



УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ГРАЂЕВИНСКО – АРХИТЕКТОНСКИ ФАКУЛТЕТ



Анђелко П. Цумбо

**АНАЛИЗА УТИЦАЈА РЕОЛОШКИХ
СВОЈСТАВА КОД СЛОЖЕНИХ
СПРЕГНУТИХ КОНСТРУКЦИЈА
СЛОЈЕВИТИМ КОНАЧНИМ
ЕЛЕМЕНТИМА**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Текст ове докторске дисертације ставља се на увид јавности,
у складу са чланом 30., став 8. Закона о високом образовању
("Сл. гласник РС", бр. 76/2005, 100/2007 – аутентично тумачење, 97/2008, 44/2010,
93/2012, 89/2013 и 99/2014)

НАПОМЕНА О АУТОРСКИМ ПРАВИМА:

Овај текст сматра се рукописом и само се саопштава јавности (члан 7. Закона о ауторским и сродним правима, "Сл. гласник РС", бр. 104/2009, 99/2011 и 119/2012).

Ниједан део ове докторске дисертације не сме се користити ни у какве сврхе, осим за упознавање са њеним садржајем пре одбране дисертације.

Ниш | 2016.



UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING AND ARCHITECTURE



Andelko P. Cumbo

**ANALYSIS OF RHEOLOGICAL
PROPERTIES IMPACT IN
COMPLEX COMPOSITE
STRUCTURES OF
LAYERED FINITE
ELEMENTS**

DOCTORAL DISSERTATION

Niš | 2016.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	др Радомир Фолић, професор емеритус Универзитета у Новом Саду, Ангажован на ФТН у Новом Саду и ГАФ Универзитета у Нишу
Наслов:	АНАЛИЗА УТИЦАЈА РЕОЛОШКИХ СВОЈСТАВА КОД СЛОЖЕНИХ СПРЕГНУТИХ КОНСТРУКЦИЈА СЛОЈЕВИТИМ КОНАЧНИМ ЕЛЕМЕНТИМА
Резиме:	<p>У раду је развијен нумерички модел за одређивање стања напона и деформација услед течења и скупљања бетона и релаксације челика за преднапрезање код сложених спрегнутих конструкција применом методе коначних елемената. Матрица крутости линијског коначног елемента изведена је коришћењем технике методе слојева, а реолошка својства бетона и преднапрегнуте арматуре уведена су преко фиктивног оптерећења.</p> <p>У развоју прорачунског модела коришћене су генералисане инкременталне везе напон-деформација за вискозне материјале изведене применом методе деформација. Детаљније је анализиран начин одређивања фиктивних сила услед вискозних деформација, посебно дела аксијалних сила као допринос од чистог савијања штапа. Формулисан је побољшани прорачунски поступак којим се тачност резултата знатно поправља без потребе да се конструкција дискретизује на већи број коначних елемената.</p> <p>Прорачунски модел је применљив код различитих технолошких поступака при грађењу са омогућеним постепеним укључивањем појединих делова спрегнутог пресека у напонски активни пресек. Показано је да се услед временских - реолошких промена знатно мења стање напона и деформација спрегнутих конструкција и да је у фази пројектовања потребно предупредити негативна дејства. У том циљу аутор је развио одговарајући програмски пакет чијом применом се на брз и једноставан начин долази до потребних резултата прорачуна.</p>
Научна област:	грађевина
Научна дисциплина:	теорија конструкција
Кључне речи:	спрегнуте конструкције, спрезање, реологија, течење, скупљање, вискозне деформације, временске деформације, слојевити коначни елементи
УДК:	
CERIF класификација:	T 230
Тип лиценце Креативне заједнице:	CC BY-NC-ND

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Radomir Folić, PhD professor emeritus, Dr. h.c. Faculty of Technical Sciences in Novi Sad and Faculty of Civil Engineering and Architecture in Niš
Title:	ANALYSIS OF RHEOLOGICAL PROPERTIES IMPACT IN COMPLEX COMPOSITE STRUCTURES OF LAYERED FINITE ELEMENTS
Abstract:	<p>This paper contains a proposed numerical procedure for determination of stress and deformations state due to creep and shrinkage of concrete and relaxation of prestressed steel in composite structures with apply of the finite element method. Stiffness matrix of linear finite-element is performed by use of layers technique, but rheological properties of concrete and prestressed reinforcement are introduced by fictive loading.</p> <p>For procedure development, generalized incremental stress-deformation links are used for viscous materials derived by application of displacement method. The manner is analysed in more details to determine fictive forces due to viscous deformations, especially the axial forces part as a contribution from the pure member bending. Improved procedure is formulated which provides considerable correction of results accuracy without the need of structure discretization on the bigger number of finite elements.</p> <p>Here developed procedure for calculation of composite structures is applicable in various technological procedures of construction-work with enabled gradual inclusion of some individual parts of composite section into a stress active section. It has been shown that time - dependent (rheological) changes considerably change state of stress and deformations of CS and that in their design negative impacts cannot be left out of the analysis. To that aim, the author has developed a program package with whose application, it is simple to get the needed results.</p>
Scientific Field:	Civil Engineering
Scientific Discipline:	Theory of structures
Key Words:	composite structures, rheology, creep, shrinkage, viscous deformations, time deformations, layered finite elements
UDC:	
CERIF Classification:	T 230
Creative Commons License Type:	CC BY-NC-ND

САДРЖАЈ

Подаци о докторској дисертацији (на српском и енглеском језику)	iii
Предговор	viii
Списак ознака	ix
Списак слика, илустрација и табела	xix
1. УВОДНЕ НАПОМЕНЕ	25
1.1. Спрегнути носачи – основни појмови и механизам деловања	25
1.2. Вискозно понашање бетона	30
1.3. Вискозно понашање преднапрегнуте арматуре	33
1.4. Основе за прорачун спрегнутих пресека	34
1.5. Предмет и проблем истраживања	38
1.6. Примењена методологија	39
1.7. Циљ, задаци и основне хипотезе истраживања	40
1.7.1. Циљ истраживања	41
1.7.2. Радне (полазне) хипотезе истраживања	42
1.7.3. Задатак истраживања	43
1.8. Значај истраживања и применљивост резултата	44
1.9. Кратак садржај рада по поглављима	45
2. ПРЕГЛЕД ВАЖНИЈИХ ДОСАДАШЊИХ ИСТРАЖИВАЊА	55
2.1. Теоријска и експериментална истраживања	55
2.2. Примењивани поступци прорачуна	62
2.3. Закључак	67
3. СПРЕГНУТИ НОСАЧИ – ОСНОВНИ КОНЦЕПТ И ОСОБИНЕ .	69
3.1. Механизам деловања спрегнутог носача	69
3.2. Обим и врсте спрезања	75
3.3. Средства за спрезање	82
3.4. Утицај вискозног понашања бетона	84

3.5. Утицај вискозног понашања преднапрегнуте арматуре	88
3.6. Предности и недостаци спрегнутих конструкција	89
3.7. Развој спрегнутих конструкција	91
3.7.1. Примена спрегнутих конструкција у зградарству	93
3.7.2. Примена спрегнутих конструкција у мостоградњи	104
4. ВЕЗЕ ИЗМЕЂУ НАПОНА И ДЕФОРМАЦИЈА ЗА СПРЕГНУТЕ ЕЛЕМЕНТЕ	109
4.1. Веза напон-деформација за бетон	109
4.2. Веза напон-деформација за преднапрегнути челик	122
4.3. Веза напон-деформација за конструкциони и бетонски челик	125
5. НАПОНИ И ДЕФОРМАЦИЈЕ У СПРЕГНУТОМ ПРЕСЕКУ	127
5.1. Дискретизација времена	127
5.2. Конститутивне једначине	129
5.2.1. Конститутивне релације напон-деформација за поједине материјале ..	130
5.2.2. Услови компатибилности деформација	131
5.2.3. Једначине равнотеже спољашњих и унутрашњих сила	132
5.3. Прорачунски модел	133
5.4. Закључак	136
6. НАПОНИ И ДЕФОРМАЦИЈА СПРЕГНУТИХ СИСТЕМА МЕТОДОМ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА	138
6.1. Основни појмови и једначине методе коначних елемената	138
6.2. Слојевити коначни елементи са вискозним својствима	148
6.2.1. Матрица крутости слојевитог коначног елемента	151
6.2.2. Вектор спољашњих сила	153
6.2.3. Вектор фиктивних сила – допринос реолошких својстава	154
6.3. Мрежа коначних елемената за спрегнути систем	158
6.4. Вектор фиктивних сила за систем	161
6.4.1. Побољшани прорачунски модел	163
6.5. Стање напона и деформација спрегнутих система	167
6.6. Специјални случајеви	169
7. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕРИ И АНАЛИЗА РЕЗУЛТАТА	174
7.1. Провера модела на примерима из литературе	175
7.2. Прорачун понашања спрегнуте рамовске конструкције	192
7.3. Прорачун понашања високих зграда	194
7.4. Прорачун понашања viseћих мостова са кабловима	202

7.5. Верификација развијеног модела	207
8. МОГУЋНОСТ ПРИМЕНЕ РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА	210
9. ЗАВРШНЕ НАПОМЕНЕ И ЗАКЉУЧЦИ	216
9.1. Закључци и препоруке	216
9.2. Правци даљих истраживања	219
ЛИТЕРАТУРА	223
ПРИЛОЗИ	233
БИОГРАФИЈА	267
ИЗЈАВЕ АУТОРА	268

ПРЕДГОВОР

Ова докторска дисертација: *Анализа утицаја реолошких својстава код слојених спрегнутих конструкција слојевитим коначним елементима*, је урађена на Катедри за материјале и конструкције Грађевинско-архитектонског факултета у Нишу. Настала је као резултат дугогодишњег истраживања и рада (око 20 година) аутора, донекле са ментором, у области материјала и конструкција, развоја нумеричких поступака прорачуна, математичких модела и рачунарских програма у оквиру Методе коначних елемената (МКЕ) са увођењем вискоеластичних својстава материјала.

Аутор је још на постдипломским студијама показао интересовање за развој нумеричких модела за прорачун спрегнутих конструкција (СК). Магистарски рад: *Прилог анализи утицаја течења и скупљања бетона код спрегнутих конструкција*, одбрањен на ФТН-у у Новом Саду 1998. год., се такође односи на нумерички модел прорачуна по МКЕ са увођењем вискозних својстава бетона. Касније је у овој области аутор публиковао неколико радова у угледним домаћим и међународним часописима и зборницима радова.

Истраживања у овом раду су обухватала прикупљање, анализу и вредновање досадашњих истраживања као и стално праћење актуелног стања из области прорачуна понашања СК са утицајем временских деформација бетона и преднапрегнуте арматуре, са нагласком на нумеричке методе и примену рачунара. Главни део рада се односи на развој оригиналног прорачунског модела по МКЕ, при чему је изведена основна матрица крутости слојевитог вискоеластичног коначног елемента, а доприноси реолошког понашања бетона и високовредног челика су уведени преко слободних деформација. Развијен је прорачунски модел и рачунарски програм за анализу мешовитих и СК, без обзира на статичку неодређеност, укључујући технолошки поступак настајања/грађења и промену оптерећења током времена.

Овом приликом изражавам неизмерну захвалност свима који су ми помогли у досадашњем раду и током израде ове дисертације. Највећу захвалност изражавам ментору, др Радомиру Фолићу, професору емеритусу, који ме је на најбољи начин увео у актуелне проблеме прорачуна СК, и који ме је несебично усмеравао и подржавао током наше дугогодишње сарадње. Захвалност изражавам и члановима Катедре за материјале и конструкције Грађевинско-архитектонског факултета у Нишу, као и свима који су ми на било који начин помогли у досадашњем раду.

На крају, али не и на последњем месту, захваљујем се својој породици која ми је пружала огромну подршку и помоћ и која је имала стрпљења и разумевања за мој рад током свих протеклих година.

Ниш, август 2016.

Анђелко П. Цумбо

СПИСАК ОЗНАКА

Напомена:

Ознаке су наведене према редоследу појављивања.

Ознаке могу да имају различита значења.

Ознаке су дефинисане тамо где се први пут појављују.

Поглавље 1

- σ_c Експлоатациони напон у бетону ($\sigma_c \leq 0.4f_{ck}$)
- f_{ck} Карактеристична вредност чврстоће бетона при старости од 28 дана
- $\varepsilon_{c,el}$ Тренутна еластична деформација бетона
- $\varepsilon_{c,v}$ Временска вискозна деформација бетона
- Δt_i Интервали времена до посматраног тренутка t_k ($\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$; $i=1,2,\dots,k-1$)

Поглавље 2

- $K(t)$ Матрица крутости коначног елемента (КЕ) или система КЕ (конструкције) у функцији времена
- $\Delta q(t)$ Вектор померања чворних тачака КЕ или система КЕ у функцији времена
- $\Delta Q(t)$ Вектор спољашњих чворних сила КЕ или система КЕ у функцији времена

Поглавље 3

- A_a Површина дела попречног пресека од конструкционог челика (КЧ) (челичног пресека)
- A_c Површина бетонског дела попречног пресека
- A_s Површина попречног пресека бетонског меког челика (арматуре) (МЧ)

ε_a	Дилатација у попречном пресеку КЧ
ε_c	Дилатација у бетонском делу попречног пресека
ε_s	Дилатација у попречном пресеку МЧ
σ_a	Напон у попречном пресеку КЧ
σ_c	Напон у бетонском делу попречног пресека
σ_s	Напон у попречном пресеку МЧ
n	Однос модула еластичности челика и бетона
η	Степен оствареног спрезања између челичног носача и бетонске плоче ($0 \leq \eta \leq 1$)
δ	Проклизавање између челичног носача и бетонске плоче
δ_{max}	Максимално проклизавање између челичног носача и бетонске плоче
T_a	Тежиште попречног пресека КЧ
T_c	Тежиште бетонског дела попречног пресека
T_i	Тежиште идеализованог спрегнутог пресека
M	Момент савијања у спрегнутом пресеку
M_a	Прорачунски момент савијања који делује на део пресека од КЧ
M_c	Прорачунски момент савијања који делује на бетонски део пресека
N	Аксијална (нормална) сила у спрегнутом пресеку
g	Стално оптерећење по јединици дужине спрегнутог носача (греде)
Δg	Додатно стално оптерећење по јединици дужине спрегнутог носача
p	Повремено оптерећење по јединици дужине спрегнутог носача
ε_g	Дилатација у попречном пресеку од сталног оптерећења
$\varepsilon_{\Delta g}$	Дилатација у попречном пресеку од додатног сталног оптерећења
ε_p	Дилатација у попречном пресеку од повременог оптерећења
ε_u	Дилатација у попречном пресеку од укупног оптерећења
ε_δ	Дилатација у попречном пресеку од принудне деформације спрегнутог носача
q	Спољашње оптерећење по јединици дужине спрегнутог носача (греде)
P	Сила преднапрезања спрегнутог носача
M_q	Момент савијања греде од спољашњег оптерећења

M_p	Момент савијања греде од натезања каблова
d	Дужина на којој је изостављено спрезање између челичног носача и бетонске плоче
M_{max}	Максимална вредност момента савијања греде у неспрегнутој зони
M_{sr}	Средња вредност момента савијања греде у неспрегнутој зони
t	Време
$\sigma_c(t)$	Напон у бетону у току времена
$\varepsilon_c(t)$	Деформација бетона у току времена
$\varepsilon_{c,s}$	Деформација од скупљања бетона
$\sigma_{c,el}$	Тренутни еластични напон који одговара принудној деформацији бетона
$\sigma_{c,v}$	Временски вискозни напон (релаксација напона) који одговара константној деформацији бетона
ΔM	Прираштај момента савијања у спрегнутом пресеку од скупљања бетона
ΔM_a	Прорачунски момент савијања у пресеку КЧ од скупљања бетона
ΔM_c	Прорачунски момент савијања у бетонском делу пресека од скупљања бетона
ΔN	Прираштај аксијалне (нормалне) силе у спрегнутом пресеку од скупљања бетона
$\Delta \sigma_a$	Прорачунски напон у попречном пресеку КЧ од скупљања бетона
$\Delta \sigma_c$	Прорачунски напон у бетонском делу пресека од скупљања бетона

Поглавље 4

$\varepsilon_{el,p}$	Тренутна еластична повратна дилатација бетона
$\varepsilon_{v,p}$	Временска вискозна повратна дилатација бетона
ε_{pl}	Трајно неповратна (пластична) дилатација бетона
$\phi(t, \tau)$	Функција течења бетона као укупна деформација у тренутку t при константном јединичном напону $\sigma_c = 1$ који делује од тренутка τ
ϕ	Мера еластичности бетона као инверзна вредност модула еластичности
$E_c(t)$	Модул еластичности (деформације) бетона у тренутку t
$\varepsilon_{cn}(t)$	Деформација бетона у тренутку t независна од напона (нпр. скупљање бетона)

- $\sigma_c(\tau)$ Напонска функција; напон у бетону у тренутку τ ($\tau=t_0, \dots, t$)
- $E_c(\tau)$ Модул еластичности (деформације) бетона у тренутку τ
- $R(t, \tau)$ Функција релаксације бетона као вредност напона у тренутку t при константној јединичној деформацији која делује од тренутка τ
- $E_c(t, \tau)$ Модул еластичности (деформације) бетона у тренутку t при константној јединичној деформацији која делује од тренутка τ
- $\varphi(t, \tau)$ Коефицијент течења бетона у времену t при деловању напона од тренутка τ
- $E_{c,ef}(t, t_0)$ Фиктивни модул деформације бетона као реципрочна вредност функције течења бетона према ЕМ-методи
- $\chi(t, t_0)$ Коефицијент старења бетона према ААЕМ-методи
- $\Delta\sigma_c(t_i)$ Прираштај напона у бетону за i -ти интервал времена
- $E_{c(k,i-1)}$ Фиктивни модул деформације бетона (општи облик)
- $\Delta\varepsilon_c(t_k)$ Прираштај деформације бетона у k -том (посматраном/текућем) интервалу времена
- $\Delta\varepsilon_{cn}(t_k)$ Прираштај деформације бетона у k -том интервалу времена независна од напона (нпр. скупљање бетона)
- $\Delta\sigma_c(t_k)$ Прираштај напона у бетону у k -том интервалу времена
- $\Delta\varepsilon_c^*(t_k)$ Прираштај слободне деформације бетона у k -том интервалу времена
- $E_{c(k,k-1)}$ Генералисани фиктивни модул деформације бетона у k -том интервалу времена
- $E_{c^*}^{(k,i-1)}$ Изведени фиктивни модул деформације бетона за прорачун у k -том интервалу времена ($i=1, 2, \dots, k-1$)
- σ_{p0} Почетни напон у преднапрегнутом челику (ПЧ)
- f_{pk} Карактеристична чврстоћа ПЧ при затезању
- ρ_{1000} Вредност чисте релаксације ПЧ при 1000 часова
- λ Параметар који представља однос почетног напона и карактеристичне чврстоће при затезању ПЧ
- $\Delta\sigma_{pr}(t, t_0)$ Промена напона у ПЧ услед својствене релаксације
- $f_1(\sigma_p(t_0))$ Функција за утицај величине почетних напона на коначну вредност својствене релаксације ПЧ
- $f_2(t-t_0)$ Функција за утицај величине промене својствене релаксације ПЧ током времена

- $\sigma_p(t)$ Напон у ПЧ у тренутку t
- $\sigma_p(t_0)$ Напон у ПЧ у тренутку t_0
- $\Delta\sigma_{pr}(t)$ Својствена (чиста) релаксација ПЧ
- $\Delta\sigma_p(t)$ Промена напона у ПЧ током времена
- $\Delta\varepsilon_p(t)$ Промена деформације у ПЧ током времена
- E_p Модул еластичности ПЧ
- $\Delta\bar{\sigma}_{pr}(t)$ Промена напона у ПЧ при променљивој деформацији током времена (редукована релаксација)
- $\Delta\sigma_p(t_k)$ Прираштај напона у ПЧ у k -том (текућем/посматраном) интервалу времена
- $\Delta\varepsilon_p(t_k)$ Прираштај дилатације у ПЧ у k -том интервалу времена
- $\Delta\bar{\sigma}_{pr}(t_k)$ Редукована релаксација у ПЧ у k -том интервалу времена
- $E_{p, k}^*$ Редуковани модул еластичности ПЧ у k -том интервалу времена
- $\rho_{p, k}$ Фактор релаксације ПЧ у k -том интервалу времена
- $\Delta\sigma_a(t_k)$ Прираштај напона у КЧ у k -том интервалу времена
- $\Delta\varepsilon_a(t_k)$ Прираштај деформације у КЧ у k -том интервалу времена
- E_a Модул еластичности КЧ
- $\Delta\sigma_s(t_k)$ Прираштај напона у МЧ у k -том интервалу времена
- $\Delta\varepsilon_s(t_k)$ Прираштај дилатације у МЧ у k -том интервалу времена
- E_s Модул еластичности МЧ
- $\Delta\varepsilon_r$ Прираштај дилатације у нивоу референтне осе спрегнутог пресека
- $\Delta\kappa$ Прираштај кривине деформације пресека
- $\Delta\alpha_r$ Прираштај нормалног напона у нивоу референтне осе пресека
- $\Delta\beta$ Прираштај нагиба дијаграма напона у пресеку

Поглавље 5

- $F(t)$ Општа ознака за временски променљиву функцију
- $\Delta\alpha_{r, m, k}$ Прираштај нормалног напона у нивоу референтне осе појединих делова спрегнутог пресека ($m=c, a, s, p$) за k -ти интервал времена
- $\Delta\beta_{m, k}$ Прираштај нагиба дијаграма напона у појединим деловима спрегнутог пресека ($m=c, a, s, p$) за k -ти интервал времена

- $\Delta \varepsilon_{r,m,k}$ Прираштај дилатације у нивоу референтне осе појединих делова спрегнутог пресека ($m=c,a,s,p$) за k -ти интервал времена
- $\Delta \kappa_{m,k}$ Прираштај кривине деформације у појединим деловима спрегнутог пресека ($m=c,a,s,p$) за k -ти интервал времена
- $\Delta \varepsilon_{r,c,k}^*$ Прираштај слободне дилатације у нивоу референтне осе бетонског дела пресека за k -ти интервал времена
- $\Delta \kappa_{c,k}^*$ Прираштај слободне кривине деформације у бетонском делу пресека за k -ти интервал времена
- $\Delta \bar{\sigma}_{pr,p,k}$ Редукована релаксација ПЧ у k -том интервалу времена
- u Одстојање посматраног влакна пресека од референтне осе
- $\Delta N_{m,k}$ Прираштај унутрашњих сила као резултанте напона на површинама појединих делова спрегнутог пресека ($m=c,a,s,p$) у правцу подужне осе носача за k -ти интервал времена
- $\Delta M_{m,k}$ Прираштај унутрашњих момената савијања које праве резултанте напона на површинама појединих делова спрегнутог пресека ($m=c,a,s,p$) око референтне осе за k -ти интервал времена
- ΔN_k Прираштај спољашњих сила у правцу подужне осе носача за k -ти интервал времена
- ΔM_k Прираштај спољашњих момената савијања око референтне осе за k -ти интервал времена
- $\Delta N_{m,k}^*$ Прираштај фиктивних сила на површинама појединих делова спрегнутог пресека ($m=c,p$) у правцу подужне осе носача за k -ти интервал времена
- $\Delta M_{m,k}^*$ Прираштај фиктивних момената савијања које праве резултанте напона на површинама појединих делова спрегнутог пресека ($m=c,p$) око референтне осе за k -ти интервал времена
- K_k Матрица крутости попречног пресека за k -ти интервал времена
- $K_{c,k}$ Матрица крутости бетонског дела попречног пресека за k -ти интервал времена
- K_m Матрица крутости појединих делова спрегнутог пресека ($m=a,s,p$)
- D_m Матрица крутости геометријских карактеристика појединих делова спрегнутог пресека ($m=c,a,s,p$)
- A_m Површина појединих делова спрегнутог пресека ($m=c,a,s,p$)
- S_m Статички момент површине појединих делова спрегнутог пресека ($m=c,a,s,p$)

I_m Момент инерције појединих делова спрегнутог пресека ($m=c,a,s,p$)

Поглавље 6

- XOY Глобални координатни систем коначног елемента (КЕ)
 xOy Локални координатни систем КЕ
1,2 Чворне тачке КЕ
 u_1, u_2 Транслаторно померање чворних тачака КЕ у правцу x осе
 v_1, v_2 Транслаторно померање чворних тачака КЕ у правцу y осе
 φ_1, φ_2 Обртање пресека КЕ на крајевима (у чворовима)
 l Дужина КЕ (штапа)
 $A(\varepsilon)$ Рад унутрашњих сила (напона) на одговарајућим деформацијама штапа (енергија деформације)
 V Запремина штапа
 $A(Q, P)$ Рад запреминских и површинских спољашњих сила на задатим померањима штапа
 Q Спољашње запреминске силе штапа
 P Спољашње површинске силе штапа
 u Генерализовано померање које одговара природи силе
 $\Delta\Pi$ Укупна промена потенцијалне енергије штапа
 x Произвольна тачка КЕ на одстојању x од почетка штапа
 $u(x)$ Транслаторно хоризонтално (подужно) померање произвољне тачке штапа
 $v(x)$ Транслаторно вертикално (попречно) померање произвољне тачке штапа
 $\varphi(x)$ Обртање произвољне тачке (пресека) штапа
 q, q_1, q_2 Вектор померања чворних тачака КЕ
 T Трансверзална (попречна) сила штапа
 C_1, C_2, C_3, C_4 Коефицијенти полинома
 N_u Интерполациона матрица штапа за хоризонтална (подужна) померања
 $\Delta q_{u,k}$ Вектор хоризонталних (подужних) померања чворних тачака КЕ за k -ти интервал времена
 N_v Интерполациона матрица штапа за вертикална (попречна) померања

- $\Delta q_{v,k}$ Вектор вертикалних (попечних) померања чворних тачака КЕ за k -ти интервал времена
- Δq_k Вектор померања чворних тачака КЕ за k -ти интервал времена
- $\Delta q(x)_k$ Вектор померања у пољу штапа за k -ти интервал времена
- $\Delta \varepsilon_r(x)_k$ Прираштај дилатације на референтној осиг штапа за k -ти интервал времена
- $\Delta \kappa(x)_k$ Прираштај кривине деформације на референтној осиг штапа за k -ти интервал времена
- $\Delta q_{r,k}$ Вектор померања чворних тачака КЕ на референтној осиг за k -ти интервал времена
- B_r Матрица поља штапа (функција облика, интерполациона матрица) у нивоу референтне осег
- $\Delta \varepsilon(x,y)_k$ Прираштај дилатације у произвољној тачки пресека штапа за k -ти интервал времена
- P Матрица за висински положај произвољне тачке попречног пресека штапа
- G Матрица поља произвољне тачке штапа (функција облика, интерполациона матрица)
- $\Delta \sigma(x,y)_k$ Прираштај напона у произвољној тачки пресека штапа за k -ти интервал времена
- $\Delta \alpha_r(x)_k$ Прираштај напона на референтној осиг посматраног пресека штапа за k -ти интервал времена
- $\Delta \beta(x)_k$ Прираштај кривине напона посматраног пресека штапа за k -ти интервал времена
- $\Delta q_{r,m,k}$ Вектор померања чворних тачака КЕ у нивоу референтне осег појединих делова спрегнутог пресека ($m=c,a,s,p$) за k -ти интервал времена
- $\Delta q_{r,c,k}^*$ Вектор слободних померања чворних тачака КЕ у нивоу референтне осег бетонског дела пресека за k -ти интервал времена
- ΔV_k Вектор спољашњих запреминских сила штапа за k -ти интервал времена
- ΔP_k Вектор спољашњих површинских сила штапа за k -ти интервал времена
- Δu_k Генералисано померање чворова штапа које одговара сили за k -ти интервал времена
- K_k Матрица крутости спрегнутог КЕ за k -ти интервал времена
- ΔQ_k Вектор спољашњих чворних сила КЕ за k -ти интервал времена

- $\Delta Q_{c,k}^*$ Вектор фиктивних чворних сила КЕ од течења и скупљања бетона за k -ти интервал времена
- $\Delta Q_{p,k}^*$ Вектор фиктивних чворних сила КЕ услед релаксације ПЧ за k -ти интервал времена
- $K_{m,k}$ Матрица крутости појединих делова (слојева) спрегнутог КЕ ($m=c,a,s,p$) за k -ти интервал времена
- $E_{m,k}$ Модул деформације појединих делова спрегнутог КЕ ($m=c,a,s,p$) за k -ти интервал времена
- $A_{m,k}$ Површина пресека појединих делова спрегнутог КЕ ($m=c,a,s,p$) за k -ти интервал времена
- $S_{m,k}$ Статички момент површине пресека појединих делова спрегнутог КЕ ($m=c,a,s,p$) за k -ти интервал времена
- $I_{m,k}$ Момент инерције пресека појединих делова спрегнутог КЕ ($m=c,a,s,p$) за k -ти интервал времена
- $T_{i,k}$ Тежиште идеализованог пресека КЕ за k -ти интервал времена
- E_r Референтни модул еластичности КЕ
- $A_{i,k}$ Површина идеализованог пресека КЕ за k -ти интервал времена
- $I_{i,k}$ Момент инерције идеализованог пресека КЕ за k -ти интервал времена
- $K_{i,k}$ Матрица крутости идеализованог КЕ за k -ти интервал времена
- T_k Матрица трансформације из локалног у глобални (и обрнуто) координатни систем
- U Генералисани облик произвољне матрице
- u Генералисани облик произвољног вектора
- $\Delta \bar{q}_{r,k}$ Вектор померања чворних тачака КЕ у нивоу референтне осе у глобалном координатном систему за k -ти интервал времена
- \bar{K}_k Матрица крутости спрегнутог КЕ у глобалном координатном систему за k -ти интервал времена
- $\Delta \bar{Q}_k$ Вектор спољашњих чворних сила КЕ у глобалном координатном систему за k -ти интервал времена
- $\Delta \bar{Q}_{c,k}^*$ Вектор фиктивних чворних сила КЕ услед течења и скупљања бетона у глобалном координатном систему за k -ти интервал времена
- $\Delta \bar{Q}_{p,k}^*$ Вектор фиктивних чворних сила КЕ услед релаксације ПЧ у глобалном координатном систему за k -ти интервал времена

- $\widetilde{\Delta q}_{r,k}$ Вектор померања чворних тачака мреже КЕ у нивоима референтних оса за k -ти интервал времена
- \widetilde{K}_k Матрица крутости мреже КЕ за k -ти интервал времена
- $\widetilde{\Delta Q}_k$ Вектор спољашњих чворних сила мреже КЕ за k -ти интервал времена
- $\widetilde{\Delta Q}_{c,k}^*$ Вектор фиктивних чворних сила мреже КЕ услед течења и скупљања бетона за k -ти интервал времена
- $\widetilde{\Delta Q}_{p,k}^*$ Вектор фиктивних чворних сила мреже КЕ услед релаксације ПЧ за k -ти интервал времена
- $\Delta N_{N,c,k}^*$ Део фиктивне нормалне силе бетонског дела пресека у поступку осредњавања за k -ти интервал времена
- $\Delta \varepsilon_{N,k}$ Део дилатације од осредњавања фиктивне нормалне силе за k -ти интервал времена
- $\Delta \kappa_{M,k}$ Део кривине деформације од еквивалентног чворног момента савијања од подељеног оптерећења КЕ за k -ти интервал времена
- T_m Фиксно тежиште појединих делова спрегнутог пресека КЕ ($m=c,a,s,p$)
- $\Delta q_{n,c}$ Вектор слободних померања чворних тачака бетонског слоја КЕ за k -ти интервал времена
- Ψ Бездимензионални коефицијент као однос коефицијената течења бетона

Поглавље 7

- L Дужина носача; распон носача
- d Висина спрегнутог пресека; попречна димензија стуба
- f_{ctm} Средња вредност чврстоће бетона при затезању
- h Висина спрата зграде разматране у примеру
- s Степен повећања крутости каблова viseћег моста у односу на стварну крутост у разматраном примеру ($s=0-100\%$)

СПИСАК СЛИКА, ИЛУСТРАЦИЈА И ТАБЕЛА

Поглавље 1

- Слика 1.1** – АБ греда: а) моменти савијања; б) напони и деформације у пресеку
(*Reinforced concrete beam: a) bending moments; b) stress and strains in the cross-section*) 27
- Слика 1.2** – Преднапрегнута греда: а) моменти савијања; б) напони у пресеку
(*Prestressed beam: a) bending moments; b) stress in the cross-section*) 27
- Слика 1.3** – а) Напрезања у АБ пресеку; б) напрезања у спрегнутом пресеку (*Stress in RC section; b) stress in composite section*) 28
- Слика 1.4** – Спрегнути гредни носачи: (а) проста греда; (б) континуална греда; (ц) попречни пресек греде (*Composite beam girders: a) simply supported beam; b) continuous beam; c) beam cross-section*) 29
- Слика 1.5** – Спрегнути пресеци: а) гредни носач челик-бетон; б) стуб са убетонираним челичним носачем; ц) стуб са бетонским језгром у челичном плашту; д) таваница са доњим профилисаним лимом (*Composite sections: a) beam girder steel-concrete; b) column with concreted steel girder; c) column with concrete core in the hollow section; d) floor structure with the profiled sheet*) 30
- Слика 1.6** – Деформације бетона у току времена под константним напоном
(*Concrete strains over time under constant stress*) 31
- Слика 1.7** – Деформације скупљања бетона у току времена (*Concrete shrinkage strains over time*) 31
- Слика 1.8** – Деформације бетона у зависности од старости бетона у тренутку оптерећења (*Concrete strains depending on the age of concrete in the moment of load*) 32

Поглавље 3

Слика 3.1 – Напрезања у АБ (а) и спрегнутом пресеку (б) (<i>Stress in RC (a) and the composite section (b)</i>).....	71
Слика 3.2 – Деловање момента на неспрегнутом пресеку (<i>Bending moment effect on the noncomposite section</i>)	71
Слика 3.3 – Еластично савијање потпуно спрегнутог пресека (<i>Elastic bending of the completely composite section</i>).....	72
Слика 3.4 – Расподјела напона и деформација на еластично (парцијално) спрегнутом пресеку (<i>Stress and strain distribution on the elastic (partially) composite section</i>)	72
Слика 3.5 – Спрегнуте пресеци: а) челик-бетон; б) бетон-бетон; ц) дрво-бетон (<i>Composite sections: a) steel-concrete; b) concrete-concrete; c) wood-concrete</i>).....	73
Слика 3.6 – Спрегнуте гредни носачи: а) проста греда; б) континуална греда; ц) попречни пресек (<i>Composite beam girders: a) simply supported beam; b) continuous beam; c) beam cross-section</i>).....	75
Слика 3.7 – Спрезање за повремено оптерећење (<i>Compositing for periodical load</i>).....	76
Слика 3.8 – Спрезање за повремено и преостало стално оптерећење (<i>Compositing for periodical and remaining dead load</i>)	77
Слика 3.9 – Спрезање за укупно (повремено и укупно стално) оптерећење (<i>Compositing for total (periodical and total dead) load</i>).....	77
Слика 3.10 – Преднапрезање принудним деформацијама: а) подизање средњих ослонаца; б) деформације у пресеку (<i>Prestressed with forced deformations: a) raising of the middle supporters b) deformations in the cross-section</i>)	78
Слика 3.11 – Преднапрезање кабловима (<i>Prestressed with cables</i>)	79
Слика 3.12 – Врсте спрезања: а) круто; б) еластично; ц) дисконтинуално (<i>Types of compositing: a) rigid; b) elastic; c) discontinual</i>)	80
Слика 3.13 – Средства за спрезање (<i>Way of compositing</i>)	83
Слика 3.14 – Деформације бетона у току времена под константним напоном (<i>Concrete strains over time under constant stress</i>).....	85
Слика 3.15 – Релаксација напона у бетону у току времена под константном деформацијом (<i>Stress relaxation in concrete over time under constant deformation</i>).....	86
Слика 3.16 – Прерасподела напона у спрегнутом пресеку услед течења бетона (<i>Stress distribution in the composite cross-section due to concrete creep</i>)	87
Слика 3.17 – Прерасподела напона у спрегнутом пресеку услед скупљања бетона (<i>Stress distribution in the composite cross-section due to concrete shrinkage</i>).....	88

Поглавље 4

Слика 4.1 – Веза напон-деформација у оквиру линеарне теорије течења (<i>Stress-strain connection within the linear creep theory</i>)	110
Слика 4.2 – Деформације бетона у току времена (<i>Concrete strains over time</i>).....	110
Слика 4.3 – Деформације бетона у току времена (<i>Concrete strains over time</i>).....	113
Слика 4.4 – Функција релаксације $R(t, \tau)$ за $\tau=const.$ (<i>Function of relaxation $R(t, \tau)$ for $\tau=const.$</i>).....	114

Поглавље 5

Слика 5.1 – Дискретизација времена (<i>Discretization of time</i>)	127
Слика 5.2 – Пресек и деформације спрегнутог носача (<i>Cross-section and strains of composite girder</i>).....	132
Слика 5.3 – Пресек и деформације спрегнутог носача (<i>Cross-section and strains of composite girder</i>).....	135

Поглавље 6

Слика 6.1 – Линијски коначни елемент (<i>Linear finite element</i>).....	139
Слика 6.2 – Мрежа коначних елемената (<i>The network of finite elements</i>)	140
Слика 6.3 – Чворне силе коначног елемента (<i>Joint forces of the finite element</i>)	154
Слика 6.4 – Фиктивне силе у пресеку (<i>Cross-section of fictive forces</i>)	164
Слика 6.5 – Фиктивне аксијалне силе КЕ (стварне и осредњене) (<i>Fictive axial forces of finite element (real and average)</i>)	164
Слика 6.6 – Фиктивне силе спрегнуте просте греде (<i>Fictive forces of composite simply supported beam</i>).....	166

Поглавље 7

Слика 7.1 – Континуална спрегнута греда: а) изглед; б) мека арматура; ц) преднапрегнути челик (<i>Continual composite beam: a) appearance; b) soft reinforcement; c) prestressed steel</i>)	176
Слика 7.2 – Попречни пресек спрегнуте греде (<i>Composite beam cross-section</i>)	176
Табела 7.1 – Геометријске карактеристике челичног носача у назначеним пресецима; $A[\text{cm}^2]$, $Y_T[\text{cm}]$, $I[\text{cm}^4]$ (<i>Geometrical characteristics of the steel girder in the marked cross-sections</i>)	177

Слика 7.3 – Положај КЕ дуж греде (<i>Finite element placement along the beam</i>).....	177
Слика 7.4 – Положај слојева у пресеку КЕ (<i>Composite beam cross-section</i>)	177
Табела 7.2 – Геометријске карактеристике слојева КЕ; $A[\text{cm}^2]$, $Y_T[\text{cm}]$, $I[\text{cm}^4]$ (<i>Geometrical characteristics of the finite element layers</i>)	177
Табела 7.3 – Раздвојени примери за задата појединачна дејства (<i>Separated examples for given individual forces</i>).....	178
Табела 7.4 – Јединствен пример за задата дејства (<i>Unique example for given forces</i>)....	178
Слика 7.5 – Напони за пресек 4 [МПа] (<i>Cross-section 4 stress</i>).....	179
Слика 7.6 – Напони за пресек 15 [МПа] (<i>Cross-section 15 stress</i>)	179
Слика 7.7 – Напони за пресек 10 [МПа] (<i>Cross-section 10 stress</i>).....	179
Слика 7.8 – Угиби дуж греде током времена (<i>Deflection along the beam over time</i>).....	180
Слика 7.9 – Подужна диспозиција моста (<i>Longitudinal section of bridge</i>).....	182
Слика 7.10 – Попречни пресек у пољу и над ослонцем (<i>Cross-section in span and above supporter</i>).....	182
Слика 7.11 – Подужни распоред каблова (<i>Longitudinal cable distribution</i>).....	182
Слика 7.12 – Распоред арматуре и каблова у пресецима „а“, „б“ и „ц“ (<i>Reinforcement and cable distribution in the „a“, „b“ and „c“ cross-sections</i>).....	182
Слика 7.13 – Стално оптерећење носача (<i>Dead load of girder</i>)	183
Слика 7.14 – Распоред сила претходног напрезања (<i>Distribution of prestressed forces</i>).....	183
Слика 7.15 – Подела носача на коначне елементе (<i>Finite elements of girder distribution</i>)	184
Табела 7.5 – Подаци о коначним елементима и њиховим слојевима (<i>Data on finite elements and their layers</i>).....	184
Табела 7.6 – Раздвојени примери за задата појединачна дејства (<i>Separated examples for given individual forces</i>).....	185
Табела 7.7 – Јединствен пример за задата дејства - два интервала времена (<i>Unique example for given forces – two time intervals</i>).....	185
Табела 7.8 – Јединствен пример за задата дејства - три интервала времена (<i>Unique example for given forces – three time intervals</i>)	185
Слика 7.16 – Напони у пресеку греде над средњим ослонцем [МПа] (<i>Stress in the cross-section of beam above supporter [MPa]</i>)	186
Слика 7.17 – Угиби дуж греде (<i>Deflection along the beam</i>).....	187

Слика 7.18 – Основне диспозиционе карактеристике носача (<i>Basic disposition characteristics of the girder</i>)	187
Слика 7.19 – Напони у пресеку носача над ослонцем [МПа] (<i>Stress in the cross-section of the girder above the supporter [MPa]</i>)	189
Слика 7.20 – Попречни пресек АБ елемента (<i>Cross-section of the reinforced concrete element</i>)	189
Слика 7.21 – Конзолни АБ носач и утицаји (<i>Cantilever reinforced concrete girder and forces</i>)	190
Слика 7.22 – АБ проста греда и утицаји (<i>Reinforced concrete beam and forces</i>)	190
Слика 7.23 – Рамовски систем и утицаји (<i>Frame system and forces</i>)	191
Слика 7.24 – Рамовски систем и утицаји (<i>Frame system and forces</i>)	192
Слика 7.25 – Попречни пресеци коначних елемената и положај слојева (<i>Cross-sections of finite element and distribution of layers</i>)	192
Слика 7.26 – Дискретизација времена (<i>Discretization of time</i>)	193
Слика 7.27 – Основа конструкције зграде (<i>Building structure plan view</i>)	195
Слика 7.28 – Статички системи и оптерећења у складу са градњом конструкције зграде (<i>Statical systems and loads according to construction of the building structure</i>)	195
Слика 7.29 – Дискретизација времена у складу са градњом зграде (<i>Time discretization according to building construction</i>)	196
Слика 7.30 – Зграда са бетонским стубовима. Вертикално померање спратова за t_{∞} (<i>Building with concrete columns. Vertical displacement of floors for t_{∞}</i>)	196
Слика 7.31 – Зграда са бетонским стубовима. Вертикално померање IV спрата (<i>Building with concrete columns. Vertical displacement of the IV floor</i>)	197
Слика 7.32 – Зграда са бетонским стубовима. Момент савијања на крајевима греде IV спрата (<i>Building with concrete columns. Bending moments at the beam ending of the IV floor</i>)	198
Слика 7.33 – Зграда са бетонским стубовима. Аксијална сила у стубу приземља (<i>Building with concrete columns. Axial force in the ground floor column</i>)	198
Слика 7.34 – Зграда са челичним стубовима. Вертикално померање спратова за t_{∞} (<i>Building with steel columns. Vertical displacement of the floors by t_{∞}</i>)	199
Слика 7.35 – Зграда са челичним стубовима. Вертикално померање V спрата (<i>Building with steel columns. Vertical displacement of the V floor</i>)	200
Слика 7.36 – Зграда са челичним стубовима. Моменти савијања на крају греде V спрата (<i>Building with steel columns. Bending moments at the beam ending of the V floor</i>)	200

Слика 7.37 – Зграда са челичним стубовима. Аксијална сила у стубу приземља (<i>Building with steel columns. Axial force in the ground floor column</i>)	201
Слика 7.38 – Мост са кабловима (<i>Cable-stayed bridge</i>)	204
Слика 7.39 – Попречни пресек плоче (<i>Cross-section of the deck</i>)	204
Слика 7.40 – Статички системи и оптерећења (<i>Static systems and loads</i>).....	204
Слика 7.41 – Дискретизација времена у складу са градњом зграде (<i>Time discretization in accordance with the building construction</i>)	204
Слика 7.42 – Напони у кабловима (<i>Cables stresses</i>)	205
Слика 7.43 – Промена напона у кабловима током времена (<i>Stress change in the cables over time</i>).....	205
Слика 7.44 – Вертикално померање сегмената плоче (<i>Vertical displacement of the deck segment</i>)	205
Слика 7.45 – Вертикално померање сегмената плоче у току времена (<i>Vertical displacement of the deck segment over time</i>)	206
Слика 7.46 – Моменти савијања дуж плоче за $s=0\%$ (<i>Bending moments in the deck for $s=0\%$</i>).....	206
Слика 7.47 – Моменти савијања дуж плоче за $s=100\%$ (<i>Bending moments in the deck for $s=100\%$</i>).....	206

1. ПОГЛАВЉЕ

УВОДНЕ НАПОМЕНЕ

1.1. Спрегнути носачи – основни појмови и механизам деловања

При пројектовању носећих грађевинских конструкција уобичајено је да се тежи постизању оптимума по питању стабилности, функционалности, економичности и естетике као основних захтева за конструкције. У том циљу користе се разни грађевински материјали са тежњом да се искористе њихова најбоља својства и да се адекватно комбинују и спајају/спрежу у склопу диспозиције унутар саме конструкције.

Развој грађевинских конструкција и многобројна експериментална и теоријска истраживања пропраћена су тежњом што повољнијем комбиновању материјала, који својим својствима најбоље доприносе заједничком раду спрегнутих елемената и конструкцијских система као целине.

Одавно је познато да се бетон добро понаша у притиснутом стању и да својом крутошћу успешно одолева извијању, а да није у стању примити значајније напоне затезања, те се затезање у пракси обично не поверава бетону.

Бетонски челик (арматура) успешно прихвата напоне затезања, али самостално у притиснутом стању не поседује потребну крутост, те је подложен извијању, због чега се углавном употребљава у комбинацији са другим материјалима, односно са бетоном због доброг пријањања и могућности заједничког рада.

Конструкциони челик има широку примену и у условима када је изложен притиску и/или затезању, стим да се у притиснутом стању често могу јавити одређени проблеми услед смањене отпорности на извијање. Комбинација конструкционог челика са бетоном се показала веома успешном у превазилажењу проблема губитка стабилности притиснутих делова/елемената.

Дрво као материјал се такође успешно користи за сва напонска стања, али је његова примена из неколико разлога ограничена или захтева формирање специјалних носача, нпр. ламелирани и/или спрегнути носачи, код којих се дрво комбинује са другим материјалима.

Показало се да основни материјали за носеће конструкције (бетон, арматура, конструкциони челик, дрво), поред добрих, углавном имају и нека лоша својства, али одређеном комбинацијом материјала та лоша својства се могу добрим делом искључити. У ту сврху, показало се, да је потребно различите материјале позиционирати и повезати (спрегнути) у јединствене спрегнуте (комполитне) носаче код којих ће бити активирана најбоља својства употребљених материјала.

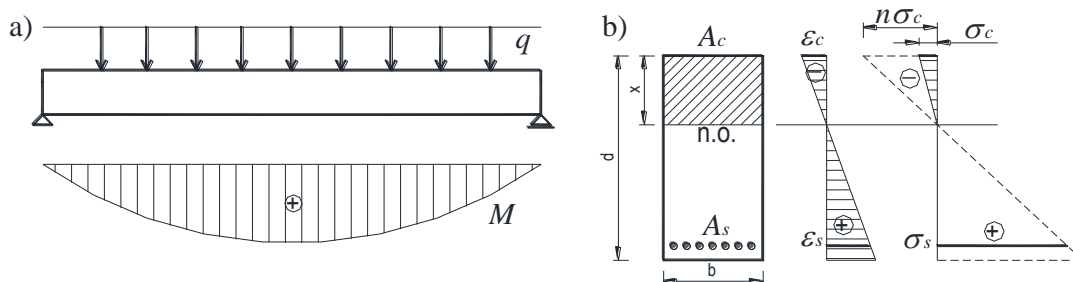
Уопштено, под појмом „**спрегнути носач**“ уобичајено се подразумева спајање два или више елемената од материјала различитих својстава конструктивно обједињених по висини попречног пресека. У низу могућих спрезања, у пракси се најчешће сусрећу:

- спрегнути носачи састављени од челика и бетона (**челик-бетон**),
- спрегнути носачи састављени од бетона различитог квалитета и старости (**бетон-бетон**),
- спрегнути носачи састављени од дрвета и бетона (**дрво-бетон**).

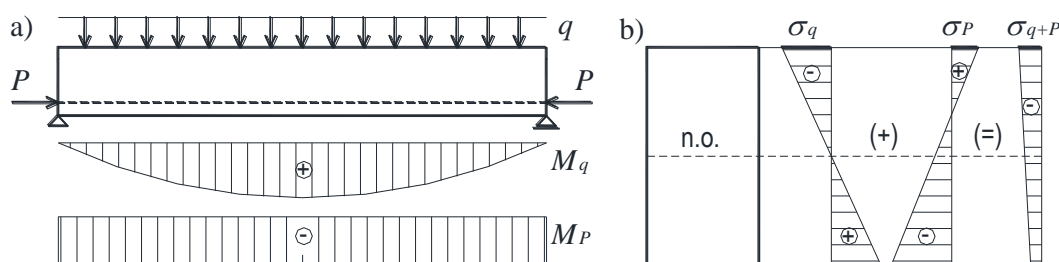
У новије време, поготово код санације и ојачања конструкционих елемената, успешно се примењују и друге врсте материјала (нпр. полиуретан), који у комбинацији са постојећим материјалима формирају нове и сложеније спрегнуте пресеке.

Један од првих успешних облика спрезања два материјала у јединствен конструктивни елемент је **армирани бетон (АБ)**, најчешће у виду гредних носача (**слика 1.1**), али је широко у употреби и код површинских носача (плоча) и комбиновано. Овде су спајањем бетона и арматуре искоришћена најбоља својства ова два материјала. Механизам носивости пресека заснива се на заједничком раду бетона и арматуре.

Опште је познато да бетон, за разлику од напона притиска, није у стању да прими значајније напоне затезања, и да ту улогу преузима арматура, чиме се постиже веома повољна комбинација ова два материјала. Компатибилност деформација се остварује довољном приоњивошћу бетона и арматуре, те приближно једнаким температурним коефицијентима.



Сл. 1.1 – АБ греда: а) моменти савијања; б) напони и деформације у пресеку
Fig. 1.1 – Reinforced concrete beam: a) bending moments; b) stress and strains in the cross-section

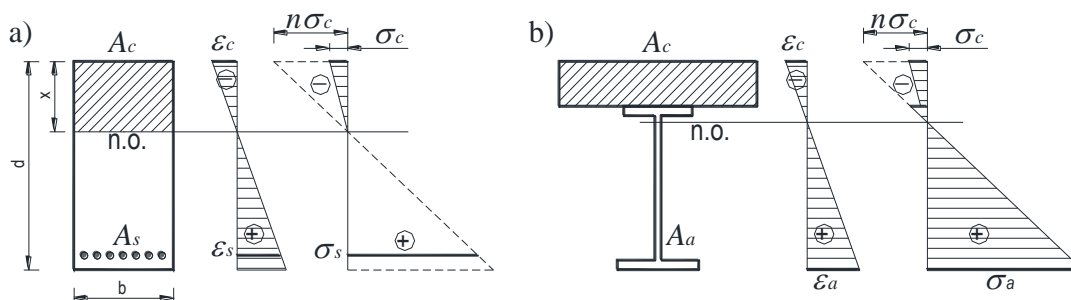


Сл. 1.2 – Преднапрегнута греда: а) моменти савијања; б) напони у пресеку
Fig. 1.2 – Prestressed beam: a) bending moments; b) stress in the cross-section

Код АБ елемената, затегнути бетон, због појаве прслина, је у већини случајева само заштита арматуре и представља мртав терет у носачу. Наиме, бетон има знатно мању чврстоћу на затезање у односу на челик и крт је материјал за разлику од челика (арматуре), те при малим напонима затезања долази до прскања бетона. Ово својство бетона је ограничило употребу АБ носача на мање распоне. Код средњих и већих распона знатан удео сопствене тежине бетона онемогућава примену рационалних и функционалних носача. Ови недостаци армираног бетона умањени су увођењем преднапрегнутог челика (каблови, жице). Затезањем овог челика уносе се напони притиска у бетон, те се обично ангажује читав пресек у преношењу сила, чиме је добијен **преднапрегнути бетон (ПБ)**. Развојем преднапрезања знатно је унапређена градња конструкција средњих и већих распона.

Најбоља илустрација ефекта преднапрезања се види на примеру просте греде оптерећене на савијање (слика 1.2). Момент од једнакоподељеног оптерећења, који затеже доњу зону греде, се неутралише моментом од силе преднапрезања кабла, те је у сумарном облику цео пресек притиснут.

У даљем настајању да се рационализују носачи, затегнути (испрскали) инертни бетонски део се замењује челичним носачем, а притиснути бетонски део се задржава, уз адекватно спајање/спрезање ових материјала/делова. На овај начин је, аналогно АБ пресеку, формиран **спрегнути носач (СН)** (слика 1.3) који је реално најближи идеализованом носачу. У овој комбинацији и позиционирању материјала успешно су искоришћена њихова најбоља својства уз знатно смањење негативаног утицаја сопствене тежине СН.



Сл. 1.3 – а) Напрезања у АБ пресеку; б) напрезања у спрегнутом пресеку
Fig. 1.3 – a) Stress in RC section; b) stress in composite section

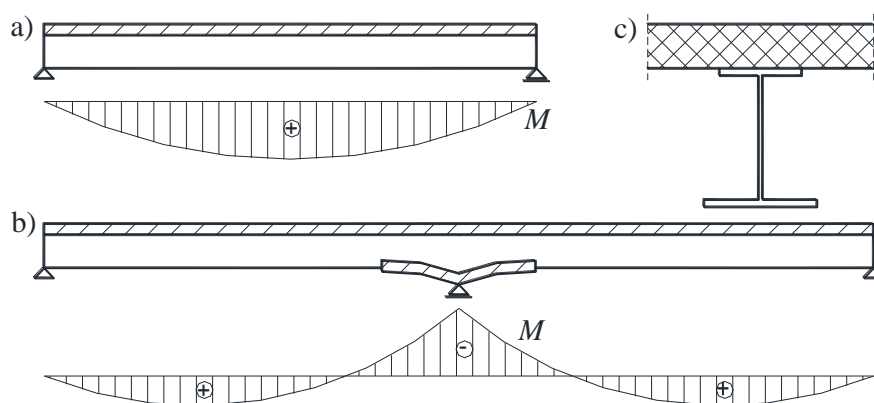
Овакав вид спрегнутих конструкција у пракси највише се остварује при бетонирању плоче преко претходно постављених челичних носача уз адекватно спрезање и омогућавање заједничког рада бетонских и челичних делова/слојева као јединствених конструкционих елемената.

У зградарству и у мостоградњи врло рано је почела примена **спрегнутих конструкција (СК)** по принципу извођења АБ плоче преко монтираних челичних носача [95]. Плочама је првобитно био поверен задатак да оптерећење пренесу на челичне носаче а ови даље на ослонце, без увођења доприноса бетона. Касније се увидело да се заједничким радом бетона и челика знатно смањују угиби и силе у пресецима овако формираних носача. Овим је уствари отпочела успешна примена СК у грађевинској пракси.

Иако су СК бетон-бетон, па једним делом и СК дрво-бетон, широко у употреби, и даље је уобичајено да се под СК, ако другачије није наведено, подразумева спрезање бетонске плоче и челичних носача, у

пракси познато као спрезање „**челик-бетон**“. За разлику од других, овај тип СК се најраније развио и њихова примена је у већини земаља пропраћена одговарајућим техничким прописима [110].

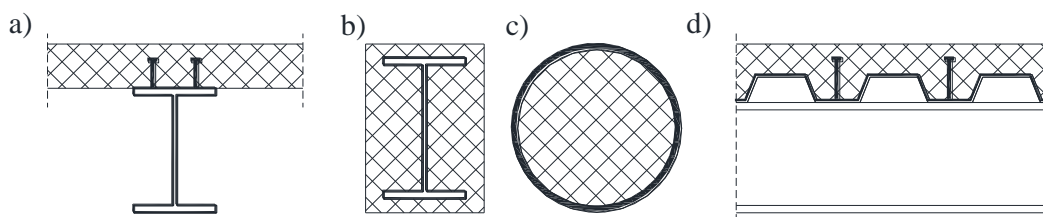
Спрегнути носачи челик-бетон се уобичајено сусрећу у виду гредних носача који раде на савијање. Најчешће су у питању просте греде или континуални носачи средњих и већих распона (слика 1.4). Код континуалних носача, у зони негативних момената, врло често се јавља потреба за израдом АБ плоче и у доњем појасу, да би се смањио челични пресек у тој притиснутој зони (слика 1.4б). Уопштено, увијек постоји тежња да се у притиснутим зонама користи бетон а у затегнутим челик како би се постигла најповољнија решења у пракси. Повољна напонска стања се такође могу постићи различитим облицима преднапрезања и разним поступцима при грађењу [95].



Сл. 1.4 – Спрегнути гредни носачи: (а) проста греда; (б) континуална греда; (ц) попречни пресек греде

Fig. 1.4 – Composite beam girders: a) simply supported beam; b) continuous beam; c) beam cross-section

Поред уобичајених гредних носача, код којих напоне затезања прихвата челични носач, а напоне притиска бетон (слика 1.5а), спрезање челичног носача и бетона нашло је широку примену и код разних облика вертикалних носећих елемената, првенствено стубова. При томе, челични носач може бити потпуно (слика 1.5б) или делимично убетониран или, што је уобичајено, могу се формирати спрегнути елементи са бетонским језгром унутар шупљих челичних профила (слика 1.5ц). Такође, спрезање бетона са профилисаним лимом (слика 1.5д) нашло је широку примену у грађевинарству у виду спрегнутих међуспратних конструкција [110]. При томе подвлаке могу бити у виду челичног или бетонског носача које се такође спрезањем са бетоном плоче интегришу у јединствену међуспратну конструкцију.



Сл. 1.5 – Спрегнути пресеци: а) гредни носач челик-бетон; б) стуб са убетонираним челичним носачем; ц) стуб са бетонским језгром у челичном плашту; д) таваница са доњим профилисаним лимом

Fig. 1.5 – Composite sections: a) beam girder steel-concrete; b) column with concreted steel girder; c) column with concrete core in the hollow section; d) floor structure with the profiled sheet

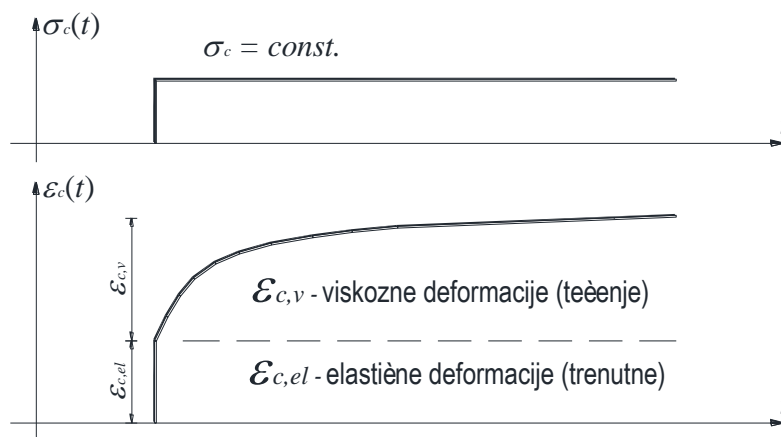
Уопштено, спрезањем бетона и челика омогућује се добијање елегантних и витких монтажних монолитних конструкција већих распона, уз висок степен индустријализације и контроле квалитета уграђеног материјала и израде. При томе, монтажних монолитних конструкција, саме по себи, представљају рационалан спој монтажних и монолитних конструкција, јер обједињују предности једних и других [111]. Познато је да се спрезањем бетона и челика, поред значајног економског ефекта, постиже и низ других предности у односу на самосталне челичне или бетонске носаче.

1.2. Вискозно понашање бетона

Бетон се, као и сва друга тела у природи, непосредно пошто је оптерећен деформише. Међутим, досадашња искуства у проучавању понашања бетона, као деформационог тела, указују на веома сложене процесе, јер бетон показује вискозно понашање у току дужег временског периода [25,106,107]. Наиме, бетон се под оптерећењем деформише, али, у области експлоатационих напона (уобичајено се узима да је експлоатациони напон у бетону $\sigma_c \leq 0.4f_{ck}$, где је са f_{ck} означена карактеристична чврстоћа бетона), поред тренутних еластичних деформација, процес деформисања се током времена наставља и без прираштаја оптерећења. Ова појава је у литератури позната као **течење бетона** (слика 1.6). Са друге стране, услед појаве да бетон тече, ако се деформација одржава константном, долази до релаксације напона у бетону, тј. бетон се током времена растеређује (релаксира).

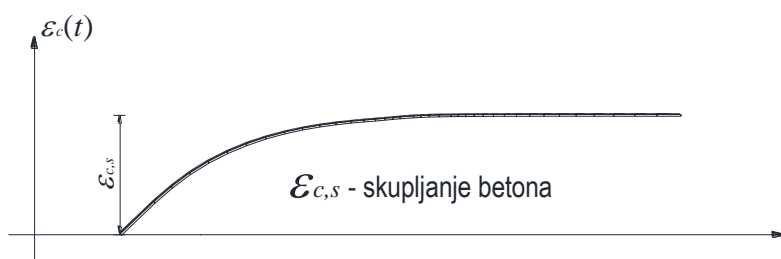
Течење бетона има значајан утицај на стање напона и деформација током времена у свим конструкцијама у којима је бетон заступљен,

нарочито у спрегнутим конструкцијама са значајним уделом конструкционог челика, код којих је изражена прерасподела напрезања.



Сл. 1.6 – Деформације бетона у току времена под константним напонем
Fig. 1.6 – Concrete strains over time under constant stress

Познато је, такође, да бетон током времена мења запремину, што је резултат сложених процеса очвршћавања, а у практичним проблемима превасходну улогу има **скупљање бетона** (слика 1.7). Скупљање бетона је полагана деформација и по свом току је веома слична течењу бетона, али се уобичајено подразумева да се ова деформација одвија без деловања спољашњег оптерећења [106].

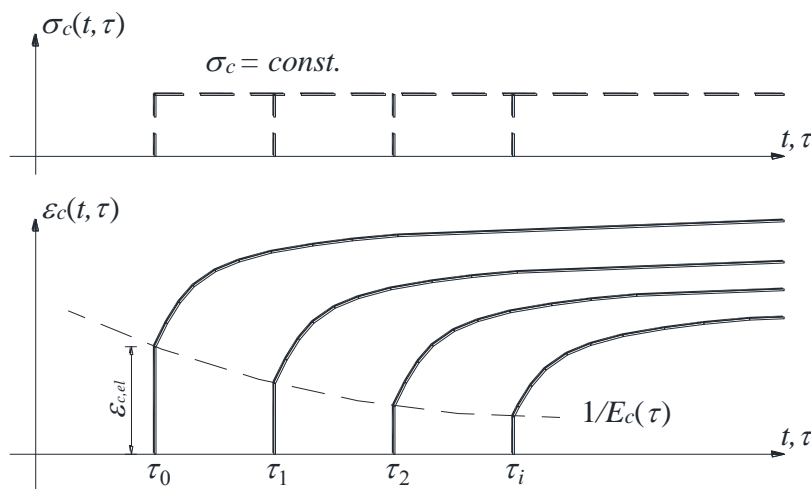


Сл. 1.7 – Деформације скупљања бетона у току времена
Fig. 1.7 – Concrete shrinkage strains over time

Тakoђе, временом бетон мења своје физичко-механичке карактеристике и показује **особине старења** [8,17]. Те промене се најчешће манифестују кроз промену модула еластичности, односно увећањем тог модула, чиме бетон током времена постепено ојачава (слика 1.8).

Када се оптерети млађи бетон деформације су веће, и то не само тренутне/еластичне него и вискозне, односно укупне/крајње. При оптерећењу старијег бетона показало се да су све ове деформације

мање. Услед ових поменутих процеса, бетон се може сврстати у групу грађевинских материјала са врло сложеним реолошким особинама.



Сл. 1.8 – Деформације бетона у зависности од старости бетона у тренутку оптерећења

Fig. 1.8 – Concrete strains depending on the age of concrete in the moment of load

Феномен течања и скупљања бетона данас је шире истражен и добио је своје место у релевантним прописима, који садрже обавезно и описе својстава бетона, када су у питању његове реолошке карактеристике [28].

Деформације услед течења бетона, у области експлоатационих напона ($\sigma_c \leq 0.4f_{ck}$), се могу довести у приближно линеарну везу са напонима - **линеарна теорија течења бетона**, док се за деформације скупљања може узети да се одвијају без деловања напона [25]. Показало се да ове вискозне деформације могу бити два до три па и више пута веће од еластичних деформација [95].

Код спрегнутих носача челик-бетон, услед течења бетона, током времена, деформације бетона се мењају (под напонима притиска бетон временом тежи да се додатно скрати), а како је бетон спрегнут са челиком те деформације се преносе и на челични део носача (компатибилност деформација) [95]. Услед ових појава долази до прерасподеле напрезања између бетона и челика унутар спрегнутог пресека.

Прерасподела напона између бетонског и челичног дела пресека, за једнак нападни моменат, се одвија тако да напон у притиснутом бетону опада (бетон се растеређује), а у челичном носачу напон расте. Слично дејство има и скупљање бетона, при чему се јављају напони затезања у

бетонском делу/слоју носача, који даље изазивају напоне притиска у челичном носачу на споју са бетоном, што опет може изазвати напоне затезања на супротном крају челичног носача.

За разлику од статички одређених, код статички неодређених спрегнутих конструкција прерасподеле напона између бетона и челика су далеко сложеније, јер се због промена деформационих карактеристика мењају статички неодређене величине а тиме и силе у пресецима елемената конструкције и у условима константног спољашњег оптерећења [25]. Због тога су прорачуни стања напона и деформација вишеструко статички неодређених спрегнутих конструкција, без обзира на увођење разних поједностављења, веома компликовани, те уколико се решавају стандардним методама статике, нису погодни за свакодневну инжењерску праксу. Решења треба тражити у развијању нумеричких метода и примени рачунара [7,20,33,50,52,85].

1.3. Вискозно понашање преднапрегнуте арматуре

Познато је да високовредни челик (жице, каблови), који се користи код разних облика преднапрезања носача, поред еластичног понашања, током времена показује особине релаксације, тј. код овог челика долази до пада напона при константној деформацији [60]. Међутим, како се ова појава одвија у условима променљиве деформације укупног спрегнутог носача, онда тачнији прорачун напона и деформација у карактеристичним фазама носача често може бити веома сложен и захтеван [116].

Падом напона у преднапрегнутој арматури током времена долази до пада силе као спољашњег оптерећења на укупни спрегнути пресек. Поред тога, свака промена напонско-деформационог стања укупног спрегнутог пресека директно утиче и на промену напона у преднапрегнутој арматури. Услед ове узајамне зависности тачнији прорачуни напона и деформација захтевају итеративне и веома дуге поступке и нису прихватљиви за свакодневну инжењерску праксу.

Такође, као што је поменуто, скупљање и течење бетона у току времена значајно мења напонско-деформационо стање у спрегнутим елементима/пресецима, што додатно утиче на промену тог стања и у преднапрегнутој арматури, као саставном делу пресека, што још више компликује прорачун. Због тога је при пројектовању спрегнутих

конструкција нужно изнајзати одговарајуће прорачунске моделе који би били прихватљиви за већину практичних проблема, с тим да се што реалније уведе допринос реологије бетона и високовредног челика.

Веома је важно имати у виду да технолошки поступци при грађењу спрегнутих конструкција, тј. различити временски интервали укључивања појединих делова и елемената у напонски активне, значајно доприносе расподели напона и деформација у карактеристичним фазама конструкције [51]. Овде се допринос вискозног понашања материјала мора реално сагледати и анализирати како би се могле пројектовати рационалне, сигурне и функционалне конструкције за све предвиђене експлоатационе ситуације.

1.4. Основе за прорачун спрегнутих пресека

При прорачуну спрегнутих пресека, поред низа других услова, нужно је познавати везу између напона и деформација за поједине материјале [17]. Код еластичног понашања материјала та веза је линеарна и успостављена је преко модула еластичности. Уобичајено је да се за бетонски челик (меку арматуру) и конструкциони челик подразумева еластична веза напон-дилатација. Међутим, за материјале који показују вискозна својства веза напон-дилатација захтева увођење додатних услова [25]. Ово се нарочито односи на бетон за који је речено да има веома сложено реолошко понашање (течење и скупљање) под оптерећењем у дужем временском периоду. Такође је речено да и високовредни челик (преднапрегнура арматура) показује вискозно понашање у виду релаксације током времена.

Веза између напона и деформација за бетон, у области линеарне теорије течења ($\sigma_c \leq 0.4f_{ck}$), поред модула еластичности који зависи од времена када је бетон оптерећен, захтева увођење функције течења која зависи не само од времена када је бетон оптерећен него и од дужине временског интервала у којем се одвија процес течења бетона [17].

Услед реолошких својстава општа линеарна веза напон-деформација за бетон је у литератури дата у интегралном или диференцијалном облику (Волтерина интегрална једначина друге врсте са језгром које зависи од укупне специфичне деформације бетона) [17,107]. Решавање такве једначине у затвореном облику није могуће чак ни за сасвим једноставне историје напона/деформација. Због тога се,

за решавање проблема у пракси, углавном примењују нумеричке методе интеграције чиме се проблеми свде на решавање система алгебарских једначина [45]. Поред тога, за уобичајене проблеме у пракси, за бетон се најчешће уместо интегралних (диференцијалних) веза напон-дилатација користе одговарајуће алгебарске везе [8,25,59].

Функција течења треба да што реалније обухвати вискозно понашање бетона под оптерећењем у току времена. До сада је предложено више аналитичких израза за функцију течења бетона од којих неки више а други мање верно приказују понашање бетона. Међутим, константе које улазе у те изразе тешко је експериментално одредити. Оне зависе од више фактора, јер мера течења није искључиво константа материјала, тј. не зависи само од количине и физичко-хемијских особина компоненти бетона (агрегата, цемента, воде, додатака) и начина справљања, већ зависи и од облика и димензија елемената и конструкције, као и од услова средине (влажност, температура) и сл.

Може се закључити да је веома тешко постићи неки тачнији израз за функцију течења бетона, а такође, неки компликовани облици ове функције нису погодни за примену у свакодневној инжењерској пракси. Отворени проблеми око ових питања још увек постоје те се у научним круговима у свету и даље одвијају интензивне дебате у циљу успостављања хармонизованог приступа задовољавајућем решењу ових проблема [14].

Једноставни облици функције течења бетона су они којима одговарају фамилије кривих линија по **теорији наслеђа**, где су ове фамилије добијене транслаторним померањем почетне криве у правцу апсцисе, или фамилије кривих линија по **теорији старења**, где су ове фамилије добијене транслаторним померањем почетне криве у правцу ординате [106].

Сам назив ових теорија разоткрива физичку суштину једне и друге претпоставке, а ради се о приближним теоријама које имају одређене предности и недостатке. Постоје тачније теорије, тј. тачнији изрази за функцију течења бетона (Арутјуџан, 1952), (Александровски, 1966), које делимично обухватају и повратне деформације течења, али је њихова примена математички знатно компликованија.

Да би се дошло до једноставнијих израза за решавање практичних проблема развијен је временом читав низ предлога за алгебарску везу

напон-деформација, уместо интегралних или диференцијалних веза. Овим проблемима су се бавили многи истраживачи у свету и код нас.

М. Ђурић (1963) је извршио извесна упрошћења интегралне везе на основу класичне теорије старења (Дишингерова теорија). Увео је коефицијент течења и непроменљивост модула еластичности бетона те добио алгебарску везу између напона и деформација [25]. Такође су из ове области познати радови (изрази) Улицког, Троста, Ивковића и многих других истраживача [58,106]. Уопштено, у свету је највише у употреби ААЕМ метода (Бажант, 1972), која се користи и у нашим актуелним прописима (ПБАБ '87), за коју је карактеристично да је, поред мере течења и скупљања, уведен коефицијент старења бетона [8,90].

Високовредни челик, као што је поменуто, има особину релаксације, односно пада напона током времена под константном дилатацијом [60]. Како се током времена мења и деформација носача, у којем активно учествује преднапрегнути челик (жице, каблови), тако се јавља потреба за увођењем одређених поједностављења у прорачунима. За већу тачност нужна је примена итеративних корака прорачуна што онда подразумева и употребу рачунара и прилагођених софтверских решења [42,116].

За нумеричко одређивање напона и деформација код статички одређених спрегнутих конструкција могу се посматрати само карактеристични пресеци, јер су силе у тим пресецима константне (не зависе од времена за непроменљиво оптерећење). Развијен је временом читав низ прорачунских модела од којих неки више а други мање пружају тачност резултата у оквиру усвојених услова и претпоставки. Значајан допринос у овој области за проблеме у пракси код нас дали су Р. Фолић, М. Татомировић и Б. Поповић самостално и у сарадњи [42-47,92,93,116,117]. При томе су развијени модели за анализу утицаја у пресецима код разних облика спрезања (челик-бетон, бетон-бетон без и са прслином, парцијално преднапрезање итд.).

Познато је да се код статички неодређених спрегнутих конструкција силе у пресецима током времена мењају услед промене статички неодређених величина (реакција) и без промене оптерећења. Промена ових сила је последица реологије бетона и високовредног челика. Због тога су код ових конструкција, за разлику од статички одређених конструкција, тачнији прорачуни веома захтевни и постоји стална тежња

развоју прорачунских модела који би били једноставнији за употребу у свакодневној инжењерској пракси [30,64,103].

До сада је за анализу статички неодређених спрегнутих конструкција код нас развијено низ метода које у везу напон-деформација уводе вискоеластична својства материјала. Тако је М. Ђурић (1963) извео изразе користећи алгебарску везу и методу сила [25,26]. Такође је методу сила користио и Ј. Лазић [71,72]. Матрицу крутости обострано укљештеног вискоеластичаног штапа, за општи случај функције течења бетона и произвољну промену попречног пресека дуж штапа, где је је узета у обзир и релаксација челика за преднапрезање, извела је Б. Деретић-Стојановић [22]. У овој области веома су значајни радови аутора овог рада у сарадњи са Р. Фолићем [19,20] где се примењује Метода коначних елемената (МКЕ), док се прорачуном спрегнутих конструкција применом Метода коначних трака (МКТ) највише бавио Д. Милашиновић [80].

Поред домаћих, у свету су се овим проблемима бавили многи аутори, те данас постоји низ развијених метода за анализу спрегнутих конструкција са уведеним вискозним понашањем материјала уз одговарајућа експериментална истраживања. Кроз све радове провејава став да је примена ефеката временских деформација веома важна, нарочито за осетљиве конструкције [14]. То су у првом реду мостовске конструкције великих распона и конструкције бетониране на лицу места преко постављених монтажних носача. Такође је истакнута важност да се анализама обухвате високе бетонске зграде са стубовима и језгрима и високе мешовите зграде са бетонским језгрима и челичним стубовима.

Све конструкције које су осетљиве на временске деформације захтевају адекватне прорачунске анализе како би се обезбедила тражена поузданост током времена. У новије време ово је још израженије јер се све више примењују бетони високих чврстоћа и елементи дебљих бетонских пресека. Овакве анализе захтевају посебну пажњу и траже развој и примену нумеричких метода и рачунарских програма [7,33,50,52,85]. Такође, овакве анализе траже и испитивања и праћења понашања спрегнутих система током дужег временског периода (50-100 година).

За поједностављење пројектовања нужно је коришћење линеарно-еластичне анализе са неким модификацијама како би се узеле у обзир одређене нелинеарности материјала [30,64,103].

Познато је да се Метода коначних елемената (МКЕ) заснива на дискретизацији конструкције на довољан број коначних елемената (КЕ), код којих се, уместо интегралних/диференцијалних, успостављају обичне алгебарске једначине [109]. Примена ове методе нарочито долази до изражаја код прорачуна напонско-деформационог стања статички неодређених конструкција. Код МКЕ једначине се успостављају у матричном облику, због чега је она веома погодна за аутоматизацију прорачуна и изналагање одговарајућих софтверских пакета и примену савремених рачунара.

У овом раду за анализу СК, са ефектима реолошких својстава материјала (бетона и преднапрегнуте арматуре), коришћена је МКЕ. За извођење матрице крутости КЕ коришћена је метода слојева у пресеку, а утицаји услед вискозних својстава материјала уведени су преко фиктивног оптерећења [20].

Поред МКЕ за просторну дискретизацију конструкције примењена је и МКД (метода коначних диференцијала) за временску дискретизацију проблема. Примењени су инкрементални облици везе напон-деформација који омогућују генерализовање поступка за дисконтинуалне и континуалне промене увођењем фиктивних и коначних интервала времена ($\Delta t_i = 0$ и $\Delta t_i \neq 0$). Овим се цео прорачунски модел своди на решавање алгебарских једначина у матричном облику за неки произвољни (посматрани) интервал времена (Δt_k) [40,41].

Концепт добијања матрице крутости КЕ, примењен у овом раду је сличан као у раду [67], с тим да су у овом раду уведене и вискоеластичне деформације материјала, а цео поступак је испрограмиран и прилагођен за уобичајене примере у пракси и у сврху ових истраживања.

1.5. Предмет и проблем истраживања

Најкраће дефинисано, предмет истраживања у овом раду је проучавање понашања сложених статички неодређених спрегнутих конструкција (СК), са ефектима течења и скупљања бетона и релаксације челика за преднапрезање, развојем нумеричког модела и

формирањем алгоритма заснованог на Методи коначних елемената (МКЕ).

Како је претходно наведено, скупљање и течење бетона и релаксације челика за преднапрезање имају значајан утицај на промену напона и деформација кроз време, нарочито код сложених СК. Ове деформације могу бити два па и више пута веће од еластичних деформација. Због тога је важно да се ове промене обухвате прорачуном и да се при пројектовању обезбеди сигурност и трајност конструкције за све фазе у експлоатацији. Такође је веома важно да се прорачуном обухвати утицај настајања/грађења СК и промена оптерећења, где се поједини елементи/слојеви укључују у напонски активне у различитим интервалима времена.

У савременој инжењерској пракси, при пројектовању сложених спрегнутих (статички неодређених) конструкција, није могуће користити интегралне/диференцијалне облике израза, и није довољно поуздано анализирати утицаје у издвојеном попречном пресеку, јер реологија бетона и преднапрегнутог челика (ПЧ) временом мења реакције и силе у конструкцији. Намеће се потреба за развојем и применом нумеричких модела, са дискретизацијом конструкције и времена, и рачунарских програма за прорачун напонско-деформационог стања елемената конструкције у карактеристичним интервалима времена (Δt_i).

У овом раду за извођење матрице крутости коначног елемента (КЕ) коришћена је метода слојева (ламела, делова) у пресеку, а утицаји услед вискозних својстава материјала (скупљање и течење бетона и релаксација високовредног челика) су уведени преко фиктивног оптерећења. Коришћени су инкрементални облици везе напон-деформација за материјале, што омогућује генерализовање поступка за дисконтинуалне и континуалне промене кроз фиктивне ($\Delta t_i = 0$) и коначне интервале времена ($\Delta t_i \neq 0$). Овим је цео поступак прорачуна сведен на сукцесивно решавање алгебарских једначина у матричном облику. За решавање ових једначина развијен је оригинални рачунарски програм ВАСКЕЛ – вискозна анализа слојевитим коначним елементима.

1.6. Примењена методологија

У оквиру овог научног истраживања извршена је систематизација појмова и метода прорачуна вискоеластичног понашања бетона и високовредног челика у спрегнутим и мешовитим системима према

најновијим научним достигнућима преузетим из актуелне домаће и светске литературе.

Постављени циљеви и предмет истраживања овог научног рада остварени су анализом и синтезом доступних досадашњих резултата на пољу прорачуна спрегнутих конструкција са утицајем вискозног понашања појединих слојева (бетон и ПЧ) и резултатима сопствених истраживања прорачунских поступака развијених на темељу методе деформација и методе коначних елемената (МКЕ).

Решавање интегралних веза извршено је применом неких од познатих поступака нумеричке интеграције. Примењени су инкрементални облици везе напон-деформација за поједине материјале уз претходну дискретизацију карактеристичног времена на коначне ($\Delta t_i \neq 0$) и фиктивне интервале ($\Delta t_i = 0$). За генерализовану поставку и решавање проблема коришћена је метода „замрзнутог“ стања деформација, а на цео систем је примењена дискретизација конструкције, са развојем линијских слојевитих коначних елемената (КЕ). При томе је развијен поступак увођења вискоеластичности бетона и ПЧ преко фиктивног оптерећења које је сумирано са спољашњим оптерећењем за сваки посматрани временски интервал (Δt_k) (уколико се појављује промена спољашњег оптерећења).

Даље је развијен побољшани модел прорачуна, а такође је развијен и поједностављени алгоритам прорачуна применљив на примере из уобичајене инжењерске праксе. Обављене су шире параметарске анализе утицаја вискоеластичног понашања бетона и високовредног челика на стање напона и деформација код сложених спрегнутих и мешовитих конструкција. Све ове анализе су се могле релативно брзо обавити захваљујући развоју оригиналног рачунарског програма ВАСКЕЛ (вискозна анализа слојевитим коначним елементима). При томе је коришћена комбинација теоријског разматрања и нумеричког моделовања. Нумеричке симулације и остале анализе су претежно реализоване у поменутом програмском пакету.

1.7. Циљ, задаци и основне хипотезе истраживања

1.7.1. Циљ истраживања

Циљ истраживања у овом раду је развој општег прорачунског модела за нумеричко одређивање стања напона и деформација код сложених

спрегнутих конструкција (СК), укључујући и мешовите конструкције са спрегнутим и неспрегнутим елементима, са нагласком на развој слојевитих вискозних коначних елемената (КЕ) и одговарајућег рачунарског програма ВАСКЕЛ - вискозна анализа слојевитим КЕ.

Оваквим алгоритмом дата је могућност да се обухвати утицај настајања (грађења, формирања) спрегнутих елемената, укључујући и различито време доношења додатног оптерећења, што је и био један од главних циљева. Такође је омогућено искључивање појединих слојева (ламела, делова) из напонске активности, као што је случај корозије арматуре, прскања бетона и сл. При томе се примењени материјали могу увести у прорачун у складу са својим реолошким параметрима који се уобичајено користе код нас и у свету.

Алгоритам нумеричког модела је верификован резултатима из одабраних доступних примера из литературе на бази теоријских и експерименталних истраживања. Циљ је био да се предложи и поједностављени модел којим се могу добити приближни резултати, који су задовољавајући за свакодневну пројектантску праксу, уз знатно скраћење уноса улазних података, бржи прорачун и лакше сагледавање резултата. Такође је био циљ да се предложи побољшани поступак осредњавањем утицаја дуж сваког КЕ и поновним враћањем на стварне разлике на крају сваке фазе прорачуна, што знатно умањује дискретизацију конструкције и количину улазних података.

Детаљно су проучени утицаји вискозних деформација бетона и преднапрегнутог челика (ПЧ), те прерасподела утицаја и могућност отказа појединих елемената (слојева, делова) спрегнуте конструкције. Анализиран је утицај вискозних деформација бетона на сигурност високих зграда, нарочито несиметричних, код којих може доћи до нагињања таваница и бочног померања услед различитог скраћења бетонских и/или челичних стубова у односу на крута бетонска језгра. Такође је анализиран допринос временских деформација бетона и ПЧ код мостова великих распона, односно мостова са конструкцијом осетљивом на временске (вискозне) деформације.

У истраживању ове проблематике шире су проучени параметри који доминантно утичу на карактеристике мешовитих и спрегнутих конструкција и на њихову поузданост током времена. За утицај вискозног понашања проучене су могућности предупређења нежељених деформација при пројектовању уз формулисање одређених

препорука. То се у првом реду односи на пројектовање надвишења и на преднапрезање разним поступцима којима се обезбеђује сигурност и функционалност елемената и конструкцијског система у целини.

Даље је обављена критичка анализа не само теоријских и експерименталних истраживања, већ и савремене праксе реализације (настајања, извођења) спрегнутих пресека и конструкције у целини. Верификација резултата је обављена на основу упоређења предложених аналитичких и нумеричких модела из одабраних карактеристичних примера са доступним резултатима из актуелне литературе. Одабрани су и анализирани одговарајући примери који показују значајан утицај реологије материјала (бетона и ПЧ) на сигурност и употребљивост СК.

1.7.2. Радне (полазне) хипотезе истраживања

Основне хипотезе – полазишта, претпоставке и ограничења која су коришћена у оквиру наведених истраживања су следећа:

- Положај и величина бетонског слоја (ламеле, дела, елемента) и/или преднапрегнуте арматуре значајно утичу на понашање спрегнутих конструкција (СК) током времена;
- Време укључења бетонског слоја и/или ПЧ у напонску активност, као и искључење неких слојева (нпр. корозија арматуре и прскање бетона) значајно утичу на понашање и поузданост СК током времена;
- Подразумева се заједнички рад слојева у спрегнутом пресеку, тј. конструкционог челика (КЧ), бетона, бетонског меког челика (МЧ) и преднапрегнутог челика (ПЧ);
- За везу напон-деформација за поједине материјале коришћени су адекватни конститутивни аналитички модели;
- Карактеристике заступљених материјала се у анализу уводе на основу резултата из литературе, експерименталних истраживања, идеализованих дијаграма, важећих кодова и стандарда (техничких прописа) код нас и у свету;
- Подразумева се да су спрегнути пресеци, односно бетонски слојеви у радним напонима до $0.4f_{ck}$, до којих се успешно може применити хипотеза равних пресека и линеарност деформација;

- Бетон се узима као хомоген материјал код којег важи линеарна теорија течења и теорија старења, те важи принцип суперпозиције деформација од скупљања и течења, док се напони индуковани током неге бетона занемарују;
- Подразумева се да важи суперпозиција утицаја у текућем интервалу времена са претходно оствареним утицајима до тог интервала и да се може применити поступак прорачуна корак-по-корак (*step-by-step*);
- Анализе се спроводе на линијским системима у равни (ради јаснијег приказа), а модел прорачуна се може успешно проширити на површинске носаче и сложене просторне системе модификацијом изведене основне матрице крутости вискозног слојевитог КЕ;
- Чврстоћа бетона на затезање и испрскали бетонски слојеви/делови се у прорачунима занемарују/искључују, док допринос арматуре у тим деловима бетона и даље остаје укључен.

1.7.3. Задатак истраживања

На основу дефинисаних циљева научног истраживања, основни задаци овог рада су:

- Проучавање доступних података из литературе уз њихову рекапитулацију, тј. презентацију прегледа стања у области скупљања и течења бетона и релаксације ПЧ код сложених спрегнутих конструкција (СК);
- Преглед и анализа нумеричких истраживања и модела прорачуна код нас и свету у области вискоеластичног понашања бетона и ПЧ код СК;
- Избор примера на којима се врши истраживање и параметара који су обухваћени линеарним нумеричким анализама у циљу добијања адекватних прорачунских модела;
- Развој и верификација модела за нумеричке и теоријске анализе по МКЕ, коришћењем резултата и примера из актуелне литературе;
- Развој приближних нумеричких модела погодних за примену у уобичајеној инжењерској пракси применом МКЕ и развојем рачунарског програма *BASKEA* за овакве примере;

- Давање препорука за пројектовање, углавном у концептуалним и прелиминарним фазама, које утичу на перформансе мешовитих и спрегнутих конструкција у области вискоеластичног понашања бетона и ПЧ;
- Презентација резултата и њихова анализа који чине основу за адекватне закључке и препоруке за пројектовање рационалних и поузданих мешовитих и спрегнутих конструкција (нпр. великих распона мостовских конструкција и високих несиметричних зграда).

1.8. Значај истраживања и применљивост резултата

Овде развијеним моделом прорачуна омогућено је да се обухвати утицај настајања/грађења спрегнутих елемената и конструкције у целини, укључујући и различито време доношења додатног оптерећења. Такође је омогућено искључење појединих слојева/ламела из напонске активности, као што је случај корозије арматуре, прскање бетона и сл. При томе се примењени материјали уводе у прорачун у складу са датим реолошким параметрима који се уобичајено користе код нас и у свету у оквиру одговарајућих прописа.

Анализиран је утицај вискозних деформација на сигурност високих зграда, нарочито несиметричних, код којих може доћи до нагињања таваница и бочног померања услед различитог скраћења бетонских и/или челичних стубова у односу на крута бетонска језгра. Такође је анализиран допринос временских деформација бетона и ПЧ код мостова великих распона и других конструкција осетљивих на развој временских (вискозних) деформација.

То значи да су у истраживању шире проучени параметари који доминантно утичу на карактеристике мешовитих и спрегнутих конструкција и на њихову поузданост током времена. За утицај вискозног понашања проучене су могућности предупређења нежељених деформација при пројектовању уз формулисање одређених препорука. То се у првом реду односи на пројектовање надвишења и разних облика преднапрезања којима се обезбеђује сигурост и употребљивост конструкције кроз све експлоатационе ситуације.

Обављена је једна критичка анализа, не само теоријских и експерименталних истраживања, већ и савремене праксе реализације/извођења спрегнутих пресека и конструкције као целине.

Верификација резултата је обављена на основу упоређења предложених аналитичких и нумеричких модела са доступним резултатима из актуелне литературе.

1.9. Кратак садржај рада по поглављима

У складу са постављеним циљевима предметни рад је изложен у 9 поглавља, и то:

1. Уводне напомене
2. Преглед важнијих досадашњих истраживања
3. Спрегнути носачи – основни концепт и особине
4. Везе између напона и деформација за спрегнуте елементе
5. Напони и деформације у спрегнутом пресеку
6. Напони и деформације спрегнутих система методом коначних елемената
7. Нумерички примери и анализа резултата
8. Могућност примене резултата истраживања
9. Завршне напомене и закључци

На крају рада дат је шири списак релевантне литературе и прилози везани за анализиране примере.

ПОГЛАВЉЕ 1

У уводном делу дате су опште напомене и основни појмови за спрегнуте конструкције (СК), те најповољнија својства појединих материјала (бетона и челика) и њихова улога у спрегнутом пресеку. Такође је дата дефиниција за спрегнуте елементе и то у оном смислу који се уобичајено подразумева у грађевинској пракси. Указано је на механизам деловања спрегнутих пресека, те могућности спрезања за разне врсте носача (греде, стубови, плоче). Наглашен је значај спрезања у грађевинским конструкцијама, као и основне предности и специфичности, али и тешкоће при њиховом пројектовању и грађењу.

Уводни део садржи упознавање са феноменом вискозног понашања бетона и преднапрегнутог челика (ПЧ), те развојем временских деформација код ових материјала. Посебно је указано на значајан допринос скупљања и течења бетона и релаксације ПЧ на промену стања напона и деформација код СК током времена. Указано је да се

ове промене не смеју занемарити уколико се желе постићи сигурне, функционалне и економичне СК у предвиђеним експлоатационим ситуацијама.

Кроз уводне напомене наведене су основе за прорачун спрегнутих пресека, где је наведено да је нужно познавати везе између напона и деформација за поједине материјале. Ове везе су, за разлику од материјала који се понашају еластично (челик), проширене на вискоеластичне материјале (бетон, ПЧ), с тим да се у прорачунским моделима и даље користи одговарајућа линеарност (линеарна теорија течења бетона).

У уводном делу дефинисан је предмет и проблем истраживања, што се уствари односи на потребу проучавања понашања сложених статички неодређених СК, са ефектима течења и скупљања бетона и релаксације ПЧ, развоја нумеричког модела и формирања поступка прорачуна по методи коначних елемената (МКЕ).

У опису примењене методологије наведени су поступци који ће се користити при развоју прорачунског модела, почев од поступка увођења реологије бетона и ПЧ, преко самог прорачуна, до начина примене добијених резултата. При томе је акценат дат на потребу развоја нумеричких поступака и увођења аналогних фиктивних утицаја од реологије бетона и ПЧ.

За циљ истраживања је наглашено да се првенствено односи на развој општег модела за нумеричко одређивање стања напона и деформација код сложених СК, укључујући и мешовите конструкције са спрегнутим и неспрегнутим елементима, са нагласком на развој слојевитих вискозних коначних елемената (КЕ) и одговарајућег рачунарског програма *VASCEL* за решавање уобичајених проблема у инжењерској пракси.

Неведене су основне хипотезе – полазишта, претпоставке и ограничења која су коришћена у оквиру наведених истраживања а која су у складу са актуелном литературом. Кроз задатке истраживања првенствено је указано на потребу развоја приближних нумеричких модела погодних за примену у уобичајеној инжењерској пракси применом МКЕ и развојем рачунарског програма за овакве примере. Такође је указано на потребу давања препорука за пројектовање, углавном у концептуалним и прелиминарним фазама, које утичу на

перформансе мешовитих и СК у области вискоеластичног понашања бетона и ПЧ.

На крају уводног дела истакнут је значај истраживања и применљивост постигнутих резултата у градитељској теорији и пракси. То се манифестује кроз могућност да се обухвати утицај настајања/грађења спрегнутих пресека, утицај код високих зграда и великих распонских и мостовских конструкција, те потребу да се предупредe негативне појаве још у фази прелиминарног прорачуна и пројектовања.

ПОГЛАВЉЕ 2

Друго поглавље је посвећено прегледу најзначајнијих досадашњих истраживања у области спрезања и реологије бетона и ПЧ. Извршено је прикупљање, анализа и вредновање тих истраживања као и преглед актуелног стања у литератури из области понашања СК са утицајем скупљања и течења бетона и релаксације ПЧ, са нагласком на развој нумеричких прорачунских модела уз примену рачунара.

Приказани су најзначајнији примењивани поступци прорачуна код нас и у свету када су у питању СК у условима промене напона и деформација услед вискоеластичног понашања бетона и ПЧ, а кроз закључак овод дела рада дат је пресек стања у овој области, као и правци даљих истраживања. Указано је на неопходност прелиминарних саопштења за сигурно и економично пројектовање разних врста СК, те неопходност тачнијих прорачунских анализа у циљу реализације задатих циљева.

ПОГЛАВЉЕ 3

Треће поглавље се односи на приказ основног концепта и својстава спрегнутих носача. Описан је механизам деловања спрегнутих пресека, прво код АБ и ПБ конструкција, као основног облика спрезања, а затим код СК и преднапрегнутих СК у ширем смислу. Указано је на прерасподелу напона и деформација у спрегнутим пресецима, како током грађења/настајања конструкције, тако и током експлоатационих ситуација.

Посебан део трећег поглавља описује обим и врсте спрезања у циљу бољег сагледавања значаја и разних могућности које пружају СК. Указано је да се расподела напона и деформација у СК може

контролисано усмерити тако да се у свим фазама пресеци могу приближити оптималном стању, мада ово значајно зависи од технологије и економичности самог грађења. У ту сврху посебно место имају могућности које пружа локација (нпр. подупирање током грађења), укључујући и могућности разних поступака преднапрезања (каблови, принудне деформације) и сл.

У склопу основних захтева за СК истакнута је значајна улога средстава за спрезање. Наглашено је да се у пракси уобичајено подразумева круто спрезање између бетона и челичног носача уз примену посебних конструктивних елемената у облику можданика и анкера, те преднапрегнутих завртњева и ангажовања трења на споју бетона и челика.

У овом поглављу значајно место заузима приказ утицаја вискозног понашања бетона и ПЧ на прерасподелу напона и деформација у спрегнутом пресеку. Дата је и физичка интерпретација деловања ових утицаја. Показано је уствари на који начин делује течење и скупљање бетона и зашто заправо долази до промене напрезања у спрегнутом пресеку.

Да би се оценио значај СК сажето су наведене предности и недостаци спрезања појединих материјала. Указано је да се спрезањем могу постићи веома рационалне и економичне конструкције које се све више користе у савременом градитељству.

Приказан је историјски развој СК и њихова примена у зградарству и мостоградњи. Када је у питању примена у зградарству, наведено је да се СК односе на спрегнуте међуспратне конструкције, спрегнуте стубове и спрегнуте греде. Посматрано као моделски системи у зградаству, СК се односе на рамовске конструкције и системе са зидним укрућењима. Када је у питању мостоградња, спрегнути носачи се углавном односе на распонску конструкцију мостова, тј. на разне могућности спрезања бетонске коловозне плоче са главним челичним распонским носачима.

ПОГЛАВЉЕ 4

Четврто поглавље садржи приказ веза напон-деформација за поједине материјале, тј. за бетон, високовредни челик (ПЧ), конструкциони челик (КЧ) и бетонски меки челик (МЧ). Ове везе су из

интегралних (диференцијалних) трансформисане у алгебарске облике применом поступака нумеричке интеграције уз претходну дискретизацију карактеристичног времена. Указано је да су овако формиран инкрементални облици веза напон-деформација погодни за нумеричке моделе и изналажење алгоритама за прорачун на савременим рачунарима.

Посебно је важна интерпретација везе напон-деформација за бетон, као вискоеластичног материјала, код којег је потребно обухватити временске (вискозне) деформације услед феномена скупљања и течења. Те везе су дефинисане интегро-диференцијалним једначинама, преко усвојене функције течења бетона, чији облик диктира тачност резултата прорачуна. Наведене су неке познате теорије течења и аналитички модели за функцију течења бетона. Приказан је поступак са дискретизацијом времена и нумеричком интеграцијом у циљу добијања система алгебарских једначина, односно приказан је јединствен генерализовани облик везе напон-деформација за бетон, где се могу применити сви познати облици везе укључујући и алгебарске облике (нпр. ААЕМ-метода).

Указано је да се код ПЧ својствена релаксација одвија при променљивој деформацији (редукована релаксација), те би при прорачуну било нужно применити итеративне поступке. Увођењем одређених упрошћења проблем релаксације ПЧ је даље обухваћен преко редукованог модула еластичности. Овај приближни поступак је на страни сигурности и успешно се примењује у одговарајућем облику у склопу општег нумеричког модела.

Приказане су везе напон-деформација у инкременталном облику за КЧ и МЧ, као еластичне материјале, чији је облик прилагођен генерализованом прорачунском моделу.

ПОГЛАВЉЕ 5

У петом поглављу сажето је приказан поступак прорачуна напонско-деформационог стања у попречном пресеку спрегнутог носача. Ово је уствари увод за боље разумевање самог проблема и лакшег развоја прорачунског модела по МКЕ на нивоу целе конструкције без обзира на степен њене статичке неодређености.

Указано је на потребу дискретизације карактеристичног времена на фиктивне и коначне интервале и обухватања свих генералисаних промена које прате спрегнути пресек. Наведени су неки уобичајени примери из праксе у којима је кроз дискретизацију времена садржана градња/настајање спрегнутог пресека са свим уобичајеним променама током експлоатације.

Сажето су приказане конститутивне једначине које се користе за формирање крајњег прорачунског модела. Напомиње се да се ради о конститутивним релацијама напон-деформација за поједине материјале (бетон, КЧ, ПЧ и МЧ), условима компатибилности деформација по висини пресека и једначинама равнотеже спољашњих и унутрашњих сила у пресеку.

У оквиру усвојених претпоставки приказан је поступак прорачуна стања напрезања пресека заснован на инкременталној анализи са применом релаксационе методе (методе деформација). Овде је веза између прираштаја деформације и прираштаја сила, у спрегнутом пресеку, за текући интервал времена, успостављена преко матрице крутости попречног пресека. Ова матрица се односи за k -ти интервал времена и формира се као сума матрица крутости свих спрегнутих делова/слојева пресека у односу на усвојену референтну осу.

Дата је физичка интерпретација појаве парова фиктивних сила услед скупљања и течења бетона и релаксације ПЧ, што одговара примени „замрзнутог“ стања деформација у посматраном k -том интервалу времена. Такође је описана физичка интерпретација одређивања параметара прираштаја напона за поједине материјале/слојеве у пресеку. Док параметри промене деформација, у издвојеном интервалу времена, важе за цео пресек и имају линеарну расподелу, докле параметри промене напона ту линеарност имају само кроз поједине слојеве, а између слојева је скоковита промена, што је у складу са дискретизацијом времена и инкременталним облицима везе напон-деформација за поједине материјале.

Показано је да се укупни напони и деформације добијају сумирањем текућег са претходним стањима, тј. резултати се добијају сукцесивном применом поступка корак по корак (*step-by-step*).

У закључку за ово поглавље указано је на предности изложеног поступка прорачуна стања напрезања у спрегнутом пресеку. Ту се као најбитније издваја обједињеност тока прорачуна у фиктивним и

коначним интервалима времена и примена генерализованог поступка корак по корак. Такође, важним се истиче да приказани алгоритам нема посебних ограничења када је у питању технологија грађења, број различитих делова/слојева, њихов распоред у пресеку и сл. На крају закључка дата је констатација да код статички неодређених носача прорачун у пресеку не обухвата промене које су допринос прерасподеле напрезања услед те статичке неодређености, те да је нужно применити и/или изнаћи друге моделе прорачуна којима се обухвата конструкција као целина без обзира на степен њене статичке неодређености.

ПОГЛАВЉЕ 6

Шесто поглавље је најзначајније за овај рад, јер се односи на развој оригиналног прорачунског модела по методи коначних елемената (МКЕ). Прво су изложени основни појмови и једначине ове методе, а затим су уведени слојевити коначни елементи (КЕ) са вискозним својствима, по аналогији са хомогеним КЕ. Према тој аналогији изведена је генералисана једначина равнотеже спрегнутог КЕ, којом се преко матрице крутости успоставља веза између померања чворова и сила у тим чворовима. При томе се те чворне силе састоје од стварно задатих спољашњих сила и формираних фиктивних сила као допринос вискозног понашања бетона и ПЧ.

Посебан део у овом поглављу посвећен је матрици крутости линијског вискозног слојевитог КЕ, као веома битном доприносу у самом поступку прорачуна. Указано је на разлику матрице крутости слојевитог штапа у односу на хомогени штап, где се преко одређених коефицијената уводи утицај висинског положаја појединих слојева у спрегнутом пресеку. Међутим, матрица крутости се мења у сваком интервалу времена, јер садржи параметре који су допринос скупљања и течења бетона, а може се мењати и физичком променом КЕ (додавањем или искључењем слојева). Иначе матрица крутости се у сваком интервалу наново формира као збир удела бетона, КЧ, МЧ и ПЧ.

За разлику од вектора спољашњих сила, који је идентичан хомогеном КЕ, уведен је вектор фиктивних сила услед скупљања и течења бетона и релаксације ПЧ. Поступак одређивања овог вектора има одређене специфичности и детаљно је описан у овом поглављу.

Приказана је мрежа КЕ за систем (конструкцију), односно изведена је генералисана једначина система, уз претходне трансформације из локалног у глобални координатни систем, и уз сумирање доприноса чланова матрица за све КЕ који се сустичу у истом чвору.

Посебно је појашњен начин формирања вектора фиктивних сила за укупан систем, са нагласком на специфичности које доприносе тачности резултата прорачуна. У ту сврху развијен је побољшани прорачунски модел. Наглашено је да је извођење овог модела веома важан допринос целом поступку прорачуна, јер се постиже задовољавајућа тачност резултата и са минималним бројем КЕ у систему. Ово је оригинални и најзначајнији део ауторовог рада у оквиру дефинисања и унапређења самог прорачунског модела.

На крају је приказан начин решавања система једначина и одређивања напона и деформација за карактеристичне пресеке у конструкцији. Поред тога наведени су специјални случајеви за СК који се уобичајено појављују у инжењерској пракси.

Развијен је (од стране аутора) одговарајући оригинални рачунарски програм ВАСКЕЛ – вискозна анализа слојевитим КЕ, који у свему прати и подржава разрађене алгоритме прорачуна. Овај програм је истестиран на релевантним примерима из актуелне литературе и потврђена је његова тачност у оквиру усвојених претпоставки. Сви остали приказани примери су рађени у поменутом програму.

ПОГЛАВЉЕ 7

У седмом поглављу дати су нумерички примери и анализа резултата. Прво су поступак прорачуна и рачунарски програм ВАСКЕЛ приказани и верификовани кроз релевантне примере из литературе, где се показало веома добро слагање резултата. Поред тога, кроз ове примере извршена је анализа утицаја вискоеластичности бетона и ПЧ на стање напона и деформација мешовитих и СК. Указано је да течење и скупљање бетона у већини случајева значајно мења напрезања у СК током дужег временског периода.

У оквиру ове прве групе примера дати су и они код којих се резултати пореде рачунањем кроз различите статичке моделе, али „намештањем“ тих модела тако да се добијају исте силе у посматраном попречном

пресеку. Ово је омогућено само ако се бирају статички одређени системи.

Друга и трећа група примера се односи на специјалне параметарске анализе, укључујући временски ток настајања/грађења конструкције и историју додатног оптерећења. Разматрана је и неопходност и обим прелиминарних анализа при пројектовању ових конструкција. Дати су примери актуелних објеката из зградарства и мостоградње.

ПОГЛАВЉЕ 8

Осмо поглавље садржи могућност примене резултата истраживања. Посебно је истакнут значај што се кроз развијени алгоритам прорачуна и програмски пакет могу релативно брзо решавати проблеми из праксе. Такође се отвара могућност даљег развоја ове методологије и њеног усавршавања у оквиру експерименталних испитивања и нових сазнања из области понашања СК под утицајем реологије бетона и ПЧ.

ПОГЛАВЉЕ 9

Девето поглавље се односи на завршне напомене и закључке, који су дати на основу резултата овде спроведених теоријских анализа, као и на основу анализа из актуелне литературе, којом су обухваћена теоријска и експериментална истраживања из ове области, те упоређењем резултата тих анализа.

Посебно је значајан допринос теоријских и нумеричких анализа који се базирају на примени матричног рачуна, МКЕ и савремених рачунара.

Истакнуто је да су СК у последње време поново актуелизоване, посебно због развоја метода и средстава заштите челика од пожара и корозије, што је до сада добрим делом био ограничавајући фактор. С друге стране, применом спрезања бетона, КЧ, МЧ и ПЧ пружа се могућност да се постигне оптимална конструкција по питању стабилности, функционалности, економичности и естетике, посебно за средње и веће распоне.

Наглашене су неке битне предности СК у виду смањеног утрошка материјала, те добијања елегантније, лакше и виткије конструкције, а посебно је значајан допринос монтажано-монолитног начина грађења СК

у виду смањења или потпуне елиминације оплате и скела, краћег времена грађења, високог степена индустријализације, бољој контроли квалитета материјала и израде и сл.

Истакнуто је да дуготрајне временске деформације услед скупљања и течења бетона и релаксације ПЧ имају значајан допринос на промену понашања СК, што се манифестује кроз знатно повећане деформације и прераспodelу напонског стања између примењених материјала. Ово је посебно важно код статички неодређених конструкција, те је тај део посебно и наглашен.

Закључено је да је приказани модел прорачуна, уз коришћење оригиналног програма *ВАСКЕЛ*, у границама уведених претпоставки, веома поуздан и да се може применити, не само у свакодневној инжењерској пракси, него и у истраживачким задацима, док је за практичне проблеме веома важан допринос у виду предложеног побољшаног модела за формирање фиктивног оптерећења. Такође, могу се анализирати сложенији случајеви спрезања, као што су све накнадне интервенције услед појачавања и санације постојећих система или случајеви искључења неких делова (нпр. услед корозије арматуре и појаве прслина у бетону).

Истакнути су правци даљих истраживања, тако да изложени модел прорачуна, са применом слојевитих КЕ, може представљати значајну основу за проширење поступка прорачуна. Било би важно да се омогући прецизније одређивале зоне бетона који је испрскао, те да се поступак прошири на прорачун СК „бетон-бетон“, које раде у фази са прслинама, и на парцијално претходно напрегнуте конструкције, код којих су дозвољене прслине у бетону. Такође је истакнуто да се поступак може проширити на површинске носаче и просторне моделе, модификацијом изведене основне матрице крутости слојевитог линијског КЕ.

Наглашено је да предложени модели за формирање фиктивног оптерећења могу послужити као значајна основа за даље проучавање и изналажење других облика, посебно упрошћених модела применљивих у свакодневној инжењерској пракси.

На крају је дат попис литературе и дати су прилози везани за приказане примере.

2. ПОГЛАВЉЕ

ПРЕГЛЕД ВАЖНИЈИХ ДОСАДАШЊИХ ИСТРАЖИВАЊА

2.1. Теоријска и експериментална истраживања

Уопштено, спрегнути носач чини комбинацију два или више елемената од материјала различитих својстава конструктивно обједињени по висини попречног пресека. У пракси појам “**спрегнути носач**”, уколико није другачије назначено, односи се на круто спојен челични носач и бетонску плочу, где челик прихвата напоне затезања а бетон напоне притиска. При томе се под крутом везом подразумева да нема клизања између челика и бетона. Да би се бетон одржао у притиснутом стању често се користи преднапрезање носача кабловима од високовредног челика или контролисаним принудним деформацијама у поступку градње [95,110,111].

Спрегнути носачи се у пракси најчешће и највише остварују при бетонирању плоче преко монтираних челичних носача. У зградарству и у мостоградњи врло рано је почела оваква врста градње. Плочама је првобитно био поверен задатак да оптерећење пренесу на челичне носаче а ови даље на ослонце. Касније се увидело да се заједничким радом бетона и челика знатно смањују угиби и силе у пресецима носача [79,82]. Овим је отпочела успешна примена спрегнутих конструкција (СК), нарочито схватањем проблема које изазива реологија бетона – скупљање и течење бетона и релаксација високовредног челика.

СК су се почеле користити још у првој половини 20. века (1920). Значајнија истраживања обављена су у САД-у, Канади, Енглеској и Швајцарској (1930-1940) [54,95]. Мост преко реке Саве у Загребу указао

је на сарадњу челик-бетон (1939). До 1944. године, након обимнијих испитивања излазе и први прописи за СК, прво у САД-у а затим и у другим развијеним земљама. У бившој Југославији такви прописи су први пут изашли 1970. године [94].

Први радови из ове области јављају се тридесетих година прошлог века, у Паризу 1932., Цириху 1934. итд [95]. У Француској су извршена опсежна испитивања СК у периоду 1939-1944. године, у Швајцарској 1942/43. године, те у Немачкој 1949-1954. године, где су обухваћени и утицаји од скупљања и течења бетона, утицаји претходног напрезања и температуре, те проблеми спрезања и носивости можданика [82].

Деформације материјала током времена су уочене још у првој половини 19. века (*Weber* 1835., *Kolrausch* 1863., *Hopkinson* 1878.). *Bolzman* је 1874. поставио основе линеарне теорије течења материјала, коју је допунио *Volterra* водећи рачуна о историји оптерећења. Значајно место у проучавању реологије бетона имају: *Bash*, *Considerere*, *Woolson*, касније *Davis*, *Granvill*, *Faber*, *Boriszanski*, а након другог светског рата *Давис*, *Dutron*, *Clanvill*, *Freudental*, *Gvozdev*, *Aleksandrovski*, *Rish*, *Ghali*, *Favre* и др [51]. Посебан допринос овим истраживањима и формулацији модела прорачуна дао *Z. Bažant* (1972) који је поред теоријских вршио и обимна експериментална истраживања [8-11].

За анализу преднапрегнутих и спрегнутих конструкција, са утицајем вискозног понашања материјала, код нас значајан допринос дали су: *М. Ђурић* [25], *Ј. Лазић* [71], *М. Ивковић* [59], *Д. Јевтић* [60], *М. Пржуљ* [95], *В. Михаиловић* [79], *Ж. Перишић* [90], *Р. Фолић* [43,44] и други. У новије време у свету па и код нас све више се тежи ка развоју нумеричких модела уз примену рачунара [14,20].

Напонска стања спрегнутих попречних пресека су променљива и без промене спољашњег оптерећења захваљујући деформацијама током времена услед скупљања и течења бетона. Стога је код ових пресека важна врста оптерећења, тренутак доношења оптерећења и величина ефективних делова у спрегнутом пресеку [51]. Поред тога, напонска стања код спрегнутих пресека зависе од начина извођења/настајања СК и степена спрезања [69]. Овде је нарочито важно да ли се конструкција гради са или без подупирања, те да ли су или не допуштена померања између спрегнутих делова.

Код подупртих конструкција дуготрајно оптерећење преузима целокупан спрегнути пресек, за разлику од неподупртих конструкција

код којих челични део прима укупно оптерећење, а до делимичне прерасподеле напона долази касније, тек након активирања бетонског дела. Челични део пресека код неподупртих конструкција трпи значајно већа напрезања, а и коначне деформације су веће у односу на СК изведене подупирањем.

Степен спрезања такође утиче на расподелу напрезања по висини попречног пресека. Највеће разлике у напрезању челичног и бетонског дела су код неспрегнутог пресека, код парцијално спрегнутог пресека те разлике су мање, док су код потпуно спрегнутог пресека разлике у напрезању најмање.

У условима константног оптерећења, услед скупљања и течења бетона, током времена долази до делимичне прерасподеле напрезања унутар спрегнутог пресека. Код статички неодређених носача долази до промене статички неодређених величина а тиме и сила у пресецима, где поменута прерасподела има значајнији утицај на промену напрезања у конструкцији као целини [25].

За сваки материјал важи основни принцип механике, тј. могу се успоставити једначине равнотеже и једначине компатибилности. Преко успостављених конститутивних једначина одређена су карактеристична својства појединих материјала. Предлог конститутивне релације за одређени материјал даје се на основу експерименталних и теоријских истраживања. Код вискозних материјала је нарочито важно успоставити конститутивну релацију која ће најбоље описати понашање тог материјала.

Код еластичних материјала за експлоатациони ниво напрезања користи се позната линеарна зависност између напона и деформација (Хуков закон), док се код вискоеластичних материјала такође користи линеарна теорија и принцип суперпозиције уз увођење додатних функција [17]. Уобичајено се код бетона узима да је граница за линеарно понашање до $0.4f_{ck}$. При већим напрезањима понашање је нелинеарно, како за еластичне деформације тако и за деформације течења (вискозне деформације). За бетон је карактеристична и појава старења, тј. промена механичких својстава у зависности од времена настанка [42]. Временом долази до прираста чврстоће бетона и опадања његове деформабилности.

Последњих година је у свету доста рађено на истраживањима и анализи понашања СК у процесу експлоатације. Посебно су од значаја

извршена експериментална истраживања [9,12]. Кроз све радове је истакнута важност примене ефеката временских деформација. Посебно је наглашено да се поменути ефекти у општем случају примене на велике конструкције, нехомогене материјале (спрегнуте конструкције) и на сложена извођења. Посебно су осетљиве високе несиметричне зграде спрегнуте и мешовите конструкције челик-бетон, мостови великих распона од претходно напрегнутог бетона и/или спрегнуте распонске конструкције, мостови са косим кабловима и сегментном градњом и сл. [14].

Поменуте конструкције су веома осетљиве на течење и скупљање бетона, што током времена значајно утиче на њихову сигурност и употребљивост. При томе важну улогу имају локални услови средине и поступци са уградњом и неговањем младог бетона, посебно бетона великих чврстоћа и конструктивних елемената велике дебљине (преко 1 м). Код овако робусних конструктивних елемената утицаји реологије бетона, нарочито скупљања, значајно расту.

Напредна истраживања у овој области и смернице дате у препорукама и кодексима међународних асоцијација треба да обезбеде поузданост и сигурност конструкцијама за које је речено да су осетљиве на временске деформације. Од међународних асоцијација, као најзначајније и најзаступљеније, издвајају се [14]:

- 1) *FIB (International Federation for Structural Concrete)*,
- 2) *ACI (American Concrete Institute)* и
- 3) *CEN (European Committee Standardization)* одговоран за Еврокодове.

Када су у питању ефекти временских деформација, њихова реална процена је веома битна при пројектовању и ту се намећу два важна проблема, за које се може рећи да су повезани међусобно, мада се најчешће разматрају одвојено [14]:

- 1) Проблем особине материјала – дефинисање поузданих модела за предвиђање напона и деформација услед скупљања и течења бетона;
- 2) Проблем анализе конструкције и компјутерски модели – одређивање временског одговора конструкције уз развој рачунарских метода прорачуна.

Отворени проблеми око ових питања још увек постоје те се у научним круговима у свету и даље одвијају интензивне дебате у циљу

успостављања хармонизованог приступа задовољавајућем решењу ових проблема. За постизање тог решења доминира потреба за усаглашавањем око два најважнија питања око којих се још увек воде интензивне расправе:

- 1) Моделирање течења и скупљања бетона још није усавршено, потребан је велики број упрошћења при моделирању, недостаје синтеза (калибрација) модела течења и скупљања и нису до краја успостављене базе података (нпр. *RILEM*-ова база података);
- 2) Код великих објеката, пројектованих на минимално 100 година, код којих промену оптерећења и услова није могуће избећи, потребна су додатна усаглашавања за меру утицаја скупљања и течења бетона, јер нема довољно података за објекте у вишедеценијској употреби.

Прва потешкоћа је и даље везана за потребу за даљим истраживањима физичко-хемијских особина материјала (бетона). Садашње базе података обухватају елементе мале дебљине (*RILEM*-ова база података), за типичне лабораторијске услове, и веома је мало података за елементе веће дебљине (дебље од 1 м), што је у савременим конструкцијама уобичајена примена (мега стубови у високоградњи, доње плоче конзолних мостова). Може се узети пример да је само 8% обухваћено података за бетоне старости више од 6 година, а само 5% за бетоне старије од 12 година.

Течење и скупљање бетона код дебљих елемената и ефекти ових појава још увек нису довољно истражени, нарочито однос површина/обим пресека. Такође је недовољно података за конструкције у току вишедеценијске употребе (50-100 година), као и о релаксацији бетона након растерећења.

При моделирању ефеката дугорочних утицаја још увек се користе различити приступи овом проблему. Линеарна вискоеластичност и теорија старења су највише прихваћени као добар математички инструмент за обухватање ефеката скупљања и течења бетона. Линеарност подразумева суперпозицију ефеката у времену, те уз претпоставку о хомогености бетона, представља знатно олакшање и поједностављује прорачунске моделе.

У научним круговима на међународном нивоу воде се интензивне дебате са различитим вредностима предвиђања и процене течења и

скупљања бетона на стање напона и деформација, нарочито код великих објеката. Води се дискусија на три основна модела [14]:

- 1) *ACI (ACI 209.1R-05, ACI 209.2R-08)* водич за моделирање и прорачун скупљања и течења бетона [3,4];
- 2) *CEB MC90-99* и нова ревидована издања означена као *FIB MC2010* модел код (карактерише ниже вредности на крају радног века конструкције) [12];
- 3) *Bažant-Baweja B3* и *GL2000* модели (показују веће вредности и континуални раст у радном веку конструкције) [10].

Нова *RILEM*-ова база података под координацијом *Бажанта (Professor Zdenek Bažant of Northwestern university, USA)* је донекле проширена за конструкције великих распона и великих померања, али је још увек неопходно допуњавати и усаглашавати ове податке [105].

Уведена поједностављења су нарочито прихватљива у концептуалним и прелиминарним фазама пројектовања. Вискоеластични бетон и теорија старења, те *AAEM* метода (*Age-Adjusted Effective Modulus Method*), као приближна алгебарска формулација, су ту дали највећи допринос [8].

Такође се у тим дебатама истиче потреба за што широм применом нумеричких метода - Методе коначних елемената (МКЕ) и потребе прорачуна по најмање две методе и више рачунарских софтверских пакета у комбинацији са класичним нумеричким процедурама [14]. Потребно је још много истраживања и примене у пракси на нове објекте, али такође и на оцену поузданости постојећих објеката.

Веома су важне смернице за смањење утицаја скупљања и течења бетона током изградње објеката, посебно за бетоне високе чврстоће [15]. Ова упутства су усмерена на избор бетона, агрегата, цемента, воде, водоцементног фактора, температуре, модула еластичности, технологије производње бетона, услова транспорта и уградње итд. Најосетљивије су преднапрегнуте конструкције на грешке у моделирању и код њих је велика дисипација резултата. Моделирање прслина у бетону и њихова прогресија и даље је могуће само грубо и на овим проблемима треба радити много више.

Проблеми моделирања деформација течења и даље су отворени иако су данас боље разумљиви. Потребно је спроводити акције у циљу

смањења неизвесности код пројектовања, нарочито осетљивих конструкција [15]:

- појачати студије код проучавања физике материјала,
- појачати експериментална истраживања,
- константно ажурирати RILEM базу података,
- пратити деформације мостова у вишегодишњој употреби.

Потребно је додатно вршити испитивање материјала и по потреби кориговати дијаграме зависности. Грешке могу бити и 100% те је нужно одређеним мерама ублажити ефекте реологије.

Потребно је код деформабилних и витких конструкција избећи напоне у бетону преко $0.4f_{ck}$, нарочито код преднапрезања. Веома је тешко обухватити симултано деловање фактора релаксације челика за преднапрезање, трења у кабловима, течења и скупљања бетона, случајна оптерећења, прслине и њихову прогресију итд. За такве проблеме препоручује се развој и примена 3Д метода (3Д коначни елементи) [15].

Препоруке при пројектовању се односе на остављање канала за могућност накнадног преднапрезања. Нужно је рачунарски пратити етапно извођење конструкције уз реологију материјала као незаобилазан параметар. Код објеката високоградње било какве касније интервенције су теже изводљиве и обично се могу свести само на пасивне акције.

Обавезно направити и спроводити програм праћења конструкције [15]. Ако се узме пример конзолног грађења мостова, због брзог развоја скупљања у танким горњим плочама у односу на успорени развој у дебљим доњим плочама угиби могу да имају мали прираст или да чак буду негативни, али после неколико година може доћи до наглог повећања угиба. Овом повећању угиба доприноси, поред закасњелог скупљања бетона доње дебље плоче, и релаксација преднапрегнуте арматуре.

Код несиметричних вишеспратних зграда са крутим бетонским језгрима и стубовима може доћи до нагињања таваница и бочног померања услед различитог скраћења појединих елемената [15]. У оваквим случајевима, ако се користе челични стубови, услед бочних утицаја може доћи до извијања ових стубова и губитка стабилности.

Мониторинг може дати значајне резултате и за побољшање базе података и модела [15]. Нарочито је потребно пратити притиснуте бетонске елементе као што су стубови код високих зграда и лукови мостова. Увек треба тежити могућности корективних мера. Значајан допринос је и у вршењу инверзне анализе постојећих конструкција у циљу ажурирања базе података. Веома је важна међународна сарадња у овој области. Потребно је развијати нумеричке поступке и прилагођавање савременим рачунарима што захтева одређене вештине и формулисања.

2.2. Примењивани поступци прорачуна

Спрегнути носачи су састављени из више елемената од материјала различитих својстава конструктивно обједињених по висини попречног пресека што захтева специфичност у прорачунским поступцима. Примарни циљ пројектовања спрегнутих конструкција (СК) је обезбеђење економичне а истовремено стабилне и естетски прихватљиве конструкције за све предвиђене експлоатационе услове [49]. Савремени концепт пројектовања СК условљава адекватну анализу у свим реалним прорачунским ситуацијама уз увођење реологије материјала од којих су формиран спрегнути елементи укључујући и саму историју грађења/настајања конструкције [69].

Деформације материјала током времена су уочене још у првој половини 19. века од када се развијају поступци прорачуна ових утицаја. *Bolzman* је 1874. поставио основе линеарне теорије течења материјала, коју је допунио *Volterra* водећи рачуна о историји оптерећења. Значајно место у проучавању реологије бетона даље имају: *Bash*, *Considerere*, *Woolson*, касније *Davis*, *Granvill*, *Faber*, *Boriszanski*, а након другог светског рата *Davis*, *Dutron*, *Clanvill*, *Freudental*, *Gvozdev*, *Aleksandrovski*, *Rish* и др. Новијим истраживањима веома значајан допринос дао је *Z. Bažant*.

Карактеристична својства појединих материјала одређена су конститутивним једначинама, које математички описују зависност напрезања и деформација. Предлог конститутивног односа у одређеном материјалу даје се на основу проучавања и резултата експеримената.

У општем случају, за произвољну историју напрезања, деформација је дефинисана преко функционала чији облик зависи од својстава материјала [17]. За еластичан материјал деформација зависи само од

вредности напрезања у посматраном тренутку, те за линеарно понашање функционал представља меру еластичности и инверзна је вредност модула еластичности. Код бетона као еластичног вискозног материјала са линеарним понашањем (важи принцип суперпозиције) граница до које се понаша линеарно је $0.4f_{ck}$ те се у свим претпоставкама користи линеарна теорија течења. Такође бетон временом стари, тј. мења механичка својства у зависности од времена настанка [42].

За физикално објашњење и математичку формулацију својстава бетона користе се реолошки модели [49]. Најједноставнији модели вискоеластичног материјала су Максвелов и Келвинов модел. За дефинисање својстава бетона обично се користе апроксимативни модели комбиновани на начин да најреалније опишу понашање бетона као еластичног вискозног материјала који стари.

Многи аутори су се бавили проблематиком математичког описа и дефинисања вискозних еластопластичних својстава бетона. Резултат спроведених истраживања су различити предлози математичких модела, који су углавном дефинисани применом:

1. Интегралне везе напон-деформација (**интегралне методе**),
2. Алгебарске везе напон-деформација (**алгебарске методе**).

Временом се развило низ математичких модела (теорија) којима се описује понашање бетона током времена, а најпознатије теорије су [49]:

- Теорија старења,
- Побољшана теорија старења,
- Болцманов принцип суперпозиције,
- Илстон-Џорданова веза,
- Наследна теорија старења,
- Предлог проф. др Милана Ђурића,
- Решење по Ришу и Јингвирту,
- Предлог Троста,
- Предлог проф. Ивковића,
- Бажантов ефективни модул старења,
- Општи облик инкременталне везе према Фолићу и Татомировићу.

Једначине равнотеже и једначине компатибилности основни су принципи механике и важе за све материјале. Пресечне силе у конструктивним елементима одређују се применом основних правила техничке механике. Код спрегнутих пресека, који се састоје од више

делова пресека различитих својстава материјала, морају бити задовољена два услова:

- 1) Сума свих пресечних сила појединих делова спрегнутог пресека мора бити једнака укупним пресечним силама;
- 2) Деформације појединих делова спрегнутог пресека морају бити међусобно компатибилне и одговарати деформацији спрегнутог пресека.

У спрегнутом пресеку временски зависне деформације бетонског дела доводе до прерасподеле пресечних сила, где се пад напрезања у бетону одражава на повећање напрезања у челику, иако не долази до промене спољашњег оптерећења. Прерасподела пресечних сила прорачунава се у следећим корацима [49]:

- Постављање израза за одређивање пресечних сила у појединим деловима/слојевима попречног пресека у тренутку t ;
- Исписивање промене деформације у појединим деловима попречног пресека за интервал времена Δt , узимајући у обзир еластичне и вискозне деформације;
- Постављање услова равнотеже за пресечне силе појединих делова у тренутку t и $t + \Delta t$;
- Постављање услова компатибилности деформација у интервалу времена Δt ;
- Увођење диференцијала пресечних сила из услова равнотеже у услове компатибилности;
- Уз увођење функције течења добија се систем диференцијалних једначина за прорачун пресечних сила зависних од времена.

Тачно решење проблема прерасподеле пресечних сила, у математичком смислу своди се на решење система линеарних диференцијалних једначина. Због сложености проблема прибегава се формирању апроксимативних метода прорачуна који се могу применити у пројектантској пракси. Две најважније методе су:

- 1) Решење помоћу приближне функције тока временски зависних пресечних сила;
- 2) Диференцна метода.

За анализу спрегнутих конструкција код нас развијено је неколико метода које у везу напон-деформација уводе вискоеластична својства материјала. Методу сила извео је М. Ђурић [25], касније и Ј. Лазић [71]. Методологију анализе утицаја у спрегнутом пресеку дали су Р. Фолић, Б. Поповић и М. Татомировић [43,44]. Матрицу крутости вискоеластичног штапа извела је Деретић-Стојановић [22]. На методи коначних трака много је радио Д. Милашиновић [80], а на методи коначних елемената М. Секуловић [109], итд. У новије време иде се ка све ширијој примени рачунара што захтева развој и усавршавање нумеричких поступака и алгоритама [18].

Од релевантних прописа који дефинишу ову област најзначајнији су: EN 1994 тј. Еврокод 4 (EC4) Прорачун спрегнутих конструкција од челика и бетона (2004) [30-32], EN 1992 тј. Еврокод 2 (EC2) Прорачун бетонских конструкција [28], EN 1993 тј. Еврокод 3 (EC3) Прорачун челичних конструкција (2005) [29], ACI 209.1R-05 (2005) [3], ACI 209.2R-08 (2008) [4], ACI 209.3R-XX (2011) [5], RILEM Technical Committee 107-CSP [105], CEB-FIP Model Code 1990 (1993) [12], fib Model Code 2010 (2012) [35], Правилник о техничким мерама и условима за спрегнуте конструкције (1970) [94], ПБАБ '87 [90] итд.

До сада је развијено низ поступака прорачуна на нивоу попречног пресека спрегнутог носача. Међутим, код сложених конструкција, анализа издвојеног попречног пресека не даје довољно поуздане резултате јер овакви поступци не могу обухватити прераспodelу утицаја индукованих временским (вискозним) деформацијама због статичке неодређености конструкције. Поступци прорачуна на нивоу целе конструкције, с друге стране, су компликовани и нису за свакодневну инжењерску употребу. Због тога је нужно код овако сложених конструкција развијати нумеричке методе и рачунарске програме, нпр. на бази методе коначних елемената (МКЕ) [18]. Посматрано у том правцу, у задње време примећује се тренд развоја оваквих поступака прорачуна, али ови поступци још нису прилагођени за уобичајене свакодневне инжењерске анализе. Још увек се користе комбинације комерцијалних софтверских решења, који захтевају велико знање и вештину за њихову примену [108].

За просторну дискретизацију конструкције веома је актуелна МКЕ, те уз временску дискретизацију проблема (метода коначних диференцијала) представља веома погодан модел прорачуна у којем

се примењује матрични рачун и користе рачунари. Основни облик једначине је [109]:

$$K(t) \cdot \Delta q(t) = \Delta Q(t) \quad (2.1)$$

где је:

- $K(t)$ матрица крутости система,
- $\Delta q(t)$ вектор померања чворних тачака,
- $\Delta Q(t)$ вектор нападних и/или индукованих сила.

Претходном једначином је преко матрице крутости успостављена веза између померања и сила, што је основ за решавање низа проблема статике конструкција. При томе матрица крутости укључује промену геометрије и формира се за сваки временски инкремент и/или итерацијски корак. Вектор сила се такође формира за сваки временски инкремент и/или итерацијски корак и састоји се из спољашњих (нападних) сила и сила услед реологије материјала. При томе је историја спољашњег оптерећења везана за временски ток грађења и коришћења конструкције.

Овакав поступак омогућује да се у сваком временском интервалу срачунају померања, деформације и напрезања конструкције. Коначне вредности се добијају сумирањем текућег са претходним стањем поступком корак по корак (*step-by step*) [116].

У радовима *Amadio* и *Fragiacomo* [6] и *Fragiacomo* и други (*et al.*) [50] дат је поједностављени поступак одређивања напона и деформација спрегнутог пресека применом ААЕМ методе и нумерички итеративни поступак којим се описује нелинеарно понашање појединих делова спрегнутог пресека коришћењем методе модификоване секантне крутости (*Modified secant stiffness method*). Дати поступак је један од начина моделирања пластификације материјала.

У раду *Zona* и други (*et al.*) [122] је за анализу спрегнутих греда челик-бетон са деформабилном смичућом везом коришћена дискретизација спрегнутог пресека коначним елементима. Полази се од услова равнотеже у конструкцији оптерећеној квази-статичким оптерећењем. У изразе је уведен временски инкремент, варијабла материјала или оптерећења, вектор померања чворова, вектор унутрашњих сила и вектор квази-статичког оптерећења. За решење једначине у инкременту времена користи се *Њутн-Рапсонов* итеративни поступак све док се не

оствари равнотежа унутрашњих сила и оптерећења са прихватљивим одступањем. На овај начин се одређују непозната померања чворова.

У раду Миличић и други [81] спроведена је експериментално-теоријска анализа на конкретном примеру спрегнуте таванице, где су за моделирање конструкције коришћени програмски пакети развијени применом МКЕ. На основу резултата спроведене анализе дате су препоруке за инжењерску праксу пројектовања спрегнутих таваница.

У раду Leong [73] анализирани су ефекти у спрегнутој конструкцији при комбинацији оптерећења од температуре и скупљања бетона. Спроведеном анализом и упоредним примерима показано је да су напрезања, услед диференцијалне температуре, значајно већа од напрезања услед скупљања бетона и дата је препорука да се адекватним системом изолације спречи велика разлика у температури горње и доње површине спрегнутог пресека.

У раду Sassone and Casalegno [108] дат је општи нумерички приступ по МКЕ за анализу ефеката временски зависног понашања бетона са посебним акцентом на течење. Кроз два примера: мост са косим кабловима и вишеспратна зграда, илустрован је поступак прорачуна и указано је на значајан допринос реологије бетона на промену стања напрезања и деформација у конструкцијама током времена. Алгоритам прорачуна је реализован у програмском окружењу *Matlab 7* у сарадњи са комерцијалним програмом *TNO Diana 9.4*.

У раду Lagos и други (*et al.*) [70] приказан је прорачун дуготрајног диференцијалног скраћења зграде висине 300 м у Чилеу компјутерским програмом развијеним на основу методологије Fintel, Ghosh e lyengar. Указано је на значајан допринос дуготрајних деформација и на потребу предвиђања ових утицаја још у прелиминарним фазама пројектовања.

Аутор овог рада је самостално и у сарадњи са ментором радио веома много на изналажењу прорачунског модела заснованог на МКЕ за прорачун напонско-деформационог стања СК са ефектима реологије бетона и ПЧ. Опширније о овоме дато је у [18,19,20,39,40].

2.3. Закључак

Последњих година је у свету доста рађено на анализи понашања СК уз одговарајућа експериментална истраживања. Истакнута је важност примене ефеката временских деформација, нарочито на конструкције

великих распона као што су: мостови од преднапрегнутог бетона, континуирани спрегнути и/или преднапрегнути мостови, лучни бетонски мостови, конзолни мостови са сегментном градњом, висићи мостови са кабловима, конструкције од префабрикованих бетонских елемената (претходно или накнадно преднапрегнуте), конструкције бетониране на лицу места, СК изведене бетонирањем и спрезањем са постојећим системом, високе бетонске зграде са стубовима и језгрима, високе зграде са бетонским језгрима и челичним стубовима, монтажномонолитне конструкције таваница и друге конструкције осетљиве на вискозне деформације током дужег временског периода.

Кроз истраживања и примере из праксе показало се да је већина наведених конструкција веома осетљива на течење и скупљање бетона и релаксацију ПЧ током времена. У новије време ови утицаји су још израженији јер се све више примењују бетони великих чврстоћа и елементи дебљих/већих пресека бетонског дела. Показало се да је веома важно уобзирити временске деформације и предупредити негативне ефекте још у фази пројектовања. Овакве анализе скоро да није могуће спровести без примене савремених рачунара и развоја нумеричких модела и алгоритама. Због тога је овај рад базиран на развоју модела и алгоритама по МКЕ, који би био применљив у свакодневној инжењерској пракси. Поред тога модел пружа могућност примене и даљег развоја поступка прорачуна при теоријским и експерименталним истраживања понашања сложених СК током дужег временског периода.

3. ПОГЛАВЉЕ

СПРЕГНУТИ НОСАЧИ – ОСНОВНИ КОНЦЕПТ И ОСОБИНЕ

Стабилност, функционалност, економичност и естетика су основни захтеви за конструкције, које треба имати у виду при пројектовању и грађењу објеката. При томе треба тежити постизању оптимума за ове захтеве. У ту сврху користе се разни грађевински материјали са тежњом да се што више искористе њихова најповољнија својства и да се адекватно комбинују и спрежу у склопу диспозиције унутар саме конструкције [49].

Током дугог периода развоја конструкција и многобројних експерименталних и теоријских истраживања наметала се потреба за што повољнијем комбиновању материјала, који својим својствима најбоље доприносе заједничком раду елемената, а да се у што већој мери постигне оптимум по питању поменутих захтева за конструкције.

Основни материјали који се традиционално користе за носеће грађевинске конструкције су: бетон, челик и дрво. За разлику од челика и дрвета, бетон се углавном не користи самостално, изузев у масивним елементима, већ се комбинује са другим материјалима, најчешће са арматуром (армирани бетон), те са конструкционим челиком (спрегнути носачи) и ређе са дрветом.

3.1. Механизам деловања спрегнутог носача

У грађевинској пракси, један од првих значајних и успешних облика спрезања два различита материјала, код којих су искоришћена њихова најбоља својства, је **армирани бетон (АБ)** (слика 3.1а), као јединствен конструктивни елеменат састављен од бетона и арматуре.

Познато је да бетон, за разлику од напона притиска, није у стању да прими значајније напоне затезања, те ову улогу преузима арматура. Формирањем АБ пресека, у којима је бетон притиснут а арматура затегнута, постиже се веома повољна комбинација ова два материјала, због чега су АБ конструкције већ дуго времена широко заступљене.

Механизам носивости АБ пресека заснива се на компатибилности деформација бетона и арматуре. При прорачунима АБ пресека у пракси, поред поменуте компатибилности деформација, углавном се примењује и Бернулијева хипотеза равних пресека као и Хуков закон за еластичне материјале, а занемарује се удео носивости бетона у затегнутим зонама, јер су за експлоатационе услове напони затезања у бетону углавном прекорачени, што доводи до прслина у бетону и потребе да се те испрскале зоне искључе из напонске активности.

Испрскали бетон у затегнутим зонама је у већини случајева само заштита арматури и представља мртав терет, који има значајан удио у укупном оптерећењу, те је због тога АБ ограничен на конструкције мањих и донекле средњих распона. Да би бетон успешно заштитио арматуру од корозије ширина прслина мора бити ограничена, што додатно редукује носивост АБ пресека.

Са повећањем распона нагло се повећава сопствена тежина АБ носача услед инертне бетонске масе у испрској затегнутој зони, што доводи у питање економичност примене ових конструкција за веће распоне. Такође, те прслине у бетону доводе до низа других проблема, а првенствено се јавља проблем изложености арматуре и њене корозије у агресивним срединама.

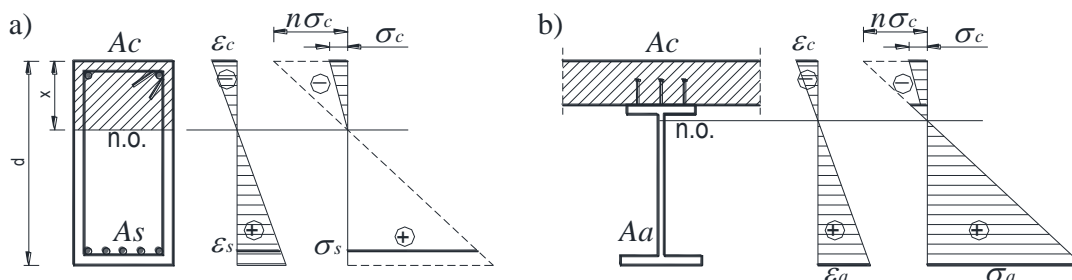
Недостаци класичног АБ умањени су спрезањем бетона са претходно напрегнутим челиком (кабловима, жицама) чиме се формира **преднапрегнути бетон (ПБ)**. Преко овог челика уносе се напони притиска у бетон, те се обично ангажује читав пресек у преношењу сила, а спречена је појава недозвољених прслина у бетону, чиме је арматура адекватно заштићена од спољашњих утицаја, за разлику од класичног АБ.

Примена природно тврдог челика се показала неуспешном, јер релативно ниске чврстоће овог челика и реолошке особине бетона – скупљање и течење бетона, су у значајној мери поништавале претходно унете силе затезања које и онако нису могле бити велике. Тек је применом високовредног челика и уношењем већих сила, те схватањем

природе реологије бетона, отворен пут за развој и успешну примену ПБ конструкција. Развојем ових конструкција знатно је унапређена градња са већим распонима, уз боље, елегантније и економичније главне елементе конструкције.

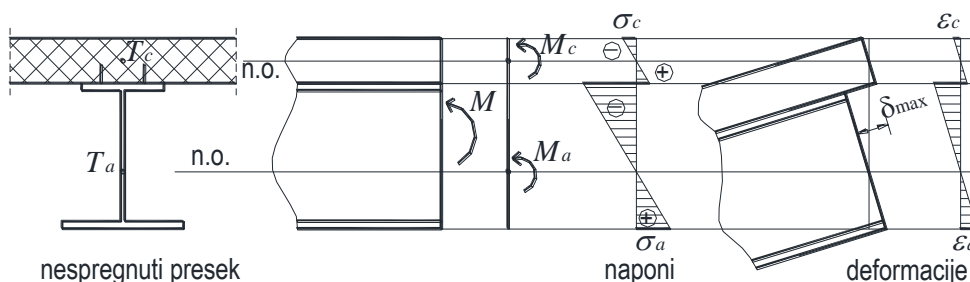
У даљем настајању да се рационализују носачи примењује се челични носач у затегнутим зонама и бетон у притиснутим, уз адекватну везу између ових материјала/делова. На овај начин се формира **спрегнути носач (СН)** (слика 3.1б) који је реално најближи идеализованом носачу. Овде је затегнути инертни бетон замењен конструкционим челиком, што знатно унапређује искоришћеност компонената спрегнутог пресека.

Овакав вид спрегнутих конструкција (СК) највише се остварује при бетонирању плоче преко претходно постављених челичних носача, уз адекватно спрезање (слика 3.1б) и заједнички рад бетона и челика у преношењу напрезања [95].



Сл. 3.1 – Напрезања у АБ (а) и спрегнутом пресеку (б)

Fig. 3.1 – Stress in RC (a) and the composite section (b)



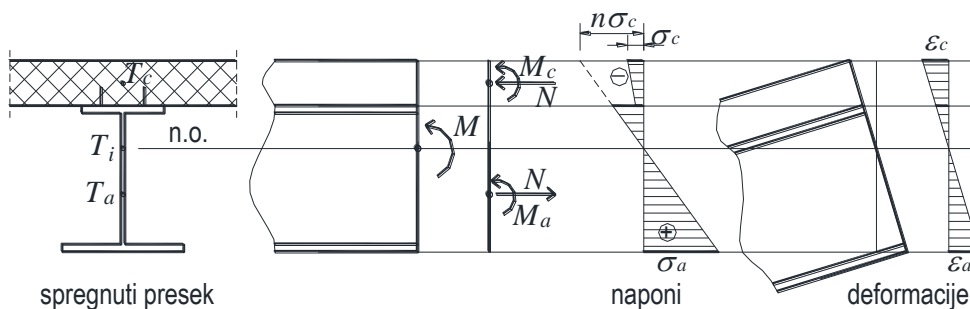
Сл. 3.2 – Деловање момента на неспрегнутом пресеку

Fig. 3.2 – Bending moment effect on the noncomposite section

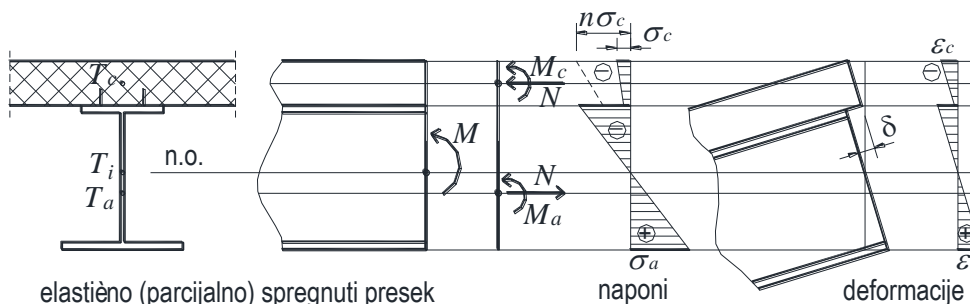
Расподела напрезања по висини попречног пресека СН зависи од степена оствареног спрезања између челичног носача и бетона [69]. Тај степен је у границама неспрегнутог (степен спрезања $\eta=0$) и потпуно спрегнутог пресека (степен спрезања $\eta=1$), па је код парцијално спрегнутог пресека тај степен спрезања у границама $0 < \eta < 1$.

Уколико је пресек неспрегнут ($\eta=0$), онда се моменат савијања од спољашњег оптерећења дели на поједине елементе (бетонску плочу и челични носач) у складу са условима равнотеже и условима компатибилности, те су напони и деформације распоређени по висини сваког елемента посебно (слика 3.2). Код овог случаја клизање између бетонске плоче и челичног носача се одвија слободно ($\delta=\delta_{max}$).

Уколико је пресек потпуно спрегнут ($\eta=1$), клизање између бетонске плоче и челичног носача је онемогућено ($\delta=0$), при чему се јавља нормална сила (сила спрезања) која уствари спречава то клизање. Аналогно, као и код неспрегнутог пресека, морају бити задовољени услови равнотеже и услови компатибилности, те су напони и деформације распоређени по висини спрегнутог пресека у складу са тим условима (слика 3.3).



Сл. 3.3 – Еластично савијање потпуно спрегнутог пресека
Fig. 3.3 – Elastic bending of the completely composite section



Сл. 3.4 – Расподјела напона и деформација на еластично (парцијално) спр. пресеку
Fig. 3.4 – Stress and strain distribution on the elastic (partially) composite section

Уколико постоји еластично попуштање између бетонске плоче и челичног носача (степен спрезања $0 < \eta < 1$), тада је величина клизања у границама $0 < \delta < \delta_{max}$, те је сила спрезања одговарајуће мања. Распоред напона и деформација по висини пресека је у складу са оствареним степеном спрезања (слика 3.4).

АБ и ПБ конструкције се у ширем смислу могу посматрати такође као СК, јер је у питању заједнички рад различитих материјала - бетона, обичне (меке) арматуре и преднапрегнуте арматуре.

Код уобичајених СК, изведених ливењем бетонске плоче преко челичних носача, користи се и арматура у бетону, а према потреби и преднапрезање бетона високовредним челиком (кабловима).

На основу претходних напомена, у ширем смислу, конструкције се могу посматрати као:

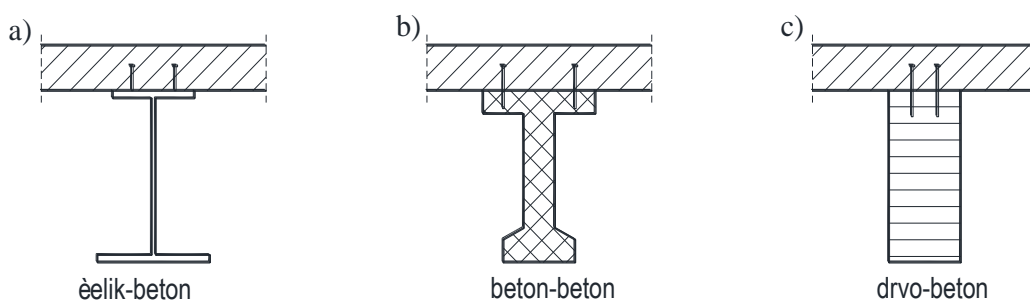
- армиранобетонске конструкције,
- преднапрегнуте конструкције,
- спрегнуте конструкције,
- преднапрегнуте спрегнуте конструкције.

Све ове конструкције се уствари могу једним заједничким именом назвати **спрегнуте конструкције (СК)**.

У зградарству и у мостоградњи врло рано је почела примена СК по принципу извођења АБ плоче преко челичних носача. Плочама је првобитно био поверен задатак да оптерећење пренесу на челичне носаче, а ови даље на ослонце, без увођења доприноса бетона. Касније се увидело да се заједничким радом бетона и челика знатно смањују угиби и силе у пресецима овако формираних носача (слика 1б.). Овим су уствари и отпочели развој и шира примена СК у грађевинарству [95].

Према врсти употребљених материјала за формирање спрегнутог пресека, поред низа комбинација, најчешће се у пракси примењују (слика 3.5.) [91]:

- спрезање челик-бетон,
- спрезање бетон-бетон,
- спрезање дрво-бетон.



Сл. 3.5 – Спрегнути пресеци: а) челик-бетон; б) бетон-бетон; ц) дрво-бетон
 Fig. 3.5 – Composite sections: a) steel-concrete; b) concrete-concrete; c) wood-concrete

Иако су СК бетон-бетон широко у употреби, а знатно мање дрво-бетон, и даље је уобичајено да се под СК, ако другачије није наведено, подразумева спрезање бетонске плоче и челичних носача, у пракси познато као спрезање **челик-бетон** (слика 3.5а). Овај вид СК се најраније развио, и што је веома важно њихову примену су пратили одговарајући технички прописи.

Уобичајено је да СН челик-бетон раде на савијање у виду простих греда или континуалних носача средњих и већих распона. Поред уобичајених гредних носача, код којих напоне затезања прихвата челични носач а напоне притиска бетон, спрезање челичног носача и бетона нашло је широку примену и код разних облика вертикалних носећих елемената, првенствено стубова. При томе, челични носач може бити потпуно или делимично убетониран или, што је уобичајено, могу се формирати спрегнути елементи са бетонским језгром унутар челичног плашта. Такође, спрезање бетона са профилисаним лимом код међуспратних конструкција нашло је широку примену у грађевинарству, нарочито код индустријских и вишеспратних објеката у зградарству.

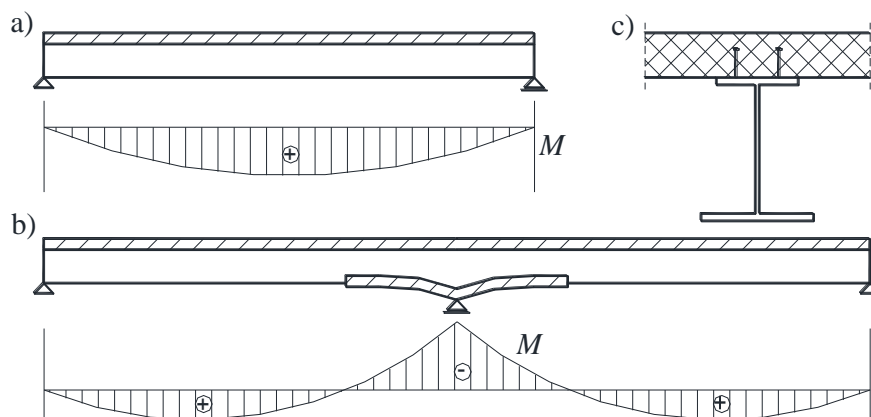
Монтажна градња АБ конструкција, где су главни носачи префабриковани и на лицу места се монолитизују бетонском плочом, довела је до специфичног облика спрезања старог и новог бетона различитих карактеристика. Овако формиране СН **бетон-бетон** (слика 3.5б) су нашли широку примену у зградарству и мостоградњи и захтевају да им се посвети посебна пажња [45,46]. Важно је истаћи да се код ових носача најчешће користи и преднапрезање бетона високовредним кабловима.

У новије време, нарочито широм применом ламелираних дрвених носача, развијено је спрезање више дрвених елемената међусобно, или спрезање дрвета и бетона чиме се формирају СН **дрво-бетон** (слика 3.5ц). Овде постоје велике могућности спрезања дрвених носача са АБ плочом и значајнијег повећања носивости и примене дрвених конструкција у грађевинској пракси. Овако формиране СК при пројектовању и извођењу захтевају посебну пажњу и нису предмет овог рада.

У овом раду шире се разматра спрезање челика и бетона, с тим да могу бити укључени и разни облици преднапрезања. Када је у питању бетон, обухваћено је и међусобно спрезање више бетона различите старости, уз употребу меке и/или преднапрегнуте арматуре. Такође,

када је у питању челични носач, могу се користити разне врсте ових носача, како пуни тако и решеткасти челични носачи, са различитим облицима попречних пресека (пуни једнозидни или сандучасти). И код ових носача такође може бити укључено преднапрезање (високовредним кабловима и/или принудним деформацијама при грађењу).

Најчешћа примена СН је на системе простих греда и континуалних носача (слика 3.6), мада се може применити и на друге системе носача. Код континуалних носача, у зони негативних момената, врло често се јавља потреба за израдом АБ плоче и у доњем појасу, да би се смањио челични пресек у притиснутој зони [82,91]. Уствари, увијек постоји тежња да се у притиснутим зонама користи бетон а у затегнутим челик како би се постигла што оптималнија решења у пракси. Повољно напонско стање се такође може постићи и различитим облицима преднапрезања коришћењем високовредног челика (каблова) и/или контролисаним принудним деформацијама при грађењу.



Сл. 3.6 – Спрегнути гредни носачи: а) проста греда; б) конт. греда; ц) попречни пресек
Fig. 3.6 – Composite beam girders: a) simply supp. beam; b) cont.; c) beam cross-section

3.2. Обим и врсте спрезања

У зависности од технолошког поступка при фазном извођењу, тј. без подупирања или са подупирањем, спрезање се према обиму може реализовати као [69]:

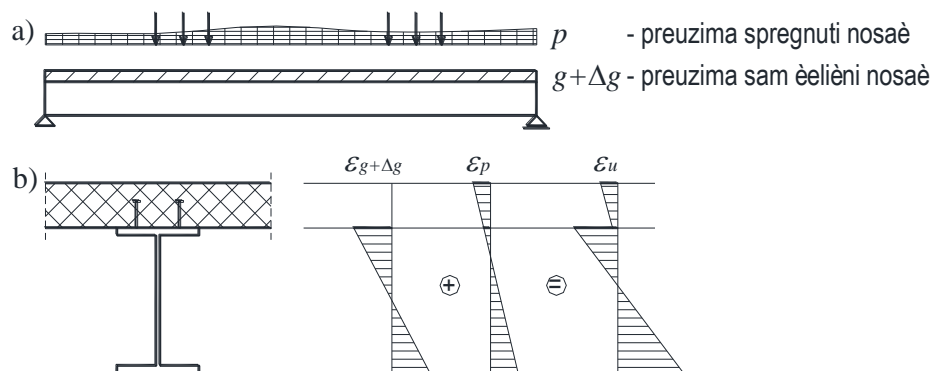
- спрезање за повремено (покретно или корисно) оптерећење,
- спрезање за повремено и преостало стално оптерећење,
- спрезање за укупно (повремено и укупно стално) оптерећење.

Који обим спрезања ће се остварити зависи да ли се или не при извођењу наредне фазе на постојећој конструкцији примењује

подупирање. Такође, на обим спрезања се може утицати применом преднапрезања бетона и/или челичног носача.

Пример спрезања за повремено (покретно или корисно) оптерећење се најчешће сусреће код распонских конструкција, ако челични носач за време бетонирања бетонске плоче није подупрт неким монтажним потпорама и ако се евентуално преостало стално оптерећење наноси још пре стврдњавања (активације) бетонске плоче. У овом случају челични носач ће преузети целокупно стално оптерећење, тј сопствену тежину, тежину бетонске плоче и свих других додатних елемената (нпр. слојеви пода, плафон, изолације итд. код зграда, ограде, ивичњаци, асфалт итд. код мостова). Након очврђавања бетона (у нормалним условима 28 дана након бетонирања) повремено оптерећење прихвата новоформирани спрегнути пресек челик-бетон (слика 3.7).

Дистрибуција дилатација по висини спрегнутог попречног пресека, формираног на претходно описан начин, уобичајено је таква да је челични носач много више деформисан/напрегнут него бетонска плоча. На спојници челик-бетон изражен је скок дилатације услед различитог времена активације појединих делова пресека.



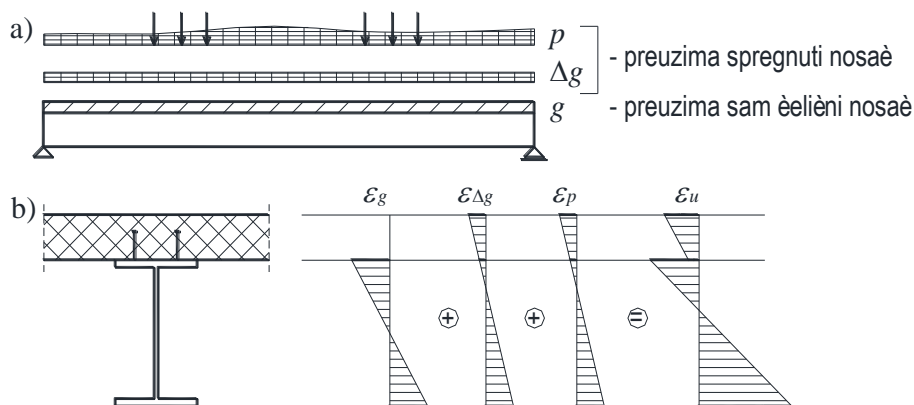
Сл. 3.7 – Спрезање за повремено оптерећење

Fig. 3.7 – Compositing for periodical load

Ако се преостало стално оптерећење нанесе на конструкцију тек након дефинитивног стврдњавања бетонске плоче, тј. након формирања спрегнутог пресека челик-бетон, и ако конструкција није подупрта, онда ће такав новоформирани пресек прихватити то додатно стално оптерећење и повремено оптерећење, односно свако оптерећење у границама пројектованог које касније буде нанесено на потпуно формирану СК.

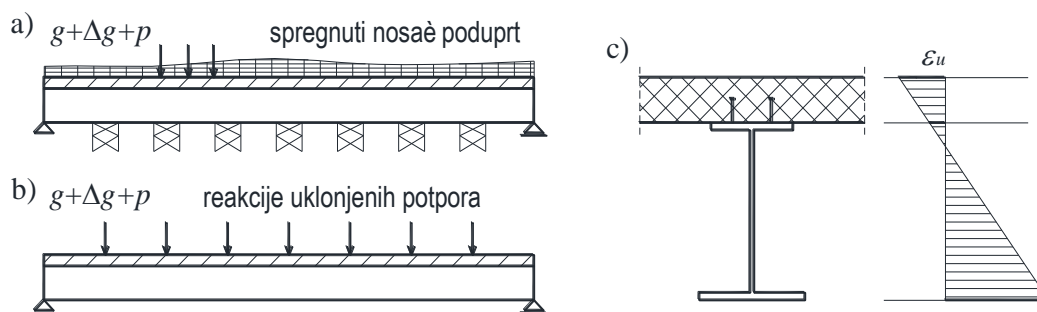
Сам челични носач у овом случају преузима сопствену тежину и тежину бетонске плоче (слика 3.8). Дистрибуција дилатација по висини

попречног пресека уобичајено је таква да је челични носач деформисан/напрегнут нешто више од бетонске плоче и то само за допринос од сопствене тежине челичног носача и бетона. На спојници челик-бетон скок дилатације је мање изражен него код спрезања само за корисно оптерећење.



Сл. 3.8 – Спрезање за повремено и преостало стално оптерећење
Fig. 3.8 – Compositing for periodical and remaining dead load

Ако се при бетонирању бетонске плоче изврши подупирање челичног носача на довољно места и ако се уклањање монтажних потпора изврши након достигнуте тражене чврстоће бетона, тада је ангажован целокупни спрегнути пресек за укупно стално и повремено оптерећење (слика 3.9).



Сл. 3.9 – Спрезање за укупно (повремено и укупно стално) оптерећење
Fig. 3.9 – Compositing for total (periodical and total dead) load

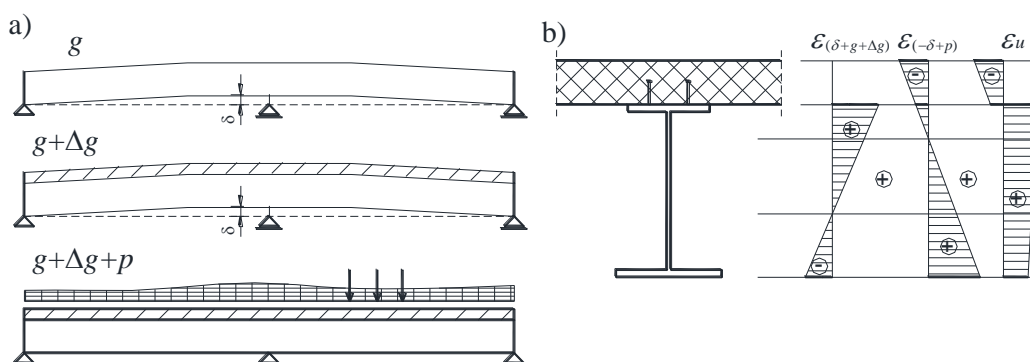
Дистрибуција дилатација по висини потпуно спрегнутог попречног пресека уобичајено је таква да су челични носач и бетонска плоча деформисани подједнако, тј. на спојници челик-бетон нема скока дилатације. Овим се највише постиже економичност примене СК. Такође, расподела напона се овде може дириговати и преко самих места за подупирање, тј. преко положаја и крутости подупирача. Само подупирање не мора бити строго континуално дуж конструкције.

Зависно од распона, али често је довољно да се подупирање оствари на три или пет места на једнаким размацама дуж носача, а да се при томе конструкција сматра континуално подупртом.

На напонско-деформационо стање СН, поред утицаја грађењем (настајањем), може се утицати и на друге начине [69]. Често се за елиминацију напона затезања у бетону или повољнијем распореду напонско-деформационог стања у спрегнутом пресеку користи поступак са преднапрезањем и то:

- преднапрезање контролисаним принудним деформацијама,
- преднапрезање високовредним челиком (кабловима, жицама).

Преднапрезање контролисаним принудним деформацијама је уствари преднапрезање монтажним поступцима, где се у карактеристичним зонама носача, током фазног извођења, унесе напони супротног знака од напона у експлоатацији и који се за то крајње стање једним делом или потпуно елиминишу (слика 3.10). Најчешћи пример из праксе је поступак са подизањем средњих ослонаца код континуалног челичног носача пре бетонирања плоче. Након бетонирања плоче и очвршћавања бетона, те спуштањем средњих ослонаца у пројектовани положај, унесе се напони притиска у бетонску плочу чиме се елиминишу неповољни негативни momenti у бетону изнад ослонаца. У новије време овај вид преднапрезања је изгубио на значају јер временске деформације бетона једним делом поништавају првобитно предвиђене ефекте.

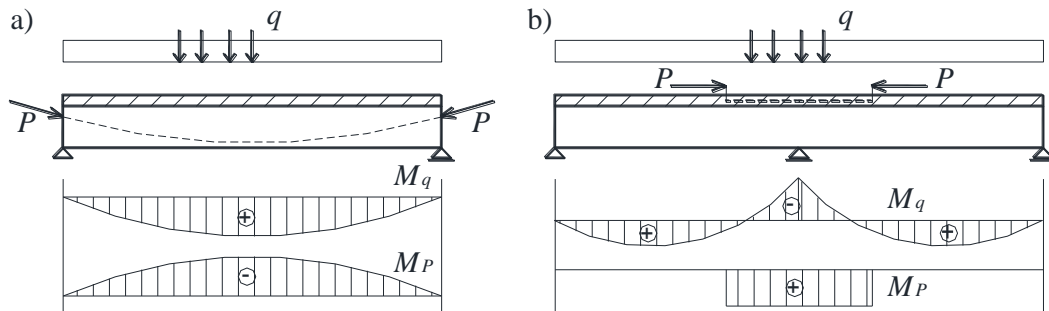


Сл. 3.10 – Преднапрезање принудним деформацијама: а) подизање средњих ослонаца; б) деформације у пресеку

Fig. 3.10 – Prestressed with forced deformations: a) raising of the middle supporters b) deformations in the cross-section

Преднапрезање високовредним челиком (жице, каблови) се уобичајено користи када се жели постићи повољно напонско-

деформационо стање у спрегнутим пресецима (слика 3.11). При томе се могу преднапрезати бетонска плоча и/или челични носач, чиме се тежи постизању што оптималнијег решења у пракси. Поред наведених начина, постоје и друге познате могућности формирања СН, нпр. Префлекс носачи и други сложенији СН [69,95].



Сл. 3.11 – Преднапрезање кабловима
Fig. 3.11 – Prestressed with cables

Имајући у виду различите могућности вишефазног грађења СН може се закључити да током времена долази до промена и прерасподеле напрезања у појединим деловима/слојевима спрегнутог пресека. Разним поступцима и начинима извођења укупни моменат савијања се може различито распоредити на бетон и челик, што је ствар детаљне анализе и изналажења оптималних решења при пројектовању и извођењу ових конструкција у пракси.

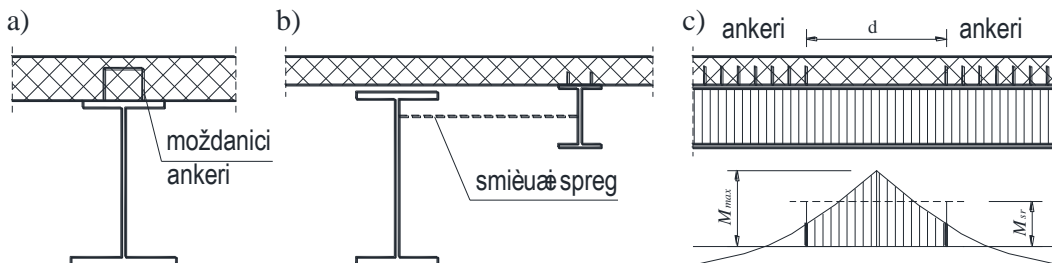
Према врсти спрезања може се реализовати [91,111]:

- круто спрезање,
- еластично спрезање,
- дисконтинуално спрезање.

Ове врсте спрезања зависе првенствено од услова експлоатације и услова извођења. Еластично и дисконтинуално спрезање су специфични облици спрезања где се могу постићи повољније расподеле напона и деформација код СН. Међутим, ови облици спрезања захтевају сложеније прорачунске поступке и извођење, те им треба посветити посебну пажњу.

Круто спрезање обично подразумева примену можданика и/или анкера као посебних елемената који имају улогу да прихвате смичуће силе између бетонског и челичног дела пресека и да омогуће заједнички рад ових елемената као јединственог спрегнутог пресека (слика 3.12а).

Само трење између бетона и челика најчешће се у пракси сматра недовољним за појам крутог спрезања, где се подразумева да су релативна померања између ових елемената занемарљива и у прорачунима се не узимају у обзир, и код којих се примењује претпоставка о равним пресецима.



Сл. 3.12 – Врсте спрезања: а) круто; б) еластично; ц) дисконтинуално
Fig. 3.12 – Types of compositing: a) rigid; b) elastic; c) discontinual

Можданици и анкери преносе утицаје између бетонског и челичног дела пресека и морају се правилно прорачунати и извести да остану у границама напонско-деформационог стања које задовољава захтеве крутог спрезања за уобичајене проблеме у пракси. Такође се, код монтажних плоча, могу користити преднапрегнути завртњеве којима се изазове такав притисак између бетонског и челичног дела носача да се смичуће силе прихватају и преносе отпором трења.

Правилно изведена веза између челичног и бетонског дела пресека је неопходан услов за заједнички рад СН. Уобичајено се подразумева да у експлоатацији неће доћи до попуштања споја и да неће бити релативних хоризонталних померања на контактної површини између бетона и челика. Уствари, подразумева се да до лома долази достизањем граничне носивости на савијање, а не смицањем контактне површине спрегнутих делова. Због тога је потребно користити средства за везу (можданике, анкере, преднапрегнуте завртњеве, посебно или комбиновано), чији је основни задатак пријем смичућих сила и спречавање одвајања бетона од челичног носача.

За све даље анализе у овом раду подразумева се да је остварено круто спрезање између бетонских и челичних делова/слојева пресека.

Еластично спрезање дозвољава релативно померање између бетонске плоче и челичног носача у нивоу додирне површине. Ово захтева специјалне поступке извођења и неопходно је омогућити посебан механизам спрезања, који треба да има једну одређену еластичну константу.

Често се у пракси еластично спрезање остварује извођењем смичућег челичног решеткастог спрега који повезује главни челични носач и бетонску плочу, при чему овај спрег може бити у вертикалном и/или хоризонталном положају у односу на носач (слика 3.12б) [69].

Еластично спрезање се ради када се жели истовремено искоришћење напона и у бетону и у челику, те се користи код већих распона и веће висине челичног носача. У овим случајевима неутрална оса лежи испод половине висине спрегнутог пресека, а у бетонској плочи, за случај крутог спрезања, долази до прекорачења напона притиска знатно раније него у притиснутом делу и/или затегнутом делу челичног носача.

Ако се омогући еластично спрезање, нпр. постављањем хоризонталног спрега, смањују се смичуће силе у додирној спојници, а тиме и нормалне силе у бетонској плочи, што доводи до повољније расподеле напона између бетона и челика. Међутим, остваривање еластичног спрезања захтева сложеније прорачунске анализе и ствара додатне проблеме при извођењу, што у завршници поскупљује ову врсту СК.

Дисконтинуално (испрекидано) спрезање представља посебан случај крутог спрезања, када се на појединим деловима носача то спрезање потпуно изоставља (слика 3.12ц). Места и дужине спрегнутих и неспрегнутих зона зависе од ефекта који се жели постићи у носачу [69].

Испрекидано спрезање има исту улогу као и еластично спрезање, а обично је једноставније и повољније за извођење, јер се не ради никакав посебан спрег између бетона и челика. На дужини на којој је изостављено спрезање не постоје смичуће силе између бетонске плоче и челичног носача, па је нормална сила константна и у бетону и у челику. На овај начин се постиже повољно напонско стање у појединим деловима пресека. Овај вид спрезања се обично користи код танких бетонских плоча у систему са релативно високим челичним носачима.

Може се закључити да се прерасподела напрезања у појединим деловима (бетонски и челични слојеви) спрегнутог пресека може контролисано остварити у циљу постизања оптималних решења при пројектовању и извођењу СК. Тиме је отворена могућност за стално проучавање и унапређење поступака прорачуна и извођења ове врсте конструкција у савременој грађевинској пракси.

Уобичајено се подразумева да се појам **“спрегнути носач”**, уколико није другачије назначено, односи се на **„круто“** спојен челични носач и бетонску плочу, где челик прихвата напоне затезања, бетон напоне притиска, а затегнути бетон се искључује из напрезања.

Поступак и анализе у овом раду се односе на случај понашања спрегнутих елемената, где је савијање доминантно, где је бетонски део притиснут и ради без прслине и где напоне затезања прихвата челик, док се затегнути део бетона искључује из анализа. Само за овакав облик спрезања може се са довољном тачношћу узети да је, у области експлоатационих напона, веза напон-дилатација линеарна и да важи претпоставка о једнакости деформација у контактним тачкама пресека.

3.3. Средства за спрезање

Круто спрезање бетонске плоче и челичног носача се остварује уз примену посебних конструктивних елемената у облику можданика и анкера, посебно или комбиновано (слика 3.13). Можданици и/или анкери имају улогу да прихвате смичуће силе између бетонског и челичног дела пресека и да омогуће заједнички рад ових елемената као јединственог спрегнутог пресека [69,91].

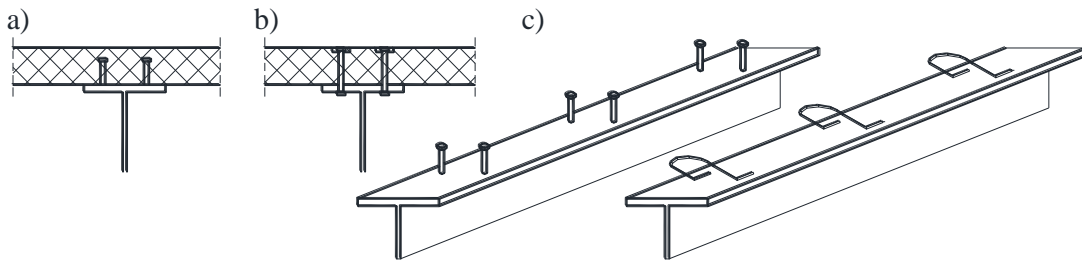
Можданици могу бити различитог облика, у зависности од облика спрегнутог пресека и његових делова (челика и бетона) и силе коју требају пренети између ових делова. Можданици се везују за горњи појас челичног носача заваривањем или преднапрегнутим завртњевима. Веза са бетоном се мора обезбедити квалитетним сидрењем и/или повезивањем са арматуром бетонског дела пресека.

Анкери су углавном од округлог челика и везују се за можданике или непосредно за горњи појас челичног носача заваривањем. Потпуна веза се остварује сидрењем слободних крајева анкера у бетон.

Можданици и анкери имају улогу да прихвате и пренесу смичуће силе између спрегнутих делова (челика и бетона). Поред тога, анкери имају улогу у спречавању одизања бетонске плоче од челичног носача и пријему главних затезућих напона у бетону.

Врло често се у пракси користе можданици са главом, јер су погодни за спајање електроотпорним заваривањем, уобичајено за горњи појас челичног носача или нека друга места преко којих се бетонира.

Само трење између бетона и челичног носача се у пракси сматра недовољним за појам крутог спрезања. Изузетак је спрезање бетона са профилисаним лимом код међуспратних конструкција. За побољшање везе са бетоном по површини ребара лима могу се извести разне перфорације и на зубљења. Такође се за побољшање везе могу профилисати нагнуте ивице ребара између којих се бетон заклињава. Овим се спречава одизање и поспешује трење које је довољно да одржи везу између бетона и лима.



Сл. 3.13 – Средства за спрезање
Fig. 3.13 – Way of compositing

Можданици и анкери се морају правилно прорачунати и извести да остану у границама напонско-деформационог стања које задовољава захтеве крутог спрезања за уобичајене проблеме у пракси. За димензионисање средстава за спрезање потребно је познавати величину смичуће силе која им се поверава. При томе је важно познавати и допринос скупљања бетона на величину укупне смичуће силе.

Утицај скупљања бетона на величину смичуће силе истоветан је са утицајем температурне разлике у загревању бетонске плоче и челичног носача. При тежњи да се бетонски део (плоча) услед скупљања скрати јављају се напони притиска у челичном делу носача на споју са бетоном, а у бетону напони затезања. Ови напони се са бетона на челик преносе спрегнутим радом носача преко средстава за спрезање.

Претпоставка о еластичној попустљивости веза има значаја при проучавању смичућих сила, како на величину тако и на ток тих сила по дужини спрегнутог носача. Одређивање константе крутости (еластичне попустљивости) средстава за спрезање је поприличан проблем у инжењерској пракси и захтева одређена упрошћења и/или експериментална испитивања.

Дозвољена носивост средстава за спрезање зависи не само од њиховог облика и димензија, већ и од чврстоће бетона и напрезања у самом бетону, посебно услед смичуће силе.

Спрезање између монтажних бетонских плоча и челичних носача се може остварити преко преднапрегнутих завртњева којима се изазове такав притисак између бетонског и челичног дела носача да се смичуће силе прихватају и преносе отпором трења. Поред тога, попречним преднапрезањем бетонске плоче параболичним кабловима изнад челичних носача може се изазвати такав притисак који успешно повезује спрегнуте делове и заједнички рад носача се даље остварује трењем.

Показало се у пракси да је примена преднапрегнутих завртњева веома економична. Они омогућују употребу готових бетонских плоча чиме се штеди на оплати и скели, значајно се умањује утицај скупљања и течења бетона, избегава се неповољна концентрација локалних напона испред можданика, а грађење се изводи много брже и у условима боље и лакше контроле материјала и радова.

Правилно изведена веза између челичног и бетонског дела је неопходан услов за заједнички рад спрегнутог пресека. Уобичајено се подразумева да у експлоатацији неће доћи до попуштања споја и да неће бити релативних хоризонталних померања на контактної површини између бетона и челика. Уствари, подразумева се да до лома долази достизањем граничне носивости на савијање, а не смицањем контактне површине спрегнутих елемената.

У пракси се подразумева употреба средстава за везу (можданика, анкера, преднапрегнутих завртњева, посебно или комбиновано), чији је основни задатак у пријему смичућих сила и спречавању одвајања бетона од челичног носача. Све даље анализе у овом раду се односе на круто спрегнуте делове челик-бетон.

3.4. Утицај вискозног понашања бетона

Досадашња искуства у проучавању понашања бетона као деформационог тела указују на сложеност процеса којег је потребно и даље проучавати. Доказано је да бетон показује вискозно понашање у току времена и да мења физичко-механичка својства (старење бетона).

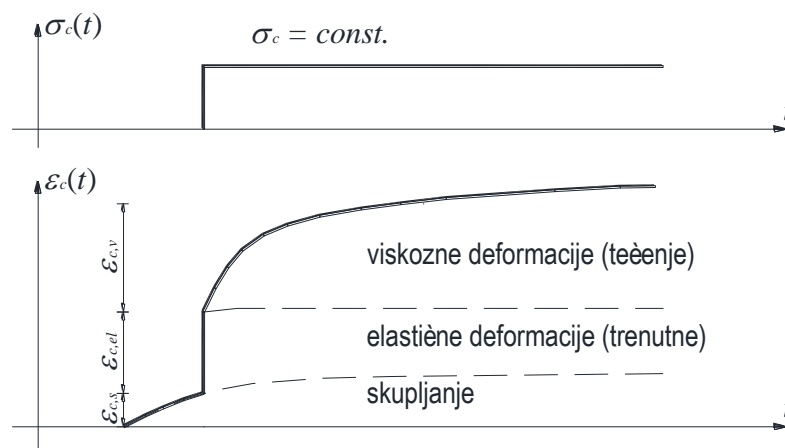
Бетон се под оптерећењем деформише, али поред тренутних/еластичних деформација процес деформисања се током

времена наставља и без прираштаја оптерећења. Ова појава је у литератури позната као **течење бетона** (слика 3.14). Са друге стране, услед појаве да бетон тече, ако се деформација одржава константном, долази до релаксације напона у бетону, тј. бетон се током времена растерећује (слика 3.15).

Феномен течања бетона данас је шире истражен и добио је своје место у прописима који садрже обавезно и описе својстава бетона.

Спречавање деформација течања бетона у обичном АБ носачу је мање значајно, јер то условљава мала количина челика у бетону, док је у спрегнутом носачу (СН) челик-бетон та појава знатно израженија. У овим носачима течење бетона изазива значајну промену напонско-деформационог стања током времена, те је веома важно ову појаву адекватно узети у прорачунским анализама.

Познато је, такође, да бетон током времена мења запремину, што је резултат сложених процеса, а променом запремине долази и до промене напонско-деформационог стања у елементима. У практичним проблемима, када је промена запремине у питању, превасходну улогу има **скупљање бетона**, што је уз течење такође сложена вискозна појава која карактерише бетон (слика 3.14). Скупљање бетона је полагана деформација и по свом току је веома слична течењу бетона, али се подразумева да се одвија без деловања спољашњег оптерећења.

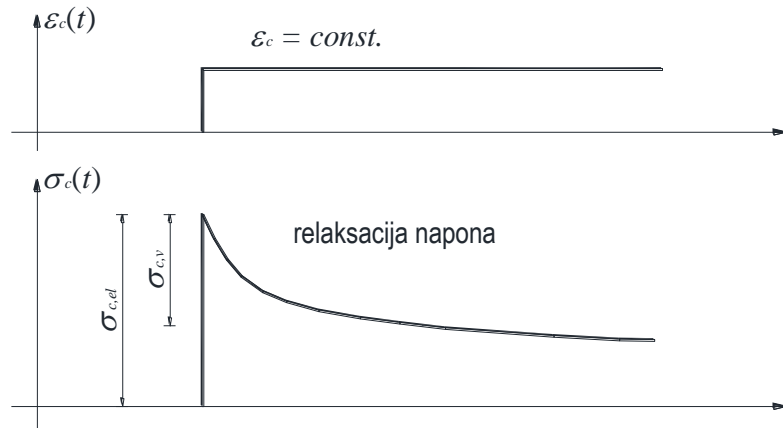


Сл. 3.14 – Деформације бетона у току времена под константним напонем

Fig. 3.14 – Concrete strains over time under constant stress

Тakoђе, временом бетон мења своје физичко-механичке карактеристике и показује **особине старења**. Те промене се најчешће манифестују кроз промену модула еластичности, односно кроз увећање тог модула чиме бетон током времена практично ојачава.

Временски процеси течења, скупљања и старења сврставају бетон у групу грађевинских материјала са најсложенијим реолошким карактеристикама.



Сл. 3.15 – Релаксација напона у бетону у току времена под константном деформацијом

Fig. 3.15 – Stress relaxation in concrete over time under constant deformation

Деформационе карактеристике бетона зависне су од низа фактора и детаљнија анализа излази из оквира овог рада. Овде ће се обухватити само оне деформационе карактеристике бетона које су битне за анализу практичних проблема везаних за прорачун понашања СК током времена.

Зависно од начина оптерећивања и дужине трајања оптерећења, деформације бетона се могу сврстати у следеће категорије:

- деформације бетона при краткотрајном оптерећивању,
- деформације бетона при дуготрајном оптерећивању,
- деформације бетона при цикличним оптерећивањима.

Деформације бетона од краткотрајног дејства, односно тренутне деформације су промене које настају одмах при аплицирању напона. За експлоатационе услове бетона ове деформације су линеарно еластичне (Хуков закон), а највише зависе од квалитета и старости бетона, те од природе и величине оптерећења. За експлоатационе услове се обично сматра да је напон у бетону до границе $\sigma_c \leq 0.4f_{ck}$.

Деформације бетона од дуготрајног дејства су промене у бетону које настају током дужег временског периода - течење и скупљање бетона. Деформације услед течења бетона, у области експлоатационих напона ($\sigma_c \leq 0.4f_{ck}$), се такође могу довести у приближно линеарну везу

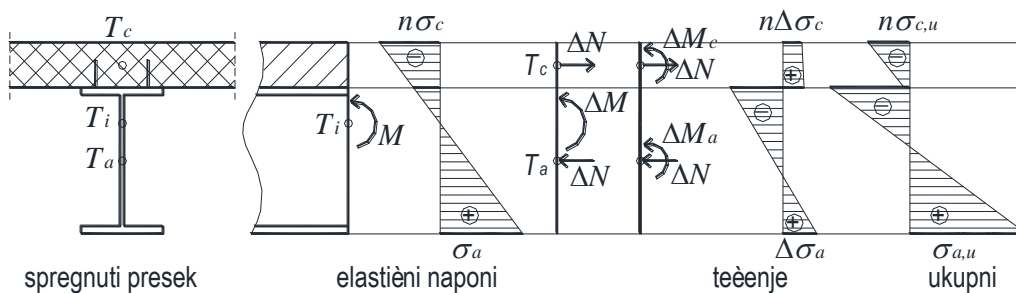
са напонима - линеарна теорија течења, док се за деформације скупљања може узети да се одвијају без деловања напона.

Ове временске деформације могу бити два до три па и више пута веће од еластичних деформација. Зато је веома важно да се скупљање и течење бетона уведу у прорачунске анализе, јер битно утичу на стање напона и деформација СК у току времена.

Деформације бетона при дејству цикличних оптерећења се стално мењају и крајње вредности су најчешће веће од вредности које би се оствариле под константним оптерећењем услед замора материјала, без обзира што су напони у границама експлоатационих за које се узима линеарно понашање бетона.

Бетон са оваквим својствима, нарочито када је спрегнут са челиком, значајно утиче на стање напона и деформација укупног спрегнутог пресека. Услед течења бетона током времена, деформације бетона се мењају (под напонима притиска бетон временом тежи да се додатно скраћује), а како је бетон спрегнут са челиком те деформације се преносе и на челични део носача (компатибилност деформација), односно јавља се прираштај нормалне силе којом се поништава разлика дилатације на споју бетона и челика.

Услед ових појава долази до прерасподеле напрезања унутар спрегнутог пресека (слика 3.16). Та прерасподела напона, за једнак нападни моменат, се одвија тако да напон у бетону опада (бетон се растеређује), а у челичном делу пресека напон расте.



Сл. 3.16 – Прерасподела напона у спрегнутом пресеку услед течења бетона

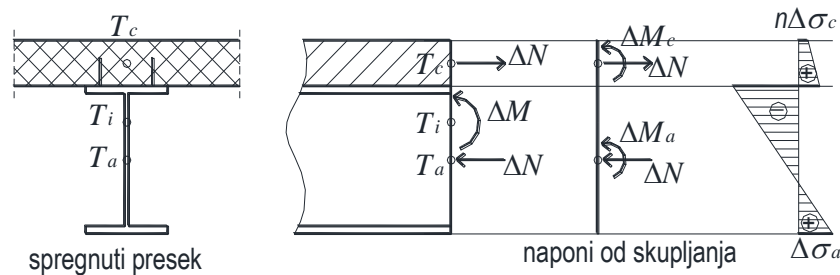
Fig. 3.16 – Stress distribution in the composite cross-section due to concrete creep

За димензионисање челичног носача најчешће је меродаван напон у доњем појасу (ножици). Међутим, може се уочити (слика 3.16), да је пораст напона у челику знатно већи у горњем појасу који је непосредно везан са бетонском плочом, него на супротном доњем појасу. Ово се

дешава због прерасподеле напона са бетона на челик, те горњи појас може бити угрожен, што треба при димензионисању уобзирити.

Код статички неодређеног носача ове прерасподеле напона су још сложеније, јер се због промена деформационих карактеристика мењају статички неодређене величине, а тиме и силе у пресецима и у условима константног спољашњег оптерећења.

Утицај скупљања бетона код СН челик-бетон је такође значајан (слика 3.17). Бетонски део/слој тежи да се скрати/скуп, али том скупљању се супроставља челични део носача услед међусобне круте везе између бетона и челика (компатибилност деформација). Ово за последицу има појаву нормалне силе којом се поништава разлика дилатације на споју бетона и челика. Услед ове нормалне силе јављају се напони затезања у бетонском слоју, а у челичном делу на споју са бетоном јављају се напони притиска, док на спољашњој страни, услед момента савијања који производи нормална сила, ти напони могу прећи у затезуће.



Сл. 3.17 – Прерасподела напона у спрегнутом пресеку услед скупљања бетона
Fig. 3.17 – Stress distribution in the composite cross-section due to concrete shrinkage

Из претходно изнетог може се закључити да се, услед течења и скупљања бетона, утицаји у спрегнутом пресеку знатно мењају и веома је важно да се за све експлоатационе ситуације ове појаве обухвате прорачуном. Овим се, поред обезбеђења носивости, мора осигурати употребљивост и трајност СК кроз све фазе коришћења конструкције.

3.5. Утицај вискозног понашања преднапрегнуте арматуре

Познато је да високовредни челик, који се користи за преднапрезање носача, поред еластичног понашања, током времена показује особине релаксације, тј. код овог челика долази до пада напона при константној деформацији.

Међутим, како се ова појава одвија у условима променљиве деформације СН онда и тачнији прорачун може бити веома захтеван и

сложен. Падом напона у преднапрегнутој арматури долази до пада силе као спољашњег оптерећења на укупни спрегнути пресек. Поред тога, свака промена напонско-деформационог стања спрегнутог пресека директно утиче и на промену стања у преднапрегнутој арматури. Услед ове узајамне зависности тачнији прорачуни захтевају сложеније итеративне поступке.

Услед релаксације преднапрегнутог челика у току времена напони у спрегнутим елементима/пресецима се значајно мењају. Због тога је при пројектовању СК неопходно што реалније анализирати стање напона и деформација у појединим елементима/пресецима узимајући у обзир евентуално различите временске интервале укључивања појединих делова у напонски активне делове. Само на овај начин се могу пројектовати и градити рационалне и сигурне конструкције за све предвиђене експлоатационе ситуације.

3.6. Предности и недостаци спрегнутих конструкција

Уопштено, спрезањем бетона и челика омогућује се добијање елегантних и витких конструкција већих распона, уз висок степен индустријализације и контроле квалитета уграђеног материјала и израде. Монтажно-монолитне конструкције, саме по себи, представљају рационалан спој монтажних и монолитних конструкција, јер обједињују предности једних и других [95]. Спрезање бетона и челика, поред значајног економског ефекта, има и друге предности у односу на самосталне челичне или бетонске носаче:

- Брже грађење услед префабрикације, без или уз врло малу примену посебних скела и оплате, јер монтажни челични елементи прихватају касније изведени и још неочврсли бетонски део;
- Уштеда у материјалу и радној снази услед високог степена индустријализације грађења;
- Рационализација грађења уз повећану сигурност због лакше контроле квалитета израде и материјала;
- Значајно повећање искоришћености попречног пресека услед ангажовања повољних својстава бетона и челика;
- Примена код већих распона услед мање сопствене тежине а тиме и смањење потребе за већим темељима и другим ослоначким елементима;

- Могућност извођења надвишења конструкције при градњи и побољшања својстава употребљивости током времена;
- Могућност остварења већег капацитета деформисања, ако је то неопходно, као што су захтеви код повољнијег одговора конструкције у сеизмичким дејствима и сл.

Услед ових и других предности, СК су нашле широку примену у грађевинарству, нарочито код већих распонских конструкција мостова и индустријских објеката, а примењују се и у зградарству, највише код израде међуспратних конструкција комбинацијом профилисаног лима и бетонске плоче [110,111].

Такође се при санацији и ојачању постојећих елемената користи поступак са додавањем нових делова чиме се практично формирају нови и сложенији спрегнути пресеци. Уствари свака промена пресека носача у било ком тренутку времена, тј. додавање једног или више елемената постојећем елементу, представља њихово спрезање. При томе се према врсти и обиму спрезања могу формирати разни облици СН, те је при пројектовању и извођењу овој проблематици неопходно посветити посебну пажњу.

Недостаци СК односе се, пре свега, на сложеност извођења и одржавање конструкције, те на неопходност адекватне техничке и кадровске опремљености, како код пројектовања, тако и код извођења [49]. Код СК врло је важан редослед фазног извођења и време спрезања, те је неопходна добра и стална сарадња између извођача и пројектанта. Само тако ће се адекватно реализовати процењени утицаји вискозних деформација бетона на напонско стање спрегнутог пресека. Због тога ове конструкције захтевају сложенију прорачунску анализу. Такође је веома важно адекватно одржавање ових конструкција, што се првенствено односи на противпожарну и антикорозивну заштиту конструкционог челика, јер се у пракси до сада та заштита показала веома битном и може представљати један од највећих недостатака код примене СК.

3.7. Развој спрегнутих конструкција

У зградарству и у мостоградњи врло рано је почела примена СК по принципу извођења АБ плоче преко челичних носача. Плочама је првобитно био поверен задатак да оптерећење пренесу на челичне носаче, а ови даље на ослонце, без увођења доприноса бетона. Касније

се увидело да се заједничким радом бетона и челика знатно смањују угиби и силе у пресецима овако формираних носача [79,82]. Овим је уствари отпочео развој и успешна примена СК у грађевинарству.

Још 1920. године се у Француској почело са извођењем АБ плоче преко челичних носача код изградње железничких мостова, где су се у прорачунима одвојено третирали АБ плоча и челични носачи. Испитивањем мостова пробним оптерећењем уочено је да су угиби распонске конструкције мањи од рачунских угиба, код којих је цјелокупно оптерећење било поверено челичним носачима.

Опсежнија истраживања спрезања челичног носача и АБ плоче вршена су у Америци и Канади од 1930. до 1940. године, првобитно у мостоградњи, а касније и у зградарству. У истом периоду прва истраживања на територији Европе обављена су у Енглеској, Швајцарској и Немачкој [54,95].

До 1944. године, након обимнијих испитивања излазе и први прописи за СК, прво у САД-у а затим и у другим развијеним земљама. У Немачкој су издате прве норме из области СК за друмске мостове 1955. године, као и препоруке за примену СК у зградарству. У Великој Британији први прописи из области СК усвојени су 1955. године. У бившој Југославији прописи за СК су први пут изашли 1970. године [94], а 1988. године објављен је нацрт стандарда за спрегнуте грађевинске конструкције у којем су прихваћена дотадашња достигнућа у развоју теорије и праксе спрезања челика и бетона.

Први радови из области СК јављају се тридесетих година прошлог века, у Паризу 1932. и Цириху 1934. године [95]. У Француској су извршена опсежна испитивања СК у периоду 1939-1944. године, у Швајцарској 1942/43. године, те у Немачкој 1949-1954. године, где су обухваћени и утицаји од скупљања и течења бетона, утицаји претходног напрезања и температуре, те проблеми спрезања и носивости можданика [82].

Мноштво теоретских радова на тему СК у периоду од 1945. до 1955. године, објавили су *Дишингер, Сатлер, Фриц, Сонтаг, Трост* и други.

На просторима бивше Југославије СК се први пут појављују код изградње друмског моста преко реке Саве у Загребу 1939. године, гдје је накнадним испитивањем указано на сарадњу челичних носача и АБ плоче, иако конструкција при пројектовању није концептуално постављена као спрегнута [25]. Тек је 1955. године први пут пројектована

и изведена спрегнута распонска конструкција моста преко реке Саве у Градишци.

Од 1950. године у свету почиње интензивнија примена хладнообликованих челичних профила као оплате и као дела бетонске плоче у заједничком спрегнутом пресеку, а на просторима бивше Југославије примена оваквих СК почиње од 1965. године.

Највећи допринос развоју СК на просторима бивше Југославије дао је М. Ђурић, који је 1963. године објавио књигу под називом „Теорија спрегнутих и претходно напрегнутих конструкција“ [25] која је значајно допринела утемељењу теорије прорачуна и развоју СК у нас. Такође, у специјалном издању часописа „Изградња“ 1972 [110]. године објављено је низ радова и стручних приказа објеката СК успешно изграђених на просторима бивше Југославије.

Даљи развој СК доводи до примене преднапрезања као резултат тежње да се конструкције рационализују и да се повећају распони. Један од првих примера реализације специјализованог спрегнутог преднапрегнутог носача је „*Preflex*“ носач патентиран 1951. године у Белгији [95].

Вискозне особине неких материјала указују да се деформације тих материјала при константном оптерећењу током времена повећавају (мењају). *Weber* је још 1835. године први уочио појаву деформисања материјала током времена. *Koltrausch* је 1863. године, а нешто касније и *Hopkinson* 1878. године први ближе описали законитост ових појава. *Boltzman* је 1874. године поставио основе линеарне теорије течења материјала, коју је, крајем XIX и почетком XX века, допунио *Volterra* водећи рачуна о историји оптерећења. Његове математичке везе и данас имају широку примену у линеарној теорији вискоеластичности и реологији бетона, познате као *Volterra*-ине интегралне једначине.

Значајно место у проучавању реологије бетона имају *Bash*, *Considero*, *Woolson*, и други. Са систематским експерименталним истраживањима реолошких особина бетона почело се 1928. године (*Davis* у САД-у 1928. године, *Granvill* и *Faber* у Енглеској 1928. године, *Борисзански* у бившем СССР-у 1930. године), а након Другог светског рата настављено је са интензивним проучавањем *Davis*-а, *Dutron*-а, *Clanvill*-а, *Freudental*-а, *Гвоздева*, *Александровског*, *Rish*-а и других [51]. Новијим истраживањима најзначајнији допринос проучавању реологије бетона (скупљање и

течење бетона) дао је *Važant*, који је поставио основе за прорачун ових појава [8-11].

Од домаћих истраживача значајно је поменути Ђ. Лазаревића који је још 1933. проучавао утицај течења бетона. За анализу СК, са утицајем вискозног понашања материјала, код нас најзначајнији допринос дали су М. Ђурић [25], Ј. Лазич [71], М. Ивковић [59], Д. Јевтић [60], М. Пржуљ [95], В. Михаиловић [79], Р. Фолић [43,44] и други. У новије време у свету и код нас изражена је тежња ка развоју нумеричких прорачунских модела уз примену савремених рачунара [14,20].

3.7.1. Примена спрегнутих конструкција у зградарству

Бетон се, као грађевински материјал, у различитим комбинацијама употребљава практично у већини или свим елементима објекта високоградње [49]. Садејство бетона и челика пружа низ повољних могућности, те су предности примене СК у зградарству одавно познате.

У Јапану 30-тих година прошлог века почињу се све више примењивати СК у високоградњи, док је шира примена ових конструкција у Европи, нарочито у Великој Британији и Скандинавији, отпочела након Другог светског рата.

И на подручју бивше Југославије СК у високоградњи се почињу користити већ 50-тих година прошлог века (надоградња хотела „Централ“ у Загребу). Ипак, највећа експанзија у развоју и примени СК у зградарству се веже за период 70-тих и 80-тих година прошлог века.

Развој СК у високоградњи је у почетку усмерен на заштиту челичних носача и на рационализацију извођења стубова и међуспратних конструкција. Челични носачи се штите тако што се забетонирају, а рационализација се односи на замену класичне оплате шупљим челичним профилима испуњеним бетоном код стубова и профилисаним лимовима код таваница.

Међутим, показало се да челик, поред улоге „заробљене“ оплате, има значајну улогу у носивости заједно са бетоном. Добрим избором челичних носача и/или профилисаног лима и адекватним спрезањем са бетоном постиже се захтевана стабилност, функционалност и економичност примене СК у зградарству.

Главне предности спрезања челичних носача и бетона код таваница су изразито већа крутост при истој грађевинској висини, као и увећана

носивост у поређењу са чистим челичним носачима. Овде је постигнута оптимизација искоришћавања позитивних својстава примењених материјала (челика и бетона), нарочито код конструкција за средње и велике распоне.

Постизањем већих распона омогућена је и већа флексибилност у организацији унутрашњег простора објекта, уз мању тежину конструкције, а примена профилисаног лима омогућава брзу и економичну градњу без оплате и скела. Такође, примена полуаутоматског електроотпорног заваривања можданика са главама пружа потребну сигурност у квалитету изведених радова на спојевима.

Када су у питању основни конструктивни системи у високоградњи, СК се примењују као рамовски системи или системи са АБ зидним дијафрагмама [49].

Својом улогом у конструкцији у прихватању оптерећења разликују се елементи за ношење вертикалног (гравитационог) оптерећења и елементи за ношење хоризонталног оптерећења (сеизмичко и оптерећење ветром). Својим положајем и обликом разликују се хоризонтални и вертикални конструктивни елементи у конструкцији објекта. При томе треба имати у виду да појединини елементи и склопови могу имати више подсистема и да је веома важна улога спојева и веза.

Спрегнуте међуспратне конструкције

Добро је позната улога таваница у конструкцији вишеспратних објеката и важност рационализације код извођења у циљу постизања економичне и брзе градње. У том смислу спрегнуте конструкције таваница могу да пруже оптимална решења [63,49].

Најчешће се користе челични пуни или решеткасти носачи преко којих се бетонира плоча уз адекватно спрезање можданицима. Поред тога, код бетонирања на лицу места, у последње време највише се користе профилисани лимови који имају двојаку улогу, тј. улогу оплате и главне арматуре. Такође, раније, у ову сврху су се највише користиле префабриковане АБ плоче дебљине 3-5 цм (Омниа плоче), мада се и данас користе. У задње време се тежи смањењу рада на лицу места и потпуној префабрикацији, где се монтажне АБ плоче одговарајућим средствима спрежу са челичним носачима. При томе се спрезање

може успешно извршити дисконтинуалним и/или континуалним бетонирањем споја у којем су можданици заварени за челични носач.

Профилисани лим за спрегнуте међусpratне конструкције почео се користити још од 1930. године, прво у САД, а нешто касније и у Европи. Педесетих година прошлог века започиње интензивна примена танкозидних профилисаних лимова у високоградњи и данас су свуда широко у употреби. У почетку су лимови имали функцију „изгубљене оплате“ и замењивали су делом подупираче за вријеме бетонирања, а нешто касније њихова функција се проширује на потпуну или делимичну замену арматуре.

Носивост трапезног лима као танкозидног профила уобичајено даје произвођач на основу лабораторијских испитивања. Наиме, показало се да теоретско одређивање носивости не може дати поуздане резултате због утицаја локалних услова, посебно када су у питању концентрисане силе. Нужно је одредити носивост за позитивне и негативне моменте савијања, која се разликује због несиметрије лима у односу на главну осу. Такође је нужно познавати носивост за трансверзалне силе у зонама ослонаца и понашање лима у зони концентрисаних сила. За израду профилисаних лимова користи се хладно обликовани челични лим (челик S235 и S275) дебљине 0,75-2,00 mm.

Улога профилисаног лима у спрегнутом пресеку захтева квалитетно везу бетона и трапезног лима. Спрезање са бетоном се може остварити тачкасто можданицима завареним за лим или се користи континуирано спрезање по површини профилисаног лима. За побољшање везе са бетоном по површини ребара лима могу се извести назубљења и перфорације. Такође се за побољшање везе и спречавање одизања могу профилисати нагнуте ивице ребара лима између којих се бетон заклињава.

Код нижих интензитета оптерећења, све до појаве прслина у бетону, спрезање пријањањем је уобичајено довољно и без посебне обраде површине лима и/или специјалног обликовања попречног пресека. Након појаве прслина веза бетона и лима се нарушава па овај вид спрезања не даје потребну сигурност. Профилисана ребра између којих се бетон заклињава и/или назубљене површине лима могу поуздано одиграти улогу добре везе лима са бетоном и у условима појаве прслина. Овде је спрезање остварено трењем па се мора водити рачуна о сидрењу на крајевима. Уобичајено се поменути сидрења

остварују уградњом можданика, те на овај начин лим може поуздано одиграти улогу арматуре. У неким случајевима се може користити само сидрење на крајевима преко можданика заварених за челични гредни носач.

Податке о вези између бетона и профилисаног лима за одређене услове спрезања треба да да произвођач лима на основу експерименталних испитивања и/или претходним испитивањима за конкретне услове.

Механизам носивости спрегнутих плоча са профилисаним лимом детаљно је описан у раду (*Chien&Ritchie, 1984.*).

Таванице са профилисаним лимовима имају по правилу дупло дејство спрезања. Први случај се односи на спрезање бетона и профилисаног лима, где лим има улогу арматуре, тако да се образује једна посебна врста АБ плоче, а други случај је спрезање бетона са челичним носачем (подвлаком) међуспратне конструкције. Ово двојачко спрезање захтева адекватан третман активног дела пресека бетона који зависи од правца пружања ребара лима у односу на челичне подвлаке. Такође су могући и раздвојени случајеви, тј. само спрезање бетона са челичним носачима или само спрезање бетона и профилисаног лима те ослањање такве таванице као континуалног носача на челичне носаче (подвлаке). Свему овоме се може додати и поступак реализације СК са потпуно монтажним елементима, гдје је и бетонска плоча префаброкована.

Прорачун спрегнутих таваница са профилисаним лимом најчешће се спроводи у две фазе у складу са поступком фазног грађења [49]. У првој фази лим има улогу оплоте и самостално преузима сва оптерећења (сопствена тежина, тежина свјежег бетона, радно оптерећење). Након очврђавања бетона активира се спрегнути пресек који даље преузима додатна стална и корисна оптерећења. Такође, скупљање и течење бетона током времена изазива прераспodelу напона између бетона и лима. У свему овоме значајну улогу има и начин (технологија) извођења, односно да ли је градња вршена без или са подупирањем.

Ако се таваница изводи без подупирања оптимално је да главни челични носачи буду на размаку од 2,5 до 3,5 м, а уколико се примени подупирање онда су ови размаци од 3,5 до 5,5 м. Оптимални распони за пуне ваљане челичне носаче су од 6 до 10 м, док је за распоне веће

од 12 м оптималније користити решеткасте носаче. Преднапрезање спрегнутих таваница може се извести кабловима, затим као „Preflex“ носачи и унутрашњим преднапрезањем помоћу додавања челичног појаса високе чврстоће који се у затегнутом стању заварује на челични носач.

Код плоча већег распона уместо пуних челичних носача користе се челичне решетке [49,63,95]. Такође, примена челичних решетки је веома повољна код вођења инсталационих цеви кроз отворе решетки. Обично се горњи појас решетки спреже са АБ плочом ливењем бетона на лицу места. Такође је могуће да се готов спрегнути горњи појас изведе као префабриковани те да се допрема на градилиште и повезује са дијагоналама решетки. Ова друга варијанта се користи код мањих распона од 7 до 12 м, док се прва варијанта може успешно применити за распоне од 10 до 20 м.

Спрезање бетонске плоче са горњим појасом решетки може се извести континуирано по целој дужини горњег појасног профила или само у чворовима. Од ових начина спрезања зависи и положај можданика и распоред сила у пресецима, јер код спрезања у чворовима смичуће силе се јављају само у чворовима решетки, те предност треба дати континуираном спрезању.

Приликом анализе СК са решеткастим носачима прорачун се спроводи у две фазе у зависности од технологије фазног извођења. У првој фази челична решеткаста конструкција преузима сопствену тежину, тежину бетонске плоче и радно оптерећење. У другој фази спрегнути решеткасти носач преузима додатно стално и корисно оптерећење. Ове фазе прорачуна могу бити и другачије уколико се користи подупирање. Такође се код бетонске плоче најчешће користи спрегнути пресек са профилисаним лимом.

Спрегнути челични решеткасти носачи уопштено имају велику висину (између 1/15 и 1/10 распона) те је допринос скупљања и течења бетона сведен на минимум. У зависности од намене и оптерећења ове анализе се понекад могу изоставити. Такође, спрегнути решеткасти носачи имају велику крутост и у већини случајева немају изражен проблем када су у питању вибрације од покретног оптерећења.

Горњи челични појас решетки мора имати минимално потребну дебљину да би се остварила пуна носивост можданика. У супротном мора се рачунати на смањену носивост можданика. У поступку

извођења потребно је обезбиједити бочну стабилност горњег појаса. Уколико заварени трапезни лим није довољан нужно је поставити елементе за бочно придржавање горњег појаса решетке.

Седамдесетих година прошлог века у Канади је теоријски и експериментално разрађен систем са кратким елементима за везу доњег челичног I профила и горње бетонске плоче у трапезном лиму [63]. Ови елементи за везу су челични I профили мале дужине који преносе смичуће силе. Овакав систем је у теорији конструкција познат као Вирендел носач (*Vierendeel*). Секундарна конструкција пролази кроз отворе Вирендел носача и она је повезана са горњом плочом и доњим челичним носачем. Ови секундарни носачи се у статичком смислу третирају као Герберови носачи, који у зони позитивних момената могу бити спрегнути са плочом, а конзолни делови су увек слободни (неспрегнути).

Овакав спрегнути систем омогућава конструктивну, механичку и инсталацијску интеграцију у два смера што резултира мањом висином међуспратне конструкције у поређењу са осталим системима.

Важно је истаћи да је ова врста таваница намењена првенствено за пренос вертикалног оптерећења, док за прихватање хоризонталних утицаја захтева одређене модификације. Такође је уобичајено да се при извођењу ових таваница користи подупирање до остваривања носивости бетона и формирања активног спрегнутог пресека. На овај начин се крајњи угиби плоче могу задржати у дозвољеним границама.

Овај Вирендел систем таваница на нашем подручју није наишао на ширу примену.

У општем случају, при дејству хоризонталних сила (ветар, сеизмика), таванице код вишеспратних зграда морају прихватити те силе и расподелити их на вертикалне носеће елементе. Код спрегнутих таваница важно је да спојеви између плоче и челичних носача буду такви да могу са сигурношћу пренети хоризонталне силе. Такође је за пренос ових сила веома важан спој греда-стуб [49].

Спрегнути стубови

Улогу стубова у конструкцији објеката високоградње не треба посебно наглашавати јер су стубови од пресудног значаја за прихватање оптерећења од међуспратних конструкција и пренос тог оптерећења на темеље. При томе, поред гравитационог оптерећења,

значајну улогу има хоризонтално оптерећење (сеизмика, ветар) које такође може бити поверено стубовима у пуном износу или делом, што зависи од вертикалног конструкцијског система објекта [49].

У попречном пресеку спрегнутих стубова уобичајено фигурише челични и бетонски део. При томе, челични профили могу бити испуњени бетоном (бетон обложен челичним плаштом) или челични профил може бити делимично или потпуно убетониран (челични профил обложен бетоном). Поред тога, нарочито код убетонираних челичних профила, редовно је присутан и бетонски челик (мека арматура).

Спрегнути стубови у односу на АБ или челичне стубове имају низ предности. Наиме, са релативно малим попречним пресеком могуће је постићи велику отпорност стубова уз значајну економичност и оптимизацију при извођењу.

Код челичних профила испуњених бетоном челични профил уједно служи као оплата и као арматура, а обавијање бетона челиком знатно повећава чврстоћу и носивост бетона, јер се активира тродимензионално напонско стање. Код овако формираних пресека утицај скупљања и течења бетона није знатније изражен и у неким случајевима се може изоставити из анализа или се могу применити упрошћени поступци прорачуна.

Стубови са потпуно убетонираним челичним профилем имају веома високу протипожарну отпорност те се обично користе за објекте код којих се то захтева. Код овако формираних пресека нужно је додатно армирање, нарочито попречном арматуром (узенгијама), ради утезања и очувања интегритета бетона, док је подужна арматура само конструктивна, мада у неким случајевима ова арматура може имати и статичку улогу.

Спрегнути стубови са делимично убетонираним челичним профилем се могу производити префабрикацијом и као готови елементи допремити и монтирати у конструкцију, што им у том смислу даје предност у односу на другу врсту стубова. Наиме, делимично убетонирани челични профили пружају могућност формирања спојева конструкције услед релативно велике изложене површине челичног профила. Код овако формираних пресека стубова утицаји скупљања и течења бетона се не могу занемарити и треба их укључити у прорачунске анализе.

Скупљање и течење бетона доприноси прераподели напона у току времена између челика и бетона код спрегнутих стубова. При томе под напонима притиска расте модул деформације бетона, што такође условљава прерасподелу напона између челика и бетона.

Бетон се под напонима притиска временом растеређује (течење бетона) и разлику напона прихвата челични део пресека. Скупљање у бетону изазива напоне затезања, а у челику напоне притиска. Ова прерасподела напрезања мора имати адекватан прорачунски третман ради постизања сигурних и функционалних спрегнутих елемената (стубова).

Доказ носивости – димензионисање спрегнутих стубова у свим савременим прописима базира се на концепту граничних стања носивости елемената. При томе прорачун спрегнутих стубова, као и спрегнутих носача уопште, заснива се на увођењу три претпоставке које су довољно тачне за практичне задатке из инжењерске праксе:

- Челик и бетон су изотропни и еластични материјали који се понашају у складу са Хуковим законом;
- Челични профил и бетонска облога или испуна сједињени су потпуно и непомерљиво по целој дужини стуба и међу њима постоји пуна интеракција;
- Важи Бернулијева хипотеза да равни пресеци и након деформација остају равни.

Уопштено, спрегнути стубови могу бити изложени централном притиску са или без извијања или ексцентрично оптерећени са савијањем у једној или две равни.

Гранично стање носивости је доказано ако пресечне силе у најнеповољнијој комбинацији, узимајући при томе и утицај деформација по теорији II реда, ни на једном делу стуба, нису већи од граничне носивости попречног пресека, при чему је цели систем у стабилној равнотежи.

Доказ за гранично стање употребљивости за уобичајене проблеме у инжењерској пракси није потребан, Међутим, контрола напонско-деформационог стања је обавезна, како за краткотрајно оптерећење, тако и за дуготрајно оптерећење када се појављују утицаји скупљања и течења бетона те долази до прерасподеле напрезања са бетонског дела пресека на челични део пресека стуба.

Носивост спрегнутих стубова зависи од карактеристика пресека, услова ослањања крајева, имперфекције и дужине извијања. Показало се да највећу носивост имају стубови од округлих челичних цеви испуњених бетоном.

Утицаји од скупљања и течења бетона у пракси доказују се само за ексцентрицитет оптерећења $e/d < 2$ и при прекорачењу граничне виткости у зависности од типа пресека спрегнутих стубова и померљивости система.

Код спрегнутих стубова веома је важна зона уношења силе. За ту зону је неопходан доказ осигурања везе између бетона и челика. Анализе треба да обухвате преузимање смичућих сила за гранично стање употребљивости узимајући у обзир скупљање и течење бетона.

Код спрегнутих стубова од челичних кружних цеви испуњених бетоном средства за спрезање се могу изоставити код примене за мирна оптерећења у објектима високоградње. Попречне силе је најчешће довољно предати челичној цеви.

Спрегнуте греде са убетонираним челичним профилем

Један од облика спрезања бетона и челика код гредних носача је да се пуни челични профил потпуно убетонира. У пракси се овако формиране греде често сусрећу под именом греде са носећом крутом арматуром. При томе се челични профил може поставити по целој висини пресека или само у затегнутој зони. Најчешће се ради о убетонираним топловаљаним челичним профилима I и T попречног пресека, док је укупни спрегнути пресек уобичајено правоугаоног или T облика [91].

Уобичајено је да се код овако формираних спрегнутих греда користи и обична арматура (бетонски челик), посебно су обавезне узенгије којима се пресек утеже и одржава интегритет спрегнутих делова, док подужна арматура може бити носећа или само монтажна. Положај арматуре је идентичан као и код обичних AB греда, те треба водити рачуна да пуни челични профил буде смештен унутар узенгија.

Примена оваквих носача у грађевинској пракси је поприлично ретка, иако имају и добрих особина. Предност примене оваквих спрегнутих система у односу на чисто армирани бетон је што се челични носач може користити за ношење оплате вешањем, тј. искључује се употреба скеле за оплату, што може бити олакшавајућа околност при самом

грађењу, док је једна од значајнијих предности у односу на чисто челичне конструкције заштита челика бетоном, те није потребна нека друга врста заштите челика од пожара и/или корозије.

У поступку димензионисања, за случај вешања оплате, треба имати у виду да челични носач прихвата стално оптерећење од сопствене тежине, тежине оплате, тежине свежег бетона и радно оптерећење. Након очвршћавања бетона и његове напонске активације преостало стално оптерећење и корисно оптерећење прихвата укупни спрегнути пресек. При томе се мора узети у обзир допринос скупљања и течења бетона на прерасподелу напрезања у конструкцији током времена.

Рамовски системи

У пракси се често прибегава употреби рамовских система за конструкцију објеката високоградње. Рамови могу бити више или мање крути што зависи од односа релативне крутости греда и стубова и начина спајања ових конструктивних елемената [49].

Могуће су различите комбинације за греде и стубове, где су код потпуно спрегнутих система и греде и стубови спрегнути елементи челик-бетон, или код мешовитих система где су спрегнути једни или други елементи, нпр. систем спрегнутих греда у комбинацији са АБ стубовима је највише у употреби.

За прихватање хоризонталног оптерећења (сеизмика, ветар) стубови објекта морају бити бочно придржани. Да би се ово постигло нужно је формирати рамове отпорне на дејство момента преко крутих веза ригли са стубовима или увести додатне елементе који имају улогу укрућења рамова, најчешће у виду челичних дијагонала.

Код вишеспратних зграда спојеви носача спрегнуте таванице и стубова имају веома важну улогу за глобалну стабилност рамова. Такође је важно да ови спојеви обезбеде пројектом претпостављени механизам рада конструкције и да се избегне њихово оштећење. При томе се карактеристике спојева одређују зависно од својстава носиве спрегнуте конструкције.

Код спојева челичних носача и стубова веома је важно спречити локалне деформације па је често неопходно предвидети додатна укрућења спојева челичним лимовима, јер бетонска облога није довољно поуздана да у потпуности одигра ту улогу.

За разлику од спрегнутих међуспратних конструкција (челичне греде-АБ плоча), код којих већину момената савијања преузима челични део, код спрегнутих стубова то није случај. С тога се јавља проблем сигурног преноса напрезања из хоризонталног челичног носача у стуб, те је нужно адекватно конструисати везу између ових елемената. Проблем нарочито долази до изражаја код мешовитих рамовских система код којих су стубови обични од армираног бетона.

Спојеве могу бити прорачунски третирано као зглобови уколико имају малу крутост и носивост. Међутим, овакве конструкције без посебних укрућења, нису погодне за хоризонтална оптерећења (сеизмика, ветар). Полукрути спојеве могу дјелимично допринети континуирању рамова, нарочито у еластичној области конструкције, док крути спојеве треба да обезбеде потпуно континуирање рамова и да остану у пуној фази носивости у свим прорачунским ситуацијама усклађеним са условима у експлоатацији.

За спојеве је важан капацитет носивости и капацитет ротације, нарочито у сеизмичким условима. Уобичајено је у експлоатацији да спојеве имају потребну дуктилност, да су крути и делимично носиви. Прорачуни спојева прилично су захтевни и компликовани и за праксу је нужно увести одређена поједностављења.

Идеалан зглобни спој слободно ротира те не преноси моменте савијања. У пракси је то уствари идеализован зглоб јер скоро увек постоји одређени степен укрућења (вијци, бетон). Идеалан крути спој не дозвољава ротацију и преноси укупне моменте. Сви случајеви између ова два гранична дозвољавају делимичну ротацију и требају бити изведени да буду дуктилни.

Посебна предност код рамовских система је могућност коришћења преднапрезања таваница, нарочито код већих распона где је ограничена висина спрегнутих таваница. Чест је случај да провођење и постављање инсталација не дозвољава већу висину греда, те се поред поменутог преднапрезања могу користити ошупљени челични носачи. Међутим, ове конструкције су због смањене крутости осетљиве на вибрације.

Системи са зидним укрућењима

Системи са зидним укрућењима користе се у сеизмички активним подручјима где се хоризонтална сила већим делом или потпуно

поверава АБ конструкцијским зидовима. Код ових конструкцијских система нужно је адекватно прорачунати и позиционирати зидове, а веома је важно обезбедити правилан унос хоризонталне силе са спрегнутих таваница у зидове [49].

Све што је речено за рамовске системе добрим делом важи и за укрућене системе.

Савремени приступ пројектовању и изградњи СК, поред стабилности, функционалности, економичности и естетике, подразумева анализу одрживости укључујући енергетску ефикасност и противпожарну заштиту објеката.

3.7.2. Примена спрегнутих конструкција у мостоградњи

У мостоградњи врло рано је почела примена СК по принципу извођења АБ плоче преко челичних носача, нарочито када се увидело да се заједничким радом бетона и челика знатно смањују угиби и силе у пресецима овако формираних носача [95].

Још 1920. године се у Француској почело са извођењем АБ плоче преко челичних носача код изградње железничких мостова, а испитивањем мостова пробним оптерећењем уочено је да АБ плоча у садејству са челичним носачима знатно доприноси смањењу угиба носача [82].

На просторима бивше Југославије СК се први пут појављују код изградње друмског моста преко реке Саве у Загребу 1939. године, гдје је накнадним испитивањем указано на сарадњу челичних носача и АБ плоче, иако конструкција при пројектовању није концептуално постављена као спрегнута. Тек је 1955. године на овим просторима први пут пројектована и изведена СК моста преко реке Саве у Градишци.

Првобитно су се спрегнути мостови углавном изводили са два главна носача са слободно ослоњеном коловозном плочом са конзолама са стране. Највише су се градили мостови са спрегнутим распонским конструкцијама система простих греда распона 20-25 м и ширине до 14 м. Овакви системи су били поуздани за пројектовање и извођење и највише су одговарали природи спрегнутих пресека код којих АБ коловозна плоча прихвата напоне притиска од момента савијања а челични носач напоне затезања.

У данашње време широка је примена спрегнутих распонских конструкција мостова. Граде се као гредни, оквирни, решеткасти, лучни, висећи и мостови са косим затегама и то за мање, средње и велике распоне.

СК распона од 25 до 45 м су углавном системи са челичним гредним носачима и коловозном бетонском плочом. Код већих распона (50-100 м) обично се формирају и јаки попречни спрегнути носачи, а уместо пуних лимених носача у подужном правцу за веће распоне рационална је примена решеткастих носача. Спрегнути сандучасти носачи трапезоидног облика попречног пресека су се показали као веома поуздани, посебно за мостове у већим кривинама због велике торзине отпорности. Код континуалних система затегнуте бетонске зоне се могу избећи разним облицима преднапрезања.

Бетонска коловозна плоча може бити ливена на лицу места или и она може бити произведена префабрикацијом, те доведена и монтирана у пројектовани положај. Спрезање монтажне бетонске плоче и челичних носача се може реализовати на више начина, а уобичајено је да се оставе рупе у плочи, заваре можданици за челични носач, те се на лицу места ови спојеви забетонирају. Такође, треба имати у виду разне поступке при монтажи, тј. да ли се примењује подупирање и слично, мада је тежња да се спрегнути мостови изводе без скела и оплате, односно са што мање радова на лицу места.

Главни носачи и коловозна плоча су уско повезани и избор ових елемената се одвија у најранијој фази конципирања решења попречног пресека спрегнутог моста. Код мостова са сложеном геометријом предност се даје монолитном извођењу коловозне плоче. Такође и код мостова на локацијама са ниским температурама и снежним падавинама предност се даје монолитној плочи. Монтажне коловозне плоче скраћују време градње и смањују утицај скупљања и течења бетона. Међутим, спојеви монтажних делова плоча и њихова веза са челичним носачима остају потенцијална места корозије и деструкције моста.

Када је у питању проблем замора материјала потребно је узети у обзир реалне услове покретног оптерећења и понашање готових носача и њихових спојева изложених таквој врсти оптерећења. Проблем замора се уствари може схватити као одређивање века трајања појединих елемената кроз акумулацију оштећења услед цикличних оптерећења.

Иако се код СК проблем замора односи више на челик, показало се да и бетон брже пропада код учестале варијације оптерећења.

Показало се да су континуални носачи донекле угроженији од простих греда и да се мора посветити пажња обликовању детаља када је у питању замор. Такође, треба имати у виду да лакше конструкције имају мању отпорност под цикличним оптерећењем.

Мостовске распонске СК су класичан пример рационалног искоришћења најбољих својстава челика и бетона. Због тога оне имају низ предности у односу на чисто бетонске и челичне конструкције. У односу на бетонске, СК имају мању висину и тежину и лакше извођење, али су сложеније за одржавање, посебно за антикорозивну заштиту. У односу на челичне, СК имају повећану крутост и боље функционалне аспекте уз лакше одржавање и редукацију челика, посебно код система за укрућење који се добрим делом могу и изоставити.

Савремена филозофија пројектовања мостова укључује, поред носивости, стабилности, функционалности, трошкова изградње и естетике, и економичност одржавања кроз читав експлоатациони век конструкције. Анализа економских вредности у функцији времена је добар показатељ квалитета конструкције моста и треба бити детаљно сагледана већ у раним фазама пројектовања.

Рационално је користити челике са вишим механичким карактеристикама и различите квалитете конструкционих челика према положају и улози елемената у конструкцији моста (ниско легирани термички обрађени челици високе отпорности са границом развлачења 400-800 МПа). Такође је употреба некородирајућих конструкционих челика веома погодна код конструкција у агресивним срединама и тешко доступних елемената за одржавање.

Коловозне плоче треба градити само од бетона високих марки (изнад МБ40), делом због повећаних локалних утицаја а делом због трајности. Такође је важно да бетон коловозне плоче има потребну отпорност на дејство мраза (М150-М200) зависно од локације објекта. Такође је потребно одговарајућим адитивима смањити водоцементни фактор а тиме умањити утицај од скупљања и течења бетона.

На избор форме, обима и степена спрезања челика и бетона утиче низ фактора. У првом реду утиче намена моста, статички систем, величина распона, морфологија терена, технологија и брзина грађења,

цијена коштања рада и материјала, опремљеност и искуство потенцијалних извођача итд.

Статички неодређене СК мостова и/или технологија изградње знају значајно искомпликовати прорачун услед скупљања и течења бетона. Ако се монтажа и бетонирање обављају у више фаза онда се течење и скупљање одвијају на различитим системима и различитим старостима бетона. Напонско-деформационо стање се додатно комликује уколико се примењује преднапрезање принудним деформацијама и/или кабловима. Релаксација високовредног челика такође мора бити узета у прорачунским анализама, што је још један параметар који прорачун чини сложенијим.

Преднапрезање код статички неодређених носача, у циљу неутрализације напона затезања у бетону, спуштањем средњих ослонаца, се показало недовољно ефикасним због скупљања и течења бетона. Употреба високовредног челика даје поуздане резултате који се желе постићи преднапрезањем и у неким случајевима у комбинацији са принудним деформацијама пружа могућност оптимизације примене спрегнутих континуалних конструкција.

Скупљање и течење бетона и релаксација преднапрегнутих каблова захтева да се монтажа, бетонирање и преднапрезање у појединим фазама одвијају онако како је то пројектом предвиђено. Свако одступање од пројектом анализираних стања, изван граница толеранције, даје другачију расподелу напрезања и пројектом дате прорачунске анализе више се не могу прихватити као довољно поуздане. Ово посебно важи ако се извођење конструкције моста реализује у периодима који се значајно разликују од онога што је пројектом предвиђено (пола године и више) или ако се извођење реализује на сасвим другачији начин.

У последњих 30-ак година реализована су многобројна експериментална и теоријска истраживања СК. Акцент је дат на повећање поузданости мостова и примену алтернативних облика и материјала, као што су влакнасто армирани полимер и неоргански фосфатни цемент. Нумеричке анализе и математички модели се све више ослањају на МКЕ и специјализоване софтверске пакете (*ADINA*, *ABAQUS*, *ANSYS*, *SAP*), где су развијени еластични и пластични модели [49]. Такође се тренутно велика пажња посвећује динамичком одговору,

дуктилности, замору, поузданости и животном циклусу СК мостова (Al-Darzi&Chen, 2006).

Анализом мостовских конструкција у инжењерској пракси користе се различити програмски пакети код којих се у основи прорачун заснива на аналогiji с роштиљем или побољшаним моделом који поред линијских елемената роштиља узима и плочасте елементе. Код мостова сандучастог попречног пресека прорачун је још комплекснији. Развојем рачунара и бољим програмским пакетима овакав приступ прорачунима може се знатно побољшати.

При пројектовању конструкцију би требало анализирати тако да се максимално искористе предности спрегнутог пресека. Потребно је на адекватан начин решити проблем затегнутог бетона уколико се јављају такве зоне. Одређивањем ефективног момента инерције испрског пресека може се одредити почетна расподела момената и спровести корак по корак анализа пресека. Код статички неодређених система неопходна је анализа прерасподеле утицаја проузрокованих скупљањем и течењем бетона.

Применом преднапрезања може се успешно решити проблематика ограничења прслина у коловозној плочи изнад средњих ослонаца. За то је најбоље користити високовредни челик за преднапрезање, иако је развијена техника преднапрезања уклањањем ослонаца. Овде се прво преднапреже челични носач подизањем/спуштањем средњих ослонаца а затим спреже са бетонском коловозном плочом. Анализа дуготрајних ефеката код оваквих поступака изградње прилично је комплексна и поред знања и искуства захтева примену нумеричких метода (нпр. МКЕ) и савремених рачунара.

4. ПОГЛАВЉЕ

ВЕЗЕ ИЗМЕЂУ НАПОНА И ДЕФОРМАЦИЈА ЗА СПРЕГНУТЕ ЕЛЕМЕНТЕ

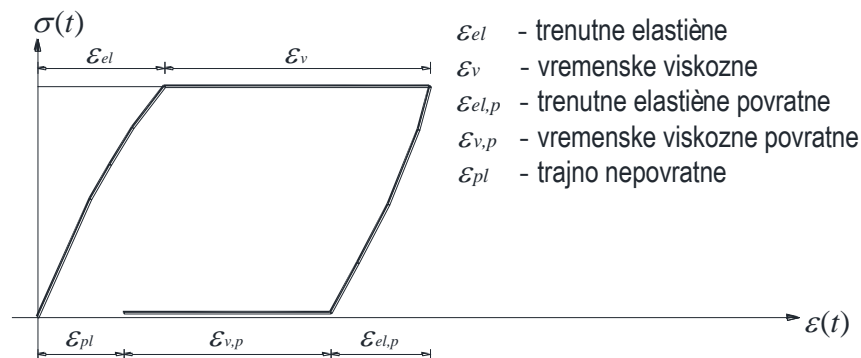
4.1. Веза напон-деформација за бетон

Познато је да је бетон вискоеластопластичан материјал и под оптерећењем се деформише. За изналагање математичких веза напон-деформација, у теоријској реологији, користе се идеализована тела или реолошко-механички модели. За краткотрајна оптерећења и радне напоне за притиснути бетон до $0.4f_{ck}$ користи се позната Хукова (Hook) веза за еластичне материјале. Међутим, под дуготрајним деловањем оптерећења на бетон деформације расту и без пораста напона [107]. Те деформације су утолико веће уколико оптерећење дуже траје и када се оптерети млад бетон. Ове деформације се у литератури називају деформације течења бетона (слика 4.1). При растерећењу јавља се обрнуто стање, где поред тренутног еластичног дела деформације фигурише и део деформације као последица релаксације напона (слика 4.1).

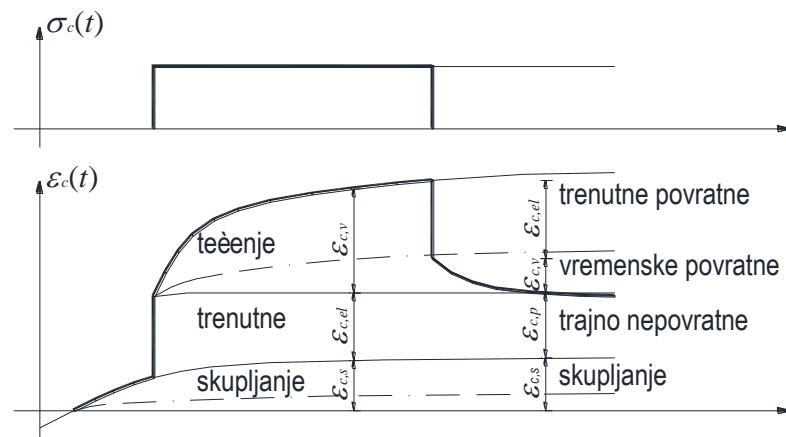
Течење бетона је веома сложена појава, па је сложена и математичка интерпретација тог проблема. Међутим, за проблеме у пракси, за које се узима да је област експлоатационих напона за бетон $\sigma_c \leq 0.4f_{ck}$, могу се применити одговарајућа упрошћења. То се у првом реду односи на линеарност између напрезања и дилатације. При томе се и проблем течења бетона за уобичајене примере у пракси може третирати у оквиру **линеарне теорије течења**.

Ова теорија полази од одређених претпоставки (хипотеза) [71]:

- Бетон се третира као хомоген и изотропан материјал;
- Тренутна еластична деформација бетона је пропорционална напонима и зависи од старости бетона при оптерећењу (променљив модул еластичности);
- Деформација течења бетона је линеарно зависна од дуготрајног деловања напона;
- На деформације течења може се применити *Boltzman*-ов принцип суперпозиције.



Сл. 4.1 – Веза напон-деформација у оквиру линеарне теорије течења
 Fig. 4.1 – Stress-strain connection within the linear creep theory



Сл. 4.2. – Деформације бетона у току времена
 Fig. 4.2. – Concrete strains over time

Под деловањем дуготрајног оптерећења на бетон јављају се тренутне еластичне деформације и деформације зависне од времена – вискозне деформације (слика 4.2, РВАВ '87). Ове вискозне деформације се могу поделити на деформације зависне од оптерећења (течење) и деформације независне од оптерећења (скупљање).

Као последица исушивања цементног гела настају временски зависне деформације. Скупљање бетона је последица директног

испаривања воде без доприноса оптерећења. Течење бетона је последица истискивања и испаривања воде из пора цементног гела под утицајем дуготрајног деловања оптерећења [15].

При растерећењу бетона прво се јављају еластичне повратне деформације, које су нешто мање од почетних при оптерећењу услед повећања модула еластичности бетона. Даље се кроз време развијају повратне деформације течења (релаксација), док један део деформација бива трајно неповратан.

Скупљање бетона се може посматрати као допринос три компоненте [15]:

- 1) Скупљање услед контракције продукта хидратације (хидратационо скупљање), утиче на напонска и деформациона стања конструкције;
- 2) Скупљање услед испаривања воде током периода везивања цемента (пластично скупљање), није од значаја за напонска стања конструкције;
- 3) Скупљање након завршетка процеса везивања (хидраулично скупљање), одвија се све док се не успостави равнотежа између влажности бетона и влажности средине, утиче на напонска и деформациона стања конструкције.

Течење бетона се у последње време може посматрати кроз две компоненте [15]:

- 1) основно (базично) течење,
- 2) течење услед исушивања.

Скупљање и течење бетона је физичко-хемијски сложен процес. Деформације од сушења могу имати коначне вредности док деформације течења могу трајати и преко 30 година. Ни до дан данас нису употпуности разјашњени сви хемијски, физички и механички процеси у бетону и деформације као последица тих процеса. Нарочито је важно наставити истраживања код бетона високих чврстоћа. Деформације течења бетона су мање уколико се бетон касније оптерети и ако се дуже одржава у влажној средини.

Скупљање и течење бетона зависе од учешћа цементног камена у макроструктури бетона, те од микроструктуре самог цементног камена. Параметри који утичу на реолошке особине очврслог бетона су:

- врста и количина цемента,
- водоцементни фактор,
- гранулометријски састав агрегата,
- услови средине (температура, влажност),
- начин уграђивања и неге бетона,
- димензије бетонских елемената и др.

За анализу укупних деформација бетона, као што је поменуто, изостављају се пластичне деформације од краткотрајног оптерећења, јер би се изашло из оквира радних напона ($\sigma_c \leq 0.4f_{ck}$) и линеарне вискоеластичности за бетон. Такође се из анализа изостављају деформације од промене температуре које иначе спадају у краткотрајне еластичне деформације и које су напонски независне.

За модул еластичности бетона узима се секантни модул за тачку у којој се крива ($\sigma_c - \varepsilon_c$) може апроксимирати правом линијом. Та тачка је уствари вредност напона $\sigma_c = 0.4f_{ck}$. Почетни модул еластичности је нагиб тангенте на криву у координатном почетку и већи је за око 10% од секантног модула. Модул еластичности мења се услед старости бетона (слика 4.3) и зависи од класе (чврстоће) бетона.

У оквиру линеарне теорије течења, укупна деформација бетона $\varepsilon_c(t)$ у времену t линеарно је зависна од напона σ_c (слика 4.3) и износи [15,17]:

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_c \cdot \phi(t, \tau) \quad (4.1)$$

где је $\phi(t, \tau)$ функција течења бетона и представља укупну деформацију у тренутку времена t при константном јединичном напону $\sigma_c = 1$ који делује од тренутка $t = \tau$.

Облик функције течења зависи од својстава бетона. Ако се за бетон узму својства линеарно еластичног материјала и ако је пресек изложен дејству напона онда укупна деформација бетона $\varepsilon_c(t)$ у времену t линеарно је зависна само од напона $\sigma_c(t)$ у тренутку t и износи:

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_c(t) \cdot \phi \quad (4.2)$$

где ϕ представља меру еластичности бетона и инверзна је вредност модула еластичности бетона E_c .

У општем случају, у оквиру линеарне теорије течења, када се за бетон узму својства вискоеластичног материјала, укупна деформација бетона

$\varepsilon_c(t)$ у времену t линеарно је зависна од напона $\sigma_c(t)$ (слика 4.3) и износи:

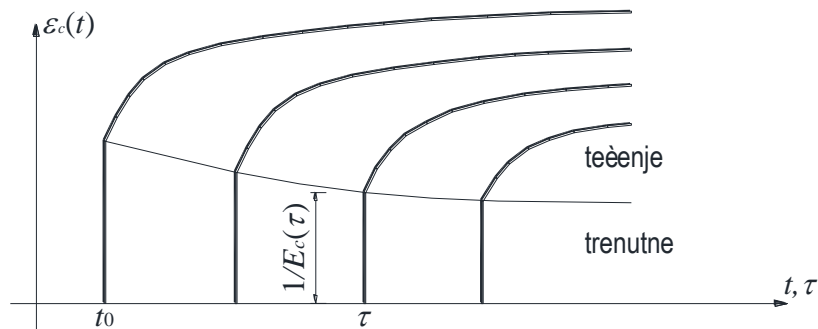
$$\varepsilon_c(t) = \sigma_c(t) \cdot \phi(t, \tau) = \frac{\sigma_c(t)}{E_c(t)} \quad (4.3)$$

Ако је бетонски пресек изложен дејству променљивог напона, као континуалне функције у интервалу времена од t_0 до t , тада се, на основу претпоставке о суперпозицији деформација, за укупне деформације може писати [45]:

$$\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{cn}(t) = \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) \cdot d\sigma(\tau) ; t \geq t_0 \quad (4.4)$$

где је $\varepsilon_{cn}(t)$ деформација бетона у тренутку t независна од напона, нпр. скупљање или термичка деформација.

Овакву везу између напона и деформација за бетон поставили су Маслов и Мак Хенри, математички је формулисао Болцман, а уопштио Волтера (Volterra). То је интегро-диференцијална једначина у којој је непозната функција $\sigma_c(\tau)$ за $\tau = t_0, \dots, t$ и представља Стиелтјесов интеграл који дозвољава прекиде првог реда за напонску функцију $\sigma_c(\tau)$.



Сл. 4.3 – Деформације бетона у току времена

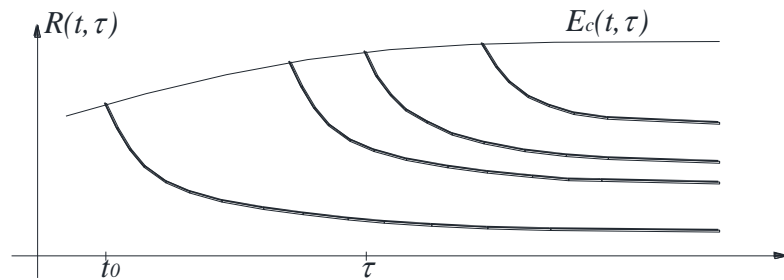
Fig. 4.3 – Concrete strains over time

Алтернативни облик интегро-диференцијалне једначине код које су непознате деформације бетона има облик:

$$\sigma_c(t) = \int_{t_0}^t R(t, \tau) \cdot d[\varepsilon_c(\tau) - \varepsilon_{cn}(\tau)] ; t \geq t_0 \quad (4.5)$$

где је $R(t, \tau)$ функција релаксације, која према дефиницији представља вредност напона у тренутку t изазван деловањем константне јединичне деформације од тренутка τ .

Функције релаксације $R(t, \tau)$ за $\tau = const.$ су монотono опадајуће и асимптотски се приближавају граничној вредности када $t \rightarrow \infty$ и увек су позитивне (слика 4.4).



Сл. 4.4 – Функција релаксације $R(t, \tau)$ за $\tau = const.$

Fig. 4.4 – Function of relaxation $R(t, \tau)$ for $\tau = const.$

За даљу анализу узето је да се деформација бетона $\varepsilon_{cn}(t)$ односи на скупљање бетона у току времена. Као што је речено, скупљање је временска деформација независна од оптерећења (напона). Разлика између скупљања и течења исушивањем је управо у томе да се за скупљање може узети да се одвија и без оптерећења. У условима влажења бетона сушење, као и течење исушивањем, су делимично повратне деформације. Коначне мере скупљања се могу посматрати за бетон старости око једне године. На скупљање највећи утицај имају климатски услови околине, димензије бетонског тела, састав бетона и карактеристике појединих компоненти бетона.

Као што је наведено, линеарно понашање бетона и за еластичне и за вискозне деформације се узима до границе $\sigma_c \leq 0.4f_{ck}$, што представља границу за експлоатационе напоне бетона у пракси. При већим напрезањима понашање бетона је нелинеарно и излази из оквира овог рада. За бетон је даље карактеристично да има особине материјала који стари. То је уствари промена механичких својстава бетона у зависности од времена његовог настанка.

Облик функције течења бетона $\phi(t, \tau)$ диктира тачност резултата прорачуна. За математичку формулацију и физикално објашњење својстава бетона користе се различити модели који описују реологију бетона [49]. Најједноставнији модели који описују понашање вискоеластичног материјала су Максвелов (Maxwell) и Келвинов (Kelvin) модел и могу само апроксимативно да опишу то понашање. Максвелов модел састоји се од еластичне опруге (Хук - Hook) и вискозног елемента (Њутн - Newton) серијски спојених, док Келвинов модел чине ови

елементи спојени паралелном везом. Комбинацијом се ови модели даље побољшавају како би се што реалније обихватиле временске деформације бетона.

Познате су различите теорије течења бетона и аналитички модели за функцију течења бетона. Ови математички модели су углавном дефинисани применом [49]:

- Интегралне/диференцијалне везе између напона и деформација (**интегралне методе**),
- Алгебарске везе напон-деформација (**алгебарске методе**).

Најчешће се ради о следећим теоријама течења бетона, односно математичким моделима за функцију течења:

- Теорија наслеђа (диференцијална веза);
- Теорија старења (Дишингер - диференцијална веза);
- Побољшана теорија старења (диференцијална веза);
- Болцманов принцип суперпозиције (интегрална веза);
- Илстон-Џорданова веза (интегрална веза);
- Наследна теорија старења (експоненцијални облик);
- Предлог проф. Милана Ђурића (алгебарска веза);
- Решење по Ришу и Јингвирту (диференцијална веза);
- Предлог Троста;
- Израз по Улицком;
- Предлог проф. Ивковића;
- Бажантова метода (ефективни модул старења);
- Општи облик инкременталне везе (Фолић и Татомировић).

Израз (4.4) је општи облик инкременталне везе заснован на поступку развијеном од стране Фолића и Татомировића [45] и даље ће се у овом раду примењивати. Функција течења бетона је дефинисана на следећи начин:

$$\phi(t, \tau) = \frac{1 + \varphi(t, \tau)}{E_c(\tau)} \quad (4.6)$$

где је $\varphi(t, \tau)$ коефицијент течења бетона који се најчешће даје у техничким прописима појединих земаља [28].

Решење интегралне једначине (4.4) у затвореном облику је скоро немогуће због чега се користи нумеричка интеграција. У ту сврху укупан интервал времена ($\Delta t = t - t_0$) се дели на подинтервале ($\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$)

у којима се sukcesивно спроводи прорачун [45,116]. Почетни тренутак времена је t_0 и представља референтну старост бетона, а t_k је текући (коначни) тренутак времена у којем се спроводи прорачун. Низови међутренутака се могу генерисати у складу са жељеном тачношћу и променама које прате историју бетона. При томе се скоковите промене напона обухватају фиктивним (нултим) интервалима ($\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = 0$) чиме се постиже генерализација прорачунског модела.

За решење интеграла користи се нумеричка интеграција и то најчешће као:

- Правоугаono правило (sукcesивна примена методе ефективног модула – EM);
- Трапезно правило (sукcesивна примена методе средњег модула деформација – MD);
- Тангентно правило (метода средње тачке или метода средњег правоугаоника);
- Прво Симпсоново правило;
- Сукcesивна примена методе средњег напона – MC;
- Сукcesивна примена AAEM методе.

У циљу поједностављења прорачуна и примене у свакодневной инжењерској пракси тежило се алгебарским облицима везе напон-деформација за бетон као трансформисаних облика интегралних и диференцијалних веза. Такође се код ових прорачуна обично усваја да нема промене геометријских величина у спрегнутим пресецима и прорачун се спроводи у једном кораку.

Најпознатије алгебарске везе између напона и деформација за вискоеластични бетон су [21]:

- Метода фиктивног модула еластичности (EM-метода),
- Метода средњег напона (MC-метода),
- Модификована метода фиктивног модула еластичности (AAEM-метода).

Метода фиктивног модула еластичности (EM-метода) је најстарији и најједноставнији облик алгебарске везе (Faber 1927, Fritz 1950), код које се утицај течења уводи преко фиктивног модула еластичности добијеног као реципрочна вредност функције течења бетона:

$$\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{cn}(t) = \sigma_c(t) \cdot \phi(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t)}{E_{c,ef}(t, t_0)} \quad (4.7)$$

где је фиктивни модул аластичности:

$$E_{c,ef}(t, t_0) = \frac{1}{\phi(t, t_0)} = \frac{E_c(t, t_0)}{1 + \varphi(t, t_0)} \quad (4.8)$$

Према овој методи деформација бетона зависи само од тренутне вредности напона где се не узима у обзир утицај претходне историје напона. То је уствари решење интегралне везе применом само једног корака правоуганог правила нумеричке интеграције. Примена ове методе је ограничена на пресеке који трпе мале промене напона (до 30%) током времена и који раде у фази без прслина у бетону (фаза I). Овом методом су деформације течења прецењене код пораста напона, а потцењене када напони опадају. При комплетном растеређењу бетона деформације су потпуно реверзибилне.

Метода средњег напона (МС-метода) (Ђурић 1963, Улицкиј 1967) је уствари решење интегралне везе применом само једног корака трапезног правила нумеричке интеграције:

$$\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{cn}(t) = \sigma_c(t_0) \cdot \phi(t, t_0) + \frac{1}{2}(\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)) \cdot (\phi(t, t_0) + \phi(t, t)) \quad (4.9)$$

Уколико се усвоји претпоставка о константном модулу еластичности бетона алгебарска веза добија облик идентичан оном код класичне теорије старења:

$$\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{cn}(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot (1 + \varphi(t, t_0)) + \frac{\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot \left(\frac{1 + \varphi(t, t_0)}{2} \right) \quad (4.10)$$

Примена ове методе је ограничена на пресеке који током времена трпе мале промене напона (до 30%). Нема задовољавајућу тачност код релаксације јер потцењује вредности коначних напона. За веће вредности коефицијента течења и дужем временском периоду деловања напона добијају се негативне вредности напона у бетонском пресеку. Међутим, задовољавајући резултати се могу добити применом поступка са поделом посматраног времена на више подинтервала у којима се сукцесивно спроводи прорачун.

Модификована метода фиктивног модула еластичности (ААЕМ-метода) (Трост 1967, Бажант 1972) подразумева следећи облик везе напон-деформација:

$$\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{cn}(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot (1 + \varphi(t, t_0)) + \frac{\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot (1 + \chi(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)) \quad (4.11)$$

где је $\chi(t, t_0)$ коефицијент старења бетона који коригује ефекат течења бетона услед промене напона у интервалу времена од t_0 до t , па отуда потиче и сам назив ове методе.

Постоје обимне информације у литератури о вредностима коефицијента старења зависно од усвојених облика функције течења бетона. За одређивање вредности коефицијента старења потребно је познавати вредности функције релаксације које се обично одређују нумеричким решавањем интегралне једначине на основу усвојене функције течења.

За уобичајене коначне вредности коефицијента течења, које су у границама $\varphi(t, t_0) = 1.5 - 3.0$, коначне вредности коефицијента старења се крећу у границама $\chi(t, t_0) = 0.75 - 0.85$ (ПБАБ '87).

Алгебарске везе између напона и деформација дате претходним изразима јасно разграничавају два дела деформација. Први део су деформације од константног напона $\sigma_c(t_0)$ у почетном тренутку t_0 , а други део су деформације од промене напона $\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)$ у посматраном интервалу времена $(t - t_0)$.

Задовољавајући резултати се могу добити применом поступка са поделом посматраног времена на више подинтервала у којима се сукцесивно спроводи прорачун. Када се успоставе везе преко прираштаја напона и деформација добијају се инкрементални облици алгебарских веза који су погодни за матричну анализу и примену рачунара.

Укупни напони и деформације у неком тренутку времена t се добијају суперпозицијом вредности за сва независна дејства до тог тренутка времена.

Може се рећи да је предлог *Перишића* и *Паквора* [90] представља специјалан случај генералисаног инкременталног облика где се посматрају два дискретна интервала времена, а обухваћени су и испрски и неиспрски пресеци АБ елемената. Овим проблемима се бавио и *Гали (Ghali)*, а обухваћени су АБ, преднапрегнути и спрегнути испрски и неиспрски пресеци. Генералисани инкрементални облик детаљно је обрађен у раду *Татомировића* на спрегнутим

елементима од бетона различите старости [116] и Поповића на примерима АБ и парцијално преднапрегнутих елемената.

У општем случају за усвојене претпоставке линеарне теорије течења, веза између напона и деформација за бетон у току времена се може представити у основном интегралном облику [45,116]:

$$\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{cn}(t) = \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) \cdot d\sigma(\tau) ; t \geq t_0 \quad (4.12)$$

Решење претходне једначине у затвореном облику није могуће чак ни за једноставне проблеме у пракси, имајући у виду законе течења који реално описују стварно понашање бетона. Међутим, нумеричка интеграција и свођење проблема на систем алгебарских једначина, те употреба израза у матричном облику и програмирање на рачунарима, пружа широке могућности изналажења решења уз варијације различитих параметара. Геометријска интерпретација решења интегралне једначине (4.12) је приказана у [43].

У општем случају интегралне везе између напона и деформација, где се укупан интервал времена ($\Delta t = t - t_0$) дели на подинтервале ($\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i=1,2,\dots,k$), претходни израз (4.12) се може писати као сума подинтеграла:

$$\varepsilon_c(t_k) - \varepsilon_{cn}(t_k) = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi(t_k, \tau) \cdot d\sigma_c(\tau) \quad (4.13)$$

Подинтегрални у претходном изразу се решавају применом неког од поменутих поступака нумеричке интеграције, нпр. правоугаоног правила (сукцесивна примена ЕМ-методе), трапезног правила (сукцесивна примена МС-методе), тангентног правила (метода средње тачке), првог Симпсоновог правила итд.

Уколико се као најједноставне примени правоугаоно правило нумеричке интеграције, где се уводе коначне вредности, израз (4.13) добија облик:

$$\varepsilon_c(t_k) - \varepsilon_{cn}(t_k) = \sum_{i=1}^k \phi(t_k, t_{i-1}) \cdot \Delta\sigma_c(t_i) \quad (4.14)$$

Имајући у виду претходно изнето напон у тренутку t_k је изражен као збир напона из свих претходних подинтервала времена Δt_i , ($i=1,2,\dots,k$):

$$\sigma_c(t_k) = \sum_{i=1}^k \Delta\sigma_c(t_i) \quad (4.15)$$

где је $\Delta\sigma_c(t_i)$ промена напона у бетону у подинтервалу времена $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, ($i=1,2,\dots,k$), тј.:

$$\Delta\sigma_c(t_i) = \sigma_c(t_i) - \sigma_c(t_{i-1}) \quad (4.16)$$

Увођењем смене за функцију течења у виду реципрочне вредности фиктивног модула деформације, у складу са примењеним поступком нумеричке интеграције, веза напон деформација за бетон се може изразити у приступачнијем општем облику:

$$\varepsilon_c(t_k) - \varepsilon_{cn}(t_k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{E_{c(k,i-1)}} \Delta\sigma_c(t_i) \quad (4.17)$$

где фиктивни модул деформације $E_{c(k,i-1)}$ зависи од примењеног поступка нумеричке интеграције за усвојену функцију течења бетона.

Претходна једначина се може директно користити за задату историју напона, чиме се срачунава деформација за текући k -ти тренутак времена. Међутим, при одређивању напонског одговора, за познату историју деформације, неопходно је издвојити последњи члан из суме напона и формирати одговарајуће изразе [43]:

$$\varepsilon_c(t_k) - \varepsilon_{cn}(t_k) = \frac{1}{E_{c(k,k-1)}} \Delta\sigma_c(t_k) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{E_{c(k,i-1)}} \Delta\sigma_c(t_i) \quad (4.18)$$

$$\Delta\sigma_c(t_k) = E_{c(k,k-1)} \cdot [\varepsilon_c(t_k) - \varepsilon_{cn}(t_k)] - E_{c(k,k-1)} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{E_{c(k,i-1)}} \Delta\sigma_c(t_i) \quad (4.19)$$

Из претходног израза је уочљиво да је за срачунавање промене напона у текућем k -том интервалу времена (Δt_k) неопходно срачунати све промене напона које претходе том интервалу, тј. примењује се поступак корак по корак (*step-by-step*).

Када се пређе на прираштај деформације за текући k -ти интервал времена (Δt_k), потребно је формирати разлику деформација за тренутке t_k и t_{k-1} чиме се уз одговарајуће смене добија:

$$\Delta\varepsilon_c(t_k) - \Delta\varepsilon_{cn}(t_k) = \frac{1}{E_{c(k,k-1)}} \Delta\sigma_c(t_k) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{E_{c(k,i-1)}^*} \Delta\sigma_c(t_i) \quad (4.20)$$

$$\Delta\varepsilon_c(t_k) = \frac{1}{E_{c(k,k-1)}} \cdot \Delta\sigma_c(t_k) + \Delta\varepsilon_c^*(t_k) \quad (4.21)$$

где је $\Delta \varepsilon_c^*(t_k)$ слободна деформација бетона и дата је изразом:

$$\Delta \varepsilon_c^*(t_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{E_{c(k,i-1)}^*} \cdot \Delta \sigma_c(t_i) + \Delta \varepsilon_{cn}(t_k) \quad (4.22)$$

$E_{c(k,k-1)}$ представља генерализани, а $E_{c(k,i-1)}^*$ је изведени фиктивни модул деформације бетона који зависе од примењеног типа нумеричке интеграције за усвојену функцију течења бетона. Ови модули су у међусобном односу према следећем изразу:

$$\frac{1}{E_{c(k,i-1)}^*} = \frac{1}{E_{c(k,i-1)}} - \frac{1}{E_{c(k-1,i-1)}} \quad (4.23)$$

У претходним изразима је:

- $\Delta \varepsilon_c(t_k)$ прираштај деформације у текућем k -том интервалу времена (Δt_k),
- $\Delta \varepsilon_{cn}(t_k)$ прираштај деформације скупљања у текућем k -том интервалу времена (Δt_k),
- $\Delta \sigma_c(t_i)$ прираштај напона у бетону за i -ти интервал времена (Δt_i) ($i = 1, 2, \dots, k-1$).

Једначина (4.21) представља јединствен генерализани облик везе напон-деформација за бетон, јер се могу применити сви познати облици везе укључујући и ААЕМ-методу (*Age-adjusted effective modulus method*) [116]. Овим је, независно од броја подинтервала, обједињен ток прорачуна у фиктивним и коначним интервалима за произвољну историју спољашњих утицаја. Тачнији прорачуни захтевају већи број подинтервала и примену рачунара. Међутим, за једноставније историје оптерећења, уз сукцесивну примену ААЕМ-методе, могу се постићи резултати задовољавајуће тачности и са минималним бројем подинтервала.

Применом израза (4.21) текући коначни интервали времена се обухватају пуним рекурзивним изразом, а у фиктивном интервалу одговарајући модул се своди на модул еластичности и слободне деформације бетона су тада једнаке нули. Овај облик је уствари познати облик везе напон-деформација за еластично стање (*Hook-ова једначина*).

Изразом (4.22) дата је промена слободне деформације бетона, у текућем k -том нтервалу, од претходне историје напона до посматраног

интервала (без утицаја k -тог дела историје напона) и са прираштајем деформације скупљања само у текућем k -том интервалу.

За срачунавање промене напона у посматраном интервалу времена неопходно је познавати све промене напона које претходе том интервалу. Овим се до коначног решења долази корак по корак (*step-by-step*).

4.2. Веза напон-деформација за преднапрегнути челик

Чиста (својствена) релаксација преднапрегнутог челика (ПЧ) се може дефинисати као пад почетног напона затезања у одређеном периоду времена при константној деформацији. Релаксација првенствено зависи од врсте примењеног високовредног челика, почетних напона затезања и температуре околне средине.

За пад напона у ПЧ након 1000 часова у прорачунима могу да се усвоје или вредности дате у сертификату или вредности дате прописима. Обично се ради о три различите класе релаксације челика (EC2) [28]:

- 1) класа 1: жице или ужад – каблови са обичном релаксацијом
- 2) класа 2: жице или ужад – каблови са ниском релаксацијом
- 3) класа 3: вруће ваљане и накнадно обрађене шипке

Класа 1 има највећу вредност релаксације и износи 8% од почетног напона ($0.7f_p$), док је за класу 2 та вредност 2.5%, а за класу 3 вредност релаксације је 4% од почетног напона. Коначне вредности пада напона услед релаксације могу бити и до три пута веће од пада напона при 1000 часова. Пад напона током времена дефинисан је одговарајућим изразима за поједине класе челика .

Према МС90 [12], ПЧ се према карактеристикама релаксације такође дели на три класе, слично моделу EC2. Вредности чисте релаксације при 1000 часова (изворна ознака ρ_{1000}), према овом моделу, представљене су графички са три криве у функцији параметра $\lambda = \sigma_{p0} / f_{pk}$ (за $\lambda = 0.6, 0.7, 0.8$).

Општи облик израза за промену напона ПЧ услед својствене релаксације $\Delta\sigma_{pr}(t)$ у периоду времена ($\Delta t = t - t_0$) се може приказати у облику производа две независне функције, којима је раздвојен утицај величине почетних напона на коначну вредност својствене релаксације

$f_1(\sigma_p(t_0))$ и промене те релаксације зависно од протеклог временског периода $f_2(t-t_0)$:

$$\Delta\sigma_{pr}(t, t_0) = f_1(\sigma_p(t_0)) \cdot f_2(t-t_0) \quad (4.24)$$

Овакви изрази су погодни за примену у склопу општих нумеричких модела. Функције $f_1(\sigma_p(t_0))$ и $f_2(t-t_0)$ су детаљно обрађене у раду [116].

Својствена (чиста) релаксације ПЧ се одвија у условима константне деформације. Међутим, у експлоатационим условима, гдје је ПЧ спрегнут са другим деловима пресека, деформације се током времена мењају, најчешће услед скупљања и течења бетона, промене оптерећења или измене геометрије спрегнутог пресека. Релаксација ПЧ се у оваквим условима одвија при променљивим вредностима напона и деформација. Ови проблеми захтевају примену везе напон-деформација у инкременталном облику чиме се са довољном тачношћу могу решавати уобичајени примери из праксе.

О проблему релаксације ПЧ и математичкој формулацији модела за анализу детаљно је дато у [116]. Овде се даје само краћи део и то онај који је довољан за анализу проблема у пракси и за моделирање у оквиру формирања алгоритма прорачуна напонско-деформационог стања спрегнуто-преднапрегнутих пресека.

Напон у тренутку t у ПЧ, затегнутом у тренутку времена t_0 и одржаваном у условима константне деформације $\varepsilon_p(t) = \varepsilon_p(t_0)$, једнак је збиру почетне вредности за t_0 и својствене (чисте) релаксације за интервал $\Delta t = t - t_0$:

$$\sigma_p(t) = \sigma_p(t_0) + \Delta\sigma_{pr}(t) \quad (4.25)$$

Промена напона у условима непроменљиве деформације у посматраном интервалу времена ($\Delta t = t - t_0$) је:

$$\Delta\sigma_p(t) = \sigma_p(t) - \sigma_p(t_0) = \Delta\sigma_{pr}(t) \quad (4.26)$$

Промена напона у ПЧ је уствари само промена напона од чисте релаксације. Међутим, ПЧ који је спрегнут са осталим деловима пресека прати деформације посматраног носача које се током времена мењају ($\Delta\varepsilon_p(t, t_0) \neq 0$), те је промена напона у посматраном интервалу ($\Delta t = t - t_0$):

$$\Delta\sigma_p(t) = E_p \cdot \Delta\varepsilon_p(t) + \Delta\bar{\sigma}_{pr}(t) \quad (4.27)$$

где је $\Delta\bar{\sigma}_{pr}(t)$ промена напона услед релаксације при променљивој деформацији, односно редукована релаксација за $\varepsilon_p(t)/\varepsilon_p(t_0) < 1$.

Из претходног израза може се одредити износ редуковане релаксације само у случају познате историје деформација. Како у конкретним случајевима историја деформација није позната, то се редукована релаксација мора претпоставити и тачније решење изналазити итеративним путем.

Укупна деформација и укупни напон на крају интервала се добијају суперпозицијом почетне вредности и промене стања у посматраном интервалу:

$$\varepsilon_p(t) = \varepsilon_p(t_0) + \Delta\varepsilon_p(t) \quad (4.28)$$

$$\sigma_p(t) = \sigma_p(t_0) + \Delta\sigma_p(t) \quad (4.29)$$

У општем случају инкременталне анализе, где се укупан интервал времена $(t - t_0)$ дели на подинтервале $(\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = 1, 2, \dots, k)$ у којима се сукцесивно спроводи прорачун, укупна релаксација на крају текућег интервала једнака је збиру релаксације до посматраног интервала и промене релаксације у текућем интервалу. Овим се уствари прорачун спроводи поступком корак по корак (*step-by-step*).

У општем случају генералисани облик инкременталне везе за ПЧ за текући k -ти интервал времена $(\Delta t_k = t_k - t_{k-1})$ је:

$$\Delta\sigma_p(t_k) = E_p \cdot \Delta\varepsilon_p(t_k) + \Delta\bar{\sigma}_{pr}(t_k) \quad (4.30)$$

где је $\Delta\bar{\sigma}_{pr}(t_k)$ редукована релаксација, која се добија корекцијом вредности својствене релаксације услед променљиве деформације.

Прираштај редуковане релаксације се може приказати у облику производа две независне функције, као што је раније поменуто. Прва функција уводи утицај коригованог напона за дискретне тренутке посматраног интервала, а друга промену редуковане релаксације у протеклом периоду времена. Упрошћени инкрементални облик редуковане релаксације је:

$$\bar{\sigma}_{pr}(t_k) = f_1 \bar{\sigma}_{pr}(t_k) \cdot f_2(t_k - t_0) - f_1 \bar{\sigma}_{pr}(t_{k-1}) \cdot f_2(t_{k-1} - t_0) \quad (4.31)$$

Кориговани напони за дискретне тренутке посматраних интервала су:

$$\bar{\sigma}_p(t_{k-1}) = \sigma_p(t_{k-1}) - \Delta\bar{\sigma}_{pr}(t_{k-1}) = E_p \cdot \varepsilon_p(t_{k-1}) \quad (4.32)$$

$$\bar{\sigma}_p(t_k) = \sigma_p(t_k) - \Delta\bar{\sigma}_{pr}(t_k) = E_p \cdot \varepsilon_p(t_k) \quad (4.33)$$

При одређивању инкременталне релаксације, све величине су познате из претходних корака прорачуна, једино је непознат кориговани напон у текућем кораку прорачуна. Ово захтева примену итеративног поступка, али се за потребе у пракси могу увести одговарајућа поједностављења. Нпр. ако се претпостави да је кориговани напон у текућем интервалу времена константан, тада су све величине познате и нису потребне поменуте итерације.

Могу се увести и додатна упрошћења где се уместо редуковане користи својствена релаксација, и даље, где се уместо коригованог напона за претходни дискретни тренутак користи стварни напон, тј. када се занемари утицај релаксације на вредност почетног коригованог напона. Поред тога релаксација ПЧ се у прорачун може увести и преко упрошћене везе са редукованим модулом еластичности. Овај приближни поступак је на страни сигурности и примењује се у следећем облику [71]:

$$\Delta\sigma_p(t_k) = (1 - \rho_{p,k}) \cdot E_p \cdot \Delta\varepsilon_p(t_k) = E_{p,k}^* \cdot \Delta\varepsilon_p(t_k) \quad (4.34)$$

У горњем изразу фигурише редуковани модул еластичности $E_{p,k}^*$:

$$E_{p,k}^* = (1 - \rho_{p,k}) \cdot E_p \quad (4.35)$$

где је $\rho_{p,k}$ фактор релаксације који се најчешће даје у техничким прописима појединих земаља. То је вредност чисте релаксације за одговарајући ПЧ и обично се креће у границама 0.025-0.08 за време након 1000 часова и температуру 20°C.

Код дисконтинуалних промена уводе се фиктивни (нулти) интервали времена, а инкрементална релаксација је тада једнака нули. Ово не захтева никакве промене генерализаног израза (4.30) што је погодно када се користе рачунари и матрични облици израза.

4.3. Веза напон-деформација за конструкциони и бетонски челик

За челични део спрегнутог пресека – конструкциони челик (КЧ) уобичајено је да се усвоји линеарна веза напон-деформација према Хуковом (*Hook*) закону за све подинтервале времена, јер је за експлоатационе напоне течење КЧ занемарљиво:

$$\Delta\sigma_a(t_k) = E_a \cdot \Delta\varepsilon_a(t_k) \quad (4.36)$$

Такође и за бетонски челик, тј. незатегнути меки челик (мека арматура) (МЧ) претпоставља се линеарна веза у складу са претходном једначином:

$$\Delta\sigma_s(t_k) = E_s \cdot \Delta\varepsilon_s(t_k) \quad (4.37)$$

У даљем тексту користе се матрични облици израза којима је успостављена веза напон-деформација за поједине материјале увођењем компонентних деформација $\Delta\varepsilon_r$ и $\Delta\kappa$ и напона $\Delta\alpha_r$ и $\Delta\beta$ [18].

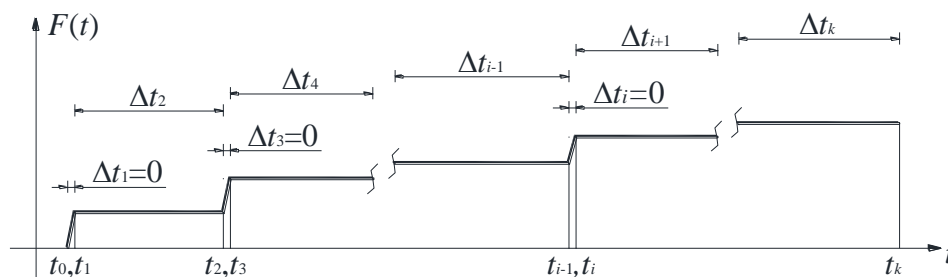
5. ПОГЛАВЉЕ

НАПОНИ И ДЕФОРМАЦИЈЕ У СПРЕГНУТОМ ПРЕСЕКУ

5.1. Дискретизација времена

Уопштено, дискретизација времена треба да прати све генерализане промене $F(t)$ код посматраног спрегнутог пресека и да се у складу са тим променама формирају прорачунски временски интервали Δt_i . На тај начин се формира низ дискретних тренутака времена $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_k$ у којима се прорачуном одређује стање напона и деформација у актуелном спрегнутом пресеку [45].

Све скоковите промене се обухватају фиктивним интервалима, тј. интервалима времена нулте вредности ($\Delta t_i = 0$). Ту се одвијају уствари све тренутне/еластичне промене у спрегнутом пресеку у складу са Хуковим законом. Временске/вискозне промене се обухватају интервалима времена коначне дужине ($\Delta t_i \neq 0$). При томе се подразумева да се реологија бетона (скупљање и течења) уводи у складу са линеарном теоријом течења, а релаксација преднапрегнутог челика (ПЧ) у оквирима приказаног линеарног модела (слика 5.1).



Сл. 5.1 – Дискретизација времена

Fig. 5.1 – Discretization of time

Потребно је нагласити да решавање интегралне једначине (4.12) нумеричком интеграцијом захтева да се укупно време подели на одговарајуће подинтервале у којима се sukcesивно спроводи прорачун. За решавање практичних проблема погодно је узети само неопходан број интервала и применити неку од алгебарских веза напон-деформација за бетон (нпр. sukcesивна примена ААЕМ методе) [18].

У складу са свим променама које прате посматрани спрегнути пресек укупан интервал времена $(t-t_0)$ се дели на подинтервале $(\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i=1,2,\dots,k)$ у којима се sukcesивно спроводи прорачун. Почетни тренутак времена t_0 одговара најстаријем елементу спрегнутог пресека и представља почетак његове активације (уобичајено челични носач), а t_k је текући тренутак времена у којем се спроводи прорачун. Подинтервали се могу генерисати у складу са жељеном тачношћу и променама које прате историју настајања/грађења носача укључујући промене оптерећења и све друге промене које су битне са аспекта напонско-деформационог стања у спрегнутом пресеку.

Све скоковите промене стања се обухватају фиктивним (нултим) интервалима $(\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = 0)$. То су тренуци промене геометрије спрегнутог пресека, када се нови део додаје постојећем пресеку или када се неки део искључује из напонске активности. Такође, свако додавање или уклањање оптерећења захтева увођење фиктивних интервала времена, јер су тиме изазване скоковите промене стања у посматраном спрегнутом пресеку. Кроз интервале времена коначне дужине уобичајено се анализира утицај реологије бетона и ПЧ. Овим се постиже генерализација поступка прорачуна где су фиктивни интервали само специјални случајеви општих (коначних) интервала времена.

Карактеристични тренуци времена за челични носач су уобичајено тренутак монтаже носача и прихватање сопствене тежине и тежине свеже бетонске масе, с тим што технологија извођења игра битну улогу (са или без подупирања). Остали тренуци су у складу са геометријским променама пресека, променама оптерећења и другим параметрима који доприносе неким променама у носачу.

Када је у питању бетонски део карактеристични тренуци времена су завршетак бетонирања и неговања, почетак скупљања, тренутак очвршћавања (напонске активације) и почетак течења бетона. Даља подела времена зависи од промене у смислу геометрије пресека, промене оптерећења и промене реолошких параметара бетона.

Код бетонског меког челика (МЧ) карактеристичан је тренутак напонске активације бетона па тиме и саме арматуре која је чврсто везана са бетоном. Све даље промене утичу и на овај део спрегнутог пресека те се карактеристични тренуци за прорачун формирају у складу са тим променама.

За ПЧ је карактеристичан тренутак натезања каблова пре очврђавања бетона и тренутак спрезања са осталим делом носача. Код накнадног преднапрезања долази до поклапања тренутака натезања каблова и спрезања са осталим делом носача. Уведени ПЧ се надаље понаша у складу са спрегнутим носачем и сопственом релаксацијом, те се карактеристични тренуци за прорачун формирају у складу са тим променама.

Важно је да се за конкретан пример који се анализира формира јединствена временска скала и да се, за проблеме у пракси, уведу само неопходни тренуци времена, чиме се поступак прорачуна знатно скраћује, а резултати су сасвим задовољавајући. Дискретизација времена ће бити показана на конкретним примерима анализираним у поглављу 7.

5.2. Конститутивне једначине

Претпоставка је да се разматра један статички одређен носач са познатим димензијама попречног пресека, познатим оптерећењем и механичким карактеристикама материјала. Претпоставља се да су познати услови развоја скупљања и течења бетона, као и релаксације ПЧ. Такође се узима да су познати и сви други услови при грађењу/настајању спрегнутог носача.

У попречном пресеку спрегнутог елемента могу се поставити три групе једначина:

- 1) једначине равнотеже спољашњих и унутрашњих сила,
- 2) услови компатибилности деформација,
- 3) конститутивне релације напон-деформација за поједине материјале.

Претпоставља да важи *Bernoulli*-јева хипотеза равних пресека, односно линеарност расподеле деформација по висини попречног пресека. Линеарност деформација важи за цео пресек, с тим да скоковита промена укупних деформација може бити последица

неједновременог укључења појединих делова спрегнутог пресека у напонску активност (слика 5.2). То се најчешће дешава код фазног грађења/настајања спрегнутог елемента, нпр. када се бетонира плоча преко претходно постављених челичних носача без подупирања.

Дискретизација времена треба да прати све промене код спрегнутог пресека и да се у складу са тим променама формирају прорачунски интервали времена. Све скоковите промене се обухватају фиктивним интервалима, тј. интервалима времена нулте вредности. У њима се одвијају све тренутне/еластичне промене. Временске промене се обухватају интервалима времена коначне дужине у којима се уводе реолошки утицаји услед скупљања и течења бетона и релаксације ПЧ.

5.2.1. Конститутивне релације напон-деформација за поједине материјале

Веза напон-деформација за бетон (изведена раније) (4.21), написана у векторском облику са компонентним деформацијама $\Delta\varepsilon_r$ и $\Delta\kappa$ и напонима $\Delta\alpha_r$ и $\Delta\beta$, за референтну осу r и k -ти интервал времена је:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\alpha_r \\ \Delta\beta \end{Bmatrix}_{c,k} = E_{c(k,k-1)} \cdot \left(\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_r \\ \Delta\kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_r^* \\ \Delta\kappa^* \end{Bmatrix} \right)_{c,k} \quad (5.1)$$

Вектор промене слободних деформација, када се узме да је деформација скупљања једнака за све тачке по висини попречног пресека, има облик:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_r^* \\ \Delta\kappa^* \end{Bmatrix}_{c,k} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{E_{c(k,i-1)}^*} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\alpha_r \\ \Delta\beta \end{Bmatrix}_{c,i} + \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_n \\ 0 \end{Bmatrix}_{c,k} \quad (5.2)$$

где је $E_{c(k,i-1)}^*$ изведени фиктивни модул деформације бетона:

$$\frac{1}{E_{c(k,i-1)}^*} = \frac{1}{E_{c(k,i-1)}} - \frac{1}{E_{c(k-1,i-1)}} \quad (5.3)$$

а $E_{c(k,k-1)}$ је генерализани модул деформације бетона за текући k -ти интервал времена.

Веза напон-дилатација за преднапрегнути челик (ПЧ), као приближни поступак (изведена раније) (4.30), написана у векторском облику за референтну осу r и k -ти интервал времена је:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\alpha_r \\ \Delta\beta \end{Bmatrix}_{p,k} = E_p \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_r \\ \Delta\kappa \end{Bmatrix}_{p,k} + \begin{Bmatrix} \Delta\bar{\sigma}_{pr} \\ 0 \end{Bmatrix}_{p,k} \quad (5.4)$$

где је $\Delta\bar{\sigma}_{pr}$ редукована релаксација ПЧ и дата је изразом:

$$\Delta\bar{\sigma}_{pr,k} = -\rho_{p,k} \cdot E_p \cdot \Delta\varepsilon_{p,k} \quad (5.5)$$

а ρ_p је фактор релаксације који се најчешће даје у техничким прописима појединих земаља за одговарајући ПЧ и период времена након 1000 часова. То је обично вредност чисте релаксације за примењени ПЧ и тај фактор треба ускладити са одговарајућим прорачунским интервалом времена, па у прорачунском моделу добија индекс k и означава се као $\rho_{p,k}$.

Везе напон-деформација за челични део спрегнутог пресека – конструкциони челик (КЧ) и арматуру - меки бетонски челик (МЧ), (4.36) и (4.37), су у складу са Хуковим законом, те су за референтну осу r и k -ти интервал времена, написане у векторском облику:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\alpha_r \\ \Delta\beta \end{Bmatrix}_{a,k} = E_a \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_r \\ \Delta\kappa \end{Bmatrix}_{a,k} \quad (5.6)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta\alpha_r \\ \Delta\beta \end{Bmatrix}_{s,k} = E_s \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_r \\ \Delta\kappa \end{Bmatrix}_{s,k} \quad (5.7)$$

5.2.2. Услови компатибилности деформација

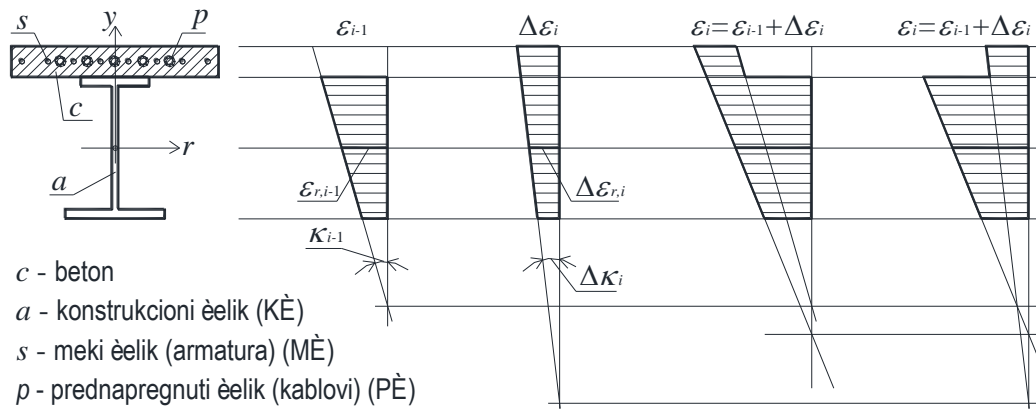
У складу са претходно изнетим, за инкрементални облик једначина, прираштај деформације је линеарна функција за све активне делове пресека (слика 5.2 – „круто“ спрезање), па у општем случају за референтну осу r и k -ти интервал времена важи једнакост:

$$\Delta\varepsilon_k = \Delta\varepsilon_{c,k} = \Delta\varepsilon_{a,k} = \Delta\varepsilon_{s,k} = \Delta\varepsilon_{p,k} = \Delta\varepsilon_{r,k} + \Delta\kappa_k \cdot y \quad (5.8)$$

где је:

- $\Delta\varepsilon_k$ прираштај дилатације посматраног влакна спрегнутог пресека за текући интервал времена,
- $\Delta\varepsilon_{r,k}$ прираштај дилатације у нивоу референтне осе r ($y=0$),
- $\Delta\kappa_k$ кривина пресека,
- y одстојање посматраног влакна од референтне осе r .

Скоковита промена дилатације за дискретни тренутак времена t_i , када се посматра укупни спрегнути пресек, је последица фазног извођења спрегнутог носача и различитог времена активације појединих слојева/делова у пресеку (слика 5.2).



Сл. 5.2 – Пресек и деформације спрегнутог носача

Fig. 5.2 – Cross-section and strains of composite girder

Сагласно линеарној расподели деформација и напони по висини попречног пресека су расподељени линеарно. Међутим, прираштај напона за сваки део спрегнутог пресека (c -бетон, a -КЧ, s -МЧ, p -ПЧ) се дефинише са посебним паром параметара $\Delta\alpha_{r,k}$ и $\Delta\beta_k$ у складу са конститутивним релацијама напон-деформација за поједине материјале.

5.2.3. Једначине равнотеже спољашњих и унутрашњих сила

За k -ти интервал времена и усвојену референтну осу r , у попречном пресеку могу се поставити два услова равнотеже спољашњих и унутрашњих сила, за суму сила у правцу подужне осе носача и за суму момената савијања око референтне осе:

$$\Delta N_{c,k} + \Delta N_{a,k} + \Delta N_{s,k} + \Delta N_{p,k} = \Delta N_k \quad (5.9)$$

$$\Delta M_{c,k} + \Delta M_{a,k} + \Delta M_{s,k} + \Delta M_{p,k} = \Delta M_k \quad (5.10)$$

или у векторском облику:

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{c,k} + \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{a,k} + \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{s,k} + \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{p,k} = \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_k \quad (5.11)$$

где су:

- $\Delta N_{m,k}$ прираштај унутрашњих сила као резултанте напона на површинама делова спрегнутог пресека ($m=c, a, s, p$) у правцу подужне осе носача,

- $\Delta M_{m,k}$ прираштај унутрашњих момената савијања које праве резултанте напона на површинама делова спрегнутог пресека ($m = c, a, s, p$) око референтне осе r ,
- ΔN_k прираштај спољашњих сила у правцу подужне осе носача,
- ΔM_k прираштај спољашњих момената савијања око референтне осе r .

5.3. Прорачунски модел

У складу са раније наведеним, у попречном пресеку спрегнутог носача могу се поставити три групе једначина:

- 1) једначине равнотеже спољашњих и унутрашњих сила,
- 2) услови компатибилности деформација,
- 3) конститутивне релације напон-деформација за поједине материјале.

На основу услова равнотеже и уведених прорачунских претпоставки, те сређивањем израза, веза између прираштаја деформације и прираштаја сила у спрегнутом пресеку за текући интервал времена Δt_k успостављена је преко матрице крутости:

$$[K]_k \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_k - \begin{Bmatrix} \Delta N^* \\ \Delta M^* \end{Bmatrix}_{c,k} - \begin{Bmatrix} \Delta N^* \\ \Delta M^* \end{Bmatrix}_{p,k} \quad (5.12)$$

Матрица крутости $[K]_k$ попречног пресека за k -ти интервал времена формира се као сума матрица крутости свих спрегнутих слојева (делова) у односу на усвојену референтну осу r :

$$[K]_k = [K]_{c,k} + [K]_a + [K]_s + [K]_p \quad (5.13)$$

или написана у следећем облику:

$$[K]_k = E_{c(k,k-1)} \cdot [D]_c + E_a \cdot [D]_a + E_s \cdot [D]_s + E_p \cdot [D]_p \quad (5.14)$$

где су матрице геометријских карактеристика појединих компоненти пресека облика:

$$[D]_m = \begin{bmatrix} A & S \\ S & I \end{bmatrix}_m ; m = c, a, s, p \quad (5.15)$$

и где су коефицијенти матрице A_m , S_m , и I_m површина, статички момент површине и момент инерције, респективно, појединих делова попречног пресека ($m = c, a, s, p$).

У складу са усвојеним претпоставкама и непроменљивом геометријом пресека током времена укупна матрица крутости је променљива само због промене генералисаног модула деформације бетона $E_{c(k,k-1)}$, док су остале компоненте у свим интервалима времена константне. Уколико се напонска активност појединих слојева пресека врши неједновремено, нпр. случај фазног грађења, онда је то додатни разлог за промену укупне матрице крутости тако формираног спрегнутог пресека.

Вектори промене фиктивних сила услед реолошких карактеристика бетона и ПЧ су:

$$\begin{Bmatrix} \Delta N^* \\ \Delta M^* \end{Bmatrix}_{c,k} = E_{c(k,k-1)} \cdot [D]_c \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix}_{c,k} \quad (5.16)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta N^* \\ \Delta M^* \end{Bmatrix}_{p,k} = \begin{Bmatrix} A \\ S \end{Bmatrix}_p \cdot \Delta \bar{\sigma}_{pr,k} \quad (5.17)$$

Из једначине (5.12) одређују се компоненте прираштаја деформација за текући интервал времена Δt_k :

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix}_k = [K]_k^{-1} \cdot \left(\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta N^* \\ \Delta M^* \end{Bmatrix}_c - \begin{Bmatrix} \Delta N^* \\ \Delta M^* \end{Bmatrix}_p \right)_k \quad (5.18)$$

Све дисконтинуалне промене се уводе преко фиктивних интервала времена и то су специјални случајеви где се изрази своде на стандардне еластичне облике веза:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix}_k = [K]_k^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_k \quad (5.19)$$

Континуалне промене се односе на временске деформације од скупљање и течење бетона и релаксације ПЧ и обухватају се кроз интервале времена коначне дужине:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix}_k = [K]_k^{-1} \cdot \left(\begin{Bmatrix} \Delta N^* \\ \Delta M^* \end{Bmatrix}_c - \begin{Bmatrix} \Delta N^* \\ \Delta M^* \end{Bmatrix}_p \right)_k \quad (5.20)$$

Ако се основна једначина за везу напон-деформација за бетон (5.1) напише у облику:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\alpha_r \\ \Delta\beta \end{Bmatrix}_{c,k} = E_{c(k,k-1)} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_r \\ \Delta\kappa \end{Bmatrix}_{c,k} - \begin{Bmatrix} \Delta\alpha_r^* \\ \Delta\beta^* \end{Bmatrix}_{c,k} \quad (5.21)$$

где је већ уведена смена:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\alpha_r^* \\ \Delta\beta^* \end{Bmatrix}_{c,k} = E_{c(k,k-1)} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_r^* \\ \Delta\kappa^* \end{Bmatrix}_{c,k} \quad (5.22)$$

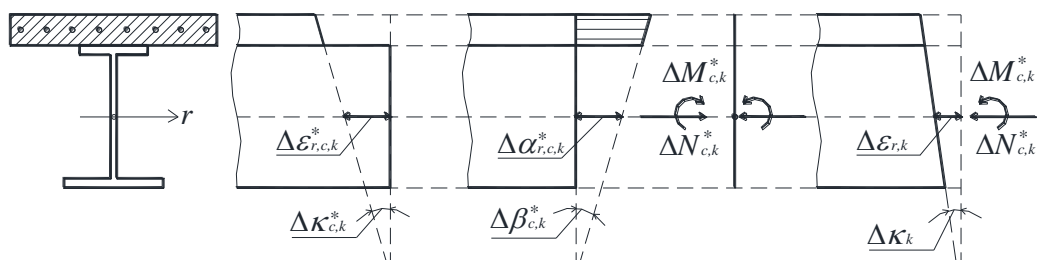
онда једначина (5.16) постаје:

$$\begin{Bmatrix} \Delta N^* \\ \Delta M^* \end{Bmatrix}_{c,k} = [D]_c \begin{Bmatrix} \Delta\alpha_r^* \\ \Delta\beta^* \end{Bmatrix}_{c,k} \quad (5.23)$$

Овакав поступак прорачуна, који је заснован на инкременталној анализи са применом тзв. релаксационе методе, развијен је у [51] и касније је коришћен у многим радовима.

Из претходног тока прорачуна и на основу **слике 5.3** може се објаснити физичка интерпретација појаве парова фиктивних сила $\Delta N_{c,k}^*$ и $\Delta M_{c,k}^*$ бетонског дела пресека [116].

Према дефиницији слободне деформације бетонског дела пресека су изазване скупљањем и течењем бетона, а не директним деловањем спољашњег оптерећења. Како су слободне деформације бетона привремено спречене услед фиктивних унутрашњих веза са челичним делом пресека, те уколико би се укинуле те везе развиле би се слободне деформације бетона $\Delta\varepsilon_{r,c,k}^*$ и $\Delta\kappa_{c,k}^*$ у посматраном интервалу времена Δt_k (**слика 5.3**).



Сл. 5.3 – Пресек и деформације спрегнутог носача
Fig. 5.3 – Cross-section and strains of composite girder

Међутим, како су слободне деформације бетона потпуно спречене услед унутрашњих веза, то доводи до прираштаја напона $\Delta\alpha_{r,c,k}^*$ и $\Delta\beta_{c,k}^*$ који својим деловањем поништавају те слободне деформације. Ови напони уствари одговарају изразу (5.22). Резултујући прираштај нормалне силе и момента савијања од овако остварених напона

одговарају изразу (5.23) и представљају укупне реакције фиктивних унутрашњих веза, а аплицирањем негативних вредности фиктивних сила поништава се дејство реакција тих веза (слика 5.3).

Укупно стање напона и деформација у дискретном тренутку t_k се добија суперпозицијом претходног стања за t_{k-1} и промене стања у текућем интервалу времена Δt_k .

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \kappa \end{Bmatrix}_{m,k} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \kappa \end{Bmatrix}_{m,k-1} + \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix}_{m,k} ; \quad m=c,a,s,p \quad (5.24)$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \beta \end{Bmatrix}_{m,k} = \begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \beta \end{Bmatrix}_{m,k-1} + \begin{Bmatrix} \Delta \alpha_r \\ \Delta \beta \end{Bmatrix}_{m,k} ; \quad m=c,a,s,p \quad (5.25)$$

Приказани модел прорачуна, за дате вредности сила у попречном пресеку, нема посебних додатних ограничења. Прорачун се одвија корак по корак (*step-by-step*), а модел је генерализован и применљив и за сложеније случајеве спрегнутих пресека.

5.4. Закључак

Приказани начин формирања услова равнотеже заснован на примени инкременталне везе напон-деформација, где су основне непознате прираштаји деформацијских величина за посматрани интервал времена, предложили су Гали (*Ghali*) и Фавре [51], а касније је коришћен у многим радовима. Значајан допринос развоју модела прорачуна код нас дали су Фолић, Татомировић и Поповић [42-45].

Претходно приказани модел прорачуна напрезања у спрегнутом пресеку има низ предности у односу на друге поступке. У моделу је обједињен ток прорачуна у фиктивним и коначним интервалима времена, а укупно напонско-деформационо стање се одређује суперпозицијом претходног са текућим стањем, тј. поступком корак по корак (*step-by-step*).

Физичка интерпретација изложеног модела прорачуна за посматрани интервал времена одговара примени „замрзнутог“ стања деформација [51,116]. Другачији начин формирања услова равнотеже у суштини одговара примени „замрзнутог“ стања напона.

Приказани алгоритам прорачуна нема посебних ограничења када је у питању технологија грађења, број различитих делова и њихов распоред у пресеку. Ово подразумева да спрегнутом елементу у неком тренутку

може бити придодат нови део, што одговара случају фазног грађења или код примене ојачања и санације. Такође су могући случајеви где је потребно искључити неке делове пресека, нпр. испрскали бетон, корозијом захваћена арматура и слично.

За разлику од анализе у спрегнутом пресеку (статички одређен носач), код статички неодређених носача, услед реолошких карактеристика бетона и ПЧ, долази до промене реакција а тиме и сила у пресецима и без промене спољашњег оптерећења. Анализом стања у пресеку, на претходно приказан начин, није могуће обухватити промене тих сила, него је нужно посматрати елементе у систему, односно посматрати конструкцију у целини.

За статички неодређене носаче, где су анализе знатно сложеније од оних у попречном пресеку, најчешће се употребљавају метода сила и метода деформација. Овде су основне једначине еластичности проширене на једначине вискоеластичности како би се обухватила промена у конструкцији услед реологије бетона и ПЧ. Пример за то је поступак М. Ђурића [25] где је примењена метода сила. Увођењем фиктивних сила и фиктивних геометријских карактеристика (идеализовани облици) успостављена је аналогија са једначинама за хомогене материјале.

Примена израза по моделу М. Ђурића [25] и сличних модела није прилагођена за нумеричко уопштавање и употребу рачунара, те је потребно развијати нумеричке моделе и алгоритме прилагођене савременим рачунарима [18,70,108]. Ово даје могућност за знатно брже и једноставније прорачунске анализе, код којих се може увести много више корака (временских интервала), чиме се постиже боља тачност и чиме се релативно лако могу анализирати проблеми из свакодневне инжењерске праксе.

У последње време тренд у свету је развој нумеричких модела по МКЕ уз примену савремених рачунара, те развој софтверских пакета уз комбинацију са комерцијалним програмима са тежњом прилагођавања свакодневной инжењерској пракси.

6. ПОГЛАВЉЕ

НАПОНИ И ДЕФОРМАЦИЈЕ СПРЕГНУТИХ СИСТЕМА МЕТОДОМ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА

Развој и широка заступљеност рачунара су знатно допринели примени нумеричких модела прорачуна у теорији грађевинских конструкција. Једна од најшире примењиваних метода за прорачун конструкција је Метода коначних елемената (МКЕ) [109]. Њеном применом у склопу одговарајућег рачунарског софтвера задаци теорије конструкција се решавају изузетно лако и брзо.

Као што је претходно истакнуто, када је у питању статички неодређена конструкција, прорачун понашања такве конструкције кроз време, са утицајем реологије бетона и ПЧ, најбоље се може сагледати на целовитом систему, а не независно на издвојеним елементима и/или пресецима. Овим начином се обухвата утицај промене статички неодређених величина и без промене спољашњег оптерећења, што знатно доприноси тачности резултата прорачуна.

Због тога је овде даље развијен један нумерички модел прорачуна базиран на МКЕ, те рачунарски програм *ВАСКЕЛ* - вискозна анализа слојевитим коначним елементима [18,19,20], којим се релативно лако и брзо долази до резултата при анализи спрегнутих конструкција (СК) са ефектима скупљања и течења бетона и релаксације ПЧ, без обзира на статичку неодређеност конструкције.

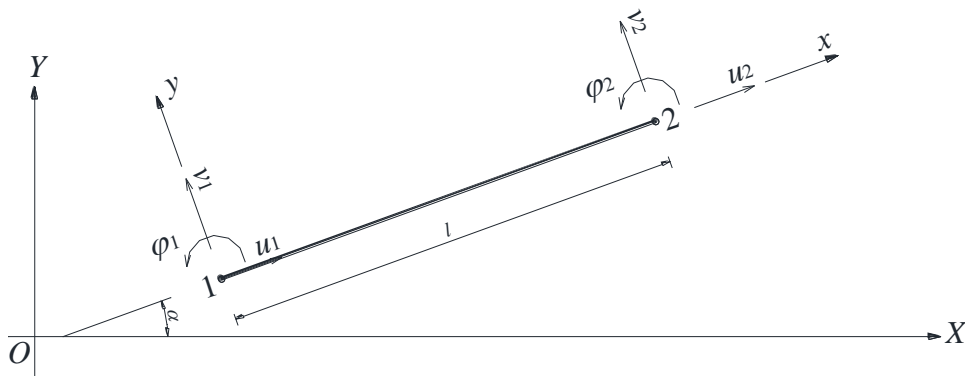
6.1. Основни појмови и једначине методе коначних елемената

Познато је да се у механици континуума основне везе између геометријских и физичких величина постављају на диференцијално

малом елементу у облику диференцијалних једначина. Решења ових једначина у затвореном облику углавном не постоје, док примена алтернативних алгебарских једначина омогућује изналажење решења, али и ови поступци код статички неодређених СК су и даље преобимни и нису за употребу у свакодневној инжењерској пракси.

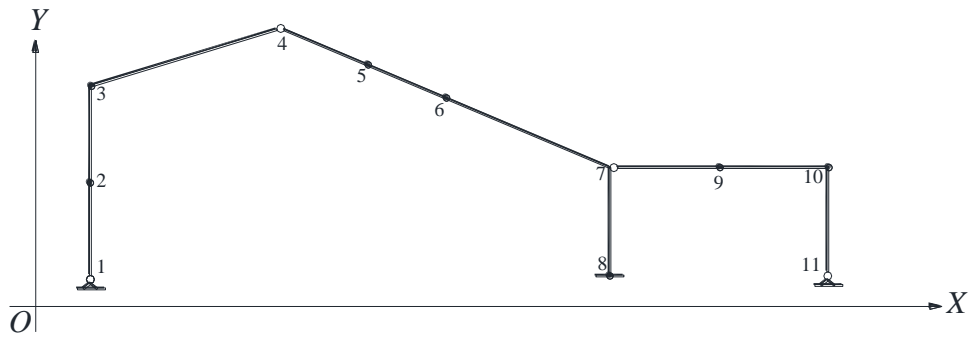
Међутим, у основи МКЕ је дискретизација континуума на елементе коначних димензија који су међусобно спојени у чворовима. Чворови, уопштено, не означавају неку посебну везу између елемената, већ само указују да су ту елементи међусобно спојени. У таквим чворовима подразумева се да требају бити задовољени услови равнотеже сила и компатибилности померања (деформација) у складу са општом теоријом конструкција.

Облик коначних елемената (КЕ) зависи од облика конструкције која се анализира. Код скелетних система (греде, стубови) уобичајено се користе линијски КЕ (слика 6.1), код површинских носача (плоче, зидови) користе се равански КЕ (у облику паравоугаоника, троуглова и сл.). Примена просторних КЕ (у облику квадера и сл.) није заступљена у широј грађевинској пракси, осим за неке специјалне анализе понашања носача као пуних тела.



Сл. 6.1 – Линијски коначни елемент
Fig. 6.1 – Linear finite element

Скуп свих КЕ међусобно спојених у чворовима чини мрежу КЕ посматране конструкције (слика 6.2.) [109]. У успостављеном систему алгебарских једначина за непознате се бирају величине везане за чворове елемената. При томе се користе матрични облици једначина што омогућује развој софтверских пакета и примену савремених рачунара.



Сл. 6.2. – Мрежа коначних елемената

Fig. 6.2. – The network of finite elements

Слично као и у статисти конструкција и овде се разликују три вида МКЕ:

- 1) Метода деформација, када се за непознате бирају кинематичке величине у чворовима (померања);
- 2) Метода сила, када се за непознате бирају статичке величине у чворовима (силе);
- 3) Мешовита метода, када се за непознате бирају и кинематичке и статичке величине у чворовима (померања, силе).

Најширу примену у пракси има метода деформација, јер се показала као најпогоднија, посебно када је у питању програмирање и примена рачунара. Код ове методе конструкција се дели на мрежу КЕ а за основне непознате проблема усвајају се чворна померања. Увођењем функција померања којима се дефинише веза између померања тачака у пољу КЕ и померања чворова описује се стање у сваком КЕ, те применом варијационе методе формира се основна једначина КЕ.

Основне једначине КЕ се исписују за читаву мрежу КЕ, односно укључују се у тзв. једначине конструкције. То је уствари систем алгебарских једначина, одакле се, узимајући у обзир спољашње оптерећење и граничне услове, срачунавају све непознате компоненте померања чворова. Из тих података могу се тада познатим поступцима срачунати компоненте деформација и напона унутар свих елемената.

Теоријска основа на којој се заснива МКЕ је принцип о минимуму енергије при варијацији померања (принцип виртуалних померања). Овај принцип се заснива на изједначавању прираштаја рада спољашњих сила на задатим померањима и прираштаја рада унутрашњих сила на одговарајућим деформацијама при сваком задатом виртуалном (могућем) померању штапа. При томе задата

виртуална померања и одговарајуће деформације морају задовољити услове компатибилности, а спољашње и унутрашње силе услове равнотеже [109].

Општи израз за енергију деформације, односно за рад унутрашњих сила (напона) на одговарајућим деформацијама штапа је:

$$A(\varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot \int_V (\sigma \cdot \varepsilon) dV \quad (6.1)$$

где је са V означена запремина штапа, док су остале величине познате од раније.

Општи израз за рад запреминских и површинских спољашњих сила на задатим померањима штапа, узимајући у обзир статичко деловање, је:

$$A(Q, P) = -\frac{1}{2} \cdot \int_V (Q \cdot u) dV - \frac{1}{2} \cdot \int_A (P \cdot u + \int_{t_0}^t (P \cdot u) d\tau) dA \quad (6.2)$$

где су:

- Q спољашње запреминске силе,
- P спољашње површинске силе,
- u генералисана померања придружена овим силама.

Остале величине су познате од раније.

Ако се пређе на виртуална померања и деформације које одговарају тим померањима, претходне једначине написане као вектори имају облик:

$$\delta A(\varepsilon) = \int_V \{\sigma\} \cdot \{\delta \varepsilon\} dV \quad (6.3)$$

$$\delta A(Q, P) = -\int_V \{Q\} \cdot \{\delta u\} dV - \int_A (\{P\} \cdot \{\delta u\} + \int_{t_0}^t \{P\} \cdot \{\delta u\} d\tau) dA \quad (6.4)$$

Применом Лагранжеове (*Lagrange*) теореме добија се:

$$\delta A(\varepsilon) + \delta A(Q, P) = 0 \quad (6.5)$$

С обзиром на непроменљивост сила при виртуалним померањима (не мењају се успостављени услови равнотеже) знак варијације може се извући испред интеграла, односно:

$$\delta(A(\varepsilon) + A(Q, P)) = 0 \quad (6.6)$$

Претходним изразом дефинисана је укупна промена потенцијалне енергије чиме је изражен став о минимуму потенцијалне енергије штапа, односно:

$$\delta \Delta \Pi = \delta (A(\varepsilon) + A(Q, P)) = 0 \quad (6.7)$$

Ако се посматра један линијски КЕ у равни, где је у питању његова деформација при сложеном савијању у локалном координатном систему xOy , тада произвољна тачка на КЕ на одстојању x ($0 \leq x \leq l$) од почетка штапа има три степена слободе кретања:

- 1) хоризонтално (подужно) померање $u(x)$,
- 2) вертикално (попречно) померање $v(x)$,
- 3) обртање тачке (пресека) $\varphi(x)$.

Када се за непознате величине узму чворна померања, линијски КЕ у равни, у општем случају, има шест степени слободе кретања, тј. у оба чвора КЕ (чвор 1 за $x=0$ и чвор 2 за $x=l$) по три непозната генерализана померања: у чвору 1 померања су u_1, v_1, φ_1 и у чвору 2 померања су u_2, v_2, φ_2 . Ови вектори чворних померања за посматрани КЕ у равни, написани у транспонованом облику (ради лакшег писања), су:

$$\{q_1\} = \{u_1 \ v_1 \ \varphi_1\}^T ; \quad \{q_2\} = \{u_2 \ v_2 \ \varphi_2\}^T \quad (6.8)$$

односно укупни вектор чворних померања КЕ у равни је:

$$\{q\} = \{u_1 \ v_1 \ \varphi_1 \ u_2 \ v_2 \ \varphi_2\}^T \quad (6.9)$$

Када су у питању конвенције о знаку примењује се следеће правило:

- Померања дуж осе штапа u (хоризонтална померања), попречна (вертикална) померања v , аксијалне силе N , попречне (трансверзалне) силе T , напони σ и њима одговарајуће деформације ε су позитивни у правцу усвојених позитивних оса локалног координатног система xOy .
- За обртање пресека φ , момент савијања M , нагиб дијаграма напона β и нагиб дијаграма деформације (кривине) κ , усвојени су као позитивни када им је смер обртања супротан од смера казаљке на сату.
- Према усвојеној конвенцији, деформација скупљања бетона ε_n у почетном чвору 1 ($x=0$) посматраног КЕ је позитивна, а у крајњем

чвору 2 ($x=l$) је негативна, јер се скупљање одвија ка унутрашњости штапа.

- Промена напона $\Delta \bar{\sigma}_{pr}$ при релаксацији ПЧ у почетном чвору 1 ($x=0$) посматраног КЕ је позитивна, а у крајњем чвору 2 ($x=l$) је негативна, јер напони од преднапрезања каблова делују ка унутрашњости штапа.
- Напони и деформације се односе искључиво на локални кординантни систем.

За даљи развој модела прорачуна напрезања код сложених спрегнутих конструкција применом МКЕ захтева се увођење одређених претпоставки:

- Анализа се односи на линијске слојевите КЕ у равни. Попречни пресек елемента у општем случају чине бетонски и челични део, те ПЧ и МЧ. Претпоставља се да је остварено потпуно спрезање, тј. да су, у текућем k -том интервалу времена, прираштаји деформација свих делова спрегнутог пресека, редуковани на заједничку осу попречног пресека, међусобно једнаки:

$$\Delta \varepsilon_{c,k} = \Delta \varepsilon_{a,k} = \Delta \varepsilon_{s,k} = \Delta \varepsilon_{p,k} = \Delta \varepsilon_k \quad (6.10)$$

- Важи Бернулијева (*Bernoulli*) претпоставка о равним пресецима и линеарна промена дилатација по висини спрегнутог пресека, тј. може се занемарити утицај смицања на деформацију КЕ:

$$\Delta \varepsilon_k = \Delta \varepsilon_{r,k} + \kappa_k \cdot y \quad (6.11)$$

где је:

- $\Delta \varepsilon_k$ прираштај деформације посматраног влакна спрегнутог пресека за текући интервал времена Δt_k ,
 - $\Delta \varepsilon_{r,k}$ прираштај дилатације у нивоу референтне осе r ,
 - $\Delta \kappa_k$ кривина пресека,
 - y одстојање посматраног влакна од референтне осе r .
- Дискретизација се спроводи по дужини конструктивног елемента, а у слојеве по висини попречног пресека, уз аксијалне дилатације, уведен је и допринос кривине, док је занемарен допринос обртања пресека.

Веза између дилатације и подужног померања произвољног пресека штапа за случај аксијалног напрезања, у текућем k -том интервалу времена, у складу са теоријом напрезања штапа, је:

$$\Delta \varepsilon(x)_k = \frac{\partial \Delta u(x)_k}{\partial x} \quad (6.12)$$

Веза између кривине и попречног померања произвољног пресека штапа за случај савијања, у текућем k -том интервалу времена, у складу са теоријом савијања штапа, је:

$$\Delta \kappa(x)_k = \frac{\partial^2 \Delta v(x)_k}{\partial x^2} \quad (6.13)$$

Горњи изрази када се групишу и напишу у транспонованом векторском облику (ради лакшег писања) постају:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon(x) \\ \Delta \kappa(x) \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Delta u(x)}{\partial x} & \frac{\partial^2 \Delta v(x)}{\partial x^2} \end{Bmatrix}_k^T \quad (6.14)$$

Промене параметара хоризонталног и вертикалног померања дуж елемента $\Delta u(x)_k$ и $\Delta v(x)_k$ се дефинишу преко претпостављеног поља померања КЕ. Поље померања је одређено интерполационим функцијама тј. функцијама облика. Ове функције дају везу између померања произвољне тачке елемента и генералисаних померања чворова тог елемента.

У општем случају сложеног савијања, за интерполационе функције КЕ усвајају се једначине у облику полинома за карактеристичне облике напрезања, где број чланова полинома зависи од броја степени слободе чворова КЕ [109].

За промену хоризонталног померања дуж КЕ, за случај аксијалног напрезања, погодно је користити полином првог степена:

$$\Delta u(x)_k = C_1 + C_2 \cdot x \quad (6.15)$$

Промена вертикалног померања дуж КЕ, за случај савијања, може се представити полиномом трећег степена:

$$\Delta v(x)_k = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + C_4 \cdot x^3 \quad (6.16)$$

Непознати коефицијенти полинома се одређују из граничних услова, тј. из услова који важе у чворовима КЕ ($x=0$ и $x=l$). Тако се за коефицијенте C_1 и C_2 добијају следеће вредности:

$$C_1 = \Delta u_{1,k} ; C_2 = \frac{\Delta u_{2,k} - \Delta u_{1,k}}{l} \quad (6.17)$$

те је промена хоризонталног померања дуж КЕ, за случај аксијалног напрезања, у матричном облику:

$$\Delta u(x)_k = [N_u] \cdot \{\Delta q_u\}_k \quad (6.18)$$

где су коефицијенти интерполационе матрице $[N_u]$ и вектора чворних хоризонталних (подужних) померања $\{\Delta q_u\}_k$ облика:

$$[N_u] = \left[1 - \frac{x}{l} \quad \frac{x}{l} \right] \quad (6.19)$$

$$\{\Delta q_u\}_k = \{\Delta u_1 \quad \Delta u_2\}_k^T \quad (6.20)$$

За случај савијања и уз коришћење познате везе:

$$\Delta \varphi(x)_k = -\frac{\partial \Delta v(x)_k}{\partial x} \quad (6.21)$$

добива се да је промена вертикалног (попречног) померања дуж КЕ, за случај савијања (у матричном облику):

$$\Delta v(x)_k = [N_v] \cdot \{\Delta q_v\}_k \quad (6.22)$$

где су коефицијенти интерполационе матрице $[N_v]$ и вектора чворних вертикалних (попречних) померања $\{\Delta q_v\}_k$ облика:

$$[N_v] = \left[1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} \quad l\left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right) \quad 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} \quad l\left(-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right) \right] \quad (6.23)$$

$$\{\Delta q_v\}_k = \{\Delta v_1 \quad \Delta \varphi_1 \quad \Delta v_2 \quad \Delta \varphi_2\}_k^T \quad (6.24)$$

Интерполационе матрице $[N_u]$ и $[N_v]$, као што је претходно наведено, у посматраном k -ом интервалу времена, успостављају везу између вектора померања $\{\Delta q(x)\}_k$ у пољу елемента ($0 < x < l$) и вектора чворних померања $\{\Delta q\}_k$ ($x=0$ и $x=l$) и зависе од променљиве x дуж осе штапа.

На основу диференцијалних веза, датих изразом (6.14), може се успоставити веза између деформацијских компоненти дуж осе штапа и компоненталних померања чворних тачака за k -ти интервал времена:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon(x) \\ \Delta \kappa(x) \end{Bmatrix}_k = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} ([N_u] \cdot \{\Delta q_u\}) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} ([N_v] \cdot \{\Delta q_v\}) \right\}_k^T \quad (6.25)$$

Када се усвоји да се померање чворне тачке КЕ односи на померање тачке на референтној оси r и када се у изразу (6.25) примене

одговарајући изводи, успоставља се веза између основних деформацијских величина $\Delta\varepsilon_r(x)$ и $\Delta\kappa(x)$ произвољних тачака и вектора чворних померања $\{\Delta q_r\}$. У складу са претходно изнетим ова веза за текући k -ти интервал времена се може написати у следећем облику:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_r(x) \\ \Delta\kappa(x) \end{Bmatrix}_k = [B_r] \cdot \{\Delta q_r\}_k \quad (6.26)$$

где матрица $[B_r]$ има следеће коефицијенте:

$$[B_r] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} & \frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} & 0 & -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} & \frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2} \end{bmatrix}_r \quad (6.27)$$

а вектор прираштаја чворних померања КЕ у транспонованом облику је:

$$\{\Delta q_r\}_k = \{\Delta u_{1,r} \quad \Delta v_1 \quad \Delta \varphi_1 \quad \Delta u_{2,r} \quad \Delta v_2 \quad \Delta \varphi_2\}_k^T \quad (6.28)$$

У складу са усвојеном претпоставком о равним пресецима, тј. линеарности расподеле деформација по висини попречног пресека, дилатација у произвољној тачки $\Delta\varepsilon(x, y)_k$ посматраног пресека одређује се из:

$$\Delta\varepsilon(x, y)_k = (\Delta\varepsilon_r(x) + \Delta\kappa(x) \cdot y)_k = [1 \quad y] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_r(x) \\ \Delta\kappa(x) \end{Bmatrix}_k = [P] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_r(x) \\ \Delta\kappa(x) \end{Bmatrix}_k \quad (6.29)$$

Када се једначина (6.26) унесе у (6.29), тада израз за дилатацију у произвољној тачки ма ког пресека штапа има облик:

$$\Delta\varepsilon(x, y)_k = [P] \cdot [B_r] \cdot \{\Delta q_r\}_k = [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k \quad (6.30)$$

где матрица $[G]$, за дилатацију неке произвољне тачке КЕ, има следеће коефицијенте:

$$[G] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) y & \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) y & \frac{1}{l} \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right) y & \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) y \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Матрични облик израза (6.30) представља везу између прираштаја деформације $\Delta\varepsilon(x, y)_k$ произвољне тачке елемента и прираштаја померања чворних тачака тог елемента у посматраном k -том интервалу времена. Поменута веза је успостављена преко матрице $[G]$ чији коефицијенти зависе од координата x и y посматраног штапа. То је уствари функција облика, односно интерполациона матрица посматраног КЕ.

Када се матрица $[G]$ напише за референтну осу r ($y=0$) она има следеће коефицијенте:

$$[G_r] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

С обзиром да матрица $[G_r]$ у овом случају не зависи ни од променљиве x , дилатација је тада константна цијелом дужином референтне осе штапа r ($y=0$):

$$\Delta \varepsilon(x)_k = \Delta \varepsilon_r(x)_k = \Delta \varepsilon_{r,k} = [G_r] \cdot \{\Delta q_r\}_k = -\frac{u_{2,r} - u_{1,r}}{l} \quad (6.33)$$

Када се матрица $[G]$, дата изразом (6.31), напише за чворну тачку 1 КЕ ($x=0$; $y \neq 0$) она има следеће коефицијенте:

$$[G_1] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{6}{l^2}y & \frac{4}{l}y & \frac{1}{l} & -\frac{6}{l^2}y & \frac{2}{l}y \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

а за чворну тачку 2 КЕ ($x=l$; $y \neq 0$) ти коефицијенти су:

$$[G_2] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & -\frac{6}{l^2}y & -\frac{2}{l}y & \frac{1}{l} & \frac{6}{l^2}y & -\frac{4}{l}y \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

У складу са коефицијентима матрице $[G]$ добијају се одговарајуће деформације у чворовима 1 и 2 КЕ. Ове деформације су уствари довољне за сагледавање проблема који се овде разматра, јер се конструкција увек може поделити на КЕ тако да нема потребе за одређивањем деформација у пољу неког штапа.

Линеарност расподеле по висини попречног пресека важи и за напоне, па је за текући интервал времена Δt_k та расподела дата у следећем облику:

$$\Delta \sigma(x, y)_k = (\Delta \alpha_r(x) + \Delta \beta(x) \cdot y)_k = [1 \quad y] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \alpha_r(x) \\ \Delta \beta(x) \end{Bmatrix}_k = [P] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \alpha_r(x) \\ \Delta \beta(x) \end{Bmatrix}_k \quad (6.36)$$

Или ако се деформације и напони посматрају само за чворне тачке КЕ онда се може скраћено писати:

$$\Delta \varepsilon_k = (\Delta \varepsilon_r + \Delta \kappa \cdot y)_k = [1 \quad y] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix}_k = [P] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix}_k = [P] \cdot [B_r] \cdot \{\Delta q_r\}_k = [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k \quad (6.37)$$

$$\Delta \sigma_k = (\Delta \alpha_r + \Delta \beta \cdot y)_k = [1 \quad y] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \alpha_r \\ \Delta \beta \end{Bmatrix}_k = [P] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \alpha_r \\ \Delta \beta \end{Bmatrix}_k \quad (6.38)$$

6.2. Слојевити коначни елементи са вискозним својствима

Све претходно истакнуто за МКЕ, у општем случају важи за све компоненталне материјале (c -бетон, a -КЧ, p -ПЧ, s -МЧ) у произвољном интервалу времена Δt_k .

Крајњи облик основне једначине спрегнутог слојевитог КЕ зависи од примењених материјала и релације између напона и деформација за те материјале.

Даља анализа напонско-деформационог стања се заснива на претпоставци да је КЕ претходно димензионисан, тако да је позната геометрија свих спрегнутих слојева (делова), почев од КЧ и бетона, па до ПЧ и МЧ. Такође се сматрају за познатим: механичке карактеристике материјала, технологија грађења, историја оптерећења, реолошке карактеристике бетона и ПЧ и сл.

Према усвојеној претпоставци о потпуном (крутом) спрезању, прираштаји деформација свих делова спрегнутог пресека у посматраној референтној оси r , у текућем k -том интервалу времена, међусобно су једнаки:

$$\Delta \varepsilon_{c,k} = \Delta \varepsilon_{a,k} = \Delta \varepsilon_{s,k} = \Delta \varepsilon_{p,k} = \Delta \varepsilon_k = \Delta \varepsilon_{r,k} + \kappa_k \cdot y \quad (6.39)$$

На основу претходне једнакости, уз израз (6.37), важи и једнакост померања свих слојева/делова спрегнутог пресека за задате услове. У том случају померање чворних тачака посматраног КЕ у референтној оси r је:

$$\{\Delta q_r\}_{c,k} = \{\Delta q_r\}_{a,k} = \{\Delta q_r\}_{s,k} = \{\Delta q_r\}_{p,k} = \{\Delta q_r\}_k \quad (6.40)$$

Инкрементални облик везе између напона и чворних померања за бетонски део пресека добија се након уврштавања израза (6.37) у зраз (4.21), и уз горњу једнакост померања, у облику:

$$\Delta \sigma_{c,k} = E_{c(k,k-1)} \cdot (\Delta \varepsilon_k - \Delta \varepsilon_{c,k}^*) = E_{c(k,k-1)} \cdot [G] \cdot (\{\Delta q_r\}_k - \{\Delta q_r^*\}_{c,k}) \quad (6.41)$$

где је веза између слободних деформација и слободних померања бетонског слоја сада у облику:

$$\Delta \varepsilon_{c,k}^* = [G] \cdot \{\Delta q_r^*\}_{c,k} \quad (6.42)$$

На сличан начин се могу написати инкременталне везе и за остале делове (слојеве) спрегнутог КЕ:

$$\Delta \sigma_{a,k} = E_a \cdot \Delta \varepsilon_k = E_a \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k \quad (6.43)$$

$$\Delta\sigma_{s,k} = E_s \cdot \Delta\varepsilon_k = E_s \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k \quad (6.44)$$

$$\Delta\sigma_{p,k} = E_p \cdot \Delta\varepsilon_k + \Delta\bar{\sigma}_{pr,k} = E_p \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k + \Delta\bar{\sigma}_{pr,k} \quad (6.45)$$

Теоријска основа на којој се заснива МКЕ је принцип о минимуму енергије при варијацији померања, односно принцип једнакости прираштаја рада спољашњих сила на задатим померањима и прираштаја рада унутрашњих сила на одговарајућим деформацијама [109].

Израз за прираштај енергије деформације (рад унутрашњих сила) је:

$$\Delta A(\varepsilon)_k = \int_V (\Delta\sigma_k \cdot \Delta\varepsilon_k) dV \quad (6.46)$$

а израз за прираштај рада спољашњих сила (запреминских и површинских) је:

$$\Delta A(s)_k = -\int_V (\Delta V_k \cdot \Delta u_k) dV - \int_A (\Delta P_k \cdot \Delta u_k + \int_{k-1}^k (\Delta P_k \cdot \Delta u_k) d\tau) dA \quad (6.47)$$

где су:

- ΔV_k и ΔP_k вектори спољашњих запреминских и површинских сила,
- Δu_k генерализована померања придружена овим силама.

Као што је раније наведено, изрази су дати за текући k -ти интервал времена, а интеграција се односи на одговарајућу запремину V и површину A посматраног КЕ.

Када се једначина (6.46) у општем случају напише као сума радова за све слојеве спрегнутог елемента (c -бетон, a -КЧ, p -ПЧ, s -МЧ), уз одговарајуће смене, прираштај енергије деформације је:

$$\begin{aligned} \Delta A(\varepsilon)_k &= \int_{V_c} (\Delta\sigma_{c,k} \cdot \Delta\varepsilon_k) dV_c + \int_{V_a} (\Delta\sigma_{a,k} \cdot \Delta\varepsilon_k) dV_a + \int_{V_s} (\Delta\sigma_{s,k} \cdot \Delta\varepsilon_k) dV_s + \int_{V_p} (\Delta\sigma_{p,k} \cdot \Delta\varepsilon_k) dV_p = \\ &= \int_{V_c} \{\Delta q_r\}_k^T \cdot [G]^T \cdot E_{c(k,k-1)} \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k dV_c + \int_{V_a} \{\Delta q_r\}_k^T \cdot [G]^T \cdot E_a \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k dV_a + \\ &+ \int_{V_s} \{\Delta q_r\}_k^T \cdot [G]^T \cdot E_s \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k dV_s + \int_{V_p} \{\Delta q_r\}_k^T \cdot [G]^T \cdot E_p \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k dV_p + \\ &- \int_{V_c} \{\Delta q_r\}_{c,k}^* \cdot [G]^T \cdot E_{k,k-1} \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k dV_c + \int_{V_p} \Delta\bar{\sigma}_{pr} \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k dV_p \end{aligned} \quad (6.48)$$

Прираштај рада спољашњих сила уз одговарајуће смене је:

$$\Delta A(V, P)_k = -\int_V \{\Delta V\}_k^T \cdot [N] \cdot \{\Delta q_r\}_k dV - \int_A (\{\Delta P\}_k^T \cdot [N] \cdot \{\Delta q_r\}_k + \int_{k-1}^k \{\Delta p\}_k^T \cdot [N] \cdot \{\Delta q_r\}_k d\tau) dA \quad (6.49)$$

Преласком на виртуална померања, где нема промене сила, не мењају се успостављени услови равнотеже. За укупну промену потенцијалне енергије, применом Лагранжеове (Lagrange) теореме, добија се:

$$\Delta\Pi_k = \Delta A(\varepsilon)_k + \Delta A(V, P)_k \quad (6.50)$$

У претходној једначини $\Delta\Pi_k$ је скалар па су и умношци матрица под интегралима такође скалари. Због тога се неки изрази под интегралима могу трансформисати, тј.:

$$\left(\{\Delta q_r\}_{c,k}^* \cdot [G]^T \cdot E_{k,k-1} \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k\right)^T = \{\Delta q_r\}_k^T \cdot [G]^T \cdot E_{k,k-1} \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_{c,k}^* \quad (6.51)$$

$$(\Delta\bar{\sigma}_{pr} \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k)^T = \{\Delta q_r\}_k^T \cdot [G]^T \cdot \Delta\bar{\sigma}_{pr} \quad (6.52)$$

$$\left(\{\Delta V\}_k^T \cdot [N] \cdot \{\Delta q_r\}_k\right)^T = \{\Delta q_r\}_k^T \cdot [N]^T \cdot \{\Delta V\}_k \quad (6.53)$$

$$\left(\{\Delta p\}_k^T \cdot [N] \cdot \{\Delta q_r\}_k\right)^T = \{\Delta q_r\}_k^T \cdot [N]^T \cdot \{\Delta p\}_k \quad (6.54)$$

Промена потенцијалне енергије уз претходне трансформације је:

$$\begin{aligned} \Delta\Pi_k = & \int_{V_c} \{\Delta q_r\}_k^T \cdot [G]^T \cdot E_{c(k,k-1)} \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k dV_c + \int_{V_a} \{\Delta q_r\}_k^T \cdot [G]^T \cdot E_a \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k dV_a + \\ & + \int_{V_s} \{\Delta q_r\}_k^T \cdot [G]^T \cdot E_s \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k dV_s + \int_{V_p} \{\Delta q_r\}_k^T \cdot [G]^T \cdot E_p \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k dV_p - \\ & - \int_{V_c} \{\Delta q_r\}_k^T \cdot [G]^T \cdot E_{k,k-1} \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_{c,k}^* dV_c + \int_{V_p} \{\Delta q_r\}_k^T \cdot [G]^T \cdot \Delta\bar{\sigma}_{pr,k} dV_p - \\ & - \int_V \{\Delta q_r\}_k^T \cdot [N]^T \cdot \{\Delta V\}_k dV - \int_A \left(\{\Delta q_r\}_k^T \cdot [N]^T \cdot \{\Delta P\}_k + \int_{k-1}^k \{\Delta q_r\}_k^T \cdot [N]^T \cdot \{\Delta P\}_k d\tau \right) dA \quad (6.55) \end{aligned}$$

Коришћењем става о минимуму укупне промене потенцијалне енергије $\delta\Delta\Pi=0$, претходни израз се може диференцирати по $\{\Delta q_r\}_k^T$ након чега се добија:

$$\begin{aligned} & \int_{V_c} [G]^T \cdot E_{k,k-1} \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k dV_c + \int_{V_a} [G]^T \cdot E_a \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k dV_a + \\ & + \int_{V_s} [G]^T \cdot E_s \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k dV_s + \int_{V_p} [G]^T \cdot E_p \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_k dV_p - \\ & - \int_{V_c} [G]^T \cdot E_{k,k-1} \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r\}_{c,k}^* dV_c + \int_{V_p} [G]^T \cdot \Delta\bar{\sigma}_{pr,k} dV_p - \\ & - \int_V [N]^T \cdot \{\Delta V\}_k dV - \int_A \left([N]^T \cdot \{\Delta P\}_k + \int_{k-1}^k [N]^T \cdot \{\Delta P\}_k d\tau \right) dA = 0 \quad (6.56) \end{aligned}$$

или краће:

$$[K]_k \cdot \{\Delta q_r\}_k + \{\Delta Q^*\}_{c,k} + \{\Delta Q^*\}_{p,k} = \{\Delta Q\}_k \quad (6.57)$$

односно:

$$[K]_k \cdot \{\Delta q_r\}_k = \{\Delta Q\}_k - \{\Delta Q^*\}_{c,k} - \{\Delta Q^*\}_{p,k} \quad (6.58)$$

где је за текући интервал времена:

- $[K]_k$ матрица крутости спрегнутог КЕ,
- $\{\Delta Q\}_k$ вектор спољашњих чворних сила,
- $\{\Delta Q^*\}_{c,k}$ вектор фиктивних чворних сила услед реологије бетона,
- $\{\Delta Q^*\}_{p,k}$ вектор фиктивних чворних сила услед релаксације ПЧ.

Израз (6.58) представља генерализани услов равнотеже линијског спрегнутог КЕ у локалном координатном систему, где је са леве стране израза производ матрице крутости и вектора чворних померања, а са десне стране израза сума вектора сила (спољашњих и фиктивних).

Поједине матрице основне једначине слојевитог КЕ заслужују детаљнију анализу.

6.2.1. Матрица крутости слојевитог коначног елемента

Матрица крутости спрегнутог КЕ $[K]_k$, према изразима (6.56) и (6.57) је:

$$[K]_k = \int_{V_c} [G]^T \cdot E_{c(k,k-1)} \cdot [G] dV_c + \int_{V_a} [G]^T \cdot E_a \cdot [G] dV_a + \int_{V_s} [G]^T \cdot E_s \cdot [G] dV_s + \int_{V_p} [G]^T \cdot E_p \cdot [G] dV_p \quad (6.59)$$

или, за општи случај, написана као збир удела бетона, КЧ, МЧ и ПЧ:

$$[K]_k = [K]_{c,k} + [K]_{a,k} + [K]_{s,k} + [K]_{p,k} \quad (6.60)$$

Коефицијенти матрице крутости за поједине слојеве посматраног спрегнутог КЕ након интеграције добијају облик:

$$[K]_{m,k} = \frac{E_m}{l^3} \begin{bmatrix} A_m l^2 & 0 & -S_m l^2 & -A_m l^2 & 0 & S_m l^2 \\ 0 & 12I_m & 6I_m l & 0 & -12I_m & 6I_m l \\ -S_m l^2 & 6I_m l & 4I_m l^2 & 0 & -6I_m l & 2I_m l^2 \\ -A_m l^2 & 0 & 0 & A_m l^2 & 0 & -S_m l^2 \\ 0 & -12I_m & -6I_m l & 0 & 12I_m & -6I_m l \\ S_m l^2 & 6I_m l & 2I_m l^2 & -S_m l^2 & -6I_m l & 4I_m l^2 \end{bmatrix}_k \quad (6.61)$$

где је индекс $m = c, a, s, p$ (бетон, КЧ, МЧ и ПЧ).

Облик израза (6.61) исти је као еластични део матрице крутости изведен у раду [67]. Коефицијенти матрице крутости (6.61) се разликују од коефицијената матрице крутости хомогеног штапа за члан $E_{m,k} \cdot S_{m,k} / l$. Величина $S_{m,k}$ је статички моменат површине попречног пресека у односу на референтну осу. Преко овог члана се уводи утицај висинског положаја појединих делова (слојева) у спрегнутом пресеку. Овакав начин моделирања омогућава анализу напона и деформација у било којој тачки посматраног КЕ.

Ако се референтна оса r поклапа са тежишном осом КЕ, за посматрани k -ти интервал времена, тада је сума статичких момената свих слојева једнака нули, тј.:

$$(S_c + S_a + S_s + S_p)_k = 0 \quad ; \quad (r = T_{i,k}) \quad (6.62)$$

У овом случају се ради о идеализованом спрегнутом КЕ за који је, при одређивању коефицијената матрице крутости, погодно усвојити референтни модул еластичности E_r и за k -ти интервал времена одредити геометријске карактеристике идеализованог пресека, тј. површину $A_{i,k}$ и моменат инерције $I_{i,k}$:

$$A_{i,k} = \frac{1}{E_r} \cdot (E_{c(k,k-1)} \cdot A_c + E_a \cdot A_a + E_s \cdot A_s + E_p \cdot A_p) \quad (6.63)$$

$$I_{i,k} = \frac{1}{E_r} \cdot (E_{c(k,k-1)} \cdot I_{c,k} + E_a \cdot I_{a,k} + E_s \cdot I_{s,k} + E_p \cdot I_{p,k}) \quad (6.64)$$

Моменти инерције бетонског и челичног дела се срачунавају као збир сопственог и положајног, док се код арматуре (МЧ и ПЧ) сопствени део момента инерције може занемарити.

Са идеализованим геометријским карактеристикама КЕ и на основу претходних израза матрица крутости се може одредити директно применом следећег израза:

$$[K]_{i,k} = \int_{V_i} [G]^T \cdot E_r \cdot [G] dV_i \quad (6.65)$$

Након извршене интеграције коефицијенти матрице крутости идеализованог КЕ у текућем интервалу времена Δt_k имају облик:

$$[K]_{i,k} = \frac{E_r}{l^3} \begin{bmatrix} A_i l^2 & 0 & 0 & -A_i l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12I_i & 6I_i l & 0 & -12I_i & 6I_i l \\ 0 & 6I_i l & 4I_i l^2 & 0 & -6I_i l & 2I_i l^2 \\ -A_i l^2 & 0 & 0 & A_i l^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12I_i & -6I_i l & 0 & 12I_i & -6I_i l \\ 0 & 6I_i l & 2I_i l^2 & 0 & -6I_i l & 4I_i l^2 \end{bmatrix}_k \quad (6.66)$$

Овакав поступак је аналоган поступку одређивања матрице крутости КЕ од једнородног материјала са еластичним карактеристикама [109], с тим што се овако одређена матрица крутости односи за k -ти интервал времена.

Положај тежишне осе идеализованог штапа $T_{i,k}$ је променљив за различите интервале времена. Зато су и положајни моменти инерције појединих делова (слојева) идеализованог спрегнутог пресека КЕ променљиви па су самим тим променљиве и њихове матрице крутости. Поред тога матрица крутости бетонског слоја је променљива, не само због промене положајног момента инерције, него и због промене генералисаног модула деформација бетона $E_{c(k,k-1)}$.

Поред утицаја положаја тежишта и генералисаног модула деформације бетона, генералисана матрица крутости КЕ може бити променљива и због додавања нових делова (слојева) током времена чиме се уствари формирају нови и сложенији спрегнути пресеци. Такође су могући и случајеви искључивања појединих слојева из напонске активности чиме се практично формирају нови спрегнути елементи са мањим бројем слојева у пресеку.

6.2.2. Вектор спољашњих сила

Вектор чворних сила од спољашњег оптерећења, у транспонованом облику (због лакшег приказа), је:

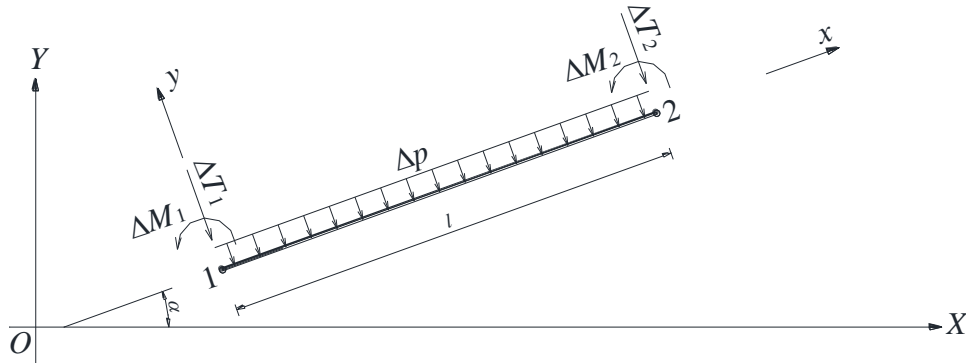
$$\begin{aligned} \{\Delta Q\}_k &= \{\Delta N_1 \quad \Delta T_1 \quad \Delta M_1 \quad \Delta N_2 \quad \Delta T_2 \quad \Delta M_2\}_k^T = \\ &= \int_V [N]^T \cdot \{\Delta V\}_k dV + \int_A ([N]^T \cdot \{\Delta P\}_k + \int_{k-1}^k [N]^T \cdot \{\Delta P\}_k d\tau) dA \end{aligned} \quad (6.67)$$

У складу са концептом МКЕ подељено оптерећење поља елемента се замењује еквивалентним компонентама чворних сила, што је у складу са претходним изразом (6.67) [109].

За пример једнако подељеног попречног оптерећења Δp које делује на целој дужини елемента l , примена израза (6.67) даје еквивалентне чворне силе; трансверзалне и моменте савијања (слика 6.3):

$$\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta p \cdot l / 2 \quad (6.68)$$

$$\Delta M_1 = -\Delta M_2 = -\Delta p \cdot l^2 / 12 \quad (6.69)$$



Сл. 6.3 – Чворне силе коначног елемента

Fig. 6.3 – Joint forces of the finite element

Треба имати у виду да моменте савијања у чворовима, ако се овако уводи континуално оптерећење, треба разликовати од евентуално стварно задатих концентрисаних момената ΔM . Наиме, еквивалентне моменте, који стварно не фигуришу, на крају текућег корака прорачуна треба одузети, док са стварно задатим моментима то није случај, што је у складу са поставкама МКЕ.

На одговарајући начин се било које произвољно оптерећење елемента може заменити еквивалентним оптерећењем у чворовима, што је у складу са основама МКЕ.

6.2.3. Вектор фиктивних сила – допринос реолошких својстава

Вектор фиктивних сила услед скупљања и течења бетона

У складу са основном једначином слојевитог КЕ, вектор чворних фиктивних сила бетонског слоја у издвојеном интервалу времена је:

$$\{\Delta Q^*\}_{c,k} = \{\Delta N_1^* \quad \Delta T_1^* \quad \Delta M_1^* \quad \Delta N_2^* \quad \Delta T_2^* \quad \Delta M_2^*\}_{c,k}^T = -[K]_{c,k} \cdot \{\Delta q_r^*\}_{c,k} \quad (6.70)$$

Појава фиктивних чворних сила је у сагласности са променама у елементу услед скупљања и течења бетона. Овим силама се може дати и физичка интерпретација.

Према дефиницији слободна померања су изазвана скупљањем и течењем бетона, а не директним деловањем спољашњег оптерећења.

Ако се претпостави да су слободна померања бетона привремено спречена увођењем фиктивних унутрашњих веза, услед реолошких карактеристика бетона долази до постепене промене напона, односно фиктивних сила. Овим силама поништавају се слободна померања. Како у посматраном елементу не постоје фиктивни услови који спречавају слободна померања, потребно је поменуте услове уклонити, тј. потребно је аплицирати негативне вредности фиктивних сила у чворовима којима се поништава дејство реакција фиктивних услова.

Директно одређивање фиктивних сила применом десног дела једначине (6.70), за усвојени модел КЕ, захтева претходно одређивање вектора слободних померања чворних тачака $\{\Delta q_r^*\}_{c,k}$. Раније је изведена веза између слободних померања чворова и слободних деформација бетона (6.42):

$$\Delta \varepsilon_{c,k}^* = [G] \cdot \{\Delta q_r^*\}_{c,k} \quad (6.71)$$

Међутим, из претходног израза, за случај познатих слободних деформација, слободна померања чворова се не могу одредити, јер систем није решив (није могућа инверзија матрице $[G]$).

У овако дефинисаним условима, у којима није могуће одредити слободна померања чворова бетонског слоја, а тиме и фиктивне силе у чворовима, нужно је проблем сагледати на другачији начин.

Фиктивне чворне силе се могу одредити једино преко претходно срачунатих слободних деформација бетонског дела пресека. Због тога део једначине (6.56), који дефинише фиктивне силе, треба у поступку сређивања израза вратити корак уназад, тј. елиминисати фиктивна померања:

$$\begin{aligned} \{\Delta Q^*\}_{c,k} &= -[K]_{c,k} \cdot \{\Delta q_r^*\}_{c,k} = \\ &= - \int_{V_c} [G]^T \cdot E_{k,k-1} \cdot [G] \cdot \{\Delta q_r^*\}_{c,k} dV_c = - \int_{V_c} [G]^T \cdot E_{k,k-1} \cdot [P] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r^* \\ \Delta \kappa^* \end{Bmatrix}_{c,k} dV_c \end{aligned} \quad (6.72)$$

Слободне деформације бетонског дела пресека се могу одредити из матричног облика израза (5.1), где је компонентом $\Delta \kappa$ дефинисана промена деформације по висини попречног пресека.

Према основним поставкама МКЕ за пресеке се уобичајено подразумевају пресеци у чворовима 1 и 2 посматраног КЕ. Међутим, одређивање фиктивних сила према једначини (6.72) захтева интеграцију по запремини бетонског слоја КЕ. Овај захтев, поред познавања

промене деформације по висини, тражи и познавање промене деформације дуж елемента.

Према усвојеном моделу МКЕ, спољашње оптерећење поља елемента се замењује еквивалентним силама у чворним тачкама. Такође је и увођењем функција облика успостављена веза између померања тачака у пољу елемента и померања чворних тачака. На сличан начин се може успоставити веза између слободних деформација у пољу елемента и одговарајућих вредности тих деформација на крајевима КЕ, тј. у чворовима 1 и 2. Довољна тачност се постиже ако се примени линеарна веза по променљивој x дуж штапа:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r^* \\ \Delta \kappa^* \end{Bmatrix}_{c,k} = \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{r1}^* \\ \Delta \kappa_1^* \end{Bmatrix}_{c,k} + \left(\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{r2}^* \\ \Delta \kappa_2^* \end{Bmatrix}_{c,k} - \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{r1}^* \\ \Delta \kappa_1^* \end{Bmatrix}_{c,k} \right) \cdot \frac{x}{l} \quad (6.73)$$

Уврштавањем израза (6.73) у (6.72) и након извршене интеграције, компоненте чворних фиктивних сила су:

$$\begin{Bmatrix} \Delta Q^* \end{Bmatrix}_{c,k} = \begin{Bmatrix} \Delta N_1^* \\ \Delta T_1^* \\ \Delta M_1^* \\ \Delta N_2^* \\ \Delta T_2^* \\ \Delta M_2^* \end{Bmatrix}_{c,k} = -E_{c(k,k-1)} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{A}{2} & -\frac{S}{2} & -\frac{A}{2} & -\frac{S}{2} \\ \frac{S}{l} & \frac{I}{l} & -\frac{S}{l} & -\frac{I}{l} \\ \frac{S}{A} & \frac{I}{S} & 0 & 0 \\ \frac{A}{2} & \frac{S}{2} & \frac{A}{2} & \frac{S}{2} \\ -\frac{S}{l} & -\frac{I}{l} & \frac{S}{l} & \frac{I}{l} \\ 0 & 0 & -S & -I \end{bmatrix}_{c,k} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{r1}^* \\ \Delta \kappa_1^* \\ \Delta \varepsilon_{r2}^* \\ \Delta \kappa_2^* \end{Bmatrix}_{c,k} \quad (6.74)$$

Применом претходног израза фиктивне силе у чворовима 1 и 2 посматраног КЕ су потпуно одређене. Преко статичког момента површине $S_{c,k}$ уводи се утицај висинског положаја бетонског дела (слоја) у односу на референтну осу.

За фиктивне нормалне силе у чворовима КЕ $\Delta N_{1c,k}^*$ и $\Delta N_{2c,k}^*$, примена израза (6.74) даје исти интензитет али супротан смер, тј.:

$$\Delta N_{c,k}^* = -\Delta N_{1c,k}^* = \Delta N_{2c,k}^* \quad (6.75)$$

Може се уочити да је фиктивна нормална сила константна и осредњена дуж посматраног КЕ што је у складу са основним поставкама МКЕ. Ово осредњавање утиче на тачност модела прорачуна. Усвајањем финије поделе конструкције и повећањем броја КЕ повећава се и тачност резултата применом овог прорачунског модела.

Вектор фиктивних сила услед релаксације ПЧ

У складу са основном једначином слојевитог КЕ, вектор прираштаја фиктивних сила услед релаксације ПЧ је:

$$\{\Delta Q^*\}_{p,k} = \int_{V_p} [G]^T \cdot \Delta \bar{\sigma}_{pr,k} dV_p \quad (6.76)$$

Довољна тачност се постиже када се за промену релаксације дуж елемента усвоји линеарна функција по променљивој x :

$$\Delta \bar{\sigma}_{pr,k} = \Delta \bar{\sigma}_{pr1,k} + (\Delta \bar{\sigma}_{pr2,k} - \Delta \bar{\sigma}_{pr1,k}) \cdot \frac{x}{l} \quad (6.77)$$

Уврштавањем израза (6.77) у (6.76) и након интеграције, за чворне фиктивне силе добија се:

$$\{\Delta Q^*\}_{p,k} = \begin{Bmatrix} \Delta N_1^* \\ \Delta T_1^* \\ \Delta M_1^* \\ \Delta N_2^* \\ \Delta T_2^* \\ \Delta M_2^* \end{Bmatrix}_{p,k} = \begin{bmatrix} -\frac{A}{2} & -\frac{A}{2} \\ S & S \\ \frac{l}{l} & -\frac{l}{l} \\ S & 0 \\ A & A \\ \frac{2}{2} & \frac{2}{2} \\ -\frac{S}{l} & \frac{S}{l} \\ 0 & -S \end{bmatrix}_{p,k} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \bar{\sigma}_{pr1} \\ \Delta \bar{\sigma}_{pr2} \end{Bmatrix}_k \quad (6.78)$$

У овом поступку се, преко статичког момента површине $S_{p,k}$, уводи утицај висинског положаја ПЧ у односу на референтну осу. Фиктивне нормалне силе су константне дуж посматраног КЕ што је у складу са усвојеним претпоставкама. Физичка интерпретација појаве фиктивних сила услед релаксације ПЧ је аналогна оној описаној за бетонски део пресека.

Као што је раније написано, аплицирањем негативних вредности укупних унутрашњих сила услед скупљања и течења бетона и релаксације ПЧ, основна једначина слојевитог КЕ у издвојеном интервалу времена је:

$$[K]_k \cdot \{\Delta q_r\}_k = \{\Delta Q\}_k - \{\Delta Q^*\}_{c,k} - \{\Delta Q^*\}_{p,k} \quad (6.79)$$

где матрица крутости успоставља везу између чворних сила и чворних померања. Претходна једначина је уствари систем алгебарских једначина, где су поред еластичних карактеристика материјала уведена и вискозна својства бетона и ПЧ.

Све дисконтинуалне промене се уводе кроз фиктивне интервале времена ($\Delta t_k = 0$). За фиктивне силе се тада добијају нулте вредности. Овај случај је уствари познати систем једначина за КЕ са еластичним карактеристикама материјала:

$$[K]_k \cdot \{\Delta q_r\}_k = \{\Delta Q\}_k \quad (6.80)$$

Кроз интервале времена коначне дужине нема промена спољашњег оптерећења и фигуришу само фиктивне силе. За овај случај основна једначина КЕ се своди на једначину за вискоеластичне материјале:

$$[K]_k \cdot \{\Delta q_r\}_k = -\{\Delta Q^*\}_{c,k} - \{\Delta Q^*\}_{p,k} \quad (6.81)$$

6.3. Мрежа коначних елемената за спрегнути систем

Примена МКЕ подразумева да се конструкција (систем) дели на елементе који формирају мрежу КЕ. Формирање система једначина мреже КЕ захтева претходно формирање основних једначина сваког КЕ.

Положај КЕ зависи од облика конструкције. За постављање једначина равнотеже система неопходно је матрицу крутости и векторе сила за сваки КЕ трансформисати из локалног у глобални координатни систем. Ово превођење се спроводи преко матрице трансформације чији коефицијенти зависе од геометријског положаја локалних координатних система сваког КЕ према усвојеном глобалном координатном систему (синуси и косинуси углова) за укупну конструкцију [109]:

$$[T]_k = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.82)$$

Трансформисани облик неког произвољног вектора $\{u\}$ и матрице $[U]$ из локалног у глобални координатни систем је:

$$\{\bar{u}\} = [T]^T \cdot \{u\} ; [\bar{U}] = [T]^T \cdot [U] \cdot [T] \quad (6.83)$$

У складу са претходним изразима величине (матрични облик) које фигуришу у основној једначини спрегнутог вискоеластичног КЕ након трансформације у глобални координатни систем имају облик:

$$\{\Delta \bar{q}_r\}_k = [T]^T \cdot \{\Delta q_r\}_k \quad (6.84)$$

$$\{\Delta\bar{Q}\}_k = [T]^T \cdot \{\Delta Q\}_k \quad (6.85)$$

$$\{\Delta\bar{Q}^*\}_{c,k} = [T]^T \cdot \{\Delta Q^*\}_{c,k} \quad (6.86)$$

$$\{\Delta\bar{Q}^*\}_{p,k} = [T]^T \cdot \{\Delta Q^*\}_{p,k} \quad (6.87)$$

$$[\bar{K}]_k = [T]^T \cdot [K]_k \cdot [T] \quad (6.88)$$

Основна једначина равнотеже вискоеластичног КЕ (6.58) у глобалном координатном систему сада је:

$$[\bar{K}]_k \cdot \{\Delta\bar{q}_r\}_k = \{\Delta\bar{Q}\}_k - \{\Delta\bar{Q}^*\}_{c,k} - \{\Delta\bar{Q}^*\}_{p,k} \quad (6.89)$$

Једначина равнотеже система (матрични облик) се добија када се матрице крутости и вектори сила из израза (6.89) за сваки КЕ суперпонирају у складу са критеријумом повезаности чворова система, тј. сабирањем доприноса свих КЕ који се сустичу у једном чвору [109].

Постављањем коефицијената матрице крутости и вектора сила сваког КЕ на одговарајуће позиције у матрици крутости, и са векторима сила система, формира се генералисана једначина равнотеже система:

$$[\tilde{K}]_k \cdot \{\Delta\tilde{q}_r\}_k = \{\Delta\tilde{Q}\}_k - \{\Delta\tilde{Q}^*\}_{c,k} - \{\Delta\tilde{Q}^*\}_{p,k} \quad (6.90)$$

Претходном једначином обухваћена су еластична и вискозна својства спрегнутих материјала.

Код дисконтинуалне промене спољашњег оптерећења, тј. за фиктивни интервал времена $\Delta t_k = 0$, компоненте вектора чворних спољашњих сила $\{\Delta\tilde{Q}\}_k$ представљају коначне вредности, док су компоненте вектора фиктивних сила $\{\Delta\tilde{Q}^*\}_{c,k}$ и $\{\Delta\tilde{Q}^*\}_{p,k}$ једнаке нули. При томе основна једначина (6.90) прелази у познату једначину система МКЕ за еластичне материјале:

$$[\tilde{K}]_k \cdot \{\Delta\tilde{q}_r\}_k = \{\Delta\tilde{Q}\}_k \quad (6.91)$$

За k -ти интервал времена коначне дужине, нема промене спољашњег оптерећења $\{\Delta\tilde{Q}\}_k$, тако да у тим случајевима у чворовима делују само фиктивне силе услед реологије бетона и ПЧ, тј. $\{\Delta\tilde{Q}^*\}_{c,k}$ и $\{\Delta\tilde{Q}^*\}_{p,k}$. Тада генералисани облик основне једначине система МКЕ (6.90) прелази у једначину за вискоеластичне материјале:

$$[\tilde{K}]_k \cdot \{\Delta\tilde{q}_r\}_k = -\{\Delta\tilde{Q}^*\}_{c,k} - \{\Delta\tilde{Q}^*\}_{p,k} \quad (6.92)$$

У претходним изразима $\{\Delta\tilde{q}_r\}_k$ представља вектор непознатих померања чворних тачака на референтним осама r усвојене мреже КЕ у текућем интервалу времена Δt_k .

Матрица $[\tilde{K}]_k$ представља матрицу крутости целокупне конструкције у текућем интервалу времена Δt_k чији чланови се добијају сумирањем одговарајућих коефицијената матрице крутости свих КЕ који се сустичу у једном чвору.

Компоненте вектора чворних спољашњих сила $\{\Delta\tilde{Q}\}_k$ представљају задате силе у чворовима и/или збир сила свих КЕ који се сустичу у једном чвору, а које су претходно трансформисане из поља елемената у чворове тих елемената и из локалног у глобални координатни систем.

Познато је да се код МКЕ спољашње силе уносе у једначину конструкције као силе у чворовима за глобални координатни систем. Код задатих концентрисаних сила уобичајено је да се бирају чворови мреже КЕ у нападним тачкама тих сила. При томе се подразумева да се силе разлажу на компоненте у складу са смеровима оса глобалног координатног система. Код неоптерећених чворова силе су једнаке нули и тако се и уносе у систем једначина.

Код оптерећења по јединици дужине штапа (подељено оптерећење), као што је раније поменуто, оптерећење поља елемента се замењује еквивалентним компонентама сила у чворовима КЕ (пример са [слике 6.3.](#)). И ове силе захтевају трансформацију у глобални координатни систем и сумирање свих компонената у једном (заједничком) чвору.

Треба имати у виду да моменте савијања у чворовима система (ΔM_1 и ΔM_2), као допринос континуалног оптерећења које делује у пољу неког елемента, треба разликовати од евентуално стварно задатих концентрисаних момената у чворовима ΔM . Наиме, дио момената од подељеног оптерећења (ΔM_1 и ΔM_2), који стварно не делују, на крају прорачуна за текући интервал времена треба одузети, односно одузети кривину пресека изазвану овим моментима.

Вектори фиктивних сила за систем $\{\Delta\tilde{Q}^*\}_{c,k}$ и $\{\Delta\tilde{Q}^*\}_{p,k}$, преко којих се уводи допринос скупљања и течења бетона и релаксације ПЧ, захтевају детаљнију анализу.

6.4. Вектор фиктивних сила за систем

Као што је поменуто, скупљање и течења бетона и релаксација ПЧ се уводе преко вектора фиктивних сила за спрегнути систем $\{\Delta\tilde{Q}^*\}_{c,k}$ и $\{\Delta\tilde{Q}^*\}_{p,k}$, с тим да су претходно одређени вектори ових сила за све КЕ у локалном координатном систему, те да су након трансформације у глобални систем сумирани они чланови вектора појединих КЕ који припадају истом чвору.

Одређивању ових сила претходи одређивање вектора чворних слободних деформација бетонског дела сваког КЕ у текућем интервалу времена Δt_k (5.2):

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_r^* \\ \Delta\kappa^* \end{Bmatrix}_{c,k} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{E_{c(k,i-1)}} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\alpha_r \\ \Delta\beta \end{Bmatrix}_{c,i} + \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_n \\ 0 \end{Bmatrix}_{c,k} \quad (6.93)$$

Све величине су познате из претходних корака прорачуна, а овај поступак је раније детаљно изложен. Када се срачунају слободне деформације бетона, у следећем кораку се одређују фиктивне силе применом раније изведене релације (6.74) по МКЕ:

$$\begin{Bmatrix} \Delta Q^* \end{Bmatrix}_{c,k} = \begin{Bmatrix} \Delta N_1^* \\ \Delta T_1^* \\ \Delta M_1^* \\ \Delta N_2^* \\ \Delta T_2^* \\ \Delta M_2^* \end{Bmatrix}_{c,k} = -E_{c(k,k-1)} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{A}{2} & -\frac{S}{2} & -\frac{A}{2} & -\frac{S}{2} \\ S & I & S & I \\ \frac{l}{l} & \frac{l}{l} & -\frac{l}{l} & -\frac{l}{l} \\ S & I & 0 & 0 \\ A & S & A & S \\ \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} \\ -\frac{S}{l} & -\frac{I}{l} & \frac{S}{l} & \frac{I}{l} \\ 0 & 0 & -S & -I \end{bmatrix}_{c,k} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{r1}^* \\ \Delta\kappa_1^* \\ \Delta\varepsilon_{r2}^* \\ \Delta\kappa_2^* \end{Bmatrix}_{c,k} \quad (6.94)$$

За сваки КЕ који садржи слој ПЧ потребно је одредити промену редуковане релаксације $\Delta\bar{\sigma}_{pr,k}$ у чворовима (5.5), а потом компоненте вектора чворних фиктивних сила спрегнутог система (6.78). Ови изрази су кроз раније извођење детаљније објашњени те се овде њима неће поклањати додатна пажња:

$$\Delta\bar{\sigma}_{pr,k} = -\rho_{p,k} \cdot E_p \cdot \Delta\varepsilon_{p,k} \quad (6.95)$$

$$\{\Delta Q^*\}_{p,k} = \begin{Bmatrix} \Delta N_1^* \\ \Delta T_1^* \\ \Delta M_1^* \\ \Delta N_2^* \\ \Delta T_2^* \\ \Delta M_2^* \end{Bmatrix}_{p,k} = \begin{bmatrix} -\frac{A}{2} & -\frac{A}{2} \\ S & S \\ \frac{l}{l} & -\frac{l}{l} \\ S & 0 \\ \frac{A}{2} & \frac{A}{2} \\ -\frac{S}{l} & \frac{S}{l} \\ 0 & -S \end{bmatrix}_{p,k} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \bar{\sigma}_{pr1} \\ \Delta \bar{\sigma}_{pr2} \end{Bmatrix}_k \quad (6.96)$$

При срачунавању компонената вектора фиктивних сила услед течења и скупљања бетона и релаксације ПЧ, применом израза (6.94) и (6.96), за сваки КЕ задовољени су услови равнотеже што је у складу са теоријом конструкција и МКЕ. При томе се мисли на равнотежу нормалних и трансверзалних сила и момената савијања за сваки издвојени КЕ. Овим се добија константна фиктивна нормална сила дуж посматраног КЕ иако стварна фиктивна нормална сила, за општи случај сложеног савијања, најчешће није константна дуж КЕ, чиме се уствари у прорачун уноси одређена грешка. Ова грешка је мања за финију поделу конструкције, а резултати за потребе инжењерске праксе, у случају довољне дискретизације конструкције, могу бити сасвим задовољавајући.

Пошто се применом израза (6.94) и (6.96) директно добијају осредњене вредности нормалних фиктивних сила, стварне вредности ових сила, за општи случај сложеног савијања, остају непознате (слика 6.4 и 6.5), тј. непозната је њихова расподела дуж посматраног КЕ или КЕ у низу (пример просте греде на слици 6.6), што ће касније бити детаљније изложено. Међутим, као што је већ наведено, нужно је конструкцију правилно изделити на већи број КЕ чиме се поменуте грешке умањују. Уствари, нужно је постићи да дијаграм фиктивних аксијалних сила, у облику степенасте полигоналне линије (без нагиба) за КЕ у низу, буде еквивалентан стварном дијаграму у облику нагнуте линије, тј. да полигонална линија са скоковитим променама на местима спајања КЕ што реалније прати нагнуту континуалну линију.

Међутим, увођење већег броја КЕ захтева знатно више улазних параметара и није за свакодневну инжењерску употребу. Да би се овај проблем превазишао овде је развијен побољшани прорачунски модел којим се добија задовољавајућа тачност резултата и без повећања броја КЕ у низу.

6.4.1. Побољшани прорачунски модел

Овде је даље развијен побољшани модел којим се може повећати тачност прорачуна без битног повећања броја КЕ у низу.

Овај побољшани модел захтева да се прво срачунају стварне фиктивне нормалне силе (слика 6.4 и 6.5) за сваки КЕ, а не осредњене применом изведених матричних образаца (6.94) и (6.96) по МКЕ.

Треба имати у виду да за општи случај сложеног савијања промена нормалне силе дуж КЕ не испуњава потребан услов равнотеже, онако како захтева МКЕ. Због тога је нужно извршити осредњавање фиктивних нормалних сила и као такве их уводити у следећи корак прорачуна. Из осредњених аксијалних фиктивних сила срачунава се осредњена дилатација, а након прорачуна у текућем кораку, потребно је увести поправку дијаграма у чворовима, тј. спровести обрнути поступак осредњавању (слика 6.4 и 6.5). Овим поступком се битно повећава тачност прорачуна, а да при томе није неопходно конструкцију делити на већи број КЕ.

Стварне вредности фиктивних нормалних сила у чворовима КЕ се могу добити из израза (6.94) када се искључи утицај компонената деформација једног чвора на суседни, тј. када одговарајући коефицијенти матрице крутости поприме нулте вредности:

$$\{\Delta Q^*\}_{c,k} = \begin{Bmatrix} \Delta N_1^* \\ \Delta T_1^* \\ \Delta M_1^* \\ \Delta N_2^* \\ \Delta T_2^* \\ \Delta M_2^* \end{Bmatrix}_{c,k} = -E_{c(k,k-1)} \cdot \begin{bmatrix} -A & -S & 0 & 0 \\ S & I & -S & -I \\ \bar{l} & \bar{l} & -\bar{l} & -\bar{l} \\ S & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & S \\ -S & -I & S & I \\ 0 & 0 & -S & -I \end{bmatrix}_{c,k} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{T1}^* \\ \Delta \kappa_1^* \\ \Delta \varepsilon_{T2}^* \\ \Delta \kappa_2^* \end{Bmatrix}_{c,k} \quad (6.97)$$

У овом случају, услов равнотеже КЕ у подужном правцу, са фиктивним нормалним силама одређеним из (6.97), није испуњен, те се са вредностима тих сила не може даље улазити у МКЕ. Да би услов равнотеже био задовољен, у следећем кораку поступка, нужно је извршити осредњавање фиктивне нормалне силе за сваки КЕ (слика 6.4):

$$\Delta N_{1c,k}^* = -\Delta N_{2c,k}^* = \frac{(\Delta N_{N1c}^* - \Delta N_{N2c}^*)_k}{2} \quad (6.98)$$

Да би се повећала тачност крајњих резултата и за системе са мањим бројем КЕ, на осредњени дијаграм, при срачунавању дилатације за

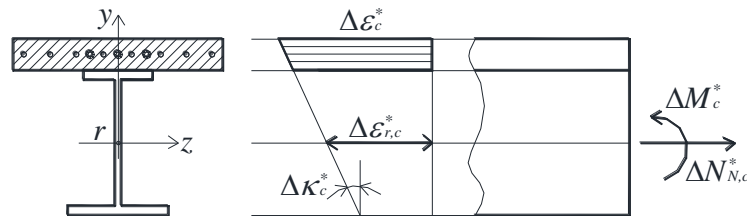
текући интервал времена, треба додати (или одузети) прираст дилатације $\Delta\varepsilon_{N,k}$ за сваки КЕ (слика 6.4 и 6.5е):

$$\Delta\varepsilon_{N,k} = \frac{1}{E_r A_k} \cdot \left(\frac{\Delta N_{N1}^* + \Delta N_{N2}^*}{2} \right)_k \quad (6.99)$$

На овај начин се поново формира нагнути дијаграм што доводи до задовољавајуће тачности за уобичајене проблеме у пракси.

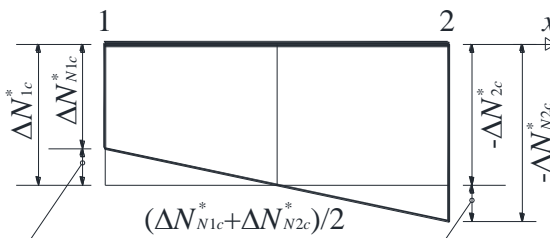
За илустрацију модела узет је **пример спрегнуте просте греде** константног попречног пресека (слика 6.6). Греда је подељена на коначне елементе у низу, а оптерећена је једном попречном силом у средини (слика 6.6а). Дијаграм момената савијања, одређен према линеарној теорији I реда, од задатог оптерећења, је троугаоног облика са нагибима катета према средини греде (слика 6.6б).

У другом интервалу времена, применом израза (4), срачунавају се слободне деформације бетонског дела пресека за све КЕ (слика 6.4). Надаље се, из израза (6.97), одређују фиктивне силе у чворовима КЕ (слика 6.6ц и 6.6д). Ове фиктивне силе су редуковане на референтну осу пресека и прате облик дијаграма момената савијања, тј. дијаграми су такође троугаоног облика са нагибима катета ка средини греде.



Сл. 6.4 – Фиктивне силе у пресеку

Fig. 6.4 – Cross-section of fictive forces



Сл. 6.5 – Фиктивне аксијалне силе КЕ (стварне и осредњене)

Fig. 6.5 – Fictive axial forces of finite element (real and average)

Може се констатовати да, за узети пример, у неком издвојеном КЕ фиктивна нормална сила није константна и да за такав КЕ није задовољен услов равнотеже у подужном правцу, а примена МКЕ у основи захтева да и поменути услов буде испуњен за сваки КЕ.

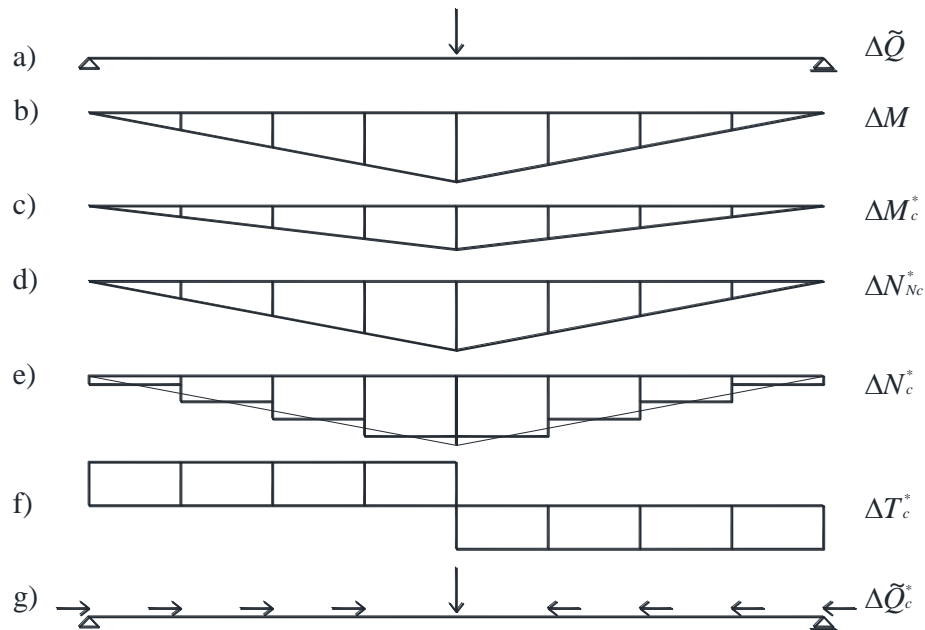
У другом интервалу времена, за посматрани пример, сабирањем сила које припадају истом чвору, фиктивне нормалне силе се анулирају, јер су за чворни пресек два суседна КЕ ове силе истог интензитета а супротног смера (слика 6.6д). Ово указује да би даља примена МКЕ довела до одређене грешке, јер фиктивне нормалне силе не би биле уведене у прорачун и њихов допринос напрезању не би био укључен.

Сабирањем фиктивних момената савијања у заједничком чвору два суседна КЕ, такође доводи до нулте резултате, јер су ти моменти истог интензитета а супротног смера (слика 6.6ц). Међутим, ово анулирање је само привидно, јер се моменти уравнотежују фиктивним попречним силама, те се адекватно уводе у следећи корак прорачуна (слика 6.6ф).

Поново се наглашава да применом изворног облика изведених израза за МКЕ у сумарне напоне и деформације не би био уведен допринос фиктивних аксијалних сила. Ово би у неким случајевима, као што је случај на илустрованом примеру, довело до знатнијег одступања резултата прорачуна.

Према усвојеном моделу МКЕ, сваки издвојени КЕ не може имати променљиву нормалну силу, јер у том случају не би био задовољен услов равнотеже у подужном правцу. Зато је потребно извршити осредњавање аксијалних сила према изразу (6.98), што даље доводи до замењујућег степенастог дијаграма ових сила (слика 6.6е). У наредном прорачунском кораку сумирањем овако формираних фиктивних аксијалних сила у чворовима мреже КЕ (слика 6.6г) добијају се вредности различите од нуле. За посматрани пример то је уствари разлика сила у чворовима јер су у једном чвору два суседна КЕ ове силе супротног смера а различитог интензитета. Сумирањем разлика дуж греде постижу се потребне вредности за аксијалне силе у облику степенастог дијаграма. Овим се допринос утицаја од фиктивних аксијалних сила адекватно уводи у даљи поступак прорачуна.

На крају прорачуна за текући интервал времена на осредњени дијаграм треба додати (или одузети) део аксијалне силе, односно прираст дилатације $\Delta \varepsilon_{N,k}$ коју та сила производи за сваки КЕ (слика 6.5 и 6.6е) чиме се степенести дијаграм „враћа“ у нагнути праволинијски. Овај поступак доводи до побољшања и задовољавајуће тачности резултата прорачуна.



Сл. 6.6 – Фиктивне силе спрегнуте просте греде
 Fig. 6.6 – Fictive forces of composite simply supported beam

Аналогни поступак као код израза (6.97) примењује се и на вектор $\{\Delta Q^*\}_{p,k}$, услед релаксације ПЧ, тј. прво се одређују компоненте вектора фиктивних сила сваког КЕ, где се искључује утицај једног чвора на други, а затим се аксијална компонента осредњава, да би се крају прорачунског корака извршио обрнути поступак осредњавању:

$$\{\Delta Q^*\}_{p,k} = \begin{Bmatrix} \Delta N_{1p}^* \\ \Delta T_{1p}^* \\ \Delta M_{1p}^* \\ \Delta N_{2p}^* \\ \Delta T_{2p}^* \\ \Delta M_{2p}^* \end{Bmatrix}_{p,k} = \begin{bmatrix} -\frac{A}{2} & 0 \\ S & -\frac{S}{l} \\ \frac{S}{l} & 0 \\ 0 & \frac{A}{2} \\ 0 & \frac{S}{l} \\ -\frac{S}{l} & \frac{S}{l} \\ 0 & -S \end{bmatrix}_{p,k} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \bar{\sigma}_{pr1} \\ \Delta \bar{\sigma}_{pr2} \end{Bmatrix}_k \quad (6.100)$$

$$\Delta N_{1p,k}^* = -\Delta N_{2p,k}^* = \frac{(\Delta N_{N1p}^* - \Delta N_{N2p}^*)_k}{2} \quad (6.101)$$

$$\Delta \varepsilon_{N,k} = \frac{1}{E_r A_k} \cdot \left(\frac{\Delta N_{N1}^* + \Delta N_{N2}^*}{2} \right)_k \quad (6.102)$$

Овако спроведен поступак прорачуна доводи до побољшања и задовољавајуће тачности резултата и када је у питању допринос ПЧ у спрегнутом систему.

6.5. Стање напона и деформација спрегнутих система

Генералисана једначина равнотеже спрегнутог система, изведена раније (6.58), представља уствари систем алгебарских једначина којим су у општем случају обухваћена еластична и вискозна својства спрегнутих материјала:

$$[\tilde{K}]_k \cdot \{\Delta \tilde{q}_r\}_k = \{\Delta \tilde{Q}\}_k - \{\Delta \tilde{Q}^*\}_{c,k} - \{\Delta \tilde{Q}^*\}_{p,k} \quad (6.103)$$

Овај систем захтева да се у текућем интервалу времена Δt_k , у општем случају, на раније описан начин, формира матрица крутости $[\tilde{K}]_k$ и вектори сила у чворовима: стварних $\{\Delta \tilde{Q}\}_k$ и фиктивних бетонског дела $\{\Delta \tilde{Q}^*\}_{c,k}$ и дела ПЧ $\{\Delta \tilde{Q}^*\}_{p,k}$.

Решење генералисаног система се тражи у виду одређивања вектора померања чворних тачака $\{\Delta \tilde{q}_r\}_k$ уз претходну инверзију матрице крутости:

$$\{\Delta \tilde{q}_r\}_k = [\tilde{K}]_k^{-1} \cdot (\{\Delta \tilde{Q}\}_k - \{\Delta \tilde{Q}^*\}_{c,k} - \{\Delta \tilde{Q}^*\}_{p,k}) \quad (6.104)$$

Међутим, да би систем био решив, потребно је претходно увести граничне услове по померањима и/или силама и из система елиминисати познате услове, јер је матрица крутости сингуларна. Раздвајањем система једначина на два подсистема увек се могу израчунати све непознате компоненте померања и непознате компоненте сила (реакција), чиме је проблем статички решен.

Компоненталне деформација посматраног КЕ се могу одредити након издвајања вектора померања за његове чворне тачке. Ова померања треба даље трансформисати из глобалног у локални координатни систем [109]:

$$\{\Delta q_r\}_k = [T] \cdot \{\Delta \bar{q}_r\}_k \quad (6.105)$$

Параметри промене деформација КЕ се срачунавају применом израза (6.26). Ако је у поступку прорачуна спољашње подељено оптерећење елемента уведено преко еквивалентних чворних сила, према изразу (6.69), где су уведени моменти ΔM_M који реално не постоје, и ако је вршено осредњавање фиктивних нормалних сила ΔN_N , у израз (6.26) треба увести део деформације $\Delta \varepsilon_{N,k}$ и део кривине $\Delta \kappa_{M,k}$ тј.:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix}_k = [B_r] \cdot \{\Delta q_r\}_k + \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_N \\ -\Delta \kappa_M \end{Bmatrix}_k \quad (6.106)$$

Претходни израз је дат у генерализаном облику и уколико у њему не фигуришу $\Delta \varepsilon_{N,k}$ и $\Delta \kappa_{M,k}$ једначина се своди на основни облик дат изразом (6.26), тј.:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix}_k = [B_r] \cdot \{\Delta q_r\}_k \quad (6.107)$$

Уколико се референтна оса КЕ бира тако да се поклапа са положајем идеализованог тежишта $T_{i,k}$ тада је тај положај променљив за сваки интервал времена. Међутим, овакво бирање има смисла јер су матрице поједностављене. Да би се избегло меморисање свих ових положаја погодна је компоненте деформације, за сваки део (слој) пресека, пројектовати на одабрану фиксну осу. На тај начин је знатно олакшан прорачун фиктивних сила за наредни интервал, уз суперпозицију стања текућег са претходним интервалима. У супротном не би било могуће сумирати претходна и текућа стања. Ако се за сваки део пресека m , ($m=c,a,s,p$), фиксна оса поклапа са сопственом тежишном осом T_m , трансформација параметара деформација са идеализованог тежишта $T_{i,k}$ на фиксна тежишта T_m дата је следећим изразом:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{T_m} \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & y_{T_m} - y_{T_{i,k}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_T \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix}_k ; m = c,a,s,p \quad (6.108)$$

Срачунати параметри промене деформација у попречном пресеку спрегнутог КЕ, сагласно претпоставци о једнакости деформација, важе за све делове пресека. Међутим, напони се морају одређивати посебно за сваки део пресека при чему се користе дати инкрементални облици везе напон-деформација за поједине материјале. Прираштаји напона за бетонски део пресека, КЧ, ПЧ и МЧ дати су изразима (4.21), (4.30), (4.36) и (4.37), респективно, с тим што је погодније користити матричне облике, тј. изразе (5.1), (5.4), (5.6) и (5.7). Напони по висини појединих делова пресека (слојева) линеарно се мењају, док се због различитих физичких карактеристика материјала на контактима слојева јављају скокови.

Параметри укупних напона и деформација, за дискретни тренутак времена t_k , одређују се суперпозицијом претходног стања и промене стања у текућем интервалу времена (*step-by-step*):

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{T_m} \\ \beta \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \alpha_{T_m} \\ \beta \end{Bmatrix}_{k-1} + \begin{Bmatrix} \Delta\alpha_{T_m} \\ \Delta\beta \end{Bmatrix}_k \quad (6.109)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{T_m} \\ \kappa \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{T_m} \\ \kappa \end{Bmatrix}_{k-1} + \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{T_m} \\ \Delta\kappa \end{Bmatrix}_k ; m = c, a, s, p \quad (6.110)$$

За делове (слојеве) пресека који су истовремено укључени у напонски активне делове, у линији спрезања нема скоковите промене укупне дилатације. Међутим, како приказани алгоритам, зависно од технолошког поступка, подржава и накнадна укључења појединих делова пресека тада се код укупне дилатације на контактима слојева могу јавити скокови. Развијени поступак прорачуна је аутоматизован, јер је од стране аутора развијен рачунарски програм ВАСКЕЛ којим се на једноставан начин могу решавати уобичајени проблеми у инжењерској пракси.

6.6. Специјални случајеви

Чест случај у инжењерској пракси је да се прорачун напонско-деформационог стања СК спроводи за два карактеристична тренутка времена - почетни (t_0) и крајњи (t_∞). При томе се уобичајено усваја константан модул еластичности бетона:

$$E_{c(t_\infty)} = E_{c(t_0)} = E_c = const. \quad (6.111)$$

У почетном тренутку (t_0) се обухвата грађење и оптерећивање СК, док се за крајњи тренутак (t_∞) врши прорачун граничних стања употребљивости са ефектима реологије бетона и ПЧ.

Овакав случај у оквиру приказаног модела прорачуна, где се користе инкрементални облици израза, захтева формирање два интервала времена - првог фиктивног ($\Delta t_1 = t_1 - t_0 = 0$) и другог коначног ($\Delta t_2 = t_2 - t_1 = \infty$), односно потребно је формирати три дискретна тренутка (t_0, t_1 и t_2).

Конститутивна релација напон-деформација за бетон (изведена раније) (5.1), за референтну осу r и k -ти интервал времена ($\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$) је:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\alpha_r \\ \Delta\beta \end{Bmatrix}_{c(t_k, t_{k-1})} = E_{c(k, k-1)} \cdot \left(\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_r \\ \Delta\kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_r^* \\ \Delta\kappa^* \end{Bmatrix} \right)_{c(t_k, t_{k-1})} \quad (6.112)$$

с тим да је вектор промене слободних деформација бетона изведен у облику:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r^* \\ \Delta \kappa^* \end{Bmatrix}_{c(t_k, t_{k-1})} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{E_{c(k,i-1)}^*} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \alpha_r \\ \Delta \beta \end{Bmatrix}_{c(t_i, t_{i-1})} + \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_n \\ 0 \end{Bmatrix}_{c(t_k, t_{k-1})} \quad (6.113)$$

где је:

- $E_{c(k,k-1)}$ генералисани фиктивни модул деформације бетона,
- $E_{c(k,i-1)}^*$ изведени фиктивни модул деформације бетона.

Ови фиктивни модули деформације зависе од примењеног типа нумеричке интеграције за усвојену функцију течења бетона, односно од примењене алгебарске везе напон-деформација. Они су у међусобном односу према следећем изразу:

$$\frac{1}{E_{c(k,i-1)}^*} = \frac{1}{E_{c(k,i-1)}} - \frac{1}{E_{c(k-1,i-1)}} \quad (6.114)$$

За овај пример, анализиран развијеним општим моделом прорачуна, напони и деформације за почетни дискретни тренутак t_0 су једнаки нули:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \beta \end{Bmatrix}_{c(t_0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \kappa \end{Bmatrix}_{c(t_0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^* \\ \kappa^* \end{Bmatrix}_{c(t_0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.115)$$

За први фиктивни интервал времена ($\Delta t_1 = t_1 - t_0 = 0$), у којем се одвијају тренутне промене, веза напон-деформација је линеарноеластична, док су слободне деформације бетона једнаке нули:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \alpha_r \\ \Delta \beta \end{Bmatrix}_{c(t_1, t_0)} = E_{c(t_1, t_0)} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix}_{c(t_1, t_0)} = E_c \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix}_{c(t_1, t_0)} \quad (6.116)$$

Из претходне једначине, за срачунате вредности тренутних еластичних деформација, одређују се напони за први фиктивни интервал времена. Генералисани фиктивни модул деформације $E_{c(t_1, t_0)}$ одговара почетном модулу еластичности бетона E_c .

Параметри укупних напона и деформација, за дискретни тренутак времена t_1 , у складу са (6.109) и (6.110) су:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \kappa \end{Bmatrix}_{c(t_1)} = \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix}_{c(t_1, t_0)} \quad (6.117)$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \beta \end{Bmatrix}_{c(t_1)} = \begin{Bmatrix} \Delta \alpha_r \\ \Delta \beta \end{Bmatrix}_{c(t_1, t_0)} = E_c \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \kappa \end{Bmatrix}_{c(t_1)} \quad (6.118)$$

За други коначни интервал времена ($\Delta t_2 = t_2 - t_1 = \infty$) једначине су:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \alpha_r \\ \Delta \beta \end{Bmatrix}_{c(t_2, t_1)} = E_{c(t_2, t_1)} \cdot \left(\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r^* \\ \Delta \kappa^* \end{Bmatrix} \right)_{c(t_2, t_1)} \quad (6.119)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r^* \\ \Delta \kappa^* \end{Bmatrix}_{c(t_2, t_1)} = \frac{1}{E_{c(t_2, t_0)}} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \alpha_r \\ \Delta \beta \end{Bmatrix}_{c(t_1, t_0)} + \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_n \\ 0 \end{Bmatrix}_{c(t_2, t_1)} = \frac{1}{E_{c(t_2, t_0)}} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \beta \end{Bmatrix}_{c(t_1)} + \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_n \\ 0 \end{Bmatrix}_{c(t_2, t_1)} \quad (6.120)$$

У општем случају фиктивни модул деформације је реципрочна вредност функције течења бетона (4.3). Неопходно је усвојити математички облик функције течења бетона према неком од предлога, где се уобичајено течење уводи преко бездимензионалног коефицијента $\varphi(t, \tau)$, који се најчешће даје у техничким прописима појединих земаља.

Коефицијенти течења бетона за фиктивне интервале времена су једнаки нули, јер се течење бетона не одвија у тим интервалима. Генералисани и изведени фиктивни модули деформације бетона за поједине методе нумеричке интеграције или алгебарске везе за овај пример су:

- 1) Правоугаоно правило нумеричке интеграције (метода фиктивног модула еластичности - ЕМ метода):

$$E_{c(t_2, t_1)} = \frac{E_c}{1 + \varphi_{(t_2, t_1)}} \quad ; \quad \frac{1}{E_{c(t_2, t_0)}} = \frac{1}{E_{c(t_2, t_0)}} - \frac{1}{E_{c(t_1, t_0)}} = \frac{\varphi_{(t_2, t_0)}}{E_c} \quad (6.121)$$

- 2) Трапезно правило нумеричке интеграције (метода средњег напона - МС метода):

$$E_{c(t_2, t_1)} = \frac{E_c}{1 + \varphi_{(t_2, t_1)} / 2} \quad ; \quad \frac{1}{E_{c(t_2, t_0)}} = \frac{1}{E_{c(t_2, t_0)}} - \frac{1}{E_{c(t_1, t_0)}} = \frac{\varphi_{(t_2, t_0)}}{E_c} \quad (6.122)$$

- 3) Модификована метода фиктивног модула еластичности - ААЕМ метода:

$$E_{c(t_2, t_1)} = \frac{E_c}{1 + \chi_{(t_2, t_1)} \cdot \varphi_{(t_2, t_1)}} \quad ; \quad \frac{1}{E_{c(t_2, t_0)}} = \frac{1}{E_{c(t_2, t_0)}} - \frac{1}{E_{c(t_1, t_0)}} = \frac{\varphi_{(t_2, t_0)}}{E_c} \quad (6.123)$$

Када се уведу одговарајуће смене, те уз нулте вредности коефицијента течења бетона за фиктивни (први) интервал времена, слободне деформације су:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_r^* \\ \Delta \kappa^* \end{Bmatrix}_{c(t_2, t_1)} = \frac{\varphi_{(t_2, t_0)}}{E_c} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \beta \end{Bmatrix}_{c(t_1)} + \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_n \\ 0 \end{Bmatrix}_{c(t_2, t_1)} = \varphi_{(t_2, t_0)} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \kappa \end{Bmatrix}_{c(t_1)} + \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_n \\ 0 \end{Bmatrix}_{c(t_2, t_1)} \quad (6.124)$$

Аналогно изразу (6.124) вектор слободних померања бетона у складу са изразом (6.26) и (6.30) је:

$$\{\Delta q^*\}_{c(t_2, t_1)} = \varphi_{(t_2, t_0)} \cdot \{q\}_{c(t_1)} + \{\Delta q_n\}_{c(t_2, t_1)} \quad (6.125)$$

где је $\{q\}_{c(t_1)}$ вектор померања чворних тачака КЕ у тренутку t_1 , а $\{\Delta q_n\}_{c(t_2, t_1)}$ вектор прираштаја померања тих тачака услед скупљања бетона у интервалу $\Delta t_2 = t_2 - t_1$.

Сада се вектор прираштаја чворних фиктивних сила КЕ може писати у облику производа матрице крутости и вектора слободних померања бетона:

$$\{\Delta Q^*\}_{c(t_2, t_1)} = -[K]_{c(t_2, t_1)} \cdot \{\Delta q^*\}_{c(t_2, t_1)} \quad (6.126)$$

Ако се нпр. за бетон користи ААЕМ-метода онда се за матрице крутости КЕ може писати:

$$[K]_{c(t_2, t_1)} = \frac{1}{1 + \chi_{(t_2, t_1)} \cdot \varphi_{(t_2, t_1)}} \cdot [K]_{c(t_1)} \quad (6.127)$$

Једначина (6.126) уз одговарајуће смене добија облик:

$$\{\Delta Q^*\}_{c(t_2, t_1)} = -\frac{\varphi_{(t_2, t_0)}}{1 + \chi_{(t_2, t_1)} \cdot \varphi_{(t_2, t_1)}} \cdot [K]_{c(t_1)} \cdot \{q\}_{c(t_1)} - [K]_{c(t_2, t_1)} \{\Delta q_n\}_{c(t_2, t_1)} \cdot \quad (6.128)$$

или написано краће:

$$\{\Delta Q^*\}_{c(t_2, t_1)} = -\psi \cdot [Q]_{c(t_1)} - \{\Delta Q_n\}_{c(t_2, t_1)} \cdot \quad (6.129)$$

где је вектор чворних спољашњих сила које делују у фиктивном (првом) интервалу времена:

$$[Q]_{c(t_1)} = [K]_{c(t_1)} \cdot \{q\}_{c(t_1)} \quad (6.130)$$

а вектор чворних сила услед скупљања бетона је:

$$\{\Delta Q_n\}_{c(t_2, t_1)} = [K]_{c(t_2, t_1)} \cdot \{\Delta q_n\}_{c(t_2, t_1)} \quad (6.131)$$

Бездимензионални коефицијент ψ има облик:

$$\psi = \frac{\varphi_{(t_2, t_0)}}{1 + \chi_{(t_2, t_1)} \cdot \varphi_{(t_2, t_1)}} \quad (6.132)$$

Израз (6.130) представља основну једначину КЕ за бетон по теорији еластичности.

У другом (коначном) интервалу времена нема промене спољашњег оптерећења, па је основна једначину КЕ за бетон по теорији вискоеластичности:

$$[K]_{c(t_2, t_1)} \cdot \{\Delta q\}_{c(t_2, t_1)} = \psi \cdot [Q]_{c(t_1)} + [\Delta Q_n]_{c(t_2, t_1)} \quad (6.133)$$

Ако се занемари скупљање бетона израз постаје:

$$[K]_{c(t_2, t_1)} \cdot \{\Delta q\}_{c(t_2, t_1)} = \psi \cdot [Q]_{c(t_1)} \quad (6.134)$$

Поступак решења проблема се своди на срачунавање еластичног стања за први (фиктивни) интервал времена, а затим се, уз одређивање коефицијента ψ и корекцију матрице крутости $[K]_{c(t_2, t_1)}$, за крајњи (други) интервал, задатак поново решава.

Код спрегнутог КЕ челик-бетон поставља се питање на који начин узети параметре при одређивању чворних сила. Нужно је извршити расподелу оптерећења по слојевима, те део који припада бетонском слоју укључити у прорачун вискозног доприноса у текућем интервалу. Ова расподела се може приближно одредити према крутости појединих слојева у пресеку.

Претходна илустрација је показала одређену аналогију прорачуна еластичног и вискозног стања. Међутим, за тачније прорачунске анализе по МКЕ потребно је користити развијени модел прорачуна приказан у поглављу 6.2-6.5.

7. ПОГЛАВЉЕ

НУМЕРИЧКИ ПРИМЕРИ И АНАЛИЗА РЕЗУЛТАТА

Да би се илустровала примена приказаног модела прорачуна, извршила верификација поступка, те указало на ефекте дуготрајних деформација услед реологије материјала, урађено је неколико примера који су подељени у три групе:

- 1) провера модела на примерима из литературе,
- 2) прорачун понашања високих зграда,
- 3) прорачун понашања viseћих мостова са кабловима.

У прву групу спадају примери преузети из релевантне литературе и они представљају основу за поуздану контролу тачности овде развијеног модела прорачуна и софтверског пакета. Поред тога кроз ове примере је указано на значајан допринос промени напрезања у спрегнутим носачима током времена услед реологије бетона и високовредног челика.

На примеру прорачуна понашања високих зграда показан је, често у пракси занемариван, допринос деформисања вертикалних носећих елемената (стубова и зидова) током времена, што првенствено изазива различита скраћења бетонских и/или челичних стубова у односу на крута бетонска језгра. Ова различита скраћења током времена доприносе прерасподели напрезања, нагињању таваница и објекта у целини, угрожавању секундарних елемената, инсталација и опреме и слично. Овакве промене могу утицати на стабилност, поузданост, функционалност и употребљивост елемената и/или објекта у целини.

Пример из треће групе се односи на завешене мостовске конструкције осетљиве на временске деформације изазване

реологијом бетона и високовредног челика. Кроз анализирани пример је указано на промене угиба и момената савијања распонске конструкције моста током времена као допринос ефеката скупљања и течења бетона.

На крају је дата коначна верификација и оцена поузданости овде развијеног модела за прорачун спрегнутих конструкција (СК). Такође је наглашена потреба за детаљнијим прорачунским анализама, како за нове СК, тако и за оне које су у дугогодишњој употреби.

7.1. Провера модела на примерима из литературе

Пример 1 – Континуална спрегнута греда моста 60+90+60 m

Да би се илустровала примена развијеног прорачунског модела узет је пример континуалне спрегнуте греде моста, распона $L=60+90+60$ m, из књиге М. Ђурића [25]. Изглед распонске греде, положај бетонског меког челика - арматуре (МЧ) и преднапрегнутог челика - каблова (ПЧ), као и дистрибуција сила претходног напрезања дуж греде дати су на слици 7.1. Облик попречног пресека, подаци за бетонску плочу и висински положај МЧ и ПЧ у карактеристичном попречном пресеку дати су на слици 7.2. Челични лимени носач у пресецима j ($j=0,1,2,\dots,15$) приказан је у табели 7.1.

На спрегнуту греду моста делују следећи утицаји:

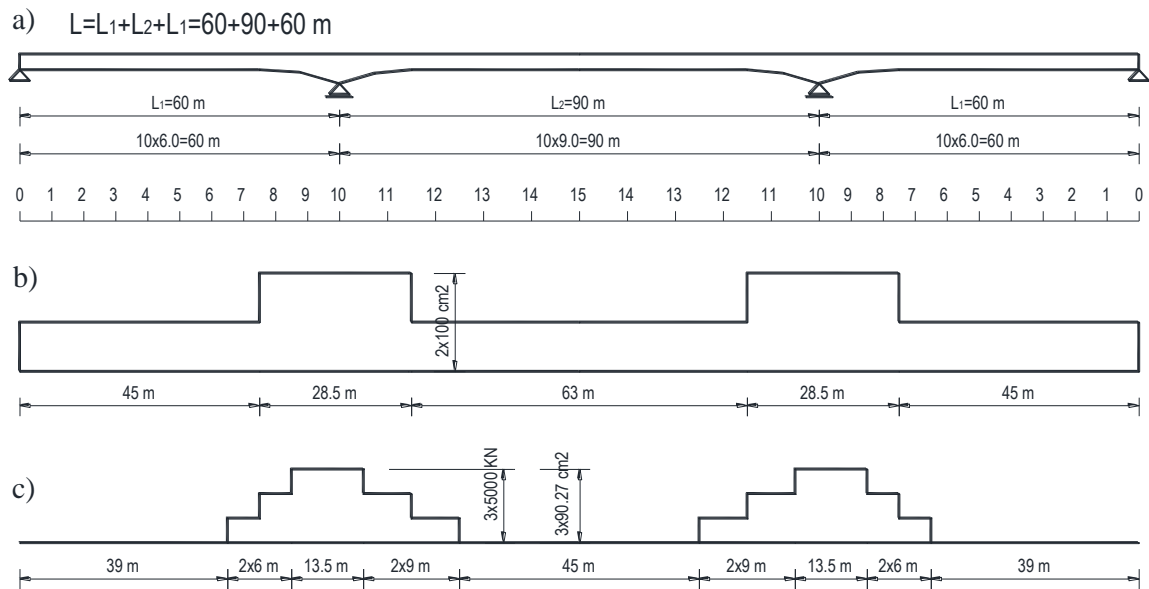
- а) претходно напрезање челичног носача пре бетонирања коловозне плоче, подизањем средњих ослонаца за $c = 0.84$ m;
- б) стално оптерећење спрегнуте греде $g = 33.0$ kN/m;
- ц) претходно напрезање спрегнуте греде силама у кабловима;
- д) претходно напрезање спрегнутог носача спуштањем средњих ослонаца за $c = 0.55$ m;
- е) скупљање бетона.

Задатком је дато да утицаји (б) и (д) делују непосредно после спрезања каблова са носачем. Потребно је одредити напоне у карактеристичним тачкама пресека 4, 10 и 15 у временима t_0 и t_∞ .

У књизи [25] задатак је решен методом сила и то појединачно за свако од задатих дејстава. Решење је дато под претпоставком да је ПЧ еластичан материјал, а за деформације течења бетона усвојена је

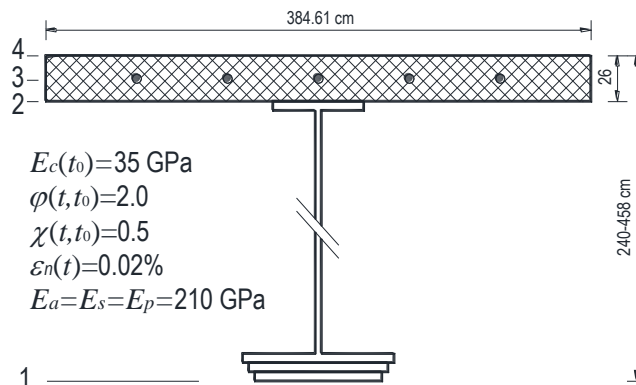
алгебарска веза методе средњег напона. То је апроксимативна алгебарска веза теорије старења при константном модулу еластичности бетона.

Овде је овај пример анализиран на рачунару применом развијеног програма *VASCEL* - вискозна анализа слојевитим коначним елементима. Посматрана је половина греде уз уведене услове симетричности. Овај део греде је подељен на 14 коначних елемената (КЕ) (слика 7.3 и 7.4) при чему су за КЕ променљивог попречног пресека узете осредњене геометријске карактеристике (табела 7.2). При подели греде на КЕ вођено је рачуна да се чворови поставе на местима скоковитих промена сила и/или геометријских карактеристика пресека.



Сл. 7.1 – Континуална спрегнута греда: а) изглед; б) мека арматура; ц) преднапрегнути челик

Fig. 7.1 – Cont. composite beam: a) appearance; b) soft reinforcement; c) prestressed steel



Сл. 7.2 – Попречни пресек спрегнуте греде
Fig. 7.2 – Composite beam cross-section

7.3). На основу излазних резултата срачунати су напони у карактеристичним тачкама за пресеке 4, 10 и 15 у тренуцима t_0 и t_∞ .

Табела 7.3 – Раздвојени примери за задата појединачна дејства.

Table 7.3 - Separated examples for given individual forces

	Интервал времена		Искључени делови пресека у почетном интервалу Δt_1
	$\Delta t_1=0$	$\Delta t_2=\infty$	
Деловање утицаја	Пример 1-а: Претходно напрезање челичног носача пре бетонирања коловозне плоче, подизањем средњих ослонаца за 0.84 m	Течење бетона	Бетон, арматура, каблови (за све КЕ)
	Пример 1-б: Стално оптерећење распонске спрегнуте греде моста $g=33.0 \text{ kN/m}$	Течење бетона	
	Пример 1-ц: Претходно напрезање спрегнуте греде силама	Течење бетона	Каблови (за 6,7,8,9,10,11,12 КЕ)
	Пример 1-д: Претходно напрезање спрегнутог носача спуштањем средњих ослонаца за 0.55 m	Течење бетона	
	Пример 1-е: Скупљање бетона	Скупљање бетона	

У другој варијанти задатак је решаван са једним улазним фајлом, јер је развијени модел генерализован и у њему се могу, у различитим тренуцима времена, укључити поједини делови (слојеви) у напонски активне делове као и сва накнадна дејства у складу са поступком фазног грађења. Другим речима, датим алгоритмом прорачуна све промене је могуће обухватити кроз формирање одговарајућих интервала времена. При томе се кроз фиктивне интервале ($\Delta t=0$) уводе све скоковите (еластичне) промене, а кроз коначне интервале ($\Delta t \neq 0$) уводе се вискозне (временске) промене. Због тога су за разматрани пример формирана четири интервала времена, прва три фиктивна и четврти коначни (табела 7.4).

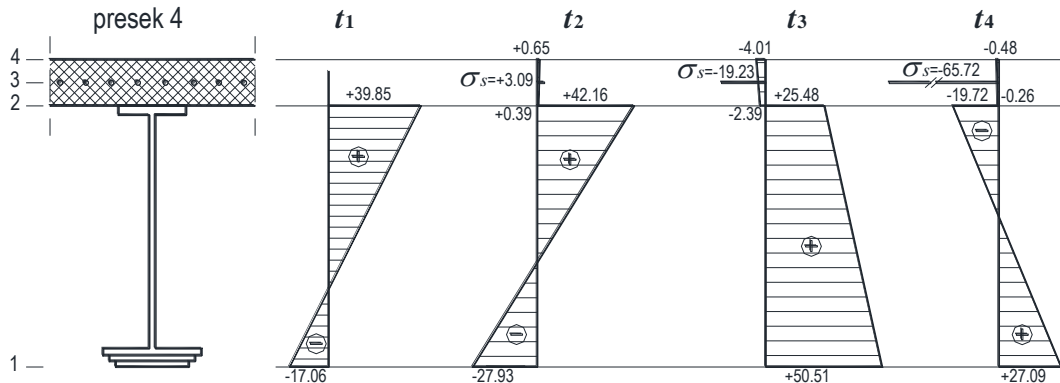
Табела 7.4 – Јединствен пример за задата дејства.

Table 7.4 - Unique example for given forces

Интервал	$\Delta t_1=0$	$\Delta t_2=0$	$\Delta t_3=0$	$\Delta t_4=\infty$
Деловање утицаја	(а): Претходно напрезање челичног носача подизањем средњих ослонаца за 0.84 m	(ц): Претходно напрезање греде силама	(б): Стално оптерећење греде $g=33.0 \text{ kN/m}$ (д): Претходно напрезање носача спуштањем средњих ослонаца за 0.55 m	(е): Скупљање бетона Течење бетона
Искључени делови пресека	Бетон, арматура, каблови (за све КЕ)	Каблови (за 6,7,8,9,10,11,12 КЕ)		

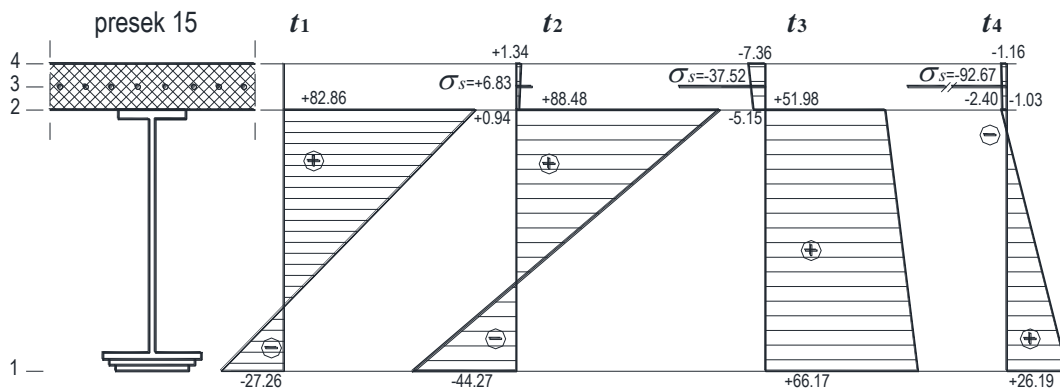
У првом интервалу ($\Delta t_1=0$) активан је само челични носач и тада делује оптерећење под (а). У другом интервалу ($\Delta t_2=0$) активан је

челични носач, бетонска плоча и мека арматура, а делују силе од преднапрезања каблова под (ц). При томе кабли за преднапрезање не улазе у пресек, јер још нису спрегнути са осталим деловима (слојевима) носача. Силе услед затезања каблова у овом интервалу могу се посматрати као спољашње оптерећење. При томе је почетни напон затезања у кабловима срачунат као $\sigma_p(t_0) = P/A_p$.



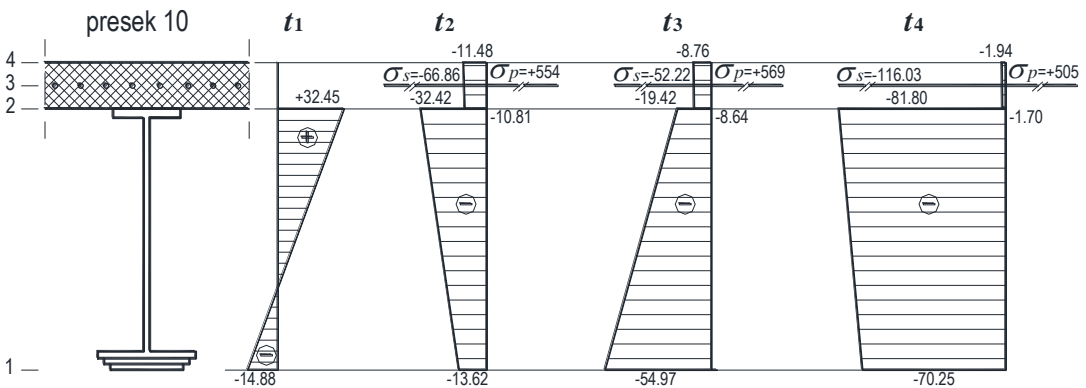
Сл. 7.5 – Напони за пресек 4 [MPa]

Fig. 7.5 – Cross-section 4 stress



Сл. 7.6 – Напони за пресек 15 [MPa]

Fig. 7.6 – Cross-section 15 stress

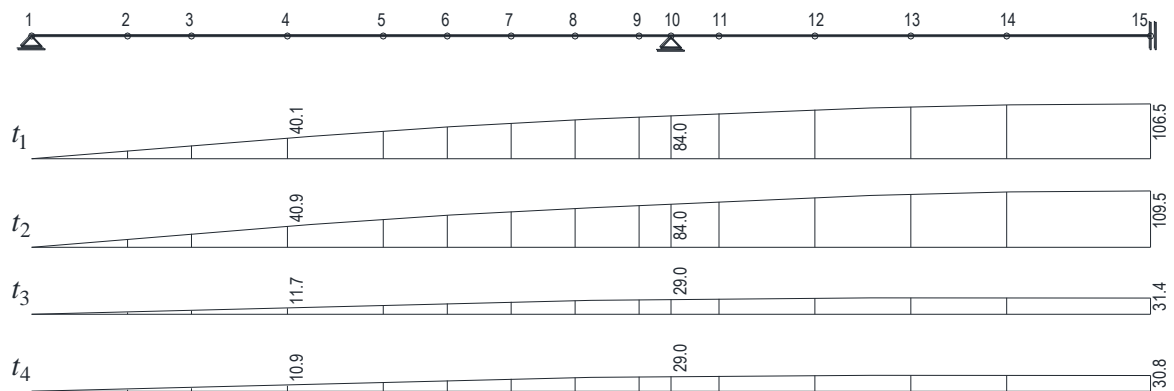


Сл. 7.7 – Напони за пресек 10 [MPa]

Fig. 7.7 – Cross-section 10 stress

У трећем интервалу времена ($\Delta t_3 = 0$) делују утицаји под (б) и (д) после спрезања каблова са осталим деловима (за одговарајуће КЕ). У овом интервалу је у целини завршено формирање спрегнутог носача, као и наношење спољашњих утицаја. У четвртом интервалу времена ($\Delta t_4 = \infty$) обухваћене су дуготрајне промене услед скупљања и течења бетона. Као репрезентативни, приказани су резултати напона за пресеке 4, 15 и 10 (слика 7.5, 7.6 и 7.7).

Резултати добијени првом и другом варијантом прорачуна су у потпуности идентични. Упоредом ових резултата са резултатима датим у [25] установљене су незнатне разлике (до 3%). Ове разлике су већим делом последица увођења средње вредности геометрије попречног пресека КЕ и јављају се већ у првом интервалу времена (еластична анализа). Међутим, прираштаји напона у последњем интервалу, у односу на резултате из [25], готово да немају одступања. Ово указује на поузданост и тачност овде развијеног генерализаног прорачунског модела.



Сл. 7.8 – Угиби дуж греде током времена
Fig. 7.8 – Deflection along the beam over time

Независно од поступка прорачуна може се констатовати да скупљање и течење бетона знатно мења стање напона и деформација анализираних распонских спрегнутих греда моста. Ако се посматра пресек 4 може се констатовати да се бетон кроз време растеређује тако да се за крајњи тренутак индукују напони затезања који су скоро једнаки напонима притиска од краткотрајних дејстава. Овим се бетон скоро у потпуности ослободио унутрашњих сила, али због услова равнотеже у арматури и челичном носачу индукују се напони притиска. У притиснутој арматури, за крајњи тренутак времена, напони су већи за око 240%. У горњем појасу челичног носача напони затезања прелазе у притисак. На доњем појасу челичног носача индуковани напони

притиска умањују почетне напоне затезања за око 46%. Сличне промене напрезања су и у другим пресецима (10 и 15) греде. Када су у питању промене угиба током времена, допринос реологије бетона није значајније изражен, јер је задатим дејствима овај угим минимализован (слика 7.8).

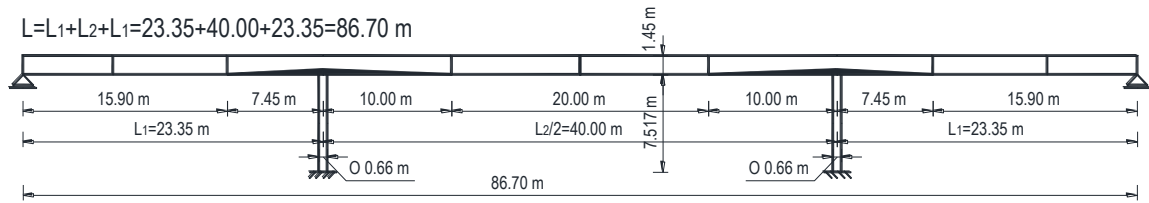
Анализом резултата из овог примера намеће се закључак да је код СК неопходно у прорачунима укључити вискоеластична својства материјала, јер се напони и деформације у пресецима кроз време битно мењају. Притиснути бетонски део спрегнутог пресека се у принципу растерећује, а утицаје преузимају челични носач и арматура. Ови утицаји могу прекорачити дозвољене границе за ове материјале, што се при пројектовању мора предупредити. Са становишта анализе граничних стања употребљивости, значајно је истаћи да се у току времена дилатације и кривина пресека знатно повећавају. Такође и померања (угиби) могу да трпе промене у смислу значајнијег апсолутног повећања. Одговарајућим интервенцијама нужно је елиминисати негативна дејства на понашање конструкције у предвиђеним експлоатационим ситуацијама.

Пример 2 – Континуална спрегнута рамовска конструкција моста 23.35+40.00+23.35 m

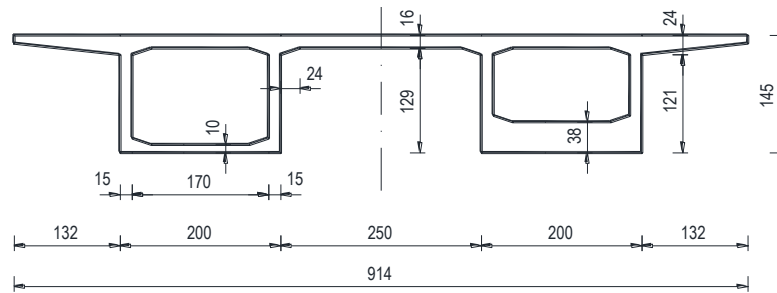
Овај пример је, такође, преузет из књиге М. Ђурића [25] како би се могла извршити провера тачности развијеног модела прорачуна. На слици 7.9 приказан је подужни пресек симетричног континуалног рама као мостовске конструкције од претходно напрегнутог бетона. Попречни пресеци греде у пољу и над стубовима дати су на слици 7.10. Коловозна плоча је константног попречног пресека $d=16\text{ cm}$ по читавој дужини греде моста. Вертикална ребра сандука греде су такође константне дебљине $d=15\text{ cm}$, док је доња плоча сандука променљиве дебљине $d=10\text{-}38\text{ cm}$ (слика 7.9 и 7.10).

Претходно напрезање греде извршено је кабловима од 12 жица $\phi 5\text{ mm}$. Један кабл уноси нормалну силу у греду од $P=240\text{ kN}$ у тежишту каблова. Каблови су распоређени у седам група које су означене словима од А до Г (слика 7.11 и 7.12). Групе А, С, Д, Ф и Г су са праволинијским кабловима, при чему је максималан број каблова у групи А (пресек 4) 8 комада, у групи С (пресек 10) 64 комада, у групи Д (пресек 10) 28 комада, а у групи Ф и Г (пресек 15) по 8 комада. Групе В и

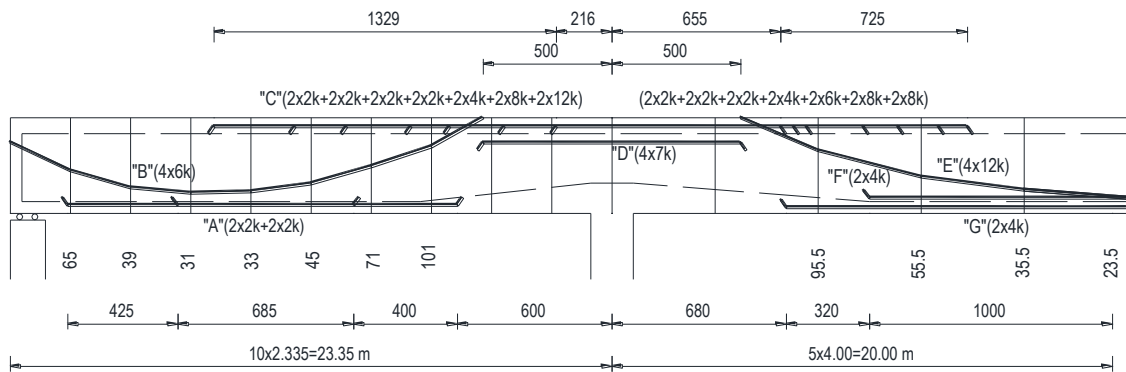
Е су са кривим кабловима распоређеним поред ребара са унутрашње стране сандука. Група В састоји се од 24, а група Е од 48 каблова.



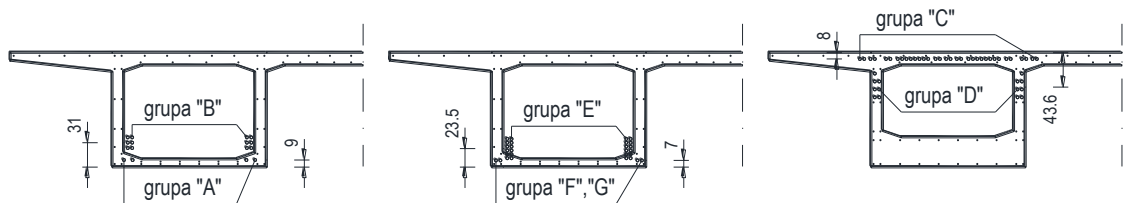
Сл. 7.9 – Подужна диспозиција моста
Fig. 7.9 – Longitudinal section of bridge



Сл. 7.10 – Попречни пресек у пољу и над ослоном
Fig. 7.10 – Cross-section in span and above supporter



Сл. 7.11 – Подужни распоред каблова
Fig. 7.11 – Longitudinal cable distribution



Сл. 7.12 – Распоред арматуре и каблова у пресецима (а), (б) и (ц)
Fig. 7.12 – Reinforcement and cable distribution in the (a), (b) and (c) cross-sections

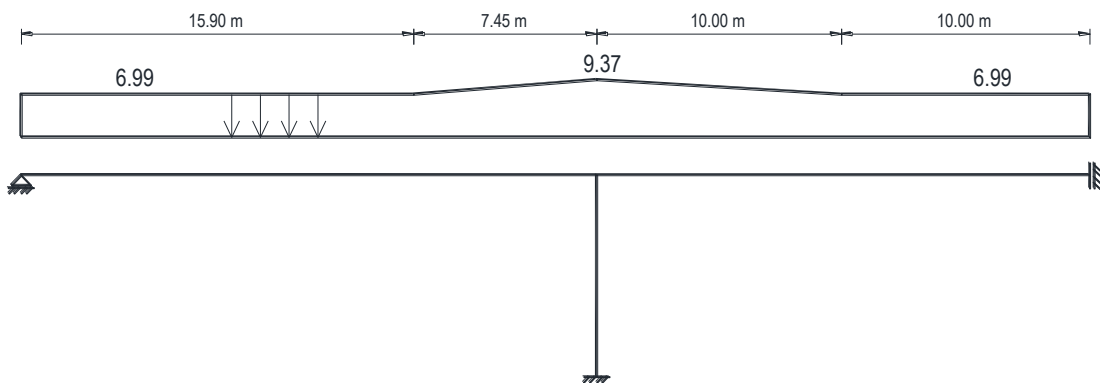
Конструктивна мека арматура греде је по читавој дужини константна и састоји се од $107\phi 10$ и $8\phi 14$. Распоред ове арматуре приказан је у карактеристичним попречним пресецима греде (слика 7.12).

Стубови су кружног попречног пресека ($\phi 66 \text{ cm}$) постављени испод сваког сандука и круто везани са гредом и темељним стопама. Мека арматура стубова састоји се од $28\phi 20$ у доњем и $44\phi 20$ у горњем делу.

Конструкција моста је од бетона марке $MB45$ са модулом еластичности $E_c=35 \text{ GPa}$. За коефицијент течења бетона дата је вредност $\varphi=2.0$ и за коефицијент скупљања $\varepsilon_n=2 \times 10^{-4}$. За усвојену алгебарску везу методе средњег напона [25] за коефицијент старења треба узети $\chi=0.5$. Модул еластичности меке арматуре је $E_s=210 \text{ GPa}$, а модул еластичности каблова је $E_p=178.5 \text{ GPa}$.

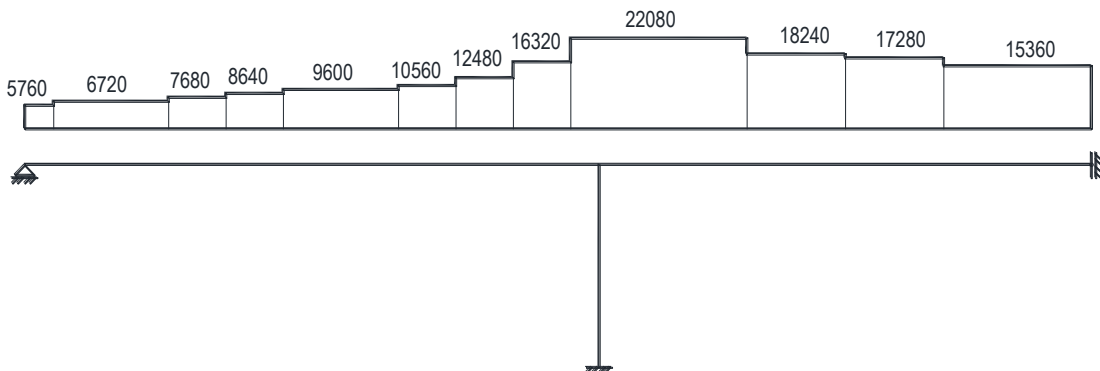
Потребно је извршити прорачун стања напона и деформација у конструкцији моста услед деловања следећих утицаја:

- сопствена тежина конструкције (слика 7.13),
- претходно напрезање распонског носача (слика 7.14),
- скупљање бетона.



Сл. 7.13 – Стално оптерећење носача

Fig. 7.13 – Dead load of girder



Сл. 7.14 – Распоред сила претходног напрезања

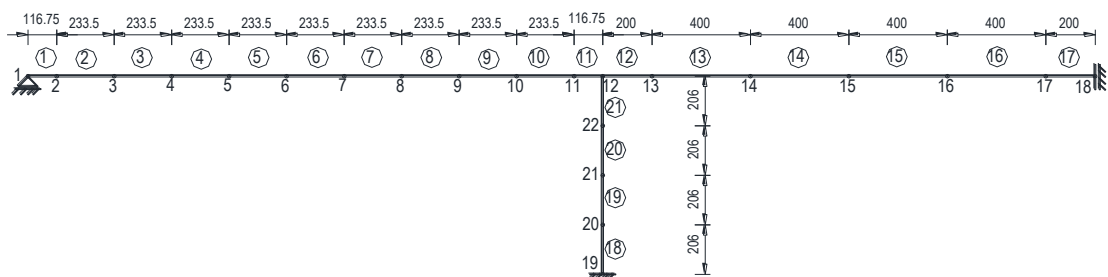
Fig. 7.14 – Distribution of prestressed forces

Конструкција моста ће бити изведена тако да у тренутку када је претходно напрезање каблова завршено и када у кабловима делују рачуном предвиђене силе, а пре инјектирања цеви, конструкција буде

ослобођена скеле. У таквим условима сопствену тежину конструкције примају пресеци греде без доприноса геометрије каблова.

У књизи [25] задатак је решен методом сила и то појединачно за задата дејства. Решење је дато под претпоставком да је ПЧ еластичан материјал, а за деформације течења бетона усвојена је алгебарска веза методе средњег напона. То је апроксимативна алгебарска веза теорије старења при константном модулу еластичности бетона.

Подела носача на КЕ и положај чворова дати су на **слици 7.15**. Геометријски подаци о КЕ и њиховим слојевима дати су у **табели 7.5**. При томе је за фиксну осу свих КЕ одабрана горња ивица коловозне плоче.



Сл. 7.15 – Подела носача на коначне елементе

Fig. 7.15 – Finite elements of girder distribution

Табела 7.5 – Подаци о коначним елементима и њиховим слојевима

Table 7.5 – Data on finite elements and their layers

КЕ		1	2	3	4	5	6	7	8	9
бетон	A	2.79480	2.79480	2.79480	2.79480	2.79480	2.79480	2.79480	2.89680	3.16880
	I	0.76254	0.76254	0.76254	0.76254	0.76254	0.76254	0.76254	0.83563	0.98569
	Y _T	0.46222	0.46222	0.46222	0.46222	0.46222	0.46222	0.46222	0.49256	0.55918
арм.	A	0.00963	0.00963	0.00963	0.00963	0.00963	0.00963	0.00963	0.00963	0.00963
	I	0.00352	0.00352	0.00352	0.00352	0.00352	0.00352	0.00352	0.00352	0.00337
	Y _T	0.67539	0.67539	0.67539	0.67539	0.67539	0.67539	0.67539	0.67539	0.66300
кабл	A	0.00661	0.00661	0.00661	0.00755	0.00850	0.00944	0.00944	0.01038	0.01227
	I	0.00000	0.00025	0.00007	0.00007	0.00110	0.00173	0.00142	0.00127	0.00042
	Y _T	0.46222	0.87999	1.10286	1.19500	1.05778	0.88800	0.60400	0.39273	0.27192
КЕ		10	11,12	13	14	15	16	17	18,19	20,21
бетон	A	3.44080	3.74680	3.33388	2.96480	2.79480	2.79480	2.79480	0.68424	0.68424
	I	1.08524	1.15438	1.05283	0.87884	0.76254	0.76254	0.76254	0.01863	0.01863
	Y _T	0.60894	0.64935	0.59200	0.51105	0.46222	0.46222	0.46222	0.00000	0.00000
арм.	A	0.00963	0.00963	0.00963	0.00963	0.00963	0.00963	0.00963	0.01759	0.02765
	I	0.00330	0.00320	0.00333	0.00344	0.00352	0.00352	0.00352	0.00059	0.00099
	Y _T	0.65680	0.64637	0.65941	0.66854	0.67539	0.67539	0.67539	0.00000	0.00000
кабл	A	0.01605	0.02171	0.02171	0.01794	0.01699	0.01510	0.01510	0.00000	0.00000
	I	0.00053	0.00062	0.00062	0.00239	0.00204	0.00020	0.00006	0.00000	0.00000
	Y _T	0.22676	0.18848	0.18848	0.48211	0.90778	1.16125	1.25125	0.00000	0.00000

За решење овог примера, а ради поређења резултата и верификације развијеног модела прорачуна, укључујући и верификацију програма *VASCEL*, у првој варијанти су формирана три примера (три улазна фајла) у складу са задатим утицајима (а), (б) и (ц) (табела 7.6). Почетни напон затезања у кабловима срачунат је као $\sigma_p(t_0) = P / A_p$.

Табела 7.6 – Раздвојени примери за задата појединачна дејства.

Table 7.6 – Separated examples for given individual forces

	Интервал времена		Искључени делови пресека у почетном интервалу Δt_1
	$\Delta t_1=0$	$\Delta t_2=\infty$	
Деловање утицаја	Пример 1-а: Сопствена тежина конструкције	Течење бетона	Каблови (за све КЕ)
	Пример 1-б: Претходно напрезање носача	Течење бетона	Каблови (за све КЕ)
	Пример 1-ц: Скупљање бетона	Скупљање бетона	

У другој варијанти задатак је решаван са једним улазним фајлом, јер је приказани прорачунски модел генерализован и омогућује да се, у различитим тренуцима времена, могу укључити поједини делови (слојеви) пресека у напонски активне делове. Такође се без ограничења могу укључити и сва накнадна дејства у складу са фазним извођењем конструкције. При томе се кроз фиктивне интервале ($\Delta t=0$) уводе све скоковите (еластичне) промене. Због тога се за разматрани пример могу формирати два или три интервала времена, зависно од потребе сагледавања доприноса појединих утицаја на промену стања напона и деформација. И у једном и у другом случају последњи интервал је коначан, док је први, односно прва два, фиктивни (табела 7.7 и 7.8).

Табела 7.7 – Јединствен пример за задата дејства - два интервала времена.

Table 7.7 Unique example for given forces – two time intervals

Интервал	$\Delta t_1=0$	$\Delta t_2=\infty$
Деловање утицаја	(а): Сопствена тежина конструкције (б): Претходно напрезање носача	(ц): Скупљање бетона Течење бетона
Искључени делови пресека	Каблови (за све КЕ)	

Табела 7.8 – Јединствен пример за задата дејства - три интервала времена.

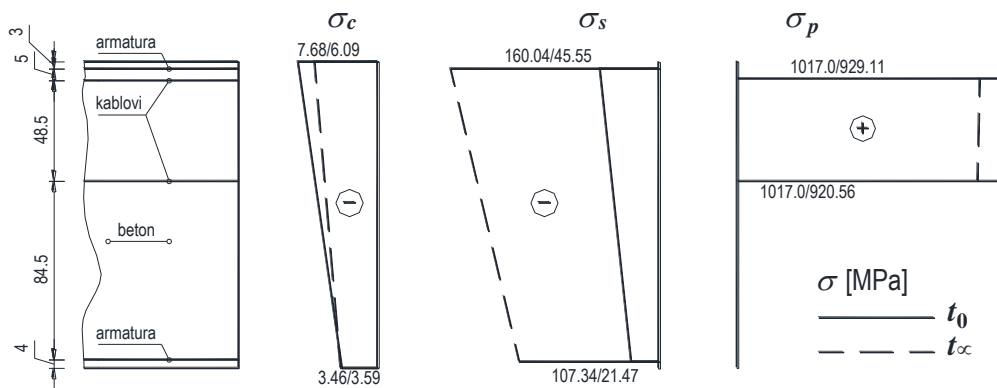
Table 7.8 Unique example for given forces – three time intervals

Интервал	$\Delta t_1=0$	$\Delta t_2=0$	$\Delta t_3=\infty$
Деловање утицаја	(б): Претходно напрезање носача	(а): Сопствена тежина конструкције	(ц): Скупљање бетона Течење бетона
Искључени делови пресека	Каблови (за све КЕ)	Каблови (за све КЕ)	

У првом интервалу ($\Delta t_1 = 0$) активан је челични носач и бетонска плоча јер преднапрегнути кабли још нису инјектирани и не чине део спрегнутог пресека, док је сила преднапрезања уведена као спољашње оптерећење $\sigma_p(t_0) = P/A_p$. У овом првом интервалу могу се укључити заједно оптерећења под а) и б). У другом интервалу времена ($\Delta t_2 = \infty$) обухваћене су промене услед скупљања и течења бетона, а у пресек су укључени и преднапрегнути кабли (табела 7.7).

У другом случају, ако се жели сагледати допринос појединачних утицаја, први и други интервал су фиктивни ($\Delta t_1 = 0; \Delta t_2 = 0$) и кроз њих се уводи оптерећење од преднапрезања и сопствене тежине, респективно, а последњи (трећи) интервал има временско трајање ($\Delta t_3 = \infty$) и обухвата вискозне деформације од скупљања и течења бетона (табела 7.8).

Као репрезентативни, приказани су резултати напона за пресек распонске греде изнад средњег ослонца моста (слика 7.16).

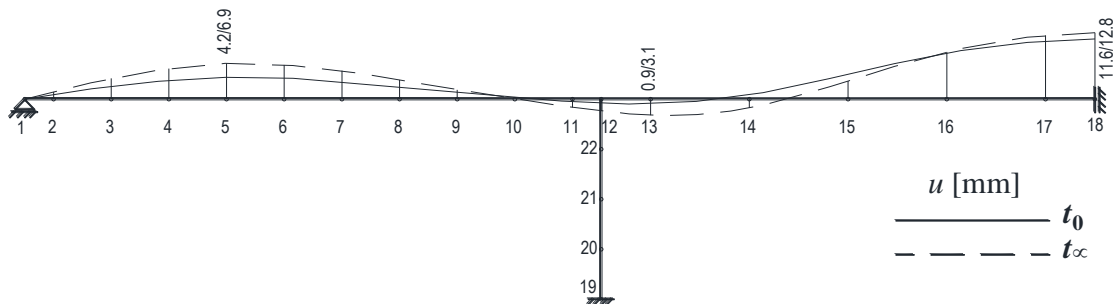


Сл. 7.16 – Напони у пресеку греде над средњим ослонцем [MPa]
Fig. 7.16 – Stress in the cross-section of beam above supporter [MPa]

Добијене вредности након извршених прорачуна су за све варијанте идентичне, без обзира да ли се задатак решава појединачно или у заједничком фајлу. Поређењем вредности напона са вредностима из књиге М. Ђурића [25] јављају се минимална одступања која су производ осредњавања геометрије појединих КЕ и приближног увођења силе преднапрезања у конструкцију преко параболичних каблова. Те разлике су испод 4% и не представљају никакву препреку за успешну примену развијеног модела прорачуна и код овако сложених СК.

И овај пример показује прерасподелу напрезања у спрегнутим пресецима услед скупљања и течења бетона током времена. Док се бетон и кабли растеређују, дотле мека арматура преузима значајан део напона. Горња арматура у овом примеру достиже границу

допуштених напона за глатки челик, што је увећање за неких 250%, те о оваквим променама треба водити рачуна још у прелиминарним фазама пројектовања.

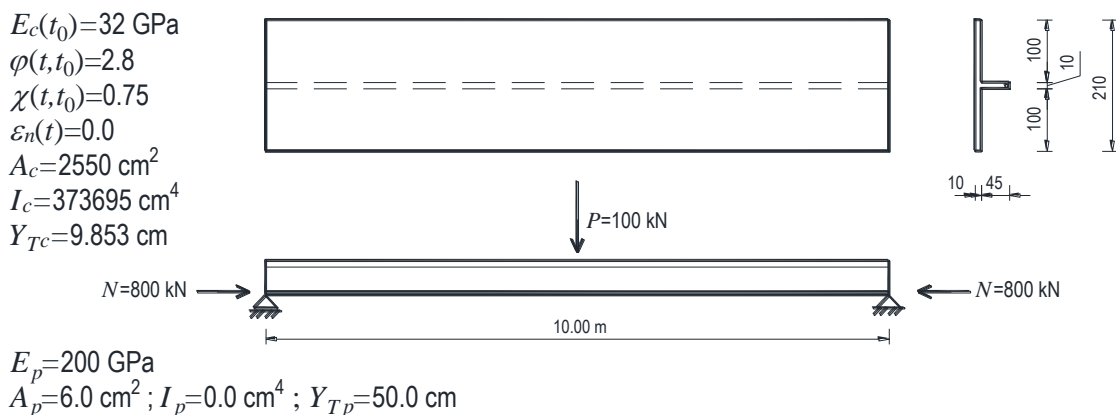


Сл. 7.17 – Угиби дуж греде
Fig. 7.17 – Deflection along the beam

Када је у питању угиб распонске греде (слика 7.17) може се констатовати да је за крајњи тренутак, услед скупљања и течења бетона, угиб у неким деловима греде порастао за више од 60% у односу на почетно еластично стање.

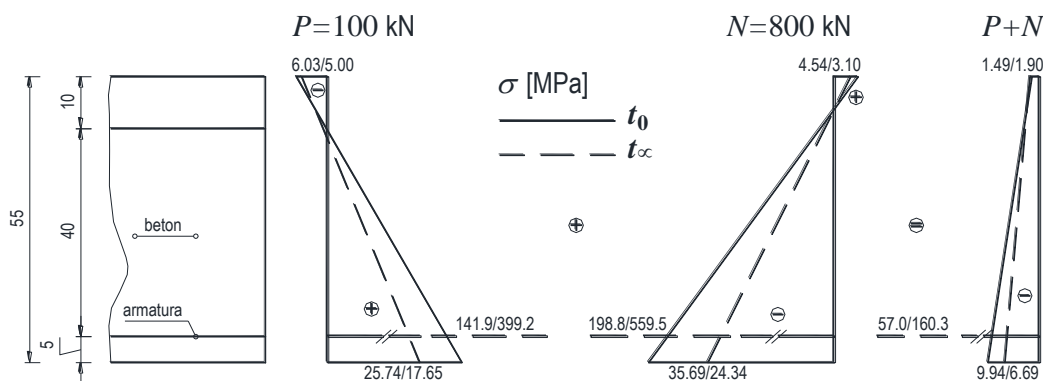
Пример 3 – Претходно напрегнут носач Т пресека

На слици 7.18 су дате основне диспозиционе карактероистике претходно напрегнутог носача Т пресека. Задатак је постављен тако да у времену t_0 оптерећење од попречне и нормалне силе преузима цео спрегнути пресек. За преднапрегнуту арматуру се неће узимати почетни напон затезања, јер се она третира као обична арматура спрегнута са бетоном, те ће се рачунати само део напрезања за тренутке t_0 и t_∞ услед задатог оптерећења и течења бетона.



Сл. 7.18 – Основне диспозиционе карактеристике носача
Fig. 7.18 – Basic disposition characteristics of the girder

За програм *VASCEL* у улазним подацима гредни носач је подељен на два идентична КЕ и формирана су два интервала времена - први фиктивни и други коначни. Кроз фиктивни интервал уводе се еластичне (тренутне) промене, а кроз коначни срачунава се промена напрезања услед течења бетона. Ради сагледавања вредности напрезања од појединачних утицаја фиктивни интервал времена је уствари подељен на два подинтервала. На **слици 7.19** дати су дијаграми за срачунате вредности напона за пресек у средини распона.



Сл. 7.19 – Напони у пресеку носача над ослоном [MPa]

Fig. 7.19 – Stress in the cross-section of the girder above the supporter [MPa]

Овај пример је преузет из [80], с тим да је тамо примењена метода коначних трака и носач је третиран као полиедарска конструкција са широким фланшама, где се комбинује равно стање напрезања и савијање. Коришћена је коначна трака равне љуске са четири степена слободе по чворној линији. Сваки део пресека је уствари посебна коначна трака, тако да је носач подељен на 10 коначних трака, а у прорачуну је коришћено 1,3,...,49 чланова реда.

Применом овде развијеног модела прорачуна са линијским коначним елементима и фиктивним оптерећењем могуће је сагледати разлику између теорије савијања и аксијалног напрезања гредних (линијских) носача и равног стања напрезања површинских носача. Такође је могуће сагледати поузданост поступка формирања фиктивног оптерећења у оквиру линијских КЕ у поређењу са директним одређивањем овог оптерећења преко коначних трака што би практично одговарало увођењу површинских КЕ.

Теорија савијања гредних носача даје по ширини пресека равномеран распоред нормалних напона за тачке једнако удаљене од неутралне осе. Ово је нарочито важно за носаче са широким фланшама, јер стваран распоред напона по ширини није равномеран

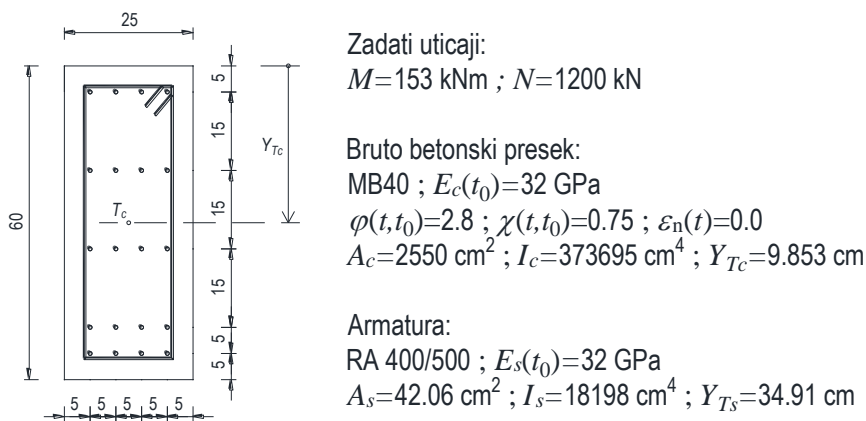
што показује теорија савијања љуски. Напони су највећи изнад ребра носача и опадају ка удаљенијим тачкама, док по висини ребра напони задржавају приближну линеарност.

Поређењем резултата са вредностима из [80] може се констатовати очекивано одступање у вредностима напона за фланшу због поменуте разлике теорије савијања линијских и површинских носача. За ребро та разлика је много мања и на доњој ивици је свега 3.5 %.

Утицај течења бетона за деловање попречне силе се огледа у паду почетних напона затезања за 31% на доњој и напона притиска за 17% на горњој ивици носача. При дејству аксијалне силе пад почетних напона притиска је 40% на доњој и напона затезања 32% на горњој ивици носача. Симултано деловање ових сила доводи целокупну површину бетона у притиснуто стање, а пад напона на доњој ивици носача за крајњи тренутак је 33% у односу на почетно стање.

Пример 4 – АБ правоугаони пресек

У датом пресеку АБ елемента (слика 7.20.) делују утицаји од сталног оптерећења – моменат савијања M и нормална сила N , у тежишту бруто бетонског пресека. Под дејством задатих утицаја није прекорачена чврстоћа бетона при затезању савијањем па у пресеку не настају прслине. Нападне силе у пресеку су током времена константне, док је релативна влажност средине око 70% и темп. приближно 20° С.



Сл. 7.20 – Попречни пресек АБ елемента

Fig. 7.20 – Cross-section of the reinforced concrete element

Овај пример је преузет из ПБАБ'87 [90]. За бетон је усвојена алгебарска веза ААЕМ-методе. На слици 7.20 дати су потребни подаци за прорачун. Задатком се тражи прорачун карактеристичних вредности

напона, дилатације и кривине пресека у тренутку оптерећења t_0 (28 дана) и t_∞ .

При непроменљивим спољашњим утицајима издвојени АБ пресек се може посматрати као пресек неког статички одређеног носача, што ће бити примењено кроз овде развијени модел прорачуна. У ту сврху потребно је формирати неки статички одређен носач и задати му такве силе које ће у посматраном пресеку изазвати задатком приказане силе. Поред тога носач треба дискретизовати у мрежу КЕ, тако да се за барем један КЕ усвоје све карактеристике које су задате за изворни АБ пресек.

У циљу верификације развијеног модела прорачуна пример ће се даље посматрати кроз три различита подпримера мењајући статички систем, оптерећење, број КЕ, нападну тачку аксијалне силе и др.

Пример 4/1 – АБ конзолни носач

За пример је узет конзолни носач (слика 7.21) и задати су утицаји M и N . Да би се изазвале идентичне силе у АБ пресеку према изворном примеру, хоризонтална сила је постављена да делује у тежишту бетонског пресека по принципу аксијалне силе у слоју КЕ. За бетон су узете геометријске карактеристике нето пресека, а у укупан пресек узета је и арматура спрегнута са бетоном. Овим је постигнута одговарајућа аналогија са задатим изворним АБ пресеком.

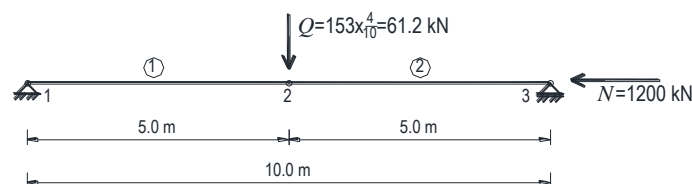


Сл. 7.21 – Конзолни АБ носач и утицаји

Fig. 7.21 – Cantilever reinforced concrete girder and forces

Пример 4/2 – АБ проста греда

У овом примеру узет је носач статичког система просте греде и задати су утицаји M и N тако да изазову силе у АБ пресеку на средини греде идентичне оним из изворног примера (слика 7.22).

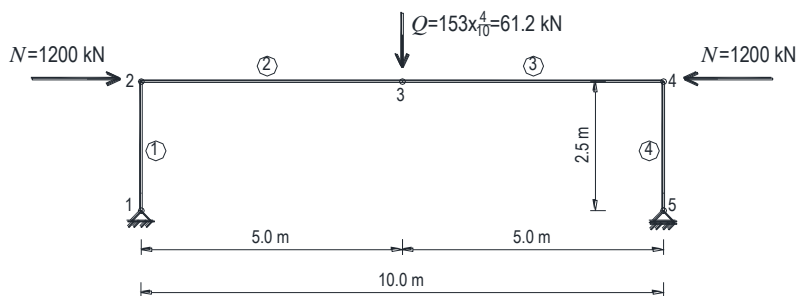


Сл. 7.22 – АБ проста греда и утицаји

Fig. 7.22 – Reinforced concrete beam and forces

Пример 4/3 – АБ рамовска конструкција

За овај пример узет је носач рамовског статички одређеног система и задати су утицаји M и N тако да изазову силе у посматраном АБ пресеку ригле рама у складу са силама из изворног примера (слика 7.23).



Сл. 7.23 – Рамовски систем и утицаји
Fig. 7.23 – Frame system and forces

Овај пример, презентован кроз три различита статички одређена носача (конзола, проста греда и рам), указује на добро подударанье резултата међусобно али и са резултатима из [72]. Важно је поменути да побољшани модел прорачуна не захтева поделу конструкције на већи број КЕ.

Када је у питању утицај течења и скупљања бетона на гранична стања носивости може се констатовати да се горњи притиснути део бетона значајно растеређује и те напоне притиска преузима арматура. Ово може довести до прекорачења напона у притиснутој арматури и потребе примене арматуре са вишом границом течења, нарочито код високих марки бетона.

У посматраном примеру, у доњој затегнутој зони неиспрсколог бетона, нема значајније промене напрезања јер су ти утицаји и онако мали. Међутим, услед скупљања бетона долази до пораста напона затезања, што у комбинацији са напонима од савијања може довести до прекорачења дозвољених напрезања и појаве прслина у доњој зони бетона.

Неутрална линија напона и неутрална линија дилатација се у току времена раздвајају.

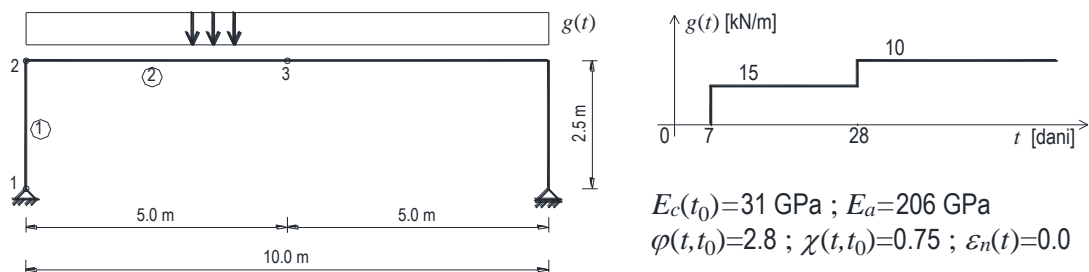
Са становишта анализе граничних стања употребљивости може се констатовати значајан прираштај дилатације и кривине пресека током времена. За посматрани пример дилатација у тежишту бруто бетонског

пресека за крајњи тренутак је чак четири пута, а кривина пресека скоро три пута већа од иницијалних вредности у тренутку оптерећења.

7.2. Прорачун понашања спрегнуте рамовске конструкције

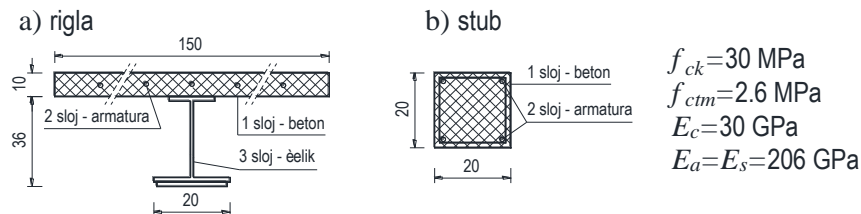
Пример 5 – АБ спрегнути рам распона 10 m

Спрегнута рамовска конструкција, чији су изглед и облици попречног пресека греде и стуба дати на [слици 7.24](#) и [7.25](#), изведена је тако да је након 7 дана уклоњена оплата (спрезање за укупно оптерећење), када је завршена и нега (влажење) бетона. У истом тренутку на риглу рама делује гравитационо оптерећење $g=15 \text{ kN/m}$, док је 28. дана додато преостало стално оптерећење $g=10 \text{ kN/m}$.



Сл. 7.24 – Рамовски систем и утицаји

Fig. 7.24 – Frame system and forces



Сл. 7.25 – Попречни пресеци коначних елемената и положај слојева

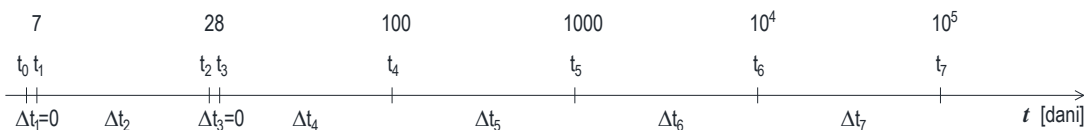
Fig. 7.25 – Cross-sections of finite element and distribution of layers

Кроз овај пример промена напонско-деформационог стања спрегнуте рамовске конструкције (ригле и стуба) анализирана је од деловања следећих утицаја:

- спољашњег оптерећења са течењем и скупљањем бетона,
- спољашњег оптерећења са течењем бетона (без скупљања),
- скупљања бетона (без спољашњег оптерећења).

Прорачуни су изведени са усвојеном ААЕМ-методом и ЕМ-методом за бетон. За течење и скупљање бетона коришћен је EC2 модел. За статички систем узет је само симетрични део рамовске конструкције.

Дискретизација времена спроведена је у складу са **сликом 7.26**. Резултати прорачуна дати су табеларно (**табела 7.9**).



Сл. 7.26 – Дискретизација времена

Fig. 7.26 – Discretization of time

На основу детаљне анализе резултата прорачуна могу се дати следећи закључци:

- У попречном пресеку на средини спрегнуте ригле долази до значајног пада напона притиска у бетону на рачун повећања напона у арматури и горњој фланши челичног носача. Напони у бетону су за 2.7 пута опали у односу на почетне (еластичне) вредности и тај пад се највише одиграва у првих 28 и 100 (1000) дана, а касније све мање, да би након 30 година промене биле скоро занемарљиве.
- Напони у притиснутој арматури расту и до 5 пута у односу на почетне вредности тако да је прекорачена дозвољена носивост за меки челик. Овакви случајеви захтевају детаљније прорачунске анализе и примену бетонског челика са вишом границом течења.
- Притиснути горњи део челичног носача током времена трпи велики пораст напона. На горњој ивици ови напони су за 8 пута већи од иницијалних вредности у почетном тренутку. На доњој ивици напони затезања не трпе значајније промене и у овом примеру те промене су само 25%.
- Са становишта анализе граничних стања употребљивости дилатације и кривина пресека се значајно увећавају. Тако је у тежишту бетонског дела пресека та дилатација порасла за 5.25 пута, а кривина за 5 пута у односу на иницијалне вредности у тренутку оптерећења. Угиби ригле у средини су се повећали за 2.6 пута, а размицање ослонаца за 2.7 пута у односу на почетне вредности.
- Код центрично притиснутих стубова запажен је пад напона притиска у бетону за 8.4 пута, док се у арматури одвија пораст напона за 7.4 пута у односу на иницијалне (еластичне) вредности.

- Скупљање бетона може да има велики допринос на прерасподелу и промену напона и деформација у СК. Ова промена често премашује промене од течења под спољашњим оптерећењем, а у неким случајевима премашује еластичне промене од самог спољашњег оптерећења.
- Примењене алгебарске методе (ААЕМ-метода и ЕМ-метода) за бетон, у анализираном примеру, дају разлику у резултатима прорачуна за максимално 8%, а та разлика се смањује са дискретизацијом времена на већи број подинтервала.

7.3. Прорачун понашања високих зграда

Пример 6 – Зграда висине 30 m

Узет је школски пример једне вишеспратне зграде, димензија у основи 21x21 m (слика 7.27.) и висине 30 m (слика 7.28.), са симетричном вертикалном конструкцијом од централног бетонског језгра и ободних стубова. Међуспратне конструкције су пуне бетонске плоче у систему са гредама (подвлакама). Разматрана су два случаја варирањем стубова зграде:

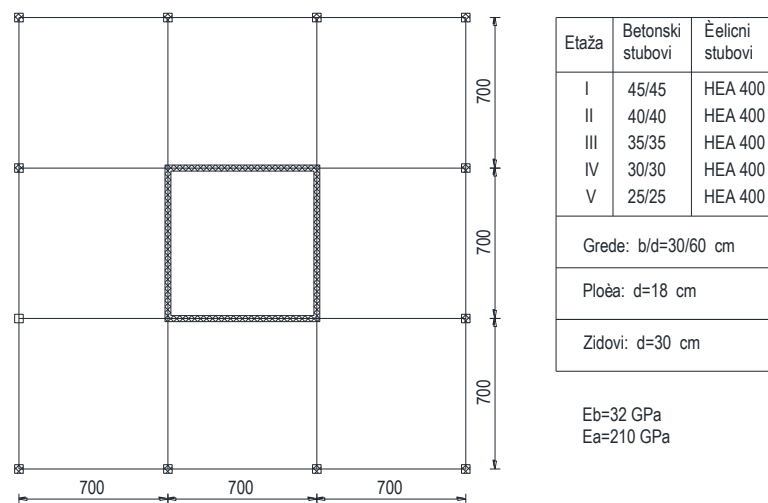
- А) бетонски стубови (пример 6/1),
- Б) челични стубови (пример 6/2)

Технологија изградње конструкције зграде је по систему спрат по спрат са узастопним оптерећивањем стубова и централног бетонског језгра. Узето је да се једна етажа гради 28 дана, када међуспратна конструкција буде ослобођена оплоте и скеле. Неговање бетона се одвија у току 28 дана од бетонирања у складу са уобичајеним поступцима у пракси. У складу са технологијом градње усвојени су статички системи и оптерећења за прорачун конструкције по овде развијеном моделу (слика 7.28.).

Циљ овог примера је да се укаже на феномен скраћење вертикалне конструкције високих зграда, односно на различито скраћење стубова и бетонског језгра услед скупљања и течења бетона током времена. Ова скраћења могу имати далекосежне последице по употребљивост конструкције, елемената испуне, инсталација у згради и сл. Прорачуни су изведени у програму ВАСКЕЛ са реолошким параметрима за бетон у складу са EC2 и сукцесивном применом ААЕМ-методе.

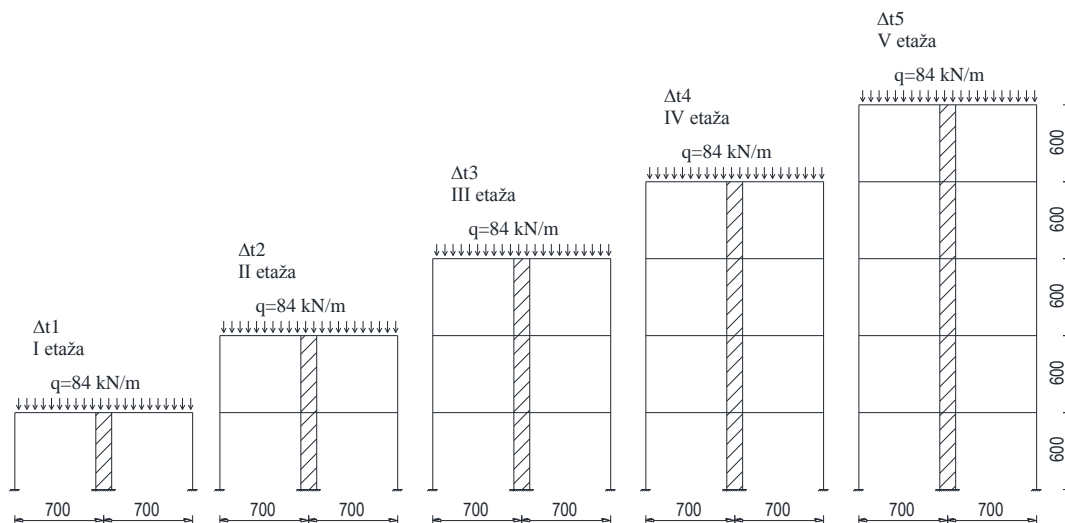
Сличан пример је анализиран у раду *Sassone and Casalegno* [108] где је указано на значајан допринос реологије бетона на промену стања напрезања и деформација у конструкцији зграде високе 30 м. Алгоритам прорачуна је реализован у програмском окружењу *Matlab 7* у сарадњи са комерцијалним програмом *TNO Diana 9.4*.

У раду *Lagos и други (et al.)* [70] приказан је прорачун дуготрајног диференцијалног скраћења зграде висине 300 м у Чилеу компјутерским програмом развијеним на основу методологије *Fintel, Ghosh и Iyengar*. Указано је на значајан допринос дуготрајних деформација и на потребу предвиђања ових утицаја још у прелиминарним фазама пројектовања.



Сл. 7.27 – Основа конструкције зграде

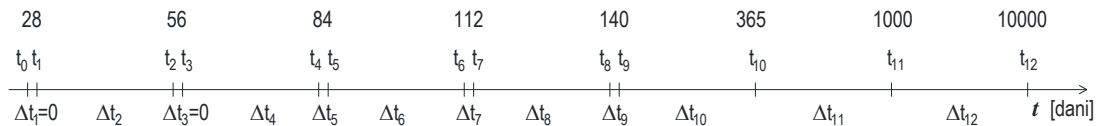
Fig. 7.27 – Building structure plan view



Сл. 7.28 – Статички системи и оптерећења у складу са градњом конструкције зграде

Fig. 7.28 – Statical systems and loads according to construction of the building structure

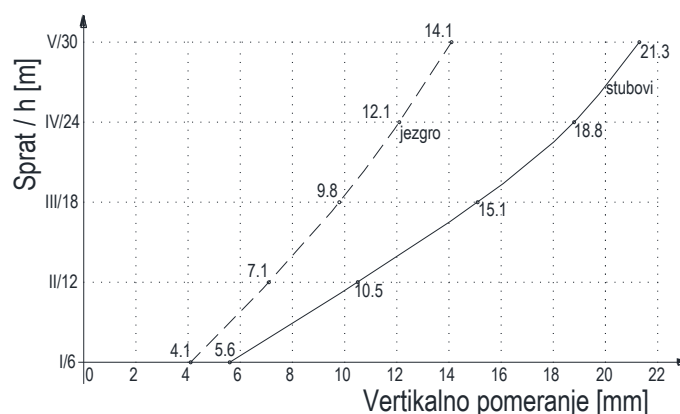
Дискретизација времена спроведена је у складу са **сликом 7.29**. Укупно време је подељено на 12 интервала у складу са технологијом градње зграде. Првих 9 интервала одговара изградњи по једног спрата зграде (укупно 140 дана), док 10., 11. и 12. интервал обухватају интервале за дискретне тренуте од 365, 1000 и 10000 дана респективно. У прорачуну нису занемарене различите старости бетона у време оптерећења, односно градња наредне етаже укључује оптерећење те етаже али и допринос реологије бетона раније изграђених доњих етажа.



Сл. 7.29 – Дискретизација времена у складу са градњом зграде
Fig. 7.29 – Time discretization according to building construction

Пример 6/1 – Зграда са бетонским стубовима

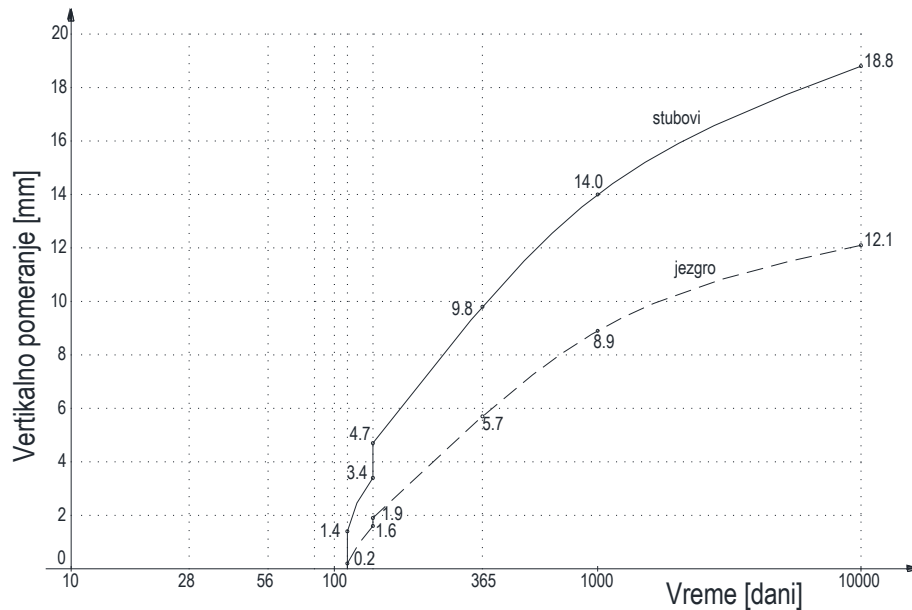
Скраћење вертикалне конструкције за крајњи тренутак расте по висини зграде (**слика 7.30**). Максимално скраћење је 21.3 mm и односи се на бетонске стубове петог спрата ($h=30$ m). Бетонски стубови се скраћују нешто више од бетонског језгра за све етаже, а највећа разлика износи 7.2 mm на петом спрату. Ободни бетонски стубови су под већим напонима притиска од централног бетонског језгра, па је за очекивати и њихово веће еластично и вискозно скраћење током времена (**слика 7.30**).



Сл. 7.30 – Зграда са бетонским стубовима. Вертикално померање спратова за t^∞
Fig. 7.30 – Building with concrete columns. Vertical displacement of floors for t^∞

На **слици 7.31** дати су дијаграми скраћења вертикалне конструкције објекта за IV спрат ($h=24$ m) током времена. Ободни бетонски стубови су се скратили одмах након скидања подупирача IV-ог спрата (еластично

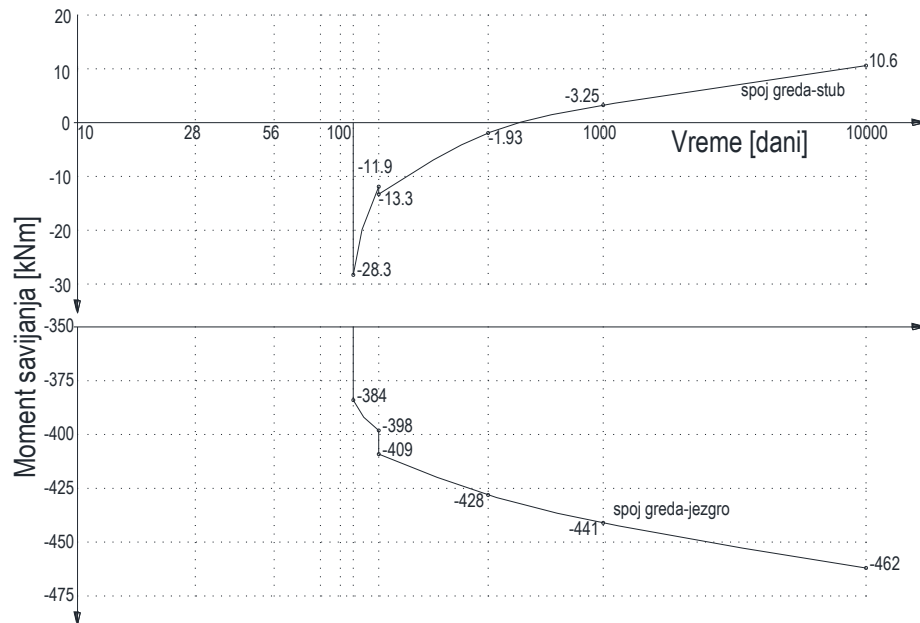
скраћење) за 1.4 mm, а од изградње V спрата за додатних 1.3 mm. Вискозне деформације су знатно израженије и оне износе 16.1 mm, чиме је укупно скраћење стубова за крајњи тренутак 18.8 mm. Сличан облик дијаграма вертикалног померања је и за централно бетонско језгро али са мањим вредностима и еластичних и вискозних деформација (слика 7.31). Еластично скраћење овог језгра износи 0.2 mm и 0.3 mm од изградње IV-ог и V-ог спрата респективно (укупно 0.5 mm), док је вискозно скраћење знатно веће и износи 11.6 mm.



Сл. 7.31 – Зграда са бетонским стубовима. Вертикално померање IV спрата
Fig. 7.31 – Building with concrete columns. Vertical displacement of the IV floor

На слици 7.32 дати су дијаграми промене момената савијања на крајевима греде IV спрата током времена. Интензитет момента савијања греде на споју са стубом временом опада (апсолутна вредност) услед већег вертикалног померања („спуштања“) стубова у односу на круће језгро, док из истог разлога интензитет момента савијања греде на споју са језгром расте (апсолутна вредност). Значајно је истаћи да је негативна вредност момента савијања греде на споју са стубом временом прешла у позитивну вредност.

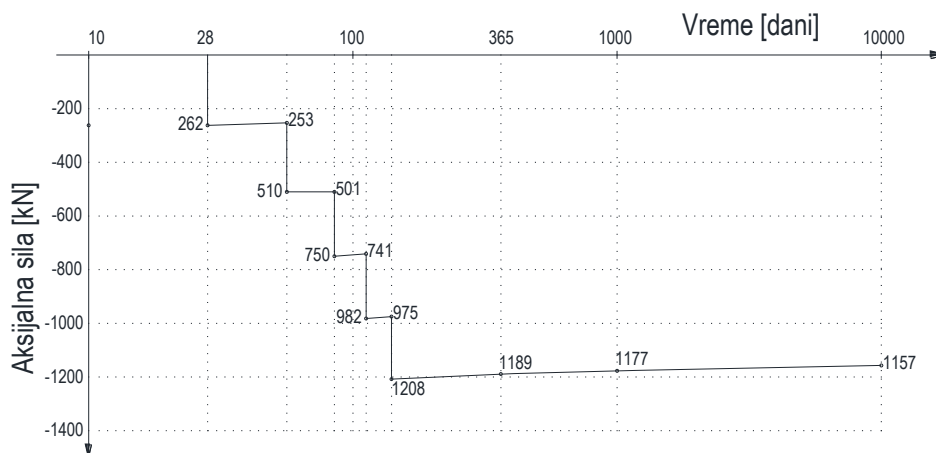
Еластични део момента савијања на споју греде са стубом износи укупно 29.7 kNm (негативан моменат), а вискозни део је 40.3 kNm али супротног знака (позитиван моменат). Код споја греде и језгра еластични део момента савијања износи укупно 395 kNm (негативан моменат), а вискозни део је 67 kNm (негативан моменат), што укупно износи 462 kNm и представља увећање негативног момента савијања за 17%.



Сл. 7.32. – Зграда са бетонским стубовима. Момент савијања на крајевима греде IV спрата

Fig. 7.32. – Building with concrete columns. Bending moments at the beam ending of the IV floor

На слици 7.33 дат је дијаграм промене аксијалне силе за бетонски стуб приземља током времена. Прираст ове силе притиска прати поступак градње објекта спрат по спрат, а услед различитих вискозних деформација стубова и језгра аксијална сила у коначним интервалима времена има благу тенденцију опадања.



Сл. 7.33 – Зграда са бетонским стубовима. Аксијална сила у стубу приземља

Fig. 7.33 – Building with concrete columns. Axial force in the ground floor column

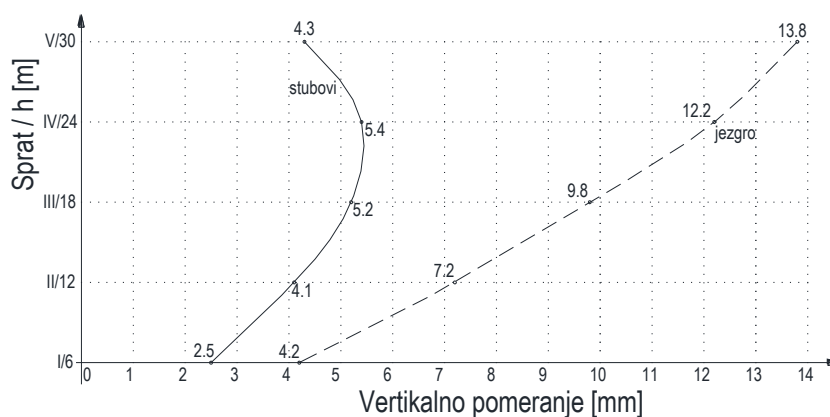
Еластични део аксијалне силе притиска у стубу приземља од утицаја свих етажа износи 1242 kN, а вискозни део за који се умањује сила износи 85 kN, што укупно износи 1157 kN и што представља пад силе притиска у стубу приземља за више од 7%. Овај пад силе у бетону био би

више изражен да је у прорачуну укључена арматура стубова, јер би се тада извршила прерасподела дела напона са бетона на арматуру током времена (релаксација бетона).

Пример 6/2 – Зграда са челичним стубовима

Максимално скраћење вертикалне конструкције објекта за крајњи тренутак је 13.8 mm, када се посматра бетонско језгро и највиша тачка (V-и спрат, $h=30$ m), док је по етажама то скраћење у складу са дијаграмом датим на слици 7.34. Ободни челични стубови се скраћују знатно мање од централног бетонског језгра и та разлика се по висини објекта мења. За пети спрат разлика вертикалних померања између челичних стубова и бетонског језгра износи 9.5 mm, док је за први спрат та разлика свега 1.7 mm.

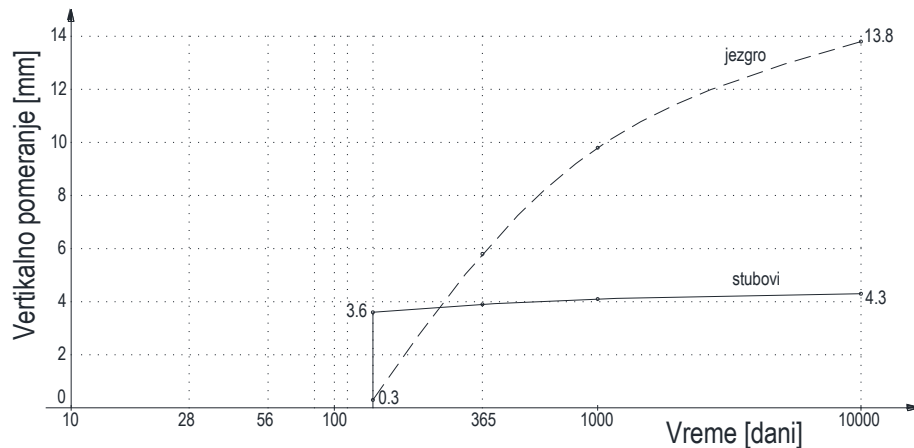
Услед скупљања и течења бетона централно језгро се током времена под напонима притиска додатно скраћује, док челични стубови због одсуства течења немају директне временске деформације. Пораст деформација челичних стубова током времена је последица реологије бетона централног језгра услед које долази до прерасподеле напрезања па тиме и додатних деформација челика.



Сл. 7.34. – Зграда са челичним стубовима. Вертикално померање спратова за t^∞
 Fig. 7.34. – Building with steel columns. Vertical displacement of the floors by t^∞

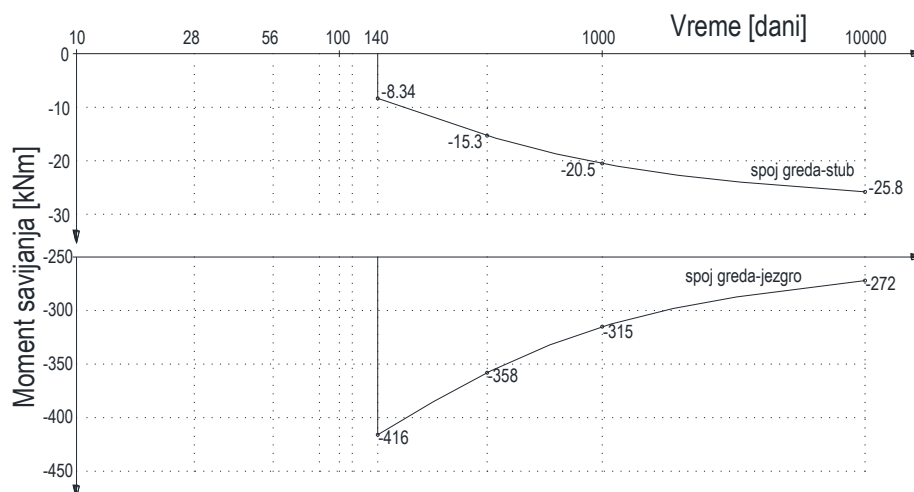
На слици 7.35 дати су дијаграми скраћења вертикалне конструкције објекта за пети спрат ($h=30$ m) током времена. Може се констатовати да је промена вертикалних померања знатно израженија код централног бетонског језгра (еластичне и вискозне деформације) него код ободних челичних стубова (еластичне деформације) због одсуства течења челика. У односу на еластично скраћење (0.3 mm), код централног бетонског језгра, вискозно скраћење је знатно више изражено (13.5 mm).

Код челичних стубова пораст скраћења са еластичних 3.6 mm на укупних 4.3 mm је последица прерасподеле напрезања са бетонског језгра на челичне стубове услед релаксације бетона током времена.



Сл. 7.35 – Зграда са челичним стубовима. Вертикално померање V спрата
Fig. 7.35 – Building with steel columns. Vertical displacement of the V floor

На слици 7.36 дат је дијаграм промене момента савијања за греду последњег спрата на спојевима са стубом и језгром током времена. Пораст негативног момента савијања на месту споја греде и челичног стуба прати смањење негативног момента на споју греде са бетонским језгром. Ово је последица прерасподеле напрезања услед скупљања и течења бетона централног језгра и његовог интензивнијег скраћења у односу на еластичне стубове („омекшавање“ средњег ослоња за греде).



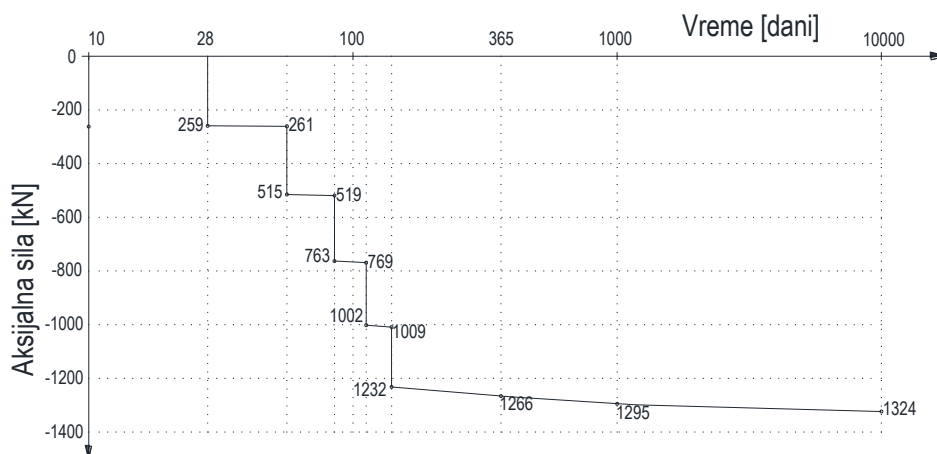
Сл. 7.36 – Зграда са челичним стубовима. Моменти савијања на крају греде V спрата
Fig. 7.36 – Building with steel columns. Bending moments at the beam ending of the V floor

На споју греде са челичним стубом негативни момент савијања је порастао три пута (са 8.34 kNm на 25.8 kNm), док је на другој страни

греде, на споју са бетонским језгром, негативни моменат савијања опао за један и по пута (са 416 kNm на 272 kNm).

Може се констатовати да различито скраћење бетонског језгра и челичних стубова током времена, може довести до прекорачења момента савијања ригли на спојевима са челичним стубовима. О овоме је нужно водити рачуна још у прелиминарним фазама пројектовања овако високих зграда са челичним стубовима и бетонским језгрима.

На слици 7.37 дат је дијаграм промене аксијане силе притиска у челичном стубу приземља током времена. Пораст ове силе прати поступак градње објекта (еластични део силе), док временом сила додатно расте и без додавања оптерећења. Ово је последица прерасподеле напона услед скупљања и течења бетона централног језгра и његовог интензивнијег скраћења у односу на еластичне ободне челичне стубове.



Сл. 7.37 – Зграда са челичним стубовима. Аксијална сила у стубу приземља
Fig. 7.37 – Building with steel columns. Axial force in the ground floor column

Еластични део аксијалне силе у челичном стубу приземља од утицаја свих етажа износи 1212 kN, а вискозни део услед прерасподеле силе са бетонског језгра на челичне стубове износи 112 kN, што је пораст за скоро 10%.

Може се констатовати да различито скраћење бетонског језгра и челичних стубова током времена, те пораст напона притиска у челичним стубовима, може довести до прекорачења дозвољених вредности за челик, као и врло неповољних ефеката извијања челичних стубова. Овакви случајеви захтевају посебну пажњу још у прелиминарним фазама пројектовања вишеспратних зграда.

Експанзија градње вишеспратница од бетона високих чврстоћа или са мешовитим (хибридним) системима челик-бетон захтевају посебне анализе временских деформација. Различите деформације вертикалних елемената могу бити последица разлике напона, различите изложености, однос површине и запремине, скупљања и течења бетона и одсуства течења код челика. Поред тога, у случају недостатка симетрије у конструкцији зграде могу се развити бочна померања и врло неповољни ефекти другог реда за витке челичне стубове [70,108].

Уколико се ови битни утицаји у прорачунима изоставе могу се јавити далекосежне лоше последице по објекат. Поред угрожавања носивости конструкције и безбедности објекта могу се јавити нагињања подова, пуцање греда и плоча, прскање материјала ентеријера, извијање лифтовских вођица и цевовода, оштећења зидова испуне и сл. Хибридне конструкције челик-бетон су осетљивије на ове ефекте чак и код објеката ниже спратности, док су симетричне бетонске конструкције знатно сигурније чак и за висине 50-100 m [108].

Поменути негативни ефекти код вишеспратница не пружају неку могућност корективних мера након изградње објекта, те је веома важно ове ефекте сагледати у фази пројектовања и градње објекта, те на време предупредити њихов негативни утицај.

7.4. Прорачун понашања висећих мостова са кабловима

Пример 7 – Висећи мост распона 240 m

Узет је школски пример конструкције једног моста са косим кабловима. Конструкција је вишеструко статички неодређена, нехомогене структуре – вискоеластични елементи (пилон, плоча) и еластични елементи (челични кабли). Пилон је крута бетонска конструкција укљештена у тло. Примењена је метода конзолне градње, где се сегменти бетонске плоче лију на лицу места и вешају паром челичних каблова. Ово је у складу са уобичајеним поступцима градње овјешених распонских конструкција мостова средњих и великих распона.

Присутна је стална промена статичког система током градње, а такође су присутне и временске промене узроковане скупљањем и течењем бетона. Ово се одражава првенствено на промену сила у кабловима, те на угибе и напрезања бетонске плоче. Потребно је

прорачунским методама проценити напоне и деформације од сталног оптерећења и промену геометрије елемената конструкције како би се избегли и предупредили нежељени ризици по сигурност моста.

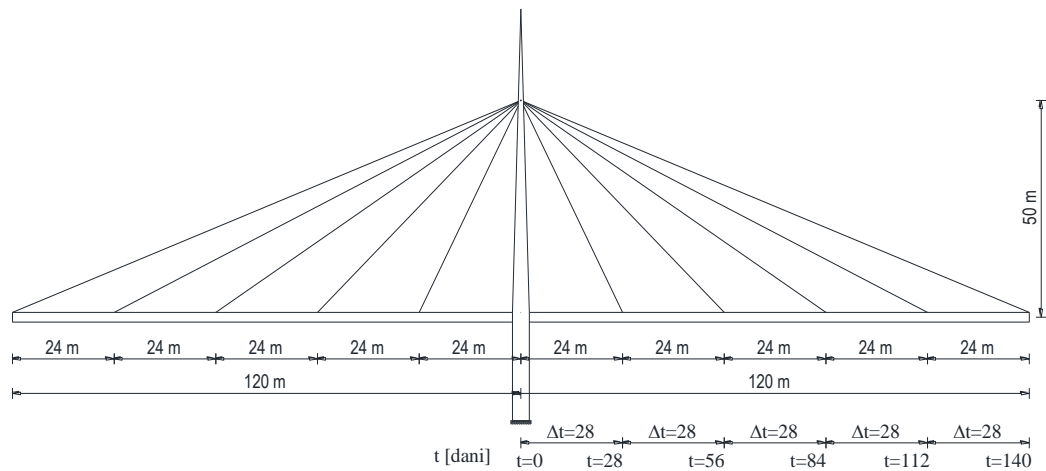
Анализа конструкције моста је спроведена за два различита нивоа крутости каблова за период од 10000 дана (27.4 год.). У првом случају узете су стварне крутости каблова ($s=0\%$) без накнадних дотезања и/или померања спојних тачака са плочом. Овде се одвија вертикално померање распонске конструкције у складу са стварном крутошћу плоче и каблова. У другом случају узета је потпуна крутост каблова у спојним тачкама ($s=100\%$), односно у тим тачкама је одржана хоризонталност плоче моста спречавањем вертикалних померања (нпр. сталним дотезањем/отпуштањем каблова). Овде је омогућена процена утицаја затезања каблова на ублажавање ефеката временских деформација бетона.

Сличан пример је анализиран у раду *Sassone and Casalegno* [108]. Указано је на значајан допринос реологије бетона на промену стања напрезања и деформација у конструкцији током времена. Алгоритам прорачуна је реализован у програмском окружењу *Matlab 7* у сарадњи са комерцијалним програмом *TNO Diana 9.4*.

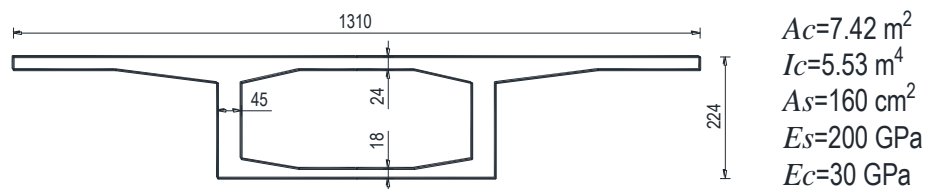
Шематски модел висећег моста са бетонском плочом, пилоном и челичним кабловима дат је на слици 7.38. Сегментна градња конзолне плоче обавља се симетрично почев од пилона ливењем на лицу места. На крају сваког изведеног сегмента качи се по пар челичних каблова кроз ојачане делове сандучасте распонске конструкције и вешају за пилон. Време завршетка два симетрична сегмента је 28 дана. Дужина сегмената плоче је 24 m, а висина пилона на месту качења каблова је 50 m. У разматрање је узето по пет сегмената плоче са сваке стране пилона завешених са по пет парова каблова. Карактеристике материјала, оптерећења и геометрија дати су на сликама 7.38, 7.39 и 7.40. Реолошке карактеристике бетона плоче узете су у складу са препорукама EC2, а у прорачун је спроведен сукцесивном применом ААЕМ-методе. У прорачуну су занемарене деформације крутог бетонског пилона, а код челичних високовредних каблова занемарена је релаксација током времена.

У прорачуну је узета хомогена бетонска плоча са својствима течења и скупљања без промене по висини плоче. Међутим, не занемарују се

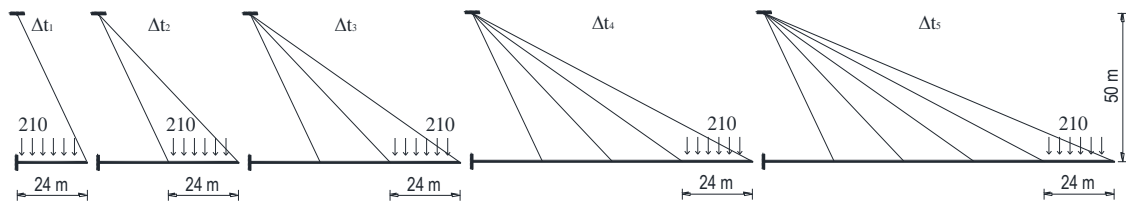
различите старости бетона за поједине сегменте плоче у време симултаног оптерећења.



Сл. 7.38 – Мост са кабловима
Fig. 7.38 – Cable-stayed bridge

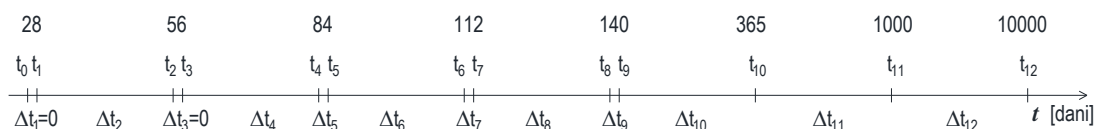


Сл. 7.39 – Попречни пресек плоче
Fig. 7.39 – Cross-section of the deck



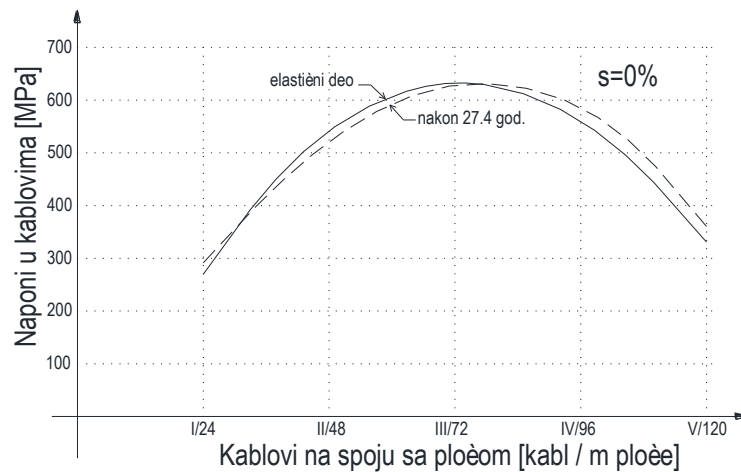
Сл. 7.40 – Статички системи и оптерећења
Fig. 7.40 – Static systems and loads

Дискретизација времена спроведена је у складу са **сликом 7.41**. Укупно време је подељено на 12 интервала у складу са технологијом изградње моста. У прорачуну нису занемарене различите старости бетона у време оптерећења, односно изградња наредног сегмента плоче укључује оптерећење те плоче али и допринос реологије бетона раније изграђених сегмената.



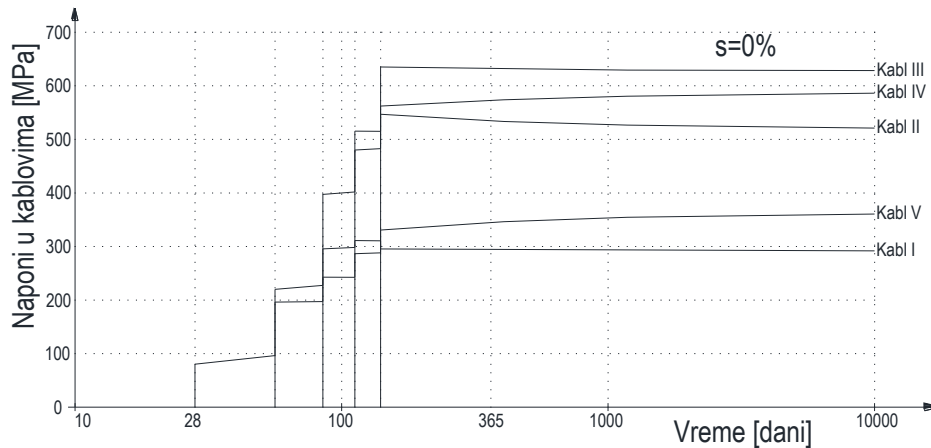
Сл. 7.41 – Дискретизација времена у складу са грађњом зграде

Fig. 7.41 – Time discretization in accordance with the building construction



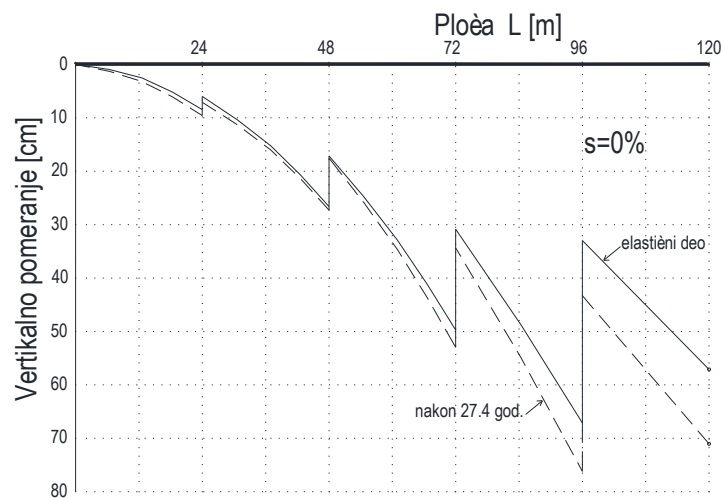
Сл. 7.42 – Напони у кабловима

Fig. 7.42 – Cables stresses



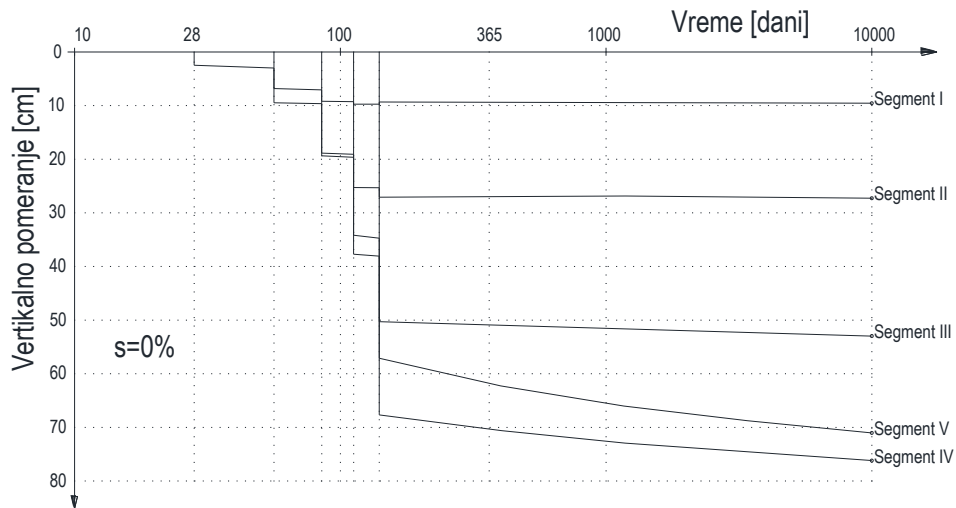
Сл. 7.43 – Промена напона у кабловима током времена

Fig. 7.43 – Stress change in the cables over time

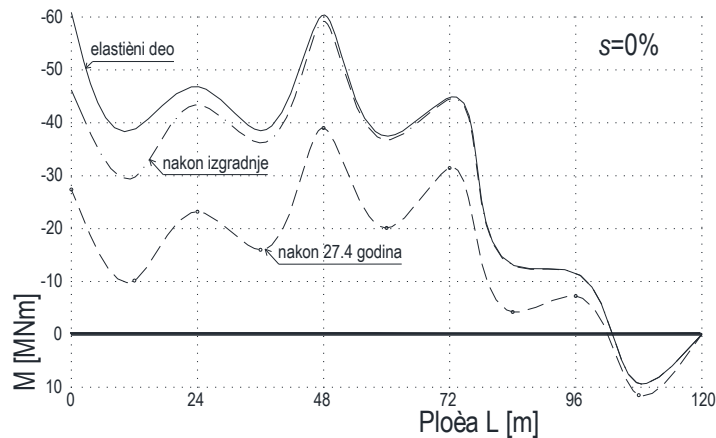


Сл. 7.44 – Вертикално померање сегмената плоче

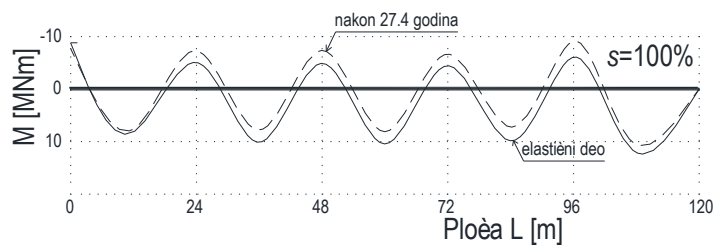
Fig. 7.44 – Vertical displacement of the deck segment



Сл. 7.45 – Вертикално померање сегмената плоче у току времена
 Fig. 7.45 – Vertical displacement of the deck segment over time



Сл. 7.46 – Моменти савијања дуж плоче за $s=0\%$
 Fig. 7.46 – Bending moments in the deck for $s=0\%$



Сл. 7.47 – Моменти савијања дуж плоче за $s=100\%$
 Fig. 7.47 – Bending moments in the deck for $s=100\%$

Иако уведене претпоставке не одговарају уобичајеним случајевима у пракси, ипак се могу сагледати битне промене и дати корисна разматрања и закључци, када је у питању допринос вискозног својства бетона код завешених мостовских конструкција [108]:

- Дотезање каблова је корисно јер умањује осетљивост конструкције на ефекте скупљања и течења бетона; за непомерљиве спојне

тачке (крутост каблова $s=100\%$) дијаграм момената савијања распонске конструкције је уједначен, и има облик типичан за континуалну греду, а временом се благо помера ка горе, где се поља плоче благо растеређују, а ослоначке зоне додатно напрежу.

- За случај стварне крутости каблова ($s=0\%$), где се током изградње нових сегмената не врше дотезања претходно постављених каблова, течење и скупљање бетона изазива значајне промене напрезања распонске конструкције; моменти савијања се временом смањују, а угиби расту. Међутим, иницијални моменти савијања су неповољни за овакав поступак градње моста; моменти савијања имају велик интензитет и негативни су целом дужином плоче сем последњег сегмента код којег су позитивне вредности значајно мањег интензитета.
- Генерално посматрано, течење и скупљање бетона испољава повољнију расподелу момената савијања распонске плоче и смањује њихове амплитуде током времена. То смањење момената у односу на иницијалне вредности је веће за ниже вредности напрезања каблова ($s=0\%$), док за $s=100\%$ иницијални моменти су знатно мањи, а временом се веома мало мењају и губи се удео реологије бетона. Међутим, за овај случај ($s=100\%$) корисне мање вредности момената савијања плоче донекле губе на значају због прогресивног повећања угиба током времена. Ти угиби су мањи код краћих (крућих) каблова ближих пилону.

7.5. Верификација развијеног модела прорачуна

За верификацију развијеног модела и пратећег софтвера за прорачун понашања СК са утицајем скупљања и течења бетона и релаксације ПЧ применом МКЕ коришћени су одговарајући примери из релевантне литературе који квалитативно репрезентују ову проблематику.

Први и други пример су преузети из књиге М. Ђурића [25] и ради се о сложеним мостовским спрегнутим конструкцијама промењивог попречног пресека. Примери су решавани у неколико варијанти, мењајући интервале времена за појединачна или групна дејства. Резултати добијени варијантним прорачунима су употпуности идентични уз исте вредности параметара. Упореджењем овде добијених резултата са изворним вредностима из [25], добијене методом сила, установљене

су незнатне разлике (до 3%). Констатовано је да су ове разлике последица увођења осредњених геометријских вредности за КЕ и јављају се већ код тренутне (еластичне) анализе. Такође, у другом примеру те разлике су делом и због приближног увођења силе преднапрезања у конструкцију преко параболичне трасе каблова. Прираштај временских деформација показује добро поклапање резултата. Ово упућује на закључак да се за конструкцију са елементима непроменљивих геометријских карактеристика поменуте разлике не би ни појавиле.

Трећи пример је преузет из [80], али је карактеристично што је тамо примењена метода коначних трака и носач је третиран као полиедарска конструкција са широким фланшама, где се комбинује равно стање напрезања и савијање. Коришћене су коначне траке равне љуске са четири степена слободе по чворној линији. Решење примера применом овде развијеног модела прорачуна са линијским КЕ и фиктивним оптерећењем дало је могућност поређења резултата по теорији савијања и аксијалног напрезања гредних (линијских) носача и равног стања напрезања површинских носача, а такође и поређења резултата применом фиктивног оптерећења у оквиру линијских КЕ и директним одређивањем овог оптерећења преко коначних трака као површинских елемената.

Констатовано је да теорија савијања гредних носача даје по ширини пресека (фланше) равномеран распоред нормалних напона за тачке једнако удаљене од неутралне осе, док по теорији савијања љуски распоред напона по ширини фланше није равномеран. Напони су највећи изнад ребра носача и опадају ка удаљенијим тачкама фланше, док по висини ребра напони задржавају приближну линеарност.

Поређењем овде добијених резултата са вредностима из [80] може се констатовати очекивано одступање у вредностима напона за фланшу због поменуте разлике теорије савијања линијских и површинских носача. За ребро та разлика је много мања што указује на исправност развијеног прорачунског модела и пратећег софтверског пакета.

Четврти пример је преузет из [90] (ПБАБ 87') и ради се о обичном попречном АБ пресеку. Примена модела са КЕ је захтевала да се такав пресек посматра у систему статички одређене конструкције (носача). У ту сврху кроз усвојене примере формирано је више врста носача/система (конзола, греда, оквир). Кроз све примере су добијени

идентични резултати. Важно је напоменути да положај резултанти унутрашњих сила има утицаја на резултате прорачуна, јер се разликују положаји тежишта бетонског пресека и идеализованог пресека од бетона и арматуре. Примењени модел прорачуна је и кроз овој пример показао једноставност, поузданост и задовољавајућу тачност.

Након верификације развијеног прорачунског модела извршена је прорачунска анализа понашања рамовких система, те вишеспратних зграда и завешених мостовских конструкција на дуготрајна дејства. У оквиру ових примера дата је анализа резултата и формулисани су одговарајући закључци.

8. ПОГЛАВЉЕ

МОГУЋНОСТ ПРИМЕНЕ РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА

На основу резултата овде спроведених истраживања може се констатовати да је утицај временског понашања бетона у конструкцијама веома значајан. Увођење ефеката временских деформација услед скупљања и течења бетона у великој мери доприноси сигурном и економичном пројектовању конструкција. Такође, реална процена утицаја заосталих деформација је веома битна при пројектовању и треба да умањи негативне појаве на употребљивост конструкције објеката у реалним експлоатационим ситуацијама.

Преднапрегнуте конструкције су нарочито осетљиве на вискозне деформације бетона, јер промена деформације преднапрегнутог носача значајно утиче на промену (пад) сила у кабловима. Ова промена изазива промену сила и у другим деловима носача, те је узајамност утицаја комплекснија за анализу и понашање преднапрегнуте конструкције, нарочито статички неодређене. Допринос овој промени има и релаксација преднапрегнутих каблова, што у сумарном облику са реологијом бетона може битније утицати на сигурност и употребљивост конструкције након дужег временског периода.

Посебно се наглашава потреба да се поменути ефекти у општем случају требају сагледати код пројектовања и грађења великих конструкција, конструкција са нехомогеним материјалима (спрегнуте конструкције) и на сложена извођења. При томе конструкције великих распона бетониране на лицу места (претходно или накнадно преднапрегнуте) захтевају свеобухватну анализу са доприносом ефеката реологије материјала (бетона и ПЧ). Такође, треба имати у виду да су посебно осетљиве високе зграде система спрегнуте и/или

мешовите конструкције челик-бетон, мостови од претходно напрегнутог бетона и/или спрегнуте распонске конструкције, мостови са косим кабловима и сл. При томе важну улогу имају локални услови средине и поступци са уградњом и неговањем младог бетона, посебно бетона великих чврстоћа и конструктивних елемената велике дебљине (преко 1 м) [14]. Треба имати у виду да код овако робусних конструктивних елемената утицаји реологије бетона, нарочито скупљања, током времена значајно расту.

Напредна истраживања у овој области и смернице дате у препорукама и кодексима међународних асоцијација треба да обезбеде поузданост и сигурност конструкцијама за које је речено да су осетљиве на временске деформације. Од међународних асоцијација, као најзначајније и најзаступљеније, издвајају се [14]:

- 1) *FIB (International Federation for Structural Concrete)*,
- 2) *ACI (American Concrete Institute)* и
- 3) *CEN (European Committee Standardization)* одговоран за Еврокодове.

Када су у питању ефекти временских деформација, њихова реална процена је веома битна при пројектовању спрегнутих конструкција (СК) и ту се намећу два важна проблема, за које се може рећи да су повезани међусобно, мада се најчешће разматрају одвојено [14]:

- 1) Проблем особине материјала – дефинисање поузданих модела за предвиђање напона и деформација услед скупљања и течења бетона током времена;
- 2) Проблем анализе (прорачуна) конструкције и компјутерски модели – одређивање временског одговора конструкције уз развој рачунарских метода прорачуна.

Отворени проблеми око ових питања још увек постоје те се у научним круговима у свету и даље одвијају интензивне дебате у циљу успостављања хармонизованог приступа задовољавајућем решењу наведених проблема. Да би се постигло повољно решење још увек доминирају двије потешкоће око којих се и даље воде расправе и усаглашавања:

- 1) Моделирање течења и скупљања бетона још није усавршено, потребан је велики број упрошћења при моделирању, недостаје синтеза (калибрација) модела течења и скупљања и нису до краја успостављене базе података (нпр. *RILEM*-ова база података);

- 2) Код великих објеката, пројектованих на период преко 100 година, код којих промену оптерећења и услова није могуће избећи, још увек није довољно сагледан утицај тих промена у сарадњи са скупљањем и течењем бетона.

Прва потешкоћа је и даље везана за потребу за даљим истраживањима физичко-хемијских особина материјала (бетона). Базе података обухватају елементе мале дебљине (*RILEM*-ова база података), за типичне лабораторијске услове, и веома је мало података за елементе веће дебљине (дебљи од 1 м), што је у савременим конструкцијама уобичајена примена (мега стубови у високоградњи, доње плоче конзолних мостова). Течење и скупљање бетона код дебљих елемената и ефекти ових појава још увек нису довољно истражени, нарочито однос површина/обим. Такође је недовољно података за конструкције коришћене више година (100 година), као и података о релаксацији након растерећења.

Значајан допринос је нова *RILEM*-ова база података која укључује колекцију дуготрајних прекомерних деформација (угиба) мостова великих распона од преднапрегнутог бетона кроз неколико деценија.

При моделирању ефеката дугорочних утицаја још увек се користе различити трендови. Линеарна вискоеластичност и теорија старења су највише прихваћени као добар математички инструмент за обухватање ефеката скупљања и течења бетона. Линеарност подразумева суперпозицију ефеката у времену, те уз претпоставку о хомогености бетона, представља знатно олакшање и поједностављује формирање прорачунских модела.

У научним круговима на међународном нивоу воде се интензивне дебате са различитим вредностима предвиђања и процене течења и скупљања бетона на стање напона и деформација, нарочито код великих објеката. Води се дискусија на три основна модела [14]:

- 1) *ACI (ACI 209.1R-05, ACI 209.2R-08)* водич за моделирање и прорачун скупљања и течења бетона [3,4];
- 2) *CEB MC90-99* и нова ревидована издања означена као *FIB MC2010* модел код (карактерише ниже вредности на крају радног века конструкције) [12];
- 3) *Vařant-Baweja B3* и *GL2000* модели (показују веће вредности и континуални раст у радном веку конструкције) [10].

ACI модели показују да сви модели представљају компромис између тачности и стварних потреба у пракси. Подаци на бази испитивања се такође могу користити у пракси и тај део је нарочито значајан.

Основне претпоставке за развој модела понашања бетона током времена су (ACI 209.2R-08) [4]:

- Скупљање и течење бетона под оптерећењем се суперпонирају;
- Може се узети линеарна вискоеластичност за напон до $0.4f_{ck}$ односно важи линеарна веза напон-течење и принцип суперпозиције у истим условима влажности и температуре;
- Подела течења бетона на базично и течење услед сушења;
- Претпоставка о линеарној расподели деформације у попречном пресеку;
- Напони индуковани током неге бетона се могу занемарити.

Уведена поједностављења су нарочито прихватљива у концептуалним и прелиминарним фазама пројектовања. Вискоеластични бетон и теорија старења, те ААЕМ метода (*Age-Adjusted Effective Modulus method*), као приближна алгебарска формулација, су ту дали највећи допринос [8].

Такође се у тим дебатама истиче потреба за што широм применом нумеричких поступака и Методе коначних елемената (МКЕ), те прорачуна по најмање две методе и пет рачунарских софтверских пакета у комбинацији са класичним нумеричким процедурама [14]. Потребно је још много истраживања и примене у пракси на нове објекте, али и на оцену поузданости постојећих објеката.

Веома су важне смернице за смањење утицаја скупљања и течења бетона током изградње конструкције објеката, посебно за бетоне високе чврстоће [15]. Ова упутства су усмерена на избор бетона, агрегата, цемента, воде, водоцементног фактора, температуре, модула еластичности, технологије производње, услова транспорта и уградње бетона итд. Најосетљивије су преднапрегнуте конструкције на грешке у моделирању и код њих је велика дисипација резултата. Моделирање прслина у бетону и њихова прогресија и даље су могући само у грубој форми.

Потребно је спроводити акције у циљу смањења неизвесности још у фази пројектовања, нарочито осетљивих конструкција. У том правцу треба предузети следеће мере [15]:

- појачати студије код проучавања физике материјала,
- појачати експериментална истраживања,
- константно ажурирати базу података (RILEM),
- пратити деформације мостова у вишегодишњој употреби.

Потребно је додатно вршити испитивање материјала и по потреби кориговати дијаграме њиховог понашања. Грешке могу бити и 100% те је нужно одређеним мерама ублажити ефекте ових грешака.

Потребно је код деформабилних и витких конструкција избећи напоне у бетону преко $0.4f_{ck}$ нарочито код преднапрегнутих конструкција. Веома је тешко обухватити симултано деловање фактора релаксације ПЧ, трења у кабловима, течења и скупљања бетона, случајна оптерећења, прслине и њихову прогресију итд. Препоручује се развој и примена 3Д прорачунских метода (3Д коначни елементи) [15].

Препоруке при пројектовању конструкције објеката се односе на остављање канала за могућност накнадног преднапрезања елемената. Нужно је рачунарски пратити етапно извођење конструкције уз реологију бетона и ПЧ као обавезан параметар. Код објеката високоградње било какве касније интервенције су теже изводљиве и своде се само на пасивне акције.

Потребно је направити и спроводити програм праћења конструкције кроз све карактеристичне ситуације [15]. Нпр. код конзолно изграђених мостова, због брзог развоја скупљања у танким горњим плочама у односу на успорени развој у дебљим доњим плочама, угиб може да има мали прираст или да чак буде негативан, али после неколико година може доћи до наглог повећања угиба. Овом повећању доприноси, поред скупљања бетона доње плоче, и релаксација преднапрегнуте арматуре. Такође је важно праћење понашања високих несиметричних зграда код којих може доћи до нагињања таваница и бочних померања услед различитог скраћења вертикалних носећих елемената (бетонска крута језгра, бетонски стубови, челични стубови, спрегнути челик-бетон стубови и др).

Мониторинг конструкције може дати значајне резултате и за побољшање базе података и модела [15]. Нарочито пратити притиснуте бетонске елементе као што су стубови код високих зграда и лукови мостова. Потребно је увек тежити могућности накнадних корективних мера. Значај је и у вршењу инверзне анализе постојећих конструкција у циљу ажурирања базе података. Значајна је међународна сарадња у

овој области. Потребно је развијати нумеричке методе и прилагођавање прорачуна на савременим рачунарима што захтева одређене вештине и формулисања.

Овде спроведене анализе и развој нумеричког модела по МКЕ, са рачунарским програмом, дају могућност прорачуна понашања СК, те предупређење негативних последица од реологије бетона и ПЧ на трајност и употребљивост конструкције у свим карактеристичним експлоатационим ситуацијама.

9. ПОГЛАВЉЕ

ЗАВРШНЕ НАПОМЕНЕ И ЗАКЉУЧЦИ

9.1. Закључци и препоруке

Завршне напомене и закључци дати су на основу резултата овде спроведених теоријских и нумеричких анализа, као и на основу анализа из актуелне литературе којом су обухваћена теоријска и експериментална истраживања из ове области, те упоређења резултата тих истраживања.

Посебно је значајан допринос теоријских и нумеричких анализа који се базирају на примени матричног рачуна, методе коначних елемената (МКЕ) и савремених рачунара.

Спрегнуте конструкције (СК) су у последње време поново актуелизоване, посебно због развоја метода и средстава заштите челика од пожара и корозије. Ово је поред низа добрих својстава веома значајан допринос у успешној примени СК у савременој грађевинској пракси.

СК се, као што је до сада више пута истакнуто, одликују добром искоришћеношћу својстава примењених материјала. Основна филозофија спрезања је да се бетон поставља у притиснутим, а челик у затегнутим зонама носача. Поред конструкционог челика (КЧ) уобичајено је да се бетон армира меком арматуром (меким челиком) (МЧ), док се високовредни челик (преднапрегнути челик) (ПЧ) може користити у склопу бетона и изван бетонског дела спрегнутог пресека.

Спрезање актуелних материјала (бетона, КЧ, МЧ и ПЧ) има за циљ да се постигне оптимум по питању основних захтева за конструкције, тј. да

се постигну најповољнија решења за стабилне, функционалне, економичне и естетики прихватљиве конструкције.

СК су успешно применљиве за средње и веће распоне уз мањи утрошак материјала, елегантнију, лакшу и виткију конструкцију. Посебно је значајан допринос монтажано-монолитног начина грађења СК [95]. Ту се првенствено истиче смањење или потпуна елиминација оплате и скела, краће време грађења, висок степен индустријализације, уштеда у материјалу и радној снази, боља контрола квалитета материјала и израде итд. Такође се може постићи веома повољан економски аспект, не само када је у питању грађење, него и по питању одржавања ових конструкција у веку њиховог трајања.

Недостаци СК односе се, пре свега, на сложеност извођења и одржавања конструкције, те на неопходност адекватне техничке и кадровске опремљености у свим фазама реализације (пројектовање, градња, контрола, мониторинг) [49]. Посебно се наглашава потреба за адекватном противпожарном и антикорозивном заштитом КЧ, јер се у пракси код нас до сада та заштита показала веома битном и може представљати један од највећих недостатака код примене СК у досадашњој грађевинској пракси.

Дуготрајне временске деформације услед скупљања и течења бетона и релаксације ПЧ, показало се, имају значајан утицај на промену понашања СК које су у дугогодишњој употреби. То се првенствено манифестује кроз знатно повећане деформације и прерасподелу напрезања између бетона и челика.

Статички неодређене конструкције су посебно интересантне за анализу, јер реологија бетона и ПЧ изазива промену статички неодређених величина па тиме и сила у пресецима и без промене утицаја (оптерећења). Ово је важно поменути, јер ако се анализирају само издвојени пресеци, где су занемарене те промене, онда резултати могу знатније одступати од оних који се сматрају довољно тачним и поузданим за решења у пракси [20].

Имајући у виду претходне напомене може се констатовати да је проблем прорачуна СК, уз увођење доприноса скупљања и течења бетона и релаксације ПЧ, специфичан и веома актуелан, те да је у највећем броју случајева у пракси тај прорачун неопходан и захтева детаљнију анализу у свим експлоатационим ситуацијама.

На основу претходно изнетог, може се закључити да је приказани модел прорачуна, уз коришћење оригиналног програма *VASKEA*, у границама уведених претпоставки, веома поуздан и да се може применити у свакодневној инжењерској пракси али, такође, и у истраживачким задацима из ове области.

За практичне проблеме веома је важан допринос развоју модела прорачуна у виду предложеног начина формирања фиктивног оптерећења (побољшани поступак) који може послужити као основа за примену у склопу једноставнијих поступака прорачуна за свакодневну инжењерску праксу.

Према овом моделу могуће је решавати читав низ проблема. Поред проблема течења, где се услед познате историје оптерећења срачунавају деформације, могуће је решавати и проблеме релаксације, где се услед познате историје деформација одређује пад напона и прерасподела напрезања у спрегнутом носачу.

Тakoђе је важно истаћи да се овим поступком, за разлику од анализе статички одређених конструкција (у пресецима нема промене утицаја), решавају статички неодређене конструкције, код којих се у пресецима мењају утицаји и без промене спољашњег оптерећења. Промена ових утицаја је даље директно везана са променом унутрашњих сила у пресецима, а тиме и напонско-деформационог стања у целини.

Приказани модел прорачуна омогућује специјалне анализе понашања спрегнутих система, где се са одговарајућим параметарским анализама могу обухватити померања ослонаца, силе претходног напрезања, додавање носачима накнадних елемената и сл.

Коришћењем овог прорачунског модела може се сагледати утицај појединих битних фактора са становишта димензионисања елемената и поступака при грађењу. Могу се анализирати сложенији случајеви, као што су све накнадне интервенције услед појачавања и санације постојећих система или случајеви искључења неких делова (нпр. услед корозије арматуре и појаве прслина у бетону).

Прорачинске анализе утицаја реологије бетона и ПЧ доприносе оптимизацији различитих подухвата у пракси, јер се може обухватити и велик број различитих метода грађења (нпр. конзолни систем грађења, континуирање монтажних елемената додатним бетоном или кабловима и сл.).

Анализом резултата приказаних примера намеће се општи закључак да је код СК неопходно укључити вискоеластична својства материјала (бетона и ПЧ), јер се напони и деформације у елементима кроз време битно мењају и те промене не могу бити занемарљиве.

У општем случају притиснути бетонски део се у принципу растеређује, а утицаје преузимају челични носач и арматура. Ови утицаји могу прекорачити допуштене границе за наведене материјале, што се при пројектовању свакако мора контролисати и ограничити на дозвољену меру.

Са становишта анализе граничних стања употребљивости, значајно је истаћи да се у току времена дилатације и кривина пресека знатно повећавају. Такође и померања (угиби) трпе промене у смислу значајнијег апсолутног повећања. Све ове промене се без детаљније анализе тешко могу проценити, имајући у виду да код вишеструко статички неодређених СК долази до значајније прерасподеле утицаја услед заједничког деловања више фактора.

Веома је важно праћење високих несиметричних зграда код којих може доћи до нагињања таваница и бочних померања услед различитог скраћења вертикалних носећих елемената (бетонска крута језгра, бетонски стубови, челични стубови, спрегнути челик-бетон стубови) [70,108]. Такође је неопходно праћење конзолно изграђених мостова, код којих због различитог развоја скупљања и течења бетона у горњим и доњим плочама, те релаксације преднапрегнутих каблова, после неколико година може доћи до наглог повећања угиба [15]. Овакве и сличне конструкције захтевају посебну пажњу још у прелиминарним фазама пројектовања.

9.1. Правци даљих истраживања

Последњих година је на светском нивоу доста рађено на истраживањима и анализи понашања СК у процесу експлоатације. Посебно су од значаја експериментална истраживања и смернице за превазилажење негативних својстава СК након коришћења у дужем временском периоду. Кроз све радове је истакнута важност примене ефеката временских деформација услед реологије материјала. Посебно је наглашена потреба да се поменути ефекти сагледају и дефинишу при пројектовању великих конструкција, примени

нехомогених материјала (спрегнуте конструкције) и на сложена фазна извођења [14,15].

Када су у питању ефекти временских деформација, њихова реална процена је веома битна при пројектовању и ту се намећу два важна проблема за које и даље треба изналазити најповољнија решења [14]. Први проблем је везан за особине материјала (бетона), односно дефинисање поузданих модела који описују зависност напон-деформација услед реологије материјала (скупљање и течење бетона). Други проблем је везан за прорачунске моделе и компјутерске програме којима се одређује (срачунава) временски одговор конструкције. Отворени проблеми око ових питања још увек постоје те се у научним круговима у свету и даље одвијају интензивне расправе у циљу успостављања хармонизованог приступа задовољавајућем решењу ових проблема.

При моделирању ефеката дугорочних утицаја још увек се користе различити приступи овом проблему. Линеарна вискоеластичност и теорија старења су највише прихваћени као добар математички инструмент за обухватање ефеката скупљања и течења бетона. Линеарност подразумева суперпозицију ефеката у времену, те уз претпоставку о хомогености бетона, представља знатно олакшање и поједностављује прорачунске моделе, што је за проблеме у пракси, показало се, сасвим прихватљиво.

Уведена поједностављења су нарочито прихватљива у концептуалним и прелиминарним фазама пројектовања СК. Вискоеластични бетон и теорија старења, те ААЕМ метода (*Age-Adjusted Effective Modulus method*), као приближна алгебарска формулација, су том упрошћењу дали највећи допринос.

Веома је компликовано обухватити симултано деловање фактора релаксације челика за преднапрезање, трења у кабловима, случајна оптерећења, течење и скупљање бетона, прслине у бетону и њихову прогресију итд. У свим новијим истраживањима у свету истиче се потреба за што широм применом нумеричких метода - Методе коначних елемената (МКЕ) и израдом софтверских пакета базираних на класичним нумеричким процедурама.

Изложени модел прорачуна и софтверско решење у овом раду управо користе нумеричке процедуре, МКЕ и рачунаре. Ово је значајна основа за коришћење прорачунског модела у пракси, али и за

коришћење у даљем развоју и унапређењу теоријских истраживања у овој области, где су значајни ефекти реологије бетона и ПЧ.

За илустрацију прорачунског поступка коришћени су равански модели, мада се поступак може проширити и на просторне моделе модификацијом матрице крутости слојевитог КЕ. Такође се поступак може проширити и на површинске носаче увођењем одговарајућих КЕ којима се такви носачи могу прорачунски третирати у складу са теоријом конструкција и МКЕ.

Модел прорачуна, са применом слојевитих КЕ, може представљати значајну основу за проширење поступка прорачуна којим би се прецизније одређивале зоне бетона који је испрскао и где би се те зоне у затегнутом стању у наредним интервалима времена искључивале из прорачуна, док би се у притиснутом стању такве зоне и даље задржавале у пуној или делимичној напонској активности.

Приказани поступак прорачуна се уз одређене модификације и проширења може прилагодити прорачуну парцијално претходно напрегнутих конструкција код којих су делимично дозвољене прслине у бетону.

Иако је било речи да се под СК подразумева спрезање бетона и челика, може се истаћи да је модел прорачуна применљив и на СК „бетон-бетон“, те да се може лако прилагодити овим конструкцијама које раде у фази са прслинама у бетону.

Предложени модели за формирање фиктивног оптерећења у текућем интервалу времена, од претходне историје спољашњих утицаја, могу послужити као значајна основа за даље проучавање и изналажење других облика модела. Значајно би било анализирати упрошћене моделе који би били примењљиви у свакодневной инжењерској пракси. Ово је нарочито важно, с обзиром да се показало да се при пројектовању олако прелази преко анализе ефеката реологије бетона и ПЧ на понашање спрегнутих система током дужег временског периода.

Веома су важне смернице за смањење утицаја скупљања и течења бетона током изградње објеката, посебно за бетоне високе чврстоће. Нужно је стално допуњавати упутства усмерена на избор бетона, технологије производње, услова транспорта и уградње. Потребно је спроводити акције у циљу смањења неизвесности код пројектовања, нарочито осетљивих конструкција. Треба појачати студије код проучавања физике материјала, радити на експерименталним

истраживањима, константно ажурирати и допуњавати базе података и пратити деформације конструкција у вишегодишњој употреби [15].

Препоруке при пројектовању треба да се односе на остављање могућности за накнадне интервенције на носачима. Нужно је рачунарски пратити етапно извођење конструкције уз реологију као обавезан параметар. Обавезно направити и спроводити програм праћења конструкције (мониторинг). Мониторинг може дати значајне резултате и за побољшање базе података и прорачунских модела. Потребно је увек тежити могућности корективних мера у карактеристичним експлоатационим ситуацијама. Значај је и у вршењу инверзне анализе постојећих конструкција у циљу ажурирања базе података. Значајна је међународна сарадња у овој области. Потребно је константно унапређивати и развијати нумеричке поступке и прилагођавање савременим рачунарима што захтева одређене вештине и формулисања.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Abbas, S.H., Bakar, S.A., Ahmadi, M., Haron, Z., (2015): *Experimental studies on corrugated steel-concrete composite slab*, Građevinar, Vol. 67, br. 3, Zagreb, str. 225-233.
- [2] ACI 209R-92, (1992): *Prediction of Creep, Shrinkage and Temperature Effects in Concrete Structures*, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 47 pp.
- [3] ACI 209.1R-05, (2005): *Report on Factors Affecting Shrinkage and Creep of Hardened Concrete*, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 13 pp.
- [4] ACI 209.2R-08, (2008): *Guide for Modeling and Calculation of Shrinkage and Creep in Hardened Concrete*, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 48 pp.
- [5] ACI 209.3R-XX, (2011): *Analysis of Creep and Shrinkage Effects on Concrete Structures*, Final Draft, Chiorino M.A. (Chairm. of Edit. Team), ACI Committee 209, 228 pp.
- [6] Amadio, C., Fragiacomio, M., (1997): *Simplified Approach to Evaluate Creep and Shrinkage Effects in Steel-Concrete Composite Beams*, Journal of Structural Engineering, Vol.123, No.9, pp. 1153-1162.
- [7] Ayoub, A., (2005): *A force-based model for composite steel-concrete beams with partial interaction*, Journal of Constructional Steel Research, No 61, pp. 387-414.
- [8] Bažant, Z. P., (1972): *Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-adjusted Effective Modulus Method*, Journal of the American Concrete Institute, Vol.69, pp. 212-217.
- [9] Bažant, Z. P., Baweja, S., (1995): *Creep and Shrinkage Prediction Model for Analysis and Design of Concrete Structures - Model B3*, RILEM Draft Recommendation, 107-GCS Guidelines for the Formulation of Creep and Shrinkage Prediction Models, Materials and Structures, Vol.28, pp. 357-365, Errata Vol. 29, p. 126, Justification and Refinements, Vol. 28, pp. 415- 430, 488-495.
- [10] Bažant, Z. P., Baweja, S., (2000): *Creep and Shrinkage Prediction Model for Analysis and Design of Concrete Structures - Model B3*, in: A. Al-Manaseer ed., The A. Neville Symposium: Creep and Shrinkage – Structural Design Effects, ACI SP-194, Am. Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, pp. 1-83.

- [11] Bažant, Z. P., Li, G. H., Yu. Q., (2009): *Prediction of Creep and Shrinkage and their Effects in Concrete Structures*, Critical Appraisal, „Proc., 8th Int. Conf. on Creep, Shrinkage and Durability of Concrete and Concrete Structures – CONCREEP 8“, Vol.2, T. Tanabe, et al. eds, CRC Press, Boca Raton, FL, pp. 1275-1289.
- [12] CEB, (1993): *CEB-FIP Model Code 1990*, CEB Bulletin d'Information No. 213/214, Comité Euro-International du Béton, Lausanne, Switzerland, 437 pp.
- [13] Chiewanichakorn, M., Aref, A.J., Chen, S.S., (2004): II-S. Ahn, *Effective Flange Width Definition for Steel-Concrete Composite Bridge Girder*, Journal of Structural Engineering, Vol. 130, No 12, pp. 2016-2031.
- [14] Chiorino, M.A., (2012): *Structural effects of time-dependent behaviour of concrete*, ICJ The Indian Concrete Journal, Vol.86, No.12, Theme: Creep and Shrinkage, Guest Editorial, Maharashtra, India, pp. 3-6.
- [15] Chiorino, M.A., Carreira, D.J., (2012): *Factors affecting creep and shrinkage of hardened concrete and guide for modelling*, ICJ The Indian Concrete Journal, Vol.86, No.12, Theme: Creep and Shrinkage, A state-of-the-art report on international recommendations and scientific debate, Maharashtra, India, pp. 11-24.
- [16] Chiorino, M.A., Casalegno, C., (2012): *Evaluation of the structural response to the time-dependent behaviour of concrete: Part 1 – An internationally harmonized format*, ICJ The Indian Concrete Journal, Vol.86, No 12, Theme: Creep and Shrinkage, Maharashtra, India, pp. 25-36.
- [17] Creus, G.J., (1986): *Viscoelasticity – Basic Theory and Applications to Concrete Structures*, Springer Verlag, Berlin.
- [18] Cumbo, A., (2014): *Formiranje slojevitih konačnih elemenata za analizu uticaja reoloških svojstava kod složenih spregnutih konstrukcija*, X međunarodni naučno-stručni skup: Savremena teorija i praksa u graditeljstvu, Zbornik radova, Banja Luka, str. 271-278.
- [19] Cumbo, A., Folić, R., (2000): *Prilog analizi uticaja tečenja i skupljanja betona kod spregnutih konstrukcija primenom metode konačnih elemenata*, Građevinski materijali i konstrukcije, vol.43, no.1-2, Beograd, pp. 12-19.
- [20] Cumbo, A., Folić, R., (2004): *Primena metode konačnih elemenata za analizu uticaja reoloških svojstava na stanje napona i deformacija spregnutih konstrukcija*, Građevinski kalendar 2004, vol.36, Beograd, pp. 203-255.
- [21] Deretić-Stojanović, B., (2008): *Proračun spregnutih konstrukcija*, Teorija konstrukcija, Monografija posvećena uspomeni na pokojnog akademika prof. dr. Milana Đurića, Beograd, str. 169-176.
- [22] Deretić-Stojanović, B., (1997): *The operator stiffness matrix of the fixed-end composite member*, Theoretical and applied mechanics 23, Beograd, pp. 35-54.

- [23] Deretić-Stojanović, B., Kostić, S., Stošić, S., (2011): *Proračun spregnutih stubova od čelika i betona*, Građevinski materijali i konstrukcije, vol. 54, no. 1, pp. 62-79.
- [24] Đurđević, M., (2008): *Jedna metoda proračuna napona i dilatacija spregnutih i prethodno napregnutih poprečnih presjeka*, Teorija konstrukcija, Monografija posvećena uspomeni na pokojnog akademika prof. dr. Milana Đurića, Beograd, str. 183-190.
- [25] Đurić M., (1963): *Teorija spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija*, SANU, Posebna izdanja, knjiga CCCLXIV, Naučno delo, Beograd, str. 183.
- [26] Đurić M., (1972): *Uticaj skupljanja i puženja betona na napone i deformacije spregnutih konstrukcija*, Časopis „Izgradnja“ – Posebno izdanje „Spregnute konstrukcije“, Beograd, str. 22-29.
- [27] Džeba, I., Mujkanović, N., Franić, T., (1987): *Proračun spregnutih nosača na elektroničkom računaru*, Simpozij: Savremene građevinske konstrukcije – Tema: Spregnute konstrukcije danas, DGKH, Zagreb.
- [28] EN 1992-1-1:2004, Evrokod 2, (2006): *Proračun betonskih konstrukcija*, Deo 1-1: Opšta pravila i pravila za zgrade, Građevinski fakultet, Beograd.
- [29] EN 1993-1-1:2004, Evrokod 3, (2006): *Proračun čeličnih konstrukcija*, Deo 1-1: Opšta pravila i pravila za zgrade, Građevinski fakultet, Beograd.
- [30] EN 1994-1-1:2004, Evrokod 4. (2006): *Proračun spregnutih konstrukcija od čelika i betona*, Deo 1-1: Opšta pravila i pravila za zgrade, prevod, Građevinski fakultet, Beograd.
- [31] EN 1994-1-2:2005, Eurocode 4. (2005): *Design of composite steel and concrete structure*, Part 1-2: General rules, Structural fire design, CEN.
- [32] EN 1994-2:2005, Eurocode 4. (2005): *Design of composite steel and concrete structure*, Part 2: General rules and rules for bridges, CEN.
- [33] Faella, C., Martinelli, E., Nigro, E., (2003): *Shear Connection Nonlinearity and Deflections of Steel-Concrete Composite Beams: A Simplified Method*, Journal of Structural Engineering, Vol. 129, No 1, pp. 12-20.
- [34] Ferreira, C., (2008): LECTURE; *Understanding Staged construction In Buildings using SAP2000*, CSI, Berkeley, CA 94704 USA.
- [35] *Fib, Model Code 2010 - Final draft*, (2012): Volume 1, *fib* Bulletin No. 65, Lausanne, 350 pp.; Volume 2, *fib* Bulletin No. 66, Lausanne, 2012, 370 pp.
- [36] Folić, R., (2014): *Bridge Engineering in Serbia*, Ch. 16in Handbook of International Bridge Engineering, Ed. Wai.Fah Chen and lian Duan, Taylor and Frances Group, CRC Press, Boca Raton, London, New York, pp- 687-746; ISBN 978-1-4398-1029-3.

- [37] Folić R., Radonjanin, V., Malešev, M. (2008): Design and Analysis of Steel-Concrete Composite Structure, Introductory report on 6th Greek National Conference on Metal Structures, Athens: Greek Association for Metal Structures, 2008, str. 1- 16,
- [38] Folić, R., Brujić, Z., (1996): *Proračun temeljnih nosača sa svojstvima tečenja na visko-elastičnom tlu*, Časopis „Izgradnja“, br.2, Beograd, str. 59-64.
- [39] Folić, R., Brujić, Z., (1997): *Stability of Columns made of Time-Dependent Materials. in Solid Mechanics*, Serbian Academy of Sciences and Art, S. M. Vol. LXXXVII, Dep. of Technical Sciences, Book 3. Ed. P. Miljanić, Belgrade, pp. 331-342.
- [40] Folić, R., Cumbo, A., (2001): *Application of Finite Elements Method in Analysis of Composite Concrete-Steel Beams*, Bulletins for Applied & Computing Mathematics, Technical University of Budapest, BAM-1782/2001 XCIV, Budapest, pp. 55-66.
- [41] Folić, R., Cumbo, A., (2000): *Theoretic Bases for Analysis of Viscous Deformations in Composite Beams using the Finite Elements Method*, Bulletins for Applied & Computing Mathematics, Technical University of Budapest, BAM-1770/2000 XCIII, Budapest, pp. 17-28.
- [42] Folić, R., Popović, B., (2008): *Parcijalno prethodno napregnute konstrukcije*, FTN-Monografije, br. 27, Novi Sad, str. 212.
- [43] Folić, R., Popović, B., Tatomirović, M., (1986): *Uticao skupljanja i tečenja betona spregnutih armiranobetonskih nosača u preseku bez prsline*, Industrijalizacija građenja III, br.10, FTN IIG, Novi Sad, str. 3-37.
- [44] Folić, R., Popović, B., Tatomirović, M., (1988): *Uticao skupljanja i tečenja betona u preseku s prslinom spregnutih AB nosača*, Časopis „Naše građevinarstvo“, br.3, Beograd, str. 289-295.
- [45] Folić, R., Tatomirović, M., (1998): *Spregnute betonske konstrukcije – I deo*, Građevinski kalendar 1999, Vol. 31, Savez građevinskih inženjera i tehničara Jugoslavije, Beograd, str. 289-386.
- [46] Folić, R., Tatomirović, M., (2000): *Spregnute betonske konstrukcije – II deo*, Građevinski kalendar 2001. Vol. 33, Savez građevinskih inženjera i tehničara Jugoslavije, Beograd, str. 217-290.
- [47] Folić, R., Tatomirović, M., (1990): *Prediction of concrete creep effects in case of discontinuous load changes, in Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structure*, Ed. N. Bićanić and H. Mang, Pineridge Press, Swansea, Vol. 2, pp. 749-759.
- [48] Folić, R., Zenunović, D., (2010): *Durability problem of RC structures in Tuzla Industrial Zone - Two case studies*, Engineering Structures, Vol. 32, July, pp. 1346-1360.
- [49] Folić, R., Zenunović, D., (2009): *Spregnute konstrukcije čelik-beton*, FTN-Monografije, br. 36, Novi Sad, str. 362.

- [50] Fragiaco, M., Amadio, C., Macorini, L., (2004): *Finite-Element Model for Collapse and Long-Term Analysis of Steel-Concrete Composite Beams*, ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 130, No 3, pp. 489-497
- [51] Ghali, A., Favre, R., (1986): *Concrete Structures: Stresses and Deformations*, Chapman and Hall, London, New York, pp. 352.
- [52] Gilbert, R. I., Bradford, M. A., (1995): *Time-dependent behavior of continuous composite beams at service loads*, Journal of Structural Engineering, Vol. 121, No 2, pp. 319-327.
- [53] Hajdin, N., Marković, N., (2008): *Spregnuti nosači sa deformabilnim moždanicima*, Teorija konstrukcija, Monografija posvećena uspomeni na pokojnog akademika prof.dr. Milana Đurića, Beograd, str. 29-36.
- [54] Horvatić, D., (2003): *Spregnute konstrukcije čelik-beton*, Masmedia, Zagreb.
- [55] Horvatić, D., (1987): *Mehanizam djelovanja spregnutog nosača*, Simpozij: Savremene građevinske konstrukcije – Tema: Spregnute konstrukcije danas, DGKH, Zagreb.
- [56] Horvatić, D., (1987): *Analiza otpornosti spregnutog nosača*, Simpozij: Savremene građevinske konstrukcije – Tema: Spregnute konstrukcije danas, DGKH, Zagreb.
- [57] Horvatić, D., Živni, D., (2001): *Naponska prelaganja od puzanja betona na spregnutim mostovima*, Časopis „Građevinar“ br. 9, Vol. 53, Zagreb, str. 573-578.
- [58] Ivković, M., Prašćević, Ž., (1977): *Osvrt na neke novije predloge veza između napona i deformacija betona*, Časopis „Građevinar“ br.1, Zagreb.
- [59] Ivković, M., Radojčić, T., (1987): *Reologija i opšta teorija loma betona*, Naučna knjiga, Beograd.
- [60] Jevtić, D., (1979): *Prednapregnuti beton 1*, Građevinska knjiga, Beograd, str. 446.
- [61] Johnson, R.P., (2004): *Composite Structures of Steel and Concrete: Beams, slabs, columns, and frames for Buildings*, Third Edition, Blackwell Publishing, Oxford.
- [62] Johnson, R.P., Anderson, D., (2004): *Designers' Guide to EN 1994-1-1: Eurocode 4: Design of Composite Steel and Concrete Structures, Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*, Thomas Telford Publishing, London.
- [63] Jurić, S., Dujmović, D., Androić, B., (1987): *Međukatne konstrukcije zgrada*, Simpozij: Savremene građevinske konstrukcije – Tema: Spregnute konstrukcije danas, DGKH, Zagreb.
- [64] Kostić, S., Deretić-Stojanović, B., (2010): *Proračun skupljanja i tečenja pri analizi spregnutih kontinualnih nosača prema EC4*, GNP 2010 – Treći internacionalni naučno-stručni skup: Građevinarstvo – nauka i praksa, Žabljak, 15-19. febr.

- [65] Kostić, S.M., Deretić-Stojanović, B., Stošić, S., (2011): *Redistribution effects in linear elastic analyses of continuous composite steel-concrete beams according to Eurocode 4*, Facta universitatis - series: Architecture and Civil Engineering, vol. 9, no. 1, pp. 133-145.
- [66] Kostić, S., Stošić, S., Deretić-Stojanović, B., (2011): *Prilog proračunu spregnutih stubova od čelika i betona*, Građevinski materijali i konstrukcije, vol. 54, no. 2, pp. 3-16.
- [67] Kovačević, D., Folić, R., (1994): *Primena "ILT" modela u nelinearnoj analizi armiranobetonskih okvira*, Časopis „Izgradnja“ (48) br. 11-12, Beograd, str. 409-417.
- [68] Kožul, M., Nikolić, Ž., Mihanović, A., (2013): *Numerički model puzanja armiranih i prednapetih betonskih konstrukcija u ravnini*, Časopis „Građevinar“, Vol. 65, br. 1, Zagreb, str. 11-21.
- [69] Kržić, F., (1987): *Utjecaj izvedbe i postupnog unošenja opterećenja*, Simpozij: Savremene građevinske konstrukcije – Tema: Spregnute konstrukcije danas, DGKH, Zagreb.
- [70] Lagos, R.C., Kupfer, M.C., Sanhueza, S.T., Cordero, F.V., (2012): *Costanera Center – Shortenings due to elastic deformation, creep and shrinkage of concrete in a 300-m tall building*, ICJ The Indian Concrete Journal, vol.86, No 12, Theme: Creep and Shrinkage, Maharashtra, India, pp. 53-60.
- [71] Lazić, J., (1988): *Približna teorija spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija*, GF, Naučna knjiga, Beograd.
- [72] Lazić, J., Lazić, V., (1982): *Opšta teorija spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija*, SANU, Posebna izdanja, knjiga DXLII, Beograd, str. 156.
- [73] Leong, T.W., (1994): *Effects of Temperature and Shrinkage on Steel Concrete Composite Girders*, II International Scientific Conference „Durability and Service Life of Bridge Structures“, Poznan, Poland.
- [74] Macorini, L., Fragiaco, M., Amadio, C., Izzuddin, B.A., (2006): *Long-term analysis of steel-concrete composite beams: FE modeling for effective width evaluation*, Engineering Structures, No 28, 2006, pp. 1110-1121.
- [75] Marušić, E., Akrap, N., (2010): *Modifikacija modela skupljanja i puzanja betona*, Časopis „Građevinar“ br. 6, Vol. 62, Hrvatski savez građevinskih inženjera, Zagreb, str. 497-506.
- [76] Mašović, S., (2008): *Efekte dugotrajnog opterećenja na ponašanje betonskih konstrukcija*, Građevinski materijali i konstrukcije, vol. 51, no. 4, pp. 16-26.
- [77] Mašović, S., (2009): *Ponašanje naknadno kontinuiranih spregnutih betonskih grednih nosača tokom vremena*, Konferencija „Savremena građevinska praksa“, Zbornik radova, Novi Sad, str. 183-206.

- [78] Mašović, S., Stošić, S., Pecić, N., (2011): *Redistribution of internal forces in composite concrete girders made continuous vs. time*, Facta universitatis - series: Architecture and Civil Engineering, vol. 9, no. 1, pp. 147-159
- [79] Mihailović, V., (1989): *Spregnute i prednapregnute konstrukcije – Proračun napona i deformacija*, GF-Subotica, Naučna knjiga-Beograd, str.158.
- [80] Milašinović, D., (1994):, *Metod konačnih traka u teoriji konstrukcija – sa računarskim programima*, Student, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, str. 420.
- [81] Miličić, I., Vlajić, Lj., Folić, R., (2008): *Numeričko modeliranje i simulacija: Eksperimentalno-teorijske analize spregnute tavanice pri statičkom dejstvu*, Časopis „Materijali i konstrukcije“, br. 3, DIMK Srbije, Beograd, str. 51-60.
- [82] Milosavljević, M., (1972): *Konstruktivni problemi spregnutih konstrukcija*, Časopis „Izgradnja“ – Posebno izdanje „Spregnute konstrukcije“, Beograd, str. 3-21.
- [83] Muravljev, M., (1978): *Neka razmatranja u vezi primene stavova klasične i modifikovane teorije starenja betona*, Časopis „Naše građevinarstvo“, br. 7-8, Beograd, str. 1039-1044.
- [84] Nethercot, D.A., Li, T.Q., Choo, B.S., (1995): *Required Rotations and Moment Redistribution for Composite Frames and Continuous Beams*", Journal of Constructional Steel Research, No 35, pp. 121-163.
- [85] Nie, J., Cai, C.S., (2003): *Steel-Concrete Composite Beams Considering Shear Slip Effects*, Journal of Structural Engineering, Vol. 129, No 4, pp. 495-506.
- [86] Oliveira, P., Reis, A., (2010): *Nonlinear analysis of composite steel-concrete cable-stayed bridges*, Engineering Structures, 32(2010)2702-2716.
- [87] Partov, D., Kantchev, V., (2006): *Numerical analysis of composite steel-concrete beams, regarding rheology*, 10th Nacional and 4th International Scientific Meeting, Novi Sad, pp. 451-461.
- [88] Partov, D., Kantchev, V., (2007): *Contribution to the methods of analysis of composite steel-concrete beams, regarding rheology*, Engineering Mechanich, Vol.14, No.5, pp. 327-343.
- [89] Partov, D., Kantchev, V., (2011): *Numerical analysis of composite steel-concrete sections using integral equation of Volterra*, Central European Journal of Engineering, Volume 1, Issue 3, pp 316-331.
- [90] Perišić, Ž., (1995): *Proračun prema graničnim stanjima upotrebljivosti*, Poglavlje u knjizi „Beton i armirani beton prema BAB 87“, Priručnik, Tom 1, Građevinski fakultet, Beograd, str. 287-359.
- [91] Petković, D., (2000): *Analiza stanja napona i deformacija spregnutih konstrukcija*, Monografija, Građevinsko-ArHITEKTONSKI fakultet Univerziteta u Nišu, Niš, str. 147.

- [92] Popović, B., Folić, R., (1992): *Analiza napona i dilatacija armiranobetonskih i parcijalno prethodno napregnutih elemenata primenom relacija integralnog tipa*, Časopis „Naše građevinarstvo“, br. 1-2, Beograd, str. 35-44.
- [93] Popović, B., Folić, R., (1994): *Time Dependent Effects in Composite Members of Concrete Slab on Steel Girders*, Proc. of the 4th ASCCS Intern. Conf., Košice, Slovakia, Bratislava, pp. 432-437.
- [94] Pravilnik o tehničkim merama i uslovima za spregnute konstrukcije, Sl. list SFRJ 35/1970.
- [95] Pržulj, M., (1989): *Spregnute konstrukcije*, Građevinska knjiga, Beograd, str. 354.
- [96] Pržulj, M., (1987): *Savremeni oblici sprezanja čelika i betona u mostogradnji*, Simpozij: Savremene građevinske konstrukcije – Tema: Spregnute konstrukcije danas, DGKH, Zagreb.
- [97] Rachew, St., Kremenski, K., (2010): *On the influence of the construction stages upon the Stressed and Deformed state of some building structures*, Proceeding of the X International Conference, VSU, 3-4 June 2010, Sofia, II 362-368, ISSN: 1314-071X.
- [98] Radić, J., Šavor, Z., Gukov, I., (2004): *Dugotrajne deformacije konzolno građenih grednih mostova*, Časopis „Građevinar“, Vol. 56, br. 3, Zagreb, str. 137-144.
- [99] Radnić, J., Matešan, D., (2003): *Proračun betonskih ljsaka s uključenjem reoloških svojstava betona*, Časopis „Građevinar“, Vol. 55, br. 1, Zagreb, str. 1-13.
- [100] Radnić, J., Matešan, D., (2007): *Ispitivanje armiranobetonske ploče pod dugotrajnim opterećenjem i rasterećenjem*, Časopis „Građevinar“ br. 11, Vol. 59, Zagreb, str. 967-973.
- [101] Radnić, J., Matešan, D., (2009): *Ispitivanje prednapete betonske ljske dugotrajnim opterećenjem i rasterećenjem*, Časopis „Građevinar“ br. 8, Vol. 61, Zagreb, str. 711-720.
- [102] Radnić, J., Matešan, D., (2011): *Model nelinearnog puzanja betona*, Časopis „Građevinar“, Vol. 63, br. 2, Zagreb, str. 163-168.
- [103] Ranković, S., Drenić, D., (2002): *Static strength of the shear connectors in steel-concrete composite beams – regulations and research analysis*, Facta Universitatis, Series: Architecture and Civil Engineering, Vol. 2, No 4, 2002, pp. 251-259.
- [104] Ranzi, G., Zona, A., (2007): *A steel-concrete composite beam model with partial interaction including the shear deformability of the steel component*, Engineering Structures, No.29, Elsevier Ltd., pp. 3026-3041.
- [105] RILEM TC 107, (1995): *Guidelines for Characterizing Concrete Creep and Shrinkage in Structural Design Codes or Recommendations*, Materials and Structures, V. 28, pp. 52-55.

- [106] Rusch, H., Jungwirth, D., (1976): *Stahlbeton-Spannbeton, Berücksichtigung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden auf das Verhalten der Tragwerke*, Werner Verlag, Dusseldorf.
- [107] Ržanicin, A.R., (1974): *Teorija puženja materijala*, Prevod sa ruskog, Građevinska knjiga, Beograd, str. 358.
- [108] Sassone, M., Casalegno, C., (2012): *Evaluation of the structural response to the time-dependent behaviour of concrete: Part 2 – A general computational approach*, ICJ The Indian Concrete Journal, vol.86, No 12, Theme: Creep and Shrinkage, Maharashtra, India, pp. 39-51.
- [109] Sekulović, M., (1988): *Metod konačnih elemenata*, drugo izdanje, Građevinska knjiga, Beograd.
- [110] *Spregnute konstrukcije*, (1972), Časopis „Izgradnja“ – Posebno izdanje, decembar 1972, Beograd, str. 178.
- [111] *Spregnute konstrukcije danas*, (1987), Simpozij: Savremene građevinske konstrukcije, DGKH, Zagreb.
- [112] Stepinac, M., Rajčić, V., Barbalić, J., (2015): *Utjecaj dugotrajnog opterećenja na sprengnute sustave drvo-beton*, Časopis „Građevinar“, Vol. 67, br. 3, Zagreb, str. 235-246.
- [113] Structural concrete, (1999): *Textbook on Behaviour, Design and Performance*; Updatet knowledge of the CEB/FIP Model Code 1990; Vol.1, July 1999; CEB-FIP Bulletin 1.
- [114] Šahinagić-Isović, M., Markovski, G., Čeček, M., (2012): *Deformacije skupljanja betona - uzroci i vrste*, Časopis „Građevinar“, Vol. 64, br. 9, Zagreb, str. 727-734.
- [115] Takach, F.P., (2002): *Deformations in Concrete Cantilever Bridges: Observations and Theoretical Modelling*, Doctoral Thesis, Department of Structural Engineering The Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway, pp. 205.
- [116] Tatomirović, M., (1996): *Prilog analizi uticaja tečenja i skupljanja betona sprengnutih betonskih nosača*, Magistarski rad, FTN, Novi Sad, str. 500.
- [117] Tatomirović, M., Folić, R., (1989): *Algebarska veza napona i deformacija betona u izdvojenom intervalu vremena*, Časopis „Naše građevinarstvo“, br.5, Beograd, str. 383-388.
- [118] Traykov, A., Boiadjieva, R., (2015): *Computer modelling of structures with account of the construction stages and the time dependent material properties*, Građevinski materijali i konstrukcije, vol. 58, no. 3, pp. 29-35.
- [119] Vuksanović, Đ., Marjanović, M., (2015): *Primena slojevitih konačnih elemenata u numeričkoj analizi laminatnih kompozitnih i sendvič-ploča i ljuski s delaminacijama*, Građevinski materijali i konstrukcije, vol. 58, no. 1, pp. 59-76.

-
- [120] Zenunović D., Folić R. (2012): *Models for behaviour analysis of monolithic wall and precast or monolithic floor slab connections*, Engineering Structures, (40), pp. 466-478.
- [121] Zenunović, D., Folić, R., (2010): *Pouzdanost montažnih betonskih veza*, Časopis „Materijali i konstrukcije“, br.2, str. 47-70.
- [122] Zona, A., Barbato, M., Conte, J.P., (2005): *Finite element responsesensitivity analysis of steel-concrete composite beams with deformable shear connection*, ASCE Journal of Engineering Mechanics 131(11), pp. 1126-1139.
- [123] Yu, Q., Bažant, Z. P., Wendner, R., (2012): *Improved Algorithm for Efficient and realistic Creep Analysis of Large Creep-Sensitive Concrete Structures*, ACI Structural Journal, Vol.109, No.5, pp. 665-675.

ПРИЛОЗИ

ЛИСТИНГ УЛАЗНИХ ПОДАТАКА И РЕЗУЛТАТА ПРОРАЧУНА (за карактеристична два примера)

А) ПРИМЕР 1 – Континуална спрегнута греда 60+90+60 m

Б) ПРИМЕР 6/2 – Зграда са челичним стубовима

VASKEL *** G L A V N I M E N I *** A.Cumbo

FORMIRANJE ULAZNIH FAJLOVA---	>	VASKEL/UL	
PRORACUN STRUKTURA-----	>	VASKEL/PR	-
STAMPA ULAZA I/ILI IZLAZA----	>	VASKEL/ST	-
VERIFIK. ULAZA I/ILI IZLAZA--	>	VASKEL/VR	-
UPUTSTVO-----	>	VASKEL/UP	-
KRAJ-----	>	IZLAZ	-

A) ПРИМЕР 1 – Континуална спрегнута греда 60+90+60 m

*** Ulazni podaci *** Primer 1

-Opsti podaci

NN	NK	N0	NT
15	14	3	4

-Kordinate cvornih tacaka

CT	X [m]	Y [m]
1	0.0000	0.0000
2	9.0000	0.0000
3	15.0000	0.0000
4	24.0000	0.0000
5	33.0000	0.0000
6	39.0000	0.0000
7	45.0000	0.0000
8	51.0000	0.0000
9	57.0000	0.0000
10	60.0000	0.0000
11	64.5000	0.0000
12	73.5000	0.0000
13	82.5000	0.0000
14	91.5000	0.0000
15	105.0000	0.0000

-Identifikacija KE-greda

KE	I	J	NS
1	1	2	3
2	2	3	3
3	3	4	3
4	4	5	3
5	5	6	3
6	6	7	4
7	7	8	4
8	8	9	4
9	9	10	4
10	10	11	4
11	11	12	4
12	12	13	4
13	13	14	3
14	14	15	3

-Geometrija KE-greda/slojeva

KE	SL	A [cm ²]	I [cm ⁴]	YT [cm]	E [GPa]	H
1	1	10000.00	563325.00	0.00	35.00	vb
1	2	100.00	0.00	0.00	210.00	el
1	3	502.00	3366039.00	130.14	210.00	el
2	1	10000.00	563325.00	0.00	35.00	vb
2	2	100.00	0.00	0.00	210.00	el
2	3	622.00	4293646.00	149.02	210.00	el
3	1	10000.00	563325.00	0.00	35.00	vb
3	2	100.00	0.00	0.00	210.00	el
3	3	790.00	5172018.00	166.34	210.00	el
4	1	10000.00	563325.00	0.00	35.00	vb
4	2	100.00	0.00	0.00	210.00	el
4	3	790.00	5172018.00	166.34	210.00	el
5	1	10000.00	563325.00	0.00	35.00	vb
5	2	100.00	0.00	0.00	210.00	el
5	3	622.00	4293646.00	149.02	210.00	el
6	1	10000.00	563325.00	0.00	35.00	vb
6	2	100.00	0.00	0.00	210.00	el
6	3	90.27	0.00	0.00	210.00	el
6	4	622.00	4293646.00	149.02	210.00	el
7	1	10000.00	563325.00	0.00	35.00	vb
7	2	200.00	0.00	0.00	210.00	el
7	3	180.54	0.00	0.00	210.00	el
7	4	697.20	5085749.00	161.26	210.00	el
8	1	10000.00	563325.00	0.00	35.00	vb
8	2	200.00	0.00	0.00	210.00	el
8	3	270.81	0.00	0.00	210.00	el
8	4	903.00	10564200.00	213.29	210.00	el
9	1	10000.00	563325.00	0.00	35.00	vb
9	2	200.00	0.00	0.00	210.00	el
9	3	270.81	0.00	0.00	210.00	el
9	4	1290.00	30591060.00	308.48	210.00	el
10	1	10000.00	563325.00	0.00	35.00	vb
10	2	200.00	0.00	0.00	210.00	el
10	3	270.81	0.00	0.00	210.00	el
10	4	1290.00	30591060.00	308.48	210.00	el
11	1	10000.00	563325.00	0.00	35.00	vb
11	2	200.00	0.00	0.00	210.00	el
11	3	180.54	0.00	0.00	210.00	el

11	4	921.20	11731140.00	221.12	210.00	e1
12	1	10000.00	563325.00	0.00	35.00	vb
12	2	100.00	0.00	0.00	210.00	e1
12	3	90.27	0.00	0.00	210.00	e1
12	4	723.80	6164110.00	172.43	210.00	e1
13	1	10000.00	563325.00	0.00	35.00	vb
13	2	100.00	0.00	0.00	210.00	e1
13	3	834.00	6454483.00	180.23	210.00	e1
14	1	10000.00	563325.00	0.00	35.00	vb
14	2	100.00	0.00	0.00	210.00	e1
14	3	1058.00	7415823.00	195.85	210.00	e1

-Iskljucenje slojeva (po intervalima)

dt	NIS
1	35
2	7
3	0
4	0

dt	No	KE	SL	dt	No	KE	SL
1	1	1	1	1	22	9	3
1	2	1	2	1	23	10	1
1	3	2	1	1	24	10	2
1	4	2	2	1	25	10	3
1	5	3	1	1	26	11	1
1	6	3	2	1	27	11	2
1	7	4	1	1	28	11	3
1	8	4	2	1	29	12	1
1	9	5	1	1	30	12	2
1	10	5	2	1	31	12	3
1	11	6	1	1	32	13	1
1	12	6	2	1	33	13	2
1	13	6	3	1	34	14	1
1	14	7	1	1	35	14	2
1	15	7	2	2	1	6	3
1	16	7	3	2	2	7	3
1	17	8	1	2	3	8	3
1	18	8	2	2	4	9	3
1	19	8	3	2	5	10	3
1	20	9	1	2	6	11	3
1	21	9	2	2	7	12	3

-Opterecenja (po intervalima)

dt	NQ	NPF	NF
1	0	0	0
2	0	7	0
3	14	0	0
4	0	0	0

-Opterecenje slojeva PN-silama /prirastaj/ za interval dt(2)

dt	No	KE	SL	FPx [KN]
2	1	6	3	5000.000
2	2	7	3	10000.000
2	3	8	3	15000.000
2	4	9	3	15000.000
2	5	10	3	15000.000
2	6	11	3	10000.000
2	7	12	3	5000.000

-Specificno opterecenje /prirastaj/ za interval dt(3)

dt	No	KE	Q [KN/m]	Q1 [KN/m]	L1 [m]
3	1	1	-33.000	-33.000	0.000
3	2	2	-33.000	-33.000	0.000
3	3	3	-33.000	-33.000	0.000
3	4	4	-33.000	-33.000	0.000

3	5	5	-33.000	-33.000	0.000
3	6	6	-33.000	-33.000	0.000
3	7	7	-33.000	-33.000	0.000
3	8	8	-33.000	-33.000	0.000
3	9	9	-33.000	-33.000	0.000
3	10	10	-33.000	-33.000	0.000
3	11	11	-33.000	-33.000	0.000
3	12	12	-33.000	-33.000	0.000
3	13	13	-33.000	-33.000	0.000
3	14	14	-33.000	-33.000	0.000

-Granichni uslovi u CT sa osloncima

No	CT	U0	V0	T0
1	1	1	0	1
2	10	1	0	1
3	15	0	1	0

-Pomeranja CT /po intervalima/

dt	NZo
1	1
2	0
3	1
4	0

-Pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(1)

dt	No	CT	Osa	q [cm]
1	1	10	Y	84.00

-Pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(3)

dt	No	CT	Osa	q [cm]
3	1	10	Y	-55.00

-Reoloske karakteristike KE1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14 SL1

Fi(2,1)=0.00	Hi(2,1)=0.50
Fi(3,1)=0.00	Hi(3,2)=0.50
Fi(3,2)=0.00	Hi(4,3)=0.50
Fi(4,1)=2.00	es(2,1)=0.00000
Fi(4,2)=2.00	es(3,2)=0.00000
Fi(4,3)=2.00	es(4,3)=0.00020

*** Rezultati proracuna *** Primer 1

-Generalisana pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(1)

CT	U [mm]	V [mm]	t [rad*10 ³]
1	0.0	0.0	17.3
2	0.0	155.0	17.0
3	0.0	255.8	16.6
4	0.0	401.1	15.7
5	0.0	536.3	14.3
6	0.0	618.4	13.0
7	0.0	691.7	11.4
8	0.0	755.9	9.9
9	0.0	812.9	9.1
10	0.0	840.0	8.9
11	0.0	879.7	8.7
12	0.0	952.6	7.5
13	0.0	1009.4	5.1
14	0.0	1045.6	2.9
15	0.0	1065.3	0.0

-Generalisana pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(2)

CT	U [mm]	V [mm]	t [rad*10 ³]
1	7.4	0.0	0.5
2	7.4	4.3	0.4
3	7.4	6.5	0.3
4	7.4	8.3	0.1
5	7.4	7.8	-0.2
6	7.4	5.4	-0.6
7	6.8	1.9	-0.6
8	5.6	-0.9	-0.3
9	4.1	-1.1	0.3
10	3.4	0.0	0.5
11	2.4	2.9	0.8
12	0.9	12.1	1.2
13	0.0	22.7	1.1
14	0.0	30.4	0.6
15	0.0	34.5	0.0

-Generalisana pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(3)

CT	U [mm]	V [mm]	t [rad*10 ³]
1	0.0	0.0	-13.9
2	0.0	-121.5	-12.7
3	0.0	-194.1	-11.4
8	5.6	-0.9	-0.3
9	4.1	-1.1	0.3
10	3.4	0.0	0.5
11	2.4	2.9	0.8
12	0.9	12.1	1.2
13	0.0	22.7	1.1
14	0.0	30.4	0.6
15	0.0	34.5	0.0

-Generalisana pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(3)

CT	U [mm]	V [mm]	t [rad*10 ³]
1	0.0	0.0	-13.9
2	0.0	-121.5	-12.7
3	0.0	-194.1	-11.4
4	0.0	-289.1	-9.7
5	0.0	-368.2	-8.0
6	0.0	-412.3	-6.8
7	0.0	-451.0	-6.2
8	0.0	-488.8	-6.5
9	0.0	-528.9	-7.0
10	0.0	-550.0	-7.1
11	0.0	-582.6	-7.3
12	0.0	-650.2	-7.5
13	0.0	-712.4	-6.0
14	0.0	-756.4	-3.6
15	0.0	-781.3	0.0

-Generalisana pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(4)

CT	U [mm]	V [mm]	t [rad*10 ³]
1	22.3	0.0	-1.3
2	20.9	-8.0	-0.5
3	19.8	-9.8	-0.1
4	18.1	-7.8	0.5
5	16.6	-2.3	0.7
6	15.6	0.5	0.2
7	14.2	1.1	-0.1
8	12.6	0.2	-0.3
9	11.0	-0.4	0.0
10	10.3	0.0	0.2
11	9.2	1.5	0.5
12	7.2	6.0	0.6
13	4.9	9.0	0.2

14	3.0	8.4	-0.2
15	0.0	6.4	0.0

-Deformacije i naponi /prirastaj/ za interval dt(1)

KE	SL	CT	e [10 ³]	k [10 ³ /m]	a [MPa]	β [MPa/m]
1	1	1	0.000	0.000	0.000	0.000
1	1	2	0.000	0.000	0.000	0.000
1	2	1	0.000	0.000	0.000	0.000
1	2	2	0.000	0.000	0.000	0.000
1	3	1	0.000	-0.000	0.000	-0.000
1	3	2	0.000	-0.071	0.000	-14.972
2	1	2	0.000	0.000	0.000	0.000
2	1	3	0.000	0.000	0.000	0.000
2	2	2	0.000	0.000	0.000	0.000
2	2	3	0.000	0.000	0.000	0.000
2	3	2	0.000	0.056	0.000	11.738
2	3	3	0.000	-0.093	0.000	-19.562
3	1	3	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1	4	0.000	0.000	0.000	0.000
3	2	3	0.000	0.000	0.000	0.000
3	2	4	0.000	0.000	0.000	0.000
3	3	3	0.000	0.077	0.000	16.240
3	3	4	0.000	-0.124	0.000	-25.985
4	1	4	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1	5	0.000	0.000	0.000	0.000
4	2	4	0.000	0.000	0.000	0.000
4	2	5	0.000	0.000	0.000	0.000
4	3	4	0.000	0.124	0.000	25.984
4	3	5	0.000	-0.170	0.000	-35.731
5	1	5	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1	6	0.000	0.000	0.000	0.000
5	2	5	0.000	0.000	0.000	0.000
5	2	6	0.000	0.000	0.000	0.000
5	3	5	0.000	0.205	0.000	43.039
5	3	6	0.000	-0.242	0.000	-50.867
6	1	6	0.000	0.000	0.000	0.000
6	1	7	0.000	0.000	0.000	0.000
6	2	6	0.000	0.000	0.000	0.000
6	2	7	0.000	0.000	0.000	0.000
6	3	6	0.000	0.000	0.000	0.000
6	3	7	0.000	0.000	0.000	0.000
6	4	6	0.000	0.242	0.000	50.867
6	4	7	0.000	-0.279	0.000	-58.689
7	1	7	0.000	0.000	0.000	0.000
7	1	8	0.000	0.000	0.000	0.000
7	2	7	0.000	0.000	0.000	0.000
7	2	8	0.000	0.000	0.000	0.000
7	3	7	0.000	0.000	0.000	0.000
7	3	8	0.000	0.000	0.000	0.000
7	4	7	0.000	0.236	0.000	49.548
7	4	8	0.000	-0.267	0.000	-56.152
8	1	8	0.000	0.000	0.000	0.000
8	1	9	0.000	0.000	0.000	0.000
8	2	8	0.000	0.000	0.000	0.000
8	2	9	0.000	0.000	0.000	0.000
8	3	8	0.000	0.000	0.000	0.000
8	3	9	0.000	0.000	0.000	0.000
8	4	8	0.000	0.129	0.000	27.033
8	4	9	0.000	-0.144	0.000	-30.211
9	1	9	0.000	0.000	0.000	0.000
9	1	10	0.000	0.000	0.000	0.000
9	2	9	0.000	0.000	0.000	0.000
9	2	10	0.000	0.000	0.000	0.000
9	3	9	0.000	0.000	0.000	0.000
9	3	10	0.000	0.000	0.000	0.000
9	4	9	0.000	0.050	0.000	10.444
9	4	10	0.000	-0.052	0.000	-10.981
10	1	10	0.000	0.000	0.000	0.000

10	1	11	0.000	0.000	0.000	0.000
10	2	10	0.000	0.000	0.000	0.000
10	2	11	0.000	0.000	0.000	0.000
10	3	10	0.000	0.000	0.000	0.000
10	3	11	0.000	0.000	0.000	0.000
10	4	10	0.000	0.052	0.000	10.994
10	4	11	0.000	-0.052	0.000	-10.989
11	1	11	0.000	0.000	0.000	0.000
11	1	12	0.000	0.000	0.000	0.000
11	2	11	0.000	0.000	0.000	0.000
11	2	12	0.000	0.000	0.000	0.000
11	3	11	0.000	0.000	0.000	0.000
11	3	12	0.000	0.000	0.000	0.000
11	4	11	0.000	0.136	0.000	28.646
11	4	12	0.000	-0.136	0.000	-28.645
12	1	12	0.000	0.000	0.000	0.000
12	1	13	0.000	0.000	0.000	0.000
12	2	12	0.000	0.000	0.000	0.000
12	2	13	0.000	0.000	0.000	0.000
12	3	12	0.000	0.000	0.000	0.000
12	3	13	0.000	0.000	0.000	0.000
12	4	12	0.000	0.260	0.000	54.516
12	4	13	0.000	-0.260	0.000	-54.521
13	1	13	0.000	0.000	0.000	0.000
13	1	14	0.000	0.000	0.000	0.000
13	2	13	0.000	0.000	0.000	0.000
13	2	14	0.000	0.000	0.000	0.000
13	3	13	0.000	0.248	0.000	52.066
13	3	14	0.000	-0.248	0.000	-52.066
14	1	14	0.000	0.000	0.000	0.000
14	1	15	0.000	0.000	0.000	0.000
14	2	14	0.000	0.000	0.000	0.000
14	2	15	0.000	0.000	0.000	0.000
14	3	14	0.000	0.216	0.000	45.315
14	3	15	0.000	-0.216	0.000	-45.315

-Deformacije i naponi /prirastaj/ za interval dt(2)

KE	SL	CT	e [10 ³]	k [10 ³ /m]	a [MPa]	β [MPa/m]
1	1	1	0.000	-0.000	0.000	-0.000
1	1	2	0.006	-0.022	0.219	-0.760
1	2	1	0.000	-0.000	0.000	-0.000
1	2	2	0.006	-0.022	1.313	-4.559
1	3	1	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
1	3	2	-0.022	-0.022	-4.620	-4.559
2	1	2	-0.006	0.015	-0.204	0.524
2	1	3	0.010	-0.025	0.339	-0.874
2	2	2	-0.006	0.015	-1.221	3.147
2	2	3	0.010	-0.025	2.035	-5.245
2	3	2	0.017	0.015	3.468	3.147
2	3	3	-0.028	-0.025	-5.781	-5.245
3	1	3	-0.009	0.018	-0.322	0.627
3	1	4	0.015	-0.029	0.515	-1.003
3	2	3	-0.009	0.018	-1.933	3.760
3	2	4	0.015	-0.029	3.092	-6.016
3	3	3	0.021	0.018	4.322	3.760
3	3	4	-0.033	-0.029	-6.915	-6.016
4	1	4	-0.015	0.029	-0.515	1.003
4	1	5	0.020	-0.039	0.709	-1.379
4	2	4	-0.015	0.029	-3.092	6.016
4	2	5	0.020	-0.039	4.252	-8.272
4	3	4	0.033	0.029	6.915	6.016
4	3	5	-0.045	-0.039	-9.508	-8.272
5	1	5	-0.021	0.055	-0.746	1.923
5	1	6	0.025	-0.065	0.882	-2.273
5	2	5	-0.021	0.055	-4.478	11.539
5	2	6	0.025	-0.065	5.292	-13.637
5	3	5	0.061	0.055	12.718	11.539
5	3	6	-0.072	-0.065	-15.030	-13.637

6	1	6	0.099	0.002	3.466	0.059
6	1	7	-0.095	-0.012	-3.330	-0.408
6	2	6	0.099	0.002	20.796	0.351
6	2	7	-0.095	-0.012	-19.982	-2.449
6	3	6	0.000	0.000	0.000	0.000
6	3	7	0.000	0.000	0.000	0.000
6	4	6	0.102	0.002	21.319	0.351
6	4	7	-0.113	-0.012	-23.631	-2.449
7	1	7	0.209	-0.054	7.331	-1.893
7	1	8	-0.206	0.046	-7.209	1.615
7	2	7	0.209	-0.054	43.984	-11.357
7	2	8	-0.206	0.046	-43.253	9.690
7	3	7	0.000	0.000	0.000	0.000
7	3	8	0.000	0.000	0.000	0.000
7	4	7	0.122	-0.054	25.670	-11.357
7	4	8	-0.132	0.046	-27.627	9.690
8	1	8	0.325	-0.097	11.392	-3.402
8	1	9	-0.323	0.093	-11.299	3.269
8	2	8	0.325	-0.097	68.352	-20.412
8	2	9	-0.323	0.093	-67.797	19.613
8	3	8	0.000	0.000	0.000	0.000
8	3	9	0.000	0.000	0.000	0.000
8	4	8	0.118	-0.097	24.816	-20.412
8	4	9	-0.124	0.093	-25.965	19.613
9	1	9	0.319	-0.074	11.175	-2.582
9	1	10	-0.318	0.073	-11.143	2.557
9	2	9	0.319	-0.074	67.047	-15.491
9	2	10	-0.318	0.073	-66.860	15.343
9	3	9	0.000	0.000	0.000	0.000
9	3	10	0.000	0.000	0.000	0.000
9	4	9	0.092	-0.074	19.260	-15.491
9	4	10	-0.093	0.073	-19.530	15.343
10	1	10	0.318	-0.073	11.143	-2.557
10	1	11	-0.318	0.073	-11.143	2.557
10	2	10	0.318	-0.073	66.860	-15.343
10	2	11	-0.318	0.073	-66.860	15.343
10	3	10	0.000	0.000	0.000	0.000
10	3	11	0.000	0.000	0.000	0.000
10	4	10	0.093	-0.073	19.530	-15.343
10	4	11	-0.093	0.073	-19.530	15.343
11	1	11	0.206	-0.048	7.209	-1.684
11	1	12	-0.206	0.048	-7.209	1.684
11	2	11	0.206	-0.048	43.254	-10.106
11	2	12	-0.206	0.048	-43.254	10.106
11	3	11	0.000	0.000	0.000	0.000
11	3	12	0.000	0.000	0.000	0.000
11	4	11	0.100	-0.048	20.908	-10.106
11	4	12	-0.100	0.048	-20.908	10.106
12	1	12	0.089	0.012	3.130	0.432
12	1	13	-0.089	-0.012	-3.130	-0.432
12	2	12	0.089	0.012	18.777	2.593
12	2	13	-0.089	-0.012	-18.777	-2.593
12	3	12	0.000	0.000	0.000	0.000
12	3	13	0.000	0.000	0.000	0.000
12	4	12	0.111	0.012	23.248	2.593
12	4	13	-0.111	-0.012	-23.248	-2.593
13	1	13	-0.034	0.058	-1.183	2.047
13	1	14	0.034	-0.058	1.183	-2.047
13	2	13	-0.034	0.058	-7.097	12.279
13	2	14	0.034	-0.058	7.097	-12.279
13	3	13	0.072	0.058	15.034	12.279
13	3	14	-0.072	-0.058	-15.033	-12.279
14	1	14	-0.033	0.044	-1.139	1.553
14	1	15	0.033	-0.044	1.139	-1.553
14	2	14	-0.033	0.044	-6.833	9.315
14	2	15	0.033	-0.044	6.833	-9.315
14	3	14	0.054	0.044	11.410	9.315
14	3	15	-0.054	-0.044	-11.410	-9.315

-Deformacije i naponi /prirastaj/ za interval dt(3)

KE	SL	CT	e [10 ³]	k [10 ³ /m]	a [MPa]	β [MPa/m]
1	1	1	-0.000	0.000	-0.000	0.000
1	1	2	-0.075	0.262	-2.640	9.168
1	2	1	-0.000	0.000	-0.000	0.000
1	2	2	-0.075	0.262	-15.840	55.009
1	3	1	0.000	0.000	0.000	0.000
1	3	2	0.265	0.262	55.746	55.009
2	1	2	0.070	-0.181	2.456	-6.329
2	1	3	-0.098	0.253	-3.435	8.853
2	2	2	0.070	-0.181	14.734	-37.972
2	2	3	-0.098	0.253	-20.611	53.117
2	3	2	-0.199	-0.181	-41.850	-37.972
2	3	3	0.279	0.253	58.542	53.117
3	1	3	0.093	-0.181	3.262	-6.346
3	1	4	-0.106	0.207	-3.720	7.238
3	2	3	0.093	-0.181	19.572	-38.077
3	2	4	-0.106	0.207	-22.322	43.429
3	3	3	-0.208	-0.181	-43.768	-38.077
3	3	4	0.238	0.207	49.919	43.429
4	1	4	0.106	-0.207	3.720	-7.238
4	1	5	-0.087	0.170	-3.055	5.943
4	2	4	0.106	-0.207	22.322	-43.428
4	2	5	-0.087	0.170	-18.328	35.659
4	3	4	-0.238	-0.207	-49.918	-43.428
4	3	5	0.195	0.170	40.988	35.659
5	1	5	0.092	-0.237	3.217	-8.291
5	1	6	-0.060	0.154	-2.092	5.391
5	2	5	0.092	-0.237	19.302	-49.743
5	2	6	-0.060	0.154	-12.552	32.348
5	3	5	-0.261	-0.237	-54.823	-49.743
5	3	6	0.170	0.154	35.652	32.348
6	1	6	0.057	-0.153	1.998	-5.343
6	1	7	-0.012	0.032	-0.421	1.126
6	2	6	0.057	-0.153	11.988	-32.061
6	2	7	-0.012	0.032	-2.526	6.755
6	3	6	0.057	-0.153	11.988	-32.061
6	3	7	-0.012	0.032	-2.526	6.755
6	4	6	-0.170	-0.153	-35.788	-32.061
6	4	7	0.036	0.032	7.540	6.755
7	1	7	0.010	-0.025	0.363	-0.887
7	1	8	0.041	-0.100	1.432	-3.495
7	2	7	0.010	-0.025	2.180	-5.321
7	2	8	0.041	-0.100	8.590	-20.968
7	3	7	0.010	-0.025	2.180	-5.321
7	3	8	0.041	-0.100	8.590	-20.968
7	4	7	-0.030	-0.025	-6.401	-5.321
7	4	8	-0.120	-0.100	-25.223	-20.968
8	1	8	-0.030	0.047	-1.047	1.653
8	1	9	0.077	-0.121	2.678	-4.227
8	2	8	-0.030	0.047	-6.284	9.920
8	2	9	0.077	-0.121	16.067	-25.364
8	3	8	-0.030	0.047	-6.284	9.920
8	3	9	0.077	-0.121	16.067	-25.364
8	4	8	0.071	0.047	14.874	9.920
8	4	9	-0.181	-0.121	-38.033	-25.364
9	1	9	-0.052	0.045	-1.810	1.559
9	1	10	0.070	-0.060	2.440	-2.102
9	2	9	-0.052	0.045	-10.863	9.356
9	2	10	0.070	-0.060	14.642	-12.611
9	3	9	-0.052	0.045	-10.863	9.356
9	3	10	0.070	-0.060	14.642	-12.611
9	4	9	0.086	0.045	17.999	9.356
9	4	10	-0.116	-0.060	-24.261	-12.611
10	1	10	-0.070	0.060	-2.441	2.102
10	1	11	0.037	-0.032	1.295	-1.116
10	2	10	-0.070	0.060	-14.645	12.614
10	2	11	0.037	-0.032	7.772	-6.694

10	3	10	-0.070	0.060	-14.645	12.614
10	3	11	0.037	-0.032	7.772	-6.694
10	4	10	0.116	0.060	24.266	12.614
10	4	11	-0.061	-0.032	-12.878	-6.694
11	1	11	-0.055	0.080	-1.914	2.789
11	1	12	-0.027	0.039	-0.938	1.367
11	2	11	-0.055	0.080	-11.482	16.732
11	2	12	-0.027	0.039	-5.627	8.200
11	3	11	-0.055	0.080	-11.482	16.732
11	3	12	-0.027	0.039	-5.627	8.200
11	4	11	0.122	0.080	25.516	16.732
11	4	12	0.060	0.039	12.505	8.200
12	1	12	0.037	-0.077	1.304	-2.696
12	1	13	-0.122	0.253	-4.276	8.842
12	2	12	0.037	-0.077	7.822	-16.173
12	2	13	-0.122	0.253	-25.656	53.051
12	3	12	0.037	-0.077	7.822	-16.173
12	3	13	-0.122	0.253	-25.656	53.051
12	4	12	-0.096	-0.077	-20.067	-16.173
12	4	13	0.313	0.253	65.821	53.051
13	1	13	0.127	-0.220	4.453	-7.705
13	1	14	-0.186	0.322	-6.517	11.277
13	2	13	0.127	-0.220	26.720	-46.231
13	2	14	-0.186	0.322	-39.104	67.659
13	3	13	-0.270	-0.220	-56.600	-46.231
13	3	14	0.394	0.322	82.835	67.659
14	1	14	0.179	-0.244	6.275	-8.554
14	1	15	-0.211	0.288	-7.393	10.078
14	2	14	0.179	-0.244	37.650	-51.325
14	2	15	-0.211	0.288	-44.357	60.469
14	3	14	-0.299	-0.244	-62.868	-51.325
14	3	15	0.353	0.288	74.068	60.469

-Deformacije i naponi /prirastaj/ za interval dt(4)

KE	SL	CT	e [10 ³]	k [10 ³ /m]	a [MPa]	β [MPa/m]
1	1	1	0.155	-0.085	-0.792	-1.485
1	1	2	-0.232	0.077	1.869	-7.059
1	2	1	0.155	-0.085	32.493	-17.816
1	2	2	-0.232	0.077	-48.625	16.197
1	3	1	0.044	-0.085	9.308	-17.816
1	3	2	-0.131	0.077	-27.547	16.197
2	1	2	0.225	-0.082	-1.818	4.375
2	1	3	-0.243	0.069	2.347	-6.779
2	2	2	0.225	-0.082	47.207	-17.155
2	2	3	-0.243	0.069	-50.991	14.402
2	3	2	0.103	-0.082	21.643	-17.155
2	3	3	-0.141	0.069	-29.530	14.402
3	1	3	0.237	-0.078	-2.288	4.359
3	1	4	-0.221	0.047	2.831	-5.407
3	2	3	0.237	-0.078	49.823	-16.332
3	2	4	-0.221	0.047	-46.493	9.948
3	3	3	0.108	-0.078	22.655	-16.332
3	3	4	-0.143	0.047	-29.945	9.948
4	1	4	0.221	-0.047	-2.831	5.406
4	1	5	-0.156	-0.007	3.117	-4.692
4	2	4	0.221	-0.047	46.492	-9.948
4	2	5	-0.156	-0.007	-32.754	-1.534
4	3	4	0.143	-0.047	29.945	-9.948
4	3	5	-0.168	-0.007	-35.305	-1.534
5	1	5	0.157	0.043	-3.224	7.127
5	1	6	-0.082	-0.105	3.281	-4.955
5	2	5	0.157	0.043	32.956	9.116
5	2	6	-0.082	-0.105	-17.148	-22.041
5	3	5	0.222	0.043	46.540	9.116
5	3	6	-0.238	-0.105	-49.993	-22.041
6	1	6	0.248	0.019	-4.617	5.626
6	1	7	-0.160	-0.088	4.444	-2.253
6	2	6	0.248	0.019	52.166	4.093

6	2	7	-0.160	-0.088	-33.687	-18.423
6	3	6	0.248	0.019	52.166	4.093
6	3	7	-0.160	-0.088	-33.687	-18.423
6	4	6	0.277	0.019	58.266	4.093
6	4	7	-0.291	-0.088	-61.141	-18.423
7	1	7	0.281	-0.004	-6.274	2.714
7	1	8	-0.199	-0.054	5.787	0.936
7	2	7	0.281	-0.004	59.034	-0.783
7	2	8	-0.199	-0.054	-41.878	-11.331
7	3	7	0.281	-0.004	59.034	-0.783
7	3	8	-0.199	-0.054	-41.878	-11.331
7	4	7	0.275	-0.004	57.772	-0.783
7	4	8	-0.286	-0.054	-60.150	-11.331
8	1	8	0.355	-0.065	-7.626	0.612
8	1	9	-0.290	0.032	7.050	1.526
8	2	8	0.355	-0.065	74.628	-13.638
8	2	9	-0.290	0.032	-60.863	6.811
8	3	8	0.355	-0.065	74.628	-13.638
8	3	9	-0.290	0.032	-60.863	6.811
8	4	8	0.217	-0.065	45.539	-13.638
8	4	9	-0.221	0.032	-46.336	6.811
9	1	9	0.327	-0.060	-7.134	-0.019
9	1	10	-0.304	0.052	6.886	0.456
9	2	9	0.327	-0.060	68.762	-12.499
9	2	10	-0.304	0.052	-63.808	10.930
9	3	9	0.327	-0.060	68.762	-12.499
9	3	10	-0.304	0.052	-63.808	10.930
9	4	9	0.144	-0.060	30.206	-12.499
9	4	10	-0.143	0.052	-30.090	10.930
10	1	10	0.304	-0.052	-6.886	-0.456
10	1	11	-0.339	0.061	7.419	-0.372
10	2	10	0.304	-0.052	63.805	-10.930
10	2	11	-0.339	0.061	-71.148	12.838
10	3	10	0.304	-0.052	63.805	-10.930
10	3	11	-0.339	0.061	-71.148	12.838
10	4	10	0.143	-0.052	30.089	-10.930
10	4	11	-0.150	0.061	-31.545	12.838
11	1	11	0.193	0.003	-5.414	-1.050
11	1	12	-0.290	0.032	6.569	-2.494
11	2	11	0.193	0.003	40.574	0.650
11	2	12	-0.290	0.032	-60.931	6.689
11	3	11	0.193	0.003	40.574	0.650
11	3	12	-0.290	0.032	-60.931	6.689
11	4	11	0.200	0.003	42.011	0.650
11	4	12	-0.220	0.032	-46.140	6.689
12	1	12	0.163	0.075	-5.083	3.569
12	1	13	-0.283	-0.020	5.955	-8.760
12	2	12	0.163	0.075	34.207	15.670
12	2	13	-0.283	-0.020	-59.407	-4.204
12	3	12	0.163	0.075	34.207	15.670
12	3	13	-0.283	-0.020	-59.407	-4.204
12	4	12	0.292	0.075	61.228	15.670
12	4	13	-0.317	-0.020	-66.656	-4.204
13	1	13	0.127	0.065	-4.545	6.795
13	1	14	-0.217	-0.024	5.031	-9.655
13	2	13	0.127	0.065	26.710	13.638
13	2	14	-0.217	-0.024	-45.647	-5.105
13	3	13	0.244	0.065	51.289	13.638
13	3	14	-0.261	-0.024	-54.846	-5.105
14	1	14	0.214	-0.007	-4.892	6.877
14	1	15	-0.263	0.028	5.158	-8.032
14	2	14	0.214	-0.007	44.932	-1.503
14	2	15	-0.263	0.028	-55.149	5.927
14	3	14	0.200	-0.007	41.989	-1.503
14	3	15	-0.207	0.028	-43.541	5.927

-Generalisana pomeranja CT /UKUPNO/

CT U [mm] V [mm] t [rad*10³]

1	29.7	0.0	2.7
2	28.3	29.8	4.2
3	27.1	58.4	5.4
4	25.5	112.5	6.6
5	23.9	173.6	6.8
6	22.9	212.1	5.8
7	20.9	243.7	4.5
8	18.3	266.4	2.9
9	15.1	282.6	2.4
10	13.7	290.0	2.5
11	11.6	301.5	2.6
12	8.0	320.4	1.8
13	4.9	328.6	0.4
14	3.0	328.0	-0.3
15	0.0	324.9	0.0

-Deformacije i naponi /UKUPNO/

KE	SL	CT	e [10 ³]	k [10 ³ /m]	a [MPa]	β [MPa/m]
1	1	1	0.155	-0.085	-0.792	-1.485
1	1	2	-0.301	0.317	-0.552	1.350
1	2	1	0.155	-0.085	32.493	-17.816
1	2	2	-0.301	0.317	-63.153	66.647
1	3	1	0.044	-0.085	9.308	-17.816
1	3	2	0.112	0.246	23.578	51.675
2	1	2	0.289	-0.248	0.434	-1.430
2	1	3	-0.331	0.297	-0.749	1.200
2	2	2	0.289	-0.248	60.720	-51.980
2	2	3	-0.331	0.297	-69.567	62.274
2	3	2	-0.080	-0.192	-16.738	-40.242
2	3	3	0.111	0.203	23.231	42.712
3	1	3	0.321	-0.241	0.652	-1.361
3	1	4	-0.313	0.226	-0.374	0.829
3	2	3	0.321	-0.241	67.462	-50.650
3	2	4	-0.313	0.226	-65.724	47.361
3	3	3	-0.080	-0.164	-16.791	-34.410
3	3	4	0.062	0.102	13.059	21.376
4	1	4	0.313	-0.226	0.374	-0.829
4	1	5	-0.223	0.123	0.771	-0.128
4	2	4	0.313	-0.226	65.722	-47.360
4	2	5	-0.223	0.123	-46.830	25.853
4	3	4	-0.062	-0.102	-13.058	-21.376
4	3	5	-0.018	-0.047	-3.825	-9.878
5	1	5	0.228	-0.139	-0.754	0.760
5	1	6	-0.116	-0.016	2.071	-1.837
5	2	5	0.228	-0.139	47.781	-29.089
5	2	6	-0.116	-0.016	-24.409	-3.330
5	3	5	0.021	0.066	4.434	13.950
5	3	6	-0.140	-0.258	-29.371	-54.197
6	1	6	0.405	-0.132	0.847	0.341
6	1	7	-0.268	-0.067	0.693	-1.535
6	2	6	0.405	-0.132	84.950	-27.616
6	2	7	-0.268	-0.067	-56.195	-14.118
6	3	6	0.305	-0.133	64.154	-27.967
6	3	7	-0.172	-0.056	-36.213	-11.669
6	4	6	0.209	0.111	43.797	23.250
6	4	7	-0.368	-0.347	-77.233	-72.807
7	1	7	0.501	-0.083	1.420	-0.065
7	1	8	-0.364	-0.108	0.010	-0.944
7	2	7	0.501	-0.083	105.198	-17.460
7	2	8	-0.364	-0.108	-76.541	-22.609
7	3	7	0.291	-0.029	61.214	-6.104
7	3	8	-0.159	-0.154	-33.288	-32.299
7	4	7	0.367	0.153	77.042	32.088
7	4	8	-0.538	-0.375	-113.000	-78.761
8	1	8	0.651	-0.115	2.719	-1.137
8	1	9	-0.536	0.005	-1.572	0.568
8	2	8	0.651	-0.115	136.697	-24.130
8	2	9	-0.536	0.005	-112.592	1.059

8	3	8	0.325	-0.018	68.345	-3.719
8	3	9	-0.213	-0.088	-44.796	-18.554
8	4	8	0.406	0.014	85.229	2.902
8	4	9	-0.525	-0.139	-110.334	-29.152
9	1	9	0.595	-0.089	2.230	-1.042
9	1	10	-0.553	0.065	-1.817	0.911
9	2	9	0.595	-0.089	124.946	-18.634
9	2	10	-0.553	0.065	-116.026	13.662
9	3	9	0.276	-0.015	57.899	-3.143
9	3	10	-0.234	-0.008	-49.166	-1.681
9	4	9	0.321	-0.039	67.464	-8.190
9	4	10	-0.352	0.013	-73.881	2.682
10	1	10	0.552	-0.065	1.817	-0.911
10	1	11	-0.620	0.102	-2.429	1.070
10	2	10	0.552	-0.065	116.020	-13.659
10	2	11	-0.620	0.102	-130.237	21.487
10	3	10	0.234	0.008	49.160	1.684
10	3	11	-0.302	0.029	-63.376	6.144
10	4	10	0.352	-0.013	73.885	-2.665
10	4	11	-0.305	0.050	-63.953	10.499
11	1	11	0.345	0.035	-0.119	0.054
11	1	12	-0.523	0.119	-1.578	0.557
11	2	11	0.345	0.035	72.346	7.276
11	2	12	-0.523	0.119	-109.812	24.995
11	3	11	0.139	0.083	29.093	17.382
11	3	12	-0.317	0.071	-66.558	14.889
11	4	11	0.421	0.171	88.435	35.922
11	4	12	-0.260	-0.017	-54.543	-3.650
12	1	12	0.290	0.010	-0.649	1.306
12	1	13	-0.494	0.220	-1.451	-0.350
12	2	12	0.290	0.010	60.806	2.089
12	2	13	-0.494	0.220	-103.840	46.254
12	3	12	0.200	-0.002	42.029	-0.503
12	3	13	-0.405	0.233	-85.063	48.847
12	4	12	0.307	0.270	64.409	56.605
12	4	13	-0.115	-0.039	-24.083	-8.267
13	1	13	0.221	-0.097	-1.274	1.137
13	1	14	-0.370	0.239	-0.304	-0.425
13	2	13	0.221	-0.097	46.332	-20.313
13	2	14	-0.370	0.239	-77.654	50.276
13	3	13	0.046	0.151	9.722	31.753
13	3	14	0.062	-0.009	12.955	-1.790
14	1	14	0.361	-0.207	0.244	-0.125
14	1	15	-0.441	0.272	-1.096	0.494
14	2	14	0.361	-0.207	75.749	-43.513
14	2	15	-0.441	0.272	-92.673	57.081
14	3	14	-0.045	0.009	-9.469	1.802
14	3	15	0.091	0.056	19.116	11.765

Б) ПРИМЕР 6/2 – Зграда са челичним стубовима

*** Ulazni podaci *** Primer 6/2

-Opsti podaci

NN	NK	NO	NT
17	20	7	12

-Kordinate cvornih tacaka

СТ	X [m]	Y [m]		
1	0.0000	0.0000	5	0.0000 24.0000
2	0.0000	6.0000	6	0.0000 30.0000
3	0.0000	12.0000	7	3.5000 6.0000
4	0.0000	18.0000	8	3.5000 12.0000
			9	3.5000 18.0000

10	3.5000	24.0000	14	7.0000	12.0000
11	3.5000	30.0000	15	7.0000	18.0000
12	7.0000	0.0000	16	7.0000	24.0000
13	7.0000	6.0000	17	7.0000	30.0000

-Identifikacija KE-greda

KE	I	J	NS				
				11	2	7	1
1	1	2	2	12	7	13	1
2	2	3	2	13	3	8	1
3	3	4	2	14	8	14	1
4	4	5	2	15	4	9	1
5	5	6	2	16	9	15	1
6	12	13	2	17	5	10	1
7	13	14	2	18	10	16	1
8	14	15	2	19	6	11	1
9	15	16	2	20	11	17	1
10	16	17	2				

-Geometrija KE-greda/slojeva

KE	SL	A [cm ²]	I [cm ⁴]	YT [cm]	E [GPa]	H
1	1	159.00	45070.00	0.00	210.00	el
1	2	1.00	1.00	0.00	0.01	el
2	1	133.00	27690.00	0.00	210.00	el
2	2	1.00	1.00	0.00	0.01	el
3	1	113.00	18260.00	0.00	210.00	el
3	2	1.00	1.00	0.00	0.01	el
4	1	76.80	7760.00	0.00	210.00	el
4	2	1.00	1.00	0.00	0.01	el
5	1	53.80	3690.00	0.00	210.00	el
5	2	1.00	1.00	0.00	0.01	el
6	1	10500.00	428750000.00	0.00	32.00	vb
6	2	1.00	1.00	0.00	0.01	el
7	1	10500.00	428750000.00	0.00	32.00	vb
7	2	1.00	1.00	0.00	0.01	el
8	1	10500.00	428750000.00	0.00	32.00	vb
8	2	1.00	1.00	0.00	0.01	el
9	1	10500.00	428750000.00	0.00	32.00	vb
9	2	1.00	1.00	0.00	0.01	el
10	1	10500.00	428750000.00	0.00	32.00	vb
10	2	1.00	1.00	0.00	0.01	el
11	1	1800.00	540000.00	0.00	32.00	el
12	1	1800.00	540000.00	0.00	32.00	el
13	1	1800.00	540000.00	0.00	32.00	el
14	1	1800.00	540000.00	0.00	32.00	el
15	1	1800.00	540000.00	0.00	32.00	el
16	1	1800.00	540000.00	0.00	32.00	el
17	1	1800.00	540000.00	0.00	32.00	el
18	1	1800.00	540000.00	0.00	32.00	el
19	1	1800.00	540000.00	0.00	32.00	el
20	1	1800.00	540000.00	0.00	32.00	el

-Isključenje slojeva (po intervalima)

dt	NIS		dt	NIS			
1	8		7	2			
2	8		8	2			
3	6		9	0			
4	6		10	0			
5	4		11	0			
6	4		12	0			
dt	No	KE	SL				
1	1	2	1	1	6	8	1
1	2	3	1	1	7	9	1
1	3	4	1	1	8	10	1
1	4	5	1	2	1	2	1
1	5	7	1	2	2	3	1
				2	3	4	1

2	4	5	1	4	5	9	1
2	5	7	1	4	6	10	1
2	6	8	1	5	1	4	1
2	7	9	1	5	2	5	1
2	8	10	1	5	3	9	1
3	1	3	1	5	4	10	1
3	2	4	1	6	1	4	1
3	3	5	1	6	2	5	1
3	4	8	1	6	3	9	1
3	5	9	1	6	4	10	1
3	6	10	1	7	1	5	1
4	1	3	1	7	2	10	1
4	2	4	1	8	1	5	1
4	3	5	1	8	2	10	1
4	4	8	1				

-Opterecenja (po intervalima)

dt	NQ	NPF	NF	dt	NQ	NPF	NF
1	2	0	0	7	2	0	0
2	0	0	0	8	0	0	0
3	2	0	0	9	2	0	0
4	0	0	0	10	0	0	0
5	2	0	0	11	0	0	0
6	0	0	0	12	0	0	0

-Specificno opterecenje /prirastaj/ za interval dt(1)

dt	No	KE	Q [KN/m]	Q1 [KN/m]	L1 [m]
1	1	11	-84.000	-84.000	0.000
1	2	12	-84.000	-84.000	0.000

-Specificno opterecenje /prirastaj/ za interval dt(3)

dt	No	KE	Q [KN/m]	Q1 [KN/m]	L1 [m]
3	1	13	-84.000	-84.000	0.000
3	2	14	-84.000	-84.000	0.000

-Specificno opterecenje /prirastaj/ za interval dt(5)

dt	No	KE	Q [KN/m]	Q1 [KN/m]	L1 [m]
5	1	15	-84.000	-84.000	0.000
5	2	16	-84.000	-84.000	0.000

-Specificno opterecenje /prirastaj/ za interval dt(7)

dt	No	KE	Q [KN/m]	Q1 [KN/m]	L1 [m]
7	1	17	-84.000	-84.000	0.000
7	2	18	-84.000	-84.000	0.000

-Specificno opterecenje /prirastaj/ za interval dt(9)

dt	No	KE	Q [KN/m]	Q1 [KN/m]	L1 [m]
9	1	19	-84.000	-84.000	0.000
9	2	20	-84.000	-84.000	0.000

-Granicni uslovi u CT sa osloncima

No	CT	U0	V0	T0	No	CT	U0	V0	T0
1	1	0	0	0	5	15	0	1	0
2	12	0	0	0	6	16	0	1	0
3	13	0	1	0	7	17	0	1	0
4	14	0	1	0					

-Pomeranja CT /po intervalima/

dt	NZo		
1	0	3	0
2	0	4	0
		5	0

6 0
7 0
8 0
9 0

10 0
11 0
12 0

-Reoloske karakteristike KE6 SL1

Fi(2,1)=1.09
Fi(3,1)=1.09
Fi(3,2)=0.00
Fi(4,1)=1.32
Fi(4,2)=0.20
Fi(4,3)=0.20
Fi(5,1)=1.32
Fi(5,2)=0.20
Fi(5,3)=0.20
Fi(5,4)=0.00
Fi(6,1)=1.47
Fi(6,2)=0.33
Fi(6,3)=0.33
Fi(6,4)=0.12
Fi(6,5)=0.12
Fi(7,1)=1.47
Fi(7,2)=0.33
Fi(7,3)=0.33
Fi(7,4)=0.12
Fi(7,5)=0.12
Fi(7,6)=0.00
Fi(8,1)=1.58
Fi(8,2)=0.43
Fi(8,3)=0.43
Fi(8,4)=0.21
Fi(8,5)=0.21
Fi(8,6)=0.08
Fi(8,7)=0.08
Fi(9,1)=1.58
Fi(9,2)=0.43
Fi(9,3)=0.43
Fi(9,4)=0.21
Fi(9,5)=0.21
Fi(9,6)=0.08
Fi(9,7)=0.08
Fi(9,8)=0.00
Fi(10,1)=2.00
Fi(10,2)=0.79
Fi(10,3)=0.79
Fi(10,4)=0.54
Fi(10,5)=0.54
Fi(10,6)=0.40
Fi(10,7)=0.40
Fi(10,8)=0.30

Fi(10,9)=0.30
Fi(11,1)=2.30
Fi(11,2)=1.06
Fi(11,3)=1.06
Fi(11,4)=0.79
Fi(11,5)=0.79
Fi(11,6)=0.64
Fi(11,7)=0.64
Fi(11,8)=0.53
Fi(11,9)=0.53
Fi(11,10)=0.19
Fi(12,1)=2.56
Fi(12,2)=1.28
Fi(12,3)=1.28
Fi(12,4)=1.00
Fi(12,5)=1.00
Fi(12,6)=0.83
Fi(12,7)=0.83
Fi(12,8)=0.72
Fi(12,9)=0.72
Fi(12,10)=0.34
Fi(12,11)=0.13
Hi(2,1)=0.75
Hi(3,2)=0.75
Hi(4,3)=0.75
Hi(5,4)=0.75
Hi(6,5)=0.75
Hi(7,6)=0.75
Hi(8,7)=0.75
Hi(9,8)=0.75
Hi(10,9)=0.75
Hi(11,10)=0.75
Hi(12,11)=0.75
es(2,1)=0.00011
es(3,2)=0.00000
es(4,3)=0.00004
es(5,4)=0.00000
es(6,5)=0.00003
es(7,6)=0.00000
es(8,7)=0.00002
es(9,8)=0.00000
es(10,9)=0.00011
es(11,10)=0.00011
es(12,11)=0.00012

-Reoloske karakteristike KE7 SL1

Fi(3,2)=0.00
Fi(4,2)=1.09
Fi(4,3)=1.09
Fi(5,2)=1.09
Fi(5,3)=1.09
Fi(5,4)=0.00
Fi(6,2)=1.32
Fi(6,3)=1.32
Fi(6,4)=0.20
Fi(6,5)=0.20
Fi(7,2)=1.32
Fi(7,3)=1.32
Fi(7,4)=0.20
Fi(7,5)=0.20
Fi(7,6)=0.00

Fi(8,2)=1.47
Fi(8,3)=1.47
Fi(8,4)=0.33
Fi(8,5)=0.33
Fi(8,6)=0.12
Fi(8,7)=0.12
Fi(9,2)=1.47
Fi(9,3)=1.47
Fi(9,4)=0.33
Fi(9,5)=0.33
Fi(9,6)=0.12
Fi(9,7)=0.12
Fi(9,8)=0.00
Fi(10,2)=1.97
Fi(10,3)=1.97

Fi (10, 4)=0.76	Fi (12, 10)=0.37
Fi (10, 5)=0.76	Fi (12, 11)=0.13
Fi (10, 6)=0.52	Hi (3, 2)=0.75
Fi (10, 7)=0.52	Hi (4, 3)=0.75
Fi (10, 8)=0.38	Hi (5, 4)=0.75
Fi (10, 9)=0.38	Hi (6, 5)=0.75
Fi (11, 2)=2.30	Hi (7, 6)=0.75
Fi (11, 3)=2.30	Hi (8, 7)=0.75
Fi (11, 4)=1.05	Hi (9, 8)=0.75
Fi (11, 5)=1.05	Hi (10, 9)=0.75
Fi (11, 6)=0.79	Hi (11, 10)=0.75
Fi (11, 7)=0.79	Hi (12, 11)=0.75
Fi (11, 8)=0.63	es (3, 2)=0.00000
Fi (11, 9)=0.63	es (4, 3)=0.00011
Fi (11, 10)=0.21	es (5, 4)=0.00000
Fi (12, 2)=2.56	es (6, 5)=0.00004
Fi (12, 3)=2.56	es (7, 6)=0.00000
Fi (12, 4)=1.28	es (8, 7)=0.00003
Fi (12, 5)=1.28	es (9, 8)=0.00000
Fi (12, 6)=1.00	es (10, 9)=0.00013
Fi (12, 7)=1.00	es (11, 10)=0.00012
Fi (12, 8)=0.83	es (12, 11)=0.00013
Fi (12, 9)=0.83	

-Reoloske karakteristike KE8 SL1

Fi (5, 4)=0.00	Fi (11, 9)=0.78
Fi (6, 4)=1.09	Fi (11, 10)=0.23
Fi (6, 5)=1.09	Fi (12, 4)=2.56
Fi (7, 4)=1.09	Fi (12, 5)=2.56
Fi (7, 5)=1.09	Fi (12, 6)=1.28
Fi (7, 6)=0.00	Fi (12, 7)=1.28
Fi (8, 4)=1.32	Fi (12, 8)=1.00
Fi (8, 5)=1.32	Fi (12, 9)=1.00
Fi (8, 6)=0.20	Fi (12, 10)=0.40
Fi (8, 7)=0.20	Fi (12, 11)=0.14
Fi (9, 4)=1.32	Hi (5, 4)=0.75
Fi (9, 5)=1.32	Hi (6, 5)=0.75
Fi (9, 6)=0.20	Hi (7, 6)=0.75
Fi (9, 7)=0.20	Hi (8, 7)=0.75
Fi (9, 8)=0.00	Hi (9, 8)=0.75
Fi (10, 4)=1.93	Hi (10, 9)=0.75
Fi (10, 5)=1.93	Hi (11, 10)=0.75
Fi (10, 6)=0.73	Hi (12, 11)=0.75
Fi (10, 7)=0.73	es (5, 4)=0.00000
Fi (10, 8)=0.49	es (6, 5)=0.00011
Fi (10, 9)=0.49	es (7, 6)=0.00000
Fi (11, 4)=2.29	es (8, 7)=0.00004
Fi (11, 5)=2.29	es (9, 8)=0.00000
Fi (11, 6)=1.05	es (10, 9)=0.00015
Fi (11, 7)=1.05	es (11, 10)=0.00013
Fi (11, 8)=0.78	es (12, 11)=0.00013

-Reoloske karakteristike KE9 SL1

Fi (7, 6)=0.00	Fi (11, 10)=0.25
Fi (8, 6)=1.09	Fi (12, 6)=2.56
Fi (8, 7)=1.09	Fi (12, 7)=2.56
Fi (9, 6)=1.09	Fi (12, 8)=1.28
Fi (9, 7)=1.09	Fi (12, 9)=1.28
Fi (9, 8)=0.00	Fi (12, 10)=0.43
Fi (10, 6)=1.89	Fi (12, 11)=0.14
Fi (10, 7)=1.89	Hi (7, 6)=0.75
Fi (10, 8)=0.70	Hi (8, 7)=0.75
Fi (10, 9)=0.70	Hi (9, 8)=0.75
Fi (11, 6)=2.28	Hi (10, 9)=0.75
Fi (11, 7)=2.28	Hi (11, 10)=0.75
Fi (11, 8)=1.04	Hi (12, 11)=0.75
Fi (11, 9)=1.04	es (7, 6)=0.00000

es(8,7)=0.00011
 es(9,8)=0.00000
 es(10,9)=0.00018

es(11,10)=0.00013
 es(12,11)=0.00013

-Reoloske karakteristike KE10 SL1

Fi(9,8)=0.00
 Fi(10,8)=1.85
 Fi(10,9)=1.85
 Fi(11,8)=2.28
 Fi(11,9)=2.28
 Fi(11,10)=0.28
 Fi(12,8)=2.56
 Fi(12,9)=2.56
 Fi(12,10)=0.46

Fi(12,11)=0.14
 Hi(9,8)=0.75
 Hi(10,9)=0.75
 Hi(11,10)=0.75
 Hi(12,11)=0.75
 es(9,8)=0.00000
 es(10,9)=0.00027
 es(11,10)=0.00014
 es(12,11)=0.00013

*** Rezultati proracuna *** Primer 6/2

-Generalisana pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(1)

CT	U [mm]	V [mm]	t [rad*10 ³]
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	-0.5	-1.5
3	0.0	-0.3	0.0
4	-0.0	-0.3	0.0
5	-0.0	-0.3	0.0
6	0.0	-0.3	-0.0
7	0.0	-4.6	0.5
8	0.0	-0.3	0.0
9	-0.0	-0.3	0.0
10	-0.0	-0.3	0.0
11	0.0	-0.3	-0.0
12	0.0	0.0	0.0
13	0.0	-0.1	0.0
14	0.0	-0.3	0.0
15	0.0	-0.3	0.0
16	0.0	-0.3	0.0
17	0.0	-0.3	0.0

-Generalisana pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(2)

CT	U [mm]	V [mm]	t [rad*10 ³]
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	-0.0	-0.1
3	0.0	-0.4	-0.0
4	0.0	-0.4	0.0
5	-0.0	-0.4	0.0
6	0.0	-0.4	-0.0
7	0.0	-0.4	-0.1
8	0.0	-0.4	-0.0
9	0.0	-0.4	0.0
10	-0.0	-0.4	0.0
11	0.0	-0.4	-0.0
12	0.0	0.0	0.0
13	0.0	-0.7	0.0
14	0.0	-0.4	0.0
15	0.0	-0.4	0.0
16	0.0	-0.4	0.0
17	0.0	-0.4	0.0

-Generalisana pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(3)

CT	U [mm]	V [mm]	t [rad*10 ³]
1	0.0	0.0	0.0
2	-0.0	-0.5	0.2
3	0.0	-1.0	-1.8
4	0.0	-0.6	0.0
5	-0.0	-0.6	0.0

6	0.0	-0.6	-0.0
7	-0.0	-0.1	0.0
8	0.0	-5.1	0.6
9	0.0	-0.6	0.0
10	-0.0	-0.6	0.0
11	0.0	-0.6	-0.0
12	0.0	0.0	0.0
13	0.0	-0.1	0.0
14	0.0	-0.1	0.0
15	0.0	-0.6	0.0
16	0.0	-0.6	0.0
17	0.0	-0.6	0.0

-Generalisana pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(4)

CT	U [mm]	V [mm]	t [rad*10 ³]
1	0.0	0.0	0.0
2	-0.0	-0.0	-0.0
3	0.0	-0.0	-0.1
4	0.0	-0.5	-0.0
5	0.0	-0.5	0.0
6	0.0	-0.5	-0.0
7	-0.0	-0.2	-0.1
8	0.0	-0.6	-0.2
9	0.0	-0.5	-0.0
10	0.0	-0.5	0.0
11	0.0	-0.5	-0.0
12	0.0	0.0	0.0
13	0.0	-0.3	0.0
14	0.0	-1.0	0.0
15	0.0	-0.5	0.0
16	0.0	-0.5	0.0
17	0.0	-0.5	0.0

-Generalisana pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(5)

CT	U [mm]	V [mm]	t [rad*10 ³]
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	-0.4	0.0
3	-0.0	-1.0	0.3
4	0.0	-1.6	-1.9
5	0.0	-0.9	0.0
6	-0.0	-0.9	-0.0
7	0.0	-0.2	0.1
8	-0.0	-0.3	0.1
9	0.0	-5.6	0.8
10	0.0	-0.9	0.0
11	-0.0	-0.9	-0.0
12	0.0	0.0	0.0
13	0.0	-0.1	0.0
14	0.0	-0.1	0.0
15	0.0	-0.2	0.0
16	0.0	-0.9	0.0
17	0.0	-0.9	0.0

-Generalisana pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(6)

CT	U [mm]	V [mm]	t [rad*10 ³]
1	0.0	0.0	0.0
2	-0.0	-0.0	-0.0
3	-0.0	-0.0	-0.0
4	0.0	-0.0	-0.2
5	0.0	-0.6	-0.0
6	0.0	-0.6	-0.0
7	-0.0	-0.1	-0.0
8	-0.0	-0.3	-0.1
9	0.0	-0.8	-0.2
10	0.0	-0.6	-0.0
11	0.0	-0.6	-0.0

12	0.0	0.0	0.0
13	0.0	-0.2	0.0
14	0.0	-0.5	0.0
15	0.0	-1.2	0.0
16	0.0	-0.6	0.0
17	0.0	-0.6	0.0

-Generalisana pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(7)

CT	U [mm]	V [mm]	t [rad*10 ³]
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	-0.4	0.0
3	0.0	-0.9	0.1
4	-0.0	-1.5	0.3
5	0.0	-2.4	-1.9
6	0.0	-1.3	0.0
7	0.0	-0.2	0.1
8	0.0	-0.5	0.2
9	-0.0	-0.6	0.2
10	0.0	-6.1	0.9
11	0.0	-1.3	0.0
12	0.0	0.0	0.0
13	0.0	-0.1	0.0
14	0.0	-0.1	0.0
15	0.0	-0.2	0.0
16	0.0	-0.3	0.0
17	0.0	-1.3	0.0

-Generalisana pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(8)

CT	U [mm]	V [mm]	t [rad*10 ³]
1	0.0	0.0	0.0
2	-0.0	-0.0	-0.0
3	-0.0	-0.0	-0.0
4	-0.0	-0.0	-0.1
5	0.0	-0.0	-0.3
6	0.0	-0.7	-0.0
7	-0.0	-0.1	-0.0
8	-0.0	-0.2	-0.1
9	-0.0	-0.4	-0.1
10	0.0	-0.9	-0.2
11	0.0	-0.7	-0.0
12	0.0	0.0	0.0
13	0.0	-0.2	0.0
14	0.0	-0.4	0.0
15	0.0	-0.7	0.0
16	0.0	-1.4	0.0
17	0.0	-0.7	0.0

-Generalisana pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(9)

CT	U [mm]	V [mm]	t [rad*10 ³]
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	-0.4	0.0
3	0.0	-0.9	0.1
4	-0.0	-1.5	0.2
5	-0.0	-2.3	0.4
6	0.0	-3.6	-1.8
7	0.0	-0.2	0.1
8	0.0	-0.4	0.1
9	-0.0	-0.7	0.2
10	-0.0	-0.9	0.3
11	0.0	-6.6	1.2
12	0.0	0.0	0.0
13	0.0	-0.1	0.0
14	0.0	-0.1	0.0
15	0.0	-0.2	0.0
16	0.0	-0.3	0.0
17	0.0	-0.3	0.0

-Generalisana pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(10)

CT	U [mm]	V [mm]	t [rad*10 ³]
1	0.0	0.0	0.0
2	-0.0	-0.1	-0.1
3	-0.0	-0.1	-0.2
4	0.0	-0.2	-0.3
5	0.0	-0.3	-0.6
6	0.0	-0.3	-1.0
7	-0.0	-0.5	-0.1
8	-0.0	-1.0	-0.3
9	0.0	-1.7	-0.4
10	0.0	-2.5	-0.6
11	0.0	-3.8	-0.9
12	0.0	0.0	0.0
13	0.0	-0.8	0.0
14	0.0	-1.6	0.0
15	0.0	-2.6	0.0
16	0.0	-3.8	0.0
17	0.0	-5.5	0.0

-Generalisana pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(11)

CT	U [mm]	V [mm]	t [rad*10 ³]
1	0.0	0.0	0.0
2	-0.0	-0.1	-0.1
3	-0.0	-0.1	-0.2
4	0.0	-0.2	-0.3
5	0.0	-0.2	-0.5
6	0.0	-0.2	-0.8
7	-0.0	-0.4	-0.1
8	-0.0	-0.9	-0.3
9	0.0	-1.5	-0.4
10	0.0	-2.1	-0.5
11	0.0	-2.8	-0.6
12	0.0	0.0	0.0
13	0.0	-0.7	0.0
14	0.0	-1.5	0.0
15	0.0	-2.3	0.0
16	0.0	-3.2	0.0
17	0.0	-4.0	0.0

-Generalisana pomeranja CT /prirastaj/ za interval dt(12)

CT	U [mm]	V [mm]	t [rad*10 ³]
1	0.0	0.0	0.0
2	-0.0	-0.1	-0.1
3	-0.0	-0.1	-0.2
4	0.0	-0.2	-0.3
5	0.0	-0.2	-0.5
6	0.0	-0.2	-0.8
7	-0.0	-0.5	-0.1
8	-0.0	-1.0	-0.3
9	0.0	-1.5	-0.4
10	0.0	-2.2	-0.5
11	0.0	-2.8	-0.6
12	0.0	0.0	0.0
13	0.0	-0.8	0.0
14	0.0	-1.6	0.0
15	0.0	-2.4	0.0
16	0.0	-3.2	0.0
17	0.0	-4.0	0.0

-Deformacije i naponi /prirastaj/ za interval dt(1)

KE	SL	CT	e [10 ³]	k [10 ³ /m]	a [MPa]	β [MPa/m]
1	1	1	0.078	-0.508	16.288	-106.719

1	1	2	-0.078	-1.021	-16.288	-214.465
1	2	1	0.078	-0.508	0.001	-0.005
1	2	2	-0.078	-1.021	-0.001	-0.010
2	1	2	0.000	0.000	0.000	0.000
2	1	3	0.000	0.000	0.000	0.000
2	2	2	-0.033	-1.031	-0.000	-0.010
2	2	3	0.033	-0.518	0.000	-0.005
3	1	3	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1	4	0.000	0.000	0.000	0.000
3	2	3	0.000	0.000	0.000	0.000
3	2	4	-0.000	0.000	-0.000	0.000
4	1	4	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1	5	0.000	0.000	0.000	0.000
4	2	4	-0.000	0.000	-0.000	0.000
4	2	5	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1	5	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1	6	0.000	0.000	0.000	0.000
5	2	5	-0.000	0.000	-0.000	0.000
5	2	6	0.000	-0.000	0.000	-0.000
6	1	12	0.010	0.000	0.313	0.000
6	1	13	-0.010	0.000	-0.313	0.000
6	2	12	0.010	0.000	0.000	0.000
6	2	13	-0.010	0.000	-0.000	0.000
7	1	13	0.000	0.000	0.000	0.000
7	1	14	0.000	0.000	0.000	0.000
7	2	13	0.035	0.000	0.000	0.000
7	2	14	-0.035	0.000	-0.000	0.000
8	1	14	0.000	0.000	0.000	0.000
8	1	15	0.000	0.000	0.000	0.000
8	2	14	0.000	0.000	0.000	0.000
8	2	15	-0.000	0.000	-0.000	0.000
9	1	15	0.000	0.000	0.000	0.000
9	1	16	0.000	0.000	0.000	0.000
9	2	15	-0.000	0.000	-0.000	0.000
9	2	16	0.000	0.000	0.000	0.000
10	1	16	0.000	0.000	0.000	0.000
10	1	17	0.000	0.000	0.000	0.000
10	2	16	-0.000	0.000	-0.000	0.000
10	2	17	0.000	0.000	0.000	0.000
11	1	2	0.004	0.559	0.134	17.900
11	1	7	-0.004	1.709	-0.134	54.675
12	1	7	0.004	-1.709	0.134	-54.675
12	1	13	-0.004	-1.978	-0.134	-63.305
13	1	3	0.000	0.000	0.000	0.000
13	1	8	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
14	1	8	0.000	0.000	0.000	0.000
14	1	14	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
15	1	4	-0.000	0.000	-0.000	0.000
15	1	9	0.000	-0.000	0.000	-0.000
16	1	9	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
16	1	15	0.000	-0.000	0.000	-0.000
17	1	5	-0.000	0.000	-0.000	0.000
17	1	10	0.000	-0.000	0.000	-0.000
18	1	10	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
18	1	16	0.000	-0.000	0.000	-0.000
19	1	6	0.000	-0.000	0.000	-0.000
19	1	11	-0.000	0.000	-0.000	0.000
20	1	11	0.000	0.000	0.000	0.000
20	1	17	-0.000	0.000	-0.000	0.000

-Deformacije i naponi /prirastaj/ za interval dt(2)

KE	SL	CT	e [10 ³]	k [10 ³ /m]	a [MPa]	β [MPa/m]
1	1	1	0.001	-0.031	0.146	-6.422
1	1	2	-0.001	-0.061	-0.146	-12.905
1	2	1	0.001	-0.031	0.000	-0.000
1	2	2	-0.001	-0.061	-0.000	-0.001
2	1	2	0.000	0.000	0.000	0.000
2	1	3	0.000	0.000	0.000	0.000

2	2	2	0.060	-0.062	0.001	-0.001
2	2	3	-0.060	-0.031	-0.001	-0.000
3	1	3	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1	4	0.000	0.000	0.000	0.000
3	2	3	0.000	-0.000	0.000	-0.000
3	2	4	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
4	1	4	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1	5	0.000	0.000	0.000	0.000
4	2	4	-0.000	0.000	-0.000	0.000
4	2	5	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1	5	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1	6	0.000	0.000	0.000	0.000
5	2	5	-0.000	0.000	-0.000	0.000
5	2	6	0.000	-0.000	0.000	-0.000
6	1	12	0.119	0.000	-0.002	0.000
6	1	13	-0.119	0.000	0.002	0.000
6	2	12	0.119	0.000	0.001	0.000
6	2	13	-0.119	0.000	-0.001	0.000
7	1	13	0.000	0.000	0.000	0.000
7	1	14	0.000	0.000	0.000	0.000
7	2	13	-0.058	0.000	-0.001	0.000
7	2	14	0.058	0.000	0.001	0.000
8	1	14	0.000	0.000	0.000	0.000
8	1	15	0.000	0.000	0.000	0.000
8	2	14	0.000	0.000	0.000	0.000
8	2	15	-0.000	0.000	-0.000	0.000
9	1	15	0.000	0.000	0.000	0.000
9	1	16	0.000	0.000	0.000	0.000
9	2	15	-0.000	0.000	-0.000	0.000
9	2	16	0.000	0.000	0.000	0.000
10	1	16	0.000	0.000	0.000	0.000
10	1	17	0.000	0.000	0.000	0.000
10	2	16	-0.000	0.000	-0.000	0.000
10	2	17	0.000	0.000	0.000	0.000
11	1	2	0.000	0.034	0.008	1.077
11	1	7	-0.000	0.013	-0.008	0.423
12	1	7	0.000	-0.013	0.008	-0.423
12	1	13	-0.000	0.060	-0.008	1.924
13	1	3	0.000	0.000	0.000	0.000
13	1	8	-0.000	0.000	-0.000	0.000
14	1	8	0.000	-0.000	0.000	-0.000
14	1	14	-0.000	0.000	-0.000	0.000
15	1	4	0.000	0.000	0.000	0.000
15	1	9	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
16	1	9	0.000	-0.000	0.000	-0.000
16	1	15	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
17	1	5	-0.000	0.000	-0.000	0.000
17	1	10	0.000	0.000	0.000	0.000
18	1	10	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
18	1	16	0.000	-0.000	0.000	-0.000
19	1	6	0.000	-0.000	0.000	-0.000
19	1	11	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
20	1	11	0.000	-0.000	0.000	-0.000
20	1	17	-0.000	0.000	-0.000	0.000

-Deformacije i naponi /prirastaj/ za interval dt(3)

KE	SL	CT	e [10 ³]	k [10 ³ /m]	a [MPa]	β [MPa/m]
1	1	1	0.076	0.067	15.936	14.096
1	1	2	-0.076	0.138	-15.936	28.966
1	2	1	0.076	0.067	0.001	0.001
1	2	2	-0.076	0.138	-0.001	0.001
2	1	2	0.090	-0.441	18.893	-92.673
2	1	3	-0.090	-1.102	-18.893	-231.365
2	2	2	0.090	-0.441	0.001	-0.004
2	2	3	-0.090	-1.102	-0.001	-0.011
3	1	3	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1	4	0.000	0.000	0.000	0.000
3	2	3	-0.072	-1.182	-0.001	-0.012

3	2	4	0.072	-0.593	0.001	-0.006
4	1	4	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1	5	0.000	0.000	0.000	0.000
4	2	4	-0.000	0.000	-0.000	0.000
4	2	5	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1	5	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1	6	0.000	0.000	0.000	0.000
5	2	5	-0.001	0.000	-0.000	0.000
5	2	6	0.001	-0.000	0.000	-0.000
6	1	12	0.010	0.000	0.319	0.000
6	1	13	-0.010	0.000	-0.319	0.000
6	2	12	0.010	0.000	0.000	0.000
6	2	13	-0.010	0.000	-0.000	0.000
7	1	13	0.010	0.000	0.321	0.000
7	1	14	-0.010	0.000	-0.321	0.000
7	2	13	0.010	0.000	0.000	0.000
7	2	14	-0.010	0.000	-0.000	0.000
8	1	14	0.000	0.000	0.000	0.000
8	1	15	0.000	0.000	0.000	0.000
8	2	14	0.074	0.000	0.001	0.000
8	2	15	-0.074	0.000	-0.001	0.000
9	1	15	0.000	0.000	0.000	0.000
9	1	16	0.000	0.000	0.000	0.000
9	2	15	-0.000	0.000	-0.000	0.000
9	2	16	0.000	0.000	0.000	0.000
10	1	16	0.000	0.000	0.000	0.000
10	1	17	0.000	0.000	0.000	0.000
10	2	16	-0.001	0.000	-0.000	0.000
10	2	17	0.001	0.000	0.000	0.000
11	1	2	-0.003	0.073	-0.101	2.334
11	1	7	0.003	-0.030	0.101	-0.971
12	1	7	-0.003	0.030	-0.101	0.971
12	1	13	0.003	0.012	0.101	0.392
13	1	3	0.003	0.371	0.083	11.864
13	1	8	-0.003	1.741	-0.083	55.725
14	1	8	0.003	-1.741	0.083	-55.725
14	1	14	-0.003	-2.101	-0.083	-67.241
15	1	4	0.000	0.000	0.000	0.000
15	1	9	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
16	1	9	0.000	0.000	0.000	0.000
16	1	15	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
17	1	5	-0.000	0.000	-0.000	0.000
17	1	10	0.000	-0.000	0.000	-0.000
18	1	10	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
18	1	16	0.000	-0.000	0.000	-0.000
19	1	6	0.000	-0.000	0.000	-0.000
19	1	11	-0.000	0.000	-0.000	0.000
20	1	11	0.000	0.000	0.000	0.000
20	1	17	-0.000	0.000	-0.000	0.000

-Deformacije i naponi /prirastaj/ za interval dt(4)

KE	SL	CT	e [10 ³]	k [10 ³ /m]	a [MPa]	β [MPa/m]
1	1	1	0.001	-0.005	0.257	-1.043
1	1	2	-0.001	-0.010	-0.257	-2.030
1	2	1	0.001	-0.005	0.000	-0.000
1	2	2	-0.001	-0.010	-0.000	-0.000
2	1	2	0.001	-0.058	0.207	-12.240
2	1	3	-0.001	-0.103	-0.207	-21.643
2	2	2	0.001	-0.058	0.000	-0.001
2	2	3	-0.001	-0.103	-0.000	-0.001
3	1	3	0.000	0.000	0.000	0.000
3	1	4	0.000	0.000	0.000	0.000
3	2	3	0.082	-0.099	0.001	-0.001
3	2	4	-0.082	-0.050	-0.001	-0.000
4	1	4	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1	5	0.000	0.000	0.000	0.000
4	2	4	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
4	2	5	0.000	-0.000	0.000	-0.000

5	1	5	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1	6	0.000	0.000	0.000	0.000
5	2	5	-0.001	0.000	-0.000	0.000
5	2	6	0.001	-0.000	0.000	-0.000
6	1	12	0.046	0.000	-0.004	0.000
6	1	13	-0.046	0.000	0.004	0.000
6	2	12	0.046	0.000	0.000	0.000
6	2	13	-0.046	0.000	-0.000	0.000
7	1	13	0.119	0.000	-0.003	0.000
7	1	14	-0.119	0.000	0.003	0.000
7	2	13	0.119	0.000	0.001	0.000
7	2	14	-0.119	0.000	-0.001	0.000
8	1	14	0.000	0.000	0.000	0.000
8	1	15	0.000	0.000	0.000	0.000
8	2	14	-0.081	0.000	-0.001	0.000
8	2	15	0.081	0.000	0.001	0.000
9	1	15	0.000	0.000	0.000	0.000
9	1	16	0.000	0.000	0.000	0.000
9	2	15	-0.000	0.000	-0.000	0.000
9	2	16	0.000	0.000	0.000	0.000
10	1	16	0.000	0.000	0.000	0.000
10	1	17	0.000	0.000	0.000	0.000
10	2	16	-0.001	0.000	-0.000	0.000
10	2	17	0.001	0.000	0.000	0.000
11	1	2	-0.000	0.025	-0.007	0.797
11	1	7	0.000	0.002	0.007	0.064
12	1	7	-0.000	-0.002	-0.007	-0.064
12	1	13	0.000	0.029	0.007	0.926
13	1	3	0.000	0.035	0.009	1.110
13	1	8	-0.000	0.021	-0.009	0.679
14	1	8	0.000	-0.021	0.009	-0.679
14	1	14	-0.000	0.077	-0.009	2.467
15	1	4	0.000	0.000	0.000	0.000
15	1	9	-0.000	0.000	-0.000	0.000
16	1	9	0.000	-0.000	0.000	-0.000
16	1	15	-0.000	0.000	-0.000	0.000
17	1	5	0.000	0.000	0.000	0.000
17	1	10	-0.000	0.000	-0.000	0.000
18	1	10	0.000	0.000	0.000	0.000
18	1	16	-0.000	0.000	-0.000	0.000
19	1	6	0.000	-0.000	0.000	-0.000
19	1	11	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
20	1	11	0.000	0.000	0.000	0.000
20	1	17	-0.000	0.000	-0.000	0.000

-Deformacije i naponi /prirastaj/ za interval dt(5)

KE	SL	CT	e [10 ³]	k [10 ³ /m]	a [MPa]	β [MPa/m]
1	1	1	0.073	0.006	15.377	1.220
1	1	2	-0.073	0.011	-15.377	2.343
1	2	1	0.073	0.006	0.001	0.000
1	2	2	-0.073	0.011	-0.001	0.000
2	1	2	0.088	0.092	18.529	19.351
2	1	3	-0.088	0.171	-18.529	35.972
2	2	2	0.088	0.092	0.001	0.001
2	2	3	-0.088	0.171	-0.001	0.002
3	1	3	0.104	-0.445	21.787	-93.549
3	1	4	-0.104	-1.149	-21.787	-241.307
3	2	3	0.104	-0.445	0.001	-0.004
3	2	4	-0.104	-1.149	-0.001	-0.011
4	1	4	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1	5	0.000	0.000	0.000	0.000
4	2	4	-0.117	-1.240	-0.001	-0.012
4	2	5	0.117	-0.621	0.001	-0.006
5	1	5	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1	6	0.000	0.000	0.000	0.000
5	2	5	-0.001	0.000	-0.000	0.000
5	2	6	0.001	0.000	0.000	0.000
6	1	12	0.010	0.000	0.327	0.000

6	1	13	-0.010	0.000	-0.327	0.000
6	2	12	0.010	0.000	0.000	0.000
6	2	13	-0.010	0.000	-0.000	0.000
7	1	13	0.010	0.000	0.325	0.000
7	1	14	-0.010	0.000	-0.325	0.000
7	2	13	0.010	0.000	0.000	0.000
7	2	14	-0.010	0.000	-0.000	0.000
8	1	14	0.010	0.000	0.326	0.000
8	1	15	-0.010	0.000	-0.326	0.000
8	2	14	0.010	0.000	0.000	0.000
8	2	15	-0.010	0.000	-0.000	0.000
9	1	15	0.000	0.000	0.000	0.000
9	1	16	0.000	0.000	0.000	0.000
9	2	15	0.117	0.000	0.001	0.000
9	2	16	-0.117	0.000	-0.001	0.000
10	1	16	0.000	0.000	0.000	0.000
10	1	17	0.000	0.000	0.000	0.000
10	2	16	-0.001	0.000	-0.000	0.000
10	2	17	0.001	0.000	0.000	0.000
11	1	2	0.000	-0.037	0.013	-1.188
11	1	7	-0.000	-0.002	-0.013	-0.073
12	1	7	0.000	0.002	0.013	0.073
12	1	13	-0.000	-0.042	-0.013	-1.334
13	1	3	-0.002	0.041	-0.071	1.319
13	1	8	0.002	-0.036	0.071	-1.159
14	1	8	-0.002	0.036	-0.071	1.159
14	1	14	0.002	-0.031	0.071	-0.999
15	1	4	0.002	0.255	0.057	8.160
15	1	9	-0.002	1.754	-0.057	56.130
16	1	9	0.002	-1.754	0.057	-56.130
16	1	15	-0.002	-2.192	-0.057	-70.137
17	1	5	0.000	-0.000	0.000	-0.000
17	1	10	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
18	1	10	0.000	0.000	0.000	0.000
18	1	16	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
19	1	6	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
19	1	11	0.000	0.000	0.000	0.000
20	1	11	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
20	1	17	0.000	0.000	0.000	0.000

-Deformacije i naponi /prirastaj/ za interval dt(6)

KE	SL	CT	e [10 ³]	k [10 ³ /m]	a [MPa]	β [MPa/m]
1	1	1	0.002	-0.006	0.358	-1.182
1	1	2	-0.002	-0.011	-0.358	-2.351
1	2	1	0.002	-0.006	0.000	-0.000
1	2	2	-0.002	-0.011	-0.000	-0.000
2	1	2	0.002	-0.026	0.365	-5.383
2	1	3	-0.002	-0.034	-0.365	-7.233
2	2	2	0.002	-0.026	0.000	-0.000
2	2	3	-0.002	-0.034	-0.000	-0.000
3	1	3	0.001	-0.093	0.261	-19.587
3	1	4	-0.001	-0.144	-0.261	-30.222
3	2	3	0.001	-0.093	0.000	-0.001
3	2	4	-0.001	-0.144	-0.000	-0.001
4	1	4	0.000	0.000	0.000	0.000
4	1	5	0.000	0.000	0.000	0.000
4	2	4	0.098	-0.130	0.001	-0.001
4	2	5	-0.098	-0.065	-0.001	-0.001
5	1	5	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1	6	0.000	0.000	0.000	0.000
5	2	5	-0.001	-0.000	-0.000	-0.000
5	2	6	0.001	-0.000	0.000	-0.000
6	1	12	0.035	0.000	-0.005	0.000
6	1	13	-0.035	0.000	0.005	0.000
6	2	12	0.035	0.000	0.000	0.000
6	2	13	-0.035	0.000	-0.000	0.000
7	1	13	0.046	0.000	-0.005	0.000
7	1	14	-0.046	0.000	0.005	0.000

7	2	13	0.046	0.000	0.000	0.000
7	2	14	-0.046	0.000	-0.000	0.000
8	1	14	0.119	0.000	-0.003	0.000
8	1	15	-0.119	0.000	0.003	0.000
8	2	14	0.119	0.000	0.001	0.000
8	2	15	-0.119	0.000	-0.001	0.000
9	1	15	0.000	0.000	0.000	0.000
9	1	16	0.000	0.000	0.000	0.000
9	2	15	-0.098	0.000	-0.001	0.000
9	2	16	0.098	0.000	0.001	0.000
10	1	16	0.000	0.000	0.000	0.000
10	1	17	0.000	0.000	0.000	0.000
10	2	16	-0.001	0.000	-0.000	0.000
10	2	17	0.001	0.000	0.000	0.000
11	1	2	-0.000	0.015	-0.002	0.472
11	1	7	0.000	0.002	0.002	0.076
12	1	7	-0.000	-0.002	-0.002	-0.076
12	1	13	0.000	0.020	0.002	0.625
13	1	3	-0.000	0.032	-0.005	1.033
13	1	8	0.000	0.006	0.005	0.197
14	1	8	-0.000	-0.006	-0.005	-0.197
14	1	14	0.000	0.045	0.005	1.428
15	1	4	0.000	0.032	0.008	1.022
15	1	9	-0.000	0.028	-0.008	0.892
16	1	9	0.000	-0.028	0.008	-0.892
16	1	15	-0.000	0.088	-0.008	2.805
17	1	5	0.000	0.000	0.000	0.000
17	1	10	-0.000	0.000	-0.000	0.000
18	1	10	0.000	-0.000	0.000	-0.000
18	1	16	-0.000	0.000	-0.000	0.000
19	1	6	0.000	-0.000	0.000	-0.000
19	1	11	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
20	1	11	0.000	-0.000	0.000	-0.000
20	1	17	-0.000	0.000	-0.000	0.000

-Deformacije i naponi /prirastaj/ za interval dt(7)

KE	SL	CT	e [10 ³]	k [10 ³ /m]	a [MPa]	β [MPa/m]
1	1	1	0.070	0.010	14.652	2.112
1	1	2	-0.070	0.020	-14.652	4.200
1	2	1	0.070	0.010	0.001	0.000
1	2	2	-0.070	0.020	-0.001	0.000
2	1	2	0.084	0.046	17.631	9.672
2	1	3	-0.084	0.062	-17.631	13.053
2	2	2	0.084	0.046	0.001	0.000
2	2	3	-0.084	0.062	-0.001	0.001
3	1	3	0.100	0.144	21.031	30.180
3	1	4	-0.100	0.211	-21.031	44.293
3	2	3	0.100	0.144	0.001	0.001
3	2	4	-0.100	0.211	-0.001	0.002
4	1	4	0.149	-0.459	31.223	-96.399
4	1	5	-0.149	-1.200	-31.223	-252.023
4	2	4	0.149	-0.459	0.001	-0.005
4	2	5	-0.149	-1.200	-0.001	-0.012
5	1	5	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1	6	0.000	0.000	0.000	0.000
5	2	5	-0.182	-1.297	-0.002	-0.013
5	2	6	0.182	-0.649	0.002	-0.006
6	1	12	0.011	0.000	0.338	0.000
6	1	13	-0.011	0.000	-0.338	0.000
6	2	12	0.011	0.000	0.000	0.000
6	2	13	-0.011	0.000	-0.000	0.000
7	1	13	0.011	0.000	0.337	0.000
7	1	14	-0.011	0.000	-0.337	0.000
7	2	13	0.011	0.000	0.000	0.000
7	2	14	-0.011	0.000	-0.000	0.000
8	1	14	0.010	0.000	0.334	0.000
8	1	15	-0.010	0.000	-0.334	0.000
8	2	14	0.010	0.000	0.000	0.000

8	2	15	-0.010	0.000	-0.000	0.000
9	1	15	0.010	0.000	0.332	0.000
9	1	16	-0.010	0.000	-0.332	0.000
9	2	15	0.010	0.000	0.000	0.000
9	2	16	-0.010	0.000	-0.000	0.000
10	1	16	0.000	0.000	0.000	0.000
10	1	17	0.000	0.000	0.000	0.000
10	2	16	0.179	0.000	0.002	0.000
10	2	17	-0.179	0.000	-0.002	0.000
11	1	2	0.000	-0.026	0.003	-0.847
11	1	7	-0.000	-0.004	-0.003	-0.136
12	1	7	0.000	0.004	0.003	0.136
12	1	13	-0.000	-0.035	-0.003	-1.119
13	1	3	0.000	-0.053	0.007	-1.690
13	1	8	-0.000	-0.011	-0.007	-0.357
14	1	8	0.000	0.011	0.007	0.357
14	1	14	-0.000	-0.075	-0.007	-2.404
15	1	4	-0.001	-0.004	-0.038	-0.112
15	1	9	0.001	-0.040	0.038	-1.279
16	1	9	-0.001	0.040	-0.038	1.279
16	1	15	0.001	-0.083	0.038	-2.670
17	1	5	0.001	0.113	0.025	3.622
17	1	10	-0.001	1.766	-0.025	56.523
18	1	10	0.001	-1.766	0.025	-56.523
18	1	16	-0.001	-2.309	-0.025	-73.887
19	1	6	0.000	-0.000	0.000	-0.000
19	1	11	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
20	1	11	0.000	0.000	0.000	0.000
20	1	17	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000

-Deformacije i naponi /prirastaj/ za interval dt(8)

KE	SL	CT	e [10 ³]	k [10 ³ /m]	a [MPa]	β [MPa/m]
1	1	1	0.002	-0.004	0.417	-0.891
1	1	2	-0.002	-0.008	-0.417	-1.771
1	2	1	0.002	-0.004	0.000	-0.000
1	2	2	-0.002	-0.008	-0.000	-0.000
2	1	2	0.002	-0.021	0.449	-4.379
2	1	3	-0.002	-0.029	-0.449	-6.120
2	2	2	0.002	-0.021	0.000	-0.000
2	2	3	-0.002	-0.029	-0.000	-0.000
3	1	3	0.002	-0.053	0.411	-11.031
3	1	4	-0.002	-0.068	-0.411	-14.206
3	2	3	0.002	-0.053	0.000	-0.001
3	2	4	-0.002	-0.068	-0.000	-0.001
4	1	4	0.002	-0.139	0.348	-29.109
4	1	5	-0.002	-0.195	-0.348	-40.875
4	2	4	0.002	-0.139	0.000	-0.001
4	2	5	-0.002	-0.195	-0.000	-0.002
5	1	5	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1	6	0.000	0.000	0.000	0.000
5	2	5	0.109	-0.167	0.001	-0.002
5	2	6	-0.109	-0.084	-0.001	-0.001
6	1	12	0.028	0.000	-0.006	0.000
6	1	13	-0.028	0.000	0.006	0.000
6	2	12	0.028	0.000	0.000	0.000
6	2	13	-0.028	0.000	-0.000	0.000
7	1	13	0.035	0.000	-0.006	0.000
7	1	14	-0.035	0.000	0.006	0.000
7	2	13	0.035	0.000	0.000	0.000
7	2	14	-0.035	0.000	-0.000	0.000
8	1	14	0.046	0.000	-0.004	0.000
8	1	15	-0.046	0.000	0.004	0.000
8	2	14	0.046	0.000	0.000	0.000
8	2	15	-0.046	0.000	-0.000	0.000
9	1	15	0.119	0.000	-0.003	0.000
9	1	16	-0.119	0.000	0.003	0.000
9	2	15	0.119	0.000	0.001	0.000
9	2	16	-0.119	0.000	-0.001	0.000

10	1	16	0.000	0.000	0.000	0.000
10	1	17	0.000	0.000	0.000	0.000
10	2	16	-0.111	0.000	-0.001	0.000
10	2	17	0.111	0.000	0.001	0.000
11	1	2	-0.000	0.012	-0.002	0.372
11	1	7	0.000	0.002	0.002	0.057
12	1	7	-0.000	-0.002	-0.002	-0.057
12	1	13	0.000	0.015	0.002	0.487
13	1	3	-0.000	0.021	-0.002	0.687
13	1	8	0.000	0.005	0.002	0.171
14	1	8	-0.000	-0.005	-0.002	-0.171
14	1	14	0.000	0.032	0.002	1.029
15	1	4	-0.000	0.028	-0.001	0.899
15	1	9	0.000	0.012	0.001	0.378
16	1	9	-0.000	-0.012	-0.001	-0.378
16	1	15	0.000	0.052	0.001	1.656
17	1	5	0.000	0.018	0.005	0.587
17	1	10	-0.000	0.036	-0.005	1.147
18	1	10	0.000	-0.036	0.005	-1.147
18	1	16	-0.000	0.090	-0.005	2.881
19	1	6	0.000	-0.000	0.000	-0.000
19	1	11	-0.000	0.000	-0.000	0.000
20	1	11	0.000	-0.000	0.000	-0.000
20	1	17	-0.000	0.000	-0.000	0.000

-Deformacije i naponi /prirastaj/ za interval dt(9)

KE	SL	CT	e [10 ³]	k [10 ³ /m]	a [MPa]	β [MPa/m]
1	1	1	0.067	0.009	14.070	1.961
1	1	2	-0.067	0.019	-14.070	3.896
1	2	1	0.067	0.009	0.001	0.000
1	2	2	-0.067	0.019	-0.001	0.000
2	1	2	0.081	0.045	16.930	9.550
2	1	3	-0.081	0.063	-16.930	13.296
2	2	2	0.081	0.045	0.001	0.000
2	2	3	-0.081	0.063	-0.001	0.001
3	1	3	0.096	0.112	20.179	23.539
3	1	4	-0.096	0.143	-20.179	30.059
3	2	3	0.096	0.112	0.001	0.001
3	2	4	-0.096	0.143	-0.001	0.001
4	1	4	0.144	0.254	30.208	53.240
4	1	5	-0.144	0.333	-30.208	70.017
4	2	4	0.144	0.254	0.001	0.003
4	2	5	-0.144	0.333	-0.001	0.003
5	1	5	0.209	-0.331	43.818	-69.424
5	1	6	-0.209	-1.076	-43.818	-226.009
5	2	5	0.209	-0.331	0.002	-0.003
5	2	6	-0.209	-1.076	-0.002	-0.011
6	1	12	0.011	0.000	0.347	0.000
6	1	13	-0.011	0.000	-0.347	0.000
6	2	12	0.011	0.000	0.000	0.000
6	2	13	-0.011	0.000	-0.000	0.000
7	1	13	0.011	0.000	0.346	0.000
7	1	14	-0.011	0.000	-0.346	0.000
7	2	13	0.011	0.000	0.000	0.000
7	2	14	-0.011	0.000	-0.000	0.000
8	1	14	0.011	0.000	0.343	0.000
8	1	15	-0.011	0.000	-0.343	0.000
8	2	14	0.011	0.000	0.000	0.000
8	2	15	-0.011	0.000	-0.000	0.000
9	1	15	0.011	0.000	0.339	0.000
9	1	16	-0.011	0.000	-0.339	0.000
9	2	15	0.011	0.000	0.000	0.000
9	2	16	-0.011	0.000	-0.000	0.000
10	1	16	0.010	0.000	0.335	0.000
10	1	17	-0.010	0.000	-0.335	0.000
10	2	16	0.010	0.000	0.000	0.000
10	2	17	-0.010	0.000	-0.000	0.000
11	1	2	0.000	-0.025	0.003	-0.815

11	1	7	-0.000	-0.004	-0.003	-0.126
12	1	7	0.000	0.004	0.003	0.126
12	1	13	-0.000	-0.033	-0.003	-1.068
13	1	3	0.000	-0.046	0.003	-1.478
13	1	8	-0.000	-0.012	-0.003	-0.371
14	1	8	0.000	0.012	0.003	0.371
14	1	14	-0.000	-0.069	-0.003	-2.220
15	1	4	-0.000	-0.056	-0.000	-1.782
15	1	9	0.000	-0.025	0.000	-0.797
16	1	9	-0.000	0.025	-0.000	0.797
16	1	15	0.000	-0.105	0.000	-3.375
17	1	5	-0.001	-0.017	-0.019	-0.532
17	1	10	0.001	-0.059	0.019	-1.893
18	1	10	-0.001	0.059	-0.019	1.893
18	1	16	0.001	-0.135	0.019	-4.317
19	1	6	0.000	0.048	0.010	1.544
19	1	11	-0.000	1.749	-0.010	55.972
20	1	11	0.000	-1.749	0.010	-55.972
20	1	17	-0.000	-2.408	-0.010	-77.067

-Deformacije i naponi /prirastaj/ za interval dt(10)

KE	SL	CT	e [10 ³]	k [10 ³ /m]	a [MPa]	β [MPa/m]
1	1	1	0.010	-0.020	2.130	-4.185
1	1	2	-0.010	-0.040	-2.130	-8.318
1	2	1	0.010	-0.020	0.000	-0.000
1	2	2	-0.010	-0.040	-0.000	-0.000
2	1	2	0.011	-0.093	2.318	-19.566
2	1	3	-0.011	-0.127	-2.318	-26.738
2	2	2	0.011	-0.093	0.000	-0.001
2	2	3	-0.011	-0.127	-0.000	-0.001
3	1	3	0.011	-0.220	2.227	-46.242
3	1	4	-0.011	-0.279	-2.227	-58.640
3	2	3	0.011	-0.220	0.000	-0.002
3	2	4	-0.011	-0.279	-0.000	-0.003
4	1	4	0.011	-0.428	2.307	-89.906
4	1	5	-0.011	-0.518	-2.307	-108.694
4	2	4	0.011	-0.428	0.000	-0.004
4	2	5	-0.011	-0.518	-0.000	-0.005
5	1	5	0.008	-0.753	1.740	-158.089
5	1	6	-0.008	-0.899	-1.740	-188.776
5	2	5	0.008	-0.753	0.000	-0.008
5	2	6	-0.008	-0.899	-0.000	-0.009
6	1	12	0.128	0.000	-0.032	0.000
6	1	13	-0.128	0.000	0.032	0.000
6	2	12	0.128	0.000	0.001	0.000
6	2	13	-0.128	0.000	-0.001	0.000
7	1	13	0.143	0.000	-0.029	0.000
7	1	14	-0.143	0.000	0.029	0.000
7	2	13	0.143	0.000	0.001	0.000
7	2	14	-0.143	0.000	-0.001	0.000
8	1	14	0.163	0.000	-0.024	0.000
8	1	15	-0.163	0.000	0.024	0.000
8	2	14	0.163	0.000	0.002	0.000
8	2	15	-0.163	0.000	-0.002	0.000
9	1	15	0.193	0.000	-0.017	0.000
9	1	16	-0.193	0.000	0.017	0.000
9	2	15	0.193	0.000	0.002	0.000
9	2	16	-0.193	0.000	-0.002	0.000
10	1	16	0.292	0.000	-0.009	0.000
10	1	17	-0.292	0.000	0.009	0.000
10	2	16	0.292	0.000	0.003	0.000
10	2	17	-0.292	0.000	-0.003	0.000
11	1	2	-0.000	0.053	-0.007	1.698
11	1	7	0.000	0.008	0.007	0.270
12	1	7	-0.000	-0.008	-0.007	-0.270
12	1	13	0.000	0.070	0.007	2.238
13	1	3	-0.000	0.092	-0.006	2.935
13	1	8	0.000	0.023	0.006	0.738

14	1	8	-0.000	-0.023	-0.006	-0.738
14	1	14	0.000	0.138	0.006	4.411
15	1	4	0.000	0.102	0.003	3.275
15	1	9	-0.000	0.048	-0.003	1.548
16	1	9	0.000	-0.048	0.003	-1.548
16	1	15	-0.000	0.199	-0.003	6.371
17	1	5	0.000	0.083	0.002	2.642
17	1	10	-0.000	0.087	-0.002	2.775
18	1	10	0.000	-0.087	0.002	-2.775
18	1	16	-0.000	0.256	-0.002	8.192
19	1	6	0.000	0.040	0.012	1.290
19	1	11	-0.000	0.149	-0.012	4.779
20	1	11	0.000	-0.149	0.012	-4.779
20	1	17	-0.000	0.339	-0.012	10.848

-Deformacije i naponi /prirastaj/ za interval dt(11)

KE	SL	CT	e [10 ³]	k [10 ³ /m]	a [MPa]	β [MPa/m]
1	1	1	0.009	-0.019	1.802	-4.079
1	1	2	-0.009	-0.039	-1.802	-8.111
1	2	1	0.009	-0.019	0.000	-0.000
1	2	2	-0.009	-0.039	-0.000	-0.000
2	1	2	0.009	-0.089	1.934	-18.654
2	1	3	-0.009	-0.120	-1.934	-25.221
2	2	2	0.009	-0.089	0.000	-0.001
2	2	3	-0.009	-0.120	-0.000	-0.001
3	1	3	0.009	-0.201	1.810	-42.309
3	1	4	-0.009	-0.252	-1.810	-52.886
3	2	3	0.009	-0.201	0.000	-0.002
3	2	4	-0.009	-0.252	-0.000	-0.003
4	1	4	0.009	-0.372	1.800	-78.139
4	1	5	-0.009	-0.442	-1.800	-92.744
4	2	4	0.009	-0.372	0.000	-0.004
4	2	5	-0.009	-0.442	-0.000	-0.004
5	1	5	0.006	-0.594	1.273	-124.644
5	1	6	-0.006	-0.676	-1.273	-141.990
5	2	5	0.006	-0.594	0.000	-0.006
5	2	6	-0.006	-0.676	-0.000	-0.007
6	1	12	0.123	0.000	-0.027	0.000
6	1	13	-0.123	0.000	0.027	0.000
6	2	12	0.123	0.000	0.001	0.000
6	2	13	-0.123	0.000	-0.001	0.000
7	1	13	0.129	0.000	-0.024	0.000
7	1	14	-0.129	0.000	0.024	0.000
7	2	13	0.129	0.000	0.001	0.000
7	2	14	-0.129	0.000	-0.001	0.000
8	1	14	0.134	0.000	-0.019	0.000
8	1	15	-0.134	0.000	0.019	0.000
8	2	14	0.134	0.000	0.001	0.000
8	2	15	-0.134	0.000	-0.001	0.000
9	1	15	0.140	0.000	-0.013	0.000
9	1	16	-0.140	0.000	0.013	0.000
9	2	15	0.140	0.000	0.001	0.000
9	2	16	-0.140	0.000	-0.001	0.000
10	1	16	0.147	0.000	-0.007	0.000
10	1	17	-0.147	0.000	0.007	0.000
10	2	16	0.147	0.000	0.001	0.000
10	2	17	-0.147	0.000	-0.001	0.000
11	1	2	-0.000	0.051	-0.006	1.634
11	1	7	0.000	0.008	0.006	0.263
12	1	7	-0.000	-0.008	-0.006	-0.263
12	1	13	0.000	0.068	0.006	2.160
13	1	3	-0.000	0.085	-0.005	2.724
13	1	8	0.000	0.022	0.005	0.692
14	1	8	-0.000	-0.022	-0.005	-0.692
14	1	14	0.000	0.128	0.005	4.108
15	1	4	0.000	0.091	0.004	2.911
15	1	9	-0.000	0.043	-0.004	1.383
16	1	9	0.000	-0.043	0.004	-1.383

16	1	15	-0.000	0.177	-0.004	5.677
17	1	5	0.000	0.068	0.003	2.185
17	1	10	-0.000	0.073	-0.003	2.337
18	1	10	0.000	-0.073	0.003	-2.337
18	1	16	-0.000	0.214	-0.003	6.858
19	1	6	0.000	0.030	0.009	0.970
19	1	11	-0.000	0.108	-0.009	3.470
20	1	11	0.000	-0.108	0.009	-3.470
20	1	17	-0.000	0.247	-0.009	7.909

-Deformacije i naponi /prirastaj/ za interval dt(12)

KE	SL	CT	e [10 ³]	k [10 ³ /m]	a [MPa]	β [MPa/m]
1	1	1	0.009	-0.021	1.850	-4.398
1	1	2	-0.009	-0.042	-1.850	-8.747
1	2	1	0.009	-0.021	0.000	-0.000
1	2	2	-0.009	-0.042	-0.000	-0.000
2	1	2	0.009	-0.095	1.975	-19.886
2	1	3	-0.009	-0.127	-1.975	-26.739
2	2	2	0.009	-0.095	0.000	-0.001
2	2	3	-0.009	-0.127	-0.000	-0.001
3	1	3	0.009	-0.211	1.834	-44.225
3	1	4	-0.009	-0.261	-1.834	-54.914
3	2	3	0.009	-0.211	0.000	-0.002
3	2	4	-0.009	-0.261	-0.000	-0.003
4	1	4	0.009	-0.381	1.807	-80.073
4	1	5	-0.009	-0.450	-1.807	-94.468
4	2	4	0.009	-0.381	0.000	-0.004
4	2	5	-0.009	-0.450	-0.000	-0.004
5	1	5	0.006	-0.596	1.265	-125.242
5	1	6	-0.006	-0.675	-1.265	-141.671
5	2	5	0.006	-0.596	0.000	-0.006
5	2	6	-0.006	-0.675	-0.000	-0.007
6	1	12	0.132	0.000	-0.028	0.000
6	1	13	-0.132	0.000	0.028	0.000
6	2	12	0.132	0.000	0.001	0.000
6	2	13	-0.132	0.000	-0.001	0.000
7	1	13	0.133	0.000	-0.025	0.000
7	1	14	-0.133	0.000	0.025	0.000
7	2	13	0.133	0.000	0.001	0.000
7	2	14	-0.133	0.000	-0.001	0.000
8	1	14	0.133	0.000	-0.020	0.000
8	1	15	-0.133	0.000	0.020	0.000
8	2	14	0.133	0.000	0.001	0.000
8	2	15	-0.133	0.000	-0.001	0.000
9	1	15	0.135	0.000	-0.013	0.000
9	1	16	-0.135	0.000	0.013	0.000
9	2	15	0.135	0.000	0.001	0.000
9	2	16	-0.135	0.000	-0.001	0.000
10	1	16	0.136	0.000	-0.006	0.000
10	1	17	-0.136	0.000	0.006	0.000
10	2	16	0.136	0.000	0.001	0.000
10	2	17	-0.136	0.000	-0.001	0.000
11	1	2	-0.000	0.055	-0.006	1.750
11	1	7	0.000	0.009	0.006	0.284
12	1	7	-0.000	-0.009	-0.006	-0.284
12	1	13	0.000	0.072	0.006	2.318
13	1	3	-0.000	0.090	-0.005	2.867
13	1	8	0.000	0.023	0.005	0.732
14	1	8	-0.000	-0.023	-0.005	-0.732
14	1	14	0.000	0.135	0.005	4.330
15	1	4	0.000	0.094	0.004	3.008
15	1	9	-0.000	0.045	-0.004	1.430
16	1	9	0.000	-0.045	0.004	-1.430
16	1	15	-0.000	0.183	-0.004	5.867
17	1	5	0.000	0.069	0.003	2.213
17	1	10	-0.000	0.074	-0.003	2.370
18	1	10	0.000	-0.074	0.003	-2.370
18	1	16	-0.000	0.217	-0.003	6.953

19	1	6	0.000	0.030	0.009	0.968
19	1	11	-0.000	0.108	-0.009	3.443
20	1	11	0.000	-0.108	0.009	-3.443
20	1	17	-0.000	0.245	-0.009	7.853

-Generalisana pomeranja CT /UKUPNO/

CT	U [mm]	V [mm]	t [rad*10 ³]
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	-2.4	-1.6
3	0.0	-4.8	-2.1
4	0.0	-6.9	-2.6
5	0.0	-8.7	-3.4
6	0.0	-9.6	-4.4
7	0.0	-7.6	0.1
8	0.0	-11.1	-0.1
9	0.0	-14.5	-0.3
10	0.0	-18.0	-0.5
11	0.0	-21.2	-0.9
12	0.0	0.0	0.0
13	0.0	-4.0	0.0
14	0.0	-7.7	0.0
15	0.0	-11.4	0.0
16	0.0	-15.2	0.0
17	0.0	-19.1	0.0

-Deformacije i naponi /UKUPNO/

KE	SL	CT	e [10 ³]	k [10 ³ /m]	a [MPa]	β [MPa/m]
1	1	1	0.397	-0.522	83.283	-109.530
1	1	2	-0.397	-1.044	-83.283	-219.293
1	2	1	0.397	-0.522	0.004	-0.005
1	2	2	-0.397	-1.044	-0.004	-0.010
2	1	2	0.377	-0.639	79.232	-134.208
2	1	3	-0.377	-1.346	-79.232	-282.739
2	2	2	0.404	-1.732	0.004	-0.017
2	2	3	-0.404	-1.896	-0.004	-0.019
3	1	3	0.331	-0.968	69.539	-203.225
3	1	4	-0.331	-1.799	-69.539	-377.822
3	2	3	0.342	-2.249	0.003	-0.022
3	2	4	-0.342	-2.442	-0.003	-0.024
4	1	4	0.322	-1.526	67.694	-320.385
4	1	5	-0.322	-2.470	-67.694	-518.787
4	2	4	0.303	-2.896	0.003	-0.029
4	2	5	-0.303	-3.157	-0.003	-0.032
5	1	5	0.229	-2.273	48.096	-477.400
5	1	6	-0.229	-3.326	-48.096	-698.445
5	2	5	0.152	-3.737	0.002	-0.037
5	2	6	-0.152	-4.058	-0.002	-0.041
6	1	12	0.661	0.000	1.539	0.000
6	1	13	-0.661	0.000	-1.539	0.000
6	2	12	0.661	0.000	0.007	0.000
6	2	13	-0.661	0.000	-0.007	0.000
7	1	13	0.646	0.000	1.236	0.000
7	1	14	-0.646	0.000	-1.236	0.000
7	2	13	0.623	0.000	0.006	0.000
7	2	14	-0.623	0.000	-0.006	0.000
8	1	14	0.627	0.000	0.932	0.000
8	1	15	-0.627	0.000	-0.932	0.000
8	2	14	0.621	0.000	0.006	0.000
8	2	15	-0.621	0.000	-0.006	0.000
9	1	15	0.608	0.000	0.625	0.000
9	1	16	-0.608	0.000	-0.625	0.000
9	2	15	0.627	0.000	0.006	0.000
9	2	16	-0.627	0.000	-0.006	0.000
10	1	16	0.585	0.000	0.314	0.000
10	1	17	-0.585	0.000	-0.314	0.000
10	2	16	0.648	0.000	0.006	0.000
10	2	17	-0.648	0.000	-0.006	0.000

11	1	2	0.001	0.787	0.030	25.185
11	1	7	-0.001	1.713	-0.030	54.807
12	1	7	0.001	-1.713	0.030	-54.807
12	1	13	-0.001	-1.742	-0.030	-55.757
13	1	3	0.000	0.668	0.009	21.370
13	1	8	-0.000	1.783	-0.009	57.047
14	1	8	0.000	-1.783	0.009	-57.047
14	1	14	-0.000	-1.722	-0.009	-55.091
15	1	4	0.001	0.543	0.038	17.380
15	1	9	-0.001	1.865	-0.038	59.685
16	1	9	0.001	-1.865	0.038	-59.685
16	1	15	-0.001	-1.681	-0.038	-53.806
17	1	5	0.001	0.335	0.020	10.717
17	1	10	-0.001	1.977	-0.020	63.259
18	1	10	0.001	-1.977	0.020	-63.259
18	1	16	-0.001	-1.666	-0.020	-53.320
19	1	6	0.001	0.149	0.040	4.773
19	1	11	-0.001	2.114	-0.040	67.663
20	1	11	0.001	-2.114	0.040	-67.663
20	1	17	-0.001	-1.577	-0.040	-50.456

БИОГРАФИЈА

Џумбо Анђелко, магистар техничких наука, дипломирани грађевински инжењер, рођен је 21.11.1964. године у Бабићима, општина Шипово, Република Српска, Босна и Херцеговина, где је завршио основну школу и гимназију.

Основне студије на Факултету техничких наука Универзитета у Новом Саду започео је 1984/85 године, на грађевинском одсеку, смер индустријска градња, а дипломирао је 1990. године. На истом одсеку и смеру је 1990/91 уписао посдипломске студије и завршио их 1998. године одбраном магистарске тезе под насловом „Прилог анализи утицаја течења и скупљања бетона код спрегнутих конструкција“ под менторством др Радомира Фолића, дипл. инж. грађ., редовног професора Факултета техничких наука у Новом Саду.

Првих година радио је у неколико предузећа у Новом Саду, а од априла 2000. године ради у ЈУ Институту за испитивање материјала и конструкција Републике Српске у Бањој Луци, првобитно као Самостални истраживач, затим Руководилац одељења за конструкције и сада као Научни сарадник 1 у Научно истраживачком центру Института.

До сада је радио на многим пословима: пројектовање конструкције објеката, управљање пројектима, надзор над изградњом објеката, ревизија техничке документације, технички пријем објеката, испитивање грађевинских конструкција пробним оптерећењем, оцена стања конструкције постојећих објеката, пројектовање санација и ојачања, те научно-истраживачки и стручни рад у области грађевинских конструкција. Аутор је, или коаутор, неколико научних и стручних радова у области теорије и испитивања конструкција који су објављени у домаћим и међународним часописима и зборницима радова.

Поседује лиценцу за израду и ревизију техничке документације, конструктивна фаза и надзор, издате од Министарства Републике Српске и од Брчко дистрикта БиХ. Положио је стручни испит и у СР Југославији и у Републици Српској. Члан је и активни стручни сарадник Друштва за земљотресно инжењерство Републике Српске.

При обављању посла у струци активно се служи рачунаром, а од програма највише користи: Radimpex (Tower, ArmCad, Metal Studio и NormaBase), AutoCad, Office и SAP 2000.

Живи у Бањој Луци, ожењен је и отац је двоје деце.

ИЗЈАВЕ АУТОРА

- 1. ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ**
- 2. ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ**
- 3. ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ**

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

**Анализа утицаја реолошких својстава код сложених спрегнутих
конструкција слојевитим коначним елементима**

која је одбрањена на Грађевинско – архитектонском факултету Универзитета у Нишу:

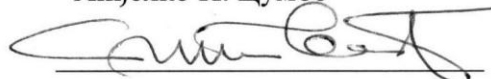
- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 16.08.2016.

Потпис аутора дисертације:

Анђелко П. Цумбо



(Име, средње слово и презиме)

**ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА
ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ**

Наслов дисертације:

**Анализа утицаја реолошких својстава код сложених спрегнутих
конструкција слојевитим коначним елементима**

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу**, истоветан штампаном облику.

У Нишу, 16.08.2016.

Потпис аутора дисертације:

Анђелко П. Цумбо



(Име, средње слово и презиме)

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

Анализа утицаја реолошких својстава код сложених спрегнутих конструкција слојевитим коначним елементима

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

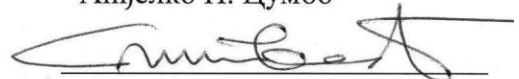
Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прераде (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

У Нишу, 16.08.2016.

Потпис аутора дисертације:

Анђелко П. Цумбо



(Име, средње слово и презиме)