 \frac{dv}{dx}(x, s) \quad (3.88)$$

$$\rho_0 sv(x, s) = -\frac{dp}{dx}(x, s) \quad (3.89)$$

$$v(0, s) = u(s) \quad (3.90)$$

Uzimajući u obzir zahtev da brzina i pritisak moraju biti ograničeni za svako x , dobijamo rešenje

$$v(x, s) = e^{-x\frac{s}{c}}u(s) \quad (3.91)$$

$$p(x, s) = \rho_0 c e^{-x\frac{s}{c}}u(s) \quad (3.92)$$

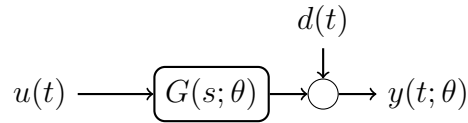
Stoga, funkcija prenosa koja opisuje vezu između pritiska merenog u prostornoj koordinati x_0 i upravljanja kojim se kontroliše brzina talasa na poziciji $x = 0$ je

$$G_{talasa} = \rho_0 c e^{-x\frac{s}{c}} \quad (3.93)$$

3.4 Opis problema

Kao što je prikazano u prethodnom odeljku, ako model razmatranog procesa ima iracionalnu funkciju prenosa i ukoliko se izlaz iz sistema ne može predstaviti kao linearno zavisano od nepoznatih parametrima, tada problem optimizacije nije lako rešiv. To je posledica toga što kriterijum (3.1) ne mora biti konveksan, kao što je slučaj kada je proces modelovan racionalnom funkcijom prenosa. Posledično, što će biti prikazano u nastavku ove disertacije, može postojati više optimuma što dovodi do nejedinsvenog rešenja. U tom smislu, fundamentalan rezultat prikazan je u radu autora Ljunga i Glada, [6]: „...pronalazak globalnog optimalnog rešenja kod problema identifikacije je moguće samo kada je osnovna parametrizacija linearna i kada je razmatrana funkcija prenosa potpuno racionalna...”.

U slučaju neadaptivnih *offline* tehnika za estimaciju moguće je rešiti optimizacioni problem primenom odgovarajući algoritama za nelinearno programiranje, ili primenom neke od modernijih tehnika za globalnu optimizaciju, kao što su genetski algoritam (*engl. Genetic Algorithm, GA*) [69], ili algoritam rojem čestica [70]. Kao što je prethodno navedeno, postoje i neke specifične adaptivne tehnike za rešavanje određene klase problema estimacije parametara iracionalnih funkcija prenosa, međutim, prema najboljim saznanjima i na osnovu izučavane literature ne postoji algoritam za adaptivnu estimaciju parametara sistema koji ne zavisi od strukture modela i načina na koji parametri utiču na sistem. Kako je problem estimacije parametara linearnih sistema bez obzira na strukturu modela i dalje ostao nerešen, time se nametnuo kao osnovni zadatak ove teze. Osnovna postavka problema data je u nastavku.



Slika 3.4: Blok šema sistema koji se razmatra. G je funkcija prenosa čija struktura je poznata i koja je pod uticajem skupa nepoznatih parametara θ . u i y su vektori ulaznih i izlaznih signala, dok je d nepoznati izlazni poremećaj.

Postavka problema

Posmatrajmo linearni vremenski invarijantan sistem sa m ulaza i p izlaza, opisan sa matricom funkcija prenosa $G(s, \theta) = \mathcal{L}\{g(t, \theta)\}$. Neka je $\theta \in \mathbb{R}^q$ vektor nepoznatih parametara i neka su $u(t) \in \mathbb{R}^m$ i $y(t) \in \mathbb{R}^p$ dostupni ulazni i izlazni signali. Posmatrani sistem je linearan, stoga se njegov odziv na proizvoljnu pobudu može tražiti u vidu superpozicije sopstvenog odziva (odziva na početne uslove) i prinudnog odziva (odziva na pobudu). Stoga, koristeći uobičajnu konvenciju zapisa u literaturi koja se bavi adaptivnim upravljanjem, zapisaćemo

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau; \theta) u(\tau) d\tau + d(t)$$

$$= \int_0^t g(t - \tau; \theta) u(\tau) d\tau + \varphi(t; \theta) + d(t), \quad (3.94)$$

$$(3.95)$$

odnosno

$$y = G(s; \theta)u(t) + \varphi(t; \theta) + d(t), \quad (3.96)$$

gde je $y(t)$ odziv procesa koji je modelovan sa funkcijom prenosa $G(s; \theta)$ na pobudu $u(t)$, i koji je pod uticajem izlaznog poremećaja $d(t) \in \mathbb{R}^p$, kao što je prikazano na slici 3.4. Uticaj početnih uslova dat je članom

$$\varphi(t; \theta) = \int_{-\infty}^0 g(t - \tau; \theta) u(\tau) d\tau, \quad (3.97)$$

i predstavlja sopstveni odziv sistema. Takođe, možemo primetiti da je (3.96) samo kraći zapis od (3.94).

Osnovni problem estimacije parametara linearnih vremenski invarijantnih sistema možemo definisati na sledeći način:

Pretpostavimo da je struktura modela G poznata, a glavni zadatak je naći estimirati (proceniti) vrednost vektor parametara θ na osnovu izmerenih ulaza u i izlaza y , pod uslovom da poremećaj d zadovoljava određene pretpostavke.

Za rešavanje opisanog problema biće predložena dva originalna i naučno-stručno verifikovana algoritma [71]. Ovaj rezultat je jedan od centalnih, ali ne jedinih rezultata ove teze.

Prvi algoritam okarakterisan je kao dvofazni algoritam, koji na ulazu u sistema zahtevati kombinaciju prostoperiodičnih signala. U prvoj fazi algoritma koristiće se rekurzivni metod najmanjih kvadrata sa faktorom zaboravljanja koji će kao rezultat dati procenjene vrednosti modula i argumenta funkcije prenosa za određenu frekvenciju, što će se koristiti kao ulazna vrednost za drugu fazu algoritma koji se temelji na primeni gradijentnog algoritma za rešavanje sistema nelinearnih jednačina čiji rezultat su estimirane vrednosti nepoznatih parametara.

Drugi algoritam, će biti razmatram u dve varijante, „osnovni algoritam” i „pojednostavljeni algoritam”. Osnovni algoritam, koji ima jednostavan koncept i zahteva da broj nezavisnih izlaza iz sistema nije manji od broja nepoznatih parametara čije vrednosti treba da se estimira i omogućava slobodu u izboru ulaznog signala. Druga varijanta predloženog algoritma, „pojednostavljeni algoritam”, zahteva da se ulazni signal formira kao linearna kombinacija prostoperiodičnih signala, a zahteva i projektovanje banke filtera propusnika opsega na izlazu sistema. Ovakva modifikacija omogućava procenu proizvoljnog broja parametara čak i u slučaju da sistem ima samo jedan izlaz. Po načinu realizacije zakona adaptacije u ovom/ovim algoritmima, oni se jednoznačno karakterišu po primeni gradijentnog zakona adaptacije.

Bitno je naglasiti da za mnoge specifične slučajeve postoje algoritmi koji su efikasniji i/ili robusniji od predloženih algoritama, zasigurno za konačno-dimenzione sisteme. Međutim, predloženi algoritmi su primenljivi na široku klasu linearnih sistema, kao i na niz klasa linearnih sistema za koje u literaturi i ne postoje alternativan način adaptacije. U takvu grupu sistema spadaju frakcioni sistemi sa nepoznatim redom ili prostorni distribuirani sistemi sa parametrima koji figurišu u različit način i sl.

Pri tome, kod predloženih algoritama, način na koji parametri figurišu u modelu može biti proizvoljan, sve dok je odziv ograničena, neprekidno diferencijabilna funkcija parametara, što znači da su predložene algoritme primenljivi nezavisno od tipa linearnog procesa i to ih čini jedinstvenim.

Predloženi algoritmi su primenljivi na sisteme sa linearnom dinamikom, i u principu nisu proširivi na nelinearne modele. Najveća mana ovih algoritma je da struktura modela mora biti poznata, odnosno način na koji parametri figurišu u modelu mora biti poznat unapred. Ovaj nedostatak može biti rešiv prethodnom *offline* identifikacijom strukture modela sistema u frekvencijskom i/ili vremenskom domenu. Takav pristup opisan je u okviru teze na primeru identifikacija frakcionog modela CNG sistema.

Dvofazni adaptivni algoritam za estimaciju parametara

U ovom poglavlju analiziran je originalan i naučno-stručno verifikovani algoritam [71] za adaptivnu estimaciju parametara linearnih sistema opisanih funkcijom prenosa proizvoljne strukture. Algoritam koji će biti predložen može se primeniti na širok spektar linearnih sistema, uključujući i one sisteme koje nisu linearno parametrizovani, sisteme frakcionog reda, sa distribuiranim parametrima, kašnjenjem i druge sisteme koji pripadaju klasi sistema koja se opisuje iracionalnim funkcijama prenosa.

Osnovna osobenost predloženog algoritma jeste da se sistem pobuđuje kombinacijom, odnosno superpozicijom, prostoperiodičnih signala različite učestanosti, nakon čega sledi izvršavanje algoritma kroz dve faze. U prvoj fazi algoritma vrši se procena vrednosti funkcije prenosa, odnosno vrednost modula i argumenta funkcije prenosa na određenim učestanostima koje su specificirane kroz ulazni signal. To je konveksan optimizacioni problem koji može biti rešen različim efektivnim adaptivnim algoritmima, uključujući i rekurzivni metod najmanjih kvadrata sa faktorom zaboravljanja koji će biti korišten u ovoj tezi. Rezultati ove faze, procenjene vrednosti modula i argumenta funkcije prenosa za određenu učestanosti, dalje se koriste kao ulazna vrednost za sledeću fazu. U drugoj fazi algoritma nepoznati parametri se određuju rešavanjem složene relacije koje opisuju zavisnost nepoznatih parametara i dobijenih procena vrednosti funkcije prenosa u prethodnoj fazi. Rešavanje tih relacija može biti eksplicitno ili primenom nekog od iterativnih algoritama za rešavanje sistema nelinearnih jednačina, a u sklopu ove teze koristi se gradijentni algoritam.

Osnovna ideja dvofaznog algoritma opisana je u odeljku 4.1, dok je njegova prva faza izložena u odeljku 4.1.2, a druga faza u 4.1.3. Numerički rezultati predstavljeni su u odeljku 4.2 gde je pokazano da se vrednosti nepoznatih parametara mogu odrediti preciznije zavisno od raspoložive apriorne informacije o karakteristikama sistema. Deo rezultata prikazanih u ovom odeljku prethodno je publikovan u [71].

4.1 Dvofazni algoritam: osnovna ideja i koncept

Kao što je već istaknuto, problem estimacije parametara u usvojenoj strukturi modela sistema se postavlja kao zadatak optimizacije (minimizacije) određene kvadratne kriterijumske funkcije. Naime, problem parametarske identifikacije može se formulisati na sledeći način:

Za zadati skup merenja ulaza i izlaza sistema $u(t_i)$ i $y(t_i)$, gde je t_i vremenski trenutak kada je vrednost izlaznog signala snimana ($i = 1, 2, \dots, N$), i usvojenu strukturu modela sistema $G(s; \theta)$ koja je poznata sa tačnošću do nepoznatog vektora parametara θ , estimirati vektor parametara $\theta \in \mathbb{R}^q$ tako da dobijeni model aproksimira što je moguće bolje realan sistem.

Kao meru za ocenu kvaliteta aproksimacije realnog sistema potrebno je uvesti matematički kriterijum, pri čemu u literaturi postoji veliki broj funkcija ili preslikavanja koji se mogu uzeti kao ocena kvaliteta ili validnosti modela. Kao prirodni kriterijum za ocenu valjanosti modela i postupka estimacije uzima greška predikcije na posmatranom intervalu $i = 1, 2, \dots, N$

$$J(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^N \left(y(t_i, \theta) - \hat{y}(t_i, \hat{\theta}) \right)^2, \quad (4.1)$$

gde, bez narušavanja opštosti, pretpostavljamo da se izlazni signal odabira sa fiksnim korakom (uniformna kvantizacija) tj. da je $t_i = t_0 + ih$, gde je t_0 početni vremenski trenutak, a $h > 0$ vremenski interval.

Ako je kriterijum optimalnosti (4.1) po paramteru $\hat{\theta}$ konveksna funkcija, tada je i unimodalna, tj. poseduje jedan optimum i može se formirati algoritam koji će konvergirati ka jedinstvenom minimumu. Međutim, kod iracionalnih

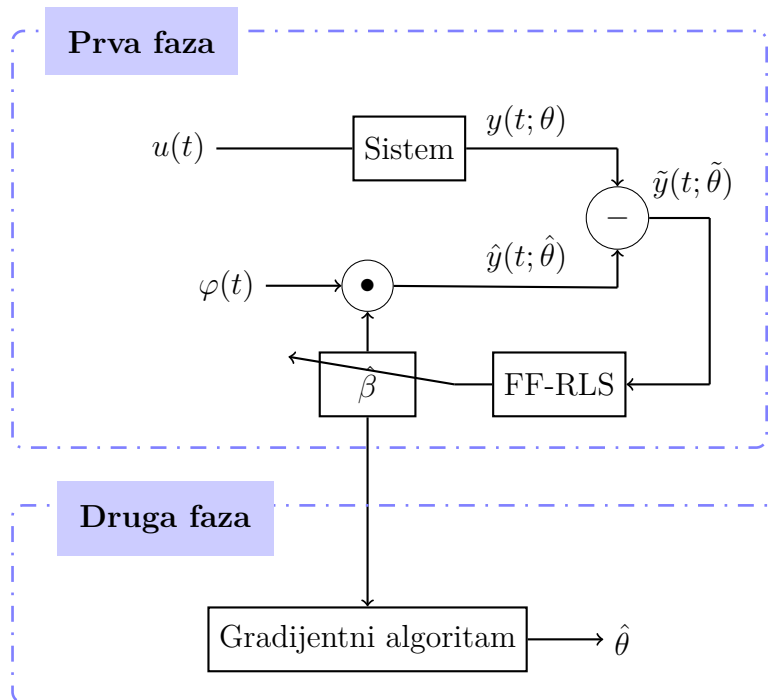
sistema funkcija J u opštem slučaju nije konveksna ili ne možemo garantovati da jeste, pa tada ona poseduje nekoliko optimuma, globalni i više lokalnih. U tom slučaju ne postoji garancija da će ijedan algoritam konvergirati ka globalnom minimumu, odnosno ne može se tvrditi da je pronađeni minimum zaista i globalni. Stoga, za problem minimizacije funkcije (4.1) po paramteru $\hat{\theta}$ veoma često ne postoji jedinstveno rešenje.

To je ujedno i *glavni problem*, s obzirom da je prema radu Ljunga i Glada [6] svaki problem identifikacije može imati jedinstveno rešenje samo ukoliko se svede na problem koji je linearno parametrizovan. S obzirom na to, algoritam za estimaciju parametara koji se primenjuje na probleme koji nisu linearno parametrizovani može biti primenjiv samo lokalno ukoliko su obezbeđena dovoljno dobra početna pogađanja parametara θ .

Glavna ideja algoritma koji će biti predstavljen u nastavku, je da se dobije što više informacija o ponašanju procesa na globalnom nivou, a zatim da se primene neke od tehnika lokalnog karaktera da bi se se precizno odredile vrednosti nepoznatih parametara. Razmatraćemo reparametrizaciju vektora θ u vektor β koji sadrži realne i imaginarne delove funkcije prenosa procesa za *a priori* odabran skup ulaznih frekvencija, što ćemo označiti sa $\theta \longleftrightarrow \beta$. Novi skup parametara β može biti identifikovan na globalnom nivou, dok je mapiranje iz θ u β obično lokalno bijektivno i diferencijabilno.

Stoga predlažemo hibridnu, dvofaznu šemu. U prvoj fazi vršiće se identifikacija vektora β primenom rekuzivnog algoritma najmanjih kvadrata sa faktorom zaboravljanja (engl. *Recursive Least Square algorithm with forgetting factor*, FF-RLS). U drugoj fazi, vrednost vektora θ biće određena primenom inverzije $\beta = \beta(\theta)$. S obzirom da u većini slučajeva inverziju nije moguće izvršiti eksplicitno, primenjuje se numerički šema zasnovana na gradijentnom algoritmu. Stoga, predloženi pristup ima ugnježdenu hijerarhijsku strukturu. U svakom koraku algoritma izvodi se jedno ažuriranje rekuzivnog algoritma najmanjih kvadrata sa faktorom zaboravljanja nakon čega sledi nekoliko koraka gradijentnog algoritma kojim se rešavaju jednačine. U svakom koraku gradijentni algoritam se inicijalizuje sa rešenjima dobijenim u prethodnom koraku. Ako se nepoznati parametri menjaju sporo u vremenu, u praksi proces estimacije će se zasnivati na samo nekoliko iteracije rekuzivnog algoritma najmanjih kvadrata sa faktorom zaboravljanja i par iteracija gradijentne šeme. Celokupna struktura predloženog dvo-faznog algoritma prikazana je na slici 4.1.

Primetimo, takođe, da su važne osobine više koračne (iterativne) procedure brzina konvergencije i robustnost. Brzina konvergencije odnosi se na



Slika 4.1: Blok šema dvo-faznog algoritma

sposobnost algoritma da locira tačku ekstremuma u što je moguće kraćem vremenskom intervalu, odnosno za što je moguće manji broj koraka (iteracija), dok robusnost označava sposobnost algoritma da odredi tačku minimuma za proizvoljan oblik kriterijuma optimalnosti.

4.1.1 Predloženi algoritam

Posmatrajmo ulazni signal sledećeg oblika

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \cos(\omega_i t + \alpha_i), \quad (4.2)$$

gde ω_i označava međusobno različite učestanosti takve da $j\omega_i$ nije ni pol ni nula od $G(s; \theta)$. Broj različitih učestanosti ℓ u ulaznom signalu je *a priori* izabran celi broj koji zadovoljava relaciju $2\ell \geq q$, dok je vrednost ostalih parametara birana tako da važi da je $c_i > 0$ i $\alpha_i \in (\pi, \pi]$. Uzimajući u obzir ovako definisan ulazni signal, ponašanje izlaza iz procesa $G(s; \theta)$ u ustaljenom

(ravnotežnom) stanju postaje

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\ell} A_i(\theta) \cos(\omega_i t + \phi_i(\theta)) \quad (4.3)$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} a_i(\theta) \cos(\omega_i t) - b_i(\theta) \sin(\omega_i t) , \quad (4.4)$$

gde je

$$A_i(\theta) = c_i |G(j\omega_i; \theta)| , \quad \phi_i(\theta) = \angle G(j\omega_i; \theta) + \alpha_i , \quad (4.5)$$

$$a_i(\theta) = A_i(\theta) \cos(\phi_i(\theta)) , \quad b_i(\theta) = A_i(\theta) \sin(\phi_i(\theta)) . \quad (4.6)$$

Shodno prethodnim pretpostavkama, ovakav sistem se može egzaktno opisati linearnim vremenski-invarijantnim modelom, koji je opisan jednačinom linearne regresije oblika

$$y(t) = \varphi^T(t) \beta(\theta) , \quad (4.7)$$

gde je $\beta(\theta)$ novoformirani vektor parametara koji ćemo nazvati vektor **transformacije parametara** definisan na sledeći način

$$\beta(\theta) = [a_1(\theta) \quad b_1(\theta) \quad \dots \quad a_{\ell}(\theta) \quad b_{\ell}(\theta)]^T , \quad (4.8)$$

a $\varphi(t)$ je regresioni vektor

$$\varphi(t) = [\cos(\omega_1 t) \quad -\sin(\omega_1 t) \quad \dots \quad \cos(\omega_{\ell} t) \quad -\sin(\omega_{\ell} t)]^T . \quad (4.9)$$

Kako je formirani model (4.7) linearan po vektoru parametara β lako se može primeniti neki od algoritama iz grupe metoda najmanjih kvadrata koji daju procenu nepoznatog vektora β . Kao sledeći korak postavlja se transformacija vektora parametara $\beta(\theta)$ u vektor θ .

4.1.2 Prva faza:

Primena rekuzivnog algoritma najmanjih kvadrata sa faktorom zaboravljanja za procenu vektora $\hat{\beta}$

Označićemo estimiranu vrednost od $\beta(t)$ u trenutku t sa $\hat{\beta}(t)$. Primenimo rekuzivni algoritam najmanjih kvadrata sa faktorom zaboravljanja kao rekuzivnu postupak za minimizaciju kriterijuma najmanjih kvadrata zapisanog u obliku

$$J = \min_{\hat{\beta}} \sum_{t=1}^N \lambda^{N-t} (y_t - \varphi_t^T \hat{\beta})^2 + \frac{\lambda^{N+1}}{2} (\hat{\beta} - \hat{\beta}_0)^T P_0 (\hat{\beta} - \hat{\beta}_0), \quad (4.10)$$

gde je $\beta_0 = \hat{\beta}(0)$ je početna vrednost estimiranih parametara, $P_0 = P(0)$ je početna vrednost inverzne matrice kovarijanse i $\lambda \in (0, 1]$ je faktor zaboravljanja. Broj N je ukupan broj uniformno raspoređenih uzoraka merenja dostupnih do trenutka t , tj. $t = Nh$, gde je h vreme uzorkovanja. Rešenje može biti implementirano u obliku

$$\hat{\beta}(t+1) = \hat{\beta}(t) + P(t)\varphi(t)[y(t) - \varphi(t)^T \hat{\beta}(t)], \quad (4.11)$$

$$P(t+1) = \frac{1}{\lambda} \left[P(t) - \frac{P(t)\varphi(t)^T \varphi(t)P(t)}{\lambda + \varphi(t)^T P(t)\varphi(t)} \right]. \quad (4.12)$$

Uz navedeno, može se pokazati da matrica $P(t+1)$ predstavlja ocenu matrice kovarijanse greške estimacije parametara u koraku $t+1$, tako da trag ove matrice određuje ukupnu srednju kvadratnu grešku estimacije po svim parametrima u datom koraku. Izborom vrednosti koeficijenta λ , odnosno faktora zaboravljanja, utiče se na dodeljivanje težine (važnost) prethodnim merenjima izlaza u odnosu na potonja merenja, čime se u algoritam implicitno ugrađuje eksponencijalno opadajuća memorija. Na izbor vrednosti ovog parametra utiče dinamika promene parametara u sistemu, a detaljno objašnjenje o izboru vrednosti parametra λ i njegovom uticaju na ponašanje algoritma dato je odeljku (3.2).

Estimirana vrednost amplitude i faze funkcije prenosa na ciljanim frekvencija ω_i ($i = 1, 2 \dots \ell$) dobija se iz (4.6), primenom obrazaca

$$\hat{\phi}_i(\theta) = \angle \left\{ \hat{a}_i(\theta) + j\hat{b}_i(\theta) \right\}, \quad \hat{A}_i(\theta) = \sqrt{\hat{a}_i^2(\theta) + \hat{b}_i^2(\theta)}. \quad (4.13)$$

Kao što je istaknuto u prethodnom poglavlju, na izbor pobudnog signala (4.2) utiče i zahtev da je signal dovoljno bogat i perzistentno pobuđujući, odnosno da poseduje zadovoljavajuće dinamičke karakteristike, kako bi mogao da pobudi sve relevantne režime od interesa sistema i kako bi se svi parametri odslikavali u izlaznom signalu, odnosno odzivu sistema, [72].

4.1.3 Druga faza: Estimacija $\hat{\theta}$ iz $\hat{\beta}$

Jednom, kada su vrednosti amplitude \hat{A}_i i faze $\hat{\phi}_i$ dostupne, vrednost originalnih parametara $\hat{\theta}$ može se dobiti rešavanjem sledećeg sistema nelinearnih jednačina

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \hat{A}_1(t) - c_1 |G(j\omega_1; \hat{\theta}(t))| = 0, \\ z_2(t) &= \hat{\phi}_1(t) - \angle G(j\omega_1; \hat{\theta}(t)) - \alpha_1 = 0, \\ &\vdots \\ z_{2\ell-1}(t) &= \hat{A}_\ell(t) - c_\ell |G(j\omega_\ell; \hat{\theta}(t))| = 0, \\ z_{2\ell}(t) &= \hat{\phi}_\ell - \angle G(j\omega_\ell; \hat{\theta}(t)) - \alpha_\ell = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Da bi sistem (4.14) bio rešiv, na osnovu dobro poznate teoreme o implicitnosti funkcije [73], broj jednačina mora biti jednak broju nepoznatih nepoznatih, što implicira da broj nepoznatih parametara mora biti jednak dvostrukom broju ulaznih harmonika, $K = 2\ell$. Prema pomenutoj teoremi još jedan potreban uslov je da Jakobijan $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ mora biti dobro definisan, neprekidan i invertibilan. Ovaj uslov implicira da $j\omega_i$ ($i \in \{1, \dots, \ell\}$) ne sme biti pol ili nula funkcije prenosa procesa koji se razmatra. U praksi, može biti korisno koristi veći broj ulaznih harmonika u cilju povećanja robustnost u odnosu na nesigurnosti merenja i druge vrste grešaka. U tom slučaju, (4.14) postaje preodređena, i treba da se reši u smislu najmanjih kvadrata, tj minimizacijom kriterijuma

$$J = \frac{1}{2} z(t)^T z(t) \quad (4.15)$$

gde je $z(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_{2\ell}(t)]^T$.

Kao mogući algoritma za minimaziciju kriterijuma (4.15), u sklopu ove teze primenjuje se metod koji se naziva algoritam najbržeg spusta (engl. *classical steepest descent*) ili gradijentni metod (engl. *gradient method*). Drugim rečima, estimacija parametara se vrši iterativnom postupkom i ima oblik

$$\hat{\theta}_{k+1}(t) = \hat{\theta}_k(t) - \Gamma \frac{\partial J(\theta_k(t))}{\partial \hat{\theta}}, \quad (4.16)$$

gde je $\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}}$ gradijent koji diferencira kriterijumsku funkciju (4.15) po elementu $\hat{\theta}_i$ vektora parametara $\hat{\theta}$. Znak $-$ označava da se približavanje procenjenom minimumu kriterijumske funkcije vrši u antigradijentnom smeru, dok je Γ

konstantna, pozitivno definitna matrica skalara koja definiše veličinu koraka u navedenom smeru.

Uvrštavanjem izraza (4.15) u gradijentni iterativni postupak (4.16) nalazimo gradijentni **zakon adaptacije**

$$\hat{\theta}_{k+1}(t) = \hat{\theta}_k(t) + \Gamma \left(\frac{\partial \hat{z}(\theta_k(t))}{\partial \hat{\theta}} \right)^T \hat{z}(\theta_k(t)) . \quad (4.17)$$

Da bi se opisani algoritam mogao primeniti kao postupak u realnom vremenu, dozvoljen je samo ograničen, mali broj iteracija izvršavanja gradijentnog algoritma, koji ćemo označavati sa K . U svakom vremenskom trenutku definiše se $\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}_K(t)$, odnosno smatra se da je rešenje dobijeno u poslednjoj iteraciji trenutna vrednost estimacije nepoznatih parametara θ . Proces rekurzija se inicijalizuje korištenjem rešenja dobijenog u prethodnom vremenskom trenutku, $\theta_0(t) = \theta_K(t-1)$. Napominjemo da se t odnosi na diskretno vreme, sa periodom h , kao što je napomenuto ranije.

Efikasnost algoritma ilustrovaćemo sledećim numeričkim primerom. Dati primer jasno ilustruju efikasnost predloženog algoritma.

4.2 Numerički primeri

4.2.1 Primer 1

Posmatrajmo sistem opisan funkcijom prenosa (pogledati [74])

$$G(s) = k \frac{1}{s^\alpha + 1} e^{-s\tau} . \quad (4.18)$$

Razmatraćemo slučaj kada pojačanje k , kašnjenje τ i frakcioni red sistema α imaju nepoznate vrednosti, odnosno kada je vektor nepoznatih parametara

$$\theta = [k \ \tau \ \alpha]^T . \quad (4.19)$$

S obzirom da su nepoznata tri parametra, za ulazni signal, kao što je definisano u (4.2) odabraćemo oblika sa $\ell = 2$

$$u(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) , \quad (4.20)$$

gde su ω_1 i ω_2 međusobno različite i pozitivne frekvencije. Vrednost izlaznog signala u ustaljenom stanju je

$$y(t) = a_1 \cos(\omega_1 t) - b_1 \sin(\omega_1 t) + a_2 \cos(\omega_2 t) - b_2 \sin(\omega_2 t) , \quad (4.21)$$

gde je $a_i = \text{Re}\{G(j\omega_i)\}$ i $b_i = \text{Im}\{G(j\omega_i)\}$, za $i \in \{1, 2\}$.

U ovom konkretnom slučaju, rekuzivni algoritam najmanjih kvadrata sa faktorom zaboravljanja će se koristiti da bi se identifikovale vrednosti modula i faze funkcije prenosa za frekvencije ω_1 i ω_2 , a potom će se, korištenjem dobijenih rezultata, vrednosti originalnih parametara estimirati rešavanjem sistema nelinearnih jednačina (4.14) koji se svodi na oblik

$$\begin{aligned}
 z_1(t) &= \hat{A}_1 - \frac{\hat{k}}{\sqrt{(\omega_1^{\hat{\alpha}} \cos(\frac{\pi}{2}\hat{\alpha}) + 1)^2 + (\omega_1^{\hat{\alpha}} \sin(\frac{\pi}{2}\hat{\alpha}))^2}} = 0 \\
 z_2(t) &= \hat{\phi}_1 + \angle\{(\omega_1^{\hat{\alpha}} \cos(\frac{\pi}{2}\hat{\alpha}) + 1) + j(\omega_1^{\hat{\alpha}} \sin(\frac{\pi}{2}\hat{\alpha}))\} + \omega_1 \hat{\tau} = 0 \\
 z_3(t) &= \hat{A}_2 - \frac{\hat{k}}{\sqrt{(\omega_2^{\hat{\alpha}} \cos(\frac{\pi}{2}\hat{\alpha}) + 1)^2 + (\omega_2^{\hat{\alpha}} \sin(\frac{\pi}{2}\hat{\alpha}))^2}} = 0 \\
 z_4(t) &= \hat{\phi}_2 + \angle\{(\omega_2^{\hat{\alpha}} \cos(\frac{\pi}{2}\hat{\alpha}) + 1) + j(\omega_2^{\hat{\alpha}} \sin(\frac{\pi}{2}\hat{\alpha}))\} + \omega_2 \hat{\tau} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

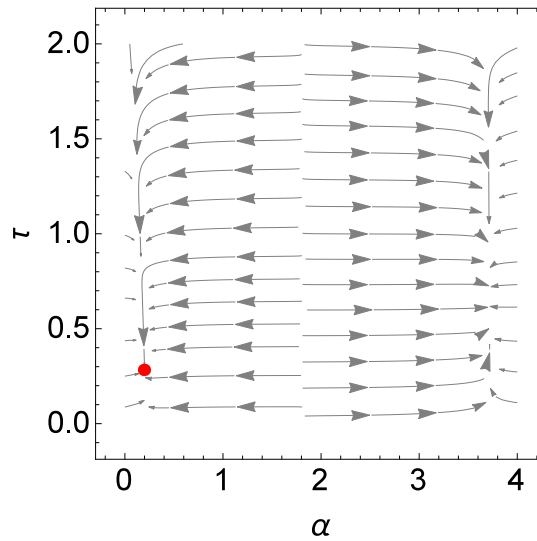
Rezultati numeričke simulacije prikazani su na slici 4.3.

Pretpostavimo da su stvarne vrednosti parametara $k = 10$, $\alpha = 0.2$ i $\tau = 0.3$. Ove vrednosti se potom naglo menjaju na $k = 12$, $\alpha = 0.4$ i $\tau = 0.5$ u trenutku $t = 20$ sekundi. Ulazni signal je oblika $u(t) = \cos(0.5t) + \cos(0.8t)$. Faktor zaboravljanja u rekuzivnom algoritam najmanjih kvadrata koja se primenjuje u prvoj fazi algoritma je $\lambda = 0.999$ a vremenski interval $h = 0.05$.

U drugoj fazi primenjuje se gradijentni algoritam sa vrednošću koeficijenta adaptacije $\Gamma = 0.3\mathbf{I}$, gde \mathbf{I} označava jediničnu matricu, i sa maksimalnim brojem iteracije $K = 20$.

Za inicijalne vrednosti nepoznatih parametara odabrane su vrednosti $\hat{k}(0) = 5$, $\hat{\alpha}(0) = 0.9$ i $\hat{\tau}(0) = 0.9$. Vrednost kašnjenja i reda sistema mora uvijek biti pozitivan broj, što implicira ograničenja oblika $\hat{\tau} \geq 0$ i $\hat{\alpha} \geq 0$. Proces adaptacije se inicijalizuje kada izlazni signal sistema dostigne svoje ustaljeno stanje, u trenutku $t = 5$. Rezultati simulacije prikazani su na slikama 4.3a i 4.3b. Lako se može primetiti da se vrednosti nepoznatih parametara poklapaju sa tačnim vrednostima.

Treba primetiti da proces estimacije ne može odmah da prati promene stvarnih vrednosti parametara. To je posledica rekuzivnog algoritma najmanjih kvadrata sa faktorom zaboravljanja koji zahteva vreme da bi dostigao ustaljeno stanje. Dužina prelaznog perioda potrebnog za dostizanje ustaljenog stanja zavisi od vrednosti faktora zaboravljanja λ . Ukoliko je vrednost

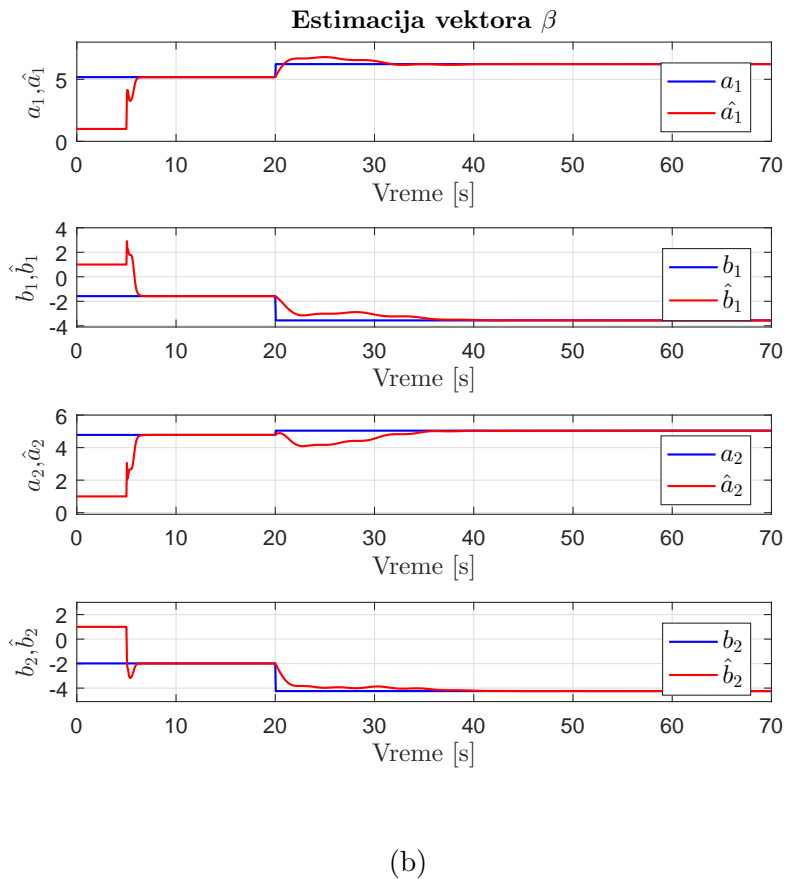
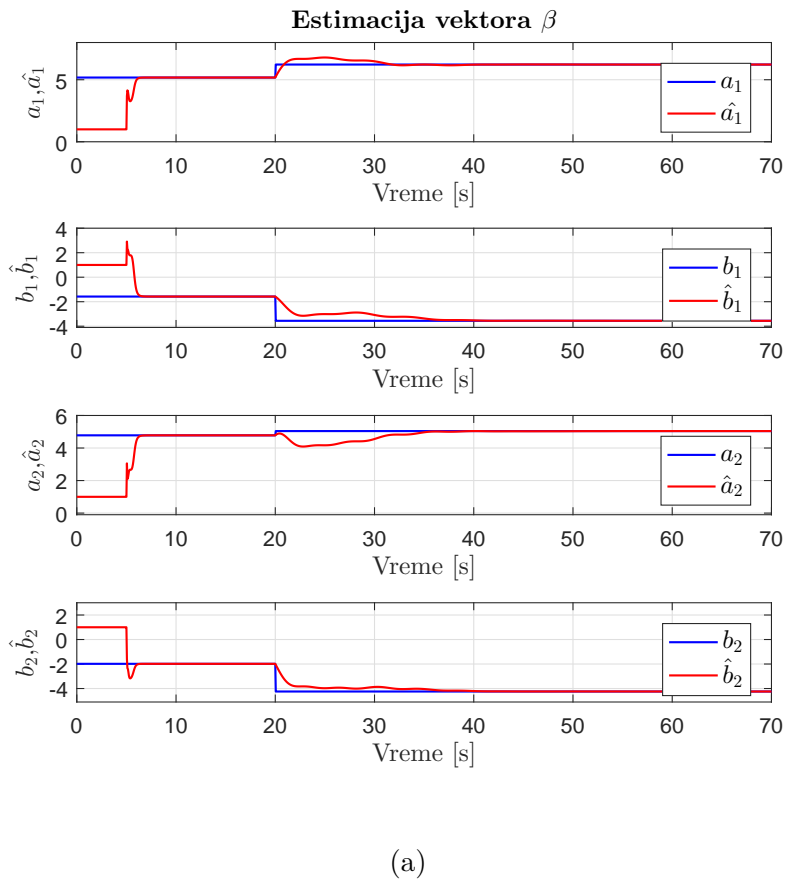


Slika 4.2: Fazni portret predstavlja region konvergencije dobijen u Primeru 1. Tačno rešenje koje odgovara ravnotežnom stanju označeno je sa tačkom.

faktora zaboravljanja bliža 1 to uzrokuje veću inertnost algoritma ali i veću robustnost na merni šum i duži prelazni period. Sa izborom vrednosti faktora λ bliže nuli, algoritam poseduje brži odziv ali i manju robustnost kao i prelazni period.

Konvergencija druge faze algoritma u mnogome zavisi od izbora početnih pogađanja. Fazni portret ilustruje ponašanje gradijentnog postupka iz druge faze predloženog algoritma za različita početna pogađanja prikazana su na slici 4.2.

Za potrebe vizualizacije, fazni portret je dobijen uz fiksiranje vrednosti pojačanja $k = 10$ i pod pretpostavku da su samo α i τ nepoznati parametri. Fazni portret jasno pokazuje da tačno rešenje $(\alpha, \tau) = (0.2, 0.3)$ predstavlja stabilnu ravnotežnu tačku u ovom primeru. Također, jasno se može videti da pogrešna procena početnih uslova može da prouzrokuje da algoritam konvergira ka nekoj drugoj stabilnoj tački a koja nije vrednost nepoznatih parametara. Odabir dovoljno dobrih početnih pogađanja nije trivijalan postupak i zahteva posjedovanje znanja o dinamici procesa. Treba napomenuti da je u praksi uobičajno da se poseduje osnovno razumevanje o fizičkim ograničenjima različitih parametara, čime se definišu fizičke granice unutar kojih treba tražiti rezultate postupka estimacije parametara.



Slika 4.3: Poređenje stvarnih i estimiranih vrednosti vektora nepoznatih parametara β i θ u Primeru 1.

4.2.2 Primer 2

Posmatrajmo proces provođenja toplote kroz homogeno telo štapa prikazan na slici 3.3 i opisan u odeljku 3.3.4, koji se opisuje parcijalnom diferencijalnom jednačinom tzv. jednačinom toplotnog provođenja

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \sigma^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad (4.23)$$

gde je parametar $\sigma^2 > 0$ toplotna difuzivnost.

Pretpostavimo da su zadati granični uslovi Dirihleovog tipa, pa je odgovarajuća funkcija prenosa oblika

$$G(x_0, s) = \frac{\sinh(\frac{\sqrt{s}x_0}{\sigma})}{\sinh(\frac{\sqrt{s}L}{\sigma})},$$

Da bi ispitili efikasnost predloženog algoritma, u nastavku ćemo razmatrati prošireni oblik klasičnog modela toplotnog provođenja

$$G(s) = k \frac{\sinh(\frac{\sqrt{s}x_0}{\sigma})}{\sinh(\frac{\sqrt{s}L}{\sigma})},$$

gde je pojačanje ulaza k uvedeno kao dodatni nepoznati parametar. Budući da je u ovom slučaju $\theta = [\sigma \ k]^T$, biramo ulazni signal (4.2) sa $\ell = 1$ u obliku

$$u = \cos(\omega t).$$

Vrednost izlaznog signala u ustaljenom stanju je

$$y(t) = a \cos(\omega t) - b \sin(\omega t),$$

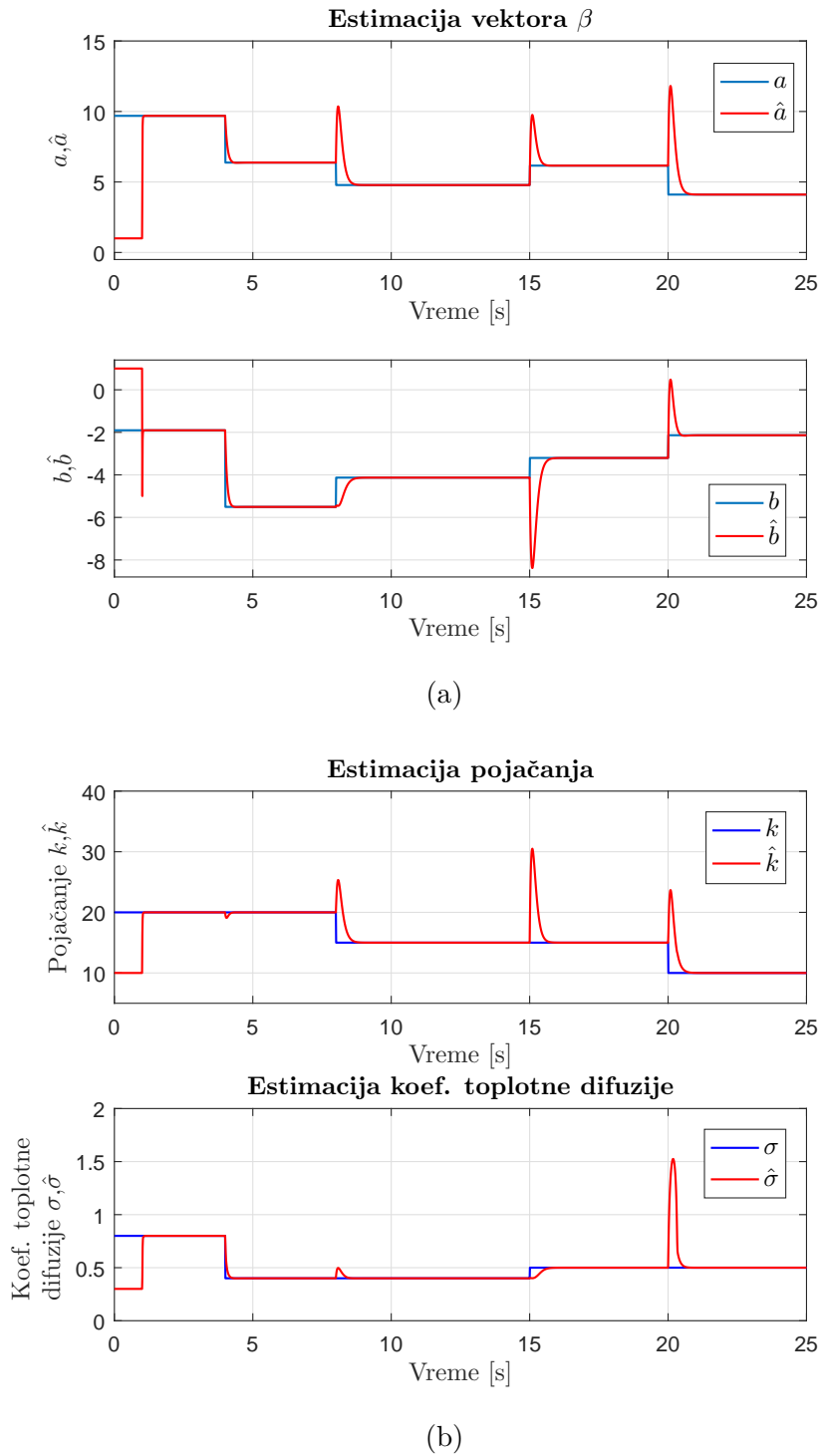
gde je $a = \text{Re}\{G(j\omega)\}$ i $b = \text{Im}\{G(j\omega)\}$.

Prema tome, rekuzivni algoritam najmanjih kvadrata sa faktorom zaboravljanja se koristi da bi se identifikovala vrednost funkcije prenosa na frekvenciji ω , odakle se dalje originalni parametri θ estimiraju rešavanjem sistema nelinearnih jednačina (4.14), koje se svode na oblik

$$z = \hat{\phi} - \angle G(j\omega) = 0, \quad (4.24)$$

gde je

$$\angle G(j\omega) = \coth\left(\frac{x_0\sqrt{2\omega}}{2\hat{\sigma}}\right) \tan\left(\frac{x_0\sqrt{2\omega}}{2\hat{\sigma}}\right) - \coth\left(\frac{L\sqrt{2\omega}}{2\hat{\sigma}}\right) \tan\left(\frac{L\sqrt{2\omega}}{2\hat{\sigma}}\right) \quad (4.25)$$



Slika 4.4: Poređenje stvarnih i estimiranih vrednosti vektora nepoznatih parametara β i θ u Primeru 2.

Jednom kada se proceni vrednost parametra $\hat{\sigma}$ rešavanjem jednačine (4.24), vrednost pojačana \hat{k} može se direktno proceniti rešavanjem sledeće jednačine

$$\hat{A} - |G(j\omega; \hat{\sigma})| = 0 \quad (4.26)$$

što implicira

$$\hat{k} = \hat{A} \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{L\sqrt{2\omega}}{2\hat{\sigma}}\right)^2 \cos\left(\frac{L\sqrt{2\omega}}{2\hat{\sigma}}\right)^2 + \cosh\left(\frac{L\sqrt{2\omega}}{2\hat{\sigma}}\right)^2 \sin\left(\frac{L\sqrt{2\omega}}{2\hat{\sigma}}\right)^2}{\sinh\left(\frac{x_0\sqrt{2\omega}}{2\hat{\sigma}}\right)^2 \cos\left(\frac{x_0\sqrt{2\omega}}{2\hat{\sigma}}\right)^2 + \cosh\left(\frac{x_0\sqrt{2\omega}}{2\hat{\sigma}}\right)^2 \sin\left(\frac{x_0\sqrt{2\omega}}{2\hat{\sigma}}\right)^2}}. \quad (4.27)$$

Rezultati simulacije prikazani su na slici 4.4.

Neka su temperutare merena na sredini štapa dužine tj. $L = 1$ i $x_0 = 0.5$. Aktuelne vrednosti parametara predpostavljaju se da su $\sigma = 0.8$ i $k = 20$. Ovi parametri potom naglo menjaju vrednost na $\sigma = 0.4$ i $k = 15$ u trenucima $t = 4$ sekunde i $t = 8$ sekundi, i na vrednosti $\sigma = 0.5$ i $k = 10$ u $t = 15$ sekundi and $t = 20$ sekundi, redom. Za ulazni signal izabran je signal $u(t) = \cos(t)$. Faktor zaboravljanja u rekuzivni algoritam najmanjih kvadrata je $\lambda = 0.9$ i vreme odabiranja je $h = 0.01$ sekundi. Matrica adaptacije u drugoj fazi algoritma je $\Gamma = 0.2\mathbf{I}$, gde \mathbf{I} označava jediničnu matricu, a maksimalan broj iteracija postavljen je na vrednost $K = 40$. Prva pogađanja za vektor nepoznatih parametara je $\hat{k}(0) = 10$ i $\hat{\sigma}(0) = 0.3$. Zakon adaptacije je inicijalizovan kada je izlazni signal dostigao ustaljeno stanje, u trenutku $t = 1$ sekund.

4.2.3 Primer 3

Posmatrajmo proces prenosa energije kroz polubeskonačni vod opisan u odeljku 3.3.4 u kome je izvedena funkcija prenosa difuznog procesa opšteg oblika

$$G(s) = k \frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}.$$

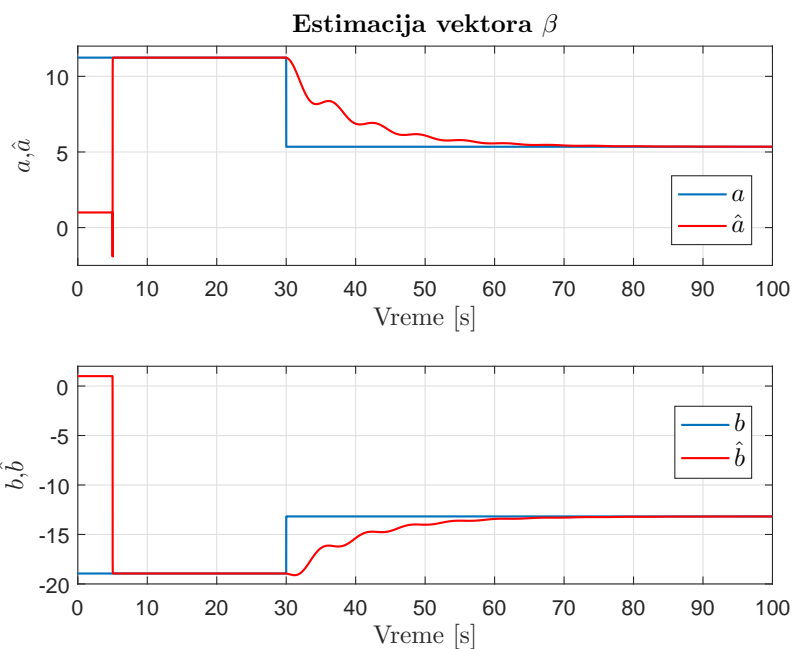
gde je u slučaju posmatranog električnog voda $k = \sqrt{\frac{R'}{C'}}$ i $\alpha = x_0\sqrt{R'C'}$.

Razmatraćemo slučaj kad parametri k i α imaju nepoznate vrednosti, tako da vektor nepoznatih parametara ima oblik $\theta = [k \ \alpha]^T$. Kako su nepoznata dva parametra, ulazni signal (4.2) za $\ell = 1$ ima oblik

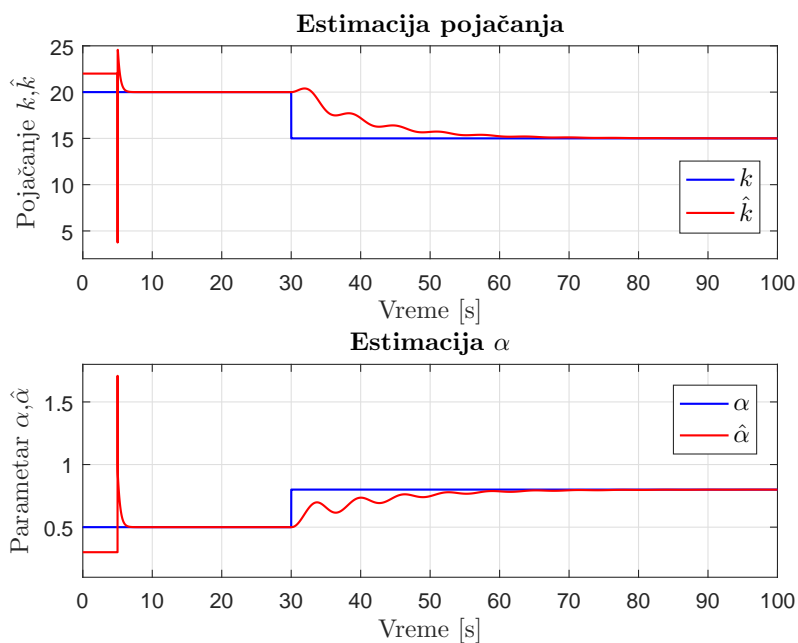
$$u(t) = \cos(\omega t).$$

Vrednost izlaznog signala u ustaljenom stanju je

$$y(t) = a \cos(\omega t) - b \sin(\omega t),$$



(a)



(b)

Slika 4.5: Poređenje stvarnih i estimiranih vrednosti vektora nepoznatih parametara β i θ u Primeru 3.

gde je $a = \text{Re}\{G(j\omega)\}$ i $b = \text{Im}\{G(j\omega)\}$.

U ovom konkretnom slučaju, rekuzivni algoritam najmanjih kvadrata sa faktorom zaboravljanja će biti korišten da identifikuje vrednost funkcije prenosa na jednoj konkretnoj frekvenciji. Identifikovane vrednosti parametara a i b se potom koriste da bi se estimirale originalne vrednosti parametara rešavanjem sistema nelinearnih jednačina (4.14), koje u ovom slučaju se svode na oblik

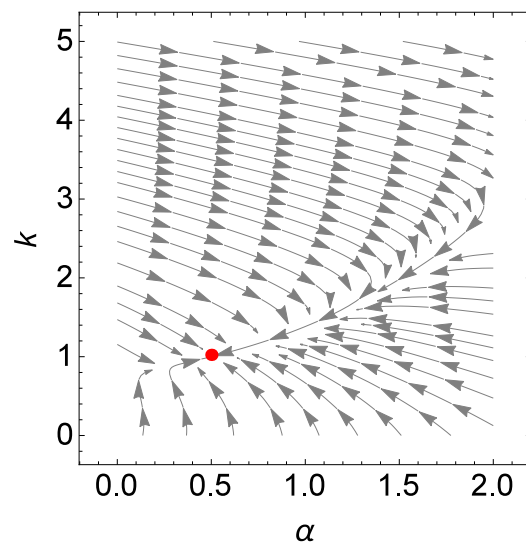
$$\begin{aligned} z_1(t) &= -\hat{\alpha} \frac{\sqrt{2\omega}}{2} - \frac{\pi}{4} - \hat{\phi} = 0 \\ z_2(t) &= \frac{\hat{k}}{\sqrt{\omega}} e^{-\hat{\alpha} \frac{\sqrt{2\omega}}{2}} - \hat{A} = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Rezultati simulacije prikazani su na slici 4.5. Pretpostavimo da su stvarne vrednosti nepoznatih parametara $k = 20$ i $\alpha = 0.5$. Te vrednosti se potom menjaju na $k = 15$ i $\alpha = 0.8$ u trenutku $t = 30$ sekundi. Za ulazni signal izabran je $u(t) = \cos(0.5t)$. Faktor zaboravljanja u rekuzivni algoritam najmanjih kvadrata je $\lambda = 0.999$ i vreme odabiranja je $h = 0.01$. U drugoj fazi algoritma vrednost koeficijenta adaptacije je $\Gamma = [0.8 \ 0; \ 0 \ 0.004]$, maksimalan dozvoljen broj iteracija unutar gradijentne procedure je $K = 40$. Za početne vrednosti nepoznatih parametara izabrane su $\hat{k}(0) = 22$ i $\hat{\alpha}(0) = 0.3$. Proces estimacije inicijalizovan je u trenutku $t = 5$ sekundi, odnosno kada je u procesu završen prelazni režim i izlazni signal uđe u ustaljeno stanje.

Fazni portreti koji prikazuju proces evolucije gradijentnog algoritma za različite izbore početnih pogađanja prikazan je na slici 4.6. Stvarne vrednosti nepoznatih parametara postavljene su na $\alpha = 0.5$ i $k = 1$. Jasno se vidi da je tačka $(\alpha, k) = (0.5, 1)$ stabilna ravnotežna tačka. Region konvergencije je prilično širok, i u ovom konkretnom slučaju moguće je eksplicitno proceniti vrednosti originalnih parametara $\hat{\theta}$ i $\hat{\beta}$, kao

$$\hat{\alpha} = -\left(\frac{\pi}{4} + \hat{\phi}\right) \sqrt{\frac{2}{\omega}} \quad (4.29)$$

$$\hat{k} = \hat{A} \sqrt{\omega} e^{\hat{\alpha} \sqrt{\frac{\omega}{2}}} \quad (4.30)$$



Slika 4.6: Fazni portret predstavlja region konvergencije dobijen u Primeru 3. Tačno rešenje koje odgovara ravnotežnom stanju označeno je sa tačkom.

Adaptivni algoritam za estimaciju zasnovan na gradijentnom postupku

U okviru ovog, centralnog poglavlja biće predstavljen još jedan metod, koji je po mišljenju autora originalan, a koji omogućava rešavanja problema estimacije parametara linearnih sistema opisanih iracionalnim funkcijama prenosa. Predložena metoda se zasniva na primeni gradijentnog algoritma i predstavlja neposredno uopštenje sličnog postupka koji su publikovali Rapaić i Pisano [63], kao i autor sa saradnicima [75, 76]. U tom smislu, ovde predloženi postupak predstavlja, prema mišljenju autora, prirodan nastavak istraživanja na Fakultetu tehničkih nauka i Univerzitetu u Novom Sadu uopšte iz oblasti identifikacije i estimacije parametara sistema.

Za rešavanje opisanog problema biće predloženi algoritam u dve varijante, „Osnovni algoritam” i „Pojednostavljeni algoritam”. U odeljku 5.1 biće izložen „Osnovni algoritam”, koji ima jednostavan koncept i zahteva da broj nezavisnih izlaza iz sistema nije manji od broja nepoznatih parametara čije vrednosti treba da se estimira i omogućava slobodu u izboru ulaznog signala. Druga varijanta predloženog algoritma nazvana „Pojednostavljeni algoritam” biće predložena u odeljku 5.2. U ovoj varijanti algoritma ulazni signal se formira kao linearna kombinacija prostoperiodičnih signala, a zahteva se i projektovanje banke filtara propusnika opsega na izlazu sistema. Ovakva modifikacija omogućava procenu proizvoljnog broja parametara čak i u slučaju da sistem ima samo jedan izlaz. Po načinu realizacije zakona adaptacije u ovom/ovim

algoritmima, oni se jednoznačno karakterišu po primeni gradijentnog zakona adaptacije. U poslednjem odeljku 5.3 prikazujemo postupak numeričkog rešavanja problema estimacije parametara sistema modelovanih iracionalnim funkcijama prenosa. Posmatrali smo sisteme koji su najreprezentativniji primeri iz ove klase linearnih sistema. Primerima su obuhvaćeni sistemi sa kašnjenjem, frakcioni sistemi, kao i sistemi sa distribuiranim parametrima.

5.1 Osnovni algoritam

Postamatrajmo linearni vremenski invarijantan sistem sa m ulaza i p izlaza, opisan sa matricom funkcija prenosa $G(s, \theta)$. Kao osnovni zadatak postavlja se estimacije vrednosti vektora nepoznatih parametara $\hat{\theta}$ uz pretpostavku da je struktura matrice funkcija prenosa $G(s)$ poznata kao i da su vrednosti ulaznog $u(t)$ i izlaznog $y(t)$ signala merljive, kao što je opisano u odeljku 3.4.

U cilju procene parametara, odnosno definisanja zakona adaptacije koji će omogućiti estimaciju nepoznatih parametara, formiraće se kriterijum optimalnosti u skladu sa [21] na sledeći način,

$$J = \frac{1}{2} \tilde{y}^T \tilde{y} . \quad (5.1)$$

Predloženi kriterijum predstavlja meru odstupanja izmerene (prave) vrednosti od estimirane vrednosti izlaza iz sistema. Da bi se izvršili minimizaciju predloženog kriterijuma optimalnosti (5.1) primenimo dobro poznat gradijentni zakon, koji je detaljno opisan u [77], i koji nam omogućava formiranje zakona adaptacije u sledećem obliku

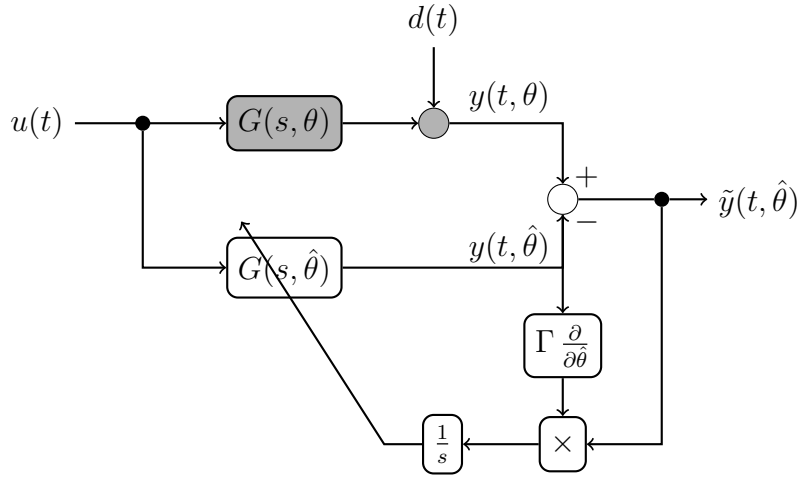
$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} , \quad (5.2)$$

gde je Γ konstantna, simetrična i pozitivno definitna skalarna matrica, a $\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}}$ je parcijalni izvod od J po parametrima $\hat{\theta}$. Uvrštavanjem izraza (5.1) u (5.2) nalazimo da je

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \hat{\theta}} \right)^T \tilde{y} . \quad (5.3)$$

S obzirom da je $\tilde{y} = y - \hat{y}$, pri čemu y ne zavisi od $\hat{\theta}$, stoga dobijamo zakon adaptacije koji može biti zapisan u obliku

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}} \right)^T \tilde{y} . \quad (5.4)$$



Slika 5.1: Blok šema *Osnovnog algoritma* sa zakonom adaptacije (5.4). Sivi blokovi označavaju stvarni sistem, a beli blokovi označavaju komponente koje moraju biti dodate za praktičnu implementaciju algoritma.

Predložena šema je grafički prikazana na slici 5.1.

5.1.1 Analiza konvergencije

Da bismo ispitali pod kojim uslovima i za koje početne vrednosti će vektor $\hat{\theta}$ da konvergira ka tačnim vrednostima θ , odnosno koliko odstupanje vrednosti vektora $\hat{\theta}$ od vektora θ možemo da očekujemo potrebno je da izvršimo analizu konvergencije predloženog algoritma, odnosno zakona adaptacije (5.4). Konvergencijska svojstva predloženog algoritma razmatrana su primenom teorije stabilnosti Ljapunova, [78].

Prethodno ćemo pretpostaviti da sledeće pretpostavke važe:

Pretpostavka 1. *Ulazni signal $u(t)$ je izabran tako da garantuje da je $\hat{y}(t, \theta)$ neprekidno diferencijabilno po promenljivoj θ za skoro svako $t > 0$.*

Pretpostavka 2. *Ulazni signal $u(t)$ je izabran tako da postoji $m > 0$ i $\varepsilon_1 > 0$ takvo da*

$$\mathcal{M}(\hat{\theta}, \xi) = \left(\left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}} \right)^T \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}} \Big|_{\hat{\theta}=\xi} \right)^s \geq m. \quad (5.5)$$

važi za skoro svako $t > 0$, i za svako $\hat{\theta} \in B_{\varepsilon_1}(\theta)$ i svako ξ koje pripada otvorenom intervalu koji povezuje $\hat{\theta}$ i θ .

Pretpostavka 3. Postoji $D > 0$ takvo da za skoro svako $t > 0$ važi da je

$$\|d(t)\| \leq D < \infty . \quad (5.6)$$

Pretpostavka 4. Ulazni signal $u(t)$ je biran tako da postoji $\Lambda > 0$ i $\varepsilon_2 > 0$ takvo da za svako $\hat{\theta} \in B_{\varepsilon_2}(\theta)$ i skoro svako $t > 0$

$$\left\| \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}} \right\| \leq \Lambda < \infty . \quad (5.7)$$

Ukoliko su zadovoljene Pretpostavke 1–4, možemo definisati sledeću Teoremu 5.1 kojom se tvrdi da predloženi zakon adaptacije (5.4) može da osigura asimptotski tačnu identifikaciju nepoznatih parametara u slučaju merenja bez šuma (tj. kada je $D = 0$ u Pretpostavci 3) pod uslovom da su početna pogađanja $\hat{\theta}(0)$ estimiranih parametara dovoljno blizu stvarnih vrednostima θ . Osim toga, Teorema 5.1 analizira i robustnost algoritma u odnosu na primenjenu normu kojom se ograničava izmereni šum. U slučaju prisustva šuma, estimirani parametri konvergiraju u neposrednoj blizini stvarnih vrednosti u konačnom vremenu. Koliko blizu će konvergirati stvarnim vrednostima zavisi od maksimalne amplitude poremećaja D .

Teorema 5.1. Posmatrajmo model procesa (3.96) sa vektorom nepoznatih parametara θ . Pretpostavimo da se nepoznati parametri estimiraju pomoći gradijentnog algoritma (5.4), i neka su Pretpostavke 1, 2, 3 i 4 zadovoljene. Označimo sa γ_{\min} i γ_{\max} najmanju i najveću sopstvenu vrednost skalarne matrice Γ . Neka je $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, i

$$\Omega = \frac{\Lambda D}{m} \frac{\gamma_{\max}}{\gamma_{\min}} . \quad (5.8)$$

Ako je $\|\tilde{\theta}(0)\| < \varepsilon \sqrt{\frac{\gamma_{\min}}{\gamma_{\max}}}$ i ako je

$$D < \varepsilon \frac{m}{\Lambda} \sqrt{\frac{\gamma_{\min}}{\gamma_{\max}}} , \quad (5.9)$$

tada je greška estimacije $\|\tilde{\theta}\|$ ograničena sa Ω i za svako

$$\eta \in \left(1, \frac{m\varepsilon}{\Lambda D} \sqrt{\frac{\gamma_{\min}}{\gamma_{\max}}}\right), \quad (5.10)$$

region $\|\tilde{\theta}(t)\| \leq \eta\Omega$ je invarijantan i atraktivan u konačnom vremenu. Dužina prelaznog perioda je ograničena sa

$$T \leq \frac{\|\tilde{\theta}(0)\|}{(\eta - 1)\Lambda D \sqrt{\gamma_{\max}\gamma_{\min}}}. \quad (5.11)$$

Dokaz. Analizu konvergencije ispitivaćemo primenom direktnog metoda Ljapunova, [78]. Posmatraćemo kandidat funkciju Ljapunova oblika

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}. \quad (5.12)$$

Data funkcija je strogo pozitivno definitna. Njen izvod duž „trajektorije“ procesa adaptacije (5.4) je

$$\dot{V} = -\tilde{\theta}^T \left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}} \right)^T \tilde{y}. \quad (5.13)$$

Na osnovu Leme 2.3 postoji vektor $\xi_i(t)$ unutar otvorenog intervala koji povezuje $\theta(t)$ i $\hat{\theta}(t)$, i pozitivan skalar $r_i(t)$, gde je $\sum_{i=1}^p r_i(t) = 1$, takav da izlaz iz sistema može biti zapisan u obliku

$$\begin{aligned} y(t) &= \hat{y}(t; \theta) + d(t) \\ &= \hat{y}(t; \hat{\theta}(t) + \tilde{\theta}(t)) + d(t) \\ &= \hat{y}(t; \hat{\theta}(t)) + \sum_{i=1}^p r_i(t) \left. \frac{\partial \hat{y}(t; \hat{\theta}(t))}{\partial \hat{\theta}} \right|_{\hat{\theta}(t)=\xi_i(t)} \tilde{\theta}(t) + d(t), \end{aligned} \quad (5.14)$$

a greška izlaza može biti zapisana u obliku

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=1}^p r_i(t) \left. \frac{\partial \hat{y}(t; \hat{\theta}(t))}{\partial \hat{\theta}} \right|_{\hat{\theta}(t)=\xi_i(t)} \tilde{\theta}(t) + d(t). \quad (5.15)$$

Na osnovu (5.15), izraz (5.13) postaje

$$\dot{V} = -\tilde{\theta}^T \left(\sum_{i=1}^p r_i \mathcal{M}(\hat{\theta}, \xi_i) \right) \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^T \left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}} \right)^T d. \quad (5.16)$$

Ukoliko je zadovoljena Pretpostavka 2, za svako $\|\tilde{\theta}\| < \varepsilon$, tada je

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^T \left(\sum_{i=1}^p r_i \mathcal{M}(\hat{\theta}, \xi_i) \right) \tilde{\theta} &= \sum_{i=1}^p r_i \left(\tilde{\theta}^T \mathcal{M}(\hat{\theta}, \xi_i) \tilde{\theta} \right) \\ &\geq \sum_{i=1}^p r_i m \|\tilde{\theta}\|^2 = m \|\tilde{\theta}\|^2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

gde je $m > 0$ konstanta definisana u Pretpostavci 2. Uvrštavanjem (5.17) u izraz (5.16), nalazimo

$$\dot{V} \leq -m \|\tilde{\theta}\|^2 - \tilde{\theta}^T \left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}} \right)^T d, \quad (5.18)$$

što dalje implicira

$$\dot{V} \leq -m \|\tilde{\theta}\|^2 + \left\| \left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}} \right)^T \right\| \|\tilde{\theta}\| \|d(t)\|. \quad (5.19)$$

Na osnovu Pretpostavki 3 i 4, prethodna nejednakost postaje

$$\dot{V} \leq -m \|\tilde{\theta}\|^2 + \Lambda D \|\tilde{\theta}\|. \quad (5.20)$$

Prostim pregrupisavanjem članova i na osnovu Leme 2.2 konačno nalazimo da je gornje ograničenje izvoda funkcije Ljapunova

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -m 2\gamma_{\min} V + \Lambda D \sqrt{2\gamma_{\max} V} \\ &\leq -\sqrt{V} \left(2m\gamma_{\min} \sqrt{V} - \Lambda \sqrt{2\gamma_{\max} D} \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Izraz (5.21) ima oblik diferencijalne nejednakosti predstavljene u Lemi 2.1, gde je $a = 2m\gamma_{\min}$ i $b = \Lambda \sqrt{2\gamma_{\max} D}$. Izraz (5.21) važi pod pretpostavkom da je $\|\tilde{\theta}\| < \varepsilon$, što na osnovu (2.38) implicira da je $\sqrt{V} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\gamma_{\min}}}$. Prema tome Lema 2.1 može da bude primenjena sa $c = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\gamma_{\min}}}$, što dovodi do zaključka da je skup

$$\sqrt{V} < \eta \frac{b}{a} = \eta \frac{\Lambda D \sqrt{\gamma_{\max}}}{m \gamma_{\min} \sqrt{2}}, \quad (5.22)$$

atraktivan u konačnom vremenu za svako

$$1 < \eta < \frac{ca}{b} = \frac{m\varepsilon}{\Lambda D} \sqrt{\frac{\gamma_{\min}}{\gamma_{\max}}} \quad (5.23)$$

i kad god je

$$c = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\gamma_{\min}}} > \frac{b}{a} = \frac{\Lambda D \sqrt{\gamma_{\max}}}{m \gamma_{\min} \sqrt{2}}. \quad (5.24)$$

Uslov (5.24) je ekvivalentan sa (5.9). Koristeći (2.39), dolazimo do toga da (5.22) implicira da je skup

$$\|\tilde{\theta}\| < \eta \frac{\Lambda D}{m} \frac{\gamma_{\max}}{\gamma_{\min}}, \quad (5.25)$$

inavrijantan i atraktivan u konačnom vremenu. Dužina prelaznog režima je ograničena sa donje strane sa (2.35), što se u ovom slučaju svodi na

$$T \leq \frac{\sqrt{2V(0)}}{(\eta - 1)\Lambda D \sqrt{\gamma_{\max}}},$$

i na osnovu izraza (2.40) implicira (5.11). \square

Napomena 5.1. Kada bi ukratko pokušali da objasnimo značenje Teoreme 5.1, možemo reći da ukoliko je početna greška $\|\tilde{\theta}(0)\|$ dovoljno mala algoritam će da konvergira u okolini stvarnih vredosti. Koliko blizu stvarnim vrednostima će konvergirati zavisi između ostalog i od amplitude poremećaja koji deluje D , odnosno sa većom amplitudom poremećaja biće veća i greška estimacije. Koliko vremena je potrebno da vektor estimiranih parametara uđe u opseg koji je u okolini stvarnih vrednosti i ne izade iz njega definisano je sa vremenom T . Dužina tog vremena proporcionalna je početnoj grešci estimacije $\|\tilde{\theta}(0)\|$.

Pretpostavka 2 kombinuje uslov „perzistentno pobuđujućeg“ ulaza sa uslovima koji se odnose na identifikabilnost strukture modela. U jednostavnim primerima, validnost ove pretpostavke se može direktno potvrditi, ali u većini komplikovanijih slučajeva računanje je mnogo kompleksnije, a nekada i nezvodljivo. Iz tih razloga tražimo alternativu i uvodimo sledeću Lemu koja je računski mnogo jednostavnija.

Lema 5.1. *Ako je ulazni signal $u(t)$ izabran tako da je $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}(\hat{\theta}(0), \hat{\theta}(0))$ striktno pozitivno-definitno za skoro svako $t > 0$, tada pretpostavka 2 važi.*

Dokaz. Ako je $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}(\hat{\theta}(0), \hat{\theta}(0))$ striktno pozitivno-definitna, tada na osnovu neprekidnosti sledi da postoji okolina od $\hat{\theta}(0)$ takva da je $\mathcal{M}(\hat{\theta}, \xi)$

striktno pozitivno definitno (pogledati [79]) za svako $\hat{\theta}, \xi \in \mathbb{R}^p$ unutar te okoline. Drugim rečima, Pretpostavka 2 važi za neko $\varepsilon_1 > 0$ i neko $m > 0$. Ovim je dokaz Leme 5.1 završen. \square

Prikazani postupak ćemo ilustrovati numeričkim primerom 5.3.1. Dati primer ilustruje ponašanje opisanog postupka u slučajevima kada proces nije izložen poremećaju, kao i u slučajevima kada na izlazu proces deluju poremećaju različitih amplituda i frekvencija. Takođe, biće prikazano ponašanje algoritma i u slučajevima kada se stvarne vrednosti parametara procesa menjaju u toku vremena. Jasno se vidi da su svi dobijeni rezultati u skladu sa tvrdnjama iz Teoreme 5.1.

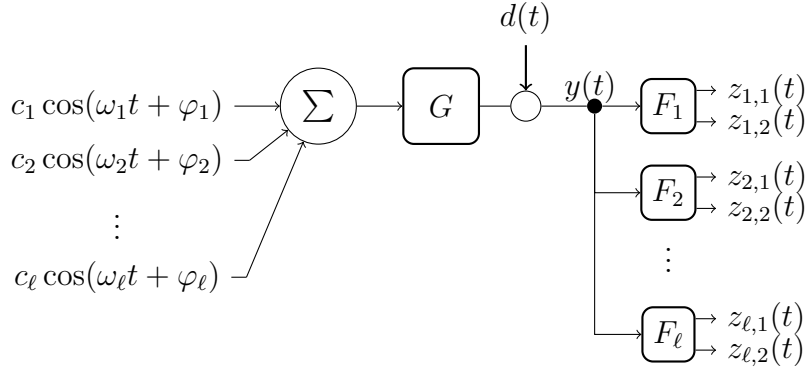
Primetimo, takodje, da teorema važi samo za slučaj kada je broj izlaza iz sistema veći od broja nepoznatih parametara sisteme, što može dovesti do poteškoća u situacijama kada je reč o SISO sistemima koji se često koriste za modelovanje različitih procesa a poseduju više od jednog nepoznatog parametra. Implementacija algoritma se može izmeniti tako da se tako modifikovana teorema može primenjivati i za SISO sisteme. Ovako modifikovan algoritam prikazana je u nastavku.

5.2 Pojednostavljeni algoritam sa prostoperiodičnom pobudom

Osnovni nedostatak prethodno predložene procedure, naslovljene kao „Osnovni algoritam” u odeljku 5.1, je da broj nezavisnih izlaza p ne sme biti manji od broja nepoznatih parametara q . To je neophodno da bi se zadovoljile pretpostavke kojima se potvrđuje konvergencija predloženog algoritma.

S ciljem otklanjanja pomenutog nedostatka u estimaciji parametara u slučaju kada je $p < k$ u nastavku ćemo se koncentrisati na sistem sa jednim ulazom i jednim izlazom, tj. na slučaj kada je $p = m = 1$, s obzirom da su sistemi takvog oblika najrasprostranjeni i predstavljaju najzahtevniji oblik sistema kada je broj parametara čije vrednosti je potrebno estimirati veći od jednog parametra.

Problem o zahtevanju broja izlaza u zavisnosti od broja nepoznatih parametara se može prevazići dovođenjem signala koji je superpozicija odgovarajućeg broja prostoperiodičnih signala na ulaz sistema. U tom slučaju, primenom banke filtera na jedan izlaz sistema može da se proizvede više približno „monohromatskih” izlaznih signala, kao što je prikazano na slici 5.2.



Slika 5.2: Blok šema koja ilustruje izdvajanja harmonika u pojednostavljenom algoritmu. Svaki filter propusnik opsega od F_1 do F_ℓ na izlazu daje odziv na odgovarajući ulazni harmonik i njegov prvi izvod po vremenu.

Predlaže se primena ulaznog signala oblika

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) , \quad (5.26)$$

za neko $c_i > 0$ i $\varphi_i \in (-\pi, \pi]$. Pretpostavimo da je izlaz iz sistema skalar, a da je njegoa vrednost u ustaljenom stanju

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=1}^{\ell} A_i(\theta) \cos(\omega_i t + \phi_i(\theta)) + d(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} a_i(\theta) \cos(\omega_i t) + b_i(\theta) \sin(\omega_i t) + d(t) , \end{aligned} \quad (5.27)$$

gde je

$$\begin{aligned} A_i(\theta) &= c_i \|G(j\omega_i; \theta)\| , \quad \phi_i(\theta) = \angle G(j\omega_i; \theta) + \varphi_i , \\ a_i(\theta) &= A_i(\theta) \cos(\phi_i(\theta)) \quad \text{and} \quad b_i(\theta) = -A_i(\theta) \sin(\phi_i(\theta)) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Glavna prednost uvođenja ulaznog signala u obliku superpozicije periodičnih signala u obliku (5.26) odslikava se u jednostavnom izračunavanju ustaljene vrednosti „estimiranog izlaznog signala” $\hat{y}(t; \hat{\theta}(t))$ direktnom primenom algebre,

$$\hat{y}(t; \hat{\theta}(t)) = \sum_{i=1}^{\ell} a_i(\hat{\theta}(t)) \cos(\omega_i t) + b_i(\hat{\theta}(t)) \sin(\omega_i t) .$$

Harmonijska komponenta izlaznog signala sa frekvencijom ω_i može se izdvojiti pomoću filtra propusnika opsega. Za svako $\omega_i \neq 0$, filter propusnik opsega generiše

$$z_{i,1}(t) = a_i(\theta) \cos(\omega_i t) + b_i(\theta) \sin(\omega_i t) + d_{i,1}(t) , \quad (5.29)$$

$$z_{i,2}(t) = -a_i(\theta) \sin(\omega_i t) + b_i(\theta) \cos(\omega_i t) + d_{i,2}(t) , \quad (5.30)$$

gde su $d_{i,1}$ i $d_{i,2}$ signali „greške” nastali kao posledica delovanja ograničenog poremećaja d i nesavršenosti filtera pri izdvajanju harmonika iz signala. Zbog stabilnosti filtera propusnika opsega i ograničenosti izlaznog poremećaja d , primetimo da su signali $d_{i,j}$ ($i = 1, \dots, \ell, j = 1, 2$) ograničeni. Dakle, ako je $d' = (d_{1,1}, d_{1,2}, \dots, d_{\ell,2})$ tada postoji $D' < \infty$ takvo da je

$$\|d'\| < D' . \quad (5.31)$$

U našoj analizi detaljan opis o projektovanom filteru je irelevantan. U numeričkim primerima koji slede, korišten je filtra propusnika opsega drugog reda, čiji je detaljan opis dizajna dat u Dodatku A.2. Shodno tome, „estimirani izlazi” koji nastaju kao rezultat filtriranja može se algebarski izraziti na sledeći način

$$\hat{z}_{i,1}(t) = a_i(\hat{\theta}(t)) \cos(\omega_i t) + b_i(\hat{\theta}(t)) \sin(\omega_i t) \quad (5.32)$$

$$\hat{z}_{i,2}(t) = -a_i(\hat{\theta}(t)) \sin(\omega_i t) + b_i(\hat{\theta}(t)) \cos(\omega_i t) . \quad (5.33)$$

U skladu sa prethodnom notacijom označimo grešku izlaza sa $\tilde{z}_{i,j} = z_{i,j} - \hat{z}_{i,j}$. Definišaćemo „pomoćni izlazni vektor”

$$z = [z_{1,1} \ z_{1,2} \ \dots \ z_{\ell,1} \ z_{\ell,2}]^T , \quad (5.34)$$

a na osnovu toga definišemo i \hat{z} i \tilde{z} . Zamenom stvarnog izlaza sa novodefinisanim pomoćnim izlazom (5.34) u zakonu adaptacije (5.4), dobijamo sledeći zakon adaptacije koji se koristi u „Pojednostavljenom algoritmu”,

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \left(\frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{\theta}} \right)^T \tilde{z} . \quad (5.35)$$

Osnovna prednost korištenja (5.35) je u tome što se i \hat{z} i $\frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{\theta}}$ mogu dobiti jednostavnim algebarskim generatorom signala za razliku od primena (5.4) zakona čija primena u realnom vremenu može zahtevati implementaciju kompleksnog, linearnog sistema beskonačne dimenzije (kao što je opisano u [63]).

U cilju potvrđivanja i sprovođenja formalne analize, uvešćemo

$$\beta(\theta) = [a_1(\theta) \quad b_1(\theta) \quad \dots \quad a_\ell(\theta) \quad b_\ell(\theta)]^T \quad (5.36)$$

gde su $a_i(\cdot)$ i $b_i(\cdot)$ definisani u (5.27), i neka je \mathcal{T} matrica Jakobijana od vektora funkcija (5.36) po svim originalnim parametrima procesa θ , tj.

$$\mathcal{T}(\theta) = \frac{\partial \beta(\theta)}{\partial \theta} . \quad (5.37)$$

Sledeće pretpostavke su u analogiji sa Pretpostavkama 2 i 4. Na isti način, Teorema 5.2 koja sledi može biti korištena umesto Teoreme 5.1 prilikom primene „Pojednostavljenog algoritma”.

Pretpostavka 5. Neka postoji $m > 0$ i $\varepsilon_1 > 0$ takvo da je za svako $\hat{\theta} \in B_{\varepsilon_1}(\theta)$ i za svako ξ unutar otvorenog intervala koji povezuje $\hat{\theta}$ i θ sledeći uslov zadovoljen

$$\left(\mathcal{T}^T(\hat{\theta}) \mathcal{T}(\xi) \right)^S \geq m . \quad (5.38)$$

Pretpostavka 6. Neka postoji $\Lambda > 0$ i $\varepsilon_2 > 0$ takvo da je za svako $\hat{\theta} \in B_{\varepsilon_2}(\theta)$ i za skoro svako $t \geq 0$ važe nejednakosti

$$\|\mathcal{T}(\hat{\theta})\| \leq \Lambda < \infty .$$

Teorema 5.2. Posmatrajmo proces sa jednim-ulazom i jednim-izlazom opisan sa (3.96) kojim se upravlja pomoću ulaznog signala (5.26), gde su ω_i , $i \in \{1, \dots, \ell\}$ različite frekvencije, takve da $j\omega_i$ nije ni pol ni nula od G . Pretpostavimo da se nepoznati parametri estimiraju primenom (5.35), i da su Pretpostavke 1, 3, 5 i 6 zadovoljene. Označimo sa γ_{\min} i γ_{\max} minimalnu i maksimalnu sopstvenu vrednost skalarne matrice Γ , i neka je $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Ako je

$$\|\tilde{\theta}(0)\| < \varepsilon \sqrt{\frac{\gamma_{\min}}{\gamma_{\max}}} \quad (5.39)$$

tada postoji $0 < D' < \infty$ takvo da je greška estimacije $\|\tilde{\theta}\|$ asimptotski ograničena sa Ω , i za svako $\eta \in (1, \frac{m\varepsilon}{\Lambda D'} \sqrt{\frac{\gamma_{\min}}{\gamma_{\max}}})$ skup $\eta\Omega$ je inavrijantan i atraktivan u konačnom vremenu, gde je

$$\Omega = \frac{\Lambda D'}{m} \sqrt{\frac{\gamma_{\max}}{\gamma_{\min}}} . \quad (5.40)$$

Dokaz. Da bi potvrdili tvrđenje prethodne teoreme, primenimo Teoremu 5.1 na sistem sa jednim-ulazom jednim-izlazom koji je prikazan na slici 5.2, sa izlaznim vektorom z . Prvo, prepisimo Jakobijan izlaza iz Pretpostavke 2 kao

$$\frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{\theta}}(\hat{\theta}) = \frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{\beta}} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \hat{\theta}}(\hat{\theta}) = \frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{\beta}} \mathcal{T}(\hat{\theta}), \quad (5.41)$$

gde je

$$\frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_1 t) & -\sin(\omega_1 t) & \cdots & 0 & 0 \\ \sin(\omega_1 t) & \cos(\omega_1 t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cos(\omega_\ell t) & -\sin(\omega_\ell t) \\ 0 & 0 & \cdots & \sin(\omega_\ell t) & \cos(\omega_\ell t) \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

nezavisno od $\hat{\theta}$. Prema tome, matrica \mathcal{M} iz Pretpostavke 2 se svodi na

$$\mathcal{M}(\hat{\theta}, \xi) = \left[\mathcal{T}^T(\hat{\theta}) \left(\frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{\beta}} \right)^T \frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{\beta}} \mathcal{T}(\xi) \right]^S. \quad (5.43)$$

Nije teško uočiti da je proizvod $\left(\frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{\beta}} \right)^T \frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{\beta}}$ jednak jediničnoj matrici, što dalje pojednostavljuje (5.43) na

$$\mathcal{M}(\hat{\theta}, \xi) = \left[\mathcal{T}^T(\hat{\theta}) \mathcal{T}(\xi) \right]^S. \quad (5.44)$$

S toga je jasno da u ovom slučaju Pretpostavka 5 potvrđuje Pretpostavku 2. Zbog (5.41) i na osnovu činjenice da je $\left\| \frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{\beta}} \right\| = 1$, važi da je

$$\left\| \frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{\theta}} \right\| \leq \left\| \frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{\beta}} \right\| \left\| \mathcal{T}(\hat{\theta}) \right\| = \left\| \mathcal{T}(\hat{\theta}) \right\| \quad (5.45)$$

čime možemo potvrditi da Pretpostavka 6 implicira Pretpostavku 4. S obzirom da Pretpostavka 3 važi i da su primenjeni filtri stabilni, svi izlazni poremećaji $d_{i,1}$ i $d_{i,2}$ su ograničeni. Prema tome postoji gornje ograničenje D' na poremećaje koji se javljaju u novoformiranim izlazima, što je prethodno i pokazano sa (5.31). Konačno, tvrđenje ove teoreme se može potvrditi direktnom primenom Teoreme 5.1, pri čemu je D zamenjeno sa D' . \square

Napomena 5.2. Izbor ulazne frekvencije koja bi bila blizu jedne od nula procesa prouzrokovalo bi veliko slabljenje izlaza, i sam predloženi metod može postati vrlo osjetljiv na bilo koji oblik merni šum. S druge strane, izbor ulazne frekvencije blizu pola procesa izazvalo bi rezonancu i time snažno pojača ulazni signal, što bi za posledicu dovelo do brojnih numeričkih komplikacija pri implementaciji.

Pretpostavka 5 je u analogiji sa Pretpostavkom 2, i ima iste nedostatke koji se odnose na složenost izračunavanja. Lema koja sledi može se koristiti kao alternativa za rešavanje pomenutih nedostataka.

Lema 5.2. *Ako su početne vrednosti vektora estimiranih parametar takve da je matrica $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}(\hat{\theta}(0))$ punog ranga, tada Pretpostavka 5 važi.*

Dokaz. Ako je $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}(\hat{\theta}(0))$ punog ranga, tada $(\mathcal{T}_0^T \mathcal{T}_0)^S > m_1$ za neko $m_1 > 0$. Na osnovu neprekidnosti [79], postoji $\varepsilon_1 > 0$ takvo da je

$$\left(\mathcal{T}^T(\hat{\theta})\mathcal{T}(\xi)\right)^S > m \tag{5.46}$$

za neko $0 < m < m_1$ i za svako $\hat{\theta}, \xi \in B_{\varepsilon_1}(\theta(0))$. Drugim rečima, Pretpostavka 5 važi. \square

Napomena 5.3. Primetimo da ulazni signal zadovoljava uslove perzistentne eksitacije ako je broj nepoznatih parametara manji od dvostrukog broja nezavisnih harmonika u ulaznom signalu. Ovo je jednostavna generalizacija klasičnog rezultata, videti [80]. Pretpostavka 5, i Lema 5.2, tvrde da je identifikacija moguća ukoliko postoji diferencijabilno i inavrijabilno preslikavanje originalnih parametara procesa θ u pomoćne linearizovane parametre β . Ovi uslovi suštinski proširuju rezultate dobijene u [6].

Prikazani postupak ćemo ilustrovati numeričkim primerima 5.3.2, 5.3.3 i 5.3.4. Dati primeri ilustruje ponašanje predloženog algoritma u slučajevima kada je model procesa sa vremenskim kašnjenjem, sa distribuiranim parametrima i frakcioni. Jasno se može videti da, nakon konačnog intervala vremena, greška estimacije približno nula kada na sistem ne deluje poremećaj ili kada taj poremećaj nije iste frekvencije kao jedan od ulaznih signala.

5.3 Numerički primeri

5.3.1 Primer 1

Mnogi procesi u industriji, ali i u drugim oblastima, poseduju vremensko kašnjenje ili mrtvo vrijeme (*engl. dead-time, DT*) u svojoj dinamici ponašanja. Vremensko kašnjenje je uglavnom uzrokovanom fenomenom transporta mase, energije ili informacija, ali takođe uzrok vremenskog kašnjenja može biti u vremenu obrade ili akumulaciji vremenskih zaostajanja u brojnim jednostavnim dinamičkim sistemima koji su povezani u niz. U cilju pojednostavljivanja projektovanja regulatora, složeni dinamički proces, kao što su hemijski, termički procesi u preradi čelika, difuzija, mehanički ili transportni procesi, često se opisuju stabilnim modelima prvog reda sa vremenskim kašnjenjem (*engl. First Order Plus Time Delay - FOPTD*). To su procesi kod kojih je osnovna dinamika umereno prigušena. Iz tih razloga, ovakvi sistemi predstavljaju predmet interesovanja za projektovanje upravljanja. Dobro prihvaćen stav u teoriji upravljanja je da često, povećanje vremenskog kašnjenja može dovesti do nestabilnosti sistema u zatvorenoj petlji i do degradaciju celog sistema. Estimacija kašnjenja sistema, kao i ostalih parametara ovakvih sistema u realnom vremenu je netrivialan, ali jako bitan postupak.

Posmatrajmo sistem prvog reda sa vremenskim kašnjenjem opisan funkcijom prenosa

$$G_0(s) = k \frac{1}{s+1} e^{-s\tau} \quad (5.47)$$

gde su oba parametra, pojačanje k i kašnjenje τ nepoznati, prema tome vektor nepoznatih parametara je $\theta = [k \ \tau]^T$. Pretpostavimo da su izlaz iz sistema i njegov prvi izvod direktno merljivi signali. Da bi estimirali vektor nepoznatih parametara dužine $q = 2$ uz dva dostupna izlazna signala, tj. $p = 2$ primenićemo predložena proceduru za estimaciju parametara naslovljena kao „Osnovnog algoritma” i opisana u odeljku 5.1.

Neka je ulazni signal oblika

$$u(t) = \cos(\omega t) \quad (5.48)$$

gde je $\omega > 0$ frekvencija sa fiksnom vrednošću. Kako su merljiva dva izlaza iz sistema, sistem se formalno može opisati matricom funkcija prenosa oblika

$$G(s; \theta) = \begin{bmatrix} G_0(s) \\ \frac{s}{\omega} G_0(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \frac{1}{s+1} e^{-s\tau} \\ k \frac{s}{\omega(s+1)} e^{-s\tau} \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

Napomena 5.4. Može se primetiti da je drugi izlaz iz sistema pomnožen sa ω^{-1} , što je nebitna izmena izvršena u cilju održavanja konstante amplitude bez obzira na izbor ulazne frkvencije.

Zakon adaptacije (4.17) postaje

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{k}} \\ \dot{\hat{\tau}} \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{k}} G_0(s; \hat{\theta}) \right) u(t) & \left(\frac{\partial}{\partial \hat{\tau}} G_0(s; \hat{\theta}) \right) u(t) \\ \frac{s}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{k}} G_0(s; \hat{\theta}) \right) u(t) & \frac{s}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{\tau}} G_0(s; \hat{\theta}) \right) u(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{bmatrix},$$

gde je

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{k}} G_0(s; \hat{\theta}) &= \frac{1}{s+1} e^{-s\tau}, \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\tau}} G_0(s; \hat{\theta}) &= \frac{-s}{s+1} e^{-s\tau}. \end{aligned}$$

Posle prelaznog režima, estimirani izlazni signali imaju oblik

$$\hat{y}_1(t) = \frac{\hat{k}}{\sqrt{1+\omega^2}} \cos(\omega t - \omega \hat{\tau} - \arctan(\omega)) \quad (5.50)$$

$$\hat{y}_2(t) = -\frac{\hat{k}}{\sqrt{1+\omega^2}} \sin(\omega t - \omega \hat{\tau} - \arctan(\omega)), \quad (5.51)$$

a estimirani izlaz Jakobijana je

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\omega t - \omega \hat{\tau} - \arctan(\omega))}{\sqrt{1+\omega^2}} & -\frac{\sin(\omega t - \omega \hat{\tau} - \arctan(\omega))}{\sqrt{1+\omega^2}} \\ \frac{\omega \hat{k} \sin(\omega t - \omega \hat{\tau} - \arctan(\omega))}{\sqrt{1+\omega^2}} & \frac{\omega \hat{k} \cos(\omega t - \omega \hat{\tau} - \arctan(\omega))}{\sqrt{1+\omega^2}} \end{bmatrix}.$$

Nije teško primetiti da su parcijalni izvodi izlaza y_1 i y_2 po oba parametra \hat{k} i $\hat{\tau}$ neprekidne funkcije po nepoznatim parametrima. Stoga Pretpostavka 1 je zadovoljena.

Matrica \mathcal{M} iz Pretpostavke 2 ima oblik

$$\mathcal{M}(\hat{\theta}, \xi) = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\omega(\hat{\tau} - \tau_\xi))}{\omega^2 + 1} & \frac{\omega \sin(\omega(\hat{\tau} - \tau_\xi))(k_\xi - \hat{k})}{2(\omega^2 + 1)} \\ \frac{\omega \sin(\omega(\hat{\tau} - \tau_\xi))(k_\xi - \hat{k})}{2(\omega^2 + 1)} & \frac{\hat{k} \omega^2 \cos(\omega(\hat{\tau} - \tau_\xi)) k_\xi}{\omega^2 + 1} \end{bmatrix}.$$

U cilju ispitivanje pozitivne definitnosti matrice \mathcal{M} primeniće se Silvesterove teoreme [81]. Kao rezultat primene Silvesterove teoreme dolazimo do zahteva

da važe sledeće nejednakosti

$$\frac{\cos(\omega\Delta\tau)}{\omega^2 + 1} > 0, \text{ i} \quad (5.52)$$

$$\frac{-\omega^2 \hat{k}^2 (\sin^2(\omega\Delta\tau) - \rho(3 + \cos(2\omega\Delta\tau)) + \rho^2 \sin^2(\Delta\tau))}{4(\omega^2 + 1)^2} > 0, \quad (5.53)$$

gde je $\Delta\tau = \hat{\tau} - \tau_\xi$ i $\rho = \frac{\hat{k}}{k_\xi}$. Nakon manjeg pregrupisanja, dobijenu uslovi pri kojima je zadovoljena pozitivna definitnost matrice \mathcal{M} su

$$|\Delta\tau| < \min \left\{ \frac{\pi}{2\omega}, \frac{1}{2\omega} \arccos \frac{1 - 6\rho + \rho^2}{(1 + \rho)^2} \right\}. \quad (5.54)$$

Odnosno, ukoliko se početna pogađanja nepoznatih parametara nalaze u ovom regionu, time se garantuje da će matrica \mathcal{M} biti pozitivno definitna, i da će se uvijek moći naći $m > 0$ takvo da Pretpostavka 2 važi. Zapravo, m je najmanja sopstvena vrednost od \mathcal{M} . Stoga, uslove (5.54) možemo smatrati za uslove konvergencije predloženog postupka u ovom slučaju. Grafički prikaz maksimalne dozvoljene greške početnog pogađanja $|\Delta\tau|$ zavisno od ρ dat je na slici 5.3.

Primetimo da se $|\Delta\tau|$ može posmatrati kao greška u početnom pogađanju kašnjenja, dok ρ može da se posmatra kao relativna greška pojačanja. U tom svetlu, jednačina (5.54) definiše oblast u $|\Delta\tau| - \rho$ ravni unutar koje se garantuje konvergencija predloženog postupka. Konačno, spektralna norma $\frac{\partial \hat{y}}{\partial \theta}$ može se eksplicitno proceniti i nije teško proveriti da je Pretpostavka 2 zadovoljana sa

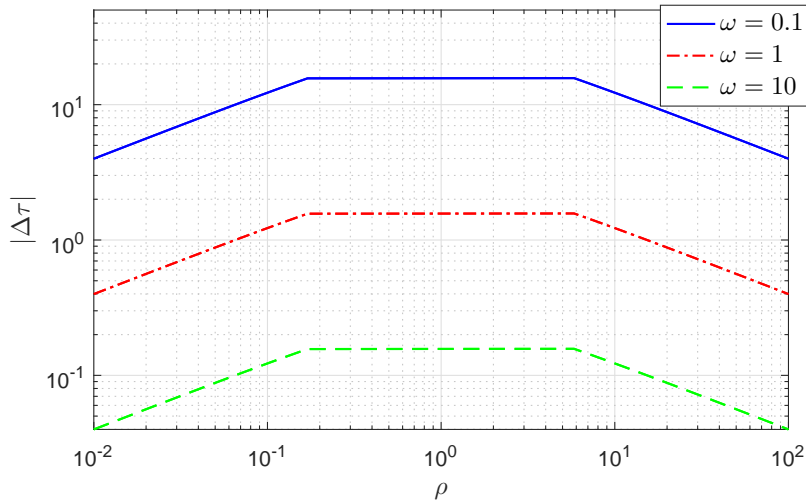
$$\Lambda = \frac{\max\{1, |\omega \hat{k}|^2\}}{\sqrt{1 + \omega^2}}.$$

Kako su Pretpostavke 1–4 zadovoljne, možemo zaključiti da se Teorema 5.1 može primeniti. Performanse primenjenog algoritma biće ilustrovane kroz numeričke simulacije.

Napomena 5.5. U duhu Leme 5.1, validacija Pretstavke 2 može biti lakše proverena ispitivanjem definitnosti matrice

$$\mathcal{M}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega^2 + 1} & 0 \\ 0 & \frac{\omega^2 \hat{k}^2}{\omega^2 + 1} \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

Međutim, proverom važenja Pretstavke 2 na ovaj način gubimo informacije o dozvoljenoj gornjoj granici početne greške procjene. Drugim rečima, korištenjem samo Leme 5.1 nije moguće dobiti uslov (5.54).



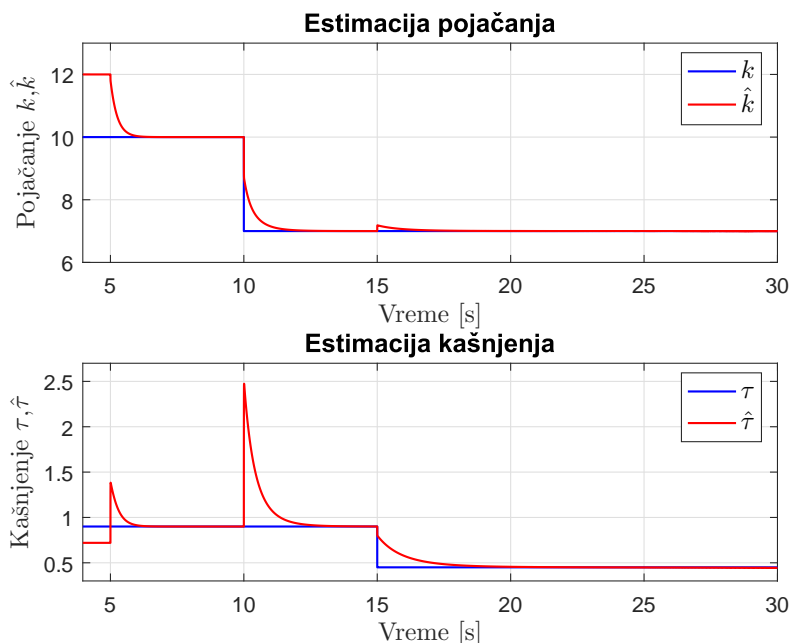
Slika 5.3: Ilustracija uslova konvergencije dobijenih u Primeru 1. Grafik prikazuje desnu stranu nejednakost (5.54), (tj. gornju granicu od maksimalne dozvoljene greške pri estimaciji kašnjenja) u funkciji od ρ (koja je gornja granica maksimalne relativne greške pri estimaciji pojačanja), za različite frekvencije ω ulaznog signala.

U nastavku biće prikazani rezultati numeričke simulacije, pri čemu će biti razmatrane različite studije problema bez i sa delovanjem poremećaja različitog oblika.

Scenario 1: Na izlaz sistema ne deluje poremećaj, a vrednosti parametara naglo menjaju.

Za tačne vrednosti parametara odabrane su vrednosti $k = 10$ i $\tau = 0.9$. U trenutku $t = 10$ sekundi vrednost pojačanja $k = 10$ se naglo promeni na $k = 7$, dok se vrednost kašnjenja menja u trenutku $t = 15$ sekundi na vrednost $\tau = 0.5$. Za ulazni signal odabran je signal oblika $u(t) = \cos(t)$, a vrednost poremećaja postavljena je na nulu. Za početna pogađanja nepoznatih parametara odabrane su vrednosti $\hat{k}(0) = 12$ i $\hat{\tau}(0) = 0.7$. Matrica pojačanja koeficijenata adaptacije je $\Gamma = 5\mathbf{I}$.

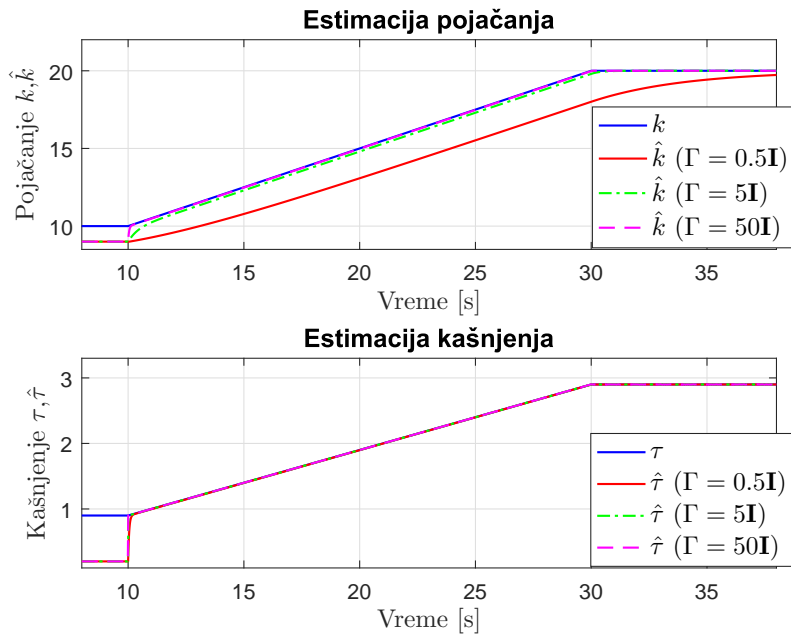
Rezultati simulacije su prikazani na slici 5.4. Proces adaptacije počeo je u trenutku $t = 5$ sekundi i može se primetiti da su identifikovane tačne vrednosti parametara.



Slika 5.4: Poređenje stvarnih i estimiranih vrednosti vektora nepoznatih parametara θ u Primeru 1. Slika ilustruje scenario 1 kada nema delovanja poremećaja na izlaz sistema i kada se stvarne vrednosti parametara naglo menjaju.

Scenario 2: Na izlaz sistema ne deluje poremećaj, a vrednosti parametara se menjaju sporo i kontinualno.

Pretpostavlja se da se stvarne vrednosti parametara menjaju linearno od $k = 10$ i $\tau = 0.9$ u trenutku $t = 10$, do $k = 20$ i $\tau = 2.9$ do trenutka $t = 30$. Ulazni signal je $u(t) = \cos(t)$, a vrednost amplitude poremećaja je postavljena na nulu. Početna vrednost nepoznatih parametara su $\hat{k}(0) = 9$ i $\hat{\tau}(0) = 0.2$. Proces estimacije prikazan je na slici 5.5, gde se može videti da je proces adaptacije počeo u $t = 10$ sekundi. Razmatrane su različiti izbori vrednosti matrice Γ oblika $\alpha \mathbf{I}$ su razmatrani, gde je $\alpha > 0$. Treba primetiti da je predložena šema adaptacije u mogućnosti da prati promene parametara čak i za vreme prelaznog režima, uz prisustvo manje greške koja iščezava kada vrednost izlaznih signala uđe u ustaljeno stanje. Takođe, treba obratiti pažnju i na to da se ova greška smanjuje s povećanjem vrednosti koeficijenta α . Vrednost greška konvergira ka nuli kada vrednosti parametara postanu konstantne.



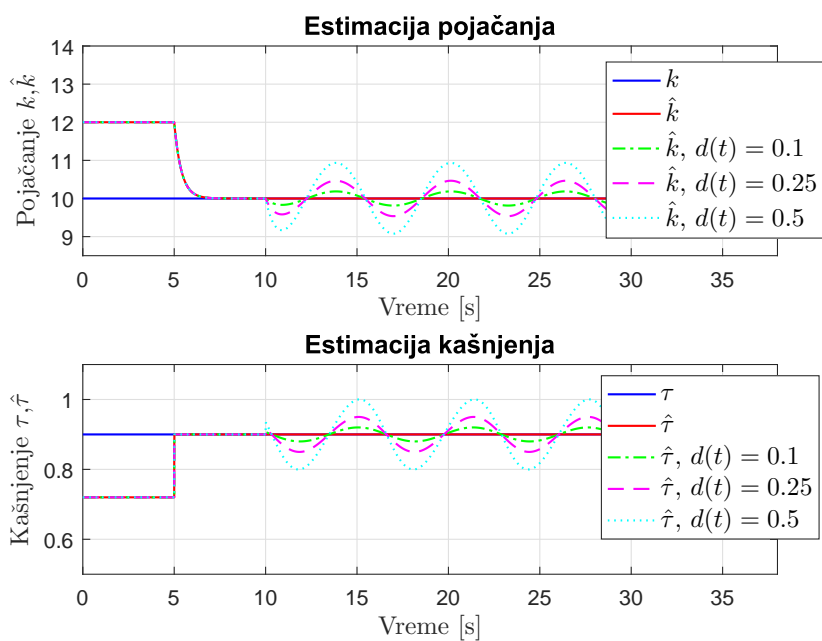
Slika 5.5: Poređenje stvarnih i estimiranih vrednosti vektora nepoznatih parametara θ u Primeru 2. Slika ilustruje scenario 2 kada nema delovanja poremećaja na izlaz sistema i kada se stvarne vrednosti parametara menjaju sporo i kontinualno.

Scenario 3: Analiza uticaja izlaznih poremećaja različitih amplituda.

Pretpostavlja se da su vrednosti stvarnih parametara $k = 10$ i $\tau = 0.9$, a da je ulazni signal je $u(t) = \cos(t)$. Početne pogađanja izabrane su da budu 20% različita od stvarnih vrednosti, odnosno $\hat{k}(0) = 12$ i $\hat{\tau}(0) = 0.72$, i matrica pojačanja procesa adaptacije je $\Gamma = 5\mathbf{I}$. Proces adaptacije je počeo u trenutku $t = 5$ sekundi. Poremećaj na izlazni signal iz sistema počinje da deluje od trenutka $t = 10$ sekundi. Razmatran je uticaj signala poremećaja različite amplitude ($d_1 = 0.1$, $d_2 = 0.25$, i $d_3 = 0.5$), a dobijenu rezultati prikazani su na slici 5.6. Maksimalne greške procene pojačanja i kašnjenja u ustaljenom stanju za različite amplitude poremećaja prikazane su u tabeli 5.1. Lako se može primetiti da se greška estimacije parametara povećava proporcionalno sa amplitudom poremećaja, bez obzira na oblik poremećaja, kao što je i predviđeno Teoremom 5.1.

d	$d(t) = d$		$d(t) = d\nu(t)$	
	$\max \tilde{k} $	$\max \tilde{\tau} $	$\max \tilde{k} $	$\max \tilde{\tau} $
0.1	0.185	0.02	0.074	0.019
0.25	0.465	0.05	0.186	0.049
0.5	0.934	0.1	0.368	0.1

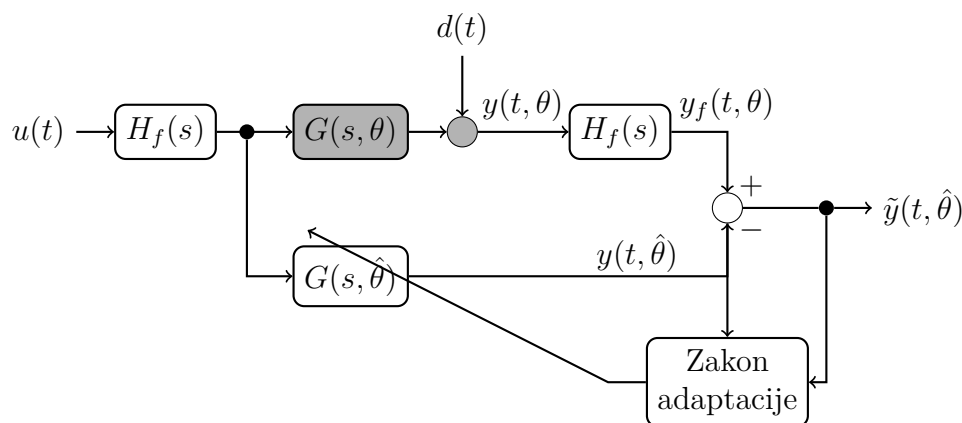
Tabela 5.1: Maksimalna greška estimacije dobijena u Primeru 1, scenario 3. $\nu(t)$ je slučajno generisan signal čije vrednosti su uniformno raspoređenje iz intervala $[-1, 1]$



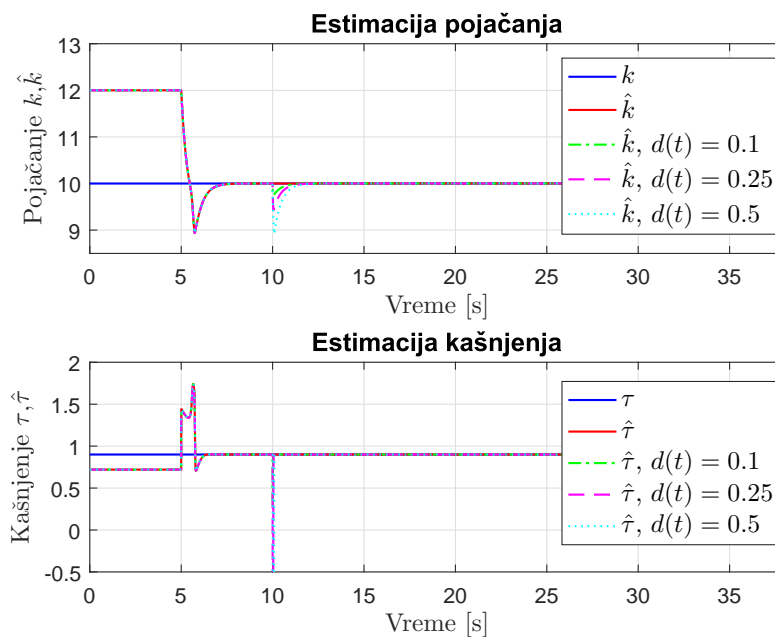
Slika 5.6: Poređenje stvarnih i estimiranih vrednosti vektora nepoznatih parametara θ u Primeru 1. Slika ilustruje scenario 3 kada na izlaz sistema deluju poremećaji različitih amplituda.

Scenario 4: Na izlaz sistema ne deluje poremećaj, a vrednosti parametara se menjaju sporo i kontinualno.

Ukoliko je oblik poremećaja koji deluje na izlaz sistema poznat unapred, moguće je ostvariti da greška estimacije asimptotski iščezava tokom vremena uz primenu odgovarajućeg filtriranja ulaznih/izlaznih signala. Na primer, ako poznato da je poremećaj koji deluje konstantan (ili sporo promenljiv), pravilno rešenje je gde je uvođenje visokopropusnog filtra $H_f(s)$ na ulaz i izlaz sistema pre primene predložene procedure, kao što je prikazano na slici 5.7. Slika 5.8 pokazuje rezultate procesa estimacija gde na proces deluje konstantan poremećaj a primenjeni filtar je oblika $H_f(s) = \frac{100s}{100s+1}$.



Slika 5.7: Blok šema *Osnovnog algoritma* sa zakonom adaptacije (5.4) uz primenu filtra koji eliminišu delovanje poremećaja. Sivi blokovi označavaju stvarni sistem, a beli blokovi označavaju komponente koje moraju biti dodate za praktičnu implementaciju algoritma.



Slika 5.8: Poređenje stvarnih i estimiranih vrednosti vektora nepoznatih parametara θ u Primeru 1. Slika ilustruje scenario 4 kada na izlaz i ulaz sistema deluje visokopropusni filter $H_f(s)$ s ciljem potiskivanja uticaja konstantnog poremećaja koji deluje.

5.3.2 Primer 2

Posmatrajmo sistem prvog reda sa jednim ulazom i jednim izlazom koji je prethodno razmatran u Primeru 1,

$$G(s) = k \frac{1}{s + 1} e^{-s\tau} . \quad (5.56)$$

S obzirom da su nepoznata dva parametra $\theta = [k \ \tau]^T$, a da je merljiv samo jedan izlazni signal, za estimaciju parametara koristiće se procedura predložena „Pojednostavljenim algoritmom” koja je opisana u odeljku 5.2. Sistem se pobuđuje signalom oblika

$$u(t) = \cos(\omega t) . \quad (5.57)$$

Pomoćni izlazi iz sistema (5.32) i (5.33) su

$$\hat{z}_{1,1} = a_1(\hat{\theta}) \cos(\omega t) + b_1(\hat{\theta}) \sin(\omega t) + d_{1,1}(t) , \quad (5.58)$$

$$\hat{z}_{1,2} = -a_1(\hat{\theta}) \sin(\omega t) + b_1(\hat{\theta}) \cos(\omega t) + d_{1,2}(t) , \quad (5.59)$$

gde je

$$a_1(\hat{\theta}) = \frac{\hat{k}}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \cos(-\hat{\tau}\omega - \arctan(\omega)) , \quad (5.60)$$

$$b_1(\hat{\theta}) = \frac{\hat{k}}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \sin(-\hat{\tau}\omega - \arctan(\omega)) . \quad (5.61)$$

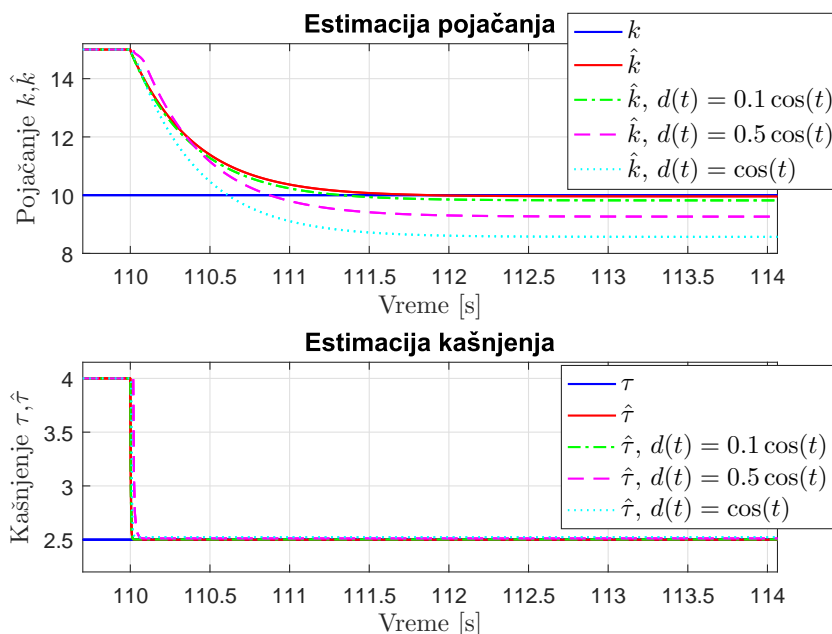
Matrica \mathcal{T} , definisana u (5.37), postaje

$$\mathcal{T}(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\cos(-\hat{\tau}\omega - \arctan(\omega))}{\sqrt{\omega^2 + 1}} & -\frac{\sin(-\hat{\tau}\omega - \arctan(\omega))}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \\ \frac{\hat{k}\omega \sin(-\hat{\tau}\omega - \arctan(\omega))}{\sqrt{\omega^2 + 1}} & \frac{\hat{k}\omega \cos(-\hat{\tau}\omega - \arctan(\omega))}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \end{bmatrix} .$$

Provera važenja Pretpostavki 5 i 6 može biti sprovedena primenom iste procedure kao što je urađeno u Primeru 5.3.1 za pretpostavke 2 i 4. Shodno tome, primnom Teoreme 5.2 dobijaju identične uslove konvergencije kao u Primeru 5.3.1.

Rezultati numeričkih simulacija prikazani su na slikama 5.9 i 5.10. Za stvarne vrednosti parametara pretpostavlja su vrednosti $k = 10$ i $\tau = 2.5$, za ulazni signal $u(t) = \cos(t)$, a početne vrednosti nepoznatih parametre su $\hat{k}(0) = 15$ i $\hat{\tau}(0) = 4$. Za matricu pojačanja procesa adaptacije izabrana je $\Gamma = 5\mathbf{I}$. Dizajn primenjenog filtra propusnika opsega opisan je u Dodatku A.2, a za parametra filtra korištene su vrednosti $\xi_p = 0.01$, $\xi_z = 0.05$, i $\omega_1 = 1$.

Na slici 5.9 prikazani su rezultati kada na izlaz sistema ne deluje poremećaj, i dobijeni rezultati predstavljeni punom linijom, pokazujući da su tačne vrednosti očigledno identifikovane. S ciljem provere robustnosti predloženog algoritma, uključeno je delovanje poremećaja na izlaz procesa. U prvom testu, čiji su rezultati su prikazani na slici 5.9, razmatran je uticaj poremećaja različitih amplituda, tipa harmonika, iste frekvencije ($\omega = 1$) kao što je frekvencija signala pobude. Treba primetiti da je ovo „najgori” scenario, s obzirom da uticaj ovakvog poremećaja ne može biti potisnut delovanjem filtera propusnika opsega koji su dizajnirani tako da ovu frekvenciju propuštaju. Rezultat na slici 5.9 pokazuje da algoritam konvergira, ali da se parametar pojačanja ne estimira precizno. Kao što se vidi sa slike, greška procene je proporcionalna amplitudi poremećaja, što se moglo i nasluti na osnovu rezultata koji

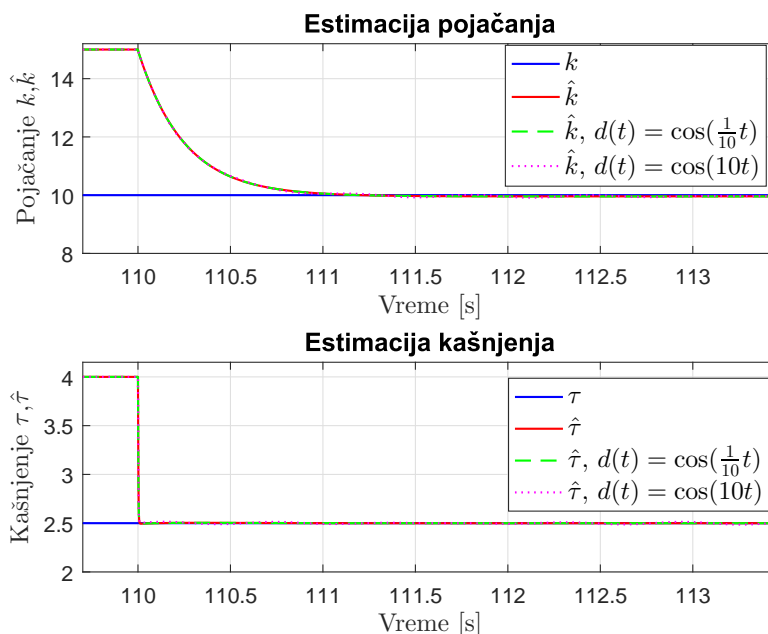


Slika 5.9: Poređenje stvarnih i estimiranih vrednosti parametara u Primeru 2

su dobijeni u analizi primenjenog algoritma (videti jed. (5.40) iz Teoreme 5.2). Za razliku od pojačanja, parametar kašnjenja je procenjen precizno čak i pri delovanju poremećaja što je posledica toga što su signal pobude i signal poremećajau fazi.

U drugom testu, prikazanom na slici 5.10, analiziran je uticaj poremećaja istih amplituda, ali različitih frekvencija u odnosu na signal pobude. S obzirom da filter propusnik opsega dizajniran tako da snažno potiskuje poremećaje frekvencije različite od ulazne frekvencij, njihov uticaj na grešku estimacije je zanemarljivi što se može videti na slici 5.10 gde je proces adaptacije počeo kada su primenjeni filteri dostigli ustaljeno stanje, tj. od trenutka $t = 110$ sekundi.

Rezultati prikazani na slikama 5.9 i 5.10 mogu se uporediti sa rezultatima na slikama 5.4 i 5.6. Sporija konvergencija „Pojednostavljenog algoritma” je posledica primene filtera propusnika opsega. Međutim, filtriranje takođe podrazumeva i veću otpornost na delovanje poremećaja.



Slika 5.10: Poređenje stvarnih i estimiranih vrednosti parametara u Primeru 2

5.3.3 Primer 3

Razmatrajmo SISO sistem modelovan sa funkcijom prenosa

$$G(s) = k \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-s\tau},$$

gde parametri pojačanja k , kašnjenja τ i vremenskih konstanti T_1 i T_2 imaju nepoznate vrednosti. S toga, vektor nepoznatih parametara ima oblik

$$\theta = [k \ \tau \ T_1 \ T_2]^T, \quad (5.62)$$

S obzirom da je broj parametara $q = 4$, a broj izlaza $p = 1$ za estimaciju parametara neophodno je primeniti „Pojednostavljenog algoritma”. Za ulazni signal odabran je signal oblika

$$u(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t). \quad (5.63)$$

Izlaz iz sistema neophodno je propustiti kroz dva filtra propusnika opsega, koja će omogućiti generisanje 4 različita pomoćna izlazna signala i primenu predloženog zakona adaptacije (5.35).

Vrednosti izlaza iz filtara (5.32) i (5.33) su

$$\begin{aligned}
 \hat{z}_{1,1} &= a_1(\hat{\theta}) \cos(\omega_1 t) + b_1(\hat{\theta}) \sin(\omega_1 t) + d_{1,1}(t) , \\
 \hat{z}_{1,2} &= -a_1(\hat{\theta}) \sin(\omega_1 t) + b_1(\hat{\theta}) \cos(\omega_1 t) + d_{1,2}(t) , \\
 \hat{z}_{2,1} &= a_2(\hat{\theta}) \cos(\omega_2 t) + b_2(\hat{\theta}) \sin(\omega_2 t) + d_{2,1}(t) , \\
 \hat{z}_{2,2} &= -a_2(\hat{\theta}) \sin(\omega_2 t) + b_2(\hat{\theta}) \cos(\omega_2 t) + d_{2,2}(t) ,
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

gde je

$$\begin{aligned}
 a_1(\hat{\theta}) &= \frac{\hat{k}}{\sqrt{\hat{T}_1^2 \omega_1^2 + 1} \sqrt{\hat{T}_2^2 \omega_1^2 + 1}} \cos \left(-\hat{\tau} \omega_1 - \arctan(\hat{T}_1 \omega_1) - \arctan(\hat{T}_2 \omega_1) \right) , \\
 b_1(\hat{\theta}) &= \frac{\hat{k}}{\sqrt{\hat{T}_1^2 \omega_1^2 + 1} \sqrt{\hat{T}_2^2 \omega_1^2 + 1}} \sin \left(-\hat{\tau} \omega_1 - \arctan(\hat{T}_1 \omega_1) - \arctan(\hat{T}_2 \omega_1) \right) , \\
 a_2(\hat{\theta}) &= \frac{\hat{k}}{\sqrt{\hat{T}_1^2 \omega_2^2 + 1} \sqrt{\hat{T}_2^2 \omega_2^2 + 1}} \cos \left(-\hat{\tau} \omega_2 - \arctan(\hat{T}_1 \omega_2) - \arctan(\hat{T}_2 \omega_2) \right) , \\
 b_2(\hat{\theta}) &= \frac{\hat{k}}{\sqrt{\hat{T}_1^2 \omega_2^2 + 1} \sqrt{\hat{T}_2^2 \omega_2^2 + 1}} \sin \left(-\hat{\tau} \omega_2 - \arctan(\hat{T}_1 \omega_2) - \arctan(\hat{T}_2 \omega_2) \right) .
 \end{aligned} \tag{5.65}$$

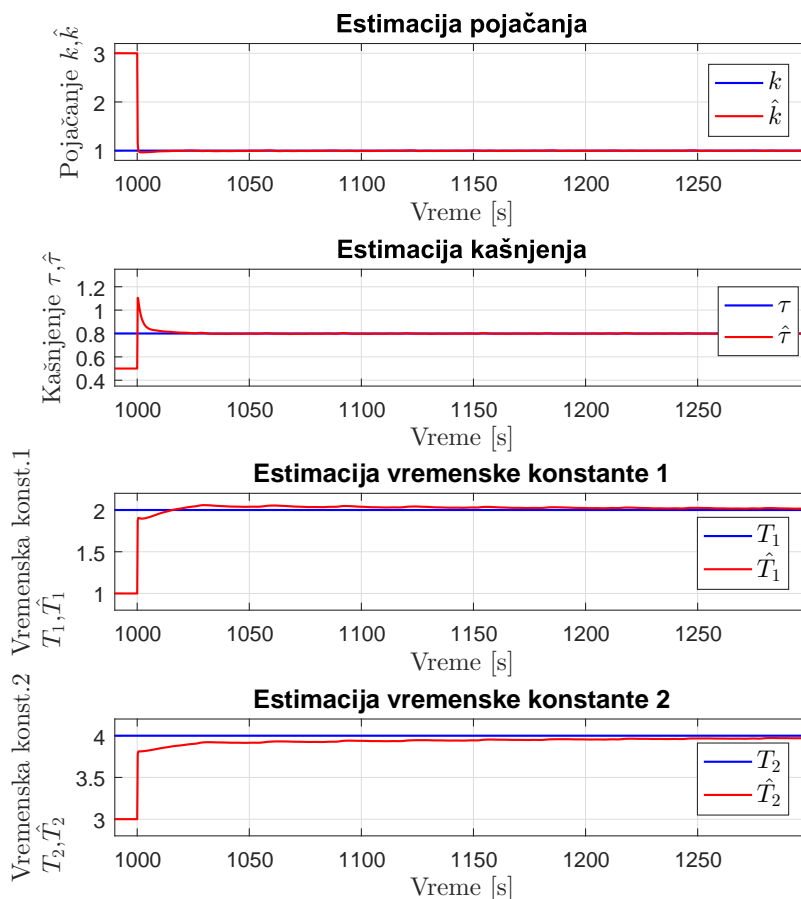
Direktnom primenom predloženog zakona adaptacije (5.35), dobija se

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{k}} \\ \dot{\hat{\tau}} \\ \dot{\hat{T}}_1 \\ \dot{\hat{T}}_2 \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{z}_1}{\partial \hat{k}} & \frac{\partial \hat{z}_2}{\partial \hat{k}} & \frac{\partial \hat{z}_3}{\partial \hat{k}} & \frac{\partial \hat{z}_4}{\partial \hat{k}} \\ \frac{\partial \hat{z}_1}{\partial \hat{\tau}} & \frac{\partial \hat{z}_2}{\partial \hat{\tau}} & \frac{\partial \hat{z}_3}{\partial \hat{\tau}} & \frac{\partial \hat{z}_4}{\partial \hat{\tau}} \\ \frac{\partial \hat{z}_1}{\partial \hat{T}_1} & \frac{\partial \hat{z}_2}{\partial \hat{T}_1} & \frac{\partial \hat{z}_3}{\partial \hat{T}_1} & \frac{\partial \hat{z}_4}{\partial \hat{T}_1} \\ \frac{\partial \hat{z}_1}{\partial \hat{T}_2} & \frac{\partial \hat{z}_2}{\partial \hat{T}_2} & \frac{\partial \hat{z}_3}{\partial \hat{T}_2} & \frac{\partial \hat{z}_4}{\partial \hat{T}_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_3 \\ \tilde{z}_4 \end{bmatrix} .$$

Konvergencija predloženog algoritma se provjerava izračunavanjem matrice \mathcal{T} , što je znatno kompleksnije u ovom slučaju. Moguće je pokazati da sve pretpostavke Teorema 5.2 zadovoljene pod uslovom da je $\omega_1 \neq \omega_2$ i $T_1 \neq T_2$. Izračunavanje je nezgrapno pa smo odlučili da ga izostavimo. Kratak pregled odgovarajuće analize dat je u Dodatku A.3.

Rezultati simulacije prikazani su na slici 5.11. Za tačne vrednosti parametara pretpostavlja su sledeće vrednosti $k = 1$, $\tau = 0.8$, $T_1 = 2$ i $T_2 = 4$. Ulazni

signal je izabran sa frekvencijama $\omega_1 = 0.1$ i $\omega_2 = 1$. Za početna vrednost nepoznatih parametara izabrana su $\hat{k}(0) = 3$, $\hat{\tau}(0) = 0.5$, $\hat{T}_1(0) = 1$ i $\hat{T}_2(0) = 3$, s matricom koeficijenata adaptacije $\Gamma = 50 \mathbf{I}$. Proces adaptacije je iniciran kada su filtri propusnici opsega dosegli ustaljeno stanje, u trenutku $t = 1000$ sekundi.



Slika 5.11: Poređenje stvarnih i estimiranih vrednosti parametara u Primeru 3

Napomena 5.6. Pretpostavke Teoreme 5.2 nisu zadovoljene ukoliko je $T_1 = T_2$. Međutim, ukoliko se razmatra sistem oblika

$$G(s) = k \frac{1}{(Ts + 1)^2} e^{-s\tau},$$

može se pokazati da ponavljanjem iste procedure moguće je estimirati sve nepoznate parametre ovog sistema.

5.3.4 Primer 4

Razmatraćemo uski homogeni štap, kao što je opisano u odeljku 3.3.4, poznate konačne dimenzije $L > 0$, sa nepoznatim koeficijentom toplotne difuzije $\alpha^2 > 0$. Pretpostavimo da je štap savršeno izolovan sa svih strana izuzev početnog i krajnjeg poprečnog preseka $x = 0$ i $x = L$ gde se temperatura može kontrolisati eksterno. Provođenje toplote $Q(x, t)$ u štapu opisuje se jednačinom toplote,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2},$$

gde su Dirihletovi granični uslovi specificiraju temperaturu u dva poprečna preseka $u_1(t) = Q(0, t)$ i $u_2(t) = Q(L, t)$. Odgovarajuća funkcija prenosa koja opisuje ovakav sistem od ulaza $u = u_2$ do y je

$$G(x_0, s) = \frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{s}x_0}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{\sqrt{s}L}{\alpha}\right)},$$

Da bi ispitali efikasnost predloženog algoritma, u nastavku ćemo razmatrati prošireni oblik klasičnog modela toplotnog provođenja sa pojačanjem k i vremenskim kašnjenjem τ . Na taj način, funkcija prenosa toplotnog provođenja dobija oblika,

$$G(x_0, s) = k \frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{s}x_0}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{\sqrt{s}L}{\alpha}\right)} e^{-s\tau}.$$

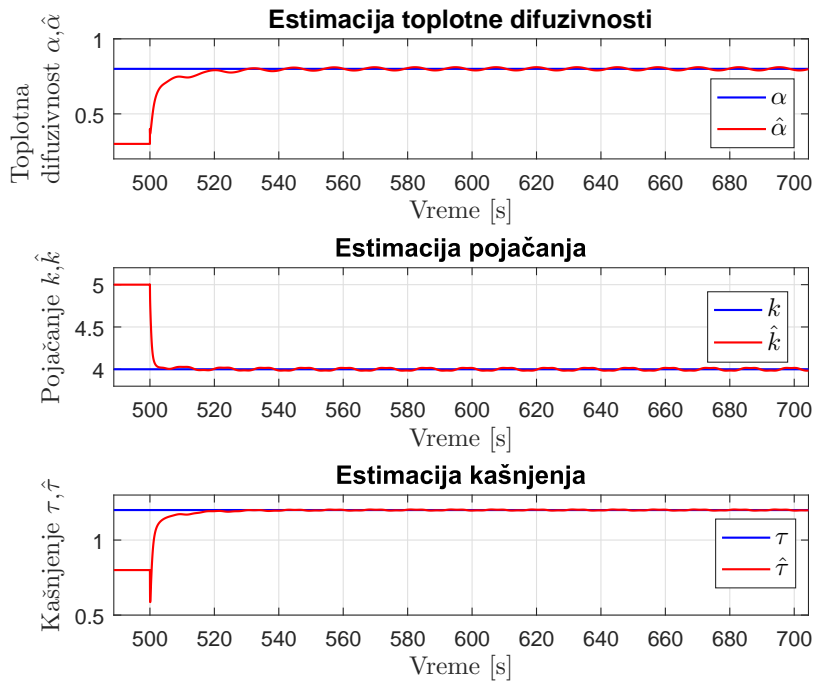
Pretpostavimo da su vrednosti parametara α , k i τ nepoznate, tj da je $\theta = [\alpha \ k \ \tau]$. Za ulazni signal izabrana je superpozicija dva harmonika

$$u = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t). \quad (5.66)$$

S ciljem identifikacije nepoznatih parametara, „Pojednostavljeni Algoritam” (5.35) će biti primenjen. U ovom konkretnom slučaju je jako teško analitički

ispitati uslove Teoreme (5.2), zbog čega će se koristiti numerička provera uslova koja se zasniva na Lemi 5.2.

Neka je $L = 1$ i $x_0 = 0.5$ (tj. temperatura se meri na sredini tela). Primećemo ulaznu pobudu sa frekvencijama $\omega_1 = 0.5$ i $\omega_2 = 1$, i pretpostavićemo da su stvarne vrednosti parametara $\alpha = 0.8$, $k = 4$ i $\tau = 1.2$. Za početna pogađanja nepoznatih parametara odabrane su vrednosti $\hat{\alpha}(0) = 0.3$, $\hat{k}(0) = 5$ i $\hat{\tau}(0) = 0.8$.



Slika 5.12: Poređenje stvarnih i estimiranih vrednosti vektora nepoznatih parametara θ u Primeru 4.

Validacija Pretpostavke 5 može biti ispitana primenom Leme 5.2. Matrica

$$\mathcal{T}_0 = \begin{bmatrix} -0.281785 & 8.90812 & 0.827514 \\ -0.331006 & -12.2505 & -0.704462 \\ -0.308779 & 0.270818 & 0.567774 \\ -0.113555 & -19.0798 & -1.5439 \end{bmatrix}, \quad (5.67)$$

je punog ranga a i Pretpostavka 6 takođe važi, s obzirom da je $\|\mathcal{T}_0\| = 24.435$. Shodno tome, sve pretpostavke Teorema 5.2 važe i „Pojednostavljeni Algoritam” je primenljiv. Numeričke simulacije dobijene sa matricom koeficijanata adaptacije $\Gamma = 30\mathbf{I}$ prikazane su na slici 5.12.

5.4 Neke dalje modifikacije

Opisani postupak estimacije parametara linearnih vremenski invarijantnih sistema opisanih funkcijama prenosa proizvoljnog oblika moguće je modifikovati s ciljem poboljšanja performansi predloženog algoritma. Klasičan pristup podrazumeva da se zakon adaptacije modeluje na osnovu vrednosti poznatih ulaza, merenih izlaza i poznavanja dinamike procesa, kao što je i predstavljeno izrazima (5.4) i (5.35). Međutim, greške u sistemu je moguće modelirati i na nešto drugačiji način, u vidu naglih i iznenadnih promena dinamike procesa. S toga, zakon adaptacije može se postaviti i u sledećem obliku

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \frac{\left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}}\right)^T}{\left\| \left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}}\right)^T \right\|} \text{sign } \tilde{y} , \quad (5.68)$$

u literaturi poznat i kao „zakon adaptacije jediničnim vektorom” (engl. *unit vector adaptation law*).

Osnovna prednost ovakve modifikacije je bolje ponašanje procesa estimacije u prelaznom režimu. Proces adaptacije, odnosno konvergencija vektora nepoznatih parametara ka stvarnim vrednostima je brža i često bez preskoka.

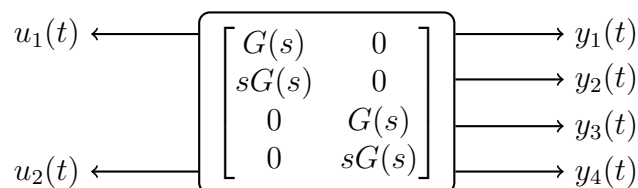
Predloženu modifikaciju primenićemo na problem estimacije parametara MIMO procesa koji je prikazan na slici 5.13 gde je

$$G(s) = k \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-s\tau} . \quad (5.69)$$

Potrebno je estimirati četiri nepoznata parametra: pojačanje k , kašnjenje τ , i dve vremenske konstante T_1 i T_2 .

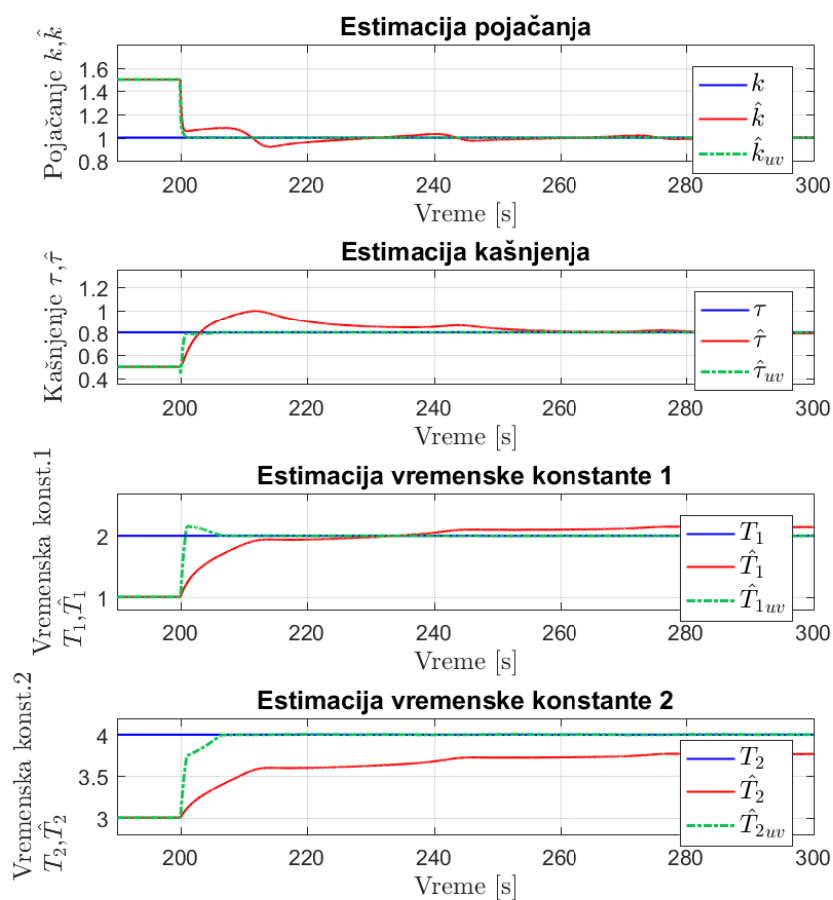
S obzirom da je broj nepoznatih parametara jednak broju izlaza iz sistema, moguće je koristiti šemu predloženu u okviru „Osnovnog algoritma” ali uz primenu modifikovanog zakona adaptacije (5.68). Za potrebe simulacije pretpostavimo da je su ulazni signali

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \cos(0.1t) \\ u_2(t) &= \cos(t) \end{aligned}$$



Slika 5.13: Blok šema razmatranog procesa

Stvarne vrednosti parametara izabrane su na sledeći način: $k = 1$, $\tau = 0.8$, $T_1 = 2$, $T_2 = 4$. Početna vrednost nepoznatih parametara su $k(0) = 1.5$, $\tau(0) = 0.5$, $T_1(0) = 1$, $T_2(0) = 3$, a matrica pojačanja procesa adaptacije je $\Gamma = 10\mathbf{I}$. S obzirom da vrednost člana $\| \left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}} \right)^T \|$ u zakonu adaptacije ne sme imati vrednost blisku nuli, postavljeno je ograničenje na vrednost tog člana u vidu donje granice na 0.01. Proces adaptacije je počeo u trenutku $t = 200$ sekundi. Dobijeni rezultati simulacije prikazani su na slici 5.14, gde su uporedno prikazani rezultati simulacije istog problem sa istim parametrima simulacije dobijeni primenom klasičnog i modifikovanog zakona adaptacije (5.68). Lako je uočiti da uz primenu modifikovanog zakona adaptacije nepoznate vrednosti parametara mnogo brže konvergiraju stvarnim vrednostima.



Slika 5.14: Poređenje stvarnih i estimiranih vrednosti vektora nepoznatih. Promenljive koje su u legendi označene sa $(\hat{\cdot})_{uv}$ odnose se na estimirane vrednosti nastale uz primenu modifikovanog zakona adaptacije

Identifikacija frakcionog modela CNG sistema

U ovom odeljku bavićemo se problemom *offline* identifikacije strukture modela sistema u vremensko-frekvencijskom domenu. Kao što je ranije napomenuto, da bi se primenili algoritmi za estimaciju parametara, razmatrani u prethodnim odeljcima, neophodno je da struktura modela sistema bude poznata. Opšte je poznato da mnogi fizički sistemi pokazuju složeno dinamično ponašanje koje se ne može opisati konačnim skupom običnih diferencijalnih jednačina i određivanje njihovog modela nije jednostavno na osnovu fizičkih zakona. Neki od tih sistema uključuju i vremensku i prostornu dinamiku. U mnogim slučajevima, najprirodniji modeli ovakvih sistema su parcijalni diferencijalni jednačine (PDE). Međutim, kada prostorna komponenta dinamike procesa nije od interesa, i uzima se u obzir samo veza ulaza i izlaza, onda se takvi sistemi mogu opisati raznim oblicima iracionalnih funkcija prenosa.

Klasi iracionalnih funkcija prenosa pripadaju modeli frakcionog tipa nastali usled opisivanja ponašanja sistema frakcionim diferencijalnim jednačinama. Međutim, osnovne relacije koje opisuje fiziku procese i interakcije između komponenata procesa kod inženjerskih sistemima najčešće nisu frakcionog tipa, zbog čega se frakcioni modele ređe koriste čak i u situacijama kada modeli celoga reda ne pokazuju adekvatna svojstva. Kao drugi problem postavlja se izbor strukture frakcionog modela u slučaju da se odlučimo za frakciono modelovanje. Takva struktura posebno se ističe u frekvencijskom domenu. Konkretno, frakcioni modeli dopuštaju amplitudsku karakteristiku proizvoljnog negativnog nagiba. Posledično, logaritamska amplitudska fre-

kvencijska (Bodeova) karakteristika frakcionih sistema može da sadrži segmente proizvoljnog nagiba $\alpha \times 20$ dB/dec, gde α može imati različite vrednosti. Kod sistema celobrojnog reda javljaju se isključivo segmenti čiji je nagib jednak celobrojnemu umnošku od -20 dB/dec. Takođe, frakcioni modeli poseduju konstantno fazno kašnjenje čija se vrednost može kontinualno podešavati promenom reda. Usled toga, asimptotsko fazno kašnjenje sistema frakcionog reda na visokim učestanostima može imati proizvoljnu vrednost, za razliku od klasičnih sistema kod kojih asimptotsko fazno kašnjenje može imati samo vrednosti celobrojnih umnožaka pravog ugla ($n\frac{\pi}{2}$).

U naučnoj literaturi predložen je veći broj metoda za *offline* identifikaciju modela frakcionog reda [65]. Algoritmi koji vrše identifikaciju u vremenskom domenu zahtevaju apriori poznavanje strukture modela, dok se za modelovanje u frekvencijskom domenu zahteva direktno merenje frekvencijskog odziva sistema, koje često nije moguće. Umesto toga, algoritam koji će biti predložen omogućiće identifikaciju na osnovu podataka u vremenskom domenu, pri čemu će se struktura modela prirodno odrediti na osnovu dostupnih podataka.

Sažeto rečeno, metod koji predlažemo u okviru ove teze olakšava:

- Odluku da li posmatrani proces karakteriše celobrojno, frakciono ili neko drugo, složeno iracionalno ponašanje.
- Modelovanje frakcionim modelom kada su dostupni samo ulazni i izlazni podaci u vremenskom domenu.

a sastoji se iz sledećih koraka:

- Formiranje klasičnog diskretnog modela visokog reda sa ARX strukturom čiji se parametri mogu jednostavno identifikovati sa metodom najmanjih kvadrata.
- Analiza frekvencijskih karakteristika dobijenog ARX modela koja će sugerisati strukturu frakcionog modela.
- Identifikacija nepoznatih parametara odabrane strukture u prethodnom koraku u frekvencijskom domenu. S obzirom na nelinearnost modela po nepoznatim parametrima, problem identifikacije parametara rešava se primenom nekog od algoritama za globalnu optimizaciju, kao što je algoritam rojem čestica (PSO).

Svojstva i efikasnost predloženog postupka prikazana su na primeru modeliranja dinamike pritiska u motorima sa komprimovanim prirodnim gasom

(engl. *Compressed Natural Gas*, CNG). Ovakav pristup je po prvi put predložen u [82],

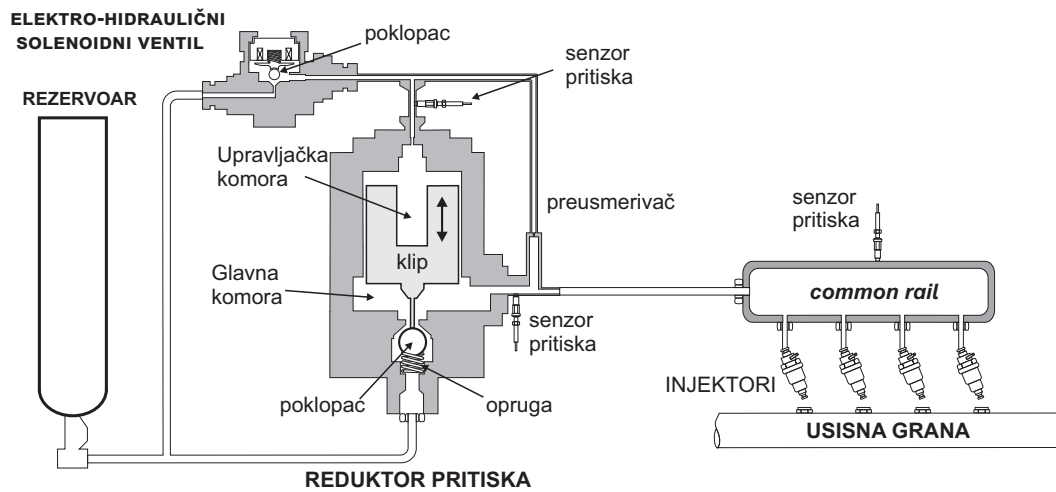
U nastavku ćemo, u odeljku 6.1, dati kratak opis CNG sistema sa ubrizgavanjem i objasniti potrebu za modeliranjem takvog sistem iracionalnim funkcijama prenosa. U odeljku 6.2 ćemo prikazati postupak identifikacije modela dela CNG sistema na osnovu ulaznih i izlaznih podataka dobijenih sa ekperimentalnog prototipa pomenutog sistema, kao i numeričke rezultate koji ilustruju efikasnost predloženog algoritma. Deo materijala prikazanog u ovim odeljcima prethodno je publikovan u [82].

6.1 Motori sa CNG sistemom

Kao alternativno gorivo, prirodni gas zaslužuje posebnu pažnju pre svega zahvaljujući svojim povoljnim ekološkim osobinama. Rezerve ovog goriva u mnogim zemljama su veoma velike što je razlog procene da će se ovaj energent u budućnosti sve više koristiti, čemu će doprineti i ekonomičnost njegove primene kao i povoljne bezbednosne karakteristike. Zemni, odnosno prirodni gas, je prirodno gasovito fosilno gorivo, sa velikim udelom metana. Kao motorno gorivo, prirodni gas se može koristiti u sabijenom obliku, ili komprimovani gas (komprimovani prirodnim gasom, KPG) sa međunarodnom skracenicom CNG. U tom slučaju, prirodni gas se nalazi u rezervoarima pod visokim pritiscima 300 bara i više. Da bi se omogućilo korišćenje prirodnog gasa kod automobila potrebna je ugradnja sistema sa *common rail* ubrizgavanjem. Sistem je nazvan po zajedničkom rezervoaru visokog pritiska (engl. *common rail*, CR) koji snabdeva sve cilindre gorivom. Kod konvencionalnih sistemima ubrizgavanja, pritisak goriva mora biti generisan pojedinačno za svako ubrizgavanje. Sa *common rail* sistemom, međutim, generisanje pritiska i ubrizgavanje su odvojeni, što znači da je gorivo stalno dostupno po neophodnom pritisku za ubrizgavanje.

Konkretno, CNG sistem je atraktivan za korišćenje u automobilskoj industriji zbog niskih troškova, optimalnom mešanju vazduha i goriva i dobroj reakciji na kočenje. Optimalnim mešanjem vazduha i goriva, usled gasovitog stanja, izbegava se prisustvo čestica u izduvnim gasovima. Glavni nedostatak CNG sistema je što agregatno stanje prirodnog gasa u rezervoaru dovodi do problema oko merenja potrošnje [83, 84]

U inovativnim CNG sistemima, ovaj problem se može rešiti jednovremenom kontrolom vremenskog intervala otvorenosti injektora i pritiska pod kojim se vrši ubrizgavanje. Međutim, dok se prvi zadatak lako može ostvariti prime-

Slika 6.1: Blok šema CNG sistema sa ubrizgavanjem ²

nom odgovarajućih elektro-injektoru, precizna regulacija pritiska za ubrizgavanja je mnogo složenija zbog sabijenosti gasa. Naime, varijacije u vrednosti parametara nastale usled promene radnih tačaka sistema ubrizgavanja, složenih fluidinamičkih pojava i poremećaja, u mnogome degradiraju osobine sistema za upravljanje [85].

Moguće rešenje dato je naprednim šemom i upravljanju zasnovanom na modelima. Modeliranje CNG sistema sa ubrizgavanjem je korisno kako za analizu ponašanja tako i za predviđanje, kao i za projektovanje upravljanja koje će bolje regulisati pritisak u sistemu. Model mora biti rezultat kompromisa između tačnog i jednostavnog. Tačni modeli mogu vrlo dobro predvideti stvarno ponašanje sistema, ali njihova složenost može otežati formiranje odgovarajućeg upravljanja. Mnogi upravljački orjentisani modeli razvijeni su za dizel i benzin sisteme sa ubrizgavanjem, a retki su oni koji su razvijeni za CNG sisteme sa ubrizgavanjem [86, 87].

U okviru ove teze biće razmatran inovativni sistem za ubrizgavanje CNG goriva, koji je razvio FIAT Research Center, filijala Valenzano, Italija [86]. Glavne komponente sistema su rezervoar, elektronski regulisani reduktor pritiska, *common rail* i injektori, kao što je prikazano na slici 6.1. Gorivo koje se skladišti u rezervoaru pod pritiskom od 40 do 200 bara se doprema do reduktora pritiska koji potom snabdeva *common rail* preko dva gasovoda. Reduktor pritiska obara vrednost pritiska na (5 – 20) bara pre nego što se gorivo do-

² Slika je preuzeta iz rada [82]

premi do *common rail*-a. Zatim, se gorivo doprema do usisne grane preko elektro-injektore kako bi se formiralo mešavina goriva i vazduha.

Da bi se postigla precizna regulacija pritiska u *common rail*-u, zapremina u reduktoru pritiska se deli na gornju „upravljačku komoru” i donju „glavnu komoru”. Komore su razdvojene pokretnim klipom i obe se napajaju gorivom iz rezervoara. Aksijalno pomeranje klipa zavisi od upravljanja i pritiska u glavnoj komori. Dotok u upravljačku komoru podešava se elektro-hidrauličnim ventilom, dok se dotok u glavnu komoru reguliše pomeranjem poklopca koji se nalazi na klipu. Protok u upravljačkoj komori će dovesti do porasta pritiska gasa na gornjoj površini klipa i čime će se pomeriti ka dole. Time se i poklopac pomera i omogućava veći dotok u glavnu komoru čime povećava pritisak. Nasuprot tome, zatvaranje ventila smanjuje pritisak na gornjoj površini klipa koji se kreće na gore, poklopac se zatvara preko opruge i pritisak se smanjuje. Stoga, pošto se *common rail* puni gorivom koje dolazi iz upravljačke i glavne komore, elektronska upravljačka jedinica (ECU) može regulisati pritisak tako što pravilno upravlja servo ventilom.

Elektronska upravljačka jedinica obrađuje informacije o položaju ventila za dovod goriva, brzini motora, pritisku vazduha u usisnom kolektoru i trenutnom pritisku u *common rail*-u. Potom izračunava interval otvaranja injektora i upravljački signal za servo ventil, i omogućavajući precizno merenje mase goriva koja se ubrizgava u usisnu granu. Cilj je identifikovati model dinamike pritiska unutar glavnih spremnika CNG sistema (ventil, rezervoar i injektori se ne razmatraju).

6.2 Identifikacija sistema ubrizgavanja

U prethodnih izlaganja navedeno je da predloženi algoritam obuhvata više faza i svaka od njih će biti detaljno opisana u nastavku na primeru identifikacije CNG sistema za ubrizgavanje.

6.2.1 Identifikacija frekvencijskih karakteristika

Jedna od osnovnih osobina stabilnih linearnih, vremenski invarijantnih sistema je da u ustaljenom stanju ne generišu dodatne frekvencijske komponente u odnosu na ulaze: Ako je linearni vremenski inavrijantan sistem pobuđen prostim periodičnim signalom frekvencije ω , posle „dovoljno dugo” vremena izlaz iz sistema će biti periodičan signal istih frekvencija ali sa promenjenom amplitudom i fazom. Snimanjem pojačanja amplitude $A(\omega)$ i faznog pomeraja

$\varphi(\omega)$ na svim frekvencijama može dobiti kompletna informacija o ponašanju sistema i u prelaznom režimu i u ustaljenom stanju. Frekvencijska karakteristika dobijena u obliku

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (6.1)$$

omogućava određivanje odziva sistema na bilo koji ulazni signal $u(t)$ na sledeći način

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega) , \quad (6.2)$$

gde su $U(j\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$ i $Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$ odgovarajuće Furijeove transformacije. Kada je $Y(j\omega)$ poznato, odgovarajući odziv u vremenskom domenu može se dobiti direktno.

Prethodno opisan postupak može se koristiti za dobijanje modela koji nisu parametrizovani, bez ikakve apriori odabrane strukture modela. Ovakav pristup je koristan u slučajevima kada struktura modela nije jasno definisana fizičkim zakonima ili ukoliko je potrebno da se odlučimo između nekoliko konkurentnih struktura. Osnovni nedostatak ovakvog pristupa je što je potrebno mnogo vremena da bi se sproveo eksperiment koji će pružiti informacije o ponašanju sistema na širokom opsegu frekvencija.

Alternativni pristup bio bi da se izabere „dovoljno bogat” ulazni signal, snimi njegov odgovarajući odziv, a potom koristeći izraz (6.2) direktno izrazi $G(j\omega)$

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} . \quad (6.3)$$

Uobičajeno je da se za „dovoljno bogat” ulazni signal koristi Gausov šum, pseudoslučajna binarna sekvenca ili multisinus slučajne faze kao što je opisano u [5].

Glavni problem kod ovakvog pristupa, kao i kod ostalih nestrukturiranih pristupa, što nedostaje unutrašnji mehanizam regulacije što ga čini izuzetno osetljivim na šum i poremećaj uopšte. Još jedan problem je što u mnogim slučajevima, nije moguće pobuditi sistem signalima dovoljno bogate strukture. Tada, dobijene frekvencijske karakteristike su nepouzidane u opsezima spektra gde je snaga ulaznog signala niska.

Da bi se zaobišao problem sa osetljivošću, predlaže se da se podaci, generisani u vremenskom domenu, modeluju koristeći autoregresioni model sa spoljašnjom pobudom (eng. *Auto-Regressive with exogenous input model*, ARX) visokog stepena. U skladu sa tim, razmatraćemo vremenski diskretan model

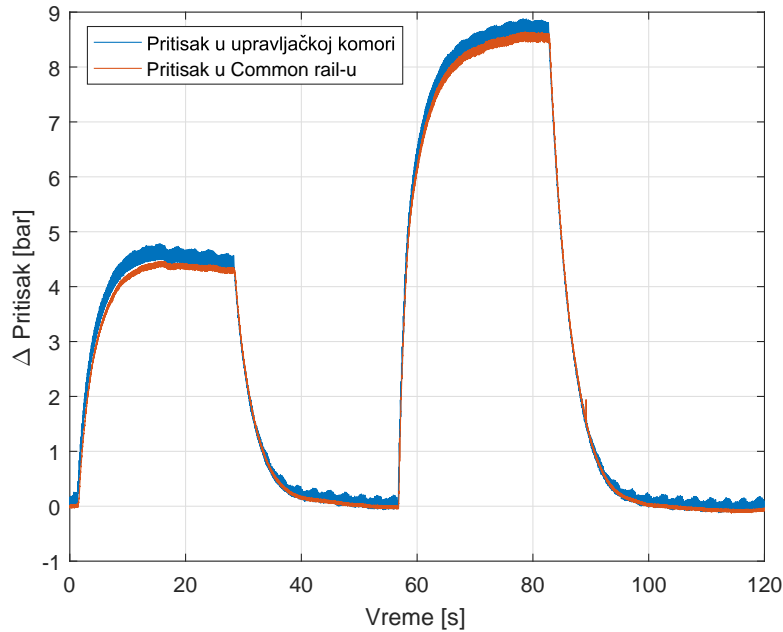
$$A(q)y(k) = B(q)u(k-1) + e(k) , \quad (6.4)$$

gde je y izlaz iz procesa, u odabrani ulaz i e poremećaj, pri čemu su $A(q)$ i $B(q)$ proizvoljni polinomi n -tog i $(n - 1)$ -og reda po promenljivoj q , koja predstavlja operator jediničnog prednjačenja. Red modela n mora da bude dovoljno veliki da bi se mogla opisati sva dinamika procesa. Dobijeni ARX model je pre-parametrizovan. Međutim, formiranje ovog modela je samo jedan od koraka u celokupnoj proceduri. Analiza frekvencijskog odziva dobijenog modela omogućava nam da odaberemo klasu linearnih modela nižeg reda koja najbolje opisuje proces koji se razmatra. Na osnovu nagibe amplitudske frekvencijske karakteristike može se zaključiti da li proces karakteriše racionalno ili frakciono ponašanje, ili se opisuje još složenijim strukturama modela. Parametri ARX modela estimiraju se korištenjem metoda najmanjih kvadrata [5], a red n ARX modela može se empirijski odrediti.

Podaci koji se koriste za identifikaciju i validaciju modela potiču iz eksperimentalnog postrojenja koje reprodukuje FIAT Multipla sistem za dotok goriva [83]. Zbog sigurnosnih razloga, tokom eksperimenta, CNG je zamenjen sa vazduhom. Postrojenje uključuje kompresor koji obezbeđuju vazduh pri konstantnom pritisku i zamenjuju rezervoar za gorivo, i sistem za ubrizgavanja sa četiri prototipna injektora koji rade pod pritiska u intervalu (4 – 20) bara. Upravljački signali koji postavljaju trenutne uslove rada zadaju se pomoću PC računara i programskog okruženja labVIEW-a, a zatim se uzrokuje pomoću National Instruments akvizicione kartice. Za detaljan opis eksperimenta videti [83, 86].

Za ulazno-izlazni skup podataka odabrani su vrednost pritiska u upravljačkoj komori i pritiska na izlazu *common rail*-a. Eksperiment je vršen pod sledećim uslovima: konstantan pritisak u rezervoaru od 40 bara, brzina obrtanja motora je 2400 o/min i vreme otvaranja injektora je 8 s. Pre bilo koje identifikacije linearnog modela, neophodan je izbor radne tačke. U ovom konkretnom slučaju, pritisci u upravljačkoj komori i *common rail*-u u ustaljenom stanju podešeni su na 4.43 i 3.585 bara. Na slici 6.2 prikazana je varijacija ulaznog i izlaznog pritisaka oko radnih tačaka.

Nakon par numeričkih testova, empirijski je određeno da je odgovarajući ARX model 10-og reda, jer modeli nižeg reda nisu mogli adekvatno da predstavljaju frekvencijske karakteristike u opsegu od interesa. Slika 6.3 prikazuje frekvencijske karakteristike dobijenog modela i lako je uočiti da je amplitudska karakteristika približno linearna po segmentima, sa dve prelomne frekvencije i nagibima koji nisu celobrojni umnošci od 20 dB/dec. Jasno se vidi da je moguće formirati frakcioni model jednostavnije strukture, sa manje parametara, koji će imati slično ponašanje u frekvencijskom domenu.



Slika 6.2: Varijacije pritiska (oko radne tačke) koje se koriste kao ulazni i izlazni podaci u procesu identifikacije. Podaci su uzrokovani sa periodom od 1 ms. Nikvistova frekvencija je 500 Hz.

6.2.2 Identifikacija fracionog modela

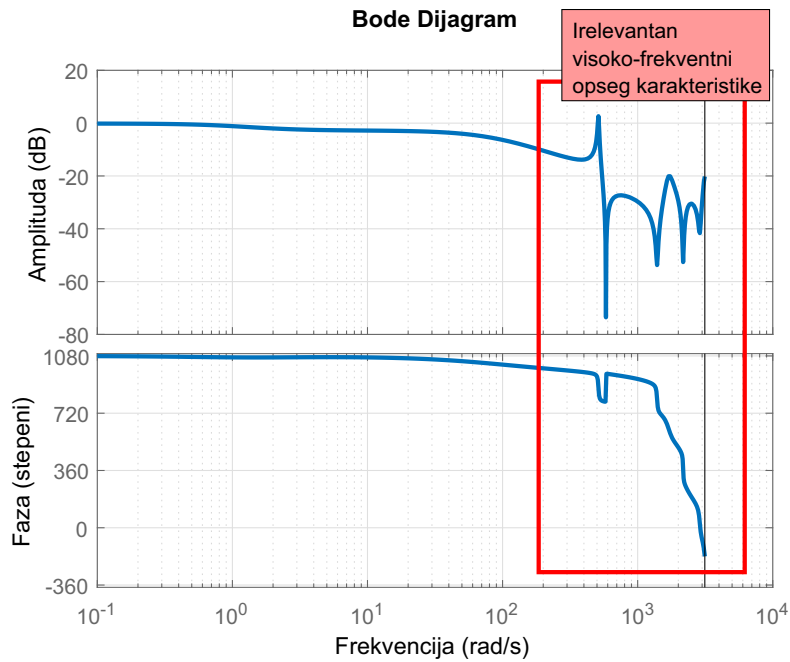
Analizom slike 6.4 dolazimo do modela sledeće strukture

$$G(s) = k \frac{(\frac{s}{\omega_2} + 1)^{\alpha_2}}{(\frac{s}{\omega_1} + 1)^{\alpha_1} (\frac{s}{\omega_3} + 1)^{\alpha_3}} . \quad (6.5)$$

Nepoznati parametri modela su pojačanje k , prelomne frekvencije ω_1 , ω_2 , ω_3 i koeficijenti α_1 , α_2 i α_3 . Vrednosti parametara modela su određene minimizacijom greške amplitudskih odziva dobijenog ARX modela i frakcionog modela, tj minimizacijom sledećeg kriterijuma optimalnosti

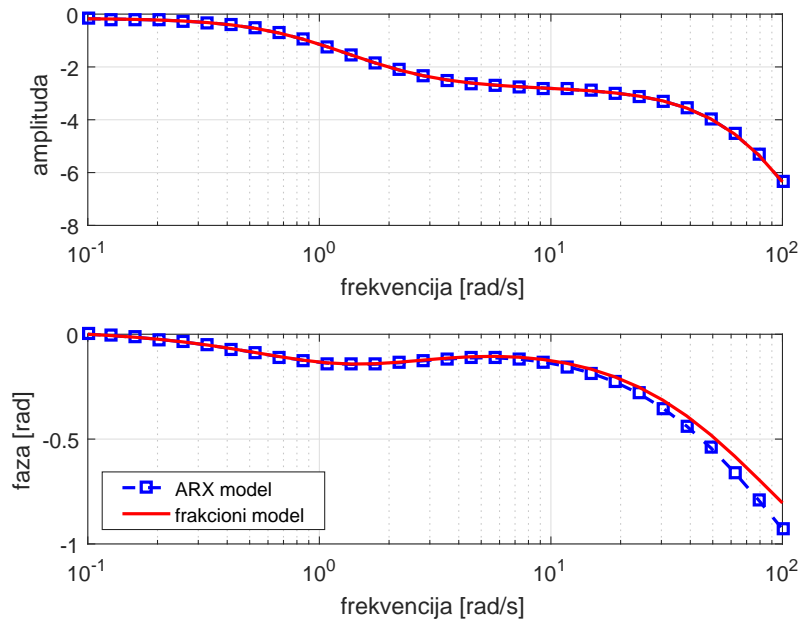
$$J = \sum_{k=1}^N \left| 20 \log |G(j\xi_k)| - 20 \log \left| \frac{B(e^{j\xi_k T})}{A(e^{j\xi_k T})} \right| \right| , \quad (6.6)$$

gde su ξ_k , $k \in \{1, \dots, N\}$ ugaone frekvencije uniformno logaritamski raspoređene u opsegu od $\omega_{\min} = 0.1$ rad/s do $\omega_{\max} = 100$ rad/s, a $N = 100$. Ovako



Slika 6.3: Frekvencijska karakteristika dobijenog ARX modela.

postavljen optimizacioni problem je složen i nije konveksan, i zahteva primenu nekog od algoritama za globalnu optimizaciju. U okviru ovog eksperimenta korišten je PSO algoritam, odnosno njegova modifikacija, GPSO algoritam (engl. *Generalized Particle Swarm Optimization*) čije osnovne postavke ćemo dati u nastavku. Čitaoca za više detalja upućujemo na literaturu [88, 89].



Slika 6.4: Frekvencijske karakteristike dobijenog ARX modela i optimalnog frakcionog modela prikazane u relevantnom frekvencijskom opsegu.

Osnovna postavka GPSO algoritma

Algoritam roja čestica tj. PSO algoritam prvi su opisali Kenedi i Eberhart 1995. godine [1], koji je prvo bio namenjen za simulaciju socijalnog ponašanja, da bi se opisalo ponašanja ptica u jatima i rojeva insekata. PSO kao optimizacijsko oruđe pruža procedure za pretragu bazirane na populaciji (roju) u kojoj jedinke (čestice) menjaju svoju poziciju (stanja) u vremenu. Kretanje roja u toku vremena može se predstaviti kao iterativni postupak pri čemu svaku česticu u sistemu u k -toj iteraciji karakteriše: tekuća pozicija $x[k]$ koja predstavlja vektor vrednosti promenljivih koje figurišu u kriterijumu optimalnosti, u k -toj iteraciji, odnosno poziciju (koordinate tačke) u n -dimenzionalnom prostoru rešenja u kojoj se čestica trenutno nalazi; tekuća brzina, $v[k]$, kojom se kreće čestica pri prelasku iz prethodne u tekuću poziciju; najbolja sopstvena pozicija čestice (engl. *personal best position*), $p[k]$, koja je jednaka onoj poziciji čestice x u kojoj je do tekuće iteracije posmatrana čestica ostvarila najbolju vrednost kriterijuma optimalnosti $f(x)$. Ovaj parameter predstavlja ekvivalent sopstvenom iskustvu čestice tokom kretanja; nabolja globalna pozicija

(engl. global best position), $g[k]$, koja je jednaka onoj poziciji x u kojoj je dostignuta najbolja vrednost kriterijuma optimalnosti do k -te iteracije na nivou celokupnog roja. Najbolja globalna pozicija jednaka je, u stvari, najboljoj sopstvenoj poziciji uzimajući u obzir sve čestice u roju i predstavlja ekvivalent iskustvu roja stečenom tokom kretanja.

GPSO algoritam predstavlja jednu od modifikacija originalnog PSO algoritma i detaljno je opisan u radu [89]. Autori ovog rada došli su na ideju da poistovete čestice roja sa linearnim dinamičkim sistemom drugog reda sa dva ulaza i jednim izlazom, gde je izlaz iz sistem pozicija x , a ulazi najbolja sopstvena pozicija p i najbolja globalna pozicija g . Potom su analizirajući stabilnost i odziv ovakvog sistem posmatrali performanse procesa optimizacije i predložili da se u svakoj iteraciji čestica premešta u novu poziciju upotrebom sledećeg izraza:

$$x[k+1] = 2\zeta\rho x[k] - \rho^2 x[k-1] + (1 - 2\zeta\rho + \rho^2)(cp[k] + (1-c)g[k]), \quad (6.7)$$

gde su ρ , ζ i c skalarni parametri. U sklopu jedne iteracija vrši se ažuriranje pozicije svih čestica i njihovih najboljih sopstvenih pozicija i najbolje globalne pozicije. Optimizacija se završava kada se postigne određeni, maksimalni propisani, broj iteracija.

U okviru ovog eksperimenta broj čestica u roju je 30, a maksimalan broj iteracija je 200. Kao što je predloženo u radu [89], vrednost parametra ρ se linearno smanjuje u svakoj iteraciji od 0.95 do 0.6, dok se parametar c smanjuje u intervalu [0.8, 0.2]. Parametar ζ se određuje za svaku česticu u svakoj iteraciji stohastički i uniformno iz intervala $[-0.9, 0.2]$.

6.2.3 Numerički rezultati

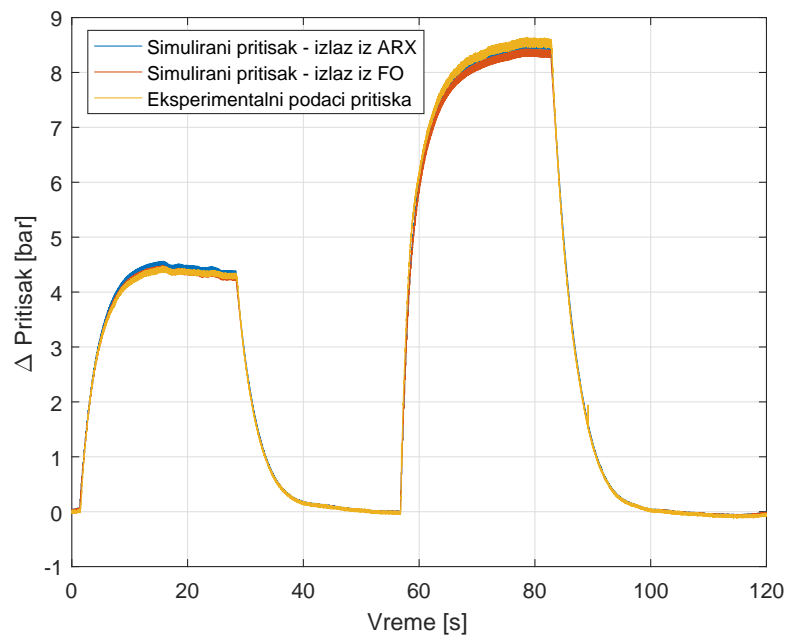
Optimalni parametri frakcionog modela (6.5) prikazani su u tabeli 6.1. Slika 6.4 prikazuje slaganje ARX i frakcionog modela u frekventnom domenu. Slika 6.5 poredi izlaz iz ARX modela, frakcionog modela i eksperimentalne rezultate u vremenskom domenu za skup podataka nad kojim je vršena optimizacija. Frakcioni model (6.5) se u vremenskom domenu numerički simulira koristeći aproksimaciju modelom konačnog reda koja je predložena u radu [90].

Kao što je i očekivano, model frakcionog reda dovoljno dobro aproksimira ponašanje realnog sistema. Validacija modela frakcionera je procenjena uzimajući u obzir različite uslove rada: konstantni pritisak rezervoara od 40 bara,

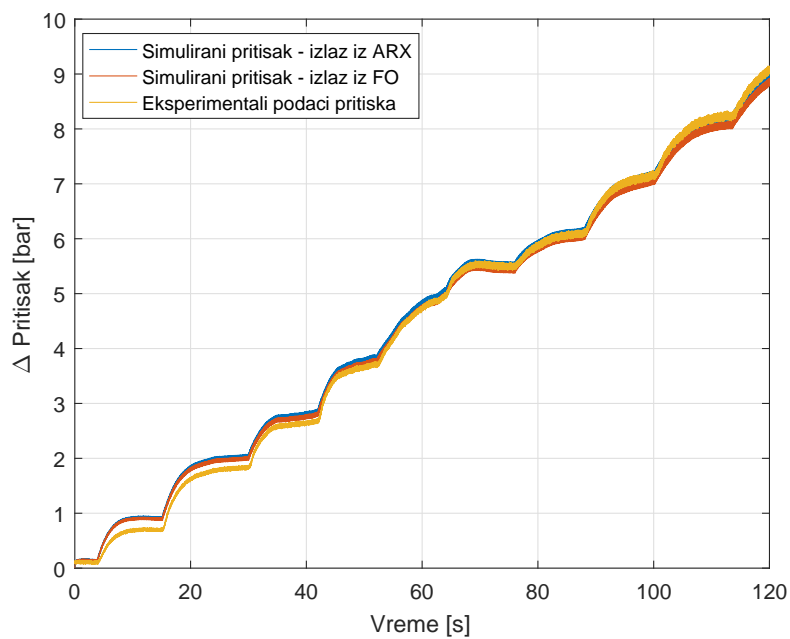
Tabela 6.1: Optimalna vrednost parametara frkacionog modela

parametri	vrednost
k	0.9817
ω_1	1.0930
α_1	0.8431
ω_2	1.5691
α_2	0.8434
ω_3	86.3676
α_3	0.9618

brzinu motora od 2400 o/min, vremena otvaranja injektora od 8 ms. Rezultati prikazani na slici 6.6 pokazuju da model sa dobrom tačnošću može predvideti stvarno ponašanje sistema tokom prelaznih uslova.



Slika 6.5: Poređenje eksperimentalnih rezultata i rezultata simulacije dobijenih sa ARX i frakcionim modelom



Slika 6.6: Poređenje eksperimentalnih rezultata i rezultata simulacije dobijenih sa ARX i frakcionim modelom

Zaključak

Rad posmatran u celini posvećen je identifikaciji i estimaciji parametara sistema modelovanih funkcijama prenosa proizvoljne structure sa posebnim naglaskom na iracionalne funkcije prenosa.

U prvom delu rada predložen je jedan originalni i naučno verifikovani metod [71] za estimaciju parametara kod kog se postupak odvija kroz dve faze, slika 4.1. U prvoj fazi predloženog algoritma kroz rekuzivni metod najmanjih kvadrata izračunava se vrednost modula i argumenta funkcije prenosa na određenim učestanostima (4.10)-(4.13) dok se u drugoj fazi vrši preslikavanje dobijenih modula i argumenata u parametre sistema primenom direktne inverzije ili gradijentnog metoda za rešavanje sistema nelinearnih jednačina (4.14)-(4.17). Razmatrani metod je ilustrovan kroz niz numeričkih primera u poglavlju 4.2

Drugi algoritam koji smo nazvali adaptivni algoritam zasnovan na gradijentom postupku predstavljen je u dve varijante, osnovni algoritam i pojednostavljeni algoritam, slika 5.1 i slika 5.2. Osnovni oblik algoritma podrazumeva da je broj izlaza iz sistema veći ili jednak od broja nepoznatih parametara, dok se u pojednostavljenom obliku taj problem rešava formiranjem složenog ulaza kao kombinacija prostoperiodičnih signala i bankom filtara propusnika opsega na izlazu sistema. Izvršena je detaljna analiza konvergencije predloženih rešenja i uticaj različitog nivoa poremećaja na dobijena rešenja, poglavlje 5.1.1. Predloženi algoritmi su ilustrovani kroz primere u poglavlju 5.3. Za rezultate iz ovog poglavlja autor je misljenja da su originalni i da se na ovakav način prvi put javljaju u ovom radu.

U trećem delu rada kroz jedan složen realan sistem ilustrovan je postupak

offline identifikacije i estimacije parametara za sistem nepoznate strukture. Blok šema razmatranog CNG sistema za ubrizgavanje goriva data je u okviru poglavlja 6.1. Za razliku od prethodna dva postupka struktura sistema nije poznata te celokupan postupak nije moguće izvršiti u realnom vremenu (*online*). Estimacija parametara za ovakav jedan sistem može se matematički posmatrati kao postupak globalne optimizacije te je u ovom radu tako i rešavan. Dati algoritam je takođe razvijen u saradnji sa kolegama sa Politehničkog univerziteta u Bariju (Italija) [82].

Na osnovu iskustva u implementaciji, sva tri predložena algoritma, može se reći da je njihovo izvođenje matematički rigidno ali da je njihova implementacija zaista okrenuta inženjerskoj praksi gde su prva dva metoda osmišljena za rad u realnom vremenu, a teći metod direktno prati tok misli i upodobljuje ga sa načinom svojstvenim inženjerima u praksi.

Dodatak

A.1 Makleod-ova teorema o srednjim vrednostima

Teorema koja sledi je poznata kao MakLeod-ova teorema o srednjim vrednostima (*McLeod's Mean Value Theorem*) iz 1964 godine, čiji detaljan dokaz izlazi iz okvira ove teze.

Teorema A.1 (MakLeod-ova teorema, [16]). *Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ funkcija preslikavanja koja ima sledeće osobine:*

1. *f je neprekidno na $[a, b]$*
2. *f je diferencijabilno na $[a, b]$*

Dalje pretpostavimo da je $f'(x)$ sa desne strane neprekidna. Tada postoji n tačaka $c_1, c_2, \dots, c_n \in (a, b)$ i n pozitivnih brojeva r_1, r_2, \dots, r_n takvih da je $r_1 + r_2 + \dots + r_n = 1$ i

$$f(b) - f(a) = (b - a) \sum_{k=1}^n r_k f'(c_k) .$$

A.2 Detaljan dizajn filtra propusnika opsega

U okviru ove teze razmatran je filter propusnika opsega drugoga reda, koji se opisuje modelom u prostoru stanja

$$\dot{x}_{2i-1}(t) = x_{2i}(t) \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{x}_{2i}(t) = -\omega_i^2 x_{2i-1}(t) - 2\xi_p \omega_i x_{2i}(t) + u(t) \quad (\text{A.2})$$

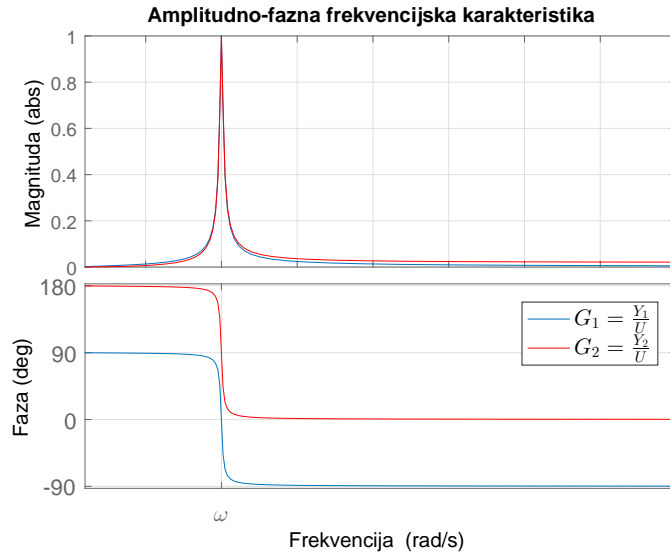
sa izlazima oblika

$$y_{2i-1}(t) = 2\xi_p \omega_i x_{2i}(t) \quad (\text{A.3})$$

$$y_{2i}(t) = -2\omega_i^2 \xi_p x_{2i-1}(t) - 4\xi_p^2 \omega_i x_{2i}(t) + 2\xi_p u(t) \quad (\text{A.4})$$

Može se primetiti da je $y_{2i}(t) = \frac{1}{\omega_i} \dot{y}_{2i-1}(t)$. U svim izloženim primerimo $\xi_p = 0.01$ i $\xi_z = 0.05$.

Amplitudsko-frekvencijska karakteristika koja pokazuje koliko filter pojačava ili guši signal na određenoj frekvenciji i fazna karakteristika koja pokazuje kako izlazni signal filtra prethodi ili zaostaje u fazi sa ulaznim signalom na određenoj frekvenciji od opisanog filtra prikazana je na slici A.1.



Slika A.1: Amplitudsko-fazna frekvencijska karakteristika filtra propusnika opsega.

A.3 Nastavak analize u sklopu Primera 3

U svrhu proveravanja važenja Pretpostavke 5 u Primeru 3 razmatraćemo matricu $\mathcal{M} = [\mathcal{T}_0^T \mathcal{T}_0]$ i sve njene glavne minore,

$$M_1 = \frac{1}{(T_1^2 \omega_2^2 + 1)(T_2^2 \omega_2^2 + 1)} + \frac{1}{(T_1^2 \omega_1^2 + 1)(T_2^2 \omega_1^2 + 1)}, \quad (\text{A.5})$$

$$M_2 = \frac{k^2 (T_1^2 T_2^2 (\omega_1^4 + \omega_2^4) + (\omega_1^2 + \omega_2^2)(T_1^2 + T_2^2) + 2)}{(T_1^2 \omega_1^2 + 1)^2 (T_1^2 \omega_2^2 + 1)^2 (T_2^2 \omega_1^2 + 1)^2 (T_2^2 \omega_2^2 + 1)^2} \cdots$$

$$\frac{k^2 (T_1^2 T_2^2 \omega_2^2 \omega_1^4 + \omega_1^2 (T_1^2 T_2^2 \omega_2^4 + 2\omega_2^2 (T_1^2 + T_2^2) + 1) + \omega_2^2)}{(T_1^2 \omega_1^2 + 1)^2 (T_1^2 \omega_2^2 + 1)^2 (T_2^2 \omega_1^2 + 1)^2 (T_2^2 \omega_2^2 + 1)^2}, \quad (\text{A.6})$$

$$M_3 = \frac{k^4 T_1^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 (T_1^4 T_2^2 \omega_2^2 \omega_1^6 + T_1^2 \omega_2^2 \omega_1^4 (T_1^2 + 2T_2^2) + \dots)}{(T_1^2 \omega_1^2 + 1)^4 (T_1^2 \omega_2^2 + 1)^4 (T_2^2 \omega_1^2 + 1)^2 (T_2^2 \omega_2^2 + 1)^2}$$

$$\frac{\dots + \omega_1^4 (T_1^4 T_2^2 \omega_2^6 + 2\omega_2^2 (2T_1^2 + T_2^2) + \omega_2^4 (T_1^4 + 2T_1^2 T_2^2) + 1) + \omega_2^2)}{(T_1^2 \omega_1^2 + 1)^4 (T_1^2 \omega_2^2 + 1)^4 (T_2^2 \omega_1^2 + 1)^2 (T_2^2 \omega_2^2 + 1)^2} \quad (\text{A.7})$$

$$M_4 = \frac{k^6 T_1^2 T_2^2 \omega_1^2 \omega_2^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)^4 (T_1 - T_2)^2}{(T_1^2 \omega_1^2 + 1)^4 (T_1^2 \omega_2^2 + 1)^4 (T_2^2 \omega_1^2 + 1)^4 (T_2^2 \omega_2^2 + 1)^4}.$$

Nije teško zaključiti da su svi glavni minori pozitivni ukoliko je $\omega_1 \neq \omega_2$ and $T_1 \neq T_2$ i na osnovu Silvesterove teoreme možemo tvrditi da je matrica \mathcal{M}_0 pozitivno definitna. Na osnovu čega sledi da je matrica \mathcal{T}_0 nesingularna i punog ranga, čime se potvrđuje važenje Pretpostavke i Leme 5.2-

Determinanta matrice \mathcal{M}_0 (koja je ekvivalentna sa M_4 iz (A.5)) je pozitivna i ograničena odozgo, što implicira da su sve sopstvene vrednosti matrice \mathcal{M}_0 ograničene sa gornje strane. Odatle sledi da je najveća sopstvena vrednost matrice \mathcal{T}_0 konačne vrednosti i da Pretpostavka 6 važi.

Bibliografija

- [1] P. Eykhoff. *System identification: parameter and state estimation*. Wiley-Interscience, 1974.
- [2] Lennart Ljung and Torkel Glad. *Modeling of Dynamic Systems*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1994.
- [3] L. Ljung. *System Identification: Theory for the User*. Prentice Hall information and system sciences series. Prentice Hall PTR, 1999.
- [4] P.P.J. van den Bosch and A.C. van der Klauw. *Modeling, Identification and Simulation of Dynamical Systems*. Taylor & Francis, 1994.
- [5] T.S. Soderstrom and P.G. Stoica. *System Identification*. Prentice Hall International Series In Systems And Control Engineering. Prentice Hall, 1989.
- [6] Lennart Ljung and Torkel Glad. On global identifiability for arbitrary model parametrizations. *Automatica*, 30(2):265 – 276, 1994.
- [7] Karl Johan Astrom and Torsten Soderstrom. Special issue on trends in system identification. *Automatica*, 31(12), 1995.
- [8] K.R. Popper. *The Logic of Scientific Discovery*. Basic Books. New York, 1934.
- [9] J. DiStefano. *Dynamic Systems Biology Modeling and Simulation*. Elsevier Science, 2015.
- [10] G. Chow. Identification and estimation in econometric systems: A survey. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6):855–862, Dec 1974.

-
- [11] Ivana Kostić Kovačević. *Analiza jedne klase rekurzivnih stohastičkih algoritama gauss-newtonovog tipa sa primenama u parametarskoj identifikaciji FIR i iir digitalnih sistema*. PhD thesis, Univerzitet u Prištini, Fakultet tehničkih nauka, 2008.
- [12] J. Jensen. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Mathematica*, 30(1):175–193, December 1906.
- [13] M. R. Rapačić and Z. D. Jeličić. *Projektovanje linearnih regulatora i estimatora u prostoru stanja*. Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2014.
- [14] J.J.E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall International Editions. Prentice-Hall, 1991.
- [15] S. Sastry. *Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer New York, 2010.
- [16] P.K. Sahoo and T. Riedel. *Mean Value Theorems and Functional Equations*. 1998.
- [17] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2004.
- [18] Karl J. Astrom. *Adaptive Control*, pages 437–450. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [19] R. Penrose. A generalized inverse for matrices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51(3):406–413, 1955.
- [20] Rudolph Emil Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering*, 82(Series D):35–45, 1960.
- [21] Petros A Ioannou and Jing Sun. Robust adaptive control, 2012.
- [22] Jing Na, Xuemei Ren, and Yuanqing Xia. Adaptive parameter identification of linear {SISO} systems with unknown time-delay. *Systems & Control Letters*, 66:43 – 50, 2014.
- [23] Oscar Gomez, Yury Orlov, and Ilya V. Kolmanovsky. On-line identification of {SISO} linear time-invariant delay systems from output measurements. *Automatica*, 43(12):2060 – 2069, 2007.

-
- [24] Y. Orlov, L. Belkoura, J.P. Richard, and M. Dambrine. Adaptive identification of linear time-delay systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13(9):857–872, 2003.
- [25] C.M. Brown and D.J. Coombs. *Notes on Control with Delay*. Number no. 387 in Department of Computer Science: Technical report. University of Rochester, [Department of] Computer Science, 1991.
- [26] D. M. Schneider. Control of processes with time delays. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 24(2):186–191, Mar 1988.
- [27] Ligang Wu, Hak Keung Lam, Yuxin Zhao, and Zhan Shu. Time-delay systems and their applications in engineering 2014. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 2015.
- [28] J. Chiasson; J. J. Loiseau. *Applications of Time Delay Systems*, volume 352. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. Lecture Notes in Control and Information Sciences.
- [29] M. Krstic. *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, 2010.
- [30] M. Krstic. Input delay compensation for forward complete and strict-feedforward nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(2):287–303, Feb 2010.
- [31] T. B. Šekara and M. R. Mataušek. Optimization of pid controller based on maximization of the proportional gain under constraints on robustness and sensitivity to measurement noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(1):184–189, Jan 2009.
- [32] M.P. Lazarević and D.Lj. Debeljković. Finite time stability analysis of linear autonomous fractional order systems with delayed state. *Asian Journal of Control*, 7(4):440–447, 2005.
- [33] J. Kozłowski and Z. Kowalczyk. On-line parameter and delay estimation of continuous-time dynamic systems. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 25(2):223–232, 2015.
- [34] Y. Orlov, L. Belkoura, J. P. Richard, and M. Dambrine. On identifiability of linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(8):1319–1324, Aug 2002.

-
- [35] Y. Orlov, I. V. Kolmanovsky, and O. Gomez. Delay estimation in linear systems using output feedback. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 858–863, Dec 2006.
- [36] J. Tuch, A. Feuer, and Z. J. Palmor. Time delay estimation in continuous linear time-invariant systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(4):823–827, Apr 1994.
- [37] G.A. Baker and P. Graves-Morris. *Padé Approximants*. Encyclopedia of Mathematics an. Cambridge University Press, 1996.
- [38] W. Harmon Ray and Demetrios G. Lainiotis. *Distributed parameter systems : identification, estimation, and control / edited by W. Harmon Ray, Demetrios G. Lainiotis*. M. Dekker New York, 1978.
- [39] A.I. Saichev and W. Woyczynski. *Distributions in the Physical and Engineering Sciences, Volume 2: Linear and Nonlinear Dynamics in Continuous Media*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Springer New York, 2013.
- [40] Ruth Curtain and Kirsten Morris. Transfer functions of distributed parameter systems: A tutorial. *Automatica*, 45(5):1101–1116, 5 2009.
- [41] D.G. Duffy. *Transform Methods for Solving Partial Differential Equations, Second Edition*. Symbolic & Numeric Computation. Taylor & Francis, 2004.
- [42] M. P. Polis and R. E. Goodson. Parameter identification in distributed systems: A synthesizing overview. *Proceedings of the IEEE*, 64(1):45–61, Jan 1976.
- [43] Thierry Poinot, Jean-Claude Trigeassou, and Jun Lin. Parameter estimation of fractional models: Application to the modeling of diffusive systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1):319 – 324, 2002. 15th IFAC World Congress.
- [44] B. M. Vinagre, V. Feliu, and J. J. Feliu. Frequency domain identification of a flexible structure with piezoelectric actuators using irrational transfer function models. In *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.98CH36171)*, volume 2, pages 1278–1280 vol.2, Dec 1998.

-
- [45] A. Oustaloup. Fractional order sinusoidal oscillators: Optimization and their use in highly linear fm modulation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 28(10):1007–1009, Oct 1981.
- [46] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu, and F. M. Nanot. Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 47(1):25–39, Jan 2000.
- [47] Xiao Geng Tian and Ya Jun Yu. Fractional order generalized electromagneto-thermo-elasticity with magnetic monopoles and geometrical nonlinearity. 273:162–166, 3 2013.
- [48] Rudolf Hilfer. *Applications of fractional calculus in physics*. World Scientific, 2000.
- [49] Igor Podlubny. *Fractional Differential Equations An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and some of their Applications*. Mathematics in Science and Engineering. Elsevier, 1999.
- [50] Fred Riewe. Nonconservative lagrangian and hamiltonian mechanics. *Phys. Rev. E*, 53:1890–1899, Feb 1996.
- [51] Teodor M. Atanackovic. On a distributed derivative model of a viscoelastic body. *Comptes Rendus Mécanique*, 331(10):687 – 692, 2003.
- [52] Stevan M. Cvetičanin, Dušan Zorica, and Milan R. Rapaić. Generalized time-fractional telegrapher’s equation in transmission line modeling. *Nonlinear Dynamics*, pages 1–20, 2017.
- [53] Milan R. Rapaić and Zoran D. Jeličić. Optimal control of a class of fractional heat diffusion systems. *Nonlinear Dynamics*, 62(1):39–51, 2010.
- [54] A. Pisano, M. R. Rapaić, Z. D. Jeličić, and E. Usai. Sliding mode control approaches to the robust regulation of linear multivariable fractional-order dynamics. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 20(18):2045–2056, 2010.
- [55] Rachid Malti, Mathieu Chevrié, Christophe Farges, and Jocelyn Sabatier. -norm of fractional transfer functions of implicit type. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 26(1–3):223 – 237, 2015.

-
- [56] D. Valério and J.S. da Costa. *An Introduction to Fractional Control*. Control, Robotics and Sensors Series. Institution of Engineering and Technology, 2013.
- [57] T M Atanackovic, S Pilipovic, and D Zorica. A diffusion wave equation with two fractional derivatives of different order. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(20):5319, 2007.
- [58] JQ. Chen Z. Jiao and I. Podlubny. *Distributed-Order Dynamic Systems*. Springer-Verlag London, 2012.
- [59] Carl F. Lorenzo and Tom T. Hartley. Variable order and distributed order fractional operators. *Nonlinear Dynamics*, 29(1):57–98, 2002.
- [60] S. Victor and R. Malti. Model order identification for fractional models. In *2013 European Control Conference (ECC)*, pages 3470–3475, July 2013.
- [61] Jovan K. Popović, Milica T. Atanacković, Ana S. Pilipović, Milan R. Rapaić, Stevan Pilipović, and Teodor M. Atanacković. Remarks on the mass balance for multi-compartmental models; a nonlinear compartmental model. *Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics*, 37(2):217–220, 2010.
- [62] M. R. Rapaić, A. Pisano, E. Usai, and Z. D. Jeličić. Adaptive identification of the commensurate order in fractional processes by means of variable-order operators. In *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 6879–6884, Dec 2012.
- [63] M. R. Rapaić and A. Pisano. Variable-order fractional operators for adaptive order and parameter estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(3):798–803, March 2014.
- [64] Rachid Malti, Tarek Raïssi, Magalie Thomassin, and Firas Khemane. Set membership parameter estimation of fractional models based on bounded frequency domain data. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(4):927 – 938, 2010.
- [65] Stéphane Victor, Rachid Malti, Hugues Garnier, and Alain Oustaloup. Parameter and differentiation order estimation in fractional models. *Automatica*, 49(4):926 – 935, 2013.
- [66] Tomislav B. Šekara. *Frakcioni sistemi upravljanja*. Akademska misao, Istočno Sarajevo, 2011.

- [67] Slobodan Milojković. *Teorija električnih kola*. Svjetlost Sarajevo, 1991.
- [68] Milan R. Rapaić. *Optimalno i suboptimalno upravljanje klasom sistema sa raspodeljenim parametrima*. PhD thesis, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, 2011.
- [69] David E Goldberg. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1989.
- [70] R. Eberhart and J. Kennedy. A new optimizer using particle swarm theory. In *Micro Machine and Human Science, 1995. MHS '95., Proceedings of the Sixth International Symposium on*, pages 39–43, Oct 1995.
- [71] M.N. Kapetina, M.R. Rapaić, and Z.D. Jeličić. Two-stage adaptive estimation of irrational linear systems. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, 78:213 – 219, 2017.
- [72] S. Sastry and M. Bodson. *Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness*. Prentice Hall advanced reference series: Engineering. Prentice Hall, 1989.
- [73] S.G. Krantz and H.R. Parks. *The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications*. Birkhäuser, 2002.
- [74] A.S. Elwakil, A. Allagui, B.J. Maundy, and C. Psychalinos. A low frequency oscillator using a super-capacitor. *{AEU} - International Journal of Electronics and Communications*, 70(7):970 – 973, 2016.
- [75] M. N. Kapetina, M. R. Rapaić, A. Pisano, and Z.D. Jeličić. Adaptive estimation of the gain, order and delay for a class of fractional-order systems, icfda. In *International Conference on Fractional Differentiation and its Applications*, Novi Sad, Serbia,, July 2016.
- [76] M. N. Kapetina, M. R. Rapaić, A. Pisano, and Z.D. Jeličić. Simultaneous estimation of gain and delay for linear stationary systems. In *International Conference on Electrical, Electronic and Computing Engineering, IcETRAN*, Srebrno jezero, Serbia,, Jun 2015.
- [77] D. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1999.

-
- [78] J.P. LaSalle and S. Lefschetz. *Stability by Liapunov's direct method: with applications*. Mathematics in science and engineering. Academic Press, 1961.
- [79] E. A. Carlen. Chapter 3 of calculus++: The symmetric eigenvalue problem. Georgia Tech, 2003.
- [80] Karl J. Åström and Bjorn Wittenmark. *Adaptive Control*.
- [81] George T. Gilbert. Positive definite matrices and sylvester's criterion. *The American Mathematical Monthly*, 98(1):44–46, 1991.
- [82] M. N. Kapetina, P. Lino, G. Maione, and M. R. Rapaić. Estimation of non-integer order models to represent the pressure dynamics in common-rail natural gas engines. In *20th IFAC World Congress Toulouse, France*, pages 15116–15121, July 2017.
- [83] C. Amorese, S. De Matthaeis, O. De Michele, and A. Satriano. The gaseous fuel option: LPG and CNG. In *Int. Conference on vehicles alternative fuel system and environmental protection*, Dublin, Ireland, July 6-9 2004.
- [84] H.H. Geok, T.I. Mohamad, S. Abdullah, Y. Ali, and A. Shamsudeen. Experimental investigation of performance and emissions of a sequential port injection compressed natural gas converted engine. *SAE Technical Papers*, 2009.
- [85] M. Baratta, H. Kheshtinejad, D. Laurenzano, D. Misul, and S. Brunetti. Modelling aspects of a CNG injection system to predict its behavior under steady state conditions and throughout driving cycle simulations. *J. of Natural Gas Science and Engineering*, 24:52–63, 2015.
- [86] P. Lino, B. Maione, and C. Amorese. Modelling and predictive control of a new injection system for compressed natural gas engines. *Control Engineering Practice*, 16:1216–1230, 2008.
- [87] P. Lino and G. Maione. Switching fractional-order controllers of common rail pressure in compressed natural gas engines. In E. Boje and X. Xia, editors, *Proceedings of the 19th IFAC World Congress 2014*, volume Vol. 19, Part 1, pages 2915–2920. IFAC Proceedings on line, Cape Town, South Africa, 24-29 August 2014, 2014.

-
- [88] M.R. Rapać and Ž. Kanović. Time-varying PSO – convergence analysis, convergence-related parameterization and new parameter adjustment schemes. *Information Processing Letters*, 109(11):548–552, 2009.
- [89] Ž. Kanović, M.R. Rapać, and Z.D. Jeličić. Generalized particle swarm optimization algorithm - theoretical and empirical analysis with application in fault detection. *Applied Mathematics and Computation*, 217(24):10175–10186, 2011.
- [90] M.R. Rapać, T. B. Šekara, and M.P. Lazarević. *On Discrete, Finite-Dimensional Approximation of Linear, Infinite Dimensional Systems*, chapter 11. Nova Science Publishers, New York, 2014. ISBN: 978-1-63463-002-3.