УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Драгољуб Д. Димитријевић

ДИНАМИКА ТАХИОНСКИХ ПОЉА У КЛАСИЧНОЈ И КВАНТНОЈ КОСМОЛОГИЈИ

Докторска дисертација

Ниш, 2015.

UNIVERSITY OF NIS
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS

Dragoljub D. Dimitrijević

DYNAMICS OF TACHYON FIELDS IN CLASSICAL AND QUANTUM COSMOLOGY

PhD Thesis

Niš, 2015.

КОМИСИЈА ЗА ОДБРАНУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ментор: др Горан С. Ђорђевић
редовни професор
Природно-математички факултет
Универзитет у Нишу

Члан комисије: ________________________________
____
____
____

Члан комисије: ________________________________
____
____
____

Датум одбране: ________________________

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Драгољуб Д. Димитријевић
Ментор, **МН**:	Горан С. Ђорђевић
Наслов рада, **НР**:	ДИНАМИКА ТАХИОНСКИХ ПОЉА У КЛАСИЧНОЈ И КВАНТНОЈ КОСМОЛОГИЈИ
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2015.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	110 страница
Научна област, **НО**:	Физика
Научна дисциплина, **НД**:	теоријска физика
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	космологија, *p*-адични бројеви, тахионска инфлација
УДК	523.852 52-52
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	У овој дисертацији се разматрају тахионска скаларна поља *DBI* типа са нестандардним обликом лагранжијана на реалним, p-адичним и аделичним просторима. Разматрана је шира класа тахионских потенцијала у 0-димензоионал-ном и квантно-механичком лимесу. Представљени су оригинални резултати.
Датум прихватања теме, **ДП**:	22. септембар 2014. године
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан, ментор:	

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual / graphic**
Contents code, **CC**:	**doctoral dissertation**
Author, **AU**:	**Dragoljub D. Dimitrijević**
Mentor, **MN**:	**Goran S. Đorđević**
Title, **TI**:	DYNAMICS OF TACHYONIC FIELDS IN CLASSICAL AND QUANTUM COSMOLOGY
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**English**
Country of publication, **CP**:	**Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2015**
Publisher, **PB**:	**author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	**110 p.**
Scientific field, **SF**:	**Physics**
Scientific discipline, **SD**:	**Theoretical physics**
Subject/Key words, **S/KW**:	**Cosmology, *p*-adic numbers, tachyonic inflation**
UC	**524.852** **52-52**
Holding data, **HD**:	**Library**
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	This thesis contains discussion about scalar tachyon field of *DBI*-type with nonstandard form of the Lagrangian on real, *p*-adic and adelic spaces. A broader class of tachyon potential in 0-dimenzoional and quantum-mechanical limit are considered. The original results are presented.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member, Mentor:	

Садржај

Резиме 4

Resume 7

1 Увод 10

2 *p*-Адична и аделична математичка анализа 16

2.1 *p*-Адична норма 16

2.2 Поље *p*-адичних бројева 18

2.3 *p*-Адична топологија 19

2.4 *p*-Адични редови 20

2.5 Неке значајне функције *p*-адичног аргумента 23

2.6 *p*-Адична интеграција 26

2.7 Адели 27

3 *p*-Адична и аделична квантна механика 29

3.1 Општа разматрања 29

3.2 *p*-Адични функционални интеграли 31

3.3 *p*-Адични псеудодиференцијални оператори 32

3.4 Аделична квантна механика 35

4 Динамика тахионског поља 40

4.1 Општа разматрања 40

4.2 Теорија струна, брана и Сенова хипотеза 42

4.3 Тахионско поље у *FRW* простор-времену 48

4.4 Хамилтонијан и маса тахионског поља 50
4.5 Класе тахионских потенцијала 53
4.6 Стандардни космолошки модели инфлације 56
4.7 Тахионска *p*-адична инфлација 60
5 Налажење локално еквивалентних лагранжијана 63
5.1 0-димензионални прилаз 63
5.2 Конструкција лагранжијана из једначине кретања 65
5.3 Класичне канонске трансформације 67
5.4 Примери са конкретним потенцијалима 70
5.5 Инверзни хармонијски осцилатор 73
5.6 Амплитуда прелаза у стандардној квантној механици 74
6 Реална, *p*-адична и аделична разматрања 77
6.1 Квантни *p*-адични тахионски модели 77
6.2 *p*-Адично основно стање 78
6.3 Аделична генерализација 80
7 Квантна космологија 81
8 Закључак 85
Додаци 87
Додатак 1 87
Додатак 2 88
Додатак 3 92
Литература 98

Дисертација је урађена под менторством
проф. др Горана Ђорђевића, коме се најискреније
захвљујем на стрпљењу и подстреку у раду.
Захвљујем се проф. др Бранку Драговићу и
проф. др Љубиши Нешићу на корисним сугестијама.
Велику захвалност дугујем Милану Милошевићу
на помоћи. Посебно се захваљујем
Петри, Снежани и родитељима.

Резиме

У докторској дисертацији се разматра класична и квантна динамика тахионских система, који се описују просторно хомогеним скаларним пољима, у лимесу класичне и квантне механике и космолошке примене. Разумевање и моделирање ових система од посебног су значаја у развоју теорије поља, теорије струна, а у овој дисертацији ће се посебно разматрати примене у модерној космологији, инфлаторној, класичној и квантној фази у еволуцији Свемира.

Главни део дисертације је посвећен истраживањима динамике тахионских скаларних поља са нестандардним лагранжијанима *DBI* типа, односно лагранжијанима који се користе у тзв. ефективним теоријама поља, са различитим потенцијалима. Интерес за ова истраживања потиче од Сенових претпоставки о суштинској улози тахионских поља у фундаменталним интеракцијама брана, односно теорији струна и њиховим директним импликацијама на предкласичну фазу космолошке инфлације. За разумевање динамике тахионских система и њихово моделирање погодно је користити ниже-димензионалне моделе, пре свега 0-димензионални класично-механички аналогон.

У дисертацији су представљена детаљна и оригинална израчунавања за неколико конкретних и најважнијих тахионских потенцијала, који су егзактно решиви и у оквиру Фридманове космологије, а имају и своју велику физичку мотивацију у основама актуелне теорије струна и инфлаторне космологије. Процедура преласка у ниже-димензионалне теорије је стандардна у теорији поља. Системи са бесконачним бројем степени слободе у класично-механичком лимесу прелазе у системе са коначним бројем степени слободе.

Једначине кретања, њихова решења, примена решења за израчунавање класичних лагранжијана и дејства су суштински елементи овог дела доктората.

Разматрају се и локално еквивалентни лагранжијани стандардног типа који доводе до истих једначина кретања као и полазни (*DBI*) тахионски лагранжијан. Приказана су два поступка налажења стандардних лагранжијана. У првом поступку се, полазећи од саме једначине кретања, стандардни лагранжијан конструише по устаљеној процедури, при чему се само поље мора рескалирати на одговарајући начин. Други поступак се заснива на класичним канонским трансформацијама, где није потребно извршити рескалирање поља. За одређену класу тахионских потенцијала, уз правилан избор генератрисе канонских трансформација, могу се наћи стандардни квадратични лагранжијани и квадратична дејства. Поред овога, показано је да се у теорију могу увести додатни степени слободе, којим се посматрани фазни простор проширује, а систем се сада може описати лагранжијаном стандардног облика, при чему су класична дејства почетног и новодобијеног лагранжијана потпуно еквивалентна.

Део тезе је посвећен разматрању претходних система и модела не само на реалним, већ и на неархимедовим, односно ултраметричким просторима. Физички процеси које разматрамо, настанак Свемира и почетак инфлационе фазе, суштински су везани за квантне ефекте и Планкову скалу, на којој се стандардна - Архимедова геометрија и реални бројеви $\mathbb{R} \equiv \mathbb{Q}_\infty$ и њихово алгебарско проширење - комплексни бројеви $\mathbb{C}$, показују као неадекватни, или барем непотпуни. Једна од најизгледнијих алтернатива је коришћење неархимедове геометрије и поља *p*-адичних бројева $\mathbb{Q}_p$. Разматрани су модели базирани на неколико тахионских потенцијала на Архимедовим и неархимедовим геометријама, и бројним пољима $\mathbb{Q}_\infty$ и $\mathbb{Q}_p$ у аделичном приступу. Приказан је поступак квантовања тахионских система у реалном, *p*-адичном и аделичном случају преко Фејнманових интеграла по путањама.

На крају се разматрају могуће примене добијених резултата за описивање периода космолошке инфлације помоћу тахионских поља. Такође се разматрају отворени проблеми у одговарајућим квантним космолошким моделима - таласна функција Свемира, и класичних модела, са метриком Минковског, а посебно са FRW метриком.

Resume

In this PhD thesis classical and quantum dynamics of tachyon systems are examined. Those systems are described by spatially homogeneous scalar fields, in the limit of classical and quantum mechanics and cosmological applications. Understanding and modeling of these systems are of particular importance in the development of the field and string theory. In this thesis its application in the modern cosmology, inflationary, classical and quantum phase in the evolution of the Universe will be discussed.

The main part of the thesis is devoted to study of the dynamics of scalar tachyonic field with non-standard Lagrangian of DBI type, or Lagrangian used in so-called effective field theories, with various potentials. The interest for this research originates from Sen's assumptions about the essential role of tachyonic fields in fundamental interactions of brains, or string theory and their direct implications on the pre-classical phase of cosmic inflation. It is suitable to use lower-dimensional models, including zero-dimensional classical-mechanical analogue, to better understand the dynamics of tachyon systems and their modeling.

In this thesis original calculations for several specific and important tachyon potentials are presented in detail. Those potentials are also exactly solvable in the framework of Friedmann cosmology, and they have their great physical motivation in the current system of string theory and inflationary cosmology. The procedure of transition to lower-dimensional theory is the standard one in field theory. Systems with an infinite number of degrees of freedom in the limits of classical mechanics transit to the systems with finite number of degrees of freedom. The equations of motion, their solutions, applications of solutions in calculation of the classical Lagrangians and actions are essential elements of this part of the thesis.

Besides, the locally equivalent Lagrangians of the standard type are considered. Those Lagrangians lead to the same equations of motion as well as initial (DBI) tachyonic Lagrangian. Two methods of finding a standard Lagrangian are shown. In the first method, one starts from the equations of motion and the standard Lagrangian is constructed by standard procedure. In this procedure the field has to be rescaled in appropriate way. The second method is based on the classical canonical transformations. In this method it is not necessary to rescale the field. For a certain class of tachyon potentials, by the correct choice of generating function of canonical transformation, the standard Lagrangian and quadratic actions can be found. In addition, it was shown that additional degrees of freedom can be introduced in the theory, by which observed phase space expands, and the system can now be equivalently described by the Lagrangian of a standard form, with the identical classic action of initial and "new" Lagrangian.

A part of the thesis is devoted to the consideration of the previous systems and the models not only on real, but also on nonarcimedian and ultrametric spaces. The physical processes under consideration, the formation of the Universe and the beginning of the inflationary phase, essentially are related to the quantum effects and the Planck scale, where the standard - Archimedean geometry and real numbers $\mathbb{R} \equiv \mathbb{Q}_\infty$, and their algebraic extension - complex numbers $\mathbb{C}$, are inadequate or, at least, incomplete. One of the most promising alternatives is to use nonarchimedean geometry and the fields of p-adic numbers $\mathbb{Q}_p$. The considered models are based on several tachionic potentials on Archimedean and nonarchimedean geometries, and fields of numbers $\mathbb{Q}_\infty$ and $\mathbb{Q}_p$ on adelic approach. The procedure of quantization of tachyon system in real, p-adic and adelic case in the framework of the Feynman path integral is shown.

The possible application of the results obtained to describe the period of cosmological inflation using the tachyon fields are discussed in the final part.

Besides, open problems in the respective quantum cosmological models - the wave function of the universe, and classic models, with Minkowski metric, especially with FRW metric, are discussed.

1 Увод

Основни захтев теоријске физике је једноставан и гласи: физичка теорија мора дозвољавати математичко описивање. Овај захтев јесте потребан, али не и довољан. На пример, у космолошким разматрањима можемо само претпоставити да се космолошки фактор скале a мења у функцији (космолошког) времена t по закону $a(t) = At^{1/2} + Bt^{2/3} + C\exp(Dt)$, и прогласити ово теоријом, а параметре A, B, C и D подесити на основу података добијених из космолошких (или неких других) посматрања. Ипак, ово не представља физичку теорију, већ само фитовање података [1]. Дакле, требало би за дати физички модел дефинисати фундаменталнији објекат, од ког ће се кренути и из ког ће се, одговарајућим поступком, добити горе поменути израз. Обично се у таквом поступку креће од дејства, односно лагранжијана.

Следећи битан захтев теоријске физике је такође једноставан и гласи: физичка теорија дозвољава дефинисање лагранжијана. Дакле, истраживања у савременој теоријској физици започињу дефинисањем лагранжијана L и дејства S. Ако се ради о системима са тзв. бесконачним бројем степени слободе, тј. (класичним) пољима, онда се полази од густине лагранжијана $\mathcal{L}$. Разматраћемо, углавном, скаларна поља $\phi(t,\vec{x})$. Израз за густину лагранжијана садржи кинетички и потенцијални члан. Кинетички члан X садржи изводе (првог и/или вишег реда) поља $\partial\phi(t,\vec{x})$ по просторно-временским координатама, док потенцијални члан V садржи само функције поља. Ако је густина лагранжијана записана као разлика кинетичког и потенцијалног члана, онда се ради о *стандардном* запису, тј. густина лагранжијана је стандардног облика

$$\mathcal{L}(\phi,\partial\phi) = X(\partial\phi) - V(\phi). \tag{1.1.1}$$

Ако је, сада, кинетички члан облика

$$X(\partial\phi) = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi\,, \tag{1.1.2}$$

где су $g^{\mu\nu}$ компоненте инверзног метричког тензора датог простор-времена, онда кинетички члан има *канонски* облик.

Један од периода космолошке еволуције који је најзахтевнији за проучавање, упркос веома кратком трајању, јесте период космолошке инфлације, посебно њен сам почетак. Овај период се може разматрати увођењем реалног скаларног поља – инфлатона, чија се динамика описује одговарајућом Клајн-Гордоновом једначином, и често се каже да је инфлација вођена инфлатоном [2].

У (класичној и квантној) космологији се, последњих година, врло често користе теорије са „необичним“ тј. нестандардним изразима за густину лагранжијана. Ово се, пре свега, огледа у њиховом нестандардном запису, густина лагранжијана није (обавезно) дефинисана као разлика кинетичког и потенцијалног члана. Такве теорије припадају класи *ефективних теорија поља*. Добијају се у лимесу нижих енергија из неке фундаменталне теорије (постојеће или претпостављене) која важи на вишим енергијама [3].

Један од таквих модела, мотивисан теоријом струна, спада у моделе тзв. *K*-инфлације [4, 5]. *K*-инфлаторни модели се дефинишу локалним дејством скаларног поља $T(t,\vec{x})$ минимално куплованог са гравитацијом.

Ефективна теорија поља која ће се разматрати у овој дисертацији је теорија тахионског скаларног поља, и представља посебан модел *K*-инфлације - тахионске инфлације. Израз за густину лагранжијана тахионског поља је Дирак-Борн-Инфелдовог (*DBI*) типа [6, 7, 8]

$$\mathcal{L}_{tach}(T,X) = -V(T)\sqrt{1-2X(\partial T)}\,. \tag{1.1.3}$$

Може се рећи да интерес за овакву ефективну теорију почиње претпоставком Ашоке Сена (*Ashoke Sen*) о суштинској улози тахионских поља у фундаменталним интеракцијама *D*-брана, односно теорији струна и њиховим директним импликацијама на предкласичну фазу космолошке инфлације [9]. Оваква, релативно једноставна формулација, тахионске динамике нестабилне *D*-бране преко ефективне теорије (1.1.3) довела је до обимних истраживања у применама у космологији. Поред поменуте космолошке инфлације [10], тахионско поље се разматрало и у описивању тамних компоненти Свемира [11, 12, 13, 14].

Динамика тахионског поља је сложена због постојања бар једног нелинераног („фрикционог“) члана у једначини кретања. Нелинеарни члан постоји чак и у случају просторно-хомогеног поља у равном простор-времену. Због тога се поступак квантовања додатно компликује. Међутим, једначина кретања се може добити из различитих лагранжијана, Лагранжијан није једнозначан [15]. Зато је могуће изабрати „погоднији“ лагранжијан, који је на класичном нивоу (локално) еквивалентан тахионском лагранжијану, тј. доводи до исте једначине кретања [16, 17]. Тако изабран еквивалентан лагранжијан, односно одговарајући модел, се може на једноставнији начин квантовати. Треба имати у виду да различити лагранжијани (са истим класичним динамичким једначинама) на квантном нивоу могу описивати нееквивалентне системе.

Налажење стандардних лагранжијана који су локално еквивалентни тахионском се може извршити (бар) на два начина - поступка. У првом поступку се, полазећи од саме једначине кретања, стандардни лагранжијан конструише по устаљеној процедури [15, 18]. Добијени стандардни лагранжијан не садржи кинетички члан у канонском облику, и при крају поступка поље се рескалира [19]. Начин на који се поље рескалира директно зависи од облика тахионског потенцијала [20].

У другом поступку, на који се односе оригинални резултати и израчунавања, који ће у овој дисертацији бити изложени, полази се од класичних канонских трансформација [20, 21]. Избор генератрисе канонских трансформација директно зависи од тахионског потенцијала. Генератриса се дефинише преко своје инверзне функције. Стандардни лагранжијан који одговара новодобијеној једначини кретања се, за разматране случајеве, лако препознаје. Кинетички члан је сада канонског облика и није потребно извршити рескалирање поља [21, 22].

Разматрања се могу проширити и на неархимедове, односно ултраметричке просторе. До сада се прећутно подразумевао реалан простор, тј. све величине су биле параметризоване реалним бројевима. Међутим, еволуцију Свемира, у његовој раној фази најкоректније би требало да се опише квантном космологијом [23]. Услед његове тадашње величине, која је била реда Планкове дужине, логично је разматрати разне геометрије, посебно неархимедове [24] и некомутативне [25], односно разне параметризације просторно-временских координата.

Једна од изгледнијих алтернатива приступу базираном на Архимедовом простору је коришћење неархимедове геометрије и поља p-адичних бројева $\mathbb{Q}_p$ (p је прост број) [26]. Наиме, математичка анализа која се користи за описивање структуре простор-времена и догађаја у њему који се одвијају на (или са) енергијама које су (за сада) експериментално доступне је дефинисана над пољем реалних бројева $\mathbb{R} \equiv \mathbb{Q}_\infty$. Требало би се подсетити да резултати свих физичких мерења припадају пољу рационалних бројева $\mathbb{Q}$. Само поље $\mathbb{Q}$, ипак, није погодно за математичку анализу и теоријска разматрања (физичких) процеса, јер није *комплетно*. Потребно је проширити поље рационалних бројева, што се може урадити на само два нееквивалентна и нетривијална начина: у односу на апсолутну вредност $|\cdot|_\infty$ (стандардну норму) и у односу на p-адичну норму $|\cdot|_p$ [27, 28]. У првом случају се добија поље реалних бројева, а у другом поље p-адичних бројева $\mathbb{Q}_p$:

$$\mathbb{Q}_\infty \xleftarrow{|\cdot|_\infty} \mathbb{Q} \xrightarrow{|\cdot|_p} \mathbb{Q}_p. \tag{1.1.4}$$

Намеће се питање зашто користимо (само) поље реалних бројева, да ли је то ствар избора? Одговор је једноставан: простор-време на до сада доступним растојањима се успешно моделује и описује Архимедовом геометријом, стога је поље $\mathbb{Q}_\infty$ јединствен најједноставнији одговарајући избор за даљу анализу. Са друге стране, постоје јасне индикације да на Планковој скали Архимедова геометрија није више адекватан избор, тј. простор-време би требало описивати *неархимедовом геометријом* [29]. Као што је Архимедова геометрија природно повезана са пољем $\mathbb{Q}_\infty$, тако се неархимедова геометрија може повезати са пољем $\mathbb{Q}_p$.

p-Адично разматрање модела се може заснивати, бар формално математички, заменом поља реалних бројева $\mathbb{Q}_\infty$ (било којим) пољем *p*-адичних бројева $\mathbb{Q}_p$. Истовремена реална и *p*-адична разматрања доводе до уопшта-вања, тј. до аделичне генерализације.

Постоје два прилаза у формулисању *p*-адичне квантне механике. У једном прилазу, који нећемо разматрати, квантно-механичке функције стања су *p*-адичне функције *p*-адичног аргумента. У другом прилазу су функције стања комплексне функције *p*-адичног аргумента и *p*-адична квантна механика је задата тројком [26]

$$\left\{L_2\left(\mathbb{Q}_p\right), W\left(z\right), U\left(t\right)\right\}, \tag{1.1.5}$$

где је $W(z)$ унитарна репрезентација Хајзенберг-Вејлове групе на Хилбертовом простору $L_2(\mathbb{Q}_p)$, а $U(t)$ представља унитарни оператор еволуције, којим се описује динамика система [30].

У овој дисертацији ће бити примењиван функционални метод у *p*-адичној квантној механици. Амплитуда прелаза (језгро оператора еволуције) је дефинисана преко Фејнманових интеграла по путањама, где се интеграција врши по *p*-адичном простору.

Уопштавање p-адичне и стандардне квантне механике (и у исто време њихово уједињавање) у тзв. аделичну квантну механику је први пут предложено у раду [31]. У истом раду је први пут предложен аделични приступ преко функционалних интеграла.

Дисертација је осмишљена тако да након Увода, у другом делу представи p-адичну и аделичну математичку анализу, а у трећем p-адичну и аделичну квантну механику.

У четвртом делу су изнета општа разматрања тахионског поља у закривљеном простор-времену и најкоришћенији тахионски потенцијали.

У петом делу су разматрани локално еквивалентни лагранжијани стандардног облика са канонским кинетичким чланом који доводе до истих једначина кретања као и тахионски лагранжијан. Приказана су два поступка налажења стандардних лагранжијана. Поред овога, показано је да се у теорију могу увести додатни степени слободе, којим се посматрани фазни простор проширује, а систем се може описати лагранжијаном стандардног-канонског облика, при чему су класична дејства почетног и новодобијеног лагранжијана (потпуно) еквивалентна.

Шести део тезе је посвећен p-адичној анализи модела. У овом делу је приказан поступак квантовања тахионских система у реалном, p-адичном и аделичном случају преко Фејнманових интеграла по путањама [16, 17]. Разматрана су вакуумска (основна) стања у p-адичном и аделичном случају, односно услови за постојање ових стања, као и ограничења која услови намећу на слободне параметре и физичке величине модела.

У седмом делу су разматране могуће примене добијених резултата за описивање периода космолошке инфлације [32, 33].

Осми део садржи закључке и идеје за даља истраживања.

Девети део садржи додатке.

2 *p*-Адична и аделична математичка анализа

Поље *p*-адичних бројева је, у одређеном смислу, слично пољу реалних бројева:

- за оба поља се може дефинисати апослутна вредност (норма),
- оба поља су комплетна у односу на метрику дефинисану (индуковану) одговарајућом нормом,
- оба поља представљају проширења поља рационалних бројева, комплетирањем у односу на одговарајућу норму,
- скуп рационалних бројева је свуда густ подскуп у њима,
- оба поља су локално компактна,
- ни једно од њих није алгебарски затворено.

Наравно, са друге стране, постоје значајне разлике:

- поље реалних бројева је уређено, док поље *p*-адичних бројева није,
- поље $\mathbb{Q}_\infty$ је Архимедово, док је поље $\mathbb{Q}_p$ неархимедово,
- метрички простор над $\mathbb{Q}_\infty$ је повезан простор, док је простор над $\mathbb{Q}_p$ тотално неповезан.

2.1 *p*-Адична норма

Норма (апсолутна вредност) $|\cdot|$ елемената неког поља представља пресликавање тог поља у поље ненегативних реалних бројева $\mathbb{Q}_\infty^+$. Ово пресликавање задовољава, редом, особине ненегативности, хомогености и неједнакости троугла:

$$|x| \geq 0, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \tag{2.1.1}$$

$$|xy| = |x| \cdot |y|, \tag{2.1.2}$$

$$|x+y| \le |x|+|y|. \tag{2.1.3}$$

Дефинисањем стандардне апсолутне вредности и свих *p*-адичних норми над пољем рационалних бројева $\mathbb{Q}$ исцрпљене су све могућности за увођење нееквивалентних и нетривијалних норми. Ово тврђење следи из *теореме Островског* [27, 28]:

Свака нетривијална норма над пољем рационалних бројева је еквивалентна стандардној апсолутној вредности $|\cdot|_\infty$ или *p*-адичној норми $|\cdot|_p$.

Дакле, над пољем рационалних бројева $\mathbb{Q}$ се могу дефинисати следеће нетривијалне норме [34]:

1) стандардна апсолутна вредност $|\cdot| \equiv |\cdot|_\infty$, која је уско повезана са пољем реалних бројева $\mathbb{Q}_\infty$

$$|x|_\infty = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0, \end{cases} \tag{2.1.4}$$

2) *p*-адична норма $|\cdot| \equiv |\cdot|_p$, за сваки прост број *p*, која је уско повезана са пољем реалних бројева $\mathbb{Q}_p$.

Комплетирањем поља рационалних бројева у односу на $|\cdot|_\infty$ добија се поље реалних бројева $\mathbb{R} \equiv \mathbb{Q}_\infty$. Комплетирање се врши додавањем свих граничних вредности Кошијевих низова, чија се конвергенција одређује преко дате норме.

Поље $\mathbb{Q}$ се може комплетирати и увођењем *p*-адичне норме $|\cdot|_p$ (прецизније, *p*-адичних норми, за свако *p*). За сваки рационалан број $q = q_1 / q_2$, $q_1, q_2 \in Z$ и за сваки прост број p одреде се цели бројеви n_1 и n_2 који представљају највећи степен броја p за које се p^{n_1} и p^{n_2} садрже, редом, у бројиоцу и имениоцу рационалног броја q. *p*-Адична норма рационалног броја се, онда, дефинише на начин

$$|q|_p = \left|\frac{q_1}{q_2}\right|_p = p^{n_2-n_1}. \tag{2.1.5}$$

За ову норму особина (2.1.3) је задовољена у још строжијем облику

$$|x+y|_p \leq max(|x|_p, |y|_p), \tag{2.1.6}$$

која је позната као особина ултраметричности. Дакле, *p*-адична норма је ултраметричка.

2.2 Поље *p*-адичних бројева

Комплетирањем поља рационалних бројева $\mathbb{Q}$ коришћењем *p*-адичне норме долази се до поља *p*-адичних бројева $\mathbb{Q}_p$ [26]. Сваки *p*-адични број се може представити на јединствен начин

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + x_3 p^3 ...), \tag{2.2.1}$$

где је $\gamma(x) \equiv ord(x) \in \mathbb{Z}$, $x_i = (0, 1, 2, ..., p-1)$, $x_0 \neq 0$. *p*-Адична норма *p*-адичног броја у облику (2.2.1) је

$$|x|_p = p^{-\gamma(x)} \tag{2.2.2}$$

За сваки *p*-адични број x се може дефинисати његов рационални (разломљени) део $\{x\}_p$. Формално, реч је о пресликавању

$$\{\cdot\}_p : \mathbb{Q}_p \mapsto [0,1) \in \mathbb{Q}_\infty, \tag{2.2.3}$$

одакле следи

$$\{x\}_p = \begin{cases} 0, \quad \gamma(x) \geq 0 \vee x = 0 \\ p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + ... + x_{-\gamma-1} p^{-\gamma-1}), \quad \gamma(x) < 0, \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Битна особина функције рационалног дела *p*-адичног броја је

$$\{x+y\}_p = \{x\}_p + \{y\}_p - N(x,y), \tag{2.2.5}$$

где $N(x,y)$ може имати вредност 0 или 1, што зависи од самих бројева x и y. Навешћемо два посебна примера.

Ако је једном од ових бројева p-адична норма мања или једнака јединици, а другом већа од један, онда је $N(x,y)=0$

$$\{x+y\}_p = \{x\}_p + \{y\}_p, \quad |x|_p \leq 1, \quad |y|_p > 1. \tag{2.2.6}$$

Посебан случај је за $|x|_p > 1$ и $y=-x$, тада је $N(x,y)=N(x,-x)=1$, па важи [35]

$$\{-x\}_p = 1-\{x\}_p, \quad |x|_p > 1. \tag{2.2.7}$$

Значај ових формула посебно долазе до изражаја у примени псеудо-диференцијалног оператора, који се дефинише преко рационалног дела p-адичног броја, предложен од стране Б. Драговића [36, 37, 38].

2.3 p-Адична топологија

Апсолутна вредност - норма се користи за индуковање метрике – растојања између бројева. То даље омогућава увођење појмова као што су отворен и затворен скуп.

Растојање или метрика над пољем $\mathbb{Q}_p$ се дефинише преко p-адичне апсолутне вредности

$$d_p(x,y) \equiv |x-y|_p. \tag{2.3.1}$$

Метрика је такође ултраметричка или уопштеније, неархимедова.

$$d_p(x,y) \leq \max\left\{d_p(x,z), d_p(y,z)\right\}. \tag{2.3.2}$$

Ова неједнакост носи назив ултраметричка неједнакост, док је растојање ултраметричко, а простор $(\mathbb{Q}_p, d_p)$ ултраметрички простор.

У овом ултраметричком простору, који је компактан, комплетан и сепарабилан, p-адични круг $B_\gamma(a)$, са центром у тачки a и полупречником p^γ је скуп тачака [26]

$$B_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \leq p^\gamma\}, \qquad \gamma \in \mathbb{Z}. \tag{2.3.3}$$

Овде ћемо посебно издвојити прстен p-адичних целих бројева Z_p, круг који садржи оне p-адичне бројеве чија је норма мања или једнака јединици

$$B_0 \equiv Z_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}. \qquad (2.3.4)$$

Треба нагласити да је сваки p-адични круг истовремено отворен и затворен скуп (*open and closed - clopen*). Као последица тога, p-адични ултраметрички простор је тотално неповезан [39].

p-Адична кружница $S_\gamma(a)$ са центром у тачки a и полупречником p^γ је скуп

$$S_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p = p^\gamma\}, \qquad \gamma \in \mathbb{Z}. \qquad (2.3.5)$$

Веза p-адичних кругова и кружница је следећа

$$B_\gamma(a) = \bigcup_{\gamma'} S_{\gamma'}(a), \qquad S_\gamma(a) = B_\gamma(a) / B_{\gamma-1}(a), \qquad (2.3.6)$$

док за цео (p-адични) простор важи

$$\mathbb{Q}_p = \bigcup_{\gamma} S_\gamma(a) = \bigcup_{\gamma} B_\gamma(a). \qquad (2.3.7)$$

2.4 p-Адични редови

Аналогно реалном случају, постоје критеријуми за конвергенцију p-адични бројних редова [26]. Бројни ред

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k, \qquad a_k \in \mathbb{Q}_p \qquad (2.4.1)$$

конвергира ка броју $S \in \mathbb{Q}_p$ ако и само ако

$$\lim_{k \to +\infty} |a_k|_p \to 0, \qquad (2.4.2)$$

тј. ако низ парцијалних сума

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad (2.4.3)$$

конвергира по p-адичној норми ка S

$$\lim_{n\to\infty} | S_n - S |_p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \ . \tag{2.4.4}$$

Према Кошијевом критеријуму, који важи и у p-адичном случају, овај услов је и довољан; за произвољно $\epsilon > 0$ увек се може наћи број $N = N(\epsilon)$ тако да за свако $k > N$ важи $| a_k |_p < \epsilon$.

Сада је могуће дефинисати појам аналитичке функције. За p-адичну функцију $f(x)$ p-адичног аргумента

$$f : \mathbb{Q}_p \mapsto \mathbb{Q}_p , \tag{2.4.5}$$

се каже да је аналитичка на кругу B_γ ако се она у том кругу може представити конвергентним степеним редом

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k x^k , \qquad f_k \in \mathbb{Q}_p \ . \tag{2.4.6}$$

Полупречник конвергенције $R(f)$ аналитичке функције $f(x)$

$$R(f) \in \{[0, p^\gamma], \quad \gamma \in Z\} , \tag{2.4.7}$$

представља број на основу кога се врши провера конвергентности реда (2.4.6). Ако за свако $x \in \mathbb{Q}_p$ важи $| x |_p \leq R(f)$, онда је ред конвергентан. У супротном случају, тј. за $| x |_p > R(f)$, ред је дивергентан.

Да би се одредио полупречник конвергенције, уводи се број $r = r(f)$

$$r^{-1} = \overline{\lim_{k\to\infty}} | f_k |_p^{1/k} \ . \tag{2.4.8}$$

Ред (2.4.6) конвергира $\forall x : | x |_p < r$ и дивергира $\forall x : | x |_p > r$. Везу између r и R је следећа: $R(f) \leq r(f)$, при чему за $p^\gamma < r(f) < p^{\gamma+1} , \gamma \in \mathbb{Z}$ следи $R(f) = p^\gamma$; ако је $r(f) = p^\gamma$, онда је $R = p^\gamma$ или $R = p^{\gamma-1}$, тј. за $r(f) = p^\gamma$ конвергентност реда захтева посебно испитивање. Аналитичке функције у кругу, односно њима представљени степени редови могу се диференцирати и интегралити чан по члан.

Основне p-адичне функције представљају се преко бројних степених редова, аналогно реалном случају. На пример

$$e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \tag{2.4.9}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \tag{2.4.10}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \tag{2.4.11}$$

$$\ln[1+x] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k, \tag{2.4.12}$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{2k}}{(2k)!}. \tag{2.4.13}$$

Ове функције су аналитичке у области

$$G_p = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : \begin{array}{ll} |x|_p \leq \dfrac{1}{p}, & p \neq 2, \\ |x|_2 \leq \dfrac{1}{4}, & p = 2. \end{array} \right. \tag{2.4.14}$$

Дефинисање p-адичне аналитичке функције омогућава увођење извода. Извод p-адичне функције у тачки $a \in \mathbb{Q}_p$ се дефинише слично реалном случају

$$f'(a) = \lim_{|\Delta x|_p \to 0} [\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}]. \tag{2.4.15}$$

Једна од занимљивих новина у p-адичној анализи је да извод p-адичне функције може бити једнак нули, иако она није константна. Функције са овом особином спадају у класу локално константних фунцкија.

Разматрање антидеривација p-адичних аналитичких функција се разликује од реалног случаја. У реалном случају постоји директна веза између неодређеног интеграла (што, заправо, представља антидеривацију) и одређеног интеграла (интеграција)

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,, \tag{2.4.16}$$

где $F = f^{(-1)}$ представља антидеривацију фунцкије f , тј. важи

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f^{(-1)}(x) = \left(f^{(-1)} \right)^{(+1)}(x) = f(x)\,. \tag{2.4.17}$$

У p-адичном случају ($x, F(x), f(x) \in \mathbb{Q}_p$) не постоји једнозначна веза између F и f [39]. Ипак, у случају p-адичних аналитичких функција антидеривација n-тог реда $f^{(-n)}(x)$ се дефинише као

$$f^{(-n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)...(k+n+1)} f_k x^{k+n}\,, \tag{2.4.18}$$

при чему за полупречнике конвергенције функција $f(x)$, $f^{(n)}(x)$ и $f^{(-n)}(x)$ важи

$$R(f^{(-n)}) \le R(f) \le R(f^{(n)})\,. \tag{2.4.19}$$

2.5 Неке значајне функције p-адичног аргумента

Овде ћемо дати приказ неких функција p-адичног аргумента које се често појављују при p-адичној интеграцији.

1) Карактеристична функција p-адичних целих бројева

Карактеристична функција $\Omega_p(|x|_p)$ на скупу p-адичних целих бројева Z_p је локално константна како на скупу Z_p , тако и ван њега $\mathbb{Q}_p / Z_p$. Дефинише се на начин

$$\Omega_p(|x|_p) = \begin{cases} 0, & |x|_p > 1 \\ 1, & |x|_p \le 1, \end{cases} \tag{2.5.1}$$

односно, користећи (2.3.4)

$$\Omega_p(|x|_p) = \begin{cases} 0, & x \notin Z_p \\ 1, & x \in Z_p. \end{cases} \tag{2.5.2}$$

Користећи ову функцију израз за рационални део p-адичног броја (2.2.4) можемо преписати на начин

$$\{x\}_p = p^{\gamma}(1-\Omega(|x|_p))(x_0 + x_1 p + \ldots x_{-\gamma-1} p^{-\gamma-1}), \tag{2.5.3}$$

што посебно олакшава израчунавање p-адичних интеграла који као подинтегралну функцију садрже рационални део p-адичног броја [35]. Иначе, карактеристична функција је веома значајна за дефинисање основних стања у p-адичним квантним моделима [24].

2) Адитивни карактер

Адитивни карактер над пољем реалних бројева је функција

$$\chi_\infty(x) \equiv \exp(-2\pi i x), \qquad x \in \mathbb{Q}_\infty. \tag{2.5.4}$$

Аналогно, адитивни карактер χ_p поља p-адичних бројева, прецизније карактер адитивне (локално компактне) групе $\mathbb{Q}_p^+$, је непрекидна комплексна функција

$$\chi_p : \mathbb{Q}_p \mapsto \mathbb{C}, \tag{2.5.5}$$

$$\chi_p(\epsilon x) \equiv \exp(2\pi i \{\epsilon x\}_p), \qquad \epsilon, x \in \mathbb{Q}_p, \tag{2.5.6}$$

где је $\{\epsilon x\}_p$ рационални део p-адичног броја ϵx, релација (2.2.4). Основне особине су

$$|\chi_p(x)|_\infty = 1, \qquad \chi_p(x+y) = \chi_p(x)\chi_p(y), \tag{2.5.7}$$

$$\chi_p(x) = 1, \qquad x \in \mathbb{Z}_p. \tag{2.5.8}$$

Из (2.5.4) и (2.5.6) следи релација посебно битна у теорији струна (повезује реалне, p-адичне и аделичне струне) [40]

$$\chi_\infty(x) \prod_p \chi_p(x) = 1, \qquad x \in \mathbb{Q}. \tag{2.5.9}$$

3) p-Адична аритметичка функција λ_p

Аритметичка функција $\lambda_p(a)$

$$\lambda_p(a) : \mathbb{Q}_p^\star \mapsto \mathbb{C}, \tag{2.5.10}$$

је дефинисана изразима

$$\lambda_2(a) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}[1+i(-1)^{a_1}], & \textit{за парно } \gamma(a) \textit{ у развоју броја а} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} i^{a_1}(-1)^{a_2}[1+i], & \textit{за непарно } \gamma(a), \end{cases} \tag{2.5.11}$$

за $p = 2$, и

$$\lambda_p(a) = \begin{cases} 1, & \textit{за парно } \gamma(a) \textit{ у развоју броја а} \\ (\frac{a_0}{p}), & \textit{за непарно } \gamma(a) \textit{ и } p \equiv 1(mod)4 \\ i(\frac{a_0}{p}), & \textit{за непарно } \gamma(a) \textit{ и } p \equiv 3(mod)4, \end{cases} \tag{2.5.12}$$

за $p \neq 2$, где је $(\frac{a}{p})$ Лежандров симбол.

Лежандров симбол је дефинисан преко квадратног остатка: број $a \in \mathbb{Z}$ је квадратни остатак по модулу p ако једначина

$$x^2 \equiv a(mod)p, \tag{2.5.13}$$

има решења $x \in \mathbb{Z}$. Дакле,

$$(\frac{a}{p}) = \begin{cases} 1, & a \textit{ је квадратни остатак по модулу } p \\ -1, & a \textit{ није квадратни остатак по модулу } p \\ 0, & a \equiv 0(mod)p. \end{cases} \tag{2.5.14}$$

За λ_p функцију важи [26]

$$|\lambda_p(a)|_\infty = 1, \quad \lambda_p(a)\lambda_p(-a) = 1, \quad \lambda_p(ac^2) = \lambda_p(a), \quad a, c \in \mathbb{Q}_p^\star, \tag{2.5.15}$$

$$\lambda_p(a)\lambda_p(b) = \lambda_p(a+b)\lambda_p(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}), \quad a, b, a+b \in \mathbb{Q}_p^\star, \tag{2.5.16}$$

$$\lambda_p(a) = 1, \quad |a|_p = p^{-ord(a)} = p^{2\gamma}, \quad \gamma \in Z. \tag{2.5.17}$$

$$\lambda_\infty(a)\prod_p \lambda_p(a) = 1, \quad a \in \mathbb{Q}_\infty / \{0\}, \tag{2.5.18}$$

где је аритметичка функција за реално поље $\lambda_\infty(a)$ облика

$$\lambda_\infty(a) = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}sgn(a)\right), \qquad a \in \mathbb{Q}_\infty / \{0\}. \tag{2.5.19}$$

2.6 p-Адична интеграција

Поље $\mathbb{Q}_p$ је локално компактна адитивна група. Због тога се на њему може дефинисати транслационо инваријантна мера Хара dx [26]

$$d(x+a) = dx, \quad a \in \mathbb{Q}_p, \tag{2.6.1}$$

$$d(ax) = |a|_p\, dx, \quad a \in \mathbb{Q}_p^\star. \tag{2.6.2}$$

Ова мера је позитивна и једнозначна до на нормирајући фактор. Нормирање се (најчешће) врши на p-адичном прстену Z_p, аналогно јединичном интервалу у реалном случају

$$\mu(Z_p) = \int_{Z_p} dx = \int_{|x|_p \le 1} dx = 1. \tag{2.6.3}$$

За функцију $f(x)$ p-адичног аргумента, која задовољава услов

$$\int_{\mathbb{Q}_p} |f(x)|_p\, dx < \infty, \quad \Leftarrow \quad f(x) \in L^1(\mathbb{Q}_p), \tag{2.6.4}$$

се каже да је интеграбилна на $\mathbb{Q}_p$ ако постоји гранична вредност

$$\lim_{N\to\infty} \int_{B_N} f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{N} \int_{S_\gamma} f(x)dx. \tag{2.6.5}$$

Ова гранична вредност представља интеграл функције $f(x)$ на $\mathbb{Q}_p$ и означава се са

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(x)dx = \sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty} \int_{S_\gamma} f(x)dx. \tag{2.6.6}$$

Смена промењљивих $x \to y$ се врши на начин

$$x = ay + b \quad \Rightarrow \quad dx = |a|_p\, dy, \tag{2.6.7}$$

одакле следи

$$\int_K f(x)dx = |a|_p \int_{\frac{K-b}{a}} f(y)dy, \qquad K \subset \mathbb{Q}_p . \tag{2.6.8}$$

Посебно су битни интеграли Гаусовог типа на пољу $\mathbb{Q}_p$

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(ax^2 + bx)dx = \lambda_p(\alpha)\,|\,2\alpha\,|_p^{-1/2}\ \chi_p\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right). \tag{2.6.9}$$

Могуће је дефинисати Фурије трансформацију за *основне* функције *p*-адичног аргумента. То су све локално константне комплексне функције са компактним носитељем [26]. Фурије слика основне функције $f(x)$ се дефинише на начин

$$\tilde{f}(\xi) = F[f](\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\chi_p(\xi x)dx, \tag{2.6.10}$$

док се инверзна Фурије трансформација дефинише на начин

$$f(x) = F^{-1}[\tilde{f}](x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \tilde{f}(\xi)\chi_p(-\xi x)d\xi . \tag{2.6.11}$$

Такође важи

$$F^{-1}F = FF^{-1} = I . \tag{2.6.12}$$

2.7 Адели

Да се подсетимо, поље реалних и поља *p*-адичних бројева су једина поља која се могу добити комплетирањем поља рационалних бројева коришћењем нетривијалних и нееквивалентних норми. Реални и *p*-адични бројеви се могу повезати, тј. истовремено разматрати увођењем адела, што је први учинио француски математичар Шевалије [41].

Бесконачни низ бројева

$$a = (a_\infty, a_2, a_3, ..., a_{137}, ..., a_p, ...) , \tag{2.7.1}$$

представља адел, акко за све осим за коначно много *p* важи [41]

$$a_p \in Z_p . \tag{2.7.2}$$

Скуп адела $\mathbb{A}$ чини прстен у односу на сабирање и множење адела по компонентама

$$a+b=(a_\infty+b_\infty, a_2+b_2, ..., a_p+b_p, ...), \tag{2.7.3}$$

$$a \cdot b=(a_\infty b_\infty, a_2 b_2, ..., a_p b_p, ...). \tag{2.7.4}$$

Над аделима се може дефинисати и адитивни карактер $\chi(a)$. То је комплексна непрекидна функција облика ($x, y \in \mathbb{A}$)

$$\chi(xy)=\chi_\infty(x_\infty y_\infty)\prod_p \chi_p(x_p y_p)=\exp(-2\pi i x_\infty y_\infty)\prod_p \exp(2\pi i\{x_p y_p\}_p) \tag{2.7.5}$$

са особинама

$$\chi(a)\chi(b)=\chi(a+b), \qquad a,b \in \mathbb{A}, \tag{2.7.6}$$

$$\chi(a)=\exp(-2\pi i a)\prod_p \exp(-2\pi i\{a_p\}_p)\equiv 1, \qquad a \in \mathbb{Q}. \tag{2.7.7}$$

Израз (2.7.7) представља интересантну везу између реалних и p-адичних бројева, носи назив *аделична формула* и може се рећи да је идентична са изразом (2.5.9):

$$\exp(-2\pi i a)=\frac{1}{\prod_p \exp(-2\pi i\{a_p\}_p)}, \qquad a \in \mathbb{Q}. \tag{2.7.8}$$

Аделична формула је разматрана у оквиру процедуре ренормализације и регуларизације у теорији струна [40]. Постојала је идеја да се на растојањима блиским Планковој дужини ове процедуре могу спровести увођењем неархимедове геометрије, p-адичних бројева и адела.

3 *p*-Адична и аделична квантна механика

3.1 Општа разматрања

Поступак канонског квантовања над пољем $\mathbb{Q}_\infty$ може започети дефинисањем комутатора за операторе координате $\hat{x}$ и импулса $\hat{k}$. Комутатор (тј. комутациона релација) се дефинише на стандардан (Дираков) начин преко Поасонових заграда (*Poisson bracket*, *PB*)

$$\{x,k\}_{PB} = i \quad \to \quad [\hat{x},\hat{k}] = i\hbar \tag{3.1.1}$$

Ови оператори делују у простору $L_2(\mathbb{Q}_\infty)$ квадратно интеграбилних комплексних функција $\Psi(x)$ реалног аргумента. У координатној репрезентацији $\hat{x}$ је мултипликативни, док је $\hat{k}$ диференцијални оператор. Оператор $\hat{k}$ је генератор транслација, другим речима, њиме су дефинисане инфинитезималне транслације.

Међутим, над пољем $\mathbb{Q}_p$ није могуће овако дефинисати операторе уколико они делују на комплексне функције *p*-адичног аргумента. Множење два објекта који припадају различитим пољима бројева није дефинисано, мултипликативни оператор на овакав начин није могуће дефинисати. Поред тога, подсетимо се да је поље $\mathbb{Q}_p$ тотално неповезано и немогуће је генерисати инфинитезималне транслације [26]. Последица тога је и немогућност дефинисања аналогне Шредингерове једначине у *p*-адичном случају.

Ипак, комутационе релације на $\mathbb{Q}_p$ (такође и на $\mathbb{Q}_\infty$ и $\mathbb{A}$) је могуће дефинисати преко Вејлових оператора коначних трансформација [42, 43, 44]

$$\hat{U}_q : \Psi(x) \mapsto \Psi(x+q), \tag{3.1.2}$$

$$\hat{V}_k : \Psi(x) \mapsto \chi_p(kx)\Psi(x). \tag{3.1.3}$$

Комутациона релација постаје

$$\hat{U}_q \hat{V}_k = \chi_p(kx)\hat{V}_k \hat{U}_q \,. \tag{3.1.4}$$

Фамилија унитарних оператора

$$\hat{W}(z) = \chi_p(-\frac{1}{2}qk)\hat{U}_q \hat{V}_k \,, \tag{3.1.5}$$

задовољава релацију

$$\hat{W}(z)\hat{W}(z') = \chi_p(\frac{1}{2}B(z,z'))\hat{W}(z+z') \,, \tag{3.1.6}$$

где је $z = (q,k) \in V(\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p)$ тачка у p-адичном фазном простору и $B(z,z') = k'q - kq'$ је кососиметрична симплетичка билинеарна форма на $V(\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p)$ [26]. Унитарни оператор $\hat{W}(z)$ делује на начин

$$\hat{W}(z)\Psi(x) = \int W(z;x,y)\Psi(y)dy = \chi_p(kx + \frac{qk}{2})\Psi(x+q) \,, \tag{3.1.7}$$

где је Ψ комплексна функција p-адичног аргумента.

Сада је могуће дефинисати оператор еволуције $\hat{U}(t)$ у p-адичном случају. Он ће бити унитаран и задовољаваће својство групног множења

$$\hat{U}^{-1}(t) = \hat{U}^{\dagger}(t) \,, \tag{3.1.8}$$

$$\hat{U}(t')\hat{U}(t'') = \hat{U}(t'+t'') \,. \tag{3.1.9}$$

Дефинише се преко свог интегралног језгра $K_t(x,y)$

$$\hat{U}(t)\Psi(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} K_t(x,y)\Psi(y)dy \,, \tag{3.1.10}$$

при чему се језгро задаје преко Фејнманових функционалних интеграла

$$K_t(x,y) = \int_{q(0)=y}^{q(t)=x} \chi_p\left(\int_0^t L(q,\dot{q})dt\right)\prod_t dq(t) \tag{3.1.11}$$

где је $L(q,\dot{q})$ класични p-адични лагранжијан. Интеграција се врши по p-адичној трајекторији, од $q(0) = y$ до $q(t) = x$. На основу групног својства (3.1.9) следи [44]

$$\int_{\mathbb{Q}_p} K_{t'}(x,q)K_{t''}(q,y)dq = K_{t'+t''}(x,y). \tag{3.1.12}$$

Уместо оператора хамилтонијана разматра се оператор еволуције и његов својствени проблем

$$\hat{U}(t)\Psi_{\alpha\beta}(x) = \chi_p(E_\alpha t)\Psi_{\alpha\beta}(x), \tag{3.1.13}$$

где E_α представља енергију у p-адичном случају, индекс α пребројава нивое енергија, док се индекс β односи на дегенерацију нивоа. Решавање својственог проблема оператора еволуције је замена за решавање својственог проблема хамилтонијана, јер се квантна верзија хамилтонијана, као генератора инфинитезималних временских транслација на $\mathbb{Q}_p$, не може дефинисати [45].

Укратко, p-адична квантна механика је задата тројком

$$\left(L_2(\mathbb{Q}_p), \hat{W}(z), \hat{U}(t)\right), \tag{3.1.14}$$

при чему је $L_2(\mathbb{Q}_p)$ Хилбертов простор комплексних интеграбилних функција p-адичног аргумента, $\hat{W}(z)$ фамилија унитарних оператора (3.1.5) и $\hat{U}(t)$ унитарна репрезентација оператора еволуције на $L_2(\mathbb{Q}_p)$ [26].

3.2 p-Адични функционални интеграли

Као што је већ речено, језгро оператора еволуције $K_p(x,t;x_0,t_0)$ се може задати преко израза (3.1.11), којег овде преписујемо у облику

$$K_p(x,t;x_0,t_0) = \int_{x_0}^{x} \chi_p\left(\int_{t_0}^{t} L(x,\dot{x})dt\right)\prod_t dx(t), \quad x,t,x_0,t_0 \in \mathbb{Q}_p. \tag{3.2.1}$$

За таласну функцију важи

$$\Psi(x,t) = \hat{U}(x,t;x_0,t_0)\Psi(x_0,t_0), \tag{3.2.2}$$

односно

$$\Psi(x,t) = \int_{\mathbb{Q}_p} K_p(x,t;x_0,t_0)\Psi(x_0,t_0)dx_0. \tag{3.2.3}$$

Језгро оператора еволуције постоји уколико постоји лимес [46]

$$K_p(x,t;x_0,t_0) = \lim_{n\to\infty} K_p^{(n)}(x,t;x_0,t_0), \tag{3.2.4}$$

$$\begin{aligned} K_p^{(n)}(x,t;x_0,t_0) &= N_p^{(n)}(t,t_0) \\ &\times \int_{\mathbb{Q}_p} \cdots \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p\left(-\frac{1}{h}\sum_{j=0}^{n-1} S_{cl}(q_{j+1},t_{j+1};q_j,t_j)\right) dq_0 \dots dq_{n-1}, \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

где је $N_p^{(n)}$ фактор нормирања и S_{cl} класично дејство. Овај метод, на жалост има озбиљна техничка ограничења [45].

Израз за језгро оператора еволуције у реалном случају за системе са квадратичним дејством [47] има облик

$$K_\infty(x,t;x_0,t_0) = \left(\frac{i}{h}\cdot\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x \partial x_0}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{2\pi i}{h} S_{cl}(x,t;x_0,t_0)\right), \tag{3.2.6}$$

који се може написати [48]

$$K_\infty(x,t;x_0,t_0) = \lambda_\infty\left(-\frac{1}{2h}\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x \partial x_0}\right)\left|\frac{1}{h}\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x \partial x_0}\right|_\infty^{1/2} \chi_\infty\left(-\frac{1}{h}S_{cl}(x,t;x_0,t_0)\right) \tag{3.2.7}$$

Показано је да у p-адичном случају за системе са квадратичним дејством важи [48]

$$K_p(x,t;x_0,t_0) = \lambda_p\left(-\frac{1}{2h}\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x \partial x_0}\right)\left|\frac{1}{h}\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x \partial x_0}\right|_p^{1/2} \chi_p\left(-\frac{1}{h}S_{cl}(x,t;x_0,t_0)\right), \tag{3.2.8}$$

што је искоришћено за израчунавање неких једнодимензионалних модела у p-адичном, као и у аделичном случају [43].

3.3 p-Адични псеудодиференцијални оператори

Да би се формулисала p-адична једначина Шредингеровог типа покушало се са увођењем одговарајућих пседудодиференцијалних оператора (скраћено ΨDO) [36, 49]. Разлог смо већ навели: комплексне функције p-адичног аргумента се не могу диференцирати у стандардном смислу.

Над пољем $\mathbb{Q}_\infty$, ΨDO са доменом $O \subset \mathbb{Q}_\infty$ је оператор $\hat{A}$, облика [50]

$$\left(\hat{A}\Psi\right)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{Q}_\infty} a(\xi,x)\tilde{\Psi}(\xi)e^{-i\xi x}d\xi, \qquad x \in O_\infty, \tag{3.3.1}$$

где је $\Psi(x)$ комплексна функција реалног аргумента, а $\tilde{\Psi}(\xi)$ њена Фурије слика. Функција $a(\xi, x)$ представља симбол оператора $\hat{A}$.

На исти начин, над пољем $\mathbb{Q}_p$, ΨDO са доменом $O_p \subset \mathbb{Q}_p$ је оператор $\hat{A}$, облика [26, 49]

$$\left(\hat{A}\Psi\right)(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} a(\xi,x)\tilde{\Psi}(\xi)\chi_p(-\xi x)d\xi, \qquad x \in O_p, \tag{3.3.2}$$

где је $\Psi(x)$ комплексна функција *p*-адичног аргумента, а $\tilde{\Psi}(\xi)$ њена Фурије слика, и $a(\xi, x)$ представља симбол оператора $\hat{A}$.

Оператор Владимирова [49]

$$\hat{D}^\alpha : \Psi(x) \mapsto \hat{D}^\alpha\Psi(x), \tag{3.3.3}$$

се посматра као оператор диференцирања реда α за $\alpha > 0$, односно као оператор интеграљења реда α за $\alpha < 0$. Његов симбол је дефинисан преко *p*-адичне норме, облика $|\xi|_p^\alpha$,

$$\hat{D}^\alpha\Psi(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} |\xi|_p^\alpha\, \tilde{\Psi}(\xi)\chi_p(-\xi x)d\xi, \tag{3.3.4}$$

при чему важи

$$F[\hat{D}^\alpha\Psi](\xi) = |\xi|_p^\alpha\, \tilde{\Psi}(\xi), \tag{3.3.5}$$

$$\hat{D}^\alpha\hat{D}^\beta\Psi(x) = \hat{D}^\beta\hat{D}^\alpha\Psi(x) = \hat{D}^{\alpha+\beta}\Psi(x), \tag{3.3.6}$$

$$\hat{D}^\alpha\hat{D}^\beta\Psi(x) = \Psi(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = -\beta. \tag{3.3.7}$$

Могуће је формулисати нестационарну једначину Шредингеровог типа (ово је уобичајени назив, иначе, једначина је дифузионог типа)

$$\hat{D}_t\Psi(x,t) = \frac{1}{|4|_p}\hat{D}_x^2\Psi(x,t) + V(x)\Psi(x), \tag{3.3.8}$$

где је $V(x)$ одговарајући p-адични потенцијал. За $V(x)=0$ следи

$$\hat{D}_t\Psi(x,t)-\frac{1}{|4|_p}\hat{D}_x^2\Psi(x,t)=0. \tag{3.3.9}$$

Ова једначина не поседује фундаментално решење $\epsilon(x,t)$ из скупа генералисаних функција [26]

$$\hat{D}_t\epsilon(x,t)-\frac{1}{|4|_p}\hat{D}_x^2\epsilon(x,t)\neq\delta(x,t), \tag{3.3.10}$$

где је $\delta(x,t)$ p-адична Диракова δ-функција, нити постоји веза са одговарајућим Фејнмановим функционалним интегралима.

У раду [36] је предложен другачи облик симбола ΨDO. Ако се крене од Вејлових оператора (3.1.2) и (3.1.3)

$$\hat{U}(\alpha)=\chi_p(\frac{\alpha\hat{q}}{h})=\exp\left(2\pi i\{\frac{\alpha\hat{q}}{h}\}_p\right), \tag{3.3.11}$$

$$\hat{V}(\beta)=\chi_p(\frac{\beta\hat{k}}{h})=\exp\left(\beta\frac{d}{dx}\right)_p, \tag{3.3.12}$$

α и β су p-адични параметри, комутациона релација (3.1.4) постаје

$$\hat{U}(\alpha)\hat{V}(\beta)=\exp\left(2\pi i\{\frac{-\alpha\beta}{h}\}_p\right)\hat{V}(\beta)\hat{U}(\alpha). \tag{3.3.13}$$

Анализирајући ову комутациону релацију, ΨDO се може дефинисати тако да његов симбол уместо p-адичне норме садржи рационални део p-адичног броја

$$\hat{D}\chi_p\left(\frac{\alpha x}{h}\right)=\left(\beta\frac{d}{dx}\right)_p\chi_p\left(\frac{\alpha x}{h}\right)=2\pi i\{\frac{\alpha\beta}{h}\}_p\chi_p\left(\frac{\alpha x}{h}\right). \tag{3.3.14}$$

Тако се деловање новог ΨDO може представити

$$\begin{aligned}\left(\beta\frac{d}{dx}\right)_p^{\alpha}\Psi(x)&=\left(\beta\frac{d}{dx}\right)_p^{\alpha}\int_{\mathbb{Q}_p}\tilde{\Psi}(\xi)\chi_p(-\frac{\xi x}{h})d\xi\\&=(2\pi i)^{\alpha}\int_{\mathbb{Q}_p}\left\{\frac{\beta\xi}{h}\right\}_p^{\alpha}\tilde{\Psi}(\xi)\chi_p(-\frac{\xi x}{h})d\xi.\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Да би се видело какве особине поседује овај ΨDO потребно је израчунати p-адичне интеграле, који, поред адитивног карактера садрже и рационални део p-адичног броја [37, 38, 51].

Ако за p-адичну слободну нерелативистичку честицу (једно-димензионални случај, $p \neq 2$) претпоставимо да се описује раванским таласом, аналогно реалном случају (релативистичка слободна честица је разматрана у раду [52])

$$\psi(x,t) = \chi_p(Et - kx), \tag{3.3.16}$$

онда следи

$$\hat{E}\psi(x,t) = -\frac{i}{2\pi}\{\frac{\partial}{\partial t}\}_p \psi(x,t) = \{E\}_p \chi_p(Et - kx), \tag{3.3.17}$$

$$\hat{k}\psi(x,t) = -\frac{i}{2\pi}\{-\frac{\partial}{\partial t}\}_p \psi(x,t) = \{k\}_p \chi_p(Et - kx). \tag{3.3.18}$$

p-Адична једначина Шредингеровог типа постаје

$$\hat{E}\psi(x,t) = \frac{\hat{k}^2}{2m}\psi(x,t), \tag{3.3.19}$$

одакле се добија веза импулса k и p-адичне енергије

$$\{E\}_p \propto \{k\}_p^2. \tag{3.3.20}$$

Ово је веома интересантан резултат који указује да у овом приступу p-адична слободна честица поседује дискретну зависност енергије од импулса, за разлику од реалног случаја [35].

3.4 Аделична квантна механика

Подсетимо се да постоје занимљиве релације које повезују реалне и p-адичне величине – аделичне формуле, на пример релације (2.5.9) и (2.5.18). Ово је „природна“ полазна тачка у покушају да се формулише аделична квантна теорија. Поред тога, p-адична разматрања доводе до резултата који експлицитно зависе од броја p, што представља још један додатни параметар унутар p-адичне теорије [45, 53]. На крају, увек је постојала дилема како интерпретирати резултате p-адичне теорије и каква је веза између ње и стандардне теорије.

Подсетимо се адела у контексту класичне динамике. Нека је S коначан скуп простих бројева p и нека је

$$\mathbb{A}(S) = \mathbb{Q}_\infty \times \prod_{p\in S} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p\notin S} \mathbb{Q}_p . \tag{3.4.1}$$

Тада се скуп адела $\mathbb{A}$ може представити на начин

$$\mathbb{A} = \bigcup_S \mathbb{A}(S) . \tag{3.4.2}$$

Скуп $\mathbb{A}$ се може унапредити у аделични тополошки простор тако што се на њему уведе *аделична топологија*, чију базу чине отворени скупови

$$O_\infty \times \prod_{p\in S} O_p \times \prod_{p\notin S} \mathbb{Z}_p , \tag{3.4.3}$$

где су O_∞ и O_p отворени скупови у, редом $\mathbb{Q}_\infty$ и $\mathbb{Q}_p$. Са оваквом топологијом $\mathbb{A}$ постаје *локално компактан тополошки простор* [45].

Аделични класични динамички систем је такав систем чије се класично кретање посматра у тополошком простору $\mathbb{A}$. Све величине којима се описује такав систем морају се „аделизовати“. Величина Θ, која зависи од фазних промењљивих (координата x и импулса k) и времена t

$$\Theta = (\Theta_\infty, \Theta_2, \ldots, \Theta_p, \ldots), \quad \Theta_v = \Theta_v(x_v, k_v, t_v), \quad v = \infty, 2, \ldots \tag{3.4.4}$$

је адел, тј. важи $|\Theta_p|_p \leq 1$ за скоро свако p. Ово се може разумети као први корак у аделизацији физичких модела.

Еволуција фазне тачке $z = (x,k)$ у аделичном простору $\mathbb{A}\times\mathbb{A}$ задаје се аделичном матрицом еволуције T (посматра се једнодимензионални случај)

$$z(t) = T(t,t_0)z(t_0), \quad z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ k(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{A}\times\mathbb{A}, \quad t = (t_\infty, t_2, \ldots, t_p, \ldots) , \tag{3.4.5}$$

при чему $T=(T_\infty, T_2, \dots, T_p, \dots)$ представља бесконачан низ матрица типа 2×2 и свака матрица из низа делује у одговарајућем фазном простору

Аделична квантна механика се може дефинисати као тројка [31, 42]

$$\left(L_2(\mathbb{A}), \hat{W}(z), \hat{U}(t)\right), \tag{3.4.6}$$

где је $L_2(\mathbb{A})$ простор квадратно интеграбилних функција над аделима $\mathbb{A}$, $\hat{W}(z)$ представља унитарну репрезентацију Хајзенберг-Вејлове групе на $L_2(\mathbb{A})$, а $\hat{U}(t)$ је унитарна репрезентација оператора еволуције на $L_2(\mathbb{A})$.

Аделична таласна функција $\Psi:\mathbb{A}\to\mathbb{C}$,

$$\Psi(x)\equiv\prod_v \Psi^{(v)}(x_v), \quad x\in\mathbb{A}, \quad (v=\infty,2,3,\dots), \tag{3.4.7}$$

је комплексна функција аделичног аргумента, при чему важи $\Psi^{(\infty)}\in L_2(\mathbb{Q}_\infty)$, $\Psi^{(p)}\in L_2(\mathbb{Q}_p)$, као и

$$\Psi^{(p)}(x_p)=\Omega(|x_p|_p), \tag{3.4.8}$$

за свако осим за коначно много *p*. Аделични еволуциони оператор $\hat{U}$ и његово интегрално језгро K дефинишу се

$$\hat{U}(t_2,t_1)\Psi(x)=\prod_v \hat{U}_v(t_2,t_1)\Psi^{(v)}(x)=\prod_v\int_{\mathbb{Q}_v} K_v(x,t_2;y,t_1)\Psi^{(v)}(y)dy, \tag{3.4.9}$$

уз групна својства

$$\hat{U}(t+t')=\hat{U}(t)\hat{U}(t'), \tag{3.4.10}$$

$$K_{t+t'}(x,y)=\int_{\mathbb{A}} K_t(x,z)K_{t'}(z,y)dz. \tag{3.4.11}$$

Релација (3.4.11) не представља „прост“ производ израза (3.1.12) за свако *p* и одговарајућег израза за реалан случај (који је истог облика). Аделична интеграција подразумева да релација (3.4.11) садржи коначно много чланова који су различити од [54]

$$K^{(p)}_{t+t'}(x,y)=\int_{|z|_p\le 1} K^{(p)}_t(x,z)K^{(p)}_{t'}(z,y)dz. \tag{3.4.12}$$

За аделичне операторе $\hat{U}(t)$ и $\hat{W}(z)$ важи релација

$$\hat{U}(t)\hat{W}(z)\hat{U}(t)^{-1} = \hat{W}(T_t z). \tag{3.4.13}$$

Својствени проблем оператора еволуције се дефинише слично p-адичном случају

$$\hat{U}(t)\psi_{\alpha\beta}(x) = \chi(E_\alpha t)\psi_{\alpha\beta}(x), \tag{3.4.14}$$

где $E = (E_\infty, E_2, \ldots, E_p, \ldots)$ представља аделичну енергију, индекси α и β означавају, редом, енергетске нивое и њихову дегенерацију, $\chi(E_\alpha t)$ су својствене вредности, док су $\psi_{\alpha\beta}$ аделичне својствене функције представљене као бесконачни производ својствених стања одговарајућег реалног и p-адичних модела

$$\psi_{\alpha\beta}(x) = \psi^{(\infty)}_{\alpha_\infty\beta_\infty}(x)\prod_{p\in S}\psi^{(p)}_{\alpha_p\beta_p}(x)\prod_{p\notin S}\Omega(|x_p|_p). \tag{3.4.15}$$

Из последњег израза следи да аделична својствена функција може да садржи само *коначно много* p-адичних својствених функција различитих од вакуумског стања $\Omega(|x|_p)$ (или неког другог вакуумског стања, као што су $\Omega(p^\nu |x|_p)$ или $\delta(p^\nu - |\tilde{x}|_p)$). Налажење вакуумског стања је од великог значаја у конструисању аделичних модела. Битно је рећи да је p-адично вакуумско стање дегенерисано.

На крају је битно рећи да се стандардна квантна механика може посматрати као ефективна теорија у апроксимацији великих растојања (у односу на Планково растојање) уопштеније – аделичне теорије. Сходно томе, треба извршити интеграцију $|\psi(x,t)|^2$ по свим p-адичним компонентама аделичног простора. На основу [26]

$$\int_{|x_p|_p\le 1} dx = 1, \quad \int_{\mathbb{Q}_p} |\psi_p(x_p, t_p)|^2_\infty \, dx_p = 1, \tag{3.4.16}$$

добија се [45]

$$\int_{\mathbb{A}(S)\setminus\mathbb{R}} |\psi_S(x,t)|_\infty^2 \, dx = |\psi_\infty(x_\infty, t_\infty)|_\infty^2 \, dx_\infty \prod_{p\in S} \int_{\mathbb{Q}_p} |\psi_p(x_p, t_p)|_\infty^2 \, dx_p$$
$$\times \prod_{p\notin S} \int_{\mathbb{Z}_p} \Omega(|x_p|_p) dx_p = \int_{\mathbb{R}} |\psi_\infty(x_\infty, t_\infty)|_\infty^2 \, dx_\infty . \tag{3.4.17}$$

4 Динамика тахионског поља

4.1 Општа разматрања

У овој глави разматрање ћемо започети теоријом поља и дејством

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\,\mathcal{L}(X,T)\,. \tag{4.1.1}$$

Овде је $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X,T)$ општи израз за густину лагранжијана. Са $T(t,\vec{x})$ је означено (реално или p-адично) скаларно поље, за сада не нужно тахионско, X представља кинетички члан облика (1.1.2), g је детерминанта метричког тензора са компонентама $g_{\mu\nu}$ и позитивном сигнатуром, $g_{\mu\nu} = diag(-,+,+,+)$.

Ово поље се може повезати са идеалним флуидом, чије се компоненте тензора енергије-импулса добијају варирањем дејства по компонентама метричког тензора [55]

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}\,. \tag{4.1.2}$$

Минималан број величина којима се описује физичко стање идеалног флуида је три. Флуид је окарактерисан својим притиском P, густином материје (енергије) ρ и 4-вектором брзине u^μ. Најједноставније је овај флуид посматрати у систему у коме он мирује (*comoving system*). У том случају се његове компоненте могу записати на начин

$$T_{\mu\nu} = (P+\rho)u_\mu u_\nu - Pg_{\mu\nu}\,, \tag{4.1.3}$$

где су притисак, густина материје и 4-вектор брзине флуида, редом

$$P(X,T) \equiv \mathcal{L}(X,T)\,, \tag{4.1.4}$$

$$\rho(X,T) \equiv 2X\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X} - \mathcal{L}(X,T)\,, \tag{4.1.5}$$

$$u_\mu = \frac{\partial_\mu T}{\sqrt{2X}}\,. \tag{4.1.6}$$

при чему су компоненте 4-вектора брзине $u_0 = +1$ и $\vec{u}_0 = \vec{0}$ (у систему јединица у коме је вредност брзине светлости у вакууму $c = 1$).

Ово је стандардан начин увођења скаларног поља у космолошким разматрањима. Прецизније, полазно дејство садржи део којим се описује гравитација (Ајнштајн-Хилбертов члан) и део којим се описује космолошки флуид (густина лагранжијана скаларног поља), па је укупно дејство [56, 57]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{M_{pl}^2}{2} R + \mathcal{L}(X,T) \right), \tag{4.1.7}$$

где је R Ричијев скалар кривине, $M_{pl}^2 = (8\pi G)^{-1}$ - редукована Планкова маса, G - Њутнова гравитациона константа. Ради једноставности, за Планкову масу ћемо за сада узети $M_{pl}^2 = 1$. Из дејства (4.1.7) се добија десет Ајнштајнових једначина

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \tag{4.1.8}$$

где је $R_{\mu\nu}$ Ричијев тензор кривине, док је на десној страни тензор енергије-импулса $T_{\mu\nu}$ „космолошког“ флуида описан скаларним пољем преко израза (4.1.3).

За случај равног простор-времена са Фридман-Робертсон-Вокеровом (FRW) метриком

$$ds_{FRW}^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) d\vec{x}^2, \tag{4.1.9}$$

где је $a(t)$ космолошки фактор скале хомогеног и изотропног Свемира, из Ајнштајнових једначина се могу извести три једначине којима се описује динамика космолошког фактора скале и скаларног поља. То су Фридманова једначина

$$H^2 = \frac{1}{3} \rho(X,T), \tag{4.1.10}$$

где је $H(t) = \dot{a}/a$ Хаблов параметар (тачка изнад величине означава диференцирање по времену), затим једначина за убрзање

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}\big(\rho(X,T) + 3P(X,T)\big), \tag{4.1.11}$$

и једначина континуитета

$$\dot{\rho} = -3H\big(\rho(X,T) + P(X,T)\big). \tag{4.1.12}$$

Наравно, само су две независне. Једначина континуитета уједно представља и динамичку једначину за скаларно поље у *FRW* простор-времену. Дефинише се још и параметар стања

$$w \equiv \frac{P}{\rho}, \tag{4.1.13}$$

као и адијабатска брзина звука

$$c_s^2 \equiv \frac{\partial P}{\partial X}\left(\frac{\partial \rho}{\partial X}\right)^{-1}. \tag{4.1.14}$$

За случај просторно хомогеног скаларног поља (поље је само функција времена), динамичка једначина (4.1.12) добија облик [58]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X}\left(\ddot{T} + 3H\dot{T}\right) + 2\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial X^2} X\ddot{T} + 2\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial T \partial X} X - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} = 0. \tag{4.1.15}$$

Битно је нагласити да ова једначина важи без обзира да ли је лагранжијан задат у стандардном или нестандардном облику.

4.2 Теорија струна, брана и Сенова хипотеза

Класично (Намбу-Гото) дејство отворене релативистичке струне је пропорционално светској површи коју струна „пребрише“ при кретању у $D = d + 1$ димензионалном простор-времену Минковског (d је број просторних димензија) [59]

$$S = -T_s \int_\Sigma d\sigma d\tau \sqrt{-det[\eta_{\mu\nu}\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu]}, \tag{4.2.1}$$

где су σ и τ локалне координате светске површи Σ, $\eta_{\mu\nu}$ компоненте метричког тензора простора Минковског, облика $\eta_{\mu\nu} = diag(-,+,+,+,...+)$, индекси i и j

узимају вредности 1 или 2 и односе се на координате светске површи σ и τ , T_s представља напон струне, док су X^{μ} координате струне, тј. функције које сваку тачку (σ,τ) на светској површи Σ преводе у тачку x^{μ} простора Минковског.

Класичне једначине кретања отворене струне, добијене из Намбу-Гото дејства имају облик

$$\frac{\partial^2 X^{\mu}(\tau,\sigma)}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 X^{\mu}(\tau,\sigma)}{\partial \sigma^2} = 0 , \tag{4.2.2}$$

чија су решења, уз Нојманове граничне услове

$$\left.\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma}\right|_0 = \left.\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma}\right|_{\pi} \equiv 0 , \tag{4.2.3}$$

и у координатама светлосног конуса (уз одговарајућу калибрацију) облика

$$X^{+}(\tau,\sigma) = \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^{+}\tau , \tag{4.2.4}$$

$$X^{-}(\tau,\sigma) = x_0^{-} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^{-}\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{-}\exp(-in\tau)\cos(n\sigma) , \tag{4.2.5}$$

$$X^{I}(\tau,\sigma) = x_0^{I} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^{I}\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{I}\exp(-in\tau)\cos n\sigma , \tag{4.2.6}$$

где су α_n^{-} , α_n^{+} и α_n^{I} (Фуријеови) коефицијенти у развоју, $\alpha' = T_s / 2\pi$ је тзв. параметар нагиба (*slope parameter*) и индекс I узима вредности $I = 2,...,d$.

Спектар маса класичне отворене струне не поседује тахионска стања

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}\sum_{n\in\mathbb{N}}(\alpha_n^{I})^{\star}\alpha_n^{I} , \tag{4.2.7}$$

јер важи да је $(\alpha_n^{I})^{\star}\alpha_n^{I} = |\alpha_n^{I}|^2 \geq 0$, тј. квадрат масе је увек ненегативна величина (звезда означава комплексну коњугацију).

При квантизацији отворене струне ($D = 26$) координате $X^{\mu}(\tau,\sigma)$ и одговарајући коњуговани импулси постају оператори за које се дефинише комутатор и који делују у простору стања струне. Другим речима, коефицијенти у развоју α_n^-, α_n^+ и α_n^I постају оператори $\hat{\alpha}_n^-$, $\hat{\alpha}_n^+$ и $\hat{\alpha}_n^I$, који делују у поменутом простору стања.

Оператор квадрата масе је облика (добијен из (4.2.7) у процесу квантовања)

$$\hat{M}^2 = \frac{1}{\alpha'}\left(-1+\hat{N}^{\perp}\right), \tag{4.2.8}$$

при чему је оператор броја честица $\hat{N}^{\perp}$ представљен на начин

$$\hat{N}^{\perp} = \sum_{n=1}^{\infty} n\hat{a}_n^{\dagger I}\hat{a}_n^I, \tag{4.2.9}$$

где су, редом оператори анихилације и креације

$$\hat{a}_n^I = \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{\alpha}_n^I, \quad \hat{a}_n^{\dagger I} = \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{\alpha}_n^{\dagger I}. \tag{4.2.10}$$

Када је $\hat{N}^{\perp} = 0$, тј. када нема ексцитација, може се, на основу израза (4.2.8), закључити да је основно (вакуумско) стање отворене струне тахионске природе.

Поред једнодимензионалних објеката–(отворених и затворених) струна, теорија струна разматра и вишедимензионалне објекте, *мембране* или *бране*.

Посебна класа објеката на којима су крајеви отворене струне локализовани (објекти на којима се отворене струне завршавају) носе назив *D*-бране (*D*-брана, Диришлеова брана). Оне су у вези са *p*-димензионалним решењима једначина кретања која задовољавају Диришлеове граничне услове (нагласимо да је овде *p* цео број, тј. не представља прост број).

Dp-бране су $p+1$-димензионални објекти са *p* просторних и једном временском димензијом. Поседују енергију и имају своју динамику. У случају D_{25}-бране у теорији отворених (бозонских) струна цео простор-време је испуњен браном. У присуству *Dp*-бране координате отворене струне $X^{\mu}(\tau,\sigma)$, $\mu = 0,1,...,25$, се могу поделити у две групе. Прву чине координате $X^m(\tau,\sigma)$

које су тангенцијалне у односу на *Dp*-брану и за које важе Нојманови гранични услови

$$\left.\frac{\partial X^m}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=0} = \left.\frac{\partial X^m}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\pi} = 0, \qquad m = 0,1,\dots,p\,. \tag{4.2.11}$$

Друга група је састављена од координата $X^a(\tau,\sigma)$ нормалних на *Dp*-брану и за њих важе Диришлеови услови

$$X^a(\tau,\sigma)\,|_{\sigma=0} = X^a(\tau,\sigma)\,|_{\sigma=\pi} = \bar{x}^a, \qquad a = p+1,\dots,d\,, \tag{4.2.12}$$

где су $\bar{x}^a$ константе које дефинишу положај *Dp*-бране преко координата нормалних на њу.

Тахионске конфигурације се не појављују само код отворених струна као основна стања, већ и у конфигурацијама *D*-брана. Значајан допринос у проучавању нестабилник конфигурација *D*-брана представља рад А. Сена из 1998. године [60]. Изнета је идеја, тј. претпоставка да се процес тзв. *тахионске кондензације* дешава на нестабилним кофигурацијама *D*-брана. Након кондензације, добијени стабилни вакуум представља вакуум затворене струне, при чему се *D*-бране распадају и отворене струне ишчезавају. Тахионска кондензација је на овај начин повећала интерес физичара за струнску теорију поља, који је у једном периоду био умањен због компликоване математичке структуре.

Да би јасније приказали тахионску кондензацију, која се помиње у Сеновим претпоставкама, посматрајмо две паралелне *Dp*-бране локализоване у $x^a_{(1)}$ и $x^a_{(2)}$ и отворену струну чији се један крај налази на првој *Dp*-брани, а други крај се садржи у другој брани. За такве струне, у изразу (4.2.8) за квадрат масе постоји додатни члан који се појављује као последица „затезања“ струне између *Dp*-брана

$$\hat{M}^2 = \frac{1}{\alpha'}\left(-1 + \hat{N}^{\perp} + \left(\frac{|\,x^a_{(1)} - x^a_{(2)}\,|}{2\pi\sqrt{\alpha'}}\right)^2\right) \tag{4.2.13}$$

Основно стање, $\hat{N}^{\perp} = 0$, постаје тахионско за случај када су две бране довољно близу једна другој

$$M^2 < 0 \Longleftrightarrow | x^a_{(1)} - x^a_{(2)} | \to 0, \qquad N^{\perp} = 0 \tag{4.2.14}$$

Ово разматрање вакуумских тахионских конфигурација отворене струне се може проширити и на теорију суперструна, где се поред *D*-брана дефинишу и анти *D*-бране, у ознаци $\bar{D}$-бране. $\bar{D}$-брана је брана са супротном оријентацијом у односу на *D*-брану.

Посматрајмо отворену струну, чији је један крај смештен на *D*-брани, док је други на $\bar{D}$. Ако су брана и антибрана постављене врло близу једна другој, онда ће основно стање отворене струне бити тахионско. Постојање вакуумске тахионске конфигурације указује да је систем брана-антибрана нестабилан [61].

И овде се поставља питање шта ће се десити са нестабилним системом, да ли постоји стабилна конфигурација у коју ће систем прећи (другим речима распасти)? Одговор је позитиван, бар у случају отворене (супер) струне. На основу Сенових претпоставки, систем брана-антибрана се распада и исчезава, остављајући за собом затворену струну, што представља тахионску кондензацију.

Треба нагласити да је проучавање тахионске кондензације веома битно, јер представља физички процес који се јавља између два различита вакуумска стања, почетног нестабилног и крајњег стабилног [62]. Сенове претпоставке су сада већ прихваћене као важне особине брана, односно отворених струна на њима.

Особине D-брана можемо проучавати индиректно, тако што ћемо испитати шта се дешава у присуству D-брана. Могућност да се на основу динамичких карактеристика отворене струне (чији се крајеви налазе на D-брани) може добити информација о динамици D-бране доводи до дефинисања ефективних теорија поља. За случај тахионских ексцитација отворене струне предложена је ефективна теорија тахионског поља облика [63, 64, 65]

$$S = \int d^{d+1}x \mathcal{L}_{tah}, \tag{4.2.15}$$

$$\mathcal{L}_{tah} = -V(T)\sqrt{1+\eta_{\mu\nu}\partial^{\mu}T\partial^{\nu}T}, \tag{4.2.16}$$

где је $V(T)$ потенцијал тахионског поља T, $\eta_{\mu\nu} = diag(-,+,+,...)$. На овај начин се D-бране проучавају на добро познатом „полигону" теорије поља, што са једне стране у одређеној мери олакшва разматрања брана и струна.

Хамилтонијан и густина хамилтонијана ове ефективне теорије имају, редом, облике

$$H = \int d^{p}x(\Pi\, \partial_0 T - \mathcal{L}) \equiv \int d^{p}x \mathcal{H}, \tag{4.2.17}$$

$$\mathcal{H} = \sqrt{\Pi^2 + (V(T))^2}\sqrt{1+\ (\vec{\nabla}T)^2}, \tag{4.2.18}$$

где је коњуговани импулс тахионског поља [66]

$$\Pi(t,\vec{x}) = \frac{\delta S}{\delta(\partial_0 T(x))} = \frac{V(T)\ \partial_0 T}{\sqrt{1-(\partial_0 T)^2 + (\vec{\nabla}T)^2}}. \tag{4.2.19}$$

Хамилтонове једначине су

$$\partial_0 \Pi(t,\vec{x}) = -\frac{\delta H}{\delta T(x)} = \partial_j \Big(\frac{(\partial_j T)\sqrt{\Pi^2+V^2}}{\sqrt{1+(\vec{\nabla}T)^2}}\Big) - \frac{V(T)V'(T)}{\sqrt{\Pi^2+V^2}}\sqrt{1+(\vec{\nabla}T)^2}, \tag{4.2.20}$$

$$\partial_0 T(t,\vec{x}) = \frac{\delta H}{\delta \Pi(x)} = \frac{\Pi}{\sqrt{\Pi^2+V^2}}\sqrt{1+(\vec{\nabla}T)^2}. \tag{4.2.21}$$

У лимесу великих вредности поља T када је потенцијал довољно опао да се може занемарити, и при фиксном Π Хамилтонове једначине постају

$$H = \int d^{p}x\,|\,\Pi\,|\sqrt{1+(\vec{\nabla}T)^2}, \tag{4.2.22}$$

$$\partial_0 \Pi(t,\vec{x}) = \partial_j \Big(|\,\Pi\,|\frac{\partial_j T}{\sqrt{1+(\vec{\nabla}T)^2}}\Big), \tag{4.2.23}$$

$$\partial_0 T(t,\vec{x}) = \frac{\Pi}{|\Pi|}\sqrt{1+(\vec{\nabla}T)^2}\ . \tag{4.2.24}$$

Квадрирањем израза (4.2.24) добија се

$$(\partial_0 T)^2 - (\vec{\nabla}T)^2 = 1\,. \tag{4.2.25}$$

Увођењем локалног 4-вектора брзине и локалне густине материје [67]

$$u_\mu \equiv -\partial_\mu T\,, \tag{4.2.26}$$

$$\rho(t,\vec{x}) \equiv \frac{|\Pi|}{\sqrt{1+(\vec{\nabla}T)^2}}\,, \tag{4.2.27}$$

једначине (4.2.23) и (4.2.24) постају, редом

$$\eta^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = -1\,, \tag{4.2.28}$$

$$\partial_\mu(\rho u^\mu) = 0\,, \tag{4.2.29}$$

док израз за тензор енергије-импулса (видети (4.3.4)) постаје

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu\,, \tag{4.2.30}$$

што одговара идеалном флуиду са нултом вредношћу притиска, тј. нерелативистичком флуиду. Дакле, у апроксимацији великих вредности поља динамичке једначине које се добијају из тахионског лагранжијана одговарају динамичким једначинама за нерелативистички флуид.

Разматрања у оквиру ове ефективне теорије се могу проширити и на гравитацију, тј закривљене просторе, над $\mathbb{Q}_\infty$ и $\mathbb{Q}_p$, односно $\mathbb{A}$, о чему ће бити речи у наставку.

4.3 Тахионско поље у FRW простор-времену

Као што је већ речено у Уводу, густина лагранжијана за тахионско скаларно поље $T(t,\vec{x})$ садржи потенцијал у виду мултипликативног члана, док је кинетички члан под квадратним кореном [9]

$$\mathcal{L}_{tach} = \mathcal{L}(T,X) = -V(T)\sqrt{1-2X}\ . \tag{4.3.1}$$

Знак минус испред потенцијала обезбеђује стабилност теорије [66].

Коњуговани импулс је

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}_{tach}}{\partial \dot{T}} = \frac{V(T)}{\sqrt{1-2X}} \frac{\partial X}{\partial \dot{T}} , \tag{4.3.2}$$

где је $\dot{T} = \partial T / \partial t$. Динамика тахионског поља у закривљеном простор-времену (варирањем дејства (4.1.1) са тахионском густином лагранжијана (4.3.1)) описује се једначином кретања [10]

$$D_{\mu}\partial^{\mu}T - \frac{D_{\mu}\partial_{\nu}T}{1-2X}\partial^{\nu}T\partial^{\mu}T - \frac{1}{V(T)}\frac{dV(T)}{dT} = 0 , \tag{4.3.3}$$

где је D_{μ} коваријантни извод у односу на метрику $g_{\mu\nu}$. Тензор енергије-импулса је облика [68]

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{tach} + \frac{V(T)}{\sqrt{1-2X}}\partial_{\mu}T\partial_{\nu}T , \tag{4.3.4}$$

одакле се, на основу (4.1.4) и (4.1.5) може закључити да тахионском пољу одговара идеалан флуид са негативним притиском и позитивном густином енергије

$$P(X,T) = -V(T)\sqrt{1-2X} , \tag{4.3.5}$$

$$\rho(X,T) = \frac{V(T)}{\sqrt{1-2X}} . \tag{4.3.6}$$

За космолошка разматрања често се користи просторно хомогено тахионско поље $T = T(t)$ и FRW метрика (4.1.9). У том случају густина лагранжијана (4.3.1) постаје

$$\mathcal{L}_{tach} = \mathcal{L}(T,\dot{T}) = -V(T)\sqrt{1-\dot{T}^2} , \tag{4.3.7}$$

а једначина (4.3.3), односно (4.1.15) добија облик

$$\frac{\ddot{T}(t)}{1-\dot{T}^2(t)} + 3H(t)\dot{T}(t) + \frac{1}{V(T)}\frac{dV}{dT} = 0 . \tag{4.3.8}$$

Изрази за притисак и густину материје идеалног флуида су

$$P(T,\dot{T}) = -V(T)\sqrt{1-\dot{T}^2(t)}\,, \tag{4.3.9}$$

$$\rho(T,\dot{T}) = \frac{V(T)}{\sqrt{1-\dot{T}^2(t)}}\,, \tag{4.3.10}$$

параметар стања је

$$w = -(1-\dot{T}^2)\,, \tag{4.3.11}$$

Док је адијабатска брзина звука

$$c_s^2 = \left(1+2\frac{X\mathcal{L}_{XX}}{\mathcal{L}_X}\right)^{-1} = -w = 1-\dot{T}^2, \tag{4.3.12}$$

где је $\mathcal{L}_X$ парцијални извод густине лагранжијана по кинетичком члану

$$\mathcal{L}_X = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X}\,. \tag{4.3.13}$$

Важно је рећи да оваква веза параметра стања и адијабатске брзине звука не постоји у случају лагранжијана стандардног облика. Овде је увек $c_s^2 \leq 1$, док за стандардне лагранжијане важи да је $c_s^2 = 1$ без обзира на вредност параметра стања w [5].

4.4 Хамилтонијан и маса тахионског поља

Дискусија о хамилтонијану тахионског поља је занимљива. Разлог је једноставан, хамилтонијан је одржана величина, без обзира на облик динамичке једначине, о чему ће овде бити речи [6, 20].

Посматрамо просторно хомогено тахионско поље у равном простор-времену

$$\mathcal{L}_{tach} = \mathcal{L}(T,\dot{T}) = -V(T)\sqrt{1-\dot{T}^2}\,. \tag{4.4.1}$$

Коњуговани импулс следи из (4.3.2)

$$\Pi = \frac{\dot{T}}{\sqrt{1-\dot{T}^2}}V(T)\,, \tag{4.4.2}$$

одакле је

$$\dot{T} = \frac{\varepsilon\Pi}{\sqrt{\Pi^2 + V^2(T)}}, \tag{4.4.3}$$

где је

$$\varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon^2 = +1. \tag{4.4.4}$$

Правилан избор је $\varepsilon = +1$, што је показано у Додатку 1, одакле следи

$$\dot{T} = \frac{\Pi}{\sqrt{\Pi^2 + V^2(T)}}. \tag{4.4.5}$$

Сада је хамилтонијан система

$$\mathcal{H}_{tach} = \Pi\dot{T} - \mathcal{L}_{tach}(T, \dot{T}) = \sqrt{\Pi^2 + V^2(T)}. \tag{4.4.6}$$

Једначина кретања добија облик

$$\ddot{T}(t) - \frac{1}{V(T)}\frac{dV}{dT}\dot{T}^2(t) = -\frac{1}{V(T)}\frac{dV}{dT}. \tag{4.4.7}$$

Једначина је нелинеарна, садржи члан са квадратом првог извода поља по времену. Овај „фрикциони“ члан на први поглед указује на „неконзервативност“ хамилтонијана система. Међутим, једначина (4.4.7) се може преписати у подеснијем облику

$$\dot{T}(t)\frac{d\dot{T}(t)}{dT} = -\left(1 - \dot{T}^2(t)\right)\frac{1}{V(T)}\frac{dV(T)}{dT} \tag{4.4.8}$$

Интеграцијом једначине (4.4.8) добија се

$$\sqrt{1 - \dot{T}^2(t)} = \frac{V(T)}{C}, \tag{4.4.9}$$

односно

$$C = \frac{V(T)}{\sqrt{1 - \dot{T}^2(T)}}, \tag{4.4.10}$$

где је C константа интеграције. Са друге стране, користећи израз (4.4.2) за коњуговани импулс, израз за хамилтонијан (4.4.6) постаје [6, 20]

$$\mathcal{H}_{tach} = \frac{V(T)}{\sqrt{1-\dot{T}^2(T)}}, \tag{4.4.11}$$

одакле следи да је хамилтонијан први интеграл кретања, не зависи експлицитно од времена и одржана је величина

$$\mathcal{H}_{tach} = C. \tag{4.4.12}$$

Напоменимо да за хамилтонијан стандардног облика са канонским кинетичким чланом,

$$\mathcal{H}_{\phi} = \frac{1}{2}\Pi_{\phi}^2 + V(\phi), \tag{4.4.13}$$

важи $\mathcal{H}_{\phi} = const$, док за хамилтонијан (4.4.6) важи

$$\mathcal{H}_{tach}^2 = \Pi^2 + V^2(T) = C^2 \tag{4.4.14}$$

Размотримо, сада, како изгледа масени члан за тахионски лагранжијан. Подсетимо се да се за (хомогено) скаларно поље ϕ, чија је густина лагранжијана стандардног облика

$$\mathcal{L}_{\phi} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad V(\phi) = \frac{1}{2}m_{\phi}^2\phi^2, \tag{4.4.15}$$

квадрат масе дефинише преко другог извода потенцијала $V(\phi)$ по пољу

$$m_{\phi}^2 = \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2}. \tag{4.4.16}$$

Међутим, овај израз важи само за стандардне лагранжијане са канонским кинетичким чланом, тј. облика (4.4.15). У случају општег облика густине лагранжијана користи се израз [69]

$$m^2 = -\frac{1}{A_1}\left(\frac{\ddot{A}_1}{2} - \frac{\dot{A}_2}{2} + A_3\right), \tag{4.4.17}$$

који се добија из разматрања полова пропагатора датог скаларног поља. Изрази за A_1, A_2 и A_3 су

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{T}^2}, \quad A_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{T}\partial T}, \quad A_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial T^2}. \tag{4.4.18}$$

За случај тахионског поља и густине лагранжијана (4.4.1) следи [20]

$$m_{tach}^2 = \frac{1}{V(T)}\frac{d^2V(T)}{dT^2} - \left(\frac{1}{V(T)}\frac{dV(T)}{dT}\right)^2 (2+\dot{T}^2)\,. \tag{4.4.19}$$

На пример, за тахионске потенцијале (о којима ће бити речи у наставку)

$$V_1(T) = e^{-\alpha T}, \quad \alpha > 0\,, \tag{4.4.20}$$

$$V_2(T) = \frac{1}{\cosh(\beta T)}, \quad \beta > 0\,, \tag{4.4.21}$$

$$V_3(T) = \frac{1}{\kappa T}, \quad \kappa > 0\,, \tag{4.4.22}$$

квадрати маса су, редом

$$m_1^2 = -\alpha^2(1+\dot{T}^2) < 0\,, \tag{4.4.23}$$

$$m_2^2 = -\beta^2\left(\frac{1}{\cosh^2(\beta T)} + \sinh^2(\beta T)(2+\dot{T}^2)\right) < 0\,, \tag{4.4.24}$$

$$m_3^2 = -\frac{\dot{T}^2}{T^2} < 0\,. \tag{4.4.25}$$

У сва три случаја квадрат масе је негативна величина, тахионска поља заиста описују тахионске системе (подсетимо се да је једна од дефиниција тахиона, односно тахионских система да је квадрат масе негативан [70]).

4.5 Класе тахионских потенцијала

У оквиру космолошких разматрања тахионске потенцијале $V(T)$ је подесно разврстати у класе. Разврставање се врши на основу параметра λ, који се за моделе са лагранжијаном тахионског типа дефинише [71]

$$\lambda \equiv -\frac{M_{pl}}{V^{3/2}(T)}\frac{dV(T)}{dT}\,. \tag{4.5.1}$$

Прецизније, класе потенцијала се одређују у зависности од асимптотских особина параметра λ. Не улазећи у детаље, довољно је рећи да природа решења динамичких једначина (тахионских) поља у многоме зависе од понашања овог параметра. Детаљније о параметру λ за космолошке моделе са стандардним обликом лагранжијана се може наћи у раду [72], док се за моделе са лагранжијаном тахионског типа може наћи у раду [71].

На основу параметра λ тахионски потенцијали су разврстани у три класе: $\lambda = \text{const}$, $\lambda \to 0$ (асимптотски) и $|\lambda| \to \infty$ (асимптотски).

(i) $\lambda = \text{const}$.

Типичан представник ове класе је инверзни квадратни потенцијал $V(T) = M^2 T^{-2}$ (у случају теорије са стандардним обликом лагранжијана типичан представник је експоненцијални потенцијал).

(ii) $\lambda \to 0$ асимптотски.

У ову класу спада неколико типова тахионских потенцијала.

(iia) $V(T) = M^{4-n} T^{-n}$, за $0 < n < 2$.

Овај потенцијал је коришћен за описивање тахионске инфлације [11], параметар λ тежи нули за $T \to \infty$.

(iib) $V(T) = V_0 e^{1/(\mu T)}$.

Овај потенцијал је коришћен за моделе са квинтесенцијом [73]. Параметар λ тежи нули за $T \to \infty$.

(iic) $V(T) = V_0 e^{\frac{1}{2} M^2 T^2}$.

Потенцијали овог облика се појављују у теоријама са D-бранама, односи се на ексцитације (масивних) скаларних поља [74]. Поседује минимум за $T = 0$, параметар λ тежи нули за $T \to 0$.

(iii) $|\lambda| \to \infty$ асимптотски.

И у овој класи постоји неколико типова тахионских потенцијала.

(iiia) $V(T) = M^{4-n} T^{-n}$, за $n > 2$.

Параметар λ тежи бесконачности за $T \to \infty$.

(iiib) $V(T)=V_0 e^{-\mu T}$.

Овај потенцијал је разматран у оквиру тахионске инфлације [75]. Параметар λ тежи бесконачности за $T\to\infty$. Преузет је из теорије струна, из модела који разматрају пар брана-антибрана ($D_3\bar{D}_3$) [76]. У ову класу спада и потенцијал облика $V(T)=V_0/\cosh(MT)$, такође преузет из теорије струна [77] и разматран у оквиру тахионске инфлације [8].

(iiic) $V(T)=V_0 e^{-\frac{1}{2}M^2T^2}$.

Модели који користе потенцијал овог облика спадају у моделе са тзв. „котрљајућим тахионима“ (*rolling tachyons*), тахионско поље се „котрља“ низ потенцијал ка бесконачности, при чему $\lambda\to\infty$.

Тахионски потенцијали који ће овде бити разматрани поседују следеће карактеристике: имају позитивну вредност за $T=0$, монотоно опадају и теже нули у бесконачности [8]

$$V(0)>0,\quad V'(T>0)<0,\quad V(T\to\infty)\to 0. \tag{4.5.2}$$

Тахионски потенцијали који задовољавају ове услове су:

- Експоненцијално опадајући потенцијал,
- Инверзни косинус хиперболички потенцијал и
- Инверзни степени потенцијал.

Ови потенцијали су ограничени одоздо.

Први наведени потенцијал, експоненцијалног облика $V(T)=e^{\alpha T}$, за реалан позитиван константан параметар α не задовољава поменуте услове, па ће бити разматран само експоненцијално опадајући потенцијал (*слика 1(а)*)

$$V(T)=e^{-\alpha T},\quad \alpha>0. \tag{4.5.3}$$

Други потенцијал, инверзни косинус-хиперболички је облика (*слика 1(б)*)

$$V(T)=\frac{1}{\cosh(\beta T)}=\frac{2}{e^{\beta T}+e^{-\beta T}},\quad \beta>0. \tag{4.5.4}$$

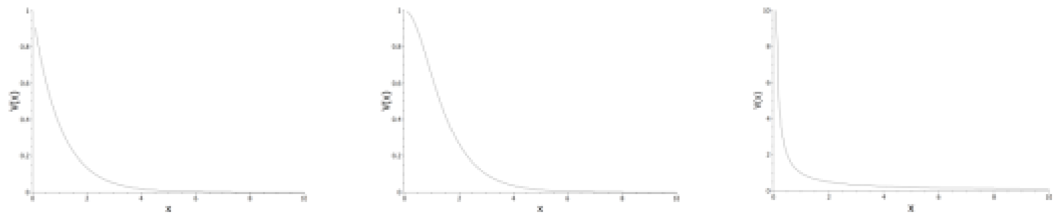
Овај потенцијал достиже максимум у $T = 0$,тежи нули за велике вредности аргумента и поседује симетрију парности $T \to -T$. Коришћен је у многим космолошким моделима, пре свега за описивање периода инфлације [8, 72, 78].

Трећи потенцијал је облика

$$V(T) \propto T^n , \tag{4.5.5}$$

где је n реалан број. У складу са условима (4.5.2), степен n мора бити негативан број. Разматраће се најједноставнији случај, $n = -1$ (*слика 1(в)*)

$$V(T) = \frac{1}{\kappa T}, \quad \kappa - const > 0 . \tag{4.5.6}$$



(а) *(б)* *(в)*

Слика 1:Графици функција $V(T)$ *за*

$T \geq 0$ *; (а)* $V(T) = e^{-\alpha T}$ *, (б)* $V(T) = 1/\cosh(\beta T)$ *, (в)* $V(T) = 1/\kappa T$.

4.6 Стандардни космолошки модели инфлације

Теорија Великог праска (*Big Bang*) је прва класична теорија која је успешно описала и предвидела битне карактеристике у еволуцији Свемира добијених из космолошких посматрања: Хаблово ширење Свемира, постојање микроталасног позадинског зрачења (Cosmic Microwave Backgroud Radiation, *CMB*) и распрострањеност лаких хемијских елемената [79]. Међутим, није могла да реши неке космолошке проблеме, као што су равност Свемира, проблем хоризонта, постојање сингуларитета на почетку еволуције Свемира.

Могуће решење за ове и друге космолошке проблеме је предложено 80-их година прошлог века. У основи идеје је претпоставка да је у веома раној еволуцији Свемира постојао период драстично брзог (експоненцијалног) ширења Свемира, *период инфлације* [80, 81, 82, 83, 84]. У раду [80], у коме је први пут изнета идеја (у покушају да се превазиђе проблем сингуларитета), инфлаторно ширење Свемира се описује увођењем додатних чланова у Ајнштајн-Хилбертово дејство за гравитацију. Почев од рада [81], овај период се описује преко скаларног поља (једног или више), *инфлатона*.

Ова једноставна и врло примамљива идеја се брзо развијала. Може се рећи да модел космолошке инфлације не само да решава поменуте космолошке проблеме, већ на природан начин уводи космолошке пертурбације настале из квантних флуктуација инфлатона (и метричког тензора). Ове квантне флуктуације се описују у семи-класичном прилазу квантном теоријом поља на закривљеним просторима [85, 86, 87].

Почев од $10^{-10}\,s$ (од почетка еволуције Свемира) па све до данас описивање еволуције Свемира је засновано на добро познатим и провереним законима физике елементарних честица, физике језгра, физике атома, теорије гравитације, и физике (идеалних) флуида. Овај тренутак одговара енергији од $1\,TeV$, која је реда величине енергији са којом располажу данашњи убрзавачи честица. Период пре $10^{-10}\,s$ одговара енергијама које су веће од $1\,TeV$, тј. нама (тренутно) експериментално недоступне, тако да проучавање овог периода у еволуцији Свемира допушта различите теоријске моделе и претпоставке, бар у оној мери колико је сам период фасцинантан [88].

Да би се описале флуктуације које постоје у вредностима температуре детектоване у *CMB* спектру потребно је претпоставити примордијалну природу космолошких флуктуација. Претпоставља се да су примордијалне флуктуације настале у веома раној еволуцији Свемира ($\sim 10^{-34}\,s$), тј. за време трајања космолошке инфлације. Модел космолошке инфлације објашњава како су ове микроскопске квантне флуктуације (пертурбације) густине материје космолошког флуида, захваљујући инфлаторном ширењу Свемира

„нарасле“ до макроскопских размера, већих од физичког хоризонта у том тренутку. Након што су пертурбације „напустиле“ хоризонт, бивају „замрзнуте“ одржавајући амплитуду константном, све до поновног „уласка“ унутар хоризонта. Овај улазак се дешава након завршетка периода инфлације, када је Свемир био „стар“ око 10^5 година, тј. нешто пре периода декупловања *CMB* фотона од остатка космолошке материје [88]. Унутар хоризонта амплитуде флуктуација више нису контантне, јер су сада у каузалном контакту са фотонима. Фотони почињу да „скупљају“ информације о овим флуктуацијама материје (и простор-времена), које данас видимо у спектру *CMB*-а. Еволуције пертурбација након њиховог повратка унутар хоризонта је теоријски добро проучен проблем, тако да је Свемир могуће „посматрати“ преко *CMB* спектра и проверити ваљаност претпоставке да је постојао период инфлације и да су у том периоду настале примордијалне флуктуације [89, 90].

Постоје неколико начина преко којих се космолошка инфлација може реализовати. Најкоришћенији модел инфлације са једним инфлатонским пољем заснива се на механизму „спорог котрљања“ (*slow roll*) инфлатона са стандардним обликом лагранжијана, након кога следи модел са нестандардним обликом лагранжијана. Да поновимо, у моделима без инфлатона, уз модификацију Ајнштајн-Хилбертовог дејства за гравитацију такође се може реализовати инфлација [58, 91].

За време трајања инфлације, космолошки фактор скале $a(t)$ се убрзано увећавао [92]

$$\ddot{a}(t) > 0\,. \tag{4.6.1}$$

Треба нагласити да опсервабилни подаци указују да се Свемир и данас убрзано шири [93, 94, 95, 96, 97], међутим, под инфлацијом се подразумева само рани период у еволуцији Свемира. Услов (4.6.1) на основу једначине за убрзање (4.1.11) доводи до битног закључка да је притисак космолошког флуида за време инфлације имао негативну вредност, односно да је параметар стања негативан

$$P(X,T) < -\frac{1}{3}\rho(X,T) \quad \Rightarrow \quad w < -\frac{1}{3}. \tag{4.6.2}$$

Видимо да за тахионски лагранжијан (4.3.7) овај услов одговара случају

$$\dot{T}^2 < \frac{2}{3}. \tag{4.6.3}$$

Најважнији опсервабилни тест постојања периода инфлације представља спектар *CMB* зрачења. Флуктуације температуре у спектру се могу повезати са пертурбацијама метрике (написане преко *ADM* разлагања [98])

$$ds^2 = -\left[(1+A)^2 - \frac{1}{a^2}e^{-2\psi}(\partial B)^2\right]dt^2 + 2\partial_i B dt dx^i + a^2\left(e^{2\psi}\delta_{ij} + h_{ij}\right)dx^i dx^j, \tag{4.6.4}$$

где A, B, ψ описују пертурбације скаларног типа, док h_{ij} описује пертурбације тензорског типа (гравитационе таласе). Ове пертурбације метрике су настале као последица постојања флуктуација δT скаларног поља (не нужно тахионског) за време инфлације [55]

$$T(t,\vec{x}) = T_0(t) + \delta T(t,\vec{x}). \tag{4.6.5}$$

Увођењем (калибрационо инваријантне) тзв. *претурбације кривине* ζ [99]

$$\zeta(t,\vec{x}) \equiv \psi(t,\vec{x}) - \frac{H(t)}{\dot{T}(t)}\delta T(t,\vec{x}), \tag{4.6.6}$$

проблем се своди на решавање динамичке једначине за ζ и, затим, њено квантовање.

Може се показати да се у овом поступку [5, 100] динамика пертурбације кривине ζ описује квадратичним лагранжијаном, тј. лагранжијаном за хармонијски осцилатор (стандардном и/или инверзном) са временски зависним параметрима у простору Минковског [5, 100]. Ово је један од разлога нашег разматрања тахионских и одговарајућих локално еквивалентних квадратичних лагранжијана. Још један битан мотив је чињеница да су амплитуде (бар неких од) модова ових пертурбација у тренутку настанка биле реда величине Планкове дужине [101, 102], што повлачи за собом могућност разматрања проблема на неархимедовим просторима [22].

По завршетку инфлације Свемир не садржи ни један тип материје (осим материје описане инфлатоном). Сва материја настаје при осциловању инфлатона у околини тачке минимума потенцијала. За случај тахионских лагранжијан и тахионских потенцијала, минимум потенцијала је најчешће у бесконачности и овакав начин стварања честица материје није могућ. Тада густина материје тахионског поља увек доминира Свемиром, што је у супротности са чињеницом да је након инфлације доминантна компонента била релативистичка материја.

Може се закључити да тахионско поље као инфлатон не може бити „одговорно“ за цео период инфлације. Међутим, може се показати да се рани период инфлације (када је Свемир имао густину реда Планкове густине) може описати тахионским пољем [10].

4.7 Тахионска *p*-адична инфлација

Почетак инфлације и њен квантни аспект спадају у најинтересантнија питања модерне космологије. Како је реч о процесима близу Планкове скале, они су одличан полигон за разматрање релевантности неархимедове геометрије и аделичног приступа. Зато је битно рећи бар оно најосновније о *p*-адичној инфлацији.

p-Адична инфлација се може разматрати преко (упрошћеног) модела теорије струна, прецизније ефективне теорије из које се добија амплитуда расејања *p*-адичних отворених тахионских струна.

p-Адично разматрање струна као алтернатива и допуна реалном случају је битна за повезивање *p*-адичних теорија са теоријама дефинисаним над пољем реалних бројева. Ова веза се остварује у аделичној теорији струна која равноправно третира p-адичне и реалне струне.

Веза реалне $A^{(\infty)}$ и p-адичних амплитуде $A^{(p)}$ дата је релацијом [40]

$$A^{(\infty)} = [\prod_p A^{(p)}]^{-1}. \tag{4.7.1}$$

За разлику од реалног случаја, p-адична интеграција при израчунавању амплитуде расејања је увек изводљива, са резултатом који је често једноставног облика. То доводи до тога да се p-адична теорија струна може представити као ефективна теорија скаларног поља из које се у потпуности могу извести изрази за амплитуде расејања. Као што ћемо видети, ова теорија поља је нелокалног карактера

Амплитуда расејања p-адичних отворених струна се може добити из ефективног лагранжијана за скаларно тахионско поље [103]

$$\mathcal{L}_p = -\frac{1}{2}\phi p^{-\frac{1}{2}\Box}\phi + \frac{1}{p+1}\phi^{p+1}. \tag{4.7.2}$$

Лагранжијан овог облика је коришћен за разматрање p-адичне инфлације [104]. Детаљније о овом лагранжијану су дати у Додатку 2 [19]. Дејство је облика

$$S = \frac{m_s^4}{g_p^4}\int d^4x\left(-\frac{1}{2}\phi p^{-\frac{\Box}{2m_s^2}}\phi + \frac{1}{p+1}\phi^{p+1}\right), \quad \frac{1}{g_p^2} = \frac{1}{g_s^2}\frac{p^2}{p-1}, \tag{4.7.3}$$

где је g_s константа осворене струне и m_s параметар скале масе струне.

Сложеност теорије се може видети из самог израза за тензор енергије-импулса. Стандардни облик тензора енергије-импулса идеалног флуида који одговара овом пољу је облика [105]

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu} = \frac{m_s^4}{2g_p^2} g_{\mu\nu} &\left\{ \left[\phi e^{-\frac{\Box}{m_p^2}} \phi - \frac{2}{p+1} \phi^{p+1} \right] + \frac{1}{m_p^2} \int_0^1 d\tau \left(\Box e^{-\frac{\tau\Box}{m_p^2}} \phi \right) \left(e^{-\frac{(1-\tau)\Box}{m_p^2}} \phi \right) \right\} \\
+ \frac{m_s^4}{2g_p^2 m_p^2} &\left\{ g_{\mu\nu} \int_0^1 d\tau \left(\partial_\alpha e^{-\frac{\tau\Box}{m_p^2}} \phi \right) \left(\partial^\alpha e^{-\frac{(1-\tau)\Box}{m_p^2}} \phi \right) - 2\int_0^1 d\tau \left(\partial_\mu e^{-\frac{\tau\Box}{m_p^2}} \phi \right) \left(\partial_\nu e^{-\frac{(1-\tau)\Box}{m_p^2}} \phi \right) \right\},
\end{aligned}
\tag{4.7.4}
$$

из ког следе изрази за густину ρ и притисак P .

Разматрана су два режима за описивање инфлације. Први режим је за мали прост број *p*, при чему је потенцијал довољно раван и инфлација се одвија на стандардан начин. Други режим је за $p >> 1$, потенцијал је врло стрм, али се *p*-адично скаларно поље „споро котрља“. Ово занимљиво понашање поља је последица нелокалности теорије. Ефекти виших извода у изразу за лагранжијан теже да у довољној мери успоре промену поља, упркос врло стрмом потенцијалу. Занимљиво је и то да је у овој теорији кинетички члан лагранжијана одговоран за инфлацију, за разлику од теорије са стандардним обликом лагранжијана [104]. Резултати које даје модел *p*-адичне инфлације се (за сада) добро слажу са резултатима добијених из спектра *CMB* зрачења [104], макар за неке конкретне вредности ($p = 19$).

Ова област свакако остаје као интересантно подручје истраживања у коме се преплићу теорија струна, квантна теорија поља, класична и квантна космологија - као шири оквир инфлаторне космологије. Напоменимо да се у свим овим разматрањима, тахионско поље и тахиони посматрају у оквиру класичне физике и квантни аспекти су или потпуно непознати и занемарени, или се само индиректно појављују кроз пертурбације поља. За дубље разумевање ових процеса, посебно на Планковој скали, неархимедовим просторима и у квантној теорији, потребно је разматрати квантне моделе, чему ова дисертација тежи да делимично допринесе.

5 Налажење локално еквивалентних лагранжијана

5.1 0-димензионални прилаз

Космолошки модели базирани на лагранжијану *DBI* типа су релативно новијег датума, привлаче велику пажњу истраживача и добра су алтернатива моделима са „стандардним-канонским“ лагранжијаном - дејством. Неки од ових космолошких модела су егзактно решиви, али динамика, а посебно квантна динамика скаларних поља (међу њима и тахионска) је или тешко решива, само нумерички решива, или у потпуности непозната. Ово последње се посебно односи на квантовање скаларног поља, поготово на наерхимедовим пољима.

Сенова хипотеза, или хипотезе, о суштинској улози тахиона и тахионске материје у интеракцији *D*-брана је привукла велику пажњу, понудивши фундаменталну основу за космолошке моделе, посебно инфлаторне, базиране на теорији струна, брана и струнској теорији поља. Релативно брзо је утврђено да инфлација вођена „тахионским инфлатоном“ тече исувише брзо (потенцијали су сувише „стрми“ да би била у сагласности са мерењима). Са друге стране, у раду [106] је показано да p-адична инфлација, односно модели на ултраметричким просторима (уједно и пример нелокалних теорија) имају другачију динамику, довољно времена за цео инфлаторни ток, и чак показују солидно слагање са мерењима CMB спектра за неке конкретне вредности броја p (рецимо $p=19$). То су, ипак, само парцијални резултати, и врло је отворено и интересантно питање да ли се може моделирати квантни почетак инфлације и да ли може бити инваријантан избор бројног поља, конзистентан и на Архимедовим и неархимедовим просторима. У коначном, да ли постоји аделични модел који би био у добром слагању са садашњим подацима и евентуално предвидео нове ефекте.

Истраживања у овом правцу су отпочела још 2003. године [107], иниране занимљивом идејом Сајана Кара (*Sayan Kar*) [108], о разматрању 0-димензионалног лимеса Сеновог лагранжијана за тахионско поље [109]. У овој дисертацији приказујемо преглед ових истраживања, са посебним акцентом на најновије резултате, од којих ће неки тек бити публиковани.

Размотримо класичну једначину кретања просторно хомогеног тахионског поља на Архимедовим просторима.

У 0-димензионалном прилазу врши се прелаз са класичне теорије поља на класичну механику. Ово је математички еквивалентно случају просторно хомогеног скаларног поља $T = T(t)$ у равном простор-времену. Теорија се поједностављује, еволуција тахионског поља постаје јаснија и директније се може разматрати класична и квантна еволуција одговарајућег „тахионског“ система [15, 16]. На први поглед, овај једноставан модел личи на класичан модел честице која се креће у константном спољашњем пољу у присуству пригушења које је пропорционално другом степену брзине честице [16, 17]. Ипак, без обзира на постојање „пригушења“, густина хамилтонијана је, као што је већ речено, одржана величина [6, 7].

Поједностављење се врши коресподенцијом $x^i \to t$, $T \to x$, $V(T) \to V(x)$ [15, 16]. Густина лагранжијана, односно лагранжијан добија облик

$$\mathcal{L}_{tach} = -V(x)\sqrt{1-\dot{x}^2}\,. \tag{5.1.1}$$

Поред тога, канонски коњуговани импулс и густина хамилтонијана су

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}_{tach}}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} V(x)\,, \tag{5.1.2}$$

$$\mathcal{H}_{tach}(x,p) = \sqrt{p^2 + V^2(x)}\,. \tag{5.1.3}$$

Једначина кретања је облика

$$\ddot{x}(t) - \frac{1}{V(x)}\frac{dV}{dx}\dot{x}^2(t) = -\frac{1}{V(x)}\frac{dV}{dx}. \tag{5.1.4}$$

Ова једначина садржи члан са $\dot{x}^2$. На нивоу класичне механике, једначина одговара једнодимензионалном систему са тзв. Њутновом фрикцијом (ако једначина садржи члан са $\dot{x}$, онда се ради о Стоксовом фрикционом члану) [110].

5.2 Конструкција лагранжијана из једначине кретања

Проблем квантовања теорије са тахионским лагранжијаном (хамилтонијаном) је веома захтеван и још увек није (потпуно) решен. У овој дисертацији се полази од идеје да се на класичном нивоу може изабрати други облик лагранжијана, који ће описивати исту динамику, тј дати исту једначину кретања и бити једноставнијег облика [16, 18, 19]. Наравно, еквивалентност лагранжијана на класичном нивоу не повлачи за собом квантну еквивалентност, што представља познат проблем при преласку са класичног на квантно разматрање.

Како је основна мотивација и делимична примена нашег разматрања (веома) кратак временски интервал – почетак периода инфлације, „локална еквивалентност“ лагранжијана је прихватљива претпоставка. Под локалном еквивалентношћу се подразумева постојање везе између старе x и нове промењиве y облика

$$dy = f(x)dx. \tag{5.2.1}$$

Избор погодног (и еквивалентног) лагранжијана омогућава поступак квантовања коришћењем Фејнманових функционалних интеграла за налажење амплитуде прелаза. Ово је посебно важно за разматрања на и близу Планкове скале, због „универзалности“ овог приступа на $\mathbb{Q}_\infty$, $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{A}$ [43].

Поступак налажења локално еквивалентног лагранжијана стандардног облика почиње од општије једначине кретања која садржи члан са квадратом „брзине“ (која је истог облика као једначина (5.1.4))

$$\ddot{x}(t)+b(x)\dot{x}^2(t)+g(x)=0\,. \tag{5.2.2}$$

Лагранжијан стандардног облика из ког произилази једначина (5.2.2) може се представити формулом [18]

$$L_{st}(x,\dot{x})=\frac{1}{2}\dot{x}^2 e^{2I(x)}-\int^x g(x)e^{2I(x)}dx\,, \tag{5.2.3}$$

где је

$$I(x)=\int^x b(x)dx\,, \tag{5.2.4}$$

при чему је доња граница интеграције произвољна. За случај једначине (5.1.4) следи

$$b(x)=-\frac{d\log V(x)}{dx}\,, \tag{5.2.5}$$

$$g\left(x\right)=-b\left(x\right) \tag{5.2.6}$$

$$I(x)=-\log V(x), \qquad e^{2I}=\frac{1}{V^2}\,. \tag{5.2.7}$$

Заменом израза (5.2.5), (5.2.6) и (5.2.7) у (5.2.3) добија се

$$L_{st}(x,\dot{x})=\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}}{V(x)}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{1}{V(x)^2}\,. \tag{5.2.8}$$

Увођењем нове променљиве Y и одговарајућег потенцијала $W(Y)$ локалном сменом променљивих

$$Y=\int^x \frac{dx}{V(x)}\,, \tag{5.2.9}$$

$$W(Y)=\frac{1}{2V(x(Y))^2}\,, \tag{5.2.10}$$

коначно се може написати израз за лагранжијан у стандардном облику, са канонским кинетичким чланом

$$L_{st}(Y,\dot{Y}) = \frac{1}{2}\dot{Y}^2 + W(Y)\,. \tag{5.2.11}$$

На основу изнетог поступка, једноставно се може добити еквивалентни лагранжијан стандардног облика за различите функције потенцијала. Приметимо да је функција (5.2.10) ненегативна и да у израз (5.2.11) улази са позитивним, наизглед погрешним, предзнаком.

5.3 Класичне канонске трансформације

Уопштавање поступка налажења локално еквивалентних лагранжијана може се остварити коришћењем класичних канонских трансформација [20, 22]. У овом делу дисертације показаћемо да се класичне канонске трансформације могу користити како би се појеадноставиле динамичке једначине (кретања), на основу којих би се могао одредити облик локално еквивалентног лагранжијана. Овако добијени лагранжијан би имао стандардни облик, са канонским кинетичким чланом, и који би, макар на класичном нивоу, описивао исту динамику. Ово, дакле, представља уопштење претходног поступка налажења лагранжијана стандардног облика из динамичких једначина, презентованог у раду [18].

Употреба класичних канонских трансформација се показала као врло ефикасан начин да се на основу динамичких једначина добије лагранжијан система који би имао стандардни–канонски облик. У том случају се поједностављује процедура квантовања система. Да поновимо, квантовање теорија са нелинеарним лагранжијанима је врло захтеван задатак, некад и нерешив.

Опште је познато из Хамилтоновог формализма класичне механике да канонске трансформације предстаљају промену фазних координата (варијабли), тако што пар фазних координата (x,k) преводе у нови пар $(\tilde{x},\tilde{k})$ задржавајући облик Хамилтонових једначина кретања [111, 112, 113]

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}(x,k)}{\partial k} \quad \to \quad \dot{\tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{x},\tilde{k})}{\partial \tilde{k}},$$
$$\dot{k} = -\frac{\partial \mathcal{H}(x,k)}{\partial x} \quad \to \quad \dot{\tilde{k}} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{x},\tilde{k})}{\partial \tilde{x}}. \tag{5.3.1}$$

Да би се одржао облик Хамилтонових једначина, трансформација $(x,k) \to (\tilde{x},\tilde{k})$ мора да задовољи два услова. Први услов је да Поасонове заграде остану непромењене

$$\{x,k\}_{PB} = \{\tilde{x},\tilde{k}\}_{PB} = 1. \tag{5.3.2}$$

Други услов је да је Јакобијан трансформације једнак јединици

$$J = \frac{\partial(x,k)}{\partial(\tilde{x},\tilde{k})} = 1. \tag{5.3.3}$$

У теорији класичних канонских трансформација постоји неколико еквивалентних начина да се дефинише функција из које произилазе ове трансформације. То су генератрисе класичних канонских трансформација и оне могу зависити како од полазних, тако и од новоуведених координата и импулса.

Овде ће бити коришћена генератриса као функција полазног импулса p и новоуведене координате $\tilde{x}$

$$G(\tilde{x},k) = -kF(\tilde{x}), \tag{5.3.4}$$

где је $F(\tilde{x})$ произвољна реална функција нове координате. За овакав избор генератрисе (у смислу да зависи од „старог“ импулса и „нове“ координате), изрази који повезују старе и нове величине су

$$x = -\frac{\partial G}{\partial k} = F(\tilde{x}),$$
$$\tilde{k} = -\frac{\partial G}{\partial \tilde{x}} = kF'(\tilde{x}), \tag{5.3.5}$$

тј. нове величине су уведене преко старих на начин

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= F^{-1}(x),\\ \tilde{k} &= kF'(\tilde{x}),\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

при чему $F^{-1}(x)$ представља инверзну функцију функције $F(\tilde{x})$, док је

$$F'(\tilde{x}) = \frac{dF(\tilde{x})}{d\tilde{x}}. \tag{5.3.7}$$

Оваквим избором генератрисе динамичка једначина у равном простор-времену (5.1.4) постаје

$$\ddot{\tilde{x}} + \left(\frac{F''(\tilde{x})}{F'(\tilde{x})} - F'(\tilde{x})\frac{d\ln V(F(\tilde{x}))}{dF(\tilde{x})}\right)\dot{\tilde{x}}^2 + \frac{1}{F'(\tilde{x})}\frac{d\ln V(F(\tilde{x}))}{dF(\tilde{x})} = 0. \tag{5.3.8}$$

Ова једначина и даље садржи члан са $\dot{\tilde{x}}^2$ и њено решавање (и касније квантовање) је компликовано. Међутим, функција $F(\tilde{x})$ је још увек произвољна и може се изабрати на погодан начин.

Избор функције $F(\tilde{x})$ може бити такав да доведе до поједностављења једначине (5.3.8), тј. да члан који садржи $\dot{\tilde{x}}^2$ буде једнак нули. Покажимо да је један такав добар избор директно повезан са функцијом потенцијала. Прецизније, функција $F(\tilde{x})$ се бира (у овом случају дефинише), делимично индиректно, преко инверзне функције $F^{-1}(x)$ и задатог потенцијала

$$F^{-1}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{V(y)}. \tag{5.3.9}$$

Избор доње границе интеграла x_0 је произвољан. Одређивањем функције $F(\tilde{x})$ преко њене инверзне функције, која је фиксирана изразом (5.3.9), једначина кретања (5.3.8) се поједностављује и добија облик

$$\ddot{\tilde{x}} + \frac{1}{F'(\tilde{x})}\frac{d\ln V(F(\tilde{x}))}{dF(\tilde{x})} = 0, \tag{5.3.10}$$

јер је члан уз $\dot{\tilde{x}}^2$ у (5.3.8) једнак нули,

$$\frac{F''(\tilde{x})}{F'(\tilde{x})} - F'(\tilde{x})\frac{d\ln V(F(\tilde{x}))}{dF(\tilde{x})} = 0. \tag{5.3.11}$$

Сада се може показати [18, 22] да оваквој динамичкој једначини одговара стандардни лагранжијан са канонским кинетичким чланом, облика

$$L_{can}(\tilde{x},\dot{\tilde{x}}) = \frac{1}{2}\dot{\tilde{x}}^2 + \frac{1}{2V(F(\tilde{x}))^2}\,. \tag{5.3.12}$$

Дакле, потенцијал „диктира“ избор генератрисе канонских трансформација. Избор генератрисе је могао бити другачији, али би се, онда, морала проверити ваљаност израза (5.3.11). Наравно, овде је, као и у претходно описаном поступку, члан који садржи потенцијал са позитивним предзнаком (израз (5.2.11)).

За квадратичне лагранжијане се релативно лако може прећи на p-адичне и аделичне моделе и разматрања. Један од разлога за то је постојање формуле Б. Драговића и Г. Ђорђевића за израчунавање амплитуде прелаза за квадратичне системе на $\mathbb{Q}_p$ [48] и проширења на аделе [43].

5.4 Примери са конкретним потенцијалима

Поставља се питање постојања критеријума по коме би се одређивало да ли ће новодобијени локално еквивалентни лагранжијан бити квадратичан по $\tilde{x}$ и $\dot{\tilde{x}}$. За сада не постоји такав критеријум, већ се за сваки задати потенцијал понаособ мора спровести цео поступак. Тако, потенцијали поменути раније доводе до локално еквивалентних квадратичних лагранжијана.

<u>Експоненцијални потенцијал</u>

За случај потенцијала (4.5.3)

$$V(x) = e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0\,, \tag{5.4.1}$$

инверзна функција (5.3.9) је

$$F^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\,, \tag{5.4.2}$$

преко које се добија израз за функцију $F(\tilde{x})$

$$F(\tilde{x}) = \frac{1}{\alpha}\ln(\alpha\tilde{x}), \qquad (5.4.3)$$

тако да генератриса (5.3.4) добија облик

$$G(\tilde{x}, p) = -\frac{p}{\alpha}\ln(\alpha\tilde{x}). \qquad (5.4.4)$$

Након извршене канонске трансформације једначина кретања преводи на добро познати облик

$$\ddot{\tilde{x}} - \alpha^2\tilde{x} = 0. \qquad (5.4.5)$$

Лагранжијан стандардног облика који одговара овој једначини кретања се може записати у облику [16]

$$L_\alpha(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = \frac{1}{2}\dot{\tilde{x}}^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\tilde{x}^2. \qquad (5.4.6)$$

Због карактера инверзне функције (5.3.9), која повезује тахионски лагранжијан (5.1.1) са квадратичним лагранжијаном (5.4.6), квадратични лагранжијан се може сматрати „локално“ еквивалентним тахионском лагранжијану.

Инверзни косинус хиперболички потенцијал

За случај потенцијала (4.5.4)

$$V(x) = \frac{1}{\cosh(\beta x)}, \quad \beta > 0, \qquad (5.4.7)$$

инверзна функција $F^{-1}(x)$ је облика

$$F^{-1}(x) = \frac{1}{\beta}\sinh(\beta x), \qquad (5.4.8)$$

одакле следи да је

$$F(\tilde{x}) = \frac{1}{\beta}\operatorname{arcsinh}(\beta\tilde{x}). \qquad (5.4.9)$$

Функција генератрисе, сада, постаје

$$G(\tilde{x}, p) = -\frac{p}{\beta}\operatorname{arcsinh}(\beta\tilde{x}). \qquad (5.4.10)$$

И за ову класу потенцијала генератриса (5.4.10) преводи једначину кретања на познати облик

$$\ddot{\tilde{x}} - \beta^2 \tilde{x} = 0, \tag{5.4.11}$$

која се може добити варирарањем лагранжијана стандардног облика са канонским кинетичким чланом [33]

$$L_\beta(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = \frac{1}{2}\dot{\tilde{x}}^2 + \frac{1}{2}\beta^2 \tilde{x}^2 . \tag{5.4.12}$$

<u>Инверзни (степени) потенцијал</u>

За случај потенцијала (4.5.6)

$$V(x) = \frac{1}{\kappa x^n}, \quad \kappa - const > 0, \quad n \in N, \tag{5.4.13}$$

инверзна функција $F^{-1}(x)$ је

$$F^{-1}(x) = \frac{\kappa}{n+1} x^{n+1}, \tag{5.4.14}$$

одакле се за генератрису канонских трансформација добија

$$G(\tilde{x}, p) = \left(\kappa(n+1)\right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{x}^{\frac{1}{n+1}} . \tag{5.4.15}$$

Применом овако дефинисане канонске трансформације једначина кретања (5.3.10) добија облик

$$\ddot{\tilde{x}}(t) - n\kappa^{\frac{2}{n+1}} (n+1)^{\frac{n-1}{n+1}} \tilde{x}^{\frac{n-1}{n+1}} = 0, \tag{5.4.16}$$

док је одговарајући локално еквивалентни лагранжијан стандардног облика

$$L_\kappa(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = \frac{1}{2}\dot{\tilde{x}}^2 + \frac{1}{2}\kappa^{\frac{2}{n+1}} (n+1)^{\frac{2n}{n+1}} \tilde{x}^{\frac{2n}{n+1}} . \tag{5.4.17}$$

Видимо да се у општем случају не добија лагранжијан квадратичног облика. Посматрајмо, сада, потенцијал (5.4.13) (4.5.6) за случај $n = 1$

$$V(x) = \frac{1}{\kappa x}, \quad \kappa - const > 0 . \tag{5.4.18}$$

Инверзна функција $F^{-1}(x)$ постаје

$$F^{-1}(x) = \frac{1}{2}\kappa x^2 , \tag{5.4.19}$$

одакле се за генератрису канонских трансформација добија

$$G(\tilde{x}, p) = -p\sqrt{\frac{2}{\kappa}\tilde{x}} . \tag{5.4.20}$$

Применом овако дефинисане канонске трансформације једначина кретања (5.3.10) добија једноставан облик

$$\ddot{\tilde{x}}(t) - \kappa = 0 , \tag{5.4.21}$$

док је одговарајући локално еквивалентни лагранжијан стандардног облика [18, 20], из ког се може добити једначина (5.4.21), облика

$$L_\kappa(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = \frac{1}{2}\dot{\tilde{x}}^2 + \kappa\tilde{x} . \tag{5.4.22}$$

У сва три случаја дошло се до стандардних лагранжијана који су квадратични по $\tilde{x}$ и $\dot{\tilde{x}}$. Лако се може приметити да се у првом и другом случају, (5.4.6) и (5.4.12), ради о лагранжијану који одговара тзв. инверзном хармонијском осцилатору са константном фреквенцом, док је у трећем случају (5.4.22), у питању лагранжијан за систем у пољу константне одбојне силе.

Укратко, у свим разматраним случајевима лагранжијани облика (5.1.1) постају локално еквивалентни системима са одбојном силом (интеракцијом), која убрзава систем, односно одговара ширењу, инфлаторним процесима.

5.5 Инверзни хармонијски осцилатор

Видели смо да је у случају два од разматрана три потенцијала лагранжијан стандардног облика, у ствари, лагранжијан за инверзни хармонијски осцилатор. Зато ћемо у овом делу укратко рећи основно о инверзном хармонијском осцилатору, не улазећи у техничке детаље.

У математичком смислу, инверзни хармонијски осцилатор је сличан (обичном) хармонијском осцилатору. Ипак, спектар енергија квантног инверзног хармонијског осцилатора није ограничен ни одоздо, нити одозго [114], квантно стање са најнижом енергијом одговара бесконачно негативној енергији, $E = -\infty$. Инверзни хармонијски осцилатор је у оквиру космолошких разматрања коришћен за описивање периода инфлације [115].

Опште решење Шредингерове једначине за инверзни хармонијски осцилатор се може представити као линеарна комбинација решења са дефинисаном парношћу

$$\Psi(x) = C\Psi_{even}(x) + D\Psi_{odd}(x), \tag{5.5.1}$$

где су C и D реалне константе, док се Ψ_{even} и Ψ_{odd} могу представити преко конфлуентних хипергеометријских функција (за више детаља, видети [116]). Увођењем оператора „анихилације“ и „креације“, што представаља стандардни поступак за случај хармонијског осцилатора на $\mathbb{Q}_\infty$, добија се теорија са такозваним уопштеним својственим стањима, која одговарају комплексним својственим вредностима енергија.

Као што је познато, својствене вредности енергија E за нестабилан систем могу имати комплексне вредности. У том случају функција потенцијалне енергије не поседује стабилну стационарну тачку (конфигурацију). За математичку формулацију непрекидног спектра и/или комплексних својствених вредности, видети радове [117, 118].

5.6 Амплитуда прелаза у стандардној квантној механици

Ако је дејство квадратично по почетној и крајњој конфигурацији система (што проистиче из квадратичности лагранжијана по координати и првом изводу координате по временском параметру), амплитуда прелаза се може представити на начин [119]

$$K\left(\tilde{x}_2, \tau; \tilde{x}_1, 0\right) = \sqrt{-\frac{1}{2\pi\hbar i} \frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial \tilde{x}_1 \partial \tilde{x}_2}} e^{i\frac{S_{cl}}{\hbar}}, \tag{5.6.1}$$

односно [33, 43, 48]

$$K_{\infty}(\tilde{x}_2,\tau;\tilde{x}_1,0)=\lambda_{\infty}\left(-\frac{1}{2h}\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial\tilde{x}_1\partial\tilde{x}_2}\right)\left|\frac{1}{h}\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial\tilde{x}_1\partial\tilde{x}_2}\right|_{\infty}^{1/2}\chi_{\infty}\Big(-\frac{1}{h}S_{cl}(\tilde{x}_2,\tau;\tilde{x}_1,0)\Big),\qquad(5.6.2)$$

где су аритметичка λ-функција и адитивни карактер дефинисани, редом, изразима (2.5.19) и (2.5.4) [26]. Избором локално еквивалентног класичног лагранжијана из претходних разматрања, који је квадратичног облика, можемо да израчунамо амплитуду прелаза на основу горњег израза.

<u>Експоненцијални потенцијал</u>

За случај потенцијала (4.5.3)

$$V(T)=e^{-\alpha T},\quad \alpha>0,\qquad(5.6.3)$$

коначно решење након извршене канонске трансформације, као и изабрани стандардни лагранжијан имају исти запис као у случају инверзног косинус хиперболичког потенцијала. Зато ћемо одмах прећи на разматрање хиперболичког потенцијала.

<u>Инверзни косинус хиперболички потенцијал</u>

За случај потенцијала (4.5.4)

$$V(x)=\frac{1}{\cosh(\beta x)},\quad \beta>0,\qquad(5.6.4)$$

коначно решење (након извршене канонске трансформације) је

$$\tilde{x}(t)=\frac{1}{2}e^{-\beta t}(\coth(\beta\tau)-1)\Big[\tilde{x}_1\left(e^{2\beta\tau}-e^{2\beta t}\right)+\tilde{x}_2\left(e^{\beta(2t+\tau)}-e^{\beta\tau}\right)\Big].\qquad(5.6.5)$$

Лагранжијан (5.4.12) је

$$\begin{aligned}L_{\beta}&=\frac{1}{8}\beta^2e^{-2\beta t}(\coth(\beta\tau)-1)^2\left(-\tilde{x}_2e^{\beta(2t+\tau)}+\tilde{x}_1e^{2\beta t}+\tilde{x}_1e^{2\beta\tau}-\tilde{x}_2e^{\beta\tau}\right)^2\\&+\frac{1}{8}\beta^2e^{-2\beta t}(\coth(\beta\tau)-1)^2\left(-\tilde{x}_2e^{\beta(2t+\tau)}+\tilde{x}_1e^{2\beta t}-\tilde{x}_1e^{2\beta\tau}+\tilde{x}_2e^{\beta\tau}\right)^2,\end{aligned}\qquad(5.6.6)$$

док је одговарајуће класично дејство

$$S_{cl}(\tilde{x}_2,\tau,\tilde{x}_1,0)=\int_0^{\tau}L_{\beta}dt=\frac{\beta}{2}\left(\left(\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2\right)\coth(\beta\tau)-\frac{2\tilde{x}_1\tilde{x}_2}{\sinh(\beta\tau)}\right),\qquad(5.6.7)$$

Применом формуле (5.6.2) добија се

$$K_\infty\left(\tilde{x}_2,\tau;\tilde{x}_1,0\right)=\sqrt{\frac{-i}{2\pi\hbar}\frac{\beta}{\sinh(\beta\tau)}}\exp\left(\frac{\beta}{2}\left(\left(\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2\right)\coth(\beta\tau)-\frac{2\tilde{x}_1\tilde{x}_2}{\sinh(\beta\tau)}\right)\right). \quad (5.6.8)$$

Инверзни (степени) потенцијал

За случај потенцијала

$$V(x)=\frac{1}{\kappa x},\quad \kappa-const>0, \quad (5.6.9)$$

израз за класичну трајекторију система (након извршене канонске трансформације) је облика

$$\tilde{x}(t)=\frac{\kappa}{2}\left(t^2-t\tau\right)+\frac{t}{\tau}\left(\tilde{x}_2-\tilde{x}_1\right)+\tilde{x}_1. \quad (5.6.10)$$

док је класично дејство (за лагранжијан (5.4.22)) квадратично по почетној и крајњој конфигурацији

$$S_{cl}=\int_0^\tau L_\kappa dt=\frac{1}{2\tau}\left(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2\right)^2+\frac{\kappa\tau}{2}\left(\tilde{x}_1+\tilde{x}_2\right)-\frac{\kappa^2\tau^3}{24}, \quad (5.6.11)$$

па се и у овом случају може извршти квантовање преко Фејнманових функционалних интеграла, коришћењем израза (5.6.1)

$$K_\infty\left(\tilde{x}_2,\tau;\tilde{x}_1,0\right)=\sqrt{\frac{-i}{2\pi\hbar\tau}}\exp\left(-\frac{i\left(\kappa\tau^4-12\kappa\tau^2\left(\tilde{x}_1+\tilde{x}_2\right)-12\left(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2\right)^2\right)}{24\hbar\tau}\right). \quad (5.6.12)$$

6 Реална, *p*-адична и аделична разматрања

6.1 Квантни *p*-адични тахионски модели

Као што је већ речено, врло је битно развити поступак на неархимедовим просторима, тј. над пољем *p*-адичних бројева (*p* представља прост број). То се постиже, бар формално математички, једноставном заменом поља реалних бројева $\mathbb{Q}_\infty$ пољем *p*-адичних бројева $\mathbb{Q}_p$. Комплексне таласне функције реалног аргумента ће бити замењене комплексним функцијама *p*-адичног аргумента [24, 26].

За *p*-адичну амплитуду прелаза (пропагатор) K_p за квадратична класична дејства, рачуната над пољем *p*-адичних бројева користићемо израз [43, 48]

$$K_p(\tilde{x}_2,\tau;\tilde{x}_1,0)=\lambda_p\Big(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial\tilde{x}_2\partial\tilde{x}_1}\Big)\left|\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial\tilde{x}_2\partial\tilde{x}_1}\right|_p^{1/2}\chi_p\Big(-S_{cl}(\tilde{x}_2,\tau;\tilde{x}_1,0)\Big), \qquad (6.1.1)$$

где је, ради једноставности, узето $h=1$.

<u>Инверзни косинус хиперболички потенцијал</u>

Одговарајућа *p*-адична амплитуда прелаза (6.1.1) је облика

$$K_p(\tilde{x}_2,\tau;\tilde{x}_1,0)=\lambda_p\Big(\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\Big)\left|\frac{\beta}{\sinh(\beta\tau)}\right|_p^{1/2}\chi_p\Big(-S_{cl}(\tilde{x}_2,\tau;\tilde{x}_1,0)\Big), \qquad (6.1.2)$$

односно

$$\begin{aligned}K_p(\tilde{x}_2,\tau;\tilde{x}_1,0)=\lambda_p\Big(\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\Big)&\left|\frac{\beta}{\sinh(\beta\tau)}\right|_p^{1/2}\\ \times\chi_p\left(-\frac{\beta}{2}\left(\left(\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2\right)\coth(\beta\tau)-\frac{2\tilde{x}_1\tilde{x}_2}{\sinh(\beta\tau)}\right)\right)&.\end{aligned} \qquad (6.1.3)$$

<u>Инверзни (степени) потенцијал</u>

Израз за p-адичну амплитуду прелаза (6.1.1) за теорију са потенцијалом (4.5.6) за све p-адичне случајеве, осим за $p=2$ има облик [22]

$$K_p(\tilde{x}_2,\tau;\tilde{x}_1,0)=\lambda_p\Big(\frac{1}{2\tau}\Big)\left|-\frac{1}{\tau}\right|_p^{1/2}\chi_p\left(-\frac{1}{2\tau}\left(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2\right)^2-\frac{\kappa\tau}{2}\left(\tilde{x}_1+\tilde{x}_2\right)+\frac{\kappa^2\tau^3}{24}\right). \quad (6.1.4)$$

Добијени резултати омогућавају да се опише квантна динамика тахионског модела, одреди вакуумско стање и разматра (не)стабилност. Добар део математичких детаља, као и формализам аделичног уопштења и ограничења се може наћи у текстовима [24, 43].

6.2 p-Адично основно стање

Потребан услов за постојање p-адичног квантног модела, тј. у општијем случају, аделичног модела [26, 43, 48] јесте постојање p-адичног квантно-механичког основног (вакуумског) стања $\Psi_p^{vac}(y)$ у најједноставнијем облику – карактеристичне Ω-функције, израз (2.5.1), који овде преписујемо

$$\Omega(|\tilde{x}|_p)=\begin{cases}1, & |\tilde{x}|_p\le 1\\ 0, & |\tilde{x}|_p>1.\end{cases} \quad (6.2.1)$$

Физичка интерпретација је да систем (честица) остаје у основном стању све док је у „кутији“ чија је страница једнака природној (униврзалној) јединици дужине (на пример Планкова дужина). Напоменимо да је у p-адичном случају Ω-функција исто што и функција Гаусовог облика $\exp(-\pi\tilde{x}^2)$ у реалном случају, обе су инваријантне на Фурије трансформацију.

Имајући у виду особине p-адичног пропагатора и p-адичног оператора еволуције

Како је једна од основних особина (p-адичне) амплитуде прелаза и вакуумског стања (што је уједно искоришћено за дефиницију вакуумског стања)

$$\int_{\mathbb{Q}_p} K_p(\tilde{x}_2, \tau; \tilde{x}_1, 0)\Psi_p^{vac}(\tilde{x}_1)d\tilde{x}_1 = \Psi_p^{vac}(\tilde{x}_2)\,, \qquad (6.2.2)$$

за $\Psi_p^{vac}(y) = \Omega(|y|_p)$ се добија

$$\int_{|\tilde{x}_1|_p \le 1} K_p(\tilde{x}_2, \tau; \tilde{x}_1, 0)d\tilde{x}_1 = \Omega(|\tilde{x}_2|_p)\,, \qquad (6.2.3)$$

односно

$$\lambda_p\Big(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial\tilde{x}_2\partial\tilde{x}_1}\Big)\left|\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial\tilde{x}_2\partial\tilde{x}_1}\right|_p^{1/2} \int_{|\tilde{x}_1|_p \le 1} \chi_p\Big(-S_{cl}(\tilde{x}_2, \tau; \tilde{x}_1, 0)\Big)\,d\tilde{x}_1 = \Omega(|\tilde{x}_2|_p)\,. \qquad (6.2.4)$$

Овде су функције и корен p-адичне норме извучени испред интеграла, јер због квадратичности дејства више не зависе од координате по којој се врши интеграција. Област интеграције је сведена на скуп целих p-адичних бројева $|\tilde{x}|_p \le 1 \in Z_p$.

Решавањем израза (6.2.5) за $p \neq 2$ добијени су следећи услови [22, 33]

$$\Psi_p^{vac}(\tilde{x}) = \Omega(|\tilde{x}|_p), \quad \text{за} \begin{cases} |\tau|_p = 1 \\ |\tau|_p < 1, \quad |\beta^2\tilde{x}^2\tau|_p \le 1 \end{cases} \qquad (6.2.6)$$

Може се спекулисати да систем постоји у аделичном основном стању све док важи $|\tau|_p < 1$ (на пример у јединицама Планковог времена t_{pl} или неке друге природне јединице времена) и $|\gamma^2\tilde{x}^2\tau|_p \le 1$.

Да поновимо, у p-адичном случају постоји дегенерација вакуумског стања. Вакуумско стање може бити представљено „модификованом“ Ω-функцијом $\Omega(p^\nu |\tilde{x}|_p)$ или p-адичном Дираковом δ-функцијом $\delta(p^\nu - |\tilde{x}|_p)$, $\nu \in Z$ [24]. Оне ће дати другачија ограничења на постојање основног стања и на параметре теорије.

Детаљна израчунавања на примеру инверзног косинус хиперболичког потенцијала су изложена у Додатку 3 [22, 33].

6.3 Аделична генерализација

Аделична разматрања ћемо започети од таласне функције

$$\Psi_{ad}(\tilde{x}_a) = \prod_v \Psi_v(\tilde{x}_v) = \Psi_\infty(\tilde{x}_\infty) \prod_{p \in S} \Psi_p(\tilde{x}_p) \prod_{p \notin S} \Omega(|\tilde{x}_p|_p), \tag{6.3.1}$$

где је, да се подсетимо, S коначан скуп простих бројева, $v = (\infty, 2, 3, \ldots p, \ldots)$, $\tilde{x}_\infty \in \mathbb{Q}_\infty$ и $\tilde{x}_p \in \mathbb{Q}_p$ чине адел

$$\tilde{x}_a = (\tilde{x}_\infty, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots \tilde{x}_p, \ldots), \tag{6.3.2}$$

и где за све осим за коначно много простих бројева p важи $|\tilde{x}|_p \leq 1$. Функције $\Psi_\infty(\tilde{x}_\infty)$ и $\Psi_p(\tilde{x}_p)$ представљају, редом, реалну и p-адичне таласне функције. за p-адични део важида је $\Psi_p(\tilde{x}_p) = \Omega(|\tilde{x}_p|_p)$ за све осим за коначно много простих бројева p.

Одговарајућа аделична амплитуда прелаза (квантни пропагатор) се представља као нетривијални производ реалног (5.6.2) и p-адичног дела (6.1.1) за свако p

$$K_{ad}(\tilde{x}_2, \tau; \tilde{x}_1, 0) = \prod_v K_v(\tilde{x}_2, \tau; \tilde{x}_1, 0) = K_\infty(\tilde{x}_2, \tau; \tilde{x}_1, 0) \prod_p K_p(\tilde{x}_2, \tau; \tilde{x}_1, 0). \tag{6.3.3}$$

У случају „правог“ аделичног вакуумског стања важи

$$\Psi_p(\tilde{x}_p) = \Omega(|\tilde{x}_p|_p), \tag{6.3.4}$$

за свако p.

7 Квантна космологија

Једна од алтернатива канонској квантизацији над пољем реалних бројева је квантизација преко интеграла по трајекторијама (функционалних интеграла) [120]. У p-адичној и аделичној космологији то је, за сада, једина могућност. Полазна основа је идеја да је амплитуда прелаза из стања описаног метриком $h_{ij'}$, пољем материје Φ' на иницијалној хиперповрши Σ', у друго стање $h_{ij''}$, са пољем материје Φ'', на финалној хиперповрши Σ'', дефинисана функционалним интегралом преко свих могућих 4-геометрија $g_{\mu\nu}$ и конфигурација поља материје Φ [121]

$$\langle h_{ij''},\Phi'',\Sigma'' \,|\, h_{ij'},\Phi',\Sigma' \rangle = \int DgD\Phi \mathrm{e}^{iS_{cl}[g_{\mu\nu},\Phi]}, \tag{7.1.1}$$

односно, након увођења смене $t = -i\tau$, $I = -iS_{cl}$

$$\langle h_{ij''},\Phi'',\Sigma'' \,|\, h_{ij'},\Phi',\Sigma' \rangle = \int DgD\Phi \mathrm{e}^{-I[g_{\mu\nu},\Phi]}, \tag{7.1.2}$$

где је S_{cl} класично дејство и I тзв. еуклидско дејство.

За случај хомогеног и изотропног минисуперпросторног модела са FRW метриком, за који важи

$$N = N(t), \quad N_i = 0, \quad h_{ij}(t) = a^2(t)\delta_{ij}, \tag{7.1.3}$$

метрика 4-простора постаје

$$ds^2 = -N^2dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j\,. \tag{7.1.4}$$

За космолошки модел са оваквом метриком и скаларним пољем са стандардним обликом лагранжијан, минисуперпростор постаје дводимензионалан, са координатама $q(t) = (q^1, q^2) \equiv (a,\Phi)$. Дакле, када за метрику важи (7.1.3), функционална интеграција по многострукости се своди на функционалну интеграцију по 3-метрици и једну обичну интеграцију по лапс функцији [122]. За граничне услове $q^{\alpha}(t'') = q^{\alpha''}$ и $q^{\alpha}(t') = q^{\alpha'}$, интеграл у (7.1.2), у калибрацији $\dot{N} = 0$, постаје минисуперпросторни пропагатор

$$\langle q^{\alpha''} | q^{\alpha'} \rangle = \int dNK(q^{\alpha''}, N | q^{\alpha'}, 0), \tag{7.1.5}$$

где је

$$K(q^{\alpha''}, N | q^{\alpha'}, 0) = \int Dq^{\alpha} e^{-I[q^{\alpha}]}, \tag{7.1.6}$$

квантно-механички пропагатор између фиксираних вредности $q^{\alpha'}$ и $q^{\alpha''}$.

За случај тахионског скаларног поља (4.3.7), интеграција по многострукости се, у општем случају, не своди на функционалну интеграцију по 3-метрици и једну обичну интеграцију по лапс функцији. Корен у запису тахионског лагранжијана то недозвољава.

Један од начина да се превазиђе проблем јесте увођење додатног (помоћног) скаларног поља $h(t)$. Посматрајмо „проширени“ лагранжијан за просторно хомогена поља $T(t)$ и $h(t)$ у (ради једноставности) простору Минковског

$$\mathcal{L}_{ext} \equiv \mathcal{L}_{ext}(T, \dot{T}, h) = \frac{1}{2}\frac{\dot{T}^2}{h(t)} - \frac{1}{2}h(t)V^2(T) - \frac{1}{2h(t)}. \tag{7.1.7}$$

Једначине кретања за тахионског $T(t)$ и помоћног поља $h(t)$, редом имају облик

$$\ddot{T}(t) - \frac{\dot{h}(t)}{h(t)}\dot{T}(t) + h^2(t)V(T)\frac{dV(T)}{dT} = 0, \tag{7.1.8}$$

$$h(t) = \frac{1}{V(T)}\sqrt{1-\dot{T}^2}. \tag{7.1.9}$$

Видимо да поље $h(t)$ не поседује динамику, одакле следи да његов коњуговани импулс π представља примарну везу (у Дираковом формализму)

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}_{ext}}{\partial \dot{h}} = 0. \tag{7.1.10}$$

Иако смо увећали број степени слободе (тј. димензију минисуперпростора) и без обзира што кинетички члан за тахионско поље у лагранжијану $\mathcal{L}_{ext}$ није канонског облика, употреба овог лагранжијана уместо $\mathcal{L}_{tach}$ при функционалној интеграцији може бити једноставнија. Заменом поља $h(t)$ из (7.1.9) у (7.1.7) добијмо (полазни) тахионски лагранжијан

$$\mathcal{L}_{tach}(T,\dot{T}) = \mathcal{L}_{ext}(T,\dot{T},h)\Big|_{h=V^{-1}\sqrt{1-\dot{T}^2}} = -V(T)\sqrt{1-\dot{T}^2}\,, \tag{7.1.11}$$

што је уједно и доказ да су одговарајућа дејства идентична. Наравно, при израчунавању функционалних интеграла овај проширени систем се посматра као систем са везама.

Ако посматрамо простор-време са поменутом FRW метриком, лагранжијани су облика

$$\mathcal{L}_{tach}(T,\dot{T},a,N) = -Na^3V(T)\sqrt{1-N^{-2}\dot{T}^2}\,, \tag{7.1.12}$$

$$\mathcal{L}_{ext} \equiv \mathcal{L}_{ext}(T,\dot{T},h,a,N) = Na^3\left(\frac{1}{2N^2}\frac{\dot{T}^2}{h(t)} - \frac{1}{2}h(t)V^2(T) - \frac{1}{2h(t)}\right), \tag{7.1.13}$$

и свакако важи

$$\mathcal{L}_{tach}(T,\dot{T},a,N) \equiv \mathcal{L}_{ext}(T,\dot{T},h,a,N)\Big|_{h=V^{-1}\sqrt{1-N^{-2}\dot{T}^2}} = -Na^3V(T)\sqrt{1-N^{-2}\dot{T}^2}\,. \tag{7.1.14}$$

За минисуперпросторне моделе са квадратичним дејством, пропагатор је дат изразом [123]

$$K(q^{\alpha''},N\,|\,q^{\alpha'},0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\det\frac{\partial^2\bar{I}}{\partial q^{\alpha''}\partial q^{\alpha'}}\right)^{1/2} e^{-\bar{I}(q^{\alpha''},N|q^{\alpha'},0)}, \tag{7.1.15}$$

где је $\bar{I}(q^{\alpha''},N\,|\,q^{\alpha'},0)$ класично еуклидско дејство за решења класичних једначина минисуперпросторних координата, уз граничне услове $q^{\alpha}(0)=q^{\alpha'}$ и $q^{\alpha}(1)=q^{\alpha''}$. Дакле, минисуперпросторни пропагатор је облика

$$\langle q^{\alpha''}\,|\,q^{\alpha'}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dN\left(-\det\frac{\partial^2\bar{I}}{\partial q^{\alpha''}\partial q^{\alpha'}}\right)^{1/2} e^{-\bar{I}(q^{\alpha''},N|q^{\alpha'},0)}. \tag{7.1.16}$$

Уколико разматрања проширимо на p-адичне и аделичне моделе неопходно је постојање p-адичног основног стања $\Omega(|q^{\alpha}|_p)$, дефинисаног као [24]

$$\int_{|q^{\alpha'}|_p \le 1} K_p(q^{\alpha''}, N; q^{\alpha'}, 0) dq^{\alpha'} = \Omega(|q^{\alpha''}|_p). \tag{7.1.17}$$

Ако је ово испуњено, Свемир може бити у основном аделичном стању, што ће, пре свега, наметнути ограничења на параметре теорије. Ако параметри „не поштују" ограничења, може се спекулисати да је Свемир изашао из свог основног стања и да је дошло до еволуције квантног стања Свемира. Такође можемо спекулисати да када је за све (или скоро све) просте бројеве p, Свемир изашао из основног квантног стања, динамика се даље описује моделима на архимедовим простроима и допринос реалне таласне функције, односно реалног дела аделичне функције постаје доминантан. Следећа фаза би била класична инфлација и о том периоду се већ довољно зна, али квантни почетак инфлације остаће још неко време тема интензивних истраживања.

8 Закључак

У овој дисертацији смо разматрали тахионска скаларна поља *DBI* типа са нестандардним обликом лагранжијана, инспирисани Сеновом претпоставком да се тахионска поља од суштинске важности за описивање интеракција и нестабилности брана у теорији струна, и да су зато од значаја у оквиру космологије, посебно у раној фази периода инфлације. Једна шира класа потенцијала, пре свега тахионских и са неколико конкретних примера, је разматрана у 0-димензоионалном (класична меахника) и квантно-механичком лимесу. Показано је да се овакав приступ може применити на реалним просторима и реалним бројним пољем, и проширити и генерализовати на *p*-адичне бројеве, аделе, односно и на неархимедове просторе.

Представљена су два начина да се пређе са нестандардног (*DBI*) на стандардни лагранжијан, који нас у барем два примера доводи до добро познатог модела–инверзни хармонијски осцилатор. Уведене су оригиналне класичне канонске трансформације конкретног облика, подесних за примену на ширу класу тахионских потенцијала, које у неким случајевима доводе до квадратичних лагранжијана и дејства. Презентована су оригинална израчунавања за амплитуде прелаза преко Фејнманових функционалних интеграла на архимедовим и нерахимедови просторима. Разматрани су услови под којима постоји *p*-адично, односно аделично вакуумско стање. Ови услови намећу нова и потенцијално врло важна ограничења на величине као што су карактеристично време и просторна дужина динамичких тахионских процеса, вредности поља, а тиме и маса, тахиона, као и на друге параметре теорије.

Намеће се неколико праваца даљих истраживања. Комплетирање аделичне генерализације за разматране потенцијале и друге моделе са локално еквивалентним квадратичним лагранжијаном; апроксимативна разматрања система блиских квадратичним; разматрање динамике поља у више-димензионим случајевима користећи везу са псеудодиференцијалним операторима; повезивање квантних феномена тахиона са израчунавањем таласне функције васионе у аделичном приступу за раличите метрике; нумеричко израчунавање параметара инфлације за тахионско поље у Рандал-Сундрум моделу, са увођењем радиона и упоређивање са доступним посматрачким подацима.

Додаци

Додатак 1

За просторно хомогено тахионско поље у равном простор-времену

$$\mathcal{L}_{tach} = \mathcal{L}(T,\dot{T}) = -V(T)\sqrt{1-\dot{T}^2}\,, \tag{9.1.1}$$

коњуговани импулс следи из (4.3.2)

$$\Pi = \frac{\dot{T}}{\sqrt{1-\dot{T}^2}}V(T)\,, \tag{9.1.2}$$

одакле је

$$\dot{T} = \frac{\varepsilon\Pi}{\sqrt{\Pi^2 + V^2(T)}}\,, \tag{9.1.3}$$

где је, да се подсетимо $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon^2 = +1$. Сада је хамилтонијан система

$$\mathcal{H}_{tach} = \Pi\dot{T} - \mathcal{L}_{tach}(T,\dot{T}) = \frac{\varepsilon\Pi^2 + V^2(T)}{\sqrt{\Pi^2 + V^2(T)}}\,, \tag{9.1.4}$$

из ког следе Хамилтонове једначине

$$\dot{T} = \frac{\partial\mathcal{H}_{tach}(T,\Pi)}{\partial\Pi} = \frac{\varepsilon\Pi^3 + \Pi V^2(T)(2\varepsilon - 1)}{\left(\Pi^2 + V^2(T)\right)^{3/2}}\,, \tag{9.1.5}$$

$$\dot{\Pi} = -\frac{\partial\mathcal{H}_{tach}(T,\Pi)}{\partial T} = -V(T)\frac{dV(T)}{dT}\frac{\left[(2-\varepsilon)\Pi^2 + V^2(T)\right]}{\left(\Pi^2 + V^2(T)\right)^{3/2}}\,. \tag{9.1.6}$$

Упоређивањем израза (9.1.3) и (9.1.5) добија се

$$\frac{\varepsilon\Pi}{\sqrt{\Pi^2 + V^2(T)}} = \frac{\varepsilon\Pi^3 + \Pi V^2(T)(2\varepsilon - 1)}{\left(\Pi^2 + V^2(T)\right)^{3/2}}\,, \tag{9.1.7}$$

одакле се добија $(1-\varepsilon)V^2(T) = 0$, тј. за $V(T) \neq 0$ следи $\varepsilon = +1$.

Додатак 2

Овде ћемо разматрати још један облик нестандардног лагранжијана. Реч је о лагранжијану p-адичне теорије струна [124], којим се описује (тахионско) скаларно поље $\phi(x)$ отворене тахионске p-адичне струне [103]

$$\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\phi, \partial_\mu \phi) = -\frac{1}{2}\phi p^{-\frac{1}{2}\Box}\phi + \frac{1}{p+1}\phi^{p+1}, \tag{9.2.1}$$

где смо, ради прегледности изоставили све константе ове теорије и где је $\Box$ Даламберов оператор (у простору Минковског)

$$\Box \equiv -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{9.2.2}$$

Ова теорија (лагранжијан) је на самом почетку била формулисана за просте бројеве p, али се p може заменити било којим природним бројем већим од један [125], односно избор се може проширити на позитивне реалне бројеве [126]. Лагранжијан (9.2.1) садржи многе битне особине стандардне теорије струна. Коришћен је и за описивање (p-адичне) инфлације [104].

Нелокалност ове теорије се огледа у постојању бесконачно много просторно-временских извода [127]. Деловање диференцијалног оператора се може представити преко степеног реда

$$p^{-\frac{1}{2}\Box} = \exp\left(-\frac{1}{2}\log(p)\Box\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\log(p)\right)^n (\Box)^n, \tag{9.2.3}$$

тако да кинетички члан, који садржи просторно-временске изводе има облик

$$\mathcal{L}_p^{kin} = \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{2}\log p)^n \frac{1}{n!}\phi(\Box^n \phi), \tag{9.2.4}$$

док је потенцијални члан

$$\mathcal{L}_p^{pot} = V(\phi) \equiv -\mathcal{L}_p \big|_{\Box=0} = \left(\frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{p+1}\phi^{p+1}\right). \tag{9.2.5}$$

За случај просторно хомогеног поља $\phi(t)$ густина лагранжијана је

$$\mathcal{L}_p(\phi,\dot{\phi}) = -\frac{1}{2}\phi(t)\,p^{\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}}\phi(t) + \frac{1}{p+1}\phi^{p+1}(t)\,, \tag{9.2.6}$$

из ког следи диференцијална једначина кретања „бесконачног реда“

$$p^{\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}}\phi(t) = \phi^p(t)\,, \tag{9.2.7}$$

односно користећи (9.2.3)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2}\log p)^n\,\frac{1}{n!}\frac{d^{2n}\phi(t)}{dt^{2n}} = \phi^p(t)\,. \tag{9.2.8}$$

Напоменимо да у лимесу $p \to 1$једначина (9.2.7) добија локални карактер [128]

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} = 2\phi(t)\log\phi(t)\,. \tag{9.2.9}$$

Нетривијално решење једначине (9.2.7) је експоненцијалног (Гаусовог) облика

$$\phi(t) = e^{a+bt^2}\,, \tag{9.2.10}$$

$$a = \frac{\log p}{2(p-1)}, \quad b = \frac{p-1}{2p\log p}\,, \tag{9.2.11}$$

док су тривијална решења $\phi = 0$, $\phi = +1$за сваки прост број *p*, као и $\phi = -1$за $p \neq 2$ [129].

Диференцијални оператор у једначини кретања (9.2.7) формално можемо посматрати као псеудодиференцијални оператор, користећи (3.3.1)

$$\left(p^{\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}}\phi\right)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{Q}_\infty} a(\xi,t)\tilde{\phi}(\xi)e^{-i\xi t}d\xi\,, \tag{9.2.12}$$

са симболом облика [127]

$$a(\xi,t) = \exp(-\frac{1}{2}\xi^2\log p)\,. \tag{9.2.13}$$

У том случају једначина (9.2.12) постаје

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{Q}_\infty}\tilde{\phi}(\xi)e^{-\frac{1}{2}\xi^2\log p - i\xi t}d\xi = \phi^p(t)\,, \tag{9.2.14}$$

где је, да подсетимо $\tilde{\phi}(\xi)$ Фурије слика тахионског поља $\phi(t)$

$$\tilde{\phi}(\xi) = F\left[\phi(t)\right](\xi) = \int_{\mathbb{Q}_\infty} \phi(t) e^{i\xi t} dt \,. \tag{9.2.15}$$

Ако извршимо парцијално диференцирање израза (9.2.14) по времену t и параметру p (и поље $\phi(t)$ и његова Фурије слика $\tilde{\phi}(\xi)$ у општем случају зависе од броја p)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{2\pi} \int_R \tilde{\phi}(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2 \log p - i\xi t} d\xi \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi^p(t) \,, \tag{9.2.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{2\pi} \int_R \tilde{\phi}(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2 \log p - i\xi t} d\xi \right) = \frac{\partial}{\partial p} \phi^p(t) \,, \tag{9.2.17}$$

и комбинујући ова два израза могуће је једначину (9.2.7) „свести“ на нелинеарну диференцијалну једначину другог реда [19]

$$\ddot{\phi}(t) + (p-1)\frac{1}{\phi(t)}\dot{\phi}^2(t) - M(t)\phi(t) = 0 \,. \tag{9.2.18}$$

Овде је $M(t)$ полиномна функција времена степена не већег од два

$$M(t) = A(p) + B(p)t^2 \,, \tag{9.2.19}$$

где коефицијенти $A(p)$ и $B(p)$ зависе од броја *p*. Функција (9.2.10), као и поменута тривијална решења, такође задовољавају једначину (9.2.18).

Посебно је интересантно разматрати случај када функцију $M(t)$ можемо апроксимирати константом, $M(t) \approx M - const$. То се може извести онда када се она споро мења са временом или када се посматра сам почетак еволуције овог тахионског поља, тј. $t \ll 1$.

Рескалирањем поља

$$\phi(t) \to Z(t) = \frac{1}{p}\phi^p(t) \,, \tag{9.2.20}$$

уз претпоставку $M(t) - const$, једначина (9.2.18) добија облик

$$\ddot{Z}(t) - pMZ(t) = 0 \,. \tag{9.2.21}$$

Ова једначина се може добити из лагранжијана стандардног облика

$$\mathcal{L}(Z,\dot{Z}) = \frac{1}{2}\dot{Z}^2(t) + \frac{1}{2}pMZ^2(t), \tag{9.2.22}$$

који је квадратичан по Z и $\dot{Z}$, са канонским кинетичким чланом. Овај резултат омогућава даље разматрање и примену у теорији поља и космолошкој инфлацији [130, 131].

Додатак 3

Да поновимо, за амплитуду прелаза K_p у p-адичном случају, за дејство квадратично по почетној y_1 и крајњој y_2 конфигурацији важи израз (6.1.1), којег овде преписујемо ($h=1$)

$$K_p(y_2,\tau;y_1,0)=\lambda_p\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial y_2 \partial y_1}\right)\left|\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial y_2 \partial y_1}\right|_p^{1/2}\chi_p\left(-S_{cl}(y_2,\tau;y_1,0)\right). \qquad (9.3.1)$$

За $\Psi_p^{vac}(y)=\Omega(|y|_p)$ из

$$\int_{Q_p} K_p(y_2,\tau;y_1,0)\Psi_p^{vac}(y_1)dy_1=\Psi_p^{vac}(y_2)\,, \qquad (9.3.2)$$

добија се

$$\int_{|y_1|_p\le 1} K_p(y_2,\tau;y_1,0)dy_1=\Omega(|y_2|_p)\,, \qquad (9.3.3)$$

тј.

$$\lambda_p\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial y_2 \partial y_1}\right)\left|\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial y_2 \partial y_1}\right|_p^{1/2}\int_{|y_1|_p\le 1}\chi_p\left(-S_{cl}(y_2,\tau;y_1,0)\right)dy_1=\Omega(|y_2|_p)\,, \qquad (9.3.4)$$

где се, да поновимо, функције λ_p и корен p-адичне норме могу наћи испред интеграла, јер због квадратичности дејства више не зависе од координате по којој се врши интеграција.

За p-адични модел са класичним дејством (5.6.7),

$$S_{cl}(y_2,\tau,y_1,0)=\frac{\beta}{2}\left(\left(y_1^2+y_2^2\right)\coth(\beta\tau)-2y_1y_2\operatorname{csch}(\beta\tau)\right), \qquad (9.3.5)$$

одговарајућа амплитуда прелаза (6.1.1) је облика

$$K_p(y_2,\tau;y_1,0)=\lambda_p\left(\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\right)\left|\frac{\beta}{\sinh(\beta\tau)}\right|_p^{1/2}\chi_p\left(-S_{cl}(y_2,\tau;y_1,0)\right), \qquad (9.3.6)$$

односно

$$K_p(y_2,\tau;y_1,0)=\lambda_p\Big(\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\Big)\left|\frac{\beta}{\sinh(\beta\tau)}\right|_p^{1/2}$$
$$\times\chi_p\Big(-\frac{\beta}{2}\Big(\big(y_1^2+y_2^2\big)\coth(\beta\tau)-2y_1y_2\mathrm{csch}(\beta\tau)\Big)\Big). \tag{9.3.7}$$

Израз (9.3.4) добија облик

$$\int_{|y_1|_p\le 1}\chi_p\Big(-\frac{\beta}{2}\Big(\big(y_1^2+y_2^2\big)\coth(\beta\tau)-2y_1y_2\mathrm{csch}(\beta\tau)\Big)\Big)dy_1$$
$$\times\lambda_p\Big(\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\Big)\left|\frac{\beta}{\sinh(\beta\tau)}\right|_p^{1/2}=\Omega(|y_2|_p). \tag{9.3.8}$$

Користећи особине p-адичних аналитичких функција $\sinh$ и $\cosh$ [24]

$$|\sinh(a)|_p=|a|_p,\quad |\cosh(a)|_p=1, \tag{9.3.9}$$

као и p-адичних интеграла Гаусовог типа (за $p\neq 2$, [26])

$$\int_{|y|_p\le 1}\chi_p(ay^2+by)dy=\begin{cases}\Omega(|b|_p), & |a|_p\le 1\\ \dfrac{\lambda_p(a)}{|a|_p^{1/2}}\chi_p(-\dfrac{b^2}{4a})\Omega(|\dfrac{b}{a}|_p), & |a|_p>1,\end{cases} \tag{9.3.10}$$

интеграл у изразу (9.3.8) се може свести на облик

$$\frac{\lambda_p\Big(\dfrac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\Big)}{|\tau|_p^{1/2}}\chi_p\Big(-\frac{\beta}{2}y_2^2\coth(\beta\tau)\Big)\times I=\Omega(|y_2|_p), \tag{9.3.11}$$

где је

$$I=\begin{cases}\Omega(|b|_p), & |a|_p\le 1\\ \dfrac{\lambda_p(a)}{|a|_p^{1/2}}\chi_p(-\dfrac{b^2}{4a})\Omega(|\dfrac{b}{a}|_p), & |a|_p>1.\end{cases} \tag{9.3.12}$$

У нашем случају следи

$$a=-\frac{\beta}{2}\coth(\beta\tau),\quad |a|_p=\frac{1}{|\tau|_p}, \tag{9.3.13}$$

$$b=\beta\frac{y_2}{\sinh(\beta\tau)},\quad |b|_p=\left|\frac{y_2}{\tau}\right|_p, \tag{9.3.14}$$

Замењујући вредности (9.3.13) и (9.3.14) у израз (9.3.12), израз (9.3.11), за $|\tau|_p \geq 1$ добија облик

$$\frac{\lambda_p\Big(\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\Big)}{|\tau|_p^{1/2}}\chi_p\Big(-\frac{\beta}{2}y_2^2\coth(\beta\tau)\Big)\Omega\Big(|\frac{y_2}{\tau}|_p\Big) = \Omega(|y_2|_p)\,, \tag{9.3.15}$$

док за $|\tau|_p < 1$ израз (9.3.11) постаје

$$\frac{\lambda_p\Big(\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\Big)}{\lambda_p\Big(\frac{\beta}{2}\coth(\beta\tau)\Big)}\chi_p\Big(-\frac{\beta}{2}y_2^2\tanh(\beta\tau)\Big)\Omega(|y_2|_p) = \Omega(|y_2|_p)\,. \tag{9.3.16}$$

Сада је потребно испитати услове под којима је израз (9.3.11), или еквивалентно изрази (9.3.15) и (9.3.16), испуњени за $|y_2|_p \leq 1$.

1) Случај $|\tau|_p \geq 1$.

За случај $|\tau|_p > 1$ (и $|y_2|_p \leq 1$) израз (9.3.11) се своди на (9.3.15), што, очигледно, никад није могуће, док за $|\tau|_p = 1$ даје

$$\lambda_p\Big(\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\Big)\chi_p\Big(-\frac{\beta}{2}y_2^2\coth(\beta\tau)\Big)\Omega(|y_2|_p) = \Omega(|y_2|_p)\,. \tag{9.3.17}$$

Како је

$$\left|\frac{\beta}{2}y_2^2\coth(\beta\tau)\right|_p = |y_2^2|_p \leq 1, \tag{9.3.18}$$

тј.

$$\{\frac{\beta}{2}y_2^2\coth(\beta\tau)\}_p = 0\,, \tag{9.3.19}$$

онда следи да је

$$\chi_p\Big(-\frac{\beta}{2}y_2^2\coth(\beta\tau)\Big) = 1, \tag{9.3.20}$$

па израз (9.3.17) постаје

$$\lambda_p\Big(\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\Big)=1. \tag{9.3.21}$$

Ова аритметичка функција, на основу особине (2.5.17) има вредност један за

$$ord\Big(\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\Big)\text{-паран број.} \tag{9.3.22}$$

Тада је

$$\left|\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\right|_p=\frac{1}{|\tau|_p}=1, \tag{9.3.23}$$

па следи

$$\mathrm{ord}\Big(\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\Big)=0\text{-паран број,} \tag{9.3.24}$$

одакле се закључује да је израз (9.3.11) испуњен уз услов $|\tau|_p=1$.

2) Случај $|\tau|_p<1$.

Случај $|\tau|_p<1$ доводи до израза (9.3.16), тј.

$$\frac{\lambda_p\Big(\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\Big)}{\lambda_p\Big(\frac{\beta}{2}\coth(\beta\tau)\Big)}\chi_p\Big(-\frac{\beta}{2}y_2^2\tanh(\beta\tau)\Big)\Omega(|y_2|_p)=\Omega(|y_2|_p). \tag{9.3.25}$$

Сада је

$$\left|\frac{\beta}{2}y_2^2\tanh(\beta\tau)\right|_p=|\beta^2y_2^2\tau|_p, \tag{9.3.26}$$

па је, за случај $|\beta^2y_2^2\tau|_p\leq 1$, вредност адитивног карактера један

$$\chi_p(-\frac{\beta}{2}y_2^2\tanh(\beta\tau))=1. \tag{9.3.27}$$

Израз (9.3.25) сада добија облик

$$\lambda_p\Big(\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\Big)\lambda_p\Big(-\frac{\beta}{2}\coth(\beta\tau)\Big)=1. \tag{9.3.28}$$

Да би се доказало важење овог израза може се искористити развој у ред p-адичне функције $\cosh$, израз (2.4.13) [26]

$$\cosh(\beta\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta\tau)^{2k}}{(2k)!}. \tag{9.3.29}$$

Другим речима, функција $\cosh(\beta\tau)$ се може написати у канонској форми (еквивалентно канонском запису p-адичног броја)

$$\cosh(\beta\tau) = p^{\gamma}(c_0 + c_1 p + ...) = p^0(1+...), \tag{9.3.30}$$

где је $\gamma = 0$ и наведен је само први члан c_0, који је једнак јединици, док су наредни чланови у развоју (9.3.29) изостављени.

Ова p-адична функција представља квадрат неке друге p-адичне функције (другим речима, за фиксиране вредности параметара β и τ p-адични број $\cosh(\beta\tau)$ представља квадрат неког другог p-адичног броја) све док је она аналитичка, тј. за

$$|\beta\tau|_p \leq \frac{1}{p}, \tag{9.3.31}$$

зато што су потребни и довољни услови за постојање решења $D \in Q_p$ алгебарске једначине [26]

$$\cosh(\beta\tau) = D^2, \tag{9.3.32}$$

сведени на услове

$$i) \quad \gamma \text{ је паран број}, \tag{9.3.33}$$

$$ii) \quad \left(\frac{c_0}{p}\right) = 1. \tag{9.3.34}$$

У овом случају, оба услова *i)* и *ii)* су задовољена

$$\gamma = 0, \quad \left(\frac{c_0}{p}\right) = \left(\frac{1}{p}\right) = +1, \quad p \neq 2. \tag{9.3.35}$$

Сада, лева страна израза (9.3.28) постаје

$$\begin{aligned}
&\lambda_p\Big(\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\Big)\lambda_p\Big(-\frac{\beta}{2}\coth(\beta\tau)\Big) \\
&\qquad = \lambda_p\Big(\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\Big)\lambda_p\Big(-\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\cosh(\beta\tau)\Big) \\
&\qquad = \lambda_p\Big(\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\Big)\lambda_p\Big(-\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}D^2\Big) \qquad (9.3.36) \\
&\qquad = \lambda_p\Big(\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\Big)\lambda_p\Big(-\frac{\beta}{2\sinh(\beta\tau)}\Big) \\
&\qquad = 1,
\end{aligned}$$

при чему је искоришћена особина (2.5.8).

Израз (9.3.25) није испуњен за случај $|\beta^2 y_2^2\tau|_p > 1$, и у коначном, израз (9.3.16) важи за $|\tau|_p < 1$ и $|\beta^2 y_2^2\tau|_p \leq 1$. Дакле, овај p-адични квантни систем ће бити у вакуумском стању за случај „p-адичног времена“ $|\tau|_p < 1$, све док важи $|\beta^2 y_2^2\tau|_p \leq 1$ (за $p \neq 2$).

Треба додати да је налажење услова за постојање Ω-стања за случај $p = 2$ могуће урадити истим поступком, али о томе на овом месту неће бити речи.

Литература

[1] R. Durrer and R. Maartens, *Gen. Relativ. Gravit.*, vol. 40, p. 301, (2008).

[2] A.R. Liddle and D.H. Lyth, Cosmological Inflation and large-Scale Structure, Cambridge: Cambridge University Press, (2000).

[3] C.P. Burgess, *Living Rev. Rel.*, vol. 7, p. 5, (2004).

[4] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V. Mukhanov, *Phys. Letters B,* vol. 458, no. 2-3, p. 209, (1999).

[5] J. Garriga and V. Mukhanov, *Phys. Letters B*, vol. 458, no. 2-3, p. 219, (1999).

[6] G.W. Gibbons, *Phys. Lett. B,* vol. 537, p. 1, (2002).

[7] G.W. Gibbons, *Class. Quantum Grav.*, vol. 20, p. 321, (2003).

[8] D.A. Steer and F. Vernizzi, *Phys. Rev. D,* vol. 70, p. 043527, (2004).

[9] A. Sen, *JHEP*, vol. 0204, p. 048, (2002).

[10] L. Kofman and A. Linde, *JHEP*, vol. 0207, p. 004, (2002).

[11] L.R. Abramo and F. Finelli, *Physics Letters B*, vol. 575, p. 165, (2003).

[12] T. Padmanabhan, *Phys. Rev. D*, vol. 66, p. 021301(R), (2002).

[13] A. Feinstein, *Phys. Rev. D,* vol. 66, p. 063511, (2002).

[14] T. Padmanabhan, *Phys. Rept.*, vol. 380, p. 235, (2003).

[15] D. Jain, A. Das and S. Kar, *Am. J. Phys.*, vol. 75, p. 259, (2007).

[16] D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic and Lj. Nesic, *Fortschr. Phys.*, vol. 56, no. 4-5, p. 412, (2008).

[17] D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic and Lj. Nesic, *Phys. AUC,* vol. 18, p. 166, (2008).

[18] Z.E. Musielak, *J. Phys. A: Math. Theor.*, vol. 41, p. 055205, (2008).

[19] D.D. Dimitrijevic and M. Milosevic, *AIP Conf. Proc.*, vol. 1472, p. 41, (2012).

[20] D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic, M. Milosevic and D. Vulcanov, *AIP Conf. Proc.,* vol. 1634, p. 9, (2014).

[21] G.S. Djordjevic, D.D. Dimitrijevic and M. Milosevic, *Romanian Journal of Physics (у штампи),* vol. 61, no. 1-2, (2016).

[22] D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic and M. Milosevic, *Romanian Reports in Physics (у штампи),* vol. 57, no. 4, (2015).

[23] D.L. Wiltshire, "Introduction to Quantum Cosmology," in *Cosmology: The Physics of the Universe*, Singapore, World Scientific, (1996), p. 473.

[24] G.S. Djordjevic, B. Dragovich, Lj. Nesic and I.V. Volovich, *Int. Journ. Mod. Phys A,* vol. 17, no. 10, p. 1413, (2002).

[25] H. Garcia-Compeon, O. Obregon and C. Ramirez, *Phys. Rev. Letters,* vol. 88, no. 16, p. 161301, (2002).

[26] V.S. Vladimirov, I.V. Volovich and E.I. Zelenov, p-Adic Analysis and Mathematical Physics, Singapore: World Scientific, (1994).

[27] A. Ostrowski, *Acta Math.,* vol. 41, p. 271, (1918).

[28] N. Koblitz, p-Adic Numbers, p-Adic Analysis and Zeta-Functions, New York: Springer-Verlag, (1977).

[29] I.V. Volovich, *Class. Quantum Grav.,* vol. 4, p. L83, (1987).

[30] B. Dragovich, A.Yu. Khrennikov, S.V. Kozyrev and I.V. Volovich, *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications,* vol. 1, no. 1, p. 1, (2009).

[31] B. Dragovich, *Int. J. Mod. Phys. A,* vol. 10, p. 2349, (1995).

[32] Д.Д. Димитријевић, Г.С. Ђорђевић и М. Милошевић, "Инфлаторни космолошки модели са тахионским пољем," in *Зборник радова са XII Конгреса физичара Србије (28 април-2. мај 2013, Врњачка Бања)*, Врњачка Бања, (2013).

[33] D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic, M. Milosevic and Lj. Nesic, *Topical Issue "Advances in Theoretical and Mathematical Physics, 10 Years of the SEENET-MTP" Facta Universitatis, Series Physics, Chemistry and Technology,* vol. 12, no. 2, p. 117, (2014).

[34] F. Gouvea, p-Adic numbers: an Introduction, Berlin: Springer-Verlag, (1993).

[35] D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic and Lj. Nesic, *Physics AUC,* vol. 21, p. 242, (2011).

[36] D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic and B. Dragovich, *Bul. Jour. Phys.,* vol. 27, no. 3, p. 50, (2000).

[37] D.D. Dimitrijevic and G.S. Djordjevic, in *Proc. of the TH-2002 Int. Conf. on Theor. Phys. Eds. D. Iagolnitzer, P. Rebeca and J. Zinn-Justin*, Paris, (2002).

[38] D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic and Lj. Nesic, in *Proc. of the BPU-5*, V. Banja, (2003).

[39] W.H. Schikhof, Ultrametric Calculus, Cambridge: Cambridge University Press, (1984).

[40] P.G.O. Freund and E. Witten, "Phys. Lett. B," vol. 199, p. 191, (1987).

[41] I.M. Gelfand, M.I. Graev and I.I. Pyatetskii-Shapiro, Representation Theory and Automorphic Function, London: Saunders, (1966).

[42] B. Dragovich, *Theor. Mat. Phys.,* vol. 101, p. 349, (1994).

[43] G.S. Djordjevic, B. Dragovich and Lj. Nesic, *Inf. Dim. Analys., Quant. Prob. and Rel. Topics,* vol. 06, no. 02, p. 179, (2003).

[44] V.S. Vladimirov and I.V. Volovich, *Commun. Math. Phys.,* vol. 123, p. 659, (1989).

[45] Г.С. Ђорђевић, О p-адичној и аделичној квантној механици, Физички факултет, Београд: Докторска дисертација, (1999).

[46] E.I. Zelenov, *J. Math. Phys.,* vol. 32, p. 147, (1991).

[47] C. Grosche and F. Steiner, Handbook of Feynman Path Integrals, Berlin: Springer-Verlag, (1998).

[48] G.S. Djordjevic and B. Dragovich, *Mod. Phys. Lett. A,* vol. 12, no. 20, p. 1455, (1997).

[49] V.S. Vladimirov, *Usp. Math. Nauk.,* vol. 43, p. 17, (1988).

[50] M.E. Taylor, Pseudodifferential Operators, New Yersey: Princeton University Press, (1981).

[51] D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic and Lj. Nesic, in *Zbornik radova sa Kongresa fizicara Srbije i Crne Gore Eds. N. Konjevic, B. Vujicic, P. Miranovic*, Petrovac na moru, (2004).

[52] D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic and Lj. Nesic, *Filomat,* vol. 21, no. 2, p. 245, (2007).

[53] Љ. Нешић, Космолошки модели у p-адичној и аделичној квантној механици, Физички факултет, Београд: Докторска дисертација, (2002).

[54] G.S. Djordjevic and B. Dragovich, "p-Adic and Adelic Path Integrals," in *Proc of the XI Conference YuNFEC,* Studenica, (1998).

[55] V. Mukhanov, Physical Foundations of Cosmology, Cambridge: Cambridge University Press, (2005).

[56] S. Weinberg, Cosmology, Oxford, USA: Oxford University Press, (2008).

[57] D. Vulcanov and G.S. Djordjevic, "On Canonical Transformation and Tachyon-like "Particles" in Inflationary Cosmology," *Rom. Journ. Phys.,* vol. 57, no. 5-6, p. 1011, (2012).

[58] J. Yokoyama, *Prog. Theor. Exp. Phys.,* vol. 2014, no. 06, p. B103, (2014).

[59] B. Zweibach, A First Course in String Theory, Cambridge: Cambridge University Press, (2004).

[60] A. Sen, *JHEP,* vol. 9809, p. 023, (1998).

[61] A. Sen, *Current Science,* vol. 81, no. 12, p. 1561, (2001).

[62] C. Maccaferri, "Basics of Open String Field Theory," Lecture Notes, (2006).

[63] A. Sen, *Mod. Phys. Lett. A,* vol. 17, p. 1797, (2005).

[64] A. Sen, *JHEP,* vol. 0207, p. 065, (2002).

[65] A. Sen, *JHEP,* vol. 0204, p. 048, (2002).

[66] A. Sen, *Int. J. Mod. Phys. A,* vol. 18, p. 4869, (2003).

[67] A. Sen, *Mod. Phys. Lett. A,* vol. 17, p. 1797, (2002).

[68] A. Frolov, L. Kofman and A. Starobinsky, *Physics Letters B,* vol. 545, p. 8, (2002).

[69] A. de la Macorra, U. Filobello and G. German, *Phys. Lett. B,* vol. 635, p. 355, (2006).

[70] Д.Д. Димитријевић, Тахиони у класичној и квантној механици, Природно-математички факултет, Ниш: Магистарска теза, (2009).

[71] E.J. Copeland, M.R. Garousi, M. Sami and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D,* vol. 71, p. 043003, (2005).

[72] A. de la Macorra and G. Piccinelli, *Phys. Rev. D,* vol. 61, p. 123503, (2000).

[73] I. Zlatev, L.M. Wang and P.J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.,* vol. 82, p. 896, (1999).

[74] M.R. Garousi, M. Sami and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D,* vol. 70, p. 043536, (2004).

[75] M. Sami, P. Chingangbam and T. Qureshi, *Phys. Rev. D,* vol. 66, p. 043530, (2002).

[76] A. Sen, *Phys. Rev. D,* vol. 68, p. 066008, (2003).

[77] N. Lambert, H. Liu and J. Maldacena, *JHEP,* vol. 014, p. 0703, (2007).

[78] M.R. Garousi, *Nucl. Phys. B,* vol. 584, p. 284, (2000).

[79] G. Gamow, *Phys. Rev.*, vol. 70, p. 572, (1946).

[80] A.A. Starobinsky, *Phys. Lett. B*, vol. 91, p. 99, (1980).

[81] K. Sato, *Phys. Lett. B*, vol. 99, p. 66, (1981).

[82] A.H. Guth, *Phys. Rev. D*, vol. 23, p. 347, (1981).

[83] A. Albrecht and P.J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 48, p. 1220, (1982).

[84] A.D. Linde, *Phys. Lett. B*, vol. 108, p. 389, (1982).

[85] V.F. Mukhanov and G. Chibisov, *JETP Lett.*, vol. 35, p. 532, (1981).

[86] J.M. Bardeen, P.J. Steinhardt and M.S. Turner, *Phys. Rev. D*, vol. 28, p. 679, (1983).

[87] V.F. Mukhanov, H. Feldman and R.H. Brandenberger, *Phys. Rept.*, vol. 215, p. 203, (1992).

[88] D. Baumann, TASI Lectures on Inflation, arXiv:0907.5424v1 [hep-th], (2009).

[89] Planck Collaboration, "Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation," arXiv:1303.5082v1 [astro-ph.CO].

[90] Planck Collaboration, "Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation," arXiv:1502.02114v1 [astro-ph.CO].

[91] D. Vulcanov, C.A. Sporea and G.S. Djordjevic, "REM - the Shape of Potentials for f(R) Theories in Cosmology and Tachyons," in *CERN-Proceedings*, CERN, (2014).

[92] A.R. Liddle and D. Lyth, Cosmological Inflation and Large-Scale Structure, Cambridge: Cambridge Universityt Press, (2000).

[93] A.G. Riess et al., *Astron. J.*, vol. 116, p. 1009, (1998).

[94] S. Perlmutter at al., *Astrophys. J.*, vol. 517, p. 565, (1999).

[95] D.N. Spergel at al. (WMAP Collaboration), *Astrophys. J. Suppl*, vol. 148, p. 213, (2003).

[96] Planck Collaboration, "Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters," arXiv:1502.01589v2 [astro-ph.CO].

[97] D. Larson et al. (WMAP Team), *The Astrophysical Journal Supplement Series 192:16 (2011)*, vol. 192, no. 16, p. 16, (2011).

[98] R.L. Arnowitt, S. Deseri and C.W. Misner, *Phys. Rev.*, vol. 117, p. 1595, (1960).

[99] S. Kachru et al., *JCAP*, vol. 0310, p. 013, (2003).

[100] S. Tsujikawa, *Prog. Theor. Exp. Phys.*, vol. 06, p. B104, (2014).

[101] J. Martin and R. Branderberger, *Phys. Rev. D*, vol. 63, p. 123501, (2001).

[102] J. Martin and C. Ringeval, *Phys. Rev. D*, vol. 69, p. 083515, (2004).

[103] L. Brekke, P.G.O. Freund, M. Olson and E.Witten, *Nucl. Phys. B*, vol. 302, p. 365, (1988).

[104] N. Barnaby, T. Biswas and J.M. Cline, *JHEP*, vol. 0704, p. 056, (2007).

[105] H.T. Yang, *JHEP*, vol. 0211, p. 007, (2002).

[106] N. Barnaby, T. Biswas and J.M. Cline, *JHEP*, vol. 04, p. 056, (2007).

[107] G.S. Djordjevic and Lj. Nesic, "Real and p-Adic Aspects of Quantization of Tachyons," in *Mathematical, Theoretical and Phenomenological Challenges Beyond the Standard Model*, Singapore, World Scientific, (2005), p. 197.

[108] S. Kar, "A Simple Mechanical Analog of the Field Theory of Tachyon Matter," arXiv:hep-th/0210108 v2, (2002).

[109] D. Jain, A. Das and S. Kar, *AJP*, vol. 75, no. 3, p. 259, (2007).

[110] J.L. Jimenez, G. del Valle and I. Campos, *Eur. J. Phys.*, vol. 26, p. 711, (2005).

[111] V.I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanic, Berlin: Springer-Verlag, (1989).

[112] L. Landau and E. Lifshitz, Mechanics, Oxford: Pergamon Press, (1976).

[113] H. Goldstein, Classical Mechanics, Massachusetts: Addison-Wesley, (1980).

[114] G. Barton, *Annals of Physics,* vol. 166, p. 322, (1986).

[115] A. Guth and S.Y. Pi, *Phys. Rev. D,* vol. 32, no. 8, p. 1899, (1985).

[116] D. Bermudez and D. J. Fernandez, *Annals of Physics,* vol. 333, p. 290, (2013).

[117] T. Shimbori, *Physics Letters A,* vol. 273, no. 1-2, p. 37, (2000).

[118] T. Shimbori and T. Kobayashi, *Nuovo Cim. B,* vol. 115, p. 325, (2000).

[119] C. Morette, *Physical Review,* vol. 81, no. 5, p. 848, (1951).

[120] C.Rovell, "Notes or a Brief History of Quantum Gravity," arXiv:gr-qc/0006061.

[121] D. Wiltshire, "An Introduction to Quantum Cosmology," in *8th Physics Summer School,* Canberra, Australia, (1996).

[122] J.J. Halliwell, "Introductory Lectures on Quantum Cosmology," in *Jerusalem Winter School on Quantum Cosmology and Baby Universes*, Jerusalem, (1990).

[123] J.J. Halliwell and J.B. Hartle, *Phys. Rev. D,* vol. 41, p. 1815, (1990).

[124] L. Brekke and P.G.O. Freund, *Phys. Rep.,* vol. 233, p. 1, (1993).

[125] B. Dragovich, *Publ. Astron. Obs. Belgrade,* vol. 86, p. 185, (2009).

[126] J.A. Minahan, *JHEP,* vol. 03, p. 028, (2001).

[127] V.S. Vladimirov and Ya. I. Volovich, *Theoretical and Mathematical Physics,* vol. 138, no. 3, p. 297, (2004).

[128] A.A. Gerasimov and S.L. Shatashvili, *JHEP,* vol. 10, p. 034, (2000).

[129] V.S. Vladimirov, *Science in China Series A: Mathematics,* vol. 51, no. 4, p. 754, (2008).

[130] D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic and M. Milosevic, "On Tachyons Driven Inflation Parameters in Cosmology," *Int. Journ. Mod. Phys A (предат за штампу),* (2015).

[131] M. Milosevic, G.S. Djordjevic, N. Bilic, D.D. Dimitrijevic and M.Stojanovic, "Impact of Radion on the Tachyon Inflation," *(у припреми),* (2015).

Биографија

Драгољуб Д. Димитријевић је рођен 14. априла 1974. године у Параћину. Основну и средњу школу је завршио у Бољевцу. Завршио је студије физике на Природно-математичком факултету у Нишу 2000. године. На истом факултету је одбранио магистарски рад 2009. године. Докторске студије је уписао 2008. gодине. У звање асистента за ужу научну област Теоријска физика на Департману за физику изабран је 2009. године.

Од 2002. године је ангажован на домаћим и међународним пројектима.

Био је секретар Департмана за физику. Учествовао је у раду више од 10 конференција у земљи и иностранству, и неколико школа. Одржао је 9 предавања, од тога 3 по позиву. Секретар је SEENET-MTP мреже (2009-), председник Друштва физичара Ниш (2013-) и био је члан Извршног одбора Друштва физичара Србије (2012-2014).

Од 2005. Године је ангажован у настави на Департману за физику ПМФ-а у Нишу за извођење рачунских вежби. Од 2011. године је ангажован у Гимназији "Светозар Марковић" у Нишу за извођење наставе из предмета "Физика микросвета" за ученике четвртог разреда "Специјализованог одељења за ученике са посебним способностима за физику".

Живи у Нишу, са супругом и ћер(к)ом.

Прилог 1.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

Динамика тахионских поља у класичној и квантној космологији

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација, ни у целини, ни у деловима, није била предложена за добијање било које дипломе, према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

У Нишу, ________________

Аутор дисертације:
Драгољуб Д. Димитријевић

Потпис докторанда:

____

Прилог 2.

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Име и презиме аутора:
Драгољуб Д. Димитријевић
Студијски програм:
физика
Наслов рада:
Динамика тахионских поља у класичној и квантној космологији
Ментор:
проф. др Горан Ђорђевић

Изјављујем да је штампана верзија моје докторске дисертације истоветна електронској верзији, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, ________________

Аутор дисертације:
Драгољуб Д. Димитријевић

Потпис докторанда:

____

Прилог 3.

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да, у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, унесе моју докторску дисертацију, под насловом:
__________ Динамика тахионских поља у класичној и квантној космологији __________
____
која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство – некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да подвучете само једну од шест понуђених лиценци; кратак опис лиценци је у наставку текста).

У Нишу, __________________

Аутор дисертације:
_______ Драгољуб Д. Димитријевић ____________________

Потпис докторанда:

____

ТИПОВИ ЛИЦЕНЦИ

1. Ауторство. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора, на начин одређен од аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци (CC BY 3.0).

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора, на начин одређен од аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела (CC BY-NC 3.0).

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе вашег дела у делима других аутора, ако се наведе име аутора, на начин одређен од аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела (CC BY-NC-ND 3.0).

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора, на начин одређен од аутора или даваоца лиценце, и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прераде (CC BY-NC-SA 3.0).

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе вашег дела у делима других аутора, ако се наведе име аутора, на начин одређен од аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела (CC BY-ND 3.0).

6. Ауторство – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора, на начин одређен од аутора или даваоца лиценце, и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода (CC BY-SA 3.0).