

Univerzitet u Nišu
Mašinski fakultet

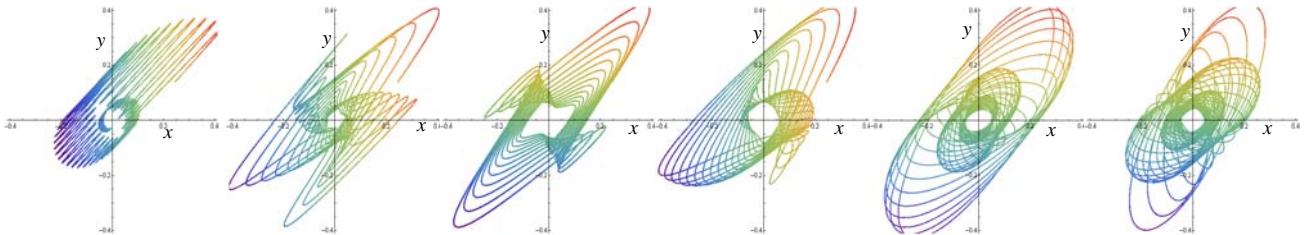


Mr Julijana D. Simonović

DINAMIKA I STABILNOST HIBRIDNIH DINAMIČKIH SISTEMA

(Dynamics and Stability of Dynamics Hybrid Systems)

Doktorska disertacija



MENTOR

Prof.dr Katica (Stevanović) Hedrih

Niš,
sept. 2009.- jan. 2011. (maj 2012.) godine.

Kada formiraš pogled na svet iz vizure teorije nelinearnih oscilacija-teorije haosa može ti se učiniti da haos oko tebe nema rešenje. Ovaj rad je moj originalni doprinos sređivanju haosa u glavi punoj znanja o nelinearnim fenomenima, sa ciljem da otvori puteve za dalja saznanja u toj oblasti, a takođe da čitaocu pomogne u shvatanju interakcija različitih oblika sprežanja oko nas.

Dok sam u svom svetu i nemam potrebu nikome da se objasnim zapravo sve je linearno uzročno posledično, no evo pojavila se potreba da Vama predstavim to što spoznah i tako dođe do interakcije- sprežanja iz kojeg pokušah da izvučem najvažnije zaključke.

Ni slovo ovoga rada ne bi postojalo da ne postoje interakcije moga bića sa mentorom profesoricom dr Katicom Hedrih, koja u najboljem svetlu osvetli sve redove ovoga rada i sa mojom predivnom porodicom koja izdrža sve udare haosa što ga pokušah objasniti.

Ovde na kraju dođe i do interakcije moga shvatanja fenomena nelinearnih nauka sa onim što Vi imate kao predstavu o tome. Moje su nade da iz te interakcije može izaći samo ono najbolje- profesionalni savet, primenjivo znanje ili jasniji pogled na haotičnu stvarnost.

Hvala

Mentoru,

Mojim roditeljima,

Suprugu i mojoj divnoj dečici

Za snagu koju imaju i dele samnom.

Sadržaj	I
Rezime	V
Summary	VII
Uvod	1
1* Pregled saznanja o hibridnim sistemima	11
1.1. Pregled savremene literature iz oblasti ključne reči hibridni sistemi sa aspekta inženjerskih pristupa	13
2* Pregled metoda za istraživanja	27
2.1. Ideja i osnovne pretpostavke asimptotskih metoda nelinearne mehanike	30
2.2. Metoda diskretizacije kontinuuma	36
2.3. Metode sinhronizacije i optimalnog upravljanja	37
2.3.1. Pregled savremene literature o upravljanju u sistemima sa prisutnim nelinearnostima	42
3* Hibridni sistemi	47
3.1. Hibridni sistemi spregnutih struktura statičkim vezama	49
3.1.1. Sprezanje oscilatora sa nelinearnim svojstvima i oscilatora sa linearnim svojstvima statičkom vezom	49
3.1.2. Sprezanje kontinualnog podsistema sa diskretnim podsistemom statičkom vezom	59
3.2. Hibridni sistemi struktura spregnutih dinamičkim vezama	64
3.2.1. Sprezanje oscilatora sa nelinearnim svojstvima i oscilatora sa linearnim svojstvima dinamičkom vezom	64
3.2.2. Sprezanje kontinualnog podsistema sa diskretnim podsistemom dinamičkom vezom	67
3.3. Hibridni sistemi struktura spregnutih naslednim vezama	72
3.3.1. Sprezanje oscilatora sa nelinearnim svojstvima i oscilatora sa linearnim svojstvima naslednim vezama	72
3.4. Hibridni sistemi struktura spregnutih slojem standardnih visko-elastičnih elemenata	76
3.4.1. Određivanje sopstvenih amplitudnih funkcija kružnih ploča	84

4* Interakcija nelinearnih dinamika i fenomena – sopstvene i prinudne dinamike.....	93
4.1. Fenomen prolaska kroz rezonantno stanje.....	93
4.2. Prinudne oscilacije hibridnih sistema oscilatora sa nelinearnošću.....	95
4.2.1. Prinudne oscilacije nelinearnog i linearnog oscilatora.....	95
4.2.2. Prinudne oscilacije nelinearnog i linearnog oscilatora spregnutih linernom oprugom.....	97
4.2.3. Prinudne oscilacije kontinualnog podsistema spregnutog sa diskretnim podsistemom dinamičkom vezom.....	98
4.3. Prinudne oscilacije sistema dve kružne ploče spregnute visko-elastičnim nelinearnim slojem.....	102
4.4. Analiza prinudnih oscilacija dinamičkih hibridnih sistema sa nelinearnošću.....	104
4.4.1. Stabilnost stacionarnog režima oscilovanja.....	106
5* Integritet hibridnih sistema i komponentnih dinamika.....	109
5.1. Matematički model dinamičkih sistema i nelinearne oscilacije.....	110
5.1.1. Egzistencija i jedinstvenost rešenja diferencijalnih jednačina.....	110
5.1.2. Linearni sistem.....	113
5.1.3. Nelinearni sistem.....	115
5.2 Diskretni dinamički sistemi	118
5.2.1. Linearne i nelinearne mape.....	118
5.2.2. Zatvorene orbite, Poincaré-ove mape i prinudne oscilacije.....	120
5.2.2.a) Oscilacije sa periodičkom prinudom.....	122
5.2.2. b) Nelinearni oscilator sa periodičkom prinudom.....	124
5.3. Asimptotsko ponašanje.....	128
5.4. Relacije jednakosti i strukturna stabilnost.....	129
5.5. Dvodimenzinalni tokovi.....	130
5.6. Metoda usrednjenja sa geometrijskog stanovišta.....	131
5.6.1. Metoda usrednjenja i Poincaré- ove mape.....	133
5.6.2. Primeri primene metode usrednjenja.....	135
5.6.3. Usrednjenje i lokalne bifurkacije.....	139
5.6.4. Metoda usrednjenja, Hamilton-ovi sistemi, i globalno ponašanje.....	140
5.6.5. Poremećaji homokliničkih orbita u ravni, Melnikov-ljeva metoda.....	142
5.6.6. Melnikov-ljeva metoda: Perturbacije Hamilton-ovih sistema i subharmoničke orbite.....	147
6* Energijska analiza dinamika hibridnih sistema.....	151
6.1. Energija sprezanja.....	151
6.2. Prenos energije u hibridnom sistemu	156
6.2.1. Prenos energije u hibridnom sistemu sprege linearnog i nelinearnog oscilatora statičkim i dinamičkim vezama.....	156
6.2.2. Prenos energije u hibridnom sistemu sprege linearnog i nelinearnog oscilatora naslednom vezom.....	159
6.2.3. Prenos energije u hibridnom sistemu ploča spregnutih visko-elastičnim nelinearnim slojem.....	161

6.2.4. Analiza prenosa energije u hibridnom sistemu dve kružne ploče spregnute slojem visko-elastičnih nelinearnih elemenata.....	166
7* Sinhronizacije u hibridnim sistemima.....	171
7.1. Pojam sinhronizacije.....	171
7.2 Sinhronizacija u hibridnim sistemima.....	180
7.2.1. Sinhronizacija spregnutih harmonijskih oscilatora –normalni modovi.....	180
7.2.2. Sinhronizacija spregnutih nelinearnih oscilatora.....	182
7.2.2.1. Linearni sistem upravljani signalom sinusnog oblika.....	185
7.2.2.2. Nelinearni sistem upravljani signalom sinusnog oblika.....	185
7.2.2.3. Nelinearni sistem upravljani drugim nelinearnim sistemom.....	185
7.2.2.4. Sinhronizacija upravljanjem dva spregnuta nelinearna oscilatora.....	186
7.2.3. Sinhronizacija u sistemu dva oscilatora spregnuta statičkim ili dinamičkim vezama.....	193
7.2.3.1. Linearni i nelinearni oscilator međusobno spregnuti statičkim vezama.....	193
7.2.3.2. Linearni i nelinearni oscilator međusobno spregnuti dinamičkim vezama.....	195
8* Optimalno upravljanje i upravljivost oscilacijama u dinamikama hibridnih sistema.....	199
8.1. Optimalno upravljanje u nelinearnim sistemima.....	199
8.2. Optimalno upravljanje mehaničkih sistema sa jednim stepenom slobode oscilovanja.....	204
8.2.1. Optimalno upravljanje kod mekih oscilatora.....	204
8.2.2. Optimalno upravljanje kod tvrdih oscilatora.....	208
8.3. Optimalno upravljanje u sistemima sa dva stepena slobode kretanja.....	212
9* Aktivne strukture i hibridni sistemi.....	221
9.1. Aktivne strukture.....	221
9.1.1 Piezoelektrični efekat.....	222
9.1.2. Piezokeramika i njena svojstva.....	222
9.1.3. Fizički modeli piezoelektričnih aktuatora.....	234
9.2. Model diskretnog piezokeramičkog elementa.....	235
9.3. Model Kelvin- Voigt -ovog piezo-visko-elastičnog naslednog elementa.....	237
9.4. Model Kelvin- Voigt -ovog piezo-visko-elastičnog naslednog elementa kao elementa veze u diskretnom hibridnom sistemu.....	238
9.5. Hibridni sistemi struktura spregnutih slojem standardnih piezo-visko-elastičnih naslednih elementa.....	240
9.6. Rezultati savremenih istraživanja u primeni aktivnih struktura.....	241

10* Numeričke simulacije dinamika i dinamičkih stanja hibridnih sistema, podsistema i sinhronizacija u njima. Vizuelzacija nelinearnih fenomena i energijskih transfera.....	247
10.1. Prolazak kroz rezonantni režim u stacionarnom stanju.....	249
10.2. Prolazak kroz rezonantni režim u nestacionarnom režimu oscilovanja.....	261
10.3. Numeričke simulacije sinhronizacija podsistema u hibridnim sistema ploča spregnutih visko-elastičnim nelinearnim slojem.....	266
11* Rezime o metodama i metodologiji izučavanja retkih svojstava i fenomena dinamike određenih klasa hibridnih sistema.....	273
12* Fenomenološko preslikavanje i matematička analogija među dinamikama hibridnih sistema.....	283
12.1. Analogija između frekventnih jednačina spregnutih longitudinalnih oscilacija elastične grede sa diskretnim sistemom materijalnih tačaka i spregnutih torzionih oscilacija elastičnog vratila sa odgovarajućim diskretnim sistemom diskova.....	286
12.1.1 Sprezanje kontinualnog i diskretnog podsistema statičkom spregom.....	286
12.1.2. Sprezanje kontinualnog i diskretnog podsistema dinamičkom spregom.....	287
12.2. Elektromehaničke analogije.....	288
12.3. Analogije u hibridnim sistemima spregnutih kontinualnih podsistema sistemima diskretnih kontinualno raspodeljenih standardnih lakih elemenata.....	290
13* Zaključna razmatranja- šta je originalno doktorant stvorio kao novo znanje o hibridnim sistemima.....	295
Literatura	307
Lista oznaka.....	325
Registar imena.....	329
Registar pojmova.....	331
Biografski podaci.....	335

Dinamika i stabilnost hibridnih dinamičkih sistema

UDC 531+534+517. 93(045)=111
UDC 531.3:531.3.011:532.511(045)=111

Rezime

Ovaj rad posvećen je rezultatima istraživanja dinamike i stabilnosti hibridnih dinamičkih sistema. U radu su prikazani i sistematizovni i osnovni rezultati drugih autora koji su bili startna osnova za dobijanje novih i originalnih rezultata. Predstavljena je klasa hibridnih sistema spregnutih: linearnih i nelinearnih oscilatora, kontinualnih i diskretnih podistema kao i kontinualnih podistema spregama elemenata različitih karakteristika i konstitutivnih relacija. Izvršena je sistematizacija analitičkih metoda i rezultata matematičkih modela dinamika predstavljenih hibridnih sistema. Ti rezultati su primenjeni na numeričku kvantitativnu analizu dinamike i stabilnosti hibridnih sistema i interreagujućih podistema. Predstavljene su: fenomeni nelinearnosti klasa hibridnih sistema sa nelinearnostima trećeg reda, kao što su prolazak kroz rezonantne opsege pri višefrekventnim prinudnim oscilacijama i pri stacionarnom i pri nestacionarnom režimu, karakteristične pojave rezonantnih skokova amplituda i faza, kao i međusobne interakcije komponentnih harmonika u tim režimima; pojave presecanja stabilnih i nestabilnih mnogostrukosti prikazane kroz presečne tačke tipa sedla u faznim ravnima dinamika takvih modela, kao i njihove fizičke manifestacije kao negativne pojave nestabilnosti i neregularnosti dinamika u ovakvim sistemima. Predložene su i metode optimalnog upravljanja, optimizacijom vrednosti Melnikov-ljeve funkcije, a radi izbegavanja neželjenih manifestacija prisutne nelinearnosti u sistemima. Identifikovane i opisane su karakteristične pojave diskontinualizacije frekventnog spektra dobijenih iz frekventnih jednačina kontinualnih podistema usled prisustva sprege sa diskretnim podsystemom sa jedne strane, kao i kontinualizacije frekventnog spektra diskretnog podistema sa druge strane, a to sve na osnovu kvalitativne analize dobijenih jednačina, kao i numeričkih eksperimentisanja, korišćenjem savremenih softverskih alata za naučno računanje, primenjenih za transformacije vizuelizacija analitičkih izraza frekventnih transcendentnih jednačina oscilovanja te klase hibridnih sistema za određivanje sopstvenih karakterističnih brojeva i frekvencija.

Opšte svojstvo sprezanja dinamika sistema jeste multipliciranje broja modova oscilatornih procesa uz njihove transformacije usled prisutne interakcije, a zavisno od prirode i broja spregnutih podistema, dok prisustvo nelinearnosti uslovljava i međusobnu zavisnost i interakciju komponentnih dinamika podistema, koje uslovljavaju dinamiku celokupnog hibridnog sistema, kao i jake interakcije komponentnih dinamika. Tako za primer hibridnog sistema spregnutih ploča slojem visko-elastičnih nelinearnih elemenata, rešavanjem odgovarajućih spregnutih diferencijalnih jednačina po vremenskim funkcijama, zaključuje se da prisustvo sprežućeg sloja između dve ploče uzrokuje udvajanje kružnih frekvencija u svakom od nm -oblika sopstvenih transverzalnih oscilacija ploča.

Metodama klasične teorije oscilacija deformabilnih tela izvedeni su sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina transverzalnih oscilacija sistema kružnih ploča spregnutih slojevima od raspodeljenih standardnih visko-elastičnih i nelinearno elastičnih elemenata. Za rešavanje sistema spregnutih nehomogenih parcijalnih diferencijalnih jednačina korišćena je Bernoulli-eva metoda partikularnih integrala, pri čemu je praktično vršena integracija rešenja u vidu beskonačnog reda po sopstvenim amplitudnim funkcijama, koje zadovoljavaju granične uslove. Izabrani redovi su morali da zadovolje jednačine kretanja i uslove kompatibilnosti pomeranja, kao i uslove metode jednakih koeficijenata primenjene na koeficijente uz jednake sopstvene amplitudene funkcije. Tako se zadatak sveo na rešavanje sistema običnih diferencijalnih jednačina u odnosu na tražene sopstvene vremenske funkcije. Pri tome, korišćeni su uslovi ortogonalnosti sopstvenih amplitudnih funkcija, kao i odgovarajući početni uslovi. Izvedeni sistemi spregnutih običnih nelinearnih diferencijalnih jednačina u modelima klasa hibridnih sistema sa nelinearnostima rešavani su primenom Lagrange-ove metode varijacije konstanta, ili asimptotskom metodom nelinearne mehanike – asimptotskom metodom usrednjenja Krilov-Bogoljubov-Mitropoljski, zavisno od oblika i svojstava dobijenih sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina. Za dobijanje partikularnih rešenja sistema diferencijalnih jednačina korišćeni su odgovarajući granični i početni uslovi, kao i odgovarajuće pretpostavke i ograničenja za primene određenih metoda, kao i njihova uopštenja koja su bila neophodna za primenu u istraživanju dinamika hibridnih sistema. Primenom Lyapunov-ljeve metode ispitivana je strukturna stabilnost, a primenom teorema o stabilnosti ispitivana je stabilnost stacionarnog režima, linearizacijom izvedenog sistema diferencijalnih jednačina prve asimptotske aproksimacije rešenja po amplitudama i fazama komponentnih harmonika u neprednoj okolini njihovih stacionarnih vrednosti.

Identifikovano je postojanje prenosa energije između podсистema vezanih u hibridne sisteme, pri čemu za analize prenosa energije u proučavanim modelima klasa hibridnih sistema korišćeni su izrazi za redukovane vrednosti kinetičke i potencijalne energije pripadajuće odgovarajućem podsystemu, izrazi za redukovane vrednosti kinetičkih, potencijalnih energija sprežućih elemenata, kao i funkcija rasipanja tipa Rayleigh-a. Pri analizi fenomena procesa prenosa energije u hibridnim sistemima izvedeni su i izrazi za Lyapunov-ljeve eksponente koji su dobijeni sa negativnim vrednostima, pa se zaključuje da su procesi oscilovanja kao i podproces interakcije među podsystemima strukturno stabilni, tako su Lyapunov-ljevimi eksponentima data svojstvo mera integriteta dinamike-kretanja sistema i podsystema, kao i komponentnih dinamika.

U globalnoj dinamici hibridnih sistema značajni su i uticajni oblici vremenskog usaglašavanja dinamika podsystema, što predstavlja sinhronizaciju u hibridnim sistemima. Predstavljeni su rezultati sopstvenih istraživanja pojave oblika atraktora potpune sinhronizacije u klasama diskretnih hibridnih sistema sa elementima statičkog i dinamičkog sprežanja. Određene su vrednosti koeficijenata sprežanja sistema vezama statičkog ili dinamičkog karaktera, koji obezbeđuju potpunu sinhronizaciju dinamike njihovih podsystema za izabrane klase hibridnih sistema. Do tih rezultata se došlo numeričkim rešavanjem specijalno izabranih primera dinamike i odgovarajućih diferencijalnih jednačina kretanja takvih sistema, korišćenjem savremenog softverskog alata za kontinualnu višeparametarsku transformaciju rešenja i odgovarajuću simultanu vizuelizaciju, i još su jedan originalni doprinos ovoga rada. Ispitivana je pojava sinhronizacije i u hibridnom sistemu sprege dva nelinearna oscilatora sa haotičnim atraktorima i otkriveno da je u tom slučaju lakše sinhronizovati podsysteme tj. potreban je mnogo manji koeficijent statičkog sprežanja, i do deset puta manji nego li u slučaju ista takva dva podsystema od kojih je jedan linearan. Kada su linearni i nelinearni podsystemi spregnuti dinamičkim elementima otkriveno je da sinhronizacija u ovakvim sistemima nije moguća. Postoji atraktor sinhronizacije koji daje prilično veliku grešku sinhronizacije, ali je posle izvesnog vremena drži ograničenom periodičnom funkcijom u uskom intervalu. Takođe, ispitan je uticaj nelinearnosti sprege, koeficijenata prigušenja i vrednosti amplituda spoljašnjih pobuda na mogućnost sinhronizacije u hibridnom sistemu ploča spregnutih visko-elastičnim nelinearnim elementima. Identifikovane su izvesne vizuelne sličnosti Lissajous-ovih figura i dijagrama harmonografa sa dijagrama sinhronizacije hibridnih sistema za određene vrednosti parametara podsystema i elemenata sprege.

Kao novi model aktivne strukture postavljen je model dve kružne ploče spregnute slojem piezo-visko-elastičnih nelinearnih elemenata. Izveden je sistem spregnutih parcijalnih diferencijalnih jednačina takvog modela i predložene su metode njegovog rešavanja i dobijanja rešenja, analogne onima korišćenim i za druge modele hibridnih sistema, gde je predloženo da promena napona polarizacije piezo-elemanta može da predstavlja upravljački signal realno potrebnog upravljanja.

Pokazano je i dokazano je da svi prikazani modeli i postavljena metodologija njihovog opisivanja apstrakcijom od realnih sistema i dinamika, kao i rešavanja imaju matematički analogne pristupe i fenomenološka preslikavanja, te je na kraju data sistematizacija i sastavljen pregledni rezime o metodama i metodologiji modeliranja, rešavanja i izučavanja retkih svojstava i fenomena dinamike klasa hibridnih sistema postavljenih i predstavljenih u ovoj disertaciji. To bi sagledavanjem svih rezultata do kojih je moguće doći ovim metodologijama trebalo da predstavlja još jedan, originalan i značajan, doprinos izučavanju, ne samo klasa hibridnih sistema postavljenih i predstavljenih u ovoj disertaciji, nego li i mnogo šire klase hibridnih sistema u čiji je matematički opis ukomponovano svojstvo nelinearnosti.

Deo finansijske podrške sticanju istraživačkih znanja, dolaženja do originalnih rezultata istraživanja i izradi ovog rada pružilo mi je Ministarstvo za nauku Republike Srbije kao istraživaču aktivne naučne kompetencije na projektima istraživanja svojstava i fenomena dinamike sistema složenih struktura i određenih klasa hibridnih sistema: 1828- Dinamika i upravljanje aktivnim strukturama (2002-2005), 1616- Realni problemi u mehanici (2002-2005), kao i ON144002 (period 2006-2010), pod rukovodstvom profesora dr Katice R. (Stevanović) Hedrih.

Ključne reči: hibridni dinamički sistem, podsystemi, komponentne dinamike, interakcija, nelinearnost, standardni visko-elastični nelinearni sprežujući element, udvajanje kružnih frekvencija, Bernoulli-eva metoda partikularnih integrala, asimptotska metoda usrednjenja Krilov-Bogoljubov-Mitropolskiy-kog, frekventne transcendentne jednačine, prenos energije, Lyapunov-ljevi eksponenti, asimptotska aproksimacija rešenja, strukturna i lokalna stabilnost, singularitet, fazni portret, prolazak kroz rezonantno stanje, rezonantni skok, numerički eksperiment, sinhronizacija, Melnikov-ljeva funkcija, optimalno upravljanje, naučno računanje, softverski alati, vizuelizacija, analogija.

Dynamics and Stability of Dynamics Hybrid Systems

Summary

This work dedicates to research results of dynamics and stability of dynamics hybrid systems. It contains the presentation and systematization of main results of the other authors which were the base for obtaining own new and original results. The following classes of hybrid systems are presented: coupled linear and nonlinear oscillators, coupled continual and discrete subsystems and coupled continual subsystems with different properties and constitutive relations of coupling elements. The analytical methods and results of mathematical models of presented hybrid systems dynamics are systematized and used for numerical quantitative analysis of dynamics and stability of presented hybrid systems and their subsystems in mutual inter-reaction. The phenomena of non-linearity in classes of hybrid systems with nonlinearities of third order are presented. Such a phenomenon are passage through the resonant regions in multi frequencies forced oscillation in stationary and no stationary regimes, the appearance of amplitude and phase resonant jumps, mutual interaction of component harmonics in that regimes, intersection of stable and unstable manifolds of saddle nodes in phase plains of dynamics in such a models, all of them are the source of negative physical representation of nonlinearity which brings the no stability and no regular dynamics of models. We proposed approach of optimal control in hybrid systems, by optimizing the values of Melnikov's functions that guarantee avoiding of such negative manifestation of nonlinearity in systems.

On the base of numerical calculation and quantitative analyses of analytical forms of transcendent frequency equations for obtaining characteristic numbers and frequencies in hybrid systems of coupled continual and discrete subsystems on present characteristic phenomenon of discretization in frequencies spectra of frequency transcendent equations corresponding to continual subsystems because of coupling with discrete subsystems and vice versa continualization of frequencies spectra of discrete subsystems.

General feature of dynamics systems coupling is multiplicity of oscillatory processes modes and their transformation under mutual interactions. The number of modes multiplicity depends of nature and number of subsystems while presence of non linearity generates the correspondence and mutual interaction of component subsystem dynamics creating the general hybrid systems dynamics. For example, the solutions of proper coupled differential equations on time functions of transversal oscillations of two plates coupled with viscous elastic nonlinear elements layer confide that presence of coupling layer causes doubling of circular frequencies in every of nm modes of own transversal oscillation of plate.

Applying the classical theory of oscillation of deformable bodies the systems of partial differential equations of transverse oscillations of circular plates systems coupled with distributed layer of viscous elastic nonlinear elements were obtained. The method of Bernoulli's particular integral is used for solving the systems of coupled non homogeneous partial differential equations (PDE), so that we practically integrate solutions in forms of infinite series of own amplitude functions satisfying proper boundary conditions and corresponding orthogonality conditions. Then we introduce that series into equations of motion and conditions of displacement compatibility and equating the coefficients beside equal own amplitude functions and obtained the system of ordinary differential equations (ODE) by unknown time functions. Thereat we use the orthogonally conditions of own amplitude functions like as the initial condition. The Lagrange's method of variation constants or asymptotic method of nonlinear mechanics - Krilov-Bogoliubov-Mitropolski's method is used to solve the systems of ODE depending of forms and features of obtained ordinary linear or nonlinear differential equations. The proper boundary and initial conditions and proper assumptions and limits are used for obtaining particular solutions of differential equations systems. The structural stability was investigated applying the Lyapunov's method and for stationary regimes stability we used the theorems of stability by linearization the obtained systems of solutions for amplitudes and phases of component harmonics in the first asymptotic approximation in the vicinity of stationary solutions.

The energy transfer between coupling subsystems of hybrid systems was identified. Using the obtained forms of reduced values of kinetic and potential energy of proper mode and proper subsystems, and potential like as kinetic energy of interaction between subsystems, and Rayleigh's function of dissipation at the interconnected elements the energy exchange of hybrid systems was analyzed. While analyzing the energies transfer the expressions of Lyapunov's exponents were obtained with negative values, so we conclude that process of oscillations like as sub-processes of interaction between subsystems are structurally

stabile, so like that we assign the Lyapunov's exponents like measure of of integrity of dynamics-motion of hybrid systems and their subsystems.

The synchronization in the hybrid systems is presented like form of time accordance in subsystems global dynamics. The results of own investigations of identical synchronization attractor shapes are presented in the classes of hybrid discrete systems with static and dynamics coupling elements. The values of static and dynamic coupling coefficients which guarantee identical synchronization of subsystems dynamics are determined for studied classes of hybrid systems. Those results are obtained from numerical calculating of proper differential equations systems for special choice examples of hybrid systems dynamics by using the software tools for continual multi parametric transformations of solutions and their visualizations; they are also original contributions of this dissertation. The identical synchronization of coupled nonlinear oscillatory hybrid system is investigated too where the possibilities of subsystems synchronization are much bigger. For example it is need ten time smaller coefficient of static coupling of two nonlinear oscillators with chaotic attractors then in the case of coupling linear and nonlinear oscillators with static coupling element. When the linear and nonlinear oscillators are coupled with dynamic coupling element the synchronization is not possible instead of that there exists attractor of synchronization with initially rather big values of synchronization error but after time of synchronization that error is the periodic function with small amplitude. The influence of nonlinearity of coupling elements, of dissipations and of external forces amplitude values on synchronization features are investigated too in the hybrid systems of plates coupled with viscous elastic nonlinear layer. The certain visual similarities of Lissajous's figures and harmonograph diagrams with diagrams of synchronization in hybrid systems are identified for proper values of system and coupling element parameters.

The model of two circular plates coupled with piezo-visco-elastic nonlinear layer is present like a new model of active structure. The system of coupled partial differential equations of such a model is derived and the methods of its solving and obtaining the results are proposed by analogy with ones used in the other models of hybrid systems. Here the exchange of polarization voltage on piezo element may present the control signal for real control required.

All presented models and proposed methodology of their describing by its abstracting from real systems and dynamics, like as their solving has the analogy mathematical approaches and phenomenological mappings. Since in the end of this dissertation on presents the systematization and overall resume of methods and methodologies of modeling, solving and studying the rare properties and phenomenon of dynamics in classes of hybrid systems. Introspection of all the results which are possible to get with proposed methodologies present one more original and meaningful contribution to studying not only the proposed classes of hybrid systems but also wider class of hybrid systems in which mathematical models possess properties of non linearity.

Acknowledgment. Parts of this research were supported by the Ministry of Sciences and Environmental Protection of Republic of Serbia through Mathematical Institute SANU Belgrade Grant ON144002 "Theoretical and Applied Mechanics of Rigid and Solid Body. Mechanics of Materials" and Faculty of Mechanical Engineering University of Niš. Special thanks to my supervisor prof.dr Katica R.(Stevanović) Hedrih.

Keywords: *hybrid dynamics system, subsystem, component dynamics, interaction, non linearity, standard viscous elastic nonlinear coupling element, doubling of circular frequencies, method of Bernoulli's particular integrals, Krilov-Bogoliubov-Mitropolski's asymptotic method, characteristic transcendent equation, energy exchange, Lyapunov's exponents, asymptotic approximation of solutions, global and local stability, singularities, phase portrait, passing through resonant regimes, resonant jump, numerical experiment, Melnikov's function, optimal control, synchronization, scientific calculation, software tools, visualization, analogy.*

Uvod

Doktorska disertacija pod nazivom „Dinamika i stabilnost hibridnih dinamičkih sistema” posvećena je otkrivanju i izučavanju fenomena i svojstava nelinearne dinamike u novopostavljenim modelima sistema spregnutih struktura, kojima se opisuju realni sistemi. Isto tako istraživanja su usmerena da se korišćenjem analitičkih metoda nelinearne mehanike, numeričkih metoda, kao i mogućnosti koje pružaju savremeni softverski alati postave i nove metodologije izučavanja pojedinih vrsta nelinearne dinamike takvih sistema i fenomena u njima. Da bi modeli što realnije opisali nelinearnu dinamiku stvarnih hibridnih sistema i strukturu spregnutih sistema biće uvršćene nelinearnosti matematički opisane kubnim članovima u odgovarajućim jednadžinama dinamike, a na osnovu analitičkih, kvalitativnih i kvantitativnih metoda rešavane, odgovarajućim kriterijumima ispitivana njihova svojstva i stabilnost i nestabilnost. Za pojedine klase postavljenih zadataka u nedostatku odgovarajućih analitičkih metoda ili njihove nedovoljne moći korišćene su numeričke metode, kao i softverski alati za takozvano “naučno računanje” da se promenom kinetičkih parametara sistema ispituju pojedina svojstva nelinearne dinamike (prolazak kroz rezonantno stanje, interakcija nelinearnih modova, rezonantni skokovi, sinhronizacije), što može pomoći u otkrivanju i razjašnjavanju nekih retkih fenomena i pojava u nelinearnoj dinamici, kao što su bifurkacije.

Pod pojmom hibridni dinamički sistem podrazumevaju se dinamički sistemi koji sadrže interakciju diskretnih i kontinualnih sistema, kao i sistema spregnutih polja, tako da će predmet istraživanja u ovome radu biti usmeren na otkrivanje svojstava i fenomena dinamike takvih sistema i njihovih podsistema, kao i interakcije među njima. Tipično za takve hibridne dinamičke sisteme je da sadrže spregnute podsisteme sa svojstvenim dinamikama i fenomenima, koji se, u uslovima različitih sprezanja podsistema menjaju, pri čemu dolazi i do transfera mehaničke energija sa jednog podsistema na drugi ili druge. Opisivanje dinamika i kinetike takvih sistema praćeno je sistemom spregnutih običnih ili parcijalnih diferencijalnih jednačina celog ili racionalnog reda.

Kroz trinaest poglavlja ove disertacije postavlja se i izučava se nekoliko originalnih modela realnih dinamičkih inženjerskih sistema, sa ciljem njihovog apstrahovanja do teorijski opštih modela hibridnih sistema složenih struktura i dinamika, spregnutih statičkim, dinamičkim i/ili visko-elastičnim elementima i strukturama, sa ciljem utvrđivanja hibridnih dinamika i svojstava nastalih u takvim složenim sistemima.

Na osnovu teorijskih modela hibridnih sistema, apstrahovanih realnih inženjerskih sistema i dinamika, kao i hibridnih biosistema, u radnim poglavljima 3-10 rasvetljavaju se fenomeni nelinearnih dinamičkih procesa, prenos energije kroz sistem, dok se u poglavljima 2 i 11 ističu doprinosi postojećim metodologijama istraživanja takvih sistema i postavljaju osnove nove metodologije istraživanja određenih klasa hibridnih sistema. Doprinos postojećim metodama i postavljanje nove metodologije istraživanja određenih klasa hibridnih sistema su značajan doprinos teoriji takvih sistema.

Na bazi postojećih i u radu sumiranih rezultata proučavanja interakcije nelinearnih dinamika hibridnih sistema kroz modele mehaničkih sistema sastavljenih od njihovih podsistema i međusobnih interakcija, cilj rada je prikaz nelinearnih fenomena dinamike hibridnih mehaničkih sistema, kao i prikaz matematičkih modela koje bi se mogli koristiti za analizu stabilnosti, mogućnosti optimalnog upravljanja i sinhronizacije podsistema u spregnutim sistema. Jedan od ciljeva je i otkrivanje svojstava nelinearnih dinamika i ocena njihove osjetljivosti na poremećaje i spoljašnja dejstva, kao i efekata interakcije komponentnih procesa u nelinearnim spregama.

U prvom poglavlju prikazan je pregleda rezultata savremene literature. Kada se na internet pretraživaču ukuca pojam "hibridni dinamički sistemi" otvara se mnoštvo radova o savremenom shvatanju pojma hibridni dinamički sistem i mogućnosti njegovog matematičkog opisivanja, identifikacije, strukturne analize i donošenja zaključaka o njegovoj dinamici i stabilnosti, kako lokalnoj tako i globalnoj-strukturnoj. Deo tih pogleda predstavljen je kroz prvo poglavlje. I pored mnoštva informacija koje se tako dobijaju, kao zaključak tog poglavlja nameće se da takvi sistemi nisu dovoljno izučeni, posebno kada su u pitanju nelinearni fenomeni i dinamike, pa sve to ukazuje da je opredeljenje i izbor teze doktorskih istraživanja i postavljenih ciljeva i aktuelno i naučno zasnovano. To je i bila ideja vodilja za naredna istraživanja, kao i naredna poglavlja sadržana u ovoj doktorskoj disertaciji. Neophodnost izučavanja nelinearnosti matematičkih modela spregnutih sistema otvara široku oblast koja nadmašuje okvire same disertacije, ali su u pojedinim poglavljima otvoreni i novi pravci istraživanja i date jasne smernice za buduća interesantna istraživanja u ovoj oblasti.

Kako ova disertacija predstavlja i sublimaciju svih mojih dosadašnjih znanja i logičan nastavak u primeni tih znanja za formiranje nove metodologije u izučavanju jedna klase hibridnih dinamičkih sistema, deo rezultata prikazan u mom magistarskom radu ovde će biti korišćen bez matematičkih izvođenja kako bi se uporedile određene klase hibridnih sistema i formirali opšti zaključci. Osnove asimptotske metode usrednjenja Krilov-Bogoliubov-Mitropolskiy-kog, [201, 202, 203], za rešavanje nelinearnih zadataka mehanike, koja će se koristiti u rešavanju modela hibridnih dinamičkih sistema predstavljenih u narednim poglavljima, date su u potpunosti i za diskretne i za kontinualne sisteme u mom magistarskom radu [259], dok se ovde, u okvirima drugog poglavlja, navedi principijelni prilaz toj metodi na najjednostavnijem i opštem obliku nelinearne diferencijalne jednačine, pri tome određujući osnovna svojstva koja mora da poseduju sistemi čiji se matematički model rešava ovom metodom, i izvedeći osnovne zaključke primene ove metode. U okvirima ovog poglavlja predstavljene su i metode sinhronizacije i optimalnog upravljanja koje su korišćene u istraživanju.

U trećem poglavlju predstavljeni su fizički i matematički modeli klasa hibridnih dinamičkih sistema, počev od modela sprezanja linearnog i nelinearnog oscilatora spregnutih statičkim ili dinamičkim vezama, preko modele sprezanja kontinualnih sistema sa diskretnim i to takođe statičkim i dinamičkim vezama, da bi na kraju ovog poglavlja bili prikazani primeri sprezanja struktura visko-elastičnim i naslednim elementima. Zaključak ovoga poglavlja od primera do primera svodi se na objašnjavanje postojanja interakcije dinamika podsistema zavisno od oblika veze koja je prisutna u sistemu i naravno od svojstava samih podsistema.

Četvrto poglavlje je logičan nastavak prethodnog u smislu upoređivanja sopstvenih dinamika hibridnih sistema i njihovog ponašanja pod dejstvom periodičkih prinudnih sila sa promenljivom frekvencijom. Prisutna nelinearnost u opisima hibridnih sistema uslovljava fenomen prolaska kroz rezonantno stanje, koji je u ovom poglavlju objašnjen zajedno sa pojmom rezonancije kod linearnih sistema.

Peto poglavlje u celosti se odnosi na pregled i definicije osnovnih pojmova koji se tiču svojstva dinamičkih, linearnih a naročito nelinearnih sistema i njihovih matematičkih modela, opisa i geometrijskih predstavljanja (interpretacija). Date su definicije pojmova strukturne stabilnosti sistema i integriteta klase hibridnih sistema sa nelinearnostima. Pri tome, najvećim delom preuzete su definicije, teoreme i dokazi iz monografije "Nelinearne oscilacije, dinamički sistemi i bifurkacije vektorskih polja" (*Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*), autora Guckenheimer J. i Holmes P. iz 1983. godine [50].

Kada govorimo o sprezi jednog ili više podsistema jasno je da prenos i raspodela energije u sistemu zavisi od svojstava samih podsistema i od svojstava elemenata sprege. Pomenuto je, u trećem poglavlju, da elementi sprezanja mogu biti statički, dinamički, visko-elastični, sa naslednim svojstvima i svaki od njih unosi poseban deo energije sprezanja u celokupni sistem. Tako da je kroz šesto poglavlje, koristeći izraze za energije sistema, sprezanja ili podsistema za najelementarnije oblike hibridnih sistema, prikazane u trećem poglavlju, izvršena analiza transfera energije. Sa stanovišta integriteta dinamičkog procesa veoma je važno analizirati energiju razdvojenih podsistema, kao posebnih sistema, upoređujući kinetičke parametre i svojstva dinamika razdvojenih podsistema i potprocesa u njima, i sprezanja tih podsistema i njihove interakcije, koje unose nove elemente u dinamike samih podsistema i naravno sasvim nova svojstva energije spregnutog hibridnog sistema.

Govoriti o spregnutim sistemima, a ne govoriti o nekom obliku usaglašavanja podsistema koji su spregnuti bilo bi ekvivalentno nesagledavanju bitnih karakteristika sistema. U globalnoj dinamici hibridnih sistema interesantni su oblici vremenskog usaglašavanja dinamika podsistema, što je, u okviru sedmog poglavlja, predstavljeno kao sinhronizacija hibridnih sistema. U tom poglavlju su, najpre, određeni različiti mogući oblici sinhronizacije i dat je pregled naučnih radova, koji se odnose na njihovo identifikovanje i određivanje odnosa parametar podsistema potrebnih za uspostavljanje sinhronizacije, a potom su predstavljeni rezultati sopstvenih istraživanja pojave oblika potpune sinhronizacije u klasama hibridnih sistema sa statičkim i dinamičkim vezama.

Pojave karakteristične u dinamici nelinearnih spregnutih sistema, kao što su skokovi amplituda i faza u rezonantnim oblastima prelaznih režima, ili svojstveni nelinearni histerezis u lokalnoj dinamici, ili pak pojava haotičnih atraktora u globalnoj dinamici, sa stanovišta upotrebe mehaničkih sistema koje opisuju takvi modeli mogu biti izrazito negativne u smislu narušavanja integriteta i stabilnosti strukture, pojačavanja efekata zamora materijala i sl. U tom smislu izbegavanje tih pojava može voditi povećanju radnog veka struktura ili povećanju stepena sigurnosti, te se u okviru osmog poglavlja predlažu metode optimalnog upravljanja primenjive na sisteme sa nelinearnostima sa jednim stepenom slobode kretanja, koje bi dokazano uslovile smanjenje uticaja

negativnih fenomena nelinearnosti. Prema rezultatima radova autora G. Rega i S. Lenci [180-184] predložena metoda se odnosi na upotrebu Melnikov-ljeve metode i optimizacije vrednosti Melnikov-ljeve funkcije koja garantuje da ne dođe do haotičnog ponašanja dinamike sistema. Predložena metoda je upotrebljiva i na sisteme sa dva i više stepeni slobode kretanja, a to daje idejne smernice za buduća istraživanja u toj oblasti.

U okviru devetog poglavlja predstavljene su aktivne structure kao strukture, koje osećaju spoljašnje poremećaje i odgovaraju na njih aktivnim upravljanjem u stvarnom vremenu da bi zadovoljile zahteve upotrebe. To znači da u svojoj ukupnoj strukturi imaju ukomponovane-spregnute elemente tipa senzora i aktuatora sastavljene od optičkih vlakana, piezoelektirčnih keramika i piezoelektičnih polimera. U ovom poglavlju su, stoga prvo, prikazana svojstva aktivnih materijala piezokeramika, objašnjen fenomen piezoelektričnog efekta, potom predstavljeni modeli standardnih piezo-visko-elastičnih elemenata [45] i na samom kraju opisan model hibridnog sistema spregnutih struktura slojem standardnih piezo-visko-elastičnih naslednih elementa kao primera jedne aktivne strukture.

U desetom poglavlju rad sadrži izabrane rezultate mnogobrojnih numeričkih eksperimenata koji se baziraju na numeričkom rešavanju diferencijalnih jednačina uz korišćenje savremenih softverskih alata MathCAD i Mathematica, koje danas sve više dobija svoj identit, pod nazivom "naučno računanje". Kako su numerički eksperimenti i vizuelizacije neophodni alat za dobijanje primenljivih rezultata, i otkrivanje nelinearnih fenomena i dinamika, to se pojedini zaključci formiraju na bazi podataka dobijenih na osnovu numeričkih eksperimenata i simulacija datih dinamičkih modela i matematičkih opisa realnih složenih struktura izvedenih komercijalnim programima tipa MathCad, Maple, Matematica i sličnih softvera. Modeli, koji se mogu naći u ovome radu, elegantnom primenom softverskih alata mogu poslužiti za stvaranje vizuelne predstave pojava u dinamici hibridnih sistema koje matematički modeli opisuju. Jednostavnom promenom odgovarajućeg parametra sistema može se ispitati uticaj elementa strukture kojem taj parameter modela odgovara na dinamiku celokupnog sistema. U okviru desetog poglavlja, posmatrani primer hibridnog sistema je model dve kružne ploče spregnute slojem kontinualno raspodeljenih visko-elastičnih nelinearnih elemenata, čiji je sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina prinudnih transverzalnih oscilacija tačaka srednje ravni ploča, rešavan metodologijom usvojenom i predstavljenom u radu, dao rezultate pogodne za numeričku analizu uticaja parameter sistema. Tako je, na primer, ispitivano dejstvo dodatog redno vezanog elementa linearne krutosti u sprežućem sloju na fenomene karakteristične za modele hibridnih sistema sa nelinearnostima: rezonantne skokove amplituda i faza komponentnih podprocesa, njihov međusobni uticaj, prenos energije u sistemu i u komponentnim podprocesima, a potom mogućnost sinhronizacije.

Svi prikazani modeli i metodologija njihovog opisivanja i rešavanja imaju formalno analogne pristupe, te je, u okvirima jedanaestog poglavlja, napravljen pregledni rezime o metodama i metodologiji modeliranja, rešavanja i izučavanja rećkih svojstava i fenomena dinamike klasa hibridnih sistema predstavljenih u ovoj disertaciji.

Predmet istraživanja usmeren je i na utvrđivanje fenomenološkog preslikavanja i matematičkih analogija među svojstvima dinamika hibridnih sistema dispartnih priroda. U okviru ovog poglavlja, prikazano je i nekoliko modela naizgled fizički drugaćijih od modela hibridnih sistema prikazanih u prethodnim poglavljima, a koji formalno mogu da se reše i objasne metodologijom ovog rada na matematički analogan način.

Logičan nastavak u istraživanju iz oblasti mehanike i nelinearnih nauka mog magistarskog rada predstavlja ova doktorska disertacija, iz tog razloga, ovde se navedi nekoliko osnovnih zaključaka toga rada.

U postavljanju modela realnih struktura uvode se određene aproksimacije i pojednostavljenja, takođe postoje različiti pristupi u stvaranju modela realnih struktura. Jedan od pristupa jeste i model više ploča, greda ili traka od materijala različitih svojstava, koje su povezane određenim standardnim lakim elementima i čiji broj je dovoljno veliki da bi se realnije opisala struktura [76, 91]. Kretanje takvog modela i prostiranje talasa u njemu opisano je sistemima parcijalnih diferencijalnih jednačinama [75, 81, 82, 95, 259]. Zbog nemogućnosti da se oni rešavaju analitički, koriste se aproksimativne metode za njihovo rešavanje, a koriste se i metode diskretizacije sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina, zatim metoda fizičke diskretizacije kontinuuma, pa se rešenja dobijaju u nizu iteracija, a krajnji rezultat kontinualizacijom tih rešenja. Za dobijanje numeričkog rešenja i obradu rezultata koriste se računarski matematički programi.

Proučavanje transverzalnih oscilacija ploča spojenih elastičnim, visko-elastičnim slojem ili slojem puzećih svostava je važno i sa teoriske i sa praktične tačke gledišta. Mnoge važne strukture mogu biti opisane ovakvim modelom. Na primer, moguće je koristiti sisteme ploča u opisu modela akustičnih ili vibracionih izolacionim sistemima, kao što su zidovi ili podovi. U svrhu takve analize u magistarskom radu [259] je definisana sendvič strukturu, [73], kao sistem više ploča, više greda ili traka u kojima su deformabilna tela (ploče, grede ili trake) spregnuti standardnim lakim elementima, [45], i nemaju deformacije u aksijalnom pravcu pri statičkim ili dinamičkim uslovima. Osnovni elementi sendvič struktura su:

-deformabilno telo: tanke ploče, grede ili trake, različitih materijalnih svojstava, svaki sa beskonačno velikim brojem stepeni slobode kretanja,

-laki standardni element zanemarljive mase u obliku aksijalno napregnutog štapa bez izvijanja.

Za svaki standardni laki element zanemarene mase definišu se konstitutivne relacije dinamičkog stanja elementa određene promenom restitucione sile sa pomeranjima i pomeranjima po vremenu, sa tačnošću do reda veličine tačnosti konstanti koje figurišu u izrazima, a zavise od tačnosti njihovog eksperimentalnog određivanja. Tačnost upotrebljenih konstanti, a sa njima i jednačina za sile i pomeranja zavisice ne samo od poznavanja prirode objekta već i od neophodnih znanja za rešavanje veoma složenih stanja napon i deformacija u elementima. Koristišćena je, takođe, i definicija diskretno-kontinualnog homogenog lančanog sistema, [76, 90], kao sistema jednakih deformabilnih tela (ploča, greda, traka), [64,76], koja imaju iste granične uslove i mogu se pomerati transverzalno na karakterističnu "elastičnu površinu" kod ploča $w_i(x, y, t)$, $i = 1, 2, \dots, M$, kao i na "elastičnu liniju", kod greda i traka $v_i(z, t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, koji su povezani međuslojem lakih standardnih elemenata istih materijalnih konstanti. Broj stepeni slobode kretanja, uslovljen sprezanjem, takvog lanca jednak je M , gde je to M broj deformabilnih tela u lancu, jer smo pretpostavili da se sva deformabilna tela u lancu mogu pomerati samo transverzalno u odnosu na "elastičnu površinu", kod ploča, odnosno "elastičnu liniju", kod greda i traka.

U matematičkom opisu problema oscilovanja sistema kontinualnih tela dobijamo sisteme parcijalnih diferencijalnih jednačina sa sistemom graničnih i početnih uslova. Zavisno od oblika parcijalnih diferencijalnih jednačina sistemi se svode na linearne i nelinearne. Nelinearni članovi u parcijalnim diferencijalnim jednačinama oscilovanja i graničnim uslovima mogu biti primarnog i sekundarnog značaja, kao male veličine u poređenju sa linearnim. Nelinearne članove sekundarnog značaja možemo zanemariti, pa se problem u rešavanju svodi na linearni u prvoj aproksimaciji. Linearne oscilacije ploče u linearnoj teoriji baziraju se na klasičnoj jednačini Lagrange-Germain i uslovima Kirohoff-a, što je u magistarskom radu korišćeno za opisivanje transverzalnih oscilacija kružnih ploča, pri čemu su data rešenja karakterističnih jednačina oscilovanja kružnih ploča za klasične granične uslove ploče ukleštene i slobodne na krajevima i naglašeno je

dobro podudaranje rezultata dobijenih upotrebom matematičkih programa za izračunavanje korena karakteristične transcendentne jednačine sa specijalnim Bessel-ovim funkcijama i rezultata iz literature, za te slučajeve oslanjanja ploča. Potom su za izabrane primere spregnutih mehaničkih struktura-sistema dve kružne ploče sa linearnim elastičnim slojem, visko-elastičnim ili termo-visko-elastičnim slojem dati prikazi rešavanja različitih primera slobodnih ili prinudnih oscilacija spregnutih struktura, kao i analiza prenosa energije u takvim strukturama, a po ideji iz rada [66], koristeći izvedene parcijalne diferencijalne jednačine u opštem obliku i odgovarajuća rešenja.

Za rešavanje sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina korišćena je Bernoulli-eva metoda partikularnih integral, pri čemu je praktično vršena integracije rešenja u vidu beskonačnog reda po sopstvenim amplitudnim funkcijama - koordinatnim funkcijama koje moraju da zadovoljavaju odgovarajuće zadate granične uslove, ista metoda korišćena je i u ovom radu za rešavanje pojedinih zadataka prikazanih hibridnih sistema. Izabrani redovi su se zatim unosili u jednačine kretanja i uslove kompatibilnosti pomeranja i izjednačavanjem koeficijenata uz jednake sopstvene koordinatne funkcije, koje zadovoljavaju uslove ortogonalnosti, dobijao se sistem običnih diferencijalnih jednačina u odnosu na tražene vremenske funkcije pripadajuće jednom sopstvenom obliku oscilovanja. Za sistem dve ploče rešavanjem tih spregnutih diferencijalnih jednačina po vremenskim funkcijam zaključuje se da prisustvo sprežućeg sloja između dve ploče uzrokuje udvajanje kružnih frekvencija u jednom nm -obliku sopstvenih transverzalnih oscilacija sistema od dve ploče. I uopšte, za vremensku funkciju jednog nm -moda oscilovanja sistema M ploča zaključuje se da u tom modu sistem osciluje M -frekventnom režimu oscilovanja slobodnih oscilacija sistema M ploča. Kada je homogeni lanac ploča slobodan zaključuje se da ima M stepeni slobode kretanja, a kako poseduje M sopstvenih kružnih frekvencija po svakom nm -modu to praktično u tom modu ima M internih stepeni slobode oscilovanja, i to u svakom od beskonačno mnogo sopstvenih modova.

Konstatovano je i da postoji interes za proučavanje prenosa energije između podsistema vezanih u sendvič structure, pri čemu su za analizu rezultata prenosa energije u modelima sendvič struktura korišćeni izrazi za redukovane vrednosti kinetičke i potencijalne energije pripadajuće odgovarajućem modu i odgovarajućoj ploči, kao i potencijalna energije interakcije ploča preko elastičnog sloja. Prateći ideju iz rada [66], za sistem kružnih ploča koji izvodi sopstvene oscilacije, potvrđeno je, da važi teorema o konzervativnosti, ako je sloj idealno elastičan, ili teorema o promeni ukupne energije sistema u svakom od modova, ako je sloj viskoelastičan, a sistem poseduje funkciju rasipanja tipa Rayleigh-a. Na osnovu prethodnog konstatovano je da su u slučaju slobodnih oscilacija sistema dve ploče samo spregnute elastičnim slojem bez prigušnica ukupna enegija moda konstantna, a u slučaju disipativnog sistema, sistema ploča spregnutih prigušnicama, vidno je da je opadanje ukupne energije svakog od modova, jednako negativnoj dvostrukoj vrednosti funkcije rasipanja pripadajuće tom modu, dok su Lyapunov-ljevi eksponenti negativni, pa se zaključuje da je proces oscilovanja kao i potproces interakcije među pločama stabilan, te se tako Lyapunov-ljevim eksponentima daje svojstvo mere integriteta sistema ili integriteta dinamike-kretanja sistema.

U uvodnom delu magistarskog rada govori se i o metodama nelinearne mehanike i konstatovano je da u poslednjih dvadesetak godina one dobijaju sve veći značaj u rešavanju čitavog niza praktičnih zadataka kako inženjerske prakse tako i niza zadataka medicine, molekularne biologije, ekonomije. U osnovi korisne primene oscilacija, kao i uzroku njihovog štetnog dejstva, leže svojstva pojava koje su povezane sa svojstvima nelinearnih fenomena u dinamičkim procesima tih oscilacija. Većina mogućnosti efektivnog korišćenja

oscilacija je povezana sa tim da oscilacije menjaju karakter i svojstva nekih fizičko-dinamičkih procesa u nelinearnim mehaničkim sistemima, a sa tim i njihovo ponašanje. Npr. stabilan položaj statičke ravnoteže postaje nestabilan u dinamičkim uslovima i uspostavlja se nova konfiguracija sistema u uslovima dinamičke ravnoteže, a konfiguracija nestabilne ravnoteže postaje stabilna i sl. Ovde treba dodati i izuzetnu osetljivost dinamičkih procesa u nelinearnim dinamičkim sistemima sa malim promenama parametara stanja sistema, što proučava teorija bifurkacija. Uticaj malih promena početnih uslova i senzitivnost na male promene je takođe pojavni fenomen u nelinearnim sistemima za određene kinetičke parametre.

Modele sistema spregnutih struktura sa nelinearnostima, u ovom radu kao i u magistarskom radu rešavali smo Lagrange-ovom metodom varijacije konstanta i modifikovanom asimptotskom metodom usrednjenja Krilov-Bogoliubov-Mitropolskiy-kog zasnovanu na principu jednofrekventnosti. Princip jednofrekventnosti se nameće kao praktično rešenje zadataka iz oblasti oscilacija sistema sa više stepeni slobode oscilovanja, gde se srećemo sa pojavom da trenje i poremećajne sile dovode do brzog uspostavljanja oscilacija osnovnog tona u skladu sa odgovarajućim početnim uslovima. U radu su dati analitički izrazi prvih asimptotskih aproksimacija rešenja sistema jednačina, koje opisuju oscilacije materijalnog sistema sa spregnutim kružnim pločama i ostalim klasama hibridnih sistema. Iako se zaključuje da jednačine prve aproksimacije najčešće moramo integraliti numeričkim metodama, prednost je postignuta u tome što je znatno prostije numerički integraliti jednačine prve aproksimacije, koje daju amplitudu i fazu, nego li neposredno jednačine kretanja, koje određuju oscilatorne veličine, jer je amplituda njihova obvojnica. Pomoću jednačina prve aproksimacije moguće je prostim postupkom ispitivati i stacionarnost i nestacionarnost i stabilnost ove dvoparametarske familije rešenja.

Kako se naročita pažnja poklonjena teoriji rezonantnih procesa, u vezi sa pitanjem korišćenja nelinearnih elemenata za otklanjanje rezonantnih pojava u sistemima spregnutih mehaničkih struktura, u radu su dati konkretni rezultati numeričkog eksperimenta sa izlaznim amplitudno-frekventnim i fazno-frekventnim dijagramima u rezonantnim oblastima i objašnjen fenomen prolaska kroz rezonantno stanje. Pri tome, ovde se podvalće samo neki zaključci svojstveni za proučavane spregnute sisteme, a izvedene u magistarskom radu, te tako u razmatranom slučaju homogenog slobodnog sistema ploča zaključeno je da su amplitude oba harmonika u jednom dvofrekventnom nm -modu oscilovanja konstantne i zavise od vrednosti datih u početnom trenutku, da je prvi harmonik izohron jer mu period ne zavisi od početnih vrednosti, a da se kod drugog harmonika javlja neizohronost, jer mu period zavisi od početnih vrednosti amplituda oscilovanja drugog harmonika. Ovo zapravo daje neka od svojstava homogenog sistema, a to su da prigušenje i nelinearnost elastičnog dela u međusloju nemaju uticaja na amplitudu i fazu prvog harmonika u modu, tačnije amplituda i faza prvog harmonika u homogenom sistemu dve ploče spregnute visko-elastičnim nelinearnim slojem ponašaju se kao da je sistem samo sa elastičnim slojem. Uticaj prigušenja i nelinearnosti prisutan je samo kod amplitude i faze drugog harmonika u jednom nm -modu oscilovanja homogenog sistema ploča. Ovakav rezultat i zaključak dobijen je zbog specialno izabranog slučaja homogenog sistema. Pokazano je i da se on ne može uopštiti za slučaj nehomogenog sistema i da se javlja neizohronost u oba harmonika jednog moda oscilovanja što zavisi od odnosa kofaktora karakteristične determinante osnovnog spregnutog sistema, tačnije od svojstava spreznjanja posmatranog sistema. Ovakvi zaključci analogno mogu da se primene i za sisteme drugih klasa hibridnih sistema proučavane u ovom radu. U izabranom slučaju nehomogenog sistema dve kružne ploče, spregnute visko-elastičnim nelinearnim slojem, sprovedena je samo kvalitativna analiza pojave prolaska kroz rezonantno stanje i interakcije harmonika u jednom modu oscilovanja i zaključeno je da bilo kakva generalizacija u smislu

uticaja harmonika ili oblika amplitudno frekventnih karakteristika u drugim slučajevima sistema ne bi mogla da se kvantitativno uopšti. Evidentno je samo da će kvalitativno sigurno postojati interakcija između harmonika, što je uostalom i opšte svojstvo nelinearnosti sistema. Bilo kakvo kvantitativno uopštavanje bilo bi moguće izvesti samo širom uporedbom rezultata za različite odnose parametara sistema, mada bi i u tom slučaju bilo teško doći do opštijih rezultata, s obzirom da bi se raspravljalo na polju višedimenzionih bifurkacija, jer sama rešenja zavise od većeg broja kako parametara sistema tako i parametara sprezanja.

U magistarskom radu prikazana su i svojstva elastičnih, viskoelastičnih, sa svojstvima puženja standardnih lakih elemenata vezivanja deformabilnih tela u mehaničke sisteme složenih struktura i njihove konstitutivne relacije kao i konstitutivne relacije složenih sistema standardnih lakih elemenata: njihovu paralelnu, rednu i složenu vezu, koristeći poglavlja iz monografije [45]. Izvedena je jednačina sopstvenih oscilacija pravougaone ploče od materijala puzećih svojstava, kao u radovima [86, 87], i dato je njeno rešenje za različite granične uslove, u slučaju opterećenja na pritisak, konstantnom silom, u srednjoj površi ploče. Na osnovu tih razmatranja zaključeno je da svojstva puzanja u ovako postavljenim modelima naprezanja, kvazistatičke ravnoteže, deformisanja srednje površi ploče i oscilovanja ploče utiču na vremensku funkciju, dok za klasične slučajeve oslanjanja ploče ne utiču na formu oblika deformisanja, već na njene veličine. Prikazane parcijalno frakciono-diferencijalne jednačine transverzalnih oscilacija ploča od materijala puzećih svojstava i prilagođene za sistem kružnih ploča za različite oblike opterećenja, te predložena Bernoulli-eva metoda za njihovo razdvajanje ne obične diferencijalne jednačine po nepoznatim sopstvenim funkcijama koje zavise od uslova oslanjanja, i obične frakciono-diferencijalne jednačine po vremenskim funkcijama koje se rešavaju primenom metode Laplace-ovih transformacija, daju ideju da, u smislu analogija sistema greda i ploča, analiziramo modele diskretno-kontinualnih homogenih puzećih lančanih sistema ili sendvič strukture od M elemenata spregnutih sistemom idealno puzećih naslednih elementa, te je u tu svrhu posmatran sistem M kružnih ploča od homogenog i izotropnog materijala puzećih svojstava, malih debljina u odnosu na druge dve dimenzije spregnutih $M - 1$ -nim slojem idealno puzećih naslednih slojeva. Iz analitičkog rešenja, datog u referenci [82], jasno je da sprezanje puzećim slojevima M kružnih ploča izaziva pojavu M -frekventnih režima vremenskih funkcija jednog nm odgovarajućeg sopstvenog oblika oscilovanja i, takođe, da vremenske funkcije različitih nm familija modova oscilovanja nisu spregnute, tačnije da su međusobno nezavisne. To opet znači da u ovakvim sistemima postoji M mogućnosti za pojavu rezonantnih dinamičkih stanja ili pojavu dinamičke apsorpcije pri prinudnim oscilacijama.

Sistematizacija saznanja o sistemima složenih struktura, kao i analiza nelinearnih dinamika određene klase hibridnih sistema predstavljena u ovoj disertaciji su delom sadržana i u već objavljenim radovima međunarodnih naučnih časopisa mentora [61-69, 73-75, 79, 84, 87, 97, 101, 105] i mojim radovima sa mentorom [140, 141, 147, 149, 150, 258] što zapravo predstavlja i jedan vid neophodne verifikacije rezultata ove disertacije u oblasti mehanike i nelinearnih nauka. Delovi ove disertacije su saopšteni i na naučnim skupovima nacionalnog i međunarodnog značaja [142-146, 148, 151-154, 157, 257, 258, 260, 261], odakle sam u diskusijama sa kolegama dolazila do interesantnih novih ideja i zaključaka koji su svi ukomponovani u redove ove disertacije.

Istraživanja po temi dinamike i stabilnosti hibridnih dinamičkih sistema ove doktorske disertacije nadam se unose nova saznanja i daju doprinos spoznaji svojstava, fenomena, dinamika i interakcija podsistema i komponentnih dinamika u izabranim klasama hibridnih sistema i spregnutih dinamika u njima, kao i da daju

doprinos metodologiji istraživanja istih. Proučavani modeli dinamičkih hibridnih sistema i odgovarajući matematički modeli za analizu nelinearnih interakcija u takvim sistemima, kao i numerički eksperimenti su osnova za sintezu zaključaka o uticajima različitih parametara i postavljanje odgovarajuće nove metodologije.

Na bazi rezultata ove doktorske disertacije stvaraju se nova saznanja o mogućnosti utvrđivanja integriteta i stabilnosti određene klase hibridnih sistema i njihovih dinamika, kao i upravljivosti njihovim dinamikama, a takođe i optimalnog upravljanja komponentnim dinamikama u njima. Istovremeno se nadam da su postojeće metode i metodologije istraživanja hibridnih sistema uspešno iskorišćene i da je načinjen uspešan pokušaj uvođenja novih metodologija.

Napomenimo da, na kraju ove disertacije posle spiska literature, postoji i lista najčešće korišćenih oznaka i to onim redosledom kako se u tekstu i pojavljuju, i registar pojmova i imena, kao i biografija autora.

1* Poglavlje

Pregled saznanja o hibridnim sistemima

Ovo poglavlje odnosiće se na savremeno shvatanje pojma hibridni dinamički sistem i mogućnosti njegovog matematičkog opisivanja, identifikacije, strukturne analize i donošenja zaključaka o njegovoj dinamici i stabilnosti, kako lokalnoj tako i globalnoj-strukturnoj, koje je dalo deo inspiracije formiranju celoga rada.

Istraživanje nelinearne dinamike hibridnih sistema je fascinantna savremena naučna oblast, koja povezuje znanja nelinearne dinamike, optimalnog upravljanja kretanjem i oscilacijama, kao i primenjenih matematičkih metoda, i kao takva veliki je izazov za savremene istraživače. O tome svedoči i nova treća serija Elsevier-ovog časopisa *Nonlinear Analysis*, pod nazivom *Hybrid Systems*, kao i naučni skupovi pod istim nazivom.

Cilj istraživanja nelinearne dinamike hibridnih sistema je mogućnost iskorišćenja matematičkog aparata u donošenju zaključaka vezanih za dinamičke procese u tim sistemima. Međutim, sama primena matematičkog aparata u proučavanju kretanja govori nam o idealizaciji neidealnog procesa. Matematička idealizacija fizičkih pojava u relativnom domenu proučavanja ozakonjuje pojave i daje one rezultate koje

nameće praksa. Matematičko opisivanje (često je u upotrebi, posebno reč modeliranje među inženjerima) se odnosi na upotrebu matematičkog jezika da bi se odredila (opisala) ponašanja „realnog sveta“ (praktičnih sistema). Njegova uloga je da omogući postavljanje efikasne, elegantne i racionalne teorije za šire klase realnih sistema, radi boljeg razumevanja osobenosti dinamika sistema. Teorija je neophodna i korisna za predstavljanje opštih zaključaka, počev od najprostijih modela i dinamika, do modela formalno sačinjenih na bazi različitih oblika sprezanja elementarnih dinamika, dok su numeričke metode, savremeni softverski alati i brzi kompjuteri korisni za donošenje specifičnih zaključaka za uske klase zadataka, za koje savremena matematička dostignuća nisu dala analitičke metode ili su nepoznata analitička rešenja nelinearnih diferencijalnih ili običnih nelinearnih jednačina kojima se opisuju dinamike. Teorija, moćna da formalno objasni i predstavi modele komplikovanih dinamika, daje okvire formiranja modela složenih struktura i graničnih uslova, koje one zadovoljavaju, što korišćenjem računara, u narednom koraku, daje numerička rešenja potrebna za donošenje zaključaka vezanih za operativne mogućnosti korišćenja tih struktura. U teoriji mehaničkih oscilacija matematički modeli, zvani i strukturni modeli, su potrebni za analizu dinamičkog ponašanja nelinearne dinamike strukture koja se modelima opisuje (modelira).

1.1. Pregled savremene literature iz oblasti ključne reči hibridni sistemi sa aspekta inženjerskih pristupa

Određenje pojam hibridni dinamički sistem kao sistema kontinualnih i diskretnih dinamika spregnutih različitim vidovima spreznja u potpunosti je deo savremenog shvatanja ovog pojma, samo što se u ovom radu modeli koji opisuju takve sisteme i usvojena metodologija razlikuje u mnogome od metoda koje se mogu pronaći u savremenoj literaturi, a po mom mišljenju predstavljaju pristup koji je opštijeg karaktera, jer se metoda diskretizacije kontinuuma [90, 99] može analogno primeniti na široku klasu stvarnih sistema. Pored toga, ukomponovani elementi nelinearnosti u predloženoj metodologiji daju realniju sliku modela i stvarnih ponašanja dinamike spregnutih sistema. Radovi [61-69, 73-75, 79, 84, 87, 98, 101, 105] iz oblasti sistema spregnutih struktura, kao i nekoliko mojih koautorskih radova [140, 141, 147, 149, 150, 259] govore u prilog aktuelnosti ovakvog određenja pojma hibridni dinamički sistem. Takođe, u radu [64], autor je dala pregled originalnih rezultata iz oblasti proučavanja spregnutih sistema i rotacija. Teorema o postojanju trigeru spregnutih singulariteta i separatriše u obliku broja osam prikazana je sa nekoliko primera spregnutih rotacija jednostavnih sistema sa deblansima masa. Takođe, dat je i pregled i matematički opis modela i dinamika spregnutih sistema deformabilnih tela (ploča, greda, ili kaiševa) sa različitim svojstvima materijala i svojstvima diskretnih među slojeva. Konstitutivne napon-deformacija relacije materijala elemenata spregnutih sendvič struktura date su za različita svojstva: elastična, viskoelastična i puzeća. Dobijeni su karakteristični modovi oscilovanja spregnutih struktura, potom analizirani za različite vrste materijala i oblika struktura. Prikazane su forme karakterističnih brojeva i modova, kao i sopstvenih amplituda. Izvršena je strukturna analiza transverzalnih oscilacija sendvič struktura. U radu [61], analitički je razmatran prenos signala kroz strukturu diskretnog kontinuuma u obliku osnovne hibridne homogene strukture necelog reda, koja sadrži spregnute homogene lance materijalnih tačaka. Sistem diskretnog kontinuuma određen je pomoću primera hibridne strukture više lanaca koja sadrži spregnute homogene lance necelog reda sa vezama standardnih lakih elemenata bez masa. Primenjujući trigonometrijsku metodu i metodu Laplace-ove transformacije za izračunavanje sistema diferencijalnih jednačina necelog reda identifikovani su odgovarajući skupovi sopstvenih glavnih lanaca, kao nezavisnih podsistema i odgovarajuće glavne koordinate lanaca. Sopstveni glavni lanac sistema više lanaca je nezavisni podsistem sa nezavisnim skupom signala koji poseduje sopstveni podskup sopstvenih frekvencija i odgovarajući skup karakterističnih brojeva određenih svojstvima izvoda necelog reda hibridnog sistema. Originalnost pomenutog rada, kao i originalni opšti analitičkih rezultati predstavljeni u ovom radu su: novi model diskretne homogene strukture necelog reda; predstavljanje standardnog lakog elementa sa izvodima necelog reda sa odgovarajućom napon-deformacija konstitutivnom relacijom; analitički izrazi za sopstvene kružne frekvencije i razdvajanje podsistema

odgovarajućih sopstvenih glavnih lanaca sa nezavisnim prenosom signala sa odgovarajućim svojstvenim podskupom sopstvenih kružnih frekvencija; skup glavnih oscilatora necelog reda svaki sa jednim stepenom slobode i sa sopstvenom kružnom frekvencijom i sopstvenim karakterističnim brojem necelog reda i odgovarajućim analitičkim rešenjima diferencijalnih jednačina necelog reda. Svi prikazani rezultati mogu se primeniti na proučavanje prenosa signala u mnogim inženjerskim (mašinskim, električnim ili građevinskim) sistemima kao i kroz biomedicinske sisteme [62].

Savremena potreba za poboljšanjem performansi i sigurnosti oscilujućih struktura u smislu težine, sigurnosti, komfora, buke i izdržljivosti stalno raste. U isto vreme, postoji i potreba za kraćim procesom dizajniranja, dužim radnim vekom, smanjivanjem broja opravki i pregleda, kao i smanjivanjem troškova. Sa pojavom moćnih računara postalo je jeftinije i sa stanovišta cene i sa stanovišta utroška vremena da se izvode numeričke simulacije i eksperimenti. Posledica je razložno pomeranje ka kompjuterski podržanom dizajniranju i numeričkim eksperimentima, gde se strukturni modeli razvijaju da bi simulirali eksperimente i da omoguće tačnu i pouzdanu procenu ponašanja strukture.

Identifikacija sistema je veoma bitna jer omogućava mehanici da uskladi numerička predviđanja sa eksperimentalnim istraživanjima. Ponekad se u tehničkoj literaturi termin „identifikacija sistema“ koristi i u širem kontekstu i može se odnositi i na dobijanje informacija o ponašanju strukture direktno iz eksperimentalnih podataka, tj. bez potrebe za modelom (npr. identifikacija broja aktivnih modova ili prisustvo sopstvenih frekvencija unutar određenih frekventnih režima). Ponekad se pod identifikacijom sistema misli na razvijanje (poboljšavanje) strukturnih modela merenjem od ulaza do izlaza na pravim strukturama korišćenjem vibraciono osetljive opreme.

Linearna identifikacija sistema je disciplina koja se razvijala poslednjih trideset godina. Modalna procena parametara- zvana modalna analiza- je nesumnjivo najpopularniji pristup za predstavljanje linearne identifikacija sistema u dinamici struktura. Model sistema je potrebno da bude u obliku modalnih parametara: sopstvenih frekvencija, oblika modova i koeficijenta prigušenja. Popularnost modalne analize proizilazi iz velike opštosti; jer modalni parametri mogu opisati ponašanje sistema za bilo koji tip i opseg ulaznih podataka. Brojni pristupi su razvijeni u tu svrhu.

Strukturna identifikacija sistema se odnosi na utvrđivanje nelinearnosti u sistemu. Nelinearnost je pravilo u Prirodi, a linearnost je njen izuzetak. Linearnost je idealizacija nelinearnosti u stvarnom svetu. Na primer, ako je avion posmatrana struktura, na površini aviona, izuzev nelinearne fluid-čvrsta podloga interakcije, tipične nelinearnosti uključuju i usporavanje i trenje na dodirnoj površini, nelinearnosti se javljaju i u radu motora aviona, na primer, pri pojavi kaljenja u motor-pilon vezi, nelinearnost postoji i u efektu zasićenja kod hidrauličnih aktuatora aviona. Kod aviona, kao posmatrane strukture, samo ovi navedeni primeri, a ima ih i više u realnom radu, distribuiraju neravnomernost u strukturi i svakako bi ih trebalo uzeti u obzir pri modeliranju. Šta više, savremene generacije aviona, sa smanjenim težinama strukture, u većoj meri koriste materijale kao što su staklo-fiber ili karbon-fiber kompoziti. Ti materijali podrazumevaju nove izazove za uspešnost predviđanja, jer njihovo strukturno ponašanje drastično odstupa od linearnosti. Njihova povećana upotreba, takođe, stvara više interakcija između različitih materijala, koji su dalji izvori nelinearnog ponašanja. Brojni su i drugi primeri stvarnog sveta gde iz opisa strukture nije

moguće dobiti pouzdane zaključke, ako se u matematičko modeliranje ne uvrsti nelinearnost u nekom obliku. U ovome radu biće, ne samo iz navedenih razloga, prikazani modeli sistema kod kojih postoje interakcije izazvane nelinearnostima i zbog toga što shvatanje pojma hibridnog dinamičkog sistema, u savremenoj literaturi, skoro da i ne uključuje nelinearnost u opis interakcije kontinualnih sistema spregnutih sa diskretnim. Savremeno shvatanje hibridnih dinamički sistema može da se sumira u nekoliko narednih pristupa.

Sa matematičke tačke gledišta možemo podvući razliku između pojmova kontinualni, diskretni i hibridni dinamički sistem kroz nekoliko primera:

- Posmatrajmo RLC kolo (koristeći elektro mehaničke analogije, to je zapravo oscilator sa prigušenjem gde je masa analogna kalemu induktivnosti L , otpornik otpora R prigušnici, a kondenzator kapacitivnosti C je analogan opruzi krutosti c) sa nelinearnim otporom karakteristike $f(x) = x^3 - x$ (što znači da u otporniku R napon f nelinearno zavisi od struje). Ako je $x(t)$ struja u kalemu L i $y(t)$ napon u kondenzatoru C obe funkcije vremena t , onda:

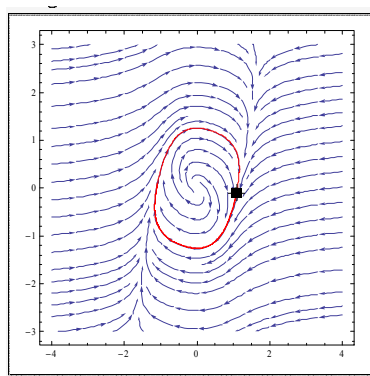
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x^3 + x \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Što su jednačine poznatog van der Pol-ovog sistem. Neka $(x(t), y(t))$ bude rešenje sistema za date početne uslove $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ u trenutku $t = 0$. Pitanje je onda šta se dešava kada $t \rightarrow \infty$ za drugi početni uslov p_0 . Odgovor se nalazi na faznom portretu na slici 1.1. Zapaža se da ako je $p_0 = (0, 0)$ onda odgovarajuća trajektorija $(x(t), y(t))$ ostaje sve vreme $(0, 0)$ (tačka $(0, 0)$ je fiksna tačka sistema ili ravnotežni položaj). Ako je p_0 blizu $(0, 0)$ onda odgovarajuća trajektorija spiralno odlazi ka zatvorenoj krivoj C što pokazuju linije toka, plave linije, na slici 1.1. Ako je p_0 iz regiona izvan C , crvena linija na slici 1.1, onda se odgovarajuće trajektorije takođe spiralno slivaju u C . Zato se C naziva granični krug i za van der Pol-ov sistem se kaže da osciluje posedujući granični ciklus. Ovo je primer jednog kontinualnog dinamičkog sistema.

- Neka je sada Σ bilo koji zrak koji izvire iz koordinatnog početka na slici 1.1. Na primer, može se uzeti da Σ bude nenegativni deo x ose. Ako $p \in \Sigma$ onda trajektorija od p preseca Σ prvi put u nekoj tački q . Ovo definiše transformaciju:

$$f: \Sigma \rightarrow \Sigma.$$

Primećuje se da su $f(0) = 0$ i $f(c) = c$, gde je c tačke gde granični krug C preseca Σ . Obe 0 i c su fiksne tačke preslikavanja f . Takođe, ako je $p \neq 0$ onda $f^n(p) \rightarrow c$ za $n \rightarrow \infty$, gde $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ označava kompoziciju funkcije. Ovo je primer diskretnog dinamičkog sistema. Vidi se da f u nekom smislu otkriva ponašanje Van der Pol-ovog sistema samo sa jednom dimenzijom manje.



Slika 1.1. Fazni portret Van der Pol-ovog oscilatora datog sistema jednačina 1.1.

Dakle, može se zaključiti sledeće:

Dinamički sistem je „sistem” koji se razvija sa vremenom, sadrži prostor X i transformaciju prostora $\Phi_t : X \rightarrow X$, i može biti kontinualni ili diskretni. O tome će detaljnije biti govora u poglavljima 5.1.1 i 5.2.1. Obično se smatra da je t vreme i može biti kontinualno ($t \in \mathbf{R}$ u prvom primeru) ili diskretno ($t \in \mathbf{Z}$ u drugom primeru). Za tačku $p \in X$, $\Phi_t(p)$ predstavlja stanje sistema u vremenu t ako je on u početnom trenutku bio u tački p . Na primer, u prvom primeru, ako je $p = (x_0, y_0)$ onda koristeći iste oznake imali bismo: $\Phi(p) = (x(t), y(t))$. Vreme, takođe može da bude i kontinualno i diskretno u jednom te istom dinamičkom sistemu, kada kažemo da je hibridni dinamički sistem. Na primer, kada kontinualno vremenski sistem deluje zajedno sa računom (vremenski diskretnom mašinom) imamo primer hibridnog dinamičkog sistema.

U teoriji sistema i teoriji upravljanja za sistem se kaže da je hibridni kada njegovo stanje ima diskretne i kontinualne komponente, koje uslovljavaju dinamiku sistema. Kao rezultat toga hibridno dinamičko stanje takvih sistema razvija se i glatko u kontinualnom vremenu i poseduje diskretne promene u diskretnim trenutcima vremena, tj., u prebrojivom skupu vremenskih trenutaka (koji može biti određen stanjem sistema ili upravljačkim signalom). Tako opisan hibridni sistemi se pojavljuju u veoma širokom polju primena. Spisak polja u kojima se mogu naći takvi sistemi sa razlogom bi mogao sadržati kontrolu na primer avio saobraćaja, hemijsko inženjerstvo, automatsko upravljanje i robotiku i to najvećim delom zbog rasprostranjenog korišćenja računara u regulaciji fizičkih sistema sa kontinualnom dinamikom.

Sa inženjerske tačke gledišta hibridni sistem je mreža digitalnih i analognih uređaja ili digitalnih uređaja koji reaguju sa kontinualnim okruženjem. Takvi sistemi tipično sadrže promenljive iz kontinualnog skupa (najčešće skupa realnih brojeva) kao i promenljive koje uzimaju vrednosti iz diskretnog skupa tj. skupa simbola. Jednostavan primer za to je sistem kontrole temperature u prostoriji. Termostat je modeliran kao sistem diskretan-događaj (discret-event system) zahvaljujući njegovoj upali-ugasi prirodi, dok su uređaji za grejanje ili hlađenje modelirani kao kontinualni sistemi (continuous-time systems). Zapravo, mnogi problemi inženjerske i naučne prakse koji zahtevaju upotrebu računara za kontrolu složenih fizičkih sistema prirodno se svrstavaju u okvir hibridnih dinamičkih sistema.

Ono što u savremenoj literaturi pod pojmom hibridni dinamički sistem, HDS, možemo pronaći pomoću bilo kog internet pretraživača, sumirano je kroz šest poglavlja knjige [251]: modeliranje hibridnih

sistema; primeri hibridnih dinamičkih sistema; sistemi promenljive strukture; komplementarni sistemi; analiza hibridnih sistema i dizajn hibridnog upravljanja. U prvom poglavlju data je predstava o novim modelima standardnih hibridnih sistema (ili automata), koji imaju kontinualno stanje (preciznije komponentu stanja) i diskretne lokacije (tj. diskretne komponente stanja) skokove, i invarijante (ograničenja koja moraju zadovoljavati kontinualno stanje na određenim mestima) i tzv. čuvar. Nekontrolisani skokovi su nekontinualne promene ili mesta, ili oboje u kontinualnom stanju, koja se moraju pojaviti kada se uvede skup čuvara, a kontrolisani skokovi su oni koji mogu biti izabrani da se dese u skupu čuvara. Dok je sistem na određenom mestu kontinualno stanje se razvija u skladu sa odgovarajućom diferencijalnom jednačinom sa kontrolisanim ulazom. Momenti u kojima se skokvi pojavljuju nazivaju se događaj vremena i oni su detaljno opisani u ovom poglavlju, zapravo pojava akumulacionih tačaka u vremenima prekidača, takozvanim Zeno vremenima, nalazi se u opisu mogućih ponašanja hibridnih sistema. Autori su takođe dali alternativnu formulaciju hibridnih sistema koja uključuje vezivanje *formula toka događaja*. Ovdje formule toka opisuju evoluciju podskupova komponenti kontinualnog stanja na raznim mestima, a formule događaja specificiraju mesta invarijanti, čuvara i pridruženih prelaznih skokova. Cilj ovoga je da se olakša opisivanje ukupnog sistema u smislu ponašanja pojedinih modula sistema (potencijalno vrlo velikog broja) i da se međusobno povezivanje modula, putem komuniciranja varijable opiše na način analogan konstrukciji sinhronih proizvod automata.

U drugom poglavlju nalazi se veoma koristan skup elementarnih primera, naročito su opisani sistemi sa histerezisom i različiti primeri kao što su odskačuća lopta, zatim toplotni termostat, monitor nivoa vode, kontroler prelaza željezničke pruge, konvertor snage, sistem klatna sa udarom, i na kraju jedan oblik Van der Pol-ovog oscilatora. Primeri monitora i prelaza željezničke pruge su predstavljeni pomoću događaj-tok formalizma za svaku od komponenti sistema. U trećem poglavlju opisani su sistemi promenljive strukture i dato bitno generalizovano rešenje u okvirima opisa hibridnih sistema. Četvrto poglavlje odnosi se na klasu sistema za koje postoji komplementarno uparivanje između ulaza u_i i izlaza v_i za svako i , takvi da su oba ne negativna ili je barem jedan nula. Peto poglavlje sadrži rešenja pitanja stabilnosti hibridnih sistema i pojave fenomena haosa. Šesto poglavlje predstavlja pitanja stabilizacije hibridnih sistema pomoću prekidača i „tačkaste” (set point) regulacije. Iz zaključaka ove knjige jasno je da ispitivanje sistema sa nelinearnostima koje u određenim ponašanjima generišu haotičnu dinamiku zapravo daje ključ razumevanja i mogućnosti primene tih znanja u modeliranju stvarnih sistema sprege kontinualnih i diskretnih sistema.

Slični zaključci proizilaze i iz rezultata knjige [196] gde su autori između mnogo toga rečenog o hibridnim sistemima dali i definiciju jednostavne vrste hibridnih sistema nazvane *kružni linearno diferencijalni automat*. Dinamika tog sistema je u svakom diskretnom stanju opisana konstantnim vektorskim poljem. Izvedeni su potreban i dovoljan uslov postojanja ovakvih sistema, a to je da poseduju jedan globalno privlačeći granični krug. Uslov je formulisan u obliku sopstvenih vrednosti odgovarajuće matrice sistema. Nadalje su definisani opšti modeli hibridnih sistema koji je nazvan više promenljivi diferencijalni automat. Dokazano je da pod određenim pretpostavkama svaki takav automat može da se predstavi kao jedinstvo konačnog broja diferencijalnih automata sa jednostavnom kružnom dinamikom.

Taj rezultat je kasnije korišćen u dokazu postojanja peroidičnih trajektorija i opisivanju njihovog ponašanja. Na primeru dvodimenzionalnog viševrednosnog diferencijalnog automata objašnjen je analog Poincaré-Bendixon teoreme za hibridne sisteme u ravni, koja daje uslove neophodne da ti sistemi poseduju nehaotično eventualno periodično ponašanje. Takođe, dat je opšti kriterijum za postojanje i stabilnost graničnog kruga takvih sistema i sve to ilustrovano na nekoliko primera sistema koji poseduju tok sa prekidačima.

U radu [187] ovaj kriterijum autor je iskoristio da bi za specifičnu vrstu hibridnih sistema sa takozvanim vezama toka sa prekidačima (switched flow networks) takođe dokazao postojanje konačnog broja asimptotski stabilnih graničnih krugova, kao i da bilo koja trajektorija takvih sistema konvergira jednom od tih krugova. U radu su predstavljene mreže toka sa prekidačem (switched flow networks). Poznato je da čak veoma jednostavna mreža toka drugog reda može da poseduje haotično neregularno nepredvidivo ponašanje. Tipičan problem sinteze je da pronađe prekidačku liniju odgovora (feedback switching policy) koja garantuje regularno predvidivo ponašanje takve mreže. U ovom radu pretpostavljeno je da se mreža sastoji od proizvoljnog broja čvorova spojenih vezama. Sadržaj čvorova (zvani rad) u sistem dolazi spolja na jedan čvor. Mreža je pod dejstvom jedne mašine (single server). Ona prenosi rad sa izabranog čvora i raspodeljuje ga duž ivica počev od tog čvora. Položaj servera je diskretno upravljana promenljiva i određena je linijom odgovora. Proučavana je prilično prirodna linija prekidača, gde su kombinovane strategija očisti najviši nivo čvorova [198] i kružna linija [186 i 197]. Slučaj kružne linije prekidača za neke jednostavne mreže toka proučavan je u radovima [178 i 198]. Osnovni rezultat ovog rada pokazuje da odgovarajući sistem sa zatvorenom petljom pokazuje globalno periodičko ponašanje. Tačnije, hibridni sistem ima konačan broj lokalno asimptotskih graničnih krugova i svaka trajektorija sistema konvergira jednom od tih graničnih krugova.

Sa pozicije klasične teorije upravljanja hibridni sistem se može posmatrati kao prekidački sistem [264]. U tom slučaju jedan od problema je određivanje prekidačke sekvence. Za taj problem postoji više pristupa. Jedan od pristupa je nadzor greške upravljanja podsistema na osnovu kojeg se bira podsistem sa najmanjom greškom [187]. Drugi pristup je korišćenje koncepta umetnutih elipsoida koji obezbeđuje stabilnost hibridnog sistema [36 i 37]. Treći pristup prezentiran u radu [37], je nadzor performansi individualnih podsistema.

Hibridni dinamički sistemi u najvećem broju slučajeva (ne svim) deluju na sledeći način: dok je diskretno stanje konstantno kontinualno zadovoljava konačan dinamički zakon. Prelazak kroz drugo diskretno stanje menja taj zakon. Po njegovom povratku, diskretno stanje se menja, dakle postoji i zavisnosti događaja od kontinualnog stanja.

Kao što smo već spomenuli u radu [197] je prikazan poseban primer hibridnog dinamičkog sistema-kružni linearno promenljivi automat (cycle linear differential automata) CLDA, gde je pokazano da bilo koji takav sistem može biti redukovano na linearni diskretno vremenski sistem sa periodičnim koeficijentima. Ni jedan CLDA nema ravnotežnih tačaka, zato je svaki prosti atraktor u takvim sistemima periodička trajektorija, i takav sistem smatraćemo globalno stabilnim ako poseduje periodičku trajektoriju koja privlači sve ostale trajektorije, u radu su dati potrebni i dovoljni uslovi za to. Ovaj rezultat primenjen

je na sistem sa prekidačem koji može da se smatra jednostavnim dinamičkim mrežama sa usmerenim čekanjem. Sistem se sastoji od jednog servera i n čvorova (odbojnika) i za takav sistem data je eksplicitna formula za određivanje perioda periodičkih trajektorija.

U radu [249] razmatran je problem upravljanja klasom HDS koja se sastoji od kontinualnog sistema sa upravljivim ulaznim poremećajem i diskretnim kontrolerom. Kontroler je definisan kao serija datih kontrolera koji su ovde osnovni kontroleri, a strategija upravljanja je zapravo pravilo po kome se vrši prekidački mehanizam sa jednog na drugi osnovni kontroler. Cilj upravljanja je da se dostigne nivo definisanih performansi pomoću integralnog indeksa performansi slično kao što se zahteva u standardnoj H^∞ teoriji upravljanja. Prekidački mehanizam je izračunat rešavanjem Riccati-jeve diferencijalne jednačine tipa igre i jednačinom sa diskretno vremenskom dinamikom programiranja. Ovaj rad pokazuje da ako postoje rešenja ovih jednačina onda je moguća konstrukcija odgovarajućeg kontrolera kao i da ovakva teorija nelinearnog upravljanja daje dobar okvir za proučavanje HDS.

Razvijena teorija HDS u radovima autora A. V. Savkin-a u skorije vreme primenjena je na različite aplikativne sisteme, tako da je u radu [248] prikazan središnji pristup (medium access control) problemu kontrole za bežične komunikacione mreže i primenjen je matematički model hibridnih dinamičkih sistema za analizu tog problema. Predstavljen je koncept stabilnosti takvih sistema koji garantuje da bilo koji paket podataka u bežičnoj mreži posle konačnog vremena stiže na odredište, čime su dati veoma jednostavni i lako proverljivi algebarski uslovi stabilnosti bežičnih komunikacionih mreža. U radu [247] predstavljeni su HDS sastavljeni od mreža sa složenim nizovima prekidača kao model promenljivih proizvodnih mreža. Predloženo je raspodeljivo i ugradivo pravilo sa raspoređivanjem u realnom vremenu, tako da je odgovarajući sistem sa zatvorenom petljom stabilan i optimalan. U stabilnom sistemu proces konvergira periodičkom procesu.

U radu [179] dat je pregled modeliranja i kontrole hibridnih sistema. Ovi sistemi pokazuju različitosti kontinualnog i diskretnog ponašanja, što uslovljava razlikosti u formalizmu modeliranja. Ovaj pregled podvlači neke karakteristike hibridnih sistema. Primer sistema sa tri rezervoara koji se pune tečnošću koristi se da prikaže pristup modeliranju. Varijacije ovoga primera koriste se za dublja istraživanja karakteristika hibridnih modela. Predstavljena je i diskusija o analizi i tehnikama upravljanja za hibridne sisteme.

Modeliranje i analiza hibridnih dinamičkih sistema

U radu [33] predstavljen je praktični značaj i tehnike za modeliranje i analizu hibridnih sistema. Većina tehničkih sistema, od mašina za pranje veša, preko točkova automobila i hemijskih procesa sastoji se od kontinualnih (pod)procesa koji počinju, menjaju se i zaustavljaju se diskretno upravljivom logikom, koja je zauzvrat spregnuta sa satom i/ili senzorom koji su ulaz u kontinualni proces. Takođe, konstatovano je da kontinualni proces i sam, ili barem na određenom nivou samog apstrahovanog modela, može izvršiti prelaz sa jednog diskretnog stanja na drugo, kao pri pojavama mrtvog hoda, statičkog trenja, u sistemima sa histerezisom, zatim pri faznim prelazima u mehaničkim sistemima i sl.

Tradicionalno, kada je reč o modeliranju, simuliranju i upravljanju dinamičkim sistemima fokusira se na procese kontinualne dinamike, koji mogu biti opisani adekvatnim sistemima običnih diferencijalnih

jednačina ili diferencijalno algebarskih jednačina. Nasuprot tome u oblasti kompjuterskih nauka, teoriji komunikacija, proizvodnji i drugim područjima dugo su se proučavali sistemi, koji pokazuju prelaze iz jednog diskretnog stanja u drugo u neodređenim trenucima vremena da bi se prikazala tačnost i svojstvenosti npr. toka komunikacija, operativnih sistema, transportnih sistema, sistema raspodeljenjih proračuna, strategije premeštanja resursa i sl. Poslednje dekade prošlog veka, razvija se sistematična teorija dinamičkih sistema gde dinamika obuhvata i prelaze diskretnih stanja, nazvane dinamičkim sistemima diskretnih događaja, koristeći rezultate i iz računarskih nauka, teorije matematičkih sistema i iz teorije nelinearnih oscilacija-teorije haosa.

U procesu upravljanja, obično je deo upravljačkog softvera koji se odnosi na događaje i daje diskretne izlaze ili daje prekidače između različitih procedura i strategija mnogo duži od softvera koji se odnosi na kontrolu kontinuuma. Sistemi u kojima kontinualna i diskretna (diskretni događaji) dinamika međusobno deluju i gde njihova interakcija kvalitativno i kvantitativno određuje ponašanje podsistema i samog sistema nazivaju se hibridni dinamički sistemi. Matematički model je osnov svake formalne analize hibridnih sistema i zahteva za simulaciju njihovog ponašanja. I dok za modeliranje kontinualnog sistema uglavnom postoji zasnovana jedna univerzalna paradigma modeliranja sistemi ODJ ili DAJ, za diskretne sisteme i za hibridne sisteme postoji mnogo paradigmi modeliranja, koje su korisne za različite svrhe.

Kontinualni sistemi sa prekidačima

Iz klasične dinamike sistema i upravljačkog okruženja najprirodniji pristup je da se razvije standardni model kontinualnog sistema sa diskretnim prekidima dinamike sistema.

Najraniji pokušaj da se napravi formalni okvir za modeliranje i simulaciju hibridnih fenomena je diferencijalni automat, koji je predstavio Tavernini [268]. U radu [7], lokalni prostor stanja i skokovi stanja u slučaju prebacivanja su predstavljeni zajedno sa upravljanjem ulazima. Iako se možemo složiti da su česte nekontinualne promene stanja fizičkog sistema na mikroskopskoj skali rezultat pojednostavljenja u modeliranju, često je korisno uvrstiti ovakve iznenadne promene (ekvivalentne impulsnim ulazima) da bi se izbegla numerika sa vrlo različitim vremenskim skalama. Napredne modele koji uključuju sve rečeno su predložili Branicki i saradnici [16] i Pantelides [217].

Diskretni modeli

Alternativni opis hibridnog sistema može biti izveden kao čisto diskretni ili logički model. Logički modeli obuhvataju samo niz, kvalitativno ponašanje razvoja sistema, tj. niz stanja ili prelaza respektivno „jezika“ koji sistem stvara. Ne postoje vremenske reference u kvantitativnom smislu, ali događaji su određeni kao da se pojavljuju na linearnoj vremenskoj osi.

Automat

Osnovni model diskretnog sistema je mehanizam sa konačnim stanjem, ili automat. Formalno, automat može da se definiše kao $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0)$, gde je Q konačan skup diskretnih stanja, Σ je skup događaja, $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ je (deo) funkcija prelaska stanja, i $q_0 \in Q$ je početno stanje. Automat prelazi sa jednog stanja na drugo ako prelaz (grafički označen orijentisanim likom) postoji između tih stanja i registruje se događaj pridružen tom prelasku. Trajektorija automata je niz stanja $q_0, q_1, \dots \in Q$ koja zadovoljavaju $q_{k+1} \in \delta(q_k, \sigma_k)$

za odgovarjući niz događaja $\sigma_0, \sigma_1, \dots \in \Sigma$. Nulti događaj može da se koristi da označi prelaz koji se može javiti bez ulaznog događaja. Automati se koriste npr. da opišu sisteme koji prihvataju reči u programskim jezicima, tako da događaju odgovara simbol u nizu ulaza. Ako se automat završava sa prihvatljivim stanjem ulaz je legalan izraz. U tom smislu nema potrebe da se određuje šta se događa ako ni jedan od događaja nije registrovan za ostvareni prelaz kad je sistem u datom stanju – ulaz se ne prihvata u ovom slučaju. Mnoštvo svih važećih nizova ulaza čini jezik automata. Različiti automati mogu prihvatati isti jezik što je analogno postojanju više stanja-prostornih realizacija za dato ulazno-izlazno ponašanje linearnog kontinualnog dinamičkog sistema.

Sa stanovišta analize i sinteze upravljanja za dinamičke sisteme, prihvatljivije je razmatrati automat kao generator koji proizvodi događaje, a time i reči u jeziku. Onda, za svako stanje, automat može izvesti skup prelaza, od kojih svaki može proizvesti izlazni događaj. Ovaj niz je netrivialan i neodređen, tj. uključena su u njega često i alternativni lukovi iz jednog stanja u isto stanje ili u druga stanja. Kasnija uopštenja automata određuju skup ulaznih događaja, koji aktiviraju određene prelaske u spontane prelaske.

Mape stanja

Diskretni sistemi respektivno diskretni modeli kontinualnih sistema često se sastoji od podsistema koji međusobno deluju, ali takođe prelaze sa jednog stanja na sledeće, nezavisno od svih ostalih [54]. Ova poslednja situacija naziva se konkurentnost, dok je sprezanje između podsistema sinhronizacija. Kada pravimo model sistema, trudimo se da on bude sposoban da vezuje (ili sačinjava) modele podsistema na prirodan način, tako da i nezavisna ponašanja i međusobna zavisnost mogu lako da se izraze.

Nedostatak modela automata je da njima ne pristaje izgradnja ovakvih modularnih modela. Uobičajeni metod kombinovanja modela automata nekoliko komponentnih sistema je sinhrona kompozicija u kojoj se prelazi događaju istovremeno na komponentama kad god se nađu na istoj liniji događaja. Inače, se događaji mogu pojavljivati nezavisno, a da se ne menjaju stanja komponenti. Da bi se analizirao celokupni sistem, podsistemi moraju biti združeni u veliki automat prostora stanja, koji se sastoji od svih lokalnih prostora stanja. Broj stanja onda raste eksponencijalno, kako se dodaju komponente sistema i struktura modela jako brzo postaje nerazumljiva.

Mape stanja su prikladni grafički modeli, koji su zasnovani na modelu automata proširenim sa:

- širinom (stanja mogu biti poboljšana sa detaljnijim modelima ponašanja u tom stanju)
- ortogonalnošću (ili konkurentnošću, tj. sistem može biti u nekoliko stanja paralelno)
- komunikacijom između tekućih procesa.

Prelaz se pojavljuje ako se pojavi pridruženi spoljašnji događaj i može izazvati dejstvo tj., stvoriti unutrašnji događaj koji aktivira drugi prelaz. Posle svih tih unutrašnjih događaja (i događaja izazvanih takvim događajima itd.) koji se javljaju sistem prelazi na svoje sledeće stanje. Za definisanje i simuliranje mapa stanja, dostupni su moćni kompjuterski alati (StateMate) koji su prilično popularni u industriji.

Petri-jeve mreže

Petri-jeve mreže [207] su predstavljane za modele sa konkurentnošću, konfliktima i sinhronizacijom. Jednostavna Petri mreža se sastoji od mesta (krugovi) i prelazaka (grede ili kutije) sa linkovima koji povezuju mesta sa prelazima i prelaze sa mestima. Stanje modela Petri-jeve mreže dato je

oznakama koje identifikuju broj signala na svakom mestu. Prelazi stanja se dešavaju kada Petri mreža pogodi prelaz. U jednostavnoj Petri mreži prelaz se može pogoditi (ali ne mora) kada je sposoban tj. postoji signal na svakom od njegovih ulaznih mesta. Kada se pogodi osposobljeni prelaz signal je pomeren na svako ulazno mesto i signal je postavljen na sva njegova izlazna mesta. Kaže se da su prelazi u konfliktu ako su oni istovremeno osposobljeni za datu metu, i kada pogađenje jednog od prelaza onemogućava ostale prelaze. Petri mreže mogu biti kombinovane za osnivanje velikih modela od podsistema. Mogu biti postignute uobičajenim Petri mrežama prelaza i mesta. Nasuprot sinhronoj kompoziciji automata, mesta i prelazi podsistema održavaju svoj identitet u složenoj Petri mreži. Dakle, struktura kombinovane Petri mreže i dalje odražava logičku strukturu sistema koji je modeliran. Veličina Petri mreže raste linearno, a ne eksponencijalno, sa brojem dodatih komponenti sistemu. Sa Petri mrežom su združena kvalitativna svojstva sistema kao živost, tj. sistem ne dostiže stanje sa kojeg nisu mogući i dostupni naredni prelazi. Da bi se analizirala Petri-jeva mreža može se definisati automat u kojem svako stanje odgovara dostupnoj meti u Petri mreži, a prelazi stanja odgovaraju odobrenim prelazima Petri mreže za svaku metu. Ovo se naziva dostupnost grafika za Petri mrežu. Kada je analiza Petri mreže zasnovana na konstrukciji, predstava ekonomije Petri mreže ne vodi računa o uštedi u proračunu, jer broj meta može rasti ekponencijalno sa veličinom Petri mreže.

Vremenski modeli

Opisani diskretni modeli odnose se na vreme jedino određujući događaje (prelaze) na vremenskoj osi. U mnogim tehničkim sistemima, tajmeri se koriste da prate razvoj kontinualnih procesa ili prenošenja poruka, i onda brzina procesa mora biti uzeta u obzir pri analizi. Ovo je takođe potrebno kod svih problema premeštanja resursa, gde su resursi obično potrebni posle određenog vremena. Najprirodniji način proširenja Petri mreža je uvrščavanje tajmera, koji definišu koliko dugo signal mora postojati u stanju pre ili dok se prelaz ne pogodi. Umesto toga neki autori pridružuju vreme lukovima koji su „otvoreni” samo za vreme nekog intervala [53]. Dolazak signala u stanje pokreće tajmere koji su razvijeni da odrede mogućnost pogađanja narednih prelaza. Za Petri mreže sa tajmerima (vremenske Petri mreže) analiza je još uvek moguća ako se naprave specijalne pretpostavke u pravilima pogađanja, tj. da je svaki dostupni prelaz pogođen čim on bude dostupan. Ovo je u neku ruku u suprotnosti sa opštom filozofijom Petri mreža da modeliraju prelaze koji se mogu desiti ali nisu prisiljeni.

Vremenski automat je automat sa skupom tajmera. Svi tajmeri rade sa istim korakom. Prelaz može dovesti u položaj nula jedan ili više tajmera. Prelazi mogu da se biraju ne samo na osnovu pojavljivanja događaja nego i na dodatnim logičkim uslovima koji iskazuju kako se porede tajmeri sa realnim brojevima. Jezik koji prihvata automat nije onda definisan samo na osnovu nizova simbola nego i na osnovu vremenskih ograničenja za pojavu tih simbola. Sa stanovišta generisanja, vremenski automat proizvodi reči na određenom vremenskom jeziku. U modelima vremenskih automata, uslovi prelaska mogu biti predstavljeni na drugačiji način korišćenjem intervala. Invarijanta je logički izraz, koji obuhvata poređenje tajmera sa realnim brojevima, koji moraju biti zadovoljeni da bi sistem ušao u stanje i zadržao se u njemu. Kada invarijanta nije više zadovoljena sistem mora napustiti to stanje. Ako su ulazni događaji i vremenski uslovi za prelaske predstavljeni to može izazvati konflikt- model onda postaje neodređen zbog čega

prestanak vremena mora biti definisan na osnovu informacije iz budućnosti sistema ili čak na osnovu izlaza.

Hibridni automat [5]

Iz vremenskih automata ili vremenskih Petri mreža, sledi uopštavanje sistema sa opštom dinamikom pre nego li tajmeri koji su aktivni u diskretnim stanjima. Hibridni automati sadrže proizvoljno mnogo kontinualnih dinamika i diskretnih prelaza koji mogu zavisiti od razvoja kontinualne dinamike. U hibridnim automatima, kontinualni sistem sa prekidima je "rastegnut" na različite diskretne pozicije. Svaka pozicija odgovara jednom od diskretnih modova, tj. na svakoj poziciji određeni sistem diferencijalnih jednačina je aktivan. Kao i kod vremenskih automata, uslovi za prelaskе diskretnih stanja sa jedne na drugu poziciju mogu biti izraženi logičkim uslovima, a događaji pridruženi lukovima ili pomoću invarijanti. Obe mogu sadržati poređenja funkcija kontinualnih promenljivih koje se pojavljuju u dinamičkim jednačinama stanja samih sa sobom ili sa konstantama. Ako je prelazak omogućen i invarijanta postanu netačne istovremeno, prelazak (respektivno jedan od mogućih prelazaka ako ih ima više) mora biti izveden. Inače, moguće je da sistem ostane u toj poziciji. Takođe, moguće je pridružiti događaje izlaza sa prelazima. Početni uslovi diferencijalnih jednačina, koji su skup vrednosti u kojima diskretno stanje dostiže poziciju, moraju takođe biti definisani. Oni mogu zavisiti od svih kontinualnih i diskretnih promenljivih sistema. Za sisteme sa malo diskretnih stanja, hibridni automat je relativno intuitivan model hibridnog sistema. Svakom diskretnom stanju pridružen je skup dinamičkih jednačina koje predstavljaju kontinualne dinamike za te situacije. Usvojeno je da se prelaz odvija odmah kada je zadovoljen pridruženi uslov odnosno pojavljuju se događaji pre nego li se koriste invarijante. Na svakom od tih položaja, kontinualni deo sistema je opisan različitim skupom diferencijalnih jednačina i iscertava ili tačno programira automat koji ima mnogo položaja. Problem je naravno mnogo gori ako se uvrste sva potencijalna ponašanja u podmodele. Zato i hibridni automat i kontinualni sistem sa prekidima prethodno opisani nisu pogodni za opisivanje realnog sveta hibridnih sistema čak ni umerene kompleksnosti. Hibridne Petri-jeve mreže mogu da se definišu na sličan način i dele slične principijelne probleme.

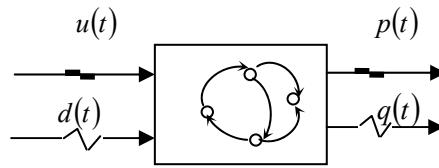
Modulirani modeli hibridnih sistema

Moduliranje je jedan ključ nadogradnje delotvornog plana modeliranja hibridnih sistema. Predstavimo ovde uslov/događaj sistem (u/d sistem) kao modularni opis diskretnih sistema kod kojih je interakcija izražena signalima koji povezuju podsisteme, kao i uopštene prekidačke kontinualne blokove. Sa ova dva osnovna elementa, hibridni sistem koji se sastoji od kompleksne diskretne i kontinualne dinamike može da se modelira pomoću interakcije blokova (objekata). Jedan u/d sistem može da se opiše pomoću automata konačnog stanja sa dva tipa ulaznih i izlaznih signala:

- pojedinačno konstantni signali sa uslovom desne kontinualnosti koji uzimaju vrednosti iz konačnog alfabeta
- signali događaja koji su skoro uvek nula i uzimaju vrednosti iz (drugacijeg) alfabeta.

Korišćenje dva tipa signala omogućava jasnu i jednostavnu razliku između odobrenih i neprisljenih prelaza stanja. Slični tipovi signala koriste se u jezicima logičkog programiranja.

U/d sistem ima uslovni ulaz $u(t)$ i ulaz događaja $d(t)$, kao i uslovljen izlaz $p(t)$ i izlaz događaja $q(t)$ slika 1.2.



Slika 1.2. Uslov/ događaj sistem

U/d sistem može biti neodređen. Za razliku od drugih modela, ovo je moduliran ulaz-izlaz opis u kojem svi tipovi interakcija logičkih sistema mogu da se izraze na pogodan način, i sve spoljašnje veličine su definisane kao funkcije vremena. Tako je sprezanje u/d sistema i kontinualnog sistema neposredno. U praksi, se signali uslova koriste da prenesu informaciju o stanju drugog podsistema ili okoline i da uslove prelaze u podsistemu stanja drugog podsistema ili spoljašnjih uslova. Ovo nije direktno moguće u modelima automata u kojima se komunicira jedino događajima koji se stvaraju kada se pojave prelazi. Da bi se razotkrila informacija o stanju drugog podsistema iz prelaza, (delimični) model tog podsistema mora da se uvrsti. Signali događaja nose informaciju o prelascima u druge podsisteme. U standardnim Petri-jevim mrežama jedini uslovi za prelasku koji zavise od stanja mogu biti izraženi, a to nije neposredno, za par prelazaka koji su neindirektni, a ovde je to postignuto kada jedan signal događaja prisili prelazak. Ipak, kako događaj može da se stvori „izabiranjem“ signala uslova i obrnuto uslovi mogu da se stvore iz događaja pomoću odgovarajuće dodatne dinamike (npr, izvesne memorije) u podsistemu. Da bi se dobio opšti modularni plan modeliranja hibridnih sistema, u/d sistemi se sprežu sa sistemima DAJ koji uključuju granične funkcije da stvore uslov i događaj izlaza iz kontinualnih promenljivih. Kontinualni blok sa prekidačem (switched continuous block SCB) je sistem DAJ-na sa prekidačima kao što je to već opisano sa istim ulazima, istim uslovnim izlazima i vrednosnim izlaznim vektorom o i vektorom događaja izlaza e . SCB može predstavljati fizički deo (pod)sistema tj. podprocesu zajedno sa diskretnim aktuatorima i senzorima. Specijalni slučaj SCB-a je tajmer. Tajmer ima dva moda, radni (sa određenim korakom) i zaustavni, koji se prekidaju modom ulaza. Ulazni događaj restartuje tajmer na (ako je moguće zavisno od događaja) početno vreme x_0 . Uslovni izlaz prati da li je tajmer ispod ili iznad granične vrednosti, i izlazni događaj se stvara u trenutku kada je granica dostignuta. Tajmer je u/d sistem tim pre što se razmatralo i spoljašnje ponašanje.

Analiza hibridnih sistema sa stanovišta tehničke prakse sastoji se u simulacijama i verifikaciji. Kako je matematička analiza hibridnih sistema veoma složena, opšti model koji obuhvata kontinualna kao i diskretna ponašanja je često korisniji za proučavanje simulacija. Od skoro su sistemi simulacije postali dostupni, a to omogućava da se implementiraju i simuliraju tipovi sistema koji su već opisani. Simulacija sistema sa prekidima standardnim integraljenjem može dati netačne rezultate. Program u MATLAB-u koji može raditi sa ODJ-ma sa prekidima razvio je Taylor [268].

DYMOLA je softverski paket koji omogućava modularno modeliranje dinamičkih sistema sa iznenadnim promenama strukture sistema i npr. histerezisom i suvim trenjem na osnovu spojenih grafičkih modela. Njegova prednost je simbolička manipulacija sa definisanim jednačinama da bi se proizveli minimalni

opisi celokupnog sistema. Logički elementi su transformisani u algebarske jednačine kada se stvara model simulacije. Program se uspešno primenjuje na velike mehaničke sisteme sa zavisnim promenama stanja u strukturi sistema. Ipak program nema rešenje za definisanje i upotrebu složenih nizova i logičkih odlučivanja.

gPROMS može rukovati sa velikim povezanim sistemima koji se sastoje od (pod)sistema DAJ-na spregnutih sa automatom. Modeli kontinualnih sistema su indeksa 1 DAJ-ne sa promenama moda tipa Tavernini (konstantan broj diferencijalnih jednačina, promenljive stanja kontinualne). Na više nivou mogu da se definišu i „zadatak“ i „raspored“ koji mogu promeniti strukturu sistema uključujući i promenu početnih vrednosti stanja.

BaSIP je simulaciono okruženje u kom je dinamika opisana logički pomoću ODJ-na koje obuhvataju stvaranje diskretnih signala. Logički sistemi mogu biti definsani logički (model promena strukture sistema na nivoima podsistema) ili globalno da predstavi navođeno startovanje ili zaustavljanje operacija, u nizu ili paralelno.

U današnje vreme moguća je verifikacija-provera logičkih programa za relativno mnogo problema zahvaljujući upotrebi računara velikih brzina, i predstavljanjem stvarnog podatka struktura za Boolean funkcijama [19] i razvojem provere simboličkog modela koja je efektivna metoda za proveru stabla svih mogućih nizova stanja konačnih prelaza sistema. Osnova je diskretni stanje-prelaz model dinamike sistema. Željena svojstva sistema (i sigurnost i radni vek) se definišu upotrebom vremenske logike i program, onda se proverava da li su svojstva zadovoljena. Provera simboličkog modela primenjuje se u digitalnom kolu i računarskom protokolu za proveru. SIMENS je razvio jedan alat za logičku proveru programa zasnovanu na istom modelu. Ove tehnike mogu da se primene na hibridne sisteme ako je kontinualni deo aproksimiran čisto diskretnim modelom, ali u tom slučaju mnogo informacija se gubi. Takođe, programi stvarne logičke kontrole tehničkih sistema često imaju prekide koji ne mogu biti adekvatno modelirani u nevremenskim opisima. Vremenski automat je najopštija klasa sistema za koju su dostupne metode provere (npr. programima HyTech, KRONOS, UPPALL). Ovi programi takođe mogu računati opsege graničnih vrednosti koji će garantovati da specificirani uslovi budu zadovoljeni. Ako se uvede diskretizacija vremenske ose modeli simboličkog proveravanja mogu da se primene i na sisteme sa tajmerima. Da bi se primenili ovi alati na formalnu proveru, kontinualni deo sistema mora da se aproksimira u vremenski diskretni sistem. Ovakva aproksimacija u osnovi ima tzv. zatvorena rešenja, tj. diskretni sistem sadrži ponašanja koja kontinualni sistem ne može izvesti. Dakle, ako provera pokaže da će upravljani sistem dostići zabranjeno stanje može da sledi da se to neće dogoditi u stvarnosti. Ako se desi da verifikacioni programi predvide niz događaja koji ne bi zadovoljavali specifikaciju, simulacija originalnog kontinualno-diskretnog sistema može da se izvede samo za kritičnu situaciju da se provere rezultati. Ako se ne pronađe narušavanje specifikacije analizom vremenskog sistema za diskretnom povratnom spregom i ako model vremenski diskretnog sistema je krajnja aproksimacija kontinualnog sistema, dokazano je da logika upravljanja radi korektno. Ovde praktično postoji stalno balansiranje između valjanosti aproksimacije i pokušaja da se načini diskretni model i opišu sve njegove složenosti.

Tehnike provere zasnovane na vremenskom u/d sistemu (u/d sistemu sa kontinualnim blokovima koji imaju prekide a to su tajmeri) prikazane su u radu [178]. Pokazano je da su vremenski u/d sistemi ekvivalentni vremenskim automatima i mogu da se transformišu u njih. Ovo omogućava da se pomenuti programi koriste i za verifikaciju tih sistema. Kritični korak ovde je kompozicija podmodela u jedan veliki sistem koji je potom objekat provere. Ovo je veoma zahtevno čak i za moćne računare i vodi ka velikim nestrukturiranim problemima provere. Zato je čini se obećavajuće da se načini analiza kompozicija gde se svojstva podsistema proveravaju, a tačno funkcionisanje celokupnog sistema se izvodi iz ovih dokazanih svojstava.

Na kraju navedi se samo jedan, mada ih ima mnogo više, primer upotrebe teorije hibridnih dinamičkih sistema u medicini. Suština određenja hibridni dinamički sistem ukazuje na disparatnost priroda koje su spregnute u hibridni sistem, sam način prilaza i modeliranja takvih sistem primenjiv je i u drugim oblastima a ne samo u inženjerstvu, na primer u ekonomiji, biologiji, medicini. Jedan ilustrativni primer upotrebe u savremenoj medicini jeste i rad [267] gde je prikazan jedan primer primene modeliranja hibridnog dinamičkog sistema na napredovanje bolesti kancera prostate pod dejstvom hormonalne terapije, gde se kontinualna dinamika tumora prekida uticajem i ubacivanjem leka. U radu se proučava model hibridnog sistema koji predstavlja androgenu terapiju sa prekidima (ATP) preventivnog suzbijanja kancera prostate. Isprekidano uzimanje leka sa prekidanjem između perioda tretmana i netretmana koristi se sa namerom za moguću prevenciju tumora prostate razvijajući se u otprno stanje hormona i za predviđanje moguće strategije za kašnjenje ili prevenciju sa nadom povratka tumora kroz koji mnogi pacijenti prolaze kao rezultat dugog vremenskog prigušivanja hormona. Klinička efikasnost ATP za kancer prostate još uvek je pod ispitivanjem ali barem vredna razmatranja u smislu smanjenja cene tretmana u periodu prekida terapije. Sam model ATP zavisi od nekih klinički upravljivih parametara koji ukazuju da li će se povratiti tumor ili ne. Zbog toga, ovde se proučava nelinearna dinamika i struktura bifurkacija modela upotrebljavajući numeričke metode da se potvrde skupovi bifurkacija u hibridnom sistemu. Šta više, dvodimenzionalni slabo nelinearni sistem redukovani iz polaznog modela ističe pojavu nelinearnih fenomena svojstvenih hibridnim sistemima. Rezultati sugeriraju da male promene normalnog androgenog nivoa u kombinaciji sa odgovarajućim rasporedom uzimanja leka mogu povećati mogućnost prevencije povratka kancera.

Iz svih navedenih primera do sada konstatuje se da je stvarnost prepuna hibridnih sistema, a to daje izazove u problemima njihovog modeliranja, simulacije i analize. Pri tome su neki od problema i pojava haosa kao posledica nelinearnosti, kako u nekim veoma jednostavnim hibridnim sistemima, tako i u onim složenim, daleko od rešenih do sada. Stalni su pokušaji savremenih naučnika da na dinamiku nelinearnih sistema primene poznate metode upravljanja, optimizacije, sinhronizacije, ali do danas ne postoji opšta teorija koja bi obuhvatila sve aspekte koje nelinearnost u sistem unosi, ali svi ti naponi daju upotrebljive rezultate od kojih su samo neki izdvojeni u narednim redovima, a odnose se na mogućnosti primene teorije upravljanja na sisteme sa nelinearnostima.

2* Poglavlje

Pregled metoda za istraživanje

U osnovi korisne primene oscilacija, kao i uzroku njihovog štetnog dejstva, leže svojstva pojava koje su povezane sa svojstvima nelinearnih fenomena u dinamičkim procesima tih oscilacija, što je i razlog predstavljanja u daljem radu klase hibridnih dinamičkih sistema sastavljenih od podistema sa svojstvima nelinearnosti. Većina mogućnosti efektivnog korišćenja oscilacija je povezana sa tim da oscilacije menjaju karakter i svojstva nekih fizičko-dinamičkih procesa u nelinearnim mehaničkim sistemima, a sa tim i njihovo ponašanje. Npr. stabilan položaj statičke ravnoteže postaje nestabilan u dinamičkim uslovima i uspostavlja se nova konfiguracija sistema u uslovima dinamičke ravnoteže, a konfiguracija nestabilne ravnoteže postaje stabilna i sl. Ovde treba dodati i izuzetnu osetljivost dinamičkih procesa u nelinearnim dinamičkim sistemima na male promenama parametara stanja sistema. U uvodnom delu rada [259] može se naći pregled metoda za rešavanje problema nelinearne mehanike i objašnjavanje specifičnih pojava dinamičkih sistema sa nelinearnostima. Kako ovaj rad predstavlja sublimaciju svih dosadašnjih znanja i logičan nastavak u primeni tih znanja za formiranje nove metodologije u izučavanju

jedna klase dinamičkih hibridnih sistema deo rezultata prikazan u mom magistarskom radu ovdje će biti korišćen bez matematičkih izvođenja kako bi se formirali opšti zaključci. Osnove asimptotske metode usrednjavanja Krilov-Bogolyubov-Mitropolskiy-kog ([200-203]) za rešavanje nelinearnih zadataka mehanike koja će se koristiti u rešavanju modela hibridnih dinamičkih sistema predstavljenih u narednim poglavljima date su u potpunosti i za diskretne i za kontinualne sisteme u mom magistarskom radu [259]. Ovdje se samo navedi principijelni prilaz metodi na najjednostavnijem i opštem obliku nelinearne diferencijalne jednačine, jer su kroz prikaz definisana i osnovna svojstva koja bi moralo da poseduju sistemi čiji se matematički model rešava ovom metodom. Kroz ovaj primer pratiće se i osnovni zaključci primene ove metode.

2.1 Ideja i osnovne pretpostavke asimptotskih metoda nelinearne mehanike

Privenstveno da bismo se asimptotsku metodu Krilov-Bogolyubov Mitropolyski primenila mora biti zadovoljeno prisustvo malog parametra ε , kojeg formalno i matematički uvodimo u diferencijalne jednačine kretanja. Fizički smisao prisustva malog pozitivnog parametra obezbeđuje se ograničavanjem izučavanja na male nelinearnosti i male oscilacije oko ravnotežnog položaja ili formalno u faznoj ravni posmatranjem malog intervala vremena. Da bi se pravilno formulisala metoda sastavljanja asimptotske aproksimacije rešenja jednačina neophodno je da se za osnovu uzme fizička predstava o karakteru proučavanog oscilatornog procesa. Na prostoju nelinearnoj običnoj diferencijalnoj jednačini oblika:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (2.1.1)$$

gde je ε mali pozitivan parametar. Pri $\varepsilon = 0$, tj. pri odsustvu poremećaja oscilovanje će biti čisto harmonijsko opisano oblikom kosinusne funkcije:

$$x = a \cos \psi, \quad (2.1.2)$$

konstantne amplitude a i jednakopromenljivog faznog ugla $\psi = \omega t$, tj.

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = \text{const}. \quad (2.1.3)$$

Prisustvo nelinearnog poremećaja dovodi, u rešenju jednačine (2.1.1), do pojave viših harmonika, uslovljava zavisnost trenutne frekvencije $\frac{d\psi}{dt}$ od amplitude, a može da izazove i sistematsko uvećanje ili umanjenje amplitude oscilovanja u zavisnosti od energije koju apsorbuje ili odaje poremećajna sila. Svi ti efekti isčezavaju u graničnom slučaju $\varepsilon = 0$. Imajući to u vidu opšte rešenje izučavane jednačine (2.1.1) traži se u obliku:

$$x = a \cos \psi + \varepsilon U_1(a, \psi) + \varepsilon^2 U_2(a, \psi) + \dots \quad (2.1.4)$$

gde se $U_1(a, \psi), U_2(a, \psi), \dots$ javljaju kao periodičke funkcije ugla ψ , perioda 2π . Veličine a i ψ kao funkcije vremena određuju se iz sistema diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Na taj način nalaženje asimptotske aproksimacije rešenja jednačine (2.1.1) svodi se na izbor odgovarajućih izraza za funkcije $U_i(a, \psi)$, $A_i(a)$ i $B_i(a)$, tako da izraz (2.1.4) u kome a i ψ bivaju zamenjene funkcijama vremena, koje se određuju iz jednačina (2.1.5), bude rešenje početne jednačine (2.1.1).

Kad su nađeni eksplicitni izrazi za koeficijente razlaganja u izrazima (2.1.4) i (2.1.5), pitanje integraljenja jednačine (2.1.1) svodi se na prostiji slučaj integraljenja jednačina (2.1.5) sa razdvojenim promenljivim (argumentima), koje u pojedinim slučajevima omogućavaju izučavanje pomoću poznatih elementarnih načina.

Određivanje koeficijenata redova (2.1.4) i (2.1.5) ne predstavlja principijelni problem, no, s obzirom da formule vrlo brzo postaju složene, praktično efektivno mogu da budu nađena samo prva dva tri člana.

Zadržavajući u redovima (2.1.4) i (2.1.5) samo prvih m članova tj. stavljajući da je:

$$x = a \cos \psi + \sum_{i=0}^m \varepsilon^i U_i(a, \psi) \quad (2.1.6)$$

i

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \sum_{i=0}^m \varepsilon^i A_i(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \sum_{i=0}^m \varepsilon^i B_i(a), \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

dobija se aproksimacije prvog, drugog itd. ili uopšte rečeno ne tako velikog reda. To je zato jer je poznato da se praktična primena asimptotske metode određuje ne osobinama konvergencije redova (2.1.4) i (2.1.5) pri $m \rightarrow \infty$ nego asimptotskim osobinama za zadati broj članova m pri $\varepsilon \rightarrow 0$. Neophodno je samo to da pri malom ε izraz za (2.1.4) daje dovoljno tačnu aproksimaciju rešenja jednačine (2.1.1) i za dovoljno dug period vremena. Zato se obično redovi (2.1.4) i (2.1.5) pretpostavljaju kao formalni, neophodni za nalaženje asimptotske aproksimacije (2.1.6).

Nalaženje asimptotskih aproksimacija može se postaviti i strožije kao nalaženje takvih funkcija $U_i(a, \psi)$, $A_i(a)$ i $B_i(a)$ da bi izraz (2.1.6) u kome se funkcije vremena a i ψ određuju jednačinama m -tog približenja (2.1.7) zadovoljavao jednačinu (2.1.1) sa tačnošću do malih veličina reda ε^{m+1} . U posmatranom slučaju jednačine (2.1.1) moguće je bilo ustanoviti konvergenciju redova (2.1.4) i (2.1.5) pri veoma opštim uslovima postavljenim za funkciju $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$. S obzirom da će se dalje proučavati slučaj

kada su posmatrani redovi divergentni, to se ovde neće vezivati izlaganja metode nalaženja asimptotskih

aproksimacija sa dokazivanjem konvergencije i zato će se redovima po stepenima malog parametra davati formalni smisao.

Nekoliko reči o proceni greške. Iz činjenice da dobijeno približno rešenje zadovoljava jednačinu (2.1.1) sa greškom reda ε^{m+1} , to i pomoću običnog majoriranja može se utvrditi da će odstupanje približnog rešenja od odgovarajućeg tačnog (uz saglasnost početnih uslova) biti ograničeno veličinom reda $\varepsilon^{m+1}t$ i na taj način razlika ostaje mala pri ma koliko velikim vrednostima εt , samo ako je ε dovoljno malo.

Pitanje strogog obrazloženja asimptotskih metoda predstavlja poseban čisto matematički problem koji ima značaj za teoriju diferencijalnih jednačina sa malim parametrom.

Nalaženje funkcija $U_i(a, \psi)$, $A_i(a)$ i $B_i(a)$ sadrži u sebi izvestan stepen proizvoljnosti, a da bi određivanje tih funkcija bilo jednoznačno moraju se postaviti za njih dopunski uslovi. Međutim i izbor dopunskih uslova je proizvoljan. Kao dopunski uslov se bira uslov da u funkcijama $U_i(a, \psi)$ odsustvuju prvi harmonici, tj. potrebno je da bude zadovoljen sledeći uslov:

$$\int_0^{2\pi} U_j(a, \psi) e^{i\psi} d\psi = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.1.8)$$

Fizički posmatrano to znači da je veličini a dat smisao potpune (pune) amplitude prvog osnovnog harmonika oscilovanja. Diferencirajući izraz (2.1.4) i uzimajući u obzir izraze (2.1.5), nalazi se:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a\omega \sin \psi + \varepsilon \left\{ A_1(a) \cos \psi - aB_1(a) \sin \psi + \omega \frac{\partial U_1}{\partial \psi} \right\} + \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ A_1 \cos \psi - aB_2 \sin \psi + A_1 \frac{\partial U_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial U_1}{\partial \psi} + \omega \frac{\partial U_2}{\partial \psi} \right\} + \varepsilon^3 \dots \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -a\omega^2 \cos \psi + \varepsilon \left\{ -2\omega A_1 \sin \psi - 2\omega a B_1 \cos \psi + \omega^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi^2} \right\} + \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ \left(A_1 \frac{dA_1}{da} - aB_1^2 - 2\omega a B_2 \right) \cos \psi - \left(2\omega A_2 + 2A_1 B_1 + A_1 a \frac{dB_1}{da} \right) \sin \psi + 2\omega A_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial a \partial \psi} + 2\omega B_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi^2} + \omega^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \psi^2} \right\} + \\ &+ \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Desna strana jednačine (2.1.1), uzimajući u obzir (2.1.9), može da se napiše u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) &= \mathcal{E}f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \varepsilon^2 \left\{ U_1(a, \psi) f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial U_1}{\partial \psi} \right) \cdot \right. \\ &\left. \cdot f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \right\} + \varepsilon^3 \dots + \dots \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Da bi posmatrani red (2.1.4) zadovoljio početnu jednačinu (2.1.1) sa tačnošću do malih veličina reda ε^{m+1} , neophodno je izjednačiti koeficijente uz jednake stepene ε sa leve i desne strane jednačine (2.1.1) do članova m -tog reda, uključujući i članove m -tog reda. Kao rezultat dobija se:

$$\omega^2 \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial \psi^2} + U_i \right) = f_{i-1}(a, \psi) + 2\omega A_i \sin \psi + 2\omega a B_i \cos \psi, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (2.1.11)$$

gde za $f_i(a, \psi)$ uvodimo oznake:

$$f_0(a, \psi) = f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi)$$

$$f_1(a, \psi) = U_1(a, \psi) f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial U_1}{\partial \psi} \right) f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) +$$

$$+ \left(aB_1^2 - A_1 \frac{dA_1}{da} \right) \cos \psi + \left(2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right) \sin \psi - 2\omega A_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi \partial a} - 2\omega B_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi^2}$$

.....

(2.1.12)

Vidi se da su funkcije $f_i(a, \psi)$ periodičke funkcije promenljive ψ sa periodom 2π i zavise od a .

Da bi se odredile funkcije $U_1(a, \psi)$, $A_1(a)$ i $B_1(a)$ iz prve jednačine sistema (2.1.11) razlože se funkcija $f_0(a, \psi)$ u Fourier-ov red:

$$f_0(a, \psi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_0^{(m)}(a) e^{im\psi}, \quad (2.1.13)$$

gde je:

$$f_0^{(m)}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) e^{-im\psi} d\psi. \quad (2.1.14)$$

Funkcija $U_1(a, \psi)$ traži se u obliku:

$$U_1(a, \psi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_1^{(m)}(a) e^{im\psi}, \quad (2.1.15)$$

pa se izrazi (2.1.13) i (2.1.15) unese u prvu jednačinu sistema (2.1.11) i dobija se:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \omega^2 (1 - m^2) U_1^{(m)}(a) e^{im\psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_0^{(m)}(a) e^{im\psi} + 2\omega A_1 \sin \psi + 2\omega a B_1 \cos \psi \quad (2.1.16)$$

odakle je:

$$U_1(a, \psi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{im\psi}}{2\pi(1-m^2)\omega^2} \int_0^{2\pi} f_0(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) e^{-im\psi} d\psi, \quad m \neq \pm 1 \quad (2.1.17)$$

i

$$A_1(a) = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_0(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi,$$

$$B_1(a) = -\frac{1}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} f_0(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi. \quad (2.1.18)$$

Na sličan način rešavajući drugu jednačinu sistema (2.1.11) dobija se:

$$U_2(a, \psi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{im\psi}}{2\pi(1-m^2)\omega^2} \int_0^{2\pi} f_1(a, \psi) e^{-im\psi} d\psi, \quad m \neq \pm 1 \quad (2.1.19)$$

i

$$A_2(a) = -\frac{1}{2\omega} \left(2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right) -$$

$$-\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \left[U_1(a, \psi) f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial U_1}{\partial \psi} \right) f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \right] \sin \psi d\psi,$$

$$B_2(a) = -\frac{1}{2\omega} \left(B_1^2 + \frac{A_1}{a} \frac{dA_1}{da} \right) - \frac{1}{2\pi\alpha\omega} \int_0^{2\pi} \left[U_1(a, \psi) f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial U_1}{\partial \psi} \right) f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \right] \cos \psi d\psi \quad (2.1.20)$$

Pri rešavanju većine praktičnih zadataka za sastavljanje asimptotskih aproksimacija sasvim je dovoljno da se ograniči na prvu aproksimaciju koja može biti predstavljena u obliku:

$$x = a \cos \psi \quad (2.1.21)$$

gde se a i ψ određuju iz jednačina prve aproksimacije:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

u kojima su $A_1(a)$ i $B_1(a)$ određeni formulama (2.1.18).

Ove jednačine prve aproksimacije je moguće dobiti i uvođenjem zamene promenljivih i usrednjenjem istih.

Jednačina (2.1.1) za $\varepsilon = 0$ ima rešenje:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \psi \\ \frac{dx}{dt} &= -a\omega \sin \psi \quad , \quad \psi = \omega t + \theta. \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

Za rešavanje jednačine (2.1.1) pri $\varepsilon \neq 0$, koriste se formule (2.1.23), ali se a i θ smatraju funkcijama vremena, a same formule (2.1.23) kao neku zamenu promenljivih, pri čemu se faza θ i amplituda a usvajaju kao nove nepoznate funkcije vremena. Odredivši funkcije a i θ mogu da se sastave izraz za traženo rešenje jednačine (2.1.1). Posle zamene promenljivih dobijaju se dve diferencijalne jednačine prvog reda u odnosu na a i θ :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{a\omega} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi. \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

Diferencijalne jednačine oblika (2.1.24) nazivaju se jednačinama standardnog oblika. Desne strane jednačina (2.1.24) se mogu predstaviti u obliku zbira:

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi &= \varepsilon \sum_{\nu} \{ f_{\nu_1}^{(1)}(a) \cos \nu \psi + f_{\nu_2}^{(1)}(a) \sin \nu \psi \} \\ -\frac{\varepsilon}{a\omega} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi &= \varepsilon \sum_{\nu} \{ f_{\nu_1}^{(2)}(a) \cos \nu \psi + f_{\nu_2}^{(2)}(a) \sin \nu \psi \}. \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

Kako su a i θ sporopromenljive veličine, to se mogu predstaviti kao superpozicija ravnomerno promenljivih članova \bar{a} i $\bar{\theta}$ i zbira malih oscilatornih članova. U prvoj aproksimaciji imaće se:

$$a = \bar{a} \quad , \quad \theta = \bar{\theta} \quad , \quad \bar{\psi} = \omega t + \bar{\theta}$$

Smatrajući da mali sinusoidalni oscilatorni članovi izazivaju samo male oscilacije oko prvih približenja \bar{a} i $\bar{\theta}$ i ne izazivaju sistematsku promenu a i θ to se mogu odbaciti i dobiti jednačine prve aproksimacije u obliku:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{a}}{dt} &= \mathcal{E}_{01}^{(i)}(\bar{a}) = M_t \left\{ -\frac{\varepsilon}{\omega} f(\bar{a} \cos \bar{\psi}, -\bar{a} \omega \sin \bar{\psi}) \sin \bar{\psi} \right\} \\ \frac{d\bar{\theta}}{dt} &= \mathcal{E}_{01}^{(i)}(\bar{a}) = M_t \left\{ -\frac{\varepsilon}{\omega \alpha} f(\bar{a} \cos \bar{\psi}, -\bar{a} \omega \sin \bar{\psi}) \cos \bar{\psi} \right\},\end{aligned}\quad (2.1.26)$$

gde je M_t operator usrednjenja za konstantne vrednosti \bar{a} i $\bar{\theta}$, a t funkcija usrednjenja za eksplicitno sadržano vreme.

Izvedeći operaciju usrednjenja u izrazima (2.1.26) i uvodeći umesto θ punu fazu ψ dobija se:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega - \frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi.\end{aligned}\quad (2.1.27)$$

Nije teško uočiti da su jednačine prve aproksimacije (2.1.27), dobijene pomoću metode usrednjenja jednake jednačinama prve aproksimacije dobijenim pokazanom asimptotskom metodom poznatom pod imenom Крылоб-ljeva metoda ili U-metoda.

Metoda usrednjenja se može primeniti i za dobijanje viših aproksimacija, ali se onda moraju uzeti u obzir i oscilatorni članovi.

Treba obratiti pažnju i na to da se struktura rešenja na faznoj ravni usrednjenih jednačina ili jednačina dobijenih asimptotskom metodom i struktura rešenja tačnih jednačina na beskonačnom intervalu vremena sasvim razlikuju, ali na konačnom intervalu vremena trajektorije na faznoj ravni moraju bezuslovno da budu bliske jedna drugoj.

Prikazana ideja asimptotskih metoda može biti primenjena za nalaženje asimptotskih aproksimacija rešenja za najrazličitije oscilatorne sisteme, koji sadrže mali parametar i to kako za sisteme sa jednim stepenom slobode oscilovanja tako i za sisteme sa više stepeni slobode oscilovanja, a i za sisteme sa beskonačno stepeni slobode oscilovanja.

Govoreći o ideji i osnovnim postavkama asimptotskih metoda nelinearne mehanike nužno je da se kaže i o ulozi metode Van-der Pol-a, koja je bila ogromna u razvoju asimptotskih metoda nelinearne mehanike. Metoda usrednjenja koja se veoma mnogo primenjivala u nebeskoj mehanici, dugo je ostala nepoznata u teoriji nelinearnih oscilacija. Samo zahvaljujući poznatim radovima Van der Pol-a i ova metoda je počela da se primenjuje u teoriji nelinearnih oscilacija. Metoda Van der Pol-a se pojavila u periodu između 1920-1923 godine u vezi sa brzim razvojem radiotehnike i sa pojavom elektronskih cevi i koristila se kao veoma pogodna za izučavanje kola sa nelinearnim elementom (elektronska cev).

Van der Pol je izučavao jednačinu oblika (2.1.1) posebno u slučaju kada je:

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = (1-x^2) \frac{dx}{dt}, \quad (2.1.28)$$

u kom se slučaju naziva jednačinom Van der Pol-a.

Za formalnu primenu metode Van der Pol-a nije bilo nikakvih ograničenja u vezi sa prirodom sila pod čijim dejstvom je proizilazio oscilatorni proces. Van der Pol je predložio prostu šemu redukcije zadatka teorije oscilacija na izučavanje jednog posebnog slučaja jednačina i uprošćeni sistem zamenjivao je usrednjenim po "brzoj" promenljivoj. Metoda Van der Pol-a je bila očigledna i pogodna za proračune,

pa je bila veoma popularna među inženjerima. Međutim sama metoda je u to vreme bila čisto intuitivnog karaktera i dugo niko nije čak ni pokušao da dâ matematički dokaz.

Za dobijanje prve aproksimacije jednačine (2.1.1) Van der Pol je predložio specijalnu metodu "sporopromenljivih" koeficijenata analognu metodi koju je Lagrange primenjivao u nebeskoj mehanici. Van der Pol je pomoću svoje metode izučio niz praktičnih zadataka izučavajući proces uspostavljanja oscilacija, stacionarne režime i oscilatorni histerezis.

Van der Pol je rešenje jednačine (2.1.1) tražio u obliku:

$$x = a \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.1.29)$$

sa promenljivom amplitudom i fazom, a i φ , koje se nalaze iz sistema jednačina sa razdvojenim promenljivim:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a\omega \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega - \frac{\varepsilon}{2\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a\omega \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

Za slučaj Van der pol-ove jednačine te jednačine dobijaju oblik:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

a njihovim rešavanjem se dobija:

$$\begin{aligned} a &= \frac{a_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}a_0^2(e^{\varepsilon t} - 1)}} \\ \varphi &= \varphi_0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

Iz ovog izraza se vidi da je rešenje $x=0$ koje odgovara statičkom režimu nestabilno, dok je rešenje $x=2$ stabilno periodičko rešenje, jer tada $\frac{da}{dt} = 0$ ima stacionarnu amplitudu $a_0 = 2$.

Nedostatak Van der Pol-ove metode je bio u tome što se ona mogla primeniti samo za sisteme sa jednim stepenom slobode oscilovanja.

Može se uočiti da su jednačine prve aproksimacije nađene pomoću metode prikazane u početku ovog člana usrednjene jednačine (2.1.27) i jednačine (2.1.30), dobijene Van der Pol -ovom metodom međusobo jednake, jer u osnovi sadrže Lagrange-ovu metodu varijacije konstanata.

Takođe, treba obratiti pažnju i na to da se struktura rešenja na faznoj ravni usrednjenih jednačina ili jednačina dobijenih asimptotskom metodom i struktura rešenja tačnih jednačina na beskonačnom intervalu vremena sasvim razlikuju, ali na konačnom intervalu vremena trajektorije na faznoj ravni moraju bezuslovno da budu bliske jedna drugoj.

Geometrijska interpretacija metode usrednjenja njen odnos prema Poincaré-ovim mapama i njene primene na dalja izučavanja svojstava sistema sa nelinearnostima, biće prikazane u poglavlju 5 kada bude bilo reči o integritetu hibridnih sistema i komponentnih dinamika.

Videće se da ne postoje opšte metode za rešavanje diferencijelne jednačine sa nelinearnošću trećeg reda koja bi se koristila u opisu modela jednog broja hibridnih dinamičkih sistema, već da postoje

analitička približenja koja zavisno od stepena aproksimacije daju rešenja sa određenim stepenom tačnosti i koja uglavnom opisuju lokalna ponašanja sistema oko određenog ustaljenog režima oscilovanja. Takođe, će se pokazati da numeričko rešavanje ovakvih jednačina daje mogućnost da se otkriju neka rešenja koja analitički ne mogu da se predvide i da se dobiju potpunije informacije o globalnom ponašanju sistema opisanih ovim vrstama diferencijalnih jednačina. S tim u vezi sa razlogom se jedan deo metoda ispitivanja pojava u klasi hibridnih sistema sa nelinearnostima odnosi na metode takozvanih računskih nauka (computational science) koje pomoću matematičkih programa numerički rešavaju sisteme nelinearnih diferencijalnih jednačina. Treba napomenuti da oblik numeričkog rešenja zavisno od metode i stepena aproksimacije i koraka koji numerička metoda koristi u izabranom programu može biti drugačiji i samim tim dati rezultate sa određenim stepenom netačnosti. Ovo je zbog toga što su sistemi nelinearnih diferencijalnih jednačina koji se koriste u ovom radu za opisivanje modela klasa hibridnih sistema sa nelinearnostima osetljivi i na izbor numeričke metode za proračun i na izbor koraka same metode. Konvergencijom i tačnošću rešenja izabranih numeričkih metode u ovom radu neće se baviti jer smisao rada nije u kvantitativnoj analizi rezultata već u kvalitativnom opisivanju fenomena hibridnih sistema sa nelinearnostima, a svakako da za neka ispitivanja za praktične primene treba uzeti u obzir i ovaj aspekt upotrebe numeričkih metoda.

Oscilacije u linearnim sistemima sa više stepeni slobode oscilovanja su višefrekventne jer su kombinacije većeg broja prostih oscilacija. Izborom početnih uslova oscilatorni sistem sa više stepeni slobode oscilovanja može da osciluje sa samo jednom frekvencijom. Takođe, pored početnih uslova dejstvo disipativnih sila i spoljašnjih poremećajnih sila dovodi do brzog isčezavanja viših harmonika, tj. oblika oscilovanja koji odgovaraju višim frekvencijama, i do uspostavljanja osnovnog oblika oscilovanja sa kružnom frekvencijom bliskom kružnoj frekvenciji spoljašnje poremećajne sile. Zato je pri specijalnim početnim uslovima ili pri dejstvu spoljašnje perturbacione sile sa samo jednom kružnom frekvencijom celishodno proučavati jednofrekventni režim oscilovanja u kome sve tačke sistema osciluju sa jednom i samo sa jednom kružnom frekvencijom na šta je prvi ukazao H.H. Боголюбов. Princip jednofrekventnosti [125, 200-203] bitno uprošćava i pronalaženje asimptotske aproksimacije rešenja i svodi zadatak na integraljenje samo dve diferencijalne jednačine prvog reda u odnosu na sporopromenljive amplitudu i fazu jednofrekventnih oscilacija. Pri tome, mogu se zanemariti početni uslovi, zato što se, u uslovima rezonantnog stanja sistema, podržavaju i razvijaju oscilacije u određenom obliku dinamičke ravnoteže, koji odgovara sopstvenoj rezonantnoj kružnoj frekvenciji, a na račun spoljašnjih poremećajnih sila. Ovdje se upotrebljava izraz oblik dinamičke ravnoteže pod kojim se podrazumeva oblik oscilovanja sistema sa jednom sopstvenom frekvencijom i njoj odgovarajućom sopstvenom funkcijom i amplitudom [74, 125]. Drugi oblici (nerezonantnih) sopstvenih oscilacija određeni početnim uslovima u realnim sistemima prigušiće se (isčeznuće) pod uticajem disipativnih sila. Zato u uslovima rezonantnog stanja sistema i pri dejstvu disipativnih sila oscilacije u sistemima sa mnogo stepeni slobode oscilovanja proizilaze kao jednofrekventne u određenom obliku dinamičke ravnoteže bliskom jednom od oblika glavnih (normalnih) oscilacija, što se odnosi na nelinearne sisteme sa više stepeni slobode oscilovanja koji su bliski linearnim. U opštem slučaju nelinearnosti ne mogu se izvući zaključci opštijeg karaktera.

U mnogim inženjerskim sistemima sa nelinearnostima, višefrekventne pobude su izvor pojave višefrekventnih rezonantnih režima pri visoko-frekventnim kao i nisko-frekventnim modovima ([136, 124]), što je pokazano u mnogim eksperimentalnim i teorijskim rezultatima ([136,137]). Uticaj između amplituda i faza različitih modova u nelinearnim sistemima sa više stepeni slobode oscilovanja, kao i pri slobodnim tako i pri prinudnim višefrekventnim režimima deformabilnih tela sa beskonačno mnogo stepeni slobode oscilovanja proučavaju se primenom asimptotske metode usrednjenja Krilov-Bogoliyubov-Mitropolskiy-kog ([147, 149, 150] i [202, 203]). Vredne pomena rezultate primene asimptotske metode Krilov-Bogoliyubov-Mitropolskiy-kog kao i energijske interpretacije date u monografijama Mitropoljskog [201, 202 i 203], u proučavanju nelinearnih oscilacija elastičnih tela pobuđenih spoljašnjom više-frekventnom pobudom dala je Katica Hedrih u doktorskoj disertaciji [126].

2.2. Metoda diskretizacije kontinuuma

U radovima [90, 98] predstavljena je metoda diskretnog kontinuuma pomoću primera homogenog diskretnog sistema sa ograničenim brojem stepeni slobode kretanja. Ovaj sistem je u obliku homogenih lanaca i mreža u prostoru i ravni. Materijalne tačke tih mreža i lanaca spojene su elastičnim, standardnim naslednim ili puzećim elementima. Predstavljena je trigonometrijska metoda za izučavanje svojstava jednačina dinamike diskretnih homogenih kontinuuma. Dinamika sistema je opisana pomoću integro-diferencijalnih jednačina ili diferencijalnih jednačina sa izvodima necelog reda. U tim radovima uočava se odnos između određenja reči diskretni kontinuum i diskretni sistemi, pa je u jednom broju radova [84] posvećena pažnja sistemima u kojima su spregnuti diskretni podsistemi krutih tela i kontinualni podsistemi i formirane su karakteristične frekventne jednačine malih oscilacija ovih sistema. U radu [60] prikazan je prilog razvoju analitičke mehanike diskretnih oscilatornih sistema frakcionog reda na primerima oscilacija spregnutih ravanskih i prostornih lančanih sistema. Metodom diskretnog kontinuuma, diskretni modeli frakcionog reda mehaničkih kontinualnih višelančanih sistema u ravni i prostoru postavljeni su kao mogući modeli vibracija homogenih deformabilnih tela. Za slučaj da su te strukture homogene i da sadrže spregnute homogene lance, koji su sastavljeni od materijalnih tačaka međusobno vezanih standardnim lakim elementima frakcionog reda, oscilacije frakcionog reda te diskretne kontinualne strukture sa elongacijama u jednom paralelnom pravcu su analitički opisane i proučene. Primenom trigonometrijske metode i Laplaceove transformacije za transformaciju i rešavanje izvornog sistema običnih diferencijalnih jednačina frakcionog reda, određeni su odgovarajući analitički izrazi za odgovarajuće skupove glavnih sopstvenih mreža i u njima glavnih sopstvenih lanaca, kao i sopstveni modovi frakcionog reda slični jednofrekventnim oscilacijama. Originalni i novi analitički rezultati pomenutog rada su: novi modeli diskretnih, homogenih, frakcionog reda, u ravni ili prostoru, oscilatornih višelančanih struktura i modeli

deformabilnih homogenih tela frakcionog reda. Pomoću tih diskretnih modela frakcionog reda razmotrene su analitički longitudinalne, kao i transverzalne oscilacije frakcionog reda homogenih greda i dobijeni su skupovi sopstvenih kružnih frekvencija sa odgovarajućim karakterističnim brojevima, kojima se izkazuju frakciona svojstva materijala elemenata. Koristeći baznu hibridnu, frakcionog reda, homogenu strukturu, koja sadrži spregnute homogene lance sastavljene od materijalnih tačaka povezanih standardnim lakim elementima frakcionog reda, proučen je prenos višefrekventnih signala kroz diskretni prostorni, odnosno, ravanski kontinuum i prikazani odgovarajući analitički izrazi. Sličan pristup primene metode diskretnog kontinuuma prikazan je i u radovima [59, 61, 62, 63].

U radovima [97, 157] date su vizuelne predstave oscilatornih procesa u klasičnim modelima oscilacija realnih sistema i na novi način su osvetljene varijacije osobina oscilatornih procesa tih sistema sa promenama nekih parametara sistema.

Jasno je da savremeni kompjuterski alati sa moćnim sposobnostima računara imaju sličnu filozofiju razmatranja realnih dinamičkih sistema, pomoću diskretizacije kontinuuma kao puta i metoda do rešenja problema, a potom pomoću mnogo iteracija kontinualizacije rešenja do verifikacije tačnosti. Diskretizacija i kontinualizacija u analizi dinamičkih procesa su metode različitog smera, ali su dobre da omoguće proračun i za donošenje zaključaka. Pri tome, ako se model želi učiniti realnijim i uključiti se nelinearnost u opise i postavljanje modela, mora se voditi računa o diskretnim tačkama i fenomenima koji se u tim procesima javljaju. Ovi fenomeni su tipa bifurkacija i homokliničkih tačaka, koje znače i daju više različitih rešenja, ili pojavu više diskretnih fenomena usled osetljivosti nelinearnog procesa na male promene početnih uslova ili parametara samih sistema, ili promene svojstava sistema.

U pojedinim modelima koji se budu objašnjavali korišće se i metoda fenomenološkog preslikavanja [225, 226], gde će se pod pojmom fenomenološki slično podrazumevati da su dve pojave u matematičkom opisu analogne a stvarno mogu biti sasvim različite prirode. Važno je da rešenja matematičkog modela jednog sistema mogu da se iskoriste u analizi i opisu ponašanja sistema potpuno drugačije prirode. Smisao primene ove metode je u formiranju celine kada se govori o fenomenološkom preslikavanju i analogijama u okviru dinamika hibridnih sistema i sprezi pojava dispartatnih priroda koje mogu da se matematički analiziraju prikazanim pristupkom i analogno rešavaju.

2.3. Metode sinhronizacije i optimalnog upravljanja

Pre XX veka, linearne diferencijalne jednačine su bile osnovni matematički modeli oscilacija u mehaničkim, električnim i drugim sistemima. Tek je na početku tog veka postalo jasno da su modeli linearnih oscilacija nemoćni da adekvatno opišu novootkrivene fenomene i procese u dinamičkim inženjerskih sistema. Osnove savremenih matematičkih aparata, teoriju nelinearnih oscilacija, postavili su

u svojim radovima A.Poincare, B. Van der Pol, A.A. Andronov, N.M. Krylov i N.N. Bogolyubov, o čemu postoji pregledni deo rukopisa u okviru uvodnog poglavlja rada [259]. Najvažnija odrednica te teorije je definicija i otkriće stabilnog graničnog ciklusa (stable limit cycle). Model linearnih oscilacija i nelinearni modeli sa stabilnim graničnim ciklusom zadovoljavali su potrebe inženjera narednih nekoliko dekada. Verovalo se da ti modeli opisuju sve moguće tipove oscilatornih kretanja determinističkih sistema. To verovanje bilo je potkrepljeno i matematičkim osnovama. Na primer, dobro je poznat zaključak Poincaré-Bendixon-ove teoreme da su ravnotežno stanje i granični krug jedine moguće vrste graničnih stabilnih kretanja u kontinualnim sistemima drugog reda. Međutim, sredinom prošlog stoleća matematičari M. Cartwright, J. Littlewood i S. Smale potvrđuju da ovo nije slučaj već u sistemima trećeg reda gde su moguća veoma kompleksna kretanja kao što su ograničene neperoidičke oscilacije. Godine 1963. fizičar E.Lorenz pokazuje da se kvalitativna priroda atmosferskih turbulencija koja se opisuje Navier-Stokes-ovim kompleksnim parcijalnim diferencijalnim jednačinama može predstaviti jednostavnim nelinearnim modelom trećeg reda (Lorenz-ovom jednačinom):

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

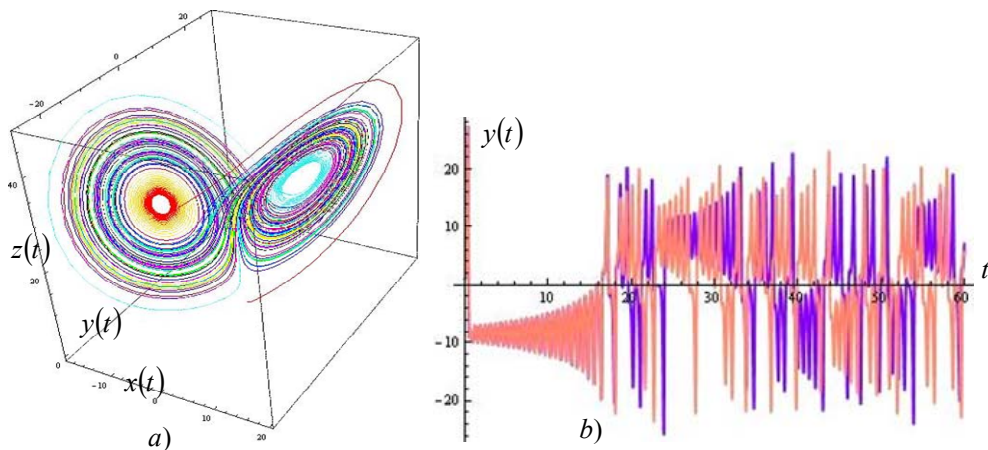
$$\dot{y} = rx - y - xz$$

$$\dot{z} = -bz + xy$$

Za određene vrednosti parametara ovog sistema (npr. $\sigma = 10$, $r = 28$ i $b = 8/3$) rešenje ovog sistema liči na neregularne oscilacije. Trajektorije u faznom prostoru imaju veoma sofisticiran oblik graničnog skupa (atraktora), slika 2.1 a). Sistem je takođe jako osetljiv na male promene početnih uslova, što je prikazano na primeru vremenske funkcije promenljive $y(t)$, slika 2.1 b), gde su različitim bojama ucrtane dve vremenske funkcije $y(t)$ sa jako bliskim početnim uslovima ($x(0) = z(0) = 0.01$, a $y(0) = 1.01$ crvena linija, i $x(0) = z(0) = 0$, a $y(0) = 1$ plava linija). Primećuje se da se ovi grafici skoro poklapaju do nekog vremena na početku intervala, ali nadalje rešenja se razlikuju. U stvari posle dužeg perioda vremena vremenski razvoji ova dva rešenja postaću totalno različiti. Zato je nemoguće predvideti poziciju vektora stanja definisanih početnim uslovima u dužem periodu vremena sa tačnošću koja je manja od razdaljina u atraktoru, ovo svojstvo velike osetljivosti na male promene početnih uslova je osobenost haotičnog toka.

Pažnju fizičara, matematičara a kasnije i inženjera na ovaj model privukli su svojim radovima D. Ruelle i F.Takens [266], a najpre svojim radom iz 1971 godine, pri čemu su ovaj atraktor nazvali "čudnim". Osnove matematičkog aparata za proučavanje fenomena haosa dali su od 1960-1970 godine u ruskoj nacionalnoj naučnoj školi autori okupljeni oko A.N Kolmogorov-ljeva, D.V Anosov-a, V.I Arnold-a, V.K Melnikov-a i L.P Silnikov-a [255]. Od toga vremena haotična kretanja su otkrivena u raznim sistemima mašinstva, u laserskoj i radio fizici, električnim kolima, hemiji, biologiji, medicini, ekonomiji i dr. Savremene razvijene metode, numerička istraživanja i rezultati pokazuju da je kaos jedna vrsta eksponencijalnog ponašanja nelinearnih sistema. Grubo govoreći, haotično kretanje javlja se uvek kada su trajektorije globalno ograničene i lokalno nestabilne. U haotičnim sistemima, veoma mala promena početnih uslova ne ostaje mala već se menja eksponencijalno, a tu dolazi do izražaja primena Lyapunov-ljevih eksponenata u određivanju svojstava haotičnog kretanja, o čemu će biti reći u okviru potog poglavlja i na dalje. U mnogim slučajevima ovakva neregularna i neperiodička oscilovanja bolje

predstavljaju procese u fizičkim sistemima, iako je ponekad skoro nemoguće okom primetiti i razdvojiti haotične procese od periodičkih ili kvazi periodičkih procesa.



Slika 2.1. a) Lorenz-ov atraktor; b) funkcija $y(t)$ za dve bliske ali različite vrednosti početnih uslova $x(0)=z(0)=0.01$, a $y(0)=1.01$ crvena linija, i $x(0)=z(0)=0$, a $y(0)=1$ plava linija.

U teoriji haosa, upravljanje haosom je zasnovano na činjenici da svaki haotični atraktor sadrži beskonačan broj nestabilnih periodičkih orbita [50]. Haotično kretanje, dakle, sadrži kretanje u kome se stanje sistema pomera u okolinu jedne od tih orbita na neko vreme, a zatim prelazi u blizinu neke druge nestabilne periodičke orbite gde opet ostaje neko ograničeno vreme i tako stalno. Ovo za rezultat daje komplikovano i lutajuće ponašanje u dužem periodu vremena. Kontrola haosa je stabilizacija, u smislu malih poremećaja sistema, jedne od tih nestabilnih periodičkih orbita. Rezultat je obezbediti drukčije haotično kretanje stabilnije i predvidljivije što je često prednost ovakvih sistema. Poremećaj mora biti jako slab da bi se izbegle značajnije modifikacije prirodne dinamike sistema [35, 253]. Postoji nekoliko metoda za upravljanje haosom ali većina je zasnovana na dva osnovna prilaza: OGY (Ott, Grebogi i Yorke) metoda [216] i Pyragas kontinualno upravljanje. Obe metode zahtevaju prethodno određivanje nestabilnih periodičkih orbita haotičnog sistema pre dizajniranja algoritma upravljanja [232]. Kod OGY metode male umešno izabrane brze promene primenjuju se na sistem po jednom ciklusu, da bi ga zadržele u blizini željene nestabilne periodičke orbite. Kod Pyragas metoda odgovarajući kontinualni upravljački signal se primenjuje na sistem, čiji je intenzitet praktično jednak nuli kada se sistem približi željenoj periodičkoj orbiti ali raste kako se sistem udaljava od orbite. Eksperimentalno upravljanje haosom i jednom i drugom metodom je postignuto na raznim sistemima kao što su turbulentni fluidi, oscilujuće hemijske reakcije, magnetno-mehanički oscilatori, i srčana tkiva.

Druga klasa problema upravljanja haosom jeste pobuđivanje ili generisanje haotičnih oscilacija. Ovaj problem se često naziva antiupravljanje ili uspostavljanje haosa (haotizacija). Pojavljuje se u onim sistemima gde je haotično kretanje željeno ponašanje sistema. Klasični primeri su izvori haotičnih signala u komunikacionim i radar sistemima. Savremena istraživanja ukazuju da haotizacija procesa može igrati značajnu ulogu u hemijskim i biološkim tehnologijama. U okviru sedmog poglavlja dato je nekoliko smernica i principelnih objašnjenja za postizanje haotizacije kao cilja upravljanja.

Treća važna klasa ciljeva upravljana haosom odgovara problemu sinhronizacije ili preciznije upravljive sinhronizacije kao suprotnosti od samosinhronizacije. Oblast sinhronizacije ima važnu primenu u vibracionoj tehnologiji (sinhronizacija vibracionih pobuda [13], komunikacije (sinhronizacija signala odašiljača i prijemnika) [188, 253], biologiji i biotehnologiji i drugim granama savremene nauke. Brojne su publikacije posvećene temi sinhronizacije haosa i njene primene u sistemima prenosa podataka [13, 30, 27, 57, 220].

U opštem slučaju pod sinhronizacijom se misli na usklađene varijacije stanja dva ili više sistema ili preciznije usklađene varijacije nekih njihovih karakteristika kao što su frekvencije oscilovanja [12] i u tom smislu postoji nekoliko tipova sinhronizacije o čemu će biti reći u sedmom poglavlju.

Postoje različite metode za otkrivanje različitih tipova sinhronizacije. Potpuna sinhronizacija može da se prepozna iscertavanjem komponenti vektora stanja pratećeg sistema naspram odgovarajućih komponent vektora stanja glavnog sistema koja je prava linija pod uglom od 45° , dok se fazna sinhronizacija može identifikovati nestajanjem razlike sopstvenih frekvencija. Da bi se otkrila generalizovana sinhronizacija postoje različiti pristupi. Na primer, postoji pristup pomoćnog sistema [3] u kom slučaju se ponašanje pomoćnog sistema $v(t)$ razmatra zajedno sa ponašanjem sistema odgovora $u(t)$, ali početni uslovi moraju biti različiti $v(t_0) \neq u(t_0)$. Oba početna uslova treba da pripadaju istom bazenu privlačenja haotičnog atraktora (ako postoji više stabilnih atraktora u sistemu). Ako se generalizovana sinhronizacija dešava u jednosmerno spregnutim nelinearnim haotičnim oscilatorima stanja sistema $v(t)$ i $u(t)$ postaju ekvivalentna posle prelaznih trenutaka tako da se poklapanje vektora stanja pratećeg sistema i pomoćnog sistema $u(t) \equiv v(t)$ uzima kao kriterijum koji potvrđuje prisustvo generalizovane sinhronizacije. Režim generaziovane sinhronizacije, takođe, može da se utvrdi u smislu proračuna uslovnih Lyapunov-ljevih eksponenata [230], gde je uslov sinhronizacije da najveći Lyapunov-ljev eksponent sistema pratioca bude negativan, tj. ako je najveći uslovni Lyapunov-ljev eksponent negativan [221].

Ključna činjenica u izučavanju i mogućnostima primene nelinearnih sistema sa haotičnim atraktorima jeste u prirodi samog haotičnog atraktora koji se sastoji od neograničenog broja nestabilnih periodičkih orbita. Ako se u sistemu žele načiniti samo male pertubacije i kako bi kreiranje nove orbite iziskivalo veoma različite osobine sistema od onih koje u sistemu već postoje, to bi zapravo trebalo iskoristiti već postojeće nestabilne periodičke orbite. Upravljanje haosom po metodi OGY [216] predlaže da se najpre odrede neke od nestabilnih periodičkih orbita malog perioda u okviru haotičnog atraktora, te da se one izuče i izabere se jedna koja bi doprinela poboljšanju performansi sistema. Zatim se uvedi u sistem mala vremenski zavisna pertubacija parametra sistema da bi se ova već postojeća orbita načinila stabilnom. Ako je tako onda prisustvo haosa u sistemima može da se nazove prednošću. Jasno je da bilo koja od orbita može da se stabilizuje i može se izabrati ona koja omogućava da sistem dostigne željene osobine. Sa druge strane ako atraktor nije haotičan, već je recimo periodičan, onda male pertubacije parametara mogu da izazovu male promene orbite. Praktično se ograničava sa svojstvima sistema koje daje ta stabilna orbita i nema se mogućnosti za suštinsko poboljšanje osim da se ne naprave znatnije izmene u sistemu.

Takođe, ako se želi sistem koristiti za različite svrhe ili pod različitim uslovima u različitim vremenskim periodima, onda se zavisno od upotrebe zahtevaju različita svojstva istog sistema. Ako je

sisteme haotičan ovakve promene dinamike sistema mogu da se načine, a da se ne čine velike promene u opštoj konfiguraciji sistema. U suštini, zavisno od željene upotrebe ponašanje sistema može da se promeni uključivanjem kratkotrajnog programa za male perturbacije parametra i da se stabilizuje kretanje po različitim orbitama. Nasuprot tome u odsustvu haotičnog kretanja potpuno odvojeni sistemi moraju da se koriste za svaku željenu opciju. Dakle, kada se dizajnira višenamenski sistem svrsishodno je dizajnirati sistem sa haotičnom dinamikom, jer to omogućava potrebnu fleksibilnost.

Upoređivanje različitih metoda upravljanja primenjenih na Duffing-ovoj nelinearnoj jednačini dat je u radovima [4], pri čemu Sifakis i Elliott pretpostavljaju postojanje četiri različite tehnike upravljanja:

- Metoda otvorene petlje periodičke perturbacije, koja podrazumeva dodavanje periodičke perturbacije u pobudu sistema. U radu [256] ova perturbacija je izabrana empirijski procedurom probanja – greške, dok je u radu [181] ona optimalno određena na osnovu široke teorijske analize dinamičkih svojstava sistema, i biće predstavljena i razrađena u poglavlju 8.
- Metoda povratne sprege sa kontinualnim kašnjenjem, koju je razvio Pyragas [232] koja se sastoji u primeni sile proporcionalne razlici trenutnog stanja sistema i stanja u nekom ranijem trenutku, koja će biti korišćena u poglavlju 7.
- Metoda OGY [217], koju ćemo predstaviti i koristiti za upravljanje sinhronizacijom u klasam hibridnih sistema predstavljenih u ovom radu.
- Metoda Hunt-a [165] je zapravo poluempirijska verzija OGY metode.

Za razliku od ostalih metoda koje se odnose mahom na stabilizaciju (ili formiranje) jedne, date, orbite metoda koju koriste autori Rega i Lenci ima za cilja da obezbedi opšte upravljanje dinamikom, jer je zasnovana na eliminaciji slučajeva koji izazivaju složeno i neželjeno ponašanje sistema. Dakle, neophodno je znati koji oblik upravljanja je zaista potreban pri stvarnoj upotrebi sistema, što takođe može zavisiti i od stvarnih troškova ugradnje te na osnovu toga prikladno izabrati strategiju upravljanja.

Metoda iz rada autora Rega i Lenci sastoji se u identifikovanju oblika periodičke pobude koji omogućava da se izbegne, na optimalan način, transverzalni presek stabilne i nestabilne mnogostrukosti tipa sedla.

Metoda je razvijena u nekoliko koraka:

- Detekcija homokliničke bifurkacije, koja se ostvaruje Melnikov-ljevom metodom, koja će biti objašnjena i primenjena na jedna broj klasa nelinearnih mehaničkih sistema sa jednim i sa dva stepena slobode kretanja u okviru poglavlja 5.6.5, 5.6.6 i 8.2.
- Proučavanje zavisnosti homokliničke bifurkacije od oblika pobude.
- Formulisanje i raščlanjivanje matematičkog problema optimizacije koje se sastoji u određivanju (optimalne) teorijske pobude koja maksimizuje udaljenost između stabilne i nestabilne mnogostrukosti pri stalnoj amplitudi pobude, ili, ekvivalentno, određivanje kritične amplitude odgovorne za pojavu homokliničke bifurkacije.
- Numeričko ugrađivanje optimalne pobude koje je neophodno da potvrdi teorijska predviđanja i da proveriti praktičnost i stvarne osobine predložene tehnike.

2.3.1. Pregled savremene literature o upravljanju u sistemima sa prisutnim nelinearnostima

Osnovna karakteristika slabo nelinearnog sistema sa jednim stepenom slobode kretanja sa prinudom određena je rezonancijom njegovih osnovnih, i viših harmonika. U radu [185] predloženo je nelinearno parametarsko upravljanje sa povratnom spregom da bi se modifikovao rezonantni odgovor stacionarnog stanja, tako što su redukovane amplitude stacionarnog odgovora i eliminisane bifurkacije tipa sedla koje se pojavljuju u rezonantnim odgovorima sistema. Korist ovakvog upravljanja određena je analizom bifurkacionih dijagrama zajedno sa odgovarajućom frekventno-rezonantnom jednačinom u okviru pristupa singularne teorije. Ilustrativnim primerima prikazana je efikasnost predložene nelinearne povratne sprege za upravljanje tri oblika rezonantnih odgovora.

U radu [11] proučavano je upravljanje sa povratnom spregom amplituda graničnog kruga u nelinearnim sistemima. Najpre je ukratko predstavljen grafički prikaz upravljanja bifurkacijama, a potom je izveden zakon nelinearnog upravljanja. Razvijena je odgovarajuća primena dizajna pomoću aproksimacije članova vremnskih izvoda u stanju nelinearnog kontrolera sa povratnom spregom. Na kraju je simuliran klasičan model kao ilustracija predloženog metoda upravljanja.

U radu [218] predstavljeni su dva algoritma upravljanja oscilacija za rezonantne senzore kakvi su vibracioni giroskopi. Jedan algoritam upravljanja istražuje rezonantnu frekvenciju rezonatora a drugi algoritam odnosi se na određene rezonantne frekvencije tako što menja dinamiku rezonatora. Oba algoritma se bave i specifičnim amplitudama oscilacija. Stabilnost oba sistema upravljanja je analizirana metodom usrednjenja i date su kvantitativne linije vodilje za izbor regulatora upravljanja za postizanje stabilnosti. Predloženi algoritmi upravljanja su primenjeni na dva važna primera oscilujućih giroskopa. Prvi je problem vodeće-prateći rezonator oscilujućeg giroskopa sa dve mase gde ne postoji mehanička veza između dve mase a drugi je problem modulacije frekvencije kod oscilujućih giroskopa uopšte. Rezultati simulacije prikazuju da su predloženi algoritmi efikasni. Oni osiguravaju da mase osciluju u antifazi sa istim rezonantnim frekvencijama i amplitudama oscilovanja kod giroskopa sa dve mase, i održavanje jednakosti dve modalne frekvencije kod giroskopa uopšte.

Brojna su savremena tehnička rešenja za automatsko upravljanje amplitudama oscilovanja zasnovana na korišćenjima znanja i rešenja teorije bifurkacija i nelinearnog oscilovanja. Savremeni radovi to potvrđuju. U radu [218] dato je rešenje dizajna stabilizatora amplituda oscilovanja mehaničkog oscilatora. Osobina stabilizatora je digitalno praćenje upravljanja pojačivača sa povratnom spregom. Vrednost digitalnog koda direktno proporcionalnog faktoru opadanja oscilacija direktno se očitava na izlazu automatskim sistemom. Digitalna povratna sprega pojednostavljuje podešavanja-potrebna je samo jedna referentna tačka.

U radu [240] opisan je problem zasnovan na principu maksimuma optimalnog upravljanja oscilacijama sedišta vozača sa elektro-reološkim šok apsorberom sa primenama u automobilima. Kordinate vektora upravljanog parametra i vertikalno kretanja sedišta su izvedeni. Predstavljena su ispitivanja test eksperimenata za model sedišta vozača u radnim režimima zavisno od upravljanog udara električnog signala (intenziteta električnog polja).

U radu [28] prikazane su tehnike upravljanja spoljnom direktnom strujom amplitudama graničnog kruga za dva slučaja oscilatora dupli T oscilator i oscilator sa faznim pomerajem. Dokazano je da

amplitude izlazne voltaže oscilatora zavise od voltaže direktne struje upravljanja. Menjanjem ukupne impedanse svakog oscilatora u mreži oscilatora frekvencije oscilovanja se upravljaju pomoću potenciometara. Osnovna prednost predloženog kola jeste da i amplituda i frekvencija generisanog talasa mogu biti nezavisno upravljane. Analitičke, numeričke i eksperimentalne metode su korišćene za određivanje granica stanja oscilatora. Pronađene su tačke ravnoteže, stabilni granični krug i divergentna stanja. Analitički rezultati su upoređivani sa numeričkim i eksperimentalnim rešenjima i dobijeno je dobro poklapanje rezultata.

U radu [290] je analizirano praćenje ulaza i trajektorije mehaničkih sistema kao kontrolnih objekata sa naglaskom na objekte kod kojih se broj spoljašnjih ulaznih veličina razlikuje od njihovog broja stepeni slobode (DOF). Razmatrani su problemi sinteze predstavljenih nominala i zakona upravljanja posebno u slučaju kada je broj DOF objekta upravljanja veći od broja spoljnih ulaza. Prikazana je razlika između zakona upravljanja za praćenje nominala i zakona regulacije.

Proces razmene energije karakteriše dinamiku objekta upravljanja, količinu, i /ili informaciju sadržanu u tom procesu. Izlazi objekta su veličine koje mogu da se izmere ili detektuju na određeni način. Zavisno od znanja, veština i potreba istraživača zakon razmene je matematički opisan sa većim ili manjim stepenom tačnosti u obliku algebarskih ili diferencijalnih jednačina. Najčešće, to su nehomogene diferencijalne jednačine u kojima ulaz objekta predstavljaju spoljašnje sile. Uopšteno, problem upravljanja se redukuje na predviđanje skupa ulaza objekta koji će dovesti objekat u takvo stanje koje produkuje željene izlaze. To znači da ne mogu da kontrolišu promene fizičke prirode predmeta, a izlaz iz objekta odražava samo njegovu sopstvenu fizičku prirodu. Upravljanjem objekat je prinuđen da postigne željeno stanje među svim mogućim stanjima. Ovo se postiže odabirom ulaza objekta kao funkcijom postojećeg stanja i , eventualno, stanja opreme koja generiše ulaz i i ulaz iz celokupnog okruženja sistema u povratnoj sprezi. Nedostatak znanja o svojstvima objekta ili njihov grub opis stvaraju poteškoće u pronalaženju rešenja upravljanja. Preciznije, za odabrani matematički oblik modela objekta možemo odrediti upravljanje koje će osigurati željene izlaze objekta. Upravljanje će biti dobro kada je dinamika objekta dovoljno dobro opisana modelom, što daje osnov za odabir upravljanja. Svi istraživači koji rade na problemima upravljanja polaze od opisa zakona koji karakteriše dinamiku objekta upravljanja. Rezultat celokupnog zadatka modeliranja je postavljanje matematičkog modela dinamike mehaničkog objekta datog u obliku diferencijalnih jednačina. Dobijeni model predstavlja osnovu sinteze nominala sistema i zakona upravljanja predstavljenih u radu [290].

Slobodno (neporemećeno) kretanje objekta upravljanja je svako ono kretanje bez spoljašnjih pobuda. Slobodan (neporemećen) objekat upravljanja se pomera duž neporemećene trajektorije. Pod trajektorijom objekta podrazumevaćemo liniju koju opisuje vektor stanja objekta za vreme kretanja ili sliku ove linije u nekom drugom prostoru iste dimenzije. Sa stanovišta matematike, trajektorija objekta je linija u prostoru stanja, i predstavnik je vremenski zavisnog vektora čiji je broj koordinata jednak dimenziji prostora stanja. Nominalno kretanje je svako neporemećeno kretanja objekta koje zadovoljava trenutne uslove. Maksimalan broj nezavisnih uslova koji mogu biti postavljeni nominalnom kretanju jednak je broju ulaza objekta. Uslovi (ograničenja) mogu biti postavljeni ulazima objekta ili stanju objekta. Nominalna trajektorija je neporemećena trajektorija koju realizuje objekat u toku nominalnog kretanja. Nominalni

ulaz je vektor spoljašnjih sila pod čijim dejstvom se realizuje kretanje objekta. Pod nominalom objekta u radu [290] podrazumeva se nominalni ulaz i odgovarajuća nominalna trajektorija. Sa matematičke tačke gledišta, nominalna trajektorija je rešenje diferencijalnih jednačina koje opisuju dinamiku sistema dobijenu pod dejstvom nominalnog ulaza. Problem određivanja nominala objekta je problem pronalaženja procedure za sintezu nominalnog vektora takvog da su diferencijalne jednačine kretanja identički zadovoljene ako je deo nominalnog vektora dat unapred. Rezultati ovako definisanog zadatka su mogući nominali. Ako postoji realizovani sistem koji ima istu dinamiku kao i objekat upravljanja, nominali ne moraju da se sastavljaju analitički nego merenjem, tako da se problem izvođenja nominala pretvara u problem prikupljanja i obrade signala. Problem određivanja nominala često se sreće i u robotici [278], gde je rešavan na različite načine.

Zadatak upravljanja objekta koji terba da prati odabrani nominal je zadatak praćenja trajektorije, ili ulaznog praćenja ulaza, ili istovremenog praćenja dela trajektorije i dela ulaza. Ako je model objekta upravljanja korišćen kao osnova za sastavljanje nominala apsolutno tačan, i ako se kretanje odvija bez prisustva poremećaja, onda će biti dovoljno da se unese realnom objektu egzaktno izračunat nominalni ulaz i dobiće se željeno kretanje. Ipak, matematički model nikada ne može opisati potpuno tačno dinamiku realnog objekta, niti se kretanje objekta može odvijati bez poremećaja. Iz tog razloga neophodno je uvesti odstupanje realnog objekta od nominalne vrednosti koje će obezbediti objektu povratak na nominalnu trajektoriju kadgod se pojavi odstupanje. Zato je potrebno sastaviti skup relacija, takozvanih zakona upravljanja, koji povezuju nominalne i trajektoriju realnog objekta sa ulazima objekta. Da bi se napravila razlika između zakona upravljanja regulacionim petljama, zakoni upravljanja na osnovi nominala i realne trajektorije zovu se zakoni praćenja. Pronalaženje rešenja sastavljanja zakona praćenja mehaničkog objekta opisanog jednačinama kretanja sistema znači pronalaženje rešenja upravljivosti i mogućnosti posmatranja objekta upravljanja, praćenja stabilnosti, praćenja sistema, kao i osiguravanja željenih kvaliteta praćenja i dinamičkog ponašanja praćenog sistema. Osnovni problem u pronalaženju tih rešenja jeste nelinearnost. Nelinearnost se pojavljuje i kao prirodna karakteristika objekta i kao nelinearnost sistema jednačina kretanja što je posledica izbora koordinatnog sistema u kome se sistem opisuje.

Dokazano je da za linearne stacionarne vremnski kontinualne dinamičke sisteme pozitivno rešenje problema upravljivosti garantuje postojanje zatvorene petlje upravljanja koja će garantovati stabilnost celog sistema upravljanja [297]. Koristeći istu logiku na nelinearne sisteme sledi da je upravljivost takođe od odlučujućeg značaja za postojanje rešenja bilo kog zadatka teorije upravljanja a samim tim i zadatka praćenja. Problem je u tome da rezultati teorije linearnih sistema ne mogu da se koriste za izvođenje zaključaka o nelinearnim sistemima.

U radu [291] autori dokazuju da uslovi i kriterijum upravljivosti i mogućnosti praćenja definišu svojstva preslikavanja između domena ulaza, stanja i izlaza dinamike sistema, tj, objekta upravljanja. Pokazuju da je uslov upravljivosti izlaza preduslov za postojanje jedinstvenog međusobnog preslikavanja između domena ulaza i domena upravljanih izlaza (podprostor prirodnog domena izlaza) objekta upravljanja. Preslikavanje među domenima je određeno rešenjem sistema i funkcijom izlaza, bez obzira da li je sistem linearan ili nelinearan. Dakle, sledi da je uslov za međusobno jedinstveno preslikavanje između domena ulaza i izlaza primenljiv i na linearne i na nelinearne sisteme kao objekte upravljanja. Neophodan uslov za međusobno jedinstveno preslikavanje [175] je da dimenzija domena ulaza i izlaza

budu iste. To znači da broj upravljanih izlaza treba biti jednak broju upravljanih ulaza, i da jedan ulaz treba da odgovara tačno jednom upravljanoj izlazu, koji je funkcija tog ulaza i stanja sistema prouzrokovanog dejstvom ulaza.

3* Poglavlje

Hibridni sistemi

U mnogim klasičnim univerzitetskim udžbenicima Teorije oscilacija (npr. [238]) mogu se pronaći brojni primeri klasičnih zadataka i frekventnih jednačina oscilovanja diskretnih ili kontinualnih sistema koji su pobuđeni početnim poremcájima prirodnog ravnotežnog stanja sistema. Savremena istraživanja u oblasti oscilacija diskretnih dinamičkih sistema su usmerena na nelinearne fenomene, kao i na nestacionarne, slične slučajnim i haotičnim procesima u čisto determinističkim dinamičkim sistemima i uslovima. Nelinearne pojave, kao i oštećenja i lomovi struktura, su predmet i tema prestižnih časopisa i međunarodnih naučnih konferencija (pogledati ...Proceedings of ENOC Copenhagen 1999, Moscow 2002; ICNM Shanghai 1998, 2002.; Control Oscillations and Chaos COC 2000 Saint Petersburg,Issues of Journal Applied Mechanics Reviews and Refferativniy Zhurnal Mechanika Moscow.....). Upotreba savremenih materijala inspiriše mnoge istraživače da se interesuju za nove konstitutivne relacije u matematičkom smislu kojima bi istražili dinamiku konstrukcija od tih materijala. U tom smislu postoji i jedan broj radova u kojima je opisana dinamika diskretnih sistema materijalnih tačaka koje su spregnute

standardnim naslednim, reološkim ili puzećim lakim elementima [61, 102, 105, 109, 110]. U monografiji [45], po prvi put, predstavljena je analitička dinamika diskretnih naslednih sistema kao integralna teorija ovih sistema.

Kao novi materijal u aktivnim sistemima koristi se piezokeramika. U radu [138] prikazana su piezokeramička ponašanja u režimima oscilovanja dobijena kao rezultat analitičkog, numeričkog i eksperimentalnog istraživanja spektra frekvencija oscilovanja. Ovi rezultati su značajni sa stanovišta oscilacija aktivnih struktura i upravljanja oscilacijama.

U radovima [106, 107, 131] predstavljene su longitudinalne oscilacije grede sa naslednim svojstvima i svojstvima puzanja sa promenljivim poprečnim presekom. Izvedena je parcijalna diferencijalna jednačina sa izvodima racionalnog reda i njena partikularna rešenja za slučaj sopstvenih longitudinalnih oscilacija grede od puzećeg materijala. Određene su sopstvene funkcije i vremenske funkcije, za taj slučaj oscilovanja, na primerima različitih graničnih uslova. Sopstvene vrednosti i sopstvene kružne frekvencije za te slučajeve graničnih uslova oscilatornog sistema su dobijene i klasifikovane tabelarno. Data je i serija grafika vremenskih funkcija dobijenih pomoću MathCad-a. U radovima [99, 100, 106, 107] razmatran je problem transversalnih oscilacija grede koja je slobodna ili pod dejstvom slučajnih sila kojima se greda napreže u aksijalnom pravcu upravno na poprečni presek u nedeformisanom stanju grede. Slučajni proces u tom slučaju je ograničeni šum.

U seriji radova [60, 84, 90] predstavljena je metoda diskretnog kontinuuma, o čemu je bilo reči u okviru poglavlja 2.2, i korišćena za predstavljanje modela oscilovanja i prostiranja signala kontinualnih tela načinjenih od materijala različitih svojstava. Sličan pristup primene metode diskretnog kontinuuma prikazan je i u radovima [59, 60, 61, 63].

U radovima [93, 157] date su vizuelne predstave oscilatornih procesa u klasičnim modelima oscilacija realnih sistema i na novi način su osvetljene varijacije osobina oscilatornih procesa tih sistema sa promenama nekih parametara sistema.

Savremeni kompjuterski alati sa moćnim kapacitetima računara imaju sličnu filozofiju razmatranja realnih dinamičkih sistema pomoću diskretizacije kontinuuma kao puta i metoda do rešenja problema, a potom pomoću mnogo iteracija kontinualizacije rešenja do verifikacije tačnosti. Diskretizacija i kontinualizacija u analizi dinamičkih procesa su metode različitog smera, ali su dobre da omoguće proračun i za donošenje zaključaka. Pri tome, ako se model želi učiniti realnijim i uključiti se nelinearnost u opis i postavljanje modela, mora se voditi računa o diskretnim tačkama i fenomenima koji se u tim procesima javljaju. Ti fenomeni su tipa bifurkacija i homokliničkih tačaka, koje znače i daju više različitih rešenja, ili pojava više diskretnih fenomena usled jake osetljivosti nelinearnog procesa na male promene ili početnih uslova, ili parametara samih sistema, ili promene svojstava sistema zbog nekonvergentnih aproksimacija u procesima diskretizacije ili kontinualizacije u prikazivanju i opisivanju realne dinamike sistema i postavljanju njegovog modela.

Kao što je već prikazano u prethodnim poglavljima razmatranje hibridnih sistema u savremenoj literaturi svodi se na upotrebu logičkog programiranja i upotrebu računara za verifikaciju modela. Veoma malo je analitičkih rešenja, koja bi mogla da se koriste, i u programskim jezicima, i u stvarnoj analizi

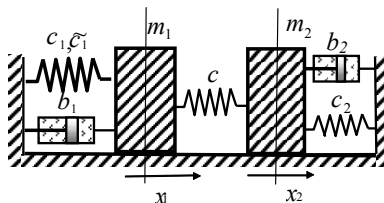
procesa hibridnih dinamičkih sistema, kao i mogućnosti da se nelinearnosti, kako procesa, tako i same strukture, uvrste u analitička rešenja i numeričke simulacije.

Ovde će, na najjednostavnijim primerima sprežanja oscilatora, biti pokazana interakcija njihovih dinamika ako su spregnuti statičkim ili dinamičkim vezama, potom će biti prikazani i modeli sprežanja kontinualnih sistema sa diskretnim i to takođe statičkim i dinamičkim vezama, da bi na kraju ovog poglavlja bili prikazani primeri sprežanja struktura visko-elastičnim i naslednim elementima.

3.1. Hibridni sistemi spregnutih struktura statičkim vezama

3.1.1. Sprežanje oscilatora sa nelinearnim svojstvima i oscilatora sa linearnim svojstvima statičkom vezom

Posmatrajmo dva oscilatora jedan sa nelinearnim svojstvima opruge krutosti c_1 i nelinearne krutosti \tilde{c}_1 , mase m_1 , i koeficijenta linearnog prigušenja b_1 i drugi sa oprugom linearne krutosti c_2 , mase m_2 , i koeficijenta otporne sile b_2 , spregnuta statičkom vezom koja je u sistemu određena opugom linearne krutosti c , kao na slici 3.1.1.



Slika 3.1.1 Oscilatori spregnuti statičkom vezom pomoću opruge: oscilator sa nelinearnom krutošću i oscilator sa linearnom krutošću i prigušnicama.

Prvo će biti napisana jednačina kretanja oscilatora sa nelinearnom oprugom i linearnom prigušnicom. U tom smislu analiza energije za nekonzervativni sistem sa otpornom silom linearno proporcionalnom brzini kretanja vodi do zaključak da funkcija rasipanja $\Phi_{(t)}$ ima ulogu mere opadanja ukupne energije sistema u jedinici vremena, [238]:

$$\frac{d}{dt}(E_{k(t)} + E_{p(t)}) = -2\Phi_{(t)}. \quad (3.1.1)$$

Izrazimo kinetičku energiju oscilatora kao:

$$E_{k(t)} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2(t). \quad (3.1.2)$$

Potencijalna energija sistema koja se sastoji od potencijalnih energija linearne i nelinearne opruge je u obliku:

$$E_{p(t)} = \frac{1}{2}c_1x_1^2(t) + \frac{1}{4}\tilde{c}_1x_1^4(t), \quad (3.1.3)$$

dok se Rayligh-jeva funkcija rasipanja izražava u obliku:

$$\Phi_{(t)} = \frac{1}{2}b_1\dot{x}_1^2(t). \quad (3.1.4)$$

Iz (3.1.1) uvrštavajući (3.1.2), (3.1.3) i (3.1.4), sledi diferencijalna jednačina kretanja oscilatora oblika:

$$\ddot{x}_1(t) + 2\delta_1\dot{x}_1(t) + \omega_1^2x_1(t) = -\tilde{\omega}_{N1}^2x_1^3(t), \text{ za } \delta_1 \neq 0, \varepsilon \neq 0, \omega_1^2 > \delta_1^2, \tilde{\omega}_{N1}^2 \neq 0 \quad (3.1.5)$$

gde su korišćene oznake $\omega_1^2 = c_1/m_1$ i $\tilde{\omega}_{N1}^2 = \tilde{c}_1/m_1$ za kvadrat sopstvene kružne frekvencije i redukovani koeficijent nelinearnosti, koji odgovaraju linearnom i nelinearnom delu svojstava opruge, kao i $2\delta_1 = b_1/m_1$ za dvostruku vrednost koeficijenta prigušenja δ_1 . Ovo je nehomogena nelinearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima tipa Duffing-ove jednačine, koja opisuje dinamiku prigušenog oscilatora sa tvrdom karakteristikom nelinearnosti. Ova jednačina će biti rešena primenom ideje metode Krilov-Bogoljubov-Mitropoljski prikazane u poglavlju 2.1. Za razliku od originalne metode u kojoj se aproksimativno rešenje razvija u okolini rešenja slobodnih neprigušenih oscilacija, ovde će se aproksimativno rešenje razvijati u okolini rešenja slobodnih prigušenih oscilacija i pokazaće se da po istom principu može da se nađe prva aproksimacija rešenja.

Karakteristična jednačina homogenog dela jednačine (3.1.5) je:

$$\lambda^2 + 2\delta_1\lambda + \omega_1^2 = 0, \text{ za } \delta_1 \neq 0, \omega_1^2 > \delta_1^2, \quad (3.1.5a)$$

sa korenima koji su, u slučaju malog prigušenja $\delta_1 < \omega_1$, za opadajuće oscilatorno kretanje, konjugovano kompleksni brojevi oblika:

$$\lambda_{1,2} = -\delta_1 \mp i\sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2} = -\delta_1 \mp ip_1 \quad (3.1.6)$$

Rešenje homogenog dela jednačine (3.1.5) je oblika:

$$x_1(t) = R_{01}e^{-\delta_1 t} \cos(p_1 t + \alpha_{01}),$$

gde su kružna frekvencija oscilovanja $p_1 = \sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2}$, a R_{01} i α_{01} integracione konstante koje se određuju iz početnih uslova, a koje predstavljaju početnu amplitudu i početnu fazu u trenutku $t = 0$.

Pretpostavka je da je jednačina (3.1.5) sa malim nelinearnostima i malim koeficijentom prigušenja i zapišimo je u opštem obliku:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \quad (3.1.7)$$

Za $\varepsilon = 0$ iz prethodne nelinearne diferencijalne jednačine se dobija odgovarajuća linearna diferencijalna jednačina oblika:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \text{ za } \delta \neq 0, \omega^2 > \delta^2,$$

čije tačno rešenje je:

$$x = ae^{-\delta t} \cos \psi = e^{-\delta t} \tilde{x}$$

u kome je konstantna početna amplituda a i jednakopromenljiv fazni ugao $\psi = pt + \alpha$, gde je

$$p = \sqrt{\omega^2 - \delta^2} \text{ tj.}$$

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = p = \text{const},$$

a konstante a i α se određuju iz početnih uslova.

Sada se pomoću transformacije promenljive x u \tilde{x} u obliku:

$$\tilde{x} = xe^{\delta t} \quad (3.1.8)$$

dolazi do relacija:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\tilde{x}}{dt} - \delta\tilde{x} \right) e^{-\delta t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} - \delta \frac{d\tilde{x}}{dt} \right) e^{-\delta t} - \delta \left(\frac{d\tilde{x}}{dt} - \delta\tilde{x} \right) e^{-\delta t} = e^{-\delta t} \left(\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} - 2\delta \frac{d\tilde{x}}{dt} + \delta^2\tilde{x} \right)$$

Levi deo diferencijalne jednačine (3.1.7) po promenljivoj x , smenom promenljive \tilde{x} , se transformiše u oblik:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = e^{-\delta t} \left(\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} - 2\delta \frac{d\tilde{x}}{dt} + \delta^2\tilde{x} \right) + 2\delta \left[\left(\frac{d\tilde{x}}{dt} - \delta\tilde{x} \right) e^{-\delta t} \right] + \omega^2 \tilde{x} e^{-\delta t} = e^{-\delta t} \left(\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + (\omega^2 - \delta^2)\tilde{x} \right).$$

Jednačina (3.1.7) smenom promenljive (3.1.8) transformiše se u oblik:

$$e^{-\delta t} \left(\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + (\omega^2 - \delta^2)\tilde{x} \right) = \mathcal{E}\mathcal{F} \left(x, \frac{dx}{dt} \right) = \mathcal{E}\mathcal{F} \left(\tilde{x} e^{-\delta t}, \left(\frac{d\tilde{x}}{dt} - \delta\tilde{x} \right) e^{-\delta t} \right) = \mathcal{E}\mathcal{F} \left(\tilde{x} e^{-\delta t}, \frac{d\tilde{x}}{dt} e^{-\delta t} \right),$$

odnosno:

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + (\omega^2 - \delta^2)\tilde{x} = \mathcal{E}\mathcal{F} \left(\tilde{x} e^{-\delta t}, \frac{d\tilde{x}}{dt} e^{-\delta t} \right) e^{\delta t}.$$

Kako je $p = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ prethodna jednačina dobija oblik:

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + p^2\tilde{x} = \mathcal{E}\mathcal{F} \left(\tilde{x} e^{-\delta t}, \frac{d\tilde{x}}{dt} e^{-\delta t} \right) e^{\delta t}. \quad (3.1.9)$$

Ako se pretpostavi da je funkcija $e^{\delta t}$ sporo promenljiva, odnosno da je $\tau = \varepsilon t$ sporopromenljivo vreme, i

da za jedan period $T_a = \frac{2\pi}{p}$ ne raste brzo, onda funkcija $\mathcal{E}\mathcal{F} \left(\tilde{x} e^{-\delta t}, \frac{d\tilde{x}}{dt} e^{-\delta t} \right) = \mathcal{E}\mathcal{F} \left(\tilde{x}, \frac{d\tilde{x}}{dt}, \tau \right)$ ispunjava uslove

za primenu asimptotske metode Krilov-Bogoljubov-Mitropoljskog sa sporopromenljivim parametrima i sporopromenljivim vremenom $\tau = \varepsilon t$.

Koristeći ovu metodu dvoparametarska aproksimacija opšteg rešenja nelinearne diferencijalne jednačine

(3.1.9) traži se u obliku:

$$\tilde{x} = xe^{\delta t} = a \cos \psi + \varepsilon U_1(a, \psi, \tau) + \varepsilon^2 U_2(a, \psi, \tau) + \dots \quad (3.1.10)$$

gde se $U_1(a, \psi, \tau), U_2(a, \psi, \tau), \dots$ javljaju kao periodičke funkcije ugla $\psi = pt + \phi(t)$, perioda 2π , a veličine

a i ψ , kao funkcije vremena, se određuju iz sistema diferencijalnih jednačina:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \tau) + \varepsilon^2 A_2(a, \tau) + \dots$$

$$\frac{d\psi}{dt} = p + \varepsilon B_1(a, \tau) + \varepsilon^2 B_2(a, \tau) + \dots$$

Nalaženje funkcija $U_i(a, \psi)$, $A_i(a)$ i $B_i(a)$ sadrži u sebi izvestan stepen proizvoljnosti, a da bi određivanje tih funkcija bilo jednoznačno moramo postaviti za njih dopunske uslove. Međutim i izbor dopunskih uslova je proizvoljan. Kao dopunski uslov mi biramo uslov da u funkcijama $U_i(a, \psi)$ odsustvuju prvi harmonici, tj. potrebno je da bude zadovoljen sledeći uslov:

$$\int_0^{2\pi} U_j(a, \psi, \tau) e^{i\psi} d\psi = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Fizički posmatrano to znači da smo veličini a dali smisao potpune (pune) amplitude prvog osnovnog harmonika oscilovanja.

Izvodi pretpostavljene aproksimacije rešenja (3.1.10) su:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= -ap \sin \psi + \varepsilon \left\{ A_1(a, \tau) \cos \psi - aB_1(a, \tau) \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial \tau} + p \frac{\partial U_1}{\partial \psi} \right\} + \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ A_1(a, \tau) \cos \psi - aB_2(a, \tau) \sin \psi + A_1(a, \tau) \frac{\partial U_1}{\partial a} + B_1(a, \tau) \frac{\partial U_1}{\partial \psi} + p \frac{\partial U_2}{\partial \psi} + \frac{\partial U_2}{\partial \tau} \right\} + \varepsilon^3 \dots \\ \frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2} &= -ap^2 \cos \psi + \varepsilon \left\{ -2pA_1 \sin \psi - 2paB_1 \cos \psi + \frac{dA_1(a, \tau)}{d\tau} \cos \psi - a \frac{dB_1(a, \tau)}{d\tau} \sin \psi + p^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + p \frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial \psi} \right\} + \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ \left(A_1 \frac{dA_1}{da} - aB_1^2 - 2paB_2 \right) \cos \psi - \left(2pA_2 + 2A_1B_1 + A_1a \frac{dB_1}{da} \right) \sin \psi + 2pA_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial a \partial \psi} + 2pB_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi^2} + p^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + p \frac{\partial^2 U_2}{\partial t \partial \psi} + A_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial a} + \dots \right\} + \\ &+ \varepsilon^3 \dots \end{aligned}$$

Desna strana nelinearne diferencijalne jednačine (3.1.9), uzimajući u obzir ove izvode, može da se razvije u red po stepenima malog parametra i napiše u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} \tilde{e}f \left(\tilde{x} e^{-\varepsilon \tilde{x}}, \frac{d\tilde{x}}{dt} e^{-\varepsilon \tilde{x}} \right) &= \tilde{e}f \left(ae^{-\varepsilon \tilde{x}} \cos \psi, -ape^{-\varepsilon \tilde{x}} \sin \psi \right) + \varepsilon^2 \left\{ U_1(a, \psi) \tilde{f}'_x \left(ae^{-\varepsilon \tilde{x}} \cos \psi, -ape^{-\varepsilon \tilde{x}} \sin \psi \right) + \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + p \frac{\partial U_1}{\partial \psi} \right) \cdot \right. \\ &\left. \tilde{f}'_x \left(ae^{-\varepsilon \tilde{x}} \cos \psi, -ape^{-\varepsilon \tilde{x}} \sin \psi \right) \right\} + \varepsilon^3 \dots + \dots \end{aligned}$$

Unošenjem ovih izvoda u nelinearnu diferencijalnu jednačinu (3.1.9) i posle sređivanja po stepenima malog parametra dobija se diferencijalna jednačina u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} &-ap^2 \cos \psi + \varepsilon \left\{ -2pA_1 \sin \psi - 2paB_1 \cos \psi + \frac{dA_1(a, \tau)}{d\tau} \cos \psi - a \frac{dB_1(a, \tau)}{d\tau} \sin \psi + p^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + p \frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial \psi} \right\} + \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ \left(A_1 \frac{dA_1}{da} - aB_1^2 - 2paB_2 \right) \cos \psi - \left(2pA_2 + 2A_1B_1 + A_1a \frac{dB_1}{da} \right) \sin \psi + 2pA_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial a \partial \psi} + 2pB_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi^2} + p^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + p \frac{\partial^2 U_2}{\partial t \partial \psi} + A_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial a} + \dots \right\} + \\ &+ \varepsilon^3 \dots + p^2 \{ a \cos \psi + \varepsilon U_1(a, \psi, \tau) + \varepsilon^2 U_2(a, \psi, \tau) + \dots \} = \\ &= \tilde{e}f \left(e^{-\varepsilon \tilde{x}} \{ a \cos \psi + \varepsilon U_1(a, \psi, \tau) + \varepsilon^2 U_2(a, \psi, \tau) + \dots \}, e^{-\varepsilon \tilde{x}} \left\{ -ap \sin \psi + \varepsilon \left(A_1(a, \tau) \cos \psi - aB_1(a, \tau) \sin \psi + \frac{\partial U_1}{\partial \tau} + p \frac{\partial U_1}{\partial \psi} \right) + \dots \right\} \right) e^{\varepsilon \tilde{x}} \end{aligned}$$

Sada izjednačavajući sa leve i desne strane izraze uz jednake stepene malog parametra ε vodeći računa o činjenici da je i desna strana jednačine (3.1.9) razvijena u red po stepenima malog parametra kao što je prikazano i imajući u vidu da je $d\tau/dt = \varepsilon$ dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned} &-ap^2 \cos \psi + p^2 a \cos \psi = 0, \\ &\varepsilon \left\{ -2pA_1 \sin \psi - 2paB_1 \cos \psi + p^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi^2} \right\} + p^2 \{ \varepsilon U_1(a, \psi, \tau) \} = \tilde{e}f \left(e^{-\varepsilon \tilde{x}} \{ a \cos \psi, \dots \}, e^{-\varepsilon \tilde{x}} \{ -ap \sin \psi, \dots \} \right) e^{\varepsilon \tilde{x}}, \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ \left(A_1 \frac{dA_1}{da} - aB_1^2 - 2paB_2 \right) \cos \psi - \left(2pA_2 + 2A_1B_1 + A_1a \frac{dB_1}{da} \right) \sin \psi + 2pA_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial a \partial \psi} + 2pB_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi^2} + p^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial \tau^2} + \dots \right\} + \\ &+ p^2 \{ \varepsilon^2 U_2(a, \psi, \tau) + \dots \} + \varepsilon^2 \frac{dA_1(a, \tau)}{d\tau} \cos \psi - \varepsilon^2 a \frac{dB_1(a, \tau)}{d\tau} \sin \psi = \\ &= \tilde{e}f \left(e^{-\varepsilon \tilde{x}} \{ \varepsilon U_1(a, \psi, \tau) \}, e^{-\varepsilon \tilde{x}} \left\{ \varepsilon \left(A_1(a, \tau) \cos \psi - aB_1(a, \tau) \sin \psi + \frac{\partial U_1}{\partial \tau} + p \frac{\partial U_1}{\partial \psi} \right) \right\} \right) e^{\varepsilon \tilde{x}} \end{aligned}$$

Prva jednačina ovog sistema je identički zadovoljena. Druga jednačina sadrži funkciju $U_1(a, \psi, t)$ i njene izvode, a kako ona ne sarži osnovni harmonik, to se iz te jednačine razvijanjem svih članova u trigonometrijski red po umnožcima $\psi = pt + \phi(t)$ i izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće harmonike sa leve i desne strane jednačine, dobijaju jednačine za određivanje rešenja nepoznatih funkcija $A_1(a, \tau)$ i $B_1(a, \tau)$, u obliku:

$$-2pA_1(a, \tau) \sin^2 \psi = \tilde{f}(e^{-\delta\tau} \{a \cos \psi\}, e^{-\delta\tau} \{-ap \sin \psi\}) e^{\delta\tau} \sin \psi$$

$$-2paB_1(a, \tau) \cos^2 \psi = \tilde{f}(e^{-\delta\tau} \{a \cos \psi\}, e^{-\delta\tau} \{-ap \sin \psi\}) e^{\delta\tau} \cos \psi$$

Integraljenje u intervalu $[0, 2\pi]$ daje sledeći sistem jednačina:

$$-2pA_1(a, \tau) \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi = \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{-\delta\tau} \{a \cos \psi\}, e^{-\delta\tau} \{-ap \sin \psi\}) e^{\delta\tau} \sin \psi d\psi$$

$$-2paB_1(a, \tau) \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{-\delta\tau} \{a \cos \psi\}, e^{-\delta\tau} \{-ap \sin \psi\}) e^{\delta\tau} \cos \psi d\psi$$

$$\text{Kako su: } \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\psi}{2} d\psi = \pi \quad \text{i} \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\psi}{2} d\psi = \pi$$

na osnovu prethodnog se dobija sledeći sistem jednačina za nepoznate funkcije $A_1(a)$ i $B_1(a)$.

$$A_1(a, \tau) = -\frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{-\delta\tau} \{a \cos \psi\}, e^{-\delta\tau} \{-ap \sin \psi\}) e^{\delta\tau} \sin \psi d\psi$$

$$B_1(a, \tau) = -\frac{1}{2\pi pa} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{-\delta\tau} \{a \cos \psi\}, e^{-\delta\tau} \{-ap \sin \psi\}) e^{\delta\tau} \cos \psi d\psi \quad (3.1.11)$$

Kako je u ovom slučaju diferencijalna jednačina, koja se rešava ovom metodom, oblika (3.1.5) to pomoću transformacije $\tilde{x} = xe^{\delta t}$ transformisana jednačina (3.1.9) ima oblik:

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2} + p_1 \tilde{x} = \tilde{f}(\tilde{x} e^{-\delta t}) e^{\delta t} = -\tilde{\omega}_{N1}^2 \tilde{x}^3(t) e^{-3\delta t} e^{\delta t} = -\tilde{\omega}_{N1}^2 \tilde{x}^3(t) e^{-2\delta t},$$

pa sistem jednačina (3.1.11) dobija oblik:

$$-2p_1 A_1(a, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -\tilde{\omega}_{N1}^2 a^3 \cos^3 \psi e^{-2\delta\tau} \sin \psi d\psi,$$

$$-2p_1 a B_1(a, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -\tilde{\omega}_{N1}^2 a^3 \cos^3 \psi e^{-2\delta\tau} \cos \psi d\psi \quad (3.1.11a)$$

Po izračunavanju integrala na desnoj strani prethodni sistem dobija sledeći oblik:

$$A_1(a, \tau) = 0;$$

$$B_1(a, \tau) = \frac{1}{2\pi p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 a^2 e^{-2\delta\tau} \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\psi + \frac{1}{8} \cos 4\psi \right] d\psi = \frac{1}{2\pi p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 a^2 e^{-2\delta\tau} \frac{3}{4} \pi = \frac{3}{8p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 a^2 e^{-2\delta\tau} \quad (3.1.12)$$

Prva dvoparameterska asimptotska aproksimacija opšteg rešenja nelinearne diferencijalne jednačine (3.1.5) u prvoj ne popravljenoj aproksimaciji dobija se u obliku:

$$xe^{\delta t} = \tilde{x} = \tilde{x}_1 = a \cos \psi,$$

gde su zanemarene $U_1(a, \psi, \tau), U_2(a, \psi, \tau), \dots$ koje se javljaju kao periodičke funkcije ugla $\psi = pt + \phi(t)$, perioda 2π , ali kao manje veličine prvog i drugog reda, a veličine a i ψ kao funkcije vremena određuju se iz sistema diferencijalnih jednačina prve asimptotske aproksimacije:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \tau)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = p + \varepsilon B_1(a, \tau) .$$

Napomenimo, da ako se uzme u obzir $x e^{\delta_1 t} = \tilde{x}_{1, pop} = a \cos \psi + \varepsilon U_1(a, \psi, \tau)$, onda bi se time dobila prva popravljena asimptotska aproksimacija, što se ovde neće koristiti, na osnovu prethodne analize.

S obzirom na (3.1.12) sledi da je sistem diferencijalnih jednačina po nepoznatim funkcijama $a(t)$ i $\psi(t)$ u prvoj aproksimaciji:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \tau) = 0 ,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = p + \varepsilon B_1(a, \tau) = p_1 + \frac{3}{8 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 a^2 e^{-2\delta_1 t} . \text{ Za } \delta_1 \neq 0 , \varepsilon \neq 0 , \omega_1^2 > \delta_1^2 , \tilde{\omega}_{N1}^2 \neq 0 .$$

Integraljenjem prethodnih diferencijalnih jednačina prve aproksimacije po vremenu dobija se da je:

$$a = R_{01} = const ,$$

$$\psi(t) = p_1 t - \frac{3}{16 p_1 \delta_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_{01}^2 e^{-2\delta_1 t} + \alpha_{01} , \quad (3.1.13)$$

gde je vrednost integracione konstante $\alpha_{01} = \phi_{01} + \frac{3}{16 \delta_1 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_{01}^2$, za početne vrednosti amplitude R_{01} i faznog pomeraja ϕ_{01} .

Tako se sada prva asimptotska aproksimacija rešenja nelinearne diferencijalne jednačine (3.1.5) dobija u obliku:

$$x(t) = R_{01} e^{-\delta_1 t} \cos \left(p_1 t - \frac{3}{16 \delta_1 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_{01}^2 (e^{-2\delta_1 t} - 1) + \phi_{01} \right) , \text{ gde je } p_1 = \sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2} \quad (3.1.14)$$

za $\delta_1 \neq 0 , \varepsilon \neq 0 , \omega_1^2 > \delta_1^2 , \tilde{\omega}_{N1}^2 \neq 0$.

Pokazano je da se metodom Krilov-Bogoljubov-Mitropoljski sa sporpromenljivim vremenom može dobiti prva asimptotska aproksimacija rešenja nelinearne diferencijalne jednačine (3.1.5). Istovetnu aproksimaciju rešenja posmatrane nelinearne diferencijalne jednačine moguće je dobiti i primenom metode usrednjenja pri tome potrebno je prvo jednačinu (3.1.5) zapisati u standardnom obliku sistema diferencijalnih jednačina promena amplitude i faze sistema, pa potom izvršiti njihovo usrednjenje po punoj fazi načinjenoj u jednom periodu oscilovanja. Kako je već konstatovano u poglavlju 2.1 i metoda Krilov-Bogoljubov-Mitropoljski i metoda usrednjenja u osnovi sadrže Lagrange-ovu metodu varijacije konstanta. Do prve aproksimacije rešenja nelinearne diferencijalne jednačine (3.1.5) se može doći koristeći i ovu metodu, zato pretpostavimo prvu aproksimaciju rešenje u obliku:

$$x_1(t) = R_1(t) e^{-\delta_1 t} \cos \Phi_1(t) , \quad (3.1.15)$$

gde su sada amplitude $R_1(t)$ i faza $\Phi_1(t) = p_1 t + \phi_1(t)$ nepoznate funkcije vremena koje je potrebno odrediti.

Kako je pri izvod pretpostavljene aproksimacije rešenja oblika:

$$\dot{x}_1(t) = -\delta_1 R_1(t) e^{-\delta_1 t} \cos \Phi_1(t) + \dot{R}_1(t) e^{-\delta_1 t} \cos \Phi_1(t) - R_1(t) e^{-\delta_1 t} \dot{\phi}_1(t) \sin \Phi_1(t) - R_1(t) e^{-\delta_1 t} p_1 \sin \Phi_1(t) \quad (3.1.16)$$

to se iz uslova da prvi izvod (3.1.16) zadovolji jednakost sa prvim izvodom kada su amplitude $R_1(t)$ i faza $\Phi_1(t) = p_1 t + \phi_1(t)$ konstantne tj. kada je $\dot{x}_1(t) = -\delta_1 R_1(t) e^{-\delta_1 t} \cos \Phi_1(t) - R_1(t) e^{-\delta_1 t} p_1 \sin \Phi_1(t)$ dobija prva jednačina za vezu izvoda po vremenu amplitude $\dot{R}_1(t)$ i faznog kašnjenja $\dot{\phi}_1(t)$:

$$\dot{R}_1(t) \cos \Phi_1(t) - R_1(t) \dot{\phi}_1(t) \sin \Phi_1(t) = 0. \quad (3.1.17)$$

Drugi izvod pretpostavljene prve aproksimacije rešenja (3.1.15) po vremenu je:

$$\ddot{x}_1(t) = (\delta_1^2 R_1(t) - R_1(t) p_1^2 - \delta_1 \dot{R}_1(t) - R_1(t) p_1 \dot{\phi}_1) e^{-\delta_1 t} \cos \Phi_1(t) + (\delta_1 R_1(t) \dot{\phi}_1 + 2 \delta_1 R_1(t) p_1 - \dot{R}_1(t) p_1) e^{-\delta_1 t} \sin \Phi_1(t) \quad (3.1.18)$$

Nakon unošenja prvog (3.1.16), drugog izvoda (3.1.18) i same pretpostavljene aproksimacije rešenja (3.1.15) u nelinearnu diferencijalnu jednačinu (3.1.5) dobija se uslov:

$$(-\delta_1 \dot{R}_1(t) - R_1(t) p_1 \dot{\phi}_1) \cos \Phi_1(t) + (\delta_1 R_1(t) \dot{\phi}_1 - \dot{R}_1(t) p_1) \sin \Phi_1(t) = -\tilde{\omega}_{N1}^2 R_1^3(t) e^{-2\delta_1 t} \cos^3 \Phi_1(t) \quad (3.1.19)$$

koji zajedno sa uslovom (3.1.17) daje sistem algebarskih jednačina po nepoznatim prvim izvodima po vremenu amplitude $\dot{R}_1(t)$ i faznog kašnjenja $\dot{\phi}_1(t)$ pretpostavljene prve aproksimacije rešenja:

$$\begin{aligned} \dot{R}_1(t) \cos \Phi_1(t) - R_1(t) \dot{\phi}_1(t) \sin \Phi_1(t) &= 0, \\ \dot{R}_1(t) \sin \Phi_1(t) + R_1(t) \dot{\phi}_1 \cos \Phi_1(t) &= \frac{\tilde{\omega}_{N1}^2}{p_1} R_1^3(t) e^{-2\delta_1 t} \cos^3 \Phi_1(t). \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Rešavanjem prethodnog sistema algebarskih jednačina po nepoznatim prvim izvodima po vremenu amplitude $\dot{R}_1(t)$ i faznog kašnjenja $\dot{\phi}_1(t)$ pretpostavljene prve aproksimacije rešenja dobijaju se sledeći izrazi za $\dot{R}_1(t)$ i $\dot{\phi}_1(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \frac{\tilde{\omega}_{N1}^2}{p_1} R_1^2(t) e^{-2\delta_1 t} \cos^4 \Phi_1(t), \\ \dot{R}_1(t) &= \frac{\tilde{\omega}_{N1}^2}{p_1} R_1^3(t) e^{-2\delta_1 t} \cos^3 \Phi_1(t) \sin \Phi_1(t). \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Imajući u vidu da su desne strane prethodnih izraza kvazi periodičke funkcije po $\Phi_1(t) = p_1 t + \phi_1(t)$ i sa sporopromeljivim amplitudama za jedan period po $\Phi_1(t) = p_1 t + \phi_1(t)$, to su zadovoljeni uslovi za aproksimacije usrednjenja. Posle usrednjenja po punoj fazi $\Phi_1(t) = p_1 t + \phi_1(t)$ dobijenog sistema prve aproksimacije amplitude $\dot{R}_1(t)$ i faznog kašnjenja $\dot{\phi}_1(t)$ pretpostavljene prve aproksimacije rešenja dobijaju se u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} \dot{R}_1(t) &= 0, \\ \dot{\phi}_1 &= \frac{3\tilde{\omega}_{N1}^2}{8p_1} R_1^2(t) e^{-2\delta_1 t}, \text{ za } \delta_1 \neq 0, \varepsilon \neq 0, \omega_1^2 > \delta_1^2, \tilde{\omega}_{N1}^2 \neq 0. \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Rešavanje ovog sistema daje prve aproksimacije za nepoznate amplitudu $R_1(t)$ i fazu $\Phi_1(t) = p_1 t + \phi_1(t)$, odnosno razliku u fazi u obliku:

$$\begin{aligned} R_1(t) &= R_{01} = const \\ \phi_1(t) &= -\frac{3}{16\delta_1 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_{01}^2 e^{-2\delta_1 t} + \alpha_{01}, \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

gde je vrednost integracione konstante $\alpha_{01} = \phi_{01} + \frac{3}{16\delta_1 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_{01}^2$, za početne vrednosti amplitude R_{01} i faznog pomeraja ϕ_{01} . Tako se dobija prva aproksimacija pune faze oscilovanja posmatranog nelinearnog oscilatora u obliku:

$$\Phi_1(t) = p_1 t - \frac{3}{16\delta_1 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_{01}^2 e^{-2\delta_1 t} + \alpha_{01}, \quad (3.1.24)$$

a zakon oscilovanja u prvoj asimptotskoj aproksimaciji je oblika:

$$x_1(t) = R_{01} e^{-\delta_1 t} \cos\left(p_1 t - \frac{3}{16\delta_1 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_{01}^2 e^{-2\delta_1 t} + \alpha_{01}\right), \text{ gde je } p_1 = \sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2}. \quad (3.1.25)$$

za $\delta_1 \neq 0, \varepsilon \neq 0, \omega_1^2 > \delta_1^2, \tilde{\omega}_{N1}^2 \neq 0$.

Ovako dobijeno rešenje u prvoj asimptotskoj aproksimaciji jednačine (3.1.5) imajući u vidu vrednost konstante α_{01} identično je rešenju (3.1.14) dobijenom metodom Krilov-Bogoljubov-Mitropoljskog sa sporopromeljivim parametrima.

Dobijena prva asimptotska aproksimacija (3.1.14) važi na ograničenom vremenskom intervalu i ne može se primenjivati na beskonačnom intervalu vremena, jer smo pretpostavili da su elongacije oscilatora male, a takođe i nelinearnosti male. Asimptotska aproksimacija je u osnovi divergentna, a konvergira tačnom rešenju kada mali parametar teži nuli, a i kada spropromeljivo vreme teži nuli.

U graničnom slučaju kada je sistem konzervativan i nelinearan, $\delta_1 = 0, \varepsilon \neq 0$, nelinearna diferencijalna jednačina (3.1.5) je oblika:

$$\ddot{x}_1(t) + \omega_1^2 x_1(t) = -\tilde{\omega}_{N1}^2 x_1^3(t), \text{ za } \delta_1 = 0, \varepsilon \neq 0, \tilde{\omega}_{N1}^2 \neq 0$$

dok se iz prve asimptotske aproksimacije (3.1.14) dobija:

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} x(t) = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \left\{ R_{01} e^{-\delta_1 t} \cos\left(p_1 t - \frac{3}{16\delta_1 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_{01}^2 (e^{-2\delta_1 t} - 1) + \phi_{01}\right) \right\} = R_{01} \cos\left(\omega_1 t + \frac{3}{8\omega_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_{01}^2 t + \phi_{01}\right),$$

ili u obliku:

$$x_1(t) = R_{01} \cos\left(\left(\omega_1 \pm \frac{3}{8\omega_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_{01}^2\right)t + \phi_{01}\right),$$

što je poznata prva asimptotska aproksimacija nelinearnog oscilatora tvrde karakteristike iz literature [200, 201].

U graničnom slučaju kada je sistem linearan i nekonzervativan za $\delta_1 \neq 0, \omega_1^2 > \delta_1^2, \tilde{\omega}_{N1}^2 = 0$ diferencijalna jednačina (3.1.5) je oblika:

$$\ddot{x}_1(t) + 2\delta_1 \dot{x}_1(t) + \omega_1^2 x_1(t) = 0, \text{ za } \delta_1 \neq 0, \omega_1^2 > \delta_1^2, \tilde{\omega}_{N1}^2 = 0,$$

dok se iz prve asimptotske aproksimacije rešavanja (3.1.14) nelinearne diferencijalne jednačine dobija tačno rešenje linearnog oscilatora sa prigušenjem za slučaj slabe oscilacije, $\omega_1^2 > \delta_1^2$, u obliku:

$$\lim_{\tilde{\omega}_{N1}^2 \rightarrow 0} x(t) = \lim_{\tilde{\omega}_{N1}^2 \rightarrow 0} \left\{ R_{01} e^{-\delta_1 t} \cos\left(p_1 t - \frac{3}{16\delta_1 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_{01}^2 (e^{-2\delta_1 t} - 1) + \phi_{01}\right) \right\} = R_{01} e^{-\delta_1 t} \cos(p_1 t + \phi_{01}), \text{ } p_1 = \sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2}, \text{ odnosno:}$$

$$x(t) = R_{01} e^{-\delta_1 t} \cos(p_1 t + \phi_{01}), \text{ za } \delta_1 \neq 0, \omega_1^2 > \delta_1^2, \tilde{\omega}_{N1}^2 = 0,$$

koje je poznato iz klasične literature [237].

Nekoliko zaključaka o svojstvima nelinearnosti vidljivim i na ovom najjednostavnijem primeru nelinearnog oscilatora mogu se izvući iz oblika zakona kretanja (3.1.14). Naime, svojstvo nelinearnosti jeste pored ostalog da period oscilovanja nije izohron tj. zavisi od vremena, kao i početnih uslova, što znači da i frekvencija dobijena metodom asimptotskog usrednjenja u prvoj aproksimaciji:

$$\tilde{p}_1(t) = p_1 + \frac{3}{8p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_{01}^2 e^{-2\delta_1 t}, \quad p = \sqrt{\omega^2 - \delta^2} \quad (3.1.25a)$$

varira sa vremenom i zavisi od vrednosti početne amplitude. Takođe, se zaključuje da faza i amplituda nisu nezavisne.

Zakon oscilovanja linearnog podsistema lako će se dobiti rešavanjem diferencijalne jednačine kretanja koja proizilazi iz balansa energije. Ako su izrazi za kinetičku, potencijalnu energiju i funkciju rasipanja linearnog oscilatora, respektivno, oblika:

$$E_{k(2)} = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2, \quad E_{p(2)} = \frac{1}{2} c_2 x_2^2 \quad \text{i} \quad \Phi_{(2)} = \frac{1}{2} b_2 \dot{x}_2^2 \quad (3.1.26)$$

diferencijalna jednačina kretanja je oblika:

$$\ddot{x}_2(t) + 2\delta_2 \dot{x}_2(t) + \omega_2^2 x_2(t) = 0, \quad (3.1.27)$$

gde se uvode oznake $\omega_2^2 = c_2/m_2$ za kvadrat ugaone frekvencije samostalnog linearnog podsistema, $2\delta_2 = b_2/m_2$ za koeficijent prigušenja tog podsistema, Zakon kretanja je sada:

$$x_2(t) = R_0 e^{-\delta_2 t} \cos(p_2 t + \alpha_2), \quad (3.1.28)$$

gde je $p_2 = \sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2}$ sopstvena kružna frekvencija prigušenog sistema za $\delta_2 < \omega_2$ malo prigušenje.

Za sistem spregnut statičkom vezom sa slike 3.1 sastavimo diferencijalne jednačine kretanja sledeći prethodnu proceduru, gde su sada izrazi za kinetičku i potencijalnu energiju spregnutog sistema oblika:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad (3.1.29a)$$

$$E_p = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{4} \tilde{c}_1 x_1^4 + \frac{1}{2} c(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2. \quad (3.1.29b)$$

Potencijalna energija sprezanja podsistema statičkom vezom je:

$$E_{p(1,2)} = \frac{1}{2} c(x_2 - x_1)^2, \quad (3.1.29c)$$

a funkcija rasipanja spregnutog sistema je oblika:

$$\Phi = \frac{1}{2} b_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} b_2 \dot{x}_2^2. \quad (3.1.29d)$$

Sistem je sa dva stepena slobode kretanja i diferencijalne jednačine kretanja su:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) + 2\delta_1 \dot{x}_1(t) + (\omega_1^2 + a_1^2)x_1(t) - a_1^2 x_2(t) &= -\tilde{\omega}_{N1}^2 x_1^3(t), \\ \ddot{x}_2(t) + 2\delta_2 \dot{x}_2(t) + (\omega_2^2 + a_2^2)x_2(t) - a_2^2 x_1(t) &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

gde su $\omega_i^2 = c_i/m_i$, $\tilde{\omega}_{N1}^2 = \tilde{c}_1/m_1$, $2\delta_i = b_i/m_i$ i $a_i^2 = c/m_i$ za $i=1,2$.

Ovo je sistem spregnutih nehomogenih običnih diferencijalnih jednačina, jedne nelinearne i druge linearne, kojem odgovara sistem homogenih linearnih diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\delta_1 \dot{x}_1 + (\omega_1^2 + a_1^2)x_1 - a_1^2 x_2 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + 2\delta_2 \dot{x}_2 + (\omega_2^2 + a_2^2)x_2 - a_2^2 x_1 &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

koje bi odgovarale modelu spregnutih linearnih podsistema.

Matrica inercionih koeficijenta, matrica kvazielastičnih koeficijenta i koeficijenta prigušenja ovog sistema su, respektivno:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 + a_1^2 & -a_1^2 \\ -a_2^2 & \omega_2^2 + a_2^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{i} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2\delta_1 & \\ & 2\delta_2 \end{pmatrix}, \quad (3.1.32a)$$

a za slučaj da su oba podsistema istih masa, krutosti opruga i koeficijenta otporne sile, tj. da je sistem homogen, imamo odgovarajuće oblike:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 + a_1^2 & -a_1^2 \\ -a_1^2 & \omega_1^2 + a_1^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{i} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2\delta & \\ & 2\delta \end{pmatrix} \quad (3.1.32b)$$

Karakteristični polinom se može zapisati u obliku:

$$|\lambda^2 \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} + \mathbf{C}| = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 2\delta_1 \lambda + \omega_1^2 + a_1^2 & -a_1^2 \\ -a_2^2 & \lambda^2 + 2\delta_2 \lambda + \omega_2^2 + a_2^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1.33a)$$

ili u razvijenom obliku: $(\lambda^2 + 2\delta_1 \lambda + \omega_1^2 + a_1^2)(\lambda^2 + 2\delta_2 \lambda + \omega_2^2 + a_2^2) - a_1^2 a_2^2 = 0$.

U slučaju da su oba podsistema istih masa, krutosti opruga i koeficijenta otporne sile oblika polinom je oblika:

$$|\lambda^2 \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} + \mathbf{C}| = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 2\delta \lambda + \omega_1^2 + a_1^2 & -a_1^2 \\ -a_1^2 & \lambda^2 + 2\delta \lambda + \omega_1^2 + a_1^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1.33b)$$

Karakteristični polinom ima dva para konjugovano kompleksnih rešenja oblika:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\delta_1 \mp \mathbf{i} \sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2} = -\delta_1 \mp \mathbf{i} p_1 \\ \lambda_{3,4} &= -\delta_1 \mp \mathbf{i} \sqrt{\omega_1^2 + 2a_1^2 - \delta_1^2} = -\delta_1 \mp \mathbf{i} \tilde{p}_1. \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

Odnos kofaktora druge vrste matrice sistema je:

$$\begin{aligned} \frac{A_1^{(s)}}{K_{21}^{(s)}} &= \frac{A_2^{(s)}}{K_{22}^{(s)}} = C_s, \text{ odnosno:} \\ \frac{A_1^{(s)}}{a_1^2} &= \frac{A_2^{(s)}}{\lambda_s^2 + 2\delta_1 \lambda_s + \omega_1^2 + a_1^2} = \tilde{C}_s. \end{aligned} \quad (3.1.34a)$$

Zakoni kretanja sada se mogu napisati u obliku:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= K_{21}^{(1)} e^{-\delta_1 t} R_{01} \cos(\hat{p}_1 t + \alpha_{01}) + K_{21}^{(2)} e^{-\delta_1 t} R_{02} \cos(\hat{p}_2 t + \alpha_{02}) \\ x_2(t) &= K_{22}^{(1)} e^{-\delta_1 t} R_{01} \cos(\hat{p}_1 t + \alpha_{01}) + K_{22}^{(2)} e^{-\delta_1 t} R_{02} \cos(\hat{p}_2 t + \alpha_{02}). \end{aligned} \quad (3.1.35a)$$

U slučaju sistema sa homogenim karakteristikama imamo:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\delta t} [R_{01} \cos(p_1 t + \alpha_{01}) + R_{02} \cos(\tilde{p}_2 t + \alpha_{02})], \\ x_2(t) &= e^{-\delta t} [R_{01} \cos(p_1 t + \alpha_{01}) - R_{02} \cos(\tilde{p}_2 t + \alpha_{02})], \end{aligned} \quad (3.1.35b)$$

jer je za ovakav sistem odnos kofaktora oblika $K_{21}^{(s)} = K_{22}^{(1)} = -K_{22}^{(2)} = 1$, a vrednosti su $p_1 = \sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2}$, niske frekvencije, i $\tilde{p}_2 = \tilde{p}_1 = \sqrt{\omega_1^2 + 2a_1^2 - \delta_1^2}$, više frekvencije, a R_{0i} su vrednosti početnih amplituda oscilovanja. Što direktno upućuje na normalne modove linearnih spregnutih harmonijskih oscilatora o kojima će biti govora u potpoglavlju 7.2.1.

Da bi se rešio sistem (3.1.30) pretpostavljaju se rešenja u obliku:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\delta t} [R_1(t) \cos \Phi_1(t) + R_2(t) \cos \Phi_2(t)] \\ x_2(t) &= e^{-\delta t} [R_1(t) \cos \Phi_1(t) - R_2(t) \cos \Phi_2(t)] \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

Na sličan način kao i jednačinu (3.1.5) rešava se i ovaj sistem sa pretpostavljenim rešenjima koristeći Langrange-ovu metodu varijacije konstanta i usrednjenje po punim fazama $\phi_i(t)$ i dobijamo sistem diferencijalnih jednačina prve aproksimacije rešenja po nepoznatim amplitudama $R_i(t)$ i faznim kašnjenjima $\phi_i(t)$ u obliku:

$$\begin{aligned} \dot{R}_1(t) &= 0 \\ \dot{\phi}_1(t) &= \frac{3}{16p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 [R_1^2(t) + 2R_2^2(t)] e^{-2\delta_1 t} \\ \dot{R}_2(t) &= 0 \\ \dot{\phi}_2(t) &= \frac{3}{16\tilde{p}_2} \tilde{\omega}_{N1}^2 [R_2^2(t) + 2R_1^2(t)] e^{-2\delta_1 t}. \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

Rešenja ovog sistema diferencijalnih jednačina u prvoj asimptotskoj aproksimaciji su:

$$\begin{aligned} R_1(t) &= R_{01} = \text{const} \\ \phi_1(t) &= -\frac{3}{32\delta_1 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 [R_{01}^2 + 2R_{02}^2] e^{-2\delta_1 t} + \alpha_{01} \\ R_2(t) &= R_{02} = \text{const} \\ \phi_2(t) &= -\frac{3}{32\delta_1 \tilde{p}_2} \tilde{\omega}_{N1}^2 [2R_{01}^2 + R_{02}^2] e^{-2\delta_1 t} + \alpha_{02}. \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

Ovde su $\alpha_{01} = \phi_{01} + \frac{3}{32\delta_1 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 [R_{01}^2 + 2R_{02}^2]$ i $\alpha_{02} = \phi_{02} + \frac{3}{32\delta_1 \tilde{p}_2} \tilde{\omega}_{N1}^2 [2R_{01}^2 + R_{02}^2]$. Sada se zakoni kretanja u prvoj

asimptotskoj aproksimaciji homogenog sistema mogu napisati u obliku:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\delta_1 t} \left\{ R_{01} \cos \left(p_1 t - \frac{3}{32\delta_1 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 [R_{01}^2 + 2R_{02}^2] (e^{-2\delta_1 t} - 1) + \phi_{01} \right) + R_{02} \cos \left(\tilde{p}_2 t - \frac{3}{32\delta_1 \tilde{p}_2} \tilde{\omega}_{N1}^2 [2R_{01}^2 + R_{02}^2] (e^{-2\delta_1 t} - 1) + \phi_{02} \right) \right\} \\ x_2(t) &= e^{-\delta_1 t} \left\{ R_{01} \cos \left(p_1 t - \frac{3}{32\delta_1 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 [R_{01}^2 + 2R_{02}^2] (e^{-2\delta_1 t} - 1) + \phi_{01} \right) - R_{02} \cos \left(\tilde{p}_2 t - \frac{3}{32\delta_1 \tilde{p}_2} \tilde{\omega}_{N1}^2 [2R_{01}^2 + R_{02}^2] (e^{-2\delta_1 t} - 1) + \phi_{02} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

Sopstvene kružne frekvencije spregnutog nelinearnog sistema su funkcije vremena i početnih uslova, odnosno početnih amplituda, oblika (videti [65]):

$$\begin{aligned} p_1(t) &= p_1 + \frac{3}{16p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 [R_{01}^2 + 2R_{02}^2] e^{-2\delta_1 t}, \\ \tilde{p}_2(t) &= \tilde{p}_2 + \frac{3}{16\tilde{p}_2} \tilde{\omega}_{N1}^2 [2R_{01}^2 + R_{02}^2] e^{-2\delta_1 t}. \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

3.1.2. Sprezanje kontinualnog podsistema sa diskretnim podsistemom statičkom vezom

Kao primer sprezanja kontinuuma i diskretnog sistema proučimo model sa slike 3.1.2, koji je razmatran i radovima [79, 84, 97]. To je sistem koji se sastoji od grede elastičnog materijala, parametara: modula elastičnosti materijala \mathbf{E} , gustine materijala ρ , dužine ℓ i površine poprečnog preseka \mathbf{A} , sa dva tereta na krajevima kao kruta tela masa m_p i m_0 , što je zapravo model kontinualnog sistema. Greda je oprugom krutosti c_0 spregnuta sa sistemom diskretnih masa koji ima n stepeni slobode kretanja. Takav

sistem može da se predstavi lancem od n materijalnih tačaka masa m_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ koje mogu da se pomeraju duž ose paralelne osi grede, a povezane su oprugama krutosti c_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Prvo se posmatraju razdvojeni podsistemi. Sa slike 3.1.2 vidimo da su $u(x, t)$ longitudinalna pomeranja poprečnog preseka grede na rastojanju x od levog kraja grede u pravcu njene ose u trenutku t . Parcijalna diferencijalna jednačina longitudinalnih oscilacija grede [237] je:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c_e^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.1.41)$$

gde je: $c_e^2 = \mathbf{E}/\rho$.

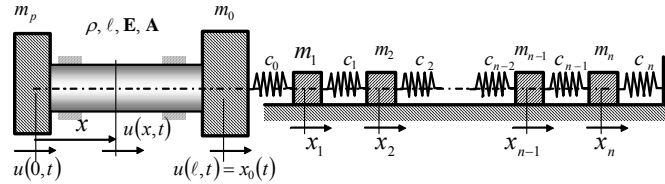
Rešenje ove jednačine Bernoulli-evom metodom partikularnih integrala pretpostavlja se u obliku:

$$u(x, t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t), \quad (3.1.42)$$

gde su:

$$\mathbf{X}(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \quad (3.1.42a)$$

$$\mathbf{T}(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (3.1.42b)$$



Slika 3.1.2 Kontinualni podsistem spregnut statički sa diskretnim podsistemom

Koristeći granične uslove podsistema grede sa longitudinalnim oscilacijama [238] kao i uslove kompatibilnosti pomeranja i sila na kraju gde postoji interakcija podsistema mogu se pisati:

$$\left[m_p \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right]_{x=0} = \left[\mathbf{EA} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (3.1.43a)$$

$$\left[m_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right]_{x=l} = \left[-\mathbf{EA} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]_{x=l} + \mathbf{F}(t) \quad (3.1.43b)$$

$$u(l, t) = x_0(t) \quad (3.1.43c)$$

Ako se uvedu sledeće bezdimenzionane oznake:

$$\mu_p = \frac{m_p}{\rho A l}, \quad \mu_0 = \frac{m_0}{\rho A l}, \quad \xi = \lambda l, \quad \omega^2 = \lambda^2 \frac{\mathbf{E}}{\rho} = \frac{\xi^2}{l^2} \frac{\mathbf{E}}{\rho} = \xi^2 \omega_0^2, \quad \omega_0^2 = \frac{\mathbf{E}}{\rho l^2}, \quad \frac{d\mathbf{X}(x)}{dx} = \lambda \frac{d\mathbf{X}(\xi)}{d\xi} = \frac{\xi}{l} \frac{d\mathbf{X}(\xi)}{d\xi}, \quad (3.1.44)$$

$$c_e = \frac{\mathbf{EA}}{l}, \quad \kappa = \frac{c_0}{c_e}, \quad u_0 = \frac{m_0 \omega_0^2}{c_0}.$$

i uvrsti pretpostavljeno rešenje (3.1.42) u granične uslove i uslove kompatibilnosti pomeranja i sila (3.1.43 a,b,c) dobija se sledeći sistem jednačina:

$$\mu_p \xi^2 \mathbf{X}(0) + \xi \mathbf{X}'(0) = 0 \quad (3.1.45a)$$

$$(\mu_0 \xi^2 - \kappa) \mathbf{X}(\xi) - \xi \mathbf{X}'(\xi) + \kappa A_1 = 0. \quad (3.1.45b)$$

Kako su $\mathbf{X}(\xi) = C_1 \cos \xi + C_2 \sin \xi$ i odgovarajući izvod po argumentu ξ : $\mathbf{X}'(\xi) = -C_1 \sin \xi + C_2 \cos \xi$, iz prethodnih jednačina sledi sistem algebarskih jednačina po nepoznatim C_1, C_2 oblika:

$$\mu_p \xi^2 C_1 + \xi C_2 = 0$$

$$C_1[(\mu_0 \xi^2 - \kappa) \cos \xi + \xi \sin \xi] + C_2[(\mu_0 \xi^2 - \kappa) \sin \xi - \xi \cos \xi] = -\kappa A_1 \quad (3.1.46)$$

Determinanta ovog sistema je:

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} \mu_p \xi^2 & \xi \\ (\mu_0 \xi^2 - \kappa) \cos \xi + \xi \sin \xi & (\mu_0 \xi^2 - \kappa) \sin \xi - \xi \cos \xi \end{vmatrix},$$

odnosno u razvijenom obliku:

$$\Delta(\xi) = \xi \{ \mu_p \xi [(\mu_0 \xi^2 - \kappa) \sin \xi - \xi \cos \xi] - [(\mu_0 \xi^2 - \kappa) \cos \xi + \xi \sin \xi] \}. \quad (3.1.47)$$

Nepoznate C_1, C_2 , pod pretpostavkom da je $\Delta(\xi) \neq 0$, su oblika:

$$C_1 = -\frac{\kappa A_1 \xi}{\xi \{ \mu_p \xi [(\mu_0 \xi^2 - \kappa) \sin \xi - \xi \cos \xi] - [(\mu_0 \xi^2 - \kappa) \cos \xi + \xi \sin \xi] \}} \quad (3.1.48a)$$

$$C_2 = -\frac{\kappa \mu_p \xi^2 A_1}{\xi \{ \mu_p \xi [(\mu_0 \xi^2 - \kappa) \sin \xi - \xi \cos \xi] - [(\mu_0 \xi^2 - \kappa) \cos \xi + \xi \sin \xi] \}} \quad (3.1.48b)$$

Posmatra se potom podsistem materijalnih tačaka sa n stepeni slobode sa izabраних n generalisanih koordinata x_i , $i=1,2,3,\dots,n$, pri čemu su odgovarajuće matrice inerciona \mathbf{A} i kvazielastičnih koeficijenata \mathbf{C} oblika:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), \quad i=1,2,3,\dots,n; \quad j=1,2,3,\dots,n \quad \mathbf{C} = (c_{ij}), \quad i=1,2,3,\dots,n; \quad j=1,2,3,\dots,n \quad (3.1.49)$$

Sistem diferencijalnih jednačina kretanja diskretnog sistema sa graničnim uslovima je:

$$\mathbf{A} \{\ddot{x}\} + \mathbf{C} \{x\} = -c_0 (x_1 - x_0) \mathbf{I}_0, \quad (3.1.50)$$

gde su :

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{Bmatrix} \quad \mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.50a)$$

Rešenja sistema diferencijalnih jednačina (3.1.50) pretpostavlja se u obliku:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{n-1} \\ A_n \end{Bmatrix} \mathbf{T}(t) = \{A\} \mathbf{T}(t), \quad \text{pa su:} \quad \{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{A\} \mathbf{T}(t) = -\xi^2 \omega_0^2 \{A\} \mathbf{T}(t). \quad (3.1.51)$$

Da bi se sastavila frekventna jednačina spregnutog sistema iskoristiće se uslovi kompatibilnosti pomeranja u obliku:

$$u(\ell, t) = x_0(t) = \mathbf{X}(\ell) \mathbf{T}(t) = (C_1 \cos \xi + C_2 \sin \xi) \mathbf{T}(t) = \frac{\kappa A_1 \xi}{\Delta(\xi)} (\cos \xi - \mu_p \xi \sin \xi) \mathbf{T}(t). \quad (3.1.52)$$

Uvede se smene za redukovane matrice diskretnog sistema : $\frac{1}{c_0} \mathbf{C} = \bar{\mathbf{C}} = (k_{ij})$, $\frac{1}{m_0} \mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} = (\mu_{ij})$ za

$i=1,2,3,\dots,n$; $j=1,2,3,\dots,n$, tako da se, iz sistema diferencijalnih jednačina (3.1.50), dobija sistem:

$$\left(\bar{\mathbf{C}} - \xi^2 u_0 \bar{\mathbf{A}} + \left[1 - \frac{\kappa \xi}{\Delta(\xi)} (\cos \xi - \mu_p \xi \sin \xi) \right] \mathbf{I}_0 \right) \{A\} = \{0\}. \quad (3.1.53)$$

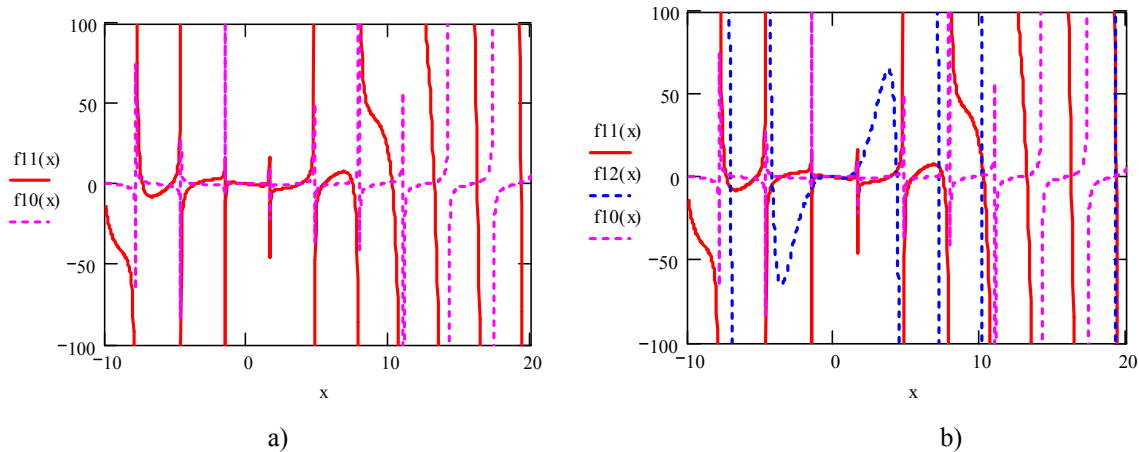
Prethodna matricna jednačina je sistem homogenih algebarskih jednačina i da bi imao netrivialna rešenja neophodno je da njegova determinanta bude jednaka nuli. Iz ovog uslova se dobija sledeća frekventna transcendentna jednačina:

$$\left\{ k_1 - \xi^2 u_0 \mu_1 + \left[1 - \frac{\kappa \xi}{\Delta(\xi)} (\cos \xi - \mu_p \xi \sin \xi) \right] \right\} (k_1 + k_2 - \xi^2 u_0 \mu_2) - k_1^2 = 0, \quad (3.1.57)$$

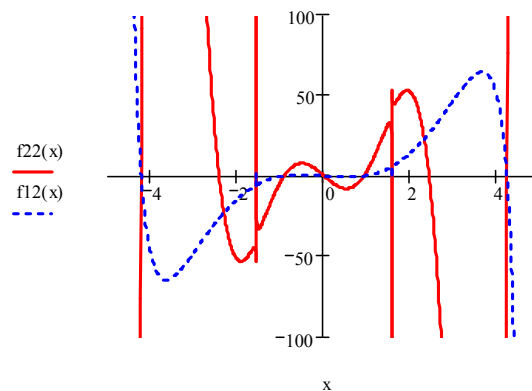
gde je $\Delta(\xi)$ karakteristična determinanta data izrazom (3.1.47).

Za slučaj konzole sa lancem od dve materijalne tačke biće:

$$\left\{ (k_1 - \xi^2 u_0 \mu_1 + 1) [(\mu_0 \xi^2 - \kappa) \sin \xi - \xi \cos \xi] + \kappa (\sin \xi) \right\} (k_1 + k_2 - \xi^2 u_0 \mu_2) - k_1^2 [(\mu_0 \xi^2 - \kappa) \sin \xi - \xi \cos \xi] = 0 \quad (3.1.57a)$$



Slika 3.1.3 Dijagrami korena frekventnih jednačina longitudinalnih oscilacija konzole sa tegom na slobodnom kraju, ljubičasta linija, i iste konzole statički spregnute sa lančanim podsistemom u obliku jedne materijalne tačke pričvršćene oprugom na slobodnom kraju crvena i plava linija.



Slika 3.1.4 Dijagrami korena frekventnih jednačina longitudinalnih oscilacija sistema konzole sa tegom na slobodnom kraju i lancem od jedne materijalne tačke plava linija, i iste konzole statički spregnute sa lančanim podsistemom u obliku dve materijalne tačke crvena linija.

Na slici 3.1.4 dati su dijagrami oblika frekventne jednačine iste konzolne grede kao kontinualnog podsistema statički spregnute sa diskretnim podsistemom u obliku lanca sa dve materijalne tačke masa $m_1 = 35.25(\text{kg})$ i $m_2 = 35(\text{kg})$ i krutosti $c_0 = c_1 = 2 \cdot 10^9 (\text{N/m})$, $c_2 = 2 \cdot 10^{10} (\text{N/m})$. Poređenja radi plavom linijom je iscrtan dijagram sistema konzola-lanac sa jednom materijalnom tačkom ($m_1 = 35.25(\text{kg})$, $c_0 = c_1 = 2 \cdot 10^9 (\text{N/m})$), a crvenom linijom pomenuti sistem konzola-lanac sa dve materijalne tačke.

Sa prikazanih dijagrama jasno se uočava činjenica da dodavanjem novih masa u sistemu raste broj karakterističnih brojeva, a time i sopstvenih kružnih frekvencija u sistemu, takođe se uočava da su poremećaji frekventne jednačine podsistema konzola sa tegom veći ukoliko su dodatne mase sistema veće. Sa ovih grafika mogu se uočiti poremećaji frekventnog spektra sopstvenih kružnih frekvencija deformabilnog podsistema, ljubičaste linije, usled dejstva diskretnog dela sistema, plava ili crvena linija, i obrnuto. To se, ustvari, može protumačiti kao diskretizaciju dela frekventnog spektra kontinualnog sistema kao rezultat sprezanja sa diskretnim podsistemom, a sa druge strane analogno i kao kontinualizaciju dela frekventnog spektra koji odgovara diskretnom podsistemu.

Na ovakav način korišćenjem analitičkih rešenja datih u ovom radu lako uz pomoć računara možemo vršiti ispitivanja dinamičkih hibridnih sistema menjajući parametre podsistema i tako izvršiti izbor odgovarajućih parametara da bi ceo sistem davao željeni odgovor.

Za lanac sa tri materijalne tačke imaćemo:

$$\begin{vmatrix} k_1 - \xi^2 u_0 \mu_1 + \left[1 - \frac{\kappa \xi}{\Delta(\xi)} (\cos \xi - \mu_p \xi \sin \xi) \right] & -k_1 & & & \\ -k_1 & k_1 + k_2 - \xi^2 u_0 \mu_2 & -k_2 & & \\ & -k_2 & k_2 + k_3 - \xi^2 u_0 \mu_3 & & \\ & & & & \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1.58)$$

Za slučaj homogenog lanca materijalnih tačaka frekventna jednačina dobija oblik:

$$\begin{vmatrix} 1 - \xi^2 \tilde{u}_0 + \frac{1}{k_1} \left[1 - \frac{\kappa \xi}{\Delta(\xi)} (\cos \xi - \mu_p \xi \sin \xi) \right] & -1 & & & \\ & 2 - \xi^2 \tilde{u}_0 & -1 & & \\ & -1 & 2 - \xi^2 \tilde{u}_0 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & 2 - \xi^2 \tilde{u}_0 & -1 \\ & & & & -1 & 2 - \xi^2 \tilde{u}_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1.59)$$

Za slučaj da taj homogeni lanac ima tri materijalne tačke frekventna jednačina ima oblik:

$$\left[(2 - \xi^2 \tilde{u}_0)^2 - 1 \right] \left[1 - \xi^2 \tilde{u}_0 + \frac{1}{k_1} \left[1 - \frac{\kappa \xi}{\Delta(\xi)} (\cos \xi - \mu_p \xi \sin \xi) \right] \right] - (2 - \xi^2 \tilde{u}_0) = 0 \quad (3.1.59a)$$

3.2. Hibridni sistemi struktura spregnutih dinamičkim vezama

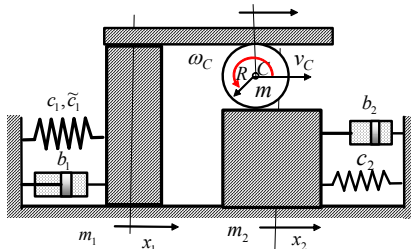
3.2.1. Sprezanje oscilatora sa nelinearnim svojstvima i oscilatora sa linearnim svojstvima dinamičkom vezom

Posmatrajmo sada spregu ona ista dva oscilatora, jednog sa oprugom nelinearnih svojstava trećeg stepena i drugog linearnog, kao iz primera u poglavlju 3.1.1, samo neka su oni sada spregnuti dinamičkom vezom, koju ćemo predstaviti dinamikom kotrljanja bez klizanja po površinama oscilatora diska poluprečnika R , mase m , kao što je to prikazano na slici 3.2.1.

Kinetička, potencijalna energije i funkcija rasipanja podsistema su istog oblika kao i u primeru poglavlja 3.1.1 date izrazima (3.1.2), (3.1.3) i (3.1.4) za nelinearni oscilator, kao i izrazom (3.1.26) za linearni oscilator. Kinetička energija sprezanja u ovom slučaju je kinetička energija kotrljanja bez klizanja diska mase m i poluprečnika R oblika:

$$E_{k(1,2)} = \frac{1}{2} [mv_C^2 + \mathbf{J}_C \omega_C^2] = \frac{1}{2} \left[m \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} \right)^2 + \mathbf{J}_C \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2R} \right)^2 \right] \quad (3.2.1)$$

gde su ω_C i v_C ugaona brzina i brzina centra mase diska, a $\mathbf{J}_C = 1/2 m R^2$ moment inercije mase diska za osu kroz centar mase C diska. Izraz (3.2.1) može se zapisati i u razvijenom obliku :



Slika 3.2.1 Sprezanje oscilatora sa nelinearnom krutošću i oscilatora sa linearnom krutošću dinamičkom spregom.

$$E_{k(1,2)} = \frac{1}{2} (\hat{a}_{11} \dot{x}_1^2 + \hat{a}_{22} \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 \hat{a}_{12}) \quad (3.2.2)$$

gde su uvedene oznake:

$$\hat{a}_{12} = \frac{m}{4} - \frac{\mathbf{J}_C}{4R^2} = \frac{m}{8}, \quad \hat{a}_{11} = \frac{m}{4} + \frac{\mathbf{J}_C}{4R^2} = \frac{3m}{8} \quad \hat{a}_{22} = \frac{m}{4} + \frac{\mathbf{J}_C}{4R^2} = \frac{3m}{8}. \quad (3.2.3)$$

Odakle se zaključuje da je kinetička energija čiste interakcije oscilatora koju u sistem unosi sprega dinamičkim elementom oblika:

$$\tilde{E}_{k(1,2)} = \frac{1}{2} 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 \left[\frac{m}{4} - \frac{\mathbf{J}_C}{4R^2} \right] = \hat{a}_{12} \dot{x}_1 \dot{x}_2. \quad (3.2.2a)$$

Ukupna kinetička energija sistema sada se može napisati u obliku:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} \left[m \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} \right)^2 + \mathbf{J}_C \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2R} \right)^2 \right], \quad (3.2.4)$$

odnosno u razvijenom obliku:

$$E_k = \frac{1}{2} (\tilde{a}_{11} \dot{x}_1^2 + \tilde{a}_{22} \dot{x}_2^2 + 2\tilde{a}_{12} \dot{x}_1 \dot{x}_2), \quad (3.2.5)$$

gde su sada oznake:

$$\tilde{a}_{11} = m_1 + \frac{m}{4} + \frac{\mathbf{J}_C}{4R^2} = a_{11} + \hat{a}_{11}, \quad \tilde{a}_{12} = \frac{m}{4} - \frac{\mathbf{J}_C}{4R^2} = \hat{a}_{12} \quad \tilde{a}_{22} = m_2 + \frac{m}{4} + \frac{\mathbf{J}_C}{4R^2} = a_{22} + \hat{a}_{22}. \quad (3.2.5a)$$

Kinetička energija čiste interakcije oscilatora data je izrazom (3.2.2a), a kinetičke energije interakcije veze dinamičkim elementom sa levim, odnosno desnim, oscilatorom izrazima:

$$E_{k(1)} = \frac{1}{2} (a_{11} + \hat{a}_{11}) \dot{x}_1^2 \quad \text{i} \quad E_{k(2)} = \frac{1}{2} (a_{22} + \hat{a}_{22}) \dot{x}_2^2. \quad (3.2.5b)$$

Promena potencijalne energije celog sistema pri izvođenju iz ravnotežnog položaja u ovom slučaju je oblika:

$$E_p = \frac{1}{2}c_1x_1^2 + \frac{1}{4}\tilde{c}_1x_1^4 + \frac{1}{2}c_2x_2^2, \quad (3.2.6)$$

a funkcija rasipanja ima isti oblik kao u primeru iz poglavlja 3.1.1 data izrazom (3.1.29.d). Za zadati sistem dobija se sistem diferencijalnih jednačina kretanja u obliku:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \kappa_1\dot{x}_2 + \tilde{\omega}_1^2x_1 + 2\tilde{\delta}_1\dot{x}_1 &= -\tilde{\omega}_{N1}^2x_1^3 \\ \dot{x}_2 + \kappa_2\dot{x}_1 + \tilde{\omega}_2^2x_2 + 2\tilde{\delta}_2\dot{x}_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

gde su uvedene oznake:

$$\tilde{\omega}_1^2 = c_1/\tilde{a}_{11}, \quad \tilde{\omega}_2^2 = c_2/\tilde{a}_{22}, \quad \kappa_1 = \tilde{a}_{12}/\tilde{a}_{11}, \quad \kappa_2 = \tilde{a}_{12}/\tilde{a}_{22}, \quad \tilde{\omega}_{N1}^2 = \tilde{c}_1/\tilde{a}_{11} = \tilde{\omega}_{N1}^2m_1/\tilde{a}_{11}, \quad 2\tilde{\delta}_i = b_i/\tilde{a}_{ii}. \quad (3.2.7a)$$

Ovom sistemu nehomogenih diferencijalnih jednačina odgovara sistem homogenih linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \kappa_1\dot{x}_2 + \tilde{\omega}_1^2x_1 + 2\tilde{\delta}_1\dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 + \kappa_2\dot{x}_1 + \tilde{\omega}_2^2x_2 + 2\tilde{\delta}_2\dot{x}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.7b)$$

Inerciona matrica, matrica kvazielastičnih koeficijenata i matrica koeficijenata otporne sile su oblika:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \kappa_1 \\ \kappa_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1^2 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2\tilde{\delta}_1 & \\ & 2\tilde{\delta}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.2.8)$$

Onda se karakteristični polinom sistema (3.2.7b) može zapisati u obliku:

$$|\lambda^2\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} + \mathbf{C}| = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 2\delta_1\lambda + \tilde{\omega}_1^2 & \kappa_1\lambda^2 \\ \kappa_2\lambda^2 & \lambda^2 + 2\delta_2\lambda + \tilde{\omega}_2^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.2.9)$$

odnosno u razvijenom obliku:

$$(\lambda^2 + 2\delta_1\lambda + \tilde{\omega}_1^2)(\lambda^2 + 2\delta_2\lambda + \tilde{\omega}_2^2) - \kappa_1\kappa_2\lambda^4 = 0$$

Odnos kofaktora druge vrste ove determinante je onda:

$$\frac{A_1^{(s)}}{-\kappa_1\lambda_s^2} = \frac{A_2^{(s)}}{\lambda_s^2 + 2\delta_1\lambda_s + \tilde{\omega}_1^2} = \tilde{C}_s \quad (3.2.9a)$$

Karakteristični polinom (3.2.9) ima dva para konjugovano kompleksnih rešenja oblika:

$$\lambda_{1,2} = -\hat{\delta}_1 \mp i\hat{p}_1 \quad \text{i} \quad \lambda_{3,4} = -\hat{\delta}_2 \mp i\hat{p}_2. \quad (3.2.10)$$

Zakoni kretanja sada se mogu napisati u istom opštem obliku (3.1.35a) kao i za sistem sa statičkom vezom gde svaki od oscilatora osciluje u dvofrekventnom režimu oscilovanja.

Nehomogeni nelinearni sistema (3.2.7) se rešava pretpostavljanjem rešenja u obliku:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= K_{21}^{(1)}e^{-\hat{\delta}_1 t}R_1(t)\cos\Phi_1(t) + K_{21}^{(2)}e^{-\hat{\delta}_2 t}R_2(t)\cos\Phi_2(t) \\ x_2(t) &= K_{22}^{(1)}e^{-\hat{\delta}_1 t}R_1(t)\cos\Phi_1(t) + K_{22}^{(2)}e^{-\hat{\delta}_2 t}R_2(t)\cos\Phi_2(t), \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

gde su $K_{2i}^{(s)}$ kofaktori druge vrste determinate (3.2.9) za s -ti koren (3.2.10), $i=1,2$. Ovde je potrebno odrediti u prvoj aproksimaciji nepoznate amplitude $R_i(t)$ i faze $\Phi_i(t)$ kao funkcije vremena. Služeći se istim pristupom i procedurom kao u poglavlju 3.1.1 dolazimo do diferencijalnih jednačina prve aproksimacije kretanja spregnutog sistema:

$$\begin{aligned} \dot{R}_1(t) &= 0 \\ \dot{\phi}_1(t) &= \frac{3(K_{21}^{(2)} + \kappa_2 K_{22}^{(2)})}{16\hat{p}_1\tilde{\Delta}_{12}}\tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ e^{-2\hat{\delta}_1 t} (K_{21}^{(1)})^2 [R_1(t)]^2 + 2e^{-2\hat{\delta}_2 t} K_{21}^{(1)} [K_{21}^{(2)}]^2 [R_2(t)]^2 \right\} \\ \dot{R}_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\dot{\phi}_2(t) = \frac{3(K_{22}^{(1)} + \kappa_2 K_{21}^{(1)})}{16\hat{p}_2\tilde{\Delta}_{21}} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ 2e^{-2\hat{\delta}_1 t} (K_{21}^{(1)})^2 K_{21}^{(2)} [R_1(t)]^2 + e^{-2\hat{\delta}_2 t} [K_{21}^{(2)}]^3 [R_2(t)]^2 \right\} \quad (3.2.12)$$

gde su $\tilde{\Delta}_{12} = (K_{21}^{(1)} + \kappa_1 K_{22}^{(1)})(K_{21}^{(2)} + \kappa_2 K_{22}^{(2)}) - (K_{22}^{(1)} + \kappa_2 K_{21}^{(1)})(K_{21}^{(2)} + \kappa_1 K_{22}^{(2)})$

$\tilde{\Delta}_{21} = (K_{21}^{(1)} + \kappa_2 K_{22}^{(1)})(K_{21}^{(2)} + \kappa_1 K_{22}^{(2)}) - (K_{22}^{(2)} + \kappa_2 K_{21}^{(2)})(K_{21}^{(1)} + \kappa_1 K_{22}^{(1)})$.

Rešenja ovog sistema diferencijalnih jednačina su oblika:

$$R_1(t) = R_{01} = const$$

$$\phi_1(t) = -\frac{3(K_{21}^{(2)} + \kappa_2 K_{22}^{(2)})}{16\hat{p}_1\tilde{\Delta}_{12}} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ \frac{(e^{-2\hat{\delta}_1 t} - 1)}{2\hat{\delta}_1} (K_{21}^{(1)})^3 [R_{01}]^3 + \frac{(e^{-2\hat{\delta}_2 t} - 1)}{\hat{\delta}_2} K_{21}^{(1)} [K_{21}^{(2)}]^2 [R_{02}]^2 \right\} + \phi_{01}$$

$$R_2(t) = R_{02} = const$$

$$\phi_2(t) = -\frac{3(K_{22}^{(1)} + \kappa_2 K_{21}^{(1)})}{16\hat{p}_2\tilde{\Delta}_{21}} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ \frac{(e^{-2\hat{\delta}_1 t} - 1)}{\hat{\delta}_1} (K_{21}^{(1)})^2 K_{21}^{(2)} [R_{01}]^2 + \frac{(e^{-2\hat{\delta}_2 t} - 1)}{2\hat{\delta}_2} [K_{21}^{(2)}]^3 [R_{02}]^3 \right\} + \phi_{02} \quad (3.2.13)$$

Prema tome, može se zaključiti da sistem spregnuta dva oscilatora dinamičkom vezom osciluje u dvofrekventnom režimu oscilovanja sa zakonima oscilovanja:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= K_{21}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_1 t} R_{01} \cos \left\langle \hat{p}_1 t - \frac{3(K_{21}^{(2)} + \kappa_2 K_{22}^{(2)})}{16\hat{p}_1\tilde{\Delta}_{12}} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ \frac{e^{-2\hat{\delta}_1 t}}{2\hat{\delta}_1} (K_{21}^{(1)})^3 [R_{01}]^3 + \frac{e^{-2\hat{\delta}_2 t}}{\hat{\delta}_2} K_{21}^{(1)} [K_{21}^{(2)}]^2 [R_{02}]^2 \right\} + \alpha_{01} \right\rangle + \\ &+ K_{21}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_2 t} R_{02} \cos \left\langle \hat{p}_2 t - \frac{3(K_{22}^{(1)} + \kappa_2 K_{21}^{(1)})}{16\hat{p}_2\tilde{\Delta}_{21}} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ \frac{e^{-2\hat{\delta}_1 t}}{\hat{\delta}_1} (K_{21}^{(1)})^2 K_{21}^{(2)} [R_{01}]^2 + \frac{e^{-2\hat{\delta}_2 t}}{2\hat{\delta}_2} [K_{21}^{(2)}]^3 [R_{02}]^3 \right\} + \alpha_{02} \right\rangle \\ x_2(t) &= K_{22}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_1 t} R_{01} \cos \left\langle \hat{p}_1 t - \frac{3(K_{21}^{(2)} + \kappa_2 K_{22}^{(2)})}{16\hat{p}_1\tilde{\Delta}_{12}} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ \frac{e^{-2\hat{\delta}_1 t}}{2\hat{\delta}_1} (K_{21}^{(1)})^3 [R_{01}]^3 + \frac{e^{-2\hat{\delta}_2 t}}{\hat{\delta}_2} K_{21}^{(1)} [K_{21}^{(2)}]^2 [R_{02}]^2 \right\} + \alpha_{01} \right\rangle + \\ &+ K_{22}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_2 t} R_{02} \cos \left\langle \hat{p}_2 t - \frac{3(K_{22}^{(1)} + \kappa_2 K_{21}^{(1)})}{16\hat{p}_2\tilde{\Delta}_{21}} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ \frac{e^{-2\hat{\delta}_1 t}}{\hat{\delta}_1} (K_{21}^{(1)})^2 K_{21}^{(2)} [R_{01}]^2 + \frac{e^{-2\hat{\delta}_2 t}}{2\hat{\delta}_2} [K_{21}^{(2)}]^3 [R_{02}]^3 \right\} + \alpha_{02} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Lyapunov-ljevi eksponenti nezavisnih podsistema su:

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[x_1^2(t) + \frac{1}{\tilde{\omega}_1^2} \dot{x}_1^2(t) \right] = -\hat{\delta}_1 < 0$$

$$\lambda_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[x_2^2(t) + \frac{1}{\tilde{\omega}_2^2} \dot{x}_2^2(t) \right] = -\hat{\delta}_2 < 0$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[x_1^2(t) + \frac{\tilde{\omega}_{N1}^2}{\tilde{\omega}_1^2} x_1^4(t) + \frac{1}{\tilde{\omega}_1^2} \dot{x}_1^2(t) \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[\frac{E_{podsist(1)}}{2m_1 \tilde{\omega}_1^2} \right] = -\hat{\delta}_1 < 0 \quad (3.2.15)$$

Svi ovi eksponenti su negativni, što govori da je sistem strukturno stabilan.

3.2.2. Sprezanje kontinualnog podsistema sa diskretnim podsistemom dinamičkom vezom

U ovom odeljku posmatrajmo istu onu gredu kao i u poglavlju 3.1.2 kao kontinualni podsistem i isti sistem materijalnih tačaka kao diskretni podsistem samo neka su ova dva podsistema spregnuta diskom mase m , poluprečnika R koji se kotrlja bez klizanja po površinama materijalnih delova koje dodiruje kako je to prikazano na slici 3.2.2, [97]. Jedan ovakav element u sistem unosi dinamičku vezu kao što smo to već videli. Kinetička energija sprezanja, u ovom slučaju je kinetička energija kotrljanja bez klizanja diska, je oblika (3.2.2), samo što ćemo je ovde zapisati u obliku:

$$E_{k(1,2)} = \frac{1}{2} (\hat{a}_{00} \dot{x}_0^2 + \hat{a}_{11} \dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1 \dot{x}_0 \hat{a}_{01}) \quad (3.2.16)$$

S obzirom na oznake u ovom sistemu, gde su $\hat{a}_{00} = \hat{a}_{11}$, $\hat{a}_{11} = \hat{a}_{22}$ i $\hat{a}_{01} = \hat{a}_{12}$ iz izraza (3.2.3).

Greda ima istu parcijalnu diferencijalnu jednačinu longitudinalnih oscilacija kao i greda iz poglavlja 3.1.2, data izrazom (3.1.41), čija rešenja pretpostavljamo u obliku (3.1.42) gde su vremenska i sopstvena funkcija oblika (3.1.42a,b).

Koristeći granične uslove podsistema grede sa longitudinalnim oscilacijama, kao iz primera 3.1.2 date izrazima (3.1.43 a,b), kao i da je:

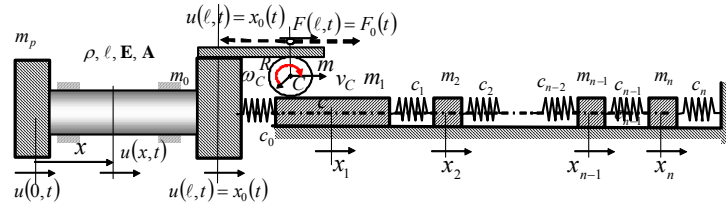
$$u(\ell, t) = x_0(t) = \mathbf{X}(\xi) \mathbf{T}(t),$$

i znajući, sa druge strane, da je:

$$\{\dot{x}\} = \{A\} \mathbf{T}(t) \quad \text{i} \quad \ddot{x}_i = -\omega^2 A_i \mathbf{T}(t) = -\xi^2 \omega_0^2 A_i \mathbf{T}(t)$$

sila $\mathbf{F}(t)$, dinamičke interakcije podsistema, može se izraziti kao:

$$\mathbf{F}(t) = -[\hat{a}_{00} \ddot{x}_0(t) + \hat{a}_{01} \ddot{x}_1(t)] = \xi^2 \omega_0^2 [\hat{a}_{00} \mathbf{X}(\xi) + \hat{a}_{01} A_1] \mathbf{T}(t) \quad (3.2.17)$$



Slika 3.2.2 Kontinualni podsistem spregnut dinamički sa diskretnim podsistemom

Iz druge jednačine graničnih uslova (3.1.43b) sledi:

$$[-m_0 \xi^2 \omega_0^2 \mathbf{X}(\xi)] \mathbf{T}(t) = \left[-\mathbf{EA} \frac{\xi}{\ell} \mathbf{X}'(\xi) \right] \mathbf{T}(t) + \xi^2 \omega_0^2 [\hat{a}_{00} \mathbf{X}(\xi) + \hat{a}_{01} A_1] \mathbf{T}(t), \text{ odnosno:}$$

$$[-m_0 \xi^2 \omega_0^2 \mathbf{X}(\xi)] = \left[-\mathbf{EA} \frac{\xi}{\ell} \mathbf{X}'(\xi) \right] + \xi^2 \omega_0^2 [\hat{a}_{00} \mathbf{X}(\xi) + \hat{a}_{01} A_1], \text{ odnosno:}$$

$$\xi^2 \left[\frac{m_0}{\rho A \ell} + \frac{\hat{a}_{00}}{\rho A \ell} \right] \mathbf{X}(\xi) - \xi \mathbf{X}'(\xi) = -\xi^2 \frac{\hat{a}_{01}}{\rho A \ell} A_1$$

$$\xi^2 [\mu_0 + \hat{\mu}_{00}] \mathbf{X}(\xi) - \xi \mathbf{X}'(\xi) = -\xi^2 \hat{\mu}_{01} A_1, \quad (3.2.18)$$

gde su, pored već poznatih oznaka (3.1.44) iz poglavlja 3.1.2, korišćene i oznake $\hat{\mu}_{00} = \frac{\hat{a}_{00}}{\rho A \ell}$ i $\hat{\mu}_{01} = \frac{\hat{a}_{01}}{\rho A \ell}$.

Iz prvog graničnog uslova grede (3.1.45a) i uslova (3.2.18), koristeći $\mathbf{X}(\xi) = C_1 \cos \xi + C_2 \sin \xi$ i $\mathbf{X}'(\xi) = -C_1 \sin \xi + C_2 \cos \xi$, sledi sistem algebarskih jednačina po nepoznatim C_1, C_2 oblika:

$$\mu_p \xi C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 [\xi (\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) \cos \xi + \sin \xi] + C_2 [\xi (\mu_p + \hat{\mu}_{00}) \sin \xi - \cos \xi] = -\xi \hat{\mu}_{01} A_1 \quad (3.2.19)$$

Determinanta ovoga sistema je:

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} \mu_p \xi & 1 \\ \xi (\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) \cos \xi + \sin \xi & \xi (\mu_p + \hat{\mu}_{00}) \sin \xi - \cos \xi \end{vmatrix}, \text{ odnosno:}$$

$$\Delta(\xi) = \mu_p \xi [\xi (\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) \sin \xi - \cos \xi] - [\xi (\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) \cos \xi + \sin \xi]. \quad (3.2.20)$$

Nepoznate C_1, C_2 se dobijaju kao:

$$C_1 = \frac{\hat{\mu}_{01} A_1 \xi}{\{\mu_p \xi [\xi(\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) \sin \xi - \cos \xi] - [\xi(\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) \cos \xi + \sin \xi]\}} \quad (3.2.21a)$$

$$C_2 = -\frac{\mu_p \hat{\mu}_{01} A_1 \xi^2}{\{\mu_p \xi [\xi(\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) \sin \xi - \cos \xi] - [\xi(\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) \cos \xi + \sin \xi]\}}. \quad (3.2.21b)$$

Kako je diskretni podsistem spregnut dinamički sa kontinualnim podsistemom posmatra se, pored sistema sa n stepeni slobode kretanja, sa matricam inercionom \mathbf{A} i kvazielastičnih koeficijenata \mathbf{C} oblika (3.1.41), i podsistem sa $n+1$ stepeni slobode kretanja, sa matricama inercionom $\tilde{\mathbf{A}}$ i kvazielastičnih koeficijenata $\tilde{\mathbf{C}}$, oblika:

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ij}), \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n; \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, n \quad \tilde{\mathbf{C}} = (\tilde{c}_{ij}), \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n; \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.2.22)$$

gde su:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{00} &= \hat{a}_{00}, & \tilde{a}_{11} &= \hat{a}_{11} + a_{11}, & \tilde{a}_{01} &= \tilde{a}_{10} = \hat{a}_{01}, & \tilde{a}_{0i} &= \tilde{a}_{i0} = 0 & \tilde{a}_{ij} &= a_{ij}, \quad i, j \neq 0, 1 \\ \tilde{c}_{00} &= c_0, & \tilde{c}_{11} &= c_{11}, & \tilde{c}_{0i} &= \tilde{c}_{i0} = 0, & \tilde{c}_{ij} &= c_{ij}, \quad i, j \neq 0, 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n; \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Tako da je sila $\mathbf{F}(t)$ dinamičke interakcije spoljnja pobudna sila za ovaj sistem kao generalisana sila na koordinati $u(\ell, t) = x_0(t) = \mathbf{X}(\xi)\mathbf{T}(t)$.

Sistem diferencijalnih jednačina diskretnog podsistema sa graničnim uslovom je:

$$\tilde{\mathbf{A}}\{\ddot{\tilde{x}}\} + \tilde{\mathbf{C}}\{\tilde{x}\} = -\mathbf{F}(t)\tilde{\mathbf{I}}_0, \quad (3.2.23)$$

gde su:

$$\{\tilde{x}\} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{Bmatrix} \quad \mathbf{I}_0 = \tilde{\mathbf{I}}_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.23a)$$

Takođe, može se pisati da je:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{00}\ddot{x}_0 + \hat{a}_{01}\ddot{x}_1 &= -\mathbf{F}(t) \\ \mathbf{A}\{\ddot{x}\} + \mathbf{C}\{x\} &= -(\hat{a}_{01}\ddot{x}_0 + \hat{a}_{11}\ddot{x}_1)\mathbf{I}_0, \end{aligned} \quad (3.2.23b)$$

gde su $\{x\}$ i \mathbf{I}_0 oblika (3.1.50a). Rešenje sistema (3.2.23b) pretpostavlja se u obliku (3.1.51).

S obzirom da su C_1, C_2 oblika (3.2.21a,b) sledi da će uslov kompatibilnosti pomeranja biti:

$$u(\ell, t) = x_0(t) = \mathbf{X}(\ell)\mathbf{T}(t) = (C_1 \cos \xi + C_2 \sin \xi)\mathbf{T}(t) = \frac{\hat{\mu}_{01} A_1 \xi}{\Delta(\xi)} (\cos \xi - \mu_p \xi \sin \xi)\mathbf{T}(t),$$

kao i da su:

$$\ddot{u}(\ell, t) = \ddot{x}_0(t) = \mathbf{X}(\ell)\ddot{\mathbf{T}}(t) = -\omega^2 (C_1 \cos \xi + C_2 \sin \xi)\mathbf{T}(t) = -\omega_0^2 \frac{\hat{\mu}_{01} A_1 \xi^3}{\Delta(\xi)} (\cos \xi - \mu_p \xi \sin \xi)\mathbf{T}(t)$$

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 A_1 \mathbf{T}(t) = -\xi^2 \omega_0^2 A_1 \mathbf{T}(t).$$

Matrična jednačina (3.2.23b) svodi se na oblik:

$$(\bar{\mathbf{C}} - \xi^2 \omega_0^2 m_0 \bar{\mathbf{A}})\{A\}\mathbf{T}(t) = \left[\omega_0^2 \hat{a}_{01} \frac{\hat{\mu}_{01} A_1 \xi^3}{\Delta(\xi)} (\cos \xi - \mu_p \xi \sin \xi) - \xi^2 \omega_0^2 \hat{a}_{11} A_1 \right] \mathbf{T}(t)\mathbf{I}_0,$$

koji se posle nekoliko matematičkih transformacija koje slede:

$$(\bar{\mathbf{C}} - \xi^2 u_0 \bar{\mathbf{A}})\{A\} = \xi^2 \omega_0^2 \left[\frac{\hat{a}_{01}}{c_0} \frac{\hat{\mu}_{01} \xi}{\Delta(\xi)} (\cos \xi - \mu_p \xi \sin \xi) - \frac{\hat{a}_{11}}{c_0} \right] A_1 \mathbf{I}_0,$$

$$\begin{aligned} & (k_1 - \xi^2 u_0 (\mu_{11} - \tilde{\mu}_{11})) (\mu_p \xi^2 (\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) - 1) t g \xi - (\mu_p \xi + \xi (\mu_0 + \hat{\mu}_{00})) - u_0 \tilde{\mu}_{01} \hat{\mu}_{01} \xi^3 (1 - \mu_p \xi t g \xi) = 0 \\ & (k_1 - \xi^2 u_0 (\mu_{11} - \tilde{\mu}_{11})) (\mu_p \xi^2 (\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) - 1) t g \xi + u_0 \mu_p \tilde{\mu}_{01} \hat{\mu}_{01} \xi^4 t g \xi - (k_1 - \xi^2 u_0 (\mu_{11} - \tilde{\mu}_{11})) (\mu_p \xi + \xi (\mu_0 + \hat{\mu}_{00})) - u_0 \tilde{\mu}_{01} \hat{\mu}_{01} \xi^3 = 0 \\ & [(k_1 - \xi^2 u_0 (\mu_{11} - \tilde{\mu}_{11})) (\mu_p \xi^2 (\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) - 1) + u_0 \mu_p \tilde{\mu}_{01} \hat{\mu}_{01} \xi^4] t g \xi = (k_1 - \xi^2 u_0 (\mu_{11} - \tilde{\mu}_{11})) (\mu_p \xi + \xi (\mu_0 + \hat{\mu}_{00})) + u_0 \tilde{\mu}_{01} \hat{\mu}_{01} \xi^3. \end{aligned}$$

dobija se:

$$t g \xi = \frac{(k_1 - \xi^2 u_0 (\mu_{11} - \tilde{\mu}_{11})) (\mu_p \xi + \xi (\mu_0 + \hat{\mu}_{00})) + u_0 \tilde{\mu}_{01} \hat{\mu}_{01} \xi^3}{[(k_1 - \xi^2 u_0 (\mu_{11} - \tilde{\mu}_{11})) (\mu_p \xi^2 (\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) - 1) + u_0 \mu_p \tilde{\mu}_{01} \hat{\mu}_{01} \xi^4]}. \quad (3.2.27)$$

U slučaju da je levi kraj grede slobodan imali bismo $\mu_p \rightarrow 0$, a (3.2.27) postaje [97]:

$$t g \xi = -\xi (\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) - \frac{u_0 \tilde{\mu}_{01} \hat{\mu}_{01} \xi^3}{(k_1 - \xi^2 u_0 (\mu_{11} - \tilde{\mu}_{11}))}. \quad (3.2.27a)$$

U slučaju da je levi kraj grede fiksiran tj. da se radi o konzoli imali bismo $\mu_p \rightarrow \infty$, a (3.2.27) postaje, [97]:

$$t g \xi = \frac{(k_1 - \xi^2 u_0 (\mu_{11} - \tilde{\mu}_{11}))}{[(k_1 - \xi^2 u_0 (\mu_{11} - \tilde{\mu}_{11})) (\xi (\mu_0 + \hat{\mu}_{00})) + u_0 \tilde{\mu}_{01} \hat{\mu}_{01} \xi^3]}. \quad (3.2.27b)$$

Za slučaj dve materijalne tačke, kao lanac vezane za gredu, ima li bismo:

$$\left\{ k_1 - \xi^2 u_0 \left(\mu_{11} - \tilde{\mu}_{11} + \tilde{\mu}_{01} \frac{\hat{\mu}_{01} \xi}{\Delta(\xi)} (\cos \xi - \mu_p \xi \sin \xi) \right) \right\} (k_1 + k_2 - \xi^2 u_0 \mu_2) - k_1^2 = 0. \quad (3.2.27c)$$

Za slučaj tri materijalne tačke, kao lanac vezane za gredu, ima li bismo:

$$\begin{vmatrix} k_1 - \xi^2 u_0 \left(\mu_{11} - \tilde{\mu}_{11} + \tilde{\mu}_{01} \frac{\hat{\mu}_{01} \xi}{\Delta(\xi)} (\cos \xi - \mu_p \xi \sin \xi) \right) & -k_1 & & & \\ & -k_1 & k_1 + k_2 - \xi^2 u_0 \mu_2 & -k_2 & \\ & & -k_2 & k_2 + k_3 - \xi^2 u_0 \mu_3 & \\ & & & & \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2.27d)$$

Za homogeni lanac, kao diskretni sistem, frekventna jednačina (3.2.26) ima oblik:

$$\begin{vmatrix} 1 - \xi^2 \tilde{u}_0 \left(1 - \tilde{\mu}_{11} + \tilde{\mu}_{01} \frac{\hat{\mu}_{01} \xi}{\Delta(\xi)} (\cos \xi - \mu_p \xi \sin \xi) \right) & -1 & & & \\ & -1 & 2 - \xi^2 \tilde{u}_0 & -1 & \\ & & -1 & 2 - \xi^2 \tilde{u}_0 & \vdots \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & 2 - \xi^2 \tilde{u}_0 & -1 \\ & & & & -1 & 2 - \xi^2 \tilde{u}_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2.28)$$

U specijalnom slučaju homogenog lanca sa tri materijalne tačke, vezanog za gredu (3.2.28), ova jednačina postaje:

$$\left[(2 - \xi^2 \tilde{u}_0)^2 - 1 \right] \left\{ 1 - \xi^2 \tilde{u}_0 \left(1 - \tilde{\mu}_{11} + \tilde{\mu}_{01} \frac{\hat{\mu}_{01} \xi}{\Delta(\xi)} (\cos \xi - \mu_p \xi \sin \xi) \right) \right\} - (2 - \xi^2 \tilde{u}_0) = 0. \quad (3.2.28a)$$

3.3. Hibridni sistemi struktura spregnutih naslednim vezama

3.3.1 Sprezanje oscilatora sa nelinearnim svojstvima i oscilatora sa linearnim svojstvima naslednim vezama

Posmatrajmo sada spregu ona ista dva oscilatora jednog sa oprugom nelinearnih svojstava trećeg stepena i drugog linearnog kao iz primera u poglavlju 3.1.1, samo neka su oni sada spregnuti standardnim naslednim elementom sa koeficijentima trenutne i dugotrajne krutosti c i \tilde{c} , kao i vremena relaksacije n , [45, 65, 69, 259]. Vezu između sile uspostavljanja i koordinata deformacije na krajevima naslednog elementa koja predstavlja uopšteni zakon - zakon dinamike standardnog naslednog elementa može se napisati u sledećem obliku:

$$n\dot{P}(t) + P(t) = nc(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \tilde{c}(x_2 - x_1). \quad (3.3.1)$$

Rešavanjem jednačine (3.3.1) po sili uspostavljanja $P(t)$ deformisanog stanja naslednog elementa, dobijamo integralnu konstitutivnu jednačinu naponsko-deformacionog stanja ili prosto stanja naslednog tela:

$$P(t) = c \left[(x_2(t) - x_1(t)) - \int_0^t \mathbf{R}(t-\tau)(x_2(\tau) - x_1(\tau)) d\tau \right] \quad (3.3.2)$$

čije se jezgro (rezolventa):

$$\mathbf{R}(t-\tau) = \frac{c-\tilde{c}}{nc} e^{\frac{1}{n}(t-\tau)} = \frac{c-\tilde{c}}{nc} \tilde{\mathbf{R}}(t-\tau) \quad (3.3.3)$$

naziva jezgrom relaksacije sile (napona), a koeficijent $\beta = \frac{1}{n}$, je koeficijent relaksacije.

Izrazi za kinetičku i potencijalnu energiju ovako spregnutog sistema imaju oblika:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2, \quad (3.3.4a)$$

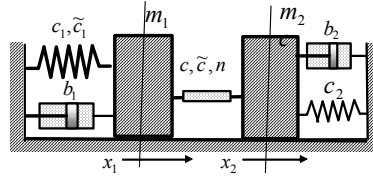
$$E_p = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{4} \tilde{c}_1 x_1^4 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2 + E_{p(1,2)} \quad (3.3.5b)$$

gde je potencijalna energija sprezanja jednaka izvršenom radu sile uspostavljanja na putu ukupnog pomeranja:

$$E_{p(1,2)} = \mathbf{A}_T^p = \frac{1}{2} c (x_2(t) - x_1(t))^2 - c \int_0^t \int_0^t \mathbf{R}(t-\tau)(x_2(\tau) - x_1(\tau)) d\tau d(x_2 - x_1) \quad (3.3.6c)$$

a funkciju rasipanja spregnutog sistema oblika:

$$\Phi = \frac{1}{2} b_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} b_2 \dot{x}_2^2 + \Phi_{(1,2)}. \quad (3.3.7d)$$



Slika 3.3.1 Sprezanje naslednim elementom oscilatora sa nelinearnom krutošću i oscilatora sa linearnom krutošću.

Iz dinamičkih jednačina ravnoteže za elemente sistema sledi sistem jednačina, [65]:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -c_1 x_1 - \tilde{c}_1 x_1^3 - b_1 \dot{x}_1 + P(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -c_2 x_2 - b_2 \dot{x}_2 - P(t), \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

odakle su diferencijalne jednačine kretanja ovakvog sistema u obliku:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\delta_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= -\tilde{\omega}_{N1}^2 x_1^3 + a_1^2 \left[(x_2(t) - x_1(t)) - \int_0^t \mathbf{R}(t-\tau) (x_2(\tau) - x_1(\tau)) d\tau \right] \\ \ddot{x}_2 + 2\delta_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= -a_2^2 \left[(x_2(t) - x_1(t)) - \int_0^t \mathbf{R}(t-\tau) (x_2(\tau) - x_1(\tau)) d\tau \right] \end{aligned} \quad (3.3.8a)$$

gde su uvedene oznake: $\omega_i^2 = c_i/m_i$, $2\delta_i = b_i/m_i$, $a_i^2 = c/m_i$, $\tilde{a}_i^2 = \tilde{c}/m_i$, za $i=1,2$, $\tilde{\omega}_{N1}^2 = \tilde{c}_1/m_1$, $\mu = m_1/m_2$.

Sistem (3.3.8a) svodi se na:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\delta_1 \dot{x}_1 + (\omega_1^2 + a_1^2) x_1 - a_1^2 x_2 &= -\tilde{\omega}_{N1}^2 x_1^3 - a_1^2 \int_0^t \mathbf{R}(t-\tau) (x_2(\tau) - x_1(\tau)) d\tau \\ \ddot{x}_2 + 2\delta_2 \dot{x}_2 + (\omega_2^2 + a_2^2) x_2 - \mu a_1^2 x_1 &= \mu a_1^2 \int_0^t \mathbf{R}(t-\tau) (x_2(\tau) - x_1(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Ako uvedemo oznake $\tilde{\omega}_1^2 = \omega_1^2 + a_1^2$ i $\tilde{\omega}_2^2 = \omega_2^2 + \mu a_1^2 = \omega_2^2 + a_2^2$ onda matrice inercionih, kvazielastičnih koeficijenata i koeficijenata prigušenja imaju oblik:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1^2 & -a_1^2 \\ -a_2^2 & \tilde{\omega}_2^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2\delta_1 & \\ & 2\delta_2 \end{pmatrix}. \quad (3.3.10)$$

Karakteristični polinom homogenog dela sistema diferencijalnih jednačina razlomljenog reda (3.3.9) je oblika:

$$|\lambda^2 \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} + \mathbf{C}| = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 2\delta_1 \lambda + \tilde{\omega}_1^2 & -a_1^2 \\ -a_2^2 & \lambda^2 + 2\delta_2 \lambda + \tilde{\omega}_2^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.3.11)$$

Odnos kofaktora druge vrste je onda:

$$\frac{A_1^{(s)}}{a_1^2} = \frac{A_2^{(s)}}{\lambda_s^2 + 2\delta_1 \lambda_s + \omega_1^2 + a_1^2} = \tilde{C}_s \quad (3.3.11a)$$

Polinom četvrtog reda (3.3.11) ima dva para konjugovano kompleksnih rešenja opšteg oblika (3.2.10b), pa su rešenja homogenog dela sistema opšteg oblika (3.1.35a), što daje predlog za pretpostavljanje rešenja sistema (3.3.9) u obliku (3.2.11), kao zakona kretanja oscilatora u dvofrekventnom režimu oscilovanja, kao rezultata njihovog spreznja. Samo su amplitude i faze sada nepoznate funkcije vremena koje određujemo na analogan način primenom Lagrange-ove metode varijacije konstanta kao u poglavlju 3.1.1. Ovde sada imamo sistem od dve jednačine sa po dve nepoznate što proračun usložnjava i ovde se iznosi samo deo tog proračuna. Sistem jednačina, iz kojeg se određuju nepoznate, svodi se na oblik:

$$\dot{R}_1(t) \cos \Phi_1(t) - R_1(t) \dot{\Phi}_1(t) \sin \Phi_1(t) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& (R_1(t)\dot{\phi}_1 \cos \Phi_1(t) + \dot{R}_1(t) \sin \Phi_1(t)) = \\
& = \left(\frac{\delta_1}{p_1} R_1(t) \cos \Phi_1(t) + R_1(t) p_1 \sin \Phi_1(t) \right) + \\
& + \left(\frac{\tilde{\omega}_2^2 K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - \tilde{\omega}_1^2 K_{21}^{(1)} K_{22}^{(2)}}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_1} R_1(t) \cos \Phi_1(t) + \frac{(\tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\omega}_1^2) K_{21}^{(2)} K_{22}^{(2)}}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_1} e^{-(\delta_1 - \delta_2)t} K_{22}^{(1)} R_2(t) \cos \Phi_2(t) \right) - \\
& - \frac{(a_2^2 K_{21}^{(2)} - a_1^2 K_{22}^{(2)}) K_{22}^{(2)}}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_1} (R_1(t) \cos \Phi_1(t) + e^{-(\delta_1 - \delta_2)t} R_2(t) \cos \Phi_2(t)) - \\
& - \frac{(a_2^2 K_{21}^{(2)} + a_1^2 K_{22}^{(2)})}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_1} \int_0^t \mathbf{R}(t-\tau) \left((K_{22}^{(1)} - K_{21}^{(1)}) e^{-\delta_1 \tau} R_1(\tau) \cos \Phi_1(\tau) + (K_{22}^{(2)} - K_{21}^{(2)}) e^{-\delta_2 \tau} R_2(\tau) \cos \Phi_2(\tau) \right) d\tau \\
& - \tilde{\omega}_{N1}^2 \frac{K_{22}^{(2)}}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_1} e^{-(\delta_1)t} \left[K_{21}^{(1)} e^{-\delta_1 t} R_1(t) \cos \Phi_1(t) + K_{21}^{(2)} e^{-\delta_2 t} R_2(t) \cos \Phi_2(t) \right]
\end{aligned}$$

$$\dot{R}_2(t) \cos \Phi_2(t) - R_2(t) \dot{\phi}_2(t) \sin \Phi_2(t) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& (\dot{R}_2(t) \sin \Phi_2(t) + R_2(t) \dot{\phi}_2 \cos \Phi_2(t)) = \\
& = \left(\frac{\delta_2}{-p_2} R_2(t) \cos \Phi_2(t) - R_2(t) \sin \Phi_1(t) \right) + \\
& + \frac{(\tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\omega}_1^2) K_{22}^{(1)} K_{21}^{(1)}}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_2} e^{-(\delta_1 - \delta_2)t} R_1(t) \cos \Phi_1(t) - \frac{(\tilde{\omega}_2^2 K_{21}^{(1)} K_{22}^{(2)} - \tilde{\omega}_1^2 K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)})}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_2} R_2(t) \cos \Phi_2(t) - \\
& - \frac{(a_1^2 K_{22}^{(2)} - a_2^2 K_{21}^{(2)}) K_{22}^{(2)}}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_2} e^{-(\delta_1 - \delta_2)t} R_1(t) \cos \Phi_1(t) + R_2(t) \cos \Phi_2(t) + \\
& \tilde{\omega}_{N1}^2 \frac{K_{22}^{(1)}}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_2} e^{-\delta_2 t} \left[K_{21}^{(1)} e^{-\delta_1 t} R_1(t) \cos \Phi_1(t) + K_{21}^{(2)} e^{-\delta_2 t} R_2(t) \cos \Phi_2(t) \right] + \\
& + \frac{(a_1^2 K_{22}^{(2)} + a_2^2 K_{21}^{(2)})}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_2} \int_0^t \mathbf{R}(t-\tau) \left((K_{22}^{(1)} - K_{21}^{(1)}) e^{-\delta_1 \tau} R_1(\tau) \cos \Phi_1(\tau) + (K_{22}^{(2)} - K_{21}^{(2)}) e^{-\delta_2 \tau} R_2(\tau) \cos \Phi_2(\tau) \right) d\tau
\end{aligned}$$

odakle dobijamo sistem diferencijalnih jednačina prvog reda po vremenskim promenama amplituda i faza u obliku:

$$\begin{aligned}
\dot{R}_1(t) & = \left(\frac{\delta_1}{p_1} R_1(t) \cos \Phi_1(t) + R_1(t) p_1 \sin \Phi_1(t) \right) \sin \Phi_1(t) + \\
& + \left(\frac{(\tilde{\omega}_2^2 K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - \tilde{\omega}_1^2 K_{21}^{(1)} K_{22}^{(2)})}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_1} R_1(t) \cos \Phi_1(t) + \frac{(\tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\omega}_1^2) K_{21}^{(2)} K_{22}^{(2)}}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_1} e^{-(\delta_1 - \delta_2)t} K_{22}^{(1)} R_2(t) \cos \Phi_2(t) \right) \sin \Phi_1(t) - \\
& - \frac{(a_2^2 K_{21}^{(2)} - a_1^2 K_{22}^{(2)}) K_{22}^{(2)}}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_1} (R_1(t) \cos \Phi_1(t) + e^{-(\delta_1 - \delta_2)t} R_2(t) \cos \Phi_2(t)) \sin \Phi_1(t) - \\
& - \frac{(a_2^2 K_{21}^{(2)} + a_1^2 K_{22}^{(2)})}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_1} \sin \Phi_1(t) \int_0^t \mathbf{R}(t-\tau) \left((K_{22}^{(1)} - K_{21}^{(1)}) e^{-\delta_1 \tau} R_1(\tau) \cos \Phi_1(\tau) + (K_{22}^{(2)} - K_{21}^{(2)}) e^{-\delta_2 \tau} R_2(\tau) \cos \Phi_2(\tau) \right) d\tau - \\
& - \tilde{\omega}_{N1}^2 \frac{K_{22}^{(2)}}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_1} e^{-(\delta_1)t} \sin \Phi_1(t) \left[K_{21}^{(1)} e^{-\delta_1 t} R_1(t) \cos \Phi_1(t) + K_{21}^{(2)} e^{-\delta_2 t} R_2(t) \cos \Phi_2(t) \right] \\
\dot{R}_2(t) & = \left(\frac{\delta_2}{-p_2} R_2(t) \cos \Phi_2(t) \sin \Phi_2(t) - R_2(t) \sin \Phi_1(t) \sin \Phi_2(t) \right) + \\
& + \frac{(\tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\omega}_1^2) K_{22}^{(1)} K_{21}^{(1)}}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_2} e^{-(\delta_1 - \delta_2)t} R_1(t) \cos \Phi_1(t) \sin \Phi_2(t) - \frac{(\tilde{\omega}_2^2 K_{21}^{(1)} K_{22}^{(2)} - \tilde{\omega}_1^2 K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)})}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_2} R_2(t) \cos \Phi_2(t) \sin \Phi_2(t) - \\
& - \frac{(a_1^2 K_{22}^{(2)} K_{22}^{(1)} - a_2^2 K_{22}^{(1)} K_{21}^{(1)})}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_2} e^{-(\delta_1 - \delta_2)t} R_1(t) \cos \Phi_1(t) \sin \Phi_2(t) - \frac{(a_1^2 K_{22}^{(1)} K_{22}^{(2)} - a_2^2 K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)})}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_2} R_2(t) \cos \Phi_2(t) \sin \Phi_2(t) + \\
& + \tilde{\omega}_{N1}^2 \frac{K_{22}^{(1)}}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_2} \sin \Phi_2(t) \left[K_{21}^{(1)} e^{-\delta_1 t} R_1(t) \cos \Phi_1(t) + K_{21}^{(2)} e^{-\delta_2 t} R_2(t) \cos \Phi_2(t) \right] + \\
& + \frac{(a_1^2 K_{22}^{(2)} + a_2^2 K_{21}^{(2)})}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_2} \sin \Phi_2(t) \int_0^t \mathbf{R}(t-\tau) \left((K_{22}^{(1)} - K_{21}^{(1)}) e^{-\delta_1 \tau} R_1(\tau) \cos \Phi_1(\tau) + (K_{22}^{(2)} - K_{21}^{(2)}) e^{-\delta_2 \tau} R_2(\tau) \cos \Phi_2(\tau) \right) d\tau \\
\dot{\phi}_1 & = \left(-\frac{\delta_1}{p_1} \cos \Phi_1(t) + p_1 \sin \Phi_1(t) \right) \cos \Phi_1(t) + \\
& + \left(-\frac{(\tilde{\omega}_2^2 K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - \tilde{\omega}_1^2 K_{21}^{(1)} K_{22}^{(2)})}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_1} \cos^2 \Phi_1(t) - \frac{(\tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\omega}_1^2) K_{21}^{(2)} K_{22}^{(2)}}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_1} e^{-(\delta_1 - \delta_2)t} K_{22}^{(1)} \frac{R_2(t)}{R_1(t)} \cos \Phi_2(t) \cos \Phi_1(t) \right) + \\
& + \frac{(a_2^2 K_{21}^{(2)} - a_1^2 K_{22}^{(2)}) K_{22}^{(2)}}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_1} \left(\cos^2 \Phi_1(t) + e^{-(\delta_1 - \delta_2)t} \frac{R_2(t)}{R_1(t)} \cos \Phi_2(t) \cos \Phi_1(t) \right) + \\
& + \frac{(a_2^2 K_{21}^{(2)} + a_1^2 K_{22}^{(2)}) \cos \Phi_1(t)}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_1} \int_0^t \mathbf{R}(t-\tau) \left((K_{22}^{(1)} - K_{21}^{(1)}) e^{-\delta_1 \tau} R_1(\tau) \cos \Phi_1(\tau) + (K_{22}^{(2)} - K_{21}^{(2)}) e^{-\delta_2 \tau} R_2(\tau) \cos \Phi_2(\tau) \right) d\tau + \\
& + \tilde{\omega}_{N1}^2 \frac{K_{22}^{(2)} \cos \Phi_1(t)}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_1} e^{-(\delta_1)t} R_1(t) \left[K_{21}^{(1)} e^{-\delta_1 t} R_1(t) \cos \Phi_1(t) + K_{21}^{(2)} e^{-\delta_2 t} R_2(t) \cos \Phi_2(t) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 = & \left(\frac{\delta_2}{-p_2} \cos \Phi_2(t) \cos \Phi_2(t) - \sin \Phi_1(t) \cos \Phi_2(t) \right) + \\ & + \frac{(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2) K_{22}^{(1)} K_{21}^{(1)}}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_2} e^{-(\hat{\delta}_1 - \tilde{\delta}_2)t} \frac{R_1(t)}{R_2(t)} \cos \Phi_1(t) \cos \Phi_2(t) - \frac{(\tilde{\omega}_1^2 K_{22}^{(1)} K_{21}^{(2)} - \tilde{\omega}_2^2 K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)})}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_2} \cos^2 \Phi_2(t) - \\ & - \frac{(a_1^2 K_{22}^{(1)} K_{22}^{(2)} - a_2^2 K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)})}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_2} e^{-(\hat{\delta}_1 - \tilde{\delta}_2)t} \frac{R_1(t)}{R_2(t)} \cos \Phi_1(t) \cos \Phi_2(t) - \frac{(a_1^2 K_{22}^{(1)} K_{22}^{(2)} - a_2^2 K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)})}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) p_2} \cos^2 \Phi_2(t) + \\ & + \tilde{\omega}_{N1}^2 \frac{K_{22}^{(1)} \cos \Phi_2(t)}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) e^{-\tilde{\delta}_2 t} R_2(t) p_2} \left[K_{21}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_1 t} R_1(t) \cos \Phi_1(t) + K_{21}^{(2)} e^{-\tilde{\delta}_2 t} R_2(t) \cos \Phi_2(t) \right] + \\ & + \frac{(a_1^2 K_{22}^{(1)} + a_2^2 K_{21}^{(1)}) \cos \Phi_2(t)}{(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) e^{-\tilde{\delta}_2 t} R_2(t) p_2} \int_0^t \mathbf{R}(t - \tau) \left((K_{22}^{(1)} - K_{21}^{(1)}) e^{-\hat{\delta}_1 \tau} R_1(\tau) \cos \Phi_1(\tau) + (K_{22}^{(2)} - K_{21}^{(2)}) e^{-\tilde{\delta}_2 \tau} R_2(\tau) \cos \Phi_2(\tau) \right) d\tau \end{aligned}$$

koji se posle usrednjenja po punim fazama $\Phi_1(t)$ i $\Phi_2(t)$ vodeći računa o sledećim svojstvima limesa trigonometrijskih proizvoda jezgra:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sin \Phi_1(t) \int_0^t \mathbf{R}(t - \tau) e^{-\hat{\delta}_1 \tau} \cos \Phi_1(\tau) d\tau = \frac{c - \tilde{c}}{nc} \mathbf{H}_{im}(\hat{p}_1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \cos \Phi_1(t) \int_0^t \mathbf{R}(t - \tau) e^{-\hat{\delta}_1 \tau} \cos \Phi_1(\tau) d\tau = \frac{c - \tilde{c}}{nc} \mathbf{H}_{re}(\hat{p}_1) \quad \mathbf{i} \quad \int_0^{+\infty} \mathbf{R}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{c - \tilde{c}}{nc} [\mathbf{H}_{re}(\omega) + i\mathbf{H}_{im}(\omega)]$$

svodi na sistem:

$$\begin{aligned} \dot{R}_1(t) = & - \frac{(a_2^2 K_{21}^{(2)} + a_1^2 K_{22}^{(2)}) (K_{22}^{(1)} - K_{21}^{(1)}) R_1(t) c - \tilde{c} \mathbf{H}_{im}(\hat{p}_1)}{2(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) \hat{p}_1} \\ \dot{\phi}_1(t) = & \frac{3K_{22}^{(2)}}{16p_1 [K_{21}^{(1)} K_{22}^{(2)} - K_{22}^{(1)} K_{21}^{(2)}]} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ e^{-2\hat{\delta}_1 t} (K_{21}^{(1)})^3 [R_1(t)]^2 + 2e^{-2\hat{\delta}_1 t} K_{21}^{(1)} [K_{21}^{(2)}]^2 [R_2(t)]^2 \right\} - \\ & - \frac{(a_2^2 K_{21}^{(2)} + a_1^2 K_{22}^{(2)}) (K_{22}^{(1)} - K_{21}^{(1)}) c - \tilde{c} \mathbf{H}_{re}(\hat{p}_1)}{2\hat{p}_1 [K_{21}^{(1)} K_{22}^{(2)} - K_{22}^{(1)} K_{21}^{(2)}]} \frac{c - \tilde{c}}{nc} \mathbf{H}_{re}(\hat{p}_1) \\ \dot{R}_2(t) = & - \frac{(a_1^2 K_{22}^{(1)} + a_2^2 K_{21}^{(1)}) (K_{22}^{(2)} - K_{21}^{(2)}) R_2(t) c - \tilde{c} \mathbf{H}_{im}(\hat{p}_2)}{2\hat{p}_2 [K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}]} \\ \dot{\phi}_2(t) = & \frac{3K_{22}^{(1)}}{16\hat{p}_2 [K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}]} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ 2e^{-2\hat{\delta}_2 t} (K_{21}^{(1)})^3 [R_1(t)]^2 + e^{-2\hat{\delta}_2 t} K_{21}^{(1)} [K_{21}^{(2)}]^2 [R_2(t)]^2 \right\} - \\ & - \frac{(a_1^2 K_{22}^{(1)} + a_2^2 K_{21}^{(1)}) (K_{22}^{(2)} - K_{21}^{(2)}) c - \tilde{c} \mathbf{H}_{re}(\hat{p}_2)}{2\hat{p}_2 [K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}]} \frac{c - \tilde{c}}{nc} \mathbf{H}_{re}(\hat{p}_2) \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Ako se uvede sledeća smena za konstante:

$$\tilde{\delta}_1 = \frac{(a_2^2 K_{21}^{(2)} + a_1^2 K_{22}^{(2)}) (K_{22}^{(1)} - K_{21}^{(1)}) c - \tilde{c} \mathbf{H}_{im}(\hat{p}_1)}{2(K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}) \hat{p}_1} \frac{c - \tilde{c}}{nc} \mathbf{H}_{im}(\hat{p}_1) \tag{3.3.12a}$$

$$\tilde{\delta}_2 = \frac{(a_1^2 K_{22}^{(1)} + a_2^2 K_{21}^{(1)}) (K_{22}^{(2)} - K_{21}^{(2)}) c - \tilde{c} \mathbf{H}_{im}(\hat{p}_2)}{2\hat{p}_2 [K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}]} \frac{c - \tilde{c}}{nc} \mathbf{H}_{im}(\hat{p}_2), \tag{3.3.12b}$$

i izvrši integraljnje sistema (3.3.12) dobija se sistem prve aproksimacije rešenja po amplitudama i faznim kašnjenjima sistema oscilatora spregnutih naslednim elementom u obliku:

$$\begin{aligned} R_1(t) = & R_{01} e^{-\tilde{\delta}_1 t} \\ \phi_1(t) = & - \frac{3K_{22}^{(2)}}{16p_1 [K_{21}^{(1)} K_{22}^{(2)} - K_{22}^{(1)} K_{21}^{(2)}]} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ \frac{e^{-2(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t}}{2(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)} (K_{21}^{(1)})^3 R_{01}^2 + \frac{e^{-2(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t}}{(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)} K_{21}^{(1)} [K_{21}^{(2)}]^2 R_{02}^2 \right\} - \\ & - \frac{(a_2^2 K_{21}^{(2)} + a_1^2 K_{22}^{(2)}) (K_{22}^{(1)} - K_{21}^{(1)}) c - \tilde{c} \mathbf{H}_{re}(\hat{p}_1)}{2\hat{p}_1 [K_{21}^{(1)} K_{22}^{(2)} - K_{22}^{(1)} K_{21}^{(2)}]} \frac{c - \tilde{c}}{nc} \mathbf{H}_{re}(\hat{p}_1) \\ R_2(t) = & R_{02} e^{-\tilde{\delta}_2 t} \\ \phi_2(t) = & - \frac{3K_{22}^{(1)}}{16\hat{p}_2 [K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}]} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ \frac{e^{-2(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t}}{(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)} (K_{21}^{(1)})^3 R_{01}^2 + \frac{e^{-2(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t}}{2(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)} K_{21}^{(1)} [K_{21}^{(2)}]^2 R_{02}^2 \right\} - \\ & - \frac{(a_1^2 K_{22}^{(1)} + a_2^2 K_{21}^{(1)}) (K_{22}^{(2)} - K_{21}^{(2)}) c - \tilde{c} \mathbf{H}_{re}(\hat{p}_2)}{2\hat{p}_2 [K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}]} \frac{c - \tilde{c}}{nc} \mathbf{H}_{re}(\hat{p}_2) \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Sledi da su faze oscilovanja oblika:

$$\Phi_1(t) = \hat{p}_1 t - \frac{3K_{22}^{(2)}}{16\hat{p}_1[K_{21}^{(1)}K_{22}^{(2)} - K_{22}^{(1)}K_{21}^{(2)}]} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ \frac{e^{-2(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t}}{2(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)} (K_{21}^{(1)})^3 R_{01}^2 + \frac{e^{-2(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t}}{(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)} K_{21}^{(1)} [K_{21}^{(2)}]^2 R_{02}^2 \right\} - \frac{(a_2^2 K_{21}^{(2)} + a_1^2 K_{22}^{(2)}) (K_{22}^{(1)} - K_{21}^{(1)}) c - \tilde{c}}{2\hat{p}_1 [K_{21}^{(1)} K_{22}^{(2)} - K_{22}^{(1)} K_{21}^{(2)}]} \frac{c - \tilde{c}}{nc} \mathbf{H}_{re}(\hat{p}_1) \quad (3.3.13a)$$

$$\Phi_2(t) = \hat{p}_2 t - \frac{3K_{22}^{(1)}}{16\hat{p}_2[K_{21}^{(2)}K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)}K_{21}^{(1)}]} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ \frac{e^{-2(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t}}{(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)} (K_{21}^{(1)})^3 R_{01}^2 + \frac{e^{-2(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t}}{2(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)} K_{21}^{(1)} [K_{21}^{(2)}]^2 R_{02}^2 \right\} - \frac{(a_1^2 K_{22}^{(1)} + a_2^2 K_{21}^{(1)}) (K_{22}^{(2)} - K_{21}^{(2)}) c - \tilde{c}}{2\hat{p}_2 [K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}]} \frac{c - \tilde{c}}{nc} \mathbf{H}_{re}(\hat{p}_2) \quad (3.3.13b)$$

Zakoni oscilovanja masa ovog sistema su:

$$x_1(t) = K_{21}^{(1)} e^{-(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t} R_{01} \cos \left\{ \hat{p}_1 t - \frac{3K_{22}^{(2)}}{16\hat{p}_1[K_{21}^{(1)}K_{22}^{(2)} - K_{22}^{(1)}K_{21}^{(2)}]} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ \frac{e^{-2(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t}}{2(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)} (K_{21}^{(1)})^3 R_{01}^2 + \frac{e^{-2(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t}}{(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)} K_{21}^{(1)} [K_{21}^{(2)}]^2 R_{02}^2 \right\} - \frac{(a_2^2 K_{21}^{(2)} + a_1^2 K_{22}^{(2)}) (K_{22}^{(1)} - K_{21}^{(1)}) c - \tilde{c}}{2\hat{p}_1 [K_{21}^{(1)} K_{22}^{(2)} - K_{22}^{(1)} K_{21}^{(2)}]} \frac{c - \tilde{c}}{nc} \mathbf{H}_{re}(\hat{p}_1) \right\} + K_{21}^{(2)} e^{-(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t} R_{02} \cos \left\{ \hat{p}_2 t - \frac{3K_{22}^{(1)}}{16\hat{p}_2[K_{21}^{(2)}K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)}K_{21}^{(1)}]} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ \frac{e^{-2(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t}}{(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)} (K_{21}^{(1)})^3 R_{01}^2 + \frac{e^{-2(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t}}{2(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)} K_{21}^{(1)} [K_{21}^{(2)}]^2 R_{02}^2 \right\} - \frac{(a_1^2 K_{22}^{(1)} + a_2^2 K_{21}^{(1)}) (K_{22}^{(2)} - K_{21}^{(2)}) c - \tilde{c}}{2\hat{p}_2 [K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}]} \frac{c - \tilde{c}}{nc} \mathbf{H}_{re}(\hat{p}_2) \right\}$$

$$x_2(t) = K_{22}^{(1)} e^{-(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t} R_{01} \cos \left\{ \hat{p}_1 t - \frac{3K_{22}^{(2)}}{16\hat{p}_1[K_{21}^{(1)}K_{22}^{(2)} - K_{22}^{(1)}K_{21}^{(2)}]} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ \frac{e^{-2(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t}}{2(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)} (K_{21}^{(1)})^3 R_{01}^2 + \frac{e^{-2(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t}}{(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)} K_{21}^{(1)} [K_{21}^{(2)}]^2 R_{02}^2 \right\} - \frac{(a_2^2 K_{21}^{(2)} + a_1^2 K_{22}^{(2)}) (K_{22}^{(1)} - K_{21}^{(1)}) c - \tilde{c}}{2\hat{p}_1 [K_{21}^{(1)} K_{22}^{(2)} - K_{22}^{(1)} K_{21}^{(2)}]} \frac{c - \tilde{c}}{nc} \mathbf{H}_{re}(\hat{p}_1) \right\} + K_{22}^{(2)} e^{-(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t} R_{02} \cos \left\{ \hat{p}_2 t - \frac{3K_{22}^{(1)}}{16\hat{p}_2[K_{21}^{(2)}K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)}K_{21}^{(1)}]} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ \frac{e^{-2(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t}}{(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)} (K_{21}^{(1)})^3 R_{01}^2 + \frac{e^{-2(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t}}{2(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)} K_{21}^{(1)} [K_{21}^{(2)}]^2 R_{02}^2 \right\} - \frac{(a_1^2 K_{22}^{(1)} + a_2^2 K_{21}^{(1)}) (K_{22}^{(2)} - K_{21}^{(2)}) c - \tilde{c}}{2\hat{p}_2 [K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}]} \frac{c - \tilde{c}}{nc} \mathbf{H}_{re}(\hat{p}_2) \right\} \quad (3.3.13c)$$

Ako se uvede smena promenljivih:

$$T_1(t) = e^{-(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t} R_{01} \cos \Phi_1(t) \quad (3.3.14)$$

$$T_2(t) = e^{-(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t} R_{02} \cos \Phi_2(t)$$

tako da se $T_i(t)$ smatraju harmonicima oscilovanja lako se zakoni oscilovanja (3.3.12) svode na oblik:

$$x_1(t) = K_{21}^{(1)} T_1(t) + K_{21}^{(2)} T_2(t)$$

$$x_2(t) = K_{22}^{(1)} T_1(t) + K_{22}^{(2)} T_2(t) \quad (3.3.14a)$$

odakle se lakše zaključuje da su oscilacije sistema dvofrekventni procesi sa po dva različita moda čije faze su međusobno spregnute i zavise od amplituda oscilovanja oba harmonika.

3.4. Hibridni sistemi struktura spregnutih slojem standardnih visko-elastičnih elemenata

Teorijski i praktični značaj izučavanja transverzalnih oscilacija ploča spregnutih visko-elastičnim slojem jako je veliki, tome u prilog stoji i činjenica o postojanju velikog broja savremenih radova na tu temu [66, 68, 75, 81-83, 87, 96, 140-154, 258, 259, 260] čiji je pregled dat u uvodnom delu magistrskog

rada [258]. Praktični značaj izučavanja sistema ploča sa visko-elastičnim sprežućim slojem može biti i u mogućnostima smanjenja rezonantnih oscilacija samim sprežućim slojem. Obično je prigušujući materijal postavljen preko cele površine ploča što naravno povećava težinu konstrukcije i praktično neefikasno koristi materijal sloja. Zadatak optimalnog dizajniranja konstrukcije je upravo ekonomisanje upotrebljenim materijalom uz potrebno zadovoljenje izlaznih performansi. Najnoviji rezultati topološke optimizacije raspodeljenog visko-elastičnog sloja između ploča dati su u radu [189]. Prvenstveno su izvedene jednačine kretanja ploča sa viskoelastičnim sprežućim slojem pomoću energijskog metoda, a potom prikazan model konačnih elemenata za takav sistem. Uzimajući u obzir modove prigušenog oscilovanja ploče i rasipanje energije istih kao promenljive optimalnog dizajniranja uzete su gustina prigušujućeg materijala i faktor zapremine, kao izlazna funkcija optimalnog topološkog dizajniranja koristi se odnos prigušenja moda. Izvedeni su izrazi osetljivosti odnosa prigušenja moda od promenljivih dizajna i potom primenjen metod pokretljive asimptote (Method of Moving Asymptote (MMA)) za proučavanje optimalne raspodele prigušujućeg materijala sprežućeg sloja. U prilog efikasnosti prikazanog rešenja dati su numerički primeri konzolne grede i grede sa prostim osloncima. Rezultati pokazuju da opadanje energije oscilovanja može biti pojačano optimalnom raspodelom prigušujućeg materijal u međusloju. U smislu aktuelnosti proučavanja sistema spregnutih ploča prikažimo jedan model sprezanja visko elastičnim materijalom sa svojstvima linearne i nelinearne elastičnosti.

Fizički model je načinjen od dve ploče od elastičnog, homogenog i izotropnog materijala, debljina h_i , $i=1,2$ malih u odnosu na druge dve dimenzije, od materijala modula elastičnosti E_i , Poisson-ovog koeficijenta μ_i , modula klizanja G_i i gustine ρ_i . Ploče su konstantne debljine u pravcu z ose sa paralelnim konturama, slike 3.4.1.a,b). Ploče su međusobno spojene sa visko-elastičnim nelinearnim slojem sastavljenim od standardnih visko-elastičnih elemenata sa nelinearnim svojstvima trećeg stepena, prikazanog na slici 3.4.1.c). Ovakav sistem spregnutih ploča je tipa kompozitne strukture još poznate i kao sendvič struktura. U smislu još jednog primera dinamičkog hibridnog sistema to je veza kontinualnih podsistema pomoću diskretnih elemenata jer je sprežujući sloj modeliran kao sloj diskretnih visko-elastičnih standardnih reoloških elemenata kontinualno raspodeljenih po površinama ploča.

Koordinatne sisteme, sa paralelnim odgovarajućim osama, $Oxyz$ uzećemo u težištu ploča, tako da se ravani Oxy poklapaju sa njihovim srednjim ravnima; osa Oz je usmerena naniže, slika 3.4.1.a).

Pretpostavimo da su obe ploče sa istom konturom i istih graničnih uslova, sa ravnim srednjim ravnima u nedeformisanom stanju.

U radu [259] date su osnove klasične teorije ploča korišćenjem Love-Kirchhoff-ljeve aproksimacije te je pokazano da se mogu normalne i transverzalne sile kao i momenti uvijanja i savijanja izraziti u funkciji transverzalnog pomeranja tačaka srednje ravni ploče $w_i(r, \varphi, t)$, $i=1,2$, ovde se indeksi 1 i 2 koriste za gornju i donju ploču, koja su funkcija dve prostorne koordinate r i φ , polarnog koordinatnog sistema koji je pogodno koristiti kada se radi sa kružnim pločama, i promenljive vremena t .

Ako su transversalni ugibi ploča $w_i(r, \varphi, t)$, $i=1,2$ mali u poređenju sa dimenzijama debljina ploča h_i , $i=1,2$ onda se oscilacije ploča javljaju samo u vertikalnom pravcu.

Na bazi prethodnih zaključaka jasno je da se pomeranja odgovarajuće tačke ploča $N_i(r, \varphi, z)$, $i=1,2$ u radijalnom $u_i(r, \varphi, z, t)$, $i=1,2$ i cirkularnom pravcu $v_i(r, \varphi, z, t)$, $i=1,2$, mogu izraziti u funkciji njihove udaljenosti z od odgovarajuće srednje ravni ploče i njihovih transversalnih pomeranja $w_i(r, \varphi, t)$, $i=1,2$ u pravcu ose z , što je ustvari pomeranje od odgovarajuće tačke $N_{i0}(r, \varphi, 0)$, $i=1,2$ iz srednje ravni ploče.

Za standardni visko-nelinearno elastični element prikazan na slici 3.4.1c) možemo pisati izraz za potencijalnu energiju oblika:

$$E_{p(1,2)} = \frac{1}{2}c_e(w_2 - w_1)^2 + \frac{1}{4}\beta_e(w_2 - w_1)^4, \quad (3.4.1)$$

gde su c_e i β_e ekvivalentne krutosti linearnih i nelinearnih opruga u sprezi. Na modelu sprežućeg elementa slika 3.4.1 c) vidimo dve opruge linearne krutosti po $c/2$ i dve opruge nelinearne krutosti po $\beta/2$ spregnute redno a potom paralelno sa linearnom oprugom krutosti c_1 pa su ekvivalentne krutosti :

$$c_e = c_{er} + c_1 = c + c_1 \quad \text{i} \quad \beta_e = \beta/2 + \beta/2 = \beta, \quad \text{jer je krutost redno vezanih opruga krutosti po } c/2 \text{ vrednosti } 1/c_{er} = 1/(c/2 + c/2).$$

Rayleigh -jeva funkcija rasipanja energije je:

$$\Phi_{(1,2)} = \frac{1}{2}b_1(\dot{w}_2 - \dot{w}_1)^2, \quad (3.4.2)$$

gde je b_1 poznati koeficijent otporne sile.

Konstitutivna relacija takvog jednog elementa može se onda pisati u obliku:

$$P(t) = (c + c_1)(w_2 - w_1) + \beta(w_2 - w_1)^3 + b_1(\dot{w}_2 - \dot{w}_1). \quad (3.4.3)$$

Sile $P(t)$ na krajevima diskretnih elemenata su kontinualno rasporedjene po jedinici površina ploča kao i sami diskretni elementi.

S obzirom na sve do sada predstavljeno i s obzirom na izvedene parcijalne diferencijalne jednačine malih transversalnih oscilacija ploče u radu [259], ovde se može pisati sistem spregnutih parcijalnih diferencijalnih jednačina prinudnih transversalnih oscilacija sistema dve kružne ploče spregnute kontinualno raspodeljenim slojem standardnih visko nelinearno elastičnih elemenata u obliku:

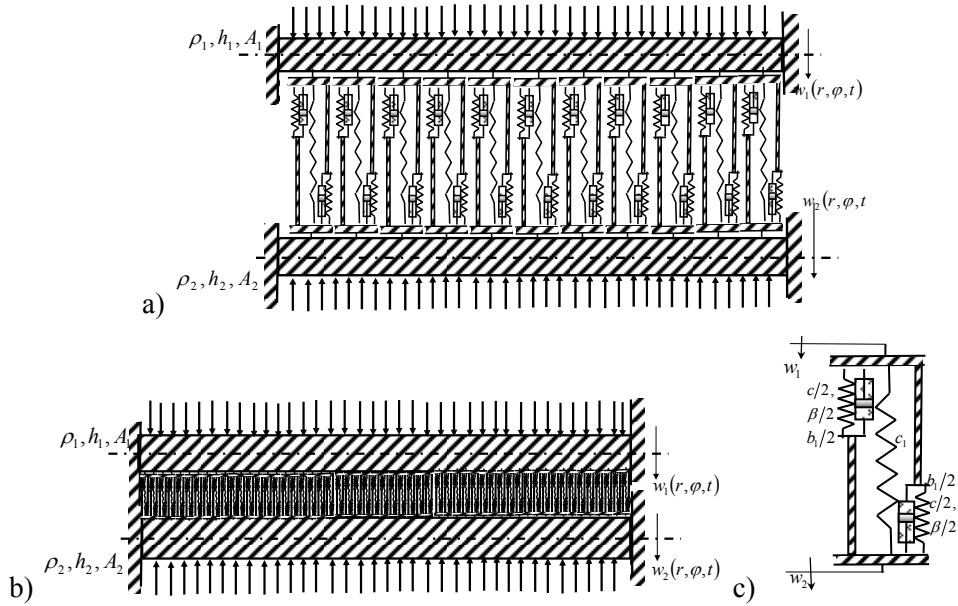
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_1(r, \varphi, t)}{\partial t^2} + c_{(1)}^4 \Delta \Delta w_1(r, \varphi, t) - 2\delta_{(1)} \left[\frac{\partial w_2(r, \varphi, t)}{\partial t} - \frac{\partial w_1(r, \varphi, t)}{\partial t} \right] - a_{(1)}^2 [w_2(r, \varphi, t) - w_1(r, \varphi, t)] &= \varepsilon \beta_{(1)} [w_2(r, \varphi, t) - w_1(r, \varphi, t)]^3 + \tilde{q}_{(1)}(r, \varphi, t) \\ \frac{\partial^2 w_2(r, \varphi, t)}{\partial t^2} + c_{(2)}^4 \Delta \Delta w_2(r, \varphi, t) + 2\delta_{(2)} \left[\frac{\partial w_2(r, \varphi, t)}{\partial t} - \frac{\partial w_1(r, \varphi, t)}{\partial t} \right] + a_{(2)}^2 [w_2(r, \varphi, t) - w_1(r, \varphi, t)] &= -\varepsilon \beta_{(2)} [w_2(r, \varphi, t) - w_1(r, \varphi, t)]^3 - \tilde{q}_{(2)}(r, \varphi, t) \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

gde su korišćene sledeće oznake:

$$a_{(i)}^2 = \frac{1}{\rho_i h_i} (c + c_1), \quad i=1,2 \quad \text{za redukovanu krutost elastičnog sloja,} \quad D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1 - \mu_i^2)} \quad \text{savojna krutost } i\text{-te ploče,}$$

$$c_{(i)}^4 = \frac{D_i}{\rho_i h_i}, \quad i=1,2 \quad \text{redukovanu savojnu krutost ploča} \quad \text{i} \quad \delta_{(i)} \quad \text{za redukovani koeficijenti prigušenja. Sa}$$

$\varepsilon\beta_{(i)}$ označen je odnos koeficijenta nelinearnosti u elastičnom sloju i gustina materijala ploča i homogenih visina ploča oblika $\varepsilon\beta_{(i)} = \frac{\beta}{\rho_i h_i}$, $i=1,2$.



Slika 3.4.1 a,b) Kontinualni podsistemi spregnuti slojem standardnih visko linearno i nelinearno elastičnih elemenata, c) model standardnog visko linearno i nelinearno elastičnog elementa

Sistemu (3.4.4) odgovara linearizovan homogen sistem sledećeg oblika:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_1(r, \varphi, t)}{\partial t^2} + c_{(1)}^4 \Delta \Delta w_1(r, \varphi, t) - 2\delta_{(1)} \left[\frac{\partial w_2(r, \varphi, t)}{\partial t} - \frac{\partial w_1(r, \varphi, t)}{\partial t} \right] - a_{(1)}^2 [w_2(r, \varphi, t) - w_1(r, \varphi, t)] &= 0 \\ \frac{\partial^2 w_2(r, \varphi, t)}{\partial t^2} + c_{(2)}^4 \Delta \Delta w_2(r, \varphi, t) + 2\delta_{(2)} \left[\frac{\partial w_2(r, \varphi, t)}{\partial t} - \frac{\partial w_1(r, \varphi, t)}{\partial t} \right] + a_{(2)}^2 [w_2(r, \varphi, t) - w_1(r, \varphi, t)] &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.4a)$$

koji zapravo predstavlja matematički model slobodnih transverzalnih oscilacija sistema dve ploče spregnute raspodeljenim slojem visko-elastičnih elemenata sa linearnom i nelinearnom krutošću opruga. Rešenja sistema (3.4.4a) se pretpostavljaju u obliku proizvoda sopstvenih amplitudnih funkcija $W_{(i)nm}(r, \varphi)$, $i=1,2$, $n=0,1,2,\dots$; $m=1,2,3,4,\dots,\infty$ i nepoznatih vremenskih funkcija $T_{(i)nm}(t)$, $i=1,2$, $n=0,1,2,\dots$; $m=1,2,3,4,\dots,\infty$, oblika:

$$w_i(r, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{(i)nm}(r, \varphi) T_{(i)nm}(t), \quad i=1,2 \quad (3.4.5)$$

gde sopstvene amplitudne funkcije $W_{(i)nm}(r, \varphi)$ imaju isti oblik kao i u slučaju razdvojenih ploča razmatranom u radu [259], a radi potpunosti ovog rada biće prikazane na kraju ovog poglavlja. Nakon zamene pretpostavljenog rešenja (3.4.5) u sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina (3.4.4a) (prateći ideju iz radova [68, 81, 259]) dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{(1)nm}(r, \varphi) \ddot{T}_{(1)nm}(t) + c_{(1)}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Delta \Delta W_{(1)nm}(r, \varphi) T_{(1)nm}(t) - 2\delta_{(1)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{(2)nm}(r, \varphi) \dot{T}_{(2)nm}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{(1)nm}(r, \varphi) \dot{T}_{(1)nm}(t) \right\} - \\ - a_{(1)}^2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{(2)nm}(r, \varphi) T_{(2)nm}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{(1)nm}(r, \varphi) T_{(1)nm}(t) \right\} = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{(2)nm}(r, \varphi) \ddot{T}_{(2)nm}(t) + c_{(2)}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Delta \Delta W_{(2)nm}(r, \varphi) T_{(2)nm}(t) + 2\delta_{(2)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{(2)nm}(r, \varphi) \dot{T}_{(2)nm}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{(1)nm}(r, \varphi) \dot{T}_{(1)nm}(t) \right\} + \\ + a_{(2)}^2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{(2)nm}(r, \varphi) T_{(2)nm}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{(1)nm}(r, \varphi) T_{(1)nm}(t) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Množenjem prve i druge jednačine sa $W_{(i)sr}(r, \varphi)rdrd\varphi$ i integraljenjem po srednjoj površi uzimajući u obzir uslove ortogonalnosti sopstvenih amplitudnih funkcija izvedene u radu [259]:

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} W_{(i)mn}(r, \varphi)W_{(i)sj}(r, \varphi)rdrd\varphi = \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ J_n(k_{nm}r) - \frac{J_n(k_{nm}a)}{I_n(k_{nm}a)} I_n(k_{nm}r) \right\} \left\{ J_s(k_{sj}r) - \frac{J_s(k_{sj}a)}{I_s(k_{sj}a)} I_s(k_{sj}r) \right\} \cos(n\varphi + \alpha_n) \cos(s\varphi + \alpha_s) r dr d\varphi = \begin{cases} 0 & za \quad nm \neq sj \\ \nu_{nm} & za \quad nm = sj \end{cases} \quad (3.4.7)$$

kao i odgovarajuće granične uslove ploča, u ovom slučaju ukleštene obe ploče, iz sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina (3.4.4a) dobijamo mn -familiju sistema spregnutih u parove običnih diferencijalnih jednačina u obliku:

$$\begin{aligned} \ddot{T}_{(1)nm}(t) - 2\delta_{(1)}(\dot{T}_{(2)nm}(t) - \dot{T}_{(1)nm}(t)) + \omega_{(1)nm}^2 T_{(1)nm}(t) - a_{(1)}^2 T_{(2)nm}(t) &= 0, \quad za \quad n = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty \\ \ddot{T}_{(2)nm}(t) + 2\delta_{(2)}(\dot{T}_{(2)nm}(t) - \dot{T}_{(1)nm}(t)) + \omega_{(2)nm}^2 T_{(2)nm}(t) - a_{(2)}^2 T_{(1)nm}(t) &= 0, \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

gde su $\omega_{(i)}^2 = k_{(i)}^4 c_{(i)}^4 + a_{(i)}^2 = k_{(i)}^4 \frac{D_{(i)}}{\rho_i h_i} + \frac{c_e}{\rho_i h_i} = k_{(i)}^4 \frac{E_{(i)} h_i^2}{12 \rho_i (1 - \mu^2)} + \frac{c_e}{\rho_i h_i}$, $i = 1, 2$ sopstvene kružne frekvencije spregnutih ploča.

Formalno za sistem jednačina (3.4.8) mogu se formirati matrice inercionih A_{nm} i kvazielastičnih C_{nm} koeficijenata, kao i matrica koeficijenata otporne sile koje bi obgovarale dinamičkom slobodnom sistemu sa dva stepena slobode oscilovanja [259], u obliku :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{(1)nm}^2 & -\tilde{a}_{(1)}^2 \\ -\tilde{a}_{(2)}^2 & \tilde{\omega}_{(2)nm}^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{i} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2\tilde{\delta}_{(1)} & -2\tilde{\delta}_{(1)} \\ -2\tilde{\delta}_{(2)} & 2\tilde{\delta}_{(2)} \end{pmatrix}. \quad (3.4.8a)$$

Kako je ovo praktično sistem spregnut statičkim i viskoelastičnim vezama to su matrice \mathbf{C} i \mathbf{B} (3.4.8a) formalnog sistema sa dva stepena oscilovanja punih formi dok je matrica \mathbf{A} dijagonalna. Primetilo se ukoliko je sistem spregnut samo dinamičkim vezama matrice kvazielestičnih koeficijenata \mathbf{C} i koeficijenata prigušenja \mathbf{B} su dijagonalne, npr. oblik (3.2.8), ili pak, ako su podsistemi spregnuti samo statičkim vezama onda su inerciona matrica \mathbf{A} i matrica koeficijenata prigušenja \mathbf{B} dijagonalnih oblika, npr. oblik (3.1.32a). Sada se karakteristični polinom sistema (3.4.8) može zapisati u obliku:

$$|\lambda^2 \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} + \mathbf{C}| = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 2\tilde{\delta}_{(1)}\lambda + \tilde{\omega}_{(1)nm}^2 & -2\tilde{\delta}_{(1)}\lambda - \tilde{a}_{(1)}^2 \\ -2\tilde{\delta}_{(2)}\lambda - \tilde{a}_{(2)}^2 & \lambda^2 + 2\tilde{\delta}_{(2)}\lambda + \tilde{\omega}_{(2)nm}^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.4.9)$$

odnosno u razvijenom obliku:

$$(\lambda^2 + 2\tilde{\delta}_{(1)}\lambda + \tilde{\omega}_{(1)nm}^2)(\lambda^2 + 2\tilde{\delta}_{(2)}\lambda + \tilde{\omega}_{(2)nm}^2) - (-2\tilde{\delta}_{(1)}\lambda - \tilde{a}_{(1)}^2)(-2\tilde{\delta}_{(2)}\lambda - \tilde{a}_{(2)}^2) = 0. \quad (3.4.9a)$$

Odnosi amplituda vremenskih funkcija oscilovanja su onda jednaki odnosu kofaktora determinante (3.4.9) u obliku:

$$\frac{R_{1nm}^{(s)}}{K_{21nm}^{(s)}} = \frac{R_{2nm}^{(s)}}{K_{22nm}^{(s)}} = C_{nm(s)} \quad \text{ili} \quad \frac{R_{1nm}^{(s)}}{-(-2\tilde{\delta}_{(1)}\lambda_s - \tilde{a}_{(1)}^2)} = \frac{R_{2nm}^{(s)}}{\lambda_s^2 + 2\tilde{\delta}_{(1)}\lambda_s + \tilde{\omega}_{(1)nm}^2} = \tilde{C}_s. \quad (3.4.9b)$$

Karakteristični polinom (3.4.9) ima dva para konjugovano kompleksnih rešenja oblika (3.2.10b) ali u svakom nm modu oscilovanja, odnosno:

$$\lambda_{1,2nm} = -\hat{\delta}_{1nm} \mp i\hat{p}_{1nm} \quad \text{i} \quad \lambda_{3,4nm} = -\hat{\delta}_{2nm} \mp i\hat{p}_{2nm}. \quad (3.4.9c)$$

Rešenja za nepoznate vremenske funkcije odgovarajućeg nm -moda slobodnih oscilacija sistema dve ploče spregnute slojem visko-elastičnih elemenata se mogu napisati u obliku:

$$\begin{aligned} T_{(1)nm}(t) &= K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{01nm} \cos(\hat{p}_{1nm} t + \alpha_{01nm}) + K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{02nm} \cos(\hat{p}_{2nm} t + \alpha_{02nm}) \\ T_{(2)nm}(t) &= K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{01nm} \cos(\hat{p}_{1nm} t + \alpha_{01nm}) + K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{02nm} \cos(\hat{p}_{2nm} t + \alpha_{02nm}). \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Za slučaj da su obe kontinualno raspodeljene po površini ploča funkcije promene spoljašnje prinudne sile $\tilde{q}_{(1)}(r, \varphi, t)$ i $\tilde{q}_{(2)}(r, \varphi, t)$ istih dvofrekventnih oscilatornih oblika:

$$\tilde{q}_{nm}(t) = h_{01nm} \cos[\Omega_{1nm} t + \phi_{1nm}] + h_{02nm} \cos[\Omega_{2nm} t + \phi_{2nm}] \quad (3.4.11)$$

i na osnovu oblika rešenja za slobodni linearizovani sistem, predstavljaju se rešenja sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina (3.4.4) u obliku proizvoda sopstvenih amplitudnih funkcija i nepoznatih vremenskih funkcija $T_{(i)nm}(t)$, $i=1,2$, $n=0,1,2,\dots$; $m=1,2,3,4,\dots,\infty$:

$$\begin{aligned} w_1(r, \varphi, t) &= W_{(1)nm}(r, \varphi) [K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) + K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t)] \\ w_2(r, \varphi, t) &= W_{(2)nm}(r, \varphi) [K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) + K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t)] \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

gde su amplitude $R_{inn}(t)$ i faze $\Phi_{inn}(t) = q_i \Omega_{inn} t + \phi_{inn}(t)$ nepoznate funkcije vremena koje će se odrediti primenom pomenute procedure, koja je korišćena i u radovima [140-150, 259 i 260].

Koristeći uslov da prvi izvodi pretpostavljenih rešenja (3.4.12), $\dot{w}_{(i)}(r, \varphi, t)$ u obliku:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(r, \varphi, t) &= W_{(1)nm} \dot{T}_{(1)nm}(t) = \\ &= W_{(1)nm} \left[-\hat{\delta}_{1nm} K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) + K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} \dot{R}_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) - K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) q_1 \Omega_{1nm} \sin \Phi_{1nm}(t) - \right. \\ &\quad \left. - K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) \dot{\phi}_{1nm} \sin \Phi_{1nm}(t) - \hat{\delta}_{2nm} K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) + \right. \\ &\quad \left. + K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} \dot{R}_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) - K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) q_2 \Omega_{2nm} \sin \Phi_{2nm}(t) - K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) \dot{\phi}_{2nm} \sin \Phi_{2nm}(t) \right] \\ \dot{w}_2(r, \varphi, t) &= W_{(2)nm} \dot{T}_{(2)nm}(t) = \\ &= W_{(2)nm} \left[-\hat{\delta}_{1nm} K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) + K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} \dot{R}_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) - K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) q_1 \Omega_{1nm} \sin \Phi_{1nm}(t) - \right. \\ &\quad \left. - K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) \dot{\phi}_{1nm} \sin \Phi_{1nm}(t) - \hat{\delta}_{2nm} K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) + \right. \\ &\quad \left. + K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} \dot{R}_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) - K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) q_2 \Omega_{2nm} \sin \Phi_{2nm}(t) - K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) \dot{\phi}_{2nm} \sin \Phi_{2nm}(t) \right] \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

budu istog oblika kao i kada su amplitude $R_{inn}(t)$ i fazne razlike $\phi_{inn}(t)$ konstantne funkcije, tj. oblika:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(r, \varphi, t) &= W_{(1)nm} \left[-\hat{\delta}_{1nm} K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) - K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) q_1 \Omega_{1nm} \sin \Phi_{1nm}(t) - \right. \\ &\quad \left. - \hat{\delta}_{2nm} K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) - K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) q_2 \Omega_{2nm} \sin \Phi_{2nm}(t) \right] \\ \dot{w}_2(r, \varphi, t) &= W_{(2)nm} \left[-\hat{\delta}_{1nm} K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) - K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) q_1 \Omega_{1nm} \sin \Phi_{1nm}(t) - \right. \\ &\quad \left. - \hat{\delta}_{2nm} K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) - K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) q_2 \Omega_{2nm} \sin \Phi_{2nm}(t) \right] \end{aligned} \quad (3.4.13a)$$

dobijaju se prva dva uslova koji moraju da zadovolje izvodi po vremenu nepoznatih funkcija $\dot{R}_{inn}(t)$

i $\dot{\phi}_{inn}(t)$ u obliku:

$$\begin{aligned} K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} \dot{R}_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) - K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) \dot{\phi}_{1nm} \sin \Phi_{1nm}(t) + K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} \dot{R}_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) - K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) \dot{\phi}_{2nm} \sin \Phi_{2nm}(t) \\ K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} \dot{R}_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) - K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) \dot{\phi}_{1nm} \sin \Phi_{1nm}(t) + K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} \dot{R}_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) - K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) \dot{\phi}_{2nm} \sin \Phi_{2nm}(t) \end{aligned}$$

Množenjem prve jednačine poslednjeg sistema kofaktorom $K_{22nm}^{(1)}$ ili $K_{22nm}^{(2)}$ i druge jednačine tog sistema sa kofaktorom $-K_{21nm}^{(1)}$ ili $-K_{21nm}^{(2)}$ i nakon sabiranja odgovarajućih jednačina sledi sistem jednačina oblika:

$$\dot{R}_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) - R_{1nm}(t) \dot{\phi}_{1nm}(t) \sin \Phi_{1nm}(t) = 0 \quad (3.4.14a)$$

$$\dot{R}_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) - R_{2nm}(t) \dot{\phi}_{2nm}(t) \sin \Phi_{2nm}(t) = 0 \quad (3.4.14b)$$

Drugi izvodi pretpostavljenih rešenja $\ddot{w}_{(i)}(r, \varphi, t)$ su onda oblika:

$$\begin{aligned}
\ddot{w}_{(1)}(r, \varphi, t) &= W_{(1)nm} \ddot{T}_{(1)nm}(t) = \\
&= W_{(1)nm} \left[\hat{\delta}_{1nm}^2 K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) - \hat{\delta}_{1nm} K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} \dot{R}_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) + 2 \hat{\delta}_{1nm} K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) q_1 \Omega_{1nm} \sin \Phi_{1nm}(t) \right] + \\
&+ \hat{\delta}_{1nm} K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) \dot{\phi}_{1nm}(t) \sin \Phi_{1nm}(t) - K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} \dot{R}_{1nm}(t) q_1 \Omega_{1nm} \sin \Phi_{1nm}(t) - K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) q_1^2 \Omega_{1nm}^2 \cos \Phi_{1nm}(t) - \\
&- K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) q_1 \Omega_{1nm} \dot{\phi}_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) + \hat{\delta}_{2nm}^2 K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) - \hat{\delta}_{2nm} K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} \dot{R}_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) + \\
&+ 2 \hat{\delta}_{2nm} K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) q_2 \Omega_{2nm} \sin \Phi_{2nm}(t) + \hat{\delta}_{2nm} K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) \dot{\phi}_{2nm}(t) \sin \Phi_{2nm}(t) - K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} \dot{R}_{2nm}(t) q_2 \Omega_{2nm} \sin \Phi_{2nm}(t) - \\
&- K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) q_2^2 \Omega_{2nm}^2 \cos \Phi_{2nm}(t) - K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) q_2 \Omega_{2nm} \dot{\phi}_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) \Big] \\
\ddot{w}_{(2)}(r, \varphi, t) &= W_{(1)nm} \ddot{T}_{(2)nm}(t) = \\
&= W_{(1)nm} \left[\hat{\delta}_{1nm}^2 K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) - \hat{\delta}_{1nm} K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} \dot{R}_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) + 2 \hat{\delta}_{1nm} K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) q_1 \Omega_{1nm} \sin \Phi_{1nm}(t) + \right. \\
&+ \hat{\delta}_{1nm} K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) \dot{\phi}_{1nm}(t) \sin \Phi_{1nm}(t) - K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} \dot{R}_{1nm}(t) q_1 \Omega_{1nm} \sin \Phi_{1nm}(t) - K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) q_1^2 \Omega_{1nm}^2 \cos \Phi_{1nm}(t) - \\
&- K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) q_1 \Omega_{1nm} \dot{\phi}_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) + \hat{\delta}_{2nm}^2 K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) - \hat{\delta}_{2nm} K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} \dot{R}_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) + \\
&+ 2 \hat{\delta}_{2nm} K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) q_2 \Omega_{2nm} \sin \Phi_{2nm}(t) + \hat{\delta}_{2nm} K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) \dot{\phi}_{2nm}(t) \sin \Phi_{2nm}(t) - K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} \dot{R}_{2nm}(t) q_2 \Omega_{2nm} \sin \Phi_{2nm}(t) - \\
&\left. - K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) q_2^2 \Omega_{2nm}^2 \cos \Phi_{2nm}(t) - K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) q_2 \Omega_{2nm} \dot{\phi}_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) \right] \quad (3.4.15)
\end{aligned}$$

Zamenjujući pretpostavljena rešenja u sistem parcijalnih nelinearnih diferencijalnih jedanačina drugog reda (3.4.4), množenjem prve i druge jednačine sa $W_{(i)sr}(r, \varphi) r dr d\varphi$ i integraljenjem po srednjoj površi i uzimajući u obzir uslove ortogonalnosti sopstvenih amplitudnih funkcija (3.4.7), za ovakav slučaj graničnih uslova, dobijamo sistem običnih diferencijalnih jednačina drugog reda koje su nehomogene i nelinearne u obliku:

$$\begin{aligned}
\ddot{T}_{(1)nm}(t) - 2\delta_{(1)}(\ddot{T}_{(2)nm}(t) - \dot{T}_{(1)nm}(t)) + \omega_{(1)nm}^2 T_{(1)nm}(t) - a_{(1)}^2 T_{(2)nm}(t) &= \varepsilon \beta_{(1)} \mathfrak{N}(W_{nm}) [T_{(2)nm}(t) - T_{(1)nm}(t)]^3 + f_{(1)nm}(t) \\
\ddot{T}_{(2)nm}(t) + 2\delta_{(2)}(\ddot{T}_{(2)nm}(t) - \dot{T}_{(1)nm}(t)) + \omega_{(2)nm}^2 T_{(2)nm}(t) - a_{(2)}^2 T_{(1)nm}(t) &= -\varepsilon \beta_{(2)} \mathfrak{N}(W_{nm}) [T_{(2)nm}(t) - T_{(1)nm}(t)]^3 - f_{(2)nm}(t), \quad (3.4.16)
\end{aligned}$$

gde je sa $\mathfrak{N}(W_{nm})$ označen: $\mathfrak{N}(W_{nm}) = \frac{\int_0^{r_2} \int_0^{2\pi} W_{(i)nm}^4(r, \varphi) r dr d\varphi}{V_{nm}}$ koeficijent uticaja nelinearnosti elastičnog sloja, a sa

$f_{(i)nm}(t)$ zadate vrednosti spoljašnje prinude kao poznate funkcije vremena $f_{(1)nm}(t)$ i $f_{(2)nm}(t)$ definisane sledećim izrazima:

$$f_{(1)nm}(t) = \frac{\int_0^{r_2} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_1(r, \varphi, t) W_{(1)nm}(r, \varphi) r dr d\varphi}{\int_0^{r_2} \int_0^{2\pi} [W_{(1)nm}(r, \varphi)]^2 r dr d\varphi} \quad f_{(2)nm}(t) = \frac{\int_0^{r_2} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_2(r, \varphi, t) W_{(2)nm}(r, \varphi) r dr d\varphi}{\int_0^{r_2} \int_0^{2\pi} [W_{(2)nm}(r, \varphi)]^2 r dr d\varphi} \quad (3.4.16a)$$

Uvrštavajući prve izvode $\dot{T}_{(i)}(t)$, iz izraza (3.4.13a), i druge izvode $\ddot{T}_{(i)}(t)$, iz izraza (3.4.15), u jednačine (3.4.16) i vodeći računa da mora biti zadovoljen sistem linearizovanih jednačina (3.4.8) dobijaju se još dve jednačine, koje moraju zadovoljiti nepoznate funkcije $\dot{R}_{inn}(t)$ i $\dot{\phi}_{inn}(t)$, u obliku:

$$\begin{aligned}
&- e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} (q_1 \Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm}) K_{21nm}^{(1)} [\dot{R}_{1nm}(t) \sin \Phi_{1nm}(t) + R_{1nm}(t) \dot{\phi}_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t)] - \\
&- e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} (q_2 \Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm}) K_{21nm}^{(2)} [\dot{R}_{2nm}(t) \sin \Phi_{2nm}(t) + R_{2nm}(t) \dot{\phi}_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t)] = \\
&= -2 \hat{\delta}_{1nm} K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) (q_1 \Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm}) \sin \Phi_{1nm}(t) - K_{21nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) (q_1^2 \Omega_{1nm}^2 - \hat{p}_{1nm}^2) \cos \Phi_{1nm}(t) + \\
&+ 2 \hat{\delta}_{2nm} K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) (q_2 \Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm}) \sin \Phi_{2nm}(t) - K_{21nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) (q_2^2 \Omega_{2nm}^2 - \hat{p}_{2nm}^2) \cos \Phi_{2nm}(t) - \\
&- 2 \hat{\delta}_{(1)} \left[K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)} \right] e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) [(q_1 \Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm}) \sin \Phi_{1nm}(t)] + [K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)}] e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) [(q_2 \Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm}) \sin \Phi_{2nm}(t)] + \\
&+ \varepsilon \beta_{(1)} \mathfrak{N}(W_{nm}) \left[(K_{21nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)}) e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) + (K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)}) e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) \right]^3 + f_{(1)nm}(t)
\end{aligned} \quad (3.4.17a)$$

$$\begin{aligned}
&- e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} (q_1 \Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm}) K_{22nm}^{(1)} (\dot{R}_{1nm}(t) \sin \Phi_{1nm}(t) + R_{1nm}(t) \dot{\phi}_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t)) - \\
&- e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} (q_2 \Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm}) K_{22nm}^{(2)} (\dot{R}_{2nm}(t) \sin \Phi_{2nm}(t) + R_{2nm}(t) \dot{\phi}_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t)) = \\
&= -2 \hat{\delta}_{1nm} K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) (q_1 \Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm}) \sin \Phi_{1nm}(t) - K_{22nm}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) (q_1^2 \Omega_{1nm}^2 - \hat{p}_{1nm}^2) \cos \Phi_{1nm}(t) + \\
&+ 2 \hat{\delta}_{2nm} K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) (q_2 \Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm}) \sin \Phi_{2nm}(t) - K_{22nm}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) (q_2^2 \Omega_{2nm}^2 - \hat{p}_{2nm}^2) \cos \Phi_{2nm}(t) + \\
&+ 2 \hat{\delta}_{(2)} \left[K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)} \right] e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) [(q_1 \Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm}) \sin \Phi_{1nm}(t)] + [K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)}] e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) [(q_2 \Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm}) \sin \Phi_{2nm}(t)] - \\
&- \varepsilon \beta_{(2)} \mathfrak{N}(W_{nm}) \left[(K_{21nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)}) e^{-\hat{\delta}_{1nm} t} R_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) + (K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)}) e^{-\hat{\delta}_{2nm} t} R_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) \right]^3 - f_{(2)nm}(t)
\end{aligned} \quad (3.4.17b)$$

Ovakav sistem je dobijen jer su iskorišćene i relacije (3.4.18a) i (3.4.18b). Ovaj sistem se može transformisati tako što se množi prva jednačina sistema (3.4.21a) prvi put sa $K_{22nm}^{(2)}$, odnosno drugi put sa

$K_{22nm}^{(1)}$, a druga jednačina (3.4.21b) prvi put sa $-K_{21nm}^{(2)}$, odnosno drugi put sa $-K_{21nm}^{(1)}$ i sabiraju se tako pomnožene jednačine oba puta, pa sledi sistem:

$$\begin{aligned} & (\dot{R}_{1nm}(t)\sin\Phi_{1nm}(t) + R_{1nm}(t)\dot{\phi}_{1nm}(t)\cos\Phi_{1nm}(t))KK_{nm} = \\ & = KK_{nm}R_{1nm}(t)[2\tilde{\delta}_{(1)}\sin\Phi_{1nm}(t) - (q_1\Omega_{1nm} - \hat{p}_{1nm})\cos\Phi_{1nm}(t)] - \end{aligned} \quad (3.4.18a)$$

$$\begin{aligned} & - [2\tilde{\delta}_{(2)}[K_{21nm}^{(2)}] + 2\tilde{\delta}_{(1)}(K_{22nm}^{(2)})] \left[[K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)}]R_{1nm}(t)\sin\Phi_{1nm}(t) + [K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)}] \frac{e^{-\tilde{\delta}_{2nm}t}R_{2nm}(t)(q_2\Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm})}{e^{-\tilde{\delta}_{1nm}t}(q_1\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})} \sin\Phi_{2nm}(t) \right] + \\ & + \frac{\{K_{21nm}^{(2)}\beta_{(2)} + K_{22nm}^{(2)}\beta_{(1)}\}e^{\mathcal{N}(W_{nm})}}{e^{-\tilde{\delta}_{1nm}t}(q_1\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})} \left[(K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)})e^{-\tilde{\delta}_{1nm}t}R_{1nm}(t)\cos\Phi_{1nm}(t) + (K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)})e^{-\tilde{\delta}_{2nm}t}R_{2nm}(t)\cos\Phi_{2nm}(t) \right] + \frac{K_{21nm}^{(2)}f_{(2)nm}(t) + K_{22nm}^{(2)}f_{(1)nm}(t)}{e^{-\tilde{\delta}_{2nm}t}(q_1\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\dot{R}_{2nm}(t)\sin\Phi_{2nm}(t) + R_{2nm}(t)\dot{\phi}_{2nm}(t)\cos\Phi_{2nm}(t))KK_{nm} = \\ & KK_{nm}R_{2nm}(t)[2\tilde{\delta}_{(2)}K_{21nm}^{(2)}\sin\Phi_{2nm}(t) - K_{21nm}^{(2)}(q_2\Omega_{2nm} - \hat{p}_{2nm})\cos\Phi_{2nm}(t)] - \end{aligned} \quad (3.4.18b)$$

$$\begin{aligned} & - \left\{ (K_{22nm}^{(1)}2\tilde{\delta}_{(1)}) + [K_{21nm}^{(1)}2\tilde{\delta}_{(2)}] \right\} * \left[[K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)}]R_{2nm}(t)\sin\Phi_{2nm}(t) + [K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)}] \frac{e^{-\tilde{\delta}_{1nm}t}R_{1nm}(t)(q_1\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})}{e^{-\tilde{\delta}_{2nm}t}(q_2\Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm})} \sin\Phi_{1nm}(t) \right] + \\ & + \frac{\{K_{21nm}^{(1)}\beta_{(1)} + K_{22nm}^{(1)}\beta_{(2)}\}e^{\mathcal{N}(W_{nm})}}{e^{-\tilde{\delta}_{2nm}t}(q_2\Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm})} \left[(K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)})e^{-\tilde{\delta}_{1nm}t}R_{1nm}(t)\cos\Phi_{1nm}(t) + (K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)})e^{-\tilde{\delta}_{2nm}t}R_{2nm}(t)\cos\Phi_{2nm}(t) \right] + \frac{K_{22nm}^{(1)}f_{(1)nm}(t) + K_{21nm}^{(1)}f_{(2)nm}(t)}{e^{-\tilde{\delta}_{1nm}t}(q_1\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})} \end{aligned}$$

gde smo uveli oznaku za odnos kofaktora sistema u obliku:

$$KK_{nm} = (K_{22nm}^{(1)}K_{21nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(1)}K_{22nm}^{(2)}) \quad (3.4.18c)$$

Rešavanjem sistema (3.4.14) i (3.4.18) sledi sistem diferencijalnih jednačina po $\dot{R}_{inn}(t)$ i $\dot{\phi}_{inn}(t)$, $i=1,2$ u svakom nm obliku oscilovanja:

$$\begin{aligned} \dot{R}_{1nm}(t) &= R_{1nm}(t)[2\tilde{\delta}_{(1)}\sin\Phi_{1nm}(t) - (q_1\Omega_{1nm} - \hat{p}_{1nm})\cos\Phi_{1nm}(t)]\sin\Phi_{1nm}(t) - \\ & - \frac{2\tilde{\delta}_{(2)}[K_{21nm}^{(2)}] + 2\tilde{\delta}_{(1)}(K_{22nm}^{(2)})}{KK_{nm}} \left[[K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)}]R_{1nm}(t)\sin\Phi_{1nm}(t) + [K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)}] \frac{e^{-\tilde{\delta}_{2nm}t}R_{2nm}(t)(q_2\Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm})}{e^{-\tilde{\delta}_{1nm}t}(q_1\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})} \sin\Phi_{2nm}(t) \right] + \\ & + \frac{\{K_{21nm}^{(2)}\beta_{(2)} + K_{22nm}^{(2)}\beta_{(1)}\}e^{\mathcal{N}(W_{nm})}\sin\Phi_{1nm}(t)}{e^{-\tilde{\delta}_{1nm}t}(q_1\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})KK_{nm}} \left[(K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)})e^{-\tilde{\delta}_{1nm}t}R_{1nm}(t)\cos\Phi_{1nm}(t) + (K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)})e^{-\tilde{\delta}_{2nm}t}R_{2nm}(t)\cos\Phi_{2nm}(t) \right] + \frac{K_{21nm}^{(2)}f_{(2)nm}(t) + K_{22nm}^{(2)}f_{(1)nm}(t)}{e^{-\tilde{\delta}_{2nm}t}(q_1\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})} \sin\Phi_{1nm}(t) \end{aligned} \quad (3.4.19a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{1nm}(t) &= [2\tilde{\delta}_{(1)}\sin\Phi_{1nm}(t) - (q_1\Omega_{1nm} - \hat{p}_{1nm})\cos\Phi_{1nm}(t)]\cos\Phi_{1nm}(t) - \\ & - \frac{2\tilde{\delta}_{(2)}[K_{21nm}^{(2)}] + 2\tilde{\delta}_{(1)}(K_{22nm}^{(2)})}{KK_{nm}} \cos\Phi_{1nm}(t) \left[[K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)}]\sin\Phi_{1nm}(t) + [K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)}] \frac{e^{-\tilde{\delta}_{2nm}t}R_{2nm}(t)(q_2\Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm})}{e^{-\tilde{\delta}_{1nm}t}(q_1\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})} \sin\Phi_{2nm}(t) \right] + \\ & + \frac{\{K_{21nm}^{(2)}\beta_{(2)} + K_{22nm}^{(2)}\beta_{(1)}\}e^{\mathcal{N}(W_{nm})}\cos\Phi_{1nm}(t)}{e^{-\tilde{\delta}_{1nm}t}(q_1\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})KK_{nm}R_{1nm}(t)} \left[(K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)})R_{1nm}(t)e^{-\tilde{\delta}_{1nm}t}\cos\Phi_{1nm}(t) + (K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)})e^{-\tilde{\delta}_{2nm}t}R_{2nm}(t)\cos\Phi_{2nm}(t) \right] + \frac{K_{21nm}^{(2)}f_{(2)nm}(t) + K_{22nm}^{(2)}f_{(1)nm}(t)}{e^{-\tilde{\delta}_{1nm}t}(q_1\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})R_{1nm}(t)} \cos\Phi_{1nm}(t) \end{aligned} \quad (3.4.19b)$$

$$\begin{aligned} \dot{R}_{2nm}(t) &= R_{2nm}(t)[2\tilde{\delta}_{(2)}K_{21nm}^{(2)}\sin\Phi_{2nm}(t) - K_{21nm}^{(2)}(q_2\Omega_{2nm} - \hat{p}_{2nm})\cos\Phi_{2nm}(t)]\sin\Phi_{2nm}(t) - \\ & - \frac{\{K_{22nm}^{(1)}2\tilde{\delta}_{(1)}\} + [K_{21nm}^{(1)}2\tilde{\delta}_{(2)}]}{KK_{nm}} \left[[K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)}]R_{2nm}(t)\sin\Phi_{2nm}(t) + [K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)}] \frac{e^{-\tilde{\delta}_{1nm}t}R_{1nm}(t)(q_1\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})}{e^{-\tilde{\delta}_{2nm}t}(q_2\Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm})} \sin\Phi_{1nm}(t) \right] + \\ & + \frac{\{K_{21nm}^{(1)}\beta_{(1)} + K_{22nm}^{(1)}\beta_{(2)}\}e^{\mathcal{N}(W_{nm})}\sin\Phi_{2nm}(t)}{e^{-\tilde{\delta}_{2nm}t}(q_2\Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm})KK_{nm}} \left[(K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)})e^{-\tilde{\delta}_{1nm}t}R_{1nm}(t)\cos\Phi_{1nm}(t) + (K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)})e^{-\tilde{\delta}_{2nm}t}R_{2nm}(t)\cos\Phi_{2nm}(t) \right] + \frac{K_{22nm}^{(1)}f_{(1)nm}(t) + K_{21nm}^{(1)}f_{(2)nm}(t)}{e^{-\tilde{\delta}_{1nm}t}(q_1\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})} \sin\Phi_{2nm}(t) \end{aligned} \quad (3.4.19c)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{2nm}(t) &= [2\tilde{\delta}_{(2)}K_{21nm}^{(2)}\sin\Phi_{2nm}(t) - K_{21nm}^{(2)}(q_2\Omega_{2nm} - \hat{p}_{2nm})\cos\Phi_{2nm}(t)]\cos\Phi_{2nm}(t) - \\ & - \frac{\{K_{22nm}^{(1)}2\tilde{\delta}_{(1)}\} + [K_{21nm}^{(1)}2\tilde{\delta}_{(2)}]}{KK_{nm}} \cos\Phi_{2nm}(t) \left[[K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)}]\sin\Phi_{2nm}(t) + [K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)}] \frac{e^{-\tilde{\delta}_{1nm}t}R_{1nm}(t)(q_1\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})}{e^{-\tilde{\delta}_{2nm}t}(q_2\Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm})} \sin\Phi_{1nm}(t) \right] + \\ & + \frac{\{K_{21nm}^{(1)}\beta_{(1)} + K_{22nm}^{(1)}\beta_{(2)}\}e^{\mathcal{N}(W_{nm})}\cos\Phi_{2nm}(t)}{e^{-\tilde{\delta}_{2nm}t}(q_2\Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm})KK_{nm}R_{2nm}(t)} \left[(K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)})e^{-\tilde{\delta}_{1nm}t}R_{1nm}(t)\cos\Phi_{1nm}(t) + (K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)})e^{-\tilde{\delta}_{2nm}t}R_{2nm}(t)\cos\Phi_{2nm}(t) \right] + \frac{K_{22nm}^{(1)}f_{(1)nm}(t) + K_{21nm}^{(1)}f_{(2)nm}(t)}{e^{-\tilde{\delta}_{2nm}t}(q_2\Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm})R_{2nm}(t)} \cos\Phi_{2nm}(t) \end{aligned} \quad (3.4.19d)$$

Primenom usrednjenja, [140-150, 259], desnih strana ovog sistema jednačina (3.4.23) po punim fazama

$\Phi_{1nm}^{(i)}(t)$ i $\Phi_{2nm}^{(i)}(t)$, dobija se rezultat u obliku:

$$\dot{a}_{1nm}(t) = -\frac{a_{1nm}(t)}{KK_{nm}} [K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)}] \left\{ \tilde{\delta}_{(2)}K_{21nm}^{(2)} + \tilde{\delta}_{(1)}K_{22nm}^{(2)} \right\} + \frac{1}{4\pi^2 KK_{nm}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_{(1)nm}K_{22nm}^{(2)} + f_{(2)nm}K_{21nm}^{(2)}}{(q_1\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})} \sin\Phi_{1nm}(t) d\Phi_{1nm} d\Phi_{2nm} \quad (3.4.20a)$$

$$\dot{\phi}_{1nm}(t) = \hat{p}_{1nm} - q_1 \Omega_{1nm} + \frac{\varepsilon \mathcal{N}(W_{nm}) (\beta_{(2)} K_{21nm}^{(2)} + \beta_{(1)} K_{22nm}^{(2)})}{(q_1 \Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm}) K K_{nm}} \left[\frac{3}{8} (K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)})^3 a_{1nm}^2(t) + \frac{1}{2} (K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)})^2 (K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)}) a_{2nm}^2(t) \right] + \quad (3.4.20b)$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2 K K_{nm}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(f_{(1)nm} K_{22nm}^{(2)} + f_{(2)nm} K_{21nm}^{(2)})}{(q_1 \Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm}) a_{1nm}(t)} \cos \Phi_{1nm}(t) d\Phi_{1nm} d\Phi_{2nm}$$

$$\dot{a}_{2nm}(t) = -\frac{a_{2nm}(t)}{K K_{nm}} [K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)}] \{ \tilde{\delta}_{(1)} K_{22nm}^{(1)} + \tilde{\delta}_{(2)} K_{21nm}^{(1)} \} + \frac{1}{4\pi^2 K K_{nm}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_{(1)nm}(t) K_{22nm}^{(1)} + f_{(2)nm}(t) K_{21nm}^{(1)}}{(q_2 \Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm})} \sin \Phi_{2nm}(t) d\Phi_{1nm}(t) d\Phi_{2nm}(t) \quad (3.4.20c)$$

$$\dot{\phi}_{2nm}(t) = \hat{p}_{2nm} - q_2 \Omega_{2nm} + \frac{\varepsilon \mathcal{N}(W_{nm}) (\beta_{(1)} K_{22nm}^{(1)} + \beta_{(2)} K_{21nm}^{(1)})}{(q_2 \Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm}) K K_{nm}} \left[\frac{1}{2} (K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)})^2 (K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)}) a_{1nm}^2(t) + (K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)})^3 \frac{3}{8} a_{2nm}^2(t) \right] + \quad (3.4.20d)$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2 K K_{nm}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_{(1)nm}(t) K_{22nm}^{(1)} + f_{(2)nm}(t) K_{21nm}^{(1)}}{(q_2 \Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm}) a_{2nm}(t)} \cos \Phi_{2nm}(t) d\Phi_{1nm} d\Phi_{2nm}$$

gde se koristila smena promenljivih u obliku:

$$a_{innm}(t) = R_{innm}(t) e^{-\hat{\delta}_{innm} t} \text{ pa je } \dot{a}_{innm}(t) = (\dot{R}_{innm}(t) - \hat{\delta}_{innm} R_{innm}(t)) e^{-\hat{\delta}_{innm} t}. \quad (3.4.20e)$$

Dobijeni sistem diferencijalnih jednačina (3.4.20) predstavlja prvu asimptotsku aproksimaciju rešenja jednačina vremenskih funkcija transverzalnih oscilacija tačaka srednih ravni ploča koje su spregnute slojem visko-elastičnih nelinearnih elemenata. Rešavanje ovoga sistema, osim u pojedinim slučajevima zanemarivanja pojedinih elemenata sistema [259], nije moguće dobiti u zatvorenom obliku, pa se sistem uglavnom rešava numerički i to u stacionarnom ili nestacionarnom režimu oscilovanja, o čemu će biti reči više u poglavljima 4.3 i 4.4.

3.4.1. Određivanje sopstvenih amplitudnih funkcija kružnih ploča

Kada se radi o kružnoj ploči pogodno je koristiti polarno cilindrični koordinatni sistem, *slika* 3.4.2, i vezu polarnih koordinata sa Descates-ovim koordinatama: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $r^2 = x^2 + y^2$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$

gde su:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \cos^2 \varphi = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos^2 \varphi}{x} = \frac{\cos \varphi}{r}, \quad (3.4.21)$$

Pomoću ovih izraza dobija se nagib elastične površine ploče u x i y pravcu:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \quad (3.4.22)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Da bi se došlo do izraza za krivine u polarnim kordinatama, potrebni su izvodi drugog reda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin^2 \varphi}{r} + 2 \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \end{aligned} \quad (3.4.23a)$$

Na isti način dobija se:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\cos^2 \varphi}{r} - 2 \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \quad (3.4.23b)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \frac{\cos 2\varphi}{r} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\cos 2\varphi}{r^2} - \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \sin 2\varphi\end{aligned}\quad (3.4.23c)$$

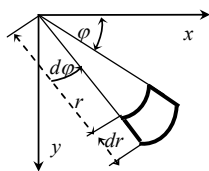
Laplace-ov operator izražen preko polarnih koordinata je :

$$\Delta(r, \varphi) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \quad (3.4.24)$$

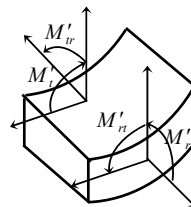
Diferencijalna jednačina elastične površine poprečno opterećene kružne ploče u polarnim koordinatama je onda [238]:

$$\Delta \Delta w(r, \varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{q(r, \varphi)}{D} \quad (3.4.25)$$

Posmatra se element isečen iz ploče sa dve susedne meridijanske ravni koje zatvaraju ugao $d\varphi$ i dve cilindrične površine poluprečnika r , odnosno $r + dr$, slika 3.4.2 i 3.4.3.



Slika 3.4.2



Slika 3.4.3

Sa M'_r , M'_t i M'_{rt} obeležavaju se momenti savijanja i momenti uvijanja koji deluju na jedinicu dužine elemenata, uzimajući njihove pozitivne smerove kao što je prikazano na slici 3.4.3. Da bi se izrazili momenti pomoću ugiba w ploče, pretpostavlja se da se x -osa poklapa sa poluprečnikom r . Momenti M'_r , M'_t i M'_{rt} tada imaju iste vrednosti kao i momenti M'_x , M'_y i M'_{xy} u istoj tački, pa kada se stavi $\varphi = 0$ u izrazima (3.4.23a, b i c), sledi:

$$\begin{aligned}M'_r &= -D \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right)_{\varphi=0} = -D \left[\frac{\partial^2 w(r, \varphi, t)}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} \right) \right], \\ M'_t &= -D \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} \right)_{\varphi=0} = -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} + \mu \frac{\partial^2 w(r, \varphi, t)}{\partial r^2} \right], \\ M'_{rt} &= M'_{xt} = -(1 - \mu) D \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right)_{\varphi=0} = (1 - \mu) D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w(r, \varphi, t)}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} \right).\end{aligned}\quad (3.4.26)$$

Za slobodnu kružnu ploču pri $q(r, \varphi) = 0$ talasna jednačina kružne ploče je [238]:

$$\frac{\partial^2 w(r, \varphi, t)}{\partial t^2} = -c^4 \Delta \Delta w(r, \varphi, t) \quad (3.4.27)$$

gde je uvedena smena: $c^4 = D/\rho h$ -redukovane savojne krutosti ploče.

Na ovaj način, problem transverzalnih oscilacija ploče se sveo na integraljenje linearne parcijalne diferencijalne jednačine četvrtog reda (3.4.27).

Rešenje ove jednačine, po Bernoulli-ovoj metodi partikularnih integrala, pretpostavlja se u obliku proizvoda dve funkcije od kojih jedna zavisi samo od vremena $T(t)$, vremenska funkcija, a druga od koordinata ploče $w(r, \varphi)$, sopstvena amplitudna funkcija ploče.

$$w(r, \varphi, t) = W(r, \varphi) \cdot T(t), \quad (3.4.28)$$

pa se jednačina (3.4.27) razdvaja na dve jednačine:

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0; \quad (3.4.29a)$$

$$\Delta \Delta W(r, \varphi) - k^4 W(r, \varphi) = 0, \quad (3.4.29b)$$

gde su uvedene smene: $C = \omega^2$; $k^4 = C/c^4 = \omega^2 \rho h / D$

Druga jednačina sistema jednačina (3.4.29b), zbog osobina Laplace-ovog operatora,

$$\Delta \Delta W - k^4 W = (\Delta \Delta - k^4) W = (\Delta - k^2) \mathcal{W} \cdot (\Delta + k^2) \mathcal{W} = 0$$

raspada se dalje na dve parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda:

$$\Delta W(r, \varphi) \pm k^2 W(r, \varphi) = 0; \quad (3.4.29c)$$

gde su sa: $\omega = k^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ označene sopstvene kružne frekvencije ploče.

Imajući u vidu izraz za Laplace-ov operator izražen preko polarnih koordinata (3.4.24) jednačine (3.4.29c) dobijaju oblik:

$$\frac{\partial^2 W(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \pm k^2 W(r, \varphi) = 0.$$

Rešenje ove parcijalne diferencijalne jednačine prema Bernouli-jevoj metodi partikularnih integrala pretpostavlja se u obliku:

$$\mathbf{W}(r, \varphi) = \mathbf{R}(r) \Phi(\varphi), \quad (3.4.30)$$

pa sledi:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}(r) \Phi(\varphi) \pm k^2 \mathbf{R}(r) \Phi(\varphi) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \pm k^2 \right) \mathbf{R}(r) \Phi(\varphi) = \\ &= \left\{ \left[\frac{d^2 \mathbf{R}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{R}(r)}{dr} \right] \Phi(\varphi) + \mathbf{R}(r) \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} \pm k^2 \mathbf{R}(r) \Phi(\varphi) \right\} = 0 \end{aligned}$$

Deljenjem ove jednačine sa $\mathbf{R}(r) \Phi(\varphi)$ dobija se sledeće:

$$\frac{1}{\mathbf{R}(r)} \left[\frac{d^2 \mathbf{R}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{R}(r)}{dr} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} \pm k^2 = 0.$$

Da bi bilo rešenja u pretpostavljenom obliku (3.4.30) potrebno je da bude zadovoljena sledeća jednakost:

$$\frac{1}{\Phi_n(\varphi)} \frac{d^2 \Phi_n(\varphi)}{d\varphi^2} = -n^2 \quad (3.4.31)$$

koja ima rešenje:

$$\Phi_n(\varphi) = C_n \cos(n\varphi + \alpha_n). \quad (3.4.31a)$$

Sada sledi da je:

$$\frac{1}{\mathbf{R}_n(r)} \left[\frac{d^2 \mathbf{R}_n(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{R}_n(r)}{dr} \right] - \frac{n^2}{r^2} \pm k_n^2 = 0. \quad (3.4.32)$$

k_n sada dobija indeks jer se vezuje za funkcije $\mathbf{w}_n(r, \varphi) = \mathbf{R}_n(r) \Phi_n(\varphi)$, a isto tako i vremenske funkcije dobijaju indeks n :

$$\Delta \Delta \mathbf{W}_n(r, \varphi) - k^4 \mathbf{W}_n(r, \varphi) = 0,$$

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = 0$$

gde je $\omega_n = k_n^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ za n sopstvenih kružnih frekvencija ploče, a k_n i dalje nepoznata konstanta,

sopstveni broj koji se određuje iz uslova zadovoljenja graničnih uslova. Jednačina (3.4.32) svodi se na:

$$\left[\frac{d^2 \mathbf{R}_n(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{R}_n(r)}{dr} \right] + \left(\pm k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \mathbf{R}_n(r) = 0,$$

odnosno nakon uvođenja smene $x_n = k_n r$, na:

$$\left[\frac{d^2 \mathbf{R}_n(x_n)}{dx_n^2} + \frac{1}{x_n} \frac{d\mathbf{R}_n(x_n)}{dx_n} \right] + \left(\pm 1 - \frac{n^2}{x_n^2} \right) \mathbf{R}_n(x_n) = 0. \quad (3.4.33)$$

Ovo je diferencijalna jednačina Bessel-ovog tipa. Bessel-ove funkcije II vrste tj. Neumann-ove funkcije imaju beskrajno velike vrednosti za $x_n = 0$ te kao rešenja jednačine (3.4.33) dolaze u obzir samo

Besselove funkcije I vrste, ali se zbog vrednosti $\pm x^2$ moraju uzeti ove funkcije i sa realnim, $J_n(x)$, i sa imaginarnim argumentom, $I_n(x)$, tj. modificirane Bessel-ove funkcije I vrste, reda n . Ona je realna kada je n ceo broj. Rešenja jednačine (3.4.33) su: $\mathbf{R}_n(x_n) = D_n J_n(x_n) + E_n I_n(x_n)$, odnosno:

$$\mathbf{R}_n(k_n r) = D_n J_n(k_n r) + E_n I_n(k_n r) \quad (3.4.34)$$

gde su: $\mathbf{I}_n(x) = (i)^{-n} \mathbf{J}_n(ix) = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-x \cos t} \cos n t dt$.

Ako je n prirodan broj, tada funkcija zadovoljava Bessel-ovu diferencijalnu jednačinu oblika:

$$\mathbf{I}_n''(ix) + \frac{1}{ix} \mathbf{I}_n'(ix) - \left(1 + \frac{n^2}{(ix)^2} \right) \mathbf{I}_n(ix) = 0$$

Rešenje prve diferencijalne jednačine sistema (3.4.29a) po vremenskoj funkciji je:

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t. \quad (3.4.35)$$

Imajući u vidu partikularna rešenja (3.4.31a), (3.4.34) i (3.4.35) zakonitost pomeranja tačaka elastične-neutralne-površine kružne ploče je:

$$w_n(r, \varphi, t) = \mathbf{R}_n(k_n r) \Phi_n(\varphi) T_n(t) \quad (3.4.36)$$

ovo rešenje treba da zadovoljava granične uslove.

U slučaju potpuno slobodne kružne ploče Kirhoff-ljevi uslovi su oblika:

$$\left[\Delta W + \frac{1-\mu}{\mu} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right]_{r=a} = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial r} \Delta W + \frac{1-\mu}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) \right]_{r=a} = 0, \text{ a uprošćeni granični uslovi biće:}$$

ugibi u svim tačkama konture $r = a$ su jednaki nuli:

$$w(a, \varphi, t) = 0$$

iz kog uslova sledi:

$$w_n(r, \varphi, t)|_{r=a} = R_n(k_n r)|_{r=a} \Phi_n(\varphi) T_n(t) = 0 \Rightarrow R_n(k_n r)|_{r=a} = 0 \Rightarrow R_n(k_n a) = 0,$$

odnosno:

$$D_n J_n(k_n a) + E_n I_n(k_n a) = 0 \quad (\text{a}^*)$$

A kako se ploča može obrtati oko te ivice to mora i moment savijanja oko nje biti jednak nuli:

$$M_r'(a, \varphi) = 0, \text{ odnosno:}$$

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) \right]_{r=a} = 0,$$

što posle unošenja pretpostavljenog rešenja postaje:

$$\left[\frac{d^2 R_n(k_n r)}{dr^2} \Phi_n(\varphi) + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{dR_n(k_n r)}{dr} \Phi_n(\varphi) + \frac{1}{r^2} R_n(k_n r) \frac{d^2 \Phi_n(\varphi)}{d\varphi^2} \right) \right]_{r=a} = 0.$$

Kako je iz (3.4.31):

$$\frac{d^2 \Phi_n(\varphi)}{d\varphi^2} = -n^2 \Phi_n(\varphi), \text{ to sledi za } r = a :$$

$$\mathbf{R}_n''(k_n a) + \frac{\mu}{a} \mathbf{R}_n'(k_n a) - \frac{\mu n^2}{a^2} \mathbf{R}_n(k_n a) = 0. \quad (\text{b}^*)$$

S obzirom na (3.4.34), za prvi i drugi izvod funkcije $R_n(k_n r)$ po r , a na konturi za $r = a$ slede izrazi:

$$\left. \frac{dR_n(k_n r)}{dr} \right|_{r=a} = k_n [D_n J_n'(k_n a) + E_n I_n'(k_n a)] \text{ i } \left. \frac{d^2 R_n(k_n r)}{dr^2} \right|_{r=a} = k_n^2 [D_n J_n''(k_n a) + E_n I_n''(k_n a)]$$

pa se jednačina (b*) svodi na:

$$k_n^2 [D_n \mathbf{J}_n''(k_n a) + E_n \mathbf{I}_n''(k_n a)] + \frac{\mu}{a} k_n [D_n \mathbf{J}_n'(k_n a) + E_n \mathbf{I}_n'(k_n a)] - \frac{n^2 \mu}{a^2} [D_n \mathbf{J}_n(k_n a) + E_n \mathbf{I}_n(k_n a)] = 0,$$

odnosno:

$$D_n \left[k_n^2 \mathbf{J}_n''(k_n a) + \frac{\mu}{a} k_n \mathbf{J}_n'(k_n a) - \frac{n^2}{a^2} \mathbf{J}_n(k_n a) \right] + E_n \left[k_n^2 \mathbf{I}_n''(k_n a) + \frac{\mu}{a} k_n \mathbf{I}_n'(k_n a) - \frac{n^2 \mu}{a^2} \mathbf{I}_n(k_n a) \right] = 0 \quad (\text{c}^*)$$

Iz sistema dve jednačine po nepoznatim E_n i D_n a* i c* sledi da bi taj sistem imao rešenja različita od trivijalnih da determinanta sistema treba da bude jednaka nuli, tj. sledi frekventna jednačina:

$$\left[k_n^2 \mathbf{J}_n''(k_n a) + \frac{\mu}{a} k_n \mathbf{J}_n'(k_n a) - \frac{\mu n^2}{a^2} \mathbf{J}_n(k_n a) \right] \mathbf{I}_n(k_n a) - \left[k_n^2 \mathbf{I}_n''(k_n a) + \frac{\mu}{a} k_n \mathbf{I}_n'(k_n a) - \frac{\mu n^2}{a^2} \mathbf{I}_n(k_n a) \right] \mathbf{J}_n(k_n a) = 0, \quad \text{odnosno} \quad \text{posle}$$

$$\text{sređivanja: } k_n (J_n''(k_n a) I_n(k_n a) - I_n''(k_n a) J_n(k_n a)) + \frac{\mu}{a} (J_n'(k_n a) I_n(k_n a) - I_n'(k_n a) J_n(k_n a)) = 0$$

Za $k_n a = \lambda_n$ sledi transcendentna karakteristična jednačina:

$$\lambda_n (J_n''(\lambda_n) I_n(\lambda_n) - I_n''(\lambda_n) J_n(\lambda_n)) + \mu (J_n'(\lambda_n) I_n(\lambda_n) - I_n'(\lambda_n) J_n(\lambda_n)) = 0 \quad (3.4.37)$$

koja ima m korena za svaku vrednost $n = 0, 1, 2, \dots$ tj. λ_{nm} za $n = 0, 1, 2, \dots$ i $m = 1, 2, 3, \dots$

Za slučaj ukleštene kružne ploče po konturi, gde su ugibi jednaki nuli:

$$w(a, \varphi, t) = 0, \quad (3.4.38)$$

iz kog uslova sledi:

$$w_n(r, \varphi, t) \Big|_{r=a} = \mathbf{R}_n(k_n r) \Big|_{r=a} \Phi_n(\varphi) \mathbf{T}_n(t) = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_n(k_n r) \Big|_{r=a} = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_n(k_n a) = 0, \quad (3.4.38a)$$

a takođe su i nagibi tangentne ravni u tačkama na konturi ploče jednaki nuli:

$$\left. \frac{\partial w(r, \varphi, t)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \text{ i } \left. \frac{\partial w(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} \right|_{r=a} = 0, \quad (3.4.39)$$

iz kojih uslova sledi:

$$\left. \frac{\partial w_n(r, \varphi, t)}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{d\mathbf{R}_n(k_n r)}{dr} \right|_{r=a} \Phi_n(\varphi) \mathbf{T}_n(t) = 0 \Rightarrow \left. \frac{d\mathbf{R}_n(k_n r)}{dr} \right|_{r=a} = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_n'(k_n a) = 0 \quad (3.4.39a)$$

i

$$\left. \frac{\partial w_n(r, \varphi, t)}{\partial \varphi} \right|_{r=a} = \mathbf{R}_n(k_n r) \Big|_{r=a} \frac{d\Phi_n(\varphi)}{d\varphi} \mathbf{T}_n(t) = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_n(k_n r) \Big|_{r=a} = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_n(k_n a) = 0 \quad (3.4.39b)$$

Uslovi (3.4.38a) i (3.4.39b) su isti, pa se ova tri uslova svode na dva (3.4.38a) i (3.4.39a). Pomoću prethodnih uslova dobija se sledeće:

$$\mathbf{R}_n(k_n, a) = D_n \mathbf{J}_n(k_n, a) + E_n \mathbf{I}_n(k_n, a) = 0$$

$$\left. \frac{d\mathbf{R}_n(k_n, r)}{dr} \right|_{r=a} = k_n [D_n \mathbf{J}'_n(k_n, a) + E_n \mathbf{I}'_n(k_n, a)] = 0 \quad (3.4.40)$$

Ovo je sada sistem od dve homogene algebarske jednačine čiji su koeficijenti specijalne funkcije. Da bi taj sistem homogenih algebarskih jednačina imao rešenja različita od trivijalnih, nultih potrebno je da determinanta sistema bude jednaka nuli:

$$\Delta_n(k_n, a) = f_n(k_n, a) = k_n \begin{vmatrix} \mathbf{J}_n(k_n, a) & \mathbf{I}_n(k_n, a) \\ \mathbf{J}'_n(k_n, a) & \mathbf{I}'_n(k_n, a) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.4.40a)$$

Ova jednačina predstavlja familiju m jednačina za svako izabrano n . To je frekventna jednačina ili karakteristična jednačina. Ta jednačina ima beskonačno mnogo korena koje će se označiti sa k_{nm} , $m = 1, 2, 3, \dots$ i predstavlja m -tu familiju sopstvenih brojeva za svako $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Znači da svi koreni svih jednačina (3.4.40a) predstavljaju sopstvene brojeve k_{nm} , $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Jednačina (3.4.40a) se može napisati i u obliku:

$$\Delta_n(\lambda_n) = f_n(\lambda_n) = k_n \begin{vmatrix} \mathbf{J}_n(\lambda_n) & \mathbf{I}_n(\lambda_n) \\ \mathbf{J}'_n(\lambda_n) & \mathbf{I}'_n(\lambda_n) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.4.40b)$$

Koreni ove jednačine su λ_{nm} , $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$, $m = 1, 2, 3, \dots$ pa je $k_{nm} = \frac{\lambda_{nm}}{a}$.

Odnosi amplituda su: $\frac{D_{nm}}{K_{21}^{(m)}} = \frac{E_{nm}}{K_{22}^{(m)}} = L_{nm}$, odnosno: $\frac{D_{nm}}{-\mathbf{I}_n(\lambda_{nm})} = \frac{E_{nm}}{\mathbf{J}_n(\lambda_{nm})} = L_{nm}$,

odakle sledi da su:

$$\begin{aligned} D_{nm} &= -L_{nm} \mathbf{I}_n(\lambda_{nm}) \\ E_{nm} &= L_{nm} \mathbf{J}_n(\lambda_{nm}) \end{aligned} \quad (3.4.41)$$

Sada su partikularna rešenja:

$$T_{nm}(t) = A_{nm} \cos \omega_{nm} t + B_{nm} \sin \omega_{nm} t \quad (3.4.42)$$

$$R_{nm}(k_{nm}, r) = D_{nm} J_n(k_{nm}, r) + E_{nm} I_n(k_{nm}, r)$$

odnosno imajući u vidu rešenja za amplitude (3.4.41):

$$R_{nm}(k_{nm}, r) = L_{nm} \left\{ J_n(k_{nm}, r) - \frac{J_n(k_{nm}, a)}{I_n(k_{nm}, a)} I_n(k_{nm}, r) \right\} \quad \text{i} \quad (3.4.43)$$

$$\Phi_n(\varphi) = C_n \cos(n\varphi + \alpha_n) \quad (3.4.43a)$$

Kako je: $w_{nm}(r, \varphi, t) = R_{nm}(k_{nm}, r) \Phi_n(\varphi) T_{nm}(t)$ to je opšte rešenje za transversalne ugibe tačaka srednje ravni slobodne kružne ploče oblika:

$$w(r, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{nm}(r, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} R_{nm}(k_{nm}, r) \Phi_n(\varphi) T_{nm}(t) \quad (3.4.44)$$

odnosno:

$$w(r, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ J_n(k_{nm}, r) - \frac{J_n(k_{nm}, a)}{I_n(k_{nm}, a)} I_n(k_{nm}, r) \right\} \cos(n\varphi + \alpha_n) (\tilde{A}_{nm} \cos \omega_{nm} t + \tilde{B}_{nm} \sin \omega_{nm} t) \quad (3.4.44a)$$

gde su konstante vremenske funkcije $T(t)$ oblika: $\tilde{A}_{nm} = L_{nm} A_{nm} C_n$ i $\tilde{B}_{nm} = L_{nm} B_{nm} C_n$,

koje zavise od zadatih početnih uslova, i nm sopstvenih kružnih frekvencija oscilovanja kružne ploče:

$$\omega_{nm} = k_{nm}^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \left(\frac{\lambda_{nm}}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (3.4.45)$$

Početni uslovi mogu biti zadati u sledećem obliku:

$$w(r, \varphi, 0) = g(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{0nm} R_{nm}(k_{nm}r) \Phi_n(\varphi) \text{ - transversalnim ugibom tačkaka srednje ravni ploče i}$$

$$\left. \frac{\partial w(r, \varphi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \tilde{g}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{w}_{0nm} \omega_0 R_{nm}(k_{nm}r) \Phi_n(\varphi) \text{ - brzinama tačkaka srednje ravni ploče. Funkcije } g(r, \varphi) \text{ i } \tilde{g}(r, \varphi)$$

treba da zadovoljavaju granične uslove, pa se mogu predstaviti u obliku reda po sopstvenim funkcijama:

$$w(r, \varphi, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{0nm} \left\{ J_n(k_{nm}r) - \frac{J_n(k_{nm}a)}{I_n(k_{nm}a)} I_n(k_{nm}r) \right\} \cos(n\varphi + \alpha_n)$$

$$\left. \frac{\partial w(r, \varphi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{w}_{0nm} \omega_0 \left\{ J_n(k_{nm}r) - \frac{J_n(k_{nm}a)}{I_n(k_{nm}a)} I_n(k_{nm}r) \right\} \cos(n\varphi + \alpha_n),$$

pri tome se koriste uslovi ortogonalnosti (3.4.7), pa su:

$$w_{0nm} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ J_n(k_{nm}r) - \frac{J_n(k_{nm}a)}{I_n(k_{nm}a)} I_n(k_{nm}r) \right\} \cos(n\varphi + \alpha_n) g(r, \varphi) r d\varphi dr}{\int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ J_n(k_{nm}r) - \frac{J_n(k_{nm}a)}{I_n(k_{nm}a)} I_n(k_{nm}r) \right\}^2 \cos^2(n\varphi + \alpha_n) r d\varphi dr}$$

$$\tilde{w}_{0nm} \omega_0 = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ J_n(k_{nm}r) - \frac{J_n(k_{nm}a)}{I_n(k_{nm}a)} I_n(k_{nm}r) \right\} \cos(n\varphi + \alpha_n) \tilde{g}(r, \varphi) r d\varphi dr}{\int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ J_n(k_{nm}r) - \frac{J_n(k_{nm}a)}{I_n(k_{nm}a)} I_n(k_{nm}r) \right\}^2 \cos^2(n\varphi + \alpha_n) r d\varphi dr}$$

Kako su pomeranja tačkaka ploče i njihove brzine u početnom trenutku:

$$w(r, \varphi, t) \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{A}_{nm} \left\{ J_n(k_{nm}r) - \frac{J_n(k_{nm}a)}{I_n(k_{nm}a)} I_n(k_{nm}r) \right\} \cos(n\varphi + \alpha_n)$$

$$\left. \frac{\partial w(r, \varphi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{B}_{nm} \omega_{nm} \left\{ J_n(k_{nm}r) - \frac{J_n(k_{nm}a)}{I_n(k_{nm}a)} I_n(k_{nm}r) \right\} \cos(n\varphi + \alpha_n),$$

to nije teško odrediti nepoznate koeficijente u obliku:

$$\tilde{A}_{nm} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ J_n(k_{nm}r) - \frac{J_n(k_{nm}a)}{I_n(k_{nm}a)} I_n(k_{nm}r) \right\} \cos(n\varphi + \alpha_n) g(r, \varphi) r d\varphi dr}{\int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ J_n(k_{nm}r) - \frac{J_n(k_{nm}a)}{I_n(k_{nm}a)} I_n(k_{nm}r) \right\}^2 \cos^2(n\varphi + \alpha_n) r d\varphi dr}$$

$$\tilde{B}_{nm} = \frac{\tilde{w}_{0nm} \omega_0}{\omega_{nm}} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ J_n(k_{nm}r) - \frac{J_n(k_{nm}a)}{I_n(k_{nm}a)} I_n(k_{nm}r) \right\} \cos(n\varphi + \alpha_n) \tilde{g}(r, \varphi) r d\varphi dr}{\omega_{nm} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ J_n(k_{nm}r) - \frac{J_n(k_{nm}a)}{I_n(k_{nm}a)} I_n(k_{nm}r) \right\}^2 \cos^2(n\varphi + \alpha_n) r d\varphi dr}$$

Uslovi ortogonalnosti sopstvenih funkcija su:

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ J_n(k_{nm}r) - \frac{J_n(k_{nm}a)}{I_n(k_{nm}a)} I_n(k_{nm}r) \right\} \left\{ J_s(k_{sj}r) - \frac{J_s(k_{sj}a)}{I_s(k_{sj}a)} I_s(k_{sj}r) \right\} \cos(n\varphi + \alpha_n) \cos(s\varphi + \alpha_s) r d\varphi dr = 0$$

$$\text{za } nm \neq sj \text{ ili: } \int_0^a \int_0^{2\pi} \mathbf{w}_{nm}(r, \varphi) \mathbf{w}_{sj}(r, \varphi) r d\varphi dr = 0$$

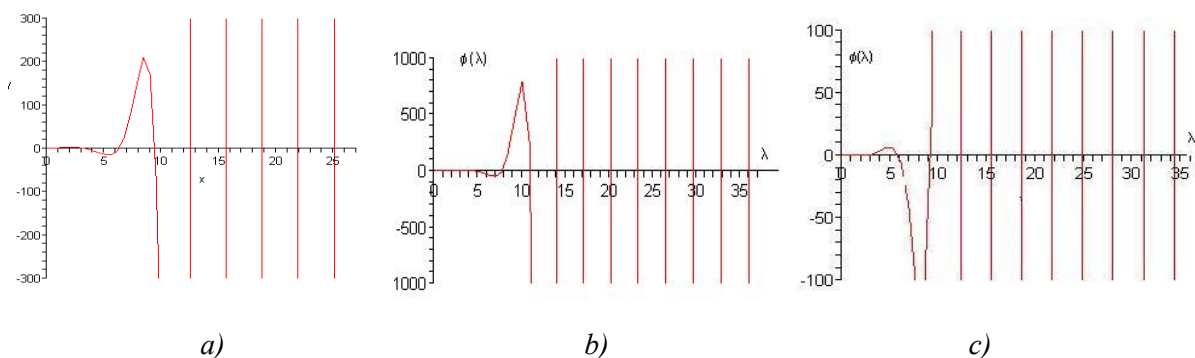
$$\text{za } nm = sj \text{ iz jednačina: } \Delta \Delta \mathbf{w}_{nm}(r, \varphi) - k_{nm}^4 \mathbf{w}_{nm}(r, \varphi) = 0 \text{ ili: } \Delta \mathbf{w}_{nm}(r, \varphi) \pm k_{nm}^2 \mathbf{w}_{nm}(r, \varphi) = 0$$

$$\Delta \Delta \mathbf{w}_{sj}(r, \varphi) - k_{sj}^4 \mathbf{w}_{sj}(r, \varphi) = 0 \quad \Delta \mathbf{w}_{sj}(r, \varphi) \pm k_{sj}^2 \mathbf{w}_{sj}(r, \varphi) = 0$$

množenjem sa $\mathbf{w}_{nm}(r, \varphi) r d\varphi dr$ druge i $\mathbf{w}_{sj}(r, \varphi) r d\varphi dr$ prve, sumiranjem po indeksima nm, sj i integraljenjem po površini ploče, i oduzimanjem jednačina i korišćenjem parcijalne integracije, i analizom rezultata vodeći računa, koji su sve uslovi zadovoljeni za razne kombinacije graničnih uslova ploče dobijaju se uslovi ortogonalnosti oblika (3.4.7). Karakteristična transcendentna jednačina je oblika (3.4.40b). Delovi grafika tih jednačina za vrednosti $n = 0$, $n = 1$ i $n = 2$ dati su na slici 3.4.4.

Na primer sa slike 3.4.4.a) mogu se pročitati karakteristične vrednosti $\lambda_{01} = 3.196$, $\lambda_{02} = 6.306$, $\lambda_{03} = 9.439$ itd, ili sa slike 3.4.4.b) karakteristične vrednosti $\lambda_{11} = 4.61$, $\lambda_{12} = 7.8$, $\lambda_{13} = 10.96$, ... Jedan broj ovako izračunatih sopstvenih vrednosti oscilovanja kružne ploče sumiran je u tabeli 1. Kada se te vrednosti uporede sa onima iz tabele 20.2 iz knjige „Teorija oscilacija“ Danila Raškovića, [238], iz 1974 (slika 3.4.5.) , koja takođe daje vrednosti nekoliko prvih karakterističnih brojeva, mogu se uočiti veoma male razlike rezultata uglavnom u četvrtoj ili petoj decimali.

Na slici 3.4.6 prikazani su oblici sopstvenih amplitudnih funkcija kružne ploče ukleštene po konturi na elastičnoj podlozi, i to za: a) vrednosti karakterističnih brojeva $\lambda_{01} = 3.196$, $\lambda_{02} = 6.306$, $\lambda_{03} = 9.439$; b) vrednosti karakterističnih brojeva $\lambda_{11} = 4.61$, $\lambda_{12} = 7.8$, $\lambda_{13} = 10.96$, ... i c) vrednosti karakterističnih brojeva $\lambda_{21} = 5.9$, $\lambda_{22} = 9.2$, $\lambda_{23} = 12.4$, ...



Slika 3.4.4 Delovi grafika karakteristične jednačine (36) za: (a) $n = 0$, gde se mogu videti, od beskonačno mnogo korena samo njih osam λ_{0m} , $m = 1, 2, \dots, 8$; (b) $n = 1$, gde vidimo jedanaest korena λ_{1m} , $m = 1, 2, \dots, 11$ i (c) $n = 2$ gde vidimo jedanaest korena λ_{2m} ,

λ_{nm}						
$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6
0	3.1962	6.3064	9.4394	12.5771	15.7164	18.8565
1	4.6108	7.7992	10.958	14.1086	17.2557	20.401
2	5.9057	9.1968	12.402	15.5794	18.7439	21.901
3	7.1435	10.5366	13.795	17.0053	20.1923	23.366
4	8.3466	11.8367	15.1499	16.475	22.998	26.212

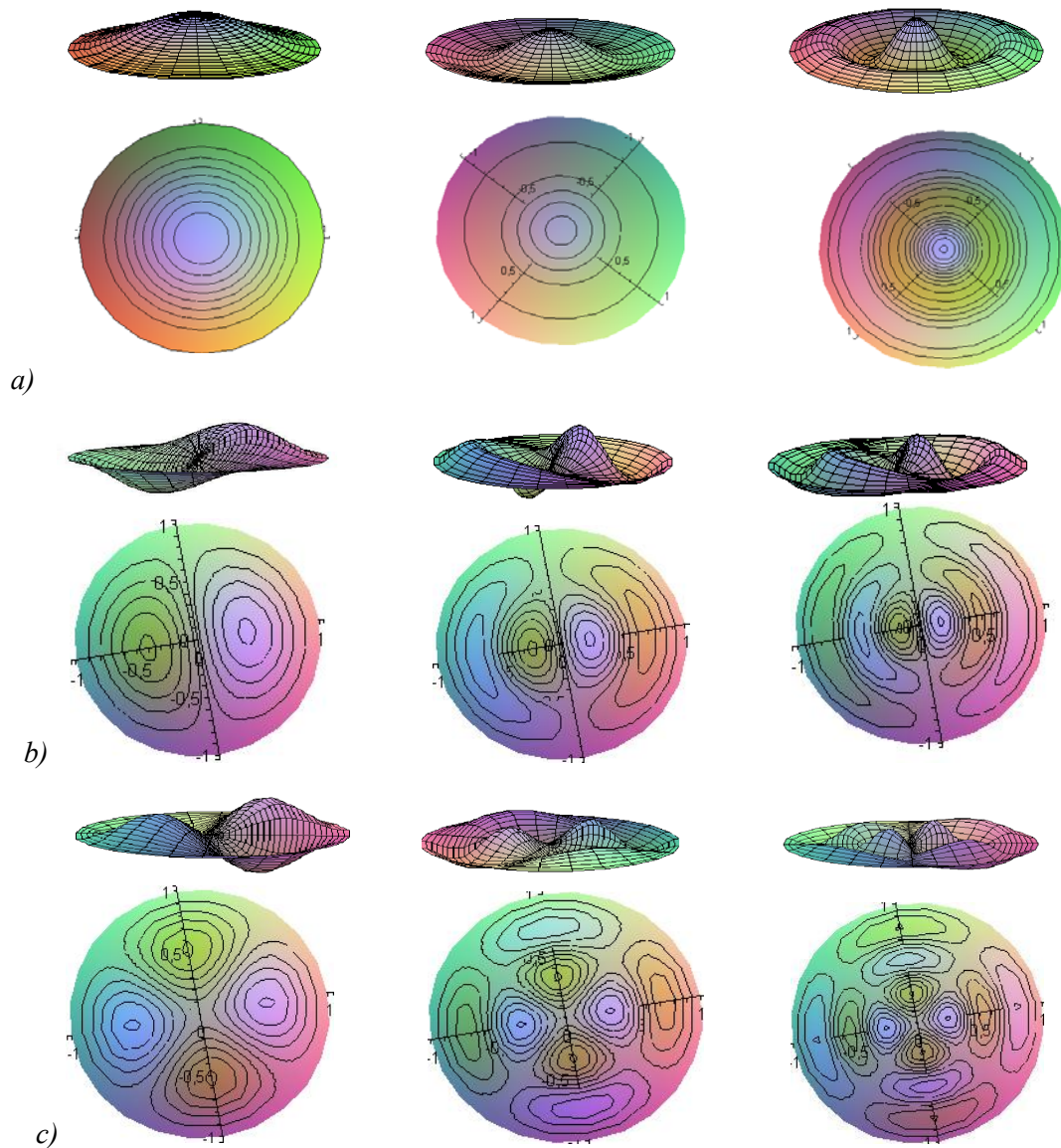
Tabela 1. Karakteristični brojevi sopstvenih oscilacija kružne ploče ukleštene po konturi

Таблица 20.2.

$k_{nm}a$		1	2	3	4
$n \backslash m$	m				
0		3,1961	6,3064	9,4395	12,577
1		4,6110	7,7993	10,958	14,108
2		5,9056	9,1967	12,402	15,579
3		7,1433	10,537	13,795	

Slika 3.4.5 Preuzeta tablica iz knjige „Teorija oscilacija“ Danila Raškovića iz 1974, [238]

Takođe, prikazani su i preseci u srednjoj ravni ploče ispod svakog karakterističnog oblika. Vidi se da je karakteristična vrednost $\lambda_{01} = 3.196$ najniža i njoj odgovara najniža kružna frekvencija oscilovanja kružne ploče ukleštene po konturi, kao i osnovni oblik oscilovanja slika 3.4.6.a).



Slika 3.4.6. Sopstvene amplitudne funkcije $W_{nm}(r, \varphi)$ za : a) $\lambda_{01} = 3.196$, $\lambda_{02} = 6.306$, $\lambda_{03} = 9.439$; b) $\lambda_{11} = 4.61$, $\lambda_{12} = 7.8$, $\lambda_{13} = 10.96$, ... ; c) $\lambda_{21} = 5.9$, $\lambda_{22} = 9.2$, $\lambda_{23} = 12.4$, ... Prikazani su preseci u srednjoj ravni ploče ispod svakog karakterističnog oblika.

4* Poglavlje

Interakcija nelinearnih dinamika i fenomena – sopstvene i prinudne dinamike

4.1. Fenomen prolaska kroz rezonantno stanje

Prikazana ideja asimptotskih metoda u drugom poglavlju može biti primenjena za nalaženje asimptotskih aproksimacija rešenja za najrazličitije oscilatorne sisteme, koji sadrže mali parametar i to kako za sisteme sa jednim stepenom slobode oscilovanja tako i za sisteme sa više stepeni slobode oscilovanja, a i za sisteme sa beskonačno stepeni slobode oscilovanja. Opšti oblik i proceduru primene ove metode na klase hibridnih sistema predstavljenih u ovom radu prikazaće se u jedanaestom poglavlju.

Kako će kroz ovaj rad biti izučavani uticaji periodičkih prinudnih sila sa promenljivom frekvencijom na sisteme sa spregnutim podsistemima koji sadrže nelinearnosti to će se ovde objasniti pojam rezonancije i fenomen prolaska kroz rezonantno stanje.

Pre nego što se u oscilatornim sistemima uspostavi određeni stacionarni režim često se može uočiti pojava znatnog povećanja amplitude oscilovanja. Ovo se može desiti i kao posledica pojave bijenja, prolaska frekvencije spoljašnje sile kroz rezonantne vrednosti- vrednosti sopstvenih frekvencija sistema i njima bliskih vrednosti, ili pak pri promeni nekih drugih parametara sistema. Naročito intenzivno se uveličava amplituda prilikom prolaska kroz rezonantno stanje, no pre nego što se objasni taj fenomen proanaliziraće se opšte usvojen pojam rezonancije kao pojave koja se uočava u oscilatornim sistemima. Spoljašnje periodičke sile, koje dejstvuju na oscilatorni sistem u taktu sa sopstvenim oscilacijam, izazivaju velika odstupanja amplituda sopstvenih oscilacija. Za oscilatorne sisteme koji se opisuju nehomogenim linearnim diferencijalnim jednačinama rezonantnim stanjem se naziva pojava da amplitude oscilovanja sistema počnu brzo da rastu i dostižu neki maksimum, kada je frekvencija spoljašnje sile jednaka frekvenciji slobodnih oscilacija ili pak nekom njenom delu, pri tom ostali parametri sistema- sopstvene i spoljašnje frekvencije sistema i amplituda poremećajne sile ostaju nepromenjeni. U oscilatornim sistemima koji se opisuju složenim diferencijalnim jednačinama, npr. diferencijalnim jednačinama sa

periodičko promenljivim koeficijentima (parametarska rezonantna stanja) ili nelinearnim diferencijalnim jednačinama suština pojave rezonantnog stanja je složenija. Npr., u nelinearnim sistemima sopstvena frekvencija sistema može da zavisi od amplitude oscilovanja i u toku uspostavljanja rezonantnog stanja ona se može menjati, dok se ne uspostavi takav režim pri kome će amplituda biti konstantna. U opštem slučaju u složenim oscilatornim sistemima rezonancijom možemo nazivati pojavu, koja se uočava u neautonomnim oscilatornim sistemima- sistemima izloženim dejstvu spoljašnjih periodičkih sila koje eksplicitno zavise od vremena-pri kojoj amplituda oscilovanja intenzivno raste u toku uspostavljanja oscilacija, posle čega ona ima konstantnu vrednost. Opšte svojstvo pojave rezonantnog stanja u linearnim kao i u nelinearnim sistemima je to što obično mala poremećajna sila dovodi do značajnog uvećanja amplitude oscilovanja. Pojava prolaska kroz rezonantno stanje se uočava u toku nekog vremenskog intervala, i u oblasti nekog konačnog intervala oko rezonantnih frekvencija, u kome se sa vremenom menja i frekvencija spoljašnje prinudne sile, dok se obično rezonantno stanje linearnih sistema uočava, takođe u određenom vremenskom intervalu, ali baš za konstantnu rezonantnu vrednost frekvencije spoljašnje periodičke pobude. Pri tome, što je sistem duže vremena pod dejstvom sile sa rezonantnom frekvencijom amplituda oscilacija linearnog sistema u rezonantnom stanju se sve više uvećava. Veličina maksimalnih amplituda koje se razvijaju u toku pojave prolaska kroz rezonantno stanje zavisi od brzine promene parametara sistema- frekvencije spoljašnje sile.

U mnogim inženjerskim sistemima sa nelinearnostima, višefrekventne pobude su izvor pojave višefrekventnih rezonantnih režima pri visoko-frekventnim kao i nisko-frekventnim modovima ([123, 124, 135]), što je pokazano u mnogim eksperimentalnim i teorijskim rezultatima ([129, 136]). Uticaj između amplituda i faza različitih modova u nelinearnim sistemima sa više stepeni slobode oscilovanja kako pri slobodnim tako i pri prinudnim višefrekventnim režimima deformabilnih tela sa beskonačno mnogo stepeni slobode oscilovanja proučavaju se primenom asimptotske metode usrednjenja Krilov-Bogoliubov-Mitropolskiy-kog ([130, 140, 147, 259]).

Sledi razrada metode sastavljanja asimptotskih aproksimacija rešenja za pojedine primere oscilatornih sistema sa više stepeni slobode oscilovanja i sporopromenljivim parametrima, koji su prikazani u trećem poglavlju, kada je poremećajna sila koja dejstvuje na sistem periodična funkcija perioda 2π , nekoliko sporopromenljivih frekvencija bliskih prvoj sopstvenoj frekvenciji ili njenoj razlomljenoj vrednosti. Kao osnovu za rešenje postavljenog zadatka koristi se asimptotska metoda Крилова-Боголюбова-Митропольског.

4.2. Prinudne oscilacije hibridnih sistema oscilatora sa nelinearnošću

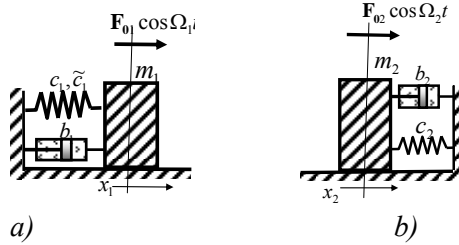
4.2.1. Prinudne oscilacije nelinearnog i linearnog oscilatora

Nelinearni oscilator razmatran u primeru 3.1.1. neka sada je pod dejstvom harmonijske prinudne sile, slika 4.2.1.a):

$$F_1(t) = F_{01} \cos(\Omega_1 t + \vartheta_{01}). \quad (4.2.1)$$

Za ovakav oscilator iz jednačine promene energije sledi:

$$\frac{d}{dt}(E_k(t) + E_p(t)) = -2\Phi(t) + \dot{x}_1 F_{01} \cos(\Omega_1 t + \vartheta_{01}). \quad (4.2.2)$$



Slika 4.2.1 Nelinearni a) i linearni b) oscilator sa harmonijskom prinudnom silom

S obzirom na izraze za kinetičku, potencijalnu energiju i funkciju rasipanja nelinearnog oscilatora date izrazima (3.1.2), (3.1.3) i (3.1.4), sledi diferencijalna jednačina kretanja oscilatora:

$$\ddot{x}_1 + 2\delta_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = -\tilde{\omega}_{N1}^2 x_1^3 + h_{01} \cos(\Omega_1 t + \vartheta_{01}) \quad (4.2.3)$$

gde je $h_{01} = F_{01}/m_1$ redukovana amplituda prinudne sile. Rešenje jednačine (4.2.3) pretpostavlja se u obliku:

$$x_1(t) = R_1(t) e^{-\delta_1 t} \cos \Phi_1(t), \quad (4.2.4)$$

gde se za fazu uzima $\Phi_1(t) = \Omega_1 t + \phi_1(t)$.

Prvi izvod po vremenu pretpostavljanog rešenja je:

$$\dot{x}_1(t) = -\delta_1 R_1(t) e^{-\delta_1 t} \cos \Phi_1(t) + \dot{R}_1(t) e^{-\delta_1 t} \cos \Phi_1(t) - R_1(t) e^{-\delta_1 t} \dot{\phi}_1(t) \sin \Phi_1(t) - R_1(t) e^{-\delta_1 t} \Omega_1 \sin \Phi_1(t). \quad (4.2.5)$$

Ako on ispunjava uslov da je jednak prvom izvodu rešenja u slučaju konstantnih amplitude i faze dobija se uslov (3.1.17). Drugi izvod po vremenu pretpostavljenog rešenja je:

$$\ddot{x}_1(t) = (\delta_1^2 R_1(t) - R_1(t) \Omega_1^2 - \delta_1 \dot{R}_1(t) - R_1(t) \Omega_1 \dot{\phi}_1) e^{-\delta_1 t} \cos \Phi_1(t) + (\delta_1 R_1(t) \dot{\phi}_1 + 2\delta_1 \dot{R}_1(t) \Omega_1 - \dot{R}_1(t) \Omega_1) e^{-\delta_1 t} \sin \Phi_1(t). \quad (4.2.6)$$

Uvrštavanjem (4.2.4), (4.2.5) i (4.2.6) u (4.2.3) sledi jednačina:

$$\begin{aligned} & \dot{R}_1(t) \sin \Phi_1(t) + R_1(t) \dot{\phi}_1 \cos \Phi_1(t) = \\ & = R_1(t) \frac{(\omega_1^2 - \Omega_1^2 - \delta_1^2)}{\Omega_1 + p_1} \cos \Phi_1(t) + \frac{\tilde{\omega}_{N1}^2}{\Omega_1 + p_1} R_1^3(t) e^{-2\delta_1 t} \cos^3 \Phi_1(t) - \frac{h_{01}}{\Omega_1 + p_1} e^{-\delta_1 t} \cos(\Omega_1 t + \vartheta_{01}), \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

koja zajedno sa uslovom (3.1.17) daje sistem algebarskih jednačina po nepoznatim vremenskim izvodima $\dot{R}(t)$ i $\dot{\phi}(t)$. Rešavanjem tog sistema dobija se:

$$\begin{aligned} \dot{R}_1(t) &= R_1(t) \frac{(p_1^2 - \Omega_1^2)}{\Omega_1 + p_1} \sin \Phi_1(t) \cos \Phi_1(t) + \frac{\tilde{\omega}_{N1}^2}{\Omega_1 + p_1} R_1^3(t) e^{-2\delta_1 t} \sin \Phi_1(t) \cos^3 \Phi_1(t) - \frac{h_{01}}{\Omega_1 + p_1} e^{-\delta_1 t} \sin \Phi_1(t) \cos(\Omega_1 t + \vartheta_{01}), \\ \dot{\phi}_1 &= \frac{(p_1^2 - \Omega_1^2)}{\Omega_1 + p_1} \cos^2 \Phi_1(t) + \frac{\tilde{\omega}_{N1}^2}{\Omega_1 + p_1} R_1^2(t) e^{-2\delta_1 t} \cos^4 \Phi_1(t) - \frac{h_{01}}{(\Omega_1 + p_1) R_1(t)} e^{-\delta_1 t} \cos \Phi_1(t) \cos(\Omega_1 t + \vartheta_{01}), \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

gde je iskorišćena činjenica da je kvadrat sopstvene kružne frekvencije prigušenog oscilovanja oblika:

$$p_1^2 = \omega_1^2 - \delta_1^2. \quad (4.2.8a)$$

Nakon usrednjenja sistema (4.2.8) po punoj fazi $\Phi_1(t)$ od 0 do 2π sledi sistem:

$$\dot{R}_1(t) = -\frac{h_{01}}{\Omega_1 + p_1} e^{-\delta_1 t} \sin \phi_1(t),$$

$$\dot{\phi}_1(t) = (p_1 - \Omega_1) + \frac{3}{8p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_1^2(t) e^{-2\delta_1 t} - \frac{h_{01}}{(\Omega_1 + p_1)R_1(t)} e^{\delta_1 t} \cos \phi_1(t). \quad (4.2.9)$$

Ako se koristi smena promenljivih oblika $a_1(t) = R_1(t)e^{-\delta_1 t}$, odakle je $\dot{a}_1(t) = (\dot{R}_1(t) - \delta_1 R_1(t))e^{-\delta_1 t}$, sistem jednačina (4.2.10) može da se napiše u obliku:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1(t) &= -\delta_1 a_1(t) - \frac{h_{01}}{\Omega_1 + p_1} \sin \phi_1(t), \\ \dot{\phi}_1(t) &= (p_1 - \Omega_1) + \frac{3}{8p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 a_1^2(t) - \frac{h_{01}}{(\Omega_1 + p_1)a_1(t)} \cos \phi_1(t). \end{aligned} \quad (4.2.9a)$$

Ovo je sistem diferencijalnih jednačina prve asimptotske aproksimacije rešenja za amplitudu i fazu oscilovanja nelinearnog oscilatora pod dejstvom jednofrekventne spoljašnje periodičke pobudne sile i predstavlja nehomogeni nelinearni sistem diferencijalnih jednačina koji će se rešavati numerički kako bi se prikazali svojstveni fenomeni nelinearne dinamike, prisutne čak i u ovom veoma jednostavnom primeru. Iz ovog analitičkog oblika, može se zaključiti da su amplitude i faza međusobno zavisne, kao i da amplitude i faza prinudnog oscilovanja zavise od vremena i od početnih uslova.

Za linearni oscilator sa slike 4.2.1.b) sa prinudnom silom oblika:

$$F_2(t) = F_{02} \cos(\Omega_2 t + \vartheta_{02}). \quad (4.2.10)$$

Važi relacija:

$$\frac{d}{dt}(E_{k(2)} + E_{p(2)}) = -2\Phi_{(2)} + \dot{x}_2 F_{02} \cos(\Omega_2 t + \vartheta_{02}), \quad (4.2.11)$$

a diferencijalna jednačina je oblika:

$$\ddot{x}_2 + 2\delta_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = h_{02} \cos(\Omega_2 t + \vartheta_{02}). \quad (4.2.12)$$

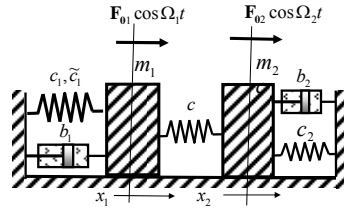
Ovo je nehomogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima koja ima poznato rešenje [238] opšteg oblika:

$$x_2(t) = R_0 e^{-\delta_2 t} \cos(p_2 t + \alpha_2) + \frac{h_{02}}{\sqrt{(\omega_2^2 - \Omega_2^2)^2 + 4\delta_2^2 \Omega_2^2}} \cos(\Omega_2 t + \vartheta_{02} - \beta_2), \quad (4.2.13)$$

koje se sastoji iz dela koji odgovara slaboj oscilaciji kružne frekvencije prigušenog oscilovanja p_2 amplitude $R_0 e^{-\delta_2 t}$ eksponencijalno opadajuće sa vremenom, i dela koji odgovara prinudnom oscilovanju kružne frekvencije prinudne sile Ω_2 sa konstantnom amplitudom $\frac{h_{02}}{\sqrt{(\omega_2^2 - \Omega_2^2)^2 + 4\delta_2^2 \Omega_2^2}}$.

4.2.2. Prinudne oscilacije nelinearnog i linearnog oscilatora spregnutih linearnom oprugom

Sprega linearnog i nelinearnog oscilatora sa prinudnim silama prikazana na slici 4.2.2 unosi svojstvenosti spregnutog sistema, a to je da rešenje ima dva spregnuta moda oscilovanja, kao što je to pokazano u trećem poglavlju.



Slika 4.2.2 Sprega nelinearnog i linearnog oscilatora sa harmonijskim prinudnim silama

Diferencijalne jednačine kretanja ovakvog sistema, ili se može reći matematički model sistema spregnuta dva oscilatora jednog nelinearnog i drugog linearnog, su oblika:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\delta_1 \dot{x}_1 + (\omega_1^2 + a_1^2)x_1 - a_1^2 x_2 &= -\tilde{\omega}_{N1}^2 x_1^3 + h_{01} \cos(\Omega_1 t + \vartheta_{01}) \\ \ddot{x}_2 + 2\delta_2 \dot{x}_2 + (\omega_2^2 + a_2^2)x_2 - a_2^2 x_1 &= h_{02} \cos(\Omega_2 t + \vartheta_{02}). \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Rešenja se pretpostavljaju u obliku (3.2.11), gde su faze $\Phi_i = \Omega_i t + \phi_i$ frekvencija prinudne sile, a Ω_i frekvencijae prinudne sile, što znači da se posmatraju osnovna rezonantna stanja sistema. Primenom metode usrednjenja dobijaju se rešenja prve asimptotske aproksimacije po amplitudama i faznim kašnjenjima harmonika:

$$\begin{aligned} \dot{R}_1(t) &= -\frac{K_{22}^{(2)} e^{\delta_1 t}}{[\hat{p}_1 + \Omega_1(\tau)] [K_{21}^{(1)} K_{22}^{(2)} - K_{22}^{(1)} K_{21}^{(2)}]} h_{01} \sin \phi_1(t) \\ \dot{\phi}_1(t) &= \hat{p}_1 - \Omega_1(\tau) + \\ &+ \frac{3K_{22}^{(2)}}{16\hat{p}_1 [K_{21}^{(1)} K_{22}^{(2)} - K_{22}^{(1)} K_{21}^{(2)}]} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ e^{-2\delta_1 t} (K_{21}^{(1)})^3 [R_1(t)]^2 + 2e^{-2\delta_2 t} K_{21}^{(1)} [K_{21}^{(2)}]^2 [R_2(t)]^2 \right\} - \\ &- \frac{K_{22}^{(2)} e^{\delta_1 t}}{[\hat{p}_1 + \Omega_1(\tau)] R_1(t) [K_{21}^{(1)} K_{22}^{(2)} - K_{22}^{(1)} K_{21}^{(2)}]} h_{01} \cos \phi_1(t) \\ \dot{R}_2(t) &= -\frac{K_{21}^{(1)} e^{\delta_2 t}}{[\hat{p}_2 + \Omega_2(\tau)] [K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}]} h_{02} \sin \phi_2(t) \\ \dot{\phi}_2(t) &= \hat{p}_2 - \Omega_2(\tau) + \\ &+ \frac{3K_{21}^{(1)}}{16\hat{p}_2 [K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}]} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ 2e^{-2\delta_1 t} (K_{21}^{(1)})^3 [R_1(t)]^2 + e^{-2\delta_2 t} K_{21}^{(1)} [K_{21}^{(2)}]^2 [R_2(t)]^2 \right\} - \\ &- \frac{K_{21}^{(1)} e^{\delta_2 t}}{[\hat{p}_2 + \Omega_2(\tau)] R_2(t) [K_{21}^{(2)} K_{22}^{(1)} - K_{22}^{(2)} K_{21}^{(1)}]} h_{02} \cos \phi_2(t) \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Za homogeni sistem spregnutih oscilatora istih masa, linearnih krutosti opruga i koeficijenata otporne sile, kada je odnos kofaktora $K_{21nm}^{(1)} = K_{22nm}^{(1)} = 1$, $K_{21nm}^{(2)} = -K_{22nm}^{(2)} = 1$, sistem (4.2.15) se svodi na oblik:

$$\begin{aligned} \dot{R}_1(t) &= -\frac{h_{01}}{2(\Omega_1 + \hat{p}_1)} e^{\delta_1 t} \sin \phi_1(t) \\ \dot{\phi}_1(t) &= (\hat{p}_1 - \Omega_1) + \frac{3}{32\hat{p}_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 [R_1^2(t) + 2R_2^2(t)] e^{-2\delta_1 t} - \frac{h_{01}}{2(\Omega_1 + \hat{p}_1) R_1(t)} e^{\delta_1 t} \cos \phi_1(t) \\ \dot{R}_2(t) &= -\frac{h_{02}}{2(\Omega_2 + \hat{p}_2)} e^{\delta_2 t} \sin \phi_2(t) \\ \dot{\phi}_2(t) &= (\hat{p}_2 - \Omega_2) + \frac{3}{32\hat{p}_2} \tilde{\omega}_{N1}^2 [2R_1^2(t) + R_2^2(t)] e^{-2\delta_2 t} - \frac{h_{02}}{2(\Omega_2 + \hat{p}_2) R_2(t)} e^{\delta_2 t} \cos \phi_2(t). \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

4.2.3. Prinudne oscilacije kontinualnog podsistema spregnutog sa diskretnim podsistemom dinamičkom vezom

Koristi se isti model kao i u poglavlju 3.2.2 samo se sada uvede prinudne harmonijske sile koje deluju na elemente diskretnog sistema, [97]. Rešenja frekventne jednačine malih longitudinalnih oscilacija kontinualnog podsistema isto je kao i u tom poglavlju. Ovde se sada definiše matrica kolona generalisanih prinudnih sila koje deluju na diskretni sistem u obliku:

$$\{\mathbf{F}_k(t)\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{n-1} \\ \mathbf{F}_n \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{01} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{F}_{0(n-1)} & \\ & & & \mathbf{F}_{0n} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \Omega_1 t \\ \vdots \\ \cos \Omega_{n-1} t \\ \cos \Omega_n t \end{Bmatrix}. \quad (4.2.17)$$

Sada se sistem diferencijalnih jednačina oscilovanja diskretnog podsistema sa graničnim uslovom može napisati u obliku:

$$\mathbf{A}\{\ddot{x}\} + \mathbf{C}\{\dot{x}\} = -c_0(x_1 - x_0)\mathbf{I}_0\{I\} + \{\mathbf{F}_k(t)\}, \quad (4.2.18)$$

gde su $\{x\}$ i \mathbf{I}_0 date izrazima (3.1.42a), a $\{I\}$ je:
$$\{I\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.2.18a)$$

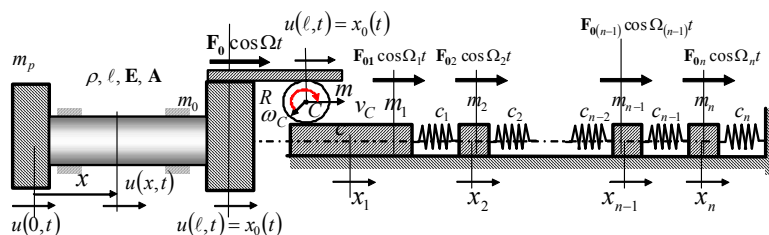
U slučaju da je sistem slobodan $\mathbf{F}_i = 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$ rešenje sistema (4.2.18) je oblika (3.1.51).

Kao što je već pokazano u poglavlju 3.2.2 za spregnuti sistem grede i diskretnog podsistema frekventna transcendentna jednačina malih oscilacija dinamički spregnutog sistema data je izrazom (3.2.25).

Neophodno je sada odrediti izraze za amplitude oscilovanja u obliku:

$$A_k^{(s)} = K_{nk}^{(s)} C_s, \quad s = 2, 3, 4, \dots \quad (4.2.19)$$

Rešenja (3.1.51) se mogu pisati u obliku:



Slika 4.2.3 Dinamička sprega kontinualnog podsistema i diskretnog podsistema sa harmonijskim prinudnim silama

$$x_k(t) = \sum_{s=1}^{\infty} A_k^{(s)} T_s(t) = \sum_{s=1}^{\infty} K_{nk}^{(s)} C_s T_s(t) = \sum_{s=1}^{\infty} K_{nk}^{(s)} [A_s \cos \omega_s t + B_s \sin \omega_s t]. \quad (4.2.20)$$

Uslov kompatibilnosti pomeranja na kraju gde je sprega podsistema (3.1.52) sada se svodi na:

$$u(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{X}_s(\xi) T_s(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[C_1^{(s)} \cos \frac{\xi_s}{\ell} x + C_2^{(s)} \sin \frac{\xi_s}{\ell} x \right] [A_s \cos \omega_s t + B_s \sin \omega_s t], \quad (4.2.21)$$

gde su:

$$C_1^{(s)} = \frac{\hat{\mu}_{01} K_{n1}^{(s)} C_s \xi_s}{\{\mu_p \xi_s [\xi_s (\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) \sin \xi_s - \cos \xi_s] - [\xi_s (\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) \cos \xi_s + \sin \xi_s]\}} \quad (4.2.21a)$$

$$C_2^{(s)} = -\frac{\mu_p \hat{\mu}_{01} K_{n1}^{(s)} C_s \xi_s^2}{\{\mu_p \xi_s [\xi_s (\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) \sin \xi_s - \cos \xi_s] - [\xi_s (\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) \cos \xi_s + \sin \xi_s]\}} \quad (4.2.21b)$$

Da bi se rešio nehomogeni sistem (4.2.18) prinudnih oscilacija diskretnog podsistema, koji je spregnut sa parcijalnom diferencijalnom jednačinom longitudinalnih oscilacija grede (3.1.41) preko graničnih uslova (3.1.43 a,b,c) pretpostaviće se generalisane vremenske funkcije u obliku:

$$x_k(t) = \sum_{s=1}^{\infty} A_k^{(s)} \mathbf{T}_s(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{nk}^{(s)} C_s \mathbf{T}_s(t), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.2.22)$$

ili

$$\{x\} = \mathbf{R}\{T(t)\} \quad \{x\} = \left(K_{nk}^{(s)}\right) \downarrow_{k=1,2,\dots,n} \{T_s(t)\}, \quad (4.2.22a)$$

gde je $\mathbf{R} = \left(K_{nk}^{(s)}\right) \downarrow_{k=1,2,\dots,n}$ modalna matrica diskretnog podsistema reda n sa beskonačnim brojem kolona.

U ovom smislu izraziće se i karakteristični koeficijenti $C_1^{(s)}$ i $C_2^{(s)}$ u obliku:

$$C_1^{(s)} = \frac{\hat{\mu}_{01} K_{n1}^{(s)} C_s \xi_s}{\Delta(\xi_s)} = \tilde{C}_1^{(s)}(\xi_s) \mathbf{K}_{n1}^{(s)} C_s$$

$$C_2^{(s)} = -\frac{\mu_p \hat{\mu}_{01} K_{n1}^{(s)} C_s \xi_s^2}{\Delta(\xi_s)} = -\mu_p \xi_s \tilde{C}_1^{(s)}(\xi_s) \mathbf{K}_{n1}^{(s)} C_s \quad s = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (4.2.23)$$

gde su: $\tilde{C}_1^{(s)}(\xi_s) = \frac{\hat{\mu}_{01} \xi_s}{\Delta(\xi_s)}$ i

$$\Delta(\xi_s) = \mu_p \xi_s [\xi_s (\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) \sin \xi_s - \cos \xi_s] - [\xi_s (\mu_0 + \hat{\mu}_{00}) \cos \xi_s + \sin \xi_s].$$

Sada su karakteristične amplitudne funkcije oblika:

$$\mathbf{X}_{(s)}(x) = \tilde{C}_1^{(s)}(\xi_s) A_1^{(s)} \left[\cos \frac{\xi_s}{\ell} x - \mu_p \xi_s \sin \frac{\xi_s}{\ell} x \right] = A_1^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}(x) = \mathbf{K}_{n1}^{(s)} C_s \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}(x) \quad (4.2.24)$$

$$\mathbf{X}_{(s)}(\ell) = \tilde{C}_1^{(s)}(\xi_s) A_1^{(s)} [\cos \xi_s - \mu_p \xi_s \sin \xi_s] = A_1^{(s)} \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_{(s)}(\xi_s) = \mathbf{K}_{n1}^{(s)} C_s \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_{(s)}(\xi_s) = \mathbf{K}_{n1}^{(s)} C_s \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_{(s)}(\ell) \quad (4.2.24a)$$

a rešenje za longitudinalna pomeranja je:

$$u(x, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{X}_{(s)}(x) \mathbf{T}_s(t) = \sum_{s=1}^{\infty} A_1^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}(x) \mathbf{T}_s(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}(x) C_s \mathbf{T}_s(t) \quad (4.2.25)$$

pa je:

$$u(\ell, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{X}_{(s)}(\ell) \mathbf{T}_s(t) = \sum_{s=1}^{\infty} A_1^{(s)} \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_{(s)}(\ell) \mathbf{T}_s(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_{(s)}(\ell) C_s \mathbf{T}_s(t) \quad (4.2.25a)$$

$$\text{gde su : } \frac{A_k^{(s)}}{\mathbf{K}_{nk}^{(s)}} = C_s, \quad s = 1, 2, 3, \dots, \infty, \quad (4.2.25b)$$

a $\mathbf{K}_{n,k}^{(s)}$ kofaktori determinante sistema k -te kolone za svaki karakteristični broj ξ_s , $s = 1, 2, 3, \dots, \infty$.

Takođe, longitudinalna pomeranja mogu se pisati i na sledeći način:

$$u(x, t) = (v_s) \{T_s(t)\} = \left(\mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}(x)\right) \downarrow_{s=1,2,\dots,\infty} \{T_s(t)\} \downarrow_{s=1,2,\dots,\infty}, \quad (4.2.26)$$

gde je (v_s) karakteristični amplitudni vektor sa beskonačnim brojem kolona oblika:

$$(v_s) = \left(\mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{C}_1^{(s)}(\xi_s) \left[\cos \frac{\xi_s}{\ell} x - \mu_p \xi_s \sin \frac{\xi_s}{\ell} x \right]\right) \downarrow_{s=1,2,\dots,\infty} = \left(\mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}(x)\right) \downarrow_{s=1,2,\dots,\infty} \quad (4.2.27)$$

koji se dobija na sledeći način:

$$(v_s) = (\mathbf{X}_s(x)) = \left(C_1^{(s)} \cos \frac{\xi_s}{\ell} x + C_2^{(s)} \sin \frac{\xi_s}{\ell} x\right), \text{ odnosno:}$$

$$(v_s) = (\mathbf{X}_s(x))_{\rightarrow s=1,2,\dots,\infty} = \left(\tilde{C}_1^{(s)}(\xi_s) A_1^{(s)} \left[\cos \frac{\xi_s}{\ell} x - \mu_p \xi_s \sin \frac{\xi_s}{\ell} x \right] \right)_{\rightarrow s=1,2,\dots,\infty}.$$

Modalna matrica deformabilnog tela kao kontinualnog podsistema može se sada predstaviti u obliku:

$$\mathbf{v} = \left(\mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_s(x) \right)_{\downarrow k=1,2,\dots,n}^{\rightarrow s=1,2,\dots,\infty}, \quad (4.2.28)$$

$$\text{pa je : } \mathbf{v}_{x=\ell} = \mathbf{v}_{\xi_s} = \left(\mathbf{K}_{nk}^{(s)} \tilde{C}_k^{(s)}(\xi_s) \left[\cos \xi_s - \mu_p \xi_s \sin \xi_s \right] \right)_{\downarrow k=1,2,\dots,n}^{\rightarrow s=1,2,\dots,\infty} = \left(\mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_s(\xi_s) \right)_{\downarrow k=1,2,\dots,n}^{\rightarrow s=1,2,\dots,\infty}.$$

Rešenje je oblika:

$$u(x,t)\{I\} = \mathbf{I}_0 \mathbf{v}\{T_s(t)\}. \quad (4.2.29)$$

Sada se ovo rešenje uvrsti u sisteme diferencijalnih jednačina podsistema diskretnog (4.2.18) i kontinualnog (3.1.41) dela i dobija se sledeći sistem, u matricnom obliku:

$$\mathbf{AR}\{\ddot{T}_s\} + \mathbf{CR}\{T_s\} = -c_0 \left(\sum_{s=1}^{\infty} K_{n1}^{(s)} T_s - \sum_{s=1}^{\infty} [C_1^{(s)} \cos \xi_s + C_2^{(s)} \sin \xi_s] T_s(t) \right) \mathbf{I}_0 \{I\} + \{\mathbf{F}_k(t)\}, \text{ ili}$$

$$\mathbf{AR}\{\ddot{T}_s\} + \mathbf{CR}\{T_s\} + c_0 \mathbf{I}_0 \mathbf{R}\{T_s\} = -c_0 \mathbf{I}_0 \mathbf{v}_{\xi_s}\{T_s\} + \{\mathbf{F}_k(t)\}, \quad (4.2.30)$$

$$(v_s)\{\ddot{T}\} = c_e^2 (v_s'')\{T\}. \quad (4.2.31)$$

Granični uslovi su:

$$m_p (v_s(0))\{\ddot{T}\} = \mathbf{EA} (v_s'(0))\{T\} \quad (4.2.32a)$$

$$m_0 (v_s(\ell))\{\ddot{T}\} = -\mathbf{EA} (v_s'(\ell))\{T\} + c_0 \left(\sum_{s=1}^{\infty} K_{n1}^{(s)} T_s - \sum_{s=1}^{\infty} [C_1^{(s)} \cos \xi_s + C_2^{(s)} \sin \xi_s] T_s(t) \right). \quad (4.2.32b)$$

Množeći matricnu jednačinu (4.2.30) sa \mathbf{R}^T dobija se:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{AR}\{\ddot{T}_s\} + \mathbf{R}^T \mathbf{CR}\{T_s\} + c_0 \mathbf{R}^T \mathbf{I}_0 \mathbf{R}\{T_s\} = -c_0 \mathbf{R}^T \mathbf{I}_0 \mathbf{v}_{\xi_s}\{T_s\} + \mathbf{R}^T \{\mathbf{F}_k(t)\}$$

ili u razvijenom skalarnom obliku:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{K}_{ni}^{(s)} \mathbf{K}_{nj}^{(r)} \ddot{T}_s(t) + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \mathbf{K}_{ni}^{(s)} \mathbf{K}_{nj}^{(r)} T_s(t) + \left\{ c_0 \left(\sum_{s=1}^{\infty} [1 - \tilde{\mathbf{X}}_s(\ell)] \mathbf{K}_{ni}^{(r)} \mathbf{K}_{ni}^{(s)} T_s(t) \right) \begin{array}{l} i, j = 1 \\ 0 \\ i, j \neq 1 \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^n \mathbf{K}_{nk}^{(r)} \mathbf{F}_k(t) \quad (4.2.33)$$

Iz matricnih jednačina (4.2.31), (4.2.32a) i (4.2.32b) u njihovom razvijenom obliku, posle njihovog monženja sa $\mathbf{K}_{n1}^{(r)} \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(x) dx$ i integraljenja sledi:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_s(x) \ddot{T}_s(t) &= \tilde{c}_e^2 \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_s''(x) \ddot{T}_s(t), \\ \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \mathbf{K}_{n1}^{(r)} \ddot{T}_s(t) \int_0^{\ell} \tilde{\mathbf{X}}_s(x) \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(x) dx &= \tilde{c}_e^2 \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \mathbf{K}_{n1}^{(r)} T_s(t) \int_0^{\ell} \tilde{\mathbf{X}}_s''(x) \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(x) dx \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

$$m_p \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_s(0) \ddot{T}_s(t) = \mathbf{EA} \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_s'(0) T_s(t), \quad (4.2.35)$$

i $m_0 \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_s(\ell) \ddot{T}_s(t) = -\mathbf{EA} \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_s'(\ell) T_s(t) + c_0 \left(\sum_{s=1}^{\infty} [1 - \tilde{\mathbf{X}}_s(\ell)] \mathbf{K}_{n1}^{(s)} T_s(t) \right)$, odnosno:

$$m_0 \ell \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \mathbf{K}_{n1}^{(r)} \ddot{T}_s(t) \tilde{\mathbf{X}}_s(\ell) \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(\ell) = -\mathbf{EA} \ell \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \mathbf{K}_{n1}^{(r)} T_s(t) \tilde{\mathbf{X}}_s'(\ell) \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(\ell) + c_0 \ell \left(\sum_{s=1}^{\infty} [1 - \tilde{\mathbf{X}}_s(\ell)] \mathbf{K}_{n1}^{(r)} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(\ell) T_s(t) \right) \quad (4.2.36)$$

Sabiranjem jednačina (4.2.33), (4.2.34), (4.2.35) i (4.2.36) dobija se:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \ddot{T}_s(t) \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{K}_{ni}^{(s)} \mathbf{K}_{nj}^{(r)} + \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \mathbf{K}_{n1}^{(r)} \left[\rho \mathbf{A} \int_0^{\ell} \tilde{\mathbf{X}}_s(x) \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(x) dx + m_p \ell \tilde{\mathbf{X}}_s(0) \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(0) - m_0 \ell \tilde{\mathbf{X}}_s(\ell) \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(\ell) \right] \right\} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} T_s(t) \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \mathbf{K}_{ni}^{(s)} \mathbf{K}_{nj}^{(r)} + \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \mathbf{K}_{n1}^{(r)} \left[\mathbf{E} \mathbf{A} \int_0^{\ell} \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}'(x) \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(x) dx + \mathbf{E} \mathbf{A} \ell \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}'(0) \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(0) - \mathbf{E} \mathbf{A} \ell \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}'(\ell) \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(\ell) \right] \right\} + c_0 \ell \left(\sum_{s=1}^{\infty} [1 - \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}(\ell)] [1 - \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(\ell)] \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \mathbf{K}_{n1}^{(r)} T_s(t) \right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{K}_{nk}^{(r)} \mathbf{F}_k(t) \quad (4.2.37)$$

Koristeći prošireni uslov ortogonalnosti izveden u radu [84] oblika:

$$\tilde{a}_{sr} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{K}_{ni}^{(s)} \mathbf{K}_{nj}^{(r)} + \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \mathbf{K}_{n1}^{(r)} \left[\rho \mathbf{A} \int_0^{\ell} \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}'(x) \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(x) dx + m_p \ell \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}'(0) \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(0) - m_0 \ell \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}'(\ell) \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(\ell) \right] = \begin{cases} \tilde{a}_{ss} & s=r \\ 0 & s \neq r \end{cases}$$

$$\tilde{c}_{sr} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \mathbf{K}_{ni}^{(s)} \mathbf{K}_{nj}^{(r)} + \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \mathbf{K}_{n1}^{(r)} \left[\mathbf{E} \mathbf{A} \int_0^{\ell} \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}'(x) \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(x) dx + \mathbf{E} \mathbf{A} \ell \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}'(0) \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(0) - \mathbf{E} \mathbf{A} \ell \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}'(\ell) \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(\ell) + c_0 \ell (1 - \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}(\ell)) (1 - \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(\ell)) \right] = \begin{cases} \tilde{c}_{ss} & s=r \\ 0 & s \neq r \end{cases}$$

odnosno:

$$\tilde{c}_{sr} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \mathbf{K}_{ni}^{(s)} \mathbf{K}_{nj}^{(r)} - \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \mathbf{K}_{n1}^{(r)} \left[\mathbf{E} \mathbf{A} \int_0^{\ell} \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}'(x) \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}'(x) dx - c_0 \ell (1 - \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}(\ell)) (1 - \tilde{\mathbf{X}}_{(r)}(\ell)) \right] = \begin{cases} \tilde{c}_{ss} & s=r \\ 0 & s \neq r \end{cases}, \quad (4.2.38)$$

sistem (4.2.37) se redukuje na oblik:

$$\tilde{a}_{ss} \ddot{\tilde{T}}_s(t) + \tilde{c}_{ss} \dot{\tilde{T}}_s(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{K}_{nk}^{(s)} \mathbf{F}_{0k} \cos \Omega_k t. \quad (4.2.39)$$

Rešenje ovoga sistema diferencijalnih jednačina je oblika:

$$\tilde{T}_s(t) = N_s \cos(\omega_s t + \alpha_s) + \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{K}_{nk}^{(s)} \mathbf{F}_{0k}}{\tilde{c}_{ss} - \tilde{a}_{ss} \Omega_k^2} \cos \Omega_k t, \quad (4.2.40)$$

pa su:

$$x_k(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{nk}^{(s)} \tilde{T}_s(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{nk}^{(s)} N_s \cos(\omega_s t + \alpha_s) + \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{nk}^{(s)} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{K}_{ni}^{(s)} \mathbf{F}_{0i}}{\tilde{c}_{ss} - \tilde{a}_{ss} \Omega_i^2} \cos \Omega_i t, \quad (4.2.41)$$

kao i:

$$u(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}(x) \tilde{T}_s(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}(x) N_s \cos(\omega_s t + \alpha_s) + \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}(x) \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{K}_{ni}^{(s)} \mathbf{F}_{0i}}{\tilde{c}_{ss} - \tilde{a}_{ss} \Omega_i^2} \cos \Omega_i t. \quad (4.2.42)$$

U slučaju da je spoljašnja pobuda samo jedna harmonijska sila sledi:

$$\tilde{T}_s(t) = N_s \cos(\omega_s t + \alpha_s) + \frac{\mathbf{K}_{n1}^{(s)} \mathbf{F}_{01}}{\tilde{c}_{ss} - \tilde{a}_{ss} \Omega_1^2} \cos \Omega_1 t, \quad (4.2.43)$$

odakle se zaključuje da su prinudne oscilacije u s -tom modu oscilovanja dvofrekventne i da postoji beskonačan broj takvih dvofrekventnih oscilacija, koje su pobuđene jednofrekventnom spoljašnjom silom.

Pomeranja diskretnog sistema su onda:

$$x_k(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{nk}^{(s)} \tilde{T}_s(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{nk}^{(s)} N_s \cos(\omega_s t + \alpha_s) + \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{nk}^{(s)} \frac{\mathbf{K}_{n1}^{(s)} \mathbf{F}_{01}}{\tilde{c}_{ss} - \tilde{a}_{ss} \Omega_1^2} \cos \Omega_1 t. \quad (4.2.44)$$

Longitudinalna pomeranja kontinualnog podsistema su:

$$u(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}(x) \tilde{T}_s(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}(x) N_s \cos(\omega_s t + \alpha_s) + \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{n1}^{(s)} \tilde{\mathbf{X}}_{(s)}(x) \frac{\mathbf{K}_{n1}^{(s)} \mathbf{F}_{01}}{\tilde{c}_{ss} - \tilde{a}_{ss} \Omega_1^2} \cos \Omega_1 t \quad (4.2.45)$$

Takođe, zaključuje se da se rezonantno stanje oscilacija u odgovarajućem s -tom modu oscilovanja pojavljuju kada je ispunjen odnos parametara:

$$\Omega_{1rez}^2 = \frac{\tilde{c}_{ss}}{\tilde{a}_{ss}} = \omega_s^2 = \frac{\xi_s^2}{\ell^2} \frac{\mathbf{E}}{\rho}, \text{ odnosno kada je: } v_{rez}^2 = \frac{\rho}{\mathbf{E}} \ell^2 \Omega_{1rez}^2 \text{ i}$$

$$\left| \bar{\mathbf{C}} - v_{rez}^2 \mu_0 \bar{\mathbf{A}} + \left[1 - \frac{K v_{rez}}{\Delta(v_{rez})} (\cos v_{rez} - \mu_p v_{rez} \sin v_{rez}) \right] \mathbf{I}_0 \right| = 0 \quad (4.2.46)$$

Stanje dinamičke apsorpcije u odgovarajućem modu pojaviće se kada su amplitude odgovarajućeg prinudnog oscilovanja jednake nuli tj. $\mathbf{K}_n^{(s)}(\xi_s) = 0$, iz kog uslova sledi odnos parametara sistema:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{nk}^{(s)} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{K}_{ni}^{(s)} \mathbf{F}_{0i}}{\tilde{c}_{ss} - \tilde{a}_{ss} \Omega_i^2} \cos \Omega_i t = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{0i} \cos \Omega_i t \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{nk}^{(s)} \frac{\mathbf{K}_{ni}^{(s)} \mathbf{F}_{0i}}{\tilde{c}_{ss} - \tilde{a}_{ss} \Omega_i^2} = 0, \text{ odnosno:}$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}_{nk}^{(s)}(\xi_s) \frac{\mathbf{K}_{ni}^{(s)}(\xi_s) \mathbf{F}_{0i}}{\tilde{c}_{ss} - \tilde{a}_{ss} \Omega_i^2} = 0 \quad (4.2.47)$$

Vidi se da takvih uslova za svaku n -tu amplitudu prinudnog oscilovanja ima s tj. onoliko koliko je modova oscilovanja kontinualnog sistema.

4.3. Prinudne oscilacije sistema dve kružne ploče spregnute visko-elastičnim nelinearnim slojem.

Pretpostavimo da spoljašnja prinudna sila deluje jednako raspodeljeno po gornjoj površini gornje ploče i da je dvofrekventna sila frekvencija bliskih kružnim frekvencijama sprezanja oblika, a da na donju ploču ne deluje sila tj. da su :

$$f_{(1)nm}(t) = h_{01nm} \cos[\Omega_{1nm}t + \phi_{1nm}] + h_{02nm} \cos[\Omega_{2nm}t + \phi_{2nm}] \quad \dot{f}_{(2)nm}(t) = 0.$$

Posmatra se prolazak kroz glavna rezonantna stanja ($q_1 = 1$ i $q_2 = 1$) koja odgovaraju frekvencijama sprezanja $\Omega_{inn} \approx \hat{p}_{inn}$ visko-elastičnog sloja. Sada je sistem jednačina (3.4.20) oblika:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{1nm}(t) &= -\frac{a_{1nm}(t)}{KK_{nm}} [K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)}] [\tilde{\delta}_{(2)} K_{21nm}^{(2)} + \tilde{\delta}_{(1)} K_{22nm}^{(2)}] + \frac{h_{01nm} K_{22nm}^{(2)} \cos \phi_{1nm}}{KK_{nm} (\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})} \\ \dot{\phi}_{1nm}(t) &= \hat{p}_{1nm} - \Omega_{1nm} + \frac{\varepsilon \mathcal{N}(W_{nm}) (\beta_{(2)} K_{21nm}^{(2)} + \beta_{(1)} K_{22nm}^{(2)})}{(\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm}) KK_{nm}} \left[\frac{3}{8} (K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)})^3 a_{1nm}^2(t) + \frac{1}{2} (K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)})^2 (K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)}) a_{2nm}^2(t) \right] + \frac{h_{01nm} K_{22nm}^{(2)} \sin \phi_{1nm}}{KK_{nm} (\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm}) a_{1nm}(t)} \\ \dot{a}_{2nm}(t) &= -\frac{a_{2nm}(t)}{KK_{nm}} [K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)}] [\tilde{\delta}_{(1)} K_{21nm}^{(1)} + \tilde{\delta}_{(2)} K_{22nm}^{(1)}] + \frac{h_{02nm} K_{21nm}^{(1)} \cos \phi_{2nm}}{KK_{nm} (\Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm})} \\ \dot{\phi}_{2nm}(t) &= \hat{p}_{2nm} - \Omega_{2nm} + \frac{\varepsilon \mathcal{N}(W_{nm}) (\beta_{(1)} K_{21nm}^{(1)} + \beta_{(2)} K_{22nm}^{(1)})}{(\Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm}) KK_{nm}} \left[\frac{1}{2} (K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)})^2 (K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)}) a_{1nm}^2(t) + (K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)})^3 \frac{3}{8} a_{2nm}^2(t) \right] + \frac{h_{02nm} K_{21nm}^{(1)} \sin \phi_{2nm}}{KK_{nm} (q_2 \Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm}) a_{2nm}(t)} \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Iz izraza (4.3.1) uočava se da oblik rešenja ovih diferencijalnih jednačina zavise od odnosa kofaktora karakteristične determinante osnovnog spregnutog sistema, tačnije od svojstava sprezanja ovog sistema. Za slučaj da je sistem homogen, a pod time se podrazumeva da su obe ploče sistema istih homogenih visina u z pravcu $h_{(1)} = h_{(2)}$ i da su od materijala istih: gustina $\rho_{(1)} = \rho_{(2)}$, Poisson-ovih koeficijenta $\mu_{(1)} = \mu_{(2)}$ i modula elastičnosti $E_{0(1)} = E_{0(2)}$. U tom slučaju su za jedan oblik oscilovanja ispunjeni uslovi:

$$a_{(1)}^2 = a_{(2)}^2 = a^2, \quad \delta_{(1)} = \delta_{(2)} = \delta, \quad \dot{a}_{(1)nm}^2 = \dot{a}_{(2)nm}^2 = k_{nm}^4 c^4 + a^2 = k_{nm}^4 \frac{D_0}{\rho h} + \frac{c}{\rho h} = k_{nm}^4 \frac{E_0 h^2}{12 \rho (1 - \mu^2)} + \frac{c}{\rho h}.$$

Tada je karakteristični polinom (3.4.9a) oblika:

$$(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_{nm}^2) \pm (a^2 + 2\delta\lambda) = 0$$

Sa korenima:

$$\begin{aligned}\lambda_{1/2nm} &= \sqrt{a^2 - \omega_{nm}^2} = -\tilde{\delta}_1 \mp i\tilde{p}_1 \\ \lambda_{3/4nm} &= -2\delta \mp \sqrt{4\delta^2 - a^2 - \omega_{nm}^2} = -\tilde{\delta}_2 \mp i\tilde{p}_2,\end{aligned}\quad (4.3.2)$$

pri čemu su:

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_1 &= 0, \quad \tilde{\delta}_2 = 2\delta \quad \text{i} \\ \tilde{p}_1 &= \sqrt{\omega_{nm}^2 - a^2} \quad \text{za} \quad \omega_{nm}^2 > a^2 \\ \tilde{p}_2 &= \sqrt{a^2 + \omega_{nm}^2 - 4\delta^2} \quad \text{za} \quad a^2 + \omega_{nm}^2 > 4\delta^2.\end{aligned}\quad (4.3.2a)$$

Kofaktori su onda: $K_{21nm}^{(s)} = a^2 + 2\delta\lambda_{snm}$, $K_{22nm}^{(s)} = \lambda_{snm}^2 + 2\delta\lambda_{snm} + \omega_{nm}^2 = \pm(a^2 + 2\delta\lambda_{snm})$,

tako da su zadovoljeni uslovi odnosa kofaktora u obliku:

$$K_{21nm}^{(1)} = K_{22nm}^{(1)} = K_{21nm}^{(2)} = -K_{22nm}^{(2)} = 1 \quad (4.3.2b)$$

Sistem (4.3.1) svodi se na oblik:

$$\dot{a}_{1nm}(t) = -\frac{h_{01nm}}{2(\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})} \cos \phi_{1nm} \quad (4.3.3a)$$

$$\dot{\phi}_{1nm}(t) = (\hat{p}_{1nm} - \Omega_{1nm}) + \frac{h_{01nm}}{(\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})2a_{1nm}(t)} \sin \phi_{1nm} \quad (4.3.3b)$$

$$\dot{a}_{2nm}(t) = -2\delta a_{2nm}(t) - \frac{h_{02nm}}{2(\Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm})} \cos \phi_{2nm} \quad (4.3.3c)$$

$$\dot{\phi}_{2nm}(t) = (\hat{p}_{2nm} - \Omega_{2nm}) + 3\varepsilon\beta_{(1)} \frac{N(W_{nm})}{(\Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm})} a_{2nm}^2(t) + \frac{h_{02nm}}{(\Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm})2a_{2nm}(t)} \sin \phi_{2nm} \quad (4.3.3d)$$

Odavde se, zapravo, uočavaju neka od svojstava homogenog sistema, a to su da prigušenje i nelinearnost elastičnog dela u međusloju nema uticaja na amplitudu i fazu prvog harmonika u nm -modu. Tačnije, amplituda i faza prvog harmonika u homogenom sistemu dve ploče spregnute visko-elastičnim nelinearnim slojem ponašaju se kao da je sistem samo sa elastičnim slojem. Uticaj prigušenja i nelinearnosti prisutan je samo kod amplitude i faze drugog harmonika u jednom nm -modu oscilovanja homogenog sistema ploča. Takođe, amplituda i faza jednog harmonika su nezavisne od amplitude i faze drugog harmonika, ali su međusobno spregnute u okviru jednog harmonika nm -moda oscilovanja. U opštem slučaju to nije tako, kao što se vidi iz sistema jednačina (4.3.1) i amplitude zavise od faza u istom harmoniku dok su faze zavisne i od amplituda drugog harmonika tj. $\dot{a}_{1nm}(t) = f_1(a_{1nm}(t), \phi_{1nm}(t))$, $\dot{\phi}_{1nm}(t) = f_2(a_{1nm}(t), a_{2nm}(t), \phi_{1nm}(t))$ kao i $\dot{a}_{2nm}(t) = f_3(a_{2nm}(t), \phi_{2nm}(t))$ i $\dot{\phi}_{2nm}(t) = f_4(a_{1nm}(t), a_{2nm}(t), \phi_{2nm}(t))$.

4.4. Analiza prinudnih oscilacija dinamičkih hibridnih sistema sa nelinearnošću.

Videlo se da se matematički model sistema sa nelinearnošću svode na sistem diferencijalnih jednačina po amplitudama i fazama u prvoj aproksimaciji asimptotskog rešenja (4.2.9a), (4.2.15) kao i (4.3.1). Analiziraće se sistem (4.3.1) koji je najsloženiji. Istim postupkom analizirali bi se i ostali izvedeni sistemi, i u stacionarnim i u nestacionarnim uslovima tako što će se, samo radi lakšeg komentarisanja, napiti u opštijem obliku:

$$\dot{a}_{1nm}(t) = -\delta_{1nm} a_{1nm}(t) - \frac{h_{01nm} P_{1nm}}{(\Omega_{1nm} + \hat{p}_{1nm})} \cos \phi_{1nm}(t)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_{1nm}(t) &= (\hat{p}_{nm1} - \Omega_{1nm}) - \frac{3}{8} \frac{\alpha_{1nm}}{\hat{p}_{nm1}} a_{1nm}^2(t) - \frac{1}{4} \frac{\beta_{1nm}}{\hat{p}_{nm1}} a_{2nm}^2(t) + \frac{h_{01nm} P_{1nm}}{(\Omega_{1nm} + \hat{p}_{nm1}) a_{1nm}(t)} \sin \phi_{1nm}(t) \\
\dot{a}_{2nm}(t) &= -\delta_{2nm} a_{2nm}(t) - \frac{h_{02nm} P_{2nm}}{(\Omega_{2nm} + \hat{p}_{2nm})} \cos \phi_{2nm}(t) \\
\dot{\phi}_{2nm}(t) &= (\hat{p}_{nm2} - \Omega_{2nm}) - \frac{3}{8} \frac{\alpha_{2nm}}{\hat{p}_{nm2}} a_{2nm}^2(t) - \frac{1}{4} \frac{\beta_{2nm}}{\hat{p}_{nm2}} a_{1nm}^2(t) + \frac{h_{02nm} P_{2nm}}{(\Omega_{2nm} + \hat{p}_{nm2}) a_{2nm}(t)} \sin \phi_{2nm}(t)
\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

gde se uvode oznake za koeficijente: δ_{inn} uz amplitude a_{inn} , α_{inn} i β_{inn} uz kvadrate amplituda a_{inn}^2 i $\mathcal{E}P_{inn}$ kao redukovane vrednosti prinudnih amplituda, koji zavisno od sistema imaju drugačije vrednosti. U sistemu spregnutih ploča sa slojem visko-elastičnih nelinearnim kontinualno rapodeljenih elemenata ti koeficijenti bi bili:

$$\begin{aligned}
\delta_{1nm} &= \frac{[K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)}] \{ \tilde{\delta}_{(2)} K_{21nm}^{(2)} + \tilde{\delta}_{(1)} K_{22nm}^{(2)} \}}{KK_{nm}}, \\
P_{1nm} &= -\frac{\mathcal{E}K_{22nm}^{(2)}}{KK_{nm}}, \\
\alpha_{1nm} &= -\frac{\mathcal{E}\mathcal{N}(W_{nm})(K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)})^3}{2KK_{nm}} \{ \beta_{(2)} K_{21nm}^{(2)} + \beta_{(1)} K_{22nm}^{(2)} \}, \\
\beta_{1nm} &= -\frac{\mathcal{E}\mathcal{N}(W_{nm})(K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)})(K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)})^2}{KK_{nm}} \{ \beta_{(2)} K_{21nm}^{(2)} + \beta_{(1)} K_{22nm}^{(2)} \}, \\
\delta_{2nm}(t) &= \frac{[K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)}] \{ \tilde{\delta}_{(1)} K_{22nm}^{(1)} + \tilde{\delta}_{(2)} K_{21nm}^{(1)} \}}{KK_{nm}}, \\
P_{2nm} &= -\frac{\mathcal{E}K_{21nm}^{(1)}}{KK_{nm}}, \\
\alpha_{2nm} &= -\frac{\mathcal{E}\mathcal{N}(W_{nm})(K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)})^3}{2KK_{nm}} \{ \beta_{(1)} K_{22nm}^{(1)} + \beta_{(2)} K_{21nm}^{(1)} \}, \\
\beta_{2nm} &= -\frac{\mathcal{E}\mathcal{N}(W_{nm})(K_{22nm}^{(2)} - K_{21nm}^{(2)})(K_{22nm}^{(1)} - K_{21nm}^{(1)})^2}{KK_{nm}} \{ \beta_{(1)} K_{22nm}^{(1)} + \beta_{(2)} K_{21nm}^{(1)} \}.
\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

Radi ispitivanja stacionarnog režima oscilovanja izjednače se desne strane jednačina (4.4.1) sa nulom. Eliminisanjem faza ϕ_{1nm} i ϕ_{2nm} dobija se sistem od dve algebarske jednačine sa nepoznatim amplitudama a_{1nm} i a_{2nm} oblika:

$$\begin{aligned}
(\hat{p}_{nm1} + \Omega_{1nm})^2 \delta_{1nm}^2 a_{1nm}^2 + a_{1nm}^2 \left(\hat{p}_{nm1}^2 - \Omega_{1nm}^2 - \frac{\hat{p}_{nm1} + \Omega_{1nm}}{8\hat{p}_{nm1}} (3\alpha_{1nm} a_{1nm}^2 + 2\beta_{1nm} a_{2nm}^2) \right) - P_{1nm}^2 &= 0 \\
(\hat{p}_{nm2} + \Omega_{2nm})^2 \delta_{2nm}^2 a_{2nm}^2 + a_{2nm}^2 \left(\hat{p}_{nm2}^2 - \Omega_{2nm}^2 - \frac{\hat{p}_{nm2} + \Omega_{2nm}}{8\hat{p}_{nm2}} (3\alpha_{2nm} a_{2nm}^2 + 2\beta_{2nm} a_{1nm}^2) \right) - P_{2nm}^2 &= 0
\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Deljenjem druge jednačine sistema (4.4.1) prvom i četvrte jednačine istog sistema sa trećom, u kojima su izvodi amplituda i faza po vremenu jednaki nuli, dobijaju se izrazi za faze pri dvofrekventnom prinudnom oscilovanju u stacionarnom režimu jednog oblika oscilovanja posmatranog hibridnog sistema:

$$\begin{aligned}
\phi_{1nm} &= \arctg \left(\frac{\hat{p}_{nm1} - \Omega_{1nm}}{\delta_{1nm}} - \frac{3\alpha_{1nm} a_{1nm}^2 + 2\beta_{1nm} a_{2nm}^2}{8\hat{p}_{nm1} \delta_{1nm}} \right) \\
\phi_{2nm} &= \arctg \left(\frac{\hat{p}_{nm2} - \Omega_{2nm}}{\delta_{2nm}} - \frac{3\alpha_{2nm} a_{2nm}^2 + 2\beta_{2nm} a_{1nm}^2}{8\hat{p}_{nm2} \delta_{2nm}} \right)
\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

Rešavanjem sistema (4.4.3) i (4.4.4), numeričkom metodom Newton-Kantoroviča u matematičkom programu Mathematica, dobijaju se stacionarne amplitude i faze dvofrekventnog režima oscilovanja u jednom obliku oscilovanja hibridnih sistema sa nelinearnošću u zavisnosti od frekvencija spoljašnje poremećajne sile. Ako se fiksira vrednost druge frekvencije prinudne sile ($\Omega_{2nm} = const$) dobijaju se krive stacionarnog stanja:

$$a_{1nm} = f_1(\Omega_{1nm}), \quad a_{2nm} = f_2(\Omega_{1nm}), \quad \phi_{1nm} = f_3(\Omega_{1nm}) \quad \text{i} \quad \phi_{2nm} = f_4(\Omega_{1nm})$$

Ako se fiksiraju vrednost prve frekvencije prinudne sile ($\Omega_{1nm} = const$) dobijaju se krive stacionarnog stanja:

$$a_{1nm} = f_5(\Omega_{2nm}), a_{2nm} = f_6(\Omega_{2nm}), \phi_{1nm} = f_7(\Omega_{2nm}) \text{ i } \phi_{2nm} = f_8(\Omega_{2nm}).$$

U desetom poglavlju date su numeričke simulacije dinamika i dinamičkih stanja hibridnih sistema zasnovane na prethodnoj analizi. Prikazane su amplitudno-frekventne i fazno-frekventne krive stacionarnog stanja pri veoma sporoj promeni fiksiranih vrednosti kružne frekvencije spoljašnje pobude i u tom smislu se smatra da su sistemi u stacionarnom režimu. Na tim dijagramima moguće je vizuelno pratiti nelinearne fenomene prolaska kroz rezonantno stanje, međusobnu zavisnost harmonika u okviru jednog moda oscilovanja, pojavu novih nestabilnih grana amplitudnog i faznog odgovora sistema, kao i karakteristične skokove amplituda i faze u rezonantnom opseg frekvencija spoljašnjih pobuda.

Za nestacionarni slučaj potrebno je za zadatau promenu kružnih frekvencija spoljašnje sile $\Omega_i(t)$ numerički integraliti sistem (4.4.1) diferencijalnih jednačina prve aproksimacije, što je u desetom poglavlju učinjeno primenom numeričke metode Runge-Kutta IV reda i računarskog programa MathCAD. Kao rezultat na slici 10.2.1 prikazane su amplitudno-frekventne krive harmonika u jednom modu oscilovanja u funkciji promene, a u smeru porasta ili opadanja, frekvencija spoljašnje sile. Posmatraće se slučajevi linearne promene $\Omega_i(t) = \Omega_{oi} + \alpha t$, pri čemu za $\alpha > 0$ kružne frekvencije rastu, a za $\alpha < 0$ opadaju. Za male apsolutne vrednosti α dobijaju se krive koje su sasvim bliske krivim stacionarnog rezonantnog stanja. Vidi se da pri prolasku kroz rezonantno stanje suštinski uticaj na amplitudno-frekventne krive pokazuje brzina promene frekvencija spoljašnje sile. Pri njenom povećanju maksimumi amplituda se snižavaju, a „oštrina“ prvog maksimuma se umanjuje. Posle postizanja maksimuma uočava se pojava nekoliko maksimuma manjih veličina pri čemu što se brže ostvaruje promena frekvencija spoljašnje sile to se oni izraženije uočavaju. Prvi maksimumi amplituda su manji po apsolutnim vrednostima ukoliko je brža promena frekvencija, tj. ukoliko je prolaz kroz rezonantnu oblast izveden brže.

Kako se pri stacionarnom režimu u sistemu uočavaju skokovi amplituda, to se pri prolasku kroz rezonantno stanje kružnih frekvencija spoljašnje prinude takođe uočavaju nagle promene amplituda naročito za sporiji prolazak kroz rezonantno stanje. Maksimumi amplituda se ne pojavljuju u momentima poklapanja kružnih frekvencija spoljašnje sile sa sopstvenim frekvencijama sprezanja sistema nego kasnije ili ranije, što opet zavisi od brzina promena kružnih frekvencija prinudne sile, karaktera nelinearnosti u sistemu, a takođe i od smera porasta-opadanja promene kružnih frekvencija spoljašnje sile.

4.4.1. Stabilnost stacionarnog režima oscilovanja

Stacionarno stanje oscilovanja sistema, samo mu ime kaže, ispituje se za odgovarajuću stacionarnu vrednost ponašanja sistema. Ispitivanje stabilnosti stacionarnog režima zato treba da nam da informaciju o lokalnoj stabilnosti baš tog posmatranog stacionarnog režima. U narednom poglavlju biće reči o strukturnoj stabilnosti sistema sa nelinearnostima, koje indukuju haotična kretanja, a odnose se na

globalnu stabilnost ponašanja sistema. Analiza stabilnosti stacionarnog režima oscilovanja odnosi se na posmatranje lokalne stabilnosti posmatranog stacionarnog režima unutar jednog nm -moda dvofrekventnih vremenskih funkcija oscilovanja ploča, pa se jednačine sistema prve asimptotske aproksimacije (4.4.1) zapisuju u obliku:

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1(t) &= -\delta_1 a_1(t) - \frac{\varepsilon P_1}{(\Omega_1 + \hat{p}_1)} \cos \phi_1(t) \\
\dot{\phi}_1(t) &= (\hat{p}_1 - \Omega_1) - \frac{3}{8} \frac{\alpha_1}{\hat{p}_1} a_1^2(t) - \frac{1}{4} \frac{\beta_1}{\hat{p}_1} a_2^2(t) + \frac{\varepsilon P_1}{(\Omega_1 + \hat{p}_1) a_1(t)} \sin \phi_1(t) \\
\dot{a}_2(t) &= -\delta_2 a_2(t) - \frac{\varepsilon P_2}{(\Omega_2 + \hat{p}_2)} \cos \phi_2(t) \\
\dot{\phi}_2(t) &= (\hat{p}_2 - \Omega_2) - \frac{3}{8} \frac{\alpha_2}{\hat{p}_2} a_2^2(t) - \frac{1}{4} \frac{\beta_2}{\hat{p}_2} a_1^2(t) + \frac{\varepsilon P_2}{(\Omega_2 + \hat{p}_2) a_2(t)} \sin \phi_2(t)
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Videlo se da se za potrebe ispitivanja stacionarnog stanja rešava sisteme jednačina:

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1(t) &= -\delta_1 a_1(t) - \frac{\varepsilon P_1}{(\Omega_1 + \hat{p}_1)} \cos \phi_1(t) = \sigma_1(a_1(t), a_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \Omega_{1s}, \Omega_{2s}) = 0, \\
\dot{\phi}_1(t) &= (\hat{p}_1 - \Omega_1) - \frac{3}{8} \frac{\alpha_1}{\hat{p}_1} a_1^2(t) - \frac{1}{4} \frac{\beta_1}{\hat{p}_1} a_2^2(t) + \frac{\varepsilon P_1}{(\Omega_1 + \hat{p}_1) a_1(t)} \sin \phi_1(t) = \tau_1(a_1(t), a_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \Omega_{1s}, \Omega_{2s}) = 0, \\
\dot{a}_2(t) &= -\delta_2 a_2(t) - \frac{\varepsilon P_2}{(\Omega_2 + \hat{p}_2)} \cos \phi_2(t) = \sigma_2(a_1(t), a_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \Omega_{1s}, \Omega_{2s}) = 0, \\
\dot{\phi}_2(t) &= (\hat{p}_2 - \Omega_2) - \frac{3}{8} \frac{\alpha_2}{\hat{p}_2} a_2^2(t) - \frac{1}{4} \frac{\beta_2}{\hat{p}_2} a_1^2(t) + \frac{\varepsilon P_2}{(\Omega_2 + \hat{p}_2) a_2(t)} \sin \phi_2(t) = \tau_2(a_1(t), a_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \Omega_{1s}, \Omega_{2s}) = 0.
\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Ako se fiksira vrednost druge frekvencije prinudne sile ($\Omega_{2s} = const$) dobijaju se četiri krive stacionarnog stanja: $a_1 = f_1(\Omega_1)$, $a_2 = f_2(\Omega_1)$, $\phi_1 = f_3(\Omega_1)$ i $\phi_2 = f_4(\Omega_1)$ po frekvenciji prvog moda spoljašnje pobude.

Ako se fiksira vrednost prve frekvencije prinudne sile ($\Omega_{1s} = const$) dobijaju se, takođe, četiri krive stacionarnog stanja: $a_{1nm} = f_5(\Omega_2)$, $a_{2nm} = f_6(\Omega_2)$, $\phi_1 = f_7(\Omega_2)$ i $\phi_2 = f_8(\Omega_2)$ po frekvenciji drugog moda spoljašnje pobude. Da bi se ispitala stabilnost vrednosti stacionarnih krivih amplituda i faza, za određene fiksirane vrednosti frekvencija spoljašnje pobude, najpre se izvrši linearizacija jednačina prve asimptotske aproksimacije. Razlog zbog kojeg vršimo linearizaciju jeste teorema Hartman-Grobmana, koja se može naći u poglavlju 5.1.3. Formira se karakteristični polinom i ispita se prirodu njegovih korena, a potom ispitujući znak realnog dela svakog od korena, za svaku vrednost (a_{is}, Ω_s) , $i=1,2$ na amplitudnim karakteristikama odnosno (ϕ_{is}, Ω_s) , $i=1,2$ na faznim karakteristikama, donose se zaključci o lokalnoj stabilnosti stacionarnog režima na datoj vrednosti frekvencija spoljašnje pobude. Ako je realni deo bar jednog korena karakterističnog polinoma linearizacije prve aproksimacije za posmatrane vrednosti sa pozitivnom vrednošću onda je režim dvofrekventnog stacionarnog oscilovanja tog nm -moda ploča nestabilan. Sistem:

$$\begin{aligned}
\frac{da_1(t)}{dt} &= \sigma_1(a_1(t), a_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \Omega_{1s}, \Omega_{2s}) = \frac{\partial \sigma_1}{\partial a_1} \Big|_{a_i, \phi_i, \Omega_i} a_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \phi_1} \Big|_{a_i, \phi_i, \Omega_i} \phi_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial a_2} \Big|_{a_i, \phi_i, \Omega_i} a_2 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \phi_2} \Big|_{a_i, \phi_i, \Omega_i} \phi_2 = 0 \\
\frac{d\phi_1(t)}{dt} &= \tau_1(a_1(t), a_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \Omega_{1s}, \Omega_{2s}) = \frac{\partial \tau_1}{\partial a_1} \Big|_{a_i, \phi_i, \Omega_i} a_1 + \frac{\partial \tau_1}{\partial \phi_1} \Big|_{a_i, \phi_i, \Omega_i} \phi_1 + \frac{\partial \tau_1}{\partial a_2} \Big|_{a_i, \phi_i, \Omega_i} a_2 + \frac{\partial \tau_1}{\partial \phi_2} \Big|_{a_i, \phi_i, \Omega_i} \phi_2 = 0 \\
\frac{da_2(t)}{dt} &= \sigma_2(a_1(t), a_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \Omega_{1s}, \Omega_{2s}) = \frac{\partial \sigma_2}{\partial a_1} \Big|_{a_i, \phi_i, \Omega_i} a_1 + \frac{\partial \sigma_2}{\partial \phi_1} \Big|_{a_i, \phi_i, \Omega_i} \phi_1 + \frac{\partial \sigma_2}{\partial a_2} \Big|_{a_i, \phi_i, \Omega_i} a_2 + \frac{\partial \sigma_2}{\partial \phi_2} \Big|_{a_i, \phi_i, \Omega_i} \phi_2 = 0, \text{ za } i=1,2 \\
\frac{d\phi_2(t)}{dt} &= \tau_2(a_1(t), a_2(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \Omega_{1s}, \Omega_{2s}) = \frac{\partial \tau_2}{\partial a_1} \Big|_{a_i, \phi_i, \Omega_i} a_1 + \frac{\partial \tau_2}{\partial \phi_1} \Big|_{a_i, \phi_i, \Omega_i} \phi_1 + \frac{\partial \tau_2}{\partial a_2} \Big|_{a_i, \phi_i, \Omega_i} a_2 + \frac{\partial \tau_2}{\partial \phi_2} \Big|_{a_i, \phi_i, \Omega_i} \phi_2 = 0
\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

se može zapisati i u matičnom obliku kao:

$$\begin{cases} \dot{a}_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{\phi}_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial a_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial a_2} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial \tau_1}{\partial a_1} & \frac{\partial \tau_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial \tau_1}{\partial a_2} & \frac{\partial \tau_1}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial a_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial a_2} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial a_1} & \frac{\partial \tau_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial \tau_2}{\partial a_2} & \frac{\partial \tau_2}{\partial \phi_2} \end{bmatrix}_{a_i, \phi_i, \Omega_i} \begin{cases} a_1 \\ \phi_1 \\ a_2 \\ \phi_2 \end{cases} = 0, \quad i=1,2 \quad (4.4.7a)$$

Pretpostavljajući rešenja u obliku:

$$\begin{aligned} a_1 &= C_1 e^{\lambda t} \\ \phi_1 &= C_2 e^{\lambda t} \\ a_2 &= C_3 e^{\lambda t} \\ \phi_2 &= C_4 e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

i zamenjujući ih u sistem stacionarnih jednačina prve asimptotske aproksimacije dobija se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial a_1} - \lambda & \frac{\partial \sigma_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial a_2} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial \tau_1}{\partial a_1} & \frac{\partial \tau_1}{\partial \phi_1} - \lambda & \frac{\partial \tau_1}{\partial a_2} & \frac{\partial \tau_1}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial a_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial a_2} - \lambda & \frac{\partial \sigma_2}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial a_1} & \frac{\partial \tau_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial \tau_2}{\partial a_2} & \frac{\partial \tau_2}{\partial \phi_2} - \lambda \end{bmatrix}_{a_i, \phi_i, \Omega_i} \begin{cases} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{cases} = 0, \quad i=1,2 \quad (4.4.9)$$

Da bi ovaj sistem algebarskih jednačina imao rešenja različita od trivijalnih potrebno je da determinanta sistema bude jednaka nuli iz kog uslova se dobija karakteristični polinom u ovom slučaju četvrtog reda:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial a_1} - \lambda & \frac{\partial \sigma_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial a_2} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial \tau_1}{\partial a_1} & \frac{\partial \tau_1}{\partial \phi_1} - \lambda & \frac{\partial \tau_1}{\partial a_2} & \frac{\partial \tau_1}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial a_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial a_2} - \lambda & \frac{\partial \sigma_2}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial a_1} & \frac{\partial \tau_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial \tau_2}{\partial a_2} & \frac{\partial \tau_2}{\partial \phi_2} - \lambda \end{vmatrix}_{a_i, \phi_i, \Omega_i} = 0, \quad i=1,2 \quad (4.4.10)$$

$$\text{ili } \lambda^4 + A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0$$

gde su vrednosti koeficijenata A, B, C i D vrednosti koje se dobiju razvijanjem karakteristične determinante, i imaju vrednosti zavisno od oblika jednačina prve asimptotske aproksimacije (4.4.6).

U slučaju oblika (4.4.6) dobija se:

$$\begin{vmatrix} -\delta_1 - \lambda & \frac{\varepsilon P_1 \sin \phi_{1s}}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1)} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} \frac{\alpha_1}{\hat{p}_1} a_{1s} - \frac{\varepsilon P_1 \sin \phi_{1s}}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1) a_{1s}^2} & \frac{\varepsilon P_1 \cos \phi_{1s}}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1) a_{1s}} - \lambda & -\frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\hat{p}_1} a_{2s} & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2 - \lambda & \frac{\varepsilon P_2 \sin \phi_{2s}}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2)} \\ -\frac{1}{2} \frac{\beta_2}{\hat{p}_2} a_{1s} & 0 & -\frac{3}{4} \frac{\alpha_2}{\hat{p}_2} a_{2s} - \frac{\varepsilon P_2 \sin \phi_{2s}}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2) a_{2s}^2} & \frac{\varepsilon P_2 \cos \phi_{2s}}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2) a_{2s}} - \lambda \end{vmatrix}_{a_i, \phi_i, \Omega_i} = 0, \quad i=1,2 \quad (4.4.11)$$

Rešavajući determinantu sledi:

$$\begin{aligned} & \left[\lambda^2 + \lambda \left(\delta_2 - \frac{\varepsilon P_2 \cos \phi_{2s}}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2) a_{2s}} \right) + \left(\frac{3}{4} \frac{\alpha_2}{\hat{p}_2} a_{2s} \frac{\varepsilon P_2 \sin \phi_{2s}}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2)} + \frac{\varepsilon^2 P_2^2 \sin^2 \phi_{2s}}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2)^2 a_{2s}^2} - \frac{\varepsilon P_2 \cos \phi_{2s} \delta_2}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2) a_{2s}} \right) \right] \cdot \\ & \cdot \left\{ \lambda^2 + \lambda \left(\delta_1 - \frac{\varepsilon P_1 \cos \phi_{1s}}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1) a_{1s}} \right) + \left(\frac{3}{4} \frac{\alpha_1}{\hat{p}_1} a_{1s} \frac{\varepsilon P_1 \sin \phi_{1s}}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1)} + \frac{\varepsilon^2 P_1^2 \sin^2 \phi_{1s}}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1)^2 a_{1s}^2} - \frac{\varepsilon P_1 \cos \phi_{1s} \delta_1}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1) a_{1s}} \right) \right\} + \\ & + \frac{1}{4} \frac{\beta_1 \beta_2}{\hat{p}_1 \hat{p}_2} a_{2s} a_{1s} \frac{\varepsilon^2 P_2 P_1 \sin \phi_{2s} \sin \phi_{1s}}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2)(\Omega_{1s} + \hat{p}_1)} = 0 \end{aligned}$$

te se mogu pisati vrednosti koeficijenata karakterističnog polinoma u obliku:

$$A = \delta_1 + \delta_2 - \varepsilon \left(\frac{P_1 \cos \phi_{1s}}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1) a_{1s}} + \frac{P_2 \cos \phi_{2s}}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2) a_{2s}} \right),$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{3}{4} \frac{\alpha_1}{\hat{p}_1} a_{1s} \frac{\varepsilon P_1 \sin \phi_{1s}}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1)} + \frac{\varepsilon^2 P_1^2 \sin^2 \phi_{1s}}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1)^2 a_{1s}^2} - \frac{\varepsilon P_1 \cos \phi_{1s} (\delta_2 + \delta_1)}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1) a_{1s}} + \frac{3}{4} \frac{\alpha_2}{\hat{p}_2} a_{2s} \frac{\varepsilon P_2 \sin \phi_{2s}}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2)} + \frac{\varepsilon^2 P_2^2 \sin^2 \phi_{2s}}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2)^2 a_{2s}^2} - \\
&\quad - \frac{\varepsilon P_2 \cos \phi_{2s} (\delta_2 + \delta_1)}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2) a_{2s}} + \frac{\varepsilon P_2 \cos \phi_{2s}}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2) a_{2s}} \frac{\varepsilon P_1 \cos \phi_{1s}}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1) a_{1s}} + \delta_2 \delta_1 \\
C &= \left(\delta_2 - \frac{\varepsilon P_2 \cos \phi_{2s}}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2) a_{2s}} \right) \left(\frac{3}{4} \frac{\alpha_1}{\hat{p}_1} a_{1s} \frac{\varepsilon P_1 \sin \phi_{1s}}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1)} + \frac{\varepsilon^2 P_1^2 \sin^2 \phi_{1s}}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1)^2 a_{1s}^2} - \frac{\varepsilon P_1 \cos \phi_{1s} \delta_1}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1) a_{1s}} \right) + \quad \text{i} \\
&\quad + \left(\delta_1 - \frac{\varepsilon P_1 \cos \phi_{1s}}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1) a_{1s}} \right) \left(\frac{3}{4} \frac{\alpha_2}{\hat{p}_2} a_{2s} \frac{\varepsilon P_2 \sin \phi_{2s}}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2)} + \frac{\varepsilon^2 P_2^2 \sin^2 \phi_{2s}}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2)^2 a_{2s}^2} - \frac{\varepsilon P_2 \cos \phi_{2s} \delta_2}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2) a_{2s}} \right) \\
D &= \frac{1}{4} \frac{\beta_1 \beta_2}{\hat{p}_1 \hat{p}_2} a_{2s} a_{1s} \frac{\varepsilon^2 P_2 P_1 \sin \phi_{2s} \sin \phi_{1s}}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2)(\Omega_{1s} + \hat{p}_1)} + \\
&\quad + \left(\frac{3}{4} \frac{\alpha_1}{\hat{p}_1} a_{1s} \frac{\varepsilon P_1 \sin \phi_{1s}}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1)} + \frac{\varepsilon^2 P_1^2 \sin^2 \phi_{1s}}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1)^2 a_{1s}^2} - \frac{\varepsilon P_1 \cos \phi_{1s} \delta_1}{(\Omega_{1s} + \hat{p}_1) a_{1s}} \right) \left(\frac{3}{4} \frac{\alpha_2}{\hat{p}_2} a_{2s} \frac{\varepsilon P_2 \sin \phi_{2s}}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2)} + \frac{\varepsilon^2 P_2^2 \sin^2 \phi_{2s}}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2)^2 a_{2s}^2} - \frac{\varepsilon P_2 \cos \phi_{2s} \delta_2}{(\Omega_{2s} + \hat{p}_2) a_{2s}} \right)
\end{aligned}$$

Za krive dobijene kada se fiksira vrednost druge frekvencije prinudne sile ($\Omega_{2s} = const$) dobijaju se četiri krive stacionarnog stanja: $a_1 = f_1(\Omega_1)$, $a_2 = f_2(\Omega_1)$, $\phi_1 = f_3(\Omega_1)$ i $\phi_2 = f_4(\Omega_1)$ po frekvenciji prvog moda spoljašnje pobude. Potrebno je za svaku vrednost Ω_{1s} sa dijagrama očitati vrednosti a_{is} i ϕ_{is} , za $i=1,2$ i za svaku od tih vrednosti izračunati vrednost koeficijenata karakterističnog polinoma te naći njegove korene. Ako i jedan od četiri korena ima realni deo pozitivan ta tačka na dijagramima se označava kao nestabilna tačka. Budući da broj tačaka i broj dijagrama sa novo pojavljenim granama pri prolascima kroz rezonantne oblasti za koje treba izvršiti ispitivanja ima prilično mnogo to je potrebno napraviti algoritam proračuna koeficijenata karakterističnog polinoma za svaku vrednost odgovarajuće serije dijagrama na diskretnoj vrednosti jedne of frekvencija spoljašnje sile i korena tog polinoma, pa kao izlaz tog algoritma dobiti potvrdu o vrednostima realnih delova korena.

Ako bilo koja sopstvena vrednost ima realni deo jednak nuli onda informacija o stabilnosti ne može da se odredi linearizacijom, a više o tome može se naći u potpoglavljima petog poglavlja.

Na dijagramima stacionarnih krivih u radovima [115, 124, 130, 135] isprekidanim linijama su naznačene oblasti tih dijagrama, koje odgovaraju nestabilnim rešenjima stacionarnog režima oscilovanja, samo što u tim radovima nije postojao numerički algoritam za brža izračunavanja, već se svaka vrednost stacionarnih krivih ispitivala ponaosob algebarskim proračunima. Jedan od doprinosa ovoga rada jeste upravo procedura za pisanje tog algoritma i mogućnost da se ispita stabilnost stacionarnog režima pomoću računara daleko brže nego li analitičkim proračunima.

5* Poglavlje

Integritet hibridnih sistema i komponentnih dinamika

Jasno je iz prethodnih poglavlja da jedna klasa hibridnih sistemima u ovom radu podrazumeva spregnute dinamičke sisteme koje u nekoj od podstruktura sadrže svojstva nelinearnosti. Takođe, zaključci dostupne savremene literature ukazuju na prisustvo nelinearnosti u hibridnim sistemima, ili uopšte projektovanim sistemima, kao negativnost, koja se teško može poredvideti proračunom i sa njome kao takvom manipulirati. Ovde kroz ceo rad pokazaće se kako se nelinearnosti mogu fizički uklopiti u modele sistema i matematički ih modelirati i rešiti, pa potom i iskoristiti neke od fenomena takvih sistema sa nelinearnostima u smislu sinhronizacije u takvim sistemima ili optimalnog upravljanja. No, najpre, ovo poglavlje koristi se za pregled i definicije osnovnih pojmova koji se tiču svojstva dinamičkih, kako linearnih, tako i nelinearnih sistema i njihovih matematičkih modela i opisa, geometrijskih predstavljanja (interpretacija), kao i da se definišu pojmovi strukturne stabilnosti sistema i integriteta klase hibridnih sistema sa nelinearnostima, koristeći se pri tome pretežno monografijom sada već klasičnih osnova nelinearnih oscilacija ” Nelinearne oscilacije, dinamički sistemi i bifurkacije vektorskih polja” (*Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*), autora Guckenheimer J. i Holmes P. iz 1983. godine.

5.1. Matematički model dinamičkih sistema i nelinearne oscilacije

5.1.1. Egzistencija i jedinstvenost rešenja diferencijalnih jednačina

Jasno je iz prethodnih poglavlja da se matematički modeli dinamičkih sistema svode na diferencijalne jednačine kretanja. Zato svojstva tih modela proučavamo najpre posmatrajući diferencijalnu jednačinu u opštem obliku:

$$\frac{dx}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x} = f(x), \quad (5.1.1)$$

gde je $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ vektorska funkcija od jedne nezavisne promenljive (obično vremena) i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ je neprekidna funkcija definisana na istom podskupu $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Kaže se da vektorsko polje f generiše tok $\phi_t: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, gde je $\phi_t(x) = \phi(x, t)$ neprekidna funkcija definisana za svako x iz U i t iz intervala $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ i ϕ zadovoljava jednačinu (5.1.1) u smislu:

$$\frac{d}{dt}(\phi(x, t))|_{t=\tau} = f(\phi(x, t)) \quad (5.1.2)$$

za svako $x \in U$ i $\tau \in I$. Dinamički sistemi opisani diferencijalnim jednačinama oblika (5.1.1) u kojima vektorsko polje ne sadrži eksplicitno vreme su autonomni.

Ako su dati i početni uslovi oblika:

$$x(0) = x_0 \in U \quad (5.1.3)$$

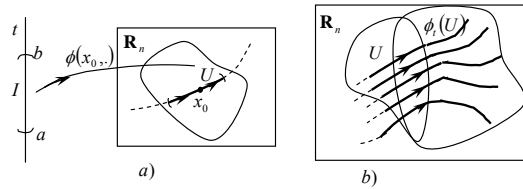
u kom slučaju se traži rešenje $\phi(x_0, t)$, tako da:

$$\phi(x_0, 0) = x_0, \quad (5.1.4)$$

tada $\phi(x_0, \cdot): I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiše *krivu rešenja, trajektoriju ili orbitu* diferencijalne jednačine (5.1.1) dobijenu za x_0 . Za sve tačke $x \in U$ dobija se familija takvih krivih, slika 5.1.1, ili fazni portret. Vektorsko polje autonomnog sistema (5.1.1) invarijantno je u odnosu na translaciju u vremenu, rešenje dobijeno za $t_0 \neq 0$ uvek se može translatorno pomeriti u $t_0 = 0$. Jedinstvenost i egzistencija rešenja jednačine (5.1.1) data je sledećom teoremom:

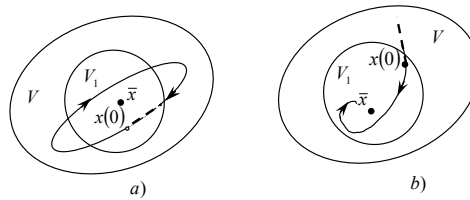
Osnovna teorema lokalne jedinstvenosti i egzistencije rešenja, [160]: Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ otvoreni podskup Euklidskog prostora (ili diferencijabilne mnogostrukosti M), neka je $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilna (C^1) i neka $x_0 \in U$. Onda postoji konstanta $c > 0$ i jedinstveno rešenje $\phi(x_0, \cdot): (-c, c) \rightarrow U$ koje zadovoljava diferencijalnu jednačinu $\dot{x} = f(x)$ sa početnim uslovom $x(0) = x_0$.

Ustvvari, samo treba biti zadovoljen uslov da je $|f(y) - f(x)| \leq K|x - y|$ za $K < \infty$, gde je K Lipshitz-ova konstanta od f .



Slika 5.1.1. Krive rešenja i tok: a) trajektorija $\phi_t(x_0)$; b) tok ϕ_t

Fiksne tačke, tzv. ravnotežne ili nulte, su bitna klasa rešenja diferencijalne jednačine. Fiksne tačke su definisane iščezavanjem vektorskog polja $f(x) : f(\bar{x}) = 0$. Kaže se da je fiksna tačka \bar{x} stabilna ako rešenje $x(t)$ u njoj blizini ostaje blizu \bar{x} za sve vreme, tj. ako za svaku okolinu V od \bar{x} u U postoji okolina $V_1 \subset V$ takva da svako rešenje $x(x_0, t)$ sa $x_0 \in V_1$ je definisano i leži u V za sve $t > 0$. Ako V_1 može biti tako izabrano da $x(t) \rightarrow \bar{x}$ kada $t \rightarrow \infty$ onda je \bar{x} asimptotski stabilna tačka, slika 5.1.2.



Slika 5.1.2.a) Stabilnost; b) asimptotska stabilnost

Na slici 5.1.2. (a) je prikazana tzv. prirodna stabilnost i tipična je za fiksne tačke tipa centar. Asimptotski stabilne fiksne tačke nazivaju se ponori. Ako fiksne tačke nisu stabilne one se nazivaju nestabilnim, sedla i izvori su primeri nestabilnih fiksnih tačaka. Predhodno definisana stabilnost je lokalnog karaktera: ona se tiče samo ponašanja rešenja u okolini fiksne tačke. Iako takva rešenja ostaju ograničena sve vreme, druga rešenja ne moraju postojati globalno.

Teorema (Hirsch and Smale, [160]): Neka je \bar{x} fiksna tačka za jednačinu (5.1.1) i neka $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ bude diferencijabilna funkcija definisana u okolini $W \subseteq U$ od \bar{x} takva da je:

- (i) $V(\bar{x}) = 0$ i $V(x) > 0$ ako je $x \neq \bar{x}$; i
- (ii) $\dot{V}(x) \leq 0$ u $W - \{\bar{x}\}$. Onda je \bar{x} stabilna. Šta više, ako
- (iii) $\dot{V}(x) < 0$ u $W - \{\bar{x}\}$; onda je \bar{x} asimptotski stabilna.

Ovde je $\dot{V} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x)$ izvod od V duž trajektorije jednačine (5.1.1). Ovim diferenciranjem

zapravo se ispituje da li su svi preseci krivih sa V 'unutrašnji'.

pozitivno definitna funkcija V naziva se Lyapunov-ljeva funkcija.

Dakle, stabilnost ravnoteže i ograničenost rešenja mogu se ispitati, a da se ne računaju rešenja diferencijalne jednačine. Međutim, ne postoji opšti metod za nalaženje odgovarajuće Lyapunov-ljeve funkcije, iako je u mašinskim problemima funkcija energije dobar izbor.

Na primer:

Ako se posmatra kretanje nelinearnog oscilatora bez prigušenja opisanog jednačinom (3.1.5), u kojoj će se zanemariti linearno prigušenje i oprugu smatrati sa restitucionom silom u obliku $F_c = c(x + x^3)$, koja se može napisati u obliku:

$$\ddot{x} + \omega_1^2(x + x^3) = 0 \quad (5.1.5)$$

gde je $\omega_1^2 = c/m$ i $c > 0$. Ako se stavi da je $\dot{x} = y$ ova diferencijalna jednačina drugog reda se svodi na sistem diferencijalnih jednačina prvog reda oblika:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega_1^2(x + x^3) \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Ukupna energija ovog sistema može se napisati u obliku:

$$E(x, y) = \frac{my^2}{2} + c\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right). \quad (5.1.7)$$

$E(x, y)$ predstavlja i Lyapunov-ljevu funkciju za sistem (5.1.6). Vidi se da je $E(0,0) = 0$, u tački jedinstvene ravnoteže sistema $(x, y) = (0,0)$, kao i $E(x, y) > 0$, za svako $(x, y) \neq (0,0)$, šta više izvod po vremenu Lyapunov-ljeve funkcije (5.1.7) je oblika:

$$\dot{E} = my\dot{y} + c(x + x^3)\dot{x} = -c(x + x^3)\dot{x} + c(x + x^3)\dot{x} \equiv 0. \quad (5.1.8)$$

To sledi da je tačka $(x, y) = (0,0)$ tačka stabilne ravnoteže. Ako se sada doda prigušenje i posmatra onaj isti nelinearni oscilator sa prigušenjem iz poglavlja 3.1.1 samo, bez gubljenja u opštosti zaključaka, u slučaju kada su $\omega_1^2 = \tilde{\omega}_{N1}^2 = c/m$ i ako se sa $\alpha = 2\delta_1$ označi koeficijent prigušenja, pri čemu se posmatra slučaj, kao i do sada, da je $\alpha > 0$, onda se sistem jednačina kretanja nelinearnog oscilatora sa prigušenjem može pisati u obliku:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega_1^2(x + x^3) - \alpha y. \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Pri tome se za istu Lyapunov-ljevu funkciju (5.1.7) dobija da je:

$$\dot{E} = -\alpha my^2, \quad (5.1.10)$$

ovaj izraz je negativan za svako $(x, y) \neq (0,0)$. Zato se modifikuje Lyapunov-ljeva funkcija na oblik:

$$V(x, y) = \frac{my^2}{2} + c\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right) + \beta\left(xy + \frac{\alpha x^2}{2}\right), \quad (5.1.11)$$

tako da je:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= my\dot{y} + c(x + x^3)\dot{x} + \beta(\dot{x}y + x\dot{y} + \alpha x\dot{x}) = \\ &= (mx + \beta y)(-\omega_1^2(x + x^3) - \alpha y) + c(x + x^3)y + \beta y^2 + \alpha \beta xy = -\beta \omega_1^2(x^2 + x^4) - (\alpha m - \beta)y^2 \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Ako se izabere β dovoljno malo V ostaje sve vreme pozitivno definitna funkcija i \dot{V} je striktno negativno za sve $(x, y) \neq (0,0)$. To znači da je $(x, y) = (0,0)$ globalno asimptotski stabilna tačka za $\alpha > 0$.

5.1.2. Linearni sistem

Linearni sistem se definiše u obliku:

$$\frac{dx}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (5.1.13)$$

gde je A $n \times n$ matrica sa konstantnim koeficijentima. Pod rešenjem jednačine (5.1.13) podrazumeva se vektorska funkcija $x(x_0, t)$ zavisna od vremena t i početnog uslova:

$$x(0) = x_0 \in U \quad (5.1.14)$$

$x(x_0, t)$ je dakle rešenje početnog problema (5.1.13)-(5.1.14). Kod toka ϕ_t je $x(x_0, t) \equiv \phi_t(x_0)$.

Teorema, [160]: Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i pretpostavi se da $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ima Lipschitz-ovu konstantu K . Neka $y(t)$, $z(t)$ budu rešenja $\dot{x} = f(x)$ na zatvorenom intervalu $[t_0, t_1]$. Onda za svako $t \in [t_0, t_1]$, sledi: $|y(t) - z(t)| \leq |y(t_0) - z(t_0)|e^{K(t-t_0)}$.

Ova teorema garantuje da je rešenje linearnog sistema definisano za svako $t \in \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Opšte rešenje sistema (5.1.13) može se dobiti linearnom superpozicijom n nezavisnih rešenja $\{x^1(t), \dots, x^n(t)\}$:

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j x^j(t), \quad (5.1.15)$$

gde se n nepoznatih konstanti c_j određuju iz početnih uslova.

Ako A ima n linearno nezavisnih sopstvenih vektora v^j , $j = 1, \dots, n$ onda kao osnov prostora rešenja mogu se uzeti vektorske funkcije:

$$x^j(t) = e^{\lambda_j t} v^j, \quad (5.1.16)$$

gde su λ_j sopstvene vrednosti vektora v^j . Za kompleksne sopstvene vrednosti $\lambda_j, \bar{\lambda}_j = \alpha_j \pm i\beta_j$, sa sopstvenim vektorima $v^R \pm iv^I$, može se uzeti:

$$\begin{aligned} x^j(t) &= e^{\alpha_j t} (v^R \cos \beta t - v^I \sin \beta t), \\ x^{j+1}(t) &= e^{\alpha_j t} (v^R \sin \beta t + v^I \cos \beta t), \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

kao pridruženi par rešenja linearno nezavisnim rešenjima.

Ako se ponovo pogleda skup n linearno nezavisnih rešenja i naznači se da osnovno matricno rešenje ima ovih n rešenja kao svoje kolone:

$$X(t) = [x^1(t), \dots, x^n(t)]. \quad (5.1.18)$$

Onda kolone $x^j(t)$, $j = 1, \dots, n$ od $X(t)$ čine bazu prostora rešenja sistema (5.1.13).

Lako je pokazati da:

$$e^{tA} = X(t)X(0)^{-1} \quad (5.1.19)$$

Jednačina (5.1.13) može se izračunati ako se prvo pronađe inverzna transformacija T koja diagonalizuje matricu A ili na kraju krajeva dovodeći je u Jordan-ovu normalni oblik (ako ima ponovljenih sopstvenih vrednosti). Jednačina (5.1.13) postaje:

$$\dot{y} = Jy, \quad (5.1.20)$$

gde je $J = T^{-1}AT$ i $x = Ty$. Sa jednačinom (5.1.20) je lako raditi. e^{tA} se može izračunati kao

$$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}. \quad (5.1.21)$$

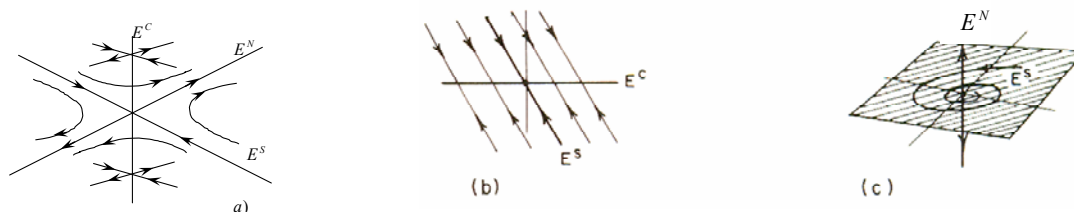
Tako su na primer za tri 2×2 matrice dobijene Jordan-ove matrice oblika:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, & e^{tA} &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}; \\ A &= \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, & e^{tA} &= e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix}; \\ A &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}, & e^{tA} &= e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

Matrica e^{tA} može se posmatrati kao preslikavanje \mathbb{R}^n u \mathbb{R}^n . Operator e^{tA} , dakle, sadrži opštu informaciju na skupu svih rešenja jednačine (5.1.13), dok formula $x(x_0, t) = e^{tA}x_0$ sadrži sve tačke $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Kaže se da e^{tA} definiše tok na \mathbb{R}^n i da je taj tok generisan vektorskim poljem Ax definisanim na \mathbb{R}^n . Tok $e^{tA} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ može se shvatiti kao skup svih rešenja jednačine (5.1.13). U tom skupu pojedina rešenja imaju specijalnu ulogu; ona koja leže u linearnim potprostorima spojenim sopstvenim vektorima. Ako je v^j realni sopstveni vektor od A , a tako i od e^{tA} onda rešenje u tački $c_j v^j \in \mathbb{R}^n$ ostaje u intervalu $\{v^j\}$ sve vreme.

Potprostori pod različitim sopstvenim vektorima dele se na tri vrste:

- stabilni potprostor $E^S = mreža\{v^1, \dots, v^{n_s}\}$,
- nestabilni potprostor $E^N = mreža\{u^1, \dots, u^{n_N}\}$ i
- centralni potprostor $E^C = mreža\{w^1, \dots, w^{n_c}\}$, gde su v^1, \dots, v^{n_s} n_s -sopstvenih vektora, čije sopstvene vrednosti imaju negativne realne delove, u^1, \dots, u^{n_N} su n_N sopstvenih vektora, čije sopstvene vrednosti imaju pozitivne realne delove i w^1, \dots, w^{n_c} , čije sopstvene vrednosti imaju realne delove jednake nuli. Nazivi odslikavaju činjenicu da rešenja koja leže u E^S imaju osobinu eksponencijalnog opadanja (ili monotono ili oscilatorno), oni iz E^N imaju osobinu eksponencijalnog rasta, a iz E^C ni jednu ni drugu, slika 5.1.3.



Slika 5.1.3. Invarijantni potprostori. (a) Tri moguća potprostora, (b) primer za

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, E^S = mreža(1, -4), E^C = mreža(1, 0), E^N = \emptyset; \quad (c) \text{ primer za } A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, E^S = mreža\{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\},$$

$$E^C = \emptyset, E^N = (0, 0, 1).$$

5.1.3. Nelinearni sistem

Jasno je da teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja tvrdi da je za beskonačno diferencijabilne (C^∞) funkcije $f(x)$ rešenje za početni problem:

$$\dot{x} = f(x); \quad x \in \mathbb{R}^n \quad x(0) = x_0 \quad (5.1.23)$$

definisano najmanje u nekoj okolini $t \in (-c, c)$ od $t = 0$. Tako je lokalni tok $\phi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definisan kao $\phi_t(x_0) = x(t, x_0)$ na analogan način kao u linearnom slučaju mada se ne može dati opšta formula kao e^{tA} .

Dobar početak u proučavanju nelinearnog sistema $\dot{x} = f(x)$ mogao bi biti u nalaženju nula od f ili fiksnih tačaka od (5.1.23), što su *nulta, ravnotežna ili stacionarna rešenja*. Pretpostavi se da postoji fiksna tačka \bar{x} , tako da je $f(\bar{x}) = 0$ i želi se opisati ponašanje rešenja u okolini \bar{x} . To se čini linearizujući jednačinu (5.1.23) u tački \bar{x} , tj. proučava se linearni sistem:

$$\dot{\xi} = Df(\bar{x})\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (5.1.24)$$

gde je $Df = [\partial f_i / \partial x_j]$ Jacobijan-ova matrica prvih parcijalnih izvoda funkcije

$$f = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))^T \quad (T \text{ označava transponovanje}), \text{ i } x = \bar{x} + \xi, \quad |\xi| \ll 1.$$

Pitanje je šta se može reći o rešenju (5.1.23) pomoću znanja o sistemu (5.1.24)? Odgovor sledi iz dva fundamentalna rezultata teorije dinamičkih sistema koji će biti dati, a mogu biti zaokruženi rečima *lokalno ponašanje* (za $|\xi|$ male vrednosti).

Teorema (Hartman-Grobman), [55, 56]: Ako $Df(\bar{x})$ nema nulte ili čisto imaginarne sopstvene vrednosti onda postoji homeomorfizam* h definisan u nekoj okolini U od \bar{x} u \mathbb{R}^n koji lokalno predstavlja orbite nelinearnog toka ϕ_t od (5.1.23) preko linearnog toka $e^{tDf(\bar{x})}$ od (5.1.24). Homeomorfizam održava smisao orbita i može takođe biti izabran da održava i parametrizaciju preko vremena.

Kada $Df(\bar{x})$ nema sopstvene vrednosti sa nultim realnim delovima, \bar{x} se naziva *hiperbilička ili nedegenerativna* fiksna tačka i asimptotsko ponašanje rešenja u njenoj okolini (dakle i vrsta stabilnosti) je određeno linearizacijom. Ako bilo koja sopstvena vrednost ima realni deo jednak nuli onda stabilnost ne može da se odredi linearizacijom, kao u primeru:

$$\ddot{x} + \varepsilon x^2 \dot{x} + x = 0. \quad (5.1.25)$$

Ako se napiše kao sistem (sa $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$):

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 x_2 \end{pmatrix}. \quad (5.1.26)$$

* C^k difeomorfizam $f: M \rightarrow N$ je preslikavanje f koje je 1-1, na, i ima osobinu da su obe f i f^{-1} k -puta diferencijabilne. Homeomorfizam je C^0 difeomorfizam, tj. neprekidno preslikavanje $f: M \rightarrow N$ sa neprekidnom inverzijom.

Nalaze se sopstvene vrednosti $\lambda, \bar{\lambda} = \pm i$. Međutim, izuzev za $\varepsilon = 0$, fiksna tačka $(x_1, x_2) = (0, 0)$ nije centar, kao u linearnom sistemu, već nehiperbolička ili slabo privlačeci ponor za $\varepsilon > 0$, i odbijajući izvor za $\varepsilon < 0$. Definišu se lokalno stabilne i nestabilne mnogostrukosti od \bar{x} , $W_{loc}^s(\bar{x})$, $W_{loc}^n(\bar{x})$ na sledeći način:

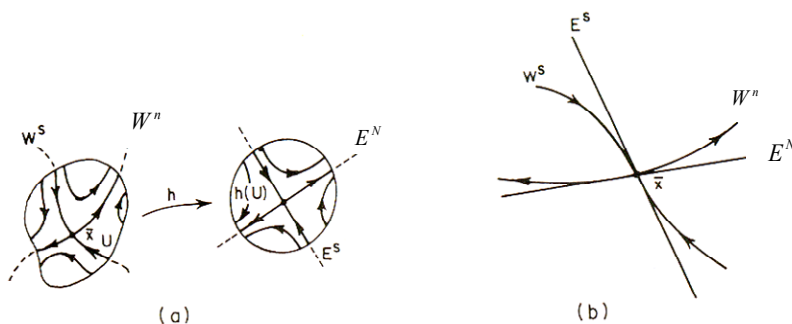
$$\begin{aligned} W_{loc}^s(\bar{x}) &= \{x \in U \mid \phi_t(x) \rightarrow \bar{x} \text{ za } t \rightarrow \infty, \text{ i } \phi_t(x) \in U \text{ za svako } t \geq 0\} \\ W_{loc}^n(\bar{x}) &= \{x \in U \mid \phi_t(x) \rightarrow \bar{x} \text{ za } t \rightarrow -\infty, \text{ i } \phi_t(x) \in U \text{ za svako } t \leq 0\} \end{aligned} \quad (5.1.27)$$

gde je $U \subset R^n$ okolina fiksne tačke \bar{x} . Invarijantne mnogostrukosti $W_{loc}^s(\bar{x})$ i $W_{loc}^n(\bar{x})$ daju nelinearni analog ravnim stabilnim i nestabilnim sopstvenim prostorima E^s i E^n linearnog problema (5.1.24). Sledeći rezultat zapravo nam kaže da su $W_{loc}^s(\bar{x})$ i $W_{loc}^n(\bar{x})$ tangentne na E^s i E^n u tački \bar{x} .

Teorema stabilne mnogostrukosti za fiksnu tačku: Ako se pretpostavi da $\dot{x} = f(x)$ ima hiperboličku fiksnu tačku, onda postoje lokalno stabilna i nestabilna mnogostrukost $W_{loc}^s(\bar{x})$, $W_{loc}^n(\bar{x})$ istih dimenzija n_s, n_n kao i sopstveni prostori E^s, E^n linernog sistema (5.1.24), i tangentne su na E^s, E^n u tački \bar{x} . $W_{loc}^s(\bar{x}), W_{loc}^n(\bar{x})$ su onoliko puta diferencijabilne koliko i funkcija f . Ova i teorema **Hartman-Grobman-a** mogu biti prikazane slikovito kao na slici 5.1.4.

Lokalno invarijantne mnogostrukosti W_{loc}^s, W_{loc}^n imaju uopštenje puštajući da tačke u W_{loc}^s teku unazad, a u W_{loc}^n teku unapred:

$$\begin{aligned} W^s(\bar{x}) &= \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{loc}^s(\bar{x})) \\ W^n(\bar{x}) &= \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{loc}^n(\bar{x})) \end{aligned} \quad (5.1.28)$$



Slika 5.1.4. Linearizacija i invarijantni podprostori. (a) Hartman-Grobman-ova teorema (b) lokalne stabilna i nestabilna mnogostrukosti

Egzistencija i jedinstvenost rešenja jednačine (5.1.23) garantuju da se dve stabilne (nestabilne) mnogostrukosti različitih fiksni tačaka \bar{x}^1 i \bar{x}^2 ne mogu presecati, niti se $W^s(\bar{x})$ (ili $W^n(\bar{x})$) mogu međusobno presecati. Međutim, međusobni preseoci stabilne i nestabilne mnogostrukosti različitih fiksni tačaka ili iste fiksne tačke mogu se pojaviti, i, u suštini, izvor su veoma složenog ponašanja koje se pojavljuje kod dinamičkih sistema.

Na primer:

Sistem nelinearnih diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= -y + x^2, \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

ima jedinstvenu fiksnu tačku u koordinatnom početku. Za linearizovani sistem slede sledeći invarijantni potprostori:

$$E^s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0\},$$

$$E^n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}. \tag{5.1.30}$$

U ovom slučaju može se direktno integraliti nelinearni sistem, zato iz sistema (5.1.29) eliminacijom vremena sledi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} + x. \tag{5.1.31}$$

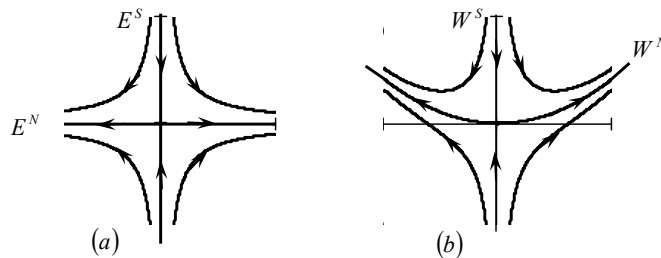
Ovo se može direktno integraliti i dobijaju se krive rešenja, trajektorije:

$$y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}, \tag{5.1.32}$$

gde je c konstanta, koja se određuje iz početnih uslova. Sada iz Hartman-ove teoreme zajedno sa (5.1.30) sledi da $W_{loc}^n(0,0)$ može biti predstavljena kao grafik $y = h(x)$ sa $h(0) = h'(0) = 0$, dok je W_{loc}^n tangenta na E^n u tački $(0,0)$, pa je $c = 0$ u (5.1.32) i sledi:

$$W^n(0,0) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = \frac{x^2}{3} \right\} \tag{5.1.33}$$

Na kraju, zapaža se da ako je $x(0) = 0$ onda je $\dot{x} \equiv 0$, i odatle $x(t) \equiv 0$, vidi se da je $W^s(0,0) \equiv E^s$, slika 5.1.5.



Slika 5.1.5. Stabilna i nestabilna mnogostrukost sistema (5.1.29). (a) linearan sistem; (b) nelinearan sistem

Pored fiksnih tačaka nelinearni sistemi mogu posedovati i granične skupove kao na primer zatvorene ili periodičke orbite. Periodičko rešenje je ono za koje postoji $0 < T < \infty$ takvo da $x(t) = x(t + T)$ za sve vreme t . Zatvorene ili periodičke orbite često se javljaju u nelinearnim sistemima, takve orbite imaju stabilane i nestabilne mnogostrukosti isto kao i fiksne tačke. Neka γ označava zatvorenu orbitu i neka je U neka okolina od γ onda se definiše:

$$W_{loc}^s(\gamma) = \{x \in U | |\phi_t(x) - \gamma| \rightarrow 0 \text{ za } t \rightarrow \infty, \text{ i } \phi_t(x) \in U \text{ za } t \geq 0\} \tag{5.1.34a}$$

$$W_{loc}^n(\gamma) = \{x \in U | |\phi_t(x) - \gamma| \rightarrow 0 \text{ za } t \rightarrow -\infty, \text{ i } \phi_t(x) \in U \text{ za } t \leq 0\}. \tag{5.1.34b}$$

5.2. Diskretni dinamički sistemi

5.2.1. Linearne i nelinearne mape

Pokazano je kako linearan sistem (5.1.13) stvara mapu toka $e^{tA} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, kada je e^{tA} matrica $n \times n$. Za fiksno $t = \tau$, neka je $e^{\tau A} = B$ onda je B matrica konstantnih koeficijenata i jednačina:

$$x_{n+1} = Bx_n \quad \text{ili} \quad x \rightarrow Bx \quad (5.2.1)$$

je diskretni dinamički sistem dobijen iz toka jednačine (5.1.13). Slično, nelinearni sistem i njegov tok ϕ_t stvara nelinearnu mapu:

$$x_{n+1} = G(x_n) \quad \text{ili} \quad x \rightarrow G(x) \quad (5.2.2)$$

gde je $G = \phi_t$ nelinearna vektorska funkcija. Ako je tok ϕ_t gladak (recimo r -puta neprekidno diferencijabilan), onda je G glatka mapa sa glatkom inverznom mapom tj. difeomorfizam. Ovo je jedan primer kako kontinualni tok stvara diskretnu mapu, kasnije će biti opisane važnije Poincaré-ove mape.

Difeomorfizmi ili diskretni dinamički sistemi mogu se proučavati na sebi svojstven način i uopšte mogu se posmatrati neinvertne mape oblika:

$$x \rightarrow x - x^2. \quad (5.2.3)$$

Orbita linearne mape $x \rightarrow Bx$ je niz tačaka $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ definisan sa $x_{i+1} = Bx_i$. Bilo koja početna tačka generiše jedinstvenu orbitu u slučaju da B nema sopstvene vrednosti jednake nuli.

Stabilni, nestabilni i centralni potprostori definišu se na analogan način kao kod vektorskih polja:

$$E^s = \text{mreža} \{n_s (\text{opšti}) \text{ sopstveni vektori čije sopstvene vrednosti imaju module } < 1 \}$$

$$E^n = \text{mreža} \{n_n (\text{opšti}) \text{ sopstveni vektori čije sopstvene vrednosti imaju module } > 1 \}$$

$$E^c = \text{mreža} \{n_c (\text{opšti}) \text{ sopstveni vektori čije sopstvene vrednosti imaju module } = 1 \}$$

gde orbite E^s i E^n imaju osobine kontrakcije i širenja, respektivno.

Ako ne postoje sopstvene vrednosti koje se ponavljaju, onda su kontrakcija i ekspanzija ograničene geometrijskim redovima tj. postoji konstanta $c > 0$, $\alpha < 0$ takva da za $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} |x_n| &\leq c\alpha^n |x_0| && \text{ako } x_0 \in E^s \\ |x_{-n}| &\leq c\alpha^{-n} |x_0| && \text{ako } x_0 \in E^n \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Ako se pojavljuju jednake sopstvene vrednosti, tada mnogo više no u slučaju tokova, kontrakcije (ili ekstenzije) ne moraju biti eksponencijalne.

Ako B nema sopstvene vrednosti jediničnih modula, same sopstvene vrednosti služe za određivanje stabilnosti. U tom slučaju $x = 0$ je *hiperbolička* fiksna tačka, i uopšte, ako je \bar{x} fiksna tačka za G ($G(\bar{x}) = \bar{x}$) i $DG(\bar{x})$ nema sopstvene vrednosti jediničnih modula onda se \bar{x} naziva *hiperbolička* fiksna tačka.

Postoji teorija difeomorfizama paralelna onoj kod tokova, i u suštini teorema linearizacije Hartman-Grobman-ova i rezultati invarijantne mnogostrukosti su primenljivi na mape isto kao i na tokove.

Teorema (Hartman-Grobman): Neka $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bude (C^1) difeomorfizam sa hiperboličkom fiksnom tačkom \bar{x} . Onda postoji homeomorfizam h definisan u nekoj okolini U od \bar{x} takav da je $h(G(\xi)) = DG(\bar{x})h(\xi)$ za sve $\xi \in U$.

Teorema stabilne mnogostrukosti za fiksnu tačku: Neka $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bude (C^1) difeomorfizam sa hiperboličkom fiksnom tačkom \bar{x} . Onda postoje lokalno stabilna i nestabilna mnogostrukost $W_{loc}^s(\bar{x})$, $W_{loc}^N(\bar{x})$ i tangentne na sopstvene prostore $E_{\bar{x}}^s$, $E_{\bar{x}}^N$ od $DG(\bar{x})$ u tački \bar{x} i odgovarajućih istih dimenzija. $W_{loc}^s(\bar{x})$, $W_{loc}^N(\bar{x})$ su onoliko puta diferencijabilne koliko i mapa G .

Opšte stabilne i nestabilne mnogostrukosti su definisane kao i kod tokova:

$$W_{loc}^s(\bar{x}) = \{x \in U \mid G^n(x) \rightarrow \bar{x} \text{ za } t \rightarrow \infty, \text{ i } G^n(x) \in U \text{ za svako } n \geq 0\}$$

$$W_{loc}^N(\bar{x}) = \{x \in U \mid G^{-n}(x) \rightarrow \bar{x} \text{ za } t \rightarrow \infty, \text{ i } G^{-n}(x) \in U \text{ za svako } n \geq 0\} \text{ i}$$

$$W^s(\bar{x}) = \bigcup_{n \geq 0} G^{-n}(W_{loc}^s(\bar{x}))$$

$$W^N(\bar{x}) = \bigcup_{n \geq 0} G^n(W_{loc}^N(\bar{x})).$$

Mora se imati na umu da se tokovi i mape bitno razlikuju u tome da dok je orbita ili trajektorija $\phi_t(p)$ toka kriva u \mathbb{R}^n , orbita mape $\{G^n(p)\}$ je niz tačaka. Dakle, dok se invarijantne mnogostrukosti toka sastoji od unija krivih rešenja (trajektorija), dotle su mape unije orbita diskretnih tačaka, slika 5.2.1.

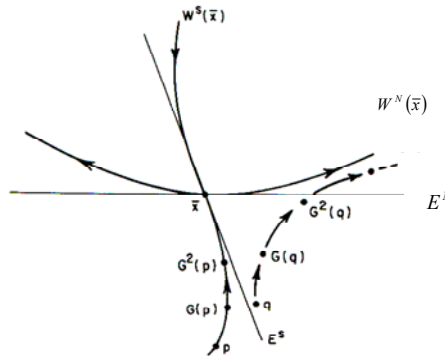
Kada se napiše $G^2(p)$ to je ustvari $G(G(p))$ i slično $G^n(p)$ podrazumeva n -tu iteraciju od p pod G . Tako, ako postoji krug od k posebnih tačaka $p_j = G^j(p_0)$, $j = 0, \dots, k$, i $G^k(p_0) = p_0$ imamo *periodičku orbitu* perioda k . Stabilnost takve orbite određena je linearizovanom mapom $DG^k(p_0)$, ili, ekvivalentno $DG^k(p_j)$ za bilo koje j . Prema lančanom (rekurentnom) pravilu je:

$$DG^k(p_0) = DG(G^{k-1}(p_0)) \cdots DG(G(p_0)) \cdot DG(p_0).$$

Tip stabilnosti fiksne tačke $x = 0$ određen je intenzitetom sopstvenih vrednosti od B . Ako je $|\lambda_j| < 1$ za sve sopstvene vrednosti onda postoji ponor; ako je $|\lambda_j| > 1$ za sve sopstvene vrednosti onda postoji izvor, a ako za neke sopstvene vrednosti sledi $|\lambda_j| > 1$, a za ostale $|\lambda_j| < 1$ javlja se sedlasti čvor. Ako je $|\lambda_j| = 1$ za bilo koju sopstvenu vrednost onda je norma očuvana u pravcima v^j zajedno sa tim sopstvenim vrednostima. Ako paran broj sopstvenih vrednosti ima negativne realne delove onda je mapa $x \rightarrow Bx$ očuvane orijentacije, dok ako neparan broj sopstvenih vrednosti ima negativne realne delove onda mapa menja orijentaciju.

Ako postoji jedna tačka $q \in W^N(p) \cap W^s(p)$, sa $q \neq p$, onda, kako $G^n(q) \rightarrow p$ kada $n \rightarrow \pm\infty$, i približenje se čini za linearni sistem kada je $|q - p|$ malo, mora postojati beskonačan niz takvih *homokliničkih tačaka*. Šta više, ako je mapa očuvane orijentacije (kakve su Poincaré-ove mape), onda dve homokliničke tačke q , $G(q)$ moraju biti razdvojene makar još jednim tačkom u $W^N(p) \cap W^s(p)$. Orbita

$\{G^n(q)\}$ tačke q se naziva *homoklinička orbita* i ima važnu ulogu u opštoj dinamici mape G . U suštini, naglo vijuganje globalne mnogostrukosti $W^s(p)$ i $W^N(p)$ u okolini p vodi u osetljivu zavisnost orbita $\{G^n(x_0)\}$ od početnih uslova x_0 , dakle prisustvo homokliničkih orbita najavljuje čudno ponašanje. Ako se stabilna i nestabilna mnogostrukost $W^s(p_1)$ i $W^N(p_2)$ od dve različite fiksne tačke seku rezultat je *heteroklinička orbita*.



Slika 5.2.1. Invarijantne mnogostrukosti i orbite mape $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Neka je $G(p) = p$ i $G^1(p) > 1$. Tačka q se naziva homokliničkom tačkom za p ako $q \in W_{loc}^N(p)$ i postoji $n > 0$ takvo da $G^n(q) = p$. Tačka q je heteroklinička ako $q \in W_{loc}^N(p)$ i postoji $n > 0$ takvo da $G^n(q)$ leži na različitoj periodičkoj orbiti.

5.2.2. Zatvorene orbite, Poincaré-ove mape i prinudne oscilacije

Neka γ bude periodička orbita toka ϕ_t u \mathbb{R}^n nastala iz nelinearnog vektorskog polja $f(x)$. Prvo se posmatra *lokalni poprečni presek* $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, dimenzije $n-1$. Hiperpovrš Σ ne mora biti ravna, ali mora biti tako izabrana da je tok svugde poprečan na nju. To se postiže ako $f(x) \cdot n(x) \neq 0$ za sve $x \in \Sigma$, gde je $n(x)$ jedinična normala od Σ u x . Sa p označava se tačku gde γ preseca Σ , i pusti se da $U \subseteq \Sigma$ bude neka okolina od p . (Ako γ ima više preseka sa Σ , onda se smanjuje Σ sve dok ne ostane samo jedan presek). Onda je *prvi povratak* ili *Poincaré-ova mapa* $P: U \rightarrow \Sigma$ definisan za tačku $q \in U$ kao:

$$P(q) = \phi_\tau(q), \quad (5.2.5)$$

gde je $\tau = \tau(q)$ vreme potrebno da orbitu $\phi_t(q)$ od q napravi prvi presek sa Σ , slika 5.2.2 (a). Zapaža se da τ generalno zavisi od q i nije nužno jednako $T = T(p)$, periodu od γ , ipak $\tau \rightarrow T$ kako $q \rightarrow p$.

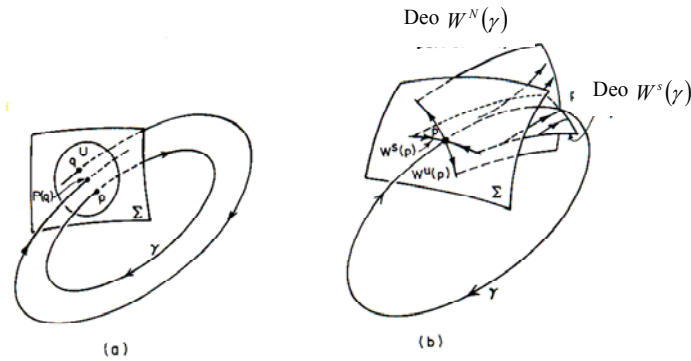
Jasnije p je fiksna tačka za mapu P , i nije teško uočiti da stabilnost od p za P odražava stabilnost γ za tok ϕ_t . Naročito, ako je p hiperbolička, i $DP(p)$, linearizovana mapa, ima n_s sopstvenih vrednosti sa modulima manjim od jedinice i n_N sa modulima većim od jedinice ($n_s + n_N = n-1$), onda su

$\dim W^s(p) = n_s$ i $\dim W^N(p) = n_N$ za mapu. Dok orbite od P leže u W^s i W^N je sačinjena od preseka orbita (krivih rešenja) od ϕ_t sa Σ , dimenzije od $W^s(\gamma)$ i $W^N(\gamma)$ su za jedan veće nego za mapu. Slika 5.2.2 b).

Primer:

Posmatra se sistem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + y - y(x^2 + y^2), \end{aligned} \tag{5.2.6}$$



Slika 5.2.2. Poincaré-ova mapa. (a) Poprečni presek i mapa; (b) zatvorena orbita.

Kao poprečni presek uzma se:

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = 0\}.$$

Transformacijom (5.2.6) pomoću polarnih koordinata $r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \theta = \arctan(y/x)$, dobija se:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned} \tag{5.2.6a}$$

i presek postaje

$$\Sigma = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \mid r > 0, \theta = 0\}.$$

Lako je rešiti (5.2.6a) da se dobije opšte rešenje sistema i njegov tok:

$$\phi_t(r_0, \theta_0) = \left(\left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right)^{-1/2}, t + \theta_0 \right)$$

Vreme τ za bilo koju tačku $q \in \Sigma$ lako se određuje $\tau = 2\pi$, i onda je Poincaré-ova mapa oblika:

$$P(r_0) = \left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right)^{-1/2} \tag{5.2.7}$$

P ima fiksnu tačku u $r_0 = 1$, predstavljajući kružnu zatvorenu orbitu radijusa 1 od (5.2.6). Ovde je P 1-dimenzionalna mapa i njena linearizacija je

$$DP(1) = \left. \frac{dP}{dr_0} \right|_{r_0=1} = -\frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right)^{-3/2} \left(-\frac{2e^{-4\pi}}{r_0^3} \right) \Big|_{r_0=1} = e^{-4\pi} < 1 \tag{5.2.8}$$

Dakle, $p = 1$ je stabilna fiksna tačka i γ je stabilna ili privlačeća zatvorena orbita.

5.2.2.a) Oscilacije sa periodičkom prinudom

Posmatra se sistem:

$$\dot{x} = f(x, t); \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (5.2.9)$$

gde je $f(\cdot, t) = f(\cdot, t + T)$ periodička funkcija vremena t , perioda T . Sistem (5.2.9) može biti prepisan kao autonomni sistem sa povećanom dimenzijom za jedan, ako vreme posmatramo kao promenljivu stanja:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \theta), \\ \dot{\theta} &= 1, \quad \text{gde } (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1. \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Fazni prostor je mnogostrukost $\mathbb{R}^n \times S^1$, gde kružna komponenta $S^1 = \mathbb{R}$ predstavlja periodičnost vektorskog polja f od θ . Za ovaj problem može se definisati opšti poprečni presek:

$$\Sigma = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1 \mid \theta = \theta_0\}, \quad (5.2.11)$$

Sva rešenja presecaju Σ poprečno, s obzirom na komponentu $\dot{\theta} = 1$ sistema (5.2.10). Poincaré-ova mapa $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$ je oblika:

$$P(x_0) = \pi \cdot \phi_t(x_0, \theta_0), \quad (5.2.12)$$

gde je $\phi_t: \mathbb{R}^n \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n \times S^1$ je tok sistema (5.2.10) i π označava projekciju na prvi faktor. Ovde je vreme obilaska T isto za sve tačke $x \in \Sigma$

Na primer sistem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2, \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

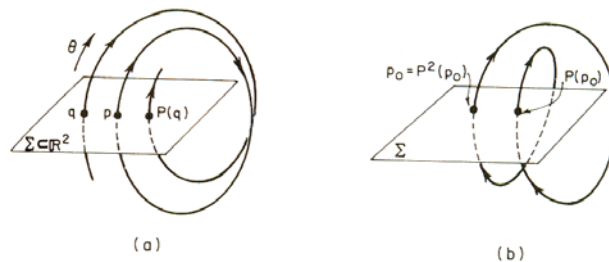
ima rešenje:

$$\phi_t(x_0, \theta_0) = \left(\left(\frac{1}{x_0} - t \right)^{-1}, t + \theta_0 \right). \quad (5.2.14)$$

Ovde se vidi da trajektorije ϕ_t za vrednosti $x_0 \geq 1/2\pi$ teže beskonačnosti za vreme $t \leq 2\pi$, pa sledi Poincaré-ova mapa u obliku:

$$P(x_0) = \left(\frac{1}{x_0} - 2\pi \right)^{-1}, \quad x_0 \in (-\infty, 1/2\pi). \quad (5.2.15)$$

Na slici 5.2.3. su prikazane Poincaré-ove mape za sistem sa oscilatornom prinudom.



Slika 5.2.3. Poincaré-ove mape za sistem sa oscilatornom prinudom. (a) Periodička orbita perioda T i fiksna tačka $p = P(p)$; (b) subharmonik perioda $2T$.

Lako je videti da fiksna tačka p od Poincaré-ove mape P odgovara periodičkoj orbiti perioda T toka. Šta više, periodička tačka perioda $k > 1$ ($P^k(p) = p$ ali $P^j(p) \neq p$ za $1 \leq j \leq k-1$) odgovara subharmoniku perioda kT . Ovde P^k znači P ponovljeno k puta, tj. $P^2(p_0) = P(P(p_0))$ itd.

Sledeći neka bude primer linearnog oscilatora sa prigušenjem i periodičkom prinudom kakav je oscilator iz poglavlja 4.2.1 čija je konačna jednačina kretanja oblika (4.2.12), samo sada ne gubeći ništa od opštosti rešavanja primera i nalaženja Poincaré-ove mape smatrajmo da je $\omega_2^2 = 1$ i da periodička pobuda nema fazno kašnjenje $\mathcal{G}_{02} = 0$, pa jednačina (4.2.13) može da se zapiše u obliku:

$$\ddot{x} + 2\delta_2 \dot{x} + x = h_{02} \cos \Omega_2 t; \quad 0 \leq \delta_2 < 1 \quad (5.2.16)$$

Ako se uvede smena koordinata u smislu faznih koordinata $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ i ako se vreme posmatra kao promenljiva stanja sledi sistem diferencijalnih jednačina prvog reda:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\delta_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h_{02} \cos \Omega_2 t \end{pmatrix}, \quad \dot{\theta} = 1. \quad (5.2.17)$$

Prinudna sila je perioda $T = 2\pi/\Omega_2$. Kako je sistem linearan rešenje je oblika (4.2.13) samo se ovde zapisuje u obliku:

$$x(t) = x_1(t) = e^{-\delta_2 t} (c_1 \cos \omega_d t + c_2 \sin \omega_d t) + A \cos \Omega_2 t + B \sin \Omega_2 t \quad (5.2.18)$$

gde je sada $\omega_d = \sqrt{1 - \delta_2^2}$ sopstevna frekvencija prigušenja (zapravo p_2 za $\omega_2^2 = 1$), a A i B su koeficijenti partikularnog rešenja oblika:

$$A = \frac{(1 - \Omega_2^2)h_{02}}{(1 - \Omega_2^2)^2 + 4\delta_2^2 \Omega_2^2}, \quad B = \frac{2\delta_2 \Omega_2 h_{02}}{(1 - \Omega_2^2)^2 + 4\delta_2^2 \Omega_2^2} \quad (5.2.19)$$

Konstante c_1 i c_2 se određuju iz početnih uslova. Ako je $x = x_1 = x_{10}$ i $\dot{x} = x_2 = x_{20}$ za $t = 0$ onda je:

$$\left. \begin{aligned} x(0) = x_{10} = c_1 + A \\ \dot{x}(0) = x_{20} = -\delta_2 c_1 + \omega_d c_2 + \Omega_2 B \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 = x_{10} - A \\ c_2 = (x_{20} + \delta_2(x_{10} - A) - \Omega_2 B) / \omega_d \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

Dakle, ako je $\phi_i(x_{10}, x_{20}, 0)$ dato za (5.2.18) i

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = e^{-\delta_2 t} \{-\delta_2(c_1 \cos \omega_d t + c_2 \sin \omega_d t) + \omega_d(-c_1 \sin \omega_d t + c_2 \cos \omega_d t)\} - \Omega_2(A \sin \Omega_2 t - B \cos \Omega_2 t)$$

Može se izračunati Poincaré-ova mapa eksplicitno kao $\pi \cdot \phi_{2\pi/\Omega_2}(x_{10}, x_{20}, 0)$. U slučaju rezonancije,

$\Omega_2 = \omega_d = \sqrt{1 - \delta_2^2}$, dobija se:

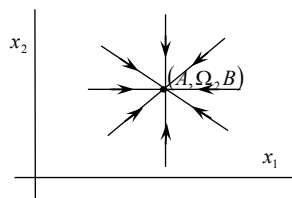
$$P(x_{10}, x_{20}) = ((x_{10} - A)e^{-2\pi\delta_2/\Omega_2} + A, (x_{20} - \Omega_2 B)e^{-2\pi\delta_2/\Omega_2} + \Omega_2 B). \quad (5.2.21)$$

Kao što se i očekivalo mapa ima jednu privlačeću fiksnu tačku datu kao $(x_1, x_2) = (A, \Omega_2 B)$ ili $c_1 = c_2 = 0$.

Naravno mapa je linearna i dok je matrica:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_{10}} & \frac{\partial P_1}{\partial x_{20}} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x_{10}} & \frac{\partial P_2}{\partial x_{20}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2\pi\delta_2/\Omega_2} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi\delta_2/\Omega_2} \end{bmatrix}, \quad (5.2.22)$$

dijagonalna sa jednakim sopstvenim vrednostima, orbite od P približavaju se radialno u $(x_1, x_2) = (A, \Omega_2 B)$, slika 5.2.4.



Slika 5.2.4. Poincaré-ova mapa za jednačinu linearnog oscilatora (5.2.16).

5.2.2. b) Nelinearni oscilator sa periodičkom prinudom

Posmatra se sada onaj isti nelinearni oscilator sa prigušenjem iz poglavlja 4.2.1 sa periodičkom spoljašnjom pobudom, čije je kretanje opisano diferencijalnom jednačinom oblika (4.2.3), samo bez gubljenja u opštosti zaključaka vezanih za Poincaré-ove mape oscilatora sa periodičkom pobudom, uzima se slučaj kada su $\omega_1^2 = c/m = -\beta$, $\tilde{\omega}_{N1}^2 = 1$ i ako se sa $\delta = 2\delta_1$ označi koeficijent prigušenja. Onda diferencijalnu jednačinu možemo napisati u obliku modifikovane klasične Duffing-ove jednačine, koju je 1918 godine koristio Georg Duffing kako bi opisao uticaj tvrde karakteristike opruge $\alpha > 0$. Klasična Duffing-ova [32] jednačina je oblika:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + x + \alpha x^3 = \gamma \cos \Omega t \quad (5.2.23)$$

ovde se koristi modifikacija u obliku:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - \beta x + \alpha x^3 = \gamma \cos \Omega t \quad (5.2.24)$$

gde se član koji odgovara linearnoj krutosti opruge smatra negativnog intenziteta β , takva jednačina opisuje dinamiku grede ili ploče napregnutih na izvijanje, kada se posmatra samo jedan mod oscilovanja [204].

Najpre se posmatra slučaj bez spoljašnje pobude uzimajući da je $\gamma = 0$, pa se diferencijalna jednačina (5.2.24) drugog reda za $\alpha = 1$ može napisati kao sistem diferencijalnih jednačina prvog reda koristeći smenu promenljivih u obliku $x = u$, $\dot{x} = v$ kao:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= \beta u - u^3 - \delta v. \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

Lako je proveriti da za $\beta < 0$ postoji jedna ravnotežna tačka u $(x, \dot{x}) = 0$, dok za $\beta > 0$ postoje tri ravnotežne tačke $x = 0, \pm \sqrt{\beta}$. Ako je $\delta > 0$, ravnotežne tačke su, respektivno, centar za $\beta < 0$, i dva centra sa jednim sedlom za $\beta > 0$. U smislu bifurkacija ovde se javlja pitchfork bifurkacija stabilne tačke kako β prolazi kroz nulu. Da bi dobili opštu informaciju o faznom portretu kako se ima da je za $\delta = 0$ sistem Hamilton-ov sa energijom:

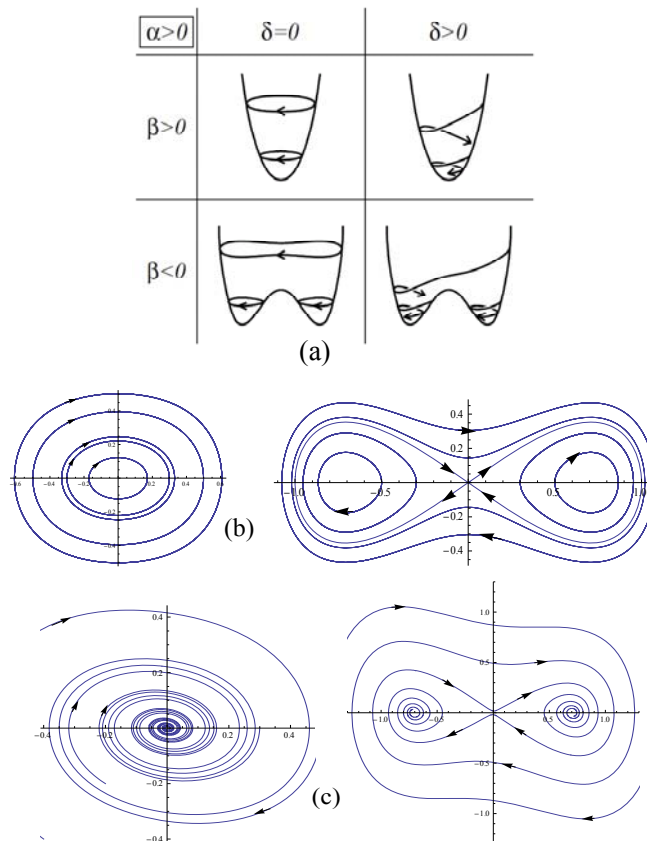
$$H(u, v) = \frac{v^2}{2} - \beta \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}. \quad (5.2.26)$$

Kako rešenja leže na krivima nivoa od funkcije H , slika 5.2.5 (a), može se odmah nacrtati fazni portret za $\delta = 0$ kao na slici 5.2.5 (b). Član $-\delta v$ u drugoj jednačini sistema (5.2.25) usmerava vektorsko polje unutar zatvorenih krivih nivoa (izuzev za $v = 0$) i dobija se kvalitativno ponašanje prikazano na slici 5.2.5 (c). Ovakva svojstva globalne stabilnosti ostaju očuvana i u slučaju postojanja spoljne pobude. Zato se

sada posmatra slučaj kada je $\gamma \neq 0$ i $\beta = 1$, pa se jednačina (5.2.24) može zapisati kao autonomni sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= u - u^3 - \delta v + \gamma \cos(\Omega\theta), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (u, v, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 \quad (5.2.27)$$

gde je $S^1 = \mathbb{R}/T$ krug poluprečnika $T = 2\pi/\Omega$. Sistem jednačina (5.2.27) generiše trodimenzionalni autonomni tok. Izabere se poprečni presek $\Sigma = \{(u, v, \theta) | \theta = 0\}$ i prepostavi se Poincaré-ova mapa $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$. Pri tome, P zavisi od parametara γ, δ, Ω , ali u narednom opisu posmatraju se fiksirane pozitivne vrednosti δ i Ω , a menjaju se γ i u tom smislu piše se $P = P_\gamma$.



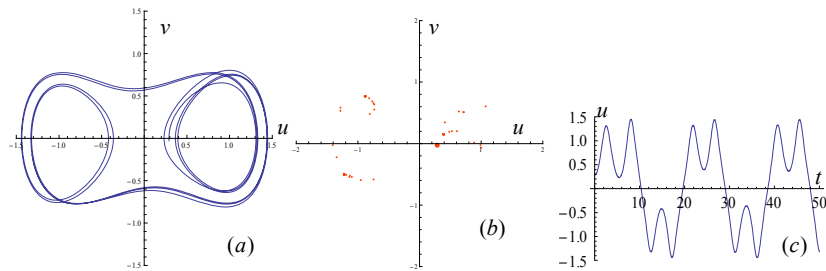
Slika 5.2.5. Funkcija energije(5.2.26) (a) i fazni portreti Duffing-ove jednačine bez spoljašnje pobude (b) za $\delta = 0$ i (c) $\delta > 0$.

Jasno je onda da je P_0 mapa toka vremena $2\pi/\Omega$ za slobodni sistem (5.2.25). Separatrisa kroz sedlo $(0,0)$ za tok je odgovarajuća sedlasta tačka za P_0 . Posmatra se šta se dešava sa P_γ kada γ raste od nule. Prvo se opisuju rezultati numeričkih rešenja dobijenih u programu Mathematica i Poincaré-ovih mapa generisanih iz tih rešenja.

Za male vrednosti γ dva centra sistema (5.2.25) u tačkama $(u,v) = (\pm 1,0)$ postaju male ($O(\gamma)$) privlačuće orbite perioda $2\pi/\Omega$, a tačke tipa sedla postaju orbite tipa sedla. Mapa P_γ ima tri hiperboličke fiksne tačke. Kako γ raste amplitude orbita, praktično stabilnih orbita, kontinualno rastu sve dok se, zavisno od određenih vrednosti δ i Ω , ne desi bifurkacija. Linearizujući sistem (5.2.25) u tački $(\pm 1,0)$ vidi se da je sopstvena frekvencija, za $\delta = 0$, $\sqrt{2}$. Orbite koje okružuju $(\pm 1,0)$ imaju sve veće periode, a period teži

beskonačnosti kako se približava dvostrukoj homokliničkoj vezi, slika 5.2.5 (b). Lokalno se zato oscilator u blizini tačke $(\pm 1, 0)$ ponaša kao oscilator sa mekom oprugom, [211], i za $\Omega < \sqrt{2}$ javljaju se rezonantni skokovi u kojima se mali period orbite 1 zamenjuje relativno velikim periodom orbite 1. Kada je $\Omega > \sqrt{2}$ i naročito kada se $\Omega \approx 2\sqrt{2}$ javlja se rezonancija perioda 2, u kojoj fiksna tačka P_γ postaje nestabilna i pojavljuje se flip bifurkacija, u kojoj postoji stabilna orbita perioda $4\pi/\Omega$, [163]. Takvi skokovi i pridružene fold i flip bifurkacije mogu da se proučavaju iz rezultata asimptotskih aproksimacija usrednjenja. Kako γ nastavlja da raste javljaju se naredne bifurkacije u kojima takve periodičke tačke i njihove odgovarajuće periodičke orbite toka multipliciraju periode.

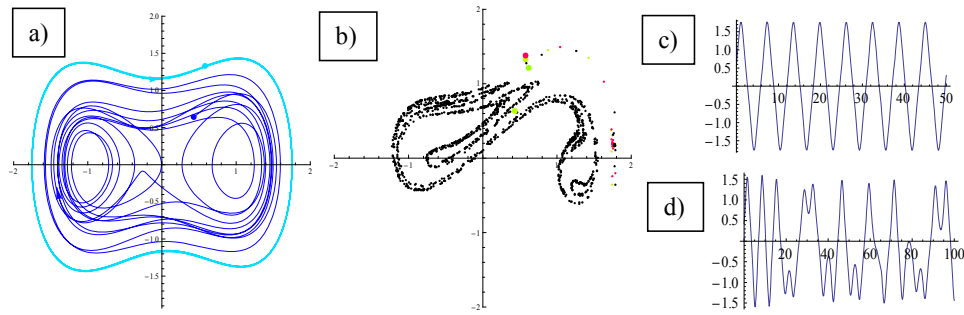
Na slici 5.2.6 (a) prikazan je fazni dijagram Duffing-ove jednačine (5.2.24) za vrednosti $\gamma = 0.3$, $\beta = 1$, $\delta = 0.22$ i $\Omega = 1$, gde se vidi pojava kretanja koje odgovara jednom od subharmonika, takođe se vide i samopreseci trajektorije. Na slici 5.2.6 (b) prikazana je Poincare-ova mapa ovog sistema gde se, zapravo, uviđa nakoliko usamljenih izolovanih tačaka. Na slici 5.2.6 (c) prikazan je zakon kretanja za sistem opisan ovom Duffing-ovom jednačinom.



Slika 5.2.6. Numerička rešenja Duffing-ove jednačine (5.2.24) za vrednosti $\gamma = 0.3$, $\beta = 1$, $\delta = 0.22$ i $\Omega = 1$.

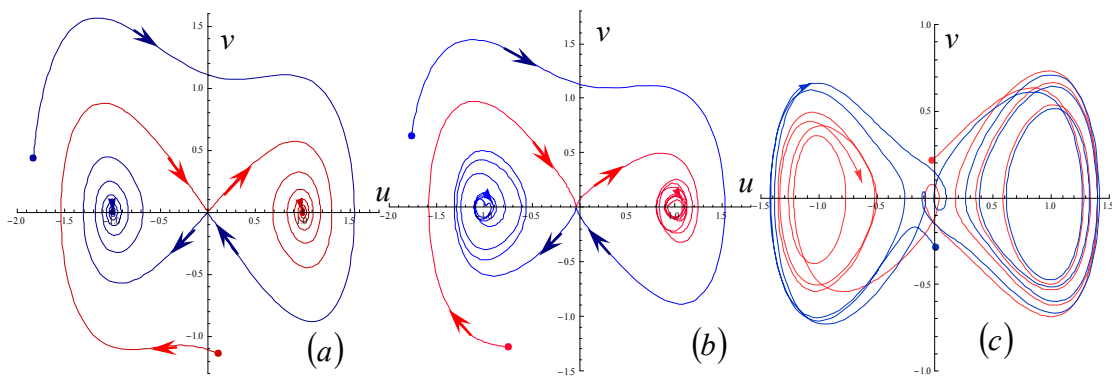
Na slici 5.2.7(a) prikazan je fazni dijagram Duffing-ove jednačine (5.2.24) za vrednosti $\gamma = 0.3$, $\beta = 1$, $\delta = 0.15$ i $\Omega = 1$, gde se vidi pojava stabilne orbite perioda 2 u obliku graničnog kruga ($u(0) = 0.58, v(0) = 1.33$) i jednu haotičnu trajektoriju ($u(0) = 0.43, v(0) = 0.64$), a obe su dobijene za iste vrednosti parametara samo za drugačije početne uslove. Na slici 5.2.7 (b) prikazana je Poincare-ova mapa ovog sistema gde se, zapravo, uviđa nakoliko usamljenih izolovanih tačaka za sistem kod koga se pojavljuje granični krug i pojavu čudnog atraktora u slučaju drugih početnih uslova. Na slici 5.2.7(c) prikazani su zakoni kretanja za sistem opisan ovom Duffing-ovom jednačinom, a za slučaj dva različita početna uslova kojim se prikazuje velika osetljivost ovog sistema na promenu istih.

Ovako numerički generisan čudni atraktor postoji za relativno širok opseg parametarskih i početnih vrednosti, i kao što se vidi može koegzistirati sa periodičnim kretanjem, a unutar vrednosti koje odgovaraju čudnom atraktoru postoji jedan uzak region vrednosti koje odgovaraju kretanju subharmonika.



Slika 5.2.7. Numerička rešenja Duffing-ove jednačine (5.2.24) za vrednosti $\gamma = 0.3$, $\beta = 1$, $\delta = 0.15$ i $\Omega = 1$.

Ključ razumevanja ovakvih krajnje složenih pojava leži u analizi invarijantne mnogostrukosti tačke tipa sedla mape P_γ u okolini tačke $(0,0)$. Napomena je da upotreba neke druge numeričke procedure može dati drugačije rezultate, jer je sam sistem jako osetljiv i na broj iteracija numeričke procedure. Ova tačka se označava sa p , a njene stabilnu i nestabilnu mnogostrukost sa $W^s(p)$ i $W^N(p)$. Kako je već rečeno stabilna i nestabilna mnogostrukost $W^s(p)$ i $W^N(p)$ za $\gamma = 0$ je jednostavno separatrisa sa sedlom, slika 5.2.8 (a) (crvena linija za početne uslove $u(0) = -1.83, v(0) = 0.435$, a plava za $u(0) = 0.11, v(0) = -1.14$). Poincare-ova mapa P_0 ima tri hiperboličke fiksne tačke i mnogostrukosti se ne presecaju, i tako se odmah može zaključiti da su P_γ za male vrednosti γ topološki jednake sa P_0 , s obzirom da je P_0 strukturno stabilna. Kako γ raste, slika 5.2.8 (b) mnogostrukosti mogu i postaju tangentne i kao posledica toga presecaju se transversalno, što je uočljivije na slici 5.2.8 (c). Kada se mnogostrukosti jednom preseku registruje se postojanje transversalnih homokliničkih orbita i prisustvo takvih orbita implicira postojanje komplikovanog nelutajućeg Cantor skupa koji poseduje beskonačno mnogo nestabilnih periodičkih orbita proizvoljno dugog perioda kao i ograničeno neperiodičko kretanje [50].



Slika 5.2.8. Numerička rešenja Duffing-ove jednačine (5.2.24) za vrednosti $\beta = 1$, $\delta = 0.25$ i $\Omega = 1$
(a) $\gamma = 0.0$, (b) $\gamma = 0.1$, (c) $\gamma = 0.2$.

5.3. Asimptotsko ponašanje

Definicija: Invarijantni skup S toka ϕ_t , ili mape G na \mathbb{R}^n je podskup $S \subset \mathbb{R}^n$ takav da $\phi_t(x) \in S$ (ili $G(x) \in S$) kada $x \in S$ za sve vreme $t \in \mathbb{R}$. (5.3.1)

Stabilne i nestabilne mnogostrukosti, fiksne tačke ili periodička orbita su primeri invarijantnih skupova. Tačka p je nelutajuća za tok ϕ_t (respektivno mapu G) ako, za bilo koju okolinu U od p , postoji proizvoljno veliko t (resp. $n > 0$) tako da je $\phi_t(U) \cap U \neq \emptyset$ (resp. $G^n(U) \cap U \neq \emptyset$). Nelutajući skup Ω je skup svih nelutajućih tačaka p . Dakle, nelutajuće tačke su na ili u blizini orbita koje se vraćaju unutar određene razdaljine oko njih samih. Fiksne tačke i periodičke orbite su nelutajuće.

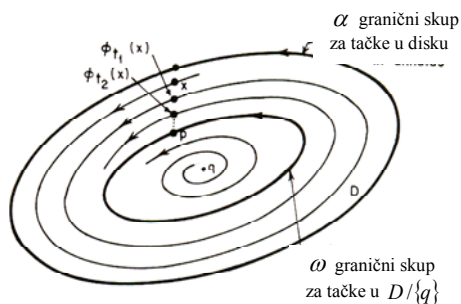
Za linearni oscilator sa prigušenjem (3.1.27) $(x_2, \dot{x}_2) = (0, 0)$ je jedina nelutajuća tačka, ali za slobodni harmonijski oscilator sa diferencijalnom jednačinom kretanja u obliku:

$$\ddot{x} + x = 0 \tag{5.3.2}$$

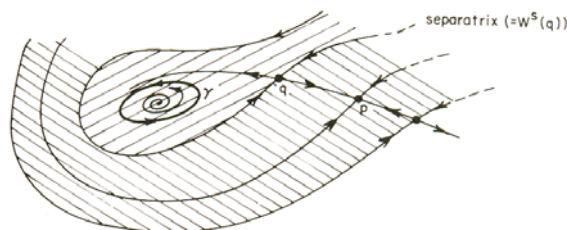
Sve tačke $p \in \mathbb{R}^2$ su nelutajuće, dok je (x, \dot{x}) fazna ravan ispunjena sa neprekidnom familijom periodičkih orbita.

Tačka p je ω -granična tačka od x ako postoje tačke $\phi_{t_1}(x), \phi_{t_2}(x), \dots$ na orbiti od x takve da $\phi_{t_i}(x) \rightarrow p$ i $t_i \rightarrow \infty$. Tačka q je α -granična tačka ako takav niz postoji za $\phi_{t_i}(x) \rightarrow q$ i $t_i \rightarrow -\infty$. α - i ω -granični skupovi $\alpha(x), \omega(x)$ su skupovi od α , i ω graničnih tačaka od x , slika 5.3.1.

Zatvoreni invarijantni skup $A \subset \mathbb{R}^n$ naziva se skupom privlačenja ako postoji neka okolina U od A takva da $\phi_t(x) \in U$ za $t \geq 0$ i $\phi_t(x) \rightarrow A$ kako $t \rightarrow \infty$, za sve $x \in U$. Skup $\bigcup_{t \geq 0} \phi_t(U)$ je domen atrakcije od A . Skup atrakcije obuhvata sve orbite koje počinju u njegovom domenu atrakcije. Odbijajući skup je definisan analogno zamenjujući t sa $-t$. Domeni atrakcije razdvojenih skupova atrakcije se ne presecaju i odvojeni su stabilnom mnogostrukostima neprivlačećih skupova, slika 5.3.2.



Slika 5.3.1. Primeri α , i ω graničnih skupova. D je otvoreni disk ograničen spoljašnjom periodičkom orbitom



Slika 5.3.2. Domeni privlačenja: zatvorene orbite γ i fiksne tačke p .

Atraktor je skup atrakcije koji sadrži gustu orbitu.

5.4. Relacije jednakosti i strukturalna stabilnost

Kada se govori o svojstvu jake osetljivosti nelinearnih sistema na promenu početnih uslova ili parametara sistema neophodno je da se razmotri pojam strukturalne stabilnosti sistema.

Ako se pretpostavi da je posmatrani dinamički sistem opisan rešenjem diferencijalne jednačine ili pak dolazi iz stvarnog sveta fizičkih sistema. Praktično sam sistem će samo biti model stvarne pojave, određene pretpostavke će se uvesti, i neke aproksimacije i eksperimentalne greške će se javiti. Ako dinamički sistem nije strukturalno stabilan, onda male greške i aproksimacije načinjene na modelu imaju mogućnost za dramatično menjanje strukture stvarnog rešenja sistema. Dakle, „rešenje“ može biti radikalno pogrešno i nestabilno. Ako, je sa druge strane, dinamički sistem, koji se posmatra, strukturalno stabilan, onda male greške uvedene aproksimacijama i eksperimentalnim greškama ne moraju uopšte imati uticaja i rešenje modela sistema može biti jednako ili topološki spregnuto sa stvarnim rešenjem.

U ovom smislu sledi nekoliko definicija koje objašnjavaju pojmove vezane za strukturalnu stabilnost i topološke ekvivalencije tokova i mapa.

Definicija: Ako $F \in C^r(\mathbb{R}^n)$, $r, k \in \mathbb{Z}^+$, $k \leq r$ i $\varepsilon > 0$, onda G predstavlja C^k poremećaj (perturbaciju) veličine ε ako postoji jedinstven skup $K \subset \mathbb{R}^n$ takav da $F = G$ na skupu $\mathbb{R}^n - K$ i za sve sa $i_1 + \dots + i_n = i \leq k$ imamo $\left| (\partial^i / \partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n})(F - G) \right| < \varepsilon$

Definicija : Dve C^r (r -puta diferencijabilne) mape F, G su C^k jednake ili C^k spregnute (konjugovane) ($k \leq r$) ako postoji C^k homeomorfizam h takav da $h \circ F = G \circ h$. C^0 jednakost se naziva *topološka jednakost*.

Definicija: Za dva C^r vektorska polja f, g kaže se da su C^k jednaka ili C^k spregnuta (konjugovana) ($k \leq r$) ako postoji C^k difeomorfizam h koji preslikava orbite $\phi_t^f(x)$ od f na orbite $\phi_t^g(x)$ od g zadržavajući im smisao ali ne i smislo parametrizacije vremena.

Definicija jednakosti tvrdi da za bilo koje x i t_1 postoji t_2 tako da

$$h(\phi_{t_1}^f(x)) = \phi_{t_2}^g(h(x)) \quad (5.4.1)$$

Razlog zašto parametrizacija vremena ne može, uopšteno, biti očuvana je i taj da se periodi zatvorenih orbita na tokovima mogu razlikovati.

Definicija: Mapa $F \in C^r(\mathbb{R}^n)$ (resp. C^r vektorsko polje f) je *strukturalno stabilna* ako postoji takav $\varepsilon > 0$ da sve C^1, ε perturbacije od F (resp. od f) su topološki jednake sa F .

Ako se posmatara dvo-dimenzionalna linearna diferencijalna jednačina:

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (5.4.2)$$

i mapa

$$x \rightarrow Bx, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (5.4.3)$$

Onda seldi da su ova dva sistema strukturno stabilna ako matrica A nema sopstvene vrednosti sa realnim delovima jednakim nuli, odnosno B nema sopstvene vektore sa jediničnim modulima.

Trebalo bi biti jasno da vektorsko polje (ili mapa) koje poseduje nehiperboličku fiksnu tačku ne mogu biti strukturno stabilna, dok ih mali poremećaj može odstraniti, ako je linearizovana matrica neinvertna, imajući nulte sopstvene vrednosti, ili preokrenuti ih u hiperbolički ponor, sedlo ili izvor, ako matrica ima čisto imaginarne sopstvene vrednosti.

Važan uslov strukturne stabilnosti je da sve fiksne tačke i zatvorene orbite moraju biti hiperboličke. Ipak, ovaj uslov sam nije dovoljan da garantuje strukturnu stabilnost kada i globalni efekti uđu u igru.

Ako je sistem strukturno stabilan onda neki dovoljno blizak sistem ima isto kvalitativno ponašanje.

Mapa f je strukturno stabilna ako je svaka „okolna“ mapa topološki konjugovana (spregnuta) sa f i zato ima u osnovi istu dinamiku. Ako se bez obzira kako se naruši f ili je neznatno promeni ima ekvivalentan dinamički sistem onda je dinamička struktura od f stabilna. Ovde ekvivalentan znači topološki spregnut.

Definicija: Neka su f i g dve mape, C^0 -rastojanje između f i g , $d_0(f, g)$ je:

$$d_0(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|. \text{ } C^r \text{-rastojanje}$$

$d_r(f, g)$ je:

$$d_r(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (|f(x) - g(x)|, |f'(x) - g'(x)|, \dots, |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)|).$$

Dakle dve mape (funkcije) su C^r bliske ako se njihovih r prvih izvoda malo razlikuju po vrednosti.

Definicija C^r strukturne stabilnosti: Neka je $f: J \rightarrow J$. Kaže se da je f C^r strukturno stabilna na J ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da kada god $d_r(f, g) < \varepsilon$ za $g: J \rightarrow J$, sledi da je f topološki konjugovana sa g .

Osnovni način da se izgubi strukturna stabilnost je manjak hiperboličnosti.

Npr: $F_0(x) = x - x^2$, $F_0(0) = 0$ i $F_0'(0) = 1$, pa je nula nehiperbolička fiksna tačka. Neka je $F_\varepsilon(x) = x - x^2 + \varepsilon$, $F_\varepsilon(x)$ je $C^r - \varepsilon$ bliska F_0 . Ali za $\varepsilon > 0$ $F_\varepsilon(x)$ ima dve fiksne tačke, ali za $\varepsilon < 0$ $F_\varepsilon(x)$ nema ni jednu. Dakle, $F_\varepsilon(x)$ nema istu dinamiku kao F_0 i zato F_0 nije strukturno stabilna.

Hiperbolička fiksna tačka za f je C^1 lokalno strukturno stabilna. To podrazumeva da postoji okolina fiksne tačke i jedno $\varepsilon > 0$ tako da ako je funkcija g $C^1 - \varepsilon$ bliska funkciji f , na ovoj okolini, onda je f topološki spregnuta sa g na toj okolini.

5.5. Dvodimenzionalni tokovi

Dat je sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^n \quad (5.5.1)$$

gde su f i g dovoljno puta diferencijabilne funkcije. Proučavajući ovaj sistem prvo se traže fiksne tačke, u kojima $f(x, y) = g(x, y) = 0$, linearizujući (5.5.1) u takvoj tački (\bar{x}, \bar{y}) dobija se:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \dot{\xi} = Df(\bar{x}, \bar{y})\xi \quad (5.5.2)$$

Posle lociranja fiksnih tačaka i proučavanja njihove stabilnosti (npr. koristeći Lyapunov-ljevu funkciju) želi se otkriti ima li sistem (5.5.1) neku peroidičku orbitu. U tome su korisne dve teoreme koje slede:

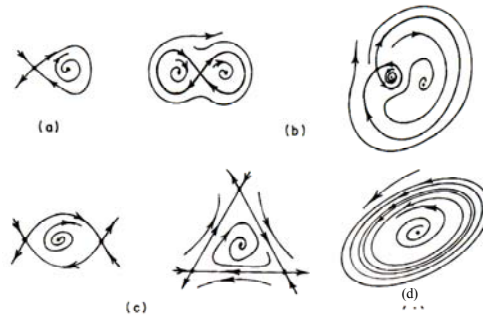
Teorema (Poincaré-Bendixson-ova): Neprazan jedinstven ω - ili α -ograničeni skup ravnog toka, koji ne sadrži fiksne tačke, je zatvorena orbita.

Teorema (Bendixson-ov kriterijum): Ako na jednostruko povezanoj oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$ izraz $\partial f / \partial x + \partial g / \partial y$ nije identički jednak nuli i ne menja znak, onda jednačina (5.5.1) nema zatvorenih orbita u unutrašnjosti od D .

Svi mogući nelutajući skupovi kod tokova u ravni su podeljeni u tri klase:

- Fiksne tačke
- Zatvorene orbite i
- Unije fiksnih tačaka i trajektorija koje ih povezuju.

Heterokliničke orbite povezuju različite tačke a *homokliničke* povezuju tačku sa samom sobom. Zatvoreni delovi sačinjeni od heterokliničkih orbita su *homoklinički krugovi*. Fiksne tačke sadržane u takvom krugu sve moraju biti tačke tipa sedla (ako su hiperboličke), dok je neophodno da ponori i izvori imaju lutajuće tačke u svojoj okolini. Neki primeri ovakvih graničnih skupova su prikazani na slici 5.5.1.



Slika 5.5.1. Neki ograničeni skupovi za tok u ravni. (a) homoklinička orbita ili sedlasta petlja; (b) udvojenom sedlasta petlja; (c) homoklinički krug sačinjen od heterokliničkih orbita; (d) grupe periodičkih orbita

5.6. Metoda usrednjenja sa geometrijskog stanovišta

Naredni odeljci do kraja ovog poglavlja posvećeni su geometrijskoj interpretaciji metode usrednjenja i perturbacije, koja se koristi u rešavanju modela klase hibridnih sistema sa nelinearnostima. Metoda usrednjenja, koja originalno proizilazi iz radova Krylov-a i Bogoliubov-a (1934) posebno je korisna za male nelinearnosti ili male perturbacije u linearnim sistemima. Pokazaće se da pod određenim uslovima, globalna informacija, važeća u polu-beskonačnom intervalu vremena, može biti dobijena ovom

metodom. Uopšteno, u prurbacionoj metodi polazi se od (integrabilnog) sistema čija su rešenja poznata u potpunosti i izučavaju se male perturbacije tog rešenja. Dok su neprurbovana i perturbovana vektorska polja zatvorena, za očekivati je da će rešenje takođe biti zatvoreno, ali, kako će se videti to nije generalno slučaj, obično su neprurbovani sistemi strukturno nestabilni. Pokazaće se da proizvoljno male perturbacije takvih sistema mogu izazvati radikalne kvalitativne promene u strukturi rešenja. Ipak, ovakve promene generalno su vezane za ograničenja, asimptotska ponašanja i obično se mogu pronaći neprurbovana i perturbovana rešenja koja su još zatvorena za *konačno* vreme.

Usrednjenje se primenjuje na sistem oblika:

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t); \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (5.6.1)$$

gde je f T -periodična u vremenu t .

Do sada se, kroz proračun trećeg poglavlja, videlo kako slabo nelinearni oscilatori oblika:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, t), \quad (5.6.2)$$

mogu biti redukovani na standardni oblik (5.6.1) i primenjeno usrednjavanje. Sve to u generalnoj formi biće opisano sa stanovišta geometrijskog prikaza u faznoj ravni kod mapa i tokova, ili na amplitudno i fazno frekventnim dijagramima. U toj analizi naročito će se baviti malim perturbacijama linearnog oscilatora $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, koji je primer integrabilnog Hamilton-ovog sistema.

U nastavku opisaćće se Melnikov-ljva metoda za perturbacije generalnih Hamilton-ovih sistema. Tu će se tipično početi sa nelinearnim sistemom:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (5.6.3)$$

i dodaće se slaba perturbacija u vidu prinudne sile:

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t). \quad (5.6.4)$$

Isprva, baviti će se periodičkom silom dvodimenzionih sistema, a onda će se primeniti metod usrednjenja u opštijem smislu na n -dimenzione sisteme. Kod Melnikov-ljeve metode ograničiće se na dvodimenzione probleme, iako su moguće neke n -dimenzione, čak beskonačno-dimenzione, generalizacije.

5.6.1. Metoda usrednjenja i Poincaré- ove mape

Posmatra se sistem oblika:

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon); \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1, \quad (5.6.5)$$

gde je $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ je C^r , $r \geq 2$, ograničena na ograničenom skupu, i perioda $T > 0$ u t . Ograničiće se na skup $U \subset \mathbb{R}^n$. Pridruženi autonomni usrednjeni sistem je definisan kao:

$$\dot{y} = \varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T f(y, t, 0) dt \stackrel{\text{def}}{=} \bar{f}(y). \quad (5.6.6)$$

Teorema 5.6.1 (Teorema usrednjenja), [50] Postoji C^r promena koordinata $x = y + \varepsilon w(y, t, \varepsilon)$ zbog koje sistem (5.6.5) postaje:

$$\dot{y} = \bar{f}(y) + \varepsilon^2 f_1(y, t, \varepsilon), \quad (5.6.7)$$

gde je f_1 perioda T u vremenu t . Štaviše:

- (i) Ako su $x(t)$ i $y(t)$ rešenja sistema (5.6.5) i (5.6.6) za x_0, y_0 respektivno, u trenutku $t=0$, i $|x_0 - y_0| = O(\varepsilon)$, onda $|x(t) - y(t)| = O(\varepsilon)$ na vremenskoj skali $t \approx 1/\varepsilon$.
- (ii) Ako je p_0 hiperbolička fiksna tačka sistema (5.6.6) tada postoji $\varepsilon_0 > 0$ takvo da, za sve $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, (5.6.5) poseduje jedinstvenu hiperboličku orbitu $\gamma_\varepsilon(t) = p_0 + O(\varepsilon)$ istog tipa stabilnosti kao i p_0 (γ_ε može biti trivijalna periodička orbita, $\gamma_\varepsilon(t) \equiv p_0$)
- (iii) Ako je $x^s(t) \in W^s(\gamma_\varepsilon)$ rešenje sistema (5.6.5) koje leži u centralnoj mnogostrukosti hiperboličke periodičke orbite $\gamma_\varepsilon(t) = p_0 + O(\varepsilon)$, i $y^s(t) \in W^s(p_0)$ rešenje sistema (5.6.6) koje leži u centralnoj mnogostrukosti hiperboličke fiksne tačke p_0 i $|x^s(0) - y^s(0)| = O(\varepsilon)$, onda $|x^s(t) - y^s(t)| = O(\varepsilon)$ za $t \in [0, \infty)$. Sličan je rezultat za rešenja koja leže u nestabilnoj mnogostrukosti u vremenskom intervalu $t \in (-\infty, 0]$.

Dokaz:

Prikazaće se prva dva dela dokaza koristeći standardne rezultate za diferencijalne jednačine; za poslednji deo bolje je koristiti ideje Poincaré-ovih mapa i invarijantnu mnogostrukost. Počnje se sa eksplicitnim računanjem promene koordinata. Neka je:

$$f(x, t, \varepsilon) = \bar{f}(x) + \tilde{f}(x, t, \varepsilon) \quad (5.6.8)$$

Podeljena na dva dela \bar{f} , i oscilatorni deo \tilde{f} . Neka je:

$$x = y + \varepsilon w(y, t, \varepsilon), \quad (5.6.9)$$

još uvek ne birajući w . Diferenciranjem (5.6.9) i koristeći (5.6.5) i (5.6.8) sledi:

$$[I + \varepsilon D_y w] \dot{y} = \dot{x} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} = \mathcal{E} \bar{f}(y + \varepsilon w) + \mathcal{E} \tilde{f}(y + \varepsilon w, t, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t},$$

ili

$$\dot{y} = \varepsilon [I + \varepsilon D_y w]^{-1} \left[\bar{f}(y + \varepsilon w) + \tilde{f}(y + \varepsilon w, t, \varepsilon) - \frac{\partial w}{\partial t} \right]. \quad (5.6.10)$$

Razvijajući (5.6.10) po stepenim od ε i birajući w da njen izvod po vremenu bude \tilde{f} :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \tilde{f}(y, t, 0), \quad (5.6.11)$$

dobija se:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \mathcal{E} \bar{f}(y) + \varepsilon^2 \left[D_y \bar{f}(y, t, 0) w(y, t, 0) - D_y w(y, t, 0) \bar{f}(y) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon}(y, t, 0) \right] + O(\varepsilon^3) \\ &\stackrel{def}{=} \mathcal{E} \bar{f}(y) + \varepsilon^2 f_1(y, t, \varepsilon) \end{aligned} \quad (5.6.12)$$

kao što je traženo.

Da bi dokazali (i) koristićemo verziju Gronwell-ove leme:

Lema 5.6.1, [26]: Ako su u, v i $c \geq 0$ na intervalu $[0, t]$, c je diferencijabilno, i

$$v(t) = c(t) + \int_0^t u(s)v(s)ds, \quad \text{onda} \quad v(t) \leq c(0) \exp \int_0^t u(s)ds + \int_0^t c'(s) \left[\exp \int_0^s u(\tau)d\tau \right] ds.$$

Sada se posmatraju jednačine (5.6.6) i (5.6.7). Njihovim integraljenjem i oduzimanjem sledi:

$$y_\varepsilon(t) - y(t) = y_{\varepsilon_0} - y_0 + \varepsilon \int_0^t [\bar{f}(y_\varepsilon(s)) - \bar{f}(y(s))] ds + \varepsilon^2 \int_0^t f_1(y_\varepsilon(s), s, \varepsilon) ds,$$

gde je $y_\varepsilon(t)$ rešenje jednačine (5.6.7) za y_{ε_0} . Puštajući da $y_\varepsilon - y = \zeta$, L neka je Lipschitz-ova konstanta od \bar{f} i C maksimalna vrednost od f_1 dobija se:

$$|\zeta(t)| \leq |\zeta(0)| + \varepsilon L \int_0^t |\zeta(s)| ds + \varepsilon^2 Ct. \quad (5.6.13)$$

Primenjujući Gronwell-ovu lemu, sa $|c(t)| = |\zeta(0)| + \varepsilon^2 Ct$ i koristeći $u(s) = \varepsilon L$ ima se:

$$|\zeta(t)| \leq |\zeta(0)| e^{\varepsilon L t} + \varepsilon^2 L \int_0^t e^{\varepsilon L(t-s)} ds \leq \left[|\zeta(0)| + \frac{\varepsilon C}{L} \right] e^{\varepsilon L t} \quad (5.6.14)$$

Dakle, ako je $|y_{\varepsilon_0} - y_0| = O(\varepsilon)$, zaključuje se da $|y_\varepsilon(t) - y(t)| = O(\varepsilon)$ za $t \in [0, 1/\varepsilon L]$. Na kraju transformacijom (5.6.9) sledi:

$$|x(t) - y_\varepsilon(t)| = \varepsilon w(y_\varepsilon, t, \varepsilon) = O(\varepsilon)$$

i koristeći pravilo trougaone nejednakosti: $|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - y_\varepsilon(t)| + |y_\varepsilon(t) - y(t)|$, dobija se željeni rezultat.

Da bi dokazali (ii) posmatraju se Poincaré-ove mape P_0, P_ε pridružene jednačinama (5.6.6) i (5.6.7).

Zapiše se poslednji sistem kao:

$$\dot{y} = \bar{f}(y); \quad \dot{\theta} = 1 \quad (5.6.15)$$

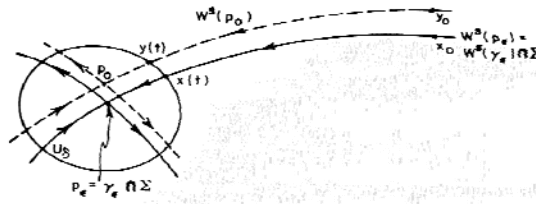
$$\dot{y} = \bar{f}(y) + \varepsilon^2 f_1(y, \theta, \varepsilon); \quad \dot{\theta} = 1 \quad (5.6.16)$$

gde je $(y, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1$ i $S^1 = \mathbb{R}/T$ krug poluprečnika T . Definiše se globalni poprečni odsečak $\Sigma = \{(y, \theta) | \theta = 0\}$, i prvi odgovor ili vreme T Poincaré-ove mape $P_0 : U \rightarrow \Sigma, P_\varepsilon : U \rightarrow \Sigma$ su onda definisane za (5.6.15), (5.6.16) na uobičajen način, gde je $U \subseteq \Sigma$ otvoreni skup. (U P_0 indeks 0 ne znači da je $\varepsilon = 0$ u (5.6.15) već da su članovi $O(\varepsilon^2)$ uklonjeni). Zapaža se da je P_ε ε^2 -bliska P_0 dok je T fiksno zavisna od ε . Ako je p_0 hiperbolička fiksna tačka za (5.6.6), onda je takođe hiperbolička fiksna tačka za $DP_0(p_0)$ dok je $DP_0(p_0) = e^{\varepsilon T Df(p_0)}$. Zato je $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1/\varepsilon) [e^{\varepsilon T Df(p_0)} - Id] = TDf(p_0)$ invertan. Dok je P_ε ε^2 -zatvorena za P_0 takođe sledi $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1/\varepsilon) [DP_\varepsilon(p_0) - Id] = TDf(p_0)$. Iz teoreme implicitne funkcije sledi da nule od $(1/\varepsilon) [DP_\varepsilon(p_0) - Id]$ čine neprekidnu krivu $(p_\varepsilon, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. p_ε su fiksne tačke od P_ε , i sopstvene vrednosti od $DP_\varepsilon(p_\varepsilon)$ su ε^2 bliske onima od $DP_0(p_0)$ dok je $p_\varepsilon = p_0 + O(\varepsilon)$ i $DP_\varepsilon(p_\varepsilon) = \exp[\varepsilon T (Df(p_\varepsilon) + \varepsilon^2 Df_1(p_\varepsilon))] = \exp[\varepsilon TDf(p_0)] + O(\varepsilon^2)$. Dakle, (5.6.16) ima periodičku orbitu γ_ε ε -blisku p_0 , i promenom koordinata (5.6.9), jednačina (5.6.5) ima sličnu orbitu.

Da bi dokazali (iii) pretpostavi se da (5.6.6) ima hiperboličku sedlastu tačku p_0 i posmatraju se rešenja $y(t) \in W^s(p_0)$ i odgovarajuća rešenja $y_\varepsilon(t) \in W^s(\gamma_\varepsilon)$ celog sistema (5.6.7). Dokaz je podeljen u dva dela:

Spoljni region u kojem je osrednjeno vektorsko polje $\bar{f}(y)$ veće u poređenju sa preostalim članovima $\varepsilon^2 f_1(y, t)$, i unutrašnji region u kojem su „perturbacije“ $\varepsilon^2 f_1$ i \bar{f} uporedivog reda veličine. Fiksira se δ -okolina, U_δ , od p_0 , takvo da, izvan U_δ , sledi $|\bar{f}(y)| \gg \varepsilon |f_1(y, t, \varepsilon)|$. Kao što je već rečeno, standardni

Gronwell-ov proračun pokazuje da je $|y_\varepsilon - y_0| = O(\varepsilon)$ za vreme reda $1/\varepsilon$ izvan U_δ . Sa druge strane, u U_δ teorema lokalne stabilne mnogostrukosti garantuje da je stabilna mnogostrukost $W_{lok}^s(\gamma_\varepsilon)$ ε, C^r bliska $W_{lok}^s(p_0) \times [0, T]$. Štaviše, unutar $W_{lok}^s(\gamma_\varepsilon)$ i $W_{lok}^s(p_0)$ rešenja se sakupljaju oko γ_ε i p_0 , respektivno, ovim sakupljanjem rukovodi eksponencijalni član oblika $e^{-\lambda t}$. Koristeći ovu činjenicu može se dokazati da, ako su y_ε i y_0 unutar U_δ bez $O(\varepsilon)$, oni ostaju bez $O(\varepsilon)$ za sva ostala vremena. Slika 5.6.1 pokazuje dva proračuna zajedno i koristeći transformaciju (5.6.9) kao i ranije, dobija se željeni rezultat.



Slika 5.6.1 Zakonitosti usrednjenja na polubeskonačnim intervalima vremena

5.6.2. Primeri primene metode usrednjenja

Prvi primer

Posmatra se skalarni sistem:

$$\dot{x} = \varepsilon x \sin^2 t \tag{5.6.17}$$

Ovde je $f(x, t, \varepsilon) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(x, t, \varepsilon) = x/2 - (x/2)\cos 2t$, pa sledi:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{y}{2} \cos 2t, \text{ ili}$$

$$w = -\frac{y}{4} \sin 2t. \tag{5.6.18}$$

Zapaža se da je t - nezavisan član koji se može pojaviti u anti -izvodu je generalno uzet da bude nula. Iz (5.6.12), transformisani sistem je:

$$\dot{y} = \varepsilon \frac{y}{2} + \varepsilon^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \right) \left(-\frac{y}{4} \sin 2t \right) - \left(-\frac{1}{4} \sin 2t \right) \left(\frac{y}{2} \right) \right] + O(\varepsilon^3)$$

ili

$$\dot{y} = \varepsilon \frac{y}{2} + \varepsilon^2 \frac{y}{16} \sin 4t + O(\varepsilon^3). \tag{5.6.19}$$

Ovde je autonomna usrednjena jednačina jednostavna:

$$\dot{y} = \varepsilon \frac{y}{2}. \tag{5.6.20}$$

Rešenje jednačine (5.6.17) sa početnom vrednošću $x(0) = x_0$ se lako pronalazi kao:

$$x(t) = x_0 e^{\varepsilon((t/2) - \sin(2t)/4)}. \tag{5.6.21}$$

Upoređujući ovo rešenje sa rešenjem usrednjene jednačine:

$$y(t) = y_0 e^{\varepsilon t/2}. \tag{5.6.22}$$

Vidi se da se:

$$x(t) - y(t) = e^{\varepsilon t/2} \left[|x_0 - y_0| - \varepsilon x_0 \sin(2t)/4 + O(\varepsilon^2) \right], \quad (5.6.22a)$$

slaže sa zaključkom (i) teoreme. Ovde hiperbolički izvor $y=0$ od (5.6.20) odgovara trivijalnoj hiperboličkoj orbiti $x \equiv 0$ od (5.6.17), i, puštajući $t \rightarrow -\infty$ u (5.6.21)-(5.6.22) vidimo da $x(t), y(t) \rightarrow 0$ onda i $|x(t) - y(t)| \rightarrow 0$, u saglasnosti sa zaključcima (ii) i (iii).

Drugi primer

Kao drugi primer posmatra se slabo nelinearni oscilator sa prinudnom silom (weakly nonlinear forced oscillator).

U mnogim nelinearnim oscilatornim problemima, jednačina drugog reda koja se treba proučiti je oblika:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, t), \quad (5.6.23)$$

gde je f T -periodična u vremenu t . U suštini, ako je f sinusna funkcija sa frekvencijom $\omega \approx k\omega_0$, imamo sistem blizak rezonanciji reda k . U tom slučaju, očekivanja da se pronade skoro sinusni odgovor frekvencije ω/k nalažu da se koristi invertna van der Pol-ovu transformacija, koja pretvara (5.6.23) u oblik (5.6.5) koji onda može biti usrednjen. Odredi se:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\omega t}{k}\right) & -\frac{k}{\omega} \sin\left(\frac{\omega t}{k}\right) \\ -\sin\left(\frac{\omega t}{k}\right) & -\frac{k}{\omega} \cos\left(\frac{\omega t}{k}\right) \end{bmatrix}, \quad (5.6.24)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\omega t}{k}\right) & -\sin\left(\frac{\omega t}{k}\right) \\ -\frac{\omega}{k} \sin\left(\frac{\omega t}{k}\right) & -\frac{\omega}{k} \cos\left(\frac{\omega t}{k}\right) \end{bmatrix},$$

tako da (5.6.23) postaje:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{k}{\omega} \left[\left(\frac{\omega^2 - k^2 \omega_0^2}{k^2} \right) x + \varepsilon f(x, \dot{x}, t) \right] \sin\left(\frac{\omega t}{k}\right), \\ \dot{v} &= -\frac{k}{\omega} \left[\left(\frac{\omega^2 - k^2 \omega_0^2}{k^2} \right) x + \varepsilon f(x, \dot{x}, t) \right] \cos\left(\frac{\omega t}{k}\right), \end{aligned} \quad (5.6.25)$$

U kojima x, \dot{x} mogu biti napisani kao funkcije od u, v i t pomoću (5.6.24). Ako $\omega^2 - k^2 \omega_0^2 = O(\varepsilon)$, onda je (5.6.25) u pogodnoj formi za usrednjenje.

Kao specifičan primer, posmatra se standardna Duffing-ova jednačina, koja se izučava u skoro svim tekstovima o nelinearnim oscilacijama, i zapisuje se u obliku:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \left[\gamma \cos \omega t - \delta \dot{x} - \alpha x^3 \right], \quad (5.6.26)$$

gde $\omega_0^2 - \omega^2 = \varepsilon \Omega$, na primer ima se mogućnost da se odredi jedna rezonantna vrednost. Uzimajući $k=1$ u (5.6.24) dobija se transformisani sistem:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\varepsilon}{\omega} \left[\Omega(u \cos \omega t - v \sin \omega t) - \omega \delta (u \sin \omega t + v \cos \omega t) + \alpha (u \cos \omega t - v \sin \omega t)^3 - \gamma \cos \omega t \right] \sin \omega t, \\ \dot{v} &= \frac{\varepsilon}{\omega} \left[\Omega(u \cos \omega t - v \sin \omega t) - \omega \delta (u \sin \omega t + v \cos \omega t) + \alpha (u \cos \omega t - v \sin \omega t)^3 - \gamma \cos \omega t \right] \cos \omega t. \end{aligned} \quad (5.6.27)$$

Usrednjavajući (5.6.27) unutar jednog perioda $T = 2\pi/\omega$, dobija se:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\varepsilon}{2\omega} \left[-\omega\delta u - \Omega v - \frac{3\alpha}{4}(u^2 + v^2)v \right] \stackrel{def}{=} \mathcal{E}f_1(u, v) \\ \dot{v} &= \frac{\varepsilon}{2\omega} \left[\Omega u - \omega\delta v + \frac{3\alpha}{4}(u^2 + v^2)u - \gamma \right] \stackrel{def}{=} \mathcal{E}f_2(u, v) \end{aligned} \quad (5.6.28)$$

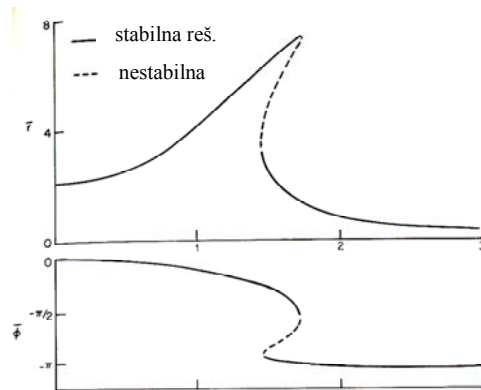
ili, u polarnim koordinatama; $r = \sqrt{u^2 + v^2}$, $\phi = \arctg(u/v)$:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\varepsilon}{2\omega} [-\omega\delta r - \gamma \sin \phi], \\ r\dot{\phi} &= \frac{\varepsilon}{2\omega} \left[\Omega r + \frac{3\alpha}{4}r^3 - \gamma \cos \phi \right]. \end{aligned} \quad (5.6.29)$$

Imajući u vidu transformaciju (5.6.24):

$$x = u(t) \cos \omega t - v(t) \sin \omega t = r(t) \cos(\omega t + \phi(t)),$$

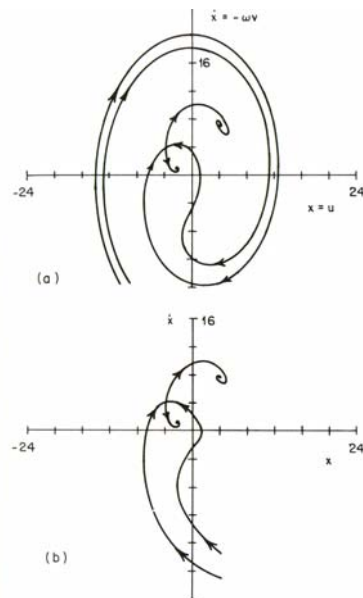
vidi se da su promene amplitude r , i faze, ϕ lagane, rešenja jednačine (5.6.26) su data kao rešenja usrednjenog sistema (5.6.29). Zato je bitno pronaći ravnotežna rešenja ili fiksne tačke od (5.6.29), koje, po teoremi o usrednjenju i transformacijom (5.6.24) odgovaraju stabilnim, gotovo sinusnim rešenjima početne jednačine. Fiksirajući α, δ i γ i crtajući fiksne tačke $\bar{r}, \bar{\phi}$ jednačine (5.6.29) po Ω ili ω/ω_0 , dobijaju se amplitudno-frekventne i fazno-frekventne rezonantne krive, slika 5.6.2. Tipovi stabilnosti grana rešenja, prikazani na toj slici, su dobijeni proučavanjem sopstvenih vrednosti linearizovane usrednjene jednačine.



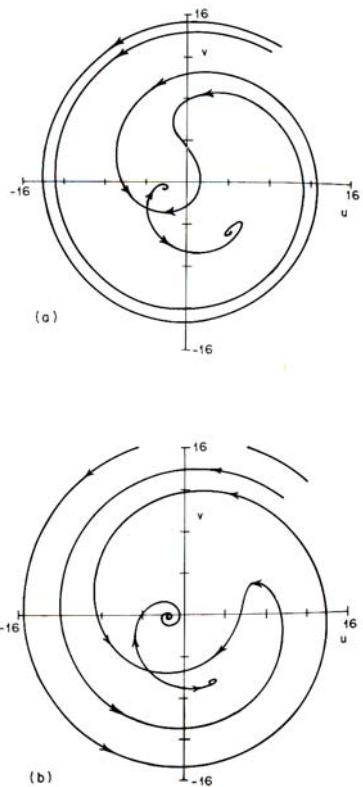
Slika 5.6.2 Amplitudno i fazno frekventna rezonantna kriva za Duffing-ovu jednačinu:

$$\varepsilon\alpha = 0.05, \varepsilon\delta = 0.2, \varepsilon\gamma = 2.5.$$

Na slici 5.6.3 su prikazani tipični fazni portreti za (5.6.28)-(5.6.29), dobijeni numeričkom integracijom za vrednosti parametara za koje postoje tri hiperboličke fiksne tačke. Na slici 5.6.4 (a) reprodukovane su stabilne i nestabilne mnogostrukosti sedlaste tačke, pomoću inverzne transformacije (5.6.24) (za $k = 1$) primenjene za $t = 0: x = u, \dot{x} = -\omega v$. Po teoremi 5.6.1 te mnogostrukosti bi trebalo da aproksimiraju stabilne i nestabilne mnogostrukosti Poincaré-ove mape celog sistema (5.6.26), što je prikazano na slici 5.6.4 (b).



Slika 5.6.3. Fazni portreti jednačine (5.6.28): $\varepsilon\alpha = 0.05$, $\varepsilon\delta = 0.2$, $\varepsilon\gamma = 2.5$, $\omega_0 = 1$. (a) $\omega = 1.5$, (b) $\omega = 1.65$



Slika 5.6.4. Poincaré-ova mapa za Duffing-ovu jednačinu upoređena sa vremenskim T tokom usrednjene jednačine: $\varepsilon\alpha = 0.05$, $\varepsilon\delta = 0.2$, $\varepsilon\gamma = 2.5$, $\omega_0 = 1$, $\omega = 1.5$. (a) Invarijantne mnogostrukosti sedlaste tačke za usrednjenu jednačinu (5.6.28); (b) Invarijantne mnogostrukosti sedlaste tačke za Poincaré-ovu mapu.

Na kraju, napominje se da je u određenim slučajevima neophodno usrednjavanje drugog ili čak višeg reda ako je rezultat usrednjavanja prvog reda nerešiv.

5.6.3. Usrednjenje i lokalne bifurkacije

Za jednoparametarsku familiju sistema sličnih (5.6.5) oblika:

$$\dot{x} = \mathcal{E}f_{\mu}(x, t, \varepsilon); \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (5.6.30)$$

sa pridruženom familijom usrednjenih sistema:

$$\dot{y} = \tilde{\mathcal{E}}f_{\mu}(y). \quad (5.6.31)$$

Pretpostavi se da (5.6.31) podnosi bifurkaciju kako μ varira. Želja je da se sazna da li (5.6.30) podnosi sličnu bifurkaciju. Za jednostavnije jedno-kodimenzione bifurkacije, odgovor je: da sa određenim svojstvima.

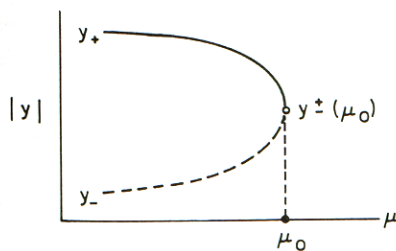
Teorema 5.6.2. Ako za $\mu = \mu_0$ (5.6.31) ima sedlastu tačku ili Hopf bifurkaciju, onda, za μ u okolini μ_0 i za ε dovoljno malo, Poincaré-ova mapa od (5.6.30) takođe ima sedlastu tačku ili Hopf bifurkaciju.

Dokaz:

Fiksira se $\varepsilon > 0$, neka je malo. Zatim se koristi ε -okolina Poincaré-ovih mapa P_0^{μ} i P_{ε}^{μ} od (5.6.31) i (5.6.30), respektivno. Za sedlastu tačku posmatra se bifurkaciona jednačina (Teorema 5.6.1)

$$(1/\varepsilon)(Id - P_0^{\mu})(y) = 0 \quad \text{i} \quad (1/\varepsilon)(Id - P_{\varepsilon}^{\mu})(x) = 0 \quad (5.6.32 \text{ a,b})$$

Po hipotezi, osrednjeni sistem ima par fiksnih tačaka y_+, y_- koje se sjedinjuju za μ_0 u zaobljen (lokalno paraboličan) ugao u (y, μ) prostoru (slika 5.6.5). Postoji lokalna promena koordinata u okolini tačke $(y_{\pm}(\mu_0), \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ pod kojom se tačke na tim granama mogu transformisati u oblik $y_{\pm}(\mu) = (\pm c\sqrt{\mu_0 - \mu}, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n$. Dok je P_{ε}^{μ} u ε^2 -blizini od P_0^{μ} , sledi da u istim koordinatama, P_{ε}^{μ} ima par grana ravnoteže $x_{\pm}(\mu) = (\pm c\sqrt{\mu_0 - \mu} + \mathcal{O}(\varepsilon), \mathcal{O}(\varepsilon))$, i dok su matrice $DP_{\varepsilon}^{\mu}(x_{\pm}(\mu))$ i $DP_0^{\mu}(y_{\pm}(\mu))$ takođe bliske, linearizovana stabilnost grana je ista za oba sistema.



Slika 5.6.5 Bifurkacija sedlaste tačke

Ovi rezultati mogu biti primenjeni za Duffing-ov primer. U suštini, sledi da se bifurkacije sedlaste tačke koje se pojavljuju na prevojnim ili tačkama rezonantnih skokova na slici 5.6.2 u osrednjenoj Duffing-ovoj jednačini odgovaraju bifurkacionim sedlastim tačkama periodičkih orbita za ceo sistem. I za multi parametarske sisteme i komplikovanije bifurkacije može se reći: npr, za Duffing-ov primer iz odeljka 5.6.2 postoji tačka u Ω, γ prostoru za koju taj sistem ima degenerativnu fiksnu tačku koja se može razdvojiti u jednu, dve ili tri tačke- kao kod perturbovane računaste bifurkacije. U toj tački dva prevoja amplitudno (fazno)-frekventnih rezonantnih funkcija sa slika 5.6.2 sjedinjavaju se u tačku vertikalne

tangente. Sledi da, u blizini te tačke, polazni sistem ima bifurkaciju u kojoj se sjedinjavaju tri periodičke orbite.

5.6.4. Metoda usrednjenja, Hamilton-ovi sistemi, i globalno ponašanje

Teorema 5.6.3. Ako vremenska T mapa toka P_0 od usrednjenog sistema (5.6.6), svedena na ograničeni domen $D \subset \mathbb{R}^n$, ima ograničen skup isključivo hiperboličkih fiksnih tačaka i svi preseki stabilne i nestabilne mnogostrukosti su poprečni, onda je odgovarajuća Poincaré-ova mapa $P_{\varepsilon|D}$ od polaznog sistema (5.6.5) topološki jednaka $P_{0|D}$ za $\varepsilon > 0$ dovoljno male vrednosti.

Dokaz sledi iz činjenice da je ova teorema neposredna posledica glavne teoreme usrednjavanja 5.6.1.

Ako se vrati na Duffing-ovu jednačinu iz primera 5.6.2 može se upotrebiti Bendixon-ov kriterijum da bi se proverilo da fazni portret od sistema usrednjenih jednačina (5.6.28) ne sadrži zatvorene petlje, tj. nema zatvorenih ili homokliničkih orbita. Potvrđi se da:

$$\text{trace } Df = \frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial v} = -\delta < 0, \quad (5.6.33)$$

za svako $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Dakle, fazni portret može sadržati samo fiksne tačke i, dok je u ravni i ne pojavljuju se homokliničke petlje, postoji samo jedna sedlasta tačka, stabilna i nestabilna mnogostrukost te tačke se ne mogu presecati. Dakle, zadovoljena je teorema 5.6.3 i P_ε je topološki jednaka P_0 za dovoljno malo ε .

Teorema 5.6.4. Ako usrednjeni sistem (5.6.6) ima hiperboličku periodičku orbitu γ_0 , onda tok sistema (5.6.16) ima invarijantan hiperbolički torus T_ε u okolini $\gamma_0 \times S^1$. Ekvivalentno, Poincaré-ova mapa P_ε od polaznog sistema (5.6.5) ima invarijantnu zatvorenu krivu γ_ε u okolini γ_0 .

Dok postoji neprekidna invarijantna zatvorena kriva za obe P_0 i P_ε , dinamika od $P_{\varepsilon|\gamma_\varepsilon}$ je generalno prilično složena zahvaljujući efektu rezonancije. Da bi ovo shvatilo, posmatra se:

$$y' = \bar{f}(y) + \varepsilon f_1\left(y, \frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \quad (5.6.34)$$

gde $\tau = \varepsilon t$, i perturbacija ima novi period εT . Ako, za $\varepsilon = 0$, (5.6.34) ima jednu orbitu perioda $\bar{\tau}$, onda, kako $\varepsilon \rightarrow 0$, rezonantna zavisnost:

$$\bar{\tau} = \frac{m\varepsilon T}{n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad (5.6.35)$$

je zadovoljena za sve vreme.

Ako je polazni sistem (5.6.5) Hamilton-ov sa energijom $\varepsilon H(u, v, t, \varepsilon)$ onda transformacija (5.6.9) može biti izabrana da bude kanonička, tako da je transformisani sistem (5.6.7) takođe Hamilton-ov. Ako $x \in \mathbb{R}^2$, tako da je (5.6.6) dvodimenzionalni autonomni sistem, onda su njegove krive rešenja jednake krivima usrednjene Hamilton-ove funkcije:

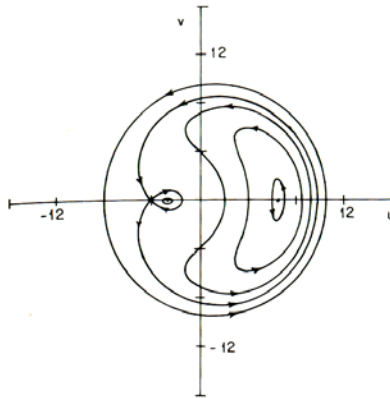
$$\bar{H}(u, v) = \frac{1}{T} \int_0^T H(u, v, t, 0) dt \tag{5.6.36}$$

Ako usrednjeni sistem ima kompaktne krive koje sadrže sedlastu tačku onda je neophodno da ta kriva ima netraversalni presek stabilne i nestabilne mnogostrukosti za nepertubovanu Poincaré-ovu mapu i ne može se očekivati da se održe posle vraćanja vremensko zavisnih članova $\varepsilon^2 f_1$.

Još jednom posmatra se Duffing-ova jednačina iz odeljka 5.6.2 i neka je $\delta = 0$. Početni sistem je sada Hamilton-ov, i, direktno iz (5.6.28) može se videti da je usrednjeni Hamilton-ian:

$$\varepsilon \bar{H}(u, v) = -\frac{\varepsilon}{4\omega} \left[\Omega(u^2 + v^2) + \frac{3\alpha}{8}(u^2 + v^2)^2 - 2\gamma u \right]. \tag{5.6.37}$$

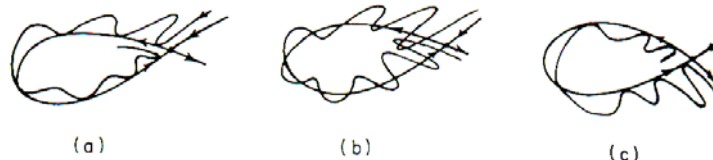
Odgovarajući fazni portret je prikazan na slici 5.6.6. Zapaža se, u nastavku, dupla homoklinička petlja i tri kontinualne familije periodičkih orbita. Dok su te krive invarijantne krive za (nepertubovanu) Poincaré-ovu mapu P_0 usrednjenog sistema, dotle u opštem slučaju očekuje se da se homoklinička petlja raskine, izazivajući transversalni presek perturbovane stabilne i nestabilne mnogostrukosti. Takođe, očekuje se da se rezonantna zatvorena kriva raskine na neki komplikovaniji način.



Slika 5.6.6. Fazni portret za usrednjenu Duffing-ovu jednačinu:

$$\varepsilon\alpha = 0.05, \delta = 0, \varepsilon\gamma = 2.5, \omega_0 = 1, \omega = 1.5.$$

Ponekad, iako početni problem nije Hamilton-ov, homokliničke bifurkacije se mogu pojaviti u usrednjenoj jednačini. Generalna teorije ovde izložena pokazuje da, za ε dovoljno malo i zavisno od ostalih parametara, fazni portreti su sačuvani za ceo sistem, dok su tok i T mape za usrednjeni sistem u ovom slučaju strukturno stabilni. Ipak, kako je predviđeno vrednost parametra za koju se pojavljuje homoklinička bifurkacija, ε -okolina za koju je održiv zaključak teoreme 5.6.4, odskače. Jasnije, u bifurkacionoj tački, ne može se očekivati da budu identifikovane stabilne i nestabilne mnogostukosti sedla za pertubovanu mapu P_ε . U opštem sličaju očekuje se da se pronade transversalni presek koji se pojavljuje u okolini bifurkacione tačke za nepertubovani sistem, sa kvadratnom tangencijom mnogostrukosti u diskretnim tačkama koje se pojavljuju na granicama regiona, slika 5.6.7.



Slika 5.6.7. Opšta perturbacija za degenerativnu homokliničku bifurkaciju mape P_ε^μ .

5.6.5 Poremećaji homokliničkih orbita u ravni, Melnikov-ljeva metoda

Ovde se razvija metoda koja omogućava da se proučava Poincaré-ova mapa za periodički sistem oblika:

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t); \quad x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad (5.6.38)$$

gde je g perioda T u vremenu t . Što se može zapisati i kao sistem:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \varepsilon g(x, \theta) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned} \right\}; \quad (x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$$

gde je $f(x)$ Hamilton-ovo vektorsko polje definisano na \mathbb{R}^2 ili neki njegov podskup, a $\varepsilon g(x, t)$ mala perturbacija, koja ne mora biti sama Hamilton-ova. Mnogi fizički problemi mogu biti izraženi u ovakvoj formi, ali glavni razlog zašto se ovde proučavaju ti sistemi je taj jer oni predstavljaju jedan od slučajeva u kojima globalna informacija o sistemu može biti dobijena analitički.

Osnovna ideja ove metode je da se načini upotrebljivim globalno izračunato rešenje neporemećenog integrabilnog sistema u proračunu poremećenog rešenja. Da bi se to postiglo prvo se mora uveriti da perturbacioni proračun jedinstveno važi na dovoljno dugom ili polu-beskonačnom intervalu vremena.

Prvo se pojašnjava ova pretpostavka. Posmatra se sistem oblika (5.6.38), gde su:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x, t) \\ g_2(x, t) \end{pmatrix}$$

dovoljno puta integrabilne ($C^r, r \geq 2$) na ograničenim skupovima, i g je perioda T u vremenu t . Radi pojednostavljenja pretpostavlja se da je neporemećeni sistem Hamilton-ov sa $f_1 = \partial H / \partial v$, $f_2 = -\partial H / \partial u$.

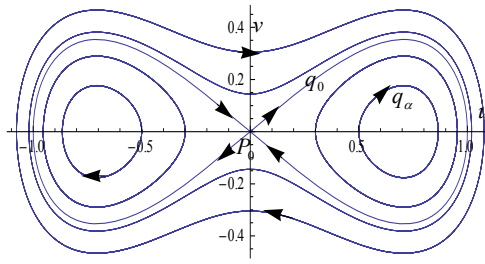
Uopšteno, ograničava se na ograničen region $D \subset \mathbb{R}^2$ faznog prostora. Specijalne pretpostavke za neporemećeni tok su:

A1 Za $\varepsilon = 0$ (5.6.38) poseduje homokliničku orbitu $q^0(t)$, kroz hiperboličku tačku tipa sedla p_0 .

A2 Neka je $\Gamma^0 = \{q^0(t) | t \in \mathbb{R}\} \cup \{p_0\}$. Unutrašnjost od Γ^0 je ispunjena sa neprekidnom familijom homokliničkih orbita q^α , $\alpha \in (-1, 0)$. Puštajući da $d(x, \Gamma^0) = \inf_{q \in \Gamma^0} |x - q|$ imamo $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} d(q^\alpha(t), \Gamma^0) = 0$.

A3 Neka je $h_\alpha = H(q^\alpha(t))$ i T_α neka je period od $q^\alpha(t)$. Onda je T_α diferencijabilna funkcija od h_α i $dT_\alpha / dh_\alpha > 0$ unutar Γ^0 .

Zapaža se da iz A2 i A3 sledi da $T_\alpha \rightarrow \infty$ monotono kako $\alpha \rightarrow 0$. Ovo je ilustrovano na slici 5.6.8.



Slika 5.6.8. Slobodan (neporemećen) sistem

Mnogi od problema koji slede mogu biti dokazani sa manje restriktivnim pretpostavkama. U suštini u ovom odeljku zahtevaće se samo A1.

Kao u odeljku 5.6.1 definiše se Poincaré-ova mapa $P_\varepsilon^{t_0} : \Sigma^{t_0} \rightarrow \Sigma^{t_0}$, gde je $\Sigma^{t_0} = \{(x, t) | t = t_0 \in [0, T]\} \subset \mathbb{R}^2 \times S^1$ globalni poprečni presek u vremenu t_0 za ograničeni autonomni tok od (5.6.38). Iz pretpostavke A1 odmah sleduje da neporemećena Poincaré-ova mapa $P_0^{t_0}$ ima hiperboličku sedlastu tačku p_0 i da je zatvorena kriva $\Gamma^0 = W^u(p_0) \cap W^s(p_0)$ načinjena od tačaka nepoprečnih homokliničkih preseka za $P_0^{t_0}$ (ovde indeks 0 govori da smo uzeli da je $\varepsilon = 0$ u (5.6.38)). Očekuje se da se ova veoma degenerativna struktura raskine pod uticajem poremećaja $\varepsilon g(x, t)$, i možda da proizvede poprečne homokliničke orbite ili da nikako ne postoje homokliničke orbite. U suštini, ovaj metod će dokazati postojanje poprečnih homokliničkih orbita i homokliničkih bifurkacija u važnijim fizičkim primerima. Ovo je jedan od nekoliko analitičkih metoda koji omogućava otkrivanje i proučavanje haotičnog kretanja.

Počnje se sa osnovnim perturbacionim rezultatima:

Lema 5.6.2 Pod pomenutim pretpostavkama, za ε dovoljno malo, (5.6.38) ima jedinstvenu hiperboličku orbitu $\gamma_\varepsilon^0(t) = p_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$. Time i Poincaré-ova mapa $P_\varepsilon^{t_0}$ ima jedinstvenu hiperboličku tačku tipa sedla $p_\varepsilon^0(t) = p_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Dokaz ove leme se izvodi strogom primenom teoreme implicitne funkcije.

Lema 5.6.3. Lokalna stabilna i nestabilna mnogostrukost $W_{loc}^s(\gamma_\varepsilon)$ i $W_{loc}^u(\gamma_\varepsilon)$ poremećene periodičke orbite su C^r -bliske onima od neporemećene periodičke orbite $p_0 \times S^1$. Štaviše, orbite $q_\varepsilon^s(t, t_0)$, $q_\varepsilon^u(t, t_0)$ koje leže u $W^s(\gamma_\varepsilon)$, $W^u(\gamma_\varepsilon)$ i koje su osnovane od Σ^{t_0} mogu biti izražene na sledeći način, sa jedinstvenom važnošću u posmatranom intervalu vremena:

$$\begin{aligned} q_\varepsilon^s(t, t_0) &= q^0(t - t_0) + \varepsilon q_1^s(t, t_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), & t \in [t_0, \infty) \\ q_\varepsilon^u(t, t_0) &= q^0(t - t_0) + \varepsilon q_1^u(t, t_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), & t \in (-\infty, t_0]. \end{aligned} \quad (5.6.39)$$

Dokaz. Kao i u dokazu teoreme usrednjenja, fiksira se ν -okolina ($0 \leq \varepsilon \ll \nu \ll 1$) U_ν od p_0 unutar koje su lokalna poremećena mnogostrukost i njen tangentni prostor ε -bliske onima od neporemećenog toka (ili Poincaré-ove mape). Standardni Gronwell-ov proračun pokazuje da poremećene orbite koje počinju unutar $\mathcal{O}(\varepsilon)$ od $q^0(0)$ postoje i unutar $\mathcal{O}(\varepsilon)$ od $q^0(t - t_0)$ za konačno vreme i prema tome može se pratiti bilo koja takva orbita od neke proizvoljne tačke u okolini $q^0(0)$ na Γ^0 van U_ν do granice sa U_ν . U U_ν , ako je poremećena orbita q_ε^s izabrana da leži u $W^s(\gamma_\varepsilon)$, njeno ponašanje se rukovodi eksponencijalnim

sakupljanjem pridruženim linearizovanom sistemu. Šta više, perturbaciona teorija invarijantnih mnogostrukosti tvrdi da:

$|q_\varepsilon^s(t_1, t_0) - q^0(t_1 - t_0)| = O(\varepsilon)$, dok je poremećena mnogostrukost C^r -bliska neporemećenoj mnogostrukosti.

Stavni proračun pokazuje da $|q_\varepsilon^s(t, t_0) - q^0(t - t_0)| = O(\varepsilon)$, za $t \in (t_1, \infty)$.

Ova lema tvrdi da su rešenja iz stabilne mnogostrukosti jedinstveno aproksimirana, za $t \geq 0$, rešenjem q_1^s jednačine prvog izvoda.

$$q_1^s(t, t_0) = Df(q^0(t - t_0))q_1^s(t, t_0) + g(q^0(t - t_0), t) \quad (5.6.40)$$

Definiše se sada odvajanje mnogostrukosti $W^s(p_\varepsilon^{t_0})$ i $W^N(p_\varepsilon^{t_0})$ na preseku Σ^{t_0} u tački $q^0(0)$ kao:

$$d(t_0) = q_\varepsilon^N(t_0) - q_\varepsilon^s(t_0) \quad (5.6.41)$$

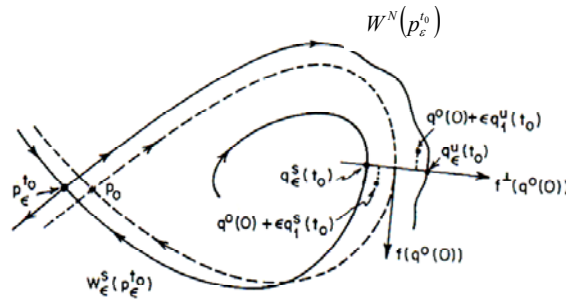
gde su $q_\varepsilon^N(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} q_\varepsilon^N(t_0, t_0)$, $q_\varepsilon^s(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} q_\varepsilon^s(t_0, t_0)$ jedinstvene tačke u $W^N(p_\varepsilon^{t_0})$, $W^s(p_\varepsilon^{t_0})$ najbliže tački $p_\varepsilon^{t_0}$ i koje leže na normalni:

$$f^\perp(q^0(0)) = (-f_2(q^0(0)), f_1(q^0(0)))^T \text{ od } \Gamma^0 \text{ u } q^0(0).$$

Iz C^r -blizine mnogostrukosti od Γ^0 , iz leme 5.6.3. sledi:

$$d(t_0) = \varepsilon \frac{f(q^0(0)) \wedge (q_1^u(t_0) - q_1^s(t_0))}{|f(q^0(0))|} + O(\varepsilon^2), \quad (5.6.42)$$

Ovde je operator \wedge definisan kao $a \wedge b = a_1 b_2 - a_2 b_1$, a $f \wedge (q_1^u - q_1^s)$ je projekcija $q_1^u - q_1^s$ na f^\perp , vidi sliku 5.6.9.



Slika 5.6.9. Poremećene mnogostrukosti i funkcija razdvajanja

Konačno, definiše se Melnikov-ljeva funkcija:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t) dt \quad (5.6.43)$$

Teorema 5.6.5.: Ako $M(t_0)$ ima proste nule i zavisna je od ε , onda se, za dovoljno malo $\varepsilon < 0$, $W^N(p_\varepsilon^{t_0})$ i $W^s(p_\varepsilon^{t_0})$ presecaju transverzalno (poprečno). Ako $M(t_0)$ nema nulu onda $W^N(p_\varepsilon^{t_0}) \cap W^s(p_\varepsilon^{t_0}) = \emptyset$.

Zapažanje: Ova teorema je bitna jer omogućava da se proveri postojanje poprečnih homokliničkih orbita u specijalnim diferencijalnim jednačinama. Iz prisustva takvih orbita, prema Smale-Birkhoff-ljevoj teoremi, sledi da neka iteracija $(P_\varepsilon^{t_0})^n$ Poincaré-ove mape ima invarijantni hiperbolički skup: Smale-ovu potkovicu. Potkovicu sadrži konačan broj (nestabilnih) periodičkih orbita, neograničen skup graničnih,

neperiodičkih orbita, i gustu orbitu. Osetljivost od početnih uslova koja je izazvana u toku diferencijalne jednačine ima veliki praktični značaj.

Dokaz teoreme 5.6.5. može se naći u monografiji [50]. Iz dokaza sledi da mora postojati takvo $t_0 = \tau$ da su $q_\varepsilon^s(\tau) = q_\varepsilon^N(\tau)$ i ima se homoklinička tačka $q \in W^s(p_\varepsilon^\tau) \cap W^N(p_\varepsilon^\tau)$. Ali kako su sve Poincaré-ove mape P^{t_0} jednake, $W^N(p_\varepsilon^{t_0})$ i $W^s(p_\varepsilon^{t_0})$ se moraju presecati za sve vreme $t_0 \in [0, T]$. Čak, ako su nule proste ($dM/dt_0 \neq 0$), onda sledi da je presek poprečan. Praktično, ako ne postoje nule, onda $q_\varepsilon^s(\tau)$ i $q_\varepsilon^N(\tau)$ ostaju iste orijentacije i mnogostrukosti se ne presecaju.

Zapažanja:

1. $M(t_0)$ je T-periodičko u vremenu t_0 , jer su $P_\varepsilon^{t_0}$ i $P_\varepsilon^{t_0+T}$ identične, dakle $d(t_0) = d(t_0 + T)$. Računajući $M(t_0)$ zapravo stojeći u fiksnoj tački $q^0(0)$ pokreće se duž preseka Σ^{t_0} i posmatra se oscilovanje poremećenih mnogostrukosti kako se t_0 menja. Isto je i ako se fiksira presek Σ^{t_0} i pokreće se osnovna tačka $q^0(0)$ duž neporemećenog prstena (petlje) Γ^0 .

2. Ako je poremećaj g izvod od (vremenski zavisne) Hamilton-ove funkcije $G(u, v) : g_1 = \partial G / \partial v, g_2 = -\partial G / \partial u$ onda sledi:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ H(q^0(t-t_0)), G(q^0(t-t_0), t) \right\} dt, \quad (5.6.44)$$

gde $\{H, G\}$ označava Poisson-ovu zagradu:

$$\{H, G\} = \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial u} \quad (5.6.45)$$

Ovo je prirodna formula ukoliko se ponovi da se prvi izvod neporemećene Hamiltonian-ove energije H može dobiti integracijom njegove razvojne jednačine.

$$\dot{H} = \{H, G\} \quad (5.6.46)$$

duž neporemećene orbite $q^0(t-t_0)$.

3. Ako $g = g(x)$ nije eksplicitno zavisna od vremena, onda sledi, koristeći Green-ovu teoremu:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0)) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 g_2 - f_2 g_1) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (g_2(u^0, v^0) \dot{u}^0 - g_1(u^0, v^0) \dot{v}^0) dt \\ &= \int_{\Gamma^0} g_2(u, v) du - g_1(u, v) dv \\ &= \int_{\text{int} \Gamma^0} \text{trace} Dg(x) dx. \end{aligned} \quad (5.6.47)$$

4. Zamenom promenljivih $t \rightarrow t + t_0$ Melnikov-ljev intregal dobija oblik:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q^0(t)) \wedge g(q^0(t), t+t_0) dt \quad (5.6.48)$$

Posmatra se sada slučaj kada poremećaj $g = g(x, t; \mu)$ zavisi od parametra $\mu \in R^k$. Jednostavnosti radi uzima se $k = 1$.

Teorema 5.6.6. : Posmatraj se parametrizovana familija $\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t; \mu)$, $\mu \in R$ i neka važe hipoteze A1-A3. Ako se pretpostavi da Melnikov-ljeva funkcija $M(t_0, \mu)$ ima (kvadratnu) nulu $M(\tau, \mu_b) = (\partial M / \partial t_0)(\tau, \mu_b) = 0$, ali $(\partial^2 M / \partial t_0^2)(\tau, \mu_b) \neq 0$ i $(\partial M / \partial \mu)(\tau, \mu_b) \neq 0$, onda je $\mu_b = \mu_b + O(\varepsilon)$ bifurkaciona vrednost za koju se u sistemu pojavljuju kvadratne homokliničke tangente. Dokaz teoreme 5.6.6. može se naći u monografiji [50].

Primer:

Primenjuju se ovi rezultati na Duffing-ovu jednačinu sa negativnom linearnom krutošću i slabom sinusnom prinudnom silom i prigušenjem, pa se jednačina (5.6.26) zapiše kao sistem:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= u - u^3 + \varepsilon(\gamma \cos \omega t - \delta v), \end{aligned} \quad (5.6.49)$$

gde je γ amplituda, ω ferekvencija prinudne sile, δ promenljivi parametar i ε mali parametar. Za $\varepsilon = 0$ videlo se da sistem ima centre u $(u, v) = (\pm 1, 0)$ i hiperboličko sedlo u $(0, 0)$. Ravan skup:

$$H(u, v) = \frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4} = 0 \quad (5.6.50)$$

sastavljen je od dve homokliničke orbite, Γ_+^0, Γ_-^0 i tačke $p_0 = (0, 0)$. Neporemećene homokliničke orbite zasnovane na $q_{\pm}^0(0) = (\pm\sqrt{2}, 0)$ date su kao:

$$\begin{aligned} q_+^0(t) &= (\sqrt{2} \operatorname{sech} t, -\sqrt{2} \operatorname{sech} t \tanh t), \\ q_-^0(t) &= -q_+^0(t). \end{aligned} \quad (5.6.51)$$

Izračunaće se Melnikov-ljeva funkcija za $q_+^0(t)$ (postupak za $q_-^0(t)$ je identičan). Koristeći oblik (5.6.48), sledi:

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} v^0(t) [\gamma \cos \omega(t + t_0) - \delta v^0(t)] dt \\ &= -\sqrt{2} \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} t \tanh t \cos \omega(t + t_0) dt - 2\delta \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 t \tanh^2 t dt \end{aligned} \quad (5.6.52)$$

Integrali se mogu izračunati (prvi pomoću metode ostatka), pa sledi:

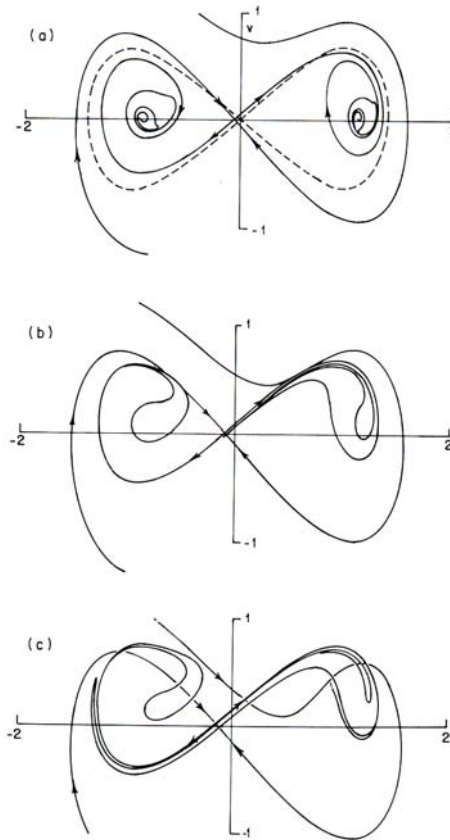
$$M(t_0; \gamma, \delta, \omega) = \frac{-4\delta}{3} + \sqrt{2} \gamma \pi \omega \operatorname{sech} \left(\frac{\pi \omega}{2} \right) \sin \omega t_0. \quad (5.6.53)$$

Ako se definiše:

$$R^0(\omega) = \frac{4 \cosh(\pi \omega / 2)}{3 \sqrt{2} \pi \omega}, \quad (5.6.54)$$

onda sledi, iz teoreme 5.6.5., da ako $\gamma / \delta > R^0(\omega)$, $W^s(p_\varepsilon)$ preseca $W^N(p_\varepsilon)$ za ε dovoljno malo, i ako $\gamma / \delta < R^0(\omega)$, $W^s(p_\varepsilon) \cap W^N(p_\varepsilon) = \emptyset$. Takođe, kada $M(t_0; \gamma, \delta, \omega)$ ima kvadratne nule za $\gamma / \delta = R^0(\omega)$ teorema 5.6.6. tvrdi da postoji bifurkaciona kriva u γ, δ ravni za svako fiksno ω , tangentna na $\gamma = R^0(\omega) \delta$ u $\gamma = \delta = 0$, u kojoj se pojavljuju homokliničke tangente. Pri korišćenju teoreme 5.6.6. direktno fiksiraln su ω i δ na primer, i menja se γ . Na slici 5.6.10 prikazane su neke Poincaré-ove mape jednačine (5.6.49). Njih je dobio numerički Ueda [1981a]. Neporemećena dupla homoklinička petlja

$\Gamma_+^0 \cup \{0,0\} \cup \Gamma_-^0$ je takođe prikazana na toj slici 5.6.10(a). Primećuje se da se prva tangentnost javlja za $\varepsilon\gamma = 0.19$, za razliku od teorijske vrednosti 0.188.



Slika 5.6.10 Poincaré-ove mape za Duffing-ovu jednačinu, pokazuju stabilnu i nestabilnu mnogostrukosti sedlaste tačke u okolini $(0,0)$, $\omega = 1.0$, $\varepsilon\delta = 0.25$. (a) $\varepsilon\gamma = 0.11$; (b) $\varepsilon\gamma = 0.19$; (c) $\varepsilon\gamma = 0.30$.

5.6.6. Melnikov-ljeva metoda: Perturbacije Hamilton-ovih sistema i subharmoničke orbite

Posmatra se sada sistem (5.6.38) za koji su zadovoljene hipoteze A1-A3 i familija orbita $q^\alpha(t)$ koje leže unutar Γ^0 . Postavlja se pitanje da li će i jedna od njih ostati očuvana pod dejstvom poremećaja $\varepsilon g(x, t)$. Polazi se sa perturbacionom lemom.

Lema 5.6.4 . Neka $q^\alpha(t - t_0)$ bude periodička orbita slobodnog sistema (neporemećenog sistema) sa ponavljanjem u Σ^{t_0} , i periodom T_α . Onda postoji poremećena orbita $q_\varepsilon^\alpha(t, t_0)$, koja ne mora biti periodička, i koja može biti izražena kao:

$$q_\varepsilon^\alpha(t, t_0) = q^\alpha(t - t_0) + \varepsilon q_1^\alpha(t, t_0) + O(\varepsilon^2) \tag{5.6.55}$$

uniformna u intervalu $t \in [t_0, t_0 + T_\alpha]$, za ε dovoljno malo i za svako $\alpha \in (-1, 0)$. Dokaz se nalazi na 194 str. monografije [50].

Subharmonična Melnikov-ljeva funkcija se definiše puštajući da $q^\alpha(t-t_0)$ bude periodička orbita perioda $T_\alpha = mT/n$, sa m i n relativno prostim brojevima, gde je T period poremećaja, sledi:

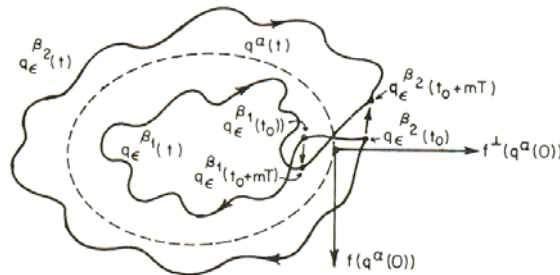
$$M^{m/n}(t_0) = \int_0^{mT} f(q^\alpha(t)) \wedge g(q^\alpha(t), t+t_0) dt. \quad (5.6.56)$$

Teorema 5.6.7. Ako $M^{m/n}(t_0)$ ima proste nule i nezavisna je od ε i $dT_\alpha/dh_\alpha \neq 0$, onda za $0 < \varepsilon \leq \varepsilon(n)$ (5.6.38) ima subharmoničku orbitu perioda mT . Ako je $n=1$ onda je rezultat jednako važeći u $0 < \varepsilon \leq \varepsilon(1)$. Dokaz se nalazi na 195 str. monografije [50].

Dakle postoji kriva početnih uslova koji povezuju $q_\varepsilon^{\beta_1}(t_0)$ sa $q_\varepsilon^{\beta_2}(t_0)$ iscrtana iza preseka Σ^{t_0} posle m ponavljanja od $P_\varepsilon^{t_0}$, videti sliku 5.6.11. Dokazuje se ovde da mapa $(P_\varepsilon^{t_0})^m$ odesečena u $O(\varepsilon)$ ima fiksnu tačku u okolini $q^\alpha(0)$.

Zapažanje. Ako $M^{m/n}$ nema nula, onda se sva rešenja pomeraju ili unutar ili spolja duž neporemećene orbite i poremećena mapa nema fiksnih tačaka.

Teorema 5.6.8. Posmatra se parametrizovana familija $\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t; \mu)$, $\mu \in R$, i neka važe hipoteze A1-A3. Ako se pretpostavi da $M^{m/n}(t_0, \mu)$ ima (kvadratnu) nulu $M^{m/n} = (\partial M^{m/n} / \partial t_0) = 0$; $(\partial^2 M^{m/n} / \partial t_0^2), \partial M^{m/n} / \partial \mu \neq 0$ za $\mu = \mu_b$, onda je $\mu_{m/n} = \mu_b + O(\varepsilon)$ bifurkaciona vrednost u kojoj se pojavljuju čvorovi tipa sedla periodičkih orbita.



Slika 5.6.11. Postojanje fiksne tačke 'u $O(\varepsilon)$.'

Sledeća teorema tvrdi da je homoklinička bifurkacija granica od konačnog niza subharmoničkih bifurkacija tipa sedla.

Teorema 5.6.9. Neka $M^{m/1}(t_0) = M^m(t_0)$ onda $\lim_{m \rightarrow \infty} M^m(t_0) = M(t_0)$. (5.6.57)

Dokaz se nalazi na 197 str. monografije [50].

Da bi se ilistrovala upotreba analize subharmonika, posmatra se Duffing-ova jednačina (5.6.49). Kada je $\varepsilon = 0$, unutar svakog od homokliničkih zapleta Γ_\pm^0 postoji jednoparameterska familija periodičkih orbita koje mogu biti napisane u obliku:

$$q_\pm^k(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-k^2}} dn \left(\frac{t}{\sqrt{2-k^2}}, k \right) \right), \left(\frac{-\sqrt{2}k^2}{\sqrt{2-k^2}} sn \left(\frac{t}{\sqrt{2-k^2}}, k \right) \times cn \left(\frac{t}{\sqrt{2-k^2}}, k \right) \right),$$

$$q_-^k(t) = -q_+^k(t). \quad (5.6.58)$$

gde su sn, cn i dn Jacobi-jeve eliptičke funkcije i k su eliptički moduli. Pri tome su $k \rightarrow 1, q_\pm^k \rightarrow q_\pm^0 \cup \{0,0\}$ i $k \rightarrow 0, q_\pm^k \rightarrow (\pm 1, 0)$. Izabru se početni uslovi za $t = t_0$ da budu:

$$q_{\pm}^k(t) = \left(\pm \sqrt{\frac{2}{\sqrt{2-k^2}}}, k \right). \quad (5.6.59)$$

Primećuje se da Hamilton-ian (5.6.50) može da se napiše unutar Γ_+^0 (ili Γ_-^0) preko modula k kao:

$$H(q^k) = \frac{k^2 - 1}{(2 - k^2)^2} \stackrel{\text{def}}{=} h_k. \quad (5.6.60)$$

Period ovih orbita je:

$$T_k = 2K(k)\sqrt{2-k^2} \quad (5.6.61)$$

gde je $K(k)$ eliptički integral prve vrste. T_k monotono raste sa k kao $\lim_{k \rightarrow 0} T_k = \sqrt{2}\pi$, $\lim_{k \rightarrow 1} T_k = \infty$ i

$$\frac{dT_k}{dh_k} = \frac{dT_k/dk}{dH/dk} > 0 \quad (5.6.62)$$

i

$$\lim_{k \rightarrow 1} \frac{dT_k}{dh_k} = \infty. \quad (5.6.63)$$

Pretpostavke A1, A2 i A3 su zadovoljene.

Može se izračunati subharmonička Melnikov-ljeva funkcija za rezonantne periodičke orbite. Posmatraće se to samo unutar Γ_+^0 : $q_+^k(t - t_0)$. Uslov rezonancije je, iz (5.6.61):

$$2K(k)\sqrt{2-k^2} = \frac{2\pi m}{\omega n}, \quad (5.6.64)$$

i za bilo koji izbor m, n sa $2\pi m/\omega n > \sqrt{2}\pi$, (5.6.64) može biti izračunato jedinstveno da $k = k(m, n)$ i prema tome jedinstvenu rezonantnu orbitu $q_+^{k(m, n)}$.

Računajući:

$$M^{m/n}(t_0; \gamma, \delta, \omega) = \int_0^{mT} v^{k(m, n)}(t) [\gamma \cos \omega(t + t_0) - \delta v^{k(m, n)}(t)] dt \quad (5.6.65)$$

Koristeći Fourier-ove redove za (5.6.58) i zapaženje 3. teoreme 5.6.5. dobija se:

$$M^{m/n}(t_0; \gamma, \delta, \omega) = -\delta J_1(m, n) - \gamma J_2(m, n, \omega) \sin \omega t_0 \quad (5.6.66)$$

gde je:

$$J_1(m, n) = \frac{2}{3} \left[(2 - k^2(m, n)) 2E(k(m, n)) - 4k'^2(m, n) K(k(m, n)) \right] / (2 - k^2(m, n))^{2/3}, \text{ i}$$

$$J_2(m, n, \omega) = \begin{cases} 0; & n \neq 1 \\ \sqrt{2}\pi \omega \sec h \frac{\pi n K'(k(m, 1))}{K(k(m, 1))}; & n = 1 \end{cases}.$$

Ovde je $E(k)$ eliptički integral druge vrste i k' su komplementarni eliptički moduli $k' = 1 - k^2$. Definišući

$$R^m(\omega) = \frac{J_1(m, 1)}{J_2(m, 1, \omega)}, \quad (5.6.67)$$

iz teorema 5.6.7 i 5.6.8 zaključuje se da ako je $\gamma/\delta > R^m(\omega)$, onda postoji par subharmonika m -tog reda (perioda $2\pi/\omega$) koji se pojavljuje na bifurkacionoj krivoj tangentnoj na $\gamma = R^m(\omega)\delta$ u $\gamma = \delta = 0$. Provera potvrđuje da je:

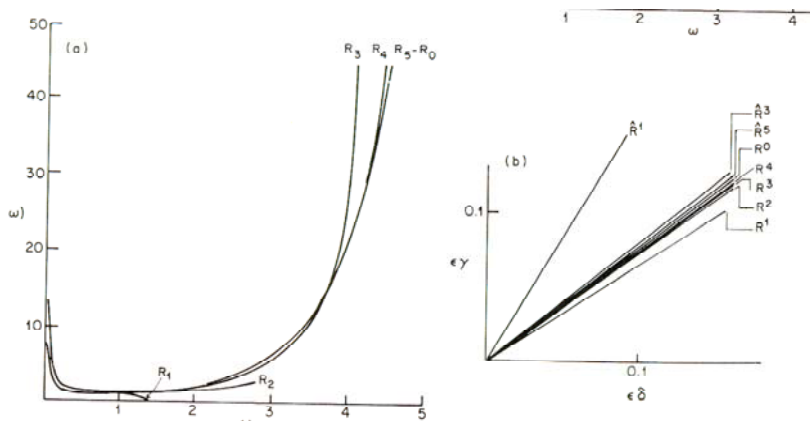
$$\lim_{m \rightarrow \infty} M^{m/1}(t_0; \gamma, \delta, \omega) = M(t_0; \gamma, \delta, \omega), \quad (5.6.68)$$

i da je stepen konvergencije krajnje veliki. Na slici 5.6.12 prikazane su neke od bifurkacionih krivih $R^m(\omega)$.

Slična računica se može izvesti za orbite van $\Gamma_+^0 \cup \{0,0\} \cup \Gamma_-^0$ i dobijaju se bifurkacione krive

$$\gamma = \frac{\hat{J}_1(m,1)\delta}{\hat{J}_2(m,1,\omega)} = \hat{R}^m(\omega)\delta.$$

Iz prethodne teorije o postojanju subharmonijskih orbita jasno je da jedan trigger singulariteta [86, 89, 91, 92, 93, 155, 159] sa jednom nestabilnom homokliničkom tačkom tipa sedla i sa dve singularne stabilne tačke pojavljuje se u jedno-frekventnom stacionarnom rezonantnom stanju. To je vidljivo i na krivim amplitudno i fazno-frekventnog dijagrama za stacionarno rezonantno stanje. U slučaju višefrekventnih spregnutih rezonantnih stanja i u prisustvu više spregnutih rezonantnih modova u rezonantnom opsegu odgovarajućih frekvencija dolazi do pojave jednog ili više trigerera [91]. Maksimalan broj spregnutih trigerera odgovara broju spregnutih modova i broju rezonantnih frekvencija spoljašnje pobude. Broj nestabilnih homokliničkih tački tipa sedla u faznom prostoru sa više trigerera jednak je broju rezonantnih frekvencija spoljašnje pobude. Na primer, za četvero-frekventni spregnuti proces u $u-v$ ravni postojale bi četiri homokliničke tačke tipa sedla. Pojava ovih nestabilnih homokliničkih tački zahteva i dodatna ispitivanja jer ona povlači i elemente nestabilnosti u stacionarnom nelinearnom više-frekventnom procesu.



Slika 5.6.12. Bifurkacione krive za homokliničke orbite i subharmonike Duffing-ove jednačine, (a) $R^m(\omega)$ (subharmoničke orbite unutar Γ_0^\pm); (b) nagibi $R^m(\omega)$, $\omega=1$. Zapaža se velika konvergencija $R^m(\omega)$ i $\hat{R}^m(\omega)$ ka $R^0(\omega)$.

6* Poglavlje

Energijska analiza dinamika hibridnih sistema

6.1. Energija sprezanja

U monografiji [208] Nayfeh-a prikazan je jezgrovit i jedinstven postupak analitičkih, kompjuterskih i eksperimentalnih metoda i pristupa nelinearnim interakcijama. Te metode su korišćene za jedinstveno proučavanje i tumačenje fascinantnih složenosti nelinearnih dinamičkih sistema. U toj monografiji komentarisano je da energija višefrekventnih izvora može da se prenese na niskofrekventne modove nosećih struktura ili podloga a kao rezultat beleže se razarajuće velike amplitude oscilovanja koje umanjuju njihov životni vek. Sa druge strane taj mehanizam može da se iskoristi u prenosu energije sa sistema na ugrožene podsisteme [209] i tako značajno smanje oscilacije glavnog sistema i poveća njegov životni vek.

U radovima [65, 66, 111, 112, 144, 145, 146] autori su predstavili prenos energije između modova nelinearnih oscilacija deformabilnih tela u spregnutim linearnim i nelinearnim oscilatorima koristeći usrednjenje i asimptotsku metodu Krilov-Bogoliyubov-Mitropolskiy-kog za dobijanje sistema diferencijalnih jednačina po amplitudama i fazama u prvoj aproksimaciji i izraza za energiju pobuđenih

modova koji zavise od amplituda, faza i frekvencija različitih nelinearnih modova. U smislu dobijenih prvih aproksimacija rešenja, izvršena je energijska analiza interakcije među modovima u slučajevima dobijenih više frekventnih oscilatornih režima u nelinearnim elastičnim sistemima (greda, ploča i ljuski) pobuđenih početnim uslovima za slobodne i prinudne oscilacije. Takođe, identifikovan je prenos energije između modova. U slučaju kad je frekvencija prinudne sile u rezonantnom opsegu u okolini jedne od sopstvenih kružnih frekvencija osnovnog linernog sistema javljaju se dva ili više rezonantnih skokova i moguće ih je identifikovati dobijenim sistemom diferencijalnih jednačina po amplitudama i fazama prve aproksimacije. Triger spregnutih singulariteta, kao i spregnuti trigeri vrednosti energije su prikazani u multifrekventnim stacionarnim i nestacionarnim rezonantnim režimima nelinearnih sistema za vreme porasta ili opadanja vrednosti frekvencija spoljašnje pobudne sile kroz rezonantni opseg odgovarajućeg moda oscilovanja. U radu [38] prikazana je energijska analiza longitudinalnih oscilacija štapova.

Iz zaključaka tih radova može se izdvojiti sledeće uopšteno razmatranje:

Oscilatorni procesi u dinamičkim sistemima zavise od karaktera sistema. U takvim sistemima energija se transformiše iz jedne u drugu formu i ima različite tokove unutar dinamičkog sistema.

Transformacija kinetičke energije u potencijalnu i obratno javlja se u konzervativnim sistemima, ali kada je linearni sistem u pitanju, energija koju nosi posmatrani harmonik (mod) odgovarajuća frekvencija ostaje konstantna za sve vreme dinamičkog procesa, kao i ukupna energija sistema. Ne postoji uzajamni uticaj između harmonika i sistem može da se predstavi parcijalnim oscilatorima, čiji broj odgovara broju stepeni slobode oscilovanja ili broju sopstvenih kružnih frekvencija slobodnih oscilacija. Pri tome, ukupna energija jednog parcijalnog oscilatora ostaje konstantna i javlja se transformacija kinetičke u potencijalnu energiju. U takvim linearnim sistemima ne javlja se prenos energije između modova [238].

Kada je nelinearni konzervativni sistem u pitanju ovakvi zaključci bi bili netačni. Teorijske i eksperimentalne studije pokazuju da postoji interakcija između bliskih modova i da rezultira različitim bifurkacijama i haotičnim atraktorima. Teorijski rezultati ukazuju takođe da prigušenje može biti destabilizirajuće. Kod nelinearnih sistema javlja se neizohronost harmonika različitih frekvencija koje zavise od početnih uslova i spregnute su sa amplitudama različitih harmonika. Energija, bilo kinetička ili potencijalna, saopštena sistemu u početnom trenutku određenom harmoniku sa određenom frekvencijom prenosi se nelinearnim efektima dinamike sprežanja na harmonike drugih frekvencija. U nelinearnim više-frekventnim oscilatornim sistemima pod uticajem spoljašnje više-frekventne pobude moguće je primetiti i pojavu prenosa energije sa jednog na drugi harmonik, kao i opadanja ili porast kinetičkih parametara jednog harmonika sa promenom parametara drugog harmonika. Ove pojave se mogu uočiti kako pri slobodnim nelinearnim oscilacijama tako i pri prinudnim stacionarnim ili nestacionarnim više-frekventnim nelinearnim oscilacijama. Takvi efekti su naročito važni prilikom prolaska kroz rezonantno stanje što se dešava kada jedan ili više harmonika osciluje frekvencijama iz rezonantnog opsega nelinearnog sistema.

U radovima [275-277] pokazano je da osnovna nelinearnost dovodi do pojave nepovratnog nelinearnog transvera energije između podsistema- nazvanog nelinearno pumpanje energije.

Važno je ispitati prenos energije između podistema hibridnih sistema kao i između različitih podprocesa u sistemu sa hibridnim procesom u kome su podprocesi spregnuti sa različitim tipovima sprežanja. Elementi sprežanja kao što smo već videli mogu biti statički, dinamički, visko-elastični, sa naslednim svojstvima i svaki od njih unosi poseban deo energije sprežanja u celokupni sistem. Zato će se ovde koristeći izraze za energije sistema, sprežanja ili podistema za nejelementarnije oblike hibridnih sistema prikazane u trećem poglavlju izvršiti analizu transfera energije u takvim sistemima. Sa stanovišta integriteta dinamičkog procesa veoma je važno analizirati energiju razdvojenih podistema kao posebnih sistema upoređujući kinetičke parametre i svojstva dinamika razdvojenih podistema i podprocesa u njima i sprežanja tih podistema i njihove interakcije koje unose nove elemente u dinamike samih podistema i naravno sasvim nova svojstva energije spregnutog hibridnog sistema.

Kao jedan uvodni primer prenosa energije u hibridnim nelinearnim sistemima biće prikazana transformacija energije između delova nošenih određenim generalisanim kordinatama φ i ρ u sistemu sa dva stepena slobode kretanja poznatog primera klatna sa oprugom. Radi analize ponašanja energije u sistemu klatna sa oprugom izraziće se, najpre, kinetička i potencijalna energija sistema u obliku:

$$E_k = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + (\rho+l)^2 \dot{\varphi}^2) \quad \text{i} \quad E_p = \frac{c}{2}\rho^2 + mg(\rho+l)(1 - \cos \varphi)$$

gde su m masa klatna, l dužina opruge klatna u statički nenapregnutom stanju čija se masa zanemaruje, c je aksijalna krutost opruge, a φ i ρ su respektivno ugaoni otklon i istežanje opruge u odnosu na njenu statički ravnotežnu dužinu l , posmatrane kao generalisane koordinate sistema. U slučaju linearizovanog sistema zanemarujući male članove (deo kinetičke energije koju nosi koordinata φ) dobijaju se sledeći izrazi za kinetičku energiju:

Deo izraza $E_{k2} = \frac{m}{2}(\rho+l)^2 \dot{\varphi}^2$ se aproksimira kao $E_{k2} \approx \frac{m}{2}(l\dot{\varphi})^2$. Samo za male oscilacije (mala odstupanja od ravnotežnog položaja) oblici kinetičke i potencijalne energije bili bi:

$$E_k \approx \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + (l\dot{\varphi})^2) \quad \text{i} \quad E_p \approx \frac{c}{2}\rho^2 + \frac{mgl}{2}\varphi^2$$

U ovom linearizovanom slučaju, generalisane koordinate su normalne koordinate malih oscilacija klatna sa oprugom oko ravnotežnog položaja $\varphi=0$ i $\rho=0$ i međusobno su nespregnute tj. nezavisne. Takođe, energija nošena ovim normalnim kordinatama je nespregnuta, prenos ukupne energije se ne pojavljuje među odgovarajućim delovima razdvojenih normalnih koordinata, i razdvojeni procesi određeni normalnim koordinatama su konzervativni sistemi svaki sa jednim stepenom slobode oscilovanja. U ovom slučaju javlja se prelaženje iz kinetičke u potencijalnu energiju i obrnuto ali ukupna energija je konstantna za jednu normalnu koordinatu:

$$E_{k\rho} \approx \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 \quad \text{i} \quad E_{p\rho} \approx \frac{c}{2}\rho^2$$

$$E_{k\varphi} \approx \frac{m}{2}(l\dot{\varphi})^2 \quad \text{i} \quad E_{p\varphi} \approx \frac{mgl}{2}\varphi^2$$

Ovo je takođe jasno i iz sistema diferencijalnih jednačina kretanja, za linearizovan slučaj:

$$m\ddot{\rho} + c\rho = 0, \text{ odnosno} \quad \ddot{\rho} + \omega_2^2\rho = 0, \text{ gde je} \quad \omega_2^2 = c/m.$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0 \quad \text{ili u obliku:} \quad \ddot{\varphi} + \omega_1^2\varphi = 0, \text{ gde je} \quad \omega_1^2 = g/l.$$

U nelinearnom slučaju pak interakcija između koordinata postoji, a pojavljuje se i prenos energije:

$$E_k = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + 2\rho l\dot{\varphi}^2)$$

$$E_p = \frac{c}{2}\rho^2 + mgl(1 - \cos\varphi) + mg\rho(1 - \cos\varphi).$$

U ovim izrazima mogu se razdvojiti sledeći oblici:

- Kinetička i potencijalna energija duž koordinate ρ u obliku:

$$E_{k\rho} = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 \quad \text{i} \quad E_{p\rho} = \frac{c}{2}\rho^2 + mg\rho$$

Analizirajući ove izraze ponaosob za oscilator sa koordinatom ρ vidi se da je to slučaj čisto linearnog oscilatora ili harmonijskog oscilatora sa koordinatom ρ i frekvencijom $\omega_2^2 = c/m$ kao i da je ovaj izdvojeni proces izohron.

- Kinetička i potencijalna energija u zavisnosti od koordinate φ imaju oblik:

$$E_{k\varphi} = \frac{m}{2}(l\dot{\varphi})^2 \quad \text{i} \quad E_{p\varphi} = mgl(1 - \cos\varphi)$$

Analizirajući ove izraze za razdvojeni oscilator sa koordinatom φ vidi se da je to slučaj čisto nelinearnog oscilatora sa koordinatom φ kao i da je ovaj izdvojeni proces neizohron. U linearizovanom slučaju ovaj potproces ima frekvenciju $\omega_1^2 = g/l$.

Dakle, moguće je zaključiti da ovde formalno postoje dva spregnuta oscilatora od kojih je jedan čisto linearan sa jednim stepenom slobode kretanja, a drugi je nelinearan takođe sa jednim stepenom slobode kretanja. U hibridnom sistemu, ovi oscilatori su spregnuti i postoji energija sprežanja koja sadrži dva dela koji odgovaraju kinetičkim i potencijalnim energijama. Dakle, hibridni odnos sa statičkim ili dinamičkim svojstvima može da se predstavi kroz analizu sprežanja.

- Kinetička i potencijalna energija interakcije između koordinata φ i ρ u nelinearnom hibridnom modelu su:

$$E_{k(\varphi,\rho)} = \frac{m}{2}(\rho + 2l)\rho\dot{\varphi}^2 \quad \text{i} \quad E_{p(\varphi,\rho)} = -mg\rho\cos\varphi \quad (6.1.1)$$

U nelinearnom slučaju sistem diferencijalnih jednačina kretanja je:

$$m\ddot{\rho} + c\rho + mg(1 - \cos\varphi) = 0$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + \frac{d}{dt}m(\rho + 2l)\rho\dot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0 \quad \text{ili u obliku:}$$

$$\ddot{\rho} + \omega_2^2\rho + g(1 - \cos\varphi) = 0$$

$$l^2\ddot{\varphi} + 2(\rho + l)\dot{\rho}\dot{\varphi} + (\rho + 2l)\rho\ddot{\varphi} + \omega_1^2 l^2 \sin\varphi = 0, \quad \text{odnosno:}$$

$$\ddot{\rho} + \omega_2^2\rho = -g(1 - \cos\varphi) \quad (6.1.2)$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_1^2\varphi = \omega_1^2(\varphi - \sin\varphi) - \frac{2}{l^2}(\rho + l)\dot{\rho}\dot{\varphi} - \frac{1}{l^2}(\rho + 2l)\rho\ddot{\varphi} \quad (6.1.3)$$

Za male oscilacije oko položaja $\varphi = 0$ i $\rho = 0$ tj. oko pozicije stabilne ravnoteže klatna sa oprugom, nelinearna aproksimacija ovih jednačina je oblika:

$$\ddot{\rho} + \omega_2^2 \rho \approx -g \left(\frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^4}{24} + \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{\varphi^8}{8!} + \dots \right) \quad (6.1.4)$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_1^2 \varphi \approx -\omega_1^2 \left(\frac{\varphi^3}{3} - \frac{\varphi^5}{5!} + \frac{\varphi^7}{7!} - \dots \right) - \frac{2}{l^2} (\rho + l) \dot{\rho} \dot{\varphi} - \frac{1}{l^2} (\rho + 2l) \rho \ddot{\varphi} \quad (6.1.5)$$

Ako se uvedu fazne koordinate $v = \dot{\rho}$ i $u = \dot{\varphi}$ dobija se sistem jednačina u obliku:

$$v = \dot{\rho}$$

$$\dot{v} = -\omega_2^2 \rho - g(1 - \cos \varphi)$$

$$u = \dot{\varphi}$$

$$\dot{u} = -\omega_1^2 \varphi + \omega_1^2 (\varphi - \sin \varphi) - \frac{2}{l^2} (\rho + l) \dot{\rho} \dot{\varphi} - \frac{1}{l^2} (\rho + 2l) \rho \ddot{\varphi},$$

ili u istoj aproksimaciji u obliku:

$$v = \dot{\rho}$$

$$\dot{v} = -\omega_2^2 \rho - g \left(\frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^4}{24} + \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{\varphi^8}{8!} + \dots \right)$$

$$u = \dot{\varphi}$$

$$\dot{u} = -\omega_1^2 \varphi - \omega_1^2 \left(\frac{\varphi^3}{3} - \frac{\varphi^5}{5!} + \frac{\varphi^7}{7!} - \dots \right) - \frac{2}{l^2} (\rho + l) v u - \frac{1}{l^2} (\rho + 2l) \rho u$$

Iz sistema jednačina (6.1.2) i (6.1.3) kao i njegovih aproksimacija (6.1.4) i (6.1.5) vidi se da su desne strane jednačina nelinearne funkcije generalisanih koordinata i njihovih prvih i drugih vremenskih izvoda.

Može se zaključiti da metoda asimptotskog usrednjenja, koja se koristi za dobijanje prve asimptotske aproksimacije rešenja, može da se iskoristi i za analizu prenosa energije između energija koje nose generalisane koordinate φ i ρ u ovom nelinearnom sistemu sa dva stepena slobode kretanja. Ovaj sistem formalno se može posmatrati kao hibridni sistem spregnuta dva oscilatora linearnog i nelinearnog, svakog sa po jednim stepenom slobode kretanja, kao podsistema jednog spregnutog hibridnog sistema sa dva stepena slobode kretanja, sa hibridnim vezama u obliku statičkih ili dinamičkih sprega. Ovaj odnos ima dva člana energije interakcije između podsistema izrađenih u obliku kinetičke i potencijalne energije datih relacijama (6.1.1). S obzirom na karakteristike analiziranog sistema klatna sa oprugom zaključuje se da bi se mogli analizirati hibridni fenomeni spregnutih podsistema neophodno je razmotriti i najprostije slučajeve sprežanja linearnog i nelinearnog oscilatora sa po jednom stepenom slobode kretanja koji su spregnuti statičkim ili dinamičkim elementima. To će se izvršiti na osnovu već datih izraza za energije sistema i podsistema, kao i energije sprežanja za hibridne sisteme iz trećeg poglavlja.

6.2. Prenos energije u hibridnom sistemu

6.2.1. Prenos energije u hibridnom sistemu sprege linearnog i nelinearnog oscilatora statičkim i dinamičkim vezama

Iz analize prethodnog jednostavnog modela klatna sa oprugom kao nelinearnog konzervativnog sistema vidi se da zaključci koji važe za linearni ili linearizovani sistem u osnovi ne mogu da se primene na nelinearni model. Teorijska i eksperimentalna istraživanja potvrđuju da interakcije između različitih modova rezultiraju različitim tipovima bifurkacija, postojanju više atraktora i haotičnih atraktora. Teorijski rezultati takođe pokazuju da prigušenje može izazvati destabilizaciju sistema. Eksperimentalno otkrivanje i teorijska demonstracija interakcije između visoko-frekventnih i nisko-frekventnih modova je od velikog praktičnog značaja. U brojnim inženjerskim sistemima visoko-frekventne pobude mogu biti izazvane velikim brzinama rotacije u sistemu ili pak nekim debalansima masa.

Za kinetičku i potencijalnu energiju nelinearnih modova nelinearnog konzervativnog sistema u prvoj asimptotskoj aproksimaciji preko normalnih koordinata odgovarajućeg nepobuđenog linearnog sistema mogu se pisati izrazi [87, 111, 112]:

$$E_k = \sum_{s=1}^n E_{k_s} = \sum_{s=1}^n (\dot{\xi}_s)^2 + \varepsilon g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s, \xi_r, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dots, \dot{\xi}_s, \dot{\xi}_r, \dots, \dot{\xi}_{n-1}, \dot{\xi}_n) \quad (6.2.1)$$

$$E_p = \sum_{s=1}^n \omega_s^2 \xi_s^2 + f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s, \xi_r, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) \quad (6.2.2)$$

gde su $s=1, \dots, n$ prve asimptotske aproksimacije normalnih koordinata, $a_s(t)$ su amplitude, a $\xi_s = a_s \cos(\theta_s + \psi_s)$ i $\Phi_s(t) = \theta_s + \psi_s(t)$ su faze koje se smatraju funkcijama vremena, a pronalaze se iz diferencijalnih jednačina prve aproksimacije rešenja, kao što smo to već videli iz rešavanja primera poglavlja 3.

Svojstva uticaja nelinearnosti opruge kod prostog nelinearnog oscilatora videla su se i iz samog izvedenog zakona kretanja u prvoj asimptotskoj aproksimaciji (3.1.25). Ovde se samo podvlači nekoliko zaključaka vezanih za energije nelinearnog oscilatora. Izrazi (3.1.2) za kinetičku i (3.1.3) za potencijalnu energiju i funkciju rasipanja (3.1.4) kada uvrstimo rešenje u prvoj asimptotskoj aproksimaciji (3.1.25) postaju:

$$E_{k(t)} = \frac{m_1 R_{01}^2 e^{-2\delta_1 t}}{2} \left[\delta_1 \cos \left(p_1 t - \frac{3}{16\delta_1 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_{01}^2 e^{-2\delta_1 t} + \alpha_{01} \right) + p_1 \sin \left(p_1 t - \frac{3}{16\delta_1 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_{01}^2 e^{-2\delta_1 t} + \alpha_{01} \right) \right]^2 \quad (6.2.3)$$

$$E_{p(t)} = \frac{c_1 R_{01}^2 e^{-2\delta_1 t}}{2} \cos^2 \left(p_1 t - \frac{3}{16\delta_1 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_{01}^2 e^{-2\delta_1 t} + \alpha_{01} \right) + \frac{\tilde{c}_1 R_{01}^4 e^{-4\delta_1 t}}{4} \cos^4 \left(p_1 t - \frac{3}{16\delta_1 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_{01}^2 e^{-2\delta_1 t} + \alpha_{01} \right) \quad (6.2.4)$$

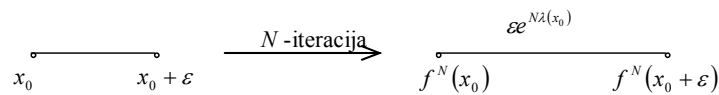
$$\Phi_{(t)} = \frac{b_1 R_{01}^2 e^{-2\delta_1 t}}{2} \left[\delta_1 \cos \left(p_1 t - \frac{3}{16\delta_1 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_{01}^2 e^{-2\delta_1 t} + \alpha_{01} \right) + p_1 \sin \left(p_1 t - \frac{3}{16\delta_1 p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 R_{01}^2 e^{-2\delta_1 t} + \alpha_{01} \right) \right]^2 \quad (6.2.5)$$

Odavde se lako zaključuje da su kinetička i potencijalna energija, kao i funkcija rasipanja periodičke jedno-frekventne funkcije vremena sa frekvencijama (3.1.25a) nelinearnog oscilatora koje su funkcije vremena i zavise od amplituda i faza oscilovanja u početnom trenutku.

Pokazano je u petom poglavlju da su svojstva uticaja nelinearnosti u sistemu pored ostalog i moguća jaka osetljivost na male promene početnih uslova ili parametara sistema, što se u faznom prostoru lako vidi ukoliko se za npr. malu promenu početnih uslova dobijaju velika odstupanja faznih trajektorija, u tom smislu kao meru uticaja nelinearnosti u sistemu može se definisati Lyapunov-ljev eksponent.

Lyapunov-ljev eksponent je mera razdvajanja dveju trajektorija u faznom prostoru koje kreću iz bliskih početnih tačaka. Ukoliko se početno rastojanje ε menja po zakonu $\varepsilon e^{N\lambda(x_0)}$, gde je N broj primenjenih iteracija onda je po definiciji Lyapunov-ljev eksponent ili λ eksponent, slika 6.2.2,:

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)}{\varepsilon} \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx} \right|. \quad (6.2.6)$$



Slika 6.2.2 Definicija Lyapunov-ljevog eksponenta

Ukoliko je $\lambda > 0$ onda je razdvajanje eksponencijalno, postoji velika osetljivost sistema na malu promenu početnih uslova, što u ponašanju sistema detektuje pojavu haosa.

U više dimenzionalnom slučaju istu proceduru potrebno je sprovesti za svaki od nezavisnih (ortogonalnih) pravaca.

$$\lambda_i(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |a_i(x_0, t)| \quad i = 1 \dots m$$

gde su $a_i(x_0, t)$ sopstvene vrednosti matrice $A(x_0) = D_x F(x_0)$ koja definiše prostorne izvode.

Ako je x_0 fiksna tačka Lyapunov-ljevi eksponenti su logaritmi modula sopstvenih vrednosti matrice

$$D_x F(x_0) \text{ [50]}. \text{ Na primer: } D_x F(x_0) = \begin{bmatrix} \mu_1 & \\ & \mu_2 \end{bmatrix} \text{ sa } \mu_1 > \mu_2 \text{ sledi da su Lyapunov-ljevi eksponenti:}$$

$$\lambda_1 = \ln |\mu_1| \quad \text{i} \quad \lambda_2 = \ln |\mu_2|.$$

Pri tome se λ_i izražavaju u silaznom nizu: $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$, i ima ih onoliko koliko ima dimenzija u faznom prostoru i sačinjavaju Lyapunov-ljev spektar dinamičkog sistema.

Brzinu povećanja infinitesimalno malog rastojanja između dve bliske trajektorije kontroliše najveći Lyapunov-ljev eksponent λ_1 . Kod disipativnih dinamičkih sistema mora biti zadovoljen uslov:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m < 0$$

mada neki od λ_i mogu biti pozitivni. Ukoliko je makar jedan od λ_i eksponenata pozitivan sistem je haotičan.

Lyapunov-ljev eksponent je mera gubitka informacije o sistemu tokom iteracije i tako je direktno povezan sa entropijom sistema.

Kod prostog nelinearnog oscilatora Lyapunov-ljevi eksponent s obzirom na izvedeni zakon kretanja u prvoj asimptotskoj aproksimaciji (3.1.17) su:

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[x_1^2(t) + \frac{1}{\omega_1^2} \dot{x}_1^2(t) \right] = -\delta_1 < 0$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[x_1^2(t) + \frac{\omega_{N1}^2}{\omega_1^2} x_1^4(t) + \frac{1}{\omega_1^2} \dot{x}_1^2(t) \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[\frac{E_{sist}}{2m_1 \omega_1^2} \right] = -\delta_1 < 0 \quad (6.2.7)$$

Kako je $\lambda_1 < 0$ onda ne postoji eksponencijalno razdvajanje faznih krivih, što daje mogućnost za zaključak da se u ponašanju sistema ne očekuje pojava haosa, da je sistem strukturno stabilan.

U hibridnom sistemu sastavljenom od linearnog i nelinearnog oscilatora spregnutih statičkom vezom sa slike 3.1 izvedene su prve aproksimacije rešenja u obliku (3.1.39), kako prvi izvodi po vremenu rešenja imaju oblik:

$$\dot{x}_1(t) = -\delta e^{-\delta t} (R_1(t) \cos \Phi_1(t) + R_2(t) \cos \Phi_2(t)) - e^{-\delta t} (R_1(t) p_1 \sin \Phi_1(t) + R_2(t) p_2 \sin \Phi_2(t))$$

$$\dot{x}_2(t) = -\delta e^{-\delta t} (R_1(t) \cos \Phi_1(t) - R_2(t) \cos \Phi_2(t)) - e^{-\delta t} (R_1(t) p_1 \sin \Phi_1(t) - R_2(t) p_2 \sin \Phi_2(t))$$

to izrazi za kinetičku (3.1.29a), potencijalnu energiju (3.1.29b) i energiju sprezanja (3.1.29c), kao i funkcija rasipanja takvog homogenog sistema (3.1.29d) dobijaju oblik:

$$E_k = m e^{-2\delta t} \left[R_{01}^2 (\delta \cos \Phi_1(t) + p_1 \sin \Phi_1(t))^2 + R_{02}^2 (\delta \cos \Phi_2(t) + p_2 \sin \Phi_2(t))^2 \right] \quad (6.2.8)$$

$$E_p = c_1 e^{-2\delta t} \left[R_{01}^2(t) \cos^2 \Phi_1(t) + R_{02}^2(t) \cos^2 \Phi_2(t) \right] + 2c e^{-2\delta t} R_{02}^2(t) \cos^2 \Phi_2(t) + \frac{\tilde{c}_1 e^{-4\delta t}}{4} \left[R_{01}(t) \cos \Phi_1(t) + R_{02}(t) \cos \Phi_2(t) \right]^4 \quad (6.2.9)$$

$$E_{p(1,2)} = 2c e^{-2\delta t} (R_{02})^2 \cos^2 \Phi_2(t) \quad (6.2.10)$$

$$\Phi = b_1 e^{-2\delta t} \left[R_{01}^2 (\delta \cos \Phi_1(t) + p_1 \sin \Phi_1(t))^2 + R_{02}^2 (\delta \cos \Phi_2(t) + p_2 \sin \Phi_2(t))^2 \right] \quad (6.2.11)$$

gde su faze $\Phi_i(t)$, $i = 1, 2$ date izrazima:

$$\Phi_1(t) = p_1 t - \frac{3}{32 \delta p_1} \tilde{\omega}_{N1}^2 [R_{01}^2 + 2R_{02}^2] e^{-2\delta t} + \alpha_{01} \quad (6.2.12a)$$

$$\Phi_2(t) = \tilde{p}_2 t - \frac{3}{32 \delta \tilde{p}_2} \tilde{\omega}_{N1}^2 [2R_{01}^2 + R_{02}^2] e^{-2\delta t} + \alpha_{02} \quad (6.2.12b)$$

Lyapunov-ljevi eksponenti podsistema nelinearnog $\tilde{\lambda}_1$ i linearnog λ_2 su:

$$\tilde{\lambda}_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[x_1^2(t) + \frac{\tilde{\omega}_{N1}^2}{\omega_1^2} x_1^4(t) + \frac{1}{\omega_1^2} \dot{x}_1^2(t) \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[\frac{E_{podsist(1)}}{2m_1 \omega_1^2} \right] = -\delta < 0 \quad (6.2.13a)$$

$$\lambda_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[x_2^2(t) + \frac{1}{\omega_2^2} \dot{x}_2^2(t) \right] = -\delta < 0 \quad (6.2.13b)$$

Dok potencijalna energija sistema i podsistema kao i funkcija rasipanja sistema ostaju istih vrednosti za ekvivalentan hibridni sistem sprege linearnog i nelinearnog oscilatora samo sa dinamičkom spregom dotle, kao što se vidi, kinetička energija menja vrednost, i to kako kinetička energija sprezanja (3.2.2) usled prisustva kotrljajnog elementa sprezanja, tako i kinetička energija celog sistema (3.2.5), što je i razumljivo. S obzirom na izvedene zakone oscilovanja (3.2.14) i oblik pretpostavljenog rešenja (3.2.11) prvi izvodi po vremenu zakona kretanja biće:

$$\dot{x}_1(t) = -\hat{\delta}_1 K_{21}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_1 t} R_{01} \cos \Phi_1(t) - K_{21}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_1 t} R_{01} \Omega_1 \sin \Phi_1(t) - \hat{\delta}_2 K_{21}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_2 t} R_{02} \cos \Phi_2(t) - K_{21}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_2 t} R_{02} \Omega_2 \sin \Phi_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\hat{\delta}_1 K_{22}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_1 t} R_{01} \cos \Phi_1(t) - K_{22}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_1 t} R_{01} \Omega_1 \sin \Phi_1(t) - \hat{\delta}_2 K_{22}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_2 t} R_{02} \cos \Phi_2(t) - K_{22}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_2 t} R_{02} \Omega_2 \sin \Phi_2(t),$$

gde su $\Phi_i(t)$, $i = 1, 2$ pune faze oscilovanja u obliku:

$$\Phi_1(t) = \hat{p}_1 t - \frac{3(K_{21}^{(2)} + \kappa_2 K_{21}^{(2)})}{16\hat{p}_1 \tilde{\Delta}_{12}} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ \frac{e^{-2\hat{\delta}_1 t}}{2\hat{\delta}_1} (K_{21}^{(1)})^3 [R_{01}]^2 + \frac{e^{-2\hat{\delta}_2 t}}{\hat{\delta}_2} K_{21}^{(1)} [K_{21}^{(2)}]^2 [R_{02}]^2 \right\} + \alpha_{01}$$

$$\Phi_2(t) = \hat{p}_2 t - \frac{3(K_{22}^{(1)} + \kappa_2 K_{21}^{(1)})}{16\hat{p}_2 \tilde{\Delta}_{21}} \tilde{\omega}_{N1}^2 \left\{ \frac{e^{-2\hat{\delta}_1 t}}{\hat{\delta}_1} (K_{21}^{(1)})^2 K_{21}^{(2)} [R_{01}]^2 + \frac{e^{-2\hat{\delta}_2 t}}{2\hat{\delta}_2} [K_{21}^{(2)}]^3 [R_{02}]^2 \right\} + \alpha_{02}$$

Kinetička energija čiste interakcije oscilatora, data izrazom (3.2.2a), sada ima oblik:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{k(1,2)} = & \hat{a}_{12} \left(\hat{\delta}_1 K_{21}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_1 t} R_{01} \cos \Phi_1(t) + K_{21}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_1 t} R_{01} \Omega_1 \sin \Phi_1(t) + \hat{\delta}_2 K_{21}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_2 t} R_{02} \cos \Phi_2(t) + K_{21}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_2 t} R_{02} \Omega_2 \sin \Phi_2(t) \right) \\ & \cdot \left(\hat{\delta}_1 K_{22}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_1 t} R_{01} \cos \Phi_1(t) + K_{22}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_1 t} R_{01} \Omega_1 \sin \Phi_1(t) + \hat{\delta}_2 K_{22}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_2 t} R_{02} \cos \Phi_2(t) + K_{22}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_2 t} R_{02} \Omega_2 \sin \Phi_2(t) \right) \end{aligned} \quad (6.2.14a)$$

a kinetičke energije interakcije dinamičke veze sa levim odnosno desnim oscilatorom (3.2.5b) sada je oblika:

$$\begin{aligned} E_{k(1)} = & \frac{1}{2} (a_{11} + \hat{a}_{11}) \left(\hat{\delta}_1 K_{21}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_1 t} R_{01} \cos \Phi_1(t) + K_{21}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_1 t} R_{01} \Omega_1 \sin \Phi_1(t) + \hat{\delta}_2 K_{21}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_2 t} R_{02} \cos \Phi_2(t) + K_{21}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_2 t} R_{02} \Omega_2 \sin \Phi_2(t) \right)^2 \\ E_{k(2)} = & \frac{1}{2} (a_{22} + \hat{a}_{22}) \left(\hat{\delta}_1 K_{22}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_1 t} R_{01} \cos \Phi_1(t) + K_{22}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_1 t} R_{01} \Omega_1 \sin \Phi_1(t) + \hat{\delta}_2 K_{22}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_2 t} R_{02} \cos \Phi_2(t) + K_{22}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_2 t} R_{02} \Omega_2 \sin \Phi_2(t) \right)^2 \end{aligned} \quad (6.2.14b)$$

Ovi izrazi mogli bi poslužiti za prikaz energijske analize na dijagramima kinetičke i potencijalne energije hibridnih sistema i podsistema spregnutih dinamičkim vezama.

6.2.2. Prenos energije u hibridnom sistemu sprege linearnog i nelinearnog oscilatora naslednom vezom

Izrazi za energije podsistema i podprocesa hibridnog sistema sa naslednom spregom imajući u vidu rešenja za amplitude i fazna kašnjenja u prvoj aproksimaciji (3.3.13), mogu da se podele na sledeći način:

- Energije podsistema u linearizovanom hibridnom sistemu:

$$\tilde{E}_1(t) = \frac{1}{2} \hat{p}_1^2 e^{-2\hat{\delta}_1 t} R_{01}^2 \cos^2(\hat{p}_1 t + \alpha_{01}) + e^{-2\hat{\delta}_1 t} R_{01}^2 \left[\hat{\delta}_1 \cos(\hat{p}_1 t + \alpha_{01}) + \hat{p}_1 \sin(\hat{p}_1 t + \alpha_{01}) \right]^2 \quad (6.2.15a)$$

$$\tilde{E}_2(t) = \frac{1}{2} \hat{p}_2^2 e^{-2\hat{\delta}_2 t} R_{02}^2 \cos^2(\hat{p}_2 t + \alpha_{02}) + e^{-2\hat{\delta}_2 t} R_{02}^2 \left[\hat{\delta}_2 \cos(\hat{p}_2 t + \alpha_{02}) + \hat{p}_2 \sin(\hat{p}_2 t + \alpha_{02}) \right]^2 \quad (6.2.15b)$$

- Energije podsistema:

Kinetička, potencijalna energija i funkcija rasipanja za linearni oscilator imaju oblik:

$$\begin{aligned} E_{k(2)}(t) = & \frac{1}{2} m_2 \left\{ \left[\hat{\delta}_1 e^{-\hat{\delta}_1 t} K_{22}^{(1)} R_{01} \cos(\hat{p}_1 t + \alpha_{01}) + \hat{\delta}_2 e^{-\hat{\delta}_2 t} K_{22}^{(2)} R_{02} \cos(\hat{p}_2 t + \alpha_{02}) \right] - \right. \\ & \left. - \left[\hat{p}_1 e^{-\hat{\delta}_1 t} K_{22}^{(1)} R_{01} \sin(\hat{p}_1 t + \alpha_{01}) + \hat{p}_2 e^{-\hat{\delta}_2 t} K_{22}^{(2)} R_{02} \sin(\hat{p}_2 t + \alpha_{02}) \right] \right\}^2 \end{aligned} \quad (6.2.16a)$$

$$E_{p(2)}(t) = \frac{1}{2} c_2 \left[K_{22}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_1 t} R_{01} \cos(\hat{p}_1 t + \alpha_{01}) + K_{22}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_2 t} R_{02} \cos(\hat{p}_2 t + \alpha_{02}) \right]^2 \quad (6.2.16b)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{(2)}(t) = & \frac{1}{2} b_2 \left\{ \left[\hat{\delta}_1 e^{-\hat{\delta}_1 t} K_{22}^{(1)} R_{01} \cos(\hat{p}_1 t + \alpha_{01}) + \hat{\delta}_2 e^{-\hat{\delta}_2 t} K_{22}^{(2)} R_{02} \cos(\hat{p}_2 t + \alpha_{02}) \right] - \right. \\ & \left. - \left[\hat{p}_1 e^{-\hat{\delta}_1 t} K_{22}^{(1)} R_{01} \sin(\hat{p}_1 t + \alpha_{01}) + \hat{p}_2 e^{-\hat{\delta}_2 t} K_{22}^{(2)} R_{02} \sin(\hat{p}_2 t + \alpha_{02}) \right] \right\}^2 \end{aligned} \quad (6.2.16c)$$

a za nelinearni oscilator oblik:

$$\begin{aligned} E_{k(1)}(t) = & \frac{1}{2} m_1 \left\{ \left[\hat{\delta}_1 e^{-\hat{\delta}_1 t} K_{21}^{(1)} R_{01} \cos(\hat{p}_1 t + \alpha_{01}) + \hat{\delta}_2 e^{-\hat{\delta}_2 t} K_{21}^{(2)} R_{02} \cos(\hat{p}_2 t + \alpha_{02}) \right] - \right. \\ & \left. - \left[\hat{p}_1 e^{-\hat{\delta}_1 t} K_{21}^{(1)} R_{01} \sin(\hat{p}_1 t + \alpha_{01}) + \hat{p}_2 e^{-\hat{\delta}_2 t} K_{21}^{(2)} R_{02} \sin(\hat{p}_2 t + \alpha_{02}) \right] \right\}^2 \end{aligned} \quad (6.2.17a)$$

$$E_{p(1)}(t) = \frac{1}{2}c_1 \left[K_{21}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_1 t} R_{01} \cos(\hat{p}_1 t + \alpha_{01}) + K_{21}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_2 t} R_{02} \cos(\hat{p}_2 t + \alpha_{02}) \right]^2 + \frac{1}{4} \tilde{c}_1 \left[K_{21}^{(1)} e^{-\hat{\delta}_1 t} R_{01} \cos(\hat{p}_1 t + \alpha_{01}) + K_{21}^{(2)} e^{-\hat{\delta}_2 t} R_{02} \cos(\hat{p}_2 t + \alpha_{02}) \right]^4 \quad (6.2.17b)$$

$$\Phi_{(1)}(t) = \frac{1}{2} b_1 \left\{ \left[\hat{\delta}_1 e^{-\hat{\delta}_1 t} K_{21}^{(1)} R_{01} \cos(\hat{p}_1 t + \alpha_{01}) + \hat{\delta}_2 e^{-\hat{\delta}_2 t} K_{21}^{(2)} R_{02} \cos(\hat{p}_2 t + \alpha_{02}) \right] - \left[\hat{p}_1 e^{-\hat{\delta}_1 t} K_{21}^{(1)} R_{01} \sin(\hat{p}_1 t + \alpha_{01}) + \hat{p}_2 e^{-\hat{\delta}_2 t} K_{21}^{(2)} R_{02} \sin(\hat{p}_2 t + \alpha_{02}) \right]^2 \right\} \quad (6.2.17c)$$

• Energija svakog od harmonika (3.3.14) u prvoj aproksimaciji rešenja:

$$\tilde{E}_1(t) = \frac{1}{2} \hat{p}_1^2 e^{-2(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t} R_{01}^2 \cos^2 \Phi_1(t) + e^{-2(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t} R_{01}^2 \left[\hat{\delta}_1 \cos \Phi_1(t) + \hat{p}_1 \sin \Phi_1(t) \right]^2 \quad (6.2.18a)$$

$$\tilde{E}_2(t) = \frac{1}{2} \hat{p}_2^2 e^{-2(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t} R_{02}^2 \cos^2 \Phi_2(t) + e^{-2(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t} R_{02}^2 \left[\hat{\delta}_2 \cos \Phi_2(t) + \hat{p}_2 \sin \Phi_2(t) \right]^2 \quad (6.2.18b)$$

Energije linearnog oscilatora u prvoj aproksimaciji rešenja:

$$E_{k(2)}(t) = \frac{1}{2} m_2 \left\{ \left[\hat{\delta}_1 e^{-(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t} K_{22}^{(1)} R_{01} \cos \Phi_1(t) + \hat{\delta}_2 e^{-(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t} K_{22}^{(2)} R_{02} \cos \Phi_2(t) \right] - \left[\hat{p}_1 e^{-(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t} K_{22}^{(1)} R_{01} \sin \Phi_1(t) + \hat{p}_2 e^{-(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t} K_{22}^{(2)} R_{02} \sin \Phi_2(t) \right]^2 \right\} \quad (6.2.19a)$$

$$E_{p(2)}(t) = \frac{1}{2} c_2 x_2^2 = \frac{1}{2} c_2 \left[e^{-(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t} K_{22}^{(1)} R_{01} \cos \Phi_1(t) + e^{-(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t} K_{22}^{(2)} R_{02} \cos \Phi_2(t) \right]^2 \quad (6.2.19b)$$

$$\Phi_{(2)}(t) = \frac{1}{2} b_2 \left\{ \left[\hat{\delta}_1 e^{-(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t} K_{22}^{(1)} R_{01} \cos \Phi_1(t) + \hat{\delta}_2 e^{-(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t} K_{22}^{(2)} R_{02} \cos \Phi_2(t) \right] - \left[\hat{p}_1 e^{-(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t} K_{22}^{(1)} R_{01} \sin \Phi_1(t) + \hat{p}_2 e^{-(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t} K_{22}^{(2)} R_{02} \sin \Phi_2(t) \right]^2 \right\} \quad (6.2.19c)$$

Energije nelinearnog oscilatora u prvoj aproksimaciji rešenja:

$$E_{k(1)} = \frac{1}{2} m_1 \left\{ \left[\hat{\delta}_1 e^{-(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t} K_{21}^{(1)} R_{01} \cos \Phi_1(t) + \hat{\delta}_2 e^{-(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t} K_{21}^{(2)} R_{02} \cos \Phi_2(t) \right] - \left[\hat{p}_1 e^{-(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t} K_{21}^{(1)} R_{01} \sin \Phi_1(t) + \hat{p}_2 e^{-(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t} K_{21}^{(2)} R_{02} \sin \Phi_2(t) \right]^2 \right\} \quad (6.2.20a)$$

$$E_{p(1)}(t) = \frac{1}{2} c_1 \left[e^{-(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t} K_{21}^{(1)} R_{01} \cos \Phi_1(t) + e^{-(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t} K_{21}^{(2)} R_{02} \cos \Phi_2(t) \right]^2 + \frac{1}{4} \tilde{c}_1 \left[e^{-(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t} K_{21}^{(1)} R_{01} \cos \Phi_1(t) + e^{-(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t} K_{21}^{(2)} R_{02} \cos \Phi_2(t) \right]^4 \quad (6.2.20b)$$

$$\Phi_{(1)}(t) = \frac{1}{2} b_1 \left\{ \left[\hat{\delta}_1 e^{-(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t} K_{21}^{(1)} R_{01} \cos \Phi_1(t) + \hat{\delta}_2 e^{-(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t} K_{21}^{(2)} R_{02} \cos \Phi_2(t) \right] - \left[\hat{p}_1 e^{-(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1)t} K_{21}^{(1)} R_{01} \sin \Phi_1(t) + \hat{p}_2 e^{-(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2)t} K_{21}^{(2)} R_{02} \sin \Phi_2(t) \right]^2 \right\} \quad (6.2.20c)$$

gde su faze $\Phi_i(t)$, $i=1,2$ date izrazima (3.3.13a) i (3.3.13b)

S obzirom na izvedene izraze za zakone kretanja masa hibridnog sistema sprege linearnog i nelinearnog oscilatora naslednim elementom (3.3.13) i (3.3.14) izrazi za Lyapunov-ljeve eksponente podsistema bili bi:

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[x_1^2(t) + \frac{1}{\hat{p}_1^2} \dot{x}_1^2(t) \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[\frac{E_{podsist(I),linear}}{2m\hat{p}_1^2} \right] = -(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1) < 0 \quad (6.2.21a)$$

$$\lambda_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[x_2^2(t) + \frac{1}{\hat{p}_2^2} \dot{x}_2^2(t) \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[\frac{E_{podsist(II),linear}}{2m\hat{p}_2^2} \right] = -(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2) < 0 \quad (6.2.21b)$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[x_1^2(t) + \frac{\tilde{\omega}_{N1}^2}{\hat{p}_1^2} x_1^4(t) + \frac{1}{\hat{p}_1^2} \dot{x}_1^2(t) \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[\frac{E_{podsist(I),nonlinear}}{2m_1 \hat{p}_1^2} \right] = -(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1) < 0 \quad (6.2.21c)$$

gde su $\hat{\delta}_i$ realni delovi karakterističnih brojeva $\lambda_{1,2}$ i $\lambda_{3,4}$ oblika (3.2.10), a $\tilde{\delta}_i$ su date izrazima (3.3.12a) i (3.3.12b). Kako su oscilacije ovog hibridnog sistema dvofrekventni procesi sa po dva različita moda (3.3.14) čije faze su međusobno spregnute i zavise od amplitude oscilovanja oba harmonika to ovde može da se govori i o Lyapunov-ljevim eksponentima podprocesa:

$$\lambda_{1T} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[T_1^2(t) + \frac{1}{\hat{p}_1^2} \dot{T}_1^2(t) \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[\frac{E_{\text{mode}(1)}}{2m_1 \hat{p}_1^2} \right] = -(\hat{\delta}_1 + \tilde{\delta}_1) < 0 \quad (6.2.22a)$$

$$\lambda_{2T} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[T_2^2(t) + \frac{1}{\hat{p}_2^2} \dot{T}_2^2(t) \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left[\frac{E_{\text{mode}(2)}}{2m_2 \hat{p}_2^2} \right] = -(\hat{\delta}_2 + \tilde{\delta}_2) < 0 \quad (6.2.22b)$$

koji imaju iste vrednosti kao i Lyapunov-ljevi eksponenti podistema i mogu se smatrati merom integriteta hibridnog sistema.

6.2.3. Prenos energije u hibridnom sistemu ploča spregnutih visko-elastičnim nelinearnim slojem

Model sistema dve kružne ploče je svrsishodno koristiti pri razmatranju prenosa energije između ploča spregnutih slojem visko-elastičnih nelinearnih kontinualno raspodeljenih elemenata. Koristeći izvedene parcijalne diferencijalne jednačine u opštem obliku, najpre je potrebno ispisati izraze za kinetičku i potencijalnu energiju ploča, energiju sprezanja ploča, potencijalnu energiju nelinearnog elastičnog međusloja, kao i funkciju rasipanja visko-elastičnog sloja.

Kinetičku energiju kružne ploče može da se napiše u obliku, [238]:

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2} \iiint_{V_i} \rho_i \left(\frac{\partial w_i(r, \varphi, t)}{\partial t} \right)^2 dz dA_i,$$

S obzirom na (3.4.5) izraz za $w_i(r, \varphi, t)$ oblik transverzalnog pomeranje tačaka srednje ravni i -te ploče sistema ploča, biće:

$$E_{k(i)} = \frac{\rho_i h_i}{2} \iint_{(A)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{(i)nm}(r, \varphi) \dot{T}_{(i)nm}(t) \right)^2 r d\varphi dr = \frac{\rho_i h_i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \dot{T}_{(i)nm}(t) \dot{T}_{(i)sr}(t) \iint_{(A)} W_{(i)nm}(r, \varphi) W_{(i)sr}(r, \varphi) r d\varphi dr \quad (6.2.23a)$$

odnosno može se napisati da je:

$$E_{k(i)} = \frac{\rho_i h_i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [\dot{T}_{(i)nm}(t)]^2 v_{(i)nm}(r, \varphi), \quad i = 1, 2 \quad (6.2.23b)$$

gde se uvodi oznaka $v_{(i)nm}$, koristeći činjenicu da sopstvene amplitudne funkcije zadovoljavaju uslove ortogonalnosti (3.4.7), u obliku:

$$v_{(i)nm}(r, \varphi) = \iint_A [W_{(i)nm}(r, \varphi)]^2 r dr d\varphi, \quad i = 1, 2. \quad (6.2.24)$$

Kinetička energija ploče može se predstaviti kao linearnu kombinaciju kinetičkih energija svakog od nm -modova $E_{k(i)nm}$, po ideji iz rada [66] o transferu energije u sistemu pravougaonih ploča:

$$E_{k(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_{k(i)nm}, \quad (6.2.25)$$

gde su komponentne kinetičke energije $E_{k(i)nm}$, $i=1,2$ koje pripadaju odgovarajućem nm -modu za svako $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$, $m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$, izražene preko prvih izvoda po vremenu vremenskih funkcija $\dot{T}_{(i)nm}(t)$ istog nm -moda:

$$E_{k(i)nm} = \frac{\rho_i h_i}{2} [\dot{T}_{(i)nm}(t)]^2 v_{(i)nm}(r, \varphi) = v_{(i)nm} \tilde{E}_{k(i)nm}, \quad i = 1, 2 \quad (6.2.26)$$

gde su sa $\tilde{E}_{k(i)nm}$, $i=1,2$ označene redukovane komponentne kinetičke energije ploča odgovarajućeg nm -moda:

$$\tilde{E}_{k(i)nm} = \frac{E_{k(i)nm}}{v_{(i)nm}(r, \varphi)} = \frac{\rho_i h_i}{2} [\dot{\Gamma}_{(i)nm}(t)]^2, \quad i=1,2 \quad (6.2.26a)$$

Potencijalna energija ploče je jednaka energiji deformacije elastične ploče pri izvođenju iz nedeformisanog stanja pri oscilovanju i može se napisati kao, [238]:

$$E_p = A_d = \frac{1}{2} \iiint_V [\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{xz} \tau_{xz} + \gamma_{yz} \tau_{yz}] dV, \quad (6.2.27)$$

gde su $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ komponente matrice tenzora specifične deformacije dilatacije i klizanja u odgovarajućim pravcima i $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ komponente matrice tenzora napona: normalni i tangencijalni naponi u odgovarajućim pravcima. Tangencijalne komponente napona τ_{xz} i τ_{yz} su male, kao i komponente klizanja γ_{xz} i γ_{yz} i mogu biti zanemarene u poređenju sa ostalim članovima u izrazu za deformacioni rad tanke elastične ploče. Deformacioni rad elastične ploče može da se izrazi kao:

$$E_p = A_d \approx \frac{1}{2} \iiint_V [\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy}] dV. \quad (6.2.28)$$

Kako se dilatacije ε_x u pravcu ose x i ε_y u pravcu ose y , normalni naponi σ_x u pravcu x ose i σ_y u pravcu y ose i klizanje γ_{xy} i tangencijalni napon $\tau_{xy} = \tau_z$ mogu izraziti u funkciji transverzalnih pomeranja tačaka srednje ravni ploče $w(x, y, t)$ za Descartes-ov koordinatni sistem u obliku, [238]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \\ \sigma_x &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{R_1} + \mu \frac{1}{R_2} \right) = \frac{-Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{R_2} + \mu \frac{1}{R_1} \right) = \frac{-Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} \right), \quad \text{i} \quad \sigma_z = 0 \\ \gamma_{xy} = \gamma_z &= \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = \tau_z = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \text{gde je veza modula klizanja i modula elastičnosti oblika: } G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

to izraz za promenu potencijalne energije elastične ploče pri transverzalnim oscilacijama [66, 238] može da se napiše u obliku:

$$E_p \approx \frac{D}{2} \iint_A \left\{ \left[\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} \right]^2 + \left[\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right]^2 + 2\mu \left[\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} \right] \left[\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right] + 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right]^2 \right\} dA \quad (6.2.29)$$

U polarno cilindričnom koordinatnom sistemu r, φ, z gde su pomeranja tačaka srednje ravni ploče funkcija polarnih koordinata i vremena $w(r, \varphi, t)$, koje je pogodno koristiti ako je reč o kružnim polčama. Veza polarnih koordinata sa Descartes-ovim koordinatama data je izrazima (3.4.21). Pomoću ovih izraza dobija se nagib elastične površine ploče u x i y pravcu (3.4.22), dok su potrebni izvodi drugog reda dati sa

(3.4.23a,b,c), tako da izraz za deformacioni rad elastične ploče, izražen u polarno cilindričnom sistemu koordinata, može da se napiše u obliku:

$$E_p = A_d = \frac{1}{2} \iint_{(A)} D \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} r dr d\varphi \quad (6.2.30)$$

Ako se u izraz (6.2.30) ubaci pretpostavljeno rešenje (3.4.5) sledi:

$$E_p = A_d = \frac{D}{2} \iint_{(A)} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Delta W_{(i)nm}(r, \varphi) T_{(i)nm}(t) \right)^2 - \right. \\ \left. - 2(1-\mu) \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial r} T_{(i)nm}(t) + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2 W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} T_{(i)nm}(t) \right) \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2 W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial r^2} T_{(i)nm}(t) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{r} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2 W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} T_{(i)nm}(t) - \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial \varphi} T_{(i)nm}(t) \right)^2 \right] \right\} r dr d\varphi$$

Posle parcijalne integracije po r, φ i operacije kvadriranja i množenja dobija se sledeće:

$$E_p = A_d = \frac{D}{2} \sum_n \sum_m \sum_s \sum_r T_{(i)nm}(t) T_{(i)sr}(t) \iint_{(A)} (\Delta W_{(i)nm}(r, \varphi)) (\Delta W_{(i)sr}(r, \varphi)) dA - \\ - D(1-\mu) \sum_n \sum_m \sum_s \sum_r T_{(i)nm}(t) T_{(i)sr}(t) \iint_{(A)} \frac{1}{r} \frac{\partial W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial r} \frac{\partial^2 W_{(i)sr}(r, \varphi)}{\partial r^2} dA - \\ - D(1-\mu) \sum_n \sum_m \sum_s \sum_r T_{(i)nm}(t) T_{(i)sr}(t) \iint_{(A)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 W_{(i)sr}(r, \varphi)}{\partial r^2} dA + \\ + D(1-\mu) \sum_n \sum_m \sum_s \sum_r T_{(i)nm}(t) T_{(i)sr}(t) \iint_{(A)} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial^2 W_{(i)sr}(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} dA - \\ - 2D(1-\mu) \sum_n \sum_m \sum_s \sum_r T_{(i)nm}(t) T_{(i)sr}(t) \iint_{(A)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial W_{(i)sr}(r, \varphi)}{\partial \varphi} dA + \\ + D(1-\mu) \sum_n \sum_m \sum_s \sum_r T_{(i)nm}(t) T_{(i)sr}(t) \iint_{(A)} \frac{1}{r^3} \frac{\partial W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial W_{(i)sr}(r, \varphi)}{\partial \varphi} dA$$

Sada izraz za promenu potencijalne energije elastične kružne ploče, po ideji iz rada [66] primenjenoj na pravougaone ploče, može da se napiše u obliku:

$$E_p^{(i)} \approx \frac{D_i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} C_{nm, sr(i)} T_{(i)nm}(t) T_{(i)sr}(t), \quad i = 1, 2 \quad (6.2.31)$$

gde se sa $C_{nm, sr(i)}$ označava:

$$C_{nm, sr(i)} = \iint_{(A)} (\Delta W_{(i)nm}(r, \varphi)) (\Delta W_{(i)sr}(r, \varphi)) dA - 2(1-\mu) \iint_{(A)} \frac{1}{r} \frac{\partial W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial r} \frac{\partial^2 W_{(i)sr}(r, \varphi)}{\partial r^2} dA \\ - 2(1-\mu) \iint_{(A)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 W_{(i)sr}(r, \varphi)}{\partial r^2} dA + 2(1-\mu) \iint_{(A)} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial^2 W_{(i)sr}(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} dA - \\ - 4(1-\mu) \iint_{(A)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial W_{(i)sr}(r, \varphi)}{\partial \varphi} dA + 2(1-\mu) \iint_{(A)} \frac{1}{r^3} \frac{\partial W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial W_{(i)sr}(r, \varphi)}{\partial \varphi} dA$$

ili drugačije napisano u obliku:

$$C_{nm, sr(i)} = \iint_{(A)} \left\{ (\Delta W_{(i)nm}(r, \varphi)) (\Delta W_{(i)sr}(r, \varphi)) - 2(1-\mu) \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\partial^2 W_{(i)sr}(r, \varphi)}{\partial r^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\partial^2 W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial W_{(i)nm}(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial^2 W_{(i)sr}(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial W_{(i)sr}(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right) \right] \right\} dA$$

S obzirom na svojstva dvostrukog Laplace-ovog operatora u polarno cilindričnom koordinatnom sistemu i na to da sopstvene amplitudne funkcije zadovoljavaju date granične uslove to se može pisati da je:

$$C_{nm, sr(i)} = \iint_{(A)} W_{(i)sr}(r, \varphi) \Delta \Delta W_{(i)nm}(r, \varphi) dA = k_{nm}^4 \iint_{(A)} W_{(i)sr}(r, \varphi) W_{(i)nm}(r, \varphi) dA \quad (6.2.32)$$

i ako se uzmu u obzir uslovi ortogonalnosti sopstvenih amplitudnih funkcija (3.4.7), dobija se:

$$C_{nn,sr(i)} = k_{nm}^4 \begin{cases} 0 & sr \neq nm \\ \iint_{(A)} [W_{(i)sr}(r, \varphi)]^2 dA & sr = nm \end{cases} \quad (6.2.33)$$

Potencijalne energije razdvojenih ploča mogu da se izraze u obliku:

$$E_p^{(i)} \approx \frac{D_i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k_{nm}^4 v_{(i)nm} [T_{(i)nm}(t)]^2 \quad (6.2.34)$$

ili u obliku:

$$E_p^{(i)} \approx \frac{\rho_i h_i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{(i)nm}^2 v_{(i)nm} [T_{(i)nm}(t)]^2 \quad (6.2.35)$$

gde su kvadrati sopstvenih kružnih frekvencija pojedinih ploča oblika: $\omega_{(i)nm}^2 = \frac{D_i}{\rho_i h_i} k_{nm}^4$, $i=1,2$

Dakle, potencijalna energija ploče može se izraziti u obliku linearne kombinacije promena potencijalnih energija svakog od mn modova $E_{p,nm}^{(i)}$ za svako $n=0,1,2,\dots,\infty, m=1,2,3,4,\dots,\infty$ u obliku:

$$E_p^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_{pnm}^{(i)}, i=1,2 \quad (6.2.36)$$

gde su komponentne potencijalne energije $E_{pnm}^{(i)}$, $i=1,2$, koje pripadaju odgovarajućem nm -modu za svako $n=0,1,2,\dots,\infty, m=1,2,3,4,\dots,\infty$ izražene preko vremenskih funkcija $T_{(i)nm}(t)$ istog nm -moda u obliku:

$$E_{pnm}^{(i)} \approx \frac{\rho_i h_i}{2} \omega_{(i)nm}^2 v_{(i)nm} [T_{(i)nm}(t)]^2 = v_{(i)nm} \tilde{E}_{pnm}^{(i)} \quad (6.2.37)$$

gde su sa $\tilde{E}_{pnm}^{(i)}$, $i=1,2$ označene redukovane komponentne potencijalne energije ploča odgovarajućeg nm -moda:

$$\tilde{E}_{pnm}^{(i)} = \frac{\rho_i h_i}{2} \omega_{(i)nm}^2 [T_{(i)nm}(t)]^2 = \frac{E_{pnm}^{(i)}}{v_{(i)nm}} \quad (6.2.38)$$

Energija sprezanja ploča sadrži potencijalnu energiju visko-elastičnog nelinearnog sloja. Pretpostavka je da je sloj elastičnih opruga krutosti c_1 prednapregnut naprezanjem u statičkom položaju ravnoteže. Ako se elastični deo visko-elastičnog nelinearnog sloja smatra jednoliko raspodeljenim elastičnim slojem između ploča sa zanemarljivom masom i svojstvima inercije može se smatrati da je njegova kinetička energija zanemarljiva i promenu potencijalne energije u tom sloju može se napisati u obliku deformacione energije tog elastičnog sloja pri transversalnim oscilacijama ploča, pa sledi izraz za promenu potencijalne energije visko-elastičnog nelinearnog sloja u obliku:

$$E_{pnm(1,2)sloja} = \frac{c}{2} \iint_A (w_2 - w_1)^2 dA + \frac{\beta}{4} \iint_A (w_2 - w_1)^4 dA + \frac{1}{2} c_1 \iint_A (w_2 - w_1)^2 dA \quad (6.2.39)$$

Sa tri dela, dva koji se odnose na elastični deo sloja, i to jedan na linearni deo elastičnosti opruge krutosti c i drugi koji se odnosi na nelinearni deo krutosti β , kao i treći član koji se odnosi na potencijalnu energiju opruga krutosti c_1 . Ako se u izraz (6.2.39) ubaci pretpostavljeno rešenje (3.4.5), izvrši integraljanje po srednjoj površi ploče, uzmu u obzir uslovi ortogonalnosti sopstvenih amplitudnih funkcija i razdvoje tri dela potencijalne energije međusloja dobiće se sledeće:

$$E_{pnm(1,2)sloja,linear} = \frac{c+c_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} v_{(i)nm} [T_{(2)nm}(t) - T_{(1)nm}(t)]^2 \quad (6.2.40)$$

$$E_{pnm(1,2)sloja, nelinear} = \frac{\beta}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{v}_{(i)nm} [\dot{T}_{(2)nm}(t) - \dot{T}_{(1)nm}(t)]^4, \quad (6.2.41)$$

gde je $\tilde{v}_{(i)nm sr} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [W_{(i)nm}(r, \varphi)]^4 r d\varphi dr$.

Potencijalna energija sprezanja ploča, dakle, može se izraziti u obliku linearne kombinacije promena potencijalnih energija svakog od mn modova $E_{pnm(1,2)sloja}$ za svako $n = 0, 1, 2, \dots, \infty, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$ u obliku:

$$E_{p(1,2)sloja} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_{pnm(1,2)sloja, linear} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_{pnm(1,2)sloja, nelinear}, \quad (6.2.42)$$

gde su komponentne potencijalne energije $E_{pnm(1,2)sloja}$, koje pripadaju odgovarajućem nm -modu za svako $n = 0, 1, 2, \dots, \infty, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$ izražene preko vremenskih funkcija $T_{(i)nm}(t)$ istog nm -moda. Takođe, mogu se i ovde definisati redukovane komponentne potencijalne energije lakog elastičnog sloja

$\tilde{\mathbf{E}}_{pnm(1,2)sloja, linear}$, $\tilde{\mathbf{E}}_{pnm(1,2)sloja, non-linear}$ odgovarajućeg nm -moda u obliku:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{pnm(1,2)sloja, linear} = \frac{1}{2} (c + c_1) [\dot{T}_{(2)nm}(t) - \dot{T}_{(1)nm}(t)]^2 = \frac{\mathbf{E}_{pnm(1,2)sloja, linear}}{v_{(i)nm}} \quad (6.2.43a)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{pnm(1,2)sloja, nelinear} = \frac{1}{4} \beta [\dot{T}_{(2)nm}(t) - \dot{T}_{(1)nm}(t)]^4 = \frac{\mathbf{E}_{pnm(1,2)sloja, nelinear}}{\tilde{v}_{(i)nm}}. \quad (6.2.43b)$$

Tada je:

$$\mathbf{E}_{p(1,2)sloja} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} v_{(i)nm} \tilde{\mathbf{E}}_{pnm(1,2)sloja, linear} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{v}_{(i)nm} \tilde{\mathbf{E}}_{pnm(1,2)sloja, nelinear}. \quad (6.2.44)$$

Rayleigh-eva funkcija rasipanja sloja visko-elastičnih nelinearnih elemenata, koja ima osobinu da je parcijalni izvod te funkcije po generalisanoj relativnoj brzini jednak negativnoj vrednosti generalisane nekonzervativne sile, je funkcija brzina deformacija krajeva visko-elastičnog sloja zanemarljive mase i inercionih svojstava u obliku:

$$\Phi_{(1,2)sloja} = \frac{b}{2} \iint_A (\dot{w}_2 - \dot{w}_1)^2 dA, \quad (6.2.45)$$

odnosno: $\Phi_{(1,2)sloja} = \frac{b}{2} \iint_A \left(\frac{\partial w_2(x, y, t)}{\partial t} - \frac{\partial w_1(x, y, t)}{\partial t} \right)^2 dA$,

Kada se ubaci pretpostavljeno rešenje (3.4.5), uzmu u obzir uslovi ortogonalnosti sopstvenih amplitudnih funkcija i izvrši integraljenje po celoj površini ploča dobija se:

$$\Phi_{(1,2)sloja} = \frac{b}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} v_{(i)nm} [\dot{T}_{(2)nm}(t) - \dot{T}_{(1)nm}(t)]^2, \quad i = 1, 2 \quad (6.2.46)$$

Što se može pisati u obliku: $\Phi_{(1,2)sloja} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} v_{(i)nm} \tilde{\Phi}_{nm(1,2)sloja}$, (6.2.46a)

gde je uvedena redukovana komponentna funkcija rasipanja lakog viskoznog sloja $\tilde{\Phi}_{nm(1,2)sloja}$, odgovarajućeg nm -moda u obliku:

$$\tilde{\Phi}_{nm(1,2)sloja} = \frac{b}{2} [\dot{T}_{(2)nm}(t) - \dot{T}_{(1)nm}(t)]^2 = \frac{\Phi_{nm(1,2)sloja}}{v_{(i)nm}}, \quad (6.2.46b)$$

gde je: $b_{(i)nm} = b \iint_A W_{(i)nm}(x, y) W_{(i)sr}(x, y) dA = \begin{cases} 0 & sr \neq nm \\ bv_{(i)nm} & sr = nm \end{cases}$.

6.2.4. Analiza prenosa energije u hibridnom sistemu dve kružne ploče spregnute slojem visko-elastičnih nelinearnih elemenata

Izrazi (6.2.26a) za redukovanu komponentnu kinetičku energiju ploča odgovarajućeg nm -moda $\tilde{E}_{knm}^{(i)}$, $i=1,2$; zatim (6.2.38) za redukovanu komponentnu potencijalnu energiju ploča odgovarajućeg nm -moda $\tilde{E}_{pnm}^{(i)}$, $i=1,2$; kao i izrazi (6.2.43 a i b) za redukovane komponentne potencijalne energije elastičnog nelinearnog sloja $\tilde{E}_{pnm(1,2)sloja}$, odgovarajućeg nm -moda, i (6.2.46b) za redukovanu komponentnu funkciju rasipanja lakog viskozno sloja $\tilde{\Phi}_{nm(1,2)sloja}$, ukazuju na mogućnost energijske analize sistema dve ploče po odgovarajućim nm -modovima koristeći te redukovane komponente energija za taj nm -mod. Zato će se koristiti odgovarajući beskonačan nm broj sistema običnih diferencijalnih jednačina oblika (3.4.8) i energijska analiza izvršiti kao u sistemu sa dva stepena slobode oscilovanja. Videlo se da se sistem diferencijalnih jednačina (3.4.8) formalno može formirati preko inercione matrice \mathbf{A}_{nm} , matrice kvazielastičnih koeficijenata \mathbf{C}_{nm} i matrice koeficijenata prigušenja \mathbf{B}_{nm} oblika (3.4.8a), koje odgovaraju dinamičkom sistemu sa dva stepena slobode oscilovanja za odgovarajući nm mod, pa izrazi za redukovane vrednosti kinetičke i potencijalne energije odgovarajućeg nm moda takvog sistema mogu se pisati u obliku:

A* redukovana kinetička energija $\tilde{E}_{k, nm}$,

$$\tilde{E}_{knm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{T}_{(1)nm} & \dot{T}_{(2)nm} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{nm} \begin{Bmatrix} \dot{T}_{(1)nm} \\ \dot{T}_{(2)nm} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{T}_{(1)nm} & \dot{T}_{(2)nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 h_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 h_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_{(1)nm} \\ \dot{T}_{(2)nm} \end{Bmatrix}, \quad (6.2.47)$$

odnosno:

$$\tilde{E}_{knm} = \frac{1}{2} \left[\rho_1 h_1 (\dot{T}_{(1)nm}(t))^2 + \rho_2 h_2 (\dot{T}_{(2)nm}(t))^2 \right] = \frac{E_{knm}}{v_{(i)nm}},$$

odavde se mogu izdvojiti članovi koji se odnose na redukovane vrednosti kinetičkih energija ploča u jednom modu (6.2.26a):

$$\tilde{E}_{knm} = \tilde{E}_{k(1)nm} + \tilde{E}_{k(2)nm} = \frac{(E_{k(1)nm} + E_{k(2)nm})}{v_{(i)nm}(r, \varphi)}. \quad (6.2.47a)$$

B* redukovana potencijalna energija \tilde{E}_{pnm} , spregnutih ploča:

$$\tilde{E}_{pnm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} T_{(1)nm} & T_{(2)nm} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{nm} \begin{Bmatrix} T_{(1)nm} \\ T_{(2)nm} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} T_{(1)nm} & T_{(2)nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 h_1 \omega_{(1)nm}^2 & -\rho_1 h_1 a_{(1)}^2 \\ -\rho_2 h_2 a_{(2)}^2 & \rho_2 h_2 \omega_{(2)nm}^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T_{(1)nm} \\ T_{(2)nm} \end{Bmatrix}, \quad (6.2.48)$$

odnosno:

$$\tilde{E}_{pnm} = \frac{1}{2} \left[\rho_1 h_1 \omega_{(1)nm}^2 (T_{(1)nm}(t))^2 + \rho_2 h_2 \omega_{(2)nm}^2 (T_{(2)nm}(t))^2 - (\rho_1 h_1 a_{(1)}^2 + \rho_2 h_2 a_{(2)}^2) T_{(1)nm}(t) T_{(2)nm}(t) \right] = \frac{E_{pnm}}{v_{(i)nm}}. \quad (6.2.48a)$$

C* redukovana Rayleigh-eva funkcija rasipanja $\tilde{\Phi}_{nm(1,2)sloja}$, $n, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$ visko-elastičnog sloja:

$$\tilde{\Phi}_{nm(1,2)sloja} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{T}_{(1)nm} & \dot{T}_{(2)nm} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{nm} \begin{Bmatrix} \dot{T}_{(1)nm} \\ \dot{T}_{(2)nm} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{T}_{(1)nm} & \dot{T}_{(2)nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\delta_{(1)} \rho_1 h_1 & -2\delta_{(1)} \rho_1 h_1 \\ -2\delta_{(2)} \rho_2 h_2 & 2\delta_{(2)} \rho_2 h_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_{(1)nm} \\ \dot{T}_{(2)nm} \end{Bmatrix}, \quad (6.2.49)$$

odnosno:

$$\tilde{\Phi}_{nm(1,2)stloja} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{T}_{(1)nm} & \dot{T}_{(2)nm} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 2\delta_{(1)}\rho_1 h_1 [\dot{T}_{(1)nm} - \dot{T}_{(2)nm}] \\ -2\delta_{(2)}\rho_2 h_2 [\dot{T}_{(1)nm} - \dot{T}_{(2)nm}] \end{Bmatrix},$$

ili posle množenja:

$$\tilde{\Phi}_{nm(1,2)stloja} = (\dot{T}_{(1)nm} - \dot{T}_{(2)nm}) (\delta_{(1)}\rho_1 h_1 \dot{T}_{(1)nm} - \delta_{(2)}\rho_2 h_2 \dot{T}_{(2)nm}) = \frac{1}{2} b (\dot{T}_{(1)nm} - \dot{T}_{(2)nm})^2 = \frac{\Phi_{nm(1,2)stloja}}{v_{(i)nm}}. \quad (6.2.49a)$$

Sada se mogu razdvojiti članovi iz izraza za kinetičku i potencijalnu energiju koji odgovaraju prvoj i drugoj ploči posebno:

A.1* Kinetička energija ploča iz spregnutog sistema.

Kinetička energija prve ploče:

$$\tilde{E}_{k(1)nm} = \frac{1}{2} \rho_1 h_1 (\dot{T}_{(1)nm}(t))^2 = \frac{E_{k(1)nm}}{v_{(1)nm}}. \quad (6.2.50a)$$

Kinetička energija druge ploče:

$$\tilde{E}_{k(2)nm} = \frac{1}{2} \rho_2 h_2 (\dot{T}_{(2)nm}(t))^2 = \frac{E_{k(2)nm}}{v_{(2)nm}}. \quad (6.2.50b)$$

B.1* Potencijalna energija ploča i redukovani deo potencijalne energije visko-elastičnog sloja koji odgovara pojedinim pločama:

$$\tilde{E}_{p(1)nm} = \frac{1}{2} \rho_1 h_1 \omega_{(1)nm}^2 (T_{(1)nm}(t))^2 = \frac{E_{p(1)nm}}{v_{(1)nm}}, \quad (6.2.51a)$$

$$\tilde{E}_{p(2)nm} = \frac{1}{2} \rho_2 h_2 \omega_{(2)nm}^2 (T_{(2)nm}(t))^2 = \frac{E_{p(2)nm}}{v_{(2)nm}}. \quad (6.2.51b)$$

B.2* Potencijalna energija interakcije između ploča usled prisustva (izazvana) visko-elastičnog sloja:

$$\tilde{E}_{p(1,2)nm} = -(\rho_1 h_1 a_{(1)}^2 + \rho_2 h_2 a_{(2)}^2) T_{(1)nm}(t) T_{(2)nm}(t) = \frac{E_{pnm(1,2)}}{v_{(1)nm}}. \quad (6.2.51c)$$

Takođe, može se analizirati potencijalna energija sistema i razdvojiti članovi:

B.3 * Potencijalna energija ploča bez redukovano delo potencijalne energije elastičnog sloja koja odgovara pojedinim pločama:

$$\tilde{E}_{pnm(1s)} = \frac{1}{2} \rho_1 h_1 \omega_{0nm}^2 (T_{(1)nm}(t))^2 = \frac{E_{pnm(1s)}}{v_{(1)nm}}, \quad (6.2.52a)$$

$$\tilde{E}_{pnm(2s)} = \frac{1}{2} \rho_2 h_2 \omega_{0nm}^2 (T_{(2)nm}(t))^2 = \frac{E_{pnm(2s)}}{v_{(1)nm}}. \quad (6.2.52b)$$

B.4* Redukovana vrednost potencijalne energije elastičnog sloja:

$$\tilde{E}_{pnm(1,2)stloja} = \frac{1}{2} c [T_{(2)nm}(t) - T_{(1)nm}(t)]^2 = \frac{E_{pnm(1,2)stloja}}{v_{(1)nm}}. \quad (6.2.52c)$$

gde su sopstvene kružne frekvencija spregnutih ploča:

$$\begin{aligned} \omega_{(1)nm}^2 &= c_{(1)}^4 k_{(1)nm}^4 + a_{(1)}^2 = \omega_{0nm}^2 + a_{(1)}^2, \\ \omega_{(2)nm}^2 &= c_{(2)}^4 k_{(2)nm}^4 + a_{(2)}^2 = \omega_{0nm}^2 + a_{(2)}^2. \end{aligned} \quad (6.2.52d)$$

Odakle se vidi da se razdvajanje članova potencijalne energije vrši razdvajajući delove koji odgovaraju potencijalnoj energiji dve ploče na elastičnoj podlozi Wincler-ovog tipa i delovima potencijalne energije

sprežućeg sloja koji odgovaraju pojedinim pločama i jedan deo koji odgovara interakciji između ploča a zavisi samo od krutosti elastičnog sloja i vremenskih funkcija obe ploče.

C.1* Rayleigh-eva funkcija rasipanja-redukovani deo od visko-elastičnog sloja koji odgovara pojedinim pločama:

$$\tilde{\Phi}_{nm(1,2)sloja(1)} = \delta_{(1)} \rho_1 h_1 (\dot{T}_{(1)nm})^2 = \frac{\Phi_{nm(1,2)sloja(1)}}{V_{(i)nm}}, \quad (6.2.53a)$$

$$\tilde{\Phi}_{nm(1,2)sloja(2)} = \delta_{(2)} \rho_2 h_2 (\dot{T}_{(2)nm})^2 = \frac{\Phi_{nm(1,2)sloja(2)}}{V_{(i)nm}}. \quad (6.2.53b)$$

C.2* deo Rayleigh-eve funkcije rasipanja– čista interakcija između ploča izazvana visko-elastičnim slojem:

$$\tilde{\Phi}_{nm(1,2)sloja} = -(\delta_{(1)} \rho_1 h_1 + \delta_{(2)} \rho_2 h_2) \dot{T}_{(1)nm} \dot{T}_{(2)nm} = \frac{\Phi_{nm(1,2)sloja}}{V_{(i)nm}}. \quad (6.2.53c)$$

Iz prethodno izvedene analize energija sistema kružnih ploča spregnutih slojem visko-elastičnim nelinearnim elemenata vidi se da svi izrazi za redukovane vrednosti potencijalnih energija ploča, kao i međusloja, zavise od vremenskih funkcija $T_{(i)nm}(t)$, $i=1,2$ transverzalnih oscilacija sistema ploča, koji mogu, s obzirom na smenu promenljivih oblika (3.4.20e), da se napišu u obliku:

$$T_{(1)nm}(t) = K_{21nm}^{(1)} a_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) + K_{21nm}^{(2)} a_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) \quad (6.2.54a)$$

$$T_{(2)nm}(t) = K_{22nm}^{(1)} a_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) + K_{22nm}^{(2)} a_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) \quad (6.2.54b)$$

gde su amplitude $a_{inm}(t)$ i faze $\Phi_{inm}(t) = \Omega_{inm} t + \phi_{inm}(t)$ nepoznate funkcije vremena koje su određene u prvoj aproksimaciji koristeći asimptotsku metodu Кривола-Богољубова-Митропольског i dobijen sistem diferencijalnih jednačina prvog reda oblika (3.4.20 a-d), koji nema rešenje u zatvorenom obliku, pa se rešava numerički s obzirom na oblik spoljašnje pobudne funkcije i načina promene njene frekvencije u stacionarnom ili nestacionarnom režimu oscilovanja sistema. Izrazi za redukovane vrednosti kinetičkih energija ploča zavise od izvoda vremenskih funkcija $\dot{T}_{(i)nm}(t)$, $i=1,2$ transverzalnih oscilacija sistema ploča koji se mogu, s obzirom na smenu promenljivih oblika (3.4.20e), za osnovno rezonantno stanje napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \dot{T}_{(1)nm}(t) &= K_{21nm}^{(1)} \dot{a}_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) - K_{21nm}^{(1)} a_{1nm}(t) (\Omega_{1nm} + \dot{\phi}_{1nm}) \sin \Phi_{1nm}(t) + K_{21nm}^{(2)} \dot{a}_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) - K_{21nm}^{(2)} a_{2nm}(t) (\Omega_{2nm} + \dot{\phi}_{2nm}) \sin \Phi_{2nm}(t) \\ \dot{T}_{(2)nm}(t) &= K_{22nm}^{(1)} \dot{a}_{1nm}(t) \cos \Phi_{1nm}(t) - K_{22nm}^{(1)} a_{1nm}(t) (\Omega_{1nm} + \dot{\phi}_{1nm}) \sin \Phi_{1nm}(t) + K_{22nm}^{(2)} \dot{a}_{2nm}(t) \cos \Phi_{2nm}(t) - K_{22nm}^{(2)} a_{2nm}(t) (\Omega_{2nm} + \dot{\phi}_{2nm}) \sin \Phi_{2nm}(t) \end{aligned} \quad (6.2.54c)$$

Jasno je da sve promene koje se dešavaju sa amplitudama $a_{(i)nm}(t)$ harmonika dvofrekventnih procesa vremenskih funkcija, kao i fazama $\Phi_{(i)nm}(t)$, pri stacionarnom ili nestacionarnom prolasku kroz rezonantno stanje, jedne ili druge frekvencije spoljašnje pobudne sile u smislu karakterističnih amplitudnih ili faznih skokova u smeru porasta ili opadanja brzine spoljašnje frekvencija, to će se dešavati i sa oblicima kinetičkih i potencijalnih energija, kao i sa funkcijom rasipanja sistema. Šta više iz oblika amplitudnih i faznih odgovora tj. iz oblika amplitudno- i fazno- frekventnih dijagrama moći će se doneti zaključci o uticaju harmonika za pojedine odnose parametara sistema ovako spregnutih ploča, o čemu će biti govora pri analizi numeričkih rezultata ovakve klase hibridnih sistema u okviru desetog poglavlja. Tako će se, dakle, koristeći sistem diferencijalnih jednačina prve aproksimacije (3.4.20 a-d) za više-frekventne modove stacionarnog i nestacionarnog rezonantnog stanja analizirati energija pobuđenih

modova i prenos energije između modova kao i u radovima [112, 122, 141]. Kako izrazi za energije sistema imaju izvestan stepen opštosti jasno je da se ovakva analiza prenosa i raspodele energije u sistemu ploča može iskoristiti i za hibridne sisteme spregnutih struktura ploča, greda ili pojaseva vezama tipa elastičnih, visko elastičnih, naslednih ili puzećih svojstava. O tome će više biti reći kada budemo govorili o analogijama u ovim klasama hibridnih sistema u okviru dvanaestog poglavlja.

Za svaku od sopstvenih vremenskih funkcija ploča $T_{(1)nm}(t)$ i $T_{(2)nm}(t)$ i procesa vremena u nm - modu oscilovanja može se definisati Lyapunov-ljeve eksponente u obliku [6]:

$$\lambda_{nm(i)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left\{ [T_{(i)nm}(t)]^2 + \frac{1}{\omega_{(i)nm}^2} [\dot{T}_{(i)nm}(t)]^2 \right\}, \quad i = 1, 2, n = 0, 1, 2, \dots, \infty, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty, \quad (6.2.55)$$

Vidi se da izraz u zagradi predstavlja ukupnu energiju jedne ploče tj.:

$$\lambda_{nm(i)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \left\{ [T_{(i)nm}(t)]^2 + \frac{1}{\omega_{(i)nm}^2} [\dot{T}_{(i)nm}(t)]^2 \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \frac{2\tilde{\mathbf{E}}_{nm(i)}}{\omega_{(i)nm}^2} = -\hat{\delta}_{nm(i)} \quad (6.2.55a)$$

Takođe, koristeći analogiju može se definisati Lyapunov-ljev eksponent energijske interakcije ploča u obliku:

$$\lambda_{nm(1,2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \frac{2\tilde{\mathbf{E}}_{nm(1,2)}}{\omega_{(1)nm}\omega_{(2)nm}} = -(\hat{\delta}_{nm(1)} + \hat{\delta}_{nm(2)}) < 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty, m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty \quad (6.2.56)$$

U slučaju slobodnih oscilacija sistema dve ploče samo spregnute elastičnim slojem bez prigušnica Lyapunov-ljevi eksponenti su jednaki nuli. Dok u slučaju disipativnog sistema, sistema ploča spregnutih prigušnicama, vidi se da su Lyapunov-ljevi eksponenti negativni, pa se zaključuje da je proces oscilovanja kao i podproces interakcije među pločama strukturno stabilan.

Takođe, ovakav energijski pristup i predstavljene Lyapunov-ljeve eksponente moguće je koristiti i za druge načine sprežanja u hibridne sisteme sa različitim tipovima svojstava materijala, visko-elastičnih ili puzećih, i proučavanje stabilnosti procesa oscilovanja. Vidi se da su Lyapunov-ljevi eksponenti mera integriteta sistema ili integriteta dinamike-kretanja sistema.

7* Poglavlje

Sinhronizacije u hibridnim sistemima

7.1. Pojam sinhronizacije

U opštem slučaju pod sinhronizacijom se misli na usklađene varijacije stanja dva ili više sistema, ili preciznije usklađene varijacije nekih njihovih karakteristika kao što su frekvencije oscilovanja [12]. Ako ovaj kriterijum treba biti zadovoljen asimptotski onda se kaže da je sinhronizacija asimptotska. Ako bez upravljanja sinhronizacija ne može da se uspostavi u sistemu onda se može postaviti problem određivanja zakona upravljanja pod kojim će sistem sa zatvorenom petljom postati sinhronizovan. Tako sinhronizacija može da se koristi kao cilj upravljanja.

Termin upravljanje haosom uglavnom je korišćen da opiše područje istraživanja koje se nalazi između teorije upravljanja i teorije dinamičkih sistema koje proučava upravljanje determinističkim sistemima sa neregularnim i haotičnim ponašanjem. U drevnoj mitologiji i filozofiji reč “ $\chi\alpha\omega\sigma$ ” (haos) značila je neuređeno stanje jednolične materije koje je, pretpostavlja se, postojalo pre uredenog univerzuma. Tako kombinacija “upravljanje haosom” zapravo ima paradoksalan smisao koji izaziva dodatni interes za samu temu. Problem kontrole haosa privlači pažnju istraživača i inženjera od 1990. godine. Nekoliko hiljada publikacija se pojavilo na tu temu poslednjih dvadesetak godina. Statistika objavljivanja preko Science Citation Index-a pokazuje da je, u periodu 1997-2001, u referentnim

časopisima objavljivano oko četiri stotine radova godišnje. Poređenja radi, pretraga pomoću ključne reči „adaptivno upravljanje” pokazuje da je u okviru te oblasti, koja je takođe veoma aktuelna, godišnje objavljivano oko tri stotine radova.

Najpopularniji matematički model koji se upotrebljava u toj brojnoj literaturi za kontrolu haosa opisan je običnom diferencijalnom jednačinom (jednačinom stanja) oblika:

$$\dot{x}(t) = F(x, u), \quad (7.1.1)$$

gde su : $x = x(t)$ n-dimenzionalni vektor promenljivih stanja; $u = u(t)$ m-dimenzionalni vektor ulaza (upravljačkih veličina) i vektorska funkcija $F(x, u)$ obično je kontinualna. U prisustvu spoljašnje pobude koristi se nestacionarni model:

$$\dot{x}(t) = F(x, u, t), \quad (7.1.2)$$

a u mnogim slučajevima jednostavniji, model afinog upravljanja:

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u \quad (7.1.3)$$

Napominje se ovde da neki istraživači podrazumevaju upravljanje koordinata, gde spoljašnja dejstva (sile, momenti, intenziteti električnih ili magnetnih polja, i dr.) imaju ulogu dela ulaznih promenljivih, i upravljanje parametara, gde su ulazne promenljive varijacije parametara fizičkog sistema (npr. $u(t) = p - p_0$, gde je p_0 nominalna vrednost fizičkog parametra p) kao dva u osnovi različita problema. Ako je razmatranje dato za procese koji se odnose na nelinearne modele koji podrazumevaju obe klase to onda zapravo i nije fundamentalna razlika. U radu [24] navedeno je da u mnogim haotičnim sistemima postoji ekvivalencija problema upravljanja koordinata sa linearnom povratnom spregom, kao i da se upravljanje parametrima može izvesti samo nelinearnom smenom koordinata.

Mereno izlaz sistema označen je sa $y(t)$ i izražava se u funkciji od postojećeg kinetičkog stanja sistema:

$$y(t) = h(x(t)). \quad (7.1.4)$$

Ako izlazne promenljive nisu tačno date, onda se može pretpostaviti da je ceo vektor stanja određen odnosno da je $y(t) \equiv x(t)$.

Za diskretne modele definišu se jednačine razlika stanja:

$$x_{k+1} = F_d(x_k, u_k) \quad (7.1.5)$$

gde $x_k \in R^n$, $u_k \in R^m$ i $y_k \in R^l$ predstavljaju vrednosti vektora stanja, ulaza i izlaza, respektivno, u k -tom koraku. Ovakav model je određen mapom F_d . Pretpostavlja se da za sve vreme $t \geq t_0$ svi prethodni modeli imaju rešenja za date početne uslove, obično je $t_0 = 0$.

Jedan od problema upravljanja haosom je problem stabilizacije nestabilnih periodičkih rešenja (orbita) koje se pojavljuju u suzbijanju buke i vibracija različitih konstrukcija, eliminacija harmonika u sistemima komunikacije, električnim uređajima i tako dalje. Ovaj problem ima svojstvo da je sistem strogo oscilatoran, što znači da su mu sopstvene vrednosti matrice linearizovanog sistema blizu imaginarne ose. Štetne vibracije mogu biti ili regularne (kvaziperiodičke) ili haotične. Problem suzbijanja

haotičnih oscilacija redukovanjem na regularne oscilacije ili potpunim suzbijanjem može da se formuliše na sledeći način:

Ako se posmatra slobodno (neupravljano, $u(t) \equiv 0$) kretanje $x_*(t)$ sistema (7.1.1) sa početnim uslovom $x_*(0) = x_{*0}$, i neka je ovo kretanje perioda T , odnosno $x_*(t+T) = x_*(t)$, za sve vreme $t \geq 0$. Potrebno je da stabiliziramo taj sistem tj. da redukujemo rešenje $x(t)$ sistema (7.1.1) na $x_*(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_*(t)) = 0, \quad (7.1.6)$$

što može da se formuliše i drukčije, kao voditi izlaz sistema $y(t)$ ka datoj funkciji $y_*(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_*(t)) = 0, \quad (7.1.7)$$

za svako rešenje $x(t)$ sistema (7.1.1), pri početnim uslovima $x(0) = x_0 \in \Omega$, gde je Ω dati skup početnih uslova.

Problem je u određivanju funkcije upravljanja, bilo da je u pitanju otvorena sprega upravljanja (open-loop control action)

$$u(t) = U(t, x_0), \quad (7.1.8)$$

ili povratna sprega stanja sistema:

$$u(t) = U(x(t)) \quad (7.1.9)$$

ili povratna sprega izlaza sistema:

$$u(t) = U(y(t)) \quad (7.1.10)$$

koji zadovoljava uslove upravljanja (7.1.6) i (7.1.7).

Ovakva formulacija problema stabilizacije periodičkog kretanja je nerazdvojiva od konvencionalnog problema praćenja u teoriji upravljanja. Ipak, postoji ključna razlika, a leži u činjenici da je za upravljanje haotičnog procesa potrebno da se dostigne cilj sa dovoljno-teorijski govoreći proizvoljno-malim nivoom upravljačkog dejstva [216]. Rešivost ovog problema nije dokazana zbog nestabilnosti haotične trajektorije $x_*(t)$.

Stabilizacija nestabilnog položaja ravnoteže je jedan poseban slučaj. Neka desna strana sistema (7.1.1) zadovoljava uslov $F(x_{*0}, 0) = 0$, onda za $u(t) \equiv 0$ sistem (7.1.1) ima ravnotežno stanje x_{*0} koje bi trebalo stabilizirati u datom smislu izborom odgovarajućeg upravljanja. Problem je okarakterisan i dodatnim zahtevom „malosti“ upravljanja.

Druga klasa problema upravljanja haosom jeste pobuđivanje ili generisanje haotičnih oscilacija. Ovaj problem se često naziva antiupravljanje ili uspostavljanje haosa (haotizacija). Pojavljuje se u onim sistemima gde je haotično kretanje željeno ponašanje sistema. Klasični primeri su izvori haotičnih signala u komunikacionim i radar sistemima. Savremena istraživanja ukazuju da haotizacija procesa može igrati značajnu ulogu hemijskim i biološkim tehnologijama. Ovde je problem vezan i za činjenicu da trajektorija faznog vektora sistema nije unapred određena, nepoznata je ili je bez posledica na postizanje krajnjeg cilja. Ovde se formalno cilj upravljanja može predstaviti ralacijom (7.1.7), ali ovde krajnja trajektorija $x_*(t)$ nije više periodička. Šta više može se zahtevati da umesto kretanja po datoj trajektoriji proces

upravljanja zadovoljava neki formalni kriterijum haotičnosti. Na primer, skalarna funkcija krajnjeg cilja $G(x)$ može biti data, i svrha upravljanja može biti formulisana kao dostizanje granične jednakosti

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x(t)) = G_* \quad (7.1.11)$$

ili nejednakosti za gornje ograničenu $G(x(t))$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x(t)) \geq G_* \quad (7.1.12)$$

Za problem haotizacije, najviši Lyapunov-ljev indeks $G = \alpha_1$ često se uzima kao krajnja ciljna funkcija, i $G_* > 0$ je definisano. Ukupna energija mehaničkih ili električnih oscilacija ponekad se uzima kao $G(x)$.

Dakle, u teoriji haosa, upravljanje haosom je zasnovano na činjenici da svaki haotični atraktor sadrži beskonačan broj nestabilnih periodičkih orbita [50]. Haotično kretanje, dakle, sadrži kretanje u kome se stanje sistema pomera u okolinu jedne od tih orbita na neko vreme, a zatim prelazi u blizinu neke druge nestabilne periodičke orbite, gde opet ostaje neko ograničeno vreme i tako stalno. Ovo za rezultat daje komplikovano i lutajuće ponašanje u dužem periodu vremena. Kontrola haosa je stabilizacija, u smislu malih poremećaja sistema, jedne od tih nestabilnih periodičkih orbita. Rezultat je obezbediti drukčije haotično kretanje stabilnije i predvidljivije što je često prednost ovakvih sistema. Poremećaj mora biti jako slab da bi se izbegle značajnije modifikacije prirodne dinamike sistema [35, 253]. Postoji nekoliko metoda za upravljanje haosom, ali većina je zasnovana na dva osnovna prilaza: OGY (Ott, Grebogi i Yorke) metoda i Pyragas kontinualno upravljanje. Obe metode zahtevaju prethodno određivanje nestabilnih periodičkih orbita haotičnog sistema pre dizajniranja algoritma upravljanja. Kod OGY metode male umešno izabrane brze promene primenjuju se na sistem po jednom ciklusu, da bi ga zadržele u blizini željene nestabilne periodičke orbite. Kod Pyragas metoda odgovarajući kontinualni upravljački signal se primenjuje na sistem, čiji je intenzitet praktično jednak nuli kada se sistem približi željenoj periodičkoj orbiti, ali raste kako se sistem udaljava od orbite. Eksperimentalno upravljanje haosom i jednom i drugom metodom je postignuto na raznim sistemima kao što su: turbulentni fluidi, oscilujuće hemijske reakcije, magnetno-mehanički oscilatori, i srčana tkiva.

Treća važna klasa ciljeva upravljana haosom odgovara problemu sinhronizacije ili preciznije upravljive sinhronizacije kao suprotnosti od samosinhronizacije. Oblast sinhronizacije ima važnu primenu u vibracionoj tehnologiji (sinhronizacija vibracionih pobuda) [13], komunikacijama (sinhronizacija signala odašiljača i prijelnika) [188, 254], biologiji i biotehnologiji i drugim granama savremene nauke. Brojne su publikacije posvećene temi sinhronizacije haosa i njene primene u sistemima prenosa podataka [13, 27, 30, 57, 221].

Jedan važan problem upravljanja haotičnim procesima predstavlja modifikovanje atraktora, npr., transformacija haotičnih oscilacija u periodičke i obrnuto. Razvoj prilaza toj vrsti problema stalno se podstiče novim primenama u tehnologijama lasera i hemijskoj, u telekomunikacijama, biologiji i medicini [25, 35]. Na primer, uvodeći slabu povratnu spregu u optički kanal može se uspostaviti rad lasera koji pokazuje haotično (sa više modova) ponašanje. Kao rezultat postaje moguće da se poveća radiaciona snaga dok se održava povezanost. U hemijskoj tehnologiji, haotičnost u reaktorima za mešanje suspenzija je korisna jer ubrzava reakcije i poboljšava kvalitet proizvoda. Na kraju u medicini se predlaže da se neki

slučajevi aritmije tretiraju u smislu povratne sprege merača brzine koji menjaju stepen neregularnosti srčanog ritma [15, 39] generišući stimulatívne pulseve u odgovarajućim vremenskim trenucima. Kako se aritmija može manifestovati i porastom i smanjenjem haotičnosti srčanog ritma, što zavisi od individualnih normi pacijenta, cilj upravljanja u ovom slučaju je podrževanje datog stepena neregularnosti.

U hibridnim sistemima sprege nelinearnih oscilatora pokazano je da zbog nelinearnosti svojstva takvih sistema mogu biti eksponencijalno razilaženje trajektorija, za dva identična sistema koji polaze iz veoma bliskih početnih uslova, ali i u takvim sistemima može doći do sinhronizacije što na prvi pogled može da začudi. Sinhronizacija haosa dakle javlja se u hibridnim sistemima sprege dva ili više nelinearnih haotičnih oscilatora ili pak u sistemima kada jedan haotični oscilator vodi (nosi) drugi haotični oscilator. Prisustvo sinhronizacije u hibridnim sistemima eksperimentalno je potvrđeno i teorijski do neke istraženo, pri čemu je potvrđeno da je sinhronizacija prilično raznovrstan fenomen koji može da se pojavi u različitim oblicima.

A pored toga eksperti iz različitih oblasti razumevaju sinhronizaciju na različite načine, a to iziskuje i dodatne napore da se primene konvencionalne metode upravljanja. U tom smislu u radu [12] data je sveobuhvatna definicija sinhronizacije, koja obuhvata i pojam samostabilizacije i pojam upravljane stabilizacije. U najopštijem smislu sinhronizacija podrazumeva uzajamni odnos ili uzajamni odgovor ponašanja dva ili više procesa u vremenu. Prema [295] sinhronizovati znači poklopiti se ili složiti se u vremenu, da bi podsistemi nastavili ili radili na potpuno isti način u istom trenutku.

Posmatra se k dinamičkih sistema:

$$\Sigma_i = \{T, U_i, X_i, Y_i, \phi_i, h_i\}, \quad i = 1, \dots, k$$

gde su T poznati skup vremena; U_i, X_i, Y_i su respektívno skupovi ulaza, stanja i izlaza;

$\phi_i : T \times X_i \times U_i \rightarrow X_i$ je mapa prolaska, a $h_i : T \times X_i \times U_i \rightarrow Y_i$ je mapa izlaza.

Prvo se posmatra slučaj kada ulazi nisu prisutni i kada se mogu zanemariti u sistemu.

Pretpostavi se da je dato l funkcionala $g_j : \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \dots \times \mathcal{Y}_k \times T \rightarrow R^l \quad j = 1, \dots, l$, gde su \mathcal{Y}_i skupovi svih funkcija iz T u Y_i tj. $\mathcal{Y}_i = \{y : T \rightarrow Y_i\}$. Za skup vremena T može se uzeti ili $T = R \geq 0$ (kontinualno vreme) ili $T = Z \geq 0$ (diskretno vreme). Za bilo koje $\tau \in T$ definiše se onda σ_τ kao operator promene, tj. $\sigma_\tau : \mathcal{Y}_i \rightarrow \mathcal{Y}_i$ dato je kao $(\sigma_\tau y)(t) = y(t + \tau)$ za sve $y \in \mathcal{Y}_i$ i sve $t \in T$.

Definicija [12]: Rešenja $x_1(\cdot), \dots, x_k(\cdot)$ sistema $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ sa početnim uslovima $x_1(0), \dots, x_k(0)$ nazivaju se **sinhronizovana** u odnosu na funkcionale g_1, \dots, g_l ako

$$g_j(\sigma_{\tau_1} y_1(\cdot), \dots, \sigma_{\tau_k} y_k(\cdot), t) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, l \quad (7.1.13)$$

važi za sve $t \in T$ i neke $\tau_1, \dots, \tau_k \in T$, gde $y_i(\cdot)$ označavaju izlazne funkcije sistema $\Sigma_i : y_i(t) = h(x_i(t), t)$, $t \in T$, $i = 1, \dots, k$.

Kaže se da su rešenja $x_1(\cdot), \dots, x_k(\cdot)$ sistema $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ sa početnim uslovima $x_1(0), \dots, x_k(0)$ **aproksimativno sinhronizovana** u odnosu na funkcionale g_1, \dots, g_l ako postoji $\varepsilon > 0$ i $\tau_1, \dots, \tau_k \in T$ tako da:

$$\left|g_j(\sigma_{\tau_1}y_1(\cdot), \dots, \sigma_{\tau_k}y_k(\cdot), t)\right| \leq \varepsilon, \quad j=1, \dots, l \text{ za sve } t \in T. \quad (7.1.14)$$

Rešenja $x_1(\cdot), \dots, x_k(\cdot)$ sistema $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ sa početnim uslovima $x_1(0), \dots, x_k(0)$ su **asimptotski sinhronizovana** u odnosu na funkcionalne g_1, \dots, g_l ako za neke $\tau_1, \dots, \tau_k \in T$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_j(\sigma_{\tau_1}y_1(\cdot), \dots, \sigma_{\tau_k}y_k(\cdot), t) = 0, \quad j=1, \dots, l. \quad (7.1.15)$$

Kada je sinhronizacija uspostavljena za sve početne uslove $x_1(0), \dots, x_k(0)$ kaže se da su sistemi $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ sinhronizovani (u odgovarajućem smislu s obzirom na date funkcionalne). U slučaju asimptotske sinhronizacije, takođe, je moguće definisati bazen početnih uslova koji vode sinhronizaciji.

Iako je ova definicija sinhronizacije prilično opšta moguća su još neka uopštenja. U mnogim praktičnim slučajevima vremenske promene $\tau_i, i=1, \dots, k$ nisu konstantne nego teže nekoj konstantnoj vrednosti, takozvane asimptotske faze. U ovom slučaju umesto operatora promene za svaku izlaznu funkciju $y_i(\cdot)$ prihvatljivije je posmatrati vremenski promenljiv operator definisan na sledeći način:

$$\sigma_{\tau_i}y(t) = y(t'_i(t)),$$

gde je $t'_i: T \rightarrow T, i=1, \dots, k$ homeomorfizam (neprekidna funkcija sa neprekidnom inverznom funkcijom) takav da $\lim_{t \rightarrow \infty} (t'_i(t) - t) = \tau_i$.

U mnogim praktičnim problemima sinhronizacije prostori \mathcal{Y}_i su identični $\mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}$, a funkcionali $\{g_{jsr}\}$ su izabrani da porede slične osobine različitih sistema tj.

$$g_{jsr}(y_s(\cdot), y_r(\cdot)) = \text{dist}(J_j(\sigma_{\tau_s}y_s(\cdot)), J_j(\sigma_{\tau_r}y_r(\cdot)))$$

gde $r, s=1, \dots, k, j=1, \dots, l$ i $J_j: \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{J}_j$ je određeno preslikavanje (sinhronizacioni indeksi) koje preslikava (izlaz) trajektoriju $y_i(\cdot)$ svakog sistema $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ u isti metrički prostor \mathcal{J}_j .

Umesto skupa funkcionala uvek je moguće uzeti jedan funkcional koji izražava isti sinhronizacioni fenomen.

U mnogim praktičnim slučajevima skupovi U_i, X_i, Y_i su vektori konačnih dimenzija i sistemi Σ_i mogu biti opisani običnim diferencijalnim jednačinama.

Za najjednostavniji slučaj razdvojenih sistema bez ulaza sledi:

$$\Sigma_i: \frac{dx_i}{dt} = F_i(x_i, t),$$

gde je $F_i, i=1, \dots, k$ određeno vremenski zavisno vektorsko polje. Ponekada se sinhronizacija može javiti i u razdvojenim sistemima, i ovo će se nazvati prirodnom sinhronizacijom. Mnogo je praktično važniji slučaj sinhronizacije u vezanim sistemima. U ovom slučaju model sistema je uvećan za date veze u obliku:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= F_i(x_i, t) + \tilde{F}_i(x_0, x_1, \dots, x_k, t), \quad i=1, \dots, k \\ \frac{dx_0}{dt} &= F_0(x_0, x_1, \dots, x_k, t), \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

gde je F_0 vektorsko polje koje opisuje dinamiku sistema veze, a \tilde{F}_i vektorsko polje koje opisuje veze. Saglasno sa prethodnom definicijom pretpostavlja se da su ulazi svih sistema zanemareni. Da bi se opisale veze sada pretpostavlja se da ulaz u svaki sistem Σ_i , $i=1, \dots, k$ može da se načini od izlaza vezanog sistema $\Sigma_0 = \{T, U_0, X_0, Y_0, \phi_0, h_0\}$, gde su prelazna i mapa izlaza date kao $\phi_0: T \times X_0 \times U_0 \rightarrow X_0$ i $h_0: T \times X_0 \times U_0 \rightarrow Y_0$ sa $U_0 = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_k$ i $Y_0 = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k$, tako da je moguće definisati sinhronizaciju u spregnutim hibridnim sistemima:

Definicija, [12.]: Rešenja $x_0(\cdot), \dots, x_k(\cdot)$ sistema $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ i sistema veze Σ_0 sa početnim uslovima $x_0(0), \dots, x_k(0)$ nazivaju se **sinhronizovana** u odnosu na funkcionale g_1, \dots, g_l ako:

$$g_j(\sigma_{\tau_0} y_0(\cdot), \sigma_{\tau_1} y_1(\cdot), \dots, \sigma_{\tau_k} y_k(\cdot), t) \equiv 0, \quad j=1, \dots, l \quad (7.1.17)$$

važi za sve $t \in T$ i neke $\tau_0, \dots, \tau_k \in T$, gde $y_i(\cdot)$ označavaju izlazne funkcije sistema $\Sigma_i: y_i(t) = h(x_i(t), t)$, $t \in T$, $i=0, 1, \dots, k$.

Kaže se da su rešenja $x_0(\cdot), \dots, x_k(\cdot)$ sistema $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ i sistema veze Σ_0 sa početnim uslovima $x_0(0), \dots, x_k(0)$ **aproksimativno sinhronizovana** u odnosu na funkcionale g_1, \dots, g_l ako postoji $\varepsilon > 0$ i $\tau_0, \dots, \tau_k \in T$ tako da:

$$|g_j(\sigma_{\tau_0} y_0(\cdot), \sigma_{\tau_1} y_1(\cdot), \dots, \sigma_{\tau_k} y_k(\cdot), t)| \leq \varepsilon, \quad j=1, \dots, l \quad \text{za sve } t \in T. \quad (7.1.18)$$

Rešenja $x_0(\cdot), \dots, x_k(\cdot)$ sistema $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ i sistema veze Σ_0 sa početnim uslovima $x_0(0), \dots, x_k(0)$ su **asimptotski sinhronizovana** u odnosu na funkcionale g_1, \dots, g_l ako za neke $\tau_0, \dots, \tau_k \in T$ postoji:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_j(\sigma_{\tau_0} y_0(\cdot), \dots, \sigma_{\tau_k} y_k(\cdot), t) = 0, \quad j=1, \dots, l. \quad (7.1.19)$$

Jasna je činjenica iz definicije sinhronizacije spregnutih sistema da sinhronizacija u ovakvim sistemima može da se javi i bez dejstva bilo kakvog spoljašnjeg efekta. U tom smislu za spregnuti sistem kaže se da je samosinhronizovan u odnosu na funkcionale g_1, \dots, g_l .

Interesantan slučaj u praksi je kada je veza u hibridnom sistemu slaba, na primer, kada se sistem može predstaviti kao:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_i, t) + \mu \tilde{F}_i(x_0, x_1, \dots, x_k, t), \quad i=1, \dots, k$$

$$\frac{dx_0}{dt} = F_0(x_0, x_1, \dots, x_k, t),$$

gde je μ mali parametar.

Ipak u mnogim slučajevima samosinhronizacija nije moguća i nameće se pitanje da li je moguće izazvati odnosno kontrolisati sisteme na takav način da se oni sinhronizuju. U prethodnim definicijama ta mogućnost nije uzeta u obzir. Zato se sada pretpostavlja da su svi Σ_i , $i=0, 1, \dots, k$ glatki sistemi konačnih dimenzija, opisani diferencijalnim jednačinama sa ulazom konačnih dimenzija:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_i, t) + \tilde{F}_i(x_0, x_1, \dots, x_k, u, t), \quad i=1, \dots, k$$

$$\frac{dx_0}{dt} = F_0(x_0, x_1, \dots, x_k, u, t), \quad (7.1.20)$$

gde je $u = u(t) \in R^m$ ulazna promenljiva (promenljiva upravljanja).

Definicija [12]: Problem upravljanja sinhronizacijom u odnosu na funkcionale $g_j, j=1, \dots, l$ (respektivno upravljanja asimptotskom sinhronizacijom u odnosu na funkcionale $g_j, j=1, \dots, l$) je problem pronalaženja upravljanja u kao funkcije povratne sprege stanja $x_0(0), \dots, x_n(0)$ i vremena, koji obezbeđuje da (7.1.17) (respektivno (7.1.18) i (7.1.19)) važi za sistem povratne sprege.

Ponekada ovaj zahtev može biti obezbeđen bez merenja bilo koje promenljive sistema, npr. periodičkim silama. U ovom slučaju funkcija upravljanja u ne zavisi od stanja sistema i problem pronalaženja takvog upravljanja naziva se problem upravljanja (asimptotskom) sinhronizacijom sa otvorenom spregom. Ipak, korisniji prilaz pretpostavlja mogućnost merenja stanja ili nekih funkcija promenljivih sistema, a u tom slučaju pronalaženje upravljanja naziva se problem upravljanja (asimptotskom) sinhronizacijom sa zatvorenom petljom ili povratnom spregom.

Sve do sada uopšteno rečeno o sinhronizaciji i upravljanju sinhronizacijom može da se pojednostavi u hibridnom sistemi sa dva podsistema, svaki sa po jednim stepenom slobode kretanja. Videli smo da je kod problema sinhronizacije osnovni zahtev često formulisan kao poklapanje ili usaglašavanje oscilacija svih podsistema, dok osobine svakog od podsistema mogu da se menjaju u okviru širokog opsega.

Kada su dva nelinearna oscilatora u haotičnom režimu nelinearne dinamike spregnuta sinhronizacija može biti:

- **Identična sinhronizacija.** Ovo je najjednostavniji oblik sinhronizacije, koji se javlja kada su dva identična nelinearna haotična oscilatora međusobno spegnuta, ili kada jedan od njih vodi drugi. Ako sa (x_1, x_2, \dots, x_n) i $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ označimo skupove dinamičkih promenljivih, koje opisuju stanja prvog i drugog oscilatora, respektivno, kaže se da se identična sinhronizacija javlja kada za skup početnih uslova $(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ i $(\bar{x}_1(0), \bar{x}_2(0), \dots, \bar{x}_n(0))$ razlika promenljivih stanja $|\bar{x}_i(t) - x_i(t) \rightarrow 0|$, za $i=1, 2, \dots, n$ kada vreme $t \rightarrow \infty$ ili drukčije zapisano:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - \bar{x}_i(t)) = 0 \text{ za } i=1, 2, \dots, n. \quad (7.1.21)$$

To praktično znači da se posle dovoljno dugog vremena dinamike oscilatora izjednačavaju $\bar{x}_i(t) = x_i(t)$ za $i=1, 2, \dots, n$ u dobroj aproksimaciji. Ovo stanje se naziva sinhronizovano stanje u smislu identične sinhronizacije. Jednakost $\bar{x}_i(t) = x_i(t)$ u jedinstvenom prostoru stanja predstavlja podprostor (dijagonalu), a (7.1.21) zapravo opisuje konvergencije vektora stanja $x(t)$ tom dijagonalnom skupu $\{x : x_i = \bar{x}_i\}$.

- **Generalisana (opšta) sinhronizacija.** Ovaj oblik sinhronizacije javlja se uglavnom kada su spegnuta haotični oscilatori različiti, iako se može javiti i u slučaju identičnih oscilatora. Za date promenljive stanja (x_1, x_2, \dots, x_n) i (y_1, y_2, \dots, y_m) , koje određuju dinamiku oscilatora, opšta sinhronizacija se javlja kada postoji funkcional Φ , takav da nakon uspostavljanja stanja iz datih početnih uslova, važi $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) = \Phi(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$. To znači da je dinamičko stanje jednog oscilatora potpuno određeno stanjem drugog. Kada su oscilatori međusobno

spregnuti ovaj funkcional mora biti invertan, a ako postoji konfiguracija vođenje-odgovor onda vodeći određuje razvoj odgovora, i funkcional Φ ne mora biti invertan. Identična sinhronizacija je poseban slučaj opšte sinhronizacije kada je funkcional Φ funkcija jednakosti.

- **Fazna sinhronizacija.** Ovaj vid sinhronizacije, koji se javlja kada oscilatori nisu identični, je delimičan u smislu da u sinhronizovanom stanju amplitude oscilatora ostaju nesinhronizovane, a sinhronizuju se samo faze oscilatora. Konstatovanje fazne sinhronizacije zahteva prethodno definisanje faze haotičnog oscilatora. U mnogim posebnim slučajevima, moguće je pronaći ravan u faznom prostoru u kojoj projekcije trajektorija oscilatora rotiraju oko definisanog centra. U tom slučaju faza je definisana uglom, $\varphi(t)$, između segmenta koji spaja centar rotacije i tačku projekcije trajektorije na ravan. U tom slučaju ako su $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$ faze dva spregnuta oscilatora sinhronizacija faza data je relacijom $n\varphi_1(t) = m\varphi_2(t)$ gde su n i m celi brojevi.

- **Sinhronizacija zaostajanja i praćenja.** U ovim slučajevima sinhronizovano stanje je okarakterisano intervalom vremena τ tako da su dinamičke promenljive oscilatora (x_1, x_2, \dots, x_n) i $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ odnosa $\bar{x}_i(t) = x_i(t + \tau)$, što znači da dinamika jednog oscilatora prati, ili joj prethodi, dinamiku drugog. Sinhronizacija praćenja javlja se između haotičnih oscilatora spregnutih u konfiguraciji vođenje-odgovor, čija je dinamika opisana diferencijalnim jednačinama sa kašnjenjem, tj. diferencijalnom jednačinom u kojoj je izvod nepoznate funkcije u određenom trenutku dat u zavisnosti od vrednosti te funkcije u prethodnom trenutku. Opšti oblik diferencijalne jednačine sa kašnjenjem za $x(t) \in R^n$ je:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), x_t),$$

gde $x_t = \{x(\tau) : \tau \leq t\}$ predstavlja trajektoriju rešenja iz prošlosti, a f je funkcionalni operator iz $R \times R^n \times C^1$ u R^n .

U ovom slučaju odgovor pratećeg oscilatora prati dinamiku vodećeg oscilatora. Sinhronizacija zaostajanja može da se javi kada jačina veze između fazno sinhronizovanih oscilatora raste.

- **Sinhronizacija envelope amplitude.** Ovo je prelazni oblik sinhronizacije koji može da se javi između dva slabo spregnuta haotična oscilatora. U ovom slučaju ne postoji veza između faza ili amplitude već se oscilacije oba oscilatora razvijaju u periodične koje imaju iste frekvencije u oba sistema. Ovo je istog reda veličine kao i razlike između prosečnih frekvencija oscilovanja dva haotična oscilatora. Najčešće sinhronizacija envelope amplitude prethodi faznoj sinhronizaciji u smislu da se, kada jačina veze između dva oscilatora sa sinhronizacijom envelope amplituda raste, razvija sinhronizacija faza.

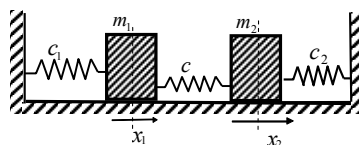
Svi ovi oblici sinhronizacije imaju svojstva asimptotske stabilnosti. Ovo znači da kada se jednom dostigne sinhronizovano stanje efekat male perturbacije koja uništava sinhronizaciju se brzo prigušuju i sinhronizacija se uspostavlja ponovo. Matematički je poznato da je svojstvo asimptotske stabilnosti pozitivan Lyapunov-ljev eksponet sistema od dva oscilatora koji postaje negativan kada se dostigne sinhronizacija haosa. U sinhronizacij haosa često se koristi termin uslovni Lyapunov-ljev eksponet, i ako su dva sistema spregnuta tako da je jedan vodeći (glavni) sistem, a drugi sistem odgovora (prateći), onda su uslovni eksponenti oni eksponenti od sistema odgovora kada se vodeći sistem tretira samo kao izvor

(haotičnog) ulaznog signala. Sinhronizacija se dakle javlja kada su svi uslovni Lyapunov-ljevi eksponenti negativni. [220].

7.2 Sinhronizacija u hibridnim sistemima

7.2.1. Sinhronizacija spregnutih harmonijskih oscilatora –normalni modovi

Iz predstavljenih vrsta hibridnih sistema u trećem poglavlju ovde se posmatra jedan slučaj koji će nam pomoći u definisanju i tumačenju pojmova sinhronizacije u hibridnim sistemima. Posmatraju se, naime, dva linearna oscilatora predstavljena na slici 7.2.1 vezana oprugom krutosti c .



Slika 7.2.1 Statičko sprezanje dva linearna oscilatora sa linearnom krutošću

Za slučaj kada je taj sistem homogen tj. kada su spregnuta dva identična oscilatora, dinamiku takvog sistema može se opisati sistemom spregnutih diferencijalnih jednačina oblika:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + a^2(x_1 - x_2) &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + a^2(x_2 - x_1) &= 0, \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

gde su $\omega_0^2 = c_i/m_i$, $i = 1, 2$ sopstvene kružne frekvencije podsistema, a $a^2 = c/m_i$ je mera jačine sprezanja. Za slučaj kada je $a < \omega_0$ sprezanje će se nazvati slabim.

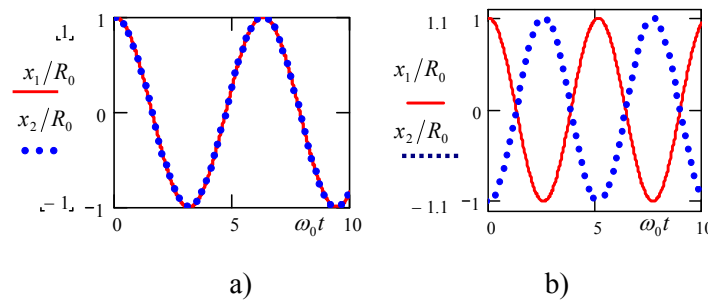
Koristeći standardne i dobro poznate tehnike rešavanja sistema diferencijalnih jednačina, a imajući u vidu i sve do sada rečeno o homogenim hibridnim sistemima rešenje sistema (7.2.1), mogu se napisati u obliku:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= R_{01} \cos(\omega_1 t + \alpha_{01}) + R_{02} \cos(\omega_2 t + \alpha_{02}) \\ x_2(t) &= -R_{01} \cos(\omega_1 t + \alpha_{01}) + R_{02} \cos(\omega_2 t + \alpha_{02}) \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

gde su ω_i , $i = 1, 2$ kružne frekvencije oscilovanja modova takve da je $\omega_1^2 = \omega_0^2 + 2a^2$ i $\omega_2^2 = \omega_0^2 - a^2$ što može da se zapiše i u opštem slučaju u simetričnom obliku kao $\omega_i^2 = \omega_c^2 \pm a^2$, gde su $\omega_c^2 = \omega_0^2 + a^2$ kružne frekvencije harmonijskih oscilacija bilo kojeg od oscilatora kada se drugi fiksira. Amplitude R_{0i} , $i = 1, 2$ i fazna kašnjenja α_{0i} , $i = 1, 2$ harmonika oscilovanja određuju se iz početnih uslova pomeranja masa podsistema $x_i(0)$, $i = 1, 2$ i početnih brzina masa podsistema $\dot{x}_i(0)$, $i = 1, 2$. Osnovna svojstva dinamike dva identična spregnuta harmoniska oscilatora prikazana su na slikama 7.2.2 a) i b). Ti dijagrami odgovaraju

partikularnim rešenjima dobijenim za početne uslove $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ i $x_1(0) = x_2(0) = R_0$ na slici 7.2.2 a) i $x_1(0) = -x_2(0) = R_0$ na slici 7.2.2 b).

U prvom slučaju slika 7.2.2 a) modovi osciluju istim frekvencijama ω_2^2 i to u fazi tačnije ne postoji fazna razlika te se dve krive poklapaju, u drugom slučaju modovi osciluju frekvencijom ω_1^2 sa faznom razlikom $\Delta\alpha = \pi$. Ova dva oblika oscilovanja poznata su kao dva normalna moda oscilovanja spregnutog sistema dva linearna oscilatora, i to prvi je nisko frekventni mod, a drugi je visoko frekventni mod. Oni su interesantni jer su to zapravo dve jednostavne harmonijske oscilacije i svi ostali oblici kretanja ovako spregnutog sistema su zapravo superpozicija (slaganje) ta dva kretanja. Na primer, na slici 7.2.3 prikazani su oblici oscilovanja masa sistema dva spregnuta linearna oscilatora za početne uslove oblika $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, $x_1(0) = R_0$ i $x_2(0) = 0$. Oscilacije sistema su kao što vidimo komplikovane, ali se mogu posmatrati kao slaganje oscilacija dva jednostavna harmonijska oscilovanja koji odgovaraju normalnim modovima kao što se to vidi iz zakon kretanja (7.2.2).

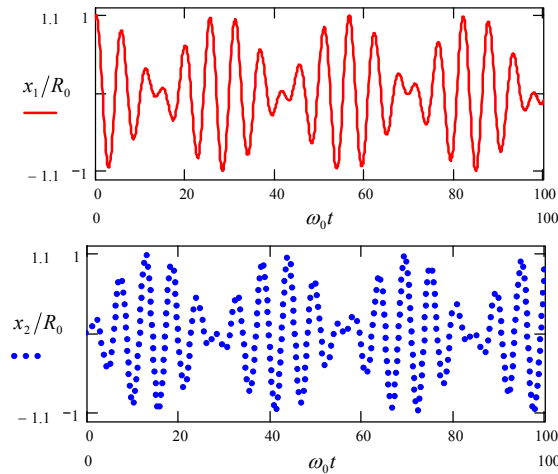


Slika 7.2.2 Zakoni oscilovanja modova sistema dva spregnuta linearna oscilatora a) nisko frekventni mod, b) visoko frekventni mod

Dekompozicija oscilovanja spregnutih linearnih oscilatora na slaganje oscilovanja normalnih modova koji su jednostavni linearni harmonijski oscilatori, je osnovni rezultat fizike spregnutih linearnih sistema. Videće se u poglavlju s analogijama da dekompozicija nije ograničena samo na oscilacije dva oscilatora već je moguća i u sistemima sa beskrajno mnogo spregnutih oscilatora sa brojem odgovarajućih frekvencija spregnutog oscilovanja koje odgovaraju frekvencijama modova jednakim broju spregnutih elemenata sistema.

Normalni modovi igraju značajnu ulogu u razumevanju dinamičkog ponašanja sistema koji su načinjeni od mreža oscilatora niskih amplituda, čija se dinamika može redukovati na slaganje jednostavnih harmonijskih oscilacija, [43]. Ovo se dešava, na primer, u teoriji materijala gde se relevantna svojstva čvrstih tela mogu proučiti iz dinamike atoma od kojih su načinjeni i koji osciluju oko svojih ravnotežnih položaja u kristalnim rešetkama. Isti zaključci važe i u hemiji i biologiji gde se dinamika atoma, koji čine molekule, teorijski može shvatiti kao dinamika skupa spregnutih oscilatora.

Upotreba normalnih modova oscilovanja za razumevanje i upravljanje fenomena u nauci i tehnologiji ide od slučajeva skupova sa konačnim brojem spregnutih oscilatora do skupova sa beskonačnim brojem oscilatora kada govorimo o predstavi kontinuuma različitih svojstava [60, 90, 99].



Slika 7.2.3 Zakoni oscilovanja modova sistema dva spregnuta linearna oscilatora za početne uslove oblika $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, $x_1(0) = R_0$ i $x_2(0) = 0$

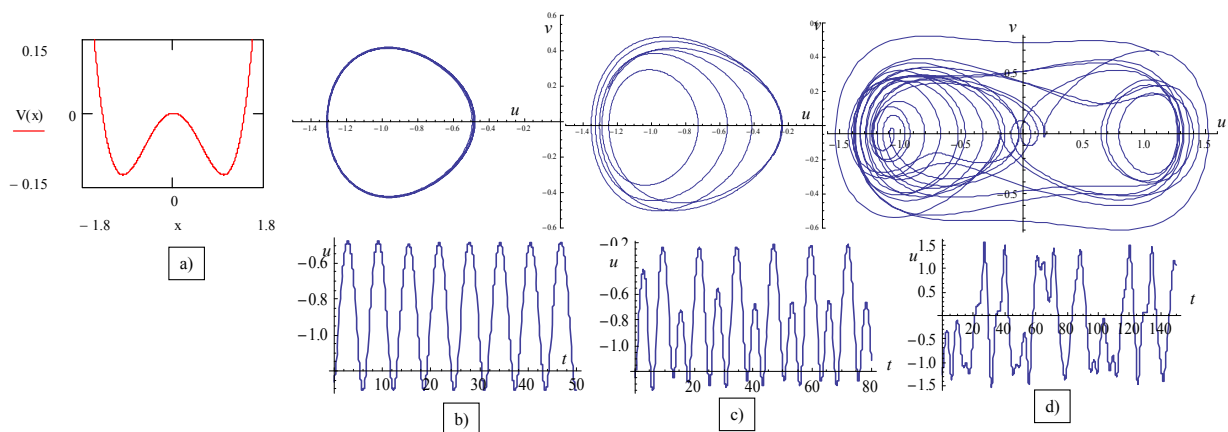
7.2.2. Sinhronizacija spregnutih nelinearnih oscilatora

Sve do sada rečeno o oscilacijama spregnutih linearnih oscilatora može da se sumira u nekoliko važnih osobina ove vrste sistema: oni opisuju kretanje oko stabilnog položaja ravnoteže, prigušenje u ovakvim sistemima izaziva umirenje sistema u položaju ravnoteže i takozvano gubljenje memorije početnih uslova, spoljašnje prinude u kombinaciji sa prigušenjem izazivaju održive oscilacije koje su nezavisne od početnih uslova, što se naziva graničnim krugom oscilacija. Pokazano je, a i u praksi je potvrđeno, da je nelinearnost veoma značajna i da se svakako treba uzeti u obzir. Opšti oblik nelinearne diferencijalne jednačine kojom se mogu opisati neke vrste nelinearnosti u sistemu nelinearnog oscilatora pod dejstvom harmonijske prinude može se napisati u sledećem obliku:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \frac{dV(x)}{dx} = A_1 \sin(\Omega t) \quad (7.2.3)$$

gde su $V(x)$ funkcija potencijala koja ima makar jednu stabilnu ravnotežnu poziciju, i $f(x, \dot{x})$ je član koji odgovara prigušenju i ne mora biti linearan. Kod nelinearnog oscilatora (3.1.5) funkcija potencijala $V(x) = \tilde{\omega}_1^2 x^2 / 2 + \tilde{\omega}_{N1}^2 x^4 / 4$, videlo se, dovoljna je da učini sistem nelinearnim i da linearna kombinacija rešenja pod sistema nije više rešenje celokupnog hibridnog sistema. Pored onog rečenog za linearne sisteme, što važi i ovde u nelinearnim sistemima, videlo se da nelinearni sistemi imaju još jednu važnu osobinu ili vrstu kretanja, a to su kao oscilatorna kretanja oko ravnotežnog položaja ili stacionarnog – ustaljenog režima koja se nazivaju aperiodičkim rešenjima. Na primer na slici 5.2.7 d) vidi se da zakon kretanja, kada se pojave aperiodička rešenja, osciluje oko ravnotežne pozicije ali nema konačnog oblika $x(t)$ zakona kretanja ograničenog u konačnom vremenu da se ponavlja, a vidi se i da fazna trajektorija ovakvog sistema, slika 5.2.7 a) plava linija, ne konvergiraju ni jednoj zatvorenoj krivoj liniji, niti se slivaju u položaj ravnoteže, već odslikava krivu liniju koja se nikada ne ponavlja. Ne postoje opšte metode za rešavanje diferencijalne jednačine (7.2.3), postoje analitička približenja koja zavisno od

stepena aproksimacije daju rešenja sa određenim stepenom tačnosti. Takođe, konstatovano je da numeričko rešavanje ovakvih jednačina daje mogućnost da se otkriju neka rešenja koja analitički ne mogu da se predvide. Na primer, nelinearni oscilator sa prinudom (4.2.3), za vrednost parametara $2\delta_1 = 0.1$, $-\omega_1^2 = \tilde{\omega}_{N1}^2 = 0.5$, čija je funkcija potencijala predstavljena na slici 7.2.4 a), i $\Omega_1 = 1$, $\mathcal{G}_{01} = 0$ sa promenljivim parametrom h_{01} , može razviti kretanje koje liči na periodičko oko centra, koji odgovara jednom od minimuma funkcije potencijala za manje vrednosti parametra h_{01} ($h_{01} = 0.12$) slika 7.2.4 b), povećanjem amplitude prinudne sile $h_{01} = 0.18$ kretanje postaje kompleksnije ali i dalje ima neki oblik periodičnosti sa periodom četiri puta većim od perioda u prethodnom slučaju slika 7.2.4 c), a za iste početne uslove $x(0) = u(0) = -1.259$ i $\dot{x}(0) = v(0) = 0.129$.



Slika 7.2.4 Nelinearni oscilator sa prinudom (4.2.3) za vrednost parametara $2\delta_1 = 0.1$, $-\omega_1^2 = \tilde{\omega}_{N1}^2 = 0.5$, a) funkcija potencijala, $\Omega_1 = 1$, $\mathcal{G}_{01} = 0$; i trajektorije u faznoj ravni u, v odnosno (x, \dot{x}) za vrednosti: b) $h_{01} = 0.12$; c) $h_{01} = 0.18$; d) $h_{01} = 0.24$; a za iste početne uslove $x(0) = u(0) = -1.259$ i $\dot{x}(0) = v(0) = 0.129$.

Daljim povećanjem amplitude h_{01} kretanje postaje još složenije i praktično postoje sada dva centra oscilovanja koji odgovaraju minimumima funkcije potencijala, ali ih oscilator posećuje sasvim slučajno i kretanje postaje aperiodičko slika 7.2.4 d), za $h_{01} = 0.24$. Ovakvu strukturu faznog prostora već je predstavljena u petom poglavlju. Može se zaključiti da, uprkos aperiodičnosti struktura, kretanje ima jedan oblik invarijantnog skupa, pa fazni dijagrami za različite početne uslove ostaju sličnih struktura. Međutim aperiodičnost je samo jedno svojstvo specijalnog slučaja dinamike svojstvene nelinearnim sistemima zvane dinamika haosa. Drugo bitno svojstvo je pojava graničnog ciklusa ili više takvih ciklusa zavisno od izabranih skupova početnih uslova, takozvanih bazena atrakcije. Ako hibridni sistem sa nelinearnošću poseduje više od jednog atraktora sa stanovišta sinhronizacije interesantno je proučiti prirodu bazena atrakcije koja nudi informacije o stabilnosti orbite kao funkcije početnih uslova.

U sinhronizaciji dva haotična sistema sistemi mogu imati identičnu strukturu ili mogu biti potpuno različiti, i obično je jedan sistem glavni sistem, a drugi je prateći. Ideja o sinhronizaciji u ovakvim sistemima je zapravo upotreba izlaza glavnog podsistema za upravljanje podsistema pratioca i to

tako da izlaz podsistema pratioca asimptotski prati izlaz glavnog podsistema. U radu [9] je posmatran malo opštiji slučaj i to kada je dat nelinearni sistema u kome je registrovano haotično kretanje sa proizvoljno datim ulaznim signalom. Pitanje je da li se može dizajnirati kontroler na bazi ulaznog signala tako da izlaz haotičnog sistema asimptotski prati dati referentni signal? U suštini sinhronizacija dva identična ili različita haotična sistema jeste problem u kome bi se izlaz jednog od podsistema smatrao referentnim signalom. Uopšteno posmatrano referentni signal može biti izlaz i nekog linearnog i nekog nelinearnog sistema. Zato se posmatra opšti oblik nelinearnog sistema u dvodimenzionom toku oblika:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f(x_1(t), x_2(t), t) + u(t).\end{aligned}\tag{7.2.4}$$

gde je $f(x_1(t), x_2(t), t)$ nelinearna funkcija, a $u(t)$ signal upravljanja koji treba da se odredi. Neka je $y(t)$ proizvoljno dat referentni signal sa definisanim prvim i drugim izvodima. Cilj upravljanja je određivanje $u(t)$ na bazi $y(t)$ i njegovih izvoda tako da (7.1.21) ovde zapisano u obliku:

$|x_1(t) - y(t)| \rightarrow 0$ kada $t \rightarrow \infty$ bude zadovoljeno.

Neka su α_1 i α_2 dve pozitivne konstante, definiše se $u(t)$ u obliku:

$$u(t) = -f(x_1(t), x_2(t), t) - \alpha_1 x_1(t) - \alpha_2 x_2(t) + \left(\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \alpha_2 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_1 y(t) \right)\tag{7.2.5}$$

Kada se zameni (7.2.5) u sistem (7.2.4) sledi:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -\alpha_1 x_1(t) - \alpha_2 x_2(t) + \left(\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \alpha_2 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_1 y(t) \right)\end{aligned}\tag{7.2.6}$$

Neka $e(t) = x_1(t) - y(t)$ određuje grešku ili razliku $x_1(t)$ i $y(t)$ tako da sledi:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 e(t)}{dt^2} &= \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} - \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{dx_2(t)}{dt} - \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \\ &= -\alpha_1 x_1(t) - \alpha_2 x_2(t) + \left(\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \alpha_2 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_1 y(t) \right) - \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \\ &= -\alpha_1 x_1(t) - \alpha_2 \frac{dx_1(t)}{dt} + \alpha_2 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_1 y(t) = -\alpha_1 e(t) - \alpha_2 \frac{de(t)}{dt}\end{aligned}$$

odnosno:

$$\frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \alpha_2 \frac{de(t)}{dt} + \alpha_1 e(t) = 0\tag{7.2.7}$$

Jednačina (7.2.7) je linearna diferencijalna jednačina drugog reda. Rešenje ove diferencijalne jednačine, $e(t)$, eksponencijalno konvergira nuli za bilo koje početne uslove $e(t=0)$, sve dok su konstante α_1 i α_2 obe veće od nule, što zapravo daje zaključak:

$|e(t)| = |x_1(t) - y(t)| \rightarrow 0$ kada $t \rightarrow \infty$, a to je i bio cilj zadatka upravljanja. Dakle, nije neophodna informacija strukture sistema koja stvara referentni signal $y(t)$ da bi se odredio signal $u(t)$ upravljanja. Kao primere posmatraju se tri slučaja.

7.2.2.1. Linearni sistem upravljani signalom sinusnog oblika.

Neka je linearni oscilatorni sistem (3.1.27) opisan sistemom jednačina u obliku:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -2\delta_2 x_2(t) - \omega_2^2 x_1(t) + u(t).\end{aligned}\quad (7.2.8)$$

Onda je saglasno sa (7.2.5) signal upravljanja:

$$u(t) = 2\delta_2 x_2(t) + \omega_2^2 x_1(t) - \alpha_1 x_1(t) - \alpha_2 x_2(t) + \left(\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \alpha_2 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_1 y(t) \right) \quad (7.2.9)$$

Biraju se $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = 1$ i nakon $t = 100$ slobodni linearni sistem upravljamo signalom sinusnog oblika:

$y(t) = \sin(0.2t)$. Slika 7.2.5 a) pokazuje referentni signal punom linijom, a isprekidanom izlaz sistema koji se signalom $u(t)$ upravlja posle vremena $t = 100$ i sinhronizuje sa referentnim sinusnim signalom.

7.2.2.2. Nelinearni sistem upravljani signalom sinusnog oblika.

Neka je nelinearni oscilatorni sistem (4.2.3) opisan sistemom jednačina u obliku:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -2\delta_2 x_2(t) - \omega_2^2 x_1(t) - \tilde{\omega}_{2N}^2 x_1^3(t) + h_{01} \cos(\Omega_1 t + \mathcal{G}_{01}) + u(t)\end{aligned}\quad (7.2.10)$$

Onda je saglasno sa (7.2.5) signal upravljanja:

$$u(t) = 2\delta_2 x_2(t) + \omega_2^2 x_1(t) + \tilde{\omega}_{2N}^2 x_1^3(t) - h_{01} \cos(\Omega_1 t + \mathcal{G}_{01}) - \alpha_1 x_1(t) - \alpha_2 x_2(t) + \left(\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \alpha_2 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_1 y(t) \right) \quad (7.2.11)$$

Neka su $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = 1$ i nakon $t = 100$ slobodni nelinearni sistem upravljamo signalom sinusnog oblika:

$y(t) = \sin(0.2t)$. Slika 7.2.5 b) pokazuje referentni signal punom linijom, a iscrtanom izlaz sistema koji se signalom $u(t)$ upravlja posle vremena $t = 100$ i sinhronizuje sa referentnim signalom oblika sinusne funkcije, za vrednosti $2\delta_2 = 0.1$, $\tilde{\omega}_{2N}^2 = 1$, $\omega_2^2 = -1.8$, $h_{01} = 1.1$, $\Omega_1 = 0.4$ i $\mathcal{G}_{01} = 0$.

7.2.2.3. Nelinearni sistem upravljani drugim nelinearnim sistemom.

Neka je nelinearni oscilatorni sistem (4.2.3) opisan sistemom jednačina u obliku:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -0.1x_2(t) + 1.8x_1(t) - x_1^3(t) + 1.1 \cos(0.4t) + u(t)\end{aligned}\quad (7.2.12)$$

Prateći sistem, čiji izlazni signal mora da se posle konačnog vremena poklopi sa signalom glavnog sistema datog takođe izrazom nelinearnog oscilatora u obliku:

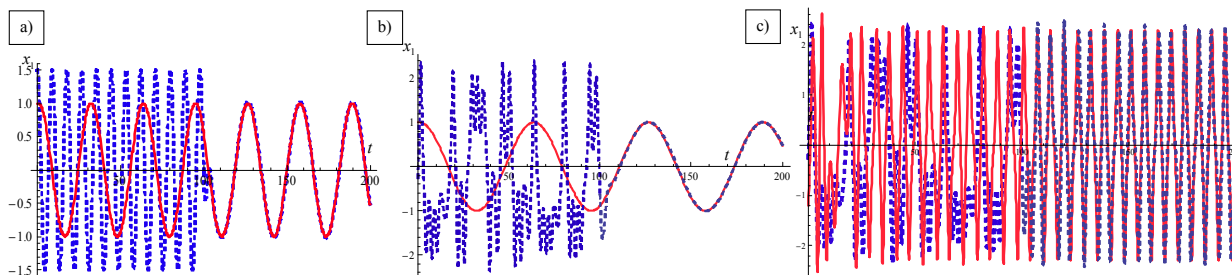
$$\begin{aligned}\frac{dy_1(t)}{dt} &= y_2(t) \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= -0.1y_2(t) + 1.8y_1(t) - y_1^3(t) + 1.1 \cos(t).\end{aligned}\quad (7.2.13)$$

pri čemu se menja samo frekvenciju prinude u pratećem sistemu.

Onda je, saglasno sa (7.2.5), signal upravljanja:

$$u(t) = 0.1x_2(t) - 1.8x_1(t) + x_1^3(t) - 1.1\cos(0.4t) - \alpha_1x_1(t) - \alpha_2x_2(t) + \left(\frac{d^2y_1(t)}{dt^2} + \alpha_2 \frac{dy_1(t)}{dt} + \alpha_1y_1(t) \right) \quad (7.2.14)$$

Neka su $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = 1$ i nakon $t = 100$ slobodni nelinearan sistem upravljamo kontrolnim nelinearnim sistemom (7.2.13). Slika 7.2.5 c) pokazuje referentni signal punom linijom, a iscrtanom izlaz sistema koji se signalom $u(t)$ upravlja posle vremena $t = 100$ i sinhronizuje sa referentnim izlaznim signalom glavnog nelinearnog sistema, za vrednosti $2\delta_2 = 0.1$, $\tilde{\omega}_{2N}^2 = 1$, $\omega_2^2 = 1.8$, $h_{01} = 1.1$, $\Omega_1 = 0.4$ i $\mathcal{G}_{01} = 0$.



Slika 7.2.5 Sinhronizacija linearnog i nelinearnog sistema. Referentni signal je prikazan punom linijom, izlaz sistema koji se upravlja do sinhronizacije sa referentnim signalom dat je isprekidanom linijom funkcija upravljanja se dodaje posle vremena $t = 100$. a) Linearni sistem sinhronizovan sa sinusnim signalom; b) nelinearni sistem sinhronizovan sa sinusnim signalom; c) Nelinearni prateći sistem sa izlazom prikazanim isprekidanom linijom sinhronizovan sa izlazom nelinearnog glavnog sistema što je u ovom slučaju referentni signal.

7.2.2.4. Sinhronizacija upravljanjem dva spregnuta nelinearna oscilatora

Iz dosada rečenog jasno je da se fenomen sinhronizacije može manifestovati na različite načine pa tako postoje i različiti koncepti opisa sinhronizovanih sistema. Najjednostavniji slučaj potpune sinhronizacije može da se postigne kada su dva identična sistema spregnuta dovoljno jakim vezom tako da njihova stanja nakon prelaznih promena podudaraju [228]. Fazna sinhronizacija opisana na primer u radu [242], kao globalno poklapanje faza, dok stvarne fazne razlike i amplitude ostaju haotične i u osnovi slabo uskleđene. Koncept generalizovane sinhronizacije za jednosmerno spregnute sisteme znači prisustvo funkcionalnog odnosa $u(t) = F[x(t)]$ između vektora stanja glavnog $x(t)$ sistema i vektora stanja pratećeg sistema $u(t)$ [244]. Ovaj odnos može biti prilično komplikovan i njegovo određivanje nije jednostavno. U zavisnosti od oblika tog odnosa $F[\cdot]$ - da li je bez ili sa prekidima- generalizovana sinhronizacija može biti jaka ili slaba, respektivno, pri čemu glavni i prateći sistemi mogu biti različiti pa čak mogu biti razmatrani sistemi i sa različitim dimenzijama faznog prostora. I kako funkcional ne mora biti jednakost kriterijum generalizovane sinhronizacije je prilično slab, ali ipak zahteva ispunjenost uslova međuzavisnosti preslikavanja lokalnih okolina u prvom sistemu i lokalnih okolina faznog prostora u drugom sistemu kao kvantitativni kriterijum. Postoje različite metode za otkrivanje različitih tipova sinhronizacije. Potpuna sinhronizacija može da se prepozna iscrtavanjem komponenti vektora stanja

pratećeg sistema naspram odgovarajućih komponenata vektora stanja glavnog sistema, koja je prava linija pod uglom od 45° , slika 7.2.6 a) ili b), dok se fazna sinhronizacija može identifikovati nestajanjem razlike sopstvenih frekvencija. Da bi se otkrila generalizovana sinhronizacija postoje različiti pristupi. Na primer, postoji pristup pomoćnog sistema, [1], u kom slučaju se ponašanje pomoćnog sistema $v(t)$ razmatra zajedno sa ponašanjem sistema odgovora $u(t)$, ali početni uslovi moraju biti različiti $v(t_0) \neq u(t_0)$ i ako oba početna uslova treba da pripadaju istom bazenu privlačenja haotičnog atraktora (ako postoji više stabilnih atraktora u sistemu). Ako se generalizovana sinhronizacija dešava u jednosmerno spregnutim nelinearnim haotičnim oscilatorima stanja sistema $v(t)$ i $u(t)$ postaju ekvivalentna posle prelaznih trenutaka i to zbog postojanja odnosa $u(t) = F[x(t)]$ i $v(t) = F[x(t)]$, tako da se poklapanje vektora stanja pratećeg sistema i pomoćnog sistema $u(t) \equiv v(t)$ uzima kao kriterijum koji potvrđuje prisustvo generalizovane sinhronizacije. Režim generalizovane sinhronizacije takođe može da se utvrdi u smislu proračuna uslovnih Lyapunov-ljevih eksponenata [232], gde je već napomenuto da je uslov sinhronizacije da najveći Lyapunov-ljev eksponent sistema pratioca bude negativan, [220].

U literature komentaran još jedan vid sinhronizacije, a to je sinhronizacija izazvana šumom [34], a podrazumeva dva identična ne spregnuta nelinearna haotična oscilatora $u(t)$ i $v(t)$ koji su izloženi dejstvu spoljašnjeg šuma $\xi(t)$. Spoljašni pobudni šum može izazvati usaglašavanje vektora stanja razmatranih sistema posle prelaznog režima. Sinhronizacija izazvana šumom kao i generalizovana sinhronizacija može da se realizuje samo ako su svi uslovni Lyapunov-ljevi eksponenti negativni [190, 227, 288]. U radu [164] pokazano je da su generalizovana sinhronizacija i sinhronizacija šumom dva tipa sinhronizacije izazvana sličnim mehanizmom i mogle bi se posmatrati kao jedan opšti oblik sinhronizacije. Taj mehanizam je zapravo suzbijanje sopstvene haotične dinamike sistema pratioca u smislu dodavanja prigušenja. Dodatno prigušenje može u sistem biti uvedeno ili u smislu nenulte srednje vrednosti šuma ili uz pomoć dodatnog člana sa prigušenjem ili pomeranjem stanja sistema u oblast faznog prostora sa jakom konvergencijom faznih trajektorija. Takođe i drugi uzroci pomeranja stanja sistema u region faznog prostora sa jakim prigušenjem mogu da se razmatraju kao što su spoljni signal velike amplitude ili šum sa velikom srednjom vrednošću.

Ključna činjenica u izučavanju i mogućnostima primene nelinearnih sistema sa haotičnim atraktorima jeste u prirodi samog haotičnog atraktora koji se sastoji od neograničenog broja nestabilnih periodičkih orbita. Ako se u sistemu žele načiniti samo male perturbacije i kako bi za kreiranje nove orbite iziskivalo veoma različite osobine sistema od onih koje sistem već ima, to se trebaju iskoristiti već postojeće nestabilne periodičke orbite. Upravljanje haosom po metodi OGY [216] predlaže da se najpre odrede neke od nestabilnih periodičkih orbita malog perioda u okviru haotičnog atraktora, te da se one izuče i izabere se jedna koja bi doprinela poboljšanju performansi sistema. Zatim se uvedi u sistem mala vremenski zavisna perturbacija parametra sistema da se načini ova već postojeća orbita stabilnom. Ako je tako onda prisustvo haosa u sistemima može da se nazove prednošću. Jasno je da bilo koja od orbita može da se stabilizuje i može se izabrati ona koja omogućava da sistem dostigne željene osobine. Sa druge strane ako atraktor nije haotičan, već je recimo periodičan onda male perturbacije parametara mogu da

izazovu male promene orbite. Praktično ograničenje su svojstva sistema koje daje ta stabilna orbita i nema se mogućnosti za suštinsko poboljšanje, osim da se naprave veće izmene u sistemu.

Takođe, ako se želi koristiti sistem za različite svrhe ili pod različitim uslovima u različitim vremenskim periodima, onda se zavisno od upotrebe zahtevaju različita svojstva istog sistema. Ako je sistem haotičan, ovakve promene dinamike sistema mogu da se načine, a da se ne čine velike promene u opštoj konfiguraciji sistema. U suštini, zavisno od željene upotrebe ponašanje sistema može da se promeni uključivanjem kratkotrajnog programa za male perturbacije parametra i da se stabilizuje kretanje po različitim orbitama. Nasuprot tome, u odsustvu haotičnog kretanja potpuno odvojeni sistemi moraju da se koriste za svaku željenu opciju. Pa tako, kada se dizajnira višenamenski sistem, svrshodno je dizajnirati sistem sa haotičnom dinamikom, jer to omogućava potrebnu fleksibilnost.

U radu [216] dat je prikaz metode za ostvarivanje ovakvih malih perturbacija parametara sistema koristeći unošenje koordinate sa kašnjenjem u dinamiku sistema, tako da je zapravo eksperimentalno jako pogodna, jer nije potrebno apriori poznavanje analitičkog rešenja dinamike sistema. Takođe, komentarisana je i bitna karakteristika haotičnog kretanja, a to je vreme uspostavljanja ili prelazni režim koji prethodi uspostavljanju periodičkog kretanja kao i uticaj šuma na sisteme sa haotičnim kretanjem. Iako ideja OGY metode može da se primeni na probleme sinhronizacije ona ne može biti opšta u tom području, osim toga ona zahteva neprestani kompjuterski monitoring sistema i rad sa Poincaré-ovim mapama da bi se pratile i odredile promene parametara. Kako je tačnost merenih kontrolnih parametara u ovakvim sistemima jako teško postići, a i zbog prisustva šuma koji često vodi sistem daleko od željenih orbita to se postignuta sinhronizacija gubi, a frekvencija i trajanje gubitka sinhronizacije zavise od intenziteta šuma, tako da se ovom metodom sinhronizacija generalno ne može postići.

Metoda kontinualnog upravljanja haosom [232] daje rezultate u hibridnim sistemima spregnutih podsystema, a postoje njene generalizacije na bazi metode upravljanja zavisnosti sistema od početnih uslova, [171]. Po metodi kontinualnog upravljanja haosom za dva spregnuta sistema data diferencijalnim jednačinama kretanja u kanonskom obliku:

$$\dot{x} = f(x), \quad (7.2.15a)$$

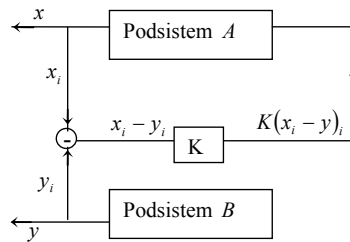
$$\dot{y} = f(y), \quad (7.2.15b)$$

pretpostavlja se da neke promenljive stanja oba sistema A i B mogu da se izmere, i to neka su $x_i(t)$ mereni signali sistema A i $y_i(t)$, $i=1,2,\dots,n$ sistema B . Sinhronizacija ova dva sistema postže se upravljanjem datim blok dijagramom na slici 7.2.6. Neke dinamičke promenljive oba sistema ($x_i(t)$ i $y_i(t)$) se mere i dva spregnuta sistema se povezuju negativnom povratnom spregom. Veza je jednosmerna tako da se razlika signala $x_i(t)$ i $y_i(t)$ koristi kao kontrolni signal:

$$F(t) = KD(t) = K(x_i(t) - y_i(t)) \quad (7.2.16)$$

koji se u sistem uvodi preko jednog od podsystema (na slici 7.2.6 podsystema A) kao negativna povratna sprega, [171]. $K > 0$ je eksperimenatlno dodata težina perturbacije, čiji će se izbor komentarisati u narednom tekstu. Poremećajni signal (7.2.16) modifikuje rešenja jednačine (7.2.15a) i izaziva

sinhronizaciju. Kada se režim sinhronizacije postigne tj. kada je $x_i(t) = y_i(t)$, $F(t)$ postaje nula i podsistemi A i B postaju praktično nespregnuti.



Slika 7.2.6 Blok dijagram upravljanja sinhronizovanjem podsistema A i B negativnom povratnom spregom

Ova metoda se primenjuje na dva identična nelinearna oscilatora čije se jednačine kretanja zapisuju u obliku:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + \alpha_1 x + x^3 = f \cos t, \quad (7.2.17a)$$

$$\ddot{y} + a\dot{y} + \alpha_1 y + y^3 = f \cos t, \quad (7.2.17b)$$

Za vrednosti $a = 0.1$, $\alpha_1 = 0$, $f = 10$ sistem (7.2.17) pokazuje haotično kretanje, slika 7.2.7, i ako se početni uslovi $x(0)$ i $y(0)$ malo razlikuju trajektorije podsistema (7.2.17a) i (7.2.17b) eksponencijalno divergiraju jedne od drugih. Da bi postigli sinhronizacioni režim u sistem se ubacuje signal (7.2.16) u jednačinu (7.2.17a) i dobija se sistem oblika:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + \alpha_1 x + x^3 = K(y - x) + f \cos t, \quad (7.2.18a)$$

$$\ddot{y} + a\dot{y} + \alpha_1 y + y^3 = f \cos t, \quad (7.2.18b)$$

Pri tome težina sprege K se bira tako da vreme sinhronizacije bude manje, a jasno je da veća težina sprezanja izaziva bržu sinhronizaciju, što je u radu [171] numeričkim proračunima i pokazano za interval vrednosti $K \in \{0.01, 0.1\}$. Ovde su pokazani na slici 7.2.7 rezultati numeričkog eksperimenta sa sinhronizacijom kontinualnom metodom upravljanja na sistemu jednačina (7.2.18), gde su takođe potvrđeni rezultati sinhronizacije samo za druge vrednosti težine sprezanja, kao i činjenica da je vreme sinhronizacije manje ukoliko je težina sprezanja veća slika 7.2.7 c) i d). Na slici 7.2.7 a) date su fazne trajektorije dva nespregnuta sistema (7.2.17a) i (7.2.17b) koji polaze iz neznatno različitih početnih uslova $x(0) = 1.0$, $y(0) = 1.1$ i $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0.2$, te se $x(t)$ i $y(t)$ znatno razlikuju. Na slici 7.2.7 b), c) i d) date su fazne trajektorije dva spregnuta podsistema (7.2.17a) i (7.2.17b) povratnom spregom koji polaze iz neznatno različitih početnih uslova $x(0) = 1.0$, $y(0) = 1.1$ i $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0.2$, i vidi se da shodno težini sprezanja K $x(t)$ i $y(t)$ imaju gustiji oblak oko prave $x(t) = y(t)$ za manje vrednosti $K = 1$, dok sa povećanjem $K > 2.5$ posle određenog vremena postaju $x(t) = y(t)$ i u sistemu je postignuta sinhronizacija i to za $K = 2.9$ vreme uspostavljanja sinhronizacije je $t_s = 180$, slika 7.2.7 c), za $K = 3$ vreme uspostavljanja sinhronizacije je $t_s = 90$, slika 7.2.7 d). Ipak ova metoda ne može se uvek primeniti za postizanje sinhronizacije, a dokazano je u radu [171] da je efikasna samo kada je broj pozitivnih Lyapunov-ljevih eksponenata sistema jednak broju pozitivnih eksponenata jednog podsistema, ako pak to nije slučaj menja se težina sprezanja ili se u podsistemima uzimaju povratne sprege više promenljivih stanja istovremeno. Zbog kontinualnosti samog upravljanja ova metoda je pogodna za uspostavljanje

sinhronizacije čak i u slučaju prisustva šuma, [171], takođe prednost joj je jer ne zahteva praćenje trajektorija podsistema.

Posmatraju se sada numerička rešenja dva spregnuta Duffing-ova oscilatora, [233], gde jedan predstavlja podsistem A sa promenljivim stanja (x, \dot{x}) , a drugi podsistem B sa promenljivim stanja (y, \dot{y}) date jednačinama:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -d\dot{x} - \alpha_1 x - \beta_1 x^3 - \delta \dot{y}^2 + f \cos t \\ \ddot{y} &= -d\dot{y} - \alpha_2 y - \beta_2 y^3 - \delta \dot{x}^2 + f \cos t\end{aligned}\quad (7.2.19)$$

Za slučaj kada su ovo identična dva sistema tj. kada su $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ i $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ i izabrani skup početnih uslova $x(0) \in (-1.2, 1.2)$, $y(0) \in (-0.6, 0.6)$ sa $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0.2$ sistem (7.2.19) ima šest koegzistirajućih haotičnih atraktora za skup vrednosti parametara sistema [234]. Fiksirajmo parametre $d = 0.4$, $\alpha = -0.25$, $\beta = 0.5$, $\delta = 0.05$ i $f = 0.28$ i za vrednosti početnih uslova: $X_1(0) = (x(0), \dot{x}(0), y(0), \dot{y}(0)) = (0.4, 0.2, 0.4, 0.2)$, $X_2(0) = (-0.8, 0.2, -0.8, 0.2)$, $X_3(0) = (0.4, 0.2, -0.8, 0.2)$, $X_4(0) = (-0.8, 0.2, 0.4, 0.2)$, $X_5(0) = (0.4, 0.2, 0.41, 0.2)$ i $X_6(0) = (-0.8, 0.2, -0.81, 0.2)$ postoje koegzistirajući atraktori od kojih su četiri prikazana na slici 7.2.8.

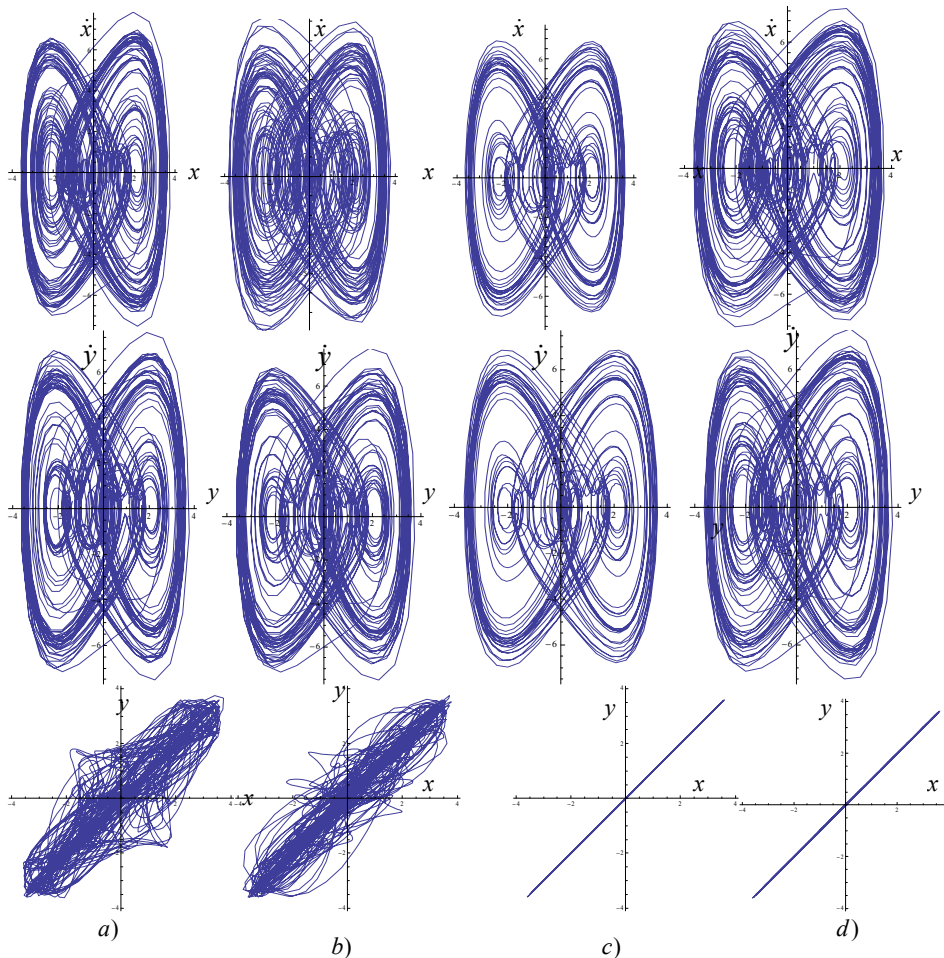
Za početne uslove $X_1(0)$ fazni portreti (x, \dot{x}) i (y, \dot{y}) , slika 7.2.8 a), su identični, te su sistemi potpuno sinhronizovani tj. $x(t) = y(t)$ i $\dot{x}(t) = \dot{y}(t)$, ista svojstva sistem su pronađena za atraktore dobijene za početne uslove $X_2(0)$. Ovo je zato što kada su $x(0) = y(0)$ i $\dot{x}(0) = \dot{y}(0)$ sprežući članovi $\delta \dot{x}^2 y$ i $\delta \dot{y}^2 x$ mogu da se zamene sa $\delta \dot{x}^3$ i $\delta \dot{y}^3$ i sistem (7.2.19) postaje sistem razdvojenih nelinearnih jednačina. Kao rezultat imaju se dva identična oscilatora sa identilnim početnim uslovima i to omogućava potpunu sinhronizaciju. Veliki deo atraktora za početne uslove $X_1(0)$, se nalazi u prvom kvadrantu, 7.2.6 a), ($x > 0, y > 0$), pa se naziva a_{++} , a drugi, 7.2.8 b), u trećem kvadrantu ($x < 0, y < 0$), pa se naziva a_{--} . Za početne uslove $X_3(0)$ pronađeni su atraktori, slika 7.2.8. c), ali oni nisu istovetni i nema sinhronizacije, isto je pronađeno i za $X_4(0)$. Na slici 7.2.8. d) prikazan je atraktor za početne uslove $X_5(0) = (0.4, 0.2, 0.41, 0.2)$ i označen je sa b_{++} . Geometrija faznih portreta je identična ($t = 100 - 300 s$), ali postoji razlika između atraktora a_{++} i ovog b_{++} . Za atraktor a_{++} promenljive stanja podsistema su potpuno sinhronizovane dok su kod atraktora b_{++} asinhronizovane. Prave linije na dijagramima $x - y$ i $\dot{x} - \dot{y}$, slika 7.2.6 a), ukazuje na činjenicu da su $x(t) = y(t)$ i $\dot{x}(t) = \dot{y}(t)$, dok sa druge strane sa slike 7.2.8 d) jasno se vidi da su $x(t) \neq y(t)$ i $\dot{x}(t) \neq \dot{y}(t)$, što znači da su podsistemi asinhronizovani. Činjenica je i da za sprezanje $-\delta \dot{y}$ (odnosno $-\delta \dot{y}^3$) u prvoj jednačini sistema (7.2.19), i $-\delta \dot{x}$ (odnosno $-\delta \dot{x}^3$) u drugoj jednačini sistema (7.2.19) za $\delta = 0.05$ sistem ima period $2T$ ($T = 2\pi/\omega$), a trajektorije podsistema imaju faznu razliku T .

Na sistem (7.2.19) se primenjuje ista metoda kontinualne povratne sprege, [232], i posmatra se taj sistem koji označimo sa S i njegovu identičnu kopiju označenu sa S' . Pretpostavka je da su S i S' u haotičnom stanju atraktora b_{++} . Spregnimo sisteme S i S' jednosmerno sa signalom razlike $\varepsilon(x' - x)$ i

$\varepsilon(x' - y)$ koji se dodaje podsistemima A i B , tako da su sa dodavanjem signala upravljanja jednačine kretanja sistema S oblika:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -d\dot{x} - \alpha_1 x - \beta_1 x^3 - \delta xy^2 + f \cos t + \varepsilon(x' - x) \\ \ddot{y} &= -d\dot{y} - \alpha_2 y - \beta_2 y^3 - \delta yx^2 + f \cos t + \varepsilon(x' - y)\end{aligned}\quad (7.2.20)$$

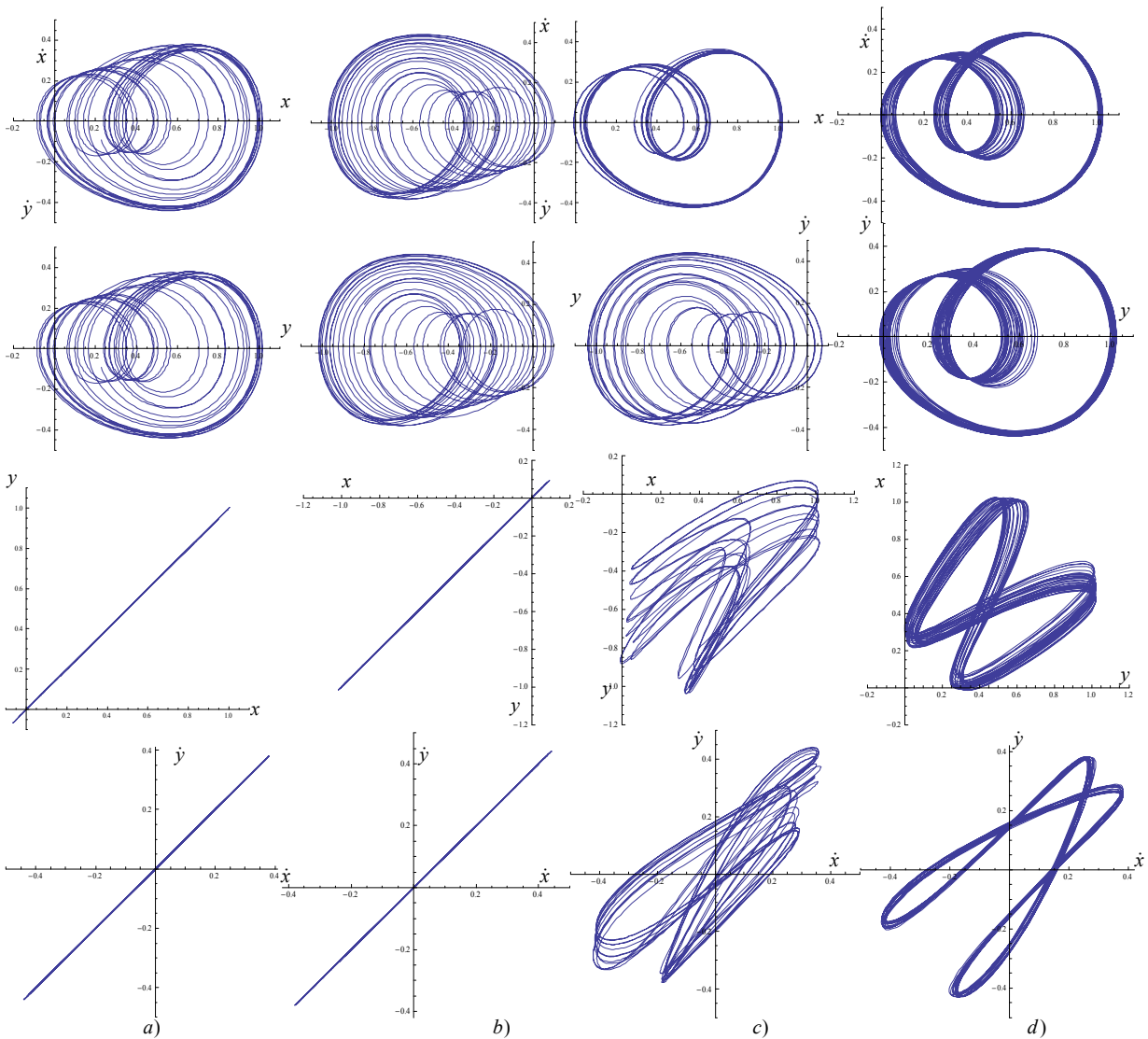
gde je x' komponenta x sistema S' , tj. istog ovog sistema samo bez upravljačkog signala $\varepsilon = 0$, a ε je jačina upravljanja. Upravljanje se uključuje u sistem posle $t_s = 300s$. Za jedan opseg vrednosti ε ($\varepsilon \geq \varepsilon_c = 8.0209$, [235]) korekcionni signal modifikuje sistem S i stabilno ga sinhronizuje. Za vrednosti $\varepsilon = 10$ dijagrami $x - y$ i $x - x'$ su prave linije pod uglom 45° što ukazuje da su $x(t) = y(t) = x'(t)$.



Slika 7.2.7 Fazni portreti haotičnih atraktora podsistema A i B a) za sistem (7.2.17) i vrednosti $a = 0.1$, $\alpha_1 = 0$, $f = 10$ i za vrednosti početnih uslova $x(0) = 1.0, \dot{x}(0) = 0.2$ i $y(0) = 1.1, \dot{y}(0) = 0.2$, b) za sistem (7.2.18) i vrednosti $a = 0.1$, $\alpha_1 = 0$, $f = 10$ sa težinom spreznja $K = 1$ i za vrednosti početnih uslova $x(0) = 1.0, \dot{x}(0) = 0.2$ i $y(0) = 1.01, \dot{y}(0) = 0.2$, c) za sistem (7.2.18) i vrednosti $a = 0.1$, $\alpha_1 = 0$, $f = 10$ sa težinom spreznja $K = 2.9$ i za iste vrednosti početnih uslova vreme početka sinhronizacije je $t_s = 180s$, d) za sistem (7.2.18) svih istih vrednosti osim težine spreznja $K = 3$ gde je vreme početka sinhronizacije je $t_s = 90s$.

Istom metodom su ispitivana i upravljanja atraktorima koji odgovaraju početnim uslovima $X_3(0)$ i $X_4(0)$ i nije postignuta sinhronizacija metodom kontinualnog upravljanja sa povratnom spregom, ali je pronađena za jedan opseg vrednosti ε migracija faznih trajektorija ka atraktoru b_{++} . Takođe, se slično

dešava i kada se u sistem (7.2.19) uvede jednosmerno upravljanje oblika $\varepsilon(x-y)$ u drugu jednačinu sistema te se dobije sistem:



Slika 7.2.8 Fazni portreti koegzistirajućih atraktora sistema (7.2.15) za $d=0.4$, $\alpha=-0.25$, $\beta=0.5$, $\delta=0.05$ i $f=0.28$ i za vrednosti početnih uslova: a) $X_1(0)=(x(0),\dot{x}(0),y(0),\dot{y}(0))=(0.4,0.2,0.4,0.2)$, b) $X_2(0)=(-0.8,0.2,-0.8,0.2)$, c) $X_3(0)=(0.4,0.2,-0.8,0.2)$, d) $X_5(0)=(0.4,0.2,0.41,0.2)$.

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -d\dot{x} - \alpha_1 x - \beta_1 x^3 - \delta xy^2 + f \cos t \\ \ddot{y} &= -d\dot{y} - \alpha_2 y - \beta_2 y^3 - \delta yx^2 + f \cos t + \varepsilon(x-y)\end{aligned}\quad (7.2.21)$$

U odsustvu signala $\varepsilon(x-y)$ kretanje sistema je dato u faznoj ravni asinhronim atraktorom b_{++} , i nije moguće postići sinhronizaciju u sistemu ni za koje vrednosti ε . Umesto toga moguće je aktuelnu dinamiku atraktora b_{++} usmeriti na atraktor a_{++} , za vrednosti $\varepsilon \geq \varepsilon_c \approx 0.11116$. Kada se upravljanje uključi sistem prelazi u stanje za koje su $x(0)=y(0)$ i $\dot{x}(0)=\dot{y}(0)$ zadovoljne za duži period vremena. Videlo se ranije da je atraktor a_{++} dobijen za tačno određene početne vrednosti, ali ovakav vid migracije

atraktor b_{++} ka atraktoru a_{++} pokazuje da atraktor a_{++} može da se dobije za proizvoljne početne uslove odgovarajućim izborom upravljanja sa povratnom spregom.

Pored već izloženih rezultata radova dostupnih iz literature i ovde proverenih primera uspostavljanja sinhronizacije upravljenjem navode se rezultati još nekoliko skorašnjih radova na istu temu.

U radu [224], opisana je potpuna sinhronizacija između dva spregnuta Duffing-ova oscilatora vođena sa harmonijskim signalom. Pokazana su pri tome tipična ponašanja mehaničkih sistema spregnutih oprugom i upoređene su različite metode otkrivanja potpune sinhronizacije. U narednom radu istih autora [223] teorija je razvijena i pokazano je postojanje isprekidane (ragged) sinhronizabilnosti tj. postojanje isprekidanih oblasti potpune sinhronizacije u prostoru parametara sistema, što je svojstven fenomen sistemima spregnutim sa oprugom, takođe je određen odnos između maksimalnog Lyapunov-ljevog eksponenta spregnutog sistema i koeficijenta sprežanja. U radu [263] prikazan je postupak za otkrivanje potpune sinhronizacije u sistemima pobuđenim haotičnim ili isprekidanim signalom. U radu [223] opisan je odnos između potpune, fazne i generalizovane sinhronizacije mehaničkih oscilatora (koji su sistem odgovora) vođenih haotičnim signalom koji stvara vodeći sistem. Sve to je prikazano na primeru dva Duffing-ova oscilatora međusobno spregnuta sa prigušnicom i preko opruga istih ili malo različitih svojstava podvrnutih vodećem signalu, koji je u ovom slučaju izlaz Rössler-ovog haotičnog oscilatora. Potvrđena je bliska zavisnosta između promena u spektru Lyapunov-ljevih eksponenata i prelaza između različitih tipova sinhronizacije.

7.2.3. Sinhronizacija u sistemu dva oscilatora spregnuta statičkim ili dinamičkim vezama

U ovom delu biće prikazani rezultati ispitivanja sinhronizacije u hibridnim sistemima linearnog i nelinearnog oscilatora međusobno spregnutih statičkim ili dinamičkim vezama razmatranim u poglavlju 3.1 i 4.1, kao i međusobno spregnuta dva identična ili dva veoma malo različita nelinearna oscilatora.

7.2.3.1. Linearni i nelinearni oscilator međusobno spregnuti statičkim vezama

Posmatraju se rezultati numeričke analize statičkog sprežanja dva spregnuta podsistema u hibridni sistem metodom Runge Kutta 4 reda u programu Matematica iz poglavlja 3.1, gde su izvedena analitička rešenja u prvoj asimptotskoj aproksimaciji statički spregnutih linearnog i nelinearnog sistema, kao i primer iz poglavlja 4.2.2, gde je posmatran taj isti hibridni sistem samo sa prinudnim harmonijskim silama. Pre svage ovde se podvlače rezultati koji se odnose na mogućnost potpune sinhronizacije podsistema kada se menja koeficijent statičke sprege. Najpre se posmatra sistem (3.1.22) i njegova numerička rešenja za vrednosti parametara sistema $2\delta_1 = 2\delta_2 = 0.1$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 0.1$ i $\tilde{\omega}_{N1}^2 = 0.1$, pri čemu se vrednosti koeficijenta statičkog sprežanja menjaju u intervalu $a_1^2 = a_2^2 \in \{0.1, 15\}$. Za vrednost

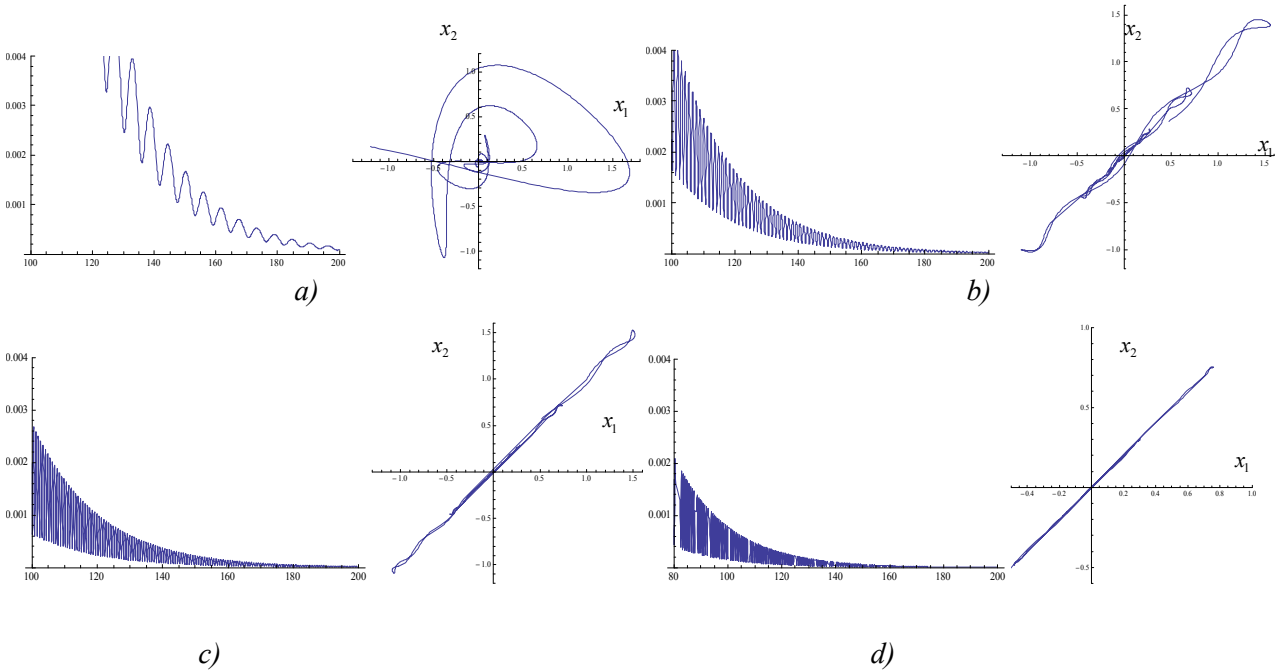
$a_1^2 = a_2^2 = 0.1$ pri jako slabom statičkom sprezanju sinhronizacija sistema je moguća ali u jako uskom intervalu početnih uslova $x_2(0) = 0$, $x_1(0) \in \{0, \pm 0.5\}$, a pri tome posle vremena $t = 140[s]$ greška sinhronizacije biva manja od 0.001. Sa dijagrama greške sinhronizacije, slika 7.2.9, koju računamo po izrazu [223]:

$$z_s(t) = \sqrt{\frac{1}{\varpi^2}(x_1 - x_2)^2 + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2} \quad (7.2.22)$$

gde je koeficijent $\varpi[s]$ uveden radi dimenzionog usaglašavanja ovog izraza, i daje mu se formalna vrednost $\varpi = 1[s]$. Vidi se da za malo veći opseg početnih pomeranja oba sistema smanjenje vremena sinhronizacije uzrokovano je porastom koeficijenta krutosti statičke sprege, takođe je jasno da sve jače sprezanje uslovljava da su $x_1(t)$ i $x_2(t)$ sve bliskiji. Za vrednosti $a_1^2 = a_2^2 = 14.56$, imamo skoro dijagonalnu liniju na dijagramu x_1, x_2 a potpuna sinhronizacija nastupa već posle $t = 160[s]$. Dakle, povećanjem jačine sprezanja povećava se i mogućnost sinhronizacije za veći opseg početnih uslova, a takođe se smanjuje i vreme potrebno da sinhronizacija nastupi, slika 7.2.9. Za slučaj hibridnog sistema sa statičkom spregom sa spoljašnjom harmonijskom prinudom na podsisteme koristiće se primer sistema iz poglavlja 4.2.2, pri čemu će se menjati pored jačine sprege i amplitudu spoljašnje pobude. Za sistem (4.2.15) sa vrednošću parametara $2\delta_1 = 2\delta_2 = 0.1$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 0.1$ i $\tilde{\omega}_{N1}^2 = 0.1$, parametri prinudnih sila isprva jednake amplitude $h_{01} = h_{02} = 2.7$, i faze $\Omega_i t + \vartheta_{0i} = t$, pri čemu vrednosti koeficijenta statičkog sprezanja menjamo u intervalu $a_1^2 = a_2^2 \in \{5, 35\}$. Povećanjem amplitude spoljašnje pobude generalno potreban je veći koeficijent sprezanja da bi se uspostavila sinhronizacija. Međutim, za iste vrednosti amplitude postoji jedan uski interval koeficijenta sprezanja koji ne omogućava potpunu sinhronizaciju, već postoji jedan atraktor bliskosti pomeranja oba sistema za sve vrednosti početnih uslova sistema, a greška sinhronizacije ostaje relativno velika. Takav jedan atraktor asinhronizacije koji zapravo i ne očekujemo u datoj oblasti koeficijenta sprezanja, jer u području neposredno ispred postoji atraktor sinhronizacije sa manjom greškom sinhronizacije, pojavljuje se za jako uzak interval koeficijenta sprezanja i egzistira i za druge vrednosti amplituda prinudne sile, pa čak iako one nisu jednake kod oba sistema, slika 7.2.10 c). Karakteristično je za ovaj sistem jednačina sa koeficijentom statičke sprege u intervalu $a_1^2 = a_2^2 = 10.5 - 11$ da oba podsistema poseduju koegzistirajuće atraktore, slika 7.2.10 a), sa kvaziperiodičkim kretanjem perioda T , ali da se ti atraktori razlikuju i zapravo jedan prati drugi.

Lepote prikaza radi, a pre svega potkrepljanja činjenica radi, posmatraju se ista ova dva sistema samo neka su oba podsistema nelinearni i neka je hibridni sistem homogen tj. Posmatra se mogućnost sinhronizacije dva nelinearna podsistema statičkom spregom spregnuta i to u slučaju da postoji identična spoljašnja pobuda na oba podistema. Dva nelinearna sistema sa haotičnim atraktorima spregnuta statičkom spregom mnogo je lakše sinhronizovati tj. potreban je mnogo manji koeficijent statičkog sprezanja i deset puta manji nego li u prikazanom slučaju ista takva dva podsistema od kojih je jedan linearan. Na slici 7.2.11 prikazani su fazni dijagrami podistema i dijagrami funkcija $x_1 - x_2$ i $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$ za dva nelinearna podistema oblika:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) + 0.1\dot{x}_1(t) + 0.1x_1(t) + 0.1x_1^3(t) + a_1^2 x_1(t) - a_1^2 x_2(t) &= 2.7 \cos(t) \\ \ddot{x}_2(t) + 0.1\dot{x}_2(t) + 0.1x_2(t) + 0.1x_2^3(t) + a_1^2 x_2(t) - a_1^2 x_1(t) &= 2.7 \cos(t) \end{aligned} \quad (7.2.23)$$



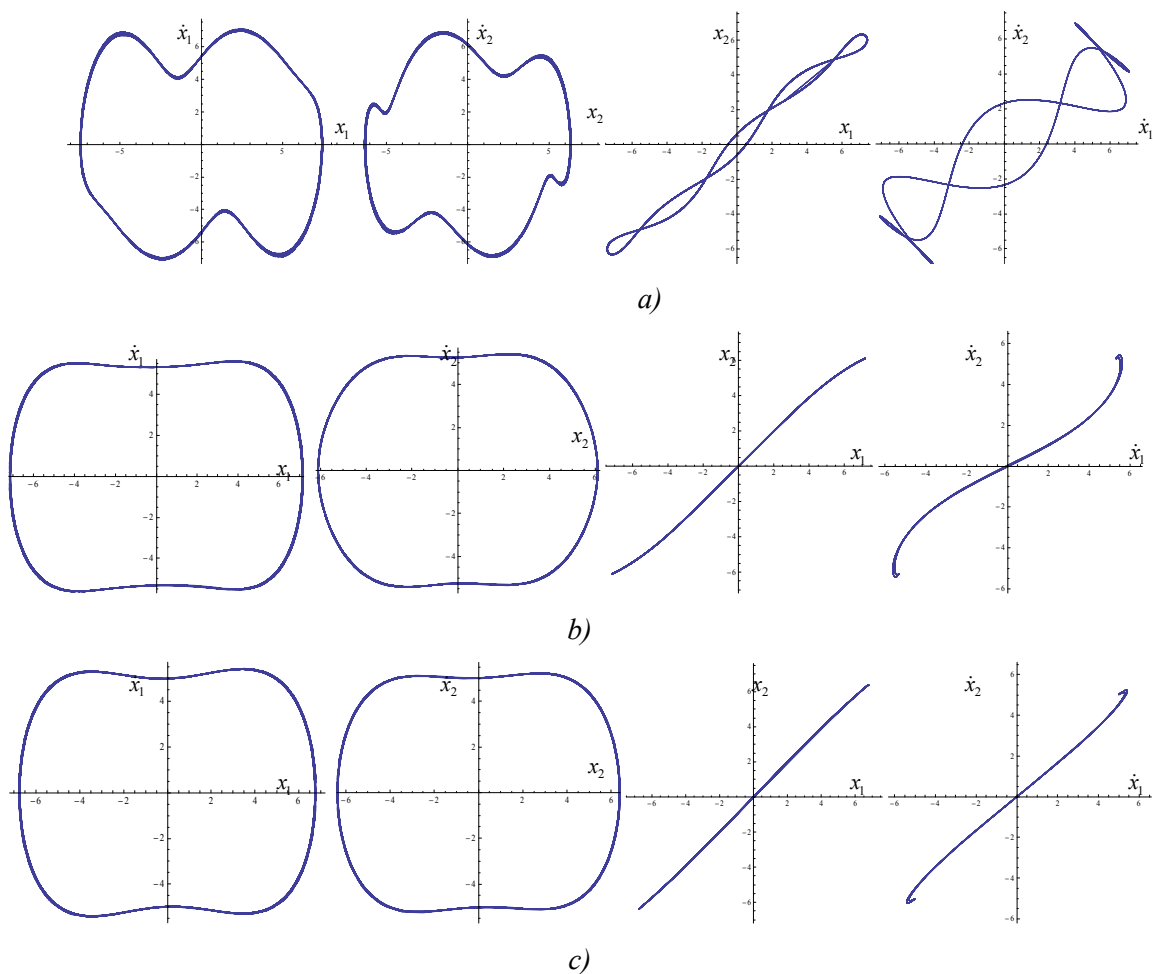
Slika 7.2.9 Funkcija greške sinhronizacije $z_s(t)$ i zavisnost $x_1(t)$ i $x_2(t)$ hibridnih slobodnih sistema spregnutih statičkim vezama. a) koeficijent krutosti statičke sprege je $a_1^2 = a_2^2 = 0.1$; b) $a_1^2 = a_2^2 = 3.56$ i c) $a_1^2 = a_2^2 = 9.56$ a u sva tri slučaja početni uslovi su isti $x_1(0) = 2.49, \dot{x}_1(0) = -0.2$ i $x_2(0) = 2.5, \dot{x}_2(0) = -0.2$, d) $a_1^2 = a_2^2 = 14.56$ početni uslovi su $x_1(0) = 1.49, \dot{x}_1(0) = -0.2$ i $x_2(0) = 1.5, \dot{x}_2(0) = -0.2$

sa početnim uslovima $x_1(0) = 2.49, \dot{x}_1(0) = -0.2$ i $x_2(0) = 2.5, \dot{x}_2(0) = -0.2$ i to za dva slučaja koeficijenta statičkog spreznjanja $a_1^2 = 0.8$, slika 7.2.11 a), i $a_1^2 = 0.87$, slika 7.2.11 b). Vidimo da je potpuna sinhronizacija postignuta već sa koeficijentom statičkog spreznjanja $a_1^2 = 0.87$, dok za vrednosti koeficijenta $a_1^2 = 0.6 - 0.87$ postoji skup koegzistirajućih atraktora asinhronizacije za ovaj sistem, sličnih onome prikazanom na slici 7.2.11 a), što su vrednosti koeficijenta statičke sprege niže atraktori sinhronizacije su už i, zavisno od bazena atrakcije početnih uslova, okrenuti su za 180° oko prave $x_1(t) = x_2(t)$.

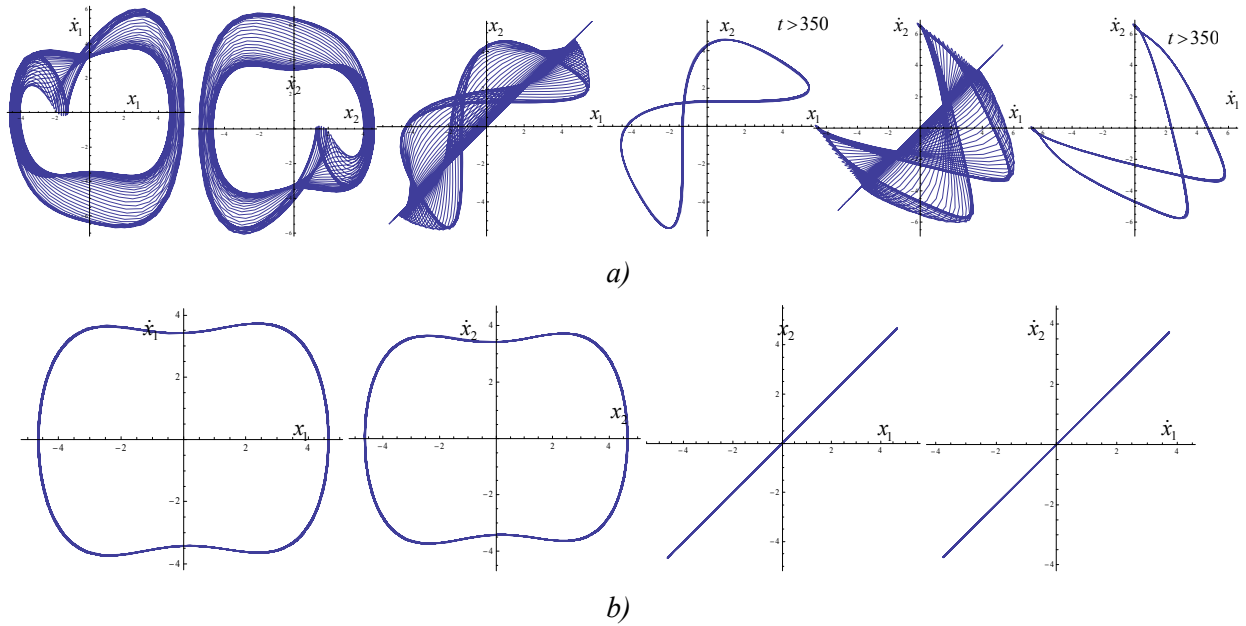
7.2.3.2. Linearni i nelinearni oscilator međusobno spregnuti dinamičkim vezama

Da bi se podvukla razlika spreznjanja podsistema različitim tipovima veza posmatra se sada, u ovom poglavlju, mogućnosti sinhronizacije u sistemima sa dinamičkom spregom i kao primer za prikaz numeričkih rezultat i izvođenje zaključaka posmatrajmo sistem (3.2.7) dinamičke sprege linearnog i nelinearnog oscilatora. Kao i u slučaju statičke sprege neka su $2\delta_1 = 2\delta_2 = 0.1$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 0.1$ i $\tilde{\omega}_{N1}^2 = 0.1$, amplituda spoljašnjih pobudnih sila $h_{01} = h_{02} = 2.7$, i faza $\Omega_i t + \mathcal{G}_{0i} = t$, a koeficijente dinamičkog spreznjanja posmatramo u intervali $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.1 - 0.99$. Na slici 7.2.12 dati su fazni portreti podsistema

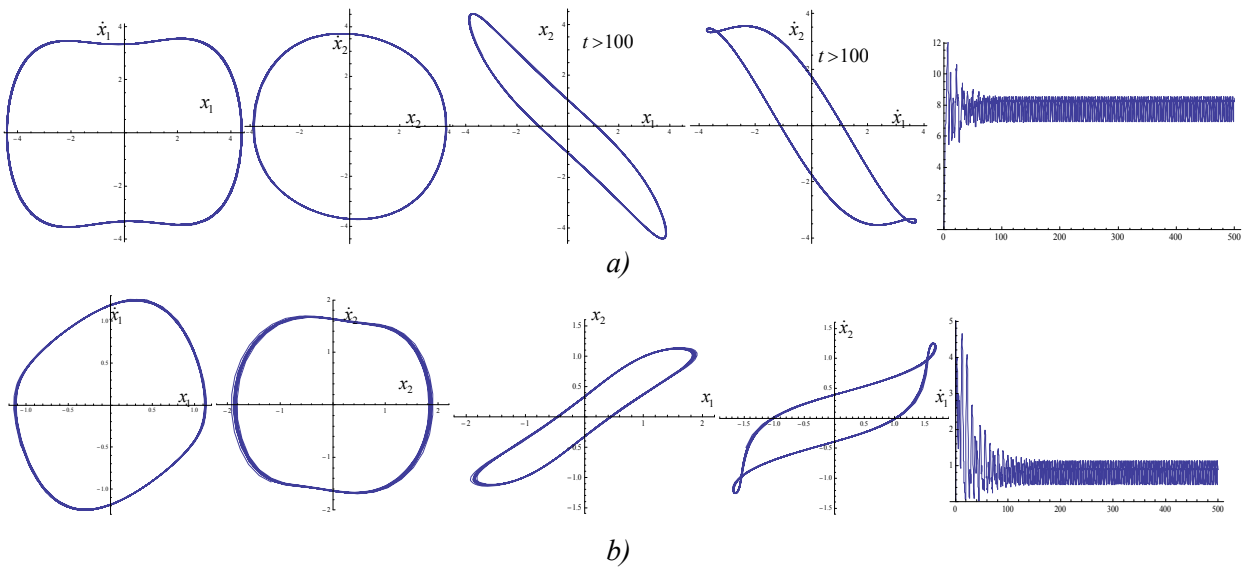
linearnog i nelinearnog dinamički spregnuti sa dve različite vrednosti koeficijenta dinamičkog sprezanja, kao i funkcije $x_1 - x_2$ i $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$, sa ovih dijagrama uočava se da sinhronizacija u ovakvim sistemima ovakvom međusobnom spregom nije moguća, postoji atraktor sinhronizacije koji daje prilično veliku grešku sinhronizacije ali je posle izvesnog vremena drži ograničenom periodičnom funkcijom u uskom intervalu. Zbog toga ovakav vid sprezanja sistema bi mogao da se iskoristi u sistemima praćenja i uspostavljanja sinhronizacije u njima. Međutim, ako su oba podsistema nelinearni i spregnuti dinamički pojavljuje se zanimljiv fenomen kratkotrajne početne sinhronizacije koja prelazi u asinhronizaciju ili se brzo potpuno narušava pri manjim vrednostima koeficijenta dinamičkog sprezanja $\kappa_1 = \kappa_2 < 0.425$, slike 7.2.13 a) i b), ali već pri $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.43$ dolazi do potpune sinhronizacije, slika 7.2.13 c). Za vrednosti koeficijenta dinamičkog sprezanja $\kappa_1 = \kappa_2 < 0.1$ podsistemi su potpuno sinhronizovani što objašnjavamo malim uticajem dinamičkog sprezanja na podsisteme.



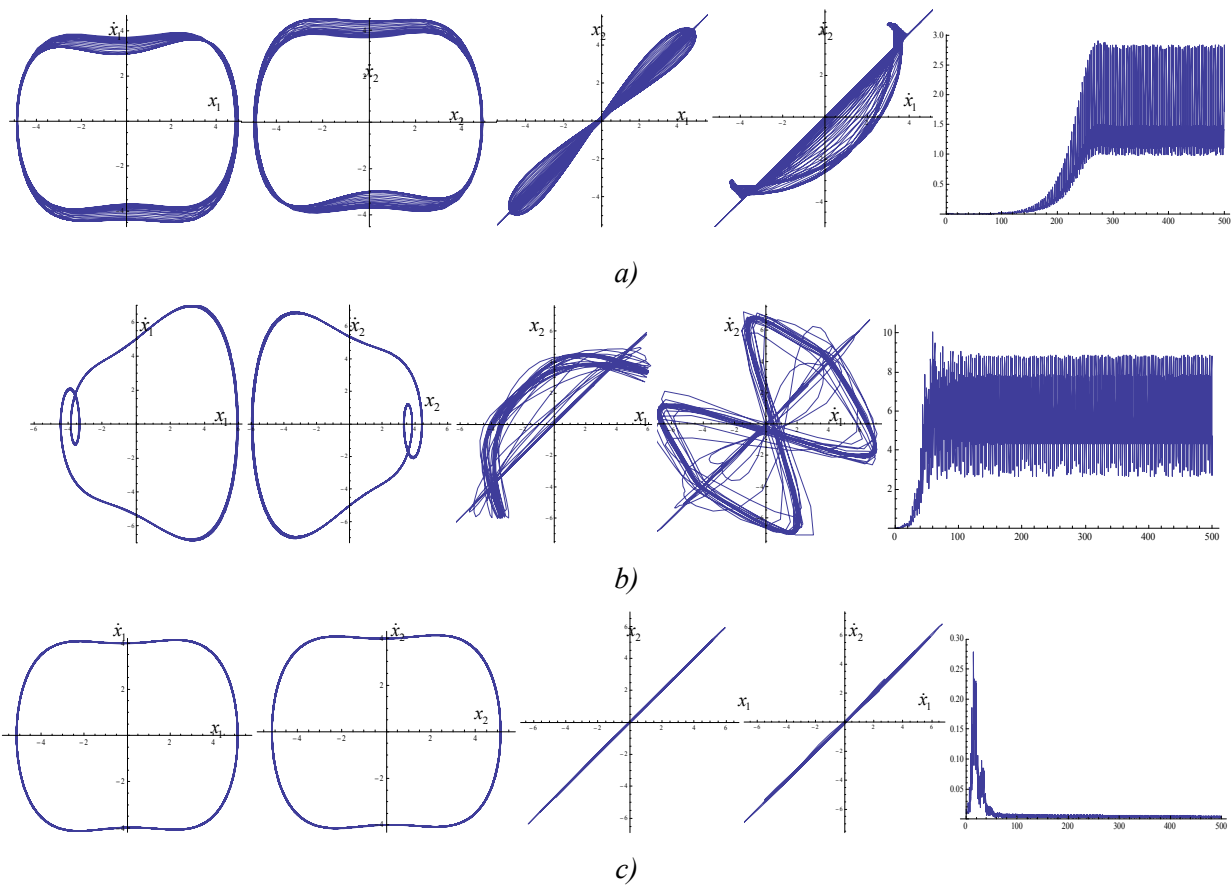
Slika 7.2.10 Fazni dijagrami hibridnih podsistema spregnutih statičkim vezama sa spoljašnjom pobudom: a) koeficijent krutosti statičke sprege je $a_1^2 = a_2^2 = 10.7$; b) $a_1^2 = a_2^2 = 13.7$ i c) $a_1^2 = a_2^2 = 35$ i $h_{01} = 2.7$ a $h_{02} = 3.9$ a u sva tri slučaja početni uslovi su isti $x_1(0) = 2.49, \dot{x}_1(0) = -0.2$ i $x_2(0) = 2.5, \dot{x}_2(0) = -0.2$.



Slika 7.2.11 Fazni dijagrami hibridnih nelinearnih podistema (7.3.23) spregnutih statičkim vezama sa spoljašnjom pobudom: a) koeficijent krutosti statičke sprege je $a_1^2 = 0.8$ i b) $a_1^2 = 0.87$ a u oba slučaja početni uslovi su isti $x_1(0) = 2.49, \dot{x}_1(0) = -0.2$ i $x_2(0) = 2.5, \dot{x}_2(0) = -0.2$



Slika 7.2.12 Fazni dijagrami, dijagrami funkcija $x_1 - x_2$ i $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$, kao i funkcije greške sinhronizacije (7.3.22) hibridnih podistema spregnutih dinamičkim vezama sa spoljašnjom pobudom: a) koeficijent krutosti dinamičke sprege je a) $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.19$ i b) $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.99$ a u oba slučaja početni uslovi su isti $x_1(0) = 2.49, \dot{x}_1(0) = -0.2$ i $x_2(0) = 2.5, \dot{x}_2(0) = -0.2$



Slika 7.2.13 Fazni dijagrami, dijagrami funkcija $x_1 - x_2$ i $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$, kao i funkcije greške sinhronizacije (7.3.22) hibridnih nelinearnih podsistema spregnutih dinamičkim vezama sa spoljašnjom pobudom sa koeficijentom krutosti dinamičke sprege : a) $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.19$; b) $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.39$ i c) $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.425$ a u sva tri slučaja početni uslovi su isti $x_1(0) = 2.49, \dot{x}_1(0) = -0.2$ i $x_2(0) = 2.5, \dot{x}_2(0) = -0.2$.

8* Poglavlje

Optimalno upravljanje i upravljivost oscilacijama u dinamikama hibridnih sistema

8.1. Optimalno upravljanju u nelinearnim sistemima

U prethodnom poglavlju već se govorilo da je upravljanje nelinearnih sistema na nestabilnim periodičkim orbitama koje su u sastavu haotičnog atraktora predmet istraživanja poslednjih dvadesetak godina počev od radova iz 1990 godine. [216]. Kako su te periodičke orbite rešenja već postojećih jednačina dinamike nelinearnog sistema moguće je sistem stabilisati na tim orbitama sa malim upravljačkim signalima. Mnogi algoritmi ovakvog upravljanja su zasnovani na idejama iz radova Ott-a, Grebogi-a i Yorke-a [216, 242]. Njihove tehnike (OGY) omogućavaju efikasno upravljanje nestabilnih periodičkih orbita kada se radi na Poincaré-ovom preseku. Međutim, vreme potrebno da se dostigne željena periodička orbita iz neke proizvoljne početne pozicije može biti veoma dugo, i to vreme eksponencijalno raste kako maksimalne dozvoljene amplitude upravljanja opadaju. Za bi se smanjilo vreme potrebno za dostizanje željenog periodičkog kretanja u radu [176] predložena je tehnika “ciljanja”, međutim ta tehnika je zasnovana na praćenjima pomoću računara i može biti teško upotrebiti je u

praktičnim situacijama, kao i u više dimenzionalnim faznim prostorima gde se zahtevaju prećenja stabilnih i nestabilnih mnogostrukosti sistema u okviru faznog prostora.

Optimalno upravljanje ima jako dugačku istoriju, ali se retko koristilo za upravljanje haotičnih sistema [23, 262]. U radu [2] razmatran je jedan alternativni način skraćanja vremena zasnovan na teoriji optimalnog upravljanja gde se koristi metoda lokalne primene Pontryagin-ovog principa maksimuma [250]. Razvijena je jedna jednostavna formula upravljanja u jednom koraku za usmeravanje faznog portreta sistema u izabrani skup tačaka faznog prostora, a potom i zadržavnja istih u željenom području. Taj niz ciljanih tačaka obično leži na nestabilnoj periodičkoj orbiti neupravljanog sistema. Pravilo upravljanja zahteva da mogu biti primenjene samo male vrednosti kontrolera u okolini nominalnog neupravljanog stanja. To znači da male perturbacije u sistemu mogu biti iskorišćene za tačno i efikasno upravljanje. Pri tome, tehnika se razlikuje od tradicionalnog problema praćenja signala jer ovde ne postoji unapred određeni referentni signal već kada je dostignut ciljani skup on se prati u konvencionalnom smislu, jer je on zapravo i jedna orbita sistema. Princip Pontryagin-ovog minimuma korišćen u radovima [72, 85], minimizira vremenski interval procesa. Pri tome se sistem iz jednog "poremećenog" zadatog stanja za minimalno vreme prevodi u "neporemećeno" ili ravnotežno (stacionarno) stanje.

U praksi se koristi i metoda rekonstrukcije faznog prostora sistema razmatranjem jedne skalarne promenljive [1, 266], a potom modeliranje dinamike u tom prostoru koristeći se svojstvima atraktora sistema, tako je moguće predvideti razvoj orbite i potom primeniti upravljanje da bi se dobio željeni izlaz i to sve bez poznavanja jednačina kretanja sistema. U radu [2] podvučena je i razlika između pretpostavljene "rekonstrukcije" sa njenim poreklom iz teorije dinamičkih sistema što se razlikuje od pretpostavke formiranja koja je uobičajenija u teoriji upravljanja [206], gde su jednačine sistema pretpostavkom poznate, izuzev možda za neke parametre, i stanje i mogući parametri trebaju da se formiraju. Metoda upravljanja, za poznati ili rekonstruisani sistem, koristi kratke kontrolne pulseve male amplitude, i zato ima prednost kod osetljivosti haotičnih sistema na perturbacije. Nestabilnost sistema se koristi da bi se dobila ciljani orbita. U užem smislu ova metoda liči na OGY metodu, ali se razlikuje od nje na dva važna načina potencijalno dugačko vreme pre upravljanja nije potrebno niti je potrebno detaljno proračunavanje stabilne i nestabilne mnogostrukosti za obrazac upravljanja ili za ciljanje. U radu je data tačna formula za upravljanje u „jednom koraku”, kada upravljanje ostaje blisko nominalnoj operativnoj vrednosti. „Jedan korak” može biti razvijanje dinamičkog sistema kroz jedan posmatrani korak vremena ili kompozicija od mnogo mapa vremena l koje prevode sistem iz datog stanja u stanje mnogo koraka duž atraktora. Pri tome je napomenuto da je ograničenje na upravljanje jednim korakom ustvari ograničenje koje ne dozvoljava upravljanje svim sistemima, čak ni svim upravljivim linearnim sistemima. U osnovi ova metoda može da se primeni i kod upravljanja u više koraka. To znači da, na primer, proširena verzija ove metode bi stabilizirala bilo koji upravljivi linearan sistem, a ova metoda je efikasna u skoro svim slučajevima od interesa gde je dinamika dvodimenzionalna. Dakle, u radu [2] korišćene su tehnike optimalnog upravljanja i razvijena je metoda upravljanja koja u jednom koraku usmerava nelinearni sistem ka željenoj orbiti zadržavajući ga na njoj. Željena lokacija na izabranoj trajektoriji na svakom nivou upravljanja određuje se dinamički početnim uslovima i dinamikom sistema, a

željena trajektorija je aproksimacija nestabilne periodičke orbite neupravljanog sistema. Linearna analiza stabilnosti u radu pokazuje da je prigušenje u dinamičkom sistemu osnov za postizanje upravljivog stanja.

Duffing-ova jednačina je jedna od najviše istraživanih jednačina u oblasti primenjene nelinearne dinamike, između ostalog njome se opisuje nelinearna dinamika jednog moda greda opterećenih na izvijanje [270], zatim nelinearna dinamika magnetnoelektričnog klatna [204] i mnogih drugih mehaničkih sistema i struktura. Zapravo je to jedanačina arhetip oscilatora u dvostrukoj simetričnoj potencijalnoj dolini koja poseduje veoma zanimljivu i bogatu nelinearnu dinamiku. Pored ostalih fenomena već spomenutih ovde se navodi i sledeće:

- Postojanje i moguća promena uzanog (u dolini) i širokog (kroz dolinu) atraktora
- Postojanje i moguća promena periodičkih i haotičnih atraktora
- Pojava fraktalnih granica bazena atrakcije odgovornih za haotične prelaze i jaku osetljivost na male promene početnih uslova

Rasprostranjena haotična dinamika i fraktalne granice basena atrakcije su obično neželjene dinamičke pojave, a izbegavanje tih pojava je poželjno, ali i veoma zahtevan cilj. Sve pobrojane osobine su u vezi sa presecanjem stabilnih i nestabilnih mnogostrukosti tačke tipa sedla, i spregnute su sa njihovom homokliničkom bifurkacijom. U tom smislu metodu opšteg upravljanja Duffing-ovim oscilatorom autori Rega i Lenci posmatraju u smislu eliminacije homokliničkih bifurkacija tačke tipa sedla, kao u radovima [180-184]. Metoda je prvenstveno formulisana za optimalno upravljanje haosom u diskontinualnim mehaničkim sistemima [183], a potom uopštena na kontinualne nelinearne oscilatore i sistematično primenjena za upravljanje neregulatornom dinamikom Helmholtz-ovog oscilatora [182]. Što se tiče Duffing-ovog oscilatora metoda primenjena u ovim radovima treba samo da se doda drugim metodama za upravljanje haosom razvijenim i primenjenim u sledećim radovima. U radu [205] posle uvodnog predstavljanja različitih metoda upravljanja, predstavili su eksperimentalno upravljanje (regulisanja) nelinearne dinamike magnetnoelektričnog klatna (model izvijene grede) upotrebljavajući minimalnu promenu uobičajenog upravljanja sa proporcionalnom povratnom spregom, metoda koju je razvio Hunt [166] je zapravo polu empirijska verzija poznate OGY metode [216]. U radovima [229, 230] autori takođe izučavaju oscilacije izvijene grede i upravljanje njene nelinearne dinamike menjanjem aksijalnog opterećenje u smislu klasičnog optimiziranja stanja upravljanja sa povratnom spregom, kao i primenjivanjem koncentrisanog momenta u odgovarajućim tačkama na osi grede. Osipov i njegovi saradnici [215] primenjuju metodu suzbijanja haosa pobuđenom povratnom spregom kod Duffing-ovog oscilatora sa pozitivnom umesto sa negativnom linearnom krutošću.

Upoređivanje različitih metoda upravljanja primenjenih na Duffing-ovoj jednačini dat je u radovima [4, 256], pri čemu Sifakis i Elliott pretpostavljaju postojanje četiri različite tehnike upravljanja:

- Metoda otvorene petlje periodičke perturbacije, koja podrazumeva dodavanje periodičke perturbacije u pobudu sistema. U radu [256] ova perturbacija je izabrana empirijski procedurom probanja – greške, dok je u radu [181] ona optimalno određena na osnovu široke teorijske analize dinamičkih svojstava sistema.

- Metoda povratne sprege sa kontinualnim kašnjenjem, koju je razvio Pyragas [232] koja se sastoji u primeni sile proporcionalne razlici trenutnog stanja sistema i stanja u nekom ranijem trenutku.
- Metoda OGY [216].
- Metoda Hunt-a [165] je zapravo polu empirijska verzija OGY metode.

Sa druge strane, Agrawal i njegovi saradnici u radu [4] koriste klasičnije tehnike upravljanja. Za razliku od ostalih metoda koje se odnose mahom na stabilizaciju (ili formiranje) jedne, date, orbite metoda koju koriste autori Rega i Lenci ima za cilja da obezbedi opšte upravljanje dinamikom, jer je zasnovana na eliminaciji jednog od gore podvučenih slučajeva koji izaziva složeno i neželjeno ponašanje sistema. Dakle, neophodno je znati koji oblik upravljanja je zaista potreban pri stvarnoj upotrebi sistema, što takođe može zavisiti i od stvarnih troškova ugradnje te na osnovu toga prikladno izabrati strategiju upravljanja.

Metoda iz rada autora Rega i Lenci sastoji se u identifikovanju oblika periodičke pobude koji omogućava da se izbegne, na optimalan način, transverzalni presek stabilne i nestabilne mnogostrukosti tačke tipa sedla. Metoda je razijena u nekoliko koraka:

- Detekcija homokliničke bifurkacije, koja se ostvaruje Melnikov-ljevom metodom;
- Proučavanje zavisnosti homokliničke bifurkacije od oblika pobude;
- Formulisanje i rasčlanjivanje matematičkog problema optimizacije koje se sastoji u određivanju (optimalne) teorijske pobude koja maksimizuje udaljenost između stabilne i nestabilne mnogostrukosti pri stalnoj amplitude pobude, ili, ekvivalentno, određivanje kritične amplitude odgovorne za pojavu homokliničke bifurkacije;
- Numeričko ugrađivanje optimalne pobude koje je neophodno da potvrdi teorijska predviđanja i da proveriti praktičnost i stvarne osobine predložene tehnike.

Prva tri koraka su čisto teorijska i imaju istu vodilju kao i u radovima [180, 182, 183] ovde su samo posebno razmatrani sledeći koraci:

- Numeričko potvrđivanje Melnikov-ljevog predviđanja homokliničke bifurkacije;
- Analiza regularizacije fraktalnih granica bazena atrakcije, koji je prvi efekat predviđanje eliminacije homokliničke bifurkacije;
- Redukcija fraktalne erozije bazena atrakcije ograničenog atraktora;
- Efekat upravljanja dinamikom haosa je proučen pomoću analize relevantnih bifurkacionih dijagrama.

Štaviše, izučavanje tehnike upravljanja haosom nelinearne dinamike sistema dovelo je autore Regu i Lencija na nekoliko konstatacija o dinamičkom integritetu sistema [239]. Još iz rada [270] bilo je jasno i pokazano da se atraktor mora javljati paralelno sa bazenom atrakcije koji nema nepravilnosti da bi praktična upotreba sistema sa nelinearnošću bila bezbedna. Zaista bazeni sa erozijom sadrže kritična stanja strukture koja prethode lomovima. Sa druge strane, upotreba struktura kod kojih je erozija potpuno izbegnuta može biti prilično nazadno, jer struktura zapravo može prilično bezbedno funkcionisati i kod postojanja erozije samo da ona nije sa karakterističnim oblikom. Ovakvo shvatanje zahteva detaljno istraživanje erozije bazena atrakcije i njeno moguće upravljanje. Prva stvar koja se pri tome treba

razmotriti je definicija “bezbednog bazena” koja nije uopšteno prihvaćena. Na primer, to zavisi da li: 1) smo zainteresovani za stacionarnu ili nestacionarnu dinamiku, 2) fraktalnost bazena može biti prihvaćena ili mora biti isključena, i tako dalje. Zajedno sa konceptom “sigurnog bazena” je i pitanje kako izmeriti njegov topološki integritet, što je od najbitnije važnosti za kvantitativno obeležavanje dinamičkog integriteta struktura. Drugi korak je izučavanje razvoja bazena pri promeni parametara sistema. Obično je amplituda pobude najbitniji parametar, i ona odslikava meru integriteta, tačnije amplituda određuje takozvani „profil erozije”. Profili erozije osvetljavaju gubitak sigurnosti strukture zbog prodiranja erozionih fraktalnih trouglova (tongues) u sigurni bazen što je od velikog praktičnog interesa. Dakle, izučavanje dinamičkog integriteta struktura sa nelinearnostima po mišljenju autora vezano je za detaljno izučavanje erozija sigurnih bazena atrakcije što se u osnovi sprovodi u četiri koraka:

- Izborom pavilne definicije „sigurnog bazena” i mere integriteta. Videlo se da to može da bude drugačije tumačeno zavisno od specifičnosti problema, a takođe dostupnost brzih algoritama za izračunavanje mere integriteta ima važnu ulogu, često baš to može biti faktor koji najviše oduzima vremena za ispitivanje;
- Ispitivanje razvoja bazena, što može da se učini samo sa intenzivnim i sistematičnim numeričkim simulacijama. Ipak, ključna informacija, tačna ili aproksimativna, treba da se dobije iz izučavanja globalnih bifurkacija odgovornih za glavne promene granica bazena, koje ponekad otkrivaju i objašnjavaju skrivene i složene mehanizme dinamike;
- Formiranje profila erozije za različite parametre sistema, na primer amplitudu pobude. Ovaj korak je najbitniji, jer omogućava da se potvrdi kako dinamički integritet zavisi od posmatranog parametra. Takođe, veoma je bitan u praktičnoj upotrebi, jer on može omogućiti optimalan izbor parametar, ako erozioni profil ima maksimum, ili sugerisati da se ostane podalje od opasnog oblika pada u profilu. Dokazano je da su erozioni profili obično sa pikovima u okolini rezonantnih vrednosti frekvencija, dok su monotoni na drugim frekvencijama;
- Proučavanje propadanja sigurnog bazena. U stvari, ishod erozije je navala negativnih fenomena, kao što je pojava rasutog atraktora, za oscilatore sa tvrdom nelinearnošću, ili beg za oscilatore sa mekom nelinearnošću. Za različite slučajeve struktura može doživeti kolaps ili preživeti (na željeni ili neželjeni način) posle ovih događaja.

8.2. Optimalno upravljanje mehaničkih sistema sa jednim stepenom slobode oscilovanja

U radu [180] autori pokazuju tehniku upravljanja na primerima mehaničkih sistema sa jednim stepenom slobode oscilovanja opšteg oblika:

$$\ddot{x} + \varepsilon \delta \dot{x} + F(x) = \varepsilon \gamma(\omega t) \quad (8.2.1)$$

$$\gamma(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \sin(js + \Psi_j),$$

gde $F(x)$ predstavlja nelinearnu restitucionu silu koja određuje različita mehanička svojstva sistema, $\varepsilon \gamma(\omega t)$ je opšta T -periodička ($T = 2\pi/\omega$) spoljašnja pobudna sila, bezdimenzioni mali parameter ε ovde je uveden da predstavi male vrednosti prigušenja δ i spoljašnje pobude. U radu se pokazuje da je za takve sisteme sa restitucionom silom mekih ili tvrdih karakteristika upravljanje opšteg karaktera, kao i da je zapravo nezavisno od svojstvene mehaničke prirode sistema.

Određene su Melnikov-ljeve funkcije sledećih sistema sa različitim fizičkim svojstvima, a zavisno od oblika restitucione sile: Helmholtz-ov oscilator, Helmholtz-Duffing-ovoscilator i Duffing-ove oscilatore sa mekom i tvrdom karakteristikom.

8.2.1. Optimalno upravljanje kod mekih oscilatora

8.2.1.1. *Helmholtz-ov oscilator (sa potencijalom koji poseduje jednu dolinu i jedan pravac bega, slika 8.1.a)* sa restitucionom silom oblika $F(x) = -x + x^2$, čiji je potencijal $V(x) = -x^2/2 + x^3/3$ prikazan na slici 8.1.a) gore. Na slici 8.1.a) dole prikazan je i fazni portret takvog oscilatora u slučaju da ne postoji spoljna pobuda. Ovde se vidi da ovaj oscilator poseduje dve ravnotežne tačke jednu $x_1 = 0$, koja je jedinstvena tačka tipa sedla, i $x_2 = 1$, koja je ravnotežna tačka tipa centra. Homoklinička orbita je prikazana crvenom bojom na faznom portretu, desni deo te orbite je oblika $x_{\text{hom}}(t) = 3/2 \cosh^2(t/2)$ i on praktično okružuje tačku minimuma potencijalne krive, leve mnogostrukosti, stabilna donja i nestabilna gornja divergiraju u beskonačnost. Ovaj mehanički oscilator je arhetip za proučavanje kontinualnih nelinearnih oscilatora sa samo jednim pravcem bega, i opisuje dinamiku različitih mehaničkih sistema (npr. prednapregnutih membrana, valjanje asimetričnog broda, asimetričnih kranova, i slično). Iako naizgled jednostavnog matematičkog zapisa ova jednačina otkriva složenu dinamiku sa nekoliko karakterističnih fenomena nelinearnosti (rezonantni režim, multistabilnost, haotična i regularna dinamika, različite vrste lokalnih i globalnih bifurkacija). Sa praktične tačke gledišta najinteresantniji je fenomen bega iz potencijalne doline, to je pojava koja vodi ovakve sisteme u nemogućnost daljeg rada ili lom strukture. Homoklinička orbita razdvaja ograničene periodičke oscilacije od neograničenih trajektorija, i kada se u ovaj sistem unese i pobuda ona se može razdvojiti u dve mnogostrukosti koje se mogu ili ne moraju presecati zavisno od

relativne vrednosti amplitude prinude i prigušenja. Preciznije, za male vrednosti amplituda prinude prigušenje održava mnogostrukosti razdvojene, dok pri većim vrednostima amplitude prinude dolazi do presecanja mnogostrukosti.

U poglavlju 5.6.5 videlo se da je jedna analitička tehnika da se odredi kritična vrednost amplitude perturbacione sile koja dovodi do presecanja stabilnih i nestabilnih mnogostrukosti primena Melnikov-ljeve metode. Određivanje Melnikov-ljeve funkcije daje u aproksimaciji prvog reda vrednost rastojanja između stabilne i nestabilne mnogostrukosti u opštem obliku (5.6.48). Posmatrajući oblik (5.6.52) Melnikov-ljeve funkcije kod Duffing-ove jednačine (5.6.49) može se zapisati opštiji oblik Melnikov-ljeve funkcije koji može da se primeni i kod Helmholtz-ove jednačine na sledeći način:

$$M(\omega t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}_{\text{hom}}(t) [\gamma \cos \omega(t+t_0) - \delta \ddot{x}_{\text{hom}}(t)] dt \quad (8.2.2)$$

Izračunavanje integrala ove funkcije metodom ostatka u slučaju pomenute Helmholtz-ove jednačine daje rezultat oblika:

$$M(\omega t_0) = -\frac{6}{5} \left[\delta + \gamma_1 \frac{5\pi\omega^2}{\sinh(\omega\pi)} h(\omega t_0) \right] \quad (8.2.3)$$

gde su:

$$h(\omega t_0) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \cos(j\omega t_0 + \Psi_j) \quad h_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_1} \frac{j^2 \sinh(\omega\pi)}{\sinh(j\omega\pi)} \quad (8.2.4)$$

Vidi se da je $h_1 = 1$ i da je $h(\omega t_0)$ perioda 2π .

Odavde se lako uočava da rastojanje između mnogostrukosti ima jedan konstantan deo koji zavisi od prigušenja i jedan oscilatorni deo $h(t_0)$ umnožen svojom amplitudom $\gamma_1 5\pi\omega^2 / \sinh(\omega\pi)$.

Izraz (8.2.3) je napisan na takav način [180] da je lako uočiti da γ_1 ima ulogu ukupne amplitude. Preostali bezdimenzioni parametar γ_j / γ_1 samo određuje oblik pobude, tačnije daje meru superharmonične korekcije osnovne harmonijske pobude. U smislu Melnikov-ljeve funkcije efekat te korekcije dat je parametrom h_j , $j > 1$ koji je sadržan u oscilatornom delu $h(\omega t_0)$ rastojanja između mnogostrukosti. Kako Melnikov-ljeva funkcija daje rastojanje između mnogostrukosti može se zaključiti da ukoliko su ω i γ_1 konstantne vrednosti, onda minimum rastojanja između mnogostrukosti (dostignut kada je $h(\omega t_0)$ u minimumu) raste porastom minimuma $h(\omega t_0)$. Što je veći taj minimum to je veće i rastojanje, takođe za fiksne vrednosti ω veći minimum od $h(\omega t_0)$ veći je i množilac $\gamma_{1,kr}$ potreban da se ostvari nulto rastojanje, tj. amplituda prinude za homokliničku bifurkaciju koja se javlja kada se mnogostrukosti tangiraju.

Opšta teorija tvrdi da, za ε dovoljno malo, postoji homoklinički presek ako i samo ako $M(\omega t_0)$ ima proste nule za neko t_0 . U slučaju Helmholtz-ovog oscilatora dobija se vrednost:

$$h(\omega t_0) = -\frac{\delta \sinh(\omega\pi)}{\gamma_1 5\pi\omega^2}, \text{ za neko } t_0 \in [0, 2\pi].$$

Kako je desna strana negativan broj ovo je moguće ako i samo ako:

$$\gamma_1 > \delta \frac{\sinh(\omega\pi)}{5\pi\omega^2} \frac{1}{M} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{1,kr}(\omega)$$

gde se sa M označava:

$$M = - \min_{t_0 \in [0, 2\pi]} \{h(\omega t_0)\} = \max_{t_0 \in [0, 2\pi]} \{-h(\omega t_0)\}$$

pozitivan broj koji zavisi od oblika, ali ne i od amplitude γ_1 spoljašnje pobude.

U specijalnom slučaju harmonijske pobude sledi da je $h(t_0) = \cos(t_0 + \Psi_1)$, $M = 1$ i odgovarajuća kritična kriva $\gamma_{1kr}^h = \delta \sinh(\omega\pi)/5\pi\omega^2$, pa se Melnikov-ljeva funkcija može zapisati u obliku:

$$M(\omega t_0) = -\frac{6}{5} \delta \left[1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_{1kr}^h(\omega)} h(\omega t_0) \right]$$

Dok je kritična kriva za opštu pobudu data u obliku:

$$\gamma_{1kr}(\omega) = \frac{\gamma_{1kr}^h(\omega)}{M}$$

U prostoru parametara (ω, γ_1) kriva $\gamma_{1kr}(\omega)$, koja odgovara opštoj pobudi razdvaja zone u kojima dolazi do homokliničkih preseka (iznad kritične krive) od zona u kojima se homoklinički preseki ne pojavljuju (ispod kritične krive). Isto važi i za $\gamma_{1kr}^h(\omega)$ u slučaju harmonijske pobude.

Centralna ideja metode upravljanja jeste upravo smanjenje regiona homokliničkih preseka menjanjem oblika pobude. Kako $\gamma_{1kr}(\omega)$ utiče na oblik preko broja M pomenuti region se smanjuje kada M opada, što je M manje to je manji i gornji region u parametarskom prostoru. Kvantitativna mera poboljšanja u odnosu na referentnu harmonijsku pobudu predstavlja cilj upravljanja, a definisan je kao odnos kritične amplitude neharmonijske i harmonijske pobude:

$$G = \frac{\gamma_{1kr}}{\gamma_{1kr}^h} = \frac{1}{M} \quad (8.2.4)$$

Oblast gde postoje homoklinički preseki sa harmonijskom pobudom (iznad krive $\gamma_{1kr}^h(\omega)$) i ne postoje preseki sa neharmonijskom pobudom (ispod krive $\gamma_{1kr}(\omega)$) je oblast gde se teorijski očekuje da upravljanje bude efikasno i zove se sigurna oblast.

Jasno je dakle da bi se povećao sigurni region koliko je moguće više potrebno je da se reši sledeći optimizacioni problem:

Maksimizirati G menjajući koeficijente Fourier-ovog reda

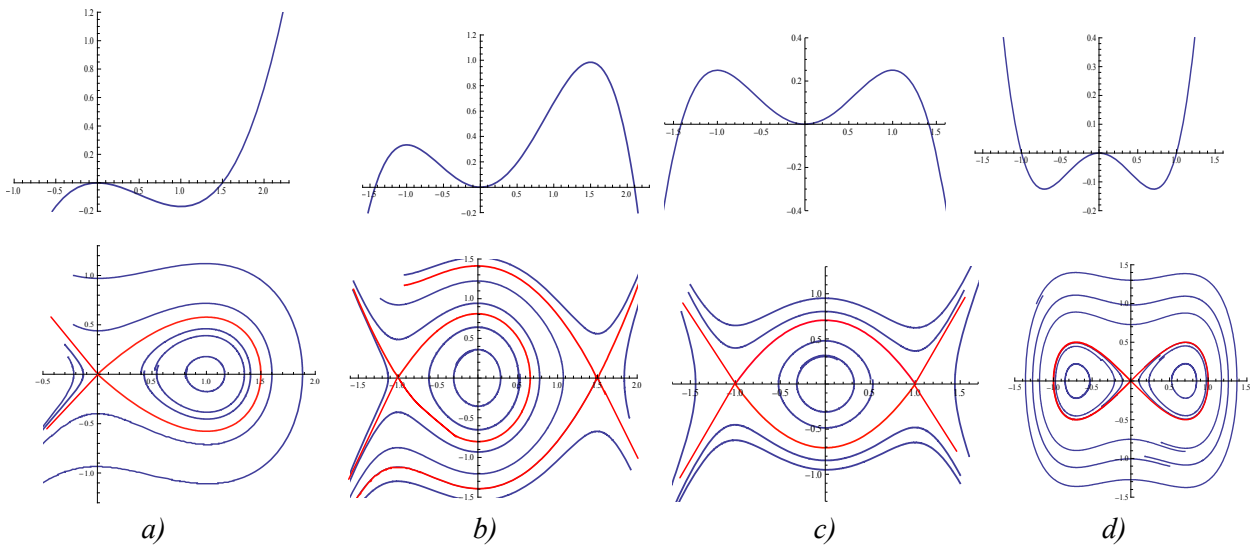
$$h_j \text{ i } \Psi_j, \quad j = 2, 3, \dots, \text{ funkcije } h(\omega t_0) \quad (8.2.5)$$

Kada se odrede najbolji h_j i Ψ_j Fourier-ovi koeficijenti γ_j mogu da se odrede iz relacije (8.2.4), pa je optimalna pobuda data izrazom:

$$\gamma(s) = \gamma_1 \sum_{j=1}^{\infty} h_j \frac{\sinh(j\omega\pi)}{j^2 \sinh(\omega\pi)} \sin(js + \Psi_j) \quad (8.2.6)$$

8.2.1.2. Helmholtz-Duffing-ova jednačina (sa potencijalom koji poseduje jednu dolinu i dva nesimetrična pravca bega, sa restitutionom silom oblika $F(x) = \alpha x + (\sigma - 1)x^2 - x^3$, čija je funkcija potencijala $V(x) = \alpha x^2/2 + (\sigma - 1)x^3/3 - x^4/4$ prikazan na slici 8.1.b), gore, za vrednost $\sigma = 1.5$. Na slici 8.1.b), dole, prikazan je i fazni portret slobodnog oscilatora. Parametar σ je parametar koji određuje asimetriju sistema u odnosu na jedinstvenu tačku stabilne ravnoteže $x = 0$. Za $\sigma \rightarrow 1$ ima se simetričan slučaj standardnog mekog Duffing-ovog oscilatora. Sa slike funkcije potencijala zaključuje se da se beg češće

dešava u negativnom smeru, ali je dozvoljen i u drugom smeru. Kao i u slučaju Helmholtz-ovog oscilatora levi beg iz potencijalne doline spregnut sa homokliničkom bifurkacijom manjeg po vrednosti sedla, je osnovni mada ne i jedina neželjena pojava koja treba da se kontroliše predloženom metodom. Pored ravnotežne tačke tipa centra $x_2 = 0$, postoje i dve ravnotežne tačke tipa sedla $x_1 = -1$ i $x_3 = \sigma$, ali samo levo, energetski niže, tipa sedla $x_1 = -1$ ima sa svoje desne strane homokliničku petlju koja okružuje jedinstvenu potencijalnu dolinu $x_{\text{hom}}(t) = -1 + \frac{3\sqrt{2}(\sigma+1)}{\sqrt{(\sigma-1)(2\sigma+1)\cosh(t\sqrt{\sigma+1}) + (\sigma+2)\sqrt{2}}}$, dok ostale invarijantne mnogostrukosti divergiraju u beskonačnost, slika 8.1 b). Za razliku od Helmholtz-ovog primera u prethodnom poglavlju u radu [180] pokazano je da oscilatorni deo Melnikov-ljeve funkcije $h(t_0)$ nije uvek pozitivan nego osciluje sa vrednostima ω i ima intervale i u kojima je negativan, ali u odnosu na optimizacioni problem zadatak ostaje u suštini isti.



Slika 8.1. Funkcije potencijala $V(x)$ i fazni portreti: a) Helmholtz-ove jednačine; b) Helmholtz-Duffing-ove jednačine i c) Duffing-ove jednačine.

8.2.1.3. Duffing-ova jednačina (sa potencijalom koji poseduje jednu dolinu i dva simetrična pravca bega, slika 8.1 c) gore). Za razliku od prethodna dva primera oscilatora sa mekim karakteristikama beg se kod ovog modela dešava u oba smera, a potencijalna dolina ima simetrične barijere, jer dve ravnotežne tačke tipa sedla $x_{3,1} = \pm 1$ imaju isti nivo energije. Ovo svojstvo implicira da umesto homokliničke petlje postoji heteroklinička petlja sa dve heterokliničke orbite $x_{\text{het}}(t) = \pm \tanh(t/\sqrt{2})$. Tako da se Melnikov-ljeva funkcija svodi na oblik:

$$M(\omega t_0) = -\delta \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[1 \mp \frac{\gamma_1}{\gamma_{kr}^h(\omega)} h(\omega t_0) \right] \quad (8.2.7)$$

$$\gamma_{kr}^h(\omega) = \delta \frac{2}{3} \frac{\sinh\left(\frac{\omega\pi}{\sqrt{2}}\right)}{\pi\omega}, \quad h(\omega t_0) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \sin(j\omega t_0 + \Psi_j) \quad \text{ i } \quad h_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_1} \frac{j \sinh\left(\frac{\omega\pi}{\sqrt{2}}\right)}{\sinh\left(\frac{j\omega\pi}{\sqrt{2}}\right)} \quad (8.2.7a,b,c)$$

Heteroklinička bifurkacija pod dejstvom opšte pobude javlja se za $\gamma_{kr} = \gamma_{kr}^h / M$, gde je $M = \max\{h(\omega t_0)\}$ za orbitu iz -1 do 1 (znak - u jednačini (8.2.7)) i $M = -\min\{h(\omega t_0)\}$ za drugu orbitu (znak + u jednačini (8.2.7)).

Ako kritična amplituda jedne od heterokliničke bifurkacije poraste, bez obzira šta se dešava sa drugom, optimizacioni problem (8.2.5) sa odgovarajućim izborom $G = 1/M$ mora da se reši. U osnovi to je matematički isti problem kao i u prethodna dva slučaja. I to tako što ova tehnika dozvoljava da se poremećena heteroklinička petlja koja je odgovorna za pojavu haotične dinamike prekine i tako doprinese regulisanju nelinearne dinamike sistema, takođe da eliminiše fraktalne granice bazena atrakcije i da smanji nepredvidivost dinamike. Treba imati na umu da heteroklinički presek nekontrolisane orbite dozvoljava prodor klinova (tongues) bazena atrakcije iz beskonačnosti u bazen atrakcije konačnog atraktora (obično definisanog kao sigurni bazen), a to dovodi do brže erozije bazena atrakcije i do ranijeg oštećenja strukture, pa prema tome različite strategije za povećanje životnog veka struktura mogu biti usmerene na istovremeno izbegavanje i gornjih i donjih heterokliničkih bifurkacija sistema. Istovremeno izbegavanje dve bifurkacije zahteva istovremeno smanjenje $-\min\{h(\omega t_0)\}$ i $\max\{h(\omega t_0)\}$. U radu [180] dokazano je i numerički provereno da je optimalno rešenje određeno uslovom $-\min\{h(\omega t_0)\} = \max\{h(\omega t_0)\}$, tako da je u ovom slučaju optimizacioni problem definisan na sledeći način:

Maksimizirati G menjajući koeficijente Fourier-ovog reda

$$h_j \text{ i } \Psi_j, \quad j = 2, 3, \dots, \text{ funkcije } h(\omega t_0) \text{ sa ograničenjem da } -\min\{h(\omega t_0)\} = \max\{h(\omega t_0)\} \quad (8.2.8)$$

gde zahvaljujući ograničenju nema neodređenosti u definisanju cilja upravljanja G . Problem je zapravo isti onaj problem definisan uslovom (8.2.5) sa dodatkom ograničenja koje omogućava istovremeno kontrolisanje obe heterokliničke bifurkacije.

8.2.2. Optimalno upravljanje kod tvrdih oscilatora

8.2.2.1. *Duffing-ova jednačina (sa potencijalom koji poseduje dve simetrične doline, slika 7.2.4 a)*, isto je dato i na slici 8.1 d) gore, radi preglednosti i upoređenja sa sistemima prethodnih poglavlja. Na slici 8.1 d) gore, prikazan je potencijal $V(x) = -x^2/2 + x^4/2$ odakle se vidi da je Duffing-ova jednačina arhetip sistema sa dve simetrične potencijalne doline koji poseduje vrlo zanimljivu nelinearnu dinamiku. Na primer, za velike vrednosti spoljnje pobude pojavljuje se spoljašnji (razvučeni) haotični atraktor koji zapravo zamenjuje beg u beskonačnost koji ima meka Duffing-ova jednačina i podrezumeva jednu od neželjenih dinamičkih događaja čija eliminacija (zamena) predstavlja veoma poželjnu praktičnu predstavu upravljanja. Na slici 5.6.8. prikazan je fazni portret slobodnog neporemećenog sistema čija se dinamika opisuje Duffing-ovom jednačinom, koji je samo radi preglednosti prikazan i na slici 8.1.d) dole. Sa slike se vidi da je neporemećena dinamika okarakterisana sa dva stabilna centra (x_1 i x_3) i jedinstvenom nestabilnom ravnotežnom tačkom tipa sedla $x_2 = 0$ koja odgovara maksimumu potencijalne funkcije. Dve

homokliničke orbite, okružuju centre i susreću se u tački tipa sedla. Jedna je sa leve, a potpuno simetrična druga je sa desne strane fazne ravni (slika 8.1 d) dole, crvena linija), i one su oblika $x_{\text{hom}}^{d,l}(t) = \pm \text{sech}(t)$. Melnikov-ljeva funkcija izračunata je u poglavlju 5.6.5 za homokliničke orbite $x_{\text{hom}}^{d,l}(t) = \pm \sqrt{2} \text{sech}(t)$, pa koristeći taj rezultat i rezultat rada [180] može se napisati Melnikov-ljeve funkcije, jednu za desnu, a drugu za levu homokliničku petlju, u obliku:

$$M^{d,l}(\omega t_0) = -\delta \frac{2}{3} \left[1 \mp \frac{\gamma_1}{\gamma_{1kr}^h(\omega)} h(\omega t_0) \right] \quad (8.2.9)$$

$$\text{gde su: } \gamma_{1kr}^h(\omega) = \delta \frac{2}{3\pi\omega} \cosh\left(\frac{\omega\pi}{2}\right) > 0, \quad h(\omega t_0) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \cos(j\omega t_0 + \Psi_j) \quad \text{i} \quad h_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_1} \frac{j \cosh\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{j\omega\pi}{2}\right)} \quad (8.2.9 \text{ a,b})$$

Kriva $\gamma_{1kr}^h(\omega)$, u referentnom slučaju harmonijske pobude, je ista i za levu i za desnu homokliničku orbitu. Može se govoriti o specifičnosti ovog oscilatora sa stanovišta strategije upravljanja, jer prisustvo dve homokliničke orbite omogućava da se izaberu različite strategije upravljanja. Stvarno može se kontrolisati samo jedna (leva ili desna) bifurkacija zanemarujući šta se dešava oko druge potencijalne doline, ili se može pokušati upravljati istovremeno i levom i desnom homokliničkom orbitom. Ovo su dva topološki različita zadatka upravljanja, jer je jedno topološki lokalizovano upravljanje, dok se drugi pristup odnosi na upravljanje celom faznom ravni. Ova dva pristupa su detaljno proučena na primeru obrnutog klatna u radu [184], gde je pokazano da upravljanje jedna strana daje veće vrednosti cilja G dok opšte upravljanje daje niže vrednosti G , a takođe je numerički potvrđeno da te dve strategije upravljanja nisu različite već se nadopunjuju.

Ovde se trebaju razmatrati razdvojeno tri slučaja:

- 1) Jednostrano upravljanje na desnom minimumu potencijala (desno upravljanje). Uslov $M^d(\omega t_0) = 0$ za neko $\omega t_0 \in [0, 2\pi]$ garantuje homoklinički presek stabilne i nestabilne mnogostrukosti na desnoj starni, i dešava se u oblasti parametarskog prostora definisanoj sa:

$$\gamma_1 > \gamma_{1kr}^d = \gamma_{1kr}^h \frac{1}{M^d}$$

i ovde je $M^d = -\min_{t_0 \in [0, 2\pi]} \{h(\omega t_0)\} = \max_{t_0 \in [0, 2\pi]} \{-h(\omega t_0)\}$ pozitivni broj koji je odgovoran za oblik pobude. Da bi se izbeglo desno homokliničko tangiranje mnogostrukosti odgovarajućim oblikom pobude cilj $G^d = \frac{1}{M^d}$

mora da se ima maksimum. Kada taj uslov zadovoljimo i rešimo zadatak optimizacije onda se optimalni oblik pobude određuje iz jednačine (8.2.9b)

- 2) Jednostrano upravljanje na levom minimumu potencijala (levo upravljanje). Uslov $M^l(\omega t_0) = 0$ za neko $t_0 \in [0, 2\pi]$ grantuje homoklinički presek stabilne i nestabilne mnogostrukosti na levoj starni, i dešava se u oblasti parametarskog prostora definisanoj sa:

$$\gamma_1 > \gamma_{1kr}^l = \gamma_{1kr}^h \frac{1}{M^l}$$

gde je $M^l = \max_{t_0 \in [0, 2\pi]} \{h(\omega t_0)\}$ pozitivni broj koji je odgovoran za oblik pobude. Da bi se izbeglo levo homokliničko tangiranje mnogostrukosti odgovarajućim oblikom pobude cilj $G^l = \frac{1}{M^l}$ mora da ima maksimum. Kada taj uslov zadovoljimo i rešimo zadatak optimizacije onda se optimalni oblik pobude određuje iz jednačine (8.2.9b). Tako da su stvarno optimalni ciljevi dobijeni za dva jednostrana upravljanja jednaki.

3) Globalno upravljanje: da bi se upravljalo istovremeno i levim i desnim tangiranjem mnogostrukosti levi $G^l = \frac{1}{M^l}$ i desni $G^d = \frac{1}{M^d}$ cilj, gde $M^d = -\min_{t_0 \in [0, 2\pi]} \{h(\omega t_0)\}$ i $M^l = \max_{t_0 \in [0, 2\pi]} \{h(\omega t_0)\}$, moraju da rastu istovremeno. Matematički istovremeni rast G^l i G^d ima za posledicu porast njihovih minimalnih vrednosti, odnosno:

$$\begin{aligned} & \text{Maksimizirati } G = \min\{G^l, G^d\} \text{ menjajući koeficijente} \\ & h_j \text{ i } \Psi_j, \quad j = 2, 3, \dots, \text{ funkcije } h(\omega t_0) \end{aligned} \quad (8.2.10)$$

U radu [180] pokazano je da sva numerička rešenja ove jednačine zadovoljavaju uslov $G^l = G^d = G$ kako se i očekivalo tj. $-\min\{h(\omega t_0)\} = \max\{h(\omega t_0)\}$. U tom smislu problem (8.2.10) može da se zapiše u jednostavnijem obliku (8.2.8). Ono što ide zajedno sa ovim skraćenjem jeste mogućnost upravljanja celim faznim prostorom.

Ovde su različiti oscilatori klasifikovani prema njihovim osnovnim mehaničkim osobinama, u stvarnosti vrsta krutosti (meka ili tvrda) daje jasnu razliku između fizičkih pojava koje su nepoželjne, a čiju pojavu treba da kontroliramo. Dok je kod mekih oscilatora smetnja erozija sigurnog bazena atrakcije i beg iz potencijalne doline, to je kod sistema sa tvrdom krutošću pojava haosa u smislu stalnog prelaza iz doline u dolinu minimuma potencijala. Takođe, je moguće načiniti klasifikaciju ovih sistema i prema simetriji ili asimetriji njihove prirode, a to bi zahtevalo pažnju sa dinamičke tačke gledišta jer, pored nekih kritičnih situacija, simetrični oscilatori su strukturno nestabilni i posebni su slučajevi asimetričnih oscilatora, i zaista nisu uvek ograničeni.

Predloženom metodom optimalnog upravljanja zapravo vrši se izbor najpogodnijeg oblika spoljašnje pobude da bi se izbegli transverzalni preseki stabilnih i nestabilnih mnogostrukosti. U radu [181] autori su metodu primenili na primer bezdiemencione Duffing-ove jednačine oblika:

$$\ddot{x} + \varepsilon \delta \dot{x} - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2} = \varepsilon \gamma(\omega t) = \varepsilon \gamma_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma_j}{\gamma_1} \sin(j\omega t + \Psi_j) \quad (8.2.11)$$

Za vrednost $j = 1$, $\varepsilon \gamma(\omega t) = \varepsilon \gamma_1 \sin \omega t$ je prosta harmonijska pobuda, za $j > 1$, $\gamma_j \sin(j\omega t)$ su superharmonijske pobude. Jednačina (8.2.11) se posle reskaliranja svodi na jednačinu o kojoj se govorilo u poglavlju 8.2.1, pa se njena Melnikov-ljeva funkcija može napisati u ekvivalentnom obliku kao i (8.2.9):

$$M^{d,l}(\omega t_0) = -\delta \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[1 \mp \frac{\gamma_1}{\gamma_{1kr}^h(\omega)} h(\omega t_0) \right], \quad (8.2.12)$$

$$\gamma_{1kr}^h(\omega) = \delta \frac{2\sqrt{2}}{3\pi\omega} \cosh\left(\frac{\omega\pi}{\sqrt{2}}\right) > 0, \quad h(t_0) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \cos(j\omega t_0 + \Psi_j) \quad \text{i} \quad h_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_1} \frac{j \cosh\left(\frac{\omega\pi}{\sqrt{2}}\right)}{\cosh\left(\frac{j\omega\pi}{\sqrt{2}}\right)} \quad (8.2.12 \text{ a,b})$$

Prema optimizacionom zadatku (8.2.10), osnovni cilj G je odrediti kvantitativnu vrednost porasta kritičnog praga amplitude neharmonijske pobude u odnosu na amplitudu referentne harmonijske pobude. U radu je pokazano da se teorijska razmatranja dobro slažu sa simuliranim rezultatima što je i potvrđeno brojnim numeričkim proračunima. Zaključak radova autora Rega-e i Lenci-ja [181-184] može da se uokviri u dva pravila:

i) Jednačina (8.2.11) je promenljiva sa $x \rightarrow -x$, $t \rightarrow t + \pi/\omega$ što znači da je asimetrična u odnosu na promenljive (x, t) , odakle sledi da za $j \neq 1$ imaju se dve različite Melnikov-ljeve funkcije sa leve i desne strane faznog prostora $M^d \neq M^l$, pa je potrebno primeniti obe strategije upravljanja i jednostranu (lokalnu) i globalnu.

ii) Prema ovim strategijama upravljanja matematičko rešenje optimalnog problema (8.2.10), ako se za $h(\omega t_0)$ izabere pozitivna Dirac-ova funkcija amplitude π za $t_0 = 0$ sa dodatkom konstante $-1/2$, onda su Fourierovi koeficijenti $h_j = 1$, $\Psi_j = \Psi_1 = 0$, a optimalan cilj je $G^{d,l} = 2$, kritična amplituda je zapravo udvostručena. To praktično daje hipotetičku ili teorijski optimalnu vrednost, jer ovo rešenje nije prihvatljivo sa fizičke tačke gledišta, jer bi u tom slučaju odgovarajuća optimalna pobuda bila divergentni razvoj. Ovaj nedostatak se u posebnim slučajevima otklanja dodavanjem dodatnih uslova ili ograničenja optimalnog problema. U svakom slučaju, što je optimalni cilj bliži toj teorijskoj vrednosti to je pridružena optimalna upravljačka pobuda efikasnija u rešavanju otklanjanja transverzalnih preseka mnogostrukosti sistema. U slučaju globalnog upravljanja funkcija $h(\omega t_0)$ čiji Fourier-ov red ima samo neparne superharmonike je oblika $h(\omega t_0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right) \cos(j\omega t_0)$, gde su $\Psi_j = 0$, a optimalni cilj je $G = 4/\pi$.

Teorijski za prvi superharmonik i numerički rezultati za više superharmonike u radovima [180-184] potvrdili su se rezultati teorijskih pretpostavki, a na bazi njihovog metoda u radu [21] pokazana je efikasnost metode globalnog upravljanja sa kontrolorem oblika $\gamma(\omega t) = \sum_{j=1}^N \cos(j\omega t + \Psi_j)$ na opštem nelinearnom oscilatoru sa jednim stepenom slobode oblika:

$$\ddot{x} + \varepsilon \delta h(x) \dot{x} + g(x) = \varepsilon \gamma(\omega t) = k\gamma_1 \cos(\omega t) + \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos((2j+1)\omega t) \quad (8.2.13)$$

Novina u ovom radu je dodavanje parametra $|k| \leq 1$ uz amplitudu harmonijskog dela kontrolera i pokazuje se da on ima odlučujuću ulogu u upravljanju homokliničkim presecima stabilnih i nestabilnih mnogostrukosti. Ovde je određen cilj $G = 2\sqrt{3}/(3k)$ upravljanja strogo matematičkim izvođenjem za slučaj superharmonijske pobude ($N = 1$) gde je $M^d = -\min_{t_0 \in [0, 2\pi]} \{h(\omega t_0)\} = M^l = \max_{t_0 \in [0, 2\pi]} \{h(\omega t_0)\} = k\sqrt{3}/2$. Jasno je da $G \rightarrow \infty$ kada $k \rightarrow 0$ odakle sledi da predložena metoda optimalnog upravljanja može povećati region u kojem se ne javljaju homoklinički preseki koliko je to god moguće više dok kontroler sadrži samo dva člana $k\gamma_1 \cos(\omega t)$ i $\gamma_3 \cos(3\omega t)$. Prema ovoj uprošćenoj metodi optimalnog upravljanja koeficijenti amplituda γ_j mogu biti usaglašeni sa promenom parametra k i to tako da su svi dovoljno malih vrednosti što je

pogodno i sa matematičke i sa praktične tačke gledišta. Takođe, važno je napomenuti da ovde optimalno upravljani sistem ima istu strukturu u različitim vrednostima homokliničkih preseka zahvaljujući različitim vrednostima parametra k .

8.3. Optimalno upravljanje u sistemima sa dva stepena slobode kretanja

Rukovodeći se idejom optimiziranja problem upravljanja u sistemima sa nelinearnostima iz prethodnog poglavlja koristeći Melnikov-ljevu funkciju i kriterijume postojanja homokliničkih ili heterokliničkih preseka u ovom poglavlju pokazaće se nekoliko sistema sa dva stepena slobode kretanja i nekoliko kriterijuma koji formiraju Melnikov-ljevu funkciju i pokazuju postojanje periodičkih i homokliničkih orbita. Kako minimizacija Melnikov-ljeve funkcije može da da kriterijum izbegavanja transversalnih preseka stabilne i nestabilne mnogostrukosti i homokliničke bifurkacije, u posrednom značenju izbegavanja pojave nepredvidivih haotičnih kretanja to će se ovde pokušati formirati Melnikov-ljeve funkcije i usvojiti neke opšte kriterijume vezane za sistem s obzirom na vrednosti te funkcije, i to u sistemima sa dva stepena slobode oscilovanja sa nelinearnostima. Razlog zašto se posmatraju baš sistemi sa dva stepena jeste što opisani hibridni sistemi u poglavlju 3. generalisanim koordinatama mogu da se svedu na sisteme sa dve stepena slobode oscilovanja, ili pak, u prvom približenju, njihovo oscilovanje može da se aproksimira oscilovanjem jednog analognog sistema sa dva stepena slobode kretanja. Tako, na primer, pokazano je u poglavlju 3.4 da se u jednom nm -modu oblika oscilovanja sistema dve ploče pojavljuju dva harmonika vremenske funkcije tog nm -moda i da postoji međusobna interakcija tih harmonika, kao svojstvo nelinearnosti tog sistema. Diferencijalne jednačine vremenskih funkcija oscilovanja u jednom nm obliku sopstvene amplitudne funkcije sistema ploča su oblika (3.4.16). Formiranje Melnikov-ljeve funkcije ovakvog sistema dovelo bi do zaključaka koji bi dali kriterijume o optimalnom upravljanju spoljašnjom pobudnom silom u ovakvom sistemu, što otvara nekoliko pitanja u okviru teorije Melnikov-ljeve metode sistema sa više stepeni slobode oscilovanja i moglo bi samo po sebi predstavljati istraživanje jedne subdoktorske disertacije. Zato se ovde u daljem tekstu prikazuju rezultati iz savremenih radova vezanih za sličnu problematiku, otvarajući tako potencijalno polje novih istraživanja. U radu [293] autor proučava periodičko i homokliničko kretanje slabo spregnutih oscilatora sa spoljašnjom periodičkom pobudom oblika:

$$\dot{x}_j = JDH_j(x_j) + \varepsilon g_j(x_1, x_2, \omega t; \mu), \quad x_j \in \mathbb{R}^2, \quad j = 1, 2 \quad (8.3.1)$$

gde su: $0 < \varepsilon \ll 1$, mali parameter, $\mu \in \mathbb{R}$ je parameter sistema, a J je matrica oblika:

$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Takođe, $H_j: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i $g_j: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ su dovoljno puta diferencijabilne, a

$g_j(x_1, x_2, \omega t; \mu)$ je i 2π periodična po $\theta = \omega t$, za $j = 1, 2$. Posebno proučavan slučaj je sistem slabo spregnutih Duffing-ovih oscilatora oblika:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_1, \quad \dot{p}_1 = q_1 - q_1^3 + \varepsilon(-\delta p_1 - \beta q_1 q_2^2 + \gamma \cos \omega t) \\ \dot{q}_2 &= p_2, \quad \dot{p}_2 = q_2 - q_2^3 + \varepsilon(-\delta p_2 - \beta q_2 q_1^2) \end{aligned} \quad (8.3.2)$$

gde su δ, β, γ i ω pozitivne konstante. Poslednja jednačina predstavlja model sa dva stepena slobode oscilovanja prostornih oscilacija grede napregnute na izvijanje. Analiziran je, do sada, Duffing-ov oscilator oblika (5.6.49) Melnikov-ljevom metodom, i njegovo periodičko i homokliničko kretanje je dovoljno proučeno. U slučaju sistema (8.3.2) mnogo bogatija dinamika se pojavljuje zahvaljujući članovima sprežanja $\varepsilon\beta q_1 q_2^2$ i $\varepsilon\beta q_2 q_1^2$.

Kada je $\varepsilon = 0$ sistem (8.3.1) se redukuje na sistem dva nezavisna Hamilton-ova sistema sa po jednim stepenom slobode kretanja:

$$\dot{x}_j = JDH_j(x_j), \quad j = 1, 2 \quad (8.3.3)$$

Svaka jednačina sistema (8.3.3) poseduje hiperboličku tačku tipa sedla, homokliničku orbitu kroz njega i jednoparametarsku familiju periodičkih orbita unutar homokliničke orbite. To znači da sistem poseduje hiperboličku periodičku orbitu, homokliničku mnogostrukost, dvoparametarsku familiju trodimenzionalnog invarijantnog torusa i dve trodimenzionalne ortogonalne hiperboličke invarijantne mnogostrukosti u proširenom petodimenzionalnom faznom prostoru. Standardna Melnikov-ljeva metoda ne može da se primeni na ovakav sistem, ali u radu je pokazano i dokazano da pojedina proširenja homokliničke Melnikov-ljeve metode mogu da se prihvate. Najpre je proširena subharmonijska Melnikov-ljeva metoda, dat je dokaz teorema postojanja, stabilnosti i bifurkacije periodičkih orbita u blizini nepobuđenog invarijantnog torusa sa rezonantnom vrednošću. Potom je primenjena modifikovana verzija homokliničke Melnikov-ljeve metode koju je predstavio Wiggins [296] za homokliničku orbitu na dva tipa periodičkih orbita. Prvi tip periodičke orbite je rezultat postojanja nepobuđene hiperboličke periodičke orbite, a drugi tip nastaje izvan rezonantnog regiona u nepobuđenim invarijantnim mnogostrukostima. Tako je pokazano da se u sistemu (8.3.1) pojavljuju neki novi oblici homokliničkog kretanja. U radu je opisana geometrijska struktura nepobuđenog faznog prostora, potom je razvijena Melnikov-ljeva metoda za periodičko kretanje i posebno za homokliničko kretanje. Takođe, napravljena je veza između Melnikov-ljeve teorije za subharmonijske i homokliničke orbite, a potom je cela teorija primenjena na sistem (8.3.2). Ipak, mnoga zanimljiva svojstva ovakvih sistema nisu razmatrana u ovom radu. Navedimo neke od njih. Jedna od uvedenih pretpostavki u radu je da je period $T_j^{\alpha_j}$, periodičkih orbita $x_j^{\alpha_j}(t)$ unutar separatriše diferencijabilan u odnosu na α_j , a takođe da je $\frac{dT_j^{\alpha_j}}{d\alpha_j} > 0$, a ako to nije slučaj potrebna je

drugačija analiza periodičkog i homokliničkog kretanja. Takva analiza je izvršena za sisteme sa jednim stepenom slobode u radu [293]. Jedan od problema se takođe javlja i u slučaju kada postoji rezonancija. Naime, iako prisustvo homokliničkih orbita potvrđuje haotičnu dinamiku, ona može biti prekinuta kada je

invarijantni torus podvrgnut rezonanciji ili faznom usaglašavanju (sinhronizaciji). Takođe, neporemećene trodimenzionalne invarijantne mnogostrukosti mogu da ostanu iste i posle poremećaja i njihove stabilne i nestabilne mnogostrukosti mogu da se presecaju transversalno, što takođe usložnjava dinamiku sistema.

U radu [283] na primeru prosto oslonjene pravougaone piezokeramičke kompozitne ploče pokazana je primena proširene Melnikov-ljeve metode u izučavanju globalnih bifurkacija i multipulsne haotične dinamike takve ploče. Ploča je prosto oslonjena na četiri kraja i načinjena je od regularnih simetričnih ortogonalno ukrštenih n slojeva. Neki od tih slojeva su od piezokeramičkih materijala, koji služe kao aktuatori, a ostali su od prednapregnutog fibera kompozitnog materijala. Ploča je napregnuta spoljašnjim transversalnim raspodeljenim opterećenjem i opterećenjem u ravni ploče u dva ortogonalna pravca. Za matematičko modeliranje ovakvog modela u radu su korišćene von-Karman-ova jednačina, Reddy-eva teorija smicajnih deformacija ploče trećeg reda i Galerkin-ov pristup, te su izvedene jednačine kretanja kompozitne piezoelektrične pravougaone ploče, kao aktivne strukture, u obliku:

$$\begin{aligned} \ddot{w}_1 + \mu_1 \dot{w}_1 + \omega_1^2 w_1 + (f_1 \cos \Omega_1 t + f_2 \cos \Omega_2 t + f_3 \cos \Omega_4 t) w_1 + \alpha_3 w_1^2 + \alpha_1 w_1^2 w_2 + \alpha_2 w_2^2 w_1 + \alpha_4 w_2^3 &= F_1 \cos \Omega_3 t \\ \ddot{w}_2 + \mu_2 \dot{w}_2 + \omega_2^2 w_2 + (f_4 \cos \Omega_1 t + f_5 \cos \Omega_2 t + f_6 \cos \Omega_4 t) w_2 + \beta_3 w_2^2 + \beta_1 w_2^2 w_1 + \beta_2 w_1^2 w_2 + \beta_4 w_1^3 &= F_2 \cos \Omega_3 t \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

gde periodičke funkcije frekvencija Ω_1 i Ω_2 odgovaraju aksijalnim spoljašnjim naprazanjima, frekvencija Ω_3 transversalnom periodičkom spoljašnjem opterećenju, a frekvencija Ω_4 odgovara rezultanti piezoelektričnog napona. Svi koeficijenti jednačina (8.3.4) mogu da se pronađu u radovima [285 i 286]. Sistem jednačina (8.3.4) sa dva stepena slobode kretanja koji ima članove trećeg stepena, parametarsku i transversalnu spoljašnju pobudu opisuje nelinearne transversalne oscilacije kompozitne laminatne piezokeramičke pravougaone ploče izložene spoljašnjim naprezanjima u ravni ploče i transversalno na ravan ploče u prva dva moda oscilovanja. Na ove jednačine je primenjena proširena Melnikov-ljeva metoda za neautonomne nelinearne sisteme i pokazano je postojanje multipulsnog haotičnog kretanja ovakve ploče. Prikazana je i numerička simulacija radi upoređenja i potvrde rezultata.

Uvodeći transformaciju koordinata oblika:

$$w_1 = x_1, \quad \dot{w}_1 = x_2, \quad w_2 = x_3, \quad \dot{w}_2 = \omega_2 x_4 \quad \text{i} \quad \phi = \Omega_3 t$$

i koristeći činjenicu da se frekvencije Ω_i ($i=1,2,3,4$) sila racionalno odnose dobija se sledeća relacija:

$Z_1 \phi = \Omega_1 t$, $Z_2 \phi = \Omega_2 t$, $Z_3 \phi = \Omega_4 t$, $\phi = \Omega_3 t = \Omega t$, gde su Z_1 , Z_2 i Z_3 svi nenegativni brojevi, pa se sistem (8.3.4) svodi na oblik:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_1^2 x_1 - \alpha_1 x_1^2 x_3 - \alpha_2 x_3^2 x_1 - \alpha_3 x_1^3 - \alpha_4 x_3^3 - \mu_1 x_2 - x_1 \sum_{i=1}^3 \xi_i + F_1 \cos \phi \\ \dot{x}_3 &= \omega_2 x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\omega_2 x_3 - \frac{\beta_1}{\omega_2} x_3^2 x_1 - \frac{\beta_2}{\omega_2} x_1^2 x_3 - \frac{\beta_3}{\omega_2} x_3^3 - \frac{\beta_4}{\omega_2} x_1^3 - \frac{\mu_2}{\omega_2} x_4 - \frac{x_3}{\omega_2} \sum_{i=1}^3 \xi_{i+3} + \frac{F_2}{\omega_2} \cos \phi \\ \dot{\phi} &= \Omega \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

gde su $\xi_i = f_i \cos Z_i \phi$ i $\xi_{i+3} = f_{i+3} \cos Z_i \phi$, $i=1,2,3$

Da bi izvršili analizu multipulsne haotične dinamike laminatne kompozitne piezoelektrične pravougaone ploče potrebno je formirati normalni oblik sistema jednačina (8.3.5), pa koeficijente prigušenja i sile posmatramo kao perturbacione parametre. Sistem bez poremećajnih parametara je oblika:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\omega_1^2 x_1 - \alpha_1 x_1^2 x_3 - \alpha_2 x_3^2 x_1 - \alpha_3 x_1^3 - \alpha_4 x_3^3 \\
\dot{x}_3 &= \omega_2 x_4 \\
\dot{x}_4 &= -\omega_2 x_3 - \frac{\beta_1}{\omega_2} x_3^2 x_1 - \frac{\beta_2}{\omega_2} x_1^2 x_3 - \frac{\beta_3}{\omega_2} x_3^3 - \frac{\beta_4}{\omega_2} x_1^3.
\end{aligned} \tag{8.3.6}$$

On poseduje trivijalno rešenje $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$ za koje je Jacobi-jeva matrica oblika:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{pmatrix},$$

poseduje jednu dvostruku nulu i par čisto imaginarnih sopstvenih vrednosti: $\lambda_{1,2} = 0$ i $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$.

Primenjujući Maple program dat u radu [287], dobija se normalna forma trećeg reda sistema (8.3.6), bez perturbacionih parametara u obliku:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{1}{2}\alpha_2 x_1(x_3^2 + x_4^2) - \alpha_3 x_1^3 \\
\dot{x}_3 &= \omega_2 x_4 + \frac{1}{2}\tilde{\beta}_2 x_1^2 x_4 + \tilde{\beta}_3 x_4(x_3^2 + x_4^2) \\
\dot{x}_4 &= -\omega_2 x_3 - \tilde{\beta}_3 x_3(x_3^2 + x_4^2) - \frac{1}{2}\tilde{\beta}_2 x_1^2 x_3,
\end{aligned} \tag{8.3.7}$$

gde su $\tilde{\beta}_2 = \beta_2/\omega_2$ i $\tilde{\beta}_3 = 3\beta_3/(8\omega_2)$.

Nekoliko narednih transformacija ovoga sistema odnosi se na transformaciju koordinata u obliku:

$$x_1 = \sqrt{\frac{|\alpha_2|}{|\tilde{\beta}_2|}} u_1, \quad x_2 = \sqrt{\frac{|\alpha_2|}{|\tilde{\beta}_2|}} u_2, \quad x_3 = I \cos \gamma \quad \text{i} \quad x_4 = I \sin \gamma, \quad \text{i transformaciju razmere u obliku:}$$

$\mu_1 \rightarrow \varepsilon \mu_1, \mu_2 \rightarrow \varepsilon \mu_2, f_i \rightarrow \varepsilon f_i, f_{i+3} \rightarrow \varepsilon f_{i+3} \quad i = 1, 2, 3, \tilde{F}_1 \rightarrow \varepsilon \tilde{F}_1$ i $F_2 \rightarrow \varepsilon F_2$ i dodavanje perturbacija, pa se sistem (8.3.7) svodi na oblik:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= u_2, \\
\dot{u}_2 &= -\omega_1^2 x_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 u_1 I^2 - \tilde{\alpha}_3 u_1^3 - \varepsilon \mu_1 u_2 - \varepsilon u_1 \sum_{i=1}^3 \xi_i + \varepsilon \tilde{F}_1 \cos \phi, \\
\dot{I} &= -\varepsilon \mu_2 I \sin^2 \gamma - \varepsilon I \cos \gamma \sin \gamma \sum_{i=1}^3 \xi_{i+3} + \varepsilon F_2 \sin \gamma \cos \phi,
\end{aligned} \tag{8.3.8}$$

$$I\dot{\gamma} = -\omega_2 I - \tilde{\beta}_3 I^3 - \frac{\alpha_2}{2} u_1^2 I - \varepsilon \mu_2 I \sin \gamma \cos \gamma + \varepsilon F_2 \cos \gamma \cos \phi - \varepsilon I \cos^2 \gamma \sum_{i=1}^3 \xi_{i+3},$$

$$\dot{\phi} = \Omega.$$

Analiza se nadalje zasniva na posmatranju sistema na preseku $\Sigma^{\phi_0} = \{(u_1, u_2, I, \gamma, \phi) | \phi = \phi_0\}$. Zanemarujući ε u sistemu (8.3.8) sledi neporemećeni sistem oblika:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= u_2, \\
\dot{u}_2 &= -\omega_1^2 x_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 u_1 I^2 - \tilde{\alpha}_3 u_1^3, \\
\dot{I} &= 0,
\end{aligned} \tag{8.3.9}$$

$$I\dot{\gamma} = -\omega_2 I - \tilde{\beta}_3 I^3 - \frac{\alpha_2}{2} u_1^2 I.$$

Ovaj sistem je zapravo sistem dva nespregnuta nelinearna oscilatora sa dva stepena slobode kretanja. Promenljiva I se pojavljuje u komponentama (u_1, u_2) kao parametar, jer je $\dot{I} = 0$. Prve dve jednačine sistema (8.3.9) imaju odgovarjući Hamilton-ian:

$$H = \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{1}{2} R u_1^2 + \frac{1}{4} \tilde{\alpha}_3 u_1^4 \quad (8.3.10)$$

gde je $R = \frac{1}{2} \alpha_2 I^2 + \omega_1^2$. Kao što je već poznato kada su $R < 0$, $\tilde{\alpha}_3 > 0$ i $\alpha_2 < 0$ sistem prve dve jednačina

sistem (8.3.9) posedovao bi homokliničku bifurkaciju. Iz uslova $\frac{1}{2} \alpha_2 I^2 + \omega_1^2 < 0$ imali bismo $I > \sqrt{2/\alpha_2} \omega_1$

ili $I < -\sqrt{2/\alpha_2} \omega_1$. Međutim, jasno je da promenljive I i γ mogu predstavljati amplitudu i fazu

nelinearnih oscilacija, te je moguće da postoji samo $I \geq 0$ tako da je domen za $I > \sqrt{2/\alpha_2} \omega_1$. Trivijalna

rešenja sistema prve dve jednačine sistema (8.3.9) su:

$(u_1, u_2) = (0, 0)$, što je tačka tipa sedla,

$(u_1, u_2) = (\pm \sqrt{\tilde{R}/\tilde{\alpha}_3}, 0)$, što su dva centra. Homoklinička orbita koja prolazi kroz tačku tipa sedla je oblika:

$$(u_1^h, u_2^h) = \left(\pm \sqrt{2\tilde{R}/\tilde{\alpha}_3} \operatorname{sech} \sqrt{\tilde{R}t}, \pm \sqrt{2/\tilde{\alpha}_3} \tilde{R} \operatorname{sech} \sqrt{\tilde{R}t} \tanh \sqrt{\tilde{R}t} \right).$$

Pretpostavka 1. Pretpostavi se da za neko $I = I_r$ gde je $I_1 < I_r < I_2$ postoji sledeći uslov:

$$\Omega(x_0(I_r), I_r) = 0 \text{ i } \left. \frac{d\Omega(x_0(I), I)}{dI} \right|_{I=I_r} \neq 0 \quad (8.3.11)$$

što znači da se pojavljuje rezonancija. Ovde je I_r rezonantna vrednost, a fazna razlika $\Delta\gamma$ nelinearnih oscilacija je definisana kao: $\Delta\gamma = \gamma(+\infty, I_r) - \gamma(-\infty, I_r)$. Iz geometrijske analize mnogostrukosti sistema sa četiri stepena slobode u radu [283] izveden je izraza za Melnikov-ljevu funkciju pomoću integrala:

$$M(I_\gamma, \gamma_0, \phi_0, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathbf{n}(p^h(t)), \mathbf{g}(p^h(t), \omega t + \phi_0, \mu, 0) \rangle dt \quad (8.3.12)$$

gde je vektor \mathbf{n} normalan na homokliničku mnogostrukost i oblika je:

$$\mathbf{n} = (D_x H(x, I), D_I H(x, I) - D_I H(x(I_\gamma), I_\gamma), 0).$$

$$\mathbf{g} = (g^x(x, I, \gamma, \phi, \mu, 0), g^I(x, I, \gamma, \phi, \mu, 0), g^\gamma(x, I, \gamma, \phi, \mu, 0)) \text{ i}$$

$$p^h(t) = (h^h(t, I), I, \gamma^h(t, I) + \gamma_0)$$

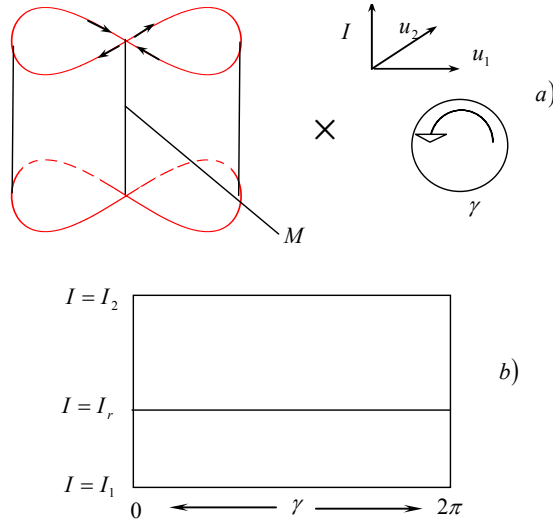
k -pulsna Melnikov-ljeva funkcija je oblika:

$$M_k(I_\gamma, \gamma_0, \phi_0, \mu) = \sum_{j=0}^{k-1} M(I_\gamma, \gamma_0 + j\Delta\gamma(I_\gamma), \phi_0, \mu) \quad (8.3.13)$$

gde je $\Delta\gamma(I_\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} [\Omega(x^h(\tau, I_\gamma), I_\gamma) - \Omega(x(I_\gamma), I_\gamma)] d\tau$, a iz jednačine (8.3.11) sledi da je:

$$\Delta\gamma(I_\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(x^h(\tau, I_\gamma), I_\gamma) d\tau \quad (8.3.13a)$$

Izraz $\Delta\gamma$ predstavlja rastojanje između dve ravnotežne tačke na mnogostrukosti M sastavljenoj od ravnotežnih tačaka, slika 8.2. Mnogostrukost M je spora mnogostrukost, dok je vektor x lociran na brznoj mnogostrukosti.



Slika 8.2. Geometrijska struktura mnogostrukosti M , $W^S(M)$ i $W^N(M)$ u četverodimenzionalnom faznom prostoru. a) homoklinička mnogostrukost Γ ; b) deo invarijantne mnogostrukosti M

U radu [283] dokazana je i sledeća teorema:

Neka su za celobrojnu vrednosti broja k , $\gamma = \tilde{\gamma}_0$, $\phi = \tilde{\phi}_0$ i $\mu = \tilde{\mu}$ zadovoljeni sledeći uslovi:

1. k -pulsna Melnikov-ljeva funkcija ima tačku proste nule u $\tilde{\gamma}_0$ ili u $\tilde{\phi}_0$, odnosno:

$$M_k(I_\gamma, \tilde{\gamma}_0, \tilde{\phi}_0, \tilde{\mu}) = 0, \quad D_{\gamma_0} M_k(I_\gamma, \tilde{\gamma}_0, \tilde{\phi}_0, \tilde{\mu}) \neq 0 \quad \text{ili}$$

$$M_k(I_\gamma, \tilde{\gamma}_0, \tilde{\phi}_0, \tilde{\mu}) = 0, \quad D_{\phi_0} M_k(I_\gamma, \tilde{\gamma}_0, \tilde{\phi}_0, \tilde{\mu}) \neq 0$$

2. $M_i(I_\gamma, \tilde{\gamma}_0, \tilde{\phi}_0, \tilde{\mu}) \neq 0$, $i = 1, \dots, k-1$, $k > 1$.

Onda za sve $\gamma \rightarrow \tilde{\gamma}_0$, $\phi \rightarrow \tilde{\phi}_0$ i $\mu \rightarrow \tilde{\mu}$ postoji dvodimenzionalna površ preseka $\Sigma_\varepsilon^\mu(\tilde{\gamma}_0)$ duž koje se stabilna i nestabilna mnogostrukost $W^s(M_\varepsilon^{\phi_0})$ i $W^N(M_\varepsilon^{\phi_0})$ prstena $M_\varepsilon^{\phi_0}$ presecaju pod uglom reda veličine $O(\varepsilon)$. Takođe, izvan male okoline prstena $M_\varepsilon^{\phi_0}$, površina $\Sigma_\varepsilon^\mu(\tilde{\gamma}_0)$ glatko se uliva u uniju $\Sigma_0^\mu(\tilde{\gamma}_0)$ površi načinjene od homokliničkih orbita na homokliničkoj mnogostrukosti Γ sa $I = I_\gamma$, i $\gamma_0 = \tilde{\gamma}_0 + j\Delta\gamma(I_0)$, $j = 1, \dots, k-1$, gde $\tilde{\gamma}_0$ odgovara tački proste nule k -pulsne Melnikov-ljeve funkcije $M_k(I_\gamma, \gamma_0, \phi_0, \mu)$.

Na osnovu pretpostavke 1. dobijamo $-\omega_2 I - \tilde{\beta}_3 I^3 - \frac{\alpha_2}{2} u_1^2 I = 0$ kada je $u_1 = 0$. Neka je $\tilde{\beta}_3 < 0$ i $\tilde{\beta}_3 = -\tilde{\beta}_3$, onda sledi rezonantna vrednost $I = \sqrt{\omega_2 / \tilde{\beta}_3}$. Uslov $\sqrt{\omega_2 / \tilde{\beta}_3} > \sqrt{2/\alpha_2} \omega_1$, odnosno $\omega_2 / \tilde{\beta}_3 > 2/\alpha_2 \omega_1^2$ treba da je zadovoljen. Zamenjujući vrednost $u_1^h = \pm \sqrt{2\tilde{R}/\tilde{\alpha}_3} \operatorname{sech}\sqrt{\tilde{R}t}$ u poslednju jednačinu sistema (8.3.9) i integraleći sledi:

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^t \left(-\omega_2 - \tilde{\beta}_3 I^2 - \frac{\alpha_2}{2} u_1^2 \right) dt = -\frac{2\alpha_2}{\tilde{\alpha}_3} \sqrt{\tilde{R}} \tanh \sqrt{\tilde{R}t} + \gamma_0.$$

S obzirom na (8.3.13), fazna razlika može da se izrazi kao:

$$\Delta\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\alpha_2}{2} u_1^2 dt = -\frac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}_3} \sqrt{\tilde{R}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\tilde{R}t} dt = -\frac{2\alpha_2}{\tilde{\alpha}_3} \sqrt{\tilde{R}}$$

Na osnovu jednačine (8.3.12) jednopulsna Melnikov-ljeva funkcija je oblika:

$$\begin{aligned}
M = & \int_{-\infty}^{\infty} [-u_1 u_2 (f_1 \cos(\Omega_1 t + Z_1 \phi_0) + f_2 \cos(\Omega_2 t + Z_2 \phi_0) + f_3 \cos(\Omega_4 t + Z_4 \phi_0))] dt + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\mu_1 u_2^2 + u_2 \tilde{F}_1 \cos(\Omega t + \phi_0) + \frac{1}{2} \alpha_2 u_1^2 I_0 (\mu_2 I \sin^2 \gamma - F_2 \sin \gamma \cos(\Omega t + \phi_0)) \right] dt + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \alpha_2 u_1^2 I_0 \left[\frac{I}{2} \sin 2\gamma (f_4 \cos(\Omega_1 t + Z_1 \phi_0) + f_5 \cos(\Omega_2 t + Z_2 \phi_0) + f_6 \cos(\Omega_4 t + Z_4 \phi_0)) \right] dt
\end{aligned}$$

Nakon integraljenja (videti izraze (76-78) u radu [287]) sledi izraz za jednopulsnu Melnikov-ljevu funkciju, a na osnovu izraza (8.3.13) u radu je dobijen i izraz za k -pulsnu Melnikov-ljevu funkciju. Nadalje se ispituje priroda nula k -pulsne Melnikov-ljeve funkcije i na osnovu date teoreme dobijaju se dva skupa koji se zadovoljavaju:

$$\begin{aligned}
E_1 = & \{(I_0, \gamma_0, \phi_0, \delta) | M_k = 0, D_{\gamma_0} M_k \neq 0, M_i \neq 0, \dots, i = 1, 2, \dots, k-1\}, \\
E_2 = & \{(I_0, \gamma_0, \phi_0, \delta) | M_k = 0, D_{\phi_0} M_k \neq 0, M_i \neq 0, \dots, i = 1, 2, \dots, k-1\}.
\end{aligned} \tag{8.3.14}$$

Ovi uslovi su zadovoljeni ako:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sech} \frac{\Omega \pi}{2\sqrt{R}} \in (0, 1], \text{ ako je } \frac{\Omega \pi}{2\sqrt{R}} > \lg(\sqrt{2} + 1) \approx 0.8814 \text{ onda je } \operatorname{csc} h \frac{\Omega \pi}{2\sqrt{R}} \leq 1, \text{ a ako je} \\
0 < \frac{\Omega \pi}{2\sqrt{R}} < \lg(\sqrt{2} + 1) \approx 0.8814 \text{ onda je } \operatorname{csc} h \frac{\Omega \pi}{2\sqrt{R}} > 1.
\end{aligned} \tag{8.3.15}$$

Dakle, postoji odnos parametara da skupovi (8.3.14) nisu prazni skupovi pod uslovom (8.3.15), te na osnovu teoreme stabilna i nestabilna mnogostrukosti se presecaju transversalno što potvrđuje postojanje multipulsnog haotičnog kretanja kod laminatne kompozitne piezoelektrične pravougaone ploče.

U radu [284] analizirano je rezonantno haotično kretanje prosto oslonjene pravougaone tanke ploče sa parametarskom i spoljnjom prinudom. U analizi su korišćene eksponencijalne dihotomije i procedura usrednjenja, jednačine transversalnih oscilacija ploče dobijene su u obliku von Karman-ovih jednačina, pa je za dalju analizu korišćena Galerkin-ova metoda. Kritični uslov koji predviđa haotično kretanje dobijen je razvijanjem Melnikov-ljeve funkcije, koja sadrži članove iz nehiperboličkog moda oscilovanja. Pokazano je da nehiperbolički mod ploče ne utiče na kritični uslov za pojavu haotičnog kretanja u slučaju rezonancije. Pod rezonancijom se ovde podrazumeva pojava do koje dolazi usled poklapanja frekvencije spoljašnje pobude sa jednom od sopstvenih vrednosti nehiperboličkog moda u ravnoteži. Simulacija, takođe, potvrđuje da je haotično kretanje hiperboličkih podistema u senci haotičnog kretanja celog sistema. Model pravougaone ploče, korišćen u radu, napregnut je pritisnim silama u ravni ploče $p = p_0 - p_1 \cos \Omega_2 t$, statički sa p_0 , na izvijanje, kao i kontinualno raspodeljenim transversalnim periodičkim opterećenjem. Pri tome se posmatra slučaj kada je statičko opterećenje veće nego li opterećenje na izvijanje, što uzrokuje negativnu krutost u prvoj jednačini narednog sistema. Bezdimenzione jednačine oscilovanja ploče u prva dva moda izvedene su u obliku:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + \mu \dot{x}_1 - kx_1 + 2x_1 f_1 \cos \Omega_2 t + \alpha_1 x_1^3 + \beta x_2^2 x_1 = F_1 \cos \Omega_1 t, \\
\ddot{x}_2 + \mu \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + 2x_2 f_2 \cos \Omega_2 t + \beta_1 x_2^3 + \beta x_1^2 x_2 = F_2 \cos \Omega_1 t.
\end{aligned} \tag{8.3.16}$$

U ovom slučaju zna se da je prvi mod hiperbolički, a drugi je nehiperbolički.

Nadalje su korišćene eksponencijalne dihotomije i metoda usrednjenja da se dobije Melnikov-ljeva funkcija, te su pronađeni uslovi koje treba da zadovolje parametri sistema da bi Melnikov-ljeva funkcija

imala proste nule iz kojih uslova se zaključilo da nehiperboički mod tanke ploče ne utiče na kritični uslov za pojavu rezonantnog haotičnog kretanja.

U radu [174] proučavana je dinamika spregnutih nelinearnih mehaničkih rezonatora parametarski pobuđenih. Takvi modeli su tipični modeli mikroelektromehaničkih i nanoelektromehaničkih sistema. U radu su izvedene amplitudne jednačine, koje opisuju sporu dinamiku sistema gde je iskorišćena prednost ovakvih sistema a to je slabo prigušenje i primenjena metoda analize više-skala (multiple-scale analysis). Takav izvedeni sistem omogućio je da se pokaže postojanje homokliničkih orbita u dinamici integrabilnog dela jednačina sporog kretanja. Iskorišćena je verzija Melnikov-ljeve metode za više-dimenzionalne sisteme, koju su razvili Kovačić i Wiggins [177], da bi se dobile tačne vrednosti parametara za koje homokliničke orbite postoje u celom sistemu i za Hamilton-ove i za nehamiltonove poremećaje, i formiraju takozvane Šilnikov-ljeve orbite indikujući gubitak integriteta sistema i postojanje haotičnog kretanja. Analitički proračun Šilnikov-ljevih orbita potvrđen je i numeričkom simulacijom.

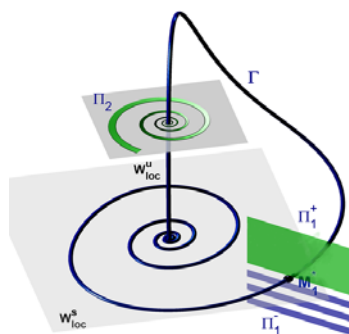
Mikroelektromehanički (MEM) i nanoelektromehanički (NEM) rezonatori su sistemi sa svojstvima jako male mase i slabog prigušenja sa radom na visokim frekvencijama i kao takvi imaju primenu u otkrivanju jedinstvene tačnosti (u sensorima) i za proučavanje fizike sistema jako malih razmera, a čak i za opisivanje kvantnog ponašanja. Često se u takvim sistemima primećuju posledice rezonantnog nelinearnog odgovora kao što su pomeranje frekvencija, multistabilnost, histerezis, kao i pojava proširenog i lokalizovanog zajedničkog stanja niza spregnutih nelinearnih rezonatora i pojava haotične dinamike. Kao što se zna nelinearnost je obično štetna u sistemima, ali poznato je i da se može iskoristiti kao, na primer, u sensorima masa, u postizanju samosinhronizacije u velikim nizovima, čak i u proučavanju kvantnih ponašanja.

MEM i NEM sistemi daju dobru podlogu za eksperimentalno testiranja haotične dinamike. Numerička analiza jednog broja modela MEM i NEM rezonatora pokazala je prisustvo prelaska udvojenog perioda u kaos, ali tu nema mnogo analitičkih rezultata. Videlo se da je jedan od najjednostavnijih modela haotičnog kretanja Duffing-ov rezonator sa dvostrukom simetričnom potencijalnom dolinom opisan Hamilton-ijanom datim u poglavlju 8.2.2.1 u obliku potencijala, ovde predstavljenim u opštijem obliku:

$$H(x, p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{k}{2} x^2 + \frac{\alpha}{4} x^4 \quad (8.3.17)$$

Videli smo da za $k < 0$ i $\alpha > 0$ ovaj sistem poseduje homokliničku orbitu za $H = 0$. Dodavanjem prigušenja i spoljašnjeg poremećaja ovaj sistem razvija jednu vrstu haotičnog kretanja zvanog kaos u vidu potkvice [50], koji se može analitički proučiti primenom Melnikov-ljeve metode. Stabilna mnogostrukost se uliva u tačku tipa sedla, a nestabilna iz nje izlazi. Pod dejstvom spoljašnje pobude struktura separatriše se narušava i dolazi do međusobnog presecanja mnogostrukosti što je put u haotično kretanje, ali sama Melnikov-ljeva funkcija, koja meri rastojanje između stabilne i nestabilne mnogostrukosti pomaže da se odredi kriterijum pojave haotičnog kretanja. Ono što se praktično uočava kod rezonatora je zapravo prekidanje slučajnog karaktera, pri prelazu iz jedne potencijalne doline u drugu. Tako ako se poseduje analitički kriterijum pojave haotičnog kretanja moguće je izbeći tu pojavu, koja može da potiče i od prisustva šuma u takvim mikro strukturama. U ovom radu proučen je primer Hamilton-ijana oblika (8.3.17) samo su oba koeficijenta $k > 0$ i $\alpha > 0$, što znači da se posmatrala pozitivna krutost. Jedan rezonator sa

takvim Hamilton-ijanom ne poseduje homokliničku orbitu ni za jednu vrednost H , i zato reklo bi se ne očekuje se pojava haotičnog kretanja nalik potkovici, pod dejstvom jednostavne periodičke pobude. Ipak, par ovakvih spregnutih rezonatora, pokazaće se u ovom radu poseduju homokliničke orbite u njihovoj spregnutoj dinamici. To je i eksperimentalno potvrđeno i izloženo u radu Karabalina i njegovih saradnika [172]. Primenjena metoda daje odnos parametara rezonatora, koji su potreban uslov za egzistenciju orbite u četverodimenzionalnom faznom prostoru, koja je homoklinička za fiksnu tačku tipa sedlastog fokusa, slika 8.3.. Takva orbita je tipa Šilnikov-ljeve [255].



Slika 8.3. Šilnikov-ljeva orbita

U radu je posmatran slučaj parametarske pobude, a ne direktne spoljašnje vodeće sile, ali to za analizu nije od značaja, najuticajnija osobenost je mali koeficijent prigušenja koji karakteriše sistem. To zapravo dovodi do jasnog razdvajanja razmera (skala)- brze razmere određene visokim frekvencijama oscilovanja rezonatora, i spore razmere određene niskom merom prigušenja. Primenjena je analiza više-razmera (multiple-scales analysis) i dobijene su amplitudne jednačine koje opisuju sporu dinamiku spregnutih rezonatora. U toj sporoj dinamici potvrđeno je prisustvo homokliničkih orbite. Prisustvo slabog prigušenja, takođe, je pogodno i sa strane poremećaja, jer slabo prigušenje daje odgovor samo pri slaboj pobudi i u tom smislu i prigušenje i pobuda mogu da se posmatraju kao poremećaji, čak i u odnosu na sporu dinamiku. Zato je i moguće u sistemu jednačina za amplitudu zanemariti prigušenje i pobudu, pa se dobija integrabilan sistem jednačina. To, nadalje, omogućava dobijanje uslova za postojanje homokliničkih orbite i izvođenje analitičkog izraza za iste. Te orbite leže u četverodimenzionalnom prostoru i homokliničke su ne za tačku već za celu dvodimenzionalnu invarijantnu mnogostrukost u obliku polu beskonačnog cilindra. U radu je identifikovan podskup tih orbite koji zadovoljava rezonantni uslov, koje su skoro heterokliničke i povezuju par tačaka u četverodimenzionalnom faznom prostoru. Kada se u sistem vrata prigušenje i vodeće sile, kao mali poremećaju, i iskoristi Melnikov-ljeva metoda za više dimenzione sisteme, moguće je da se odredi koja od heterokliničkih orbite, određenih za rezonantni uslov u neporemećenom sistemu, zapravo ostaje nepromenjena i posle poremećaja. Tako je praktično otvorena mogućnost da se istraži uticaj poremećaja na dinamiku u okviru invarijantnog polubeskonačnog cilindra u rezonantnoj oblasti. Takođe, dobijena je i vrednost parametra za koju se krajnja tačka neporemećenih heterokliničkih orbite pomera u poremećenom sistemu na takav način da se u svojoj dinamici povezuje sa polubeskonačnim cilindrom stvarajući Šilnikovljeve orbite, homokliničke za fiksnu tačku tipa sedlastog fokusa, slika 8.3. Ovi rezultati upućuju na činjenicu da u spregnutim sistemima rezonatora postoji mogućnost haotičnog kretanja.

9* poglavlje

Aktivne strukture i hibridni sistemi

9.1. Aktivne strukture

Aktivne strukture mogu biti određene kao strukture koje osećaju spoljašnje poremećaje i odgovaraju na njih aktivnim upravljanjem u stvarnom vremenu da bi zadovoljile zahteve upotrebe. U literaturi mogu da se nađu i nazivi pametne (smart) strukture što u neku ruku može i da potkrepi činjenicu jer takve strukture zaista reaguju na podsticaje iz okoline kao da su inteligentne. Realna je činjenica da suzbijanje nepoželjnih oscilacija i njihova kontrola u savremenim strukturama može da zaštiti od zamora materijala, nefunkcionalnosti pojedinih delova struktura, neželjenih zračenja ili velikog nivoa buke. Kako je upotreba pasivnih materijala sa prigušenjem dostigla maksimum u prigušivanju oscilacija, jer takvi materijali nisu mnogo efikasni na visokim frekvencijama i zahtevaju više prostora i dodavanje mase, to su savremena rešenja u upotrebi aktuatorskih i senzorskih sistema. Ovi takozvani pametni materijali mogu da suzbiju oscilacije na efikasan i inteligentan način, bez dodavanja velikih masa ili iziskivanja većih troškova. Osnovna svrha istraživanja aktivnih materijala je u pravcu upravljanja strukturama od kompozitnih materijala sa ugrađenim ili pričvršćenim piezoelektričnim pretvaračima koji imaju veoma dobre elektromehaničke karakteristike sprezanja. Odgovor piezokeramičkih materijala na mehaničku silu

je u stvaranju električnog signala koji može da se meri i u tom smislu direktnog piezoelektričnog efekta upotrebljavaju se kao senzori, a sa druge strane kada se primeni električno polje u tim materijalima se stvara mehanički napon ili dilatacija i ovaj efekat inverznog piezoelektriciteta se koristi u aktuatorima.

Aktivne strukture se sastoje od gusto raspodeljenih aktivnih uređaja najčešće senzora i aktuatora ili ugrađenih ili prikačenih na već postojeću pasivnu strukturu sa integrisanim mrežama procesora. U zavisnosti od potrebnih karakteristika aktivne strukture i očekivanih uslova rada, izbor senzora i aktuatora veoma je raznolik. Tipični sensor aktivne strukture, koji se koristi na diskretnim ili raspodeljenim mestima za merenje performansi sistema, sastoji se od optičkih vlakana, piezoelektričnih keramika i piezoelektričnih polimera. Aktuatori, koji se koriste u aktivnim strukturama, obuhvataju upotrebu piezoelektričnih keramika i polimera, elektrostrikcionih (elektrostrikcija je pojava deformacije dielektrika u električnom polju) i magnetostrikcionih materijala i piezovlakana. Razvoj piezoelektričnih materijala motivisao je brojne naučnike da istražuju na polju aktivnih (pametnih) struktura. Od svih piezoelektričnih materijala olovo-cirkon-titanate (PZT) pokazuju se kao najpouzdaniji, imaju skoro linearan odgovor na primenjeni napon, pokazuju izvrsne odgovore u primenjenom električnom polju sa širokim opsegom frekvencija, a imaju i relativno nisku cenu te su najrasprostranjeniji u upotrebi za sensorske i aktuatorске parove. U tom smislu deo ovog uvoda posvećuje se izvodima iz osnovnih svojstava piezoelektričnog efekta i svojstava piezokeramičkih materijala.

9.1.1 Piezoelektrični efekat

Piezoelektricitet je osobina određene grupe materijala, čiju su pojavu prvi put demonstrirali, u direktnom piezoelektričnom efektu, još 1880. godine Pierre i Jacques Curie, proučavajući uticaj pritiska na generisanje naelektrisanja u pojedinim kristalima. Ispoljava se kroz dva osnovna efekta: direktni i obrnuti piezoeffekat. Direktni efekat se identifikuje sa fenomenom generisanja naelektrisanja (polarizacijom) usled dejstva mehaničke sile, dok se obrnuti efekat ispoljava pojavom mehaničke sile usled dejstva električnog polja. Oba efekta našla su široku primenu u savremenim mehaničkim, elektronskim i optičkim uređajima.

Najizraženiji piezoelektrični efekat javlja se kod nekih monokristala i kod piezoelektričnih keramika, tako da se ovi materijali primenjuju u nauci i tehnici za generisanje ili prijem ultrazvučnih talasa, zatim kao aktuatorski i senzorski elementi itd..

9.1.2. Piezokeramika i njena svojstva

Keramički materijali predstavljaju jednu od najstarijih vrsta materijala koji se primenjuju za piezoelektrični efekat. Međutim, pravi razvoj ove oblasti može se smestiti u poslednjih 50 godina. Keramički materijali su složeni po svom sastavu i strukturi. Po strukturi to su materijali smešteni između kristalnih i amorfni čvrstih materijala. Poseduju mnoge osobine i jedne i druge grupe materijala, ali i neke značajne specifične osobine koje ih svrstavaju u posebnu grupu. Keramika se odlikuje znanstvom

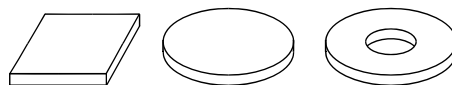
(domenskom) strukturom, koju čine skupovi slučajno orijentisanih kristalita (mali kristali veličine do 100 μm u prečniku), međusobno spojenih, tako da čine čvrsto telo. U osnovi keramički materijali su izotropni, ali se ova karakteristika može promeniti posebnim tehnikama (orijentisanjem kristalita mehaničkim, električnim ili toplotnim postupcima). Pojedine osobine keramičkih materijala određene su pre svega osobinama kristalita i njihovom međusobnom orijentacijom i vezom.

Od posebnog interesa za primenu su tzv. elektronske keramike. To su specijalno razvijene kompozicije, koje se ne mogu naći u prirodi i koje su proizvedene pod posebnim uslovima, a sa specifičnim su električnim osobinama. U ovu vrstu keramike, pored niza različitih izolatorskih keramika, ferita, kondenzatorskih keramika, supstrata, varistora, feroelektričnih, piroelektričnih i elektrooptičkih keramika, spada i piezoelektrična keramika.

Piezokeramički materijali odlikuju se indukovanom piezoelektričnom aktivnošću. S obzirom da se standardna keramika (polikristalni materijali) odlikuje izotropnim osobinama (jednakim u svim pravcima), piezoelektrična aktivnost se indukuje posebnim tehnološkim postupkom, polarizacijom u snažnom električnom polju pri povišenoj temperaturi. Time je omogućeno proizvoljno definisanje stepena anizotropije, odnosno definisanje materijala sa unapred zadatim piezoelektričnim osobinama. Na taj način je razvijen veliki broj različitih elektromehaničkih komponenti.

U posebnu grupu savremenih piezoelektričnih materijala spadaju i polimerni piezoelektrici, kao i kompozitni piezoelektrični materijali, odnosno materijali napravljeni na bazi keramike i polimera.

Primena piezoelektrične keramike u piezoelektričnim pretvaračima uslovljena je njenom velikom piezoelektričnom aktivnošću i lakom izradom elemenata različitih geometrijskih oblika i dimenzija. Piezokeramički elementi, koji služe kao izvori ultrazvučnih oscilacija kada se pobude promenljivim električnim poljem dovedenim preko odgovarajućih elektroda, izrađuju se u velikom broju geometrijskih formi, zavisno od tipa proizvedenih akustičkih oscilacija i strukture formiranog vibracionog polja. Na slici 9.1. prikazani su neki najčešći karakteristični oblici piezokeramičkih pločica za industrijsku primenu. Pri tome, za konstruisanje snažnih piezoelektričnih pretvarača najčešće se koriste pločice u obliku diska ili diska sa kružnom rupom u sredini, koje vrše oscilovanje po debljini.



Slika 9.1. Najčešći oblici piezokeramičkih pločica

Poznato je više od 1500 kristala pizokeramika koji se razlikuju po hemijskom sastavu i osobinama. Njihova klasifikacija izvršena je na osnovu pripadnosti određenoj klasi simetrije kojom se definišu pizoelektrične, dielektrične i elastične osobine kristala.

Pizoelektrične keramike su polikristalni materijali koji su polarizovani. Način na koji se dobija piezokeramika analogan je dobijanju obične keramike. Strukturno gledano nepolarizovana piezokeramika predstavlja skup kristala odnosno zrna sa slučajnom orijentacijom kristalografskih osa, pri čemu se svaki kristalit odlikuje složenom domenskom strukturom pa je i spontana polarizacija jednaka nuli. Dakle, dobijeni polikristalni uzorci, tehnologijom sinterovanja, imaju iste osobine u različitim pravcima, tj. izotropni su. Kada ne postoji polarizacija tada keramika nema osobine piezokeramike, jer predstavlja

sistem koji poseduje centar simetrije. Međutim, ovo svojstvo izotropije važi samo do trenutka dok keramika nije podvrgnuta dejstvu električnog polja.

U procesu polarizacije električni momenti domena svih vrsta zrna usmeravaju se u smeru polja. Nakon prestanka dejstva spoljašnjeg električnog polja veliki broj domena ostaje u ovim novim položajima i sada ovi materijali nemaju više izotropne osobine. To znači da polarizacija u kristalima zauzima isti pravac i ne menja se čak i kad se napon isključi, a keramika pokazuje piezoelektrične osobine zahvaljujući histerezi i time keramika dobija polarnu anizotropiju, tj. prelazi u klasu piezoelektronika.

Piezoelektrična svojstva piezoelektronike mogu prestati ako se keramika izloži visokim inverznim električnim naponima, visokim napreznjima i udarima, ako se zagreje iznad Kirijeve temperature ili ako se izloži bilo kojoj kombinaciji ovih veličina. Taj proces naziva se depolarizacija.

Dimenzije zrna piezokeramike ($3+100\mu\text{m}$) imaju uticaj na njene osobine, uglavnom se koriste piezokeramike sa sitnijom zrnastom strukturom. Vrlo često se koristi keramika $\text{PbTiO}_3\text{-PbZrO}_3$, koja se popularno naziva PZT-keramika, a i niz jedinjenja koja se oblikuju visokom Kirijevom temperaturom- 570°C što omogućava da se dobijaju piezoelementi za rad na visokim temperaturama.

Proizvodnja piezokeramike zahteva složen i komplikovan tehnološki proces. Osobine materijala piezokeramike mogu da se menjaju promenom hemijskog sastava smeše i promenom procesa proizvodnje, što daje široku lepezu različitih vrsta piezokeramičkih materijala.

Piezokeramici je svojstveno starenje tj. promena njenih parametara (dielektrična propustljivost, piezomodul, itd.) sa vremenom. To je vrlo izraženo u prvih nekoliko dana posle izrade i polarizacije uzorka. Posle nekoliko dana promene u osobinama piezokeramike su veoma male i opadaju kao logaritamska funkcija vremena. Proces starenja može se objasniti relaksacijom dipola u materijalu.

S obzirom da je piezokeramika polarizovana, razlikuje se "pozitivna" i "negativna" elektroda. Kod nenapregnute pločice napon između elektroda je jednak nuli, međutim, kada se pločica mehanički pritisne između pločica se javlja pozitivan (direktan) napon, dok istezanje iste uzrokuje negativan (inverzan) napon. S druge strane, dovođenje inverznog napona pločica se sakuplja, a pod uticajem direktnog ista se izdužuje. Dakle, ako se elektrode pločice od piezokeramike priključe na naizmenični napon onda će se javiti naizmenično sakupljanje i istezanje (oscilovanje) piezokeramike. Maksimalni pomeraj nastupa kada je učestalost pobudnog napona jednaka rezonantnoj učestanosti piezokeramičkog elementa.

Uz piezoelektrični efekat piezoelektrični materijali poseduju osobine i piroelektričnog efekta, zbog kojih dolazi do električnih promena kada je materijal pod dejstvom temperature. Ovaj efekat se koristi za proizvodnju detektora toplote, ali ovde se neće baviti takvim fenomenima.

Tenzor piezomodula

Intenzitet polarizacije piezoelektričnog kristala linearno zavisi od dejstva mehaničkog napona (N) na kristal, odnosno:

$$D_i = b_{ijk} N_{jk}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \text{ ili u razvijenom obliku:}$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{111} & b_{122} & b_{133} & b_{123} & b_{132} & b_{131} & b_{113} & b_{112} & b_{121} \\ b_{211} & b_{222} & b_{233} & b_{223} & b_{232} & b_{231} & b_{213} & b_{212} & b_{221} \\ b_{311} & b_{322} & b_{333} & b_{323} & b_{332} & b_{331} & b_{313} & b_{312} & b_{321} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{33} \\ N_{23} \\ N_{32} \\ N_{31} \\ N_{13} \\ N_{12} \\ N_{21} \end{Bmatrix} \quad (9.1.1)$$

gde je:

D_i (C/m²)- intenzitet polarizacije piezoelektričnog kristala

b_{ijk} (m/V ili C/N) - tenzor piezomodula

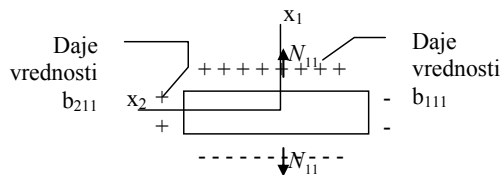
Obrnuto, ako se piezoelektrični kristal postavi u električno polje javiće se dilatacija kristala s , odnosno:

$$s_i = b_{ijk} E_{jk}$$

gde je : E (V/m)- električno polje.

Izraz (9. 1.1) slikovito može da se objasni na sledećem primru:

Pretpostavimo da je pločica presečena upravno na proizvoljni pravac označen sa Ox₁ i izložena normalnom naponu N₁₁ na toj površini. Polarizacija će se javiti sa komponentama u sva tri pravca Ox₁, Ox₂, i Ox₃, $D_i = b_{i11}N_{11}$, a u posmatranom $D_1 = b_{111}N_{11}$, zato b_{111} meri ‘longitudinalni’ piezoelektrični efekat, slika 9.2.. Praktično daje vrednost naelektrisanja po jedinici površine stvorenog na površini ploče podeljenog sa dejstvujućom normalnom silom po jedinici površine pločice.



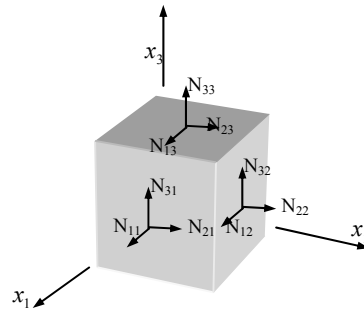
Slika 9.2. Polarizacioni efekat pod dejstvom napona N_{11}

Zbog simetrije tenzora mehaničkog napona (osnovno pravilo analize napona [237]) proizilazi da i tenzor piezoelektričnih modula b_{ijk} mora biti simetričan u odnosu na drug i treći indeks ($b_{ijk} = b_{ikj}$). Ovaj uslov simetričnosti daje 9 veza, te se broj nezavisnih koordinata tenzora piezoelektričnog modula od 27 smanjuje na 18, što daje mogućnost da koristimo kraći način pisanja poznat kao matrična notacija. To se čini definišući nove simbole b_{11} , b_{12} i tako dalje. Tko, na primer, definišu se veze $b_{11} = b_{111}$, ili $b_{14} = 2b_{123}$. Uočava se da su prvi indeksi isti u obe notacije, ali drug i treći indeks iz tenzorske notacije su zamenjeni sa jednim indeksom koji ide od 1 do 6, što znači:

Tenzorska notacija	11	22	33	23,32	31,13	12,21
Matrična notacija	1	2	3	4	5	6

S obzirom na gore pomenuto tenzor napona sada dobija drugačije označene komponente:

$$\begin{Bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_1 & N_6 & N_5 \\ N_6 & N_2 & N_4 \\ N_5 & N_4 & N_3 \end{Bmatrix}$$



Slika 9.3 Komponente tenzora napona u materijalnom koordinatnom sistemu x_1, x_2, x_3

gde su na slici 9.3 prikazane komponente tenzora napona u materijalnom koordinatnom sistemu x_1, x_2, x_3 , tj. u koordinatnom sistemu vezanom za posmatrano telo.

Sada se vektor intenziteta polarizacije piezo-elektrčnog kristala zapisuje u obliku:

$$D_i = b_{i\Lambda} N_\Lambda, \quad (9.1.2)$$

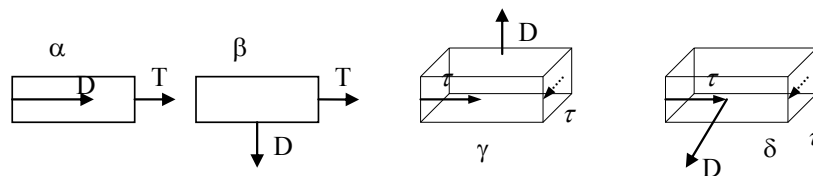
gde sada indeksi primaju vrednosti: $i \in \{1,2,3\}$ i $\Lambda \in \{1,2,3...6\}$

Da bi se razmotrilo uticaj svake komponente tenzora piezomodula $b_{i\Lambda}$ treba utvrditi fizički smisao svake komponente. Na primer, koordinata piezomodula $2b_{14} = b_{132} + b_{123}$, za nju je odgovarajuća koordinata intenziteta polarizacije: $D_1 = b_{14}T_4 = \frac{1}{2}(b_{123} + b_{132})N_{23}$. Ako se pokaže da je $b_{14} \neq 0$ pod dejstvom tangencijalnog napona N_{23} u ravni upravnoj na osu tri (ili pod dejstvom tangencijalnog napona N_{32} u ravni upravnoj na osu dva), javlja se električna polarizacija, čija je komponenta D_1 duž ose 1.

Analizirajući ovim postupkom svih 18 konstanti piezomodula pokazuje se da postoji samo 4 nezavisna tipa piezomodula.

	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6
D_1	α	β	β	γ	δ	δ
D_2	β	α	β	δ	γ	δ
D_3	β	β	α	δ	δ	γ

Fizički smisao svake komponente piezomodula objasnićemo posmatrajući sledeću sliku.



Slika 9.4. Fizički smisao komponenti piezomodula

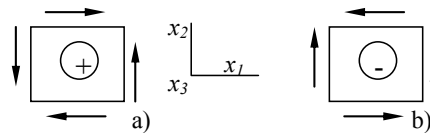
Piezomoduli α (b_{11}, b_{22}, b_{33}) daju vezu između normalnih napona (N_1, N_2, N_3) i polarizacije u istom smeru. Piezomoduli β ($b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{21}, b_{31}, b_{32}$) daju vezu između normalnih napona (N_1, N_2, N_3) i polarizacije upravne na smer naprezanja. Piezomoduli γ (b_{14}, b_{25}, b_{36}) daju vezu između tangencijalnih

napona (N_4, N_5, N_6) i polarizacije paralelne osi uvijanja. Piezomoduli $\delta (b_{15}, b_{16}, b_{26}, b_{24}, b_{34}, b_{35})$ daju vezu između tangencijalnih napona (N_4, N_5, N_6) i polarizacije upravne na osu uvijanja.

Fizički smisao i brojne vrednosti komponenata tenzora piezomodula zavise od simetrije kristala i promene orijentacije osa simetrije. Uticaj simetrije kristala definiše se Nojmanovim (*Neumann*) pravilom: "Nijednom simetričnom rotacijom, svojstvenom kristalu, ne mogu se promeniti fizičke osobine kristala". Kao krajnji slučaj prokomentarišimo kristale sa centralnom simetrijom, neka je takav kristal izložen glavnom naponu i postao polarizovan. Sada zamislimo da je ceo sistem, i kristal i napon, zasokrenut oko centra simetrije. Napon se neće promeniti pošto je centralno simetričan, takođe ni kristal, ali će polarizacija biti negativna. Dakle, ostali smo na istom kristalu i sa istim naponom, ali je polarizacija promenila znak. Ovakva situacija je moguća jedino ako je polarizacija jednaka nuli. Dakle, centralno simetrični kristali ne mogu biti piezoelektrici.

Na sličan način može se izvesti zaključak o pojavi nultih i međusobno jednakih piezomodula u različitim klasama kristala. Na primer:

Ako se posmatra piezomodul b_{36} kristalne klase 4 tetragonalne kristalne rešetke. On praktično meri komponentu polarizacije D_3 izazvanu smicajnim naponom oko ose Ox_3 . Na slici 9.5.a) osa Ox_3 je upravna na ravan crteža. Pretpostavi se da tangencijalni napon sa smerom naznačenim na slici 9.5. a) proizvodi dipol paralelan osi Ox_3 sa pozitivnim smerom naviše. Menjajući smer napona mora se promeniti i smer dipola, kao što je to prikazano na slici 9.5.b). Ali kako kristal ima 4 ose preslikavanja kristal na slici 9.5.b) je napregnut na isti način kao i kristal sa slike 9.5. a) , jedino je zaokrenut za 90° . Polarizacija mora, dakle biti ista u oba slučaja, a to je jedino moguće ako je jednaka nuli. Dakle $b_{36}=0$.



Slika 9.5. Polarizacije D_3 izazvanu smicajnim naponom oko ose Ox_3 kristalne klase 4 tetragonalne kristalne rešetke

Ispitjući svaki od 18 piezomodula mogu se naći oblici matrice tenzora piezomodula za svaku klasu simetrije. Ukoliko se pri analizi, posle transformacije simetrije kristala, znak piezomodula promeni, vrednost tog piezomodula je jednaka nuli. A ukoliko znak ostane isti taj piezomodul ostaje u matrici.

Za analizirani slučaj dobija se da su 11 piezomodula jednaki nuli, a oblik matrice zavisi od kristalografske orijentacije, tako kod tetragonalne kristalne rešetke klase 4 matricu piezomodula je oblika:

$$b_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b_{14} & b_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{24} & b_{25} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ s tim što su } b_{31} = b_{32}, \quad b_{14} = -b_{25}, \quad b_{15} = b_{24}$$

Dakle, korišćenje pravila simetrije tenzora mehaničkog napona (osnovno pravilo analize napona) i ispitujući simetriju kristala i promene orijentacije osa sistema može se zaključiti da simetrija bitno uprošćava matricu piezomodula, pri čemu su neki koeficijenti jednaki nuli, drugi su međusobno jednaki ili su sa suprotnim znakom, a neki su i dvostruko veći.

Tenzor piezokonstanti

Analogno postupku iz prethodne tačke može se naći veza između intenziteta električne polarizacije (D) i dilatacije. Za anizotropna tela ta veza je:

$D_i = e_{ik} s_k$ ($i=1,2,3$ a $k=1,\dots,6$) ili u matičnom obliku:

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{Bmatrix} \quad (9.1.3)$$

gde su e_{ik} (N/Vm ili C/m²) - koordinate tenzora piezokonstanti.

Slična je veza između koordinata tenzora mehaničkog napona i koordinata tenzora električnog polja:

$$N_i = -e_{ik} E_k$$

Postupak svođenja tenzora piezokonstanti na minimalan broj nezavisnih koordinata je sličan postupku iz prethodnog odeljka.

Kod nekih klasa kristalnih sistema su sve koordinate matrice tenzora piezokonstanti jednake nuli, a to znači da materijali sa ovim klasama simetrije kristala nisu piezoelektrici i nemaju nikakva piezoelektrična svojstva.

Tenzor dielektričnih konstanti

Izotropni dielektrik ima ista svojstva u svim pravcima i u svim tačkama, i kod njega je intenzitet električne polarizacije (\vec{D}) paralelan sa vektorom električnog polja (\vec{E}), odnosno kolinearni su.

Linearni dielektrici su dielektrici kod kojih su fizička svojstva linearna funkcija od jačine spoljašnjeg električnog polja. U linearnim izotropnim dielektricima vektor intenziteta električne polarizacije je linearno zavistan od vektora električnog polja (\vec{E}) i oni su međusobno paralelni ($\vec{D} = d\vec{E}$).

Anizotropni dielektrici su oni dielektrici čija su fizička svojstva različita u različitim pravcima. Pravac vektora intenziteta električne polarizacije (\vec{D}) se ne poklapa sa pravcem vektora spoljašnjeg električnog polja (\vec{E}). U anizotropnim linearnim dielektricima je:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

gde su:

\vec{P} -m vektor polarizacije, a

ϵ_0 - dielektrična konstanta vakuuma.

Kod linearnih dielektrika je :

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}) = X\epsilon_0\vec{E},$$

gde je X - električna susceptibilnost.

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + X\epsilon_0\vec{E} = \epsilon_0(1 + X)\vec{E} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E},$$

gde je ϵ_r - relativna dielektrična konstanta dielektrika

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E},$$

gde je $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ - dielektrična konstanta.

Dielektrična konstanta anizotropnih linearnih dielektrika je tenzor drugog reda i ne zavisi od izbora koordinatnog sistema, zato:

$$D_i = \epsilon_{ik}E_k,$$

gde je

ϵ_{ik} - tenzor dielektričnih konstanti.

Tenzor dielektričnih konstanti u stanju ravnoteže je simetričan tenzor, pa je: $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$.

Osnovne relacije matematičkog opisa piezoelektrične keramike

Jednačine stanja koje opisuju piezoelektričnu keramiku preko njenih električnih i elastičnih osobina u opštem obliku su:

$$S = s^E \cdot N + b \cdot E \tag{9.1.4}$$

$$D = b \cdot N + \epsilon^T \cdot E, \tag{9.1.5}$$

pri čemu su: D tenzor dielektričnog pomeraja, N tenzor mehaničkog napon, E vektor električnog polja, S tenzor mehaničke specifične deformacije, b matrica piezoelektričnih koeficijenta, koji karakterišu odnose deformacije i električnog polja E , pri odsustvu mehaničkog napona, s^E elastična deformacija, kada je električno polje konstantno i ϵ^T matrica dielektričnih konstanta, pri konstantnom mehaničkom naponu. Prva jednačina (9.1.4) opisuje direktni piezoelektrični efekat, a druga (9.1.5) obrnuti piezoeffekat.

Jednačine (9.1.4) i (9.1.5) mogu da se napišu i u obliku:

$$N = c^E \cdot S - e \cdot E \tag{9.1.6}$$

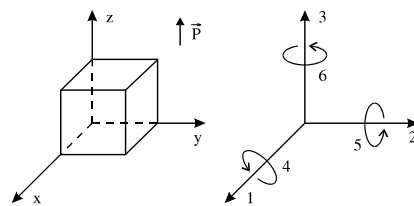
$$D = e \cdot S + \epsilon^T(1 - k^2) \cdot E, \tag{9.1.7}$$

gde su $c^E = 1/s^E$ Young-ovi moduli u konstantnom električnom polju, $e = b/s^E$ je konstanta koja daje odnos električnog pomeraja i deformacije, a $k^2 = b^2/s^E\epsilon^T$ koeficijent sprezanja piezoelektričnog materijala. To ime zapravo potiče iz činjenice da na frekvencijama bliskim mehaničkim rezonantnim frekvencijama piezo elementa k^2 može da se izrazi kao odnos konvertovane energije i energije na ulazu. Jasno je da su velike vrednosti koeficijenta k uslov dobrog pretvarača. Iz jednačine (9.1.7) vidi se da je odnos dielektrična konstanta pod konstantnom deformacijom i one pod konstantnim mehaničkim

naponom $\varepsilon^s = \varepsilon^T(1-k^2)$ Jednačina (9.1.6) je početna tačka u formulisanju jednačine ravanskog piezoelektričnog aktuatora, a jednačina (9.1.7) ravanskog senzora.

Sistemi jednačina (9.1.4-9.1.7) imaju matričnu formu, odnosno radi se o sistemu jednačina koje opisuju materijal duž različitih pravaca. Naime, piezokeramički materijali su anizotropni i zato njihovi piezoelektrični koeficijenti zavise od pravca polarizacije, odnosno od pravca delovanja mehaničke sile, a to uslovljava vrednosti i pojavu pojedinih konstanti u konstitutivnim relacijama. Materijali mogu biti tako napravljeni da određeni koeficijenti budu dominantni u odnosu na druge.

Usvojena je metoda koji omogućava jedinstveno označavanje pojedinih pravaca u piezoelektričnom materijalu (slika 9.6). Pravac polarizacije u pravouglom koordinatnom xyz sistemu, za koji je usvojeno da se poklapa sa z osom, predstavlja referentni pravac u odnosu na koji se postavljaju kristalografske ose x, y i z . Pored toga, svaka od osa se umesto slovom x, y i z , označava brojem 1, 2 i 3, respektivno. Pomoću bilo koje dve ose ovog sistema može se postaviti jedna površina (znači postoje ukupno tri takve međusobno upravne površine). Delovanje mehaničkog pritiska tangencijalno na te površine (odnosno pojava efekta smicanja) označeno je brojevima 4, 5 i 6. Rezultujuća deformacija se označava na isti način i može se pregledno prikazati kao rotacija oko ose (slika 9. 6).



Slika 9. 6. Označavanje osa kod piezoelektričnog materijala

Koeficijenti koji daju odnos dveju veličina označeni su sa dva indeksa (tabela 1), od kojih se prvi odnosi na pravac električne veličine (električno polje ili dielektrični pomeraj), a drugi indeks se odnosi na pravac mehaničke veličine (napon ili deformacija). Npr. piezoelektrični koeficijenti naelektrisanja b_{31} i b_{33} predstavljaju odnose između naelektrisanja generisanog na jediničnoj površini i sile koja deluje na tu površinu. Pri tome piezoelektrični koeficijent b_{31} se odnosi na dielektrični pomeraj (D_3) u pravcu ose polarizacije 3 i mehanički napon (N_1 i N_2) u pravcu normalnom na pravac ose polarizacije. Koeficijent b_{33} se koristi onda kada je mehanički napon N_3 paralelan sa osom polarizacije i dielektričnim pomerajem D_3 (D_3 i N_3 su istog pravca).

Karakteristični parametri piezokeramike

Parametri piezokeramičkih materijala određuju se na osnovu mehaničkih i električnih graničnih uslova. Mehanički granični uslovi definisani su konstantnim mehaničkim naponom N ili konstantnim istezanjem S . Električni granični uslovi su definisani konstantnim električnim poljem jačine E ili konstantnim dielektričnim pomerajem D . Kod primene piezokeramike od posebnog je značaja klasifikacija raznih tipova piezokeramike po osobinama, nameni i veličini odgovarajućih konstanti.

Na osnovu sistematizacije odgovarajućih teorijskih i eksperimentalnih saznanja o piezokeramikama može se dati pregled njihovih najvažnijih parametara (tabela 1).

Piezoelektrični koeficijenti naelektrisanja (b_{31} , b_{33} i b_{15}) i naponski koeficijenti (g_{31} , g_{33} i g_{15}) opisuju elektromehaničke parametre piezokeramičkog materijala. Koeficijenti elektromehaničke sprege pokazuju veličinu elektromehaničkih efekata. U fizičkom smislu, koeficijent elektromehaničke sprege definiše odnos električne energije koja se pretvara u mehaničku (obrnuti piezoeffekat) ili mehaničke u električnu (direktni piezoeffekat). Iz tabele 1 je očigledno da pored elektromehaničkih postoje i električne i mehaničke osobine koje određuju kvalitet piezokeramike.

Osobine piezokeramičkih pretvarača

Piezokeramički pretvarač je elektromehanički ili elektroakustični pretvarač čiji se rad zasniva na piezoelektričnom efektu. Osnovni deo piezoelektričnog pretvarača je piezoelement (piezopločica) ili grupa piezoelemenata međusobno povezanih električno i mehanički. Pri tom, direktni piezoelektrični efekat (generisanje elektriciteta pod dejstvom mehaničkog opterećenja) koristi se za detekciju pomoću senzora, a inverzni (stvaranje deformacije pod dejstvom električnog polja) za generisanje ultrazvučnih talasa kod aktuatora. U zavisnosti od namene piezoelementi mogu biti konstruktivno povezani sa pasivnim mehaničkim elementima kao što su: koncentratori, membrane, itd.

U skaldu sa veoma širokom i raznovrsnom primenom piezoelektričnih pretvarača i opseg njihovih frekvencija je veoma širok. S jedne strane piezopretvarač se može koristiti za seizmička ispitivanja čije su frekvencije nekoliko Hz a sa druge, za generisanje elastičnih oscilacija reda veličine nekoliko GHz. Piezoelektrični pretvarači, kada se koriste kao izvor zračenja, koriste se u uskom opsegu frekvencija, u blizini rezonantne frekvencije njihovih mehaničkih sistema, da bi se postiglo maksimalno iskorišćenje električne energije. Piezoelektrični pretvarači kao premnici, odnosno senzori, rade u širokom opsegu frekvencija i to van rezonantne, jer sada nije od presudne važnosti iskorišćenje energije.

Izbor piezoelektričnog materijala zavisi od specifične primene pretvarača koji se projektuje. Na primer maksimalna efikasnost emitera ultrazvuka je osnovna karakteristika dobrog, snažnog ultrazvučnog pretvarača. Ova karakteristika je u direktnoj vezi sa elektromehaničkim faktorom sprege k , koji treba da ima što veću vrednost. S druge strane, za pojedine načine vibriranja je često potrebna mala vrednost faktora k , da bi se eliminisale neželjene vibracije prouzrokovane vrstom sprege. Električne karakteristike i dimenzije piezoelektričnih pretvarača zavise od dielektričnih, piezoelektričnih i elastičnih konstanti materijala. Tako za donji i srednji opseg ultrazvučnih frekvencija između 20 kHz i nekoliko stotina kHz, velika vrednost relativne dielektrične konstante (permitivnosti) i elastične deformacije je značajna za dobijanje odgovarajućih praktičnih vrednosti električne impedanse i linearnog dimenzionog upravljanja rezonantnom frekvencijom piezoelektričnog elementa. Međutim, za više frekvencije su manje poželjne ovakve velike vrednosti. Ustvari, za pretvarač koji radi u debljinskom modu (thickness-mode) na vrlo visokim frekvencijama od 10÷100 MHz, piezoelektrični materijali sa malom deformacijom omogućavaju da pretvarač ne bude suviše tanak. U isto vreme je niža permitivnost protivteža porastu frekvencije i

Tabela 1: Karakteristični parametri piezokeramike

ELEKTRIČNE KARAKTERISTIKE		
NAZIV	OZNAKA	DEFINICIJA
relativna dielektrična konstanta	$\varepsilon_{33}^T/\varepsilon_0, \varepsilon_{33}^S/\varepsilon_0,$ $\varepsilon_{11}^T/\varepsilon_0, \varepsilon_{11}^S/\varepsilon_0$	odnos dielektrične konstante datog materijala i dielektrične konstante vakuuma (meren pri konstantnom mehaničkom pritisku na $f=1$ kHz i pri $U_{eff} \leq 1 V$ za $\varepsilon^T/\varepsilon_0$, odnosno meren pri konstantnom istežanju za frekvencije iznad najviše rezonantne frekvencije za $\varepsilon^S/\varepsilon_0$)
faktor gubitaka	$tg\delta$	odnos reaktivne i aktivne snage meren na $f=1$ kHz i pri $U_{eff} \leq 1 V$
specifična otpornost	r_s	
Kirijeva temperatura	T_C	temperatura na kojoj prestaju piezoelektrična svojstva
ELEKTROMEHANIČKE KARAKTERISTIKE		
elektromehanički faktor sprege	$k_p, k_{31}, k_{33},$ k_{15}, k_t	mera konverzije električne energije u mehaničku i obrnuto gde su: k_p -faktor sprege osnovnih ravanskih vibracija, k_{31} - faktor sprege osnovnih vibracija transverzalno pobudenog dugog štapa, k_{33} -faktor sprege osnovnih vibracija longitudinalno pobudenog dugog štapa, k_{15} -faktor sprege osnovnih vibracija smicanja po debljini, k_t -faktor sprege osnovnih vibracija po debljini kod tanke ploče
piezoelektrični koeficijent naelektrisanja	b_{31}, b_{33}, b_{15}	odnos između dielektričnog pomeraja D i mehaničkog pritiska N pri konstantnoj jačini polja E , ili odnos između istežanja S i jačine električnog polja E pri konstantnom mehaničkom pritisku N
piezoelektrični naponski koeficijent	g_{31}, g_{33}, g_{15}	odnos između jačine električnog polja E i mehaničkog pritiska N pri konstantnom dielektričnom pomeraju D ili odnos između istežanja S i dielektričnog pomeraja D pri konstantnom mehaničkom pritisku N
frekventna konstanta	$N_p, N_t,$ N_1, N_3	produkt osnovne rezonantne frekvencije f_r i dimenzije elementa u pravcu oscilovanja: $N_p = 2Rf_r$ -frekventna konstanta ravanskih vibracija tankog diska prečnika $2R$, $N_t = tf_r$ -frekventna konstanta vibracija po debljini kod tanke pločice debljine t , $N_1 = lf_r$ -frekventna konstanta longitudinalnih vibracija kod transverzalno polarizovanog štapa dužine l , $N_3 = lf_r$ -frekventna konstanta longitudinalnih vibracija kod longitudinalno polarizovanog štapa dužine l .
MEHANIČKE KARAKTERISTIKE		
gustina	ρ	odnos mase i zapremine uzorka
elastična deformacija	$s_{11}^E, s_{33}^E, s_{55}^E,$ $s_{11}^D, s_{33}^D, s_{55}^D$	odnos istežanja S i mehaničkog pritiska N , pri konstantnoj jačini električnog polja E , ili pri konstantnom dielektričnom pomeraju D
Poasson-ov koeficijent	μ	odnos transverzalnog i longitudinalnog širenja
mehanički faktor dobrote	Q_M	odnos ukupne energije koja se dovodi oscilatornom sistemu i energije koja se troši na savlađivanje gubitaka

obezbeđuje da električna impedansa ne bude suviše niska. To je zato što je deformacija obrnuto srazmerna kvadratu frekvencije i kvadratu debljine, a električna impedansa je obrnuto srazmerna frekvenciji i permitivnosti (IEEE Standard on Piezoelectricity 1984, Mattiat 1971).

Mehanički i električni faktori dobrote, Q_M i Q_E , odnose se na gubitke i određuju efikasnost i propusni opseg. Generalno, u keramičkim materijalima električni gubici nisu od velikog značaja. U praktičnim pretvaračima Q_M je generalno određujući parametar njihovog kvaliteta. Npr. u impulsnim eho pretvaračima korišćenje kratkih ultrazvučnih impulsa zahteva da Q_M ima što manju vrednost, da bi se dobio širok propusni opseg i dobar impulsni odgovor. Nizak Q_M faktor nije uvek uslovljen gubicima, ako je ostvaren dobar prenos akustičke energije do potrošača. To implicira da se moraju prilagoditi akustičke impedanse pretvarača i potrošača. Stoga sledi da je akustička impedansa piezoelektričnog materijala drugi određujući parametar njegovog kvaliteta.

Za primene u pretvaračima značajno je da karakteristične konstante materijala moraju biti stabilne u odnosu na vreme, temperaturu, mehanička naprezanja i električno polje. To znači da prethodna ograničenja upotrebljivosti materijala moraju biti takva da obezbede optimalnu snagu pretvarača.

Piezoelektrični materijali koji se najčešće koriste za pretvarače mogu biti klasifikovani u 7 grupa: kvarcni kristali, kristali rastvorljivi u vodi, jedinični kristali sa visokom tačkom topljenja, piezoelektrični poluprovodnici, piezoelektrične keramike, piezoelektrični polimeri i piezoelektrični keramički kompoziti.

Može se pokazati da piezoelektrične keramike u odnosu na druge materijale poseduju najširi opseg elastičnih, električnih i piezoelektričnih konstanti i generalno gledano imaju najbolje karakteristike za ultrazvučne pretvarače. S druge strane, keramički materijali mogu biti napravljeni u širokom opsegu veličina i oblika i njihova osa polarizacije se može izvesti zavisno od geometrije i načina vibriranja. Keramički kompoziti poseduju slične osobine kao keramike i često se koriste za specifične primene.

Najviše korišćeni i najpopularniji keramički materijal je olovo-cirkonat-titanat (PZT) koji se pravi u više komercijalnih verzija. Takođe su vrlo komercijalni kompoziti bazirani na barijum-titanatu, olovo-metaniobatu i sodijum-niobatu. U novije vreme posebna pažnja je posvećena razvoju novih keramika na bazi $PbTiO_3$, koje poseduju interesantne karakteristike za pojedine primene (pretvarači za NDT, medicinsku dijagnostiku i hidrofone). Konačno, piezoelektrični kompoziti keramika i polimernih materijala predstavljaju područje intenzivnog istraživanja i razvoja.

Vodeća uloga olovo-cirkonat-titanata potiče od njegovog jakog piezoelektričnog efekta i visoke Kirijeve temperature, uz širok opseg osobina koje se lako menjaju malim promenama u kompoziciji. Promene u osobinama mogu biti izazvane zamenom dela konstituenata sa drugim elementima, kao što su kalcijum, stroncijum, barijum, niobijum itd.

Mada se u praksi sreće čitav spektar varijanti piezokeramičkih materijala, prethodna klasifikacija piezokeramike dovoljna je da odredi najbliže usmerenje pri projektovanju pretvarača. Konačne karakteristike piezokeramičkih pretvarača zavise isključivo od komponenti, koje ulaze u sastav keramike i od tehnologije formiranja i sinterovanja keramike, tako da postoji mnogo novih tipova piezokeramika sa veoma raznovrsnim sastavom i različitim elektromehaničkim osobinama.

Mehanički faktor dobrote Q_M definiše kvalitet piezokeramike kao izvora oscilacija, pri čemu je poželjna njegova što veća vrednost. Da bi se za pretvarače upotrebile što tanje piezopločice, njihova odgovarajuća frekventna konstanta N treba da bude što veća. Kako je sendvič struktura piezopretvarača napregnuta i piezokeramika poseduje utisnutu dipolnu polarizaciju, vrlo je važno da u toku rada amplituda napona napajanja ne izazove električni proboj i razaranje piezokeramike. To se postiže izborom piezokeramike sa što većim naponom depolarizacije, tj. sa što sporijim starenjem. Znači da je potrebno izabrati keramiku čiji se svi električni i mehanički parametri neznatno menjaju u radnom temperaturnom opsegu pretvarača, kao i da je dozvoljeno naprezanje piezokeramike što veće, kako pri radu ne bi došlo do prskanja piezopločica. Pored svega navedenog, piezokeramika treba da se odlikuje malom poroznošću, malom higroskopnošću, velikom homogenošću, što većom specifičnom podužnom otpornošću, uskim tolerancijama dimenzija piezopločica itd.

9.1.3. Fizički modeli piezoeletričnih aktuatora.

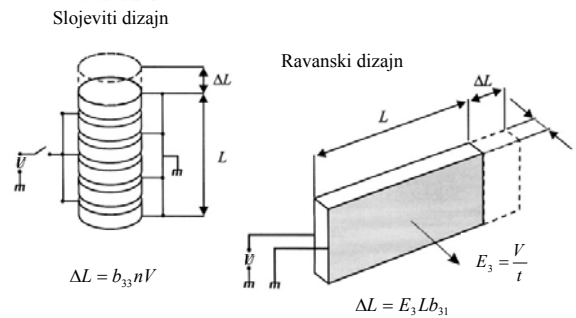
Slojeviti model - linearni aktuator i ravanski model koji je primer prostorno raspodeljenog aktuatora prikazani su na slici 9.7. Ako se pravac polarizacije poklapa sa pravcem 3 konstitutivne jednačine mogu biti napisane u matričnom obliku:

$$\begin{matrix} \left. \begin{matrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{23} \\ 2S_{13} \\ 2S_{12} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \\ & s_{44} & \\ & & s_{55} \\ & & & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{31} \\ b_{32} \\ b_{33} \\ b_{24} \\ b_{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (9.1.8)$$

Za senzor

$$\begin{matrix} \left. \begin{matrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} & & & b_{15} & 0 \\ & & & b_{24} & \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & & \\ & \varepsilon_{22} & \\ & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (9.1.9)$$

Iz jednačine za aktuator (9.1.8) primećuje se da kada je električno polje E_3 paralelno primenjeno pravcu polarizacije, širenje se dešava u istom pravcu, a amplituda mu je data preko piezoeletričnog koeficijenta b_{33} . Slično se dešava duž pravaca 1 i 2, ortogonalnih na pravac električnog polja, i njegove amplitude su određene koeficijentima b_{31} i b_{32} , respektivno. Piezokeramike imaju izotropna svojstva u ravni pa su $b_{31} = b_{32}$. Takođe, može se primetiti da električno polje E_1 normalno na pravac polarizacije 3 proizvodi deformacije smicanja S_{31} koje su kontrolisane piezoeletričnom konstantom b_{15} (ista je situacija i ako je primenjeno polje E_2).



Slika 9.7. Slojeviti (b_{33}) i ravanski (b_{31}) model pezoelektričnih aktuatora

Linearni piezoaktuator sastoji se od naslaganih keramičkih slojeva debljine između 0.1 i 1 mm, razdvojenih elektrodama, slika 9.7. Polarizacijske ose i primenjeno električno polje ortogonalni su na ravni slojeva i poklapaju se sa pravcem dilatacije aktuatora, tako da je kapacitet odavanja aktuatora kontrolisan koeficijentom piezokeramičkih elemenata. Odgovarajući napon za slojeve od 0.1 mm je 100 V (nisko voltažni piezosloj) dok 1 mm iziskuje 1000 V (visko voltažni piezosloj). Oba tipa imaju slična svojstva naprezanja i zahtevaju prilično visoke struje. Sve to utiče na dizajn pretvarača, ili je potrebna visoka voltaža i slabija struja, ili obrnuto niži napon a jača struja. Maksimalna dilatacija može biti 0.1 do 0.13%, što znači da piezo translator od 100 mm može imati maksimalnu odgovor od 100 μm . Veličina diskova može da se izabere da bi se postigla odgovarajuća krutost. Za dinamičku upotrebu mehaničko prednaprezanje kompenzuje malu ekstenzionu snagu slojeva. Slojeviti aktuatori su okarakterisani koeficijentom b_{33} , kada nema spoljašnjeg opterećenja promena dužine je proporcionalna primenjenom naponu prema aproksimativnom izrazu:

$$\Delta L = b_{33} n U, \quad (9.1.10)$$

gde je n broj slepljenih diskova, a U je primenjeni napon. Stvarna zavisnost napon ekstenzija je nelinearna i pokazuje izraziti histerezis. Pri kvazistatičkoj upotrebi histerezis se može kompenzirati u povratnoj sprezi merenjem stvarnog širenja, ali ovakve kompenzacije sa povratnom spregom u dinamičkim upotrebama, na primer pri aktivnom prigušenju, nisu neophodne, čak mogu ugroziti stabilnost sistema.

9.2. Model diskretnog piezokeramičkog elementa

U ovom potpoglavlju proučavaće se model piezo-reoloških naslednih elemenata predstavljen sprezanjem piezo-elastičnog elementa kroz paralelnu vezu sa visko-elastičnim naslednim telom [45], radi postavljanja konstitutivne jednačine naponsko-deformacionog stanja standardnog piezo-reološkog naslednog elementa, kao elementa sjedinjavanja krutih tela ili materijalnih tačaka u hibridnim sistemima.

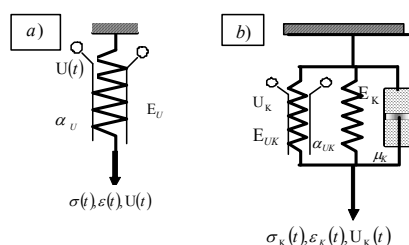
Piezo-keramički element se šematski prikazuje, kao što je na skici 9.8. a) prikazano, oprugom koja se nalazi između elektroda na čijim krajevima je napon $U(t)$ električne polarizacije površi piezo-kristala, koja označava postojanje homogenog polja električne polarizacije. Pravac elektroda je u pravcu opruge ili

upravan na nju zavisno od toga koji smo piezo-element izabrali i kako se odvija njegova polarizacija, kao i pojava mehaničke dilatacije i mehaničkog napona pod uticajem polja polarizacije, kao što se videlo u prethodnom potpoglavlju.

Direktni piezo-električni efekat jeste pojava električne polarizacije, u kristalima nekih klasa piezo-keramika, u rezultatu dejstva na keramiku spoljašnjih sila, koje deformišu njihove kristalne rešetke. U prostijim slučajevima efekat se pojavljuje u obliku površinskih električnih punjenja piezo-elementa, napravljenog iz piezo-keramike ili izrezanog iz piezo-kristala. Gustina naelektrisanja proporcionalna je izvedenom mehaničkom naponu i karakteriše se vektorom električne polarizacije P (što se meri količinom naelektrisanja po jedinici površine). Za dobijanje slobodnih naelektrisanja q sa piezo-elementom se kruto povezuju metalne elektrode.

Najprostije sumirano, iz prethodnog poglavlja, može se reći da je suština piezo-efekta u tome da se pod dejstvom mehaničkog opterećenja napreže kristalna rešetka i deformiše, pri čemu ona menja simetriju elementarne rešetke kristalne strukture. Ako je u početku u prirodnom stanju rešetka neutralna, uravnotežena, to se pod dejstvom opterećenja rešetka deformiše i gubi svoju ravnotežnu stabilnost i njena ravnoteža je poremećena. Svaka rešetka u deformisanom stanju dobija električni moment, zbog čega se površi piezo-elementa elektrišu i na metalnim elektrodama se pojavljuju slobodna naelektrisanja.

Piezoeffekat se uočava i pri opterećivanju piezoelementa silama, koje nemaju komponente duž ose normalne na površi elektrode, a takođe i momentima. Pokazano je da je za matematički opis piezoeffekta potreban tenzorski aparat. U narednim modelima će se zadržati na prostim slučajevima kada je vektor polarizacije u pravcu dejstva opterećenja ili upravan na njega.



Slika 9.8. a) šematski prikaz piezoelastičnog elementa; b) šematski prikaz pizomodifikovanog Kelvin-Voigt-ovog viskoelastičnog naslednog elementa;

Osnovni konstitutivni-materijalni parametri piezo-keramičkog elementa su modul elastičnosti E i koeficijent piezo-keramičke dilatacije $\alpha_u = b_{33}$, kojim uspostavljamo vezu između dilatacije i napona na elektrodama kojima registrujemo efekat polarizacije. Parametri stanja piezokeramičkog elementa su mehanički napon piezokeramike $\sigma(t)$, dilatacija piezokeramičkog elementa $\varepsilon(t)$ i vektor električne polarizacije površi piezokristala, kome odgovara slobodno električno punjenje i kome se može pridružiti ekvivalentni napon $U(t)$ na izvodima metalnih elektroda, koje su postavljene na krajevima piezokeramičke pločice.

Na osnovu jednačina (9.1.4) i (9.1.5) mogu se pisati osnovne jednačine piezokeramičkog linearnog elementa, koje daju vezu normalnog napona $\sigma(t)$ i dilatacije $\varepsilon(t)$ i električnog napona $U(t)$ u tri sledeća oblika:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_u U, \quad \sigma = E(\varepsilon - \alpha_u U), \quad U = \frac{1}{\alpha_u} \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E} \right). \quad (9.2.1)$$

Oblik koji će se upotrebiti zavisi od toga koji su parametri stanja piezokeramičkog elementa zadati, a kojima će se "upravljati" ili dejstvovati. Jednim parametrom stanja se upravlja, ili dejstvuje, i smatra se spoljašnjim uticajem, a ostala dva se uključuju u sistem međusobno zavisnih parametara sistema u koji je ugrađen piezokeramički element.

9.3. Model Kelvin-Voigt-ovog piezo-visko-elastičnog naslednog elementa

Na slici 9.8.b) data je piezo-reološka šema piezo-modifikovanog Kelvin-Voigt-ovog viskoelastičnog elementa koji je sastavljen od paralelno vezanih prostih elemenata Hooke-ovog H, Newton-ovog N i piezo-keramičkog elementa **PK**, i ima strukturnu formulu [45]: $MK = H \parallel N \parallel PK$.

Rezultujući mehanički napon $\sigma(t)$ piezo-modifikovanog visko-elastičnog elementa jednak je zbiru mehaničkih napona elemenata vezanih paralelno. Na osnovu toga piše se sledeće:

$$\sigma = \sigma_H + \sigma_N + \sigma_u, \quad (9.3.1)$$

$$\sigma_H(t) = E_K \varepsilon(t), \quad \sigma_N(t) = \mu_K \dot{\varepsilon}(t), \quad \sigma_u(t) = E_{uK} [\varepsilon(t) - \alpha_{uK} U_K(t)].$$

Rezultujući napon je:

$$\sigma(t) = (E_K + E_{uK}) \varepsilon(t) + \mu_K \dot{\varepsilon}(t) - E_{uK} \alpha_{uK} U_K(t). \quad (9.3.2)$$

Ovaj izraz istovremeno predstavlja i vezu mehaničkog napona $\sigma(t)$ i specifične deformacije - dilatacije $\varepsilon(t)$ piezo-modifikovanog Kelvin-Voigt-ovog visko-elastičnog elementa i napona polarizacije $U_K(t)$ na piezo-elementu. Ako se ova konstitutivnu vezu (9.3.2), mehaničkog napona i dilatacije i napona polarizacije, posmatra kao diferencijalna jednačina po dilataciji, prepisuje se u sledećem obliku:

$$\dot{\varepsilon}(t) + \frac{E_K + E_{uK}}{\mu_K} \varepsilon(t) = \frac{1}{\mu_K} [\sigma(t) + E_{uK} \alpha_{uK} U_K(t)]. \quad (9.3.3)$$

Prethodna jednačina je linearna prvog reda sa jednim konstatnim i jednim promenljivim koeficijentom i njeno se rešenje, lako, dobija u obliku:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\mu_K} e^{-\frac{E_K + E_{uK}}{\mu_K} t} \left\{ \int_0^t \sigma(\tau) e^{\frac{E_K + E_{uK}}{\mu_K} \tau} d\tau + E_{uK} \alpha_{uK} \int_0^t U(\tau) e^{\frac{E_K + E_{uK}}{\mu_K} \tau} d\tau \right\} \quad (9.3.4)$$

Kada se piezo-modifikovani Kelvin-Voigt-ov piezo-visko-elastični nasledni element naglo optereti do neke konačne vrednosti mehaničkog napona $\sigma_0 = const$ i ostavi se element pod dejstvom opterećenja. Za ovakvo stanje diferencijalna jednačina (9.3.3) se piše u obliku:

$$\dot{\varepsilon}(t) + \frac{E_K + E_{uK}}{\mu_K} \varepsilon(t) = \frac{1}{\mu_K} [\sigma_0 + E_{uK} \alpha_{uK} U_K(t)] \quad (9.3.5)$$

i njeno rešenje je oblika:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_K + E_{uK}} \left[1 - e^{-\frac{E_K + E_{uK}}{\mu_K} t} + \frac{E_K + E_{uK}}{\sigma_0} \frac{E_{uK} \alpha_{uK}}{\mu_K} \int_0^t U(\tau) e^{\frac{E_K + E_{uK}}{\mu_K} (\tau - t)} d\tau \right]. \quad (9.3.6)$$

Prva dva člana tog rešenja pokazuju kašnjenje elastične deformacije za mehaničkim naponom piezo-modifikovanog Kelvin-Voigt-ovog piezo-visko-elastičnog elementa, bez uticaja promene napona polarizacije piezo-keramičkog elementa, a u trećem članu je izražen uticaj promena napona električne polarizacije piezo-keramičkog elementa. Ako je napon polarizacije konstantan, jasno se vidi da će, i pri naglom porastu električnog napona polarizacije do neke konačne vrednosti i njegovom zadržavanju na toj vrednosti, deo dilatacije, koji potiče od elektro-polarizacije piezo-keramike, kasniti za promenom napona piezo-polarizacije. Isti efekat, zaostajanja promene dilatacije za promenom napona piezo-polarizacije, je uočljiv i iz poslednjeg izraza, kada je električni napon piezo-polarizacije funkcija vremena. Ova pojava se zove naknadna piezo-elastičnost. Vreme retardacije je oblika:

$$T_{ret} = \frac{\mu_K}{E_K + E_{uK}}, \quad (9.3.7)$$

i to je vreme za koje se dilatacija Kelvin-Voigt-ovog piezo-visko-elastičnog elementa promeni-poraste za $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ -ti deo vrednosti elastične deformacije $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_K + E_{uK}}$, koju bi element imao da nema kašnjenja unešenog u element Newton-ovim viskoznim prostim elementom. Promena dilatacije za vreme (9.3.7) dobija se u obliku:

$$\varepsilon(T_{ret}) = \frac{\sigma_0}{E_K + E_{uK}} \left\{ 1 - \frac{1}{e} + \frac{E_{uK} \alpha_{uK}}{T_{ret} \sigma_0} \int_0^{T_{ret}} U(\tau) e^{\frac{(\tau-t)}{T_{ret}}} d\tau \right\}. \quad (9.3.8)$$

Napon polarizacije se ovde može razmatrati kao reonomna koordinata.

9.4. Model Kelvin-Voigt-ovog piezo-visko-elastičnog naslednog elementa kao elementa veze u diskretnom hibridnom sistemu

Da bi se ovaj element mogao koristiti kao "vezivni" element u diskretnom sistemu (slika 9.9. b) [45], pri čemu se zanemaruje njegova masa, a uzima se u obzir samo piezo-visko-elastična svojstva, potrebno je da se, na osnovu konstitutivnih relacija piezo-modifikovanog visko-elastičnog naslednog elementa, koje daju vezu između mehaničkog napona i dilatacija i električnog napona polarizacije, napišu veze između generalisane koordinate defomacije-reološke koordinate $y(t)$ i odgovarajuće generalisane sile defomacije $P(t)$. Uvode se konstitutivni parametri krutosti c_K i c_{uK} elementa, prigušnih svojstava elementa b_K i piezo-dilatacionih svojstava α_{uK} . Koristeći tako uvedene parametre, materijalnih svojstava piezo-modifikovanog piezo-visko-elastičnog elementa za veze između generalisane koordinate deformacije $y(t)$, generalisane sile deformacije $P(t)$ za tu koordinatu i napona piezo-polarizacije $U_K(t)$, koristeći izraze (9.3.2) i (9.3.4), dobijaju se sledeće veze:

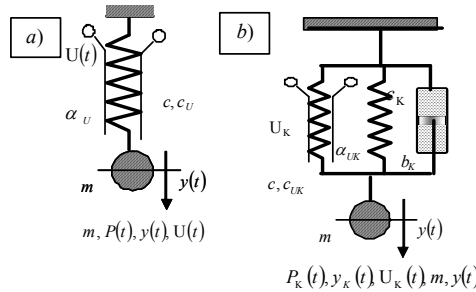
$$P(t) = (c_K + c_{uK})y(t) + b_K \dot{y}(t) - c_{uK} \alpha_{uK} U_K(t), \quad (9.4.1)$$

$$y(t) = \frac{1}{b_K} e^{-\frac{c_K+c_{uK}}{b_K}t} \left\{ \int_0^t P(\tau) e^{\frac{c_K+c_{uK}}{b_K}\tau} d\tau + c_{uK} a_{uK} \int_0^t U(\tau) e^{\frac{c_K+c_{uK}}{b_K}\tau} d\tau \right\}. \quad (9.4.2)$$

Za sistem sa jednim stepenom slobode kretanja (slika 9.9.b), koji se sastoji od jednog krutog materijalnog objekta mase m vezanog piezo-modifikovanim Kelvin-Voigt-ovim visko-elastičnim elementom generalisane sile $P(t)$ i generalisane koordinate deformacije $y(t)$, na koji dejstvuje spoljašnja sila $F(t)$ u istom pravcu i smeru u kome je naznačena i generalisana koordinata kretanja objekta, može se onda napisati polazna jednačina prinudnog kretanja posmatranog vezanog objekta u sledećem obliku:

$$m\ddot{y}(t) + P(t) = F(t). \quad (9.4.3)$$

Eliminacijom generalisane sile deformacije $P(t)$ piezo-modifikovanog Kelvin-Voight-ovog visko-elastičnog elementa, zamenom iz diferencijalne jednačine (9.4.3) u (9.4.2), ili unošenjem izraza (9.4.1) u diferencijalnu jednačinu (9.4.3), dobijaju se sledeća dva oblika iste jednačine dinamike izučavanog sistema sa jednim stepenom slobode kretanja:



Slika 9.9. Piezo-reološki oscilatori: a) šematski prikaz piezoelastičnog oscilatora; b) šematski prikaz piezo-modifikovanog Kelvin-Voigt-ovog viskoelastičnog naslednog oscilatora.

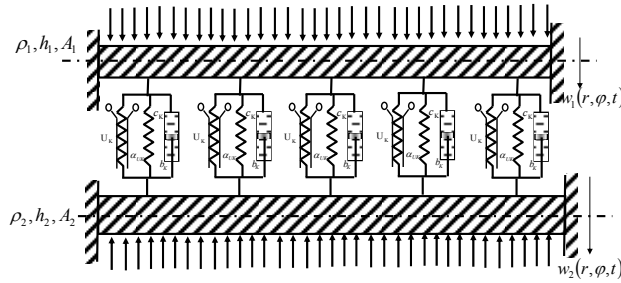
$$m\ddot{y}(t) + (c_K + c_{uK})\dot{y}(t) + b_K y(t) = F(t) + c_{uK} \alpha_{uK} U_K(t), \quad (9.4.4)$$

$$y(t) = \frac{1}{b_K} e^{-\frac{c_K+c_{uK}}{b_K}t} \left\{ \int_0^t [F(\tau) - m\ddot{y}(\tau)] e^{\frac{c_K+c_{uK}}{b_K}\tau} d\tau + c_{uK} \alpha_{uK} \int_0^t U(\tau) e^{\frac{c_K+c_{uK}}{b_K}\tau} d\tau \right\}. \quad (9.4.5)$$

Očigledno da je prvi oblik prostiji za rešavanje, jer je obična nehomogena diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima. Vidi se da unos piezo-keramičkog elementa unosi u sistem prinudu, koja je ekvivalentna odgovarajućoj spoljašnjoj prinudnoj sili, kojom se može u sistemu upravljati koristeći piezoelement ili kao aktuator ili kao sensor ili kao i jedno i drugo u spregnutoj povratnoj sprezi. Činjenica je da ta prinudna sila treba da odredi zakon upravljanja i da njeno određivanje ustvari u modeliranju upravljanja predstavlja jedan od osnovnih problema.

9.5. Hibridni sistemi struktura spregnutih slojem standardnih piezo-visko-elastičnih naslednih elementa

Kao model upotrebe piezo-visko-elastičnih elemenata u spregnutim kontinualnim strukturama posmatraće se model dve ploče od elastičnog, homogenog i izotropnog materijala, debljina h_i , $i=1,2$ malih u odnosu na druge dve dimenzije, od materijala modula elastičnosti E_i , Poisson-ovog koeficijenta μ_i , modula klizanja G_i i gustine ρ_i . Ploče su konstantne debljine u pravcu z ose sa paralelnim konturama (slika 9.10). Ploče su međusobno spojene sa piezo-visko-elastičnim slojem sastavljenim od dovoljno velikog broja standardnih piezo-visko-elastičnih naslednih elemenata kontinualno raspodeljenih, predstavljenih u potpoglavlju 9.3.



Slika 9.10. Kontinualni podsistemi spregnuti slojem standardnih piezo-visko - elastičnih naslednih elemenata

Ovakav sistem spregnutih ploča je tipa piezo-sendvič struktura. U smislu još jednog primera dinamičkog hibridnog sistema, to je veza kontinualnih podsistema pomoću piezo diskretnih elemenata, i u tom smislu model aktivne strukture spregnutih sistema.

Koordinatne sisteme, sa paralelnim odgovarajućim osama, $Oxyz$ su u težištu ploča, tako da se ravani Oxy poklapaju sa njihovim srednjim ravnima; osa Oz je usmerena naniže, slika 9.10.

Obe ploče su sa istom konturom i istih graničnih uslova, sa ravnim srednjim ravnima u nedeformisanom stanju. Već je konstatovano, poglavlje 3.4, da ako su transverzalni ugibi ploča $w_i(r, \varphi, t)$, $i=1,2$ mali u poređenju sa dimenzijama debljina ploča h_i , $i=1,2$, onda se oscilacije ploča javljaju samo u vertikalnom pravcu. Na osnovu prethodno izložene analize konstitutivna relacija piezo-visko-elastičnog elementa koja daje vezu između sile, pomeranja i brzina u samom međusloju može da se napiše u obliku:

$$P(t) = -(c_K + c_{uK})[w_2(r, \varphi, t) - w_1(r, \varphi, t)] - \beta[w_2(r, \varphi, t) - w_1(r, \varphi, t)]^3 - b_K[\dot{w}_2(r, \varphi, t) - \dot{w}_1(r, \varphi, t)] - c_{uK}\alpha_{uK}U_K(t), \quad (9.5.1)$$

gde je nelinearni deo mehaničke krutosti trećeg stepena sa koeficijentom nelinearne krutosti β . Koriste se oznake za: parametre linearne i piezo krutosti c_K i c_{uK} elementa, prigušna svojstava elementa b_K i piezo-dilatacionu svojstava α_{uK} i $U_K(t)$ za napon piezo-polarizacije elemenata. Koristeći D'Alembert-ov princip za sistem ploča pišu se jednačine transverzalnih pomeranja tačaka srednjih ravni ploča u obliku:

$$\frac{\partial^2 w_1(r, \varphi, t)}{\partial t^2} + c_{(1)}^4 \Delta \Delta w_1(r, \varphi, t) - 2\delta_{(1)} \left[\frac{\partial w_2(r, \varphi, t)}{\partial t} - \frac{\partial w_1(r, \varphi, t)}{\partial t} \right] - a_{(1)}^2 [w_2(r, \varphi, t) - w_1(r, \varphi, t)] = \varepsilon \beta_{(1)} [w_2(r, \varphi, t) - w_1(r, \varphi, t)]^3 + \kappa_{(1)} U_K(t) + \tilde{q}_{(1)}(r, \varphi, t) \\ \frac{\partial^2 w_2(r, \varphi, t)}{\partial t^2} + c_{(2)}^4 \Delta \Delta w_2(r, \varphi, t) + 2\delta_{(2)} \left[\frac{\partial w_2(r, \varphi, t)}{\partial t} - \frac{\partial w_1(r, \varphi, t)}{\partial t} \right] + a_{(2)}^2 [w_2(r, \varphi, t) - w_1(r, \varphi, t)] = -\varepsilon \beta_{(2)} [w_2(r, \varphi, t) - w_1(r, \varphi, t)]^3 - \kappa_{(2)} U_K(t) - \tilde{q}_{(2)}(r, \varphi, t), \quad (9.5.2)$$

gde su: $a_{(i)}^2 = \frac{1}{\rho_i h_i} (c_K + c_{uK})$, $i=1,2$ redukovane krutosti elastičnih delova sloja; $c_{(i)}^4 = \frac{D_i}{\rho_i h_i}$, $i=1,2$ redukovana savojna krutost ploča; $\delta_{(i)}$ redukovani koeficijenti prigušenja $2\delta_{(i)} = \frac{b_K}{\rho_i h_i}$, redukovani koeficijent piezo-elementa $\kappa_{(i)} = \frac{c_{uK} \alpha_{uK}}{\rho_i h_i}$, kao i $\varepsilon \beta_{(i)}$ odnos koeficijenta nelinearnosti u elastičnom sloju i gustina materijala ploča i homogenih visina ploča oblika $\varepsilon \beta_{(i)} = \frac{\beta}{\rho_i h_i}$ $i=1,2$. Rešavanje ovog sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina može da se sprovede na analogan način kao i u poglavlju 3.4, ili kao i u radovima [140, 259], pri čemu bi postojala dodatna prinuda zavisna od napona polarizacije piezo-elementa, kojom bi se moglo vršiti odgovarajuće i realno potrebno upravljanje. Bilo da se radi, na primer, o dinamičkoj apsorpciji, gde bi piezo-elementi bili iskorišćeni za apsorpciju transversalnih pomeranja tačaka srednje ravni jedne od ploča, gde bi zakon upravljanja u prvoj aproksimaciji mogli dobiti iz uslova da amplituda i faza oscilovanja jedne ploče u odgovarajućem nm -modu oscilovanja budu jednake nuli, ili bi se mogao naći uslov sinhronizacije u odgovarajućim modovima zahtevajući da rešenja u prvoj asimptotskoj aproksimaciji budu ekvivalentna za gornji i donju ploču. Ako bi se htelo eliminisati uticaj nelinearnosti i nepredviđenosti, koje u sistem ona unosi, mogo bi se zakon upravljanja izvesti iz uslova redukcije jednog od vremenskih harmonika i tako njihovu međusobnu interakciju anulirati. Svaki od zahteva upravljanja bio bi realan zahtev koji konstrukcija treba da ispuni, a pristupom datim u ovom radu mogle bi se dobiti upotrebljive vrednosti izlaznih veličina kojima bi se moglo upravljati pomoću aktivnih elemenata. Zakon upravljanja u posebnim slučajevima idejno bi se mogao rešiti ispitujući jednačine prve aproksimacije rešenja, a praktično bi bio cilj nekih budućih istraživanja i realnih potreba.

9.6. Rezultati savremenih istraživanja u primeni aktivnih struktura

Aktuelnost stvarne primene aktivnih struktura proizilazi iz njihovih svestranih aplikativnih osobina, relativno male cene koštanja i lakog manipulisanja sa njima. Svojstva elemenata koji čine sisteme aktivnih struktura, prvenstveno aktuatora i senzora, zavise od svojstava materijala od kojih su načinjeni, kao i od svojstava strukture, mesta postavljanja i samog zahteva primene, te je polje istraživanja u toj oblasti gotovo nepregledno. U tom smislu sledi prikaz nekoliko različitih savremenih rezultata u primeni aktivnih elemenata na kontinualne strukture, sa ciljem na ukazivanje o aktuelnosti istraživanja i predočavanja nekoliko različitih opisa u analizi matematičkih modela aktivnih struktura, mogućnosti upravljanja njima i realne primene.

U radu [252] na modelu piezoelektričnih sendvič ploča i greda razrađen je model upravljanja mehaničkim strukturama sa piezoelektričnim sensorom i aktuatorom u međusloju. To omogućava da se značajno poboljša dinamičko ponašanje strukture, jer mogu da se konstruišu na određen potreban način raspoređeni aktuatori i sensori. Zaključuje se, takođe, da zbirno upravljanje po posebno uparenim aktuatorima i sensorima mnogo pojednostavljuje dizajn upravljanja. U radu je pokazana efikasnost tehnike

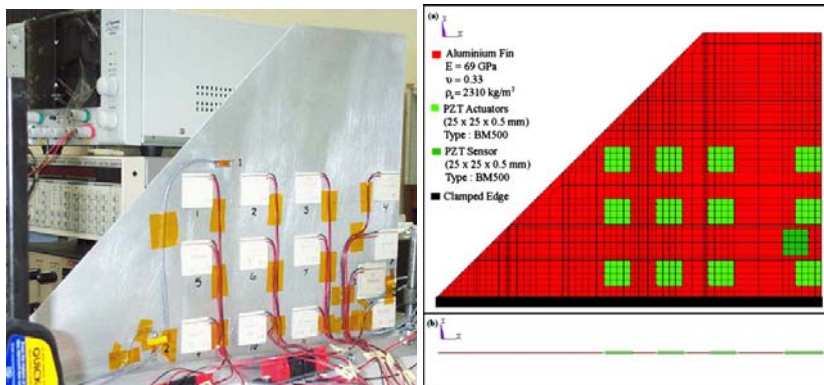
na sistemima sa konačnim brojem stepeni slobode, ali se naslućuje i efikasnost kod sistema sa beskonačnim brojem stepeni slobode. Na specijalan način raspoređeni piezoelektrični sensori dozvoljavaju dodavanje aktuatora, tako da je uticaj spoljašnjeg delovanja potpuno otklonjen u slučaju stacionarnog stanja. Na specijalan način raspoređeni piezoelektrični sensori su neophodni da bi izmerili odgovarajući prirodni izlaz, koji je ulaz u zakon upravljanja. U radu je predstavljen matematički model piezoelektričnih greda i ploča, koji uzima u obzir nelinearni izraz za napon u smislu Von-Karman-ovih jednačina, ali se zasniva na linearnom zakonu piezoelektirciteta. Takvi modeli pripadaju klasi nelinearnih beskonačno dimenzionalnih Lagrange-ovih sistema. Iz analize, izvedene u radu, sledi da pasivni zakon upravljanja obezbeđuje stabilnost povratne sprege ako je sam Lagrange-ov sistem stabilan. Prezentovani model je ograničen na mala pomeranja ploča i greda.

U radu [199] razmatrana je upotreba PZT nalepnica u aktivnim strukturama tipa greda i ploča za potrebe aktivnog upravljanja oscilacijama. Teorijska razmatranja u vezi sa modeliranjem i dizajniranjem aktivnih sturktura, u radu, su izvršena metodom konačnih elemenata, koja se pokazala kao jako koristan alat za analizu piezoelektirčnih materijala kao metoda koja nudi spregnutu termo-mehaničko-električnu analizu struktura. Analiza je fokusirana na dizajniranje sposobnosti, u vezi sa piezoelektričnim efektom, nalepnica u odgovoru aktivne strukture, uticaja veličine aktuatora, položaja i maksimalne dozvoljene piezoelektirčne pobudne vrednosti koja obezbeđuje integritet piezoelektričnih nalepnica. Aktivno zakrilce aviona slika 9.11. je zapravo ploča ukleštena sa jedne strane sa simetrično postavljenim piezoelektirčnim nalepticama i modelirana je u skladu sa klasičnom teorijom ploča. Kako njen oblik podseća na vertikalni rep aviona nazvana je aktivno zakrilce. Model sa konačnim elementima prikazan je na slici 9.11 desno. U analizi su korišćene 24 nalepnice na određenim lokacijama, postavljene simetrično na površine ploče odozgo i odozdo kao aktuatori, a jedan par piezoelektirčnih nalepnica je iskorišćen kao sensor. Proučavan je uticaj položaja nelepnic na prvu i drugu sopstvenu frekvenciju ploče. Kako se nalepnice pomeraju od ukleštenja i savojna krutost i sopstvene frekvencije opadaju dok se prva frekvencija aktivne ploče gotovo ni ne menja. U suprotnom, primičući nalepnice ivici ukleštenja zakrilca, torziona krutost značajno raste, što dovodi do pojave porasta druge frekvencije. Na osnovu ovih analiza pronađena je napovoljnija pozicija aktuatora. Metoda konačnih elemenata takođe omogućava da se odredi najpovoljnija pozicija senzorskog para za merenje oscilacija. Ova pozicija može da se odredi prema obliku moda aktivne ploče koristeći modalnu raspodelu napona u prva dva moda ploče. Postoje tri pozicije gde komponente napona dostižu maksimum i te lokacije su korišćene za pričvršćivanje kalibrisanih senzora napona za registrovanje vibracija ploče. Takođe, izučen je uticaj promena piezoelektirčnog pobudnog napona na odgovor sensora na te tri pozicije i na savojnu i na torzionu piezoelektričnu pobudu aktuatora.

Za dizajniranje upravljanja aktivnim strukturama uopšteno potrebna su dva koraka. Prvo, precizan matematički model kojim je moguće opisati elektromehaničko sprezanje u ovim strukturama, a drugo, potrebno je dizajnirati kontroler koji bi uspešno obuhvatio sve moguće nepredviđenosti ovakvih struktura. U radu [199] je pokazano kako je to i postignuto.

U radu [170] prikazana je metoda polu aktivnog upravljanja oscilacijama struktura upotrebom piezokeramičkih pretvarača, aktuatora i senzora. Metode upravljanja oscilacijama pomoću

piezokeramičkih pretvarača mogu da se svrstaju u tri kategorije: pasivne, aktivne i poluaktivne. Pasivni sistem upavljanja koristi R-L kolo i najjednostavnija je od tri pomenute metode upavljanja [161], ali su performanse upavljanja osetljive na varijacije parametara sistema.



Slika 9.11. Aktivno peraje aviona slika levo (a) i njegov model konačnim elementima slika desno (b)

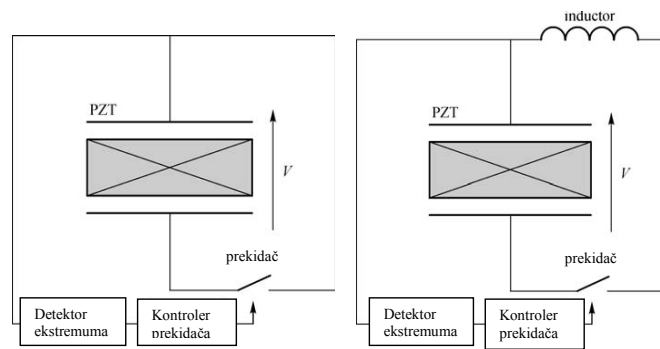
Osim toga pasivni sistem upavljanja često iziskuje veliku induktivnost u domenu frekvencija, što je teško realizovati. Aktivni sistem upavljanja zahteva procesore visokih performansi digitalnog signala i snažne pretvarače da pobude aktuator, što opet nije moguće primeniti u mnogim praktičnim slučajevima. Da bi se prevazišli nedostaci ovih metoda predstavljano je nekoliko prilaza polu aktivnog upavljanja. Wang i njegovi saradnici [294] proučavali su poluaktivno R-L kolo u kojem jedan adaptirani kalem za podešavanje, negativan otpor i jedana poboljšana postavka sprežanja uvode u sistem sposobnost prigušenja. Davis i njegovi saradnici su razvili podesivi električni paralelno vezan piezokeramički apsorber vibracija [29] u kojem se pasivno paralelno kapacitivno kolo koristi za električnu promenu piezokeramičke efektivne krutosti, a potom da podesi frekvenciju odgovora uređaja. U poslednjih nekoliko godina razvijeno je nekoliko metoda na principu tehnike pulsnog priključenja [192], koje se sastoje u brzim promenama napona na piezoelementu. Po metodi koju je predložio Richard [241] napon na piezoelementu se prekida na maksimumu napona ili na maksimumu pomeranja oscilacija. Ova tehnika se zove sinhronizovano prekinuto prigušenje (SSD- synchronized switch damping). U radu [170] poluaktivno upavljanje se zasniva na piezoelektričnom pretvaraču sa prekidačem stanja i pulsним prekidačem. Poluaktivno upavljanje ima nekoliko prednosti u odnosu na pasivno i aktivno upavljanje: nije osetljivo na promene parametara sistema, a njegova ugradnja je prilično jednostavna i zahteva samo nekoliko električnih komponenti. Potrebno je koristiti induktore, ali mnogo manje nego li u slučaju pasivnog upavljanja.

Ovde se daje jedna realna slika modeliranja upavljanja u sistemu sa jednim stepenom slobode oscilovanja koristeći predloženu tehniku prekidanja stanja, a to sve u cilju objašnjenja realnosti problema upotrebe aktivnih struktura. Model koji bi se primenio u hibridnim sistemima, prikazanim u ovom doktoratu, iziskivao bi studije koje prevazilaze okvire samog doktorata. Ovde se prikazuju mogućnosti daljeg usavršavanja i proučavanja na polju hibridnih sistema sa implementiranim piezokeramičkim pretvaračima, u smislu stvaranja modela aktivnih sistema sposobnih da interaktivno reaguju na spoljašnje poremećaje i da usaglasne svoje performanse saglasno radnim uslovima, što i jeste jedna od osnovnih karakteristika aktivnih struktura.

Kada se koriste piezokeramički aktuatori sa prekidačem stanja, piezoelektrični aktuator se priključuje između stanja niske i visoke krutosti pomoću jednostavne logike prekidanja kako bi se postiglo suzbijanje vibracija. U osnovi skladištenje energije u stanju visoke krutosti i odavanje te energije u stanju niske krutosti je osnovni mehanizam rada pretvarača. Teorijski otpor može se menjati kontinualno u električnom kolu u realnom vremenu da bi se dobio potpuno promenljiv poluaktivni sistem. Zato se jednostavno vrši prekidanje između stanja sistema. Prekidanje stanja aktuatora je zasnovano na sledećoj logici: za sistem sa jednim stepenom slobode kada se sistem pomera iz ravnotežnog položaja, tj. kada je $y \cdot \dot{y} > 0$, električno kolo je priključeno na stanje visoke krutosti (otvoreno kolo), a kada se sistem pomera ka ravnotežnom položaju, $y \cdot \dot{y} < 0$, onda je sistem priključen na nisku krutost i/ili stanje odavanja energije (kratko kolo ili kolo sa otporom). Tako da za vreme jednog perioda kretanja prekidanje se vrši četiri puta, svaki put posle četvrtine perioda. U položaju ravnoteže sistem je priključen na visoku krutost, potom na najvećem otklonu preklapa se ponovo na nisku krutost i vraća se u ravnotežni položaj posle polovine perioda. Ovo daje efekat smanjenja otklona udaljavanjem od ravnotežnog položaja, a potom na kraju otklona posle četvrtine perioda odavanja uskladištene energije, koja se ne vraća u sistem u obliku kinetičke energije. U slučaju otvorenog kola pomeranje čuva energiju u smislu mehaničke krutosti i kapacitivnosti uređaja, koja se takođe pojavljuje kao mehanička krutost. Kada je sistem priključen na stanje kratkog kola uskladištena energija se preko kondenzatora uzemljuje, efektivno prigušujući taj deo energije i tako efektivna krutost opada. Ako je sa druge strane kolo priključeno na otpornik efektivna krutost takođe opada (dodatna prednost da se dodatno prigušenje dobija kada je otpornik u kolu i za vreme sledeće četvrtine perioda, u nekim slučajevima otvoreno kolo sa otpornikom može da se ponaša povoljnije). Upotreba sinhronizovanog prekidanja prigušenja (SPP), takozvano pulsno prekidanje, sastoji se u propuštanju nelinearnog napona na piezoelektrični aktuator. On je ugrađen u jednostavan električni prekidač sinhrono vođen kretanjem strukture. Taj prekidač, koji se koristi da prekine ili popusti napon na piezoelektrični element dopušta da se element lako poveže na jednostavno električno kolo. U ovom procesu, dobija se pojačanje napona i pojavljuje se fazna razlika između napona na piezoelektričnim priključcima što rezultuje naponom. Sila koja se generiše tim naponom je uvek suprotnog smera od vektora brzine strukture, te tako izaziva rasipanje energije. Ta energija odgovara delu mehaničke energije koja se konvertuje u električnu energiju. Učiniti ovu energiju maksimalnom znači minimizirati mehaničku energiju strukture. Najjednostavniji vid ovakvog modela je sinhronizovano prekidanje prigušenja u kratkom kolu, slika 9.12.a), koje se sastoji od jednostavnog prekidača u paralelnoj sprezi sa krajevima piezoelementa bez drugih električnih uređaja. Prekidač je otvoren većim delom perioda oscilacija, zatvara se kada napon dostigne maksimum (odgovarajući maksimumu napona na krajevima piezoelementa) te rasipa svu električnu energiju u kratkom vremenu (mnogo kraćem nego što je period oscilovanja) i ponovo se otvara. Pokazano je, [8], da u ovom slučaju transferovana energija E_t u periodu jedne oscilacije iznosi:

$$E_t = \frac{4b^2}{C_0} u_M^2,$$

gde su b piezoelektrični koeficijent, C_0 je kapacitet piezoelektričnog elementa i u_M je amplituda oscilacija.



Slika 9.12. a) Synchronizovano prekidanje prigušenja u kratkom kolu; b) Synchronizovano prekidanje prigušenja na induktoru

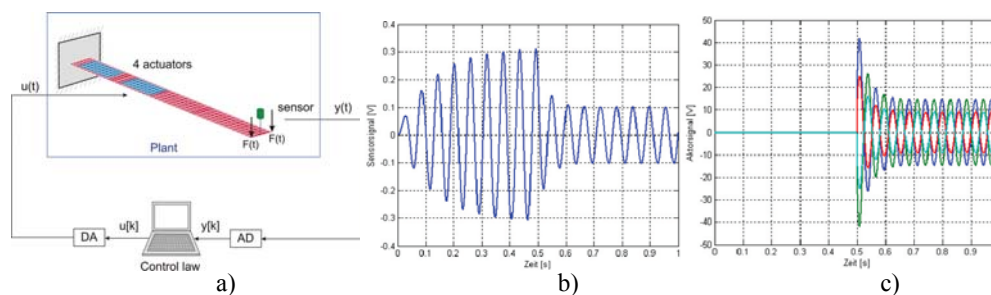
Još veći porast disipativne energije dobija se u kolu sa induktorom slika 9.12.b), [51], gde je kalem serijski vezan za prekidač. Kako piezoelektrični krajevi i kalem obrazuju L-C rezonantno kolo, brža razmena napona na krajevima piezoelementa postignuta je odgovarajućim upravljanjem vremena zatvaranja i trajanja prekidača. Prekidač je zatvoren pri ekstremumima pomeranja, a trajanje zatvorene pozicije je polovina perioda L-C kola. Ovo dovodi do značajnog porasta disipativne energija, pri čemu je izabran period L-C kola tako da bude mnogo manji nego li period mehaničkih oscilacija. U radu [170] prikazani su zakoni upravljanja ovakvim kolima, a takođe je razvijen i zakon upravljanja za slučaj upravljanja oscilacijama struktura sa više modova pomoću više piezoelektričnih pretvarača.

U radu [22] asimptotski modeli opisuju mehaničko i električno ravnotežno stanje dva tipa aktivnih struktura. Prva struktura sastoji se od anizotropne elastične tanke ploče sa dve anizotropne piezoelektrične nalepnice pričvršćene po površinama, a drugi je anizotropna elastična sendvič ploča sa ugrađenim anizotropnim piezoelektričnim elementom. Dve nepoznate prikazanog asimptotskog modela, mehanička pomeranja struktura i električni potencijal elemenata su parcijalno razdvojene. Iz modifikovanog Kirchhoff-Love modela ploče mogu biti izvedene tačne funkcije mehaničkih pomeranja. Ipak dobijaju se različiti električni potencijali kao posledica različitih električnih graničnih uslova. U radu su prikazani i numerički rezultati ovakvog asimptotskog modela.

U radu [191] je predstavljen matematički model piezo-ploča šeme za sakupljanje energije. Analitički je generisan model konačnih elemenata spregnutog piezoelektričnog sensor elementa i ploče koristeći Love-Kirchhoff-ljevu teoriju ploča. Formulirane su konstitutivne jednačine za ploču sa jednim slojem. Polarizacija piezoelektričnog sensora pričvršćenog na gornju površinu ploče je upotrebljena za detekciju okolnih vibracija. Prinudne oscilacije aktivne strukture stvaraju određenu energiju u kristalnoj strukturi piezoelektričnog materijala. Rezultujuće električno polje generisano na sensorskom elementu modelirano je koristeći funkciju linearne interpolacije po debljini, a elementi ploče su modelirani pravougaonim elementima sa četiri čvora sa po tri stepena slobode za svaki čvor. Strukturni sopstveni modovi i dinamički odgovor spregnutog piezo-ploča sistema izračunati su metodom modalne analize i Newmark- β integracionom metodom, respektivno. Rezultati analize su i dinamička pomeranja i odgovor električnog napona na primenjenu silu. Modeliranje je iskorišćeno i za određivanje maksimuma generisane snage. Indukovana energija u piezoelementu može da se konvertuje u električnu energiju koja se može sačuvati u električnim uređajim kao što su baterije ili kondenzatori. Ovakva tehnika se uopšteno zove tehnika sakupljanja energije. Sakupljena energija se može kasnije koristiti za ponovno punjenje baterija.

Cilj rada [214] izvršena je identifikacija frekventnih odziva aktivne akustične strukture sa integrisanim piezoelektričnim materijalom u ulozi senzora, a na osnovu modela dobijenog primenom metode identifikacije potprostora matrica (subspace identification). Na ovaj način mogu se identifikovati relevantne sopstvene frekvencije, koje igraju bitnu ulogu u kasnijim fazama projektovanja upravljanja u cilju sprečavanja pojave rezonantnih stanja. Kao rezultat identifikacije dobija se model u prostoru stanja, čime je omogućeno upoređivanje rezultata eksperimentalne identifikacije i numeričkog modeliranja. Identifikacija metodom potprostora matrica izvršena je za aktivnu akustičnu strukturu, koja se sastoji od aluminijumske ploče sa integrisanim piezoelektričnim davačima – pločicama i akustične kutije. Za identifikaciju je korišćeno eksperimentalno postrojenje sa akustičnom kutijom i dSPACE sistemom. Upoređivanje rezultata ukazuje na dobro slaganje između identifikovanih frekventnih odziva i numeričkih rezultata dobijenih metodom konačnih elemenata.

U radu [213] se razmatraju aktivne konstrukcije i sistemi sa akcentom na piezoelektričnim strukturama za aktivnu redukciju vibracija i buke sa potencijalnim primenama u aktivnim mašinskim ili građevinskim konstrukcijama. Sveobuhvatni pristup aktivnom upravljanju strukturama sa integrisanim piezoelektričnim aktuatorima i sensorima, obuhvata sledeće značajne faze: modeliranje, upravljanje, simulaciju, eksperimentalnu verifikaciju i implementaciju. Svaka od ovih faza razmatra se detaljno. Realizacija aktivnog upravljanja konstrukcijama prikazana je na primerima upravljanja vibracijama konzole sa piezoelektričnim aktuatorima i senzorom, slika 9.13. i kontroli buke u akustičnoj kutiji sa piezoaktuatorima.



Slika 9.13. a) Sistem upravljanja aktivnom konzolom u povratnoj sprezi iz rada [Nestorović]; b) Upravljački signal na aktuatoru pre i posle uključjenja kontrolera.

Na slici 9.13. b), prikazani su rezultati primene upravljanja na aktivnoj konzoli sa četiri aktuatora i senzorom na slobodnom kraju konzole. Izlazni signal je pomeranje slobodnog kraja konzole pod dejstvom spoljašnje periodičke pobudne sile na uglovima slobodnog kraja konzole, slika 9.13. a). Pobuda ima frekvenciju istu kao što je sopstvena frekvencija modova oscilovanja konzole, koji su posmatrani u analizi ovog primera aktivne strukture. Rezultati dizajniranja kontrolera sa periodičkom pobudom frekvencije prvog sopstvenog moda konzole prikazani su na slikama 9.13. b) i c). Posle vremena 0.5s u sistem se uključuje kontroler i na slici 9.13. b) prikazano je pomeranje slobodnog kraja konzole, gde je jasno uočljiva redukcija amplituda pomeranja pri upotrebi kontrolera. Na slici 9.13.c) prikazan je upravljački signal (napon na piezoaktuatoru) bez i sa upravljanjem.

10* Poglavlje

Numeričke simulacije dinamika i dinamičkih stanja hibridnih sistema, podsistema i sinhronizacija u njima. Vizuelzacija nelinearnih fenomena i energijskih transfera.

Jedan broj predstavljenih modela hibridnih sistema, koji u sebi sadrže nelinearnosti proučavali su se analitičkim približnim metodama, u prethodnim poglavljima. Primenom modifikovane asimptotske metode usrednjenja Krilov-Bogoliyubov-Mitropolskiy-kog odredila su se rešenja u prvoj aproksimaciji u vidu sistema diferencijalnih jednačina po amplitudama i fazama komponentnih potprocesa. Ti sistemi diferencijalnih jednačina su, zavisno od oblika sistema, integrabilni ili su pak složeni i njihova rešenja ne mogu se naći u zatvorenom obliku. Primer takvih složenih sistema diferencijalnih jednačina je sistem (4.4.1), čije rešenje tražimo numeričkim metodama nekog od matematičkih programa i softverskih alata. Taj sistem jednačina je najsloženiji od izvedenih sistema jednačina prve aproksimacije u ovom radu. Na tom primeru pokazaće se kako se nadalje ispituje uticaj prisutne nelinearnosti u sistemu i iskoristiće se dobijeni rezultati da se opišu karakteristični fenomeni nelinearnih procesa, energijskih transfera i sinhronizacije u sistemu dve kružne ploče spregnute slojem od kontinualno raspodeljenih viskoelastičnih nelinearnih elemenata. Već je spomenuto, u četvrtom poglavlju, da je prolazak kroz rezonantni režim u stvari fenomen prisutne nelinearnosti, pa se pojava rezonancije ne dešava pri jednoj fiksnoj vrednosti izjednačavanja frekvencija spoljašnjih pobuda i sopstvenih frekvencija sistema, već u frekventnom opsegu u blizini sopstvenih kružnih frekvencija sistema. Pri tome, pokazaće se da se u tom opsegu dešavaju karakteristične promene u dinamici sistema, kao što su pojave rezonantnih amplitudnih i faznih skokova ili pojave novih nestabilnih grana u amplitudnom i faznom frekventnim karakteristikama. Da bi se slikovito prikazale ove pojave prvo će se prikazati rezultati analize prolaska kroz rezonantna stanja

stacionarnog režima oscilovanja u smislu veoma sporih promena fiksiranih vrednosti kružnih frekvencija spoljašnjih pobuda.

Slična analiza, prolaska kroz rezonantno stacionarno stanje dvofrekventnog režima oscilovanja u jednom modu oscilovanja ploče od kompozitnog materijala, prikazana je u radu [167], s tim što su jednačine prve aproksimacije izvedene u ovom radu iste opšte strukture kao i sistem jednačine (4.4.1), samo što koeficijenti (4.4.2) imaju određene odnose jednakosti $\delta_1 = \delta_2, \beta_1 = \beta_2$. Ovde će se pokazati da u opštem slučaju posmatrane strukture ti koeficijenti ne moraju biti jednaki.

Sa druge strane, u radu [40] je pokazano da se, za određene parametre kod nelinearnog tvrdog Duffing-ovog oscilatora, javljaju karakteristični oblici amplitudno-frekventne krive. Objasnjena je pojava zatvorenih izdvojenih krivih, koje se mogu pojaviti unutar ili izvan glavne rezonantne krive, i dato je njeno fizičko objašnjenje. U radu je opisano dinamičko ponašanje spregnutog sistema, koji obuhvata nelinearni tvrdi oscilator vođen harmonijskom pobudom koja potiče od tresaća, pri čemu je masa nelinearnog sistema mnogo manja od mase tresaća, pa sam nelinearni sistem malo utiče na dinamiku tresaća. Od praktičnog je značaja situacija kada je sopstvena kružna frekvencija nelinearnog sistema približna sopstvenoj kružnoj frekvenciji tresaća, tako da se amplitudno frekventna kriva nelinearnog sistema savija prema višim frekvencijama, ulazi u oblast rezonantnih frekvencija tresaća i ostvaruje međusobnu interakciju. Opisane pojave su identične pojavama koje će se ovde proučiti, samo što su one u tom radu proučavane i sa stanovišta bifurkacionih vrednosti sistema. Slični zaključci se konstatuju i u radu [18], gde je prikazan jednostavan bezdimenzioni izraz za aproksimaciju amplituda oscilovanja pri frekvencijama skokova naviše i naniže za slučajeve mekog i tvrdog slabo prigušenog Duffing-ovog oscilatora. Iako takvi izrazi mogu da se pronađu i u drugoj literaturi u ovom radu je prikazan celi skup izraza pri čijem je određivanju korišćena metoda harmonijskog balansa. Izrazi su provereni za jedan opseg parametara sa proračunima dobijenim direktnim numeričkim rešavanjem jednačine kretanja. Takođe su upoređivani sa sličnim izrazima izvedenim perturbacionom metodom. Pokazano je da frekvencije na kojima se dešavaju skokovi naniže zavise od stepena nelinearnosti i prigušenja u sistemu, dok frekvencije na kojima se dešavaju skokovi naviše primarno zavise od nelinearnosti i samo su slabo zavisne od prigušenja. Dat je analitički izraz i za graničnu vrednost pobudne sile i nelinearnosti, koja je potrebna da se dostigne da bi se pojavili skokovi i zaključeno je da ona zavisi samo od prigušenja u sistemu.

10.1. Prolazak kroz rezonantni režim u stacionarnom stanju

Rešavanjem sistema (4.4.3) i (4.4.4), numeričkom metodom Newton-Kantoroviča, u matematičkom programu Mathematica, dobijaju se stacionarne amplitude i faze dvofrekventnog režima oscilovanja, u jednom obliku oscilovanja hibridnih sistema sa nelinearnošću, u zavisnosti od frekvencija spoljašnje poremećajne sile. Ako se fiksira vrednost druge frekvencije prinudne sile ($\Omega_{2nm} = const$) dobijaju se krive stacionarnog stanja:

$$a_{1nm} = f_1(\Omega_{1nm}), a_{2nm} = f_2(\Omega_{1nm}), \phi_{1nm} = f_3(\Omega_{1nm}) \text{ i } \phi_{2nm} = f_4(\Omega_{1nm})$$

Ako se fiksira vrednost prve frekvencije prinudne sile ($\Omega_{1nm} = const$) dobijaju se krive stacionarnog stanja:

$$a_{1nm} = f_5(\Omega_{2nm}), a_{2nm} = f_6(\Omega_{2nm}), \phi_{1nm} = f_7(\Omega_{2nm}) \text{ i } \phi_{2nm} = f_8(\Omega_{2nm}).$$

U ovom poglavlju date su numeričke simulacije dinamika i dinamičkih stanja hibridnih sistema zasnovane na prethodnoj analizi, prikazani su dijagrami amplitudno-frekventnih i fazno-frekventnih krivih stacionarnog stanja, pri veoma sporoj promeni fiksniranih vrednosti kružne frekvencije spoljašnje pobude, i u kom smislu sistemi su posmatrani u stacionarnom režimu. Tako se dobija vizuelizacija nelinearnih fenomena prolaska kroz rezonantno stanje. Sa tih dijagrama lako se uočavaju pojave novih nestabilnih grana amplitudnog i faznog odgovora sistema, kao i karakteristični skokovi amplituda i faze u rezonantnom opseg frekvencija spoljašnjih pobuda, što se tumači kao posledica međuzavisnosti harmonika u okviru jednog moda oscilovanja.

Sistemi sa nelinearnošću su osetljivi i na male promene parametara sistema, pa je stoga korisno ispitati odgovor sistema menajući jedan parametar, dok su ostali konstantni, ili pak menjajući nekoliko parametara. U tom smislu dalja analiza je sprovedena za sistem dve kružne ploče spregnute slojem sastavljenim od viskoelastičnih nelinearnih elemenata. Pri tome je sloj visko-elasto elemenata zanemarljive mase, tako da njihovo prisustvo ne utiče na promenu kinetičke energije celog sistema, što vidimo i iz izraza (6.2.47), koja se sastoji samo od kinetičkih energija komponentnih ploča. Međutim, njihova svojstva linearne i nelinearne elastičnosti utiču na promenu potencijalne energije celog sistema, preko vrednosti potencijalne energije interakcije između ploča (6.2.51), a svojstva viskoznosti utiču na promenu vrednosti Rayleigh-eve funkcije rasipanja, što sve menja ukupnu dinamiku ploča spregnutih na ovaj način. Analiziraće se, nadalje, uticaj prisustva elastičnih elementa u sloju menjajući njihovu krutost. Analizu zapravo sprovodimo upoređujući rezultate sa rezultatima rada [259], gde je sistem sprežućih elemenata sličan samo bez dodatne redno vezane opruge linearne krutosti c_1 . Ustvari, fizičkim dodavanjem ove opruge dobijamo povećanje linearne elastičnosti sloja i u tom smislu posmatramo uticaj parametra c_1 na nelinearnu dinamiku sistema.

Ploče su istih materijalnih karakteristika (ploče poluprečnika $1(m)$, visina $h_1 = 0,01(m)$ i $h_2 = 0,005(m)$, načinjene od čelika gustine materijala $\rho = 7.849 \cdot 10^3 (kg/m^3)$, Poisson-ovog koeficijenta

$\mu = 0.33$ i modula elastičnosti $E_i = 21 \cdot 10^{10} (N/m^2)$, između kojih se nalazi nelinearni kontinualno raspodeljeni sloj standardnih visko-elastičnih lakih elemenata krutosti $c = 2 \cdot 10^5 (N/m)$ i $c_1 = 0.5 \cdot 10^5 (N/m)$, i koeficijenta otporne sile visko-elastičnog sloja $b_1 = 0.5 (kg/s)$. Dodajući oprugu krutosti $c_1 = 0.5 \cdot 10^5 (N/m)$ u elemente sprežućeg sloja rešenja karakterističnog polinoma (3.4.13) $\lambda_{1,2nm} = -\hat{\delta}_{1nm} \mp i\hat{p}_{1nm}$ i $\lambda_{3,4nm} = -\hat{\delta}_{2nm} \mp i\hat{p}_{2nm}$ imaju drugačije vrednosti od onih dobijenih u radu [259], a samim tim i potrebni koeficijenti (4.4.2): δ_{inn} , α_{inn} i β_{inn} , kao i εP_{inn} jednačina prve asimptotske aproksimacije (4.4.1). Dobijene vrednosti kružnih frekvencija sprezanja \hat{p}_{inn} , kao i potrebnih koeficijenta dati su u tabeli 10.1. U analizi se posmatra prvi sopstveni mod oscilovanja za $n=0$ i $m=1$, kada je karakteristični sopstveni broj ukleštene kružne ploče $k_{11} = 3.196$. Ostale potrebne vrednosti korišćene u proračunu su: vrednosti koeficijenta uticaja nelinearnosti $\aleph(W_1) = 0.117$, koeficijenta nelinearnosti elastičnog sloja $\beta = 5 [m^{-2}s^{-2}]$, redukovanih amplituda prinudne sile $h_{0i(11)} = 10^7 [Nm^{-3}]$, dok je vrednost malog bezdimenzionog parametra $\varepsilon = 10^{-2}$.

\hat{p}_1	\hat{p}_2	δ_1	δ_2	α_1	α_2	β_1	β_2	P_1	P_2
108.33	174.49	11	8	-12210	-96220	-267100	-17590	1945	534

Tabela 10.1. Vrednosti kružnih frekvencija sprezanja \hat{p}_{inn} , i koeficijenata δ_{inn} , α_{inn} i β_{inn} i P_{inn} , za $i=1,2$ u prvom nm modu oscilovanja sistema ploča ($n=0, m=1$).

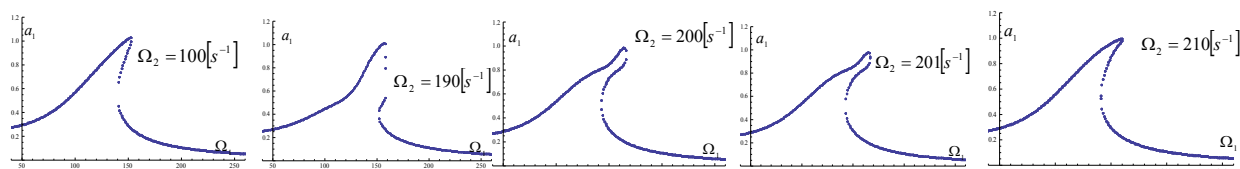
Karakteristični skokovi amplitudnog i faznog odgovora sistema u blizini rezonantnih vrednosti $\Omega_{inn} \approx \hat{p}_{inn}$, pojava novih stabilnih i nestabilnih grana, koje uslovljavaju više vrednosne odgovore sistema i pojavu dva stabilna rešenja sistema u oblasti postojanja novih grana, a takođe i izraženo međusobno dejstvo harmonika, kao i skokovi vrednosti energije sistemamogu da se prikažu na amplitudno-frekventnim i fazno-frekventnim dijagramima oba harmonika.

Na slikama 10.1.1-4 prikazane su amplitudno-frekventne i fazno-frekventne karakteristike stacionarnog stanja u funkciji od frekvencije Ω_{1nm} za slučaj kada je frekvencija Ω_{2nm} fiksirana. Amplitudno-frekventne i fazno-frekventne krive su prikazane za spore promene vrednosti frekvencije $\Omega_{2nm} = 100s^{-1}, 190s^{-1}, 200s^{-1}, 201s^{-1}, 210s^{-1}$. Do vrednosti druge frekvencije $\Omega_{2nm} = 190(s^{-1})$ amplitudno-frekventne krive amplitude prvog harmonika u nm -modu a_{1nm} ne menjaju oblik, slika 10.1.1., dok amplitude drugog harmonika a_{2nm} trpe znatnije promene oblika i povećanje vrednosti, slika 10.1.2. U oblasti vrednosti frekvencije $\Omega_{2nm} \in [190, 210](s^{-1})$ promene amplitudnih, a sinhrono, i faznih karakteristika oba moda trpe promene oblika, ali kod prvog moda je to mnogo manje izraženo nego li kod drugog moda, što se lako zaključuje upoređivanjem dijagrama sa slika 10.1.1 i 10.1.2 odnosno 10.1.3 i 10.1.4. Nakon prolaska frekvencije spoljašnje sile Ω_{2nm} kroz oblast $\Omega_{2nm} \in [190, 210](s^{-1})$, rezonantnih vrednosti dijagrami amplitudnih i faznih karakteristika, imaju oblike slične oblicima na frekvenciji $\Omega_{2nm} = 100(s^{-1})$, samo je amplitudna karakteristika prvog harmonika malo strmija i njen maksimum je pomeren ka višoj frekvenciji

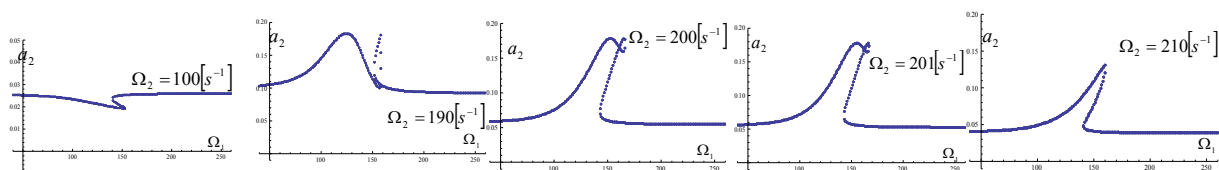
slično se desilo i sa dijagramom fazne karakteristike prvog harmonika, dok su amplitudna i fazna karakteristika drugog harmonika pretrpele znatnije promene i oblika i vrednosti, slike 10.1.2 i 10.1.4.

Naime, pojava novih grana i skokova dešava se samo na dijagramima amplitude drugog harmonika a_2 , slika 10.1.2, pri opsegu frekvencija $\Omega_{2nm} \in [185, 201]s^{-1}$. Posle izlaska iz rezonantnog opsega amplitudni odgovor drugog harmonika je pretrpeo promene oblika i vrednosti maksimalnih amplituda, koje su pomerene ka višim vrednostima. Dijagrami amplitudnog odgovora a_1 i faznih odgovora prvog harmonika ostali su zapravo nepromenjeni. Dijagram amplitudnog odgovora a_1 , slika 10.1.1, samo je neznatno zakrivljen na desnu stranu, pri čemu su se vrednosti takođe neznatno povećale. Dijagram $\phi_{1nm} = f_3(\Omega_{1nm})$, slika 10.1.3, pretrpeo je male promene oblika, ali je neznatno pomeren ka većim frekvencijama spoljašnje pobude Ω_{1nm} , dok je dijagram $\phi_{2nm} = f_4(\Omega_{1nm})$, slika 10.1.4, pretrpeo zaokretanje faze za 180° , koja posle prolaska kroz rezonantnu oblast ima negativne vrednosti, koje su po apsolutnim vrednostima manje nego li pre rezonantnog prolaska.

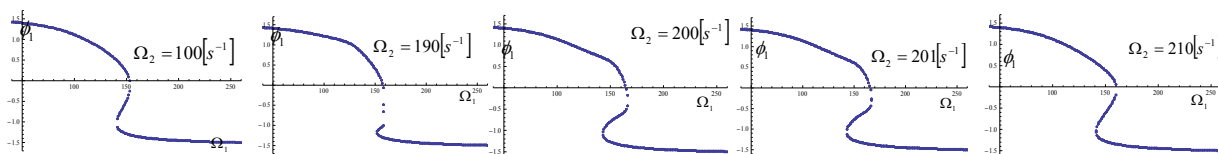
U slučaju amplitudno i fazno frekventnih dijagrama oba harmonika, u zavisnosti od frekvencije Ω_{2nm} spoljašnje pobude za diskretne vrednosti frekvencije $\Omega_{1nm} = 90s^{-1}, 100s^{-1}, 120s^{-1}$, slike 10.1.5-8, uočava se da je pojava amplitudnih i faznih skokova još manje izražena, a ovo je i zbog toga što amplitudni i fazni odgovori sistema gotovo i sami podsećaju na sisteme bez nelinearnosti, naime i ne poseduju izraženu zakrivljenost i histerezisne pojave. To samo znači da za dati izbor parametara, sistema ploča spregnutih slojem visko-elastičnih nelinearnih elemenata, nelinearnost ima jako malo izražen uticaj.



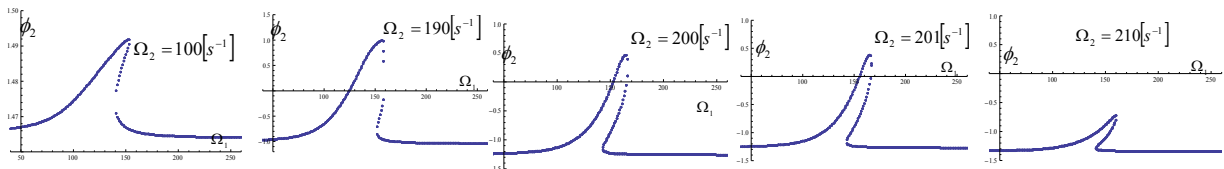
Slika 10.1.1 Amplitudno-frekventna kriva prvog harmonika $a_{1nm} = f_1(\Omega_{1nm})$ za fiksirane vrednosti druge kružne frekvencije prinudne sile Ω_{2nm} .



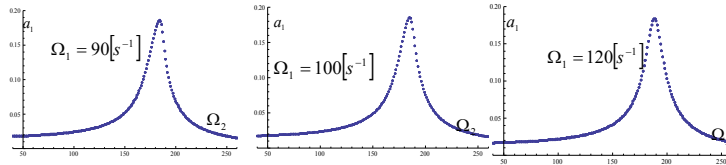
Slika 10.1.2 Amplitudno-frekventna kriva drugog harmonika $a_{2nm} = f_2(\Omega_{1nm})$ za fiksirane vrednosti druge kružne frekvencije prinudne sile Ω_{2nm} .



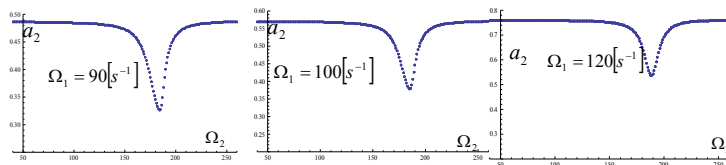
Slika 10.1.3 Fazno-frekventna kriva prvog harmonika $\phi_{1nm} = f_3(\Omega_{1nm})$ za fiksirane vrednosti druge kružne frekvencije prinudne sile Ω_{2nm} .



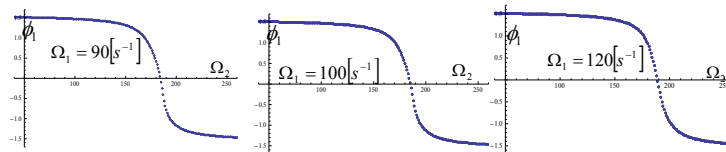
Slika 10.1.4 Fazno-frekventna kriva drugog harmonika $\phi_{2nm} = f_4(\Omega_{1nm})$ za fiksirane vrednosti druge kružne frekvencije prinudne sile Ω_{2nm} .



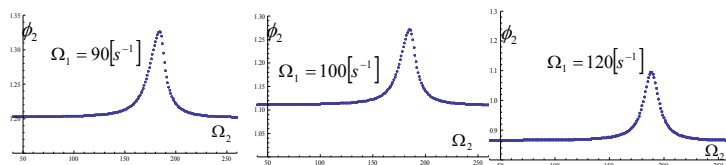
Slika 10.1.5 Amplitudno-frekventna kriva prvog harmonika $a_{1nm} = f_5(\Omega_{2nm})$ za fiksirane vrednosti prve kružne frekvencije prinudne sile Ω_{1nm} .



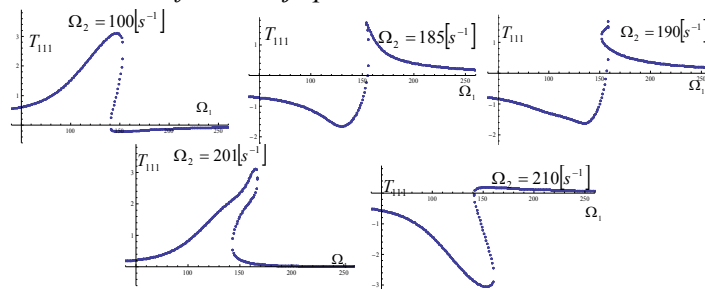
Slika 10.1.6 Amplitudno-frekventna kriva drugog harmonika $a_{2nm} = f_6(\Omega_{2nm})$ za fiksirane vrednosti prve kružne frekvencije prinudne sile Ω_{1nm} .



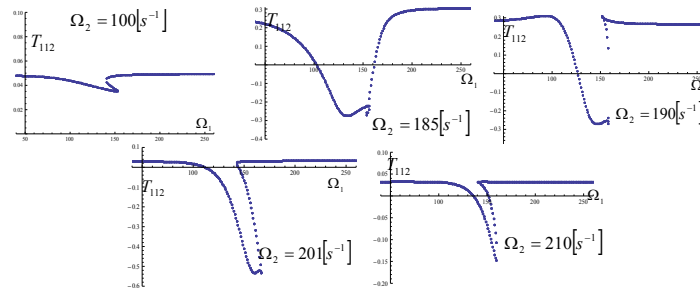
Slika 10.1.7 Fazno-frekventna kriva prvog harmonika $\phi_{1nm} = f_7(\Omega_{2nm})$ za fiksirane vrednosti prve kružne frekvencije prinudne sile Ω_{1nm} .



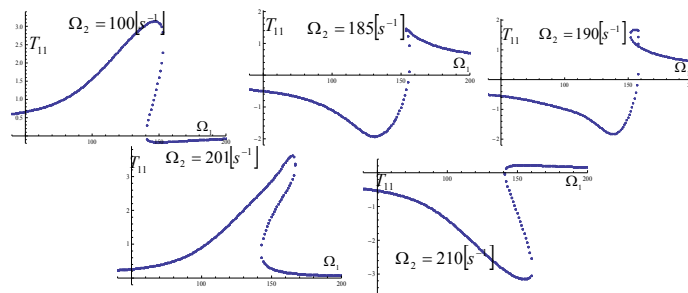
Slika 10.1.8 Fazno-frekventna kriva drugog harmonika $\phi_{2nm} = f_8(\Omega_{2nm})$ za fiksirane vrednosti prve kružne frekvencije prinudne sile Ω_{1nm} .



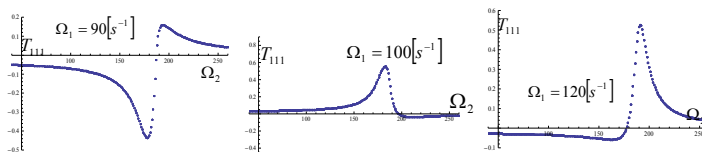
Slika 10.1.9 Funkcija prvog harmonika $T_{111}(\Omega_1, \Omega_2) = 3.185 \cdot a_1(\Omega_1, \Omega_2 = const) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_1(\Omega_1, \Omega_2 = const)]$ u zavisnosti od frekvencije Ω_{1nm} i za diskretne vrednosti pobudne frekvencije $\Omega_{2nm} = 100 s^{-1}, 185 s^{-1}, 190 s^{-1}, 201 s^{-1}, 210 s^{-1}$.



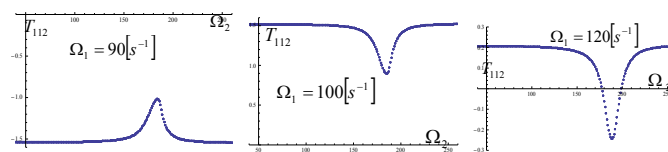
Slika 10.1.10 Funkcija drugog harmonika $T_{112}(\Omega_1, \Omega_2) = 3.185 \cdot a_1(\Omega_1, \Omega_2 = \text{const}) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_1(\Omega_1, \Omega_2 = \text{const})]$ u zavisnosti od frekvencije Ω_{1nm} i za diskretne vrednosti pobudne frekvencije $\Omega_{2nm} = 100s^{-1}, 185s^{-1}, 190s^{-1}, 201s^{-1}, 210s^{-1}$.



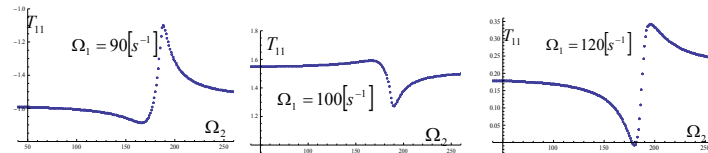
Slika 10.1.11 Vremenska funkcija prvog moda oscilovanja $T_{11}(\Omega_1, \Omega_2) = 3.185 \cdot a_1(\Omega_1, \Omega_2 = \text{const}) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_1(\Omega_1, \Omega_2 = \text{const})] + 3.185 \cdot a_1(\Omega_1, \Omega_2 = \text{const}) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_1(\Omega_1, \Omega_2 = \text{const})]$ u zavisnosti od frekvencije Ω_{1nm} i za diskretne vrednosti pobudne frekvencije $\Omega_{2nm} = 100s^{-1}, 185s^{-1}, 190s^{-1}, 201s^{-1}, 210s^{-1}$.



Slika 10.1.12 Funkcija prvog harmonika $T_{111}(\Omega_1, \Omega_2) = 3.185 \cdot a_1(\Omega_1 = \text{const}, \Omega_2) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_1(\Omega_1 = \text{const}, \Omega_2)]$ u zavisnosti od frekvencije Ω_{2nm} i za diskretne vrednosti pobudne frekvencije $\Omega_{1nm} = 90s^{-1}, 100s^{-1}, 120s^{-1}$.



Slika 10.1.13 Funkcija drugog harmonika $T_{112}(\Omega_1, \Omega_2) = 3.185 \cdot a_1(\Omega_1 = \text{const}, \Omega_2) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_1(\Omega_1 = \text{const}, \Omega_2)]$ u zavisnosti od frekvencije Ω_{2nm} i za diskretne vrednosti pobudne frekvencije $\Omega_{1nm} = 90s^{-1}, 100s^{-1}, 120s^{-1}$.



Slika 10.1.14 Vremenska funkcija prvog moda oscilovanja $T_{11}(\Omega_1, \Omega_2) = 3.185 \cdot a_1(\Omega_1 = \text{const}, \Omega_2) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_1(\Omega_1 = \text{const}, \Omega_2)] + 3.185 \cdot a_1(\Omega_1 = \text{const}, \Omega_2) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_1(\Omega_1 = \text{const}, \Omega_2)]$ u zavisnosti od frekvencije Ω_{2nm} i za diskretne vrednosti pobudne frekvencije $\Omega_{1nm} = 90s^{-1}, 100s^{-1}, 120s^{-1}$.

Međutim, poznato je, iz dosada izložene teorije, da se nelinearni odgovor sistema pojačava na primer smanjenjem prigušenja u sistemu, ili pak povećanjem amplituda spoljašnjih pobuda, pa smo samo radi potvrde iskazane konstatacije za iste vrednosti parametrima sistema povećali samo amplitudu drugog

harmonika spoljašnje pobudne sile (sa $P_2 = 534$ na $P_2 = 1534$) i kao odgovor sistema dobili dijagrame prikazane na slikama 10.1.15-22. Sa tih slika se uočavaju karakteristične pojave nelinearnog odgovora sistema u rezonantnoj oblasti, pojava novih nestabilnih grana i novih skokova amplituda i faza, koje se za jedan harmonik dešavaju na istim frekvencijama.

Na slici 10.1.15, vidi se da amplitudno-frekventna karakteristika prvog harmonika ulazi u rezonantnu oblast druge frekvencije spoljašnje pobude za vrednost $\Omega_{2nm} = 200(s^{-1})$, gde se uviđaju znatne promene oblika u smislu gubljenja nagiba karakterističnog odgovoru sistema sa tvrdom nelinearnošću. Sa daljim povećanjem vrednosti druge frekvencije prinudne sile $\Omega_{2nm} = 202(s^{-1})$ uočava se pojava novih grana amplitudno-frekventne karakteristike, i to prvo pojava nove grane na desnoj strani (pri većim frekvencijama) već prisutne osnovne rezonantne grane. Pojava dodatne grane se objašnjava međusobnim uticajem prvog i drugog harmonika u rezonantnoj oblasti druge frekvencije prinudne sile. Desna, dodatna grana, amplitude prvog harmonika se nalazi ispod osnovne grane i to njenog nestabilnog dela. Daljim povećanjem frekvencije Ω_{2nm} nestabilni novostvoreni ogranci prvo se povećavaju, potom se stapaju međusobno tako da njihovi stabilni delovi obrazuju novu rezonantnu krivu, a nestabilni se spajaju sa delom osnovne grane. Nakon spajanja stabilnih ogranaka dodatnih grana za $\Omega_{2nm} > 220(s^{-1})$ sledi odvajanje nestabilnih delova spojenih sa osnovnom granom, koji iščezavaju. Posle frekvencije $\Omega_{2nm} > 240(s^{-1})$ ostaje amplitudno-frekventna karakteristika prvog harmonika, slična onoj za vrednosti frekvencije prinudne sile $\Omega_{2nm} < 100(s^{-1})$. Identične pojave se dešavaju sa amplitudnim odgovorom drugog harmonika, slika 10.1.16, samo što se nakon prolaska kroz rezonantnu oblast amplitudno-frekventna kriva drugog harmonika a_{2nm} zaokrenula „naviše“ za 180° i vrednosti su joj se pomerile naviše. Analizom fazno-frekventnih karakteristika harmonika u jednom modu, slike 10.1.17 i 10.1.18, uočavaju se slične promene pojave novih grana, koje se stapaju sa osnovnom rezonantnom krivom, kao i da se fazno-frekventana karakteristika prvog harmonika jako malo menja posle prolaska kroz rezonantnu oblast druge frekvencije prinudne sile, dok fazno-frekventana karakteristika drugog harmonika ima značajnije promene, zaokrenuta je u negativnu oblast, faza se promenila za 180° , dok su njene apsolutne vrednosti niže nego li pre ulaska u rezonantni režim.

Dakle, u rezonantnoj oblasti druge kružne frekvencije prinudne sile izraženiji je uticaj na promenu oblika amplitudno i fazno-frekventnih karakteristika drugog harmonika.

Na slikama 10.1.19-22 prikazane su amplitudno-frekventne i fazno-frekventne karakteristike stacionarnog stanja u funkciji od frekvencija Ω_{2nm} za slučaj kada je frekvencija Ω_{1nm} fiksirana. Amplitudno-frekventne i fazno-frekventne krive su prikazane za vrednosti frekvencije $\Omega_{1nm} = 100s^{-1}, 140s^{-1}, 150s^{-1}, 160s^{-1}, 170s^{-1}, 210s^{-1}, 230s^{-1}, 250s^{-1}, 270s^{-1}, 280s^{-1}$. Tako da se, i u ovom slučaju, može razmatrati fenomen prolaska kroz rezonantno stanje za različite vrednosti frekvencija Ω_{1nm} prinudne sile.

Do vrednosti prve frekvencije $\Omega_{1nm} = 140(s^{-1})$ amplitudno-frekventne krive amplitude prvog harmonika a_{1nm} (slika 10.1.19) ne trpe promene, dok amplitudna kriva drugog harmonika u nm -modu i

a_{2nm} (slika 10.1.20) ostaje sličnog oblika sa znatnim smanjenjem vrednosti. Nove grane se pojavljuju za vrednosti $\Omega_{1nm} > 150(s^{-1})$. Pojava dodatnih grana se objašnjava međusobnim uticajem prvog i drugog harmonika u rezonantnoj oblasti prve frekvencije prinudne sile, koja je udaljena od vrednosti prve kružne frekvencije sprezanja $\hat{p}_1 = 108.33(s^{-1})$ i obuhvata rezonantno područje od $\Omega_{1nm} \in [150, 270](s^{-1})$, dakle mnogo širu rezonantnu oblast nego li u slučaju rezonantne oblasti druge frekvencije $\Omega_{2nm} \in [202, 230](s^{-1})$. Ovako izražene pojave skokova amplituda i pojava novih grana u oba harmonika zapravo su mnogo izraženije, nego li u slučajevima npr. razmatranom u radovima [140-142, 147, 259] i zbog preklapanja rezonantnih oblasti frekvencija dvofrekventne spoljašnje pobudne sile.

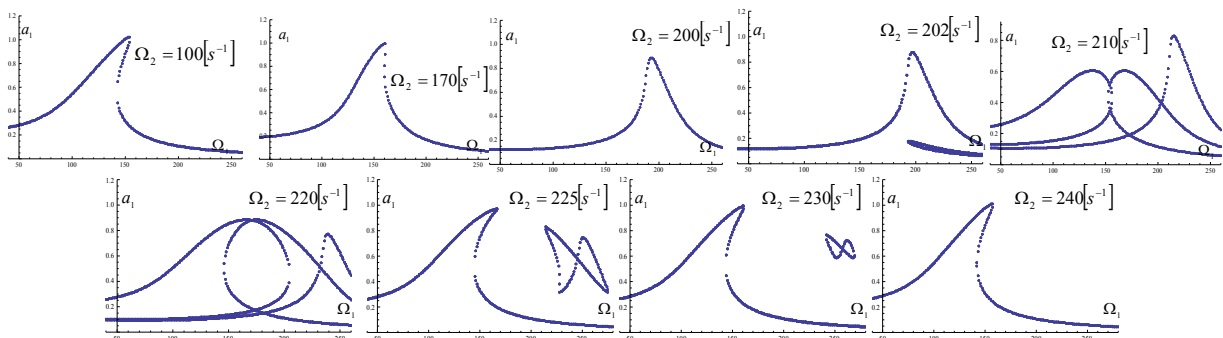
Ogranci novopojavljenih grana koji su bliži osnovnoj grani su nestabilni. Sa povećanjem vrednosti frekvencije Ω_{1nm} ogranci svake grane pojedinačno se međusobno udaljavaju, a grane se međusobno približavaju. Na amplitudno-frekventnoj krivoj za vrednosti frekvencije $\Omega_{1nm} = 160(s^{-1})$ (slika 10.1.19-22), uočava se da su se dodatne grane spojile sa osnovnim granama, a potom se ogranci osnovne grane razdvajaju i odvajaju od novonastale glavne rezonantne krive. Pri tome, od nestabilnih ogranaka nastala je donja, takođe nestabilna grana, dok je gornja grana nastala od stabilnih ogranaka novostvorenih grana. Skoro istovetan proces se sa povećanjem Ω_{1nm} odvija i sa amplitudom a_{2nm} drugog harmonika. Nadalje, sa povećanjem Ω_{1nm} dolazi do sažimanja gornjih nestabilne grane i osnovne grane i do njihovog iščezavanja sa daljim povećanjem Ω_{1nm} . Za vrednosti $\Omega_{1nm} > 280(s^{-1})$ na dijagramima se uočavaju samo osnovne grane slične polaznim. Posle prolaska kroz rezonantnu oblast $\Omega_{2nm} \in [150, 270](s^{-1})$ osnovna grana amplitudno-frekventne karakteristike prvog harmonika se „pegla“, tj. neznatno se ispravlja. Na faznim karakteristikama, slike 10.1.20 i 10.1.22, promene su analogne i dešavaju se sinhrono po frekvenciji sa promenama u amplitudnim odgovorima.

Iz svega izloženog može se zaključiti da je izraženiji uticaj prvog harmonika na drugi u okolini rezonantne vrednosti prve frekvencije prinudne sile Ω_{1nm} , nego što je uticaj drugog harmonika na prvi u oblasti rezonantne vrednosti druge frekvencije prinudne sile Ω_{2nm} . Takođe, uticaj prvog harmonika na drugi je veći ukoliko je frekvencija prinudne sile u oblasti rezonantne vrednosti prve frekvencije nego li u oblasti rezonantne vrednosti druge frekvencije.

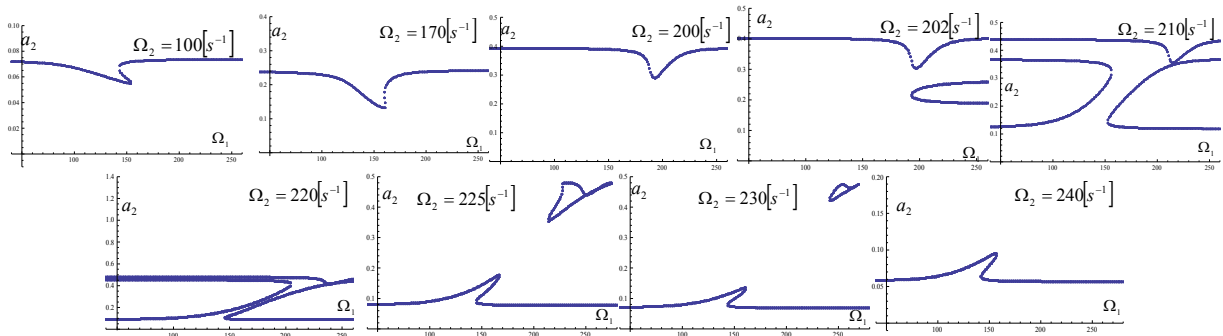
Uticaj harmonika uočljiviji je sa dijagrama 10.1.9-14 odnosno na slikama 10.1.23-28, koji predstavljaju oblike harmonika vremenske funkcije gornje ploče posebno i u zbiru u jednom nm obliku oscilovanja, ovde posmatrano u prvom osnovnom obliku oscilovanja sopstvenih amplitudnih funkcija ploča. Dijagrami sa slika 10.1.9-11 odnosno 10.1.23-25 predstavljaju oblik prvog i drugog harmonika posebno, a potom i u zbiru, što daje oblik vremenske funkcije gornje ploče, dat opštim izrazom (6.2.54a), određenog moda oscilovanja i to u rezonantnoj oblasti druge frekvencije spoljašnje pobude Ω_{2nm} , za njene diskretne vrednosti $\Omega_{2nm} = 100s^{-1}, 185s^{-1}, 190s^{-1}, 201s^{-1}, 210s^{-1}$, na slikama 10.1.9-11, odnosno $\Omega_{2nm} = 100s^{-1}, 170s^{-1}, 200s^{-1}, 202s^{-1}, 210s^{-1}, 220s^{-1}, 230s^{-1}, 240s^{-1}$ na slikama 10.1.23-25. Posmatrano u

trenutku $t=1(s)$, a u funkciji od Ω_{1nm} , se vizuelno može zaključiti da oblik prvog harmonika u konačnom zbiru biva promenjen i to više što je frekvencija Ω_{2nm} bliža rezonantnom regionu. Van tog regiona drugi harmonik ne utiče na konačni oblik vremenske funkcije određenog moda oscilovanja.

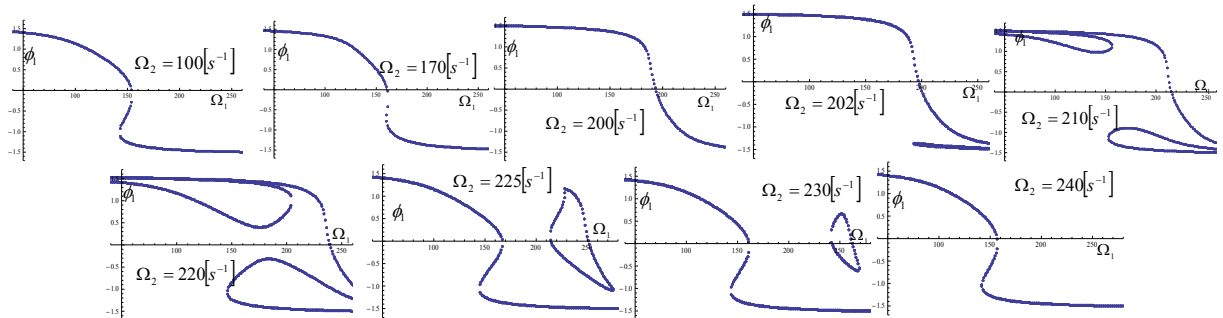
U rezonantnoj oblasti sami oblici vremenskih funkcija, slika 10.1.11 (10.1.25), više liče na oblike prvog harmonika oscilovanja, slika 10.1.9 (10.1.23), koji su neznatno promenjeni dejstvom drugog harmonika, slika 10.1.10 (10.1.24). Isti zaključak o međudejstvu harmonika može da se izvuče i sa dijagrama oblika harmonika i vremenske funkcije gornje ploče, slike 10.1.12-14 (10.1.26-28), u rezonantnoj oblasti prve frekvencije spoljašnje pobude Ω_{1nm} , za njene diskretne vrednosti $\Omega_{1nm} = 90s^{-1}, 100s^{-1}, 120s^{-1}$ ($\Omega_{1nm} = 90s^{-1}, 100s^{-1}, 120s^{-1}, 140s^{-1}, 150s^{-1}, 160s^{-1}, 210s^{-1}, 260s^{-1}, 280s^{-1}$), a u funkciji od Ω_{2nm} , posmatrano u trenutku $t = 1 (s)$.



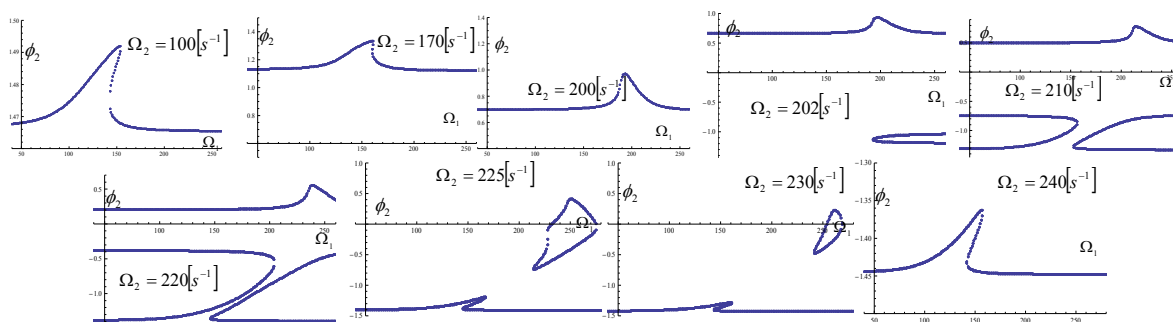
Slika 10.1.15 Amplitudno-frekventna kriva prvog harmonika $a_{1nm} = f_1(\Omega_{1nm})$ za fiksirane vrednosti druge kružne frekvencije prinudne sile Ω_{2nm} i povećana vrednost amplitude drugog harmonika spoljašnje pobude



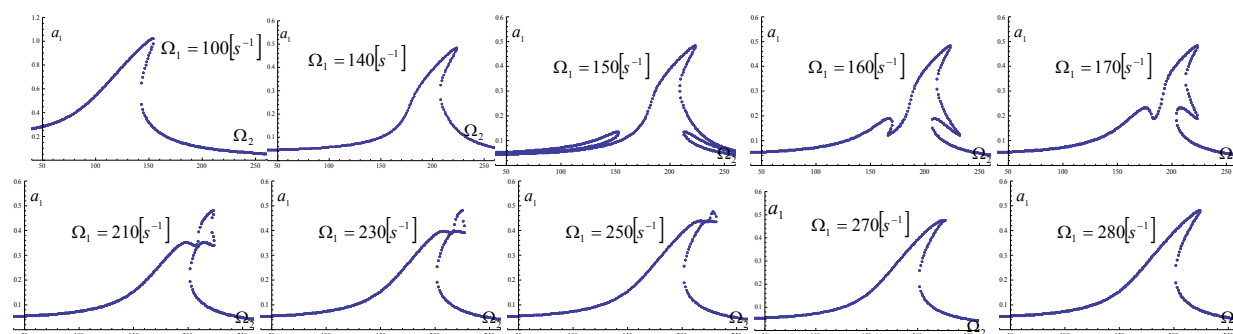
Slika 10.1.16 Amplitudno-frekventna kriva drugog harmonika $a_{2nm} = f_2(\Omega_{1nm})$ za fiksirane vrednosti druge kružne frekvencije prinudne sile Ω_{2nm} i povećana vrednosti amplitude drugog harmonika spoljašnje pobude



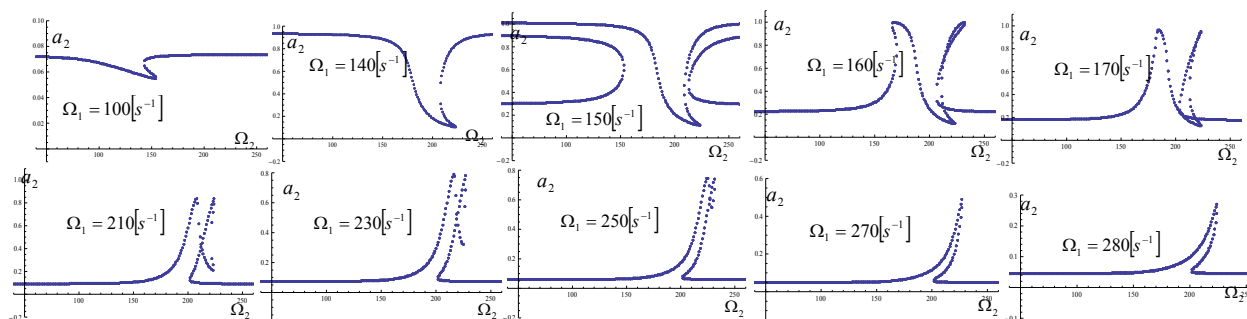
Slika 10.1.17 Fazno-frekventna kriva prvog harmonika $\phi_{1nm} = f_3(\Omega_{1nm})$ za fiksirane vrednosti druge kružne frekvencije prinudne sile Ω_{2nm} i povećane vrednosti amplitude drugog harmonika spoljašnje pobude



Slika 10.1.18 Fazno-frekventna kriva drugog harmonika $\phi_{2nm} = f_4(\Omega_{1nm})$ za fiksirane vrednosti druge kružne frekvencije prinudne sile Ω_{2nm} i povećane vrednosti amplitude drugog harmonika spoljašnje pobude



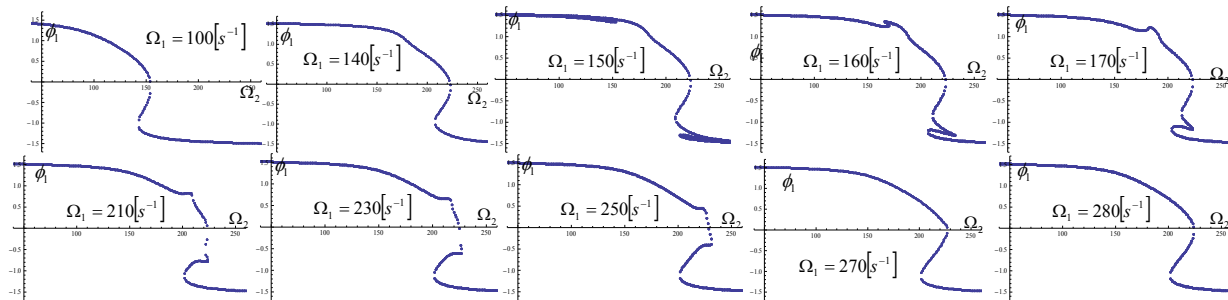
Slika 10.1.19 Amplitudno-frekventna kriva prvog harmonika $a_{1nm} = f_5(\Omega_{2nm})$ za fiksirane vrednosti prve kružne frekvencije prinudne sile Ω_{1nm} i povećane vrednosti amplitude drugog harmonika spoljašnje pobude



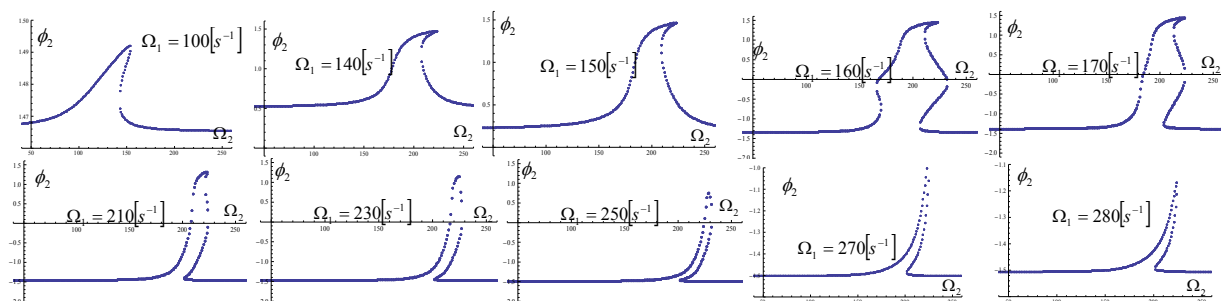
Slika 10.1.20 Amplitudno-frekventna kriva drugog harmonika $a_{2nm} = f_6(\Omega_{2nm})$ za fiksirane vrednosti prve kružne frekvencije prinudne sile Ω_{1nm} i povećane vrednosti amplitude drugog harmonika spoljašnje pobude.

Ovde je sprovedena samo kvalitativna analiza pojave prolaska kroz rezonantno stanje i interakcije harmonika u jednom modu oscilovanja proučavanog sistema, i to u izabranom slučaju nehomogenosti tog sistema. Jasno je da bilo kakva generalizacija u smislu uticaja harmonika ili oblika amplitudno-frekventnih karakteristika u drugim slučajevima sistema ne bi mogla da se kvantitativno uopšti, evidentno je samo da će kvalitativno sigurno postojati interakcija između harmonika, što je uostalom i opšte svojstvo nelinearnosti sistema. Bilo kakvo kvantitativno uopštavanje bilo bi moguće izvesti samo širom uporedbom rezultata za različite odnose parametara sistema, mada bi i u tom slučaju bilo teško doći do opštijih rezultata s obzirom da bi se raspravljalo na polju višedimenzionih bifurkacija, jer sama rešenja zavise od većeg broja kako parametara sistema tako i parametara sprezanja. Iz tabele 10.1 zaključuje se da promena jednog parametra sistema uslovljava promene i drugih parametara sistema, pa bi zapravo dalja analiza

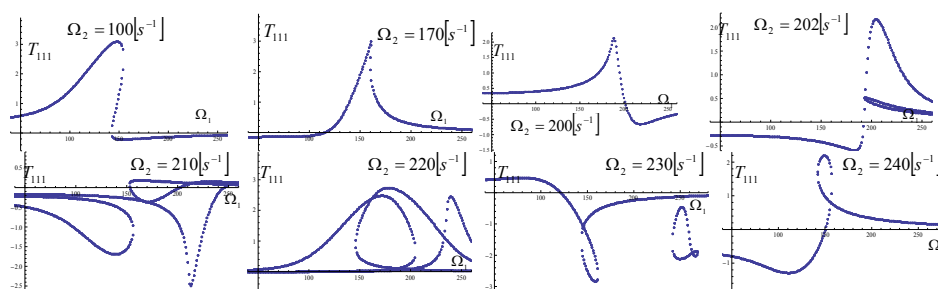
ovakvih sistema iziskivala bifurkacionu analizu, što bi moglo biti još jedno otvoreno i korisno polje nekih narednih istraživanja.



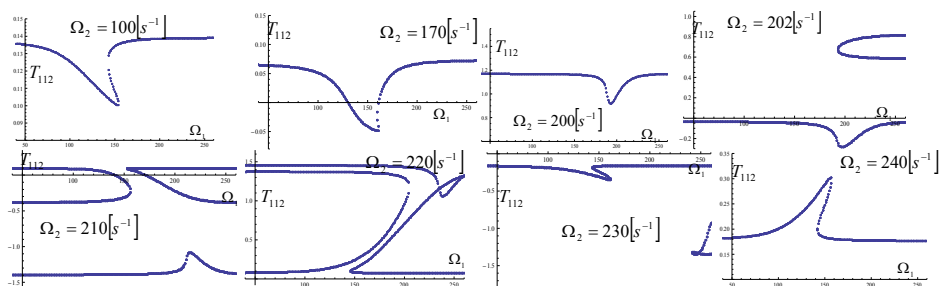
Slika 10.1.21 Fazno-frekventna kriva prvog harmonika $\phi_{1nm} = f_7(\Omega_{2nm})$ za fiksirane vrednosti prve kružne frekvencije prinudne sile Ω_{1nm} i povećane vrednosti amplitude drugog harmonika spoljašnje pobude.



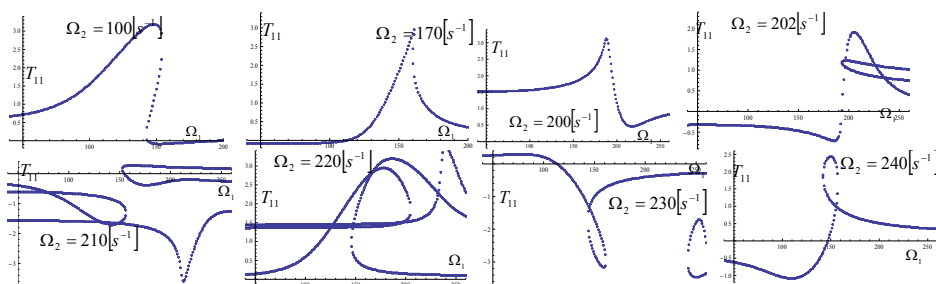
Slika 10.1.22 Fazno-frekventna kriva drugog harmonika $\phi_{2nm} = f_8(\Omega_{2nm})$ za fiksirane vrednosti prve kružne frekvencije prinudne sile Ω_{1nm} i povećane vrednosti amplitude drugog harmonika spoljašnje pobude



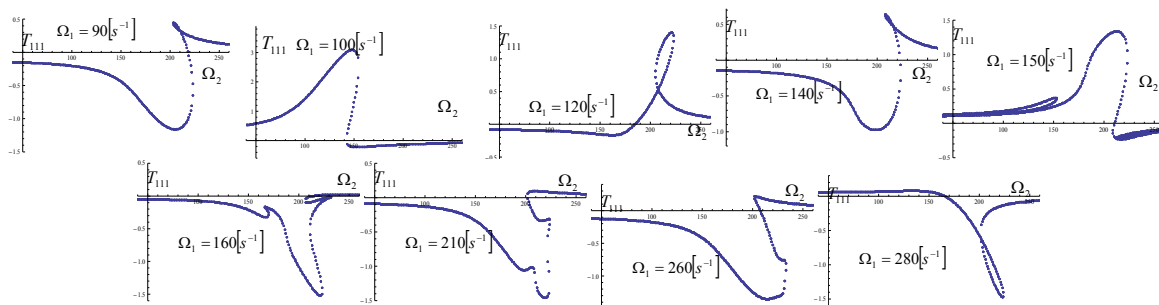
Slika 10.1.23 Funkcija prvog harmonika $T_{111}(\Omega_1, \Omega_2) = 3.185 \cdot a_1(\Omega_1, \Omega_2 = const) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_1(\Omega_1, \Omega_2 = const)]$ u zavisnosti od frekvencije Ω_{1nm} i za diskretne vrednosti pobudne frekvencije $\Omega_{2nm} = 100 s^{-1}, 170 s^{-1}, 200 s^{-1}, 202 s^{-1}, 210 s^{-1}, 220 s^{-1}, 230 s^{-1}, 240 s^{-1}$.



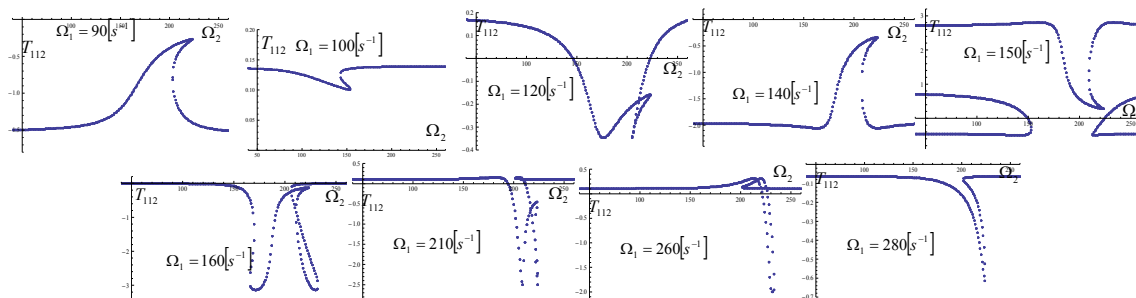
Slika 10.1.24 Funkcija drugog harmonika $T_{112}(\Omega_1, \Omega_2) = 3.185 \cdot a_1(\Omega_1, \Omega_2 = \text{const}) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_1(\Omega_1, \Omega_2 = \text{const})]$ u zavisnosti od frekvencije Ω_{1nm} i za diskretne vrednosti pobudne frekvencije $\Omega_{2nm} = 100 \text{ s}^{-1}, 170 \text{ s}^{-1}, 200 \text{ s}^{-1}, 202 \text{ s}^{-1}, 210 \text{ s}^{-1}, 220 \text{ s}^{-1}, 230 \text{ s}^{-1}, 240 \text{ s}^{-1}$.



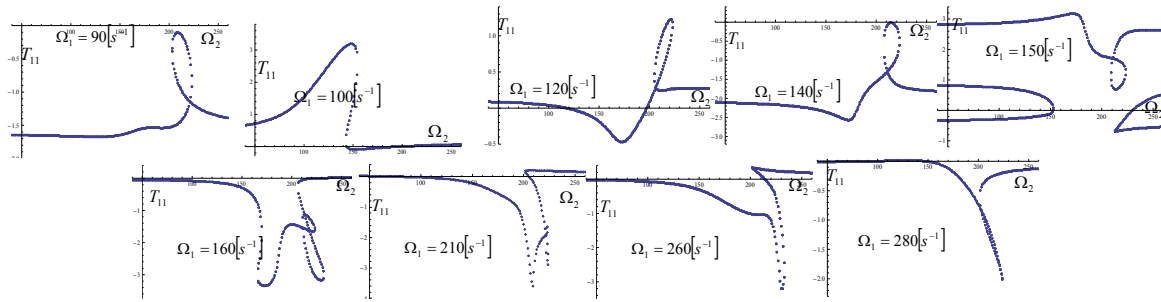
Slika 10.1.25 Vremenska funkcija prvog moda oscilovanja $T_{111}(\Omega_1, \Omega_2) = 3.185 \cdot a_1(\Omega_1, \Omega_2 = \text{const}) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_1(\Omega_1, \Omega_2 = \text{const})] + 3.185 \cdot a_1(\Omega_1, \Omega_2 = \text{const}) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_2(\Omega_1, \Omega_2 = \text{const})]$ u zavisnosti od frekvencije Ω_{1nm} i za diskretne vrednosti pobudne frekvencije $\Omega_{2nm} = 100 \text{ s}^{-1}, 170 \text{ s}^{-1}, 200 \text{ s}^{-1}, 202 \text{ s}^{-1}, 210 \text{ s}^{-1}, 220 \text{ s}^{-1}, 230 \text{ s}^{-1}, 240 \text{ s}^{-1}$.



Slika 10.1.26 Funkcija prvog harmonika $T_{111}(\Omega_1, \Omega_2) = 3.185 \cdot a_1(\Omega_1 = \text{const}, \Omega_2) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_1(\Omega_1 = \text{const}, \Omega_2)]$ u zavisnosti od frekvencije Ω_{2nm} i za diskretne vrednosti pobudne frekvencije $\Omega_{1nm} = 90 \text{ s}^{-1}, 100 \text{ s}^{-1}, 120 \text{ s}^{-1}, 140 \text{ s}^{-1}, 150 \text{ s}^{-1}, 160 \text{ s}^{-1}, 210 \text{ s}^{-1}, 260 \text{ s}^{-1}, 280 \text{ s}^{-1}$.



Slika 10.1.27 Funkcija drugog harmonika $T_{112}(\Omega_1, \Omega_2) = 3.185 \cdot a_1(\Omega_1 = \text{const}, \Omega_2) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_1(\Omega_1 = \text{const}, \Omega_2)]$ u zavisnosti od frekvencije Ω_{2nm} i za diskretne vrednosti pobudne frekvencije $\Omega_{1nm} = 90 \text{ s}^{-1}, 100 \text{ s}^{-1}, 120 \text{ s}^{-1}, 140 \text{ s}^{-1}, 150 \text{ s}^{-1}, 160 \text{ s}^{-1}, 210 \text{ s}^{-1}, 260 \text{ s}^{-1}, 280 \text{ s}^{-1}$.



Slika 10.1.28 Vremenska funkcija prvog moda oscilovanja

$T_{111}(\Omega_1, \Omega_2) = 3.185 \cdot a_1(\Omega_1 = \text{const}, \Omega_2) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_1(\Omega_1 = \text{const}, \Omega_2)] + 3.185 \cdot a_1(\Omega_1 = \text{const}, \Omega_2) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_1(\Omega_1 = \text{const}, \Omega_2)]$
 u zavisnosti od frekvencije Ω_{2nm} i za diskretne vrednosti pobudne frekvencije $\Omega_{1nm} = 90 s^{-1}, 100 s^{-1}, 120 s^{-1}, 140 s^{-1}, 150 s^{-1}, 160 s^{-1}, 210 s^{-1}, 260 s^{-1}, 280 s^{-1}$.

Pre nego pređemo na analizu nestacionarnog stanja konstatuje se da su dijagrami, slike 10.1.11, 10.1.14, 10.1.25, 10.1.28, oblika vremenskih funkcija za diskretne vrednosti frekvencija spoljašnje pobude, iz rezonantnih oblasti prve ili druge frekvencije sprezanja sistema, dati i radi analize energijskih transfera u stacionarnom režimu. Iz izvedene analize energija sistema kružnih ploča spregnutih slojem viskoelastičnih nelinearnih elemenata, u poglavlju 6.2.4, jasno je da svi izrazi za redukovane vrednosti potencijalnih energija ploča kao i međusloja zavise od vremenskih funkcija $T_{(i)nm}(t)$, $i=1,2$ transverzalnih oscilacija sistema ploča, koje imaju oblike (6.2.54a i b), gde su amplitude $a_{inn}(t)$ i faze $\Phi_{inn}(t) = \Omega_{inn}t + \phi_{inn}(t)$ nepoznate funkcije vremena, koje smo odredili u prvoj aproksimaciji i dobili sistem diferencijalnih jednačina prvog reda oblika (3.4.20 a, b, c, d), koji nema rešenje u zatvorenom obliku, pa smo ga rešavali numerički u stacionarnom režimu oscilovanja sistema i dobili karakteristične amplitudno i fazno frekventne krive vremenskih harmonika. Jasno je da sve promene koje se dešavaju sa amplitudama $a_{(i)nm}(t)$ harmonika dvofrekventnih procesa vremenskih funkcija, kao i fazama $\Phi_{(i)nm}(t)$, pri stacionarnom prolasku kroz rezonantno stanje jedne ili druge frekvencije spoljašnje pobudne sile, u smislu karakterističnih amplitudnih ili faznih skokova, u smeru porasta ili opadanja spoljašnjih frekvencija to će se dešavati i sa oblicima potencijalnih energija sistema, kao i podsistema. Iz izraza za energije zaključuje se da je za krajnje rezultate potrebno imati i oblike vremenskih funkcija donje ploče jer svi izrazi, osim potencijalnih energija samih ploča, zavise i od jednog i od drugog oblika vremenskih funkcija. Npr. izraz za redukovanu vrednost potencijalne energije elastičnog sloja (6.2.52c) zavisi od kvadrata vrednosti razlike vremenske funkcije druge i prve ploče. U tom smislu tačne vrednosti potrebne energije i prenosa energije u ovakvim hibridnim sistemima mogle bi sa izračunati prikazanom analizom na različitim frekvencijama prinudnih spoljašnjih sila.

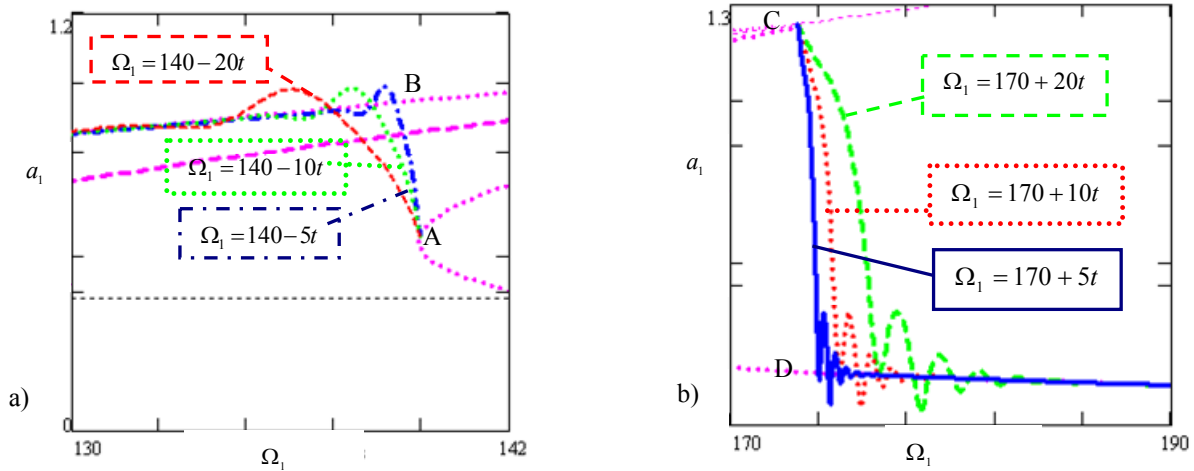
10.2. Prolazak kroz rezonantni režim u nestacionarnom režimu oscilovanja

Za nestacionarni slučaj potrebno je, za zadatu promenu kružnih frekvencija spoljašnje sile $\Omega_i(t)$, numerički integraliti sistem (4.4.1) diferencijalnih jednačina prve aproksimacije, što će ovde biti učinjeno primenom numeričke metode Runge-Kutta IV reda i računarskog programa MathCAD. Kao rezultat na slikama 10.2.1 a) i b) prikazane su amplitudno-frekventne krive prvog harmonika u jednom modu oscilovanja u funkciji promene, a u smeru porasta ili opadanja, frekvencija spoljašnje sile. Posmatraće se slučajevi linearne promene $\Omega_i(t) = \Omega_{oi} + \alpha t$, pri čemu za $\alpha > 0$ kružne frekvencije rastu, a za $\alpha < 0$ opadaju. Za male apsolutne vrednosti α dobijaju se krive koje su sasvim bliske krivim stacionarnog rezonantnog stanja. Videće se da, pri prolasku kroz rezonantno stanje, suštinski uticaj na amplitudno-frekventne krive pokazuje brzina promene frekvencija spoljašnje sile. Pri njenom povećanju maksimumi amplituda se snižavaju, a „oštrina“ prvog maksimuma se umanjuje. Posle postizanja maksimuma uočava se pojava nekoliko maksimuma manjih veličina, pri čemu, što se brže ostvaruje promena frekvencija spoljašnje sile to se oni izraženije uočavaju. Prvi maksimumi amplituda su manji po apsolutnim vrednostima ukoliko je brža promena frekvencija, tj. ukoliko je prolaz kroz rezonantnu oblast izveden brže, a takođe se uočava da su pomereni ka višim frekvencijama u smeru porasta frekvencije spoljašnje pobude, slika 10.2.1 b), odnosno ka nižim frekvencijama u smeru opadanja frekvencije spoljašnje pobude, slika 10.2.1 a). Kako pri stacionarnom režimu u sistemu uočavamo skokove amplituda, to pri prolasku kroz rezonantno stanje kružnih frekvencija spoljašnje prinude u nestacionarnom režimu, takođe, uočavaju se nagle promene amplituda, izrazitije za brži prolazak kroz rezonantno stanje, što se u smeru opadanja frekvencije spoljašnje sile vidi na slici 10.2.1 a), crvena isprekidana linija, a u smeru porasta frekvencije spoljašnje sile na slici 10.2.1 b), zelena isprekidana linija.

Maksimumi amplituda se ne pojavljuju u momentima poklapanja kružnih frekvencija spoljašnje sile sa sopstvenim frekvencijama sprežanja sistema nego kasnije ili ranije, što opet zavisi od brzina promena kružnih frekvencija prinudne sile, karaktera nelinearnosti u sistemu, a takođe i od smera porasta opadanja kružnih frekvencija spoljašnje sile.

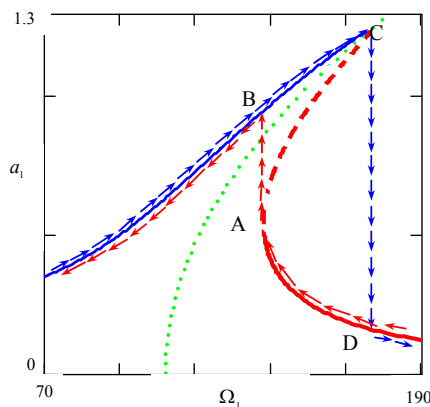
Na dijagramima 10.2.1 ljubičastom linijom su predstavljeni delovi osnovne rezonantne krive amplitudnog odgovora prvog harmonika $a_{1nm} = f(\Omega_{1nm})$ u zavisnosti od frekvencije Ω_{1nm} , koja je u celosti prikazana na dijagramu 10.2.2., gde su takođe strelicama prikazani i amplitudni skokovi u smeru porasta frekvencije i smeru njenog opadanja. Isprekidanom linijom, između tačaka A i C prikazan je deo rezonantne krive koji je nestabilan. Skeletna kriva je zakrivljena na desno, što nas podseća na činjenicu da je odnos parametara sistema takav da se on ponaša kao nelinearni sistem opisan Duffing-ovom nelinearnošću trećeg stepena sa tvrdom karakteristikom, pozitivne vrednosti ispred kubnog člana. U smeru porasta frekvencije spoljašnje pobude vrednost amplitude raste prateći plavu liniju do tačke C , gde ima iznenadni skok na manju vrednost u tačku D , a potom daljim porastom frekvencije nastavlja da prati

osnovnu krivu. U suprotnom smeru, pri opadanju frekvencije vrednost amplitude isprva je manja i prati crvene strelice do tačke A , mesta gde postoji vertikalna tangenta glavne rezonantne krive, i tu ima skok na višu vrednost do tačke B , a potom se kreće niz glavnu rezonantnu krivu.



Slika 10.2.1 Amplitudno-frekventna kriva prvog harmonika $a_{1nm} = f(\Omega_{1nm})$ za fiksirane vrednosti druge kružne frekvencije prinudne sile $\Omega_{2nm} = 360(s^{-1})$ i tri različite brzine prolaska kroz rezonantnu oblast: a) u smeru opadanja kružne frekvencije spoljašnje sile: $\Omega_{1nm} = 140 - 5t$, $\Omega_{1nm} = 140 - 10t$ i $\Omega_{1nm} = 140 - 15t$; b) u smeru porasta kružne frekvencije spoljašnje sile: $\Omega_{1nm} = 170 + 5t$, $\Omega_{1nm} = 170 + 10t$ i $\Omega_{1nm} = 170 + 20t$;

Analiza u nestacionarnom režimu nadalje može da se izvede ispitujući oblik harmonika jednog nm moda vremenske funkcije gornje i donje ploče, ovde će biti prikazani dijagrami samo za gornju ploču. U tom smislu biće dati komentari koji se odnose na promenu vrednosti energija sistema, koje direktno zavise od vrednosti vremenskih funkcija i njihovih izvoda, kao što smo to već videli u prethodnom i 6.2.4. poglavlju.



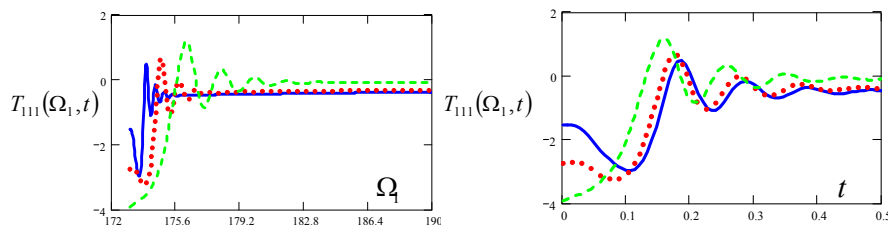
Slika 10.2.2 Amplitudno-frekventna kriva prvog harmonika $a_{1nm} = f(\Omega_{1nm})$ sa karakterističnim skokovima amplitude u smeru porasta frekvencije spoljašnje prinude (plave strelice) i u smeru opadanja (crvene strelice) koje prikazuju karakterističnu pojavu histerezisa u nelinearnim sistemima.

Na dijagramima 10.2.3 prikazane su vremenske funkcije prvog harmonika oblika $T_{111}(\Omega_1, \Omega_2) = 3.185 \cdot a_1(\Omega_1, \Omega_2 = const) \cos[\Omega_{1nes}(t) \cdot t + \phi_1(\Omega_1, \Omega_2 = const)]$, i to za slučaj kada zavise od frekvencije Ω_1 , slika 10.2.3 a), i u zavisnosti od vremena t , slika 10.2.3 b). Ovde $a_1(\Omega_1, \Omega_2 = const)$ i

$\phi_1(\Omega_1, \Omega_2 = const)$ predstavljaju numerička rešenja sistema diferencijalnih jednačina (4.4.1) u nestacionarnim uslovima za linearnu promenu $\Omega_1(t) = \Omega_{01} + \alpha t$ za tri različite vrednosti $\alpha = 5[s^{-1}]$, $\alpha = 10[s^{-1}]$ i $\alpha = 20[s^{-1}]$. U svakom posmatranom slučaju uzima se da je $\Omega_{1nes}(t) = \Omega_1(t)$. Vrednost frekvencije Ω_{01} uzima se sa osnovne rezonantne krive odakle pratimo skokove amplituda i faza.

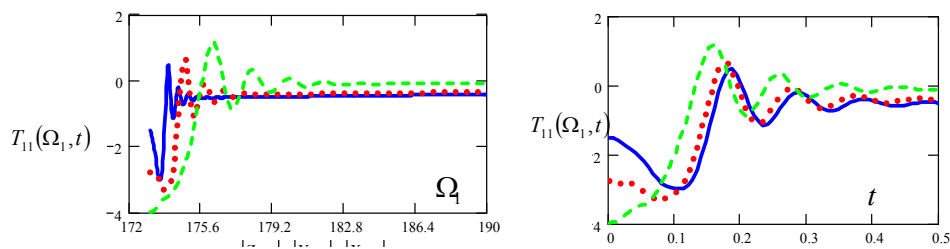
Na slici 10.2.4 prikazani su dijagrami vremenskih funkcija prve ploče, prvog moda oscilovanja, u nestacionarnim uslovima, u zavisnosti od frekvencije Ω_1 , slika 10.2.4 a), i od vremena, slika 10.2.4 b), gde su na vrednosti prvog harmonika dodate i vrednosti drugog harmonika oblika:

$$T_{112}(\Omega_1, \Omega_2) = 3.185 \cdot a_1(\Omega_1, \Omega_2 = const) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_1(\Omega_1, \Omega_2 = const)].$$



Slika 10.2.3 Funkcije prvog harmonika oblika

$T_{111}(\Omega_1, \Omega_2) = 3.185 \cdot a_1(\Omega_1, \Omega_2 = const) \cos[\Omega_{1nes}(t) \cdot t + \phi_1(\Omega_1, \Omega_2 = const)]$, u smeru porasta kružne frekvencije spoljašnje sile: $\Omega_{1nm} = 170 + 5t$ plava puna linija, $\Omega_{1nm} = 170 + 10t$ crvena tačkasta linija i $\Omega_{1nm} = 170 + 20t$ zelena isprekidana linija. a) u zavisnosti od frekvencije ; b) u zavisnosti od vremena t , a za vrednost $\Omega_2 = 360[s^{-1}]$



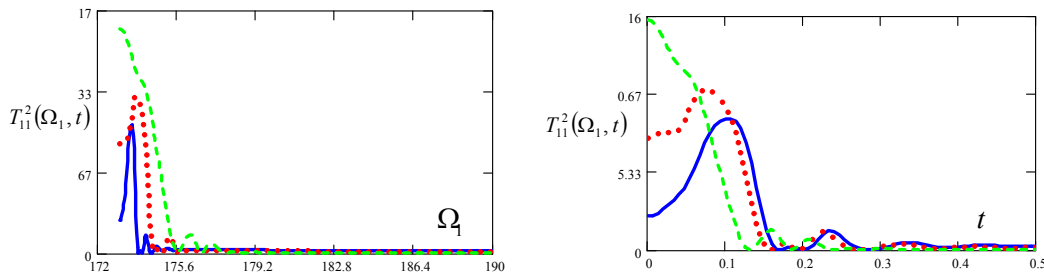
Slika 10.2.4 Vremenska funkcija gornje ploče oblika

$T_{11}(\Omega_1, \Omega_2) = 3.185 \cdot a_1(\Omega_1, \Omega_2 = const) \cos[\Omega_{1nes}(t) \cdot t + \phi_1(\Omega_1, \Omega_2 = const)] + 3.185 \cdot a_1(\Omega_1, \Omega_2 = const) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_2(\Omega_1, \Omega_2 = const)]$, u smeru porasta kružne frekvencije spoljašnje sile: $\Omega_{1nm} = 170 + 5t$ plava puna linija, $\Omega_{1nm} = 170 + 10t$ crvena tačkasta linija i $\Omega_{1nm} = 170 + 20t$ zelena isprekidana linija. a) u zavisnosti od frekvencije ; b) u zavisnosti od vremena t , a za vrednost $\Omega_2 = 360[s^{-1}]$

Upoređujući dijagrame sa slika 10.2.3 i 10.2.4 uočavamo neznatnu razliku vrednosti, što samo govori u prilog činjenici da drugi harmonik neznatno utiče na prvi za izabrane vrednosti parametara, kao što je to bio slučaj i u stacionarnom režimu. Kako redukovana vrednost potencijalne energije, koju u sistem unosi gornja ploča, zavisi od kvadrata vrednosti vremenske funkcije odgovarajućeg moda oscilovanja, to dijagrami na slikama 10.2.5 prikazuju te vrednosti.

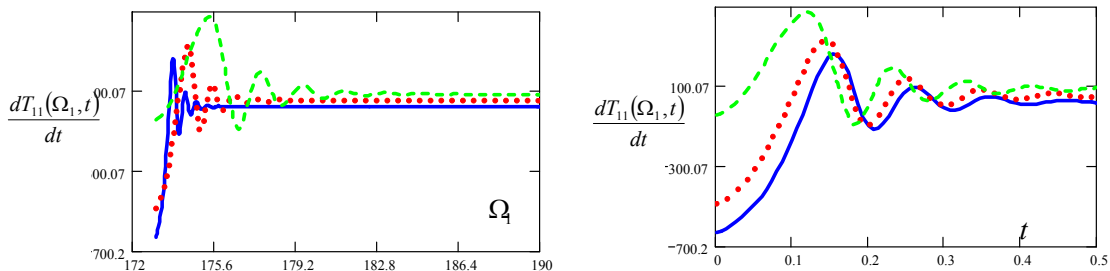
Sa slika 10.2.3-5 uočava se da je zelena isprekidana kriva sa najvećim vrednostima da ima prvi skok koji je pomeren ka većim frekvencijama i da je njen pik zaobljeniji u odnosu na ostale dve krive, što je sve u saglasnosti sa zaključcima koje smo doneli za amplitudnu krivu prvog harmonika. Sa druge strane spoljašnja pobudna sila, ukoliko ima frekvenciju koja se menja većom brzinom odaje sistemu veću količinu energije, pa i vrednosti energije pri bržim prolazima kroz rezonantnu oblast imaju veće vrednosti i skokove, koji su pomereni ka većim vrednostima u smeru porasta frekvencije. Analogno se zaključuje i

dobijaju se rezultati i u smeru opadanja frekvencije spoljašnje sile koja se menja različitim brzinama, ali ti dijagrami ovde nisu predstavljeni delom i zbog toga što u potpunosti podsećaju na predstavljene samo su vrednosti na njima manje, jer se skokovi amplituda dešavaju na nižim frekvencijama i pri manjim vrednostima amplituda, pri većim brzinama prolaska kroz rezonantnu oblast skokovi su pomereni ka višim vrednostima frekvencija i imaju veće vrednosti. Što se tiče dijagrama koji pokazuju zavisnost od vremena prikazani na datim slikama pod b), interval vremena je jako mali $t_{\max} = 0.4[s]$, jer u većim intervalima vremena sama rešenja prve asimptotske aproksimacije ne daju dobre rezultate.



Slika 10.2.5 Kvadrati vrednosti vremenske funkcije gornje ploče, u smeru porasta kružne frekvencije spoljašnje sile: $\Omega_{1nm} = 170 + 5t$ plava puna linija, $\Omega_{1nm} = 170 + 10t$ crvena tačkasta linija i $\Omega_{1nm} = 170 + 20t$ zelena isprekidana linija. a) u zavisnosti od frekvencije; b) u zavisnosti od vremena t , a za vrednost $\Omega_2 = 360[s^{-1}]$

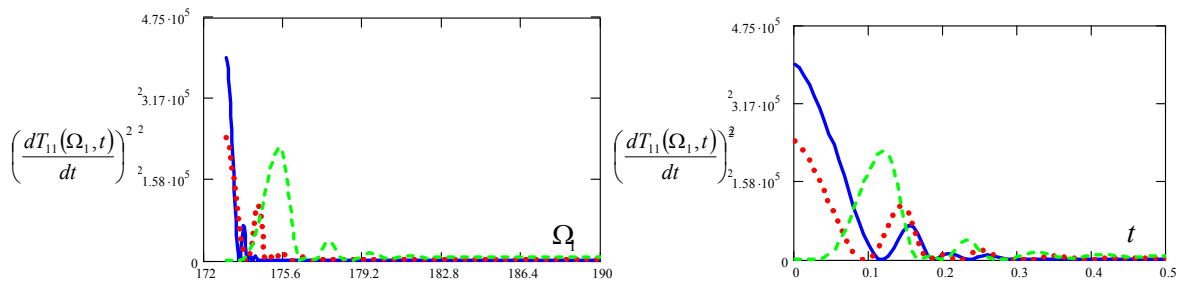
Videli smo u poglavlju 6.2.4 da redukovane vrednosti kinetičkih energija ploča i kinetičke energije sprežućeg sloja, kao i redukovana Rayleigh-eva funkcija rasipanja zavise od prvih vremenskih izvoda vremenskih funkcija obe ploče i njihovih kvadrata. Zato će se, na narednim dijagramima, slike 10.2.6 i 10.2.7, prikazati oblici izvoda po vremenu vremenske funkcije gornje ploče i vrednost njihovih kvadrata, što nam može dati vizuelnu predstavu promena kinetičke energije i funkcije rasipanja u sistemu.



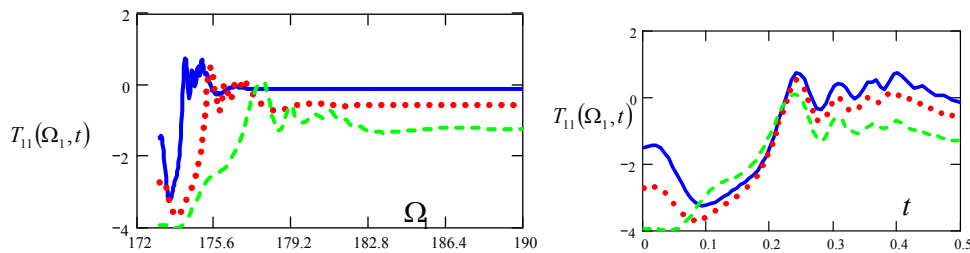
Slika 10.2.6 Izvod po vremenu vremenske funkcije gornje ploče, u smeru porasta kružne frekvencije spoljašnje sile: $\Omega_{1nm} = 170 + 5t$ plava puna linija, $\Omega_{1nm} = 170 + 10t$ crvena tačkasta linija i $\Omega_{1nm} = 170 + 20t$ zelena isprekidana linija, a za vrednost $\Omega_2 = 360[s^{-1}]$. a) u zavisnosti od frekvencije ;b) u zavisnosti od vremena .

Veću kinetičku energiju sistemu odaje spoljašnja sila koja brže prolazi kroz rezonantnu oblast i ona ima skokove, kao i amplitudne i fazne krive u nestacionarnom režimu, koji su u smeru porasta frekvencije pomereni ka višim vrednostima frekvencija i imaju veće vrednosti sa zaobljenijim pikovima. U vremenu su posle prvog najvećeg skoka uočljivi i sve niži i niži naredni skokovi, čiji je broj veći kod brzih prolaza kroz rezonantnu oblast. Frekvencija drugog moda spoljašnje pobude je $\Omega_2 = 360[s^{-1}]$, sa vrednošću van rezonantnih. Međutim, kada izaberemo neku od vrednosti unutar rezonantnog opsega $\Omega_{2nm} \in [202, 230][s^{-1}]$,

gde se pojavljuju nove grane amplitudnih i faznih odgovora sistema, dijagrami vremenskih funkcija i njihovih izvoda kao i kvadrati tih funkcija imaće drugačije oblike, slike 10.2.8-11.

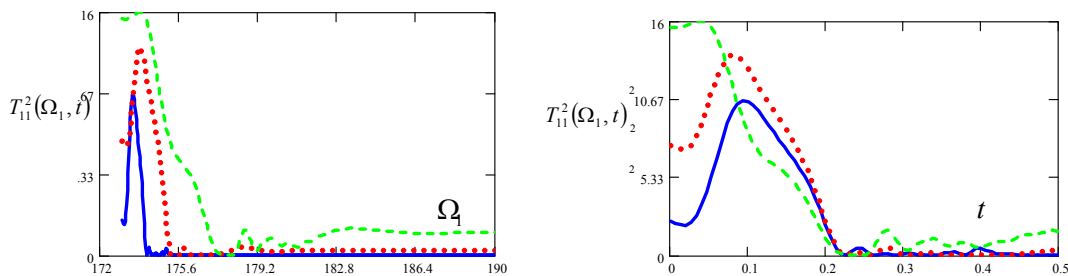


Slika 10.2.7 Kvadrati vrednosti izvoda po vremenu vremenske funkcije gornje ploče, u smeru porasta kružne frekvencije spoljašnje sile: $\Omega_{1nm} = 170 + 5t$ plava puna linija, $\Omega_{1nm} = 170 + 10t$ crvena tačkasta linija i $\Omega_{1nm} = 170 + 20t$ zelena isprekidana linija, a za vrednost $\Omega_2 = 360[s^{-1}]$. a) u zavisnosti od frekvencije ;b) u zavisnosti od vremena t

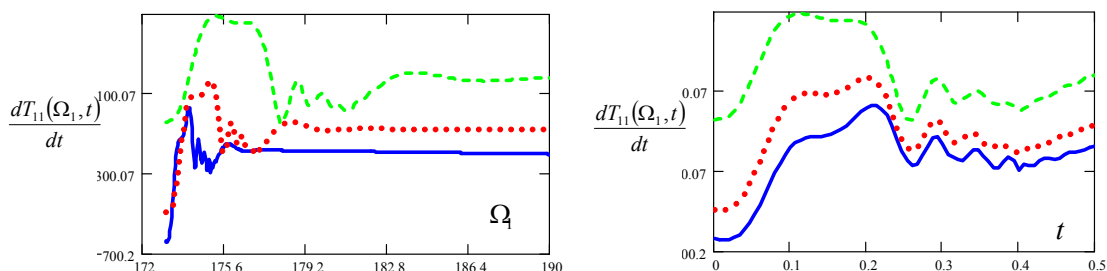


Slika 10.2.8 Vremenska funkcija gornje ploče oblika

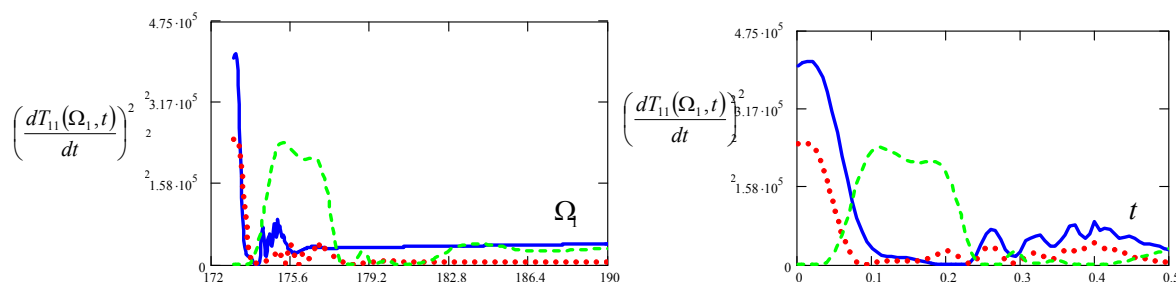
$T_{11}(\Omega_1, \Omega_2) = 3.185 \cdot a_1(\Omega_1, \Omega_2 = const) \cos[\Omega_{1nes}(t) \cdot t + \phi_1(\Omega_1, \Omega_2 = const)] + 3.185 \cdot a_1(\Omega_1, \Omega_2 = const) \cos[\Omega_2 \cdot t + \phi_1(\Omega_1, \Omega_2 = const)]$, u smeru porasta kružne frekvencije spoljašnje sile: $\Omega_{1nm} = 170 + 5t$ plava puna linija, $\Omega_{1nm} = 170 + 10t$ crvena tačkasta linija i $\Omega_{1nm} = 170 + 20t$ zelena isprekidana linija. a) u zavisnosti od frekvencije ;b) u zavisnosti od vremena t , za vrednost $\Omega_2 = 210[s^{-1}]$



Slika 10.2.9 Kvadrati vrednosti vremenske funkcije gornje ploče, u smeru porasta kružne frekvencije spoljašnje sile: $\Omega_{1nm} = 170 + 5t$ plava puna linija, $\Omega_{1nm} = 170 + 10t$ crvena tačkasta linija i $\Omega_{1nm} = 170 + 20t$ zelena isprekidana linija. a) u zavisnosti od frekvencije ;b) u zavisnosti od vremena t , a za vrednost $\Omega_2 = 210[s^{-1}]$



Slika 10.2.10 Izvod po vremenu vremenske funkcije gornje ploče, u smeru porasta kružne frekvencije spoljašnje sile: $\Omega_{1nm} = 170 + 5t$ plava puna linija, $\Omega_{1nm} = 170 + 10t$ crvena tačkasta linija i $\Omega_{1nm} = 170 + 20t$ zelena isprekidana linija, a za vrednost $\Omega_2 = 210[s^{-1}]$. a) u zavisnosti od frekvencije ;b) u zavisnosti od vremena t



Slika 10.2.11 Kvadrati vrednosti izvoda po vremenu vremenske funkcije gornje ploče, u smeru porasta kružne frekvencije spoljašnje sile: $\Omega_{1nm} = 170 + 5t$ plava puna linija, $\Omega_{1nm} = 170 + 10t$ crvena tačkasta linija i $\Omega_{1nm} = 170 + 20t$ zelena isprekidana linija, a za vrednost $\Omega_2 = 210[s^{-1}]$. a) u zavisnosti od frekvencije ;b) u zavisnosti od vremena t

Upoređujući dijagrame sa slika 10.2.5 i 10.2.9 uočava se da kvadrati vremenskih funkcija, od kojih direktno zavise vrednosti potencijalnih energija u ovom slučaju gornje ploče sistema, na frekvenciji $\Omega_2 = 210[s^{-1}]$ imaju veće vrednosti na širem opsegu frekvencija. Dok se sa dijagrama 10.2.7 i 10.2.11 uočava da su kvadrat vremenskih izvoda vremenskih funkcija gornje ploče u rezonantnoj oblasti većih vrednosti kao i da se te vrednosti zadržavaju u širem opsegu frekvencija spoljašnje pobude. Ova analiza numeričkih rezultat ukazuje na činjenicu o energetsom transferu u oblasti rezonantnih vrednosti, gde se vrednosti kinetičkih i potencijalnih energija kontinualnih podsistema povećavaju u odnosu na iste van rezonantnog opsega frekvencija spoljašnje pobude. O energiji sprežanja ovde nije bilo reći, jer ovde nije sprovedena numerička analiza za donju ploču. Vrednosti potencijalne energije sprežanja usled čiste interakcije preko sprežućeg sloja (6.2.51c) zavisi od proizvoda vremenskih funkcija gornje i donje ploče, a vrednosti Rayleigh-eve funkcije rasipanja, usled čiste interakcije između ploča izazvana visko-elastičnim slojem (6.2.53c), zavise od proizvoda vremenskih izvoda vremenskih funkcija gornje i donja ploče.

10.3. Numeričke simulacije sinhronizacija podsistema u hibridnom sistemu ploča spregnutih visko-elastičnim nelinearnim slojem.

Primer hibridnih sistema, koji je izabran za numeričke simulacije u ovom poglavlju, je najsloženiji model hibridnih sistema prikazan u ovom radu. On u sebi sadrži spregnuti uticaj statičkog sprežanja oprugama, nelinearnosti, prigušenja i prinudnih sila. Zato će se u smislu pojave sinhronizacije ispitati ovaj sistem. Proučili su se, u prethodna dva potpoglavlja, uticaji promene frekvencije prinudnih sila na pojave izražene u osnovnim rezonantnim oblastima dvofrekventnog režima oscilovanja u jednom nm modu sopstvenih amplitudnih oblika ploča, i to u smislu stacionarnog i nestacionarnog prolaska sistema kroz te oblasti dinamičkih režima. Rešenja koja su dobijena u prvoj asimptotskoj aproksimaciji važe za mali interval vremena i kao takva mogu se smatrati prihvatljivim samo u smislu lokalnog proučavanja kretanja sistema. Sa druge strane, videli smo u sedmom poglavlju da je sinhronizacija pojava koja je vezana za

globalno ponašanje dinamike sistema, tj. pojava koja se prati u dužem vremenskom periodu i koja ne mora biti izražena u nekom periodu vremena, a u nekom drugom periodu se uočava, ili se uspostavlja. Rešenja prve aproksimacije mogu eventualno dati potreban kriterijum za pojavu sinhronizacije, ali nikako i dovoljne uslove da se u odnosu na promenu parametara sistema ona i ostvari. Zato se, nadalje u ovom poglavlju, daju rezultati numeričke analize spregnutog sistema diferencijalnih nelinearnih jednačina (3.4.16) u smislu moguće sinhronizacije sa promenom parametara sprezanja i vrednosti amplituda i frekvencija prinudnih sila. Sistem (3.4.16) se zapisuje u sledećem bezdimenzionom obliku:

$$\begin{aligned} \ddot{T}_{(1)}(t) - 2\delta_{(1)}(\dot{T}_{(2)}(t) - \dot{T}_{(1)}(t)) + \omega_{(1)}^2 T_{(1)}(t) - a_{(1)}^2 T_{(2)}(t) - \tilde{\beta}_1 [T_{(2)}(t) - T_{(1)}(t)]^3 &= h_{01} \cos[\Omega_1 t + \phi_1] + h_{02} \cos[\Omega_2 t + \phi_2] \\ \ddot{T}_{(2)}(t) + 2\delta_{(2)}(\dot{T}_{(2)}(t) - \dot{T}_{(1)}(t)) + \omega_{(2)}^2 T_{(2)}(t) - a_{(2)}^2 T_{(1)}(t) + \tilde{\beta}_2 [T_{(2)}(t) - T_{(1)}(t)]^3 &= -\tilde{h}_{01} \cos[\Omega_1 t + \phi_1] - \tilde{h}_{02} \cos[\Omega_2 t + \phi_2] \end{aligned} \quad (10.3.1)$$

gde se koriste već usvojene oznake i uvode oznake $\tilde{\beta}_i = \varepsilon \beta_{(i)} \mathcal{N}(W_{nm})$ za koeficijente uticaja nelinearnosti gornje i donje ploče, smatrajući pri tome da spoljašnje pobude jesu obe dvofrekventni proces oblika (3.4.11), samo suprotnih smerova.

U sedmom poglavlju pokazano je da je sinhronizacija u sistemima sa nelinearnostima, koji pri tome nisu istovetni, jako teško ostvarljiva. Zato se ovde posmatra homogeni hibridni sistem dve ploče, tj. sistem dve ploče istih geometrijskih i materijalnih karakteristika, gde su samim tim i odgovarajući koeficijenti u jednačinama (10.3.1) istovetni, odnosno: $\delta_{(1)} = \delta_{(2)}$, $\omega_{(1)}^2 = \omega_{(2)}^2$, $a_{(1)}^2 = a_{(2)}^2$, kao i $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2$. Kako su prinude suprotnih smerova to se očekuje da su podsistemi asinhroni, a ne sinhroni. Menjajući koeficijente u jednačinama (10.3.1) u izabranim intervalima ispitivana su numerička rešenja ovog sistema u smislu:

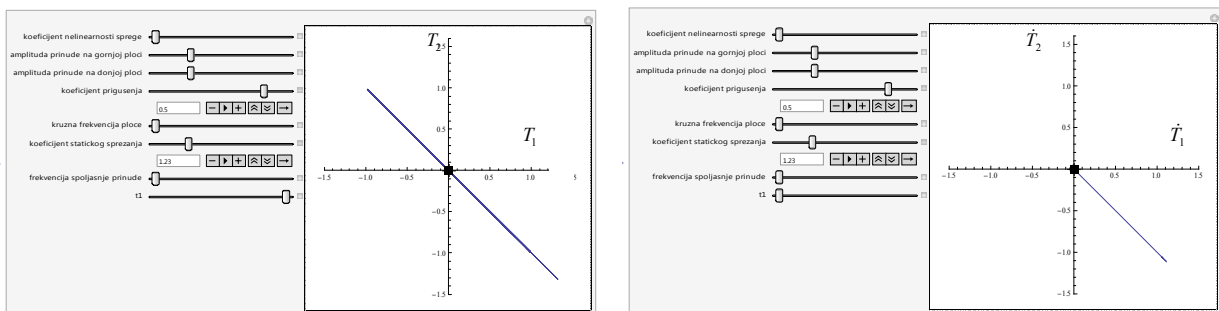
- Atraktora sinhronizacije,
- greške sinhronizacije (7.2.22), potpune za $T_1(t) = T_2(t)$, što predstavlja dijagonalu prvog i trećeg kvadranta u ravni (T_1, T_2) i
- apsolutne razlike samih rešenja podsistema u obliku:

$$k_a(t) = |T_1 - T_2| \quad (10.3.2)$$

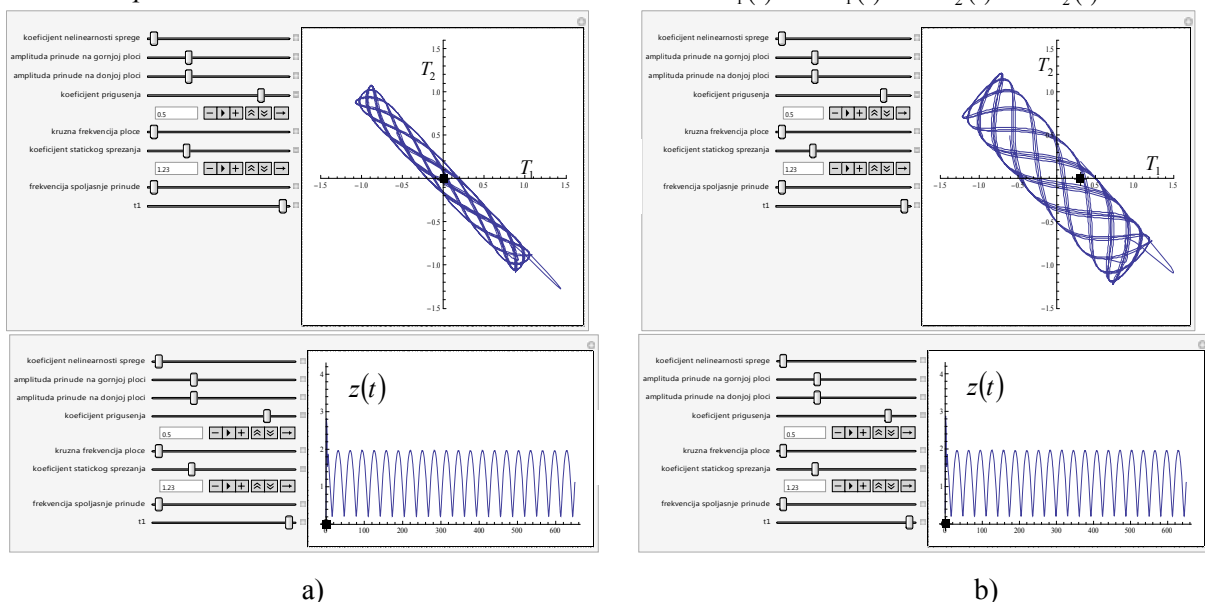
Sa stanovišta hibridnih sistema iz poglavlja 3, sistem jednačina (10.3.1) predstavlja dinamiku dva linearna oscilatora sa periodičkim prinudama spregnuta prigušnicom i statičkom nelinearnom spregom, a ovde to predstavlja domen vremenskih funkcija jednog nm oblika transverzalnih oscilacija tačaka srednjih ravni ploča spregnutih slojem viskoelastičnih nelinearnih elemenata. Posmatraće se kako koeficijenti prigušenja, nelinearnosti i statičke sprege utiču na mogućnost sinhronizacije ovakvih sistema. Pri tome, jasno je da, ukoliko su pobude istih amplituda $h_{0i} = \tilde{h}_{0i}$, i svi ostali parametri podsistema identični, onda se radi o sinhronizaciji identičnih podsistema. U slučaju da spoljašnje pobude predstavljaju jednofrekventne harmonijske procese ($\Omega_2 = 0$ i $h_{02} = \tilde{h}_{02} = 0$) menjaće se vrednosti koeficijenata sprege i ispitati mogućnost sinhronizacije.

Za slučaju da oba podsistema imaju iste početne otklone i brzine, identična sinhronizacija moguća za sve vrednosti parametara sprege, to se u ovakvim homogenim hibridnim sistemima, za bilo koju vrednost koeficijenta statičkog $\tilde{\omega}_{(1)}^2 = \tilde{\omega}_{(2)}^2$ sprezanja, dobijaju greške asinhronizacije i vrednost razlike vremenskih funkcija obe ploče jednake nuli. To zapravo znači da su oblici oscilovanja gornje i donje ploče sve vreme

kretanja suprotnih smerova. U ravnima (T_1, T_2) i (\dot{T}_1, \dot{T}_2) dobijaju se prikazane dijagonale drugog i četvrtog kvadranta, na slici 10.3.1., što je i bilo prirodno očekivati, jer su pobude suprotnih smerova, odnosno zadovoljeni su uslovi $-T_1(t) = T_2(t)$ za sve vreme oscilovanja podsistema. Međutim, ako sisteme u početnom trenutku pustimo iz vrlo bliskih položaja i bez početnih brzina tj. $T_1(t) = 0; T_2(t) = 0.2; \dot{T}_1(t) = \dot{T}_2(t) = 0$, sinhronizacija nije moguća, ali je prisutan atraktor asinhronizacije karakterističnog oblika, slika 10.3.2 a). Na slici 10.3.2 b) prikazan je sličan oblikom atraktor asinhronizacije, samo su promenjeni početni uslovi $T_1(t) = 0.3; T_2(t) = 0.2; \dot{T}_1(t) = \dot{T}_2(t) = 0$, pa je i atraktor promenio dimenzije. Ovakav atraktor asinhronizacije koegzistira za određene bazene atrakcije početnih uslova i, shodno tome, ima karakteristične različite oblike. Bazeni atrakcije nisu ovde izučavani, ali na bazi ovakvih numeričkih proračuna moguće ih je i konstruisati, ovde je samo konstatovano da postoje, a kakvih su oblika i kakve su im granice nije još poznato, ali ostaje kao još jedno interesantno i otvoreno pitanje u oblasti sinhronizacije hibridnih sistema sa nelinearnostima. Atraktor asinhronizacije je promenio dimenzije ali greška sinhronizacije ne menja oblik niti vrednosti, dijagrami $z(t)$ na slikama 10.3.2 a) i b).



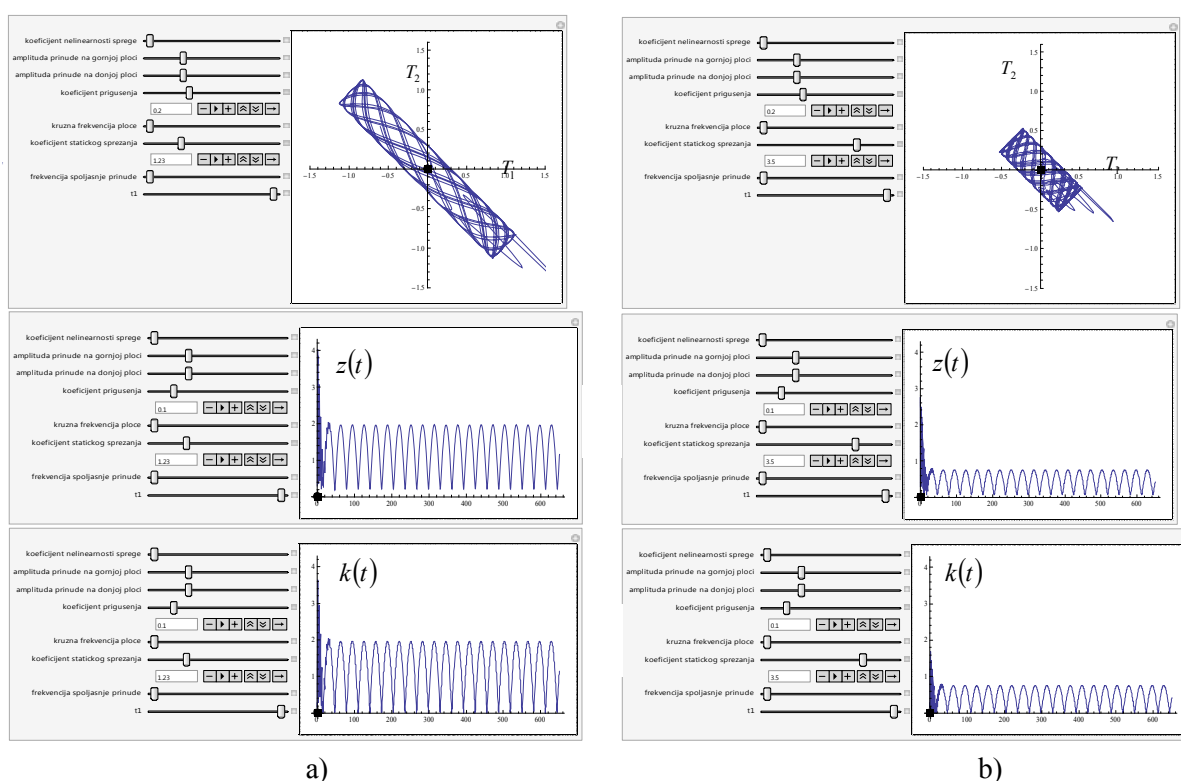
Slika 10.3.1 Potpuna asinhronizacija u sistemu dve ploče spregnute slojem visko-elastičnih nelinearnih elemenata sa prinudama različitih smerova istih intenziteta za $T_1(t) = 0; \dot{T}_1(t) = 0; T_2(t) = 0; \dot{T}_2(t) = 0$;



Slika 10.3.2 Karakteristični atraktori asinhronizacije u sistemu vremenskih funkcija oscilovanja dve ploče spregnute slojem visko-elastičnih nelinearnih elemenata sa prinudama istih amplituda za različite početne uslove i $a_{(i)}^2 = 1.23$ i $\delta_{(1)} = \delta_{(2)} = 0.25$ a) $T_1(t) = 0; T_2(t) = 0.2; \dot{T}_1(t) = \dot{T}_2(t) = 0$; b)

$$T_1(t) = 0.3; T_2(t) = 0.2; \dot{T}_1(t) = \dot{T}_2(t) = 0$$

Vrednost greške asinhronizacije i oblik atraktora asinhronizacije se može izmeniti promenom koeficijenata spreznja. Pri tome najveći uticaj na promenu oblika atraktora asinhronizacije i vrednosti greške sinhronizacije i funkcije $k_a(t)$ ima promena koeficijenta prigušenja i koeficijenta statičkog spreznja. Oblik karakterističnog atraktora za određeni odnos parametara statičkog spreznja i koeficijenta prigušenja sprege, koji je manji nego li u prethodnom slučaju, na primer za $a_{(i)}^2 = 1.23$ i $\delta_{(1)} = \delta_{(2)} = 0.1$, slika 10.3.3.a), ostaje isti samo se menjaju vrednosti greška asinhronizacije i vrednost $k_a(t)$, koje imaju veće apsolutne vrednosti pogotovo na početku (do vremena $t = 20s$), nego li u slučaju $\delta_{(1)} = \delta_{(2)} = 0.25$ sa slike 10.3.2 b). Na vrednost greške sinhronizacije više utiče promena koeficijenta statičkog spreznja podsistema, kao što se može uočiti sa slike 10.3.3 b) za vrednosti $a_{(i)}^2 = 3.5$ i $\delta_{(1)} = \delta_{(2)} = 0.1$, gde su se vrednosti amplitude greške sinhronizacije skoro prepolovile.



Slika 10.3.3 Karakteristični atraktori asinhronizacije, greška sinhronizacije i funkcija $k_a(t)$ u sistemu vremenskih funkcija oscilovanja dve ploče spregnute slojem visko-elastičnih nelinearnih elemenata sa prinudama istih amplituda za početne uslove $T_1(t) = 0.3; T_2(t) = 0.2; \dot{T}_1(t) = \dot{T}_2(t) = 0$ i vrednosti a) $a_{(i)}^2 = 1.23$ i $\delta_{(1)} = \delta_{(2)} = 0.1$; b) $a_{(i)}^2 = 3.5$ i $\delta_{(1)} = \delta_{(2)} = 0.1$

Dijagrami sinhronizacije u ravni (T_1, T_2) podsećaju na Lissajous-e krive, [238] koje se dobijaju u parametarskoj ravni (x, y) , kao rezultat slaganja asinhronih ortogonalnih oscilacija sa faznom razlikom δ oblika:

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega_1 t + \delta), \\ y &= B \cos(\omega_2 t). \end{aligned} \tag{10.3.3}$$

Oblik krivih je jako zavistan od odnosa vrednosti frekvencija ω_1/ω_2 . Kada je taj odnos jednak jedinici oblik krive je elipsa, sa specijalnim slučajevima kada je $A = B$ i $\delta = \pi/2$, kada je to elipsa istih poluosa tj.

krug, i slučaj kada je $\delta = 0$, kada se ona transformiše u pravu liniju. Slika 10.3.4 predstavlja Lissajous-ovu elipsu koja ima smer rotacije i oblik zavistan od faznog kašnjenja δ . Vidi se da dijagonala prvog i četvrtog kvadranta, što odgovara slučaju potpune sinhronizacije, odgovara slaganju ortogonalnih oscilacija istih amplituda, istih kružnih frekvencija i bez faznog kašnjenja, tj. oscilacija u fazi, a slučaj asinhronizacije odgovara slučaju slaganja oscilacija istih amplituda i kružnih frekvencija, samo sa faznim kašnjenjem $\delta = -\pi$, što se drugačije može reći oscilacija u antifazi. Dakle, iako su kretanja podsistema, sa nelinearnostima, složenog karaktera i zapravo ih ne možemo izraziti u nekom konačnom matematičkom obliku ali, prema tome kako izgleda njihov sinhronizacioni dijagram, mi možemo doneti određene zaključke o odnosima amplituda ili o veličini faznog kašnjenja nelinearnih podsistema. Imajući znanja o oblicima Lissajous-ovih figura, u slučaju slaganja linearnih ortogonalnih oscilacija, i na osnovu vizuelne sličnosti može se, sa određenim stepenom tačnosti, predvideti izgled oblika oscilovanja podsistema spregnutih spregama nelinearnih karakteristika.

Lissajous-ove krive koje se dobijaju za vrednosti $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = N$ (gde je N prirodan broj) i za $\delta = \frac{N-1}{N} \frac{\pi}{2}$

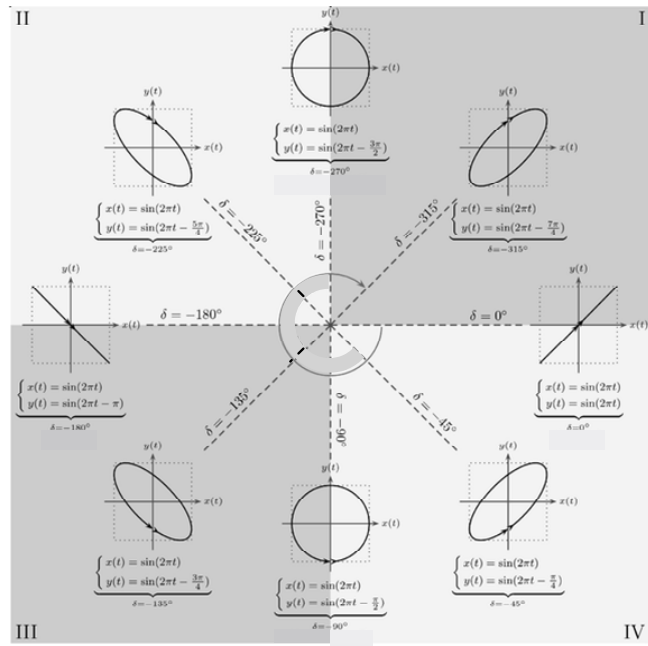
su Chebyshev-ljevi polinomi prve vrste stepena N .

Praktično se Lissajous-ove krive mogu nacrtati pomoću harmonografa. Harmonograf je aparatura načinjena od dva ili više fizičkih klatana. Kod najjednostavnijeg harmonografa dva klatna upravljaju relativno kretanja olovke u odnosu na papir. Jedno klatno upravlja kretanje olovke napred nazad duž jedne ose, a drugo klatno pokreće površinu po kojoj se crta napred nazad duž ose upravne na osu kojom se kreće olovka. Menjanjem frekvencije i faze jednog klatna relativno u odnosu na frekvenciju i fazu drugog dobijaju se različite krive od elipse, spirale, krivih oblika broja osam i drugih Lissajous-ovih krivih. Oblici krivih koje odslikava harmonograf mogu matematički da se opišu parametarskim jednačinama u ravni (x, y) oblika:

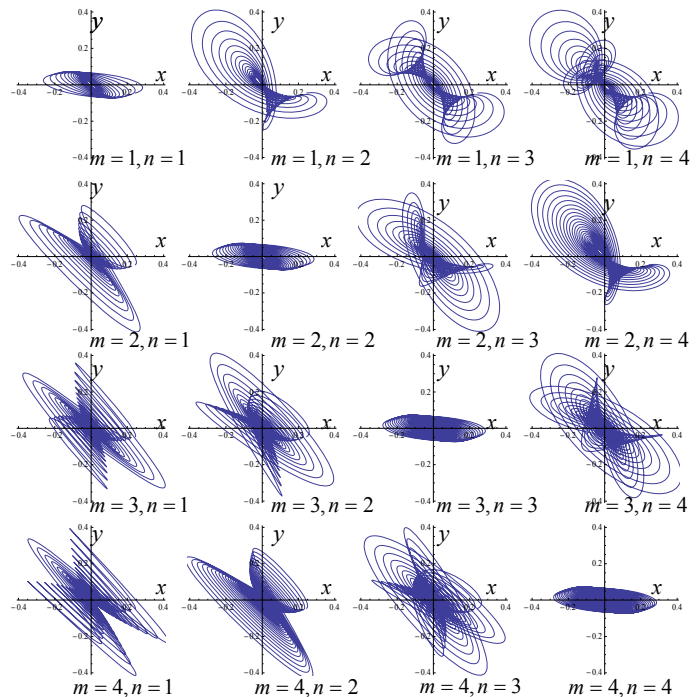
$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{-\delta_1 t} \cos(p_1 t + \alpha_1) + A_2 e^{-\delta_2 t} \cos(p_2 t + \alpha_2), \\ y(t) &= A_3 e^{-\delta_3 t} \cos(p_3 t + \alpha_3) + A_4 e^{-\delta_4 t} \cos(p_4 t + \alpha_4). \end{aligned} \quad (10.3.4)$$

Ovo je oblik jednačina pretpostavljenih rešenja vremenskih funkcija sistema jednačina koji opisuje kretanje dve ploče spregnute slojem viskoelastičnih nelinearnih kontinualno raspodeljenih elemenata. U smislu nelinearnih svojstava sprege takav oblik rešenja bio nam je polazni za izučavanje rešenja u prvoj asimptotskoj aproksimaciji. Konstatovano je postojanje međusobnog dejstva harmonika u jednoj vremenskoj funkciji, kao i međusobni uticaj oblika obe vremenske funkcije, kroz numeričku analizu u stacionarnom i nestacionarnom stanju, date su vizuelne predstave tih fenomena, iako rešenja sistema nismo dobili u konačnom matematičkom obliku. Sistem diferencijalnih jednačina vremenskih funkcija rešavali smo numerički i iskoristili izlazne podatke za iscertavanje sinhronizacionih dijagrama konstatujući postojanje atraktora sinhronizacije. Međutim, ono što nam mogu dati vizuelni oblici sinhronizacionih dijagrama jeste mogućnost da se proceni vrednost faznog kašnjenja harmonika ili kružnih frekvencije sprezanja ili vrednosti amplituda oscilovanja, samo na osnovu sličnosti dijagrama sinhronizacije sa dijagramima parametarskih krivih linearnog sistema predstavljenog jednačinama (10.3.4). Kao potvrda te konstatacije neka posluži serija dijagrama prikazanih na slikama 10.3.5., 10.3.6 i 10.3.7 koja prikazuje

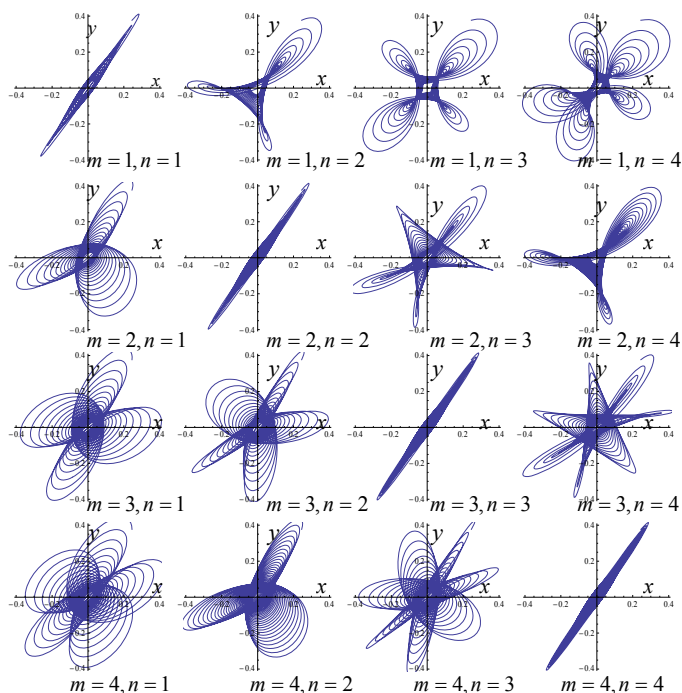
parametarke krive sistema (10.3.4). Za izabrani odnos parametara, pri čemu se menjaju odnosi kružnih frekvencije harmonika, na slikama 10.3.6. i 10.3.7 jedina razlika u sistemima je promena faznog kašnjenja prvog harmonika funkcije $y(t)$. Upoređivanjem slika 10.3.6. i 10.3.7 jasno je da mala promena u odnosu parametara sistema, koji isctavaju određeni dijagram, daje sasvim različitu sliku, i u tom smislu mogle bi se pronaći različiti odnosi amplituda, frekvencija i faza sistema jednačina (10.3.4), koji bi davali parametarsku krivu vizuelno sličnu sinhronizacionom dijagramu posmatranog sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina i na osnovu toga doneti zaključci o linearnoj aproksimaciji dvofrekventnih rešenja takvog sistema.



Slika 10.3.4 Lissajous-ova elipsu koja ima smer rotacije i oblik zavistan od faznog kašnjenja δ .

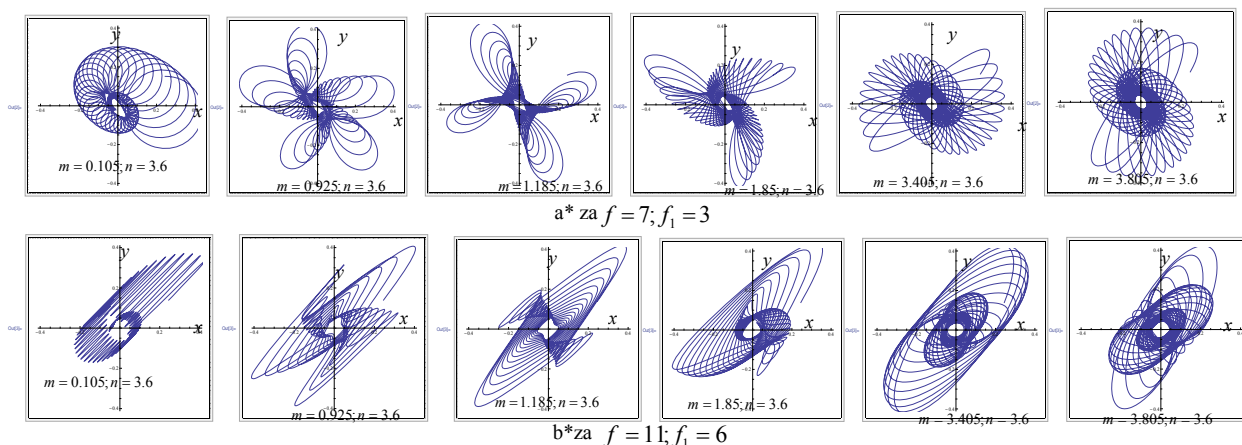


Slika 10.3.5. Parametarke krive sistema $x(t) = 1/4 e^{-0.02t} \cos(mt + \pi/16) + 1/5 e^{-0.035t} \cos(nt + 3\pi/2)$ $y(t) = -1/4 e^{-0.02t} \cos(mt + \pi/16) - 1/5 e^{-0.035t} \cos(nt + \pi)$ za različite odnose kružnih frekvencija harmonika



Slika 10.3.6. Parametarke krive sistema $x(t)=1/4e^{-0.02t} \cos(mt + \pi/16)+1/5e^{-0.035t} \cos(nt + 3\pi/2)$
 $y(t)=-1/4e^{-0.02t} \cos(mt + 12\pi/16)-1/5e^{-0.035t} \cos(nt + \pi)$ za različite odnose kružnih frekvencija harmonika.

Dijagonalni objekti sa serija slika 10.3.6 i 10.3.7 odgovaraju slaganju ortogonalnih sinhronih oscilacija i jasno je da veličina faznog kašnjenja utiče na veličinu odnosa poluosova Lissajous-ove elipse, kao i na njenu orijentaciju, što je isto i u slučaju slaganja dveju jednofrekventnih ortogonalnih sinhronih oscilacija istih amplituda bez prigušenja, prikazanih na slici 10.3.4. U slučajevima necelobrojnih vrednosti odnosa frekvencija harmonika, slika 10.3.7., oblici Lissajou-ovih figura su veoma različiti od spiralnih, preko oblika latica do oblika klupka.



Slika 10.3.7. Parametarke krive sistema $x(t)=1/4e^{-0.02t} \cos(mt + \pi/16)+1/5e^{-0.035t} \cos(nt + 3\pi/2)$
 $y(t)=-1/4e^{-0.02t} \cos(mt + f\pi/16)-1/5e^{-0.035t} \cos(nt + 3\pi/f_1)$ za različite necele odnose kružnih frekvencija i faznih razlika harmonika.

11* Poglavlje

Rezime o metodama i metodologiji izučavanja retkih svojstava i fenomena dinamike određenih klasa hibridnih sistema.

Rezime o metodama i metodologiji počinje objašnjenjima fizičkih modela realnih struktura, da bi se opisom matematičkih modela i metoda, za njihovo rešavanje, mogli doneti zaključci o retkim svojstvima i fenomenima koje dinamike prikazane klase hibridnih sistema poseduju.

U postavljanju fizičkih i matematičkih modela realnih struktura uvode se određene aproksimacije i pojednostavljenja. Posmatrani dinamički sistem je opisan rešenjem diferencijalne jednačine ili pak dolazi iz stvarnog sveta fizičkog postojanja realnih sistema disparatne prirode. Praktično, sam sistem će samo biti model stvarne pojave, određene pretpostavke će se uvesti, i aproksimacije i eksperimentalne greške će se javiti. Ako dinamički sistem nije strukturno stabilan, onda male greške i aproksimacije načinjene na modelu imaju mogućnost za dramatično menjanje strukture stvarnog rešenja sistema. Dakle, „rešenje“ i apstrahovanje modela od realnog sistema može biti radikalno pogrešno i nestabilno. Ako, je sa druge strane, dinamički sistem koji posmatramo strukturno stabilan, onda male greške uvedene aproksimacijama i eksperimentalnim greškama ne moraju uopšte imati uticaja i rešenje modela sistema može biti jednako ili topološki spregnuto sa stvarnim rešenjem. Rešenje modela sistema pri tome predstavljamo tokovima-faznim trajektorijama ili mapama- diskretnim presecima faznih trajektorija i pogodno izabраниh površi, a definicije strukturne stabilnosti i topološke ekvivalencije u njima date su u poglavlju 5.4. Kada se govori o strukturnoj stabilnosti toka ili njegove mape videlo se da je ona spregnuta sa svojstvom jake osetljivosti nelinearnih sistema na promenu početnih uslova ili parametara sistema koje opisuju. Dakle, neophodno se nameće potreba uvođenja nelinearnosti u matematički model kako bi se istražila njena svojstva i izbegli

neželjeni fenomeni, koje ona sa sobom unosi u matematički model dinamike sistema, a time i realnije opisalo stvarno ponašanje realne strukture.

Konstatovano je da postoje različiti pristupi u stvaranju modela realnih struktura, odnosno apstrahovanju bitnih svojstava realnog sistema ka svojstvima modela. U radovima [90, 99] predstavljena je metoda diskretnog kontinuuma pomoću primera homogenog diskretnog sistema sa ograničenim brojem stepeni slobode kretanja. Ovaj sistem je u obliku homogenih lanaca i mreža u prostoru i ravni. Materijalne tačke tih mreža i lanaca spojene su elastičnim, standardnim naslednim ili puzećim elementima, slika 11.1 a). Predstavljena je trigonometrijska metoda za izučavanje svojstava diferencijalnih jednačina dinamike diskretnih homogenih kontinuuma. Dinamika sistema je opisana integro-diferencijalnim jednačinama ili diferencijalnim jednačinama sa izvodima necelog reda. U tim radovima uočava se odnos između određenja reči diskretni kontinuum i diskretni sistemi, pa je u jednom broju radova [79, 84] posvećena pažnja sistemima u kojima su spregnuti diskretni podsystemi krutih tela i kontinualni podsystemi i formirane su karakteristične frekventne jednačine malih oscilacija ovih sistema. Ovde se, u okviru poglavlja 3.1.2, 3.2.2, kao i nadalje u poglavljima 12.1.1 i 12.1.2, predstavljaju takvi modeli kao rezultat rešenja njihovog matematičkog modela. Data su rešenja karakterističnih frekventnih jednačina malih oscilacija hibridnih kontinualno-diskretnih sistema sa nizom njihovih dijagrama, slike 12.2-8, za različite odnose parametara sistema, sa kojih se uočavaju fenomeni poremećaja frekventnog spektra sopstvenih kružnih frekvencija deformabilnog kontinualnog podsystema usled dejstva diskretnog dela sistema, i obrnuto. To se ustvari može protumačiti kao diskretizaciju dela frekventnog spektra kontinualnog sistema, kao rezultat sprezanja sa diskretnim podsystemom, a sa druge strane analogno i kao kontinualizaciju dela frekventnog spektra, koji odgovara diskretnom podsystemu.

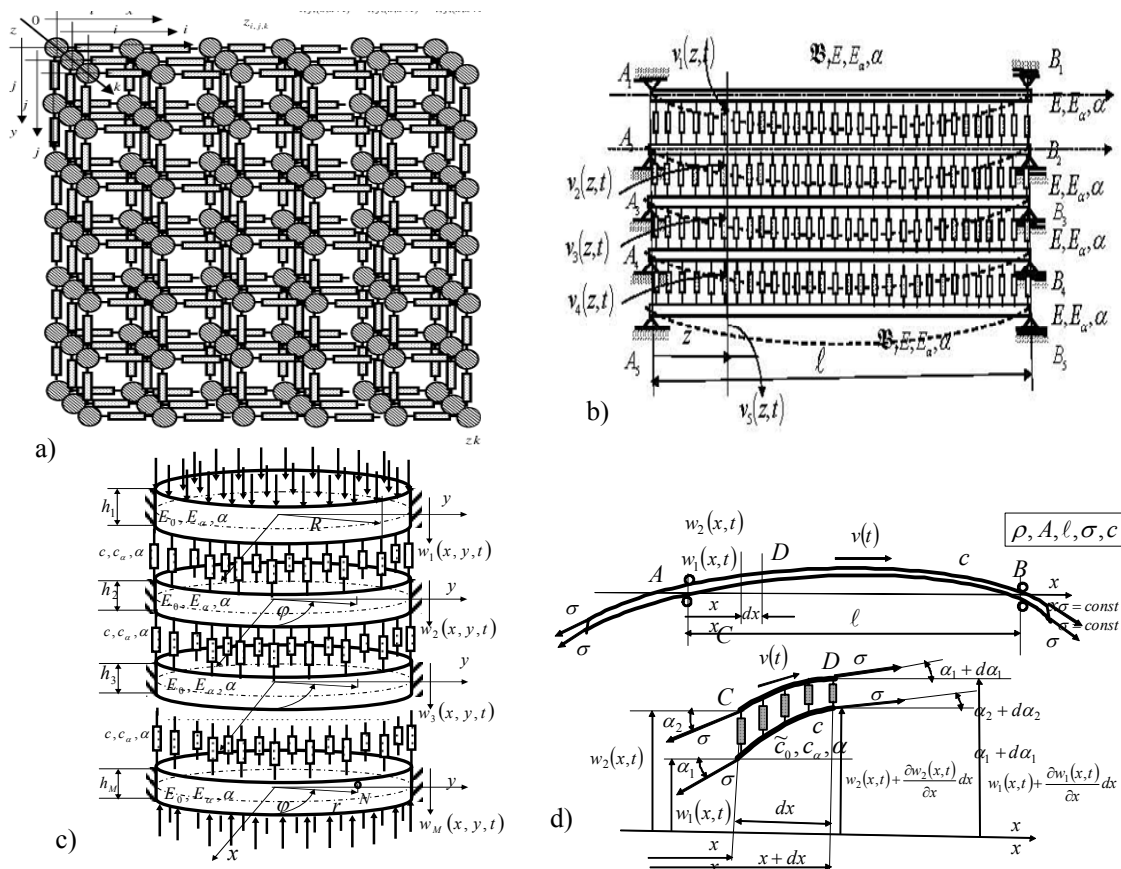
U radu [60] prikazan je prilog razvoju analitičke mehanike diskretnih oscilatornih sistema frakcionog reda na primerima oscilacija spregnutih ravanskih i prostornih lančanih sistema. Metodom diskretnog kontinuuma, diskretni modeli frakcionog reda mehaničkih kontinualnih više lančanih sistema u ravni i prostoru postavljeni su kao mogući modeli vibracija homogenih deformabilnih tela. Za slučaj da su te strukture homogene, i da sadrže spregnute homogene lance, koji su sastavljeni od materijalnih tačaka međusobno vezanih standardnim lakim elementima frakcionog reda. Oscilacije frakcionog reda te diskretne kontinualne strukture, sa elongacijama u jednom paralelnom pravcu, su analitički opisane i proučene. Primenom trigonometrijske metode i Laplace-ove transformacije za transformaciju i rešavanje izvornog sistema običnih diferencijalnih jednačina frakcionog reda, identifikovani su i određeni odgovarajući analitički izrazi za odgovarajuće skupove glavnih sopstvenih mreža i u njima glavnih sopstvenih lanaca, kao i sopstveni modovi frakcionog reda slični jednofrekventnim oscilacijama. Originalni i novi analitički rezultati pomenutog rada su: novi modeli diskretnih, homogenih, frakcionog reda, u ravni ili prostoru, oscilatornih višelančanih struktura i modeli deformabilnih homogenih tela frakcionog reda; analitički izrazi za sopstvene kružne frekvencije i razdvajanje odgovarajućih sopstvenih glavnih ravanskih mreža i sopstvenih glavnih lanaca u mrežama i odgovarajućih podskupova sopstvenih kružnih frekvencija i karakterističnih brojeva svojstava sistema frakcionog reda; skupovi glavnih oscilatora frakcionog reda, svaki od njih sa jednim stepenom slobode kretanja, i sa jednom odgovarajućom

sopstvenom kružnom frekvencijom i jednim glavnim sopstvenm karakterističnim brojem, koji iskazuje svojstva elemenata frakcionog reda, kao i analitička rešenja običnih diferencijalnih jednačina frakcionog reda. Pomoću tih diskretnih modela frakcionog reda analitički su razmatrane longitudinalne, kao i transversalne oscilacije frakcionog reda homogenih greda i dobijeni su skupovi sopstvenih kružnih frekvencija sa odgovarajućim karakterističnim brojevima, kojima se izkazuju frakciona svojstva materijala elemenata. Koristeći baznu hibridnu, frakcionog reda, homogenu strukturu, koja sadrži spregnute homogene lance sastavljene od materijalnih tačaka povezanih standardnim lakim elementima frakcionog reda, proučen je prenos višefrekventnih signala kroz diskretni prostorni, odnosno, ravanski kontinuum i prikazani odgovarajući analitički izrazi. Sličan pristup primene metode diskretnog kontinuuma prikazan je i u radovima [59, 61, 62, 64]. U radovima [104, 157] date su vizuelne predstave oscilatornih procesa u modelima oscilacija realnih sistema i na novi način su osvetljene varijacije osobina oscilatornih procesa tih sistema sa promenama nekih parametara sistema. Jasno je da savremeni kompjuterski alati sa moćnim sposobnostima računara imaju sličnu filozofiju razmatranja realnih dinamičkih sistema. Pomoću diskretizacije kontinuuma kao puta i metoda do rešenja problema, a potom pomoću mnogo iteracija kontinualizacije rešenja dolazi se do verifikacije tačnosti. Diskretizacija i kontinualizacija u analizi dinamičkih procesa su metode različitog smera, ali su dobre da omoguće proračun i za donošenje zaključaka. Pri tome, ako se model želi učiniti realnijim i uključi se nelinearnost u opise i postavljanje modela, mora se voditi računa o diskretnim tačkama i fenomenima koji se u tim procesima javljaju, tipa bifurkacija i homokliničkih tačaka, koje znače i daju više različitih rešenja, ili pojavu više diskretnih fenomena usled jake osetljivosti nelinearnog procesa na male promene početnih uslova, ili parametara samih sistema, ili promene svojstava sistema zbog nekonvergentnih aproksimacija u procesima diskretizacije ili kontinualizacije u prikazivanju i opisivanju realne dinamike sistem i postavljanju njegovog modela.

Jedan od pristupa jeste i model više ploča, greda ili traka od materijala različitih svojstava koje su povezane određenim standardnim lakim elementima i čiji broj je dovoljno veliki da bi se realnije opisala struktura, slika 11.1 b), c) i d), [76, 91, 258]. Kretanje takvog modela i prostiranje talasa u njemu opisano je sistemima parcijalnih diferencijalnih jednačina [75, 81, 82, 95, 258]. Zbog nemogućnosti da se oni rešavaju analitički koriste se aproksimativne metode za njihovo rešavanje, koriste se i metode diskretizacije sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina, za dobijanje numeričkog rešenja i obradu rezultata, koriste se računarski matematički programi.

Standardni laki elementi veza u klasama hibridnih sistemima predstavljeni u ovom radu mogu biti elastični, slika 11.2 a), visko-elastični, i to modeli Kelvin-Voigt-ovog elementa paralelne veze opruge i prigušnice, slika 11.2 c), sa oprugom linearnih i nelinearnih karakteristika, opisanih mekom ili tvrdom kubnom nelinearnošću, termo-elementi, slika 11.2 b), nasledni elementi, slika 11.2 d), kotrljajni visko elastični, slika 11.2 e) ili piezo-viskoelastični elementi, slika 11.2 f). S obzirom na svojstva strukture, koja se opisuje u modelima hibridnih sistema, mogu biti korišćeni i drugi modeli standardnih lakih elemenata [45]. Kao elementi sprezanja kontinualnih struktura predstavljeni su kao niz standardnih lakih elemenata kontinualno raspodeljenih duž linija ili površi kontinualnih podistema. Za svaki standardni laki element zanemarene mase definišu se konstitutivne relacije dinamičkog stanja elementa određene promenom

restitucione sile sa pomeranjima i pomeranjima po vremenu, sa tačnošću do reda veličine tačnosti konstanti koje figurišu u izrazima, a zavise od tačnosti njihovog eksperimentalnog određivanja. U narednom izrazu predstavljene su komponente sila koje odgovaraju pojedinim elementima, koji su u paralelnoj vezi (elengacije su im iste, a komponentne sile se sabiraju), ali se mogu u različitoj kombinaciji sabiraka dobiti konstitutivne relacije promene restitucione sile sa pomernjima i brzinama na krajevima kompleksnog elementa, u sledećem obliku:



Slika 11.1. Modeli realnih struktura prikazani metodom diskterizacije kontinuuma

$$\begin{aligned}
 F(t) = & c[w_2 - w_1] + b[\dot{w}_2 - \dot{w}_1] \pm \beta[w_2 - w_1]^3 - c_T l_0 \alpha_T K(t) + c_T \alpha_T [w_2 - w_1] K(t) + (\hat{a}_T \dot{w}_2 + \ddot{w}_1 \hat{a}_T) + \\
 & + c_1 \left(\frac{w_2 - w_1}{2} \right) + c_n [w_2 - w_1] - c_n \int_0^t R(t - \tau) (w_2(\tau) - w_1(\tau)) d\tau + (c_k + c_{Uk}) [w_2 - w_1] + b_k [\dot{w}_2 - \dot{w}_1] - c_{Uk} \alpha_{Uk} U_k(t)
 \end{aligned}
 \tag{11.1}$$

gde su korišćene oznake:

c - mehanička krutost elastičnog elementa,

c_1 - mehanička krutost opruga koje statički uravnotežavaju kotrljajni element,

$R(t - \tau) = \frac{c_n - \tilde{c}}{nc_n} e^{n \frac{1}{c} (t - \tau)}$ - jezgro relaksacije (rezolventa),

n - vreme relaksacije,

c_n, \tilde{c} - koeficijenti trenutne i dugotrajne krutosti naslednog elementa,

c_T - termička krutost termo-elastičnog elementa,

l_0 - početne dužine opruga termo-elastičnog sloja,

α_T - koeficijent toplotne dilatacije $\dot{\epsilon}$,

$K(t)$ - funkcija promene temperature koju koristimo kao spoljašnju pobudu termo-elastičnog sloja,

b - koeficijent otporne sile visko-elastičnog elementa,

b_k - koeficijent otporne sile piezo-visko-elastičnog elementa,

α_{Uk} - koeficijent piezo dilatacionih svojstava piezo-visko-elastičnog elementa,

c_k - mehanička krutost piezo-visko-elastičnog elementa,

c_{Uk} - piezo krutost piezo-visko-elastičnog elementa,

$U_k(t)$ - funkcija promene napona piezo-polarizacije,

β - koeficijent nelinearnosti elastičnog elementa,

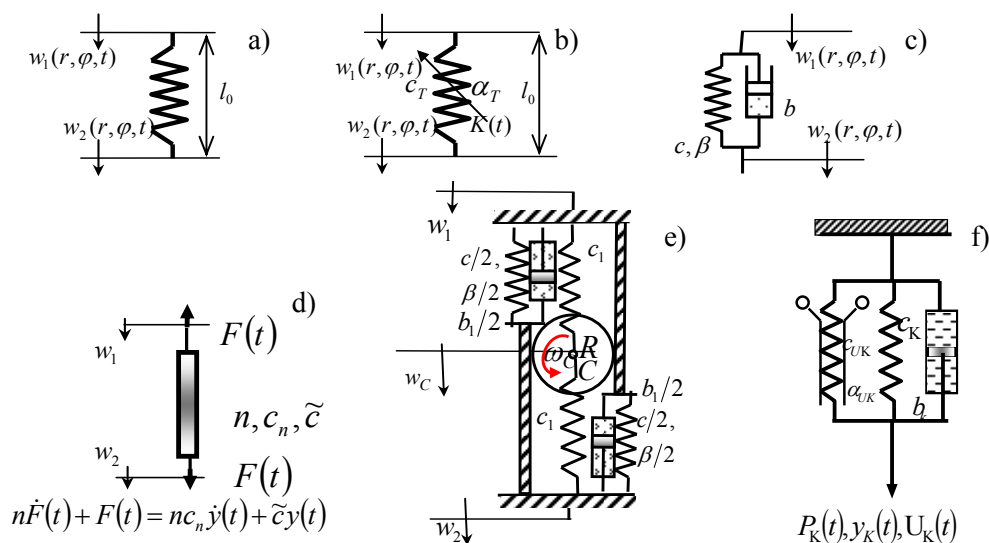
$\hat{a}_i = \frac{3m}{8}$ i $\hat{a}_j = \frac{m}{8}$ koeficijenti uticaja mase m kotrljajnog elementa.

Tako, na primer, ako bi trebalo da se napiše zavisnost restitucione sile kotrljajnog visko-elastičnog nelinearnog elementa sa promenom temperature, koja se reguliše funkcijom promene temperature koja se koristi kao spoljašnja pobuda termo-elastičnog sloja, pisali bi, za slučaj paralelne veze sastavnih elemenata, sledeću konstitutivnu relaciju:

$$F(t) = \left(c_T \alpha_T + \frac{c_1}{2} \right) [w_2 - w_1] K(t) - c_T l_0 \alpha_T K(t) + b [\dot{w}_2 - \dot{w}_1] \pm \beta [w_2 - w_1]^3 + (\hat{a}_i \ddot{w}_2 + \hat{a}_j \dot{w}_1). \quad (11.2)$$

Moguće su i drugačije sprege konstitutivnih elemenata u sloju, kao što su redna veza, kao i kombinovana redna i paralelna, ali za taj slučaj je potrebno pojedinačno konstruisati konstitutivnu relaciju, vodeći računa, gde se sabiraju komponentne sile pri jednakim elongacijama sastavnih elemenata u paralelnoj vezi, ili pak sabiranju elongacije u rednoj vezi, kada su sile na krajevima napregnutih elemenata i kroz njih jednake za sve elemente u vezi.

Tačnost upotrebljenih konstanti, a sa njima i jednačina za sile i pomeranja zavisice ne samo od poznavanja prirode objekta već i od neophodnih znanja za rešavanje veoma složenih stanja napona i deformacija u elementima sistema.



Slika 11.2. Modeli standardnih lakih elemenata veza u hibridnim sistemima. a) elastični; b) termo-elastični; c) visko-elastični; d) nasledni; e) kotrljajni visko-elastični; f) piezo-visko-elastični element.

Ovo je prikazano u referencama [67, 68, 70, 75, 83, 97, 101, 140-143, 147-149, 258] za sisteme koji imaju iste granične uslove i mogu se pomerati transversalno na karakterističnu “elastičnu površinu” kod ploča $w_i(x, y, t)$, $i = 1, 2, \dots, M$, kao i na “elastičnu liniju” kod greda i traka $v_i(z, t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, koji su povezani međuslojem lakih standardnih elemenata istih materijalnih konstanti, što je diskretno-kontinualni homogeni lančani sistem [95, 258]. Broj stepeni slobode kretanja takvog lanca jednak je M , broju deformabilnih tela u lancu, jer je pretpostavljeno da se sva deformabilna tela u lancu mogu pomerati samo longitudinalno u pravcu prostiranja ekvivalentnog lanca, odnosno transversalno u odnosu na “elastičnu površinu” kod ploča, odnosno “elastičnu liniju” kod greda ili traka.

U matematičkom opisu problema oscilovanja sistema kontinualnih tela dobijaju se sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina sa sistemom graničnih i početnih uslova. Zavisno od oblika parcijalnih diferencijalnih jednačina sistemi se svode na linearne i nelinearne. Nelinearni članovi u parcijalnim diferencijalnim jednačinama oscilovanja i graničnim uslovima mogu biti primarnog i sekundarnog značaja, kao male veličine u poređenju sa linearnim. Nelinearne članove sekundarnog značaja, kao male veličine u poređenju sa linearnim, možemo zanemariti pa se problem u rešavanju svodi na linearni u prvoj aproksimaciji. Linearne oscilacije ploče baziraju se na klasičnoj jednačini Lagrange-Germain i pojednostavljenim uslovima Kirochoff-a. Ovde su korišćene za opisivanje transversalnih oscilacija kružnih ploča, pri čemu su data rešenja karakterističnih jednačina oscilovanja kružnih ploča, za klasične granične uslove ploče ukleštene i slobodne na krajevima. Naglašeno je dobro podudaranje rezultata dobijenih upotrebom matematičkih programa za izračunavanje korena karakteristične transcendentne jednačine sa specijalnim Bessel-ovim funkcijama I vrste, reda n , i rezultata iz literature za te slučajeve oslanjanja ploča.

Za rešavanje sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina korišćena je Bernoulli-eva metoda partikularnih integrala, pri tome je praktično vršena integracija rešenja u vidu beskonačnog reda po sopstvenim amplitudnim funkcijama - koordinatnim funkcijama, koje moraju da zadovoljavaju odgovarajuće zadate granične uslove. Zatim su se izabrani redovi unosili u jednačine kretanja i uslove kompatibilnosti pomeranja, potom se izjednačavanjem koeficijenata uz jednake sopstvene koordinatne funkcije, koje zadovoljavaju uslove ortogonalnosti, dobijao sistem običnih diferencijalnih jednačina u odnosu na tražene vremenske funkcije, pripadajuće jednom sopstvenom obliku oscilovanja. Taj sistem spregnutih diferencijalnih jednačina po vremenskim funkcijama može se u jednom nm -modu oscilovanja ploča rešavati kao sistem diferencijalnih jednačina koje opisuju kretanje jednog formalno sličnog diskretnog sistema sa brojem stepeni slobode kretanja koji odgovara broju kontinualnih tela spregnutih u hibridni sistem. Prvo se rešavaju linearizovane jednačine slobodnog sistema, u kojima su nelinearni članovi i prinudne sile zanemareni, pa se dobija karakteristični polinom formalnog sistema iz kojeg se određuju rešenja homogenog linearnog sistema diferencijalnih jednačina. Broj korena karakterističnog polinoma odgovara dvostrukoj vrednosti broja stepeni slobode kretanja, ali pošto su to parovi konjugovano kompleksnih rešenja od koji su po dva spregnuta broj korena jednak je broju stepeni slobode kretanja:

$$\lambda_{M1,2nm} = -\hat{\delta}_{Mnm} \mp i\hat{p}_{Mnm}, \quad (11.2)$$

gde su \hat{p}_{Mnm} M kružnih frekvencija sprežanja sistema M kontinualnih podsistema za svaki nm mod odgovarajućeg sopstvenog amplitudnog oblika kontinualnog podsistema.

Rešenja za nepoznate vremenske funkcije odgovarajućeg nm -moda slobodnih oscilacija sistema struktura spregnutih slojem standardnih lakih elemenata sa nelinearnošću trećeg stepena mogu se napisati u obliku sume harmonika, kojih ima onoliko koliko je i kontinualnih podsistema:

$$T_{(i)nm}(t) = \sum_{i=1}^M K_{MCnm}^{(i)} e^{-\hat{\delta}_{inn} t} R_{0inn} \cos(\hat{p}_{inn} t + \alpha_{0inn}) \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, M, \quad n = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty, \quad (11.3)$$

gde su $K_{MCnm}^{(i)}$ -kofaktori M -te kolone i C -ve vrste karakteristične determinante sistema, R_{0Mnm} i α_{0Mnm} - su vrednosti početnih amplituda i faznih kašnjenje, koji se određuju iz zadatih funkcija pomeranja i brzina tačaka odgovarajućeg preseka strukture za posmatrani nm -mod oscilovanja, koje su poznate funkcije. Za sistem dve ploče, pokazano je u poglavlju 3.4., zaključuje se da prisustvo sprežućeg sloja između dve ploče uzrokuje udvajanje kružnih frekvencija u jednom nm -obliku sopstvenih transversalnih oscilacija sistema od dve ploče. Za vremensku funkciju jednog nm -moda oscilovanja sistema M ploča zaključuje se da u tom modu sistem osciluje u M -frekventnom režimu oscilovanja slobodnih oscilacija sistema M ploča. Kada je homogeni lanac ploča slobodan zaključuje se da ima M stepeni slobode kretanja, a kako poseduje M sopstvenih kružnih frekvencija po svakom nm -modu to praktično, u tom modu, ima M internih stepeni slobode oscilovanja, i to u svakom od beskonačno mnogo sopstvenih nm -modova. S obzirom da se nadalje želi ispitati ponašanje dinamike sistema oko posmatranog linearizovanog slučaja, poremećaj i nelinearne članove ubacujemo u sistem kao nehomogene delove spregnutih diferencijalnih jednačina, a kako su obe male veličine reda veličine parametra ε , to se može primeniti perturbaciona metoda, koja se zasniva na asimptotskoj metodi usrednjenja Krilov-Bogoljubov-Mitropolskiy-kog, a u osnovi može da se koristi i Lagrange-ova metoda varijacije konstanti. Koristeći se pri tome principom jednofrekventnosti, koji se nameće kao praktično rešenje zadataka iz oblasti oscilacija sistema sa više stepeni slobode oscilovanja, gde se srećemo sa pojavom da trenje i poremećajne sile dovode do brzog uspostavljanja oscilacija osnovnog tona, u skladu sa odgovarajućim početnim uslovima, a kako mi posmatramo oscilovanje pod dejstvom više frekventne spoljašnje pobude:

$$\tilde{q}_{nm}(t) = \sum_N h_{0Nnm} \cos[\Omega_{Nnm} t + \phi_{Nnm}], \quad (11.4)$$

i pojavu prolaska kroz rezonantne oblasti, onda, na osnovu oblika rešenja za slobodni linearizovani sistem. Predstave se rešenja sistema spregnutih nehomogenih diferencijalnih jednačine po nepoznatim vremenskim funkcijama $T_{(i)nm}(t)$, $i = 1, 2, \dots, M$, $n = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$ u obliku:

$$T_{(i)nm}(t) = \sum_{i=1}^M K_{MCnm}^{(i)} e^{-\hat{\delta}_{inn} t} R_{Nnm}^{(i)}(t) \cos \Phi_{Nnm}^{(i)}(t), \quad (11.5)$$

gde su amplitude $R_{inn}(t)$ i faze $\Phi_{inn}(t) = q_i \Omega_{inn} t + \phi_{inn}(t)$ nepoznate funkcije vremena, koje se određuju koristeći modifikovanu asimptotsku metodu usrednjenja Krilov-Bogoljubov-Mitropolskiy-kog. Potpuni postupak je pokazan kroz nekoliko primera hibridnih sistema sa nelinearnostima, a procedura se u nekoliko redova svodi na sedeći postupak:

Koristeći uslov da prvi izvodi pretpostavljenih rešenja (11.5), $\dot{T}_{(i)}(t)$ budu istog oblika kao i kada su amplitude $R_{inn}(t)$ i fazne razlike $\phi_{inn}(t)$ konstantne funkcije, dobija se prvih i uslova, koji moraju da zadovolje izvodi po vremenu nepoznatih funkcija $\dot{R}_{inn}(t)$ i $\dot{\phi}_{inn}(t)$. Potom se pretpostavljena rešenja, njihovi prvi i drugi izvodi po vremenu, unose u polazni sistem nehomogenih spregnutih diferencijalnih jednačina, odakle se dobija još i uslova za vremenske izvode nepoznatih funkcija. Kombinujući dobijene parove i uslova sledi sistem diferencijalnih jednačina prvog stepena po i nepoznatih $\dot{R}_{inn}(t)$ i $\dot{\phi}_{inn}(t)$. Potom se desne strane tog sistema jednačina usrednjavaju po punim fazama $\Phi_{Nnm}^{(i)}(t)$, odakle sledi sistem jednačina koji predstavlja prvu asimptotsku aproksimaciju rešenja usrednjenih jednačina vremenskih funkcija transversalnih oscilacija struktura spregnutih slojem standardnih lakih nelinearnih elemenata. Rešavanje ovoga sistema, osim u pojedinim slučajevima zanemarivanja po jedinim elemenata sistema [258], nije moguće dobiti u zatvorenom obliku, pa se sistem uglavnom rešava numerički i to u stacionarnom ili nestacionarnom režimu oscilovanja. Iako se zaključilo da se jednačine prve aproksimacije najčešće moraju integraliti numeričkim metodama, prednost je postignuta u tome što je znatno prostije numerički integraliti jednačine prve aproksimacije, koje daju amplitudu i fazu, nego li neposredno jednačine kretanja koje određuju oscilatorne veličine, jer amplituda, njihova obvojnica, predstavlja spori proces u dinamici. Pomoću jednačina prve aproksimacije moguće je prostim postupkom ispitivati stacionarne i nestacionarne rezonantne režime kao i stabilnost ove dvoparametarske familije rešenja.

Kao rezultat prikazane metodologije rešavanju modela klasa hibridnih sistema sa nelinearnostima izvedeni su i analitički uslovi stabilnosti stacionarnog položaja ravnoteže, što se može smatrati jednim originalnim rezultatom ispitivanja dinamike ovakvih sistema. Pristup ispitivanju stabilnosti lokalnog karaktera u okolini stacionarnog rešenja sistema jednačina prve aproksimacije vrši se prvo njihovom linearizacijom, a potom dobijanjem karakterističnog polinoma linearizovanih jednačina prve asimptotske aproksimacije. Priroda korena karakterističnog polinoma govori nam o lokalnoj stabilnosti posmatranog stacionarnog rešenja. Ako je realni deo bar jednog korena karakterističnog polinoma linearizacije prve aproksimacije, za posmatrane vrednosti frekvencija spoljašnje pobudne sile, sa pozitivnom vrednošću, onda je režim dvofrekventnog stacionarnog oscilovanja nestabilan. Dobijeni analitički rezultati u analizi stabilnosti oko stacionarnog rešenja polaznog sistema spregnutih diferencijalnih jednačina mogu se iskoristiti u smislu njihovog programiranja i određivanja tačaka na amplitudnim i fazno frekventnim dijagramima, koji odgovaraju stabilnim ili pak nestabilnim rešenjima dinamike sistema u stacionarnom prolazu kroz rezonantnu oblast.

U poglavljima 4.4 pokazano je to na primeru nehomogenog sistema dve kružne ploče spregnute slojem visko-elastičnih nelinearnih kontinualno raspodeljenih elemenata. Međutim, sprovedena je samo kvalitativna analiza pojave prolaska kroz rezonantno stanje i interakcije harmonika u jednom modu oscilovanja proučavanog sistema i zaključeno je da bilo kakva generalizacija u smislu uticaja harmonika ili oblika amplitudno frekventnih karakteristika u drugim slučajevima sistema ne bi mogla da se kvantitativno uopšti. Evidentno je samo da će kvalitativno sigurno postojati interakcija između harmonika, što je uostalom i opšte svojstvo nelinearnosti sistema. Bilo kakvo uopštavanje kvantitativno bilo bi

moгуće izvesti samo širom uporedbom rezultata za različite odnose parametara sistema, mada bi i u tom slučaju bilo teško doći do opštijih rezultata, s obzirom da bi se raspravljalo na polju višedimenzionih bifurkacija jer sama rešenja zavise od većeg broja kako parametara sistema tako i parametara sprezanja.

Dobijena numerička rešenja sistema usrednjenih prvih asimptotskih aproksimacija mogu da se iskoriste i za analizu prenosa energije u hibridnom sistemu. Pokazano je da postoji interes za proučavanje prenosa energije između pod sistema vezanih u hibridne sisteme, pri čemu su za analize rezultata prenosa energije u modelima, korišćeni izrazi za redukovane vrednosti kinetičke i potencijalne energije pripadajuće odgovarajućem modu i odgovarajućem pod sistemu, kao i potencijalna energije interakcije pod sistema preko sprežućeg sloja. U radu [258] za sistem kružnih ploča, koji izvodi sopstvene oscilacije, potvrđeno je da važi teorema o konzervativnosti, ako je sloj idealno elastičan, ili teorema o promeni ukupne energije sistema, u svakom od modova, ako je sloj visko-elastičan, a sistem poseduje funkciju rasipanja tipa Rayleigh-a. Na osnovu toga konstatuje se da je, u slučaju slobodnih oscilacija sistema dve ploče samo spregnute elastičnim slojem bez prigušnica, ukupna enegija moda konstantna, a u slučaju disipativnog sistema, sistema ploča spregnutih prigušnicama, opadanje ukupne energije, svakog od modova, jednako je negativnoj dvostrukoj vrednosti funkcije rasipanja pripadajuće tom modu, dok su Lyapunov-ljevi eksponenti negativni, pa se zaključuje da je proces oscilovanja kao i potproces interakcije među pločama stabilan. Lyapunov-ljevim eksponentima je dato svojstvo mera integriteta sistema ili integriteta dinamike-kretanja sistema.

Na kraju, napomenimo da dobijeni sistemi diferencijalnih nelinearnih spregnutih jednačina u vremenskom domenu oscilovanja hibridnih sistema daju mogućnost da se ispita pojava sinhronizacije tj. vremenskog usaglašavanja pod sistema vezanih različitim elementima u smislu njihove potpune sinhronizacije, jednakosti i amplituda i faza. Takva jedna analiza je, za klase hibridnih sistema urađena numeričkim rešavanjem sistema diferencijalnih jednačina, koje opisuju dinamiku hibridnog sistema, i prikazani su rezultati u okviru sedmog poglavlja za diskretne hibridne sisteme sa različitim oblicima sprezanja, a u desetom poglavlju za hibridne sisteme spregnutih kontinualnih struktura sistemom diskretnih standardnih lakih elemenata kontinualno i dovoljno gusto raspodeljenih duž ili površ kontinualnih struktura.

Sa druge strane, izvedeni sistemi jednačina za prvu asimptotsku aproksimaciju usrednjenih rešenja, po amplitudama i fazama vremenskih funkcija, daju mogućnost daljeg ispitivanja u smislu određivanja odnosa parametra sistema koji mogu da obezbede optimalno upravljanje, a radi izbegavanja negativnih i nepredvidivih pojava sistema sa nelinearnostima svojstvenih haosu, o čemu je bilo reči u osmom poglavlju. Metodološki, u ovom poglavlju, dat je jedan prilaz analitičkom rešavanju problema optimizacije pomoću optimiziranja izraza Melnikov-ljeve funkcije, čime se obezbeđuje da ne dođe do presecanja stabilnih i nestabilnih mnogostrukosti u faznoj ravni, svojstvenog pojavi haosa u sistemu. To se praktično postiže višefrekventnom periodičkom pobudom pri čemu odnos amplituda osnovnog i viših harmonika pobude, koji optimizira Melnikov-ljevu funkciju, i jeste cilj optimalnog upravljanja.

S obzirom da u ovoj disertaciji nije bilo istraživanja na temu bifurkacija napomenimo da izvedeni analitički izrazi prvih asimptotskih aproksimacija rešenja hibridnih sistema sa nelinearnostima daju mogućnost izražavanja rezultata, u zavisnosti od pojedinih parametara sistema i pod sistema, to ova

disertacija daje i uvod u jedno novo savremeno istraživanje bifurkacionih ponašanja hibridnih dinamičkih sistema. Osnov za ta istraživanja mogla bi da bude metoda prof. Zakrzhevsky-og –metoda (kompletnih) bifurkacionih grupa (MBG), [280], čija je osnovna ideja u kontinualizaciji kompletnih bifurkacionih grupa i periodičkih stabilnih i nestabilnih grana.

12* Poglavlje

Fenomenološko preslikavanje i matematička analogija među dinamikama hibridnih sistema

Pod pojmom fenomenološki slično podrazumevaće se da su dve pojave u matematičkom opisu analogne, a stvarno mogu biti sasvim različite prirode. Važno je da rešenja matematičkog modela jednog sistema mogu da se iskoriste u analizi i opisu ponašanja sistema potpuno drugačije prirode. Smisao ovog poglavlja je u formiranju celine, kada se govori o fenomenološkom preslikavanju i analogijama u okviru dinamika hibridnih sistema i sprezi pojava disparatnih priroda, koje mogu da se matematički analiziraju prikazanim postupkom i analogno rešavaju. U ovom poglavlju iskoristiće se fenomenološko preslikavanje, na modelima sprezanja kontinualnih tela sa diskretnim sistemima u dva slučaja dinamike takvih sistema. To su slučajevi longitudinalnih oscilacija grede sapregnute sistemom diskretnih materijalnih tačaka i torzijskih oscilacija vratila spregnutog diskretnim sistemom diskova, koji rotiraju koristeći analogije translacionih i rotacionih dinamika. Navešće se analogije električnih, termičkih, hidrauličnih i mehaničkih pojava koje služe u matematičkom modeliranju dinamika sistema ovih različitih pojava. Na kraju poglavlja pokazaće se kako se izvedene jednačine i zaključci, formirani u klasi hibridnih dinamičkih sistema spregnutih ploča, mogu primeniti uz pomoć fenomenološkog preslikavanja na klase sistema spregnutih greda ili pojaseva i to sve sa različitim svojstvima elemenata u sprežućem sloju, koji su prikazani kroz ovaj rad.

12.1. Analogija između frekventnih jednačina spregnutih longitudinalnih oscilacija elastične grede sa diskretnim sistemom materijalnih tačaka i spregnutih torzionih oscilacija elastičnog vratila sa odgovarajućim diskretnim sistemom diskova

12.1.1 Sprezanje kontinualnog i diskretnog podsistema statičkom spregom

Koristeći se analogijom [225, 226] između dva sistema, a u ovom slučaju između torzijskih oscilacija vratila i longitudinalnih oscilacija elastične grede može se izvesti frekventna jednačina malih oscilacija hibridnog sistema sa slike 12.1 b) za statički vid sprezanja kontinualnog i diskretnog podsistema, [79, 156].

U opštem slučaju hibridni sistem se sastoji od dva podsistema. Jedan podsistem je elastična greda –vratilo, sa pravom osom i parametrima ρ - gustina, l - dužina, \mathbf{G} - smicajni moduo, A - površina poprečnog preseka i \mathbf{I}_0 - moment inercije površine poprečnog preseka za osu vratila. Vratilo nosi dva kruta diska na slobodnim krajevima sa momentima inercije masa za osu vratila \mathbf{J}_p i \mathbf{J}_0 . Vratilo je torzionom oprugom, krutosti c_0 , vezano za diskretni sistem sa n stepeni slobode kretanja. Diskretni podsistem može, na primer, biti mehanizam u obliku lančanog sistema od n materijalnih delova (ili krutih tela-diskova) sa generalisanim masama m_i , $i = 1,2,3,\dots,n$, koji rotiraju duž kružne linije koaksijalne sa osom vratila, pri čemu su mase spojene torzionim oprugama krutosti c_i , $i = 1,2,3,\dots,n$.

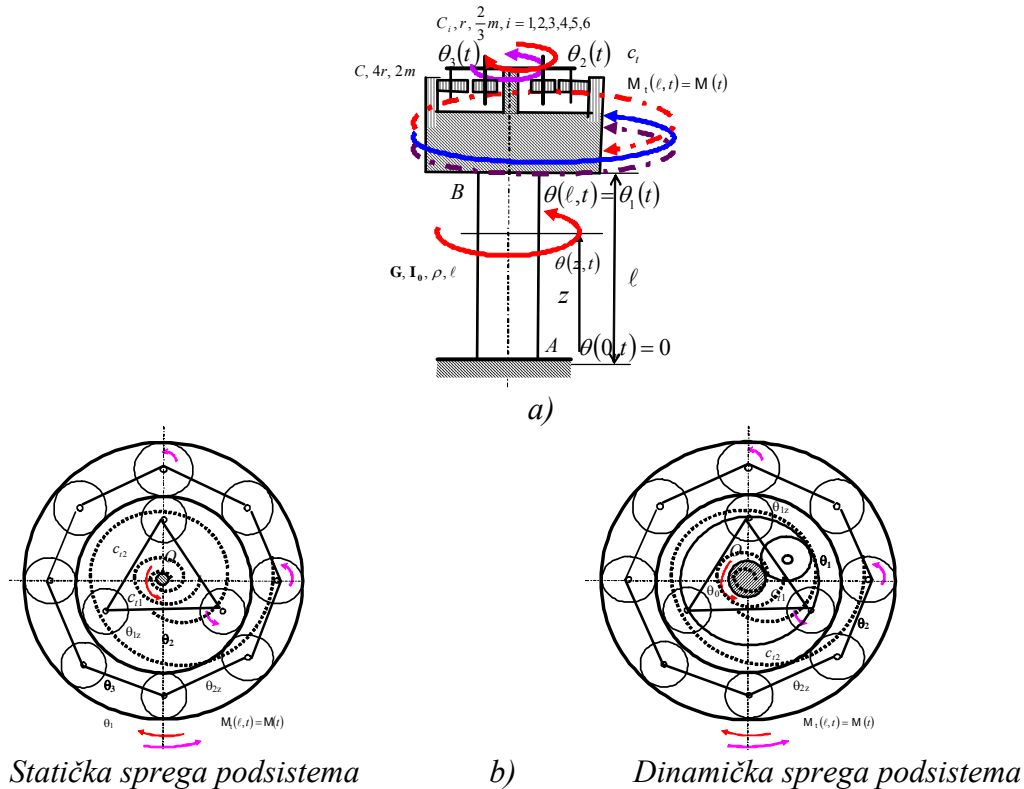
Koristeći se analogijom torzionih oscilacija vratila i longitudinalnih oscilacija elastične grede mogu se izvesti zaključci da ugaonom otklonu torzionih oscilacija poprečnog preseka x elastičnog vratila odgovara podužno pomeranje poprečnog preseka x longitudinalnih oscilacija grede $\theta(x,t) \Rightarrow u(x,t)$, kao i da momentima inercija masa, u sistemima sa rotacijom, odgovaraju mase u sistemima sa translacijom odnosno $\mathbf{J}_p \Rightarrow m_p$ i $\mathbf{J}_0 \Rightarrow m_0$, te da su generalisane koordinate translatornog pomeranja lančanog sistema materijalnih tačaka i ugaonog pomeranja lančanog sistema diskova analogne, $x_i \Rightarrow \theta_i$. Koristeći ovu analogiju mogu se u potpunosti iskoristiti izrazi koji su izvedeni u poglavlju 3.1.2, s tim da za uvedene oznake (3.1.44) analogno napišemo sledeće oznake za slučaj torzionih oscilacija elastičnog vratila:

$$\begin{aligned} \mu_p &= \frac{\mathbf{J}_p}{\rho \mathbf{I}_0 l}, \quad \mu_0 = \frac{\mathbf{J}_0}{\rho \mathbf{I}_0 l}, \quad \xi = \lambda l, \quad \omega^2 = \lambda^2 \frac{\mathbf{G}}{\rho} = \frac{\xi^2}{l^2} \frac{\mathbf{G}}{\rho} = \xi^2 \omega_0^2, \quad \omega_0^2 = \frac{\mathbf{G}}{\rho l^2}, \quad c_i = \frac{\mathbf{G} \mathbf{I}_0}{l}, \quad \kappa = \frac{c_0}{c_i}, \\ u_0 &= \frac{m_0 \omega_0^2}{c_0}, \quad \text{kao i} \quad \hat{\mu}_{00} = \frac{\hat{a}_{00}}{\rho \mathbf{I}_0 l}, \quad \hat{\mu}_{01} = \frac{\hat{a}_{01}}{\rho \mathbf{I}_0 l}, \quad \tilde{\mu}_{01} = \frac{\hat{a}_{01}}{\mathbf{J}_0}, \quad \tilde{\mu}_{11} = \frac{\hat{a}_{11}}{\mathbf{J}_0} \end{aligned} \quad (12.1.1)$$

S obzirom na izvedenu frekventnu jednačinu (3.1.54) može se direktno napisati frekventna jednačina malih torzionih oscilacija ovakvog hibridnog sistema sa statičkom spregom podsistema u matričnom obliku:

$$\left| \bar{\mathbf{C}} - \xi^2 u_0 \bar{\mathbf{A}} + \left[1 - \frac{\kappa \xi}{\Delta(\xi)} (\cos \xi - \mu_p \xi \sin \xi) \right] \mathbf{I}_0 \right| = 0 \quad (12.1.2)$$

gde je $\Delta(\xi)$ karakteristična determinanta, data izrazom analognim izrazu (3.1.47).



Slika 12.1. Male oscilacije hibridnog sistema spregnutih diskretnog i kontinualnog podsistema. **a)** torzijske oscilacije konzolnog vratila sa mehanizmom više tela u obliku dva lanaca diskova; **b)** Sprega podsistema kontinualnog vratila i diskretnog lanca diskova statičkim i dinamičkim elementom.

Sa grafika korena frekventne jednačine (12.1.2) mogli bi se uočiti poremećaji frekventnog spektra sopstvenih kružnih frekvencija deformabilnog podsistema usled dejstva diskretnog dela sistema i obrnuto. To se, ustvari, može protumačiti kao diskretizaciju dela frekventnog spektra kontinualnog sistema kao rezultat sprezanja sa diskretnim podsistemom, a sa druge strane analogno i kao kontinualizaciju dela frekventnog spektra koji odgovara diskretnom podsistemu.

12.1.2. Sprezanje kontinualnog i diskretnog podsistema dinamičkom spregom

Koristeći se principom prikazane analogije između dva sistema, a u ovom slučaju između torzijskih oscilacija vratila i longitudinalnih oscilacija elastične grede datog poprečnog preseka može se napisati frekventna jednčina malih oscilacija hibridnog sistema sa slika 12.1.b) za dinamički vid sprezanja kontinualnog i diskretnog podsistema i to koristeći se izvedenom frekventnom jednačinom (3.2.25) hibridnog sistema iz poglavlja 3.2.2, koji je potpuni fenomenološki analog sistemu sa slike 12.1.b), u obliku:

$$\left| \bar{\mathbf{C}} - \xi^2 \mathbf{u}_0 \left(\left[\tilde{\mu}_{01} \frac{\hat{\mu}_{01} \xi}{\Delta(\xi)} (\cos \xi - \mu_p \xi \sin \xi) - \tilde{\mu}_{11} \right] \mathbf{I}_0 + \bar{\mathbf{A}} \right) \right| = 0 \quad (12.1.3)$$

gde su korišćene oznake (12.1.1), a $\Delta(\xi)$ je analognog oblika kao i (3.2.20).

Zaključak je analogan onom iz poglavlja 3.2.2, a odnosi se sada na frekventnu transcendentnu jednačinu (12.1.3) spregnutog sistema, koja se sastoji iz dva dela. Jedan deo je deo izraza za frekventnu jednačinu diskretnog podsistema, a drugi je deo frekventne jednačine podsistema deformabilnog tela.

A u specijalnom slučaju homogenog lanca disktnog podsistema sa tri diska koja rotiraju unutar obodnog diska imali bi analognu jednačinu izvedenoj jednačini (3.2.28a).

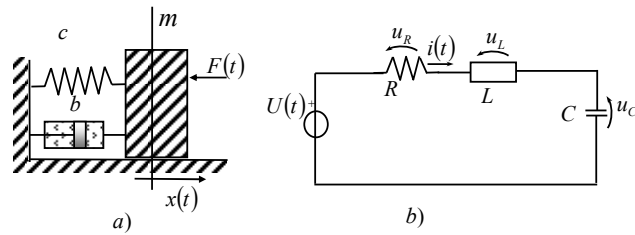
Korišćenje analogije na prezentovani način omogućava da se izvedena analitička analiza za jednu vrstu hibridnog sistema primeni na dobijanje analitičkih rezultata druge vrste hibridnih sistema, ovde pokazano na slučaju longitudinalnih oscilacija elastične grede spregnutog sa pometranjima diskretnog sistema materijalnih tačaka i torzijskih oscilacija vratila sa diskom na kraju u kome rotira lanac manjih diskova kao diskretni podsistem.

I na kraju i ovde zaključimo da je sprega kontinualnih podistema i diskretnih podsistema realnost stvarnih struktura opisanih kao hibridnih dinamičkih sistema i da zapravo rešavanje svodimo na diskretizaciju kontinuuma i sa druge strane kontinualizaciju diskretnog sistema, što daje mogućnost analitičke analize ovakvih sistema.

12.2. Elektromehaničke analogije

Fenomenološki slično znači u matematičkom opisu analogno, a pojavno može biti sasvim različite fizičke prirode. Važno je da diferencijalne jednačine i njihova rešenja matematičkog modela jednog sistema jesu analogna sa matematičkim modelom drugog sistema i da mogu da se iskoriste u analizi i opisu ponašanja sistema potpuno različitih priroda. U ovom smislu navede se ovde poznate elektromehaničke analogije, [238], koje omogućavaju fenomenološko preslikavanje pojava iz elektrotehnike u pojave iz mehanike i obrnuto. Smisao je u formiranju celine kada se govori o fenomenološkom preslikavanju i analogijama u okviru dinamika hibridnih sistema i sprezi pojava disparatnih priroda koje mogu da se matematički analiziraju prikazanim pristupom i analogno rešavaju.

Poznato je da jednačine koje opisuju neke pojave u elektrotehnici imaju isti oblik kao jednačine mnogih pojava u mehanici, termodinamici, hidraulici, pneumatici itd. Na osnovu takvih analogija, za mnoge pojave neelektrične prirode mogu se formirati električne mreže čije se ponašanje opisuje jednačinama istog oblika. U najprostijem obliku prethodnu tvrdnju prezentujemo na primeru linearnog mehaničkog oscilatora sa otpornom silom proporcionalnom prvom stepenu brzine i prinudnom silom $F(t)$, slika 12.2.1.a), i jednog RLC električnog kola, slika 12.2.1 b).



Slika 12.2.1 Analogni primeri mehanike i elektrotehnike. a) Linearni mehanički oscilator sa prigušenjem; b) redno RLC električno kolo

Iz jednačina dinamičke ravnoteže mehaničkog oscilatora mase m sa spoljašnjom prinudnom silom $F(t)$, restitutionom silom $F_c = cx(t)$ i otpornom silom $F_b = b\dot{x}(t)$ sledi:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t) \quad (12.2.1)$$

Za redno električno kolo otpora R , induktivnosti L i kapacitivnosti C sa slike 12.2.1 b) važi jednačina:

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t) \quad (12.2.2)$$

Kako jednačine (12.2.1) i (12.2.2) imaju potpuno analogan matematički izraz nehomogene diferencijalne jednačine drugog reda to se upoređujući ove dve jednačine može formirati sledeća tabela elektromehaničkih analogija.

<i>Električne veličine</i>	<i>Mehaničke veličine</i>
napon $u(t)$ [V]	\Leftrightarrow sila $F(t)$ [N]
struja $i(t)$ [A]	\Leftrightarrow brzina $\dot{x}(t)$ [m/s]
količina naelektrisanja $q(t)$ [C]	\Leftrightarrow pomeraj $x(t)$ [m]
induktivnost L [H]	\Leftrightarrow masa m [kg]
kapacitivnost C [F]	\Leftrightarrow recipročna vrednost koeficijenta elastičnosti opruge $\frac{1}{c}$ [s^2/kg]
električna otpornost R [Ω]	\Leftrightarrow Koeficijent orporne sile b [kg/s]

Analogije navedene u ovoj tabeli spadaju u najčešće korištene. Na osnovu postavljenih analogija moguće je za simulaciju ponašanja, umesto mehaničkih sistema, koristiti, mnogo pogodnija, električna kola. U cilju konstruisanja složenih analognih kola uvedena su sledeća pravila:

- mehanički elementi sa istom translatorsnom ili rotacionom brzinom kretanja se nalaze u paralelnoj mehaničkoj vezi;
- mehanički elementi čije je translatorsno ili rotaciono kretanje dato zbirom ili razlikom dveju brzina nalaze se u rednoj mehaničkoj vezi;
- mehaničkim elementima vezanim paralelno odgovaraju električni elementi vezani redno;
- mehaničkim elementima vezanim redno odgovaraju električni elementi vezani paralelno.

Analogije je moguće postaviti i na drugi način, što zavisi od načina pristupa problemu, važno je samo držati se principa matematičkih analogija iz koga slede fenomenološka preslikavanja.

Poznato je da postoji analogija i translatornog i rotacionog kretanja u mehanici radi potpunosti ovog poglavlja navedi se i ta analogija u sledećoj tabeli:

<i>Translatorno kretanje</i>		<i>Rotaciono kretanje</i>
silu $F(t)$ [N]	\Leftrightarrow	Moment sile $M(t)$ [Nm]
brzina $\dot{x}(t)$ [m/s]	\Leftrightarrow	Ugaona brzina $\dot{\theta}(t)$ [rad/s]
Translatorsni pomeraj $x(t)$ [m]	\Leftrightarrow	Ugaoni otklon $\theta(t)$ [rad]
masa m [kg]	\Leftrightarrow	Moment inercije mase J [kgm ²]

Postoje, takođe, analogije termičkih i mehaničkih pojava, kao i analogije hidrauličnih i mehaničkih pojava i u tom smislu navedimo tabelu tih analogija:

<i>Mehanička pojava</i>	<i>Termička pojava</i>	<i>Hidraulična pojava</i>
silu $F(t)$ [N]	\Leftrightarrow Temperature T [K]	Nivo h [m]
brzina $\dot{x}(t)$ [m/s]	\Leftrightarrow Količina toplote q [J]	Zapreminski protok v [m ³ /s]
pomeraj $x(t)$ [m]	\Leftrightarrow Toplotna energija Q [J]	Zapremina V [m ³]
recipročna vrednost koeficijenta elastičnosti opruge $\frac{1}{c}$ [s ² /kg]	\Leftrightarrow Termički kapacitet C [J/K]	Kapacitet suda C [m ²]
Koeficijent orporne sile b [kg/s]	\Leftrightarrow Termička otpornost R [m ² K/W]	Hidraulički otpor

Analogije koje su prikazane u ovom poglavlju su zapravo pomoćni alati kojima se možemo služiti u matematičkom modeliranju i simuliranju pojava disparatnih priroda.

12.3. Analogije u hibridnim sistemima spregnutih kontinualnih podsistema sistemima diskretnih kontinualno raspodeljenih standardnih lakih elemenata.

Brz razvoj nauke o materijalima, eksperimentalnih metoda i numeričkih analiza omogućava da se kreiraju različiti modeli realnih tela i metode za proučavanje njihove dinamike i procesa koji se odigravaju pri prostiranju poremećaja kroz deformabilna tela. Naravno u postavljanju modela realnih tela uvode se određene aproksimacije i pojednostavljenja [233, 245, 246], takođe postoje različiti pristupi u stvaranju modela realnih tela. Jedan od pristupa jeste i model diskretnog sistema materijalnih tačaka koje su povezane određenim elementima i čiji broj je dovoljno veliki da bi realnije opisao kontinuum [90, 98], kretanje takvog modela i prostiranje talasa u njemu opisano je parcijalnim diferencijalnim jednačinama [79, 81, 89, 94]. Zbog nemogućnosti da se one rešavaju analitički koristi se aproksimativna metoda za njihovo rešavanje, koriste se metode diskretizacije sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina, metoda fizičke diskretizacije kontinuuma, pa se rešenja dobijaju u nizu iteracija, a krajnji rezultat kontinualizacijom tih rešenja. Za dobijanje numeričkog rešenja i obradu rezultat koristi se računarski matematički programi. Sa druge strane jasno je da i ideje dobijanja rezultata dinamike kontinualnih

deformabilnih tela nekim od savremenih kompjuterskih paketa, koji koriste napredne računarske mogućnosti, potiču iz ideje posmatranja dinamike realnih sistema diskretizujući kontinuum, te vršeći mnogo iteracija kontinualizacije rešenja, što daje krajnji rezultat.

Diskretizacija, a sa druge strane kontinualizacija u procesu rešavanja i analize dinamičkih procesa su metode različitog smera, ali su veoma korisne za proračune i donošenje potrebnih zaključaka.

U radu [259] prikazana je metoda za analizu dva osnovna modela sendvič struktura sa lakim elastičnim standardnim elementima u obliku međusloja između dve ploče ili grede, te je uopšteno razmatranje i definisane su sendvič strukture [76] kao sistemi više ploča, više greda ili traka u kojima su deformabilna tela (ploče, grede ili trake) spregnuti standardnim lakim elementima [44] i nemaju deformacije u aksijalnom pravcu pri statičkim ili dinamičkim uslovima. Iz rezultata tog rada, a u svetlu fenomenoloških analogija podvlači se da u takvim sistemima parcijalne diferencijalne jednačine malih transverzalnih oscilacija tačaka srednje ravni ploča ili srednje linije greda ili pojaseva rešavamo Bernouli-jevom metodom partikularnih integrala, pri tome rešenja pretpostavljamo u obliku sume, po nm modovima osnovnih oblika oscilovanja, proizvoda dveju funkcija jedne prostorne sopstvene amplitudne funkcije i vremenske funkcije. Sopstvene amplitudne funkcije pre svega zavisi od same vrste strukture tačnije da li se radi o pločama, gredama ili pak pojasevima i od graničnih uslova koje zadovoljavaju sami oblici struktura tj. od geometrije same strukture, zadovoljavaju uslove ortogonalnosti i same granične uslove, odakle se i određuju sopstvene kružne frekvencije malih transverzalnih oscilovanja struktura. Te u tom smislu sistem spregnutih parcijalnih diferencijalnih jednačina prinudnih transverzalnih oscilacija sistema dve kružne ploče spregnute kontinualno raspodeljenim slojem standardnih visko nelinearno elastičnih elemenata oblika (3.4.4) analogno bi se izveo za sistem istovetno spregnutih na primer pravougaonih ploča samo što bi oblik transverzalnih pomeranja tačaka njihovih srednjih ravni umesto oblika $w_i(r, \varphi, t)$ bio napisan u obliku $w_i(x, y, t)$, ili za sistem dve grede $w_i(x, t)$ gde bi to zapravo predstavljao sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina malih transverzalnih oscilacija srednjih linija dve grede spregnute slojem diskretnih kontinualno raspodeljenim standardnih visko elastičnih nelinearnih elemenata oblika:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_1(x, t)}{\partial t^2} + c_{(1)}^4 \frac{\partial^4 w_1(x, t)}{\partial t^4} - 2\delta_{(1)} \left[\frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} \right] - a_{(1)}^2 [w_2(x, t) - w_1(x, t)] = \varepsilon \beta_{(1)} [w_2(x, t) - w_1(x, t)]^3 + \tilde{q}_{(1)}(x, t) \\ \frac{\partial^2 w_2(x, t)}{\partial t^2} + c_{(2)}^4 \frac{\partial^4 w_2(x, t)}{\partial t^4} + 2\delta_{(2)} \left[\frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} \right] + a_{(2)}^2 [w_2(x, t) - w_1(x, t)] = -\varepsilon \beta_{(2)} [w_2(x, t) - w_1(x, t)]^3 - \tilde{q}_{(2)}(x, t) \end{aligned} \quad (12.3.1)$$

gde su korišćene oznake:

$$a_{(i)}^2 = \frac{c_e}{\rho_i A_i}, i = 1, 2 \text{ za redukovanu krutost elastičnog sloja; } c_{(i)}^4 = \frac{B_i}{\rho_i A_i}, i = 1, 2 \text{ za redukovanu savojnu krutost greda, } \delta_{(i)} \text{ za redukovani koeficijenti prigušenja i } \varepsilon \beta_{(i)} \text{ označava odnos koeficijenta nelinearnosti u elastičnom sloju i gustina materijala greda i površina poprečnih preseka greda oblika } \varepsilon \beta_{(i)} = \frac{\beta}{\rho_i A_i}, i = 1, 2.$$

Vidi se da su ove oznake potpuno analogne onima za sistem ploča iz poglavlja 3.4. Rešenja sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina (12.3.1) prinudnih oscilacija sistema dve grede spojene kontinualno raspodeljenim slojem standardnih viskoelastičnih nelinearnih elemenata pretpostaviće se, prema

Bernoulli-ovoj metodi, u obliku proizvoda sopstvenih amplitudnih funkcija $W_{(i)n}(x)$, $i=1,2$, $n=1,2,3,4,\dots,\infty$ i nepoznatih vremenskih funkcija $T_{(i)n}(t)$, $i=1,2$, $n=1,2,3,4,\dots,\infty$:

$$w_i(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{(i)n}(x)T_{(i)n}(t), \quad i=1,2 \quad (12.3.2)$$

gde sopstvene amplitudne funkcije $W_{(i)n}(x)$, $i=1,2$, $n=1,2,3,4,\dots,\infty$ imaju isti oblik kao i u slučaju razdvojenih greda i zavise od uslova oslanjanja greda. Nakon zamene pretpostavljenog rešenja (12.3.2) u polazni sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina (12.3.1), te množeći prvu i drugu jednačinu sa $W_{(i)s}(x)dx$, posle integraljenja duž greda, vodeći računa o uslovima ortogonalnosti sopstvenih amplitudnih funkcija i jednakih graničnih uslova obe grede, dobija se n -familija sistema od dve zavisne obične diferencijalne jednačine drugog reda po nepoznatim vremenskim funkcijama $T_{(i)n}(t)$, $i=1,2$, $n=1,2,3,4,\dots,\infty$ oblika:

$$\begin{aligned} \ddot{T}_{(1)n}(t) - 2\delta_{(1)}(\dot{T}_{(2)n}(t) - \dot{T}_{(1)n}(t)) + \omega_{(1)n}^2 T_{(1)n}(t) - a_{(1)}^2 T_{(2)n}(t) &= \varepsilon\beta_{(1)}\mathfrak{N}(W_n)[T_{(2)n}(t) - T_{(1)n}(t)]^3 + f_{(1)n}(t) \quad n=0,1,2,\dots \\ \ddot{T}_{(2)n}(t) + 2\delta_{(2)}(\dot{T}_{(2)n}(t) - \dot{T}_{(1)n}(t)) + \omega_{(2)n}^2 T_{(2)n}(t) - a_{(2)}^2 T_{(1)n}(t) &= -\varepsilon\beta_{(2)}\mathfrak{N}(W_n)[T_{(2)n}(t) - T_{(1)n}(t)]^3 - f_{(2)n}(t), \end{aligned} \quad (12.3.3)$$

gde su $\omega_{(i)n}^2 = k_{(i)n}^4 c_{(i)n}^4 + a_{(i)}^2 = k_{(i)n}^4 \frac{\mathbf{B}_{(i)}}{\rho_i A_i} + \frac{c}{\rho_i A_i} = k_{(i)n}^4 \frac{\mathbf{E}_{(i)} I_i}{\rho_i A_i} + \frac{c}{\rho_i h_i}$, $i=1,2$ sopstvene kružne frekvencije greda

[259]. Sa $\mathfrak{N}(W_n)$ označava se: $\mathfrak{N}(W_n) = \frac{\int_0^l W_{(1)n}^4(x) dx}{v_n}$ koeficijent uticaja nelinearnosti elastičnog dela sloja, a

sa $f_{(i)n}(t)$ zadate vrednosti spoljašnje prinude, kao poznate funkcije vremena $f_{(i)n}(t)$, $i=1,2$ definisane sledećim izrazima:

$$f_{(1)n}(t) = \frac{\int_0^\ell \tilde{q}_1(x,t) W_{(1)n}(x) dx}{\int_0^\ell [W_{(1)n}(x)]^2 dx}, \quad f_{(2)n}(t) = \frac{\int_0^\ell \tilde{q}_2(x,t) W_{(2)n}(x) dx}{\int_0^\ell [W_{(2)n}(x)]^2 dx} \quad (12.3.4)$$

Iz sistema (12.3.3) određuju se nepoznate funkcije vremena $T_{(i)n}(t)$, $i=1,2$, $n=1,2,\dots$. Sistem (12.3.3) je matematički potpuno analogan sistemu (3.4.16) samo je to u ovom slučaju n -familija sistema, jer grede imaju n sopstvenih modova oscilovanja. Sistemu (12.3.3) odgovara analogan linearizovani homogeni sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina oblika (3.4.4a), pa potpuno analognim rasuđivanjama kao i za taj sistem jednačina samo ovde sada za n familiju rešenja dobijaju se kružne frekvencije sprežanja sistema greda \hat{p}_{in} , $i=1,2$, $n=1,2,\dots$; kao kompleksne delove rešenja karakterističnog polinoma analognog oblika obliku (3.4.9c). Rešenja za nepoznate vremenske funkcije odgovarajućeg n -moda slobodnih oscilacija sistema dve grede spregnutih slojem visko-elastičnih nelinearnih elemenata mogu se napisati u obliku (3.4.10) gde umesto nm familija rešenja imamo n familiju rešenja. Za slučaj da su obe funkcije promene spoljašnje prinudne sile $\tilde{q}_{(1)}(x,t)$ i $\tilde{q}_{(2)}(x,t)$, istih dvofrekventnih oscilatornih oblika kontinualno raspodeljene po dužini greda date analogno kao i (3.4.11), predstavimo rešenja sistema

parcijalnih diferencijalnih jednačine (12.3.3) u obliku proizvoda sopstvenih amplitudnih funkcija i nepoznatih vremenskih funkcija $T_{(i)n}(t)$, $i=1,2$, $n=1,2,3,4,\dots,\infty$:

$$\begin{aligned} w_1(x,t) &= W_{(1)n}(x) \left[K_{21n}^{(1)} e^{-\delta_{1n} t} R_{1n}(t) \cos \Phi_{1n}(t) + K_{21n}^{(2)} e^{-\delta_{2n} t} R_{2n}(t) \cos \Phi_{2n}(t) \right] \\ w_2(x,t) &= W_{(2)n}(x) \left[K_{22n}^{(1)} e^{-\delta_{1n} t} R_{1n}(t) \cos \Phi_{1n}(t) + K_{22n}^{(2)} e^{-\delta_{2n} t} R_{2n}(t) \cos \Phi_{2n}(t) \right] \end{aligned} \quad (12.3.5)$$

gde su amplitude $R_{in}(t)$ i faze $\Phi_{in}(t) = q_i \Omega_{in} t + \phi_{in}(t)$ nepoznate funkcije vremena koje trebamo odrediti koristeći asimptotsku metodu Кривола-Богољубова-Митропольског kao i u poglavlju 3.4. Kako su jednačine potpuno analogne to se dobijaju potpuno istovetni zaključci vezane za rešenja vremenskih funkcija n -familije oblika oscilovanja ovako spregnutih greda, kao što smo to dobili i kod sistema spregnutih ploča. Vremenske funkcije zbog sprežanja imaju dva harmonika, koji usled prisustva nelinearnosti trećeg reda u sprežućem sloju nisu nezavisni već imaju izraženo međusobno dejstvo, koje su numeričkim rešavanjem jednačinama prve asimptotske aproksimacije za amplitude i faze vremenskih harmonika opštih oblika (4.4.1) opisane tumačenjem numeričkih rezultata u desetom poglavlju. Ovde ih samo treba posmatrati kao pojave, koje se dešavaju u svakom n modu sopstvenih oblika oscilovanja greda, a do njihovog opisa došli smo potpuno analogno koristeći metodologiju ovog rada.

Kao zaključak ovog poglavlja iskoristimo još jedan primer primene fenomenološkog preslikavanja u modelima hibridnih sistema, on se odnosi na analogiju podsistema spregnutih standardnim piezo elementima i standardnim termo elementima.

U monografiji [45] primećena je fenomenološka analogija pojava koje se dešavaju u matematičkom modelu standardnog lakog Kelvin-Voigt-ovog piezo-visko-elastičnog naslednog elementa, koji smo opisali u poglavlju 9.4, i standardnog lakog Kelvin-Voigt-ovog termo-visko-elastičnog naslednog elementa čiji je model prikazan u monografiji [45] u poglavlju 8.4. Pri tome tu je konstatovana analogija promene temperature kod termo elementa sa promenom piezo napona kod piezo elementa, a na osnovu potpune matematičke analogije izraza (9.3.6) za vezu mehaničkog napona $\sigma(t)$ i specifične deformacije - dilatacije $\varepsilon(t)$ piezo-modifikovanog Kelvin-Voigt-ovog visko-elastičnog elementa i napona polarizacije $U_K(t)$ na piezo-elementu i izraza :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_K + E_{TK}} \left\{ 1 - e^{-\frac{E_K + E_{TK}}{\mu_K} t} + \frac{E_K + E_{TK}}{\sigma_0} \frac{E_{TK} \alpha_{TK}}{\mu_K} \int_0^t T(\tau) e^{-\frac{E_K + E_{TK}}{\mu_K} (\tau-t)} d\tau \right\} \quad (12.3.6)$$

izvedenog u toj monografiji, a predstavlja konstitutivnu vezu napona i dilatacije termo-modifikovanog Kelvin-Voigt-ovog visko-elastičnog naslednog elementa. Odakle se, prostim upoređivanjem, zaključuje da ono što je promena temperature kod termo elementa $T(\tau)$ predstavlja promenu napona polarizacije piezo-keramičkog element $U(\tau)$ i da su materijalni parametri ta dva elementa potpuno analogni moduli elastičnosti $E_{TK} \Leftrightarrow E_{uK}$ i koeficijent termičke dilatacije termo-visko-elastičnog elementa Kelvin-Voigt-ovog tela α_{TK} , čija je jedinica dimenzije temperaturni stepen na minus jedan i koeficijent piezo-keramičke dilatacije termo-visko-elastičnog elementa α_{uK} , čija je jedinica dimenzije jedinica strujnog napona (Volt) na minus jedan, odnosno $\alpha_{TK} \Leftrightarrow \alpha_{uK}$. U smislu naznačene analogije hibridni sistem spregnutih ploča standardnim kontinualno raspodeljenim termo-visko-nelinearno elastičnim lakim elementima u kojim

zapravo promenom temperature u sprežućem sloju može vršiti kontrolu i upravljanje takvim sistemom potpuno je analogan prikazanom modelu iz poglavlja 9.5, gde je ideja upravljanja u takvoj strukturi bila promenom napona piezo elementa.

Takođe, analogni ali inverzni princip, u smislu zamene termo elemenata piezo-keramičkim standardnim elementima, može se primeniti na rezultate rada [147] u kome je razmatran uticaj homogenog slučajnog temperaturnog polja na transversalne oscilacije sistema dve kružne ploče spregnute termo-visko-elastičnim slojem. Izveden je odgovarajući sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina kao i sistem Itô-ovih stohastičkih diferencijalnih jednačina za amplitude i faze i to za slučajeve kada je frekvencija spoljašnje pobudne temperaturne promene u sprežućem sloju u opsegu parametarske i osnovne rezonantne vrednosti frekvencija spregnutog sistema. Iz dobijenih rezultata zaključuje se da su dvofrekventne oscilacije u jednom modu oscilovanja sistema nezavisne od ostalih modova. Takođe, su u radu izvedeni izrazi za Ljapunov-ljeve eksponente komponentnih slučajnih oscilacija. Analogni rezultati i zaključak važio bi ako bi razmatrali sistem sa piezo-visko-elastičnim elementima u kontinualno raspodeljenom sprežućem sloju kod kojih je promena napona polarizacije piezo-elemenata pretpostavljena kao slučajni proces belog šuma.

13* Poglavlje

Zaključna razmatranja - šta je originalno doktorant stvorio kao novo znanje o hibridnim sistemima

Objašnjenja koja dajem sebi zapravo su linearno uzročno posledična, no evo pojavila se potreba da drugima u najkraćem objasnim to što spoznah i tako dođe do nelinearne interakcije- sprezanja mog i ostalih shvatanja hibridnih sistema i nelinearnih fenomena u njima iz kojeg ću pokušati da izvućem najvažnije zaključke.

U mojim najranijim spoznajama u mehanici, doba osnovne škole, pojavljuje se pretpostavka “u vakuumu” što se objašnjavalo da neku pojavu i njenu dinamiku posmatramo izolovano od svih uticaja sredine. Sledeća lekcija je ta ista dinamika samo sa uvođenjem uticaja sredine prvo otporom sile trenja kretanju kroz sredinu, a onda i aktivnih sila polja i svih ostalih poremećaja koji se sredinom prenose ili kao otpor ili kao aktivno dejstvo na dinamiku posmatranog objekta i menjaju je. Potom se uticaji drugih tela u kontaktu sa posmatranim na različite načine uvode u opis dinamike sistema, jednom rečju ništa ne postoji samo za sebe. Sve pojave u Prirodi i društvu su u nekom obliku interakcije, i da bi se ispravno shvatila njihova dinamika, načini sprezanja sa uticajima sredine i drugih pojava u sredini treba da se posmatra dinamika spregnutih pojava, njihove interakcije i međusobni uticaj. Vrsta sprezanja kao i svojstva pojava koje se sprežu, koje se opijuju i proučavaju, određuju ponašanje sistema u celini. Najveći probelemi u opisivanju spregnutih pojava javljaju se kada su te pojave disparatnih priroda. U tom smislu sadržaj ove disertacije odnosi se na proučavanje dinamike procesa spregnutih dinamičkih pod-sistema. Pri tome, prikazani su modeli različitih oblika sprezanja sistema istih ili različitih svojstava. Naravno najveći izazov u proučavanju je sistem sastavljen od podsistema različitih priroda sa spregom složene strukture, što smo u radu usvojili kao određenje hibridni dinamički sistem. Sistem koji u svakom slučaju ima

različitu dinamiku od njegovih komponentnih podsistema koji intereaguju međusobno i uslovljavaju jedinstvenu krajnju dinamiku sistema pri tome menjajući i svoju sopstvenu dinamiku.

Brz razvoj nauke o materijalima, eksperimentalnih metoda i numeričkih analiza, koje prelaze u numerička eksperimentisanja, omogućava da se kreiraju različiti modeli realnih struktura i metode za proučavanje njihove dinamike i procesa koji se odigravaju pri prostiranju poremećaja kroz njih. U postavljanju modela realnih struktura uvode se određene aproksimacije i pojednostavljenja, takođe postoje različiti pristupi u stvaranju modela realnih struktura. Jedan od pristupa jeste i metoda diskretnih kontinuuma, zasnovana na modelima diskretizacije kontinuuma [90, 98, 259] koji je usvojen i u ovoj disertaciji prikazan u okviru drugog i jedanaestog poglavlja.

U drugom poglavlju dat je sistematski prikaz i ostalih metoda koje su korišćene u istraživanjima i dobijenim rezultatima predstavljenim u ovom radu, pa su pored asimptotske metode usrednjenja Krilov-Bogoliyubov-Mitropolskiy-kog opisane na jednostavnom sistemu sa jednim stepenom slobode kretanja, istaknute i metode optimalnog upravljanja i metode sinhronizacije. Metode optimalnog upravljanja se zasnivaju na optimiziranju analitičkih izraza Melnikov-ljevih funkcija nekoliko sistema sa jednim stepenom slobode kretanja sa nelinearnostima, sa optimalnim rešenjem zadatka nepojavljivanja haosa u dinamici tih sistema. Metode sinhronizacije se ovde zasnivaju na proučavanju numerički dobijenih rešenja koje daju izvedeni sistemi diferencijalnih jednačina kretanja klasa hibridnih sistema u smislu vremenskog potpunog usaglašavanja podsistema.

Koliko su to omogućili okviri jednog poglavlja doktorske disertacije u prvom poglavlju je prikazan jedan broj savremenih radova, a odnose se na savremeno shvatanje pojma hibridni dinamički sistem sa stanovišta tehničkih nauka, sa stanovišta teorije upravljanja, a na kraju i sa stanovišta savremenih istraživanja u medicini. Broj savremenih radova jako je veliki zbog aktuelnosti teme, ali je u ovom poglavlju izabran i koncipiran samo jedan deo tih radova, koji je, po mom mišljenju, bio dovoljan da prikaže sve prednosti i nedostatke prilaza u opisu hibridnih sistema. Prikazani su modeli tehničke prakse i dati pristupi savremenih autora u njihovom izboru modela raznim apstrakcijama dinamike realnih sistema, u inženjerskoj praksi pri takozvanim: modeliranju, identifikaciji, verifikaciji i simuliranju. Istaknuti su i problemi i poteškoće koje se pri tome sreću te je metodologija ovoga rada primenjiva na prevazilaženje pojedinih problema modeliranja jedne klase hibridnih sistema sa nelinearnostima i mogućnostima njihovog analitičkog opisivanja koje bi moglo dati upotrebljive zaključke.

Jedan model hibridnih dinamičkih sistema može biti model sendvič ili kompozitne strukture sastavljene od više ploča, greda ili traka od materijala različitih svojstava koje su povezane određenim standardnim lakim elementima i čiji broj je dovoljno veliki da bi se realnije opisala struktura [76, 91, 259]. Kretanje takvog modela i prostiranje talasa u njemu opisano je sistemima spregnutih nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina [75, 81, 82, 95, 259]. Zbog nemogućnosti da se oni reše analitički koriste se aproksimativne metode za njihovo rešavanje, a koriste se i metode diskretizacije sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina, zatim metoda fizičke diskretizacije kontinuuma, pa se rešenja dobijaju u nizu iteracija, a krajnji rezultat se dobija kontinualizacijom tih rešenja. Za dobijanje numeričkog rešenja i obradu rezultata koristi se računarski matematički programi, kao i kompletirani

softverski alati za naučno računanje. Proučavanje transversalnih oscilacija ploča spojenih elastičnim, visko-elastičnim slojem ili slojem puzećih svostava je važno i sa teoriske i sa praktične tačke gledišta. Mnoge važne strukture mogu biti opisane ovakvim modelom. Na primer, moguće je koristiti sisteme ploča u opisu modela akustičnih ili vibracionih izolacionim sistemima, kao što su zidovi ili podovi. Ovakvi modeli bi spadali u klasu hibridnih sistema sprege kontinualnih tela i diskretnih lakih standardnih elemenata čiji je broj dovoljno veliki da predstavljaju sprežući sloj kontinualno raspodeljen između kontinualnih podsistema. Jedan takav model kružnih ploča spregnutih slojem standardnih visko-elastičnih nelinearnih elemenata pod dejstvom prinude prikazan je u okviru poglavlja 3.4. i 4.4.

U matematičkom opisu problema oscilovanja sistema kontinualnih tela dobijamo sisteme spregnutih parcijalnih diferencijalnih jednačina sa sistemom graničnih i početnih uslova. Zavisno od oblika parcijalnih diferencijalnih jednačina sistemi se svode na linearne i nelinearne. Nelinearni članovi u parcijalnim diferencijalnim jednačinama oscilovanja i graničnim uslovima mogu biti primarnog i sekundarnog značaja. Nelinearne članove sekundarnog značaja kao male veličine u poređenju sa linearnim, možemo zanemariti, pa se problem u rešavanju svodi na linearni u prvoj aproksimaciji. Linearne oscilacije ploča baziraju se na klasičnoj jednačini Lagrange-Germain i pojednostaljenim graničnim uslovima kako je to definisano uslovima Kirochoff-a, što je ovde korišćeno za opisivanje transversalnih oscilacija kružnih ploča. Pri tome su data rešenja karakterističnih jednačina oscilovanja kružnih ploča za klasične granične uslove ploče ukleštene i slobodne na krajevima i naglašeno je dobro podudaranje rezultata dobijenih upotrebom matematičkih programa za izračunavanje korena karakteristične transcendentne jednačine sa specijalnim Bessel-ovim funkcijama, I vrste, i sa realnim i sa imaginarnim argumentom, tj. modificiranim Bessel-ovim funkcijama I vrste, reda n , i rezultata iz literature za te slučajeve oslanjanja ploča, poglavlje 3.4.1. Za rešavanje sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina korišćena je Bernoulli-eva metoda partikularnih integrala, pri čemu je praktično vršena integracije rešenja u vidu beskonačnog reda po sopstvenim amplitudnim funkcijama - koordinatnim funkcijama, koje moraju da zadovoljavaju odgovarajuće zadate granične uslove. Zatim su se izabrani redovi unosili u jednačine kretanja i uslove kompatibilnosti pomeranja i izjednačavanjem koeficijenata uz jednake sopstvene koordinatne funkcije, koje zadovoljavaju uslove ortogonalnosti, dobijao se sistem običnih diferencijalnih jednačina u odnosu na tražene vremenske funkcije pripadajuće jednom sopstvenom obliku oscilovanja. Za sistem dve ploče, rešavanjem tih spregnutih diferencijalnih jednačina po vremenskim funkcijama, zaključuje se da prisustvo sprežućeg sloja između dve ploče uzrokuje udvajanje kružnih frekvencija u jednom nm -obliku sopstvenih transversalnih oscilacija. Uopšte, za vremensku funkciju jednog nm -moda oscilovanja sistema M ploča, zaključeno je da u tom modu sistem osciluje u M -frekventnom režimu slobodnih oscilacija sistema. Kada je homogeni lanac ploča slobodan zaključujemo da ima M stepeni slobode kretanja u svakom od beskonačno mnogo sopstvenih modova, a kako poseduje M sopstvenih kružnih frekvencija, po svakom nm -modu, to praktično u tom modu ima M internih stepeni slobode oscilovanja, i to u svakom od beskonačno mnogo sopstvenih modova, [68, 70, 75, 259].

Rešenja matematičkog opisa sistema jednačina sa nelinearnostima i uticajem poremećaja po vremenskim funkcijama odgovarajućeg nm -moda oscilovanja tog sistema u vidu dvoparametarske familije asimptotskog sistema usrednjenih jednačina prve aproksimacije, za amplitude i faze komponentnih procesa, prikazana su u poglavlju 4.4. Sistem jednačina prve asimptotske aproksimacije rešenja malih transversalnih oscilacija tačaka srednjih ravni kružnih ploča, spregnutih slojem visko-elastičnih nelinearnih elemenata, je originalni analitički rezultat ovoga rada. U poglavlju 4.4.1 prikazan je pristup ispitivanju stabilnosti lokalnog karaktera u okolini stacionarnog rešenja sistema jednačina prve aproksimacije. Analitički su izvedeni uslovi stabilnosti stacionarnog položaja ravnoteže što se može smatrati jednim originalnim rezultatom ispitivanja dinamike ovog sistema. U zaključku tog poglavlja date su i smernice za dalju upotrebu tih analitičkih rezultata u analizi stabilnosti oko stacionarnog rešenja polaznog sistema spregnutih diferencijalnih jednačina, i to u smislu njihovog programiranja i određivanja tačaka na amplitudni i fazno frekventnim dijagramima, koje odgovaraju stabilnim ili pak nestabilnim rešenjima dinamike sistema u stacionarnom prolazu kroz rezonantnu oblast. Za izvođenje sistem jednačina prve asimptotske aproksimacije korišćena je modifikovana asimptotska metoda usrednjenja Крилова-Богољубова-Митропольског. Sama metoda je prikazana u poglavlju 2.1, a rezime o modifikaciji korišćenoj u ovom radu može da se pronade u opisu metoda i metodologije u okviru 11. poglavlja.

Ostale klase hibridnih sistema prikazane su takođe u trećem poglavlju i to prvo modeli sprezanja diskretnih podistema različitih priroda statičkim ili dinamičkim vezama, vezama naslednih svojstava, a potom i modeli hibridnih sistema sprezanja kontinualnih podistema sa diskretnim podsystemima vezama različitih svojstava- oprugama ili kotrljajnim elementima. Pri tome je, po ideji iz radova [79 i 84], prikazano izvođenje analitičkih izraza za frekventne transcendentne jednačine spregnutih kontinualnih i diskretnih sistema i konstatovano da se one sastoje iz dva dela. Jedanog dela koji odgovara izrazu za frekvanatnu jednačinu diskretnog podistema, i drugog koji odgovara delu frekventne jednačine podistema deformabilnog tela. Takođe, prikazani su i originalni dijagrami tih frekventnih jednačina za različite oblike diskretnog podistema u vidu određenog broja materijalnih tačaka, i konstatovano uvećanje broja korena transcendentne karakteristične jednačine sa brojem materijalnih tačaka diskretnog podistema u odnosu na skup sa beskonačnim brojem sopstvenih kružnih frekvencija. Dinamika klasa hibridnih sistema sa nelinearnostima proučavana je modifikovanom asimptotskom metodom usrednjenja Крилова-Богољубова-Митропольског, pri čemu su dobijene prve asimptotske aproksimacije rešenja po pomeranjima komponentnih podistema. U slučaju slobodnih malih oscilacija oko položaja ravnoteže dobijena su analitička rešenja sistema jednačina prve aproksimacije. Zaključci, koji se mogu doneti, iz oblika tih rešenja su anologi onim dobijenim u mom magistarskom radu za sistem jednačina vremenskih funkcija oscilovanja ploča spregnutih elastičnim elementima sa nelinearnim svojstvima. Zaključuje se da su amplitude oba oblika oscilovanja, u jednom dvofrekventnom režimu oscilovanja, uslovljenom samo sprezanjem, konstantne i zavise od vrednosti datih u početnom trenutku, da su oba potprocesa neizohrona, jer im periodi zavisi od početnih vrednosti amplituda oba oblika oscilovanja. Treba napomenuti da se, u slučaju ploča, radi o domenu vremenskih funkcija, koje pokazuju ovakva ponašanja i to u svakom nm -obliku oscilovanja sopstvenih amplitudnih funkcija.

Dok su u trećem poglavlju opisane sopstvene dinamike klasa hibridnih sistema u narednom četvrtom poglavlju opisana su svojstva prinudnih kretanja tih sistema i to pod dejstvom spoljašnjih periodičkih sila koje dejstvuju na podsisteme. Objasnjeni su karakteristični fenomeni koji se pri tome javljaju, prvenstveno prolazak kroz rezonantno stanje, zatim pojava prelaznih režima, rezonantnih skokova amplituda i faza u odzivu sistema sa nelinearnostima, kao rezultati međusobne interakcije podsistema pri prenošenju dejstva pobuda. Izvedeni su analitički izrazi zakona kretanja klasa hibridnih sistema pod dejstvom harmonijske pobude.

U osnovi korisne primene oscilacija, kao i uzroku njihovog štetnog dejstva, leže svojstva pojava koje su povezane sa svojstvoma nelinearnih fenomena u dinamičkim procesima tih oscilacija. Većina mogućnosti efektivnog korišćenja oscilacija je povezana sa tim da oscilacije menjaju karakter i svojstva pojedinih fizičko-dinamičkih procesa u nelinearnim mehaničkim sistemima, a sa tim i njihovo ponašanje. Npr. stabilan položaj statičke ravnoteže postaje nestabilan u dinamičkim uslovima i uspostavlja se nova konfiguracija sistema u uslovima dinamičke ravnoteže, a konfiguracija nestabilne ravnoteže postaje stabilna i sl. Ovde treba dodati i izuzetnu osetljivost dinamičkih procesa u nelinearnim dinamičkim sistemima sa malim promenama parametara stanja sistema, što proučava teorija bifurkacija. Uticaj malih promena početnih uslova, i senzitivnost na njihove male promene, je takođe pojavni fenomen u nelinearnim sistemima za određene kinetičke parametre. Iz navedenih razloga, nametnula se neophodnost matematičkog razjašnjavanja sistema sa nelinearnostima, što je i učinjeno u okviru petog poglavlja. Matematički, kontinualni dinamički sistemi geometrijski su interpretirani tokovima, a diskretni mapama, i data je geometrijska interpretacija metode usrednjenja. Pokazani su karakteristični fenomeni sistema sa nelinearnostima za klasu sistem opisanih Duffing-ovim mekim ili tvrdim oscilatorima sa jednim stepenom slobode kretanja sistema, a rezultati su interpretirani analitički i numerički. Iz zaključka tog poglavlja, pored ostalih teorema i njihovih dokaza, izdvaja se ono što se odnosi na određivanje integriteta hibridnih sistema. U postavljanju fizičkih i matematičkih modela realnih struktura uvode se određene aproksimacije i pojednostavljenja. Ako posmatrani dinamički sistem, opisan rešenjem diferencijalne jednačine, dolazi iz stvarnog sveta fizičkog postojanja realnih sistema disparatne prorode, onda će sam sistem jednačina samo biti model stvarne pojave, određene pretpostavke će se uvesti, i aproksimacije i eksperimentalne greške će se javiti. Ako dinamički sistem nije strukturno stabilan, onda male greške i aproksimacije načinjene na modelu imaju mogućnost za dramatično menjanje strukture stvarnog rešenja sistema. Dakle, „rešenje“ i apstrahovanje modela od realnog sistema može biti radikalno pogrešno i nestabilno. Ako, je sa druge strane, dinamički sistem koji posmatramo strukturno stabilan, onda male greške uvedene aproksimacijama i eksperimentalnim greškama ne moraju uopšte imati uticaja i rešenje modela sistema može biti jednako ili topološki spregnuto sa stvarnim rešenjem. Rešenje modela sistema pri tome predstavljamo tokovima-faznim trajektorijama ili mapama- diskretnim presecima faznih trajektorija i pogodno izabranih površi, a definicije strukturne stabilnosti i topološke ekvivalencije u njima date su u poglavlju 5.4. Kada se govori o strukturnoj stabilnosti toka ili njegove mape jasno je da je ona spregnuta sa svojstvom jake osetljivosti nelinearnih sistema na promenu početnih uslova ili parametara sistema kojima se opisuju. Jedan od kriterijuma koji otkriva svojstvo eksponencijalnog razdvajanja faznih krivih-trajektorija dva sistema koji

polaze iz bliskih početnih uslova jesu i Lyapunov-ljevi eksponenti, te su oni ovde i uzeti kao mera integriteta dinamike hibridnih sistema i dinamika komponentnih podsistema. Teorijska razmatranja navedena u petom poglavlju su preuzeta iz monografije „*Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*“, [50], i na osnovu te teorije dobijeni su originalni numerički rezultati predstavljeni u tom poglavlju, a koji su rezultat samostalnih proračuna u aplikativnom softveru Mathematica, koji se uglavnom kvalitativno poklapaju sa dijagramima prikazanim u toj monografiji. Na ovim primrima su izvršene provere putem naučnog računanja raspoloživim softverskim alatima i mojom umešnošću u tome.

U šestom poglavlju pokazano je da postoji interes za proučavanje prenosa energije između podsistema vezanih u hibridne sisteme, pri čemu su za analize rezultata prenosa energije u modelima klasa hibridnih sistema korišćeni izrazi za redukovane vrednosti kinetičke i potencijalne energije pripadajuće odgovarajućem podsystemu, kao i izraza za redukovane vrednosti: kinetičkih, potencijalnih energija sprežućih elemenata kao i funkcija rasipanja tipa Rayleigh-a. U radu [259] za sistem kružnih ploča koji izvodi sopstvene oscilacije, potvrđeno je, da važi teorema o konzervativosti energije, ako je sloj idealno elastičan, ili teorema o promeni ukupne energije sistema u svakom od modova, ako je sloj visko-elastičan, a sistem poseduje funkciju rasipanja tipa Rayleigh-a. Na osnovu prethodnog, konstatovano je da, u slučaju slobodnih oscilacija sistema dve ploče samo spregnute elastičnim slojem bez prigušnica, ukupna enegija moda konstantna, a u slučaju disipativnog sistema, sistema ploča spregnutih prigušnicama, pokazalo se da je opadanje ukupne energije svakog od modova jednako negativnoj dvostrukoј vrednosti funkcije rasipanja pripadajuće tom modu, dok su Lyapunov-ljevi eksponenti negativni. Zaključilo se da je proces oscilovanja, kao i potproces interakcije među pločama, stabilan, te je tako Lyapunov-ljevim eksponentima dato svojstvo mera integriteta sistema ili integriteta dinamike-kretanja sistema. Analogne konstatacije mogu se, na osnovu izvedenih analitičkih izraza, doneti i za ostale klase pomenutih hibridnih sistema. Treba dodati i konstataciju da dinamički elementi veze predstavljeni u obliku diskova, koji se kotrljaju bez klizanja po površinama spregnutih podsistema, unose promenu u izrazima za kinetičku energiju, kako sprezanja tako i celokupnog hibridnog sistema. Elementi statičkog sprezanja oprugama nemaju uticaja na promenu kinetičke energije sistema, ali zato sudeluju u promeni potencijalne energije sprezanja, kako one koja se odnosi na direktnu interakciju podsistema preko sprežućeg elementa tako i one koja se usled prisustva sprege prenosi ne komponentne podsisteme.

Govoriti o spregnutim sistemima, a ne govoriti o nekom obliku usaglašavanja podsistema koji su spregnuti bilo bi ekvivalentno nesagledavanju bitnih karakteristika sistema. U globalnoj dinamici hibridnih sistema interesantni su oblici vremenskog usaglašavanja dinamika podsistema što je u okviru sedmog poglavlja predstavljeno kao sinhronizacija hibridnih sistema. U tom poglavlju, najpre su određeni različiti mogući oblici sinhronizacije i dat je pregled naučnih radova, koji se odnose na njihovo identifikovanje i određivanje odnosa parametara podsistema potrebnih za uspostavljanje sinhronizacije, a potom su predstavljeni rezultati sopstvenih istraživanja pojave oblika potpune sinhronizacije u klasama diskretnih hibridnih sistema sa statičkim i dinamičkim vezama. Iz niza zaključaka tog poglavlja, koji se odnose na vrednosti koeficijenata sprezanja sistema vezama statičkog ili dinamičkog karaktera koji

obezbeđuju potpunu sinhronizaciju za izabrane posmatrane klase hibridnih sistema, a koji su rezultati numeričkog rešavanja specijalno izabranih primera diferencijalnih jednačina kretanja takvih sistema, i originalni su doprinos ovoga dela disertacije, izdvojimo jedan opšti zaključak. Dva nelinearna sistema sa haotičnim atraktorima spregnuta statičkom spregom mnogo lakše je sinhronizovati tj. potreban je mnogo manji koeficijent statičkog sprezanja, i do deset puta manji nego li u prikazanom slučaju ista takva dva podsistema od kojih je jedan linearan. Ovo potvrđuje i rezultate istraživanja savremenih autora, koji su rasvetljeni u okviru ovog poglavlja, a to je da prisustvo nelinearnosti i haotičnih atraktora, koji se sastoje iz niza slučajnih periodičkih kretanja, mogu biti prednost u stvaranju sinhronizacije, jer je dovoljna mala perturbacija da se podsistem zadrži na jednoj od periodičkih orbita, koja je već postojeće rešenje sistema, i eventualno se poklopi na istoj periodičkoj orbiti sa drugim podsistemom hibridnog sistema, odnosno da se podsistemi sinhronizuju. Zato je u ovom poglavlju pokazano i nekoliko primera sistema upravljanih periodičkom pobudom sinusnog oblika do stanja sinhronizacije. Kada su linearni i nelinearni podsistemi dinamički spregnuti zaključuje se da sinhronizacija u ovakvim sistemima nije moguća. Postoji atraktor sinhronizacije, koji daje prilično veliku grešku sinhronizacije, ali je posle izvesnog vremena drži ograničenom periodičnom funkcijom u uskom intervalu. Zbog toga ovakav vid sprezanja sistema mogao bi da se iskoristi u sistemima praćenja i eventualnog uspostavljanja sinhronizacije u njima. Međutim, ako su oba podsistema nelinearni i spregnuti dinamički, pojavljuje se zanimljiv fenomen kratkotrajne početne sinhronizacije, pri manjim vrednostima koeficijenta dinamičkog sprezanja, koja prelazi u asinhronizaciju ili se brzo potpuno narušava, povećanjem koeficijenta dinamičkog sprezanja, a onda ponovo uspostavlja u nekom narednom intervalu vrednosti tog koeficijenta. Ovo je oblik takozvane isprekidane sinhronizabilnosti sistema u zavisnosti od parametara sprezanja.

Pojave karakteristične u dinamici nelinearnih spregnutih sistema kao što su skokovi amplituda i faza u rezonantnim oblastima prelaznih režima, ili svojstveni nelinearni histerezis u lokalnoj dinamici, ili pak pojava haotičnih atraktora u globalnoj dinamici sa stanovišta upotrebe mehaničkih sistema koje opisuju takvi modeli mogu biti izrazito negativne u smislu narušavanja integriteta i stabilnosti dinamičke strukture, pojačavanja efekata zamora materijala i sl. Zato izbegavanje tih pojava može doprineti povećanju radnog veka struktura, ili povećanju stepena sigurnosti, te se u okviru osmog poglavlja predlažu metode optimalnog upravljanja primenjive na sisteme sa nelinearnostima sa jednim stepenom slobode kretanja, koje bi dokazano uslovile smanjenje uticaja negativnih fenomena nelinearnosti. Prema rezultatima radova autora G. Rega i S. Lenci [180-184], predložena metoda se odnosi na upotrebu Melnikov-ljeve metode i optimizacije vrednosti Melnikov-ljeve funkcije, koja garantuje da ne dođe do haotičnog ponašanja dinamike sistema. To se praktično postiže višefrekventnom periodičkom pobudom, pri čemu odnos amplituda osnovnog i viših harmonika pobude, koji optimizira Melnikov-ljevu funkciju, i jeste cilj optimalnog upravljanja. Predložena metoda je upotrebljiva, takođe je pokazano na osnovu najnovijih istraživanja, i na sisteme sa dva i više stepeni slobode kretanja, a to daje idejne smernice za buduća istraživanja u toj oblasti.

U devetom poglavlju predstavljene su aktivne strukture kao strukture koje osećaju spoljašnje poremećaje i odgovaraju na njih aktivnim upravljanjem u stvarnom vremenu da bi zadovoljile zahteve

upotrebe. To znači da u svojoj ukupnoj strukturi imaju ukomponovane-spregnute elemente tipa senzora i aktuatora, sastavljene od optičkih vlakana, piezoelektirčnih keramika i piezoelektičnih polimera. Zbog toga su, u ovom poglavlju, prikazana svojstva aktivnih piezokeramičkih materijala, objašnjen fenomen piezoelektičnog efekta, predstavljeni modeli standardnih piezo-visko-elastičnih elemenata [45], a na kraju opisan model hibridnog sistema spregnutih struktura slojem standardnih piezo-visko-elastičnih naslednih elemenata kao primer jedne aktivne strukture. Izvedene su parcijalne diferencijalne jednačine modela kružnih ploča spregnutih slojem piezo-visko-elastičnih nelinearnih elemenata, što je i originalni rezultat ovog dela disertacije, te su predložene analogne metode rešavanja istog i dobijanja rešenja, gde je zaključeno da bi promena napona polarizacije piezo-elementa mogla da posluži kao upravljački signal realno potrebnog upravljanja. Bilo da se radi, na primer, o dinamičkoj apsorpciji gde bi piezo-elementi bili iskorišćeni za apsorpciju transverzalnih pomeranja tačaka srednje ravni jedne od ploča sistema gde bi zakon upravljanja u prvoj aproksimaciji mogli dobiti iz uslova da amplituda i faza oscilovanja jedne ploče u odgovarajućem nm -modu oscilovanja budu jednake nuli, ili bi se mogli naći uslov sinhronizacije u odgovarajućim modovima, zahtevajući da rešenja u prvoj asimptotskoj aproksimaciji budu ekvivalentna za gornji i donju ploču. Ako bi se pak hteo eliminisati uticaj nelinearnosti i nepredviđenosti, koje u sistem ona unosi, mogao bi se zakon upravljanja izvesti iz uslova redukcije jednog od vremenskih harmonika i tako njihovu međusobnu interakciju anulirati. Svaki od zahteva upravljanja bio bi realan zahtev koji konstrukcija treba da ispuni, a pristupom datim u ovom radu mogle bi se dobiti upotrebljive vrednosti izlaznih kinetičkih parametara kojima bi se moglo upravljati pomoću aktivnih elemenata. Zakon upravljanja u posebnim slučajevima idejno bi se mogao rešiti ispitujući jednačine prve aproksimacije za amplitude i faze rešenja, a praktično bi bio cilj nekih budućih istraživanja i realnih potreba.

Deseto poglavlje disertacije sadrži izabrane rezultate mojih mnogobrojnih numeričkih eksperimenata koji se baziraju na numeričkom rešavanju diferencijalnih jednačina, metodama naučnog računjanja, koje čine matematički model klase hibridnih sistema. Kako su numerički eksperimenti, naučno računjanje, kao i vizuelizacije neophodni alat za dobijanje primenljivih rezultata, i otkrivanje nelinearnih fenomena i retkih fenomena dinamika, to se pojedini zaključci formiraju na bazi podataka dobijenih na osnovu numeričkih eksperimenata i simulacija, datih apstrahovanih dinamičkih modela i matematičkih opisa realnih složenih struktura, izvedenih komercijalnim programima tipa MathCad, Maple, Matematica i sličnih softvera. Primena savremenih softverskih alata danas sve više dobija svoj identite, pod nazivom "naučno računanje".

Modeli koji se mogu naći u ovome radu, elegantnom primenom aplikativnih softvera, mogu poslužiti za stvaranje vizuelne predstave pojava u dinamici hibridnih sistema, koje matematički modeli opisuju. Jednostavnom promenom odgovarajućeg parametra sistema može se ispitati uticaj na dinamiku celokupnog sistema elementa structure, kojem taj parameter modela odgovara. U okviru desetog poglavlja posmatrani primer hibridnog sistema je model dve kružne ploče spregnute slojem kontinualno raspodeljenih viskoelastičnih nelinearnih elemenata, čiji je sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina prinudnih transverzalnih oscilacija tačaka srednje ravni ploča, rešavan metodologijom usvojenom i predstavljenom u radu, dao rezultate pogodne za numeričku analizu uticaja parametara sistema. Tako je,

na primer, ispitivano dejstvo povećanja vrednosti linearne krutosti u prisustvnim elementima sprežućeg sloja na fenomene karakteristične za modele hibridnih sistema sa nelinearnostima: rezonantne skokove amplituda i faza komponentnih potprocesa, njihov međusobni uticaj, prenos energije u sistemu i u komponentnim potprocesima.

Kako se naročita pažnja poklonjena teoriji rezonantnih procesa, u vezi sa pitanjem korišćenja nelinearnih elemenata za otklanjanje rezonantnih pojava u sistemima spregnutih mehaničkih struktura, u radu su dati konkretni rezultati numeričkog eksperimenta sa izlaznim amplitudno-frekventnim i fazno-frekventnim dijagramima u rezonantnim oblastima stacionarnih i nestacionarnih režima i objašnjen fenomen prolaska kroz rezonantno stanje. U izabranom slučaju nehomogenog sistema dve kružne ploče spregnute slojem visko-elastičnih nelinearnih elemenata sprovedena je samo kvalitativna analiza pojave prolaska kroz rezonantno stanje i interakcije harmonika u jednom modu oscilovanja proučavanog sistema i zaključeno je da bilo kakva generalizacija u smislu uticaja harmonika ili oblika amplitudno frekventnih karakteristika u drugim slučajevima parametara sistema ne bi mogla da se kvantitativno uopšti. Evidentno je samo da će kvalitativno sigurno postojati interakcija između harmonika, što je uostalom i opšte svojstvo nelinearnosti sistema. Bilo kakvo uopštavanje kvantitativno bilo bi moguće izvesti samo širom uporedbom rezultata za različite odnose parametara sistema, mada bi i u tom slučaju bilo teško doći do opštijih rezultata, s obzirom da bi se raspravljalo na polju višedimenzionih bifurkacija, jer sama rešenja zavise od većeg broja parametara sistema i parametara sprežanja. Ovde je samo ispitan uticaj povećanja vrednosti linearne krutosti elemenata u sprežućem sloju i konstatovano da njihovo prisustvo pri dejstvu dvofrekventne kontinualno raspodeljene harmonijske pobude uslovljava smanjenje izraženih pojava rezonantnih skokova i novih grana u amplitudno-frekventnom odzivu sistema. Konstatovano je i da postoji veći uticaj prvog harmonika na dinamiku drugog, što se i vizuelno može pratiti sa dijagrama vremenskih funkcija komponentnih harmonika, kao i vremenskih funkcija ploča odgovarajućih nm -modova oscilovanja prikazanih i u stacionarnom i u nestacionarnom režimu prolaska kroz rezonantne oblasti. Takođe, ispitan je i uticaj vrednosti amplitude spoljašnjih pobuda kroz primer povećanja vrednosti amplitude drugog harmonika spoljašnje pobude i konstatovano da samo promena te vrednosti, a za ostale nepromenjene vrednosti parametara sistema, može usloviti intenziviranje fenomena prolaska kroz rezonantni režim. Oblici vremenskih funkcija i njihovih vremenskih izvoda potrebni su nam i za energijsku analizu sistema i komponentnih podsistema, tako da je konstatovano da kinetička i potencijalna energija kao i funkcija rasipanja celokupnog sistema i pojedinih komponenti imaju karakteristične skokove vrednosti u stacionarnom režimu na istovetnim frekvencijama na kojim se dešavaju i karakteristični rezonantni skokovi amplitude i faza. Takođe, istaknuta je i zavisnost vrednosti energija sistema od brzine prolaska kroz rezonantne oblasti u nestacionarnom režimu.

Zaključuje se da kriva, koja odgovara vrednostima vremenskih funkcija pri najbržim prolascima kroz rezonantnu oblast, u smeru porasta frekvencije spoljašnje pobude, poseduje najveće vrednosti i ima prvi skok koji je pomešten ka većim frekvencijama i njen pik je zaobljeniji u odnosu na ostale dve krive koje odgovaraju sporijim prolascima kroz rezonantnu oblast. To je sve u saglasnosti sa zaključcima koji su doneti za amplitudnu krivu prvog harmonika. Sa druge strane, ukoliko spoljašnja pobudna sila ima

promenu frekvencije veće brzine ona odaje sistemu veću količinu energije, pa i vrednosti energije, pri bržim prolazima kroz rezonantnu oblast, imaju veće vrednosti i skokove, koji su pomereni ka većim vrednostima frekvencija, u smeru povećanja frekvencije spoljašnje pobudne sile. Analogno se zaključuje i dobijaju se rezultati i u smeru opadanja frekvencije spoljašnje sile različitim brzinama, ali ti dijagrami ovde nisu predstavljeni, zato što u potpunosti podsećaju na predstavljene, samo su vrednosti vremenskih funkcija po odgovarajućem modu manje, jer se skokovi amplituda dešavaju na nižim frekvencijama i pri manjim vrednostima amplituda, pri većim brzinama prolaska kroz rezonantnu oblast, a skokovi amplituda su pomereni ka višim vrednostima frekvencija i imaju veće vrednosti, samim tim i vrednosti vremenskih funkcija su više. Što se tiče dijagrama koji pokazuju zavisnost vremenskih funkcija od vremena prikazani na slikama u ovom poglavlju napomenimo da je interval vremena jako mali $t_{\max} = 0.4[s]$, jer u većim intervalima vremena sama rešenja prve asimptotske aproksimacije ne daju dobre rezultate, i trebala bi se načiniti rešenja druge ili viših aproksimacija. Dobijeni rezultati i zaključci su originalni doprinos ovog dela disertacije.

Konstatovano je da svi prikazani modeli i metodologija njihovog opisivanja apstrakcijom od realnih sistema i dinamika, kao i rešavanja imaju matematički analogne pristupe, te je, u okvirima jedanaestom poglavlja, napravljen pregledni rezime o metodama i metodologiji modeliranja, rešavanja i izučavanja retkih svojstava i fenomena dinamike klasa hibridnih sistema predstavljenih u ovoj disertaciji. To bi, sagledavanjem svih rezultat do kojih je moguće doći ovim metodologijama, trebalo da predstavlja originalan i značajan doprinos izučavanju, ne samo klasa hibridnih sistema predstavljenih u ovoj disertaciji, nego li i mnogo šire klase hibridnih sistema u čiji je matematički opis ukomponovano svojstvo nelinearnosti. To je i pokazano u narednom dvanaestom poglavlju, gde je predmet istraživanja usmeren na utvrđivanje fenomenološkog preslikavanja i matematičkih analogija među svojstvima dinamika hibridnih sistema disparatnih priroda. U okviru ovog poglavlja, prikazano je nekoliko modela, naizgled fizički drugačijih od modela hibridnih sistema prikazanih u prethodnim poglavljima, a koji formalno mogu da se reše i objasne metodologijom ovog rada na matematički analogan način.

Istraživanja svojstava i fenomena dinamike sistema složenih struktura i određenih klasa hibridnih sistema su predmet istraživanja na projektima iz osnovnih nauka 1616, (period 2001-2005), kao i ON144002 (period 2006-2010) finansiranih od Ministarstva nauke Republike Srbije, u kojima sam učestvovala kao istraživač aktivne naučne kompetencije. U okviru tih projekata sam sticala istraživačko iskustvo i saznanja, i uradila istraživanja sa rezultatima ugrađenim u magistarsku tezu pod naslovom: ***Dinamika mehaničkih sistema složenih struktura***, koju sam uspešno odbranila pred komisijom u međunarodnom sastavu. Logičan nastavak u istraživanju iz oblasti mehanike i nelinearnih nauka, tog magistarskog rada, predstavlja ova doktorska disertacija, ali se ovde otišlo i značajno napred originalnim doprinosima u saznanjima o fenomenima nelinearnih dinamika različitih hibridnih sistema. Izučena su svojstava njihovih podsistema i spregnutih dinamika, kao i pristupi određivanja njihovog integriteta ili strukturne stabilnosti, ispitivanja lokalne stabilnosti u stacionarnom režimu, prolaska kroz rezonantnu oblast za različite vrednosti kinetičkih parametara sistema i fenomene skokova amplitude i faza u stacionarnim rezonantnim režimima. Takođe, su izučavani i nelinearni histerezis prelaznih režima u

nestacionarnim režimima, kao i mogućnosti sinhronizacije i optimalnog upravljanja dinamikama takvih hibridnih sistema.

Ovim doprinosima, smatram da rad daje i originalni, ne samo istraživački pristup i sistematizaciju savremenih saznanja, nego i moj unos novih znanja u ovu savremenu oblast dinamike i oscilacija hibridnih dinamičkih sistema, što je bio moj zadatak, a što i po Zakonu o Univerzitetu treba da predstavlja doktorska disertacija. Sa ovim zaključkom je saglasan i mentor ovog rada, koji mi je pružio i veliki broj konsultacija i razgovora oko pravaca istraživanja, provere i prikaza rezultata mojih istraživanja.

U apstrahovanom obliku moji originalni rezultati su: postavljeni originalni fizički modeli hibridnih sistema sa odgovarajućim sistemima spregnutih diferencijalnih jednačina; nova saznanja i znanja o interakciji podsistema spregnutih u hibridne sisteme; znanja o višeparametarskoj transformaciji interakcije spregnutih podsistema različitim standardnim elementima i postojanju, pojavi i iščezavanju pojedinih nelinearnih fenomena, kao i retkih fenomena, u frekventnim opsezima spoljašnjih pobuda; postavljena metodologija kombinacije analitičkih metoda, numeričkih metoda i naučnog računanja kao novi metodološki postupak za višeparametarsko izučavanje pojedinih klasa hibridnih sistema; postavljene serije animacija višeparametarskih transformacija nelinearnih fenomena u dinamici hibridnih sistema putem softverskog alata u programu Mathematica; postavljena metodologija korišćenja višeparametarskih transformacija dinamika spregnutih podsistema radi postizanja sinhronizacije ili asinhronizacije dinamika dva spregnuta podsistema. Sistematizacijom savremenih analitičkih metoda, koje su korišćene u doktoratu, kao i softverskih alata, radu se daje i studijski karakter, da čitalac može ovladati znanjima potrebnim u istraživanju fenomena dinamike hibridnih sistema, čime je radu data dimenziju koja će omogućiti razne primene u inženjerstvu, kao i nastavak istraživanja u ovoj oblasti.

Originalni i novi rezultati ove disertacije su prikazani na većem broju vodećih naučnih svetskih i međunarodnih skupova iz oblasti nelinearne mehanike (22nd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM2008), The University of Adelaide, Australia, [260]; Thirteenth Conference on Nonlinear Vibrations, Dynamics and Multibody Systems, May 23-27, 2010, The Inn at Virginia Tech and Skelton Conference Center Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, [142]; 10th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, December 7-10, 2009. Łódź, Poland, [144]; 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference, Lisbon, Portugal, September 7-11, 2009, [145]; The Euromech Colloquium 498 Nonlinear Dynamics of Composite and Smart Structure (NDCS) - Nonlinear Dynamics and Chaos of Composite and Smart Structures (NDCS), May 21-23, 2008, Kazimierz Dolny, POLAND. Lublin 2008, [148]; ENOC 7-th European Nonlinear Dynamics Conference, 24-29, jul, 2011, Rome; kao i na trećem međunarodnom kongresu teorijske i primenjene mehanike Srpskog društva za mehaniku, 5-8 July 2011. Rezultati su saopšteni i na nekoliko seminara i konferencija nacionalnog značaja (na drugom međunarodnom kongresu teorijske i primenjene mehanike Srpskog društva za mehaniku 2009, [146]; na seminarima za mehaniku Matematičkog institute SANU u Beogradu u 2009 i 2010 godini, [257, 258] i na International Conference-Mechanical Engineering in XXI Century, Niš, Serbia, 25-26 September 2010, [143]). Takođe, deo rezultata je objavljen ili prihvaćen za štampu, u

međunarodnim časopisima: International Journal of Nonlinear Mechanics, [140], i International Journal of Bifurcation and Chaos, [141].

Na kraju, kada pomislim da sam rekla sve o mojim istraživanjima o fenomenima nelinearnih oscilacija, setih se novootkrivene grupe bifurkacija u radovima prof. Zakrzhevsky M. [281]. S obzirom da u ovoj disertaciji nije bilo šireg istraživanja na temu bifurkacija, a praktično izvedeni analitički izrazi, prvih asimptotskih aproksimacija amplituda i faza rešenja hibridnih sistema sa nelinearnostima, daju mogućnost izražavanja rezultata u zavisnosti od pojedinih parametara sistema i podsistema, to ova disertacija daje i uvod u jedno novo savremeno istraživanje bifurkacionih ponašanja hibridnih dinamičkih sistema. To je vidljivo sa amplitudno-frekventnih i fazno-frekventnih interakcija nelinearnih modova u rezonantnim oblastima, gde je uočljivo više vrednosti amplituda i faza na jednoj jedinstvenoj vrednosti frekvencije iz rezonantnog opsega frekvencija. Praktično se može zaključiti da su u radu razmotreni i pojedini aspekti bifurkacija. Osnov za naredna istraživanja u tom pravcu mogla bi da bude metoda prof. Zakrzhevsky-og –metoda (kompletnih) bifurkacionih grupa (MBG), [281], čija je osnovna ideja u kontinualizaciji kompletnih bifurkacionih grupa i periodičkih stabilnih i nestabilnih grana bifurkacionih dijagrama. Osnovno svojstvo metode je da ona vrši kontinualizaciju n -grana bez njihovog prekida u bifurkacionim tačkama. Sve tačke jedne grupe bifurkacija su spojene sa perturberansama, koje se javljaju iz bifurkacionih tačaka. Kompletna bifurkaciona analiza obuhvata iscertavanje razvoja stabilnosti za stabilna i nestabilna rešenja. Ključna stvar u metodi je kontinualizacija duž nestabilnih periodičkih rešenja. Ovom metodom se otkrivaju nove grupe bifurkacija, važni nepoznati regularni i haotični atraktori, složene perturberanse i nestabilni periodičke infinitumi (NPI) u klasi nelinearnih modela, kao što su simetrični i asimetrični oscilatori uključujući i Duffing-ov, ili pak sistemi sa više stepeni slobode oscilovanja opisani Lorenz-ovim ili Rössler-ovim modelima. Sistemi mogu posedovati jedan, nekoliko ili više različitih nestabilnih periodičkih infinituma u istom regionu parametara. Njihovo postojanje sa drugim bifurkacionim grupama praktično formira haotično ponašanje, kao što su uobičajeni haotični ili nepoznati retki haotični atraktori, umnožavanje nekoliko haotičnih atraktora, haotične prelaze i fraktale. Ovakvim proučavanjem bifurkacija hibridnih sistema mogli bi se rasvetliti još neotkriveni nelinearni fenomeni, a to je veoma interesantno polje nekih budućih istraživanja.

Literatura

- [1] Abarbanel H.D.I., Analysis of Observed Chaotic Data, Springer, New York, 1996
- [2] Abarbanel H.D.I., L. Korzinov, A. I. Mees, I.M. Starobinets, (1997), *Optimal control of nonlinear systems to given orbits*, Systems & Control Letters 31,(1997), pp.263-276,©1997 Elsevier Science B.V. All rights reserved PII S0167-6911(97)00048-0
- [3] Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M., (1996), *Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach*, Phys. Rev. E 53 (5), (1996), pp. 4528–4535.
- [4] Agrawal, A. K., Yang, J. N., and Wu, J. C., ‘*Non-linear control strategies for Duffing systems*’, International Journal of Non-Linear Mechanics 33, 1998, 829–841.
- [5] Alur R., Courcoubetis C., Henzinger T.A., Ho P.H., (1993), *Hybrid automata, Hybrid Systems*, LNCS 736, Springer, Berlin,1993, pp. 209-239
- [6] Ariaratnam S. T., (1996), *Stochastic Stability of Viscoelastic Systems under bounded Noise Excitation*, IUTAM Symp. on Advances in Nonlinear Stochastic Mechanics, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 1996, pp. 11-18.
- [7] Back A., Guckenheimer J., Myers M,(1993) *A dynamical simulation facility for hybrid systems*, Hybrid Systems, LNCS 736, Springer, Berlin, 1993,pp. 255-267
- [8] Badel A, Sebald G, Guyomar D, Lallart M, Lefeuvre E, Richard C, Qiu J.,(2006), *Piezoelectric vibration control by synchronized switching on adaptive voltage sources: Towards wideband semi-active damping*. Journal of Acoustics Society American, 2006, 119(5), pp.2815–2825
- [9] Bai E.W.and. Lonngren K.E, (1999), *Synchronization and Control of Chaotic Systems*, Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 09, No. 8, pp. 1571-1575, © Elsevier Science Ltd. All rights reserved
- [10] Berlincourt D. ,(1981), *Piezoelectric ceramics- Characteristics and applications*, J. Acoust. Soc.Am., vol.70,no.6, pp. 1586-1595.,Dec. 1981.
- [11] Berns, D. W.,Moiola J. L and Chen G., (2000), *Controlling Oscillation Amplitudes Via Feedback*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 10, No. 12 (2000), pp. 2815-2822, © World Scientific Publishing Company
- [12] Blekhman, I.I., Fradkov, A.L., Nijmeijer, H., et al., (1997), *On Self-Synchronization and Controlled Synchronization*, Syst. Control Lett., 1997, vol. 31, pp. 299-305.
- [13] Blekhman, I.I., Sinkhronizatsiya dinamicheskikh sistem (Synchronization of Dynamic Systems), Moscow: Nauka, 1971
- [14] Brand K.-P., Kopainsky J., (1988) , *Principles and engineering of process control with Petri nets*, IEEE Trans. on Automatic Control 33, (1988),pp. 138-149
- [15] Brandt M., and Chen G., *Feedback Control of Pathological Rhythms in Two Models of Cardiac Activity*, Proc. 1St Int. Conf. \Control of Oscillations and Chaos" (COC'97), St. Petersburg, 1997, vol. 2, pp. 219-223.
- [16] Branicky M., Borkar V., Mitter S., (1994), *A unified framework for hybrid control*, Proceedings of the IEEE Conf. on Decision and Control, 1994,pp. 4228-4234

- [17] Brave Y., Heymann M., (1993) ,*Control of discrete event systems modeled as hierarchical state machines*, IEEE Trans. on Automatic Control 38, (1993), 1803-1819
- [18] Brennan M.J., Kovacic I., Carrella A., Waters T.P., (2008), *On the jump-up and jump-down frequencies of the Duffing oscillator*, J. Sound Vibration 318 (2008),pp. 1250-1261.
- [19] Bryant R.E., (1986) , *Graph-based algorithms for Boolean function manipulation*, IEEE Trans. on Computers 35, (1986), pp. 677-691
- [20] Calvet J., Arkun Y., (1988), *Feedforward and feedback linearization of non-linear systems with disturbances*. Int J Control 48(4), pp.1551–1559, (1988)
- [21] Cao H. and Chen G., (2005), *A Simplified Optimal Control Method for Homoclinic Bifurcations*, Nonlinear Dynamics 42, (2005), pp. 43–61, ©Springer 2005
- [22] Carvalho J. A. , Figueiredo I. N. , Martínez R., (2009), *Plate-Like Smart Structures: Reduced Models and Numerical Simulations*, J Elast 97, pp. 47–75, © Springer Science+Business Media B.V. 2009 , DOI 10.1007/s10659-009-9212-6
- [23] Chen G., (1994), *Optimal control of chaotic systems*, Int. J. Bifur. Chaos 4, (1994), pp. 461-463.,
- [24] Chen G. and Liu, Z., (2002), *On the Relationship Between Parametric Variation and State Feedback in Chaos Control*, Int. J. Bifurcat. Chaos, 2002, vol. 12, no. 6, pp. 1411-1415
- [25] Chen G. and Dong X.,(1998), *From Chaos to Order: Perspectives, Methodologies and Applications*, Singapore: World Scientific, 1998.
- [26] Coddington E.A. and Levinson N., (1955), *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill:New York
- [27] Cuomo K., Oppenheim A., and Strogatz S., *Robustness and Signal Recovery in a Synchronized Chaotic System*, Int. J. Bifurcat. Chaos, 1993, vol. 3, pp. 1629-1638.
- [28] Dada J. P., Chedjou J. C. and Domngang S., (2009), *Amplitude and Frequency Control: Stability of Limit Cycles in Phase-Shift and Twin-T Oscillators*, Active and Passive Electronic Components, Volume 2008, Article ID 539618, 6 pages , Hindawi Publishing Corporation, doi:10.1155/2008/539618
- [29] Davis C L, Lesieutre G A.,(1998), *An actively tuned solid-state piezoelectric vibration absorber*. In: Proceedings of SPIE, Smart Structures and Materials 3327, pp. 169–182
- [30] Dmitriev, A.S., Panas, A.I., and Starkov, S.O., *Dynamic Chaos as a Paradigm of the Modern Communication Systems*, Zarub. Radioelektron., 1997, no. 10, pp. 4-26.
- [31] Douglas, A.,Wilson, J., (1994), *Input-output pseudolinearization for nonlinear systems*. IEEE Trans Automat Control **39**(11),pp.2207– 2218, (1994)
- [32] Duffing G., *Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz.*, F. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1918.
- [33] Engell S., *Modelling and analysis of hybrid systems*, Mathematics and Computers in Simulation 46 (1998), pp. 445-464, 0378-4754/98/\$19.00 © 1998 IMACS/Elsevier Science B.V. PII S 0 3 7 8 - 4 7 5 4 (9 8) 0 0 0 7 6 - 7
- [34] Fahy S., Hamann D.R., (1992) ,*Transition from chaotic to nonchaotic behavior in randomly driven systems*, Phys. Rev. Lett. 69 (5), (1992), pp.761–764
- [35] Fradkov A.L., Pogromsky A.Yu. (1998). *Introduction to control of oscillations and chaos*. Singapore: World Scientific Publishers
- [36] Filipovic V. Z., (2008), *Robust switching controllers in the presence of model uncertainty and saturation*, Int. Jour. of Information and System Sciences, Vol.4, pp. 233-240, February, 2008
- [37] Filipovic V. Z., (2008), *Robusni hibridni sistemi sa supervizorom zasnovanim na indeksu performansi* , Infoteh- Jahorina Vol. 7, Ref. A-2, p. 6-10, March 2008
- [38] Filipovski A., (1995), *Energijska analiza longitudinalnih oscilacija štapova*, magistrarska teza, mentor dr. Hedrih (Stevanović) K., Niš, 1995.

- [39] Garfinkel, A., Spano, M., Ditto, W., et al., *Controlling Cardiac Chaos*, Science, 1992, vol. 257, pp. 1230-1235.
- [40] Gatti G., Brennan M. J., Kovacic I., (2010), *On the interaction of the responses at the resonance frequencies of a nonlinear two degrees-of-freedom system*, Physica D 239 ,(2010), pp.591-599, 0167-2789/\$ -see front matter © 2010 Elsevier B.V. All rights reserved. doi:10.1016/j.physd.2010.01.006
- [41] Golubitsky M., Stewart I. and Schaeffer D.G., (1988), *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, II*. Springer, New York, 1988.
- [42] Golubitsky M. and Schaeffer.D.G., (1985), *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, I*. Springer, New York, 1985.
- [43] González-Miranda, J. M. (2004). *Synchronization and Control of Chaos. An introduction for scientists and engineers*. Imperial College Press. ISBN 1-86094-488-4
- [44] Goroško O. A and Hedrih (Stevanović) K., (2007), *Construction of the Lagrange's Mechanics of the hereditary systems*, APM Saint Petersburg 2007 pp., Minisymposium Oppening Lecture, Proceedings of the International Summer School APM –Advanced Problem in Mechanics, Saint Petersburg 2007., pp. 133-156.
- [45] Goroško O. A. i Hedrih (Stevanović) K., (2001), *Analitička dinamika (mehanika) diskretnih naslednih sistema*, (Analytical Dynamics (Mechanics) of Discrete Hereditary Systems), University of Niš, 2001, p. 426.
- [46] Goroshko O.A., Puchko, N.P., (1997), *Lagrangian equations for the multibodies hereditary systems*, Facta Universitatis, Series Mechanics, Automatic Control and Robotics, Vol. 2, No 7, 1997, pp. 209-222.
- [47] Grobman D.M. (1959). "О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений [Homeomorphisms of systems of differential equations]". *Doklady Akademii Nauk SSSR* **128**: 880–881.
- [48] Guckenheimer J., (2002), *Bifurcation and degenerate decomposition in multiple time scale dynamical systems. In Nonlinear Dynamics and Chaos: where do we go from here?* J. Hogan, A. Champneys, B. Krauskopf, M. di Bernardo, E. Wilson, H. Osinga and M.E. Homer (eds), Institute of Physics Publishing, Bristol, pp. 1-21, 2002.
- [49] Guckenheimer J., (2002), Hoffman K. and Weckesser W.. *The forced van der Pol equation I: the slow flow and its bifurcations*. SIAM J. App. Dyn. Sys., 2, 1-35, 2002.
- [50] Guckenheimer J. and Holmes P., (1983), *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York, 1983.
- [51] Guyomar D, Richard C, Petit L., (2001), *Non-linear system for vibration damping*. 142th Meeting of Acoustical Society of America, Fort Lauderdale, USA, 2001 , Petit L, Lefevre E, Richard C, Guyomar D., (2004), *A broadband semi passive piezoelectric technique for structural damping*. In: Proceedings of SPIE International Symposium on Smart Structures and Materials: Damping and Isolation, San Diego, CA, USA, 2004
- [52] Haken H., (1983), *Advanced Synergetics: Instability Heirarchies of Self-Organizing Systems and Devices*. Springer, Berlin, 1983.
- [53] Hanisch H.-M., (1993), *Analysis of place/transition nets with timed arcs and its application to batch process control*, LNCS 691, Springer, Berlin, 1993, pp. 282-299
- [54] Harel D., (1987), *Statecharts: a visual formalism for complex systems*, Sci. Computer Programming , (1987), pp. 231-274 Filipovski A., (1995), *Energijska analiza longitudinalnih oscilacija štapova*, magistrarska teza, mentor dr. Hedrih (Stevanović) K., Niš, 1995.
- [55] Hartman Ph. (August 1960). "A lemma in the theory of structural stability of differential equations". *Proc. A.M.S.* 11 (4): 610–620. doi:10.2307/2034720. [http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9939\(196008\)11%3A4%3C610%3AALITTO%3E2.0.CO%3B2-M](http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9939(196008)11%3A4%3C610%3AALITTO%3E2.0.CO%3B2-M). Retrieved 2010-28-05.

- [56] Hartman Ph. (1960). "On local homeomorphisms of Euclidean spaces". *Bol. Soc. Math. Mexicana* 5: 220–241.
- [57] Hasler, M., *Synchronization of Chaotic Systems and Transmission of Information*, Int. J. Bifurcat. Chaos, 1998, vol. 8, no. 4, pp. 647-660.
- [58] Hayashi C. , Akamatsu N., Itakura H. and Ueda Y., (1970), *On the behavior of self-oscillatory systems with external force*. Trans. IECE Japan, 53A (3), 150–158, 1970.
- [59] Hedrih (Stevanović) K., (2010), *Tensor equations of discrete dynamically defined and undefined systems with hereditary and creep light elements*, Analele Stiintice Ale Universitatii "Alexandru Ioan Cuza" Din (ASI (S.N) Matematica -Scientific Annals of "A.I.I. Cuza" University of Iasi, Matematica, Tom XCI, 2010, f. 1, pp. 131-149.
- [60] Hedrih (Stevanović) K.,(2010), *Аналитичка механика дискретних осцилаторних система фракционог реда (Analytical mechanics of fractional order discrete system vibrations*, Monograph, Advances in Nonlinear Sciences, Edited by V. Djordjević, ANN, 2010, Vol. 3, pp. (to appear)
- [61] Hedrih (Stevanović) K., (2009), *Considering Transfer of Signals through Hybrid Fractional Order Homogeneous Structure, Keynote Lecture*, AAS-09, Ohrid, Makedonija, posvecen profesoru Pane Vidincevu, prvom profesoru automatike i rachnarskih mashina u Makedoniji Special session, Applied Automatic Systems , Proceedings of selected AAS 2009 Papers. Edited bz G. Dimirovski, Skopje –Istanbul , 2009, ISBN -13-978-9989-2175-6-2, National Library of R. Makedonia, Skopje, Copright«2009Authors and ETAI Society, pp. 19-24.
- [62] Hedrih (Stevanović) K. and Hedrih N.A., (2009), *Eigen main chain modes of the double DNA fractional order chain helix vibrations (Part I)*, Proceedings 2nd International Congress Of Serbian Society Of Mechanics-IconSSM 2009,M1-03, CD, pp. 1-15.
- [63] Hedrih (Stevanović) K., (2008), *The fractional order hybrid system vibrations*, Monograph, Advances in Nonlinear Sciences, ANN, 2008, Vol. 2, pp. 226-326.
- [64] Hedrih (Stevanović) K., (2008), *Dynamics of coupled systems*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 2 (2008), pp. 310–334, © 2006 Elsevier Ltd. All rights reserved. doi:10.1016/j.nahs.2006.06.003
- [65] Hedrih (Stevanović) K., (2008), *Energy analysis in a nonlinear hybrid system containing linear and nonlinear subsystems coupled by hereditary element*, Nonlinear Dynamics , Vol. 51, no. 1, pp: 127–140, Springer Science, January , 2008
- [66] Hedrih (Stevanović) K., (2008), *Energy transfer in double plate system dynamics*, Acta Mechanica Sinica, Springer Berlin (2008), first online, DOI: 10.1007/s10409-007-0124-z
- [67] Hedrih (Stevanović) K., (2007), *Transversal vibrations of the axially moving sandwich belts*, Archive of Applied Mechanics, Vol. 77, no. 7, pp. 523-539, Springer Berlin, (2007)
- [68] Hedrih (Stevanović) K., (2007), *Double plate system with discontinuity in the elastic bounding layer*, Acta Mechanica Sinica , Volume 23, Number 2 , pp. 221-229, Springer Berlin, April, 2007
- [69] Hedrih (Stevanović) K., (2007), *Hybrid Systems and Hybrid Dynamics: Theory and Applications*, Invited Plenary Lecture, 8th HSTAM International Congress on Mechanics, Patras, 12 – 14 July, 2007, Greece, Proceedings, Edited by N. Bazwos, D.L. Karabalis, D. Polyzos, , D.E. Beskos and J. T. Katsikadelis, Volume I, pp. 77-86.
- [70] Hedrih (Stevanovic) Katica, (2007), *Transversal vibrations of the axially moving sandwich belts (Article)*, ARCHIVE OF APPLIED MECHANICS, (2007) vol.77 br.7 str. 523-539. DOI10.1007/s00419-006-0105-x DOI 10.1007/s00419-007-0187-0 http://nainfo.nbs.bg.ac.yu.nainfo.nbs.bg.ac.yu:2048/Kobson/service/jcr.aspx?ISSN=0939-1533
- [71] Hedrih (Stevanović) K., (2007), *The Control in Nonlinear Dynamical Systems with Triggers of a Coupled Singularities*, Invited Participation, The 14th International Workshop on Dynamics & Control to be held on May 28–June 2, 2007, in Zvenigorod – Moscow, Russia, Abstracts, 2007, p. 40. Institute for Problems in Mechanics of the the Russian Academy of Sciences.and Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences.

- [72] Hedrih (Stevanović) K., (2007), *Phase plane method applied to optimal control in nonlinear dynamical systems with trigger of coupled singularities*, The Scientific Journal Facta Universitatis Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics Vol. 6, No 2, 2007, pp. 71-98.
- [73] Hedrih (Stevanović) K., (2007), *Hybrid System Dynamics*, Proceedings, First International Congress of Serbian Society of Mechanics, Editors: D. Šumarac and D. Kuzmanović, Srpsko društvo za mehaniku, 10-13, April, 2007, pp. 79-84. <http://www.ssm.org.yu/congress2007/authors.html>
- [74] Hedrih (Stevanović) K., (2007), *Multifrequency and infinite frequency regimes and Lyapunov exponents as the measures of the hybrid system dynamic integrity*, Proceedings of the International Summer School APM –Advanced Problem in Mechanics, Saint Petersburg 2007., pp. 157-169. (Minisymposia IDS – Closing Lecture)
- [75] Hedrih (Stevanović) K., (2006), *Transversal Vibrations of Double-Plate Systems*, Acta Mechanica Sinica, Springer, (2006) ,Vol. 22, no. 5, pp. 487-501.
- [76] Hedrih (Stevanović) K., (2006), *Modes of the Homogeneous Chain Dynamics*, Signal Processing, Elsevier, 86 (2006), 2678-2702. ISSN: 0165-1684 www.sciencedirect.com/science/journal/01651684
- [77] Hedrih (Stevanović) K., (2006), *Transversal Vibration of a Parametrically Excited Beam: Influence of Rotatory Inertia and Transverse Shear on Stochastic Stability of Deformable Forms and Processes*, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, ©Freund Publishing House Ltd., 2006, 7(1), 117-124,
- [78] Hedrih (Stevanović) K., (2006), *The transversal creeping vibrations of a fractional derivative order constitutive relation of nonhomogeneous beam*, Mathematical Problems in Engineering, Special issue : Nonlinear Dynamics and their Applications in engineering sciences, Guest Editor: Jose Manoel Barhesar, Volume 2006, Article ID 46236, 18 pages, www.hindawi.com, doi:10.1155/MPE/2006/46236, Volume 2006, No. 5, pp. 61-78.
- [79] Hedrih (Stevanović) K., (2006), *The frequency equation theorems of small oscillations of a hybrid system containing coupled discrete and continuous subsystems*, Facta Universitatis, Series Mechanics, Automatic Control and Robotics, Vol.5, No 1, 2006 ,pp. 25 - 41
- [80] Hedrih (Stevanović) K., (2005), *Integrity of Dynamical Systems*, Journal Nonlinear Analysis, 63 (2005) 854 – 871.
- [81] Hedrih (Stevanović) K., (2005), *Partial Fractional Differential Equations of Creeping and Vibrations of Plate and their Solutions (First Part)*, Journal of the Mechanical Behavior of Materials, Freund Publishing House Ltd. 2005, pp. 305-314. ISSN 0334-8938
- [82] Hedrih (Stevanović) K., (2005), *Partial Fractional Order Differential Equations of Transversal Vibrations of Creep-connected Double Plate Systems*, in Monograph - *Fractional Differentiation and its Applications*, Edited by Alain Le Mahaute, J. A. Tenreiro Machado, Jean Claude Trigeassou and Jocelyn Sabatier, U-Book, pp. 289-302.
- [83] Hedrih (Stevanović) K., (2005), *Mathematical Analogy and Phenomenological Mapping: Vibrations of Multi Plate and Multi Beam Homogeneous Systems*, Scientific Buletletin of the “Politehnica” University of Timisoara, Romania, Transaction on Mechanics, Editura Politehnica, Tom 50 (64), Special Issue, 2005, pp. 11-18. ISSN 1224-6077.
- [84] Hedrih (Stevanović) K., (2005), *Eigen Amplitude Vectors and Functions Extended Orthogonality of Small Oscillations Mixed Systems of the Coupled Discrete and Continuous Subsystems*, Facta Universitatis, Series Mechanics, Automatic Control and Robotics, Vol. 4 No. 17, 2005. pp. 225-243. YU ISSN 0534-2009. UDC 534.1:534.012:534.013. <http://facta.junis.ni.ac.yu/facta/macar/macar200501/macar200501-04.html>
- [85] Hedrih (Stevanović) K., (2005), *Nonlinear Dynamics of a Heavy Material Particle Along Circle which Rotates and Optimal Control*, Chaotic Dynamics and Control of Systems and Processes in Mechanics (Eds: G. Rega, and F. Vestroni), p. 37-45. IUTAM Book, in Series Solid Mechanics and Its Applications, Edited by G.M.L. Gladwell, Springer,. 2005, XXVI, 504 p., ISBN: 1-4020-3267-6.
- [86] Hedrih (Stevanović) K., (2005), *Homoclinic Orbits Layering in the Coupled Rotor Nonlinear*

Dynamics and Chaotic Clock Models, SM17 – Multibody Dynamics (M. Geraldin and F. Pfeiffer), p. Lxiii – CD - SM10624, Mechanics of the 21st Century (21st ICTAM, Warsaw 2004) - CD ROM INCLUDED, edited by Witold Gutkowski and Tomasz A. Kowalewski, IUTAM, Springer 2005, ISBN 1-4020-3456-3, Hardcover., p. 421+CD. ISBN-13 978-1-4020-3456-5 (HB), ISBN-10 1-4020-3559-4(e-book), ISBN-13-978-1-4020-3559-3.

- [87] Hedrih (Stevanović) K., (2005), *Transveral vibrations of creep connected multi plate homogeneous systems*, CD Proceedings, Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference, Eindhoven University of Technology, Editors: D.H. van Campen, M.D. Lazurko, W.P.J.M. van den Over, ID 11-428, pp. 1445-1454.
- [88] Hedrih (Stevanović) K., (2005), *Multifrequency Forced Vibrations of Thin Elastic Shell (Višefrekventne prinudne oscilacije plitke elastične ljuske)*, ENOC-2005, Eindhoven, Netherlands, 7-12 Avg.2005.
- [89] Hedrih (Stevanović) K., (2004), *On Rheonomic Systems with Equivalent Holonomic Conservative Systems Applied to the Nonlinear Dynamics of the Watt's Regulator*, Proceedings, Volume 2, The eleventh world congress in Mechanism and machine Sciences, IFToMM, China Machine press, Tianjin, China, April 1-4, 2004, pp. 1475-1479. ISBN 7-111-14073-7/TH-1438. . <http://www.iftomm2003.com>
- [90] Hedrih (Stevanović) K., (2004), *Discrete Continuum Method*, COMPUTATIONAL MECHANICS, WCCM VI in conjunction with APCOM'04, Sept. 5-10, 2004, Beijing, China, © 2004 Tsinghua University Press & Springer-Verlag, pp. 1-11, CD.
- [91] Hedrih (Stevanović) K., (2004), "A trigger of coupled singularities," *Meccanica*, 39, No. 3, 295–314 (2004).
- [92] Hedrih (Stevanović) K., (2004), *Contribution to the Coupled Rotor Nonlinear Dynamics*, *Nonlinear Sci., Acad. Nonlinear Sci.*, Belgrade(2004).
- [93] Hedrih (Stevanović) K., (2004), "Phase portraits and homoclinic orbits visualization of nonlinear dynamics of multiple step reductor/multiplier," in: Eleventh World Congr. in Mechanism and Machine Sci. (IFToMM): Proc., Vol. 2, China Machine Press, Tianjin, China (2004), pp. 1508–1512.
- [94] Hedrih (Stevanović) K., (2004), *Creep Vibrations of a Fractional Derivative Order Constitutive Relation Deformable Bodies*, PACAM VIII. La Habana, 2004, *Applied Mechanics in Americas*, Vol. 10. pp. 548-551, ISBN 959-7056-20-8.
- [95] Hedrih (Stevanović) K., (2004), *A Model of Railway Track of Sandwich Type and its Dynamics Excited by Moving load*, XI Scientific-expert conference on railways-RAILCON 2004
- [96] Hedrih (Stevanović) K., (2004), *Partial Fractional Order Differential Equations of Transversal Vibrations of Creep Connected Double Plates Systems*, Workshop Preprints/Proceedings No 2004-1 IFAC workshop on Fractional Differentiation and its Applications FDA 04, ENSEIRB, Bordeaux France, July 19-21, 299-304, 2004
- [97] Hedrih (Stevanović) K., (2003), *Frequency equations of small oscillations mixed systems of the coupled discrete and continuous subsystems*, *Mehanika tverdogo tela (Rigid Body Mechanics)*, Donetsk, UDC 531.1:534.012:534.013:, ISSN 0321-1975, vip. 33, pp. 174-189. Ukraine.
- [98] Hedrih (Stevanović) K., (2003), *Discrete Continuum's Models and Thermo-rheological Elements - Basic Idea and Tensor Equations*, Proceedings of full papers, Edited by Dragutin Veličković, 6 th International Conference on Applied Electromagnetics, PES 2003, Stability Pact for South Eastern Europe, DAAD, pp. 127-130.
- [99] Hedrih (Stevanović) K., (2003), *The transversal creep vibrations of a fractional derivative order constitutive relation on nonhomogeneous beam*, Plenary Lecture, Noise and Vibration, Abstracts, p. 55, Full paper in CD-Proceedings pp. 1-13.
- [100] Hedrih (Stevanović) K., (2002), *Transversal Creep Vibrations of a Beam with Fractional Derivative Constitutive Relation Order, First part: Partial Fractional-differential equation . Part second: The S.T. Ariaratnam idea Applied to the Stochastic Stability of the Beam Dynamic Shape, under Axial Bounded Noise Excitation*, Proceedings of Forth International Conference on

- Nonlinear Mechanics (ICNM-IV), edited by Wei Zang Chien and All, August 14-17, 2002, Shanghai, P.R. China, pp. 584-595.
- [101] Hedrih (Stevanović) K., (2002), *On Rheonomic Systems with Equivalent Holonomic Conservative System*, Int. Conf. ICNM-IV, 2002, Edited by W. Chien and all. Shanghai, T. Nonlinear dynamics. pp. 1046-1054.
- [102] Hedrih (Stevanović) K., (2002), *Tensor equations of the dynamics of the discrete systems with creep light elements*, 28. naučno-stručni skup sa međunarodnim učešćem HIPNEF 2002., Vrnjačka Banja 2002. pp.431-437. (in English)
- [103] Hedrih (Stevanović) K., (2001), *The Vector Method of the Heavy Rotor Kinetic Parameter Analysis and Nonlinear Dynamics*, Monograph, University of Niš, 2001, pp. 252., YU ISBN 86-7181-046-1.
- [104] Hedrih (Stevanović), K., (2001), *Trigger of Coupled Singularities (invited plenary lecture)*, Dynamical Systems-Theory and Applications, Edited By J. Awrejcewicz and all, Lodz 2001, pp. 51-78.
- [105] Hedrih (Stevanović), K., (2001), *Differential Equations of Two Mass Particles, Constrained with a Piezo-thermo-rheological Hereditary Element, Dynamics*, Proceedings of full papers, Edited by D. Veličković, 5 th International Conference on Applied Electromagnetics, PES 2001., pp. 77-80.
- [106] Hedrih (Stevanović) K., (2000), *Transverzalne oscilacije grede od naslednog materijala. - Prvi deo - Parcijalna integro-iferencijalna jednačina (Transversal oscillations of the beam with heredytary material properties, First Part: Partial integro-differential equation)*, Originalni naučni rad, Tehnika, Mašinstvo, 49 (2000) 1, str. M1-M8. (in Serbian).
- [107] Hedrih (Stevanović) K., (2000), *Transverzalne oscilacije grede od naslednog materijala. - Drugi deo - Primena ideje S.T. Ariaratnama za ispitivanje stabilnosti formi grede pod dejstvom slučajnih sila (Transversal oscillations of the beam with heredytary material properties, Second Part: S.T. Ariaratnam's idea for analisis of the Stochastic Stability of Deformable forms under the actions of the bounded random forces)*, Originalni naučni rad, Tehnika, Mašinstvo, 49 (2000) 2, str. M1-M6. (in Serbian).
- [108] Hedrih (Stevanović) K., (2000), *Nonlinear Dynamics of a Gyrorotor, and Sensitive Dependence on initial Conditions of a Heav Gyrorotor Forced Vibration/Rotation Motion*, Semi-Plenary Invited Lecture, Proceedings: COC 2000, Edited by F.L. Chernousko and A.I. Fradkov, IEEE, CSS, IUTAM, SPICS, St. Petersburg, Inst. for Problems of Mech. Eng. of RAS, 2000., Vol. 2 of 3, pp. 259-266.
- [109] Hedrih (Stevanović) K., (1999), *Thermorheological Hereditary Pendulum*, (Ref. No. TVP-11) Thermal Stresses 99, Edited by J.J. Skrzypek and R. B. Hetnarski, Cracow 1999, pp.199-202.
- [110] Hedrih (Stevanović) K., (1999), *Rheonomic Coordinate Method Applied to Nonlinear Vibration Systems with Hereditary Elements*, www-EUROMECH, Copenhagen 1999, <http://www.imm.dtu.dk/documents/user/mps/ENOC/Proceedings/> Technical University of Denmark, 4A, pp.1-24.
- [111] Hedrih (Stevanović) K., (1997), *Interpretation of the transfer of energy from high-frequency to low-frequency modes by averaging asymptotic method Krilov-Bogolybov-Mitropolsky*, AiM 96, Asymptotics in Mechanics, Proceedings of the Second International Conference, Edited by Ali H. Nayfeh and Kiril V. Rozdestvensky, p. 302, Saint-Petersburg State Marine Technological University, Saint Petersburg, 1997, pp. 97-104. ISBN 5-88303-069-6, Izdatelskiy centr SPbGMTU, 1997.
- [112] Hedrih (Stevanović) K., (1997), *Energetic Analysis of Oscillatory Processes and the Modes in Nonlinear Systems*, Solid Mechanics, Serbian-Greek Symposium 1997, Scientific Meetings of the Serbian Academy of Sciences and Arts, Department of Technical Sciences, SANU Belgrade, vol. LXXVII., Book. 3, pp. 137-146.
- [113] Hedrih (Stevanović) K., (1988), *Izabrana poglavlja teorije elastičnosti*, II izdanje prošireno i dopunjeno, Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu, Niš, 1988. (in Serbian)
- [114] Hedrih (Stevanović) K., (1984), *Nelineynie krutilĀnie kolebaniĀ konsolĀnogo vala s diskom (Nonlinear Torsional Vibrations of the Cantilever Shaft with Disc)*, Multi-Monograph Edition

- ICNO: The IX th International Conference on Nonlinear Oscillations, Edited By Yu. A. Mitropolskiy, Vol. 3. Application of the Theory of Nonlinear Oscillations, Kiev 1984. pp.
- [115] Hedrih (Stevanović) K., (1984), *Nelinearne torzijske oscilacije vratila sa diskovima na krajevima (Nonlinear Torsional Vibrations of the Shaft with Discs on the Both Ends)*, Zbornik radova, Nova serija, knjiga 4 (12), Matematički institut SANU, Beograd 1984, str. 81-90, Zbornik posvećen radu akademika Tatomira Andelića.
- [116] Hedrih (Stevanović) K., (1984), *Multi frequency Forced Vibrations of Thin Elastic Shells with a Positive Gauss's Curvature and Finite Displacements*, Kurzfassungen Abstracts der wissenschaftlichen Jahrestagung GAMM, Regensburg 1984. p.I-12. Programm p.36.
- [117] Hedrih (Stevanović) K., (1981), *Nonlinear Differential Equations of the Surface of Thin Board (Plate)*, Abstracts, Section 3., GAMM, Mittellungen, Heft 1, Marz 1981. p.69.
- [118] Hedrih (Stevanović) K., (1981), *Jednofrekventne transversalne oscilacije pravougaone tanke ploče od materijala nelinearnog zakona elastičnosti (One-frequency transversal oscillations of thin rectangular plate with nonlinear constitutive material stress-strain relations)*, Zbornik, XV Jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanieue JDM, Kupari, 1981. str.
- [119] Hedrih (Stevanović) K., (1979), *Nonlinear Transversal Vibrations of Plate with Special Analysis of Influence of Weak Nonlinear Boundary Conditions*, Abstracts XVI th Mid West Mechanics Conference, Manhattan, Kansas, 1979.
- [120] Hedrih (Stevanović) K., *Rešeni ispitni zadaci iz Teorije oscilacija, (Solved Examine Tasks of Theory of Oscillations)*, Mašinski fakultet u Nišu, prvo izdanje 1978, drugo izdanje 1988; str. 282.
- [121] Hedrih (Stevanović) K., (1978), *One-frequency Proper Nonlinear Vibrations of Thin Plate*, Theoretical and Applied Mechanics, No. 4, 1978., pp. 51-65.
- [122] Hedrih (Stevanović) K., (1978), *One-frequency Nonlinear Forced Vibrations of Uniform Beams*, Theoretical and Applied Mechanics, No. 4, 1978., pp. 39-50.
- [123] Hedrih (Stevanović), K., (1977), *Study of Methods of Nonlinear Vibrations Theory (in Serbian), Poligraphy*, Faculty of Mechanical Engineering, Niš, Preprint issued on 10 examples-1977., p.500 for Researchers at Projects and Postgraduate Students at Faculty of Mechanical Engineering Niš).(Reviuers NNV MFN: V. Vujičić and Lj. Radosavljević (1986) and unknown supervisors OZN Niš (1981)).
- [124] Hedrih (Stevanović), K., (1975), *Selected Chapters from Theory of Nonlinear Vibrations (in Serbian)*, Faculty of Mechanical Engineering, Niš, First Edition 1975., p. 180. (Second Edition as Preprint issued on 10 examples-1977., p.500 for researchers and postgraduate students at Faculty of Mechanical Engineering Niš).
- [125] Hedrih (Stevanović) K., (1975), *Primena energijske interpretacije asimptotske metode na izučavanje nelinearnih oscilacija elastičnih tela - Energijska analiza oscilatornih kretanja elastičnih tela (Application of the Asymptotic Method for study of the Elastic Bodies Nonlinear Oscillations – Energetic Analysis of the Elastic Bodies Oscillatory Motions)*, Doktorska disertacija- Doctoral Ph. D Dissertation), Mašinski fakultet, Niš, 1975., str. 331., Biblioteka MF Niš. Komisija za odbranu doktorata: akademik Tatomir P. Andjelić, prof. dr Veljko A. Vujičić, prof. dr Jurij Korobov. Mentori (Supervision) Prof. dr. Ing. Math Danilo P. Rašković (Yugoslavia) i akademik Yuriy Alekseevich Mitropolskiy (Ukraine).
- [126] Hedrih (Stevanović) K., (1975), *Oscilacije tanke pravougaone ploče pod uticajem aksijalnih periodičkih sila u njenoj središnjoj ravni*, Zbornik radova Mašinskog fakulteta u Nišu, 1975., str. 4.1-4.99.
- [127] Hedrih (Stevanović) K., (1974), *Nestacionarne oscilacije pravougaone tanke ploče, 12th Yugoslav Congress of Rational and Applied Mechanics*, Ohrid, Vol.4, pp. 51-65, 1974.
- [128] Hedrih (Stevanović) K., (1974), *Nestacionarne oscilacije pravougaone tanke ploče, (Nonstationary Vibrations of Thin Rectangular Plate)*, Zbornik radova XII jugoslovenskog kongresa teorijske i primenjene mehanike, Ohrid, 1974, C2. str. C2.12.1-11.

- [129] Hedrih (Stevanović) K., (1973), *Popere~nie kolebaniÓ balki, le`aÈeyna uprugom osnovanii nahodÓÈeysÓ pod vozdeystviem vozmuÈeysÓ sili s neskol`Akimi garmonikami ~astotami bliskimi pervoy sobstvennoy (Transversal Vibration Beam on the Elastic Foundation uned the Action of the Multi-Frequencies Forces with Frequencies form First Frequency Resonant Range of the Beam)*, Matemati~eskaÓ fizika, vip.13, Kiev, 1973, str. 161-181.
- [130] Hedrih (Stevanović) K., (1972), *Dvuh~astotnie nestacionarnie v`Anu`denie kolebaniÓ balki (Two-Frequencies Forced Nonstationary Vibrations of the Beam)*, Matemati~eskaÓ fizika, vip. 12, Kiev, 1972, str. 127-140. Paper cited (quoted) in Monograph: *Yu.A.Mitropolskiy and B.I.Moseenkov: Asimptoti~eskie rešenja uravneniy v časnih proizvodnih*, Kiev 1976, (Listed under No. 139).
- [131] Hedrih (Stevanović) K., Filipovski A., (2002), *Longitudinal Vibration of a Fractional Derivative Order Rheological Rod with Variable Cross Section*, Facta Universitatis, Series Machanics, Automatic Control and Robotics, Vol. 3 No. 12, 2002. pp.327-350. YU ISSN 0534-2009.
- [132] Hedrih (Stevanović) K. and Gadžić S., (2007), *On a model of the material particle dynamics and of inert mass depending of velocity*, Tensor, , N.S., Vol. 68, No. 1 (2007) pp.51645. #8
- [133] Hedrih (Stevanović) K., i Predrag Kozić, *Teorija oscilacija - Zbirka rešenih ispitnih zadataka - II deo, (Theory of Oscillations – Solved examine tasks)*, Mašinski fakultet u Nišu (predato u štampu 1995, oštampano 1997), str. 450.
- [134] Hedrih (Stevanović) K., Kozić P., Pavlović R., (1997), *The Influence of the Transversal Dimensions on the Propagation Velocity of the Longitudinal Wave-Lengths in an Axissymmetrical Body*. Facta Universitatis, seria Mechanics, Automatic Control and Robotics 1997, Vol. 2. No 7-2, pp. 465 - 470.
- [135] Hedrih (Stevanović) K., Kozić P., Pavlović R., (1984), *O uzajamnom uticaju harmonika u nelinearnim sistemima sa malim parametrom (On the Mutual Influence between Modes in Nonlinear Systems with Small Parameter)*, Zbornik radova, nova serija, knjiga 4 (12), Matematički institut SANU, Beograd 1984, str. 91-102, Zbornik posvećen radu akademika Tatomira Anđelića.
- [136] Hedrih (Stevanović) K., Mitić S., K., Pavlović R., Kozić P., (1986): *Stationary and Nonstationary Four-frequency Analysis of Forced Vibrations of Thin Elastics Shell with initial Deformations*, Theoretical and Applied Mechanics, Beograd, 12, pp 33-40, 1986. UDK 624.07.
- [137] Hedrih (Stevanović) K. and Mitić Sl., "Dvofrekventne oscilacije plitke ljske sa konacnim deformacijama i uzajamni uticaj harmonika," in: *Nelinearni Problemi Dinamike [in Serbian]*, Arandjelovac (1983), pp. 197–203.
- [138] Hedrih (Stevanović) K., Perić Lj., Mančić D., Radmanović M.: *Problemi naprezanja pravougaone piezokeramičke ploče sa poprečnom polarizacijom bez elektroda*, ETRAN-Bukovačka banja, 4-4. juna 2001, Zbornik radova sveska II. str. 314-317
- [139] Hedrih (Stevanović) K., and Rašković D., (1974), *Investigation of Multi-frequencies Vibrations in single-frequency regime in Nonlinear Systems with Many Degrees of the Freedom and with Slowchanging Parameters*, Journal Nonlinear Vibrations Problems – Zagadnenia dragan nelineiowicz" No. 15., 1974. Warsaw, pp. 201-202.
- [140] Hedrih (Stevanović) K., **Simonović J.**, (2010), *Non-linear dynamics of the sandwich double circular plate system*, Int. J. Non-Linear Mech, Volume 45, Issue 9, November 2010, Pp. 902-918, ISSN: 0218-1274
- [141] Hedrih (Stevanović) K., **Simonović J.**, (2010), *Influence of nonlinearity in energy transfer of double circular plate system*, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 21 br. 10, str. 2993-3011
- [142] Hedrih (Stevanović) K., **Simonović J.**, (2010), *Multi-frequency analysis of the multicircular plate system nonlinear dynamics*, THIRTEENTH CONFERENCE on NONLINEAR VIBRATIONS, DYNAMICS, AND MULTIBODY SYSTEMS, May 23-27, 2010, The Inn at Virginia Tech and Skelton Conference Center Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA 24061. CD – Hedrih, pp. 1- 2. <http://www.esm.vt.edu/~anayfeh/>, <https://www.cpe.vt.edu/nonlinvib/>

- [143] Hedrih (Stevanović) K., **Simonović J.**, (2010), *Models of Hybrid Multi-Plates Systems Dynamics*, The International Conference-Mechanical Engineering in XXI Century, Niš, Serbia, 25-26 September 2010, Proceedings, pp.17-20.
- [144] Hedrih (Stevanović) K., **Simonović J.**, (2009), Energy transfer throught the double circular plate nonlinear system dynamics, 10th CONFERENCE on DYNAMICAL SYSTEMS THEORY AND APPLICATIONS, December 7-10, 2009. Łódź, Poland, pp.221-228
- [145] Hedrih (Stevanović) K., **Simonović J.**, (2009), *Energy transfer throught the double circular plate nonconservative system dynamics*, 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference J. Ambrósio et.al. (eds.), Lisbon, Portugal, September 7-11, 2009
- [146] Hedrih (Stevanović) K. and **Simonović J.**, (2009), *Energy Analys of the Double Circular Plate System* , Proceedings, 2nd International Congress of Serbian Society of Mechanics (IConSSM 2009), Palić (Subotica), Serbia, 1-5 June 2009, pp. 1-16
- [147] Hedrih (Stevanovic) K. and **Simonović J.**, (2008), *Transversal Vibrations of a Double Circular Plate System with Visco-elastic Layer Excited by a Random Temperature Field*, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 9(1), 47-50, 2008, ©Freund Publishing House Ltd.
- [148] Hedrih (Stevanović) K., **Simonović J.** , (2008), Non-linear dynamics of the sandwich double circular plate system, The Euromech Colloquium 498 Nonlinear Dynamics of Composite and Smart Structure (NDCS) -Nonlinear Dynamics and Chaos of Composite and Smart Structures (NDCS), May 21-23, 2008, Kazimierz Dolny, POLAND. Lublin 2008, pp. 170-175.
- [149] Hedrih (Stevanovic) K. and **Simonović J.**, (2007), *Transversal Vibrations of a non-conservative double circular plate system*, FACTA UNIVERSITATIS Series: Mechanicc, Automatic Control and Robotics, VOL. 6, N^o 1, 2007, PP. 316 - 64
- [150] Hedrih (Stevanovic) K. and **Simonović J.**, (2007), *Dynamical Absorption and Resonances in the Sandwich Double plate System Vibration with Elastic layer*, Scientific Technical Review, YUISSN 1820-0206, N^o 2, 2007 , pp.1-10.
- [151] Hedrih (Stevanović) K. and **Simonović, J.**, (2007), *Forced vibrations of the double circular plate system with viscoelastic layer*, Proceedings First International Congress of Serbian Society of Mechanics, 10-13 April, 2007, pp. 299-306.
- [152] Hedrih (Stevanović) K. and **Simonović J.**, (2006), *Characteristic Eigen Numbers and Frequencies of the Transversal Vibrations of Sandwich System*, SEECCM 06 –First South-East European Conference on Computational Mechanics, Proceedings, Editors – M. Kojic and M Papadrakakis, Kragujevac, pp. 90-94. + CD. [hppt://www.seeccn.kg.ac.yu](http://www.seeccn.kg.ac.yu). ISBN 86-81037-13-7, COBISS.SR-ID 131758092, udc 531/533(082)
- [153] Hedrih (Stevanovic) K. and **SimonovićJ.**, (2006), *Free transversal vibrations of a double circular plate system*, 6th European Solid Mechanics Conference (ESMC2006) Budapest, 28 August – 1 September 2006, Extended Abstarcts on Cd, no. 164_072.
- [154] *Hedrih (Stevanovic) K. and Simonović J.*, (2006), *Free transversal vibrations of a double circular plate system*, predavanje na seminaru Odeljenja za mehaniku u Matematičkom institutu SANU, Belgrade, maj 2006.
- [155] Hedrih (Stevanović) K. and **Simonović J.**, (2003), "Nonlinear phenomena in the dynamics of a car model," Facta Univ., Ser. Mech.,Automat. Contr. Rob., **3**, No. 14, 865–879 (2003).
- [156] Hedrih (Stevanović) K. and **Simonović J.**, (2002) *WEB Presentation of the subject Elastodynamics* , Faculty of Mechanical Engineering (Program predmeta, Spisak literature, Tekstovi 50 originalnih zadataka K. Hedrih iz Teorije elastičnosti, tekstovi originalnih ispitnih zadataka pismenih delova ispita iz ispitnih rokova u periodu mart 2000 – mart 2002 sa rešenjima zadataka iz Teorije oscilacija (Elektronsko izdanje zbirke ispitnih zadataka)). www.masfak.ni.ac.yu/ studije/ zajednicki predmeti trece godine/ elastodinamika
- [157] Hedrih (Stevanović) K. and **Simonović J.**, (2001), *Visualization of Oscillatory Processes in Discrete and Continuous Systems*, Eng-3., Section: Engineering Sciences, Introductory Lecture, Vive Math, Book of Abstracts, Workshop on Visualization and Verbalization of mathematics and

- Interdisciplinary Aspects, 14-15 December 2001, Financed by BMBF (The German Federal Ministry of Education and research) Faculty of Sciences and Mathematics, Niš, p.Eng-3.
- [158] Hedrih (Stevanović) K. and **Simonović J.**, (2000) *WEB Presentation of the subject Elastodynamics*, Faculty of Mechanical Engineering (Program predmeta, Spisak literature, Tekstovi 50 originalnih zadataka K. Hedrih iz Teorije elastičnosti, tekstovi originalnih ispitnih zadataka pismenih delova ispita iz ispitnih rokova u periodu mart 2000 – mart 2002 sa rešenjima zadataka iz Teorije oscilacija (Elektronsko izdanje zbirke ispitnih zadataka)). www.masfak.ni.ac.yu/studije/zajednicki/predmeti/tece/godine/elastodinamika
- [159] Hedrih (Stevanović) K. and Veljović Lj., *Nonlinear dynamics of the heavy gyro-rotor with two rotating axes*, Facta Univ., Ser. Mech., Automat. Contr. Rob., 4, No. 16, 55–68 (2004).
- [160] Hirsch M.W. and Smale S., (1974), *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York
- [161] Hollkamp J J., (1994), *Multimodal passive vibration suppression with piezoelectric materials and resonant shunts*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 5, pp.49–56
- [162] Holmes P., (2005), *Ninety plus thirty years of nonlinear dynamics: More is different and less is more*, Opening Lecture, ENOC-2005, Eindhoven, Netherlands, 7-12 August 2005
- [163] Holmes C. And Holmes P.J., (1981), *Second order averaging and bifurcations to subharmonics in Duffing's equation*, J.Sound Vib.,78, pp. 161-174.
- [164] Hramov A. E., Koronovskii A. A., Moskalenko O. I., (2009), *Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators?*, Physics Letters A, Preprint submitted to Physics Letters A, 8 February 2008
- [165] Hunt E. R., (1991), 'Stabilizing high-periodic orbits in a chaotic system: The diode resonator', Physical Review Letters 67, 1991, 1953–1955
- [166] Hunt L.R., Renjeng, S., Meyer, G., (1983), *Global transformations of nonlinear systems*. IEEE Trans Automat Control 28(1), pp.24–31,(1983)
- [167] Janevski G., (2002), *Nelinearne oscilacije ploča od kompozitnih materijala*, Magistarska teza, Niš, decembar 2002.
- [168] Janković, V. S., Potić, V. P. i Hedrih (Stevanović), K., *Parcijalne diferencijalne jednačine i integralne jednačine sa primenama u inženjerstvu (Partial differential equations and integro-differential equations with examples in engineering)*, Univerzitet u Nišu, 1999, str. 347. (in Serbian).
- [169] Jankowski, K., ElMaragfy, H., ElMaragfy, W., (1993), *Dynamic coordination of multiple robot arms with flexible joints*. Int J Robot Res 12(6), pp.505–528, (1993)
- [170] Jinhao QIU, Hongli JI, Kongjun ZHU, (2009), *Semi-active vibration control using piezoelectric actuators in smart structures*, Front. Mech. Eng. China 2009, 4(3), pp. 242–251, © Higher Education Press and Springer-Verlag 2009, DOI 10.1007/s11465-009-0068-z
- [171] Kapitaniak, T., (1994). *Synchronization of chaos using continuous control*. Phys. Rev. E, No. 50 /2, pp. 1642-1644
- [172] Karabalin R.B., Cross M.C., and Roukes M.L., (2009), *Nonlinear dynamics and chaos in two coupled nanomechanical resonators*, Phys. Rev. B 79, 165309
- [173] Kaulakys B., Vektaris G., (1995), *Transition to nonchaotic behavior in a brownian-type motion*, Phys. Rev. E 52 (2), (1995), pp. 2091–2094
- [174] Kenig E., Tsarin Y. A., and Lifshitz R., (2010), *Homoclinic orbits and chaos in a pair of parametrically-driven coupled nonlinear resonators*, submitted July 22, 2010.
- [175] Korn G., Korn T., (1984), *Matematikal Handbook for Scientists and Engineers*. Nauka, Moscow (1984) (in Russian)
- [176] Kostelich E.J., Grebogi G., Ott E., Yorke J.A., *High dimensional targeting*, Phys. Rev. E 47, (1993), pp. 305 310

- [177] Kovačić G. and Wiggins S., (1992), *Orbits homoclinic to resonances with an application to chaos in a model of the forced and damped Sine-Gordon equation*, Physica D 57, pp.185-225
- [178] Kowalewski S., Preußig J., (1996), *Verification of sequential controllers with timing functions for chemical processes*, Preprints IFAC 13th World Congress, vol. J, San Francisco, USA, 1996, pp. 419-424
- [179] Labinaz G. , Bayoumi M.M, Rudie K., (1997), *A Survey of Modeling and Control of Hybrid Systems*, A. Rev. Control, Vol. 21, pp. 19-92, 1997, © International Federation of Automatic Control 1997, Printed in Great Britain. All rights reserved, 1367-5788/97
- [180] Lenci S. and Rega, G.,(2004), *'A unified control framework of the nonregular dynamics of mechanical oscillators'*, *J. Sound Vibr.*, 278, pp. 1051-1080, 2004.
- [181] Lenci S. and Rega G., (2003), *Optimal Control of Nonregular Dynamics in a Duffing Oscillator*, *Nonlinear Dynamics* 33: 71–86, 2003. © 2003 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands
- [182] Lenci S. and Rega, G.,(2003), *'Optimal control of homoclinic bifurcation: Theoretical treatment and practical reduction of safe basin erosion in the Helmholtz oscillator'*, *Journal of Vibration and Control* 9, 2003, 281–316
- [183] Lenci S. and Rega, G., (1998), *'A procedure for reducing the chaotic response region in an impact mechanical system'*, *Nonlinear Dynamics* 15, 1998, 391–409.
- [184] Lenci S. and Rega, G., (1988), *'Controlling nonlinear dynamics in a two-well impact system. Parts I and II'*, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 8, 1988, 2387–2424.
- [185] Leung A.Y.T., Chen Ji J. and Chen G., (2004), *Resonance Control for a Forced Single-Degree-of-Freedom Nonlinear System* , *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 14, No. 4 (2004), pp. 1423-1429, © World Scientific_ Publishing Company
- [186] Li C.B. Soh and X. Xu, *Stability of hybrid dynamic systems*, In Proc. of the 9th Asian Control Conference, Seoul, Korea, 1997, pp. 105-108
- [187] Liberzon D., *Switching in Systems and Control*, Berlin:Springer, 2003
- [188] Lindsey, W., *Synchronization Systems in Communications and Control*, Englewood Cliff: Prentice Hall, 1972. Translated under the title *Sistemy sinkhronizatsii v svyazi i upravlenii*, Moscow: Mir, 1978.
- [189] Ling Z., Ronglu X., El-Sabbagh A., (2010), *Topology optimization of constrained layer damping on plates using Method of Moving Asymptote (MMA) approach*, *Shock and Vibration*.
- [190] Longa L., Curado E.M.F., Oliveira F.A., (1996) , *Roundoff-induced coalescence of chaotic trajectories*, *Phys. Rev. E* 54 (3),(1996), pp. 2201–2204
- [191] Lumentut M.F., Teh K.K. and Howard I., (2006), *Computational FEA Model of a Coupled Piezoelectric Sensor and Plate Structure for Energy Harvesting*, WCEAM 2006 Paper 154 , Pp 1-10
- [192] Makihara K, Onoda J, Minesugi K. (2005), *Low-Energy-Consumption hybrid vibration suppression based on an energy-recycling approach*. *AIAA Journal*, 43(8), pp. 1706–1715
- [193] Mančić D., (1995), *Projektovanje i optimizacija snažnih ultrazvučnih pretvarača i generatora*, Magistarska teza, Univerzitet u Nišu Elektronski fakultet, 1995 god.
- [194] Maritan A., Banavar J.R., (1994), *Chaos, noise and synchronization*, *Phys. Rev. Lett.* 72 (10), (1994), pp. 1451–1454.
- [195] Matveev S., Savkin A.V., *Limit Cycles in Switched Single-Server Flow Networks*, *Applied Mathematics Letters* 15, (2002), pp. 251-256, PERGAMON, 2002 Elsevier Science Ltd.
- [196] Matveev A.S. and Savkin A.V., *Qualitative theory of hybrid dynamical systems*, BirkhKauser, Boston, 2000, ISBN: 0-8176-4141-6
- [197] Matveev A.S., Savkin A.V., *Cyclic linear differential automata: A simple class of hybrid dynamical systems*, *Automatica* 36 (5), 727-734 (2000)

- [198] Matveev A.S., Savkin A.V., *Existence and stability of periodic trajectories in switched server systems*, Automatica 36 (5), 775-779 (2000)
- [199] Melin S. et al., (2008), *Smart structures and their applications on active vibration control: Studies in the Department of Aerospace Engineering*, Middle East Technical University (METU), Ankara, Turkey, Journal of Electroceram 20, pp.167–174, DOI 10.1007/s10832-007-9130-6
- [200] Mitropolyskiy Yu. A., (1995), *Nelinyeynaya mehanika-Asimptoticheskie metodi*, Institut matematiki NAN Ukraini, Kiev, pp. 397. (in Russian).
- [201] Mitropolskiy Yu.A. and Moseenkov B.I., (1976), *Asymptotic solutions of the Partial Differential Equations*, Kiev 1976. (in Russian)
- [202] Mitropolyskiy, Yu.A., (1964), *Problemi asimptoticheskoy teorii nestashionarnih kolebaniy*, Nauka Moskva, pp. 431.
- [203] Mitropolyskiy Yu. A., (1955), *Nestashionarnie proshesi v nelinyeynih kolebatelnyh sistemah*, AN USSR, Kiev, pp.280.
- [204] Moon F. C., *Chaotic and Fractal Dynamics. An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, Wiley, New York, 1992
- [205] Moon, F. C., Johnson, M. A., and Holmes, W. T., ‘Controlling chaos in a two-well oscillator’, International Journal of Bifurcation and Chaos 6, 1996, 337–347
- [206] Moraal P.E., Grizzle J.W., (1995), *Observer design for nonlinear systems with discrete-time measurements*, IEEE Trans. Automat. Control 40 (1995), pp. 395-404.
- [207] Murata T., (1989), *Petri nets: properties, analysis, applications*, Proceedings of the IEEE, vol. 77, 1989, pp. 541-580
- [208] Nayfeh A. H., (2000), *Nonlinear Interactions: Analytical, Computational, and Experimental Methods*, Wiley, 2000
- [209] Nayfeh, A. H., (1996), Transfer of energy from high-frequency to Low-frequency modes, Book of Abstracts, *The Second International Conference "Asymptotics in Mechanics" St. Petersburg Marine Technical University, Russia*, 13-16 October, 1996, pp. 44.
- [210] Nayfeh A. H., (1993), Transfer of energy from high-frequency to low frequency modes, Paper and Poster Abstracts, IUTAM Symposium Nonlinearity and chaos in engineering dynamics, Centre NDA UCL London 1993.
- [211] Nayfeh A. H. and Frank P. P., (2004), *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*, Wiley Interscience, 2004
- [212] Nayfeh A.H and Mook D.T, (1979), *Nonlinear Oscillations*, Wiley, New York
- [213] Nestorović T., Trajkov M.,(2010), *Active Control of Smart Structures-an Overall Approach*, Vol.7, Facta Universitatis Series Architecture and Civil Engineering, Vol.8, No 1, 2010 pp. 35 - 44, UDC624.01:519.711(045)=111, DOI: 10.2298/FUACE1001035N
- [214] Nestorović T., Gabbert U.,(2007), *Subspace-Based Frequency Analysis of a Smart Acoustic tructure*, Vol.7, Facta Universitatis Series Mechanics, Automatic Control and Robotics, Vol. 6 No 1, 2007 Special Issue, 2007 pp. 209-220, UDC 534.1:534.84(045)=111
- [215] Osipov, G., Glatz, L., and Troger, H., ‘Suppressing chaos in the Duffing oscillator by impulsive actions’, Chaos, Solitons and Fractals 9, 1998, 307–321
- [216] Ott E., Grebogi, C., and Yorke, J., *Controlling Chaos*, Phys. Rev. Lett., 1990, vol. 64 (11), pp. 1196-1199.
- [217] Pantelides C.C.,(1995), *Modeling, simulation and optimisation of hybrid processes*, Proceedings Workshop Analysis and Design of Event-Driven Operations in Process Systems, Imperial College, London, 1995
- [218] Park S., Tan C.-Woo, Kim H. and Hong S. K., (2009), *Oscillation Control Algorithms for Resonant Sensors with Applications to Vibratory Gyroscopes*, Sensors 2009, 9, 5952-5967; doi:10.3390/s90805952

- [219] Perkins J.R. and Kumar P.R., *Stable, distributed, real-time scheduling of flexible manufacturing/assembly/ disassembly systems*, IEEE Trans. Automat. Control 34 (2), 139-146 (1989).
- [220] Pecora, L.M., Carroll, T.L., Johnson, G.A., and Mar, D.J., *Fundamentals of Synchronization in Chaotic Systems, Concepts and Applications*, *Chaos*, 1997, vol. 7, no. 4, pp. 520-543
- [221] Pecora, L. and Carroll, T., *Synchronization in Chaotic Systems*, Phys. Rev. Lett., 1990, vol. 64, pp. 821-824.
- [222] Perić Lj., (1992), Prostorna analiza naponskog i deformacionog stanja napregnutog piezoelektričnog materijala, Magistarska teza, Univerzitet u Nišu Mašinski fakultet, 1992 god.
- [223] Perlikowski P., Stefański A., Kapitaniak T., (2008), *1:1 Mode locking and generalized synchronization in mechanical oscillators*, Journal of Sound and Vibration No.318, (2008), pp. 329–340, © 2008 Elsevier Ltd. All rights reserved. doi:10.1016/j.jsv.2008.04.021
- [224] Perlikowski P., Stefański A., (2006), *Synchronization of coupled mechanical oscillators*, Mechanics and Mechanical Engineering No. 10, (2006), pp. 110–116
- [225] Petrović M., (1933), Fenomenološko preslikavanje Phenomenological map), Srpska kraljevska akademija, Beograd, 1933. str. 33.
- [226] Petrović M., (1933), Elementi matematičke fenomenologije (Elements of mathematical phenomenology), Srpska kraljevska akademija, Beograd, 1911. str. 89.
- [227] Pikovsky A.S., (1994) ,*Comment on “chaos, noise, and synchronization”*, Phys. Rev. Lett. 73 (21), (1994), p. 2931
- [228] Pikovsky A. S., (1984), "On the interaction of strange attractors," Z. Phys. B: Condens. Matter 55, pp. 149–155
- [229] Pinto, O. C. and Gonçalves, P. B.,(2000), 'Non-linear control of buckled beams under step loading', Mechanical Systems and Signal Processing 14, 2000, 967–985.
- [230] Pinto, O. C. and Gonçalves, P. B., (2002), 'Active non-linear control of buckling and vibrations of a flexible buckled beam', Chaos, Solitons and Fractals 14, 2002, 227–239.
- [231] Pyragas K., *Weak and strong synchronization of chaos*, Phys. Rev. E 54 (5) ,(1996), pp. 4508–4511
- [232] Pyragas K., (1992), *Continuous control of chaos by self-controlling feedback*, Physics Letters A Volume 170, Issue 6, 23 November 1992, Pages 421-428
- [233] Rabotnov, Yu.N., (1977), *Elements of Hereditary Mechanics of Solids*, Moscow, Nauka (in Russian).
- [234] Paul Raj S., S. Rajasekar , K. Murali, (1999), Coexisting chaotic attractors, their basin of attractions and synchronization of chaos in two coupled Duffing oscillators, Physics Letters A 264 , 1999., pp. 283–288, ©1999 Published by Elsevier Science B.V. All rights reserved
- [235] Paul Raj S., Rajasekar S.,(1997), *Migration control in two coupled Duffing oscillators*, Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics, Volume 55, Issue 5 SUPPL. B, May 1997, pp. 6237-6240
- [236] Ramadorai, A., Tarn, T., Bejczy, A., (1992) , *Task definition, decoupling and redundancy resolution by nonlinear feedback in multirobot object handling*. In: Proceedings of IEEE Conference on Robotics and Automation, Nice, France, pp. 467–474 (1992)
- [237] Rašković, D., (1985), *Teorija elastičnosti (Theory of Elasticity)*, Naučna knjiga, 1985, 414
- [238] Rašković, D., (1965), *Teorija oscilacija, (Theory of Oscillations)*, Naučna knjiga, 1965, 503.(in Serbian).
- [239] Rega G. and Lenci S., (2005), *Identifying, Evaluating, and Controlling Dynamical Integrity Measures in Nonlinear Mechanical Oscillators*, Nonlinear Analysis No 63, (2005), pp. 902 – 914,© 2005 Elsevier Ltd. All rights reserved. doi:10.1016/j.na.2005.01.084

- [240] Reizina G. N., Korobko E. V, Bilyk V. A., Efremov V. L and Binshtok A. E., (2009), *Optimal control of transient processes in an oscillating system with an electrorheological shock-absorber*, 11th Conference on Electrorheological Fluids and Magnetorheological Suspensions, Journal of Physics: Conference Series 149 (2009) 012025, © 2009 IOP Publishing Ltd, doi:10.1088/1742-596/149/1/012025
- [241] Richard C, Guyomar D, Audigier D, Ching G.(1998), *Semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device*. In: Proceedings of the SPIE Smart Structures and Materials Conference: Passive Damping and Isolation, San Diego, 1998, 3672, pp.104–111
- [242] Romeiras F.J., Grebogi G., Ott E., Dayawansa W.P., (1992), *Controlling chaotic dynamical systems*, Physica D 58, (1992), pp. 165-192.
- [243] Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., and J. Kurths, (1996), *Phase Synchronization of Chaotic Oscillators*, Phys. Rev. Lett. No. 76, pp. 1804–1807, (1996), © 1996 The American Physical Society , DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.1804
- [244] Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I., (1995), *Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems*, Phys. Rev. E 51 (2), (1995), pp. 980–994
- [245] Rzhansitsin A.R., (1949), *Some Questions of the Mechanics of Deforming in time Systems.*, Moscow, GTTI (inRussian). 1949, pp. 248
- [246] Savin G. N., Ruschisky Yu. Ya., (1976), *Elements of Hereditary Media Mechanics*, Kyiv, Vyscha shkola (in Ukrainian), pp.250.
- [247] Savkin A.V., Somlo J., *Optimal distributed real-time scheduling of flexible manufacturing networks modeled as hybrid dynamical systems*, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing 25(2009), pp. 597–609, © 2008 Published by Elsevier Ltd. doi:10.1016/j.rcim.2008.04.004
- [248] Savkin A. V., Matveev A. S, Rapajic P.B., *The medium access control problem for wireless communication networks modelled as hybrid dynamical systems*, Nonlinear Analysis 62 (2005), pp. 1384 – 1393, 2005 Elsevier Ltd. All rights reserved.
- [249] Savkin A. V., Petersen, I. R., Skafidas, E., & Evans, R. J. (1996). *Hybrid dynamical systems: Robust control synthesis problems*. Systems and Control Letters, 29(2), 81-90. Copyright © 1996 Elsevier Science B.V. All rights reserved. PH S0167-6911(96)00040-0
- [250] Sage A.P., White III C.C, (1977), *Optimum Systems Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N J, 1977
- [251] Van der Schaft A., and H. Schumacher, *An introduction to hybrid dynamical systems*, LNCIS 251, Springer, Berlin, 2000, ISBN 1-85233-233-6
- [252] Schlacher K. and Kugi A., (2002), *Control of mechanical structures by piezoelectric actuators and sensors* , Stability and Stabilization of Nonlinear Systems , Lecture Notes in Control and Information Sciences, 1999, Volume 246/1999, pp. 275-292, DOI: 10.1007/1-84628-577-1_15
- [253] Schöll E. and Schuster H. G. (Eds), (2007) , *Handbook of Chaos Control* Wiley-VCH; 2nd Revision, Enlarged edition (2007) Weinheim
- [254] Shakhgil'dyan V.V. and Lyakhovkin, A.A., *Sistemy fazovoi avtopodstroiki chastoty (Systems of Automatic Phase Frequency Control)*, Moscow: Radio i Svyaz', 1978
- [255] Shilnikov L. P. [1967] *The existence of a denumerable set of periodic motions in four-dimensional space in an extended neighborhood of a saddle-focus*, Soviet Math. Dokl. 8(1), 54–58.
- [256] Sifakis M. K. and Elliott, S. J., ‘*Strategies for the control of chaos in a Duffing–Holmes oscillator*’, Mechanical Systems and Signal Processing 14, 2000, 987–1002.
- [257] **Simonović J.**, (2010), *Melnikov-ljava funkcija i optimalno upravljanje haotičnim kretanjem sistema sa dva stepena slobode kretanja (pregled savremenih istraživanja)*, predavanje na seminaru Odeljenja za mehaniku u Matematičkom institutu SANU, Belgrade, nov. 2010.
- [258] **Simonović J.**, (2009), *Dinamički sistemi složenih struktura. Svojstva i fenomeni*, predavanje na seminaru Odeljenja za mehaniku u Matematičkom institutu SANU, Belgrade, feb 2006.

- [259] **Simonović J.**, (2008), *Dinamika mehaničkih sistema složenih struktura*, magistrski rad, odbranjen 8 maja 2008., Mašinski fakultet u Nišu, str. 249.
- [260] **Simonović J.**, (2008), *Phenomenon of coupled structures of mechanical systems*, the 22nd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM2008), Book of Abstracts and CD-ROM Proceedings, pp. ,The School of Mathematical Sciences, The University of Adelaide, Australia, ISBN 978-0-9805142-0-9, (vidi WEB ictam2008.adelaide.edu.au).
- [261] **Simonović J.**, (2006), Predavanje na seminaru Nelinearna dinamika - Milutin Milanković: pod nazivom: "90 plus 30 godina nelinearne dinamike: Više je manje, a manje je bolje!!!" i pod mentorstvom profesora dr Katice (Stevanović) Hedrih, 20. april 2006.
- [262] Starobinets I.M., Pikovsky A.S, (1993) , *Multistep method for controlling chaos*, Phys. Lett. A 181, (1993), pp. 149- 152
- [263] Stefański A, Kapitaniak T., (2003) *Synchronization of mechanical systems driven by chaotic or random excitation*, Journal of Sound and Vibration 260, (2003), pp. 565–576
- [264] Stojić, R., Kuljić, R., Živanović, M., (1990), *Airplane path tracking*. Sci Tech Rev XL(8–9), pp.21–28, (1990)
- [265] Sun Z. and. Ge S. S, *Switched Linear Systems: Control and Design*, Berlin:Springer, 2005
- [266] Takens F., (1981), *Detecting strange attractors in turbulence*, in: D.A. Rand, L.S. Young (Eds.), *Dynamical Systems and Turbulence*, vol. 398, Springer, Berlin, 1981, pp. 365-381
- [267] Tanaka G., Tsumotoa K., Tsujia S.,Aiharaa K, (2008), *Bifurcation analysis on a hybrid systems model of intermittent hormonal therapy for prostate cancer*, Physica D 237, (2008), pp.2616–2627, © 2008 Elsevier B.V. All rights reserved
- [268] Tavernini L.,(1987) *Differential automata and their discrete simulators*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications 11, (1987), pp. 665-683
- [269] Taylor J.H., (1995), *Rigorous handling of state events in MATLAB*, Proceedings of the IEEE Conf. on Control Applic., Albany, 1995
- [270] Thompson, J.M.T., (1989), *Chaotic Behavior Triggering the Escape from a Potential Well*, Proc. Royal Soc. London A, vol. 421, 195-225, 1989.
- [271] Tseng, W.-Y. and Dugundji, J., (1971) 'Nonlinear vibrations of a buckled beam under harmonic excitation', *ASME, Journal of Applied Mechanics* 38, 1971, 467–476
- [272] Tsymbalenko V. L., (2009), *A Digital Oscillation-Amplitude Stabilizer*, ISSN 0020-4412, Instruments and Experimental Techniques, 2009, Vol. 52, No. 3, pp. 430–432. © Pleiades Publishing, Ltd., 2009. Original Russian Text © V.L. Tsymbalenko, 2009, published in Pribory i Tekhnika Eksperimenta, 2009, No. 3, pp. 129–131
- [273] Ueda Y., Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation, *Journal of Statistical Physics*, 20, 181-196, 1979.
- [274] Ueda Y., Explosion of strange attractors exhibited by Duffing's equation, In *Nonlinear Dynamics*, R.H.G. Helleman (ed.), 422-434, New York Academy of Science, 1980.
- [275] Vakakis A.F., Kerschen G., Lee Y.S., McFarland D.M, Bergman L.A., Irreversible passive energy transfer in coupled oscillators with essential nonlinearity, *SIAM Journal on Applied Mathematics* (2005), in press (Sections 1, 2.1, 2.2).
- [276] Vakakis A.F., Gendelman O., Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: Part II—resonance capture, *Journal of Applied Mechanics* 68 (2001) 42–48 (Sections 1, 2.1, 8).
- [277] Vakakis A.F., McFarland D.M., Bergman L.A., Manevitch L.I., Gendelman O., *Isolated resonance captures and resonance capture cascades leading to single- or multi-mode passive energy pumping in damped coupled oscillators*, *Journal of Vibration and Acoustics* 126 (2004) 235–244 (Sections 1, 2.1).
- [278] Vukobratović, M.,(1989), *Applied Dynamics of Manipulation Robots*. Springer, Berlin Heidelberg NewYork ,(1989)

- [279] Vukobratović, M., Stojić, R., (1988), *Modern aircraft flight control*. Springer, Berlin Heidelberg New York, (1988)
- [280] Vukobratović, M., Stojić, R., (1987), *A decentralized approach to automatic flight control design*. Bilten XCIII de L'Academie Serbe des Sciences et des Arts, Classe des Sciences Techniques 23, pp. 45–66, (1987)
- [281] Zakrzhevsky M., *New concepts of nonlinear dynamics: complete bifurcation groups, protuberances, unstable periodic infinitiums and rare attractors*, Journal of Vibroengineering JVE, December 2008, Vol. 10, and Issue 4, 421-441.
- [282] Zheng Ling, Xie Ronglu, Adel El-Sabbagh, (2010), *Topology optimization of constrained layer damping on plates using Method of Moving Asymptote (MMA) approach*, Shock and Vibration
- [283] Zhang, W., Zhang, J.H., Yao, M.H., Yao, Z.G., (2010), *Multi-pulse chaotic dynamics of non-autonomous nonlinear system for a laminated composite piezoelectric rectangular plate*. Acta Mech. 211, pp. 23–24, (2010)
- [284] Zhang W., Li S.B., (2010), *Resonant chaotic motions of a buckled rectangular thin plate with parametrically and externally excitations*, Nonlinear Dyn Vol. 62, pp. 673–686, Received: 18 August 2009 / Accepted: 1 June 2010 / Published online: 29 June 2010 © Springer Science+Business Media B.V. 2010
- [285] Zhang W, Gao M J, YAO M H, et al., (2009), *Higher-dimensional chaotic dynamics of a composite laminated piezoelectric rectangular plate*. Sci China Ser G, 2009, 52(12), pp. 1989-2000, doi: 10.1007/s11433-009-0225-8
- [286] Zhang, W., Yao, Z.G., Yao, M.H., (2008), *Periodic and chaotic dynamics of composite laminated piezoelectric rectangular plate with one-to-two internal resonance*. Sci. China Ser. E: Technol. Sci. 52, pp.731–742, Zhang,
- [287] Zhang, W., Wang, F.X., Zu, J.W., (2004), *Computation of normal forms for high dimensional nonlinear systems and application to nonplanar motions of a cantilever beam*. Int.J. Sound Vib. 278, pp.949–974
- [288] Zhou C., Lai C.-H., (1998) , *Synchronization with positive conditional Lyapunov exponents*, Phys. Rev. E 58 (4), (1998), pp. 5188–5191
- [289] Živanović, M., (1997) , *Contribution to the research of multi-arm robots cooperative work*. PhD thesis, Faculty of Tehnical Sciences, Novi Sad (1997) (in Serbian)
- [290] Živanović M. D., Vukobratović M. K., (2006), *A generalized approach to tracking the nominals of mechanical systems* , Arch Appl Mech (2006) No. 75, pp. 125–137, © Springer-Verlag 2005, DOI 10.1007/s00419-005-0424-3
- [291] Živanović M., Vukobratović M., (1997), *General mathematical model of multi-arm cooperating robots with elastic interconnection at the contact*. Trans ASME J Dyn Syst Measure Control 119(4), pp. 707–117, (1997)
- [292] Yagasaki K., (1999), *Periodic and Homoclinic Motions in Forced, Coupled Oscillators*, Nonlinear Dynamics 20, pp. 319–359, © 1999 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands
- [293] Yagasaki K., (1996), *'The Melnikov theory for subharmonics and their bifurcations in forced oscillations'*, SIAM Journal on Applied Mathematics 56, 1996, pp.1720–1765
- [294] Wang K W, Lai J S, Yu W K., (1996), *Energy-based parametric control approach for structural vibration suppression via semi-active piezoelectric networks*. Transaction of ASME, Journal Vibration and Acoustics 115, pp.505–509
- [295] Webster's, (1986), *New Collegiate Dictionary*, Merriam-Webster Inc. Springfield, MA, USA, 1986
- [296] Wiggins S., *Global Bifurcations and Chaos – Analytical Methods*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 73, Springer-Verlag, New York, 1988
- [297] Wonham W., (1967) , *On pole assignement in multi-input controllable linear systems*. IEEE Trans Automat Control 12(6), pp. 660–665, (1967)

Lista oznaka

$x_i(t)$ - generalisana koordinata i -tog podsistema

$\dot{x}_i(t), \frac{dx_i(t)}{dt}$ - izvod po vremenu generalisana koordinata i -tog podsistema

b - koeficijent otporne sile visko-elastičnog elementa sprezanja;

$2\delta_i$ - koeficijent prigušenja visko-elastičnog elementa sprezanja koji odgovara i -tom podsistemu hibridnog sistema;

$\tau = \varepsilon t$ - sporopromenljivo vreme;

ε - mali parameter spore promene parametara dinamičkog sistema sa nelinearnostima;

$\mathcal{F}\left(\tau, x, \frac{dx}{dt}, \theta\right)$ - periodičkim funkcijama po θ perioda 2π ;

$\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau) \approx \omega_{sr}$ - trenutna frekvencija spoljašnje poremećajne sile koja je funkcija sporopromenljivog vremena;

c - koeficijent linearne krutosti elastičnog elementa sprezanja;

\tilde{c} - koeficijent nelinearne krutosti elastičnog elementa sprezanja;

m_i - masa i -tog podsistema spregnutog u hibridni sistem;

$\omega_i^2 = \frac{c_i}{m_i}$ - kvadrat sopstvene kružne frekvencije i -tog podsistema;

$\tilde{\omega}_{N1}^2 = \frac{\tilde{c}_1}{m_1}$ - redukovani koeficijent nelinearnosti nelinearnog elementa;

R_{0i} - početna vrednost amplitude oscilovanja i -tog podsistema;

$R_i(t)$ - funkcija amplitude oscilovanja i -tog podsistema;

$\Phi_i(t)$ - funkcija promene faze oscilovanja posmatranog i -tog podsistema;

$p_i = \sqrt{\omega_i^2 - \delta_i^2}$ - kružna frekvencija oscilovanja i -tog podsistema;

α_{0i} - fazno kašnjenje i -tog podsistema;

\mathbb{R}, \mathbb{R}^n - skup realnih brojeva, n -dimenzini prostor realnih brojeva;

$\phi_i(x), \phi(x, t)$ - tok dinamičkog sistema;

$E_{p(i)}$ - promena potencijalne energije i -tog podsistema;

$E_{p(i,j)}$ - promena potencijalne energije sprezanja i -tog i j -tog podsistema;

$E_{k(i)}$ - kinetička energija i -tog podsistema;

$E_{k(i,j)}$ - kinetička energije sprezanja i -tog i j -tog podsistema;

\mathbf{A} - matrica inercionih koeficijenata;

\mathbf{C} - matrica kvazielastičnih koeficijenata;

\mathbf{B} - matrica koeficijenata prigušenja;

$\mathbf{P}(t)$ - sili uspostavljanja deformisanog stanja standardnog naslednog elementa;

n - vreme relaksacije standardnog naslednog elementa u sekundama definiše umnožavanje sile, toliko puta, naslednim svojstvima elementa, pri konstantnoj deformaciji $y(t) = y_0 = const.$;

\tilde{E} - dugotrajni koeficijent elastičnosti materijala;

c_n, \tilde{c} - koeficijenti trenutne i dugotrajne krutosti naslednog elementa

$\mathbf{R}(t - \tau) = \frac{c - \tilde{c}}{nc} e^{n(t-\tau)}$ - jezgro relaksacije sile (napona) standardnog naslednog elementa;

$\beta = \frac{1}{n}$ - koeficijent relaksacije standardnog naslednog elementa;

- $w_i(x, y, t)$ - transversalno pomeranje tačaka srednje ravni i -te ploče sistema ploča izraženo u Descartes-ovom sistemu kordinata;
- $w_i(x, t)$ - transversalno pomeranje tačaka srednje linije i -te grede;
- γ_{xy} -deformacija klizanja (smicanja) u ravni Oxy ;
- ε_i -dilatacija linijskog elementa u i pravcu;
- σ_i -normalni napon u tački ravni sa normalom u i pravcu;
- τ_{xy} -tangencijalni napon u pravcu y ose za ravan sa normalom u pravcu x ose;
- G - moduo klizanja-smicajni moduo (konstanta torzije);
- E - Joung-ov moduo elastičnosti materijala;
- μ - Poisson-ov koeficijent-koeficijent poprečne (bočne) kontrakcije;
- D_i - savojna krutost i -te ploče sistema ploča (*flexural rigidity of the plate*);
- A -površina poprečnog preseka grede;
- I_x - aksijalni moment inercije površine poprečnog preseka grede za osu savijanja koja je glavna centralna osa inercije poprečnog preseka;
- B_x - savojna krutost grede (krutost na savijanje);
- $q_i(x, y, t)$ -funkcija specifičnog opterećenja ravni i -te ploče izražena u Descartes-ovom sistemu koordinata;
- $\Delta(r, \varphi)$ - Laplace-ov operator izražen preko polarnih koordinata;
- $c_{(i)}^A = D_i / \rho_i h_i$ -redukovana savojna krutost i -te ploče sistema ploča;
- $T_{(i)}(t)$ -vremenska funkcija oscilovanja i -te ploče sistema ploča;
- $W_{(i)}(x, y)$ - sopstvena funkcija i -te ploče sistema ploča izražena u Descartes-ovom sistemu koordinata;
- ω_{nm} - sopstvena kružna frekvencija nm -oblika malih transversalnih oscilacija slobodne ploče;
- $\omega_{(i)nm}$ - sopstvena kružna frekvencija nm -oblika malih transversalnih oscilacija i -te ploče na elastičnoj podlozi;
- $\tilde{\omega}_{nm}$ -sopstvene kružne frekvencije nm -oblika malih transversalnih oscilacija elastično spregnutog sistema ploča;
- \hat{p}_{Mnm} - M kružnih frekvencija sprezanja sistema M kontinualnih podsistema za svaki nm mod odgovarajućeg sopstvenog amplitudnog oblika kontinualnog podsistema
- k_{nm} - sopstveni broj nm -oblika malih transversalnih oscilacija ploče;
- $\beta_{(i)}$ - koeficijent nelinearnosti elastičnog nelinearnog sloja konstantan po površini i -te ploče;
- r, φ -koordinate polarnog koordinatnog sistema u radijalnom i cirkularnom pravcu;
- $J_n(x)$ - modificirane Bessel-ove funkcije I vrste, reda n sa realnim argumentom;
- $I_n(x)$ - modificirane Bessel-ove funkcije I vrste, reda n sa imaginarnim argumentom;
- $g_i(r, \varphi)$ - funkcija u polarnom sistemu koordinata transversalnih ugiba tačaka srednje ravni i -te ploče u početnom trenutku;
- $\tilde{g}_i(r, \varphi)$ - funkcija u polarnom sistemu koordinata brzina tačaka srednje ravni i -te ploče u početnom trenutku;
- ρ_i - gustina materijala i -te ploče sistema;
- h_i - debljina i -te ploče sistema;
- $a_{(i)}^2 = \frac{c}{\rho_i h_i}$ -redukovana jednako raspodeljena površinska krutost linearnog elastičnog sloja Winkler-ovog tipa;

\mathbf{A}_{nm} - formalna matrica inercionih koeficijenata koja bi obgovarala dinamičkom sistemu sa dva stepena slobode oscilovanja;
 \mathbf{C}_{nm} - formalna matrica kvazielastičnih koeficijenata koja bi obgovarala dinamičkom sistemu sa dva stepena slobode oscilovanja;
 $f_{(i)nm}(t)$ - poznate funkcije vremena prinudnog spoljašnjeg opterećenja koje dejstvuje na i -tu ploču u nm -obliku oscilovanja;
 $\mathfrak{N}(W_i)$ - koeficijent uticaja nelinearnosti podloge na sopstvene kružne frekvencije ploče;
 c_T - termička krutost termo-elastičnog sloja konstantna po površini;
 l_0 - početne dužine opruga termo-elastičnog sloja;
 α_T - koeficijent toplotne dilatacije;
 $K(t)$ - funkcija promene temperature koju koristimo kao spoljašnju pobudu termo-elastičnog sloja;
 $M(t_0, \mu)$ - Melnikov-ljeva funkcija
 λ_i - Lyapunov-ljev eksponent;
 $z_s(t)$ - greška sinhronizacije
 $\alpha_u = b_{33}$ - koeficijent piezo-keramičke dilatacije;
 $\sigma(t)$ - mehanički napon piezokeramike;
 $\varepsilon(t)$ - dilatacija piezokeramičkog elementa
 $U(t)$ - ekvivalentni napon polarizacije na izvodima metalnih elektroda piezoelementa;

Registar imena

a.

Andronov Aleksandr Aleksandrovich (1901-1952) - 38. str.

Anosov Dmitri Victorovich (1936-) - 39.str.

Arnold Vladimir Igorevich (1937 –2010) - 39. str.

b.

Bernoulli Daniel (1700 -1782) - 6, 55, 83, 290, 296. str.

Bessel Friedrich Wilhelm (1784 –1846) - 6, 84, 296. str.

Боголюбов Николай Николаевич (1909-1992) - 2, 7, 34, 37, 39, 94, 95, 133, 151, 247, 279, 291, 295, 297. str.

c.

Cartwright Dame Mary Lucy (1900 –1998) - 38. str.

Curie Pierre (1859 –1906) - 222 . str.

Curie Paul-Jacques (1856 – 1941) - 222. str.

d.

D’Alambert Jean le Rond (1717 - 1783) - 239. str.

Duffing Georg (1861-1944) - 41, 125, 127, 139, 141, 143, 148, 149, 151, 191, 195, 201, 205, 213, 248, 261, 297, 305. str.

f.

Fourier Jean Baptiste Joseph (1768 - 1830) - 206, 208, 210. str.

g.

Germain Sophie (1776-1831) - 6, 278. str.

h.

Hamilton William Rowan (1805 –1865) - 126, 134, 142, 141, 147, 150, 212, 215. str.

von Helmholtz Hermann Ludwig Ferdinand (1821 –1894) - 204, 203. str.

j.

Jacobi Carl Gustav Jacob (1804 –1851) – 214. str.

k.

Lord Kelvin William Thomson (1824–1907) - 5, 239, 275, 296. str.

Kirchhoff Robert (1824-1887) - 6, 76, 278. str.

Kolmogorov Andrey Nikolaevich (1903 –1987) - 39. str.

Крылов Иван Андреевич (1769 - 1768) - 2, 7, 37, 95, 133, 151, 247, 279, 296, 295, 297. str.

l.

Lagrange Joseph Louis (1736-1813) - 7, 30, 50, 52, 54, 62, 73, 95, 241, 278, 286. str.

Laplace Pierre Simon (1749-1827) - 36, 86, 274. str.

Lissajous Jules Antoine (1822 - 1880) - 269, 271, 272. str.

Littlewood John Edensor (1885 –1977) - 38. str.

Lorenz Edward Norton (1917 - 2008) - 39, 305. str.

Lyapunov Aleksandr Mikhailovich (1857-1918) - 37, 112, 132, 157, 160, 169, 172, 180, 186, 189, 193, 281, 292, 299. str.

m.

Melnikov Konstantin Stepanovich (1890-1974) - 3, 39, 142, 144, 146, 202, 204, 208, 209, 213, 214, 215, 217, 218, 219, 281, 295. str.

Mitropolyski Yuriy Alekseevich() - 2, 7, 38, 66, 95, 151, 247, 279, 296, 295, 297. str.

n.

Navier Claude-Louis (1785 -1836) - 38 .str.

p.

Poincaré Henri (1854-1912) - 38, 119, 121, 123, 125, 127, 132, 134, 149, 188. str.

Poisson Siméon-Denis (1781 - 1840) - 76, 233, 238, 249. str.

van der Pol Balthasar (1889 –1959) - 33, 138. str.

r.

Rayleigh Lord (1842-1919) - 7, 50, 77, 167, 265, 281, 304. str.

Rössler Otto E. (1940-) - 135, 193, 310. str.

Ruelle David Pierre (1935 -) - 38. str.

s.

Smale Stephen (1930-) - 38, 111, 144. str

Shilnikov Leonid Pavlovich () - 38, 218, 219. str.

t.

Takens Floris (1940- 2010) - 38. str.

v.

Voigt Woldemar (1850 –1919) – 237-240, 296. str.

Registar pojmova

a.

aktivne strukture 221, 241, 244, 301. str.

amplitudno-frekventne karakteristike stacionarnog stanja 105, 139, 247, 249, 251-260, 262, 266. str.

asimptotsku metodu Krilov-Bogoljubov-Mitropolskiy-kog 2, 7, 38, 66, 95, 151, 247, 279, 296, 300, 302. str.

asimptotske aproksimacije rešenja po amplitudama i fazama komponentnih potprocesa 28, 84, 104, 151, 247, 280, 281, 290, 294. str.

atraktor 188, 193, 194, 197, 199, 267. str.

b.

Bernoulli-ovoj metodi partikularnih integrala 6, 55, 83, 290, 296. str.

Bessel-ove funkcije II vrste 6, 84, 295. str.

bifurkacije 126, 141, 145, 148, 151, 201, 202, 203, 204, 208, 215, 275, 305. str.

d.

d'Alembert-ov princip 239. str.

dinamičke jednačine ravnoteže 72. str.

dinamička ravnoteža 94. str.

dinamička apsorpcija 101, 241, 301. str.

diskretno-kontinualni hibridni sistem 58, 63, 274, 284, 285. str.

diskretizacija kontinuuma 36, 273, 293, 295. str.

Duffing-ova nelinearna jednačina 41, 125, 127, 139, 141, 143, 148, 149, 151, 190, 193, 201, 205, 213, 248, 261, 298, 305. str.

dvofrekventni procesi 75, 80, 101, 106, 249, 291. str.

e.

element sprezanja 3, 153, 154, 165, 194, 195, 237, 239, 240, 249, 275, 300, 306. str.

energija sprezanja podsistema 151, 158, 304. str.

f.

fazno-frekventna karakteristika. 105, 139, 247, 249, 251-260, 262, 266. str.

fenomenološko preslikavanje 283, 285, 286. str.

frekventna jednačina ili transcendentna karakteristična jednačina 61, 63, 70, 89, 283-285, 299. str.

funkciju rasipanja visko-elastičnog sprežućeg elementa (Rayleigh-eva funkcija rasipanja) 50, 77, 167, 265, 281, 299. str.

g.

granični uslovi 59, 66, 88, 100, 283, 289, 296. str.

greška sinhronizacije 193, 194, 198, 266, 268. str.

h.

Hamilton-ov sistem 126, 134, 141, 142, 147, 150, 212, 215. str.

harmonik (mod, oblik) oscilovanja 75, 152, 241, 245, 250-260, 279, 301. str.

harmonograf 269. str.

heteroklinička orbita 121, 133, 208. str.

Helmholtz-ov oscilator 204, 205. str.

hiperbolička tačka tipa sedla 111, 116, 119, 131, 137, 144, 145, 148, 204, 207, 209, 214, 217, 219. str.

homoklinička orbita 121, 133, 142, 144, 145, 150, 204, 207, 209, 214, 215, 217, 218, 219, 290. str.

i.

integritet dinamike klase hibridnih sistema sa nelinearnostima 109, 169, 202, 299. str.

j.

jednačine prve asimptotske aproksimacije za amplitudu i fazu 32, 96, 97, 102, 104, 107. str.
jednofrekventni režim oscilovanja 93, 149. str.

k.

kinetička energija čiste interakcije podsistema 159, 167. str.
kinetičke energije interakcije dinamičke veze sa jednim od podsistema 159, 281. str.
kinetičku energiju ploča 161, 281. str.
koeficijent nelinearnosti elastičnog sloja konstantan po površini 78. str.
koeficijent prigušenja 50, 78. str.
koeficijent uticaja nelinearnosti elastičnog sloja 81. str.
kružne frekvencije sprežanja sistema 279. str.

l.

Lagrange-ovih jednačina druge vrste 50, 52, 54, 62, 73, 95, 286. str.
Lagrange-ovu metodu varijacije konstanta 50, 54, 73. str.
laki standardni nasledni element 72. str.
Laplace-ovog operatora 86. str.
Laplace-ove transformacije 36. str.
Lissajous-ove krive 269, 271, 272. str.

lj.

Lyapunov-ljev eksponent 37, 112, 132, 157, 160, 169, 172, 180, 186, 189, 193, 281, 292, 299. str.

m.

matematička analogija 283, 285, 287, 290, 301, 303. str.
matrice inercionih koeficijenata 66, 73, 79, 285. str.
matrice kvazielastičnih koeficijenata 66, 73, 79. str.
matrica koeficijenata otporne sile 66, 73, 79. str.
Melnikov-ljeva funkcija 3, 39, 142, 144, 146, 202, 204, 208, 209, 213, 214, 215, 217, 218, 219, 281, 295. str.
metoda asimptotskog usrednjenja 51, 97, 133, 134. str.
moduo klizanja 76. str.
moduo elastičnosti 76. str.
mnogostrukosti stabilne i nestabilne 116, 126, 140, 146, 200, 204, 210, 212, 214. str.

n.

nestacionarne više-frekventne nelinearne oscilacije 105. str.

o.

optimalno upravljanje 37, 199, 204, 208, 209, 300, 303. str.

p.

piezoelement (senzor, aktuator) 4, 222, 234, 236, 239, 241, 242, 244, 292, 301. str.
početni uslovi 57, 88, 93, 181, 189, 201, 296. str.
potencijalnu energiju ploča 162. str.
potencijalnu energiju visko-elastičnog međusloja 67,70. str.
prenos energije između podsistema vezanih u hibridne sisteme 66, 153, 157, 281. str.
prinudne oscilacije hibridnih sistema (oscilacije sa periodičkom pobudom) 95, 125, 137, 193, 195, 204, 206, 209, 237, 245, 249, 298. str.
prolazak kroz rezonantno stanje. 94, 105, 247, 249, 280. str.
Van der Pol-a jednačina oscilatora 33, 138. str.
Poincaré-ova mapa 38, 119, 121, 123, 125, 127, 132, 134, 149, 188. str.

r.

redukovane savojne krutosti ploče. 78, 239. str.

redukovanu krutost elastičnog dela sloja. 78, 239. str.
redukovana kinetička energija. 162, 167, 260, 281, 299. str.
redukovana potencijalna energija. 162, 167, 281, 299. str.
redukovana Rayleigh-eva funkcija rasipanja 7, 49, 78, 167, 265, 281, 299. str.
redukovana vrednost potencijalne energije međudejstva ploča preko elastičnog sloja. 168, 260, 299. str.
rezonancija (rezonantno stanje). 93, 101, 149, 204, 301. str.
rezonantne vrednosti frakvancija. 94, 139, 301. str.
rezonantni skokovi amplitudno i fazno frekventnih karakteristika 105, 139, 247, 251-260, 302, 305. str.

s.

samosinhronizacija 177. str.
savojnu krutost ploče (*flexural rigidity of the plate*) 78. str.
savojna krutost grede (krutost na savijanje) 289. str.
sinhronizacija 38, 191, 194, 197, 208, 265, 295, 300, 303. str.
sistem dve spojene kružne ploče 76, 161, 238, 275, 296. str.
sistem prve aproksimacije rešenja po amplitudama i faznim kašnjenjima sistema 58, 67, 74, 97, 104, 169, 274. str.
sistem spregnutih parcijalnih diferencijalnih jednačina 78, 238, 274, 295, 296. str.
sopstvena amplitudna funkcija ploče (grede) 79, 84, 90, 213. str.
sopstvene kružne frekvencije sistema i podsistema. 63, 85, 97, 180. str.
sopstvene kružne frekvencije elastično spregnutog sistema ploča. 79. str.
sporopreomljivi parametri 33, 51. str.
stabilnost stacionarnog režima oscilovanja 106, 112, 123, 297. str.
stacionarna (ravnotežna) rešenja 105, 297. str.
stacionalne više-frekventne nelinearne oscilacije 105, 251-260. str.
standardni laki (nasledni, elastični, visko-elastični, kotrljajni) element sprezanja podsistema. 71, 77, 194, 195, 277, 281, 296. str.

t.

talasnu jednačinu ploče 85. str.
trajektorija 110, 111, 117, 173, 188, 189, 204, 273, 298. str.

u.

upravljanje haosom 174, 187, 188. str.
uslovi ortogonalnosti 79, 100, 161, 163, 290. str.
uslovi kompatibilnosti pomeranja 60, 69, 99. str.
usrednjenje po punim fazama 55, 59, 74, 83. str.

v.

višefrekventni rezonantni režim 149, 251-260. str.
vremenske funkcije mn -og moda oscilovanja spregnutih kružnih ploča 79, 81, 83, 213, 252, 253, 258, 259, 279, 290, 291, 292. str.

Biografski podaci

Mr Julijana (Dušana) Simonović,
Dipl. ing. mašinstva



Datum i mesto rođenja:

avg. 1975. Sarajevo, Bosna

Adresa:

Bulevar Nikole Tesle 55, Niš, Srbija

Tel.:

+381-18-500-666

Obrazovanje:

8. Maj. 2008

Odbranila magistarsku tezu pod nazivom: „*Dinamika mehaničkih sistema složenih struktura*“ pod mentorstvom Prof. dr K. (Stevanović) Hedrih.

2001 – (2008):

Poslediplomske studije primenjene Mehanike
Na Katedri za Mehaniku,
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu.

1994 – 2000:

Dodiplomske studije (10 semestara)
Hidroenergetskog smera sa prosečnom ocenom 9.31
Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu, Srbija.

1982 – 1994:

Osnovno i gimnazijsko obrazovanje u Sarajevu,
Bosna, i u Nišu, Srbija.

Strani jezici:

Engleski (govorim i pišem), Francuski (razumem).

Radno iskustvo:

Maj 2009 – :

Asistent na Katedri za Mehaniku
Mašinskog Fakulteta, Univerziteta u Nišu,
Srbija.

Februar 2001 – 2009 :

Asistent pripravnik na Katedri za Mehaniku
Mašinskog Fakulteta, Univerziteta u Nišu.

Feb 2011 –

Istraživač na projektu
ON147001 Dinamika hibridnih sistema složenih struktura. Mehanika materijal,
Ministarstvo za nauku i tehnologiju Republike Srbije, (2011-2015), rukovodioca
Prof. dr K. (Stevanović) Hedrih.

Januar 2006 – Decembar 2010:

Istraživač na projektu
144002-Problemi teorijske i tehničke mehanike krutih i čvrstih tela. Mehanika materijala, Osnovne nauke-Matematika i mehanika, Ministarstvo za nauku i tehnologiju Republike Srbije, (2005-2010), rukovodioca Prof. dr K. (Stevanović) Hedrih.

Januar 2002 – Januar 2006:

Istraživač na projektima :
1616-Realni problemi mehanike, Matematički Institut SANU,
1828-Dinamika i upravljanje aktivnim konstrukcijama, Mašinski fakultet
Univerziteta u Nišu, pod rukovodstvom Prof. dr Katica (Stevanović) Hedrih.
Oba finansirana od strane Ministarstva za Nauku i Zaštitu životne sredine Srbija.

Lični podaci:

Udata, majka troje dece.

Objavljeni radovi:

Naučni radovi publikovani u časopisima međunarodnog značaja

1. Hedrih (Stevanovic) K. and **Simonovic J.**, (2002), *Phase Portraits and Homoclinic Orbits-Visualization of Nonlinear Dynamics of Reductor*, Journal of Politechnica University Timisoar, Romonia, Transaction on Mechanical Engineering, Tom 47(61), Supplement, May 2002, Editura Politehnika., pp.76-86., ISSN 1224-6077 <http://www.utt.ro/english/pbseng.shtml>
2. Hedrih (Stevanovic) K. and **Simonovic J.**, (2003), *Nonlinear Phenomena in Dynamics of Car Model*, Facta Univesitatis, Series mechanics, Automatic Control and Robotics, Vol.3 No.14, 2003. pp.865-879.YU ISSN 0534-2009. <http://facta.junis.ni.ac.yu/facta/macar/macar200302/macar200302sadrzaj.html>
3. Hedrih (Stevanovic) K. and **Simonovic J.**, (2007), *Transversal Vibrations of a non-conservative double circular plate system*, FACTA UNIVERSITATIS Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics, VOL. 6, N^o 1, 2007, PP. 336 - 64
4. Hedrih (Stevanovic) K. and **Simonovic J.**, (2008), *Transversal Vibrations of a Double Circular Plate System with Visco-elastic Layer Excited by a Random Temperature Field*, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 9(1), 47-50, 2008, ©Freund Publishing House Ltd.
5. Hedrih (Stevanovic) K., **Simonović J. D.**, (2010), *Non-linear dynamics of the sandwich double circular plate system*, Int. J. Non-Linear Mech, Volume 45, Issue 9, November 2010, Pp. 902-918, ISSN: 0218-1274
6. Hedrih (Stevanovic) K., **Simonović J.**, (2011), *Influence of nonlinearity in energy transfer of double circular plate system*, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 21 br. 10, str. 2993-3011
7. Hedrih (Stevanovic) K R. and **Simonović J.**, (2012), "Multi-frequency analysis of the double circular plate system non-linear dynamics", NONLINEAR DYNAMICS, (2012), vol. 67 br. 3, str. 2299-2315, 2012 Springer.

Naučni radovi publikovani u časopisima nacionalnog značaja

8. Hedrih (Stevanovic) K. and **Simonovic J.**, (2007), *Dynamical Absorption and Resonances in the Sandwich Double plate System Vibration with Elastic layer*, Scientific Technical Review, YUISSN 1820-0206, N^o 2, 2007 (accepted for publishing).

Naučni radovi publikovani u zbornicima nacionalnog značaja

9. Hedrih (Stevanovic) K. and **Simonovic J.**, (2006), *Characteristic Eigen Numbers and Frequencies of the Transversal Vibrations of Sandwich System*, Eng-3., Lecture in section: Computational Methods and Proceedings of First South-East European Conference on Computational Mechanics, SECCM-06, (M. Kojic, M. P Papadrakakis (Eds.)), June 28-30, 2006, University of Kragujevac , Serbia ,pp.90-94.
10. Hedrih (Stevanovic) K. and **Simonović J.**, (2007), *Forced vibrations of the double circular plate system with viscoelastic layer*, Proceedings, First International Congress of Serbian Society of Mechanics, Editors: D. Šumarac and D. Kuzmanović, Srpsko društvo za mehaniku, 10-13, April, 2007, pp. 299-306.
11. Hedrih (Stevanovic) K. and **Simonović J.**, (2009), *Energy Analys of the Double Circular Plate System* , Proceedings, 2nd International Congress of Serbian Society of Mechanics (IconSSM 2009) ,Palić (Subotica), Serbia, 1-5 June 2009, pp. 1-16 .
12. Hedrih (Stevanovic) K., **Simonović J.**, (2010), *Models of Hybrid Multi-Plates Systems Dynamics*, The International Conference-Mechanical Engineering in XXI Century, Niš, Serbia, 25-26 September 2010, Proceedings, pp.17-20.
13. **Simonović J.**, (2011), *Energy Analys of the Double Circular Plate System* , Proceedings, 3rd International Congress of Serbian Society of Mechanics (IconSSM 2011) ,Vlasina Lake, Serbia, 5-9 July 2011, pp.

Naučni radovi prikazani i publikovani u apstraktima i proširenim publikacija međunarodnog značaja

14. Hedrih (Stevanovic) K. and **Simonovic J.**, *Free transversal vibrations of a double circular plate system*, 6th European Solid Mechanics Conference (ESMC2006) Budapest, 28 August – 1 September 2006, Extended Abstracts on Cd, no. 164_072. European Society of Mechanics.
15. Hedrih (Stevanovic) K. and **Simonovic J.**, *Nonlinear Phenomena in Dynamics of Car Model*, Booclet of Abstracts, 6th ISNM NSA Nis, 2003,pp. 141-142.
16. Hedrih (Stevanovic) K. and **Simonovic J.**, *Visualization of Oscillatory Processes in Discret and Continous Sysems*, Eng-3., Section:Engineering Sciences, Introductory Lecture, Vive Math, Book of Abstracts, Workshop on Visualization and Verbalization of Mathematics and Interdisciplinary Aspects, 14-15 dec.2001, Financed by BMBF (The German Federal Ministry of Education and Research) Faculty of Sciences and Mathematics, Nis, p. Eng-3.
17. Hedrih (Stevanovic) K. and **Simonovic J.**, (2008), *Non-linear dynamics of the sandwich double circular plate system*, Euromech 498 Colloquium, Book of Abstracts, pp. - © 2008, Lublin University of Technology
18. **Simonovic J.**, (2008), *Phenomenon of coupled structures of mechanical systems*, the 22nd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM2008), Book of Abstracts and CD-ROM

- Proceedings, pp. , The School of Mathematical Sciences, The University of Adelaide, Australia, ISBN 978-0-9805142-0-9, (vidi WEB ictam2008.adelaide.edu.au).
19. Katica (Stevanović) Hedrih and Julijana **Simonović**, (2009), *Energy transfer through the double circular plate nonlinear system dynamics*, 10th CONFERENCE on DYNAMICAL SYSTEMS THEORY AND APPLICATIONS, December 7-10, 2009. Łódź, Poland, pp.221-228
 20. Katica (Stevanović) Hedrih and Julijana **Simonović**, (2009), *Energy transfer through the double circular plate nonconservative system dynamics*, 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference J. Ambrósio et.al. (eds.), Lisbon, Portugal, September 7-11, 2009
 21. Katica (Stevanović) Hedrih and Julijana **Simonović**, (2010), *Multi-frequency analysis of the multi circular plate system nonlinear dynamics*, THIRTEENTH CONFERENCE ON NONLINEAR VIBRATIONS, DYNAMICS AND MULTIBODY SYSTEMS, May 23-26, 2010, Virginia Polytechnic Institute.
 22. **Simonović J.**, (2011), *Synchronization and resynchronization in coupled systems with different type of coupling elements*, DYNAMICAL SYSTEMS-Nonlinear Dynamics and Control, EDITORS: J. Awrejcewicz, M. Kazmierczak, P. Olejnik, J. Mrozowski, pp. 465-470, Lodz, December 5-8, 2011, Poland.
 23. **Simonović J.**, (2011), *Synchronization at Hybrid Systems with Static and Dynamic Coupling*, on CD Proceedings, European Nonlinear Oscillations Conference (ENOC) 2011, 24-29 July 2011, Rome, Italy, Booklet of Abstracts, ENOC 7th European nonlinear dynamics conference, July, 24-29, 2011, La Sapienza Rome, Edited by D. Bernndini, G. Rega and F. Romeo, pp. 68. ISBN 978-88-906234-0-0, plus CD ENOC Proceedings ISBN 978-88-906234-2-4

Naučni rezultati prikazani i publikovani u apstarktima publikacija domaćih naučnih i stručnih skupova i seminara naučnih institute i fakulteta

24. Hedrih (Stevanović) K. and **Simonović J.**, (2002), *Visualization of Multifrequency Regimes of Compulsiv Oscillations in Engineering Systems*, Invited Plenary Lecture, XVIII Yugoslav Conference with International Participation- Noise and Vibrations, Nis 2002, 17-18 Oct. 2002. paper on Cd. Pp.1-27.
25. Hedrih (Stevanović) K. and **Simonović J.**, (2002), *Visualization of Oscillatory Processes and Singulary Phenomena in Mechanical Systems by Using Tasks of Elastodinamics Examines*, Predavanje na seminaru Odeljenja za mehaniku Matematičkog instituta SANU, Belgrade, 27.feb 2002.
26. Hedrih (Stevanović) K. and **Simonović J.**, (2006), *Free transversal vibrations of a double circular plate system*, predavanje na seminaru Odeljenja za mehaniku u Matematičkom institutu SANU, Belgrade, maj 2006.
27. **Simonović J.**, (2006), Predavanje na seminaru Nelinearna dinamika - Milutin Milanković: pod nazivom: "90 plus 30 godina nelinearne dinamike: Više je manje, a manje je bolje!!!" i pod mentorstvom profesora dr Katicice (Stevanović) Hedrih, 20. april 2006.
28. **Simonović J.**, (2009), *Dinamički sistemi složenih struktura. Svojstva i fenomeni*, predavanje na seminaru Odeljenja za mehaniku u Matematičkom institutu SANU, Beograd, feb 2009.
29. **Simonović J.**, (2010), *Melnikov-ljava funkcija i optimalno upravljanje haotičnim kretanjem sistema sa dva stepena slobode kretanja (pregled savremenih istraživanja)*, predavanje na seminaru Odeljenja za mehaniku u Matematičkom institutu SANU, Beograd, nov. 2010.
30. **Simonović J.**, (2011), *Sinhronizacija i asinhronizacija sistema spregnutih različitim elementima spreznjanja*, predavanje na seminaru Odeljenja za mehaniku u Matematičkom institutu SANU, Belgrade, april. 2011.
31. **Simonović J.**, (2012), *Modeli hibridnih dinamičkih sistema i njihove analogije*, predavanje na seminaru Odeljenja za mehaniku u Matematičkom institutu SANU, Beograd, mart. 2012.

Nastavno-naučne publikacije publikovane u elektronskom obliku

32. Hedrih Katica i **Simonović Julijana**, *Zbirka rešenih zadataka iz Elastodinamike*, elektronski udžbenik, recenzent Akademik ANN Veljko A, Vujičić, april 2002, link: <http://www.masfak.ni.ac.yu/sitegenius/topic.php?id=70>
33. Hedrih Katica. i **Simonović Julijana**, *Zbirka rešenih zadataka iz Elastodinamike*, kompleti rešenih ispitnih blanketa iz 2005, 2006 godine, on-line verzija prezentacije ispitnih zadataka sa rešenjima dostupan na adresi: <http://www.masfak.ni.ac.yu/sitegenius/topic.php?id=70>
34. Hedrih Katica i **Simonović Julijana**, *Zbirka rešenih zadataka sa vežbanja Mehanike III- Dinamike*, školska 2006/07, prezentacija rešenih zadataka sa vežbanja iz predmeta Mehanika III - Dinamika, po nedeljama u on-line verziji dostupna na adresi: <http://www.hm.co.yu/mehanika/>

Rukopisi u pripremi za štampu i/ili procesu recenzije

35. Hedrih Katica i **Simonović Julijana**, *Zbirka rešenih zadataka sa vežbanja iz Kinetike*, rukopis u procesu recenzije

Начна дела доступна јавности

36. **Simonović J.**, (2008), *Dinamika mehaničkih sistema složenih struktura*, magistarski rad, odbranjen 8 maja 2008. , Mašinski fakultet u Nišu, str. 249.