



Универзитет у Приштини
Факултет техничких наука у Косовској Митровици

Мр Љубиша Гарић

СИНТЕЗА ВИБРОУДАРНИХ СИСТЕМА

Докторска дисертација

Косовска Митровица
2018. година

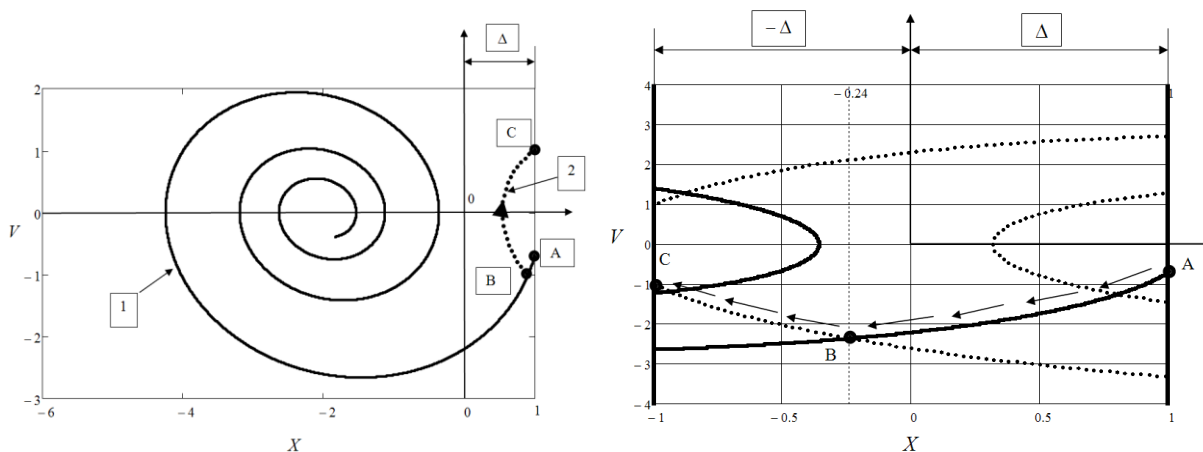
Универзитет у Приштини
Факултет техничких наука у Косовској Митровици

Мр Љубиша Гарић

СИНТЕЗА ВИБРОУДАРНИХ СИСТЕМА

Синтеза једне класе виброударних система, линеарни системи у интервалима између судара и оптимални периодични виброударни режими

Докторска дисертација



Ментор
Проф. др Владимир Раичевић

Косовска Митровица
2018. година

СИНТЕЗА ВИБРОУДАРНИХ СИСТЕМА

А б с т р а к т

Предмет ове докторске дисертације су анализа и синтеза праволинијских виброударних система. Истражени су виброударни системи са периодичним кретањем, где је усвојено да је период осциловања једнак или сразмеран периоду спољашње принудне силе. При анализи кретања виброударног система позната је једначина кретања, као и принудна сила, при томе се истражује постојање различитих виброударних режима, када се посматра један временски интервал кретања између два узастопна удара. Након извршене анализе, истражује се синтеза, при чему је позната једначина кретања и треба одредити принудну силу (управљање), тако да се одреди и дефинише минимално време кретања (оптимално време), оптимално управљање и оптимална путања.

Тема ове докторске дисертације је актуелна, јер се виброударни системи користе у скоро свим областима индустрије. За напредовање технолошких процеса, треба обезбедити услове, који реалне режиме рада машина доводе до оптималних режима рада. Разноврсност виброударних система, као и разноврсност рачунарских метода захтева решавање проблема анализе и синтезе виброударних система, како би добили резултате који се могу применити.

Виброударни режими чине основу рада великог броја машина које се користе у индустрији, као што су: машине за забијање и извлачење шипова, набијање земљишта, за бушење и сечење, дробљење и млевење материјала, набијање бетона, итд.

Када се истражује развој производње у индустрији, главни задатак је истражити ефикасност постојеће технике или нове технике која треба да замени постојећу технику. За усавршавање постојећих виброударних система, као и за моделирање и конструисање нових виброударних система, потребно је истражити анализу и оптималну динамичку синтезу ових система. На основу добијених резултата треба да се реши задатак о ефикасности система, тј. да ли треба да се усаврши постојећи систем или да се конструише нови систем.

У овој докторској дисертацији истражена је динамика праволинијских једномасених и вишемасених виброударних система, уз захтев да се у систему реализује оптимални периодични виброударни режим. У том циљу, развијена је и приказана оригинална методологија за анализу и оптималну динамичку синтезу система са периодичним виброударним режимом. Ова методологија је приказана и

илустрована на седам примера, тј. модела, како би добила на значају и постала алгоритам, који се може применити. При томе, треба нагласити следеће: истражени су модели који представљају апстракцију реалних виброударних система; усвојено је да је систем линеаран у временским интервалима између два узастопна удара; за решавање проблема оптималног управљања користи се Понтрјагинов принцип максимума; користе се нове информационе технологије (математички софтвери: Matchad 14, Wolfram Matematika7 и Matlab R2007) за прорачун и графичку визуелизацију динамике виброударних система.

У овој докторској дисертацији приказани су следећи резултати: 1) резултати истраживања изведених у анализи динамике виброударних система, као и резултати изведене оптималне динамичке синтезе за три основна теоријска модела, од којих су два са пригушењем и једним степеном слободe, док је један без пригушења и са два степена слободe; 2) резултати истражене оптимизације рада за покретни део виброчекића Daedong; 3) резултати изведене оптималне динамичке синтезе за сложеније моделе, који су добијени спајањем основних једномасених модела, при чему се у овим системима реализује оптимални периодични виброударни режим.

На основу резултата који су добијени истраживањем и представљени у овој докторској дисертацији, истраживање се може наставити у неколико праваца. Први правац односи се на примену приказане методологије на сложеније системе, са више степена слободe. Други правац односи се на примену неке друге методе из теорије оптималног управљања виброударним системима. Трећи правац односи се на истраживање оптималне динамичке синтезе виброударних система са путањама које нису праволинијске, итд.

Кључне речи: виброударни систем, анализа и синтеза (оптимизација) виброударних процеса, Понтрјагинов принцип максимума, минимално (оптимално) време, оптимална путања, оптимално управљање.

THE SYNTHESIS OF THE VIBRO-IMPACT SYSTEMS

A b s t r a c t

The subject of this doctoral dissertation are analysis and synthesis of the straight-line vibro-impact systems. Vibro-impact systems with a periodic motion are researched, whereby it is assumed that the oscillation period is equal or proportional to the period of the external coercive force. In analysis of the vibro-impact system motion the motion equation is known, as well as the external force, whereby the existence of various vibro-impact regimes is explored, while a single time interval of the system motion between two consecutive impacts is observed. After performed analysis, the synthesis is researched, whereby the motion equation is known and it is necessary to determine the external force (control) which defines and determines minimal motion time (optimal time), optimal control and optimal trajectory.

The item of this doctoral dissertation is actual, because vibro-impact systems are used at almost all industrial areas. For making the progress of technological processes, it is needed to ensure conditions which real regimes of the machines working, lead to the optimal working regimes. The variety of vibro-impact systems, as well as the variety of computational methods, require the solution of problems regarding to vibro-impact systems analysis and synthesis, in order to get applicable results.

Vibro-impact regimes are working basis of a large number of machines, which are used in industry, such as: machines for driving and pulling piles, soil compaction, for cutting and drilling, crushing and grinding materials, concrete compression etc.

For the research of the production development in industry, the main aim is to investigate the efficiency of existing technics, or of new technics which need to replace the existing technics. In order to improve existing vibro-impact systems, as well as for modelling and construction of new vibro-impact systems, it is needed to perform their analysis, as well as their optimal dynamic synthesis. Based on obtained results, it is necessary to solve the problem of the system efficiency, which means whether to improve the existing system, or to construct the new system.

In this doctoral dissertation the dynamics of the straight-line, single-mass and multi-mass vibro-impact systems, along with the requirement for the realisation of the optimal periodic vibro-impact regime, is researched. In this aim, the original methodology for analysis and optimal dynamic synthesis of the system with periodic vibro-impact regime is developed and presented. This methodology is presented and illustrated with seven examples i.e. models,

in order to get importance and become an applicable algorithm. Thereby, it is need to emphasize the following: models which are the abstraction of the real vibro-impact systems are researched; it is adopted that the system is linear in time intervals between two consecutive impacts; for solving the problem of optimal control it is used Pontrjagin's principle of maximum; new informatic technologies are used (mathematical softwares: Mathcad 14, Wolfram Mthematica 7 and Mathlab R2007) for the computation and graphicall visuelization of the vibro-impact system dynamics.

In this doctoral dissertations are presented the following results: 1) results of the research performed in analysis of the vibro-impact system dynamic, as well as results of the performed optimal dynamic synthesis for three basic theoretical models, which from, two are with damping and one degree of freedom, while one is without damping and with two degrees of freedom; 2) results of the researched optimization of the work for movable part of the vibro-hummer Daedong; 3) results of the performed optimal dynamic synthesis for more complex models, obtained by connecting basic one-mass models, whereby the optimal periodic vibro-impact regime is realized in these systems.

Based on the results obtained in the research, presented in this doctoral dissertation, the investigation can be continued in couple directions. The first direction is related to the use presented methodology on more complex systems, with more degrees of freedom. The second direction is related to the use of some other method from the theory of the optimal control of vibro-impact systems. The third direction is related to the investigation of the optimal dinamic synthesis of vibro-impact systems with trajectories which are not the straight-line, etc.

Key words: vibro-impact systems, analysis and synthesis (optimization) of vibro-impact regimes, Pontrjagin's principle of maximum, minimal (optimal) time, optimal trajectory, optimal control.

Желим да изразим искрену захвалност свима који су помогли да се ова дисертација појави у овом облику.

Захваљујем се ментору проф. др. Владимиру Раичевићу на поверењу и корисним сугестијама током израде овог рада.

Захваљујем се свим професорима и асистентима са Катедре за механику на сарадњи и подршци, на стручној и научној помоћи, као и на корисним сугестијама током израде ове дисертације.

Највише се захваљујем својој породици, супрузи Марији и сину Антонију, који су разумели, колико је потребно напорно радити да би се постигао успех у данашње време. Хвала породици за менталну и физичку подршку, што ми је помогло да прођем кроз велике тешкоће при истраживању и изради дисертације.

Љубиша Гарић

О успеху

Н.н. век - Хесиод: Пре успеха богови одредише да се човек озноји.

О синтези

Н.н. век - н.н.: Минуте синтезе треба платити годинама анализе.

О максимуму и минимуму

XVIII. век - Леонард Ојлер: Често је веома тешко одредити израз, који би био максимум или минимум.

О оптимизацији

XX. век - Ципкн: Оптимизација је централни проблем науке, технике, као и свакодневног живота.

Садржај

Синтеза виброударних система

Увод 1

I. Први део

Теоријске основе динамике удара и осцилаторног система са једним степеном слободе-основног принудно пригушеног осцилатора, методе за истраживање динамике виброударног система и основе оптималног управљања процесима-кретањем система

7

I.1. Основе стереомеханичке теорије удара 8

I.1.1. Основне поставке 8

I.1.2. Коефицијент успостављања 10

I.1.3. Централни и управни (нормални) судар два тела 12

I.1.4. Изгубљена кинетичка енергија материјалне тачке при удару о глатку непокретну површ 14

I.2. Математичко описивање кретања праволинијског једномасеног осцилаторног система 15

I.2.1. Праволинијски линеарни једномасени принудни осцилатор са вискозним пригушењем – основни осцилатор 16

I.2.2. Општа решења хомогеног дела диференцијалне једначине кретања основног осцилатора 17

I.3. Методе за истраживање динамике виброударних система 21

I.4. Оптимално управљање процесима - кретањем система 21

II. Други део

Оптимална синтеза праволинијских једномасених и вишемасених неаутономних виброударних система са вискозним пригушењем или без отпора, линеарни системи у интервалима између судара и периодични виброударни режими (непарни $l = 1, 3, \dots$; парни $l = 2, 4, \dots$) 23

II.1. Модел виброударне динамике неаутономног једномасеног система са вискозним пригушењем и једним граничником; принудне пригушене праволинијске осцилације једномасеног једнострано ударног осцилатора	24
II.1.1. Опште решење диференцијалне једначине кретања система у интервалима између удара	25
II.1.2. Услови (области) постојања и стабилности периодичних виброударних режима (непарни $l = 1, 3, \dots$; парни $l = 2, 4, \dots$)	27
II.1.3. Оптимални периодични виброударни режим (оптимално управљање силом, оптимална путања)	46
II.2. Истраживање оптимизације рада покретног дела виброчијекића Daedong	61
II.2.1. Изглед и принципијелна шема виброчијекића Daedong, математички модел и диференцијална једначина кретања у интервалима између судара	61
II.2.2. Оптимални периодични виброударни режими (оптимално управљање силом, оптимална путања)	64
II.3. Двомасени виброударни систем настао спајањем два једномасена једнострано ударна осцилатора	74
II.3.1. Оптимални периодични виброударни режими (оптимално управљање силом, оптимална путања)	75
II.4. Модел виброударне динамике неаутономног једномасеног система са вискозним пригушењем и два граничника; принудне пригушене праволинијске осцилације једномасеног обострано ударног осцилатора	85
II.4.1. Опште решење диференцијалне једначине кретања система у интервалима између удара	87
II.4.2. Услови (области) постојања и стабилности периодичних виброударних режима (непарни $l = 1, 3, \dots$; парни $l = 2, 4, \dots$)	97
II.4.3. Оптимални периодични виброударни режими (оптимално управљање силом, оптимална путања)	116
II.4.3.1. Први полупериод (кретање од десног до левог граничника)	118
II.4.3.2. Други полупериод (кретање од левог до десног граничника)	126

II.5. Двомасени виброударни систем настао спајањем једномасеног двостраног виброударног осцилатора и једномасеног једнострано ударног осцилатора	134
II.5.1. Оптимални периодични виброударни режими (оптимално управљање силом, оптимална путања)	135
II.6. Тромасени виброударни систем настао спајањем једномасеног двостраног виброударног осцилатора и два једномасена једнострано ударна осцилатора	143
II.6.1. Оптимални периодични виброударни режими (оптимално управљање силом, оптимална путања)	144
II.7. Модел виброударне динамике неаутономног двомасеног система са два степена слободе и једним непокретним граничником; принудне непригушене осцилације двомасеног једнострано ударног осцилатора са два степена слободе	151
II.7.1. Општа решења диференцијалних једначина кретања система у интервалима између удара	155
II.7.2. Услови (области) постојања и стабилности периодичних виброударних режима (непарни $l = 1, 3, \dots$; парни $l = 2, 4, \dots$)	159
II.7.3. Оптимални периодични виброударни режими (оптимално управљање силом, оптимална путања) прве масе	178
II.7.3.1. Истраживање оптималног периодичног виброударног режима ударне (прве) масе за прву групу параметара система	186
II.7.3.2. Истраживање оптималног периодичног виброударног режима ударне (прве) масе за другу групу параметара система	190
 Резултати истраживања и закључак	 199
 Л и т е р а т у р а	
 Биографски подаци	

УВОД

Под ударом подразумевамо механичко дејство између тела које се креће и тела које мирује. Ако краткотрајно дејство настаје између покретних тела тада говоримо о судару. Терминолошки разликујемо удар и судар, иако се ради о истоветном механичком феномену-дејству ударног импулса. У механици појам судара је општији од појма удара, па заједно удар и судар често краће пишемо судар. Удар и судар су појаве нелинеарне природе и са алтернацијом и дисконтинуитетом векторских и скаларних кинетичких параметара система [2], [3], [4], [5], [8], [9], [40], [45], [84], [88].

Под вибрационим (осцилаторним) системом, или краће осцилатором, подразумевамо материјални (механички) систем чије се кретање понавља у једнаким или различитим временским интервалима. Најпростији осцилатор у својој класи називамо основним осцилатором.

Осцилаторе класификујемо на аутономне (сопствене, слободне) и неаутономне (неслободне, принудне). Такође, разликујемо: конзервативне и неконзервативне осцилаторе, линеарне и нелинеарне осцилаторе, осцилаторе са једним, као и више степени слободе осциловања, осцилаторе са праволинијским и криволинијским путањама, осцилаторе без отпора (непригушене) и осцилаторе са отпором сувог или вискозног трења (пригушене), итд.

Систем у којем се појављују (врше) вибрациона (осцилаторна) кретања и настају (дешавају се) удари (или удари и судари, или само судари), називамо виброударним системом, односно осцилатором са ударом (сударом) или ударним (сударним) осцилатором. Најпростији ударни осцилатор у својој класи називамо основним виброударним системом.

Под ударним паром подразумевамо захват два саставна члана који се ударају (сударају). Структуру виброударног система чине најмање један или више ударних парова. Састављањем (спајањем, синтезом) простијих (основних) ударних осцилатора настају сложенији (интегрисани) системи – сложеније несиметричне или симетричне виброударне структуре.

Виброударне системе можемо разликовати на начин како смо то претходно урадили за осцилаторе. У овој дисертацији виброударне системе класификујемо:

- према броју покретних маса, на једномасене и вишемасене системе;
- према броју ударних парова, на системе са једним ударним паром и системе са више ударних парова;
- према облику кретања, на виброударне системе са периодичним, прелазним, стабилизирајућим и другим режимима кретања.

Због широке примене виброударних дејства и појединих облика режима кретања, најчешће периодичних режима, укључујући и проблем управљања при коме се процес обавља оптимално у неком смислу, од посебног значаја су одговарајућа теоријска, нумеричка и експериментална истраживања динамике (кинетике) виброударних система или виброударне динамике система. У оквиру истраживања динамике виброударних система разликујемо анализу и синтезу ових система.

У техничкој пракси често се широко примењују виброударна дејства: виброударна дејства услед зазора у кинематским паровима, виброударна дејства у функцији остварења технолошких процеса, виброударна дејства у функцији пригушења примарних осцилација, виброударна дејства код машина за испитивање ефеката тог дејства на уређаје, итд.

Виброударни режими чине основу рада широке класе машина, уређаја и конструкција различитих функционалних примена. Ово се односи на машине за забијање и извлачење шипова, набијање и растресање земљишта, дробљење и млевење материјала, набијање бетонских материјала и материјала за ливење, лабораторијске столове за виброударне тестове, разне машине за бушење, машине за комадање материјала, ротационе машине за резање, итд. За ове класе система карактеристични су периодични режими кретања, који се спроводе као принудне осцилације или аутоосцилације [1], [8], [12], [17], [19], [20], [24], [53], [54].

Услови за остваривање оптималних процеса у материјалним динамичким системима могу бити врло различити и критеријуми оптималности произилазе непосредно из техничко-економских захтева који се постављају у применама система аутоматског управљања. Па се критеријум оптималности може поставити тако да се цео процес у систему обавља у што је могуће краћем времену, уз најмањи утрошак расположиве енергије, са највећим дometом за одређену расположиву енергију, уз најмање трошкове производње, са највећом финансијском добити и овоме слично. Из овога се види да се у проучавању оптимизације динамичких система аутоматског управљања полази од одређених унапред постављених критеријума оптималности и да

се према томе у проблемима оптимизације динамичких система не проверава целисходност и правилан избор ових критеријума. Избор критеријума оптимизације динамичких система представља посебан проблем, који је, обично, више или мање сложене природе.

Време трајања процеса управљања представља један од основних показатеља својства динамичких система аутоматског управљања, јер скраћивање времена прелазних процеса при регулисању многих техничких постројења и уређаја доводи до повећања продуктивности, бржег реаговања, прецизнијег извршења одређених операција и овоме слично.

Динамички системи аутоматског управљања, оптимални по времену, реализују се помоћу програмабилних логичких контролера (plc). Ови контролери управљају технолошким процесима помоћу програма и они представљају управљачки део система аутоматског управљања.

Виброударне системе у погледу управљања основних подсистема-ударних осцилатора, сврсисходно је поделити у три групе: 1) системи енергетског управљања-системи који се управљају силом; 2) системи импулсног управљања; и 3) системи мешовитог (енергетског и импулсног) управљања. Треба још истаћи да се виброударни системи по принципу дејства деле на три групе: 1) аутоосцилаторни системи у којима се управљање синтетише као функција фазних координата (Лагранжеових или Хамилтонових променљивих); 2) системи временског дејства у којима се управљање синтетише као функција времена; и 3) мешовити системи у којима се користи свеукупност прва два управљања. Процес синтезе нових сложенијих (интегрисаних) шема-система у неким случајевима једноставно се решава (одабиром саставних елемената-делова система и системом регулатора управљања), а понекад захтева више експеримента и комплексно теоретско истраживање.

Актуелност одабране теме условљена је широко распрострањеним виброударним системима у свим областима индустрије, и високим степеном развоја виброударних система. За наставак и напредовање технолошких процеса, треба да се обезбеде услови, који реалне режиме рада машина доводе до оптималних режима рада. Разноврсност виброударних система и разноврсност рачунарских метода захтева решења задатака анализе, као и истраживање синтезе динамичке структуре, са циљем да се добију резултати који најбоље приказују процесе у виброударним системима.

Добијање решења тачним методама је веома дуготрајан и тежак поступак, и генерално ово доводи до потребе да се у прорачунима користе линеарне диференцијалне једначине, да би се дошло до резултата који се могу применити.

Већина радова о виброударним системима, посвећено је истраживању динамике модела различитих система, и то је у суштини анализа система. У тим радовима познати су параметри система и принудна сила, испитују се услови за постојање разних режима. У последњих неколико деценија појавиле су се нове тенденције, у вези са задацима избора најповољнијих, односно оптималних (на било који начин) режима рада машина. У задацима анализе динамике виброударних система са познатим вредностима сила, треба одредити и анализирати кретање система, док у новим задацима (синтеза виброударних система), силе нису потпуно познате, него само делимично (једначине кретања), а други део силе (непознати део, управљање) треба одредити на такав начин, да понашање система буде оптимално у односу на неки критеријум [21], [22], [25], [43].

Поставка задатка синтезе, тј. изградња оптималног система када се пројектује нека машина, прво обухвата оне особине, које сваки систем научно приказују (или би требало да прикажу) на неки оптимални начин, јер када одаберемо оптимални начин, ми сматрамо да је бољи од других могућих начина. Друго, познавање граничних могућности неког динамичког модела, омогућава да се направи закључак о ефикасности постојећих система и да се реши питање о томе да ли је потребно да се иде на њихово усавршавање, или ће то бити непрактично. Задатак синтезе виброударних система, тј. изградња оптималног кретања, је задатак одређивања принудне силе, која испуњава неке услове оптималности и остварује режим одређеног облика. Код периодичних виброударних система удар се реализује за време које је веома мало у односу на период принудне силе, и то време не мора да се узме у прорачун. То омогућава да се уведе управљање периодичним режимом виброударних система помоћу програмабилних логичких контролера (plc), који реализују одређене етапе кретања. У том случају дефинисање карактеристика контролера своди се на налажење вредности одговарајућих нивоа управљања и на тражење времена прелаза.

Прва истраживања виброударних дејства датирају још од тридесетих година двадесетог века, а новији талас интересовања у динамици виброударних система настаје крајем двадесетог века, и интензивира се са развојем теорије бифуркација и тумачења хаотичних режима [50], [52], [56], [57], [70].

Најзначајнији научни резултати који су унапредили знања о динамици виброударних система објављени су у радовима [5], [6], [7], [8], [25], [26], [28], [58], [59], итд. У овим радовима аутори су користили различите методе за одређивање решења постављеног задатка динамике виброударних система, тако што су најчешће полазили од опште стереомеханичке теорије удара (судара). Најновији радови засновани су на истраживањима која су спроведена нумеричким и експерименталним путем на основу аналитичких метода.

Проблем ефективности постојеће или нове технике која треба да замени постојећу технику, постаје једно од кључних питања индустријских програма развоја производње. У том смислу актуелан је проблем динамичке синтезе виброударних система у оквиру структура машина и механизма различитих намена. Један од приступа решавања тог проблема је коришћење оптималне динамичке синтезе, при којој се на почетку решава математички задатак оптималног управљања, а затим се довољно детаљно синтетички структурира шема. Оптималну динамичку синтезу неких виброударних система без отпора или са отпором, при чему је систем линеаран у интервалима између судара, истраживали су: Лавендел [59], В.И.Бабицки [5], А.Е.Кобрински [48], Виба [25], и многи други.

Основни и главни део (подсистем) једног виброударног система је његов покретни део, који чине један или више осцилатора са ограниченим елоганцијама. На тај начин истраживање динамике виброударног система практично се своди на истраживање виброударне динамике осцилатора. Код ових истраживања разликујемо анализу виброударних процеса и синтезу виброударних процеса. У дисертацији разматрамо три основна теоријска модела-једномасени једнострано ударни принудно пригушени осцилатор, једномасени обострано ударни принудно пригушени осцилатор и принудни двомасени осцилатор са два степена слободe-као апстракције реалних виброударних система. Анализа виброударних процеса за ова три модела биће у функцији постављања (одређивања) услова (области) постојања и стабилности периодичних виброударних режима.

Предмет ове дисертације је виброударна динамика једне класе материјалних система-праволинијски неаутономни једномасени и вишемасени виброударни системи, са вискозним пригушењем и без отпора. Истражујемо виброударну динамику ове класе система уз захтев да се у систему производи (реализује) оптимални периодични виброударни режим.

У том циљу, постављамо оригиналну методологију за спровођење оптималне динамичке синтезе система са периодичним виброударним режимом. Методологију показујемо кроз седам примера-модела (укључујући и напред поменута три основна теоријска модела) како би ова методологија добила на значају и као алгоритам. При томе: разматрамо моделе који су апстракција реалних виброударних система; следимо напред поменуту идеју, да је систем линеаран у интервалима између судара; за решавање проблема оптималног управљања користимо Потрјагинов принцип максимума [74], [75], [76], [77]; и користимо нове информационе технологије (софтверски алати - програми из софтверских пакета: Mathematica⁷ и Matlab R2007) за прорачуне и графичку визуелизацију динамике виброударних система, тј. анализу и синтезу (оптимизацију) виброударних процеса.

Дисертација је подељена у два дела, који представљају јединствену целину, и то: Први део-који чине теоријске основе динамике удара (основе стереомеханичке теорије удара) и осцилаторног система са једним степеном слободе-основног праволинијског принудно пригушеног осцилатора, методе за истраживање динамике виброударног система и основе оптималног управљања процесима-кретањем система; и Други део-који обухвата динамичку анализу два теоријска модела са једним степеном слободе и један теоријски модел са два степена слободе, услове (области) постојања (стабилности) виброударних режима (непарни $l = 1, 3, \dots$; парни $l = 2, 4, \dots$), оптималну динамичку синтезу ових система, истраживање оптимизације рада покретног дела виброчекића Daedong, као и синтезу двомасених и вишемасених виброударних система (три примера) насталих спајањем оптималних основних теоријских модела.

Из класичне механике (векторске Њутнове, аналитичке Лагранжеове и аналитичке Хамилтонове динамике) издвојиле су се и развиле посебне области, као што су: теорија удара, теорија стабилности и стабилизације кретања, теорија осцилација, теорија оптималног управљања процесима-кретањем система и друге; у новије време развија се и механика програмираног кретања система. У дисертацији систематизујемо потребна позната знања из поменутих научних области, за истраживање динамике виброударних система који ће имати оптимални периодични виброударни режим [12], [58], [59].

I. Први део

Теоријске основе динамике удара и осцилаторног система са једним степеном слободe-основног принудно пригушеног осцилатора, методе за истраживање динамике виброударног система и основе оптималног управљања процесима-кретањем система

За потребе синтезе изабране класе виброударних система-праволинијских виброударних система са вискозним пригушењем и периодичном принудном силом, у овом делу дисертације: 1) објашњавамо основе опште стереомеханичке теорије удара (судара) са освртом на коефицијент успостављања по Њутновој хипотези, централни и управни (нормални) централни судар и изгубљену кинетичку енергију материјалне тачке при удару о глатку непокретну површ; 2) наводимо другу Њутнову аксиому, Лагранжеову једначину друге врсте и Хамилтонове канонске једначине првог реда за математичко описивање кретања праволинијског осцилаторног система са једним степеном слободe - основног осцилатора, а разматрамо и општа решења хомогеног дела диференцијалне једначине кретања основног осцилатора; 3) наводимо методе које се користе за истраживање динамике виброударних система; и, на крају, 4) наводимо основе теорије оптималног управљања процесима, тј. кретањем система уз напомену да за оптимизацију периодичних виброударних режима користимо Понтрјагинов принцип максимума [5], [65], [78], [79], [84], [85], [86]. При синтези (оптимизацији) система посматра се један интервал кретања између два узастопна удара и одређује се најмање време кретања, тј., систем ће бити оптималан у погледу времена кретања између два узастопна удара.

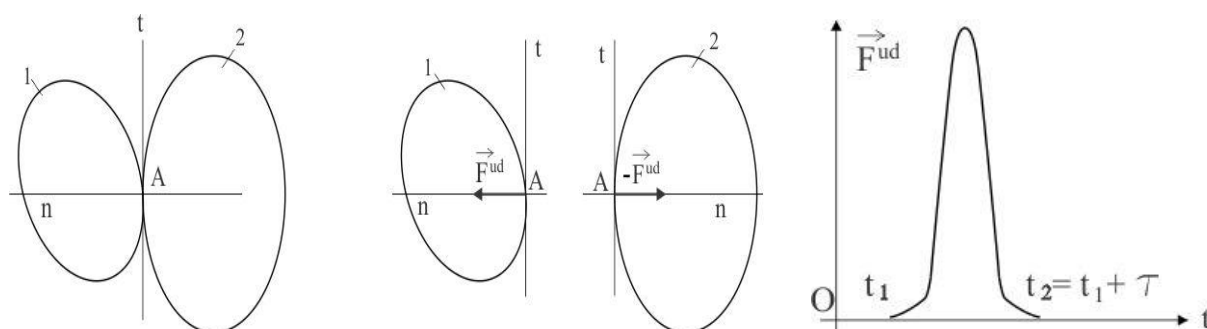
Сила вискозног пригушења

Ако сила отпора зависи само од брзине $F_w = F_w(v)$, развијањем ове функције у Маклоренов ред у околини нулте вредности брзине, у теорији осцилација се добија израз за вектор силе вискозног пригушења $\vec{F}_w = -b \cdot \vec{v}$, где је $b = \left(\frac{dF_w}{dv} \right)_{v=0}$, коефицијент вискозног отпора (трења).

I.1. Основе стереомеханичке теорије удара

I.1.1. Основне поставке

У току времена контакта два тела τ , у тачкама контакта, дејствују ударне силе интензитета F^{ud} (слика 1). Ако је t_1 тренутак почетка, а $t_2 = t_1 + \tau$ тренутак краја судара, онде се ударна сила у том временском интервалу мења као на слици 2.



Слика 1.а.Контакт два тела Слика 1.б.Ударне силе. Слика 2.Промена ударне силе.

Ако се ради о материјалној тачки која удара о непокретну глатку површ, онда је према другој Њутновој аксиоми [40], [73], њено кретање описано једначином

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}^{ud} + \vec{F}, \quad (1)$$

где су: m - маса материјалне тачке, \vec{a} - убрзање тачке,

\vec{F}^{ud} - ударна сила која је нормална (управна) на глатку површ,

\vec{F} - резултанта свих осталих неударних сила које дејствују на тачку.

Како је $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$, где је \vec{V} брзина тачке пре удара, из (1) добија се:

$$m \cdot d\vec{V} = \vec{F}^{ud} dt + \vec{F} dt, \quad (2)$$

односно, после интеграције

$$m \cdot \vec{V}' - m \cdot \vec{V} = \int_{t_1}^{t_1+\tau} \vec{F}^{ud} dt + \int_{t_1}^{t_1+\tau} \vec{F} dt, \quad (3)$$

где је \vec{V}' брзина тачке после удара.

Ако у претходној једначини τ тежи нули, односно интензитет ударне силе тежи бесконачности, импулс неударне силе постаје једнак нули, па се може писати

$$m \cdot \vec{V}' - m \cdot \vec{V} = \vec{I}, \quad (4)$$

тј. ударни импулс је

$$\vec{I} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_1 + \tau} \vec{F}^{ud} dt. \quad (5)$$

Ако је t произвољни тренутак из интервала $(t_1, t_1 + \tau)$, онда се (4) може приказати у облику:

$$m \cdot \vec{V}(t) - m \cdot \vec{V} = \vec{I}(t); \quad (6)$$

$$\vec{V}(t) = \vec{V} + \frac{1}{m} \vec{I}(t), \quad (7)$$

$$\text{или} \quad d\vec{r}(t) = \vec{V} dt + \frac{1}{m} \vec{I}(t) dt, \quad (8)$$

где је $\vec{r}(t)$ вектор положаја тачке у било ком тренутку за време трајања удара.

Интеграцијом из (8) добија се:

$$\vec{r}(t) - \vec{r} = \int_{t_1}^t \vec{V} dt + \frac{1}{m} \int_{t_1}^t \vec{I}(t) dt = \vec{V}(t - t_1) + \frac{1}{m} \int_{t_1}^t \vec{I}(t) dt, \quad (9)$$

где је \vec{r} вектор положаја тачке на почетку удара.

На основу теореме о средњој вредности интеграла, једначина (9) добија се у облику

$$\vec{r}(t) - \vec{r} = \left[\vec{V} + \frac{1}{m} \vec{I}_{sr}(t) \right] \cdot (t - t_1), \quad (10)$$

где је $\vec{I}_{sr}(t)$ средња вредност ударног импулса на интервалу (t_1, t) .

У граничном процесу, када $\tau \rightarrow 0 (t \rightarrow t_1)$ добија се да је

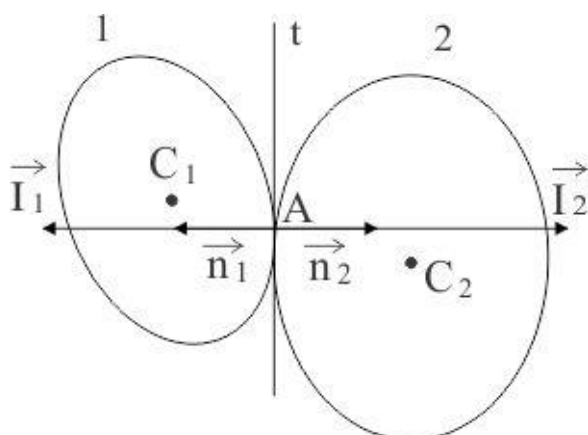
$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) = \vec{r}, \quad (11)$$

где је $\vec{r}'(t)$ вектор положаја тачке на крају удара.

Из (11) следи да се положај тачке током удара не мења. Овај резултат може се уопштити на систем тачака и тела: ни једна тачка система током удара (судара) не мења свој положај.

I.1.2. Коефицијент успостављања

При судару два тела у тачки А, јављају се ударне силе које дејствују на свако од тела. Ударним силама одговарају ударни импулси \vec{I}_1 и \vec{I}_2 , који имају правац заједничке нормале на површи тела у тачки А (слика 3).



Слика 3. Судар два тела.

Процес судара могуће је поделити на две фазе. У првој фази долази до приближавања тела (фаза компресије) у правцу заједничке нормале, при чему се пројекција релативне брзине контактних тачака на нормалу смањује до нуле. Потом долази до друге фазе у којој тела успостављају свој облик у зони контакта. У овој фази, која се назива фазом реституције, долази до промене смера и пораста интензитета нормалне компоненте релативне брзине контактних тачака, до тренутка раздвајања тела.

За даљу анализу уводе се ознаке: $\vec{n} = \vec{n}_2 = -\vec{n}_1$ јединични вектор нормале на заједничку тангентну површ у контактної тачки А (\vec{n}_1 и \vec{n}_2 су јединични вектори унутрашњих нормала тела), \vec{V}_1 и \vec{V}_2 су брзине контактних тачака првог и другог тела пре судара, а \vec{V}'_1 и \vec{V}'_2 су брзине контактних тачака првог и другог тела после судара.

Експериментима је установљено да у фази реституције не долази до потпуног успостављања облика тела, тако да се може усвојити хипотеза (Њутнова хипотеза): пројекције релативних брзина контактних тачака, на правац нормале, непосредно после и пре удара, у константном су односу

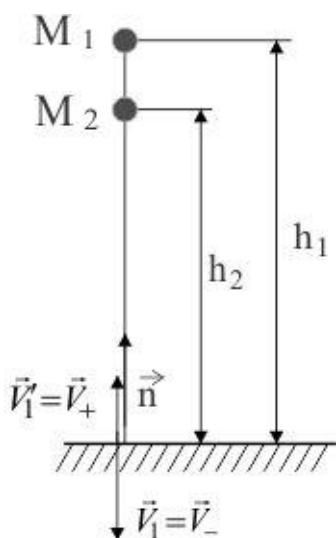
$$\frac{(\vec{V}'_2 - \vec{V}'_1) \cdot \vec{n}}{(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \cdot \vec{n}} = -R . \quad (12)$$

Позитивна константа R назива се коефицијент успостављања (реституције) или коефицијент судара. Њутн је претпоставио да коефицијент R зависи искључиво од физичких својстава тела која се сударају, при чему је $0 \leq R \leq 1$. Када је $R = 0$ ради се о апсолутно нееластичном судару, а када је $R = 1$ судар је апсолутно еластичан. У осталим случајевима $0 \leq R \leq 1$ судар је непотпуно еластичан, или једноставније-еластичан.

Користећи јединичне векторе \vec{n}_1 и \vec{n}_2 релација (12) може се написати у облику

$$\vec{V}'_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{V}'_2 \cdot \vec{n}_2 = -R(\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2). \quad (13)$$

Коефицијент судара R може бити измерен као на слици 4.



Слика 4. Мерење коефицијента судара.

Пусти се куглица из положаја M_1 са висине h_1 , без почетне брзине, па се куглица одбије од хоризонталне површине и после одскока долази до највеће висине h_2 , у положај M_2 . Измерене висине у тачкама M_1 и M_2 су редом h_1 и h_2 .

На основу познатих формула брзине куглице пре и после удара су:

$$V_1 = \sqrt{2g \cdot h_1} \quad \text{и} \quad V'_1 = \sqrt{2g \cdot h_2}.$$

Па је коефицијента судара, у ознакама са слике

$$R = -\frac{\vec{V}'_1 \cdot \vec{n}}{\vec{V}_1 \cdot \vec{n}} = \frac{V'_1}{V_1} = \frac{V_+}{V_-} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \leq 1. \quad (14)$$

Кратко о кинематичком, динамичком и енергетском коефицијенту судара

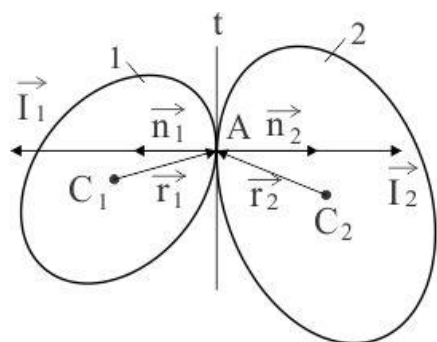
Њутн је претпоставио да коефицијент реституције зависи само од физичких својстава тела. Експерименти су показали да он може да зависи и од брзине и облика тела која се сударају. Овај (Њутнов) коефицијент назива се још и кинематски коефицијент реституције јер успоставља везу између брзина контактних тачака. Раут [16], [18], [84], је увођењем коефицијента трења при судару покушао да изврши

опсежну анализу судара реалних тела. Међутим, овим коефицијентом Раут није узео у обзир појаву деформација у тангенцијалном правцу, током компресије и реституције. Поасон је покушао да превазиђе наведене недостатке Њутнове хипотезе тако што је увео појам динамичког коефицијента успостављања. Осим наведених хипотеза, може се поставити и хипотеза о енергетском коефицијенту реституције.

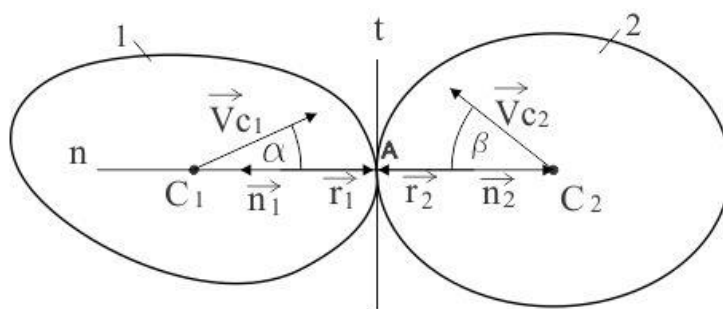
У општем случају кинематски, динамички и енергетски коефицијенти успостављања, разликују се. Увођењем хипотезе о енергетском коефицијенту реституције, отворене су нове могућности у неокласичном прилазу проблемима теорије судара.

1.1.3. Централни и управни (нормални) судар два тела

Током судара два слободна тела, на месту контакта јављају се ударне силе, односно ударни импулси ($\vec{I}_1 = I \cdot \vec{n}_1$ и $\vec{I}_2 = I \cdot \vec{n}_2$), који су истог интензитета и супротног смера (слика 5). Када су површине оба тела глатке, импулси ће имати правац заједничке нормале.



Слика 5. Судар два слободна тела.



Слика 6. Централни судар два тела.

Централни судар је такав судар код кога се средишта маса налазе на правцу нормала у тачки контакта, односно на заједничкој линији дејства ударног импулса (слика 6). У случају централног судара вектори \vec{r}_i и \vec{n}_i су колинеарни, па је векторски производ $\vec{r}_i \times \vec{n}_i = 0$, и то значи да за време судара нема обртања тела.

На основу теореме о промени количине кретања материјалног система при судару поставимо једначине

$$\vec{V}_{C_i}' - \vec{V}_{C_i} = \frac{\vec{I}_i}{m_i} = I \frac{\vec{n}_i}{m_i} \quad (i = 1, 2) \quad (15)$$

и Њутнову хипотезу у облику

$$\vec{V}'_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{V}'_2 \cdot \vec{n}_2 = -R(\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2).$$

Одавде налазимо интензитет ударног импулса

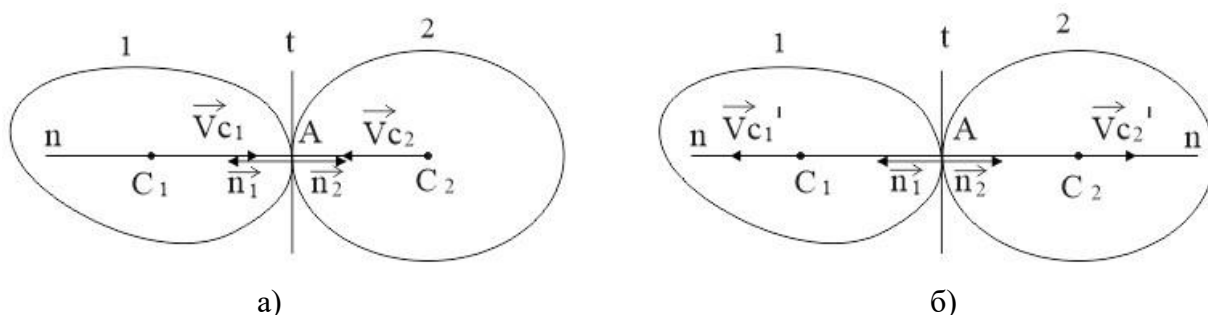
$$I = -(1+R) \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} (\vec{n}_1 \cdot \vec{V}_1 + \vec{n}_2 \cdot \vec{V}_2),$$

или
$$I = (1+R) \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} (V_{C1} \cos \alpha + V_{C2} \cos \beta). \quad (16)$$

Једначине (15) одређују брзине средишта маса после судара:

$$\vec{V}'_{C1} = \vec{V}_{C1} + \frac{(1+R)m_2}{m_1 + m_2} (v_{C1} \cos \alpha + v_{C2} \cos \beta) \vec{n}_1,$$

$$\vec{V}'_{C2} = \vec{V}_{C2} + \frac{(1+R)m_1}{m_1 + m_2} (v_{C1} \cos \alpha + v_{C2} \cos \beta) \vec{n}_2. \quad (17)$$



Слика 7. Управни централни судар: а) пре судара, б) после судара.

Уводимо обележавање: $\vec{V}_{1-} = \vec{V}_{C1}$ и $\vec{V}_{2-} = \vec{V}_{C2}$ за брзине пре судара, $\vec{V}_{1+} = \vec{V}'_{C1}$ и $\vec{V}_{2+} = \vec{V}'_{C2}$ за брзине после судара.

Управни централни судар је специјалан случај централног судара ($\alpha = \beta = 0$), па добијамо одговарајуће једначине:

$$I = (1+R) \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} (V_{1-} + V_{2-});$$

$$V_{1+} = -V_{1-} + (1+R) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (V_{1-} + V_{2-}),$$

$$V_{2+} = -V_{2-} + (1+R) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (V_{1-} + V_{2-}). \quad (18)$$

Ако праволинијску координату Ox поставимо тако, да се поклапа са нормалом n , онда ће у једначинама (18) бити: $V_{1-} = \dot{x}_{1-}$, $V_{1+} = \dot{x}_{1+}$, $V_{2-} = \dot{x}_{2-}$, $V_{2+} = \dot{x}_{2+}$.

I.1.4. Изгубљена кинетичка енергија материјалне тачке при удару о глатку непокретну површ

Кинетичка енергија тачке пре удара је $E_k = \frac{1}{2}m \cdot V^2$, а после удара $E'_k = \frac{1}{2}m \cdot V'^2$,

при чему је њихова разлика

$$E_k - E'_k = \frac{1}{2}m(V^2 - V'^2). \quad (19)$$

Из једнакости $V'_1 = V_1$ и $V'_n = R \cdot |V_n|$ следи

$$V'^2 = R^2 \cdot V_n^2 + V_1^2, \quad V^2 = V_n^2 + V_1^2. \quad (20)$$

Па разлика кинетичких енергија постаје

$$E'_k - E_k = -\frac{1}{2}m(1 - R^2) \cdot V_n^2. \quad (21)$$

При апсолутно еластичном удару ($R = 1$) нема губитака кинетичке енергије, док је код апсолутно нееластичног удара ($R = 0$) губитак енергије највећи.

Израз (21) може се трансформисати у другачији облик. Како је

$|\vec{V}' - \vec{V}| = |\vec{V}'_n + \vec{V}'_t - \vec{V}_n - \vec{V}_t| = |\vec{V}'_n - \vec{V}_n| = \vec{V}'_n + |\vec{V}_n| = R \cdot |\vec{V}_n| + |\vec{V}_n| = (1 + R) \cdot |\vec{V}_n|$, одакле је

$$|\vec{V}_n| = \frac{|\vec{V}' - \vec{V}|}{(1 + R)}, \quad (22)$$

па из (21) и (22) следи

$$E'_k - E_k = -\frac{1}{2}m \frac{1 - R}{1 + R} (\vec{V}' - \vec{V})^2, \quad (23)$$

где се разлика $\vec{V}' - \vec{V}$ назива изгубљеном брзином, а $-\frac{1}{2}m(\vec{V}' - \vec{V})^2$ представља

кинетичку енергију изгубљених брзина при удару.

Помоћу (23) дата је Карнова теорема: Изгубљена кинетичка енергија при удару пропорционална је кинетичкој енергији изгубљених брзина са коефицијентом пропорционалности $\frac{1 - R}{1 + R}$.

I.2. Математичко описивање кретања праволинијског једномасеног осцилаторног система

За математичко описивање кретања праволинијског једномасеног осцилаторног система користимо другу Њутнову аксиому у векторском облику $m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_i$ или у скаларном облику у правцу кретања

$$m \cdot \ddot{x} = \sum F_i, \quad (1)$$

и Лагранжеову једначину друге врсте $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j$ ($j = 1, 2$), тј. у правцу кретања

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x, \quad (2)$$

као и Хамилтонове канонске једначине првог реда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} + Q_x, \quad (3)$$

где је: m - маса материјалне тачке,

x - праволинијска координата,

\dot{x} - први извод координате по времену (брзина), \ddot{x} - други извод (убрзање),

$\sum \vec{F}_i$ - геометријски збир свих сила које дејствују на тело у правцу кретања,

$\sum F_i$ - алгебарски збир свих сила које дејствују на тело у правцу кретања,

\vec{a} - вектор убрзања,

$E_k(t, x, \dot{x})$ - кинетичка енергија,

$E_p(t, x)$ - потенцијална енергија,

$L(t, x, \dot{x}) = (E_K - E_P)$ - Лагранжеова функција,

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ - генералисани импулс,

$H(t, x, p) = (p \cdot \dot{x} - L)$ - Хамилтонова функција,

Q_x - генералисана сила која дејствује на тело у правцу кретања.

Хамилтонове променљиве (t, x, p) могу се изразити преко Лагранжевих променљивих (t, x, \dot{x}) и обрнуто. Стање система можемо описати како системом Лагранжеових променљивих, тако и системом Хамилтонових променљивих.

I.2.1. Праволинијски линеарни једномасени принудни осцилатор са вискозним пригушењем – основни осцилатор

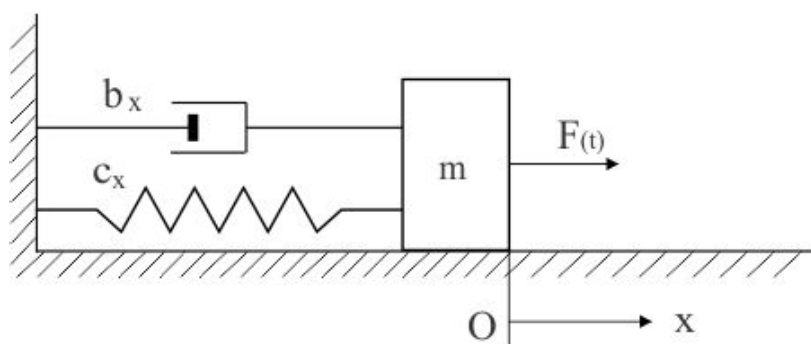
На масу основног праволинијског осцилатора са вискозним трењем (слика 1) у правцу осциловања делују:

$$F_e = c_x \cdot x - \text{еластична сила опруге,}$$

$$F_w = b_x \cdot \dot{x} - \text{сила вискозног пригушења,}$$

$$F(t) - \text{спољашња периодична принудна сила.}$$

Систем је линеаран ако су c_x и b_x константне величине.



Слика 1. Једномасени принудни пригушени осцилатор – основни осцилатор.

Кретање овог система описано је линеарном нехомогеном диференцијалном једначином другог реда, чији је облик

$$m \cdot \ddot{x} + b_x \cdot \dot{x} + c_x \cdot x = F(t), \quad (4)$$

где је: m маса осцилатора, b_x коефицијент пропорционалности, c_x коефицијент крутости.

Ако једначину (4) поделимо са m добијамо:

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + \omega_x^2 \cdot x = \frac{F(t)}{m}, \quad (5)$$

где је: $n = b_x / 2m$ - коефицијент вискозног пригушења,

$$\omega_x^2 = c_x / m, \quad \omega_x - \text{кружна фреквенција слободних осцилација.}$$

Једначине кретања овог основног система написане преко Хамилтонових једначина првог реда имају облик

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}; \quad \frac{dp}{dt} = -c \cdot x + b \frac{p}{m} + F(t), \quad (6)$$

где су фазне координате x и p Хамилтонове променљиве.

Стање система можемо описати и преко Лагранжеових променљивих x и \dot{x} :

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad ; \quad \frac{dx_2}{dt} = -2n \cdot x_2 - \omega_x^2 \cdot x_1 + \frac{F(t)}{m}, \quad (7)$$

где су $x_1 = x$ и $x_2 = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ фазне координате.

1.2.2. Општа решења хомогеног дела диференцијалне једначине кретања основног осцилатора

Општа решења хомогене једначине су различитих облика и то зависи од вредности интензитета вискозног трења n у систему и фреквенције сопствених осцилација ω_x , тј. од корена карактеристичне једначине [77], [84].

Размотримо детаљно три могућа случаја општег решења хомогене диференцијалне једначине

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + \omega_x^2 \cdot x = 0 \quad (8)$$

Једначина (8) описује сопствене осцилације система без дејства спољашње принудне силе $F(t)$. Једначина (8) је линеарна диференцијална једначина, јер је дата функција $x(t)$ линеарна, као и њен извод по времену. Хомогеност једначине карактерише одсуство спољашње принудне силе. Дакле, сопствене осцилације приказаног модела описује хомогена линеарна диференцијална једначина. Да се добије карактеристична једначина једначине (8), потребно је претпоставити решење ове једначине у облику

$$x_o = A \cdot e^{s \cdot t}, \quad (9)$$

где је: A - непозната константа интеграције, која зависи од почетних услова система, треба напоменути да број ових константи интеграција зависи од броја корена карактеристичне једначине; s - корен карактеристичне једначине.

Одредимо први и други извод израза (9):

$$\dot{x}_o = A \cdot s \cdot e^{s \cdot t}, \quad (10)$$

$$\ddot{x}_o = A \cdot s^2 \cdot e^{s \cdot t}. \quad (11)$$

Када заменимо (10) и (11) у једначину (8), добијамо

$$A \cdot s^2 \cdot e^{s \cdot t} + 2 \cdot n \cdot A \cdot s \cdot e^{s \cdot t} + \omega_x^2 \cdot A \cdot e^{s \cdot t} = 0. \quad (12)$$

Ако поделимо једначину (12) са $A \cdot e^{s \cdot t}$, добијамо следећу карактеристичну једначину

$$s^2 + 2n \cdot s + \omega_x^2 = 0. \quad (13)$$

Када решимо ову карактеристичну једначину, добијамо два корена s_1 и s_2 и на основу тога израз (9) има два решења и добија следећи облик

$$x_o = A_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}. \quad (14)$$

Одредимо корене s_1 и s_2 . Када решимо квадратну једначину (13), као резултат, добијамо следеће корене

$$s_1 = -n + \sqrt{n^2 - \omega_x^2}, \quad s_2 = -n - \sqrt{n^2 - \omega_x^2}. \quad (15)$$

На основу корена (15), израз (14) добија се у облику

$$x_o = A_1 \cdot e^{\left(-n + \sqrt{n^2 - \omega_x^2}\right) \cdot t} + A_2 \cdot e^{\left(-n - \sqrt{n^2 - \omega_x^2}\right) \cdot t},$$

или
$$x_o = A_1 \cdot e^{-n \cdot t} \cdot e^{\left(\sqrt{n^2 - \omega_x^2}\right) \cdot t} + A_2 \cdot e^{-n \cdot t} \cdot e^{\left(-\sqrt{n^2 - \omega_x^2}\right) \cdot t}.$$

Када издвојимо испред заграда $e^{-n \cdot t}$, добија се

$$x_o = e^{-n \cdot t} \cdot \left(A_1 \cdot e^{\left(\sqrt{n^2 - \omega_x^2}\right) \cdot t} + A_2 \cdot e^{\left(-\sqrt{n^2 - \omega_x^2}\right) \cdot t} \right). \quad (16)$$

Израз (16) зависи од вредности n и ω_x , и у наставку размотримо три могућа случаја.

Случај 1

Пригушено осцилаторно кретање ($n < \omega_x$), израз (16) добија облик

$$x_o = e^{-n \cdot t} \cdot \left(A_1 \cdot e^{\left(j \cdot \sqrt{n^2 - \omega_x^2}\right) \cdot t} + A_2 \cdot e^{\left(-j \cdot \sqrt{n^2 - \omega_x^2}\right) \cdot t} \right), \quad (17)$$

где је $j = \sqrt{-1}$ имагинарна јединица.

Да би поједноставили једначину (17), применимо Ојлерове трансформације

$$\begin{aligned} e^{(j \cdot \sqrt{\omega_x^2 - n^2}) \cdot t} &= \cos\left(t \cdot \sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) + j \cdot \sin\left(t \cdot \sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) \\ e^{(-j \cdot \sqrt{\omega_x^2 - n^2}) \cdot t} &= \cos\left(t \cdot \sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) - j \cdot \sin\left(t \cdot \sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) \end{aligned} \quad (18)$$

Када заменимо (18) у (17), добијамо

$$\begin{aligned} x_o &= e^{-nt} \left\{ A_1 \left[\cos\left(t \cdot \sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) + j \cdot \sin\left(t \cdot \sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) \right] + A_2 \left[\cos\left(t \cdot \sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) - j \cdot \sin\left(t \cdot \sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) \right] \right\} \\ x_o &= e^{-nt} \left((A_1 + A_2) \cos\left(t \cdot \sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) + (A_1 j - A_2 j) \sin\left(t \cdot \sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) \right) . \end{aligned} \quad (19)$$

Уведимо нове променљиве

$$A_3 = A_1 + A_2 \quad \text{и} \quad A_4 = A_1 \cdot j - A_2 \cdot j . \quad (20)$$

Тада израз (19) добија следећи облик

$$x_o = e^{-nt} \left(A_3 \cos\left(t \cdot \sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) + A_4 \sin\left(t \cdot \sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) \right) . \quad (21)$$

$$\text{Када уведемо смене } A_3 = D \cos(\delta), \quad A_4 = -D \sin(\delta), \quad (22)$$

на крају израз (21) добија облик

$$x_o = e^{-nt} \left(D \cos(\delta) \cos\left(t \cdot \sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) - D \sin(\delta) \sin\left(t \cdot \sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) \right) . \quad (23)$$

Користећи тригонометријску формулу $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$, добијамо

$$x_o = D e^{-nt} \cos\left(\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) \cdot t + \delta\right) , \quad (24)$$

где се D одређује из формуле $A_3^2 + A_4^2 = D^2 \cdot \cos^2(\delta) + D^2 \cdot \sin^2(\delta)$,

и ако узмемо у обзир тригонометријски израз $\cos^2(\delta) + \sin^2(\delta) = 1$,

коначно добијамо следећу формулу за одређивање D

$$D = \sqrt{A_3^2 + A_4^2} . \quad (25)$$

Случај 2

У наставку, истражујемо случај када је пригушење у систему велико, тј. то је апериодично кретање када је $n > \omega_x$. У том случају, корени карактеристичне једначине (13) имају облик

$$s_1 = -n + \sqrt{n^2 - \omega_x^2} \quad \text{и} \quad s_2 = -n - \sqrt{n^2 - \omega_x^2}. \quad (26)$$

Тада је опште решење хомогене једначине

$$x_o = e^{-nt} \left(A_1 \cdot e^{\left(\sqrt{n^2 - \omega_x^2}\right) \cdot t} + A_2 \cdot e^{\left(-\sqrt{n^2 - \omega_x^2}\right) \cdot t} \right), \quad (27)$$

или у облику

$$x_o = e^{-nt} \left(A_1 \cdot ch\left(\left(\sqrt{n^2 - \omega_x^2}\right) \cdot t\right) + A_2 \cdot sh\left(\left(\sqrt{n^2 - \omega_x^2}\right) \cdot t\right) \right), \quad (28)$$

где је хиперболички синус

$$sh\left(\left(\sqrt{n^2 - \omega_x^2}\right) \cdot t\right) = \frac{e^{\left(\sqrt{n^2 - \omega_x^2}\right) \cdot t} - e^{\left(-\sqrt{n^2 - \omega_x^2}\right) \cdot t}}{2},$$

а хиперболички косинус

$$ch\left(\left(\sqrt{n^2 - \omega_x^2}\right) \cdot t\right) = \frac{e^{\left(\sqrt{n^2 - \omega_x^2}\right) \cdot t} + e^{\left(-\sqrt{n^2 - \omega_x^2}\right) \cdot t}}{2}.$$

Случај 3

На крају, истражујемо случај када је пригушење једнако сопственој фреквенцији осцилатора, тј., $n = \omega_x$, то је гранично апериодично кретање.

У том случају корени карактеристичне једначине (13) су једнаки

$$s_1 = -n + 0 \quad \text{и} \quad s_2 = -n - 0. \quad (29)$$

На крају, у изразу (16) добија се члан, који садржи параметар t

$$x_o = e^{-nt} (A_1 + A_2 \cdot t). \quad (30)$$

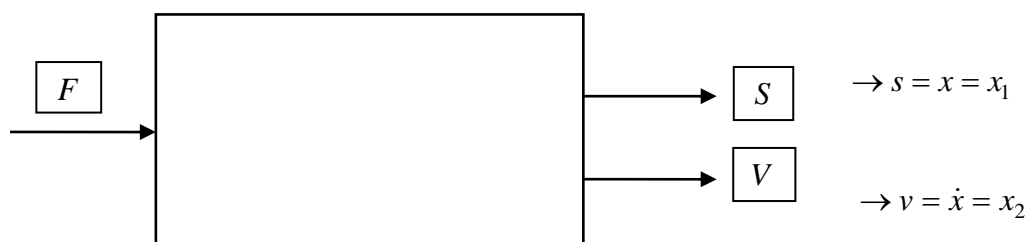
I.3. Методе за истраживање динамике виброударних система

За истраживање динамике виброударних система користе се бројне методе: аналитичке методе теорије линеарних осцилација; приближне аналитичке методе теорије нелинеарних осцилација (метода хармонијског баланса, метода хармонијске линеаризације, асимптотска метода заснована на методи Крилов-Богољубов-Митропољски); метода фазне равни, „тачне“ методе (аналитичка метода „подешавања“, метода тачкастог пресликавања); нумеричке методе, експерименталне методе, нумеричко-експерименталне методе и друге методе. [23], [67], [68], [70], [72], [88].

Оптимизација динамичких система аутоматског управљања решава се различитим методама, као што су: Лагранжеова метода, Понтрјагинов принцип максимума, Белманова метода, итд. [22], [32], [46], [50], [52], [57], [75].

I.4. Оптимално управљање процесима - кретањем система

Објаснимо оптимално управљање процесима на примеру покретног дела виброударног система-осцилатора (слика 1 у наслову II.1.). У сваком тренутку стање осцилатора може се окарактерисати са две величине: то је пређени пут S и брзина V . Ове две величине се мењају у току времена, али не самостално, него услед дејства спољашње принудне силе F , која приморава осцилатор да врши осцилаторно кретање. Дакле, овде имамо три параметара F , S и V , који су повезани међусобно и приказани су на слици 1. Величине S, V карактеришу стање осцилатора и зову се фазне координате, а величина F је управљачки параметар.



Слика 1. Дијаграм (шема) управљања системом са отвореним колом.

Ако посматрамо систем са n међусобно повезаних осцилатора, који врше кретање у једном правцу, онда имамо $2n$ фазне координате, n - брзина и n - координата сваког од осцилатора. Управљачких параметара може бити колико желимо, по правилу то може бити дејство спољашње силе F_n на сваки од осцилатора.

Стање објекта задато је у сваком тренутку времена са n величина $X = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, које се зову фазне координате објекта. Кретање објекта са математичке тачке гледишта разматра се тако да су фазне координате функције времена. Кретање тела дешава се под дејством спољашњих управљачких параметара $U = u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$.

Понашање објекта у сваком тренутку времена $t > t_0$, може се израчунати ако је познато фазно стање објекта у почетном тренутку времена t_0 , као и вредности свих управљачких функција $U = u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$, тј., могу се одредити вредности свих фазних координата $X = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ у било ком тренутку времена t .

Задатак управљања је да дефинише такав параметар U , који ће превести наш систем из почетног фазног стања X_0 у унапред задато стање X .

Прелазни процес (транзициони процес) из почетног фазног стања X_0 у текуће стање X , у одређеном правцу треба да буде најбољи, на пример, да је време транзиције најмање, или енергија која се потроши на транзициони процес да буде минимална, итд. Такав најбољи могући транзициони процес назива се оптимални процес.

У истраживању виброударних процеса принцип оптималности захтева прецизирање. Ми овде проучавамо најмање време прелазног процеса, тј., наш процес ће бити оптималан у погледу времена трајања процеса.

Одређивање функције управљања $U = U(t)$ у зависности од фазних координата које карактеришу стање динамичког система, представља решење проблема синтезе оптималног управљања. Управљање које испуњава постављени услов зове се оптимално управљање, а фазна трајекторија зове се оптимална трајекторија.

Формулишемо задатак. Међу свим могућим силама $F(t)$ при којима виброударни осцилатор масе m прелази из почетног фазног стања $X_0(t_0)$ у крајње стање $X_1(T)$, потребно је да се одреди таква сила $F(t)$, при којој се овај процес врши за најкраће време T_{\min} , а при томе је дато ограничење за принудну силу

$$|F(t)| \leq F_0. \quad (1)$$

За решење овог задатка користимо Понтрјагинов принцип максимума. Неке аспекте овог принципа, показаћемо у наставку ове дисертације.

II. Други део

Оптимална синтеза праволинијских једномасених и вишемасених неаутономних виброударних система са вискозним пригушењем или без отпора, линеарни системи у интервалима између судара и периодични виброударни режими (непарни $l = 1, 3, \dots$; парни $l = 2, 4, \dots$)

За постављање методологије оптималне синтезе праволинијских виброударних система са вискозним пригушењем или без отпора и периодичном побудом, у овом делу дисертације истражујемо виброударну динамику три основна теоријска модела, кроз анализу и синтезу виброударних процеса; при томе: динамичка анализа је у функцији одређивања услова (области) постојања и стабилности периодичних виброударних режима, а динамичка синтеза се спроводи са циљем реализације оптималног периодичног виброударног режима. Методологију показујемо кроз примере са једном и више маса како би ова методологија добила на значају и као алгоритам. Користимо: идеју о линеарном систему у интервалима између судара, Њутнову хипотезу о коефицијенту успостављања, аналитичке методе теорије линеарних осцилација, методу фазне равни, нумеричке методе из софтверских пакета и Понтрјагинов принцип максимума. [5],[8],[25],[26],[32],[34],[43],[57],[65],[74],[84].

За три основна модела истражујемо анализу и синтезу (оптимизацију), а за остале моделе синтезу. При анализи система позната је једначина кретања и принудна сила и испитују се услови за постојање различитих виброударних режима при кретању. При томе се посматра један интервал кретања између два узастопна удара, и сви интервали кретања потпуно су исти. После анализе разматра се синтеза система, где је позната једначина кретања, а непознати део (принудна сила или управљање) треба одредити тако, да се добије оптимално управљање и оптимална трајекторија.

Спољашња периодична принудна сила

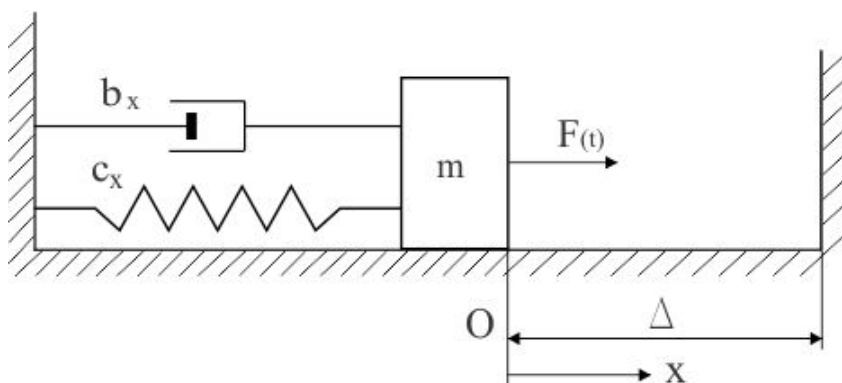
На систем који испитујемо може да дејствује периодична синусна или косинусна сила $F(t) = F_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi)$, где је: F_0 амплитуда, Ω фреквенција побуде ($\Omega \cdot t + \varphi$) фаза и φ почетна фаза. Ако дату силу разложимо у Фуријеов ред, онда имамо тзв. полихармонијску силу, када је спољашња периодична сила збир хармоника

$$F(t) = \sum_{i=1}^k F_i \cdot \cos(i \cdot \Omega \cdot t + \varphi_i).$$

II.1. Модел виброударне динамике неаутономног једномасеног система са вискозним пригушењем и једним граничником; принудне пригушене праволинијске осцилације једномасеног једнострано ударног осцилатора

У овом примеру истражујемо динамику једномасеног принудно пригушеног једнострано ударног осцилатора, када на систем дејствују: еластична сила опруге $F_e = c \cdot x$, сила вискозног пригушења $F_w = -b \cdot \dot{x}$ и спољашња периодична принудна сила $F(t) = F_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi)$. При томе су маса осцилатора m , крутост опруге c и коефицијент пропорционалности b константне величине.

У тренутку удара масе о граничник, који се налази на растојању $x = \Delta$, (слика 1), брзина масе тренутно мења знак. Напоменимо да позитивна вредност Δ одговара положају граничника са зазором, а негативна вредност када је опруга притиснута.



Слика 1. Математички (динамички) модел једномасеног једнострано ударног осцилатора.

Диференцијална једначина кретања система, у интервалима између два узастопна удара, је облика:

$$m \cdot \ddot{x} + b_x \cdot \dot{x} + c_x \cdot x = F_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi), \quad (1)$$

$$\text{или} \quad \ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + \omega_x^2 \cdot x = P_1 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi), \quad (2)$$

где је: $n = b_x / 2m$ - коефицијент вискозног пригушења,

$\omega_x^2 = c_x / m$ - кружна фреквенција слободних осцилација,

$P_1 = F_0 / m$ - однос амплитуде принудне силе и масе,

Ω - кружна фреквенција принудне силе,

$(\Omega \cdot t + \varphi)$ - фаза, где је φ почетна фаза принудне силе.

II.1.1. Опште решење диференцијалне једначине кретања система у интервалима између удара

Из теорије диференцијалних једначина, познато је решење хомогеног дела једначине (2) у облику: $x_h = e^{-n \cdot t} \left(C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2} \cdot t\right) + C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2} \cdot t\right) \right)$,

или $x_1 = e^{-n \cdot t} (C_1 \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\Omega_1 \cdot t))$, где је $\Omega_1 = \sqrt{\omega_x^2 - n^2}$ кружна фреквенција пригушених осцилација.

Партикуларно решење диференцијалне једначине (2), претпоставимо у облику $x_2 = A \cos(\Omega \cdot t + \varphi - \varepsilon)$, где су A и ε непознате константе, и после прорачуна добијамо

$$\text{вредности: } A = \frac{P_1}{\sqrt{(\omega_x^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2 \cdot \Omega^2}}; \quad \text{tg}(\varepsilon) = \frac{2n \cdot \Omega}{\omega_x^2 - \Omega^2}.$$

Опште решење линеарне нехомогене диференцијалне једначине (2) је облика

$$x = x_h + x_p = x_1 + x_2, \text{ или}$$

$$x = e^{-n \cdot t} \left(C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2} \cdot t\right) + C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2} \cdot t\right) \right) + A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi - \varepsilon).$$

Непознате константе интеграције C_1 и C_2 обично се одређују у зависности од датих почетних услова кретања. Али ове константе не могу бити одређене на тај начин, јер не можемо унапред да наведемо такве почетне услове, при којима ће кретање осцилатора имати периодичан карактер. За одређивање C_1 и C_2 уместо почетних услова користимо услове периодичности, које формирамо у складу са тим режимима кретања, за које желимо да проверимо могућност постојања. [8],[11],[37],[42],[61].

Анализа виброударних процеса

У анализи система истражују се услови за постојање и стабилност различитих виброударних режима за различите вредности вишеструкости l .

Потребно је објаснити при каквим односима између параметара осцилатора и параметара принудне силе, могу да се успоставе таква периодична кретања, при којима је период удара осцилатора о граничник једнак или је у сразмери са периодом

спољашње силе. При томе се узима у обзир да је време трајања удара у граничник мало у поређењу са периодом кретања осцилатора између два узастопна удара, и то време не мора да се узима у прорачуну.

Ефекат удара узима се у обзир преко коефицијента реституције при удару $0 \leq R \leq 1$. За пластични удар $R=0$, и за апсолутно еластични удар $R=1$. При наведеним претпоставкама, довољно је посматрати само један интервал кретања осцилатора између два узастопна удара. У случају дејства спољашње периодичне силе имамо бесконачни ударни процес. У већини практичних случајева један удар представља само део процеса узастопних удара, а услови при којима се дешава било који удар, зависе од услова при којима се десио претходни удар. Процеси, који се састоје од бесконачно великог броја удара, називају се бесконачни удари. Удари који се понављају су карактеристични за системе са периодичном побудом, тј. бесконачно ударни процеси имају периодични карактер.

У таквим системима, период кретања осцилатора зависи од периода принудне силе. Обично постоји режим кретања осцилатора са периодом који је једнак периоду принудне силе, али је могуће постојање режима кретања са периодима, који су сразмерни периоду принудне силе (субхармонијски режими, са периодима који су већи од периода принудне силе). Ова могућност постојања различитих режима, односно вишезначно решење проблема принудних осцилација, је карактеристика виброударних система. Због тога истраживање динамике виброударног система треба да обухвати дефинисање свих теоретски могућих врста кретања, као и анализу стабилности кретања, а то треба да омогући да се издвоје режими који могу да постоје у пракси.

Примењена теорија виброударних процеса заснива се на претпоставци о апсолутној тврдоћи тела која се сударају и судара као тренутног процеса, као и на хипотези Њутна о независности коефицијента реституције од брзине судара. Елементи који се сударају формирају ударни пар.

У овом истраживању посматра се један циклус кретања између два узастопна судара где се разликује брзина пре судара и брзина после судара: \dot{x}_- је брзина осцилатора пре судара, \dot{x}_+ је брзина осцилатора после судара. Релација која повезује ове две брзине је

$$\dot{x}_+ = -R \cdot \dot{x}_- .$$

П.1.2. Услови (области) постојања и стабилности периодичних виброударних режима (непарни $l = 1, 3, \dots$; парни $l = 2, 4, \dots$)

Истражимо периодично кретање система, где је усвојено да је период осциловања једнак или сразмеран периоду принудне силе, тј. удари се дешавају у константним интервалима $T = 2\pi/\Omega$, или сразмерно периоду принудне силе $2\pi \cdot l/\Omega$, где је l вишеструкост режима.

Ако је $l = 1$ тада за један пуни период T промене принудне силе $F(t)$ дешава се један удар масе о граничник. Ако је $l = 2$ тада за два пуна периода T промене принудне силе $F(t)$ дешава се један удар масе о граничник. Ако је $l = 3$ тада за три пуна периода T промене принудне силе $F(t)$ дешава се један удар масе о граничник, итд.

Размотримо један циклус кретања, који почиње непосредно после удара и рачунамо време од тог тренутка до следећег удара. Ако се занемаре губици енергије у интервалима између удара, диференцијална једначина кретања може се написати у облику (1) или (2).

Пригушено осцилаторно кретање ($n < \omega_x$)

Ако партикуларно решење усвојимо у облику $x_2 = M \cos(\Omega \cdot t + \varphi) + N \sin(\Omega \cdot t + \varphi)$, после одређивања првог извода и замене у (2) добијамо

$$x_2 = \frac{P_1(\omega_x^2 - \Omega^2)}{4n^2 \cdot \Omega^2 + (\omega_x^2 - \Omega^2)^2} \cos(\Omega \cdot t + \varphi) + \frac{P_1 \cdot 2n \cdot \Omega}{(4n^2 \cdot \Omega^2 + (\omega_x^2 - \Omega^2)^2)} \sin(\Omega t + \varphi) .$$

Укупно решење једначине (2) у овом случају има облик

$$x(t) = e^{-nt} \left(C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2} \cdot t\right) + C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2} \cdot t\right) \right) + \frac{1-p^2}{F(p)} X_1 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) + \frac{\Delta_x}{\pi} \frac{P}{F(p)} X_1 \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi) , \quad (3)$$

где је: $X_1 = \frac{F_0}{c_x}$ - статичко померање масе под дејством силе F_0 ,

$\Delta_x = \frac{\pi \cdot b_x}{m \cdot \omega_x}$ - декремент пригушења, $p = \frac{\Omega}{\omega_x}$ - бездимензиона фреквенција;

$$\omega_x = \sqrt{\frac{c_x}{m}} , \quad n = \frac{\omega_x \cdot \Delta_x}{2\pi} , \quad F(p) = (1 - p^2)^2 + \left(\frac{\Delta_x}{\pi}\right)^2 p^2 .$$

Ако уведемо смене $\frac{(1-p^2)}{F(p)} X_1 = A \cos \varphi_0$ и $-\frac{\Delta_x}{\pi} \frac{p}{F(p)} X_1 = A \sin \varphi_0$, добија се израз (3) у следећем облику

$$x(t) = e^{-nt} \left(C_1 \cdot \cos \left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2} \cdot t \right) + C_2 \cdot \sin \left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2} \cdot t \right) \right) + A \cos(\Omega \cdot t + \varphi + \varphi_0) \quad (4)$$

где је: $A = \frac{X_1}{F(p)} \sqrt{(1-p^2)^2 + \left(\frac{\Delta_x}{\pi}\right)^2 p^2}$, $\operatorname{tg}(\varphi_0) = \frac{\frac{\Delta_x}{\pi} p}{p^2 - 1}$.

Почетак рачунања времена подудара се са тренутком непосредно после удара. За наведено периодично кретање система усвоје се гранични услови на следећи начин.

а) За почетак циклуса гранични услови су:

$$x(0) = \Delta, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_+ = -R \cdot \dot{x}_-. \quad (5)$$

б) За крај циклуса (тј. тренутак који претходи следећем удару) гранични услови су:

$$x\left(\frac{2\pi \cdot l}{\Omega}\right) = \Delta, \quad \dot{x}\left(\frac{2\pi \cdot l}{\Omega}\right) = \dot{x}_-. \quad (6)$$

На овај начин је дефинисан виброударни режим, и довољно је да се ограничимо на истраживање једног ударног циклуса у интервалу $\left[0; \frac{2\pi \cdot l}{\Omega}\right]$. Услови (5) и (6) усвојени су на основу тога, да брзине које претходе удару имају исте вредности у тренутку времена $t=0$ и у тренутку времена $t = \frac{2\pi \cdot l}{\Omega}$, то јест: $\dot{x}_-(0) = \dot{x}_-\left(\frac{2\pi \cdot l}{\Omega}\right)$.

Али, да би се реализовао такав режим, треба да се употреби одговарајућа принудна сила $F(t)$, тј., треба да одаберемо почетну фазу φ принудне силе на тај начин, који омогућава да се реализује изабрани режим.

Дакле, ми изучавамо периодични режим са једним ударом масе о граничник за један период принудне силе. У виброударним системима, могуће је остварити периодичне многуударне режиме, које карактерише неколико удара о граничник у току једног периода принудне силе. Режији са једноударним интеракцијама имају најинтензивнији карактер. Ти режими се највише користе у радним процесима и истражују се да би се процениле штетне последице (ефекти) интеракције.

Основна својства виброударних система манифестују се најјасније при релативно малим вредностима коефицијента вискозног трења и декремента пригушења.

Зато, на основу израза $\Omega_1 = \sqrt{\omega_x^2 - n^2} = \sqrt{\omega_x^2 \left(1 - \frac{n^2}{\omega_x^2}\right)} = \omega_x \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta_x}{2\pi}\right)^2}$, може се узети

да је $\Omega_1 \approx \omega_x$. Ако се усвоји $\psi = \varphi + \varphi_0$, тада је израз (4) у облику

$$x(t) = e^{-nt} (C_1 \cdot \cos(\omega_x t) + C_2 \cdot \sin(\omega_x t)) + A \cdot \cos(\Omega t + \psi). \quad (7)$$

Први извод израза (7) по времену је брзина

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{dx}{dt} = -n \cdot e^{-nt} (C_1 \cdot \cos(\omega_x \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega_x \cdot t)) + \\ &+ \omega_x \cdot e^{-nt} (-C_1 \cdot \sin(\omega_x \cdot t) + C_2 \cdot \cos(\omega_x \cdot t)) - A \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega \cdot t + \psi) \end{aligned} \quad (8)$$

Сада треба одредити коефицијенте C_1 и C_2 . Ако у изразе (7) и (8) унесемо граничне услове (5) и (6), после трансформација добија се:

$$C_1 = \Delta - A \cos(\psi), \quad C_2 = \frac{C_1 \left(e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{p}} - \cos\left(\frac{2\pi \cdot l}{p}\right) \right)}{\sin\left(\frac{2\pi \cdot l}{p}\right)},$$

$$\cos(\psi) = \frac{\Delta}{A} \left(1 - \frac{\dot{x}_- \cdot D}{\omega_x \cdot \Delta} \right), \quad \sin(\psi) = \frac{\dot{x}_- \cdot D}{\omega_x \cdot A} \cdot B, \quad (9)$$

$$D = \frac{(R+1) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot l}{p}\right)}{2 \cos\left(\frac{2\pi \cdot l}{p}\right) - e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{p}} - e^{-\frac{\Delta_x \cdot l}{p}}}, \quad (10)$$

$$B = \frac{1}{p} \left(\frac{R}{D} + \frac{e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{p}} - \cos\left(\frac{2\pi \cdot l}{p}\right) - \frac{\Delta_x}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi \cdot l}{p}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi \cdot l}{p}\right)} \right). \quad (11)$$

После одређених трансформација у једначини (9), добија се брзина

$$\dot{x}_- = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (B^2 + 1) \cdot \left(1 - \frac{A^2}{\Delta^2}\right)}}{D \cdot (B^2 + 1)} \cdot \omega_x \cdot \Delta. \quad (12)$$

Треба истражити области постојања виброударних режима на основу формуле (12), за систем са зазором $\Delta > 0$. Дефинисање амплитудно фреквентне карактеристике је одређено областима постојања (стабилности) режима у зависности од параметара p, Δ . Истражимо границе области постојања. Пре свега, одредимо област реалних вредности величине \dot{x}_- . Ако претпоставимо да је израз под кореном у једначини (12) позитиван, добија се

$$1 - \left(1 - A^2 / \Delta^2\right) \cdot \left(1 + B^2\right) \geq 0.$$

Овде се добија услов који одређује област у којој се налазе реалне вредности брзине \dot{x}_-

$$\frac{|\Delta|}{A} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{B^2}}. \quad (13)$$

Према релацији (13), виброударни режими могу постојати у области постављеног граничника у границама амплитуде осциловања линеарног осцилатора $0 < \Delta < A$, а могу постојати и ван те области $\Delta > A$. У другом случају када је $\Delta > A$, за виброударни режим треба да се обезбеди додатна енергија. Ако није испуњен услов (13) виброударни режими су немогући.

Напоменимо да релација (12) је двозначна функција параметара система, и према томе, карактеристика виброударних осцилаторних система је појава двозначних решења. При одређивању решења, ми смо претпоставили да маса врши само један удар током једног периода кретања, где смо узели у обзир граничне услове (5) и (6). Одавде произилази закључак о томе, да путања кретања не прелази граничник у интервалу између два узастопна удара. На основу тога закон кретања мора да испуни услов

$$x(t) \leq \Delta. \quad (14)$$

У општем случају, није могуће одредити области постојања виброудара на основу услова (14) у датом моделу, јер закон кретања осцилатора састоји се од збира два дела хармонијских функција са несразмерним фреквенцијама. За системе релативно једноставне структуре, аналитичким методама могу се одредити приближне границе области постојања, и овде то радимо. Изаберимо из области реалних вредности (12) најужу област постојања тражених решења. У том циљу, пре свега, потребно је да се испуни следећи услов

$$\dot{x}_- \geq 0. \quad (15)$$

Овај услов није примењен у оквиру граничних услова и мора се применити као додатни услов у једначини кретања. Претпоставимо да је услов (13) испуњен, и објаснимо, каква ограничења се добијају из потребе (услов 15) да брзина \dot{x}_- има позитивну вредност.

Из израза (12) следи да ако је израз испод корена већи од јединице, тада брзина \dot{x}_- има две различите вредности, позитивну и негативну, и због тога, услов (15) увек је испуњен само за једну вредност брзине \dot{x}_- . На тај начин, у овом моделу, приликом инсталирања граничника у границама амплитуде осциловања линеарног система, може да постоји само један режим за сваку од разматраних вишеструкости l .

Посматрамо једначину (12) и одређујемо када је брзина позитивна, тј. када је испуњен услов (15). У једначини (12) прво се посматра D , који је дат једначином (10)

$$D = \frac{(R+1) \sin\left(\frac{2\pi \cdot l}{p}\right)}{2 \cos\left(\frac{2\pi \cdot l}{p}\right) - e^{\frac{\Delta x \cdot l}{p}} - e^{-\frac{\Delta x \cdot l}{p}}}. \quad \text{У једначини (10) посматрамо бројилац и именилац.}$$

Бројилац је већи од нуле (позитиван), када је $\sin\left(\frac{2\pi \cdot l}{p}\right) > 0$, а то је интервал

$[2\pi \cdot k; \pi + 2\pi \cdot k]$, па се добија:

$$2\pi \cdot k < \frac{2\pi \cdot l}{p} < \pi + 2\pi \cdot k; \quad 2\pi \cdot k < \frac{2\pi \cdot l}{p} < \pi(1+2k) / : (2\pi \cdot l); \quad \frac{k}{l} < \frac{1}{p} < \frac{1+2k}{2l};$$

реципрочна вредност је

$$\frac{2l}{1+2k} < p < \frac{l}{k}. \quad (16)$$

Бројилац је мањи од нуле (негативан) када је $\sin\left(\frac{2\pi \cdot l}{p}\right) < 0$, а то је интервал

$[\pi + 2\pi \cdot k; 2\pi + 2\pi \cdot k]$, па се добија:

$$\pi + 2\pi \cdot k < \frac{2\pi \cdot l}{p} < 2\pi + 2\pi \cdot k, \quad \pi(1+2k) < \frac{2\pi \cdot l}{p} < 2\pi(1+k) / : (2\pi \cdot l), \quad \frac{1+2k}{2l} < \frac{1}{p} < \frac{1+k}{l},$$

реципрочна вредност је

$$\frac{l}{1+k} < p < \frac{2l}{1+2k}. \quad (17)$$

Посебну пажњу треба обратити на именилац у изразу за D (једначина 10). Ако бројилац и именилац имају исте знаке, онда је однос Δ/D увек позитиван. Због мале

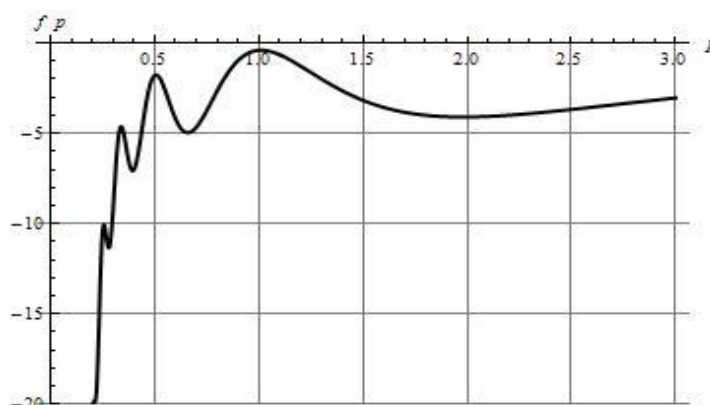
вредности декремента пригушења Δ_x , вредности $e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{p}}$ и $e^{-\frac{\Delta_x \cdot l}{p}}$ мало се разликују од

јединице. У изразу (10) вредност у имениоцу $2\cos\left(\frac{2\pi \cdot l}{p}\right) - 2 < 0$, тј. $\cos\left(\frac{2\pi \cdot l}{p}\right) - 1 < 0$,

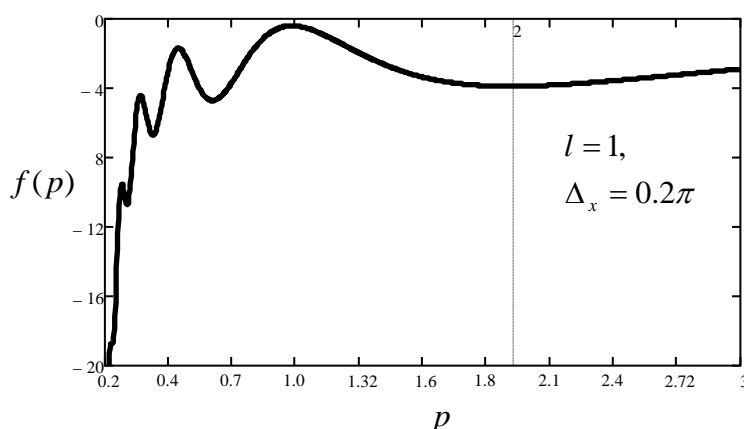
мања је од нуле на читавом интервалу променљиве p . Ова је потврђено цртањем

графика функције имениоца: $f(p) = 2\cos\left(\frac{2\pi \cdot l}{p}\right) - e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{p}} - e^{-\frac{\Delta_x \cdot l}{p}}$ (слика 2а и слика 2б).

График је конструисан помоћу програма Wolfram Mathematica7 (слика 2а) и Mathcad 14 (слика 2б), када је $l=1$. На дијаграму се види да када $p \rightarrow \infty$ вредност $f(p)$ тежи ка оси апсцисе, али је не сече, и именилац је негативан на целом интервалу $p \in [0; \infty]$.



Слика 2.а.



Слика 2.б.

Слика 2. График функције имениоца $f(p)$ у изразу (10).

Режим I

Почнимо анализу режима коме одговара знак плус испред корена у изразу (12).

Почетна брзина \dot{x}_- у овом случају је увек позитивна у области (13), тј. $\frac{|\Delta|}{A} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{B^2}}$

и када је $\Delta/D > 0$ (видети израз (12)). Тада мора бити испуњен услов да је израз под кореном већи или једнак нули, да би брзина имала реалне вредности.

$$1 - (1 - A^2 / \Delta^2) \cdot (1 + B^2) \geq 0 ,$$

$$1 \geq (1 - A^2 / \Delta^2) \cdot (1 + B^2) ,$$

или обрнуто

$$(1 - A^2 / \Delta^2) \cdot (1 + B^2) \leq 1 / : (1 + B^2) ,$$

$$1 - A^2 / \Delta^2 \leq \frac{1}{1 + B^2} , \quad -A^2 / \Delta^2 \leq \frac{1}{1 + B^2} - 1 ,$$

$$-A^2 / \Delta^2 \leq \frac{1 - 1 - B^2}{1 + B^2} , \quad -A^2 / \Delta^2 \leq \frac{-B^2}{1 + B^2} / \cdot (-1) ,$$

$$\text{мења се знак } \leq \text{ у знак } \geq \text{ па је } \frac{A^2}{\Delta^2} \geq \frac{B^2}{1 + B^2} .$$

Ако се узме реципрочна вредност, мења се знак, па је

$$\frac{\Delta^2}{A^2} \leq \frac{B^2 + 1}{B^2} , \text{ тј. } \frac{\Delta^2}{A^2} \leq 1 + \frac{1}{B^2} , \text{ односно кореновањем се добија}$$

$$\frac{|\Delta|}{A} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{B^2}} . \text{ Ово је раније наведени израз (13).}$$

Израз (13) је први услов који одређује област у којој се налазе реалне вредности брзине \dot{x}_- .

Када смо проучили први услов сада треба проучити други услов, који је представљен у једначини (15), а то је услов да је брзина позитивна $\dot{x}_- \geq 0$.

$$\text{Посматрамо израз (12) за брзину } \dot{x}_- = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (B^2 + 1) \cdot \left(1 - \frac{A^2}{\Delta^2}\right)}}{D \cdot (B^2 + 1)} \cdot \omega_x \cdot \Delta .$$

За овај режим I знак испред корена је плус.

Зато посматрамо знак за D у једначини (10)
$$D = \frac{(R+1) \sin\left(\frac{2\pi \cdot l}{p}\right)}{2 \cos\left(\frac{2\pi \cdot l}{p}\right) - e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{p}} - e^{-\frac{\Delta_x \cdot l}{p}}} .$$

Да би D био позитиван, (а тиме је и брзина позитивна), треба да су и бројилац и именилац истог знака у изразу (10) (позитивни или негативни). Овде је именилац увек

негативан
$$f(p) = 2 \cos\left(\frac{2\pi \cdot l}{p}\right) - e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{p}} - e^{-\frac{\Delta_x \cdot l}{p}} \quad (\text{слика 2.а и слика 2.б}).$$

У овом случају мора бити и бројилац негативан, да би израз за D био позитиван.

Раније је показано да је бројилац негативан када је $\sin\left(\frac{2\pi \cdot l}{p}\right) < 0$ и тада смо добили

интервал (17)
$$\frac{l}{1+k} < p < \frac{2l}{1+2k} \quad \text{и тада је: } (\Delta/D > 0, \text{ тј } D > 0).$$

То значи да је интервал (17) услов постојања режима I, а пре тога је показано да је услов постојања тог режима израз (13). На овај начин приказан је режим I који је дефинисан са знаком плус испред корена у (12).

Из интервала (17) за $l=1$ добија се $1 \leq p < 2$, за $l=2$ добија се $2 \leq p < 4$, за $l=3$ добија се $3 \leq p < 6$, итд., и то је приказано на слици 3.

На слици 3 су приказане области постојања виброударних режима када је $l=1$, $l=2$ и $l=3$.

Режим II

У наставку истражимо режим II са знаком минус испред корена у једначини (12)

$$\dot{x}_- = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (B^2 + 1) \cdot \left(1 - \frac{A^2}{\Delta^2}\right)}}{D \cdot (B^2 + 1)} \cdot \omega_x \cdot \Delta .$$

Прво испитамо случај када је $\Delta/D > 0$, да би брзина била позитивна. Сада је знак минус испред корена у (12). Тада израз под кореном треба да је мањи од јединице, да би бројилац у (12) био већи од нуле (позитиван), тј.

$$1 - \left(1 - A^2 / \Delta^2\right) \cdot (1 + B^2) < 1 , \quad (18)$$

$$-\left(1 - A^2 / \Delta^2\right) \cdot \left(1 + B^2\right) < 0 \quad / \cdot (-1),$$

$$\left(1 - A^2 / \Delta^2\right) \cdot \left(1 + B^2\right) > 0 ,$$

$$\left(1 - A^2 / \Delta^2\right) > 0 , \quad 1 - A^2 / \Delta^2 > 0 ,$$

$$-A^2 / \Delta^2 > -1 \quad / \cdot (-1) , \quad \text{мења се знак па је } A^2 / \Delta^2 < 1 .$$

Ако се узме реципрочна вредност, мења се знак па је: $\Delta^2 / A^2 > 1 \Rightarrow |\Delta| > A$.

Одавде добијамо решење $|\Delta| > A$, то решење не испуњава услов непреласка граничника $x(t) \leq \Delta$ (14), и за наше истраживање није добро решење. У овом случају када је зазор већи од амплитуде осциловања линеарног осцилатора $\Delta > A$, може да постоји режим када нема удара, а може да постоји режим када има удара, али само када се систему дода енергија, тј. када се повећа амплитуда принудне силе $F(t)$.

На овај начин испитали смо режим II са знаком минус испред корена у (12). Тада је $\Delta / D > 0$, да би брзина била позитивна, а израз под кореном је мањи од јединице.

Режим III

На крају испитамо режим III са знаком минус испред корена у (12),

$$\dot{x}_- = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (B^2 + 1) \cdot \left(1 - \frac{A^2}{\Delta^2}\right)}}{D \cdot (B^2 + 1)} \cdot \omega_x \cdot \Delta, \text{ али сада посматрамо } \Delta / D < 0 \text{ за разлику од режима}$$

II, где је $\Delta / D > 0$. Сада испитујемо случај када је $\Delta / D < 0$, тако да брзина буде позитивна. Супротно од претходног режима II, у режиму III израз под кореном у (12) треба да је већи од јединице. Тада је бројилац у (12) негативан, и да би брзина била позитивна, треба да је $\Delta / D < 0$, тј $D < 0$. Односно бројилац у (12) је негативан и именилац D је негативан, па је брзина позитивна. Раније је показано да је D негативно када је бројилац у (10) позитиван, јер је именилац $f(p)$ увек негативан, а то важи за

интервал (16) $\frac{2l}{1+2k} < p < \frac{l}{k}$, и тада је ($\Delta / D < 0$, тј $D < 0$).

Дакле, да би брзина била позитивна, у режиму III треба испитати случај када је је израз под кореном у (12) већи од јединице, а $\Delta/D < 0$. Тада из (12) добијамо:

$$1 - (1 - A^2/\Delta^2) \cdot (1 + B^2) > 1, \quad (19)$$

$$-(1 - A^2/\Delta^2) \cdot (1 + B^2) > 1 - 1 \quad / \cdot (-1),$$

$$(1 - A^2/\Delta^2) \cdot (1 + B^2) < 0,$$

$$1 - A^2/\Delta^2 < 0, \quad -A^2/\Delta^2 < -1 \quad / \cdot (-1), \text{ мења се знак па је } A^2/\Delta^2 > 1.$$

Ако се узме реципрочна вредност, мења се знак па је $\frac{\Delta^2}{A^2} < 1$, тј., $\Delta^2 < A^2 \Rightarrow |\Delta| < A$.

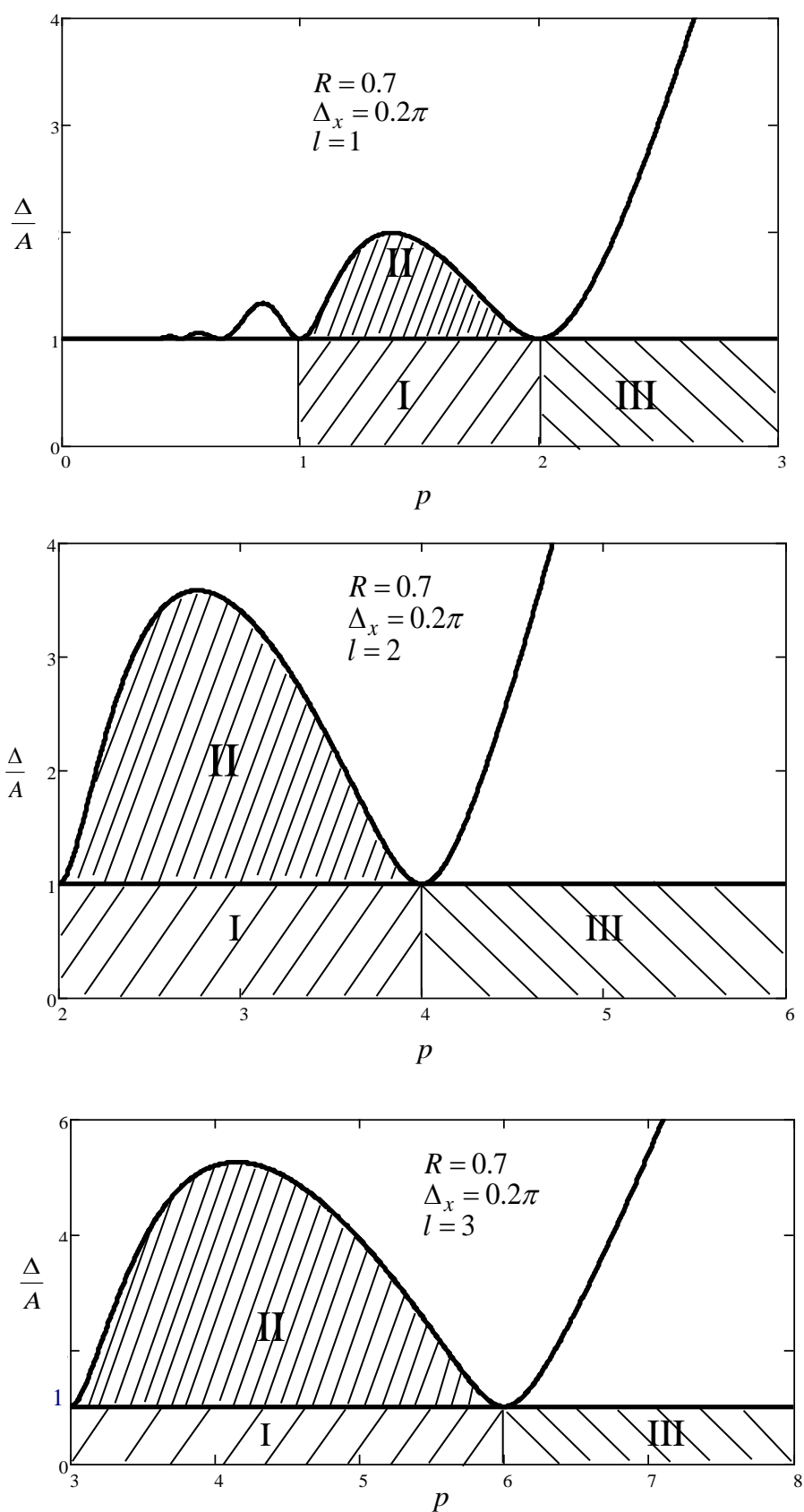
У овом случају добија се решење $|\Delta| < A$. На тај начин, испуњена су оба услова: $|\Delta| < A$ и брзина је позитивна.

Из интервала (16) се добија: за $l = 1 \Rightarrow p \geq 2$, за $l = 2 \Rightarrow p \geq 4$, за $l = 3 \Rightarrow p \geq 6$, и то се види на слици 3.

На основу анализе ова три режима, можемо да закључимо да у фреквентном интервалу p у свакој тачки области реалних вредности параметара, који испуњавају услов $\Delta < A$ може постојати виброударни режим вишеструкости од 0 до l . Када је $\Delta = A$, једна од вредности \dot{x} једнака је нули независно од осталих параметара система. То одговара кретању линеарног осцилатора са додиром граничника без удара.

На слици 3 приказане су области постојања виброударних режима I, II, III. Графици су конструисани у Mathcad 14 и Wolfram Mathematica 7 према формули (13) за константне вредности R, Δ_x и за одговарајуће вредности $l = 1, 2, 3$. Позитиван нагиб шрафуре на слици, указује на постојање режима са знаком плус испред корена у (12), а негативни (супротни) нагиб шрафуре на слици, указује на постојање режима са знаком минус испред корена у (12). Дијаграм показује и постојање виброударних режима када је $\Delta > A$ (режим II). То значи да виброударни режими могу постојати не само у области $0 < \Delta < A$, него и ван те области $\Delta > A$ (режим II). Тамо где је $\Delta > A$ може да постоји режим када нема удара, а може да постоји режим када има удара, али само када се систему дода енергија.

Као што се може видети из графика са повећањем вишеструкости l , повећавају се области постојања режима.



Слика 3. Области постојања виброударних режима I, II, III.

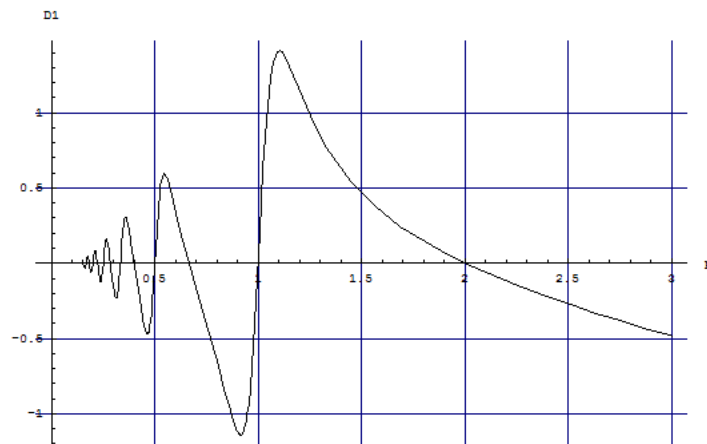
Дијаграм на слици 3 омогућава да се одреди фреквентни интервал реализације виброударног процеса када је позната вредност инсталационог зазора Δ и да се одреди гранична вредност зазора Δ , при којем је такав процес могућ.

У наставку приказујемо изразе (програмске редове) са одговарајућим цртежима у математичком пакету Wolfram Matematika7 за одређивање области постојања (сл. 3.а).

$$D1 = 1.7 * \text{Sin}[2 * \pi / p] / (2 * \text{Cos}[2 * \pi / p] - \text{Exp}[0.2 * \pi / p] - \text{Exp}[-0.2 * \pi / p])$$

$$\frac{1.7 \text{Sin}\left[\frac{2\pi}{p}\right]}{-e^{-0.628319/p} - e^{0.628319/p} + 2 \text{Cos}\left[\frac{2\pi}{p}\right]}$$

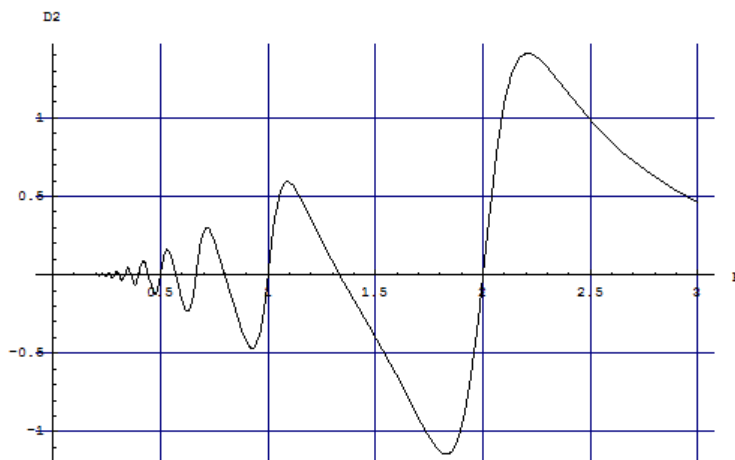
`Plot[D1, {p, 0.15, 3}, AxesLabel -> {p, "D1"}, GridLines -> Automatic]`



$$D2 = 1.7 * \text{Sin}[4 * \pi / p] / (2 * \text{Cos}[4 * \pi / p] - \text{Exp}[0.4 * \pi / p] - \text{Exp}[-0.4 * \pi / p])$$

$$\frac{1.7 \text{Sin}\left[\frac{4\pi}{p}\right]}{-e^{-1.25664/p} - e^{1.25664/p} + 2 \text{Cos}\left[\frac{4\pi}{p}\right]}$$

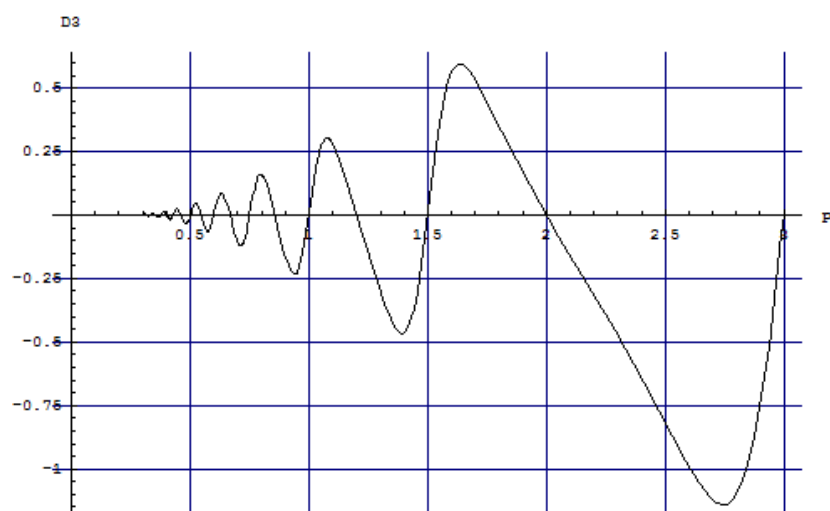
`Plot[D2, {p, 0.15, 3}, AxesLabel -> {p, "D2"}, GridLines -> Automatic]`



$$D3 = 1.7 * \text{Sin}[6 * \pi / p] / (2 * \text{Cos}[6 * \pi / p] - \text{Exp}[0.6 * \pi / p] - \text{Exp}[-0.6 * \pi / p])$$

$$\frac{1.7 \text{Sin}\left[\frac{6\pi}{p}\right]}{-e^{-1.88496/p} - e^{1.88496/p} + 2 \text{Cos}\left[\frac{6\pi}{p}\right]}$$

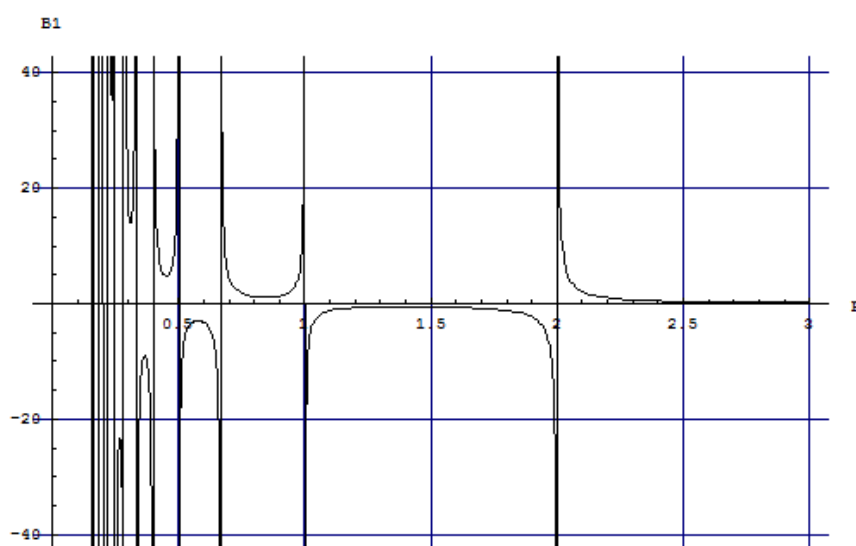
Plot[D3, {p, 0.15, 3}, AxesLabel -> {p, "D3"}, GridLines -> Automatic]



$$B1 = (0.7/D1 + (\text{Exp}[0.2 * \pi / p] - \text{Cos}[2 * \pi / p] - 0.1 * \text{Sin}[2 * \pi / p]) / \text{Sin}[2 * \pi / p]) / p$$

$$\frac{1}{p} \left(0.411765 \left(-e^{-0.628319/p} - e^{0.628319/p} + 2 \text{Cos}\left[\frac{2\pi}{p}\right] \right) \text{Csc}\left[\frac{2\pi}{p}\right] + \text{Csc}\left[\frac{2\pi}{p}\right] \left(e^{0.628319/p} - \text{Cos}\left[\frac{2\pi}{p}\right] - 0.1 \text{Sin}\left[\frac{2\pi}{p}\right] \right) \right)$$

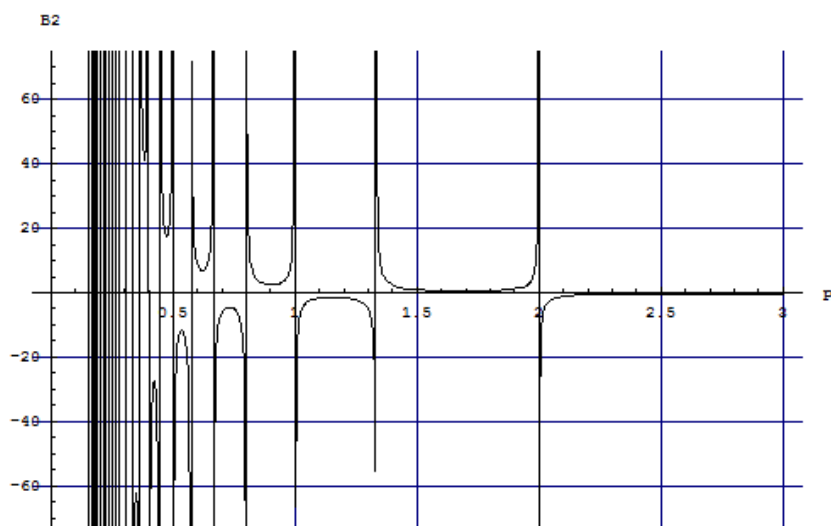
Plot[B1, {p, 0.15, 3}, AxesLabel -> {p, "B1"}, GridLines -> Automatic]



$$B2 = (0.7/D2 + (\text{Exp}[0.4 \star \pi / p] - \text{Cos}[4 \star \pi / p] - 0.1 \star \text{Sin}[4 \star \pi / p]) / \text{Sin}[4 \star \pi / p]) / p$$

$$\frac{1}{p} \left(0.411765 \left(-e^{-1.25664/p} - e^{1.25664/p} + 2 \text{Cos} \left[\frac{4 \pi}{p} \right] \right) \text{Csc} \left[\frac{4 \pi}{p} \right] + \text{Csc} \left[\frac{4 \pi}{p} \right] \left(e^{1.25664/p} - \text{Cos} \left[\frac{4 \pi}{p} \right] - 0.1 \text{Sin} \left[\frac{4 \pi}{p} \right] \right) \right)$$

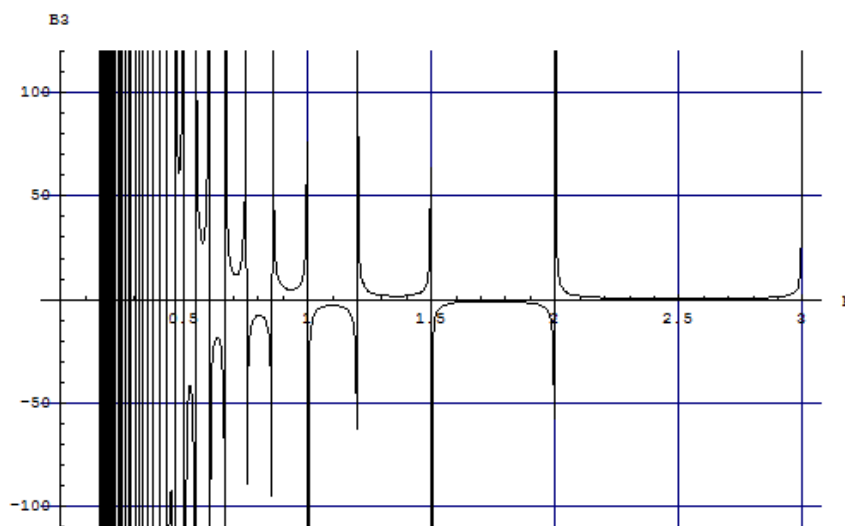
Plot[B2, {p, 0.15, 3}, AxesLabel -> {p, "B2"}, GridLines -> Automatic]



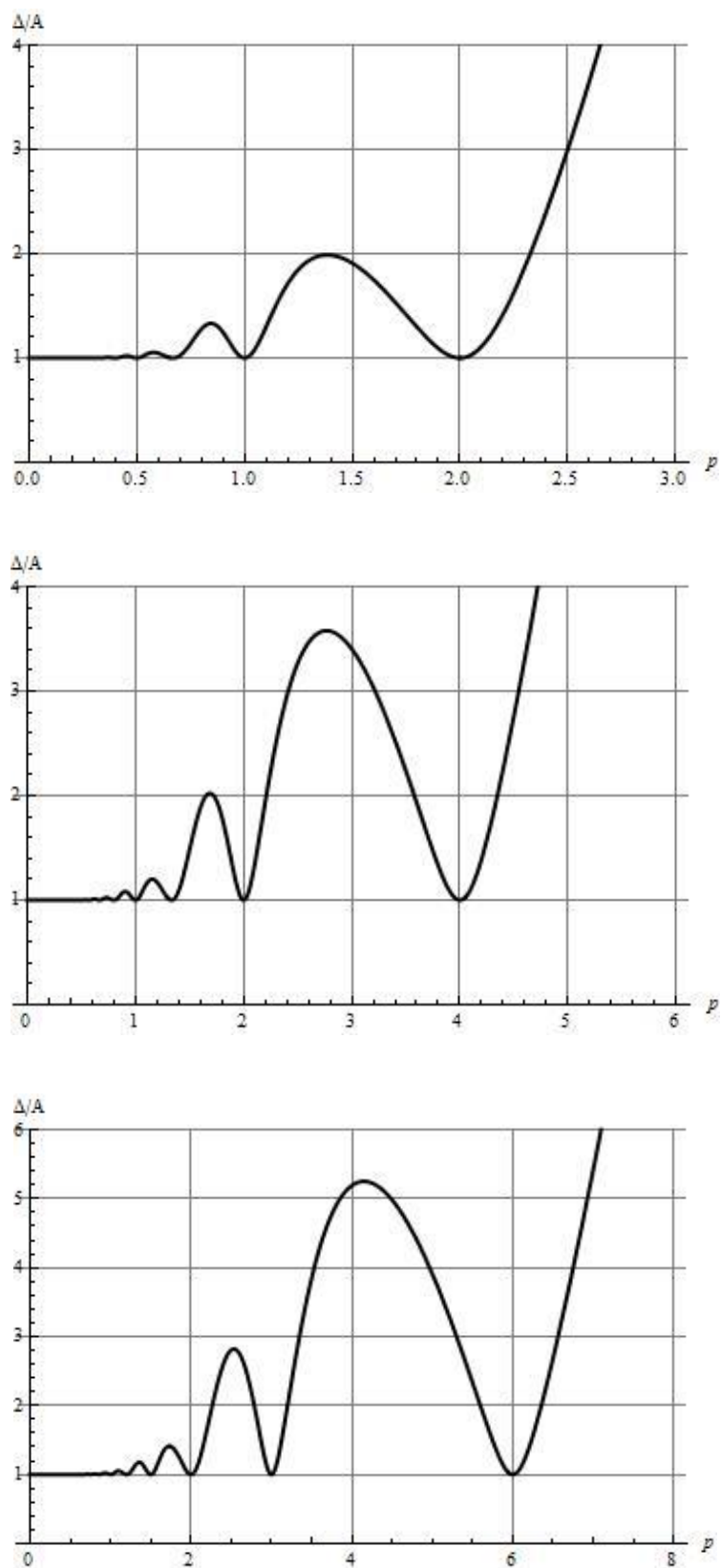
$$B3 = (0.7/D3 + (\text{Exp}[0.6 \star \pi / p] - \text{Cos}[6 \star \pi / p] - 0.1 \star \text{Sin}[6 \star \pi / p]) / \text{Sin}[6 \star \pi / p]) / p$$

$$\frac{1}{p} \left(0.411765 \left(-e^{-1.88496/p} - e^{1.88496/p} + 2 \text{Cos} \left[\frac{6 \pi}{p} \right] \right) \text{Csc} \left[\frac{6 \pi}{p} \right] + \text{Csc} \left[\frac{6 \pi}{p} \right] \left(e^{1.88496/p} - \text{Cos} \left[\frac{6 \pi}{p} \right] - 0.1 \text{Sin} \left[\frac{6 \pi}{p} \right] \right) \right)$$

Plot[B3, {p, 0.15, 3}, AxesLabel -> {p, "B3"}, GridLines -> Automatic]



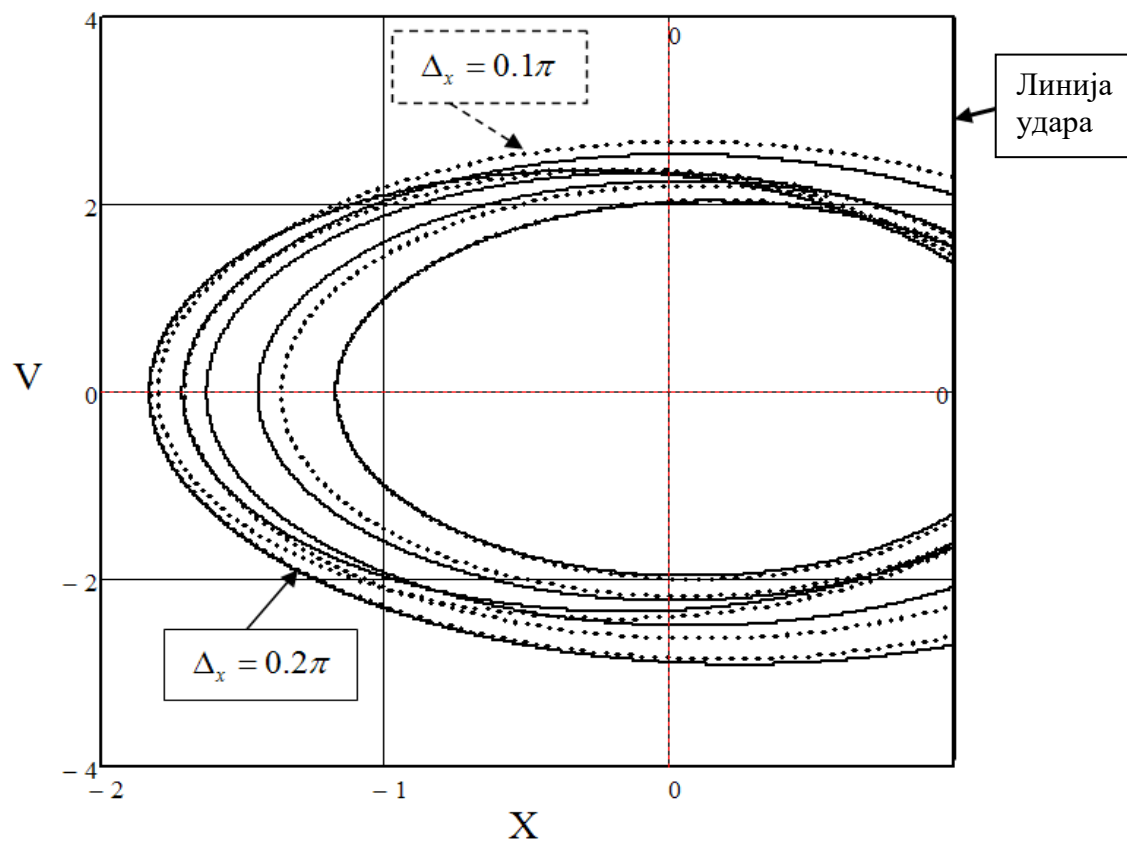
На крају прорачуна добијају се потпуно исти дијаграми као претходни дијаграми на слици 3 за области постојања виброударних режима када је $l = 1$, $l = 2$ и $l = 3$ (слика 3.а).



Слика 3.а. Области постојања виброударних режима I, II, III.

На слици 4 конструисан је фазни дијаграм у Mathcad 14 за две различите вредности декремента пригушења $\Delta_x = 0.1\pi$ и $\Delta_x = 0.2\pi$, када су дати следећи подаци:

$$F_0 = 2N, X_1 = 2N, m = 1kg, \omega_x = 1s^{-1}, \Delta = 1m, R = 0.7, p = 1.5, \Omega = 1.5s^{-1}.$$



Слика 4. Фазни портрет за период T између два узастопна удара.

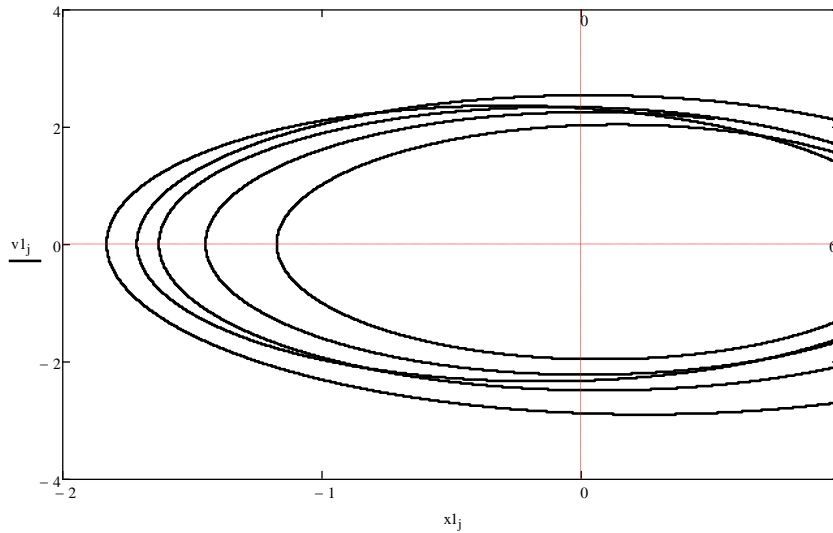
Фазни дијаграм јасно показује осцилације током целог процеса виброудара на одређеном временском интервалу.

Овај дијаграм добили смо у Mathcad 14 од следећа два дијаграма на слици 5.

$$t_j := 0.0001j \quad j := 0, 1.. 200000$$

$$x1_j := e^{-n \cdot t_j} \cdot (C1(p) \cdot \cos(\omega x \cdot t_j) + C2(p) \cos(\omega x \cdot t_j)) + A(p) \cdot \cos(\Omega \cdot t_j + \psi(p))$$

$$v1_j := -e^{-n \cdot t_j} \cdot (\omega x \cdot C1(p) \cdot \sin(t_j \cdot \omega x) + \omega x \cdot C2(p) \cdot \sin(t_j \cdot \omega x)) - n \cdot e^{-n \cdot t_j} \cdot (C1(p) \cdot \cos(t_j \cdot \omega x) + C2(p) \cdot \cos(t_j \cdot \omega x)) - \Omega \cdot \sin(\psi(p) + \Omega \cdot t_j) \cdot A(p)$$

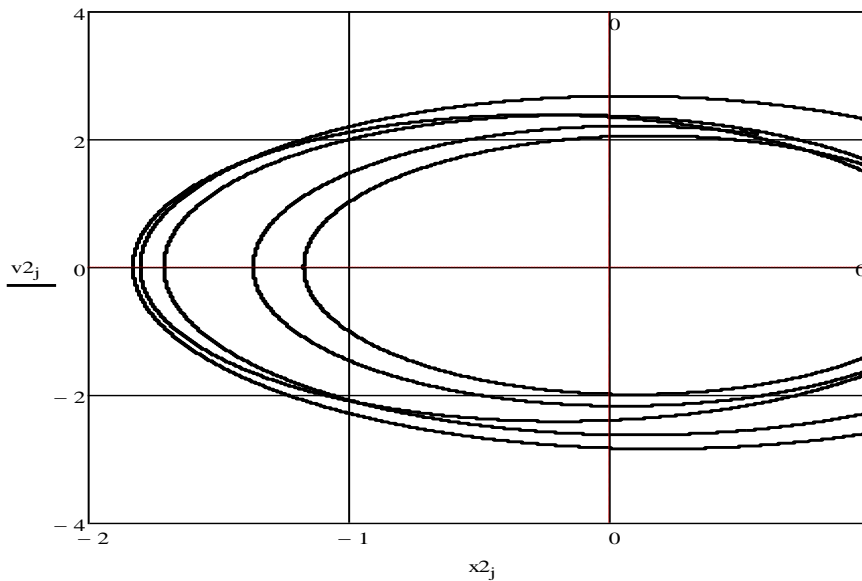


$$\Delta_x = 0.2\pi$$

$$j := 0, 1.. 200000 \quad t_j := 0.0001j$$

$$x2_j := e^{-n \cdot t_j} \cdot (C1(p) \cdot \cos(\omega x \cdot t_j) + C2(p) \cos(\omega x \cdot t_j)) + A(p) \cdot \cos(\Omega \cdot t_j + \psi(p))$$

$$v2_j := -e^{-n \cdot t_j} \cdot (\omega x \cdot C1(p) \cdot \sin(t_j \cdot \omega x) + \omega x \cdot C2(p) \cdot \sin(t_j \cdot \omega x)) - n \cdot e^{-n \cdot t_j} \cdot (C1(p) \cdot \cos(t_j \cdot \omega x) + C2(p) \cdot \cos(t_j \cdot \omega x)) - \Omega \cdot \sin(\psi(p) + \Omega \cdot t_j) \cdot A(p)$$



$$\Delta_x = 0.1\pi$$

Слика 5. Фазни портрети у Mathcad 14 када је $\Delta_x = 0.1\pi$ и $\Delta_x = 0.2\pi$.

Синтеза (оптимизација) виброударних процеса

При истраживању виброударних процеса принцип оптималности захтева прецизирање. У овом примеру проучавамо најмање време прелазног процеса, тј., процес ће бити оптималан у погледу времена.

Одређивање функције управљања $U = U(t)$ у зависности од фазних координата које карактеришу стање динамичког система, представља решење проблема синтезе оптималног управљања. Управљање које испуњава постављени услов зове се оптимално управљање, а фазна трајекторија зове се оптимална трајекторија [60], [76].

Формулишемо задатак. Међу свим могућим силама $F(t)$ при којима виброударни осцилатор масе m (слика 1) прелази из почетног фазног стања $X_0(t_0)$ у крајње стање $X_1(T)$, потребно је да се одреди таква сила $F(t)$, при којој се овај процес врши за најкраће време T_{\min} , а при томе је дато ограничење за принудну силу

$$|F(t)| \leq F_0. \quad (20)$$

За решење овог задатка користимо Понтрјагинов принцип максимума. Неке аспекте овог принципа показаћемо у наставку.

Размотримо објекат или процес, који је описан системом диференцијалних једначина

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) \quad i = 1, \dots, n, \quad (21)$$

или векторском једначином $\frac{dX}{dt} = f(X, U)$.

У фазној равни X задате су две тачке $X^0 = x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0$ и $X^1 = x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots, x_n^1$. Размотримо следећи задатак. Од могућих управљања $U(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ (у нашем случају $t_0 = 0$, $t_1 = 2\pi \cdot l / \Omega$), која померају фазну тачку нашег система из одређеног почетног положаја X^0 ($X^0(t_0) = X^0$) у положај X^1 ($X^1(t_1) = X^1$), треба одредити управљање и путању, који доводе до минимума функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) dt. \quad (22)$$

Управљање $U(t)$ и путања $X(t)$ који решавају постављени задатак су оптимални.

Избором функције $f_0(X, U)$ могу се добити различите физичке особине. Ако, на пример, функција $f_0(X, U)$ карактерише потрошњу горива у секунди, онда функционал (22) карактерише потрошњу горива у интервалу времена $\Delta t = t_1 - t_0$, а то је време које је потребно за кретање од тачке X_0 до тачке X_1 . У нашем задатку, $f_0 = 1$, јер минимизирамо само време.

У том случају функционал

$$I = \int_{t_0}^T 1 dt = T - t_0 \quad (23)$$

одређује време кретања. Функционал карактерише било који процес који се дешава у интервалу времена $[t_0, T]$. Управљање и путања, који минимизирају функционал (23), називају се оптимални по времену. Задатак је формулисан на следећи начин: одредити могуће управљање, које помера изабрани објекат из почетне тачке у крајњу тачку, за минимално време T_{\min} . Ако претпоставимо да је $t_0 = 0$, тада критеријум оптималности из (23) има следећи облик $I = T = T_{\min}$.

Поред основног система (21) уведемо помоћну функцију

$\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_k(t))$, као и функцију Хамилтона $H(\psi, X, U)$, где је:

$$H(\psi, X, U) = \lambda \cdot f_0(X, U) + \sum_{i=0}^k \psi_i \cdot f_i(X, U), \quad (24)$$

$$\begin{cases} \frac{d\psi_0}{dt} = 0 \\ \frac{d\psi_i}{dt} = \frac{-\partial H(\psi, X, U)}{\partial x_i} \end{cases} \quad (25)$$

Помоћу ове две функције добија се оптимална вредност функције управљања $u = u(t)$ у сваком тренутку времена t . Према принципу максимума да би управљање $u = u(t)$ било оптимално, Хамилтонијан $H(\psi, X, U)$ треба да има максималну вредност, када помоћна функција $\psi_2(t)$ има максимум. То значи да функција Хамилтона (24) (или функција Понтрјагина) увек има максималну вредност дуж оптималне путање.

П.1.3. Оптимални периодични виброударни режим (оптимално управљање силом, оптимална путања)

Посматрамо пример на слици 1, диференцијална једначина кретања система у интервалима између два удара $m \cdot \ddot{x} + b_x \cdot \dot{x} + c_x \cdot x = F(t)$ може се написати у облику

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + \omega_x^2 \cdot x = u, \quad (26)$$

где је: $u = \frac{F(t)}{m}, \quad u_0 = \frac{F_0}{m}.$

Уводимо фазне координате $s = x = x_1$ и $v = \dot{x} = x_2$ и диференцијалну једначину (26) замењујемо двама диференцијалним једначинама првог реда

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - 2n \cdot x_2 - \omega_x^2 \cdot x_1 \end{cases} . \quad (27)$$

Гранични услови задатка су:

$$t = 0, \quad x_1(0) = \Delta, \quad x_2(0) = \dot{x}_+ = -R \cdot \dot{x}_-, \quad (28)$$

$$t = T = T_{\min}, \quad x_1(T) = \Delta, \quad x_2(T) = \dot{x}_-, \quad (29)$$

где је \dot{x}_- почетна брзина пре удара, \dot{x}_+ почетна брзина после удара.

Ограничење (20) има облик

$$-u_0 \leq u \leq u_0. \quad (30)$$

С обзиром на то да је $f_0 = 1, f_1 = \dot{x} = x_2, f_2 = \ddot{x} = \dot{x}_2 = u - 2n \cdot x_2 - \omega_x^2 \cdot x_1$ функција Хамилтона (24) (функција Понтрјагина) добија облик

$$\begin{aligned} H(\psi, X, U) &= \lambda \cdot f_0 + \psi_1 \cdot f_1 + \psi_2 \cdot f_2, \text{ тј.} \\ H(\psi, X, U) &= \lambda \cdot 1 + \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 \cdot (u - 2n \cdot x_2 - \omega_x^2 \cdot x_1). \end{aligned} \quad (31)$$

Систем једначина (25) добија облик

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} \end{cases} . \quad (32)$$

Када одредимо изводе, систем једначина (32) добија облик

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = \omega_x^2 \cdot \psi_2 \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 + 2n \cdot \psi_2 \end{cases} . \quad (33)$$

Трансформација система (33) за функцију $\psi_2(t)$ доводи до следеће диференцијалне једначине

$$\ddot{\psi}_2 - 2n \cdot \dot{\psi}_2 + \omega_x^2 \cdot \psi_2 = 0 . \quad (34)$$

Решење једначине (34) зависи од вредности интензитета пригушења n , истраживање спроводимо када је мало пригушење ($n \ll \omega_x$). Решење једначине (34) можемо написати у облику који је познат из теорије диференцијалних једначина:

$$\psi_2(t) = e^{n \cdot t} (C_1 \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\Omega_1 \cdot t)), \quad (35)$$

или у програму Wolfram Matematika 7 добија се:

$$\text{DSolve}[\psi''[t] - 2 * n * \psi'[t] + \omega^2 * \psi[t] = 0, \psi, t], \\ \left\{ \left\{ \psi \rightarrow \left(\{t\} \rightarrow c_1 e^{t(n - \sqrt{n^2 - \omega^2})} + c_2 e^{t(n + \sqrt{n^2 - \omega^2})} \right) \right\} \right\} .$$

На основу решења (35) видимо да функција $\psi_2(t)$ може имати екстремне вредности ± 1 .

Из принципа максимума следи, да оптимално управљање добија граничне (екстремне) вредности u_0 или $-u_0$ (формула 30), и његов знак се поклапа са знаком функције $\psi_2(t)$, па је:

$$\psi_2(t)u^* = \max_{|u| \leq u_0} \psi_2(t)u = |\psi_2(t)| , \quad (36)$$

$$\text{тј. } u(t) = u_0 \cdot \text{sign}\psi_2(t) \quad \text{или} \quad u = u_0 \cdot \text{sign}\left(e^{n \cdot t} (C_1 \cos(\Omega_1 \cdot t) + C_2 \sin(\Omega_1 \cdot t))\right) . \quad (37)$$

Како су $+1$ и -1 екстремне вредности функције $\psi_2(t)$, израз (37) добија облик

$$\begin{aligned} u &= u_0, \text{ ако је } \psi_2(t) > 0 , \\ u &= -u_0, \text{ ако је } \psi_2(t) < 0 . \end{aligned} \quad (38)$$

Пошто линеарна функција може да промени знак на интервалу не више од једанпут, то је оптимално управљање (од 0 до $T = T_{\min}$):

$$u = \begin{cases} u_0 & \text{при } 0 \leq t < t_1; \\ -u_0 & \text{при } t_1 \leq t < T. \end{cases} \quad (39)$$

$$\text{или } u = \begin{cases} -u_0 & \text{при } 0 \leq t < t_1; \\ u_0 & \text{при } t_1 \leq t < T. \end{cases} \quad (40)$$

Претпоставимо да имамо један прелаз (прекид) функције u у тренутку времена t_1 , тада према (37), време треба да испуни следеће услове у два интервала:

$$\begin{aligned} 1) & \text{ интервал } 0 < t \leq t_1 \Rightarrow 0 < \Omega_1 \cdot t \leq \pi, \\ 2) & \text{ интервал } t_1 < t \leq T \Rightarrow 0 < \Omega_1 \cdot t \leq \pi. \end{aligned} \quad (41)$$

Оптимално управљање силом, једначине (40)

Прво посматрамо (40) – то је друго од два наведена управљања, а разлог је што након удара осцилатор почиње своје кретање супротно од позитивног правца осе x , па у складу са тим принудна сила такође мора бити усмерена супротно од осе x . Прелаз принудне силе у супротни смер дешава се у тренутку t_1 . Прецизније можемо да формулишемо задатак овако: треба испитати које од два управљања нама одговара (39) или (40), и за то је потребно истражити оба случаја. Остаје да се одреди тачка t_1 , тачка прелаза (прекида) за управљање.

Када одредимо укупно решење једначине (26) $x_u = x_h + x_p$ добијамо

$$x(t) = \begin{cases} e^{-n \cdot t} (C_1 \cos(\Omega_1 \cdot t) + C_2 \sin(\Omega_1 \cdot t)) - \frac{u_0}{\omega_x^2} & \text{када је } 0 \leq t < t_1; \\ e^{-n \cdot t} (C_3 \cos(\Omega_1 \cdot t) + C_4 \sin(\Omega_1 \cdot t)) + \frac{u_0}{\omega_x^2} & \text{када је } t_1 \leq t < T_{\min} \end{cases}. \quad (42)$$

Изрази за брзину се добију када нађемо прве изводе

$$v(t) = \begin{cases} e^{-n \cdot t} ((\Omega_1 \cdot C_2 - n \cdot C_1) \cos(\Omega_1 \cdot t) - (\Omega_1 \cdot C_1 + n \cdot C_2) \sin(\Omega_1 \cdot t)) & \text{при } 0 \leq t < t_1; \\ e^{-n \cdot t} ((\Omega_1 \cdot C_4 - n \cdot C_3) \cos(\Omega_1 \cdot t) - (\Omega_1 \cdot C_3 + n \cdot C_4) \sin(\Omega_1 \cdot t)) & \text{при } t_1 \leq t < T_{\min} \end{cases}. \quad (43)$$

Заменимо граничне услове (28) и (29) у (42) и (43) и тада непознате константе интеграције добијају облик:

$$C_1 = \Delta + \frac{u_0}{\omega_x^2}, \quad C_2 = \frac{1}{\Omega_1} (n \cdot C_1 - R \cdot \dot{x}_-), \quad C_3 = \frac{\left(\left(\Delta - \frac{u_0}{\omega_x^2} \right) e^{n \cdot T} - C_4 \sin(\Omega_1 \cdot T) \right)}{\cos(\Omega_1 \cdot T)},$$

$$C_4 = \frac{e^{n \cdot t}}{\Omega_1} \left(\dot{x}_- \cos(\Omega_1 \cdot T) + \left(\Delta - \frac{u_0}{\omega_x^2} \right) (n \cos(\Omega_1 \cdot T) + \Omega_1 \sin(\Omega_1 \cdot T)) \right). \quad (44)$$

Услови континуитета (непрекидности) на фазној путањи имају следећи облик

$$x_1|_{0 \leq t < t_1} = x_1|_{t_1 \leq t < T}, \quad x_2|_{0 \leq t < t_1} = x_2|_{t_1 \leq t < T}. \quad (45)$$

У циљу одређивања минималног (оптималног) времена ($T = T_{\min}$) и времена прелаза (прекида) t_1 , потребно је да релације (42) и (43) испуне услове континуитета (45). Као резултат добијамо следеће трансцендентне једначине:

$$e^{-n \cdot t_1} (C_1 \cos(\Omega_1 \cdot t_1) + C_2 \sin(\Omega_1 \cdot t_1)) - \frac{u_0}{\omega_x^2} = e^{-n \cdot t_1} (C_3 \cos(\Omega_1 \cdot t_1) + C_4 \sin(\Omega_1 \cdot t_1)) + \frac{u_0}{\omega_x^2}, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & ((\Omega_1 \cdot C_2 - n \cdot C_1) \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t_1) - (\Omega_1 \cdot C_1 + n \cdot C_2) \cdot \sin(\Omega_1 \cdot t_1)) = \\ & ((\Omega_1 \cdot C_4 - n \cdot C_3) \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t_1) - (\Omega_1 \cdot C_3 + n \cdot C_4) \cdot \sin(\Omega_1 \cdot t_1)) \end{aligned} \quad (47)$$

Једначине (46) и (47) не могу се решити аналитички, тако да ове две једначине решавамо графички. Због тога трансформишемо систем једначина (46) и (47) на следећи облик:

$$tg(\Omega_1 \cdot t_1) = \frac{\Omega_1 \cdot C_2 - n \cdot C_1 - \Omega_1 \cdot C_4 + n \cdot C_3}{\Omega_1 \cdot C_1 + n \cdot C_2 - \Omega_1 \cdot C_3 - n \cdot C_4}, \quad (48)$$

$$e^{-n \cdot t_1} ((C_1 - C_3) \cos(\Omega_1 \cdot t_1) + (C_2 - C_4) \sin(\Omega_1 \cdot t_1)) - 2 \frac{u_0}{\omega_x^2} = 0. \quad (49)$$

Непознате константе интеграције C_3 и C_4 су функције параметра T , тј. $C_3(T)$ и $C_4(T)$.

Тако да леви део једначине (48) зависи само од t_1 а десни део зависи од T . Изразимо из једначине (48) параметар t_1 као функцију од T , тј. $t_1(T)$.

Трансформишемо систем једначина (48) и (49) на облик:

$$t_1(T) = \frac{1}{\Omega_1} \arctg \left(\frac{\Omega_1 \cdot C_2 - n \cdot C_1 - \Omega_1 \cdot C_4(T) + n \cdot C_3(T)}{\Omega_1 \cdot C_1 + n \cdot C_2 - \Omega_1 \cdot C_3(T) - n \cdot C_4(T)} \right), \quad (50)$$

$$G(T) = e^{-n \cdot t_1(T)} ((C_1 - C_3(T)) \cos(\Omega_1 \cdot t_1(T)) + (C_2 - C_4(T)) \sin(\Omega_1 \cdot t_1(T))) - 2 \frac{u_0}{\omega_x^2} = 0. \quad (51)$$

Сада ове две трансцендентне једначине (50) и (51) решавамо графички. За решавање користимо математички програм Mathcad 14 и при томе се добија минимално (оптимално) време $T = T_{\min}$, на месту где функција $G(T)$ сече апсцису. После тога минимално време заменимо у (50) и добија се време прелаза (прекида) t_1 .

На овај начин испитано је управљање (40), добија се време прелаза (прекида) t_1 и добија се минимално (оптимално) време $T = T_{\min}$, а затим се нацрта дијаграм оптималног кретања виброударног осцилатора. Тако је доказано да за наш случај одговара управљање (40), и то је оптимално управљање.

Истражен је конкретан случај за следеће параметре:

$$\Delta_x = 0.2 \cdot \pi, \Delta = 1m, m = 1kg, F_0 = 2N, R = 0.7, \omega_x = 1s^{-1}, V_0 = 1m/s, u_0 = \frac{F_0}{m}, \Omega_1 = \omega_x.$$

Прикажимо случај (40) графички, на сликама 6.а и 6.б приказан је правац и смер дејства силе F_0 . До времена прелаза (прекида) $0 < t \leq t_1$ (сл. 6.а) сила F_0 дејствује у супротном смеру од одабраног позитивног смера осе x . Али у тренутку времена t_1 сила F_0 нагло мења свој смер, супротно, у смеру који се поклапа са позитивним смером осе x , и дејствује у интервалу времена $t_1 < t \leq T$ ($T = T_{\min}$) (сл. 6.б).



Слика 6. Правац и смер дејства спољашње принудне силе $F(t)$.

Слика 6.а. смер дејства силе F_0
на временском интервалу $0 < t \leq t_1$
до тренутка промене смера силе
(тренутак прелаза t_1)

Слика 6.б. смер дејства силе F_0
на временском интервалу $t_1 < t \leq T$
после тренутка промене смера силе
(тренутак прелаза t_1)

Посматрањем слика 6.а и 6.б видимо да је ова сила усмерена у смеру позитивне оријентације координатне осе, уколико је прорачуната вредност те силе са знаком плус, и обрнуто.

У наставку приказујемо део прорачуна и одговарајуће графичко решење трансцендентних једначина (50) и (51).

Поставимо почетне податке за наш задатак

$$\Delta x := 0.2 \cdot \pi \quad \Delta := 1 \quad m := 1 \quad F_0 := 2 \quad R := 0.7 \quad U_0 := \frac{F_0}{m}$$

$$V_0 := 1 \quad \omega x := 1 \quad \Omega := 2 \quad n := \frac{\omega x \cdot \Delta x}{2 \cdot \pi} \quad \Omega_1 := \omega x \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x}{2 \cdot \pi}\right)^2}$$

Поставимо константе интеграције

$$C_1 := \frac{U_0}{\omega x^2} + \Delta \quad C_2 := \frac{1}{\Omega_1} \cdot (n \cdot C_1 - R \cdot V_0)$$

$$C_4(x) := \frac{e^{n \cdot x}}{\Omega_1} \cdot \left[V_0 \cdot \cos((\Omega_1 \cdot x)) + \left(\Delta + \frac{-U_0}{\omega x^2} \right) \cdot (n \cdot \cos(\Omega_1 \cdot x) + \Omega_1 \cdot \sin(\Omega_1 \cdot x)) \right]$$

$$C_3(x) := \frac{\left[\left(\Delta + \frac{-U_0}{\omega x^2} \right) \cdot e^{n \cdot x} - C_4(x) \cdot (\sin(\Omega_1 \cdot x)) \right]}{\cos(\Omega_1 \cdot x)}$$

Поставимо функцију

$$a(x) := \frac{\Omega_1 \cdot C_2 - n \cdot C_1 - \Omega_1 \cdot C_4(x) + n \cdot C_3(x)}{\Omega_1 \cdot C_1 + n \cdot C_2 - \Omega_1 \cdot C_3(x) - n \cdot C_4(x)} \quad t_1(x) := \frac{1}{\Omega_1} \cdot \text{atan}(a(x))$$

$$G(x) := e^{-(n \cdot t_1(x))} \cdot \left[\frac{\Omega_1 \cdot C_1 + n \cdot C_2 - \Omega_1 \cdot C_3(x) - n \cdot C_4(x)}{\sqrt{(\Omega_1 \cdot C_1 + n \cdot C_2 - \Omega_1 \cdot C_3(x) - n \cdot C_4(x))^2 + (\Omega_1 \cdot C_2 - n \cdot C_1 - \Omega_1 \cdot C_4(x) + n \cdot C_3(x))^2}} \cdot (C_1 - C_3(x)) + \frac{\Omega_1 \cdot C_2 - n \cdot C_1 - \Omega_1 \cdot C_4(x) + n \cdot C_3(x)}{\sqrt{(\Omega_1 \cdot C_1 + n \cdot C_2 - \Omega_1 \cdot C_3(x) - n \cdot C_4(x))^2 + (\Omega_1 \cdot C_2 - n \cdot C_1 - \Omega_1 \cdot C_4(x) + n \cdot C_3(x))^2}} \cdot (C_2 - C_4(x)) \right] - 2 \cdot \frac{U_0}{\omega x^2}$$

Тражимо тачку пресека графика $G(T)$ са хоризонталном осом T (решење трансцендентне једначине)

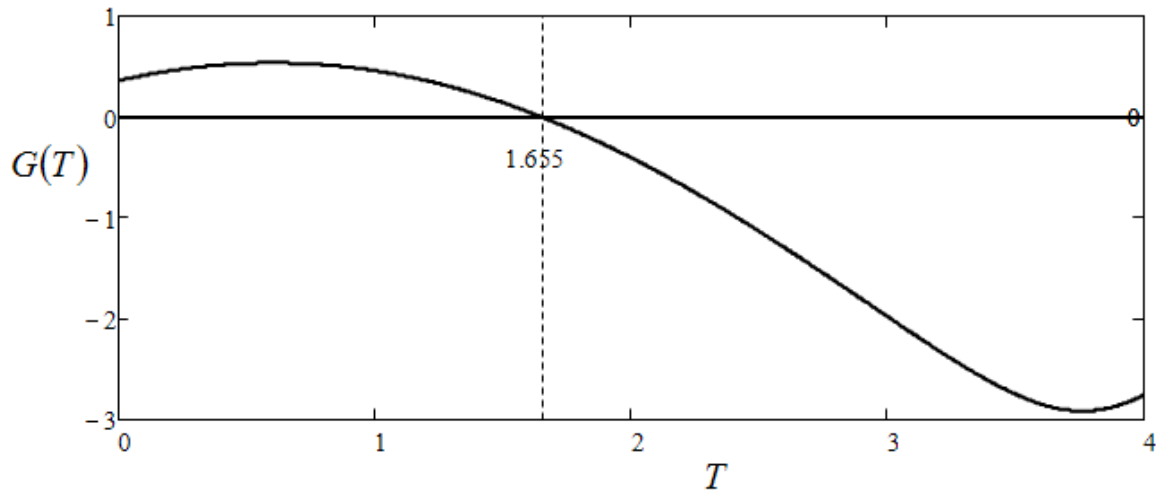
$$\text{root}(G(x), x, 1, 2) = 1.655$$

$$T_1 := 1.655$$

Одредимо време прелаза (прекида) t_1

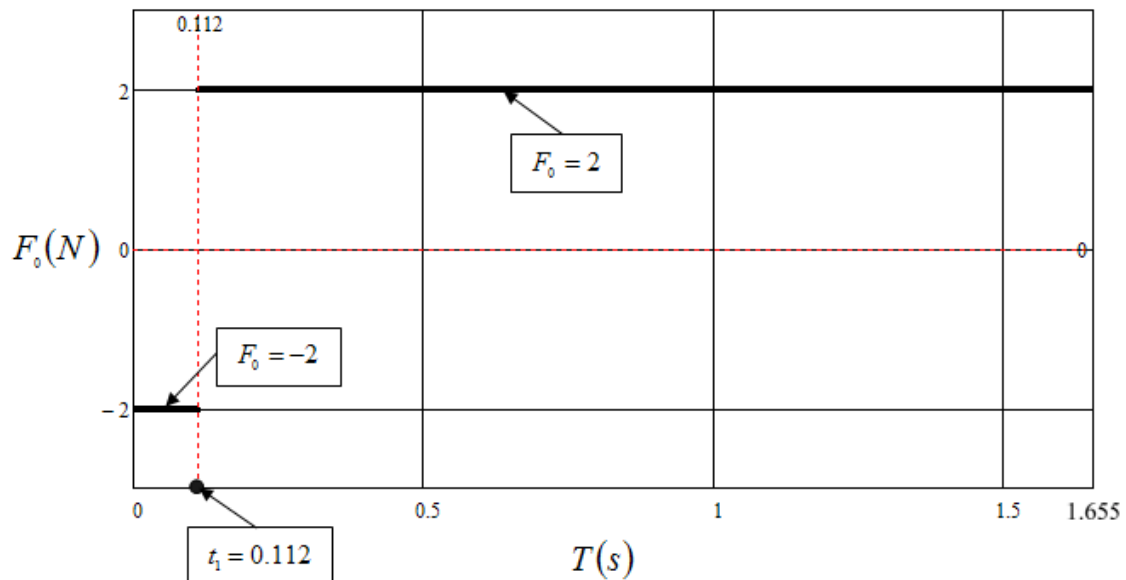
$$t_1(T_1) = 0.112$$

На слици 7 представљен је график $G(T)$ (формула 51), који пресеца осу апсцисе у тачки $T = 1.655 s$, из (50) налазимо време прелаза (прекида) $t_1 = 0.112 s$. Обе вредности T и t_1 испуњавају услов (41).



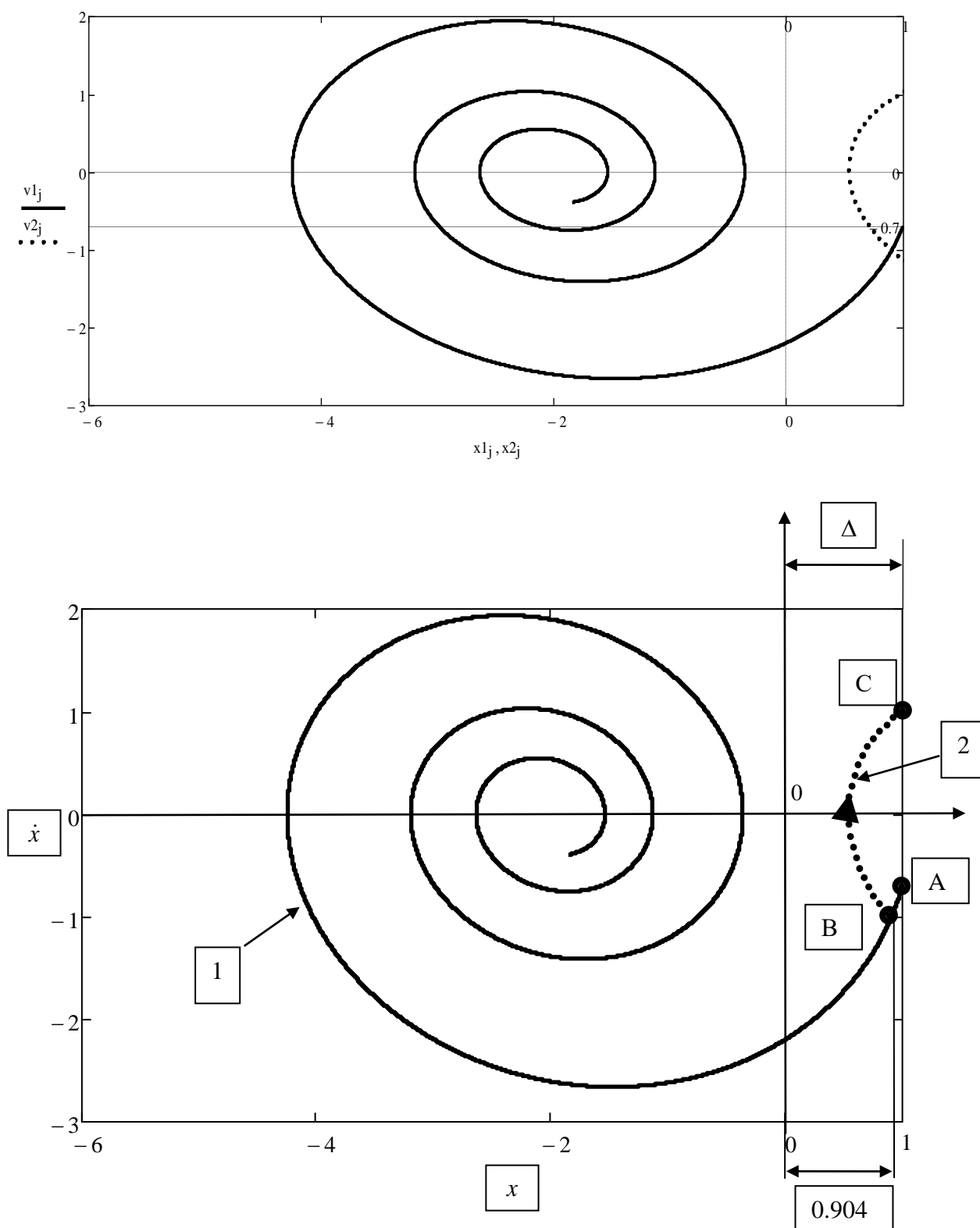
Слика 7. Графичко одређивање корена трансцедентне једначине (51) $G(T)$.

На слици 8 представљен је дијаграм управљања силом F_0 за један период $T = T_{\min}$.



Слика 8. Дијаграм управљања спољашњом принудном силом $F(t)$.

У наставку је приказан потребни цртеж за конструисање слике 9 у Mathcad 14.



Слика 9. Фазни дијаграм оптималног кретања виброударног осцилатора између два узастопна удара.

На слици 9 приказано је кретање осцилатора у фазном простору, график је нацртан у Mathcad 14 на основу претходно одређених вредности за време прелаза (прекида) $t_1 = 0.112 \text{ s}$ и вредности за минимално (оптимално) време $T = T_{\min} = 1.655 \text{ s}$.

Координата тачке прелаза (прекида) је тачка В, $x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0.904 \text{ m}$, а брзина осцилатора у тачки прелаза (прекида) је $\dot{x}_1(t_1) = \dot{x}_2(t_1) = -1.012 \text{ m/s}$. Прво, осцилатор почиње своје кретање од тачке А ка тачки В по путањи (1) првог фазног дијаграма (прва формула у 42) на временском интервалу $[0; t_1]$. Даље у тачки прелаза (прекида) t_1 осцилатор наставља своје кретање од тачке В до тачке С по другом фазном дијаграму (2) (друга формула у 42). Оба фазна дијаграма представљају спиралу која се отвара. Путања кретања А-В-С је оптимална путања кретања виброударног осцилатора.

Тачка А на слици 9, одговара тренутку времена $t_0 = 0$ после удара терета о непокретни граничник, $v_A = -0.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, у том тренутку времена спољашња принудна сила F_0 дејствује у смеру као што је то приказано на слици 6.а.

Тачка В на слици 9, одговара тренутку времена $t_1 = 0.112 \text{ s}$ и у том тренутку времена спољашња принудна сила F_0 нагло мења свој смер, тј., има прелаз (прекид) и дејствује у смеру као што је то приказано на слици 6.б.

Тачка С на слици 9, одговара тренутку времена $t = T_{\min} = 1.655 \text{ s}$ непосредно испред удара, када терет прилази непокретном граничнику, али се удар још није десио, $v_C = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. У том тренутку времена спољашња принудна сила F_0 мења смер и дејствује у смеру као што је приказано на слици 6.а.

Када се терет креће по трајекторији АВ од тачке А ка тачки В, то значи да се терет креће по фазној трајекторији $X_1 - V_1$. У тачки В је прелаз (прекид) и терет почиње да се креће по другој фазној трајекторији $X_2 - V_2$ од тачке В до тачке С.

У наставку се прилаже (показује) део прорачуна и одговарајуће графичко решење у Mathcad 14 за цртање графика функција $x = x(t)$, $v = v(t)$, $E_k = E_k(t)$, $E_p = E_p(t)$, $F_w = F_w(t)$ у интервалу између два удара.

$$t1 := 0.112 \quad T := 1.655$$

$$t2 := 0, 0.001 .. 0.112 \quad t3 := 0.112, 0.123 .. 1.655$$

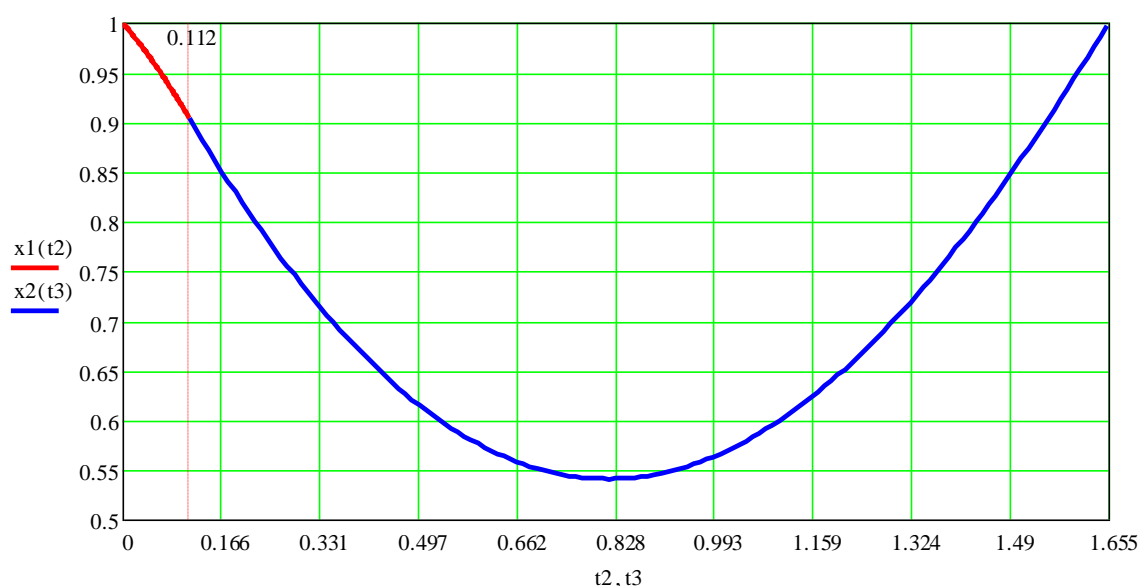
$$x1(t2) := e^{-n \cdot t2} \cdot (C1 \cdot \cos(\Omega1 \cdot t2) + C2 \cdot \sin(\Omega1 \cdot t2)) + \frac{-U0}{\omega x^2}$$

$$v1(t2) := e^{-n \cdot t2} \cdot (C2 \cdot \Omega1 \cdot \cos(t2 \cdot \Omega1) - C1 \cdot \Omega1 \cdot \sin(t2 \cdot \Omega1)) - n \cdot e^{-n \cdot t2} \cdot (C1 \cdot \cos(t2 \cdot \Omega1) + C2 \cdot \sin(t2 \cdot \Omega1))$$

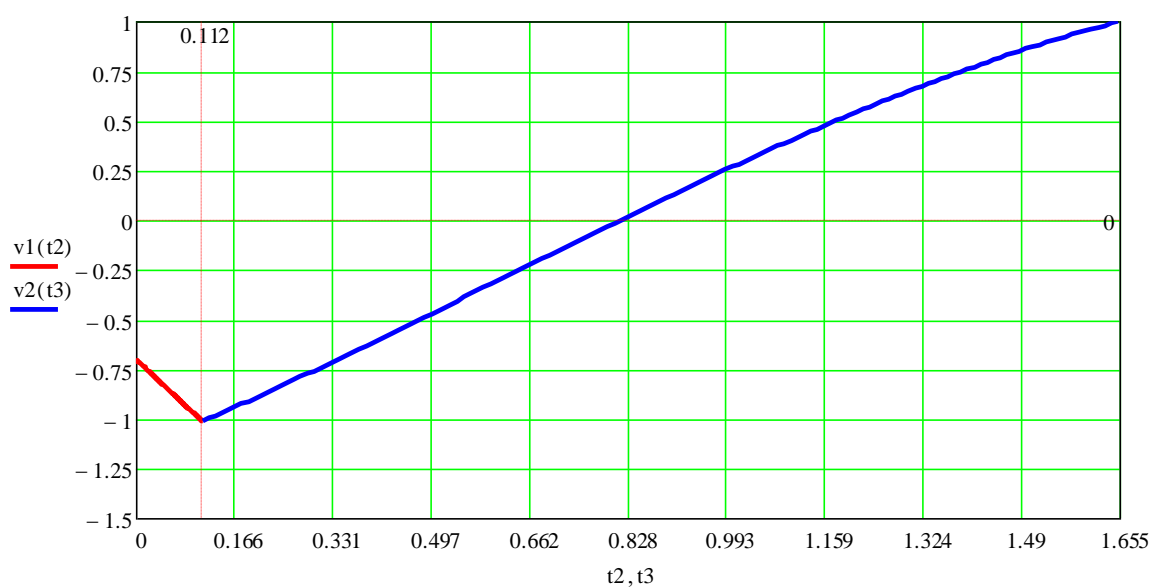
$$x2(t3) := e^{-n \cdot t3} \cdot (C3 \cdot \cos(\Omega1 \cdot t3) + C4 \cdot \sin(\Omega1 \cdot t3)) + \frac{U0}{\omega x^2}$$

$$v2(t3) := e^{-n \cdot t3} \cdot (C4 \cdot \Omega1 \cdot \cos(t3 \cdot \Omega1) - C3 \cdot \Omega1 \cdot \sin(t3 \cdot \Omega1)) - n \cdot e^{-n \cdot t3} \cdot (C3 \cdot \cos(t3 \cdot \Omega1) + C4 \cdot \sin(t3 \cdot \Omega1))$$

На следећим сликама приказани су графици функција $x = x(t)$, $v = v(t)$, $E_k = E_k(t)$, $E_p = E_p(t)$, $F_w = F_w(t)$ у интервалу између два удара.

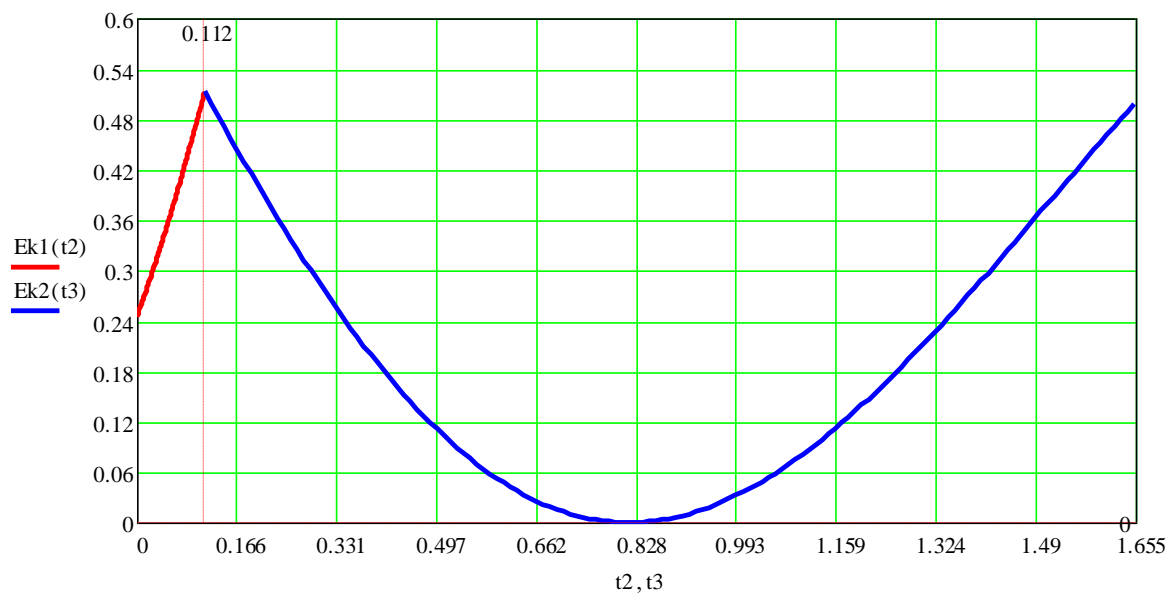


Слика 10.а. Координата у зависности од времена $x = x(t)$



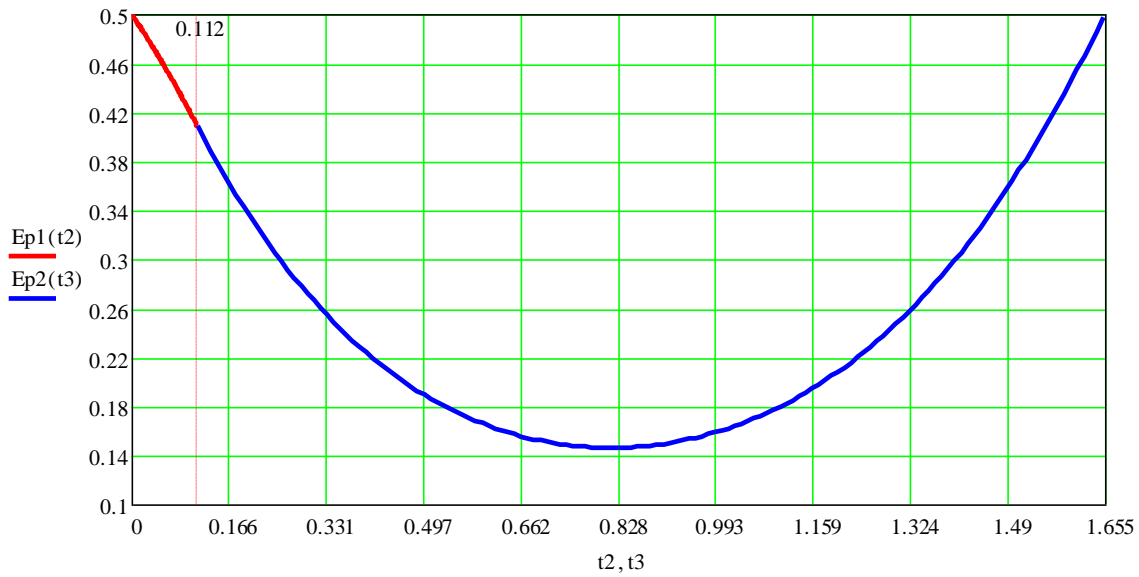
Слика 10.б. Брзина у зависности од времена $v = v(t)$

$$E_{k1}(t_2) := \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_1(t_2))^2 \qquad E_{k2}(t_3) := \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2(t_3))^2$$



Слика 10.в. Кинетичка енергија у функцији времена $E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = E_k(t)$

$$E_{p1}(t_2) := \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_1(t_2))^2 \qquad E_{p2}(t_3) := \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_2(t_3))^2$$

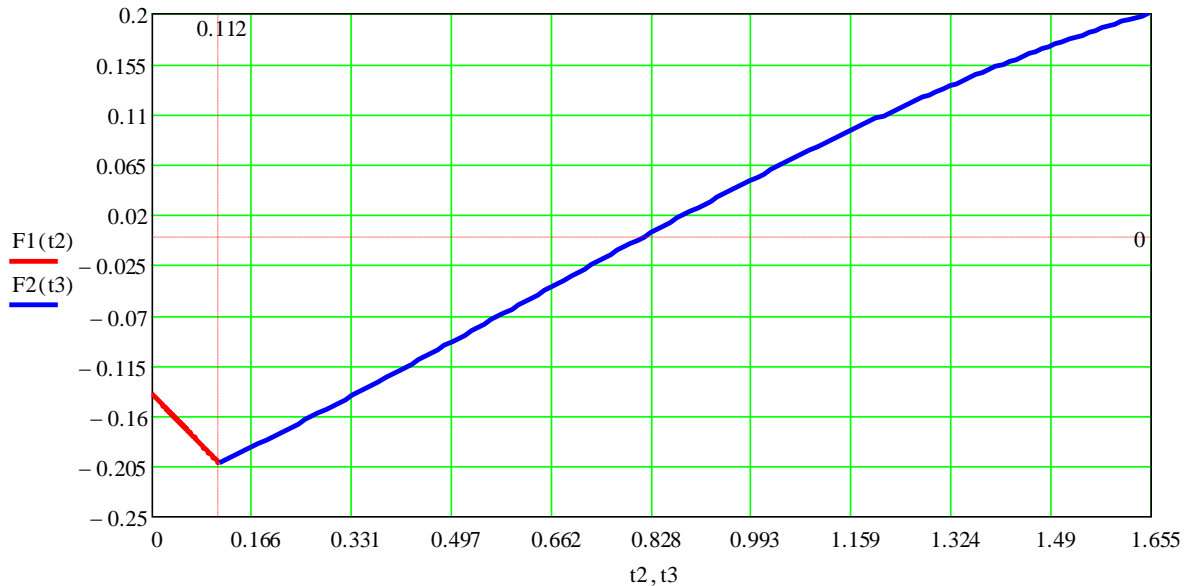


Слика 10. г. Потенцијална енергија опруге у функцији времена $E_p = \frac{1}{2} c \cdot x^2 = E_p(t)$

$$b := \frac{m \cdot \Delta x \cdot \omega X}{\pi}$$

$$F_1(t_2) := b \cdot v_1(t_2)$$

$$F_2(t_3) := b \cdot v_2(t_3)$$



Слика 10. д. Сила пригушења (отпора) у функцији времена $F_w = -b \cdot \dot{x}$

Оптимално управљање силом , једначине (39)

У наставку испитујемо управљање (39) $u = \begin{cases} u_0 & \text{при } 0 \leq t < t_1 \\ -u_0 & \text{при } t_1 \leq t < T \end{cases}$.

Када одредимо укупно решење једначине (26) $x_u = x_h + x_p$ добијамо

$$x(t) = \begin{cases} e^{-nt} (C_1 \cos(\Omega_1 \cdot t) + C_2 \sin(\Omega_1 \cdot t)) + \frac{u_0}{\omega_x^2} & \text{када је } 0 \leq t < t_1 \\ e^{-nt} (C_3 \cos(\Omega_1 \cdot t) + C_4 \sin(\Omega_1 \cdot t)) - \frac{u_0}{\omega_x^2} & \text{када је } t_1 \leq t < T \end{cases}. \quad (52)$$

Изрази за брзину се добију када одредимо прве изводе

$$v(t) = \begin{cases} e^{-nt} ((\Omega_1 \cdot C_2 - n \cdot C_1) \cos(\Omega_1 \cdot t) - (\Omega_1 \cdot C_1 + n \cdot C_2) \sin(\Omega_1 \cdot t)) & \text{при } 0 \leq t < t_1 \\ e^{-nt} ((\Omega_1 \cdot C_4 - n \cdot C_3) \cos(\Omega_1 \cdot t) - (\Omega_1 \cdot C_3 + n \cdot C_4) \sin(\Omega_1 \cdot t)) & \text{при } t_1 \leq t < T \end{cases}. \quad (53)$$

Заменимо граничне услове (28) и (29) у (52) и (53) и тада непознате константе интеграције добијају облик:

$$C_1 = \Delta - \frac{u_0}{\omega_x^2}, \quad C_2 = \frac{1}{\Omega_1} (n \cdot C_1 - R \cdot \dot{x}_-), \quad C_3 = \frac{\left(\left(\Delta + \frac{u_0}{\omega_x^2} \right) e^{n \cdot T} - C_4 \sin(\Omega_1 \cdot T) \right)}{\cos(\Omega_1 \cdot T)},$$

$$C_4 = \frac{e^{n \cdot t}}{\Omega_1} \left(\dot{x}_- \cos(\Omega_1 \cdot T) + \left(\Delta + \frac{u_0}{\omega_x^2} \right) \cdot (n \cos(\Omega_1 \cdot T) + \Omega_1 \sin(\Omega_1 \cdot T)) \right). \quad (54)$$

Услови континуитета (непрекидности) на фазној путањи имају следећи облик

$$x_1|_{0 \leq t < t_1} = x_1|_{t_1 \leq t < T}, \quad x_2|_{0 \leq t < t_1} = x_2|_{t_1 \leq t < T}. \quad (55)$$

У циљу одређивања минималног (оптималног) времена ($T = T_{\min}$) и времена прелаза (прекида) t_1 , потребно је да релације (52) и (53) испуне услове континуитета (55).

Као резултат добијамо следеће трансцендентне једначине:

$$e^{-n \cdot t_1} (C_1 \cos(\Omega_1 \cdot t_1) + C_2 \sin(\Omega_1 \cdot t_1)) + \frac{u_0}{\omega_x^2} = e^{-n \cdot t_1} (C_3 \cos(\Omega_1 \cdot t_1) + C_4 \sin(\Omega_1 \cdot t_1)) - \frac{u_0}{\omega_x^2}, \quad (56)$$

$$\begin{aligned} & ((\Omega_1 \cdot C_2 - n \cdot C_1) \cos(\Omega_1 \cdot t_1) - (\Omega_1 \cdot C_1 + n \cdot C_2) \sin(\Omega_1 \cdot t_1)) = \\ & = ((\Omega_1 \cdot C_4 - n \cdot C_3) \cos(\Omega_1 \cdot t_1) - (\Omega_1 \cdot C_3 + n \cdot C_4) \sin(\Omega_1 \cdot t_1)) \end{aligned} \quad (57)$$

Једначине (56) и (57) не могу се решити аналитички, тако да ове две једначине решавамо графички. Због тога трансформишемо систем једначина (56) и (57) на следећи облик:

$$tg(\Omega_1 \cdot t_1) = \frac{\Omega_1 \cdot C_2 - n \cdot C_1 - \Omega_1 \cdot C_4 + n \cdot C_3}{\Omega_1 \cdot C_1 + n \cdot C_2 - \Omega_1 \cdot C_3 - n \cdot C_4}, \quad (58)$$

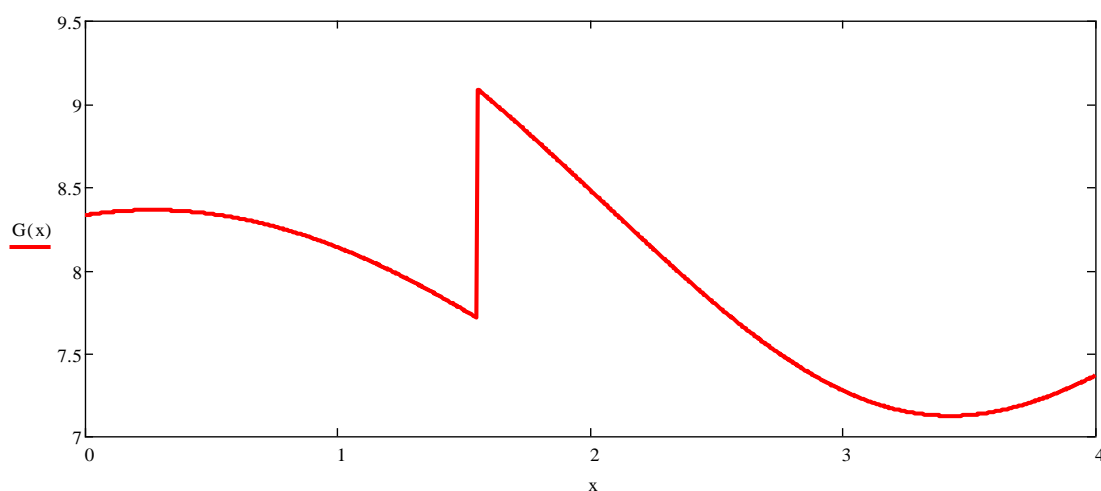
$$e^{-n \cdot t_1} ((C_1 - C_3) \cos(\Omega_1 \cdot t_1) + (C_2 - C_4) \sin(\Omega_1 \cdot t_1)) + 2 \frac{u_0}{\omega_x^2} = 0. \quad (59)$$

Непознате константе интеграције C_3 и C_4 су функције параметра $T = T_{\min}$, тј. $C_3(T)$ и $C_4(T)$. Тако да леви део једначине (58) зависи само од t_1 а десни део зависи од T . Изразимо из једначине (58) параметар t_1 као функцију од T , тј. $t_1(T)$. Трансформишемо систем једначина (58) и (59) на облик:

$$t_1(T) = \frac{1}{\Omega_1} \arctg \left(\frac{\Omega_1 \cdot C_2 - n \cdot C_1 - \Omega_1 \cdot C_4(T) + n \cdot C_3(T)}{\Omega_1 \cdot C_1 + n \cdot C_2 - \Omega_1 \cdot C_3(T) - n \cdot C_4(T)} \right), \quad (60)$$

$$G(T) = e^{-n \cdot t_1(T)} ((C_1 - C_3(T)) \cos(\Omega_1 \cdot t_1(T)) + (C_2 - C_4(T)) \sin(\Omega_1 \cdot t_1(T))) + 2 \frac{u_0}{\omega_x^2} = 0. \quad (61)$$

Сада ове две трансцендентне једначине (60) и (61) решавамо графички. За решавање користимо математички програм Mathcad 14. При томе не може да се добије минимално (оптимално) време $T = T_{\min}$, јер функција $G(T)$ не сече апсцису. На слици 11 представљен је график $G(T)$ (формула 61), који не пресеца осу апсцисе. График нема корене (нуле) и ово управљање (39) не одговара за наш случај.



Слика 11. Графичко одређивање корена трансцендентне једначине (61) $G(T)$.

Анализа истраживања, регулисање и управљање силом

У овом примеру истражена је анализа и синтеза (оптимизација) кретања једномасеног једнострано ударног осцилатора на слици 1, када се у систему реализује периодични виброударни режим. Кретање осцилатора је периодично са константним периодом T , а то је време између два узастопна удара.

У првом делу задатка истражена је анализа виброударног система помоћу математичког модела на слици 1, који се налази под дејством спољашње периодичне принудне силе $F(t)$. Истражена је могућност ударног процеса у зависности од различитих параметара и одређени су услови (области) постојања периодичних виброударних режима. Добијени су резултати који омогућавају да се обезбеди стабилност кретања периодичних виброударних система. Главни закључак састоји се у томе да што је мањи коефицијент вискозног отпора средине, то је шира област постојања ударних режима.

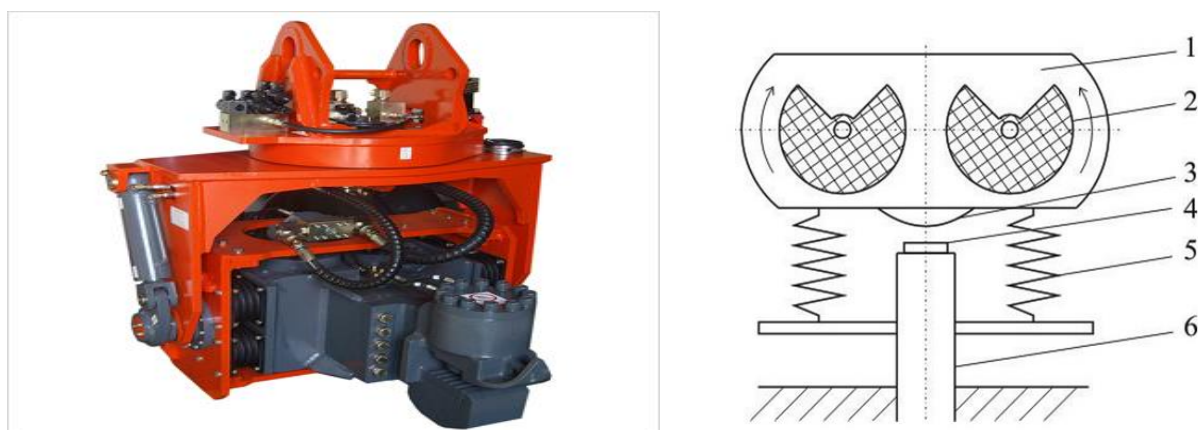
У другом делу задатка истражена је синтеза (оптимизација) модела на слици 1. Помоћу Понтрјагиновог принципа максимума одређен је оптимални закон управљања спољашном принудном силом F_0 , са циљем да се обезбеди оптимални закон кретања, односно да за најкраће време T_{\min} обезбедимо померање масе из тачке А у тачку С (слика 9).

У пракси, регулисање и управљање силом F_0 врши се помоћу електричног погона. Спољашња принудна сила има променљив карактер и она се контролише системом аутоматског управљања по датом програму. Спољашња принудна сила мора да обезбеди оптимално управљање, тако да се обезбеди потребна вредност силе F_0 , као и закон промене ове силе, који треба да обезбеди силу одређеног смера до тренутка прелаза (прекида) t_1 , и онда у тренутку прелаза (прекида) t_1 треба да се промени смер силе на супротни смер. Овај закон се реализује електричним погоном, на основу промене закона струје $I(t)$. Електрични погон је електромеханички систем који се састоји се од електромотора, преносника, управљачког и информационог уређаја, а механички део обухвата покретне масе погона и механизма. Електрични погон треба да обезбеди такав закон промене струје $I(t)$, који може да реализује потребан закон промене силе F_0 као што је приказано на слици 8.

II.2. Истраживање оптимизације рада покретног дела виброчекића Daedong

II.2.1. Изглед и принципијелна шема виброчекића Daedong, математички модел и диференцијална једначина кретања у интервалима између судара

У овом примеру истражујемо оптимизацију рада покретног дела виброчекића по времену, који се користи за забијање у земљу носача, шипова, цеви и других елемената [32], [33]. Основно истраживање се реализује на виброчекићу марке Daedong, изглед и принципијелна шема је представљена на слици 1.

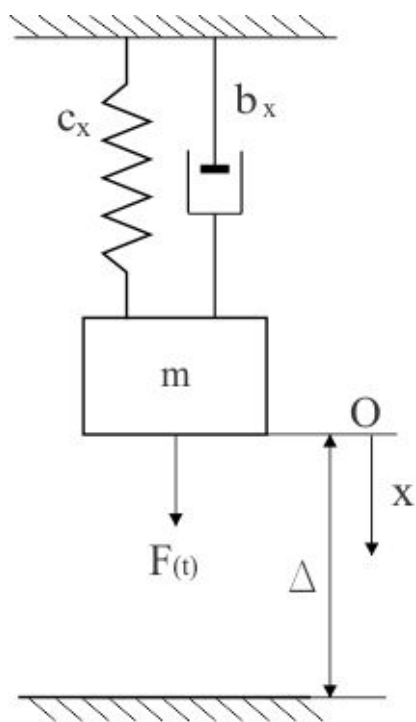


Слика 1. Изглед и принципијелна шема виброчекића Daedong:

1 — вибрирајући део; 2 — дебаланс; 3 — ударна игла; 4 — наковањ (почетак цеви, носача, итд); 5 — еластична опруга; 6 — греда (цев коју забијамо).

На слици 2 представљен је покретни део виброчекића као математички модел једномасеног једнострано ударног осцилатора, када на систем дејствују: еластична сила опруге $F_e = c \cdot x$, сила вискозног пригушења $F_w = -b \cdot \dot{x}$ и спољашња периодична принудна сила $F(t) = F_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi)$. При томе су маса осцилатора m , крутост опруге c и коефицијент пропорционалности b константне величине.

У тренутку удара масе о граничник, који се налази на растојању $x = \Delta$, (слика 2), брзина масе тренутно мења знак. Напоменимо да позитивна вредност Δ одговара положају граничника са зазором, а негативна вредност када је опруга притиснута. Кретање виброударног осцилатора је периодично са константним периодом T , а то је време између два узастопна удара.



Слика 2. Математички модел покретног дела виброчекића Daedong .

Диференцијална једначина кретања система у интервалима између два узастопна удара је облика:

$$m \cdot \ddot{x} + b_x \cdot \dot{x} + c_x \cdot x = F_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi), \quad (1)$$

односно

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + \omega_x^2 \cdot x = P_1 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi). \quad (2)$$

Једначина (2) у потпуности одговара диференцијалној једначини кретања модела из наслова II.1., па се динамичка анализа и прорачун динамичке синтезе овог система у потпуности изводи на исти начин, како је то урађено у поменутом наслову. У наставку спроводимо синтезу (оптимизацију) модела приказаног на слици 2, са подацима за реални виброударни систем-виброчекић Daedong.

Синтеза (оптимизација) вибрударних процеса

Принудна сила $F(t)$ која делује на покретни део одређена је законом промене силе и управљање се врши системом аутоматског управљања по датом програму. Задатак управљања је да дефинише такво управљање $U = U(t)$, које ће превести наш систем из почетног фазног стања X_0 у крајње стање X , за најкраће време T_{\min} . У овом примеру проучавамо најмање време прелазног процеса и за решење користимо Понтрјагинов принцип максимума. При томе је дато ограничење за принудну силу $|F(t)| \leq F_0$.

Управљање и путања, који минимизирају функционал

$$I = \int_{t_0}^T 1 dt = T - t_0, \quad (3)$$

називају се оптимални по времену. Понтрјагинов принцип максимума је формулисан на следећи начин: одредити могуће управљање, које помера изабрани објекат из почетне тачке у крајњу тачку, за минимално време T_{\min} . Ако претпоставимо да је $t_0 = 0$, тада критеријум оптималности из (3) има следећи облик $I = T = T_{\min}$.

Поред основног система диференцијалних једначина које описују систем

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

уведимо помоћну функцију $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_k(t))$, као и функцију Хамилтона (или функцију Понтрјагина) $H(\psi, X, U)$, где је:

$$H(\psi, X, U) = \lambda \cdot f_0(X, U) + \sum_{i=0}^k \psi_i \cdot f_i(X, U), \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{d\psi_0}{dt} = 0; & \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H(\psi, X, U)}{\partial x_i}. \end{cases} \quad (6)$$

Помоћу ове две функције добија се оптимална вредност функције управљања $u = u(t)$ у сваком тренутку времена t . Према принципу максимума да би управљање $u = u(t)$ било оптимално, Хамилтонијан $H(\psi, X, U)$ треба да има максималну вредност, када помоћна функција $\psi_2(t)$ има максимум. То значи да функција Хамилтона (5) (или функција Понтрјагина) увек има максималну вредност дуж оптималне путање.

II.2.2. Оптимални периодични виброударни режими (оптимално управљање силом, оптимална путања)

Посматрамо модел на слици 2, диференцијална једначина кретања система у интервалима између два удара $m \cdot \ddot{x} + b_x \cdot \dot{x} + c_x \cdot x = F(t)$ може се написати у облику

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + \omega_x^2 \cdot x = u, \quad (7)$$

где је: $u = \frac{F(t)}{m}$, $u_0 = \frac{F_0}{m}$.

Уводимо фазне координате $s = x = x_1$ и $v = \dot{x} = x_2$ и диференцијалну једначину (7) заменимо са две диференцијалне једначине првог реда

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - 2n \cdot x_2 - \omega_x^2 \cdot x_1 \end{cases} . \quad (8)$$

Гранични услови задатка су:

$$t = 0, \quad x_1(0) = \Delta, \quad x_2(0) = \dot{x}_+ = -R \cdot \dot{x}_-, \quad (9)$$

$$t = T = T_{\min}, \quad x_1(T) = \Delta, \quad x_2(T) = \dot{x}_-. \quad (10)$$

где је \dot{x}_- почетна брзина пре удара, \dot{x}_+ почетна брзина после удара.

Ограничење (3) има облик:

$$-u_0 \leq u \leq u_0 . \quad (11)$$

С обзиром на то да је $f_0 = 1$, $f_1 = \dot{x} = x_2$, $f_2 = \ddot{x} = \dot{x}_2 = u - 2n \cdot x_2 - \omega_x^2 \cdot x_1$ функција Хамилтона (5) (или функција Понтрјагина) добија облик:

$$H(\psi, X, U) = \lambda \cdot f_0 + \psi_1 \cdot f_1 + \psi_2 \cdot f_2, \text{ тј.}$$

$$H(\psi, X, U) = \lambda \cdot 1 + \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 \cdot (u - 2n \cdot x_2 - \omega_x^2 \cdot x_1) . \quad (12)$$

Систем једначина (6) добија облик

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} \end{cases} . \quad (13)$$

Изводи су

$$\frac{-\partial H}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\lambda \cdot 1 + \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 (u - 2n \cdot x_2 - \omega_x^2 \cdot x_1) \right] = -\left[\psi_2 (-\omega_x^2) \right] = +\omega_x^2 \cdot \psi_2 ,$$

$$\frac{-\partial H}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\lambda \cdot 1 + \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 (u - 2n \cdot x_2 - \omega_x^2 \cdot x_1) \right] = -\left[\psi_1 + \psi_2 (-2n) \right] = -\psi_1 + 2n \cdot \psi_2$$

Када заменимо изводе, систем једначина (13) добија облик

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = \omega_x^2 \cdot \psi_2 \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 + 2n \cdot \psi_2 \end{cases} . \quad (14)$$

Трансформацијом система (14) за функцију $\psi_2(t)$ добија се диференцијална једначина:

$$\ddot{\psi}_2 - 2n \cdot \dot{\psi}_2 + \omega_x^2 \cdot \psi_2 = 0 . \quad (15)$$

Решење једначине (15) зависи од вредности интензитета пригушења n , ми спроводимо истраживање када је мало пригушење ($n \ll \omega_x$). Решење једначине (15) можемо написати у облику који је познат из теорије диференцијалних једначина

$$\psi_2(t) = e^{nt} (C_1 \cos(\Omega_1 \cdot t) + C_2 \sin(\Omega_1 \cdot t)) . \quad (16)$$

На основу израза (16) видимо да функција $\psi_2(t)$ може имати екстремне вредности ± 1 .

Из принципа максимума следи, да оптимално управљање добија граничне (екстремне) вредности u_0 или $-u_0$ (формула 11), и његов знак се поклапа са знаком функције $\psi_2(t)$, па је:

$$\psi_2(t)u^* = \max_{|u| \leq u_0} \psi_2(t)u = |\psi_2(t)|, \quad (17)$$

$$\text{тј., } u(t) = u_0 \cdot \text{sign} \psi_2(t), \quad u = u_0 \cdot \text{sign} (e^{nt} (C_1 \cos(\Omega_1 \cdot t) + C_2 \sin(\Omega_1 \cdot t))), \quad (18)$$

$$\text{где је } \Omega_1 = \sqrt{\omega_x^2 - n^2} = \sqrt{\omega_x^2 \left(1 - \frac{n^2}{\omega_x^2} \right)} = \omega_x \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta_x}{2\pi} \right)^2} .$$

Како су +1 и -1 екстремне вредности функције $\psi_2(t)$, израз (18) добија облик

$$u = u_0, \text{ ако је } \psi_2(t) > 0, \quad u = -u_0, \text{ ако је } \psi_2(t) < 0 . \quad (19)$$

Пошто линеарна функција може да промени знак на интервалу не више од једанпут, то је оптимално управљање (од 0 до $T = T_{\min}$):

$$u = \begin{cases} u_0 & \text{при } 0 \leq t < t_1; \\ -u_0 & \text{при } t_1 \leq t < T. \end{cases} \quad (20)$$

или

$$u = \begin{cases} -u_0 & \text{при } 0 \leq t < t_1; \\ u_0 & \text{при } t_1 \leq t < T. \end{cases} \quad (21)$$

Претпоставимо да имамо један прелаз (прекид) функције u у тренутку времена t_1 , тада према (18), време треба да испуни следеће услове у два интервала:

- 1) интервал $0 < t \leq t_1 \Rightarrow 0 < \Omega_1 \cdot t \leq \pi$;
- 2) интервал $t_1 < t \leq T \Rightarrow 0 < \Omega_1 \cdot t \leq \pi$.

Прво посматрамо друго управљање (21), а разлог је што након удара у граничник, осцилатор почиње своје кретање супротно од позитивног правца осе x . Прелаз принудне силе у супротни смер дешава се у тренутку t_1 . Прецизније можемо да формулишемо задатак овако: треба испитати које од два управљања нама одговара (20) или (21), и за то је потребно истражити оба случаја. Остаје да се одреди тачка t_1 , тачка прелаза (прекида).

Када одредимо укупно решење једначине (7) $x_u = x_h + x_p$ добија се

$$x(t) = \begin{cases} e^{-n \cdot t} (C_1 \cos(\Omega_1 \cdot t) + C_2 \sin(\Omega_1 \cdot t)) - \frac{u_0}{\omega_x^2} & \text{када је } 0 \leq t < t_1; \\ e^{-n \cdot t} (C_3 \cos(\Omega_1 \cdot t) + C_4 \sin(\Omega_1 \cdot t)) + \frac{u_0}{\omega_x^2} & \text{када је } t_1 \leq t < T_{\min} \end{cases} \quad (23)$$

Изрази за брзину се добију када нађемо прве изводе:

$$v(t) = \begin{cases} e^{-n \cdot t} ((\Omega_1 \cdot C_2 - n \cdot C_1) \cos(\Omega_1 \cdot t) - (\Omega_1 \cdot C_1 + n \cdot C_2) \sin(\Omega_1 \cdot t)) & \text{при } 0 \leq t < t_1; \\ e^{-n \cdot t} ((\Omega_1 \cdot C_4 - n \cdot C_3) \cos(\Omega_1 \cdot t) - (\Omega_1 \cdot C_3 + n \cdot C_4) \sin(\Omega_1 \cdot t)) & \text{при } t_1 \leq t < T_{\min} \end{cases} \quad (24)$$

Заменимо граничне услове (9) и (10) у (23) и (24), тада непознате константе интеграције добијају облик:

$$C_1 = \Delta + \frac{u_0}{\omega_x^2}, \quad C_2 = \frac{1}{\Omega_1} (n \cdot C_1 - R \cdot \dot{x}_-), \quad C_3 = \frac{\left(\left(\Delta - \frac{u_0}{\omega_x^2} \right) e^{n \cdot T} - C_4 \sin(\Omega_1 \cdot T) \right)}{\cos(\Omega_1 \cdot T)},$$

$$C_4 = \frac{e^{n \cdot T}}{\Omega_1} \left[\left(\Delta - \frac{u_0}{\omega_x^2} \right) [n \cdot \cos(\Omega_1 \cdot T) + \Omega_1 \cdot \sin(\Omega_1 \cdot T)] + \dot{x}_- \cdot \cos(\Omega_1 \cdot T) \right]. \quad (25)$$

Услови континуитета (непрекидности) на фазној путањи имају следећи облик

$$x_1|_{0 \leq t < t_1} = x_1|_{t_1 \leq t < T}, \quad x_2|_{0 \leq t < t_1} = x_2|_{t_1 \leq t < T}. \quad (26)$$

У циљу одређивања минималног (оптималног) времена ($T = T_{\min}$) и времена прелаза (прекида) t_1 , потребно је да релације (23) и (24) испуне услове континуитета (26). Као резултат добијамо следеће трансцендентне једначине:

$$e^{-n \cdot t_1} (C_1 \cos(\Omega_1 \cdot t_1) + C_2 \sin(\Omega_1 \cdot t_1)) - \frac{u_0}{\omega_x^2} = e^{-n \cdot t_1} (C_3 \cos(\Omega_1 \cdot t_1) + C_4 \sin(\Omega_1 \cdot t_1)) + \frac{u_0}{\omega_x^2}, \quad (27)$$

$$\left((\Omega_1 \cdot C_2 - n \cdot C_1) \cos(\Omega_1 \cdot t_1) - (\Omega_1 \cdot C_1 + n \cdot C_2) \sin(\Omega_1 \cdot t_1) \right) = \quad (28)$$

$$= \left((\Omega_1 \cdot C_4 - n \cdot C_3) \cos(\Omega_1 \cdot t_1) - (\Omega_1 \cdot C_3 + n \cdot C_4) \sin(\Omega_1 \cdot t_1) \right)$$

Једначине (27) и (28) не могу се решити аналитички, тако да ове две једначине решавамо графички. Због тога трансформишемо систем једначина (27) и (28) на следећи облик:

$$tg(\Omega_1 \cdot t_1) = \frac{\Omega_1 \cdot C_2 - n \cdot C_1 - \Omega_1 \cdot C_4 + n \cdot C_3}{\Omega_1 \cdot C_1 + n \cdot C_2 - \Omega_1 \cdot C_3 - n \cdot C_4}, \quad (29)$$

$$e^{-n \cdot t_1} \left((C_1 - C_3) \cos(\Omega_1 \cdot t_1) + (C_2 - C_4) \sin(\Omega_1 \cdot t_1) \right) - 2 \frac{u_0}{\omega_x^2} = 0. \quad (30)$$

Непознате константе интеграције C_3 и C_4 су функције параметра T , тј. $C_3(T)$ и $C_4(T)$.

Тако да леви део једначине (29) зависи само од t_1 а десни део зависи од T . Изразимо из једначине (29) параметар t_1 као функцију од T , тј. $t_1(T)$.

Трансформишемо систем једначина (29) и (30) на облик:

$$t_1(T) = \frac{1}{\Omega_1} \arctg \left(\frac{\Omega_1 \cdot C_2 - n \cdot C_1 - \Omega_1 \cdot C_4(T) + n \cdot C_3(T)}{\Omega_1 \cdot C_1 + n \cdot C_2 - \Omega_1 \cdot C_3(T) - n \cdot C_4(T)} \right), \quad (31)$$

$$G(T) = e^{-n \cdot t_1(T)} \left((C_1 - C_3(T)) \cos(\Omega_1 \cdot t_1(T)) + (C_2 - C_4(T)) \sin(\Omega_1 \cdot t_1(T)) \right) - 2 \frac{u_0}{\omega_x^2} = 0. \quad (32)$$

Сада ове две трансцендентне једначине (31) и (32) решавамо графички. За решавање користимо математички програм Mathcad 14 и при томе се добија минимално (оптимално) време $T = T_{\min}$, на месту где функција $G(T)$ сече апсцису. После тога минимално време заменимо у (31) и добија се време прелаза (прекида) t_1 .

На овај начин испитано је управљање (21) и показано је да ово оптимално управљање одговара за наш пример.

За случај управљања (20) функција $G(T)$ не сече апсцису и не може да се добије време T_{\min} и време t_1 . То значи да управљање (20) не одговара за наш пример.

Истражен је конкретан случај за виброчекић Daedong са следећим параметрима:

Техничке карактеристике:

маса покретног дела $m = 550 \text{ kg}$,

укупна крутост опруге $c = 100000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$,

коэффициент вискозног отпора (трења) $b = 68 \text{ kg/s}$,

максимална ударна сила $F = 17600 \text{ N}$,

број удара у минути $N = 400$,

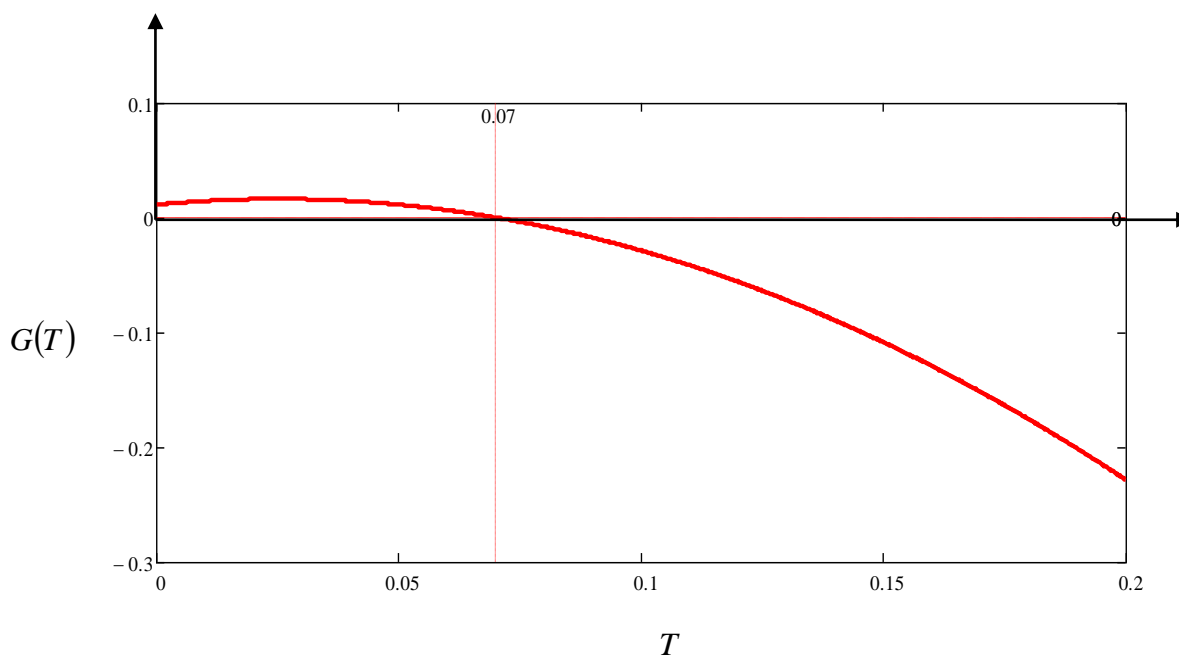
време једног удара $T = 0.15 \text{ s}$,

величина зазора $\Delta = 0.016 \text{ m}$,

почетна брзина покретног дела виброчекића $v_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

коэффициент успостављања при удару $R = 0.2$.

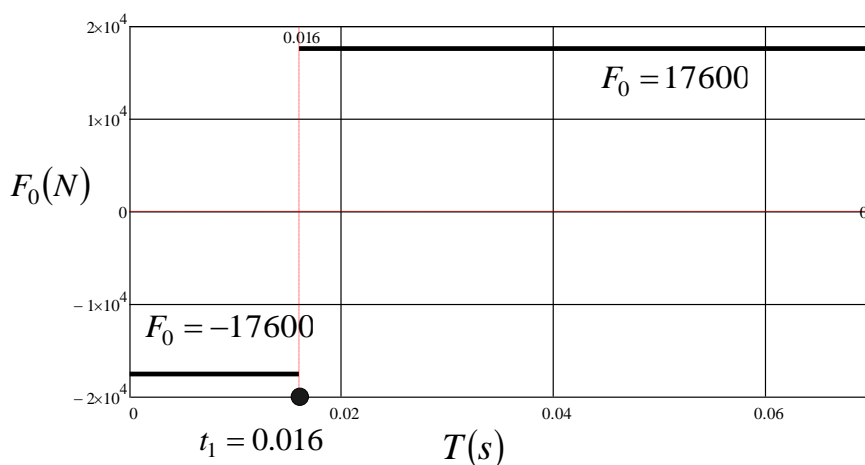
На слици 3 представљен је график $G(T)$ (формула 32), који пресеца осу апсцисе у тачки $T = 0.07 \text{ s}$, и то је минимално (оптимално) време $T = T_{\min} = 0.07 \text{ s}$. После тога минимално време заменимо у (31) и добија се време прелаза (прекида) $t_1 = 0.016 \text{ s}$. Обе вредности T_{\min} и t_1 испуњавају услов (22).



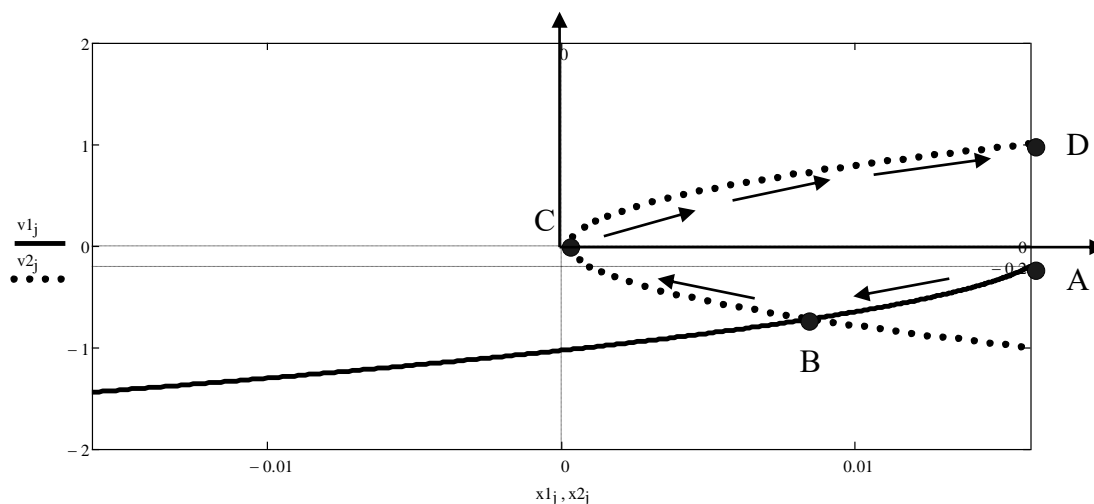
Слика 3. Графичко одређивање корена трансцедентне једначине (32) у Mathcad 14.

На основу извршеног прорачуна за управљање (21) добија се графички приказ управљања спољашњом принудном силом F_0 , и на слици 4 је приказан правац и смер дејства принудне силе F_0 . До тренутка времена прелаза (прекида) $0 < t \leq t_1$ ($t_1 = 0.016\text{s}$) сила $F = 17600\text{N}$ дејствује у негативном смеру осе x . Али у тренутку времена t_1 сила нагло мења свој смер у супротни смер, дејствује у позитивном смеру осе x , у интервалу времена $t_1 < t \leq T$ ($T = T_{\min}$).

У наставку приказујемо дијаграм управљања силом F за један период осциловања покретног дела виброчекића (слика 4) и фазни дијаграм оптималног кретања (слика 5), конструисани у Mathcad 14.



Слика 4. Дијаграм управљања спољашњом принудном силом $F(t)$.



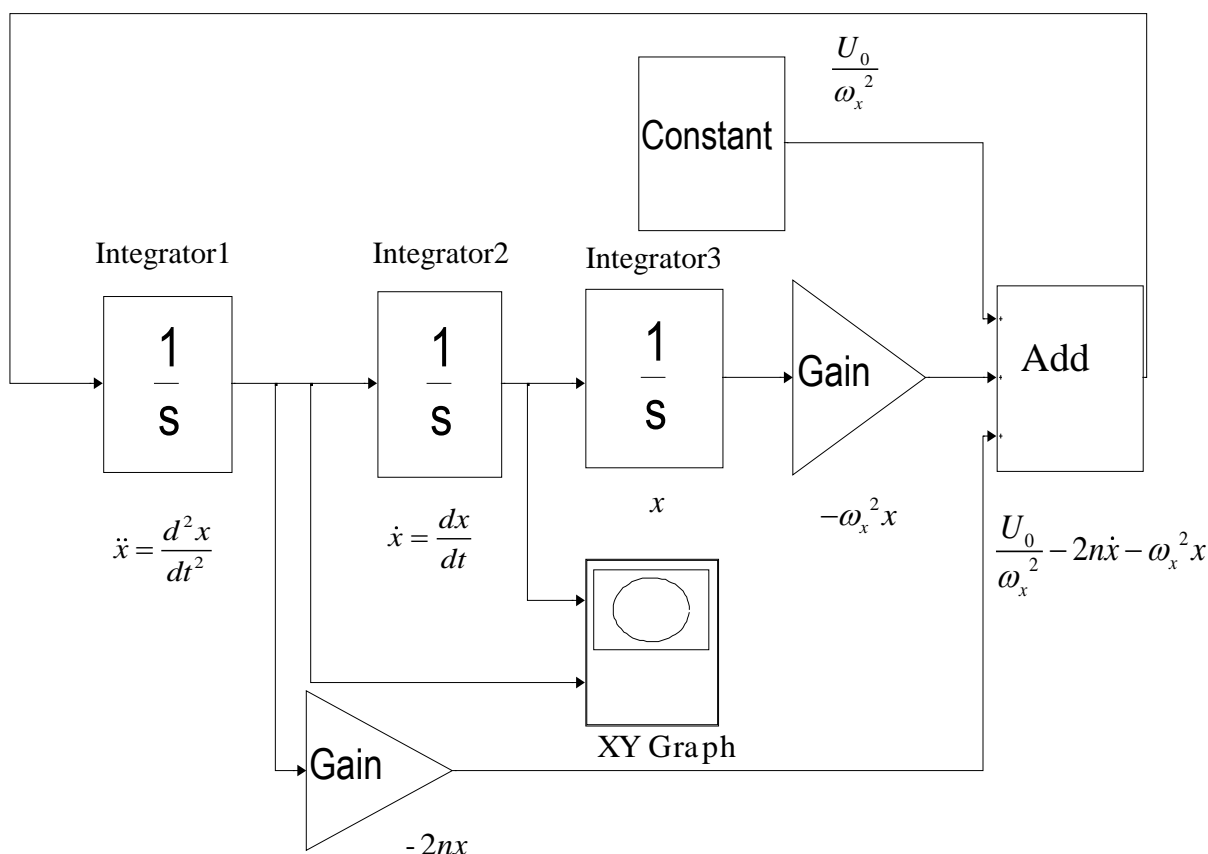
Слика 5. Фазни дијаграм оптималног кретања виброударног осцилатора између два узастопна удара.

За конструисање фазног портрета користимо и математички пакет MatlabR2007 и то део Simulink, који служи за решавање математичких проблема помоћу блок дијаграма.

1. Блок за интеграцију Integrator - врши интеграцију улазног сигнала.
2. Појачало Gain - обавља множење улазног сигнала.
3. Блок за рачунање збира Add - врши израчунавање суме тренутних вредности сигнала.
4. Извор константног сигнала Constant - поставља стални ниво сигнала.
5. Осцилограф Scope XY Graph омогућава да се изграде фазни портрети, а такође омогућава да се посматрају сигнали у процесу симулације (моделирања).

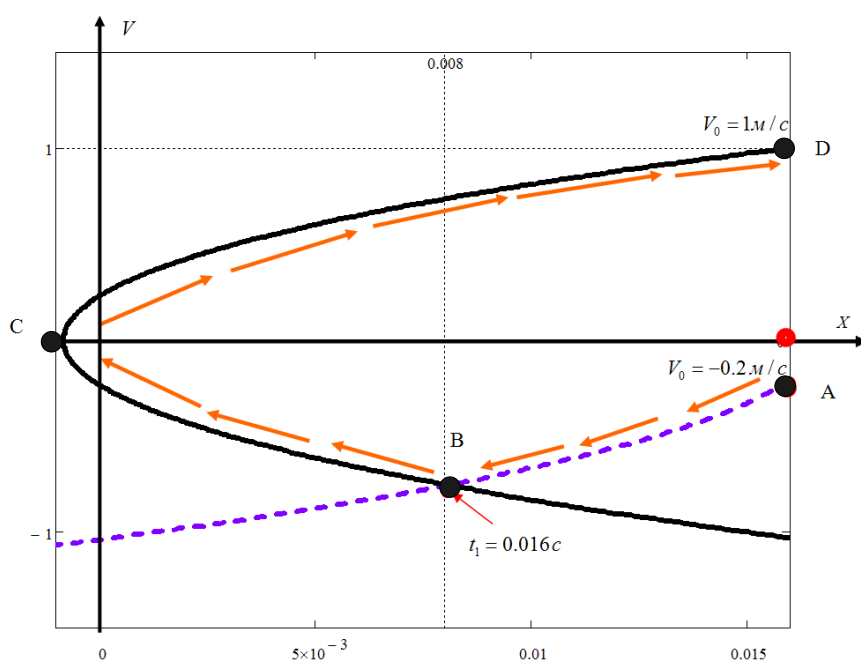
Диференцијална једначина кретања вертикалног осцилатора $\ddot{x} = \frac{U_0}{\omega_x^2} - 2n \cdot \dot{x} - \omega_x^2 \cdot x$

представљена је у облику блок-шеме (слика 6):



Слика 6. Блок-шема диференцијалне једначине, која описује осциловање покретног дела виброчекића, састављена у MatlabR2007 (Simulink).

На слици 7 приказано је кретање осцилатора у фазном простору и тај график је нацртан у MatlabR2007 (Simulink).



Слика 7. Фазни портрет кретања покретног дела виброчекића за један период осциловања.

Виброударни осцилатор почиње своје кретање од тачке А ка тачки В по путањи првог фазног дијаграма (прва формула у 23) на временском интервалу $[0; t_1]$. У тачки прелаза (прекида) $t_1 = 0.016 \text{ s}$, виброударни осцилатор наставља своје кретање од тачке В преко тачке С до тачке D по другом фазном дијаграму (друга формула у 23).

Путања кретања А-В-С-D је оптимална путања кретања једномасеног виброударног вертикалног осцилатора.

Тачка А на слици 7, одговара тренутку времена $t_0 = 0$ после удара терета о непокретни граничник, $v_A = -0.2 \text{ m/s}$, у том тренутку времена спољашња принудна сила F_0 дејствује у смеру кретања виброчекића (слика 4).

Тачка В на слици 7, одговара тренутку времена $t_1 = 0.016 \text{ s}$ и у том тренутку спољашња принудна сила F_0 нагло мења свој смер, тј, има прелаз (прекид) и дејствује у смеру супротно од кретања виброчекића (слика 4).

Тачка D на слици 7, одговара тренутку времена $t = T_{\min} = 0.073 \text{ s}$ непосредно испред удара, када терет прилази непокретном граничнику, али се удар још није десио, $v_D = 1 \text{ m/s}$. У том тренутку времена спољашња принудна сила F_0 опет мења смер и дејствује у смеру кретања виброчекића (слика 4).

Када се терет креће по трајекторији АВ од тачке А ка тачки В, то значи да се терет креће по фазној трајекторији $X_1 - V_1$. У тачки В је прелаз (прекид) и терет почиње да се креће по другој фазној трајекторији $X_2 - V_2$ од тачке В до тачке D.

На овај начин у овом примеру спроведено је истраживање и дефинисан је оптимални закон управљања по времену. У пракси, регулисање и управљање силом F_0 врши се помоћу електричног погона.

Анализа и резултати истраживања

У овом примеру истражена је синтеза (оптимизација) рада покретног дела виброчекића по времену, а који се користи за забијање у земљу носача, шипова, цеви и других елемената. Основно истраживање се реализује на виброчекићу марке Daedong, а изглед и принципијелна шема је представљена на слици 1. У овом примеру приказан је периодични виброударни процес, који се дешава у току времена T , а то је време између два узастопна удара. Посматран је модел система у облику једномасеног вертикалног осцилатора, који се налази под дејством спољашње периодичне принудне силе $F(t)$. За приказани вертикални модел виброударног осцилатора написана је једначина кретања у интервалима између два узастопна удара у облику (1).

Помоћу Понтрјагиновог принципа максимума одређен је оптимални закон управљања спољашњом принудном силом F_0 , са циљем да се обезбеди оптимални закон кретања масе по времену, односно да за најкраће време T_{\min} обезбедимо померање масе из тачке А у тачку D (слике 5 и 7).

Као резултат истраживања добијен је оптимални закон управљања принудном силом, која обезбеђује брзину удара покретног дела виброчекића без промене било ког параметра конструкције. Та сила мора бити регулисана системом аутоматског управљања у складу са законом који је представљен на слици 4. Овај закон може обезбедити смањење времена између два узастопна удара за два пута и то се добија на

основу количника времена $k = \frac{T}{T_{\min}} = \frac{0.15 s}{0.07 s} = 2.14$, где је време између два узастопна

удара (период) $T = 0.15 s$, а минимално време (оптимално време) $T_{\min} = 0.07 s$.

То значи, на градилиштима где се користе виброчекићи за забијање цеви, шипова и разних предмета, продуктивност се може удвостручити. Резултати неких испитивања виброчекића на терену показали су да је реално смањење времена између два удара $k = 1.8$, а то се мало разликује од резултата $k = 2.14$, који је добијен у овом раду.

Кратко о моделу елемента који се забија у земљу

Велики део у области виброударних система представљају виброчекићи, који се користе за забијање у земљу шипки, цеви и разних других производа. При томе карактер забијања зависи у првом реду од особина земљишта, које може бити зрнасте ситније структуре или вишеслојне крупније структуре.

Математичко описивање особина земљишта је веома сложен задатак, посебно при великим деформацијама земљишта, које настају у процесу забијања елемената у великим дубинама или када су велики попречни пресеци елемената који се забијају. Због тога се при разматрању динамичких модела елемент забијања посматра као апсолутно круто тело, а земљиште се замењује системом маса, опруга и амортизера (пригушења) сувог и вискозног трења. Параметри маса и опруга бирају се тако да модел на одговарајући начин описује квалитативне особине процеса и квантитативне односе са познатим експерименталним подацима. При томе суштинска неравномерност и велика разноврсност особина земљишта, доводе до тога да су експериментални подаци приближног карактера. Ако се све то узме у обзир, онда је довољно да теоретски резултати буду приближног карактера. На основу свих ових околности, довољно је да се ограничимо на посматрање довољно једноставних модела, који дају разумљиве резултате, а који се могу користити за даљу анализу и синтезу модела.

Осим тога, динамички модел система (моделирање процеса) треба да садржи и динамички модел машине - виброчекића. При томе треба узети у обзир да брзина кретања машине и брзина елемената који се забија су неупоредиве, пошто је средња брзина забијања мала у поређењу са максималним вредностима брзине радног органа машине. Зато је сврсисходно посебно разматрати елемент који се забија, а на који дејствују познате спољашње силе и отпори земљишта.

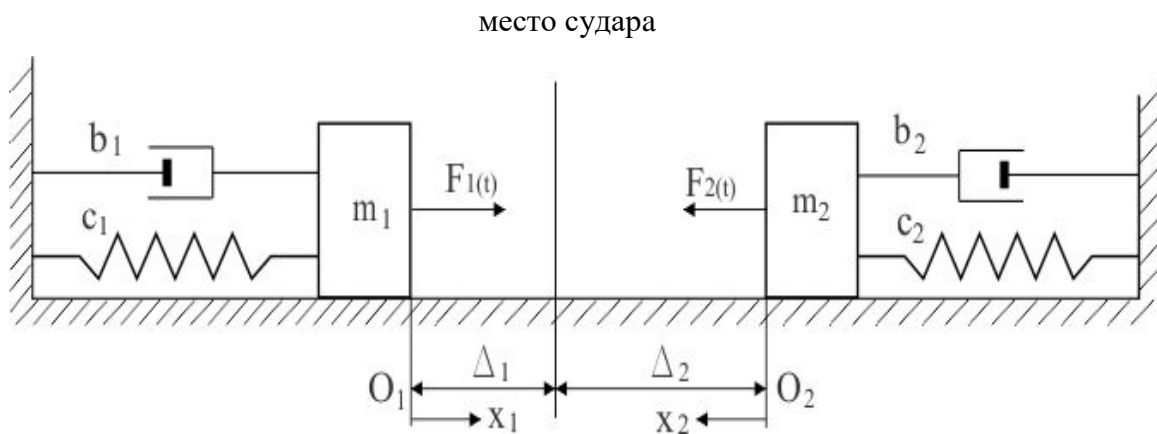
П.3. Двомасени виброударни систем настао спајањем два једномасена једнострано ударна осцилатора

Синтеза (оптимизација) виброударних процеса

У овом примеру истражујемо праволинијски неаутономни двомасени виброударни систем са вискозним пригушењем, настао спајањем два једномасена једнострано ударна осцилатора (слика 1).

Диференцијалне једначине кретања овог система су у облику:

$$\ddot{x}_i + 2n_i \cdot \dot{x}_i + \omega_{xi}^2 \cdot x_i = \frac{F_{0i}}{m_i} \cos(\Omega_i \cdot t + \varphi_i) \quad (i = 1,2)$$



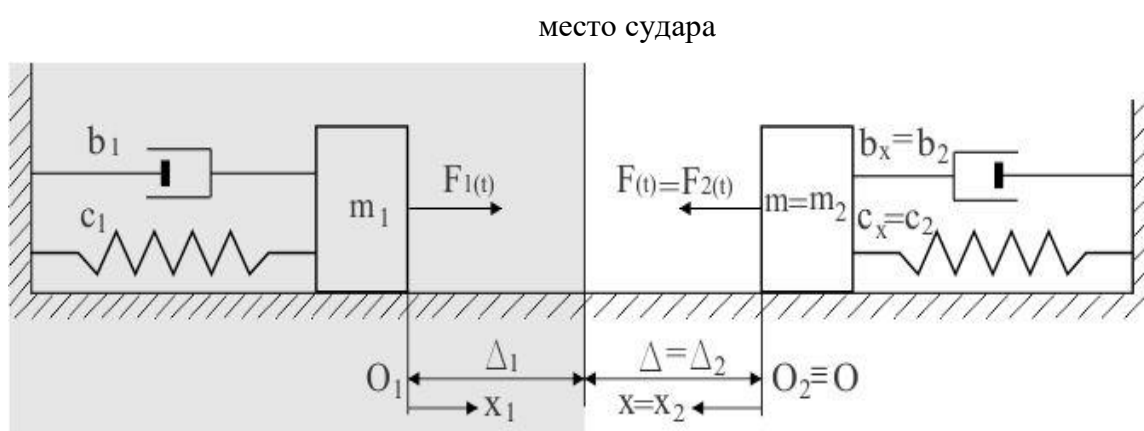
Слика 1. Модел двомасеног виброударног система са једним ударним паром.

Оптимална синтеза система као целине подразумева посебно оптималну динамичку синтезу сваког његовог покретног дела-ударног осцилатора, уз услове који морају да се испуне: да се масе сваког ударног пара виброударног система сударају на одређеним (задатим) местима, после оптималног временског интервала (минималног виброударног периода). За наш систем (слика 1) место судара је одређено растојањима Δ_1 и Δ_2 , а судар настаје после времена $T_{\min(1)} = T_{\min(2)} = T_{\min}$.

Спровешћемо прорачун оптималне динамичке синтезе за овај систем.

П.3.1. Оптимални периодични виброударни режими (оптимално управљање силом, оптимална путања)

С обзиром да у нашем примеру имамо ударне осцилаторе истог типа, који је динамички истражен у наслову П.1. и за који имамо у потпуности спроведен прорачун оптималне динамичке синтезе, а да у овом наслову смањимо обим потребне количине рачуна и графичке визуелизације, опредељујемо се да за лево постављени ударни осцилатор (на слици 2 осенчено поље) узмемо пример осцилатора из поменутог наслова.



Слика 2. Делови двомасеног виброударног система са слике 1.

Из наслова П.1. користимо једначине кретања у интервалима између судара:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-nt} (C_1 \cos(\Omega_1 \cdot t) + C_2 \sin(\Omega_1 \cdot t)) - \frac{u_0}{\omega_x} & \text{када је } 0 \leq t < t_1; \\ e^{-nt} (C_3 \cos(\Omega_1 \cdot t) + C_4 \sin(\Omega_1 \cdot t)) + \frac{u_0}{\omega_x} & \text{када је } t_1 \leq t < T_{\min} \end{cases} \quad (1)$$

Одређивањем извода претходних једначина добијамо изразе за брзину:

$$v(t) = \begin{cases} e^{-nt} ((\Omega_1 \cdot C_2 - n \cdot C_1) \cos(\Omega_1 \cdot t) - (\Omega_1 \cdot C_1 + n \cdot C_2) \sin(\Omega_1 \cdot t)) & \text{при } 0 \leq t < t_1; \\ e^{-nt} ((\Omega_1 \cdot C_4 - n \cdot C_3) \cos(\Omega_1 \cdot t) - (\Omega_1 \cdot C_3 + n \cdot C_4) \sin(\Omega_1 \cdot t)) & \text{при } t_1 \leq t < T_{\min} \end{cases} \quad (2)$$

Време прелаза (прекида) одређујемо преко једначине

$$t_1(T) = \frac{1}{\Omega_1} \arctg \left[\frac{\Omega_1 \cdot C_2 - n \cdot C_1 - \Omega_1 \cdot C_4 + n \cdot C_3}{\Omega_1 \cdot C_1 + n \cdot C_2 - \Omega_1 \cdot C_3 - n \cdot C_4} \right]. \quad (3)$$

Једначина за одређивање минималног времена између два судара има облик:

$$G(T) = e^{-n \cdot t_1} [(C_1 - C_3) \cos(\Omega_1 \cdot t_1) + (C_2 - C_4) \sin(\Omega_1 \cdot t_1)] - 2 \frac{u_0}{\omega_x} = 0 \quad (4)$$

Разликоваћемо две могућности оптималне динамичке синтезе виброударног система, насталог спајањем ударних осцилатора: прва могућност - да се не мењају конструктивне карактеристике система; и друга могућност - да се мењају конструктивне карактеристике система. У оквиру ове две могућности оптималне динамичке синтезе у наставку истражићемо три случаја:

1. случај - не мењамо конструктивне карактеристике, усвајамо Δ и варирамо F_2 ;
2. случај - не мењамо конструктивне карактеристике, усвајамо F_2 и мењамо Δ ;
3. случај - мењамо и конструктивне карактеристике осцилатора.

Случај 1

У овом случају не мењамо конструктивне карактеристике осцилатора, усвајамо Δ_2 и варирамо F_2 (слика 1).

За леви подсистем познати су улазни параметри из наслова II.1.

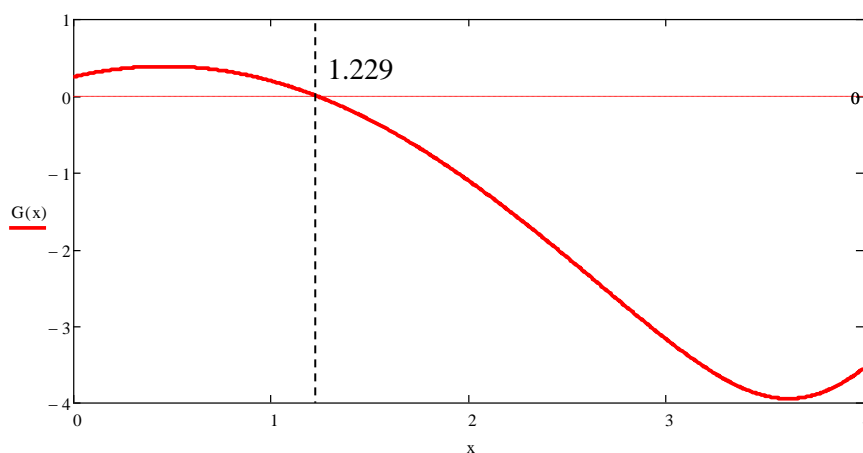
Прорачун оптимизације десног подсистема почињемо са вредностима:

$$\Delta_x = 0.2 \cdot \pi, \Delta = 1.5m, m = 1kg, F_0 = 3N, R = 0.7, \omega_x = 1s^{-1}, V_0 = 1m/s, u_0 = \frac{F_0}{m}, \Omega_1 = \omega_x.$$

За прорачун користимо математички пакет Mathcad 14.

У наставку приказујемо део прорачуна и одговарајуће графичко решење трансцендентне једначине (формула 4), када је $F_2 = F_0 = 3N$ (слика 3).

$$\begin{aligned} m &:= 1 & F_0 &:= 3 & R &:= 0.7 & \omega_x &:= 1 & U_0 &:= \frac{F_0}{m} \\ \Delta_x &:= 0.2 \cdot \pi & \Delta &:= 1.5 & V_0 &:= 1 \end{aligned}$$



Слика 3. Графичко одређивање корена трансцендентне једначине $G(T)$.

Тражимо корен - тачку пресека графика $G(T)$ са хоризонталном осом T

$$\text{root}(G(x), x, 1, 2) = 1.229$$

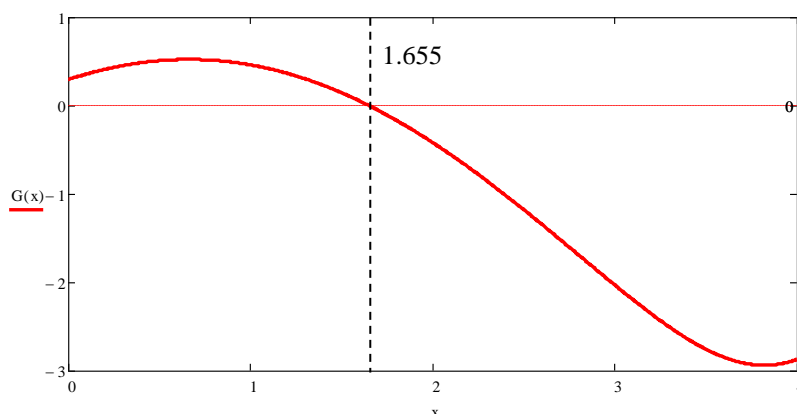
$$T1 := 1.229$$

одредимо време прелаза (прекида) $t1$

$$t1(T1) = 0.068$$

У овом случају (слика 3) видимо да добијена вредност за минимално време $T = T_{\min} = 1.229 \text{ s}$, није једнака $T = T_{\min} = 1.655 \text{ s}$ (мања је), па зато настављамо прорачун.

У наставку, приказујемо део прорачуна и одговарајуће графичко решење трансцедентне једначине (формула 4), када је $F_2 = F_0 = 2.5$ (слика 4).



Слика 4. Графичко одређивање корена трансцедентне једначине $G(T)$.

Тражимо корен - тачку пресека графика $G(T)$ са хоризонталном осом T :

$$\text{root}(G(x), x, 1, 2) = 1.65$$

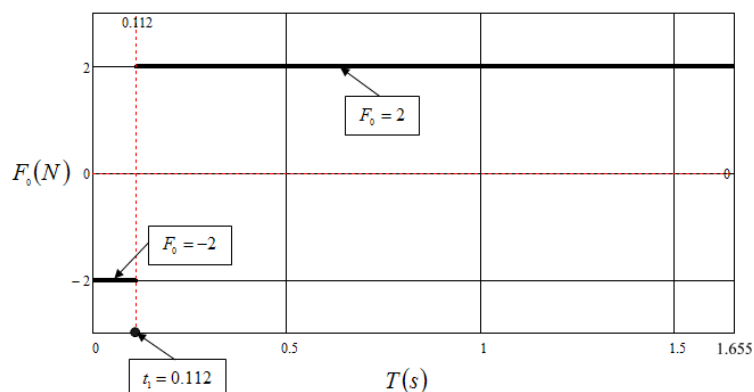
$$T1 := 1.65$$

одредимо време прелаза (прекида) $t1$

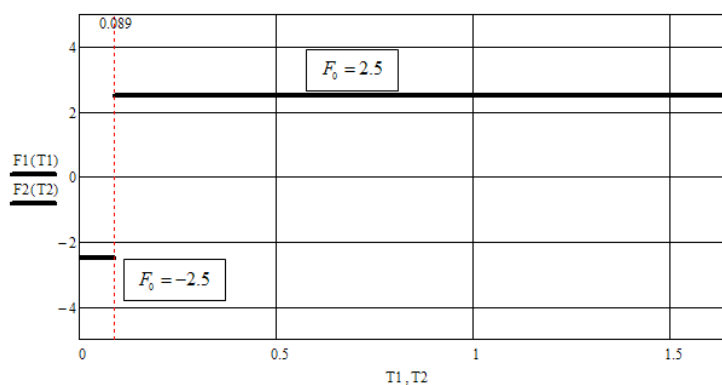
$$t1(T1) = 0.089$$

Овде је за десни подсистем добијена вредност за минимално време $T = T_{\min} = 1.65 \text{ s}$, то време је исто за леви и десни подсистем, па овим завршавамо прорачун. Дакле, у овом случају за десно постављени ударни осцилатор оптималну динамичку синтезу постижемо када је вредност $F_2 = F_0 = 2.5$.

Сада, за овај десни подсистем, конструишемо одговарајући дијаграм управљања силом F_0 за један период и одговарајућу слику са оптималном фазном путањом.

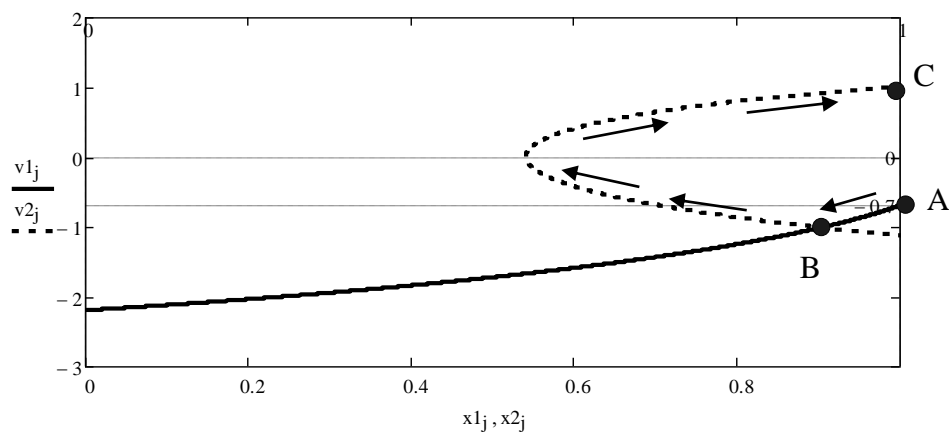


Слика 5. Дијаграм управљања спољашњом принудном силом $F(t)$ за леви подсистем.

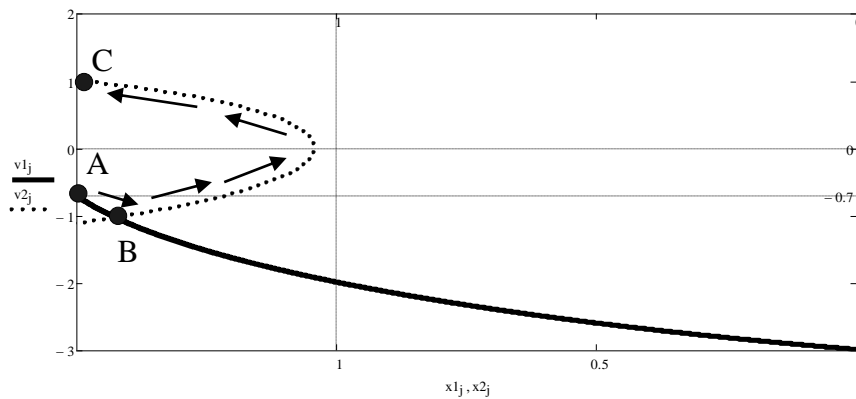


Слика 6. Дијаграм управљања спољашњом принудном силом $F(t)$ за десни подсистем.

У наставку приказујемо фазни дијаграм оптималног кретања за леви и десни подсистем.

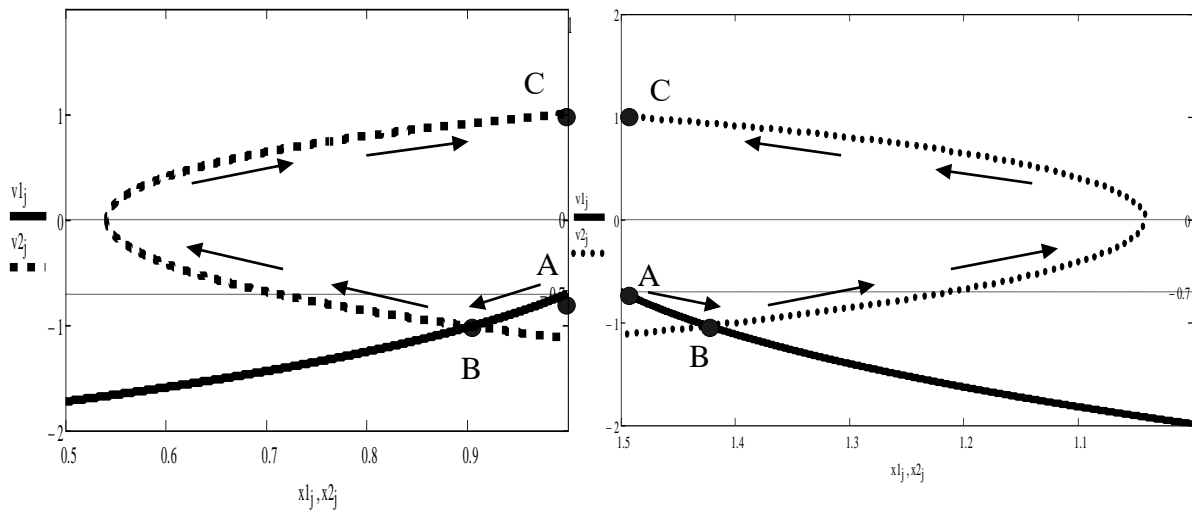


Слика 7. Фазни дијаграм оптималног кретања левог подсистема,
преузет из наслова II.1. за $\Delta_1 = 1m$



Слика 8. Фазни дијаграм оптималног кретања десног подсистема за $\Delta_2 = 1.5 m$.

На крају приказујемо заједно оба фазна дијаграма оптималног кретања лево и десно постављеног ударног осцилатора, и на тај начин конструишемо оптималне фазне путање за систем као целину (двомасени систем са једним ударним паром, слика 1).



Слика 9. Фазни дијаграм оптималног кретања двомасеног виброударног осцилатора.

Анализа резултата

У случају када спроводимо оптималну синтезу виброударног система насталог спајањем два једнострано ударна осцилатора (слика 1), за $\Delta_1 = 1m$ и $\Delta_2 = 1.5m$, до судара долази када је време исто за оба подсистема $T = T_{\min} = 1.655 s$. За леви подсистем узели смо познате податке из наслова II.1. За десно постављени ударни осцилатор усвојили смо растојање $\Delta_2 = 1.5m$ и варирали $F_2 = F_0$. На слици 9 види се да су оптималне путање левог и десног подсистема различите.

Случај 2

У овом случају не мењамо конструктивне карактеристике осцилатора, усвајамо F_2 и варирамо Δ_2 (слика 1).

За леви подсистем познати су улазни параметри из наслова П.1.

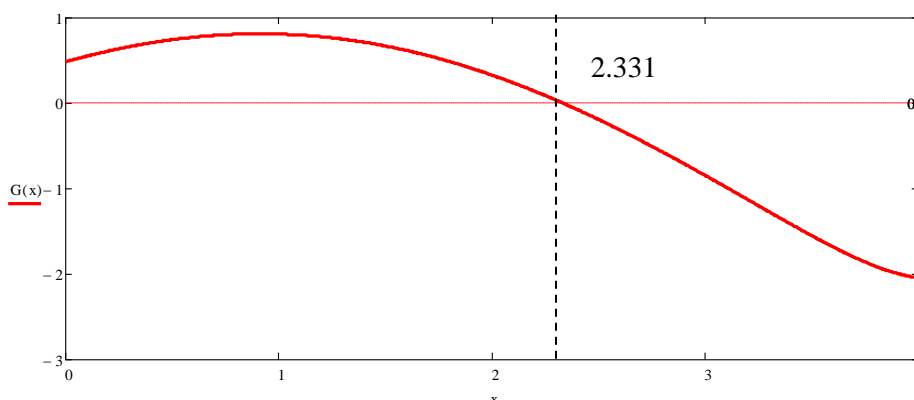
Прорачун оптимизације десног подсистема почињемо са вредностима:

$$\Delta_x = 0.2 \cdot \pi, \Delta = 1m, m = 1kg, F_0 = 1.5N, R = 0.7, \omega_x = 1s^{-1}, V_0 = 1m/s, u_0 = \frac{F_0}{m}, \Omega_1 = \omega_x.$$

За прорачун користимо математички пакет Mathcad 14.

У наставку приказујемо део прорачуна и одговарајуће графичко решење трансцедентне једначине (формула 4), када је $F_2 = F_0 = 1.5N$ (слика 10).

$$\begin{aligned} \Delta x &:= 0.2 \cdot \pi & \Delta &:= 1 & m &:= 1 & F_0 &:= 1.5 & U_0 &:= \frac{F_0}{m} \\ V_0 &:= 1 & R &:= 0.7 & \omega_x &:= 1 \end{aligned}$$



Слика 10. Графичко одређивање корена трансцедентне једначине $G(T)$.

Тражимо корен - тачку пресека графика $G(T)$ са хоризонталном осом T:

$$\text{root}(G(x), x, 2, 3) = 2.331$$

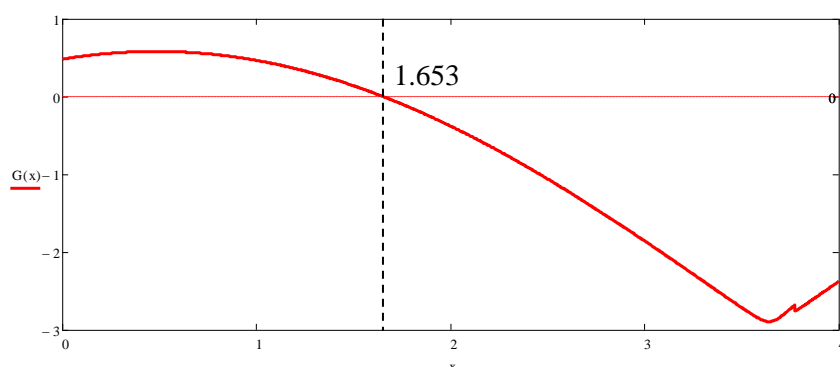
$$T1 := 2.331$$

одредимо време прелаза (прекида) $t1$

$$t1(T1) = 0.175$$

У овом случају (слика 10) видимо да добијена вредност за минимално време $T = T_{\min} = 2.331 s$, није једнака $T = T_{\min} = 1.655 s$ (већа је), па зато настављамо прорачун.

У наставку, приказујемо део прорачуна и одговарајуће графичко решење трансцендентне једначине (формула 4), када је $\Delta_2 = 0.49$ (слика 11).



Слика 11. Графичко одређивање корена трансцендентне једначине $G(T)$.

Тражимо корен - тачку пресека графика $G(T)$ са хоризонталном осом T :

$$\text{root}(G(x), x, 1, 2) = 1.653$$

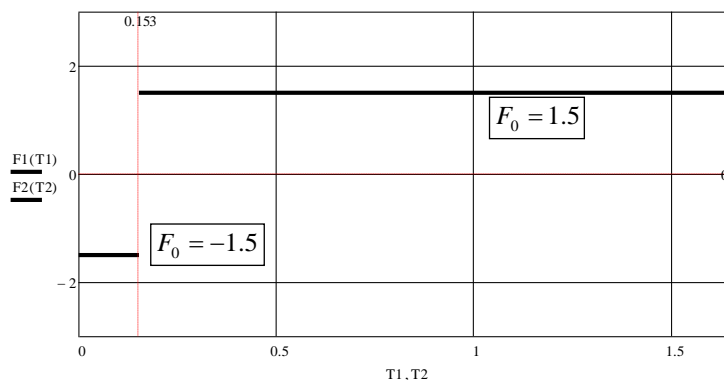
$$T1 := 1.653$$

одредимо време прелаза (прекида) $t1$

$$t1(T1) = 0.153$$

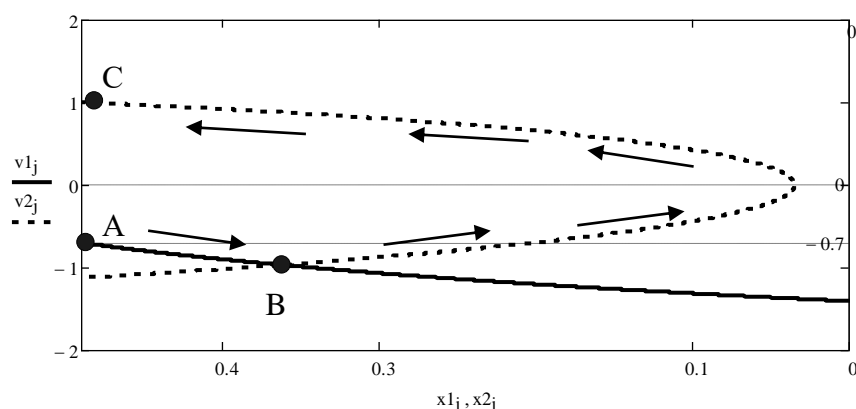
Овде је за десни подсистем добијена вредност за минимално време $T = T_{\min} = 1.653s$, то време је исто за леви и десни подсистем, па овим завршавамо прорачун. Дакле, у овом случају за десно постављени ударни осцилатор оптималну динамичку синтезу постижемо када је вредност $\Delta_2 = 0.49m$.

Сада, за овај десни подсистем, конструишемо одговарајући дијаграм управљања силом F_0 за један период и одговарајућу слику са оптималном фазном путањом.



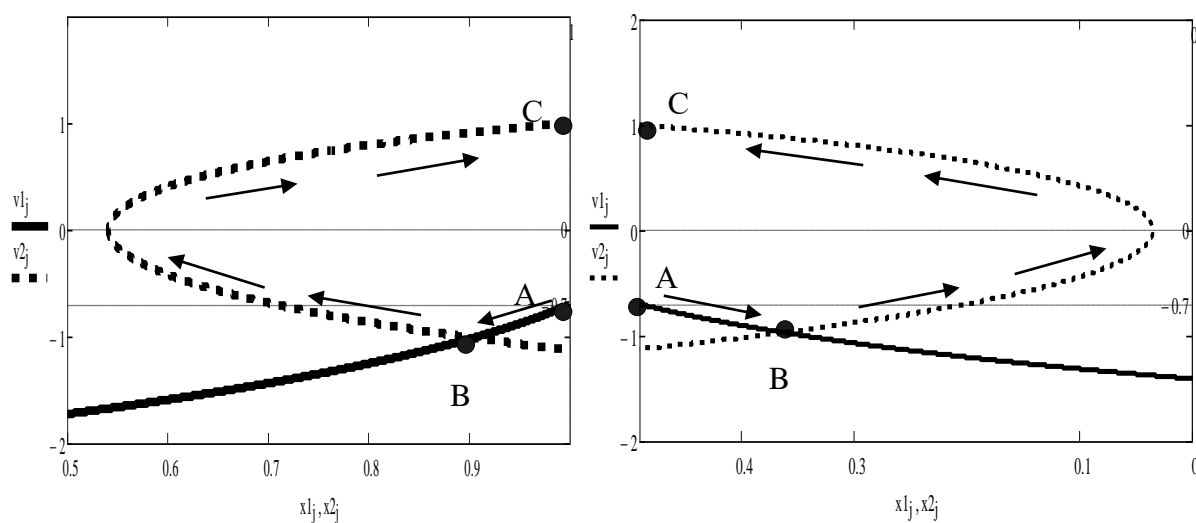
Слика 12. Дијаграм управљања спољашњом принудном силом $F(t)$ за десни подсистем.

У наставку приказујемо фазни дијаграм оптималног кретања за десни подсистем.



Слика 13. Фазни дијаграм оптималног кретања десног подсистема за $\Delta_2 = 0.49m$.

На крају приказујемо заједно оба фазна дијаграма оптималног кретања лево и десно постављеног ударног осцилатора, и на тај начин конструишемо оптималне фазне путање за систем као целину (двомасени систем са једним ударним паром, слика 1).



Слика 14. Фазни дијаграм оптималног кретања двомасеног виброударног осцилатора.

Анализа резултата

У случају када спроводимо оптималну синтезу виброударног система насталог спајањем два једнострано ударна осцилатора (слика 1), када усвајамо F_2 и варирамо Δ_2 , до судара долази када је време исто за оба подсистема $T = T_{\min} = 1.655s$. За леви подсистем узели смо познате податке из наслова II.1. За десно постављени ударни осцилатор усвојили смо силу $F_2 = 2$ и варирали Δ_2 . На слици 14 види се да су оптималне путање левог и десног подсистема различите.

Случај 3

У овом случају испитујемо како на систем утиче промена конструктивних и других параметара. Имајући у виду да код удара постоји зависност између масе и брзине, варирамо вредности за масу m_2 и брзину V_2 десно постављеног ударног осцилатора (слика 1). За леви подсистем узели смо познате податке из наслова II.1.

Задајемо почетну вредност масе $m_2 = 1.5$. Преко формула (18) из наслова I.1.3., и израчунавањем у Mathcad 14, добијамо вредност за почетну брзину $V_2 = 0.667$. Овај поступак смо поновили више пута и нисмо дошли до решења, односно нисмо могли да добијемо минимално време: $T = T_{\min} = 1.655 \text{ s}$.

Зато тражимо други начин, задајемо вредности $m_2 = 2$, $V_2 = 0.5$ и $F_2 = F_0 = 4$ и варирамо Δ . Резултати овог начина прорачуна су:

за $\Delta = 1.5$ добија се $T = T_{\min} = 1.643 \text{ s}$; за $\Delta = 1.4$ добија се $T = T_{\min} = 1.452 \text{ s}$;

за $\Delta = 1.505$ добија се $T = T_{\min} = 1.686 \text{ s}$; итд.

За $R = 0.7$, $m_2 = 2$ и $v_{2-} = 0.5$, помоћу формула (18) из наслова I.1.3. одређујемо брзине маса непосредно после судара:

$$v_{1+} = -v_{1-} + (1 + R) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_{1-} + v_{2-}) = -1 + (1 + 0.7) \frac{2}{1 + 2} (1 + 0.5) = 0.7 \quad (5)$$

$$v_{2+} = -v_{2-} + (1 + R) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_{1-} + v_{2-}) = -0.5 + (1 + 0.7) \frac{1}{1 + 2} (1 + 0.5) = 0.35 \quad (6)$$

Проверавамо коефицијент удара R преко формуле (12) из наслова I.1.2.

$$R = \frac{v_{2+} + v_{1+}}{v_{2-} + v_{1-}} = \frac{0.35 + 0.7}{0.5 + 1} = \frac{1.05}{1.5} = 0.7 \quad (7)$$

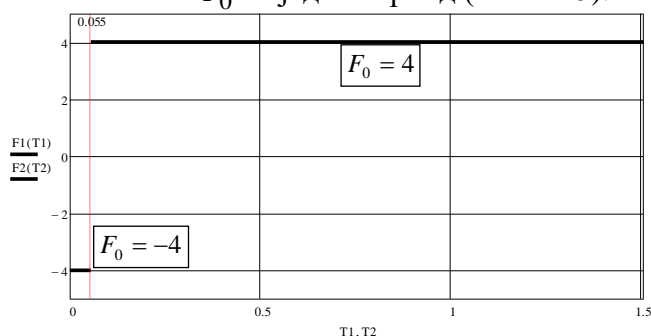
Ударни (сударни) импулс израчунавамо преко формула (15) и (18) из наслова I.1.3.

$$\begin{aligned} I &= m_1(v_{1+} + v_{1-}) = m_2(v_{2+} + v_{2-}) = (1 + R) \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} (v_{1-} + v_{2-}) = 1(0.7 + 1) = 2(0.35 + 0.5) = \\ &= (1 + 0.7) \frac{1 \cdot 2}{1 + 2} (1 + 0.5) = 1.7 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Оптималну динамичку синтезу десно постављеног ударног осцилатора у овом случају постижемо за следеће конкретне вредности:

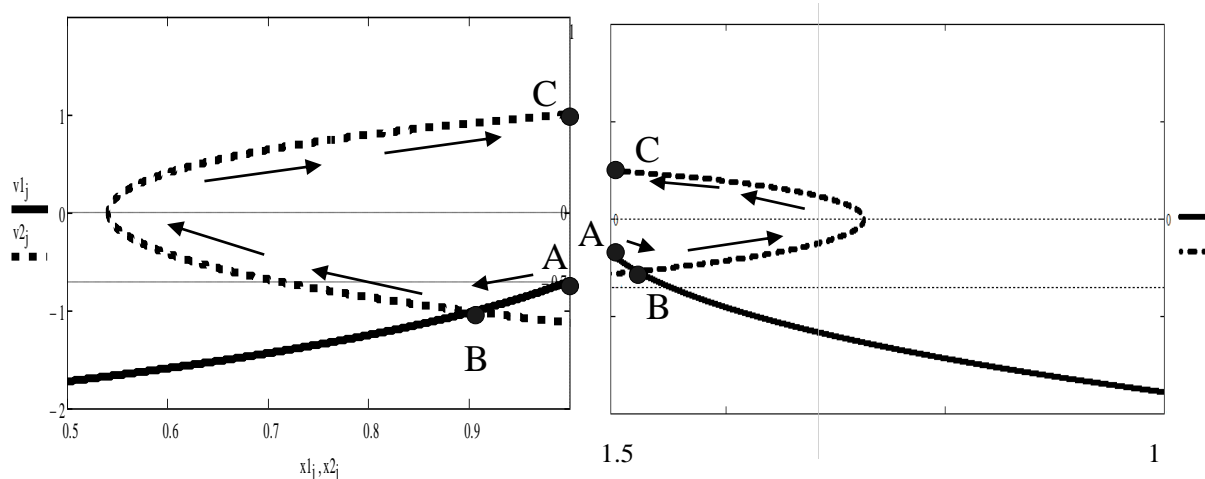
$$\begin{array}{llllll} \Delta x := 0.2 \cdot \pi & \Delta := 1.505 & m := 2 & F_0 := 4 & U_0 := \frac{F_0}{m} \\ R := 0.7 & V_0 := 0.5 & \omega x := 1 & & & \end{array}$$

У наставку, за десно постављени ударни осцилатор, конструишемо одговарајући дијаграм управљања силом F_0 за један период (слика 15).



Слика 15 . Правац и смер дејства спољашње принудне силе $F(t)$ за десни подсистем

На крају конструишемо оптималне фазне путање за систем као целину (двомасени систем на слици 1).



Слика 16. Фазни дијаграм оптималног кретања двомасеног виброударног осцилатора.

Анализа резултата

На виброударном систему приказаном на слици (1) можемо променити конструктивне карактеристике за леви или десни подсистем (или за оба подсистема). До судара долази када је минимално време исто за оба подсистема $T = T_{\min} = 1.655 \text{ s}$. За леви подсистем узели смо познате податке из наслова П.1., а варирали смо конструктивне параметре за десни подсистем. За десно постављени ударни осцилатор задали смо вредности $m_2 = 2$, $V_2 = 0.5$ и $F_2 = 4$ и варирали смо Δ_2 . За $\Delta_2 = 1.505$ добили смо исто време за оба система $T = T_{\min} = 1.655 \text{ s}$ и завршили прорачун. На слици 16 приказане су оптималне путање левог и десног подсистема, где се види да су ове оптималне путање различите.

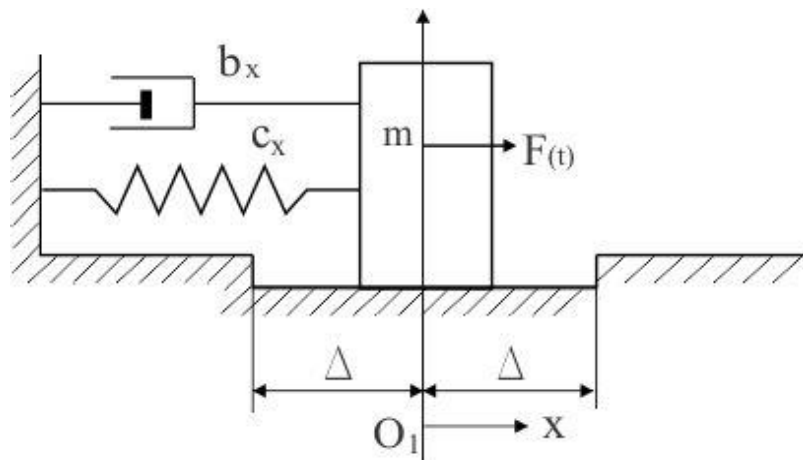
II.4. Модел виброударне динамике неаутономног једномасеног система са вискозним пригушењем и два граничника; принудне пригушене праволинијске осцилације једномасеног обострано ударног осцилатора

У овом примеру истражујемо динамику једномасеног принудно пригушеног обострано ударног осцилатора, када на систем дејствују: еластична сила опруге $F_e = c \cdot x$, сила вискозног пригушења $F_w = -b \cdot \dot{x}$ и спољашња периодична принудна сила

$$F(t) = \sum_{i=1}^k F_i \cdot \cos(i \cdot \Omega \cdot t + \varphi_i), \quad (1)$$

при чему су маса осцилатора m , крутост опруге c и коефицијент пропорционалности b константне величине.

На систем дејствује спољашња периодична принудна сила $F(t)$, и при томе маса удара у два симетрично распоређена граничника (слика 1). Граничник је саставни део система, који кретању система даје нелинеарни карактер. Пошто је компликовано испитати утицај нелинеарности на карактер осцилаторног процеса, ми испитујемо виброударни процес помоћу линеарне диференцијалне једначине. Истраживање у анализи система је усмерено на испитивање постојања (стабилности) различитих виброударних режима за различите вредности вишеструкости l [28].



Слика 1. Математички модел једномасеног обострано ударног осцилатора.

Диференцијална једначина кретања система, у интервалима између два узастопна судара је облика

$$m \cdot \ddot{x} + b_x \cdot \dot{x} + c_x \cdot x = F(t) = \sum_{i=1}^k F_i \cdot \cos(i \cdot \Omega \cdot t + \varphi_i). \quad (2)$$

Једначина (2) може се написати у проширеном облику:

$$m \cdot \ddot{x} + b_x \cdot \dot{x} + c_x \cdot x = F_1 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi_1) + F_2 \cdot \cos(2 \cdot \Omega \cdot t + \varphi_2) + F_3 \cdot \cos(3 \cdot \Omega \cdot t + \varphi_3) + \dots \\ \dots + F_k \cdot \cos(k \cdot \Omega \cdot t + \varphi_k)$$

где је: m - маса осцилатора, b_x - коефицијент пропорционалности,

c_x - коефицијент крутости, Ω - кружна фреквенција принудне силе.

Поделимо обе стране једначине (2) са масом m . Једначина (2) добија облик

$$\ddot{x} + \frac{b_x}{m} \cdot \dot{x} + \frac{c_x}{m} \cdot x = \frac{F_1}{m} \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi_1) + \frac{F_2}{m} \cdot \cos(2 \cdot \Omega \cdot t + \varphi_2) + \frac{F_3}{m} \cdot \cos(3 \cdot \Omega \cdot t + \varphi_3) + \dots \\ \dots + \frac{F_k}{m} \cdot \cos(k \cdot \Omega \cdot t + \varphi_k) \quad (3)$$

Да би се поједноставио облик једначине (3) уведемо следеће ознаке:

$$P_1 = \frac{F_1}{m}, \quad P_2 = \frac{F_2}{m}, \quad P_3 = \frac{F_3}{m}, \quad \dots, \quad P_k = \frac{F_k}{m}; \quad (4)$$

$$\omega_x^2 = \frac{c_x}{m}, \quad n = \frac{b_x}{2m}; \quad (5)$$

ω_x - фреквенција слободних сопствених осцилација осцилатора при одсуству било

каког трења и отпора у систему;

n - коефицијент вискозног пригушења који карактерише интензитет вискозног трења у систему или брзину пригушења осцилација.

При постојању сила отпора енергија система се постепено смањује, и осцилације се пригушују. Фреквенција ω_x и одговарајући период $T_o = \frac{2\pi}{\omega_x}$, за разлику од амплитуде и почетне фазе, не зависе од почетних услова, они су у потпуности одређени особинама осцилатора, тј. зависе од вредности параметара осцилатора c_x и m . Сопствене осцилације линеарног осцилатора увек се дешавају са једном те истом сопственом фреквенцијом ω_x , независно од облика принудне силе.

Независност фреквенције сопствених осцилација од почетних услова, а тиме и од амплитуде осциловања, зове се изохроност линеарног осцилатора.

Када узмемо у обзир релације (4) и (5) добија се једначина (3) у облику

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + \omega_x^2 \cdot x = P_1 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi_1) + P_2 \cdot \cos(2 \cdot \Omega \cdot t + \varphi_2) + P_3 \cdot \cos(3 \cdot \Omega \cdot t + \varphi_3) + \dots$$

$$\dots + P_k \cdot \cos(k \cdot \Omega \cdot t + \varphi_k)$$
(6)

II.4.1. Опште решење диференцијалне једначине кретања система у интервалима између удара

Опште решење једначине (6) састоји се од збира општег решења одговарајуће хомогене једначине x_o и партикуларних решења $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ нехомогене једначине.

Решење хомогеног дела једначине (6) је (формула 21 из наслова I.2.2.)

$$x_o = e^{-n \cdot t} \left(A_3 \cos\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2} \cdot t\right) + A_4 \sin\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2} \cdot t\right) \right).$$
(7)

Ако уведемо следеће променљиве:

$$A_3 = D \cos(\delta), \quad A_4 = -D \sin(\delta),$$
(8)

на крају као резултат добијамо

$$x_o = e^{-n \cdot t} \left(D \cos(\delta) \cos\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2} \cdot t\right) - D \sin(\delta) \sin\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2} \cdot t\right) \right).$$
(9)

Користећи тригонометријску формулу $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, добијамо

$$x_o = D \cdot e^{-n \cdot t} \cos\left(\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) \cdot t + \delta\right),$$
(10)

где се D одређује из формуле $A_3^2 + A_4^2 = D^2 \cos^2(\delta) + D^2 \sin^2(\delta)$.

Ако узмемо у обзир тригонометријски идентитет $\cos^2(\delta) + \sin^2(\delta) = 1$, добијамо следећу формулу за одређивање D

$$D = \sqrt{A_3^2 + A_4^2}.$$
(11)

За одређивање непознате почетне фазе δ добијамо следеће формуле:

$$tg(\delta) = -\frac{A_4}{A_3}; \quad \delta = a \tan\left(-\frac{A_4}{A_3}\right). \quad (12)$$

Израз (10) описује пригушени осцилаторни процес, где је амплитуда $D \cdot e^{-nt}$ променљива и експоненцијално опада са временом. Величина $\Omega_1 = \sqrt{\omega_x^2 - n^2}$ описује кружну фреквенцију пригушених осцилација. Треба напоменути да кружна фреквенција описује броја пуних осцилација које производи осцилаторни систем за време 2π секунди, односно приближно за око $2\pi = 6.28$ секунди. Овде дефинишемо главну разлику кружне фреквенције ω_x од Ω_1 . Кружна фреквенција ω_x описује број пуних осцилација у 2π секунди у слободном систему, у систему где нема вискозно трење $b_x = 0$. А кружна фреквенција Ω_1 описује броја пуних осцилација у 2π секунди у неслободном систему, у систему где има вискозно трење $b_x \neq 0$.

Одредимо период осциловања у слободном и неслободном систему. Напоменимо да је период осциловања T време за које се дешава једна пуна осцилација у систему. Период осциловања $T_o = \frac{2\pi}{\omega_x}$; је време за које се дешава једна пуна осцилација осцилатора где нема вискозно трење $b_x = 0$. Период осциловања $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_x^2 - n^2}}$ је време за које се дешава једна пуна осцилација осцилатора где има вискозно трење $b_x \neq 0$.

У условима слабог и малог трења у зависности од времена члан $D \cdot e^{-nt}$ у изразу (10) може се посматрати као постепено смањење амплитуде пригушених осцилација. После временског периода $\tau = \frac{1}{n}$, ова амплитуда је отприлике $e \approx 2.72$ пута мања од почетне вредности. Ово време τ се зове време пригушења или време трајања (живота) осциловања. Иако формално осцилације трају бескрајно дуго, карактеристично време τ може се условно посматрати као трајање процеса пригушења осцилација, за коначан број таквих интервала амплитуда постаје мања од било које произвољно мале вредности.

При малом трењу, када је $n \ll \omega_x$, или $\tau \gg T_o = \frac{2\pi}{\omega_x}$ (услови слабог пригушења) осцилатор врши велики број N циклуса сопствених осцилација током времена трајања (живота) τ : $N = \frac{\tau}{T_o} \gg 1$. Узастопна максимална растојања од положаја равнотеже смањују се геометријском прогресијом.

За описивање брзине пригушења осцилација, заједно са коефицијентом пригушења n , користи се бездимензиони логаритамски декремент пригушења Δ_x , и то је квантитативна карактеристика брзине пригушења осцилација у линеарном систему. Он представља природни логаритам количника два узастопна максимална растојања од положаја равнотеже, тј. логаритам количника две било које узастопне амплитуде.

За осцилаторни систем на слици 1, који се састоји од масе m која се одржава у положају равнотеже опругом са коефицијентом еластичности c_x и при томе на систем делује сила вискозног трења F_w која је пропорционална брзини ($F_w = -b_x \cdot \dot{x}$), декремент пригушења има облик

$$\Delta_x = \frac{\pi \cdot b_x}{m \sqrt{\omega_x^2 - n^2}} . \quad (13)$$

При малом пригушењу је $n^2 \ll \omega_x^2$, тако да се логаритамски декремент пригушења може представити у облику

$$\Delta_x = \frac{\pi \cdot b_x}{m \cdot \omega_x} . \quad (14)$$

У наставку, размотримо процес проналажења партикуларних решења диференцијалне једначине (2). За почетак на десној страни ограничимо се само на први члан у једначини (6)

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + \omega_x^2 \cdot x = P_1 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi_1) . \quad (15)$$

Партикуларно решење једначине (15) тражимо у следећем облику

$$x_{np} = A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi_1) + B \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi_1) . \quad (16)$$

Одредимо први и други извод извод (16) и заменимо у (15), добијамо:

$$A = \frac{P_1(\omega_x^2 - \Omega^2)}{\left(4n^2 \cdot \Omega^2 + (\omega_x^2 - \Omega^2)^2\right)} , \quad B = \frac{P_1 \cdot 2 \cdot n \cdot \Omega}{\left(4n^2 \cdot \Omega^2 + (\omega_x^2 - \Omega^2)^2\right)} . \quad (17)$$

Потребно је трансформисати изразе (17), зато уводимо ознаку за бездимензиону фреквенцију $p = \frac{\Omega}{\omega_x}$. Истражимо систем са малим пригушењем $n \ll \omega_x$ и према формули (14) можемо написати да је декремент пригушења

$$\Delta_x = \frac{\pi \cdot b_x}{m \cdot \omega_x} = \frac{2\pi \cdot n}{\omega_x} . \quad (18)$$

Трансформишемо израз за A у (17), ако узмемо у обзир израз (18) и ознаке:

$$\omega_x^2 = \frac{c_x}{m}, \quad F_1 = \frac{F_1}{m}, \quad X_1 = \frac{F_1}{c_x}, \quad p = \frac{\Omega}{\omega_x},$$

добија се

$$A = \frac{F_1(1-p^2)}{c_x \left(\left(\frac{\Delta_x}{\pi} \right)^2 p^2 + (1-p^2)^2 \right)} . \quad (19)$$

Израз $X_1 = \frac{F_1}{c_x}$ је статичко померање осцилатора под дејством силе F_1 , где је F_1

амплитуда за први члан познате спољашње принудне силе. Статичко померање у нашем случају је следеће: у почетку опруга је у ненапрегнутом стању и када на опругу делује сила F_1 , опруга се одмах растегне и издужи се за неку вредност X_1 . То истезање за које се издужила опруга под дејством силе F_1 називамо статичко издужење опруге. Као резултат, добија се следећи израз

$$A = \frac{X_1(1-p^2)}{\left(\left(\frac{\Delta_x}{\pi} \right)^2 p^2 + (1-p^2)^2 \right)} . \quad (20)$$

На исти начин трансформишемо израз за B у (17) и добија се

$$B = \frac{X_1 \frac{\Delta_x}{\pi} p}{\left(\left(\frac{\Delta_x}{\pi} \right)^2 p^2 + (1-p^2)^2 \right)} . \quad (21)$$

Партикуларно решење (16) с обзиром на (20) и (21) има облик

$$x_{np} = \frac{X_1(1-p^2)}{\left(\left(\frac{\Delta x}{\pi}\right)^2 p^2 + (1-p^2)^2\right)} \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi_1) + \frac{X_1 \frac{\Delta x}{\pi} p}{\left(\left(\frac{\Delta x}{\pi}\right)^2 p^2 + (1-p^2)^2\right)} \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi_1) \quad (22)$$

Уведимо следећу ознаку

$$K(p) = \left(\left(\frac{\Delta x}{\pi}\right)^2 p^2 + (1-p^2)^2\right). \quad (23)$$

У наставку израз (22), узимајући у обзир ознаку (23), добија следећи изглед

$$x_{np} = \frac{X_1(1-p^2)}{K(p)} \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi_1) + \frac{X_1 \frac{\Delta x}{\pi} p}{K(p)} \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi_1). \quad (24)$$

На крају, за пригушено осцилаторно кретање при малом коефицијенту вискозног трења n , опште решење диференцијалне једначине (15) састоји се од суме општег хомогеног решења (10) и партикуларног решења (24)

$$x = De^{-nt} \cdot \cos\left(\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) \cdot t + \delta\right) + \frac{X_1(1-p^2)}{K(p)} \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi_1) + \frac{X_1 \frac{\Delta x}{\pi} p}{K(p)} \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi_1). \quad (25)$$

У наставку размотримо случај када је $i = k$ у једначини (6), која је облика

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + \omega_x^2 \cdot x = P_k \cdot \cos(k \cdot \Omega \cdot t + \varphi_k). \quad (26)$$

Партикуларно решење једначине (26) тражимо у следећем облику

$$x_{k,np} = A_k \cdot \cos(k \cdot \Omega \cdot t + \varphi_k) + B_k \cdot \sin(k \cdot \Omega \cdot t + \varphi_k). \quad (27)$$

Одредимо први и други извод (27) и заменимо у (26), добијамо:

$$A_k = \frac{P_k(\omega_x^2 - k^2 \cdot \Omega^2)}{\left(4n^2 \cdot k^2 \cdot \Omega^2 + (\omega_x^2 - k^2 \cdot \Omega^2)^2\right)}, \quad B_k = \frac{2n \cdot k \cdot \Omega \cdot P_k}{\left(4n^2 \cdot k^2 \cdot \Omega^2 + (\omega_x^2 - k^2 \cdot \Omega^2)^2\right)}. \quad (28)$$

Потребно је трансформисати изразе (28), зато узимамо ознаку за бездимензиону фреквенцију $p = \frac{\Omega}{\omega_x}$. За систем са малим пригушењем може се узети $n \ll \omega_x$ и према

формули (14) можемо написати декремент пригушења у облику:

$$\Delta_x = \frac{\pi \cdot b_x}{m \cdot \omega_x} = \frac{2\pi \cdot n}{\omega_x} \quad (29)$$

После одређених трансформација у изразу за A_k у (28) добија се

$$A_k = \frac{P_k(1 - k^2 \cdot p^2)}{\omega_x^2 \left(\left(\frac{\Delta_x}{\pi} \right)^2 p^2 \cdot k^2 + (1 - k^2 \cdot p^2)^2 \right)} \quad (30)$$

С обзиром да је $\omega_x^2 = \frac{c_x}{m}$, $P_k = \frac{F_k}{m}$, $X_k = \frac{F_k}{c_x}$ добија се

$$A_k = \frac{F_k(1 - k^2 \cdot p^2)}{c_x \left(\left(\frac{\Delta_x}{\pi} \right)^2 p^2 \cdot k^2 + (1 - k^2 \cdot p^2)^2 \right)} \quad (31)$$

Израз $X_k = \frac{F_k}{c_x}$ је статичко померање осцилатора под дејством силе F_k , где је F_k

амплитуда за k -ти члан познате спољашње силе. Статичко померање у нашем случају је следеће: у почетку опруга је у ненапрегнутом стању и када на опругу делује сила F_k , опруга се одмах растегне и издужи се за неку вредност X_k . То истезање за које се издужила опруга под дејством силе F_k називамо статичко издужење опруге. Као резултат, добија се следећи израз

$$A_k = \frac{X_k(1 - k^2 \cdot p^2)}{\left(\left(\frac{\Delta_x}{\pi} \right)^2 p^2 \cdot k^2 + (1 - k^2 \cdot p^2)^2 \right)} \quad (32)$$

На исти начин урадимо трансформације у изразу за B_k у (28).

Као резултат, добија се следећи израз

$$B_k = \frac{X_k \frac{\Delta_x}{\pi} p \cdot k}{\left(\left(\frac{\Delta_x}{\pi} \right)^2 p^2 \cdot k^2 + (1 - k^2 \cdot p^2)^2 \right)} \quad (33)$$

У наставку партикуларно решење (27) с обзиром на (32) и (33) има облик

$$\begin{aligned}
 x_{k,np} = & \frac{X_k(1-k^2 \cdot p^2)}{\left(\left(\frac{\Delta_x}{\pi} \right)^2 p^2 \cdot k^2 + (1-k^2 \cdot p^2)^2 \right)} \cdot \cos(k \cdot \Omega \cdot t + \varphi_k) + \\
 & + \frac{X_k \frac{\Delta_x}{\pi} p \cdot k}{\left(\left(\frac{\Delta_x}{\pi} \right)^2 p^2 \cdot k^2 + (1-k^2 \cdot p^2)^2 \right)} \cdot \sin(k \cdot \Omega \cdot t + \varphi_k)
 \end{aligned} \quad (34)$$

Уведимо следећу ознаку

$$K_k(p) = \left(\frac{\Delta_x}{\pi} \right)^2 p^2 \cdot k^2 + (1-k^2 \cdot p^2)^2 . \quad (35)$$

Ако узмемо у обзир ознаку (35), израз (34) добија следећи облик

$$x_{k,np} = \frac{X_k(1-k^2 \cdot p^2)}{K_k(p)} \cdot \cos(k \cdot \Omega \cdot t + \varphi_k) + \frac{X_k \frac{\Delta_x}{\pi} p \cdot k}{K_k(p)} \cdot \sin(k \cdot \Omega \cdot t + \varphi_k) . \quad (36)$$

На крају, за пригушено осцилаторно кретање при малом коефицијенту вискозног трења n , опште решење диференцијалне једначине (26) састоји се од суме општег хомогеног решења (10) и партикуларног решења (36)

$$\begin{aligned}
 x_k = & D \cdot e^{-n \cdot t} \cos\left(\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2} \right) \cdot t + \delta \right) + \frac{X_k(1-k^2 \cdot p^2)}{K_k(p)} \cdot \cos(k \cdot \Omega \cdot t + \varphi_k) + \\
 & + \frac{X_k \frac{\Delta_x}{\pi} p \cdot k}{K_k(p)} \cdot \sin(k \cdot \Omega \cdot t + \varphi_k)
 \end{aligned} \quad (37)$$

Али нас највише интересује случај када на десној страни диференцијалне једначине има k сабирака, у том случају, добија се k партикуларних решења. Опште решење диференцијалне једначине састоји се суме општег решења хомогеног дела и k партикуларних решења, тј., решење једначине (6) може се написати у облику

$$\begin{aligned}
 x = & D \cdot e^{-n \cdot t} \cos\left(\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2} \right) \cdot t + \delta \right) + \sum_{i=1}^k \frac{X_i(1-i^2 p^2)}{K_i(p)} \cdot \cos(i \cdot \Omega \cdot t + \varphi_i) + \\
 & + \sum_{i=1}^k \frac{X_i \frac{\Delta_x}{\pi} p \cdot i}{K_i(p)} \cdot \sin(i \cdot \Omega \cdot t + \varphi_i)
 \end{aligned} \quad (38)$$

Непознате константе интеграције D и δ обично се одређују у зависности од датих почетних услова кретања. Али ове константе не могу бити одређене на тај начин, јер не можемо унапред да наведемо такве почетне услове, при којима ће кретање осцилатора имати периодичан карактер. За одређивање D и δ уместо почетних услова користимо услове периодичности, које формирамо у складу са тим режимима кретања, за које желимо да проверимо могућност постојања.

Анализа виброударних процеса

Истраживање у анализи система је усмерено на испитивање постојања и стабилности виброударних режима за различите вредности вишеструкости l .

Потребно је објаснити, при каквим односима између параметара осцилатора и параметара принудне силе, могу да се успоставе таква периодична кретања, при којима је период удара осцилатора о граничник једнак или је у сразмери са периодом спољашње силе. При томе се узима у обзир да је време удара о граничник мало у поређењу са периодом кретања осцилатора између два удара, и то време не мора да се узме у прорачуну.

Ефекат удара узимамо у обзир преко коефицијента реституције при удару $0 \leq R \leq 1$. За пластични удар $R=0$, и за апсолутно еластични удар $R=1$. При наведеним претпоставкама, довољно је посматрати само један интервал кретања осцилатора. У случају дејства спољашње периодичне силе имамо бесконачни ударни процес. У већини практичних случајева један удар представља само део процеса узастопних удара, а услови при којима се дешава било који удар, зависе од услова при којима се десио претходни удар. Процеси, који се састоје од бесконачно великог броја удара, називају се бесконачни удари. Удари који се понављају су карактеристични за системе са периодичном побудом, тј. бесконачно ударни процеси имају периодични карактер.

У таквим системима, период кретања осцилатора зависи од периода принудне силе. Обично постоји стабилни режим кретања осцилатора са периодом који је једнак периоду принудне силе, али је могуће постојање режима кретања са периодима, који су сразмерни периоду принудне силе (субхармонијски режими, са периодима који су већи од периода принудне силе).

Ова могућност постојања више режима, односно вишезначно решење проблема принудних осцилација, је карактеристика виброударних система и зато истраживање динамике виброударног система треба да обухвати не само дефинисање свих теоретски могућих врста кретања, него и анализу стабилности кретања, а то треба да омогући да се издвоје режими који могу да постоје у пракси.

Примењена теорија виброударних процеса заснива се на претпоставци о апсолутној тврдоћи тела која се сударају и судара као тренутног процеса, као и на хипотези Њутна о независности коефицијента реституције од брзине судара. Елементи који се сударају формирају ударни пар.

У овом истраживању посматра се један циклус кретања између два узастопна судара где се разликује брзина пре судара и брзина после судара: \dot{x}_- је брзина осцилатора пре судара, \dot{x}_+ је брзина осцилатора после судара. Релација која повезује ове две брзине је

$$\dot{x}_+ = -R \cdot \dot{x}_- \quad . \quad (39)$$

У овом примеру имамо два граничника, претпоставимо да су коефицијенти реституције једнаки при удару за леви и десни граничник. У примеру се истражује периодични режим, при чему маса наизменично удара о леви и десни граничник. Због симетрије система, укупни период кретања система састоји се од два једнака полупериода кретања, тј., када осцилатор удари о десни граничник, осцилатор иде лево до тренутка, док не удари о леви граничник, и време кретања од десног граничника до левог граничника одређује време једног полупериода кретања. За исти полупериод кретања маса се креће од левог граничника до десног граничника, односно оба кретања су кинематички једнака и за оба кретања потребна је иста количина енергије. Сви интервали удара биће потпуно исти и зато нема смисла да истражујемо други удар, трећи удар, итд. јер се они ништа не разликују један од другог и зато је потребно и довољно да се истражи само један интервал кретања између два узастопна удара.

Истражимо интервал који почиње после удара о десни граничник на слици 1. Суштина истраживања неког задатка је да се испита могућност постојања (стабилности) периодичних ударних режима необичног карактера. Зато, да опишемо "необични" карактер, прво формирамо граничне услове:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad x = \Delta, \quad \dot{x} = -R \cdot \dot{x}_- \\ t = \frac{\pi \cdot l}{\Omega}, \quad x = -\Delta, \quad \dot{x} = -\dot{x}_- \end{aligned} \quad . \quad (40)$$

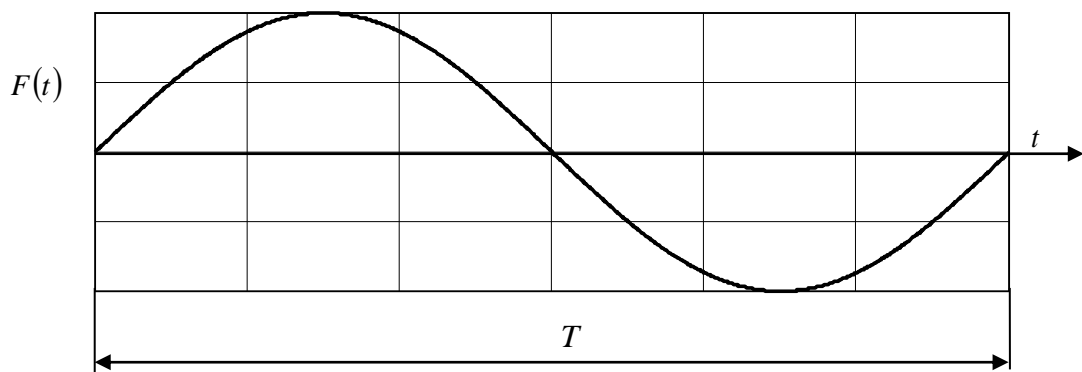
Код граничних услова када је $t = 0$, види се да осцилатор смањује своју брзину након удара о десни граничник R пута. Када настави да се креће ка левом граничнику осцилатор повећа своју брзину до те вредности, коју је имао када је дошао до десног граничника пре тренутка удара о граничник. Укупан период кретања је $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, тј., то је онај временски интервал за који се осцилатор враћа поново до десног граничника. Као што смо рекли раније, усвојено је да је време кретања осцилатора од десног граничника до левог граничника једнако као и време кретања од левог граничника до десног граничника. Ако рачунамо процес осциловања од левог граничника, тада су гранични услови у облику:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad x = -\Delta, \quad \dot{x} = R \cdot \dot{x}_- \\ t = \frac{\pi \cdot l}{\Omega}, \quad x = \Delta, \quad \dot{x} = \dot{x}_- \end{aligned} \quad (41)$$

Истраживање спроводимо за граничне услове (40), они се не разликују од граничних услова (41), осим у знацима плус и минус.

Истражимо периодично кретање система, под претпоставком да је полупериод кретања једнак или сразмеран периоду принудне силе, то јест, удари се дешавају наизменично у један и други граничник, у константним интервалима који су сразмерни полупериоду силе побуде $\pi \cdot l / \Omega$, где је l вишеструкост режима. Показаћемо детаљно шта је то вишеструкост l .

Период промене принудне силе – то је временски интервал $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ у коме се принудна сила потпуно промени као на слици 2. За један полупериод $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\Omega}$ сила се промени тачно до половине.



Слика 2. Промена принудне силе за један период T .

П.4.2. Услови (области) постојања и стабилности периодичних виброударних режима (непарни $l = 1, 3, \dots$; парни $l = 2, 4, \dots$)

Вишеструкост $l = 1$, то значи да док се осцилатор креће од десног граничника према левом граничнику, спољашња принудна сила $F(t)$ промени се за једну половину периода $T/2$, то јест, принудна сила промени се за један полупериод.

Вишеструкост $l = 2$, то значи да док се осцилатор креће од десног граничника према левом граничнику, спољашња принудна сила $F(t)$ промени се за два полупериода $T/2$, тј. принудна сила промени се за период T .

Вишеструкост $l = 3$, то значи да док се осцилатор креће од десног граничника према левом граничнику, спољашња принудна сила $F(t)$ промени се за три полупериода $T/2$, тј. принудна сила промени се за један и по период.

Дакле, једноударни режим карактерише вишеструка промена принудне силе $F(t)$ за полупериод $T/2$.

Ако трансформишемо израз (25) на следећи начин:

$$x = D e^{-n \cdot t} \cos\left(\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) \cdot t + \delta\right) + \frac{X_1(1-p^2)}{K(p)} \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi_1) + \frac{X_1 \frac{\Delta_x}{\pi} p}{K(p)} \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi_1),$$

нека је
$$K_1 \cos(\delta) = \frac{X_1(1-p^2)}{K(p)} \quad \text{и} \quad K_1 \sin(\delta) = -\frac{X_1 \frac{\Delta_x}{\pi} p}{K(p)} .$$

У наставку добијамо:

$$x = D \cdot e^{-n \cdot t} \cos\left(\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) \cdot t + \delta\right) + K_1 \cos(\delta) \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi_1) - K_1 \sin(\delta) \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi_1) , \quad (42)$$

за трансформацију користимо тригонометријску формулу

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta .$$

На крају добијамо

$$x = D \cdot e^{-n \cdot t} \cos\left(\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2}\right) \cdot t + \delta\right) + K_1 \cos(\Omega \cdot t + \varphi_1 + \delta) . \quad (43)$$

Ако користимо тригонометријску формулу $\cos^2(\delta) + \sin^2(\delta) = 1$,

из израза (42) добијамо следећи израз за амплитуду K_1

$$K_1 = \sqrt{\left(\frac{X_1(1-p^2)}{K(p)}\right)^2 + \left(-\frac{X_1 \frac{\Delta_x}{\pi} p}{K(p)}\right)^2}. \quad (44)$$

Израз (44) представља амплитуду принудних осцилација које се дешавају под утицајем спољашње принудне силе $F_1(t) = F_1 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi_1)$.

Одредимо фазу осциловања δ :

$$\frac{K_1 \sin(\delta)}{K_1 \cos(\delta)} = -\frac{X_1 \frac{\Delta_x}{\pi} p \cdot K(p)}{K(p) \cdot X_1(1-p^2)} = -\frac{X_1 \frac{\Delta_x}{\pi} p}{X_1(1-p^2)}; \quad (45)$$

$$\operatorname{tg}(\delta) = -\frac{X_1 \frac{\Delta_x}{\pi} p}{X_1(1-p^2)}; \quad \delta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{X_1 \frac{\Delta_x}{\pi} p}{X_1(1-p^2)}\right)$$

Ако за решење хомогеног дела једначине (6) користимо израз (7) и узмемо да је $K_1 = A$, тада укупно решење може се написати у следећем облику:

$$x(t) = e^{-nt} \left(A_3 \cos\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2} \cdot t\right) + A_4 \sin\left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2} \cdot t\right) \right) + A \cos(\Omega \cdot t + \varphi_1 + \delta) = \quad (46)$$

$$= e^{-nt} \left(A_3 \cos\left(\omega_x \sqrt{1 - \frac{n^2}{\omega_x^2}} \cdot t\right) + A_4 \sin\left(\omega_x \sqrt{1 - \frac{n^2}{\omega_x^2}} \cdot t\right) \right) + A \cos(\Omega \cdot t + \varphi_1 + \delta)$$

Користимо познате ознаке: $\Delta_x = \frac{2\pi \cdot n}{\omega_x}$, $p = \frac{\Omega}{\omega_x}$. (47)

Уведимо нову променљиву $\Omega_1 = \sqrt{\omega_x^2 - n^2}$, тј. $\Omega_1 = \omega_x \sqrt{1 - \frac{n^2}{\omega_x^2}}$, где је променљива

Ω_1 кружна фреквенција пригушених осцилација.

У систему који проучавамо пригушење је веома мало $n \ll \omega_x$, па је тада је $\Omega_1 \approx \omega_x$.

Тада израз (46) добија облик

$$x(t) = e^{-nt} (A_3 \cos(\omega_x \cdot t) + A_4 \sin(\omega_x \cdot t)) + A \cos(\Omega \cdot t + \varphi_1 + \delta). \quad (48)$$

Означимо $\psi = \varphi_1 + \delta$ тада израз (48) добија облик:

$$x(t) = e^{-nt} (A_3 \cos(\omega_x \cdot t) + A_4 \sin(\omega_x \cdot t)) + A \cos(\Omega \cdot t + \psi). \quad (49)$$

Уместо константи A_3 и A_4 узећемо константе C_1 и C_2 , па је (49) у облику

$$x(t) = e^{-nt} (C_1 \cos(\omega_x \cdot t) + C_2 \sin(\omega_x \cdot t)) + A \cos(\Omega \cdot t + \psi) . \quad (50)$$

Одредимо први извод израза (50) по времену t

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -n \cdot e^{-nt} (C_1 \cos(\omega_x \cdot t) + C_2 \sin(\omega_x \cdot t)) + e^{-nt} (-C_1 \omega_x \sin(\omega_x \cdot t) + C_2 \omega_x \cos(\omega_x \cdot t)) - A \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega \cdot t + \psi) \quad (51)$$

Одредимо константе C_1 и C_2 . У изразе (50) и (51) заменимо граничне услове (40):

$$t = 0, \quad x = \Delta, \quad \dot{x} = -R \cdot \dot{x}_-, \quad t = \frac{\pi \cdot l}{\Omega}, \quad x = -\Delta, \quad \dot{x} = -\dot{x}_- .$$

У изразе (50) и (51) заменимо први ред из граничних услова $t = 0, \quad x = \Delta, \quad \dot{x} = -R \cdot \dot{x}_-$

$$\Delta = C_1 + A \cdot \cos(\psi) , \quad (52)$$

$$-R \cdot \dot{x}_- = -n \cdot C_1 + C_2 \cdot \omega_x - A \cdot \Omega \cdot \sin(\psi) . \quad (53)$$

Ако узмемо у обзир ознаке (47), и поделимо (42) са ω_x добија се:

$$\frac{-R \cdot \dot{x}_-}{\omega_x} = \frac{-n}{\omega_x} \cdot C_1 + C_2 - A \cdot \frac{\Omega}{\omega_x} \cdot \sin(\psi) = \frac{-n}{\omega_x} \cdot \frac{2\pi}{2\pi} \cdot C_1 + C_2 - A \cdot \frac{\Omega}{\omega_x} \cdot \sin(\psi) \quad (54)$$

$$\frac{-R \cdot \dot{x}_-}{\omega_x} = -\frac{\Delta_x}{2\pi} \cdot C_1 + C_2 - A \cdot p \cdot \sin(\psi)$$

Ако комбинујемо оба израза (52) и (53) у један систем, добија се:

$$\begin{cases} \Delta = C_1 + A \cdot \cos(\psi) \\ \frac{-R \cdot \dot{x}_-}{\omega_x} = -\frac{\Delta_x}{2\pi} \cdot C_1 + C_2 - A \cdot p \cdot \sin(\psi) \end{cases} \quad (55)$$

У изразе (50) и (51) заменимо други ред из граничних услова $t = \frac{\pi \cdot l}{\Omega}, \quad x = -\Delta, \quad \dot{x} = -\dot{x}_-$

добија се:

$$\begin{aligned} -\Delta &= e^{-nt} \left(C_1 \cos\left(\omega_x \cdot \frac{\pi \cdot l}{\Omega}\right) + C_2 \sin\left(\omega_x \cdot \frac{\pi \cdot l}{\Omega}\right) \right) + A \cos\left(\Omega \cdot \frac{\pi \cdot l}{\Omega} + \psi\right) \\ -\dot{x}_- &= -n \cdot e^{-n \frac{\pi \cdot l}{\Omega}} \left(C_1 \cos\left(\omega_x \cdot \frac{\pi \cdot l}{\Omega}\right) + C_2 \sin\left(\omega_x \cdot \frac{\pi \cdot l}{\Omega}\right) \right) + \\ &+ e^{-n \frac{\pi \cdot l}{\Omega}} \left(-C_1 \cdot \omega_x \sin\left(\omega_x \cdot \frac{\pi \cdot l}{\Omega}\right) + C_2 \cdot \omega_x \cos\left(\omega_x \cdot \frac{\pi \cdot l}{\Omega}\right) \right) - A \cdot \Omega \cdot \sin\left(\Omega \cdot \frac{\pi \cdot l}{\Omega} + \psi\right) \end{aligned} \quad (56)$$

Поделимо другу једначину са ω_x

$$\begin{aligned} \frac{-\dot{x}_-}{\omega_x} &= \frac{-n}{\omega_x} \frac{2\pi}{2\pi} \cdot e^{-n \frac{\pi \cdot l}{\Omega} \frac{\omega_x}{\omega_x}} \left(C_1 \cos \left(\omega_x \cdot \frac{\pi \cdot l}{\Omega} \right) + C_2 \sin \left(\omega_x \cdot \frac{\pi \cdot l}{\Omega} \right) \right) + \\ &+ e^{-n \frac{\pi \cdot l}{\Omega} \frac{\omega_x}{\omega_x}} \left(-C_1 \sin \left(\omega_x \cdot \frac{\pi \cdot l}{\Omega} \right) + C_2 \cos \left(\omega_x \cdot \frac{\pi \cdot l}{\Omega} \right) \right) - A \cdot \frac{\Omega}{\omega_x} \cdot \sin \left(\Omega \cdot \frac{\pi \cdot l}{\Omega} + \psi \right) \end{aligned}$$

добија се

$$\begin{aligned} \frac{-\dot{x}_-}{\omega_x} &= -\frac{\Delta_x \cdot l}{2\pi} \cdot e^{-\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} \left(C_1 \cos \left(\frac{\pi \cdot l}{p} \right) + C_2 \sin \left(\frac{\pi \cdot l}{p} \right) \right) + \\ &+ e^{-\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} \left(-C_1 \sin \left(\frac{\pi \cdot l}{p} \right) + C_2 \cos \left(\frac{\pi \cdot l}{p} \right) \right) - A \cdot p \cdot \sin(\pi \cdot l + \psi) \end{aligned} \quad (57)$$

У изразу (57) треба размотрити тригонометријску функцију $\sin(\pi \cdot l + \psi)$.

При $l = 1$, $\sin(1 \cdot \pi + \psi) = -\sin(\psi)$.

При $l = 2$, $\sin(2 \cdot \pi + \psi) = \sin(\psi)$.

При $l = 3$, $\sin(3 \cdot \pi + \psi) = -\sin(\psi)$.

При $l = 4$, $\sin(4 \cdot \pi + \psi) = \sin(\psi)$.

Тј., за непарно l имамо вредност $-\sin(\psi)$, а када је l парно имамо вредност $\sin(\psi)$.

За непарно $l = 1, 3, 5, \dots$

$$\begin{aligned} \frac{-\dot{x}_-}{\omega_x} &= -\frac{\Delta_x}{2\pi} \cdot e^{-n \frac{\pi \cdot l}{\Omega}} \left(C_1 \cos \left(\frac{\pi \cdot l}{p} \right) + C_2 \sin \left(\frac{\pi \cdot l}{p} \right) \right) + \\ &+ e^{-n \frac{\pi \cdot l}{\Omega}} \left(-C_1 \sin \left(\frac{\pi \cdot l}{p} \right) + C_2 \cos \left(\frac{\pi \cdot l}{p} \right) \right) + A \cdot p \cdot \sin(\psi) \end{aligned} \quad (58)$$

За парно $l = 2, 4, 6, \dots$

$$\begin{aligned} \frac{-\dot{x}}{\omega_x} = & -\frac{\Delta_x}{2\pi} \cdot e^{-n\frac{\pi \cdot l}{\Omega}} \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \right) + \\ & + e^{-n\frac{\pi \cdot l}{\Omega}} \left(-C_1 \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \right) - A \cdot p \cdot \sin(\psi) \end{aligned} \quad (59)$$

Ако напишемо $e^{-n\frac{\pi \cdot l}{\Omega}} = e^{-\frac{\Delta_x \cdot \omega_x \cdot \pi \cdot l}{2\pi \cdot \Omega}} = e^{-\frac{\Delta_x \cdot l \cdot \omega_x}{2 \cdot \Omega}} = e^{-\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}}$.

Тада је прва једначина из (56):

$$\begin{aligned} -\Delta = & e^{-n\frac{\pi \cdot l}{\Omega}} \left(C_1 \cos\left(\omega_x \cdot \frac{\pi \cdot l}{\Omega}\right) + C_2 \sin\left(\omega_x \cdot \frac{\pi \cdot l}{\Omega}\right) \right) + A \cos\left(\Omega \cdot \frac{\pi \cdot l}{\Omega} + \psi\right), \\ -\Delta = & e^{-\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \right) + A \cos(\pi \cdot l + \psi). \end{aligned} \quad (60)$$

У изразу (60) треба размотрити тригонометријску функцију $\cos(\pi \cdot l + \psi)$.

При $l = 1$, $\cos(1 \cdot \pi + \psi) = -\cos(\psi)$.

При $l = 2$, $\cos(2 \cdot \pi + \psi) = \cos(\psi)$.

При $l = 3$, $\cos(3 \cdot \pi + \psi) = -\cos(\psi)$.

При $l = 4$, $\cos(4 \cdot \pi + \psi) = \cos(\psi)$.

Тј. , за непарно l имамо вредност $-\cos(\psi)$, а када је l парно имамо вредност $\cos(\psi)$.

За непарно $l = 1, 3, 5, \dots$

$$-\Delta = e^{-\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \right) - A \cos(\psi). \quad (61)$$

За парно $l = 2, 4, 6, \dots$

$$-\Delta = e^{-\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \right) + A \cos(\psi). \quad (62)$$

Прво ћемо размотрити наш задатак када је непарно $l = 1, 3, 5, \dots$ и зато изразе (55), (58) и (61) комбинујемо у један систем:

$$\begin{aligned} \Delta &= C_1 + A \cdot \cos(\psi), \\ \frac{-R \cdot \dot{x}_-}{\omega_x} &= -\frac{\Delta_x}{2\pi} \cdot C_1 + C_2 - A \cdot p \cdot \sin(\psi), \\ -\Delta &= e^{-\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \right) - A \cos(\psi), \\ \frac{-\dot{x}_-}{\omega_x} &= -\frac{\Delta_x}{2\pi} \cdot e^{-n \frac{\pi \cdot l}{\Omega}} \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \right) + \\ &+ e^{-n \frac{\pi \cdot l}{\Omega}} \left(-C_1 \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \right) + A \cdot p \cdot \sin(\psi). \end{aligned} \quad (63)$$

Добија се: $C_1 = \Delta - A \cdot \cos(\psi)$, $C_2 = -C_1 d$,

$$C_2 = -C_1 \frac{\left(e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} + \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \right)}{\sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right)}, \quad d = \frac{\left(e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} + \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \right)}{\sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right)}, \quad (64)$$

$$D = \frac{(R+1) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right)}{e^{-\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} + 2 \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) + e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}}}, \quad (65)$$

$$B = \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{R}{D} - \frac{\frac{\Delta_x}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) + e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} + \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right)}{\sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right)} \right), \quad (66)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sin(\psi) &= \frac{\dot{x}_- \cdot D}{\omega_x \cdot A} \cdot B, & \cos(\psi) &= \frac{\Delta}{A} \left(1 - \frac{\dot{x}_- \cdot D}{\omega_x \cdot \Delta} \right). \end{aligned} \right.$$

Ако уведемо следећу смену $x_1 = \frac{\dot{x}_-}{\omega_x \cdot \Delta}$, брзина је $\dot{x}_- = x_1 \cdot \omega_x \cdot \Delta$, па је последњи израз:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\psi) = x_1 \cdot \frac{\Delta \cdot D \cdot B}{A} \\ \cos(\psi) = \frac{\Delta}{A} \cdot (1 - x_1 D) \end{array} \right. , \quad (67)$$

Сада је потребно да се ослободимо тригонометријских функција у (67) зато квадрирамо функције синус и косинус и саберемо користећи тригонометријски идентитет $\sin^2(\psi) + \cos^2(\psi) = 1$, па се добија:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin^2(\psi) = \left(x_1 \cdot \frac{\Delta \cdot D \cdot B}{A} \right)^2 \\ \cos^2(\psi) = \left(\frac{\Delta}{A} \cdot (1 - x_1 D) \right)^2 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left(x_1 \cdot \frac{\Delta \cdot D \cdot B}{A} \right)^2 + \left(\frac{\Delta}{A} \cdot (1 - x_1 D) \right)^2 = \sin^2(\psi) + \cos^2(\psi) \Rightarrow$$

$$D^2 \cdot (B^2 + 1)x_1^2 - 2 \cdot D \cdot x_1 + 1 - \frac{A^2}{\Delta^2} = 0 . \quad (68)$$

На крају се добија квадратна једначина (68), када је решимо добијемо два корена и то заменимо у израз за брзину:

$$x_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (B^2 + 1) \cdot \left(1 - \frac{A^2}{\Delta^2} \right)}}{D \cdot (B^2 + 1)} , \quad (69)$$

$$\dot{x}_- = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (B^2 + 1) \cdot \left(1 - \frac{A^2}{\Delta^2} \right)}}{D \cdot (B^2 + 1)} \cdot \omega_x \cdot \Delta . \quad (70)$$

У овом примеру се истражује систем са зазором, тј. $\Delta > 0$. Ако је амплитуда виброударних режима константа $A = \Delta$, дефинисање амплитудно фреквентне карактеристике је одређено областима постојања (стабилности) режима у зависности од параметара p, Δ . Истражимо границе области постојања. Пре свега, одредимо област реалних вредности величине \dot{x}_- .

Ако претпоставимо да је израз под кореном у једначини (70) позитиван, добија се:

$$1 - \left(1 - \frac{A^2}{\Delta^2} \right) \cdot (1 + B^2) \geq 0 , \quad 1 - \frac{A^2}{\Delta^2} \leq \frac{-1}{1 + B^2} , \quad -\frac{A^2}{\Delta^2} \leq \frac{-1}{1 + B^2} - 1 ,$$

$$\frac{|\Delta|}{A} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{B^2}} . \quad (71)$$

Овај израз (71) је услов који одређује област у којој се налазе реалне вредности брзине \dot{x}_- . Област реалних вредности бројева под кореном много је шира од области решења. У интервалу између два узастопна судара осцилатор треба да се налази између граничника, и не прелази дужину $|x| = \Delta$. У нашем задатку ово ограничење није испуњено при свим вредностима параметара система. Због тога спроводимо истраживање, на који начин има утицај додатно ограничење на резултате анализе. У нашем случају $B \neq 0$, јер је у облику квадрата и под кореном у именуоцу израза (70). Виброударни режими могу постојати не само у границама амплитуде осциловања линеарног осцилатора $0 < \Delta < A$, него и ван те области $\Delta > A$. Ако се граничници помере на вредност која је већа од амплитуде осциловања $\Delta > A$, тада да би се реализовао виброударни режим потребна је довољно јака принудна сила, и то се може остварити додавањем енергије, односно повећањем амплитуде принудне силе $F(t)$.

Добили смо област реалних вредности (71) из услова да је израз под кореном у формули (70) већи од нуле. Сада од свих реалних вредности треба да одредимо оне вредности при којима могу постојати виброударни режими, или области вредности. Област постојања (стабилности) виброударних режима, пре свега, је област где параметри система испуњавају услов да путања осциловања $x(t)$ не прелази вредност зазора Δ :

$$\Delta - < x(t) < \Delta \quad \text{или} \quad |x(t)| < \Delta . \quad (72)$$

У општем случају, није могуће одредити области постојања виброудара на основу услова (72) у датом моделу, јер закон кретања осцилатора састоји се од збира два дела функција са несразмерним фреквенцијама. За системе релативно једноставне структуре, аналитичким методама могу се одредити приближне границе области постојања, и овде то радимо. Изаберимо из области реалних вредности (70) најужу област постојања тражених решења. У том правцу, потребно је да се испуни услов

$$\dot{x}_- > 0 . \quad (73)$$

У изразу (70) имамо два корена и при $\Delta < A$ услов (73) испуњава само корен

$$\dot{x}_- = \frac{1 + \sqrt{1 - (B^2 + 1) \cdot \left(1 - \frac{A^2}{\Delta^2}\right)}}{D \cdot (B^2 + 1)} \cdot \omega_x \cdot \Delta . \quad (74)$$

Па је услов постојања виброударног режима $\Delta < A$, само у том случају осцилатор ће ударати о два граничника. Ако је $\Delta > A$, процес осциловања ће се дешавати тако да осцилатор неће ударати у граничнике и зато да би постојао ударни процес потребна је додатна енергија осцилатора или повећање амплитуде принудне силе $F(t)$.

Посматрамо једначину (74) и одређујемо када је брзина позитивна. Зато прво посматрамо каквог је знака именилац, где је множилац $(B^2 + 1)$ увек позитиван. Остаје да се испита знак за D у имениоцу. Знак за D у (65) одређује се на основу знака

$$\text{бројиоца } \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \text{ и имениоца } f(p) = e^{-\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} + 2\cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) + e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} .$$

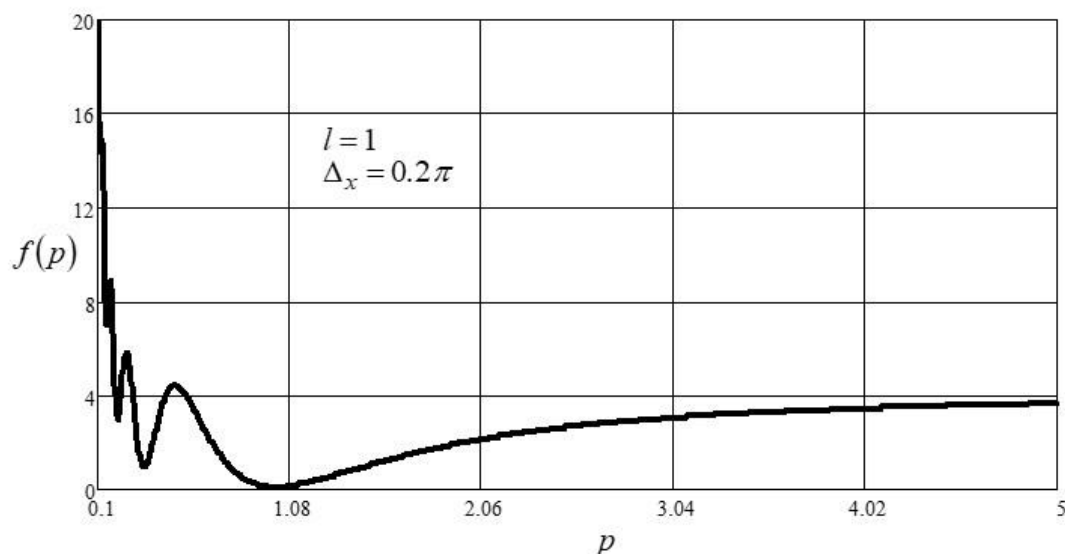
Прво истражујемо бројилац и дефинишемо у којим интервалима је позитиван:

$$\sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \geq 0 \quad , \quad 2\pi \cdot n < \frac{\pi \cdot l}{p} < \pi + 2\pi \cdot n \quad , \quad 2 \cdot n < \frac{l}{p} < 1 + 2 \cdot n \quad ,$$

$$\frac{p}{l} \geq \frac{1}{1 + 2 \cdot n} \quad , \quad \text{а када је } n = 0 \text{ добија се } p \geq l . \quad (75)$$

$$\text{Тј. } \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \text{ позитиван је при } p \geq l \text{ и негативан при } p < l .$$

У наставку истражујемо именилац $f(p)$ из (65), он је позитиван на целом интервалу променљиве p , то потврђује график на слици (3), (Mathcad 14).



Слика 3. Конструкција функције имениоца $f(p)$.

Режим I

Истражимо на који начин утиче услов (73) на област постојања виброударних режима за које је $\Delta \geq A$. Почнимо анализу решења коме одговара знаком минус испред корена у (70). У том случају израз под кореном треба да буде мањи од јединице, да би брзина била позитивна.
$$1 - \left(1 - A^2 / \Delta^2\right) \cdot \left(1 + B^2\right) < 1$$

После трансформација добија се $A^2 / \Delta^2 < 1$.

Ако се узме реципрочна вредност добија се $\Delta^2 / A^2 > 1$ и на крају се добија

$$|\Delta| > A . \quad (76)$$

Овде је добијено јединствено решење $|\Delta| > A$, овај услов карактерише режим осциловања без удара, тј., осцилатор не стиже до граничника. Ово решење $|\Delta| > A$ не одговара за наше истраживање.

Режим II

У наставку истражимо решење са знаком минус испред корена у (70) и посматрамо случај када је израз под кореном већи од јединице

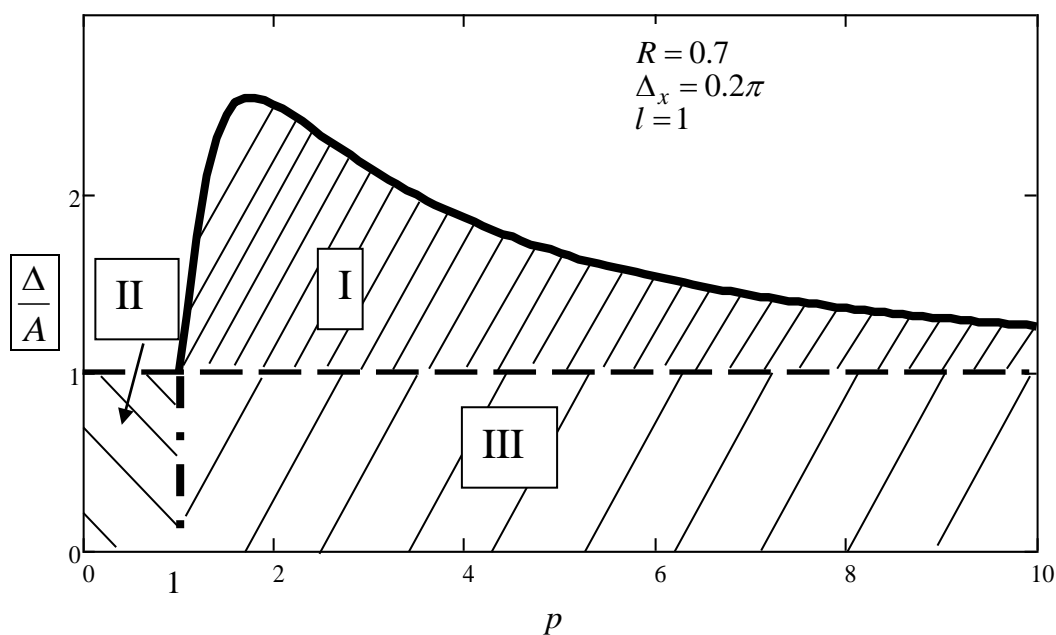
$$1 - \left(1 - A^2 / \Delta^2\right) \cdot \left(1 + B^2\right) > 1 . \quad (77)$$

После трансформација добија се да је $|\Delta| < A$, и испуњен је први услов. Други услов је да је брзина позитивна $\dot{x}_- > 0$ (73). На основу (77) у изразу за брзину (70) види се да је бројилац негативан. Зато да би брзина била позитивна, мора да је и именилац негативан, а то се дешава када је у имениоцу D негативно. У изразу (75) видели смо да је D негативно када је $\sin(\pi \cdot l / p)$ негативно, то јест, када је $p < l$.

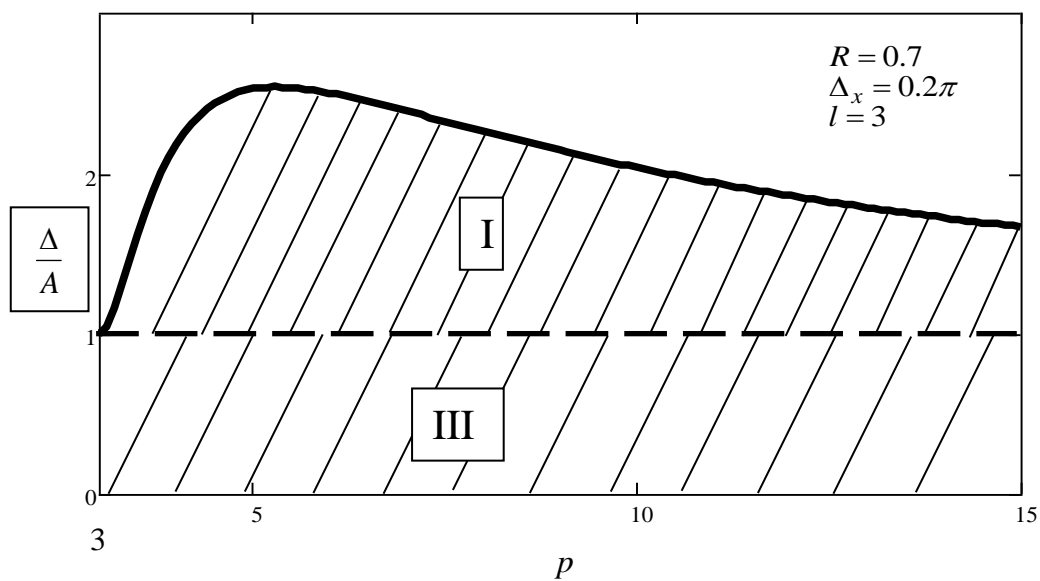
Режим III

На крају истражимо решење са знаком плус испред корена у (70). Први услов да би постојао виброударни режим је испуњен када је подкорена величина већа од јединице (израз 77) и тада се добија $|\Delta| < A$. Други услов је да је брзина $\dot{x}_- > 0$ позитивна. У изразу за брзину (70) види се да је бројилац позитиван. Зато да би брзина била позитивна, мора да је и именилац позитиван, а то се дешава када је у имениоцу D позитивно. У изразу (75) видели смо да је D позитивно када је $\sin(\pi \cdot l / p)$ позитивно, то јест, када је $p \geq l$.

На основу ова три режима можемо закључити да у фреквентном интервалу p у свакој тачки области реалних вредности параметара, који испуњавају услов $|\Delta| < A$ може постојати виброударни режим дужине (вишеструкости) од 0 до l . Када је $\Delta = A$, једна од вредности \dot{x}_- једнака је нули независно од осталих параметара система. То одговара линеарном осцилатору са додиром граничника без удара.



Слика 4. Области постојања виброударних режима при $l = 1$.



Слика 5. Области постојања виброударних режима при $l = 3$.

На сликама 4 и 5 приказане су области постојања виброударних режима I, II и III. Графици су конструисани у Mathcad 14 према формули (71) за константне вредности R, Δ_x и за непарно $l = 1, 3$. Позитиван нагиб шрафуре на слици, указује на постојање режима са знаком плус у (70), а негативни (супротни) нагиб шрафуре на слици, указује на постојање режима са знаком минус. Дијаграм показује постојање виброударних режима када је $\Delta > A$.

Објаснићемо детаљно распоред области на сликама 4 и 5.

Режим I - област где је $\Delta > A$, тј. зазор Δ је већи од амплитуде A , а то значи да није испуњен услов $|\Delta| < A$. На дијаграму се види постојање виброударних режима, то значи да у овој области може да постоји режим када нема удара осцилатора о граничнике, али је могућ и ударни режим. Ударни режим је могуће остварити само у случају ако се систему дода енергија или како би рекли треба остварити "јаку принудну силу". Ова зона је шрафирана позитивно, она је најгушћа и односи се на истраживање корена

$$\dot{x}_- = \frac{1 - \sqrt{1 - (B^2 + 1) \cdot \left(1 - \frac{A^2}{\Delta^2}\right)}}{D \cdot (B^2 + 1)} \cdot \omega_x \cdot \Delta .$$

Режим II - област где је $\Delta < A$, тј. вредност зазора Δ је мања од амплитуде A , то значи да у овој области постоје виброударни режими. Ова зона је шрафирана негативно и она се односи на истраживање корена

$$\dot{x}_- = \frac{1 - \sqrt{1 - (B^2 + 1) \cdot \left(1 - \frac{A^2}{\Delta^2}\right)}}{D \cdot (B^2 + 1)} \cdot \omega_x \cdot \Delta \text{ и тада је } p < l .$$

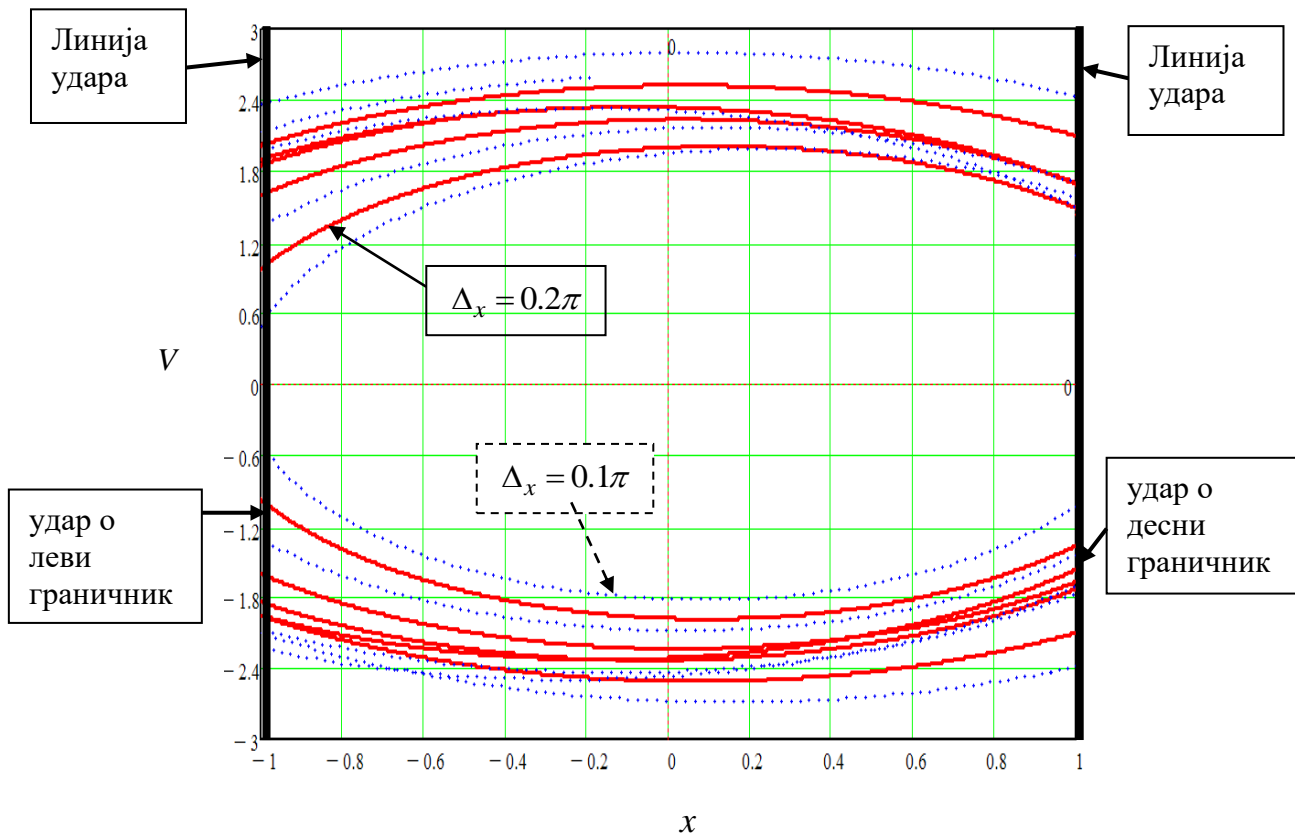
Режим III - област где је $\Delta < A$, тј. вредност зазора Δ је мања од амплитуде A , то значи да у овој области постоје виброударни режими. Ова зона је шрафирана позитивно и

$$\text{односи се на истраживање корена } \dot{x}_- = \frac{1 + \sqrt{1 - (B^2 + 1) \cdot \left(1 - \frac{A^2}{\Delta^2}\right)}}{D \cdot (B^2 + 1)} \cdot \omega_x \cdot \Delta \text{ и тада је } p \geq l .$$

Као што видимо на сликама 4 и 5 имамо мање косине код кривих са два граничника у односу на први задатак где имамо један граничник. У примеру са једним граничником криве имају веће нагибе и израженије карактеристичне екстремуме.

На слици 6 конструисан је фазни портрет у Mathcad 14 за две различите вредности декремента пригушења када је $\Delta_x = 0.1\pi$ и $\Delta_x = 0.2\pi$, када су дати следећи подаци:

$$F_0 = 2N, X_1 = 2N, m = 1kg, \omega_x = 1s^{-1}, \Delta = 1m, R = 0.7, p = 1.5, \Omega = 1.5s^{-1}.$$



Слика 6. Фазни портрет за виброударни процес за период T између два узастопна удара.

Са слике 6 се види, ако је мање пригушење шири је обим осцилација. Фазни дијаграм јасно показује осцилације током целог процеса виброудара на одређеном временском интервалу.

До сада смо проучавали ударни процес за непарно $l = 1, 3, 5, \dots$

Сада ћемо проучити ударни процес за парно $l = 2, 4, 6, \dots$. Написаћемо систем једначина који описује ударни процес када је $l = 2, 4, 6, \dots$

Почињемо од система једначина (63), али је разлика код треће једначине (за парно l узимамо једначину 62) и код четврте једначине (за парно l узимамо једначину 59):

$$\Delta = C_1 + A \cdot \cos(\psi);$$

$$\frac{-R \cdot \dot{x}_-}{\omega_x} = -\frac{\Delta_x}{2\pi} \cdot C_1 + C_2 - A \cdot p \cdot \sin(\psi);$$

$$-\Delta = e^{-\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \right) + A \cos(\psi); \quad . \quad (78)$$

$$\frac{-\dot{x}_-}{\omega_x} = -\frac{\Delta_x}{2\pi} \cdot e^{-n \frac{\pi \cdot l}{\Omega}} \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \right) +$$

$$+ e^{-n \frac{\pi \cdot l}{\Omega}} \left(-C_1 \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \right) - A \cdot p \cdot \sin(\psi)$$

Добија се:

$$C_2 = C_1 \frac{\left(e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} - \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \right)}{\sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right)} - \frac{2 \cdot \Delta \cdot e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}}}{\sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right)}, \quad d = \frac{\left(e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} - \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \right)}{\sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right)},$$

$$C_1 = \Delta - A \cdot \cos(\psi), \quad k^* = \frac{2 \cdot \Delta \cdot e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}}}{\sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right)}, \quad C_2 = C_1 d - k^* \quad . \quad (79)$$

Уведимо следећу ознаку

$$D = \frac{(R-1) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) - e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} - e^{-\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}}} \quad . \quad (80)$$

Уведимо следеће ознаке

$$B = \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{R}{D} + \frac{-\frac{\Delta_x}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) + e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} - \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right)}{\sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right)} \right) \quad \text{и} \quad E = -\frac{2 \cdot e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}}}{p \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right)} - \frac{2 \cdot D}{p} \cdot \frac{\left(e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} - \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) \right)^2}{(R-1) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right)} \quad .$$

На крају добијамо израз

$$\frac{D}{A \cdot p} \cdot \frac{\dot{x}_-}{\omega_x} \cdot B + \frac{\Delta}{A} \cdot E = \sin(\psi) . \quad (81)$$

У изразу (81) уведемо следећу смену $x_1 = \frac{\dot{x}_-}{\omega_x \cdot \Delta} \Rightarrow \dot{x}_- = x_1 \cdot \omega_x \cdot \Delta$, (82)

$$\sin(\psi) = x_1 \cdot \frac{\Delta \cdot D \cdot B}{A} + \frac{\Delta}{A} \cdot E = \frac{\Delta}{A} \cdot (E + D \cdot B \cdot x_1) . \quad (83)$$

Означимо $H = \frac{\frac{\Delta_x}{2\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) - \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) + e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}}}{(R-1) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right)}$, добија се:

$$\begin{cases} \sin(\psi) = \frac{\Delta}{A} \cdot (D \cdot B \cdot x_1 + E) \\ \cos(\psi) = \frac{\Delta}{A} (1 - x_1 D + 2 \cdot D \cdot H) \end{cases} . \quad (84)$$

Ослободимо се тригонометријских функција у (84) и зато квадрирамо функције уз синус и косинус и саберемо користећи тригонометријску једнакост $\sin^2(\psi) + \cos^2(\psi) = 1$.

$$\begin{cases} \sin^2(\psi) = \frac{\Delta^2}{A^2} \cdot (D \cdot B \cdot x_1 + E)^2 \\ \cos^2(\psi) = \frac{\Delta^2}{A^2} (1 - x_1 D + 2 \cdot D \cdot H)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta^2}{A^2} \cdot (D \cdot B \cdot x_1 + E)^2 + \frac{\Delta^2}{A^2} (1 - x_1 D + 2 \cdot D \cdot H)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$D^2 \cdot (B^2 + 1) \cdot x_1^2 + (-2 \cdot D + 2 \cdot D \cdot B \cdot E - 2 \cdot H \cdot D^2) \cdot x_1 + 1 - \frac{A^2}{\Delta^2} + 2 \cdot D \cdot H + 4 \cdot D^2 \cdot H^2 + E^2 = 0 . \quad (85)$$

Сада упоредимо једначине (85) и (68). Једначина (68) описује виброударне режиме за непарно $l = 1, 3, 5, \dots$, а једначина (85) описује виброударне режиме за парно $l = 2, 4, 6, \dots$. Као што видимо једначина (85) има сложенију структуру него једначина (68). У обе једначине исти коефицијент стоји код x_1^2 . У коефицијенту који стоји код x_1 додаје се члан $2 \cdot D \cdot B \cdot E - 2 \cdot H \cdot D^2$. У трећем сабирку додаје се члан $2 \cdot D \cdot H + 4 \cdot D^2 \cdot H^2 + E^2$.

На крају решимо квадратну једначину (85), решавањем добијамо два корена, а затим и брзину:

$$x_1 = \frac{2 \cdot D - 2 \cdot D \cdot B \cdot E + 2 \cdot H \cdot D^2 \pm \sqrt{\left(-2 \cdot D + 2 \cdot D \cdot B \cdot E - 2 \cdot H \cdot D^2\right)^2 - 4 \cdot D^2 \cdot \left(B^2 + 1\right) \cdot \left(1 - \frac{A^2}{\Delta^2} + 2 \cdot D \cdot H + 4 \cdot D^2 \cdot H^2 + E^2\right)}}{2 \cdot D \cdot \left(B^2 + 1\right)} \quad (86)$$

$$\dot{x}_- = \frac{2 \cdot D - 2 \cdot D \cdot B \cdot E + 2 \cdot H \cdot D^2 \pm \sqrt{\left(-2 \cdot D + 2 \cdot D \cdot B \cdot E - 2 \cdot H \cdot D^2\right)^2 - 4 \cdot D^2 \cdot \left(B^2 + 1\right) \cdot \left(1 - \frac{A^2}{\Delta^2} + 2 \cdot D \cdot H + 4 \cdot D^2 \cdot H^2 + E^2\right)}}{2 \cdot D \cdot \left(B^2 + 1\right)} \omega_x \Delta$$

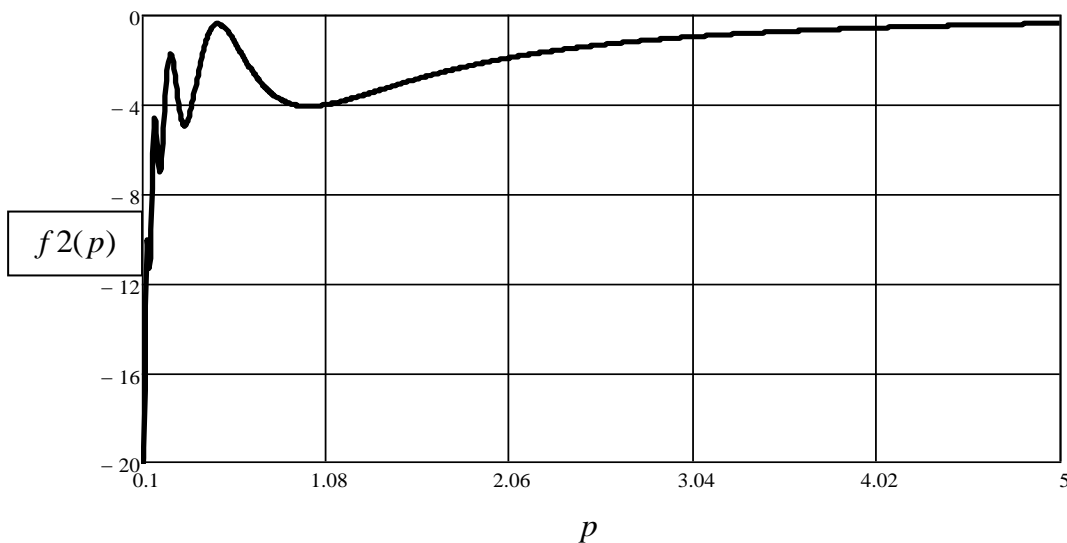
Брзина (86) за виброударне режиме за парно $l = 2, 4, 6, \dots$ има сложенију структуру него брзина за непарно $l = 1, 3, 5, \dots$ и зато се истраживање знатно компликује.

Почнимо истраживање од имениоца, конкретно од $D = \frac{(R-1) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) - e^{-\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} - e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}}}$.

У бројиоцу $\sin\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right)$ је позитивно за $p \geq l$ и негативно за $p < l$ (једначина 75).

Именилац је увек негативан на целој бројној оси и то показује график на слици 7

конструисан у Mathcad 14 за израз $f_2(p) = 2 \cos\left(\frac{\pi \cdot l}{p}\right) - e^{-\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}} - e^{\frac{\Delta_x \cdot l}{2p}}$.



Слика 7. Конструкција функције имениоца $f_2(p)$.

Вредност $(R-1)$ у изразу D је увек негативна јер је $R < 1$. На крају имамо да је именилац негативан и вредност $(R-1)$ такође је негативна и знак за израз D , као и у случају непарног l , одређује само функција синус у бројиоцу.

Истражимо границе области постојања (стабилности). Пре свега, одредимо област реалних вредности брзине \dot{x}_- , и тада добијамо из услова да је израз под кореном у једначини (86) позитиван:

$$\left(-2 \cdot D + 2 \cdot D \cdot B \cdot E - 2 \cdot H \cdot D^2\right)^2 - 4 \cdot D^2 \cdot (B^2 + 1) \cdot \left(1 - \frac{A^2}{\Delta^2} + 2 \cdot D \cdot H + 4 \cdot D^2 \cdot H^2 + E^2\right) \geq 0,$$

$$\frac{|\Delta|}{A} \leq \sqrt{\frac{4 \cdot D^2 \cdot (B^2 + 1)}{4 \cdot D^2 \cdot (B^2 + 1) \cdot (1 + 2 \cdot D \cdot H + 4 \cdot D^2 \cdot H^2 + E^2) - \left(-2 \cdot D + 2 \cdot D \cdot B \cdot E - 2 \cdot H \cdot D^2\right)^2}}. \quad (87)$$

Израз (87) карактерише област реалних вредности али не и област постојања (стабилности) решења. Област постојања налазимо из услова да је $\dot{x}_- > 0$.

$$2 \cdot D - 2 \cdot D \cdot B \cdot E + 2 \cdot H \cdot D^2 \geq$$

$$\geq \sqrt{\left(-2 \cdot D + 2 \cdot D \cdot B \cdot E - 2 \cdot H \cdot D^2\right)^2 - 4 \cdot D^2 \cdot (B^2 + 1) \cdot \left(1 - \frac{A^2}{\Delta^2} + 2 \cdot D \cdot H + 4 \cdot D^2 \cdot H^2 + E^2\right)}$$

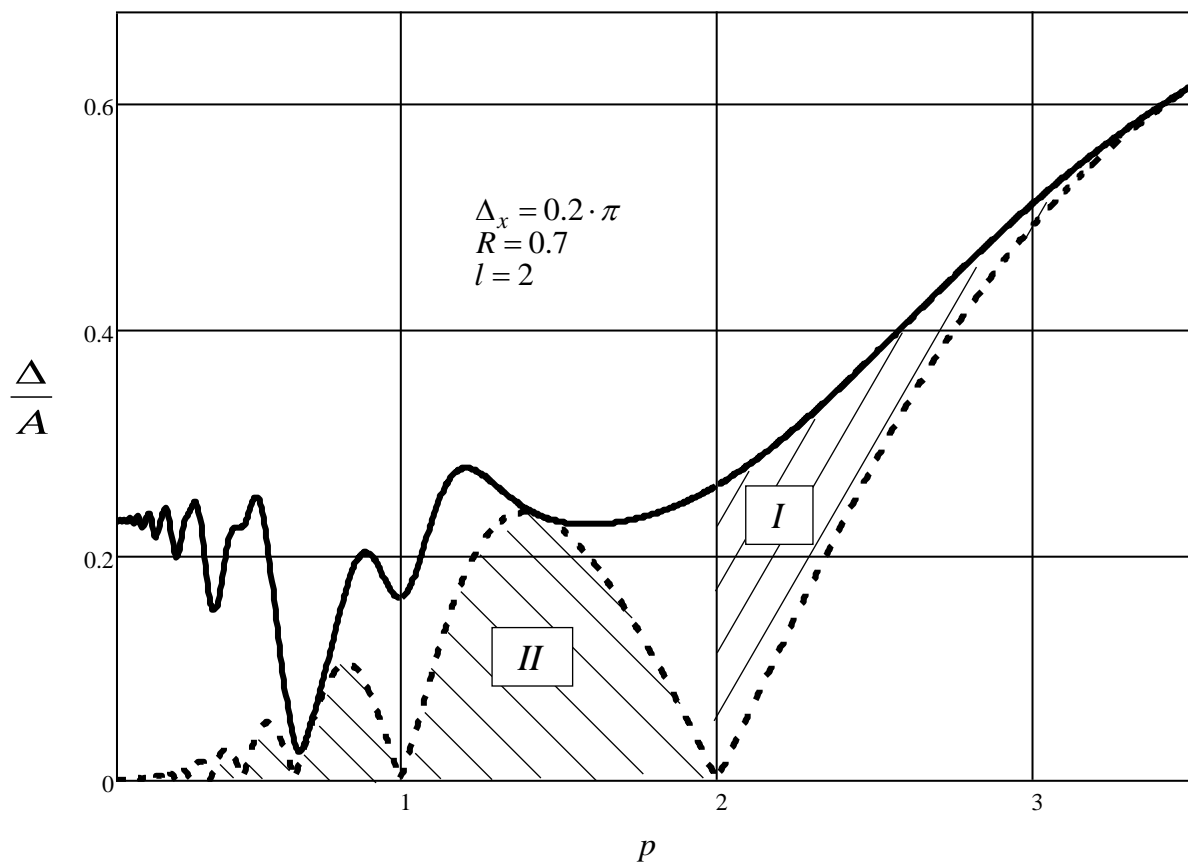
$$\frac{|\Delta|}{A} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \cdot D \cdot H + 4 \cdot D^2 \cdot H^2 + E^2}}. \quad (89)$$

Израз (89) карактерише област постојања (стабилности) када је позитиван именилац, када је позитиван синус, то јест када је $p \geq l$.

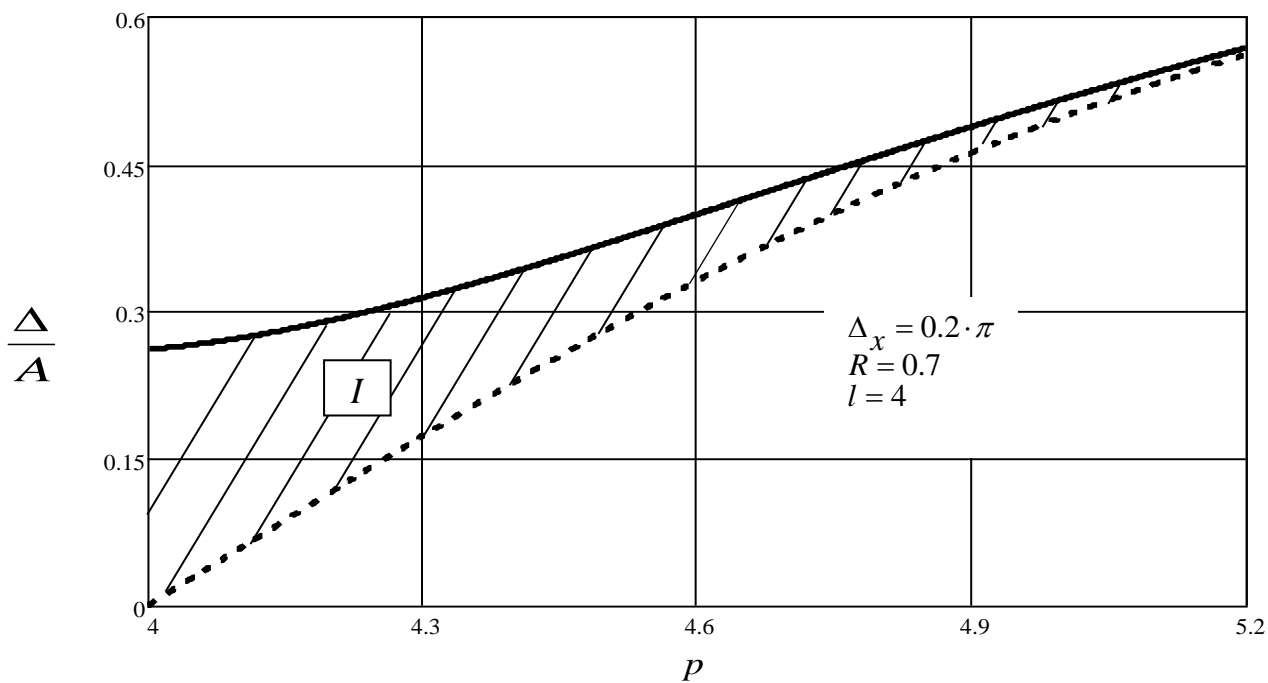
$$\frac{|\Delta|}{A} < \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \cdot D \cdot H + 4 \cdot D^2 \cdot H^2 + E^2}} \quad (90)$$

Израз (90) карактерише област постојања (стабилности) када је негативан именилац, када је негативан синус, то јест када је $p < l$.

На сликама 8 и 9 приказане су области постојања виброударних режима. Графици су конструисани у Mathcad 14 по формулама (87) и (89) за константне вредности R, Δ_x и за одговарајуће парне вредности $l = 2, 4$. При томе пуна линија описује израз (87) а испрекидана линија описује израз (89). Позитиван нагиб шрафуре на слици, указује на постојање режима са знаком плус у бројиоцу (86), а негативни (супротни) нагиб шрафуре на слици, указује на постојање режима са знаком минус.



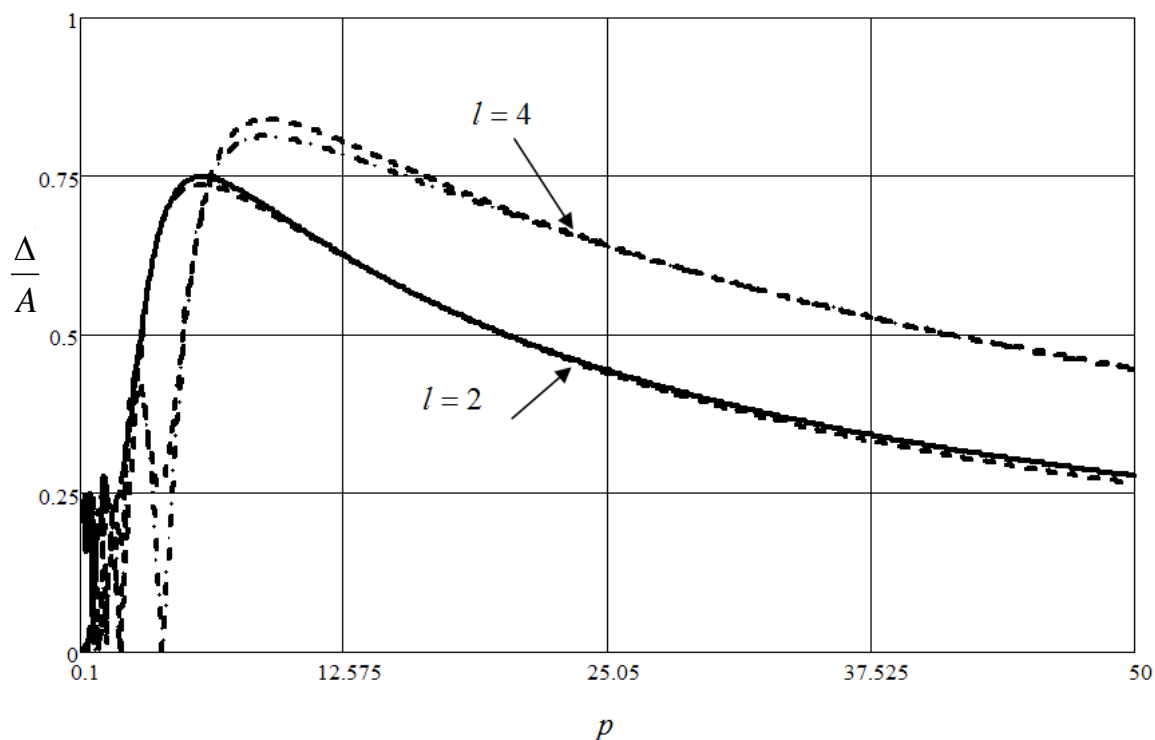
Слика 8. Области постојања виброударних режима при $l = 2$.



Слика 9. Области постојања виброударних режима при $l = 4$.

Режим I – област где је $\Delta < A$, тј. вредност зазора Δ је мања од амплитуде A , у овој области постоје виброударни режими. Ова зона је шрафирана позитивно и она се односи на истраживање режима са знаком плус испред корена у (86).

Режим II – област где је $\Delta < A$, тј. вредност зазора Δ је мања од амплитуде A , у овој области постоје виброударни режими. Ова зона је шрафирана негативно и она се односи на истраживање режима са знаком минус испред корена у (86).



Слика 10. Области постојања виброударних режима при $l = 2$ и $l = 4$.

У овом истраживању види се да режими са непарним $l = 1, 3, 5, \dots$ разликују се од режима са парним $l = 2, 4, 6, \dots$. У режимима са непарним бројем l показано је да је могуће постојање виброударних режима у случају $\Delta > A$, док у режимима са парним бројем l , то једноставно није могуће. Да би ово показали посебно смо конструисали график на слици 10, за парно $l = 2, 4$ и на целој бројној оси $p \in [0, \infty]$ видимо да је $\Delta < A$. То значи да за парно l постоје виброударни режими када је $\Delta < A$ и не могу постојати виброударни режими када је $\Delta > A$.

На крају закључујемо, да је могуће постојање виброударних режима у случају када је вредност зазора већа од амплитуде осциловања, тј. $\Delta > A$ само у режимима са непарним $l = 1, 3, 5, \dots$

Синтеза (оптимизација) виброударних процеса

П.4.3. Оптимални периодични виброударни режими (оптимално управљање силом, оптимална путања)

Посматрамо пример на слици 1, где имамо две фазне координате, то су координата $s = x$ и брзина кретања $v = \dot{x}$. Означимо $x_1 = x$ и $x_2 = \dot{x}$, изводи су:

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = x_2 \quad \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x} = \ddot{x}_1.$$

С обзиром на ове ознаке, једначина осциловања (2) $m \cdot \ddot{x} + b_x \cdot \dot{x} + c_x \cdot x = F(t) \quad / : m$

може да се напише у облику $\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + \omega_x^2 \cdot x = \frac{F(t)}{m} \Rightarrow$

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + \omega_x^2 \cdot x = u \quad \text{или} \quad \ddot{x}_1 + 2n \cdot \dot{x}_1 + \omega_x^2 \cdot x_1 = u \quad (91)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 = u - 2n \cdot \dot{x}_1 - \omega_x^2 \cdot x_1,$$

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 \Rightarrow \dot{x}_2 = u - 2 \cdot n \cdot x_2 - \omega_x^2 \cdot x_1,$$

где је: $n = \frac{b_x}{2m}$, $\omega_x^2 = \frac{c_x}{m}$, $u = \frac{F(t)}{m}$, $u_0 = \frac{F_0}{m}$.

Имајући у виду наведене фазне координате $x_1 = x$ и $x_2 = \dot{x}$, и њихове изводе $\dot{x}_1 = x_2$ и $\dot{x}_2 = \ddot{x}_1$, добијамо две једначине у облику

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - 2n \cdot x_2 - \omega_x^2 \cdot x_1 \end{cases} \quad (92)$$

Гранични услови задатка су :

$$\begin{aligned} t = 0, \quad x = \Delta, \quad \dot{x} = -R \cdot \dot{x}_- \\ t = \frac{T_{\min}}{2}, \quad x = -\Delta, \quad \dot{x} = -\dot{x}_- \end{aligned} \quad (93)$$

Ограничење за принудну силу $|F(t)| \leq F_0$ има облик:

$$-u_0 \leq u \leq u_0 \quad (94)$$

С обзиром на то да је $f_0 = 1$, $f_1 = \dot{x} = x_2$, $f_2 = \ddot{x} = \dot{x}_2 = u - 2n \cdot x_2 - \omega_x^2 \cdot x_1$, функција

Хамилтона $H(\psi, X, U) = \lambda \cdot f_0(X, U) + \sum_{i=0}^k \psi_i \cdot f_i(X, U)$ (формула 24 из наслова П.1.)

добија облик:

$$H(\psi, X, U) = \lambda \cdot f_0 + \psi_1 \cdot f_1 + \psi_2 \cdot f_2, \text{ тј.}$$

$$H(\psi, X, U) = \lambda \cdot 1 + \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 \cdot (u - 2n \cdot x_2 - \omega_x^2 \cdot x_1). \quad (95)$$

Систем једначина 25 (из наслова II.1.) је облика

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{-\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{-\partial H}{\partial x_2} \end{cases}. \quad (96)$$

Одредимо изводе и заменимо у систем једначина (96), добија се:

$$\frac{-\partial H}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1} [\lambda \cdot 1 + \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 (u - 2n \cdot x_2 - \omega_x^2 \cdot x_1)] = -[\psi_2 (-\omega_x^2)] = +\omega_x^2 \cdot \psi_2, \quad ,$$

$$\frac{-\partial H}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_2} [\lambda \cdot 1 + \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 (u - 2n \cdot x_2 - \omega_x^2 \cdot x_1)] = -[\psi_1 + \psi_2 (-2n)] = -\psi_1 + 2n \cdot \psi_2, \quad ,$$

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = \omega_x^2 \cdot \psi_2 \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 + 2n \cdot \psi_2 \end{cases} \quad (97)$$

Трансформација система (97) за функцију $\psi_2(t)$ доводи до следеће диференцијалне једначине

$$\ddot{\psi}_2 - 2n \cdot \dot{\psi}_2 + \omega_x^2 \cdot \psi_2 = 0. \quad (98)$$

Решење једначине (98) зависи од вредности интензитета пригушења n , ми спроводимо истраживање када је мало пригушење ($n \ll \omega_x$), $\Omega_1 = \omega_x$. Решење једначине (98) можемо написати у облику који је познат из теорије диференцијалних једначина

$$\psi_2(t) = e^{n \cdot t} (C_1 \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\Omega_1 \cdot t)). \quad (99)$$

или у програму Математика 7 добија се:

$$\text{DSolve}[\psi''[t] - 2 \cdot n \cdot \psi'[t] + \omega^2 \cdot \psi[t] = 0, \psi, t],$$

$$\left\{ \left\{ \psi \rightarrow \left(\{t\} \rightarrow c_1 e^{t(n - \sqrt{n^2 - \omega^2})} + c_2 e^{t(n + \sqrt{n^2 - \omega^2})} \right) \right\} \right\}.$$

На основу решења (99) видимо да функција $\psi_2(t)$ може имати екстремне вредности +1 и -1.

Из Понтрјагиновог принципа максимума следи, да оптимално управљање добија граничне (екстремне) вредности u_0 или $-u_0$ (формула 94), и његов знак се поклапа са знаком функције $\psi_2(t)$, па је:

$$\psi_2(t)u^* = \max_{|u| \leq u_0} \psi_2(t)u = |\psi_2(t)|, \quad \text{то јест: } u(t) = u_0 \cdot \text{sign}\psi_2(t), \text{ или:}$$

$$u = u_0 \cdot \text{sign}\left(e^{n \cdot t} (C_1 \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\Omega_1 \cdot t))\right), \quad (100)$$

тј: $u = u_0 \cdot \text{sign}\left(e^{n \cdot t} (a \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t + \varphi))\right) \approx u_0 \cdot \text{sign}\left(e^{n \cdot t} (a \cdot \cos(\omega_x \cdot t + \varphi))\right).$

Како су $+1$ и -1 екстремне вредности функције $\psi_2(t)$, израз (101) добија облик

$$\begin{aligned} u &= u_0, \text{ ако је } \psi_2(t) > 0, \\ u &= -u_0, \text{ ако је } \psi_2(t) < 0. \end{aligned} \quad (101)$$

Пошто линеарна функција може да промени знак на интервалу не више од једанпут, то је оптимално управљање:

$$u = \begin{cases} u_0 & \text{при } 0 \leq t < t_1 \\ -u_0 & \text{при } t_1 \leq t < \frac{T_{\min}}{2} \end{cases}, \quad (102)$$

или $u = \begin{cases} -u_0 & \text{при } 0 \leq t < t_1 \\ u_0 & \text{при } t_1 \leq t < \frac{T_{\min}}{2} \end{cases}.$ (103)

П.4.3.1. Први полупериод (кретање од десног до левог граничника)

Истражимо полупериод који почиње после удара у десни граничник на слици 1 и претпоставимо да имамо један прелаз (прекид) функције u у тренутку времена t_1 , тада према (100), време треба да испуни следеће услове у два интервала:

- 1) интервал $0 < t \leq t_1 \Rightarrow 0 < \Omega_1 \cdot t \leq \pi$;
 - 2) интервал $t_1 < t \leq T \Rightarrow 0 < \Omega_1 \cdot t \leq \pi$.
- (104)

Управљање је дефинисано изразом (103) $u = \begin{cases} -u_0 & \text{при } 0 \leq t < t_1 \\ u_0 & \text{при } t_1 \leq t < \frac{T_{\min}}{2} \end{cases}.$

Прво посматрамо (103), то је друго од два наведена управљања, а разлог је што након удара осцилатор почиње своје кретање супротно од позитивног правца осе x , па у складу са тим принудна сила такође мора бити усмерена супротно од осе x . Прелаз принудне силе у супротни смер дешава се у тренутку t_1 . Прецизније можемо да формулишемо задатак овако: треба испитати које од два управљања нама одговара (102) или (103), и за то је потребно истражити оба случаја. Остаје да се одреди тачка t_1 , тачка прелаза (прекида) за управљање.

Одредимо укупно решење диференцијалне једначине (91)

$$\ddot{x}_1 + 2n \cdot \dot{x}_1 + \omega_x^2 \cdot x_1 = u .$$

Укупно решење једначине (91) се састоји од збира $x_1 = x_h + x_p$.

Решење хомогеног дела једначине (91) можемо написати у облику који је познат из теорије диференцијалних једначина:

$$x_h = e^{-nt} \left(C_1 \cdot \cos \left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2} \cdot t \right) + C_2 \cdot \sin \left(\sqrt{\omega_x^2 - n^2} \cdot t \right) \right) ,$$

или $x_h = e^{-nt} (C_1 \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\Omega_1 \cdot t))$, где је $\Omega_1 \approx \omega_x$.

На крају укупно решење једначине (91) добија се у облику:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-nt} (C_1 \cdot \cos(\omega_x \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega_x \cdot t)) - \frac{u_0}{\omega_x^2} & \text{када је } 0 \leq t < t_1; \\ e^{-nt} (C_3 \cdot \cos(\omega_x \cdot t) + C_4 \cdot \sin(\omega_x \cdot t)) + \frac{u_0}{\omega_x^2} & \text{када је } t_1 \leq t < \frac{T_{\min}}{2} \end{cases} \quad (105)$$

Први период: $0 \leq t < t_1$,

$$x1(t) = e^{-nt} (C_1 \cdot \cos(\omega_x \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega_x \cdot t)) - \frac{u_0}{\omega_x^2} . \quad (106)$$

Други период: $t_1 \leq t < \frac{T_{\min}}{2}$,

$$x2(t) = e^{-nt} (C_3 \cdot \cos(\omega_x \cdot t) + C_4 \cdot \sin(\omega_x \cdot t)) + \frac{u_0}{\omega_x^2} . \quad (107)$$

Када одредимо први извод обе једначине у (105), добија се брзина

$$v(t) = \begin{cases} e^{-nt} ((-n \cdot C_1 + \omega_x \cdot C_2) \cos(\omega_x \cdot t) - (n \cdot C_2 + \omega_x \cdot C_1) \sin(\omega_x \cdot t)) & \text{при } 0 \leq t < t_1; \\ e^{-nt} ((-n \cdot C_3 + \omega_x \cdot C_4) \cos(\omega_x \cdot t) - (n \cdot C_4 + \omega_x \cdot C_3) \sin(\omega_x \cdot t)) & \text{при } t_1 \leq t < \frac{T_{\min}}{2} \end{cases} . \quad (108)$$

Први период: $0 \leq t < t_1$,

$$v1(t) = e^{-nt} \cdot ((-n \cdot C_1 + \omega_x \cdot C_2) \cdot \cos(\omega_x \cdot t) - (n \cdot C_2 + \omega_x C_1) \cdot \sin(\omega_x \cdot t)) . \quad (109)$$

Други период: $t_1 \leq t < \frac{T_{\min}}{2}$,

$$v2(t) = e^{-nt} \cdot ((-n \cdot C_3 + \omega_x \cdot C_4) \cdot \cos(\omega_x \cdot t) - (n \cdot C_4 + \omega_x C_3) \cdot \sin(\omega_x \cdot t)) . \quad (110)$$

У изразе (105) и (108) заменимо граничне услове (93):

први период: $t = 0$, $x = \Delta$, $\dot{x} = -R \cdot \dot{x}_-$,

други период: $t = \frac{T_{\min}}{2}$, $x = -\Delta$, $\dot{x} = -\dot{x}_-$.

Одредимо непознате константе из (105) и (108), добија се:

$$C_1 = \Delta + \frac{u_0}{\omega_x^2}, \quad C_2 = \frac{1}{\omega_x} (-R \cdot \dot{x}_- + n \cdot C_1),$$

$$C_3 = C_3(T) = \frac{\left(-\Delta - \frac{u_0}{\omega_x^2} \right) \cdot e^{n \cdot \frac{T}{2}} - C_4 \sin\left(\omega_x \cdot \frac{T}{2}\right)}{\cos\left(\omega_x \cdot \frac{T}{2}\right)}, \quad (111)$$

$$C_4 = -\frac{e^{n \cdot \frac{T}{2}}}{\omega_x^3} \left[n \cdot \Delta \cdot \omega_x^2 \cdot \cos\left(\omega_x \cdot \frac{T}{2}\right) + \Delta \cdot \omega_x^3 \cdot \sin\left(\omega_x \cdot \frac{T}{2}\right) + n \cdot u_0 \cdot \cos\left(\omega_x \cdot \frac{T}{2}\right) + u_0 \cdot \omega_x \cdot \sin\left(\omega_x \cdot \frac{T}{2}\right) + \dot{x}_- \cdot \omega_x^2 \cdot \cos\left(\omega_x \cdot \frac{T}{2}\right) \right]$$

Услови континуитета (непрекидности) на фазној путањи имају следећи облик:

$$x_1 \Big|_{0 \leq t < t_1} = x_1 \Big|_{t_1 \leq t < \frac{T}{2}}, \quad x_2 \Big|_{0 \leq t < t_1} = x_2 \Big|_{t_1 \leq t < \frac{T}{2}} . \quad (112)$$

У циљу одређивања минималног (оптималног) времена ($T = T_{\min}$) и времена прелаза (прекида) t_1 , потребно је да релације (105) и (108) испуне услове континуитета (112).

Као резултат добијамо следеће трансцендентне једначине:

$$e^{-nt_1} (C_1 \cos(\omega_x \cdot t_1) + C_2 \sin(\omega_x \cdot t_1)) - \frac{u_0}{\omega_x^2} = e^{-nt_1} (C_3 \cos(\omega_x \cdot t_1) + C_4 \sin(\omega_x \cdot t_1)) + \frac{u_0}{\omega_x^2}, \quad (113)$$

$$\begin{aligned} & (-n \cdot C_1 + \omega_x \cdot C_2) \cdot \cos(\omega_x \cdot t_1) - (n \cdot C_2 + \omega_x \cdot C_1) \cdot \sin(\omega_x \cdot t_1) = \\ & = (-n \cdot C_3 + \omega_x \cdot C_4) \cdot \cos(\omega_x \cdot t_1) - (n \cdot C_4 + \omega_x \cdot C_3) \cdot \sin(\omega_x \cdot t_1) \end{aligned} \quad (114)$$

Једначине (113) и (114) не могу се решити аналитички, тако да ове две једначине решавамо графички. Због тога трансформишемо систем једначина (113) и (114) на следећи облик:

$$\operatorname{tg}(\omega_x \cdot t_1) = \frac{n \cdot C_1 - \omega_x \cdot C_2 - n \cdot C_3 + \omega_x \cdot C_4}{n \cdot C_4 + \omega_x \cdot C_3 - n \cdot C_2 - \omega_x \cdot C_1} = \frac{-n \cdot C_1 + \omega_x \cdot C_2 + n \cdot C_3 - \omega_x \cdot C_4}{-n \cdot C_4 - \omega_x \cdot C_3 + n \cdot C_2 + \omega_x \cdot C_1}, \quad (115)$$

$$e^{-n \cdot t_1} (C_1 \cos(\omega_x \cdot t_1) + C_2 \sin(\omega_x \cdot t_1)) - e^{-n \cdot t_1} (C_3 \cos(\omega_x \cdot t_1) + C_4 \sin(\omega_x \cdot t_1)) - 2 \frac{u_0}{\omega_x} = 0. \quad (116)$$

На крају систем једначина (115) и (116) добија облик:

$$t_1(T) = \frac{1}{\omega_x} \operatorname{arctg} \left(\frac{-n \cdot C_1 + \omega_x \cdot C_2 + n \cdot C_3 - \omega_x \cdot C_4}{-n \cdot C_4 - \omega_x \cdot C_3 + n \cdot C_2 + \omega_x \cdot C_1} \right) \quad (117)$$

$$G(T) = e^{-n \cdot t_1} (C_1 \cos(\omega_x \cdot t_1) + C_2 \sin(\omega_x \cdot t_1)) - e^{-n \cdot t_1} (C_4 \cos(\omega_x \cdot t_1) + C_4 \sin(\omega_x \cdot t_1)) - 2 \frac{u_0}{\omega_x} = 0 \quad (118)$$

Сада ове две трансцендентне једначине (117) и (118) решавамо графички. За решавање користимо математички програм Mathcad 14 и при томе се добија минимално (оптимално) време $T = T_{\min}$, на месту где функција $G(T)$ сече апсцису. После тога минимално време заменимо у (117) и добија се време прелаза (прекида) t_1 .

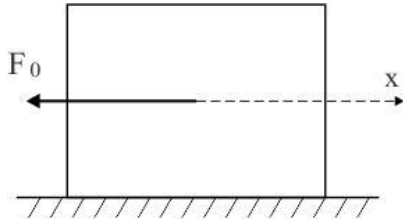
На овај начин испитано је управљање (103), доказано је да за наш случај одговара ово управљање, и то је оптимално управљање.

За случај управљања (102) функција $G(T)$ не сече осу апсцисе за било које вредности задатих параметара, то значи да управљање (102) не одговара за наш случај.

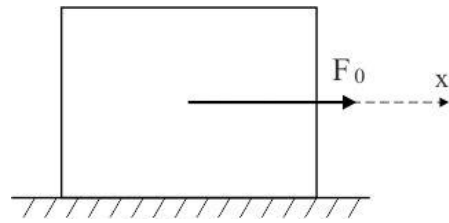
Истражен је конкретан случај за следеће параметре:

$$\Delta_x = 0.2\pi, \Delta = 1m, m = 1kg, F_0 = 2N, R = 0.7, \omega_x = 1s^{-1}, V_0 = 1 \frac{m}{s}, u_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Прикажимо случај (103) графички, на сликама 11.а. и 11.б. приказан је правац и смер дејства силе F_0 . До времена прелаза (прекида) $0 < t \leq t_1$ (слика 11.а.) сила F_0 дејствује у супротном смеру од одабраног позитивног смера осе x . Али у тренутку времена t_1 сила F_0 нагло мења свој смер, супротно у смеру који се поклапа са позитивним смером осе x , и дејствује у интервалу времена $t_1 \leq t < \frac{T_{\min}}{2}$ (слика 11.б.).



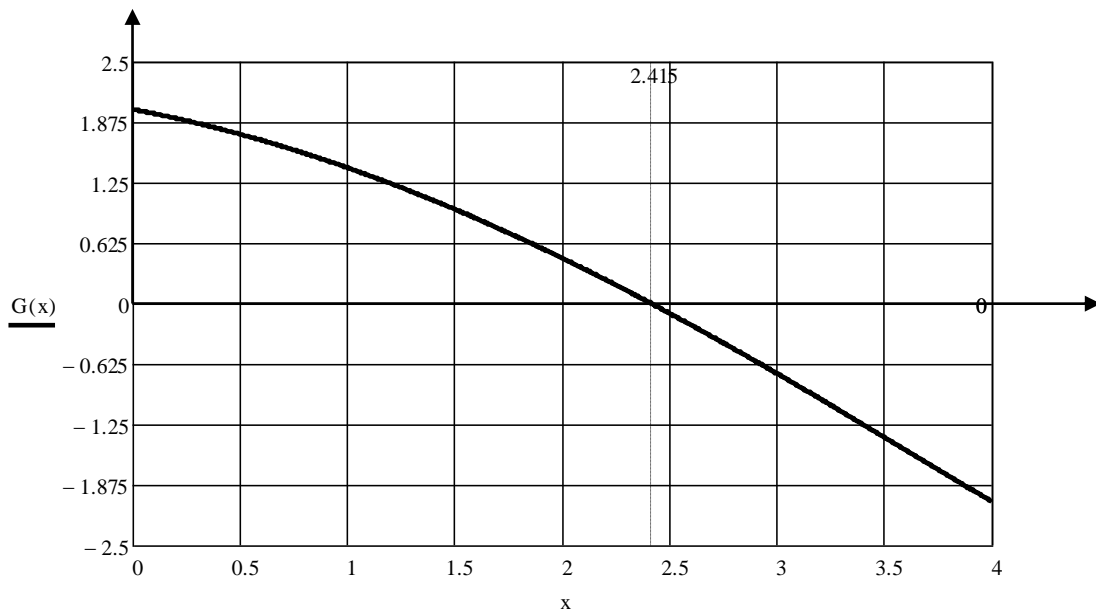
Слика 11.а. смер дејства силе F_0 на временском интервалу $0 < t \leq t_1$ до тренутка промене смера силе (тренутак прелаза t_1)



Слика 11.б. смер дејства силе F_0 на временском интервалу $t_1 < t \leq \frac{T_{\min}}{2}$ после тренутка промене смера силе (тренутак прелаза t_1)

Слика 11. Правац и смер дејства спољашње принудне силе $F(t)$.

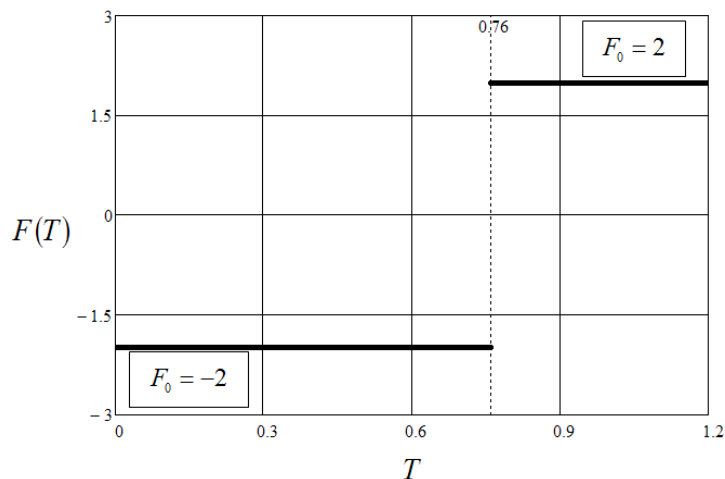
На слици 12 представљен је график $G(T)$, који пресеца осу апсцисе у тачки $T = 2.415 \text{ s}$, из (117) налазимо време прелаза (прекида) $t_1 = 0.76 \text{ s}$.



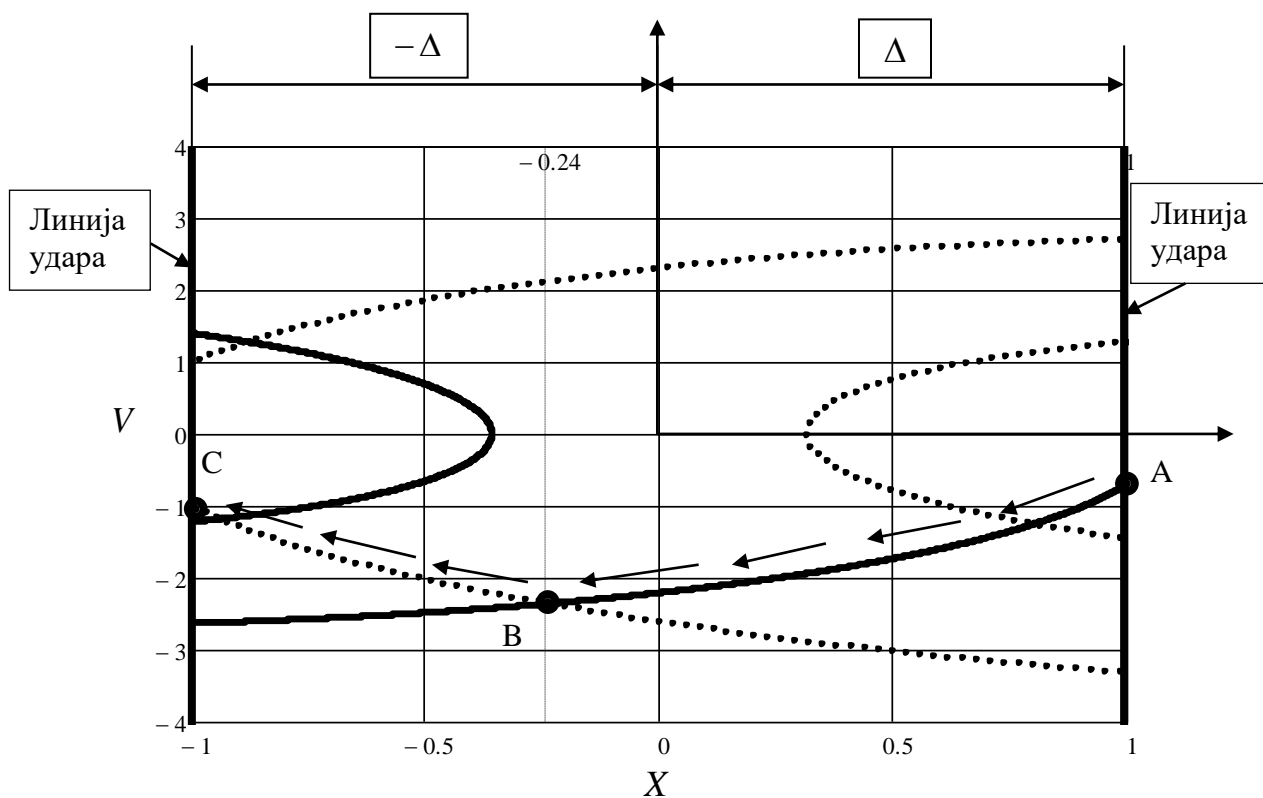
Слика 12. Графичко одређивање корена трансцендентне једначине $G(T)$ (118).

На слици 13 приказан је дијаграм управљања силом F_0 за један полупериод

$$\frac{T_{\min}}{2} = \frac{2.415}{2} = 1.2 \text{ s} .$$



Слика 13. Дијаграм управљања спољашном принудном силом $F(T)$.



Слика 14. Фазни дијаграм оптималног кретања виброударног осцилатора између два узастопна удара.

На слици 14 приказано је кретање осцилатора у фазном простору и тај график је нацртан у Mathcad 14. Када се терет креће по трајекторији АВ од тачке А ка тачки В, то значи да се терет креће по фазној трајекторији $X_1 - V_1$. У тачки В је прелаз (прекид) и терет почиње да се креће по другој фазној трајекторији $X_2 - V_2$ од тачке В до тачке С.

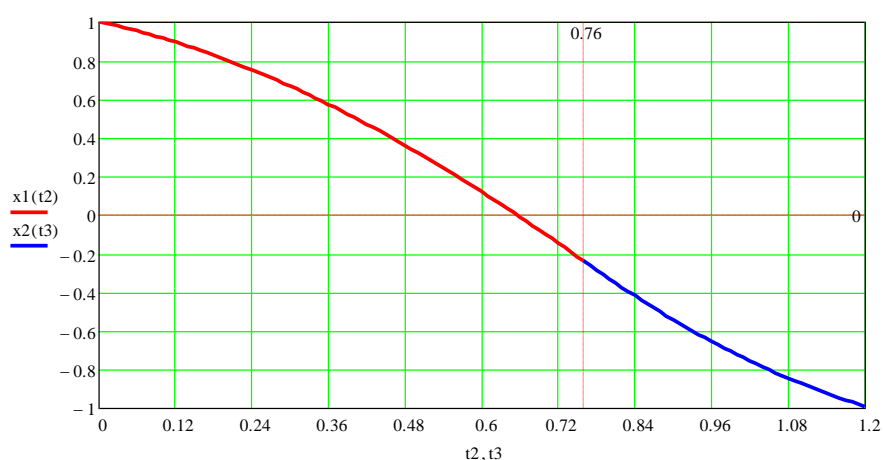
Координата тачке прелаза (прекида) је (тачка В) $x_1(t_1) = x_2(t_1) = -0.24\text{ m}$, а брзина осцилатора у тачки прелаза (прекида) је $\dot{x}_1(t_1) = \dot{x}_2(t_1) = -2.36\text{ m/s}$. Прво, осцилатор почиње своје кретање од тачке А ка тачки В по путањи првог фазног дијаграма (прва формула у 105) на временском интервалу $[0; t_1]$. Даље у тачки прелаза (прекида) t_1 осцилатор наставља своје кретање од тачке В до тачке С по другом фазном дијаграму (друга формула у 105). Оба фазна дијаграма представљају спиралу која се отвара. Путања кретања А-В-С је оптимална путања кретања виброударног осцилатора.

Тачка А на слици 14 одговара тренутку времена $t_0 = 0$ после удара терета о десни непокретни граничник, у том тренутку времена спољашња принудна сила $F_0 = -2N$ дејствује у смеру као на слици 11.а. Брзина у тачки А је $v_A = -0.7\frac{m}{s}$.

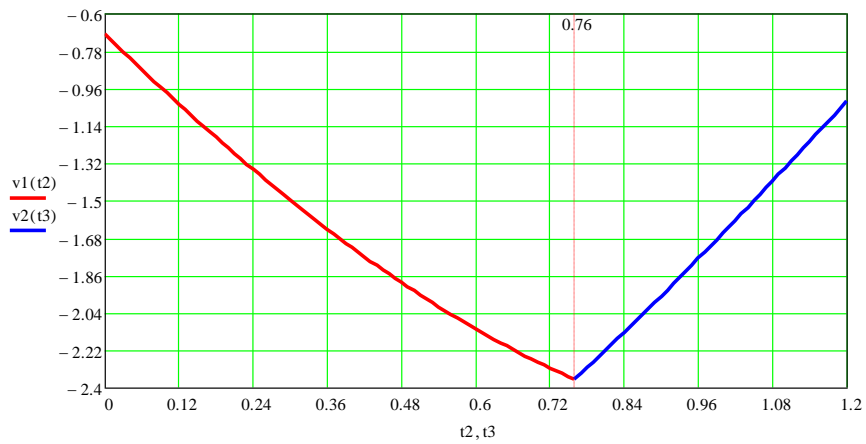
Тачка В на слици 14 одговара тренутку времена $t_1 = 0.76\text{ s}$ и у том тренутку времена спољашња принудна сила F_0 нагло мења свој смер, тј. има прелаз (прекид) и дејствује у смеру као што је то приказано на слици 11.б.

Тачка С на слици 14 одговара тренутку времена $t_2 = \frac{T_{\min}}{2} = \frac{2.415}{2} = 1.2\text{ s}$ непосредно испред удара, када терет прилази непокретном граничнику, али се удар још није десио. Брзина у тачки С једнака је $v_C = -1\frac{m}{s}$.

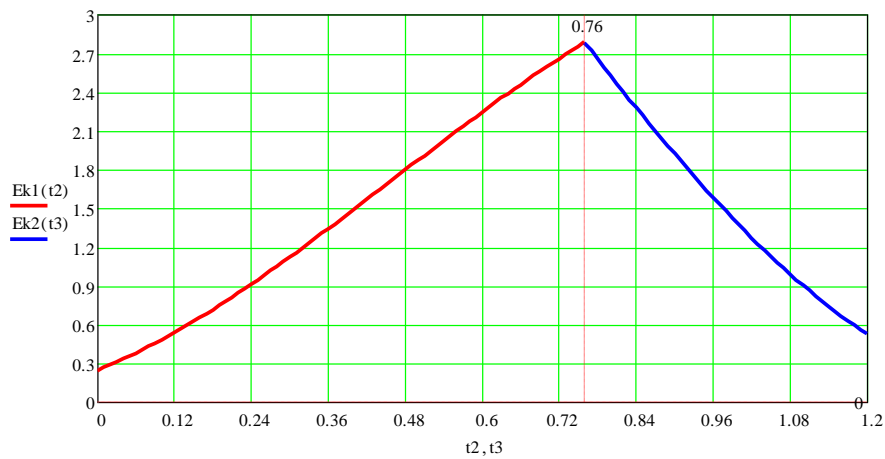
У наставку, приказујемо графике функција $x = x(t)$, $v = v(t)$,
 $E_k = \frac{1}{2}m \cdot v^2 = E_k(t)$, $E_p = \frac{1}{2}c \cdot x^2 = E_p(t)$, $F_w = F_w(t)$ у интервалу између два удара:



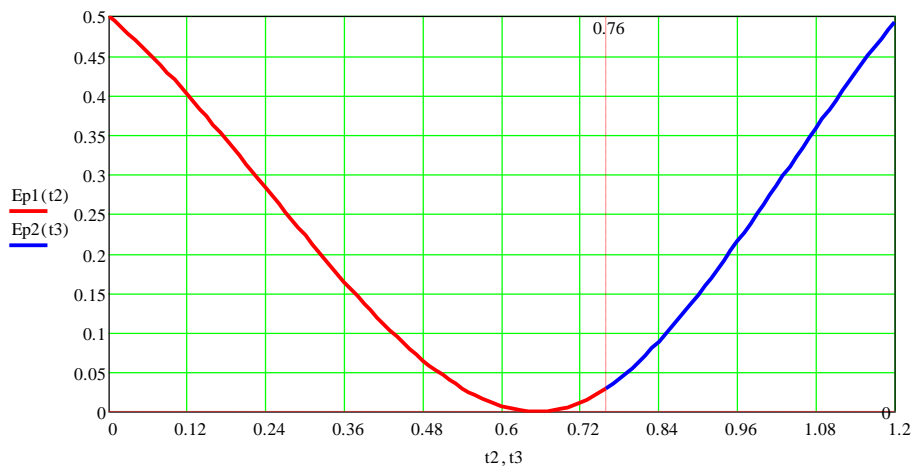
Слика 15.а. Координата у зависности од времена $x = x(t)$



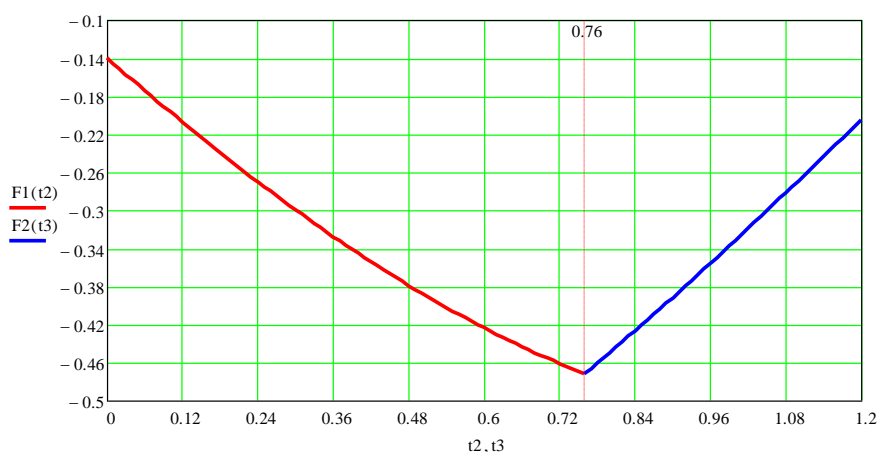
Слика 15.б. Брзина у зависности од времена $v = v(t)$



Слика 15.в. Кинетичка енергија у функцији времена $E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = E_k(t)$



Слика 15.г. Потенцијална енергија опруге у функцији времена $E_p = \frac{1}{2} c \cdot x^2 = E_p(t)$


 Слика 15.д. Сила пригушења (отпора) у функцији времена $F_w = -b \cdot \dot{x}$

II.4.3.2. Други полупериод (кретање од левог до десног граничника)

Истражимо полупериод који почиње после удара о леви граничник на слици 1, где је: \dot{x}_- је брзина осцилатора пре судара, \dot{x}_+ је брзина осцилатора после судара. Релација која повезује ове две брзине је дата изразом (39): $\dot{x}_+ = -R \cdot \dot{x}_-$.

Ако посматрамо процес који почиње после удара у леви граничник, тада су гранични услови дати изразом (41):

$$t = 0, \quad x = -\Delta, \quad \dot{x} = R \cdot \dot{x}_-, \quad t = \frac{T_{\min}}{2}, \quad x = \Delta, \quad \dot{x} = \dot{x}_-,$$

и посматрамо управљање које је дато изразом (102)

$$u = \begin{cases} u_0 & \text{при } 0 \leq t < t_1 \\ -u_0 & \text{при } t_1 \leq t < \frac{T_{\min}}{2} \end{cases}.$$

После прорачуна добија се путања:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-nt} (C_1 \cdot \cos(\omega_x \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega_x \cdot t)) + \frac{u_0}{\omega_x^2} & \text{када је } 0 \leq t < t_1; \\ e^{-nt} (C_3 \cdot \cos(\omega_x \cdot t) + C_4 \cdot \sin(\omega_x \cdot t)) - \frac{u_0}{\omega_x^2} & \text{када је } t_1 \leq t < \frac{T_{\min}}{2} \end{cases}. \quad (119)$$

$$\text{Први период: } 0 \leq t < t_1, \quad x1(t) = e^{-nt} (C_1 \cdot \cos(\omega_x \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega_x \cdot t)) + \frac{u_0}{\omega_x^2}. \quad (120)$$

$$\text{Други период: } t_1 \leq t < \frac{T_{\min}}{2}, \quad x2(t) = e^{-nt} (C_3 \cdot \cos(\omega_x \cdot t) + C_4 \cdot \sin(\omega_x \cdot t)) - \frac{u_0}{\omega_x^2}. \quad (121)$$

Када одредимо први извод обе једначине у (119), добија се брзина:

$$v(t) = \begin{cases} e^{-nt} \left((-n \cdot C_1 + \omega_x \cdot C_2) \cos(\omega_x \cdot t) - (n \cdot C_2 + \omega_x \cdot C_1) \sin(\omega_x \cdot t) \right) & \text{при } 0 \leq t < t_1; \\ e^{-nt} \left((-n \cdot C_3 + \omega_x \cdot C_4) \cos(\omega_x \cdot t) - (n \cdot C_4 + \omega_x \cdot C_3) \sin(\omega_x \cdot t) \right) & \text{при } t_1 \leq t < \frac{T_{\min}}{2} \end{cases} \quad (122)$$

Први период: $0 \leq t < t_1$,

$$v1(t) = e^{-nt} \cdot \left((-n \cdot C_1 + \omega_x \cdot C_2) \cdot \cos(\omega_x \cdot t) - (n \cdot C_2 + \omega_x \cdot C_1) \cdot \sin(\omega_x \cdot t) \right) \quad (123)$$

Други период: $t_1 \leq t < \frac{T_{\min}}{2}$,

$$v2(t) = e^{-nt} \cdot \left((-n \cdot C_3 + \omega_x \cdot C_4) \cdot \cos(\omega_x \cdot t) - (n \cdot C_4 + \omega_x \cdot C_3) \cdot \sin(\omega_x \cdot t) \right) \quad (124)$$

Заменимо граничне услове (41) у (119) и (122).

Одредимо непознате константе:

$$C_1 = -\Delta - \frac{u_0}{\omega_x^2}, \quad C_2 = \frac{1}{\omega_x} (R \cdot \dot{x}_- + n \cdot C_1),$$

$$C_3 = C_3(T) = \frac{\left(\Delta + \frac{u_0}{\omega_x^2} \right) \cdot e^{n \cdot \frac{T}{2}} - C_4 \sin\left(\omega_x \cdot \frac{T}{2}\right)}{\cos\left(\omega_x \cdot \frac{T}{2}\right)}, \quad (125)$$

$$C_4 = \frac{e^{n \cdot \frac{T}{2}}}{\omega_x^3} \left[n \cdot \Delta \cdot \omega_x^2 \cdot \cos\left(\omega_x \cdot \frac{T}{2}\right) + \Delta \cdot \omega_x^3 \cdot \sin\left(\omega_x \cdot \frac{T}{2}\right) + n \cdot u_0 \cdot \cos\left(\omega_x \cdot \frac{T}{2}\right) + u_0 \cdot \omega_x \cdot \sin\left(\omega_x \cdot \frac{T}{2}\right) + \dot{x}_- \cdot \omega_x^2 \cdot \cos\left(\omega_x \cdot \frac{T}{2}\right) \right]$$

Услови континуитета (непрекидности) на фазној путањи имају следећи облик:

$$x_1 \Big|_{0 \leq t < t_1} = x_1 \Big|_{t_1 \leq t < \frac{T}{2}}, \quad x_2 \Big|_{0 \leq t < t_1} = x_2 \Big|_{t_1 \leq t < \frac{T}{2}} \quad (126)$$

У циљу одређивања минималног (оптималног) времена ($T = T_{\min} / 2$) и времена прелаза (прекида) t_1 , потребно је да релације (119) и (122) испуне услове континуитета (126).

Као резултат добијамо следеће трансцендентне једначине:

$$\begin{aligned}
 e^{-n \cdot t_1} (C_1 \cdot \cos(\omega_x \cdot t_1) + C_2 \cdot \sin(\omega_x \cdot t_1)) + \frac{u_0}{\omega_x^2} = \\
 = e^{-n \cdot t_1} (C_3 \cdot \cos(\omega_x \cdot t_1) + C_4 \cdot \sin(\omega_x \cdot t_1)) - \frac{u_0}{\omega_x^2}
 \end{aligned} \quad (127)$$

$$\begin{aligned}
 (-n \cdot C_1 + \omega_x \cdot C_2) \cdot \cos(\omega_x \cdot t_1) - (n \cdot C_2 + \omega_x \cdot C_1) \cdot \sin(\omega_x \cdot t_1) = \\
 = (-n \cdot C_3 + \omega_x \cdot C_4) \cdot \cos(\omega_x \cdot t_1) - (n \cdot C_4 + \omega_x \cdot C_3) \cdot \sin(\omega_x \cdot t_1)
 \end{aligned} \quad (128)$$

Једначине (127) и (128) не могу се решити аналитички, тако да ове две једначине решавамо графички. Због тога трансформишемо систем једначина (127) и (128) на следећи облик:

$$tg(\omega_x \cdot t_1) = \frac{n \cdot C_1 - \omega_x \cdot C_2 - n \cdot C_3 + \omega_x \cdot C_4}{n \cdot C_4 + \omega_x \cdot C_3 - n \cdot C_2 - \omega_x \cdot C_1} = \frac{-n \cdot C_1 + \omega_x \cdot C_2 + n \cdot C_3 - \omega_x \cdot C_4}{-n \cdot C_4 - \omega_x \cdot C_3 + n \cdot C_2 + \omega_x \cdot C_1} \quad (129)$$

$$e^{-n \cdot t_1} (C_1 \cos(\omega_x \cdot t_1) + C_2 \sin(\omega_x \cdot t_1)) - e^{-n \cdot t_1} (C_3 \cos(\omega_x \cdot t_1) + C_4 \sin(\omega_x \cdot t_1)) + 2 \frac{u_0}{\omega_x^2} = 0 \quad (130)$$

На крају систем једначина (129) и (130) добија облик:

$$t_1(T) = \frac{1}{\omega_x} \arctg \left(\frac{-n \cdot C_1 + \omega_x \cdot C_2 + n \cdot C_3 - \omega_x \cdot C_4}{-n \cdot C_4 - \omega_x \cdot C_3 + n \cdot C_2 + \omega_x \cdot C_1} \right), \quad (131)$$

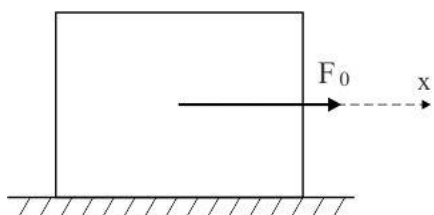
$$\begin{aligned}
 G(T) = e^{-n \cdot t_1} (C_1 \cdot \cos(\omega_x \cdot t_1) + C_2 \cdot \sin(\omega_x \cdot t_1)) - \\
 - e^{-n \cdot t_1} (C_4 \cdot \cos(\omega_x \cdot t_1) + C_4 \cdot \sin(\omega_x \cdot t_1)) + 2 \frac{u_0}{\omega_x^2} = 0
 \end{aligned} \quad (132)$$

Сада ове две трансцендентне једначине (131) и (132) решавамо графички. За решавање користимо математички програм Mathcad 14 и при томе се добија минимално (оптимално) време $T = T_{\min}$, на месту где функција $G(T)$ сече апсису. После тога минимално време заменимо у (131) и добија се време прелаза (прекида) t_1 . На овај начин доказано је да за наш случај одговара управљање (103), и то је оптимално управљање.

Истражен је конкретан случај за следеће параметре:

$$\Delta_x = 0.2\pi, \Delta = 1m, m = 1kg, F_0 = 2N, R = 0.7, \omega_x = 1s^{-1}, V_0 = 1 \frac{m}{s}, u_0 = \frac{F_0}{m}$$

Прикажимо случај (102) графички, на сликама 16.а. и 16.б. приказан је правац и смер дејства силе F_0 . До времена прелаза (прекида) $0 < t \leq t_1$ (слика 16.а.) сила F_0 дејствује у смеру одабраног позитивног смера осе x , али у тренутку времена t_1 сила F_0 нагло мења свој смер, супротно, у смеру који је супротан од позитивног смера осе x , и дејствује у интервалу времена $t_1 < t \leq \frac{T_{\min}}{2}$ (слика 16.б.).



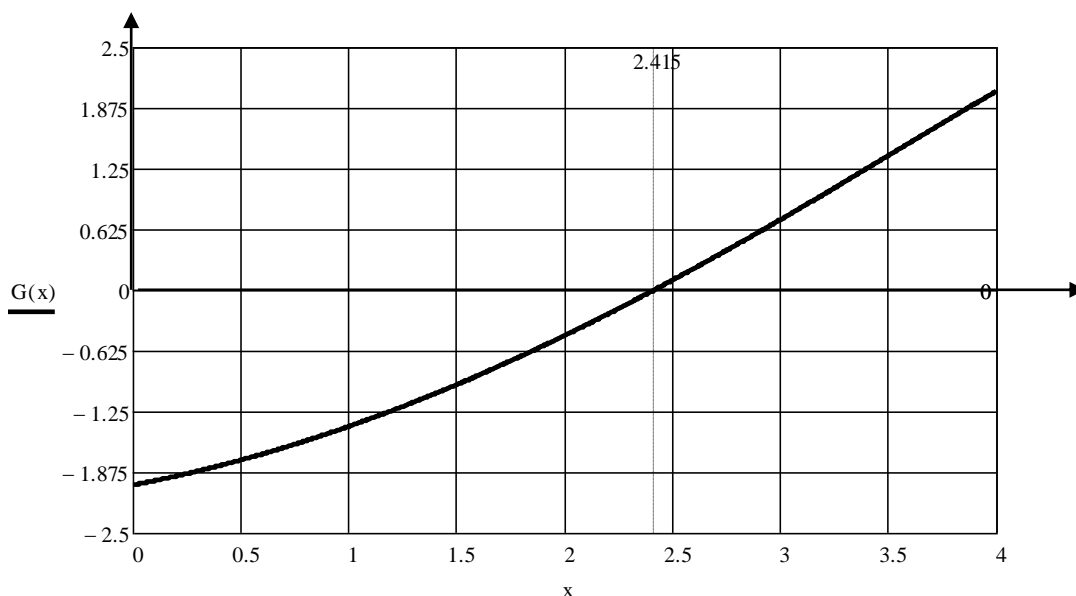
Слика 16. а. Смер дејства силе F_0 на временском интервалу $0 < t \leq t_1$ до тренутка промене смера силе (тренутак прелаза t_1).



Слика 16.б. Смер дејства силе F_0 на временском интервалу $t_1 < t \leq \frac{T_{\min}}{2}$ после тренутка промене смера силе (тренутак прелаза t_1).

Слика 16. Правац и смер дејства спољашње принудне силе $F(t)$.

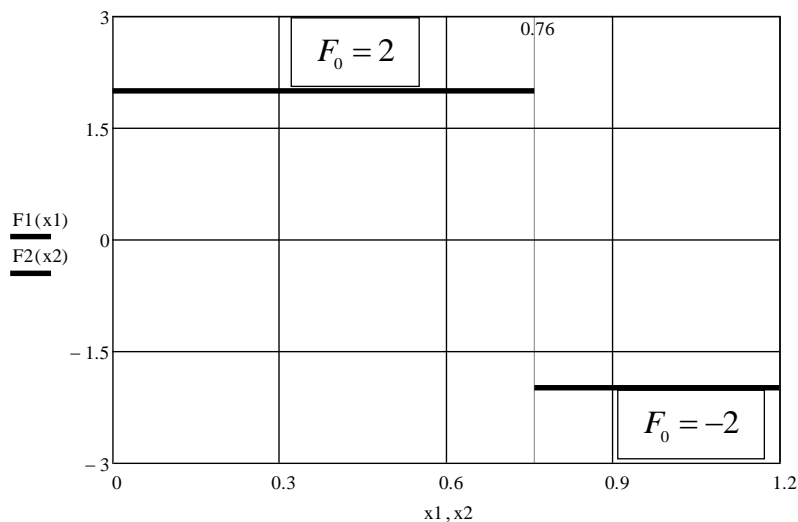
На слици 17 представљен је график $G(T)$, који пресеца осу апсцисе у тачки $T = 2.415s$, из (131) налазимо време прелаза (прекида) $t_1 = 0.76 s$.



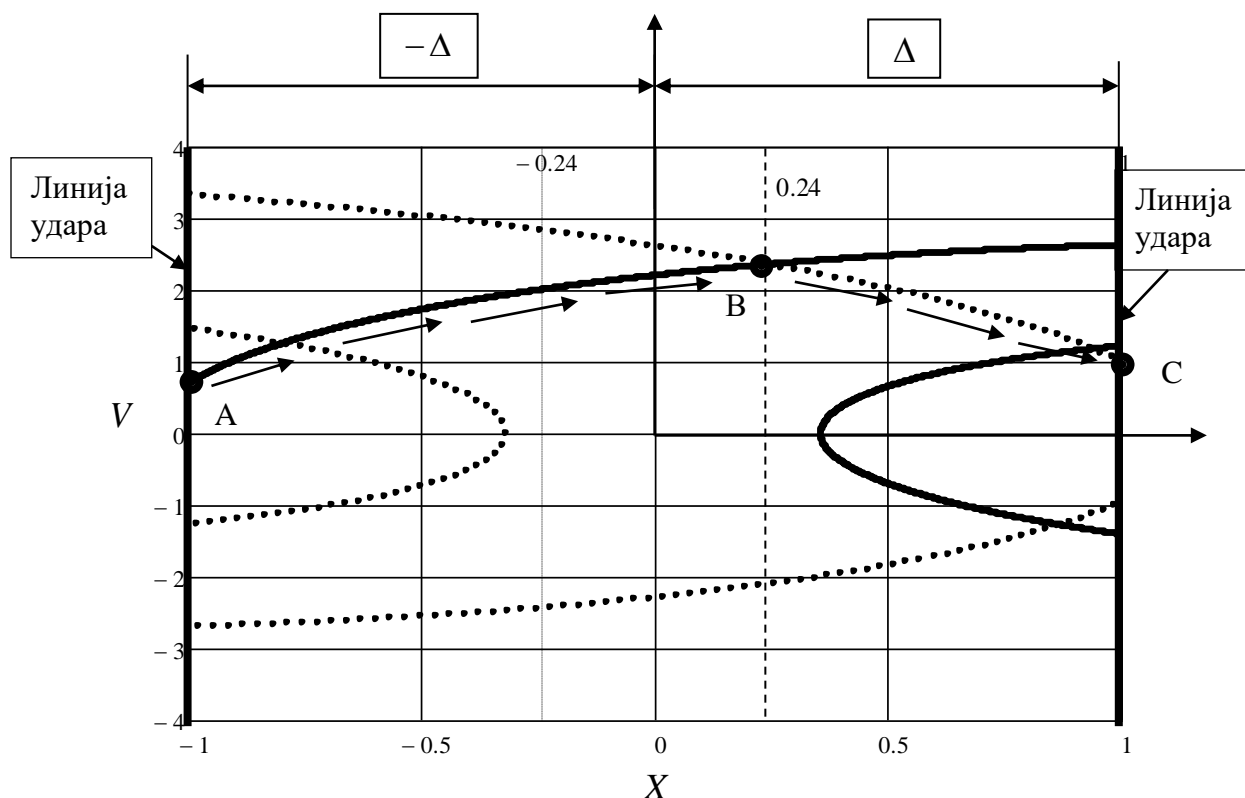
Слика 17. Графичко одређивање корена трансцендентне једначине $G(T)$.

На слици 18 приказан је дијаграм управљања силом F_0 за један полупериод

$$\frac{T_{\min}}{2} = \frac{2.415}{2} = 1.2 s .$$



Слика 18. Дијаграм управљања спољашном принудном силом $F(t)$.



Слика 19. Фазни дијаграм оптималног кретања виброударног осцилатора између два узастопна удара.

На слици 19 приказано је кретање осцилатора у фазном простору и тај график је нацртан у Mathcad 14. Када се терет креће по трајекторији АВ од тачке А ка тачки В, то значи да се терет креће по фазној трајекторији $X_1 - V_1$. У тачки В је прелаз (прекид) и терет почиње да се креће по другој фазној трајекторији $X_2 - V_2$ од тачке В до тачке С.

Координата тачке прелаза (прекида) је (тачка В) $x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0.24\text{ m}$, а брзина осцилатора у тачки прелаза (прекида) је $\dot{x}_1(t_1) = \dot{x}_2(t_1) = 2.36\text{ m/s}$. Прво, осцилатор почиње своје кретање од тачке А ка тачки В по путањи првог фазног дијаграма (прва формула у 119) на временском интервалу $[0; t_1]$. Даље у тачки прелаза (прекида) t_1 осцилатор наставља своје кретање од тачке В до тачке С по другом фазном дијаграму (друга формула у 119). Оба фазна дијаграма представљају спиралу која се отвара. Путања кретања А-В-С је оптимална путања кретања виброударног осцилатора.

Тачка А на слици 19 одговара тренутку времена $t_0 = 0$ после удара терета о леви непокретни граничник, у том тренутку спољашња принудна сила $F_0 = 2N$ дејствује у смеру као што је то приказано на слици 16.а. Брзина у тачки А једнака је $v_A = 0.7 \frac{m}{s}$.

Тачка В на слици 19 одговара тренутку времена $t_1 = 0.76\text{ s}$ и у том тренутку времена спољашња принудна сила $F_0 = 2N$ нагло мења свој смер, тј. има прелаз (прекид) и дејствује у смеру као што је то приказано на слици 16.б.

Тачка С на слици 19 одговара тренутку времена $t_2 = \frac{T_{\min}}{2} = \frac{2.415}{2} = 1.2\text{ s}$ непосредно испред удара, када терет прилази непокретном граничнику, али се удар још није десио. Брзина у тачки С једнака је $v_C = 1 \frac{m}{s}$.

На овај начин за једномасени обострани ударни осцилатор на слици 1 истражена су оба полупериода, дефинисани су оптимални закони управљања по времену и нацртане су оптималне путање.

У пракси, регулисање и управљање силом F_0 врши се помоћу електричног погона. Спољашња принудна сила има променљив карактер и она се контролише системом аутоматског управљања по датом програму. Спољашња принудна сила мора да обезбеди оптимално управљање, тако да се обезбеди потребна вредност силе F_0 , као и закон промене ове силе, који треба да обезбеди силу одређеног смера до тренутка

прелаза (прекида) t_1 , и онда у тренутку прелаза (прекида) t_1 треба да се промени смер силе на супротни смер до тренутка времена $T_{\min}/2$. Овај закон се реализује електричним погоном, на основу промене закона струје $I(t)$.

Електрични погон је електромеханички систем који се састоји се од електромотора, преносника, управљачког и информационог уређаја, а механички део обухвата покретне масе погона и механизма. Електрични погон треба да обезбеди такав закон промене струје $I(t)$, који може да реализује потребан закон промене силе F_0 као што је приказано на сликама 13 и 18.

Анализа резултата истраживања и закључак

У овом примеру истражена је анализа и синтеза (оптимизација) једномасеног обострано ударног осцилатора на слици 1, када се у систему реализује периодични виброударни режим. Кретање осцилатора је периодично са константним периодом $T/2$, а то је време између два узастопна удара.

У првом делу задатка истражена је анализа виброударног система помоћу математичког модела на слици 1, који се налази под дејством спољашње периодичне принудне силе $F(t)$. Истражена је могућност ударног процеса у зависности од различитих параметара и одређени су услови (области) постојања периодичних виброударних режима. Главни закључак састоји се у томе да што је мањи коефицијент вискозног отпора средине, то је шире подручје постојања ударних режима.

У примеру из наслова II.1. истражен је задатак са једним граничником. Појава другог граничника значајно мења изглед система и задатак је сложенији у односу на задатак са једним граничником. Овде се види да неке мале промене виброударног модела могу веома значајно да утичу на ток истраживања, као и на појаву потпуно нових неочекиваних ефеката система.

Код виброударних режима са једним граничником видели смо да постоје три области виброударних режима и постоје области где постоје два режима у пару, тј. може да постоји режим када нема удара, а може да постоји и режим када има удара. Области постојања режима са парним и непарним бројем удара одређују се по једној формули.

Сасвим друга слика добијена је при постављању другог граничника са леве стране. Код виброударних режима са парним бројем удара види се да постоје две области постојања виброударних режима, а код режима са непарним бројем удара има једна област. Области постојања режима са парним и непарним бројем удара одређују се различитим формулама.

У другом делу задатка истражена је синтеза (оптимизација) модела на слици 1. Помоћу Понтрјагиновог принципа максимума одређен је оптимални закон управљања спољашњом принудном силом F_0 , са циљем да се обезбеди оптимални закон кретања, односно да за најкраће време $T_{\min} / 2$ обезбедимо померање масе из тачке А у тачку С (слика 14).

При оптимизацији су посматрана два периода. Први период обухвата време кретања виброударног осцилатора од десног према левом граничнику, управљање је дато формулом (103) и на слици 14 приказан је фазни дијаграм оптималног кретања ударног осцилатора. Други период обухвата време кретања виброударног осцилатора од левог према десном граничнику, управљање је дато формулом (102) и на слици 19 приказан је фазни дијаграм.

На основу резултата који су добијени види се да су дијаграми симетрични, време прелаза (прекида) $t_1 = 0.76s$ је исто за оба полупериода, координата тачке прелаза (прекида) је једнака по апсолутној вредности за оба периода, брзина осцилатора у тачки прелаза (прекида) једнака је по апсолутној вредности за оба полупериода.

Истраживањем дисипативних фактора у задатку, показано је да они значајно умањују области постојања (стабилности) виброударних режима, али ипак, не могу довести до потпуног нестанка виброудара. То је зато што се удари дешавају у машинама где постоје системи за амортизацију. Тамо где то допуштају технички услови, ефикасна мера борбе са ударима је повећање зазора Δ ван граница области постојања датог режима. У складу са израчунатим релацијама таква конструкција реализује се на основу амплитудно фреквентне карактеристике одговарајућег виброударног система.

У овом истраживању показано је да се режими са непарним $l = 1,3,5,\dots$ разликују од режима са парним $l = 2,4,6,\dots$. У режимима са непарним l видимо да је могуће постојање виброударних режима у случају $\Delta > A$, док у режимима са парним бројем l , то једноставно није могуће.

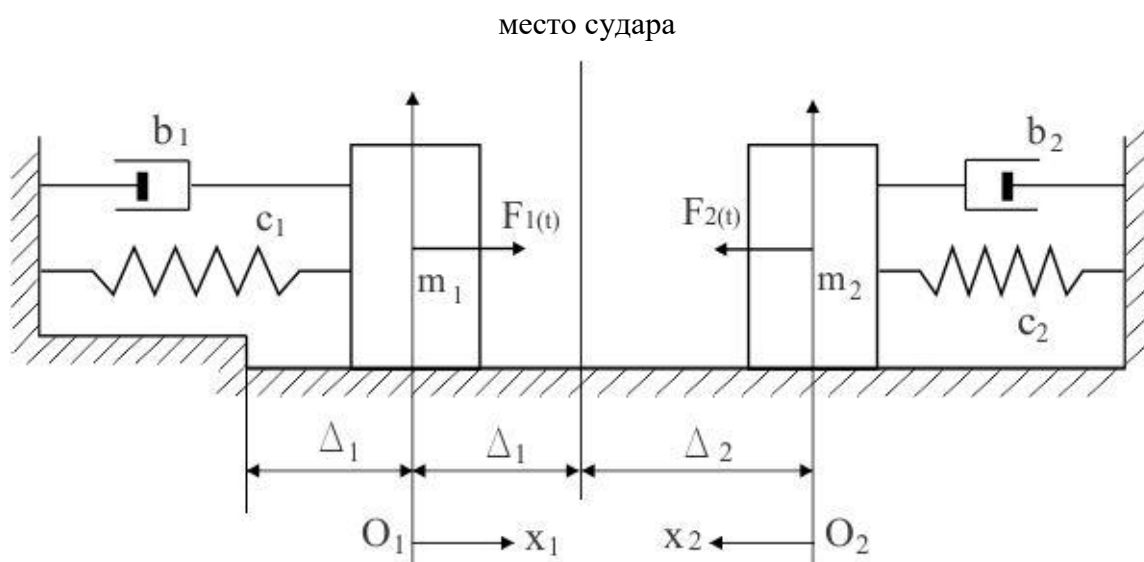
II.5. Двомасени виброударни систем настао спајањем једномасеног обострано ударног осцилатора и једномасеног једнострано ударног осцилатора

Синтеза (оптимизација) виброударних процеса

У овом примеру истражујемо праволинијски неаутономни двомасени виброударни систем са вискозним пригушењем, настао спајањем једномасеног обострано ударног осцилатора и једномасеног једнострано ударног осцилатора (сл. 1).

Диференцијалне једначине кретања овог система су у облику:

$$\ddot{x}_i + 2n_i \cdot \dot{x}_i + \omega_{xi}^2 \cdot x_i = \frac{F_{0i}}{m_i} \cdot \cos(\Omega_i \cdot t + \varphi_i) \quad (i=1,2)$$



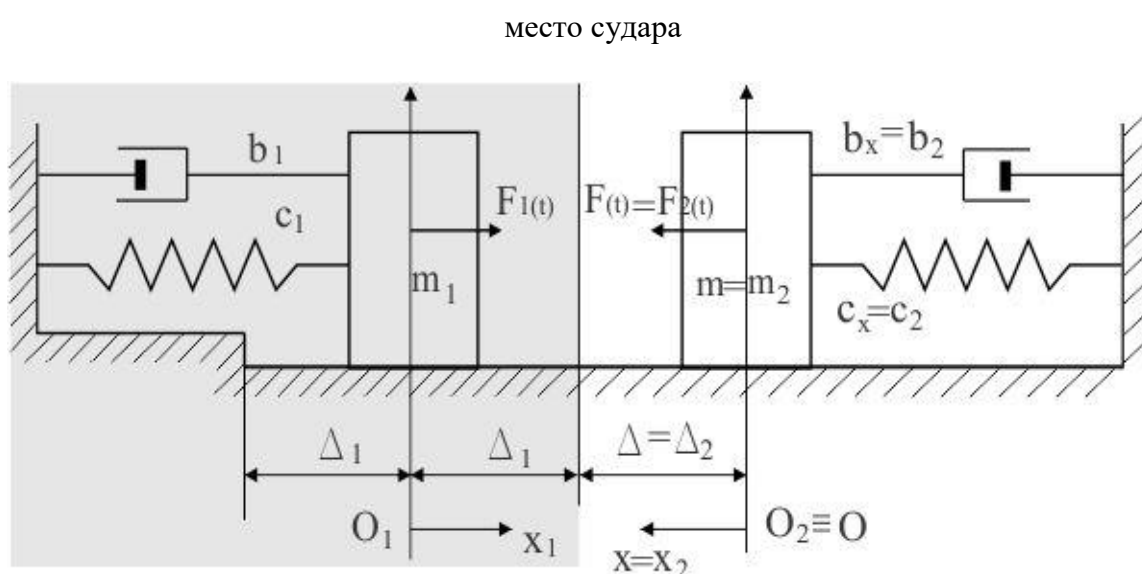
Слика 1. Модел двомасеног виброударног система са два ударна пара.

Оптимална синтеза система као целине подразумева посебно оптималну динамичку синтезу сваког његовог покретног дела-ударног осцилатора, уз услове који морају да се испуне: да се масе сваког ударног пара виброударног система сударају на одређеним (задатим) местима, после оптималног временског интервала (минималног виброударног периода). За наш систем (слика 1) место судара је одређено растојањима $\Delta_1 = \Delta$ и Δ_2 , а судар настаје после времена $T_{\min(1)} = T_{\min(2)} = T_{\min}$.

Спровешћемо прорачун оптималне динамичке синтезе за овај систем.

П.5.1. Оптимални периодични виброударни режими (оптимално управљање силом, оптимална путања)

У овом примеру ударни осцилатори су различитог типа, узима се спроведена оптимална синтеза за један од њих, на пример за лево постављени ударни осцилатор (леви подсистем) из наслова П.4. (осенчени део система на слици 2), па спроводимо оптималну синтезу за десни подсистем.



Слика 2. Делови двомасеног виброударног система са слике 1.

Оптимална динамичка синтеза лево постављеног обострано ударног осцилатора истражена је у наслову П.4. за следеће параметре:

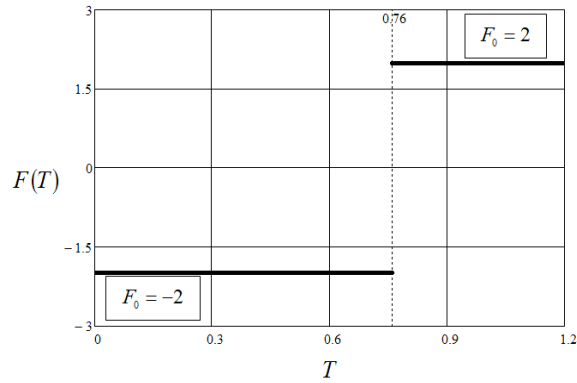
$$\Delta_x = 0.2\pi, \Delta = 1m, m = 1kg, F_0 = 2N, R = 0.7, \omega_x = 1s^{-1}, V_0 = 1\frac{m}{s}, u_0 = \frac{F_0}{m}.$$

При томе је добијено минимално време судара за цео период $T = T_{\min} = 2.415 s$

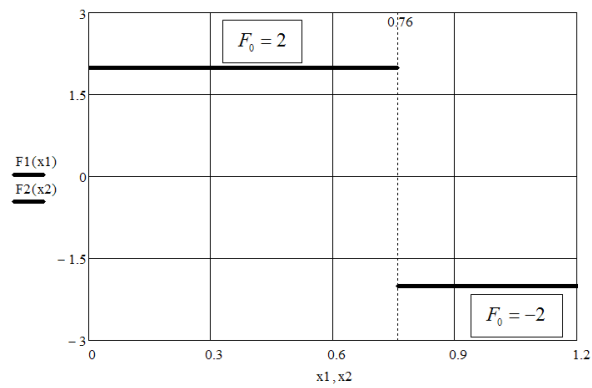
или за један полупериод $\frac{T_{\min}}{2} = \frac{2.415}{2} = 1.2 s$.

Леви подсистем је симетричан. Кретање левог дела система посматрали смо у два полупериода: први полупериод-кретање од места судара до левог граничника; и други полупериод-кретање од левог граничника до места судара.

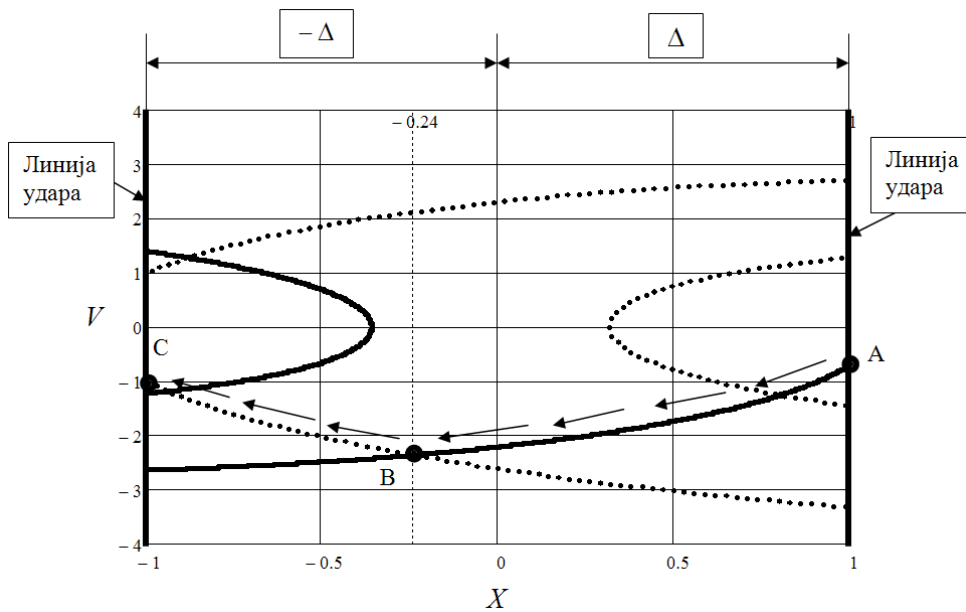
Из наслова П.4. за ове полупериоде преносимо дијаграме управљања спољашњом принудном силом и фазне слике оптималног кретања за једномасени обострано ударни осцилатор.



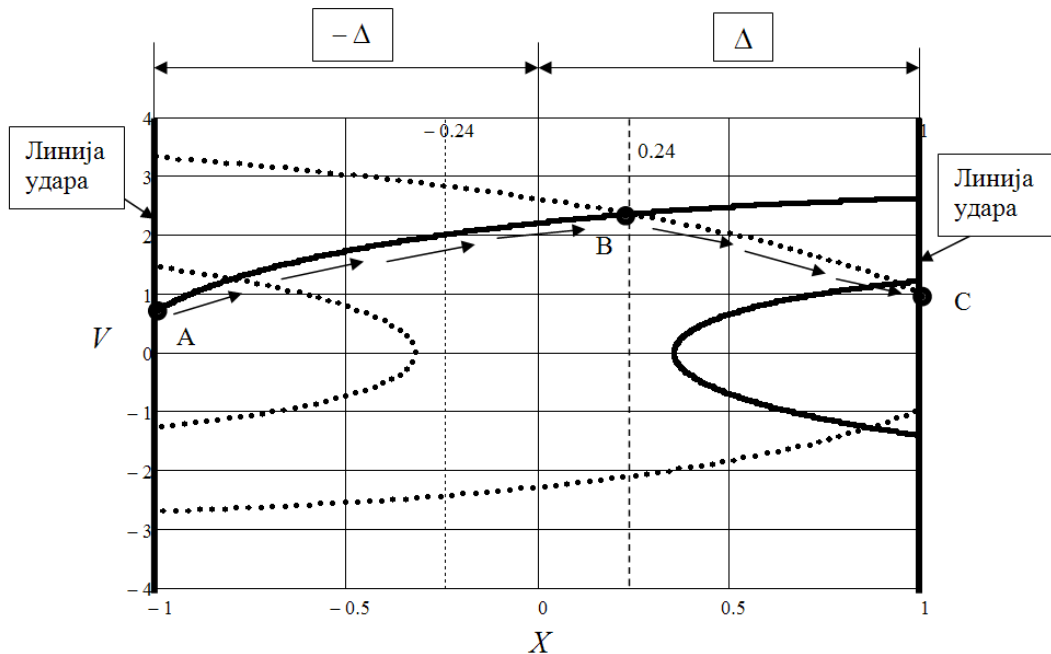
Слика 3. Дијаграм управљања спољашњом принудном силом $F(t)$ за први полупериод.



Слика 4. Дијаграм управљања спољашњом принудном силом $F(t)$ за други полупериод.

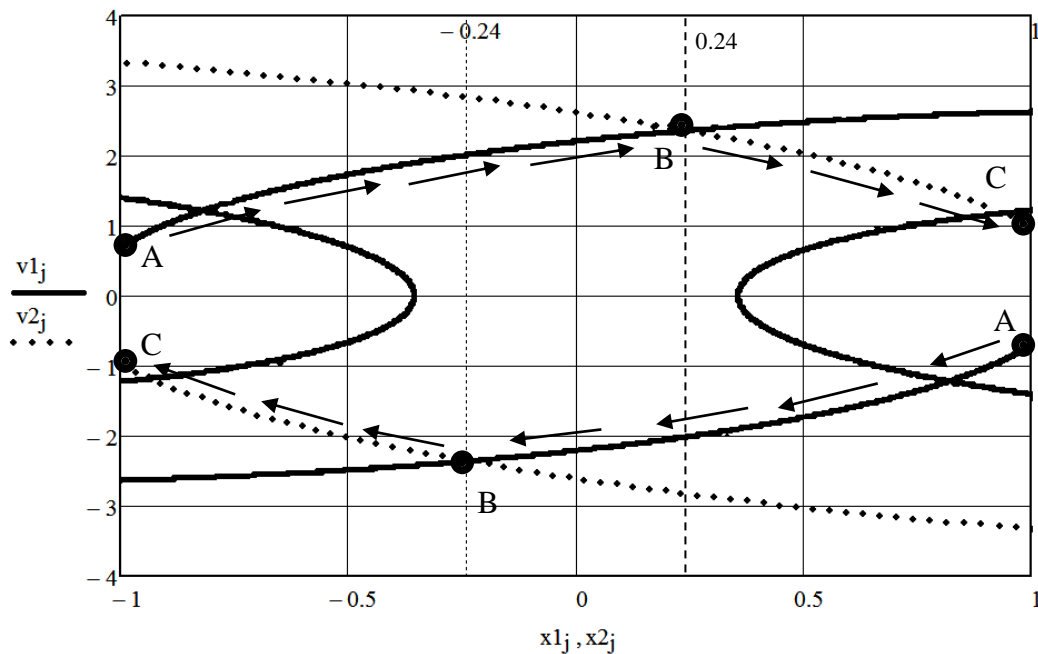


Слика 5. Фазни дијаграм оптималног кретања ударног осцилатора за први полупериод.



Слика 6. Фазни дијаграм оптималног кретања ударног осцилатора за други полупериод.

За потребе даљег истраживања фазне дијаграме оптималног кретања ударног осцилатора за први и други полупериод спојимо у један дијаграм, који представља фазну слику оптималног кретања обострано ударног осцилатора за цео период кретања.



Слика 7. Фазни дијаграм оптималног кретања ударног једномасеног обострано ударног осцилатора за цео период кретања.

У овом примеру, истражићемо два случаја, тако што не мењамо конструктивне карактеристике система и за две различите усвојене вредности растојања Δ варирамо силу F_0 .

Случај 1

У овом случају истражујемо оптималну синтезу за десни осцилатор на слици 1. Да би дошло до судара мора бити испуњен услов да је минимално време $T = T_{\min} = 2.415 s$ исто за оба подсистема. На десној страни је једномасени једнострано ударни осцилатор из наслова II.1. За десни подсистем задајемо вредност $\Delta_2 = \Delta_1 = \Delta = 1m$ и варирамо F_2 .

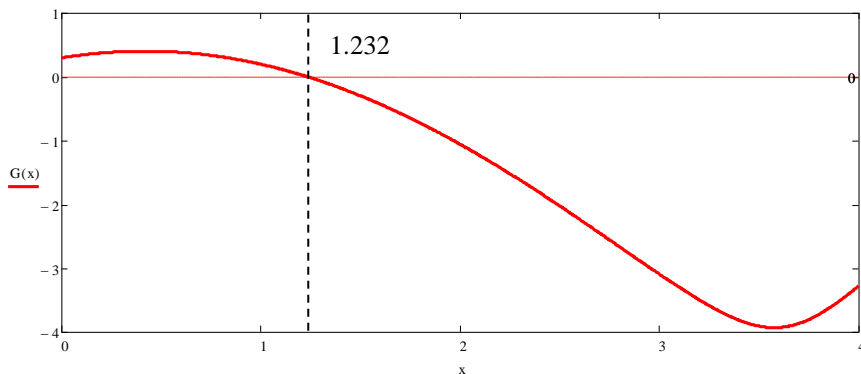
За прорачун користимо математички пакет Mathcad 14.

Прорачун оптимизације десног подсистема почињемо са вредностима:

$$\Delta_x = 0.2 \cdot \pi, \Delta = 1m, m = 1kg, F_0 = 2N, R = 0.7, \omega_x = 1s^{-1}, V_0 = 1m/s, u_0 = \frac{F_0}{m}, \Omega_1 = \omega_x.$$

У наставку приказујемо прорачун и одговарајуће графичко решење трансцендентне једначине, када је $F_2 = F_0 = 2.5N$ (слика 8).

$$\begin{aligned} \Delta x &:= 0.2 \cdot \pi & \Delta &:= 1 & m &:= 1 & U_0 &:= \frac{F_0}{m} & \omega_x &:= 1 \\ R &:= 0.7 & V_0 &:= 1 & F_0 &:= 2.5 \end{aligned}$$



Слика 8. Графичко одређивање корена трансцендентне једначине $G(T)$.

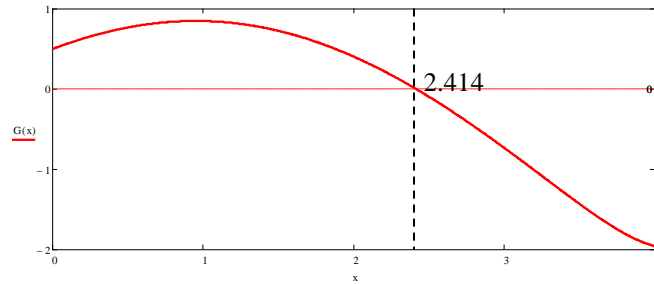
Тражимо корен – тачку пресека графика $G(T)$ са хоризонталном осом T

$$\text{root}(G(x), x, 1, 2) = 1.232 \quad T_1 := 1.232$$

$$\text{одредимо време прелаза (прекида) } t_1 \quad t_1(T_1) = 0.082$$

У овом случају (слика 8) добијена вредност за минимално време $T = T_{\min} = 1.232 s$, није једнака $T = T_{\min} = 2.415 s$ (мања је), па зато настављамо прорачун.

У наставку, приказујемо део прорачуна и одговарајуће графичко решење трансцендентне једначине, када је $F_2 = F_0 = 1.45$ (слика 9).

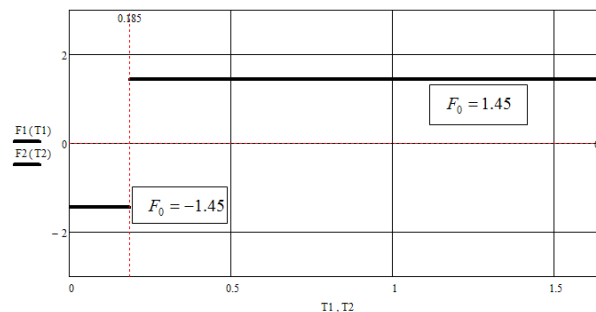


Слика 9. Графичко одређивање корена трансцендентне једначине $G(T)$.

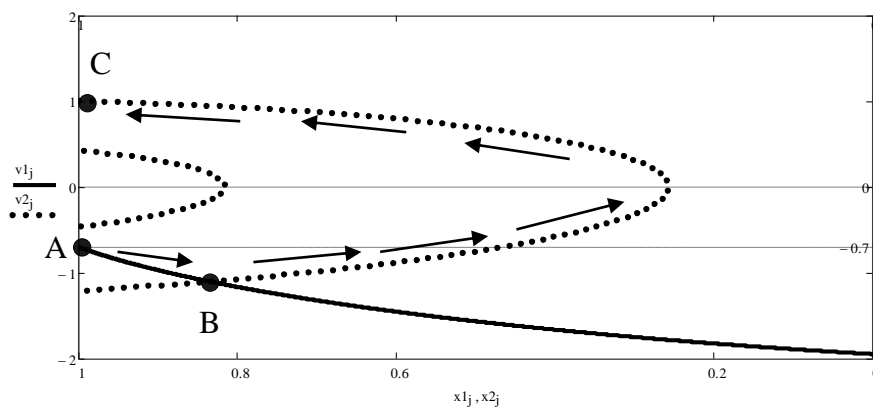
Тражимо корен – тачку пресека графика $G(T)$ са хоризонталном осом T
 $\text{root}(G(x), x, 2, 3) = 2.414 \quad T1 := 2.414$

одредимо време прелаза (прекида) $t1 \quad t1(T1) = 0.185$

Овде је за десни подсистем добијена вредност за минимално време $T = T_{\min} = 2.414 \text{ s}$, то време је исто за леви и десни подсистем, на тај начин завршавамо прорачун. Дакле, у овом случају за десно постављени ударни осцилатор постижемо оптималну динамичку синтезу када је вредност $F_2 = F_0 = 1.45$. Сада за десни подсистем конструишемо одговарајући дијаграм управљања силом $F_2 = F_0 = 1.45$ за један период и одговарајућу слику са оптималном фазном путањом.

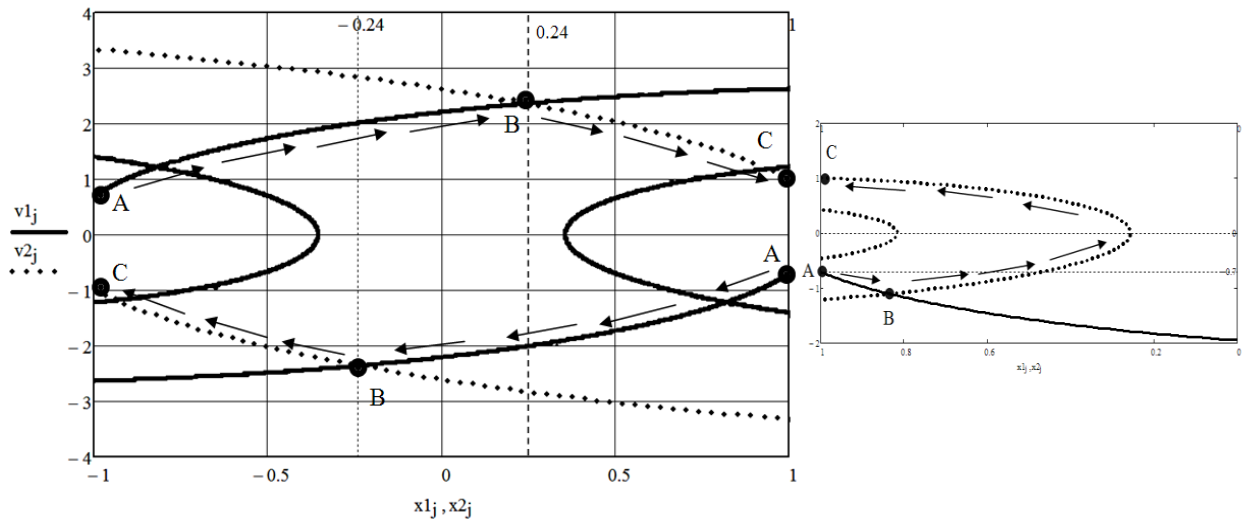


Слика 10. Дијаграм управљања спољашњом принудном силом $F(t)$ за десни подсистем.



Слика 11. Фазни дијаграм оптималног кретања десног подсистема, $\Delta_2 = 1m$.

У наставку приказујемо заједно оба фазна дијаграма оптималног кретања левог и десног подсистема и на тај начин конструишемо оптималне фазне путање на слици 12, за систем као целину (двомасени систем на слици 1).



Слика 12. Фазни дијаграм оптималног кретања двомасеног виброударног система.

Анализа резултата

У случају када спроводимо оптималну синтезу виброударног система насталог спајањем два ударна осцилатора (слика 1), до судара долази када је минимално време $T = T_{\min} = 2.415 s$ исто за оба подсистема. За леви подсистем узели смо познате податке из наслова II.4. За десни подсистем усвојили смо растојање $\Delta_2 = \Delta_1 = \Delta = 1m$ и варирали $F_2 = F_0$. Када је $F_2 = 1.45N$, добили смо оптималне параметре за десни подсистем и завршили смо прорачун. На слици 12 види се да су оптималне путање левог и десног подсистема различите.

Случај 2

У овом случају истражујемо оптималну синтезу десног подсистема, усвајамо $\Delta_2 = 1.5m$, $\Delta_1 \neq \Delta_2$ и варирамо $F_2 = F_0$ (слика 1).

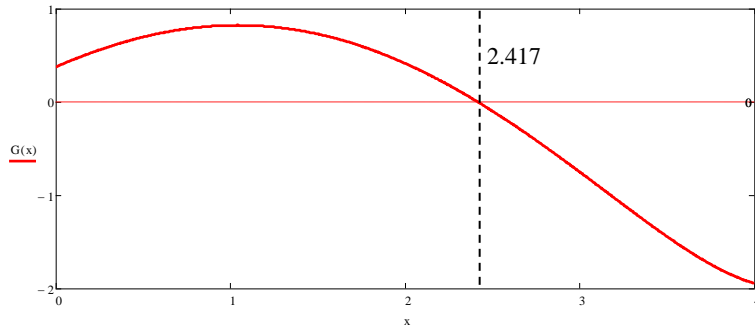
Прорачун оптимизације десног подсистема почињемо са вредностима:

$$\Delta_x = 0.2 \cdot \pi, \Delta = 1.5m, m = 1kg, F_0 = 2N, R = 0.7, \omega_x = 1s^{-1}, V_0 = 1m/s, u_0 = \frac{F_0}{m}, \Omega_1 = \omega_x.$$

У наставку приказујемо део прорачуна и одговарајуће графичко решење трансцендентне једначине, када је $F_2 = F_0 = 1.942$ (слика 13).

$$\Delta x := 0.2 \cdot \pi \quad \Delta := 1.5 \quad m := 1 \quad \omega x := 1 \quad U_0 := \frac{F_0}{m}$$

$$V_0 := 1 \quad R := 0.7 \quad F_0 := 1.942$$



Слика 13. Графичко одређивање корена трансцендентне једначине $G(T)$.

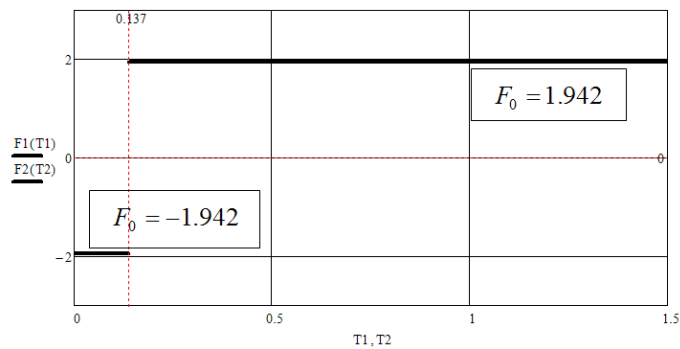
Тражимо корен - тачку пресека графика $G(T)$ са хоризонталном осом T

$$\text{root}(G(x), x, 2, 3) = 2.417 \quad T_1 := 2.417$$

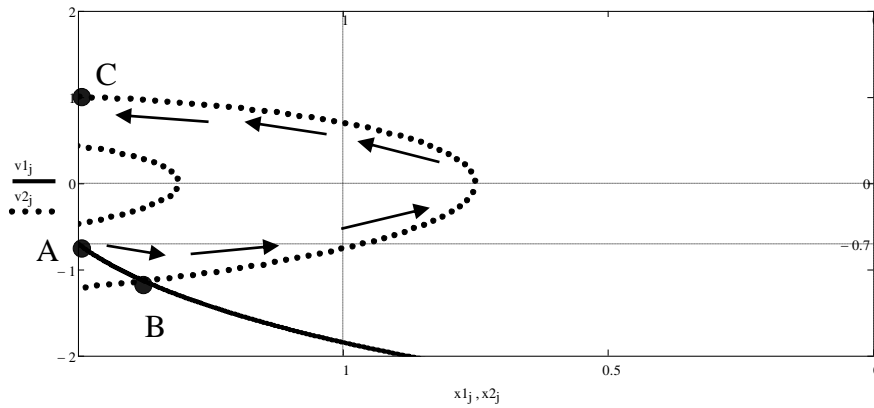
$$\text{одредимо време прелаза (прекида) } t_1 \quad t_1(T_1) = 0.137$$

Овде је за десни подсистем добијена вредност за минимално време $T = T_{\min} = 2.417 \text{ s}$, то време је исто за леви и десни подсистем, па завршавамо прорачун. Дакле, у овом случају за десни подсистем оптималну динамичку синтезу постижемо када је вредност $F_2 = F_0 = 1.942$.

За десни подсистем конструишемо одговарајући дијаграм управљања силом F_0 за један период и одговарајућу слику са оптималном фазном путањом.

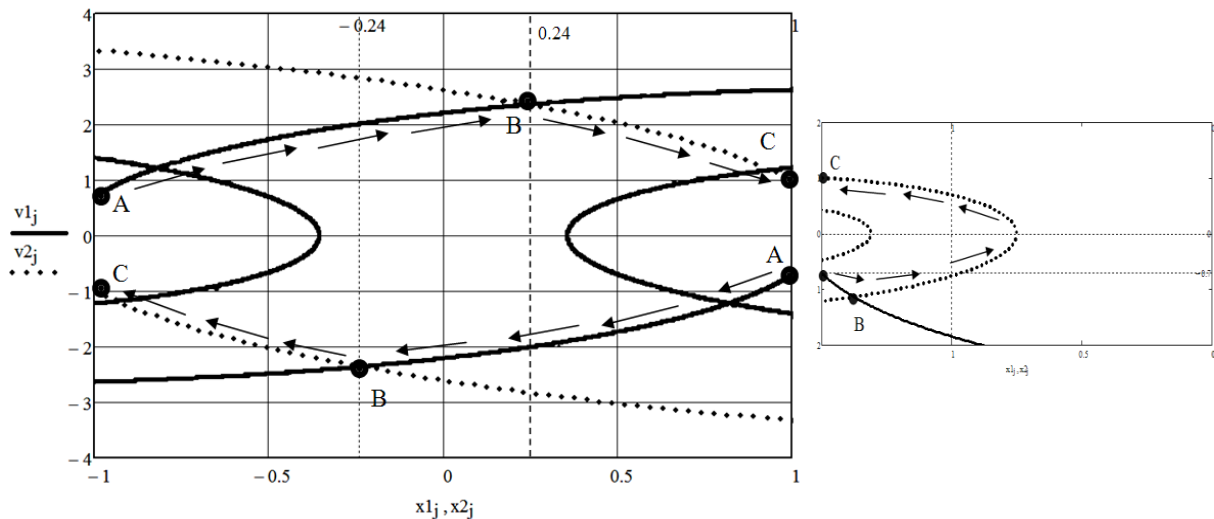


Слика 14. Дијаграм управљања спољашњом принудном силом $F(t)$ за десни подсистем.



Слика 15. Фазни дијаграм оптималног кретања десног виброударног осцилатора када је $\Delta_2 = 1.5m$.

У наставку приказујемо заједно оба фазна дијаграма оптималног кретања левог и десног виброударног осцилатора и на тај начин конструишемо оптималне фазне путање за систем као целину (двомасени систем на слици 1).



Слика 16. Фазни дијаграми оптималног кретања двомасеног ударног осцилатора.

Анализа резултата

У случају када спроводимо оптималну синтезу виброударног система насталог спајањем два ударна осцилатора (слика 1), до судара долази када је минимално време $T = T_{\min} = 2.415s$ исто за леви и десни подсистем. За леви подсистем узели смо познате податке из наслова П.4. За десни подсистем усвојили смо растојање $\Delta_2 = 1.5m$ и варирамо $F_2 = F_0$. За $F_2 = F_0 = 1.942$, добили смо оптималне параметре за десни подсистем и завршили смо прорачун. На слици 16 приказане су оптималне путање левог и десног подсистема, где се види да су оптималне путање различите.

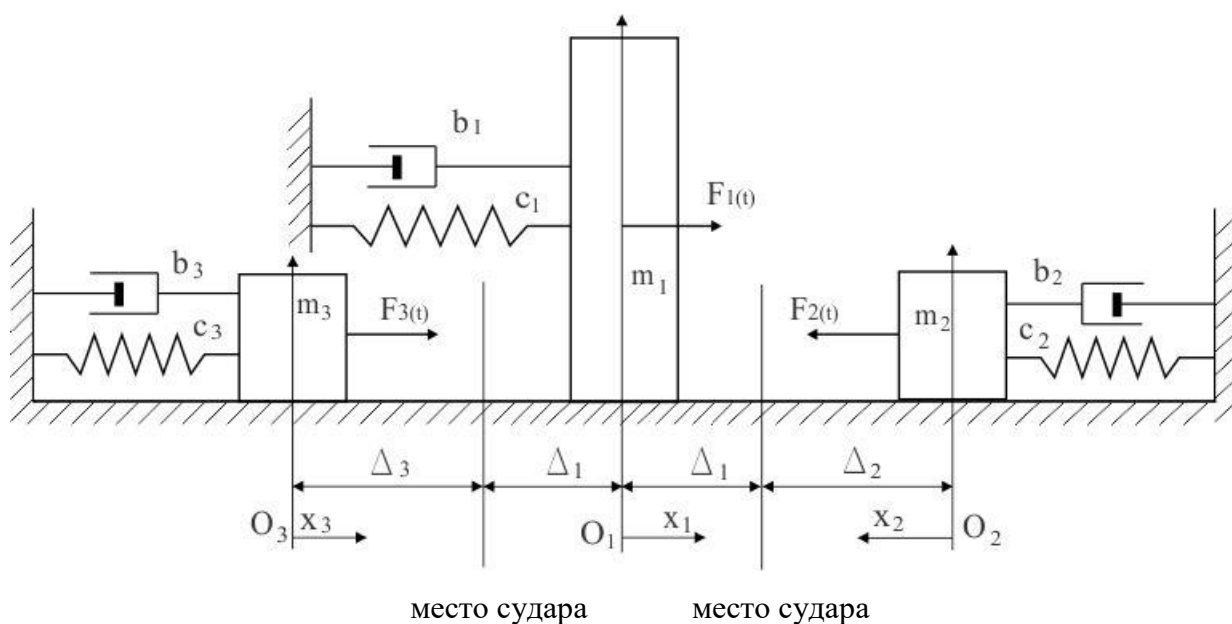
II.6. Тромасени виброударни систем настао спајањем једномасеног обострано ударног осцилатора и два једномасена једнострано ударна осцилатора

Синтеза (оптимизација) виброударних процеса

У овом примеру истражујемо праволинијски неаутономни тромасени виброударни систем са вискозним пригушењем, настао спајањем једномасеног обострано ударног осцилатора и два једномасена једнострано ударна осцилатора (сл. 1).

Диференцијалне једначине кретања овог система су у облику:

$$\ddot{x}_i + 2n_i \cdot \dot{x}_i + \omega_{xi}^2 \cdot x_i = \frac{F_{0i}}{m_i} \cdot \cos(\Omega_i \cdot t + \varphi_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$



Слика 1. Модел тромасеног виброударног система са два ударна пара.

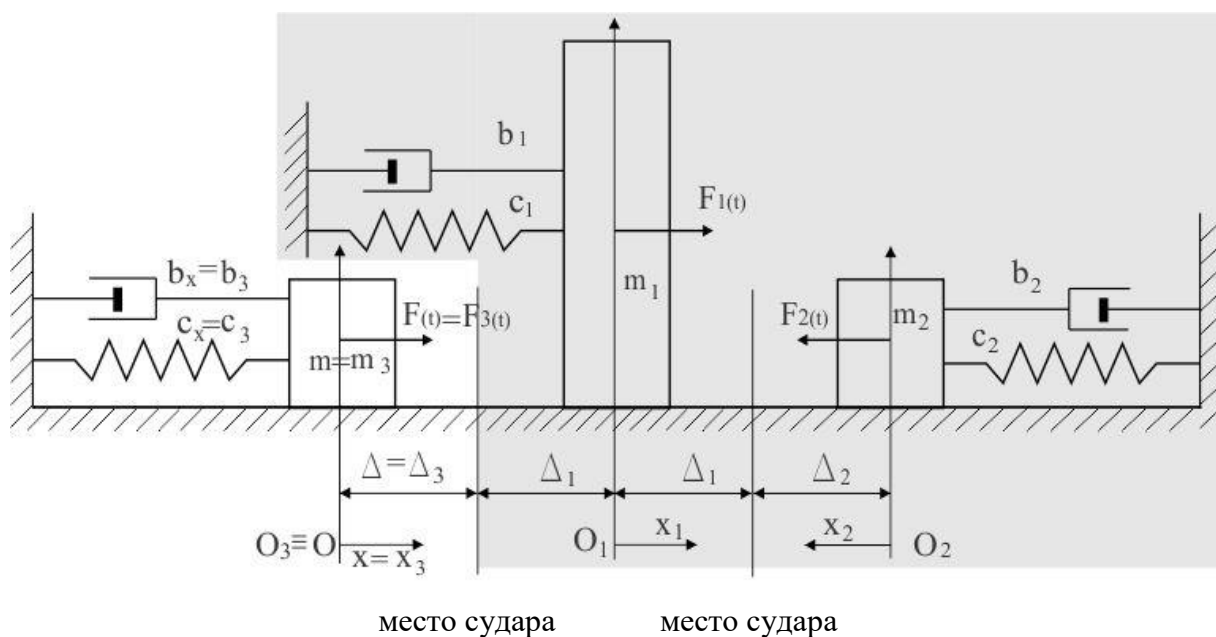
Оптимална синтеза система као целине подразумева посебно оптималну динамичку синтезу сваког његовог покретног дела-ударног осцилатора, уз услове који морају да се испуне: да се масе сваког ударног пара виброударног система сударају на одређеним (задатим) местима, после оптималног временског интервала (минималног виброударног периода). За наш систем (слика 1) места судара су одређена растојањима Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 , а судари настају после времена $T_{\min(1)} = T_{\min(2)} = T_{\min(3)} = T_{\min}$.

Спровешћемо прорачун оптималне динамичке синтезе за овај систем.

II.6.1. Оптимални периодични виброударни режими (оптимално управљање силом, оптимална путања)

У овом примеру имамо три ударна осцилатора при чему су два различитог типа. Узима се спроведена оптимална динамичка синтеза подсистема (осенчени део на слици 2), који чине подсистем у средини и десни подсистем, па спроводимо оптималну синтезу за леви подсистем. Оптимална динамичка синтеза за осенчени подсистем-једномасени обострано ударни осцилатор спојен са једномасеним једнострано ударним осцилатором- истражена је у наслову II.5.

Систем који истражујемо делимо у две целине: прва целина-настала спајањем једномасеног обострано ударног осцилатора и једномасеног једнострано ударног осцилатора (осенчени део на слици 2); и друга целина - једномасени једнострано ударни осцилатор на левој страни.



Слика 2. Делови тромасеног виброударног система са слике 1.

Маса m_1 у средини прво иде десно и судари се са масом m_2 , а затим иде лево и судари се са масом m_3 . Први полупериод кретања масе m_1 обухвата време од судара на десној страни са масом m_2 до судара на левој страни са масом m_3 . Други полупериод кретања масе m_1 обухвата време од судара на левој страни са масом m_3 до судара на десној страни са масом m_2 . Временска разлика између десног и левог судара је пола периода.

За подсистеме за које је у насловима П.4. и П.5. спроведена оптимална динамичка синтеза преузимамо одговарајуће фазне дијаграме оптималног кретања. У овом примеру истражујемо оптималну динамичку синтезу левог подсистема (неосенчени део на слици 2) – једномасеног једнострано ударног осцилатора. Истражићемо два случаја, тако што не мењамо конструктивне карактеристике система и за две различите усвојене вредности растојања Δ варирамо силу F_3 .

Случај 1

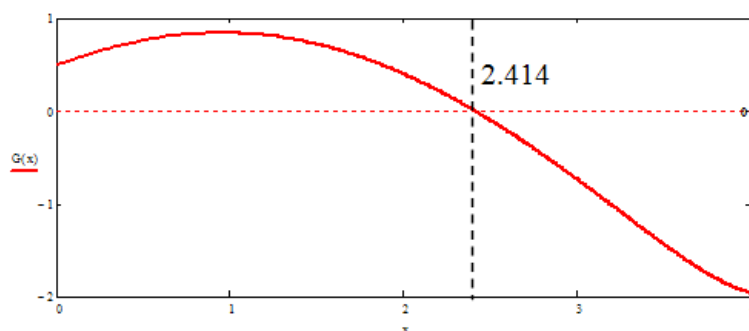
У овом случају истражујемо оптималну синтезу за леви подсистем на слици 2. У наслову П.5 (случај 1), истражена је оптимална синтеза осенченог дела система на слици 2, при томе смо добили минимално време судара за цео период $T = T_{\min} = 2.415 \text{ s}$. Да би дошло до судара мора бити испуњен услов да је минимално време судара исто за сва три подсистема. За леви подсистем узимамо вредност $\Delta_3 = \Delta_2 = \Delta_1 = \Delta = 1 \text{ m}$ и варирамо F_3 .

За прорачун користимо математички пакет Mathcad 14.

Прорачун оптимизације левог подсистема почињемо са вредностима:

$$\Delta_x = 0.2 \cdot \pi, \Delta = 1 \text{ m}, m = 1 \text{ kg}, F_0 = 2 \text{ N}, R = 0.7, \omega_x = 1 \text{ s}^{-1}, V_0 = 1 \text{ m/s}, u_0 = \frac{F_0}{m}, \Omega_1 = \omega_x.$$

У наставку, приказујемо део прорачуна и одговарајуће графичко решење трансцендентне једначине, када је $F_3 = F_0 = 1.45$ (слика 3).



Слика 3. Графичко одређивање корена трансцендентне једначине $G(T)$.

Тражимо корен – тачку пресека графика $G(T)$ са хоризонталном осом T

$$\text{root}(G(x), x, 2, 3) = 2.414$$

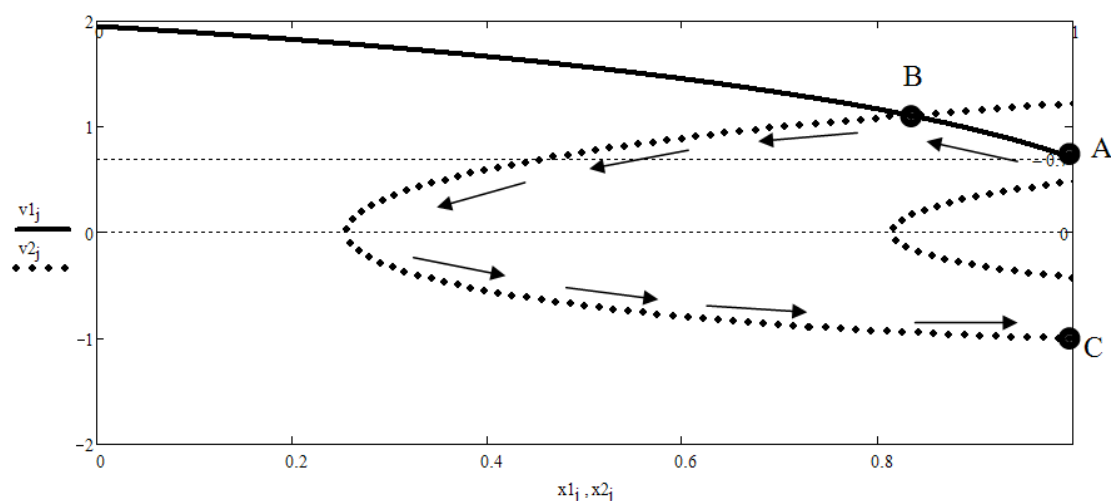
$$T1 := 2.414$$

одредимо време прелаза (прекида) $t1$

$$t1(T1) = 0.185$$

Овде је за леви подсистем добијена вредност за минимално време $T = T_{\min} = 2.414 s$, то време је исто за сва три подсистема, на тај начин завршавамо прорачун. Дакле, у овом случају за лево постављени ударни осцилатор постижемо оптималну динамичку синтезу када је вредност $F_3 = F_0 = 1.45$.

За леви подсистем конструишемо фазни дијаграм оптималног кретања.

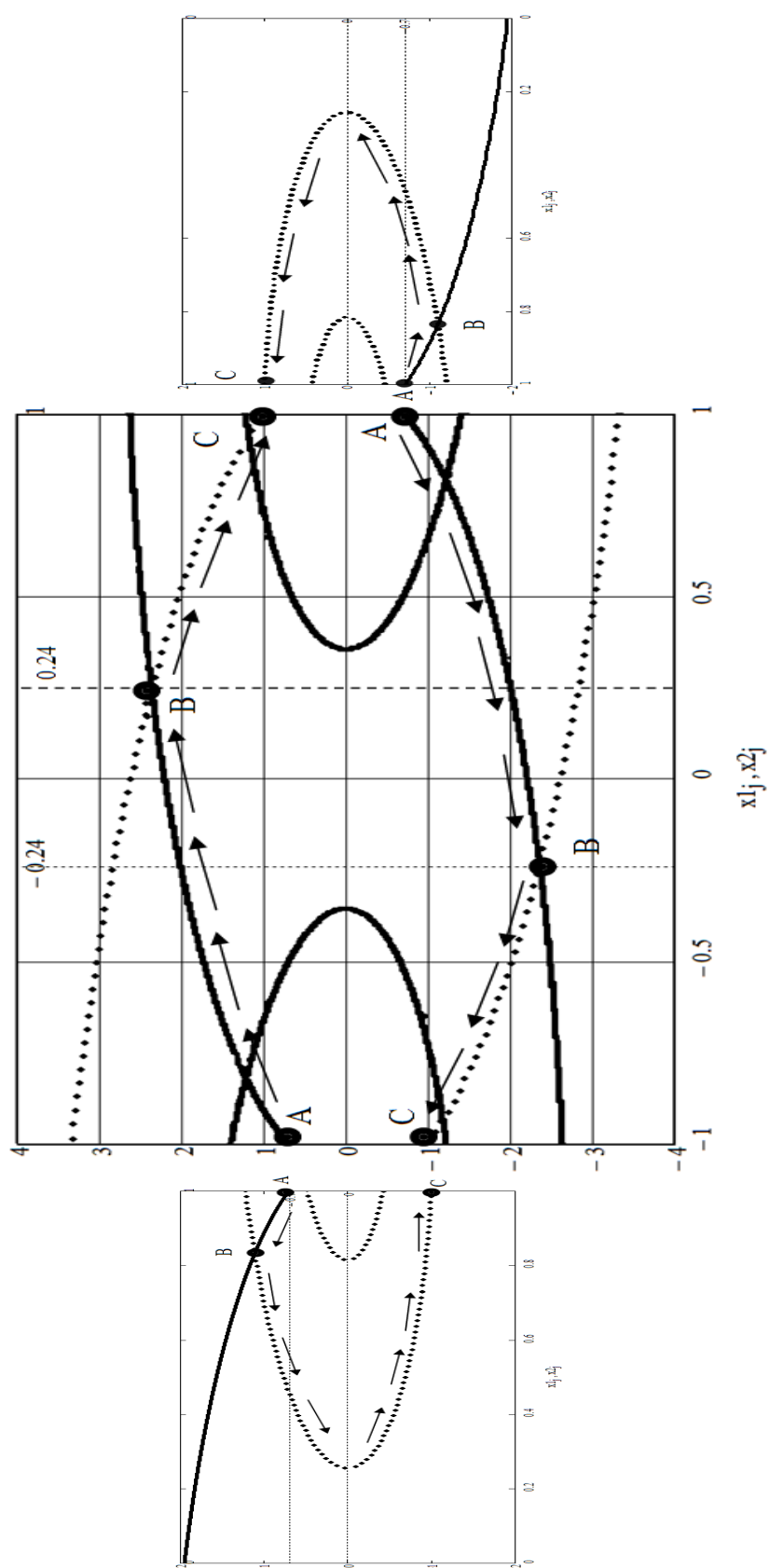


Слика 4. Фазни дијаграм оптималног кретања левог подсистема, $\Delta_3 = 1m$.

У наставку из наслова II.5. (случај 1) преузимамо одговарајуће фазне дијаграме оптималног кретања осенченог дела система на слици 2 и конструишемо оптималне фазне путање за систем као целину на слици 5 (тромасени систем на слици 1).

Анализа резултата

У случају када спроводимо оптималну синтезу виброударног система настало спајањем три ударна осцилатора (слика 1), до судара долази када је минимално време $T = T_{\min} = 2.415 s$ исто за три подсистема. За осенчени део система на слици 2, узели смо познате податке из наслова II.5. (случај 1). За леви подсистем усвојили смо растојање $\Delta_3 = \Delta_2 = \Delta_1 = \Delta = 1m$ и варирали F_3 . Када је $F_3 = 1.45N$, добили смо оптималне параметре за леви подсистем и завршили смо прорачун. На слици 5 приказане су оптималне путање где су путање за леви и десни подсистем симетричне, дијаграм за леви подсистем окренут је за 180° око хоризонталне осе x у односу на дијаграм за десни подсистем. Временска разлика између десног и левог судара је пола периода.



Слика 5. Фазни дијаграм оптималног кретања тромасеног виброударног система.

Случај 2

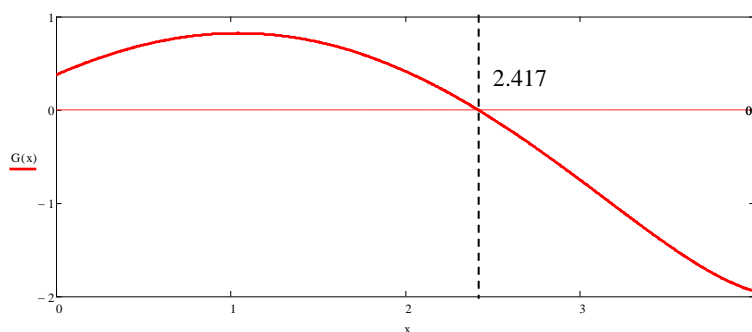
У овом случају истражујемо оптималну синтезу за леви подсистем на слици 2, када су растојања различита $\Delta_1 = 1m$ и $\Delta_3 = \Delta_2 = 1.5m$. У наслову II.5 (случај 2), истражена је оптимална синтеза осенченог дела система на слици 2, при томе смо добили минимално време судара за цео период $T = T_{\min} = 2.415s$. Да би дошло до судара мора бити испуњен услов да је минимално време судара исто за сва три подсистема. За леви подсистем узимамо вредност $\Delta_3 = \Delta_2 = 1.5m$ и варирамо F_3 .

За прорачун користимо математички пакет Mathcad 14.

Прорачун оптимизације левог подсистема почињемо са вредностима:

$$\Delta_x = 0.2 \cdot \pi, \Delta = 1.5m, m = 1kg, F_0 = 2N, R = 0.7, \omega_x = 1s^{-1}, V_0 = 1m/s, u_0 = \frac{F_0}{m}, \Omega_1 = \omega_x.$$

У наставку приказујемо део прорачуна и одговарајуће графичко решење трансцендентне једначине, када је $F_3 = F_2 = F_0 = 1.942$ (слика 6).



Слика 6. Графичко одређивање корена трансцендентне једначине $G(T)$.

Тражимо корен - тачку пресека графика $G(T)$ са хоризонталном осом T

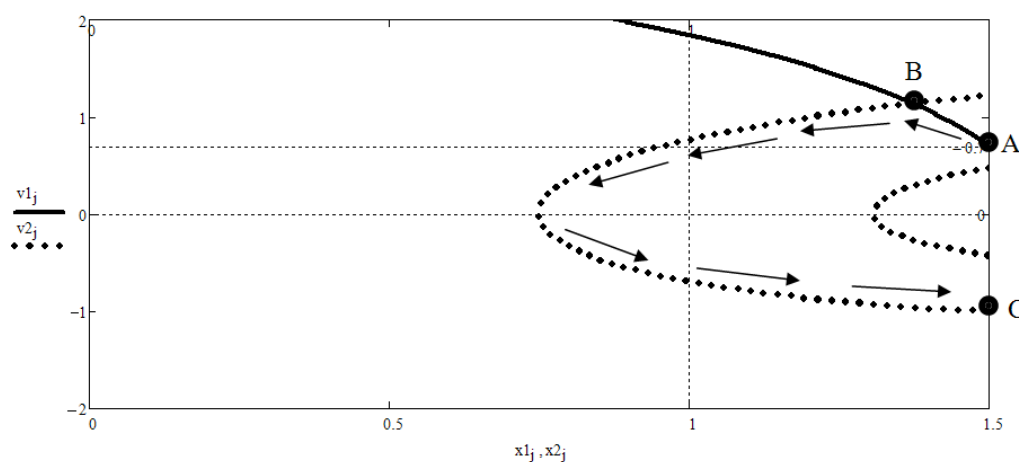
$$\text{root}(G(x), x, 2, 3) = 2.417$$

$$T1 := 2.417$$

$$\text{одредимо време прелаза (прекида) } t1 \quad t1(T1) = 0.137$$

Овде је за леви подсистем добијена вредност за минимално време $T = T_{\min} = 2.417s$, то време је исто за сва три подсистема, па завршавамо прорачун. Дакле, у овом случају за леви подсистем оптималну динамичку синтезу постижемо када је вредност $F_3 = F_2 = F_0 = 1.942$.

За леви подсистем конструишемо фазни дијаграм оптималног кретања.



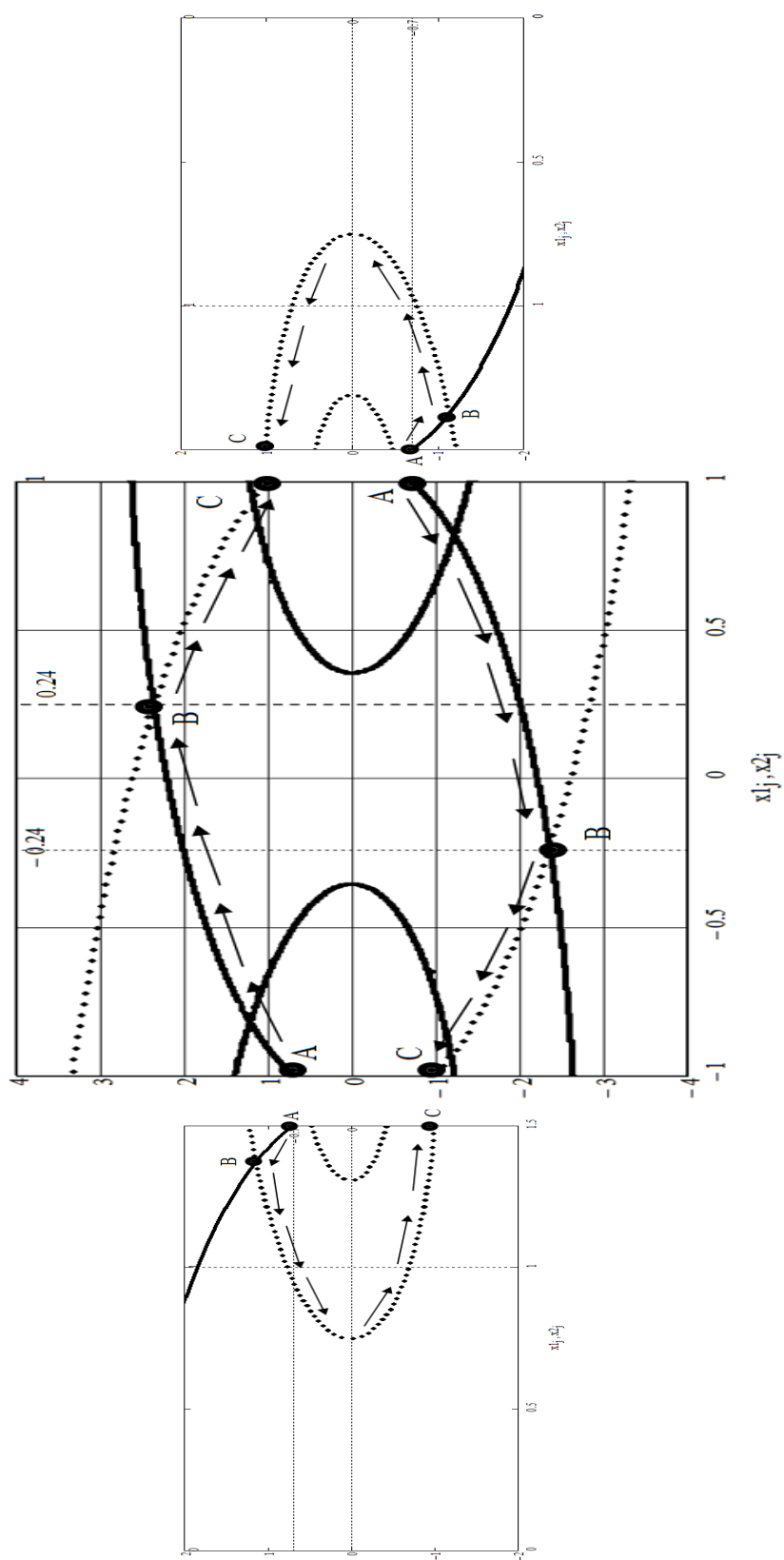
Слика 7. Фазни дијаграм оптималног кретања за леви подсистем када је $\Delta_3 = 1.5m$.

У наставку из наслова II.5. (случај 2) преузимамо одговарајуће фазне дијаграме оптималног кретања осенченог дела система на слици 2 и конструишемо оптималне фазне путање за систем као целину на слици 8 (трмасени систем на слици 1).

Анализа резултата

У случају када спроводимо оптималну синтезу система са три виброударна осцилатора на слици 1, до судара долази када је минимално време $T = T_{\min} = 2.415 s$ исто за сва три подсистема. За осенчени део система на слици 2, узели смо познате податке из наслова II.5. (случај 2). Усвојили смо растојања $\Delta_1 = 1m$ за подсистем у средини и $\Delta_2 = \Delta_3 = 1.5m \neq \Delta_1$ за леви и десни подсистем и варирали смо F_3 . Када је $F_0 = 1.942$, добили смо оптималне параметре за леви подсистем и завршили смо прорачун.

На слици 8 приказане су оптималне путање где су путање за леви и десни подсистем симетричне, дијаграм за леви подсистем окренут је за 180° око хоризонталне осе x у односу на дијаграм за десни подсистем. Временска разлика између десног и левог судара је пола периода.

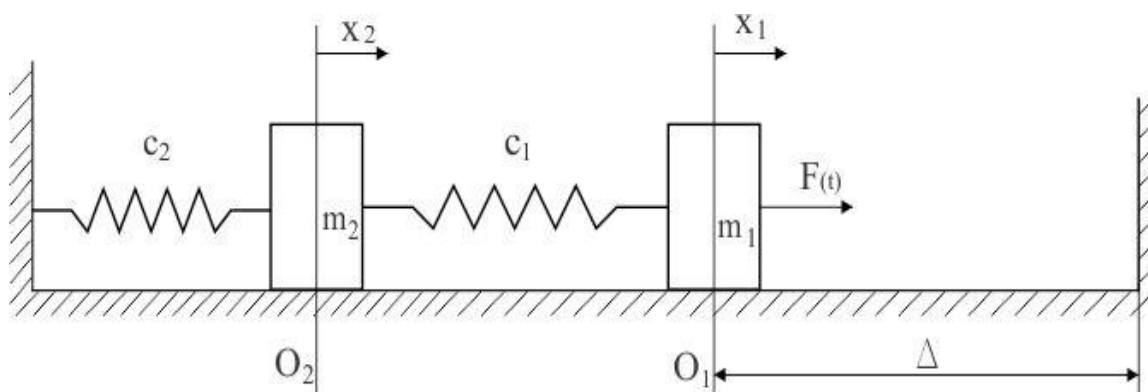


Слика 8. Фазни дијаграм оптималног кретања тромасеног вибрударног система.

II.7. Модел виброударне динамике неаутономног двомасеног система са два степена слободе и једним непокретним граничником; принудне непригушене осцилације двомасеног једнострано ударног осцилатора са два степена слободе

У овом примеру истражујемо динамику двомасеног виброударног осцилатора (виброударни осцилатор са два степена слободе), са две опруге крутости c_1 и c_2 , у средини без вискозног отпора, сила пригушења (отпора) $F_w = 0$, кретање се врши под дејством принудне силе $F(t) = F_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi)$, и осцилатор удара о десни граничник на растојању Δ . Граничник је саставни део система, који кретању система даје нелинеарни карактер. Пошто је компликовано испитати утицај нелинеарности на карактер осцилаторног процеса, испитујемо виброударни процес помоћу линеарних диференцијалних једначина [8], [14], [34].

У примеру се истражује анализа и синтеза (оптимизација) кретања виброударног двомасеног осцилатора са два степена слободе на слици 1, када се у систему реализује периодични виброударни режим. Кретање осцилатора је периодично са константним периодом T , а то је време између два узастопна удара.



Слика 1. Математички модел ударног осцилатора са два степена слободе.

Диференцијалне једначине кретања двомасеног осцилатора у интервалима између два узастопна удара су следећег облика:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 &= F \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) - c_1(x_1 - x_2) \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 &= c_1(x_1 - x_2) - c_2 \cdot x_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Поделимо обе једначине система (1) са масама m_1 и m_2 . Систем диференцијалних једначина (1) добија облик

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{F}{m_1} \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) - \frac{c_1}{m_1}(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 &= \frac{c_1}{m_2}(x_1 - x_2) - \frac{c_2}{m_2} \cdot x_2 \end{aligned} \quad (2)$$

где су: m_1 и m_2 масе, c_1, c_2 - коефицијенти крутости опруга.

У наставку после трансформација систем (2) добија се у облику

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{F}{m_1} \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) - \frac{c_1}{m_1} \cdot x_1 + \frac{c_1}{m_1} \cdot x_2 \\ \ddot{x}_2 &= \frac{c_1}{m_2} \cdot x_1 - \frac{c_1}{m_2} \cdot x_2 - \frac{c_2}{m_2} \cdot x_2 \\ \Rightarrow \ddot{x}_1 &= \frac{F}{m_1} \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) - \frac{c_1}{m_1} \cdot x_1 + \frac{c_1}{m_1} \cdot x_2 \\ \Rightarrow \ddot{x}_2 &= \frac{c_1}{m_2} \cdot x_1 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_2} \right) x_2 \\ \Rightarrow \ddot{x}_1 &= \frac{F}{m_1} \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) - \frac{c_1}{m_1} \cdot x_1 + \frac{c_1}{m_1} \cdot x_2 \\ \Rightarrow \ddot{x}_2 &= \frac{m_1}{m_1} \cdot \frac{c_1}{m_1} \cdot x_1 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_2} \right) x_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Да би се поједноставио облик диференцијалних једначина уводимо следеће ознаке

$$P = \frac{F}{m_1}, \quad \chi = \frac{m_1}{m_1}, \quad \omega_1^2 = \frac{c_1}{m_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{c_1 + c_2}{m_2} \quad (4)$$

Када узмемо у обзир ознаке (4) систем диференцијалних једначина добија облик

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= P \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) - \omega_1^2 \cdot x_1 + \omega_1^2 \cdot x_2 \\ \ddot{x}_2 &= \chi \cdot \omega_1^2 \cdot x_1 - \omega_2^2 \cdot x_2 \end{aligned} \quad (5)$$

где су: ω_1, ω_2 - фреквенције слободних сопствених осцилација прве и друге масе осцилатора при одсуству било каквог трења и отпора у систему; фреквенције ω_1, ω_2 и одговарајући периоди $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$, за разлику од амплитуде и почетне фазе, не зависе од почетних услова – оне су у потпуности одређене особинама осцилатора, тј. зависе од вредности параметара осцилатора c и m .

За даље истраживање треба решити систем диференцијалних једначина (5). За одређивање сопствених фреквенција система истражујемо слободне осцилације система када на систем не дејствује спољашња принудна периодична сила $P(t)$.

Тада се систем (5) добија у облику

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\omega_1^2 \cdot x_1 + \omega_1^2 \cdot x_2 \\ \ddot{x}_2 &= \chi \cdot \omega_1^2 \cdot x_1 - \omega_2^2 \cdot x_2 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 \cdot x_1 - \omega_1^2 \cdot x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 - \chi \cdot \omega_1^2 \cdot x_1 + \omega_2^2 \cdot x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Представимо систем (6) у облику

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot \ddot{x}_1 + c_{11} \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2 &= 0 \\ a_{22} \cdot \ddot{x}_2 + c_{21} \cdot x_1 + c_{22} \cdot x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

где су: $a_{11} = 1$, $c_{11} = \omega_1^2$, $c_{12} = -\omega_1^2$, $a_{22} = 1$, $c_{21} = -\chi \cdot \omega_1^2$, $c_{22} = \omega_2^2$.

Пошто систем диференцијалних једначина (7) садржи само генерализане (главне) координате и њихове друге изводе по времену, решење овог система тражимо у следећем облику

$$x_1 = A_1 \cdot \cos(k \cdot t + \alpha) \quad \text{и} \quad x_2 = A_2 \cdot \cos(k \cdot t + \alpha) \quad (8)$$

Одредимо друге изводе у (8) и заменимо у (7), добија се:

$$\begin{aligned} -k^2 \cdot a_{11} \cdot A_1 \cdot \cos(k \cdot t + \alpha) + c_{11} \cdot A_1 \cdot \cos(k \cdot t + \alpha) + c_{12} \cdot A_2 \cdot \cos(k \cdot t + \alpha) &= 0 \\ -k^2 \cdot a_{22} \cdot A_2 \cdot \cos(k \cdot t + \alpha) + c_{21} \cdot A_1 \cdot \cos(k \cdot t + \alpha) + c_{22} \cdot A_2 \cdot \cos(k \cdot t + \alpha) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow (9)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(-k^2 \cdot a_{11} \cdot A_1 + c_{11} \cdot A_1 + c_{12} \cdot A_2 \right) \cdot \cos(k \cdot t + \alpha) &= 0 \\ \Rightarrow \left(-k^2 \cdot a_{22} \cdot A_2 + c_{21} \cdot A_1 + c_{22} \cdot A_2 \right) \cdot \cos(k \cdot t + \alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

На крају се добија

$$\begin{aligned} (c_{11} - k^2 \cdot a_{11})A_1 + c_{12} \cdot A_2 &= 0 \\ c_{21} \cdot A_1 + (c_{22} - k^2 \cdot a_{22})A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Да би систем (11) имао решење, односно да има решење које је различито од нуле, тада треба да буде једнака нули детерминанта која се састоји од коефицијената уз непознате A_1 и A_2 , тј.,

$$\begin{vmatrix} (c_{11} - k^2 \cdot a_{11}) & c_{12} \\ c_{21} & (c_{22} - k^2 \cdot a_{22}) \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

Када израчунамо детерминанту (12) добијамо следећу биквадратну једначину

$$(c_{11} - k^2 \cdot a_{11})(c_{22} - k^2 \cdot a_{22}) - c_{12}^2 = 0 \quad (13)$$

Корени једначине (13) који одговарају квадратима фреквенција одређујемо по формули

$$k_{1,2}^2 = \frac{a_{11} \cdot c_{22} + a_{22} \cdot c_{11} \mp \sqrt{(a_{11} \cdot c_{22} + a_{22} \cdot c_{11})^2 - 4 \cdot a_{11} \cdot a_{22} (c_{11} \cdot c_{22} - c_{12}^2)^2}}{2 \cdot a_{11} \cdot a_{22}} \quad (14)$$

Из једначине (14) одређујемо две фреквенције, које одговарају главним осцилацијама. Треба напоменути да су A_1 и A_2 амплитуде главних облика осциловања, k - фреквенције слободних осцилација или сопствене фреквенције система, α - почетна фаза осциловања.

Написаћемо једначине које одређују прво главно осциловање које одговара фреквенцији k_1

$$k_1^2 = \frac{a_{11} \cdot c_{22} + a_{22} \cdot c_{11} - \sqrt{(a_{11} \cdot c_{22} + a_{22} \cdot c_{11})^2 - 4 \cdot a_{11} \cdot a_{22} (c_{11} \cdot c_{22} - c_{12}^2)^2}}{2 \cdot a_{11} \cdot a_{22}},$$

где имамо два независна решења:

$$x_{11} = A_{11} \cdot \cos(k_1 \cdot t + \alpha_1) \quad \text{и} \quad x_{21} = A_{21} \cdot \cos(k_1 \cdot t + \alpha_1).$$

Написаћемо једначине које одређују друго главно осциловање које одговара фреквенцији k_2

$$k_2^2 = \frac{a_{11} \cdot c_{22} + a_{22} \cdot c_{11} + \sqrt{(a_{11} \cdot c_{22} + a_{22} \cdot c_{11})^2 - 4 \cdot a_{11} \cdot a_{22} (c_{11} \cdot c_{22} - c_{12}^2)}}{2 \cdot a_{11} \cdot a_{22}}$$

где имамо два независна решења:

$$x_{12} = A_{12} \cdot \cos(k_2 \cdot t + \alpha_2) \quad \text{и} \quad x_{22} = A_{22} \cdot \cos(k_2 \cdot t + \alpha_2) .$$

Константе A_{11} , A_{21} , A_{12} , A_{22} су повезане следећим односима:

$$\mu_1 = \frac{A_{21}}{A_{11}} = - \frac{c_{11} - a_{11} \cdot k_1^2}{c_{12} - a_{12} \cdot k_1^2} = - \frac{c_{12} - a_{12} \cdot k_1^2}{c_{22} - a_{22} \cdot k_1^2} ,$$

$$\mu_2 = \frac{A_{22}}{A_{12}} = - \frac{c_{11} - a_{11} \cdot k_2^2}{c_{12} - a_{12} \cdot k_2^2} = - \frac{c_{12} - a_{12} \cdot k_2^2}{c_{22} - a_{22} \cdot k_2^2} ,$$

$$A_{21} = \mu_1 \cdot A_{11} \quad A_{22} = \mu_2 \cdot A_{12} .$$

II.7.1. Општа решења диференцијалних једначина кретања система у интервалима између удара

Опште решење система диференцијалних једначина (7), тј. система (11) представимо као збир решења

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{11} + x_{12} \\ x_2 &= x_{21} + x_{22} \end{aligned} \quad (15)$$

Опште хомогено решење, које описује осцилације прве масе m_1 је облика

$$x_1 = A_{11} \cdot \cos(k_1 \cdot t + \alpha_1) + A_{12} \cdot \cos(k_2 \cdot t + \alpha_2) . \quad (16)$$

Опште хомогено решење, које описује осцилације друге масе m_2 је облика

$$x_2 = A_{21} \cdot \cos(k_1 \cdot t + \alpha_1) + A_{22} \cdot \cos(k_2 \cdot t + \alpha_2) ,$$

или

$$x_2 = \mu_1 \cdot A_{11} \cdot \cos(k_1 \cdot t + \alpha_1) + \mu_2 \cdot A_{12} \cdot \cos(k_2 \cdot t + \alpha_2) . \quad (17)$$

Решења (16) и (17) представљају општа хомогена решења система диференцијалних једначина (6) које описују слободне осцилације две масе на слици 1, ако се не узме у обзир дејство спољашње принудне силе $P(t)$ на систем.

У наставку истражујемо осциловање система ако на систем дејствује спољашња принудна сила $P(t)$. Тада је потребно решити систем једначина (5), који пишемо у облику:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 \cdot x_1 - \omega_1^2 \cdot x_2 &= P \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) \\ \ddot{x}_2 - \chi \cdot \omega_1^2 \cdot x_1 + \omega_2^2 \cdot x_2 &= 0 \end{aligned} \quad , \quad (17)$$

или записано у другом облику

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot \ddot{x}_1 + c_{11} \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2 &= P \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) \\ a_{22} \cdot \ddot{x}_2 + c_{21} \cdot x_1 + c_{22} \cdot x_2 &= 0 \end{aligned} \quad , \quad (18)$$

где су: $a_{11} = 1$, $c_{11} = \omega_1^2$, $c_{12} = -\omega_1^2$, $a_{22} = 1$, $c_{21} = -\chi \cdot \omega_1^2$, $c_{22} = \omega_2^2$.

Партикуларно решење система (18) тражимо у облику

$$x_{1np} = B_1 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) \quad \text{и} \quad x_{2np} = B_2 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) \quad . \quad (19)$$

Одредимо друге изводе у (19) и заменимо у (18), добија се:

$$\begin{aligned} -\Omega^2 \cdot a_{11} \cdot B_1 \cos(\Omega \cdot t + \varphi) + c_{11} \cdot B_1 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) + c_{12} \cdot B_2 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) &= P \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) \\ -\Omega^2 \cdot a_{22} \cdot B_2 \cos(\Omega \cdot t + \varphi) + c_{21} \cdot B_1 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) + c_{22} \cdot B_2 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(-\Omega^2 \cdot a_{11} \cdot B_1 + c_{11} \cdot B_1 + c_{12} \cdot B_2 - P \right) \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) &= 0 \\ \Rightarrow \left(-\Omega^2 \cdot a_{22} \cdot B_2 + c_{21} \cdot B_1 + c_{22} \cdot B_2 \right) \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) &= 0 \\ \Rightarrow \left(c_{11} - \Omega^2 \cdot a_{11} \right) B_1 + c_{12} \cdot B_2 - P &= 0 \\ \Rightarrow c_{21} \cdot B_1 + \left(c_{22} - \Omega^2 \cdot a_{22} \right) B_2 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Када решимо систем (21) добија се

$$B_2 = - \frac{c_{21} \cdot B_1}{\left(c_{22} - \Omega^2 \cdot a_{22} \right)} \quad .$$

Заменимо ово решење B_2 у прву једначину система, добија се:

$$\left(c_{11} - \Omega^2 \cdot a_{11}\right)B_1 - \frac{c_{12} \cdot c_{21} \cdot B_1}{\left(c_{22} - \Omega^2 \cdot a_{22}\right)} - P = 0 ,$$

$$\left(c_{11} - \Omega^2 \cdot a_{11}\right)\left(c_{22} - \Omega^2 \cdot a_{22}\right)B_1 - c_{12} \cdot c_{21} \cdot B_1 - P\left(c_{22} - \Omega^2 \cdot a_{22}\right) = 0 ,$$

$$\left(\left(c_{11} - \Omega^2 \cdot a_{11}\right)\left(c_{22} - \Omega^2 \cdot a_{22}\right) - c_{12} \cdot c_{21}\right)B_1 - P\left(c_{22} - \Omega^2 \cdot a_{22}\right) = 0 ,$$

$$B_1 = \frac{P\left(c_{22} - \Omega^2 \cdot a_{22}\right)}{\left(c_{11} - \Omega^2 \cdot a_{11}\right)\left(c_{22} - \Omega^2 \cdot a_{22}\right) - c_{12} \cdot c_{21}} ,$$

$$B_2 = -\frac{c_{21} \cdot B_1}{\left(c_{22} - \Omega^2 \cdot a_{22}\right)} = \frac{-c_{21} \cdot P}{\left(c_{11} - \Omega^2 \cdot a_{11}\right)\left(c_{22} - \Omega^2 \cdot a_{22}\right) - c_{12} \cdot c_{21}} .$$

Укупно решење система диференцијалних једначина (17) је у облику

$$x_1(t) = A_{11} \cdot \cos(k_1 \cdot t + \alpha_1) + A_{12} \cdot \cos(k_2 \cdot t + \alpha_2) + B_1 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi), \quad (22)$$

$$x_2(t) = \mu_1 \cdot A_{11} \cdot \cos(k_1 \cdot t + \alpha_1) + \mu_2 \cdot A_{12} \cdot \cos(k_2 \cdot t + \alpha_2) + B_2 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) . \quad (22^*)$$

Уводимо следеће ознаке $\eta = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, $p = \frac{\Omega}{\omega_1}$, $X_1 = \frac{P}{\omega_1^2} = \frac{F}{m_1 \cdot \frac{c_1}{m_1}} = \frac{F}{c_1}$ и са овим

ознакама трансформишемо константе интеграције B_1 и B_2 на следећи начин:

$$B_1 = \frac{P\left(\omega_2^2 - \Omega^2\right)}{\left(\omega_1^2 - \Omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \Omega^2\right) + \chi \cdot \omega_1^4} ,$$

$$B_1 = \frac{\frac{P}{\omega_1^2} \left(\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)}{\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2} - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)\left(\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right) + \chi \cdot \frac{\omega_1^4}{\omega_1^4}} ,$$

$$B_1 = \frac{X_1\left(\eta^2 - p^2\right)}{\left(1 - p^2\right)\left(\eta^2 - p^2\right) + \chi} . \quad (23)$$

$$B_2 = \frac{\chi \cdot \omega_1^2 \cdot P}{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2) + \chi \cdot \omega_1^4} ,$$

$$B_2 = \frac{\frac{\chi \cdot \omega_1^2 \cdot P}{\omega_1^4}}{\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2} - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)\left(\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right) + \chi \cdot \frac{\omega_1^4}{\omega_1^4}} ,$$

$$B_2 = \frac{X_1 \cdot \eta}{(1 - p^2)(\eta^2 - p^2) + \chi} . \quad (24)$$

Анализа виброударних процеса

Истраживање у анализи система је усмерено на испитивање постојања и стабилности виброударних режима за различите вредности вишеструкости l .

Потребно је објаснити, при каквим односима између параметара осцилатора и параметара принудне силе, могу да се успоставе таква периодична кретања, при којима је период удара осцилатора о граничник једнак или је у сразмери са периодом спољашње силе. При томе се узима у обзир да је време удара о граничник мало у поређењу са периодом кретања осцилатора између два удара, и то време не мора да се узме у прорачуну.

У овом истраживању посматра се један циклус кретања између два узастопна судара где се разликује брзина пре судара и брзина после судара: \dot{x}_- је брзина осцилатора пре судара, \dot{x}_+ је брзина осцилатора после судара. Релација која повезује ове две брзине је

$$\dot{x}_+ = -R \cdot \dot{x}_- . \quad (25)$$

У овом примеру истражује се периодично кретање, где имамо један граничник на десној страни, при чему прва маса наизменично удара у граничник. Сви интервали удара су потпуно исти и зато нема смисла да истражујемо други удар, трећи удар, четврти удар, итд. јер се они ништа не разликују један од другог и зато је потребно и довољно да се истражи само један интервал кретања између два узастопна удара.

П.7.2. Услови (области) постојања и стабилности периодичних виброударних режима (непарни $l = 1, 3, \dots$; парни $l = 2, 4, \dots$)

Истражимо интервал који почиње после удара у десни граничник на слици 1. Суштина истраживања неког задатка је да се испита могућност постојања (стабилности) периодичних ударних режима необичног карактера. Зато, да би истражили "необични" карактер, прво формирамо граничне услове. Почетак рачунања времена подудара се са тренутком непосредно после удара. За наведено периодично кретање система усвоје се гранични услови на следећи начин.

За прву масу m_1 за почетак циклуса гранични услови су:

$$x_1(0) = \Delta, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_+ = -R \cdot \dot{x}_{1-} . \quad (26)$$

За крај циклуса (тј. тренутак који претходи следећем удару) гранични услови су:

$$x_1\left(\frac{2\pi \cdot l}{\Omega}\right) = \Delta, \quad \dot{x}_1\left(\frac{2\pi \cdot l}{\Omega}\right) = \dot{x}_{1-} . \quad (27)$$

Почетни услови за другу масу m_2 су:

$$x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0 . \quad (28)$$

У овом примеру за другу масу узимамо нулте почетне услове (28). Почетни услови за другу масу могу бити другачији од наведених у (28), и те услове можемо узети онако како нама одговара. За почетак спроводимо истраживање где нас интересује само да се удар прве масе понавља тачно за један период са истим кинематичким карактеристикама у складу са условима (26) и (27). Цео ток виброударног процеса одређује само прва маса. При томе треба одредити шест непознатих променљивих $A_{11}, A_{12}, \alpha_1, \alpha_2, \dot{x}_{1-}, \varphi$, тј, то су сви они параметри који омогућавају постојање ударног режима који се понавља тачно за један период.

На овај начин је дефинисан виброударни режим, и довољно је да се ограничимо на истраживање једног ударног циклуса у интервалу $\left[0; \frac{2\pi \cdot l}{\Omega}\right]$. Услови (26) и (27) усвојени су на основу тога, да брзине које претходе удару имају исте вредности у тренутку времена $t = 0$ и у тренутку времена $t = \frac{2\pi \cdot l}{\Omega}$, то јест: $\dot{x}_-(0) = \dot{x}_-\left(\frac{2\pi \cdot l}{\Omega}\right)$.

Али, да би се реализовао такав режим, треба да се употреби одговарајућа принудна сила $F(t)$, тј., треба да одаберемо почетну фазу φ принудне силе на тај начин, који омогућава да се реализује изабрани режим.

Дакле, ми изучавамо периодични режим са једним ударом масе о граничник за један период принудне силе. У виброударним системима, могуће је остварити периодичне многоударне режиме, које карактерише неколико удара у граничник у току једног периода принудне силе. Режији са једноударним интеракцијама имају најинтензивнији карактер. Ти режими се највише користе у радним процесима и истражују се да би се процениле штетне последице (ефекти) интеракције.

Одредимо први извод по времену израза (22) и (22*), добија се

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = -A_{11} \cdot k_1 \cdot \sin(k_1 \cdot t + \alpha_1) - A_{12} \cdot k_2 \cdot \sin(k_2 \cdot t + \alpha_2) - B_1 \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi), \quad (29)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = -A_{11} \cdot k_1 \cdot \mu_1 \cdot \sin(k_1 t + \alpha_1) - A_{12} \cdot k_2 \cdot \mu_2 \cdot \sin(k_2 \cdot t + \alpha_2) - B_2 \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi). \quad (30)$$

У изразе (22) и (29) заменимо граничне услове за прву масу (26) и (27):

$$x_1(0) = \Delta, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_+ = -R \cdot \dot{x}_{1-},$$

$$x_1\left(\frac{2\pi \cdot l}{\Omega}\right) = \Delta, \quad \dot{x}_1\left(\frac{2\pi \cdot l}{\Omega}\right) = \dot{x}_{1-}.$$

А у изразе (22*) и (30) заменимо граничне услове за другу масу (28), који су облика:

$$x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0.$$

На почетку у (22) и (29) заменимо граничне услове (26) који су облика

$$x_1(0) = \Delta, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_+ = -R \cdot \dot{x}_1,$$

па се добија:

$$A_{11} \cdot \cos(\alpha_1) + A_{12} \cdot \cos(\alpha_2) + B_1 \cdot \cos(\varphi) = \Delta, \quad (31)$$

$$-A_{11} \cdot k_1 \cdot \sin(\alpha_1) - A_{12} \cdot k_2 \cdot \sin(\alpha_2) - B_1 \cdot \Omega \cdot \sin(\varphi) = -R \cdot \dot{x}_{1-} \quad (32)$$

Поделимо обе стране (32) са ω_1 , добија се

$$-A_{11} \cdot \frac{k_1}{\omega_1} \cdot \sin(\alpha_1) - A_{12} \cdot \frac{k_2}{\omega_1} \cdot \sin(\alpha_2) - B_1 \cdot \frac{\Omega}{\omega_1} \cdot \sin(\varphi) = \frac{-R \cdot \dot{x}_{1-}}{\omega_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -A_{11} \cdot \frac{k_1}{\omega_1} \cdot \sin(\alpha_1) - A_{12} \cdot \frac{k_2}{\omega_1} \cdot \sin(\alpha_2) - B_1 \cdot p \cdot \sin(\varphi) = \frac{-R \cdot \dot{x}_{1-}}{\omega_1} \quad (33)$$

Сада у (22) и (29) заменимо граничне услове (27) који су облика

$$x_1\left(\frac{2\pi \cdot l}{\Omega}\right) = \Delta, \quad \dot{x}_1\left(\frac{2\pi \cdot l}{\Omega}\right) = \dot{x}_{1-},$$

па се добија у (22):

$$A_{11} \cdot \cos\left(k_1 \cdot \frac{2\pi \cdot l}{\Omega} + \alpha_1\right) + A_{12} \cdot \cos\left(k_2 \cdot \frac{2\pi \cdot l}{\Omega} + \alpha_2\right) + B_1 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) = \Delta, \quad (34)$$

$$A_{11} \cdot \cos\left(\frac{k_1 \cdot \omega_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{\Omega} + \alpha_1\right) + A_{12} \cdot \cos\left(\frac{k_2 \cdot \omega_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{\Omega} + \alpha_2\right) + B_1 \cdot \cos\left(\Omega \cdot \frac{2\pi \cdot l}{\Omega} + \varphi\right) = \Delta$$

$$A_{11} \cdot \cos\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p} + \alpha_1\right) + A_{12} \cdot \cos\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p} + \alpha_2\right) + B_1 \cdot \cos(2\pi \cdot l + \varphi) = \Delta. \quad (35)$$

За било које $l = 1, 2, 3, 4, \dots \Rightarrow \cos(2\pi \cdot l + \varphi) = \cos(\varphi)$, па је

$$A_{11} \cdot \cos\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p} + \alpha_1\right) + A_{12} \cdot \cos\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p} + \alpha_2\right) + B_1 \cdot \cos(\varphi) = \Delta. \quad (36)$$

У (29) \Rightarrow

$$-A_{11} \cdot k_1 \cdot \sin\left(\frac{k_1 \cdot \omega_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{\Omega} + \alpha_1\right) - A_{12} \cdot k_2 \cdot \sin\left(\frac{k_2 \cdot \omega_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{\Omega} + \alpha_2\right) - B_1 \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi) = \dot{x}_{1-}$$

$$-A_{11} \cdot k_1 \cdot \sin\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p} + \alpha_1\right) - A_{12} \cdot k_2 \cdot \sin\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p} + \alpha_2\right) - B_1 \cdot \Omega \cdot \sin\left(\Omega \cdot \frac{2\pi \cdot l}{\Omega} + \varphi\right) = \dot{x}_{1-}$$

$$-\frac{A_{11}}{\omega_1} \cdot k_1 \cdot \sin\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p} + \alpha_1\right) - \frac{A_{12}}{\omega_1} \cdot k_2 \cdot \sin\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p} + \alpha_2\right) - B_1 \cdot \frac{\Omega}{\omega_1} \cdot \sin(\varphi) = \frac{\dot{x}_{1-}}{\omega_1}$$

$$-\frac{A_{11}}{\omega_1} \cdot k_1 \cdot \sin\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p} + \alpha_1\right) - \frac{A_{12}}{\omega_1} \cdot k_2 \cdot \sin\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p} + \alpha_2\right) - B_1 \cdot p \cdot \sin(\varphi) = \frac{\dot{x}_{1-}}{\omega_1} \quad (37)$$

У (22*) и (30) заменимо граничне услове за другу масу (28), добија се:

$$y(22^*) \Rightarrow \mu_1 \cdot A_{11} \cdot \cos(\alpha_1) + \mu_2 \cdot A_{12} \cdot \cos(\alpha_2) + B_2 \cdot \cos(\varphi) = 0, \quad (38)$$

$$y(30) \Rightarrow -A_{11} \cdot k_1 \cdot \mu_1 \cdot \sin(\alpha_1) - A_{12} \cdot k_2 \cdot \mu_2 \cdot \sin(\alpha_2) - B_2 \cdot \Omega \cdot \sin(\varphi) = 0 \quad /: \omega_1 \quad (39)$$

$$-A_{11} \cdot \frac{k_1}{\omega_1} \cdot \mu_1 \cdot \sin(\alpha_1) - A_{12} \cdot \frac{k_2}{\omega_1} \cdot \mu_2 \cdot \sin(\alpha_2) - B_2 \cdot \frac{\Omega}{\omega_1} \cdot \sin(\varphi) = 0,$$

$$-A_{11} \cdot \frac{k_1}{\omega_1} \cdot \mu_1 \cdot \sin(\alpha_1) - A_{12} \cdot \frac{k_2}{\omega_1} \cdot \mu_2 \cdot \sin(\alpha_2) - B_2 \cdot p \cdot \sin(\varphi) = 0 \quad . \quad (40)$$

Спојимо изразе (31), (33), (36), (37), (38) и (40) у један систем једначина:

$$-A_{11} \cdot \frac{k_1}{\omega_1} \cdot \mu_1 \cdot \sin(\alpha_1) - A_{12} \cdot \frac{k_2}{\omega_1} \cdot \mu_2 \cdot \sin(\alpha_2) - B_2 \cdot p \cdot \sin(\varphi) = 0$$

$$\mu_1 \cdot A_{11} \cdot \cos(\alpha_1) + \mu_2 \cdot A_{12} \cdot \cos(\alpha_2) + B_2 \cdot \cos(\varphi) = 0$$

$$-A_{11} \cdot \frac{k_1}{\omega_1} \cdot \sin(\alpha_1) - A_{12} \cdot \frac{k_2}{\omega_1} \cdot \sin(\alpha_2) - B_1 \cdot p \cdot \sin(\varphi) = \frac{-R \cdot \dot{x}_{1-}}{\omega_1} \quad (41)$$

$$A_{11} \cdot \cos(\alpha_1) + A_{12} \cdot \cos(\alpha_2) + B_1 \cdot \cos(\varphi) = \Delta$$

$$-\frac{A_{11}}{\omega_1} \cdot k_1 \cdot \sin\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p} + \alpha_1\right) - \frac{A_{12}}{\omega_1} \cdot k_2 \cdot \sin\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p} + \alpha_2\right) - B_1 \cdot p \cdot \sin(\varphi) = \frac{\dot{x}_{1-}}{\omega_1}$$

$$A_{11} \cdot \cos\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p} + \alpha_1\right) + A_{12} \cdot \cos\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p} + \alpha_2\right) + B_1 \cdot \cos(\varphi) = \Delta$$

Потребно је решити систем једначина (41) и за то је потребно да се развију једначине и да се неке једначине групишу.

У почетку решимо следећи систем једначина, који чине друга и четврта једначина из система (41):

$$\begin{cases} \mu_1 \cdot A_{11} \cdot \cos(\alpha_1) + \mu_2 \cdot A_{12} \cdot \cos(\alpha_2) + B_2 \cdot \cos(\varphi) = 0 \\ A_{11} \cdot \cos(\alpha_1) + A_{12} \cdot \cos(\alpha_2) + B_1 \cdot \cos(\varphi) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \quad (42)$$

$$\begin{cases} \mu_1 \cdot A_{11} \cdot \cos(\alpha_1) + \mu_2 \cdot A_{12} \cdot \cos(\alpha_2) + B_2 \cdot \cos(\varphi) = 0 \\ \mu_1 \cdot A_{11} \cdot \cos(\alpha_1) + \mu_1 \cdot A_{12} \cdot \cos(\alpha_2) + \mu_1 \cdot B_1 \cdot \cos(\varphi) = \mu_1 \cdot \Delta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (\mu_2 - \mu_1)\cos(\alpha_2)A_{12} + (B_2 - \mu_1 B_1)\cos(\varphi) = -\mu_1 \cdot \Delta \\ &\Rightarrow \cos(\alpha_2) = \frac{-\mu_1 \cdot \Delta - (B_2 - \mu_1 B_1)\cos(\varphi)}{A_{12}(\mu_2 - \mu_1)} \\ &\Rightarrow \cos(\alpha_2) = \frac{\mu_1 \cdot \Delta + (B_2 - \mu_1 B_1)\cos(\varphi)}{A_{12}(\mu_1 - \mu_2)} . \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{cases} \mu_1 \cdot A_{11} \cdot \cos(\alpha_1) + \mu_2 \cdot A_{12} \cdot \cos(\alpha_2) + B_2 \cdot \cos(\varphi) = 0 \\ \mu_2 \cdot A_{11} \cdot \cos(\alpha_1) + \mu_2 \cdot A_{12} \cdot \cos(\alpha_2) + \mu_2 \cdot B_1 \cdot \cos(\varphi) = \mu_2 \cdot \Delta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (\mu_1 - \mu_2)\cos(\alpha_1)A_{11} + (B_2 - \mu_2 B_1)\cos(\varphi) = -\mu_2 \cdot \Delta \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos(\alpha_1) = \frac{-\mu_2 \cdot \Delta - (B_2 - \mu_2 B_1)\cos(\varphi)}{A_{11}(\mu_1 - \mu_2)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos(\alpha_1) = \frac{\mu_2 \cdot \Delta + (B_2 - \mu_2 B_1)\cos(\varphi)}{A_{11}(\mu_2 - \mu_1)} . \end{aligned} \quad (44)$$

Решимо сада други систем једначина, који чине трећа и прва једначина из система (41):

$$\begin{aligned} &-A_{11} \cdot \frac{k_1}{\omega_1} \cdot \sin(\alpha_1) - A_{12} \cdot \frac{k_2}{\omega_1} \cdot \sin(\alpha_2) - B_1 \cdot p \cdot \sin(\varphi) = \frac{-R \cdot \dot{x}_{1-}}{\omega_1} \\ &\Rightarrow \\ &-A_{11} \cdot \frac{k_1}{\omega_1} \cdot \mu_1 \cdot \sin(\alpha_1) - A_{12} \cdot \frac{k_2}{\omega_1} \cdot \mu_2 \cdot \sin(\alpha_2) - B_2 \cdot p \cdot \sin(\varphi) = 0 \\ &A_{11} \cdot \frac{k_1}{\omega_1} \cdot \mu_1 \cdot \sin(\alpha_1) + A_{12} \cdot \frac{k_2}{\omega_1} \cdot \mu_1 \cdot \sin(\alpha_2) + B_1 \cdot p \cdot \mu_1 \cdot \sin(\varphi) = \mu_1 \frac{R \cdot \dot{x}_{1-}}{\omega_1} \\ &\Rightarrow \\ &A_{11} \cdot \frac{k_1}{\omega_1} \cdot \mu_1 \cdot \sin(\alpha_1) + A_{12} \cdot \frac{k_2}{\omega_1} \cdot \mu_2 \cdot \sin(\alpha_2) + B_2 \cdot p \cdot \sin(\varphi) = 0 \\ &\Rightarrow (\mu_1 - \mu_2) \cdot \frac{k_2}{\omega_1} \cdot \sin(\alpha_2)A_{12} + (B_1 \cdot \mu_1 - B_2) \cdot p \cdot \sin(\varphi) = \mu_1 \frac{R \cdot \dot{x}_{1-}}{\omega_1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha_2) = \frac{\mu_1 \cdot \frac{R \dot{x}_{1-}}{\omega_1} - (B_1 \cdot \mu_1 - B_2) \cdot p \cdot \sin(\varphi)}{A_{12}(\mu_1 - \mu_2) \frac{k_2}{\omega_1}}, \quad (45)$$

$$A_{11} \cdot \frac{k_1}{\omega_1} \cdot \mu_2 \cdot \sin(\alpha_1) + A_{12} \cdot \frac{k_2}{\omega_1} \cdot \mu_2 \cdot \sin(\alpha_2) + B_1 \cdot p \cdot \mu_2 \cdot \sin(\varphi) = \mu_2 \frac{R \cdot \dot{x}_{1-}}{\omega_1},$$

$$A_{11} \cdot \frac{k_1}{\omega_1} \cdot \mu_1 \cdot \sin(\alpha_1) + A_{12} \cdot \frac{k_2}{\omega_1} \cdot \mu_2 \cdot \sin(\alpha_2) + B_2 \cdot p \cdot \sin(\varphi) = 0,$$

$$(\mu_2 - \mu_1) \frac{k_1}{\omega_1} \cdot \sin(\alpha_1) A_{11} + (B_1 \cdot \mu_2 - B_2) p \cdot \sin(\varphi) = \mu_2 \frac{R \cdot \dot{x}_{1-}}{\omega_1},$$

$$-(\mu_1 - \mu_2) \frac{k_1}{\omega_1} \cdot \sin(\alpha_1) A_{11} + (B_1 \cdot \mu_2 - B_2) p \cdot \sin(\varphi) = \mu_2 \frac{R \cdot \dot{x}_{1-}}{\omega_1},$$

$$-(\mu_1 - \mu_2) \frac{k_1}{\omega_1} \cdot \sin(\alpha_1) A_{11} + (B_1 \cdot \mu_2 - B_2) p \cdot \sin(\varphi) = \mu_2 \frac{R \cdot \dot{x}_{1-}}{\omega_1},$$

$$\sin(\alpha_1) = \frac{\mu_2 \cdot \frac{R \cdot \dot{x}_{1-}}{\omega_1} - (B_1 \cdot \mu_2 - B_2) p \cdot \sin(\varphi)}{-A_{11}(\mu_1 - \mu_2) \frac{k_1}{\omega_1}}.$$

Па је коначно

$$\sin(\alpha_1) = \frac{-\mu_2 \cdot \frac{R \cdot \dot{x}_{1-}}{\omega_1} + (B_1 \cdot \mu_2 - B_2) p \cdot \sin(\varphi)}{A_{11}(\mu_1 - \mu_2) \frac{k_1}{\omega_1}}. \quad (46)$$

У наставку, заменимо једначине од (43) до (46) у шесту једначину у систему (41)

$$A_{11} \cdot \cos\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p} + \alpha_1\right) + A_{12} \cdot \cos\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p} + \alpha_2\right) + B_1 \cdot \cos(\varphi) = \Delta,$$

овде користимо тригонометријску формулу

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta, \text{ па је}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \cos\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1 \cdot p}\right) \cos(\alpha_1) - A_{11} \sin\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1 \cdot p}\right) \sin(\alpha_1) + \\
 & + A_{12} \cos\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1 \cdot p}\right) \cos(\alpha_2) - A_{12} \sin\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1 \cdot p}\right) \sin(\alpha_2) + B_1 \cos(\varphi) = \Delta \\
 & A_{11} \cdot \cos\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1 \cdot p}\right) \left(\frac{-\mu_2 \cdot \Delta - (B_2 - \mu_2 \cdot B_1) \cos(\varphi)}{A_{11}(\mu_1 - \mu_2)} \right) - A_{11} \cdot \sin\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1 \cdot p}\right) \left(\frac{-\mu_2 \frac{R \cdot \dot{x}_{1-}}{\omega_1} + (B_1 \cdot \mu_2 - B_2) p \cdot \sin(\varphi)}{A_{11}(\mu_1 - \mu_2) \frac{k_1}{\omega_1}} \right) + \\
 & + A_{12} \cos\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1 \cdot p}\right) \left(\frac{\mu_1 \Delta + (B_2 - \mu_1 B_1) \cos(\varphi)}{A_{12}(\mu_1 - \mu_2)} \right) - A_{12} \sin\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1 \cdot p}\right) \left(\frac{\mu_1 \frac{R \dot{x}_{1-}}{\omega_1} - (B_1 \cdot \mu_1 - B_2) \cdot p \cdot \sin(\varphi)}{A_{12}(\mu_1 - \mu_2) \frac{k_2}{\omega_1}} \right) + B_1 \cos(\varphi) = \Delta
 \end{aligned}$$

Сакупимо све уз множиоце добија се

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{p \cdot \omega_1 \cdot \sin\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1 \cdot p}\right) (B_2 - \mu_2 \cdot B_1)}{k_1(\mu_1 - \mu_2)} - \frac{p \cdot \omega_1 \cdot \sin\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1 \cdot p}\right) (B_2 - \mu_1 \cdot B_1)}{k_2(\mu_1 - \mu_2)} \right) \sin(\varphi) - \\
 & - \left(B_1 + \frac{\cos\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1 \cdot p}\right) (B_2 - \mu_2 \cdot B_1)}{(\mu_1 - \mu_2)} - \frac{\cos\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1 \cdot p}\right) (B_2 - \mu_1 \cdot B_1)}{(\mu_1 - \mu_2)} \right) \cos(\varphi) + \\
 & + \left(\frac{R \cdot \mu_2 \cdot \sin\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1 \cdot p}\right)}{k_1(\mu_1 - \mu_2)} - \frac{R \cdot \mu_1 \cdot \sin\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1 \cdot p}\right)}{k_2(\mu_1 - \mu_2)} \right) \dot{x}_{1-} - \left(\frac{\mu_1 \cdot \cos\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1 \cdot p}\right)}{(\mu_1 - \mu_2)} - \frac{\mu_2 \cdot \cos\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1 \cdot p}\right)}{(\mu_1 - \mu_2)} \right) \Delta = 0
 \end{aligned} \tag{47}$$

У наставку, заменимо једначине од (43) до (46) у пету једначину у систему (41)

$$- \frac{A_{11}}{\omega_1} \cdot k_1 \cdot \sin\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1 \cdot p} + \alpha_1\right) - \frac{A_{12}}{\omega_1} \cdot k_2 \cdot \sin\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1 \cdot p} + \alpha_2\right) - B_1 \cdot p \cdot \sin(\varphi) = \frac{\dot{x}_{1-}}{\omega_1},$$

овде користимо тригонометријску формулу

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta, \text{ па је}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{A_{11}}{\omega_1} \cdot k_1 \cdot \sin\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right) \cos(\alpha_1) - \frac{A_{11}}{\omega_1} \cdot k_1 \cdot \cos\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right) \sin(\alpha_1) - \\
 & -\frac{A_{12}}{\omega_1} \cdot k_1 \cdot \sin\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right) \cos(\alpha_2) - \frac{A_{12}}{\omega_1} \cdot k_1 \cdot \cos\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right) \sin(\alpha_2) - B_1 \cdot p \cdot \sin(\varphi) = \frac{\dot{x}_{1-}}{\omega_1} \\
 & -\frac{A_{11}}{\omega_1} \cdot k_1 \cdot \sin\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right) \frac{-\mu_2 \cdot \Delta - (B_2 - \mu_2 \cdot B_1) \cos(\varphi)}{A_{11}(\mu_1 - \mu_2)} - \frac{A_{11}}{\omega_1} \cdot k_1 \cdot \cos\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right) \frac{-\mu_2 \cdot \frac{R \cdot \dot{x}_{1-}}{\omega_1} + (B_1 \cdot \mu_2 - B_2) p \cdot \sin(\varphi)}{A_{11}(\mu_1 - \mu_2) \frac{k_1}{\omega_1}} - \\
 & -\frac{A_{12}}{\omega_1} k_1 \sin\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right) \frac{\mu_1 \Delta + (B_2 - \mu_1 B_1) \cos(\varphi)}{A_{12}(\mu_1 - \mu_2)} - \frac{A_{12}}{\omega_1} k_1 \cos\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right) \frac{\mu_1 \frac{R \dot{x}_{1-}}{\omega_1} - (B_1 \cdot \mu_1 - B_2) \cdot p \cdot \sin(\varphi)}{A_{12}(\mu_1 - \mu_2) \frac{k_2}{\omega_1}} - B_1 \cdot p \cdot \sin(\varphi) = \frac{\dot{x}_{1-}}{\omega_1}
 \end{aligned}$$

Сакупимо све уз множиоце добија се

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{p \cdot \omega_1 \cdot \cos\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right) (B_2 - \mu_2 \cdot B_1)}{(\mu_1 - \mu_2)} + \frac{p \cdot \omega_1 \cdot \cos\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right) (B_2 - \mu_1 \cdot B_1)}{(\mu_1 - \mu_2)} \right) \sin(\varphi) - \\
 & - \left(\frac{k_1 \cdot \sin\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right) (B_2 - \mu_2 \cdot B_1)}{(\mu_1 - \mu_2)} - \frac{k_2 \cdot \sin\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right) (B_2 - \mu_1 \cdot B_1)}{(\mu_1 - \mu_2)} \right) \cos(\varphi) + \\
 & + \left(\frac{R \cdot \mu_1 \cdot \cos\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right)}{(\mu_1 - \mu_2)} - \frac{R \cdot \mu_2 \cdot \cos\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right)}{(\mu_1 - \mu_2)} + 1 \right) \dot{x}_{1-} + \left(\frac{k_2 \cdot \mu_1 \cdot \sin\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right)}{(\mu_1 - \mu_2)} - \frac{k_1 \cdot \mu_2 \cdot \sin\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right)}{(\mu_1 - \mu_2)} \right) \Delta = 0
 \end{aligned} \tag{48}$$

Ове две једначине (47) и (48) решавамо по непознатим $\sin(\varphi)$ и $\cos(\varphi)$, а пошто је прорачун прилично обиман, уводимо следеће ознаке да поједноставимо прорачун:

$$\begin{aligned}
 q & = k_1 k_2 \left(B_1 (\mu_1 - \mu_2) - \cos\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right) (B_2 - B_1 \mu_2) + \cos\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right) (B_2 - B_1 \mu_1) \right) + \\
 & + \left(k_2 \sin\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right) (B_2 - B_1 \mu_2) - k_1 \sin\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right) (B_2 - B_1 \mu_1) \right) \left(k_1 \sin\left(\frac{k_1}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right) (B_2 - B_1 \mu_2) - k_2 \sin\left(\frac{k_2}{\omega_1} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{p}\right) (B_2 - B_1 \mu_1) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_1 &= k_1 k_2 \left(B_1 (\mu_1 - \mu_2) - \cos\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) (B_2 - B_1 \mu_2) + \cos\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) (B_2 - B_1 \mu_1) \right) \times \\
 &\times \left((\mu_1 - \mu_2) + R_1 \mu_1 \cos\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) - R_1 \mu_2 \cos\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) \right) + \\
 &+ \left(R \mu_1 k_1 \sin\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) - R \mu_2 k_2 \sin\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) \right) \left(k_1 \sin\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) (B_2 - B_1 \mu_2) - k_2 \sin\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) (B_2 - B_1 \mu_1) \right) \\
 w_2 &= \frac{1}{p \omega_1} \left(B_1 (\mu_1 - \mu_2) - \cos\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) (B_2 - B_1 \mu_2) + \cos\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) (B_2 - B_1 \mu_1) \right) \times \\
 &\times \left(R \mu_1 k_1 \sin\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) - R \mu_2 k_2 \sin\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) \right) - \\
 &- \frac{1}{p \omega_1} \left(k_1 \sin\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) (B_2 - B_1 \mu_1) - k_2 \sin\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) (B_2 - B_1 \mu_2) \right) \left((\mu_1 - \mu_2) + R_1 \mu_1 \cos\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) - R_1 \mu_2 \cos\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) \right) \\
 h_1 &= \frac{k_1 k_2 B_1}{p \omega_1} \left((\mu_1 - \mu_2) - \mu_1 \cos\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) + \mu_2 \cos\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) \right) \times \\
 &\times \left(k_1 \sin\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) (B_2 - B_1 \mu_2) - k_2 \sin\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) (B_2 - B_1 \mu_1) \right) - \\
 &- \frac{k_1 k_2 B_1}{p \omega_1} \left(k_1 \mu_2 \sin\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) - k_2 \mu_1 \sin\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) \right) \left(B_1 (\mu_1 - \mu_2) - \cos\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) (B_2 - B_1 \mu_2) + \cos\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) (B_2 - B_1 \mu_1) \right) \\
 h_2 &= B_1 \left(k_1 \mu_2 \sin\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) - k_2 \mu_1 \sin\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) \right) \times \\
 &\times \left(k_1 \sin\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) (B_2 - B_1 \mu_1) - k_2 \sin\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) (B_2 - B_1 \mu_2) \right) - \\
 &- k_1 k_2 B_1 \left(k_1 \mu_2 \sin\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) - k_2 \mu_1 \sin\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) \right) \left((\mu_1 - \mu_2) - \mu_1 \cos\left(\frac{k_2 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) + \mu_2 \cos\left(\frac{k_1 \cdot 2\pi \cdot l}{\omega_1}\right) \right)
 \end{aligned}$$

Упоредимо вредност зазора Δ и вредност амплитуде B_1 и уведимо нову променљиву $\Delta_1 = \Delta / B_1$, па се добија

$$\sin(\varphi) = \frac{w_1}{q} \cdot \dot{x}_{1-} + \frac{h_1}{q} \cdot \Delta_1 \quad \text{и} \quad \cos(\varphi) = \frac{w_2}{q} \cdot \dot{x}_{1-} + \frac{h_2}{q} \cdot \Delta_1 .$$

Да би се ослободили од функција синус и косинус подигнемо на квадрат ове две функције и користимо тригонометријски идентитет $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$.

После трансформација добијамо квадратну једначину по променљивој \dot{x}_{1-}

$$(w_1^2 + w_2^2) \dot{x}_{1-}^2 + 2\Delta_1 \cdot h_1(w_1 + w_2) \dot{x}_{1-} + \Delta_1^2(h_1^2 + h_2^2) = q^2 . \quad (49)$$

Када решимо квадратну једначину (49) по променљивој \dot{x}_{1-} , добија се брзина у облику

$$\dot{x}_{1-} = \Delta_1 \frac{-(h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2) \pm \sqrt{(h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2)^2 - (h_1^2 + h_2^2) + \frac{q^2}{\Delta_1^2}}}{(w_1^2 + w_2^2)} . \quad (50)$$

За нас је важно да брзина буде позитивна и зато истражујемо следећи корен

$$\dot{x}_{1-} = \Delta_1 \frac{-(h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2) + \sqrt{(h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2)^2 - (h_1^2 + h_2^2) + \frac{q^2}{\Delta_1^2}}}{(w_1^2 + w_2^2)} . \quad (51)$$

У наставку истражујемо области постојања таквих почетних брзина (51) за које ће бити могуће постојање периодичног ударног процеса који одаберемо, а који се понавља тачно кроз један период у истом облику. За именилац је очигледно да је он позитиван у целој области дефинисаности параметара система, јер у имениоцу имамо суму квадрата две функције.

Треба истражити области постојања виброударних режима на основу формуле (51), за систем са зазором, тј. $\Delta > 0$. Ако је амплитуда виброударних режима константа, $B_1 = \Delta$, дефинисање амплитудно фреквентне карактеристике је одређено областима постојања (стабилности) режима у зависности од параметара p, Δ . Истражимо границе области постојања. Пре свега, одредимо област реалних вредности брзине \dot{x}_{1-} .

Ако претпоставимо да је израз под кореном у једначини (51) позитиван, добија се

$$\begin{aligned}
 & (h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2)^2 - (h_1^2 + h_2^2) + \frac{q^2}{\Delta_1^2} > 0, \\
 & \frac{q^2}{\Delta_1^2} > (h_1^2 + h_2^2) - (h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2)^2, \\
 & \frac{\Delta_1^2}{q^2} < \frac{1}{(h_1^2 + h_2^2) - (h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2)^2}, \\
 & |\Delta_1| < \frac{q}{\sqrt{(h_1^2 + h_2^2) - (h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2)^2}}. \tag{52}
 \end{aligned}$$

Додатно истраживање захтева именилац у (52), он мора да буде строго већи од нуле. Такође бројилац у (51) треба да буде строго већи од нуле, па се добија:

$$\begin{aligned}
 & -(h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2) + \sqrt{(h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2)^2 - (h_1^2 + h_2^2) + \frac{q^2}{\Delta_1^2}} > 0, \\
 & \sqrt{(h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2)^2 - (h_1^2 + h_2^2) + \frac{q^2}{\Delta_1^2}} > (h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2), \\
 & (h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2)^2 - (h_1^2 + h_2^2) + \frac{q^2}{\Delta_1^2} > ((h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2))^2, \\
 & -(h_1^2 + h_2^2) + \frac{q^2}{\Delta_1^2} > 0, \\
 & \frac{q^2}{\Delta_1^2} > (h_1^2 + h_2^2), \\
 & \frac{\Delta_1^2}{q^2} < \frac{1}{(h_1^2 + h_2^2)}, \\
 & |\Delta_1| < \frac{q}{\sqrt{(h_1^2 + h_2^2)}}. \tag{53}
 \end{aligned}$$

Именилац у (53) је увек већи од нуле, јер се састоји од збира две функције са квадратима. Дефинисаћемо услове који одређују области реалних вредности брзине \dot{x}_- .

У интервалу између судара осцилатор не треба да прелази граничник, и не прелази дужине $|x| = \Delta$. У нашем задатку ово ограничење није испуњено при свим вредностима параметара система. Због тога спроводимо истраживање, на који начин додатно ограничење има утицај на резултате анализе. У изразу (51) израз у имениоцу $(w_1^2 + w_2^2)$ је позитиван, јер је израз у облику збира квадрата и цео корен у имениоцу је позитиван. Виброударни режими могу постојати не само у границама амплитуде осциловања линеарног осцилатора $0 < \Delta < A$, него и ван те области $\Delta > A$. Ако се граничник помери на вредност која је већа од амплитуде осциловања $\Delta > A$, да би се реализовао виброударни режим потребна је јака принудна сила, и то се може остварити додавањем енергије осцилатору, односно повећањем амплитуде принудне силе $F(t)$.

Област реалних вредности (52) добили смо из услова да је израз под кореном у формули (51) већи од нуле. Сада од свих реалних вредности треба да одредимо оне вредности при којима могу постојати виброударни режими, или области вредности. Област постојања (стабилности) виброударних режима, пре свега, је област где параметри система испуњавају услов да путања осциловања $x(t)$ не прелази вредност зазора Δ ,

$$|x(t)| < \Delta \quad . \quad (54)$$

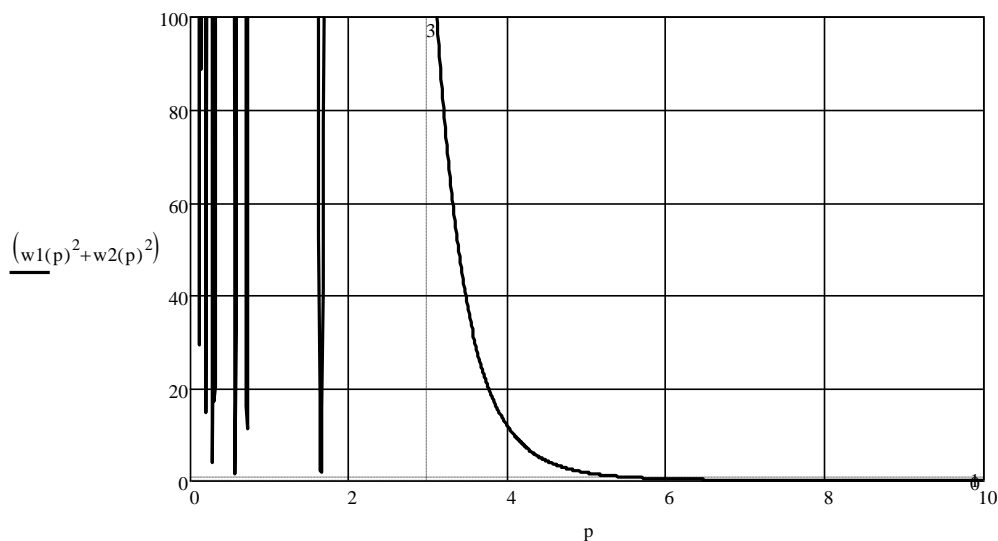
У општем случају, није могуће одредити области постојања виброудара на основу услова (54) у датом моделу. За системе релативно једноставне структуре, аналитичким методама могу се одредити приближне границе области постојања, и овде то радимо.

Услов постојања виброударног режима је $\Delta < A$, само у том случају осцилатор ће ударати о граничник. Ако је $|\Delta| > A$, процес осциловања ће се дешавати тако да осцилатор неће ударати у граничник и зато да би постојао ударни процес потребна је додатна енергија осцилатора или повећање амплитуде принудне силе $F(t)$.

Истраживање система спроводимо за две једнаке масе и две опруге једнаке крутости. Усвојимо параметре система на следећи начин:

$$m_1 = 50 \text{ kg}, \quad m_2 = 50 \text{ kg}, \quad c_1 = 1000 \text{ N/m}, \quad c_2 = 1000 \text{ N/m}, \quad l = 1.$$

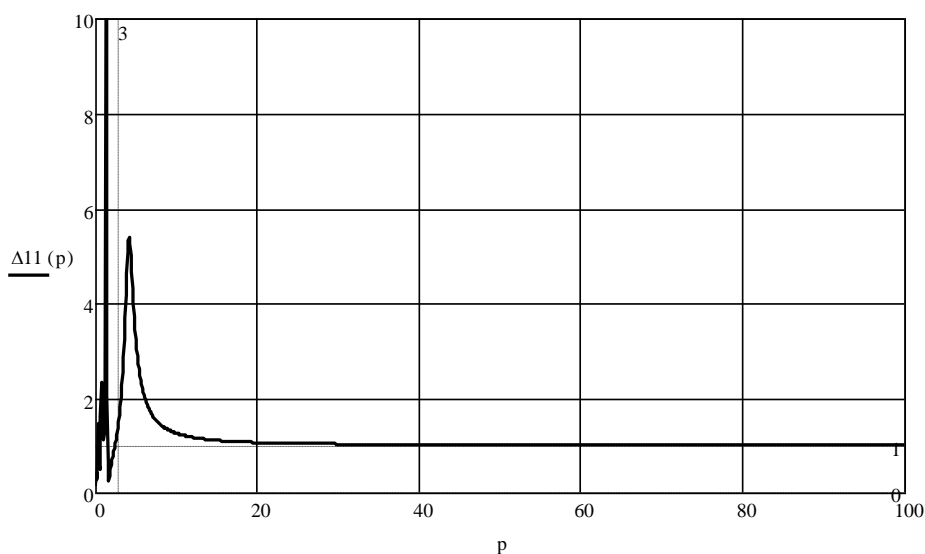
За ове параметре истражимо именилац у изразу (51) а затим и израз (53), за виброударне режиге вишеструкости $l = 1$.



Слика 2. Области постојања позитивних вредности имениоца у изразу (51) када је $l = 1$.

На слици 2 се види да на интервалу $0 < p < 3$ функција има велике осцилације и стално је позитивна. У наставку, када је $p > 3$ функција је већа од нуле и када је $p = 5$ функција се приближава нули.

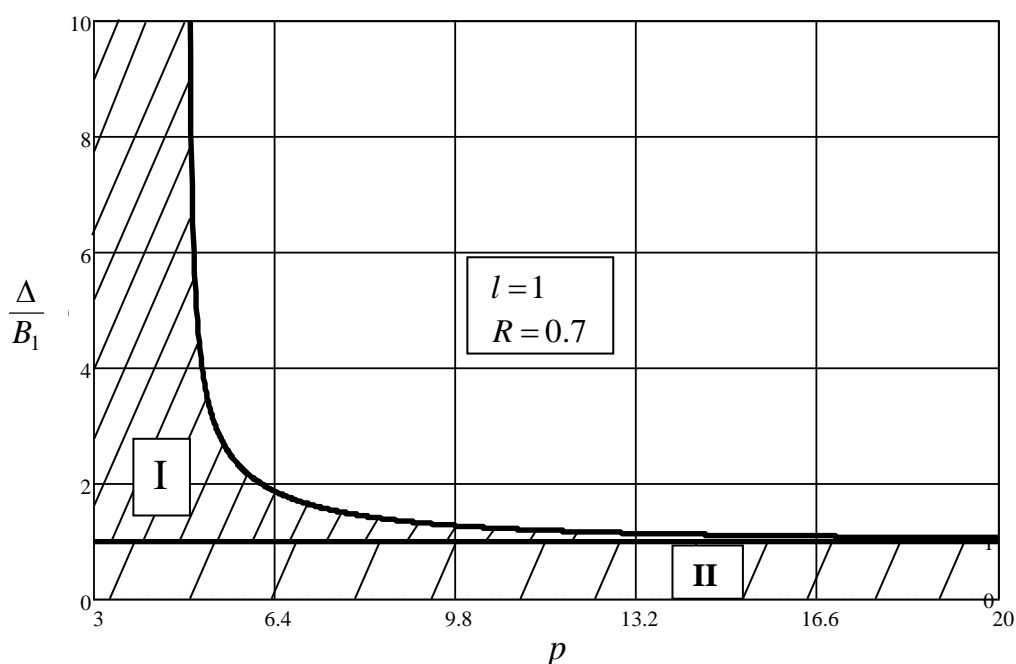
У наставку истражујемо израз (53).



Слика 3. Области постојања позитивних вредности имениоца у изразу (53) када је $l = 1$.

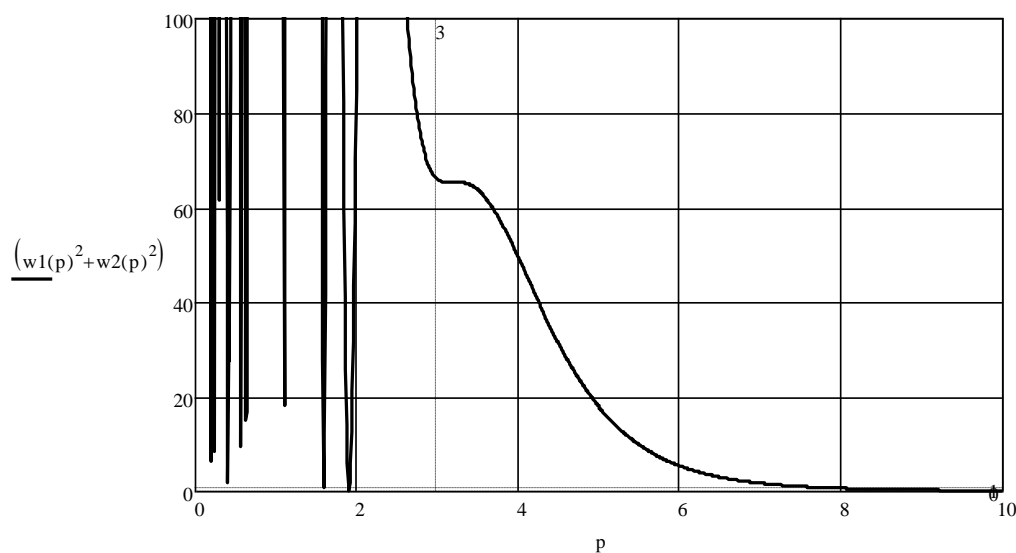
На слици 3 се види да је добијени график стално позитиван и сличног је облика као график на слици 2. Функција је већа од нуле и када $p \rightarrow \infty$ функција тежи ка константној вредности а то је јединица.

У наставку приказујемо области постојања виброударних режима када је $l = 1$.



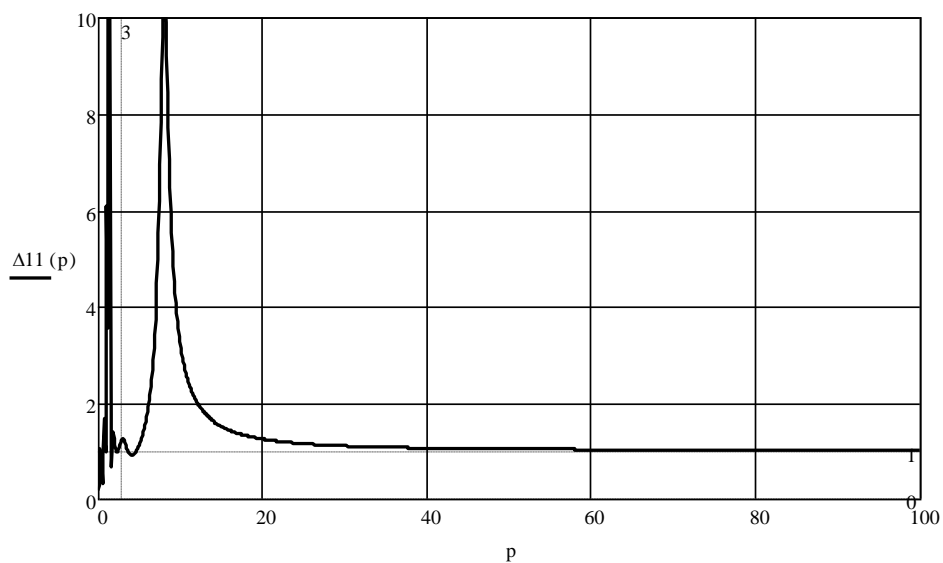
Слика 4. Области постојања виброударних режима када је $l = 1$.

У наставку спроводимо истраживање за виброударне режиме вишеструкости $l = 2$, где прво истражујемо именилац у (51), а затим израз (53).



Слика 5. Области постојања позитивних вредности имениоца (51) за $l = 2$.

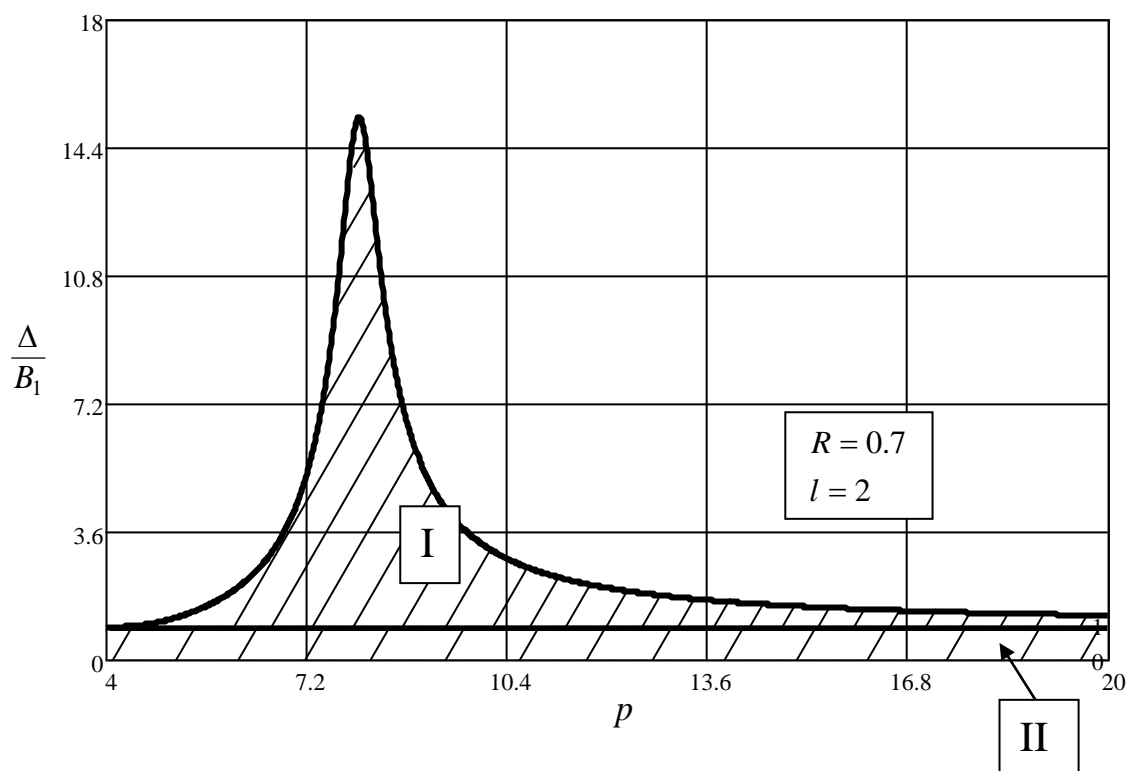
На слици 5 се види да на интервалу $0 < p < 3$ функција има велике осцилације и стално је позитивна. У наставку, када је $p > 3$ функција је већа од нуле и када је $p = 10$ функција се приближава нули.



Слика 6. Области постојања позитивних вредности имениоца у изразу (53) када је $l = 2$.

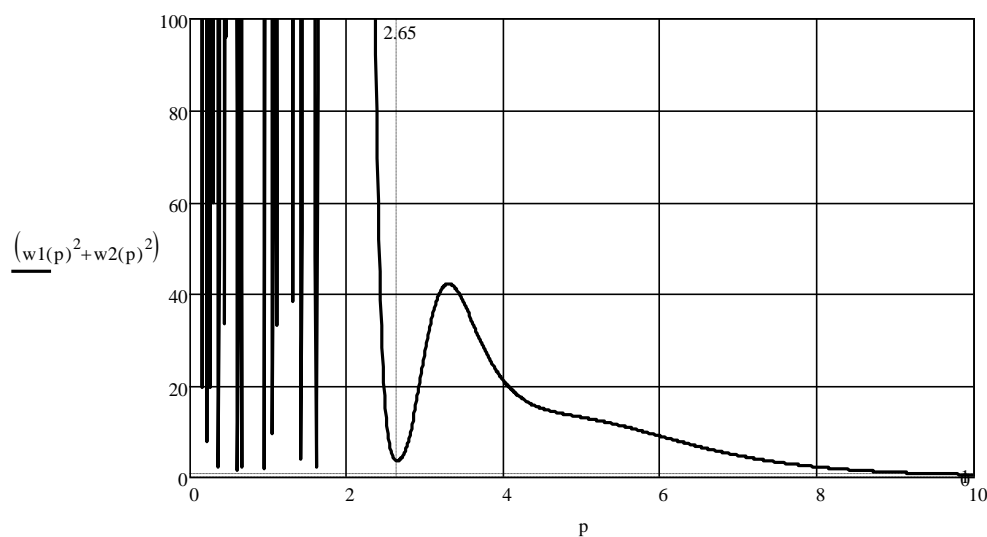
Као што се види на слици 6 добијени график је сличног облика као на слици 5 и када $p \rightarrow \infty$ функција тежи ка константној вредности а то је јединица.

У наставку приказујемо области постојања виброударних режима када је $l = 2$.



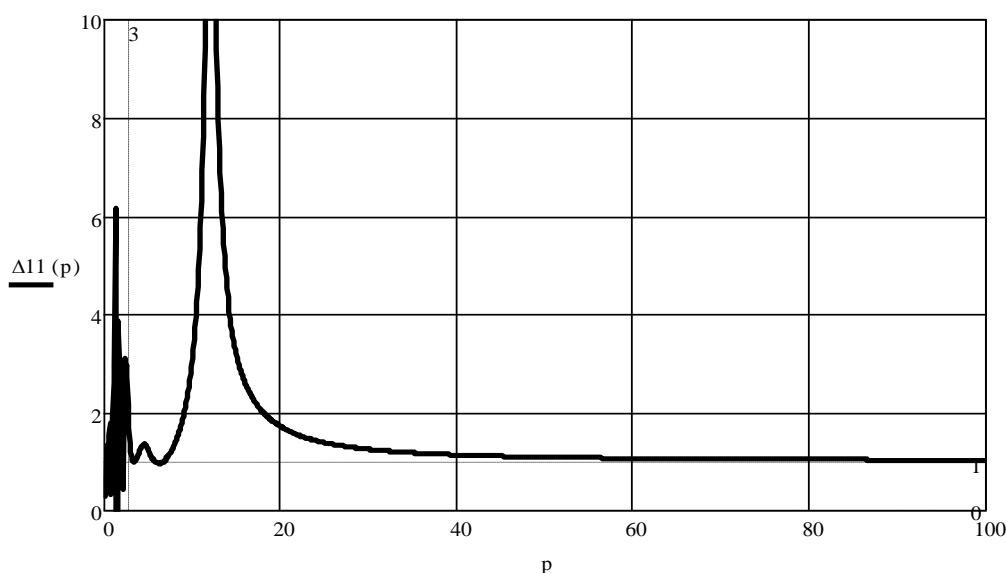
Слика 7. Области постојања виброударних режима када је $l = 2$.

У наставку спроводимо истраживање за виброударне режиме вишеструкости $l = 3$, где прво истражујемо именилац у (51), а затим израз (53).



Слика 8. Области постојања позитивних вредности имениоца у изразу (51) када је $l = 3$.

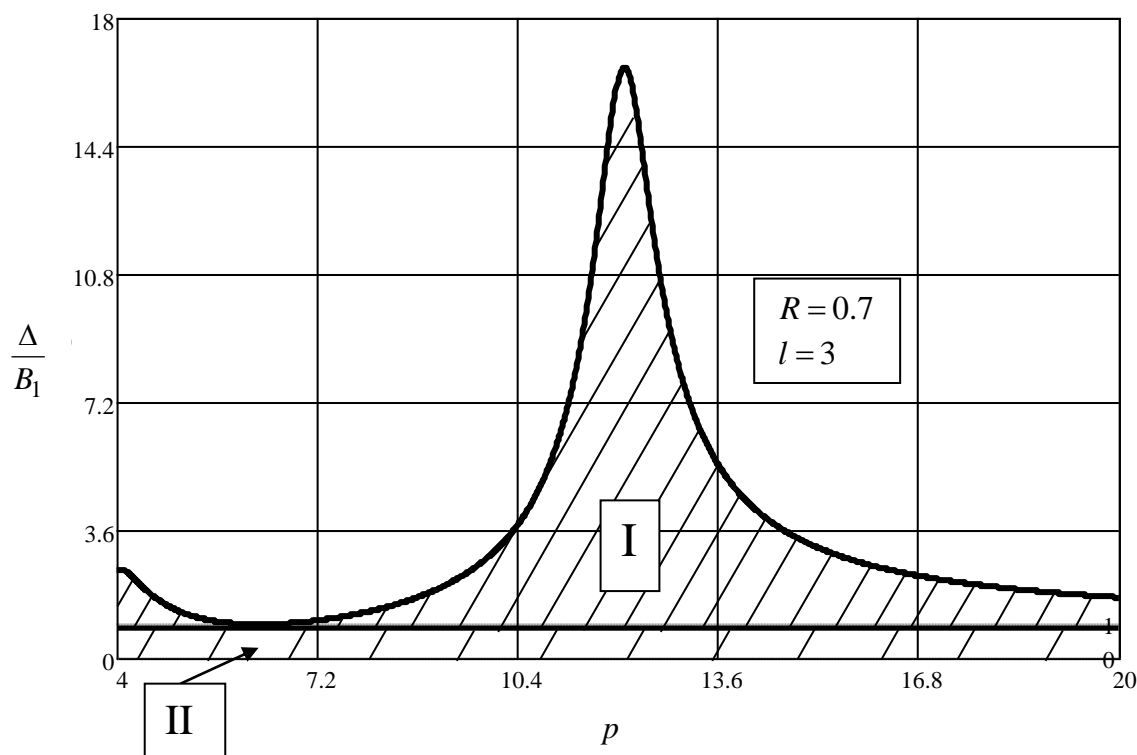
На слици 8 се види да на интервалу $0 < p < 2.65$ функција има велике осцилације и стално је позитивна. Када је $p > 3$ функција је већа од нуле и када је $p = 10$ функција се приближава нули.



Слика 9. Области постојања позитивних вредности имениоца у изразу (53) када је $l = 3$.

На слици 9 се види добијени график је позитиван када је $p > 3$ и када је $p \rightarrow \infty$ функција тежи ка константној вредности а то је јединица.

У наставку приказујемо области постојања виброударних режима када је $l = 3$.



Слика 10. Области постојања виброударних режима када је $l = 3$.

Објаснићемо детаљно резултате који су добијени за области постојања виброударних режима, а који су приказани на сликама 4, 7 и 10.

Режим I – област где је $\Delta > A$, зазор Δ је већи од амплитуде A , то решење не испуњава услов $|x(t)| < \Delta$ (54) и за наше истраживање није добро решење. У овом случају може да постоји режим када нема удара осцилатора о граничник, али је могућ и ударни режим. Ударни режим је могуће остварити само у случају ако се систему дода енергија у процесу кретања или како би рекли треба остварити "јаку принудну силу". Ова зона је шрафирана позитивно, она је најгушћа и односи се на истраживање израза за брзину (50) када се узме знак минус испред корена у бројиоцу

$$\dot{x}_{1-} = \Delta_1 \frac{-(h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2) - \sqrt{(h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2)^2 - (h_1^2 + h_2^2) + \frac{q^2}{\Delta_1^2}}}{(w_1^2 + w_2^2)} .$$

Режим II – област где је $\Delta < A$, зазор Δ је мањи од амплитуде A , то решење испуњава услов $|x(t)| < \Delta$ (54) и за наше истраживање је добро решење. У овој области могу да постоје виброудари. Ова област је шрафирана позитивно и односи се на истраживање израза са знаком плус испред корена у бројиоцу у изразу за брзину (50):

$$\dot{x}_{1-} = \Delta_1 \frac{-(h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2) + \sqrt{(h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2)^2 - (h_1^2 + h_2^2) + \frac{q^2}{\Delta_1^2}}}{(w_1^2 + w_2^2)} .$$

Као што се види на сликама 4, 7 и 10 у овом задатку са два степена слободе и са две масе, криве имају веће нагибе и израженије карактеристичне екстремуме у односу на задатак са једном масом из примера П.1. Присуство додатне масе знатно смањује области постојања виброударних режима. У случају једне масе такве зоне постоје практично на целој области дефинисаности p , у овом случају са два степена слободе такве зоне су ограничене и постоје у оквиру одређених граница p . Поред тога за реализацију виброударних процеса где је зазор већи од амплитуде осциловања $\Delta > A$, потребно је више енергије за реализацију виброударног процеса него у случају са једном масом.

Синтеза (оптимизација) виброударних процеса

При истраживању виброударних процеса принцип оптималности захтева прецизирање. У овом примеру проучавамо најмање време прелазног процеса, тј., процес ће бити оптималан у погледу времена.

Одређивање функције управљања $u = u(t)$ у зависности од фазних координата које карактеришу стање динамичког система, представља решење проблема синтезе оптималног управљања. Управљање које испуњава постављени услов зове се оптимално управљање, а фазна трајекторија зове се оптимална трајекторија.

Формулишемо задатак. Међу свим могућим силама $F(t)$ при којима виброударни осцилатор масе m (слика 1) прелази из почетног фазног стања $X_0(t_0)$ у крајње стање $X_1(T)$, потребно је да се одреди таква сила $F(t)$, при којој се овај процес врши за најкраће време T_{\min} , а при томе је дато ограничење за принудну силу

$$|F(t)| \leq F_0 . \quad (55)$$

За решење овог задатка користимо Понтрјагинов принцип максимума. Неке аспекте овог принципа, показаћемо у наставку.

Размотримо објекат или процес, који је описан системом диференцијалних једначина

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) \quad i = 1, \dots, n \quad , \quad (56)$$

или векторском једначином $\frac{dX}{dt} = f(X, U)$.

У фазној равни X задате су две тачке $X^0 = x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0$ и $X^1 = x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots, x_n^1$. Размотримо следећи задатак. Од могућих управљања $U(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ (у нашем случају $t_0 = 0$, $t_1 = 2\pi \cdot l / \Omega$), која померају фазну тачку нашег система из одређеног почетног положаја X^0 ($X^0(t_0) = X^0$) у положај X^1 ($X^1(t_1) = X^1$), треба одредити управљање и путању, који доводе до минимума функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) dt . \quad (57)$$

Управљање $U(t)$ и путања $X(t)$ који решавају постављени задатак су оптимални. Избором функције $f_0(X, U)$ могу се добити различите физичке особине. Ако, на пример, функција $f_0(X, U)$ карактерише потрошњу горива у секунди, онда функционал (57) карактерише потрошњу горива у интервалу времена $\Delta t = t_1 - t_0$, а то је време које је потребно за кретање од тачке X_0 до тачке X_1 . У нашем задатку $f_0 = 1$, јер минимизирамо само време. У том случају функционал (58) одређује време кретања.

$$I = \int_{t_0}^T 1 dt = T - t_0 \quad (58)$$

Функционал карактерише било који процес који се дешава у интервалу времена $[t_0, T]$. Управљање и путања, који минимизирају функционал (58), називају се оптимални по времену. Задатак је формулисан на следећи начин: одредити могуће управљање, које помера избрани објекат из почетне тачке у крајњу тачку, за минимално време T_{\min} .

Ако претпоставимо да је $t_0=0$, тада критеријум оптималности из (58) има следећи облик $I = T = T_{\min}$.

Поред основног система (56) уведемо помоћну функцију $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_k(t))$, као и функцију Хамилтона $H(\psi, X, U)$, где је:

$$H(\psi, X, U) = \lambda \cdot f_0(X, U) + \sum_{i=0}^k \psi_i \cdot f_i(X, U), \quad (59)$$

$$\begin{cases} \frac{d\psi_0}{dt} = 0 \\ \frac{d\psi_i}{dt} = \frac{-\partial H(\psi, X, U)}{\partial x_i} \end{cases} \quad (60)$$

Помоћу ове две функције добија се оптимална вредност функције управљања $u = u(t)$ у сваком тренутку времена t . Према принципу максимума да би управљање $u = u(t)$ било оптимално, Хамилтонијан $H(\psi, X, U)$ треба да има максималну вредност, када помоћна функција $\psi_2(t)$ има максимум. То значи да функција Хамилтона (59) (или функција Понтрјагина) увек има максималну вредност дуж оптималне путање.

II.7.3. Оптимални периодични виброударни режими (оптимално управљање силом, оптимална путања) прве масе

Посматрамо пример на слици 1, где имамо четири фазне координате, то су координате x_1 и x_2 и брзине кретања \dot{x}_1 и \dot{x}_2 . Означимо $x_1 = x_1$, $x_2 = \dot{x}_1$, $x_3 = x_2$, $x_4 = \dot{x}_2$. Ако узмемо у обзир ове ознаке, диференцијалне једначине кретања (5) могу се написати у облику

$$\ddot{x}_1 = u - \omega_1^2 \cdot x_1 + \omega_1^2 \cdot x_2 \quad (61)$$

$$\ddot{x}_2 = \chi \cdot \omega_1^2 \cdot x_1 - \omega_2^2 \cdot x_2$$

где је $u = \frac{F(t)}{m}$, $u_0 = \frac{F_0}{m}$.

Имајући у виду наведене фазне координате и њихове изводе, из (61) добијамо једначине у облику

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - \omega_1^2 \cdot x_1 + \omega_1^2 \cdot x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \chi \cdot \omega_1^2 \cdot x_1 - \omega_2^2 \cdot x_3 \end{cases} . \quad (62)$$

гранични услови задатка су:

$$\begin{aligned} \text{прва маса: } t = 0, \quad x_1(0) = \Delta, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_+ = -R \cdot \dot{x}_{1-} , \\ T = T_{\min} , \quad x_1(T) = \Delta, \quad \dot{x}_1(T) = \dot{x}_{1-} , \\ \text{друга маса: } t = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0 , \end{aligned} \quad (63)$$

где је \dot{x}_- почетна брзина пре удара, \dot{x}_+ почетна брзина после удара.

Ограничење (55) има облик

$$\begin{aligned} |u(t)| \leq u_0 \quad \text{или} \\ -u_0 \leq u \leq u_0 . \end{aligned} \quad (64)$$

На основу израза (62) имамо да је $f_0 = 1$, $f_1 = x_2$, $f_2 = u - \omega_1^2 \cdot x_1 + \omega_1^2 \cdot x_3$,

$f_3 = x_4$, $f_4 = \chi \cdot \omega_1^2 \cdot x_1 - \omega_2^2 \cdot x_3$, функција Хамилтона (59) добија облик

$$H(\psi, X, U) = \lambda \cdot 1 + \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 \cdot (u - \omega_1^2 \cdot x_1 + \omega_1^2 \cdot x_3) + \psi_3 \cdot x_4 + \psi_4 \cdot (\chi \cdot \omega_1^2 \cdot x_1 - \omega_2^2 \cdot x_3). \quad (65)$$

Систем једначина (60) је облика:

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{-\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{-\partial H}{\partial x_2} \\ \frac{d\psi_3}{dt} = \frac{-\partial H}{\partial x_3} \\ \frac{d\psi_4}{dt} = \frac{-\partial H}{\partial x_4} \end{cases} . \quad (66)$$

Одредимо изводе и заменимо у систем једначина (66), добија се:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi_1}{dt} = \omega_1^2 \cdot \psi_2 - \psi_4 \cdot \chi \cdot \omega_1^2 \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 \\ \frac{d\psi_3}{dt} = -\omega_1^2 \cdot \psi_2 + \omega_1^2 \cdot \psi_4 \\ \frac{d\psi_4}{dt} = -\psi_3 \end{array} \right. \quad (67)$$

Сада треба одредити управљање $u(t)$ при којем функција Хамилтона $H(\psi, X, U)$ добија максималну вредност, односно постиже оптималност по времену.

Познато је из математичке анализе, да би се одредио максимум функције Хамилтона треба одредити извод $\frac{\partial H}{\partial u}$ и изједначити га са нулом, и из ове једначине треба одредити вредност u за коју функција Хамилтона добија максималну вредност. Али нећемо урадити тако пошто у функцији Хамилтона функција u представља линеарну функцију. Одредимо услове оптималности, размотримо функцију Хамилтона у облику

$$\begin{aligned} H(\psi, X, U) = & \lambda \cdot 1 + \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 \cdot (-\omega_1^2 \cdot x_1 + \omega_1^2 \cdot x_3) + \\ & + \psi_3 \cdot x_4 + \psi_4 \cdot (\chi \cdot \omega_1^2 \cdot x_1 - \omega_2^2 \cdot x_3) + \psi_2 \cdot u = \max \end{aligned} \quad (68)$$

У изразу (68) се види се да је $H(\psi, X, U)$ линеарна функција променљиве $u(t)$ и због тога нема потребе да се тражи први извод $\frac{\partial H}{\partial u}$ и изједначи се са нулом. Од управљачке функције $u(t)$ зависи само шести сабирак $H_u = \psi_2 \cdot u$, дакле, функција Хамилтона $H(\psi, X, U)$ биће максимална само онда када буде максималан шести сабирак $H_u = \psi_2 \cdot u$. Зато ћемо да урадимо истраживање тако да је сабирак $H_u = \psi_2 \cdot u$ максималан. Дакле, функција ће бити максимална, када је максимално управљачко дејство (тј. функција) $u(t)$. Тј., ако је u_{\max} тада је и $H_{u_{\max}} = H_{\max}$, односно

$$H_{\max} = \psi_2 \cdot u_{\max} \quad (69)$$

Остали сабирци из израза (68) су изостављени, јер не играју апсолутно никакву улогу у оптимизацији функције Хамилтона. Треба напоменути да је $u = \max(H(\psi, X, U))$.

Максимум функције Хамилтона $H(\psi, X, U)$ је строго одређен знаком који стоји испред функције u у функцији $H_u = \psi_2 \cdot u$. За овај знак одговорна је функција ψ_2 :

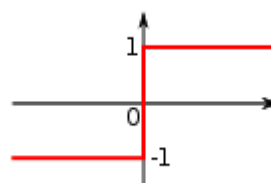
$$\max(H(\psi, X, U)) = H_{u \max}, \quad u = H_{u \max},$$

ако је $\psi_2 > 0$ тада је $u = U_{\max}$,

ако је $\psi_2 < 0$ тада је $u = -U_{\max}$.

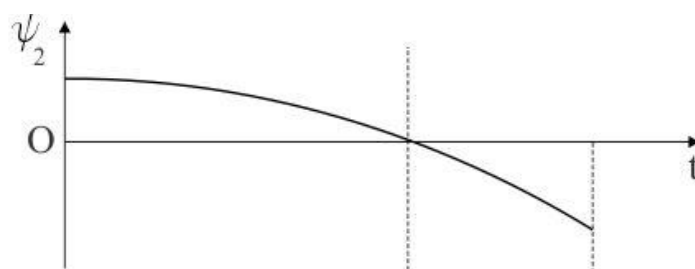
У случају такве промене знакова, ово можемо да представимо функцијом signum .

$$\text{sign}(\psi_2) = \begin{cases} 1 & \text{када је } \psi_2 > 0 \\ 0 & \text{када је } \psi_2 = 0 \\ -1 & \text{када је } \psi_2 < 0 \end{cases}$$

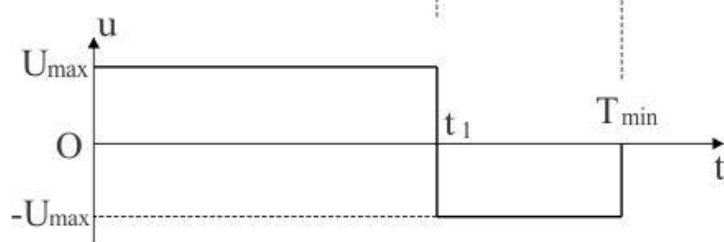


Тада управљање $u(t)$ можемо да представимо на следећи начин:

$$u(t) = U_{\max} \cdot \text{sign}\psi_2(t) \tag{70}$$



Слика 11.а.



Слика 11.б.

Слика 11. График функције ψ_2 (11.а) и закон промене управљачког дејства (11.б).

На слици 11.а. приказан је график функције ψ_2 , а на слици 11.б. приказан је график силе управљања u , која обезбеђује оптимално управљање.

На слици се види да крива ψ_2 једанпут мења знак, и зато оптимално управљачко дејство садржи два интервала управљања где је $u = \text{const} = \pm U_{\max}$. Одговарајући физички смисао на првом интервалу $0 \leq t < t_1$ је да управљање $u = U_{\max}$ даје убрзање мотора које наш систем доводи у кретање, или једноставно, створена је управљачка сила која дејствује на прву масу. На другом интервалу $t_1 \leq t < T_{\min}$ управљање се реализује кочењем мотора када је $u = -U_{\max}$. Или обрнуто.

Пошто линеарна функција може да промени знак на интервалу не више од једанпут, то је оптимално управљање (од 0 до $T = T_{\min}$):

$$u = \begin{cases} U_{\max} & \text{при } 0 \leq t < t_1; \\ -U_{\max} & \text{при } t_1 \leq t < T_{\min} \end{cases}, \quad (71)$$

или:

$$u = \begin{cases} -U_{\max} & \text{при } 0 \leq t < t_1; \\ U_{\max} & \text{при } t_1 \leq t < T_{\min} \end{cases}, \quad (72)$$

Прво посматрамо (72), то је друго од два наведена управљања, а разлог је што након удара осцилатор почиње своје кретање супротно од позитивног правца осе x , па у складу са тим принудна сила такође мора бити усмерена супротно од осе x . Прелаз принудне силе у супротни смер дешава се у тренутку t_1 . Прецизније можемо да формулишемо задатак овако: треба испитати које од два управљања нама одговара (71) или (72), и за то је потребно истражити оба случаја. Остаје да се одреди тачка t_1 - тачка прелаза (прекида) за управљање.

Заменимо израз (72) у једначине објекта (61).

$$\text{За } 0 \leq t < t_1 \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = -U_{\max} - \omega_1^2 \cdot x_1 + \omega_1^2 \cdot x_2 \\ \ddot{x}_2 = \chi \cdot \omega_1^2 \cdot x_1 - \omega_2^2 \cdot x_2 \end{cases} \quad (73)$$

$$\text{За } t_1 \leq t < T_{\min} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = U_{\max} - \omega_1^2 \cdot x_1 + \omega_1^2 \cdot x_2 \\ \ddot{x}_2 = \chi \cdot \omega_1^2 \cdot x_1 - \omega_2^2 \cdot x_2 \end{cases} \quad (74)$$

Одредимо партикуларно решење датог система (73) тако што означимо функције $x_{1np} = K_1$ и $x_{2np} = K_2$.

Када користимо ове ознаке једначина (73) је облика

$$\begin{aligned} 0 &= -U_{\max} - \omega_1^2 \cdot K_1 + \omega_1^2 \cdot K_2 \\ 0 &= \chi \cdot \omega_1^2 \cdot K_1 - \omega_2^2 \cdot K_2 \end{aligned} \quad (75)$$

Када решимо (75) добија се $K_1 = \frac{U_{\max} \cdot \omega_2^2}{\chi \cdot \omega_1^4 - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2}$ $K_2 = \frac{U_{\max} \cdot \chi}{\chi \cdot \omega_1^2 - \omega_2^2}$.

На крају, за први интервал $0 \leq t < t_1$ добија се укупно решење $x = x_h + x_p$

$$\begin{aligned} \text{прва маса } x_1(t) &= A_1 \cdot \cos(k_1 \cdot t + \alpha_1) + A_2 \cdot \cos(k_2 \cdot t + \alpha_2) + \frac{U_{\max} \cdot \omega_2^2}{\chi \cdot \omega_1^4 - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2}, \\ \text{друга маса } x_2(t) &= \mu_1 \cdot A_1 \cdot \cos(k_1 \cdot t + \alpha_1) + \mu_2 \cdot A_2 \cdot \cos(k_2 \cdot t + \alpha_2) + \frac{U_{\max} \cdot \chi}{\chi \cdot \omega_1^2 - \omega_2^2}. \end{aligned} \quad (76)$$

Решимо систем (74) тако што означимо партикуларна решења $x_{1np} = K_3$ и $x_{2np} = K_4$.

Када користимо ове ознаке једначина (74) је облика

$$\begin{aligned} 0 &= -U_{\max} - \omega_1^2 \cdot K_3 + \omega_1^2 \cdot K_4 \\ 0 &= \chi \cdot \omega_1^2 \cdot K_3 - \omega_2^2 \cdot K_4 \end{aligned} \quad (77)$$

Када решимо (77) добија се

$$K_3 = \frac{-U_{\max} \cdot \omega_2^2}{\chi \cdot \omega_1^4 - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2} \quad K_4 = \frac{-U_{\max} \cdot \chi}{\chi \cdot \omega_1^2 - \omega_2^2}.$$

На крају, за други интервал $t_1 \leq t < T_{\min}$ добија се укупно решење

$$\begin{aligned} \text{прва маса } x_3(t) &= A_3 \cdot \cos(k_1 \cdot t + \alpha_1) + A_4 \cdot \cos(k_2 \cdot t + \alpha_2) - \frac{U_{\max} \cdot \omega_2^2}{\chi \cdot \omega_1^4 - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2}, \\ \text{друга маса } x_4(t) &= \mu_1 \cdot A_3 \cdot \cos(k_1 \cdot t + \alpha_1) + \mu_2 \cdot A_4 \cdot \cos(k_2 \cdot t + \alpha_2) - \frac{U_{\max} \cdot \chi}{\chi \cdot \omega_1^2 - \omega_2^2}. \end{aligned} \quad (78)$$

Одредимо изводе у (76), добијамо брзине за први интервал

$$\text{прва маса } \dot{x}_1(t) = \frac{dx_1}{dt} = -A_1 \cdot k_1 \cdot \sin(k_1 \cdot t + \alpha_1) - A_2 \cdot k_2 \cdot \sin(k_2 \cdot t + \alpha_2) ,$$

$$\text{друга маса } \dot{x}_2(t) = \frac{dx_2}{dt} = -\mu_1 \cdot A_1 \cdot k_1 \cdot \sin(k_1 \cdot t + \alpha_1) - \mu_2 \cdot A_2 \cdot k_2 \cdot \sin(k_2 \cdot t + \alpha_2) . \quad (79)$$

Одредимо изводе у (78), добијамо брзине за други интервал

$$\text{прва маса } \dot{x}_3(t) = \frac{dx_3}{dt} = -A_3 \cdot k_1 \cdot \sin(k_1 \cdot t + \alpha_1) - A_4 \cdot k_2 \cdot \sin(k_2 \cdot t + \alpha_2) ,$$

$$\text{друга маса } \dot{x}_4(t) = \frac{dx_4}{dt} = -\mu_1 \cdot A_3 \cdot k_1 \cdot \sin(k_1 \cdot t + \alpha_1) - \mu_2 \cdot A_4 \cdot k_2 \cdot \sin(k_2 \cdot t + \alpha_2) . \quad (80)$$

У (76) и (78) заменимо граничне услове (26), (27), (28),

$$x_1(0) = \Delta , \quad x_1(T) = \Delta , \quad x_2(0) = 0 :$$

$$A_1 \cdot \cos(k_1 \cdot 0 + \alpha_1) + A_2 \cdot \cos(k_2 \cdot 0 + \alpha_2) + \frac{U_{\max} \cdot \omega_2^2}{\chi \cdot \omega_1^4 - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2} = \Delta ,$$

$$A_3 \cdot \cos(k_1 \cdot T + \alpha_1) + A_4 \cdot \cos(k_2 \cdot T + \alpha_2) - \frac{U_{\max} \cdot \omega_2^2}{\chi \cdot \omega_1^4 - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2} = \Delta ,$$

$$\mu_1 \cdot A_1 \cdot \cos(k_1 \cdot 0 + \alpha_1) + \mu_2 \cdot A_2 \cdot \cos(k_2 \cdot 0 + \alpha_2) + \frac{U_{\max} \cdot \chi}{\chi \cdot \omega_1^2 - \omega_2^2} = 0$$

На крају добијамо једначине за координате у облику:

$$\begin{cases} A_1 \cdot \cos(\alpha_1) + A_2 \cdot \cos(\alpha_2) + \frac{U_{\max} \cdot \omega_2^2}{\chi \cdot \omega_1^4 - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2} = \Delta \\ A_3 \cdot \cos(k_1 \cdot T + \alpha_1) + A_4 \cdot \cos(k_2 \cdot T + \alpha_2) - \frac{U_{\max} \cdot \omega_2^2}{\chi \cdot \omega_1^4 - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2} = \Delta \\ \mu_1 \cdot A_1 \cos(\alpha_1) + \mu_2 \cdot A_2 \cos(\alpha_2) + \frac{U_{\max} \cdot \chi}{\chi \cdot \omega_1^2 - \omega_2^2} = 0 \end{cases} . \quad (81)$$

У (79) и (80) заменимо граничне услове

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_+ = -R \cdot \dot{x}_- , \quad \dot{x}_1(T) = \dot{x}_- , \quad \dot{x}_2(0) = 0 ,$$

добија се:

$$\begin{aligned}
 & -A_1 \cdot k_1 \cdot \sin(k_1 \cdot 0 + \alpha_1) - A_2 \cdot k_2 \cdot \sin(k_2 \cdot 0 + \alpha_2) = -R \cdot \dot{x}_{1-} \\
 & -A_3 \cdot k_1 \cdot \sin(k_1 \cdot T + \alpha_1) - A_4 \cdot k_2 \cdot \sin(k_2 \cdot T + \alpha_2) = \dot{x}_{1-} \\
 & -\mu_1 \cdot A_1 \cdot k_1 \cdot \sin(k_1 \cdot 0 + \alpha_1) - \mu_2 \cdot A_2 \cdot k_2 \cdot \sin(k_2 \cdot 0 + \alpha_2) = 0 \quad .
 \end{aligned}$$

На крају добијамо једначине за брзине у облику:

$$\begin{cases}
 -A_1 \cdot k_1 \cdot \sin(\alpha_1) - A_2 \cdot k_2 \cdot \sin(\alpha_2) = -R \cdot \dot{x}_{1-} \\
 -A_3 \cdot k_1 \cdot \sin(k_1 \cdot T + \alpha_1) - A_4 \cdot k_2 \cdot \sin(k_2 \cdot T + \alpha_2) = \dot{x}_{1-} \\
 -\mu_1 \cdot A_1 \cdot k_1 \cdot \sin(\alpha_1) - \mu_2 \cdot A_2 \cdot k_2 \cdot \sin(\alpha_2) = 0
 \end{cases} \quad . \quad (82)$$

Услови континуитета (непрекидности) на фазној путањи имају следећи облик:

$$x_1 \Big|_{0 \leq t < t_1} = x_1 \Big|_{t_1 \leq t < T} \quad , \quad x_2 \Big|_{0 \leq t < t_1} = x_2 \Big|_{t_1 \leq t < T} \quad . \quad (83)$$

У циљу одређивања минималног (оптималног) времена ($T = T_{\min}$) и времена прелаза (прекида) t_1 , потребно је да релације (76), (78), (79) и (80) испуне услове континуитета (83). Као резултат добијамо трансцендентне једначине за прву масу на основу услова континуитета (83) за координате и брзине:

$$A_1 \cos(k_1 \cdot t_1 + \alpha_1) + A_2 \cos(k_2 \cdot t_1 + \alpha_2) + \frac{U_{\max} \cdot \omega_2^2}{\chi \cdot \omega_1^4 - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2} = \quad (84)$$

$$= A_3 \cos(k_1 \cdot t_1 + \alpha_1) + A_4 \cos(k_2 \cdot t_1 + \alpha_2) - \frac{U_{\max} \cdot \omega_2^2}{\chi \cdot \omega_1^4 - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2}$$

$$-A_1 \cdot k_1 \cdot \sin(k_1 \cdot t_1 + \alpha_1) - A_2 \cdot k_2 \cdot \sin(k_2 \cdot t_1 + \alpha_2) = -A_3 \cdot k_1 \cdot \sin(k_1 \cdot t_1 + \alpha_1) - A_4 \cdot k_2 \cdot \sin(k_2 \cdot t_1 + \alpha_2). \quad (85)$$

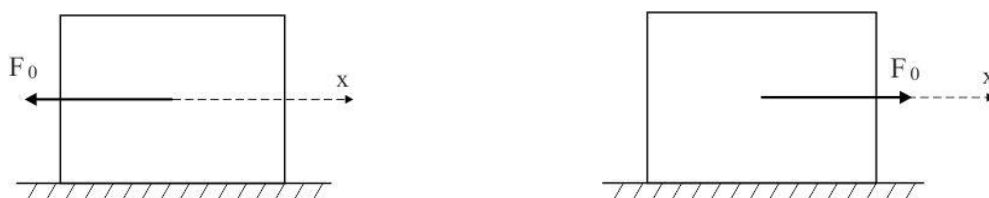
За решавање ових једначина (84) и (85) и одређивање t_1 и T_{\min} користимо компјутер и то математички пакет Mathcad14. Такође, при решавању трансцендентних једначина користимо једначине (81) и (82) за координате и брзине, као и раније једначине за одређивање k_1 , k_2 и осталих параметара.

II.7.3.1. Истраживање оптималног периодичног виброударног режима ударне (прве) масе за прву групу параметара система

Истражен је конкретан случај за следеће параметре:

$$\Delta = 0.1m, m_1 = 50kg, m_2 = 50kg, F_0 = 1000N, R = 0.7, \omega_x = 1s^{-1}, V_0 = 0.5m/s.$$

Прикажимо случај (72) графички, на сликама 12.а. и 12.б. приказан је правац и смер дејства силе F_0 . До времена прелаза (прекида) $0 < t \leq t_1$ (сл. 12.а) сила F_0 дејствује у супротном смеру од одабраног позитивног смера осе x , али у тренутку времена t_1 сила F_0 нагло мења свој смер, супротно, у смеру који се поклапа са позитивним смером осе x , и дејствује у интервалу времена $t_1 < t \leq T$ ($T = T_{\min}$) (сл. 12.б).

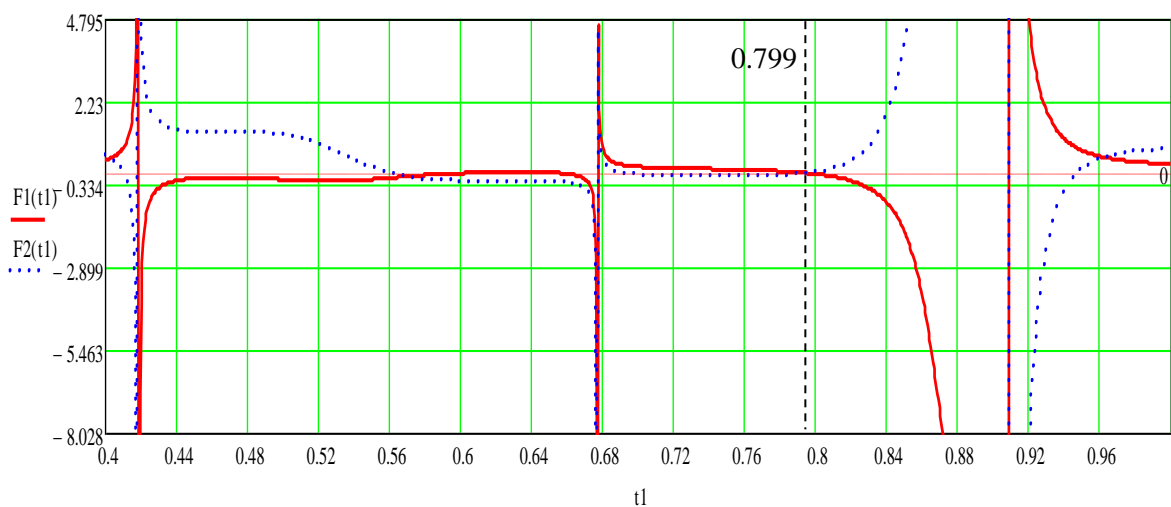


Слика 12. Правац и смер дејства спољашње принудне силе $F(t)$.

Слика 12.а. смер дејства силе F_0 на временском интервалу $0 < t \leq t_1$ до тренутка промене смера силе (тренутак прелаза t_1)

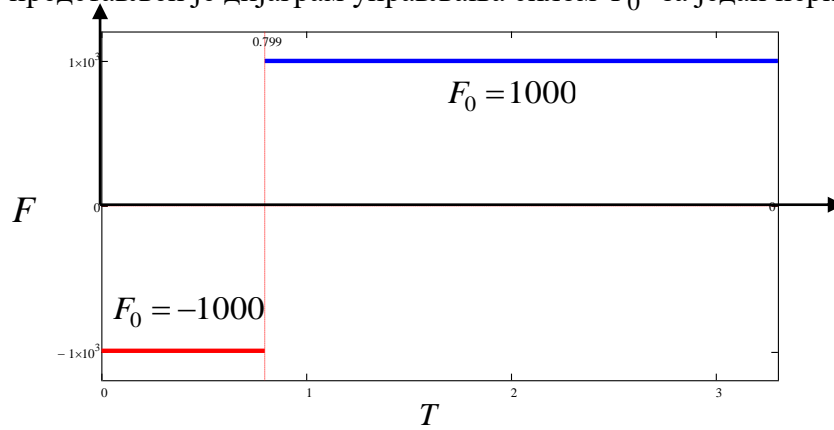
Слика 12.б. смер дејства силе F_0 на временском интервалу $t_1 < t \leq T$ после тренутка промене смера силе (тренутак прелаза t_1)

Када смо урадили неопходне прорачуне у Mathcad 14 израчунали смо време прелаза (прекида) $t_1 = 0.799s$ а цео период дејства силе је $T = T_{\min} = 3.301s$ (слика 13).



Слика 13. Графичко одређивање корена трансцендентне једначине.

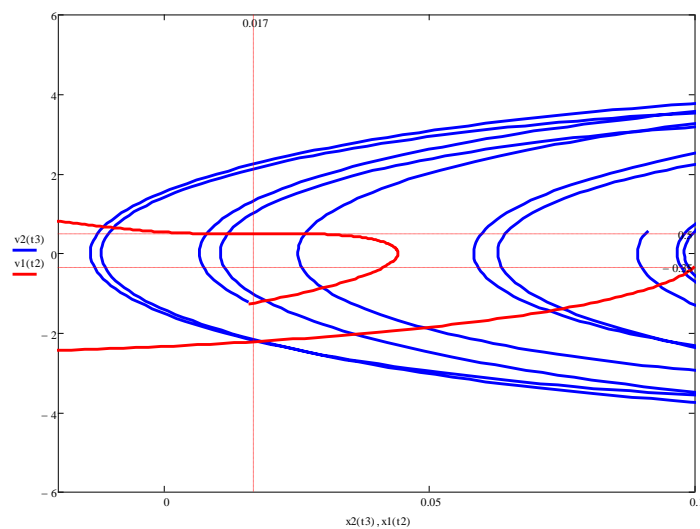
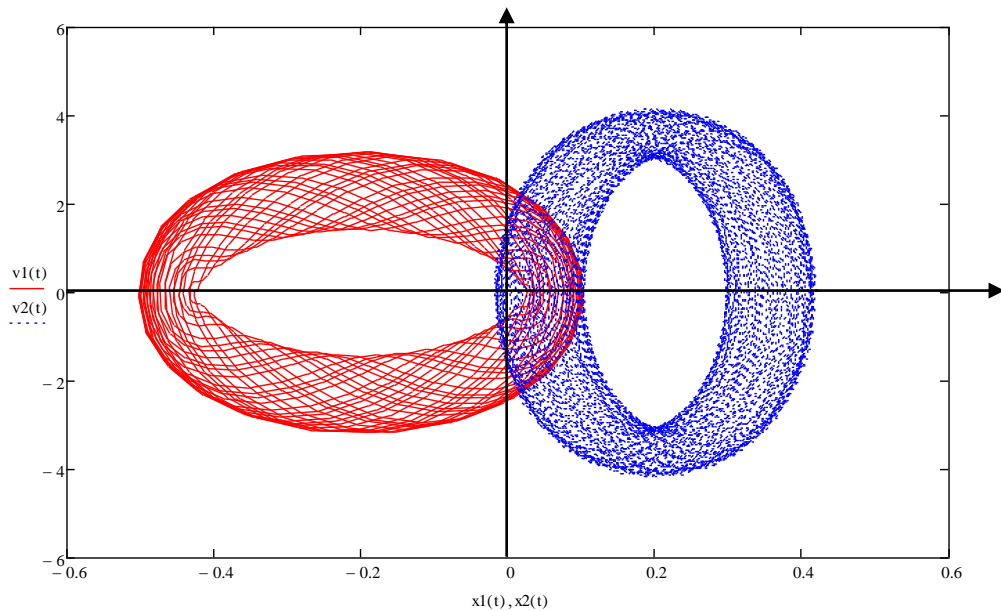
На слици 14 представљен је дијаграм управљања силом F_0 за један период $T = T_{\min}$.



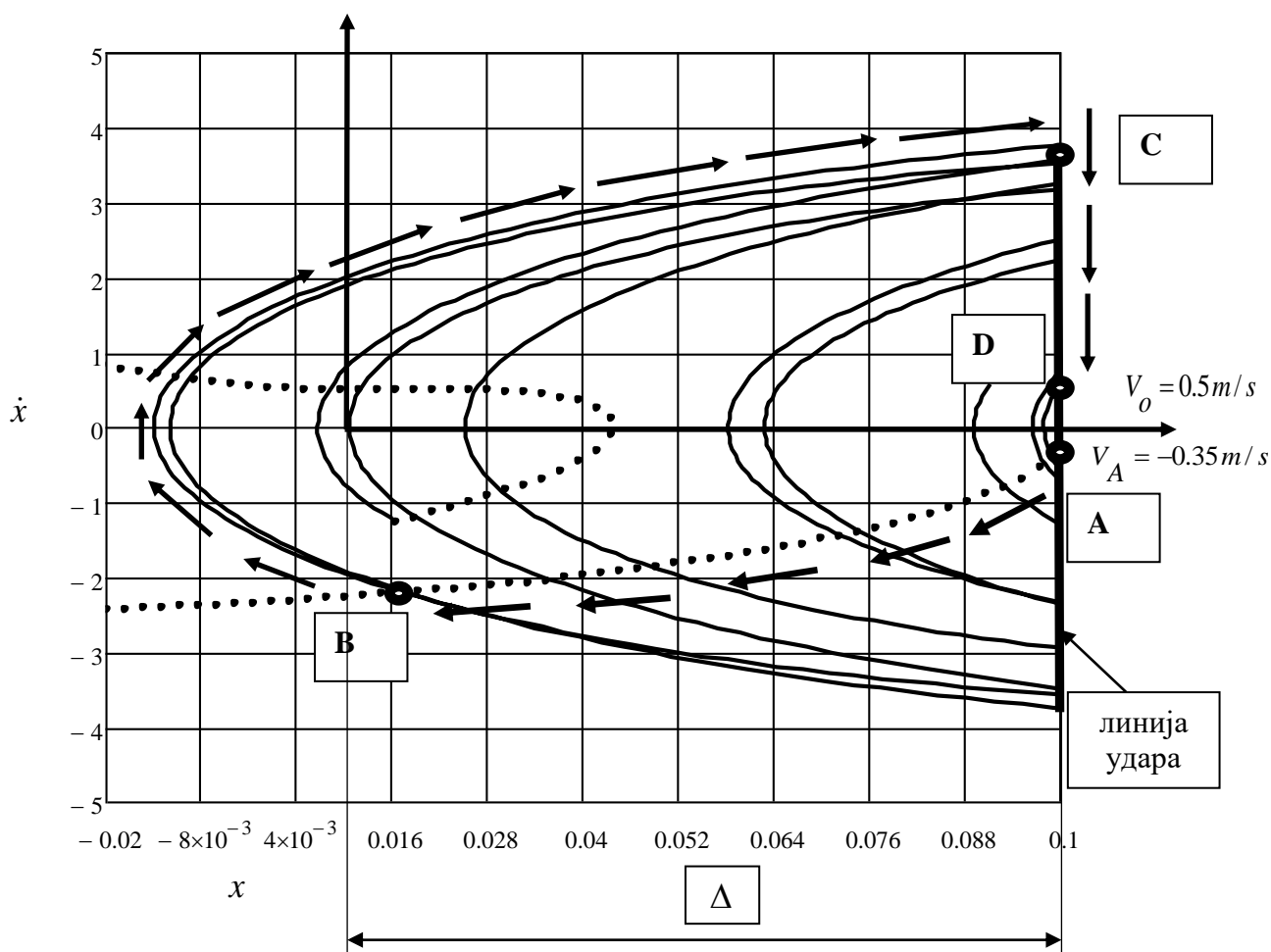
Слика14. Дијаграм управљања спољашњом принудном силом $F(t)$.

У Mathcad 14 нацртали смо оптимално кретање прве масе и оптималну трајекторију.

У наставку приказујемо два цртежа за конструисање оптималне фазне путање (сл. 15).



Трајекторија А-В-С-Д на слици 15 је оптимална трајекторија кретања прве масе.



Слика 15. Фазни дијаграм оптималног кретања прве масе између два удара

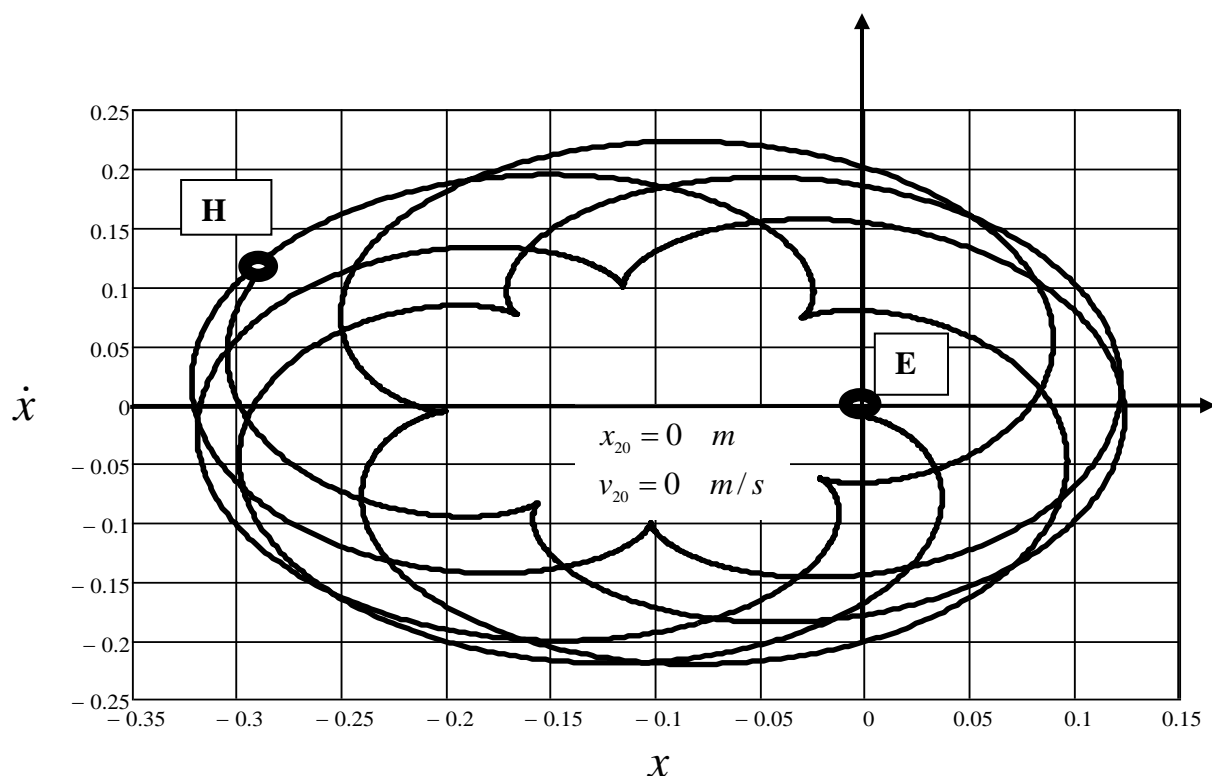
Тачка А на слици 15, одговара тренутку времена $t_0 = 0$ после удара терета о десни непокретни граничник, $v_A = -0.35 \frac{m}{s}$. У том тренутку времена спољашња принудна сила F_0 дејствује у смеру као што је то приказано на слици 12.а.

Тачка В на слици 15, одговара тренутку времена $t_1 = 0.799 s$ и у том тренутку времена спољашња принудна сила $F_0 = 1000N$ нагло мења свој смер, тј., има прелаз (прекид) и дејствује у смеру као што је то приказано на слици 12.б.

Тачка С на слици 15, одговара тренутку времена $T = T_{\min} = 3.301 \text{ s}$, брзина тачке је $v_C = 3.8 \text{ m/s}$ и тада маса нагло смањује своју брзину на вредност 0.5 m/s .

Тачка D на слици 15, одговара тренутку времена непосредно испред удара, када терет прилази непокретном граничнику, али се удар још није десио, $v_0 = 0.5 \text{ m/s}$. У том тренутку времена спољашња принудна сила F_0 мења смер и дејствује у смеру као што је приказано на слици 12.а.

У наставку објаснимо детаљно другу масу. За прву масу дати су прецизни гранични услови и детаљно понашање прве масе. Друга маса је посебан део система и карактер њеног кретања дефинисан је кинематиком процеса који се дешавају у систему. За другу масу познато је да она почиње своје кретање из стања мировања из почетне координате која је једнака нули. Карактер кретања друге масе није нам много интересантан, као што је интересантан утицај друге масе на кретање прве масе. На слици 16 приказан је фазни портрет кретања друге масе за време од једног периода кретања прве масе $T = T_{\min} = 3.301 \text{ s}$.



Слика 16. Фазни дијаграм кретања друге масе.

Кретање друге масе није ограничено зазором као код прве масе, кретање је ограничено карактеристикама система.

Тачка Е на слици 16, одговара тренутку времена $t_0 = 0$ када почиње кретање друге масе из почетног положаја $x_{20} = 0 \text{ m}$ са почетном брзином $v_{20} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Тачка Н на слици 16, одговара тренутку времена $T = T_{\min} = 3.301 \text{ s}$ и у овом тренутку друга маса је завршила хипоциклоидни циклус свог кретања за време T и долази у ову тачку са брзином $v_{2T} = 0.12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, координата друге масе тада је $x_{2T} = -0.29 \text{ m}$.

II.7.3.2. Истраживање оптималног периодичног виброударног режима ударне (прве) масе за другу групу параметара система

У наставку истражимо утицај друге масе на карактер оптимизације, тако што поновимо поступак за оптимизацију али са другим вредностима параметара система и те вредности су исте као у примеру са једном масом из наслова II.1.

У задатку са једном масом у наслову II.1. истражен је модел за следеће параметре:

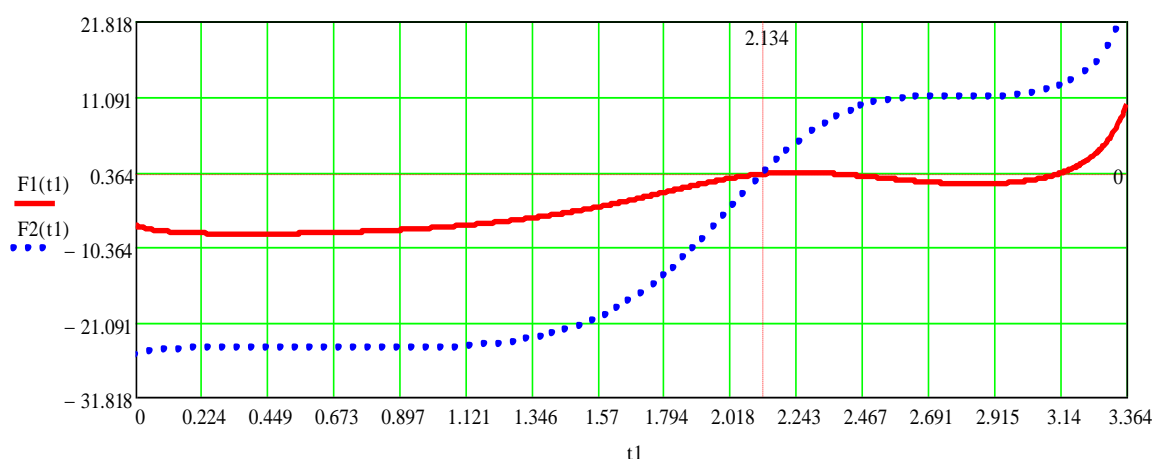
$$\Delta_x = 0.2\pi, \Delta = 1\text{m}, m = 1\text{kg}, F_0 = 2\text{N}, R = 0.7, \omega_x = 1\text{s}^{-1}, R = 0.7, V_0 = 1 \text{ m/s}.$$

У том моделу имали смо само једну масу. Истраживање је спроведено за мало пригушење где је $\Delta_x = 0.2\pi$. У овом задатку са две масе и са два степена слободe спроведено је истраживање када нема пригушења, тј. при потпуном одсуству пригушења $\Delta_{x1} = 0$ и $\Delta_{x2} = 0$. Како је пригушење веома мало у првом задатку са једном масом, то истраживање из првог задатка може се узети у обзир да би упоредили са динамичким процесима у овом задатку са два степена слободe.

За систем са два степена слободe спроводимо истраживање за следеће параметре

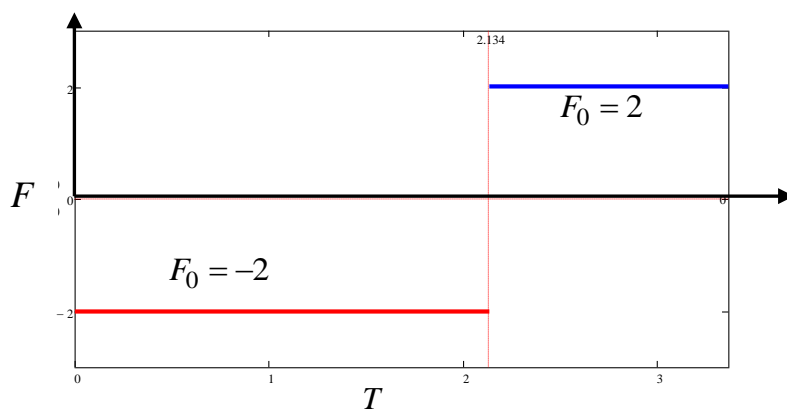
$$m_1 = 1\text{kg}, m_2 = 1\text{kg}, F_0 = 2\text{N}, R = 0.7, c_1 = c_2 = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}, V_0 = 1\text{m/s}.$$

Када смо урадили неопходне прорачуне у Mathcad 14, израчунали смо време прелаза (прекида) $t_1 = 2.134 \text{ s}$ а цео период дејства силе је $T = T_{\min} = 3.364 \text{ s}$ (слика 17).



Слика 17. Графичко одређивање корена трансцендентне једначине.

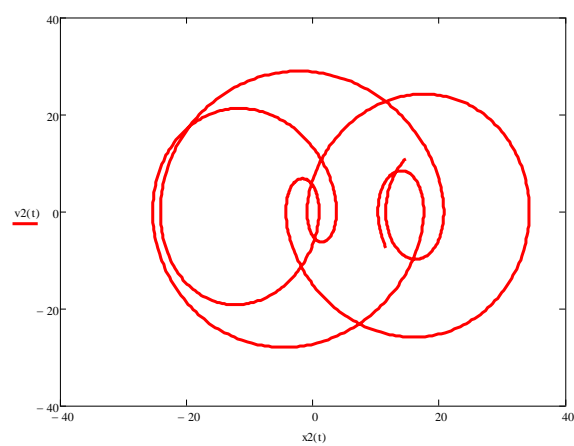
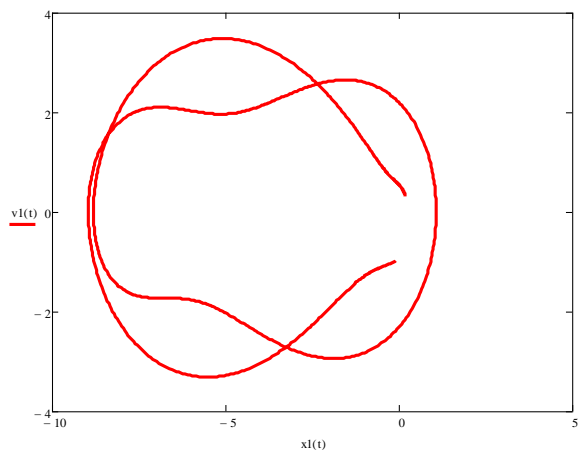
На слици 18 представљен је дијаграм управљања силом F_0 за један период $T = T_{\min}$.



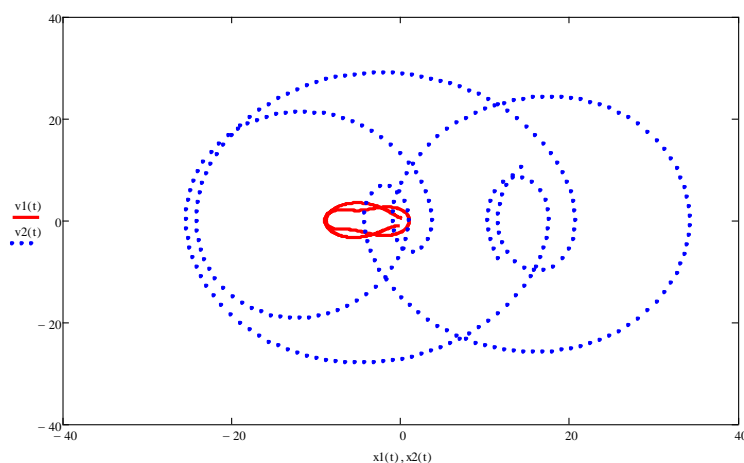
Слика18. Дијаграм управљања спољашњом принудном силом $F(t)$.

У Mathcad 14 нацртали смо оптимално кретање прве масе и оптималну путању.

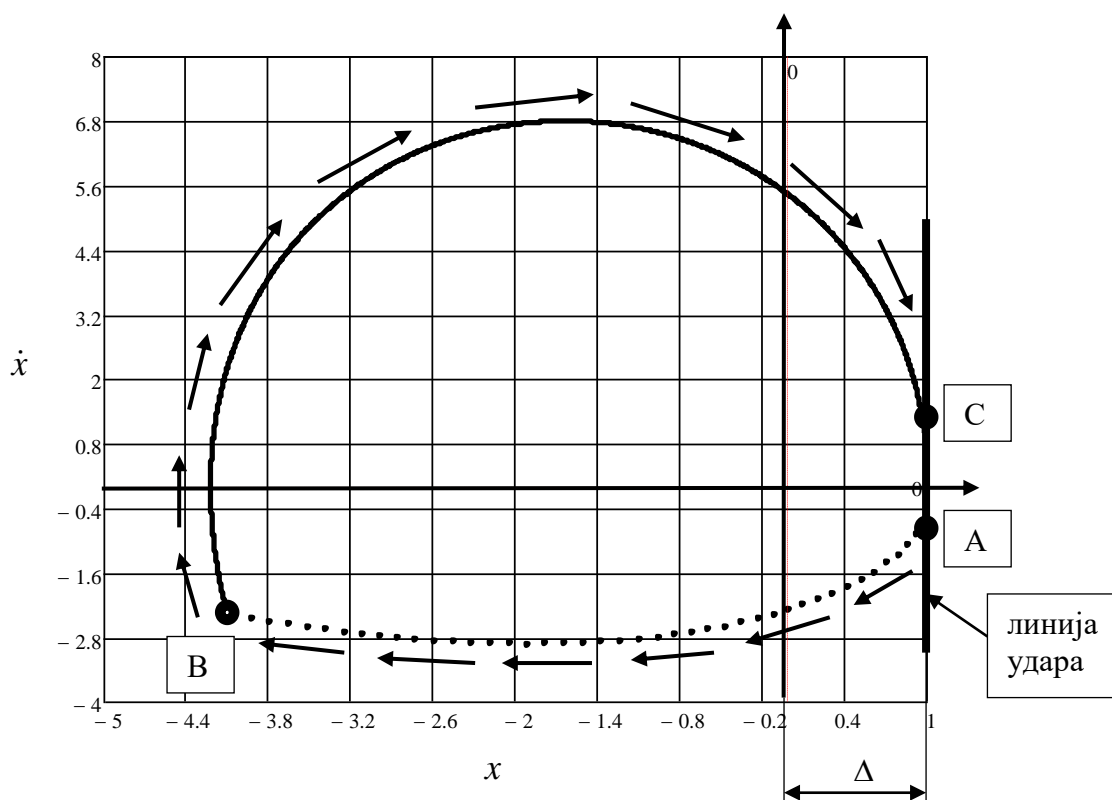
У наставку приказујемо потребне цртеже за конструисање оптималне фазне путање (слика 19).



Када претходна два дијаграма нацртамо заједно, добија се слика 19.



На слици 19 приказана је оптимална трајекторија кретања прве масе.



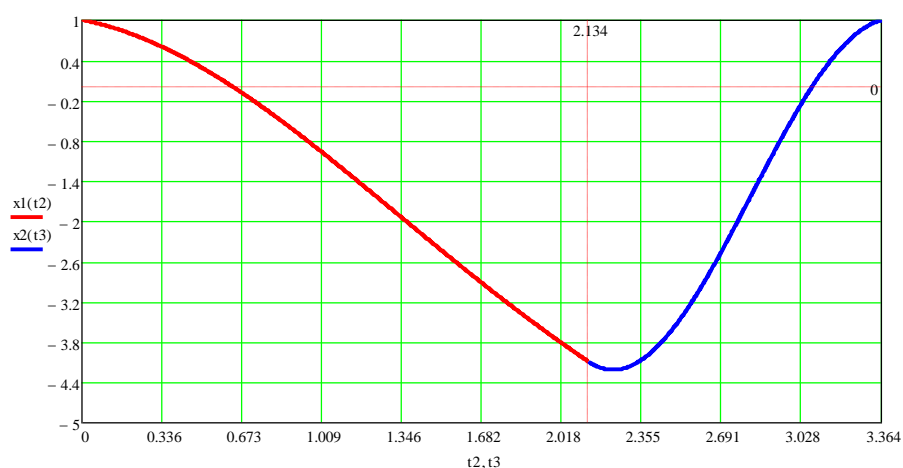
Слика 19. Фазни дијаграм оптималног кретања прве масе између два удара.

Тачка А на слици 19, одговара тренутку времена $t_0 = 0$ после удара терета о десни непокретни граничник, $v_A = -0.7 \frac{m}{s}$. У том тренутку времена спољашња принудна сила $F_0 = -2 N$, дејствује у смеру као што је то приказано на слици 12.а.

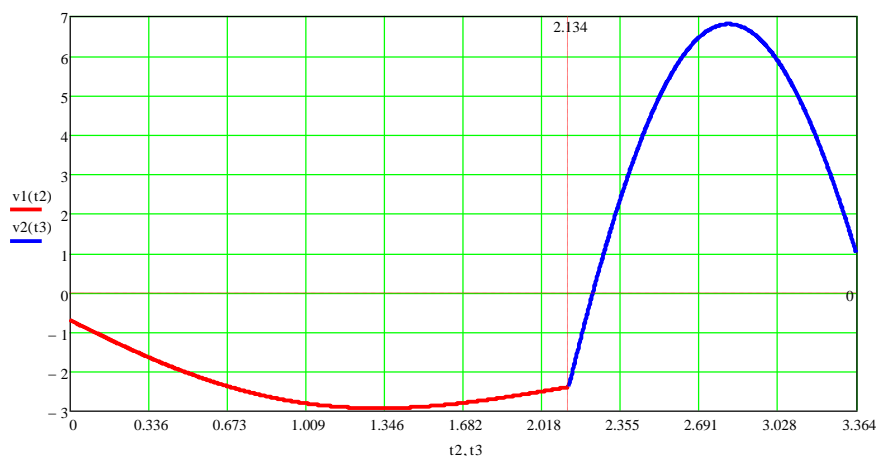
Тачка В на слици 19, одговара тренутку времена прелаза (прекида) $t_1 = 2.134$ s и у том тренутку времена спољашња принудна сила F_0 нагло мења свој смер, тј., има прелаз (прекид) и дејствује у смеру као што је то приказано на слици 12.б.

Тачка С на слици 19, одговара тренутку времена непосредно испред удара, када терет прилази непокретном граничнику, али се удар још није десио. У том тренутку времена спољашња принудна сила F_0 мења смер и дејствује у смеру као што је приказано на слици 12.а. Брзина у тачки С је $v_C = v_0 = 1$ m/s.

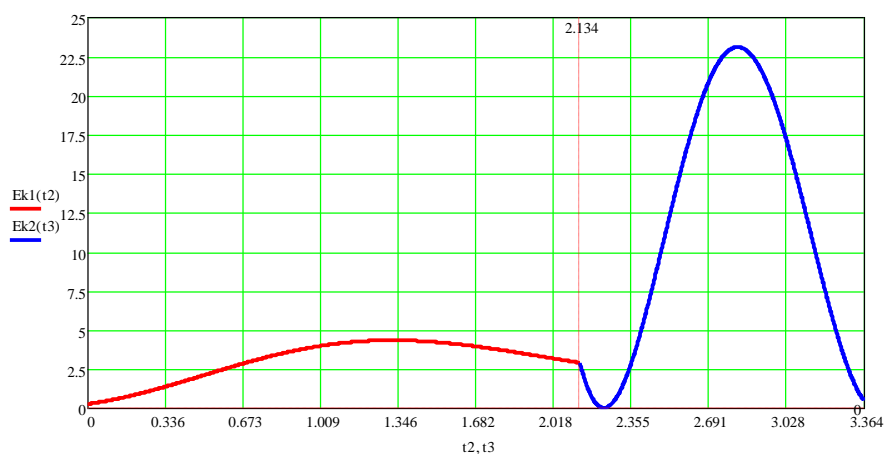
У наставку, за прву масу приказујемо графике функција $x = x(t)$, $v = v(t)$, $E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = E_k(t)$, $E_p = \frac{1}{2} c \cdot x^2 = E_p(t)$ у интервалу између два узастопна удара:



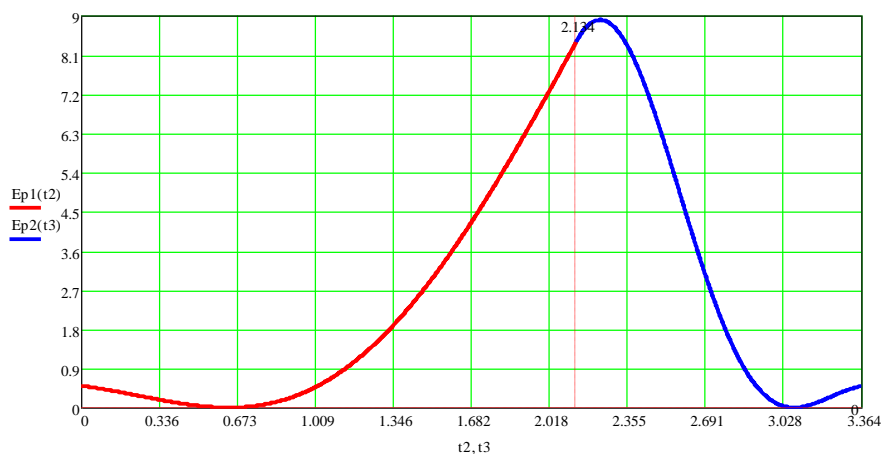
Слика 20.а. Координата у зависности од времена $x = x(t)$



Слика 20.б. Брзина у зависности од времена $v = v(t)$

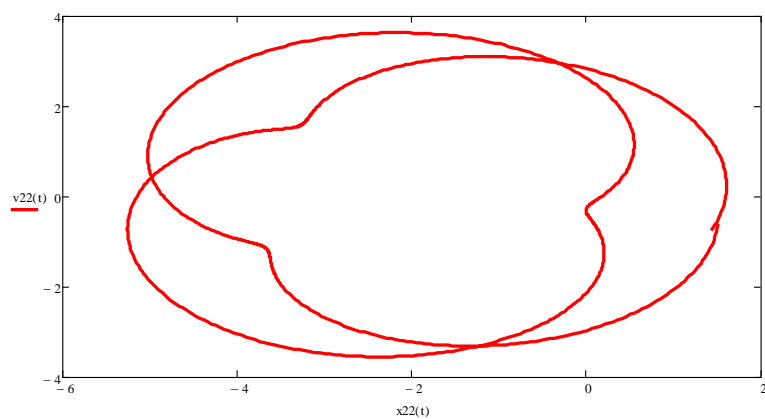


Слика 20.в. Кинетичка енергија у функцији времена $E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = E_k(t)$

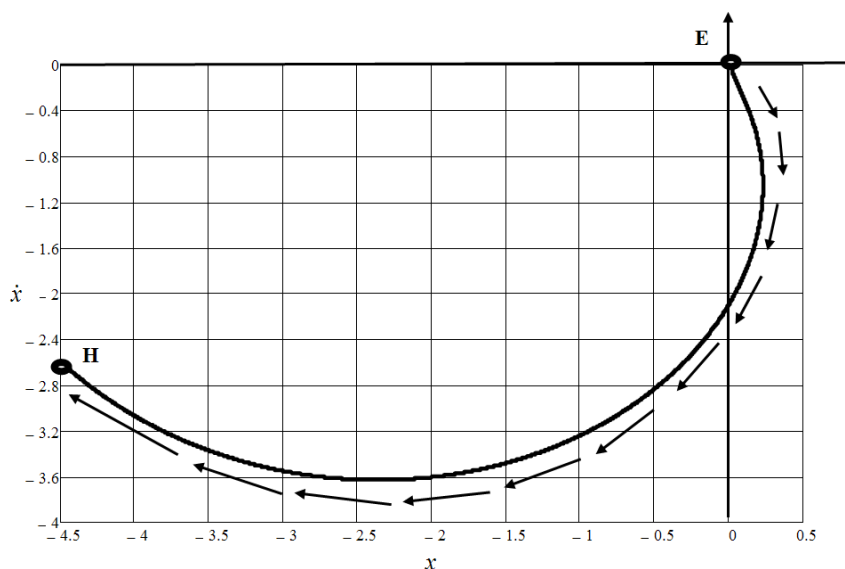


Слика 20.г. Потенцијална енергија опруге у функцији времена $E_p = \frac{1}{2} c \cdot x^2 = E_p(t)$

У наставку у Mathcad 14 нацртали смо кретање друге масе. Приказујемо потребан цртеж за конструисање фазног дијаграма на слици 21.



На слици 21 приказан је фазни дијаграм кретања друге масе.

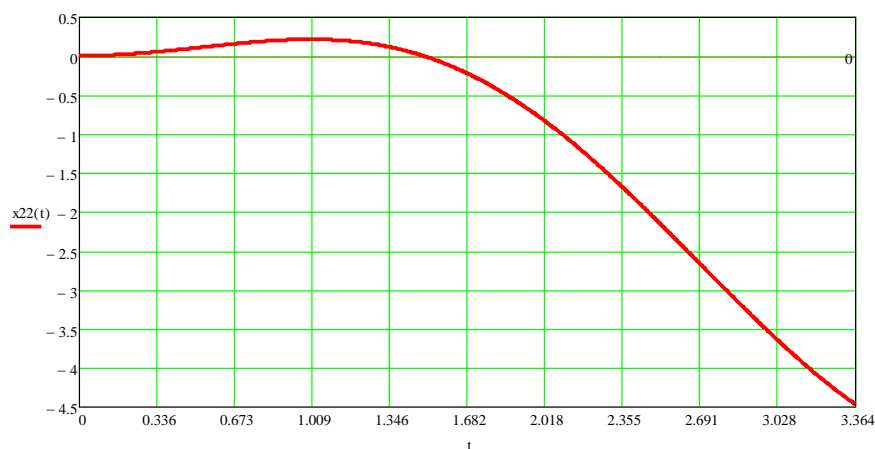


Слика 21. Фазни дијаграм кретања друге масе између два удара.

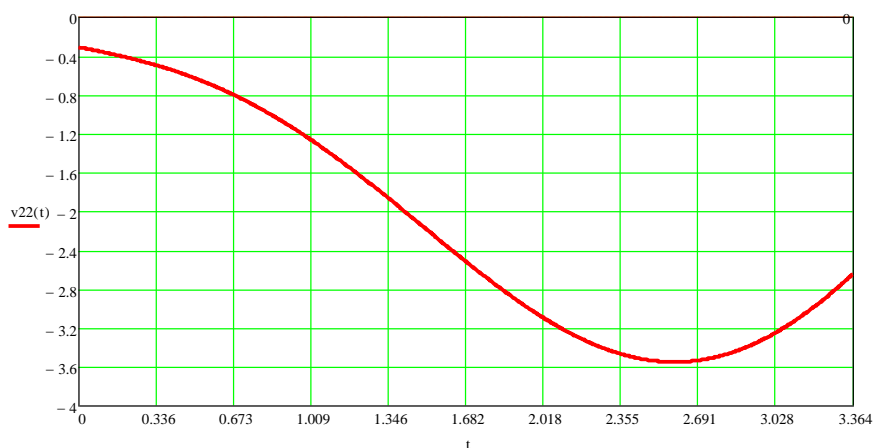
Тачка Е на слици 21, одговара тренутку времена $t_0 = 0$ када почиње кретање друге масе из почетног положаја $x_{20} = 0 \text{ m}$ са почетном брзином $v_{20} = 0 \frac{m}{s}$.

Тачка Н на слици 21, одговара тренутку времена $T = T_{\min} = 3.364 \text{ s}$ и у овом тренутку друга маса је завршила хипоциклоидни циклус свог кретања за време T и долази у ову тачку са брзином $v_{2T} = -2.648 \frac{m}{s}$, координата друге масе тада је $x_{2T} = -4.47 \text{ m}$.

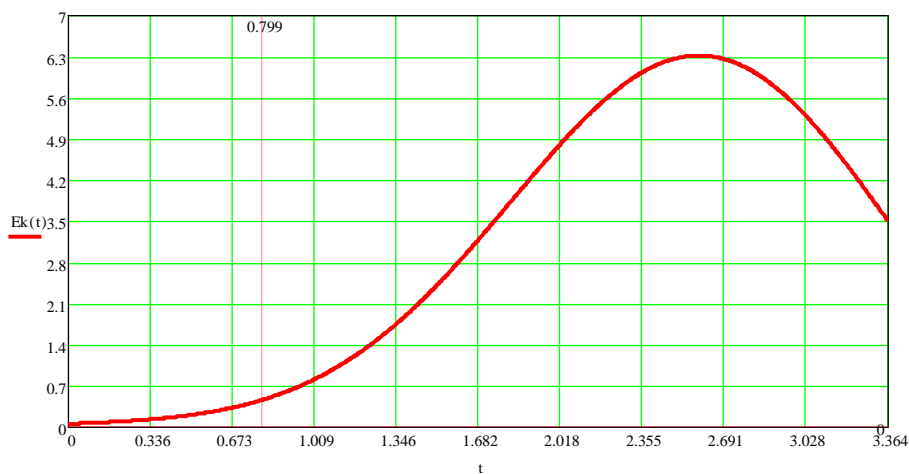
У наставку, за другу масу приказујемо графике функција $x = x(t)$, $v = v(t)$, $E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = E_k(t)$, $E_p = \frac{1}{2} c \cdot x^2 = E_p(t)$ у интервалу између два заустопна удара:



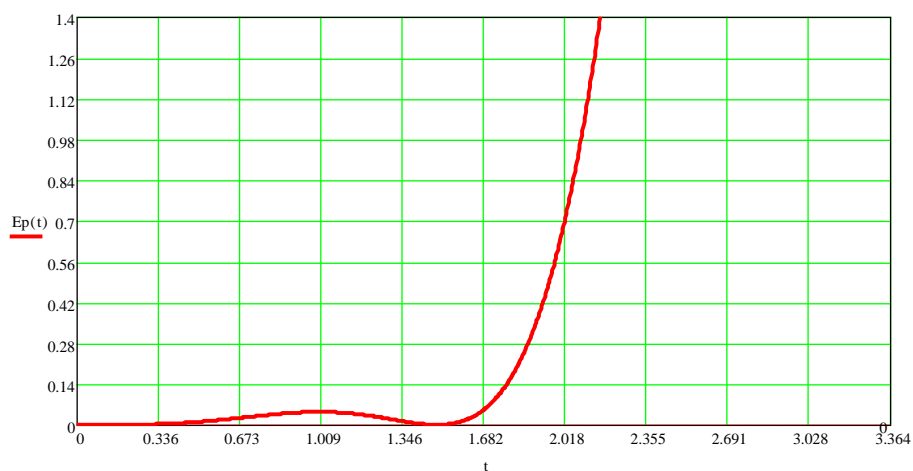
Слика 22.а. Координата у зависности од времена $x = x(t)$



Слика 22. б. Брзина у зависности од времена $v = v(t)$



Слика 22. в. Кинетичка енергија у функцији времена $E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = E_k(t)$



Слика 22. г. Потенцијална енергија опруге у функцији времена $E_p = \frac{1}{2} c \cdot x^2 = E_p(t)$

Анализа резултата истраживања и закључак

У овом примеру истражена је анализа и синтеза (оптимизација) кретања двомасеног једностраног ударног осцилатора са два степена слободе на слици 1, када се у систему реализује периодични виброударни режим. Кретање осцилатора је периодично са константним периодом T , а то је време између два узастопна удара. Виброударни осцилатор се креће под дејством спољашње периодичне принудне силе $F(t)$, која дејствује на прву масу. Истражено је кретање осцилатора у средини без вискозног отпора, тако да је сила пригушења (отпора) $F_w = 0$.

У првом делу задатка истражена је анализа кретања виброударног система помоћу математичког модела на слици 1. Истражена је могућност ударног процеса у зависности од различитих параметара, када су присутна веома мала пригушења за прву и другу масу која можемо занемарити, тј., задатак је истражен у средини без отпора. Додатна маса (друга маса) "омета" пуну реализацију виброударних режима који се понављају периодично, увек на исти начин. Са увођењем друге масе знатно су се сузиле области постојања вишеструких виброударних режима и области су се помериле десно. Тј., присуство друге масе смањује области где постоје периодични режими осцилација са једном масом, и успорава кретање прве масе.

Главни закључак састоји се у томе да са увођењем друге (додатне) масе и настанка система са два степена слободе, области постојања виброударних режима значајно мењају свој облик и знатно се смањују.

Раније смо истражили задатак са једном масом и са једним граничником и идентификовали неколико карактеристика у делу II.1. У односу на тај пример појава друге масе и система са два степена слободе, суштински мења изглед и карактер нашег система, и то се одмах види јер су промењени гранични услови. У односу на приказани пример са једним степеном слободе из дела II.1, у овом моделу са два степена слободе истраживање је компликованије и обимније. У виброударним режимима са једном масом и једним граничником показано је да постоје три области виброударних режима, а у овом примеру са два степена слободе показано је да постоје две области виброударних режима.

У другом делу задатка истражена је синтеза (оптимизација) модела на слици 1. Помоћу Понтрјагиновог принципа максимума одређен је оптимални закон управљања спољашном принудном силом F_0 , са циљем да се обезбеди оптимални закон кретања масе по времену, односно да за најкраће време T_{\min} обезбедимо померање масе из почетног положаја у крајњи положај (слика 15).

У наставку истражен је утицај друге масе на карактер оптимизације, тако што смо поновили поступак за оптимизацију али са другим вредностима параметара система и узели смо исте вредности као у примеру са једном масом из наслова II.1. Из добијених резултата за систем са два степена слободe види се да друга маса не "дозвољава" да се реализује оптималан процес у пуној мери и процес оптимизације је продужен у односу на пример са једном масом из наслова II.1.

Када смо истраживали систем са једном масом у наслову II.1., добили смо да је тачка прелаза (прекида) $t_1 = 0.112 \text{ s}$ и минимално (оптимално) време је $T = 1.655 \text{ s}$. Када додамо другу масу имамо следећу слику: не само да имамо повећање периода два пута (добили смо минимално време $T = T_{\min} = 3.364 \text{ s}$), него је порасла и вредност времена за тачку прелаза (прекида) $t_1 = 2.134 \text{ s}$. Из овога се јасно види да друга маса успорава прву масу.

РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА И ЗАКЉУЧАК

Како је у Уводу истакнуто предмет истраживања ове дисертације је динамика праволинијских неаутономних једномасених и вишемасених виброударних система са вискозним пригушењем или без отпора, са једним и два степена слободе. У дисертацији је постављена оригинална методологија за спровођење оптималне динамичке синтезе ове класе система уз захтев (са циљем) да се у систему реализује оптимални периодични виброударни режим. Методологија је приказана кроз седам примера, тј. модела.

Први пример у наслову **II.1.** приказује математички (динамички) модел хоризонталног једномасеног једнострано ударног осцилатора, и то је први основни модел. Приказано је, при каквим односима између параметара осцилатора и параметара принудне силе, могу се успоставити таква периодична кретања, при којима је период удара осцилатора о граничник једнак или је у сразмери са периодом спољашње силе. При томе је узето у обзир да је време удара у граничник мало у поређењу са периодом кретања осцилатора између два узастопна удара, и то време не мора да се узме у прорачуну. Посматран је бесконачни ударни процес са периодичним карактером, тј. период осциловања виброударног осцилатора је једнак или сразмеран периоду принудне силе.

У првом делу задатка истражена је анализа кретања виброударног система помоћу математичког модела на слици 1. Кретање система је периодично са константним периодом T , а то је време између два узастопна удара. Виброударни систем се налази под дејством спољашње периодичне принудне силе $F(t)$. Главни закључак састоји се у томе да што је мањи коефицијент вискозног отпора средине, то је шира област постојања ударних режима.

У другом делу задатка истражена је синтеза (оптимизација) модела на слици 1. Помоћу Понтрјагиновог принципа максимума, одређен је оптимални закон управљања спољашном принудном силом F_0 , са циљем да се обезбеди оптимални закон кретања масе по времену, односно да се за најкраће време T_{\min} обезбеди померање масе из тачке А у тачку С (слика 9).

Оригинални допринос у овом примеру:

А) У анализи је истражен виброударни систем са једноударним интеракцијама. Такви режими се највише користе у радним процесима и истражују се да би се проценили штетни и корисни ефекти интеракције. У општем случају, одређене су области постојања виброударних режима на основу услова периодичности. Истражена су три постојећа режима за овај пример и резултати су приказани на слици 3 и слици 3а, а који су добијени помоћу два математичка пакета: Matkad 14 и Wolfram Matematika 7. Дијаграм на слици 3 омогућава да се одреди фреквентни интервал реализације виброударног процеса када је позната вредност инсталационог зазора Δ .

Б) У синтези виброударног система, помоћу Понтрјагиновог принципа максимума, одређен је оптимални закон управљања спољашном принудном силом F_0 , са циљем да се обезбеди оптимални закон кретања масе по времену, односно да се за најкраће време T_{\min} обезбеди померање масе из тачке А у тачку С (слика 9). На овај начин спроведено је истраживање и дефинисан је оптимални закон управљања.

Други пример у наслову **II.2.** приказује истраживање оптимизације рада покретног дела виброчекића марке Daedong, чији изглед и принципијелна шема је представљена на слици 1. На слици 2 приказан је математички модел покретног дела виброчекића. Кретање система је периодично са константним периодом T , а то је време између два узастопна удара.

А) Није истражена анализа модела јер је прорачун исти као за хоризонтални једномасени виброударни осцилатор са непокретним граничником из наслова II.1.

Б) При синтези (оптимизацији) истражен је проблем оптимизације рада покретног дела виброчекића по времену, који се користи за забијање у земљу носача, шипова, цеви и других елемената. Основно истраживање приказано је на виброчекићу марке Daedong. У синтези виброударног система, помоћу Понтрјагиновог принципа максимума, одређен је оптимални закон управљања спољашњом принудном силом F_0 , са циљем да се обезбеди оптимални закон кретања масе по времену, односно да се за најкраће време T_{\min} обезбеди померање масе из тачке А у тачку D (слика 5 и слика 7).

Оригинални допринос у овом примеру:

При синтези виброударног система основно истраживање приказано је на виброчекићу марке Daedong, чије су конкретне вредности коришћене за прорачун. При прорачуну су коришћена два математичка пакета Matkad 14 и Matlab R2007.

Као резултат истраживања добијен је оптимални закон управљања принудном силом, који обезбеђује брзину удара покретног дела виброчекића без промене било ког параметра конструкције. Та сила мора бити регулисана системом аутоматског управљања у складу са законом који је представљен на графику (слика 4).

Овај закон може обезбедити смањење времена између два удара за два пута и то се добија на основу количника времена $k = \frac{T}{T_{\min}} = \frac{0.15 s}{0.07 s} = 2.14$, где је време између два узастопна удара $T = 0.15 s$, а минимално време (оптимално време) $T_{\min} = 0.07 s$.

То значи, на градилиштима за забијање цеви, шипова и разних предмета продуктивност се може удвостручити. Резултати неких испитивања виброчекића на терену показали су да је реално смањење времена једног удара за $k = 1.8$, а то се мало разликује од резултата који је добијен у овој дисертацији.

На овај начин у овом примеру спроведено је истраживање и дефинисан је оптимални закон управљања.

Трећи пример у наслову **II.3.** приказује истраживање синтезе (оптимизације) праволинијског неаутономног двомасеног виброударног система, који је настао спајањем два једномасена једнострано ударна осцилатора (слика 1). У овом примеру имамо ударне осцилаторе истог типа, који је динамички истражен у наслову II.1.

Оптимална динамичка синтеза обухвата три случаја:

Случај 1 -не мењамо конструктивне карактеристике, усвајамо Δ и мењамо F_2 ;

Случај 2 -не мењамо конструктивне карактеристике, задајемо F_2 и мењамо Δ ;

Случај 3 -мењамо и конструктивне карактеристике осцилатора.

Оригинални допринос у овом примеру:

У случају када спроводимо оптималну синтезу виброударног система насталог спајањем два једнострано ударна осцилатора (слика 1), до судара долази када је минимално (оптимално) T_{\min} време исто за оба подсистема. За леви подсистем (осенчени део на слици 2) узели смо познате податке из наслова II.1., а варирали смо параметре за десни подсистем. На сликама које приказују фазни дијаграм оптималног кретања два ударна осцилатора (слика 9, слика 14 и слика 16) види се да су оптималне путање левог и десног подсистема различите.

Четврти пример у наслову **II.4.** приказује математички (динамички) модел хоризонталног једномасеног виброударног осцилатора са два непокретна граничника, који су распоређени симетрично на две стране, и то је други основни модел.

У првом делу задатка истражена је анализа система, посебно је истражено кретање када је у диференцијалној једначини на десној страни само један члан принудне силе и посебно када принудна сила има k чланова. Прорачуном су добијени изрази који објашњавају периодична кретања, при којима је период удара осцилатора о граничник једнак или је у сразмери са периодом спољашње силе. Главни закључак састоји се у томе да што је мањи коефицијент вискозног отпора средине, то је шире подручје постојања ударних режима.

У другом делу задатка истражена је синтеза (оптимизација) модела на слици 1. Помоћу Понтрјагиновог принципа максимума, одређен је оптимални закон управљања спољашњом принудном силом F_0 , са циљем да се обезбеди оптимални закон кретања масе по времену, односно да се за најкраће време $T_{\min}/2$ обезбеди померање масе из тачке А у тачку С (слика 14 и слика 19).

Оригинални допринос у овом примеру:

А) У првом делу задатка истражена је анализа кретања виброударног система на слици 1, спроведен је оригинални прорачун при решавању диференцијалне једначине кретања система у интервалима између два узастопна судара. Прво је приказан прорачун када је на десној страни узет у обзир само први члан принудне силе. Затим је приказан прорачун када је на десној страни узето у обзир k чланова принудне силе. Посебно је истражено кретање када је непарно $l = 1, 3, 5, \dots$ и када је парно $l = 2, 4, 6, \dots$ У општем случају, одређене су аналитичке границе области постојања на основу услова периодичности. Истражени су постојећи режими за овај модел и резултати су приказани на сликама 4, 5, 8, 9 и 10, а који су добијени помоћу математичког пакета Matcad 14.

Б) У синтези (оптимизацији) система, помоћу Понтрјагиновог принципа максимума, одређен је оптимални закон управљања спољашњом принудном силом F_0 , са циљем да се обезбеди оптимални закон кретања масе по времену, односно да се за најкраће време $T_{\min}/2$ обезбеди померање масе из тачке А у тачку С (сл. 14 и сл. 18).

Овде су посматрана два периода.

Први период приказује кретање виброударног осцилатора од десног према левом граничнику, управљање је дато формулом (103) и на слици 14 приказан је фазни дијаграм оптималног кретања виброударног осцилатора. Други период приказује кретање виброударног осцилатора од левог према десном граничнику, управљање је дато формулом (102) и на слици 19 приказан је фазни дијаграм. На основу резултата који су добијени види се да су дијаграми симетрични, време прелаза (прекида) $t_1 = 0.76 \text{ s}$ је исто за оба периода, координата тачке прелаза (прекида) је једнака по апсолутној вредности за оба периода, брзина осцилатора у тачки прелаза (прекида) је једнака по апсолутној вредности за оба периода.

На овај начин у овом примеру спроведено је истраживање и дефинисан је оптимални закон управљања.

Пети пример у наслову **II.5.** приказује истраживање синтезе (оптимизације) праволинијски неаутономног двомасеног виброударног система, настао спајањем једномасеног обострано ударног осцилатора и једномасеног једнострано ударног осцилатора. У овом примеру приказани су ударни осцилатори различитог типа, који су динамички истражени у насловима II.1. и II.4.

Оптимална динамичка синтеза обухвата два случаја, не мењамо конструктивне карактеристике система и за две различите усвојене вредности растојања Δ варирамо силу F_2 .

Оригинални допринос у овом примеру:

У случају када спроводимо оптималну синтезу виброударног система настао спајањем једномасеног обострано ударног осцилатора и једномасеног једнострано ударног осцилатора (слика 1), до судара долази када је минимално (оптимално) време T_{\min} исто за оба подсистема. За леви подсистем (осенчени део на слици 2) узели смо познате податке из наслова II.4., а варирали смо параметре за десни подсистем. На сликама које приказују фазни дијаграм оптималног кретања два ударна осцилатора (слика 12 и слика 16) види се да су оптималне путање левог и десног подсистема различите.

Шести пример у наслову **II.6.** приказује истраживање синтезе (оптимизације) тромасеног виброударног система, настао спајањем једномасеног обострано ударног осцилатора и два једномасена једнострано ударна осцилатора (слика 1). У овом примеру приказана су три ударна осцилатора при чему су два различитог типа, који су

динамички истражени у делу II.1. и II.4. У наслову II.5. истражена је оптимална синтеза осенченог дела система на слици 2, и те резултате користимо да би приказали резултате за систем у овом наслову.

Оптимална динамичка синтеза обухвата два случаја, не мењамо конструктивне карактеристике система и за две различите усвојене вредности растојања Δ варирамо силу F_3 .

Оригинални допринос у овом примеру:

У случају када спроводимо оптималну синтезу виброударног система насталог спајањем три ударна осцилатора на слици 1, до судара долази када је минимално време T_{\min} исто за три подсистема. За осенчени део система (слика 2), узели смо познате податке из наслова II.5., а варирали смо параметре за леви подсистем. Када је $F_3 = 1.45N$, добили смо оптималне параметре за леви подсистем и завршили смо прорачун. На сликама које приказују фазни дијаграм оптималног кретања два ударна осцилатора (слика 5 и слика 8) види се да су оптималне путање сва три подсистема различите.

Седми пример у наслову II.7. приказује математички (динамички) модел двомасеног виброударног система са два степена слободе и без отпора, који се налази под дејством спољашње пероичне принудне силе $F(t)$, која дејствује на прву масу. То је трећи основни модел и први модел са два степена слободе кретања. Приказано истраживање је много компликованије и обимније у односу на претходне моделе са једним степеном слободе кретања.

У првом делу задатка истражена је анализа кретања система на слици 1, у зависности од различитих параметара и без пригушења, тј., задатак је истражен у средини без отпора. Додатна маса (друга маса) "омета" пуну реализацију виброударних режима који се понављају периодично. Кретање система је периодично са константним периодом T , а то је време између два узастопна удара. Додавањем друге масе знатно су се сузиле области постојања вишеструких виброударних режима и успорава се кретање прве масе.

У другом делу задатка истражена је синтеза система. Помоћу Понтрјагиновог принципа максимума, одређен је оптимални закон управљања спољашњом принудном силом F_0 , са циљем да се обезбеди оптимални закон кретања масе, односно да се за најкраће време T_{\min} обезбеди померање масе из тачке А у тачку D (слика 15).

Оригинални допринос у овом примеру:

А) У анализи модела истражено је кретање двомасеног виброударног система са два степена слободe и без отпора и при томе је спроведен оригинални прорачун при решавању диференцијалних једначина кретања модела у интервалима између судара. Истражено је кретање када је непарно $l = 1, 3, 5, \dots$ и када је парно $l = 2, 4, 6, \dots$. У општем случају, одређене су аналитичке границе области постојања на основу услова периодичности. Истражени су постојећи режими за овај модел и резултати су приказани на сликама од 2 до 10. Присуство друге масе смањује области где постоје периодични режими осцилација са једном масом, и успорава кретање прве масе.

Б) У синтези модела помоћу Потрјагиновог принципа максимума, одређен је оптимални закон управљања спољашњом принудном силом F_0 , са циљем да се обезбеди оптимални закон кретања масе, односно да се за најкраће време T_{\min} обезбеди померање масе из тачке А у тачку D (слика 15).

У овом примеру истражен је утицај друге масе на карактер оптимизације, тако што је за две групе параметара спроведена оптимална динамичка синтеза система. На основу добијених резултата види се да друга маса не "дозвољава" да се реализује оптималан процес у пуној мери и процес оптимизације је продужен у односу на пример са једном масом из наслова II.1.

Када смо истраживали систем са једном масом у наслову II.1. , добили смо да је тачка прелаза (прекида) $t_1 = 0.112 \text{ s}$ и минимално (оптимално) време је $T = 1.655 \text{ s}$. Када додамо другу масу имамо следећу слику: не само да имамо повећање периода скоро два пута (добили смо минимално време $T = T_{\min} = 3.364 \text{ s}$), него је порасла и вредност времена за тачку прелаза (прекида) $t_1 = 2.134$. Из овога се јасно види да друга маса успорава прву масу.

Кроз наведених седам примера - модела (укључујући и три основна теоријска модела) показали смо постављену оригиналну методологију и потврдили њен значај и као алгоритам. При томе смо: разматрали моделе који су апстракција реалних виброударних система; следили идеју да је систем линеаран у интервалима између судара; за решавање проблема оптималног управљања користили Понтрјагинов принцип максимума; и користили нове информационе технологије (софтверски алати-програми из софтверских пакета: Matkad14, MatlabR2007 и Wolfram Matematika7)

за прорачуне и графичку визуелизацију динамике виброударних система, за анализу и синтезу (оптимизацију) виброударних процеса.

Ова дисертација је оригинално научно дело. У целини представља не само оригиналну композицију на тему синтезе једне класе виброударних система, већ и приказ оригиналних резултата до којих је у истраживању дошао њен аутор. Оригиналност је достигнута систематизацијом познатих знања потребних за истраживање оптималне динамичке синтезе разматране класе виброударних система, за коју је коришћена литература високог универзитетског, научног садржаја кинетичких механичких система. Посебно се истиче графичка визуелизација у поступку конструисања дијаграма оптималног управљања спољашњом периодичном принудном силом и конструисање оптималне фазне путање система. Кроз разне визуелизације постављена је основа методологије лако применљиве у инжењерској пракси за анализу и синтезу реалних виброударних система, чија апстракција води ка неком од проучених модела виброударне динамике. Ова методологија, показана кроз седам примера, тј. модела, добија на значају и као алгоритам који олакшано води анализи и синтези кинетичких параметара виброударне динамике разматране класе система.

На основу резултата добијених у овој дисертацији на тему оптималне динамичке синтезе виброударних система, могу се наставити истраживања у више праваца. Први правац односи се на показивање ове методологије кроз сложеније системе, са више степени слободе, зашта би требало да се претходно спроведе анализа виброударних процеса за нове и сложеније теоријске моделе. Други правац односи се на примену друге методе (или других метода) теорије оптималног управљања виброударним системима: метода варијационог рачуна, метода момената, Рицова метода, Белманова метода, и друге методе. Било би корисно истражити исте примере помоћу две или три методе и упоредити добијене резултате. Трећи правац односи се на истраживање оптималне динамичке синтезе виброударних система са путањама које нису праволинијске и са косим сударом, итд.

С обзиром на добијене резултате и обим истраживања, ова дисертација може бити корисна истраживачима које интересује анализа и синтеза виброударних система.

Текст дисертације постављен је на 206 странице.

Л и т е р а т у р а

- [1] Алимов О.Д., Басов С.А., *Гидравлические виброударные системы*, Москва, 1990.
- [2] Алимов О.Д., Манжосов В.К., *Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах*, Москва, Наука, 1985.
- [3] Алабужев П.М., Стихановский Б.Н., Шпигельбург И.Я., *Введение в теорию удара*, Москва, Наука, 1970.
- [4] Асташев В.К., Крупенин В.Л., *Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах*, Москва, Наука, 1998.
- [5] Бабицкий В.И., *Теория виброударных систем*, Москва, Наука, 1978.
- [6] Бабицкий В.И., Коловский М.З., *Колебания линейной системы с ограничителями при случайных нагрузках*, *Механика твердого тела*, Но 3, Москва, 1967.
- [7] Бабицкий В.И., Израилович М.Я., *Об оптимальных движениях виброударных систем*, Москва, 1978.
- [8] Бабицкий В.И., Коловский М.З., *Исследование колебаний линейной системы с ограничителями точными и приближенными методами*, Москва, 1967.
- [9] Бабицкий В.И., Крупенин В.Л., *Колебания в сильно нелинейных системах*, Москва, 1985.
- [10] Barat C.N., Popplewell N., *Several Similar Vibroimpact Systems*, *Journal of Sound and Vibration*, 1987., 113, pp. 17-28.
- [11] Barat C.N., Sancar S., *Single Unit Impact Damper in Free and Forced Vibration*, *Journal of Sound and Vibration*, 1985, 99, pp. 85-94.
- [12] Barat C.N., *Periodic Motions of Impact Oscillator*, *Journal of Sound and Vibration*, 1998.
- [13] Barat C.N., *Impact-Pair under Periodic Excitation*, *Journal of Sound and Vibration*, 1988.
- [14] Бауер К., *Устойчивость вынужденных колебаний двухмассеной виброударной системы*, *Вибротехника* 3, 1978.
- [15] Берзиньш Я.П., Виба Я.А., *Исследование вибромолота с кусочно постоянным возбуждением*, Москва, 1973.
- [16] Беспалова Л.В., *К теории виброударного механизма*, Новосибирск, 1967.
- [17] Беспалова Л.В., Неймарк Ю.И., Фейгин М.И., *Динамические системы с ударными взаимодействиями и теория нелинейных колебаний*, Москва, 1976.

- [18] Бидерман В.Л., *Теория механических колебаний*, Москва, 1980.
- [19] Блехман И.И., *Исследование процесса вибрационных забивки свай и шпунтов*, Киев, 1968.
- [20] Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю., *Вибрационное перемещение*, Москва, 1964.
- [21] Болтянский В.Г., *Математические методы оптимального управления*, Москва, Наука, 1969.
- [22] Болтянский В.Г., *Оптимальное управление дискретными процессами*, Москва, Наука, 1973.
- [23] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., *Асимптотические методы в теории нелинейных колебания*, Москва, 1958.
- [24] Быховский И.И., *Основы теории вибрационной техники*, Москва, 1969.
- [25] Виба Я.А., *Оптимизационный синтез виброударных систем*, Рига, 1988.
- [26] Виба Я.А., *Синтез одностороннего виброударного транспортера*, Рига, 1970.
- [27] Виба Я.А., *Определение параметров реального закона движения одноударного вибрационного лотка*, Рига, 1971.
- [28] Виба Я.А., *Синтез двухстороннего виброударного транспортера с неподвижным упором*, Рига, 1971.
- [29] Виба Я.А., *Вопросы синтеза одноударного вибротранспортера с негармоническим возбуждением*, Рига, 1972.
- [30] Виба Я.А., Кузнецов Г.В., *Оптимальное быстроедействие одномассового вибромолота с учетом сил сухого трения*, Рига, 1976.
- [31] Виба Я.А., Кузнецов Г.В., *Возбуждение вибромолота оптимальным изменением жесткости упругой связи*, Рига, 1976.
- [32] Виба Я.А., Кузнецов Г.В., *Оптимальное параметрическое возбуждение горизонтального вибромолота*, Рига, 1977.
- [33] Виба Я.А., Кузнецов Г.В., Фридман Э.Г., Белостоцкий В.К., *Вибромолот*, Рига, 1978.
- [34] Виба Я.А., Лавендел Э. Э.
Двухмассовый ударный привод вибротранспортирующего устройства, Рига, 1967.
- [35] Вујановић Б., *Динамика*, Универзитет у Новом Саду, 1992.
- [36] Грабовкий А.В., *Расчетно экспериментальные определение сил ударного взаимодействия в виброударных системах*, Москва, 2006.

- [37] Garić Ljubiša, “*Analysis of Vibro-Impact Processes of a Single-Mass System with Viscous Damping and a Single Limiter*“, Transactions of FAMENA, Vol.41 No.3, 16 pages DOI: 10.21278/TOF.41303 , ISSN 1333-1124, eISSN 1849-1391 (Online First), 2017.
[SCI] RG Journal Impact: 0,5
Категоризација: M23
http link: <http://hrcak.srce.hr/187772>
- [38] Dimentberg, M.F., Menyailov, A.I., *Response of a Single-Mass Vibro-impact System to White-Noise Random Excitation*, Zamm (Germany) 59, pages 709–716, 1979.
- [39] Dimentberg M.F., Menyailov A.I., *Responce Analysis of Vibroimpact Systems with Random Exitation*, Studies in Applied Mechanics, Volume 14, pages 87-99, Moskva, 1986.
- [40] Đurić S., *Mehanika III i IV Dinamika i Teorija oscilacija*, Mašinski fakultet Beograd, 1981.
- [41] Douglas B., *The Experimental Responce of an Impacting Pendulum System*, International Journal of Non-linear Mechanics, Volume 25, No 4, pp. 1-16, 1982.
- [42] Индриксон, Виба Я.А., *Исследование одномассового автоколебательного виброударного система*, Рига, 1972.
- [43] Израилович М.Я. *Элементы теории оптимального управления периодическими режимами виброударных систем. Системы, линейные в промежутках между соударениями*. Москва, Либроком, 2010.
- [44] Jović S., Raičević V., Garić Lj., *Vibro-Impact System Based on Forced Oscillations of Heavy Mass Particle Along a Rough Parabolic Line*, Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering, Volume 2012, Article ID 846390, 17 pages doi:10.1155/2012/846390, ISSN: 1024-123x, (Online First), 2012. [SCI] Impact Factor: 0.777.
- [45] Кильчевский Н. А. *Теория соударения твердых тел*, Киев, 1974.
- [46] Кищенко А.В., *Определение оптимальных значений параметров механизмов с использованием метода динамического синтеза*, Москва, 1978.
- [47] Кобринский А.Е., *Механизмы с упругими связями, Динамика и устойчивость*, Москва, 1964.
- [48] Кобринский А.Е., *Виброударные системы*, Москва, 1973.
- [49] Кобринский А.А., Кобринский А.Е. *Виброударные системы: Динамика и устойчивость*. Москва, 1973.

- [50] Коловский М.З., *Автоматическое управление виброзащитными системами*, Москва, 1976.
- [51] Красовский А.А., *Динамика непрерывных самонастраивающихся систем*, 1963.
- [52] Красовский А.А., *Теория управления движением*, Москва, 1968.
- [53] Крюков Б.И., *Динамика вибрационных машин резонансного типа*. Киев, 1967.
- [54] Крупенин В.Л., *Ударные и виброударные машины и устройства*, Вестник научно-технического развития, №4, 2009.
- [55] Крейнин Г.В., *Динамика машин и управление машинами*, Справочник, Москва, Машиностроение, 1988.
- [56] Лавендел Э.Э., *Вибрация в технике*. Москва, Машиностроение, 1981.
- [57] Лавендел Э.Э., *Динамический синтез вибромашин*, Рига, 1969.
- [58] Лавендел Э.Э., *Синтез оптимальных вибромашин*, Рига, 1970.
- [59] Лавендел Э.Э., Виба Я.А., *Задача об оптимальном быстродействии одномассового вибромолота*, Рига, 1973.
- [60] Лавендел Э.Э., Виба Я.А., *Особенности оптимального синтеза виброударных систем*, Рига, 1973.
- [61] Лавендел Э.Э., Виба Я.А., Мейерович А.А., *Способ управления режимом работы одномассового вибромолота*, Рига, 1975.
- [62] Лавендел Э.Э., Виба Я.А., Свердлин М.Я., *Вибропитатель*, Рига, 1975.
- [63] Лавендел Э.Э., Субач А.П., *Результаты экспериментального исследования удара с трением*, Рига, 1972.
- [64] Lieber P., and D. P. Jensen D.P., "An Acceleration Damper: Development, Design and some Applications," Transaction of the American Society of Mechanical Engineers, Vol.67, pp. 523-530, 1944.
- [65] Мирослав Ненадовић, *Метод оптимизације система*, Монографија, САНУ, 1980
- [66] Milanković M., *Nebeska mehanika*, Naučna knjiga, Beograd, 1935.
- [67] Митропольский Ю.А., *Нестационарные процессы в нелинейных системах*, Киев, 1955.
- [68] Mitropolyskiy Yu.A., Nguyen Van Dao, *Lectures on Asymptotic Methods of Nonlinear Dynamics*, Vietnam National University Publishing House, Hanoi, p. 494, 2003.
- [69] Митропольский Ю.А., Мосеев Б.И., *Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных*, Киев, 1968.

- [70] Митропольский Ю.А., *Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний*, Москва, 1964.
- [71] Митић С., *Виброударни системи*, монографија, Факултет заштите на раду, Ниш, 2006.
- [72] Неймарк Ю.И., *Теория вибрационного погружения и вибровыдерживания*, Москва, 1963.
- [73] Пановко Я.Г., *Введение в теорию механического удара*. Москва, Наука, 1977.
- [74] Понтрягин Л.С., *Принцип максимума*, Москва, 1998.
- [75] Понтрягин Л.С., *Принцип максимума в оптимальном управлении*, Москва, 2004.
- [76] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., *Математическая теория оптимальных процессов*, Москва, 1993.
- [77] Понтрягин Л.С., *Обыкновенные дифференциальные уравнения.*, Москва, 1983.
- [78] Radosavljević Lj., *Teorija oscilacija*, Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet, 1981.
- [79] Raičević V., *Mehanika - Statika*, Univerzitet u Prištini, FTN, Kosovska Mitrovica 2004.
- [80] Raičević V., Jović S., "Synthesis of the Nonlinear Elastic Characteristics in a System with Many Degrees of Freedom in Sinphase of Harmonious Oscillation", Facta universitatis, Series mechanics, automatics control and robotics, vol. 3, No 14, pp. 937-942, Univerzitet u Nišu, 2003.
- [81] Raičević V., Vasić Z., Jović S., "The synthesis of unlinear elastic characteristics in a system with more degrees of independency in the case of more harmonic oscillation", Facta universitatis. Series mechanics, automatics control and robotics, Niš, 2005.
- [82] Rašković P.D., *Mehanika I - Statika*, Naučna knjiga, Beograd, 1973.
- [83] Rašković P.D., *Mehanika II- Kinematika*, Zavod, Beograd, 1966.
- [84] Rašković P.D., *Mehanika III - Dinamika*, Naučna knjiga, Beograd, 1962.
- [85] Rašković P.D., *Teorija oscilacija*, Naučna knjiga, Beograd, 1965.
- [86] Симић С., *Аналитичка механика - Динамика Стабилност бифуркације*, Нови Сад, 2006.
- [87] Фалдин Н. В., *Оптимизация систем управления*, Тула, 2000.
- [88] Foole S., Bishop S., *Dynamical Complexities of Forced Impacting Systems*, London, 1992.

Биографија

Датум рођења: 02/04/1963.

Место рођења: Пећ

Образовање:

Основно образовање стекао у основној школи „Вук Караџић“ у Клини 1976. године, средње образовање 1980. године у Гимназији у Пећи (усмерено образовање, математички смер) завршио са одличним успехом.

Машински факултет уписао 1982. године на Универзитету у Приштини, смер производно машинство. На истом факултету дипломирао 1987. године, са просечном оценом у току студирања 8 (осам) и оценом 10 (десет) на дипломском испиту.

Последипломске студије уписао 1991. на Машинском факултету Универзитета у Нишу, на Катедри за машинске конструкције и механизацију, где је положио све испите предвиђене планом и програмом последипломских студија. Магистарску тезу под називом „Прилог истраживању динамичких модела транспортних машина“ са успехом одбранио 1997. године на Машинском факултету у Нишу.

Радно искуство:

Радни однос први пут засновао у руднику боксита у Клини, септембра 1987. године. Од октобра 1987. године ради као асистент приправник, а од септембра 1997. године као асистент на Катедри за Теоријску и примењену механику Машинског факултета у Приштини, на предметима из области Механике.

У току рада на Машинском факултету у Приштини, а потом и на Факултету техничких наука у Косовској Митровици, ангажован је на одржавању вежби из следећих предмета: Статика, Кинематика, Динамика.

Лични подаци: Ожењен и отац једног детета.

Знање страних језика: говори руски и енглески језик

Информационе технологије:

MathCad, Matlab, Wolfram Matematika, Corel DRAW, Auto CAD, 3D Max.

Коаутор је помоћног универзитетског уџбеника:

Владимир Раичевић, Љубиша Гарић, Срђан Јовић:

Механика - ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ СТАТИКЕ, Факултет техничких наука у Косовској Митровици Универзитета у Приштини, 2004. године.

Објављени радови:

1. Ljubiša Garić , “*Analysis of Vibro-Impact Processes of a Single-Mass System with Viscous Damping and a Single Limiter*“, Transactions of FAMENA, Vol.41 No.3, 16 pages
DOI: 10.21278/TOF.41303 , ISSN 1333-1124, eISSN 1849-1391 (Online First), 2017.

[SCI] RG Journal Impact: 0,5

Категоризација: M23

http link: <http://hrcak.srce.hr/187772>

2. Ljubiša Garić, Šefik Bajmak, *Analiza i proračun uticaja temperature i pritiska radnog fluida na veličinu kompenzatora toplotnih mreža*, Procesing 2011, Međunarodni kongres o procesnoj industriji, Beograd, jun 2011. godine.

Категоризација: M63

3. Šefik Bajmak, Ljubiša Garić., *Analiza i proračun kombinovanog režima rada ejektora i centrifugalne pumpe u zavisnosti od toplotnog kapaciteta sistema grejanja*, Procesing 2011, Međunarodni kongres o procesnoj industriji, Beograd, jun 2011. godine.

Категоризација: M63

4. Jović S., Raičević V., Garić Lj., *Vibro-Impact System Based on Forced Oscillations of Heavy Mass Particle Along a Rough Parabolic Line*, Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering, Volume 2012, Article ID 846390, 17 pages
doi:10.1155/2012/846390, ISSN: 1024-123x, (Online First), 2012.

[SCI] Impact Factor: currently: 0.777.

Категоризација: M22

http link: <http://www.hindawi.com>

Укупне референце кандидата:

- ❖ укупан број радова са SCI листе: 2
- ❖ укупан број саопштења на скуповима: 2

Научно дело доступно јавности:

Љубиша Гарић, „Прилог истраживању динамичких модела транспортних машина“, магистарски рад одбрањен 1997. године на Машинском факултету у Нишу.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани др Љубиша Гарић, дипл. инж. машинства

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

„СИНТЕЗА ВИБРОУДАРНИХ СИСТЕМА“

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

Љубиша Гарић

У Косовској Митровици, _____

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора : др Љубиша Гарић, дипл. инж. машинства

Наслов рада: „ СИНТЕЗА ВИБРОУДАРНИХ СИСТЕМА “

Ментор: Проф. др Владимир Раичевић, дипл. инж. машинства

Потписани Љубиша Гарић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу Дигиталног репозиторијума Универзитета у Приштини, са привременим седиштем у Косовској Митровици.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Приштини, са привременим седиштем у Косовској Митровици.

Потпис докторанда

Гарић Љубиша

У Косовској Митровици, _____

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Приштини, са привременим седиштем у Косовској Митровици унесе моју докторску дисертацију под насловом:

„ СИНТЕЗА ВИБРОУДАРНИХ СИСТЕМА “

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

Гарик Ђубица

У Косовској Митровици, _____

1. Ауторство - Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.