

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Љубица В. Мухић

**Остатак одређених типова Гаусових
квадратурних формула са
специјалним класама тежинских
функција**

докторска дисертација

Београд, 2017

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Ljubica V. Mihić

**The remainder term of certain types
of Gaussian quadrature formulae
with specific classes of weight
functions**

doctoral dissertation

Belgrade, 2017

Подаци о ментору и члановима комисије

др Милан Дражић, ментор,

ванредни професор,

Универзитет у Београду, Математички факултет

др Александар Пејчев, коментор,

доцент,

Универзитет у Београду, Машински факултет

др Миодраг Спалевић,

редовни професор,

Универзитет у Београду, Машински факултет

др Десанка Радуновић,

ванредни професор у пензији,

Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

РЕЗИМЕ

Интеграција има широку примену приликом математичког моделовања многих појава које се јављају у природним, техничким наукама, економији и другим областима. Када се вредност интеграла не може аналитички израчунати, потребно је конструисати формулу која апроксимира његову вредност са прихватљивом тачношћу. Поред традиционалних формула које се користе, тенденције у развоју ове области односе се на повећање тачности формуле и оцену грешке настале када се интеграл замени коначном сумом.

Предмет ове дисертације су *Gauss*-ове квадратурне формуле са чворовима произвољне вишеструкости (глава 3), или са двоструким чворовима (главе 2 и 4). Уколико је, као чвор, фиксиран један од крајева интервала интеграције, ради се о *Gauss-Radau* квадратурним формулама, а уколико се фиксирају оба краја интервала интеграције, такве формуле су *Gauss-Lobatto* типа. Поред поменутих формула, у тези се бавимо и анализом *Kronrod*-ове екстензије *Gauss-Turán*-ове квадратурне формуле у којој се поред вредности функције у чворовима посматрају и вредности произвољних извода функције. Циљ је дати ефикасне оцене грешака поменутих формула у односу на различите врсте *Chebyshev*-љевих тежинских функција као и *Gori-Micchelli*-јеве тежинске функције која у специјалном случају представља уопштење прве *Chebyshev*-љеве тежинске функције.

Прва глава је уводног карактера и садржи познате појмове и тврђења која се користе у остатку рада. Описана су основна својства ортогоналних полинома који учествују у конструкцији *Gauss*-ових квадратурних формула. Такође, дефинишу се различити типови остатака квадратурних формула при чему ће се у наредним главама анализирати интегрална репрезентација остатка, а изложени су и новији резултати који се односе на повећавање вишеструкости чворова.

Преостале три главе садрже поглавља са оригиналним резултатима.

Друга глава је посвећена оцени грешке *Gauss-Lobatto* квадратурне формуле са двостуким чворовима у крајњим тачкама. Након детаљне анализе језгра остатка (видети 2.2.1), доказали смо Теореме које говоре о условима под којима се достиже максимум модула језгра остатка, одредили фиксирани вредности које се спомињу у Теорема и приказали стварне грешке и оцене грешака датих формула.

У трећој глави се бавимо *Kronrod*-овим уопштењем *Gauss-Turán*-ове квадратурне формуле у односу на специјални случај *Gori-Micchelli*-јеве тежинске функције. Поменуто уопштење се састоји у томе да се поред чворова *Gauss-Turán*-ове формуле уведу нови чворови, нуле *Chebyshev*-љевог ортогоналног полинома друге врсте, у којима се посматра само вредност функције (не и њених извода). Овом модификацијом, *Kronrod*-ова формула је заправо квадратурна формула *Chakalov-Popoviciu* типа, па смо, применом метода које важе за ту формулу, у неким случајевима израчунали коефицијенте и грешку *Kronrod*-овог уопштења.

У четвртој глави смо доказали *Gautschi-Li* хипотезе о *Gauss-Radau* квадратурним формулама у односу на *Chebyshev*-љеве тежинске функције друге и треће врсте. Поглавље 4.4 се састоји од нумеричких примера и садржи табеле у којима су изложене ефикасне оцене грешака.

Кључне речи: нумеричка интеграција, *Gauss*-ова квадратурна формула, остатак квадратурне формуле, оцена грешке

Научна област: Математика

Ужа научна област: Нумеричка математика

УДК број: 519.644(043.3)

ABSTRACT

Mathematical modeling of many phenomena which occur in the natural, technical sciences, economy requires significant knowledge of the theory of numerical integration. In the situations where the integral cannot be determined analytically, it is necessary to construct the formula which approximates its value with acceptable error. Besides the traditional formulae, the tendencies in the development of this area refer to increment of algebraic degree of precision of the quadrature formula and its error estimation.

The subject of this dissertation is Gaussian quadrature formula with increased number of nodes which may have double multiplicity (sections 2 and 4) or arbitrary multiplicity (section 3). When we consider the addition of one node, one of the integration interval ends, the corresponding quadrature formula is called Gauss-Radau, and in the case of adding two new nodes, the appropriate formula is of Gauss-Lobatto type. Beside those formulae, in this dissertation we consider the Kronrod's extension of Gauss-Turán quadrature formula, which includes the derivatives of the function at nodes. Here, the main aim is to determine efficient error bounds of these formulae with respect to the different types of Chebyshev weight functions and Gori-Micchelli weight function which, in one special case, represents the generalization of the first Chebyshev weight function.

Introductory theorems and well-known statements that are used in the rest of the thesis are presented in the first section. We described basic properties of orthogonal polynomials participating in the construction of Gaussian quadrature formula. Furthermore, the different types of remainder terms of quadrature formula are defined, whereby in the following sections we analyze the integral representation of the remainder term. The recent results relating to the increasing number of the nodes of arbitrary multiplicity are exposed. The remaining three sections contain the chapters with original results.

The second section is devoted to the estimation of the error of Gauss-

Lobatto quadrature formulae with a double nodes at the endpoints. After detailed analysis of the kernel of the remainder term (see subsection 2.2.1), we proved the Theorems stating the behavior of the maximum modulus of the kernel. We computed fixed values mentioned in the Theorems and established the real errors and the error bounds of quadrature formula.

In third section we examine the Kronrod's extension of Gauss-Turán quadrature formulae with respect to the special kind of Gori-Micchelli weight function. This extension, beside the nodes of Gauss-Turán quadrature formula, also contains the zeros of Chebyshev polynomial of the second kind. In those new nodes, we consider just the values of the function (not the values of its derivatives). Previously mentioned Kronrod's extension is actually Chakalov-Popoviciu quadrature formula, so, by applying the methods for those formulae, we computed the coefficients and the error of Kronrod's formula.

Gautschi-Li hypotheses are proven in the fourth section. Those hypotheses concern the Gauss-Radau quadrature formulae with respect to the Chebyshev weight functions of the second and the third kind. Subsection 4.4 consists of numerical examples and the tables with efficient error bounds.

Key words: numerical integration, Gaussian quadrature formula, remainder term of quadrature formula, error estimation

Scientific field: Mathematics

Scientific subfield: Numerical mathematics

UDK number: 519.644(043.3)

ЗАХВАЛНИЦА

Захваљујем се проф. Милану Дражићу и проф. Десанки Радуновић на помоћи приликом обликовања дисертације, на дугогодишњем познанству и пренетом знању током студирања.

Било је задовољство учити од професора Бошка Јовановића, Миодрага Спалевића и Александра Пејчева чије су смернице допринеле критичком, темељном и креативном начину размишљања. Проф. Пејчев и проф. Спалевић су ме увели у област истраживања ове дисертације, задали проблеме на којима треба да радим и пропратили њихово решавање.

Хвала колективу Библиотеке Шабачке и Високе медицинске и пословно-технолошке школе на квалитетној радној атмосфери.

Рад је посвећен Синђелић Милени и Живораду

Садржај

1. Увод	1
1.1 Математички апарат	1
1.2 Gauss-ова квадратурна формула	9
1.3 Конструкција Gauss-ових квадратурних формула .	14
1.3.1 Gauss-Radau и Gauss-Lobatto формуле	18
1.3.2 Уопштене Gauss-Turán-ове формуле	21
1.4 Остатак квадратурне формуле	25
1.5 Неке модификације Gauss-ове формуле, новији резултати	30
2. Остатак Gauss-Lobatto квадратурне формуле	38
2.1 Gauss-Lobatto квадратурне формуле са двоструким чвором у крајњим тачкама, основни појмови	38
2.2 Gauss-Lobatto квадратурне формуле у односу на Chebyshev-љеву тежинску функцију друге врсте	43
2.2.1 Уводно разматрање	43
2.2.2 Максимум модула језгра	45
2.2.3 Главна тврђења	48
2.2.4 Одређивање вредности ρ_n	51
2.2.5 Модификација треће Gautschi-Li хипотезе . .	51
2.2.6 Оцена грешке, нумерички примери	54
2.3 Gauss-Lobatto квадратурне формуле у односу на Chebyshev-љеву тежинску функцију треће и четврте врсте	58
2.3.1 Максимум модула језгра	58
2.3.2 Главна тврђења	61
2.3.3 Анализа Gautschi-Li хипотезе	64

3. Уопштене Gauss-Turán–ове квадратурне формуле, коэффициенти и остатак	66
3.1 Уводно поглавље	66
3.2 Коэффициенти Kronrod–овог уопштења Gauss-Turán–ове квадратурне формуле	68
4. Остатак Gauss-Radau квадратурне формуле	77
4.1 Gauss-Radau квадратурне формуле са двоструким чвором у крајњој тачки	77
4.2 Трећа Chebyshev–лева тежинска функција	80
4.3 Друга Chebyshev–лева тежинска функција	88
4.4 Нумерички примери	92
Додаци 1-11	97
Литература	110
Биографија	123

1.

Увод

У овој глави су дефинисани основни појмови и тврђења која се користе у наредним главама. Зависно од одабира ортогоналних полинома и тежинских функција, описани су различити типови *Gauss*-ових квадратурних формула и њихове конструкције. У поглављу 1.4 су дефинисани начини приказивања остатка квадратурне формуле. Поглавље 1.5 је посвећено опису модификација *Gauss*-ових формула. Кроз кратак историјски преглед, приказане су модификације које се састоје у увођењу нових чворова произвољне вишеструкости, а изложени су и новији резултати.

1.1 Математички апарат

Дефиниција 1. Векторски простор са скаларним производом назива се унитаран или пред-*Hilbert*-ов простор. Унитаран простор који је комплетан у односу на норму $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$, назива се *Hilbert*-ов простор.

Дефиниција 2. Скуп вектора $\{u_k\}_{k \in J}$ у *Hilbert*-овом простору X образује ортогоналан систем ако је

$$(1.1) \quad (u_n, u_k) = \delta_{n,k} \|u_n\|^2 = \delta_{n,k} \|u_k\|^2, \quad \forall n, k \in J,$$

где је $\delta_{n,k}$ *Kronecker*-ов делта симбол, и $\|u_k\| = \sqrt{(u_k, u_k)}$, $\forall k \in J$. Уколико је $\|u_k\| = 1$, $\forall k \in J$, кажемо да скуп вектора $\{u_k\}_{k \in J}$ из X образује ортонормиран систем.

Дефиниција 3. Функцију $\omega(x)$ дефинисану на коначном интервалу (a, b) називамо тежинском функцијом уколико је она на том интервалу ненегативна, интеграбилна и ако је њен интеграл позитиван, тј. ако су испуњени услови

$$(1.2) \quad \omega(x) \geq 0, \quad x \in (a, b), \quad 0 < \int_a^b \omega(x) dx < +\infty.$$

При томе је $\omega(x) = 0$ само на скупу мере нула. У случају када је интервал (a, b) бесконачан (на пример, $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$ или $(-\infty, \infty)$), поред услова (1.2), захтева се и апсолутна конвергенција интеграла

$$(1.3) \quad \nu_k = \int_a^b x^k \omega(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Интеграле ν_k називамо моментима тежинске функције $\omega(x)$.

Лема 1.1. Полазећи од базиса $\{1, x, x^2, \dots\}$, могуће је конструисати ортогонални базис $\{p_k\}_{k \in N_0}$ у простору $L^2(a, b)$, у ком је скаларни производ дефинисан помоћу

$$(1.4) \quad (f, g) = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx, \quad f, g \in L^2(a, b).$$

Линеал над овим базисом је скуп свих алгебарских полинома који је свуда густ у *Hilbert*-овом простору (видети [1]). У зависности од тежинске функције $\omega(x)$, добијају се различите класе ортогоналних полинома.

Нека је $\{p_k\}_{k \in N_0}$ скуп ортогоналних полинома на интервалу (a, b) у односу на тежинску функцију $\omega(x)$ (тј. у односу на скаларни производ који је задат једнакошћу (1.4)).

Теорема 1.2. Све нуле полинома $\{p_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ су реалне, различите и налазе се унутар интервала (a, b) .

Теорема 1.3. За три узаспотна полинома низа $\{p_k\}_{k \in N_0}$ постоји рекурентна релација

$$(1.5) \quad p_{k+1}(x) - (\alpha_k x - \beta_k)p_k(x) + \gamma_k p_{k-1}(x) = 0,$$

где су $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ константе.

Теорема 1.4. За моничан низ ортогоналних полинома $\{p_k\}_{k \in N_0}$ важи рекурентна релација

$$(1.6) \quad p_{k+1}(x) = (x - \beta_k)p_k(x) - \gamma_k p_{k-1}(x).$$

У конструктивној теорији ортогоналних полинома трослојна рекурентна релација има фундаменталну улогу из више разлога. На пример, једноставно се генерише низ ортогоналних полинома, као и вредност полинома $p_k(x)$ и коначних сума $\sum_{i=0}^m \lambda_i p_i(x)$; коефицијенти рекурентне релацији учествују у генерисању *Jacobi*-еве матрице, јако значајне у конструкцији *Gauss*-ових квадратурних формула.

Значајну класу ортогоналних полинома чине такозвани класични ортогонални полиноми.

Дефиниција 4. Нека је $\{p_k\}_{k \in N_0}$ низ ортогоналних полинома дефинисаних на сегменту (a, b) са тежинском функцијом $\omega(x)$. Полиноми p_k , $k = 0, 1, \dots$ се називају класичим ако тежинска функција задовољава диференцијалну једначину

$$(1.7) \quad \frac{d}{dx}(A(x)\omega(x)) = B(x)\omega(x)$$

где је $B(x)$ полином првог степена, док функција $A(x)$ у зависности од a и b има облик

$$A(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x) & a \text{ и } b \text{ коначни,} \\ x-a & a \text{ коначно, } b = +\infty, \\ b-x & a = -\infty, b \text{ коначно,} \\ 1 & a = -\infty, b = +\infty, \end{cases}$$

(видети [71]).

Теорема 1.5. За свако $m = 0, 1, \dots$ тежинска функција класичних ортогоналних полинома задовољава услове

$$(1.8) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} x^m A(x) \omega(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} x^m A(x) \omega(x) = 0.$$

Доказ се може наћи у [18].

С обзиром на то да је решење диференцијалне једначине (1.7) задато изразом

$$(1.9) \quad \omega(x) = \frac{C}{A(x)} \cdot e^{\int \frac{B(x)}{A(x)} dx},$$

где је C произвољна константа, у зависности од a и b (са тачношћу до на константу) добија се

$$\omega(x) = \begin{cases} (b-x)^\alpha (x-a)^\beta & a \text{ и } b \text{ коначни,} \\ (x-a)^s e^{rx} & a \text{ коначно, } b = +\infty, \\ (b-x)^t e^{-rx} & a = -\infty, b \text{ коначно,} \\ e^{\int B(x) dx} & a = -\infty, b = +\infty, \end{cases}$$

где су

$$\alpha = -\frac{B(b)}{b-a} - 1, \quad \beta = \frac{B(a)}{b-a} - 1, \quad s = B(a) - 1, \quad t = -B(b) - 1, \quad B(x) = rx + q.$$

Пошто се применом једноставне трансформације сваки интервал (a, b) може трансформисати у један од наредних интервала $(-1, 1)$, $(0, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, тежинска функција може имати неки од облика $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $x^s e^{-x}$, e^{-x^2} , респективно, при чему параметри α , β и s испуњавају услове $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $s > -1$,

(видети [71] и [72]).

Размотримо детаљније случај $\omega(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$.

Функција $A(x)$ је у овом случају задата са $A(x) = 1 - x^2$. Применом диференцијалне једначине (1.7), функција $B(x)$ се може изразити на следећи начин

$$B(x) = \frac{1}{\omega(x)} \frac{d}{dx} (A(x)\omega(x)) = \beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x.$$

Одговарајући ортогонални полиноми се називају *Jacobi*-еви полиноми и означавају са $P_k^{(\alpha, \beta)}(x)$.

Специјални случајеви *Jacobi*-евих полинома су

Chebyshev-љеви полиноми

- прве врсте $T_k(x)$ ($\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$),
- друге врсте $U_k(x)$ ($\alpha = \beta = \frac{1}{2}$),
- треће врсте $V_k(x)$ ($\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$),
- четврте врсте $W_k(x)$ ($\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$),

као и *Legendre*-ови полиноми $P_k(x)$ ($\alpha = \beta = 0$).

Теорема 1.6. За чланове низа класичних ортогоналних полинома $\{p_k\}_{k \in N_0}$ важи формула

$$(1.10) \quad p_k(x) = \frac{c_k}{\omega(x)} \frac{d^k}{dx^k} (A(x)^k \omega(x)), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где су c_k константе различите од нуле.

Доказ се може наћи, на пример, у књизи [71]. Формула (1.10) је позната као *Rodrigues*-ова. Применом *Cauchy*-еве формуле за извод реда k регуларне функције, дата формула се може представити у интегралном облику

$$(1.11) \quad p_k(x) = \frac{c_k}{\omega(x)} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{A(z)^k \omega(z)}{(z - k)^{k+1}} dz,$$

где је Γ затворена контура за коју важи $x \in \text{int}\Gamma$. У формулама (1.10) и (1.11) константа c_k се може одабрати или из услова да су полиноми монични или да је $\|p_k\| = 1$. За *Chebyshev*-љеве полиноме прве и друге врсте узима се

$$(1.12) \quad T_k(x) = \frac{k!}{(\frac{1}{2})_k} P_k^{(-1/2, -1/2)}(x), \quad U_k(x) = \frac{(k+1)!}{(\frac{3}{2})_k} P_k^{(1/2, 1/2)}(x),$$

где је $(s)_k = s(s+1)\dots(s+k-1) = \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)}$, док је Γ гама функција.

Теорема 1.7. Диференцијална једначина *Jacobi*-евих полинома $P_k^{(\alpha, \beta)}(x)$ има облик

$$(1.13) \quad (1-x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\beta + \alpha + 2)x)y' + k(k + \alpha + \beta + 1)y = 0.$$

У случају прве тежинске функције $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, изрази у формули (1.7) износе $A(x) = 1 - x^2$, $B(x) = -x$. Када се у једначини (1.13) уврсти $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, одговарајућа диференцијална једначина има облик

$$(1.14) \quad (1-x^2)y'' - xy' + k^2y = 0,$$

који се сменом $x = \cos \theta$, $y(x) = z(\theta)$, $-1 \leq x \leq 1$ своди на $z'' + k^2z = 0$. Пошто је опште решење претходне једначине

$$(1.15) \quad z(\theta) = C_1 \cos(k\theta) + C_2 \sin(k\theta),$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе, опште решење *Chebyshev*-љеве диференцијалне једначине (1.12) је

$$y = C_1 \cos(k \arccos x) + C_2 \sin(k \arccos x).$$

За $-1 \leq x \leq 1$ израз (1.12) се може приказати у облику

$$(1.16) \quad T_k(x) = \cos(k \arccos x),$$

или, у развијеном облику

$$(1.17) \quad T_k(x) = \frac{k}{2} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i (k-i-1)!}{i!(k-2i)!} (2x)^{k-2i}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad T_0(x) = 1.$$

Коришћењем једнакости $\arccos x = -i \ln(x + i\sqrt{1-x^2})$, добија се

$$(1.18) \quad T_k(x) = \frac{1}{2}(e^{ik \arccos x} + e^{-ik \arccos x}) = \frac{1}{2} \left((x+i\sqrt{1-x^2})^k + (x-i\sqrt{1-x^2})^k \right).$$

Коначно, ако се у једнакости $\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta = 2 \cos \theta \cos k\theta$ одабере $\theta = \arccos x$, добија се рекурентна релација

$$(1.19) \quad T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x).$$

Нуле *Chebyshev*-левих полинома прве врсте се могу експлицитно изразити. Наиме, из $T_k(x) = \cos(k \arccos x) = 0$ следи

$$(1.20) \quad x_i^{(k)} = \cos \frac{\pi}{2k}(2i-1), \quad i = 1, \dots, k.$$

У случају *Chebyshev*-левих полинома друге врсте, $U_k(x)$, где је $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, а тежинска функција $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$, одговарајући изрази у формули (1.7) су задати са $A(x) = 1-x^2$, $B(x) = -3x$. Диференцијална једначина чије једно партикуларно решење износи $y = U_k(x)$ гласи

$$(1.21) \quad (1-x^2)y'' - 3xy' + k(k+2)y = 0.$$

Chebyshev-љеви полиноми друге врсте су одређени експлицитно

$$(1.22) \quad U_k(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i (k-i)!}{i!(k-2i)!} (2x)^{k-2i},$$

док је једна од стандардних репрезентација за $|x| \leq 1$ дата са

$$(1.23) \quad U_k(x) = \frac{\sin((k+1) \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Полиноми $U_k(x)$ задовољавају исту рекурентну релацију као полиноми $T_k(x)$, односно,

$$(1.24) \quad U_{k+1}(x) = 2xU_k(x) - U_{k-1}(x).$$

Chebyshev-љеви полиноми треће врсте, $V_k(x)$, одређени са $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\omega(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ су експлицитно задати са

$$(1.25) \quad V_k(\cos \theta) = \frac{\cos(k + \frac{1}{2})\theta}{\cos(\frac{1}{2}\theta)}.$$

За ове полиноме важи иста рекурентна релација

$$(1.26) \quad V_{k+1}(x) = 2xV_k(x) - V_{k-1}(x).$$

Chebyshev-љеви полиноми четврте врсте, $W_k(x)$, одређени са $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\omega(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ су експлицитно задати изразом

$$(1.27) \quad W_k(\cos \theta) = \frac{\sin(k + \frac{1}{2})\theta}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

За полиноме ове врсте важи иста рекурентна релација као и у претходна три случаја.

Дефиниција 5. Уведимо низ моничних полинома степена n , $P_{n,s}(\cdot, d\lambda)$, ($n = 1, 2, \dots$) са особином да је њихов $(2s+1)$ -ви степен ортогоналан на све полиноме степена мањег од n , односно

$$(1.28) \quad \int_a^b [P_{n,s}(t)]^{2s+1} P_{k,s}(t) d\lambda(t) = 0, \quad k < n.$$

Овако уведени полиноми, $P_{n,s}(\cdot, d\lambda)$, се називају s -ортогонални, и за $s = 0$ се свде на ортогоналне полиноме, [24, стр. 94-95].

Уопште, сваки низ ненегативних целобројних вредности

$\sigma = (s_1, s_2, \dots)$ дефинише низ полинома

$$(1.29) \quad P_{n,\sigma}(t) = \prod_{\nu=1}^n (t - \tau_{\nu}^{(n)}), \quad a < \tau_1^{(n)} < \tau_2^{(n)} < \dots < \tau_n^{(n)} < b, \quad n = 1, 2, \dots$$

таквих да је

$$(1.30) \quad \int_a^b \left[\prod_{\nu=1}^n (t - \tau_{\nu}^{(n)}) \right]^{2s_{\nu}+1} P_{k,\sigma}(t) d\lambda(t) = 0, \quad k < n.$$

Полиноми $P_{n,\sigma}(t)$ се називају σ -ортогонални полиноми.

У случају када је $\sigma = (s, s, \dots)$, они се своде на s -ортононалне полиноме.

1.2 Gauss–ова квадратурна формула

Квадратурна формула у којој се и коефицијенти и чворови бирају тако да формула буде тачна за полиноме што је могуће вишег степена, назива се квадратурна формула *Gauss*–овог типа. *Gauss*–ова квадратурна формула са тежинском функцијом $\omega(x)$ је дефинисана као линеарна комбинација вредности функције $f(x)$ на дискретном скупу тачака x_1, x_2, \dots, x_n из интервала (a, b)

$$(1.31) \quad \int_a^b \omega(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) + R_n(f).$$

Тачке x_1, x_2, \dots, x_n се називају чворови, вредности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ се називају коефицијенти, док се израз $R_n(f)$ назива остатак квадратурне формуле.

Пример. Дат је интеграл $\int_0^4 te^{2t}dt$.

Приближна вредност интеграла износи 5216.926477323024....

Произвољни интервал $[a, b]$ се применом једноставне трансформације $t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$ може свести на интервал $[-1, 1]$.

Пример показује грешку која настаје применом *Gauss*–ових квадратурних формула са, редом, 2, 3, 4, 5 и 6 чворова. Свођењем интервала $[0, 4]$ на стандардни $[-1, 1]$, добија се

$$(1.32) \quad I = \int_0^4 te^{2t}dt = \int_{-1}^1 (4x+4)e^{4x+4}dx = \int_{-1}^1 f(x)dx,$$

где је $f(x) = (4x+4)e^{4x+4}$.

Уколико је $n = 2$, потребно је одредити чворове x_1, x_2 и коефицијенте λ_1, λ_2 тако да формула $\int_{-1}^1 f(x)dx = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

буде тачна за x^0, x^1, x^2, x^3 . Решавањем система

$$f(x) = 1 \longrightarrow \int_{-1}^1 1dx = 2 = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$f(x) = x \longrightarrow \int_{-1}^1 xdx = 0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,$$

$$f(x) = x^2 \longrightarrow \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2,$$

$$f(x) = x^3 \longrightarrow \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 = \lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3,$$

добија се $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $x_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Сасвим аналогно, за произвољно n , чворови и коефицијенти се могу изразити решавањем система вишег реда. Коришћењем резултата из табеле 1.1, добијамо случај $n = 2$,

$$I = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3477.5439362670846274 \dots$$

Грешка у овом случају износи 33.34111%.

Случај $n = 3$, $I \approx 4967.106689$, грешка 4.78862%.

Случај $n = 4$, $I \approx 5197.543750$, грешка 0.37151%.

Случај $n = 5$, $I \approx 5215.987635$, грешка 0.01799%.

Случај $n = 6$, $I \approx 5216.895500$, грешка 0.00059%.

Дефиниција 6. *Gauss*-ова квадратурна формула има алгебарски степен тачности $m - 1$ уколико је $R_n(f) = 0$ за свако $f \in P_{m-1}$ (тј. $R_n(x^{i-1}) = 0$, $i = 1, \dots, m$), док за бар једно $f \in P_m$ важи $R_n(f) \neq 0$ (тј. $R_n(x^m) \neq 0$).

Newton 1676. године уводи такозвани „метод конструкције параболичке криве која пролази кроз задате тачке”. Наиме, за задату функцију f и n различитих тачака x_i , *Newton* конструише јединствени полином $p_{n-1}(f, x_i)$ степена не већег од $n - 1$ који у тачкама x_i узима исте вредности као функција f ,

Табела 1.1: Тежине λ_i и чворови x_i у случајевима $n \leq 6$

n	λ_i	x_i	n	λ_i	x_i
2	1	- 0.577350269	5	0.236926885	- 0.906179846
	1	0.577350269		0.478628670	- 0.538469310
3	0.555555556	- 0.774596669	6	0.568888889	0
	0.888888889	0		0.478628670	0.538469310
	0.555555556	0.774596669		0.236926885	0.906179846
4	0.347854845	- 0.861136312	6	0.171324492	- 0.932469514
	0.652145155	- 0.339981044		0.360761573	- 0.661209386
	0.652145155	0.339981044		0.467913935	- 0.238619186
	0.347854845	0.861136312		0.467913935	0.238619186
			0.360761573	0.661209386	
			0.171324492	0.932469514	

$$p_{n-1}(f, x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad p_{n-1} \in P_{n-1}.$$

Интерполациони полином p_{n-1} се може изразити у облику

$$p_{n-1}(f, x) = \sum_{i=0}^n J_i(x) f(x_i),$$

где су $J_i(x)$ полиноми са особинама $J_i \in P_{n-1}$, $J_i(x_i) = 1$ и $J_i(x_j) = 0$ за $i \neq j$. Овим се функција $f(x)$ може приказати на следећи начин

$$f(x) = p_{n-1}(f; x) + r_n(f; x),$$

где $r_n(f; \cdot)$ означава грешку. Због јединствености интерполационог полинома, важи $r_n(f; \cdot) = 0$ за $f \in P_{n-1}$.

Интеграцијом претходне једнакости добија се *Newton-Cotes*–ова формула

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = Q_n(f) + R_n(f), \quad Q_n(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i),$$

где су a и b коначни бројеви.

Постављају се питања – који је максимални степен тачности који се може постићи уколико су у *Newton-Cotes*–овој формули чворови x_i произвољни, а вредности λ_i познате; како одабрати чворове x_i да би се постигао максимални степен тачности. Овим питањима се бавио *Gauss* у раду [21] из 1814. године.

Нека је $\{p_k\}_{k \in N}$ низ ортогоналних полинома на интервалу (a, b) у односу на тежинску функцију $\omega(x)$. Наредне теореме описују нека значајна својства квадратурних формула.

Теорема 1.8. *Gauss*–ова квадратурна формула има алгебарски степен тачности $2n - 1$ ако и само ако су x_k , $k = 1, \dots, n$ нуле полинома $p_n(x)$.

Теорема 1.9. Потребан и довољан услов да низ $Q_n f = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$ конвергира ка $I(f)$ за свако $f \in C[a, b]$ јесте да дати низ конвергира за сваки алгебарски полином и да постоји позитивна константа M таква да је

$$(1.33) \quad \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leq M, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Теорема 1.10. Тежински коефицијенти λ_k *Gauss*–ове квадратурне формуле (1.28) се могу експлицитно изразити

$$(1.34) \quad \lambda_k = \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \frac{\|p_n\|^2}{p_{n-1}(x_k)p'_n(x_k)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где су x_k нуле полинома $p_n(x)$, док су α_n и γ_n константе које се јављају у трослојној рекурентној релацији (1.5).

Докази последње три теореме се могу наћи у књизи [71].

Зависно од ортогоналних полинома и класа тежинских функција разликује се више типова *Gauss*–ових квадратурних формула. Тежински коефицијенти λ_k *Gauss-Jacobi*–еве формуле се могу

одредити на основу једнакости (1.34). Добија се

$$(1.35) \quad \lambda_k = \frac{2^{\alpha+\beta}(2n + \alpha + \beta)\Gamma(n + \alpha)\Gamma(n + \beta)}{n!(n + \alpha + \beta)\Gamma(n + \alpha + \beta)} \cdot \frac{1}{P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x_k) \frac{d}{dx}(P_n^{(\alpha,\beta)}(x_k))}.$$

где су x_k , $k = 1, \dots, n$ нуле *Jacobi*–евог полинома $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Gauss-Chebyshev–лева квадратурна формула, као класа *Gauss-Jacobi*–еве формуле, је одређена са једним од четири типа тежинских функција

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \omega_2(x) &= \sqrt{1-x^2}, \\ \omega_3(x) &= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, & \omega_4(x) &= \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. \end{aligned}$$

У случају прве тежинске функције, на основу (1.35) добија се

$$(1.36) \quad \lambda_k = \frac{2^{-1}(2n-1)\Gamma(n-\frac{1}{2})^2}{n!(n-1)\Gamma(n-1)} \frac{\lambda_n \lambda_{n-1}}{T_{n-1}(x_k)T'_n(x_k)}$$

где је $\lambda_n = \frac{n!}{(\frac{1}{2})_n} = n! \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n + \frac{1}{2})}$.

С обзиром на то да је $T_{n-1}(x_k)T'_n(x_k) = n$, претходна једнакост се своди на

$$(1.37) \quad \lambda_k = \frac{\pi}{n},$$

па се помоћу једнакости (1.20), *Gauss-Chebyshev*–лева квадратурна формула прве врсте може представити у облику

$$(1.38) \quad \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) + R_n(f).$$

Такође, коришћењем претходних резултата, *Gauss-Chebyshev*–лева квадратурна формула друге врсте је задата са

$$(1.39) \quad \int_{-1}^1 f(x)\sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} f\left(\cos \frac{k\pi}{n+1}\right) + R_n(f).$$

Специјално, ако је $\alpha = \beta = 0$, $\omega(x) = 1$, добијамо *Gauss-Legendre*-ову формулу. За одређивање чворова и коефицијената, најпре је потребно наћи нуле *Legendre*-овог полинома.

У конструкцији *Gauss-Laguerre*-ове квадратурне формуле учествују *Laguerre*-ови ортогонални полиноми дефинисани на интервалу $[0, \infty]$ у односу на тежинску функцију $\omega(x) = e^{-x}$.

Gauss-Hermite-ове квадратурне формуле су одређене *Hermite*-овим ортогоналним полиномима на интервалу $[-\infty, \infty]$ у односу на тежинску функцију $\omega(x) = e^{-x^2}$.

Разликују се три врсте *Gauss*-ових квадратурних формула у односу на тежинске функције *Bernstein-Szegő*-вог типа, које су задате изразима

$$w_1(x) = \frac{(1-x^2)^{-1/2}}{\beta(\beta-2\alpha)x^2 + 2\delta(\beta-\alpha)x + \alpha^2 + \delta^2}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$w_2(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\beta(\beta-2\alpha)x^2 + 2\delta(\beta-\alpha)x + \alpha^2 + \delta^2}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$w_3(x) = \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\beta(\beta-2\alpha)x^2 + 2\delta(\beta-\alpha)x + \alpha^2 + \delta^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

1.3 Конструкција Gauss-ових квадратурних формула

Приликом генерисања *Gauss*-ове квадратурне формуле

$$\int_a^b \omega(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^n \lambda_k f(x_k) + R_n(f)$$

разликују се два приступа у случајевима

a) позната је трослојна рекурентна релација ортогоналних полинома у односу на тежинску функцију,

b) познати су моменти у односу на тежинску функцију.

a) Конструкција *Gauss*-ове квадратурне формуле је уско повезана се конструкцијом ортогоналних полинома. Нека је задат скуп моничних полинома $\{p_k(x)\}_{k \in N_0}$ ортогоналних у односу на тежинску функцију $\omega(x)$ који задовољавају трослојну рекурентну релацију

$$p_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)p_k(x) - \beta_k p_{k-1}(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$p_{-1}(x) = 0, \quad p_0(x) = 1,$$

где су

$$\alpha_k = \frac{(xp_k, p_k)}{(p_k, p_k)}, \quad \beta_k = \frac{(p_k, p_k)}{(p_{k-1}, p_{k-1})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Дата релација се може приказати матрично

$$x \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 1 & & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_N \end{bmatrix}$$

односно,

$$(1.40) \quad xP(x) = T_n P(x) + p_n(x)E_n(x),$$

где је $P(x) = (p_0(x), \dots, p_{n-1}(x))^T$, матрица T_n дата тродијагонална матрица, док је $E_n(x)$ колона $E_n(x) = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$.

Тродијагонална матрица T_n се, применом трансформације $DT_n D^{-1}$,

може свести на симетричну тродијагоналну матрицу J_n ,

$$(1.41) \quad DTD^{-1} = J_n = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Рекурентној релацији за ортонормиране полиноме $P^*(x) = \frac{P(x)}{\|P(x)\|}$

$$(1.42) \quad \sqrt{\beta_{k+1}}p_{k+1}^*(x) = (x - \alpha_k)p_k^*(x) - \sqrt{\beta_k}p_{k-1}^*(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$p_{-1}^*(x) = 0, \quad p_0^*(x) = c_0^{-1/2},$$

односно,

$$(1.43) \quad xP^*(x) = J_nP^*(x) + \sqrt{\beta_n}p_n^*(x)E_n(x),$$

одговара управо симетрична матрица J_n слична матрици T_n .

Као што је познато, чворови x_k квадратурне формуле су нуле полинома $p_n(x)$. Одабиром $x = x_k$ у једнакости (1.40), може се закључити да је x_k уједно и сопствена вредност матрице T_n и да је $P(x_k)$ одговарајући сопствени вектор јер је $x_kP(x_k) = T_nP(x_k)$. Исто важи и за *Jacobi*-еву матрицу, односно из једнакости (1.43), следи $J_nP^*(x_k) = x_kP^*(x_k)$, што значи да је x_k сопствена вредност, а $P^*(x_k)$ сопствени вектор матрице J_n .

Дакле, коефицијенти λ_k и чворови x_k квадратурне формуле (1.28) се одређују помоћу сопствених вредности и првих компоненти ортонормираних сопствених вектора матрице J_n . Обично се код решавања проблема сопствених вредности налазе нормализовани сопствени вектори, односно траже се сопствене вредности x_k и сопствени вектори q_k такви да је

$$(1.44) \quad J_nq_k = x_kq_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где је $q_k = [q_{1,k}, \dots, q_{n,k}]^T$ вектор колинеаран са $P^*(x_k)$, односно $q_k = \text{const} \cdot P^*(x_k)$ и важи $q_k^T q_k = 1$.

Константа const се може једноставно одредити. Приметимо

$$(1.45) \quad [P^*(x_k)]^T [P^*(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} (p^*(x_k))^2 = \frac{1}{\lambda_k}.$$

С обзиром на једнакости (1.42) и (1.43), важи

$$(1.46) \quad q_{k,1} = \text{const} \cdot p_0^*(x) = \text{const} \cdot c_0^{-1/2},$$

па се заменом у једнакост (1.45) добија

$$(1.47) \quad \lambda_k = \text{const}^2 = c_0 q_{k,1}^2.$$

Закључујемо да се одређивање параметара λ_k и x_k квадратурне формуле (1.28) своди на решавање проблема сопствених вредности, при чему је довољно одредити само прве компоненте сопствених вектора $q_k(x_k)$.

b) У неким случајевима тежинска функција $\omega(x)$ није дата експлицитно већ је познат само скуп од $(2n+1)$ -ог момента датог у облику

$$(1.48) \quad \nu_k = \int_a^b \omega(x) x^k dx, \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Нека је Ω подскуп n -димензионог *Euclid*-ског простора на ком за дату тежинску функцију $\omega(x) \geq 0$ постоје сви моменти дефинисани са

$$(1.49) \quad \nu_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n} = \int_{\Omega} \omega(x) x^{\gamma_1} x^{\gamma_2} \dots x^{\gamma_n} dx,$$

и важи $\nu_{0,0,\dots,0} > 0$.

Уколико се чланови $x^{\gamma_1} x^{\gamma_2} \dots x^{\gamma_n}$, $\gamma_1 \geq 0, \dots, \gamma_n \geq 0$ означе са $\phi_k(x)_{k=1}^L$, тада су скаларни производи

$$(1.50) \quad (\phi_i, \phi_j) = \int_{E^n} \omega(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx$$

уједно и елементи *Gram*-ове матрице $M = [(\phi_i, \phi_j)]_{i,j=1}^L = [m_{i,j}]$, и притом важи следећа Лема

Лема 1.11. Полиноми

$$F_j(x) = s_{1j}\phi_1(x) + s_{2j}\phi_2(x) + \dots + s_{jj}\phi_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, L$$

формирају ортонормирани систем.

Штавише, када је $n = 1$, тада је $F_j = p_{j-1}$ полином степена $j - 1$ и важи рекурентна веза

$$(1.51) \quad xp_{j-1}(x) = \beta_{j-1}p_{j-2}(x) + \alpha_j p_{j-1}(x) + \beta_j p_j(x), \quad j = 1, \dots, n.$$

Детаљнији опис се може наћи у раду [39].

1.3.1 Конструкција Gauss-Radau и Gauss-Lobatto квадратурних формула

Разматра се задатак конструкције квадратурне формуле

$$(1.52) \quad \int_a^b f(x)\omega(x)dx = \sum_{j=1}^N w_j f(x_j) + \sum_{k=1}^M v_k f(z_k) + R_n(f)$$

код које су чворови $\{z_k\}_{k=1}^M$ унапред задати.

Дефиниција 7. Квадратурна формула (1.52) је:

Gauss-Radau типа уколико је $M = 1$, $z_1 = a$ или $z_1 = b$,

Gauss-Lobatto типа уколико је $M = 2$, $z_1 = a$ и $z_2 = b$.

Golub у раду [40] из 1973. године описује алгоритам за конструкцију *Gauss-Radau* и *Gauss-Lobatto* квадратурних формула који представља модификацију алгоритма заснованог на проблему сопствених вредности. Нека је $\omega(x) \geq 0$ тежинска функција дефинисана на интервалу $[a, b]$ и нека је дат низ полинома $p_0(x), p_1(x), \dots$ ортонормираних у односу на $\omega(x)$. Полиноми

$$p_n(x) = k_n \prod_{i=1}^n (x - x_i^{(n)}), \quad k_n > 0$$

имају n различитих реалних нула на интервалу $[a, b]$

$$a < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < b$$

и задовољавају рекурентну релацију која се може записати у облику матричне једначине (1.43). Под претпоставком да је могуће одредити све коефицијенте и чворове формуле (1.52), остатак квадратурне формуле се може изразити на следећи начин ([40])

(1.53)

$$R(f) \approx \frac{f^{(2N+M)}(\eta)}{(2N+M)!} \int_a^b \prod_{k=1}^M (x - v_k) \left[\prod_{j=1}^N (x - x_j) \right]^2 \omega(x) dx, \quad a < \eta < b.$$

Нека је $M = 1$ и $z_1 = a$ дати фиксирани чвор. За конструкцију *Gauss-Radau* квадратурне формуле потребно је одредити полином $p_{N+1}(x)$ тако да је

$$(1.54) \quad p_{N+1}(a) = 0.$$

Из релације (1.5) следи

$$(1.55) \quad 0 = p_{N+1}(a) = (a - \alpha_{N+1})p_N(a) - \beta_N p_{N-1}(a),$$

односно,

$$(1.56) \quad \alpha_{N+1} = a - \beta_N \frac{p_{N-1}(a)}{p_N(a)}.$$

Из матричне једначине (1.43) следи

$$(1.57) \quad (J_N - aI)P(a) = -\beta_N p_N(a)E_N,$$

што се увођењем $\delta_j(a) = -\beta_N \frac{p_{j-1}(a)}{p_N(a)}$, $j = 1, \dots, N$ своди на

$$(1.58) \quad (J_N - aI)\Delta(a) = \beta_N^2 E_N, \quad \Delta(a) = [\delta_1(a), \delta_2(a), \dots, \delta_N(a)].$$

Коначно, елемент на позицији $(N+1, N+1)$ новодобијене матрице J_{N+1} је дат изразом

$$(1.59) \quad \alpha_{N+1} = a + \delta_N(a).$$

Дакле, конструкција *Gauss-Radau* квадратурне формуле се састоји из следећих корака

1. генерисати матрицу J_N и елемент β_N ,
2. решити систем једначина који је задат изразом (1.58),
3. одредити коефицијент α_{N+1} из једнакости (1.59),
4. одредити сопствене вредности и прве компоненте сопствених вектора новодобијене тродијагоналне матрице

$$J_{N+1} = \begin{bmatrix} J & \beta_N E_N \\ \beta_N E_N^T & \alpha_{N+1} \end{bmatrix}.$$

Слично, приликом конструкције *Gauss-Lobatto* квадратурне формуле, потребно је одредити полином $p_{N+1}(x)$ тако да је

$$(1.60) \quad p_{N+1}(a) = p_{N+1}(b) = 0.$$

Релација (1.5) се своди на

$$(1.61) \quad \begin{aligned} \alpha_{N+1} p_N(a) + \beta_N p_{N-1}(a) &= a p_N(a), \\ \alpha_{N+1} p_N(b) + \beta_N p_{N-1}(b) &= b p_N(b). \end{aligned}$$

Уколико се у једнакости (1.43) уведу ознаке

$$(1.62) \quad \begin{aligned} (J - aI)\gamma &= e_N, \\ (J - bI)\eta &= e_N, \end{aligned}$$

тада се одговарајуће компоненте вектора γ и η могу одредити на следећи начин

$$(1.63) \quad \gamma_j = -\frac{1}{\beta_N} \frac{p_{j-1}(a)}{p_N(a)} \quad j = 1, \dots, N,$$

$$\eta_j = -\frac{1}{\beta_N} \frac{p_{j-1}(b)}{p_N(b)}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Систем једнакости (1.61) се овим своди на

$$(1.64) \quad \begin{aligned} \alpha_{N+1} - \gamma_N \beta_N^2 &= a, \\ \alpha_{N+1} - \eta_N \beta_N^2 &= b. \end{aligned}$$

Конструкција *Gauss-Lobatto* квадратурне формуле обухвата следеће

1. генерисати матрицу J_N ,
2. одредити γ_N и η_N из система (1.63),
3. одредити α_{N+1} и β_N^2 помоћу једнакости (1.64),
4. одредити сопствене вредности и прве компоненте сопствених вектора тродијагоналне матрице

$$J_{N+1} = \begin{bmatrix} J & \beta_N E_N \\ \beta_N E_N^T & \alpha_{N+1} \end{bmatrix}.$$

1.3.2 Конструкција уопштене Gauss-Turán-ове квадратурне формуле

P. Turán је у раду [125] из 1950. год. увео квадратурну формулу облика

$$(1.65) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=0}^{2s} A_{i,\nu} f^{(i)}(\tau_\nu) \quad (n \in N, s \in N_0).$$

Основна разлика у односу на *Gauss*-ову квадратурну формулу се састоји у томе што се, поред вредности функције у чворовима, сада посматрају и вредности извода функције, закључно са $(2s)$ -тим. Очигледно је да се у случају $s = 0$ ова формула своди на *Gauss*-ову квадратурну формулу.

Уопштење ове формуле, *Gauss-Turán*–ова квадратурна формула, је дата са

$$(1.66) \quad \int_a^b f(x)\omega(x) dx \approx \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=0}^{2s} A_{i,\nu} f^{(i)}(\tau_\nu) \quad (n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}_0),$$

где су τ_ν нуле полинома π_n , познатог као s –ортогонални полином степена n (видети деф. 5), за који важи

$$(1.67) \quad \int_a^b \pi_n^{2s+1}(x)p(x)\omega(x) dx = 0, \quad p \in \mathbb{P}_{n-1}.$$

Алгебарски степен тачности формуле (1.66) износи $2(s+1)n - 1$.

У раду [31] *Gautschi* и Миловановић излажу метод за одређивање чворова и коефицијената *Gauss-Turán*–ове квадратурне формуле. Најпре се конструишу s –ортогонални полиноми. За фиксиране n и s , уз ознаку $d\mu(x) = d\mu^{s,n}(x) = (P_n(x))^{2s}d\lambda(x)$, услов ортогоналности се може записати у облику

$$(1.68) \quad \int_R P_k^{s,n}(x)x^\nu d\mu(x) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, k-1,$$

где је $\{P_k^{s,n}\}$ низ моничних ортогоналних полинома у односу на нову меру $d\mu(t)$. Ови полиноми задовољавају трослојну рекурентну релацију

$$P_{\nu+1}^{s,n}(x) = (x - \alpha_\nu)P_\nu^{s,n}(x) + \beta_\nu P_{\nu-1}^{s,n}(x), \quad \nu = 0, 1, \dots$$

$$P_{-1}^{s,n}(x) = 0, \quad P_0^{s,n}(x) = 1.$$

Због ортогоналности, важи

$$\alpha_\nu = \frac{(xP_\nu^{s,n}, P_\nu^{s,n})}{(P_\nu^{s,n}, P_\nu^{s,n})} = \frac{\int_R x(P_\nu^{s,n}(x))^2 d\mu(x)}{\int_R (P_\nu^{s,n}(x))^2 d\mu(x)},$$

$$\beta_\nu = \frac{(P_\nu^{s,n}, P_\nu^{s,n})}{(P_{\nu-1}^{s,n}, P_{\nu-1}^{s,n})} = \frac{\int_R (P_\nu^{s,n}(x))^2 d\mu(x)}{\int_R (P_{\nu-1}^{s,n}(x))^2 d\mu(x)}, \quad \beta_0 = \int_R d\mu(x).$$

Као што је описано поглављу 1.1, коефицијенти α_ν и β_ν имају фундаменталну улогу у конструктивној теорији ортогоналних полинома. Уколико су они познати за $\nu = 0, 1, \dots, n-1$, познато је и првих $n+1$ ортогоналних полинома $P_0^{s,n}, P_1^{s,n}, \dots, P_n^{s,n}$. Тражени s -ортогонални полиноми су управо последњи елементи претходних низова, односно, $P_n^{s,n}$, $n = 0, 1, \dots$.

Пошто је мера $d\mu(x)$ задата имплицитно, тј. пошто укључује и непознате полиноме $P_n^{s,n}$, да би израчунали коефицијенте α_ν и β_ν , *Gautschi* и Миловановић најпре решавају систем нелинеарних једначина

$$f_0 = \beta_0 - \int_R P_n^{2s}(x) d\lambda(x) = 0,$$

$$f_{2\nu+1} = \int_R (\alpha_\nu - x) P_\nu^2(x) P_n^{2s}(x) d\lambda(x) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$f_{2\nu} = \int_R (\beta_\nu P_{\nu-1}^2(x) - P_\nu^2(x)) P_n^{2s}(x) d\lambda(x) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n-1,$$

применом *Newton-Kantorovič*-евог метода. Више детаља се може наћи у раду [31].

Li ([57]) је 1994. год. конструисао уопштење формуле (1.66) на следећи начин

$$(1.69) \quad \int_a^b f(x) \omega(x) dx \approx \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=0}^{2s} B_{i,\nu} f^{(i)}(\tau_\nu) + \sum_{j=1}^{n+1} C_j f(\hat{\tau}_j) \quad (n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}_0),$$

где су чворови τ_ν исти као у формули (1.66), док су нови чворови $\hat{\tau}_j$ и нови коефицијенти $B_{i,\nu}$ и C_j одабрани тако да доведу до максималног алгебарског степена тачности формуле (1.69). У истом раду је показано да, када је ω произвољна тежинска функција на интервалу $[a, b]$, тада се увек може постићи максимални алгебарски степен тачности, једнак

$2n(s+1)+n+1$, одабиром да нови чворови $\hat{\tau}_j$ буду нуле полинома

$\hat{\pi}_{n+1}$ за који важи

$$\int_a^b \hat{\pi}_{n+1}(t) \pi_n^{2s+1}(t) p(t) \omega(t) dt = 0, \quad p \in P_n.$$

Истовремено је показано да полином $\hat{\pi}_{n+1}$ увек постоји и да је јединствен до на константу. У специјалном случају, када је $\omega(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$, полином $\hat{\pi}_{n+1}$ је експлицитно одређен и добијени су коефицијенти формуле (1.69) за $s = 1$ и за $s = 2$.

Коефицијенте у преосталим случајевима $s \geq 3$ је касније одредио *Shi* у раду [104].

Наредно уопштење *Gauss-Turán*-ове квадратурне формуле се састоји у томе да чворови не морају имати исту вишеструкост, односно да се произвољни чвор τ_ν може појавити s_ν пута. Таква формула се назива формула *Chakalov-Popoviciu* типа

$$(1.70) \quad \int_a^b f(x) \omega(x) dx \approx \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=0}^{2s_\nu} A_{i,\nu} f^{(i)}(\tau_\nu) \quad (n \in N, s_\nu \in N_0).$$

У раду [74] се налазе алгоритми који описују начине рачунања коефицијената $A_{i,\nu}$ формуле (1.70). Наведимо Теорему чија ће нам примена бити неопходна у глави 3.

Теорема 1.12. За фиксирано ν , $1 \leq \nu \leq n$, коефицијенти $A_{i,\nu}$ уопштене *Gauss-Turán*-ове квадратурне формуле (1.70) су задати са

$$\begin{aligned} b_{2s_\nu+1} &= (2s_\nu)! A_{2s_\nu,\nu} = \hat{\mu}_{2s_\nu,\nu}, \\ b_k &= (k-1)! A_{k-1,\nu} = \hat{\mu}_{k-1,\nu} - \sum_{j=k+1}^{2s_\nu+1} \hat{a}_{k,j} b_j, \quad k = 2s_\nu, \dots, 1, \end{aligned}$$

где је

$$(1.71) \quad \hat{\mu}_{k,\nu} = \int_R (t - \tau_\nu)^k \prod_{i \neq \nu} \left(\frac{t - \tau_i}{\tau_\nu - \tau_i} \right)^{2s_i+1} d\lambda(t),$$

$$(1.72) \quad \hat{a}_{k,k+j} = -\frac{1}{j} \sum_{l=1}^j u_l \hat{a}_{l,j}, \quad \hat{a}_{k,k} = 1,$$

$$(1.73) \quad u_l = \sum_{i \neq \nu} (2s_i + 1)(\tau_i - \tau_\nu)^{-l}, \quad l = 2s_\nu, \dots, 1.$$

1.4 Остатак квадратурне формуле

Као што је дефинисано, израз

$$(1.74) \quad R_n(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx - \sum_{k=0}^n \lambda_k f(x_k)$$

се назива остатком квадратурне формуле и он представља грешку која настаје при замени интеграла коначном сумом. Код неких елементарних квадратурних формула остатак се може експлицитно изразити, док, у општем случају $R_n(f)$ може имати сложен облик.

Дефиниција језгра, Пеано–ов израз

Теорема 1.13. Нека је $R_n(f) = 0$ за свако $f \in P_m$. Тада је, за свако $f \in C^{m+1}[a, b]$

$$(1.75) \quad R_n(f) = \int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t) dt,$$

где је $K_m(t) = \frac{1}{m!} Lu = R_n(u)$,

$$Lf = R_n(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx - \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k),$$

а функција $x \rightarrow u(x)$ дефинисана помоћу

$$(1.76) \quad u(x) = (x - t)_+^m = \begin{cases} (x - t)^m & x \geq t, \\ 0 & x < t, \end{cases}$$

(видети [72]).

Доказ. С обзиром да се остатак E_m у *Taylor*-овој формули

$$(1.77) \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(a)(x - a)^m + E_m$$

може представити у облику

$$(1.78) \quad E_m = \frac{1}{m!} \int_a^x (x - t)^m f^{(m+1)}(t) dt = \frac{1}{m!} \int_a^b (x - t)_+^m f^{(m+1)}(t) dt,$$

применом линеарног функционала L на f добијамо

$$(1.79) \quad Lf = \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!} f^{(i)}(a) L((x - a)^i) + \frac{1}{m!} L\left(\int_a^b (x - t)_+^m f^{(m+1)}(t) dt\right).$$

С обзиром на то да је $Lf = 0$ за свако $f \in P_m$, последња једнакост се своди на

$$(1.80) \quad R_n(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b (Lu) f^{(m+1)}(t) dt,$$

чиме је доказ завршен. \square

Функција $x \rightarrow K_s(x)$ се назива *s*-то *Peano*-во језгро остатка R_n , а изрази e_s

$$(1.81) \quad e_s = \int_{-\infty}^{\infty} |K_s(t)| dt, \quad s = 1, 2, \dots, d + 1,$$

Peano-ве константе остатка R_n . Применом једнакости (1.75), добија се оцена остатка

$$(1.82) \quad |R_n(f)| \leq e_s \cdot \max_{a \leq t \leq b} |f^{(s)}(t)|.$$

Претходни израз је погодан за оцену грешке квадратурне формуле у случајевима у којима су познати само изводи нижег

реда функције f . Неке вредности *Peano*-вих константи e_s за $s = 1, 2, 4, 8, \dots$ за различите типове *Gauss*-ових формула су израчунате у радовима *Stroud*-а и *Secrest*-а из 1966. године.

У раду [84] из 1836. године је показано да језгра K_s која одговарају *Gauss-Legendre*-овој квадратурној формули са n тачака садрже тачно $2n - s$ промену знака на интервалу $[-1, 1]$. Сличан резултат важи и за *Gauss-Radau* и *Gauss-Lobatto* квадратурне формуле (видети [7]).

Оцена модула остатка у *Hilbert*-овом простору и оцена на основу апроксимација

Уколико је R_n ограничен линеарни функционал на *Hilbert*-овом простору \mathcal{H} , он се може оценити на следећи начин

$$(1.83) \quad |R_n(f)| \leq \sigma_n \|f\|,$$

где је $\sigma_n = \|R_n\|$ норма функционала R_n , а $\|f\|$ норма функције f на простору \mathcal{H} . *Davis* у раду [14] из 1953. год. уводи методе за оцену линеарних функционала. Уколико је $\{p_k\}$ комплетан систем ортонормираних полинома простора \mathcal{H} , тада важи

$$(1.84) \quad \sigma_n^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |R_n(p_k)|^2.$$

На кружној контури $\Gamma = C_r$ оцена (1.83) се може изразити на следећи начин

$$(1.85) \quad |R_n(f)| \leq \sigma_n \sqrt{2\pi r} \cdot \sup_{z \in C_r} |f(z)|.$$

Слично, на елиптичкој контури $\Gamma = \mathcal{E}_\rho$ са збиром полуоса $a + b = \rho$, добија се оцена

$$(1.86) \quad |R_n(f)| \leq \sigma_n \sqrt{\pi ab} \cdot \sup_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)|.$$

Уколико је функција f непрекидна на коначном интервалу $[a, b]$ и уколико је p_{2n-1}^* полином степена $\leq 2n - 1$, њена најбоља апроксимација, тада се увођењем ознаке

$$(1.87) \quad E_{2n-1}(f) = \inf_{p \in \mathcal{P}_{2n-1}} \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - p(t)| = \|f - p_{2n-1}^*\|_\infty,$$

модуо остатка било које *Gauss*-ове квадратурне формуле може оценити на следећи начин

$$(1.88) \quad |R_n(f)| = |R_n(f - p_{2n-1}^*)| \leq 2\eta_0 \|f - p_{2n-1}^*\|_\infty, \quad \eta_0 = \int_a^b d\lambda(t),$$

односно

$$(1.89) \quad |R_n(f)| \leq 2\eta_0 E_{2n-1}(f).$$

Претходни резултат је добио *Bernstein* [2], а сличне оцене се могу наћи и у раду [60].

Sydow [121] долази до побољшане оцене модула остатка

$$(1.90) \quad |R_n(f)| \leq 4\eta_0(1 - \rho^{-2})^{-1} \rho^{-2n} \cdot \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)|$$

где је функција f холоморфна у унутрашњости елипсе \mathcal{E}_ρ и непрекидна на њеној граници.

Оцена интегралне репрезентације остатка

Нека је H *Hilbert*-ов простор функција $f(z)$ регуларних у диску $|z| < 1$ и непрекидних на $\Gamma = \{z \mid |z| = 1\}$ са скаларним производом

$$(1.91) \quad (f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma f(z) \overline{g(z)} ds,$$

где је ds елемент лука криве Γ . На основу *Cauchy*-еве формуле

$$(1.92) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{1 - z\xi} ds, \quad (d\xi = i\xi ds),$$

добија се

$$(1.93) \quad Lf = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(\xi) L\left(\frac{1}{1-z\bar{\xi}}\right),$$

где је $Lf = R_n(f)$.

Применом *Cauchy-Schwarz*-ове неједнакости, добија се

$$(1.94) \quad |R_n(f)|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} |f(\xi)|^2 ds \int_{\Gamma} \left| L\left(\frac{1}{1-z\bar{\xi}}\right) \right|^2 ds.$$

Када је f холоморфна функција, остатак $R_n(f)$ се може изразити на више начина. *Heine* у раду из 1881. године даје следећу интегралну репрезентацију остатка

$$(1.95) \quad R_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\rho_n(z)}{p_n(z)} f(z) dz.$$

Претпоставља се да је интервал $[a, b]$ коначан, тако да се може трансформисати у интервал $[-1, 1]$; функција f је холоморфна на домену D који окружује интервал $[-1, 1]$; Γ је крива унутар домена D која такође окружује интервал $[-1, 1]$, док је израз $\rho_n(z)$ дефинисан на следећи начин

$$(1.96) \quad \rho_n(z) = \int_a^b \frac{p_n(t)}{z-t} d\lambda(t), \quad z \notin [a, b].$$

Крива Γ је најчешће: круг $\Gamma = C_r$, $|z| = r$, $r > 1$, или елипса $\Gamma = \mathcal{E}_\rho$ са фокусима у тачкама ± 1 и збиром полуоса једнаким ρ , $\rho > 1$. Одабир круга C_r је погодан уколико је домен D довољно велики и може да садржи круг полупречника r , док је примена елипсе \mathcal{E}_ρ доста већа јер се смањивањем $\rho \rightarrow 1$ све мање одступа од интервала $[-1, 1]$. Елипса, као крива интеграције, је погодна и за функције које су аналитичке на интервалу $[-1, 1]$. Остатак (1.95) се може оценити изразом

$$(1.97) \quad R_n(f) \leq \frac{1}{2\pi} H_n \cdot l(\Gamma) \cdot \max_{z \in \Gamma} |f(z)|,$$

где је $l(\Gamma)$ дужина криве Γ , H_n или горња граница израза $\left| \frac{\rho_n(z)}{p_n(z)} \right|$ на кривој Γ или његова асимптотска оцена за $n \rightarrow \infty$.

Применом претходног израза, добијене су оцене грешака за неке од Gauss–ових квадратурних формула (видети [16], [103], [108]).

Freud ([19], [20]) формулише нови начин приказивања остатка

$$(1.98) \quad R_n(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{f(z)dz}{p_k(z)p_{k+1}(z)},$$

где су p_k ортогонални монични полиноми, $h_k = \int_a^b p_k^2(t)d\lambda(t)$, Γ_k крива унутар које су све нуле полинома $p_k(z)$ и $p_{k+1}(z)$.

Уз претпоставке да је $d\lambda(t) = \lambda(t)dt$ на интервалу $[-1, 1]$ и да је функција f холоморфна унутар области $|z| < 1$ и непрекидна на $|z| = 1$, *Stenger* добија следећи израз за остатак

$$(1.99) \quad R_n(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2n+2k} r_{n,k},$$

где су α_{2k} коефицијенти *Maclaurin*–овог развоја функције f , док је $r_{n,k} = R_n(t^{2n+2k})$. Модуо $|R_n(f)|$ се може оценити применом *Cauchy-Schwarz*–ове или *Hölder*–ове неједнакости.

1.5 Неке модификације Gauss–ове формуле, новији резултати

Нека алгебарски степен тачност квадратурне формуле

$$(1.100) \quad I(f) = \int_a^b \omega(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) + R_n(f) = Q_n(f) + R_n(f).$$

износи $p = 2n - 1$, односно $R_n(f) = 0$ за свако $f \in P_{2n-1}$.

Gauss је у раду [21] анализирао претходну формулу у случају $\omega(x) = 1$ и нумерички одредио параметре λ_k за $k \leq 7$.

Christoffel у раду [10] из 1858. године уводи случај произвољне мере $d\lambda(t)$ на коначном или полу-бесконачном интервалу. Касније, *Christoffel* уопштава *Gauss*–ове резултате, па се претходна квадратурна формула у литератури јавља и под називом *Gauss-Christoffel*–ова квадратурна формула.

Heun [45] врши даље уопштење *Gauss*–ове идеје и примењује је на решавање диференцијалних једначина чиме се унапређује до тада познато нумеричко решавање диференцијалних једначина и иницира настанак методе *Runge Kutta* [54].

Jacobi у раду [42] из 1826. године уводи појам ортогоналности полинома. Поред тога, показује да за произвољни цео број k , $0 \leq k \leq n$, квадратурна формула (1.100) има степен тачности једнак $n - 1 + k$ ако и само ако су задовољена следећа два услова

i) Q_n је интерполациона формула

ii) $I(\pi_n p) = 0$, $p \in P_{k-1}$, где је π_n задат са $\pi_n(t) = \prod_{k=1}^n (t - x_k)$.

Такође, захтева се да је полином π_n ортогоналан на све полиноме степена не већег од $k - 1$. Случај $k = n$ је нарочито битан јер води ка *Gauss*–овој формули максималног степена тачности. У овом случају π_n мора бити ортогоналан и на све полиноме нижег степена, односно (уколико је интервал $[a, b]$ стандардизован на

интервал $[-1, 1]$), π_n је *Legendre*–ов полином степена n

$$\pi_n(t) = p_n(t), \quad I(p_k p_l) = 0, \quad k \neq l.$$

Мера $d\lambda(t) = \lambda(t)dt$ одређује јединствен систем моничних ортогоналних полинома $p_k(t) = p_k(t; d\lambda)$, степена k таквих да је

$$(1.101) \quad \int_a^b p_k(t) p_l(t) d\lambda(t) = 0, \quad k \neq l.$$

Полиноми $p_k(t)$ задовољавају трослојну рекурентну релацију задату изразом (1.6) (видети [11], [13] и [118]).

Услов ортогоналности полинома π_n на све полиноме степена мењег или једнаког $k-1$ може бити записан и у следећем облику

$$\pi_n(t) = p_n(t) - c_1 p_{n-1}(t) - \dots - c_{n-k} p_k(t),$$

где су c_i произвољне константе. Уколико је $k = n$, добија се јединствен облик $\pi_n(t) = p_n(t, d\lambda)$.

Следеће уопштење Gauss–ове формуле се изводи увођењем израза

$$\begin{aligned} L(z) &= \int_a^b \frac{d\lambda(t)}{z-t}, \\ \rho_n(z) &= \int_a^b \frac{p_n(t)}{z-t} d\lambda(t), \quad z \notin [a, b], \\ \sigma_n(z) &= \int_a^b \frac{p_n(z) - p_n(t)}{z-t} d\lambda(t), \end{aligned}$$

(видети [11], [48]) чији су се специјални случајеви јављали у ранијим радовима *Christoffel*–а и *Jacobi*–ја. Очигледно је

$$(1.102) \quad p_n(z)L(z) = \sigma_n(z) + \rho_n(z),$$

а важи и

$$(1.103) \quad \rho_n(z) = \int_a^b \frac{p_n(t)}{z-t} d\lambda(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \int_a^b t^k p_n(t) d\lambda(t),$$

што значи да је $\rho_n(z) = O(z^{-n-1})$, као и

$$(1.104) \quad L(z) - \frac{\sigma_n(z)}{p_n(z)} = \frac{\rho_n(z)}{p_n(z)} = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Коефицијенти λ_k се уопштено могу дефинисати на следећи начин

$$(1.105) \quad \frac{\sigma_n(z)}{p_n(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{z-x_k} \equiv Q_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right),$$

односно

$$(1.106) \quad \lambda_k = \frac{\sigma_k(x_k)}{p'_n(x_k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Одатле следи

$$(1.107) \quad L(z) - \frac{\sigma_n(z)}{p_n(z)} = I\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) - Q_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) = R_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_n(t^k)}{z^{k+1}},$$

што, заједно са једнакошћу (1.105) даје $R_n(t^k) = 0$ за свако $0 \leq k \leq 2n - 1$. Добијени резултат значи да је формула (1.100) Gauss–ова квадратурна формула максималног алгебарског степена тачности. Више детаља се може наћи у раду [24].

Један од првих начина приказивања остатка дао је *Markoff* у раду [61]. Применом *Hermite*–ове интерполације, уместо функције f , посматра се интеграција *Hermite*–овог интерполационог полинома $q_{2n-1}(f; \cdot)$ степена $\leq 2n - 1$. Услов да све тежине додељене изводима $f'(x_k)$ у квадратурној суми буду једнаке нули, намеће да се чворови x_k одаберу као нуле ортогоналног полинома $p_n(\cdot; d\lambda)$. У истом раду *Markoff* долази до експлицитног израза за остатак квадратурне формуле (1.100),

$$(1.108) \quad R_n(f) = \int_a^b p_n^2(t)[x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, t]f d\lambda(t),$$

где $[x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, t]f$ означава подељене разлике функције f . Уколико $f \in C^{2n}[a, b]$, тада се остатак $R_n(f)$ може приказати у следећем облику

$$(1.109) \quad R_n(f) = \frac{1}{(2n)!} h_n(t) f^{(2n)}(t'_m), \quad h_n = \int_a^b p_n^2(t) d\lambda(t),$$

где је $t'_m \in [a, b]$.

Остатак (1.109) се може изразити и коришћењем *Euler-Maclaurin*–ове формуле, што предлаже *Bilharz* у раду [4] посвећеном анализи остатка *Gauss-Legendre*–ове формуле, док *Krylov*

у раду [53] из 1959. године анализира остатак произвољне квадратурне формуле. С обзиром на то да је у неким случајевима тешко одредити изводе вишег реда, ова формула нема широку практичну примену.

Turán [125] 1950. год. уводи нови приступ *Gauss*–овим квадратурним формулама који обухвата да се поред вредности функције у чворовима посматрају и вредности извода функције. Поред тога, показује да постоји јединствен полином $p_n(x)$ такав да формула (1.110) има максимални степен тачности једнак $(r + 1)n - 1$,

$$(1.110) \quad I(f) = \sum_{\nu=1}^n [\lambda_{\nu} f(\tau_{\nu}) + \lambda'_{\nu} f'(\tau_{\nu}) + \dots + \lambda_{\nu}^{(r-1)} f^{(r-1)}(\tau_{\nu})] + R_n(f),$$

где је $r \geq 1$ вишеструкост чворова τ_{λ} , уколико важи

$$(1.111) \quad \int_a^b [p_n(x)]^{(2s+1)} x^k d\lambda(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Bernstein у раду [3] доказује да за свако s и свако непарно r , нуле *Chebyshev*–љевих полинома прве врсте могу бити чворови свих *Turán*–ових формула облика (1.110). Овај резултат је искоришћен у потпоглављу 3.2.

Примена квадратурних формула *Turán*–овог типа се може наћи у раду [64] у ком *Micchelli* и *Rivlin* рачунају *Fourier*–ове коефицијенте, као и у раду [49] аутора *Kastlunger* и *Wanner* где се конструишу имплицитне формуле *Runge-Kutta*.

Kronrod ([51], [52]) уводи идеју о вишеструкости чворова *Gauss*–ових квадратурних формула, као и одабиру чворова и тежина који воде ка максималном степену тачности (глава 3).

Gatteschi [22] уводи уопштење *Gauss-Lobatto* квадратурне формуле у случају *Legendre*–ове тежинске функције које се састоји у томе да се крајеви интервала интеграције посматрају као вишеструки чворови.

Миловановић, Спалевић и Цветковић у раду [77] из 2004. године приказују алгоритам за конструкцију неких типова *Gauss*–ових квадратурних формула са вишеструким чворовима.

Интеграл $I(f)$ у формули (1.100) се може апроксимирати и увођењем два скупа чворова

$$(1.112) \quad I(f) = \sum_{k=1}^K \lambda_k f(x_k) + \sum_{l=1}^L \eta_l f(u_l) + R_n(f).$$

Фиксирани чворови u_1, \dots, u_L су задати реални бројеви ван отвореног интервала (a, b) , док су $x_1, \dots, x_K \in (a, b)$ слободни чворови. Специјални случај формуле (1.112) где је $L = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ је формулисао *Rehuel Lobatto* у раду [59]. *Rodolphe Radau* је анализирао исту формулу у случају $L = 1$, $u_1 = a$ или $u_2 = b$ у раду [102] из 1880. године.

Markoff у раду [61] експлицитно, помоћу тригонометријских функција, изражава поменуте формуле у случају друге *Chebyshev*–љеве мере $d\lambda(t) = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}} dt$.

Последњих 20 година јавља се велики број радова у којима се разматрају модификације и примене *Gauss-Lobatto* и *Gauss-Radau* формула у раличитим областима.

Gautschi и *Varga* се у раду [25] баве оценом интегралне репрезентације остатка *Gauss*–ове формуле. У неким случајевима је доказано да се максимум модула језгра остатка достиже на реалној или имагинарној оси. Допуна претходног, рад [28] из 1990. год, представља доказ да се у осталим случајевима максимум не достиже на имагинарној оси, већ у углу који одступа од имагинарне осе максимално $\frac{\pi}{2n+2}$ (слично понашање запажамо и у потпоглављу 2.2.5).

Hunter и *Nikolov* у раду из 1999. год. анализирају језгро остатка *Gauss-Lobatto* квадратурних формула у односу на неке типове симетричних тежинских функција и дефинишу довољне услове за постизање максимума модула језгра.

Велики допринос у изучавању различитих модификација *Gauss-Lobatto* и *Gauss-Radau* квадратурних формула крајем 20. и почетком 21. века даје швајцарско-амерички математичар *Walter Gautschi*. У радовима [32] и [33] из 2000. године *Gautschi* експлицитно изражава коефицијенте *Gauss-Lobatto* и *Gauss-Radau* квадратурних формула у односу на *Jacobi*–еву и *Laguerre*–ову тежинску функцију. Уопштење поменутих формула, које се састоји у томе да крајеви интервала интеграције могу бити произвољне вишеструкости, је приказано у раду [35].

Рад [43] из 2009. године допуњује *Gautschi*–еве резултате из рада [35] тиме што је показана позитивност коефицијената квадратурне формуле. Модификација поменутих формула у циљу постизања већег степена тачности је описана у радовима [17] и [62] из 2005. године.

Notaris у раду [87] из 2010. године посматра остатак *Gauss-Radau* квадратурне формуле као непрекидни линеарни функционал и рачуна (или оцењује) његову норму у случају *Chebyshev*–левих тежинских функција. Рад [8] приказује везу између *Anti-Gauss*–ових и *Gauss-Lobatto* квадратурних формула.

Радови [98], [99], [93], [114], [115] се баве анализом остатка *Gauss*–ове квадратурне формуле у односу на тежинске функције *Bernstein-Szegő* типа.

У раду [33] се анализира *Gauss-Lobatto* квадратурна формула у односу на *Jacobi*–еву меру ефикаснијом методом од оне која је описана у раду [40]. Приказан је и алгоритам за конструкцију квадратурне формуле базиран на модификованој верзији *Jacobi*–еве матрице J_{n+2} (попут матрице (1.41), али димензије $n + 2$) у којој су α_k, β_k такође коефицијенти рекурентне релације (1.42), док су коефицијенти α_{n+1}^* и β_{n+1}^* решења следећег система линеарних једначина

$$\begin{bmatrix} p_{n+1}(-1) & p_n(-1) \\ p_{n+1}(1) & p_n(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{n+1}^* \\ \beta_{n+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_{n+1}(-1) \\ p_{n+1}(1) \end{bmatrix}.$$

Недостатак датог алгоритма се састоји у томе што са порастом броја чворова, n , систем постаје сингуларан. Због тога се предлаже да се у случају *Jacobi*–еве мере, коефицијенти α_{n+1}^* и β_{n+1}^* не рачунају помоћу линеарног система, већ директно:

$$\alpha_{n+1}^* = \frac{a - b}{2n + a + b + 2},$$

$$\beta_{n+1}^* = 4 \frac{(n + a + 1)(n + b + 1)(n + a + b + 1)}{(2n + a + b + 1)(2n + a + b + 2)^2}.$$

Gauss-Lobatto формула у односу на *Jacobi*–еву меру је тиме експлицитно одређена сопственим вредностима и првим компонентама сопствених вектора матрице J_{n+2} .

Слично, у раду [32] су експлицитно израчунати коефицијенти *Gauss-Radau* квадратурне формуле у односу на *Jacobi*–еву и *Laguerre*–ову тежинску функцију. Најпре је експлицитно одређен елемент α_n^* на позицији $(n + 1, n + 1)$ модификоване *Jacobi*–еве матрице J_{n+1} , а затим и одговарајуће сопствене вредности и сопствени вектори.

Gautschi 2004. године конструираше уопштење *Gauss-Radau* квадратурне формуле које се састоји у посматрању вредности извода функције у крајњој тачки

$$\int_a^\infty f(t) d\lambda(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_0^{(k)} f^{(k)}(a) + \sum_{l=1}^n \lambda_l^R f(x_l^R) + R_{n,r}^R(f).$$

У истом раду *Gautschi* формулише хипотезу да су одговарајући коефицијенти позитивни, док је доказ овог тврђења дат у раду [43] из 2009. године.

Примена *Gauss-Lobatto* и *Gauss-Radau* квадратурних формула приликом решавања парцијалних диференцијалних једначина, методе коначих елемената, интерполације, хиперболичких једначина, *Navier-Stokes*–ове једначине као и при решавању неких проблема оптималног управљања се може видети у радовима [47], [126], [15], [85], [128].

2.

Остатак Gauss-Lobatto квадратурне формуле

2.1 Gauss-Lobatto квадратурне формуле са двоструким чвором у крајњим тачкама, основни појмови

Gauss-Lobatto квадратурна формула са крајњим тачкама вишеструкости r је задата на следећи начин

$$\int_{-1}^1 f(t)\omega(t) dt = \sum_{\rho=0}^{r-1} \kappa_{\rho} f^{(\rho)}(-1) + \sum_{\rho=0}^{r-1} (-1)^{\rho} \mu_{\rho} f^{(\rho)}(1) + \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} f(x_{\nu}) + R_{n+2,r}(f),$$

где је

$$(2.1) \quad R_{n+2,r}(f) = 0, \quad f \in P_{2n+2r-1},$$

док су x_{ν} нуле полинома $p_n(\cdot, \omega^L)$, ортогоналног у односу на тежинску функцију

$$(2.2) \quad \omega^L(t) = (t^2 - 1)^r \omega(t)$$

на интервалу $[-1, 1]$.

Нека је Γ проста затворена крива у комплексној равни која окружује интервал $[-1, 1]$ и нека је D њена унутрашњост. Уколико је функција f аналитичка на домену D који садржи

интервал $[-1, 1]$, тада је интегрална репрезентација остатка квадратурне формуле $R_{n+2,r}(f)$ дата у облику

$$(2.3) \quad R_{n+2,r}(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} K_{n+2,r}(z; \omega) f(z) dz.$$

Модификацијом основних облика једнакости за израчунавање језгра, (1.95) и (1.96), у овом случају се добија

$$(2.4) \quad K_{n+2,r}(z, \omega) = \frac{\varrho_{n,r}(z; w)}{\omega_{n,r}(z; w)}, \quad z \notin [-1, 1],$$

где је

$$(2.5) \quad \omega_{n,r}(z; w) = (z^2 - 1)^r p_n(z; w),$$

$$(2.6) \quad \varrho_{n,r}(z, w) = \int_{-1}^1 \frac{\omega_{n,r}(z; w)}{z - t} \omega(t) dt,$$

видети [26]. Применом једнакости (2.3), добија се оцена грешке

$$(2.7) \quad |R_{n+2,r}(f)| \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi} \left(\max_{z \in \Gamma} |K_{n+2,r}(z; \omega)| \right) \left(\max_{z \in \Gamma} |f(z)| \right),$$

где је $\ell(\Gamma)$ дужина криве Γ .

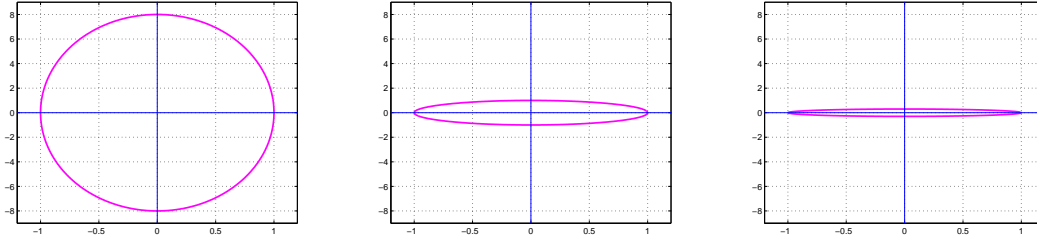
Круг $\{|u| = \rho \mid \rho > 1\}$ се применом

$$(2.8) \quad z = \frac{1}{2}(u + u^{-1}), \quad |u| > 1,$$

слика у елипсу

$$(2.9) \quad \mathcal{E}_\rho = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = \frac{1}{2}(u + u^{-1}), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad u = \rho e^{i\theta}, \quad \rho > 1 \right\}.$$

Када $\rho \rightarrow 1$, елипса (2.9) се своди на интервал $[-1, 1]$, док са растом ρ , постаје све више налик кругу (слика 1). Предност елиптичких контура у односу на кружне је тај што се захтева аналитичност функције $f(z)$ у мањој области комплексне равни.



Слика 1: Елипсе у случајевима $\rho = 9$ (лево), $\rho = 2$ (средина) и $\rho = 1.3$ (десно)

Уколико се интеграција врши по елипси $\Gamma = \mathcal{E}_\rho$ задатом изразом (2.9), оцена грешке $|R_{n+2,r}(f)|$ се своди на

$$(2.10) \quad |R_{n+2,r}(f)| \leq \frac{\ell(\mathcal{E}_\rho)}{2\pi} \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n+2,r}(z; \omega)| \right) \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right).$$

Разматрање настављамо у случају када је вишестукост крајњих тачака реда два, односно $r = 2$.

С обзиром на то да се за задату функцију $f(z)$ израз $\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)|$ може једноставно одредити, главни циљ приликом оцене грешке је одредити где тачно дуж криве интеграције језгро $K_{n+2,r}(z; \omega)$ достиже своју максималну вредост.

У случају друге *Chebyshev*-љеве тежинске функције $\omega = \omega_2$, с обзиром на једнакост (2.2), следи

$$(2.11) \quad \omega_2^L(t) = (1 - t^2)^{5/2}.$$

У даљем разматрању ће бити потребно и следеће тврђење ([29])

Лема 2.1. Нека је $U_{n,k}$ полином степена n , ортогоналан на интервалу $(-1, 1)$ у односу на тежинску функцију $(1 - t)^{1/2}(1 + t)^{1/2+k}$ где је $k \geq 0$, цео број. Тада важи

а) $U_{n,0}(t) = U_n(t)$

б) $U_{n,k}(t) = \frac{1}{1+t} \left\{ U_{n+1,k-1}(t) + \frac{(n+k+\frac{1}{2})(n+k+1)}{(n+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2}k+1)} U_{n,k-1}(t) \right\},$
 $k = 1, 2, 3, \dots$

Из једнакости (2.11), (2.5) и Леме 2.1, следи

$$(2.12) \quad \omega_2^L = (1 - z^2)^2 T_{n+3}''',$$

где је T_{n+3} *Chebyshev*-љев полином прве врсте степена $n + 3$. Изражавањем полинома T_{n+3} , T_{n+3}' и T_{n+3}''' преко *Chebyshev*-љевих полинома друге врсте, $U_k(z)$, добија се

$$\begin{aligned} \omega_2^L(z) &= (n+3) [((n+3)^2 - 1)(z^2 - 1) + 3z^2] U_{n+2}(z) \\ &\quad - \frac{3}{2}(n+3)^2 z (U_{n+3}(z) - U_{n+1}(z)) \\ &= \frac{1}{4}(n+3) [(n+1)(n+2)U_{n+4}(z) - 2(n+1)(n+5)U_{n+2}(z) \\ &\quad + (n+4)(n+5)U_n(z)]. \end{aligned}$$

Заменом претходног израза у једнакости (2.4) и (2.6) добија се експлицитни израз за језгро

$$(2.13) \quad K_{n+2}(z; \omega_2) = \frac{\pi(u^2 - 1)}{u^{n+6}} \times \frac{u^4 - \alpha u^2 + \beta}{\beta[u^{n+5} - u^{-(n+5)}] - \alpha[u^{n+3} - u^{-(n+3)}] + [u^{n+1} - u^{-(n+1)}]},$$

где је $\alpha = \frac{2(n+1)}{n+4}$, $\beta = \frac{(n+1)(n+2)}{(n+4)(n+5)}$, $z = (u + u^{-1})/2$ и $u = \rho e^{i\theta}$.

У случају треће тежинске функције $w = w_3$, применом једнакости (2.2), следи

$$(2.14) \quad \omega_3^L(t) = (1 - t)^{3/2}(1 + t)^{5/2},$$

односно, $w_3^L(z) = \text{const} \cdot (z^2 - 1)^2 P_n^{(3/2, 5/2)}$.

Применом формуле [123, једн. (4.5.4)]

$$P_n^{(\alpha, \beta+1)} = \frac{2}{2n + \alpha + \beta + 2} \frac{(n + \beta + 1)P_n^{(\alpha, \beta)}(z) + (n + 1)P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(z)}{1 + z}$$

са параметрима $\alpha = \beta = 1/2$, добија се

$$P_n^{(3/2, 5/2)}(z) = \frac{1}{2n + 5} \frac{(2n + 5)P_n^{(3/2, 3/2)}(z) + 2(n + 1)P_{n+1}^{(3/2, 3/2)}(z)}{1 + z}.$$

Слично, коришћењем једнакости [122, једн. (4.21.7)],

$$(2.15) \quad \frac{d}{dx}\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\} = \frac{1}{2}(n + \alpha + \beta + 1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x),$$

добија се

$$P_n^{(3/2,3/2)}(z) = \frac{4c_{n+2}}{(n+2)(n+3)}T_{n+2}''(z), \quad c_{n+2} = 4^{-(n+2)} \begin{pmatrix} 2n+4 \\ n+2 \end{pmatrix}.$$

Из претходног следи

$$w_3^L(z) = (1-z)(1-z^2) \left[T_{n+3}''(z) + \frac{(n+3)(n+4)}{(n+1)(n+2)} T_{n+2}''(z) \right].$$

Коначно, увођењем једнакости [27, једн. (3.10)]

$$w_{n+2}(z) = -\frac{(n+1)(n+2)}{2} \left[U_{n+2}(z) - \frac{n+3}{n+1} U_n(z) \right],$$

долази се до израза

$$\begin{aligned} \omega_3^L(z) = & -\frac{1}{2}(n+2)(n+3)(1-z) \left[U_{n+3}(z) - \frac{n+4}{n+2} U_{n+1}(z) \right. \\ & \left. + \frac{n+4}{n+2} \left(U_{n+2}(z) - \frac{n+3}{n+1} U_n(z) \right) \right], \end{aligned}$$

као и до израза за језгра $K_{n+2}^L(\omega_3)$ и $K_{n+2}^L(\omega_4)$,

(2.16)

$$\begin{aligned} K_{n+2}(z; \omega_3) = & \frac{2\pi}{u^{n+4}} \frac{u+1}{u-1} \times \\ & \frac{u^3 + \alpha(u^2 - u) - \beta}{\beta[u^{n+4} - u^{-n-4}] + \alpha[u^{n+3} - u^{-n-3} - (u^{n+2} - u^{-n-2})] - [u^{n+1} - u^{-n-1}]}, \\ K_{n+2}(z; \omega_4) = & -K_{n+2}(-z; \omega_3), \end{aligned}$$

где је $\alpha = \frac{n+1}{n+3}$, $\beta = \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}$, $z = (u + u^{-1})/2$ и $u = \rho e^{i\theta}$.

Да би се добиле ефикасне оцене грешке (2.10), потребно је одредити интервал променљиве ρ на ком модуо језгра $|K_{n+2}(z; \omega)|$ достиже своју максималну вредност.

У раду [26] је у случају прве тежинске функције доказано да језгро $K_{n+2}(z; \omega_1)$ увек достиже своју максималну вредност на реалној осе, док су за остале тежинске функције постављене само хипотезе засноване на асимптотским резултатима.

Рад [68] се бави анализом модула језгра у случају друге тежинске функције. Један део претпоставки добијених у раду [26] је доказан, док су неке хипотезе модификоване.

У раду [70] је анализиран модуло језгра у случају треће и четврте тежинске функције.

2.2 Gauss-Lobatto квадратурне формуле у односу на Chebyshev–љеву тежинску функцију друге врсте

2.2.1 Уводно разматрање

Gautschi и *Li* су у раду [26, поглавље 4.2] анализирали максималну вредност модула језгра $K_{n+2}(z; \omega_2)$ датог изразом (2.13) и поставили хипотезе де се максимум достиже

- i*) на позитивном делу реалне осе уколико је $\rho > 1$ и $1 \leq n \leq 9$;
- ii*) на имагинарној осе уколико је $\rho \geq \rho_n$ и $n \geq 10$;
- iii*) на позитивном делу реалне осе уколико је $1 < \rho < \rho_n$ и $n \geq 10$,
где је $\rho_n \in [1, \infty]$, вредност израчуната за $10 \leq n \leq 20$.

Може се показати да дате хипотезе не описују најпрецизније понашање максимума модула језгра $K_{n+2}(z; \omega_2)$. Наиме, по хипотезама *ii*) и *iii*) функција $f(\theta) := |K_{n+2}(z; \omega_2)|$ (видети поглавље 2.2.2) за $n \geq 10$ достиже своју максималну вредност

или у углу $\theta = 0$ или $\theta = \pi/2$. Фиксирањем неких од вредности n и ρ , једноставан рачун даје следеће:

Нека је, на пример, $n = 20$, $\rho = 1.13$, тада

$$f(0) = 0.022769\dots ; f(\pi/2) = 0.023550\dots ; f(1.5094) = 0.023680\dots .$$

Функција $f(\theta)$ је имплементирана у прецизној аритметици симболичког израчунавања помоћу програмског пакета MATLAB.

Такође, уколико је $n = 30$, $\rho = 1.1368$ или било која вредност из интервала $[1.1368, \infty)$, максимум се достиже у углу $\theta = \pi/2$; са друге стране, за $\rho = 1.0629$, или било коју вредност из интервала $(1, 1.0629]$, максимум се достиже у углу $\theta = 0$. Међутим, уколико одаберемо $n = 30$ и било који број из интервала $(1.0629, 1.1368)$, на пример, $\rho = 1.090$, добијамо

$$f(0) = 0.01457367\dots ; f(\pi/2) = 0.02162440\dots ; f(1.6157) = 0.02175132\dots$$

Овакви примери показују да постоји мали интервал променљиве ρ у ком функција $f(\theta)$ не достиже своју максималну вредност нити на реалној, нити на имагинарној оси. То уједно значи и да хипотеза *iii*) важи на ужем скупу, односно на интервалу $(1, \rho_1]$, где је $\rho_1 \leq \rho_n$.

У остатку поглавља ћемо показати егзистенцију вредности ρ_n поменутих у хипотези *ii*), као и израчунате вредности ρ_1 .

Са практичне стране, најважније је приказати ефикасне оцене грешке Gauss-Lobatto квадратурне формуле $|R_{n+2}(f)|$ у односу на тежинску функцију $\omega = \omega_2$. Хипотезе *i*) и *ii*), код којих је ρ веће од неке фиксиране вредности ρ_n , су битније за проналажење ефикасних оцена, па ће бити разматране детаљно.

2.2.2 Максимум модула језгра

Као што је описано, језгро на елипси \mathcal{E}_ρ је задато експлицитним изразом

$$K_{n+2}(z; \omega_2) = \frac{\pi(u^2 - 1)}{u^{n+6}} \frac{u^4 - \alpha u^2 + \beta}{\beta[u^{n+5} - u^{-(n+5)}] - \alpha[u^{n+3} - u^{-(n+3)}] + [u^{n+1} - u^{-(n+1)}]}.$$

Потребно је одредити модуо језгра као и модуо језгра у фиксираним угловима $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ јер одговарајуће хипотезе тврде да се, зависно од n , максимум модула језгра достиже управо у тим угловима.

Модуо језгра можемо приказати на следећи начин

$$(2.17) \quad |K_{n+2}(z; \omega_2)| = \sqrt{\frac{\pi^2}{\rho^{2n+12}} \frac{ac}{\delta}},$$

где је

$$a = |u^2 - 1|^2 = \rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\theta + 1,$$

$$\begin{aligned} c &= |u^4 - \alpha u^2 + \beta|^2 \\ &= \rho^8 - 2\alpha \cos 2\theta \rho^6 + (\alpha^2 + 2\beta \cos 4\theta) \rho^4 - (2\alpha\beta \cos 2\theta) \rho^2 + \beta^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta &= \left| \beta[u^{n+5} - u^{-(n+5)}] - \alpha[u^{n+3} - u^{-(n+3)}] + [u^{n+1} - u^{-(n+1)}] \right|^2 \\ &= \frac{d}{\rho^{2n+10}}, \end{aligned}$$

односно,

$$\begin{aligned}
 d &= \delta \cdot \rho^{2n+10} = |\beta[u^{n+5} - u^{-(n+5)}] \\
 &\quad - \alpha[u^{n+3} - u^{-(n+3)}] + [u^{n+1} - u^{-(n+1)}]|^2 \cdot \rho^{2n+10} \\
 &= \beta^2 \cdot \rho^{4n+20} - 2\alpha\beta \cos 2\theta \cdot \rho^{4n+18} + (\alpha^2 + 2\beta \cos 4\theta) \cdot \rho^{4n+16} \\
 &\quad - 2\alpha \cos 2\theta \cdot \rho^{4n+14} + \rho^{4n+12} - 2\beta \cos(2n+6)\theta \cdot \rho^{2n+14} \\
 &\quad + (2\alpha \cos(2n+4)\theta + 2\alpha\beta \cos(2n+8)\theta) \cdot \rho^{2n+12} \\
 &\quad + (-2 \cos(2n+2)\theta - 2\beta^2 \cos(2n+10)\theta - 2\alpha^2 \cos(2n+6)\theta) \cdot \rho^{2n+10} \\
 &\quad + (2\alpha\beta \cos(2n+8)\theta + 2\alpha \cos(2n+4)\theta) \cdot \rho^{2n+8} \\
 &\quad - 2\beta \cos(2n+6)\theta \cdot \rho^{2n+6} + \rho^8 - 2\alpha \cos 2\theta \cdot \rho^6 \\
 &\quad + (\alpha^2 + 2\beta \cos 4\theta) \cdot \rho^4 - 2\alpha\beta \cos 2\theta \cdot \rho^2 + \beta^2.
 \end{aligned}$$

Да бисмо израз $d(\rho)$ представили као полиномијалну функцију по променљивој ρ , израз $\delta(\rho)$ је помножен са ρ^{2n+10} , чиме се квадрат модула језгра своди на

$$(2.18) \quad |K_{n+2}(z; \omega_2)|^2 = \frac{\pi^2}{\rho^2} \frac{ac}{d}.$$

Уколико са A_0, C_0, D_0 означимо вредности израза a, c, d у углу $\theta = 0$, квадрат модула језгра у углу $\theta = 0$ можемо записати на следећи начин

$$(2.19) \quad |K_{n+2}(z; \omega_2)|^2 = \frac{\pi^2}{\rho^2} \frac{A_0 C_0}{D_0}.$$

Потребно је показати да је ово уједно и максимална вредност модула за све $\rho > 1$ и $\theta \in [0, 2\pi]$ уколико је $1 \leq n \leq 9$.

Одговарајуће смене су дате изразима

$$A_0 = \rho^4 - 2\rho^2 + 1,$$

$$C_0 = |u^4 - \alpha u^2 + \beta^2 = \rho^8 - 2\alpha\rho^6 + (\alpha^2 + 2\beta)\rho^4 - 2\alpha\beta\rho^2 + \beta^2,$$

$$\begin{aligned} D_0 = & \beta^2 \cdot \rho^{4n+20} - 2\alpha\beta \cdot \rho^{4n+18} + (\alpha^2 + 2\beta) \cdot \rho^{4n+16} \\ & - 2\alpha \cdot \rho^{4n+14} + \rho^{4n+12} - 2\beta \cdot \rho^{2n+14} \\ & + (2\alpha + 2\alpha\beta) \cdot \rho^{2n+12} + (-2 - 2\beta^2 - 2\alpha^2) \cdot \rho^{2n+10} \\ & + (2\alpha\beta + 2\alpha) \cdot \rho^{2n+8} - 2\beta \cdot \rho^{2n+6} + \rho^8 \\ & - 2\alpha \cdot \rho^6 + (\alpha^2 + 2\beta) \cdot \rho^4 - 2\alpha\beta \cdot \rho^2 + \beta^2. \end{aligned}$$

Када је $n = 1$, израз D_0 садржи узастопне степене променљиве ρ : $8, 2n + 6$ као и $2n + 14, 4n + 12$. Приликом MATLAB имплементације израза D_0 разликујемо његову вредност за $n = 1$

$$\begin{aligned} D_{0,1} = & \beta^2 \cdot \rho^{24} - 2\alpha\beta \cdot \rho^{22} + (\alpha^2 + 2\beta) \cdot \rho^{20} \\ & - 2\alpha \cdot \rho^{18} + (1 - 2\beta) \cdot \rho^{16} \\ & + (2\alpha + 2\alpha\beta) \cdot \rho^{14} + (-2 - 2\beta^2 - 2\alpha^2) \cdot \rho^{12} \\ & + (2\alpha\beta + 2\alpha) \cdot \rho^{10} + (1 - 2\beta) \cdot \rho^8 \\ & - 2\alpha \cdot \rho^6 + (\alpha^2 + 2\beta) \cdot \rho^4 - 2\alpha\beta \cdot \rho^2 + \beta^2. \end{aligned}$$

Слично, уколико са $A_{\pi/2}, C_{\pi/2}, D_{\pi/2}$ означимо вредности израза a, c, d у углу $\theta = \pi/2$, квадрат модула језгра у углу $\theta = \pi/2$ се може приказати на следећи начин

$$(2.20) \quad |K_{n+2}(z; \omega_2)|^2 = \frac{\pi^2 A_{\pi/2} C_{\pi/2}}{\rho^2 D_{\pi/2}}.$$

У овом случају треба показати да је за $n \geq 10$ ово уједно и максимална вредност модула за све $\rho \geq \rho_n$ ($\rho_n > 1$) и $\theta \in [0, 2\pi]$.

Одговарајуће смене су

$$A_{\pi/2} = \rho^4 + 2\rho^2 + 1,$$

$$C_{\pi/2} = \rho^8 + 2\alpha\rho^6 + (\alpha^2 + 2\beta)\rho^4 + 2\alpha\beta\rho^2 + \beta^2.$$

Израз $D_{\pi/2}$ зависи од тога да ли је n паран или непаран број.

У случају да је n паран, добијамо

$$\begin{aligned} D_{\pi/2, \text{even}} = & \beta^2 \cdot \rho^{4n+20} + 2\alpha\beta \cdot \rho^{4n+18} + \alpha^2 \cdot \rho^{4n+16} \\ & + \rho^{4n+10} + 2\beta \cdot \rho^{2n+14} + (2\alpha + 2\alpha\beta) \cdot \rho^{2n+12} \\ & + (2\beta^2 + 2\alpha^2) \cdot \rho^{2n+10} + 2\alpha\beta \cdot \rho^{2n+8} + \rho^8 \\ & + 2\alpha \cdot \rho^6 + (\alpha^2 + 2\beta) \cdot \rho^4 + 2\alpha\beta \cdot \rho^2 + \beta^2, \end{aligned}$$

док, у случају када је n непаран број важи

$$\begin{aligned} D_{\pi/2, \text{odd}} = & \beta^2 \cdot \rho^{4n+20} + 2\alpha\beta \cdot \rho^{4n+18} + \alpha^2 \cdot \rho^{4n+16} \\ & + \rho^{4n+10} - 2\beta \cdot \rho^{2n+14} + (-2\alpha - 2\alpha\beta) \cdot \rho^{2n+12} \\ & + (-2\beta^2 - 2\alpha^2) \cdot \rho^{2n+10} - 2\alpha\beta \cdot \rho^{2n+8} + \rho^8 \\ & + 2\alpha \cdot \rho^6 + (\alpha^2 + 2\beta) \cdot \rho^4 + 2\alpha\beta \cdot \rho^2 + \beta^2. \end{aligned}$$

2.2.3 Главна тврђења

У наредној Теореме ћемо показати егзистенцију вредности ρ_n почев од које језгро достиже своју максималну вредност на некој од оса. С обзиром на то да прва и друга хипотеза важе за свако ρ из интервала $[\rho_n, \infty)$, посебно ће бити изложен доказ који се односи на валидност хипотеза за сваку вредност из поменутог интервала.

Теорема 2.2. За *Gauss-Lobatto* квадратурну формулу са двоструким чворовима у крајњим тачкама ∓ 1 ($r = 2$) у односу на *Chebyshev*–љеву тежинску функцију друге врсте постоји вредност $\rho_n \in [1, \infty)$ таква да модуло језгра $|K_{n+2}(z; \omega_2)|$ достиже своју максималну вредност

i) на реалној оси ($\theta = 0$) за свако ρ веће од ρ_n и $1 \leq n \leq 9$, односно

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n+2}(z; \omega_2)| = \left| K_{n+2} \left(\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}), \omega_2 \right) \right|;$$

ii) на имагинарној оси ($\theta = \frac{\pi}{2}$) за свако $\rho \geq \rho_n$ и $n \geq 10$, тј.

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n+2}(z; \omega_2)| = \left| K_{n+2} \left(\frac{i}{2}(\rho - \rho^{-1}), \omega_2 \right) \right|.$$

Доказ. *i*) У складу са претходно уведеним ознакама, треба показати

$$\frac{ac}{d} \leq \frac{A_0 C_0}{D_0}, \text{ за све } \rho > \rho_n, 1 \leq n \leq 9.$$

Ова неједнакост се може записати у следећем облику

$$(2.21) \quad I_0 = I_0(\rho) = [acD_0 - A_0 C_0 d](\rho) \leq 0.$$

Испоставља се да је I_0 полином степена $4n + 30$ по променљивој ρ (Додатак 11). Очигледно је да коефицијенти полинома зависе само од променљиве θ , односно, полином се може записати у облику

$$(2.22) \quad I_0 = I_0(\rho) = \sum_{i=0}^{4n+30} a_i(\theta) \rho^i.$$

Да бисмо показали егзистенцију вредности ρ_n , користимо познату чињеницу да се почев од неке вредности ρ , знак полинома

$$(2.23) \quad I_0(\rho) = \rho^{4n+30} \left(a_{4n+30} + \frac{a_{4n+29}}{\rho} + \frac{a_{4n+28}}{\rho^2} + \dots + \frac{a_0}{\rho^{4n+30}} \right)$$

поклапа са знаком његовог водећег коефицијента

$$(2.24) \quad a_{4n+30} = 2\beta(\cos 2\theta - 1)(\alpha - \alpha\beta - \beta),$$

$$\text{где је } \alpha = \frac{2(n+1)}{n+4}, \beta = \frac{(n+1)(n+2)}{(n+4)(n+5)} = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{n+2}{n+5}.$$

Дакле, полином (2.21) ће бити непозитиван за $\rho \geq \rho_n$ уколико је његов водећи коефицијент негативан.

Услов $a_{4n+30} < 0$ се своди на низ неједнакости

$$a_{4n+30} < 0 \quad \text{ако} \quad \alpha - \alpha\beta - \beta > 0 \quad \text{ако} \quad 1 - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{n+2}{n+5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+5} > 0.$$

Последња неједнакост се своди на $-n^2 + 6n + 28 > 0$ што је тачно за све $n \in \{-2, -1, \dots, 8, 9\}$, а обзиром да $n \in \mathbb{N}$, закључујемо да је израз a_{4n+30} негативан за свако $1 \leq n \leq 9$.

ii) У овом случају потребно је показати

$$(2.25) \quad \frac{ac}{d} \leq \frac{A_{\pi/2}C_{\pi/2}}{D_{\pi/2}}$$

за свако $\rho \geq \rho_n$, $n \geq 10$. Слично, ова неједнакост се своди на

$$(2.26) \quad I_{\frac{\pi}{2}}(\rho) = [acD_{\pi/2} - A_{\pi/2}C_{\pi/2}d](\rho) \leq 0.$$

Да бисмо показали непозитивност полиома $I_{\frac{\pi}{2}}(\rho)$ за свако ρ које је веће од неке фиксиране вредност ρ_n , потребно је анализирати водећи коефицијент

$$a_{4n+30} = 2\beta(\cos 2\theta + 1)(\alpha - \alpha\beta - \beta)$$

и показати његову негативност. Израз a_{4n+30} је негативан онда када је $\alpha - \alpha\beta - \beta < 0$, односно $-n^2 + 6n + 28 < 0$, што важи за свако $n \geq 10$ и $n \leq -3$, чиме је показано тврђење. \square

2.2.4 Одређивање вредности ρ_n

Вредности ρ_n су дефинисане Теоремом 2.2. За $n \geq 10$, тестирамо најмању могућу вредност ρ_n за коју важи да су изрази $I_{\frac{\pi}{2}}(\rho, \theta)$ непозитивни за свако $\rho > \rho_n$. Неке од вредности ρ_n су приказане у табели 2.1 (са четири значајне цифре).

Анализом израза $I_0(\rho, \theta)$ на сличан начин, нумерички резултати показују да је $\rho_n = 1.0000$ за свако $n = 1, \dots, 9$.

Табела 2.1: Вредности ρ_n

n	ρ_n	n	ρ_n	n	ρ_n	n	ρ_n	n	ρ_n
10	1.7531	21	1.1141	32	1.1303	43	1.0359	54	1.0869
11	1.4925	22	1.1725	33	1.0541	44	1.1020	55	1.0248
12	1.3733	23	1.0975	34	1.1244	45	1.0335	56	1.0845
13	1.3013	24	1.1617	35	1.0493	46	1.0985	57	1.0235
14	1.2530	25	1.0847	36	1.1191	47	1.0314	58	1.0822
15	1.2170	26	1.1523	37	1.0452	48	1.0953	59	1.0223
16	1.2179	27	1.0746	38	1.1142	49	1.0295	60	1.0800
17	1.1683	28	1.1443	39	1.0417	50	1.0923	61	1.0212
18	1.2000	29	1.0664	40	1.1098	51	1.0277	62	1.0779
19	1.1365	30	1.1368	41	1.0386	52	1.0895	63	1.0203
20	1.1851	31	1.0597	42	1.1057	53	1.0262	64	1.0760

2.2.5 Модификација треће Gautschi-Li хипотезе

У формулацији треће хипотезе, променљива ρ припада ограниченом интервалу $(1, \rho_n)$. Хипотеза тврди да се, уколико је $n \geq 10$, максимум модула језгра достиже на позитивном делу реалне осе за свако ρ из поменутог интервала.

Када је n непаран број, нумерички резултати потврђују претходно. Међутим, када је n паран број, показује се да претходно тврђење не важи за свако ρ из интервала $(1, \rho_n)$, већ

постоји вредност ρ^* , $\rho^* < \rho_n$, таква да хипотеза важи на ужем интервалу, $(1, \rho^*)$.

Интервал $1 < \rho < \rho^*$ захтева нешто сложенији приступ јер разлике $\rho - \rho^*$ нису позитивне. Да бисмо показали непозитивност полинома (2.22) на интервалу $(1, \rho^*)$, записаћемо га у облику развоја по негативним разликама. У иницијалном полиному

$$(2.27) \quad I_0(\rho) = \sum_{i=0}^{4n+30} a_i(\theta) \rho^i, \quad 1 < \rho < \rho^*,$$

аргумент ρ најпре транслирамо за један

$$(2.28) \quad J_1(\rho) = \sum_{i=0}^{4n+30} b_i(\theta) (\rho - 1)^i, \quad 0 < \rho - 1 < \rho^* - 1,$$

а затим, сличном модификацијом, добијамо

$$(2.29) \quad J_0(\rho) = \sum_{i=0}^{4n+30} c_i(\theta, \rho^*) (\rho - 1 - \rho^*)^i, \quad -\rho^* < \rho - 1 - \rho^* < -1.$$

Непозитивност претходног полинома је довољан услов за непозитивност полазног полинома $I_0(\rho)$ на интервалу $(1, \rho^*)$.

Табела 2.2: Вредности ρ^* и ρ_n када је n паран број

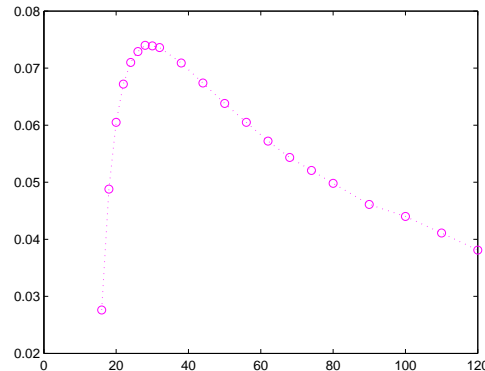
n	ρ^*	ρ_n	n	ρ^*	ρ_n	n	ρ^*	ρ_n
16	1.1903	1.2179	34	1.0515	1.1244	52	1.0269	1.0895
18	1.1512	1.2000	36	1.0471	1.1191	54	1.0254	1.0869
20	1.1246	1.1851	38	1.0433	1.1142	56	1.0240	1.0845
22	1.1053	1.1725	40	1.0400	1.1098	58	1.0228	1.0822
24	1.0907	1.1617	42	1.0371	1.1057	60	1.0217	1.0800
26	1.0794	1.1523	44	1.0346	1.1020	62	1.0207	1.0779
28	1.0703	1.1443	46	1.0323	1.0985	64	1.0197	1.0760
30	1.0629	1.1368	48	1.0303	1.0953	66	1.0188	1.0742
32	1.0567	1.1303	50	1.0285	1.0923	68	1.0180	1.0724

Коефицијенте $c_i(\theta, \rho^*)$ смо израчунали двоструком применом *Horner*-ове шеме. У првој итерацији добијамо коефицијенте $b_i(\theta)$

простом translацијом $\rho \rightarrow \rho - 1$. Помоћу $b_i(\theta)$ коефицијената, као улазних аргумената, имплементира се друга *Horner*-ова шема чији су резултат позитивни непарни и негативни парни коефицијенти $c_i(\theta, \rho^*)$, $i = 0, 1, \dots, 4n + 30$.

Наиме, вредност ρ^* се може нумерички одредити анализом израза $J_0(\rho)$ за $n \geq 10$.

Резултати добијени помоћу MATLAB-а показују да, уколико је n напарно, тада је $\rho^* = \rho_n$. Иначе, уколико је n парно, почев од $n = 16$, постоји разлика између вредности ρ^* и ρ_n , што се може видети у табели 2.2 и слици (десно) која приказује вредности $\text{gap}(n) = \rho_n - \rho^*$, за $n =$



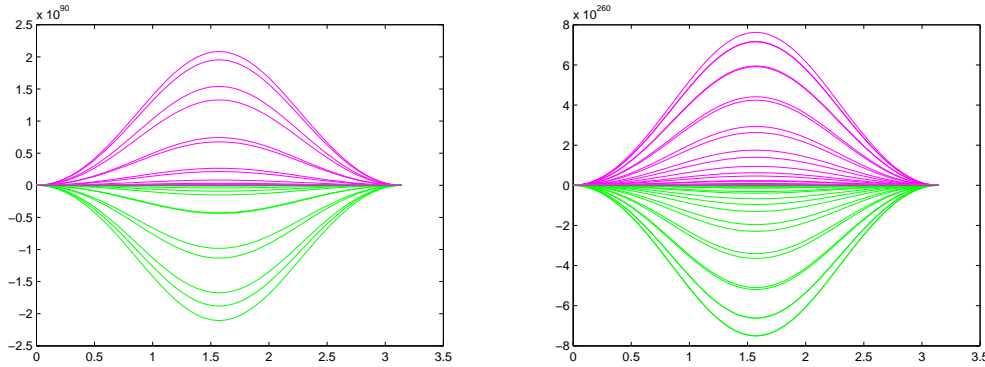
$2k$, $k = 8, 9, \dots, 60$. Дакле, за свако n могуће је одредити ρ^* уз одговарајућу (унапред задату) тачност. За фиксирано n и познато ρ^* , анализирани су функције коефицијената $c_i(\theta, \rho^*)$, за $\theta \in [0, 2\pi]$, $i = 0, 1, \dots, 4n + 30$. У случају када је i паран број, показује се да је решење једнодимензионалног задатка

$$(2.30) \quad c_i(\theta, \rho^*) \rightarrow \max$$

једнако нули за свако $\theta \in [0, 2\pi]$, односно, да су графици функција $c_i(\theta, \rho^*)$ испод x -осе. У супротном, применом исте методе, показује се да непарним вредностима i -а, одговарају ненегативни изрази $c_i(\theta, \rho^*)$ (слика 2).

Уколико је i паран број, израз $\rho' = \rho - 1 - \rho^*$ у једнакости (2.29) је негативан, односно степени $(\rho')^i$ су позитивни. Пошто су у овом случају изрази $c_i(\theta, \rho^*)$ непозитивни, закључујемо да су сви парови $c_i(\theta, \rho^*)(\rho')^i$ непозитивни. Обрнуто, када је i

непаран број, негативним изразима $(\rho')^i$ одговарају ненегативни изрази $c_i(\theta, \rho^*)$, чиме је сума свих производа $c_i(\theta, \rho^*)(\rho')^i$, $i = 0, 1, \dots, 4n + 30$, односно израз $J_0(\rho)$, непозитиван. Тестирани су случајеви $n = 10, 11, \dots, 90$.



Слика 2: Функције $c_0(\theta, \rho^*), \dots, c_{102}(\theta, \rho^*)$, у случају $n = 18$, $\rho^* = 1.1512$ (лево) и функције $c_0(\theta, \rho^*), \dots, c_{290}(\theta, \rho^*)$, у случају $n = 65$, $\rho^* = 1.0193$ (десно). Парни коефицијенти су испод x -осе (зелени), док су непарни изнад (љубичасти)

2.2.6 Оцена грешке, нумерички примери

У овом поглављу се анализира нумеричко решавање интеграла датог формулом (2.1) у односу на тежинску функцију $\omega = \omega_2$

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(t) \sqrt{1-t^2} dt.$$

У складу са претходно уведеним ознакама и под претпоставком да је функција f аналитичка унутар елипсе $\mathcal{E}_{\rho_{\max}}$, оцена грешке квадратурне формуле може се изразити на следећи начин

$$(2.31) \quad |R_n(f)| \leq r_n(f),$$

где је

$$(2.32) \quad r_n(f) = \inf_{\rho_n < \rho < \rho_{\max}} \left[\frac{\ell(\mathcal{E}_\rho)}{2\pi} \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n+2}(z)| \right) \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right) \right].$$

Оцена израза $\ell(\mathcal{E}_\rho)$ који представља дужину елипсе \mathcal{E}_ρ је дата

$$(2.33) \quad \ell(\mathcal{E}_\rho) \leq 2\pi a_1 \left(1 - \frac{1}{4}a_1^{-2} - \frac{1}{64}a_1^{-4} - \frac{5}{256}a_1^{-6} \right),$$

где је $a_1 = (\rho + \rho^{-1})/2$ (видети [107]).

У зависности од n , језгро достиже своју максималну вредност у углу $\theta = 0$ или $\theta = \pi/2$, односно

$$(2.34) \quad \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n+2}(z)| = \frac{\pi}{\rho} \sqrt{\frac{AC}{D}},$$

где A, C, D означавају вредности израза a, c, d у угловима $\theta = 0$ или $\theta = \pi/2$. Овим се оцена грешке $r_n(f)$ своди на

$$(2.35) \quad r_n(f) = \inf_{\rho_n < \rho < \rho_{\max}} (\bar{r}_n(f)),$$

где је

$$\bar{r}_n(f) = a_1 \frac{\pi}{\rho} \left(1 - \frac{1}{4}a_1^{-2} - \frac{1}{64}a_1^{-4} - \frac{5}{256}a_1^{-6} \right) \sqrt{\frac{AC}{D}} \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right).$$

У наредних неколико експеримената поредимо претходно добијену оцену грешке *Gauss-Lobatto* квадратурне формуле са стварном грешком, *Error*. Тестирани су примери стандардних функција које се најчешће виђају у литератури.

Пример 1. Нека је $f_1(z) = \frac{e^{e^z}}{(a+z)^k(b+z)^l(c+z)^m}$, где је $c \leq b \leq a < -1, k \in N$, док $l, m \in N_0$. Познато је (видети [111])

$$(2.36) \quad \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f_1(z)| = \frac{e^{e^{a_1}}}{|a+a_1|^k |b+a_1|^l |c+a_1|^m}.$$

Посматрамо случај подинтегралне функције код које је $a = -1.4083333333333333; b = -1.892857142857143; c = -2.408695652173913;$

$k = 1$; $l = 5$; $m = 10$ и $\rho_{\max} = |c| = 2.4$.

Одговарајуће оцене грешке и стварне грешке су приказане у табели 2.3.

Табела 2.3: Оцене грешке $r_n(f_1)$ и стварне грешке

n	$r_n(f_1)$	$Error$	n	$r_n(f_1)$	$Error$
4	3.736 (-1)	1.592(-2)	16	4.295(-9)	7.115(-11)
5	9.290 (-2)	3.916(-3)	18	1.582(-10)	2.153(-12)
6	2.271(-3)	9.279(-4)	20	5.639(-12)	6.404(-14)
7	5.401 (-3)	2.101(-4)	25	1.234(-15)	9.596(-18)
8	1.201 (-3)	4.547(-5)	30	2.488(-19)	1.447(-21)
9	2.735(-4)	9.432(-6)	40	8.886(-27)	3.390(-29)
10	5.987 (-5)	1.884(-6)	50	2.867(-34)	8.123(-37)
12	2.710 (-6)	6.853(-8)	64	8.560(-45)	1.775(-47)

Пример 2. Нека је $f_2(z) = e^{e^{\cos(\omega z)}}$, $\omega > 0$. За функцију f_2 важи (видети [111])

$$(2.37) \quad \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f_2(z)| = e^{e^{\cosh(\omega b_1)}},$$

где је $b_1 = (\rho - \rho^{-1})/2$. У табели 4.4 су приказе оцене грешака и стварне грешке за неке одабине n и ω .

Пример 3. Нека је $f_3(z) = \frac{\cos(z)}{z^2 + \omega^2}$, $\omega > 0$. Познато је (видети [86], [116]) да за функцију $f_3(z)$ важи

$$(2.38) \quad \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f_3(z)| = \frac{\cos(b_1)}{-b_1^2 + \omega^2},$$

где је $b_1 = (\rho - \rho^{-1})/2$, и где је инфимум рачунат на интервалу $\rho \in (\rho_n, \rho_{\max})$, $\rho_{\max} = \omega + \sqrt{1 + \omega^2}$. Неке оцене грешке и стварне грешке су приказане у табели 2.5.

У табели 2.6 су приказане оцене грешака $r_n(f_3)$ и вредности $\rho_{opt} \in (\rho_n, \rho_{\max})$ у којима се достижу оптималне грешке (2.35). За

Табела 2.4: Оцене грешака $r_n(f_2)$ и стварне грешке

n	$\omega = 3$	<i>Error</i>	$\omega = 1$	<i>Error</i>	$\omega = 0.5$	<i>Error</i>
3	7.178(+1)	1.447(+0)	8.100(-2)	7.546(-3)	2.056(-4)	2.308(-5)
6	3.777 (+0)	1.678(-1)	1.275(-4)	1.103(-5)	8.127(-9)	7.218(-10)
9	2.769 (-1)	1.701(-2)	1.679(-7)	1.287(-8)	2.435(-13)	1.808(-14)
15	2.101 (-3)	1.217(-4)	1.757(-13)	1.019(-14)	1.140(-22)	6.420(-24)
20	3.077(-5)	1.514(-6)	1.129(-18)	5.547(-20)	1.155(-30)	5.526(-32)
25	3.612(-7)	1.564(-8)	5.293(-24)	2.280(-25)	8.397(-39)	3.527(-40)
35	3.078(-11)	1.094(-12)	5.803(-35)	2.044(-36)	2.129(-55)	7.334(-57)
50	1.037(-17)	2.978(-19)	6.212(-52)	1.763(-53)	7.492(-81)	2.085(-82)
70	8.339(-27)	1.935(-28)	3.174(-75)	7.341(-77)	1.719(-115)	3.905(-117)

$\omega = 0.5$, добија се $\rho_{\max} = 1.6179$, и слично за $\omega = 1$, $\rho_{\max} = 2.4141$, док вредности $\omega = 5$ одговара $\rho_{\max} = 10.0989$.

За израчунавање стварних грешака је коришћена измењена верзија фајла `globatto.m` који је модификовао проф. Миодраг Спалевић (видети [36], [34], <http://www.cs.purdue.edu/archives/2001/wxg/codes>).

 Табела 2.5: Оцене грешака $r_n(f_3)$ и стварне грешке

n	$\omega = 0.5$	<i>Error</i>	$\omega = 1$	<i>Error</i>	$\omega = 5$	<i>Error</i>
4	9.305(-1)	2.775(-2)	2.201(-3)	1.114(-4)	1.093(-10)	9.763(-12)
6	1.068 (-1)	3.707(-3)	6.208(-5)	2.847(-6)	1.266(-14)	7.720(-16)
9	5.201 (-3)	1.914(-4)	3.333(-7)	1.274(-8)	1.493(-20)	6.150(-22)
12	3.087 (-4)	1.091(-5)	1.971(-9)	5.987(-11)	1.695(-26)	5.247(-28)
15	2.013(-5)	5.511(-7)	1.152(-11)	2.883(-13)	1.868(-32)	4.629(-34)
20	2.035(-7)	4.337(-9)	2.105(-15)	4.071(-17)	2.101(-42)	3.905(-44)
25	1.977(-9)	3.453(-11)	3.715(-19)	5.855(-21)	2.273(-52)	3.380(-54)
30	1.871(-11)	2.767(-13)	6.394(-23)	8.507(-25)	2.394(-62)	2.966(-64)

Табела 2.6: Оцене грешака $r_n(f_3)$ и вредности ρ_{opt}

n	$\omega = 0.5$	ρ_{opt}	$\omega = 1$	ρ_{opt}	$\omega = 5$	ρ_{opt}
4	9.305(-1)	1.5200	2.201(-3)	2.2320	1.093(-10)	8.9710
6	1.068 (-1)	1.5350	6.208(-5)	2.2720	1.266(-14)	9.3090
9	5.201 (-3)	1.5520	3.333(-7)	2.3080	1.493(-20)	9.5580
12	3.087 (-4)	1.5643	1.971(-9)	2.3303	1.695(-26)	9.6883
15	2.013(-5)	1.5730	1.152(-11)	2.3450	1.868(-32)	9.7690
20	2.035(-7)	1.5830	2.105(-15)	2.3600	2.101(-42)	9.8500
25	1.977(-9)	1.5890	3.715(-19)	2.3700	2.273(-52)	9.8990
30	1.871(-11)	1.5940	6.394(-23)	2.3770	2.394(-62)	9.9320

2.3 Gauss-Lobatto квадратурне формуле у односу на Chebyshev–љеву тежинску функцију треће и четврте врсте

За *Gauss-Lobatto* квадратурну формулу са двоструким чворовима у крајњим тачкама у односу на *Chebyshev*–љеве тежинске функције треће и четврте врсте постоји хипотеза [26] по којој модуо језгра $K_{n+2}(z; \omega_3)$ достиже своју максималну вредност на позитивном делу реалне осе за свако $\rho > 1$.

У овом поглављу је поменути хипотеза доказана, што је у облику рада [70] публиковано.

2.3.1 Максимум модула језгра

Експлицитни израз за језгро $K_{n+2}(z; \omega_3)$ на елипси је дат са (2.16). Најпре ћемо анализирати израз за језгро у случају треће тежинске функције, а касније ћемо приказати аналогни резултат за језгро у случају четврте тежинске функције. Уводњем одговарајућих ознака, модуо језгра можемо изразити на

следећи начин

$$(2.39) \quad |K_{n+2}(z; \omega_3)| = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\rho^{2n+8}} \frac{ac}{b\delta}},$$

где је

$$a = |u + 1|^2 = \rho^2 + 2 \cos \theta \cdot \rho + 1,$$

$$b = |u - 1|^2 = \rho^2 - 2 \cos \theta \cdot \rho + 1,$$

$$\begin{aligned} c &= |u^3 + \alpha(u^2 - u) - \beta|^2 \\ &= \rho^6 + (2\alpha \cos \frac{\theta}{2}) \cdot \rho^5 + (\alpha^2 - 2\alpha \cos \theta) \cdot \rho^4 \\ &+ (-2\alpha^2 \cos \frac{\theta}{2} - 2\beta \cos \frac{3\theta}{2}) \cdot \rho^3 \\ &+ (\alpha^2 - 2\alpha\beta \cos \theta) \cdot \rho^2 + (2\alpha\beta \cos \frac{\theta}{2}) \cdot \rho + \beta^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta &= |\beta[u^{n+4} - u^{-(n+4)}] + \alpha[u^{n+3} - u^{-(n+3)} - (u^{n+2} - u^{-(n+2)})] \\ &- [u^{n+1} - u^{-(n+1)}]|^2 = \frac{d}{\rho^{2n+8}}, \end{aligned}$$

односно,

$$\begin{aligned} d &= \delta \cdot \rho^{2n+8} = |\beta[u^{n+4} - u^{-(n+4)}] \\ &+ \alpha[u^{n+3} - u^{-(n+3)} - (u^{n+2} - u^{-(n+2)})] - [u^{n+1} - u^{-(n+1)}]|^2 \cdot \rho^{2n+8} \\ &= \beta^2 \cdot \rho^{4n+16} + 2\alpha\beta \cos \theta \cdot \rho^{4n+15} + (\alpha^2 - 2\alpha\beta \cos 2\theta) \cdot \rho^{4n+14} \\ &+ (-2\beta \cos 3\theta - 2\alpha^2 \cos \theta) \cdot \rho^{4n+13} + (\alpha^2 - 2\alpha \cos 2\theta) \cdot \rho^{4n+12} \\ &+ 2\alpha \cos \theta \cdot \rho^{4n+11} + \rho^{4n+10} + (2\beta \cos(2n+5)\theta) \cdot \rho^{2n+11} \\ &+ (2\alpha\beta \cos(2n+6)\theta + 2\alpha \cos(2n+4)\theta) \cdot \rho^{2n+10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (2\alpha^2 \cos(2n+5)\theta - 2\alpha\beta \cos(2n+7)\theta - 2\alpha \cos(2n+3)\theta) \cdot \rho^{2n+9} \\
 & - [2\beta^2 \cos(2n+8)\theta + 2 \cos(2n+2)\theta \\
 & + 2\alpha^2 \cos(2n+6)\theta + 2\alpha^2 \cos(2n+4)\theta] \cdot \rho^{2n+8} \\
 & + (-2\alpha\beta \cos(2n+7)\theta - 2\alpha \cos(2n+3)\theta + 2\alpha^2 \cos(2n+5)\theta) \cdot \rho^{2n+7} \\
 & + (2\alpha \cos(2n+4)\theta + 2\alpha\beta \cos(2n+6)\theta) \cdot \rho^{2n+6} + 2\beta \cos(2n+5)\theta \\
 & \cdot \rho^{2n+5} + \rho^6 + 2\alpha \cos \theta \cdot \rho^5 + (\alpha^2 - 2\alpha \cos 2\theta) \cdot \rho^4 + (-2\alpha^2 \cos \theta \\
 & - 2\beta \cos 3\theta) \cdot \rho^3 + (\alpha^2 - 2\alpha\beta \cos 2\theta) \cdot \rho^2 + 2\alpha\beta \cos \theta \cdot \rho + \beta^2.
 \end{aligned}$$

Да бисмо израз $d(\rho)$ представили као полиномијалну функцију по променљивој ρ , израз $\delta(\rho)$ је помножен са ρ^{2n+8} , чиме добијемо

$$|K_{n+2}(z; \omega_3)|^2 = 4\pi^2 \frac{ac}{bd}.$$

Означимо са A, B, C, D вредности израза a, b, c, d у углу $\theta = 0$. Потребно је показати да је максимална вредност модула језгра дата на следећи начин

$$|K_{n+2}(z; \omega_3)|^2 = 4\pi^2 \frac{AC}{BD},$$

где је

$$A = \rho^2 + 2\rho + 1,$$

$$B = \rho^2 - 2\rho + 1,$$

$$\begin{aligned}
 C = & \rho^6 + 2\alpha \cdot \rho^5 + (\alpha^2 - 2\alpha) \cdot \rho^4 \\
 & + (-2\alpha^2 - 2\beta) \cdot \rho^3 + (\alpha^2 - 2\alpha\beta) \cdot \rho^2 + 2\alpha\beta \cdot \rho + \beta^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D = & \beta^2 \cdot \rho^{4n+16} + 2\alpha\beta \cdot \rho^{4n+15} + (\alpha^2 - 2\alpha\beta) \cdot \rho^{4n+14} \\
 & - (2\beta + 2\alpha^2) \cdot \rho^{4n+13} + (\alpha^2 - 2\alpha) \cdot \rho^{4n+12} + 2\alpha \cdot \rho^{4n+11} + \rho^{4n+10} \\
 & + 2\beta \cdot \rho^{2n+11} + (2\alpha\beta + 2\alpha) \cdot \rho^{2n+10} + (2\alpha^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha) \cdot \rho^{2n+9} \\
 & - (2\beta^2 + 2 + 4\alpha^2) \cdot \rho^{2n+8} - (2\alpha\beta + 2\alpha - 2\alpha^2) \cdot \rho^{2n+7} \\
 & + (2\alpha + 2\alpha\beta) \cdot \rho^{2n+6} + 2\beta \cdot \rho^{2n+5} + \rho^6 + 2\alpha \cdot \rho^5 + (\alpha^2 - 2\alpha) \cdot \rho^4 \\
 & - (2\alpha^2 + 2\beta) \cdot \rho^3 + (\alpha^2 - 2\alpha\beta) \cdot \rho^2 + 2\alpha\beta \cdot \rho + \beta^2.
 \end{aligned}$$

2.3.2 Главна тврђења

Gautschi-Li хипотеза тврди да се максимум модула језгра достиже на реалној оси за свако $\rho > \rho^* = 1$. У наредној Теорему ћемо доказати егзистенцију вредности ρ^* .

Теорема 2.3. За *Gauss-Lobatto* квадратурну формулу са двоструким чворовима у крајњим тачкама ∓ 1 у односу на *Chebyshev*-љеву тежинску функцију треће врсте, постоји вредност ρ^* таква да модуо језгра $|K_{n+2}(z; \omega_3)|$ достиже своју максималну вредност на позитивном делу реалне осе ($\theta = 0$) за свако $\rho > \rho^*$, односно

$$(2.40) \quad \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n+2}(z; \omega_3)| = \left| K_{n+2} \left(\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}), \omega_3 \right) \right|, \quad \rho > \rho^*.$$

Доказ. Потребно је показати

$$(2.41) \quad \frac{ac}{bd} \leq \frac{AC}{BD}.$$

Уведимо ознаке A_1, B_1, C_1, D_1 које представљају разлике $a - A$,

$b - B$, $c - C$ и $d - D$, редом, односно,

$$A_1 = 4 \cdot \left(\sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \cdot \rho,$$

$$B_1 = -4 \cdot \left(\sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \cdot \rho,$$

$$C_1 = 4 \cdot \left[\left(-\alpha \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \cdot \rho^5 + \alpha \sin^2 \theta \cdot \rho^4 + \left(\beta \sin^2 \frac{3\theta}{2} + \alpha^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \cdot \rho^3 + \alpha\beta \sin^2 \theta \cdot \rho^2 - \alpha\beta \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \rho \right],$$

$$\begin{aligned} D_1 = & 4 \cdot \left[\left(-\alpha\beta \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \cdot \rho^{4n+15} + \left(\alpha\beta \sin^2 \theta\right) \cdot \rho^{4n+14} \right. \\ & + \left(\beta \sin^2 \frac{3\theta}{2} + \alpha^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \cdot \rho^{4n+13} + \alpha \sin^2 \theta \cdot \rho^{4n+12} - \alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ & \cdot \rho^{4n+11} - \beta \sin^2 \frac{(2n+5)\theta}{2} \cdot \rho^{2n+11} + \left(-\alpha\beta \sin^2 \frac{(2n+6)\theta}{2} \right. \\ & - \alpha \sin^2 \frac{(2n+4)\theta}{2} \left.) \cdot \rho^{2n+10} + \left(-\alpha^2 \sin^2 \frac{(2n+5)\theta}{2} + \alpha\beta \sin^2 \frac{(2n+7)\theta}{2} \right. \right. \\ & + \alpha \sin^2 \frac{(2n+3)\theta}{2} \left.) \cdot \rho^{2n+9} + \left(\beta^2 \sin^2 \frac{(2n+8)\theta}{2} + \sin^2 \frac{(2n+2)\theta}{2} \right. \right. \\ & + \alpha^2 \sin^2 \frac{(2n+6)\theta}{2} + \alpha^2 \sin^2 \frac{(2n+4)\theta}{2} \left.) \cdot \rho^{2n+8} + \left(\alpha\beta \sin^2 \frac{(2n+7)\theta}{2} \right. \right. \\ & + \alpha \sin^2 \frac{(2n+3)\theta}{2} - \alpha^2 \sin^2 \frac{(2n+5)\theta}{2} \left.) \cdot \rho^{2n+7} + \left(-\alpha \sin^2 \frac{(2n+4)\theta}{2} \right. \right. \\ & - \alpha\beta \sin^2 \frac{(2n+6)\theta}{2} \left.) \cdot \rho^{2n+6} - \beta \sin^2 \frac{(2n+5)\theta}{2} \cdot \rho^{2n+5} - \alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \rho^5 \\ & + \alpha \sin^2 \theta \cdot \rho^4 + \left(\alpha^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \beta \sin^2 \frac{3\theta}{2}\right) \cdot \rho^3 + \alpha\beta \sin^2 \theta \cdot \rho^2 \\ & \left. - \alpha\beta \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \rho \right]. \end{aligned}$$

Неједнакост (2.41) се може записати у облику

(2.42)

$$I = I(\rho) = [CD(A_1B - AB_1) + C_1BD(A + A_1) - AC(B + B_1)D_1] \leq 0,$$

за свако $\rho > \rho^*$.

Полином $I(\rho)$ је полином по променљивој ρ степена $4n + 25$, чији коефицијенти зависе само од θ , односно

$$(2.43) \quad I = I(\rho) = \sum_{i=0}^{4n+25} a_i(\theta)\rho^i.$$

Потребно је анализирати знак водећег коефицијента полинома $I(\rho)$ и показати његову негативност.

Увођењем ознака $I(\rho) = x(\rho) + y(\rho) - z(\rho)$, и анализирајући водеће коефицијенте израза $x(\rho)$, $y(\rho)$ и $z(\rho)$, респективно добијамо

$$\beta^2(-8 \sin^2 \frac{\theta}{2}), \quad -4\alpha\beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad \text{и} \quad (-4\alpha\beta \sin^2 \frac{\theta}{2}).$$

Коначно, водећи коефицијент израза $I(\rho)$ је

$$(2.44) \quad a_{4n+25} = -8\beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 4\alpha\beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 4\alpha\beta \sin^2 \frac{\theta}{2} = -4\beta \sin^2 \frac{\theta}{2} (2\beta + \alpha\beta - \alpha),$$

$$\text{где је } \alpha = \frac{n+1}{n+3} \text{ и } \beta = \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)} = \alpha \cdot \frac{n+2}{n+4}.$$

Анализом знака израза a_{4n+25} добијамо

$$a_{4n+25} < 0 \quad \text{ако} \quad 2\beta + \alpha\beta - \alpha > 0 \quad \text{ако}$$

$$2\frac{n+2}{n+4} + \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)} - 1 > 0.$$

Претходна неједнакост се своди на $n^2 + 3n + 1 > 0$ што је испуњено за свако $n > 0$. \square

Сличан резултат важи за $K_{n+2}(z; \omega_4) = -K_{n+2}(-z; \omega_3)$.

Теорема 2.4. За *Gauss-Lobatto* квадратурну формулу са двоструким чворовима у крајњим тачкама ∓ 1 у односу на *Chebyshev*-љеву тежинску функцију четврте врсте, постоји вредност ρ^* таква да модуло језгра $|K_{n+2}(z; \omega_4)|$ достиже своју максималну вредност на негативном делу реалне осе ($\theta = \pi$) за

свако $\rho > \rho^*$, односно

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n+2}(z; \omega_4)| = \left| K_{n+2} \left(-\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}), \omega_4 \right) \right|, \quad \rho > \rho^*.$$

2.3.3 Анализа Gautschi-Li хипотезе

Потребно је показати да хипотеза важи за свако $\rho > 1$. Да бисмо показали непозитивност полинома $I(\rho)$ задатог формулом (2.43) за свако $\rho > 1$, најпре ћемо га записати у облику развоја по позитивним разликама $\rho - 1$, чиме добијамо

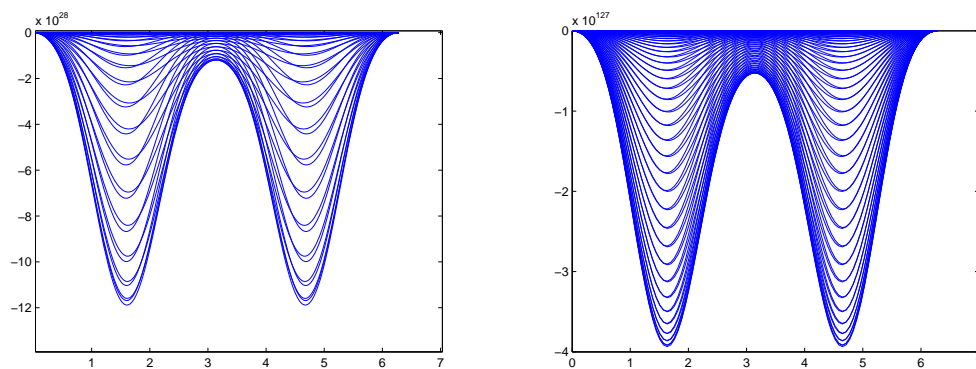
$$(2.45) \quad I(\rho) = \sum_{i=0}^{4n+25} b_i(\theta)(\rho - 1)^i \text{ за свако } \rho > 1.$$

Коефицијенти $b_i(\theta)$ су компликоване тригонометријске функције. Нумеричким решавањем једнодимензионих оптимизационих проблема

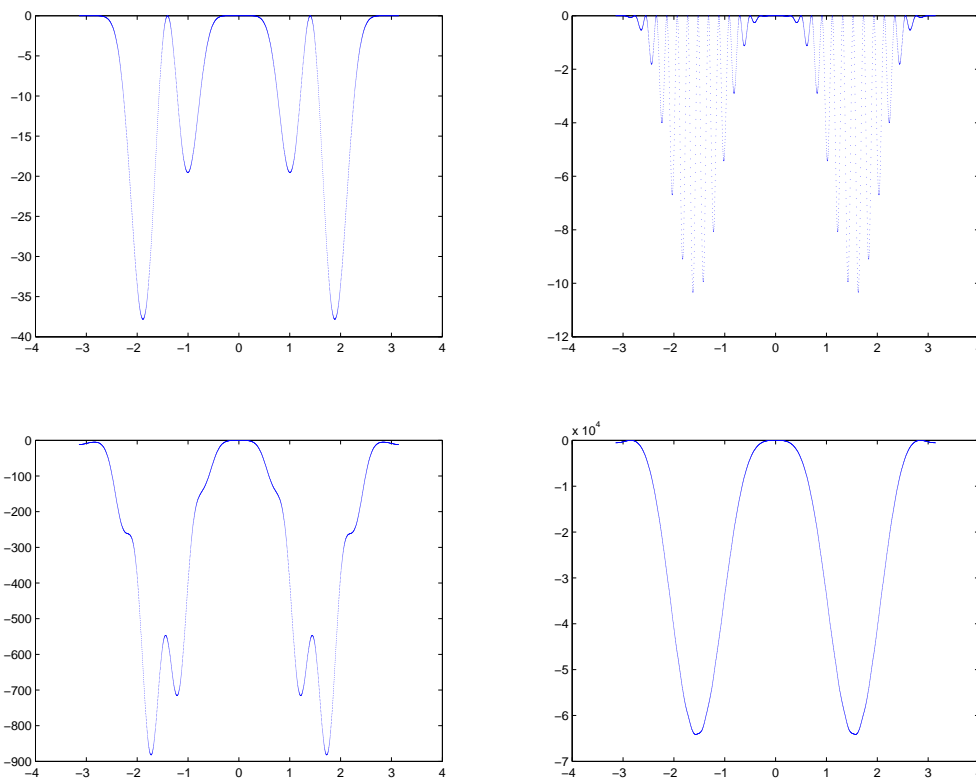
$$(2.46) \quad b_i(\theta) \longrightarrow \max, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad i = 0, 1, \dots, 4n + 25,$$

добијамо да изрази $b_i(\theta)$ достижу своју максималну вредност у нули за свако $i = 0, 1, \dots, 4n + 25$ и $\theta \in [0, 2\pi]$, односно да су графици свих коефицијената $b_i(\theta)$ испод x -осе. Тестирани примери $n = 1, 2, \dots, 100$ дају оптималне резултате од који су неки приказани (слика 3).

Резултат се може потврдити и посматрањем знака полинома $I(\rho)$. Слично, показује се полиноми $I(\rho)$ непозитивни за свако $\rho > 1$, $n \in \mathbb{N}$, и $\theta \in [0, 2\pi]$. Приказани су неки примери (слика 4).



Слика 3: Функције $b_0(\theta), \dots, b_{97}(\theta)$ у случају $n = 18$ (лево) и функције $b_0(\theta), \dots, b_{425}(\theta)$ у случају $n = 100$ (десно)



Слика 4: Функције $I(\theta)$ у случају $n = 1$, $\rho = 1.0001$ (горе лево); $n = 13$, $\rho = 1.0001$ (горе десно); $n = 3$, $\rho = 1.2$ (доле лево); $n = 15$, $\rho = 1.2$ (доле десно)

3.

Уопштене Gauss-Turán–ове квадратурне формуле, одређивање коэффицијената и остатка

3.1 Уводно поглавље

Gauss-Turán–ова формула је дата са

$$(3.1) \quad \int_{-1}^1 f(t) \omega(t) dt \approx \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=0}^{2s} c_{\nu i} f^{(i)}(\tau_{\nu}),$$

(видети потпоглавље 1.3.2).

Gori и *Micchelli* у раду [41] из 1996. год. уводе нову класу тежинских функција на интервалу $[-1, 1]$, чија се специфичност састоји у томе што за свако s постоји *Gauss-Turán*–ова формула (3.1). Поменута класа тежинских функција садржи и уопштење *Jacobi*–еве тежинске функције

$$\omega_{n,\mu}(t) = \left[\frac{U_{n-1}(t)}{n} \right]^{2\mu+1} (1-t^2)^\mu, \quad \mu > -1$$

где је $U_{n-1}(\cos \theta) = \sin n\theta / \sin \theta$ други *Chebyshev*–љев полином.

У раду [82] Миловановић и Спалевећ посматрају специјалну поткласу *Gori-Micchelli*–евих тежинских функција

$$(3.2) \quad \omega_{n,\ell}(t) = \left[\frac{U_{n-1}(t)}{n} \right]^{2\ell} (1-t^2)^{\ell-1/2}, \quad \ell \in \{0, 1, \dots, s\}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Очигледно, уколико је $\ell = 0$, тежинска функција (3.2) се своди на *Chebyshev*–љеву тежинску функцију прве врсте,
 $\omega_{n,0}(t) = (1-t^2)^{-1/2}$.

За тежинску функцију (3.2) *Chebyshev*–љеви полиноми прве врсте, T_n , су s –ортогонални (видети [83]).

S. Li је у раду [57] увео *Kronrod*–ово уопштење формуле (3.1) и показао да она постоји за произвољну тежинску функцију. У раду [82] је показано да за *Kronrod*–ово уопштење *Gauss-Turán*–ове квадратурне формуле,

$$(3.3) \quad \int_{-1}^1 f(t) \omega_{n,\ell}(t) dt \approx \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=0}^{2s} b_{\nu i} f^{(i)}(\tau_\nu) + \sum_{\mu=2}^n \sum_{j=0}^{2(s-\ell)} c_{\mu j}^* f^{(j)}(\tau_\mu^*) + \sum_{j=0}^{s-\ell} \left(c_{1,j}^* f^{(j)}(-1) + c_{n+1,j}^* f^{(j)}(1) \right),$$

важи да су чворови τ_μ^* , $\mu = 2, \dots, n$, нуле *Chebyshev*–љевог полинома друге врсте, као и да је $\tau_1^* = -1$, $\tau_{n+1}^* = 1$.

Специјално, када је $\ell = s$, формула (3.3) се своди на формулу облика (1.69), тј.,

$$(3.4) \quad \int_{-1}^1 f(t) \omega_{n,s}(t) dt \approx \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=0}^{2s} b_{\nu i} f^{(i)}(\tau_\nu) + \sum_{\mu=2}^n c_{\mu 0}^* f(\tau_\mu^*) + c_{1,0}^* f(-1) + c_{n+1,0}^* f(1),$$

док тежинска функција добија облик

$$\omega_{n,s}(t) = \left[\frac{U_{n-1}(t)}{n} \right]^{2s} (1-t^2)^{s-1/2}, \quad s \in N.$$

Уопштене *Gauss-Turán*–ове квадратурне формуле у односу на различите врсте *Chebyshev*–љевих и *Gori-Micchelli*–евих тежинских функција, се анализирају и у радовима [12], [78], [76], [80], [77], [83].

3.2 Коефицијенти Kronrod–овог уопштења Gauss–Turán–ове квадратурне формуле

Применимо Теорему 12 из главе 1, по којој се, за фиксирано ν , $1 \leq \nu \leq n$, коефицијенти $A_{i,\nu}$ уопштене Gauss–Turán–ове квадратурне формуле одређују решавањем система

$$\begin{aligned} b_{2s_\nu+1} &= (2s_\nu)!A_{2s_\nu,\nu} = \hat{\mu}_{2s_\nu,\nu}, \\ b_k &= (k-1)!A_{k-1,\nu} = \hat{\mu}_{k-1,\nu} - \sum_{j=k+1}^{2s_\nu+1} \hat{a}_{k,j}b_j, \quad k = 2s_\nu, \dots, 1, \end{aligned}$$

где је

$$(3.5) \quad \hat{\mu}_{k,\nu} = \int_R (t - \tau_\nu)^k \prod_{i \neq \nu} \left(\frac{t - \tau_i}{\tau_\nu - \tau_i} \right)^{2s_i+1} d\lambda(t),$$

$$(3.6) \quad \hat{a}_{k,k+j} = -\frac{1}{j} \sum_{l=1}^j u_l \hat{a}_{l,j}, \quad \hat{a}_{k,k} = 1,$$

$$(3.7) \quad u_l = \sum_{i \neq \nu} (2s_i + 1)(\tau_i - \tau_\nu)^{-l}, \quad l = 2s_\nu, \dots, 1.$$

Претходни систем можемо свести на матрични облик

$$(3.8) \quad AB = C,$$

где је $A = [\hat{a}_{i,j}]$, $B = [b_1, \dots, b_{2s_\nu+1}]^T$, $C = [\hat{\mu}_{0,\nu}, \dots, \hat{\mu}_{2s_\nu,\nu}]^T$.

Формуле (3.6) и (3.7) дефинишу елементе матрице система (3.8). Следећа MATLAB функција генерише елементе $\hat{a}_{i,j}$ горњетроугаоне матрице система уз претпоставку да су чворови

квадратурне формуле експлицитно задати, а да се њихов број (n) и вишеструкост (s) могу произвољно тестирати

```
function a=gornjetrougaona_matrica(ni,n)
dig=100;
digits(dig);
[s,t]=zadato(n);
for l=1:(2*s(ni))
    uu=0;
    for i=1:n
        if i~=ni
            uu=uu+(2*s(i)+1)/(t(i)-t(ni))^l;
        end
    end
    u(l)=uu;
end
for k=1:(2*s(ni)+1)
    a(k,k)=1;
end
j=1;
while j<=2*s(ni)
    aa=vpa(0.);
    for l=1:j
        aa=vpa(aa+u(l)*a(l,j));
    end
    for m=1:(2*s(ni))
        a(m,j+m)=vpa((-1/j)*aa);
    end
    j=j+1;
end
a=vpa(a(:,1:(2*s(ni)+1)));
end
```

Да би се формирали елементи колоне $C = [\hat{\mu}_{0,\nu}, \dots, \hat{\mu}_{2s_\nu,\nu}]^T$, потребно је израчунати моменте $\hat{\mu}_{k,\nu}$, $k = 0, \dots, 2s_\nu$ по формули (3.5). Поменути интеграли се могу израчунати класичном

Gauss–овом квадратурном формулом $\text{gauss}(\text{dig}, N, \text{ab})$, (видети [34]). Улазни аргумент претходне функције је матрица ab чију прву колону чине коефицијенти α_k , а другу коефицијенти β_k трослојне рекурентне релације (1.5).

Пре него што одредимо коефицијенте формуле (3.1) у односу на *Gori-Micchelli*–еву тежинску функцију, проверимо најпре тачност претходно описаног алгоритма на примеру за који је познато експлицитно решење. Наиме, познато је да је интеграл функције $f(t) = \cos(t)$ у односу на *Hermite*–ову тежинску функцију једнак

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t)e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}} \\ &= 1.3803884470431429747734152467255912742707724655622\dots \end{aligned}$$

Применом Теореме 12 за $n = 10$, $s = l = 1$ добијамо матрицу коефицијената чији су елементи рачунати са 100 значајних цифара, а овде је приказано 40. Матрица се састоји од следећих колона

$$\text{прва} \left[\begin{array}{l} 2.756968528738376515453157078149743899867(-10) \\ 6.553691671152327718567578322667870122098(-06) \\ 3.228557509550512113959613251612502233876(-03) \\ 1.313609438687963446107729742354467495369(-01) \\ 7.516308701070431875218234418169915654035(-01) \\ 7.516308701070431875218234418169915654035(-01) \\ 1.313609438687963446107729742354467495369(-01) \\ 3.228557509550512113959613251612502233876(-03) \\ 6.553691671152327718567578322667870122098(-06) \\ 2.756968528738376515453157078149743899867(-10) \end{array} \right],$$

$$\text{друга} \left[\begin{array}{l} 4.951334244141606628809680846303301996621(-11) \\ 1.211443111726818357208764850290560489416(-06) \\ 5.531319202218100904515578140264513558410(-04) \\ 1.669125751629158962244477838065054385267(-02) \\ 3.601923990662150871678357222440098103681(-02) \\ -3.601923990662150871678357222440098103681(-02) \\ -1.669125751629158962244477838065054385267(-02) \\ -5.531319202218100904515578140264513558410(-04) \\ -1.211443111726818357208764850290560489416(-06) \\ -4.951334244141606628809680846303301996621(-11) \end{array} \right],$$

$$\text{трећа} \quad \left[\begin{array}{l} 2.622141275262324250259104719609761329934(-12) \\ 8.5927390890113445001026358082222186283718(-08) \\ 5.6359400267266902042730088081161531708854(-05) \\ 2.8771438165854773931997228971893562946131(-03) \\ 1.8753722634747071283228718112124442164094(-02) \\ 1.8753722634747071283228718112124442164094(-02) \\ 2.8771438165854773931997228971893562946131(-03) \\ 5.6359400267266902042730088081161531708854(-05) \\ 8.5927390890113445001026358082222186283718(-08) \\ 2.6221412752623242502591047196097613299032(-12) \end{array} \right].$$

Када се ови резултати уврсте у формулу (3.1), где је $f(t) = \cos(t)$ и где су чворови τ_ν , $\nu = 1, \dots, 10$, нуле *Hermite*–овог ортогоналног полинома, добија се приближна вредност интеграла

$$I_{10,1}(f) = 1.3803884470431430300922578913374819884998102 \dots,$$

односно грешка

$$R(f) = |I(f) - I_{10,1}(f)| = 5.531884(-17).$$

Коефицијенти квадратурне формуле (3.1)

У случају *Gori-Micchelli*–еве тежинске функције, моменти $\hat{\mu}_{k,\nu}$ које треба израчунати добијају облик

$$(3.9) \quad \hat{\mu}_{k,\nu} = \int_R (t - \tau_\nu)^k \prod_{i \neq \nu} \left(\frac{t - \tau_i}{\tau_\nu - \tau_i} \right)^{2s_i+1} \left[\frac{U_{n-1}(t)}{n} \right]^{2\ell} (1-t^2)^{\ell-1/2} dt.$$

Пошто за ову тежинску функцију нису познати коефицијенти трослојне рекурентне релације, најпре треба издвојити полиномијални део подинтегралне функције. Преостали део заправо представља прву *Chebyshev*–љеву тежинску функцију, $(1-t^2)^{-1/2}$, за коју су коефицијенти трослојне рекурентне релације, α_k и β_k , познати. Функцију `mi(ni, n)` смо имплементирали тако да за фиксирано ν генерише моменте $\hat{\mu}_{k,\nu}$, до на задату прецизност (`dig`):

```

function k_mi=mi(ni,n)
dig=100;
digits(dig);
[s,t]=zadato(n);
l=s(1);
syms tt
syms u
u(1)=1;
u(2)=2*tt;
for ii=3:(n+1)
    u(ii)=2*tt*u(ii-1)-u(ii-2); % konstrukcija Cheb.pol. II vrste
end
uu=symfun(expand(u(n)),tt);
u=uu(tt);
for k=1:(2*s(ni)+1)
p=ceil(2*n*l-l+1+(n+k)/2); % minimalni broj cvorova za Gaussovu k.f.
ab=r_cheb1(p);
xw=Gauss(dig,p,ab);
sim_int=((u/n)^(2*l))*(1-tt^2)^l;
for r=1:n
    if r~=ni
        sim_int=sim_int*((tt-t(r))/(t(ni)-t(r)))^(2*s(r)+1);
    else
        sim_int=sim_int*(tt-t(ni))^(k-1);
    end
end
simbolicki_int=symfun(expand(sim_int),tt);
mm=vpa(0.);
for i=1:p
    mm=vpa(mm+vpa(xw(i,2))*vpa(simbolicki_int(vpa(xw(i,1)))));
end
mi_ni(k)=vpa(mm);
end
k_mi=vpa(mi_ni',dig);
end

```

Пример 1. Нека је $f(t) = e^t$, $n = s = l = 2$.

Gauss–Turán–ова формуле (3.1) је задата са

$$I_{G-T}(f) = \int_{-1}^1 f(t) \omega_{n,s}(t) dt \approx \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=0}^{2s} c_{\nu i} f^{(i)}(\tau_{\nu}).$$

Коефицијенте које треба одредити можемо записати у облику матрице

$$\Gamma = \begin{bmatrix} c_{1,0} & c_{1,1} & \dots & c_{1,2s} \\ c_{2,0} & c_{2,1} & \dots & c_{2,2s} \\ \dots & & & \\ c_{n,0} & c_{n,1} & \dots & c_{n,2s} \end{bmatrix},$$

где коефицијент $c_{\nu i}$ множи i -ти извод функције у чвору τ_{ν} тј., прву колону матрице Γ чине коефицијенти уз вредност функције у чворовима τ_{ν} , $\nu = 1, \dots, n$; другу колону чине коефицијенти уз први извод функције, последња колона матрице представља коефицијенте уз максимални, $2s$ -ти, извод функције.

На примеру интеграла функције $f(t) = e^t$, у односу на тежинску функцију $\omega_{n,s}(t) = \left[\frac{U_{n-1}(t)}{n} \right]^{2\ell} (1 - t^2)^{\ell-1/2}$, и

$n = s = l = 2$, добијамо

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 2.5396(-02) & 1.25784(-03) & 3.12228(-04) & 1.47936(-05) & 9.72611(-07) \\ 2.5396(-02) & -1.25784(-03) & 3.12228(-04) & -1.47936(-05) & 9.72611(-07) \end{bmatrix}.$$

(Елементи матрице Γ су такође рачунати са 100 значајних цифара, а овде је, примера ради, приказано само 5).

Множењем елемената матрице Γ са одговарајућим изводима функције у чворовима, добијамо приближну вредност интеграла

$$I_{G-T}(f) = 0.062866143494939210198402057087189279514952740373\dots$$

MATLAB имплементација претходно описаног поступка

```
function suma=provera_e(n)
dig=100;
digits(dig);
[s,t]=zadato(n);
ss=s(1);
A=matrica_koeficijenata(n)
suma=vpa(0.);
for j=1:(2*ss+1)
    s_j=vpa(0.);
    for i=1:n
        s_j=s_j+vpa(A(i,j)*exp(t(i))); % jer je svaki izvod jednak exp(t)
    end
    suma=vpa(suma+s_j);
end
suma=vpa(suma,dig);
end
```

Коефицијенти квадратурне формуле (3.4)

$$I_{K,G-T}(f) = \int_{-1}^1 f(t) \omega_{n,s}(t) dt \approx \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=0}^{2s} b_{\nu i} f^{(i)}(\tau_{\nu}) + \sum_{\mu=2}^n c_{\mu 0}^* f(\tau_{\mu}^*) + c_{1,0}^* f(-1) + c_{n+1,0}^* f(1)$$

Поред чворова τ_{ν} , који су нуле *Chebyshev*-љевог ортогоналног полинома прве врсте, τ_{ν} (видети [3]), ова формула садржи чворове који су нуле *Chebyshev*-љевог полинома друге врсте тј. $\tau_{\mu}^* = -\cos(j-1)\pi/n$, $\mu = 2, \dots, n$ као и чворове -1 и 1 који се могу уврстити у исту групу за $\mu = 1$ и $\mu = n+1$, односно,

$$I_{K,G-T}(f) = \int_{-1}^1 f(t) \omega_{n,s}(t) dt \approx \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=0}^{2s} b_{\nu i} f^{(i)}(\tau_{\nu}) + \sum_{\mu=1}^{n+1} c_{\mu 0}^* f(\tau_{\mu}^*).$$

Формула (3.4) је *Chakalov-Popoviciu* типа (видети поглавље 1.3.2 и формулу (1.70)), јер су чворови τ_{ν} вишеструкости $2s + 1$, а остали τ_{μ}^* , $\mu = 1, 2, \dots, n + 1$, су вишеструкости 1.

Чворови τ_{ν} и τ_{μ}^* су међусобно раздвојени ("*interlacing property*"), тако да их наизменично можемо поређати у растући низ. У чворовима τ_{ν} посматрамо вредности функције, као и вредности извода функције закључно са $2s$ -тим, док у чворовима τ_{μ}^* посматрамо само вредности функције.

Пример 2. Нека је $f(t) = e^t$, $n = s = l = 2$.

Применом *Kronrod*–овог уопштења *Gauss–Turán*–ове формуле,

$$I_{K,G-T}(f) = \int_{-1}^1 f(t) \omega_{n,s}(t) dt \approx \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=0}^{2s} b_{\nu i} f^{(i)}(\tau_{\nu}) + \sum_{\mu=1}^{n+1} c_{\mu 0}^* f(\tau_{\mu}^*),$$

на примеру дате функције и $\omega_{n,s}(t) = \left[\frac{U_{n-1}(t)}{n} \right]^{2\ell} (1 - t^2)^{\ell-1/2}$ за

$n = s = l = 2$, добијамо

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1.40210(-04) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.46638(-02) & 9.92824(-04) & 2.37962(-04) & 7.41149(-06) & 4.9543(-07) \\ 1.18546(-03) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.46638(-02) & -9.92824(-04) & 2.37962(-04) & -7.41149(-06) & 4.9543(-07) \\ 1.40210(-04) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

као и

$$I_{K,G-T}(f) = 0.06286614348701507325658365836098151638730086473\dots$$

У растућем низу τ_1^* , τ_1 , τ_2^* , τ_2, \dots, τ_n , τ_{n+1}^* , чворови τ_{μ}^* су на непарним позицијама. Пошто j -том чвору по реду одговара j -та врста матрице коефицијената, почев од друге колоне, сви елементи непарних врста матрице су једнаки нули. Тиме је осигурано да се у формули (3.4) појаве само вредности функције

у чворовима τ_μ^* , а не и вредности извода функције у поменутиим чворовима. У првом примеру интеграл функције смо апроксимирани *Gauss–Turán*–овом формулом, а у другом примеру *Kronrod*–овом екстензијом те формуле. Њиховом поређењем, грешку рачунамо стандардним начином и добијамо

$$(3.10) \quad R(f) = |I_{G-T}(f) - I_{K,G-T}(f)| = 7.924147449323016\dots(-12).$$

Табела (3.1) приказује вредности грешке $R(f)$ у случају исте функције $f(t) = e^t$ и исте тежинске функције, али за различите изборе броја чворова у њихових вишеструкости.

Табела 3.1: Оцена грешке $R(f)$

s	$R(f), n = 2$	$R(f), n = 4$	$R(f), n = 6$
2	7.924(-12)	1.117(-19)	6.111(-21)
5	8.769(-21)	1.059(-22)	4.549(-27)
12	3.309(-24)	1.578(-30)	6.385(-43)
15	2.068(-25)	9.631(-68)	-

4.

Остатак Gauss-Radau квадратурне формуле

4.1 Gauss-Radau квадратурне формуле са двоструким чвором у крајњој тачки

Посматрамо остатак *Gauss-Radau* квадратурне формуле са крајњом тачком -1 вишеструкости r

$$(4.1) \quad \int_{-1}^1 f(t)\omega(t) dt = \sum_{\rho=0}^{r-1} \kappa_{\rho} f^{(\rho)}(-1) + \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} f(x_{\nu}) + R_{n+1,r}(f),$$

где су x_{ν} нуле полинома $p_n(\cdot; \omega^R)$, ортогоналног на интервалу $[-1, 1]$, у односу на тежинску функцију

$$(4.2) \quad \omega^R(t) = (t+1)^r \omega(t).$$

Такође, $R_{n+1,r}(f) = 0$ за свако $f \in P_{2n+2r-1}$, где је r вишеструкост крајње тачке. Нека је Γ проста затворена крива која окружује интервал $[-1, 1]$ и нека је $\mathcal{D} = \text{int}\Gamma$ њена унутрашњост. Уколико је функција f аналитичка на домену \mathcal{D} који садржи $[-1, 1]$, тада је интегрална репрезентација остатка $R_{n+1,r}(f)$ дата изразом

$$(4.3) \quad R_{n+1,r}(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} K_{n+1,r}(z; \omega) f(z) dz.$$

Језгро остатка је задато са

$$(4.4) \quad K_{n+1,r}(z, \omega) = \frac{\varrho_{n,r}(z; \omega)}{\omega_{n,r}(z; \omega)}, \quad z \notin [-1, 1],$$

где је израз $\omega_{n,r}(z; w)$, модификован због вишеструкости крајње тачке, $\omega_{n,r}(z; w) = (z + 1)^r p_n(z; w)$, док је

$$(4.5) \quad \varrho_{n,r}(z, w) = \int_{-1}^1 \frac{\omega_{n,r}(z; w)}{z - t} \omega(t) dt,$$

видети [26]. Интегрална репрезентација остатка (4.3) се може оценити на следећи начин

$$(4.6) \quad |R_{n+1,r}(f)| \leq \frac{\ell(\mathcal{E}_\rho)}{2\pi} \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n+1,r}(z; \omega)| \right) \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right),$$

где је елипса \mathcal{E}_ρ задата изразом (2.9). У случају друге тежинске функције важи $\omega_2^R = (1-t)^{1/2}(1+t)^{5/2}$, па се двоструком применом Леме 2.1 добија

$$(4.7) \quad \omega_2^R(z) = U_{n+2}(z) + 4 \frac{n+3}{2n+3} U_{n+1}(z) + \frac{(n+3)(2n+5)}{(n+1)(2n+3)} U_n(z),$$

где је U_n Chebyshev-љев полином друге врсте. Применом једнакости (4.5) и [27, једн. (3.6)]

$$(4.8) \quad U_n(z) = \frac{u^{n+1} - u^{-(n+1)}}{u - u^{-1}},$$

$$\int_{-1}^1 \frac{U_n(t)}{z - t} \omega_2(t) dt = \frac{\pi}{u^{n+1}},$$

где је $z = (u + u^{-1})/2$, $u = \rho e^{i\theta}$,

долази се до експлицитног израза за језгро

$$(4.9) \quad K_{n+1}(z; \omega_2) = \frac{\pi(u^2 - 1)}{u^{n+4}} \times \frac{u^2 + \alpha u + \beta}{\beta[u^{n+3} - u^{-(n+3)}] + \alpha[u^{n+2} - u^{-(n+2)}] + [u^{n+1} - u^{-(n+1)}]},$$

где је $\alpha = \frac{4(n+1)}{2n+5}$, $\beta = \frac{(n+1)(2n+3)}{(n+3)(2n+5)}$, $z = (u + u^{-1})/2$ и $u = \rho e^{i\theta}$.

У случају треће тежинске функције важи $\omega_3^R = (1-t)^{-1/2}(1+t)^{5/2}$.

Лема 4.1. Нека су $V_{n,k}$ полиноми степена n ортогонални на интервалу $(-1, 1)$ у односу на тежинску функцију $(1-t)^{-1/2}(1+t)^{1/2+k}$, $k \geq 0$, цео број. Тада важи

$$a) \quad V_{n,0}(t) = V_n(t)$$

$$b) \quad V_{n,k}(t) = \frac{1}{1+t} \left(V_{n+1,k-1}(t) + \frac{(n+k+\frac{1}{2})(n+k)}{(n+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2}k)} V_{n,k-1}(t) \right),$$

$$k \geq 1.$$

Двоструком применом претходне Леме и једнакости [27, једн. 3.14]

$$(4.10) \quad \int_{-1}^1 \frac{V_n(t)}{z-t} \omega_3(t) dt = \frac{2\pi}{(u-1)u^n},$$

$$V_n(z) = \frac{u^{n+1} + u^{-n}}{u+1},$$

добија се израз за језгро

$$(4.11) \quad K_{n+1}(z; \omega_3) = \frac{2\pi(u+1)}{(u-1)u^{n+2}} \times \frac{u^2 + \alpha u + \beta}{\beta[u^{n+3} + u^{-(n+2)}] + \alpha[u^{n+2} + u^{-(n+1)}] + [u^{n+1} + u^{-n}]},$$

где је $\alpha = \frac{2n+1}{n+2}$, $\beta = \frac{(n+1)(2n+1)}{(n+2)(2n+5)}$, $z = (u + u^{-1})/2$ и $u = \rho e^{i\theta}$.

У раду [26] су анализиране *Gauss-Radau* квадратурне формуле са двоструким чвором у крајњој тачки у односу на све четири *Chebyshev–љеве* тежинске функције. Случајеви тежинских функција $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_4$ су детаљно анализирани и доказано је да се максимум модула језгра достиже на негативном делу реалне осе ($\theta = \pi$) за свако $\rho > 1$. У овој глави су анализирани случајеви преостале две тежинске функције, $\omega = \omega_2$ и $\omega = \omega_3$ (радови [66] и [92]).

4.2 Gauss-Radau квадратурне формуле са Chebyshev–љевим тежинским функцијама треће врсте

У раду [26, стр. 326] су формулисане хипотезе по којима се максимум модула језгра са трећом *Chebyshev*–љевом тежинском функцијом достиже у углу: *i*) $\theta = \pi$ ако је $\rho > 1$ и $n = 1$; *ii*) $\theta = 0$ ако је $\rho \geq \rho_n$ и $n \geq 2$, где је ρ_n вредност већа од 1 одређена за $2 \leq n \leq 20$. Као и у другој глави, циљ је доказати егзистенцију вредности ρ_n , показати да хипотезе важе на целом интервалу дефинисаности и дати ефикасне оцене грешке *Gauss-Radau* квадратурне формуле (4.1).

Као што је показано, језгро на елипси \mathcal{E}_ρ је задато изразом

$$K_{n+1}(z; \omega_3) = \frac{2\pi(u+1)}{(u-1)u^{n+2}} \times \frac{u^2 + \alpha u + \beta}{\beta[u^{n+3} + u^{-(n+2)}] + \alpha[u^{n+2} + u^{-(n+1)}] + [u^{n+1} + u^{-n}]},$$

где је $\alpha = \frac{2n+1}{n+2}$, $\beta = \frac{(n+1)(2n+1)}{(n+2)(2n+5)}$, $z = (u + u^{-1})/2$ и $u = \rho e^{i\theta}$.

Увођењем одговарајућих ознака (Додатак 9), квадрат модула језгра у угловима $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ се може изразити као

$$4\pi^2 \frac{A_0 C_0}{B_0 D_0} \text{ и } 4\pi^2 \frac{A_\pi C_\pi}{B_\pi D_\pi}, \text{ респективно.}$$

Угао у ком језгро достиже свој максимум за фиксиране вредности n (број чворова) и ρ_0 (вредност променљиве ρ), одређујемо позивањем функције `kn(n, rho)`

```
function angle=kn(n,ro)
k=100000;
t0=0;
t_pi=pi/k;
```

```

for j=1:(k+1)
    t=t0+(j-1)*t_pi;
    [a,b,c,d]=vrati_abcd(n,ro,t);
    Kn=sqrt((4*(pi^2)*a*c)/(b*d));
    aa(j)=t;
    bb(j)=Kn;
end
MaxKn=bb(1);
teta=aa(1);
for j=1:(k+1)
    if (bb(j)>=MaxKn)
        MaxKn=bb(j);
        teta=t0+(j-1)*t_pi;
    end
end
angle=teta;
end

```

где је $vrati_abcd(n,ro,t)$ (Додатак 1) функција која експлицитно враћа вредности израза a , b , c и d за фиксирано n , ro и t (вредност угла θ).

Теорема 4.2. За *Gauss-Radau* квадратурну формулу са двоструким чвором у крајњој тачки -1 и у односу на *Chebyshev–љеву* тежинску функцију треће врсте, постоји вредност $\rho_n \in (1, \infty)$ таква да модуо језгра $|K_{n+1}(z; \omega_3)|$ достиже своју максималну вредност

i) на негативном делу реалне осе ($\theta = \pi$) за свако $\rho \geq \rho_n$ и $n = 1$,

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n+1}(z; \omega_3)| = \left| K_{n+1} \left(-\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}), \omega_3 \right) \right|,$$

ii) на позитивном делу реалне осе ($\theta = 0$) за свако $\rho \geq \rho_n$ и $n \geq 2$ где је $\rho_n \in (1, \infty)$,

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n+1}(z; \omega_3)| = \left| K_{n+1} \left(\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}), \omega_3 \right) \right|.$$

Доказ. *i)* Потребно је доказати

$$(4.12) \quad \frac{ac}{bd} \leq \frac{A_\pi C_\pi}{B_\pi D_\pi} \Leftrightarrow I_\pi(\rho) = [acB_\pi D_\pi - A_\pi C_\pi bd](\rho) \leq 0$$

за свако ρ веће од ρ_n , $n = 1$ и $\theta \neq \pi$ (јер се управо у углу $\theta = \pi$ достиже максимум).

Анализом водећег коефицијента полинома $I_\pi(\rho)$,

$$(4.13) \quad a_{4n+17} = -2\beta(\cos \theta + 1)(\alpha - 2\beta - \alpha\beta),$$

и наметањем услова да израз a_{4n+17} буде негативан, добија се

$$a_{4n+17} < 0 \quad \text{ако} \quad \alpha - 2\beta - \alpha\beta > 0 \quad \text{ако}$$

$$1 - \frac{2n+2}{2n+5} - \frac{2n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{2n+5} > 0.$$

Последња неједнакост се своди на $-2n^2 + 5 > 0$, што се уз услов $n \in \mathbb{N}$, своди на $n = 1$. Овим је доказано да за $n = 1$ постоји вредност ρ_n почев од које је израз $I_\pi(\rho)$ непозитиван.

ii) Потребно је доказати

$$(4.14) \quad \frac{ac}{bd} \leq \frac{A_0 C_0}{B_0 D_0} \Leftrightarrow I_0(\rho) = [acB_0 D_0 - A_0 C_0 bd] \leq 0,$$

за свако $\rho \geq \rho_n$, $\theta \neq 0$ и $n \geq 2$. Израз $I_0(\rho)$ је такође полином по променљивој ρ са водећим коефицијентом

$$(4.15) \quad a_{4n+17} = 2\beta(1 - \cos \theta)(\alpha - 2\beta - \alpha\beta).$$

Коефицијент a_{4n+17} ће бити негативан ако и само ако је израз $\alpha - 2\beta - \alpha\beta$ негативан. Знак овог израза је анализиран у доказу *i)* и показано је да је позитиван само за $n = 1$, што значи да је је негативан за $n \geq 2$. □

Према првој и другој хипотези, максимум модула језгра $K_{n+1}(z; \omega_3)$ се за свако $\rho \geq \rho_n$ достиже у углу $\theta = \pi$, уколико је $n = 1$, или у углу $\theta = 0$, уколико је $n \geq 2$. Да бисмо показали непозитивност полинома $I_\pi(\rho)$ и $I_0(\rho)$ за свако $\rho \geq \rho_n$, иницијални полином најпре записујемо у облику развоја по позитивним разликама $\rho - \rho_n$

$$(4.16) \quad J(\rho) = \sum_{i=0}^{4n+17} b_i(\theta, \rho_n)(\rho - \rho_n)^i.$$

Новодобијене коефицијенте $b_i(\theta, \rho_n)$ можемо изразити помоћу коефицијената $a_i(\theta)$ на следећи начин

$$(4.17) \quad b_k(\theta, \rho_n) = \sum_{i=0}^{4n+17-k} (-1)^i \binom{k+i}{i} a_{k+i}(\theta) \rho_n^i.$$

Неки од њих су приказани

$$b_{4n+17}(\theta, \rho_n) = 2\beta(\alpha\beta - \alpha + 2\beta)(\cos \theta - 1),$$

$$b_{4n+16}(\theta, \rho_n) = 4 \beta(2(1 + \beta)(\alpha + \beta - 1) - \rho_n(\alpha\beta - \alpha + 2\beta)(17 + 4n)) \\ + 2(1 + \beta)(\alpha + \beta - 1) \cos \theta \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$b_{4n+15}(\theta, \rho_n) = - 4[2\alpha^2 + \alpha^3 - \alpha + 2\beta - 4\alpha\beta - \alpha^3\beta + 2\beta^2 + 4\alpha\beta^2 \\ + 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^3 + \alpha\beta^3 + 32\beta \rho_n - 32\alpha\beta \rho_n - 32\alpha\beta^2 \rho_n \\ - 32\beta^3 \rho_n + 8\beta n \rho_n - 8\alpha\beta n \rho_n - 8\alpha\beta^2 n \rho_n - 8\beta^3 n \rho_n \\ - 136\alpha\beta \rho_n^2 + 272\beta^2 \rho_n^2 + 136\alpha\beta^2 \rho_n^2 - 66\alpha\beta n \rho_n^2 \\ + 132\beta^2 n \rho_n^2 + 66\alpha\beta^2 n \rho_n^2 - 8\alpha\beta n^2 \rho_n^2 + 16\beta^2 n^2 \rho_n^2 \\ + 8\alpha\beta^2 n^2 \rho_n^2] - 8\beta \cos \theta [\alpha(1 + \beta)(4 + n) \rho_n + (\beta^2 - 1)$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot (4+n) \rho_n - \alpha^2] + 2(\beta + \beta^3) \cos 2\theta \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\
 b_{4n+14}(\theta, \rho_n) = & - 4\alpha - 4\alpha^3 + 4\beta - 4\alpha\beta - 4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^2 - 4\beta^3 - 4\alpha\beta^3 \\
 & - 8\beta \cos \theta - 8\alpha\beta \cos \theta - 8\alpha\beta^2 \cos \theta + 8\beta^3 \cos \theta + 4\alpha \cos^2 \theta \\
 & + 4\alpha^3 \cos^2 \theta + 12\alpha\beta \cos^2 \theta + 4\alpha^3\beta \cos^2 \theta + 12\alpha\beta^2 \cos^2 \theta \\
 & + 4\alpha\beta^3 \cos^2 \theta - 4\beta \cos 2\theta - 8\alpha\beta \cos 2\theta - 8\alpha\beta^2 \cos 2\theta \\
 & + 4\beta^3 \cos 2\theta + 8\beta \cos \theta \cos 2\theta + 8\alpha\beta \cos \theta \cos 2\theta + 8\alpha\beta^2 \\
 & \cdot \cos \theta \cos 2\theta - 8\beta^3 \cos \theta \cos 2\theta + \frac{8}{3}\beta(\alpha\beta - \alpha + 2\beta)\rho_n^3 \\
 & \cdot (4+n)(15+4n)(17+4n) \sin^2 \frac{\theta}{2} + 4\rho_n \sin^2 \frac{\theta}{2}(15+4n) \\
 & \cdot (\alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha + 2\beta - 4\alpha\beta - \alpha^3\beta + 2\beta^2 + 4\alpha\beta^2 \\
 & + 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^3 + \alpha\beta^3 + 8\alpha^2\beta \cos \theta + 2(\beta + \beta^3) \cos 2\theta) \\
 & - 8\beta\rho_n^2 \sin^2 \theta(1+\beta)(\alpha+\beta-1)(4+n)(15+4n).
 \end{aligned}$$

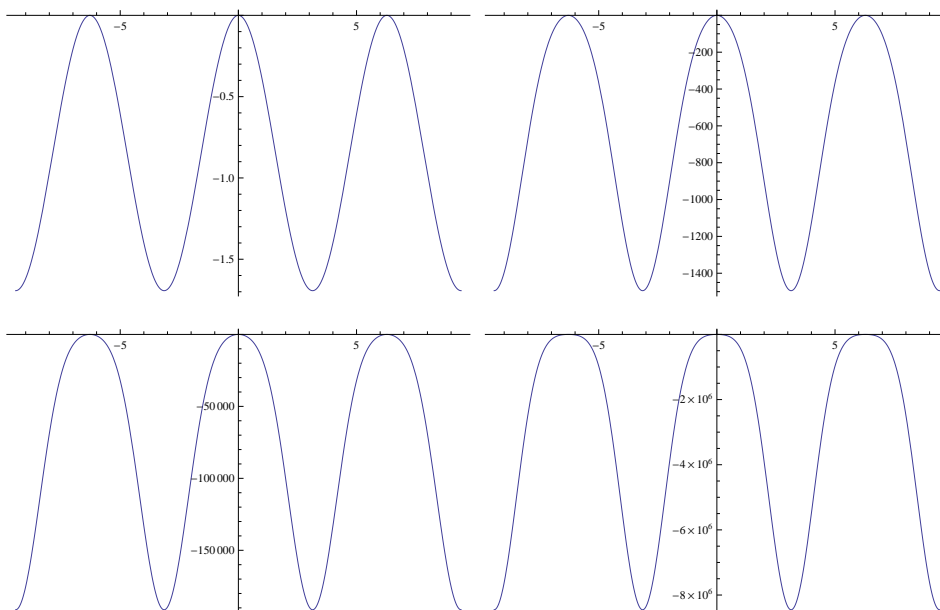
Слика 5 приказује графике претходних коефицијената израчунатих помоћу програмског пакета *Mathematica* у случају $n = 5$, $\rho_n = 1.1549$ (видети табелу 4.1). Анализом знака функција $b_i(\theta, \rho_n)$ и у осталим случајевима, $i = 0, 1, \dots, 4n + 17$, показује се да функције $b_i(\theta, \rho_n)$ узимају непозитивне вредности за свако θ из интервала $[0, 2\pi]$ и $n = 1, 2, \dots, 100$. Неки од резултата су графички показани (слика 6).

Након што израчунамо и остале коефицијенте $b_i(\theta, \rho_n)$, увођењем ознаке $r = \rho - \rho_n$, полином (4.16) можемо посматрати на следећи начин

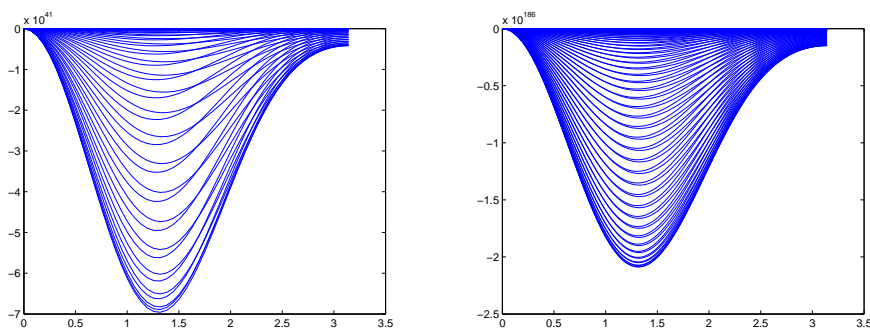
$$(4.18) \quad J(\theta, r) = \sum_{i=0}^{4n+17} b_i(\theta, \rho_n) r^i.$$

За фиксиране вредности $n = 5$, $\rho_n = 1.1549$ приказан је график функције $J(\theta, r)$ у случају $r \in [0, 3]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ (слика 7). Поново

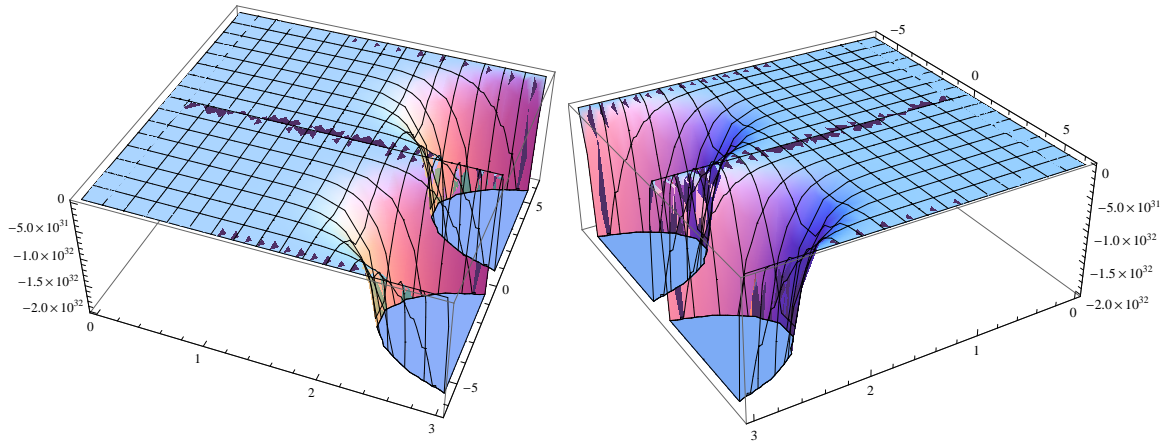
је потврђено да су изрази $J(\theta, r)$ непозитивни, а тиме и иницијални полином.



Слика 5: Функције $b_{37}(\theta, \rho_n), b_{36}(\theta, \rho_n), b_{35}(\theta, \rho_n), b_{34}(\theta, \rho_n)$



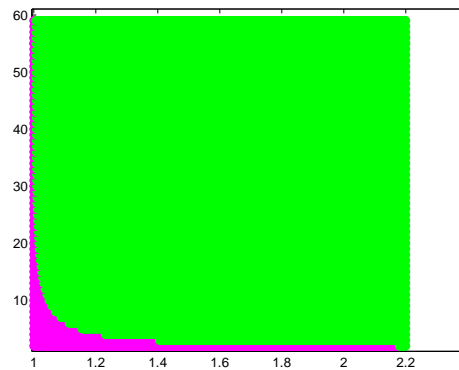
Слика 6: Функције $b_0(\theta, \rho_n), \dots, b_{137}(\theta, \rho_n)$, у случају $n = 30$ (лево) и функције $b_0(\theta, \rho_n), \dots, b_{417}(\theta, \rho_n)$, у случају $n = 100$ (десно)



Слика 7: Функције $J(\theta, r)$ у случају $n = 5$, $\rho_n = 1.1549$ и $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 3]$

MATLAB функција *maksimum_koeficijenata(n)* (наредна страна) применом применом *Horner*–ове шеме генерише претходно описане коефицијенте, црта њихове графике и одређује максимум свих.

Најмања могућа вредност ρ_n за коју је израз $I_0(\rho)$ непозитиван за свако $\rho \geq \rho_n$ проналази се анализом израза $I_0(\rho)$ за фиксирано $n \geq 2$. Неке вредности ρ_n су приказане у табели 4.1, као и на слици (десно) на којој је зеленом бојом означава област у $\rho - n$ равни у којој хипотеза важи. Вредност ρ_n на интервалу $[ll, ul]$ за фиксирано n налазимо помоћу MATLAB функције *izracunaj-rn(n, ll, ul)*.




```
function max_koef=maksimum_koeficijenata(n)
k=1000;
if(n>=2)
ro=izracunaj_rn(n);
end
koeficijenti=zeros(4*n+18,k+1);
t0=0;
t_pi=pi/k;
for j=1:(k+1)
    t=t0+(j-1)*t_pi;
    II=izracunaj_I(n,t);
    J=II(1);
    for s=2:length(II)
        J=[J 0]+ro*[0 J];
        J(end)=J(end)+II(s);
    end
    for b=1:(4*n+18)
        koeficijenti(b,j)=J(b);
    end
end
T=0:(k);
T=pi*T./(k);
for l=(4*n+18):-1:1;
    a{l}=koeficijenti(l,:);
    figure(1)
    plot(T,a{l});
    hold on;
end
max_koef=max(max(koeficijenti));
end
```

(видети и Додатак 2)

```
function r=izracunaj_rn(n, ll, ul)
k=100000;
t0=0;
t_pi=pi/k;
ro=ul;
m=1;
while(ro>=ll)
    I_max=0;
    for j=1:(k+1)
        t=t0+(j-1)*t_pi;
        [a,b,c,d]=vrati_abcd(n,ro,t);
        [A,B,C,D]=vrati_abcd(n,ro,0);
        Io(j)=a*c*B*D-A*C*b*d;
        I_max=max(Io(j));
        if (I_max>0)
            rn(m)=ro;
        end
        m=m+1;
    end
    ro=ro-0.00001;
end
r=max(rn)+0.00001
end
```

4.3 Gauss-Radau квадратурне формуле са Chebyshev–љевом тежинском функцијом друге врсте

На основу нумеричких резултата, *Gautschi* и *Li* постављају хипотезе да се максимум модула језгра $K_{n+1}(z; \omega_2)$ достиже на негативном делу реалне осе уколико је: *i*) $\rho > 1$ и $1 \leq n \leq 11$; *ii*) $\rho \geq \rho_n$ и $n \geq 12$. Претходне хипотезе можемо обухватити на

Табела 4.1: Вредности ρ_n за $2 \leq n \leq 61$

n	ρ_n	n	ρ_n	n	ρ_n	n	ρ_n	n	ρ_n	n	ρ_n
2	2.1789	12	1.0356	22	1.0131	32	1.0083	42	1.0075	52	1.0065
3	1.4045	13	1.0312	23	1.0122	33	1.0081	43	1.0074	53	1.0065
4	1.2309	14	1.0276	24	1.0114	34	1.0079	44	1.0073	54	1.0063
5	1.1549	15	1.0246	25	1.0108	35	1.0078	45	1.0070	55	1.0064
6	1.1132	16	1.0222	26	1.0102	36	1.0077	46	1.0069	56	1.0062
7	1.0872	17	1.0201	27	1.0098	37	1.0075	47	1.0069	57	1.0060
8	1.0697	18	1.0183	28	1.0093	38	1.0074	48	1.0068	58	1.0062
9	1.0573	19	1.0167	29	1.0090	39	1.0077	49	1.0069	59	1.0062
10	1.0481	20	1.0153	30	1.0086	40	1.0077	50	1.0066	60	1.0058
11	1.0411	21	1.0141	31	1.0084	41	1.0076	51	1.0066	61	1.0046

следећи начин: максимум модула језгра $K_{n+1}(z; \omega_2)$ достиже се на негативном делу реалне осе уколико је $\rho > \rho^*$ и $n \geq 1$, где је $\rho^* = 1$ за $1 \leq n \leq 11$, док је $\rho^* = \rho_n$ за $n \geq 12$.

Експлицитни израз за језгро $K_{n+1}(z; \omega_2)$ на елипси \mathcal{E}_ρ (2.9) је дат са

$$K_{n+1}(z; \omega_2) = \frac{\pi(u^2 - 1)}{u^{n+4}} \times \frac{u^2 + \alpha u + \beta}{\beta[u^{n+3} - u^{-(n+3)}] + \alpha[u^{n+2} - u^{-(n+2)}] + [u^{n+1} - u^{-(n+1)}]},$$

где је $\alpha = \frac{4(n+1)}{2n+5}$, $\beta = \frac{(n+1)(2n+3)}{(n+3)(2n+5)}$, $z = (u + u^{-1})/2$ и $u = \rho e^{i\theta}$.

Квадрат модула језгра у углу $\theta = \pi$ се може приказати

$$(4.19) \quad |K_{n+1}(z; \omega_3)|^2 = \frac{\pi^2 AC}{\rho^2 D},$$

где A, C, D означавају вредности израза a, c, d у углу $\theta = \pi$ (Додатак 10).

Теорема 4.3. За *Gauss-Radau* квадратурну формулу са двоструким чвором у крајњој тачки -1 у односу на *Chebyshev*–љеву тежинску функцију друге врсте, постоји вредност $\rho^* \in [1, \infty)$, таква да модуо језгра $|K_{n+1}(z; \omega_2)|$ достиже своју максималну вредност на негативном делу реалне осе ($\theta = \pi$) за свако $\rho \geq \rho^*$ и $n \geq 1$, односно

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n+1}(z; \omega_2)| = \left| K_{n+1} \left(-\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}), \omega_2 \right) \right|,$$

за $\rho \geq \rho^*$, $n \geq 1$.

Доказ. Потребно је показати

$$(4.20) \quad \frac{ac}{d} \leq \frac{AC}{D},$$

тј,

$$(4.21) \quad I = I(\rho) = [acD - ACd] \leq 0.$$

за свако $\rho \geq \rho^*$, $\theta \neq \pi$ и $n \geq 1$. Показује се да је $I(\rho)$ полином степена $4n+19$ по променљивој ρ , чији коефицијенти зависе само од θ и чији је водећи коефицијент

$$(4.22) \quad a_{4n+19} = 2\alpha\beta(1 + \cos \theta)(\beta - 1),$$

где је $\alpha = \frac{4(n+1)}{2n+5}$ и $\beta = \frac{(n+1)(2n+3)}{(n+3)(2n+5)}$.

Показује се

$$a_{4n+19} < 0 \quad \text{акко} \quad \beta < 1 \quad \text{акко} \quad (n+1)(2n+3) < (n+3)(2n+5).$$

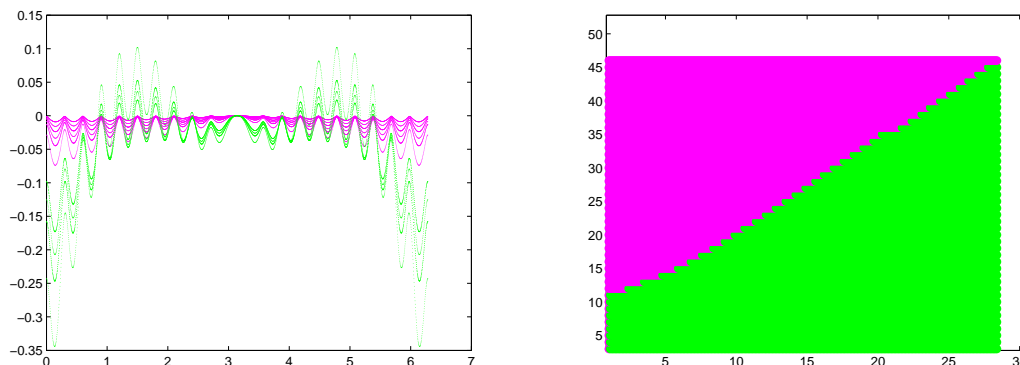
Претходна неједнакост се своди на $n > -2$, па закључујемо да је израз a_{4n+19} негативан за свако $n \geq 1$.

Према формулацији *Gautschi-Li* хипотезе, максимум модула језгра се достиже у углу $\theta = \pi$ за свако $\rho \geq \rho^*$ и $n \geq 1$. Развојем по $\rho - \rho^*$ добијамо

$$(4.23) \quad J(\rho) = \sum_{i=0}^{4n+19} b_i(\theta, \rho^*)(\rho - \rho^*)^i \quad \text{за свако} \quad \rho \geq \rho^*.$$

Слика 8 (лево) приказује графике функција $J(\rho)$ на интервалу $\rho \in (\rho^* - \epsilon, \rho^* + \epsilon)$, за $n = 9$ и $\theta \in [0, 2\pi]$. Када је $\rho < \rho^*$, графици функција $J(\rho)$ су негативни (на слици љубичасти), док за $\rho > \rho^*$ функције $J(\rho)$ могу узети позитивне вредности (зелени).

За фиксиране $n \geq 1$, тестирали смо најмање вредности ρ^* (са 4 значајне цифре) за које су изрази $J(\rho)$ непозитивни за свако $\rho \geq \rho^*$. Неке од вредности ρ^* су приказане у табели (испод) и на слици 8 (десно) на којој је зеленом бојом означена област $\rho - n$ равни у којој хипотеза важи.



Слика 8: Графици функција $J(\rho)$ и област $\rho - n$ равни

n	ρ^*	n	ρ^*	n	ρ^*	n	ρ^*
12	2.3455	21	10.5861	30	16.8838	39	23.0093
13	3.4034	22	11.3053	31	17.5691	40	23.6857
14	4.7165	23	12.0172	32	18.2529	41	24.3615
15	5.8433	24	12.7232	33	18.9354	42	25.0367
16	6.7473	25	13.4245	34	19.6167	43	25.7115
17	7.5731	26	14.1219	35	20.2969	44	26.3859
18	8.3575	27	14.8161	36	20.9762	45	27.0599
19	9.1162	28	15.5076	37	21.6547	46	27.7334
20	9.8575	29	16.1967	38	22.3323	47	28.4066

4.4 Нумерички примери

Грешка квадратурне формуле (4.1) се може оценити изразом (4.24)

$$|R_{n+1}(f)| \leq r_n(f) = \inf_{\rho_n < \rho < \rho_{\max}} \left[\frac{\ell(\mathcal{E}_\rho)}{2\pi} \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n+1}(z, \omega_i)| \right) \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right) \right],$$

где је дужина елипсе, $\ell(\mathcal{E}_\rho)$, дата са (2.33), док је модуо $|K_{n+1}(z, \omega_i)|$ за $i = 2, 3$ анализиран у претходне две главе.

Пример 1. Нека је $f_1(z) = \frac{e^{e^z}}{(a+z)^k(b+z)^l(c+z)^m}$, где је $c \leq b \leq a < -1, k \in \mathbb{N}, l, m \in \mathbb{N}_0$. Познато је

$$(4.25) \quad \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f_1(z)| = \frac{e^{e^{a_1}}}{|a+a_1|^k |b+a_1|^l |c+a_1|^m}.$$

Оцене грешака и стварне грешке поново рачунамо на примеру који се често јавља у литератури: $a = -1.4083333333333333; b = -1.892857142857143; c = -2.408695652173913; k = 1; l = 5; m = 10, \rho_{\max} = |c| = 2.4$, Табела 4.2 се односи на случај тежинске функције ω_3 .

Табела 4.2: Оцене грешака $R_{n+1}(f_1, \omega_3)$ и стварне грешке

n	$R_{n+1}(f_1, \omega_3)$	$Error$	n	$R_{n+1}(f_1, \omega_3)$	$Error$
1	2.0739(+2)	1.175(+0)	12	4.7715(-5)	1.347(-6)
2	3.5288(+2)	7.023(-1)	20	1.1247(-10)	1.578(-12)
3	7.0035(+0)	3.077(-1)	30	5.2709(-18)	3.935(-20)
5	8.3240(-1)	3.619(-2)	50	6.3643(-33)	2.398(-35)
9	4.3001(-3)	1.523(-4)	60	1.9700(-40)	5.943(-43)

Оцена грешке (4.24) у случају првог примера се добија помоћу функције `osena1(n)`:

```

function [rn_f1,ro_infimum]=ocena1(n)
aa=-1.4083333333333333;
bb=-1.892857142857143;
cc=-2.408695652173913;
k=1;
l=5;
m=10;
i1=izracunaj_rn(n);
i2=100;
ro=i1;
[a,b,c,d]=vrati_abcd(n,ro,0);
a1=(ro+ro^(-1))/2;
l_e=a1*(1-(1/4*(a1^(-2)))-(3/64*(a1^(-4)))-(5/256*(a1^(-6))));
max_f=(exp(exp(a1)))/(((abs(aa+a1))^k)*...
                ((abs(bb+a1))^1)*((abs(cc+a1))^m));
inf_rn=l_e*(2*pi)*sqrt((a*c)/(b*d))*max_f;
while (ro<=i2)
    [a,b,c,d]=vrati_abcd(n,ro,0);
    a1=(ro+ro^(-1))*0.5;
    l_e=a1*(1-(1/4*(a1^(-2)))-(3/64*(a1^(-4)))-(5/256*(a1^(-6))));
    max_f=(exp(exp(a1)))/(((abs(aa+a1))^k)*...
                ((abs(bb+a1))^1)*((abs(cc+a1))^m));
    rn=l_e*(2*pi)*sqrt((a*c)/(b*d))*max_f;
    if(rn<=inf_rn)
        inf_rn=rn;
        ro_inf=ro;
    end
    ro=ro+0.001;
end
rn_f1=inf_rn;
ro_infimum=ro_inf;
end

```

Пример 2. Нека је $f_2(z) = e^{e^{\cos(wz)}}$, $w > 0$. Познато је

$$(4.26) \quad \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f_2(z)| = e^{e^{\cosh(wb_1)}},$$

где је $b_1 = (\rho - \rho^{-1})/2$. Табела 4.3 садржи неке оцене грешака и стварне грешке у случају тежинске функције ω_3 , док се табела 4.4 односи на тежинску функцију ω_2 .

Пример 3. Нека је $f_3(z) = \frac{\cos(z)}{z^2 + w^2}$, $w > 0$. За функцију $f_3(z)$ важи

$$(4.27) \quad \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f_3(z)| = \frac{\cos(b_1)}{-b_1^2 + w^2},$$

где је $b_1 = (\rho - \rho^{-1})/2$, и где је инфимум рачунат на интервалу $\rho \in (\rho_n, \rho_{\max})$, при чему је $\rho_{\max} = w + \sqrt{1 + w^2}$ (видети [86], [116]). Одговарајуће оцене грешака и стварне грешке у случају тежинске функције ω_3 су приказане у табели 4.5, док се табеле 4.6 и 4.7 односе на тежинску функцију ω_2 . У табели 4.7 су приказане вредности $R_{n+1}(f_3, \omega_2)$ и $\rho_{opt} \in (\rho^*, \rho_{\max})$ за неке вредности из табеле 4.6. На пример, за $w = 2$, добијамо да је $\rho_{\max} = 4.2360$, док је за $w = 5$, $\rho_{\max} = 10.0989$ и слично за $w = 20$, $\rho_{\max} = 40.0249$.

Стварне грешке ("*Error*") су добијене модификацијом *Gautschi*-евог MATLAB кода `gradau.m` (видети [36], [34]).

Табела 4.3: Оцена грешке $R_{n+1}(f_2, \omega_3)$ и стварне грешке

n	$w = 1$	$Error$	$w = 0.2$	$Error$	$w = 0.02$	$Error$
1	6.930(+1)	4.017(+0)	1.149(-1)	2.155(-2)	1.113(-5)	2.293(-6)
2	5.843(+0)	5.426(-1)	7.932(-4)	1.234(-4)	8.083(-10)	1.315(-10)
3	9.309(-1)	6.968(-2)	5.812(-6)	7.391(-7)	5.819(-14)	4.828(-15)
4	1.368(-1)	8.698(-3)	3.974(-8)	4.342(-9)	3.955(-18)	4.687(-19)
5	1.880(-2)	1.051(-3)	2.547(-10)	2.464(-11)	2.534(-22)	2.679(-23)
7	3.031(-4)	1.390(-5)	8.888(-15)	7.117(-16)	8.887(-31)	7.845(-32)
9	4.135(-6)	1.635(-7)	2.598(-19)	1.801(-20)	2.622(-39)	2.0112(-40)
12	5.196(-9)	1.738(-10)	3.185(-26)	1.866(-27)	3.266(-52)	2.124(-53)
15	5.248(-12)	1.544(-13)	3.084(-33)	1.585(-34)	3.217(-65)	1.836(-66)
20	3.714(-17)	9.271(-19)	4.257(-45)	1.843(-46)	4.567(-87)	2.197(-88)
30	7.200(-28)	1.429(-29)	2.904(-69)	9.863(-71)	3.290(-131)	1.240(-132)

Табела 4.4: Оцена грешке $R_{n+1}(f_2, \omega_2)$ и стварне грешке.

n	$w = 1$	$Error$	$w = 0.1$	$Error$	$w = 0.01$	$Error$
1	4.412(+1)	4.017(+0)	3.101(-3)	1.411(-3)	1.212(-5)	1.434(-7)
2	4.395(+0)	5.425(-1)	5.982(-6)	2.023(-6)	3.671(-9)	2.057(-12)
3	5.140(-1)	6.971(-2)	1.097(-8)	3.043(-9)	1.061(-16)	1.892(-15)
4	6.280(-2)	8.698(-2)	1.877(-11)	4.490(-12)	1.838(-21)	4.580(-22)
5	7.701(-3)	1.050(-3)	3.012(-14)	9.457(-15)	2.977(-26)	6.546(-27)
6	9.212(-4)	1.227(-4)	4.569(-17)	8.812(-18)	4.548(-31)	9.015(-32)
9	1.365(-6)	1.635(-7)	1.213(-25)	1.867(-26)	1.224(-45)	1.920(-46)
12	1.613(-9)	1.738(-10)	2.350(-34)	3.067(-35)	2.394(-60)	3.168(-61)

Табела 4.5: Оцена грешке $R_{n+1}(f_3, \omega_3)$ и стварне грешке

n	$w = 2$	$Error$	$w = 5$	$Error$	$w = 50$	$Error$
1	1.892(-1)	2.545(-2)	5.601(-3)	1.549(-3)	3.071(-5)	1.080(-5)
2	9.201(-3)	1.051(-3)	7.839(-5)	1.671(-5)	2.048(-7)	6.366(-8)
3	6.221(-4)	4.858(-5)	1.088(-6)	1.572(-7)	8.917(-10)	2.374(-10)
4	4.090(-5)	2.395(-6)	1.371(-8)	1.416(-9)	2.495(-12)	5.933(-13)
5	2.627(-6)	1.225(-7)	1.635(-10)	1.285(-11)	4.846(-15)	1.053(-15)
8	6.354(-10)	1.821(-11)	2.339(-16)	1.045(-17)	6.449(-24)	1.150(-24)
13	5.035(-16)	8.720(-18)	3.205(-26)	8.481(-28)	1.841(-40)	2.624(-41)
20	1.219(-24)	1.354(-26)	4.286(-40)	6.899(-42)	5.521(-66)	5.967(-67)

Табела 4.6: Оцена грешке $R_{n+1}(f_3, \omega_2)$ и стварне грешке

n	$w = 2$	$Error$	$w = 5$	$Error$	$w = 20$	$Error$
1	1.082(-1)	2.544(-2)	2.800(-3)	1.549(-3)	8.426(-5)	6.903 (-5)
2	5.601(-3)	1.051 (-3)	4.087(-5)	1.671 (-5)	6.819(-7)	4.226 (-7)
3	3.224(-4)	4.858 (-5)	5.367(-7)	1.572 (-7)	3.089(-9)	1.665 (-9)
4	1.909(-5)	2.395 (-6)	6.547(-9)	1.417 (-9)	9.374(-12)	4.491 (-12)
5	1.142(-6)	1.225 (-7)	7.637(-11)	1.285 (-11)	2.045(-14)	8.808 (-15)
10	8.600(-13)	5.335 (-14)	1.215(-20)	9.504 (-22)	4.433(-29)	1.046 (-29)
13	1.761(-16)	2.714(-17)	1.432(-26)	8.481 (-28)	2.155(-38)	3.104 (-39)

Табела 4.7: Оцена грешке $R_{n+1}(f_3, \omega_2)$ и вредности ρ_{opt}

n	$w = 2$	ρ_{opt}	$w = 5$	ρ_{opt}	$w = 20$	ρ_{opt}
1	1.082(-1)	3.3511	2.800(-3)	6.2311	8.426(-5)	8.2831
2	5.601(-3)	3.5666	4.087(-5)	7.4816	6.819(-7)	11.8126
3	3.224(-4)	3.7104	5.367(-7)	8.2394	3.089(-9)	15.4024
4	1.909(-5)	3.8087	6.547(-9)	8.6927	9.374(-12)	18.9057
5	1.142(-6)	3.8765	7.637(-11)	8.9795	2.045(-14)	22.2445
10	8.600(-13)	4.0397	1.215(-20)	9.5587	4.433(-29)	33.8827
13	1.761(-16)	4.0814	1.432(-26)	9.6884	2.155(-38)	36.4644

Додаци 1-11

1. Функција `vrati_abcd(n,ro,t)`

```
function [a,b,c,d]=vrati_abcd(n,ro,t)
alfa=(2*n+1)/(n+2);
beta=alfa*((n+1)/(2*n+5));
ce=cos(t);
cc=cos(2*t);
c1=cos((2*n+1)*t);
c2=cos((2*n+2)*t);
c3=cos((2*n+3)*t);
c4=cos((2*n+4)*t);
c5=cos((2*n+5)*t);
r3=ro^(2*n+3);
r4=ro^(2*n+4);
r5=ro^(2*n+5);
r6=ro^(2*n+6);
r7=ro^(2*n+7);
rr6=ro^(4*n+6);
rr7=ro^(4*n+7);
rr8=ro^(4*n+8);
rr9=ro^(4*n+9);
rr10=ro^(4*n+10);
a=ro^2+2*ro*ce+1;
b=ro^2-2*ro*ce+1;
c=ro^4+2*alfa*ce*ro^3+(alfa^2+2*beta*cc)*ro^2+2*alfa*beta*ce*ro+beta^2;
d=(beta^2)*rr10+(2*alfa*beta*ce)*rr9+(alfa^2+2*beta*cc)*rr8...
+(2*alfa*ce)*rr7+rr6+(2*beta*c3)*r7+(2*alfa*c2+2*alfa*beta*c4)*r6...
+(2*c1+2*beta^2*c5+2*alfa^2*c3)*r5...
+(2*alfa*c2+2*alfa*beta*c4)*r4+(2*beta*c3)*r3...
+ro^4+(2*alfa*ce)*(ro^3)+(alfa^2+2*beta*cc)*(ro^2)...
```

```
+(2*alfa*beta*ce)*ro+(beta^2);
end
```

2. Функција izracunaj_I(n,t)

```
function I=izracunaj_I(n,t)
[A,B,C,D]=ABCD_0(n);
[a,b,c,d]=abcd(n,t);
X=conv(a,c);
X=conv(X,B);
X=conv(X,D);
Y=conv(A,C);
Y=conv(Y,b);
Y=conv(Y,d);
I=X-Y;
end
```

3. Функција abcd(n,t)

```
function [a,b,c,d]=abcd(n,t)
alfa=(2*n+1)/(n+2);
beta=alfa*((n+1)/(2*n+5));
ce=cos(t);
cc=cos(2*t);
c1=cos((2*n+1)*t);
c2=cos((2*n+2)*t);
c3=cos((2*n+3)*t);
c4=cos((2*n+4)*t);
c5=cos((2*n+5)*t);
a=[1 2*ce 1];
b=[1 -2*ce 1];
c=[1 2*alfa*ce (alfa^2+2*beta*cc) 2*alfa*beta*ce beta^2];
d=[beta^2 2*alfa*beta*ce (alfa^2+2*beta*cc) 2*alfa*ce 1];
```

```

for i=1:(2*n-2)
d=[d 0];
end
d=[d 2*beta*c3 (2*alfa*c2+2*alfa*beta*c4)];
d=[d (2*c1+2*beta^2*c5+2*alfa^2*c3)]
d=[d (2*alfa*c2+2*alfa*beta*c4) 2*beta*c3];
for i=1:(2*n-2)
d=[d 0];
end
d=[d 1 2*alfa*ce (alfa^2+2*beta*cc) 2*alfa*beta*ce beta^2];
end

```

4. Функција ABCD_0(n)

```

function [A,B,C,D]=ABCD_0(n)
alfa=(2*n+1)/(n+2);
beta=alfa*((n+1)/(2*n+5));
A=[1 2 1];
B=[1 -2 1];
C=[1 2*alfa (alfa^2+2*beta) 2*alfa*beta beta^2];
D=[beta^2 2*alfa*beta (alfa^2+2*beta) 2*alfa 1];
for i=1:(2*n-2)
D=[D 0];
end
D=[D 2*beta (2*alfa+2*alfa*beta)];
D=[D (2+2*beta^2+2*alfa^2) (2*alfa+2*alfa*beta) 2*beta];
for i=1:(2*n-2)
D=[D 0];
end
D=[D 1 2*alfa (alfa^2+2*beta) 2*alfa*beta beta^2];
end

```

5. Функција `stvarna_greska(n)`

```
function error=stvarna_greska(n)
dig=200;
digits(dig)
endl=-1;
r=2;
a=-vpa(1.408333333333333);
b=-vpa(1.892857142857143);
c=-vpa(2.408695652173913);
ab=r_jacobi(154,-0.5,0.5);
ab=vpa(ab);
ab(1,2)=vpa(pi);
xw=sgradau(dig,n,ab,r,endl);
int1=vpa(0.);
for i=3:n+r
    int1=int1+xw(i,2).*exp(exp(xw(i,1)))./(a+xw(i,1))./...
        (b+xw(i,1)).^5./(c+xw(i,1)).^10;
end
int1=int1+xw(1,2).*exp(exp(xw(1,1)))./(a+xw(1,1))./...
    (b+xw(1,1)).^5./(c+xw(1,1)).^10;
int1=int1+xw(2,2).*exp(exp(xw(2,1))).*(exp(xw(2,1)).*(a+xw(2,1)).*...
    (b+xw(2,1)).^5.*(c+xw(2,1)).^10-...
    (b+xw(2,1)).^5.*(c+xw(2,1)).^10-...
    (a+xw(2,1)).*5.*(b+xw(2,1)).^4.*(c+xw(2,1)).^10-...
    (a+xw(2,1)).*(b+xw(2,1)).^5.*10.*(c+xw(2,1)).^9)./...
    ((a+xw(2,1)).*(b+xw(2,1)).^5.*(c+xw(2,1)).^10).^2;
n=120;
xw=sgradau(dig,n,ab,r,endl);
int2=vpa(0.);
for i=3:n+r
    int2=int2+xw(i,2).*exp(exp(xw(i,1)))./(a+xw(i,1))./...
        (b+xw(i,1)).^5./(c+xw(i,1)).^10;
end
int2=int2+xw(1,2).*exp(exp(xw(1,1)))./(a+xw(1,1))./...
```

```

        (b+xw(1,1)).^5./(c+xw(1,1)).^10;
int2=int2+xw(2,2).*exp(exp(xw(2,1))).*(exp(xw(2,1)).*(a+xw(2,1))).*...
    (b+xw(2,1)).^5.*(c+xw(2,1)).^10-...
    (b+xw(2,1)).^5.*(c+xw(2,1)).^10-...
    (a+xw(2,1)).*5.*(b+xw(2,1)).^4.*(c+xw(2,1)).^10-...
    (a+xw(2,1)).*(b+xw(2,1)).^5.*10.*(c+xw(2,1)).^9)./...
    ((a+xw(2,1)).*(b+xw(2,1)).^5.*(c+xw(2,1)).^10).^2;
error=double(abs(int1-int2));
end

```

6. Функција r_jacobi(N,a,b)

```

function ab=r_jacobi(N,a,b)
if nargin<2, a=0; end; if nargin<3, b=a; end
if((N<=0)|(a<=-1)|(b<=-1)) error('parameter(s) out of range'), end
nu=(b-a)/(a+b+2);
mu=2^(a+b+1)*gamma(a+1)*gamma(b+1)/gamma(a+b+2);
if N==1, ab=[nu mu]; return, end
N=N-1;
n=1:N;
nab=2*n+a+b;
A=[nu (b^2-a^2)*ones(1,N)./(nab.*(nab+2))];
n=2:N;
nab=nab(n);
B1=4*(a+1)*(b+1)/((a+b+2)^2*(a+b+3));
B=4*(n+a).*(n+b).*n.*(n+a+b)./((nab.^2).*(nab+1).*(nab-1));
ab=[A' [mu; B1; B']];
end

```

7. Функција `sgradau(dig,n,ab,r,endl)`

```
function xw=sgradau(dig,N,ab,r,endl)
digits(dig)
ab1=ab;
for s=r:-1:1
    ab0=ab1;
    ab1=schri1(dig,N+s-1,ab0,endl);
end
xw0=sgauss(dig,N,ab1(1:N,:));
xw(r+1:N+r,:)=xw0;
xw(r+1:N+r,2)=xw(r+1:N+r,2)./((xw(r+1:N+r,1)-endl).^r);
xw(1:r,1)=endl*vpa(ones(r,1));
rs=vpa(zeros(r-1,1));
A=vpa(zeros(r)); b=vpa(zeros(r,1)); x=vpa(zeros(r,1));
for rho=1:r-1
    rs(rho)=sum((xw0(:,1)-endl).^(-rho));
end
for i=r:-1:1
    A(i,i)=factorial(i-1)*prod((endl-xw0(:,1)).^2);
    if i<r
        for j=i+1:r
            A(i,j)=-2*sum(A(i+1:j,j).*rs(1:j-i))/(j-i);
        end
    end
end
ng=N+floor((r+1)/2);
xwg=sgauss(dig,ng,ab(1:ng,:));
for i=1:r
    s=0;
    for ig=1:ng
        t=xwg(ig,1); w=xwg(ig,2);
        s=s+w*((t-endl)^(i-1)*prod((t-xw0(:,1)).^2));
    end
    b(i)=s;
end
```



```
end
x(r)=b(r)/A(r,r);
for i=r-1:-1:1
    x(i)=(b(i)-sum(A(i,i+1:r).*(x(i+1:r))'))/A(i,i);
end
xw(1:r,2)=x;
end
```

8. Функција sgauss(dig,N,ab)

```
function xw=sgauss(dig,N,ab)
NO=size(ab,1); if NO<N, error('input array ab too short'), end
sab=vpa(ab,dig);
if N==1
    xw=[sab(1,1) sab(1,2)];
    return
elseif N==2
    J=[sab(1,1) sqrt(sab(2,2)); sqrt(sab(2,2)) sab(2,1)];
else
    J=diag(sqrt(sab(2:end,2)),1);
    J=diag(sab(:,1))+J+J';
end
[V,D]=eig(J);
D=diag(D);
[v,I]=sort(double(D));
D=D(I);
V=V(:,I);
xw=[D vpa(sab(1,2))*V(1,:)'.^2];
end
```

9. Помоћни изрази у случају Gauss-Radau квадратурних формула у односу на трећу Chebyshev–љеву тежинску функцију

$$\begin{aligned}
a &= |u + 1|^2 = \rho^2 + 2\rho \cos \theta + 1, \\
b &= |u - 1|^2 = \rho^2 - 2\rho \cos \theta + 1, \\
c &= |u^2 + \alpha u + \beta|^2 \\
&= \rho^4 + 2\alpha \cos \theta \rho^3 + (\alpha^2 + 2\beta \cos 2\theta)\rho^2 + 2\alpha\beta \cos \theta \rho + \beta^2, \\
d &= \delta \cdot \rho^{2n+4} = |\beta[u^{n+3} + u^{-(n+2)}] \\
&+ \alpha[u^{n+2} + u^{-(n+1)}] + [u^{n+1} + u^{-n}]|^2 \cdot \rho^{2n+4} \\
&= \beta^2 \cdot \rho^{4n+10} + 2\alpha\beta \cos \theta \cdot \rho^{4n+9} + (\alpha^2 + 2\beta \cos 2\theta) \cdot \rho^{4n+8} \\
&+ 2\alpha \cos \theta \cdot \rho^{4n+7} + \rho^{4n+6} + 2\beta \cos(2n + 3)\theta \cdot \rho^{2n+7} \\
&+ (2\alpha \cos(2n + 2)\theta + 2\alpha\beta \cos(2n + 4)\theta) \cdot \rho^{2n+6} \\
&+ (2 \cos(2n + 1)\theta + 2\beta^2 \cos(2n + 5)\theta + 2\alpha^2 \cos(2n + 3)\theta) \cdot \rho^{2n+5} \\
&+ (2\alpha\beta \cos(2n + 4)\theta + 2\alpha \cos(2n + 2)\theta) \cdot \rho^{2n+4} \\
&+ 2\beta \cos(2n + 3)\theta \cdot \rho^{2n+3} + \rho^4 + 2\alpha \cos \theta \cdot \rho^3 + (\alpha^2 + 2\beta \cos 2\theta) \cdot \rho^2 \\
&+ 2\alpha\beta \cos \theta \cdot \rho + \beta^2, \\
A_0 &= \rho^2 + 2\rho + 1, \\
B_0 &= \rho^2 - 2\rho + 1, \\
C_0 &= \rho^4 + 2\alpha \cdot \rho^3 + (\alpha^2 + 2\beta) \cdot \rho^2 + 2\alpha\beta \cdot \rho + \beta^2, \\
D_0 &= \beta^2 \cdot \rho^{4n+10} + 2\alpha\beta \cdot \rho^{4n+9} + (\alpha^2 + 2\beta) \cdot \rho^{4n+8} + 2\alpha \cdot \rho^{4n+7} \\
&+ \rho^{4n+6} + 2\beta \cdot \rho^{2n+7} + (2\alpha + 2\alpha\beta) \cdot \rho^{2n+6} \\
&+ (2\beta^2 + 2\alpha^2 + 2) \cdot \rho^{2n+5} + (2\alpha\beta + 2\alpha) \cdot \rho^{2n+4} + 2\beta \cdot \rho^{2n+3} + \rho^4 \\
&+ 2\alpha \cdot \rho^3 + (\alpha^2 + 2\beta) \cdot \rho^2 + 2\alpha\beta \cdot \rho + \beta^2, \\
A_\pi &= \rho^2 - 2\rho + 1, \\
B_\pi &= \rho^2 + 2\rho + 1, \\
C_\pi &= \rho^4 - 2\alpha \cdot \rho^3 + (\alpha^2 + 2\beta) \cdot \rho^2 - 2\alpha\beta \cdot \rho + \beta^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_\pi = & \beta^2 \cdot \rho^{4n+10} - 2\alpha\beta \cdot \rho^{4n+9} + (\alpha^2 + 2\beta) \cdot \rho^{4n+8} - 2\alpha \cdot \rho^{4n+7} \\
 & + \rho^{4n+6} - 2\beta \cdot \rho^{2n+7} + (2\alpha + 2\alpha\beta) \cdot \rho^{2n+6} - (2\beta^2 + 2\alpha^2 + 2) \\
 & \cdot \rho^{2n+5} + (2\alpha\beta + 2\alpha) \cdot \rho^{2n+4} - 2\beta \cdot \rho^{2n+3} + \rho^4 \\
 & - 2\alpha \cdot \rho^3 + (\alpha^2 + 2\beta) \cdot \rho^2 - 2\alpha\beta \cdot \rho^2 + \beta^2.
 \end{aligned}$$

10. Помоћни изрази у случају Gauss-Radau квадратурних формула у односу на другу Chebyshev–љеву тежинску функцију

$$\begin{aligned}
 a &= |u^2 - 1|^2 = \rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\theta + 1, \\
 c &= |u^2 + \alpha u + \beta|^2 \\
 &= \rho^4 + 2\alpha \cos \theta \rho^3 + (\alpha^2 + 2\beta \cos 2\theta)\rho^2 + 2\alpha\beta \cos \theta \rho + \beta^2, \\
 \delta &= \left| \beta[u^{n+3} - u^{-(n+3)}] + \alpha[u^{n+2} - u^{-(n+2)}] + [u^{n+1} - u^{-(n+1)}] \right|^2, \\
 d &= \delta \cdot \rho^{2n+6} = \left| \beta[u^{n+3} - u^{-(n+3)}] \right. \\
 &+ \left. \alpha[u^{n+2} - u^{-(n+2)}] + [u^{n+1} - u^{-(n+1)}] \right|^2 \cdot \rho^{2n+6} \\
 &= \beta^2 \cdot \rho^{4n+12} + 2\alpha\beta \cos \theta \cdot \rho^{4n+11} + (\alpha^2 + 2\beta \cos 2\theta) \cdot \rho^{4n+10} \\
 &+ 2\alpha \cos \theta \cdot \rho^{4n+9} + \rho^{4n+8} - 2\beta \cos(2n+4)\theta \cdot \rho^{2n+8} \\
 &- (2\alpha \cos(2n+3)\theta + 2\alpha\beta \cos(2n+5)\theta) \cdot \rho^{2n+7} \\
 &- (2 \cos(2n+2)\theta + 2\beta^2 \cos(2n+6)\theta + 2\alpha^2 \cos(2n+4)\theta) \cdot \rho^{2n+6} \\
 &- (2\alpha\beta \cos(2n+5)\theta + 2\alpha \cos(2n+3)\theta) \cdot \rho^{2n+5} - 2\beta \cos(2n+4)\theta \\
 &\cdot \rho^{2n+4} + \rho^4 + 2\alpha \cos \theta \cdot \rho^3 + (\alpha^2 + 2\beta \cos 2\theta) \cdot \rho^2 + 2\alpha\beta \cos \theta \cdot \rho + \beta^2. \\
 A &= \rho^4 - 2\rho^2 + 1, \\
 C &= \rho^4 - 2\alpha \cdot \rho^3 + (\alpha^2 + 2\beta) \cdot \rho^2 - 2\alpha\beta \cdot \rho + \beta^2, \\
 D &= \beta^2 \cdot \rho^{4n+12} - 2\alpha\beta \cdot \rho^{4n+11} + (\alpha^2 + 2\beta) \cdot \rho^{4n+10} \\
 &- 2\alpha \cdot \rho^{4n+9} + \rho^{4n+8} - 2\beta \cdot \rho^{2n+8} + (2\alpha + 2\alpha\beta) \cdot \rho^{2n+7} \\
 &- (2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2) \cdot \rho^{2n+6} + (2\alpha\beta + 2\alpha) \cdot \rho^{2n+5} - 2\beta \cdot \rho^{2n+4} \\
 &+ \rho^4 - 2\alpha \cdot \rho^3 + (\alpha^2 + 2\beta) \cdot \rho^2 - 2\alpha\beta \cdot \rho + \beta^2.
 \end{aligned}$$

11. Полином $I_0(\rho)$ из потпоглавља 2.2.3.

$$\begin{aligned}
 I_0(\rho) = & \rho^{4n+30} \cdot [2\beta(\alpha - \beta - \alpha\beta)(\cos 2\theta - 1)] \\
 & + \rho^{4n+28} \cdot [4\beta \sin^2 2\theta(1 - \alpha\beta - \beta^2)] \\
 & + \rho^{4n+26} \cdot [2\beta^3 \cos 4\theta \sin^2 \theta + 4(\alpha^2 + \alpha^3 - \alpha) - 2\beta - 3\alpha\beta - \alpha^3\beta \\
 & + 3\alpha\beta^2 + \alpha\beta^3 + \alpha^2\beta^2 + 4\beta^3 + 4\beta \cos 2\theta(\alpha^2 + \alpha\beta - \alpha + \beta^2 - 1)] \\
 & + \rho^{4n+24} \cdot 4 \sin^2 2\theta[2\alpha\beta - \alpha\beta^3 + \beta - \beta^3 - 4\alpha\beta^2 \cos 2\theta - \alpha^3] \\
 & + \rho^{4n+22} \cdot 4 \sin^2 \theta[1 + \alpha^4 + 2\alpha^2\beta + \beta^4 + 4\alpha^2 + 4\alpha^2\beta^2 \cos 2\theta \\
 & + 2\beta\alpha^2 + 4\beta^2 \cos 4\theta] \\
 & + \rho^{4n+20} \cdot 4 \sin^2 2\theta[-\alpha - \beta - \alpha^3\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 - 4\alpha\beta \cos 2\theta] \\
 & + \rho^{4n+18} \cdot 4 \sin^2 \theta[\alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + 4\beta + 3\alpha\beta + \alpha^3\beta - 3\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 \\
 & - 2\beta^3 - \alpha\beta^3 - 4\beta \cos 2\theta(\beta^2 - \alpha + \alpha\beta - 1 - \alpha^2) + 2\beta \cos 4\theta] \\
 & + \rho^{4n+16} \cdot 4\beta \sin^2 2\theta[\beta^2 - 1 - \alpha] + \rho^{4n+14} \cdot 4\beta \sin^2 \theta[\beta + \alpha - \alpha\beta] \\
 & + \rho^{2n+26} \cdot [-4\beta \sin^2(3+n)\theta] \\
 & + \rho^{2n+24} \cdot [2\alpha + \alpha\beta + 2\alpha\beta \cos 2\theta + 2\beta \cos 2\theta - \alpha \cos 2(2+n)\theta \\
 & - 2\beta \cos 2(3+n)\theta - 2\alpha\beta \cos 2(3+n)\theta - \alpha\beta \cos 2(4+n)\theta] \\
 & + \rho^{2n+22} \cdot [-2(1 + \alpha^2 + \beta + \alpha^2\beta + \beta^2) + 2\alpha(1 + \alpha)(1 + \beta) \cos 2\theta \\
 & + 4\alpha\beta \cos^2 2\theta + 2\beta^2 \cos 4\theta - \cos 2(1+n)\theta - 2\alpha \cos 2(2+n)\theta \\
 & - 2\alpha^2 \cos 2(2+n)\theta - \alpha^2 \cos 2(3+n)\theta \\
 & - \beta \cos 2(3+n)\theta - 4\alpha\beta \cos 2(3+n)\theta - \alpha^2\beta \cos 2(3+n)\theta \\
 & - 2\beta^2 \cos 2(3+n)\theta - 2\alpha\beta \cos 2(4+n)\theta - 2\alpha^2\beta \cos 2(4+n)\theta \\
 & - \beta^2 \cos 2(5+n)\theta] \\
 & + \rho^{2n+20} \cdot [2(2\alpha + \alpha^3 + 2\alpha\beta + \alpha^3\beta) + 2 \cos 2\theta(1 + \alpha^3 + \beta^2 + \alpha^2 + \alpha^2\beta \\
 & + \alpha + \alpha\beta + 2\alpha\beta^2) + 4\alpha^2 + 4\alpha^2\beta \cos^2 2\theta + (2\alpha\beta + 2\alpha\beta^2) \cos 4\theta \\
 & - 2 \cos 2(1+n)\theta - 2\alpha \cos 2(1+n)\theta - 2\alpha \cos 2(2+n)\theta]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 4\alpha^2 \cos 2(2+n)\theta - \alpha^3 \cos 2(2+n)\theta - 2\alpha\beta \cos 2(2+n)\theta \\
& - 2\alpha^2 \cos 2(3+n)\theta - 2\alpha^3 \cos 2(3+n)\theta - 2\alpha\beta \cos 2(3+n)\theta \\
& - 2\alpha^2\beta \cos 2(3+n)\theta - 4\beta^2 \cos 2(3+n)\theta \\
& - 2\alpha\beta^2 \cos 2(3+n)\theta - 2\alpha\beta \cos 2(4+n)\theta - 4\alpha^2\beta \cos 2(4+n)\theta \\
& - \alpha^3\beta \cos 2(4+n)\theta - 2\alpha\beta^2 \cos 2(4+n)\theta - 2\beta^2 \cos 2(5+n)\theta \\
& - 2\alpha\beta^2 \cos 2(5+n)\theta + \beta^2 \cos 2\theta \sin 8\theta] \\
& + \rho^{2n+18} \cdot 2[-1 - 2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta - \alpha^2\beta - \beta^2 - \alpha^2\beta^2 - \beta^3 \\
& - 4\alpha \cos^2 2\theta(1 + \alpha^2 + 2\beta^2) - 2\beta \cos 4\theta(1 + \alpha^2 + \beta + \beta^2) \\
& - 2\alpha(1 + \beta) \cos 2\theta(1 + \alpha^2 + 2\alpha + \alpha\beta + 2\beta \cos 4\theta) + \cos 2(1+n)\theta \\
& + 4\alpha \cos 2(1+n)\theta + \alpha^2 \cos 2(1+n)\theta + 2\beta \cos 2(1+n)\theta \\
& + 2\alpha \cos 2(2+n)\theta + 4\alpha^2 \cos 2(2+n)\theta + 2\alpha^3 \cos 2(2+n)\theta \\
& + 4\alpha\beta \cos 2(2+n)\theta + 2\alpha^2\beta \cos 2(2+n)\theta + \alpha^2 \cos 2(3+n)\theta \\
& + 4\alpha^3 \cos 2(3+n)\theta + \alpha^4 \cos 2(3+n)\theta \\
& + \beta \cos 2(3+n)\theta + 3\alpha^2\beta \cos 2(3+n)\theta + 2\beta^2 \cos 2(3+n)\theta \\
& + 4\alpha\beta^2 \cos 2(3+n)\theta + \beta^3 \cos 2(3+n)\theta + 2\alpha\beta \cos 2(4+n)\theta \\
& + 4\alpha^2\beta \cos 2(4+n)\theta + 2\alpha^3\beta \cos 2(4+n)\theta \\
& + 4\alpha\beta^2 \cos 2(4+n)\theta + 2\alpha^2\beta^2 \cos 2(4+n)\theta + \beta^2 \cos 2(5+n)\theta \\
& + 4\alpha\beta^2 \cos 2(5+n)\theta + \alpha^2\beta^2 \cos 2(5+n)\theta + 2\beta^3 \cos 2(5+n)\theta] \\
& + \rho^{2n+16} \cdot 2[\alpha + 2\alpha^3 + \alpha\beta + 2\alpha^3\beta + \alpha\beta^2 + \alpha\beta^3 + 2 \cos 2\theta(\alpha^3 \\
& + \alpha^3\beta + \alpha^2 + \alpha^2\beta^2 + \alpha + 2\alpha\beta + 2\alpha\beta^2 + \alpha\beta^3 + \alpha^4 + \beta + \beta^3) \\
& + 4\alpha^2(1 + \beta)^2 \cos^2 2\theta + 4\alpha\beta(1 + \beta) \cos 4\theta - 2\alpha \cos 2(1+n)\theta \\
& - 2\alpha^2 \cos 2(1+n)\theta - 4\beta \cos 2(1+n)\theta - 2\alpha\beta \cos 2(1+n)\theta \\
& - \alpha \cos 2(2+n)\theta - 4\alpha^2 \cos 2(2+n)\theta - 2\alpha^3 \cos 2(2+n)\theta \\
& - 4\alpha\beta \cos 2(2+n)\theta - 4\alpha^2\beta \cos 2(2+n)\theta - \alpha\beta^2 \cos 2(2+n)\theta \\
& - 2\alpha^3 \cos 2(3+n)\theta - 2\alpha^4 \cos 2(3+n)\theta - 2\beta \cos 2(3+n)\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2\alpha\beta \cos 2(3+n)\theta - 4\alpha^2\beta \cos 2(3+n)\theta - 2\alpha^3\beta \cos 2(3+n)\theta \\
 & - 2\alpha\beta^2 \cos 2(3+n)\theta - 2\beta^3 \cos 2(3+n)\theta - \alpha\beta \cos 2(4+n)\theta \\
 & - 4\alpha^2\beta \cos 2(4+n)\theta - 2\alpha^3\beta \cos 2(4+n)\theta - 4\alpha\beta^2 \cos 2(4+n)\theta \\
 & - 4\alpha^2\beta^2 \cos 2(4+n)\theta - \alpha\beta^3 \cos 2(4+n)\theta - 2\alpha\beta^2 \cos 2(5+n)\theta \\
 & - 2\alpha^2\beta^2 \cos 2(5+n)\theta - 4\beta^3 \cos 2(5+n)\theta - 2\alpha\beta^3 \cos 2(5+n)\theta \\
 & + \beta \cos 2\theta \sin 8\theta + \alpha^2\beta \cos 2\theta \sin 8\theta + \beta^3 \cos 2\theta \sin 8\theta] \\
 & + \rho^{2n+14} \cdot 2[-\alpha^2 - \alpha^4 - \beta - \alpha^2\beta - \beta^2 - 2\alpha^2\beta^2 - \beta^3 - \beta^4 \\
 & - 4\alpha\beta \cos^2 2\theta(2 + \alpha^2 + \beta^2) - 2\beta \cos 4\theta(1 + \alpha^2 + \beta + \beta^2) \\
 & - 2\alpha(1 + \beta) \cos 2\theta(\alpha + \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + 2\beta \cos 4\theta + \alpha^2 \cos 2(1+n)\theta \\
 & + 2\beta \cos 2(1+n)\theta + 4\alpha\beta \cos 2(1+n)\theta + \beta^2 \cos 2(1+n)\theta \\
 & + 2\alpha^2 \cos 2(2+n)\theta + 2\alpha^3 \cos 2(2+n)\theta + 4\alpha\beta \cos 2(2+n)\theta \\
 & + 4\alpha^2\beta \cos 2(2+n)\theta + 2\alpha\beta^2 \cos 2(2+n)\theta + \alpha^4 \cos 2(3+n)\theta \\
 & + \beta \cos 2(3+n)\theta + 4\alpha\beta \cos 2(3+n)\theta + 3\alpha^2\beta \cos 2(3+n)\theta \\
 & + 4\alpha^3\beta \cos 2(3+n)\theta + 2\beta^2 \cos 2(3+n)\theta + \alpha^2\beta^2 \cos 2(3+n)\theta \\
 & + \beta^3 \cos 2(3+n)\theta + 2\alpha^2\beta \cos 2(4+n)\theta + 2\alpha^3\beta \cos 2(4+n)\theta \\
 & + 4\alpha\beta^2 \cos 2(4+n)\theta + 4\alpha^2\beta^2 \cos 2(4+n)\theta + 2\alpha\beta^3 \cos 2(4+n)\theta \\
 & + \alpha^2\beta^2 \cos 2(5+n)\theta + 2\beta^3 \cos 2(5+n)\theta + 4\alpha\beta^3 \cos 2(5+n)\theta \\
 & + \beta^4 \cos 2(5+n)\theta] + \rho^{2n+12} \cdot 2[\alpha^3 + \alpha^3\beta + 2\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta^3 \\
 & + 2\beta \cos 2\theta(\alpha^3 + \beta + \beta^3 + \alpha^2(1 + \beta) \\
 & + \alpha(2 + \beta + \beta^2)) + 4\alpha^2\beta(1 + \beta) \cos^2 2\theta + 2\alpha\beta(1 + \beta) \cos 4\theta \\
 & - 2\alpha\beta \cos 2(1+n)\theta - 2\beta^2 \cos 2(1+n)\theta - \alpha^3 \cos 2(2+n)\theta \\
 & - 2\alpha\beta \cos 2(2+n)\theta - 4\alpha^2\beta \cos 2(2+n)\theta - 2\alpha\beta^2 \cos 2(2+n)\theta \\
 & - 2\alpha\beta \cos 2(3+n)\theta - 2\alpha^2\beta \cos 2(3+n)\theta - 2\alpha^3\beta \cos 2(3+n)\theta \\
 & - 4\beta^2 \cos 2(3+n)\theta - 2\alpha\beta^2 \cos 2(3+n)\theta - 2\alpha^2\beta^2 \cos 2(3+n)\theta \\
 & - \alpha^3\beta \cos 2(4+n)\theta - 2\alpha\beta^2 \cos 2(4+n)\theta - 4\alpha^2\beta^2 \cos 2(4+n)\theta \\
 & - 2\alpha\beta^3 \cos 2(4+n)\theta - 2\alpha\beta^3 \cos 2(5+n)\theta - 2\beta^4 \cos 2(5+n)\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \beta^2 \cos 2\theta \sin 8\theta] + \rho^{2n+10} \cdot (-2\beta)[\alpha^2 + \beta + 2\alpha\beta + \alpha^2\beta + \beta^2 + \beta^3 \\
 &+ 2\alpha(1 + \beta)(\alpha + \beta) \cos 2\theta \\
 &+ 2(1 + \alpha)\beta \cos 4\theta - \beta \cos 2(1 + n)\theta - 2\alpha^2 \cos 2(2 + n)\theta \\
 &- 2\alpha\beta \cos 2(2 + n)\theta - \alpha^2 \cos 2(3 + n)\theta - 2\beta \cos 2(3 + n)\theta \\
 &- 4\alpha\beta \cos 2(3 + n)\theta - \alpha^2\beta \cos 2(3 + n)\theta - \beta^2 \cos 2(3 + n)\theta \\
 &- 2\alpha^2\beta \cos 2(4 + n)\theta - 2\alpha\beta^2 \cos 2(4 + n)\theta - \beta^3 \cos 2(5 + n)\theta] \\
 &+ \rho^{2n+8} \cdot 2\beta^2[\alpha + \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) \cos 2\theta \\
 &- \alpha \cos 2(2 + n)\theta - 2\alpha \cos 2(3 + n)\theta - 2\beta \cos 2(3 + n)\theta \\
 &- \alpha\beta \cos 2(4 + n)\theta] - \rho^{2n+6} \cdot [4\beta^3 \sin^2(3 + n)\theta] + \rho^{18} \cdot [4 \sin^2 \theta] \\
 &- \rho^{16} \cdot [4\alpha \sin^2 2\theta] + \rho^{14} \cdot 8 \sin^2 \theta[\alpha^2 + \beta + 2\alpha^2 \cos 2\theta + \beta \cos 4\theta] \\
 &- \rho^{12} \cdot [4\alpha \sin^2 2\theta(\alpha^2 - \beta + 4\beta \cos 2\theta)] \\
 &+ \rho^{10} \cdot 4 \sin^2 \theta[\alpha^4 + 2\alpha^2\beta + 2\beta^2 + 8\alpha^2\beta \cos 2\theta + 2\beta(\alpha^2 + 2\beta) \cos 4\theta] \\
 &- \rho^8 \cdot [4\alpha\beta \sin^2 2\theta(\alpha^2 - \beta + 4\beta \cos 2\theta)] \\
 &+ \rho^6 \cdot [8\beta^2(\alpha^2 + \beta + 2\alpha^2 \cos 2\theta + \beta \cos 4\theta) \sin^2 \theta] \\
 &- \rho^4 \cdot [4\alpha\beta^3 \sin^2 2\theta] + \rho^2 \cdot [4\beta^4 \sin^2 \theta].
 \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. Арсеновић, М. Достанић, Д. Јоцић, Теорија мере, функционална анализа, теорија оператора, Математички факултет, Београд (1998)
- [2] S. Bernstein, Quelques remarques sur l'interpolation, *Math. Ann.* 79, 1-12, (1918)
- [3] S. Bernstein, Sur les polynomes orthogonaux relatifs a un segment fini. *J. Math. Pures Appl.* (9) 9, 127-177 (1930)
- [4] H.J. Bilharz, Über die Gaußsche Methode zur angenäherten Berechnung bestimmter Integrale. *Math. Nachr.* 6, 171-192, (1951)
- [5] B. Bojanov, G. Petrova, Quadrature formulae for Fourier coefficients, *J. Comput. Appl. Math.* 231 (2009) 378–391.
- [6] J. Bouzitat, Integration numerique approchee par la methode de Gauss generalisee et extension de cette methode. In: Mineur H., *Techniques de Calcul Numerique*, 557-605, Beranger, Paris (1952)
- [7] H. Brass, *Quadraturverfahren*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen (1977)
- [8] D. Calvetti, L. Reichel, Symmetric Gauss-Lobatto and modified anti-Gauss rules, *BIT Numerical Mathematics* 43, 541-554, (2003)
- [9] P. L. Chebyshev, Sur l'interpolation par la methode des moindres carrés. *Mém. Acad. Imper. Sci. St. Pétersbourg* (7) 1, no. 15, 1-24 (*Oeuvres I*, 473-498), (1859)

- [10] E.B. Christoffel, Über die Gaußsche Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben. *J. Reine Angew. Math.* 55, 61-82 (Ges. Math. Abhandlungen I, 65-87] (1858)
- [11] E.B. Christoffel, Sur une classe particuliere de fonctions entieres et de fractions continues, *Ann. Mat. Pgra Appl.* (2) 8, 1-10 (Ges. Math. Abhandlungen II, 42-50, (1877)
- [12] A. Cvetković, M. Spalević, Estimating the Error of Gauss-Turan Quadrature Formulas Using Their Extensions, *ELECTRONIC TRANSACTIONS ON NUMERICAL ANALYSIS*, vol. 41, str. 1-12, (2014)
- [13] G. Darboux, Memoire sur l' approximation des fonctions de tres-grands nombres et sur une classe etendue de developpements en serie. *J. Math. Pures Appl.* (3) 4, 377-416, (1878)
- [14] P.J. Davis, Errors of numerical approximation for analytic functions. *J. Rational Mech. Anal.* 2, 303-313, (1953)
- [15] E. Doha, A. Bhrawy, R. Hafez, M. Abdelkawy, A Chebyshev-Gauss-Radau scheme for nonlinear hyperbolic system of first order, *Appl. Mth. Inf. Sci.* 8, 2, 1-10, (2014)
- [16] J.D. Donaldson, D. Elliott, A unified approach to quadrature rules with asymptotic estimates of their remainders. *SIAM J. Numer. Anal.* 9, 573-602, (1972)
- [17] M.R. Eslahchi, M. Masjed-Jamei, E. Babolian, On numerical improvement of Gauss-Lobatto quadrature rules, *App. Math. Comp.* 164, 707-717, (2005)
- [18] M.R. Farmer, G. Loizou, An algorithm for the total or partial, factorization of a polynomial, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 82, 427-437, (1977)

- [19] G. Freud, Error estimates for Gauss-Jacobi quadrature formulae. In: Topics in Numerical Analysis (Ed. by Miller, J.J.H.), Academic Press, London 113-121, (1973)
- [20] G. Freud, Numerical estimates for the error of Gauss-Jacobi quadrature formulae. In: Topics in Numerical Analysis II (Ed. by Miller, J.J.H.), Academic Press, London 43-50, (1975)
- [21] C.F. Gauss, Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi, Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores 3 [Werke III, 163-196] (1814)
- [22] L. Gatteschi, Su una formula di quadratura quasi Gaussiana. Tabulazione delle ascisse d'integrazione e delle relative costanti di Christoffel, Atti Accad. Sci. Torino CI. Sci. Fis. Mat. Natur. 98 (1963/64) 641-661, (1964)
- [23] W. Gautschi, Construction of Gauss-Christoffel quadrature formulas, Math. Comp., vol. 22, 251-270, (1968)
- [24] W. Gautschi, A Survey of Gauss-Christoffel Quadrature Formulae, (P.L. Butzer, F. Fehér, eds.), 72-147, Birkhäuser, Basel, (1981)
- [25] W. Gautschi, R. Varga, Error bounds for Gaussian quadrature of analytic functions, SIAM J. Numer. Anal. 20, 6, 1170-1186, (1983)
- [26] W. Gautschi and S. Li, The remainder term for analytic functions of Gauss-Radau and Gauss-Lobatto quadrature rules with multiple end points, J. Comput. Appl. Math. 33 (3) 315-329, (1990)
- [27] W. Gautschi, On the remainder term for analytic functions of Gauss-Lobatto and Gauss-Radau quadratures, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol. 23, Num. 1 (1990)

- [28] W. Gautschi, E. Tychopoulos, R. Varga, A note on the contour integral representation of the remainder term for a Gauss-Chebyshev quadrature rule, *SIAM J. Numer. Anal.* 27, 1, 219-224, (1990)
- [29] W. Gautschi, On the remainder term for analytic functions of Gauss-Radau and Gauss-Lobatto quadratures, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 21, 209–226, (1991)
- [30] W. Gautschi, Gauss-Radau and Gauss-Lobatto quadratures with double end points, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 34, 343-360, (1991)
- [31] W. Gautschi, G. Milovanović, S-orthogonality and construction of Gauss-Turán-type quadrature formulae, *J. Comput. Appl. Math.* 86, 205-218, (1997)
- [32] W. Gautschi, Gauss-Radau formulae for Jacobi and Laguerre weight functions, *Mathematics and Computers in Simulations* 54, 403-412, (2000)
- [33] W. Gautschi, High order Gauss-Lobatto formula, *Numerical Algorithms* (25) 213-222, (2000)
- [34] W. Gautschi: OPQ suite
(<http://www.cs.purdue.edu/archives/2001/wxg/codes>).
- [35] W. Gautschi, Generalized Gauss-Radau and Gauss-Lobatto formulae, *BIT* 44, 711-720, (2004)
- [36] W. Gautschi, *Orthogonal polynomials: computation and approximation*, Oxford University Press (2004)
- [37] A. Ghizzetti, A. Ossicini, *Quadrature formulae*, Akademie – Verlag, Berlin, 1970.
- [38] A. Ghizzetti, A. Ossicini, Sull’ esistenza e unicità delle formule di quadratura Gaussiane, *Rend. Mat.* 8, 1–15, (1975)

- [39] G.H. Golub, J.H. Welsch, Calculation of Gauss quadrature rules. *Math. Comp.* 23, 221-230, Loose microfiche suppl. A1-A10 (1969)
- [40] G.H. Golub, Some modified matrix eigenvalue problems. *SIAM Rev.* 15, 318-334, (1973)
- [41] L. Gori, C.A. Micchelli, On weight functions which admit explicit Gauss–Turán quadrature formulas, *Math. Comp.* 65, 1567–1581, (1996)
- [42] C.G.J. Jacobi, Ueber Gaup new Metlwde, die Werthe der Integrale niiherungsweiv, *J. Reine Angew. Math.* I, 301-308, (1826)
- [43] H. Joulak, B. Beckermann, On Gautschi’s conjecture for generalized Gauss-Radau and Gauss-Lobatto formulae, *J. Comput. Appl. Math.* 233, 768-774, (2009)
- [44] E. Heine, Anwendungen der Kugelfunctionen und der verwandten Functionen. 2nd ed., Reimer, Berlin. I. Theil: Mechanische Quadratur, 1-31, (1881)
- [45] K. Heun, Neue Methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen einer unabhiingigen Veriinderlichen. *Z. Math. Phys.* 45, 23-38, (1900)
- [46] D.B. Hunter, G. Nikolov, On the error term of symmetric Gauss-Lobatto quadrature formulae for analytic functions, *Math. Comp.* 69, 269–282, (2000)
- [47] S. Islam, G. Saha, Applications of Gauss-Radau and Gauss-Lobatto numerical integrations over a four node quadrilateral finite element, *BC SIR.* 43(3), 377-386, (2008)
- [48] C.G.J. Jacobi, Untersuchungen iiber die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. *J. Reine Angew. Math.* 56, 149-165, (Math. Werke III, 97-113) (1859)

- [49] K. Kastlunger, and G. Wanner, On Turan type implicit Runge-Kuna methods. *Computing*, 9, 317-325 (1972)
- [50] D. Kečkić, *Analiza 3- zbirka zadataka*, Beograd "Kečkić" (2005)
- [51] A.S. Kronrod, Nodes and weights for quadrature formulae, Sixteen-place tables, Izdat. "Nauka", Moscow, (1964)
- [52] A.S. Kronrad, Integration with control of accuracy, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 154, 283-286, (1964)
- [53] V.I. Krylov, *Approximate Calculation of Integrals*, Izdat. Fiz.cMat. Lit., Moscow. [2nd ed., Izdat. "Nauka", Moscow] (1959)
- [54] W. Kutta, Beitrag zur niherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen. *Z. Math. Phys.* 46, 435-453, (1901)
- [55] D.P. Laurie, Accurate recovery of recursion coefficients from Gaussian quadrature formulas, *J. Comput. Appl. Math.* 112, 165-180, (1999)
- [56] S. Li, Kronrod extension of generalized Gauss-Radau and Gauss-Lobatto formulae, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 26, 4, (1996)
- [57] S. Li, Kronrod extension of Turán formula, *Studia Sci. Math. Hungarica*, 29, 71-83, (1994)
- [58] F.G. Lether, Error estimates for Gaussian quadrature. *Appl. Math. Comput.* 7, 237-246, (1980)
- [59] R. Lobatto, *Lessen over de Differentiaal- en Integraal-Rekening. Part II. Integraai-Rekening*, VanCleeef, The Hague (1852)
- [60] F. Locher, K. Zeller, Approximationsgute und numerische Integration. *Math. Z.* 104, 249-251, (1968)
- [61] A. Markoff, Sur Ia methode de Gauss pour le calcul approche des integrates. *Math. Ann.* 25, 427-432, (1885)

- [62] M. Masjed-Jamei, M.R. Eslahchi, M. Dehghan, On numerical improvement of Gauss-Lobatto quadrature rules, *App. Math. Comp.* 168, 51-64, (2005)
- [63] F.G. Mehler, Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadraturen. *J. Reine Angew. Math.* 63, 152-157, (1864)
- [64] C.A. Micchelli, T.J. Rivlin, Turán formulae and highest precision quadrature rules for Chebyshev coefficients, *IBM J. Res. Develop.* 16, 372–379, (1972)
- [65] C.A. Micchelli, A. Sharma, On a problem of Turán: multiple node Gaussian quadrature, *Rend. Mat.* 3, 529–552, (1983)
- [66] Lj.V. Mihić, The remainder term of Gauss-Radau quadrature rule with single and double end point, *Publ. Inst. Math.* (to appear, DOI: 10.2298/PIM161115002M)
- [67] Ljubica Mihić, Aleksandar Pejčev, Ocena greške Gauss-Lobatto kvadrature formula u odnosu na Chebyshevljeve težinske funkcije druge, treće i četvrte vrste, *Zbornik radova, V simpozijum "Matematika i primene"*, 152-160, (2014)
- [68] Lj.V. Mihić, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, Error bounds for Gauss-Lobatto quadrature with double end points with Chebyshev weight of the second kind, (предложен за штампу) *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications*
- [69] Lj.V. Mihić, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, Kronrod extension of Turán formula with respect to certain weight functions (у припреми)
- [70] Lj.V. Mihić, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, Error bounds for Gauss-Lobatto quadrature formula with multiple end points with Chebyshev weight function of the third and the fourth kind, *Filomat*, Vol. 30, Num. 1, 231-239, (2016)

- [71] G.V. Milovanović, *Numerička analiza I deo*, Naučna knjiga, Beograd (1991).
- [72] G.V. Milovanović, *Numerička analiza II deo*, Naučna knjiga, Beograd (1991).
- [73] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, A numerical procedure for coefficients in generalized Gauss-Turán quadratures, *FILOMAT* 9, 1–8, (1995)
- [74] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, Construction of Chakalov-Popoviciu's type quadrature formulae, *Rend. Circ. Mat. Palermo* 52, 625–636, (1998)
- [75] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, Quadrature formulae connected to sigma-orthogonal polynomials, *JOURNAL OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS*, vol. 140 br. 1-2, str. 619-637 (2002)
- [76] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, Error bounds for Gauss-Turan quadrature formulae of analytic functions, *MATHEMATICS OF COMPUTATION*, vol. 72 br. 244, str. 1855-1872, (2003)
- [77] G.V. Milovanović M.M. Spalević, A.S. Cvetković, Calculation of Gaussian-type quadratures with multiple nodes, *Math. and Comp. modelling*, 39, 325-347, (2004)
- [78] G.V. Milovanović M.M. Spalević, Error analysis in some Gauss-Turdn-Radau and Gauss-Turdn-Lobatto quadratures for analytic functions, *JOURNAL OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS*, vol. 164-165, str. 569-586, (2004)
- [79] G.V. Milovanović M.M. Spalević, Bounds of the error of Gauss-Turan-type quadratures, *JOURNAL OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS*, vol. 178, br. 1-2, str. 333-346, (2005)

- [80] G.V. Milovanović M.M. Spalević, An error expansion for some Gauss-Turan quadratures and L-1-estimates of the remainder term, BIT NUMERICAL MATHEMATICS, vol. 45 br. 1, str. 117-136, (2005)
- [81] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, M.S. Pranić, On the remainder term of Gauss-Radau quadratures for analytic functions, Journal of Computational and Applied Mathematics 218, 281–289, (2008)
- [82] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, Kronrod extensions with multiple nodes of quadrature formulas for Fourier coefficients, Math. Comp. 83, 1207–1231, (2014)
- [83] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, Bounds of the error of Gauss-Turán type quadratures, J. Comput. Appl. Math.178, 333-346 (2005)
- [84] R. von Mises, Uber allgemeine Quadraturformeln. 1. Reine Angew. Math. 174, 56-67, (1836)
- [85] D. Niclasen, H. Blackburn, Gauss and Gauss-Lobatto element quadratures applied to the incompressible Navier-Stokes equations, Computational Technique and applications: CTAC97, Word Scientific
- [86] S.E. Notaris, Error bounds for Gauss-Kronrod quadrature of analytic functions, Numer. Math. 64, 371–380, (1993)
- [87] S.E. Notaris, The error norm of Gauss-Radau quadrature formulae for Chebyshev weight functions, BIT Numer. Math. 50, 123-147, (2010)
- [88] S.E. Notaris, The error norm of quadrature formulae, Numer. Algor. 60, 555–578, (2012)
- [89] B.N. Parlett, The Symmetric Eigenvalue Problem, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1980)

- [90] G. Peano, Resto nelle formule di quadratura, espresso con un integrale definito. Atti. R. Accad. Lincei (5) Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 22, 562-569, (1913)
- [91] G. Peano, Residua in formulas de quadratura. Mathesis (4) 4 (34), 5-10, (1914)
- [92] A.V. Pejčev, Lj.V. Mihić, Error bounds for Gauss-Radau quadrature formula with double end points with respect to the Chebyshev weight function of the third kind (у припреми)
- [93] A.V. Pejčev, M.M. Spalević, The error bounds of Gauss-Radau quadrature formulae with Bernstein-Szegő weight functions, NUMERISCHE MATHEMATIK, vol. 133 br. 1, str. 177-201, (2016)
- [94] A.V. Pejčev, Error bounds for Gauss-type quadratures with Bernstein-Szegő weights, NUMERICAL ALGORITHMS, vol. 66 br. 3, str. 569-590, (2014)
- [95] A.V. Pejčev, M.M. Spalević, Error bounds of the Micchelli-Sharma quadrature formula for analytic functions, JOURNAL OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS, vol. 259, str. 48-56, (2014)
- [96] A.V. Pejčev, M.M. Spalević, Error bounds of Micchelli-Rivlin quadrature formula for analytic functions, J. Approx. Th. 169, 23-34, (2013)
- [97] A.V. Pejčev, M.M. Spalević, On the remainder term of Gauss-Radau quadrature with Chebyshev weight of the third kind for analytic functions, Appl. Math. Comp. 219, 2760–2765, (2012)
- [98] A.V. Pejčev, M.M. Spalević, Error bounds for Gaussian quadrature formulae with Bernstein-Szegő weights that are rational modifications of Chebyshev weight functions of the second kind, IMA J. Numer. Anal. 32, 1733-1754, (2012)

- [99] A.V. Pejčev, M.M. Spalević, M.S. Pranić, Maximum of the modulus of kernels of Gaussian quadrature formulae for one class of Bernstein-Szegő weight functions, *APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION*, vol. 218 br. 9, str. 5746-5756 (2012)
- [100] G. Peters, J. H. Wilkinson, Eigenvalues of $Ax = \lambda Bx$ with band symmetric A and B, *Comput. J.* 12, 398-404, (1969)
- [101] C. Posse, Sur les quadratures. *Nouv. Ann. Math.*, (2) 14, 49-62, (1875)
- [102] R. Radau, Etude sur les formules d'approximation qui servent a calculer la valeur numerique d'une integrate definie. 1. *Math. Pures Appl.* (3) 6, 283-336, (1880)
- [103] T.R. Ramakrishnan, Asymptotic estimates for the error of Gauss-Jacobi quadrature formulas, *Calcolo* 10, 233-244, (1973)
- [104] Y.G. Shi, Generalized Gaussian Kronrod-Turán quadrature formulas, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 62, 175–185, (1996)
- [105] Y.G. Shi, General Gaussian quadrature formulas on Chebyshev nodes, *Adv. Math.* 27, 227–239, (1998)
- [106] T. Schira, The remainder term for analytic functions of Gauss-Lobatto quadratures, *J. Comp. Appl. Math.* 76, 171–193, (1996)
- [107] T. Schira, The remainder term for analytic functions of symmetric Gaussian quadratures, *Math. Comp.* 66, 297–310, (1997)
- [108] H.V. Smith, Error estimates for Gauss-Legendre quadrature of integrands possessing Dirichlet series expansions. *BIT* 17, 108–112, (1977)
- [109] M.M. Spalević, Calculation of Chakalov-Popoviciu quadratures of Radau and Lobatto type, *ANZIAM JOURNAL*, vol. 43, str. 429-447, (2002)

- [110] M.M. Spalević, On generalized averaged Gaussian formulas, *MATHEMATICS OF COMPUTATION*, vol. 76 br. 259, str. 1483-1492, (2007)
- [111] M.M. Spalević, M.S. Pranić, Error bounds of certain Gaussian quadrature formulae, *J. Comput. Appl. Math.* 234, 1049-1057, (2010)
- [112] M.M. Spalević, M.S. Pranić, The remainder term of Gauss-Turán quadratures for analytic functions, In: W. Gautschi, G. Mastroianni, Th. M. Rassias (eds.) *Approximation and Computation – In Honor of Gradimir V. Milovanović* Springer Optimization and Its Applications, vol. 42, 253-266, Springer, New York (2011)
- [113] M.M. Spalević, Error estimates of anti-Gaussian quadrature formulae, *J. Comput. Appl. Math.* 236, 3542-3555, (2012)
- [114] M.M. Spalević, M.S. Pranić, A.V. Pejčev, Maximum of the modulus of kernels of Gaussian quadrature formulae for one class of Bernstein-Szegő weight functions, *App. Math. Comput.* 218, 5746-5756, (2012)
- [115] M.M. Spalević, Error Bounds of Gaussian Quadrature Formulae for One Class of Bernstein-Szego Weights, *MATHEMATICS OF COMPUTATION*, vol. 82 br. 282, str. 1037-1056 (2013)
- [116] M.M. Spalević, Error bounds and estimates for Gauss-Turán quadrature formulae of analytic functions, *SIAM J. Numer. Anal.* 52, 443–467, (2014)
- [117] F. Stenger, Bounds on the error of Gauss-type quadratures. *Nurner. Math.* 8, 150-160, (1966)
- [118] T.J. Stieltjes, Quelques recherches sur la theorie des quadratures dites mecaniques. *Ann. Sci. Éc. Norm. Paris, Sér. 3, I*, 409-426, *Oeuvres I*, 377-396, (1883)

- [119] T.J. Stieltjes, Note sur quelques formules pour l' evaluation de certaines integrales. Bul. Astr. Paris I, 568. [Oeuvres I, 426-427] (1884)
- [120] T.J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues. Ann. Fac. Sci. Toulouse 8, 1-122, ibid. 9 (1894)
- [121] B. von Sydow, Error estimates for Gaussian quadrature formulae. Nurner. Math. 29, 59-64, (1977/78)
- [122] G. Szegő, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 23 (Amer. Mathematical Soc., Providence, RI, 4th ed. 1975)
- [123] G. Szegő, Orthogonal Polynomials, 4th Edition, Vol. 23, American Mathematical Society Colloquium Publications, American Mathematical Society, Providence, RI (1978)
- [124] H. Takahasi and M. Mori, Error estimation in the numerical integration of analytic functions. Rep. Cornput. Centre Univ. Tokyo 3, 41-108, (1970)
- [125] P. Turán, On the theory of the mechanical quadrature, Acta Sci. Math. (Szeged) 12, 30–37, (1950)
- [126] L. Wang, B. Guo, Interpolation approximations based on Gauss-Lobatto-Legendre-Birkhoff quadrature, Journal of Approximtion Theory 161, 142-173, (2009)
- [127] H. Wilf, Mathematics for the Physical Sciences, Wiley, New York (1962)
- [128] P. Williams, A Gauss-Lobatto quadrature method for solving optimal control problems, ANZIAM J. 47, c101-c115, (2006)
- [129] S. Yang, On a quadrature formula of Gori and Micchelli, J. Comput. Appl. Math. 176, 35-43, (2005)

Биографија аутора

Лични подаци

име и презиме: Љубица Михић (рођ. Матић)

датум рођења: 27. април 1985. год.

e-mail адреса: *maticljubica@gmail.com*

Образовање

Завршила је основну школу „Селимир Јовановић” и Шабачку гимназију. Носилац је Вукове дипломе и неких признања са регионалних и републичких такмичења из математике и физике. Основне студије на Математичком факултету у Београду, смер нумеричка математика и оптимизација, завршила је 2009. год., а мастер студије, под менторством професора Бошка Јовановића, наредне године. Током зимског семестра 2009/10, у организацији *DAAD*-а, на Техничком Универзитету у Минхену, бавила се имплементацијом мултигрид методе.

Докторске студије је уписала 2010. год. Издвајају се следећи радови и саопштења:

- Lj.V. Mihić, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, Error Bounds for Gauss-Lobatto Quadrature Formula with Multiple End Points with Chebyshev Weight Function of the Third and the Fourth Kind, (accepted 2014), *Filomat*, vol. 30, num. 1, 231-239 (2016)
- Lj. V. Mihić, The remainder term of Gauss-Radau quadrature rule with single and double end point, *Publ. Inst. Math.* (to appear, DOI: 10.2298/PIM161115002M)
- Ljubica Mihić, Aleksandar Pejčev, Ocena greške Gauss-Lobatto kvadrature formula u odnosu na Chebyshev-ljeve težinske funkci-

je druge, treće i četvrte vrste, Zbornik radova, V simpozijum „Matematika i primene”, str. 152-160 (2014)

- Lj.V. Mihić, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, Error bounds for Gauss-Lobatto quadrature with double end points with Chebyshev weight of the second kind, Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications, (предложен за штампу)
- Lj.V. Mihić, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, Kronrod extension of Turán formula with respect to certain weight functions (у припреми)
- Ljubica Mihić, The remainder term of Kronrod extension of Gauss-Turán formula, Seminar of the project 174002 „Methods of numerical and nonlinear analysis with applications”, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, October 2016.
- Ljubica Matić., Euler-ove jednačine - klasična teorija potencijalnih strujanja, Seminar „Matematički metodi mehanike“, SANU, 26. septembar i 3. oktobar 2012.
- P. Rogleva, I. Jovanović, I. Grujičić, Lj. Matić, Presentation of one month group working, PhD course, Optimization Syllabus for the TEMPUS, Faculty of Mathematics, Belgrade, September 2011.
- Ljubica Matić, Multigrid method–implimentations in MATLAB, Technische Universitat Munchen, Munchen, December 2009.

Радно искуство

2010. – Висока медицинска и пословно-технолошка школа струковних студија, Шабац, асистент на предметима математика, пословна математика, статистика, математички софтвер.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Љубица В. Михаћ

број уписа 2004/2010

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Остатак одређених типова Гаусових квадратурних формула са

специјалним класама тежинских функција

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 21. 12. 2016.

Љубица В.

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Љубица Михаић

Број уписа 2004/2010

Студијски програм математика

Наслов рада Остатак одређених типова Гаусових квадратурних формула
са специјалним класама тежинских функција

Ментор др. Милан Дражић, ванредни професор

Потписани Љубица Михаић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 21.12.2016.

Љубица М

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Остатак одређених типова Гаусових квадратурних формула са
специјалним класама тежинских функција

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

① Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 21.12.2016.

Ђурица М.

1. Ауторство - Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. Ауторство – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.