УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Иван Б. Станковић

ФАЗИ РЕЛАЦИЈСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ И ЊИХОВА ПРИМЕНА У АНАЛИЗИ ПОДАТАКА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ниш, 2017.

УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Иван Б. Станковић

ФАЗИ РЕЛАЦИЈСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ И ЊИХОВА ПРИМЕНА У АНАЛИЗИ ПОДАТАКА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ниш, 2017.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

Ivan B. Stanković

FUZZY RELATION EQUATIONS AND INEQUALITIES AND THEIR APPLICATION IN DATA ANALYSIS

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2017.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	Проф. Др Мирослав Д. Ћирић, редовни професор, Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет
Наслов:	Фази релацијске једначине и неједначине и њихова примена у анализи података
Резиме:	Тема ове докторске дисертације је развој алгоритама за израчунавање највећих решења система фази релацијских једначина и неједначина и примена тих решења у анализи података задатих фази релацијама, пре свега у позиционој анализи једно-модалитетних и више-модалитетних фази социјалних мрежа. Разматрани су проблеми налажења структурних сличности између учесника различитих мрежа које су послужиле за одређивање повезаних позиција у овим мрежама.
Научна област:	рачунарске науке
Научна дисциплина:	Фази логика и фази скупови, анализа података
Кључне речи:	фази логика, фази релацијске једначине и неједначине, социјалне мреже
УДК:	510.3, 512.643.4, 519.876, 004.8
CERIF класификација:	P110, P176
Тип лиценце Креативне заједнице:	**CC BY-NC-ND**

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Miroslav D. Ćirić, Ph.D., full professor at Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš
Title:	Fuzzy relation equations and inequalities and their application in data analysis
Abstract:	The subject of this thesis is the development of algorithms for computing the greatest solutions to systems of fuzzy relational equations and inequalities and application of these solutions in the analysis of one-mode and multi-mode fuzzy social networks. In addition, some problems of finding structural similarities (regular equivalences) between the actors of various networks have been considered, and have been employed for determination of connected positions in these networks.
Scientific Field:	computer science
Scientific Discipline:	fuzzy logic and fuzzy sets, data analysis
Key Words:	fuzzy logic, fuzzy relational equations and inequalities, social networks
UDC:	510.3, 512.643.4, 519.876, 004.8
CERIF Classification:	P110, P176
Creative Commons License Type:	**CC BY-NC-ND**

Predgovor

"Granular computing" je koncept rešavanja problema duboko ukorenjen u ljudskom razmišljanju. Naime, mnoge objekte je moguće razložiti na podobjekte za koje se traženi problem jednostavnije rešava. Na primer, ljudsko telo se može granulirati na glavu, vrat, trup itd. Geografski objekti mogu biti granulirani u planine, ravnice, vode itd, vode se mogu granulirati na okeane, mora, jezera, reke i slično. Iako je ideja o granulaciji (razbijanju, razlaganju) u suštini fazi, nejasna i neprecizna matematičari su je idealizovali uvodeći pojam particija (klasa ekvivalencije) i razvili osnovnu metodologiju rešavanja problema zasnovanu na ovoj ideji. Pojam granulacije, odnosno razlaganja imao je važnu ulogu u rešavanju mnogih problema kroz istoriju matematike. Teorija grubih skupova je predstavila ovu ideju računarskim naukama i ona se uspešno primenjuje u mnogim oblastima računarskih nauka, kao na primer u analizi podataka i upravljanju informacijama. Ipak, pojam particija koji ne dozvoljava nikakvo preklapanje među podobjekatima (klasama) suviše je restriktivan za primenu u realnom svetu. Čak i u prirodnim naukama javlja se potreba za određenim stepenom preklapanja i zato je došlo do razvoja opštije teorije. "Granular computing" je primer dizajniran da ispuni ovu potrebu. Neformalno, svaka računarska teorija/tehnologija koja procesira elemente i *granule* (*podobjekte*, *podskupove*) nekog univerzuma razmatranja može se posmatrati kao "granular computing". Matematički, teorija grubih skupova ima dve perspektive: algebarsku, to je teorija relacija ekvivalencije i geometrijsku, koja podrazumeva teoriju topoloških aproksimacija. U teoriji grubih skupova, objekti su podeljeni u klase ekvivalencije na osnovu vrednosti svojih atributa, koje predstavljaju, u suštini, funkcionalne informacije o ovim objektima. Ovakve informacije su definisane kao binarne relacije koje predstavljaju proširenje funkcionalnih atributa objekata. Geometrijski, u ovakvoj granulaciji se svakoj tački/objektu pridružuje najviše jedan sused (granula) i ova vrsta granulacije se naziva *relaciona granulacija* dok se samo na vrednosti atributa zasniva druga vrsta granulacije, takozvana *funkcionalna granulacija*.

Sociolozi primenjuju iste tehnike relacione granulacije (naravno pod drugim imenom) u pozicionoj analizi socijalnih mreža. Poziciona analiza je grana analize socijalnih mreža, čiji je glavni cilj nalaženje strukturalnih sličnosti između učesnika koje bi trebalo da odslikavaju njihovu poziciju, tj. ulogu u mreži. Postoje dve vrste promenivih koje mogu biti uključene u skup podataka socijalnij mreža: *strukturne* i *kompozicione promnljive*. Strukturne promenljive se definišu na parovima učesnika u mrev zi, dakle to su relacije na skupu učesnika i predstavljaju temelj skupa podataka date mreže. Kompozicione promenljive su mere atributa (osobina) učesnika u mreži. Primetimo da su relacione veze između učesnika od primarne važnosti, dok su atributi učesnika sekundarni. Gledano iz perspektive socijalnih mreža, moguće je proučavati relacije među učesnicima i bez razmatranja njihovih atributa. U ovoj glavi ćemo diskutovati o problemu nalaženja neke vrste strukturalne sličnosti između učesnika iz dve različite mreže, korišćenjem koncepta bisimulacija koji zahteva uporednu analizu strukturnih i kompozicionih promenljivih.

Kategorija analize socijalnih mreža, koja se naziva *socijalna uloga* ili *socijalna pozicija* okarakterisana je u terminima relacija sličnosti među učesnicima, a ne preko atributa učesnika. Ovakve vrste sličnosti su prvi formulisali Lorrain i White [80] koristeći koncept strukturalnih ekvivalencija, gde se dva učesnika smatraju strukturalno ekvivalentim ako imaju iste susede. Pošto se, u mnogim slučajevima ovaj koncept pokazao previše striktnim, White i Reitz [120] su uveli koncept regularnih ekvivalencija koji je prikladniji za modeliranje socijalnih pozicija. U ovom slučaju, dva učesnika se smatraju regularno ekvivalentnim ako su jednako povezani sa drugim učesnicima koji su ekvivalentni. Regularne ekvivalencije su proučavane u mnogim naučnim radovima, kao što su [2, 37, 40, 104].

Socijalne veze u većini slučajeva nisu jasno određene i u suštini predstavljaju fazi koncept. Stoga je potpuno prirodno da su pojedini autori proučavali socijalne mreže sa aspekta teorije fazi skupova (na primer [19, 47, 48, 49, 63, 64, 65]). Fazi socijalne mreže su dobile zasluženu pažnju, jer mogu da predstave i veze između učesnika i stepen interakcije među njima.Regularne fazi ekvivalencije su najpre proučavane u radovima Fana i drugih [48, 49], gde su nazivane regularnim sličnostima, i na sličan način su razmatrane nedavno u [47]. Sa drugačije tačke gledišta, regularne fazi ekvivalencije su proučavane u [19, 63, 64, 65] i pokazalo se da se najveća regularna fazi ekvivalencija na fazi mreži može dobiti određivanjem najvećeg rešenja određenog sistema fazi relacijskih jednačina. Ovakav pristup se pokazao veoma efikasnim prilikom rešavanja nekih osnovnih problema u teriji fazi automata kao što su redukcija broja stanja i problemi ekvivalencije, simulacije i bisimulacije (na primer [23, 24, 20, 26, 63, 107]).

Kao što je već rečeno, uloga regularne ekvivalencije je da uvede određenu vrstu strukturalne sličnosti između učesnika ili entiteta u mreži da bi omogućila podelu mreže u skupove učesnika koji imaju istu socijalnu poziciju. Ovde ćemo diskutovati o malo drugačijem problemu: Problemu nalaženja neke vrste strukturalne sličnosti između učesnika iz dve različite mreže, koja će poslužiti za određivanje povezanih pozicija u ovim mrežama. Ovaj problem je već razmatran od strane Marx-a i Masuch-a u [81], koji su ukazali na koncept bisimulacije koji je uspešno korišćen u sličnu svrhu kod nekih povezanih oblasti računarskih nauka i matematike.

Glavni zadatak ove disertacije je sistematsko izučavanje raznih tipova fazi relacijskih sistema i poziciona analiza i blok-modeliranje fazi socijalnih mreža, koje ovde razmatramo kao osnovnu konkretnu interpretaciju fazi relacijskih sistema. Metodologija koju koristimo je nova i originalna, i zasnovana je na izračunavanju najvećih rešenja izvesnih sistema fazi relacijskih jednačina i nejednačina. Algoritmi koje ovde razvijamo imaju bolje performanse od svih ranije poznatih srodnih algoritama.

U prvoj glavi disertacije uvedeni su osnovni pojmovi teorije fazi skupova i relacija, pri čemu se kao strukture istinitosnih vrednosti koriste kompletne reziduirane mreže.

U drugoj glavi disertacije izučavaju se jedno-modalitetni fazi relacijski sistemi i jedno-modalitetne fazi mreže. Razvijaju se metodi za nalaženje najvećih rešenja odgovarajućih sistema fazi relacijskih jednačina i nejednačina i ta najveća rešenja se primenjuju u analizi fazi mreža. Takođe se razmatra problem utvrđivanja postojanja strukturne sličnosti između dva jedno-modalitetna fazi relacijska sistema, odnosno dve jedno-modalitetne mreže, i u tu svrhu se uvodi više različitih tipova bisimulacija. Pitanje utvrđivanja postojanja određenog tipa bisimulacija između dve fazi mreže, kao i pitanje izračunavanja najveće bisimulacije tog tipa, ako ona postoji, takođe su svedena na pitanje rešavanja odgovarajućeg sistema fazi relacijskih jednačina ili nejednačina. Posebna pažnja je posvećena regularnim bisimulacijama koje su tesno povezane sa regularnim ekvivalencijama, dobro poznatim i veoma važnim konceptom analize socijalnih mreža.

U trećoj glavi se razmatraju fazi relacijski sistemi koji se sastoje od fazi relacija između dva različita skupa i odgovarajuće fazi mreže, koje nazivamo dvo-modelitetnim. Osnovni problemi pozicione analize i blok-modeliranja dvo-modalitetnih mreža takođe su svedeni na probleme rešavanja izvesnih sistema fazi relacijskih jednačina i nejednačina sa dve promenljive, pri čemu rešenja predstavljaju parove koji se sastoje od fazi relacija na oba modaliteta. Uveden je i koncept količničkog dvo-modalitetnog fazi relacijskog sistema koji se, osim za simultatnu redukciju aktera i događaja u analizi dvo-modalitetnih mreža, može koristiti i za simultanu redukciju objekata i atributa u okviru analize formalnih koncepata ili relacionih baza podataka. Na kraju glave je ukazano na prednosti koje pristup korišćen u ovoj disertaciji ima u odnosu na ostale poznate pristupe izučavanju dvo-modalitetnih mreža.

U Glavi 4. je uvedeno zajedničko uopštenje jedno-modalitetnih i dvo-modalitetnih fazi relacijskih sistema i mreža. Naime, uvedeni su koncepti više-modalitetnog fazi relacijskog sistema i više modalitetne fazi mreže. I ovde se koristi metodologija koja se svodi na rešavanje odgovarajućih sistema fazi relacijskih jednačina i nejednačina. U ovom slučaju se radi o sistemima jednačina i nejednačina sa većim brojem nepoznatih, i uprkos tome što se koristi slična metodologija, njihovo rešavanje je znatno komplikovanije od rešavanja sistema razmatranih u prethodnim glavama.

U poslednjem odeljku je data implementacija nekih od algoritama razvijenih u prethodnim glavama, u programskom jeziku C++, i prikazani su odgovarajući kodovi.

Moram da naglasim i to da veliku zahvalnost dugujem, pre svega prof. dr Miroslavu Ćiriću, svom mentoru, na velikoj pomoći pri izboru oblasti moje doktorske teze kao i na ogromnoj podršci i pomoći u njenoj izradi i formiranju svih naučnih rezultata izloženih u tezi. Isto tako dugujem veliku zahvalnost mojim dragim koleginicama, prof. dr Jeleni Ignjatović, dr Zorani Jančić i dr Ivani Micić koje su mi nesebično pomagale od samog početka rada na tezi kao i u naučnim istraživanjima sprovedenim u toku rada na tezi. Takođe se zahvaljujem svojoj porodici, pre svega supruzi Aleksandri, sinu Mateji i ćerki Anastasiji na strpljenju koje su mi posvetili tokom izrade doktorske disertacije, kao i na razumevanju za sve ono vreme koje nisam provodio sa njima. Svojim roditeljima, Bori i Ljiljani Stanković dugujem posebnu zahvalnost na pomoći koju su mi pružali ceo život kao i na svom trudu koji su uložili da bi mi obezbedili bezbrižno detinjstvo, dobro školovanje i sve učinili da postanem dobar i častan čovek. Takođe se zahvaljujem svim svojim prijateljima, profesorima i kolegama, kao i svima onima koji su neposredno ili posredno učinili bilo šta da mi je makar i malo olakšalo bilo koji korak na putu do doktorske disertacije.

Sadržaj

Glava 1
Uvod

U ovoj glavi će biti uvedeni neki osnovni pojmovi i dati neki poznati rezultati koji se tiču reziduiranih mreža, fazi skupova i fazi relacija.

1.1. Reziduirane mreže

U realnom, fizičkom svetu, često se nailazi na klase objekata kod kojih kriterijum pripadanja određenoj klasi nije precizno definisan. Osnovna ideja fazi skupova i fazi logike je da "napadne" tradiciju u nauci, tzv. bivalentni način razmišljanja i rezonovanja, i da dovede do formiranja novih, fleksibilnijih modela stvarnosti. Zbog toga, struktura skupa istinitosnih vrednosti zahteva našu posebnu pažnju.

Pokazaćemo sada kako se prirodne, sigurne logičke pretpostavke reflektuju na odgovarajuće osobine strukture istinitosnih vrednosti. Približna ocena istinitosti direktno vodi do zaključka da skup istinitosnih vrednosti $\mathcal{L}$ treba da bude parcijalno uređen (relacijom $\leqslant$) sa 0 i 1 kao najmanjim i najvećim elementom, tim redom. Ono što takođe važi je da za svake dve istinitosne vrednosti a i b treba da postoji istinitosna vrednost veća od obe (može se uzeti 1). Na ovaj način dolazimo do zahteva za postojanjem supremuma (dualno infimuma) dvoelementnih podskupova u $\mathcal{L}$, odnosno da $\mathcal{L}$ bude mreža.

Označimo sa $\{\varphi_i \,|\, i \in I\}$ skup nekih datih propozicija. Uopštenje slučaja klasične dvovalentne logike dovodi do zaključka da istinitosna vrednost izraza "postoji i tako da je φ_i" treba da bude supremum svih istinitosnih vrednosti od φ_i, tj. $\|$"postoji i tako da je φ_i"$\| = \bigvee_{i\in I} \|\varphi_i\|$ (gde $\|\varphi\|$ označava istinitosnu vrednost od φ). Dakle, ako želimo da razvijemo ovakve egzistencijalne (i dualno, univerzalne) stavove, onda treba da postoje supremum (i infimum) proizvoljnog podskupa od $\mathcal{L}$. Na ovaj način dolazimo do toga da $\mathcal{L}$ treba da bude kompletna mreža.

Dalje, dolazimo do pitanja operacija na $\mathcal{L}$ kojima će biti modelirani logički veznici. Jasno, neophodno je da istinitosna vrednost složene formule zavisi samo od istinitosne vrednosti njenih sastavnih delova. Počećemo sa konjunkcijom, koju ćemo označiti sa &. Binarnu operaciju na $\mathcal{L}$ koja joj odgovara označićemo sa $\otimes$. Da bi ona odgovarala klasičnoj konjunkciji treba najpre da važi: $1 \otimes 1 = 1$; $1 \otimes 0 = 0 \otimes 1 = 0 \otimes 0 = 0$. Ako želimo da istinitosna vrednost od $\varphi \& \psi$ bude ista kao istinitosna vrednost od $\psi \& \varphi$, dolazimo do zahteva da $\otimes$ bude komutativna operacija. Naime, tada je $\|\varphi \& \psi\| = \|\varphi\| \otimes \|\psi\|$ i $\|\psi \& \varphi\| = \|\psi\| \otimes \|\varphi\|$, pa uslov $\|\varphi \& \psi\| = \|\psi \& \varphi\|$ povlači $\|\varphi\| \otimes \|\psi\| = \|\psi\| \otimes \|\varphi\|$. Na sličan način, ako su istinitosne vrednosti za $\varphi \& (\psi \& \chi)$ i za $(\varphi \& \psi) \& \chi$ jednake, dolazimo do yahteva da operacija $\otimes$ bude asocijativna. Tako smo došli do toga da $(L, \otimes, 1)$ treba da bude komutativni monoid. Dalje, intuitivno zahtevamo da $\otimes$ bude neopadajuća operacija, tj. da iz $a_1 \leqslant a_2$ i $b_1 \leqslant b_2$ sledi $a_1 \otimes b_1 \leqslant a_2 \otimes b_2$, što znači da većim istinitosnim stepenima dva pravila odgovaraju veći istinitosni stepeni njihove konjunkcije.

Pređimo na implikaciju. U klasičnoj logici konjunkcija i implikacija imaju važnu ulogu u formulaciji pravila zaključivanja koje se naziva *modus ponens*. Da podsetimo: ovo pravilo kaže da, ako važi φ i važi $\varphi \Rightarrow \psi$, možemo zaključiti da važi ψ. Preformulisaćemo sada ovo pravilo korišćenjem stepena istinitosti (opravdanosti). Rećićemo da φ ima stepen opravdanosti 1, ako φ važi i stepen opravdanosti 0 ako ne važi (u bivalentnoj logici nema drugih vrednosti). Prema tome, ekvivalentna formulacija modus ponensa je sledeća: Ako je stepen opravdanosti za φ najmanje a, a stepen opravdanosti za $\varphi \Rightarrow \psi$ najmanje b ($a, b \in \{0, 1\}$), onda ψ ima stepen opravdanosti najmanje $a \otimes b$. Ovo pravilo očuvava smisao da za formule φ i ψ, takve da je $a \leqslant \|\varphi\|$ i $b \leqslant \|\varphi \Rightarrow \psi\|$ važi $a \otimes b \leqslant \|\psi\|$. Znači da, kada se koristi modus ponens, stepen stvarne istinitosti tvrđenja ψ ne može biti manji od stepena koji dobijen zaključivanjem iz modus ponensa. Prema tome, uloga operacije $\otimes$ je da se dobije najbolja moguća procena za koju je uslov pravila zaključivanja očuvan. Ako sa $\rightarrow$ označimo binarnu operaciju na $\mathcal{L}$ koja odgovara implikaciji, tada imamo sledeće: $a \leqslant \|\varphi\|$ i $b \leqslant \|\varphi \Rightarrow \psi\|$ povlači $a \otimes b \leqslant \|\psi\|$, odnosno $a \leqslant \|\varphi\|$ i $b \leqslant \|\varphi\| \rightarrow \|\psi\|$ daje $a \otimes b \leqslant \|\psi\|$. Sada posmatramo specijalan slučaj ove implikacije. Ako izaberemo vrednost $a = \|\varphi\|$ i uvedemo oznaku $\|\psi\| = c$ dobijamo sledeću implikaciju:

$$b \leqslant a \rightarrow c \quad \Rightarrow \quad a \otimes b \leqslant c.$$

Drugi deo ove implikacije je najjači zaključak koji izvodimo iz modus ponensa. Kada je dato $a = \|\varphi\|$ i istinitosna vrednost za $\|\varphi \Rightarrow \psi\|$ dobijamo donju granicu $a \otimes \|\varphi \Rightarrow \psi\|$ za $\|\psi\| = c$, tj. $a \otimes \|\varphi \Rightarrow \psi\| \leqslant c$. Kako je a dato, ova vrednost zavisi samo od $\|\varphi \Rightarrow \psi\|$. Pošto je $\otimes$ neopadajuća operacija veća vrednost za $\|\varphi \Rightarrow \psi\|$ vodi do veće (ili bar jednake) vrednosti za $a \otimes \|\varphi \Rightarrow \psi\|$. Sada, iz $\|\varphi \Rightarrow \psi\| = \|\varphi\| \rightarrow \|\psi\| = a \rightarrow c$ sledi da zahtev da je modus ponens što je moguće jači dovodi do najveće vrednosti donje granice za c. Ako sa b označimo vrednost koja vodi do donje granice imamo da kada je $a \otimes b \leqslant c$ važi $b \leqslant a \rightarrow c$. Tako dolazimo do *osobine adjunkcije*:

$$a \otimes b \leqslant c \quad \Leftrightarrow \quad b \leqslant a \to c.$$

Algebarska struktura koja zadovoljava sve prethodno navedene uslove naziva se *kompletna reziduirana mreža*. Mada su logičke pretpostavke iz kojih su izvedeni algebarski uslovi relativno jednostavne one vode do veoma bogatih struktura. Na primer, možemo zahtevati da operacija $\otimes$ bude idempotentna, kada je $\|\varphi\&\varphi\| = \|\varphi\|$, tj. $x \otimes x = x$, i tada dobijamo MV-algebre (algebre Lukasiewiczeve logike) kao specijalan slučaj reziduiranih mreža itd. Uprkos tome što su reziduirane mreže veoma uopštene strukture, njihove su osobine dovoljno jake da dozvole proučavanje veoma važnih pitanja fazi relacijskih sistema i fazi relacijskih modela. Zato ćemo u daljem radu, kao strukture istinitosnih vrednoste uzeti upravo reziduirane mreže. Daćemo sada njihovu algebarsku definiciju:

Reziduirana mreža je algebra $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ za koju važi

(L1) $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ je mreža sa najmanjim elementom 0 i najvećim elementom 1,

(L2) $(L, \otimes, 1)$ je komutativan monoid sa jedinicom 1,

(L3) operacije $\otimes$ i $\to$ obrazuju *adjungovani par*, tj. oni zadovoljavaju *osobinu adjunkcije*: za sve $x, y, z \in L$,

$$x \otimes y \leqslant z \;\Leftrightarrow\; x \leqslant y \to z. \tag{1.1}$$

Svojstvo (1.1) nazivamo i *svojstvo reziduacije*.

Ako je, pored toga, $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ kompletna mreža, onda se $\mathcal{L}$ naziva *kompletna reziduirana mreža*. Operacije $\otimes$ (*množenje*) and $\to$ (*rezidum*) predstavljaju modele konjunkcije i implikacije u odgovarajućoj logici, a supremum ($\bigvee$) i infimum ($\bigwedge$) su modeli univerzalnog i egzistencijalnog kvantifikatora, respektivno.

Na kompletnoj reziduiranoj mreži mogu se definisati i sledeće operacije:

$$\begin{aligned} &\textit{birezidum} \text{ (ili } \textit{biimplikacija}) : && x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x), && (1.2)\\ &\textit{negacija} : && \neg a = a \to 0, && (1.3)\\ &n\!-\!\textit{ti stepen} : && a^0 = 1 \text{ i } a^{n+1} = a^n \otimes a. && (1.4) \end{aligned}$$

Operacija biimplikacije predstavlja model jednakosti istinitosnih vrednosti, dok je negacija model komplementa za datu istinitosnu vrednost. Može se lako pokazati da u odnosu na $\leq$, $\otimes$ je izotona po oba argumenta, a $\to$ je izotona po drugom a antitona po prvom argumentu.

Najviše proučavan i primenjivan skup istinitosnih vrednosti je realan, jedinični interval $[0,1]$ sa

$$x \wedge y = \min(x, y), \quad x \vee y = \max(x, y),$$

i sa tri važna para adjungovanih operacija:

Łukasiewiczeve operacije:

$$x \otimes y = \max(x+y-1,0), \quad x \to y = \min(1-x+y,1),$$

Goguenove (*proizvod*) *operacije*:

$$x \otimes y = x \cdot y, \qquad x \to y = \begin{cases} 1, & \text{if } x \leqslant y, \\ y/x, & \text{inače,} \end{cases}$$

Gödelove operacije :

$$x \otimes y = \min(x,y), \qquad x \to y = \begin{cases} 1, & \text{if } x \leqslant y, \\ y, & \text{inače.} \end{cases}$$

Drugi važan skup istinitosnih vrednosti je $\{a_0,\dots,a_n\}$, sa $0 = a_0 < \cdots < a_n = 1$, na kome su adjungovane operacije definisane sa

$$a_k \otimes a_l = a_{\max(k+l-n,0)}, \qquad a_k \to a_l = a_{\min(n-k+l,n)}.$$

Specijalan slučaj ovih poslednjih algebri je dvoelementna Bulova algebra sa klasičnom logikom koja se oslanja na skup $\{0,1\}$. Jedini adjungovan par operacija na dvoelementnoj Bulovoj algebri sadrži samo operacije konjunkcije i implikacije.

Sve tri strukture, Łukasiewiczeva, proizvod i Gödelova, su reziduirane mreže indukovane takozvanim t-normama. Pod *t-normom* podrazumevamo binarnu operaciju $\otimes$ na $[0,1]$ koja je asocijativna, komutativna, monotona i za koju je 1 jedinični element, tj. $\otimes : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ je preslikavanje koje zadovoljava sledeće uslove:

$$\begin{aligned} (x \otimes y) \otimes z &= x \otimes (y \otimes z), \\ x \otimes y &= y \otimes x \\ y_1 \leqslant y_2 &\Rightarrow x \otimes y_1 \leqslant x \otimes y_2, \\ x \otimes 1 &= x. \end{aligned}$$

Opštije, algebra $([0,1],\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ je kompletna reziduirana mreža ako i samo ako je $\otimes$ levo-neprekidna t-norma, tj.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \otimes b) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \otimes b,$$

i tada je rezidum definisan sa

$$x \to y = \bigvee \{u \in [0,1] \,|\, u \otimes x \leqslant y\}.$$

Navešćemo još neke važne istinitosne strukture koje su reziduirane mreže, ali zadovoljavaju i neke dodatne uslove.

Reziduirana mreža $\mathcal{L}$ se naziva *Heytingova algebra* ako je $x \otimes y = x \wedge y$, za sve $x, y \in L$. Ako je, pored toga, $\mathcal{L}$ i kompletna mreža, onda je ona *kompletna Heytingova algebra*, a ako je parcijalno uređenje $\leqslant$ u $\mathcal{L}$ linearno, onda je $\mathcal{L}$ *linearno uređena Heytingova algebra*. Najvažniji primer linearno uređene, kompletne Heytingove algebre je realan, jedinični interval $[0,1]$ sa Gödelovim parom adjungovanih operacija, tj. sa standardnom minimum t-normom.

BL-algebra (*Basic Logic Algebra*) je reziduirana mreža koja zadovoljava uslov $a \wedge b = a \otimes (a \to b)$ (*deljivost*) i $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$ (*prelinearnost*).

MV-algebra (*Multi Valued Algebra*) je BL-algebra u kojoj je $a = \neg\neg a$ (u kojoj važi Zakon dvostruke negacije).

P-algebra (*product algebra*) je BL-algebra koja zadovoljava

$$(c \to 0) \to 0 \leqslant ((a \otimes c) \to (b \otimes c)) \to (a \to b), \qquad a \wedge (a \to 0) = 0.$$

G-algebra (Gödelova algebra) je BL-algebra koja zadovoljava $a \otimes a = a$ (idempotentnost).

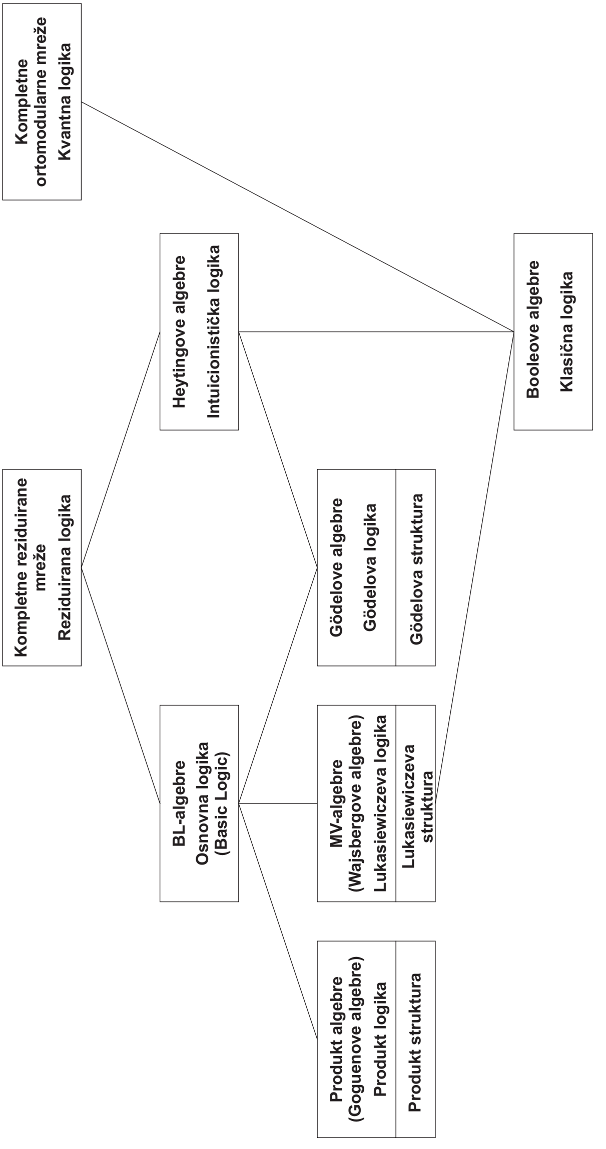
Booleova algebra je reziduirana mreža koja je i Heytingova algebra i MV-algebra.

Zbog istaknute monoidne strukture, u nekim radovima se reziduirane mreže nazivaju monoidi, dok neki autori naziv reziduirane mreže koriste za neke opštije strukture.

Redukt $\mathcal{S} = (L, \vee, \otimes, 0, 1)$ reziduirane mreže $\mathcal{L}$ je komutativni poluprsten, ako $(L, \vee, 0)$ i $(L, \otimes, 1)$ jesu komutativni monoidi, $\otimes$ je distributivna operacija u odnosu na $\vee$ i $0 \otimes x = 0$, za svako $x \in L$.

Poluprsten je *lokalno konačan* ako je proizvoljan, njegov konačno generisan podpoluprsten konačan, i slično, monoid je lokalno konačan ako je njegov proizvoljan konačno generisan podmonoid konačan. Lako se proverava da je poluprsten $\mathcal{S}$ lokalno konačan ako i samo ako su oba monoida $(L, \vee, 0)$ i $(L, \otimes, 1)$ lokalno konačni monoidi. Kako je $(L, \vee, 0)$ polumreža, a svaka polumreža je lokalno konačna, poluprsten $\mathcal{S}$ je lokalno konačan ako i samo ako je monoid $(L, \otimes, 1)$ lokalno konačan.

Za parcijalno uređen skup P kažemo da zadovoljava *DCC* uslov, ako se svaki opadajući niz elemenata iz skupa P stabilizuje, tj., ako je $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ niz elemenata skupa P za koji važi $a_{k+1} \leqslant a_k$, za svako $k \in \mathbb{N}$, tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $a_n = a_{n+m}$, za svako $m \in \mathbb{N}$.



Slika 1.1 Najznačajnije istinitosne strukture i odgovarajuće logike.

1.2. Osnovna svojstva reziduiranih mreža

Navešćemo neka osnovna svojstva operacija u reziduiranim mrežama.

Teorema 1.2.1. *Svaka reziduirana mreža zadovoljava sledeće uslove:*

$$y \leqslant x \to (x \otimes y), \quad x \leqslant (x \to y) \to y, \tag{1.5}$$

$$x \otimes (x \to y) \leqslant y, \tag{1.6}$$

$$x \leqslant y \;\Leftrightarrow\; x \to y = 1, \tag{1.7}$$

$$x \to x = 1, \quad x \to 1 = 1, \quad 1 \to x = x, \tag{1.8}$$

$$0 \to x = 1, \tag{1.9}$$

$$x \otimes 0 = 0, \tag{1.10}$$

$$x \otimes y \leqslant x, \quad x \leqslant y \to x, \tag{1.11}$$

$$x \otimes y \leqslant x \wedge y, \tag{1.12}$$

$$(x \otimes y) \to z = x \to (y \to z), \tag{1.13}$$

$$(x \to y) \otimes (y \to z) \leqslant (x \to z), \tag{1.14}$$

$$x \to y \;\text{ je najveći element od }\; \{z \,|\, x \otimes z \leqslant y\}, \tag{1.15}$$

$$x \otimes y \;\text{ je najmanji element od }\; \{z \,|\, x \leqslant y \to z\}. \tag{1.16}$$

Naredna teorema ukazuje na izotonost operacije $\otimes$, kao i na izotonost operacije $\to$ po drugom i antitonost ove operacije po prvom argumentu.

Teorema 1.2.2. *U svakoj reziduiranoj mreži važi sledeće:*

$$y_1 \leqslant y_2 \;\Rightarrow\; x \otimes y_1 \leqslant x \otimes y_2, \tag{1.17}$$

$$y_1 \leqslant y_2 \;\Rightarrow\; x \to y_1 \leqslant x \to y_2, \tag{1.18}$$

$$x_1 \leqslant x_2 \;\Rightarrow\; x_2 \to y \leqslant x_1 \to y. \tag{1.19}$$

Navodimo još neka svojstva operacija u reziduiranoj mreži:

Teorema 1.2.3. *U svakoj reziduiranoj mreži zadovoljene su sledeće nejednakosti:*

$$x \to y \leqslant (x \wedge z) \to (y \wedge z), \tag{1.20}$$

$$x \to y \leqslant (x \vee z) \to (y \vee z), \tag{1.21}$$

$$x \to y \leqslant (x \otimes z) \to (y \otimes z), \tag{1.22}$$

$$x \to y \leqslant (z \to x) \to (z \to y), \tag{1.23}$$

$$x \to y \leqslant (y \to z) \to (x \to z). \tag{1.24}$$

Naredna teorema daje odnos između operacija $\bigvee$ i $\bigwedge$, za neku familiju elemenata reziduirane mreže, i operacija $\otimes$ i $\to$.

Teorema 1.2.4. *Sledeća tvrđenja su tačna, za svaki indeksni skup I. Štaviše, ako u prve tri jednakosti leva strana ima smisla, onda i desna strana ima smisla.*

$$x \otimes \bigvee_{i\in I} y_i = \bigvee_{i\in I} (x \otimes y_i), \tag{1.25}$$

$$x \to \bigwedge_{i\in I} y_i = \bigwedge_{i\in I} (x \to y_i), \tag{1.26}$$

$$\Big(\bigvee_{i\in I} x_i\Big) \to y = \bigwedge_{i\in I} (x_i \to y), \tag{1.27}$$

$$x \otimes \bigwedge_{i\in I} y_i \leqslant \bigwedge_{i\in I} (x \otimes y_i), \tag{1.28}$$

$$\bigvee_{i\in I} (x \to y_i) \leqslant x \to \bigvee_{i\in I} y_i, \tag{1.29}$$

$$\bigvee_{i\in I} (x_i \to y) = \Big(\bigwedge_{i\in I} x_i\Big) \to y. \tag{1.30}$$

$$\bigwedge_{i\in I} (x_i \to y_i) \leqslant \Big(\bigwedge_{i\in I} x_i\Big) \to \Big(\bigwedge_{i\in I} y_i\Big) \tag{1.31}$$

$$\bigwedge_{i\in I} (x_i \to y_i) \leqslant \Big(\bigvee_{i\in I} x_i\Big) \to \Big(\bigvee_{i\in I} y_i\Big) \tag{1.32}$$

Teorema 1.2.5. *Sledeća tvrđenja predstavljaju još neka svojstva reziduiranih mreža:*

$$x \to y = ((x \to y) \to y) \to y, \tag{1.33}$$
$$x \otimes (x \to y) = y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists z)(x \otimes z = y), \tag{1.34}$$
$$x \to (x \otimes y) = y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists z)(x \to z = y), \tag{1.35}$$
$$(y \to x) \to x = y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists z)(z \to x = y), \tag{1.36}$$
$$(x \wedge y) \otimes (x \vee y) \leqslant x \otimes y, \tag{1.37}$$
$$x \vee y \leqslant ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x), \tag{1.38}$$
$$x \wedge y \geqslant x \otimes (x \to y), \tag{1.39}$$
$$x \otimes (y \to z) \leqslant y \to (x \otimes z). \tag{1.40}$$

Važi sledeća teorema:

Teorema 1.2.6. *Neka je* $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, 0, 1)$ *struktura koja zadovoljava* (i) *i* (ii) *iz definicije reziduiranih mreža i neka je* $\mathcal{L}$ *kompletna mreža. Tada su ekvivalentna sledeća tvrđenja:*

(i) *Postoji* $\to$ *koje zadovoljava svojstvo adjunkcije u odnosu na* $\otimes$.
(ii) *Za sve* a, b, *skup* $\{c \mid a \otimes c \leqslant b\}$ *ima najveći element.*
(iii) $x \otimes \bigvee_{i\in I} y_i = \bigvee_{i\in I} (x \otimes y_i)$ *važi u* $\mathcal{L}$,
i za $x \to y = \bigvee\{z \mid x \otimes z \leqslant y\}$ *su* $\otimes$ *i* $\to$ *adjungovane operacije.*

Videćemo, dalje neka svojstva negacije u reziduiranoj mreži.

Teorema 1.2.7. *Negacija ima sledeća svojstva:*

$$\neg 0 = 1, \quad \neg 1 = 0, \tag{1.41}$$
$$x \otimes \neg x = 0, \tag{1.42}$$
$$x \leqslant \neg\neg x, \quad \neg x = \neg\neg\neg x, \tag{1.43}$$
$$x \leqslant y \;\Rightarrow\; \neg y \leqslant \neg z, \tag{1.44}$$
$$\neg\Big(\bigvee_{i\in I} x_i\Big) = \bigwedge_{i\in I} \neg x_i, \tag{1.45}$$
$$\neg\Big(\bigwedge_{i\in I} x_i\Big) \geqslant \bigvee_{i\in I} \neg x_i. \tag{1.46}$$

Sledeća teorema pokazuje koja svojstva ima operacija bireziduma.

Teorema 1.2.8. *Operacija bireziduma ima sledeća svojstva:*

$$0 \leftrightarrow 1 = 1 \leftrightarrow 0 = 0, \quad 0 \leftrightarrow 0 = 1 \leftrightarrow 1 = 1, \tag{1.47}$$
$$x \leftrightarrow x = 1, \tag{1.48}$$
$$x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x, \tag{1.49}$$
$$(x \leftrightarrow y) \otimes (y \leftrightarrow z) \leqslant x \leftrightarrow z, \tag{1.50}$$
$$x \leftrightarrow 1 = x, \quad x \leftrightarrow 0 = \neg x, \tag{1.51}$$
$$x \leftrightarrow y = 1 \;\Leftrightarrow\; x = y, \tag{1.52}$$
$$(x_1 \leftrightarrow y_1) \wedge (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \wedge x_2) \leftrightarrow (y_1 \wedge y_2), \tag{1.53}$$
$$(x_1 \leftrightarrow y_1) \wedge (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \vee x_2) \leftrightarrow (y_1 \vee y_2), \tag{1.54}$$
$$(x_1 \leftrightarrow y_1) \otimes (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \otimes x_2) \leftrightarrow (y_1 \otimes y_2), \tag{1.55}$$
$$(x_1 \leftrightarrow y_1) \otimes (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \to x_2) \leftrightarrow (y_1 \to y_2), \tag{1.56}$$
$$\bigwedge_{i\in I} (x_1 \leftrightarrow y_i) \leqslant \Big(\bigwedge_{i\in I} x_i\Big) \leftrightarrow \Big(\bigwedge_{i\in I} y_i\Big), \tag{1.57}$$
$$\bigwedge_{i\in I} (x_1 \leftrightarrow y_i) \leqslant \Big(\bigvee_{i\in I} x_i\Big) \leftrightarrow \Big(\bigvee_{i\in I} y_i\Big) \tag{1.58}$$
$$x \leftrightarrow y = (x \vee y) \to (x \wedge y). \tag{1.59}$$

1.3. Fazi skupovi i fazi relacije

Fazi podskup skupa A *nad* L, ili, jednostavno, *fazi podskup* od A, je svako preslikavanje iz A u L. Neka su f i g dva fazi podskupa od A. *Jednakost* fazi podskupova f i g definiše se kao uobičajena jednakost preslikavanja, tj. $f = g$ ako i samo ako je $f(x) = g(x)$, za svako $x \in A$. *Inkluzija* $f \leqslant g$ se, takođe, definiše kao uređenje preslikavanja: $f \leqslant g$ ako i samo ako je $f(x) \leqslant g(x)$, za svaki $x \in A$. Snabdeven ovim parcijalnim uređenjem, skup $\mathcal{F}(A)$ svih fazi podskupova od A predstavlja kompletnu distributivnu mrežu, u kojoj su infimum (presek) $\bigwedge_{i\in I} f_i$ i supremum (unija) $\bigvee_{i\in I} f_i$ proizvoljne familije $\{f_i\}_{i\in I}$

fazi podskupova od A definisani sa

$$\left(\bigwedge_{i\in I} f_i\right)(x) = \bigwedge_{i\in I} f_i(x), \qquad \left(\bigvee_{i\in I} f_i\right)(x) = \bigvee_{i\in I} f_i(x).$$

Proizvod fazi podskupva $f, g \in \mathcal{F}(A)$, u oznaci $f \otimes g$ je fazi podskup od A definisan sa: $f \otimes g(x) = f(x) \otimes g(x)$, za svako $x \in A$.

Stepen preklapanja fazi podskupova f i g skupa A definiše kao

$$\bigwedge_{x\in A} f(x) \otimes g(x).$$

Stepen inkluzije od f i g se definiše kao

$$\bigvee_{x\in A} f(x) \to g(x).$$

Stepen jednakosti fazi podskupova f i g definiše se kao

$$\bigvee_{x\in A} f(x) \leftrightarrow g(x).$$

Krisp deo fazi podskupa f skupa A, u oznaci $c(f)$, ili kraće $\widehat{f}$ je *jasan (engl. crisp) podskup* od A definisan sa $\widehat{f} = \{x \in A \mid f(x) = 1\}$. Ovakvi podskupovi se drugačije nazivaju *obični (engl. ordinary)* podskupovi i ovaj naziv ćemo koristiti u daljem radu.

Može se primetiti da su mnogi autori koristili naziv "jezgro" umesto "krisp deo", u oznaci "$\ker f$" umesto "$\widehat{f}$", ali mi ćemo naziv "jezgro" koristiti u njegovom uobičajenom značenju – za običnu ekvivalenciju koja se, na prirodan način, pridružuje preslikavanju. Naime, *jezgro* fazi podskupa f od A, u oznaci $\ker f$, je ekvivalencija na A definisana sa

$$\ker f = \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}.$$

Visina od f, u oznaci $\|f\|$, je definisana sa

$$\|f\| = \bigvee_{x\in A} f(x).$$

Razmotrićemo sada fazi relacije kao fazi podskupove od $A \times A$.

Fazi relacija na A je svako preslikavanje iz $A \times A$ u L, odnosno, svaki fazi podskup od $A \times A$, a jednakost, inkluzija, unija, presek i uređenje fazi relacija su definisani kao za fazi skupove. Za dve fazi relacije R i S, njihova *kompozicija* je fazi relacija $R \circ S$ definisana sa:

$$(R \circ S)(x,y) = \bigvee_{a \in A} \Big(R(x,a) \otimes S(a,y) \Big), \tag{1.60}$$

za sve $x, y \in A$.

Krisp deo fazi relacije R, u oznaci $\widehat{R}$ je obična relacija za koju je

$$(a,b) \in \widehat{R} \quad \Leftrightarrow \quad R(a,b) = 1,$$

za proizvoljne elemente $a, b \in A$.

Označimo sa $\bar{A}$ skup koji sadrži tačno po jedan element iz svake klase krisp ekvivalencije $\widehat{E}$. Takav skup naziva se *poprečni presek* od $\widehat{E}$. (engl. cross-section).

Za fazi podskup f od A i fazi relaciju R na A, *kompozicije* $f \circ R$ i $R \circ f$ su fazi podskupovi od A definisani sa

$$(f \circ R)(a) = \bigvee_{b \in A} f(b) \otimes R(b,a), \quad (R \circ f)(a) = \bigvee_{b \in A} R(a,b) \otimes f(b), \tag{1.61}$$

za proizvoljan $a \in A$. Konačno, za fazi podskupove f i g od A pišemo

$$f \circ g = \bigvee_{a \in A} f(a) \otimes g(a). \tag{1.62}$$

Primećujemo da vrednost $f \circ g$ možemo smatrati "stepenom preklapanja" od f i g. Poznato je da je kompozicija fazi relacija asocijativna, i lako se proverava da je

$$(f \circ R) \circ S = f \circ (R \circ S), \quad (f \circ R) \circ g = f \circ (R \circ g), \tag{1.63}$$

za proizvoljne fazi podskupove f i g od A, i fazi relacije R i S na A, što znači da se zagrade u (1.63) mogu izostaviti.

Takođe, za proizvoljne $\alpha \in L^{A \times B}$, $\{\alpha_i\}_{i \in I} \subseteq L^{A \times B}$, $\beta \in L^{B \times C}$ i $\{\beta_i\}_{i \in I} \subseteq L^{B \times C}$ važi:

$$\alpha \circ \Big(\bigvee_{i \in I} \beta_i \Big) = \bigvee_{i \in I} (\alpha \circ \beta_i), \qquad \Big(\bigvee_{i \in I} \alpha_i \Big) \circ \beta = \bigvee_{i \in I} (\alpha_i \circ \beta); \tag{1.64}$$

$$\Big(\bigvee_{i \in I} \alpha_i \Big)^{-1} = \bigvee_{i \in I} \alpha_i^{-1}. \tag{1.65}$$

Primetimo takođe da, ako je A konačan skup od n elemenata, fazi relacije R i S mogu da se posmatraju kao $n \times n$ fazi matrice nad $\mathcal{L}$ i $R \circ S$ je matrični proizvod, dok se $f \circ R$ može smatrati proizvodom $1 \times n$ matrce f i $n \times n$ matrice R, i $R \circ f$ je proizvod $n \times n$ matrice R i $n \times 1$ matrice f^t (transponovane matrice od f).

Neka su A, B i C konačni skupovi kardinalnosti $|A| = k$, $|B| = m$ i $|C| = n$, tada se $\varphi \in \mathcal{R}(A,B)$ i $\psi \in \mathcal{R}(B,C)$ mogu posmatrati kao $k \times m$ i $m \times n$ fazi matrice nad $\mathcal{L}$, a $\varphi \circ \psi$ kao proizvod matrica. Analogno, za $f \in \mathcal{F}(A)$ i $g \in \mathcal{F}(B)$ možemo tretirati $f \circ \varphi$ kao proizvod $1 \times k$ matrice f i $k \times m$ matrice φ (vektor-matrica proizvod), $\varphi \circ g$ kao proizvod jedne $k \times m$ matrice φ i jedne $m \times 1$ matrice g^t, transpononovane matrice g (vektor-matrica proizvod), i $f \circ g$ kao skalarni proizvod vektora f i g.

Za datu familiju fazi relacija $\mathcal{R}$, sa $\mathcal{L}(\mathcal{R})$ ćemo označiti podalgebru od $\mathcal{L}$ generisanu svim vrednostima koje uzimaju dazi relacije iz $\mathcal{R}$.

Dalje, neka je $n \in \mathbb{N}$ i $A_1, \ldots, A_n$ kolekcija nepraznih skupova. Skup $L^{A_1 \times A_1} \times \cdots \times L^{A_n \times A_n}$ svih n-torki fazi relacija na $A_1, \ldots, A_n$, respektivno, je uređen pokordinatno, na sledeći način: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqslant (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ ako is samo ako $\alpha_l \leqslant \beta_l$, za svako $l \in [1, n]$. Koristeći se terminologijom koja se primenjuje pri radu sa fazi skupovima i fazi relacijama, kazaćemo da je $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sadržano u $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Za fazi relaciju R na A se kaže da je

(R) *refleksivna* (ili *fazi refleksivna*) ako je $R(a,a) = 1$, za svako $a \in A$;
(S) *simetrična* (ili *fazi simetrična*) ako je $R(a,b) = R(b,a)$, za svako $a, b \in A$;
(T) *tranzitivna* (ili *fazi tranzitivna*) ako za svako $a, b, c \in A$ imamo

$$R(a,b) \otimes R(b,c) \leqslant R(a,c).$$

Lako se može pokazati da za bilo koju refleksivnu i tranzitivnu relaciju R na A, važi $R \circ R = R$.

Relaciju na A nazivamo *fazi ekvivalencijom* ukoliko je refleksivna, simetriňa i tranzitivna. Skup $\mathcal{E}(A)$ svih fazi ekvivalencija, zajedno sa relacijom inkluzije fazi relacija, čini kompletnu mrežu. Infimum na ovoj mreži se poklapa sa presekom fazi relacija, dok se supremum ne poklapa u svim slučajevima sa unijom.

Fazi ekvivalenciju E na skupu A nazivamo *fazi jednakost* ako za svako $a, b \in A$, $E(a,b) = 1$ sledi $a = b$. Drugim rečima, E je fazi jednakost ako i samo ako je njen krisp deo $\widehat{E}$ je obična jednakost.

Klasa ekvivalencije fazi relacije E na skupu A određena sa $a \in A$ je fazi podskup E_a od A definisan sa

$$E_a(b) = E(a,b), \quad \text{za svako } b \in A.$$

Skup $A/E = \{E_a \,|\, a \in A\}$ svih klasa ekvivalencije relacije E se naziva *faktor skup* od A u odnosu na E ([6]). *Prirodna funkcija* iz A u A/E je fazi relacija $\varphi_E \in \mathcal{R}(A, A/E)$ definisana sa $\varphi_E(a, E_b) = E(a,b)$, za svako $a, b \in A$.

Za fazi relaciju R na skupu A, fazi relacija R^∞ na A definisana sa

$$R^\infty = \bigvee_{n \in N} R^n.$$

je najmanja tranzitivna fazi relacija na A koja sadrži R, i zove se tranzitivno zatvorenje od R.

Fazi relacija na skupu A koja je refleksivna i tranzitivna, naziva se fazi kvazi-uređenje, a refleksivna i tranzitivna krisp relacija na A se naziva *kvazi-uređenje*. Kao i skup $\mathcal{E}(A)$ svih fazi ekvivalencija, tako i skup $\mathcal{Q}(A)$ svih fazi kvazi-uređenja na skupu $\mathcal{A}$ čini kompletnu mrežu u kojoj se infimum poklapa sa presekom fazi relacija, a u opštem slučaju supremum se ne poklapa sa unijom fazi relacija. Naime, ako je R je supremum familije $\{R_i\}_{i\in I}$ u $\mathcal{Q}(A)$, onda R može biti prikazan na sledeći način:

$$R = \Big(\bigvee_{i\in I} R\Big)^{\infty} = \bigvee_{n\in N}\Big(\bigvee_{i\in I} R\Big)^{n}.$$

R-afterset od a, $a \in A$, je fazi skup $R_a \in L^A$ definisan sa

$$R_a(b) = R(a,b), \text{ za svako } b \in A,$$

dok je *R-foreset* od a fazi skup $R^a \in L^A$ definisan sa

$$R^a(b) = R(b,a), \text{ za svako } b \in A,$$

Skup svih R-aftersetova se označava sa A/R, a skup svih R-foresetova se označava sa $A\backslash R$. Očigledno, ako je R fazi ekvivalencija, tada $A/R = A\backslash R$ je skup svih fazi ekvivalencija na R.

Fazi kvazi-uređenje R na skupu A se naziva fazi uređenje ako za svako $a,b \in A$, $R(a,b) = R(b,a) = 1$ povlači $a = b$. Za fazi kvazi-uređenje R na skupu A, fazi relacija E_R definisano sa $E_R = R \wedge R^{-1}$ je fazi ekvivalencija na A, koja se naziva prirodna fazi ekvivalencija od R. Očigledno fazi- kvazi uređenje R je fazi uređenje ako je prirodna fazi ekvivalencija od R fazi jednakost.

Sledeća teorema daje neke važne osobine fazi kvazi-uređenja i prirodnih fazi ekvivalencija.

Teorema 1.3.1. *Neka je R fazi kvazi-uređenje na skupu A and E prirodna fazi ekvivalencija od R. Tada važi:*

(a) *Za proizvoljne $a,b \in A$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

- (i) $E(a,b) = 1$;
- (ii) $E_a = E_b$;
- (iii) $R_a = R_b$;
- (iv) $R^a = R^b$.

(b) *Funkcija $R_a \to E_a$ koja preslikava A/R u A/E, i funkcija $R_a \to R^a$ koja preslikava A/R u $A \setminus R$, su bijekcije.*

1.4. Uniformne fazi relacije

U ovom odeljku predstavićemo jedan veoma važan koncept - koncept uniformnih fazi relacija, uveden u radu [22]. Namera autora, koji su uveli pojam uniformnih fazi relacija, bila je da definišu određene vrste fazi funkcija, koje bi obezbedile korespondenciju između fazi funkcija i fazi relacija ekvivalencije, analogno korespondenciji između običnih funkcija i običnih relacija ekvivalencije. Ispostavilo se da uniformne fazi relacije utvrđuju prirodnu vezu između fazi particija dva skupa, tj. definišu neku vrstu "uniformnosti" između ovih fazi particija. Opštije, uniformne fazi relacije mogu biti shvaćene kao fazi relacije ekvivalencije koje povezuju elemente dva, ne obavezno jednaka skupa.

Neka su A i B neprazni skupovi i neka su E i F fazi relacije ekvivalencije na A i B, redom. Ako fazi relacija $\varphi \in L^{A\times B}$ zadovoljava uslov

(EX1) $\varphi(a_1,b)\otimes E(a_1,a_2) \leqslant \varphi(a_2,b)$, za sve $a_1,a_2 \in A$ i $b \in B$,

onda je ona *ekstenzionalna u odnosu na E*, a ako zadovoljava

(EX2) $\varphi(a,b_1)\otimes F(b_1,b_2) \leqslant \varphi(a,b_2)$, za sve $a \in A$ i $b_1,b_2 \in B$,

onda je *ekstenzionalna u odnosu na F*. Ako je fazi relacija φ ekstenzionalna u odnosu na E i F, i ako zadovoljava

(PFF) $\varphi(a,b_1)\otimes \varphi(a,b_2) \leqslant F(b_1,b_2)$, za sve $a \in A$ i $b_1,b_2 \in B$,

onda se ona naziva *parcijalna fazi funkcija* u odnosu na E i F.

Parcijalne fazi funkcije uveo je Klawonn [70], a proučavao ih je i Demirci u [32, 33]. Zbog osobine adjunkcije i simetričnsti, uslovi (EX1) i (EX2) mogu biti napisani kao

(EX1′) $E(a_1,a_2) \leqslant \varphi(a_1,b) \leftrightarrow \varphi(a_2,b)$, za sve $a_1,a_2 \in A$ i $b \in B$;
(EX2′) $F(b_1,b_2) \leqslant \varphi(a,b_1) \leftrightarrow \varphi(a,b_2)$, za sve $a \in A$ i $b_1,b_2 \in B$.

Za proizvoljnu fazi relaciju $\varphi \in L^{A\times B}$ možemo definisati fazi relaciju ekvivalencije E_A^{φ} na A sa

$$E_A^{\varphi}(a_1,a_2) = \bigwedge_{b\in B} \varphi(a_1,b) \leftrightarrow \varphi(a_2,b), \tag{1.66}$$

za sve $a_1,a_2 \in A$ i fazi relaciju ekvivalencije E_B^{φ} na B kao

$$E_B^{\varphi}(b_1,b_2) = \bigwedge_{a\in A} \varphi(a,b_1) \leftrightarrow \varphi(a,b_2), \tag{1.67}$$

za proizvoljne $b_1,b_2 \in B$. One će biti nazvane *fazi relacije ekvivalencije* na A i B *indukovane sa* φ, specijalno, E_A^{φ} će biti nazvano *jezgrom* od φ, a E_B^{φ} *ko-jezgrom* od φ. Prema (EX1′) i (EX2′), E_A^{φ} i E_B^{φ} su najveće fazi ekvivalencije na A i B, redom, takve da je fazi relacija φ ekstenzionalna u odnosu na njih.

Fazi relacija $\varphi \in L^{(A\times B)}$ se naziva *parcijalna fazi funkcija* ako je ona parcijalna fazi funkcija u odnosu na E_A^φ and E_B^φ [22]. Karakterizacija parcijalnih fazi funkcija data je u radu [22] na sledeći način:

Teorema 1.4.1. *Neka su A i B neprazni skupovi i neka je $\varphi \in L^{A\times B}$ fazi relacija. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *φ je parcijalna fazi funkcija;*
(ii) *φ^{-1} je parcijalna fazi funkcija;*
(iii) $\varphi^{-1} \circ \varphi \leqslant E_B^\varphi$*;*
(iv) $\varphi \circ \varphi^{-1} \leqslant E_A^\varphi$*;*
(v) $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \leqslant \varphi$*.*

Fazi relacija $\varphi \in L^{A\times B}$ se naziva *$\mathcal{L}$-funkcija* ako za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ tako da je $\varphi(a,b) = 1$ ([34]) i ona je *sirjektivna* ako za svaki $b \in B$ postoji $a \in A$ takav da je $\varphi(a,b) = 1$, tj. ako φ^{-1} jeste $\mathcal{L}$-funkcija. Za sirjektivnu fazi relaciju $\varphi \in \mathcal{F}(A\times B)$ kažemo da je fazi relacija iz A *na* B. Ako φ jeste $\mathcal{L}$-funkcija i ako je sirjektivna, odnosno, ako i φ i φ^{-1} jesu $\mathcal{L}$-funkcije, onda se φ naziva *sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija*.

Primetimo da fazi relacija $\varphi \in L^{A\times B}$ jeste $\mathcal{L}$-funkcija ako i samo ako postoji funkcija $\psi : A \to B$ takva da važi $\varphi(a,\psi(a)) = 1$, za svaki $a \in A$ (cf. [33, 34]). Funkcija ψ sa ovim svojstvom biće nazvana *krisp opis* od φ, i skup svih ovakvih funkcija označićemo sa $CR(\varphi)$. U krisp slučaju, relaciju $\varphi \subseteq A\times B$ nazivamo *kompletnom* ako i samo ako postoji funkcija $f : A \to B$ takva da važi $(a, f(a)) \in \varphi$, za svako $a \in A$. Funkciju f sa ovim svojstvom nazivamo *funkcionalni opis* od φ i označimo sa $FD(\varphi)$ skup svih ovakvih funkcija.

$\mathcal{L}$-funkcija koja je perfektna fazi funkcija u odnosu na E i F naziva se *perfektna fazi funkcija* u odnosu na E i F. Perfektne fazi funkcije predstavio je i proučavao Demirci u [32, 33]. Fazi relaciju $\varphi \in L^{A\times B}$ koja je perfektna fazi funkcija u odnosu na E_A^φ i E_B^φ nazivaćemo, jednostavno, *perfektna fazi funkcija*.

Neka su A i B neprazni skupovi i neka je E fazi ekvivalencija na B. Krisp (standardna) funkcija $\psi : A \to B$ se naziva *E-sirjektivnom* ako za proizvoljno $b \in B$ postoji $a \in A$ tako da je $E(\psi(a), b) = 1$. Drugim rečima, ψ je E-sirjektivna ako i samo ako je $\psi \circ E^\sharp$ sirjektivna funkcija iz A na B/E, gde je $E^\sharp : B \to B/E$ funkcija data sa $E^\sharp(b) = E_b$, za svaki $b \in B$. Jasno je da ψ jeste E-sirjektivna funkcija ako i samo ako njena slika $\operatorname{Im}\psi$ ima neprazan presek sa svakom od klasa ekvivalencije krisp relacije ekvivalencije $\ker(E)$.

Neka su A i B neprazni fazi skupovi i neka je $\varphi \in L^{A\times B}$ parcijalna fazi funkcija. Ako je, uz to, φ sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija, ona se naziva *uniformna fazi relacija* [22]. Drugim rečima, uniformna fazi relacija je perfektna fazi funkcija koja dodatno ima svojstvo da je sirjektivna. Uniformna fazi relacija koja je i krisp relacija naziva se *uniformna relacija*. Sledeća teorema daje karakterizaciju uniformnih fazi relacija:

Teorema 1.4.2. *Neka su A i B neprazni skupovi i neka je $\varphi \in L^{A\times B}$ fazi relacija. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *φ je uniformna fazi relacija;*
(ii) *φ^{-1} je uniformna fazi relacija;*
(iii) *φ je sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija i*

$$\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = \varphi; \tag{1.68}$$

(iv) *φ je sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija i*

$$E_A^{\varphi} = \varphi \circ \varphi^{-1}; \tag{1.69}$$

(v) *φ je sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija i*

$$E_B^{\varphi} = \varphi^{-1} \circ \varphi; \tag{1.70}$$

(vi) *φ je $\mathcal{L}$-funkcija i za svako $\psi \in CR(\varphi)$, $a \in A$ i $b \in B$ važi da ψ jeste E_B^{φ}-sirjektivna i*

$$\varphi(a,b) = E_B^{\varphi}(\psi(a),b); \tag{1.71}$$

(vii) *φ je $\mathcal{L}$-funkcija i za svako $\psi \in CR(\varphi)$ i $a_1,a_2 \in A$ imamo da ψ jeste E_B^{φ}-sirjektivna i*

$$\varphi(a_1,\psi(a_2)) = E_A^{\varphi}(a_1,a_2). \tag{1.72}$$

Dokaz: Uslovi (i), (ii), (vi) i (vii) su isti kao u Teoremi 3.3 iz rada [22], dok (iv) i (v) predstavljaju samo drugačiju formulaciju uslova (v) i (vi) Teoreme 3.3 iz [22]. Implikacija (iii)⇒(i) sledi direktno prema Teoremi 1.4.1.. Ostaje da dokažemo samo uslov (i)⇒(iii).

Ako je φ uniformna fazi relacija, ona je sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija i prema Teoremi 1.4.1. dobijamo da je $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \leqslant \varphi$. Da bi dokazali obratnu nejednakost posmatramo proizvoljne $\psi \in CR(\varphi)$, $a \in A$ i $b \in B$. Tada je $\varphi(a,\psi(a)) = \varphi^{-1}(\psi(a),a) = 1$, i

$$\begin{aligned}
\varphi(a,b) &= \varphi(a,\psi(a)) \otimes \varphi^{-1}(\psi(a),a) \otimes \varphi(a,b) \\
&\leqslant \bigvee_{a' \in A, b' \in B} \varphi(a,b') \otimes \varphi^{-1}(b',a') \otimes \varphi(a',b) = (\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi)(a,b).
\end{aligned}$$

Prema tome, $\varphi \leqslant \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$, pa smo dokazali da je $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = \varphi$. □

Posledica 1.4.3. [22] *Neka su A i B neprazni skupovi i neka je $\varphi \in L^{A\times B}$ uniformna fazi relacija. Tada, za sve $\psi \in CR(\varphi)$ i $a_1,a_2 \in A$ imamo da je*

$$E_A^{\varphi}(a_1,a_2) = E_B^{\varphi}(\psi(a_1),\psi(a_2)). \tag{1.73}$$

Neka su A i B neprazni skupovi. Na osnovu Teoreme 1.4.2. fazi relacija $\varphi \in L^{A\times B}$ je uniformna fazi relacija ako i samo ako njoj inverzna relacija φ^{-1} jeste uniformna fazi relacija.

Šta više, prema uslovima (iv) i (v) Teoreme 1.4.2., jasno je da je jezgro od φ^{-1} ko-jezgro od φ i obratno, ko-jezgro od φ^{-1} jeste jezgro od φ, odnosno

$$E_B^{\varphi^{-1}} = E_B^{\varphi} \quad \text{i} \quad E_A^{\varphi^{-1}} = E_A^{\varphi}.$$

Naredne leme, u mnogome, će nam koristiti u daljem radu.

Lema 1.4.4. *Neka su A i B neprazni skupovi i neka je $\varphi \in L^{A\times B}$ uniformna fazi relacija, neka je $\alpha = E_A^{\varphi}$ i $\beta = E_B^{\varphi}$ i neka funkcija $\widetilde{\varphi} : A/\alpha \to B/\beta$ bude definisana sa*

$$\widetilde{\varphi}(\alpha_a) = \beta_{\psi(a)}, \ \text{za sve } a \in A \text{ i } \psi \in CR(\varphi). \tag{1.74}$$

Tada je funkcija $\widetilde{\varphi}$ dobro definisana i (ona ne zavisi od izbora $\psi \in CR(\varphi)$ i $a \in A$). To je bijektivna funkcija iz A/α na B/β i $(\widetilde{\varphi})^{-1} = \widetilde{\varphi^{-1}}$.

Lema 1.4.5. *Neka su A i B neprazni skupovi i neka su $\varphi_1, \varphi_2 \in L^{A\times B}$ uniformne fazi relacije. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$;
(ii) $\varphi_1^{-1} \leqslant \varphi_2^{-1}$;
(iii) $CR(\varphi_1) \subseteq CR(\varphi_2)$ *and* $E_A^{\varphi_1} \leqslant E_A^{\varphi_2}$;
(iv) $CR(\varphi_1) \subseteq CR(\varphi_2)$ *and* $E_B^{\varphi_1} \leqslant E_B^{\varphi_2}$.

Kao direktnu posledicu prethodne leme dobijamo sledeću posledicu koja pokazuje da je uniformna fazi relacija jednoznačno određena svojom krisp reprezentacijom i jezgrom, kao i svojom krisp reprezentacijom i ko-jezgrom.

Posledica 1.4.6. *Neka su A i B neprazni skupovi i neka su $\varphi_1, \varphi_2 \in L^{A\times B}$ uniformne fazi relacije. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\varphi_1 = \varphi_2$;
(ii) $\varphi_1^{-1} = \varphi_2^{-1}$;
(iii) $CR(\varphi_1) = CR(\varphi_2)$ *and* $E_A^{\varphi_1} = E_A^{\varphi_2}$;
(iv) $CR(\varphi_1) = CR(\varphi_2)$ *and* $E_B^{\varphi_1} = E_B^{\varphi_2}$.

Poznato je da kompozicija dve uniformne fazi relacije u opštem slučaju ne mora da bude fazi relacija. Ipak, kada je ko-jezgro prvog faktora kompozicije sadržano u jezgru drugog faktora, tada je kompozicija uniformna što pokazuje naredna lema.

Lema 1.4.7. *Neka su A, B i C neprazni skupovi i neka je $\varphi_1 \in L^{A\times B}$ i $\varphi_2 \in L^{B\times C}$.*

(a) *Ako su φ_1 i φ_2 sirjektivne $\mathcal{L}$-funkcije, onda je i $\varphi_1 \circ \varphi_2$ sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija.*
(b) *Ako su φ_1 i φ_2 uniformne fazi relacije takve da je $E_B^{\varphi_1} \leqslant E_B^{\varphi_2}$, onda je $\varphi_1 \circ \varphi_2$ takođe uniformna fazi relacija.*

1.5. Reziduali

Za neprazne skupove A i B i fazi podskupove $\eta \in \mathcal{F}(A)$ i $\xi \in \mathcal{F}(B)$, fazi relacije $\eta \backslash \xi \in \mathcal{R}(A,B)$ i $\eta/\xi \in \mathcal{R}(A,B)$ se definišu na sledeći način:

$$(\eta\backslash\xi)(a,b) = (\,\eta(a) \to \xi(b)\,), \tag{1.75}$$

$$(\eta/\xi)(a,b) = (\,\xi(b) \to \eta(a)\,), \tag{1.76}$$

za svako $a \in A$ i $b \in B$. Očigledno je da važi $\eta/\xi = (\xi\backslash\eta)^{-1}$.

Sledeća lema predstavlja dobro poznat rezultat E.Sanchez-a (cf. [101, 102, 103]).

Lema 1.5.1. *Neka su A i B neprazni skupovi, $\eta \in \mathcal{F}(A)$ i $\xi \in \mathcal{F}(B)$.*

(a)*Skup svih rešenja nejednačine $\eta \circ \chi \leqslant \xi$, gde je χ nepoznata fazi relacija između A i B, je glavni ideal od $\mathcal{R}(A,B)$ generisan fuzi relacijom η/ξ.*
(b)*Skup svih rešenja nejednačine $\chi \circ \xi \leqslant \eta$, gde je χ nepoznata fazi relacija između A i B, je glavni ideal od $\mathcal{R}(A,B)$ generisan fazi relacijom $\eta\backslash\xi$.*

Dokaz: Ovo je takođe, poznat rezultat E. Sanchez-a (cf. [101, 102, 103]). □

Neka je $(\eta/\xi) \wedge (\eta\backslash\xi) = \eta|\xi$, gde je $\eta|\xi$ fazi relacija između A i B definisana

$$(\eta|\xi)(a,b) = (\,\eta(a) \leftrightarrow \xi(b)\,), \tag{1.77}$$

za proizvoljne $a \in A$ i $b \in B$.

Dalje, neka su A i B neprazni skupovi i neka su $\alpha \in \mathcal{R}(A)$, $\beta \in \mathcal{R}(B)$ i $\gamma \in \mathcal{R}(A,B)$. *Desni rezidual* od γ po α je fazi relacija $\alpha\backslash\gamma \in \mathcal{R}(A,B)$ definisana sa

$$(\alpha\backslash\gamma)(a,b) = \bigwedge_{a' \in A} (\,\alpha(a',a) \to \gamma(a',b)\,), \tag{1.78}$$

za svako $a \in A$ i $b \in B$, a takođe *levi residual* od γ po β je fazi relacija $\gamma/\beta \in \mathcal{R}(A,B)$ definisana sa

$$(\gamma/\beta)(a,b) = \bigwedge_{b' \in B} (\beta(b,b') \to \gamma(a,b')\,), \tag{1.79}$$

za svako $a \in A$ i $b \in B$. Možemo posmatrati desni rezidual $\alpha\backslash\gamma$ kao ostatak od γ na desnoj strani nakon "deljenja" γ s leva sa α, i o levom rezidualu γ/β kao o ostatku γ na levoj strani nakon "deljenja" γ s desna sa β. Tačnije,

$$\alpha \circ \gamma' \leqslant \gamma \;\Leftrightarrow\; \gamma' \leqslant \alpha\backslash\gamma, \qquad \gamma' \circ \beta \leqslant \gamma \;\Leftrightarrow\; \gamma' \leqslant \gamma/\beta, \tag{1.80}$$

za svako $\alpha \in \mathcal{R}(A)$, $\beta \in \mathcal{R}(B)$ i $\gamma', \gamma \in \mathcal{R}(A,B)$. U slučaju da je $A = B$, ova dva koncepta su dobro poznata koncepta desnih i levih reziduala fazi relacija na skupu (videti [64]).

Lema 1.5.2. *Neka su A i B neprazni skupovi i neka je $\alpha \in \mathcal{R}(A)$, $\beta \in \mathcal{R}(B)$ and $\gamma \in \mathcal{R}(A,B)$.*

(a)*Skup svih rešenja nejednačine $\alpha \circ \chi \leqslant \gamma$, gde je χ nepoznata fazi relacija između A i B, je glavni ideal od $\mathcal{R}(A,B)$ generisan desnim rezidualom $\alpha\backslash\gamma$ od γ po α.*
(b)*Skup svih rešenja nejednačine $\chi \circ \beta \leqslant \gamma$, gde je χ nepoznata relacija između A i B, je glavni ideal od $\mathcal{R}(A,B)$ generisan levim rezidualom γ/β od γ po β.*

Dokaz: Ovo su takođe rezultati E. Sanchez-a. (cf. [101, 102, 103]). □

Sledeće osobine kompozicije i rezidualnosti će biti korišćene u daljem radu.

Neka je $(P, \leq)$ parcijalno uređen skup i neka je $\phi : P \to P$ funkcija. Ako iz $x \leq y$ za svako $x, y \in P$, tada ϕ nazivamo *izotonom*, a ako je $x \leq \phi(x)$ za svako $x \in P$, tada je nazivamo *ekstenzivnom*, ako je $\phi(x) \leq x$ za svako $x \in P$, tada je *intenzivna*; Ako važi da je $\phi(\phi(x)) = \phi(x)$ za svako $x \in P$, tada se zove *idempotent*. Izotona, ekstenzivna i idempotentna funkcija se naziva *operator zatvorenja* na $(P, \leq)$, a svako $x \in P$ za koje važi da je $\phi(x) = x$ se naziva $\phi - zatvoren$ element. S druge strane, izotona, intenzivna i idempotentna funkcija se naziva *operator otvorenja* na $(P, \leq)$, a svaki $x \in P$ za koji važi $\phi(x) = x$ se naziva $\phi - otvorenelement$. Konačno, za svaku funkciju $\phi : P \to P$, element $x \in P$ se kaže da je *post - fiksna tačka* ako važi da je $x \leq \phi(x)$.

Tvrđenje 1.1. *Neka su A i B neprazni skupovi i $\alpha \in L^{A\times A}$ i $\beta \in L^{B\times B}$ fazi kvazi uređenja. Tada*

(a) *Funkcije $R \mapsto \alpha \circ R$ i $R \mapsto R \circ \beta$ su operatori zatvorenja na mreži fazi relacija između skupova A i B.*

(b) *Funkcije $R \mapsto \alpha \backslash R$ i $R \mapsto R/\beta$ su operatori otvorenja na mreži vazi relacija između skupova A i B.*

Za proizvoljnu relaciju $\lambda \in L^{A\times B}$, na isti način kao u Teoremi 3.5 [64] može se dokazati da je λ/λ fazi kvazi uređenje na A i $\lambda\backslash\lambda$ fazi kvazi uređenje na B. Prirodne fazi ekvivalencije od λ/λ i $\lambda\backslash\lambda$ ćemo označiti sa $\lambda /\!/ \lambda$ i $\lambda \backslash\!\backslash \lambda$, tj., $\lambda /\!/ \lambda = (\lambda/\lambda) \wedge (\lambda/\lambda)^{-1}$ i $\lambda \backslash\!\backslash \lambda = (\lambda\backslash\lambda) \wedge (\lambda\backslash\lambda)^{-1}$.

Na osnovu osobine reziduala, imamo

$$(\eta/\mu) \circ \mu \leqslant \eta \quad \text{i} \quad \lambda \circ (\lambda\backslash\eta) \leqslant \eta, \tag{1.81}$$

i kao posledicu da je η/μ najveće rešenje nejednačine $\chi \circ \mu \leqslant \eta$ (gde je χ nepoznata fazi relacija između skupova A i B), dok je $\lambda\backslash\eta$ najveće rešenje nejednačine $\lambda \circ \chi \leqslant \eta$ (gde je χ nepoznata fazi relacija između $L^{B\times C}$).

U nekim slučajevima, potrebno je razmatrati najveća rešenja nejednačina $\lambda \circ \chi \leqslant \eta$ i $\chi \circ \mu \leqslant \eta$ koja pripadaju nekom određenom podskupu od $L^{B\times C}$ i $L^{A\times B}$, ako takva rešenja postoje. Za $M \subseteq L^{B\times C}$, najveće rešenje nejednačine $\lambda \circ \chi \leqslant \eta$, ukoliko postoji se naziva *relativni desni rezidual* od η po λ u odnosu na M. Analogno, za $M \subseteq L^{A\times B}$, najveće rešenje nejednačine $\chi \circ \mu \leqslant \eta$, ukoliko postoji se naziva *relativni levi rezidual* od η po μ u odnosu na M. Primetimo da ako je M otvoreni sistem u $L^{B\times C}$ (odnosno $L^{A\times B}$), tj. ako je zatvoren za proizvoljnu uniju i sadrži prazan skup, tada relativni desni (odnosno levi) rezidual u odnosu na M postoji za bilo koji par relacija $\lambda \in L^{A\times B}$ i $\eta \in L^{A\times C}$ (tj. $\mu \in L^{B\times C}$ i $\eta \in L^{A\times C}$). Za nas su posebno interesantni relativni reziduali u odnosu na Bool-ove mreže $2^{B\times C}$ i $2^{A\times B}$. Relativni desni rezidual od η po λ u odnosu na $2^{B\times C}$ se naziva *Bool-ov desni rezidual* od η po λ, i označava se sa $\lambda \nwarrow \eta$, dok se relativni levi rezidual od η po μ u odnosu na $2^{A\times B}$ naziva *Bool-ov* *levi rezidual* od η po λ, i označava se sa $\eta \nearrow \mu$. Možemo pokazati da $\lambda \nwarrow \eta$ i $\eta \nearrow \mu$ mogu biti okarakterisane sledećim jednakostima:

$$\begin{aligned} \lambda \nwarrow \eta &= (\lambda \backslash \eta)^{\mathrm{c}} = \{(b,c) \in B \times C \,|\, \lambda b \leqslant \eta c\} \\ \eta \nearrow \mu &= (\eta / \mu)^{\mathrm{c}} = \{(a,b) \in A \times B \,|\, b\mu \leqslant a\eta\} \end{aligned} \tag{1.82}$$

(vidi Teoreme 5.1. i 5.2 [29] koje se odnose na Bool-ove reziduale u kontekstima matrica nad aditivno idempotentnim poluprstenom).

Glava 2
Jedno-modalitetni fazi relacijski sistemi i jedno-modalitetne fazi mreže

U ovoj glavi bavimo se fazi relacijskim sistemima koje čini familija fazi relacija na jednom istom skupu, kojoj u nekim situacijama pridružujemo i familiju fazi podskupova tog skupa. Takve fazi relacijske sisteme nazivaćemo jedno-modalitetnim. Takvi fazi relacijski sistemi imaju razne interpretacije i praktične primene, a mi ćemo ovde uglavnom imati na umu interpretaciju gde se pomenuti skup shvata kao skup aktera, familijom fazi relacija opisuju se razni odnosi i veze između tih aktera, a familijom fazi podskupova, ako je prisutna, zadaju se atributi koje ti akteri mogu imati. Takve interpretacije poznate su kao jedno-modalitetne fazi socijalne mreže, ili kraće samo fazi socijalne mreže.

Istraživanja koja se ovde sprovode inspirisana su problemom određivanja uloge ili pozicije aktera u okviru socijalne mreže, koji predstavlja jedan od glavnih problema u analizi socijalnih mreža i razmatra se u okviru discipline koja se naziva poziciona analiza. U velikim i kompleksnim mrežama nemoguće je razumeti veze između svakog para aktera, ali je u izvesnoj meri moguće da se razume ceo sistem, klasifikovanjem aktera i opisivanjem veza na nivou klasa. Pri tome se za aktere iz iste klase smatra da imaju istu poziciju ili da igraju istu ulogu u mreži. Glavni zadatak pozicione analize je da odredi sličnosti između aktera koje oslikavaju njihovu poziciju u mreži. Na primer, u okviru terorističke ili kriminalne mreže, zadatak pozicione analize bi bio da odredi pozicije ili uloge članova te mreže samo na osnovu uvida u komunikaciju između njih, ne zalazeći u sadržaj te komunikacije. Te sličnosti prvi put su formalizovali Lorrain i White u [80] konceptom strukturne ekvivalencije. Neformalno govoreći, dva aktera se smatraju strukturno ekvivalentnim ako su povezani sa istim individuama u mreži. Međutim, u mnogim situacijama se takav vid veza pokazao suviše strogim. Oslabljujući taj koncept tako da se na mnogo pogodniji način mogu modelirati socijalne pozicije, White i Reitz su u [120] su uveli koncept regularne ekvivalencije, gde se dva aktera smatraju regularno ekvivalentnim ako na isti način povezane sa ekvivalentnim akterima.

Nasuprot tradicionalnoj statističkoj analizi, neki savremeni pristupi analizi podataka, kao što su analiza socijalnih mreža i analiza formalnih koncepata, su fokusirani na prepoznavanje i uopštavanje strukturnih sličnosti koje proizilaze iz opisa podataka. Metod koji se često koristi u takvoj strukturnoj analizi je redukcija podataka, proces transformisanja sirovih podataka u sažetiju formu bez gubljenja bitnih semantičkih informacija. Jedna od takvih tehnika redukcije podataka je i blok-modeliranje. Blok-modeliranje ima široku primenu u analizi socijalnih mreža, gde se velike i kompleksne mreže slikaju u jednostavnije strukture, nazvane blok-model slikama, koje se mogu shvatiti kao strukturni sažeci originalnih mreža. Blok-modeliranje se obavlja grupisanjem aktera koji imaju suštinski slične obrasce odnosa sa drugim akterima i interpretiranjem obrazaca odnosa između grupa, a ključnu ulogu u tome igraju upravo regularne i strukturne ekvivalencije. Za više informacija o pozicionoj analizi socijalnih mreža i blok-modeliranju upućujemo na [2, 37, 40].

U analizi fazi relacijskih sistema i fazi socijalnih mreža, koju vršimo u ovoj disertaciji, koristi se pristup drugačiji od onoga koji je obično korišćen u pozicionoj analizi socijalnih mreža i blok-modeliranju. Taj naš pristup zasnovan je na izračunavanju najvećih rešenja izvesnih sistema fazi relacijskih jednačina i nejednačina, pri čemu ta najveća rešenja zapravo jesu najveće regularne fazi ekvivalencije i fazi kvazi-uređenja. Nakon Odeljka 2.1., u kome predstavljamo formalne definicije jedno-modalitetnih fazi i krisp relacijskih sistema i jedno-modalitetnih fazi i krisp mreža i navodimo neke primere jedno-modalitetnih mreža, u Odeljku 2.2. analiziramo sisteme fazi relacijskih jednačina i nejednačina koji su određeni jedno-modalitetnim fazi relacijskim sistemima. Te sisteme nazivaćemo *jedno-modalitetnim sistemima*. Nekim jednostavnijim sistemima, od kojih svaki predstavlja instancu nekog opšteg jedno-modalitetnog sistema, pri čemu svako rešenje novog sistema mora biti i rešenje odgovarajućeg opšteg sistema, baviće se Odeljak 2.3. U Odeljku 2.4 dajemo algoritme za izračunavanje najvećih krisp rešenja sistema predstavljenih u Odeljku 2.2. sadržanih u datoj fazi relaciji. Ovi algoritmi dobijeni su modifikacijom algoritama iz tog odeljka. U Odeljku 2.5. diskutovaćemo o problemu nalaženja neke vrste strukturne sličnosti između učesnika dve različite mreže, korišćenjem koncepta bisimulacija koji zahteva uporednu analizu strukturnih i kompozicionih promenljivih, odnosno analizu relacionih veza između učesnika uz razmatranje odnosa njihovih atributa. Odeljak 2.6. ukazuje na značaj uniformnih forward fazi bisimulacija čija je karakterizacija predstavljena preko njihovih jezgra i kojezgra, kao i preko izomorfizma između faktor fazi relacijskih sistema u odnosu na jezgro i kojezgro datih uniformnih fazi relacija. U Odeljku 2.7. proučavaćemo heterotipne bisimulacije između fazi socijalnih mreža i ukazaćemo na sličnosti i osnovne razlike između homotipnih i heterotipnih bisimulacija. Algoritmi koji utvrđuju da li postoji forward (backward-forward) bisimulacija između dve fazi mreže i, ako ona postoji računaju najveću takvu bisimulaciju biće predstavljeni u Odeljku 2.8. Kako je koncept regularnih ekvivalencija najprikladniji za modeliranje socijalnih pozicija, u Odeljku 2.9. ćemo se baviti regularnim bisimulacijama, pri čemu uniformna regularna bisimulacija između dve jedno-modalitetne fazi mreže određuje par regularnih ekvivalencija na ovim mrežama. Na kraju, u Odeljku 2.10 dajemo neke primere testiranja postojanja i izračunavanja najvećih bisimulacija.

2.1. Osnovne definicije i primeri

Formalno se jedno-modalitetni fazi relacijski sistemi mogu definisati na sledeći način:

Neka je A neprazan skup i neka je $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i\in I}$ familija nepraznih fazi relacija na skupu A. Sistem $\mathcal{N} = (A,\mathcal{R})$ nazivaćemo *jedno-modalitetni fazi relacijski sistem*, ili 1-*modalitetni fazi relacijski sistem*, a skup A *komponentom* ili *modalitetom* sistema $\mathcal{N}$. Ukoliko svi članovi familije $\mathcal{R}$ jesu krisp relacije, onda ćemo za sistem $\mathcal{N} = (A,\mathcal{R})$ reći da je *jedno-modalitetni krisp relacijski sistem*. Kada je potrebno simbolički predstaviti naka svojstva elemenata datog univerzuma razmatranja, *jedno-modalitetni fazi relacijski sistem* se može posmatrati kao uređena trojka $\mathcal{N} = (A,\mathcal{R},\mathcal{P})$, gde je $\mathcal{P} = \{p_j\}_{j\in J}$ proizvoljna familija fazi podskupova skupa A.

Već smo naglasili da ćemo ovde razmatrati jedno-modalitetne fazi socijalne mreže kao interpretaciju fazi relacijskih sistema. Fazi socijalne mreže su dobile zasluženu pažnju, jer mogu da predstave i veze između učesnika i stepen interakcije među njima. Relacione veze između učesnika u jedno-modalitetnoj fazi mreži su od primarne važnosti, dok su atributi učesnika sekundarni. Dakle, moguće je proučavati relacije među učesnicima i bez razmatranja njihovih atributa, te se fazi relacijski sistem $\mathcal{N} = (A,\{R_i\}_{i\in I})$ može smatrati *jedno-modalitetnom fazi socijalnom mrežom* ili, kraće, *jedno-modalitetnom fazi mrežom* bez atributa. U slučaju kada $\mathcal{N}$ interpretiramo kao jedno-modalitetnu fazi mrežu, podrazumevaćemo da je skup A konačan, neprazan skup učesnika u datoj mreži, dok je $\{R_i\}_{i\in I}$ neprazna familija fazi relacija na skupu A. Ako se posmatraju i atributi učesnika onda je *jedno-modalitetna fazi socijalna mreža* fazi relacijski sistem $\mathcal{N} = (A,\{R_i\}_{i\in I},\{p_j\}_{j\in J})$. Stepen pripadnosti nekog učesnika fazi skupu p_j se može shvatiti kao stepen sa kojim ovaj učesnik poseduje atribute koji su povezani sa p_j, za $j \in J$.

Za dve fazi mreže $\mathcal{N} = (A,\{R_i\}_{i\in I},\{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A',\{R'_i\}_{i'nI},\{p'_j\}_{j\in J})$ kažemo da su *izomorfne* ako postoji bijektivna funkcija $\phi : A \to A'$ za koju važi $R_i(a,b) = R'_i(\phi(a),\phi(b))$, za svako $a,b \in A$ i $i \in I$, i $p_j(a) = p'_j(\phi(a))$, za svako $a \in A$ i $j \in J$.

Neka je $\mathcal{N} = (A,\{R_i\}_{i\in I},\{p_j\}_{j\in J})$ fazi mreža, $\alpha \in L^{A\times A}$ fazi ekvivalencija, i neka je, A/α odgovarajući faktor skup. Za svako $i \in I$ i svako $j \in J$ definišemo fazi relaciju $\bar{R}_i \in L^{(A/\alpha)\times(A/\alpha)}$ i fazi skup $\bar{p}_j \in L^{A/\alpha}$ na sledeći način:

(i) $\bar{R}_i(\alpha_a,\alpha_b) = (\alpha \circ R_i \circ \alpha)(a,b) = \alpha_a \circ R_i \circ \alpha_b$, za sve $a,b \in A$,
(ii) $\bar{p}_j(\alpha_a) = (\alpha \circ p_j)(a) = \alpha_a \circ p_j$, za svaki $a \in A$.

Jasno je da su svi $\bar{R}_i$ i $\bar{p}_j$ dobro definisani u smislu da ne zavise od izbora predstavnika klasa relacije α, pa je $\mathcal{N}/\alpha = (A/\alpha, \{\bar{R}_i\}_{i\in I}, \{\bar{p}_j\}_{j\in J})$ takođe fazi mreža koja se naziva *količnik* (ili *faktor*) *fazi mreža* od $\mathcal{N}$ u odnosu na α. Važno je napomenuti da je faktor fazi mreža u odnosu na α takođe poznata pod nazivom *blokmodel* ili *blokmodel slika* od $\mathcal{N}$ koja odgovara α (na primer [2, 37, 40, 81]).

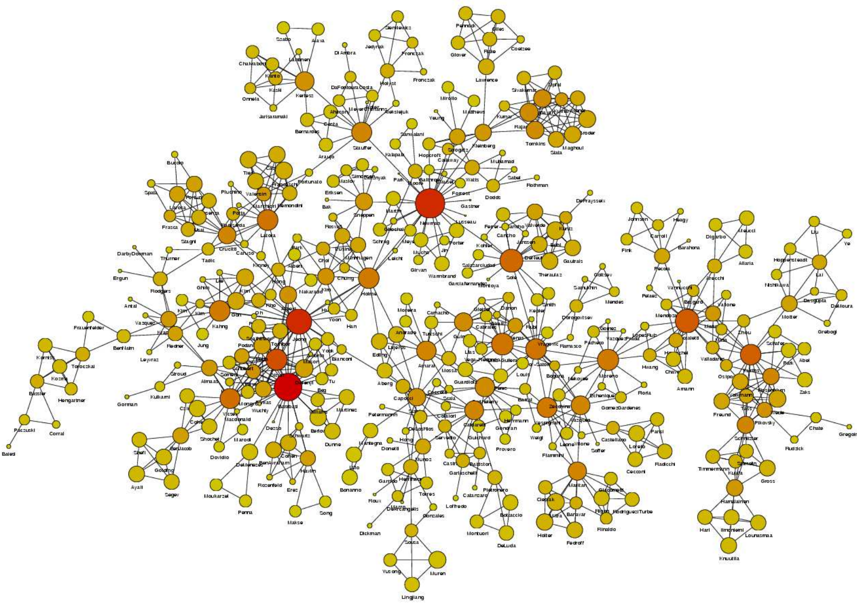
Jedno-modalitetne mreže izučavane su u brojnim radovima ne samo u okviru analize socijalnih mreža, već i u nekim drugim srodnim oblastima u okviru informacionih nauka, fizike, biologije itd.

Primer 2.1.1. (Primeri jedno-modalitetnih mreža) Navodimo nekoliko konkretnih primera više-modalitetnih mreža.

(a) Mreža saradnje među naučnicima koji proučavaju mreže [86, 87, 88]: Razni tipovi socijalnih mreža vezani za naučne publikacije i njihove autore izučavani u brojnim radovima. Razlog za prilično veliko interesovanje istraživača za ovakve mreže je verovatno postojanje velikog broja baza sa podacima koji se tiču naučnih publikacija, što istraživačima značajno olakšava dolazak do podataka koje bi analizirali.

Najintenzivnije su izučavane takozvane *kolaboracione mreže* (*collaboration networks*) ili *koautorske mreže* (*coautorship networks*). One su izučavane kao jedno-modalitetne mreže istraživača (autora) povezanih koautorstvom pri publikovanju naučnih publikacija.

Na slici 2.1 predstavljena je mreža koautorstva naučnika koji se bave teorijom i eksperimentima u oblasti mreža, koju je sačinio M. Nevman in [88] i mreža je sastavljena od bibliografija dva pregledna rada [86, 87], sa nekoliko dodatnih referenci. Predstavjena je verzija koja sadrži sve komponente mreže, za ukupno 1589 naučnika.

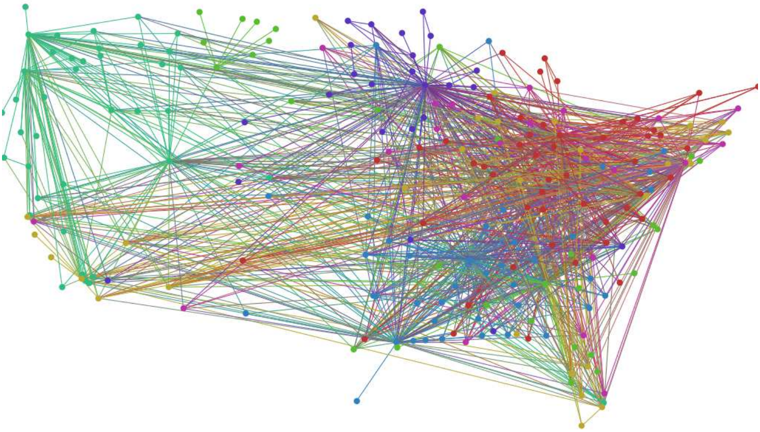


Slika 2.1 Mreža saradnje među naučnicima koji proučavaju mreže

(b) Svetska internet mreže:

Slika 2.2 Vizuelizacija svetske internet mreže

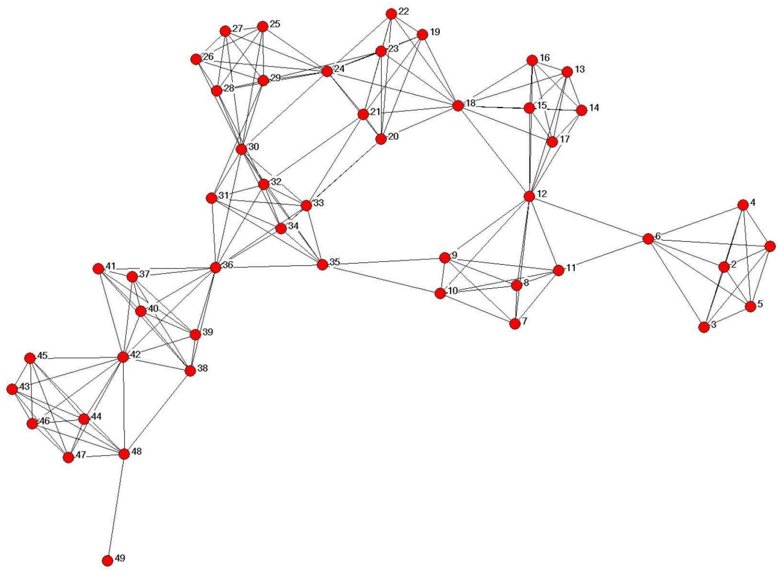
(c) Mreža aerodroma u US [18]: Ovde je analizirana mreža letova u Sjedinjenim Američikim Državama. To je mreža u kojoj svaki čvor predstavlja jedan aerodrom i svaka grana predstavlja let između dva aerodroma. Cilj ove analize bio je da se utvrdi koji su aerodromi najvitalniji, pri čemu su se koristili podaci iz 2010. god. i ova statistika je omogućila da se identifikuju najznačajniji aerodromi u US i da se ispita njihova uloga u postojećoj strukturi mreže aerodroma u US. Grane sadrže atribute koji uključuju plazni aerodrom, odredište leta, broj putnika i fizičku udaljenost između polaznog i dolaznog aerodroma 2.3.



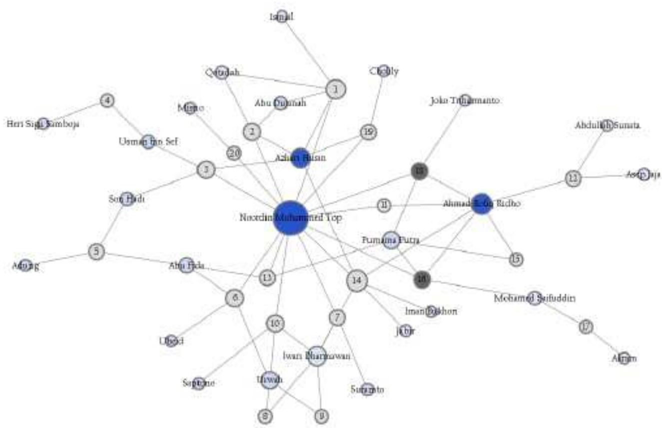
Slika 2.3 Mreža aerodroma u US

(d) Simulacija mreže terorističke organizacije Al Kaide [113]: Al Kaida se pri organizaciji operacije rukovodi pravilom da ćelija pripreme napada treba da bude mala, ne veća od šest članova. Pripadnici ćelije žive zajedno u sigurnoj kući, sami sprovode izviđačke misije i misije snabdevanja, pri čemu održavaju malo ili nimalo veze sa zajednicom. Samo rukovodilac ćelije poseduje informacije o kontaktima i kretanjima unutar šire organizacije, čime se smanjuje rizik da neko (od mlađih i neiskusnih) operativaca bude uhvaćen. Simulacija ovakve strukture mreže predstavljena je na 2.4. U ovoj mreži, dve odvojene grupe operativaca pripremaju dva odvojena napada: grupom sa desne strane rukovodi Agent 6, dok većom grupom levo rukovodi Agent 36.

(d) Mreža Nurdin terorističke mreže: Dok 2.4 predstavlja model mreže Al Kaide, mreža 2.5 predstavlja originalni primer terorističke mreže. Tamniji čvorovi ukazuju na veličinu grupacija u mreži, dok veličina cvora ukazuje na njegov značaj.



Slika 2.4 Simulacija mreže terorističke organizacije Al Kaide



Slika 2.5 Mreža Nurdin terorističke mreže

2.2. Jedno-modalitetni sistemi fazi relacijskih jednačina i nejednačina

U ovom odeljku analiziraćemo sisteme fazi relacijskih jednačina i nejednačina koji su određeni jedno-modalitetnim fazi relacijskim sistemima. Takve sisteme fazi relacijskih jednačina i nejednačina nazvaćemo *jedno-modalitetnim sistemima jednačina* i *jedno-modalitetnim sistemima nejednačina*, redom.

Neka je dat jedno-modalitetni fazi relacijski sistem $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I})$. Posmatraćemo sledeće jedno-modalitetne sisteme fazi relacijskih jednačina i nejednačina:

$$\alpha \circ R_i = R_i \circ \alpha, \qquad i \in I, \tag{2.1}$$

$$\alpha \circ R_i \leqslant R_i \circ \alpha, \qquad i \in I, \tag{2.2}$$

$$\alpha \circ R_i \geqslant R_i \circ \alpha, \qquad i \in I, \tag{2.3}$$

gde je α promenljiva koja uzima vrednost u $L^{A\times A}$. Jasno je da je sistem jednačina (2.1) ekvivalentan konjunkciji sistema nejednačina (2.2) i (2.3). Ako su relacije ϱ i θ rešenja nekog od sistema (2.1), (2.2) i (2.3) i $\varrho \leqslant \theta$, onda kažemo da je rešenje ϱ *sadržano* u rešenju θ.

U slučaju kada je sistem $\mathcal{N}$ interpretiran kao jedno-modalitetna fazi mreža, za fazi relaciju ϱ, koja je rešenje sistema (2.1), odnosno za koju važi

$$\varrho \circ R_i = R_i \circ \varrho,$$

za svaki $i \in I$, kažemo da je *regularna fazi relacija* u odnosu na sistem $\mathcal{N}$, za fazi relaciju koja je rešenje sistema (2.2) kažemo da je *desno regularna fazi relacija* u odnosu na $\mathcal{N}$, a za fazi relaciju koja je rešenje sistema (2.3) kažemo da je *levo regularna fazi relacija* u odnosu na sistem $\mathcal{N}$. Ukoliko ove fazi relacije jesu fazi kvazi-uređenja, odnosno fazi ekvivalencije, onda govorimo o *regularnom* (*desno regularnom, levo regularnom*) *fazi kvazi-uređenju*, odnosno o *regularnoj* (*desno regularnoj, levo regularnoj*) *fazi ekvivalenciji.*

Teorema 2.2.1. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija. Skupovi svih rešenja sistema (2.1), (2.2) i (2.3) čine kompletne mreže, pa stoga postoje najveća rešenja tih sistema sadržana u ϱ_0.*

Ako je ϱ_0 fazi kvazi-uređenje, tada su ta najveća rešenja, takođe, fazi kvazi-uređenja.

Dokaz: Dokazaćemo tvrđenje koje se odnosi na sistem (2.1). Tvrđenja koja se odnose na sisteme (2.2) i (2.3) dokazuju se na potpuno isti način.

Očigledno je da sistem (2.1) ima bar jedno rešenje i to je prazna fazi relacija na A. Neka je $\{\theta_j\}_{j\in J}$ familija rešenja sistema (2.1) sadržana u ϱ_0, i neka je θ unija (supremum) ove familije, tj.

$$\theta = \bigvee_{j\in J} \theta_j$$

u kompletnoj mreži $L^{A\times A}$. Tada, za proizvoljan $i \in I$ imamo da je

$$\begin{aligned}\theta \circ R_i &= \Big(\bigvee_{j\in J} \theta_j\Big) \circ R_i = \bigvee_{j\in J} \big(\theta_j \circ R_i\big) \\ &= \bigvee_{j\in J} \big(R_i \circ \theta_j\big) = R_i \circ \Big(\bigvee_{j\in J} \theta_j\Big) = R_i \circ \theta,\end{aligned}$$

što znači da θ takođe rešenje sistema (2.1). Prema tome, skup rešenja sistema (2.1) je zatvoren za proizvoljne supremume, i očigledno sadrži najmanji element kompletne mreže $(L^{A\times A}, \leqslant)$ (prazna relacija), te zaključujemo da je taj skup i sam kompletna mreža, kao i da postoji najveće rešenje ϱ sistema (2.1) sadržano u ϱ_0.

Neka je ϱ_0 fazi kvazi-uređenje. Zbog refleksivnosti fazi relacije imamo da je $\Delta \leqslant \varrho_0$, gde je sa Δ označena identička relacija na A, pa je Δ rešenje sistema (2.1) sadržano u ϱ_0. Ako je ϱ najveće rešenje ovog sistema, to je $\Delta \leqslant \varrho$, što znači da je ϱ refleksivna fazi relacija.

Osim toga, za proizvoljno $i \in I$ imamo da je

$$\begin{aligned}(\varrho \circ \varrho) \circ R_i &= \varrho \circ (\varrho \circ R_i) = \varrho \circ (R_i \circ \varrho) \\ &= (\varrho \circ R_i) \circ \varrho = (R_i \circ \varrho) \circ \varrho = R_i \circ (\varrho \circ \varrho),\end{aligned}$$

čime smo dobili da je $\varrho \circ \varrho$ rešenje sistema (2.1). To rešenje je sadržano u ϱ_0, jer zbog tranzitivnosti fazi relacije ϱ_0 sledi da je

$$\varrho \circ \varrho \leqslant \varrho_0 \circ \varrho_0 \leqslant \varrho_0.$$

Koristeći opet činjenicu da je ϱ najveće rešenje sistema (2.1) sadržano u ϱ_0, dobijamo da je $\varrho \circ \varrho \leqslant \varrho$, što znači da je ϱ tranzitivna fazi relacija.

Prema tome, dokazali smo da je ϱ fazi kvazi-uređenje, čime je dokaz teoreme završen. □ □

U nastavku, za datu familiju $\mathcal{R}$ fazi relacija, sa $\mathcal{L}(\mathcal{R})$ ćemo označavati podalgebru od $\mathcal{L}$ generisanu svim vrednostima koje uzimaju fazi relacije iz $\mathcal{R}$.

Sledeća teorema daje postupak za izračunavanje najvećeg rešenja sistema (2.1) (najveće regularne fazi relacije) sadržanog u datoj fazi relaciji.

Teorema 2.2.2. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija, i neka je $\{\varrho_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ opadajući niz fazi relacija iz $L^{A\times A}$, definisan induktivno na sledeći način:*

$$\varrho_1 = \varrho_0, \tag{2.4}$$

$$\varrho_{r+1} = \varrho_r \wedge \bigwedge_{i\in I} \Big([(R_i \circ \varrho_r)/R_i] \wedge [R_i \backslash (\varrho_r \circ R_i)] \Big) \tag{2.5}$$

za svako $r \in \mathbb{N}$. Tada važi:

(a) *ako postoji $s \in \mathbb{N}$ takvo da važi*

$$\varrho_s = \varrho_{s+1},$$

tada je ϱ_s najveće rešenje sistema (2.1) sadržano u ϱ_0;

(b) *ako je A konačan skup i podalgebra $\mathcal{L}(\mathcal{R} \cup \{\varrho_0\})$ zadovoljava DCC, onda je niz $\{\varrho_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan i postoji $s \in \mathbb{N}$ takvo da važi $\varrho_s = \varrho_{s+1}$.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je $\varrho_s = \varrho_{s+1}$, za neko $s \in \mathbb{N}$. Tada za $i \in I$, na osnovu (2.5) dobijamo da je

$$\varrho_s = \varrho_{s+1} \leqslant (R_i \circ \varrho_s)/R_i \qquad \text{i} \qquad \varrho_s = \varrho_{s+1} \leqslant R_i\backslash(\varrho_s \circ R_i), \tag{2.6}$$

i na osnovu svojstva adjunkcije dobijamo da je (2.6) ekvivalentno sa

$$\varrho_s \circ R_i \leqslant R_i \circ \varrho_s \qquad \text{i} \qquad R_i \circ \varrho_s \leqslant \varrho_s \circ R_i. \tag{2.7}$$

Prema tome, dobili smo da je

$$\varrho_s \circ R_i = R_i \circ \varrho_s,$$

za sve $i \in I$, što znači da je ϱ_s rešenje sistema (2.1). Očigledno je da je ovo rešenje sadržano u ϱ_0.

Uzmimo da je ϱ proizvoljno rešenje sistema (2.1) sadržano u $\varrho_0 = \varrho_1$. Pretpostavimo da je $\varrho \leqslant \varrho_r$, za neko $r \in \mathbb{N}$. Za dato $i \in I$ imamo da je

$$\varrho \circ R_i \leqslant R_i \circ \varrho \leqslant R_i \circ \varrho_r,$$

što povlači

$$\varrho \leqslant (R_i \circ \varrho_r)/R_i,$$

i odatle dobijamo da je

$$\varrho \leqslant \bigwedge_{i\in I} \Big((R_i \circ \varrho_r)/R_i \Big). \tag{2.8}$$

Na isti način dokazujemo da je

$$\varrho \leqslant \bigwedge_{i\in I} \Big(R_i\backslash(\varrho_r \circ R_i) \Big), \qquad \text{za neko} \qquad i \in I. \tag{2.9}$$

Dakle,

$$\varrho \leqslant \varrho_r \wedge \bigwedge_{i\in I} \Big([(R_i \circ \varrho_r)/R_i] \wedge [R_i\backslash(\varrho_r \circ R_i)] \Big) = \varrho_{r+1}. \tag{2.10}$$

Kako važi (2.10), to zaključujemo da je $\varrho \leqslant \varrho_{r+1}$, i prema tome, matematičkom indukcijom zaključujemo da je $\varrho \leqslant \varrho_r$, za svako $r \in \mathbb{N}$. Odavde dalje sledi da je $\varrho \leqslant \varrho_s$, što znači da je ϱ_s najveće rešenje sistema (2.1) sadržano u ϱ_0.

(b) Neka je A konačan skup i podalgebra $\mathcal{L}(\mathcal{R} \cup \{\varrho_0\})$ zadovoljava DCC.

Za sve parove $(a,b) \in A \times A$, imamo da je $\{\varrho_r(a,b)\}_{r\in\mathbb{N}}$ opadajući niz u $\mathcal{L}(\mathcal{R} \cup \{\varrho_0\})$. Na osnovu pretpostavke, ovaj niz se stabilizuje, pa zaključujemo da postoji $s \in \mathbb{N}$ takvo da se niz stabilizuje nakon s koraka, što znači da je $\varrho_s = \varrho_{s+1}$.

Ovime je dokaz teoreme završen. □

Teorema 2.2.3. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija, i neka je $\{\varrho_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ opadajući niz fazi relacija iz $L^{A\times A}$, definisan induktivno na sledeći način:*

$$\varrho_1 = \varrho_0, \tag{2.11}$$

$$\varrho_{r+1} = \varrho_r \wedge \bigwedge_{i\in I}\Big((R_i \circ \varrho_r)/R_i\Big) \tag{2.12}$$

za svako $r \in \mathbb{N}$. Tada važi:

(a) *ako postoji $s \in \mathbb{N}$ takvo da važi*

$$\varrho_s = \varrho_{s+1},$$

tada je ϱ_s najveće rešenje sistema (2.2) sadržano u ϱ_0;

(b) *ako je A konačan skup i podalgebra $\mathcal{L}(\mathcal{R} \cup \{\varrho_0\})$ zadovoljava DCC, onda je niz $\{\varrho_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan i postoji $s \in \mathbb{N}$ takvo da važi $\varrho_s = \varrho_{s+1}$.*

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu Teoreme 2.2.2. i biće izostavljen. □

Teorema 2.2.4. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija, i neka je $\{\varrho_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ opadajući niz fazi relacija iz $L^{A\times A}$, definisan induktivno na sledeći način:*

$$\varrho_1 = \varrho_0, \tag{2.13}$$

$$\varrho_{r+1} = \varrho_r \wedge \bigwedge_{i\in I}\Big(R_i\backslash(\varrho_r \circ R_i)\Big) \tag{2.14}$$

za svako $r \in \mathbb{N}$. Tada važi:

(a) *ako postoji $s \in \mathbb{N}$ takvo da važi*

$$\varrho_s = \varrho_{s+1},$$

tada je ϱ_s najveće rešenje sistema (2.3) sadržano u ϱ_0;

(b) *ako je A konačan skup i podalgebra $\mathcal{L}(\mathcal{R} \cup \{\varrho_0\})$ zadovoljava DCC, onda je niz $\{\varrho_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan i postoji $s \in \mathbb{N}$ takvo da važi $\varrho_s = \varrho_{s+1}$.*

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu Teoreme 2.2.2. i biće izostavljen. □

Kao što smo ranije videli, najveća rešenja sistema (2.1), (2.2) i (2.3) sadržana u datim fazi kvazi-uređenjima i sama predstavljaju fazi kvazi-uređenja. Kako se u mnogim situacijama javlja potreba za rešenjima ovih sistema koja se sastoje od fazi ekvivalencija, to se prirodno se nameće pitanje kako izračunati najveće fazi ekvivalencije koje su rešenja sistema (2.1), (2.2) i (2.3), redom, i sadržane su u datoj fazi relaciji ϱ_0. U nastavku ćemo videti da je potrebno da polazna fazi relacija ϱ_0 bude fazi ekvivalencija. Međutim, to nije dovoljno. Da bi postigli to što želimo neophodno je izvršiti i izvesne modifikacije sistema (2.1), (2.2) i (2.3). Naime, razmatraćemo i sledeće sisteme fazi relacijskih jednačina i nejednačina:

$$\alpha \circ R_i = R_i \circ \alpha, \quad \alpha^{-1} \circ R_i = R_i \circ \alpha^{-1}, \qquad i \in I, \tag{2.15}$$

$$\alpha \circ R_i \leqslant R_i \circ \alpha, \quad \alpha^{-1} \circ R_i \leqslant R_i \circ \alpha^{-1}, \qquad i \in I, \tag{2.16}$$

$$\alpha \circ R_i \geqslant R_i \circ \alpha, \quad \alpha^{-1} \circ R_i \geqslant R_i \circ \alpha^{-1}, \qquad i \in I, \tag{2.17}$$

gde je α promenljiva koja uzima vrednost u $L^{A\times A}$.

Teorema 2.2.5. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija. Skupovi svih rešenja sistema (2.15), (2.16) i (2.17) čine kompletne mreže, pa postoje najveća rešenja tih sistema sadržana u ϱ_0.*

Ako je ϱ_0 fazi ekvivalencija, tada su ta najveća rešenja takođe fazi ekvivalencije.

Dokaz: Na isti način kao u dokazu Teoreme 2.2.1. dobijamo da su skupovi rešenja sistema (2.15), (2.16) i (2.17) zatvoreni za proizvoljne supremume i sadrže najmanji element kompletne mreže $(L^{A\times A}, \leqslant)$, pa su ti skupovi i sami kompletne mreže, odakle sledi da postoje najveća rešenja sistema (2.15), (2.16) i (2.17) sadržana u ϱ_0.

Neka je ϱ_0 fazi ekvivalencija, i neka je ϱ najveće rešenje bilo kog od sistema (2.15), (2.16) i (2.17). Na isti način kao u dokazu Teoreme 2.2.1. dobijamo da je ϱ fazi kvazi-uređenje.

Ako je ϱ rešenje bilo kog od sistema (2.15), (2.16) i (2.17), onda je i ϱ^{-1} rešenje tog istog sistema, i ako je pri tome ϱ najveće rešenje, onda dobijamo da je $\varrho^{-1} \leqslant \varrho$, što dalje povlači da je $\varrho = \varrho^{-1}$. To znači da je ϱ simetrična fazi relacije, odakle sledi da su ϱ fazi ekvivalencija. □

Teorema 2.2.6. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija, i neka je $\{\varrho_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ opadajući niz fazi relacija iz $L^{A\times A}$, definisan induktivno na sledeći način:*

$$\varrho_1 = \varrho_0, \tag{2.18}$$

$$\varrho_{r+1} = \varrho_r \wedge \bigwedge_{i\in I}\Big([(R_i \circ \varrho_r)/R_i] \wedge [(R_i \circ \varrho_r^{-1})/R_i]^{-1} \wedge \wedge [R_i\backslash(\varrho_r \circ R_i)] \wedge [R_i\backslash(\varrho_r^{-1} \circ R_i)]^{-1}\Big), \tag{2.19}$$

za svako $r \in \mathbb{N}$. Tada važi:

(a) *ako postoji $s \in \mathbb{N}$ takvo da važi*

$$\varrho_s = \varrho_{s+1},$$

tada je ϱ_s najveće rešenje sistema (2.15) sadržano u ϱ_0;

(b) *ako je A konačan skup i podalgebra $\mathcal{L}(\mathcal{R} \cup \{\varrho_0\})$ zadovoljava DCC, onda je niz $\{\varrho_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan i postoji $s \in \mathbb{N}$ takvo da važi $\varrho_s = \varrho_{s+1}$.*

Dokaz: (a) Uzmimo da je $\varrho_s = \varrho_{s+1}$ za neko $s \in \mathbb{N}$. Tada za $i \in I$, kao u dokazu Teoreme 2.2.2. dobijamo da je

$$\varrho_s \circ R_i = R_i \circ \varrho_s. \tag{2.20}$$

Osim toga, na osnovu (2.19) imamo da je

$$\varrho_s = \varrho_{s+1} \leqslant [(R_i \circ \varrho_s^{-1})/R_i]^{-1} \quad \text{i} \quad \varrho_s = \varrho_{s+1} \leqslant [R_i \backslash (\varrho_s^{-1} \circ R_i)]^{-1},$$

što je ekvivalentno sa

$$(\varrho_s)^{-1} \leqslant (R_i \circ \varrho_s^{-1})/R_i \quad \text{i} \quad \varrho_s^{-1} \leqslant R_i \backslash (\varrho_s^{-1} \circ R_i).$$

Na osnovu svojstva adjunkcije, to je ekvivalentno sa

$$\varrho_s^{-1} \circ R_i \leqslant R_i \circ \varrho_s^{-1} \quad \text{i} \quad R_i \circ \varrho_s^{-1} \leqslant \varrho_s^{-1} \circ R_i,$$

čime smo dobili da je

$$\varrho_s^{-1} \circ R_i = R_i \circ \varrho_s^{-1}. \tag{2.21}$$

Dakle, dokazali smo da (2.20) i (2.21) važi za proizvoljno $i \in I$, što znači da je ϱ_s rešenje sistema (2.15), i očigledno je da je to rešenje sadržano u ϱ_0.

Uzmimo da je ϱ proizvoljno rešenje sistema (2.15) sadržano u $\varrho_0 = \varrho_1$. Pretpostavimo da je $\varrho \leqslant \varrho_r$, za neko $r \in \mathbb{N}$. Tada, za $i \in I$ imamo

$$\varrho \circ R_i \leqslant R_i \circ \varrho \leqslant R_i \circ \varrho_r \quad \text{i} \quad \varrho^{-1} \circ R_i \leqslant R_i \circ \varrho^{-1} \leqslant R_i \circ \varrho_r^{-1},$$

što povlači

$$\varrho \leqslant (R_i \circ \varrho_r)/R_i \quad \text{i} \quad \varrho^{-1} \leqslant (R_i \circ \varrho_r^{-1})/R_i,$$

odnosno

$$\varrho \leqslant (R_i \circ \varrho_r)/R_i \wedge [(R_i \circ \varrho_r^{-1})/R_i]^{-1}.$$

Prema tome, dobili smo da je

$$\varrho \leqslant \bigwedge_{i \in I} \Big([(R_i \circ \varrho_r)/R_i] \wedge [(R_i \circ \varrho_r^{-1})/R_i]^{-1} \Big). \tag{2.22}$$

Na isti način dokazujemo da, za svako $i \in I$ važi

$$\varrho \leqslant \bigwedge_{i \in I} \Big([R_i \backslash (\varrho_r \circ R_i)] \wedge ([R_i \backslash (\varrho_r^{-1} \circ R_i)])^{-1} \Big). \tag{2.23}$$

Dakle,

$$\varrho \leqslant \varrho_r \wedge \bigwedge_{i\in I}\Big([(R_i \circ \varrho_r)/R_i] \wedge [(R_i \circ \varrho_r^{-1})/R_i]^{-1} \wedge \\ \wedge [R_i \backslash (\varrho_r \circ R_i)] \wedge [R_i \backslash (\varrho_r^{-1} \circ R_i)]^{-1}\Big) = \varrho_{r+1}. \tag{2.24}$$

Kako važi nejednakost (2.24) zaključujemo da je $\varrho \leqslant \varrho_{r+1}$, odakle matematičkom indukcijom dobijamo da je $\varrho \leqslant \varrho_r$, za svako $r \in \mathbb{N}$. Odavde dalje sledi da je $\varrho \leqslant \varrho_s$, i prema tome, ϱ_s je najveće rešenje sistema (2.15) sadržano u ϱ_0.

(b) To dokazujemo na isti način kao odgovarajući deo Teoreme 2.2.2. □

Teorema 2.2.7. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija, i neka je $\{\varrho_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ opadajući niz fazi relacija iz $L^{A\times A}$, definisan induktivno na sledeći način:*

$$\varrho_1 = \varrho_0, \tag{2.25}$$

$$\varrho_{r+1} = \varrho_r \wedge \bigwedge_{i\in I}\Big([(R_i \circ \varrho_r)/R_i] \wedge [(R_i \circ \varrho_r^{-1})/R_i]^{-1}\Big) \tag{2.26}$$

za svako $r \in \mathbb{N}$. Tada važi:

(a) *ako postoji $s \in \mathbb{N}$ tako da važi*

$$\varrho_s = \varrho_{s+1},$$

tada je ϱ_s najveće rešenje sistema (2.16) sadržano u ϱ_0;

(b) *ako je A konačan skupo i podalgebra $\mathcal{L}(\mathcal{R} \cup \{\varrho_0\})$ zadovoljava DCC, onda je niz $\{\varrho_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan i postoji $s \in \mathbb{N}$ takvo da važi $\varrho_s = \varrho_{s+1}$.*

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu Teoreme 2.2.6. i biće izostavljen. □

Teorema 2.2.8. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija, i neka je $\{\varrho_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ opadajući niz fazi relacija iz $L^{A\times A}$, definisan induktivno na sledeći način:*

$$\varrho_1 = \varrho_0, \tag{2.27}$$

$$\varrho_{r+1} = \varrho_r \wedge \bigwedge_{i\in I}\Big([R_i \backslash (\varrho_r \circ R_i)] \wedge [R_i \backslash (\varrho_r^{-1} \circ R_i)]^{-1}\Big) \tag{2.28}$$

za svako $r \in \mathbb{N}$. Tada važi:

(a) *ako postoji $s \in \mathbb{N}$ takvo da važi*

$$\varrho_s = \varrho_{s+1},$$

onda je ϱ_s najveće rešenje sistema (2.17) sadržano u ϱ_0;

(b) *ako je A konačni skupovi i podalgebra $\mathcal{L}(\mathcal{R} \cup \{\varrho_0\})$ zadovoljava DCC, onda je niz $\{\varrho_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan i postoji $s \in \mathbb{N}$ takvo da važi $\varrho_s = \varrho_{s+1}$.*

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu Teoreme 2.2.6. i biće izostavljen. □

U slučaju jedno-modalitetnog fazi relacijskog sistema $\mathcal{N} = (A, \mathcal{R}, \mathcal{P})$ u kome je definisana i familija $\mathcal{P} = \{p_j\}_{j\in J}$ fazi podskupova skupa A, definišu se najveća rešenja napred navedenih sistema fazi relacijskih nejednačina i jednačina sadržana u relaciji

$$\varrho_0 \wedge \bigwedge_{j\in J} \big((p_j/p_j) \wedge (p_j \backslash p_j)\big) \in L^{A\times A}.$$

2.3. Neke instance opštih jedno-modalitetnih sistema

U prethodnom odeljku bavili smo se sistemima fazi relacijskih jednačina i nejednačina koje možemo nazvati opštim jedno-modalitetnim sistemima. U ovom odeljku bavićemo se nekim "jednostavnijim" sistemima, od kojih svaki predstavlja instancu nekog opšteg jedno-modalitetnog sistema, u smislu da svako rešenje tog novog sistema mora biti rešenje i odgovarajućeg opšteg sistema. Naime, razmatraćemo sledeće sisteme:

$$\alpha \circ R_i \leqslant R_i, \qquad i \in I, \tag{2.29}$$
$$\alpha \circ R_i \leqslant R_i, \quad R_i \leqslant R_i \circ \alpha, \qquad i \in I, \tag{2.30}$$
$$R_i \circ \alpha \leqslant R_i, \qquad i \in I, \tag{2.31}$$
$$R_i \circ \alpha \leqslant R_i, \quad R_i \leqslant \alpha \circ R_i, \qquad i \in I, \tag{2.32}$$
$$\alpha \circ R_i \leqslant R_i, \quad R_i \circ \alpha \leqslant R_i \qquad i \in I, \tag{2.33}$$
$$\alpha \circ R_i = R_i, \quad R_i \circ \alpha = R_i \qquad i \in I, \tag{2.34}$$

gde je α promenljiva koja uzima vrednost u $L^{A\times A}$.

Teorema 2.3.1. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija. Tada važi sledeće:*

(a) *Skupovi svih rešenja sistema (2.29), (2.31), (2.33) i (2.34) čine kompletne mreže, pa stoga postoje najveća rešenja tih sistema sadržana u ϱ_0.*
(b) *Ako je ϱ_0 fazi kvazi-uređenje, tada su sva ta najveća rešenja, takođe, fazi kvazi-uređenja.*
(c) *Najveće rešenje sistema (2.29) sadržano u ϱ_0 je takođe i najveće rešenje sistema (2.30) sadržano u ϱ_0.*
(d) *Najveće rešenje sistema (2.31) sadržano u ϱ_0 je takođe i najveće rešenje sistema (2.32) sadržano u ϱ_0.*
(e) *Najveće rešenje sistema (2.33) sadržano u ϱ_0 je takođe i najveće rešenje sistema (2.34) sadržano u ϱ_0.*

Dokaz: (a) Zbog distributivnosti kompozicije u odnosu na proizvoljne unije fazi relacija imamo da su skupovi rešenja nejednačina

$$\alpha \circ R_i \leqslant R_i \quad \text{i} \quad R_i \circ \alpha \leqslant R_i$$

i jednačina

$$\alpha \circ R_i = R_i \quad \text{i} \quad R_i \circ \alpha = R_i$$

zatvoreni za sve supremume u kompletnoj mreži $L^{A\times A}$, odakle sledi da to važi i za skupove rešenja sistema (2.29), (2.31), (2.33) i (2.34). Kako skupovi rešenja tih sistema sadrže najmanji element kompletne mreže $L^{A\times A}$, to i oni sami čine kompletne mreže i postoje najveća rešenja tih sistema sadržana u ϱ_0.

(b) Neka je ϱ najveće rešenje bilo kog od sistema (2.29), (2.31), (2.33) i (2.34) sadržano u ϱ_0. Kao u dokazima Teorema 2.2.1. i 2.2.5., jednostavno dobijamo da su Δ i ϱ rešenja tog sistema sadržana u ϱ_0, odakle sledi da je $\Delta \leqslant \varrho$ i $\varrho \circ \varrho \leqslant \varrho$, što znači da je ϱ fazi kvazi-uređenje.

(c) Neka je ϱ najveće rešenje sistema (2.29) sadržano u ϱ_0. Tada je ϱ refleksivna fazi relacija, odakle sledi da je $R_i \leqslant R_i \circ \varrho$, za svako $i \in I$, što znači da je ϱ rešenje i sistema (2.30).

Ako je θ rešenje sistema (2.30) sadržano u ϱ_0, onda je θ i rešenje sistema (2.29), odakle sledi da je $\theta \leqslant \varrho$, čime smo dokazali da je ϱ najveće rešenje sistema (2.30) sadržano u ϱ_0.

(d) To se dokazuje na potpuno isti način kao i (c).

(e) Neka je ϱ najveće rešenje sistema (2.33) sadržano u relaciji ϱ_0. Na osnovu (c) i (d) imamo da je ϱ, takođe, rešenje sistema (2.30) i (2.32), pa je jasno da je i rešenje sistema (2.34).

Na isti način kao u dokazu tvrđenja (c) dobijamo da je ϱ najveće rešenje sistema (2.34) sadržano u ϱ_0. □

Teorema 2.3.2. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija i neka je $\varrho \in L^{A\times A}$ fazi relacija definisana sa*

$$\varrho = \varrho_0 \wedge \bigwedge_{i\in I} \Big((R_i/R_i) \wedge (R_i \backslash R_i) \Big). \tag{2.35}$$

Tada je ϱ najveće rešenje sistema (2.33) i (2.34) sadržano u ϱ_0.

Dokaz: Za $i \in I$, na osnovu (2.49) imamo da je $\varrho \leqslant R_i/R_i$, odakle sledi da je

$$\varrho \circ R_i \leqslant R_i. \tag{2.36}$$

Sa druge strane, na osnovu (2.49) dobijamo da je $\varrho \leqslant R_i \backslash R_i$, odnosno

$$R_i \circ \varrho \leqslant R_i. \tag{2.37}$$

Prema tome, za proizvoljno $i \in I$ važi (2.36) i (2.37), što znači da je ϱ rešenje sistema (2.33).

Dalje, neka je θ proizvoljno rešenje sistema (2.33) sadržano u ϱ_0. Na osnovu (2.33) dobijamo da je $\theta \circ R_i \leqslant R_i$, za svako $i \in I$, odakle na osnovu svojstva reziduacije sledi da je $\theta \leqslant R_i/R_i$. Prema tome, zaključujemo da je

$$\theta \leqslant \bigwedge_{i\in I}(R_i/R_i). \tag{2.38}$$

Prema (2.33) sledi da je $R_i \circ \theta \leqslant R_i$, odnosno, prema svojstvu reziduacije, $\theta \leqslant R_i \backslash R_i$. Odatle zaključujemo da važi

$$\theta \leqslant \bigwedge_{i\in I}(R_i\backslash R_i). \tag{2.39}$$

Sada na osnovu (2.38), (2.39) i pretpostavke da je $\theta \leqslant \varrho_0$, dobijamo da važi

$$\theta \leqslant \varrho_0 \wedge \bigwedge_{i\in I}\Big((R_i/R_i) \wedge (R_i\backslash R_i)\Big) = \varrho.$$

Time smo dokazali da je ϱ najveće rešenje sistema (2.33), a na osnovu Teoreme 2.3.1. i najveće rešenje sistema (2.34). □

Teorema 2.3.3. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija i neka je $\varrho \in L^{A\times A}$ fazi relacija definisana sa*

$$\varrho = \varrho_0 \wedge \bigwedge_{i\in I}(R_i/R_i). \tag{2.40}$$

Tada je ϱ najveće rešenje sistema (2.29) i (2.30) sadržano u ϱ_0.

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu Teoreme 2.49 i biće izostavljen. □

Teorema 2.3.4. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija i neka je $\varrho \in L^{A\times A}$ fazi relacija definisana sa*

$$\varrho = \varrho_0 \wedge \bigwedge_{i\in I}(R_i\backslash R_i). \tag{2.41}$$

Tada je ϱ najveće rešenje sistema (2.31) i (2.32) sadržano u ϱ_0.

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu Teoreme 2.49 i biće izostavljen. □

Razmatraćemo takođe i sledeće sisteme:

$$\alpha \circ R_i \leqslant R_i, \quad \alpha^{-1} \circ R_i \leqslant R_i, \quad i \in I, \tag{2.42}$$

$$\alpha \circ R_i \leqslant R_i, \quad \alpha^{-1} \circ R_i \leqslant R_i, \quad R_i \leqslant R_i \circ \alpha, \quad R_i \leqslant R_i \circ \alpha^{-1}, \quad i \in I, \tag{2.43}$$

$$R_i \circ \alpha \leqslant R_i, \quad R_i \circ \alpha^{-1} \leqslant R_i, \quad i \in I \tag{2.44}$$

$$R_i \circ \alpha \leqslant R_i, \quad R_i \circ \alpha^{-1} \leqslant R_i, \quad R_i \leqslant \alpha \circ R_i, \quad R_i \leqslant \alpha{-}1 \circ R_i, \quad i \in I, \tag{2.45}$$

$$\alpha \circ R_i \leqslant R_i, \quad \alpha^{-1} \circ R_i \leqslant R_i, \quad R_i \circ \alpha \leqslant R_i, \quad R_i \circ \alpha^{-1} \leqslant R_i \quad i \in I, \tag{2.46}$$

$$\alpha \circ R_i = R_i, \quad \alpha^{-1} \circ R_i = R_i, \quad R_i \circ \alpha = R_i, \quad R_i \circ \alpha_k^{-1} = R_i \quad i \in I, \tag{2.47}$$

gde je α promenljiva koja uzima vrednosti u $L^{A\times A}$.

Teorema 2.3.5. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija. Tada važi sledeće:*

(a) *Skupovi svih rešenja sistema (2.42), (2.44), (2.46) i (2.47) čine kompletne mreže, pa stoga postoje najveća rešenja tih sistema sadržana u ϱ_0.*
(b) *Ako je ϱ_0 fazi kvazi-uređenje, tada je najveće rešenje, takođe, fazi kvazi-uređenje.*
(c) *Najveće rešenje sistema (2.42) sadržano u ϱ_0 je takođe i najveće rešenje sistema (2.43) sadržano u ϱ_0.*
(d) *Najveće rešenje sistema (2.44) sadržano u ϱ_0 je takođe i najveće rešenje sistema (2.45) sadržano u ϱ_0.*
(e) *Najveće rešenje sistema (2.46) sadržano u ϱ_0 je takođe i najveće rešenje sistema (2.47) sadržano u ϱ_0.*

Teorema 2.3.6. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija, i neka je $\varrho \in L^{A\times A}$ fazi relacija definisana sa*

$$\varrho = \varrho_0 \wedge \bigwedge_{i\in I}\Big((R_i/\!/R_i) \wedge (R_i\backslash\!\backslash R_i)\Big). \tag{2.48}$$

Tada je ϱ najveće rešenje sistema (2.46) i (2.47) sadržano u ϱ_0.

Teorema 2.3.7. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija, i neka je $\varrho \in L^{A\times A}$ fazi relacija definisana sa*

$$\varrho = \varrho^0 \wedge \bigwedge_{i\in I}(R_i/\!/R_i). \tag{2.49}$$

Tada je ϱ najveće rešenje sistema (2.42) i (2.43) sadržano u ϱ_0.

Teorema 2.3.8. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija, i neka je $\varrho \in L^{A\times A}$ fazi relacija definisana sa*

$$\varrho = \varrho^0 \wedge \bigwedge_{i\in I}(R_i\backslash\!\backslash R_i). \tag{2.50}$$

Tada je ϱ najveće rešenje sistema (2.44) i (2.45) sadržano u ϱ_0.

2.4. Izračunavanje najvećih krisp rešenja jedno-modalitetnih sistema

Algoritmi koje smo dali u Odeljku 2.2. za izračunavanje najvećih rešenja jedno-modalitetnih sistema (2.1)–(2.3) i (2.15)–(2.17) sadržanih u datoj fazi relaciji, ne moraju se obavezno završiti u konačnom broju koraka. Zbog toga se prirodno nameće pitanje: Šta raditi u slučaju kada ovi algoritmi ne daju rezultate?

U ovom odeljku dajemo algoritme za izračunavanje najvećih krisp rešenja sistema (2.1)–(2.3) i (2.15)–(2.17) sadržanih u datoj fazi relaciji, koji se dobijaju modifikacijom algoritama iz Odeljka 2.2., tako da se svode na konstrukciju opadajućih nizova krisp relacija.

Najpre dajemo postupak za izračunavanje najvećih krisp rešenja jedno-modalitetnog sistema (2.1).

Teorema 2.4.1. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija, i neka je $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ opadajući niz krisp relacija iz $2^{A\times A}$, definisan induktivno na sledeći način:*

$$\xi_1 = \varrho_0^c, \tag{2.51}$$

$$\xi_{r+1} = \xi_r \cap \bigcap_{i\in I}\Big([(R_i \circ \xi_r) \nearrow R_i] \cap [R_i \nwarrow (\xi_r \circ R_i)]\Big), \tag{2.52}$$

za svako $r \in \mathbb{N}$.

Ako je A konačan skup, onda je $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan niz i postoji $s \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$\xi_s = \xi_{s+1}, \tag{2.53}$$

i u tom slučaju ξ_s je najveće krisp rešenje sistema (2.1) sadržano u ϱ_0. Osim toga, ako je ϱ_0 fazi kvazi-uređenje, onda je to najveće krisp rešenje kvazi-uređenje.

Dokaz: Prema pretpostavci, A je konačan skup, pa je jasno da je i $2^{A\times A}$ konačan skup. Odavde neposredno sledi da je i niz $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan, i kako je taj niz opadajući, na jednostavan način dobijamo da postoji $s \in \mathbb{N}$ tako da važi (2.53). Dalje, na isti način kao u dokazu Teoreme 2.2.2., korišćenjem Bulovih reziduala umesto običnih reziduala i svojstva reziduacije za Bulove reziduale, dobijamo da je ξ_s najveće krisp rešenje sistema (2.1) sadržano u ϱ_0.

Takođe, ako je ϱ_0 fazi kvazi-uređenje, onda na isti način kao u dokazu Teoreme 2.2.1. dobijamo da je ξ_s kvazi-uređenje. □

Narednih pet teorema, kojima se daju postupci za izračunavanje najvećih krisp rešenja sistema (2.2), (2.3) i (2.15)–(2.17) sadržanih u datoj fazi relaciji, dokazuje se na sličan način kao Teorema 2.4.1., odnosno odgovarajuće teoreme iz Odeljka 2.2. Stoga će njihovi dokazi biti izostavljeni, a formulacije teorema se navode potpunosti radi, jer će se konstrukcije nizova krisp relacija, koje se u njima daju, u daljem tekstu ove disertacije koristiti u kreiranju algoritama i programa za izračunavanje najvećih krisp rešenja sistema (2.2), (2.3) i (2.15)–(2.17).

Teorema 2.4.2. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija, i neka je $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ opadajući niz krisp relacija iz $2^{A\times A}$, definisan induktivno na sledeći način:*

$$\xi_1 = \varrho_0^c, \tag{2.54}$$

$$\xi_{r+1} = \xi_r \cap \bigcap_{i\in I}\Big((R_i \circ \xi_r) \nearrow R_i\Big), \tag{2.55}$$

za svako $r \in \mathbb{N}$.

Ako je A konačan skup, onda je $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan niz i postoji $s \in \mathbb{N}$ tako da važi $\xi_s = \xi_{s+1}$, i u tom slučaju ξ_s je najveće krisp rešenje sistema (2.2) sadržano u ϱ_0. Osim toga, ako je ϱ_0 fazi kvazi-uređenje, onda je to najveće krisp rešenje kvazi-uređenje.

Teorema 2.4.3. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija, i neka je $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ opadajući niz krisp relacija iz $2^{A\times A}$, definisan induktivno na sledeći način:*

$$\xi_1 = \varrho_0^c, \tag{2.56}$$

$$\xi_{r+1} = \xi_r \cap \bigcap_{i\in I}\Big(R_i \setminus (\xi_r \circ R_i)\Big), \tag{2.57}$$

za svako $r \in \mathbb{N}$.

Ako je A konačan skup, onda je $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan niz i postoji $s \in \mathbb{N}$ tako da važi $\xi_s = \xi_{s+1}$, i u tom slučaju ξ_s je najveće krisp rešenje sistema (2.3) sadržano u ϱ_0. Osim toga, ako je ϱ_0 fazi kvazi-uređenje, onda je to najveće krisp rešenje kvazi-uređenje.

Teorema 2.4.4. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija, i neka je $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ opadajući niz krisp relacija iz $2^{A\times A}$, definisan induktivno na sledeći način:*

$$\xi_1 = \varrho_0^c, \tag{2.58}$$

$$\begin{aligned}\xi_{r+1} = \xi_r \cap \bigcap_{i\in I}\Big[\Big([(R_i \circ \xi_r) \nearrow R_i] \cap [(R_i \circ \xi_r^{-1}) \nearrow R_i]^{-1}\Big) \cap \qquad (2.59)\\ \cap \Big([R_i \setminus (\xi_r \circ R_i)] \cap [R_i \setminus (\xi_r^{-1} \circ R_i)]^{-1}\Big)\Big],\end{aligned}$$

za svako $r \in \mathbb{N}$.

Ako je A konačan skup, onda je $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan niz i postoji $s \in \mathbb{N}$ tako da važi $\xi_s = \xi_{s+1}$, i u tom slučaju ξ_s je najveće krisp rešenje sistema (2.15) sadržano u ϱ_0. Osim toga, ako je ϱ_0 fazi kvazi-uređenje, onda je to najveće krisp rešenje kvazi-uređenje.

Teorema 2.4.5. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija, i neka je $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ opadajući niz krisp relacija iz $2^{A\times A}$, definisan induktivno na sledeći način:*

$$\xi_1 = \varrho_0^c, \tag{2.60}$$

$$\xi_{r+1} = \xi_r \cap \bigcap_{i\in I}\Big([(R_i \circ \xi_r) \nearrow R_i] \cap [(R_i \circ \xi_r^{-1}) \nearrow R_i]^{-1}\Big), \tag{2.61}$$

za svako $r \in \mathbb{N}$.

Ako je A konačan skup, onda je $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan niz i postoji $s \in \mathbb{N}$ tako da važi $\xi_s = \xi_{s+1}$, i u tom slučaju ξ_s je najveće krisp rešenje sistema (2.16) sadržano u ϱ_0. Osim toga, ako je ϱ_0 fazi kvazi-uređenje, onda je to najveće krisp rešenje kvazi-uređenje.

Teorema 2.4.6. *Neka je $\varrho_0 \in L^{A\times A}$ proizvoljna fazi relacija, i neka je $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ opadajući niz krisp relacija iz $2^{A\times A}$, definisan induktivno na sledeći način:*

$$\xi_1 = \varrho_0^c, \tag{2.62}$$

$$\xi_{r+1} = \xi_r \cap \bigcap_{i\in I}\Big([R_i \setminus (\xi_r \circ R_i)] \cap [R_i \setminus (\xi_r^{-1} \circ R_i)]^{-1}\Big), \tag{2.63}$$

za svako $r \in \mathbb{N}$.

Ako je A konačan skup, onda je $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan niz i postoji $s \in \mathbb{N}$ tako da važi $\xi_s = \xi_{s+1}$, i u tom slučaju ξ_s je najveće krisp rešenje sistema (2.17) sadržano u ϱ_0. Osim toga, ako je ϱ_0 fazi kvazi-uređenje, onda je to najveće krisp rešenje kvazi-uređenje.

2.5. Bisimulacije na jedno-modalitetnim fazi mrežama

Pojam bisimulacija je uveden od strane Milner-a [84] i Park-a [92] u oblasti računarskih nauka, preciznije u teoriji konkurentnosti. U približno isto vreme one su otkrivene u nekim oblastima matematike, na primer u modalnoj logici i teoriji skupova. Bisimulacije su našle široku primenu u modeliranju ekvivalencije između različitih sistema, kao i pri redukovanju broja stanja sistema, a danas se koriste u mnogim oblastima računarskih nauka. Nekoliko autora se bavilo bisimulacijama u kontekstu socijalnih mreža. Marx i Masuch [81] su definisali pojam forward bisimulacija između dve mreže i izjednačili su pojam regularne ekvivalencije sa onim što su oni nazivali ulaz-izlaz bisimulacijom. Međutim, oni su se uglavnom bavili bisimulacijma koje povezuju učesnike iste mreže i nisu dublje izučavali bisimulacije između različitih mreža. Forward bisimulacije između dve različite mreže su pomenute u radu [47], međutim ni ovde nisu detaljnije izučavane. Konačno, Brynielsson i ostali [16] su proučavali relacije koje mi nazivamo simulacijama, ali ponovo između učesnika jedne mreže, dok simulacije između različitih mreža nisu proučavali.

Ovde ćemo detljnije izučavati bisimulacije između dve različite jedno-modalitetne fazi socijalne mreže. Definisaćemo dva tipa simulacija i pet tipova bisimulacija, uključujući i regularne bisimulacije.

Neka su $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ fazi mreže i $\varphi \in L^{A\times A'}$ neprazna fazi relacija. Relacija φ se naziva *forward simulacija* između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$ ako zadovoljava sledeće nejednakosti

$$p_j \leqslant p'_j \circ \varphi^{-1}, \qquad \text{za svaki } j \in J, \tag{2.64}$$

$$\varphi^{-1} \circ p_j \leqslant p'_j, \qquad \text{za svaki } j \in J, \tag{2.65}$$

$$\varphi^{-1} \circ R_i \leqslant R'_i \circ \varphi^{-1}, \qquad \text{za svaki } i \in I \tag{2.66}$$

i *backward simulacija* ako je

$$p_j \circ \varphi \leqslant p'_j, \qquad \text{za svaki } j \in J, \tag{2.67}$$

$$p_j \leqslant \varphi \circ p'_j, \qquad \text{za svaki } j \in J, \tag{2.68}$$

$$R_i \circ \varphi \leqslant \varphi \circ R'_i, \qquad \text{za svaki } i \in I. \tag{2.69}$$

Pomoću ova dva tipa simulacija možemo definisati četiri tipa bisimulacija. Ako su i φ i φ^{-1} forward simulacije, tj. ako φ zadovoljava (2.64)–(2.66) i

$$p'_j \leqslant p_j \circ \varphi, \qquad \text{za svaki } j \in J, \tag{2.70}$$

$$\varphi \circ p'_j \leqslant p_j \qquad \text{za svaki } j \in J, \tag{2.71}$$

$$\varphi \circ R'_i \leqslant R_i \circ \varphi, \qquad \text{za svaki } i \in I, \tag{2.72}$$

onda se φ naziva *forward bisimulacija*, a ako su i φ i φ^{-1} backward simulacije, tj. ako φ zadovoljava (2.67)–(2.69) i

$$p'_j \circ \varphi^{-1} \leqslant p_j, \qquad \text{za svaki } j \in J \tag{2.73}$$

$$p'_j \leqslant \varphi^{-1} \circ p_j, \qquad \text{za svaki } j \in J \tag{2.74}$$

$$R'_i \circ \varphi^{-1} \leqslant \varphi^{-1} \circ R_i, \qquad \text{za svaki } i \in I, \tag{2.75}$$

onda se φ naziva *backward bisimulacija*. Takođe, ako je φ forward simulacija i φ^{-1} backward simulacija, tj. ako je

$$p_j = p'_j \circ \varphi^{-1}, \qquad \text{za svaki } j \in J, \tag{2.76}$$

$$\varphi^{-1} \circ p_j = p'_j, \qquad \text{za svaki } j \in J, \tag{2.77}$$

$$\varphi^{-1} \circ R_i = R'_i \circ \varphi^{-1}, \qquad \text{za svaki } i \in I, \tag{2.78}$$

onda se φ naziva *forward-backward bisimulacija*, a ako je φ backward simulacija i φ^{-1} forward simulacija, odnosno, ako je

$$p_j \circ \varphi = p'_j, \qquad \text{za svaki } j \in J, \tag{2.79}$$

$$p_j = \varphi \circ p'_j, \qquad \text{za svaki } j \in J, \tag{2.80}$$

$$R_i \circ \varphi = \varphi \circ R'_i, \qquad \text{za svaki } i \in I, \tag{2.81}$$

onda se φ naziva *backward-forward bisimulacija*.

Konačno, ako su φ i φ^{-1} obe forward i backward bisimulacije, tada se φ naziva *regularna bisimulacija*. Drugim rečima, φ je regularna bisimulacija ako zadovoljava

$$p_j = \varphi \circ p'_j, \qquad \text{za svako } j \in J, \tag{2.82}$$

$$p'_j = \varphi^{-1} \circ p_j, \qquad \text{za svako } j \in J, \tag{2.83}$$

$$R_i \circ \varphi = \varphi \circ R'_i, \qquad \text{za svako } i \in I, \tag{2.84}$$

$$\varphi^{-1} \circ R_i = R'_i \circ \varphi^{-1}, \text{ za svako } i \in I. \tag{2.85}$$

Značenje simulacija i bisimulacija se može dobro objasniti u slučaju kada su $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$ krisp mreže (mreže sa Boolovim vrednostima). Uslov (2.65) znači da ako učesnik $a \in A$ poseduje određeni atribut ili svojstvo, a tog učesnika simulira drugi učesnik $b \in A'$, tada b poseduje isto svojstvo, dok uslov (2.64) znači da bilo koji učesnik $a \in A$ koji poseduje određeni atribut, može biti simuliran od strane bilo kog drugog učesnika $b \in A'$ sa istim svojstvom. Značenje uslova (2.66) i (2.69) je prikazano na slici 2.6.

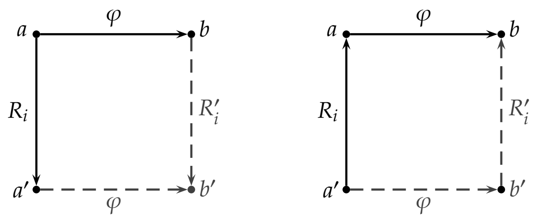


Figure 2.6 Forward simulacija (uslov (2.66) je prikazan levo) i backward simulacija (uslov (2.69) je prikazan desno).

Navodimo dve leme koje se jednostavno dokazuju i važe za sve tipove simulacija i bisimulacija.

Lema 2.5.1. *Neka su $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$, $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}'' = (A'', \{R''_i\}_{i\in I}, \{p''_j\}_{j\in J})$ fazi mreže i neka su $\varphi_1 \in L^{A\times A'}$ i $\varphi_2 \in L^{A'\times A''}$ forward bisimulacije.*

Tada je $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in L^{A\times A''}$, takođe, forward bisimulacija.

Lema 2.5.2. *Neka su $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ fazi mreže i neka je $\{\varphi_i\}_{i\in I} \subseteq L^{A\times A'}$ neprazna familija forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$.*

Tada je, takođe, $\bigvee_{i\in I} \varphi_i$ forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$.

Sada možemo dokazati naredni važan rezultat.

Teorema 2.5.3. *Neka su $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ fazi mreže takve da postoji bar jedna forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$. Tada postoji najveća forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$.*

Štaviše, najveća forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ and $\mathcal{N}'$ jeste parcijalna fazi funkcija.

Dokaz: Prema pretpostavci teoreme, kolekcija forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ and $\mathcal{N}'$ je neprazna. Neka je φ supremum (unija) svih članova ove kolekcije. Prema Lemi 2.5.2., φ je forward bisimulacija, pa je ona najveća forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ and $\mathcal{N}'$.

Dalje, prema to Lemi 2.5.1., $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$ je, takođe, forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$, i kako je φ najveća forward bisimulacija, te zaključujemo da je $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \leqslant \varphi$. Sada, prema Teoremi 1.4.1. sledi da je φ parcijalna fazi funkcija. □

Prethodna teorema ukazuje na značaj proučavanja onih bisimulacija koje su parcijalne fazi funkcije. Bisimulacije se mogu posmatrati kao modeli ekvivalencije između mreža, pri čemu su dve mreže ekvivalentne, ako je svaki učesnik prve mreže ekvivalentan nekom učesniku druge i obratno. U kontekstu fazi mreža, ovo znači da fazi relacija koju koristimo kao model ekvivalencije mora da bude sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija. Kako su parcijalne fazi funkcije koje su sirjektivne $\mathcal{L}$-funkcije upravo uniformne fazi relacije, ova diskusija ukazuje da je važno pozabaviti se onim bisimulacijama koje su uniformne fazi relacije. Zato će ovakve bisimulacije biti predmet proučavanja narednog odeljka. U formulaciji Teoreme 2.5.3. morali smo da uvedemo pretpostavku da postoji bar jedna forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$, jer prazna relacija nije forward bisimulacija, pošto ne zadovoljava uslove (2.64) i (2.70).

Definisali smo koncepte simulacija i bisimulacija između dve različite fazi mreže. Razmatraćemo sada, slučaj kada su date fazi mreže jednake, tj. pozabavićemo se bisimulacijama na jednoj fazi mreži.

Neka je $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ fazi mreža. Ako je fazi relacija $\varphi \in L^{A\times A}$ forward bisimulacija između fazi mreže $\mathcal{N}$ i nje same, nazvaćemo je *forward bisimulacija na* $\mathcal{N}$ (analogno definišemo *backward bisimulaciju na* $\mathcal{N}$). Forward bisimulacije na $\mathcal{N}$ koje su relacije fazi ekvivalencije nazivacemo *forward bisimulacione fazi ekvivalencije*.

Primetimo da svaka fazi ekvivalencija zadovoljava uslov (2.64) (zbog refleksivnosti i simetričnosti). Dakle, proizvoljna relacija fazi ekvivalencije α na $\mathcal{N}$ je forward bisimulacija na $\mathcal{N}$ ako i samo ako je

$$\alpha \circ R_i \leqslant R_i \circ \alpha, \qquad \text{za svaki } i \in I, \tag{2.86}$$

$$\alpha \circ p_j \leqslant p_j \qquad \text{za svaki } j \in J. \tag{2.87}$$

(Uslov (2.87) može biti zamenjen sa $\alpha \circ p_j = p_j$ za svaki $j \in J$). Prema Teoremi 4.1 iz [26] (pogledati, takođe, Teoremu 1 [25]), uslov (2.86) je ekvivalentan sa

$$\alpha \circ R_i \circ \alpha = R_i \circ \alpha, \qquad \text{za svaki } i \in I. \tag{2.88}$$

Slično, relacija fazi ekvivalencije α na $\mathcal{N}$ je backward bisimulacija na $\mathcal{N}$ ako i samo ako

$$R_i \circ \alpha \leqslant \alpha \circ R_i, \qquad \text{za svaki } i \in I, \tag{2.89}$$

$$p_j \circ \alpha \leqslant p_j \qquad \text{za svaki } j \in J \tag{2.90}$$

(opet možemo zameniti (2.90) sa $p_j \circ \alpha = p_j$) i imamo da je uslov (2.89) ekvivalentan sa

$$\alpha \circ R_i \circ \alpha = \alpha \circ R_i, \qquad \text{za svaki } i \in I. \tag{2.91}$$

Forward i backward bisimulacione fazi ekvivalencije na fazi mreži definisane su po uzoru na forward i backward bisimulacione fazi ekvivalencije na fazi automatima, koje su bile proučavane u radovima [25, 26, 109] gde su nazvane desno i levo invarijantne fazi ekvivalencije. U opštijem kontekstu,u radu [64] su proučavane neke srodne relacije fazi ekvivalencije pod nazivom desno i levo regularne fazi ekvivalencije.

2.6. Uniformne forward bisimulacije

Već smo govorili o značaju uniformnih forward bisimulacija. U ovom odeljku pokušaćemo da, kroz predstavljene rezultate damo pravu sliku o značaju uniformnih forward bisimulacija između fazi mreža.

Teorema 2.6.1. *Neka su $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ fazi mreže i neka je $\varphi \in L^{A\times A'}$ proizvoljna fazi relacija. Tada važi sledeće:*

(a) *$\varphi \circ \varphi^{-1}$ je forward bisimulacija na $\mathcal{N}$, $\varphi^{-1} \circ \varphi$ je forward bisimulacija na $\mathcal{N}'$ i*

$$\varphi \circ \varphi^{-1} \circ R_i \leqslant \varphi \circ R'_i \circ \varphi^{-1} \leqslant R_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1}, \qquad \textit{za svaki } i \in I, \tag{2.92}$$

$$\varphi^{-1} \circ \varphi \circ R'_i \leqslant \varphi^{-1} \circ R_i \circ \varphi \leqslant R'_i \circ \varphi^{-1} \circ \varphi, \qquad \textit{za svaki } i \in I, \tag{2.93}$$

(b) *Ako je φ uniformna forward bisimulacija, onda je $\varphi \circ \varphi^{-1}$ forward bisimulaciona fazi ekvivalencija na $\mathcal{N}$ i $\varphi^{-1} \circ \varphi$ jeste forward bisimulaciona fazi ekvivalencija na $\mathcal{N}'$.*

Dokaz: (a) Nejednakosti (2.92) i (2.93) slede direktno iz definicije forward bisimulacije između fazi mreža i saglasnosti uređenja fazi relacija u odnosu na kompoziciju fazi relacija.

Prema(2.92) i (2.93) sledi da su $\varphi \circ \varphi^{-1}$ i $\varphi^{-1} \circ \varphi$ forward bisimulacije na $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$, tim redom.

(b) Ako je φ uniformna forward bisimulacija, onda prema Teoremi 1.4.2. sledi da je $\varphi \circ \varphi^{-1} = E_A^{\varphi}$ and $\varphi^{-1} \circ \varphi = E_{A'}^{\varphi}$, i prema tome, $\varphi \circ \varphi^{-1} = E_A^{\varphi}$ i $\varphi^{-1} \circ \varphi = E_{A'}^{\varphi}$, jesu fazi ekvivalencije na $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$, tim redom. Ostatak dokaza sledi iz (a). □

Podsetimo se da je $\varphi \in L^{A\times A'}$ uniformna fazi relacija ako i samo je sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija i $E_A^{\varphi} = \varphi \circ \varphi^{-1}$, ili ekvivalentno, ako je sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija i $E_{A'}^{\varphi} = \varphi^{-1} \circ \varphi$ (cf. Teorema 1.4.2.).

Naredna teorema pokazuje da uniformne forward bisimulacije mogu, takođe, biti definisane preko jednakosti.

Teorema 2.6.2. *Neka su* $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ *i* $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ *fazi mreže i neka je* $\varphi \in L^{A\times A'}$ *uniformna fazi relacija. Tada je* φ *forward bisimulacija između* $\mathcal{N}$ *i* $\mathcal{N}'$ *ako i samo ako važi sledeće:*

$$p_j \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = p'_j \circ \varphi^{-1}, \qquad p_j \circ \varphi = p'_j \circ \varphi^{-1} \circ \varphi, \qquad \text{za svaki } j \in J \quad (2.94)$$

$$p_j = \varphi \circ p'_j, \qquad \varphi^{-1} \circ p_j = p'_j, \qquad \text{za svaki } j \in J \quad (2.95)$$

$$R_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ R'_i \circ \varphi^{-1}, \quad \varphi^{-1} \circ R_i \circ \varphi = R'_i \circ \varphi^{-1} \circ \varphi, \quad \text{za svaki } i \in I. \quad (2.96)$$

Dokaz: Neka je φ forward bisimulacija između fazi mreža $\mathcal{N}$ and $\mathcal{N}'$. Tada $p_j \leqslant p'_j \circ \varphi^{-1}$ za $j \in J$ povlači

$$p_j \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \leqslant p'_j \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = p'_j \circ \varphi^{-1}, \text{ za svaki } j \in J$$

i $p'_j \leqslant p_j \circ \varphi$ povlači $p'_j \circ \varphi^{-1} \leqslant p_j \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$, za proizvoljno $j \in J$. Tako dobijamo $p_j \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = p'_j \circ \varphi^{-1}$. Štaviše, imamo da je $p_j \circ \varphi = p_j \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = p'_j \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$.

Prema tvrđenju (a) Teoreme 2.6.1., za svaki $j \in J$ imamo

$$\varphi \circ p'_j \circ \varphi^{-1} \leqslant p_j \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ p_j \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \leqslant \varphi \circ p'_j \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ p'_j \circ \varphi^{-1},$$

dok je $\varphi \circ p'_j \circ \varphi^{-1} = p_j \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$ i slično, $\varphi^{-1} \circ R_i \circ \varphi = R'_i \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$, za svako $i \in I$. Sa druge strane, prema tvrđenju (b) Teoreme 2.6.1. dobijamo da je $p_j = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ p_j \leqslant \varphi \circ p'_j \leqslant p_j$, pa je $p_j = \varphi \circ p'_j$ i slično, $p'_j = \varphi^{-1} \circ p_j$, za svako $j \in J$.

Obratno, pretpostavimo da tvrđenja (2.94)–(2.95) važe. Tada je $p_j \leqslant p_j \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \leqslant p'_j \circ \varphi^{-1}$, za svako $j \in J$ i za svako $i \in I$, imamo

$$\varphi^{-1} \circ R_i \leqslant \varphi^{-1} \circ R_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = R'_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi^{-1} = R'_i \circ \varphi^{-1}.$$

Jasno je da je, $\varphi^{-1} \circ p_j \leqslant p'_j$, što znači da je φ forward simulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$. Dalje, $p'_j \leqslant p'_j \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = p_j \circ \varphi$, za svako $j \in J$ i važi

$$\varphi \circ R'_i \leqslant \varphi \circ R'_i \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = R_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = R_i \circ \varphi.$$

Takođe je $\varphi \circ p_j \leqslant p'_j$, odakle sledi da je φ^{-1} forward simulacija između $\mathcal{N}'$ i $\mathcal{N}$. Prema tome, φ je forward bisimulacija između fazi mreža $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$. □

Teorema 2.6.3. *Neka su* $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ *i* $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ *fazi mreže i neka je* $\varphi \in L^{A\times A'}$ *uniformna fazi relacija. Tada je* φ *forward fazi bisimulacija između* $\mathcal{N}$ *i* $\mathcal{N}'$ *ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(i) E_A^{φ} *je forward bisimulacija na* $\mathcal{N}$*;*
(ii) $E_{A'}^{\varphi}$ *je forward bisimulacija na* $\mathcal{N}'$*;*

(iii) $\bar{\varphi}$ *je izomorfizam između količničkih fazi mrež* $\mathcal{N}/E_A^{\varphi}$ *and* $\mathcal{N}'/E_{A'}^{\varphi}$.

Dokaz: Jednostavnosti radi uvešćemo oznake $\alpha = E_A^{\varphi}$ i $\alpha' = E_{A'}^{\varphi}$.

Neka je φ forward bisimulacija. Uslovi (i) i (ii) slede direktno prema (iv) i (v) Teoreme 1.4.2. i Teoreme 2.6.1..Prema Lemi 1.4.4., $\bar{\varphi}$ bijektivna funkcija iz A/α na A'/α'.

Dalje, posmatrajmo proizvoljne $a, a_1, a_2 \in A$, $j \in J$ and $\psi \in CR(\varphi)$. Na osnovu Teoreme 2.6.2., imamo da je

$$\bar{p}_j(\alpha_a) = (p_j \circ \alpha)(a) = (p'_j \circ \varphi^{-1})(a) = \bigvee_{b \in A'} p'_j(b) \otimes \varphi(a,b) = \bigvee_{b \in A'} p'_j(b) \otimes \alpha'(\psi(a), b)$$

$$= \bigvee_{b \in A'} p'_j(b) \otimes \alpha'(b, \psi(a)) = (p'_j \circ \alpha')(\psi(a)) = \bar{p}'_j(\alpha'_{\psi(a)}) = \bar{p}'_j(\bar{\varphi}(\alpha_a)),$$

$$\bar{p}_j(\alpha_a) = (p_j \circ \alpha)(a) = p_j(a) = (\varphi \circ p'_j)(a) = \bigvee_{b \in A'} \varphi(a,b) \otimes p'_j(b) = \bigvee_{b \in A'} \alpha'(\psi(a), b) \otimes p'_j(b)$$

$$= (\alpha' \circ p'_j)(\psi(a)) = \bar{p}'_j(\alpha'_{\psi(a)}) = \bar{p}'_j(\bar{\varphi}(\alpha_a))$$

Dalje, iz uslova (i), nejednakosti (2.92) i (1.68) dobijamo

$$R_i \circ \alpha = \alpha \circ R_i \circ \alpha = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ R_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \leqslant \varphi \circ R'_i \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ R'_i \circ \varphi^{-1} \leqslant R_i \circ \alpha,$$

za svako $i \in I$ i odatle, $\alpha \circ R_i \circ \alpha = R_i \circ \alpha = \varphi \circ R'_i \circ \varphi^{-1}$. Na osnovu ovoga i (1.71) sledi da je

$$\begin{aligned}
\bar{R}_i(\alpha_{a_1}, \alpha_{a_2}) &= (\alpha \circ R_i \circ \alpha)(a_1, a_2) \\
&= (\varphi \circ R'_i \circ \varphi^{-1})(a_1, a_2) \\
&= \bigvee_{b_1, b_2 \in A'} \varphi(a_1, b_1) \otimes R'_i(b_1, b_2) \otimes \varphi(a_2, b_2) \\
&= \bigvee_{b_1, b_2 \in A'} \alpha'(\psi(a_1), b_1) \otimes R'_i(b_1, b_2) \otimes \alpha'(\psi(a_2), b_2) \\
&= (\alpha' \circ R'_i \circ \alpha')(\psi(a_1), \psi(a_2)) \\
&= \bar{R}'_i(\alpha'_{\psi(a_1)}, \alpha'_{\psi(a_2)}) \\
&= \bar{R}'_i(\bar{\varphi}(\alpha_{a_1}), \bar{\varphi}(\alpha_{a_2})),
\end{aligned}$$

Prema tome, $\bar{\varphi}$ je izomorfizam između fazi mreža $\mathcal{N}/\alpha$ and $\mathcal{N}'/\alpha'$.

Obratno, neka (i), (ii) i (iii) važe. Za proizvoljne $\psi \in CR(\varphi)$, $\xi \in CR(\varphi^{-1})$, $a, a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in A'$ i $j \in J$ imamo

$$
\begin{aligned}
p_j(a) &\leqslant (p_j \circ \alpha)(a) = \bar{p}_j(\alpha_a) = \bar{p}'_j(\bar{\varphi}(\alpha_a)) = \bar{p}'_j(\alpha'_{\psi(a)}) = (p'_j \circ \alpha')(\psi(a)) \\
&= \bigvee_{b \in A'} p'_j(b) \otimes \alpha'(b, \psi(a)) = \bigvee_{b \in A'} p'_j(b) \otimes \alpha'(\psi(a), b) = \bigvee_{b \in A'} p'_j(b) \otimes \varphi(a, b) \\
&= \bigvee_{b \in A'} p'_j(b) \otimes \varphi^{-1}(b, a) = (p'_j \circ \varphi^{-1})(a),
\end{aligned}
$$

te je $p_j \leqslant p'_j \circ \varphi^{-1}$, i na sličan način pokazujemo da je $p'_j \leqslant p_j \circ \varphi$. Dalje,

$$
\begin{aligned}
(\alpha \circ R_i \circ \alpha)(a_1, a_2) &= \bar{R}_i(\alpha_{a_1}, \alpha_{a_2}) = \bar{R}'_i(\bar{\varphi}(\alpha_{a_1}), \bar{\varphi}(\alpha_{a_2})) \\
&= \bar{R}'_i(\alpha'_{\psi(a_1)}, \alpha'_{\psi(a_2)}) = (\alpha' \circ R'_i \circ \alpha')(\psi(a_1), \psi(a_2)),
\end{aligned}
$$

i slično, za $i \in I$ imamo

$$
(\alpha' \circ R'_i \circ \alpha')(b_1, b_2) = (\alpha \circ R_i \circ \alpha)(\xi(b_1), \xi(b_2)).
$$

Prema (i) i (ii), $\varphi^{-1} \circ R_i = \varphi^{-1} \circ \alpha \circ R_i \leqslant \varphi^{-1} \circ R_i \circ \alpha$, i sada, prema (1.71) i (1.72), za sve $a \in A$ i $b \in A'$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
(\varphi^{-1} \circ R_i)(b, a) \leqslant (\varphi^{-1} \circ R_i \circ \alpha)(b, a) &= \bigvee_{a_1 \in A} \varphi^{-1}(b, a_1) \otimes (R_i \circ \alpha)(a_1, a) \\
&= \bigvee_{a_1 \in A} \alpha(\xi(b), a_1) \otimes (R_i \circ \alpha)(a_1, a) = (\alpha \circ R_i \circ \alpha)(\xi(b), a) \\
&= (\alpha' \circ R'_i \circ \alpha')(\psi(\xi(b)), \psi(a)) \\
&= \bigvee_{b_1 \in A'} \alpha'(\psi(\xi(b)), b_1) \otimes (R'_i \circ \alpha')(b_1, \psi(a)) \\
&= \bigvee_{b_1 \in A'} \alpha'(b, b_1) \otimes (R'_i \circ \alpha')(b_1, \psi(a)) \\
&= (\alpha' \circ R'_i \circ \alpha')(b, \psi(a)) = (R'_i \circ \alpha')(b, \psi(a)) \\
&= \bigvee_{b_2 \in A'} R'_i(b, b_2) \otimes \alpha'(b_2, \psi(a)) = \bigvee_{b_2 \in A'} R'_i(b, b_2) \otimes \varphi(a, b_2) \\
&= (R'_i \circ \varphi^{-1})(b, a),
\end{aligned}
$$

pa je $\varphi^{-1} \circ R_i \leqslant R'_i \circ \varphi^{-1}$. Ovde smo koristili činjenicu da je $\alpha'(\psi(\xi(b)), b) = \varphi(\xi(b), b) = \varphi^{-1}(b, \xi(b)) = 1$, odakle je $\alpha'_{\psi(\xi(b))} = \alpha'_b$ i

$$
\alpha'(\psi(\xi(b)), b_1) = \alpha'_{\psi(\xi(b))}(b_1) = \alpha'_b(b_1) = \alpha'(b, b_1).
$$

Na sličan način pokazujemo $\varphi \circ R'_i \leqslant R_i \circ \varphi$. Dalje,

$$p_j(a) = (\alpha \circ p_j)(a) = \bar{p}_j(\alpha_a) = \bar{p}'_j(\bar{\varphi}(\alpha_a))$$
$$= \bar{p}'_j(\alpha'_{\psi(a)}) = \bigvee_{b\in A'} \alpha'(\psi(a),b)\otimes p'_j(b) = \bigvee_{b\in A'} \varphi(a,b)\otimes p'_j(b) = (\varphi \circ p'_j)(a),$$

pa je $p_j = \varphi \circ p'_j$ i slično dobijamo $\varphi^{-1} \circ p_j \leqslant p'_j$. Prema tome, φ je uniformna forward fazi bisimulacija između fazi mreža $\mathcal{N}$ and $\mathcal{N}'$. □

Teorema 2.6.4. *Neka su $\mathcal{N} = (A,\{R_i\}_{i\in I},\{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A',\{R'_i\}_{i\in I},\{p'_j\}_{j\in J})$ fazi mreže i neka je α forward fazi bisimulacija na $\mathcal{N}$ i α' forward bisimulacija na $\mathcal{N}'$.*

Tada postoji uniformna forward fazi bisimulacija $\varphi \in L^{A\times A'}$ takva da je

$$E^{\varphi}_A = \alpha \ \ i \ \ E^{\varphi}_{A'} = \alpha', \tag{2.97}$$

ako i samo ako postoji izomorfizam $\phi : \mathcal{N}/\alpha \to \mathcal{N}'/\alpha'$ takav da za sve $a_1,a_2 \in A$ imamo

$$\bar{\alpha}(\alpha_{a_1},\alpha_{a_2}) = \bar{\alpha}'(\phi(\alpha_{a_1}),\phi(\alpha_{a_2})). \tag{2.98}$$

Dokaz: Neka je φ uniformna forward bisimulacija koja zadovoljava (2.97) i neka je $\psi \in CR(\varphi)$. Prema definiciji fazi relacija $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}'$ i $\bar{\varphi}$, i Posledici 1.4.4. dobijamo

$$\bar{\alpha}(\alpha_{a_1},\alpha_{a_2}) = \alpha(a_1,a_2) = \alpha'(\psi(a_1),\psi(a_2)) = \bar{\alpha}'(\alpha'_{\psi(a_1)},\alpha'_{\psi(a_2)}) = \bar{\alpha}'(\bar{\varphi}(\alpha_{a_1}),\bar{\varphi}(\alpha_{a_2})).$$

Prema Teoremi 2.6.3., $\bar{\varphi}$ je izomorfizam iz $\mathcal{N}/\alpha$ na $\mathcal{N}'/\alpha'$ koji zadovoljava jednakost (2.98).

Obratno, neka je $\phi : \mathcal{N}/\alpha \to \mathcal{N}'/\alpha'$ izomorfizam koji zadovoljava (2.98). Definišimo funkcije $\phi_\alpha : A \to A/\alpha$, $\phi_{\alpha'} : A'/\alpha' \to A'$ i $\psi : A \to A'$ na sledeći način: Za proizvoljno $x \in A$ neka je $\phi_\alpha(x) = \alpha_x$, za svako $\eta \in A'/\alpha'$ neka $\phi_{\alpha'}(\eta)$ bude fiksirani element iz $\widehat{\eta}$ (krisp deo od η) i neka je $\psi = \phi_\alpha \circ \phi \circ \phi_{\alpha'}$. Definišimo još fazi relaciju $\varphi \in L^{A\times A'}$ sa

$$\varphi(a,b) = \alpha'(\psi(a),b), \qquad \text{za sve } a \in A \text{ i } b \in A'. \tag{2.99}$$

Prema dokazu Teoreme 3.4 [22], φ je uniformna fazi relacija koja zadovoljava (2.97) i $\psi \in CR(\varphi)$. Za proizvoljno $a \in A$ imamo $\phi(\alpha_a) = \alpha'_b$, za neko $b \in A'$ i

$$\psi(a) = \phi_{\alpha'}(\phi(\phi_\alpha(a))) = \phi_{\alpha'}(\phi(\alpha(a)) = \phi_{\alpha'}(\alpha'_b) \in \widehat{\alpha'_b},$$

odakle sledi da je

$$\bar{\varphi}(\alpha_a) = \alpha'_{\psi(a)} = \alpha'_b = \phi(\alpha_a),$$

za svako $a \in A$. Prema tome, $\bar{\varphi} = \phi$ i na osnovu Teoreme 2.6.3., φ je uniformna forward bisimulacija. □

U slučaju krisp jedno-modalitetnih socijalnih mreža Teorema 2.6.1. važi, dok prethodno tvrđenje ima drugačiji oblik, jer su količničke mreže u odnosu na jezgro i kojezgro uniformne forward bisimulacije izomorfne među sobom. Zato ćemo posebno navesti naredna tvrđenja.

Teorema 2.6.5. *Neka su $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ krisp mreže i neka je $\varphi \subseteq A \times A'$ uniformna relacija. Tada je φ forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$ ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(i) E_A^φ *je forward bisimulaciona ekvivalencija na* $\mathcal{N}$;
(ii) $E_{A'}^\varphi$ *je forward bisimulaciona ekvivalencija na* $\mathcal{N}'$;
(iii) $\bar{\varphi}$ *je izomorfizam faktor mreža* $\mathcal{N}/E_A^\varphi$ *and* $\mathcal{N}'/E_{A'}^\varphi$.

Dokaz: Jednostavnosti radi uvodimo oznake $E_A^\varphi = \alpha$ i $E_{A'}^\varphi = \alpha'$.

Neka je φ forward bisimulacija. Prema Teoremi 2.6.1., za svako $i \in I$ imamo da je

$$\begin{aligned}\alpha \circ R_i \circ \alpha = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ R_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1} &= \varphi \circ R'_i \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \\ &= \varphi \circ R'_i \circ \varphi^{-1} = R_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = R_i \circ \alpha,\end{aligned}$$

i takođe, $\alpha \circ p_j = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ p_j = \varphi \circ p'_j = p_j$, za $j \in J$. Inkluzija $p_j \subseteq p_j \circ \alpha$ je očigledna, te je $\alpha = E_A^\varphi$ forward bisimulaciona ekvivalencija na $\mathcal{N}$. Slično, $\alpha' = E_{A'}^\varphi$ je forward bisimulaciona ekvivalencija na $\mathcal{N}'$.

Na osnovu teoreme za krisp slučaj koja odgova Teoremi 1.4.1., jednostavno se pokazuje da je $\bar{\varphi}$ bijectivna funkcija. Dalje, za sve $a_1, a_2 \in A$, $i \in I$ i $f \in FD(\varphi)$ dobijamo

$$\begin{aligned}(\alpha_{a_1}, \alpha_{a_2}) \in \bar{R}_i &\Leftrightarrow (a_1, a_2) \in \alpha \circ R_i \circ \alpha \Leftrightarrow (a_1, a_2) \in \varphi \circ R'_i \circ \varphi^{-1} \\ &\Leftrightarrow (\exists b_1, b_2 \in A')\big((a_1, b_1) \in \varphi \wedge (b_1, b_2) \in R'_i \wedge (a_2, b_2) \in \varphi\big) \\ &\Leftrightarrow (\exists b_1, b_2 \in A')\big((f(a_1), b_1) \in \alpha' \wedge (b_1, b_2) \in R'_i \wedge (f(a_2), b_2) \in \alpha'\big) \\ &\Leftrightarrow (f(a_1), f(a_2)) \in \alpha' \circ R'_i \circ \alpha' \Leftrightarrow (\alpha'_{f(a_1)}, \alpha'_{f(a_2)}) \in \bar{R}'_i \\ &\Leftrightarrow (\bar{\varphi}(\alpha_{a_1}), \bar{\varphi}(\alpha_{a_2})) \in \bar{R}'_i.\end{aligned}$$

i za svako $a \in A$ i $f \in FD(\varphi)$ imamo

$$
\begin{aligned}
\alpha_a \in \bar{p}_j &\Leftrightarrow a \in p_j \circ \alpha \Leftrightarrow (\exists a' \in A)\big(a' \in p_j \wedge (a', a) \in \alpha\big)\\
&\Leftrightarrow (\exists a' \in A)\big(a' \in p_j \wedge (a', f(a)) \in \varphi\big)\\
&\Leftrightarrow f(a) \in p_j \circ \varphi = p'_j \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = p'_j \circ \alpha'\\
&\Leftrightarrow \alpha'_{f(a)} \in \bar{p}'_j \Leftrightarrow \bar{\varphi}(\alpha_a) \in \bar{p}'_j,\\
\alpha_a \in \bar{p}_j &\Leftrightarrow a \in \alpha \circ p_j \Leftrightarrow (\exists a' \in A)\big((a, a') \in \alpha \wedge a' \in p_j\big)\\
&\Leftrightarrow (\exists a' \in A)\big((f(a), a') \in \varphi^{-1} \wedge a' \in p_j\big)\\
&\Leftrightarrow f(a) \in \varphi^{-1} \circ p_j = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ p'_j = \alpha' \circ p'_j\\
&\Leftrightarrow \alpha'_{f(a)} \in \bar{p}'_j \Leftrightarrow \bar{\varphi}(\alpha_a) \in \bar{p}'_j.
\end{aligned}
$$

Dakle, $\bar{\varphi}$ je izomorfizam između faktor socijalnih mreža $\mathcal{N}/\alpha$ and $\mathcal{N}'/\alpha'$.

Obratno, neka važe uslovi (i), (ii) i (iii). Prema (i), za svako $i \in I$ imamo

$$
\alpha \circ R_i \circ \alpha = R_i \circ \alpha = R_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1},
$$

i prema (iii), za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ i $f \in FD(\varphi)$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
&(a_1, a_2) \in R_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (a_1, a_2) \in \alpha \circ R_i \circ \alpha \Leftrightarrow (\alpha_{a_1}, \alpha_{a_2}) \in \bar{R}_i\\
&\Leftrightarrow (\bar{\varphi}(\alpha_{a_1}), \bar{\varphi}(\alpha_{a_2})) \in \bar{R}'_i \Leftrightarrow (\alpha'_{f(a_1)}, \alpha'_{f(a_2)}) \in \bar{R}'_i\\
&\Leftrightarrow (f(a_1), f(a_2)) \in \alpha' \circ R'_i \circ \alpha'\\
&\Leftrightarrow (\exists b_1, b_2 \in A')\big((f(a_1), b_1) \in \alpha' \wedge (b_1, b_2) \in R_i \wedge (f(a_2), b) \in \alpha'\big)\\
&\Leftrightarrow (\exists b_1, b_2 \in A')\big((a_1, b_1) \in \varphi \wedge (b_1, b_2) \in R'_i \wedge (a_2, b) \in \varphi\big)\\
&\Leftrightarrow (a_1, a_2) \in \varphi \circ R'_i \circ \varphi^{-1}.
\end{aligned}
$$

Prema tome, prva jednakost u (2.96) važi. Na sličan način dokazujemo drugu jednakost u (2.96).

Dalje, za sve $a \in A$ i $j \in J$ imamo

$$
\begin{aligned}
a \in p_j \circ \varphi \circ \varphi^{-1} &\Leftrightarrow a \in p_j \circ \alpha \Leftrightarrow \alpha_a \in \bar{p}_j \Leftrightarrow \bar{\varphi}(\alpha_a) \in \bar{p}'_j \Leftrightarrow \alpha'_{f(a)} \in \bar{p}'_j\\
&\Leftrightarrow f(a) \in p'_j \circ \alpha' \Leftrightarrow (\exists b \in A')\big(b \in p'_j \wedge (f(a), b) \in \alpha'\big)\\
&\Leftrightarrow (\exists b \in A')\big(b \in p'_j \wedge (a, b) \in \varphi\big) \Leftrightarrow a \in p'_j \circ \varphi^{-1},
\end{aligned}
$$

te je $p_j \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = p'_j \circ \varphi^{-1}$ i odatle je $p_j \circ \varphi = p'_j \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$. Takođe imamo

$$a \in p_j \Leftrightarrow a \in \alpha \circ p_j \Leftrightarrow \alpha_a \in \bar{p}_j \Leftrightarrow \bar{\varphi}(\alpha_a) \in \bar{p}'_j \Leftrightarrow \alpha'_{f(a)} \in \bar{p}'_j$$
$$\Leftrightarrow f(a) \in \alpha' \circ p'_j \Leftrightarrow (\exists b \in A')\big((f(a),b) \in \alpha' \wedge b \in p'_j\big)$$
$$\Leftrightarrow (\exists b \in A')\big((a,b) \in \varphi \wedge b \in p'_j\big) \Leftrightarrow a \in \varphi \circ p'_j,$$

odakle zaključujemo da je $p_j = \varphi \circ p'_j$. Slično, $p'_j = \varphi^{-1} \circ p_j$. Prema tome, dokazali smo da važe (2.94) i (2.95), što znači da je φ forward bisimulacija. □

Teorema 2.6.6. *Neka su $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ jedno-modalitetne mreže i neka su α and α' forward bisimulacione ekvivalencije na $\mathcal{N}$ and $\mathcal{N}'$.*

Tada postoji uniformna forward bisimulacija $\varphi \subseteq A \times A'$ takva da je $E_A^{\varphi} = \alpha$ i $E_B^{\varphi} = \alpha'$ ako i samo ako su faktor mreže $\mathcal{A}/\alpha$ and $\mathcal{B}/\alpha'$ izomorfne.

Dokaz: Direktni smer tvrđenja je neposredna posledica Teoreme 2.6.5..

Obratno, neka su $\phi : A/\alpha \to A'/\alpha'$ izomorfizmi između količničkih mreža $\mathcal{N}/\alpha$ i $\mathcal{N}'/\alpha'$. Definišimo $\varphi \subseteq A \times A'$ na sledeći način:,

$$(a,b) \in \varphi \Leftrightarrow \phi(\alpha_a) = \alpha'_b, \text{ za sve } a \in A \text{ i } b \in A'.$$

Prema dokazu Teoreme 3.4 u [20], φ je uniformna relacija takva da je $\alpha = E_A^{\varphi}$, $\alpha' = E_B^{\varphi}$ i $\phi = \bar{\varphi}$ i prema Teoremi 2.6.5., φ je forward bisimulacija. □

2.7. Backward-forward bisimulacije

U ovom odeljku srešćemo se sa heterotipnim bisimulacijama i glavni rezultat ukazuje na sličnosti i osnovne razlike između homotipnih i heterotipnih bisimulacija.

Za svako tvrđenje koje važi za backward-forward bisimulacije može se dokazati odgovarajuće tvrđenje koje se odnosi na forward-backward bisimulacije i zato ćemo u nastavku govoriti samo o backward-forward bisimulacijama.

Primetimo da ako je φ forward ili backward bisimulation between fuzzy mreža $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$, onda φ^{-1} takođe ima istu osobinu. Ako je φ backward-forward ili forward-backward bisimulacija, onda φ^{-1} ne mora da ima isto svojstvo. Važi čak da je φ backward-forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ and $\mathcal{N}'$ ako i samo ako je φ^{-1} forward-backward bisimulacija između $\mathcal{N}'$ and $\mathcal{N}$.

Jednostavno se pokazuje da analogna tvrđenja Lemama 2.5.1. i 2.5.2. važe i za backward-forward bisimulacije. Drugim rečima, kompozicija dve backward-forward bisimulacije i supremum proizvoljne familije backward-forward bisimulacija su takođe, backward-forward bisimulacije. Prema tome, ako postoji najmanje jedna backward-forward bisimulacija između fazi mreža $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ kao u Teoremi

2.5.3. možemo pokazati da postoji najveća backward-forward bisimulacija φ između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$. Ipak, za razliku od forward i backward bisimulacija, u slučaju backward-forward bisimulacija ne možemo pokazati da je φ parcijalna fazi funkcija, jer ne možemo da pokazemo da je $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$ backward-forward bisimulacija.

Bez obzir na to, pokazaćemo da backward-forward bisimulacije imaju neka važna svojstva koja forward i backward bisimulacije imaju.

Teorema 2.7.1. *Neka su $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ fazi mreže i neka je $\varphi \in \mathcal{F}(A \times A')$ uniformna fazi relacija. Tada je φ backward-forward bisimulacija ako i samo ako važi:*

(i) *E^{φ}_{A} je forward bisimulacija na $\mathcal{A}$;*
(ii) *$E^{\varphi}_{A'}$ je backward bisimulacija na $\mathcal{A}'$;*
(iii) *$\bar{\varphi}$ je izomorfizam količničkih fazi socijalnih mreža $\mathcal{N}/E^{\varphi}_{A}$ i $\mathcal{N}'/E^{\varphi}_{A'}$.*

Dokaz: Jednostavnosti radi stavimo $\alpha = E^{\varphi}_{A}$ i $\alpha' = E^{\varphi}_{A'}$. Kako je φ uniformna fazi relacija, imamo da je $\alpha = \varphi \circ \varphi^{-1}$ i $\alpha' = \varphi^{-1} \circ \varphi$.

Neka je φ backward-forward bisimulacija. Tada je

$$\begin{aligned}
\alpha \circ R_i \circ \alpha &= \varphi \circ \varphi^{-1} \circ R_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ R'_i \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ R'_i \circ \varphi^{-1} \\
&= R_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = R_i \circ \alpha, \\
\alpha \circ p_j &= \varphi \circ \varphi^{-1} \circ p_j = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ p'_j = \varphi \circ p'_j = p_j, \\
\alpha' \circ R'_i \circ \alpha' &= \varphi^{-1} \circ \varphi \circ R'_i \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ R_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ R_i \circ \varphi \\
&= \varphi^{-1} \circ \varphi \circ R'_i = \alpha' \circ R'_i, \\
p'_j \circ \alpha' &= p'_j \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = p_j \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = p_j \circ \varphi = p'_j,
\end{aligned}$$

i prema tome, $\alpha = E^{\varphi}_{A}$ je forward bisimulaciona fazi ekvivalencija na $\mathcal{N}$ i $\alpha' = E^{\varphi}_{A'}$ je backward bisimulaciona fazi ekvivalencija na $\mathcal{N}'$. Na isti način kao u dokazu Teoreme 2.6.3. dokazujemo da je $\bar{\varphi}$ izomorfozam između fazi mreža $\mathcal{N}/\alpha$ and $\mathcal{N}'/\alpha'$.

Obratno, pretpostavimo da važe uslovi (i), (ii) i (iii). Za svako $\psi \in CR(\varphi)$, $\xi \in CR(\varphi^{-1})$, $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in A'$ i $i \in I$, kao u dokazu Teoreme 2.6.3. pokazujemo da je

$$\begin{aligned}
(\alpha \circ R_i \circ \alpha)(a_1, a_2) &= (\alpha' \circ R'_i \circ \alpha')(\psi(a_1), \psi(a_2)), \\
(\alpha' \circ R'_i \circ \alpha')(b_1, b_2) &= (\alpha \circ R_i \circ \alpha)(\xi(b_1), \xi(b_2))
\end{aligned}$$

i iz (i) i (ii) dobijamo

$$\begin{aligned}
R_i \circ \varphi &= R_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = R_i \circ \alpha \circ \varphi = \alpha \circ R_i \circ \alpha \circ \varphi = \alpha \circ R_i \circ \varphi, \\
\varphi \circ R'_i &= \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ R'_i = \varphi \circ \alpha' \circ R'_i = \varphi \circ \alpha' \circ R'_i \circ \alpha' = \varphi \circ R'_i \circ \alpha'.
\end{aligned}$$

Sada, za sve $a \in A$ and $b \in A'$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
(R_i \circ \varphi)(a,b) = (\alpha \circ R_i \circ \varphi)(a,b) &= \bigvee_{a_1 \in A} (\alpha \circ R_i)(a,a_1) \otimes \varphi(a_1,b) \\
&= \bigvee_{a_1 \in A} (\alpha \circ R_i)(a,a_1) \otimes \alpha(a_1,\xi(b)) = (\alpha \circ R_i \circ \alpha)(a,\xi(b)) \\
&= (\alpha' \circ R'_i \circ \alpha')(\psi(a),\psi(\xi(b))) = (\alpha' \circ R'_i \circ \alpha')(\psi(a),b) \\
&= \bigvee_{b_1 \in A'} \alpha'(\psi(a),b_1) \otimes (R'_i \circ \alpha')(b_1,b) = \bigvee_{b_1 \in A'} \varphi(a,b_1) \otimes (R'_i \circ \alpha')(b_1,b) \\
&= (\varphi \circ R'_i \circ \alpha')(a,b) = (\varphi \circ R'_i)(a,b),
\end{aligned}
$$

i odatle je, $R_i \circ \varphi = \varphi \circ R'_i$. Prema tome, φ je forward-backward bisimulacija.
□

Takođe važi sledeće:

Teorema 2.7.2. *Neka su $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ fazi mreže i neka je E forward bisimulacija na $\mathcal{N}$ i F backward bisimulacija na $\mathcal{N}'$.*

Tada postoji uniformna backward-forward bisimulacija $\varphi \in L^{A\times A'}$ takva da je

$$E^{\varphi}_{A} = \alpha \;\; i \;\; E^{\varphi}_{A'} = \alpha', \tag{2.100}$$

ako i samo ako postoji izomorfizam $\phi : \mathcal{N}/\alpha \to \mathcal{N}'/\alpha'$ tako da za sve $a_1, a_2 \in A$ imamo

$$\bar{\alpha}(\alpha_{a_1}, \alpha_{a_2}) = \bar{\alpha}'(\phi(\alpha_{a_1}), \phi(\alpha_{a_2})). \tag{2.101}$$

Dokaz ove teoreme ćemo izostaviti pošto je isti kao dokaz Teoreme 2.6.4. i biće izostavljen.

Za razliku od forward bisimulacija, koje služe da se definiše ekvivalencija između fazi mreža, backward-forward bisimulacije nemaju ovu svrhu, jer ne obezbeđuju simetričnost.

2.8. Algoritmi za računanje najvećih bisimulacija

Kozen je u radu [73] dao algoritam koji odlučuje da li postoji bar jedna forward bisimulacija između automata i kada forward bisimulacija postoji, isti algoritam računa najveću takvu bisimulaciju. Druga verzija ovog algoritma data je u radu [20] u kome je predstavljen i analogni algoritam za backward-forward bisimulacije. U ovom odeljku ćemo predstaviti slične algoritme kojima se utvrđuje da li postoji forward bisimulacija i backward-forward bisimulacija između dve jedno-modalitetne fazi socijalne mreže i ako one postoje ovi algoritmi računaju najveće takve bisimulacije.

Pošto samo konačne mreže imaju praktični značaj, u ovom odeljku ćemo posmatrati dve konačne fazi mreže $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$. Naredna teorema predstavlja algoritam kojim se utvrđuje da li postoji forward bisimulacija između ove dve fazi mreže i računa najveća forward bisimulacija.

Teorema 2.8.1. *Neka su $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ dve fazi mreže. Definišimo induktivno niz $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fazi relacija između A and A' na sledeći način:*

$$\varphi_1 = (p_j\backslash p'_j) \wedge (p_j/p'_j), \ \ \text{za svako } j \in J \tag{2.102}$$

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k \wedge \bigwedge_{i\in I} \Big([(R'_i \circ \varphi_k^{-1})/R_i]^{-1} \wedge [(R_i \circ \varphi_k)/R'_i] \Big). \tag{2.103}$$

Tada je $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ neopadajući niz relacija i postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $\varphi_k = \varphi_{k+1}$.

Relacija φ_k je najveća fazi relacija između A and A' koja zadovoljava uslove (2.65), (2.66), (2.71) i (2.72) za forward bisimulacije između fazi mreža.

Šta više, ako φ_k zadovoljava uslove (2.64) and (2.70) onda je φ_k najveća forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$. Sa druge strane ako φ_k ne zadovoljava ove uslove, onda ne postoji forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$.

Dokaz: (a) Jasno je da je $\varphi_{k+1} \leqslant \varphi_k$, za svako $k \in \mathbb{N}$. Kako su skupovi A i A' konačni, postoji konačan niz relacija između A and A', pa postoje i $k, m \in \mathbb{N}$ takvi da je $\varphi_k = \varphi_{k+m}$. Sada, $\varphi_{k+1} \leqslant \varphi_{k+m} = \varphi_k \leqslant \varphi_{k+1}$, i prema tome važi $\varphi_k = \varphi_{k+1}$.

Dalje, neka je $\varphi = \varphi_k$. Jasno je da fazi relacija $\psi \leqslant L^{A\times A'}$ zadovoljava nejednakosti (2.65) i (2.71) u odnosu na atribute za forward bisimulacije ako i samo ako je $\psi \leqslant \varphi_1$, odakle sledi da φ zadovoljava (2.65) i (2.71). Šta više, iz uslova (2.103) koji definiše φ_{k+1} sledi da je

$$\varphi = \varphi \wedge \bigwedge_{i\in I} \Big([(R'_i \circ \varphi_k^{-1})/R_i]^{-1} \wedge [(R_i \circ \varphi_k)/R'_i] \Big),$$

i za svako $i \in I$ dobijamo da je $\varphi \leqslant ((R'_i \circ \varphi^{-1})/R_i)^{-1}$ i $\varphi \leqslant (R_i \circ \varphi)/R'_i$, odnosno, $\varphi^{-1} \leqslant (R'_i \circ \varphi^{-1})/R_i$ i $\varphi \leqslant (R_i \circ \varphi)/R'_i$. Odavde je jasno da $\varphi^{-1} \circ R_i \leqslant R'_i \circ \varphi^{-1}$ i $\varphi \circ R_i \leqslant R_i \circ \varphi$, pa φ zadovoljava uslove (2.66) i (2.72) za forward bisimulacije između socijalnih fazi mreža.

Neka je $\psi \in L^{A\times A'}$ proizvoljna fazi relacija koja zadovoljava (2.65), (2.66), (2.71) i (2.72). Kao što smo već rekli, ψ zadovoljava (2.65) i (2.71) ako i samo ako je $\psi \leqslant \varphi_1$. Pretpostavimo da je $\psi \leqslant \varphi_j$, za neko $j \in \mathbb{N}$. Tada imamo da je $\psi^{-1} \circ R_i \leqslant R'_i \circ \psi^{-1} \leqslant R'_i \circ \varphi_j^{-1}$, odakle je $\psi^{-1} \leqslant (R'_i \circ \varphi_j^{-1})/R_i$, odnosno, $\psi \leqslant ((R'_i \circ \varphi_j^{-1})/R_i^{-1}$, za svako $i \in I$. Analogno dobijamo $\psi \leqslant (R_i \circ \varphi_j)/R'_i$. Prema tome,

$$\psi \leqslant \varphi_j \wedge \bigwedge_{i\in I} \Big([(R'_i \circ \varphi_j^{-1})/R_i]^{-1} \wedge [(R_i \circ \varphi_j)/R'_i]) \Big) = \varphi_{j+1}.$$

Sada, indukcijom zaključujemo da je $\psi \leqslant \varphi_j$, za svako $j \in \mathbb{N}$, te je dakle, $\psi \leqslant \varphi$. Ovo znači da je φ najveća fazi relacija koja zadovoljava uslove (2.65), (2.66), (2.71) i (2.72).

Pored toga, ako φ zadovoljava uslove (2.64) i (2.70) za forward bisimulacije među atributima fazi socijalnih mreža, onda je φ forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$, i to je upravo najveća takva forward bisimulacija.

Sa druge strane, pretpostavimo da φ ne zadovoljava (2.64) i (2.70). Ako je ψ proizvoljna forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$, onda ona zadovoljava (2.65), (2.66), (2.71) i (2.72) i prema tome $\psi \leqslant \varphi$. Ovo povlači da je $p_j \leqslant p'_j \circ \psi^{-1} \leqslant p'_j \circ \varphi^{-1}$ i $p'_j \leqslant p_j \circ \psi \leqslant p_j \circ \varphi$, što dovodi do kontradikcije. Dakle, zaključujemo da ako φ ne zadovoljava uslove (2.64) i (2.70), onda ne postoji forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$. □

Prema prethodnom, da bi utvrdili da li postoji forward bisimulacija između dve fazi mreže i da bi izračunali najveću, treba da konstruišemo niz $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fazi relacija na sledeći način. Prva relacija φ_1 računa se kao najveća fazi relacija koja zadovoljava uslove (2.65) i (2.71). Zatim počinjemo iterativnu proceduru koja računa φ_{k+1} iz φ_k i proveravamo da li je $\varphi_{k+1} = \varphi_k$. Procedura se završava kada nađemo najmanje $k \in \mathbb{N}$ za koje je $\varphi_{k+1} = \varphi_k$. Posle toga proveravamo da li φ_k zadovoljava (2.64) i (2.70). Ako φ_k ne zadovoljava ove nejednakosti, zaključujemo da ne postoji forward bisimulacija između datih fazi mreža, dok ako relacija φ_k zadovoljava (2.64) i (2.70) zaključujemo da je ona najveća forward bisimulacija između datih fazi mreža.

Naredna teorema, koja se može dokazati na sličan način kao Teorema 2.8.1. predstavlja algoritam koji ispituje da li postoji backward-forward bisimulacija između dve fazii mreže i računa najveću backward-forward bisimulaciju ako ona postoji.

Teorema 2.8.2. *Neka su $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ dve fazi mreže. Definišimo induktivno niz $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fazi relacija između A and A' na sledeći način:*

$$\varphi_1 = (p_j \backslash p'_j) \wedge (p_j / p'_j),$$

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k \wedge \bigwedge_{i\in I} \Big([(R_i \circ \varphi_k)/R'_i] \wedge [R_i \backslash (\varphi_k \circ R'_i)] \Big).$$

Tada je $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ neopadajući niz fazi relacija i postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $\varphi_k = \varphi_{k+1}$.

Relacija φ_k je najveća fazi relacija između A and A' koja zadovoljava uslove (2.67), (2.69), (2.71) i (2.72).

Šta više, ako φ_k zadovoljava uslove (2.68) and (2.70) onda je φ_k najveća backward-forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$. Sa druge strane ako φ_k ne zadovoljava ove uslove, onda ne postoji backward-forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$.

U Teoremama 2.8.1. i 2.8.2. predstavili smo procedure koje testiraju da li postoji najveća forward ili backward-forward fazi bisimulacija između dve jedno-modalitetne fazi mreže, koje takođe, računaju najveće ovakve bisimulacije, ako one postoje. Malom modifikacijom niza $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ relacija možemo dobiti odgovarajuće procedure i za druge tipove simulacija i bisimulacija:

najveća forward simulacija:

$$\varphi_1 = p_j \backslash p'_j, \qquad \varphi_{k+1} = \varphi_k \wedge \bigwedge_{i\in I} \Big((R'_i \circ \varphi_k^{-1})/R_i\Big)^{-1},$$

najveća backward simulacija:

$$\varphi_1 = p_j \backslash p'_j, \qquad \varphi_{k+1} = \varphi_k \wedge \bigwedge_{i\in I} R_i \backslash (\varphi_k \circ R'_i),$$

najveća backward bisimulacija:

$$\varphi_1 = (p_j \backslash p'_j) \wedge (p_j / p'_j), \quad \varphi_{k+1} = \varphi_k \wedge \bigwedge_{i\in I} \Big([R_i \backslash (\varphi_k \circ R'_i)] \wedge [R'_i \backslash (\varphi_k^{-1} \circ R_i)]^{-1}\Big),$$

najveća forward-backward bisimulacija:

$$\varphi_1 = (p_j \backslash p'_j) \wedge (p_j / p'_j), \quad \varphi_{k+1} = \varphi_k \wedge \bigwedge_{i\in I} \Big([(R'_i \circ \varphi_k^{-1})/R_i]^{-1} \wedge [R'_i \backslash (\varphi_k^{-1} \circ R_i)])^{-1}\Big).$$

2.9. Regularne bisimulacije

O ovom odeljku ćemo pažnju pre svega usmeriti na najrestriktivniji tip bisimulacije, na regularne bisimulacije.

Pre svega, dokazujemo sledeću teoremu.

Teorema 2.9.1. *Neka su $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$ fazi mreže takve da postoji najmanje jedna regularna bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$. Tada postoji najveća regularna bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$.*

Pri tome je najveća regularna bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$ je parcijalna fazi funkcija.

Dokaz: Ako je familija svih regularnih bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$ je neprazna, lako je proveriti da unija ove familije je takođe regularna bisimulacija, i kao takve je najveća regularna bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$.

Dalje, ako je φ najveća regularna bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$, tada je $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$ takođe regularna bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$, i možemo zaključiti da je $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \leqslant \varphi$. Takođe, φ je parcijalna fazi funkcija. □

Naredna teorema daje metodu za testiranje postojanja regularne bisimulacije između dve fazi mreže.

Teorema 2.9.2. *Neka su $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ fazi mreže.*

Tada postoji najveća fazi relacija $\varphi \in L^{A\times A'}$ koja zadovoljava jednakosti (2.84), (2.85) *i nejednakosti*

$$\varphi \circ p'_j \leqslant p_j, \ \ \varphi^{-1} \circ p_j \leqslant p'_j, \ \ \textit{za svako } j \in J. \tag{2.104}$$

Ako, pored ovoga, φ zadovoljava i

$$p_j \leqslant \varphi \circ p'_j, \ \ p'_j \leqslant \varphi^{-1} \circ p_j, \ \ \textit{za svako } j \in J, \tag{2.105}$$

tada je φ najveća regularna bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$.

U suprotnom, ako φ ne zadovoljava (2.105), *tada ne postoji regularna bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$.*

Dokaz: Očigledno, familija svih fazi relacija između A i A' koje zadovoljavaju (2.84), (2.85) i (2.104) je neprazna, zato što sadrži praznu relaciju između A i A'. Koristeći se istim argumentima kao u dokazu Teoreme 2.9.1. dobijamao da je unija φ svih članova ove familije najveća fazi relacija između A i A' koja zadovoljava (2.84), (2.85) i (2.104).

Ako φ zadovoljava (2.105), tada je φ regularna bisimulacija, a kako proizvoljna regularna bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$ mora da zadovolji (2.84), (2.85) i (2.104), i φ je najveća fazi relacija između A i A' koja zadovoljava ove uslove, možemo zaključiti da je φ najveća regularna bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$.

Pretpostavimo da postoji regularna bisimulacija ψ između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$. Tada ψ zadovoljava (2.84), (2.85) i (2.104), pa važi $\psi \leqslant \varphi$, pa kao posledicu dobijamo:

$$p_j = \psi \circ p'_j \leqslant \varphi \circ p'_j$$

i

$$p'_j = \psi^{-1} \circ p_j \leqslant \varphi^{-1} \circ p_j,$$

za svako $j \in J$, što znači da φ zadovoljava (2.105). Dakle, ako φ ne zadovoljava (2.105), tada ne postoji regularna bisimulacija između fazi mreža $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$. □

Primetimo da u opštem slučaju fazi relacija φ iz prethodne teoreme može biti prazna. Međutim, ako φ zadovoljava (2.105), tada ona mora biti neprazna.

Za fazi mreže $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$, označimo sa $\mathcal{L}(\mathcal{N}, \mathcal{N}')$ podalgebru od $\mathcal{L}$ generisanu svim istinitosnim vrednostima fazi relacija i fazi skupova iz familija $\{R_i\}_{i\in I}$, $\{R'_i\}_{i\in I}$, $\{p_j\}_{j\in J}$ i $\{p'_j\}_{j\in J}$.

Sada ćemo dokazati teoremu koja daje način za testiranje postojanja regularne bisimulacija između dve fazi mreže, kao i za izračunavanje najveće, u slučaju da ona postoji.

Teorema 2.9.3. *Neka su $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ fazi mreže, i neka je $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz fazi relacija između A i A' definisan induktivno na sledeći način:*

$$\varphi_1 = \bigwedge_{j\in J} (p_j \backslash p'_j) \wedge (p_j/p'_j),$$

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k \wedge \bigwedge_{i\in I} \Big([R_i \backslash (\varphi_k \circ R'_i)] \wedge [(R_i \circ \varphi_k)/R'_i] \wedge [(R'_i \circ \varphi_k^{-1})/R_i]^{-1} \wedge [R'_i \backslash (\varphi_k^{-1} \circ R_i)]^{-1} \Big),$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Tada su sledeća tvrđenja tačna:

(a) *niz $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je opadajući;*

(b) *ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $\varphi_{n+1} = \varphi_n$, tada*

- (b1) *φ_n je najveća regularna fazi relacija između A i A' koja zadovoljava uslove* (2.84), (2.85) *i* (2.104)*;*
- (b2) *ako relacija φ_n zadovoljava* (2.105)*, tada ona predstavlja najveću regularnu bisimulaciju između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$;*
- (b3) *ako relacija φ_n ne zadovoljava* (2.105)*, tada ne postoji regularna bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$;*

(c) *ako su A i A' konačni skupovi i podalgebra $\mathcal{L}(\mathcal{N},\mathcal{N}')$ zadovoljava DCC uslov, tada je $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konačan niz i postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da važi $\varphi_{n+1} = \varphi_n$.*

Dokaz: (a) Jasno je da je niz $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ opadajući.

(b) Prvo primetimo da za proizvoljnu fazi relaciju $\varphi \in L^{A\times A'}$ imamo da važi $\varphi \leqslant \varphi_1$ ako i samo ako

$$\varphi \leqslant p_j \backslash p'_j \ \text{ i } \ \varphi \leqslant p_j/p'_j$$

za svako $j \in J$, što je ekvivalentno sa

$$\varphi^{-1} \circ p_j = p_j \circ \varphi \leqslant p'_j \ \text{ i } \ \varphi \circ p'_j \leqslant p_j,$$

za svako $j \in J$. Ovo znači da φ zadovoljava uslov (2.104) ako i samo ako $\varphi \leqslant \varphi_1$, i φ_1 je najveća fazi relacija između A i A' što zadovoljava (2.104). Pa prema tome φ_k zadovoljava (2.104) za svako $k \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo sada da je $\varphi_{n+1} = \varphi_n$ za neko $n \in \mathbb{N}$. Za svako $i \in I$, iz nejednakosti $\varphi_n = \varphi_{n+1} \leqslant R_i \backslash (\varphi_n \circ R'_i)$ sledi da važi $R_i \circ \varphi_n \leqslant \varphi_n \circ R'_i$, i na sličan način dobijamo da je $\varphi_n \circ R'_i \leqslant R_i \circ \varphi_n$, $\varphi_n^{-1} \circ R_i \leqslant R'_i \circ \varphi_n^{-1}$ i $R'_i \circ \varphi_n^{-1} \leqslant \varphi_n^{-1} \circ R_i$. Pa iz svega ovoga sledi da φ_n zadovoljava (2.84), (2.85) i (2.104).

Neka je $\varphi \in L^{A\times A'}$ proizvoljna fazi relacija koja zadovoljava (2.84), (2.85) i (2.104). Tada je $\varphi \leqslant \varphi_1$, jer je φ_1 najveća fazi relacija koja zadovoljava (2.104). Pretpostavimo da važi $\varphi \leqslant \varphi_k$, za neko $k \in \mathbb{N}$. Tada za svako $i \in I$ imamo da važi

$$R_i \circ \varphi = \varphi \circ R'_i \leqslant \varphi_k \circ R'_i,$$

odakle sledi

$$\varphi \leqslant R_i \backslash (\varphi_k \circ R'_i).$$

Na isti način dobijamo da važi $\varphi \leqslant (R_i \circ \varphi_k)/R'_i$, $\varphi \leqslant [(R'_i \circ \varphi_k^{-1})/R_i]^{-1}$ i $\varphi \leqslant [R'_i \backslash (\varphi_k^{-1} \circ R_i)]^{-1}$, što znači da važi $\varphi \leqslant \varphi_{k+1}$. Sada, indukcijom zaključujemo da je $\varphi \leqslant \varphi_k$, za svako $k \in \mathbb{N}$, pa kao posledicu imamo da važi $\varphi \leqslant \varphi_n$. Dakle, dokazali smo da je φ_n najveća fazi relacija između A i A' koja zadovoljava (2.84), (2.85) i (2.104).

Tvrđenja (b2) i (b3) slede direktno kao posledica Teoreme 2.9.2.

(c) Neka su dati A i A' konačni skupovi i podalgebra $\mathcal{L}(\mathcal{N},\mathcal{N}')$ koja zadovoljava DCC uslov. Za bilo koji par $(a,a') \in A \times A'$, važi da je niz $\{\varphi_k(a,a')\}_{k\in\mathbb{N}}$ opadajući u $\mathcal{L}(\mathcal{N},\mathcal{N}')$. Prema pretpostavci, ovaj niz postaje konstantan nakon određenog broja članova, a kako postoji konačno mnogo ovakvih nizova, zaključujemo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da svi nizovi postaju konstantni nakon n koraka. Dakle, niz $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je konačan i $\varphi_{n+1} = \varphi_n$ za $n \in \mathbb{N}$ čije je postojanje ustanovljeno u prethodnom delu.

Ovim je kompletiran dokaz teoreme. □

Prethodna teorema daje proceduru kojom je moguće ustanoviti da li postoji regularna bisimulacija između dve fazi mreže, i u slučaju kada postoji, ista procedura izračunava najveću. U proceduri se pravi opadajući niz fazi relacija, na način koji je prikazan u Teoremi 2.9.3., i kad god novi član niza bude izračunat, procedura proverava da li je taj novi čan jednak prethodno izračunatom članu niza. Procedura se završava čim se pronađe prvi par jednakih susednih članova niza, i u tom slučaju poslednji izračunati član niza predstavlja najveću fazi relaciju koja zadovoljava uslove (2.84), (2.85) i (2.104). Tada, procedura proverava da li ova fazi relacija zadovoljava uslov (2.105). Ukoliko je uslov zadovoljen, tada je ta poslednja izračunata relacija zapravo najveća regularna bisimulacija između datih fazi mreža. S druge strane, ako ona ne zadovoljava uslov (2.105), tada ne postoji ni jedna regularna bisimulacija između ovih fazi mreža.

Međutim, predložena procedura se obavezno ne završava u konačnom broju koraka. Kraj procedure zavisi od pripadajuće strukture istinitosnih vrednosti, kao i od vrednosti koje uzimaju fazi relacije i fazi skupovi koje određuju razmatrane fazi mreže. Teorema 2.9.3. daje dovoljne uslove za prekid precedure u konačnom broju koraka, kada podalgebra $\mathcal{L}(\mathcal{N},\mathcal{N}')$ zadovoljava DCC uslov. Na primer, ovaj uslov je zadovoljen ako je $\mathcal{L}$ lokalno konačna algebra, što zapravo znači ako je svaka konačno generisana podalgebra od $\mathcal{L}$ konačna. Najpoznatije lokalno konačne strukture su Boolean struktura i Gödelova struktura. Više informacija o lokalnoj konačnosti t-normiranih struktura možemo naći u nedavno objavljenom radu [55].

Pretpostavimo da su I, A i A' konačni skupovi i podalgebra $\mathcal{L}(\mathcal{N},\mathcal{N}')$ zadovoljava DCC. Neka su $c_\otimes$, $c_\vee$, $c_\to$ i $c_\wedge$ su cene izvršenja operacija $\otimes$, $\vee$, $\to$ i $\wedge$ u $\mathcal{L}$, i označimo sa $|I|$, $|A|$ i $|A'|$ broj elemenata skupova I, A i A'. Može se pokazati da svaki pojedinačni korak može biti realizovan u vremenu $O(|I| \cdot |A| \cdot |A'| \cdot (|A| + |A'|) \cdot (c_\otimes + c_\vee + c_\to + c_\wedge))$. Vrednosti odgovarajućih unosa od $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ formiraju $|A| \cdot |A'|$ opadajući lanac elemenata u algebri $\mathcal{L}(\mathcal{N},\mathcal{N}')$, pa zato postoji $l \in \mathbb{N}$, tako da je broj različitih elemenata u svakom od ovih lanaca manji ili jednak od l. Broj koraka u našoj proceduri je $O(l\cdot|A|\cdot|A'|)$, a ukupno vreme izvršenja cele procedure je

$$O(l\cdot|I|\cdot|A|^2\cdot|A'|^2\cdot(|A|+|A'|)\cdot(c_\otimes+c_\vee+c_\to+c_\wedge)).$$

Primetimo da je broj l karakterističan za niz $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ a u opštem slučaju to nije broj koji na bilo koji način karakteriše algebru $\mathcal{L}(\mathcal{N},\mathcal{N}')$. Međutim, ponekad broj različitih elemenata u svim opadajućim nizovima u $\mathcal{L}(\mathcal{N},\mathcal{N}')$ može imati gornju granicu l. Na primer, ako je algebra $\mathcal{L}(\mathcal{N},\mathcal{N}')$ konačna, tada mi možemo pretpostaviti da je l broj njenih elemenata. Naročito, ako je $\mathcal{L}$ Gödel-ova struktura, tada jedine vrednosti koje mogu uzeti fazi relacije $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ jesu 1 i one vrednosti fazi skupova i relacija koje određuju $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$, pa je broj ovih vrednosti konačan. Ako ovaj broj označimo sa j, tada je ukupno vreme izračunavanja procedure dato sa $O(j\cdot|I|\cdot|A|^2\cdot|A'|^2\cdot(|A|+|A'|))$ (jer operacije $\otimes$, $\vee$, $\to$ i $\wedge$ mogu biti obavljene u konstantnom vremenu). Ako je $\mathcal{L}$ Boolova struktura, tada je $j=2$ i procedura se izvršava u vremenu $O(|I|\cdot|A|^2\cdot|A'|^2\cdot(|A|+|A'|))$.

Prema Teoremi 2.9.1., ako postoji barem jedna regularna bisimulacija između dve fazi mreže, tada postoji najveća, i ona predstavlja parcijalnu fazi funkciju. Međutim, ako želimo da uspostavimo neku vrstu strukturne sličnosti između dve vazi mreže, neophodno je da svaki učesnik iz prve mreže bude "sličan" nekom učesniku iz druge, i obratno. Drugim rečima, ove regularne bisimulacije koje su sirjektivne $\mathcal{L}$-funkcije su specijalno interesantne. Lako je proveriti da ako postoji regularna bisimulacija između dve fazi mreže koja je sirjektivna $\mathcal{L}$-funkcija, tada i najveća bisimulacija ima takođe ovu osobinu, tj. ona je uniformna fazi funkcija. Prema ovome, možemo zaključiti da je veoma interesantno proučavati regularne bisimulacije koje su uniformne fazi relacije.

Sledeća teorema pokazuje da uniformna regularna bisimulacija između dve fazi mreže određuje par regularnih ekvivalencija na ovim mrežama, kao i jedan izomorfizam između odgovarajućih količničkih fazi mreža (tj. izomorfizam između pozicija i uloga u ovim mrežama), i obrnuto.

Teorema 2.9.4. *Neka su $\mathcal{N}=(A,\{R_i\}_{i\in I},\{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}'=(A',\{R'_i\}_{i\in I},\{p'_j\}_{j\in J})$ fazi mreže i neka je $\varphi\in L^{A\times A'}$ uniformna fazi relacija. Tada je φ regularna bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$ ako i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

(i) *jezgro relacije φ je regularna ekvivalencija na $\mathcal{N}$;*

(ii) *kojezgro od φ je regularna ekvivalencija na $\mathcal{N}'$;*

(iii) *$\tilde{\varphi}$ je izomorfizam količnik mreža $\mathcal{N}/E_A^\varphi$ i $\mathcal{N}'/E_{A'}^\varphi$.*

Dokaz: Označimo sa $E_A^\varphi=\alpha$ and $E_{A'}^\varphi=\alpha'$. Prema Teoremi 4.2 [23] sledi da je $\alpha=\varphi\circ\varphi^{-1}$ i $\alpha'=\varphi^{-1}\circ\varphi$, i za svako $\psi\in CR(\varphi)$, $a,b\in A$ i $a'\in A'$ imamo da je

$$\varphi(a,\psi(b))=\alpha(a,b)\ \text{ i }\ \varphi(a,a')=\alpha'(\psi(a),a')).$$

Pretpostavimo da je φ regularna bisimulacija. Tada za svako $i\in I$ imamo da je

$$\begin{aligned}\alpha\circ R_i &= \varphi\circ\varphi^{-1}\circ R_i=\varphi\circ R_i'\circ\varphi^{-1}\\ &= R_i\circ\varphi\circ\varphi^{-1}=R_i\circ\alpha,\end{aligned}$$

i za svako $j\in J$ imamo da je

$$p_j\circ\alpha=p_j\circ\varphi\circ\varphi^{-1}\leqslant p_j'\circ\varphi^{-1}\leqslant p_j\leqslant p_j\circ\alpha,$$

odakle zaključujemo da je $p_j\circ\alpha=p_j$. Dakle, α je regularna ekvivalencija na $\mathcal{N}$. Na isti način pokazujemo da je α' regularna bisimulacija na $\mathcal{N}'$.

Dalje, za proizvoljno $i\in I, a,b\in A$ i $\psi\in CR(\varphi)$ imamo da važi niz jednakosti:

$$\begin{aligned}\bar{R}_i'(\bar\varphi(\alpha_a),\bar\varphi(\alpha_b)) &= \bar{R}_i'(\alpha'_{\psi(a)},\alpha'_{\psi(b)})\\ &= (\alpha'\circ R_i'\circ\alpha')(\psi(a),\psi(b))\\ &= (\varphi^{-1}\circ R_i\circ\varphi)(\psi(a),\psi(b))\\ &= \bigvee_{c,d\in A}\varphi^{-1}(\psi(a),c)\otimes R_i(c,d)\otimes\varphi(d,\psi(b))\\ &= \bigvee_{c,d\in A}\alpha(a,c)\otimes R_i(c,d)\otimes\alpha(d,b)\\ &= (\alpha\circ R_i\circ\alpha)(a,b)\\ &= \bar{R}_i(\alpha_a,\alpha_b).\end{aligned}$$

Takođe, za svako $j\in J$ prema (2.64) i (2.65) sledi

$$\varphi^{-1}\circ p_j\leqslant\varphi^{-1}\circ\varphi\circ p_j'=\alpha'\circ p_j'=p_j'\leqslant\varphi^{-1}\circ p_j,$$

pa je $\varphi^{-1}\circ p_j=\alpha'\circ p_j'$, i za svako $j\in J$, $a\in A$ i $\psi\in CR(\varphi)$ dobijamo da je

$$\begin{aligned}\bar{p}_j'(\bar\varphi(\alpha_a)) &= \bar{p}_j'(\alpha'_{\psi(a)})=(\alpha'\circ p_j')(\psi(a))\\ &= (\varphi^{-1}\circ p_j)(\psi(a))\\ &= \bigvee_{b\in A}\varphi^{-1}(\psi(a),b))\otimes p_j(b)\\ &= \bigvee_{b\in A}\alpha(a,b))\otimes p_j(b)\\ &= (\alpha\circ p_j)(a)=\bar{p}_j(\alpha_a).\end{aligned}$$

Dakle, $\bar\varphi$ je izomorfizam količnik mreža $\mathcal{N}/E_A^{\varphi}$ i $\mathcal{N}'/E_{A'}^{\varphi}$.

Obrnuto, pretpostavimo da važe uslovi (i), (ii) i (iii).

Za svako $j\in J$, $a\in A$ i $\psi\in CR(\varphi)$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
p_j(a) = (p_j \circ \alpha)(a) &= \bar{p}_j(\alpha_a) = \bar{p}'_j(\bar{\varphi}(\alpha_a)) \\
&= \bar{p}'_j(\alpha'_{\psi(a)}) = (p'_j \circ \alpha')(\psi(a)) \\
&= \bigvee_{a' \in A'} p'_j(a') \otimes \alpha'(a', \psi(a)) \\
&= \bigvee_{a' \in A'} p'_j(a') \otimes \varphi(a, a') = (\varphi \circ p'_j)(a),
\end{aligned}
$$

pa je $p_j = \varphi \circ p'_j = p'_j \circ \varphi^{-1}$. Na isti način, koristeći φ^{-1} umesto φ, dobijamo da je $p'_j = \varphi^{-1} \circ p_j = p_j \circ \varphi$.

S druge strane, koristeći činjenicu da su α i α' regularne fazi ekvivalencije na $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$, respektivno, $\varphi = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = \alpha \circ \varphi = \varphi \circ \alpha'$, $\alpha \circ \alpha = \alpha$ i $\alpha' \circ \alpha' = \alpha'$, za proizvoljno $i \in I$ dobijamo

$$
R_i \circ \varphi = R_i \circ \alpha \circ \alpha \circ \varphi = \alpha \circ R_i \circ \alpha \circ \varphi,
$$

i slično,

$$
\alpha' \circ R'_i \circ \alpha' = \alpha' \circ R'_i.
$$

Štaviše, za svako $a, b \in A$ i $\psi \in CR(\varphi)$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
(\alpha \circ R_i \circ \alpha)(a, b) &= \bar{R}_i(\alpha_a, \alpha_b) \\
&= \bar{R}'_i(\bar{\varphi}(\alpha_a), \bar{\varphi}(\alpha_b)) = \bar{R}'_i(\alpha'_{\psi(a)}, \alpha'_{\psi(b)}) \\
&= (\alpha' \circ R'_i \circ \alpha')(\psi(a), \psi(b)).
\end{aligned}
$$

Sada, za proizvoljno $a \in A$, $a' \in A'$ i $\psi \in CR(\varphi)$ imamo da važi

$$
\begin{aligned}
(R_i \circ \varphi)(a, a') &= (\alpha \circ R_i \circ \alpha \circ \varphi)(a, a') \\
&= \bigvee_{b \in A} (\alpha \circ R_i \circ \alpha)(a, b) \otimes \varphi(b, a') \\
&= \bigvee_{b \in A} (\alpha' \circ R'_i \circ \alpha')(\psi(a), \psi(b)) \otimes \alpha'(\psi(b), a') \\
&\leqslant \bigvee_{b' \in A'} (\alpha' \circ R'_i \circ \alpha')(\psi(a), b') \otimes \alpha'(b', a') \\
&= (\alpha' \circ R'_i \circ \alpha' \circ \alpha')(\psi(a), a') \\
&= (\alpha' \circ R'_i)(\psi(a), a') \\
&= \bigvee_{c' \in A'} \alpha'(\psi(a), c') \otimes R'_i(c', a') \\
&= \bigvee_{c' \in A'} \varphi(a, c') \otimes R'_i(c', a') \\
&= (\varphi \circ R'_i)(a, a'),
\end{aligned}
$$

pa tako i $R_i \circ \varphi \leqslant \varphi \circ R'_i$. Na sličan način, koristeći φ^{-1} i $(\bar{\varphi})^{-1}$ umesto φ i $\bar{\varphi}$, dokazujemo suprotnu nejednakost. Zato je $R_i \circ \varphi = \varphi \circ R'_i$. Takođe, slično, dokazujemo da je $\varphi^{-1} \circ R_i = R'_i \circ \varphi^{-1}$.

Dakle, dokazali smo da je φ regularna bisimulacija između mreža $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$. □

U ovom poglavlju smo definisali dva tipa simulacija, kao i pet tipova bisimulacija na fazi socijalnim mrežama, ali smo razmatrali samo jednu od njih - regularnu bisimulaciju. U daljem istraživanju nameravamo da obavimo šire proučavanje svih tipova simulacija i bisimulacija. Ovo je posebno važno ako imamo na umu primer dat od strane Brynielsson i ostalih u [16], koji pokazuje da tzv. simultane ekvivalencije mogu identifikovati socijalne pozicije koje ne mogu biti identifikovane pomoću regularnih ekvivalencija. Dakle, tip relacija ekvivalencije ili bisimulacija koji je interesantan za proučavanje zavisi od konkretnog problema, i neophodno je razmotriti nekoliko različitih tipova ovih relacija za datu mrežu, kako bismo ih potpuno razumeli.

2.10. Primeri testiranja postojanja i izračunavanja najvećih bisimulacija

U ovom odeljku dajemo nekoliko konkretnih i jednostavnih primera u kojima se testira postojanje raznih tipova bisimulacija između jedno-modalitetnih mreža, i u slučaju kada postoji izračunava se najveća bisimulacija.

Primer 2.10.1. Neka su $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ fazi mreže, pri čemu je $A = \{a_1, a_2\}$, $A' = \{a'_1, a'_2, a'_3\}$, $I = \{1,2\}$, $J = \{1\}$, a relacije R_1, R_2, R'_1, R'_2, kao i p_1, p'_1 su dati sa:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad p_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

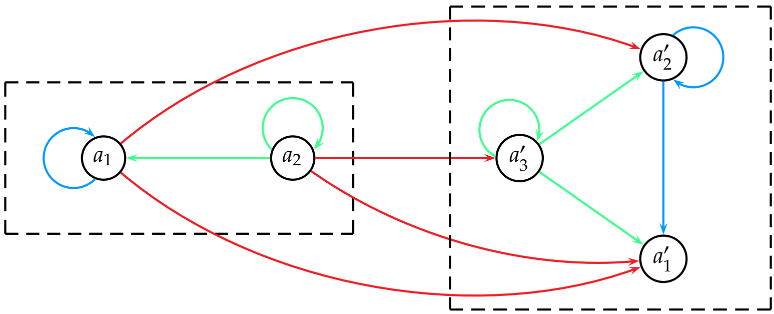
Korišćenjem algoritma za izračunavanje najveće forward bisimulacije dobijamo:

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \varphi_3 = \varphi_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Na osnovu toga što φ_4, odnosno φ_3 ne zadovoljava uslove (2.64) i (2.70) sledi da ne postoji forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$. Međutim, primenom algoritma za računanje najveće backward forward bisimulacije dobijamo:

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \psi_2 = \psi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pa kako ψ_2, odnosno ψ_3 zadovoljava uslov (2.79) i (2.80) sledi da je to najveća backward-forward bisimulacija. U nastavku dajemo grafički prikaz ove mreže.



Plavim linijama su označene relacije R_1, odnosno R'_1, zelenom R_2, odnosno R'_2, dok je crvenom prikazana backward-forward bisimulacija.

Primer 2.10.2. Neka su $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ fazi mreže, pri čemu je $A = \{a_1, \ldots, a_{13}\}$, $A' = \{a'_1, \ldots, a'_7\}$, $I = \{1\}$, $J = \{1\}$, a relacije R_1, R'_1, kao i p_1, p'_1 su dati sa:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0&1&1&0&1&0&0&1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&0&1&0&0&1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&1&0&1&0&0&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \quad R'_1 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&0&1&1 \\ 1&1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1 \\ 0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0&1 \\ 0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \quad p'_1 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

Korišćenjem algoritma za izračunavanje najveće forward bisimulacije dobijamo:

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1&0 \end{bmatrix} \quad \varphi_3 = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&1&0\\ 1&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 1&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&1&0&1&0&0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_4 = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 1&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&1&0&1&0&0 \end{bmatrix} \quad \varphi_5 = \varphi_6 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Na osnovu toga što φ_5, odnosno φ_6 ne zadovoljava uslove (2.64) i (2.70) sledi da ne postoji forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$.

Dalje, primenom algoritma za računanje najveće backward bisimulacije dobijamo:

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \quad \phi_3 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$\phi_4 = \phi_5 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Na osnovu toga što ϕ_4, odnosno ϕ_5 ne zadovoljava uslove (2.73) i (2.74) sledi da ne postoji backward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$.

Međutim, primenom algoritma za računanje najveće backward forward bisimulacije dobijamo:

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \qquad \psi_2 = \psi_3 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

pa kako ψ_2, odnosno ψ_3 zadovoljava uslov (2.79) i (2.80) sledi da je to najveća backward-forward bisimulacija.

Primer 2.10.3. Neka su $\mathcal{N} = (A, \{R_i\}_{i\in I}, \{p_j\}_{j\in J})$ i $\mathcal{N}' = (A', \{R'_i\}_{i\in I}, \{p'_j\}_{j\in J})$ fazi mreže, pri čemu je $A = \{a_1, \dots, a_8\}$, $A' = \{a'_1, \dots, a'_1 0\}$, $I = \{1\}$, $J = \{1\}$, a relacije R_1, R'_1, kao i p_1, p'_1 su dati sa:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&1&1&0&1 \\ 0&1&1&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&1&0&0&0&1 \\ 1&0&1&1&1&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \qquad R'_1 = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&1&0&1&1&1&0&0&1 \\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&1&0&0&0&0&1 \\ 1&1&0&1&1&1&0&0&0&1 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \qquad p'_1 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

Korišćenjem algoritma za izračunavanje najveće forward bisimulacije dobijamo:

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&0&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&0&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&0&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&0&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&0&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \quad \varphi_3 = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&1&0&0&1&1&1 \\ 0&0&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&0&0&1&1&1 \\ 0&0&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&0&0&1&1&1 \\ 1&1&0&0&1&0&0&1&1&1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_4 = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix} \quad \varphi_5 = \varphi_6 = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix}$$

Sada, s obzirom da φ_5, odnosno φ_6 zadovoljava uslove (2.64) i (2.70) sledi da je φ_5 najveća forward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$.

Dalje, primenom algoritma za računanje najveće backward bisimulacije dobijamo:

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&1 \end{bmatrix} \quad \phi_3 = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&1&1&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&1&1&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&1&1&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&1&1&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&1&1&1&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$\phi_4 = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&1 \end{bmatrix} \quad \phi_5 = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&1&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \quad \phi_6 = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$\phi_7 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad \phi_8 = \phi_9 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Na osnovu toga što ϕ_8, odnosno ϕ_9 ne zadovoljava uslove (2.73) i (2.74) sledi da ne postoji backward bisimulacija između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}'$. Međutim, primenom algoritma za računanje najveće backward forward bisimulacije dobijamo:

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \quad \psi_2 = \psi_3 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&0&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&1 \end{bmatrix}$$

pa kako ψ_2, odnosno ψ_3 zadovoljava uslov (2.79) i (2.80) sledi da je to najveća backward-forward bisimulacija.

Glava 3
Dvo-modalitetni fazi relacijski sistemi i dvo-modalitetne fazi mreže

U prethodnoj glavi bavili smo se fazi relacijskim sistemima koje čini familija fazi relacija na jednom istom skupu, koje smo nazivali jedno-modalitetnim. U ovoj glavi razmatramo drugačiji tip fazi relacijskih sistema, koje nazivamo dvo-modalitetnim, koje čini familija fazi relacija između dva različita skupa. Takvi fazi relacijski sistemi imaju razne interpretacije i praktične primene, a mi ćemo ovde uglavnom imati na umu dve posebne interpretacije. Glavna interpretacija koju ćemo imati u vidu su dvo-modalitetne socijalne mreže, gde se jedan od modaliteta interpretira kao skup aktera ili učesnika a drugi kao skup događaja, dok se relacijama između njih određuje učešće aktera u događajima. Više informacija o dvo-modalitenim mrežama se može pronaći u [9, 39, 41, 46, 56]. Osim toga, prvi modalitet možemo shvatiti i kao skup izvesnih objekata, drugi kao skup atributa koje ti objekti mogu imati, dok je relacijama određeno da li dati objekt poseduje dati atribut, čime se dolazi do koncepta formalnog konteksta, koji se sreće, na primer, u konceptualnoj analizi podataka i relacionim bazama podataka.

Nakon Odeljka 3.1., u kome uvodimo osnovne definicije i dajemo primere vezane za dvo-modalitetne fazi i krisp relacijske sisteme i dvo-modalitetne fazi i krisp mreže, u Odeljku 3.2. se bavimo sistemima fazi relacijskih jednačina i nejednačina koji su na prirodan način određeni dvo-modalitetnim fazi relacijskim sistemima. Ono što je karakteristično za svaki od tih dvo-modalitetnih sistema je to da sadrži dve promenljive i rešenja su mu parovi koji se sastoje od fazi relacija na oba modaliteta. Za razliku od jedno-modalitetnih sistema fazi relacijskih jednačina i nejednačina, izučavanih u prethodnoj glavi, čija su najveća rešenja izračunavana iterativnim postupkom, najveća rešenja dvo-modalitetnih sistema fazi relacijskih nejednačina razmatranih u Odeljku 3.2. se izračunavaju bez upotrebe iteracije, jednostavnim operacijama na fazi relacijama. Međutim, to ne važi za dvo-modalitetne sisteme fazi relacijskih jednačina, čija se najveća rešenja izračunavaju korišćenjem iterativnih algoritama koji su bazirani na takozvanom *naizmeničnom algoritmu* koji su razvili Cuninghame-Green i Zimmermann [28, 27] za rešavanje jednačina na parcijalno uređenim skupovima definisanim pomoću rezidualnih funkcija. Kako su kriterijumi zaustavljanja naizmeničnog algoritma, predloženi u [28], karakteristični za parcijalno uređene skupove i nisu primenljivi na fazi relacije, ovde su dati drugačiji kriterijumi koji su specifični baš za fazi relacije. Analizirano je i vreme izvršenja predloženih algoritama.

U Odeljku 3.3. se razvija koncept količničkog dvo-modalitetnog fazi relacijskog sistema sa osnovnom namenom da se upotrebljava u redukciji podataka koji se mogu modelirati pomoću dvo-modalitetnih fazi relacijskih sistema. Na primer, u slučaju dvo-modalitetnih fazi mreža takvim konceptom se obezbeđuje simultana redukcija aktera i događaja, a u slučaju fazi formalnih koncepata simultana redukcija objekata i atributa. Ovde su date karakterizacije količničkih dvo-modalitetnih fazi relacijskih sistema u odnosu na parove fazi kvazi-uređenja i fazi ekvivalencija koji su rešenja fazi relacijskih sistema razmatranih u prethodnom odeljku i prikazane su veoma zanimljive praktične primene dobijenih rezultata. Dalje, u Odeljku 3.4. se razmatraju dvo-modalitetni krisp relacijski sistemi i odgovarajući sistemi relacijskih jednačina, i daju se algoritmi za izračunavanje njihovih najvećih rešenja koji su bazirani na čuvenom algoritmu koji su razvili Paige i Tarjan [91] i rade brže od algoritama prikazanih u Odeljku 3.2.

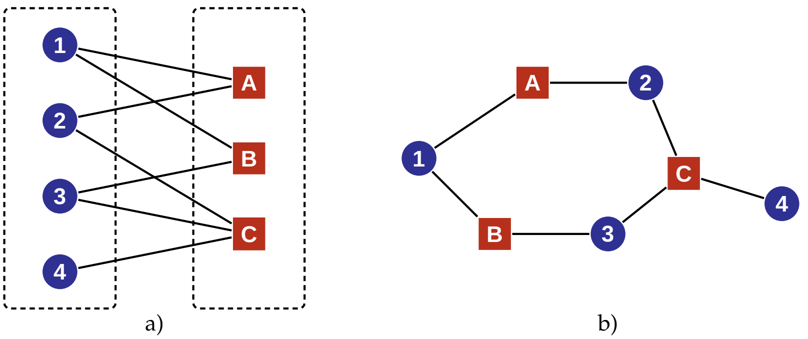
Konačno, u Odeljku 3.5. su prikazani razni pristupi izučavanju dvo-modalitetnih mreža i dato je poređenje direktnog metoda razvijenog u ovoj disertaciji sa metodima svođenja dvo-modalitetnih mreža na jedno-modalitetne.

3.1. Osnovne definicije i primeri

Neka su A i B neprazni skupovi i neka je $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i\in I} \subseteq L^{A\times B}$ neprazna familija nepraznih fazi relacija. Sistem $\mathcal{T} = (A, B, \mathcal{R})$ zvaćemo *dvo-modalitetni fazi relacijski sistem*. U nekim izvorima koristi se i naziv *bipartitni fazi relacijski sistem*. Skupove A i B nazivaćemo *komponentama* ili *modalitetima* sistema $\mathcal{T}$. Ukoliko su svi članovi familije $\mathcal{R}$ krisp relacije, onda za sistem $\mathcal{T} = (A, B, \mathcal{R})$ kažemo da je *dvo-modalitetni krisp relacijski sistem*.

Dvo-modalitetni fazi relacijski sistemi imaju brojne interpretacije, a ovde ćemo uglavnom imati na umu dve posebne interpretacije. Ako A shvatimo kao skup *aktera* (*učesnika*) a B kao skup nekih *događaja*, i ako se $\mathcal{R}$ sastoji od relacije kojom je određeno učešće aktera u događajima, onda dolazimo do interpretacije sistema $\mathcal{T}$ kao *dvo-modalitetne mreže*, kakve se proučavaju u okviru *analize socijalnih mreža*. Osim toga, ako A shvatimo kao skup izvesnih *objekata*, B kao skup *atributa* koje ti objekti mogu imati, a $\mathcal{R}$ se sastoji od relacije kojom je određeno da li dati objekat poseduje dati atribut, onda dolazimo do toga da se sistem $\mathcal{T}$ interpretira kao *formalni kontekst*, kakvi se razmatraju u okviru *konceptualne analize podataka* ili *relacionih baza podataka*.

Glavna interpretacija dvo-modalitetnih fazi relacijskih sistema koju ćemo ovde razmatrati biće dvo-modalitetne fazi i krisp mreže. Pri tome, iako je u najvećem broju publikacija u oblasti analize socijalnih mreža rađeno sa dvo-modalitetnim mrežama koje su određene jednom relacijom, mi ćemo ovde prihvatati i *više-relacijske mreže*, odnosno dozvoljavaćemo da $\mathcal{R}$ bude proizvoljna familija relacija ili fazi relacija. Koristićemo i dva uobičajena načina za grafičko predstavljanje dvo-modalitetnih mreža. Oba načina se koriste uglavnom kod predstavljanja dvo-modalitetnih mreža sa jednom relacijom, jer se stvari znatno komplikuju ako je prisutan veći broj relacija. Prvi način je predstavljanje dvo-modalitetne mreže bipartitnim grafom kod koga su jasno odvojene komponente koje odgovaraju modalitetima A i B, kao na Slici 3.1 a). Drugi način je predstavljanje grafom kod koga se komponente koje odgovaraju modalitetima ne odvajaju, ali su čvorovi iz različitih komponenti označavaju na drugačiji način, na primer drugačijim bojama i/ili drugačijim oblikom, kao Slici 3.1 b). Jednostavnosti radi, za ovaj drugi način predstavljanja govorićemo da je predstavljanje *objedinjenim grafom*. Primetimo da kod oba načina predstavljanja grane obično nisu orijentisane jer orijentacija grana ovde ne igra nikakvu ulogu zbog raznorodnosti čvorova koje povezuju.

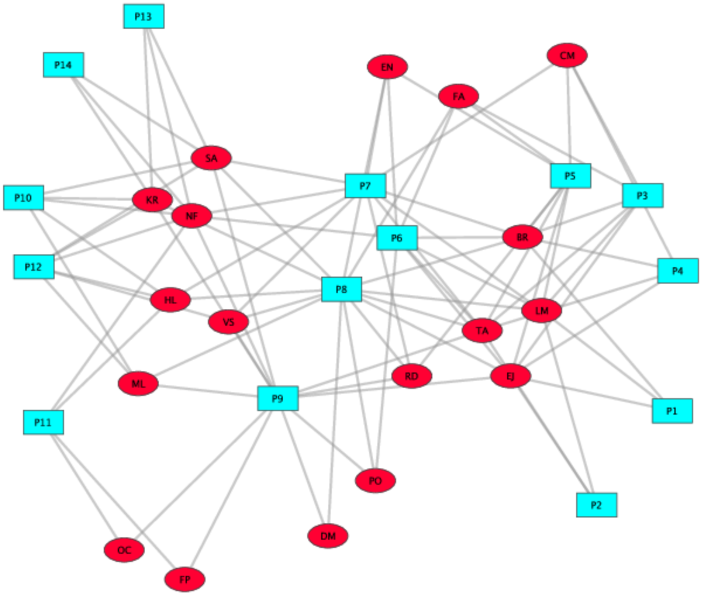


Slika 3.1 Grafičko predstavljanje dvo-modalitetne krisp mreže.

U daljem tekstu dajemo neke karakteristične primere dvo-modalitetnih mreža.

Primer 3.1.1. (Primeri dvo-modalitetnih mreža) Daćemo nekoliko konkretnih primera dvo-modalitetnih mreža, koji su razmatrani u brojnim radovima, i navesti najpoznatije tipove takvih mreža.

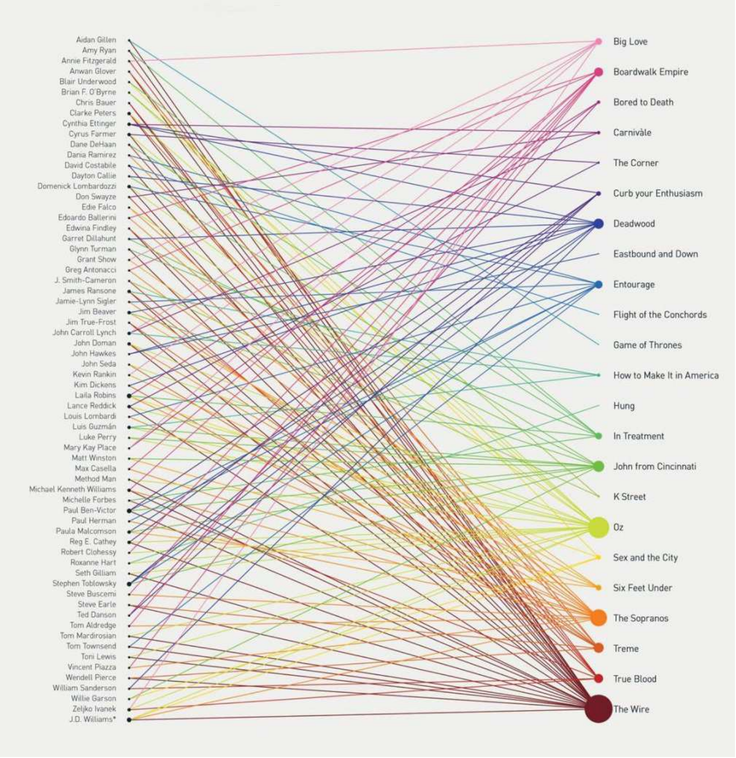
(a) Mreža južnjačkih žena (Southern Woman Network) [30, 53]: Radi se o mreži koja je proizašla iz podataka koje je grupa američkih etnografa 1930tih godina prikupila u Načezu, Misisipi, u sklopu proučavanja društvenog raslojavanja u okviru bele i crne populacije. Specijalno, prikupljeni su podaci o društvenim aktivnostima 18 belih žena koje su praćene u periodu od 9 meseci, tokom koga su neke od tih žena imale priliku da se sretnu na 14 neformalnih društvenih događaja. Učešće tih 18 žena na tih 14 događaja formira dvo-modalitetnu mrežu koja je kasnije bila predmet izučavanja brojnih autora u okviru analize socijalnih mreža. Ta mreža je prikazana na Slici 3.2.



Slika 3.2 Mreža južnjačkih žena (Southern Women Network)

(b) The HBO Recycling Program: Ova mreža čudnog naziva je dvo-modalitetna mreža koju čine najpopularnije serije televizijske mreže HBO i glumci koji su bili angažovani u najmanje tri epizode neke od tih serija, dok su veze između ta dva modaliteta zadate angažovanjem glumaca u tim serijama. Mreža je prikazana na Slici 3.3. Podaci koji zadaju ovu mrežu takođe su korišćeni u brojnim istraživanjima.

(c) Mreža norveških direktora [105]: Ovo je takođe dvo-modalitetna mreža koju čini 367 javni kompanija u Norveškoj i 1495 direktora – članova upravnih odbora tih kompanija, dok su veze zadate članstvom direktora u tim upravnim odborima. Podaci vezani za ovu mrežu javno su dostupni i korišćeni su u brojnim istraživanjima. Na Slici 3.4 prikazana je jedna od projekcija te mreže – jedno-modalitetna mreža koju čine direktori a veze između njih predstavljaju članstvo u istom upravnom odboru. Napominjemo da će pojam projekcije dvo-modalitetne mreže na jedno-modalitetnu biti objašnjen u poslednjem odeljku ove glave. Takođe ističemo da se različitim načinom označavanja čvorova na Slici 3.4 ukazuje na pol direktora. Naime, čvorovi predstavljeni punim kružićima označavaju žene direktore, a oni predstavljeni praznim kružićima označavaju muškarce. Na taj način, mreža prikazana na Slici 3.4 može se shvatiti i kao primer više-modalitetnih mreža, koje će biti razmatrane u narednoj glavi.



Slika 3.3 The HBO Recycling Program

(d) Mreža država i rezolucija: Kao primer konkretne mreže velikih dimenzija u radu [41] je izučavana dvo-modalitetna mreža čiji jedan modalitet čine države, članice Generalne skupštine Ujedinjenih nacija, drugi modalitet čine rezolucije koje su razmatrane na zasedanjima Generalne skupštine, a veze predstavljaju glasovi država članica za te rezolucije.

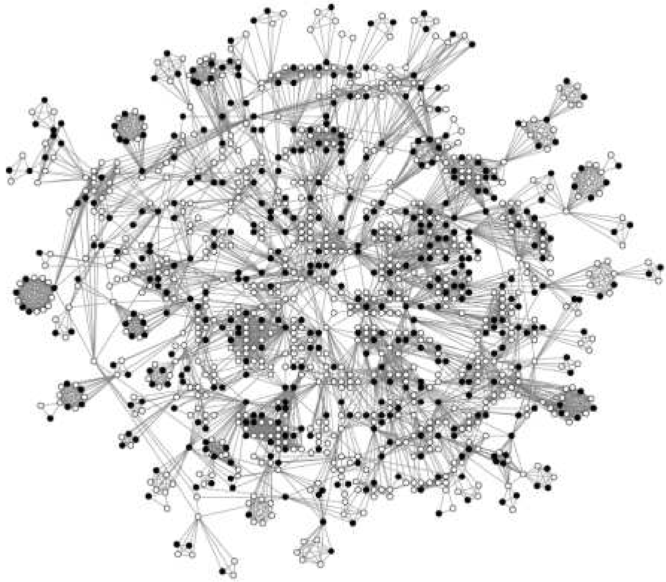
Dijagram i matrica jednog dela mreže prikazani su na Slici 3.5.

(e) Razni tipovi dvo-modalitetnih mreža: Od raznih drugih tipova dvo-modalitetnih mreža pomenućemo sledeće:

Afiliacione mreže to su mreže koje označavaju pripadnost/članstvo aktera izvesnim grupama, klubovima, institucijama i slično. One spadaju u dvo-modalitetne mreže koje su prve proučavane, tako da se naziv *afiliacione mreže* ponegde koristi i kao sinonim za dvo-modalitetne mreže.

Autorske mreže to su mreže koje čine naučni radnici, tj. autori, i njihove publikacije. Naravno, veze su zadate kroz autorstvo na publikaciji.

Biološke mreže osim jedno-modelitetnih mreža pomoću kojih su naučnici objašnjavali složene biološke procese, postoje i brojne dvo-modalitetne mreže pomoću kojih je činjeno to isto, kao što su **metaboličke mreže**, koje



Slika 3.4 Mreža norveških direktora

čine metaboliti i odgovarajuće hemijske reakcije, **genetske mreže**, koje čine geni i njihove funkcije, i druge.

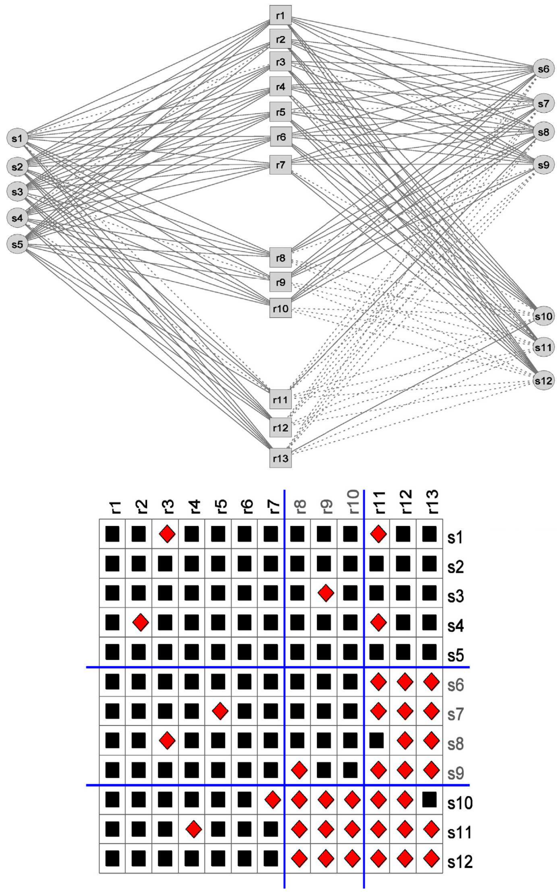
Svojstvene mreže (feature networks) to su dvo-modalitetne mreže pomoću kojih se predstavlja bilo koja vrsta svojstava koja se mogu prudružiti entitetima. Jedan od primera takvih mreža su pesme i njihovi žanrovi. Ove mreže možemo poistovetiti sa formalnim kontekstima, koje smo ranije pomenuli.

Interakcione mreže to su dvo-modalitetne mreže koje čine ljudi i stavke, a veze između njih su određene interakcijama između njih. Primeri su ljudi koji pišu na forumima, komentarišu filmove, slušaju pesme i slično.

Fazi relacijski sistemi $\mathcal{R} = (A, B, \{R_i\}_{i\in I})$ i $\mathcal{R}' = (A', B', \{R'_i\}_{i\in I})$ koji su indeksirani istim skupom (ili skupovima iste kardinalnosti) kaže se da su *izomorfni* ako postoje bijektivne funkcije $\phi : A \to A'$ i $\psi : B \to B'$ takve da važi

$$R_i(a, b) = R'_i(\phi(a), \psi(b)),$$

za sve $a \in A$, $b \in B$ i $i \in I$. U tom slučaju za par (ϕ, ψ) kažemo da je *izomorfizam* između $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$.



Slika 3.5 Prikaz dela mreže država i rezolucija

3.2. Dvo-modalitetni sistemi fazi relacijskih jednačina i nejednačina

U ovom odeljku bavićemo se sistemima fazi relacijskih jednačina i nejednačina određenim dvo-modalitetnim fazi relacijskim sistemima. Takve sisteme fazi relacijskih jednačina i nejednačina zvaćemo *dvo-modalitetnim sistemima*.

Neka je dat dvo-modalitetni fazi relacijski sistem $\mathcal{T} = (A, B, \mathcal{R})$, gde je $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i\in I}$. Razmotrimo sledeće sisteme fazi relacijskih jednačina i nejednačina

$$\alpha \circ R_i = R_i \circ \beta, \qquad i \in I, \tag{3.1}$$

$$\alpha \circ R_i \leqslant R_i \circ \beta, \qquad i \in I, \tag{3.2}$$

$$R_i \circ \beta \leqslant \alpha \circ R_i, \qquad i \in I. \tag{3.3}$$

gde su α i β nepoznate koje uzimaju vrednosti u $L^{A\times A}$ i $L^{B\times B}$, tim redom. Jasno, rešenja ovih sistema su parovi fazi relacija iz $L^{A\times A}\times L^{B\times B}$, koji su u kompletnoj mreži $(L^{A\times A}\times L^{B\times B},\leqslant)$ uređeni pokoordinatno, tj.

$$(\varrho_1,\theta_1)\leqslant(\varrho_2,\theta_2) \quad\Leftrightarrow\quad \varrho_1\leqslant\varrho_2 \ \text{ i } \ \theta_1\leqslant\theta_2,$$

za sve $\varrho_1,\varrho_2\in L^{A\times A}$ i $\theta_1,\theta_2\in L^{B\times B}$. Ako važi gornja relacija, govorićemo i da je par (ϱ_1,θ_1) *sadržan* u paru (ϱ_2,θ_2). Koristeći ovo uređenje, možemo upoređivati i rešenja gornjih sistema i govoriti o većim ili manjim rešenjima.

Primetimo i da je sistem (3.1) ekvivalentan konjunkciji sistema (3.2) i (3.3).

Prva teorema koju dokazujemo utvrđuje postojanje najvećih rešenja sistema (3.1)–(3.3) sadržanih u datom paru fazi relacija.

Teorema 3.2.1. *Neka je* $(\lambda_0,\varrho_0)\in L^{A\times A}\times L^{B\times B}$ *dati par fazi relacija.*

Skupovi svih rešenja sistema (3.1), (3.2) *i* (3.3) *sadržanih u* (λ_0,ϱ_0) *čine kompletne mreže, i shodno tome postoje najveća rešenja sistema* (3.1), (3.2) *i* (3.3) *sadržana u* (λ_0,ϱ_0).

Ako su λ_0 *i* ϱ_0 *fazi kvazi uređenja, tada su obe komponente najvećih rešenja datih sistema sadržanih u* (λ_0,ϱ_0) *takođe fazi kvazi uređenja.*

Dokaz: Dokazaćemo da tvrđenje važi za sistem (3.1). Da tvrđenje važi i za sisteme (3.2) i (3.3) može se dokazati analogno.

Lako je videti da sistem (3.1) ima bar jedno rešenje koje je sadržano u paru (λ_0,ϱ_0), a to je uređeni par praznih relacija na A i B, tim redom, koji se naziva *trivijalno rešenje*.

Neka je $\{(\lambda_j,\varrho_j)\}_{j\in J}$ familija uređenih parova fazi relacija na A i B, tim redom, koji su rešenja sistema (3.1) i pri tome su sadržani u (λ_0,ϱ_0). Označimo sa λ uniju fazi relacija $\{\lambda_j\}_{j\in J}$, a sa ϱ uniju fazi relacija $\{\varrho_j\}_{j\in J}$. Jasno je da važi $(\lambda,\varrho)\leqslant(\lambda_0,\varrho_0)$. Takođe, za svako $i\in I$ dobijamo

$$\lambda\circ R_i=\Big(\bigvee_{j\in J}\lambda_j\Big)\circ R_i=\bigvee_{j\in J}(\lambda_j\circ R_i)=\bigvee_{j\in J}(R_i\circ\varrho_j)=R_i\circ\Big(\bigvee_{j\in J}\varrho_j\Big)=R_i\circ\varrho,$$

što znači da je (λ,γ) takođe rešenje sistema (3.1) sadržano u (λ_0,ϱ_0). Dakle, skup svih rešenja sistema (3.1) sadržanih u (λ_0,ϱ_0) je kompletna mreža, i ako je $\{(\lambda_j,\varrho_j)\}_{j\in J}$ skup svih rešenja sistema (3.1) sadržanih u (λ_0,ϱ_0), tada je par (λ,ϱ) definisan ranije, najveće rešenje.

U nastavku, neka je (λ,ϱ) najveće rešenje sistema (3.1) sadržano u (λ_0,ϱ_0). Za svako $i\in I$ važi $\lambda\circ\lambda\circ R_i=\lambda\circ R_i\circ\varrho=R_i\circ\varrho\circ\varrho$, i ako su λ_0 i ϱ_0 fazi kvazi uređenja, tada je $\lambda\circ\lambda\leqslant\lambda_0\circ\lambda_0=\lambda_0$ i $\varrho\circ\varrho\leqslant\varrho_0\circ\varrho_0=\varrho_0$, pa dobijamo da je $(\lambda\circ\lambda,\varrho\circ\varrho)$ rešenje sistema (3.1) sadržano u (λ_0,ϱ_0). Kako je (λ,ϱ) najveće rešenje, zaključujemo da važi $\lambda\circ\lambda\leqslant\lambda$ i $\varrho\circ\varrho\leqslant\varrho$. Dakle, λ i ϱ su tranzitivne relacije. Očigledno, par (Δ_A,Δ_B) je rešenje sistema (3.1) sadržano u (λ_0,ϱ_0), pa važi $(\Delta_A,\Delta_B)\leqslant(\lambda,\varrho)$, tj., λ i ϱ su refleksivne fazi relacije, pa samim tim λ i ϱ su fazi kvazi uređenja. □

Sledeća teorema omogućava da kreiramo algoritam za izračunavanje najvećeg rešenja sistema (3.1) koje je sadržano u datom paru fazi relacija.

Teorema 3.2.2. *Neka je* $(\lambda_0, \varrho_0) \in L^{A\times A} \times L^{B\times B}$ *dati par fazi relacija, i neka je* $\{(\lambda_n, \varrho_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *opadajući niz parova fazi relacija iz* $L^{A\times A} \times L^{B\times B}$*, definisan na sledeći način:*

$$\lambda_1 = \lambda_0, \qquad \varrho_1 = \varrho_0, \tag{3.4}$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n \wedge \bigwedge_{i\in I} (R_i \circ \varrho_n)/R_i, \qquad \varrho_{n+1} = \varrho_n \wedge \bigwedge_{i\in I} R_i\backslash(\lambda_n \circ R_i), \tag{3.5}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$*. Tada važi:*

(a) *za svako* $n \in \mathbb{N}$*, par* (λ_n, ϱ_n) *je rešenje sistema* (3.1) *ako i samo ako važi* $\lambda_n = \lambda_{n+1}$ *i* $\varrho_n = \varrho_{n+1}$*;*

(b) *ako postoji* $k \in \mathbb{N}$ *takvo da važi* $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ *i* $\varrho_k = \varrho_{k+1}$*, tada je par* (λ_k, ϱ_k) *najveće rešenje sistema* (3.1) *sadržano u* (λ_0, ϱ_0)*;*

(c) *ako su* A *i* B *konačni skupovi i podalgebra* $\mathcal{L}(\{R_i\}_{i\in I}, \lambda_0, \varrho_0)$ *od* $\mathcal{L}$ *zadovoljava uslov DCC, tada je niz* $\{(\lambda_n, \varrho_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konačan i postoji* $k \in \mathbb{N}$ *tako da je* $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ *i* $\varrho_k = \varrho_{k+1}$*.*

Dokaz: (a) Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan prirodan broj. Ako je (λ_n, ϱ_n) rešenje sistema (3.1), tada važi

$$\lambda_n \leqslant \bigwedge_{i\in I} (R_i \circ \varrho_n)/R_i \quad \text{i} \quad \varrho_n \leqslant \bigwedge_{i\in I} R_i\backslash(\lambda_n \circ R_i),$$

odakle sledi da je $\lambda_{n+1} = \lambda_n$ and $\varrho_{n+1} = \varrho_n$.

Obratno, neka je $\lambda_{n+1} = \lambda_n$ i $\varrho_{n+1} = \varrho_n$. Tada za svako $i \in I$ imamo da važi

$$\lambda_n \leqslant (R_i \circ \varrho_n)/R_i \qquad \text{i} \qquad \varrho_n \leqslant R_i\backslash(\lambda_n \circ R_i),$$

i na osnovu svojstva reziduacije, to je ekvivalentno sa

$$\lambda_n \circ R_i \leqslant R_i \circ \varrho_n \qquad \text{i} \qquad R_i \circ \varrho_n \leqslant \lambda_n \circ R_i.$$

Što znači da je, (λ_n, ϱ_n) rešenje sistema (3.1).

(b) Pretpostavimo da postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da važi $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ i $\varrho_k = \varrho_{k+1}$. Na osnovu dokaza pod (a), par (λ_k, ϱ_k) je rešenje sistema (3.1). Niz $\{(\lambda_n, \varrho_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ je očigledno opadajući, pa je (λ_k, ϱ_k) sadržano u (λ_0, ϱ_0).

Dalje, pretpostavimo da je (λ, ϱ) rešenje sistema (3.1) sadržano u (λ_0, ϱ_0). Pretpostavimo da je $(\lambda, \varrho) \leqslant (\lambda_n, \varrho_n)$, za neko $n \in \mathbb{N}^0$. Tada za svako $i \in I$ imamo da važi $\lambda \circ R_i \leqslant R_i \circ \varrho \leqslant R_i \circ \varrho_n$, što implicira $\lambda \leqslant (R_i \circ \varrho_n)/R_i$, i onda imamo da važi:

$$\lambda \leqslant \lambda_n \wedge \bigwedge_{i\in I} (R_i \circ \varrho_n)/R_i = \lambda_{n+1}.$$

Na sličan način možemo pokazati da važi $\varrho \leqslant \varrho_{n+1}$, pa matematičkom indukcijom zaključujemo da je $(\lambda, \varrho) \leqslant (\lambda_n, \varrho_n)$, za svako $n \in \mathbb{N}$, odakle sledi da je $(\lambda, \varrho) \leqslant (\lambda_k, \varrho_k)$. Ovim smo pokazali da je (λ_k, ϱ_k) najveće rešenje sistema (3.1) sadržano u (λ_0, ϱ_0).

(c) Neka su A i B konačni skupovi i neka podalgebra $\mathcal{L}(\{R_i\}_{i\in I}, \lambda_0, \varrho_0)$ zadovoljava DCC uslov. Za sve uređene parove $(a,a') \in A\times A$ i $(b,b') \in B\times B$ imamo da su $\{\lambda_n(a,a')\}_{n\in N}$ i $\{\varrho_n(b,b')\}_{n\in N}$ opadajući nizovi u $\mathcal{L}(\{R_i\}_{i\in I}, \lambda_0, \varrho_0)$. Na osnovu pretpostavke, tj. na osnovu činjenice da $\mathcal{L}(\{R_i\}_{i\in I}, \lambda_0, \varrho_0)$ ispunjava DCC uslov, ovi nizovi se stabilizuju, i kako postoji konačno mnogo ovakvih nizova (jer su skupovi A i B konačni), zaključujemo da postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da se svi ovi nizovi stabilizuju nakon k koraka. Drugim rečima, niz $\{(\lambda_n, \varrho_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konačan i $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ i $\varrho_k = \varrho_{k+1}$, čime je teorema dokazana. □

Neka su skupovi A, B i I konačni, neka je njihov broj elemenata označen sa $|A|$, $|B|$ i $|I|$, tim redom, i neka podalgebra $\mathcal{L}(\{R_i\}_{i\in I}, \lambda_0, \varrho_0)$ od $\mathcal{L}$ generisana vrednostima koje u $\mathcal{L}$ uzimaju λ_0, ϱ_0 i R_i, za sve $i \in I$, zadovoljava uslov DCC. Posmatraćemo sve razmatrane fazi relacije kao fazi matrice. U tom slučaju prethodna teorema daje algoritam za izračunavanje najvećeg rešenja sistema (3.1) sadržanog u (λ_0, ϱ_0) koji se izvršava u konačnom broju koraka.

U prvom koraku ovog algoritma stavljamo $(\lambda_1, \varrho_1) = (\lambda_0, \varrho_0)$. Nakon k-tog koraka, neka je izračunat par (λ_k, ϱ_k). U narednom koraku izračunavamo par $(\lambda_{k+1}, \varrho_{k+1})$ koristeći formulu (3.5). Može se pokazati da je vreme potrebno za izračunavanje para $(\lambda_{k+1}, \varrho_{k+1})$ jednako

$$O(|I|\cdot|A|\cdot|B|\cdot(|A|+|B|)\cdot(c_\otimes + c_\vee + c_\to + c_\wedge)),$$

gde $c_\otimes, c_\vee, c_\to$ i $c_\wedge$ predstavljaju vremena potrebna za izvršavanje operacija $\otimes$, $\vee$, $\to$ i $\wedge$ u $\mathcal{L}$. Nakon izračunavanja relacija λ_{k+1} i ϱ_{k+1} upoređujemo njihove vrednosti sa odgovarajućim vrednostima relacija λ_k i ϱ_k i proveravamo da li su te vrednosti različite. Algoritam se završava nakon prvog koraka u kome vrednosti ostanu nepromenjene.

Vrednosti koje uzimaju relacije $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $\{\varrho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ formiraju $|A|^2+|B|^2$ opadajućih lanaca elemenata iz $\mathcal{L}(\{R_i\}_{i\in I}, \lambda_0, \varrho_0)$, pa kako $\mathcal{L}(\{R_i\}_{i\in I}, \lambda_0, \varrho_0)$ zadovoljava uslov DCC, postoji $l \in \mathbb{N}$ takvo da je broj različitih elemenata u svakom od ovih lanaca manji ili jednak l, i shodno tome, u svakom od ovih nizova se vrednost može promeniti najviše $l-1$ puta. Samim tim, ukupan broj promena je manji od ili jednak $(l-1)(\max(|A|,|B|))^2$, što znači da se algoritam završava nakon najviše $(l-1)(\max(|A|,|B|))^2+2$ koraka (u prvom i poslednjem koraku vrednosti se ne menjaju).

Kao posledicu ovoga, imamo da je ukupno vreme izvršenja algoritma jednako:

$$O(l\cdot|I|\cdot|A|\cdot|B|\cdot(|A|+|B|)\cdot(\max(|A|,|B|))^2\cdot(c_\otimes + c_\vee + c_\to + c_\wedge)).$$

Ako je $m = \max(|A|,|B|)$, onda dobijamo da je vreme izvršenja jednako

$$O(l\cdot|I|\cdot m^5\cdot(c_\otimes + c_\vee + c_\to + c_\wedge)).$$

Primetimo da broj l zavisi od nizova $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $\{\varrho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, i da u opštem slučaju ne zavisi od algebre $\mathcal{L}(\{R_i\}_{i\in I},\lambda_0,\varrho_0)$. Međutim u nekim slučajevima, broj različitih elemenata u svim opadajućim lancima u $\mathcal{L}(\{R_i\}_{i\in I},\lambda_0,\varrho_0)$ može da ima gornju granicu jednaku l. Na primer, ako je $\mathcal{L}(\{R_i\}_{i\in I},\lambda_0,\varrho_0)$ konačna, onda možemo za l uzeti broj elemenata tog skupa. Specijalno, ako je $\mathcal{L}$ Gedelova struktura, tada jedine vrednosti koje uzimaju fazi relacije $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $\{\varrho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ jesu vrednosti koje uzimaju relacije $\{R_i\}_{i\in I}$, λ_0 i ϱ_0, plus vrednost 1, pa je očigledno da je broj ovih vrednosti konačan. U ovom slučaju ukupno vreme izvršenja algoritma je $O(j\cdot|I|\cdot m^5)$, gde je j broj vrednosti koje uzimaju fazi relacije $\{R_i\}_{i\in I}$, λ_0 i ϱ_0 (ovde je vreme potrebno da se izvrše operacije $\otimes$, $\vee$, $\to$ i $\wedge$ konstantno). Primetimo da za vrednost j važi $j\leqslant |I|\cdot|A|\cdot|B|+|A|^2+|B|^2$. Na kraju ako je $\mathcal{L}$ Bulova struktura, tada je $j=2$ i vreme izvršenja algoritma je $O(|I|\cdot m^5)$. Brži algoritam za ovaj slučaj biće prikazan u Odeljku 4.

Sledeća teorema pokazuje da za razliku od sistema (3.1), najveća rešenja sistema nejednačina (3.2) i (3.3), koja su sadržana u datom paru fazi relacija, mogu biti izračunata direktnim metodom, bez upotrebe bilo kakvog iterativnog postupka.

Teorema 3.2.3. *Neka je $(\lambda_0,\varrho_0)\in L^{A\times A}\times L^{B\times B}$ dati par fazi relacija. Tada je par*

$$\Big(\lambda_0\wedge\bigwedge_{i\in I}(R_i\circ\varrho_0)/R_i,\varrho_0\Big) \tag{3.6}$$

najveće rešenje sistema (3.2) *sadržano u* (λ_0,ϱ_0).

Dokaz: Jednostavnosti radi, stavimo da je

$$\lambda_1=\lambda_0\wedge\bigwedge_{i\in I}(R_i\circ\varrho_0)/R_i.$$

Tada za proizvoljno $i\in I$ imamo da je $\lambda_1\leqslant(R_i\circ\varrho_0)/R_i$, što je ekvivalentno sa $\lambda_1\circ R_i\leqslant R_i\circ\varrho_0$, pa je par (λ_1,ϱ_0) rešenje sistema (3.2) sadržano u (λ_0,ϱ_0).

Neka je (λ,ϱ) proizvoljno rešenje sistema (3.2) sadržano u (λ_0,ϱ_0). Tada iz $\lambda\circ R_i\leqslant R_i\circ\varrho\leqslant R_i\circ\varrho_0$ sledi da je $\lambda\leqslant(R_i\circ\varrho_0)/R_i$, za svako $i\in I$, i kao posledicu ovoga imamo da je $\lambda\leqslant\lambda_0\wedge\bigwedge_{i\in I}(R_i\circ\varrho_0)/R_i=\lambda_1$. Time smo dokazali da je (λ_1,ϱ_0) najveće rešenje sistema (3.2) sadržano u (λ_0,ϱ_0). □

Na sličan način može se pokazati da važi sledeća teorema:

Teorema 3.2.4. *Neka je $(\lambda_0,\varrho_0)\in L^{A\times A}\times L^{B\times B}$ dati par fazi relacija. Tada je par*

$$\Big(\lambda_0,\varrho_0\wedge\bigwedge_{i\in I}R_i\backslash(\lambda_0\circ R_i)\Big) \tag{3.7}$$

najveće rešenje sistema (3.3) *sadržano u* (λ_0,ϱ_0).

U praksi se veoma često javlja potreba da se nađe par fazi relacija (λ,ϱ) takav da je (λ,ϱ) je rešenja sistema (3.1), (3.2) ili (3.3) ako i samo ako je njegov simetrični par $(\lambda^{-1},\varrho^{-1})$ rešenje istog sistema jednačina ili nejednačina. Problemi takvog tipa mogu se rešiti razmatranjem sledećih sistema fazi relacijskih jednačina i nejednačina.

$$\alpha\circ R_i = R_i\circ\beta,\quad \alpha^{-1}\circ R_i = R_i\circ\beta^{-1},\qquad i\in I, \tag{3.8}$$

$$\alpha\circ R_i \leqslant R_i\circ\beta,\quad \alpha^{-1}\circ R_i \leqslant R_i\circ\beta^{-1},\qquad i\in I, \tag{3.9}$$

$$R_i\circ\beta \leqslant \alpha\circ R_i,\quad R_i\circ\beta^{-1} \leqslant \alpha^{-1}\circ R_i,\qquad i\in I, \tag{3.10}$$

gde su α i β promenljive koje uzimaju vrednosti redom u $L^{A\times A}$ i $L^{B\times B}$.

Slično kao za sisteme (3.1)–(3.3), za sisteme (3.8)–(3.10) možemo dokazati da važi sledeća teorema:

Teorema 3.2.5. *Neka je $(\lambda_0,\varrho_0)\in L^{A\times A}\times L^{B\times B}$ dati par fazi relacija.*

Skupovi svih rešenja sistema (3.8), (3.9) *i* (3.10) *sadržanih u paru (λ_0,ϱ_0) čine kompletne mreže, pa shodno tome postoje najveća rešenja sistema* (3.8), (3.9) *i* (3.10) *sadržana u (λ_0,ϱ_0).*

Ako su λ_0 i ϱ_0 fazi ekvivalencije, tada obe komponente tih najvećih rešenja takođe jesu fazi ekvivalencije.

Dokaz: Koristeći jednakosti (1.64) i (1.65), na isti način kao u dokazu Teoreme 3.2.1. možemo pokazati skupovi svih rešenja sistema (3.8), (3.9) i (3.10) sadržanih u (λ_0,ϱ_0) čine kompletne mreže.

Neka su λ_0 i ϱ_0 fazi ekvivalencije, i neka je (λ,ϱ) najveće rešenje sistema (3.8), (3.9) ili (3.10) sadržano u (λ_0,ϱ_0). Kao u dokazu Teoreme 3.2.1. pokazujemo da su λ i ϱ fazi kvazi uređenja, i kako su oba para (λ,ϱ) i $(\lambda^{-1},\varrho^{-1})$ rešenja razmatranog sistema sadržana u (λ_0,ϱ_0), na osnovu činjenice da je (λ,ϱ) najveće rešenje zaključujemo da je $\lambda=\lambda^{-1}$ i $\varrho=\varrho^{-1}$, što znači da su λ i ϱ simetrične fazi relacije. Ovim smo dokazali da su λ i ϱ fazi ekvivalencije, čime je dokaz teoreme završen. □

Sledeća teorema daje algoritam za izračunavanje najvećeg rešenja sistema (3.8), sadržanog u (λ_0,ϱ_0).

Teorema 3.2.6. *Neka je $(\lambda_0,\varrho_0)\in L^{A\times A}\times L^{B\times B}$ dati par fazi relacija, i neka je opadajući niz $\{(\lambda_n,\varrho_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ fazi relacija iz $L^{A\times A}\times L^{B\times B}$ definisan sa:*

$$\lambda_1=\lambda_0,\qquad \varrho_1=\varrho_0, \tag{3.11}$$

$$\lambda_{n+1}=\lambda_n\wedge\bigwedge_{i\in I}[(R_i\circ\varrho_n)/R_i]\wedge\bigwedge_{i\in I}[(R_i\circ\varrho_n^{-1})/R_i]^{-1}, \tag{3.12}$$

$$\varrho_{n+1}=\varrho_n\wedge\bigwedge_{i\in I}[R_i\backslash(\lambda_n\circ R_i)]\wedge\bigwedge_{i\in I}[R_i\backslash(\lambda_n^{-1}\circ R_i)]^{-1}, \tag{3.13}$$

za svako $n\in\mathbb{N}$. Tada važi:

(a) *ako postoji* $k \in \mathbb{N}$ *takvo da važi* $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ *i* $\varrho_k = \varrho_{k+1}$, *tada je par* (λ_k, ϱ_k) *najveće rešenje sistema* (3.8) *sadržano u* (λ_0, ϱ_0)*;*

(b) *ako su* A *i* B *konačni skupovi i podalgebra* $\mathcal{L}(\{R_i\}_{i\in I}, \lambda_0, \varrho_0)$ *zadovoljava DCC, tada je niz* $\{(\lambda_k, \varrho_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ *konačan i postoji* $k \in \mathbb{N}$ *za koje važi* $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ *i* $\varrho_k = \varrho_{k+1}$.

Dokaz: (a) Ovo tvrđenje dokazujemo na sličan način kao odgovarajući deo Teoreme 3.2.2. Naime, ako je $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ i $\varrho_k = \varrho_{k+1}$, za neko $k \in \mathbb{N}$, tada za svako $i \in I$ važi:

$$\lambda_k \leqslant (R_i \circ \varrho_k)/R_i\,, \;\; \lambda_k^{-1} \leqslant (R_i \circ \varrho_k^{-1})/R_i\,, \;\; \varrho_k \leqslant R_i\backslash(\lambda_k \circ R_i)\,, \;\; \varrho_k^{-1} \leqslant R_i\backslash(\lambda_k^{-1} \circ R_i)\,,$$

što je ekvivalentno sa

$$\lambda_k \circ R_i \leqslant R_i \circ \varrho_k\,, \;\; \lambda_k^{-1} \circ R_i \leqslant R_i \circ \varrho_k^{-1}\,, \;\; R_i \circ \varrho_k \leqslant \lambda_k \circ R_i\,, \;\; R_i \circ \varrho_k^{-1} \leqslant \lambda_k^{-1} \circ R_i\,.$$

Jasno je da je (λ_k, ϱ_k) rešenje sistema (3.8), i očigledno je sadržano u (λ_0, ϱ_0). Na sličan način kao u dokazu Teoreme 3.2.2. možemo pokazati da je (λ_k, ϱ_k) najveće rešenje sistema (3.8) sadržano u (λ_0, ϱ_0).

(b) Dokaz ovog tvrđenja može se izvesti na sličan način kao odgovarajući deo dokaza Teoreme 3.2.2. □

Kao i kod sistema nejednačina (3.2) i (3.3), najveće rešenje sistema nejednačina (3.9) i (3.10) koje je sadržano u (λ_0, ϱ_0), može biti izračunato direktno, bez upotrebe iterativnog postupka:

Teorema 3.2.7. *Neka je* $(\lambda_0, \varrho_0) \in L^{A\times A} \times L^{B\times B}$ *dati par fazi relacija. Tada je par*

$$\Big(\lambda_0 \wedge \bigwedge_{i\in I} [(R_i \circ \varrho_0)/R_i] \wedge \bigwedge_{i\in I} [(R_i \circ \varrho_0^{-1})/R_i]^{-1}, \varrho_0\Big) \tag{3.14}$$

najveće rešenje sistema (3.9) *sadržano u* (λ_0, ϱ_0).

Dokaz: Neka je

$$\lambda_1 = \lambda_0 \wedge \bigwedge_{i\in I} [(R_i \circ \varrho_0)/R_i] \wedge \bigwedge_{i\in I} [(R_i \circ \varrho_0^{-1})/R_i]^{-1}$$

Tada za svako $i \in I$ imamo $\lambda_1 \leqslant (R_i \circ \varrho_0)/R_i$ i $\lambda^{-1} \leqslant (R_i \circ \varrho_0^{-1})/R_i$, što je ekvivalentno sa $\lambda_1 \circ R_i \leqslant R_i \circ \varrho_0$ i $\lambda^{-1} \circ R_i \leqslant R_i \circ \varrho_0^{-1}$. Odatle sledi da je (λ_1, ϱ_0) rešenje sistema (3.9) sadržano u (λ_0, ϱ_0).

Ako je (λ, ϱ) proizvoljno rešenje sistema (3.9) sadržano u (λ_0, ϱ_0), tada za svako $i \in I$, važi

$$\lambda \circ R_i \leqslant R_i \circ \varrho \leqslant R_i \circ \varrho_0 \quad \text{i} \quad \lambda^{-1} \circ R_i \leqslant R_i \circ \varrho^{-1} \leqslant R_i \circ \varrho_0^{-1},$$

tj. $\lambda \leqslant (R_i \circ \varrho_0)/R_i$ i $\lambda^{-1} \leqslant (R_i \circ \varrho_0^{-1})/R_i$, što povlači da je $\lambda \leqslant \lambda_1$ odakle dobijamo da je $(\lambda, \varrho) \leqslant (\lambda_1, \varrho_0)$. Ovim smo pokazali da je (λ_1, ϱ_0) najveće rešenje sistema (3.9) sadržano u (λ_0, ϱ_0). □

Na sličan način se može dokazati da važi i sledeća teorema.

Teorema 3.2.8. *Neka je* $(\lambda_0, \varrho_0) \in L^{A\times A} \times L^{B\times B}$ *dati par fazi relacija. Tada je par*

$$\Big(\lambda_0, \varrho_0 \wedge \bigwedge_{i\in I} [R_i \backslash (\lambda_0 \circ R_i)] \wedge \bigwedge_{i\in I} [R_i \backslash (\lambda_0^{-1} \circ R_i)]^{-1}\Big) \tag{3.15}$$

najveće rešenje sistema (3.10) *sadržano u* (λ_0, ϱ_0).

U nastavku razmatramo sledeće sisteme jednačina i nejednačina:

$$\alpha \circ R_i \leqslant R_i, \qquad R_i \circ \beta \leqslant R_i, \qquad i \in I, \tag{3.16}$$

$$\alpha \circ R_i = R_i, \qquad R_i \circ \beta = R_i, \qquad i \in I, \tag{3.17}$$

gde su α i β promenljive koje uzimaju vrednosti redom u $L^{A\times A}$ i $L^{B\times B}$.

Možemo primetiti da je sistem (3.17) instanca sistema (3.1), u smislu da je svako rešenje sistema (3.17) takođe i rešenje sistema (3.1).

Teorema 3.2.9. *Neka je* $(\lambda_0, \varrho_0) \in L^{A\times A} \times L^{B\times B}$ *dati par fazi relacija. Tada je par*

$$\Big(\lambda_0 \wedge \bigwedge_{i\in I} R_i/R_i, \varrho_0 \wedge \bigwedge_{i\in I} R_i \backslash R_i\Big) \tag{3.18}$$

najveće rešenje sistema nejednačina (3.16) *sadržano u* (λ_0, ϱ_0).

Ako su λ_0 *i* ϱ_0 *refleksivne fazi relacije, tada je par* (3.18) *takođe najveće rešenje sistema jednačina* (3.17) *sadržano u* (λ_0, ϱ_0), *a ako su* λ_0 *i* ϱ_0 *fazi kvazi uređenja, tada su obe komponente para* (3.18) *takođe fazi kvazi uređenja.*

Dokaz: Jednostavnosti radi, stavimo da je

$$\lambda_1 = \lambda_0 \wedge \bigwedge_{i\in I} R_i/R_i, \qquad \varrho_1 = \varrho_0 \wedge \bigwedge_{i\in I} R_i \backslash R_i.$$

Tada za svako $i \in I$ imamo da važi $\lambda_1 \leqslant R_i/R_i$ i $\varrho_1 \leqslant R_i \backslash R_i$, što je ekvivalentno sa $\lambda_1 \circ R_i \leqslant R_i$ i $R_i \circ \varrho_1 \leqslant R_i$, pa je par (λ_1, ϱ_1) rešenje sistema (3.16) sadržano u (λ_0, ϱ_0).

Jednostavno se pokazuje da važi $\lambda \leqslant \lambda_1$ i $\varrho \leqslant \varrho_1$, za proizvoljan par fazi relacija (λ, ϱ) koji je rešenje sistema (3.16) sadržano (λ_0, ϱ_0), t.j. (λ_1, ϱ_1) je najveće rešenje sistema (3.16) sadržano u (λ_0, ϱ_0).

Ako su λ_0 i ϱ_0 refleksivne fazi relacije, tada su λ_1 i ϱ_1 takođe refleksivne, jer su relacije R_i/R_i i $R_i \backslash R_i$ fazi kvazi uređenja, za svako $i \in I$. Kao posledicu ovoga imamo da za svako $i \in I$ važi

$$R_i = \Delta_A \circ R_i \leqslant \lambda_1 \circ R_i \quad \text{i} \quad R_i = R_i \circ \Delta_B \leqslant R_i \circ \varrho_1,$$

što znači da je (λ_1, ϱ_1) rešenje sistema (3.17) sadržano u (λ_0, ϱ_0). Kako je bilo koje rešenje sistema (3.17) istovremeno i rešenje sistema (3.16) i (λ_1, ϱ_1) je najveće rešenje sistema (3.16) sadržano u (λ_0, ϱ_0), zaključujemo da je (λ_1, ϱ_1) takođe najveće rešenje sistema (3.17) sadržano u (λ_0, ϱ_0).

Na isti način kao u dokazu Teoreme 3.5 [64] dobijamo da su R/R i $R\backslash R$ fazi kvazi uređenja na A i B, za proizvoljnu fazi relaciju $R \in L^{A\times B}$, pa ako su λ_0 and ϱ_0 fazi kvazi uređenja, onda su obe komponente para (3.18) takođe fazi kvazi uređenja. □

Konačno, ako razmatramo sisteme

$$\alpha \circ R_i \leqslant R_i, \quad R_i \circ \beta \leqslant R_i, \quad \alpha^{-1} \circ R_i \leqslant R_i, \quad R_i \circ \beta^{-1} \leqslant R_i, \quad i \in I, \tag{3.19}$$

$$\alpha \circ R_i = R_i, \quad R_i \circ \beta = R_i, \quad \alpha^{-1} \circ R_i = R_i, \quad R_i \circ \beta^{-1} = R_i, \quad i \in I, \tag{3.20}$$

gde su α i β promenljive koje uzimaju vrednosti redom u $L^{A\times A}$ i $L^{B\times B}$, tada na sličan način možemo dokazati sledeću teoremu.

Teorema 3.2.10. *Neka je* $(\lambda_0, \varrho_0) \in L^{A\times A} \times L^{B\times B}$ *dati par fazi relacija. Tada je par*

$$\Big(\lambda_0 \wedge \bigwedge_{i\in I} R_i /\!/ R_i, \varrho_0 \wedge \bigwedge_{i\in I} R_i \backslash\!\backslash R_i\Big) \tag{3.21}$$

najveće rešenje sistema nejednačina (3.19) *sadržano u* (λ_0, ϱ_0).

Ako su, osim toga, λ_0 *i* ϱ_0 *refleksivne fazi relacije, tada je par* (3.21) *takođe i najveće rešenje sistema jednačina* (3.20) *sadržano u* (λ_0, ϱ_0), *a ako su* λ_0 *i* ϱ_0 *fazi ekvivalencije, tada su obe komponente para* (3.21) *takođe fazi ekvivalencije.*

Primetimo da ako je (λ_0, ϱ_0) par fazi kvazi uređenja, tada je najveće rešenje sistema (3.16) i (3.17) koje je sadržano u (λ_0, ϱ_0) takođe par fazi kvazi uređenja, i ako je (λ_0, ϱ_0) par fazi ekvivalencija, tada je rešenje sistema (3.19) i (3.20) sadržano u (λ_0, ϱ_0) par fazi ekvivalencija.

Teoreme 3.2.2. i 3.2.6. nude postupak za računanje najvećeg rešenja sistema jednačina (3.1) i (3.8). Ovaj metod je baziran na konstrukciji opadajućeg niza parova fazi relacija na skupovima A i B, respektivno, i kad god izračunamo novi član niza, proveravamo da li je jednak sa prethodnim članom. Algoritam se završava kada pronađemo prva dva uzastopna člana niza koja su jednaka, i u ovom slučaju, poslednji izračunat član niza je najveće rešenje sistema (3.1) ili (3.8). Međutim, predloženi algoritam se ne mora okončati u konačnom broju koraka. Da li će se algoritam okončati u konačnom broju koraka zavisi od odgovarajuće strukture istinitosnih vrednosti, od istinitosnih vrednosti koje uzimaju fazi relacije koje formiraju razmatrani sistem fazi relacijskih jednačina, kao i od graničnih fazi relacija. Teoreme 3.2.2. i 3.2.6. obezbeđuju dovoljne uslove za okončanje algoritma u konačnom broju koraka, kada podalgebra $\mathcal{L}(\{R_i\}_{i\in I}, \lambda_0, \varrho_0)$ od $\mathcal{L}$ koja je generisana istinitosnim vrednostima koje uzimaju fazi relacije λ_0, ϱ_0 i R_i, za svaki $i \in I$, zadovoljava DCC uslov. Na primer, ovaj uslov je zadovoljen ako je $\mathcal{L}$ lokalno konačna algebra, tj. ako svaka konačno generisana podalgebra od $\mathcal{L}$ je konačna. Najpoznatije lokalno konačne algebre koje se koriste kao strukture istinitosnih vrednosti u teoriji fazi skupova su Bulova i Gedelova struktura. Više informacija o strukturama koje su bazirane na lokalno konačnim t-normama može se naći u [55].

U slučaju da se predložena procedura ne završava u konačnom broju koraka, pa se zbog toga ne može koristiti za efektivno računanje najvećeg rešenja sistema (3.1) ili (3.8), moguće je prilagoditi ovaj postupak tako da se računa najveće krisp rešenje posmatranog sistema, pri čemu pod *krisp rešenje* podrazumevamo rešenje sistema (3.1) ili (3.8) koje je krisp relacija. Ovaj modifikovani postupak je dat u sledećoj teoremi.

Teorema 3.2.11. *Neka je* $(\lambda_0, \varrho_0) \in L^{A\times A} \times L^{B\times B}$ *dati par fazi relacija i neka je opadajući niz* $\{(\lambda_n, \varrho_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *parova krisp relacija iz* $2^{A\times A} \times 2^{B\times B}$ *definisan induktivno, na sledeći način:*

$$\lambda_1 = \lambda_0^{\mathrm{c}}, \qquad \varrho_1 = \varrho_0^{\mathrm{c}}, \tag{3.22}$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n \cap \bigcap_{i\in I} (R_i \circ \varrho_n) \nearrow R_i, \qquad \varrho_{n+1} = \varrho_n \cap \bigcap_{i\in I} R_i \nwarrow (\lambda_n \circ R_i), \tag{3.23}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Ako su skupovi A i B konačni, tada je niz $\{(\lambda_n, \varrho_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konačan i postoji* $k \in \mathbb{N}$ *takvo da je* $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ *i* $\varrho_k = \varrho_{k+1}$*, i u tom slučaju je par* (λ_k, ϱ_k) *najveće krisp rešenje sistema* (3.1) *sadržano u* (λ_0, ϱ_0)*.*

Dokaz: Na osnovu pretpostavke, A i B su konačni skupovi, što znači da je i skup $2^{A\times A} \times 2^{B\times B}$ konačan, a to povlači da je niz $\{(\lambda_n, \varrho_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ takođe konačan. Kako je taj niz opadajući, zaključujemo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takvo da je $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ i $\varrho_k = \varrho_{k+1}$, i slično kao u dokazu Teoreme 3.2.2. za svako $i \in I$ dobijamo da važi

$$\lambda_k \leqslant (R_i \circ \varrho_k) \nearrow R_i = [(R_i \circ \varrho_k)/R_i]^{\mathrm{c}} \leqslant (R_i \circ \varrho_k)/R_i$$

i

$$\varrho_k \leqslant R_i \nwarrow (\lambda_k \circ R_i) = [R_i \backslash (\lambda_k \circ R_i)]^{\mathrm{c}} \leqslant R_i \backslash (\lambda_k \circ R_i),$$

odakle sledi da je par (λ_k, ϱ_k) rešenje sistema (3.1) koje je očigledno krisp i sadržano je u (λ_0, ϱ_0).

Koristeći činjenicu da je krisp relacija sadržana u nekoj fazi relaciji ako i samo ako je sadržana u krisp delu te fazi relacije, na isti način kao u dokazu Teoreme 3.2.2. pokazujemo da svako krisp rešenje sistema (3.1) sadržano u (λ_0, ϱ_0) je takođe sadržano u (λ_k, ϱ_k), tj., (λ_k, ϱ_k) je najveće krisp rešenje sistema (3.1) sadržano u (λ_0, ϱ_0), što je i trebalo dokazati. □

Slično se može pokazati i sledeće:

Teorema 3.2.12. *Neka je* $(\lambda_0, \varrho_0) \in L^{A\times A} \times L^{B\times B}$ *dati par fazi relacija, i neka je opadajući niz* $\{(\lambda_n, \varrho_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *parova krisp relacija iz* $2^{A\times A} \times 2^{B\times B}$ *definisan na sledeći način:*

$$\lambda_1 = \lambda_0^c, \qquad \varrho_1 = \varrho_0^c, \tag{3.24}$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n \cap \bigcap_{i\in I} [(R_i \circ \varrho_n) \nearrow R_i] \cap \bigcap_{i\in I} [(R_i \circ \varrho_n^{-1}) \nearrow R_i]^{-1}, \tag{3.25}$$

$$\varrho_{n+1} = \varrho_n \cap \bigcap_{i\in I} [R_i \nwarrow (\lambda_n \circ R_i)] \cap \bigcap_{i\in I} [R_i \nwarrow (\lambda_n^{-1} \circ R_i)]^{-1}, \tag{3.26}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$.

Ako su A *i* B *konačni skupovi, tada je niz* $\{(\lambda_n, \varrho_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konačan i postoji* $k \in \mathbb{N}$ *takvo da je* $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ *i* $\varrho_k = \varrho_{k+1}$*, i u tom slučaju par* (λ_k, ϱ_k) *je najviše krisp rešenje sistema* (3.8) *sadržano u* (λ_0, ϱ_0).

3.3. Količnički dvo-modalitetni fazi relacijski sistemi

Neka je $\mathcal{R} = (A, B, \{R_i\}_{i\in I})$ dvo-modalitetni fazi relacijski sistem i neka su $\lambda \in L^{A\times A}$ i $\varrho \in L^{B\times B}$ fazi kvazi uređenja. Sa $\tilde{\lambda}$ i $\tilde{\varrho}$ ćemo označiti prirodne fazi ekvivalencije od λ i ϱ, a sa $A/\tilde{\lambda}$ i $B/\tilde{\varrho}$ skupove svih klasa ekvivalencije od $\tilde{\lambda}$ i $\tilde{\varrho}$. Za svako $i \in I$ definišemo fazi relaciju $\tilde{R}_i \in L^{(A/\tilde{\lambda})\times(B/\tilde{\varrho})}$ na sledeći način:

$$\tilde{R}_i(\tilde{\lambda}_a, \tilde{\varrho}_b) = (\lambda \circ R_i \circ \varrho)(a, b), \tag{3.27}$$

za svako $a \in A$ i $b \in B$. Nije teško proveriti da je (3.27) ekvivalentno sa

$$\tilde{R}_i(\tilde{\lambda}_a, \tilde{\varrho}_b) = (a\lambda) \circ R_i \circ (\varrho b),$$

pri čemu $a\lambda$ označava λ-afterset od a a ϱb označava ϱ-foreset od b. Stoga na osnovu Teoreme 1.3.1. imamo da je fazi relacija $\tilde{R}_i$ dobro definisana, odnosno ne zavisi od izbora predstavnika klasa prirodnih ekvivalencija od λ i ϱ. Drugim rečima, ako su $a, a' \in A$ i $b, b' \in B$ takve da važi $\tilde{\lambda}_a = \tilde{\lambda}_{a'}$ i $\tilde{\varrho}_b = \tilde{\varrho}_{b'}$, tada prema Teoremi 1.3.1. sledi da je $a\lambda = a'\lambda$ i $\varrho b = \varrho b'$, pa važi, $\tilde{R}_i(\tilde{\lambda}_a, \tilde{\varrho}_b) = \tilde{R}_i(\tilde{\lambda}_{a'}, \tilde{\varrho}_{b'})$.

Dvo-modalitetni fazi relacijski sistem $\tilde{\mathcal{R}} = (A/\tilde{\lambda}, B/\tilde{\varrho}, \{\tilde{R}_i\}_{i\in I})$ nazivaćemo *količnički* (ili *faktor*) *fazi relacijski sistem* od $\mathcal{R}$ u odnosu na par (λ, ϱ). Primetimo da se ništa ne menja ako se skupovi $A/\tilde{\lambda}$ i $B/\tilde{\varrho}$ zamene odgovarajućim skupovima aftersetova ili foresetova, definicija (3.27) će ostati da važi, jer na osnovu Teoreme 1.3.1. sledi da su tako definisani dvo-modalitetni fazi relacijski sistemi izomorfni sa $\tilde{\mathcal{R}}$.

U slučaju kada radimo sa dvo-modalitetnim krisp relacijskim sistemom, relacije koje formiraju odgovarajući količnički relacijski sistem mogu se okarakterisati sledećom teoremom:

Teorema 3.3.1. *Neka je* $\mathcal{R} = (A, B, \{R_i\}_{i\in I})$ *dvo-modalitetni krisp relacijski sistem i neka su* $\lambda \subseteq A \times A$ *i* $\varrho \subseteq B \times B$ *kvazi uređenja. Tada za proizvoljne* $i \in I$, $\sigma \in A/\tilde{\lambda}$ *i* $\tau \in B/\tilde{\varrho}$ *su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $(\sigma,\tau)\in\tilde{R}_i$;
(ii) $(\forall x\in\sigma)(\forall y\in\tau)\ (x,y)\in\lambda\circ R_i\circ\varrho$.

Ako, pored ovoga važi da su λ i ϱ ekvivalencije, tada su gornji uslovi ekvivalentni sa

(iii) $(\exists x\in\sigma)(\exists y\in\tau)\ (x,y)\in R_i$.

Dokaz: Za proizvoljne $x\in A$ i $y\in B$ važiće $x\in\sigma$ i $y\in\tau$ ako i samo ako važi $\sigma=\tilde{\lambda}_x$ i $\tau=\tilde{\varrho}_y$, pa ekvivalencija (i)$\Leftrightarrow$(ii) sledi direktno na osnovu (3.27).

Dalje, pretpostavimo da su λ i ϱ ekvivalencije.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Neka su $a\in\sigma$ i $b\in\tau$ proizvoljni elementi. Tada imamo da je $(a,b)\in\lambda\circ R_i\circ\varrho$, što znači da postoje $x\in A$ i $y\in B$ takvi da je $(a,x)\in\lambda$, $(x,y)\in R_i$ i $(y,b)\in\varrho$. Kako su λ i ϱ ekvivalencije i σ i τ njihove klase ekvivalencija, zaključujemo da važi $\lambda_x=\lambda_a=\sigma$ i $\varrho_y=\varrho_b=\tau$, a potom i, $x\in\sigma$, $y\in\tau$ i $(x,y)\in R_i$.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Ova implikacija je očigledna. □

U nastavku ćemo razmatrati količničke fazi relacijske sisteme određene parom regularnih ili strukturnih fazi kvazi uređenja i fazi ekvivalencije. Najpre ćemo pokazati sledeću teoremu:

Teorema 3.3.2. *Neka su $\lambda\in L^{A\times A}$ i $\varrho\in L^{B\times B}$ fazi kvazi uređenja i neka je $R\in L^{A\times B}$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\lambda\circ R\circ\varrho=R\circ\varrho$;
(ii) $\lambda\circ R\circ\varrho=\lambda\backslash(R\circ\varrho)$;
(iii) $\lambda\circ R\leqslant R\circ\varrho$.

Dokaz: (i)$\Rightarrow$(ii). Pretpostavimo da važi $\lambda\circ R\circ\varrho=R\circ\varrho$. Tada na osnovu $\lambda\circ R\circ\varrho\leqslant R\circ\varrho$ sledi $R\circ\varrho\leqslant\lambda\backslash(R\circ\varrho)$, pa na osnovu Tvrđenja 1.1. imamo da važi $\lambda\backslash(R\circ\varrho)\leqslant R\circ\varrho$. Zapravo, $\lambda\circ R\circ\varrho=R\circ\varrho=\lambda\backslash(R\circ\varrho)$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Na osnovu Tvrđenja 1.1. sledi

$$\lambda\circ R\leqslant\lambda\circ R\circ\varrho=\lambda\backslash(R\circ\varrho)\leqslant R\circ\varrho,$$

odakle važi (iii).

(iii)$\Rightarrow$(i). Neka je $\lambda\circ R\leqslant R\circ\varrho$, tada $\lambda\circ R\circ\varrho\leqslant R\circ\varrho\circ\varrho=R\circ\varrho$, i na osnovu refleksivnosti relacije λ imamo da važi $R\circ\varrho\leqslant\lambda\circ R\circ\varrho$, pa zaključujemo da je (i) tačno. □

Takođe, imamo sledeće:

Teorema 3.3.3. *Neka su $\lambda\in L^{A\times A}$ i $\varrho\in L^{B\times B}$ fazi kvazi uređenja i neka je $R\in L^{A\times B}$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $\lambda\circ R\circ\varrho=\lambda\circ R$;
(ii) $\lambda\circ R\circ\varrho=(\lambda\circ R)/\varrho$;
(iii)$R\circ\varrho\leqslant\lambda\circ R$.

Dokaz: Dokaz je analogan dokazu Teoreme 3.3.2. □

Kombinujući prethodne dve teoreme, dobijamo teoremu koja daje karakterizaciju količničkog fazi relacijskog sistema u odnosu na par regularnih fazi kvazi uređenja.

Teorema 3.3.4. *Neka je $\mathcal{R} = (A, B, \{R_i\}_{i\in I})$ dvo-modalitetni fazi relacijski sistem i neka je $\lambda \in L^{A\times A}$ i $\varrho \in L^{B\times B}$ fazi kvazi uređenje. Tada je (λ, ϱ) par regularnih fazi kvazi uređenja u odnosu na $\mathcal{R}$ ako i samo ako važi:*

$$\begin{aligned}\tilde{R}_i(\tilde{\lambda}_a, \tilde{\varrho}_b) &= \bigwedge_{x\in A}\Big(\lambda(x,a) \to \Big(\bigvee_{y\in B} R_i(x,y) \otimes \varrho(y,b)\Big)\Big) = \\ &= \bigwedge_{y\in B}\Big(\varrho(b,y) \to \Big(\bigvee_{x\in A} \lambda(a,x) \otimes R_i(x,y)\Big)\Big), \qquad (3.28)\end{aligned}$$

za svako $i \in I$, $a \in A$ i $b \in B$.

Dokaz: Na osnovu Teorema 3.3.2. i 3.3.3., (λ, ϱ) je par regularnih fazi kvazi uređenja u odnosu na $\mathcal{R}$ ako i samo ako važi $\lambda \circ R \circ \varrho = \lambda \backslash (R \circ \varrho) = (\lambda \circ R)/\varrho$, i prema definiciji količnika fazi relacionog sistema, definiciji rezidula, kao i definiciji kompozicije fazi relacija (jednakosti (3.27), (1.78), (1.79) i (1.60)) dobijamo da svaki $\bar{R}_i$ može biti predstavljen jednačinom (4.79). □

Na isti način dobijamo sledeću posledicu:

Posledica 3.3.5. *Neka je $\mathcal{R} = (A, B, \{R_i\}_{i\in I})$ dvo-modalitetni fazi relacijski sistem i neka su $\lambda \in L^{A\times A}$ i $\varrho \in L^{B\times B}$ fazi kvazi uređenja. Tada je (λ, ϱ) par desno regularnih fazi kvazi uređenja u odnosu na $\mathcal{R}$ ako i samo ako važi*

$$\tilde{R}_i(\tilde{\lambda}_a, \tilde{\varrho}_b) = \bigwedge_{x\in A}\Big(\lambda(x,a) \to \Big(\bigvee_{y\in B} R_i(x,y) \otimes \varrho(y,b)\Big)\Big), \qquad (3.29)$$

za svako $i \in I$, $a \in A$ i $b \in B$.

Posledica 3.3.6. *Neka je $\mathcal{R} = (A, B, \{R_i\}_{i\in I})$ dvo-modalitetni fazi relacijski sistem i neka su $\lambda \in L^{A\times A}$ i $\varrho \in L^{B\times B}$ fazi kvazi uređenja. Tada je (λ, ϱ) par levo regularnih fazi kvazi uređenja u odnosu na $\mathcal{R}$ ako i samo ako važi*

$$\tilde{R}_i(\tilde{\lambda}_a, \tilde{\varrho}_b) = \bigwedge_{y\in B}\Big(\varrho(b,y) \to \Big(\bigvee_{x\in A} \lambda(a,x) \otimes R_i(x,y)\Big)\Big), \qquad (3.30)$$

za svako $i \in I$, $a \in A$ i $b \in B$.

Zanimljivo je videti kako jednačina (4.79) izgleda u slučaju kada su λ, ϱ i R_i, $i \in I$ krisp relacije. Tada važi sledeća teorema:

Teorema 3.3.7. *Neka je $\mathcal{R} = (A, B, \{R_i\}_{i\in I})$ dvo-modalitetni relacijski sistem i neka su $\lambda \subseteq A \times A$ i $\varrho \subseteq B \times B$ kvazi uređenja. Tada je (λ, ϱ) par regularnih kvazi-uređenja u odnosu na $\mathcal{R}$ ako i samo ako važi*

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\lambda}_a, \tilde{\varrho}_b) \in \tilde{R}_i \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall x \in \lambda a)(\exists y \in \varrho b)\ (x,y) \in R_i \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall y \in b\varrho)(\exists x \in a\lambda)\ (x,y) \in R_i,
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

za svako $i \in I$, $a \in A$ i $b \in B$.

Dokaz: Na osnovu teoreme 4.5.3., pravila u označavanju krisp skupova i relacija pomenutih u uvodu, kao i poznatih pravila za restrikciju kvantifikatora, imamo da je

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\lambda}_a, \tilde{\varrho}_b) \in \tilde{R}_i \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall x \in A)\Big((x,a) \in \lambda \Rightarrow (\exists y \in B)\big((x,y) \in R_i \ \&\ (y,b) \in \varrho\big)\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall x \in \lambda a)(\exists y \in \varrho b)\ (x,y) \in R_i.
\end{aligned}
$$

Na isti način dokazujemo i drugu ekvivalenciju u (3.31). □

Konačno, kada radimo sa dvo-modalitetnim krisp relacijskim sistemom i ekvivalencijama, imamo da važi sledeće:

Posledica 3.3.8. *Neka je $\mathcal{R} = (A, B, \{R_i\}_{i\in I})$ dvo-modalitetni relacijski sistem i neka su $\lambda \subseteq A \times A$ i $\varrho \subseteq B \times B$ ekvivalencije. Tada je (λ, ϱ) par regularnih ekvivalencija u odnosu na $\mathcal{R}$ ako i samo ako važi*

$$
(\sigma, \tau) \in \tilde{R}_i \ \Leftrightarrow\ (\forall x \in \sigma)(\exists y \in \tau)\ (x,y) \in R_i \ \Leftrightarrow\ (\forall y \in \tau)(\exists x \in \sigma)\ (x,y) \in R_i, \tag{3.32}
$$

za svako $i \in I$, $\sigma \in A/\lambda$ and $\tau \in B/\varrho$.

Konačno, fazi relacije koje formiraju količnički fazi relacijski sistem u odnosu na par strukturnih fazi kvazi uređenja, mogu se okarakterisati na sledeći način:

Teorema 3.3.9. *Neka je $\mathcal{R} = (A, B, \{R_i\}_{i\in I})$ dvo-modalitetni fazi relacijski sistem i neka su $\lambda \in L^{A\times A}$ i $\varrho \in L^{B\times B}$ fazi kvazi uređenja. Tada je (λ, ϱ) je par strukturnih fazi kvazi uređenja u odnosu na $\mathcal{R}$ ako i samo ako važi:*

$$
\tilde{R}_i(\tilde{\lambda}_a, \tilde{\varrho}_b) = R_i(a,b), \tag{3.33}
$$

za svako $i \in I$, $a \in A$ i $b \in B$.

Dokaz: Neka je (λ, ϱ) par strukturnih fazi kvazi uređenja u odnosu na $\mathcal{R}$. Tada za proizvoljne $i \in I$, $a \in A$ i $b \in B$ važi

$$
\tilde{R}_i(\tilde{\lambda}_a, \tilde{\varrho}_b) = (\lambda \circ R_i \circ \varrho)(a,b) = R_i(a,b).
$$

Obratno, ako (4.88) važi, tada za svako $i \in I$ imamo da je $\lambda \circ R_i \circ \varrho = R_i$, odakle imamo

$$
\lambda \circ R_i = \lambda \circ \lambda \circ R_i \circ \varrho = \lambda \circ R_i \circ \varrho = R_i \ \text{ i } \ R_i \circ \varrho = \lambda \circ R_i \circ \varrho \circ \varrho = \lambda \circ R_i \circ \varrho = R_i.
$$

Dakle, (λ, ϱ) je par strukturnih fazi kvazi uređenja u osnosu na $\mathcal{R}$. □

Kada se radi o krisp relacijskom sistemu, dobijamo sledeće:

Posledica 3.3.10. *Neka je $\mathcal{R} = (A, B, \{R_i\}_{i\in I})$ dvo-modalitetni krisp relacijski sistem i neka su $\lambda \subseteq A\times A$ i $\varrho \subseteq B\times B$ kvazi uređenja. Tada je (λ, ϱ) par strukturnih kvazi uređenja u odnosu na $\mathcal{R}$ ako i samo ako važi:*

$$(\sigma,\tau) \in \tilde{R}_i \iff (\forall x \in \sigma)(\forall y \in \tau)\ (x,y) \in R_i, \tag{3.34}$$

za sve $i \in I$, $\sigma \in A/\tilde{\lambda}$ i $\tau \in B/\tilde{\varrho}$.

U nastavku, dajemo nekoliko primera koji ilustruju primenu parova regularnih fazi kvazi uređenja i fazi ekvivalencija. Jednostavnosti radi, prva dva primera se odnose na krisp slučaj.

Primer 3.3.11. Pretpostavimo da je A skup zaposlenih u nekoj kompaniji, a B je skup svih poslova koje ova kompanija obavlja za druge kompanije. Neka je skup drugih kompanija označen sa I i za svako $i \in I$ i neka su poslovi za kompaniju i raspodeljeni zaposlenima pomoću relacije $R_i \subseteq A\times B$, tj., posao b za kompaniju i je dodeljen zaposlenom a ako i samo ako je $(a,b) \in R_i$. Dalje, pretpostavimo da u svrhu povećanja efikasnosti i kvaliteta posla, kompanija namerava da grupiše radnike u timove, a poslove u grupe poslova, tako da ovi timovi i grupe poslova budu što je moguće veći i da timovima zaposlenih dodeli grupe poslova tako da budu zadovoljeni sledeći uslovi:

– za svaku kompaniju, grupa poslova γ će biti dodeljena timu θ ako i samo ako za svakog zaposlenog iz tima θ postoji posao iz γ koji je on već obavljao za tu kompaniju, i
– za svaki posao iz γ postoji zaposleni iz tima θ koji je već obavljao taj posao za datu kompaniju.

Očigledno, ovakvo grupisanje radnika i poslova može biti izvršeno korišćenjem najvećeg para regularnih ekvivalencija u odnosu na familiju relacija $\{R_i\}_{i\in I}$.

Neka su pomenuti skupovi $A = \{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$, $B = \{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6\}$, $I = \{1,2\}$ i neka su relacije R_1 i R_2 predstavljene sledećim matricama:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

Primenjujući gore pomenuti algoritam, računamo najveći par (λ,ϱ) regularnih ekvivalencija u odnosu na R_1 i R_2, pri čemu su λ i ϱ predstavljene sledećim matricama:

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \varrho = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gde isprekidane linije pokazuju klase ekvivalencije. Dakle, oformljeni timovi su $\{a_1,a_2\}$, $\{a_3\}$, $\{a_4\}$ i $\{a_5,a_6\}$, a grupe poslova su $\{b_1,b_2\}$, $\{b_3,b_4\}$, $\{b_5\}$ i $\{b_6\}$.

Sada se relacije R_1, R_2, $\lambda \circ R_1 \circ \varrho$ i $\lambda \circ R_2 \circ \varrho$ mogu zapisati kao

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda \circ R_1 \circ \varrho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda \circ R_2 \circ \varrho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gde isprekidane linije pokazuju timove radnika i grupe poslova, dok su redukovane relacije $\tilde{R}_1$ i $\tilde{R}_2$, koje predstavljaju dodelu grupa poslova timovima, date sa

$$\tilde{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

U ovom primeru smo razmatrali situaciju kada se timovi i grupe poslova formiraju korišćenjem para regularnih ekvivalencija, pa su shodno ovome oni međusobno disjunktni. Međutim, disjunktnost nije neophodan uslov, i u sledećem primeru ćemo razmatrati opštiji slučaj kada se timovi i grupe poslova formiraju korišćenjem para regularnih kvazi uređenja.

Primer 3.3.12. U ovom primeru koristeićemo terminologiju i oznake iz prethodnog primera. Jedina razlika će biti u sledećem: timovi i grupe poslova će biti formirani na takav način da se sastoje od širih i užih delova. Uži delovi će se zvati jezgra timova, odnosno jezgra grupe poslova. U ovom slučaju ćemo zahtevati sledeće:

– za svaku kompaniju šira grupa poslova γ će biti dodeljena široj grupi timova θ ako i samo ako za svakog zaposlenog iz jezgra od θ postoji posao iz γ koji je on već obavljao za tu kompaniju, i

– za svaki posao iz jezgra od γ postoji zaposleni iz θ koji je taj posao obavljao za tu kompaniju.

Jasno je da ovakvo grupisanje zaposlenih i poslova može biti izvršeno korišćenjem para (λ, ϱ) regularnih kvazi uređenja u odnosu na familiju relacija $\{R_i\}_{i\in I}$, i tada su širi timovi i grupe poslova redom aftersetovi od λ i foresetovi od ϱ, dok uži timovi i grupe poslova odgovaraju klasama ekvivalencije prirodnih ekvivalencija $\tilde{\lambda}$ i $\tilde{\varrho}$. Jezgro nekog tima možemo shvatiti kao grupu zaposlenih koji odrađuju glavni deo dodeljenog zadatka, dok ostatak tima pomaže jezgru u obavljanju posla koji oni pre toga nisu obavljali ili im je iz nekih drugih razloga potrebna pomoć pri obavljanju tog posla. Slično, jezgro grupe poslova koja je dodeljena timu se može razumeti kao grupa glavnih poslova koje bi tim trebalo da obavi, dok su ostali poslovi iz ove grupe oni za koje članovi tima mogu biti angažovani kao savetnici.

Za isti relacijski sistem koji je razmatran u prethodnom primeru, najveći par (λ, ϱ) regularnih kvazi uređenja sastoji se od kvazi uređenja predstavljenih sa

$$\lambda = \left[\begin{array}{ccc|c|cc} 1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ \hline 1&1&1&1&1&1\\ \hline 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&1 \end{array}\right], \qquad \varrho = \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ \hline 0&0&1&1&1&0\\ 0&0&1&1&1&0\\ 0&0&1&1&1&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right],$$

pri čemu su njihove prirodne ekvivalencije date sa

$$\tilde{\lambda} = \left[\begin{array}{ccc|c|cc} 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ \hline 0&0&0&1&0&0\\ \hline 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&1 \end{array}\right], \qquad \tilde{\varrho} = \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ \hline 0&0&1&1&1&0\\ 0&0&1&1&1&0\\ 0&0&1&1&1&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right].$$

Na osnovu ovoga imamo da su timovi $\{[a_1, a_2, a_3], a_5, a_6\}$, $\{a_1, a_2, a_3, [a_4], a_5, a_6\}$ i $\{[a_5, a_6]\}$, dok su grupe poslova $\{[b_1, b_2]\}$, $\{b_1, b_2, [b_3, b_4, b_5]\}$ i $\{[b_6]\}$, pri čemu su uglaste zagrade korišćene da se označe jezgra.

Dalje, relacije R_1, R_2, $\lambda \circ R_1 \circ \varrho$ i $\lambda \circ R_2 \circ \varrho$ mogu se zapisati na sledeći način

$$R_1 = \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1&1\\ \hline 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right], \qquad R_2 = \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1\\ \hline 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right],$$

$$\lambda \circ R_1 \circ \varrho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda \circ R_2 \circ \varrho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dok se redukovane relacije $\tilde{R}_1$ i $\tilde{R}_2$, koje predstavljaju dodelu grupa poslova timovima, mogu predstaviti sa

$$\tilde{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jasno je da u nekim situacijama ima smisla koristiti desno ili levo regularna fazi kvazi uređenja ili fazi ekvivalencije umesto regularnih.

Takođe ć emo dati primer koji razmatra fazi relacioni sistem nad Gedelovom strukturom.

Primer 3.3.13. Neka je $\mathcal{L}$ Gedelova struktura, $|A| = |B| = 6$ i neka je $R \in L^{A\times B}$ fazi relacija data sa

$$R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Najveći par (λ^q, ϱ^q) regularnih fazi kvazi uređenja i najveći par (λ^e, ϱ^e) regularnih fazi ekvivalencija u odnosu na R sastoji se od fazi kvazi uređenja i fazi ekvivalencija predstavljenih na sledeći način:

$$\lambda^q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \varrho^q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \varrho^e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Možemo uočiti da su λ^e i ϱ^e prirodne fazi ekvivalencije relacija λ^q i ϱ^q, redom. Dalje, imamo da važi sledeće

$$\lambda^q \circ R \circ \varrho^q = \lambda^e \circ R \circ \varrho^e = \left[\begin{array}{cc:c:ccc} 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hdashline 0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

dok je redukovana fazi relacija $\tilde{R}$ data sa

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.4. Dvo-modalitetni krisp relacijski sistemi

U ovom odeljku razmatraćemo dvo-modalitetne krisp relacijske sisteme $\mathcal{R} = (A, B, \{R\}_{i\in I})$, odnosno, sisteme kod kojih su članovi familije $\{R_i\}_{i\in I}$ krisp relacije. Preciznije, razmatraćemo sistem jednačina (3.1), kod koga su α i β nepoznate krisp relacije na skupovima A, odnosno B, tj. nepoznate koje uzimaju vrednosti u $2^{A\times A}$ i $2^{B\times B}$, tim redom. Kao što je već navedeno u Odeljku 3.2., postoji najveće rešenja ovog sistema sadržanog u datom paru krisp relacija. Takođe, Teorema 3.2.2. daje algoritam za izračunavanja najvećeg rešenja gore navedenog sistema sadržanog u datom paru krisp relacija, čije je vreme izvršenja $O(|I| \cdot m^5)$. Međutim, od posebnog je interesa razmatrati ona rešenja datog sistema koja su relacije ekvivalencije. Razlog za ovo je činjenica da takvi parovi rešenja predstavljaju parove regularnih ekvivalencija, koje imaju veoma važnu ulogu u teoriji socijalnih mrža. Jedan od glavnih problema teorije socijalnih mreža je nalaženje sličnosti između entiteta koje bi ukazivale na to da ovi entiteti imaju istu ulogu ili poziciju u mreži. Ovakve vrste sličnosti su prvi put formalno opisali Lorrain i White [80], Breiger i ostali [14] i Burt [17] uvođenjem koncepta strukturne ekvivalencije. Za dva entiteta kažemo da su strukturno ekvivalentna ako oni imaju identične veze sa ostalim entitetima mreže. Strukturne ekvivalencije su proučavane u mnogim člancima kao na primer [2, 4, 9, 38, 37, 39, 40, 51, 52]. U cilju generalizacije koncepta strukturne ekvivalencije, White i Reitz [120] su definisali pojam regularne ekvivalencije. Za dva entiteta se kaže da su regularno ekvivalentna ako imaju identične veze sa svim entitetima sa kojima su regularno ekvivalentni [10, 45]. Regularne ekvivalencije su takođe izučavane od strane mnogih autora [63, 64].

Korišćene regularnih ekvivalencija nam pruža način identifikovanja "uloga" u mreži na osnovu međusobnih veza entiteta u mreži. Umesto oslanjanja na osobine učesnika u cilju definisanja socijalnih uloga i razumevanja kako one utiču na interakciju između učesnika, korišćenjem regularnih ekvivalencija identifikujemo socijalne uloge prepoznavanjem regularnosti u vezama u mreži. Regularne ekvivalencije omogućavaju deljenje skupa učesnika u odnosu na njihove međusobne veze. Cilj ovog odeljka je da se uopšti pojam regularnih ekvivalencija, na takav način da se one mogu koristiti za deljenje skupa učesnika na osnovu veza koje učesnici jedne grupe imaju sa učesnicima druge grupe (na primer, grupa studenata može biti podeljena na osnovu njihovih afiniteta prema određenoj grupi predmeta).

Prva teorema koju dokazujemo u ovom poglavlju utvrđuje postojanje sistema jednačina ekvivalentnog sistemu 3.1 u slučaju kada je $\mathcal{R} = (A, B, \{R\}_{i\in I})$ dvo-modalitetni krisp relacijski sistem i α i β krisp relacije ekvivalencije.

Teorema 3.4.1. *Neka je $\mathcal{R} = (A, B, \{R\}_{i\in I})$ dvo-modalitetni krisp relacijski sistem i $\lambda_0 \in \mathcal{E}(A)$ i $\varrho_0 \in \mathcal{E}(B)$. Tada je, (λ_0, ϱ_0) rešenje sistema jednačina (3.1) ako i samo ako je (λ_0, ϱ_0) rešenje sledećeg sistema jednačina:*

$$\lambda \circ R_i \circ \varrho = \lambda \circ R_i \cap R_i \circ \varrho, \qquad i \in I. \tag{3.35}$$

Dokaz: Neka je $\mathcal{R} = (A, B, \{R\}_{i\in I})$ dvo-modalitetni krisp relacijski sistem, $\lambda_0 \in \mathcal{E}(A)$, $\varrho_0 \in \mathcal{E}(B)$ i (λ_0, ϱ_0) rešenje sistema jednačina (3.1). Tada, za proizvoljno $i \in I$ imamo:

$$\begin{aligned} \lambda_0 \circ R_i \circ \varrho_0 &= R_i \circ \varrho_0 \circ \varrho_0 = R_i \circ \varrho_0, \\ \lambda_0 \circ R_i \circ \varrho_0 &= \lambda_0 \circ \lambda_0 \circ R_i = \lambda_0 \circ R_i, \end{aligned}$$

dakle (λ_0, ϱ_0) je rešenje sistema (3.35).

Obratno, neka je (λ_0, ϱ_0) je rešenje sistema (3.35). Tada, za proizvoljno $i \in I$ imamo:

$$\begin{aligned} \lambda_0 \circ R_i \leqslant \lambda_0 \circ R_i \circ \varrho_0 = \lambda_0 \circ R_i \cap R_i \circ \varrho_0 \subseteq R_i \circ \varrho_0, \\ R_i \circ \varrho_0 \leqslant \lambda_0 \circ R_i \circ \varrho_0 = \lambda_0 \circ R_i \cap R_i \circ \varrho_0 \subseteq \lambda_0 \circ R_i, \end{aligned}$$

čime je dokazano da je (λ_0, ϱ_0) je rešenje sistema 3.1. □

Sledeća teorema daje osnovnu karakterizaciju regularnih ekvivalencija na dvo-modalitetnim mrežama.

Teorema 3.4.2. *Neka je $\mathcal{R} = (A, B, \{R\}_{i\in I})$ dvo-modalitetni krisp relacijski sistem i $\lambda_0 \in \mathcal{E}(A)$ i $\varrho_0 \in \mathcal{E}(B)$. Tada je, (λ_0, ϱ_0) rešenje sistema jednačina (3.1) ako i samo ako za svako $a \in A$ i $b \in B$ važi sledeće:*

$$(\lambda_0, \varrho_0) \subseteq \left(\bigcap_{i\in I} (R_i \circ \varrho_0^b) | (R_i \circ \varrho_0^b), \bigcap_{i\in I} (\lambda_0^a \circ R_i) | (\lambda_0^a \circ R_i) \right). \tag{3.36}$$

Dokaz: Neka je $\mathcal{R} = (A, B, \{R\}_{i\in I})$ dvo-modalitetni krisp relacijski sistem, $\lambda_0 \in \mathcal{E}(A)$, $\varrho_0 \in \mathcal{E}(B)$ i (λ_0, ϱ_0) rešenje sistema jednačina (3.1). Tada, prema prethodnoj teoremi, imamo da je (λ_0, ϱ_0) rešenje sistema (3.35). Dakle važi:

$$\begin{aligned} \lambda_0 \circ R_i \circ \varrho_0 &\subseteq \lambda_0 \circ R_i, \qquad i \in I \\ \lambda_0 \circ R_i \circ \varrho_0 &\subseteq R_i \circ \varrho_0, \qquad i \in I \end{aligned} \tag{3.37}$$

Na osnovu nejednakosti (3.37) dobija se:

$$\lambda_0 \subseteq (R_i \circ \varrho_0^b) / (R_i \circ \varrho_0^b), \qquad i \in I, b \in A.$$

Dalje, koristeći činjenicu da je λ_0 simetrična relacija dobijamo:

$$\lambda_0 = \lambda_0^{-1} \subseteq \Big((R_i \circ \varrho_0^b) / (R_i \circ \varrho_0^b)\Big)^{-1} = (R_i \circ \varrho_0^b) \setminus (R_i \circ \varrho_0^b), \qquad i \in I, b \in A.$$

Kao posledicu ovoga imamo,

$$\lambda_0 \subseteq \Big((R_i \circ \varrho_0^b) / (R_i \circ \varrho_0^b)\Big) \cap \Big((R_i \circ \varrho_0^b) \setminus (R_i \circ \varrho_0^b)\Big) = (R_i \circ \varrho_0^b) | (R_i \circ \varrho_0^b), \qquad i \in I, b \in A.$$

Na sličan način dokazujemo da važi $\varrho_0 \subseteq (\lambda_0^a \circ R_i)|(\lambda_0^a \circ R_i)$, za svako $a \in A$ i $i \in I$.

Obratno, neka važi (3.36). Neka je $(a,b) \in \lambda_0 \circ R_i \circ \varrho_0$, tada postoji $c \in A$ takvo da je $(a,c) \in \lambda_0$ i $(c,b) \in R_i \circ \varrho_0$, tj. $(a,c) \in \lambda_0$ i $c \in R_i \circ \varrho_0^b$. Na osnovu (3.36), iz $(a,c) \in \lambda_0$ sledi da je $(a,c) \in (R_i \circ \varrho_0^b) | (R_i \circ \varrho_0^b)$, za svako $b \in B$. Dakle, $a \in R_i \circ \varrho_0^b$, tj. $(a,b) \in R_i \circ \varrho_0$, što znači da je $\lambda_0 \circ R_i \circ \varrho_0 \subseteq R_i \circ \varrho_0$, pa je zapravo $\lambda_0 \circ R_i \circ \varrho_0 = R_i \circ \varrho_0$, jer je λ_0 relacija ekvivalencije.

Na sličan način se može pokazati da važi da je $\lambda \circ R_i \circ \varrho_0 \subseteq \lambda_0 \circ R_i$, tj. $\lambda \circ R_i \circ \varrho_0 = \lambda_0 \circ R_i$. Odavde, (λ_0, ϱ_0) je na osnovu prethodne teoreme rešenje sistema jednačina (3.1). □

Lema 3.1. *Neka je $\mathcal{R} = (A, B, \{R\}_{i \in I})$ dvo-modalitetni krisp relacijski sistem, $\lambda_0 \in \mathcal{E}(A)$, $\varrho_0 \in \mathcal{E}(B)$, (λ_0, ϱ_0) rešenje sistema jednačina (3.1) i (μ, ν) je par ekvivalencija na A i B respektivno za koje važi da je $(\lambda_0, \varrho_0) \subseteq (\mu, \nu)$. Tada je sledeća nejednakost zadovoljena:*

$$(\lambda_0, \varrho_0) \subseteq \Big(\bigcap_{i \in I} \Big((R_i \circ \nu^b) | (R_i \circ \nu^b)\Big), \bigcap_{i \in I} \big((\mu^a \circ R_i) | (\mu^a \circ R)\big)\Big), \qquad a \in A, b \in B. \tag{3.38}$$

Dokaz: Prema Teoremi 3.4.1. par (λ_0, ϱ_0) je rešenje sistema jednačina (3.1) ako i samo ako je rešenje sistema (3.35), tj. ako i samo ako zadovoljava

$$\begin{aligned} \lambda_0 \circ R_i \circ \varrho_0 &\subseteq \lambda_0 \circ R_i, \qquad i \in I \\ \lambda_0 \circ R_i \circ \varrho_0 &\subseteq R_i \circ \varrho_0, \qquad i \in I \end{aligned}$$

Kako su $\lambda_0, \varrho_0, \mu$ i ν relacije ekvivalencije za koje važi $\lambda_0 \subseteq \mu$ i $\varrho_0 \subseteq \nu$, zaključujemo da važi $\mu \circ \lambda_0 = \mu$ i $\varrho_0 \circ \nu = \nu$. Dakle, dobijamo sledeće:

$$\lambda_0 \circ R_i \circ \varrho_0 \circ \nu \subseteq R_i \circ \varrho_0 \circ \nu, \quad \mu \circ \lambda_0 \circ R_i \circ \varrho_0 \subseteq \mu \circ \lambda_0 \circ R_i,$$

tj.

$$\lambda_0 \circ R_i \circ \nu \subseteq R_i \circ \nu, \quad \mu \circ R_i \circ \varrho_0 \subseteq \mu \circ R_i. \tag{3.39}$$

Na sličan način kao u dokazu Teoreme 3.4.2., možemo dokazati da prva nejednakost u (3.39) implicira $\lambda_0 \subseteq \cap_{i\in I}(R_i \circ \nu^b)|(R_i \circ \nu^b)$, za svako $b \in B$, a druga $\varrho_0 \subseteq \cap_{i\in I}((\mu^a \circ R_i)|(\mu^a \circ R_i))$, za svako $a \in A$, čime je dokaz teoreme kopletiran. □

Naredna teorema daje proceduru za izračunavanje najvećeg para ekvivalencija koji je rešenje sistema jednačina (3.1).

Teorema 3.4.3. *Neka je $\mathcal{R} = (A, B, \{R\}_{i\in I})$ dvo-modalitetni krisp relacijski sistem i $\lambda_0 \in \mathcal{E}(A)$ i $\varrho_0 \in \mathcal{E}(B)$ relacije ekvivalencije na A i B respektivno.*

Definišemo nizove $\{(\lambda_k, \varrho_k)\}_{k\in N}$ i $\{(\mu_k, \nu_k)\}_{k\in N}$ na sledeći način: Inicijalno, za $k = 1$,

$$\mu_1 = \nabla_A, \quad \nu_1 = \nabla_B, \tag{3.40}$$

$$\lambda_1 = \lambda_0 \cap \bigcap_{i\in I}\Big((R_i \circ \nabla_B^b)|(R_i \circ \nabla_B^b)\Big), \quad \varrho_1 = \varrho_0 \cap \bigcap_{i\in I}\Big((\nabla_A^a \circ R_i)|(\nabla_A^a \circ R_i)\Big) \tag{3.41}$$

pri čemu su $a \in A$ i $b \in B$ proizvoljni elementi.

Dalje, za svako $k \in N$ ponavljamo sledeći korak: Pronalazimo $a \in A$ i $b \in B$ takvo da je $(\mu_k^a, \nu_k^b) \neq (\lambda_k^a, \varrho_k^b)$ i postavljamo

$$\mu_{k+1} = \mu_k \cap \lambda_k^a|\lambda_k^a, \quad \nu_{k+1} = \nu_k \cap \varrho_k^b|\varrho_k^b, \tag{3.42}$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k \cap \bigcap_{i\in I}\Big((R_i \circ \varrho_k^b)|(R_i \circ \varrho_k^b)\Big) \cap \bigcap_{i\in I}\Big((R_i \circ (\nu_k^b \cap (\varrho_k^b)^c))|(R_i \circ (\nu_k^b \cap (\varrho_k^b)^c))\Big),$$

$$\varrho_{k+1} = \varrho_k \cap \bigcap_{i\in I}\Big((\lambda_k^a \circ R_i)|(\lambda_k^a \circ R_i)\Big) \cap \bigcap_{i\in I}\Big(((\mu_k^a \cap (\lambda_k^a)^c) \circ R_i)|((\mu_k^a \cap (\lambda_k^a)^c) \circ R_i)\Big), \tag{3.43}$$

sve dok ne dobijemo da je $(\mu_k, \nu_k) = (\lambda_k, \varrho_k)$. Tada važi:

(a)*Nizovi $\{(\lambda_k, \varrho_k)\}_{k\in N}$ i $\{(\mu_k, \nu_k)\}_{k\in N}$ su opadajući;*
(b)*Za svako $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \subseteq \mu_k$ i $\varrho_k \subseteq \nu_k$;*
(c)*Za svako $k \in \mathbb{N}$, i za sve $c \in A$ i $d \in B$ važi sledeće:*

$$\lambda_k \subseteq \bigcap_{i\in I}\Big((R_i \circ \nu_k^d)|(R_i \circ \nu_k^d)\Big), \quad \varrho_k \subseteq \bigcap_{i\in I}\Big((\mu_k^c \circ R_i)|(\mu_k^c \circ R_i)\Big); \tag{3.44}$$

(d)*Postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da važi $(\mu_n, \nu_n) = (\lambda_n, \varrho_n)$ i (λ_n, ϱ_n) je najveći par ekvivalencija koji je rešenje sistema jednačina (3.1) sadržan u (λ_0, ϱ_0).*

Dokaz: (a) Ovo sledi direktno iz definicije nizova.

Dokazujemo tvrđenje (b) indukcijom po $k \in \mathbb{N}$.

Za $k = 1$, tvrđenje očigledno važi.

Pretpostavimo da je $\lambda_m \subseteq \mu_m$, za $k = m$, i dokažimo da važi $\lambda_{m+1} \subseteq \mu_{m+1}$. Kako je $\{\lambda_k\}_{k\in N}$ opadajući niz, imamo da važi $\lambda_{m+1} \subseteq \lambda_m$, odakle imamo da je $\lambda_{m+1} \subseteq \lambda_m^a | \lambda_m^a$ za proizvoljno $a \in A$. Prema indukcijskoj hipotezi važi $\lambda_{m+1} \subseteq \lambda_m \subseteq \mu_m$, i odatle:

$$\lambda_{m+1} \subseteq \mu_m \cap (\lambda_m^a | \lambda_m^a) = \mu_{m+1},$$

što je i trebalo dokazati. Analogno se može dokazati da je $\varrho_k \subseteq \nu_k$.

Dokazujemo tvrđenje pod (c) takođe indukcijom po $k \in \mathbb{N}$.

U slučaju $k = 1$ direktno iz definicije λ_1 i činjenice da ∇_B ima tačno jednu klasu ekvivalencije, dobijamo da (3.44) važi.

Za $k = 2$, $\mu_2 = \mu_1 \cap (\lambda_1^a | \lambda_1^a)$ za neko $a \in A$. Kako $\nu_1 = \nabla_B$ ima jednu klasu ekvivalencije, označićemo je sa ν_1^b. Prema definiciji ν_2, zaključujemo da je ν_2 takođe relacija ekvivalencije i ima tačno dve klase ekvivalencije ϱ_1^b i $\nu_1^b \cap (\varrho_1^b)^c$. Sada, na osnovu definicije relacije λ_2 imamo:

$$\lambda_2 = \lambda_1 \cap \bigcap_{i\in I} \Big((R_i \circ (\nu_1^a \cap (\varrho_1^b)^c)) | (R_i \circ (\nu_1^a \cap (\varrho_1^b)^c)) \Big) \cap \bigcap_{i\in I} \Big((R_i \circ \varrho_1^b) | (R_i \circ \varrho_1^b) \Big),$$

što znači,

$$\lambda_2 \subseteq \bigcap_{i\in I} \Big((R_i \circ \mu_2^d) | (R_i \circ \mu_2^d) \Big), \qquad \text{za svako } d \in B. \tag{3.45}$$

Na sličan način dokazujemo da je $\varrho_2 \subseteq \bigcap_{i\in I} \Big((\mu_2^c \circ R_i) | (\mu_2^c \circ R_i) \Big)$ za svako $c \in A$. Na osnovu toga za $k = 2$ nejednakost (3.44) važi.

Pretpostavimo da je za $k = m$ nejednakost (3.44) tačna. Tada za svako $d \in B$:

$$\lambda_m \subseteq \bigcap_{i\in I} \Big((R_i \circ \nu_m^d) | (R_i \circ \nu_m^d) \Big).$$

Uočimo relaciju ekvivalencije $\nu_{m+1} = \nu_m \cap (\varrho_m^b | \varrho_m^b)$, za neko $b \in A$ tako da je $\nu_m^b \neq \varrho_m^b$. Na osnovu (b), $\varrho_m^b \subset \nu_m^b$. Ovo znači da, izuzev klase ekvivalencije ν_m^b, sve klase ekvivalencija relacija ekvivalencije ν_m i ν_{m+1} su jednake. Pored ovoga, ν_m ima klasu ekvivalencije ν_m^b, dok ν_{m+1} umesto ν_m^b ima dve klase ekvivalencije ϱ_m^b i $\nu_m^b \cap (\varrho_m^b)^c$. Dakle, za proizvoljnu klasu ekvivalencije ν_{m+1}^d, $d \in B$, takvu da je $\nu_{m+1}^d \neq \varrho_m^b$ i $\nu_{m+1}^d \neq (\nu_m^b \cap (\varrho_m^b)^c)$, na osnovu indukcijske hipoteze imamo da važi:

$$\lambda_{m+1} \subseteq \lambda_m \subseteq \bigcap_{i\in I} \Big((R_i \circ \nu_m^d) | (R_i \circ \nu_m^d) \Big) = \bigcap_{i\in I} \Big((R_i \circ \nu_{m+1}^d) | (R_i \circ \nu_{m+1}^d) \Big). \tag{3.46}$$

Dakle, za svako $d \in B$, za koje je $\nu_{m+1}^d \neq \varrho_m^b$ i $\nu_{m+1}^d \neq (\nu_m^b \cap (\varrho_m^b)^c)$, prva nejednačina u (3.44) važi. Za klase ekvivalencije ϱ_m^b i $\nu_m^b \cap (\varrho_m^b)^c$, na osnovu definicije relacije λ_{m+1} važi sledeće:

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m \cap (\bigcap_{i\in I} \Big((R_i \circ \varrho_m^b) | (R_i \circ \varrho_m^b) \Big)) \cap (\bigcap_{i\in I} \Big((R_i \circ (\nu_m^b \cap (\varrho_m^b)^c)) | (R_i \circ (\nu_m^b \cap (\varrho_m^b)^c)) \Big)).$$

Dakle, za $k = m+1$ prva nejednakost u (3.44) je zadovoljena. Na sličan način se može pokazati da i druga nejednakost u (3.44) važi, što je i trebalo dokazati.

(d) Na osnovu činjenice da su skupovi A i B konačni, postoji konačno mnogo relacija na A i B, pa postoji $k \in N$ tako da važi $(\mu_k, \nu_k) = (\lambda_k, \varrho_k)$. Dalje, za takvo k, na osnovu tvrđenja pod (c) i Teoreme 3.4.2., zaključujemo da je (λ_k, ϱ_k) par ekvivalencija koji je rešenje sistema jednačina (3.1). Da bi dokazali da je (λ_k, ϱ_k) najveći par ekvivalencija koji je rešenje sistema jednačina (3.1) sadržan u (λ_0, ϱ_0), pokazaćemo da za proizvoljan par ekvivalencija (λ, ϱ) koji je rešenje sistema jednačina (3.1) sadržan u (λ_0, ϱ_0) važi sledeće:

$$(\lambda, \varrho) \subseteq (\lambda_k, \varrho_k) \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Ovo ćemo takođe dokazati indukcijom. Najpre dokazujemo tvrđenje za slučaj kada je $k = 1$. Kako je (λ, ϱ) par regularnih ekvivalencija i ∇_A, ∇_B su ekvivalencije takve da je $\lambda \subseteq \nabla_A$ i $\varrho \subseteq \nabla_B$, pa su uslovi Leme 3.1 zadovoljeni i imamo da važi

$$(\lambda, \varrho) \subseteq \Big(\bigcap_{i\in I}\big((R_i \circ \nabla_B^b) | (R_i \circ \nabla_B^b)\big), \bigcap_{i\in I}\big((\nabla_A^a \circ R_i) | (\nabla_A^a \circ R_i)\big)\Big).$$

Sada, kako važi da je $(\lambda, \varrho) \subseteq (\lambda_0, \varrho_0)$, dobijamo da je $(\lambda, \varrho) \subseteq (\lambda_1, \varrho_1)$.

Dalje, pretpostavimo da važi $(\lambda, \varrho) \subseteq (\lambda_m, \varrho_m)$ i dokažimo da važi $(\lambda, \varrho) \subseteq (\lambda_{m+1}, \varrho_{m+1})$.

Na osnovu tvrđenja pod (b), $(\lambda_m, \varrho_m) \subseteq (\mu_m, \nu_m)$. Jednostavno se dokazuje i sledeće, $\lambda_m \subseteq \lambda_m^a | \lambda_m^a$ i $\varrho_m \subseteq \varrho_m^b | \varrho_m^b$, za svako $a \in A$ i $b \in B$. Kao posledica važi da je $\lambda_m \subseteq \mu_{m+1}$ i $\varrho_m \subseteq \nu_{m+1}$.

Na osnovu indukcijske pretpostavke $(\lambda, \varrho) \subseteq (\lambda_m, \varrho_m) \subseteq (\mu_{m+1}, \nu_{m+1})$ uslovi Leme 3.1 su zadovoljeni i onda dobijamo:

$$(\lambda, \varrho) \subseteq \Big(\bigcap_{i\in I}\big((R_i \circ \nu_{m+1}^b) | (R_i \circ \nu_{m+1}^b)\big), \bigcap_{i\in I}\big((\mu_{m+1}^a \circ R_i) | (\mu_{m+1}^a \circ R_i)\big)\Big),$$

za svako $a \in A$, $b \in B$. Ovo direktno povlači da je $(\lambda, \varrho) \subseteq (\lambda_{m+1}, \varrho_{m+1})$, što je i trebalo dokazati. □

U nastavku, na osnovu prethodne teoreme, za dvo-modalitetni krisp relacijski sistem $\mathcal{R} = (A, B, \{R\}_{i\in I})$ i par ekvivalencija (λ_0, ϱ_0), dajemo algoritam za izračunavanje najvećeg para ekvivalencija koji je rešenje sistema jednačina (3.1) sadržan u (λ_0, ϱ_0).

Algoritam 3.4.4. (*Konstrukcija najvećeg para regularnih ekvivalencija*) Ulaz ovog algoritma predstavlja dvo-modalitetni krisp relacijski sistem $\mathcal{R} = (A, B, \{R\}_{i\in I})$ i ekvivalencije $\lambda_0 \in \mathcal{E}(A)$ i $\varrho_0 \in \mathcal{E}(B)$, dok je izlaz ovog algoritma najveći para ekvivalencija koji je rešenje sistema jednačina (3.1) sadržan u (λ_0, ϱ_0).

Procedura se sastoji u formiranju dva niza parova ekvivalencija $\{(\mu_k, \nu_k)\}_{k\in N}$ i $\{(\lambda_k, \varrho_k)\}_{k\in N}$ na sledeći način:

(A1) U prvom koraku je $(\mu_1, \nu_1) = (\nabla_A, \nabla_B)$, gde je (∇_A, ∇_B) par univerzalnih relacija na A i B, i računamo (λ_1, ϱ_1) koristeći formulu (3.41), pri čemu su $a \in A$ i $b \in B$ proizvoljni elementi;

(A2) Nakon k-tog koraka, pretpostavimo da su parovi ekvivalencija (μ_k, ν_k) i (λ_k, ϱ_k) izračunati;

(A3) U sledećem koraku radimo sledeće: Ako postoji par $(a,b) \in A \times B$, takvih da je par klasa ekvivalencija (μ_k^a, ν_k^b) različit od $(\lambda_k^a, \varrho_k^b)$, tada, koristeći formulu (3.42) računamo par (μ_{k+1}, ν_{k+1}) i koristeći formulu (3.43) računamo $(\lambda_{k+1}, \varrho_{k+1})$. Inače, ako takav par elemenata ne postoji, procedura se završava i poslednji izračunati par (λ_k, ϱ_k) je najveći para ekvivalencija koji je rešenje sistema jednačina (3.1) sadržan u (λ_0, ϱ_0).

Analizirajmo vreme izvršenja algoritma. Najpre, pretpostavljamo da su skupovi A, B i I konačni i da je njihov broj elemenata označen sa $|A|$,$|B|$ i $|I|$, respektivno. Incijalni par relacija ekvivalencije (μ_1, ν_1), je par (∇_A, ∇_B), tj. μ_1, kao i ν_1 imaju samo jednu klasu ekvivalencije, a u najgorem slučaju poslednji par relacija ekvivalencije (μ_k, ν_k), za neko $k \in N$, je par $(\triangle_A, \triangle_B)$. Dakle, u najgorem slučaju, μ_k ima $|A|$ klasa ekvivalencije i ν_k ima $|B|$ klasa ekvivalencije. Na osnovu toga i činjenice da u svakom koraku ovog algoritma delimo najmanje jednu klasu ekvivalencije na dve klase, dobijamo da se ovaj algoritam završava nakon najviše $|A| + |B| - 1$ koraka.

Analizirajmo vreme izvršenja algoritma. U prvom koraku ovog algoritma stavljamo $(\mu_1, \nu_1) = (\nabla_A, \nabla_B)$ a vreme potrebno za izračunavanje para (λ_1, ϱ_1), jednako je

$$O(|I| \cdot (|A| + |B|) \cdot \max(|A|, |B|)).$$

Nakon k-tog koraka, neka je izračunat par (λ_k, ϱ_k) i par (μ_{k+1}, ν_{k+1}). U narednom koraku koristeći formulu (3.42) računamo par (μ_{k+1}, ν_{k+1}) i koristeći formulu (3.43) računamo $(\lambda_{k+1}, \varrho_{k+1})$. Može se pokazati da je vreme potrebno za izračunavanje svakog od ovih parova $(\lambda_{k+1}, \varrho_{k+1})$ jednako

$$O(|I| \cdot (|A| + |B|) \cdot \max(|A|, |B|)).$$

Nakon izračunavanja relacija λ_{k+1}, ϱ_{k+1},μ_{k+1} i ν_{k+1} upoređujemo vrednosti ovih relacija i proveravamo da li su te vrednosti različite. Algoritam se završava nakon prvog koraka u kome vrednosti ostanu nepromenjene.

Kao posledicu ovoga i činjenice da se algoritam završava nakon $|A| + |B| - 1$ koraka, imamo da je ukupno vreme izvršenja algoritma jednako:

$$O(|I| \cdot m^3)$$

pri čemu je $m = \max(|A|, |B|)$.

Sledeći primer ilustruje rad algoritma.

Example 3.1. Neka je $\mathcal{R} = (A, B, \{R\}_{i \in I})$ dvo-modalitetni krisp relacijski sistem, pri čemu je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{12}\}$, $I = \{1\}$ i relacija R_1 data sledećom matricom:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1 \\ 0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1 \\ 0&1&1&1&0&0&0&0&1&1&0&0 \\ 1&1&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&0 \\ 1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&1&1&1&0&1&0&0&0&1&1 \\ 1&1&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1 \end{bmatrix}$$

Početne relacije λ_0 i ϱ_0 su date sa:

$$\lambda_0 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \end{bmatrix} \qquad \varrho_0 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

Koristeći proceduru iz Teoreme 3.4.3. dobijamo:
$(\mu_1, \nu_1) = (\nabla_A, \nabla_B)$ i $(\lambda_1, \varrho_1) = (\lambda_0, \varrho_0)$

U drugom koraku biramo elemente $a \in A$ i $b \in B$ takve da je $(\mu_1^a, \nu_1^b) \neq (\lambda_1^a, \varrho_1^b)$. Za $a_1 \in A$ imamo da je $\mu_1^{a_1} \neq \lambda_1^{a_1}$, a samim tim biramo $a_1 \in A$ i bilo koji element (na primer $b_1 \in B$) iz skupa B. Tako dobijamo,

$$\mu_2 = \mu_1 \cap \lambda_1^{a_1} | \lambda_1^{a_1} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \end{bmatrix}$$

$$\nu_2 = \nu_1 \cap \varrho_1^{b_1} | \varrho_1^{b_1} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 \cap \Big((R_1 \circ (\nu_1^{b_1} \cap (\varrho_1^{b_1})^c)) | (R_1 \circ (\nu_1^{b_1} \cap (\varrho_1^{b_1})^c)) \Big) \cap \Big((R_1 \circ \varrho_1^{b_1}) | (R_1 \circ \varrho_1^{b_1} \Big))$$

$$\lambda_2 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \end{bmatrix}$$

$$\varrho_2 = \varrho_1 \cap \Big(((\mu_1^{a_1} \cap (\lambda_1^{a_1})^c) \circ R_1) | ((\mu_1^{a_1} \cap (\lambda_1^{a_1})^c) \circ R_1) \Big) \cap \Big((\lambda_1^{a_1} \circ R_1) | (\lambda_1^{a_1} \circ R_1) \Big)$$

$$\varrho_2 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \end{bmatrix}$$

U nastavku, s obzirom na činjenicu da je $(\mu_2, \nu_2) \neq (\lambda_2, \varrho_2)$ biramo elemente $a_1 \in A$ i $b_8 \in B$ jer oni zadovoljavaju $(\mu_2^{a_1}, \nu_2^{b_8}) \neq (\lambda_2^{a_1}, \varrho_2^{b_8})$.

$$\mu_3 = \mu_2 \cap \lambda_2^{a_1} | \lambda_2^{a_1} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \end{bmatrix}$$

$$\nu_3 = \nu_2 \cap \varrho_2^{b_8} | \varrho_2^{b_8} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = \lambda_2 \cap \Big((R_1 \circ (\nu_2^{b_8} \cap (\varrho_2^{b_8})^c)) | (R_1 \circ (\nu_2^{b_8} \cap (\varrho_2^{b_8})^c)) \Big) \cap \Big((R_1 \circ \varrho_2^{b_8}) | (R_1 \circ \varrho_2^{b_8}) \Big)$$

$$\lambda_3 = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \end{bmatrix}$$

$$\varrho_3 = \varrho_2 \cap \Big(((\mu_2^{a_1} \cap (\lambda_2^{a_1})^c) \circ R_1) | ((\mu_2^{a_1} \cap (\lambda_2^{a_1})^c) \circ R_1) \Big) \cap \Big((\lambda_2^{a_1} \circ R_1) | (\lambda_2^{a_1} \circ R_1) \Big)$$

$$\varrho_3 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \end{bmatrix}$$

Slično, kao u prethodnom koraku dobijamo:

$$\mu_4 = \mu_3 \cap \lambda_3^{a_4} | \lambda_3^{a_4} = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \end{bmatrix}$$

$$\nu_4 = \nu_3 \cap \varrho_3^{b_1} | \varrho_3^{b_1} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_4 = \lambda_3 \cap \Big((R_1 \circ (\nu_3^{b_1} \cap (\varrho_3^{b_1})^c)) | (R_1 \circ (\nu_3^{b_1} \cap (\varrho_3^{b_1})^c)) \Big) \cap \Big((R_1 \circ \varrho_3^{b_1}) \,|\, (R_1 \circ \varrho_3^{b_1}) \Big)$$

$$\lambda_4 = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \end{bmatrix}$$

$$\varrho_4 = \varrho_3 \cap \Big(((\mu_3^{a_4} \cap (\lambda_3^{a_4})^c) \circ R_1) | ((\mu_3^{a_4} \cap (\lambda_3^{a_4})^c) \circ R_1) \Big) \cap \Big((\lambda_3^{a_4} \circ R_1) | (\lambda_3^{a_4} \circ R_1) \Big)$$

$$\varrho_4 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \end{bmatrix}$$

U poslednjem koraku dobijamo da je $(\mu_4, \nu_4) = (\lambda_4, \varrho_4)$ pa je shodno tome par ekvivalencija (λ_4, ϱ_4) par najvećih regularnih ekvivalencija sadržanih u (λ_0, ϱ_0).

3.5. Pristupi izučavanju dvo-modalitetnih mreža

U ovoj sekciji prikazaćemo glavne pristupe izučavanju dvo-modalitetnih mreža i uporediti ih sa pristupom koji se koristi u ovoj disertaciji.

U literaturi koja se bavi socijalnim mrežama može se sresti nekoliko pristupa izučavanju dvo-modalitetnih mreža:

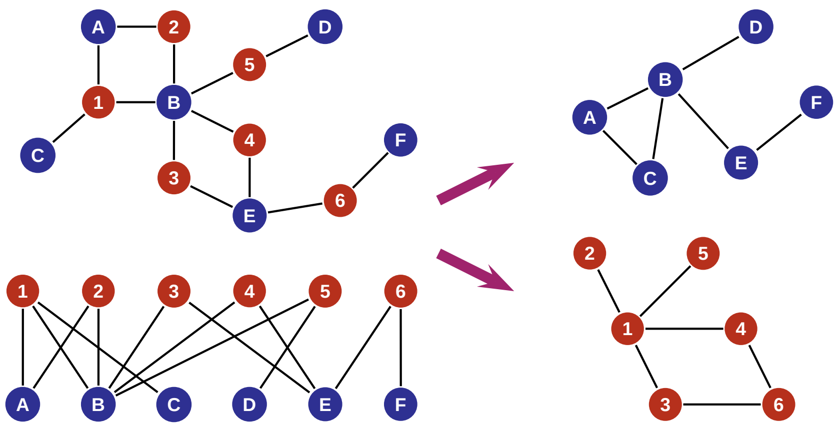
(a) zasebna analiza oba modaliteta i upoređivanje rezultata;
(b) svođenje dvo-modalitetne mreže na jedno-modalitetne mreže;
(c) pravi dvo-modalitetni pristup.

Treba reći da je u mnogim istraživanjima prvi pristup korišćen samo kao prvi korak u opsežnijoj analizi koja je uključivala i neki od preostala dva pristupa, pa stoga i ne predstavlja pravu alternativu za te pristupe. Jasno je da takva zasebna analiza ostavlja po strani mnoge bitne aspekte dvo-modalitetnih mreža i da može da dovede do gubitka važnih informacija, ali u nekim slučajevima može biti veoma korisna u izboru načina na koji će se vršiti dalja analiza.

Pristup (b), svođenje dvo-modalitetne mreže na jedno-modalitetne, korišćen je uglavnom u situacijama kada je pažnja istraživača usmerena na jedan od modaliteta, i u analizi tog modaliteta se koriste veze sa drugim modalitetom. Naime, ako je data dvo-modalitetna mreža $\mathcal{T} = (A, B, \mathcal{R})$, pri čemu je $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i\in I}$ familija fazi relacija između A i B, i

$$\mathcal{R}' = \{R_i \circ R_i^{-1}\}_{i\in I} \subseteq L^{A\times A} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{R}'' = \{R_i^{-1} \circ R_i\}_{i\in I} \subseteq L^{B\times B},$$

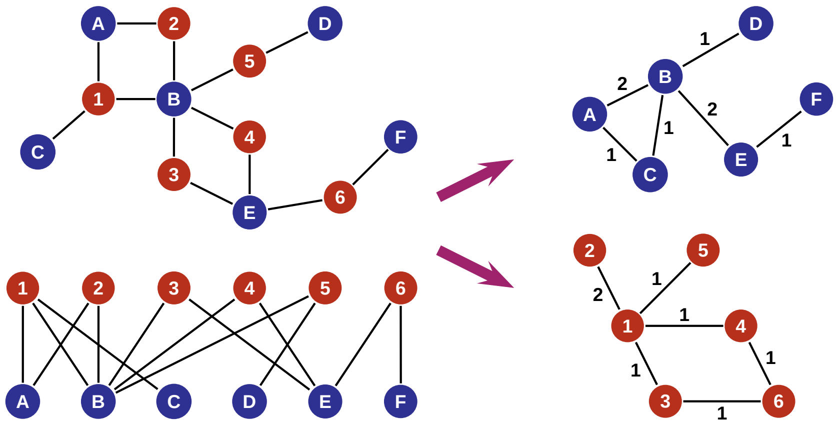
onda se za jedno-modalitetnu mrežu $\mathcal{O}' = (A, \mathcal{R}')$ kaže da je *prva projekcija*, a za jedno-modalitetnu mrežu $\mathcal{O}'' = (B, \mathcal{R}'')$ da je *druga projekcija* dvo-modalitetne mreže $\mathcal{T}$. Slika 3.6 prikazuje konstrukciju projekcija na primeru dvo-modalitetne jedno-relacijske krisp mreže.



Slika 3.6 Projekcije dvo-modalitetne mreže.

U literaturi posvećenoj socijalnim mrežama takođe se sreću i *težinske projekcije* koje predstavljaju jedno-modalitetne mreže kod kojih su vezama pridružene celobrojne težine. U tom slučaju, celobrojna težina koja se pridružuje vezi između dva entiteta iz istog modaliteta predstavlja broj entiteta iz suprotnog modaliteta preko kojih su ta dva entiteta povezana. Takav slučaj prikazan je na Slici 3.7.

Drugi način svođenja dvo-modalitetnog slučaja na jedno-modalitetan koji se sreće u literaturi je predstavljanje dvo-modalitetne mreže $\mathcal{T} = (A, B, \mathcal{R})$, gde je $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i\in I}$ familija fazi relacija između A i B, jedno-modalitetnom mrežom $\mathcal{O}' = (A \cup B, \mathcal{R}')$ sa $\mathcal{R}' = \{R_i'\}_{i\in I}$, pri čemu za svako $i \in I$ stavljamo da je R_i' relacija na $A \cup B$ zadata blok matricom



Slika 3.7 Težinske projekcije dvo-modalitetne mreže.

$$R_i' = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m\times m} & R_i \\ R_i^{-1} & \mathbf{0}_{n\times n} \end{bmatrix}, \tag{3.47}$$

gde R_i^{-1} označava transponovanu matricu od R_i a $\mathbf{0}_{m\times m}$ i $\mathbf{0}_{n\times n}$ su nula-matrice datih dimenzija ($m = |A|$, $n = |B|$). Takav način svođenja može se sresti, na primer, u radu [82].

Metod projekcije takođe ima nekoliko ozbiljnih nedostataka. I on najčešće dovodi do gubitka nekih bitnih informacija pa se originalna dvo-modalitetna mreža samo u izuzetnim slučajevima može rekonstruisati iz svojih projekcija. Takvi slučajevi su razmatrani, na primer, u radu [46]. Jedan konkretan slučaj u kome dolazi do gubitka izvesnih informacija biće prikazan kasnije u ovom odeljku.

Sa druge strane, broj veza u projekcijama može enormno porasti u odnosu na broj veza u originalnoj dvo-modalitetnoj mreži. Neki slučajevi u kojima se to dešava razmatrani su u radu [77]. U tom radu su analizirani podaci koji se tiču četiri konkretne dvo-modalitetne mreže:

– *mreža glumci-filmovi*, dobijena 2005. godine iz baze IMDB (*Internet Movie Data Base*), sa 127.823 glumaca, 383.640 filmova i 1.470.418 veza;
– *autorska mreža*, dobijena iz baze preprinta *arXiv*, sa 19.885 radova, 16.400 autora i 45.904 veza;
– *mreža pojavljivanja*, koja je dobijena iz jedne vezije Biblije i sadrži 9.264 reči, 13.587 rečenica u kojima se te reči pojavljuju i 183.363 veza;
– *peer-to-peer mreža*, koja je dobijena registrovanjem svih razmena koje je veliki server procesuirao u toku 48 sati i gde prva komponenta (peers) sadrži 1.986.588 članova, druga komponenta (data) sadrži 5.380.546 članova i između njih je 55.829.392 veza.

Odnos broja veza u ovim dvo-modalitetnim mrežama i njihovim projekcijama, izračunat u [77], prikazan je u sledećoj tabeli:

	glumci-filmovi	autorska	pojavljivanja	peer-to-peer
originalna mreža	1.470.418	45.904	183.363	55.829.392
prva projekcija	15.038.083	29.552	392.066	10.142.780.673
druga projekcija	20.490.112	134.492	51.405.275	1.085.217.140

Kao što se iz tabele vidi, broj veza u projekcijama može biti drastično veći od broja veza u originalnoj dvo-modalitetnoj mreži. To je posebno izraženo u slučaju mreže pojavljivanja, gde je ukupan broj veza u projekcijama skoro 300 puta veći od broja veza u originalnoj mreži, kao i u slučaju peer-to-peer mreže, gde je taj broj više od 200 puta veći. Jasno je da takvo enormno povećanje broja veza ne samo zahteva ogroman memorijski prostor za skladištenje osnovnih podataka o mreži (u slučaju peer-to-peer mreže neophodan memorijski prostor narasta od manje od 500MB na više of 80GB [77]) već i drastično uvećava vreme potrebno za realizaciju algoritama koji se koriste u analizi dvo-modalitetnih mreža, kao što su, na primer, algoritmi za izračunavanje najvećih regularnih ekvivalencija i kvazi-uređenja.

Što se tiče svođenja dvo-modalitetne mreže na jedno-modalitetnu mrežu sa relacijama (matricama) zadatim sa (3.47), u teoremi koju ćemo dokazati kasnije u ovom odeljku videćemo da, bar što se pozicione analize, prilikom takvog svođenja ne dolazi do gubitka informacija. Međutim, ovaj metod takođe ima svojih nedostatka koji se ogledaju u povećanju dimenzije matrica. To ne samo da zahteva veći memorijski prostor za skladištenje podataka, već može imati i jak negativni efekat na brzinu izračunavanja.

Konačno, treći pristup izučavanju dvo-modalitetnih mreža je *pravi dvo-modalitetni pristup*, koji podrazumeva simultano razmatranje oba modaliteta. Očigledna prednost ovog pristupa je to što se kod njega sigurno koriste sve raspoložive informacije o oba modaliteta, pa ne dolazi do gubitka informacija. Više informacija o pravom dvo-modalitetnom pristupu analizi dvo-modalitetnih mreža, uključujući i pozicionu analizu i blok-modeliranje, može se naći u radu [9].

Pristup dvo-modalitetnim mrežama korišćen u ovoj disertaciji takođe predstavlja pravi dvo-modalitetni pristup. U daljem tekstu daćemo nekoliko rezultata i primera koji prikazuju odnos našeg pristupa i pristupa svođenjem na jedno-modalitetne mreže.

Primer 3.5.1. Neka je data dvo-modalitetna mreža $\mathcal{T} = (A,B,\mathcal{R})$, gde je $|A| = 12$, $|B| = 13$ i $\mathcal{R} = \{R_1, R_2\}$, pri čemu su relacije R_1 i R_2 zadate matricama

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

Primenom algoritma za izračunavanje najvećeg para regularnih ekvivalencija na dvo-modalitetnoj mreži dobijamo da se najveći par (λ, ϱ) regularnih ekvivalencija na mreži $\mathcal{T}$ sastoji od relacija zadatih sledećim matricama:

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \qquad \varrho = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}.$$

Sa druge strane, ako formiramo projekcije $\mathcal{O}' = (A, \mathcal{R}')$ i $\mathcal{O}'' = (A, \mathcal{R}'')$, gde je $\mathcal{R}' = \{R_1 \circ R_1^{-1}, R_2 \circ R_2^{-1}\}$ i $\mathcal{R}'' = \{R_1^{-1} \circ R_1, R_2^{-1} \circ R_2\}$, i izračunamo najveće regularne ekvivalencije μ' i μ'' na njima, dobićemo da su μ' i μ'' relacije zadate sledećim matricama:

$$\mu' = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \qquad \mu'' = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1 \end{bmatrix}.$$

Jasno je da je $\lambda < \mu'$ i $\varrho < \mu''$, što znači da (μ', μ'') ne može biti par regularnih ekvivalencija na dvo-modalitetnoj mreži $\mathcal{T}$, jer bi u suprotnom moralo biti $(\mu', \mu'') \leqslant (\lambda, \varrho)$. Prema tome, u opštem slučaju se par regularnih ekvivalencija na dvo-modalitetnoj mreži ne može dobiti formiranjem njenih projekcija i izračunavanjem najvećih regularnih ekvivalencija na njima. Doduše, u nekim slučajevima je to moguće, na primer u slučaju dvo-modalitetne mreže razmatrane u Primeru 3.3.11.

Sada dokazujemo sledeću teoremu:

Teorema 3.5.2. *Neka je data dvo-modalitetna fazi mreža $\mathcal{T} = (A, B, \mathcal{R})$, gde je $|A| = m$, $|B| = n$ i $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i\in I}$, i neka je $\mathcal{O}' = (A \cup B, \mathcal{R}')$ jedno-modalitetna fazi mreža sa familijom $\mathcal{R}' = \{R_i'\}_{i\in I}$ fazi relacija na $A \cup B$ zadatih blok matricama*

$$R_i' = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m\times m} & R_i \\ R_i^{-1} & \mathbf{0}_{n\times n} \end{bmatrix}, \qquad i \in I, \tag{3.48}$$

gde je R_i^{-1} transponovana matrica od R_i a $\mathbf{0}_{m\times m}$ i $\mathbf{0}_{n\times n}$ su nula-matrice.

Ako najveću regularnu fazi ekvivalenciju μ na jedno-modalitetnoj mreži $\mathcal{O}$ predstavimo u obliku

$$\mu = \begin{bmatrix} \lambda' & U \\ V & \varrho' \end{bmatrix}, \tag{3.49}$$

gde su λ' i ϱ' matrice tipa $m \times m$ i $n \times n$, a U i V matrice tipa $m \times n$ i $n \times m$, tada je (λ', ϱ') najveći par regularnih ekvivalencija na dvo-modalitetnoj mreži $\mathcal{T}$.

Dokaz: Označimo sa (λ, ϱ) najveći par regularnih ekvivalencija na dvo-modalitetnoj mreži $\mathcal{T}$.

Prema pretpostavci, za proizvoljno $i \in I$ imamo da je $\mu \circ R_i' = R_i' \circ \mu$, odnosno

$$\begin{bmatrix} U \circ R_i^{-1} & \lambda' \circ R_i \\ \varrho' \circ R_i^{-1} & V \circ R_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda' & U \\ V & \varrho' \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m\times m} & R_i \\ R_i^{-1} & \mathbf{0}_{n\times n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m\times m} & R_i \\ R_i^{-1} & \mathbf{0}_{n\times n} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \lambda' & U \\ V & \varrho' \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} R_i \circ V & R_i \circ \varrho' \\ R_i^{-1} \circ \lambda' & R_i^{-1} \circ U \end{bmatrix}.$$

Odavde sleedi da je $\lambda' \circ R_i = R_i \circ \varrho'$ i $\varrho' \circ R_i^{-1} = R_i^{-1} \circ \lambda'$, odnosno $(\lambda')^{-1} \circ R_i = R_i \circ (\varrho')^{-1}$, što znači da je (λ', ϱ') par regularnih fazi ekvivalencija na $\mathcal{T}$. Prema tome, imamo da je $(\lambda', \varrho') \leqslant (\lambda, \varrho)$.

Sa druge strane, za proizvoljno $i \in I$ imamo da je $\lambda \circ R_i = R_i \circ \varrho$ i $\lambda^{-1} \circ R_i = R_i \circ \varrho^{-1}$, odnosno $R_i^{-1} \circ \lambda = \varrho \circ R_i^{-1}$, odakle dobijamo da je

$$\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}_{m\times n} \\ \mathbf{0}_{n\times m} & \varrho \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m\times m} & R_i \\ R_i^{-1} & \mathbf{0}_{n\times n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m\times m} & \lambda \circ R_i \\ \varrho \circ R_i^{-1} & \mathbf{0}_{n\times n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m\times m} & R_i \circ \varrho \\ R_i^{-1} \circ \lambda & \mathbf{0}_{n\times n} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m\times m} & R_i \\ R_i^{-1} & \mathbf{0}_{n\times n} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}_{m\times n} \\ \mathbf{0}_{n\times m} & \varrho \end{bmatrix}.$$

To znači da fazi relacija zadata matricom

$$\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}_{m\times n} \\ \mathbf{0}_{n\times m} & \varrho \end{bmatrix}$$

jeste regularna fazi ekvivalencija na $\mathcal{O}$, pa prema pretpostavci imamo da je

$$\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}_{m\times n} \\ \mathbf{0}_{n\times m} & \varrho \end{bmatrix} \leqslant \mu = \begin{bmatrix} \lambda' & U \\ V & \varrho' \end{bmatrix}.$$

Na taj način smo dobili da je $(\lambda, \varrho) \leqslant (\lambda', \varrho')$, i konačno, zaključujemo da je $(\lambda, \varrho) = (\lambda', \varrho')$. Ovim je dokaz teoreme kompletiran. □

Prema prethodnoj teoremi, najveći par regularnih fazi ekvivalencija na dvo-modalitetnoj mreži $\mathcal{T}$ može se dobiti iz najveće regularne fazi ekvivalencije na odgovarajućoj jedno-modalitetnoj mreži $\mathcal{O}$. Međutim, jasno je da od toga nema nikakve praktične koristi, jer zbog povećanja dimenzija matrica izračunavanje najveće regularne fazi ekvivalencije na $\mathcal{O}$ je memorijski i vremenski znatno zahtevnije od izračunavanja najvećeg para regularnih fazi ekvivalencija na $\mathcal{T}$ algoritmima koje smo ovde uveli.

Glava 4
Više-modalitetni fazi relacijski sistemi i više-modalitetne fazi mreže

Prethodne dve glave ove disertacije bavile su se jedno-modalitetnim i dvo-modalitetnim fazi relacijskim sistemima i fazi mrežama. Međutim, u realnim situacijama često se sreću i mnogo kompleksnije mreže koje se sastoje od više skupova entiteta i veza unutar ili između nekih od njih. Zadatak ovog odeljka je da se formira opšti matematički model i obezbede oruđa za rad sa takvim kompleksnim mrežama.

U Odeljku 4.1. dajemo definiciju koncepata više-modalitetnog fazi relacijskog sistema i više-modalitetne fazi mreže, koji predstavljaju svojevrsnu sintezu većeg broja dvo-modalitetnih i jedno-modalitetnih fazi relacijskih sistema i mreža, i prikazujemo karakteristične primere više-modalitetnih mreža. Potom se u Odeljku 4.2. bavimo odgovarajućim sistemima fazi relacijskih jednačina i nejednačina i postupcima za izračunavanje njihovih najvećih rešenja. Metodologija koja se ovde primenjuje slična je metodologiji koja je primenjivana u izračunavanju najvećih rešenja jedno-modalitetnih i dvo-modalitetnih fazi relacijskih sistema, ali je neuporedivo komplikovanija. Za razliku od dvo-modalitetnih sistema fazi relacijskih nejednačina, kod kojih se, kao što smo videli, pri izračunavanju najvećeg rešenja može izbeći iteracija, kod više-modalitetnih sistema fazi relacijskih nejednačina se ona može izbeći samo u nekim izuzetnim sličajevima, koji su ovde opisani. U narednim odeljcima razmatrane su neke instance opštih više-modalitetnih sistema, postupci za izračunavanje najvećih krisp rešenja više-modalitetnih sistema, količnički više-modalitetni fazi relacijski sistemi i njihove primene i objašnjeni su razni pristupi izučavanju više-modalitetnih mreža koji se sreću u literaturi.

4.1. Osnovne definicije i primeri

Neka je $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_n$ je kolekcija nepraznih skupova, $J \subseteq [1,n] \times [1,n]$ je neprazan skup i $\{I_{j,k}\}_{(j,k)\in J}$ je takođe kolekcija nepraznih skupova. Zahtevaćemo da važi sledeći uslov:

$$\text{za svako } j \in [1,n] \text{ postoji } k \in [1,n] \text{ tako da važi } (j,k) \in J \text{ ili } (k,j) \in J. \tag{4.1}$$

Značenje ovog uslova biće objašnjeno nešto kasnije.

Za proizvoljan par $(j,k) \in J$ neka je $\{R_i^{j,k}\}_{i \in I_{j,k}}$ familija nepraznih fazi relacija između A_j i A_k i neka je

$$\mathcal{R} = \{R_i^{j,k} \mid (j,k) \in J, i \in I_{j,k}\}.$$

Sistem $\mathcal{M} = (A_1, \dots, A_n, \mathcal{R})$ nazivaćemo *više-modalitetni fazi relacijski sistem*, ili preciznije, *n-modalitetni fazi relacijski sistem*. Skupove $A_1, \dots, A_n$ nazivaćemo *komponentama* ili *modalitetima* sistema $\mathcal{M}$. Ukoliko svi članovi familije $\mathcal{R}$ jesu krisp relacije, onda ćemo za sistem $\mathcal{M} = (A_1, \dots, A_n, \mathcal{R})$ govoriti da je *više-modalitetni krisp relacijski sistem*.

Primetimo da su gore navedene familije fazi relacija definisane za neke parove komponenti, ali ne obavezno za sve. Preciznije, te familije su definisane za one i samo one parove komponenti koje odgovaraju parovima iz J. Upravo to je razlog zbog čega smo nametnuli uslov (4.1). Naime, ukoliko za neko $j \in [1,n]$ ne bi postojalo $k \in [1,n]$ tako da je $(j,k) \in J$ ili $(k,j) \in J$, odnosno, ako bi za svako $k \in [1,n]$ imali da $(j,k) \notin J$ i $(k,j) \notin J$, to bi značilo da je komponenta A_j izolovana, da nije povezana ni sa jednom drugom komponentom sistema $\mathcal{M}$. To očigledno nema smisla, jer takva komponenta ne igra nikakvu ulogu u sistemu i suvišna je. Jasno, uslov (4.1) onemogućava da takve komponente postoje.

Više-modalitetni fazi relacijski sistemi mogu imati razne interpretacije, a mi ćemo ovde razmatrati interpretaciju kao fazi socijalnih mreža, i u tom slučaju ćemo sistem $\mathcal{M}$ zvati *više-modalitetna fazi mreža*, odnosno, *n-modalitetna fazi mreža*. U slučaju kada $\mathcal{M}$ interpretiramo kao više-modalitetnu fazi mrežu, podrazumevaćemo da su svi skupovi $A_1, A_2, \dots, A_n$ konačni.

Uočimo da više-modalitetna fazi mreža $\mathcal{M}$ predstavlja kompleksan sistem koji se sastoji iz jedno-modalitetnih fazi mreža

$$\mathcal{O}_j = (A_j, \{R_i^{j,j}\}_{i \in I_{j,j}}),$$

za one $j \in [1,n]$ za koje je $(j,j) \in J$, i dvo-modalitetnih fazi mreža

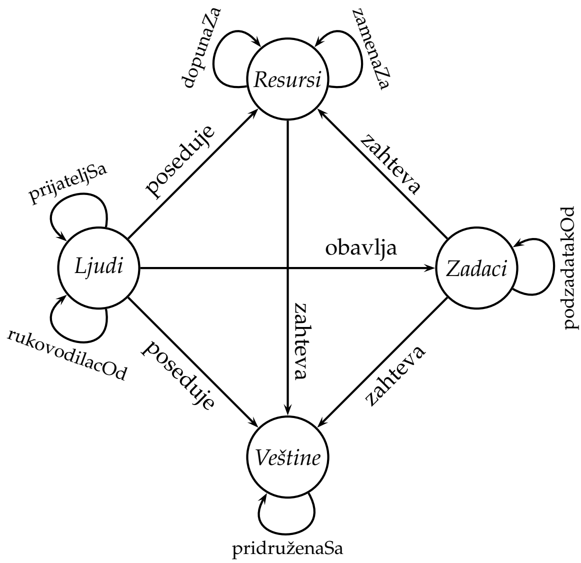
$$\mathcal{T}_{j,k} = (A_j, A_k, \{R_i^{j,k}\}_{i \in I_{j,k}}),$$

za one $(j,k) \in J$ za koje je $j \neq k$. Prema tome, za $n = 1$ ova definicija se svodi na definiciju jedno-modalitetne fazi mreže, dok se za $n = 2$ i $J = \{(1,2)\}$ svodi na definiciju dvo-modalitetne fazi mreže.

Jedno-modalitetne i dvo-modalitetne mreže izučavane su u brojnim radovima ne samo u okviru analize socijalnih mreža, već i u nekim drugim srodnim oblastima u okviru informacionih nauka, fizike, biologije itd. Za razliku od njih, više-modalitetne mreže su izučavane znatno manje, verovatno zbog toga što je rad sa njima znatno složeniji. Ipak, poslednjih godina pažnja istraživača se sve više usmerava ka više-modalitetnim mrežama, pa je u skorije vreme publikovan veći broj radova koji se bave upravo takvim mrežama (videti, na primer, [15, 78, 79, 83, 106, 111, 113, 117, 118, 125]). Treba napomenuti da se u pojedinim izvorima više-modalitetne mreže (*multi-mode networks*) mogu sresti i pod nazivom *višenivoovske mreže* (*multilevel networks*).

Primer 4.1.1. (Primeri više-modalitetnih mreža) Daćemo nekoliko konkretnih primera više-modalitetnih mreža.

(a) Mreža jednostavne organizacije (kompanije) [113]: To je više-modalitetna mreža predstavljena dijagramom koji je prikazan na Slici 4.1. Kao što se sa slike vidi, ta mreža je sinteza 4 jedno-modalitetne (više-relacijske) mreže i 6 prostih dvo-modalitetnih mreža. iskoristićemo ovaj primer da pojas-



Slika 4.1 Dijagram koji predstavlja više-modalitetnu mrežu jednostavne organizacije.

nimo definiciju više-modalitetne mreže i sistem oznaka koji u njoj koristimo. Uvedimo sledeće oznake:

A_1 – skup ljudi;	A_3 – skup resursa;
A_2 – skup zadataka;	A_4 – skup veština;
$R_1^{1,1} \in 2^{A_1 \times A_1}$ – relacija *rukovodilacOd*;	$R_1^{1,2} \in 2^{A_1 \times A_2}$ – relacija *obavlja (zadatak)*;
$R_2^{1,1} \in 2^{A_1 \times A_1}$ – relacija *rprijateljSa*;	$R_1^{1,3} \in 2^{A_1 \times A_3}$ – relacija *poseduje (resurs)*;
$R_1^{2,2} \in 2^{A_2 \times A_2}$ – relacija *podzadatakOd*;	$R_1^{1,4} \in 2^{A_1 \times A_4}$ – relacija *poseduje (veštinu)*;
$R_1^{3,3} \in 2^{A_3 \times A_3}$ – relacija *dopunaZa*;	$R_1^{2,3} \in 2^{A_2 \times A_3}$ – relacija *zahteva (resurs)*;
$R_2^{3,3} \in 2^{A_3 \times A_3}$ – relacija *zamenaZa*;	$R_1^{2,4} \in 2^{A_2 \times A_4}$ – relacija *zahteva (veštinu)*;
$R_1^{4,4} \in 2^{A_4 \times A_4}$ – relacija *pridruženaSa*;	$R_1^{3,4} \in 2^{A_3 \times A_4}$ – relacija *zahteva (veštinu)*.

Tada ovu mrežu predstavljamo sa $\mathcal{M} = (A_1, A_2, A_3, A_4, \mathcal{R})$, gde je

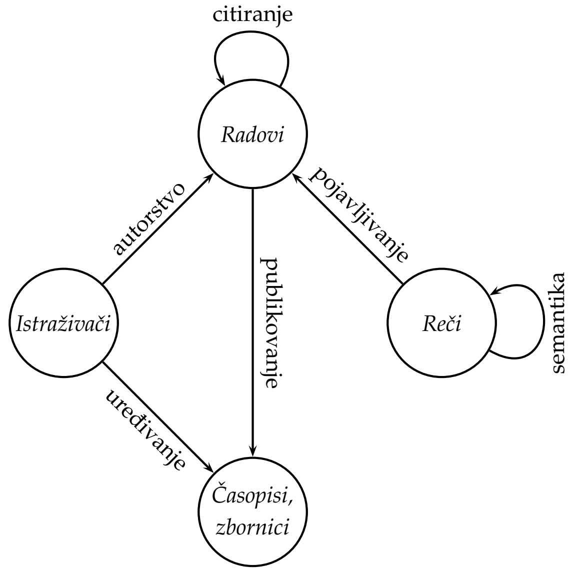
$$\mathcal{R} = \{R_1^{1,1}, R_2^{1,1}, R_1^{2,2}, R_1^{3,3}, R_2^{3,3}, R_1^{4,4}, R_1^{1,2}, R_1^{1,3}, R_1^{1,4}, R_1^{2,3}, R_1^{2,4}, R_1^{3,4}\}.$$

Jasno je da je

$$J = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}, \tag{4.2}$$

$$I_{1,1} = I_{3,3} = \{1,2\}, \qquad I_{j,k} = \{1\}, \text{ za } (j,k) \in J \setminus \{(1,1),(3,3)\}. \tag{4.3}$$

(b) Mreža akademskih publikacija [111]: To je više-modalitetna mreža predstavljena dijagramom koji je prikazan na Slici 4.2. Ona se sastoji od 2 jedno-modalitetne i 4 proste dvo-modalitetne mreže.

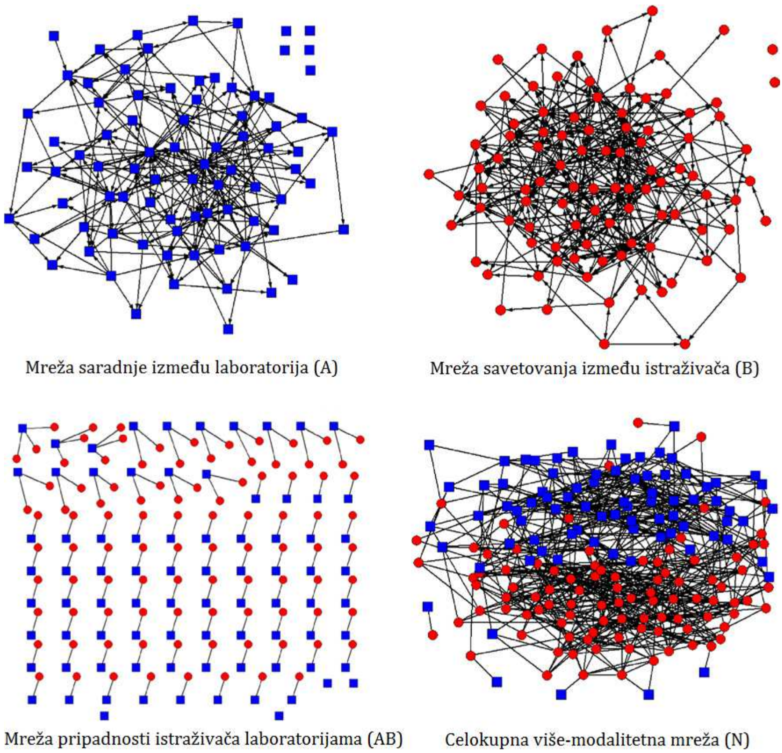


Slika 4.2 Dijagram koji predstavlja više-modalitetnu mrežu akademskih publikacija.

Treba reći da su razni tipovi socijalnih mreža vezani za naučne publikacije i njihove autore izučavani u brojnim radovima. Razlog za prilično veliko interesovanje istraživača za ovakve mreže je verovatno postojanje velikog broja baza sa podacima koji se tiču naučnih publikacija, što istraživačima značajno olakšava dolazak do podataka koje bi analizirali.

Najintenzivnije su izučavane takozvane *kolaboracione mreže* (*collaboration networks*) ili *koautorske mreže* (*coautorship networks*). One su izučavane kao jedno-modalitetne mreže istraživača (autora) povezanih koautorstvom pri publikovanju naučnih publikacija, ali se mogu posmatrati i kao projekcije dvo-modalitetnih mreža "istraživači-radovi" na komponente "istraživači". Potsećamo da je o projekcijama bilo reči u prethodnoj glavi. Više informacija o ovim mrežama može se naći u [35, 85, 89] i drugim izvorima.

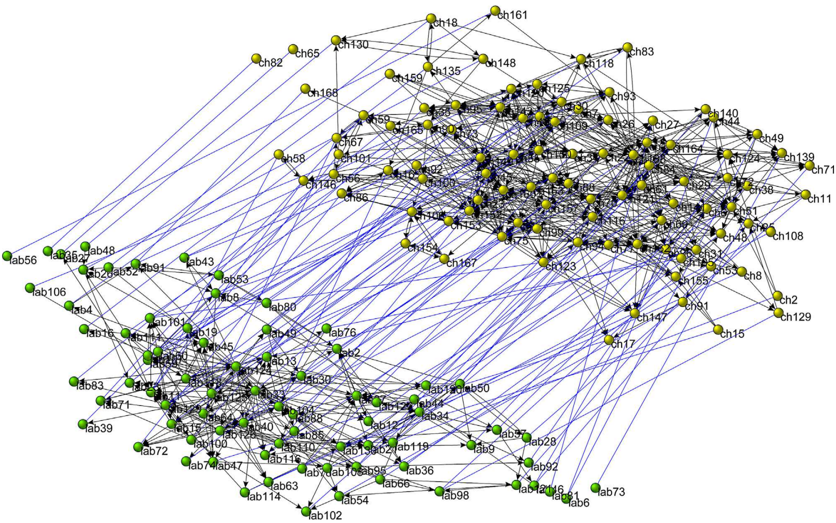
Drugi intenzivno proučavani tip mreža vezanih za naučne publikacije su *mreže citiranja* (*citation networks*), koje su takođe razmatrane kao jedno-modalitetne mreže istraživača koji su drugim istraživačima vezani citiranjem njihovih publikacija. Mreže citiranja i koautorske mreže su izučavane uglavnom odvojeno jedne od drugih i tek nedavno su počele da se javljaju ideje o integrisanom pristupu koji će istovremeno uzeti u obzir obe ove mreže i neke druge aspekte naučnog publikovanja. Više-modalitetni pristup koji ovde podstičemo savršeno se uklapa u te trendove.



Slika 4.3 Mreža istraživanja raka u Francuskoj

(c) Mreža istraživanja raka u Francuskoj [78, 79, 117, 118, 125]: Radi se o više-modalitetnoj mreži koja je izučavana u većem broju radova novijeg datuma. Osnovna ideja koja leži iza ove mreže je razmatranje veza između istraživača i laboratorija u Francuskoj koji se bave istraživanjem raka na dva nivoa. Prvi je inter-organizacioni nivo, gde se razmatraju veze između 82 Francuske laboratorije u pomenutoj oblasti, a drugi je inter-individualni, gde se razmatraju veze između 126 Francuskih istraživača u toj oblasti. Na taj način su formirane dve jedno-modalitetne mreže koje su prikazane na Slici 4.3 (A) i (B). Osim toga, istraživači i laboratorije su povezani pripadnošću istraživača laboratorijama, što čini prostu dvo-modalitetnu mrežu prikazanu na Slici 4.3 (AB). Konačno, sve ove mreže zajedno formiraju više-modalitetnu mrežu prikazanu na Slici 4.3 (N).

Drugačija vizualizacija ove više-modalitetne mreže data je na Slici 4.4. Na slici su laboratorije prikazane zelenim kružićima (dole levo), a istraživači žutim kružićima (gore desno).

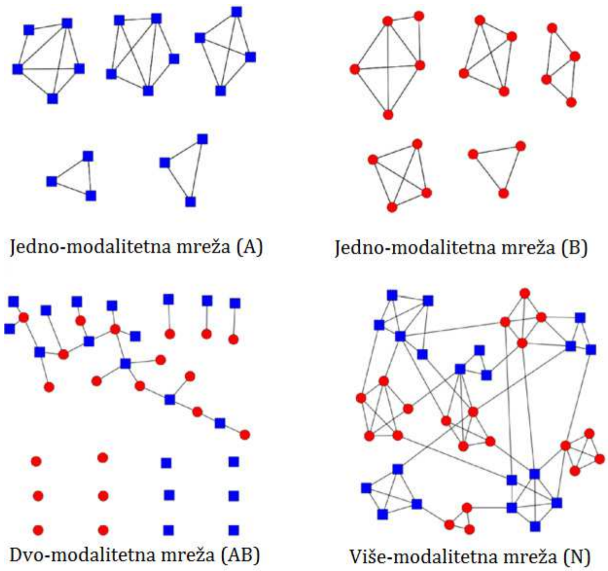


Slika 4.4 Drugačija vizualizacija mreže istraživanja raka u Francuskoj

(d) Mreža/graf pećinskog čoveka [115, 116, 117]: *Graf pećinskog čoveka* (*caveman graph*) nastaje modifikacijom kolekcije izolovanih klika ("pećina") na taj način što se iz svake klike ukloni po jedna grana, koja se potom iskoristi da tu kliku poveže sa susednom klikom tako da se na kraju dobije (retko) povezan graf. Takvi grafovi uvedeni su u [115] da bi se upotrebljavali u izučavanju poznatog "*fenomena malog sveta*" ("*small world phenomenon*").

Mreža pećinskog čoveka prikazana na Slici 4.5 (N) nastala je povezivanjem klika iz (A) i (B) na nešto drugačiji način, pomoću dvo-modalitetne mreže iz (AB). Ta mreža je očigledno istog tipa kao mreža iz dela (c), samo izgleda znatno jednostavnije, što je i razlog zbog čega je ovde navodimo. Međutim, bez obzira što mreže iz (A), (B) i (AB) imaju prilično jednostavne strukture, rezultujuća više-modalitetna mreža iz (N) ne izgleda baš tako jednostavno.

(d) Genetska regulatorna (interakciona) mreža je samo jedna od brojnih vrsta mreža koje se u biologiji koriste da bi se lakše razumeli složeni biološki procesi. Mreža prikazana na Slici 4.6, uzeta iz rada [112], prikazuje složene



Slika 4.5 Mreža "pećinskog čoveka"

interakcije između gena. Geni (njih 204) su predstavljeni kao čvorovi, pri čemu su različitim bojama prikazani različiti tipovi gena (odnosno njihove različite funkcije), a interakcije između gena (njih 291) su predstavljene kao grane grafa. Iz legende se vidi da se razlikuje 9 tipova (funkcija) gena, što prikazanu mrežu čini više-modalitetnom, sa 9 modaliteta.

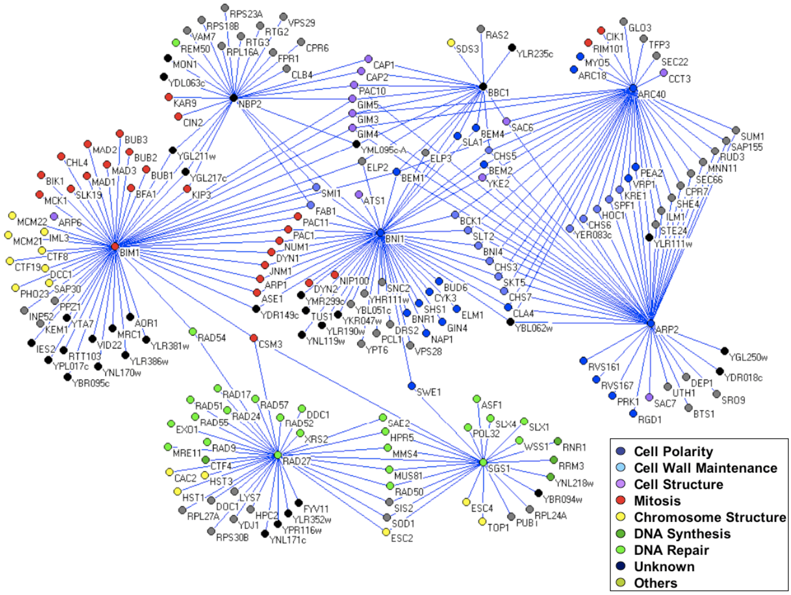
Neka su $\mathcal{M} = (A_1, A_2, \dots, A_n, \mathcal{R})$ i $\mathcal{N} = (B_1, B_2, \dots, B_n, \mathcal{S})$ više-modalitetni fazi relacijski sistemi istog tipa (indeksirani istim skupom J i familijom skupova $\{I_{j,k}\}_{(j,k)\in J}$), odnosno

$$\mathcal{R} = \{R_i^{j,k} \mid (j,k) \in J, i \in I_{j,k}\} \quad \text{i} \quad \mathcal{S} = \{S_i^{j,k} \mid (j,k) \in J, i \in I_{j,k}\}.$$

Ako za svaki $j \in [1,n]$ postoji bijektivna funkcija $\phi_j : A_j \to B_j$ takva da je

$$R_i^{j,k}(a_j, a_k) = S_i^{j,k}(\phi_j(a_j), \phi_k(a_k)),$$

za sve $a_j \in A_j$, $a_k \in A_k$ i $i \in I_{j,k}$, onda za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ kažemo da su *izomorfni* više-modalitetni fazi relacijski sistemi, pri čemu za n-torku $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ kažemo da je *izomorfizam* između $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.



Slika 4.6 Genetska regulatorna (interakciona) mreža

4.2. Više-modalitetni sistemi fazi relacijskih jednačina i nejednačina

U ovom odeljku bavićemo se sistemima fazi relacijskih jednačina i nejednačina određenim više-modalitetnim fazi relacijskim sistemima (odnosno više-modalitetnim fazi mrežama). Takve sisteme fazi relacijskih jednačina i nejednačina nazivaćemo *više-modalitetnim sistemima*.

Neka je dat više-modalitetni fazi relacijski sistem $\mathcal{M} = (A_1, \ldots, A_n, \mathcal{R})$, gde je

$$\mathcal{R} = \{R_i^{j,k} \mid (j,k) \in J,\, i \in I_{j,k}\}.$$

Razmatraćemo sledeće više-modalitetne sisteme fazi relacijskih jednačina i nejednačina:

$$\alpha_j \circ R_i^{j,k} = R_i^{j,k} \circ \alpha_k, \qquad (j,k) \in J,\, i \in I_{j,k}, \tag{4.4}$$

$$\alpha_j \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k} \circ \alpha_k, \qquad (j,k) \in J,\, i \in I_{j,k}, \tag{4.5}$$

$$\alpha_j \circ R_i^{j,k} \geqslant R_i^{j,k} \circ \alpha_k, \qquad (j,k) \in J,\, i \in I_{j,k}, \tag{4.6}$$

gde su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ promenljive takve da α_j uzima vrednosti u $L^{A_j \times A_j}$, za svako $j \in [1,n]$. Jasno je da je sistem jednačina (4.4) ekvivalentan konjunkciji sistema nejednačina (4.5) i (4.6). Rešenja ovih sistema su n-torke fazi relacija iz $L^{A_1\times A_1}\times\cdots\times L^{A_n\times A_n}$, koje su u kompletnoj mreži $(L^{A_1\times A_1}\times\cdots\times L^{A_n\times A_n},\leqslant)$ uređene pokoordinatno, sa

$$(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n)\leqslant(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n) \;\Leftrightarrow\; \varrho_j\leqslant\theta_j, \text{ za svako } j\in[1,n].$$

Ako je $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n)\leqslant(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)$, onda kažemo i da je n-torka $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n)$ *sadržana* u n-torci $(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)$. Na ovaj način uređujemo i rešenja sistema (4.4), (4.5) i (4.6), kao i ostalih sistema fazi relacijskih jednačina i nejednačina koji će biti razmatrani u nastavku.

U slučaju kada je sistem $\mathcal{N}$ interpretiran kao više-modalitetna fazi mreža, za n-torku $(\varrho_1,\dots,\varrho_n)$ koja je rešenje sistema (4.4), odnosno za koju važi

$$\varrho_j\circ R_i^{j,k}=R_i^{j,k}\circ\varrho_k,$$

za sve $(j,k)\in J$ i $i\in I_{j,k}$, kažemo da je n-torka *regularnih fazi relacija* u odnosu na sistem $\mathcal{N}$, za n-torku koja je rešenje sistema (4.5) kažemo da je n-torka *desno regularnih fazi relacija* u odnosu na $\mathcal{N}$, a za n-torku koja je rešenje sistema (4.6) kažemo da je n-torka *levo regularnih fazi relacija* u odnosu na sistem $\mathcal{N}$. Ukoliko sve fazi relacije iz te n-torke jesu fazi kvazi-uređenja, odnosno fazi ekvivalencije, onda govorimo o n-torci *regularnih* (*desno regularnih, levo regularnih*) *fazi kvazi-uređenja*, odnosno *regularnih* (*desno regularnih, levo regularnih*) *fazi ekvivalencija*.

Jasno je da je $(\varrho_1,\dots,\varrho_n)$ n-torka regularnih fazi relacija u odnosu na $\mathcal{M}$ ako i samo ako je ϱ_j regularna fazi relacija na jedno-modalitetnoj mreži $\mathcal{O}_j$, za svako $j\in[1,n]$ za koje važi $(j,j)\in J$, i (ϱ_j,ϱ_k) je par regularnih fazi relacija na dvo-modalitetnoj fazi mreži $\mathcal{M}_{j,k}$ za svako $(j,k)\in J$ za koje je $j\neq k$.

U radu sa sistemima (4.4), (4.5) i (4.6) važnu ulogu će imati skupovi koj definišemo u nastavku. Prvo, za svako $j\in[1,n]$ definišemo skupove

$$\Lambda_j=\{k\in[1,n]\,|\,(j,k)\in J\}, \tag{4.7}$$

$$P_j=\{k\in[1,n]\,|\,(k,j)\in J\}. \tag{4.8}$$

Jasno, Λ_j je skup svih $k\in[1,n]$ za koje se jednačina $\alpha_j\circ R_i^{j,k}=R_i^{j,k}\circ\alpha_k$ (odnosno nejednačina $\alpha_j\circ R_i^{j,k}\leqslant R_i^{j,k}\circ\alpha_k$, $\alpha_j\circ R_i^{j,k}\geqslant R_i^{j,k}\circ\alpha_k$) pojavljuje u sistemu (4.4) (odnosno sistemu (4.5), (4.6)), a P_j je skup svih $k\in[1,n]$ za koje se jednačina $\alpha_k\circ R_i^{k,j}=R_i^{k,j}\circ\alpha_j$ (odnosno nejednačina $\alpha_k\circ R_i^{k,j}\leqslant R_i^{k,j}\circ\alpha_j$, $\alpha_k\circ R_i^{k,j}\geqslant R_i^{k,j}\circ\alpha_j$) pojavljuje u sistemu (4.4) (odnosno sistemu (4.5), (4.6)).

Takođe definišemo i skupove

$$\Lambda=\{j\in[1,n]\,|\,(\exists k\in[1,n])\,(j,k)\in J\}=\{j\in[1,n]\,|\,\Lambda_j\neq\emptyset\}, \tag{4.9}$$

$$P=\{j\in[1,n]\,|\,(\exists k\in[1,n])\,(k,j)\in J\}=\{j\in[1,n]\,|\,P_j\neq\emptyset\}. \tag{4.10}$$

Jasno, Λ je skup svih $j \in [1,n]$ za koje se napoznata α_j pojavljuje na levoj strani neke od jednačina u sistemu (4.4), odnosno nejednačine u sistemu (4.5) ili (4.6)), a P je skup svih $j \in [1,n]$ za koje se napoznata α_j pojavljuje na desnoj strani neke od jednačina u sistemu (4.4), odnosno nejednačine u sistemu (4.5) ili (4.6)).

Teorema 4.2.1. *Neka je* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0) \in L^{A_1\times A_1} \times \dots \times L^{A_2\times A_2} \times L^{A_n \times A_n}$ *proizvoljna* n*-torka fazi relacija.*

Skupovi svih rešenja sistema (4.4), (4.5) i (4.6) čine kompletne mreže, pa stoga postoje najveća rešenja tih sistema sadržana u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

Ako su $\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0$ *fazi kvazi-uređenja, tada sve komponente tih najvećih rešenja takođe jesu fazi kvazi-uređenja.*

Dokaz. Dokazaćemo tvrđenje koje se odnosi na sistem (4.4). Tvrđenja koja se odnose na sisteme (4.5) i (4.6) dokazuju se na potpuno isti način.

Neka je $\{(\theta_1^t, \theta_2^t, \dots, \theta_n^t)\}_{t\in T}$ proizvoljna neprazna familija rešenja sistema (4.4) sadržanih u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$, i neka je

$$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \bigvee_{t\in T} (\theta_1^t, \theta_2^t, \dots, \theta_n^t)$$

u kompletnoj mreži $(L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \dots \times L^{A_n\times A_n}, \leqslant)$, odnosno

$$\theta_j = \bigvee_{t\in T} \theta_j^t, \qquad \text{za svako } j \in [1,n].$$

Tada za proizvoljne $(j,k) \in J$ i $i \in I_{j,k}$ imamo da je

$$\begin{aligned} \theta_j \circ R_i^{j,k} &= \Big(\bigvee_{t\in T} \theta_j^t\Big) \circ R_i^{j,k} = \bigvee_{t\in T} \Big(\theta_j^t \circ R_i^{j,k}\Big) \\ &= \bigvee_{t\in T} \Big(R_i^{j,k} \circ \theta_k^t\Big) = R_i^{j,k} \circ \Big(\bigvee_{t\in T} \theta_k^t\Big) = R_i^{j,k} \circ \theta_k, \end{aligned}$$

što znači da je n-torka $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ takođe rešenje sistema (4.4). Prema tome, skup rešenja sistema (4.4) je zatvoren za proizvoljne supremume, i očigledno sadrži najmanji element kompletne mreže $(L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \dots \times L^{A_n\times A_n}, \leqslant)$, n-torku koja se sastoji od praznih relacija, i stoga zaključujemo da je taj skup i sam kompletna mreža, kao i da postoji najveće rešenje $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ sistema (4.4) sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

Neka su $\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0$ fazi kvazi-uređenja. Zbog refleksivnosti tih fazi relacija imamo da je $\Delta_j \leqslant \varrho_j$, za svako $j \in [1,n]$, gde je sa Δ_j označena identička relacija na A_j, pa je $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$ rešenje sistema (4.4) sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$. Kako je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ najveće takvo rešenje, to je $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) \leqslant (\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$, odnosno $\Delta_j \leqslant \varrho_j$, za svako $j \in [1,n]$, a to znači da su $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ refleksivne fazi relacije.

Osim toga, za proizvoljne $(j,k) \in J$ i $i \in I_{j,k}$ imamo da je

$$(\varrho_j \circ \varrho_j) \circ R_i^{j,k} = \varrho_j \circ (\varrho_j \circ R_i^{j,k}) = \varrho_j \circ (R_i^{j,k} \circ \varrho_k)$$
$$= (\varrho_j \circ R_i^{j,k}) \circ \varrho_k = (R_i^{j,k} \circ \varrho_k) \circ \varrho_k = R_i^{j,k} \circ (\varrho_k \circ \varrho_k),$$

čime smo dobili da je $(\varrho_1 \circ \varrho_1, \varrho_2 \circ \varrho_2, \dots, \varrho_n \circ \varrho_n)$ rešenje sistema (4.4). To rešenje je sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$, jer zbog tranzitivnosti fazi relacija $\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0$ sledi da je

$$\varrho_j \circ \varrho_j \leqslant \varrho_j^0 \circ \varrho_j^0 \leqslant \varrho_j^0,$$

za svako $j \in [1,n]$. Koristeći opet činjenicu da je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ najveće rešenje sistema (4.4) sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$, dobijamo da je

$$(\varrho_1 \circ \varrho_1, \varrho_2 \circ \varrho_2, \dots, \varrho_n \circ \varrho_n) \leqslant (\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$$

odnosno $\varrho_j \circ \varrho_j \leqslant \varrho_j$, za svako $j \in [1,n]$, što znači da su $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ tranzitivne fazi relacije.

Prema tome, dokazali smo da su $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ fazi kvazi-uređenja, čime je dokaz teoreme završen. □

U nastavku, za datu familiju $\mathcal{F}$ fazi relacija, sa $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ ćemo označavati podalgebru od $\mathcal{L}$ generisanu svim vrednostima koje uzimaju fazi relacije iz $\mathcal{F}$.

Sledeća teorema daje postupak za izračunavanje najvećeg rešenja sistema (4.4) (najveće regularne fazi relacije) sadržanog u datoj n-torci fazi relacija.

Teorema 4.2.2. *Neka je $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \dots \times L^{A_n\times A_n}$ proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je $\{(\varrho_1^r, \varrho_2^r, \dots, \varrho_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ opadajući niz n-torki fazi relacija iz $L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \dots \times L^{A_n\times A_n}$, definisan induktivno na sledeći način:*

$$(\varrho_1^1, \varrho_2^1, \dots, \varrho_n^1) = (\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0), \tag{4.11}$$

$$\varrho_j^{r+1} = \varrho_j^r \wedge \bigwedge_{k\in\Lambda_j} \bigwedge_{i\in I_{j,k}} \Big((R_i^{j,k} \circ \varrho_k^r)/R_i^{j,k}\Big) \wedge \bigwedge_{k\in P_j} \bigwedge_{i\in I_{k,j}} \Big(R_i^{k,j} \backslash (\varrho_k^r \circ R_i^{k,j})\Big) \tag{4.12}$$

za svako $j \in [1,n]$, $r \in \mathbb{N}$. Tada važi:

(a) *ako postoji $s \in \mathbb{N}$ takvo da važi*

$$(\varrho_1^s, \varrho_2^s, \dots, \varrho_n^s) = (\varrho_1^{s+1}, \varrho_2^{s+1}, \dots, \varrho_n^{s+1}),$$

tada je $(\varrho_1^s, \varrho_2^s, \dots, \varrho_n^s)$ najveće rešenje sistema (4.4) sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$;

(b) *ako su $A_1, A_2, \dots, A_n$ konačni skupovi i podalgebra $\mathcal{L}(\mathcal{R} \cup \{\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0\})$ zadovoljava DCC, onda je niz $\{(\varrho_1^r, \varrho_2^r, \dots, \varrho_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan i postoji $s \in \mathbb{N}$ takvo da važi $(\varrho_1^s, \varrho_2^s, \dots, \varrho_n^s) = (\varrho_1^{s+1}, \varrho_2^{s+1}, \dots, \varrho_n^{s+1})$.*

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je $(\varrho_1^s, \varrho_2^s, \dots, \varrho_n^s) = (\varrho_1^{s+1}, \varrho_2^{s+1}, \dots, \varrho_n^{s+1})$, za neko $s \in \mathbb{N}$. Razmotrimo proizvoljne $(j,k) \in J$ i $i \in I_{j,k}$. Tada je $k \in \Lambda_j$ i $j \in P_k$, pa na osnovu (4.12) dobijamo da je

$$\varrho_j^s = \varrho_j^{s+1} \leqslant (R_i^{j,k} \circ \varrho_k^s)/R_i^{j,k} \qquad \text{i} \qquad \varrho_k^s = \varrho_k^{s+1} \leqslant R_i^{j,k} \backslash (\varrho_j^s \circ R_i^{j,k}), \tag{4.13}$$

i na osnovu svojstva adjunkcije dobijamo da je (4.13) ekvivalentno sa

$$\varrho_j^s \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k} \circ \varrho_k^s \qquad \text{i} \qquad R_i^{j,k} \circ \varrho_k^s \leqslant \varrho_j^s \circ R_i^{j,k}. \tag{4.14}$$

Prema tome, dobili smo da je

$$\varrho_j^s \circ R_i^{j,k} = R_i^{j,k} \circ \varrho_k^s,$$

za sve $(j,k) \in J$ i $i \in I_{j,k}$, što znači da je $(\varrho_1^s, \varrho_2^s, \dots, \varrho_n^s)$ rešenje sistema (4.4). Očigledno je da je ovo rešenje sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

Uzmimo da je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ proizvoljno rešenje sistema (4.4) sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0) = (\varrho_1^1, \varrho_2^1, \dots, \varrho_n^1)$. Pretpostavimo da je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \leqslant (\varrho_1^r, \varrho_2^r, \dots, \varrho_n^r)$, za neko $r \in \mathbb{N}$. Neka je dato proizvoljno $j \in [1, n]$. Ako je skup Λ_j neprazan i $k \in \Lambda_j$ i $i \in I_{j,k}$ su proizvoljni elementi, tada imamo da je

$$\varrho_j \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k} \circ \varrho_k \leqslant R_i^{j,k} \circ \varrho_k^r,$$

što povlači

$$\varrho_j \leqslant (R_i^{j,k} \circ \varrho_k^r)/R_i^{j,k},$$

i odatle dobijamo da je

$$\varrho_j \leqslant \bigwedge_{k \in \Lambda_j} \bigwedge_{i \in I_{j,k}} \left((R_i^{j,k} \circ \varrho_k^r)/R_i^{j,k} \right). \tag{4.15}$$

Ako je skup P_j neprazan i $k \in P_j$ i $i \in I_{j,k}$ su proizvoljni elementi, onda na isti način dokazujemo da je

$$\varrho_j \leqslant \bigwedge_{k \in P_j} \bigwedge_{i \in I_{k,j}} \left(R_i^{k,j} \backslash (\varrho_k^r \circ R_i^{k,j}) \right). \tag{4.16}$$

Dakle, ukoliko su Λ_j i P_j neprazni, onda je

$$\varrho_j \leqslant \varrho_j^r \wedge \bigwedge_{k \in \Lambda_j} \bigwedge_{i \in I_{j,k}} \left((R_i^{j,k} \circ \varrho_k^r)/R_i^{j,k} \right) \wedge \bigwedge_{k \in P_j} \bigwedge_{i \in I_{k,j}} \left(R_i^{k,j} \backslash (\varrho_k^r \circ R_i^{k,j}) \right) = \varrho_j^{r+1}. \tag{4.17}$$

Napomenimo da je, zbog uslova (4.1), bar jedan od skupova Λ_j i P_j neprazan. Kako u proizvoljnom uređenom skupu infimum praznog skupa jeste najveći element, to u slučaju da je jedan od skupova Λ_j i P_j prazan imamo da će jedan od izraza na desnim stranama formula (4.15) i (4.16) biti zamenjen sa ∇_{A_j}, a u formuli (4.17) će biti izostavljen, pri čemu će formule (4.15), (4.16) i (4.17) i dalje biti tačne.

Kako (4.17) važi za svako $j \in [1,n]$, to zaključujemo da je $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n) \leqslant (\varrho_1^{r+1},\varrho_2^{r+1},\dots,\varrho_n^{r+1})$, i prema tome, matematičkom indukcijom zaključujemo da je $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n) \leqslant (\varrho_1^r,\varrho_2^r,\dots,\varrho_n^r)$, za svako $r \in \mathbb{N}$. Odavde dalje sledi da je $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n) \leqslant (\varrho_1^s,\varrho_2^s,\dots,\varrho_n^s)$, što znači da je $(\varrho_1^s,\varrho_2^s,\dots,\varrho_n^s)$ najveće rešenje sistema (4.4) sadržano u $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$.

(b) Neka su $A_1,A_2,\dots,A_n$ konačni skupovi i podalgebra $\mathcal{L}(\mathcal{R}\cup\{\varrho_1^0,\dots,\varrho_n^0\})$ zadovoljava DCC.

Za svako $l \in [1,n]$ i sve parove $(a_l,b_l) \in A_l \times A_l$, imamo da je $\{\varrho_l^r(a_l,b_l)\}_{r\in\mathbb{N}}$ opadajući niz u $\mathcal{L}(\mathcal{R}\cup\{\varrho_1^0,\dots,\varrho_n^0\})$. Na osnovu pretpostavke, ovaj niz se stabilizuje, i budući da ima konačno mnogo ovakvih nizova, zaključujemo da postoji $s \in \mathbb{N}$ takvo da se svi ovi nizovi stabilizuju nakon s koraka. To znači da je niz $\{(\varrho_1^r,\varrho_2^r\dots,\varrho_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan i $(\varrho_1^s,\varrho_2^s,\dots,\varrho_n^s) = (\varrho_1^{s+1},\varrho_2^{s+1},\dots,\varrho_n^{s+1})$.

Ovime je dokaz teoreme završen. □

Teorema 4.2.3. *Neka je* $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0) \in L^{A_1\times A_1}\times L^{A_2\times A_2}\times\cdots\times L^{A_n\times A_n}$ *proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je* $\{(\varrho_1^r,\varrho_2^r,\dots,\varrho_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ *opadajući niz n-torki fazi relacija iz* $L^{A_1\times A_1}\times L^{A_2\times A_2}\times\cdots\times L^{A_n\times A_n}$*, definisan induktivno na sledeći način:*

$$(\varrho_1^1,\varrho_2^1,\dots,\varrho_n^1) = (\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0), \tag{4.18}$$

$$\varrho_j^{r+1} = \varrho_j^r \wedge \bigwedge_{k\in\Lambda_j}\bigwedge_{i\in I_{j,k}}\left((R_i^{j,k}\circ\varrho_k^r)/R_i^{j,k}\right) \tag{4.19}$$

za svako $j \in [1,n]$, $r \in \mathbb{N}$. *Tada važi:*

(a) *ako postoji* $s \in \mathbb{N}$ *takvo da važi*

$$(\varrho_1^s,\varrho_2^s,\dots,\varrho_n^s) = (\varrho_1^{s+1},\varrho_2^{s+1},\dots,\varrho_n^{s+1}),$$

tada je $(\varrho_1^s,\varrho_2^s,\dots,\varrho_n^s)$ *najveće rešenje sistema (4.5) sadržano u* $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$*;*

(b) *ako su* $A_1,A_2,\dots,A_n$ *konačni skupovi i podalgebra* $\mathcal{L}(\mathcal{R}\cup\{\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0\})$ *zadovoljava DCC, onda je niz* $\{(\varrho_1^r,\varrho_2^r,\dots,\varrho_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ *konačan i postoji* $s \in \mathbb{N}$ *takvo da važi* $(\varrho_1^s,\varrho_2^s,\dots,\varrho_n^s) = (\varrho_1^{s+1},\varrho_2^{s+1},\dots,\varrho_n^{s+1})$.

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu Teoreme 4.2.2. i biće izostavljen. □

Teorema 4.2.4. *Neka je* $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0) \in L^{A_1\times A_1}\times L^{A_2\times A_2}\times\cdots\times L^{A_n\times A_n}$ *proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je* $\{(\varrho_1^r,\varrho_2^r,\dots,\varrho_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ *opadajući niz n-torki fazi relacija iz* $L^{A_1\times A_1}\times L^{A_2\times A_2}\times\cdots\times L^{A_n\times A_n}$*, definisan induktivno na sledeći način:*

$$(\varrho_1^1,\varrho_2^1,\dots,\varrho_n^1) = (\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0), \tag{4.20}$$

$$\varrho_j^{r+1} = \varrho_j^r \wedge \bigwedge_{k\in P_j}\bigwedge_{i\in I_{k,j}}\left(R_i^{k,j}\backslash(\varrho_k^r\circ R_i^{k,j})\right) \tag{4.21}$$

za svako $j \in [1,n]$, $r \in \mathbb{N}$. *Tada važi:*

(a) *ako postoji* $s \in \mathbb{N}$ *takvo da važi*

$$(\varrho_1^s, \varrho_2^s, \dots, \varrho_n^s) = (\varrho_1^{s+1}, \varrho_2^{s+1}, \dots, \varrho_n^{s+1}),$$

tada je $(\varrho_1^s, \varrho_2^s, \dots, \varrho_n^s)$ *najveće rešenje sistema (4.6) sadržano u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$;

(b) *ako su* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *konačni skupovi i podalgebra* $\mathcal{L}(\mathcal{R} \cup \{\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0\})$ *zadovoljava DCC, onda je niz* $\{(\varrho_1^r, \varrho_2^r, \dots, \varrho_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ *konačan i postoji* $s \in \mathbb{N}$ *takvo da važi* $(\varrho_1^s, \varrho_2^s, \dots, \varrho_n^s) = (\varrho_1^{s+1}, \varrho_2^{s+1}, \dots, \varrho_n^{s+1})$.

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu Teoreme 4.2.2. i biće izostavljen. □

Teorema 4.2.5. *Pretpostavimo da je* $\Lambda \cap P = \emptyset$.

Neka je $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \cdots \times L^{A_n\times A_n}$ *proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je* $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \cdots \times L^{A_n\times A_n}$ *n-torka fazi relacija definisana sa*

$$\varrho_j = \varrho_j^0 \wedge \bigwedge_{k\in\Lambda_j} \bigwedge_{i\in I_{j,k}} \Big((R_i^{j,k} \circ \varrho_k^0)/R_i^{j,k} \Big), \tag{4.22}$$

za svako $j \in [1,n]$. *Tada je* $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ *najveće rešenje sistema nejednačina (4.5) sadržano u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

Dokaz: Neka su dati proizvoljni $(j,k) \in J$ i $i \in I_{j,k}$. Tada je $k \in P$, pa na osnovu pretpostavke da je $\Lambda \cap P = \emptyset$ dobijamo da $k \notin \Lambda$, odnosno $\Lambda_k = \emptyset$, zbog čega je

$$\varrho_k = \varrho_k^0 \wedge \bigwedge_{l\in\Lambda_k} \bigwedge_{t\in I_{k,l}} \Big((R_t^{k,l} \circ \varrho_l^0)/R_t^{k,l} \Big) = \varrho_k^0 \wedge \nabla_{A_k} = \varrho_k^0.$$

Osim toga, imamo da je $k \in \Lambda_j$, pa je

$$\varrho_j \leqslant \bigwedge_{l\in\Lambda_j} \bigwedge_{t\in I_{j,l}} \Big((R_t^{j,l} \circ \varrho_l^0)/R_t^{j,l} \Big) \leqslant (R_i^{j,k} \circ \varrho_k^0)/R_i^{j,k} = (R_i^{j,k} \circ \varrho_k)/R_i^{j,k},$$

i na osnovu svojstva reziduacije dobijamo da je

$$\varrho_j \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k} \circ \varrho_k.$$

Time smo dokazali da je n-torka $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ rešenje sistema (4.5), i jasno je da je to rešenje sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

Neka je $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ proizvoljno rešenje sistema (4.5) sadržano u n-torci $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$. Razmotrimo proizvoljno $j \in [1,n]$. Ako je $\Lambda_j \neq \emptyset$, onda za proizvoljne $k \in \Lambda_j$ i $i \in I_{j,k}$ imamo da je

$$\theta_j \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k} \circ \theta_k \leqslant R_i^{j,k} \circ \varrho_k^0,$$

odakle sledi da je

$$\theta_j \leqslant R_i^{j,k} \backslash (R_i^{j,k} \circ \varrho_k^0).$$

Kako to važi za proizvoljne $k \in \Lambda_j$ i $i \in I_{j,k}$, i kako je, osim toga, $\theta_j \leqslant \varrho_j^0$, to zaključujemo da je

$$\theta_j \leqslant \varrho_j^0 \wedge \bigwedge_{k \in \Lambda_j} \bigwedge_{i \in I_{j,k}} \left((R_i^{j,k} \circ \varrho_k^0) / R_i^{j,k} \right) = \varrho_j.$$

Sa druge strane, ako je $\Lambda_j = \emptyset$, onda je $\varrho_j = \varrho_j^0$, odakle dobijamo da je $\theta_j \leqslant \varrho_j$.

Ovim smo dokazali da je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ najveće rešenje sistema (4.5) sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$, čime je dokaz teoreme završen. □

Teorema 4.2.6. *Pretpostavimo da je $\Lambda \cap P = \emptyset$.*

Neka je $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0) \in L^{A_1 \times A_1} \times L^{A_2 \times A_2} \times \dots \times L^{A_n \times A_n}$ proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \in L^{A_1 \times A_1} \times L^{A_2 \times A_2} \times \dots \times L^{A_n \times A_n}$ n-torka fazi relacija definisana sa

$$\varrho_j = \varrho_j^0 \wedge \bigwedge_{k \in P_j} \bigwedge_{i \in I_{k,j}} \left(R_i^{k,j} \backslash (\varrho_k^0 \circ R_i^{k,j}) \right), \tag{4.23}$$

za svako $j \in [1, n]$. Tada je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ najveće rešenje sistema nejednačina (4.6) sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu Teoreme 4.2.5. i biće izostavljen. □

Kao što smo ranije videli, najveća rešenja sistema (4.4), (4.5) i (4.6) sadržana u datoj n-torci fazi kvazi-uređenja i sama predstavljaju n-torke fazi kvazi-uređenja. Kako se u mnogim situacijama javlja potreba za rešenjima ovih sistema koja se sastoje od fazi ekvivalencija, to se prirodno se nameće pitanje kako izračunati najveće n-torke fazi ekvivalencija koje su rešenja sistema (4.4), (4.5) i (4.6) i sadržane su u datoj n-torci fazi relacija $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$. U nastavku ćemo videti da je najpre potrebno da svi članovi polazne n-torke $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$ budu fazi ekvivalencije. Međutim, to nije dovoljno. Da bi postigli to što želimo neophodno je izvršiti i izvesne modifikacije sistema (4.4), (4.5) i (4.6). Naime, razmatraćemo i sledeće sisteme fazi relacijskih jednačina i nejednačina:

$$\alpha_j \circ R_i^{j,k} = R_i^{j,k} \circ \alpha_k, \quad \alpha_j^{-1} \circ R_i^{j,k} = R_i^{j,k} \circ \alpha_k^{-1}, \qquad (j,k) \in J, i \in I_{j,k}, \tag{4.24}$$

$$\alpha_j \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k} \circ \alpha_k, \quad \alpha_j^{-1} \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k} \circ \alpha_k^{-1}, \qquad (j,k) \in J, i \in I_{j,k}, \tag{4.25}$$

$$\alpha_j \circ R_i^{j,k} \geqslant R_i^{j,k} \circ \alpha_k, \quad \alpha_j^{-1} \circ R_i^{j,k} \geqslant R_i^{j,k} \circ \alpha_k^{-1}, \qquad (j,k) \in J, i \in I_{j,k}, \tag{4.26}$$

gde su $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ promenljive takve da α_j uzima vrednosti u $L^{A_j \times A_j}$, za svako $j \in [1, n]$.

Teorema 4.2.7. *Neka je* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \cdots \times L^{A_n\times A_n}$ *proizvoljna* n*-torka fazi relacija.*

Skupovi svih rešenja sistema (4.24), (4.25) i (4.26) čine kompletne mreže, pa stoga postoje najveća rešenja tih sistema sadržana u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

Ako su $\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0$ *fazi ekvivalencije, tada sve komponente tih najvećih rešenja takođe jesu fazi ekvivalencije.*

Dokaz: Na isti način kao u dokazu Teoreme 4.2.1. dobijamo da su skupovi rešenja sistema (4.24), (4.25) i (4.26) zatvoreni za proizvoljne supremume i sadrže najmanji element kompletne mreže $(L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \cdots \times L^{A_n\times A_n}, \leqslant)$, pa su ti skupovi i sami kompletne mreže, odakle sledi da postoje najveća rešenja sistema (4.24), (4.25) i (4.26) sadržana u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

Neka su $\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0$ fazi ekvivalencije, i neka je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ najveće rešenje bilo kog od sistema (4.24), (4.25) i (4.26). Na isti način kao u dokazu Teoreme 4.2.1. dobijamo da su $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ fazi kvazi-uređenja.

Ako je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ rešenje bilo kog od sistema (4.24), (4.25) i (4.26), onda je i n-torka $(\varrho_1^{-1}, \varrho_2^{-1}, \dots, \varrho_n^{-1})$ rešenje tog istog sistema, i ako je pri tome $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ najveće rešenje, onda dobijamo da je

$$(\varrho_1^{-1}, \varrho_2^{-1}, \dots, \varrho_n^{-1}) \leqslant (\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n),$$

odnosno $\varrho_j^{-1} \leqslant \varrho_j$, za svako $j \in [1,n]$, što dalje povlači da je $\varrho_j = \varrho_j^{-1}$, za svako $j \in [1,n]$. To znači da su $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ simetrične fazi relacije, odakle sledi da su $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ fazi ekvivalencije. □

Teorema 4.2.8. *Neka je* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \cdots \times L^{A_n\times A_n}$ *proizvoljna* n*-torka fazi relacija, i neka je* $\{(\varrho_1^r, \varrho_2^r, \dots, \varrho_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ *opadajući niz* n*-torki fazi relacija iz* $L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \cdots \times L^{A_n\times A_n}$*, definisan induktivno na sledeći način:*

$$(\varrho_1^1, \varrho_2^1, \dots, \varrho_n^1) = (\varrho_1^0, \varrho_2^0 \dots, \varrho_n^0), \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned} \varrho_j^{r+1} = \varrho_j^r \wedge \bigwedge_{k\in\Lambda_j} \bigwedge_{i\in I_{j,k}} \Big([(R_i^{j,k} \circ \varrho_k^r)/R_i^{j,k}] \wedge [(R_i^{j,k} \circ (\varrho_k^r)^{-1})/R_i^{j,k}]^{-1} \Big) \wedge \\ \wedge \bigwedge_{k\in P_j} \bigwedge_{i\in I_{k,j}} \Big([R_i^{k,j} \backslash (\varrho_k^r \circ R_i^{k,j})] \wedge ([R_i^{k,j} \backslash ((\varrho_k^r)^{-1}) \circ R_i^{k,j}])^{-1} \Big), \end{aligned} \tag{4.28}$$

za sve $j \in [1,n]$ *i* $r \in \mathbb{N}$. *Tada važi:*

(a) *ako postoji* $s \in \mathbb{N}$ *takvo da važi*

$$(\varrho_1^s, \varrho_2^s, \dots, \varrho_n^s) = (\varrho_1^{s+1}, \varrho_2^{s+1}, \dots, \varrho_n^{s+1}),$$

tada je $(\varrho_1^s, \varrho_1^s, \dots, \varrho_n^s)$ *najveće rešenje sistema (4.24) sadržano u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$;

(b) *ako su* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *konačni skupovi i podalgebra* $\mathcal{L}(\mathcal{R} \cup \{\varrho_1^0, \dots, \varrho_n^0\})$ *zadovoljava DCC, onda je niz* $\{(\varrho_1^r, \varrho_2^r, \dots, \varrho_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ *konačan i postoji* $s \in \mathbb{N}$ *takvo da važi* $(\varrho_1^s, \varrho_2^s, \dots, \varrho_n^s) = (\varrho_1^{s+1}, \varrho_2^{s+1}, \dots, \varrho_n^{s+1})$.

Dokaz: (a) Uzmimo da je $(\varrho_1^s, \varrho_2^s, \dots, \varrho_n^s) = (\varrho_1^{s+1}, \varrho_2^{s+1}, \dots, \varrho_n^{s+1})$ za neko $s \in \mathbb{N}$. Razmotrimo proizvoljne $(j,k) \in J$ i $i \in I_{j,k}$. Tada je $k \in \Lambda_j$ i $j \in P_k$, i kao u dokazu Teoreme 4.2.2. dobijamo da je

$$\varrho_j^s \circ R_i^{j,k} = R_i^{j,k} \circ \varrho_k^s. \tag{4.29}$$

Osim toga, na osnovu (4.28) imamo da je

$$\varrho_j^s = \varrho_j^{s+1} \leqslant [(R_i^{j,k} \circ (\varrho_k^s)^{-1})/R_i^{j,k}]^{-1} \quad \text{i} \quad \varrho_k^s = \varrho_k^{s+1} \leqslant [R_i^{j,k} \backslash ((\varrho_j^s)^{-1} \circ R_i^{j,k})]^{-1},$$

što je ekvivalentno sa

$$(\varrho_j^s)^{-1} \leqslant (R_i^{j,k} \circ (\varrho_k^s)^{-1})/R_i^{j,k} \quad \text{i} \quad (\varrho_k^s)^{-1} \leqslant R_i^{j,k} \backslash ((\varrho_j^s)^{-1} \circ R_i^{j,k}).$$

Na osnovu svojstva adjunkcije, to je ekvivalentno sa

$$(\varrho_j^s)^{-1} \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k} \circ (\varrho_k^s)^{-1} \quad \text{i} \quad R_i^{j,k} \circ (\varrho_k^s)^{-1} \leqslant (\varrho_j^s)^{-1} \circ R_i^{j,k},$$

čime smo dobili da je

$$(\varrho_j^s)^{-1} \circ R_i^{j,k} = R_i^{j,k} \circ (\varrho_k^s)^{-1}. \tag{4.30}$$

Dakle, dokazali smo da (4.29) i (4.30) važi za proizvoljne $(j,k) \in J$ i $i \in I_{j,k}$, što znači da je $(\varrho_1^s, \varrho_1^s, \dots, \varrho_n^s)$ rešenje sistema (4.24), i očigledno je da je to rešenje sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

Uzmimo da je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ proizvoljno rešenje sistema (4.24) sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0) = (\varrho_1^1, \varrho_2^1, \dots, \varrho_n^1)$. Pretpostavimo da je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \leqslant (\varrho_1^r, \varrho_2^r, \dots, \varrho_n^r)$, za neko $r \in \mathbb{N}$. Neka je dato proizvoljno $j \in [1, n]$. Ako je skup Λ_j neprazan i $k \in \Lambda_j$ i $i \in I_{j,k}$ su proizvoljni elementi, tada je

$$\varrho_j \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k} \circ \varrho_k \leqslant R_i^{j,k} \circ \varrho_k^r \quad \text{i} \quad (\varrho_j)^{-1} \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k} \circ (\varrho_k)^{-1} \leqslant R_i^{j,k} \circ (\varrho_k^r)^{-1},$$

što povlači

$$\varrho_j \leqslant (R_i^{j,k} \circ \varrho_k^r)/R_i^{j,k} \quad \text{i} \quad (\varrho_j)^{-1} \leqslant (R_i^{j,k} \circ (\varrho_k^r)^{-1})/R_i^{j,k},$$

odnosno

$$\varrho_j \leqslant (R_i^{j,k} \circ \varrho_k^r)/R_i^{j,k} \wedge [(R_i^{j,k} \circ (\varrho_k^r)^{-1})/R_i^{j,k}]^{-1}.$$

Prema tome, dobili smo da je

$$\varrho_j \leqslant \bigwedge_{k \in \Lambda_j} \bigwedge_{i \in I_{j,k}} \Big([(R_i^{j,k} \circ \varrho_k^r)/R_i^{j,k}] \wedge [(R_i^{j,k} \circ (\varrho_k^r)^{-1})/R_i^{j,k}]^{-1} \Big). \tag{4.31}$$

Ako je skup P_j neprazan i $k \in P_j$ i $i \in I_{j,k}$ su proizvoljni elementi, onda na isti način dokazujemo da je

$$\varrho_j \leqslant \bigwedge_{k\in P_j} \bigwedge_{i\in I_{k,j}} \Big([R_i^{k,j} \backslash (\varrho_k^r \circ R_i^{k,j})] \wedge ([R_i^{k,j} \backslash ((\varrho_k^r)^{-1}) \circ R_i^{k,j}])^{-1} \Big). \tag{4.32}$$

Dakle, ukoliko su Λ_j i P_j neprazni, onda je

$$\begin{aligned} \varrho_j \leqslant \varrho_j^r \wedge \bigwedge_{k\in \Lambda_j} \bigwedge_{i\in I_{j,k}} \Big([(R_i^{j,k} \circ \varrho_k^r)/R_i^{j,k}] \wedge [(R_i^{j,k} \circ (\varrho_k^r)^{-1})/R_i^{j,k}]^{-1} \Big) \wedge \\ \wedge \bigwedge_{k\in P_j} \bigwedge_{i\in I_{k,j}} \Big([R_i^{k,j} \backslash (\varrho_k^r \circ R_i^{k,j})] \wedge ([R_i^{k,j} \backslash ((\varrho_k^r)^{-1}) \circ R_i^{k,j}])^{-1} \Big) = \varrho_j^{r+1}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Kao što smo već ranije rekli, bar jedan od skupova Λ_j i P_j neprazan, i u slučaju da je jedan od skupova Λ_j i P_j prazan imamo da će jedan od izraza na desnim stranama formula (4.31) i (4.32) biti zamenjen sa ∇_{A_j}, a u formuli (4.33) će biti izostavljen, pri čemu će formule (4.31), (4.32) i (4.33) i dalje biti tačne.

Kako nejednakost (4.33) važi za proizvoljno $j \in [1,n]$, to zaključujemo da je $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n) \leqslant (\varrho_1^{r+1},\varrho_2^{r+1},\dots,\varrho_n^{r+1})$, odakle matematičkom indukcijom dobijamo da je $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n) \leqslant (\varrho_1^{r},\varrho_2^{r},\dots,\varrho_n^{r})$, za svako $r \in \mathbb{N}$. Odavde dalje sledi da je $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n) \leqslant (\varrho_1^{s},\varrho_2^{s},\dots,\varrho_n^{s})$, i prema tome, $(\varrho_1^{s},\varrho_2^{s},\dots,\varrho_n^{s})$ je najveće rešenje sistema (4.24) sadržano u $(\varrho_1^{0},\varrho_2^{0},\dots,\varrho_n^{0})$.

(b) To dokazujemo na isti način kao odgovarajući deo Teoreme 4.2.2. □

Teorema 4.2.9. *Neka je $(\varrho_1^{0},\varrho_2^{0},\dots,\varrho_n^{0}) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \cdots \times L^{A_n\times A_n}$ proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je $\{(\varrho_1^{r},\varrho_2^{r},\dots,\varrho_n^{r})\}_{r\in\mathbb{N}}$ opadajući niz n-torki fazi relacija iz $L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \cdots \times L^{A_n\times A_n}$, definisan induktivno na sledeći način:*

$$(\varrho_1^{1},\varrho_2^{1},\dots,\varrho_n^{1}) = (\varrho_1^{0},\varrho_2^{0},\dots,\varrho_n^{0}), \tag{4.34}$$

$$\varrho_j^{r+1} = \varrho_j^r \wedge \bigwedge_{k\in \Lambda_j} \bigwedge_{i\in I_{j,k}} \Big([(R_i^{j,k} \circ \varrho_k^r)/R_i^{j,k}] \wedge [(R_i^{j,k} \circ (\varrho_k^r)^{-1})/R_i^{j,k}]^{-1} \Big) \tag{4.35}$$

za svako $j \in [1,n]$, $r \in \mathbb{N}$. Tada važi:

(a) *ako postoji $s \in \mathbb{N}$ takvo da važi*

$$(\varrho_1^{s},\varrho_2^{s},\dots,\varrho_n^{s}) = (\varrho_1^{s+1},\varrho_2^{s+1},\dots,\varrho_n^{s+1}),$$

tada je $(\varrho_1^{s},\varrho_2^{s},\dots,\varrho_n^{s})$ najveće rešenje sistema (4.25) sadržano u $(\varrho_1^{0},\varrho_2^{0},\dots,\varrho_n^{0})$;

(b) *ako su $A_1, A_2, \dots, A_n$ konačni skupovi i podalgebra $\mathcal{L}(\mathcal{R} \cup \{\varrho_1^{0},\varrho_2^{0},\dots,\varrho_n^{0}\})$ zadovoljava DCC, onda je niz $\{(\varrho_1^{r},\varrho_2^{r},\dots,\varrho_n^{r})\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan i postoji $s \in \mathbb{N}$ takvo da važi $(\varrho_1^{s},\varrho_2^{s},\dots,\varrho_n^{s}) = (\varrho_1^{s+1},\varrho_2^{s+1},\dots,\varrho_n^{s+1})$.*

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu Teoreme 4.2.8. i biće izostavljen. □

Teorema 4.2.10. *Neka je* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \dots \times L^{A_n\times A_n}$ *proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je* $\{(\varrho_1^r, \varrho_2^r, \dots, \varrho_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ *opadajući niz n-torki fazi relacija iz* $L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \dots \times L^{A_n\times A_n}$*, definisan induktivno na sledeći način:*

$$(\varrho_1^1, \varrho_2^1, \dots, \varrho_n^1) = (\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0), \tag{4.36}$$

$$\varrho_j^{r+1} = \varrho_j^r \wedge \bigwedge_{k\in P_j} \bigwedge_{i\in I_{k,j}} \Big([R_i^{k,j} \backslash (\varrho_k^r \circ R_i^{k,j})] \wedge [R_i^{k,j} \backslash ((\varrho_k^r)^{-1} \circ R_i^{k,j})]^{-1} \Big) \tag{4.37}$$

za svako $j \in [1,n]$*,* $r \in \mathbb{N}$*. Tada važi:*

(a) *ako postoji* $s \in \mathbb{N}$ *takvo da važi*

$$(\varrho_1^s, \varrho_2^s, \dots, \varrho_n^s) = (\varrho_1^{s+1}, \varrho_2^{s+1}, \dots, \varrho_n^{s+1}),$$

tada je $(\varrho_1^s, \varrho_2^s, \dots, \varrho_n^s)$ *najveće rešenje sistema (4.26) sadržano u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$*;*

(b) *ako su* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *konačni skupovi i podalgebra* $\mathcal{L}(\mathcal{R} \cup \{\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0\})$ *zadovoljava DCC, onda je niz* $\{(\varrho_1^r, \varrho_2^r, \dots, \varrho_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ *konačan i postoji* $s \in \mathbb{N}$ *takvo da važi* $(\varrho_1^s, \varrho_2^s, \dots, \varrho_n^s) = (\varrho_1^{s+1}, \varrho_2^{s+1}, \dots, \varrho_n^{s+1})$*.*

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu Teoreme 4.2.8. i biće izostavljen. □

Teorema 4.2.11. *Pretpostavimo da je* $\Lambda \cap P = \emptyset$*.*

Neka je $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \dots \times L^{A_n\times A_n}$ *proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je* $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \dots \times L^{A_n\times A_n}$ *n-torka fazi relacija definisana sa*

$$\varrho_j = \varrho_j^0 \wedge \bigwedge_{k\in \Lambda_j} \bigwedge_{i\in I_{j,k}} \Big([(R_i^{j,k} \circ \varrho_k^0)/R_i^{j,k}] \wedge [(R_i^{j,k} \circ (\varrho_k^0)^{-1})/R_i^{j,k}]^{-1} \Big), \tag{4.38}$$

za svako $j \in [1,n]$*. Tada je* $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ *najveće rešenje sistema nejednačina (4.25) sadržano u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$*.*

Dokaz: Razmotrimo proizvoljne $(j,k) \in J$ i $i \in I_{j,k}$. Na isti način kao u dokazu Teoreme 4.2.5. dobijamo da je $\varrho_k = \varrho_k^0$. Takođe, imamo da je $k \in \Lambda_j$, odakle sledi da je

$$\begin{aligned}
\varrho_j &\leqslant \bigwedge_{l\in \Lambda_j} \bigwedge_{t\in I_{j,l}} \Big([(R_t^{j,l} \circ \varrho_l^0)/R_t^{j,l}] \wedge [(R_t^{j,l} \circ (\varrho_l^0)^{-1})/R_t^{j,l}]^{-1} \Big) \\
&\leqslant [(R_i^{j,k} \circ \varrho_k^0)/R_i^{j,k}] \wedge [(R_i^{j,k} \circ (\varrho_k^0)^{-1})/R_i^{j,k}]^{-1} \\
&= [(R_i^{j,k} \circ \varrho_k)/R_i^{j,k}] \wedge [(R_i^{j,k} \circ \varrho_k^{-1})/R_i^{j,k}]^{-1},
\end{aligned}$$

što znači da je

$$\varrho_j \leqslant (R_i^{j,k} \circ \varrho_k)/R_i^{j,k} \qquad \text{i} \qquad \varrho_j^{-1} \leqslant (R_i^{j,k} \circ \varrho_k^{-1})/R_i^{j,k},$$

odnosno

$$\varrho_j \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k} \circ \varrho_k \qquad \text{i} \qquad \varrho_j^{-1} \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k} \circ \varrho_k^{-1}.$$

Prema tome, $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ je rešenje sistema nejednačina (4.25), i očigledno je sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

Neka je $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ proizvoljno rešenje sistema (4.25) sadržano u n-torci $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$. Razmotrimo proizvoljno $j \in [1, n]$. Ako je $\Lambda_j \neq \emptyset$, onda za proizvoljne $k \in \Lambda_j$ i $i \in I_{j,k}$ imamo da je

$$\theta_j \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k} \circ \theta_k \leqslant R_i^{j,k} \circ \varrho_k^0 \qquad \text{i} \qquad \theta_j^{-1} \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k} \circ \theta_k^{-1} \leqslant R_i^{j,k} \circ (\varrho_k^0)^{-1},$$

odakle dobijamo da je

$$\theta_j \leqslant (R_i^{j,k} \circ \varrho_k^0)/R_i^{j,k} \qquad \text{i} \qquad \theta_j \leqslant [(R_i^{j,k} \circ (\varrho_k^0)^{-1})/R_i^{j,k}]^{-1},$$

odnosno

$$\theta_j \leqslant [(R_i^{j,k} \circ \varrho_k^0)/R_i^{j,k}] \wedge [(R_i^{j,k} \circ (\varrho_k^0)^{-1})/R_i^{j,k}]^{-1}.$$

Kako to važi za proizvoljne $k \in \Lambda_j$ i $i \in I_{j,k}$, i kako je, osim toga, $\theta_j \leqslant \varrho_j^0$, to zaključujemo da je

$$\theta_j \leqslant \varrho_j^0 \wedge \bigwedge_{k \in \Lambda_j} \bigwedge_{i \in I_{j,k}} \Big([(R_i^{j,k} \circ \varrho_k^0)/R_i^{j,k}] \wedge [(R_i^{j,k} \circ (\varrho_k^0)^{-1})/R_i^{j,k}]^{-1} \Big) = \varrho_j.$$

Sa druge strane, ako je $\Lambda_j = \emptyset$, onda je $\varrho_j = \varrho_j^0$, odakle neposredno sledi da je $\theta_j \leqslant \varrho_j$.

Ovim smo dokazali da je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ najveće rešenje sistema nejednačina (4.25) sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$, pa je dokaz teoreme završen. □

Teorema 4.2.12. *Pretpostavimo da je $\Lambda \cap P = \emptyset$.*

Neka je $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0) \in L^{A_1 \times A_1} \times L^{A_2 \times A_2} \times \dots \times L^{A_n \times A_n}$ proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \in L^{A_1 \times A_1} \times L^{A_2 \times A_2} \times \dots \times L^{A_n \times A_n}$ n-torka fazi relacija definisana sa

$$\varrho_j = \varrho_j^0 \wedge \bigwedge_{k \in P_j} \bigwedge_{i \in I_{k,j}} \Big([R_i^{k,j} \backslash (\varrho_k^0 \circ R_i^{k,j})] \wedge [R_i^{k,j} \backslash ((\varrho_k^0)^{-1} \circ R_i^{k,j})]^{-1} \Big), \tag{4.39}$$

za svako $j \in [1, n]$. Tada je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ najveće rešenje sistema nejednačina (4.26) sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu Teoreme 4.2.11. i biće izostavljen. □

4.3. Neke instance opštih više-modalitetnih sistema

U prethodnom odeljku bavili smo se sistemima fazi relacijskih jednačina i nejednačina koje možemo nazvati opštim više-modalitetnim sistemima. U ovom odeljku bavićemo se nekim “jednostavnijim" sistemima, od kojih svaki predstavlja instancu nekog opšteg više-modalitetnog sistema, u smislu da svako rešenje tog novog sistema mora biti rešenje i odgovarajućeg opšteg sistema. Naime, razmatraćemo sledeće sisteme:

$$\alpha_j \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k}, \qquad (j,k)\in J,\, i \in I_{j,k}, \tag{4.40}$$
$$\alpha_j \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k}, \quad R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k} \circ \alpha_k, \qquad (j,k)\in J,\, i \in I_{j,k}, \tag{4.41}$$
$$R_i^{j,k} \circ \alpha_k \leqslant R_i^{j,k}, \qquad (j,k)\in J,\, i \in I_{j,k}, \tag{4.42}$$
$$R_i^{j,k} \circ \alpha_k \leqslant R_i^{j,k}, \quad R_i^{j,k} \leqslant \alpha_j \circ R_i^{j,k}, \qquad (j,k)\in J,\, i \in I_{j,k}, \tag{4.43}$$
$$\alpha_j \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k}, \quad R_i^{j,k} \circ \alpha_k \leqslant R_i^{j,k} \qquad (j,k)\in J,\, i \in I_{j,k}, \tag{4.44}$$
$$\alpha_j \circ R_i^{j,k} = R_i^{j,k}, \quad R_i^{j,k} \circ \alpha_k = R_i^{j,k} \qquad (j,k)\in J,\, i \in I_{j,k}, \tag{4.45}$$

gde su $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ promenljive takve da α_j uzima vrednosti u $L^{A_j\times A_j}$, za svako $j \in [1,n]$.

Teorema 4.3.1. *Neka je $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0) \in L^{A_1\times A_1}\times L^{A_2\times A_2}\times\cdots\times L^{A_n\times A_n}$ proizvoljna n-torka fazi relacija. Tada važi sledeće:*

(a) *Skupovi svih rešenja sistema (4.40), (4.42), (4.44) i (4.45) čine kompletne mreže, pa stoga postoje najveća rešenja tih sistema sadržana u $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$.*
(b) *Ako su $\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0$ fazi kvazi-uređenja, tada sve komponente tih najvećih rešenja takođe jesu fazi kvazi-uređenja.*
(c) *Najveće rešenje sistema (4.40) sadržano u $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$ je takođe i najveće rešenje sistema (4.41) sadržano u $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$.*
(d) *Najveće rešenje sistema (4.42) sadržano u $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$ je takođe i najveće rešenje sistema (4.43) sadržano u $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$.*
(e) *Najveće rešenje sistema (4.44) sadržano u $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$ je takođe i najveće rešenje sistema (4.45) sadržano u $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$.*

Dokaz: (a) Zbog distributivnosti kompozicije u odnosu na proizvoljne unije fazi relacija imamo da su skupovi rešenja nejednačina

$$\alpha_j \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k} \quad \text{i} \quad R_i^{j,k} \circ \alpha_k \leqslant R_i^{j,k}$$

i jednačina

$$\alpha_j \circ R_i^{j,k} = R_i^{j,k} \quad \text{i} \quad R_i^{j,k} \circ \alpha_k = R_i^{j,k}$$

zatvoreni za sve supremume u kompletnoj mreži $L^{A_1\times A_1}\times\cdots\times L^{A_n\times A_n}$, odakle sledi da to važi i za skupove rešenja sistema (4.40), (4.42), (4.44) i (4.45).

Kako skupovi rešenja tih sistema sadrže najmanji element kompletne mreže $L^{A_1\times A_1}\times\cdots\times L^{A_n\times A_n}$, to i oni sami čine kompletne mreže i postoje najveća rešenja tih sistema sadržana u $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$.

(b) Neka je $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n)$ najveće rešenje bilo kog od sistema (4.40), (4.42), (4.44) i (4.45) sadržano u $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$. Kao u dokazima Teorema 4.2.1. i 4.2.7., jednostavno dobijamo da su $(\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_n)$ i $(\varrho_1\circ\varrho_1,\varrho_2\circ\varrho_2,\dots,\varrho_n\circ\varrho_n)$ rešenja tog sistema sadržana u $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$, odakle sledi da je $\Delta_j\leqslant\varrho_j$ i $\varrho_j\circ\varrho_j\leqslant\varrho_j$, za svako $j\in[1,n]$, što znači da su $\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n$ fazi kvazi-uređenja.

(c) Neka je $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n)$ najveće rešenje sistema (4.40) sadržano u n-torci $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$. Tada su $\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n$ refleksivne fazi relacije, odakle sledi da je

$$R_i^{j,k}\leqslant R_i^{j,k}\circ\varrho_k,$$

za sve $(j,k)\in J$ i $i\in I_{j,k}$, što znači da je $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n)$ rešenje i sistema (4.41).

Ako je $(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)$ rešenje sistema (4.41) sadržano u $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$, onda je $(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)$ rešenje i sistema (4.40), odakle sledi da je

$$(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)\leqslant(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n),$$

čime smo dokazali da je $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n)$ najveće rešenje sistema (4.41) sadržano u $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$.

(d) To se dokazuje na potpuno isti način kao i (c).

(e) Neka je $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n)$ najveće rešenje sistema (4.44) sadržano u n-torci $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$. Na osnovu (c) i (d) imamo da je $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n)$ takođe rešenje sistema (4.41) i (4.43), pa je jasno da je i rešenje sistema (4.45).

Na isti način kao u dokazu tvrđenja (c) dobijamo da je $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n)$ najveće rešenje sistema (4.45) sadržano u n-torci $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$. □

Teorema 4.3.2. *Neka je $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)\in L^{A_1\times A_1}\times L^{A_2\times A_2}\times\cdots\times L^{A_n\times A_n}$ proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n)\in L^{A_1\times A_1}\times L^{A_2\times A_2}\times\cdots\times L^{A_n\times A_n}$ n-torka fazi relacija definisana sa*

$$\varrho_j=\varrho_j^0\wedge\bigwedge_{k\in\Lambda_j}\bigwedge_{i\in I_{j,k}}\left(R_i^{j,k}/R_i^{j,k}\right)\wedge\bigwedge_{k\in P_j}\bigwedge_{i\in I_{k,j}}\left(R_i^{k,j}\backslash R_i^{k,j}\right),\tag{4.46}$$

za svako $j\in[1,n]$. Tada je $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n)$ najveće rešenje sistema (4.44) i (4.45) sadržano u $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$.

Dokaz: Razmotrimo proizvoljne $(j,k)\in J$ i $i\in I_{j,k}$. Tada je $k\in\Lambda_j$, pa na osnovu (4.46) imamo da je

$$\varrho_j\leqslant R_i^{j,k}/R_i^{j,k},$$

odakle sledi da je

$$\varrho_j\circ R_i^{j,k}\leqslant R_i^{j,k}.\tag{4.47}$$

Sa druge strane, imamo da je $j\in P_k$, pa opet na osnovu (4.46) dobijamo da je

$$\varrho_k \leqslant R_i^{j,k} \backslash R_i^{j,k},$$

odnosno

$$R_i^{j,k} \circ \varrho_k \leqslant R_i^{j,k}. \tag{4.48}$$

Prema tome, za proizvoljne $(j,k) \in J$ i $i \in I_{j,k}$ važi (4.47) i (4.48), što znači da je n-torka $(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n)$ rešenje sistema (4.44).

Dalje, neka je $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ proizvoljno rešenje sistema (4.44) sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \ldots, \varrho_n^0)$. Razmotrimo proizvoljno $j \in [1,n]$. Tada za proizvoljne $k \in \Lambda_j$ i $i \in I_{j,k}$ imamo da je $(j,k) \in J$, pa na osnovu (4.44) dobijamo da je

$$\theta_j \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k},$$

odakle na osnovu svojstva reziduacije sledi da je

$$\theta_j \leqslant R_i^{j,k} / R_i^{j,k}.$$

Prema tome, zaključujemo da je

$$\theta_j \leqslant \bigwedge_{k \in \Lambda_j} \bigwedge_{i \in I_{j,k}} \left(R_i^{j,k} / R_i^{j,k} \right). \tag{4.49}$$

Sa druge strane, za proizvoljne $k \in P_j$ i $i \in I_{k,j}$ je $(k,j) \in J$, pa prema (4.44) sledi da je

$$R_i^{k,j} \circ \theta_j \leqslant R_i^{k,j},$$

odnosno, prema svojstvu reziduacije,

$$\theta_j \leqslant R_i^{k,j} \backslash R_i^{k,j}.$$

Odatle zaključujemo da važi

$$\theta_j \leqslant \bigwedge_{k \in P_j} \bigwedge_{i \in I_{k,j}} \left(R_i^{k,j} \backslash R_i^{k,j} \right). \tag{4.50}$$

Sada na osnovu (4.49), (4.50) i pretpostavke da je $\theta_j \leqslant \varrho_j^0$, za svako $j \in [1,n]$, dobijamo da za proizvoljno $j \in [1,n]$ važi

$$\theta_j \leqslant \varrho_j^0 \wedge \bigwedge_{k \in \Lambda_j} \bigwedge_{i \in I_{j,k}} \left(R_i^{j,k} / R_i^{j,k} \right) \wedge \bigwedge_{k \in P_j} \bigwedge_{i \in I_{k,j}} \left(R_i^{k,j} \backslash R_i^{k,j} \right) = \varrho_j.$$

Time smo dokazali da je $(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n)$ najveće rešenje sistema (4.44), a na osnovu Teoreme 4.3.1. i najveće rešenje sistema (4.45). □

Teorema 4.3.3. *Neka je $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \ldots, \varrho_n^0) \in L^{A_1 \times A_1} \times L^{A_2 \times A_2} \times \cdots \times L^{A_n \times A_n}$ proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je $(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n) \in L^{A_1 \times A_1} \times L^{A_2 \times A_2} \times \cdots \times L^{A_n \times A_n}$ n-torka* *fazi relacija definisana sa*

$$\varrho_j = \varrho_j^0 \wedge \bigwedge_{k\in\Lambda_j} \bigwedge_{i\in I_{j,k}} \left(R_i^{j,k}/R_i^{j,k}\right), \tag{4.51}$$

za svako $j \in [1,n]$. *Tada je* $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ *najveće rešenje sistema (4.40) i (4.41) sadržano u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu Teoreme 4.46 i biće izostavljen. □

Teorema 4.3.4. *Neka je* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \dots \times L^{A_n\times A_n}$ *proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je* $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \dots \times L^{A_n\times A_n}$ *n-torka fazi relacija definisana sa*

$$\varrho_j = \varrho_j^0 \wedge \bigwedge_{k\in P_j} \bigwedge_{i\in I_{k,j}} \left(R_i^{k,j}\backslash R_i^{k,j}\right), \tag{4.52}$$

za svako $j \in [1,n]$. *Tada je* $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ *najveće rešenje sistema (4.42) i (4.43) sadržano u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu Teoreme 4.46 i biće izostavljen. □

Razmatraćemo takođe i sledeće sisteme:

$$\alpha_j \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k}, \quad \alpha_j^{-1} \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k}, \qquad (j,k) \in J,\, i \in I_{j,k}, \tag{4.53}$$

$$\alpha_j \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k}, \quad \alpha_j^{-1} \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k}, \quad R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k} \circ \alpha_k, \quad R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k} \circ \alpha_k^{-1}, \quad (j,k) \in J,\, i \in I_{j,k}, \tag{4.54}$$

$$R_i^{j,k} \circ \alpha_k \leqslant R_i^{j,k}, \quad R_i^{j,k} \circ \alpha_k^{-1} \leqslant R_i^{j,k}, \qquad (j,k) \in J,\, i \in I_{j,k}, \tag{4.55}$$

$$R_i^{j,k} \circ \alpha_k \leqslant R_i^{j,k}, \quad R_i^{j,k} \circ \alpha_k^{-1} \leqslant R_i^{j,k}, \quad R_i^{j,k} \leqslant \alpha_j \circ R_i^{j,k}, \quad R_i^{j,k} \leqslant \alpha_j^{-1} \circ R_i^{j,k}, \quad (j,k) \in J,\, i \in I_{j,k}, \tag{4.56}$$

$$\alpha_j \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k}, \quad \alpha_j^{-1} \circ R_i^{j,k} \leqslant R_i^{j,k}, \quad R_i^{j,k} \circ \alpha_k \leqslant R_i^{j,k}, \quad R_i^{j,k} \circ \alpha_k^{-1} \leqslant R_i^{j,k} \quad (j,k) \in J,\, i \in I_{j,k}, \tag{4.57}$$

$$\alpha_j \circ R_i^{j,k} = R_i^{j,k}, \quad \alpha_j^{-1} \circ R_i^{j,k} = R_i^{j,k}, \quad R_i^{j,k} \circ \alpha_k = R_i^{j,k}, \quad R_i^{j,k} \circ \alpha_k^{-1} = R_i^{j,k} \quad (j,k) \in J,\, i \in I_{j,k}, \tag{4.58}$$

gde su $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ promenljive takve da α_j uzima vrednosti u $L^{A_j\times A_j}$, za svako $j \in [1,n]$.

Teorema 4.3.5. *Neka je* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \dots \times L^{A_n\times A_n}$ *proizvoljna n-torka fazi relacija. Tada važi sledeće:*

(a) *Skupovi svih rešenja sistema (4.53), (4.55), (4.57) i (4.58) čine kompletne mreže, pa stoga postoje najveća rešenja tih sistema sadržana u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

(b) *Ako su* $\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0$ *fazi kvazi-uređenja, tada sve komponente tih najvećih rešenja takođe jesu fazi kvazi-uređenja.*
(c) *Najveće rešenje sistema (4.53) sadržano u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$ *je takođe i najveće rešenje sistema (4.54) sadržano u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.
(d) *Najveće rešenje sistema (4.55) sadržano u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$ *je takođe i najveće rešenje sistema (4.56) sadržano u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.
(e) *Najveće rešenje sistema (4.57) sadržano u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$ *je takođe i najveće rešenje sistema (4.58) sadržano u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

Teorema 4.3.6. *Neka je* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \cdots \times L^{A_n\times A_n}$ *proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je* $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \cdots \times L^{A_n\times A_n}$ *n-torka fazi relacija definisana sa*

$$\varrho_j = \varrho_j^0 \wedge \bigwedge_{k\in\Lambda_j} \bigwedge_{i\in I_{j,k}} \left(R_i^{j,k} /\!/ R_i^{j,k}\right) \wedge \bigwedge_{k\in P_j} \bigwedge_{i\in I_{k,j}} \left(R_i^{k,j} \backslash\!\backslash R_i^{k,j}\right), \tag{4.59}$$

za svako $j \in [1,n]$. *Tada je* $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ *najveće rešenje sistema (4.57) i (4.58) sadržano u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

Teorema 4.3.7. *Neka je* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \cdots \times L^{A_n\times A_n}$ *proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je* $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \cdots \times L^{A_n\times A_n}$ *n-torka fazi relacija definisana sa*

$$\varrho_j = \varrho_j^0 \wedge \bigwedge_{k\in\Lambda_j} \bigwedge_{i\in I_{j,k}} \left(R_i^{j,k} /\!/ R_i^{j,k}\right), \tag{4.60}$$

za svako $j \in [1,n]$. *Tada je* $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ *najveće rešenje sistema (4.53) i (4.54) sadržano u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

Teorema 4.3.8. *Neka je* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \cdots \times L^{A_n\times A_n}$ *proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je* $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \cdots \times L^{A_n\times A_n}$ *n-torka fazi relacija definisana sa*

$$\varrho_j = \varrho_j^0 \wedge \bigwedge_{k\in P_j} \bigwedge_{i\in I_{k,j}} \left(R_i^{k,j} \backslash\!\backslash R_i^{k,j}\right), \tag{4.61}$$

za svako $j \in [1,n]$. *Tada je* $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ *najveće rešenje sistema (4.55) i (4.56) sadržano u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

4.4. Izračunavanje najvećih krisp rešenja više-modalitetnih sistema

Kao što smo videli, algoritmi koje smo dali u Odeljku 4.2., za izračunavanje najvećih rešenja više-modalitetnih sistema (4.4)–(4.6) i (4.24)–(4.26) sadržanih u datoj n-torci fazi relacija, ne moraju se obavezno završiti u konačnom broju koraka. Izuzetak su jedino sistemi nejednačina (4.5), (4.6), (4.25) i (4.26), u slučaju kada je $\Lambda \cap P = \emptyset$, čija se najveća rešenja tada izračunavaju direktnim metodama, bez upotrebe iteracije. Zbog toga se prirodno nameće pitanje: Šta raditi u slučaju kada ovi algoritmi ne daju rezultate?

U nedostatku drugih algoritama koji bi kao rezultat dali najveća rešenja više-modalitetnih sistema sadržanih u datoj n-torci fazi relacija, bilo bi razumno zadovoljiti se nekim manjim rešenjima tih sistema. Na primer, takva rešenja bi dobili izračunavanjem najvećih rešenja instanci više-modalitetnih sistema razmatranih u Odeljku 4.3. Ono što je dobro je da se svi sistemi razmatrani u tom odeljku rešavaju direktnim metodama, bez upotrebe iteracije. Međutim, ograničenja koja ti sistemi nameću mogu biti suviše jaka, što za posledicu može imati to da i najveća rešenja tih sistema mogu biti suviše mala (na primer, mogu biti n-torke identičkih relacija). Stoga nije na odmet imati još neko alternativno rešenje, poput onog koje dajemo u ovom odeljku.

Naime, u ovom odeljku dajemo algoritme za izračunavanje najvećih krisp rešenja sistema (4.4)–(4.6) i (4.24)–(4.26) sadržanih u datoj n-torci fazi relacija. Ti algoritmi se dobijaju modifikacijom algoritama iz Odeljka 4.2., tako da se svode na konstrukciju opadajućih nizova n-torki krisp relacija. U slučaju kada se radi sa više-modalitetnim fazi relacijskim sistemima sa modalitetima koji su konačni skupovi, a takvi su svi oni koji se sreću u praktičnim primenama, ti nizovi n-torki krisp relacija se obavezno stabilizuju nakon konačno mnogo iteracija, što kao rezultat daje najveća krisp rešenja sistema (4.4)–(4.6), odnosno (4.24)–(4.26), sadržana u datoj n-torci fazi relacija.

Najpre dajemo postupak za izračunavanje najvećih krisp rešenja više-modalitetnog sistema (4.4).

Teorema 4.4.1. *Neka je $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \cdots \times L^{A_n\times A_n}$ proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je $\{(\xi_1^r, \xi_2^r, \dots, \xi_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ opadajući niz n-torki krisp relacija iz $2^{A_1\times A_1} \times 2^{A_2\times A_2} \times \cdots \times 2^{A_n\times A_n}$, definisan induktivno na sledeći način:*

$$(\xi_1^1, \xi_2^1, \dots, \xi_n^1) = ((\varrho_1^0)^c, (\varrho_2^0)^c, \dots, (\varrho_n^0)^c), \tag{4.62}$$

$$\xi_j^{r+1} = \xi_j^r \cap \bigcap_{k\in\Lambda_j} \bigcap_{i\in I_{j,k}} \Big((R_i^{j,k} \circ \xi_k^r) \nearrow R_i^{j,k} \Big) \cap \bigcap_{k\in P_j} \bigcap_{i\in I_{k,j}} \Big(R_i^{k,j} \nwarrow (\xi_k^r \circ R_i^{k,j}) \Big) \tag{4.63}$$

za sve $j \in [1,n]$, $r \in \mathbb{N}$.

Ako su $A_1, A_2, \dots, A_n$ konačni skupovi, onda je $\{(\xi_1^r, \xi_2^r, \dots, \xi_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan niz i postoji $s \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$(\xi_1^s, \xi_2^s, \dots, \xi_n^s) = (\xi_1^{s+1}, \xi_2^{s+1}, \dots, \xi_n^{s+1}), \tag{4.64}$$

i u tom slučaju n-torka $(\xi_1^s, \xi_2^s, \dots, \xi_n^s)$ *je najveće krisp rešenje sistema (4.4) sadržano u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$. *Osim toga, ako su* $\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0$ *fazi kvazi-uređenja, onda sve komponente tog najvećeg krisp rešenja jesu kvazi-uređenja.*

Dokaz: Prema pretpostavci, $A_1, A_2, \dots, A_n$ su konačni skupovi, pa je jasno da je i $2^{A_1\times A_1}\times 2^{A_2\times A_2}\times\cdots\times 2^{A_n\times A_n}$ konačan skup. Odavde neposredno sledi da je i niz $\{(\xi_1^r, \xi_2^r, \dots, \xi_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan, i kako je taj niz opadajući, na jednostavan način dobijamo da postoji $s\in\mathbb{N}$ tako da važi (4.64). Dalje, na isti način kao u dokazu Teoreme 4.2.2., korišćenjem Bulovih reziduala umesto običnih reziduala i svojstva reziduacije za Bulove reziduale, dobijamo da je $(\xi_1^s, \xi_2^s, \dots, \xi_n^s)$ najveće krisp rešenje sistema (4.4) sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$.

Takođe, ako su $\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0$ fazi kvazi-uređenja, onda na isti način kao u dokazu Teoreme 4.2.1. dobijamo da su $\xi_1^s, \xi_2^s, \dots, \xi_n^s$ kvazi-uređenja. □

Narednih pet teorema, kojima se daju postupci za izračunavanje najvećih krisp rešenja sistema (4.5), (4.6) i (4.24)–(4.26) sadržanih u datoj n-torci fazi relacija, dokazuje se na sličan način kao Teorema 4.4.1., odnosno odgovarajuće teoreme iz Odeljka 4.2. Stoga će njihovi dokazi biti izostavljeni, a formulacije teorema se navode potpunosti radi, jer će se konstrukcije nizova n-torki krisp relacija, koje se u njima daju, u daljem tekstu ove disertacije koristiti u kreiranju algoritama i programa za izračunavanje najvećih krisp rešenja sistema (4.5), (4.6) i (4.24)–(4.26).

Teorema 4.4.2. *Neka je* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)\in L^{A_1\times A_1}\times L^{A_2\times A_2}\times\cdots\times L^{A_n\times A_n}$ *proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je* $\{(\xi_1^r, \xi_2^r, \dots, \xi_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ *opadajući niz n-torki krisp relacija iz* $2^{A_1\times A_1}\times 2^{A_2\times A_2}\times\cdots\times 2^{A_n\times A_n}$, *definisan induktivno na sledeći način:*

$$(\xi_1^1, \xi_2^1, \dots, \xi_n^1) = ((\varrho_1^0)^c, (\varrho_2^0)^c, \dots, (\varrho_n^0)^c), \tag{4.65}$$

$$\xi_j^{r+1} = \xi_j^r \cap \bigcap_{k\in\Lambda_j}\bigcap_{i\in I_{j,k}}\Big((R_i^{j,k}\circ\xi_k^r)\nearrow R_i^{j,k}\Big) \tag{4.66}$$

za sve $j\in[1,n]$, $r\in\mathbb{N}$.

Ako su $A_1, A_2, \dots, A_n$ *konačni skupovi, onda je* $\{(\xi_1^r, \xi_2^r, \dots, \xi_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ *konačan niz i postoji* $s\in\mathbb{N}$ *tako da važi*

$$(\xi_1^s, \xi_2^s, \dots, \xi_n^s) = (\xi_1^{s+1}, \xi_2^{s+1}, \dots, \xi_n^{s+1}),$$

i u tom slučaju n-torka $(\xi_1^s, \xi_2^s, \dots, \xi_n^s)$ *je najveće krisp rešenje sistema (4.5) sadržano u* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$. *Osim toga, ako su* $\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0$ *fazi kvazi-uređenja, onda sve komponente tog najvećeg krisp rešenja jesu kvazi-uređenja.*

Teorema 4.4.3. *Neka je* $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)\in L^{A_1\times A_1}\times L^{A_2\times A_2}\times\cdots\times L^{A_n\times A_n}$ *proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je* $\{(\xi_1^r, \xi_2^r, \dots, \xi_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ *opadajući niz n-torki krisp relacija iz* $2^{A_1\times A_1}\times 2^{A_2\times A_2}\times\cdots\times 2^{A_n\times A_n}$, *definisan induktivno na sledeći način:*

$$(\xi_1^1,\xi_2^1,\dots,\xi_n^1) = ((\varrho_1^0)^c,(\varrho_2^0)^c,\dots,(\varrho_n^0)^c), \tag{4.67}$$

$$\xi_j^{r+1} = \xi_j^r \cap \bigcap_{k\in P_j}\bigcap_{i\in I_{k,j}}\Big(R_i^{k,j} \nwarrow (\xi_k^r \circ R_i^{k,j})\Big) \tag{4.68}$$

za sve $j \in [1,n]$, $r \in \mathbb{N}$.

Ako su $A_1,A_2,\dots,A_n$ *konačni skupovi, onda je* $\{(\xi_1^r,\xi_2^r,\dots,\xi_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ *konačan niz i postoji* $s\in\mathbb{N}$ *tako da važi*

$$(\xi_1^s,\xi_2^s,\dots,\xi_n^s) = (\xi_1^{s+1},\xi_2^{s+1},\dots,\xi_n^{s+1}),$$

i u tom slučaju n-torka $(\xi_1^s,\xi_2^s,\dots,\xi_n^s)$ *je najveće krisp rešenje sistema (4.6) sadržano u* $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$. *Osim toga, ako su* $\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0$ *fazi kvazi-uređenja, onda sve komponente tog najvećeg krisp rešenja jesu kvazi-uređenja.*

Teorema 4.4.4. *Neka je* $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)\in L^{A_1\times A_1}\times L^{A_2\times A_2}\times\cdots\times L^{A_n\times A_n}$ *proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je* $\{(\xi_1^r,\xi_2^r,\dots,\xi_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ *opadajući niz n-torki krisp relacija iz* $2^{A_1\times A_1}\times 2^{A_2\times A_2}\times\cdots\times 2^{A_n\times A_n}$, *definisan induktivno na sledeći način:*

$$(\xi_1^1,\xi_2^1,\dots,\xi_n^1) = ((\varrho_1^0)^c,(\varrho_2^0)^c\dots,(\varrho_n^0)^c), \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}\xi_j^{r+1} = \xi_j^r \cap \bigcap_{k\in\Lambda_j}\bigcap_{i\in I_{j,k}}\Big([(R_i^{j,k}\circ\xi_k^r)\nearrow R_i^{j,k}] \wedge [(R_i^{j,k}\circ(\xi_k^r)^{-1})\nearrow R_i^{j,k}]^{-1}\Big)\cap \\ \cap \bigcap_{k\in P_j}\bigcap_{i\in I_{k,j}}\Big([R_i^{k,j}\nwarrow(\xi_k^r\circ R_i^{k,j})]\cap([R_i^{k,j}\nwarrow((\xi_k^r)^{-1})\circ R_i^{k,j}])^{-1}\Big),\end{aligned} \tag{4.70}$$

za sve $j\in[1,n]$ *i* $r\in\mathbb{N}$.

Ako su $A_1,A_2,\dots,A_n$ *konačni skupovi, onda je* $\{(\xi_1^r,\xi_2^r,\dots,\xi_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ *konačan niz i postoji* $s\in\mathbb{N}$ *tako da važi*

$$(\xi_1^s,\xi_2^s,\dots,\xi_n^s) = (\xi_1^{s+1},\xi_2^{s+1},\dots,\xi_n^{s+1}),$$

i u tom slučaju n-torka $(\xi_1^s,\xi_2^s,\dots,\xi_n^s)$ *je najveće krisp rešenje sistema (4.24) sadržano u* $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)$. *Osim toga, ako su* $\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0$ *fazi ekvivalencije, onda sve komponente tog najvećeg krisp rešenja jesu ekvivalencije.*

Teorema 4.4.5. *Neka je* $(\varrho_1^0,\varrho_2^0,\dots,\varrho_n^0)\in L^{A_1\times A_1}\times L^{A_2\times A_2}\times\cdots\times L^{A_n\times A_n}$ *proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je* $\{(\xi_1^r,\xi_2^r,\dots,\xi_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ *opadajući niz n-torki krisp relacija iz* $2^{A_1\times A_1}\times 2^{A_2\times A_2}\times\cdots\times 2^{A_n\times A_n}$, *definisan induktivno na sledeći način:*

$$(\xi_1^1,\xi_2^1,\dots,\xi_n^1) = ((\varrho_1^0)^c,(\varrho_2^0)^c\dots,(\varrho_n^0)^c), \tag{4.71}$$

$$\xi_j^{r+1} = \xi_j^r \cap \bigcap_{k\in\Lambda_j}\bigcap_{i\in I_{j,k}}\Big([(R_i^{j,k}\circ\xi_k^r)\nearrow R_i^{j,k}] \wedge [(R_i^{j,k}\circ(\xi_k^r)^{-1})\nearrow R_i^{j,k}]^{-1}\Big) \tag{4.72}$$

za sve $j\in[1,n]$ *i* $r\in\mathbb{N}$.

Ako su $A_1, A_2, \dots, A_n$ konačni skupovi, onda je $\{(\xi_1^r, \xi_2^r, \dots, \xi_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan niz i postoji $s \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$(\xi_1^s, \xi_2^s, \dots, \xi_n^s) = (\xi_1^{s+1}, \xi_2^{s+1}, \dots, \xi_n^{s+1}),$$

i u tom slučaju n-torka $(\xi_1^s, \xi_2^s, \dots, \xi_n^s)$ je najveće krisp rešenje sistema (4.25) sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$. Osim toga, ako su $\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0$ fazi ekvivalencije, onda sve komponente tog najvećeg krisp rešenja jesu ekvivalencije.

Teorema 4.4.6. *Neka je $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0) \in L^{A_1\times A_1} \times L^{A_2\times A_2} \times \cdots \times L^{A_n\times A_n}$ proizvoljna n-torka fazi relacija, i neka je $\{(\xi_1^r, \xi_2^r, \dots, \xi_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ opadajući niz n-torki krisp relacija iz $2^{A_1\times A_1} \times 2^{A_2\times A_2} \times \cdots \times 2^{A_n\times A_n}$, definisan induktivno na sledeći način:*

$$(\xi_1^1, \xi_2^1, \dots, \xi_n^1) = ((\varrho_1^0)^c, (\varrho_2^0)^c \dots, (\varrho_n^0)^c), \tag{4.73}$$

$$\xi_j^{r+1} = \xi_j^r \cap \bigcap_{k\in P_j} \bigcap_{i\in I_{k,j}} \Big([R_i^{k,j} \setminus (\xi_k^r \circ R_i^{k,j})] \cap ([R_i^{k,j} \setminus ((\xi_k^r)^{-1}) \circ R_i^{k,j}])^{-1} \Big), \tag{4.74}$$

za sve $j \in [1,n]$ i $r \in \mathbb{N}$.

Ako su $A_1, A_2, \dots, A_n$ konačni skupovi, onda je $\{(\xi_1^r, \xi_2^r, \dots, \xi_n^r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ konačan niz i postoji $s \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$(\xi_1^s, \xi_2^s, \dots, \xi_n^s) = (\xi_1^{s+1}, \xi_2^{s+1}, \dots, \xi_n^{s+1}),$$

i u tom slučaju n-torka $(\xi_1^s, \xi_2^s, \dots, \xi_n^s)$ je najveće krisp rešenje sistema (4.26) sadržano u $(\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0)$. Osim toga, ako su $\varrho_1^0, \varrho_2^0, \dots, \varrho_n^0$ fazi ekvivalencije, onda sve komponente tog najvećeg krisp rešenja jesu ekvivalencije.

4.5. Količnički više-modalitetni fazi relacijski sistemi

Neka je dat više-modalitetni fazi relacijski sistem $\mathcal{M} = (A_1, A_2, \dots, A_n, \mathcal{R})$, gde je

$$\mathcal{R} = \{R_i^{j,k} \,|\, (j,k) \in J, i \in I_{j,k}\},$$

i neka je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \in L^{A_1\times A_1} \times \cdots \times L^{A_n\times A_n}$ n-torka fazi kvazi-uređenja. Kao i ranije, za svako $j \in [1,n]$ sa $\tilde{\varrho}_j$ označavamo prirodnu ekvivalenciju od ϱ_j, a sa $A/\tilde{\varrho}_j$ odgovarajući količnički skup.

Za proizvoljne $(j,k) \in J$ i $i \in I_{k,j}$ definišemo fazi relaciju $\tilde{R}_i^{j,k} \in L^{(A/\tilde{\varrho}_j)\times(A/\tilde{\varrho}_k)}$ sa

$$\tilde{R}_i^{j,k}((\tilde{\varrho}_j)_{a_j}, (\tilde{\varrho}_k)_{a_k}) = (\varrho_j \circ R_i^{j,k} \circ \varrho_k)(a_j, a_k), \tag{4.75}$$

za sve $a_j \in A_j$ i $a_k \in A_k$.

Najpre dokazujemo sledeće:

Lema 4.5.1. *Za proizvoljne $(j,k) \in J$ i $i \in I_{k,j}$, fazi relacija $\tilde{R}_i^{j,k}$ je dobro definisana.*

Dokaz: Primetimo najpre da je (4.75) ekvivalentno sa

$$\tilde{R}_i^{j,k}((\tilde{\varrho}_j)_{a_j},(\tilde{\varrho}_k)_{a_k}) = (a_j\varrho_j) \circ R_i^{j,k} \circ (\varrho_k a_k), \tag{4.76}$$

za sve $a_j \in A_j$ i $a_k \in A_k$, gde $a_j\varrho_j$ označava ϱ_j-afterset od a_j, dok $\varrho_k a_k$ označava ϱ_k-foreset od a_k. Pretpostavimo sada da su $a_j, b_j \in A_j$ i $a_k, b_k \in A_k$ elementi takvi da je $(\tilde{\varrho}_j)_{a_j} = (\tilde{\varrho}_j)_{b_j}$ i $(\tilde{\varrho}_k)_{a_k} = (\tilde{\varrho}_k)_{b_k}$. Tada na osnovu Teoreme (1.3.1.) sledi da je $a_j\varrho_j = b_j\varrho_j$ i $\varrho_k a_k = \varrho_k b_k$, odakle, na osnovu (4.76), dobijamo da je

$$\tilde{R}_i^{j,k}((\tilde{\varrho}_j)_{a_j},(\tilde{\varrho}_k)_{a_k}) = (a_j\varrho_j) \circ R_i^{j,k} \circ (\varrho_k a_k) = (b_j\varrho_j) \circ R_i^{j,k} \circ (\varrho_k b_k) = \tilde{R}_i^{j,k}((\tilde{\varrho}_j)_{b_j},(\tilde{\varrho}_k)_{b_k}),$$

što znači da je $\tilde{R}_i^{j,k}$ je dobro definisana fazi relacija. □

Dakle, $\tilde{\mathcal{M}} = (A_1/\tilde{\varrho}_1, A_2/\tilde{\varrho}_2, \dots, A_n/\tilde{\varrho}_n, \tilde{\mathcal{R}})$, gde je

$$\tilde{\mathcal{R}} = \{\tilde{R}_i^{j,k} \,|\, (j,k) \in J, i \in I_{j,k}\},$$

je više-modalitetni fazi relacijski sistem koji nazivamo *količnički* ili *faktor više-modalitetni fazi relacijski sistem od $\mathcal{M}$* u odnosu na n-torku fazi kvazi-uređenja $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$.

Primetimo da se suštinski ništa neće promeniti ako se količnički skupovi $A_1/\tilde{\varrho}_1, A_2/\tilde{\varrho}_2, \dots, A_n/\tilde{\varrho}_n$ zamene odgovarajućim skupovima aftersetova ili foresetova, a definicija (4.75) ostane da važi, jer u skladu sa Teoremom (1.3.1.) dobijamo da svi tako dobijeni više-modalitetni fazi relacijski sistemi jesu izomorfni.

Teorema 4.5.2. *Neka je $\mathcal{M} = (A_1, A_2, \dots, A_n, \mathcal{R})$ više-modalitetni krisp relacijski sistem i neka je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \in 2^{A_1 \times A_1} \times 2^{A_2 \times A_2} \times \dots \times 2^{A_n \times A_n}$ n-torka kvazi-uređenja. Tada su za proizvoljne $(j,k) \in J$, $i \in I_{j,k}$, $\eta_j \in A/\tilde{\varrho}_j$ i $\eta_k \in A/\tilde{\varrho}_k$ sledeća dva uslova ekvivalentna:*

(i) $(\eta_j, \eta_k) \in \tilde{R}_i^{j,k}$;

(ii) $(\forall x \in \eta_j)(\forall y \in \eta_k)\ (x,y) \in \varrho_j \circ R_i^{j,k} \circ \varrho_k$.

Ako su, osim toga, $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ relacije ekvivalencije, tada su prethodna dva uslova ekvivalentna sa

(iii) $(\exists x \in \eta_j)(\exists y \in \eta_k)\ (x,y) \in R_i^{j,k}$.

Dokaz: Dokaz ove teoreme sledi neposredno iz dokaza Teoreme 3.3.1. □

Teorema 4.5.3. *Neka je $\mathcal{M} = (A_1, A_2, \dots, A_n, \mathcal{R})$ više-modalitetni fazi relacijski sistem i neka je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \in L^{A_1 \times A_1} \times \dots \times L^{A_n \times A_n}$ n-torka fazi kvazi-uređenja. Tada važi sledeće:*

(a) *$(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ je rešenje sistema (4.5) ako i samo ako je*

$$\tilde{R}_i^{j,k}((\tilde{\varrho}_j)_{a_j},(\tilde{\varrho}_k)_{a_k}) = \bigwedge_{x_j\in A_j}\Big(\varrho_j(x_j,a_j)\to\Big(\bigvee_{x_k\in A_k} R_i^{j,k}(x_j,x_k)\otimes\varrho_k(x_k,a_k)\Big)\Big), \tag{4.77}$$

za proizvoljne $(j,k)\in J$, $i\in I_{j,k}$, $a_j\in A_j$ *i* $a_k\in A_k$.
(b) $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n)$ *je rešenje sistema (4.6) ako i samo ako je*

$$\tilde{R}_i^{j,k}((\tilde{\varrho}_j)_{a_j},(\tilde{\varrho}_k)_{a_k}) = \bigwedge_{x_k\in A_k}\Big(\varrho_k(a_k,x_k)\to\Big(\bigvee_{x_j\in A_j} \varrho_j(a_j,x_j)\otimes R_i^{j,k}(x_j,x_k)\Big)\Big), \tag{4.78}$$

za proizvoljne $(j,k)\in J$, $i\in I_{j,k}$, $a_j\in A_j$ *i* $a_k\in A_k$.
(c) $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n)$ *je rešenje sistema (4.4) ako i samo ako je*

$$\begin{aligned}\tilde{R}_i^{j,k}((\tilde{\varrho}_j)_{a_j},(\tilde{\varrho}_k)_{a_k}) &= \bigwedge_{x_j\in A_j}\Big(\varrho_j(x_j,a_j)\to\Big(\bigvee_{x_k\in A_k} R_i^{j,k}(x_j,x_k)\otimes\varrho_k(x_k,a_k)\Big)\Big) \\ &= \bigwedge_{x_k\in A_k}\Big(\varrho_k(a_k,x_k)\to\Big(\bigvee_{x_j\in A_j} \varrho_j(a_j,x_j)\otimes R_i^{j,k}(x_j,x_k)\Big)\Big),\end{aligned} \tag{4.79}$$

za proizvoljne $(j,k)\in J$, $i\in I_{j,k}$, $a_j\in A_j$ *i* $a_k\in A_k$.

Dokaz: Dokazaćemo samo tvrđenje (a). Tvrđenje (b) je dualno tvrđenju (a), dok tvrđenje (c) predstavlja konjunkciju tvrđenja (a) i (b).

(a) Primetimo prvo da za proizvoljne $(j,k)\in J$, $i\in I_{j,k}$, $a_j\in A_j$ i $a_k\in A_k$ važi

$$\begin{aligned}\Big(\varrho_j\backslash(R_i^{j,k}\circ\varrho_k)\Big)(a_j,a_k) &= \bigwedge_{x_j\in A_j}\Big(\varrho_j(x_j,a_j)\to(R_i^{j,k}\circ\varrho_k))(a_j,a_k)\Big) \\ &= \bigwedge_{x_j\in A_j}\Big(\varrho_j(x_j,a_j)\to\Big(\bigvee_{x_k\in A_k} R_i^{j,k}(x_j,x_k)\otimes\varrho_k(x_k,a_k)\Big)\Big),\end{aligned}$$

pa na osnovu toga i (4.75) dobijamo da je (4.77) ekvivalentno sa

$$\varrho_j\circ R_i^{j,k}\circ\varrho_k = \varrho_j\backslash(R_i^{j,k}\circ\varrho_k), \tag{4.80}$$

za proizvoljne $(j,k)\in J$ i $i\in I_{j,k}$. Međutim, na osnovu Teoreme 3.3.2., (4.80) je ekvivalentno sa

$$\varrho_j\circ R_i^{j,k}\leqslant R_i^{j,k}\circ\varrho_k, \tag{4.81}$$

za proizvoljne $(j,k)\in J$ i $i\in I_{j,k}$. Time smo dokazali da (4.77) važi ako i samo ako $(\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_n)$ jeste rešenje sistema (4.5). □

U slučaju kada se radi sa krisp relacijskim sistemima prethodna teorema se pretvara u sledeću teoremu:

Teorema 4.5.4. *Neka je $\mathcal{M} = (A_1, A_2, \dots, A_n, \mathcal{R})$ više-modalitetni krisp relacijski sistem i $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \in 2^{A_1\times A_1} \times 2^{A_2\times A_2} \times \cdots \times 2^{A_n\times A_n}$ je n-torka kvazi-uređenja. Tada važi:*

(a) *$(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ je rešenje sistema (4.5) ako i samo ako je*

$$((\tilde{\varrho}_j)_{a_j}, (\tilde{\varrho}_k)_{a_k}) \in \tilde{R}_i^{j,k} \quad\Leftrightarrow\quad (\forall x_j \in \varrho_j a_j)(\exists x_k \in \varrho_k a_k)\ (x_j, x_k) \in R_i^{j,k}, \tag{4.82}$$

za proizvoljne $(j,k) \in J$, $i \in I_{j,k}$, $a_j \in A_j$ i $a_k \in A_k$.

(b) *$(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ je rešenje sistema (4.6) ako i samo ako je*

$$((\tilde{\varrho}_j)_{a_j}, (\tilde{\varrho}_k)_{a_k}) \in \tilde{R}_i^{j,k} \quad\Leftrightarrow\quad (\forall x_k \in a_k \varrho_k)(\exists x_j \in a_j \varrho_j)\ (x_j, x_k) \in R_i^{j,k}, \tag{4.83}$$

za proizvoljne $(j,k) \in J$, $i \in I_{j,k}$, $a_j \in A_j$ i $a_k \in A_k$.

(c) *$(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ je rešenje sistema (4.4) ako i samo ako je*

$$\begin{aligned} ((\tilde{\varrho}_j)_{a_j}, (\tilde{\varrho}_k)_{a_k}) \in \tilde{R}_i^{j,k} \quad&\Leftrightarrow\quad (\forall x_j \in \varrho_j a_j)(\exists x_k \in \varrho_k a_k)\ (x_j, x_k) \in R_i^{j,k}, \\ &\Leftrightarrow\quad (\forall x_k \in a_k \varrho_k)(\exists x_j \in a_j \varrho_j)\ (x_j, x_k) \in R_i^{j,k}, \end{aligned} \tag{4.84}$$

za proizvoljne $(j,k) \in J$, $i \in I_{j,k}$, $a_j \in A_j$ i $a_k \in A_k$.

Dokaz: I ovde ćemo dokazati samo tvrđenje (a). Tvrđenje (b) se dokazuje dualno, dok je (c) konjunkcija (a) i (b).

(a) Na osnovu prethodne teoreme, $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ je rešenje sistema (4.5) ako i samo ako važi (4.77), i kako se u ovom slučaju radi o fazi relacijama koje uzimaju vrednosti u dvo-elementnoj Bulovoj algebri, to se (4.77) transformiše u (4.82), na sledeći način:

$$\begin{aligned} &((\tilde{\varrho}_j)_{a_j}, (\tilde{\varrho}_k)_{a_k}) \in \tilde{R}_i^{j,k} \;\Leftrightarrow\; \tilde{R}_i^{j,k}((\tilde{\varrho}_j)_{a_j}, (\tilde{\varrho}_k)_{a_k}) = 1 \\ &\quad\Leftrightarrow\; \Bigg(\bigwedge_{x_j \in A_j} \Bigg(\varrho_j(x_j, a_j) \to \Bigg(\bigvee_{x_k \in A_k} R_i^{j,k}(x_j, x_k) \otimes \varrho_k(x_k, a_k) \Bigg)\Bigg)\Bigg) = 1 \\ &\quad\Leftrightarrow\; (\forall x_j \in A_j)\Bigg(\varrho_j(x_j, a_j) \to \Bigg(\bigvee_{x_k \in A_k} R_i^{j,k}(x_j, x_k) \otimes \varrho_k(x_k, a_k) \Bigg) = 1 \Bigg) \\ &\quad\Leftrightarrow\; (\forall x_j \in A_j)\Bigg(\Big(\varrho_j(x_j, a_j) = 1\Big) \;\Rightarrow\; \Bigg(\bigvee_{x_k \in A_k} R_i^{j,k}(x_j, x_k) \otimes \varrho_k(x_k, a_k) \Bigg) = 1 \Bigg) \\ &\quad\Leftrightarrow\; (\forall x_j \in A_j)\Big(\Big(\varrho_j(x_j, a_j) = 1\Big) \Rightarrow \Big((\exists x_k \in A_k)\Big(R_i^{j,k}(x_j, x_k) = 1 \ \&\ \varrho_k(x_k, a_k) = 1 \Big)\Big)\Big) \\ &\quad\Leftrightarrow\; (\forall x_j \in A_j)\Big(x_j \in \varrho_j a_j \Rightarrow (\exists x_k \in A_k)(x_k \in \varrho_k a_k \ \&\ (x_j, x_k) \in R_i^{j,k})\Big) \\ &\quad\Leftrightarrow\; (\forall x_j \in \varrho_j a_j)(\exists x_k \in \varrho_k a_k)\ (x_j, x_k) \in R_i^{j,k} \end{aligned}$$

Time smo dokazali tačnost tvrđenja (a). □

Sledeća teorema bavi se slučajem kada se radi sa više-modalitetnim krisp relacijskim sistemima i n-torkama ekvivalencija.

Teorema 4.5.5. *Neka je* $\mathcal{M} = (A_1, A_2, \dots, A_n, \mathcal{R})$ *više-modalitetni krisp relacijski sistem i* $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \in 2^{A_1 \times A_1} \times 2^{A_2 \times A_2} \times \dots \times 2^{A_n \times A_n}$ *je n-torka ekvivalencija. Tada važi:*

(a) $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ *je rešenje sistema (4.5) (odnosno (4.25)) ako i samo ako je*

$$(\eta_j, \eta_k) \in \tilde{R}_i^{j,k} \iff (\forall x_j \in \eta_j)(\exists x_k \in \eta_k)\ (x_j, x_k) \in R_i^{j,k}, \tag{4.85}$$

za proizvoljne $(j,k) \in J$, $i \in I_{j,k}$, $\eta_j \in A_j/\varrho_j$ *i* $\eta_k \in A_k/\varrho_k$.

(b) $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ *je rešenje sistema (4.6) (odnosno (4.26)) ako i samo ako je*

$$(\eta_j, \eta_k) \in \tilde{R}_i^{j,k} \iff (\forall x_k \in \eta_k)(\exists x_j \in \eta_j)\ (x_j, x_k) \in R_i^{j,k}, \tag{4.86}$$

za proizvoljne $(j,k) \in J$, $i \in I_{j,k}$, $\eta_j \in A_j/\varrho_j$ *i* $\eta_k \in A_k/\varrho_k$.

(c) $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ *je rešenje sistema (4.4) (odnosno (4.24)) ako i samo ako je*

$$\begin{aligned}(\eta_j, \eta_k) \in \tilde{R}_i^{j,k} &\iff (\forall x_j \in \eta_j)(\exists x_k \in \eta_k)\ (x_j, x_k) \in R_i^{j,k}, \\ &\iff (\forall x_k \in \eta_k)(\exists x_j \in \eta_j)\ (x_j, x_k) \in R_i^{j,k},\end{aligned} \tag{4.87}$$

za proizvoljne $(j,k) \in J$, $i \in I_{j,k}$, $\eta_j \in A_j/\varrho_j$ *i* $\eta_k \in A_k/\varrho_k$.

Dokaz: Dokaz ove teoreme sledi neposredno iz dokaza Teoreme 4.5.4. □

Teorema 4.5.6. *Neka je* $\mathcal{M} = (A_1, A_2, \dots, A_n, \mathcal{R})$ *više-modalitetni fazi relacijski sistem i neka je* $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \in L^{A_1 \times A_1} \times \dots \times L^{A_n \times A_n}$ *n-torka fazi kvazi-uređenja. Tada je* $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ *rešenje sistema (4.45) ako i samo ako je*

$$\tilde{R}_i^{j,k}((\tilde{\varrho}_j)_{a_j}, (\tilde{\varrho}_k)_{a_k}) = R_i^{j,k}(a_j, a_k), \tag{4.88}$$

za proizvoljne $(j,k) \in J$, $i \in I_{j,k}$, $a_j \in A_j$ *i* $a_k \in A_k$.

Dokaz: Neka je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ rešenje sistema (4.45). Tada prema (4.75), za proizvoljne $(j,k) \in J$, $i \in I_{j,k}$, $a_j \in A_j$ i $a_k \in A_k$ imamo da je

$$\tilde{R}_i^{j,k}((\tilde{\varrho}_j)_{a_j}, (\tilde{\varrho}_k)_{a_k}) = (\varrho_j \circ R_i^{j,k} \circ \varrho_k)(a_j, a_k) = (R_i^{j,k} \circ \varrho_k)(a_j, a_k) = R_i^{j,k}(a_j, a_k).$$

Obratno, neka važi (4.88). Tada opet prema (4.75), za proizvoljne $(j,k) \in J$ i $i \in I_{j,k}$ imamo da je

$$(\varrho_j \circ R_i^{j,k} \circ \varrho_k)(a_j, a_k) = R_i^{j,k}(a_j, a_k),$$

za sve $a_j \in A_j$ i $a_k \in A_k$, što znači da je $\varrho_j \circ R_i^{j,k} \circ \varrho_k = R_i^{j,k}$. Odavde, zbog idempotentnosti fazi kvazi-uređenja ϱ_j i ϱ_k, na jednostavan način dobijamo da je

$$\varrho_j \circ R_i^{j,k} = R_i^{j,k} \quad \text{i} \quad R_i^{j,k} \circ \varrho_k = R_i^{j,k}.$$

Prema tome, dokazali smo da je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ rešenje sistema (4.45). □

Teorema 4.5.7. *Neka je $\mathcal{M} = (A_1, A_2, \dots, A_n, \mathcal{R})$ više-modalitetni krisp relacijski sistem i neka je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \in 2^{A_1\times A_1} \times 2^{A_2\times A_2} \times \dots \times 2^{A_n\times A_n}$ n-torka kvazi-uređenja. Tada je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ rešenje sistema (4.45) ako i samo ako je*

$$(\eta_j, \eta_k) \in \tilde{R}_i^{j,k} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x_j \in \eta_j)(\forall x_k \in \eta_k)\ (x_j, x_k) \in R_i^{j,k}, \tag{4.89}$$

za proizvoljne $(j,k) \in J$, $i \in I_{j,k}$, $\eta_j \in A_j/\tilde{\varrho}_j$ i $\eta_k \in A_k/\tilde{\varrho}_k$.

Dokaz: Za proizvoljne $(j,k) \in J$, $i \in I_{j,k}$, $\eta_j \in A_j/\tilde{\varrho}_j$ i $\eta_k \in A_k/\tilde{\varrho}_k$, na osnovu Teoreme 4.5.6. dobijamo da je $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ rešenje sistema (4.45) ako i samo ako za proizvoljne $x_j \in \eta_j$ i $x_k \in \eta_k$ važi

$$\tilde{R}_i^{j,k}(\eta_j, \eta_k) = R_i^{j,k}(x_j, x_k),$$

što se, jasno, može formulisati i kao (4.89). □

4.6. Računski primeri

Primer 4.6.1. Uzmimo da je A skup zaposlenih u nekoj softverskoj kompaniji, B je skup svih poslova koje ova kompanija obavlja za druge kompanije, i neka je sa C označen skup programskih paketa za čije su korišćenje zaposleni u kompaniji osposobljeni. Neka je skup drugih kompanija označen sa I i za svako $i \in I$ neka su poslovi za kompaniju i raspodeljeni radnicima pomoću relacije $R_i^{1,2} \subseteq A \times B$, odnosno, posao b za kompaniju i je dodeljen radniku a ako i samo ako je $(a,b) \in R_i^{1,2}$. Takođe, pretpostavimo da su radnici i programski paketi vezani relacijom $R_1^{1,3} \subseteq A \times C$, i to tako da je radnik a osposobljen za korišćenje programskog paketa c ako i samo ako je $(a,c) \in R_1^{1,3}$.

Dalje, pretpostavimo da u svrhu povećanja efikasnosti i kvaliteta posla, kompanija namerava da grupiše radnike u timove, a poslove i programske pakete u grupe poslova i programskih paketa, tako da su ovi timovi i grupe poslova i programskih paketa budu što je moguće veći i da dodela grupa poslova i programskih paketa timovima radnika bude realizovana tako da budu ispunjeni sledeći uslovi:

1. za svaku kompaniju, grupa poslova γ je dodeljena timu θ ako i samo ako
   - za svakog zaposlenog iz tima θ postoji posao iz γ koji je on već obavljao za tu kompaniju, i
   - za svaki posao iz γ postoji zaposleni iz tima θ koji je već obavljao taj posao za datu kompaniju;

2. grupa programskih paketa π će biti dodeljena timu θ ako i samo ako
   - za svakog zaposlenog iz tima θ postoji programski paket iz π za čije je korišćenje on osposobljen, i
   - za svaki programski paket iz π postoji zaposleni iz tima θ koji je osposobljen za taj programski paket.

Očigledno, ovakvo grupisanje zaposlenih, poslova i programskih paketa se može izvršiti korišćenjem najveće trojke regularnih ekvivalencija u odnosu na familiju relacija $\{R_i^{1,2}\}_{i\in I} \cup \{R_1^{1,3}\}$.

Konkretno, uzmimo da je $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$ i $I = \{1, 2\}$, i neka su relacije $R_1^{1,2}$, $R_2^{1,2}$ i $R_1^{1,3}$ predstavljene sledećim matricama:

$$R_1^{1,2} = \begin{bmatrix} 0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \qquad R_2^{1,2} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \qquad R_1^{1,3} = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1 \\ 1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

Primenjujući algoritam za više-modalitetne fazi mreže izračunavamo najveću trojku $(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ regularnih ekvivalencija u odnosu na $R_1^{1,2}$, $R_2^{1,2}$ i $R_1^{1,3}$, pri čemu su ϱ_1 , ϱ_2 i ϱ_3 predstavljene sledećim matricama:

$$\varrho_1 = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \qquad \varrho_2 = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \qquad \varrho_3 = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&1&0&1&1 \end{bmatrix}$$

gde isprekidane linije pokazuju klase ekvivalencije. Dakle, oformljeni timovi su $\{a_1, a_2\}$, $\{a_3\}$, $\{a_4\}$, $\{a_5\}$ i $\{a_6\}$, a grupe poslova su $\{b_1, b_2\}$, $\{b_3, b_4\}$, $\{b_5\}$ i $\{b_6\}$, dok su veštine podeljene u sledeće grupe $\{c_1, c_2, c_3\}$, $\{c_4\}$ i $\{c_5, c_6\}$.

Rešavajući postavljeni problem, razmatramo sledeći više-modalitetni sistem fazi relacijskih jednačina:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 \circ R_1^{1,2} = R_1^{1,2} \circ \alpha_2, & \alpha_1 \circ R_2^{1,2} = R_2^{1,2} \circ \alpha_2, & \alpha_1 \circ R_1^{1,3} = R_1^{1,3} \circ \alpha_3, \\ \alpha_1^{-1} \circ R_1^{1,2} = R_1^{1,2} \circ \alpha_2^{-1}, & \alpha_1^{-1} \circ R_2^{1,2} = R_2^{1,2} \circ \alpha_2^{-1}, & \alpha_1^{-1} \circ R_1^{1,3} = R_1^{1,3} \circ \alpha_3^{-1}. \end{array}$$

U prvom koraku algoritma se uzima da su ϱ_1^0, ϱ_2^0 i ϱ_3^0 pune relacije. Nakon toga se rešenje dobija u 4 iteracije, od kojih je poslednja konačno rešenje, a međurezultati su sledeći:

NAKON 1. ITERACIJE:

$$\varrho_1^1 = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \qquad \varrho_2^1 = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0\\ 0&0&1&1&1&0\\ 0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \qquad \varrho_3^1 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

NAKON 2. ITERACIJE:

$$\varrho_1^2 = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \qquad \varrho_2^2 = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \qquad \varrho_3^2 = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix}$$

NAKON 3. i 4. ITERACIJE:

$$\varrho_1^3 = \varrho_1^4 = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad \varrho_2^3 = \varrho_2^4 = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad \varrho_3^3 = \varrho_3^4 = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix}$$

Dakle, najveće rešenje gornjeg sistema je $(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$, gde je $\varrho_1 = \varrho_1^3 = \varrho_1^4$, $\varrho_2 = \varrho_2^3 = \varrho_2^4$ i $\varrho_3 = \varrho_3^3 = \varrho_3^4$.

Sada se relacije $R_1^{1,2}$, $R_2^{1,2}$, $R_1^{1,3}$, $\varrho_1 \circ R_1^{1,2} \circ \varrho_2$, $\varrho_1 \circ R_2^{1,2} \circ \varrho_2$ i $\varrho_1 \circ R_1^{1,3} \circ \varrho_3$ mogu zapisati kao

$$R_1^{1,2} = \begin{bmatrix} 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \qquad R_2^{1,2} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \qquad R_1^{1,3} = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 1&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$\varrho_1 \circ R_1^{1,2} \circ \varrho_2 = \begin{bmatrix} 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \qquad \varrho_1 \circ R_2^{1,2} \circ \varrho_2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$
\varrho_1 \circ R_1^{1,3} \circ \varrho_3 = \left[\begin{array}{ccc:c:cc}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hdashline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hdashline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

gde isprekidane linije pokazuju timove radnika i grupe poslova, dok su redukovane relacije $\bar{R}_1^{1,2}$, $\bar{R}_2^{1,2}$ i $\bar{R}_1^{1,3}$, koje predstavljaju dodelu grupa poslova i programskih paketa timovima date sa

$$
\bar{R}_1^{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad
\bar{R}_2^{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad
\bar{R}_1^{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

4.7. Pristupi izučavanju više-modalitetnih mreža

Kao i kod dvo-modalitetnih mreža, i kod više-modalitetnih mreža se mogu razlikovati tri pristupa njihovom izučavanju:

(a) zasebna analiza svakog od modaliteta i upoređivanje rezultata;
(b) svođenje više-modalitetne mreže na jedno-modalitetne mreže;
(c) pravi više-modalitetni pristup.

Sve ono što je u prethodnoj glavi rečeno za pristupe izučavanju dvo-modalitetnih mreža može se preneti i na pristupe izučavanju više-modalitetnih mreža. Detaljna analiza prednosti i mana ovih pristupa izvršena je i u radu [125]. Ovde ćemo dati još neke dodatne napomene.

Neka je $\mathcal{M} = (A_1, \dots, A_n, \mathcal{R})$ više-modalitetni fazi relacijski sistem, gde je

$$
\mathcal{R} = \{R_i^{j,k} \,|\, (j,k) \in J, i \in I_{j,k}\},
$$

koji ćemo ovde interpretirati kao više-modalitetnu fazi mrežu. Za proizvoljno $j \in [1,n]$, pod *j-tom projekcijom* mreže $\mathcal{M}$ podrazumevamo jedno-modalitetnu fazi mrežu $\mathcal{O}_j = (A_j, \mathcal{R}_j)$, gde je $\mathcal{R}_j$ familija koja predstavlja uniju sledećih familija fazi relacija na A_j:

- $\{R_i^{j,j} \,|\, i \in I_{j,j}\}$, ako je $(j,j) \in J$;
- $\{R_i^{j,k} \circ (R_i^{j,k})^{-1} \,|\, k \in \Lambda_j \setminus \{j\}, i \in I_{j,k}\}$, ako je $\Lambda_j \neq \emptyset$;
- $\{(R_i^{k,j})^{-1} \circ R_i^{k,j} \,|\, k \in P_j \setminus \{j\}, i \in I_{k,j}\}$, ako je $P_j \neq \emptyset$.

Jasno je da ovakav koncept projekcije uopštava koncept projekcije dvo-modalitetnih mreža, razmatran u poslednjem odeljku prethodne glave. Takođe je jasno da problem enormnog rasta broja veza prilikom formiranja projekcija u ovom slučaju postaje još izraženiji nego u slučaju dvo-modalitetnih mreža.

Drugi način svođenja dvo-modalitetnih mreža na jedno-modalitetne, formiranjem familije relacija (matrica) na $A_1 \cup A_2$ pomoću formule (3.47), neće uvek imati smisla ako se prevede na više-modalitetni slučaj. Na primer, ako imamo više-modalitetnu mrežu $\mathcal{M} = (A_1, A_2, A_3, \{R^{1,2}, R^{1,3}\})$, onda bi se ona mogla svesti na jedno-modalitetnu mrežu $\mathcal{O} = (A_1 \cup A_2 \cup A_3, R)$, gde je R relacija zadata sa

$$R = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & R^{1,2} & R^{1,3} \\ (R^{1,2})^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (R^{1,3})^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{4.90}$$

Jasno, ukoliko bi bila uključena i relacija $R^{2,3}$, onda bi i nju i inverznu matricu $(R^{1,3})^{-1}$ mogli uneti na odgovarajuća mesta u (4.90). Tako nešto je rađeno, na primer, u radu [83]. Osim toga, ako bi bila uključena i neka od relacija $R^{1,1}$, $R^{2,2}$ ili $R^{3,3}$ (na A_1, A_2 i A_3), tada bi i ona mogla biti uneta na odgovarajuće mesto na dijagonali. Međutim, nastaće problem ako imamo uključenu, na primer, i relaciju $R^{2,1}$ između A_2 i A_1, ili ako, na primer, između A_1 i A_2 postoji jedna relacija, a između A_1 i A_3 više njih. U takvim slučajevima ne možemo primeniti analogiju sa dvo-modalitetnim slučajem. Konačno, čak i u slučajevima kada se takva analogija može napraviti, ostaje problem enormnog rasta dimenzije matrice, koji je u više-modalitenom slučaju još izraženiji.

Dodatak A
Primeri koda programa

1.1. Klasa za rad sa matricama

```

#pragma once

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <string.h>
#include <time.h>

#ifndef TINY
#  define TINY 1.0e-18
#endif

#ifndef PI
#  define PI 3.14159265358979323846264 3
#endif

#ifndef __CONSTANT_MATRICES__
# define __CONSTANT_MATRICES__
# define IDENTITY -1
# define ALLONES -2
# define UPPERTRIANGLE -4
# define LOWERTRIANGLE -8
# define ERROR -1000000
#endif

#ifndef EPS10
#define EPS10 1e-10
#endif

static double RANGE = 1.0e-10;

#ifndef __STRUCTURE_TYPE__
#  define __STRUCTURE_TYPE__
```

```
#  define BOOL 1
#  define LUKASIEWICZ 2
#  define GOODEL 3
#  define GOGUEN 4
#endif

class CMatrix
{
private:
  int m_iN, m_iM;
  double *m_aMat;
  int *m_aPerm;
  int m_bEigenvaluesOK;
  int *m_aEVPerm;
  int _structureType;
public:
  // constructors / destructor
  CMatrix(void);
  ~CMatrix(void);
  CMatrix(int n);
  CMatrix(int n, int m);
  CMatrix(const CMatrix & mat);
protected:
  int alloc(int n, int m);
  int inbounds(int i, int j);
public:
  void free(void);
  void error(char * msg);
  // Overloaded operators
  CMatrix& operator+(const CMatrix& b);
  void operator+=(const CMatrix& b);
  CMatrix& operator-(const CMatrix& b);
  void operator-=(const CMatrix& b);
  CMatrix& operator*(const CMatrix& b);
  double & operator()(int i, int j);
  void operator*=(const CMatrix& b);
  void operator*=(double alpha);
  CMatrix& operator=(const CMatrix& b);

  CMatrix& composition(const CMatrix& b);

  CMatrix& leftResidual(const CMatrix& b);
  CMatrix& rightResidual(const CMatrix& b);

  int n(void);
  int m(void);

  void init();
  void copyFrom(const CMatrix& b);
  void print(FILE * out = NULL);
  void transpose(void);
  void printint(FILE * out = NULL);
  int LUfact(void);
  int loadFromFile(FILE * in, int rectangular = 0);
```

```
  int loadElementsFromFile(FILE * in);
  void makeUniversal(int);

  int LUsubst(double * b);
  CMatrix & inverse(void);
  int copyTo(CMatrix& b);
  int printMathematicaListFormat(FILE * f = NULL);

  double *m_aEigenValues;
  double *m_aEigenVectors;
  int eigens(void);
public:
  double getEigenvalue(int i);
private:
  void rotationA(double s, double tau, int i, int j, int k,
                 int l, double * A, int N);
  void rotationV(double s, double tau, int i, int j, int k,
                 int l);
  void permute(double * A, int N);
  int jacobi(void);



public:
  int logicalAnd(int a, int b);
  double logicalAnd(double a, double b);
  int logicalOr(int a, int b);
  double logicalOr(double a, double b);
  CMatrix& infimum(const CMatrix& b);
  bool equalsTo(CMatrix *b);
  double mul(double a, double b);
  double residuum(double a, double b);
  double max(double a, double b);
  int max(int a, int b);
  double min(double a, double b);
  int min(int a, int b);
  friend CMatrix rightResidual(CMatrix *a, CMatrix *b);
  friend CMatrix leftResidual(CMatrix *a, CMatrix *b);

  void setMatrixElemToZero();
};
```

1.2. Implementacija metoda klase za rad sa matricama

```
#ifdef _MSC_VER
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS
#endif

#include ".\matrix.h"

CMatrix::CMatrix(void) : m_aEigenValues(NULL)
{
  init();
```

```
}

CMatrix::~CMatrix(void){
  free();
}

void CMatrix::init(){
  m_aMat = NULL;
  m_iN = m_iM = 0;
  m_aPerm = NULL;
  m_aEigenValues = NULL;
  m_aEigenVectors = NULL;
  m_bEigenvaluesOK = 0;
  _structureType = BOOL;
}

CMatrix::CMatrix(int n){
  init();
  if(alloc(n, n)){
    //memset(m_aMat, 0, sizeof(double) * m_iN * m_iM);
  }
  else{
    error("Error in function alloc(). Cannot allocate memory!");
  }
}

CMatrix::CMatrix(const CMatrix & mat){
  init();
  if(alloc(mat.m_iN, mat.m_iM)){
    memcpy(m_aMat, mat.m_aMat, sizeof(double) * m_iN * m_iM);
    if(mat.m_aPerm != NULL){
      memcpy(m_aPerm, mat.m_aPerm, sizeof(double) * m_iN);
    }
  }
  else{
    error("Error in function alloc(). Cannot allocate memory!");
  }
}

int CMatrix::alloc(int n, int m){
  if(n <= 0) return 0;
  if(m_aMat != NULL) free();
  if(m <= 0) m = n;
  m_aMat = new double[n * m];
  if(m_aMat == NULL) return 0;
  m_iN = n;
  m_iM = m;
  return 1;
}

void CMatrix::free(void){
  if(m_aMat != NULL){
    delete[] m_aMat;
    m_aMat = NULL;
```

```
      m_iN = m_iM = 0;
    }
    if(m_aPerm != NULL){
      delete[] m_aPerm;
      m_aPerm = NULL;
    }
    if(m_aEigenValues != NULL){
      delete[] m_aEigenValues;
      m_aEigenValues = NULL;
    }
    if(m_aEigenVectors != NULL){
      delete[] m_aEigenVectors;
      m_aEigenVectors = NULL;
    }
}

void CMatrix::error(char * msg){
    fprintf(stderr, "Error:\t%s\n", msg);
}

CMatrix::CMatrix(int n, int m){
    int res, i, j;
    init();
    if(m > 0) res = alloc(n, m);
    else res = alloc(n, n);
    if(!res){
      error("Error in function alloc(). Cannot allocate memory!");
      return;
    }
    switch(m){
      case IDENTITY:
        for(i = 0; i < m_iN; i++) (*this)(i, i) = 1;
        break;
      case ALLONES:
        for(i = 0; i < m_iN; i++)
          for(j = 0; j < m_iM; j++)
            (*this)(i, j) = 1;
        break;
      case UPPERTRIANGLE:
        for(i = 0; i < m_iN; i++)
          for(j = i; j < m_iN; j++)
            (*this)(i, j) = 1;
        break;
      case LOWERTRIANGLE:
        for(i = 0; i < m_iN; i++)
          for(j = 0; j <= i; j++)
            (*this)(i, j) = 1;
    }
}

CMatrix& CMatrix::operator+(const CMatrix& b){
    CMatrix *c = NULL;
    static CMatrix refErr;
    int i, j;
```

```
  if((m_iN != b.m_iN) || (m_iM != b.m_iM)) return refErr;
  c = new CMatrix(m_iN, m_iM);
  if(!c) return refErr;
  for(i = 0; i < m_iN; i++)
    for(j = 0; j < m_iM; j++)
      (*c)(i, j) = (*this)(i, j) + b.m_aMat[i * m_iM + j];
  return *c;
}

void CMatrix::operator+=(const CMatrix& b){
  int i, j;
  if((m_iN != b.m_iN) || (m_iM != b.m_iM)) return;
  for(i = 0; i < m_iN; i++)
    for(j = 0; j < m_iM; j++)
      (*this)(i, j) += b.m_aMat[i * m_iM + j];
}
CMatrix& CMatrix::operator-(const CMatrix& b){
  CMatrix *c = NULL;
  static CMatrix refErr;
  int i, j;
  if((m_iN != b.m_iN) || (m_iM != b.m_iM)) return refErr;
  c = new CMatrix(m_iN, m_iM);
  if(!c) return refErr;
  for(i = 0; i < m_iN; i++)
    for(j = 0; j < m_iM; j++)
      (*c)(i, j) = (*this)(i, j) - b.m_aMat[i * m_iM + j];
  return *c;
}

void CMatrix::operator-=(const CMatrix& b){
  int i, j;
  if((m_iN != b.m_iN) || (m_iM != b.m_iM)) return;
  for(i = 0; i < m_iN; i++)
    for(j = 0; j < m_iM; j++)
      (*this)(i, j) -= b.m_aMat[i * m_iM + j];
}

CMatrix& CMatrix::operator*(const CMatrix& b){
  CMatrix *c = NULL;
  static CMatrix refErr;
  int i, j, k;
  if(m_iM != b.m_iN) return refErr;
  c = new CMatrix(m_iN, b.m_iM);
  if(!c) return refErr;
  for(i = 0; i < m_iN; i++)
    for(j = 0; j < b.m_iM; j++){
      (*c)(i, j) = 0;
      for(k = 0; k < m_iM; k++)
        (*c)(i, j) += (*this)(i, k) * b.m_aMat[k * m_iM + j];
    }
  return *c;
}

double & CMatrix::operator()(int i, int j){
```

```
  static double dErr = ERROR;
  if(!inbounds(i, j)){
    error("Operator (): index out of bounds!");
    return dErr;
  }
  return m_aMat[i * m_iM + j];
}

int CMatrix::inbounds(int i, int j){
  return (i >= 0) && (i < m_iN) && (j >= 0) && (j < m_iM);
}
int CMatrix::n(void){
  return m_iN;
}

int CMatrix::m(void){
  return m_iM;
}

void CMatrix::copyFrom(const CMatrix& b){
  int i, j;
  if((m_iN != b.m_iN) || (m_iM != b.m_iM)){
    alloc(b.m_iN, b.m_iM);
  }
  for(i = 0; i < m_iN; i++)
    for(j = 0; j < m_iM; j++)
      (*this)(i, j) = b.m_aMat[i * m_iM + j];
}

void CMatrix::operator*=(const CMatrix& b){
  if(m_iM != b.m_iN){
    error("Operation *= : Matrices must be of the adequate size!"
    );
    return;
  }
  int i, j, k;
  CMatrix c(m_iN, b.m_iM);
  for(i = 0; i < m_iN; i++)
    for(j = 0; j < b.m_iM; j++){
      c(i, j) = 0;
      for(k = 0; k < m_iM; k++)
        c(i, j) += (*this)(i, j) * b.m_aMat[k * m_iM + j];
    }
  copyFrom(c);
}

void CMatrix::print(FILE * out){
  int i, j;
  if(out == NULL) out = stdout;
  fprintf(out, "%d ", m_iN);
  if(m_iN != m_iM) fprintf(out, "%d ", m_iM);
  fprintf(out, "\n");
  for(i = 0; i < m_iN; i++){
    for(j = 0; j < m_iM; j++)
```

```
            fprintf(out, "%6.2lf", (*this)(i, j));
        fprintf(out, "\n");
    }
}

void CMatrix::transpose(void){
    int i, j;
    double p;
    if(m_iN == m_iM){
        for(i = 0; i < m_iN; i++)
            for(j = i + 1; j < m_iN; j++){
                p = (*this)(i, j);
                (*this)(i, j) = (*this)(j, i);
                (*this)(j, i) = p;
            }
    }
    else{
        CMatrix aux(m_iM, m_iN);
        CMatrix &mat = aux;
        for(i = 0; i < m_iN; i++)
            for(j = 0; j < m_iM; j++) mat(j, i) = (*this)(i, j);
        copyFrom(mat);
    }
}

void CMatrix::printint(FILE * out){
    int i, j;
    if(out == NULL) out = stdout;
    fprintf(out, "%d ", m_iN);
    if(m_iN != m_iM) fprintf(out, "%d ", m_iM);
    fprintf(out, "\n");
    for(i = 0; i < m_iN; i++){
        for(j = 0; j < m_iM; j++) fprintf(out, "%5d",(int)(*this)(i,
        j));
        fprintf(out, "\n");
    }
}

int CMatrix::LUfact(){
    if(m_iN != m_iM) return 0;

    int i, imax, j, k;
    double big, dum, sum, temp;
    double * vv;
    int n = m_iN;
    vv = new double[n];
    if(!vv){
        printf("LUfact: cannot allocate memory!\n");
        return 0;
    }

    if(m_aPerm != NULL){
        delete[] m_aPerm;
        m_aPerm = NULL;
```

```
  }
  m_aPerm = new int[n];
  for(i = 0; i < n; i++) m_aPerm[i] = i;

  for(i = 0; i < n; i++){
    big = 0.0;
    for(j = 0; j < n; j++){
      if((temp = fabs((*this)(i, j))) > big) big = temp;
    }
    if(big == 0.0){
      printf("LUfact: Error - singular matrix!\n");
      delete[] vv;
      return 0;
    }
    vv[i] = 1.0 / big;
  }
  for(j = 0; j < n; j++){
    for(i = 0; i < j; i++){
      sum = (*this)(i, j); //a[i][j];
      for(k = 0; k < i; k++) sum -= (*this)(i, k) * (*this)(k, j); //a[i][k] * a[k][j];
      (*this)(i, j) = sum; //a[i][j] = sum;
    }
    big = 0.0;
    for(i = j; i < n; i++){
      sum = (*this)(i, j); //a[i][j];
      for(k = 0; k < j; k++) sum -= (*this)(i, k) * (*this)(k, j); //a[i][k] * a[k][j];
      (*this)(i, j) = sum;//a[i][j] = sum;
      if((dum = vv[i] * fabs(sum)) >= big){
        big = dum;
        imax = i;
      }
    }
    if(j != imax){
      for(k = 0; k < n; k++){
        dum = (*this)(imax, k);//a[imax][k];
        (*this)(imax, k) = (*this)(j, k); //a[imax][k] = a[j][k];
        (*this)(j, k) = dum;//a[j][k] = dum;
      }
      //*d = - (*d);
      vv[imax] = vv[j];
    }
    m_aPerm[j] = imax;//indx[j] = imax;
    //if(a[j][j] == 0.0) a[j][j] = TINY;
    if((*this)(j, j) == 0.0) (*this)(j, j) = TINY;
    if(j != n - 1){
      dum = 1.0 / (*this)(j, j); //a[j][j];
      for(i = j + 1; i < n; i++) (*this)(i, j) *= dum; //a[i][j] *= dum;
    }
  }
  delete[] vv;
  return 1;
```

```
}


int CMatrix::loadFromFile(FILE * in, int rectangular){
  int i, j, N, M;
  if(!in) return 0;
  if(fscanf(in, "%d", &N) <= 0){
    error("No more matrices in file!");
    return 0;
  }
  if(rectangular){
    if(fscanf(in, "%d", &M) <= 0){
      error("Error while loading!");
      return 0;
    }
  }
  else M = N;
  alloc(N, M);
  for(i = 0; i < N; i++)
    for(j = 0; j < M; j++)
      if(fscanf(in, "%lf", &m_aMat[i * M + j]) <= 0){
        free();
        error("Error while loading!");
        return 0;
      }
  return 1;
}

int CMatrix::loadElementsFromFile(FILE * in) {
  int i, j, N, M;
  if (!in) return 0;
  N = m_iN;
  M = m_iM;
  alloc(N, M);
  for (i = 0; i < N; i++)
    for (j = 0; j < M; j++)
      if (fscanf(in, "%lf", &m_aMat[i * M + j]) <= 0) {
        free();
        error("Error while loading!");
        return 0;
      }
  return 1;
}

void CMatrix::makeUniversal(int n) {
  alloc(n,n);
  for (int i = 0;i < n;i++)
    for (int j = 0;j < n;j++)
      m_aMat[i * n + j] = 1;
}

void CMatrix::setMatrixElemToZero() {
  for (int i = 0;i < n();i++)
    for (int j = 0;j < m();j++)
```

```
      m_aMat[i * n() + j] = 0;
}

void CMatrix::operator*=(double alpha){
  int i, j;
  for(i = 0; i < m_iN; i++)
    for(j = 0; j < m_iM; j++)
      (*this)(i, j) *= alpha;
}

CMatrix& CMatrix::operator=(const CMatrix& b) {
  if (this != &b) {
    free();
    init();
    if (alloc(b.m_iN, b.m_iM)) {
      memcpy(m_aMat, b.m_aMat, sizeof(double) * m_iN * m_iM);
      if (b.m_aPerm != NULL) {
        memcpy(m_aPerm, b.m_aPerm, sizeof(double) * m_iN);
      }
    }
    else {
      error("Error in function alloc(). Cannot allocate memory!");
    }
  }
  return *this;
}

int CMatrix::LUsubst(double * b){
  if(m_iN != m_iN) return 0;
  if(!m_aPerm) return 0;
  int i, ii = -1, ip, j;
  int n = m_iN;
  double sum;

  for(i = 0; i < n; i++){
    ip = m_aPerm[i];
    sum = b[ip];
    b[ip] = b[i];
    if(ii > -1){
      for(j = ii; j <= i - 1; j++){
        sum -= (*this)(i, j) * b[j];//a[i][j] * b[j];
      }
    }
    else if (sum){
      ii = i;
    }
    b[i] = sum;
  }
  for(i = n - 1; i >= 0; i--){
    sum = b[i];
    for(j = i + 1; j < n; j++) sum -= (*this)(i, j) * b[j];//a[i][j] * b[j];
    b[i] = sum / (*this)(i, i);//a[i][i];
```

```
  }
  return 1;
}


CMatrix & CMatrix::inverse(void){
  static CMatrix refErr;
  if(m_iN != m_iM) return refErr;;
  CMatrix *a, *inv;
  double *e;
  int i, j;
  a = new CMatrix();
  copyTo(*a);
  inv = new CMatrix(m_iN);
  if(!inv) return refErr;
  e = new double[m_iN];
  if(!e){
    delete inv;
    return refErr;
  }

  if(!a->LUfact()){
    delete inv;
    delete[] e;
    return refErr;
  }
  for(i = 0; i < m_iN; i++){
    memset(e, 0, m_iN * sizeof(double));
    e[i] = 1;
    if(!a->LUsubst(e)){
      error("Cannot compute inverse!");
      return refErr;
    }
    for(j = 0; j < m_iN; j++) (*inv)(j, i) = e[j];
  }
  a->free();
  delete a;
  delete[] e;
  return *inv;
}

int CMatrix::copyTo(CMatrix& b){
  if(!b.alloc(m_iN, m_iM)) return 0;
  memcpy(b.m_aMat, m_aMat, sizeof(double) * m_iN * m_iM);
  if(m_aPerm != NULL){
    b.m_aPerm = new int[m_iN];
    memcpy(b.m_aPerm, m_aPerm, sizeof(int) * m_iN);
  }
  return 1;
}

int CMatrix::printMathematicaListFormat(FILE * f){
  if(f == NULL) f = stdout;
  int i, j;
```

```
  fprintf(f, "{");
  for(i = 0; i < m_iN; i++){
    fprintf(f, "{");
    for(j = 0; j < m_iM - 1; j++) fprintf(f, "%6.2lf, ", (*this)(i, j));
    fprintf(f, "%6.2lf", (*this)(i, m_iM - 1));
    fprintf(f, "}");
    if(i < m_iN - 1) fprintf(f, ",");
  }
  fprintf(f, "}\n");
  return 0;
}


int CMatrix::eigens(void){
  int N = m_iN, i, j;

  if(m_aEigenValues != NULL){
    delete[] m_aEigenValues;
    m_aEigenValues = NULL;
  }
  if(m_aEigenVectors != NULL){
    delete[] m_aEigenVectors;
    m_aEigenVectors = NULL;
  }

  m_aEigenValues = new double[N];
  m_aEigenVectors = new double[N * N];

  m_bEigenvaluesOK = jacobi();

  if(m_bEigenvaluesOK){
    double tmp;
    for(i = 0; i < N - 1; i++){
      for(j = i + 1; j < N; j++){
        if(m_aEigenValues[i] < m_aEigenValues[j]){
          tmp = m_aEigenValues[i];
          m_aEigenValues[i] = m_aEigenValues[j];
          m_aEigenValues[j] = tmp;
          for(int k = 0; k < N; k++){
            tmp = m_aEigenVectors[i * N + k];
            m_aEigenVectors[i * N + k] = m_aEigenVectors[j * N + k];
            m_aEigenVectors[j * N + k] = tmp;
          }
        }
      }
    }
  }

  return m_bEigenvaluesOK;
}

double CMatrix::getEigenvalue(int i){
```

```
  if((!m_bEigenvaluesOK) || (i < 0) || (i >= m_iN)) return
    -199999;
  return m_aEigenValues[i];
}

void CMatrix::permute(double * A, int N){
  int * p = new int[N];
  int i, j, tmp;

  srand((unsigned int)time(0));

  for(i = 0; i < N; i++){
    p[i] = i;
  }

  for(i = 0; i < N; i++){
    j = rand() % (N - i) + i;
    if(i != j){
      tmp = p[i];
      p[i] = p[j];
      p[j] = tmp;
    }
  }

  for(i = 0; i < N; i ++){
    for(j = 0; j < N; j++){
      A[p[i] * N + p[j]] = (*this)(i, j);
    }
  }

  delete p;
}

void CMatrix::rotationA(double s, double tau, int i, int j, int k
    , int l, double * A, int N){
  double g = A[i * N + j];
  double h = A[k * N + l];
  A[i * N + j] = g - s * (h + g * tau);
  A[k * N + l] = h + s * (g - h * tau);
}

void CMatrix::rotationV(double s, double tau, int i, int j, int k
    , int l){
  int N = m_iN;
  double g = m_aEigenVectors[i * N + j];
  double h = m_aEigenVectors[k * N + l];
  m_aEigenVectors[i * N + j] = g - s * (h + g * tau);
  m_aEigenVectors[k * N + l] = h + s * (g - h * tau);
}

int CMatrix::jacobi(){
  int i, j, ip, iq, N;
  int numRotations;
  double tresh, theta, tau, t, sm, s, h, g, c;
```

```
  double * b, * z;
  double * A;
  N = m_iN;
  b = new double[N]; z = new double[N];
  A = new double[N * N];

  permute(A, N);

  for (i = 0; i < N; i++){
    for (j = 0; j < N; j++) m_aEigenVectors[i * N + j] = 0.0;
    m_aEigenVectors[i * N + i] = 1.0;
    m_aEigenValues[i] = A [i * N + i];
    b[i] = A [i * N + i];
    z[i] = 0.0;
  }
  numRotations = 0;
  for (i = 1; i <= 50; i++){
    sm = 0.0;
    for (ip = 0; ip < N - 1; ip++){
      for (iq = ip + 1; iq < N; iq++) sm += fabs(A [ip * N + iq]);
    }
    if (sm == 0.0){
      delete[] b; delete[] z; delete[] A;
      return true;
    }
    if (i < 4) tresh = (0.2 * sm) / (N * N);
    else tresh = 0.0;

    for (ip = 0; ip < N - 1; ip++)
      for (iq = ip + 1; iq < N; iq++){
        g = 100.0 * fabs (A [ip * N + iq]);
        if ((i > 4) && (g <= EPS10 * fabs (m_aEigenValues [ip])) && (g <= EPS10 * fabs (m_aEigenValues [iq])))
          A [ip * N + iq] = 0.0;
        else if (fabs (A [ip * N + iq]) > tresh){
          h = m_aEigenValues [iq] - m_aEigenValues [ip];
          if (g <= EPS10 * fabs(h))
            t = (A [ip * N + iq]) / h;
          else {
            theta = 0.5 * h / (A [ip * N + iq]);
            t =  1.0 / (fabs (theta) + sqrt (1.0 + theta * theta));
            if (theta < 0.0) t = -t;
          }
          c = 1.0 / sqrt(1 + t * t);
          s = t * c;
          tau = s / (1.0 + c);
          h = t * A [ip * N + iq];
          z [ip] -= h;
          z [iq] += h;
          m_aEigenValues [ip] -= h;
          m_aEigenValues [iq] += h;
          A [ip * N + iq]=0.0;
```

```
          for (j = 0; j < ip; j++)
                 rotationA (s, tau, j, ip, j, iq, A, N);
          for (j = ip + 1; j<iq; j++)
                 rotationA (s, tau, ip, j, j, iq, A, N);
          for (j = iq + 1; j < N; j++)
                 rotationA (s, tau, ip, j, iq, j, A, N);
          for (j = 0; j < N; j++)
                 rotationV (s, tau, j, ip, j, iq);
          numRotations++;
        }
      }
    for (ip = 0; ip < N; ip++){
      b [ip] += z [ip];
      m_aEigenValues [ip] = b [ip];
      z [ip] = 0.0;
    }
  }
  delete[] b; delete[] z; delete[] A;
  return 0;
}

int CMatrix::logicalAnd(int a, int b){
  return min(a,b);
}

double CMatrix::logicalAnd(double a, double b) {
  return min(a,b);
}

int CMatrix::logicalOr(int a, int b){
  int c = a + b;
  if(c==2)
    return 1;
  else
    return c;
}

double CMatrix::logicalOr(double a, double b) {
  return max(a, b);
}

CMatrix& CMatrix::composition(const CMatrix& b){
  CMatrix *c = NULL;
  static CMatrix refErr;
  int i, j, k;
  if(m_iM != b.m_iN) return refErr;
  c = new CMatrix(m_iN, b.m_iM);
  if(!c) return refErr;
  for(i = 0; i < m_iN; i++)
    for(j = 0; j < b.m_iM; j++){
      double res = 0;
      //(*c)(i, j) = 0;
      for(k = 0; k < m_iM; k++){
        double p1 = (*c)(i, j);
```

```
          double p2 = (*this)(i, k);
          double p3 = b.m_aMat[k * b.m_iM + j];
          res = (double)this->logicalOr(res, this->mul(p2,p3));
        }
        (*c)(i, j) = res;
      }
    return *c;
}

CMatrix& CMatrix::leftResidual(const CMatrix& b){
    CMatrix *c = new CMatrix(this->m_iN);
    for(int i=0; i<m_iN; i++){
      for(int j=0; j<m_iN; j++){
        int res = 1;
        for(int k=0; k<m_iM; k++){
          if(b.m_aMat[j*b.m_iM + k] > (*this)(i,k))
            res=0;
        }
        (*c)(i,j)=res;
      }
    }
    return *c;
}

CMatrix& CMatrix::rightResidual(const CMatrix& b){
    CMatrix *c = new CMatrix(this->m_iM);
    for(int i=0; i<m_iM; i++){
      for(int j=0; j<m_iM; j++){
        int res = 1;
        for(int k=0; k<m_iN; k++){
          if((*this)(k,i) > b.m_aMat[k*b.m_iM + j])
            res=0;
        }
        (*c)(i,j)=res;
      }
    }
    return *c;
}

CMatrix& CMatrix::infimum(const CMatrix& b){
    CMatrix *c = new CMatrix(this->n(), this->m());
    for(int i=0; i<m_iN; i++)
      for(int j=0; j<m_iM; j++)
        (*c)(i,j) = min((*this)(i,j),b.m_aMat[i*b.m_iM+j]);
    return (*c);
}

bool CMatrix::equalsTo(CMatrix *b){
    if(this->n() != b->n() || this->m() != b->m())
      return false;
    for(int i=0;i<this->n();i++)
      for(int j=0;j<this->m();j++)
        if((*this)(i,j) != (*b)(i,j))
          return false;
```

```
  return true;
}

double CMatrix::mul(double a, double b) {
  switch (_structureType)
  {
  case LUKASIEWICZ:
    return max(a + b - 1, 0.0);
    break;
  case GOGUEN:
    return a*b;
    break;
  case GOODEL:
    return min(a, b);
    break;
  case BOOL:
    return a*b;
    break;
  default:
    return a*b;
    break;
  }
}

double CMatrix::residuum(double a, double b) {
  switch (_structureType)
  {
  case LUKASIEWICZ:
    return min(1 - a + b, 1.0);
    break;
  case GOGUEN:
    if (a <= b) return 1;
    else return b / a;
    break;
  case GOODEL:
    if (a <= b) return 1;
    else return b;
    break;
  case BOOL:
    return max(1-a, b);
    break;
  default:
    return max(1 - a, b);
    break;
  }
}

double CMatrix::max(double a, double b) {
  if (a >= b)
    return a;
  else return b;
}

double CMatrix::min(double a, double b) {
```

```
  if (a <= b)
    return a;
  else return b;
}

int CMatrix::max(int a, int b) {
  if (a >= b)
    return a;
  else return b;
}

int CMatrix::min(int a, int b) {
  if (a <= b)
    return a;
  else return b;
}


CMatrix rightResidual(CMatrix *lambda, CMatrix *ni) {
  int i, j, k;
  if ((lambda->n() != ni->n()))
    return NULL;
  CMatrix R = CMatrix(lambda->m(), ni->m());
  for (i = 0; i < R.n();i++)
    for (j = 0;j < R.m();j++) {
      R(i, j) = R.residuum((*lambda)(0, i), (*ni)(0, j));
      for (k = 1; k < ni->n(); k++)
        R(i, j) = R.min(R(i, j), R.residuum((*lambda)(k, i), (*ni
    )(k, j)));
    }
  return R;
}

CMatrix leftResidual(CMatrix *ni, CMatrix *mi) {
  int i, j, k;
  if (mi->m() != ni->m())
    return NULL;
  CMatrix R = CMatrix(ni->n(), mi->n());
  for (i = 0; i < R.n();i++)
    for (j = 0;j < R.m();j++) {
      R(i, j) = R.residuum((*mi)(j, 0), (*ni)(i, 0));
      for (k = 1;k < ni->m();k++)
        R(i, j) = R.min(R(i, j), R.residuum((*mi)(j, k), (*ni)(i,
     k)));
    }
  return R;
}
```

1.3. Implementacija algoritma za više-modalitetne fazi relacijske sisteme

```
void main() {
  int brojSkupova, brElemJ;
```

```
  CMatrix *ro;
  CMatrix *ro1;
  FILE *f;


  f = fopen("InputVM.txt", "r");
  fscanf(f, "%d", &brojSkupova);

  ro = new CMatrix[brojSkupova];
  for (int i = 0;i < brojSkupova; i++)
    ro[i].loadFromFile(f);

  //pravimo matrice za izracunavanje
  ro1 = new CMatrix[brojSkupova];


  //  for (int i = 0; i < brojSkupova; i++)
  //    ro[i].printint();

  fscanf(f, "%d", &brElemJ);
  Trojka *JElem = new Trojka[brElemJ];
  //formiramo matricu koja ce nam oznacavati da li postoje relacije izmedju skupova (Ai, Aj)
  CMatrix LAMP = CMatrix(brojSkupova);
  LAMP.postaviNaNulaMat();
  for (int i = 0; i < brElemJ; i++) {
    //ucitavamo par (i,j) iz J i broj relacija R(i,j) - s
    int l, m, s;
    fscanf(f, "%d %d %d", &l, &m, &s);
    JElem[i].i = l;
    JElem[i].j = m;
    JElem[i].brR = s;
    JElem[i].R = new CMatrix[s];
    for (int j = 0; j < JElem[i].brR; j++) {
      JElem[i].R[j] = CMatrix(ro[JElem[i].i].n(), ro[JElem[i].j].n());
      JElem[i].R[j].loadElementsFromFile(f);
      JElem[i].R[j].printint();
    }
    LAMP(l - 1, m - 1) = 1;
  }

  LAMP.printint();

  bool dalje = true;
  int brIter = 0;

  while (dalje && brIter < MAX_BROJ_ITER) {
    dalje = false;
    for (int j = 0; j < brojSkupova; j++) {
      ro1[j] = ro[j];
      CMatrix res1, res2;
      res1.makeUniversal(ro[j].n());
      res2.makeUniversal(ro[j].n());
```

```
      for (int k = 0; k < brojSkupova; k++) {
        if (LAMP(j, k) == 0) continue;
        int z = 0;
        while (z < brElemJ && (JElem[z].i != j + 1 || JElem[z].j != k + 1))
          z++;
        for (int i = 0; i < JElem[z].brR; i++) {
          res1 = res1.infimum(leftResidual(&(JElem[z].R[i].composition(ro[k])), &(JElem[z].R[i])));
          CMatrix pom = ro[k];
          pom.transpose();
          pom = leftResidual(&(JElem[z].R[i].composition(pom)), &(JElem[z].R[i]));
          pom.transpose();
          res1 = res1.infimum(pom);
        }
      }
      for (int k = 0; k < brojSkupova; k++) {
        if (LAMP(k, j) == 0) continue;
        int z = 0;
        while (z < brElemJ && (JElem[z].i != k + 1 || JElem[z].j != j + 1))
          z++;
        for (int i = 0; i < JElem[z].brR; i++) {
          res2 = res2.infimum(rightResidual(&(JElem[z].R[i]), &(ro[k].composition(JElem[z].R[i]))));
          CMatrix pom = ro[k];
          pom.transpose();
          pom = rightResidual(&(JElem[z].R[i]), &(pom.composition(JElem[z].R[i])));
          pom.transpose();
          res2 = res2.infimum(pom);
        }
      }
      ro1[j] = ro1[j].infimum(res1.infimum(res2));
      if (!ro1[j].equalsTo(&ro[j]))
        dalje = true;
    }

    brIter++;

    for (int j = 0; j < brojSkupova; j++)
      ro[j] = ro1[j];

    printf("\n\n=========== ITERACIJA %d ===============\n", brIter);
    for (int j = 0; j < brojSkupova; j++)
      ro[j].printint();
  }



  printf("\n\n========== STAMPA KOMPOZICIJA =============\n");
  Trojka pom;
```

```
  CMatrix alphaI;
  CMatrix R;
  CMatrix alphaJ;
  CMatrix res;
  for (int k = 0; k < brElemJ; k++) {
    pom = JElem[k];
    for (int l = 0; l < JElem[k].brR; l++) {
      alphaI = ro[JElem[k].i-1];
      R = JElem[k].R[l];
      alphaJ = ro[JElem[k].j-1];
      res = alphaI.composition(R).composition(alphaJ);
      res.printint();
    }

  }



  printf("\nBroj iteracija je: %d", brIter);

  system("PAUSE");
}
```

1.4. Implementacija algoritma za izračunavanje najveće forward bisimulacije

```
void bisimulacijeForward(FILE *inputFile) {
  int brA, brAp, brR, brP;
  CMatrix *R1, *R2, *P1, *P2;
  FILE *f;


  //f = fopen("VotingForStates.txt", "r");
  f = inputFile;

  fscanf(f, "%d %d %d %d", &brA, &brAp, &brR, &brP);

  R1 = new CMatrix[brR];
  R2 = new CMatrix[brR];
  P1 = new CMatrix[brP];
  P2 = new CMatrix[brP];

  for (int i = 0; i < brR; i++) {
    R1[i] = CMatrix(brA);
    R1[i].loadElementsFromFile(f);
  }

  for (int i = 0; i < brR; i++) {
    R2[i] = CMatrix(brAp);
    R2[i].loadElementsFromFile(f);
  }

  for (int i = 0; i < brP; i++) {
```

```
    P1[i] = CMatrix(1, brA);
    P1[i].loadElementsFromFile(f);
  }

  for (int i = 0; i < brP; i++) {
    P2[i] = CMatrix(1, brAp);
    P2[i].loadElementsFromFile(f);
  }


  for (int i = 0; i < brR; i++) {
    R1[i].printint();
  }

  for (int i = 0; i < brR; i++) {
    R2[i].printint();
  }

  for (int i = 0; i < brP; i++) {
    P1[i].printint();
  }

  for (int i = 0; i < brP; i++) {
    P2[i].printint();
  }



  CMatrix phi0, phi1;

  //Racunamo phi0 inicijalno

  CMatrix pPom1, pPom2;
  pPom1 = rightResidual(&(P1[0]),&(P2[0]));
  CMatrix p1T, p2T;
  p1T = P1[0];
  p1T.transpose();
  p2T = P2[0];
  p2T.transpose();
  pPom2 = leftResidual(&p1T, &p2T);


  phi0 = pPom1.infimum(pPom2);

  for (int i = 1; i < brP; i++) {
    phi0.printint();
    pPom1 = rightResidual(&(P1[i]), &(P2[i]));
    p1T = P1[i];
    p1T.transpose();
    p2T = P2[i];
    p2T.transpose();
    pPom2 = leftResidual(&p1T, &p2T);
    pPom2.transpose();
    phi0 = phi0.infimum(pPom1.infimum(pPom2));
```

```
  }

  phi0.printint();

  bool dalje = true;
  int brIter = 0;


  while (dalje && brIter < MAX_BROJ_ITER) {
    phi1 = phi0;
    for (int j = 0; j < brR; j++) {
      CMatrix res1, res2;
      //izracunavamo prvi deo u izrazu
      res1 = phi0;
      res1.transpose();
      res1 = R2[j].composition(res1);
      res1 = leftResidual(&res1, &(R1[j]));
      res1.transpose();

      //racunamo drugi deo izraza
      res2 = R1[j].composition(phi0);
      res2 = leftResidual(&res2, &R2[j]);

      phi1 = phi1.infimum(res1).infimum(res2);
    }

    if (phi1.equalsTo(&phi0))
      dalje = false;

    brIter++;

    phi0 = phi1;

    printf("\n\n========== ITERACIJA %d =============\n", brIter);
    phi0.printint();
  }

  printf("\nBroj iteracija je: %d\n", brIter);

  system("PAUSE");
}
```

1.5. Implementacija algoritma za izračunavanje najveće backward bisimulacije

```
void bisimulacijeBackward(FILE *inputFile) {
  int brA, brAp, brR, brP;
  CMatrix *R1, *R2, *P1, *P2;
  FILE *f;

  f = inputFile;

```

```
fscanf(f, "%d %d %d %d", &brA, &brAp, &brR, &brP);

R1 = new CMatrix[brR];
R2 = new CMatrix[brR];
P1 = new CMatrix[brP];
P2 = new CMatrix[brP];

for (int i = 0; i < brR; i++) {
  R1[i] = CMatrix(brA);
  R1[i].loadElementsFromFile(f);
}

for (int i = 0; i < brR; i++) {
  R2[i] = CMatrix(brAp);
  R2[i].loadElementsFromFile(f);
}

for (int i = 0; i < brP; i++) {
  P1[i] = CMatrix(1, brA);
  P1[i].loadElementsFromFile(f);
}

for (int i = 0; i < brP; i++) {
  P2[i] = CMatrix(1, brAp);
  P2[i].loadElementsFromFile(f);
}


for (int i = 0; i < brR; i++) {
  R1[i].printint();
}

for (int i = 0; i < brR; i++) {
  R2[i].printint();
}

for (int i = 0; i < brP; i++) {
  P1[i].printint();
}

for (int i = 0; i < brP; i++) {
  P2[i].printint();
}



CMatrix phi0, phi1;

//Racunamo phi0 inicijalno

CMatrix pPom1, pPom2;
pPom1 = rightResidual(&(P1[0]), &(P2[0]));
CMatrix p1T, p2T;
p1T = P1[0];
```

```
  p1T.transpose();
  p2T = P2[0];
  p2T.transpose();
  pPom2 = leftResidual(&p1T, &p2T);

  phi0 = pPom1.infimum(pPom2);

  for (int i = 1; i < brP; i++) {
    phi0.printint();
    pPom1 = rightResidual(&(P1[i]), &(P2[i]));
    p1T = P1[i];
    p1T.transpose();
    p2T = P2[i];
    p2T.transpose();
    pPom2 = leftResidual(&p1T, &p2T);
    pPom2.transpose();
    phi0 = phi0.infimum(pPom1.infimum(pPom2));
  }

  phi0.printint();

  bool dalje = true;
  int brIter = 0;


  while (dalje && brIter < MAX_BROJ_ITER) {
    phi1 = phi0;
    for (int j = 0; j < brR; j++) {
      CMatrix res1, res2;
      //izracunavamo prvi deo u izrazu
      res1 = phi0.composition(R2[j]);
      res1 = rightResidual(&R1[j], &res1);

      //racunamo drugi deo izraza
      res2 = phi0;
      res2.transpose();
      res2 = res2.composition(R1[j]);
      res2 = rightResidual(&R2[j], &res2);
      res2.transpose();

      phi1 = phi1.infimum(res1).infimum(res2);
    }

    if (phi1.equalsTo(&phi0))
      dalje = false;

    brIter++;

    phi0 = phi1;

    printf("\n\n=========== ITERACIJA %d ============\n", brIter)
    ;
    phi0.printint();
  }
```

```
  printf("\nBroj iteracija je: %d\n", brIter);

  system("PAUSE");
}
```

1.6. Algoritam za izračunavanje najveće backward-forward bisimulacije

```
void bisimulacijeBackwardForward(FILE *inputFile) {
  int brA, brAp, brR, brP;
  CMatrix *R1, *R2, *P1, *P2;
  FILE *f;


  //f = fopen("VotingForStates.txt", "r");
  f = inputFile;

  fscanf(f, "%d %d %d %d", &brA, &brAp, &brR, &brP);

  R1 = new CMatrix[brR];
  R2 = new CMatrix[brR];
  P1 = new CMatrix[brP];
  P2 = new CMatrix[brP];

  for (int i = 0; i < brR; i++) {
    R1[i] = CMatrix(brA);
    R1[i].loadElementsFromFile(f);
  }

  for (int i = 0; i < brR; i++) {
    R2[i] = CMatrix(brAp);
    R2[i].loadElementsFromFile(f);
  }

  for (int i = 0; i < brP; i++) {
    P1[i] = CMatrix(1, brA);
    P1[i].loadElementsFromFile(f);
  }

  for (int i = 0; i < brP; i++) {
    P2[i] = CMatrix(1, brAp);
    P2[i].loadElementsFromFile(f);
  }

  CMatrix phi0, phi1;

  //Racunamo phi0 inicijalno

  CMatrix pPom1, pPom2;
  pPom1 = rightResidual(&(P1[0]), &(P2[0]));
  CMatrix p1T, p2T;
  p1T = P1[0];
```

```
  p1T.transpose();
  p2T = P2[0];
  p2T.transpose();
  pPom2 = leftResidual(&p1T, &p2T);
//  pPom2.transpose();

  phi0 = pPom1.infimum(pPom2);

  for (int i = 1; i < brP; i++) {
    pPom1 = rightResidual(&(P1[i]), &(P2[i]));
    p1T = P1[i];
    p1T.transpose();
    p2T = P2[i];
    p2T.transpose();
    pPom2 = leftResidual(&p1T, &p2T);
    pPom2.transpose();
    phi0 = phi0.infimum(pPom1.infimum(pPom2));
  }

  phi0.printint();

  bool dalje = true;
  int brIter = 0;


  while (dalje && brIter < MAX_BROJ_ITER) {
    phi1 = phi0;
    for (int j = 0; j < brR; j++) {
      CMatrix res1, res2;
      //izracunavamo prvi deo u izrazu
      res1 = R1[j].composition(phi0);
      res1 = leftResidual(&res1, &(R2[j]));


      //racunamo drugi deo izraza
      res2 = phi0.composition(R2[j]);
      res2 = rightResidual(&R1[j],&res2);

      res1 = res1.infimum(res2);

      phi1 = phi1.infimum(res1);
    }

    if (phi1.equalsTo(&phi0))
      dalje = false;

    brIter++;

    phi0 = phi1;

    printf("\n\n============ ITERACIJA %d ============\n", brIter
    );
    phi0.printint();
  }
```

```
  printf("\nBroj iteracija je: %d\n", brIter);

  system("PAUSE");
}
```

Literatura

1. M.J. Barber, Modularity and community detection in bipartite networks, Physical Review E 76 (2007) 066102.
2. V. Batagelj, Large scale social network analysis, in: R. A. Meyers (Ed.), Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer, New York, 2009, pp. 8245–8265.
3. V. Batagelj, P. Dorean, A. Ferligoj, An optimizational approach to regular equivalence, Social Networks 14 (1992) 121–135.
4. V. Batagelj, A. Ferligoj, P. Dorean, Direct and indirect methods for structural equivalence, Social Networks 14 (1992) 63–90.
5. V. Batagelj, A. Mrvar, A. Ferligoj, P. Doreian, Generalized blockmodeling with Pajek, Metodološki zvezki 1 (2) (2004) 455–467.
6. R. Bělohlávek, Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles, Kluwer, New York, 2002.
7. R. Bělohlávek, V. Vychodil, Fuzzy Equational Logic, Springer, Berlin/Heidelberg, 2005.
8. K. Blount, C. Tsinakis, The structure of residuated lattices, International Journal of Algebra and Computation 13 (4) (2003) 437–461.
9. S. P. Borgatti, Two-mode concepts in social network analysis, in: R. A. Meyers (Ed.), Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer, New York, 2009, pp. 8279–8291.
10. S. P. Borgati, M. G. Everett, The class of all regular equivalences: Algebraic structure and computation, Social Networks 11 (1989) 65–88.
11. S. P. Borgati, M. G. Everett, Regular blockmodels of multiway, multimode matrices, Social Networks 14 (1992) 31–120.
12. S. P. Borgati, M. G. Everett, Two algorithms for computing regular equivalence, Social Networks 15 (1993) 361–376.
13. J. P. Boyd, M.G. Everett, Relations, residuals, regular interiors and relative regular equivalence, Social Networks 21 (1999) 147–165.
14. R.L. Breiger, S.A. Boorman, P. Arabie, An algorithm for clustering relational data with applications to social network analysis and comparison to multidimensional scaling, Journal of Mathematical Psychology 12 (1975) 328–383.

15. J. Brennecke, O.N. Rank, The interplay between formal project memberships and informal advice seeking in knowledge-intensive firms: A multilevel network approach, Social Networks 44 (2016) 307–318.
16. J. Brynielsson, L. Kaati, P. Svenson, Social positions and simulation relations, Social Network Analysis and Mining 2 (2012) 39–52.
17. R.S. Burt, Positions in networks, Social Forces 55 (1976) 93–122.
18. E Conti, S Cao, AJ Thomas, Disruptions in the U.S. Airport Network,arXiv:1301.2223 [physics.soc-ph]
19. M. Ćirić, S. Bogdanović, Fuzzy social network analysis, Godišnjak Učiteljskog fakulteta u Vranju 1 (2010) 179–190.
20. M. Ćirić, J. Ignjatovic, M. Bašić, I. Jančić, Nondeterministic automata: Simulation, bisimulation and structural equivalence, Information Sciences 261 (2014) 185–218.
21. M. Ćirić, J. Ignjatović, S. Bogdanović, Fuzzy equivalence relations and their equivalence classes, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 1295–1313.
22. M. Ćirić, J. Ignjatović, S. Bogdanović, Uniform fuzzy relations and fuzzy functions, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009) 1054–1081.
23. M. Ćirić, J. Ignjatović, N. Damljanović, M. Bašić, Bisimulations for fuzzy automata, Fuzzy Sets and Systems 186 (2012) 100–139.
24. M. Ćirić, J. Ignjatović, I. Jančić, N. Damljanović, Computation of the greatest simulations and bisimulations between fuzzy automata, Fuzzy Sets and Systems 208 (2012) 22–42.
25. M. Ćirić, A. Stamenković, J. Ignjatović, T. Petković, Factorization of fuzzy automata, In: Csuhaj-Varju, E., Ésik, Z. (eds.), FCT 2007, Springer, Heidelberg, Lecture Notes in Computer Science 4639 (2007) 213–225.
26. M. Ćirić, A. Stamenković, J. Ignjatović, T. Petković, Fuzzy relation equations and reduction of fuzzy automata, Journal of Computer and System Sciences 76 (2010) 609–633.
27. R. A. Cuninghame-Green, P. Butkovic, The equation $A \otimes x = B \otimes y$ over $(\max, +)$, Theoretical Computer Science 293 (2003) 3–12.
28. R. A. Cuninghame-Green, K. Zimmermann, Equation with residuated functions, Comment. Math. Univ. Carolin. 42 (4) (2001) 729–740.
29. N. Damljanović, M. Ćirić, J. Ignjatović, Bisimulations for weighted automata over an additively idempotent semiring, Theoretical Computer Science 534 (2014) 86–100.
30. A. Davis, B.B. Gardner, M.R. Gardner, Deep South, The University of Chicago Press, Chicago, 1941.
31. B. De Baets, Analytical solution methods for fuzzy relational equations, in: D. Dubois, H. Prade (eds.), Fundamentals of Fuzzy Sets, The Handbooks of Fuzzy Sets Series, Vol. 1, Kluwer Academic Publishers, 2000, pp. 291–340.
32. M. Demirci, Fuzzy functions and their applications, Journal of Mathematical Analysis and Applications 252 (2000) 495–517.
33. M. Demirci, Foundations of fuzzy functions and vague algebra based on many-valued equivalence relations, Part I: Fuzzy functions and their applications, International Journal of general Systems 32 (2) (2003) 123–155.
34. M. Demirci, A theory of vague lattices based on many-valued equivalence relations – I: general representation results, Fuzzy Sets and Systems 151 (2005) 437–472.
35. Y. Ding, Scientific collaboration and endorsement: Network analysis of coauthorship and citation networks, Journal of Informetrics 5 (2011) 187–203.
36. A. Di Nola, E. Sanchez, W. Pedrycz, S. Sessa, Fuzzy Relation Equations and Their Application to Knowledge Engineering, Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1989.

37. P. Doreian, Positional analysis and blockmodeling, in: R. A. Meyers (Ed.), Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer, New York, 2009, pp. 6913–6927.
38. P. Doreian, Equivalence in a social network, Journal of Mathematical Sociology 13 (1988) 243–282.
39. P. Doreian, V. Batagelj, A. Ferligoj, Generalized blockmodeling of twomode network data, Social Networks 26 (2004) 29–53.
40. P. Doreian, V. Batagelj, A. Ferligoj, Generalized Blockmodeling, Cambridge University Press, 2005.
41. P. Doreian, P. Lloyd, A. Mrvar, Partitioning large signed two-mode networks: Problems and prospects, Social Networks 35 (2013) 178–203.
42. D. Dubois, H. Prade, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, New York, 1980.
43. D. Dubois, H. Prade (eds.), Fundamentals of Fuzzy Sets, The Handbooks of Fuzzy Sets Series, Vol. 1, Kluwer Academic Publishers, 2000.
44. D. Easley, J. Kleinberg, Networks, crowds, and markets: Reasoning about a highly connected world, Cambridge University Press, 2010.
45. M.G. Everett, S. P. Borgatti, Regular equivalence: General theory, Journal of Mathematical Sociology 19 (1994) 29–52.
46. M.G. Everett, S. P. Borgatti, The dual-projection approach for two-mode networks, Social Networks 35 (2013) 204–210.
47. T.F. Fan, C.J. Liau, Logical characterizations of regular equivalence in weighted social networks, Artiffcial Intelligence 214 (2014) 66–88.
48. T.F. Fan, C.J. Liau, T.Y. Lin, Positional analysis in fuzzy social networks, Proceedings of the 3rd IEEE International Conference on Granular Computing, 2007, pp 423–428.
49. T.F. Fan, C.J. Liau, T.Y. Lin, A theoretical investigation of regular equivalences for fuzzy graphs, International Journal of Approximate Reasoning 49 (3) (2008) 678–688.
50. T. Fararo, P. Doreian, Tripartite structural analysis: Generalizing the Breiger-Wilson formalism, Social Networks 6 (1984) 141–175.
51. K. Faust, Comparison of methods for positional analysis: Structural and general equivalences, Social Networks 10 (1988) 313–341.
52. L.R. Foulds, Combinatorial Optimization for Undergraduates, Springer-Verlag, New York, 1984.
53. L.C. Freeman, Finding Social Groups: A Meta-Analysis of the Southern Women Data, In R. Breiger, K. Carley, P. Pattison (eds.), Dynamic Social Network Modeling and Analysis, The National Academies Press, Washington, 2003.
54. J. A. Goguen, L-fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl. 18 (1967) 145–174.
55. S. Gottwald, Local and relativized local finiteness in t-norm based structures, Information Sciences 228 (2013) 26–36.
56. R.A. Hanneman, M. Riddle, Introduction to social network methods, University of California, Riverside, Riverside CA, 2005.
57. J. B. Hart, L. Rafter, C. Tsinakis, The structure of commutative residuated lattices, International Journal of Algebra and Computation 12 (4) (2002) 509–524.
58. U. Höhle, Quotients with respect to similarity relations, Fuzzy Sets and Systems 27 (1988) 31–44.
59. U. Höhle, Fuzzy equalities and indistinguishability, in: Proc. EUFIT'93, 1993, pp. 358–363.
60. U. Höhle, Commutative,residuated ℓ-monoids, in: U. Höhle and E. P. Klement (Eds.), Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, 1995, pp. 53–106.

61. U. Höhle, On the fundamentals of fuzzy set theory, Journal of Mathematical Analysis and Applications 201 (1996) 786–826.
62. U. Höhle, Many-valued equalities, singletons and fuzzy partitions, Soft Computing 2 (1998) 134–140.
63. J. Ignjatović, M. Ćirić, Weakly linear systems of fuzzy relation inequalities and their applications: A brief survey, Filomat 26 (2) (2012) 207–241.
64. J. Ignjatović, M. Ćirić, S. Bogdanović, On the greatest solutions to weakly linear systems of fuzzy relation inequalities and equations, Fuzzy Sets and Systems 161 (2010) 3081–3113.
65. J. Ignjatović, M. Ćirić, N. Damljanović, I. Jančić, Weakly linear systems of fuzzy relation inequalities: The heterogeneous case, Fuzzy Sets and Systems 199 (2012) 64–91.
66. J. Ignjatović, M. Ćirić, V. Simović, Fuzzy relation equations and subsystems of fuzzy transition systems, Knowledge-Based Systems 38 (2013) 48–61.
67. J. Ignjatović, M. Ćirić, B. Šešelja, A. Tapavčević, Fuzzy relation inequalities and equations, fuzzy quasi-orders, and closures and openings of fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 260 (2015) 1–24.
68. J. Jiménez, S. Montes, B. Šešelja, A. Tepavčević, Lattice-valued approach to closed sets under fuzzy relations: theory and applications, Computers and Mathematics with Applications 62 (2011) 3729–3740.
69. J. Jiménez, S. Montes, B. Šešelja, A. Tepavčević, Fuzzy correspondence inequations and equations, Fuzzy Sets and Systems 239 (2014) 81–90.
70. F. Klawonn, Fuzzy points, fuzzy relations and fuzzy functions, in: V. Novâk and I. Perfilieva (Eds.), Discovering World with Fuzzy Logic, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000, pp. 431–453.
71. F. Klawonn, R. Kruse, Equality relations as a basis for fuzzy control, Fuzzy Sets and Systems 54 (1993) 147-156.
72. F. Klawonn, R. Kruse, From fuzzy sets to indistinguishability and back, in: N. Steele (ed.), Proc. First ICSC Internat. Symp. on Fuzzy Logic, Zürich, Switzerland, 1995, ICSC Academic Press, Millet, 1995, A57-A59.
73. D. C. Kozen, Automata and Computability, Springer, 1997.
74. R. Kruse, J. Gebhardt, F. Klawonn, Foundations of Fuzzy Systems, Wiley, Chichester, 1994.
75. G. J. Klir, B. Yuan, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Application, Prentice-Hall, Englevood Cliffs, NJ, 1995.
76. H. Lai, D. Zhang, Fuzzy preorder and fuzzy topology, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 1865–1885.
77. M. Latapy, C. Magnien, N. Del Vecchio, Basic notions for the analysis of large two-mode networks, Social Networks 30 (2008) 31–48.
78. E. Lazega, M.-T. Jourda, L. Mounier, Network lift from dual alters: Extended opportunity structures from a multilevel and structural perspective, European Sociological Review 29 (6) (2013) 1226–1238.
79. E. Lazega, M.-T. Jourda, L. Mounier, R. Stofer, Catching up with big fish in the big pond? Multi-level network analysis through linked design, Social Networks 30 (2008) 159–176.
80. F. Lorrain, H.C. White, Structural equivalence of individuals in social networks, Journal of Mathematical Sociology 1 (1971) 49–80.
81. M. Marx, M. Masuch, Regular equivalence and dynamic logic, Social Networks 25 (1) (2003) 51–65.

82. D. Melamed, Community structures in bipartite networks: A dual-projection approach, PLoS ONE 9 (5) (2014) e97823.
83. D. Melamed, R.L. Breiger, A.J. West, Community structure in multi-mode networks: Applying an eigenspectrum approach, Connections 33 (2013) 18–23.
84. R. Milner, A calculus of communicating systems, Lecture Notes in Computer Science, vol. 92, Springer, 1980.
85. M.E.J. Newman, Scientific collaboration networks. I. Network construction and fundamental results, Physical Review E 64 (2001) 016131.
86. M.E.J. Newman, The structure and function of complex networks, SIAM Review 45, 167-256.
87. S. Boccaletti, Complex networks: Structure and dynamics Physics Reports 424, 175-308.
88. M.E.J. Newman, Finding community structure in networks using the eigenvectors of matrices, Preprint physics/0605087.
89. M.E.J. Newman, Scientific collaboration networks. II. Shortest paths, weighted networks, and centrality, Physical Review E 64 (2001) 016132.
90. V. Novăk, Fuzzy Sets and Their Applications, Adam Hilger, Bristol, 1986.
91. R. Paige, R. E. Tarjan, Three partition refinement algorithms, SIAM Journal on Computing 16 (6) (1987) 973–989.
92. D. Park, Concurrency and automata on infinite sequences, in: P. Deussen (ed.), Theoretical Computer Science – 5th GI-Conference Karlsruhe, March 23–25, 1981, pp. 167–183, Lecture Notes in Computer Science 104, Springer, 1981.
93. W. Pedrycz, F. Gomide, Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing, Wiley-IEEE Press, 2007.
94. K. Peeva, Y. Kyosev, Algorithm for solving max-product fuzzy relational equations, Soft Computing 11 (2007) 593–605.
95. K. Peeva, Y. Kyosev, Fuzzy Relational Calculus: Theory, Applications, and Software (with CD-ROM), in Series "Advances in Fuzzy Systems – Applications and Theory", Vol 22, World Scientific, 2004.
96. I. Perfilieva, Finitary solvability conditions for systems of fuzzy relation equations, Information Sciences 234 (2013) 29–43.
97. I. Perfilieva, Fuzzy function as an approximate solution to a system of fuzzy relation equations, Fuzzy Sets and Systems 147 (2004) 363–383.
98. I. Perfilieva, S. Gottwald, Fuzzy function as a solution to a system of fuzzy relation equations, International Journal of General Systems 32 (2003) 361–372.
99. I. Perfilieva, V. Novák, System of fuzzy relation equations as a continuous model of IF-THEN rules, Information Sciences 177 (2007) 3218–3227.
100. E. Sanchez, Equations de relations floues, Thèse de Doctorat, Faculté de Médecine de Marseille, 1974.
101. E. Sanchez, Resolution of composite fuzzy relation equations, Information and Control 30 (1976) 38–48.
102. E. Sanchez, Solutions in composite fuzzy relation equations: application to medical diagnosis in Brouwerian logic, in: M. M. Gupta, G. N. Saridis, B. R. Gaines (Eds.), Fuzzy Automata and Decision Processes, North-Holland, Amsterdam, 1977, pp. 221–234.
103. E. Sanchez, Resolution of eigen fuzzy sets equations, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978) 69–74.
104. J. Scott, Social Network Analysis, Overview of, in: R. A. Meyers (Ed.), Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer, New York, pp. 8265–8279, 2009.

105. C. Seierstad, T. Opsahl, For the few not the many? The effects of affirmative action on presence, prominence, and social capital of women directors in Norway, Scandinavian Journal of Management 27 (1) (2011) 44–54.

106. A.J. Slaughter, L.M. Koehly, Multilevel models for social networks: Hierarchical Bayesian approaches to exponential random graph modeling, Social Networks 44 (2016) 334–345.

107. A. Stamenković, M. Ćirić, J. Ignjatović, Reduction of fuzzy automata by means of fuzzy quasi-orders, Information Sciences 275 (2014) 168–198.

108. I. Stanković, I. Micić, Z. Jančić, Computation of the greatest regular equivalence, Filomat 30 (1) (2016) 179–190.

109. I. Stanković, M. Ćirić, J. Ignjatović, Fuzzy relation inequalities and equations with two unknowns and their applications, accepted for publication in Fuzzy Sets and Systems.

110. I. Stanković, J. Ignjatović, M. Ćirić, Boolean relation equations in data analysis, in: Proceedings of the 9th IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY 2011), Subotica, Serbia, pp. 125–130, IEEE, 2011.

111. L. Tang, H. Liu, J. Zhang, Identifying evolving groups in dynamic multimode networks, IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering 24 (1) (2012) 72–85.

112. A.H.Y. Tong et al., Systematic genetic analysis with ordered arrays of yeast deletion mutants, Science 294 (5550) (2001) 2364–2368.

113. M. Tsvetovat, A. Kouznetsov, Social Network Analysis for Startups, O'Reilly Media, Inc., Sebastopol, CA, 2011.

114. F. Tutzauer, A family of affiliation indices for two-mode networks, Journal of Social Structure 14 (2013) 1–19.

115. D.J. Watts, Networks, dynamics, and the Small-World Phenomenon, American Journal of Sociology 105 (2) (1999) 493–527. Published by:

116. D.J. Watts, S.H. Strogatz, Collective dynamics of 'small-world' networks, Nature 393 (1998) 440–442.

117. P. Wang, G. Robins, P. Pattison, E. Lazega, Exponential random graph models for multilevel networks, Social Networks 35 (2013) 96–115.

118. P. Wang, G. Robins, P. Pattison, E. Lazega, Social selection models for multilevel networks, Social Networks 44 (2016) 346–362.

119. D. R. White, REGGE (web page) http://eclectic.ss.uci.edu/ drwhite/REGGE/

120. D.R. White, K.P. Reitz, Graph and semigroup homomorphisms on networks of relations, Social Networks 5 (1983) 193–234.

121. L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Inf. Control 8 (3) (1965) 338–353.

122. L. A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings, Information Sciences 3 (1971) 177–200.

123. T. Zhou, J. Ren, M. Medo, Y.-C. Zhang, Bipartite network projection and personal recommendation, Physical Review E 76 (4) (2007) Article number 046115.

124. A. Žiberna, Direct and indirect approaches to blockmodeling of valued networks in terms of regular equivalence, Journal of Mathematical Sociology 32 (2008) 57–84.

125. A. Žiberna, Blockmodeling of multilevel networks, Social Networks 39 (2014) 46–61.

Biografija autora

Ivan B. Stanković je rođen 17.3.1976. godine u Surdulici, gde je završio osnovnu i srednju školu sa odličnim uspehom. Osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu je upisao školske 1994/1995 godine na Odseku za matematiku i informatiku, na smeru za informatiku i računarstvo, koje je završio 2001. godine sa prosečnom ocenom 9,46.

Magistarske studije upisuje 2001. godine na Odseku za matematiku i infromatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu, na smeru za računarstvo i informatiku. Položio je sve ispite predviđene planom i programom magistarskih studija sa prosečnom ocenom 9,83. Magistarsku tezu "Računarom potpomognuto traženje hipoteza o energijama grafova", kod mentora prof. dr Dragana Stevanovića je uspešno odbranio 2010. godine i time stekao akademsko zvanje magistar matematičkih nauka.

Doktorske studije je upisao školske 2010/2011 godine gde polaže sve preostale ispite sa najvišom ocenom.

Od februara 2002. do septembra 2003. godine radi u Računskom centru Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu kao administrator fakultetske računarske mreže. U isto vreme, kao saradnik u nastavi izvodi vežbe na Filozofskom fakultetu u Nišu, na studijskim grupama za istoriju i psihologiju. U januaru, 2003. godine je izabran za asistenta-pripravnika na Odseku za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu. U tom zvanju provodi narednih 8 godina, a 2011. se bira u zvanje asistenta na Departmanu za računarske nauke Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu. Od septembra 2005. godine, pa do juna 2016. godine izvodi nastavu iz predmeta "Baze podataka" u specijalizovanom odeljenju za talentovane učenike iz matematike gimnazije "Svetozar Marković" u Nišu.

U okviru nastavnog rada na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu izvodi vežbe iz više predmeta od kojih su neki: Uvod u objektno-orijentisano programiranje, Strukture podataka i algoritmi, Uvod u baze podataka, Napredni kurs iz baza podataka, Web programiranje, Strukture i baze podataka, Osnovi računarstva i programiranja, Uvod u programiranje, Matematičko programiranje, Operaciona istraživanja i dr.

Kao istraživač učestvuje u realizaciji naučno - istraživačkih projekata Ministarstva za nauku i obrazovanje Republike Srbije, i to:

- *Algebarske i kombinatorne metode u informacionim i komunikacionim tehnologijama* (br. 101227, nosilac Prirodno-matematički fakultet u Nišu), 2002-2005.
- *Algebarske strukture i metode za procesiranje informacija* (br. 144011, nosilac Prirodno-matematički fakultet u Nišu), 2006-2010.
- *Razvoj metoda izračunavanja i procesiranja informacija: teorija i primene* (br. 174013, nosilac Prirodno-matematički fakultet u Nišu), 2011-2016.

Oženjen je i otac dvoje dece.

Bibliografija

- I. Stanković, M. Ćirić, J. Ignjatović, *Fuzzy relation inequalities and equations with two unknowns and their applications*, Fuzzy Sets and Systems, [doi: doi.org/10.1016/j.fss.2017.03.011].

- Z. Jančić, I. Stanković, I. Micić, *Regular fuzzy equivalence on two mode fuzzy network*, Filomat, prihvaćen za štampu.

- I. Stanković, I. Micić, Z. Jančić, *Computation of the greatest regular equivalence*, Filomat 30 (1) (2016) 179–190.

- M. Ćirić, J. Ignjatović, I. Stanković, *Regular fuzzy equivalences on multi-mode multi-relational fuzzy networks*, The 16th World Congress of the International Fuzzy Systems Association and the 9th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology - IFSA-EUSFLAT 2015, June 30 - July 3, 2015, Gijon, Asturias, Spain.

- J. Ignjatović, M. Ćirić, I. Stanković, *Bisimulations in fuzzy social network analysis*, The 16th World Congress of the International Fuzzy Systems Association and the 9th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology - IFSA-EUSFLAT 2015, June 30 - July 3, 2015, Gijon, Asturias, Spain.

- I. Micić, Z. Jančić, I. Stanković, *Regular fuzzy equivalences and regular fuzzy quasi-orders*, The 16th World Congress of the International Fuzzy Systems Association and the 9th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology - IFSA-EUSFLAT 2015, June 30 - July 3, 2015, Gijon, Asturias, Spain.

- I. Stanković, J. Ignjatović, M. Ćirić, *Boolean relation equations in data analysis*, in: Proceedings of the 9th IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY 2011), Subotica, Serbia, pp. 125–130, IEEE, 2011.

- I. Stanković, M. Milosević, D. Stevanović, *Small and not so Small Equienergetic Graphs*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., vol. 61 (2009) 443-450.

- D. Stevanović, I. Stanković, M. Milosević, *More on the Relation between Energy and Laplacian Energy of Graphs*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., vol. 61 (2009) 395-401.

- Dragan Stevanović, Ivan Stanković, *Remarks on hyperenergetic circulant graphs*, Linear Algebra and its Applications, vol. 400 (2005) 345-348.

- Predrag S. Stanimirović, Ivan B. Stanković, *Symbolic Implementation of Simplex Method*, proceeding of XIII Conference on Apply Mathematics, (1998) 141-152.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

ФАЗИ РЕЛАЦИЈСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ И ЊИХОВА ПРИМЕНА У АНАЛИЗИ ПОДАТАКА

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 12.04.2017.

Потпис аутора дисертације:

____

Др Иван Б. Станковић

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНОГ И ЕЛЕКТРОНСКОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

ФАЗИ РЕЛАЦИЈСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ И ЊИХОВА ПРИМЕНА У АНАЛИЗИ ПОДАТАКА

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 12.04.2017.

Потпис аутора дисертације:

____

Др Иван Б. Станковић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

ФАЗИ РЕЛАЦИЈСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ И ЊИХОВА ПРИМЕНА У АНАЛИЗИ ПОДАТАКА

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
3. **Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу, 12.04.2017.

Потпис аутора дисертације:

Др Иван Б. Станковић

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални / графички
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Иван Б. Станковић
Ментор, **МН**:	Мирослав Д. Ћирић
Наслов рада, **НР**:	Фази релацијске једначине и неједначине и њихова примена у анализи података
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2017.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	186 стр., граф. прикази
Научна област, **НО**:	рачунарске науке
Научна дисциплина, **НД**:	Фази логика и фази скупови, анализа података
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	фази логика, фази релацијске једначине и неједначине, социјалне мреже
УДК	510.3, 512.643.4, 519.876, 004.8
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Извод, **ИЗ**:	Тема ове докторске дисертације је развој алгоритама за израчунавање највећих решења система фази релацијских једначина и неједначина и примена тих решења у анализи података задатих фази релацијама, пре свега у позиционој анализи једно-модалитетних и више-модалитетних фази социјалних мрежа. Разматрани су проблеми налажења структурних сличности између учесника различитих мрежа које су послужиле за одређивање повезаних позиција у овим мрежама.
Датум прихватања теме, **ДП**:	22.09.2015
Датум одбране, **ДО**:	

Чланови комисије, **КО**: Председник:

Члан:

Члан:

Члан:

Члан, ментор:

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual / graphic**
Contents code, **CC**:	**doctoral dissertation**
Author, **AU**:	**Ivan B. Stanković**
Mentor, **MN**:	**Miroslav D. Ćirić**
Title, **TI**:	**Fuzzy relation equations and inequalities and their application in data analysis**
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**English**
Country of publication, **CP**:	**Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2017.**
Publisher, **PB**:	**author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	**186 p. ; graphic representations**
Scientific field, **SF**:	**computer science**
Scientific discipline, **SD**:	**fuzzy logic and fuzzy sets, data analysis**
Subject/Key words, **S/KW**:	**fuzzy logic, fuzzy relational equations and inequalities, social networks**
UC	**510.3, 512.643.4, 519.876, 004.8**
Holding data, **HD**:	**library**
Abstract, **AB**:	The subject of this thesis is the development of algorithms for computing the greatest solutions to systems of fuzzy relational equations and inequalities and application of these solutions in the analysis of one-mode and multi-mode fuzzy social networks. In addition, some problems of finding structural similarities (regular equivalences) between the actors of various networks have been considered, and have been employed for determination of connected positions in these networks.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	22.09.2015
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member:	
Member:	
Member, Mentor:	