

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

АРХИТЕКТОНСКИ ФАКУЛТЕТ

Маја М. Петровић

**ГЕНЕРИСАЊЕ  
ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНИХ  
ГЕОМЕТРИЈСКИХ ФОРМИ  
КАО ОБРАСЦА ЗА ОБЛИКОВАЊЕ  
АРХИТЕКТОНСКО-УРБАНИСТИЧКОГ  
ПРОСТОРА**

докторска дисертација

Београд, 2016

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF ARCHITECTURE

Maja M. Petrović

**GENERATING  
THE FOCAL-DIRECTORIAL  
GEOMETRIC FORMS  
AS A DESIGNING PATTERN OF THE  
ARCHITECTURAL-URBAN SPACE**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2016

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
АРХИТЕКТОНСКИ ФАКУЛТЕТ

МЕНТОР:

**др Љиљана Петрушевски**, редовни професор  
Универзитет у Београду, Архитектонски факултет

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

**др Ђорђе Ђорђевић**, председник Комисије  
доцент, Универзитет у Београду, Архитектонски факултет

**др Љиљана Петрушевски**, ментор и члан Комисије  
редовни професор, Универзитет у Београду, Архитектонски факултет

**др Бранко Малешевић**, члан Комисије  
ванредни професор, Универзитет у Београду, Електротехнички факултет

**др Марија Обрадовић**, члан Комисије  
ванредни професор, Универзитет у Београду, Грађевински факултет

**др Слободан Мишић**, члан Комисије  
доцент, Универзитет у Београду, Грађевински факултет

Датум одбране докторске дисертације: \_\_\_\_\_

---

**Матеји,  
Николи,  
Ањи,  
Луки  
и  
Алекси**



---

---

# ГЕНЕРИСАЊЕ ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНИХ ГЕОМЕТРИЈСКИХ ФОРМИ КАО ОБРАСЦА ЗА ОБЛИКОВАЊЕ АРХИТЕКТОНСКО-УРБАНИСТИЧКОГ ПРОСТОРА

## *РЕЗИМЕ*

Истраживањем различитих типова равних кривих и површи које су генерисане као геометријско место тачака (ГМТ) са константном сумом/производом растојања до фокуса, показано је да постоје и такве геометријске форме које настају као ГМТ са константном сумом/производом растојања до директриса. Захваљујући оваквој генези, добијена је веза фокалних и директрисних геометријских форми са Паладијевим пропорционалним системом, али и са Ферма-Веберовим скупом тачака, тј. са Веберовим локацијским проблемом. Такође, анализирањем ових елемената уочила се њихова повезаност са неким геометријским неједнакостима многоугла, и на основу тога, формиран је прелазни тип. Прелазни тип је назван фокално-директрисно генерисани елемент (фокално-директрисна крива и фокално-директрисна површ).

На почетку рада, извршена је генерализација прелазног типа равних кривих са константном сумом растојања, односно дефинисана је Веберова фокално-директрисна крива. Прелазни тип кривих са константним производом растојања представљен је као Веберова фокално-директрисна крива Касинијевог типа.

У простору, генерисање је извршено на основу три геометријска појма (тачка – фокус; права – директриса и раван – директрисна раван). Комбинацијом основних појмова добијени су прелазни типови површи са константном сумом растојања и названи су: Веберова фокално-директрисна површ, Веберова фокално-директорна површ и Веберова директрисно-директорна површ. Прелазни типови површи са константним производом растојања дефинисани су на сличан начин као и претходне површи и назване истим именом са одредбом да су Касинијевог типа. Веберова површ и Веберова површ Касинијевог типа су називи површи које су генерисане помоћу сва три геометријска појма. Сви генерисани 3D елементи су представљени графичким приказима (три ортогоналне пројекције и аксонометријски приказ).

---

У раду су сагледане поједине варијације фокално-директрисних геометријских форми у зависности од полазних параметара. Такође, испитана су геометријска својства и ред генерисаних 2D и 3D елемената. Извршена је њихова класификација, а затим је дат дијаграм поделе ових елемената.

Планарне фокално-директрисне криве својом транспозицијом у 3D могу дати различите просторне форме.

У раду су дати фокално-директрисно генерисани елементи као графичке интерпретације неких геометријских неједнакости многоугла. Извршено је проширење Ердеш-Морделове неједнакости за троугао до Ердеш-Морделове криве као фокално-директрисно генерисаног 2D елемента. Варијација форме Ердеш-Морделове криве у зависности од полазног троугла може се сагледати на основу просторне интерпретације Ердеш-Морделове неједнакости за троугао, тј. када се она интерпретира као Ферма-Веберов оптимизациони проблем.

Извршена је анализа погодности облика фокално-директрисно генерисаних 2D и 3D елемената за примену у архитектури. Због разноврсности облика фокално-директрисно генерисаних 2D елемената, могућа је њихова примена у апроксимацији и реконструкцији контуре основа објеката. Геометријска генеза фокално-директрисних кривих омогућава примену ових 2D елемената на решавање локацијских проблема. Мењањем малог броја параметара (фокуса и/или директриса) може се знатно утицати на промену облика генерисаног 2D или 3D елемента, па се ове геометријске форме могу подешавати, прилагођавати и трансформисати према жељеним захтевима архитектонског задатка.

Због својих геометријски одредивих форми, флексибилности облика и морфолошке компатибилности са изводљивим структурама којима су наклоњени актуелни трендови у пројектовању, фокално-директрисно генерисани елементи се могу користити као обрасци за обликовање архитектонско-урбанистичког простора.

**КЉУЧНЕ РЕЧИ:** фокалне криве и површи; директрисне криве и површи; фокално-директрисно генерисани елемент; Веберове криве и површи; Ферма-Торичели-Веберова тачка; Ферма-Веберов скуп тачака; Ердеш-Морделова неједнакост; Ердеш-Морделова крива; изолиније.

**НАУЧНА ОБЛАСТ:** архитектура и урбанизам

**УЖА НАУЧНА ОБЛАСТ:** геометрија архитектонске форме

**УДК број:** 514.18:72(043.3)

---

---

# GENERATING THE FOCAL-DIRECTORIAL GEOMETRIC FORMS AS A DESIGNING PATTERN OF THE ARCHITECTURAL-URBAN SPACE

## *ABSTRACT*

Through explorations of various types of planar curves and surfaces generated as locus of points with constant sum/product of distances to the focus, it was shown that there also exist geometric forms that are locus of points with constant sum/product of distances to the directrix. Due to such genesis, one could obtain a connection between focal and directorial geometric forms with Palladio's proportional system, as well as with Fermat-Weber's set of points, i.e. with Weber's location problem. In addition, analysis of these elements led to observations of their connections with some geometric polygonal inequalities, which then led to introduction of a transitory element type. This transitory type of an element is called focal-directorial generated element (focal-directorial curve and focal-directorial surface).

At the beginning of this dissertation, a generalization of the transitory type of planar curves with a constant sum of distances was attained, i.e. Weber's focal-directorial curve was defined. Transitory type of curves with a constant product was introduced as Weber's focal-directorial curve of Cassini's type.

In 3-D space, generation of the curves was accomplished based on three geometric terms (point – focus; line – directrix line and plane – directorial plane). Combination of basic terms, led to transitory types of surfaces with constant sums of distances, which were referred to as: Weber's focal-directorial surface and Weber's directorial-directorial surface. Transitory types of surfaces with constant product of distances are defined in a similar manner as the aforementioned surfaces and are referred to using the same terminology, with the note that they are of Cassini's type. Weber's surface and Weber's surface of Cassini's type are the terms used for surfaces generated using all three geometric terms. All 3D elements generated this way were illustrated graphically (three orthogonal projections and axonometric representation).

In this manuscript, certain forms of focal-directory geometric forms are analyzed in terms of their dependencies on initial parameters. Also, geometric properties and order of 2D and 3D elements generated this way were examined. These elements were classified and a diagram of their classification is enclosed.

3-D transposition of planar focal-directorial curves can yield various spatial forms.

This manuscript offers focal-directory generated elements as graphical interpretation of certain geometric inequalities for polygons. Erdős-Mordell inequality for a triangle was expanded to Erdős-Mordell curves seen as focal-directory generated 2D element. Variations of the form of Erdős-Mordell curve depending on the initial triangle can be understood based on the basic spatial interpretation of Erdős-Mordell inequality for a triangle, i.e. when it is interpreted as a Fermat-Weber optimization problem.

This dissertation also offers suitability of various 2D and 3D focal-directory elements for applications in architecture. Due to the diversity of shapes of focal-directory 2D elements, it is possible to apply them to approximation and reconstruction of contours of object foundations. Geometric genesis of focal-directory curves enables the use of these 2D elements for solving of locational problems. Through changes in a small number of parameters (focus and/or directrix), one can strongly influence the changes of the resulting 2D or 3D element, the enabling adaptations and transformations of geometric forms according to the requirements of the architectural task at hand.

Due to their geometrically deterministic forms, flexibility of shapes and morphological compatibility with feasible structures featuring in recent trends in design, focal-directory generated elements can be characterized as standards for shaping of architectural-urban space.

KEY WORDS: focal curves and surfaces; directorial curves and surfaces; focal-directory generated element; Weber's curves and surfaces; Fermat-Torricelli-Weber point; Fermat-Weber's set of points; Erdős-Mordell inequality; Erdős-Mordell curve; isolines.

SCIENTIFIC AREA: architecture and urbanism

SPECIALIZATION AREA: geometry of architectural forms

UDC number: 514.18:72(043.3)

---

---

# ГЕНЕРИСАЊЕ ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНИХ ГЕОМЕТРИЈСКИХ ФОРМИ КАО ОБРАСЦА ЗА ОБЛИКОВАЊЕ АРХИТЕКТОНСКО-УРБАНИСТИЧКОГ ПРОСТОРА

## Садржај

РЕЗИМЕ .....	II
АВСТРАКТ .....	IV
САДРЖАЈ .....	VI
ПОПИС ОЗНАКА, СКРАЋЕНИЦА И СИМБОЛА .....	IX
ПОПИС СЛИКА И ТАБЕЛА .....	XII
<b>1. УВОД .....</b>	<b>1</b>
1.1. СТАЊЕ ИСТРАЖИВАЊА .....	1
1.1.1. Образложење предмета истраживања .....	1
1.1.2. Преглед релевантних истраживања .....	2
1.2. ПОСТАВЉАЊЕ ЗАДАТАКА И ОДРЕЂИВАЊЕ ЦИЉЕВА ИСТРАЖИВАЊА .....	4
1.2.1. Основни задаци и циљеви истраживања .....	5
1.2.2. Очекивани резултати и њихова примена .....	5
1.3. ПОЛАЗНЕ ХИПОТЕЗЕ ИСТРАЖИВАЊА .....	6
1.4. ПРЕГЛЕД САДРЖАЈА РАДА .....	6
<b>2. КАРАКТЕРИСТИКЕ ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИХ ЕЛЕМЕНАТА .....</b>	<b>9</b>
2.1. ФОКАЛНО И ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИ ЕЛЕМЕНТИ У ОБЛИКОВАЊУ АРХИТЕКТОНСКО-УРБАНИСТИЧКОГ ПРОСТОРА .....	12
2.2. ГЕНЕЗА ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИХ ЕЛЕМЕНАТА И РАЗНОВРСНОСТ ТАКО НАСТАЛИХ ОБЛИКА, ЊИХОВА ФЛЕКСИБИЛНОСТ И ПРИЛАГОДЉИВОСТ ПОТРЕБАМА ПРОЈЕКТНОГ ЗАДАТКА .....	14
<b>3. ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИ 2D ЕЛЕМЕНТИ КАО ПРЕЛАЗНИ ТИП ИЗМЕЂУ ФОКАЛНО И ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИХ 2D ЕЛЕМЕНАТА .....</b>	<b>16</b>
3.1. КОНУСНИ ПРЕСЕЦИ КАО ФОКАЛНО И ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИ 2D ЕЛЕМЕНТИ .....	22
3.1.1. Генеза и конструктивна интерпретација фокално генерисаних 2D елемената .....	30
3.1.2. Директрисно генерисани 2D елементи као дуали фокално генерисаних елементима и њихова конструктивна интерпретација .....	40
3.1.3. Генеза и конструктивна интерпретација фокално-директрисно генерисаних 2D елемената као прелазни тип између фокално и директрисно генерисаних елемената .....	45

---

3.2. ГЕОМЕТРИЈСКА СВОЈСТВА, РЕД И КЛАСИФИКАЦИЈА ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИХ 2D ЕЛЕМЕНАТА .....	47
3.2.1. Варијација форме фокално-директрисно генерисаних 2D елемената у зависности од полазних параметара.....	49
3.3. АНАЛИЗА ПОГОДНОСТИ ОБЛИКА ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИХ 2D ЕЛЕМЕНАТА ЗА ПРИМЕНУ У АРХИТЕКТУРИ .....	51
3.3.1. Примена фокално-директрисно генерисаних елемената у апроксимацији и реконструкцији контуре основе објекта .....	51
3.3.2. Примена геометрије фокално-директрисно генерисаних 2D елемената на решавање локацијских проблема.....	54
<b>4. ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИ 3D ЕЛЕМЕНТИ КАО ПРЕЛАЗНИ ТИП ИЗМЕЂУ ФОКАЛНО И ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИХ 3D ЕЛЕМЕНАТА .....</b>	<b>58</b>
4.1. ГЕНЕЗА И ПРОСТОРНА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА ФОКАЛНО, ДИРЕКТРИСНО И ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИХ 3D ЕЛЕМЕНАТА .....	58
4.1.1. Генерисани 3D елементи са константном сумом/производом растојања.....	71
4.1.2. Генерисани 3D елементи са променљивом сумом/производом растојања.	112
4.2. ГЕОМЕТРИЈСКА СВОЈСТВА ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИХ ЕЛЕМЕНАТА, КЛАСИФИКАЦИЈА И РЕД ПОВРШИ .....	118
4.3. ВАРИЈАЦИЈА ФОРМЕ ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИХ 3D ЕЛЕМЕНАТА У ЗАВИСНОСТИ ОД ПОЛАЗНИХ ПАРАМЕТАРА.....	121
4.4. 3D ФОРМЕ ДОБИЈЕНЕ ТРАНСПОЗИЦИЈОМ ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНОГ 2D ЕЛЕМЕНТА .....	128
4.4.1. Транслација фокално-директрисно генерисаног 2D елемента – фокално-директрисни цилиндар.....	129
4.4.2. Фокално-директрисно генерисани 2D елемент као директриса правоизводне површи – фокално-директрисни конус и коноид.....	130
4.4.3. Ротација фокално-директрисно генерисаног 2D елемента .....	131
4.5. АНАЛИЗА ПОГОДНОСТИ ФОРМЕ ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИХ 3D ЕЛЕМЕНАТА ЗА ПРИМЕНУ У АРХИТЕКТУРИ .....	134
4.5.1. Анализа геометријских својстава у генерисању фокално-директрисно генерисаних елемената као архитектонских форми .....	134
4.5.2. Триангулација фокално-директрисно генерисаних елемената и погодности извођења у диагрид конструктивном систему .....	137
4.5.3. Обликовање архитектонских простора коришћењем фокално-директрисно генерисаних 3D елемената ради постизања акустичних и оптичких ефеката .....	139
<b>5. ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИ ЕЛЕМЕНТИ КАО ГРАФИЧКЕ ИНТЕРПРЕТАЦИЈЕ ГЕОМЕТРИЈСКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ МНОГОУГЛА... 144</b>	
5.1. ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИ ЕЛЕМЕНТИ И ГЕОМЕТРИЈСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ ЕРДЕШ-МОРДЕЛОВОГ ТИПА .....	144
5.1.1. Проширење Ердеш-Морделове неједнакости до Ердеш-Морделове криве као фокално-директрисно генерисаног 2D елемента .....	145
5.1.2. Просторна интерпретација Ердеш-Морделове неједнакости троугла .....	151
5.2. ПРОСТОРНА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА НЕКИХ ГЕОМЕТРИЈСКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ МНОГОУГЛА .....	155

---

---

<b>6. ПРЕДЛОГ ПРИМЕНЕ .....</b>	<b>157</b>
6.1. МОГУЋНОСТИ ПРИМЕНЕ ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИХ ЕЛЕМЕНАТА У ОБЛИКОВАЊУ АРХИТЕКТОНСКО-УРБАНИСТИЧКОГ ПРОСТОРА .....	158
6.2. СЕГМЕНТ ГЕНЕРИСАНОГ 3D ЕЛЕМЕНАТА КАО ГЕОМЕТРИЈСКА МАТРИЦА ЗА МОДЕЛОВАЊЕ АРХИТЕКТОНСКИХ ФОРМИ .....	163
<b>7. ЗАКЉУЧАК .....</b>	<b>165</b>
7.1. ОСНОВНИ ЗАКЉУЧЦИ И ДОПРИНОС ИСТРАЖИВАЊА.....	165
7.2. ПРАВЦИ ДАЉЕГ ИСТРАЖИВАЊА .....	167
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>168</b>
<b>ПРИЛОГ I-1.....</b>	<b>177</b>
<b>ПРИЛОГ I-2.....</b>	<b>178</b>
<b>ПРИЛОГ I-3.....</b>	<b>180</b>
<b>ПРИЛОГ II-1 .....</b>	<b>182</b>
<b>ПРИЛОГ II-2 .....</b>	<b>183</b>
<b>ПРИЛОГ II-3 .....</b>	<b>184</b>
<b>ПРИЛОГ II-4 .....</b>	<b>185</b>
<b>ПРИЛОГ II-5 .....</b>	<b>186</b>
<b>ПРИЛОГ II-6 .....</b>	<b>187</b>
<b>ПРИЛОГ II-7 .....</b>	<b>188</b>
<b>ПРИЛОГ III-1 .....</b>	<b>190</b>
<b>ПРИЛОГ III-2 .....</b>	<b>191</b>
<b>ПРИЛОГ III-3 .....</b>	<b>192</b>
<b>ПРИЛОГ III-4 .....</b>	<b>193</b>
<b>ПРИЛОГ III-5 .....</b>	<b>194</b>
<b>ПРИЛОГ IV-1.....</b>	<b>195</b>
<b>ПРИЛОГ IV-2.....</b>	<b>196</b>
<b>ПРИЛОГ IV-3.....</b>	<b>197</b>
<b>ПРИЛОГ IV-4.....</b>	<b>198</b>
<b>БИОГРАФИЈА.....</b>	<b>199</b>

---

---

*Попис ознака, скраћеница и симбола*

3	2
4	1

- 1 - прва ортогонална пројекција (поглед одозго)  
 2 - друга ортогонална пројекција (поглед спреда)  
 3 - трећа ортогонална пројекција (поглед сдесна)  
 4 - аксонометрија

- $A, B, C, M, T, P_1, P_2, P_3, \dots$  - тачка у  $2D$  или  $3D$   
 $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, \dots$  -  $k$ -та фиксирана тачка - фокус ( $k=1,2,3,\dots$ )  
 $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, \dots$  - растојање тачке до  $k$ -тог фокуса  
 $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, \dots$  -  $k$ -та фиксирана права – директриса ( $k=1,2,3,\dots$ )  
 $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, \dots$  - растојање тачке до  $k$ -те директрисе  
 $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, \dots$  -  $k$ -та фиксирана раван - директрисна раван ( $k=1,2,3,\dots$ )  
 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6 \dots$  - растојање тачке до  $k$ -те директрисне равни  
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, \dots, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  - реалан број (фактор скалирања,  
 Веберов тежински коефицијент)  
 $m, n, k, l$  - природни број  
 $R_A, R_B, R_C$  - растојање тачке до фокуса  $A, B, C$   
 $r_a, r_b, r_c$  - растојање тачке до директриса  $a, b, c$   
 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$  - дужина угаоног бисектора  
 $(\alpha_1), \dots, (\alpha_4)$  - угаоне области равни  
 $z = z(x, y)$  - експлицитни облик једначине површи  
 $F(x, y, z) = 0$  - имплицитни облик једначине површи  
 $F$  - Ферма-Торичелијева тачка  $F$   
 $S_0, S_1$  - константа, *const* (реалан број)  
 $S$  - параметар (константа или  $z(x, y)$ )  
 $\bar{a}$  - дужина стране  $a$  правилног полигона  
 $\bar{R}$  - дужина полупречника  $R$  круга описаног око правилног полигона  
 $\bar{r}$  - дужина полупречника  $r$  круга уписаног у правилни полигон
-



---



---

$\bar{d}$	- дужина дијагонале $d$ квадрата
$\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, \dots$	- дијагонала повучена из једног темена правилног полигона
$h_{\Delta}$	- висина троугла
$P_{\Delta}$	- површина троугла
$\bar{a}$	- дужина стране $a$ правилног полиедра
$\bar{R}$	- дужина полупречника $R$ сфере описане око правилног полиедра
$\bar{r}$	- дужина полупречника $r$ сфере уписане у правилни полигон
$\bar{d}$	- дужина дијагонале $d$ коцке
$\bar{D}$	- дужина просторне дијагонале $D$ коцке
$H$	- висина полиедра
$\pi$	- однос између обима круга и пречника, $\pi = 3.1415926 \dots$
$\Phi$	- златни пресек (божански рацио), $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.61803399 \dots$
$e$	- ексцентрицитет (коника, Касинијевих кривих)
$dist(F_1, F_2)$	- функција најкраћег растојања између две тачке $F_1$ и $F_2$
$dist(d_1, d_2)$	- функција најкраћег растојања између две праве $d_1$ и $d_2$
$ГМТ$	- геометријско место тачака
$\Phi К$	- фокална крива
$\Phi ККТ$	- фокална крива Касинијевог типа
$ДК$	- директрисна крива
$ДККТ$	- директрисна крива Касинијевог типа
$\Phi-ДК$	- фокално-директрисна крива
$\Phi-ДККТ$	- фокално-директрисна крива Касинијевог типа
$\Phi П$	- фокална површ
$\Phi П.1.$	- фокална површ генерисана помоћу темена правилног полигона
$\Phi П.2.$	- фокална површ генерисана помоћу темена правилног полиедра
$\Phi ПКТ.1.$	- фокална површ Касинијевог типа генерисана помоћу темена правилног полигона
$\Phi ПКТ.2.$	- фокална површ Касинијевог типа генерисана помоћу темена правилног полиедра

---



---

- 
- ДП** - директрисна површ
- ДП.1.** - директрисна површ генерисана помоћу страница правилног полигона
- ДП.2.** - директрисна површ генерисана помоћу паралелних ивица призме чији је базис правилни полигон
- ДП.3.** - директрисна површ генерисана помоћу мимоилазних правих које су поклопљене са дијагоналама странице призме чији је базис правилни полигон
- ДП.4.** - директрисна површ генерисана помоћу ивица правилног полиедра
- ДПКТ.1.** - директрисна површ Касинијевог типа генерисана помоћу страница правилног полигона
- ДПКТ.2.** - директрисна површ Касинијевог типа генерисана помоћу паралелних ивица призме чији је базис правилни полигон
- ДПКТ.3.** - директрисна површ Касинијевог типа генерисана помоћу мимоилазних правих које су поклопљене са дијагоналама странице призме чији је базис правилни полигон
- ДПКТ.4.** - директрисна површ Касинијевог типа генерисана помоћу ивица правилног полиедра
- Ф-ДП** - фокално-директрисна површ
- Ф-ДПКТ** - фокално-директрисна површ Касинијевог типа
- ДРП** - директорна површ
- ДРПКТ** - директорна површ Касинијевог типа
- Ф-ДРП** - фокално-директорна површ
- Ф-ДРПКТ** - фокално-директорна површ Касинијевог типа
- $W_f^{[\alpha_1, \dots, \alpha_k]}(\mathcal{S})$  - Веберова фокална крива
- $W_d^{[\beta_1, \dots, \beta_k]}(\mathcal{S})$  - Веберова директрисна крива
- $W_{fd}^{[\alpha_1, \dots, \alpha_k][\beta_1, \dots, \beta_k]}(\mathcal{S})$  - Веберова фокално-директрисна крива
- $C_f(\mathcal{S})$  -  $k$ -фокална Касинијева крива
- $C_d(\mathcal{S})$  -  $k$ -фокална крива Касинијевог типа
- $C_{fd}^{[\alpha][\beta]}(\mathcal{S})$  - Веберова фокално-директрисна крива Касинијевог типа
-

**Поглавље 2.**

Слика 2 - 1: Седам од десет Паладијевих димензија у планирању Виле Емо, а које директно проистичу из два троугла 3-4-5, [60]..... 11

Слика 2 - 2: Схематски приказ три алтернативна правила у дизајну Паладијеве идеалне собе ..... 12

Слика 2 - 3: Примена конусних пресека у архитектури..... 13

Слика 2 - 4: Генерисане површи и идејни пројекат мегаструктуре ..... 14

Слика 2 - 5: Моделоване фокално-директрисне површи ..... 15

Слика 2 - 6: Мултиплицирање фокално-директрисне површи..... 15

Табела 1 - 1: Пропорције изведене из Албертијеве приоритетне размере, [113]..... 10

Табела 1 - 2: Пропорције изведене из Паладијеве приоритетне размере, [113]..... 10

Табела 1 - 3: Основни консонантни интервали и остале консонанце..... 10

**Поглавље 3.**

Слика 3 - 1: Графички приказ Торичелијеве конструкција Фермаове тачке ..... 17

Слика 3 - 2: Графички приказ трифокалних кривих  $Wf[1,1,1]\mathcal{S}: RA + RB + RC = \mathcal{S}$  за различите вредности параметра  $\mathcal{S}$  ..... 18

Слика 3 - 3: Графички приказ тридиректрисних кривих  $Wd[1,1,1]\mathcal{S}: ra + rb + rc = \mathcal{S}$  за различите вредности параметра  $\mathcal{S}$  ..... 19

Слика 3 - 4: Графички приказ Ердеш-Морделове криве за различите полазне  $\Delta ABC$  ..... 20

Слика 3 - 5: Графички приказ Чајлдове криве за различите полазне троуглове  $\Delta ABC$  ..... 22

Слика 3 - 6: Конусни пресеци..... 23

Слика 3 - 7: а) Елипса као двофокално генерисана крива б) Графички приказ Ферма-Торичелијевог скупа тачака елипсе  $F = Wf[1,1]\mathcal{S}0$  ..... 24

Слика 3 - 8: Елипса (двофокално генерисана крива) и пропорције у Паладијевој идеалној соби ... 25

Слика 3 - 9: а) Хипербола као двофокално генерисана крива б) Графички приказ Ф-Т скупа тачака хиперболе  $F = Wf[1, -1]\mathcal{S}0 = Wf[-1,1]\mathcal{S}0$  ..... 26

Слика 3 - 10: Парабола као фокално-директрисно генерисана крива..... 27

Слика 3 - 11: Елипса као фокално-директрисно генерисана крива ..... 28

Слика 3 - 12: Хипербола као фокално-директрисно генерисана крива ..... 29

Слика 3 - 13: Хипербола као фокално-директрисно генерисана крива а) лева грана хиперболе; б) десна грана хиперболе ..... 30

Слика 3 - 14: Декартов овал као двофокално генерисана крива ..... 31

Слика 3 - 15: Трифокална крива..... 34

Слика 3 - 16: Фокуси - темена правилних полигона ..... 35

Слика 3 - 17: а) Круг (ФК за  $k = 1$ ) б) Елипса (ФК за  $k = 2$ ) ..... 36

Слика 3 - 18: ФК за  $k = 3$  и  $k = 4$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$  ..... 37

Слика 3 - 19: ФК за  $k = 5$  и  $k = 6$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$  ..... 37

Слика 3 - 20: ФККТ за  $k = 2,3,4$  и  $5$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$  ..... 38

Слика 3 - 21: ФККТ за  $k = 6$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$  ..... 39

Слика 3 - 22: Директрисе - странице правилних полигона..... 40

Слика 3 - 23: ДК за  $k = 2$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$ ..... 40

Слика 3 - 24: ДК за  $k = 3, 4$  и  $5$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$  ..... 41

Слика 3 - 25: ДК за  $k = 6$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$ ..... 42

Слика 3 - 26: ДККТ за  $k = 2$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$ ..... 43

Слика 3 - 27: ДККТ за  $k = 3$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$ ..... 43

Слика 3 - 28: ДККТ за  $k = 4$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$ ..... 44

Слика 3 - 29: ДККТ за  $k = 5$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$ ..... 45

Слика 3 - 30: Веберове Ф-ДК (лево) и Ф-ДККТ (десно) за  $k = m = n, \mathcal{S} > 0$  ..... 46

Слика 3 - 31: Схематски приказ оса симетрије правилних полигона .....	47
Слика 3 - 32: Дијаграм подела Веберових кривих.....	49
Слика 3 - 33: Дијаграм подела Веберових кривих Касинијевог типа .....	49
Слика 3 - 34: Веберове Ф-ДК (лево) и Ф-ДККТ (десно) за $k = m = n, \mathcal{S} = 0$ .....	50
Слика 3 - 35: а) Колосеум, Рим, Италија, [12]; б) арена Дортон, Северна Каролина, УСА, [137]...	52
Слика 3 - 36: Апроксимација основе контуре амфитеатра Колосеум трифокалном кривом са константном сумом растојања .....	52
Слика 3 - 37: Апроксимација основе контуре арене Дортон фокално-директрисном кривом (два фокуса и три директрисе).....	53
Слика 3 - 38: а) Белекспо 1988, Минск, Белорусија, [141]; б) Веберова Ф-ДК за $k = 5$ .....	53
Слика 3 - 39: а) ресторан Лос Манантилес, Мексико, [142]; б) објекат у оквиру комплекса Града уметности и науке, Шпанија, [142]; в) Веберова Ф-ДК за $k = 8$ .....	54
Слика 3 - 40: Графички приказ Менхетн и Еуклидског растојања између две тачке .....	55
Слика 3 - 41: Примена Јава апликације на примеру пројекта за гасовод Јужни ток.....	56
Табела 3 - 1: Ред $k$ -фокалне криве и $k$ -ФККТ.....	48

#### Поглавље 4.

Слика 4 - 1: Модерни архитектонски објекти са обликом алгебарских површи другог и виших редова .....	59
Слика 4 - 2: а) Елипсоид; б) Сфера.....	62
Слика 4 - 3: Двограни хиперболоид.....	63
Слика 4 - 4: а) Елиптички цилиндар; б) Кружни цилиндар.....	64
Слика 4 - 5: а) Хиперболички цилиндар; б) Хиперболички параболоид .....	66
Слика 4 - 6: а) Дегенерисна површ; б) Параболички цилиндар .....	67
Слика 4 - 7: а) Једнограни хиперболоид; б) Конус.....	68
Слика 4 - 8: Параболоид .....	69
Слика 4 - 9: а) Двограни хиперболоид; б) Конус .....	70
Слика 4 - 10: Сфера (лево) и елипсоид (десно).....	75
Слика 4 - 11: ФП.1. за $k = 3$ (лево), $k = 4$ (десно) и $\mathcal{S} = \mathcal{S}1$ .....	76
Слика 4 - 12: ФП.1. за $k = 5$ (лево), $k = 6$ (десно) и $\mathcal{S} = \mathcal{S}1$ .....	76
Слика 4 - 13: ФП.1. за $k = 3$ (лево), $k = 4$ (десно) и $\mathcal{S} > \mathcal{S}1$ .....	77
Слика 4 - 14: ФП.1. за $k = 5$ (лево), $k = 6$ (десно) и $\mathcal{S} > \mathcal{S}1$ .....	77
Слика 4 - 15: Фокуси - темена правилних полиедара.....	78
Слика 4 - 16: ФП.2. за $k = 4$ (фокуси су темена тетраедра) и $\mathcal{S} = \mathcal{S}1$ (лево); $\mathcal{S} > \mathcal{S}1$ (десно) .....	78
Слика 4 - 17: ФП.2. за $k = 6$ (фокуси су темена октаедра) и $\mathcal{S} = \mathcal{S}1$ (лево); $\mathcal{S} > \mathcal{S}1$ (десно).....	79
Слика 4 - 18: ФП.2. за $k = 8$ (фокуси су темена коцке) и $\mathcal{S} = \mathcal{S}1$ (лево); $\mathcal{S} > \mathcal{S}1$ (десно) .....	79
Слика 4 - 19: Двофокална јајаста површ када је $\mathcal{S} < \mathcal{S}0$ .....	80
Слика 4 - 20: Двофокална јајаста површ када је $\mathcal{S} = \mathcal{S}0$ (Бернулијева површ).....	80
Слика 4 - 21: Двофокална јајаста површ када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}0$ .....	81
Слика 4 - 22: Двофокална јајаста површ када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}0$ .....	81
Слика 4 - 23: ФПКТ.1. за $k = 3$ и $\mathcal{S} < \mathcal{S}0$ .....	82
Слика 4 - 24: ФПКТ.1. за $k = 3$ и $\mathcal{S} = \mathcal{S}0$ .....	82
Слика 4 - 25: ФПКТ.1. за $k = 3$ и $\mathcal{S} > \mathcal{S}0$ .....	82
Слика 4 - 26: ФПКТ.1. за $k = 3$ и $\mathcal{S} > \mathcal{S}0$ .....	83
Слика 4 - 27: ФПКТ.1. за $k = 4$ и $\mathcal{S} < \mathcal{S}0$ .....	83
Слика 4 - 28: ФПКТ.1. за $k = 4$ и $\mathcal{S} = \mathcal{S}0$ .....	84
Слика 4 - 29: ФПКТ.1. за $k = 4$ и $\mathcal{S} > \mathcal{S}0$ .....	84
Слика 4 - 30: ФПКТ.1. за $k = 4$ и $\mathcal{S} > \mathcal{S}0$ .....	84
Слика 4 - 31: ФПКТ.1. за $k = 5$ и $\mathcal{S} < \mathcal{S}0$ .....	85
Слика 4 - 32: ФПКТ.1. за $k = 6$ и $\mathcal{S} < \mathcal{S}0$ .....	85
Слика 4 - 33: ФПКТ.1. за $k = 5$ и $\mathcal{S} = \mathcal{S}0$ .....	85
Слика 4 - 34: ФПКТ.1. за $k = 6$ и $\mathcal{S} = \mathcal{S}0$ .....	86
Слика 4 - 35: ФПКТ.1. за $k = 5$ и $\mathcal{S} > \mathcal{S}0$ .....	86
Слика 4 - 36: ФПКТ.1. за $k = 6$ и $\mathcal{S} > \mathcal{S}0$ .....	86
Слика 4 - 37: ФПКТ.1. за $k = 5$ и $\mathcal{S} > \mathcal{S}0$ .....	87

Слика 4 - 38: ФПКТ.1. за $k = 6$ и $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	87
Слика 4 - 39: ФПКТ.2 за $k = 4$ (фокуси су темена тетраедра) и $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ .....	88
Слика 4 - 40: ФПКТ.2 за $k = 4$ (фокуси су темена тетраедра) и $\mathcal{S}_0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_1$ .....	88
Слика 4 - 41: ФПКТ.2 за $k = 4$ (фокуси су темена тетраедра) и $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ .....	88
Слика 4 - 42: ФПКТ.2 за $k = 4$ (фокуси су темена тетраедра) и $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$ .....	88
Слика 4 - 43: ФПКТ.2 за $k = 6$ (фокуси су темена октаедра) и $0 < \mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ .....	89
Слика 4 - 44: ФПКТ.2 за $k = 6$ (фокуси су темена октаедра) и $\mathcal{S}_0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_1$ .....	89
Слика 4 - 45: ФПКТ.2 за $k = 6$ (фокуси су темена октаедра) и $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ .....	89
Слика 4 - 46: ФПКТ.2 за $k = 6$ (фокуси су темена октаедра) и $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$ .....	89
Слика 4 - 47: ФПКТ.2 за $k = 8$ (фокуси су темена коцке) и $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ .....	90
Слика 4 - 48: ФПКТ.2 за $k = 8$ (фокуси су темена коцке) и $\mathcal{S}_0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_1$ .....	90
Слика 4 - 49: ФПКТ.2 за $k = 8$ (фокуси су темена коцке) и $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ .....	90
Слика 4 - 50: ФПКТ.2 за $k = 8$ (фокуси су темена коцке) и $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$ .....	90
Слика 4 - 51: Цилиндар.....	91
Слика 4 - 52: Елиптички цилиндар.....	91
Слика 4 - 53: Дводиректрисна површ када се $d_1$ и $d_2$ секу и $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	91
Слика 4 - 54: ДП.1. за $k = 3$ (лево), $k = 4$ (десно) и када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	92
Слика 4 - 55: ДП.1. за $k = 5$ (лево), $k = 6$ (десно) и када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	92
Слика 4 - 56: Директрисе - ивице призме са основом правилног полигона.....	92
Слика 4 - 57: ДП.2. за $k = 3$ (лево), $k = 4$ (десно) и када је $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ .....	93
Слика 4 - 58: ДП.2. за $k = 5$ (лево), $k = 6$ (десно) и када је $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ .....	93
Слика 4 - 59: ДП.2. за $k = 3$ (лево), $k = 4$ (десно) и када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	94
Слика 4 - 60: ДП.2. за $k = 5$ (лево), $k = 6$ (десно) и када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	94
Слика 4 - 61: Директрисе - мимоилазне праве.....	95
Слика 4 - 62: Дводиректрисна површ када се $d_1$ и $d_2$ мимоилазе и $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	95
Слика 4 - 63: ДП.3. за $k = 3$ (лево), $k = 4$ (десно) и када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	96
Слика 4 - 64: ДП.3. за $k = 5$ (лево), $k = 6$ (десно) и када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	96
Слика 4 - 65: Директрисе - ивице правилних полиедара.....	96
Слика 4 - 66: ДП.4. за $k = 6$ и када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	97
Слика 4 - 67: ДП.4. за $k = 12$ и када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	97
Слика 4 - 68: ДП.4. за $k = 12$ и када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	98
Слика 4 - 69: ДПКТ са $d_1 \parallel d_2$ и $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ .....	99
Слика 4 - 70: ДПКТ са $d_1 \parallel d_2$ и $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	99
Слика 4 - 71: ДПКТ са $d_1 \parallel d_2$ и $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ .....	99
Слика 4 - 72: ДПКТ са $d_1 \parallel d_2$ и $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	99
Слика 4 - 73: ДПКТ са директрисама које се секу и када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	100
Слика 4 - 74: ДПКТ.1. за $k = 3$ (лево), $k = 4$ (десно) и када је $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ .....	100
Слика 4 - 75: ДПКТ.1. за $k = 5$ (лево), $k = 6$ (десно) и када је $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ .....	100
Слика 4 - 76: ДПКТ.1. за $k = 3$ (лево), $k = 4$ (десно) и када је $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ .....	101
Слика 4 - 77: ДПКТ.1. за $k = 5$ (лево), $k = 6$ (десно) и када је $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ .....	101
Слика 4 - 78: ДПКТ.1. за $k = 3$ (лево), $k = 4$ (десно) и када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	101
Слика 4 - 79: ДПКТ.1. за $k = 5$ (лево), $k = 6$ (десно) и када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	101
Слика 4 - 80: ДПКТ.2. када је $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ .....	102
Слика 4 - 81: ДПКТ.2. када је $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ .....	102
Слика 4 - 82: ДПКТ.2. када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	103
Слика 4 - 83: ДПКТ.2. када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	103
Слика 4 - 84: ДПКТ.3. за $k = 2$ и када је $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ .....	104
Слика 4 - 85: ДПКТ.3. за $k = 2$ и када је $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ .....	104
Слика 4 - 86: ДПКТ.3. за $k = 2$ и када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	104
Слика 4 - 87: ДПКТ.3. за $k = 3$ (лево), $k = 4$ (десно).....	105
Слика 4 - 88: ДПКТ.3. за $k = 5$ (лево), $k = 6$ (десно).....	105
Слика 4 - 89: ДПКТ.4. за $l = 6$ и када је $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ .....	106
Слика 4 - 90: ДПКТ.4. за $l = 6$ и када је $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ .....	106
Слика 4 - 91: ДПКТ.4. за $l = 6$ и када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	107
Слика 4 - 92: ДПКТ.4. за $l = 12$ и када је $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ .....	107
Слика 4 - 93: ДПКТ.4. за $l = 12$ и када је $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ .....	108
Слика 4 - 94: ДПКТ.4. за $l = 12$ и када је $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .....	108

Слика 4 - 95: Ф-ДРП.С1. (лево) и Ф-ДРП.С2. (десно) за $n = 4$ .....	111
Слика 4 - 96: Ф-ДРП.С1. (лево) и Ф-ДРП.С2. (десно) за $n = 5$ .....	111
Слика 4 - 97: Ф-ДРП.С1. (лево) и Ф-ДРП.С2. (десно) за $n = 6$ .....	111
Слика 4 - 98: Ф-ДП.С1. за $k = l = 3$ .....	113
Слика 4 - 99: Ф-ДП.С2. за $k = l = 3$ .....	113
Слика 4 - 100: Ф-ДП.П1. (лево) и Ф-ДП.П2. (десно) за $k = l = 3$ .....	114
Слика 4 - 101: Ф-ДП.С1. за $k = l = 4$ .....	114
Слика 4 - 102: Ф-ДП.С2. за $k = l = 4$ .....	115
Слика 4 - 103: Ф-Д.П1. (лево) и Ф-Д.П2. (десно) за $k = l = 4$ .....	115
Слика 4 - 104: Ф-ДП.С1. (лево) и Ф-ДП.С2. (десно) за $k = l = 5$ .....	116
Слика 4 - 105: Ф-ДП.П1. (лево) и Ф-ДП.П2. (десно) за $k = l = 5$ .....	116
Слика 4 - 106: Ф-ДП.С1. (лево) и Ф-ДП.С2. (десно) за $k = l = 6$ .....	117
Слика 4 - 107: Ф-ДП.П1. (лево) и Ф-ДП.П2. (десно) за $k = l = 6$ .....	117
Слика 4 - 108: Дијаграм подела Веберових површи.....	120
Слика 4 - 109: Дијаграм подела Веберових површи Касинијевог типа.....	120
Слика 4 - 110: Ф-ДП за $k = l = 6$ и $\beta = 1.42$ .....	121
Слика 4 - 111: Ф-ДП за $k = l = 6$ и $\beta = 1.5$ .....	122
Слика 4 - 112: Ф-ДП за $k = l = 6$ и $\beta = 1.55$ .....	122
Слика 4 - 113: Ф-ДП за $k = l = 6$ и $\beta = 1.6$ .....	122
Слика 4 - 114: Ф-ДП. за $k = l = 5$ , $\mathcal{S} = 1.5$ (лево) и $\mathcal{S} = 1.62$ (десно).....	123
Слика 4 - 115: Ф-ДП. за $k = l = 5$ , $\mathcal{S} = 4.5$ (лево) и $\mathcal{S} = 8.5$ (десно).....	123
Слика 4 - 116: Ф-ДП за $k = l = 4$ и $\mathcal{S} = 5$ .....	124
Слика 4 - 117: Ф-ДП за $k = 3$ , $l = 4$ и $\mathcal{S} = 5$ .....	124
Слика 4 - 118: Ф-ДП за $k = 4$ , $l = 3$ и $\mathcal{S} = 5$ .....	125
Слика 4 - 119: Ф-ДПКТ за $k = 8$ , $l = 4$ и када је $\beta = 50$ .....	126
Слика 4 - 120: Ф-ДПКТ за $k = 8$ , $l = 4$ и када је $\beta = 175$ .....	126
Слика 4 - 121: Ф-ДПКТ за $k = 8$ , $l = 4$ и када је $\beta = 100$ .....	127
Слика 4 - 122: Ф-ДПКТ за $k = 8$ , $l = 3$ и када је $\beta = 175$ .....	127
Слика 4 - 123: Ф-ДПКТ за $k = 8$ , $l = 6$ и када је $\beta = 40$ .....	128
Слика 4 - 124: Општа цилиндарска површ у простору $Oxyz$ .....	129
Слика 4 - 125: Прав цилиндар (лево); коси цилиндар (десно).....	129
Слика 4 - 126: Општа конусна површ (лево); Коноидна површ (десно).....	130
Слика 4 - 127: Прав конус (лево); коси конус (десно).....	131
Слика 4 - 128: Коноид.....	131
Слика 4 - 129: Ротација фокално-директрисне криве у простору $Oxyz$ .....	132
Слика 4 - 130: Ротациона површ настала ротацијом фокално-директрисне криве око праве $s \parallel x$ (лево); $s \parallel y$ (десно).....	132
Слика 4 - 131: Ротациона површ настала ротацијом фокално-директрисне криве око $x -$ осе (лево); $y -$ осе (десно).....	133
Слика 4 - 132: Површ настала ротацијом и translацијом фокално-директрисне криве.....	133
Слика 4 - 133: Огледалска симетрија.....	134
Слика 4 - 134: а) $1/4k$ -ти део фокалне површи ( $k = 3$ ); б) $1/2k$ -ти део директрисне површи ( $k = 6$ ).....	135
Слика 4 - 135: Директрисна калота ( $n = 3$ ).....	135
Слика 4 - 136: Трифокална калота.....	136
Слика 4 - 137: Геркин (арх. Норман Фостер), [138].....	137
Слика 4 - 138: Шестодиректрисна калота.....	138
Слика 4 - 139: Фокално-директрисна површ.....	139
Слика 4 - 140: Елипсоидни свод и његове акустичне карактеристике, [90].....	140
Слика 4 - 141: а) Сферична аберација (горе - сочиво без св.аб; доле - сочиво са св.аб.) б) Рефракционе површи: (а) Декартов овоид; (б) хиперболичка површ; (с) елипсоид.....	140
Слика 4 - 142: Објекти са основом: а) Декартовог овала; б) Паскаловог пужа.....	141
Слика 4 - 143: Паскалов пуж добијен рефлексијом са сферне површи, [146].....	142
Слика 4 - 144: Модели Декартовог конуса: $mR1 + nR2 = \mathcal{S}$ ,.....	142
Слика 4 - 145: Дефиниција Декартовог овала.....	143

Табела 4 - 1: Класификација Веберових површи другог реда.....	119
Табела 4 - 2: Табела класификације кривих са антикаустичним својством које настају након рефлексије/рефракције на одговарајућим површима, [32];.....	141

## Поглавље 5.

Слика 5 - 1: Ердеш-Морделова неједнакост за троугао .....	145
Слика 5 - 2: Егзистенција угаоних области $(\alpha_1) - (\alpha_4)$ .....	146
Слика 5 - 3: Егзистенција правих $y = kx + r, s = 2, 3$ .....	147
Слика 5 - 4: Конусне површи и егзистенција правих $ls - 1: y = kx + r, s = 2, 3$ .....	147
Слика 5 - 5: Проширење $\Delta ABC$ до области $M \subseteq E$ .....	148
Слика 5 - 6: Ердеш-Морделова крива за троугао и област $E$ .....	149
Слика 5 - 7: Ердеш-Морделова крива за једнакостранични троугао .....	150
Слика 5 - 8: а) Неједнакост Бароуа; б) Подела равни странама троугла .....	150
Слика 5 - 9: Означена растојања $d_a$ и означени угаони бисектори $l_a$ .....	151
Слика 5 - 10: Ердеш-Морделова површ $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \pi/3$ .....	153
Слика 5 - 11: Ердеш-Морделова површ $0 < \sphericalangle BAC < \pi/2$ .....	153
Слика 5 - 12: Ердеш-Морделова површ $\sphericalangle BAC = \pi/2$ .....	154
Слика 5 - 13: Ердеш-Морделова површ $\sphericalangle BAC > \pi/2$ .....	154
Слика 5 - 14: Ф-ДП.С2 са геометријском бионичком формом генерисана помоћу: а) правилног шестоугла и б) правилног осмоугла .....	155
Слика 5 - 15: Ф-ДП.П2 са геометријском флуидном формом генерисана помоћу правилног шестоугла.....	156
Слика 5 - 16: Ф-ДП. П2 са геометријском геометријском флуидном формом генерисана помоћу неправилног шестоугла .....	156

## Поглавље 6.

Слика 6 - 1: Архитектонска просторна структура (4-фокална површ).....	158
Слика 6 - 2: Архитектонска просторна структура (4-фокална површ).....	159
Слика 6 - 3: Архитектонска просторна структура (4-директрисна површ).....	160
Слика 6 - 4: Архитектонска просторна структура (фокално-директрисна површ) .....	161
Слика 6 - 5: Лампа (фокално-директрисна површ) .....	161
Слика 6 - 6: Архитектонска просторна структура (Декартов конус).....	162
Слика 6 - 7: Архитектонске просторне структуре (две комбинације мултипликације сегмента Веберове фокалне површ).....	163

---

---

# 1. УВОД

## 1.1. СТАЊЕ ИСТРАЖИВАЊА

Архитектонски објекти XXI века, због развоја нових технологија, пре свега технологија конструкција и нових структурних система, али и због брзог напретка у развоју компјутерске технике, добијају све комплексније геометријске облике. Традиционални ортогонални систем није више неприкосновен, док слободне, закривљене форме или параметарски дизајнирани облици доживљавају своју експанзију у архитектонско-урбанистичком обликовању.

### 1.1.1. Образложење предмета истраживања

Повезано са актуелним трендовима у архитектонско-урбанистичком обликовању, може се уочити бржи развој геометрије као науке. Нацртна геометрија, као једна од грана геометрије која се развила за потребе инжењерске праксе, такође доживљава своју експанзију. Данас је конструктивна обрада геометријских површи олакшана уз коришћење савремених рачунарских алата, али важи и обрнуто, учестала је имплементација конструктивних поступака за формирање нових геометријских 2D и 3D елемената (кривих и површи) у већини компјутерско-графичких програма.

Предмет истраживања овог рада представљају нове форме изведене као геометријска места тачака чија је сума/производ растојања до  $m$  фиксираних тачака (фокуса) и  $n$  фиксираних правих (директриса) константна, као и потенцијал овако генерисаних кривих и површи за примену у архитектури. 2D и 3D елементи са поменутиим геометријским својствима могу се генерисати према унапред задатим захтевима обликовања простора.

Фамилији фокално генерисаних 2D елемената припадају: конусни пресеци, Декартови овали, Касинијеве криве, Максвелове трифокалне криве и Сахадеванове елипсе, док фамилији фокално генерисаних 3D елемената припадају: сфера, неке површи другог реда, Касинијева површ и  $m$ -елипсоид. У овом раду разматрају се фокално генерисани 2D и 3D елементи, затим, дефинишу се нови елементи: директрисно генерисани 2D и 3D елементи, као и нови прелазни тип фокално-директрисно генерисани 2D и 3D елементи. Мењањем малог броја параметара (положаја фокуса и/или директриса) може се знатно утицати на промену облика



---

генерисаног елемента, па се ове форме могу подешавати, прилагођавати и трансформисати према жељеним захтевима архитектонског задатка.

Фокално-директрисно генерисани елементи, због својих геометријски одредивих форми, флексибилности облика и морфолошке компатибилности са изводљивим структурама којима су наклоњени актуелни трендови у пројектовању, дају основ за истраживање њихове погодности за примену у обликовању архитектонско-урбанистичких простора, како у 2D, тако и у 3D.

### 1.1.2. Преглед релевантних истраживања

Почеци истраживачког рада на дисертацији подразумевали су прикупљање научно-стручне литературе из предметне области. Део истраживачких радова, научних радова и студија које се баве овом проблематиком дат је у списку литературе.

Историјски посматрано, истраживања фокалних и директрисних кривих потичу од њихових геометријских конструкција које се јављају у радовима Р. Декарта (Descartes, 1638), Ђ. Касинија, (Cassini, 1675), Џ. К. Максвела (Maxwell, 1846) и Р. Барбаре (Barbara, 2000), док су генезу елипсе, хиперболе и параболе изучавали Еуклид, Архимед и Аполоније (откриће ових конусних пресека приписује се Менехму, око 350 пре н.е.). Примена елиптичких, параболичких и хиперболичких облика у архитектури је значајна. Кружни или овални облик основа објекта коришћен је још код конструисања римских и грчких амфитеатара. А. Гауди је први пут користио у свом дизајну параболичне лукове за улазне капије палате Гуел и Терезијанског колеџа у Барселони. Високим сводовима облика хиперболе, Гауди истиче унутрашњост објекта Саграда Фамилие. Сводови, лукови, прозори и контуре основа архитектонских објеката се и данас наглашавају овим облицима.

Новија истраживања  $m$ -фокалних кривих потичу од П. В. Сахадевана (Sahadevan, 1987) који дефинише појам еглипсе (egglipe) као криве за коју је збир растојања до три фокуса константан. На основу изведене Сахадеванове параметризације, у Индији је патентиран поступак за формирање одводних канала са попречним профилем еглипсе. Сличну параметризацију трифокалне елипсе попут Сахадеванове у специјалном положају фокуса разматрали су А. Варга и Џ. Винцзе (Varga & Vincze, 2008).

Генеза  $m$ -фокалних површи се разматра у раду Ј. Ние, П. Парило и Б. Штурмфелс (Nie, Parrilo & Sturmfels, 2008), где аутори дефинишу  $m$ -елипсоид (алгебарска површ вишег реда) као природно проширење  $m$ -елипсе у тродимензионални простор (2D у 3D). Мултифокалне површи са константном сумом и са константним производом растојања до фокуса, као и алгоритми за приказивање ових имплицитно задатих површи за различите вредности полазне константе и број фокуса, били су предмет истраживања В. М. Пипера (W. M. Pieper, 2006).

---

Данас, примена фокално генерисаних елемената са овоидном формом у архитектури значајна је због њене ергономичности и аеродинамике. Ове форме привлаче пажњу и због своје сведене естетике и елеганције. Објекти који по облику могу имати својство фокалности су: Национални центар за извођачке уметности у Пекингу, арх. П. Андреа, отворен 2007. са називом „Јаје“; Град уметности и науке, комплекс објеката у Валенсији (арх. С. Калатрава) са зградом биоскопа и планетаријума „Велико око“; зграда Геркин и Градска већница у Лондону су ергономичног овоидног облика (арх. Н. Фостер). Јајаста форма ових објеката није изабрана само због визуелног ефекта, већ због енергетске ефикасности и аеродинамичких особина (Kolarević, *Architecture in the Digital Age*, Ch.7: Laws of form, 2003); затим зграда Љиљан у Варшави, архитекте З. Хадид са контуром основе облика 4-фокалне криве.

Развојем компјутерске технике, данас је олакшано генерисање геометријских форми које имају потенцијал за примену у обликовању архитектонско-урбанистичког простора. Недавна истраживања следећих аутора, о општој примени алгебарских површи у архитектонском дизајну, то потврђују: Барцик, Лаб, Лордик (Barczik, Labs & Lordick, 2009, *Algebraic Geometry in Architectural Design*); Барцик, Лордик, Лаб (Barczik, Lordick & Labs, 2011, *Algebraic Expansions: Broadening the Scope of Architectural Design through Algebraic Surfaces*); Ли, Потман, Валнер, Јанг, Ванг (Liu, Pottmann, Wallner, Yang & Wang, 2006, *Geometric Modeling with Conical Meshes and Developable Surfaces*); Потман и Валнер (Pottmann & Wallner, 2008, *The focal geometry of circular and conical mesh*).

Докторске дисертације младих истраживача О. Лаба, Б. Денга и Л. Шија сведоче о актуелности ове теме:

- Labs, O. (2006). *Hypersurfaces with Many Singularities. History-Constructions-Algorithms-Visualization*. Johannes Gutenberg-Universität Mainz, [50];

- Deng, B. (2011). *Special Curve Patterns for Freeform Architecture*. Vienna University of Technology, [19];

- Shi, L. (2013). *Architectural Surfaces and Structures from Circular Arcs*. King Abdullah University of Science and Technology, Kingdom of Saudi Arabia, [99].

У складу са новим, актуелним трендовима у развоју геометрије архитектонске форме, одбрањене су докторске дисертације у нашој земљи:

- Обрадовић, М. (2006). *Конструктивно - геометријска обрада тороидних делтаедара са правилном полигоналном основом*. Универзитет у Београду, Архитектонски факултет, [73];

- Ђукановић, Г. (2012). *Праменови кривих трећег и четвртог реда добијени пресликавањем праменова коника*. Универзитет у Београду, Арх. факултет, [26];

- Мишић, С. (2012). *Конструктивно - геометријско генерисање купола са конкавним полиедарским површима*. Универзитет у Београду, Архитектонски факултет, [67];

- Николић, В. (2015). *Конструктивна обрада геометријских површи и њихова примена у архитектури*. Универзитет у Нишу, Грађевинско-архитектонски факултет, [72].

---

Ова проучавања дају значајан допринос развоју нових геометријских форми које имају потенцијал за примену у обликовању архитектонско-урбанистичких простора.

## 1.2. ПОСТАВЉАЊЕ ЗАДАТАКА И ОДРЕЂИВАЊЕ ЦИЉЕВА ИСТРАЖИВАЊА

Предмет истраживања ове докторске дисертације јесу форме које настају као геометријско место тачака у равни (2D) односно у простору (3D) чији је збир/производ растојања до три или више фиксираних тачака (фокуса) константан или задовољава унапред задате критеријуме. Такође, разматрају се генерисани 2D и 3D елементи са константном сумом/производом растојања до три или више линија (директриса). На основу генезе ових геометријских форми извршена је њихова класификација. Кроз конструктивне поступке и графичку обраду фокално и директрисно генерисаних елемената биће дати начини за њихово визуелно сагледавање и приказивање. Комбиновањем полазних података (фокуса и директриса) дефинисан је нови прелазни тип, фокално-директрисно генерисани елемент, који настаје као геометријско место тачака чија је сума/производ растојања до  $m$  фокуса и  $n$  директриса константна. Испитивање се даље односи на практичну примену ових елемената у архитектонско-урбанистичком обликовању, као и на њихову везу са геометријским неједнакостима Ердеш-Морделовог типа. Анализирањем фокуса/директриса односно објекта/путева са позитивним и негативним тежинама даје се нова интерпретација Ердеш-Морделове неједнакости. На тај начин биће проширена геометријска сазнања о читавој области из теорије кривих, теорије површи, неједнакости многоуглова и нова могућност обликовања у архитектури.

Природа проблема условљава да истраживање буде спроведено у три основна правца, односно дела истраживања:

- први правац истраживања се огледа у прикупљању литературе која се односи на генезу фокално генерисаних елемената и директрисно генерисаних елемената, са циљем увођења нових фокално-директрисно генерисаних елемената;
- други правац истраживања испитује потенцијал и утврђивање конкретних могућности, па самим тим и ограничења примене фокално-директрисно генерисаних елемената у архитектури;
- трећи правац истраживања се бави повезивањем фокално-директрисно генерисаних елемената са кривама у којима важе геометријске неједнакости Ердеш-Морделовог типа и могућности примене ових елемената у архитектури.

---

Предложена тема спада у домен наших научних интересовања и представља логичан наставак истраживања различитих типова равних кривих и кривих које имају овоидни облик, а које је реализовано у оквиру магистарског рада (М. Петровић, 2010, [78]).

### **1.2.1. Основни задаци и циљеви истраживања**

Основни задаци истраживачког рада јесу:

- доћи до нових облика и врста прелазних фокално-директрисно генерисаних елемената на основу синтезе досадашњих сазнања из области фокално генерисаних елемената и директрисно генерисаних елемената;
- приказати генезу и конструктивну интерпретацију фокално-директрисно генерисаних елемената и извршити њихову класификацију;
- показати погодност примене фокално-директрисно генерисаних елемената у обликовању архитектонско-урбанистичких простора;
- показати да постоји веза између геометријских неједнакости конвексних многоуглова и фокално-директрисно генерисаних елемената и да се кроз визуелни приступ проблема сагледа могућност примене ових елемената за моделовање архитектонских форми.

Научни циљ овог истраживања је да се сагледају и истраже геометријска својства добијених фокално-директрисно генерисаних елемената, а затим да се изврши њихова класификација. Флексибилност, изводљивост (захваљујући утемељености на конструктивној геометрији), аеродинамичност (погодује енергетској ефикасности и стабилности објеката), атрактивност, разноврсност и актуелност закривљене форме ових елемената дају предности примене у архитектури.

### **1.2.2. Очекивани резултати и њихова примена**

Научна оправданост овог истраживања почива у чињеници да фокално-директрисно генерисани елементи нису били предмет научног истраживања у доступним изворима како код нас, тако и у свету, нити су примењивани у обликовању архитектонског простора.

Резултати рада би представљали конкретну примену прелазних фокално-директрисно генерисаних елемената у архитектури, са посебним освртом на:

- сегменте површи као модел за обликовање купола, сводова, зидне завесе, самосталне структуре, форме у пејзажној архитектури;
- погодност за реализацију, компатибилност са дијагрид конструктивним системом;

- 
- геометријску дефинисаност (константна сума/производ растојања) даје унифицираност елемената и најмањи утрошак материјала;
  - обликовање архитектонског простора према оптичким и акустичким захтевима;
  - примене у урбанизму.

### 1.3. ПОЛАЗНЕ ХИПОТЕЗЕ ИСТРАЖИВАЊА

У оквиру истраживачког рада, сходно постављеним циљевима, формулисане су следеће хипотезе:

- геометрија фокално-директрисно генерисаних елемената има низ погодности за примену у обликовању архитектонских простора због разноврсности облика, флексибилности (промена малог броја параметара) и оптималности, а сходно формама и потребама пројектног задатка;
- фокално-директрисно генерисани 2D елементи као прелазни тип између фокално и директрисно генерисаних 2D елемената могу се по својој генези класификовати и објединити у једну фамилију;
- фокално-директрисно генерисани 3D елементи као прелазни тип између фокално и директрисно генерисаних 3D елемената могу се по својој генези класификовати и објединити у једну фамилију;
- на основу класификација површи и генерализовањем њихових особина, могуће је поставити принцип генерисања форми које испуњавају одређене захтеве архитектонске струке.

### 1.4. ПРЕГЛЕД САДРЖАЈА РАДА

Докторска дисертација је организована тако да се састоји од 7 поглавља, укључујући уводно и закључно поглавље. Поглавља од 2. до 5. представљају тежиште истраживања и садрже најважније резултате и научни допринос рада. Шесто поглавље садржи практичну анализу и примену фокално-директрисно генерисаних елемената у области архитектуре и дизајна.

У првом поглављу рада уочава се актуелност теме, а затим се образлаже предмет истраживања. Значај и оправданост теме излаже се кроз преглед релевантних научно-истраживачких радова и студија које се баве предметном проблематиком. Постављају се задаци, формулишу се хипотезе и у односу на њих одређују се циљеви истраживања.

---

У другом поглављу рада биће изложене карактеристике фокално-директрисних елемената. У наставку овог поглавља даће се повезаност између већ познатих геометријских форми генерисаних помоћу фокуса и/или директриса (конусних пресека) и архитектонских објеката, а затим генеза нових фокално-директрисних елемената и разноврсност тако насталих облика, њихова флексибилност и прилагодљивост потребама пројектног задатка.

Треће поглавље рада под називом: **ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИ 2D ЕЛЕМЕНТИ КАО ПРЕЛАЗНИ ТИП ИЗМЕЂУ ФОКАЛНО И ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИХ 2D ЕЛЕМЕНАТА** ставља акценат на нову групу прелазних кривих која ће бити основни предмет истраживања. Генерализовањем Ферма-Веберовог оптимизационог проблема даће се основна генеричка дефиниција овог прелазног типа кривих, као и њихова конструктивно-геометријска интерпретација. У првом делу овог поглавља анализираће се прво фокалне, онда директрисне, а затим фокално-директрисне генерисане криве. У другом делу испитаће се њихова геометријска својства, затим ред генерисаних кривих и извршиће се њихова класификација. У наставку рада, разматраће се варијација форме генерисаних 2D елемената у зависности од полазних параметара. Трећи део овог поглавља садржаће анализу погодности облика ових кривих за примену у архитектури.

Четврто поглавље рада под називом: **ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИ 3D ЕЛЕМЕНТИ КАО ПРЕЛАЗНИ ТИП ИЗМЕЂУ ФОКАЛНО И ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИХ 3D ЕЛЕМЕНАТА** представља нову групу прелазних површи која ће бити основни предмет истраживања. У првом делу овог поглавља поставиће се основне генеричке дефиниције фокалне, онда директрисне, а затим фокално-директрисне генерисане површи и извршиће се њихова конструктивно-геометријска интерпретација. У другом делу испитаће се њихова геометријска својства, затим ред генерисаних површи и извршиће се њихова класификација. Трећи део овог поглавља садржаће варијацију форме генерисаних 3D елемената у зависности од полазних параметара. У оквиру четвртог дела разматраће се 3D форме добијене транспозицијом фокално-директрисно генерисаних елемената, док ће пети део овог поглавља садржати анализу погодности облика ових површи за примену у архитектури.

У петом поглављу биће анализирани фокално-директрисно генерисани елементи као графичке интерпретације геометријских неједнакости многоугла. У првом делу разматраће се проширење Ердеш-Морделове неједнакости за троугао до Ердеш-Морделове криве као фокално-директрисно генерисаног 2D елемента, а затим ће се дати просторна интерпретација ове неједнакости троугла. Просторна интерпретација неких геометријских неједнакости многоугла у формирању фокално-директрисно генерисаних елемената биће разматрано у другом делу петог поглавља овог рада.

Шесто поглавље рада даће предлоге примена новоистражених фокално-директрисно генерисаних геометријских форми као просторних структура погодних за примену у градитељској пракси. Наиме, у првом делу анализираће се могућност примене ових геометријских форми у обликовању архитектонско-урбанистичког простора, затим ће се, у другом делу поглавља 6, извојити карактеристични сегмент генерисаног елемента који се може користити као геометријска матрица за моделовање сложенијих архитектонских форми.

На крају, у последњем поглављу рада резимираће се резултати истраживања и провериће се полазни ставови о проблему и предмету истраживања. Такође, даће се оцена полазних хипотеза, као и назнака могућих праваца и потенцијали будућих истраживања.

---

---

## 2. КАРАКТЕРИСТИКЕ ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИХ ЕЛЕМЕНАТА

„*Medeis ageometretos eisito!*“<sup>1</sup>

Крајем XX и почетком XXI века, интересовање за примену структурних форми које су дефинисане алгебарским кривама или површима у архитектури постаје у порасту, због значајне примене рачунара и програмских пакета. Генеришући овакве форме, које могу бити прилагођене потребама пројектног задатка, архитекте и инжењери доприносе иновацији у њиховој струци у смислу естетских, функционалних, али и структурних предности. Разноврсне, ефикасне, лагане архитектонске форме, изводе се тако да се умањује употребни материјал, тј. смањује се количина отпада при њиховој реализацији. Такође, теме попут: активног коришћења изворног материјала из непосредне околине; употребљивости и/или рециклаже материјала при изградњи енергетски ефикасних објеката и моделовања бионичких структура; доводе до повезивања архитектуре са индустријом грађевинских материјала, као и са сродним научним дисциплинама у току процеса стварања комплексних архитектонских објеката.

Употреба математике у естетске сврхе да се постигне пропорцијски склад, посебан изглед или визуелни ефекат архитектонских објеката, датире још из доба Ренесансе. Пропорционални системи који су коришћени у делима архитеката тога доба Леона Батисте Албертија и Андреа Паладија базирани су на:

- аритметичкој средини ( $Ac$ ),
- геометријској средини ( $Gc$ ),
- хармонијској средини ( $Xc$ ) или
- Фибоначијевом низу ( $Fn$ ).

Ови истакнути представници италијанске Ренесансе развили су систем архитектонских пропорција на основу пропорција које су својствене у музичкој скали (Табела 1 - 1 и Табела 1 - 2).

---

<sup>1</sup> натпис који је био постављен над вратима Платонове академије: „*Нико ко не зна геометрију, нека не улази!*“ – превод са латинског.



Табела 1 - 1: Пропорције изведене из Албертијеве приоритетне размере, [113]

Планирана размера	Дужина $l$	Ширина $w$	Тип средине	Висина $h$	Музички еквивалент	$l : h : w$
1:1	1	1	$Ac, Gc, Xc$	1	Унисон, потпуно сазвучје	$1 : 1 : 1$
3:2	6	4	$Ac$	5	Велики трозвук	$6 : 5 : 4$
3:2	15	10	$Xc$	12	Мали трозвук	$15 : 12 : 10$
4:3	8	6	$Ac$	7	Без м.евивалента	$8 : 7 : 6$
2:1	4	2	$Ac$	3	Чиста кварта и чиста квинта	$4 : 3 : 2$
9:4	9	4	$Gc$	6	Две чисте квинте	$9 : 6 : 4$
16:9	16	9	$Gc$	12	Две чисте кварте	$16 : 12 : 9$
3:1	3	1	$Ac$	2	Чиста квинта и октава	$3 : 2 : 1$
8:3	8	3	$Fn$	5	Мала и велика секста	$8 : 5 : 3$
4:1	4	1	$Gc$	2	Две октаве	$4 : 2 : 1$

Табела 1 - 2: Пропорције изведене из Паладијеве приоритетне размере, [113]

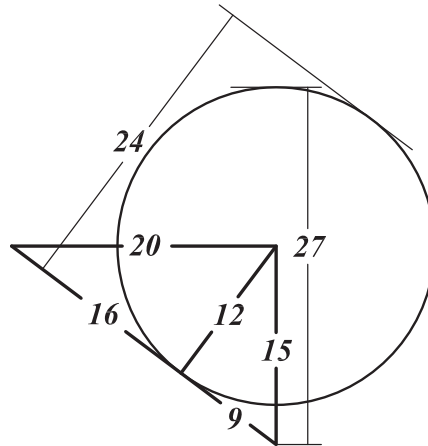
Планирана размера	Дужина $l$	Ширина $w$	Тип средине	Висина $h$	Музички еквивалент	$l : h : w$
круг	1	1	$Ac, Gc, Xc$	1	Унисон, потпуно сазвучје	$1 : 1 : 1$
1:1	3	3	<i>Без средине</i>	4	Чиста кварта (специјална)	$3 : 4 : 3$
3:2	6	4	$Ac$	5	Велики трозвук	$6 : 5 : 4$
3:2	15	10	$Xc$	12	Мали трозвук	$15 : 12 : 10$
4:3	8	6	$Ac$	7	Без м.евивалента	$8 : 7 : 6$
2:1	4	2	$Ac$	3	Чиста кварта и чиста квинта	$4 : 3 : 2$
5:3	5	3	$Ac$	4	Велики трозвук (друга верзија)	$5 : 4 : 3$
$\sqrt{2}:1$	45	32	$Gc$	38	Умањени трозвук	$45 : 38 : 32$

Познато је да се сазвучје два тона које је пријатно за слух назива консонанца (Табела 1 - 3). Најпријатнија консонанца је октава (2:1). Нумеричка веза и поређење између консонантних интервала у систему музичке хармоније и архитектонских пропорција (дужина-ширина собе) је честа тема данашњих истраживања, [113].

Табела 1 - 3: Основни консонантни интервали и остале консонанце

Основне консонанце							Остале (слабе) консонанце				
октава	квинта	кварта	велика секста	велика терца	мала терца	мала секста	мала септима	мелика секунда	мала секунда	мелика септима	мали полутон
2:1	3:2	4:3	5:3	5:4	6:5	8:5	9:5	9:8	10:9	15:8	16:15

Поред везе музике и архитектуре, учестала је и повезаност Питагориног троугла 3-4-5 са пропорцијама архитектонских објеката. Ренесансни архитекта Андреа Паладио користи Питагорин троугао како би дизајнирао собу складне размере тј. божанске пропорције. Анализирајући пропорцију Паладијевих објеката, архитекта и математичар Лајонел Марч пронашао је 7 од десет растојања (димензија) које је Паладио користио приликом планирања Виле Емо, а који директно проистичу из два троугла 3-4-5, односно троугла димензија 9, 12, 15 и 12, 16, 25, [60].



Слика 2 - 1: Седам од десет Паладијевих димензија у планирању Виле Емо, а које директно проистичу из два троугла 3-4-5, [60]

Такође, приликом дефинисања висине идеалне собе, Паладио у својој књизи Четири књиге Архитектуре (*The Four Books of Architecture, 1570.*) у Поглављу XXIII истиче три алтернативна правила (Слика 2 - 2), [102] и [117]:

а) разлика растојања између дужине собе  $l$  и висине  $h$  треба да буде једнака разлици висине  $h$  и ширине  $w$ . Другим речима, висина собе треба да буде половина збира ширине и дужине, тј.

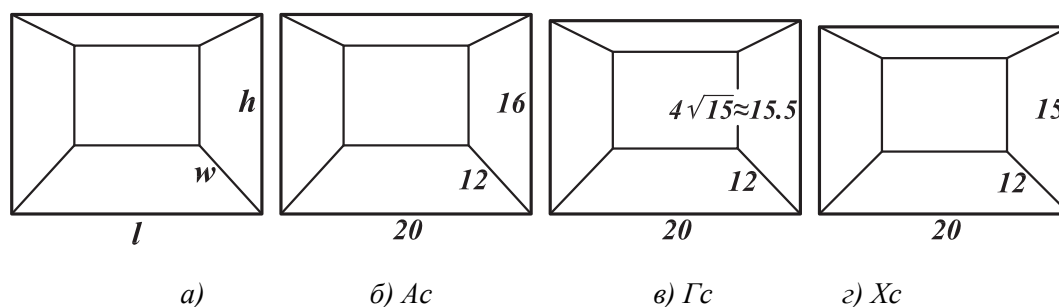
$$l - h = h - w \Leftrightarrow h = \frac{l+w}{2} \quad \text{аритметичка средина (Ас)}$$

б) однос дужине собе  $l$  према висини  $h$  треба да буде исти као однос висине  $h$  према ширини  $w$ . Другим речима, висина собе је једнака корену производа дужине и ширине собе, тј.

$$\frac{l}{h} = \frac{h}{w} \Leftrightarrow h = \sqrt{lw} \quad \text{геометријска средина (Гс)}$$

в) количник разлике дужине собе  $l$  и висине  $h$  и разлике висине  $h$  и ширине  $w$  треба да буде једнак количнику дужине  $l$  и ширине  $w$ . Другим речима висина собе  $h$  је одређена геометријским правилом за хармонијску средину, тј.

$$\frac{l-h}{h-w} = \frac{l}{w} \Leftrightarrow h = \frac{2}{\frac{1}{l} + \frac{1}{w}} \quad \text{хармонијска средина (Хс)}$$



Слика 2 - 2: Схематски приказ три алтернативна правила у дизајну Паладијеве идеалне собе

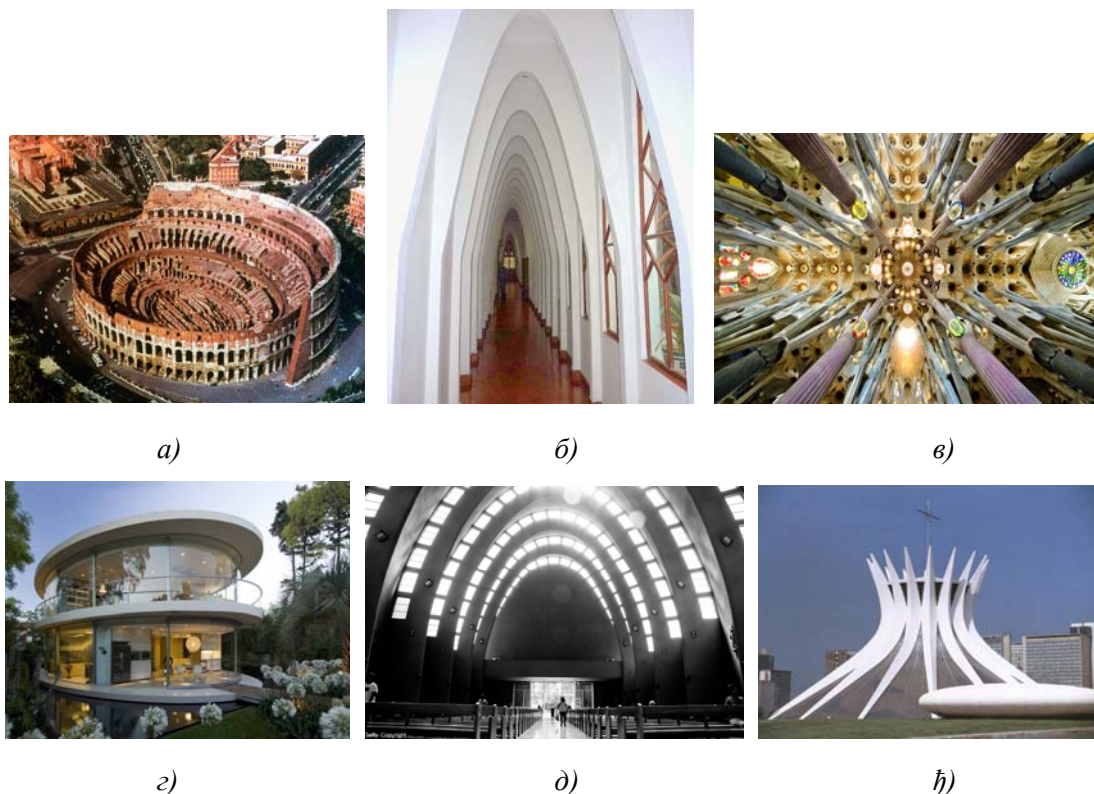
У складу са претходно наведеним правилима у дизајну Паладијеве собе, овај рад има за циљ да пружи визуелни приказ проширења фамилије фокално и директрисно генерисаних геометријских форми које у себи садрже правило аритметичке и геометријске средине, а затим да се дефинише нови прелазни тип фокално-директрисно генерисани 2D и 3D елементи са константном или променљивом сумом/производом растојања до фокуса и директриса који такође садрже поменута правила. Један од циљева је и да се из ових фамилија са разноврсним облицима пронађу такве геометријске форме које својом флексибилношћу могу да се прилагоде потребама пројектног задатка.

## 2.1. Фокално и директрисно генерисани елементи у обликовању архитектонско-урбанистичког простора

По генези најједноставнија фокална крива најчешће коришћена у архитектури, јесте круг. Круг је алгебарска крива другог реда. Овој фамилији кривих припадају конусни пресеци (круг, елипса и хипербола као фокалне криве и парабола као фокално-директрисна крива) који такође имају значајну примену у архитектури и урбанизму. Примена елиптичких, параболичких и хиперболичких облика у архитектури је значајна. Повезаност између геометријских истраживања и архитектонског дизајна почиње са првим конструкцијама зграда у римској култури које се називају амфитеатри. Ови споменици културе сведоче да се примењује нова геометријска шема за архитектонско пројектовање (Слика 2 - 3 а).

Почетком другог века пре нове ере, у јужној Италији, појављују се објекти са елиптичким обликом. Метод једноставног генерисања круга и елипсе помоћу чиода и потега, омогућио је примену ових облика основа објеката. Данас, најчешће постављено питање је: „да ли је неки римски или грчки амфитеатар елиптичан или овалан?“ и зато се велики број архитеката и математичара бави конструктивном и математичком анализом кривих које апроксимирају облик основа ових објеката, [7], [12], [25], [91] - [93]. Архитекта Антонио Гауди је први пут користио у свом дизајну параболичне лукове за улазне капије палате Гуељ и Терезијанског колица (истовремено школа и самостан реда сестара свете Терезе) у Барселони, [123].

Високим сводовима параболичног облика Гауди истиче унутрашњост хола Терезијанског колеца (Слика 2 - 3 б), док високим сводовима облика хиперболе истиче унутрашњост објекта Саграда Фамилиа (Слика 2 - 3 в). Сводови, лукови, прозори и контуре основа архитектонских објеката се и данас наглашавају овим облицима (Слика 2 - 3 г-ђ).



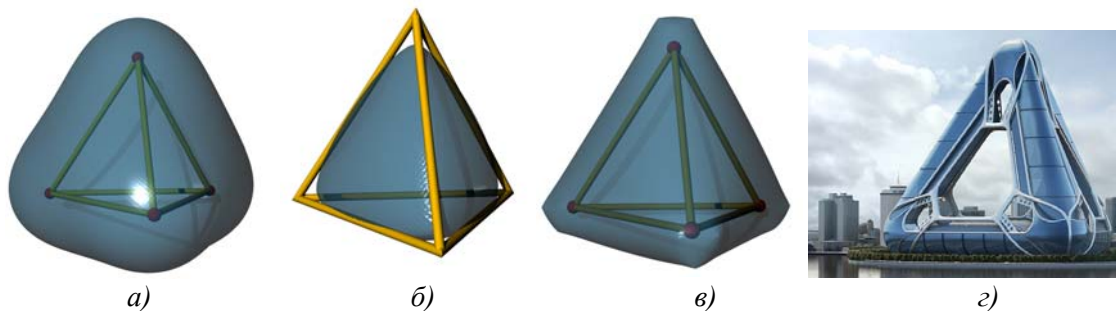
Слика 2 - 3: Примена конусних пресека у архитектури:

- а) Колосеум, Рим, Италија, [124];
- б) Хол Терезијанског колеца, Барселона, Шпанија, [125];
- в) Саграда Фамилиа, Барселона, Шпанија, [126];
- г) Кућа са елипсастом основом, Буонас Ајрес, Аргентина, [127];
- д) Катедрала са параболичним луковима, Цилан, Чиле, [128];
- е) Катедрала са хиперболичким луковима, Бразилија, Бразил, [129]

Поред најстаријих грађевина чији остаци још увек постоје, римских и грчких амфитеатара са основом круга, елипсе или овала, и данас велики број модерних објеката има овакву основу или изглед. Ергономични, овални изглед објекта, који је дизајнирао француски архитекта Пол Андреу, има кинески Национални центар за извођачке уметности у Пекингу. Такође, јајасту форму са аеродинамичним особинама имају зграда Геркин и Градска већница у Лондону, архитекте сер Нормана Фостера.

## 2.2. Генеза фокално-директрисно генерисаних елемената и разноврсност тако насталих облика, њихова флексибилност и прилагодљивост потребама пројектног задатка

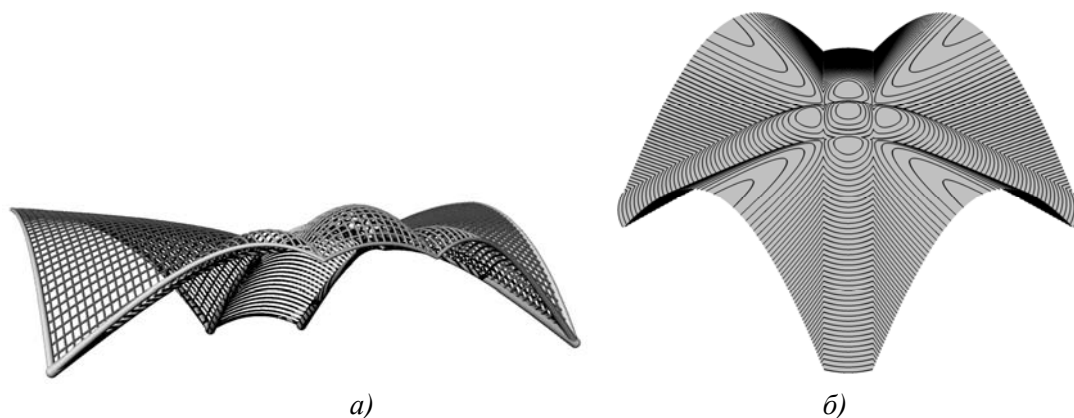
Генерисана површ са константним производом чији су фокуси поклопљени са теменима тетраедра (Слика 2 - 4 а) визуелно има сличну геометријску форму као и директрисно генерисана површ са константном сумом чије су директрисе поклопљене са ивицама тетраедра (Слика 2 - 4 б). Облик ових површи подсећа на „плутајући град НОЈЕ“ (‘NOAH’ - new orleans arcology habitat, [130]). Ова мегаструктура представља предлог решења проблема који имају приобални градови и истраживање које указује на нови урбани дизајн. Архитекта Кевин Шопфер је дао предлог ове урбане аркологије (спој архитектуре и екологије) као идејни пројекат града са могућношћу да прими 40000 људи, који би могао да се изведе на реци Мисисипи, УСА. Модерно, архитектонско-урбанистичко решење „плутајућег града Ноје“ може се по облику повезати и са фокално-директрисно генерисаном површи (Слика 2 - 4 в). Површ је генерисана помоћу 4 фокуса (темена тетраедра) и 6 директриса (ивице тетраедра) и има константну суму растојања до њих.



Слика 2 - 4: Генерисане површи и идејни пројекат мегаструктуре

- а) Фокално генерисана површ;
- б) Директрисно генерисана површ;
- в) Фокално-директрисно генерисана површ;
- г) Плутајући град НОЈЕ, Мисисипи, УСА, [130]

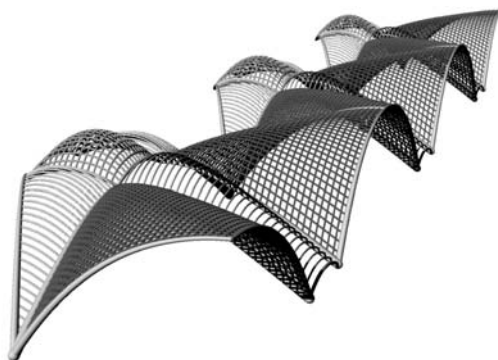
Велики број површи које ће бити генерисане и приказане у оквиру овог рада, било да су фокално, директрисно или фокално-директрисно дефинисане, могу да се посматрају самостално, као нови објекти. Осим тога, постоји могућност да се посматрају и неки изабрани делови површи (Слика 2 - 5 а), а такође, могу се добити нове структурне форме, ако се делови ових површи мултиплицирају (Слика 2 - б). Приказани део површи припада групи површи која настаје као визуелна интерпретација Ердеш-Морделове неједнакости за квадрат (Слика 2 - 5 б). Моделовани део површи подсећа на птицу раширених крила (Слика 2 - 5 а).



Слика 2 - 5: Моделоване фокално-директрисне површи

- a) Део фокално-директрисне површи као самостална арх. површ;
- б) Фокално-директрисно генерисана површ

Ефекат скелетног система на структурно формирање грађевине најчешће користи шпански архитекта Сантјаго Калатрава.



Слика 2 - 6: Мултиплицирање фокално-директрисне површи

Стални развој односа између структуралне морфологије, својстава материјала, производне технологије и архитектонске форме доприноси да се убрза развој нових метода и алата чак и више, а нарочито се очекује да дигитална револуција суштински промени дизајн и стил објеката, [65].

---

---

### 3. ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИ 2D ЕЛЕМЕНТИ КАО ПРЕЛАЗНИ ТИП ИЗМЕЂУ ФОКАЛНО И ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИХ 2D ЕЛЕМЕНАТА

„Мисли геометријски, докажи алгебарски“<sup>2</sup>

На почетку овог поглавља рада, да би се што детаљније извршила анализа и конструктивно-геометријска поставка фокално, затим директрисно генерисаних елемената, а онда и њиховог прелазног типа фокално-директрисно генерисаних 2D елемената, кренуће се од једног познатог геометријског проблема који је поставио француски математичар Пјер де Ферма у XVII веку:

„Пронаћи тачку у троуглу такву да је сума њеног растојања до три темена полазног троугла минимална.“<sup>3</sup>

Геометријско решење овог проблема први је дао Галилејев ученик, италијански физичар и математичар Еванђелиста Торичели, 1640. године. Торичелијево решење се састојало у конструисању три једнакостранична троугла на странама полазног троугла и три описана круга око њих, [104]. Пресек описаних кругова даје решење Фермаовог проблема тј. Ферма-Торичелијеву тачку  $F$  (Слика 3 - 1). Ова тачка је у литератури позната као пета значајна тачка троугла, [63] и прва тачка у троуглу која је откривена након времена доминације Грка везана за геометријска открића, [110].

Следећи корак у истраживању Фермаовог проблема дао је 1647. године Бонавентура Кавалиери који показује да дужи које спајају Ферма-Торичелијеву тачку с теменима троугла (Слика 3 - 1, кратке испрекидане линије) образују угао од  $120^\circ$ . Галилејев и Торичелијев ученик, Винћенцо Вивиани, италијански математичар и физичар, 1659. године, забележио је Торичелијево решење. Сто година касније, енглески математичар Томас Симпсон, поједностављује Торичелијеву конструкцију тако што спаја одговарајуће тачке  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  једнакостраничних

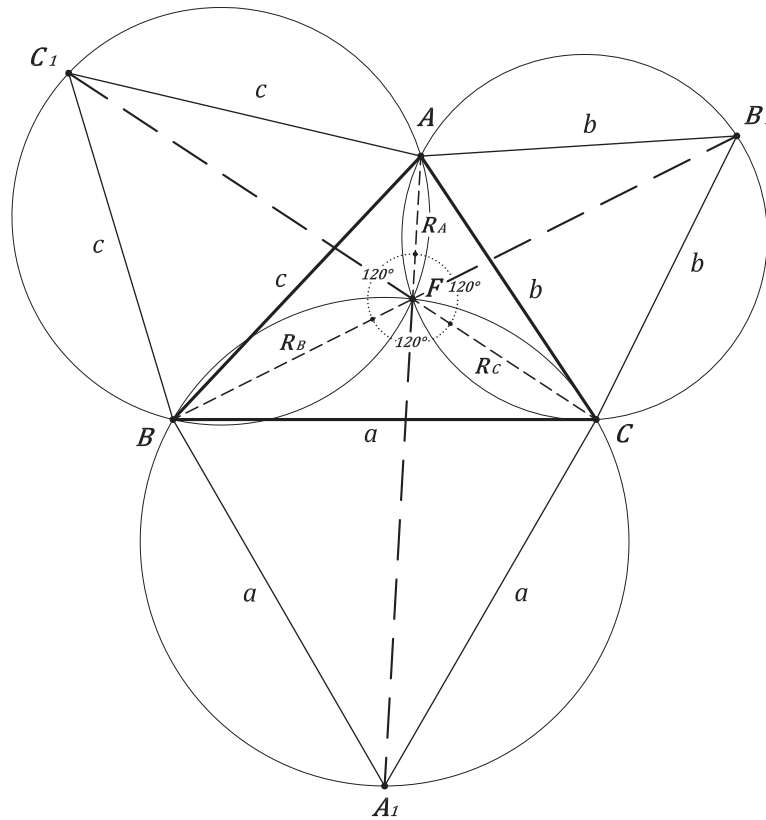
---

<sup>2</sup> John Tate: “*Think geometrically, prove algebraically*”

<sup>3</sup> Фермаов проблем на оригиналном латинском језику: „*datis tribus punctis, quartum reperire, a quo si ducantur tres rectae ad data puncta, summa trium harum rectorum sit minima quantitas*”, [33].

---

троуглова са полазним теменима троугла  $ABC$  (Слика 3 - 1, испрекидане линије). Пресечна тачка Симпсонових линија је Фермаова тачка  $F$ .



Слика 3 - 1: Графички приказ Торичелијеве конструкција Фермаове тачке

Шкотски физичар и математичар Џејмс Кларк Максвел је свој први научни рад [61] написао из области механичког значења цртања математичких кривих [36]: елипса-крива са два фокуса и кривих са више од два фокуса. Максвел уводи трифокалну елипсу са следећом једначином

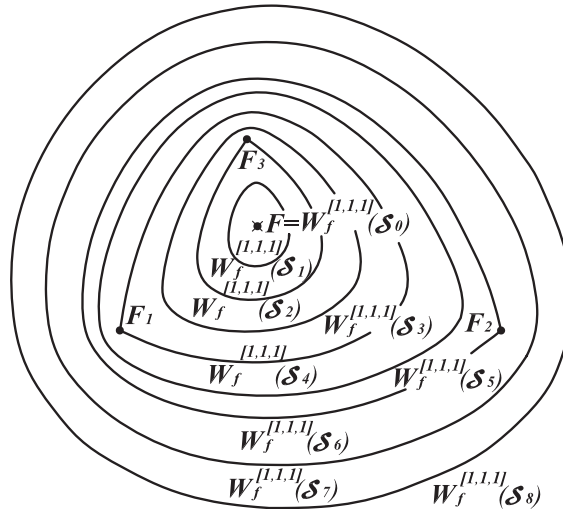
$$(3 - 1) \quad W_f^{[1,1,1]}(\mathcal{S}): R_A + R_B + R_C = \mathcal{S}$$

где су  $R_A = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}$ ,  $R_B = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}$  и  $R_C = \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2}$  Еуклидска растојања тачке  $T(x, y)$  до фокуса  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$  и  $C(x_C, y_C)$  и задати параметар  $\mathcal{S} > 0$ .

Математички гледано, Максвелова трифокална елипса садржи пропорционални склад попут Паладијевог, јер се по својој генези може повезати са аритметичком средином. Трифокална елипса представља и добар геометријски модел за решавање Ферма-Торичелијевог проблема, наиме Ферма-Торичелијева тачка  $F = W_f^{[1,1,1]}(\mathcal{S})$  је одређена са минималном вредношћу параметра  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$  (Слика 3 - 2). Ако је  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$  трифокална елипса не постоји, а за  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  је недегенерисана јајаста крива. У том случају, за ову криву користе се следећи називи: египска, трисоид, полиелипса, трифокална крива, мултифокална затворена крива, [29], [44], [62], [95], [98].



Ове криве имају овоидни облик и њихове конструкције су биле познате још у седамнаестом веку, али у односу на Декартове конструкције мултифокалних кривих, Максвелова конструкција је дала извесно поједностављење, [22] и [55].



Слика 3 - 2: Графички приказ трифокалних кривих  $W_f^{[1,1,1]}(S)$ :  $R_A + R_B + R_C = S$  за различите вредности параметра  $S$

Почетком XX века, аустријски економиста Алфред Вебер у свом раду [116] уопштава Фермаов проблем, тј. дефинише тежински проблем са три тачке. Веберово проширење Фермаовог проблема гласи:

„Наћи локацију фабрике тако да су минимизирани транспортни трошкови од фабрике до три групе снабдевача сировинама, уколико се одговарајућа растојања множе са тежинама посматраних објеката који мере њихов значај“

и подразумева следећу једначину

$$(3 - 2) \quad W_f^{[w_A, w_B, w_C]}(S): \quad w_A R_A + w_B R_B + w_C R_C = S$$

где су  $w_A, w_B$  и  $w_C$  позитивни реални бројеви, Веберови тежински фактори (коефицијенти).

Генерализовање проблема који су дали Ферма и Вебер, тако што се узима већи број полазних фиксираних тачака/локација фабрика, доводи до тога да се сада разматрају мултифокалне криве са тежинским коефицијентима. Ферма-Веберов скуп тачака  $F = W_f^{[w_A, w_B, w_C]}(S)$  је одређен са минималном вредношћу параметра  $S = S_0$ . За вредност  $S > S_0$ , геометријска места тачака у равни односно добијене криве имају везу са локацијским проблемима и називају се криве са једнаким утрошком (тј. „isocost“ криве) или изолиније. Решавање овог Ферма-Веберовог оптимизационог проблема је данас актуелно, због велике примене у локацијској анализи. Сами локацијски проблеми имају велику примену у урбанизму, архитектури, саобраћају, индустрији, [30], [41], [44], [62], [63], [77], [79], [106], [107], [110] и [111].

Након претходног историјског осврта и већ постојећег научног истраживања које је везано за решавање Ферма-Веберовог локацијског проблема за већи број фиксираних тачака, поставићемо следећу геометријско-алгебарску дефиницију мултифокалних кривих:

**ВЕБЕРОВА ФОКАЛНА КРИВА** представља геометријско место тачака (ГМТ) у равни чија је сума скалираних растојања до  $k$  фиксираних тачака (фокуса) константна:

$$(3 - 3) \quad W_f^{[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]}(\mathcal{S}): \quad \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \dots + \alpha_k R_k = \mathcal{S}, \quad k \geq 1$$

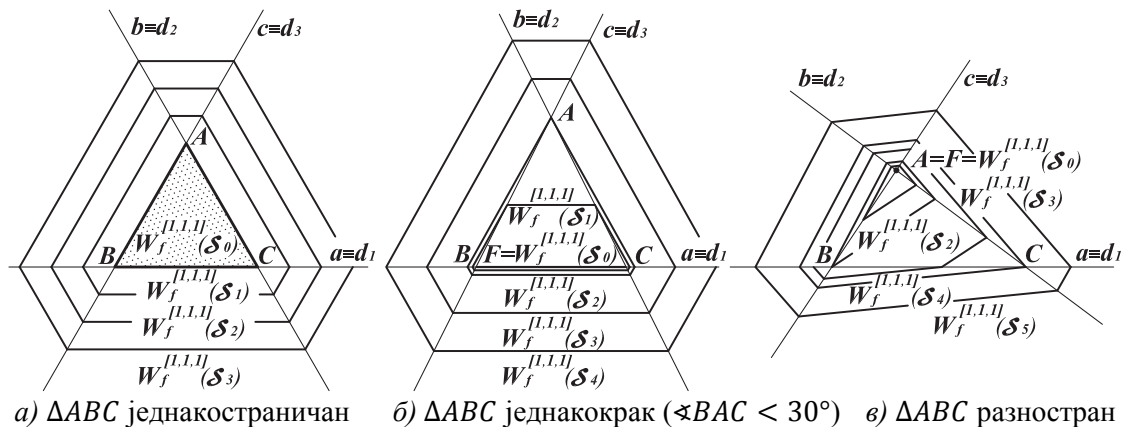
где су  $R_1, R_2, \dots, R_k$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y)$  до фокуса  $F_1, F_2, \dots, F_k$ , респективно, а фактори скалирања  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  су Веберови тежински коефицијенти и  $\mathcal{S} = const.$

Ако су фактори скалирања јединични и једнаки:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 1$  тада се крива назива **К-ФОКАЛНА КРИВА**.

Геометријски посматрано, у равни је тачка дуална правој и обрнуто, [24]. Ако узмемо у обзир ову чињеницу, тада се аналогно Фермаовом проблему за темена троугла, може дефинисати следећи проблем:

„пронаћи тачку у равни троугла такву да је сума њеног растојања до три фиксиране праве (директрисе) које пролазе кроз темена полазног троугла минимална“

и тада крива дефинисана изразом  $W_d^{[1,1,1]}(\mathcal{S}): r_a + r_b + r_c = \mathcal{S}$  се назива тридиректрисна крива. Фермаов скуп тачака  $F = W_d^{[1,1,1]}(\mathcal{S}_0)$  за три линије је дефинисао Рој Барбара у раду [9], док се на следећој слици по први пут даје графички приказ Барбариног алгебарског решења (Слика 3 - 3).



Слика 3 - 3: Графички приказ тридиректрисних кривих  $W_d^{[1,1,1]}(\mathcal{S}): r_a + r_b + r_c = \mathcal{S}$  за различите вредности параметра  $\mathcal{S}$

Такође, и овај проблем може се уопштити и проширити са Веберовим тежинским коефицијентима при чему улогу растојања  $R_A, R_B, R_C$  до локација фабрика/фокуса преузимају растојања  $r_a, r_b, r_c$  до путева-правих (директриса).

Генерализација овог проблема се односи на произвољан број полазних правих/путева и аналогно претходној, сада се уводи следећа дефиниција:

**ВЕБЕРОВА ДИРЕКТРИСНА КРИВА** представља ГМТ у равни чија је сума скалираних растојања до  $k$  фиксираних правих (директриса) константна:

$$(3 - 4) \quad W_d^{[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k]}(\mathcal{S}): \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \dots + \beta_k r_k = \mathcal{S}, \quad k \geq 1$$

где су  $r_1, r_2, \dots, r_k$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y)$  до директриса  $d_1, d_2, \dots, d_k$ , респективно, а фактори скалирања  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  су Веберови тежински коефицијенти и  $\mathcal{S} = const.$

Ако су фактори скалирања јединични и једнаки:  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 1$  тада се крива назива **К-ДИРЕКТРИСНА КРИВА**.

Фермаов скуп тачака  $F = W_d^{[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k]}(\mathcal{S}_0)$  за  $k$  линија дефинисао је Рој Барбара, 2000. год. у свом раду са називом Ферма-Торичелијеве тачке за  $n$  линија, [9].

Последње године прошлог века, амерички математичар Џејмс Паркс у свом раду са називом: „Решавање геометријских проблема у свакодневном животу“ [77], поставља следећи проблем:

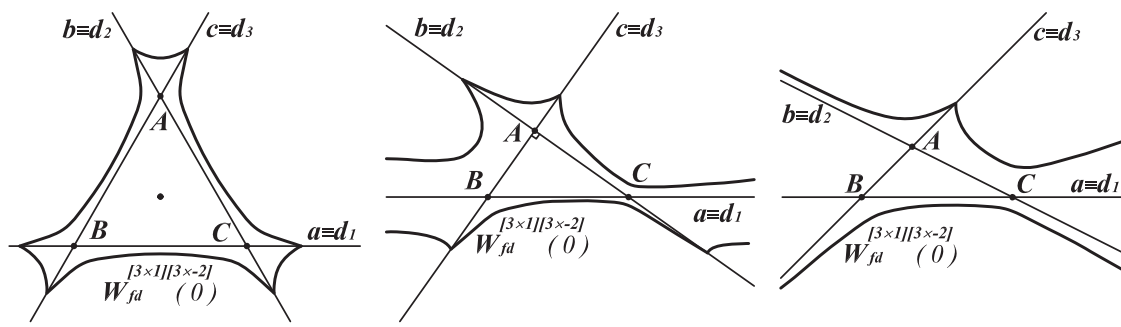
„Који скуп путева/комуникационих линија је бржи/краћи?“

који се своди на Ердеш-Морделову неједнакост:  $R_A + R_B + R_C \geq 2(r_a + r_b + r_c)$ . Парков проблем повезује претходна два: Фермаов проблем за три тачке и Веберов проблем за три праве.

Потпуно решење овог проблема у равни троугла је могуће ако се формира нови прелазни тип кривих, Веберова фокално-директрисна крива. Дефиницију и алгебарско-геометријске особине Ердеш-Морделове криве:

$$(3 - 5) \quad W_{fd}^{[3 \times 1][3 \times -2]}(0): R_A + R_B + R_C - 2(r_a + r_b + r_c) = 0$$

разматрали су Б. Малешевић, М. Петровић, М. Обрадовић и Б. Попконстантиновић у раду [57] и доказали да се она састоји из уније делова алгебарских кривих осмог реда (Слика 3 - 4).



а)  $\triangle ABC$  једнакостраничан    б) разностран ( $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ )    в) разностран ( $\sphericalangle BAC > 90^\circ$ )

Слика 3 - 4: Графички приказ Ердеш-Морделове криве за различите полазне  $\triangle ABC$

Након ове везе која је успостављена између 3 фокуса и 3 директрисе, могуће је сада и извршити генерализацију претходно изложеног проблема за  $m$  тачака и  $n$  правих и зато уводимо следећу, нову дефиницију:

**ВЕБЕРОВА ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНА КРИВА** представља ГМТ у равни чија је сума скалираних растојања до  $m$  фиксираних тачака (фокуса) и  $n$  фиксираних правих (директриса) константна:

$$(3 - 6) \quad W_{fd}^{[\alpha_1, \dots, \alpha_m][\beta_1, \dots, \beta_n]}(\mathcal{S}): \quad \alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_m R_m + \beta_1 r_1 + \dots + \beta_n r_n = \mathcal{S}, \quad m, n \geq 1,$$

где су  $R_1, \dots, R_m$  и  $r_1, \dots, r_n$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y)$  до фокуса  $F_1, \dots, F_m$ , и до директриса  $d_1, \dots, d_n$ , респективно, а фактори скалирања  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$  су Веберови тежински коефицијенти (бар један коефицијент не сме да буде нула) и  $\mathcal{S} = const$ .

Најмања вредност параметра  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$  за коју је геометријско место тачака (3 - 6) непразан скуп представља Ферма-Веберов скуп тачака  $F = W_{fd}^{[\alpha_1, \dots, \alpha_m][\beta_1, \dots, \beta_n]}(\mathcal{S}_0)$ . Ако су сви Веберови тежински фактори јединични тада све претходно дефинисане криве садрже пропорционални склад попут Паладијевог, јер се по својој генези могу повезати са аритметичком средином растојања свих тачака до фокуса и до директриса. Аналогно, можемо дефинисати фокалне криве које садрже друго пропорционално правило (геометријска средина). Ове фокалне криве је први разматрао Ђовани Доменико Касини, 1675 године, [96], [119] и [120]:

**К-ФОКАЛНА КАСИНИЈЕВА КРИВА** представља ГМТ у равни чији је производ растојања до  $k$  фиксираних тачака константан. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за генерализовану Касинијеву криву:

$$(3 - 7) \quad C_f(\mathcal{S}): \quad R_1 \cdot R_2 \cdot \dots \cdot R_k = \mathcal{S}^k, \quad k \geq 1$$

где су  $R_1, R_2, \dots, R_k$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y)$  до фокуса  $F_1, F_2, \dots, F_k$ , респективно и  $\mathcal{S} = const, \mathcal{S} \geq 0$ .

За фиксиране праве као дуални елемент тачке, можемо дефинисати нове криве – директрисне криве Касинијевог типа. Ове криве до сада нису разматране.

**К-ДИРЕКТРИСНА КРИВА КАСИНИЈЕВОГ ТИПА** представља ГМТ у равни чији је производ растојања до  $k$  фиксираних директриса константан. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за  $k$ -директрисну криву Касинијевог типа:

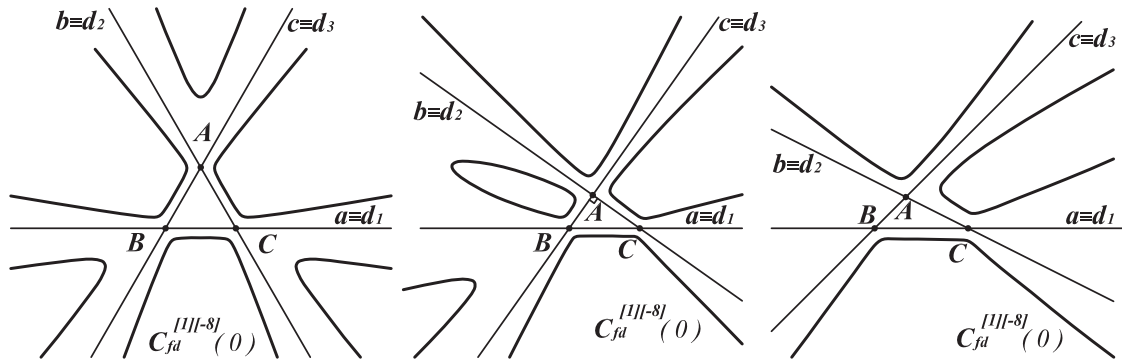
$$(3 - 8) \quad C_d(\mathcal{S}): \quad r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_k = \mathcal{S}^k, \quad k \geq 1$$

где су  $r_1, r_2, \dots, r_k$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y)$  до директриса  $d_1, d_2, \dots, d_k$ , респективно и  $\mathcal{S} = const, \mathcal{S} \geq 0$ .

Неједнакост Ердеш-Мордела за троугао повезује трифокалну и тридиректрисну криву, док неједнакост Чајлда за троугао:  $R_A \cdot R_B \cdot R_C \geq 8 \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c$  повезује трифокалну и тридиректрисну криву Касинијевог типа. Дефиниција и графички приказ Чајлдове криве

$$(3 - 9) \quad C_{fd}^{[1] [-8]}(0): R_A \cdot R_B \cdot R_C - 8 \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = 0$$

је по први пут дата у овом раду (Слика 3 - 5).



а)  $\triangle ABC$  једнакостраничан б) разностран ( $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ ) в) разностран ( $\sphericalangle BAC > 90^\circ$ )

Слика 3 - 5: Графички приказ Чајлдове криве за различите полазне троуглове  $\triangle ABC$

Након дефинисања Чајлдове криве за троугао која представља прелазни тип између фокалних и директрисних кривих Касинијевог типа, можемо сада дати и њену генерализацију тј. дефинисати Веберову криву Касинијевог типа за  $m$  тачака и  $n$  правих:

**ВЕБЕРОВА ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНА КРИВА КАСИНИЈЕВОГ ТИПА** представља ГМТ у равни чији је збир производа скалираних растојања до  $m$  фокуса и  $n$  директриса константан. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за Веберову фокално-директрисну криву Касинијевог типа:

$$(3 - 10) \quad C_{fd}^{[\alpha] [\beta]}(S): \alpha R_1 \cdot \dots \cdot R_m + \beta r_1 \cdot \dots \cdot r_n = S, \quad m, n \geq 1,$$

где су  $R_1, \dots, R_m$  и  $r_1, \dots, r_n$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y)$  до фокуса  $F_1, \dots, F_m$ , и до директриса  $d_1, \dots, d_n$ , респективно, а фактори скалирања  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  су Веберови тежински коефицијенти (бар један коефицијент не сме да буде нула) и  $S = const, S \geq 0$ .

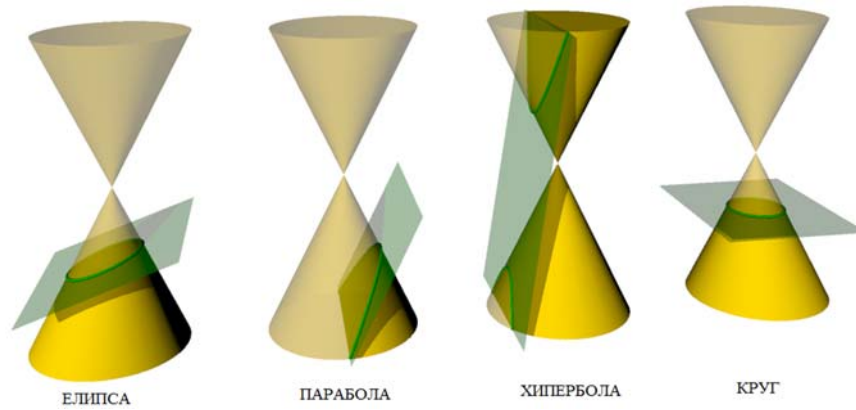
### 3.1. Конусни пресеци као фокално и фокално-директрисно генерисани 2D елементи

Ради комплетнијег сагледавања Веберових фокално-директрисно генерисаних 2D елемената кренућемо од најједноставнијих примера – конусних пресека. Конусни пресеци или конике настају приликом пресека равни и правог кружног конуса (Слика 3 - 6). Генезу елипсе, хиперболе и параболе изучавали су Еуклид, Архимед и Аполоније, мада се откриће конусних пресека приписује Менехму, око 350 пре н.е.

Конике су алгебарске криве другог реда и дефинисане су у  $Oxy$  равни следећим алгебарским једначинама:

$$(3 - 11) \quad Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$$

где су  $A, B, C, D, E$  и  $F$  реални коефицијенти ( $A, B, C \neq 0$ ).



Слика 3 - 6: Конусни пресеци

Ред алгебарске криве одређен је бројем пресека те криве са једном правом. Разред криве је највећи могући број тангената који се могу поставити из тачке ван криве. Ако криве имају исти ред и разред онда те криве имају одређен степен, [96]. Коника као алгебарска крива другог степена (ред и разред конике је једнак и износи два) представља: ГМТ у равни чија је сума/разлика растојања до два фокуса константна; или ГМТ у равни за које важи да је сума/разлика растојања до фокуса и скалираног растојања до директрисе константна. Фактор скалирања растојања тј. Веберов тежински коефицијент је задат ексцентрицитетом конике. Другим речима, конике су родоначелници фамилије фокално-директрисно генерисаних 2D елемената. Конике су елипса, хипербола и парабола. У специјалном случају равнoг пресека конуса може се добити и круг (специјални случај елипсе).

Надаље, у овом поглављу рада, конусни пресеци су детаљно анализирани као фокално и фокално-директрисно генерисани 2D елементи тако што се приликом генерисања ових познатих кривих у Еуклидској равни по први пут дефинише геометријска област у којој оне егзистирају. Геометријска област за егзистенцију ових кривих настаје услед једноставне трансформације - квадрирање полазних једначина коника и када се за растојање до фокуса  $R_1$  и растојање до директрисе  $r_1$  узимају Еуклидска растојања. Метод за издвајање лукова алгебарских кривих другог реда објављен је у секцији 2.1. рада [58], (аутори: Б. Малешевић, М. Петровић, Б. Бањац, И. Јововић и П. Јовановић), док се у оквиру ове тезе даје свеобухватнији геометријско-конструктивни поступак за издвајање лукова коника када су оне дефинисане као Веберове фокално-директрисно генерисане криве. Услови који важе за издвајање лукова коника су дати алгебарском једначином, као и графичким приказом на одговарајућим сликама (области су визуелно прекривене тачкицама). С обзиром да су овако генерисане криве дате у имплицитном запису, прецизним дефинисањем алгебарских услова области егзистенције кривих и њиховом имплементацијом у компјутерској

графици олакшало би се и убрзало њихово исцртавање. Такође, у наредној секцији рада се по први пут дефинише и визуелно сагледава Ферма-Торичелијев скуп тачка за конике. Почећемо од уобичајене дефиниције елипсе као двофокалне криве:

**ЕЛИПСА** представља ГМТ у равни чија је сума растојања до две фиксиране тачке константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за елипсу:

$$(3 - 12) \quad W_f^{[1,1]}(\mathcal{S}): R_1 + R_2 = \mathcal{S}, \quad \mathcal{S} > 0$$

где су  $R_1$  и  $R_2$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y)$  до две фиксиране тачке (фокуса)  $F_1(-c, 0)$  и  $F_2(c, 0)$ ,  $c > 0$ . Нека је  $\mathcal{S} = 2a$ , где је  $a$  велика полуоса елипсе тада је мала полуоса одређена са  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  ( $a \geq b > 0$ ). Ова Веберова фокална крива у специјалном случају (тежински фактори су једнаки 1) са једначином (3 - 12) може се приказати у облику:

$$(3 - 13) \quad \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

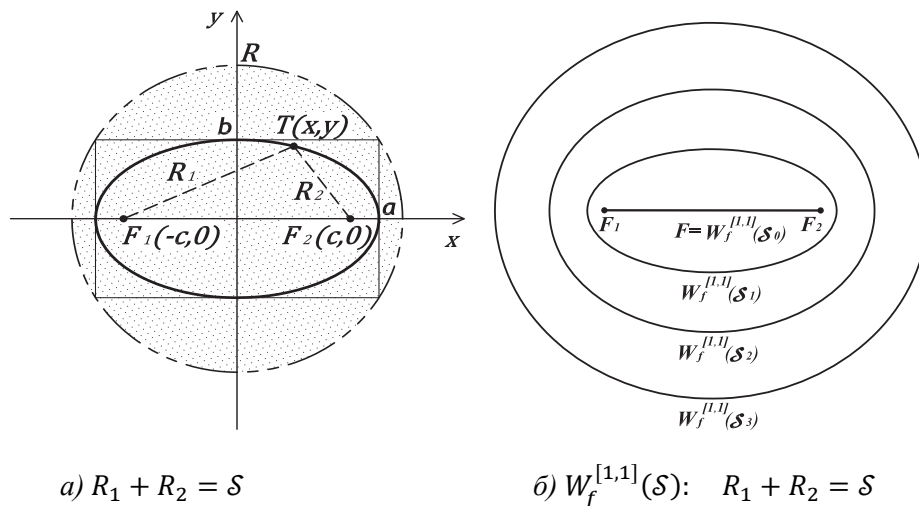
Првим квадрирањем ове једначине за тачке елипсе добијамо услов:

$$(3 - 14) \quad x^2 + y^2 \leq R^2$$

где је  $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Другим квадрирањем настаје канонски облик елипсе:

$$(3 - 15) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Елипса, као двофокална крива која задовољава услов (3 - 14), јесте генерисани скуп тачака  $T(x, y)$  који се налази у унутрашњости круга  $x^2 + y^2 = R^2$  (Слика 3 - 7 а). Геометријски посматрано, овај круг је описан око тангентног правоугаоника елипсе.

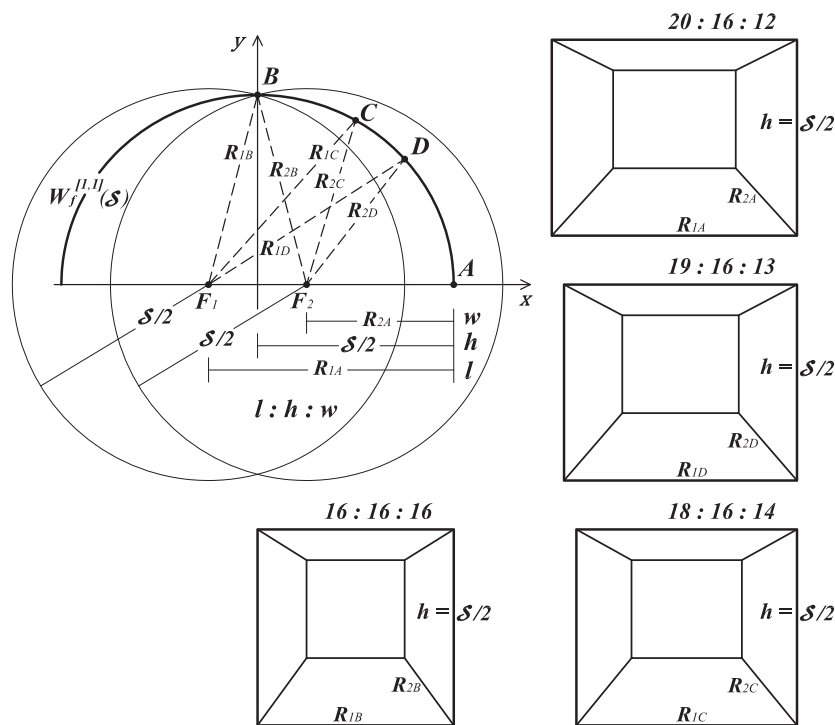


Слика 3 - 7: а) Елипса као двофокално генерисана крива  
б) Графички приказ Ферма-Торичелијевог скупа тачака елипсе  $F = W_f^{[1,1]}(\mathcal{S}_0)$



Ферма-Веберов скуп тачака елипсе  $F = W_f^{[1,1]}(\mathcal{S})$  је одређен за вредност параметра  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = 2c$  и представља двоструку дуж  $\overline{F_1F_2}$ . За све вредности параметра  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  елипса је недегенерисана фокална крива другог степена (Слика 3 - 7 б).

Анализирањем елипсе можемо да уочимо пропорционални склад попут Паладијевог, јер се по својој генези може повезати са аритметичком средином свих растојања до фокуса. Такође, елипса са великом полуосом дужине  $a = \mathcal{S}/2$  и са фокусима  $F_1(-c, 0)$  и  $F_2(c, 0)$ ,  $c = (l - w)/2$  представља пример генерисане криве са пропорцијом  $l : h : w = 5 : 4 : 3$ , где је висина Паладијеве идеалне собе управо одређена великом полуосом, тј.  $h = a = (l + w)/2$ , (Слика 3 - 8). Растојања од фокуса до темена  $A$  елипсе на великој оси  $R_{1A}$  и  $R_{2A}$  представљају дужину  $l$  и ширину  $w$  приликом дефинисања Паладијеве собе са пропорцијом 20:16:12, тј. 5:4:3. Ако се разматрају растојања  $R_1$  и  $R_2$  до одговарајућих тачака елипсе  $B, C$  или  $D$  тада се могу дефинисати и нове пропорције  $l : h : w$  са вредностима 19:16:13, 18:16:14 и 16:16:16 (тј. 1:1:1), респективно, (Слика 3 - 8).



Слика 3 - 8: Елипса (двофокално генерисана крива)  
и пропорције у Паладијевој идеалној соби

На основу узajамне везе која постоји између Паладијеве конструкције идеалне собе и овако генерисане елипсе  $R_1 + R_2 = \mathcal{S}$  можемо да закључимо да ако је велика полуоса елипсе одређена аритметичком средином дужине и ширине собе  $a = (l + w)/2$  и када су задати фокуси на растојању  $c = (l - w)/2$  тада је мала полуоса елипсе дефинисана на основу геометријске средине дужине и ширине Паладијеве собе, тј.  $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{l \cdot w}$ .



Следећа дефиниција је дата за другу криву конусног равног пресека – хипербола као Веберова фокално генрисана крива са једним негативним тежинским коефицијентом:

**ХИПЕРБОЛА** представља ГМТ у равни чија је апсолутна вредност разлике растојања до две фиксирани тачке константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за хиперболу:

$$(3 - 16) \quad |R_1 - R_2| = \mathcal{S} \quad (\mathcal{S} \geq 0) \Leftrightarrow$$

$$W_f^{[1,-1]}(\mathcal{S}): R_1 - R_2 = \mathcal{S} \quad \vee \quad W_f^{[-1,1]}(\mathcal{S}): -R_1 + R_2 = \mathcal{S}$$

где су  $R_1$  и  $R_2$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y)$  до два фокуса:  $F_1(-c, 0)$  и  $F_2(c, 0)$ . Нека су  $a$  и  $b$  одсечци на реалној и имагинарној оси хиперболе ( $a \geq b > 0$ ), тада су параметри  $c$  и  $\mathcal{S}$  са вредностима:  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  и  $\mathcal{S} = 2a$ . Једнакост (3 - 16) може се приказати у облику:

$$(3 - 17) \quad \left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

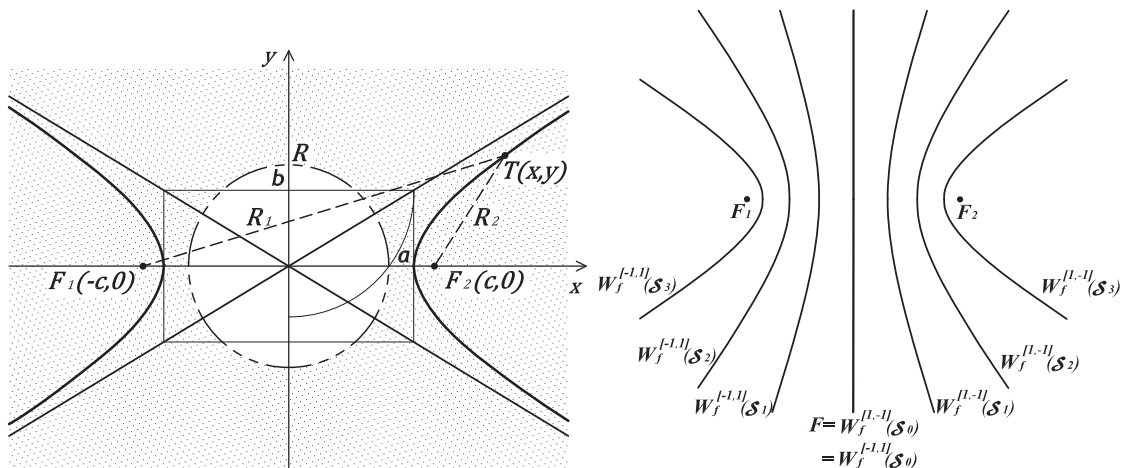
Првим квадрирањем ове једначине за тачке хиперболе добијамо услов

$$(3 - 18) \quad x^2 + y^2 \geq R^2$$

где је  $R = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Другим квадрирањем настаје канонски облик хиперболе:

$$(3 - 19) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Хипербола, као двофокална крива која задовољава услов (3 - 18) јесте генерисани скуп тачака  $T(x, y)$  који се налази у спољашњости круга  $x^2 + y^2 = R^2$  (Слика 3 - 9 а).



а)  $|R_1 - R_2| = \mathcal{S}$

б)  $W_f^{[1,-1]}(\mathcal{S}): R_1 - R_2 = \mathcal{S} \quad \vee \quad W_f^{[-1,1]}(\mathcal{S}): -R_1 + R_2 = \mathcal{S}$

Слика 3 - 9: а) Хипербола као двофокално генерисана крива  
б) Графички приказ Ф-Т скупа тачака хиперболе  $F = W_f^{[1,-1]}(\mathcal{S}_0) = W_f^{[-1,1]}(\mathcal{S}_0)$

Ферма-Веберов скуп тачака хиперболе  $F = W_f^{[1,-1]}(\mathcal{S}) = W_f^{[-1,1]}(\mathcal{S})$  одређен је минималном вредношћу параметра  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = 0$  за који се хипербола дегенерише у двоструку праву – имагинарну осу хиперболе. За све вредности  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  хипербола је недегенерисана Веберова фокална крива (Слика 3 - 9 б).

Трећа крива конусног пресека – парабола је родоначелник новог прелазног типа Веберових фокално-директрисно генерисаних кривих тј.

**ПАРАБОЛА** представља ГМТ у равни чије је растојање до фокуса једнако растојању до директрисе. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за параболу:

$$(3 - 20) \quad W_{fd}^{[1]^{[-e]}}(0): R_1 - e \cdot r_1 = 0, e = 1$$

где су  $R_1$  и  $r_1$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y)$  до фокуса  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  и до директрисе  $d_1: x = -\frac{p}{2}$ ,  $p > 0$ , респективно. Параметар  $e = 1$  представља ексцентрицитет параболе. Парабола, као Веберова фокално-директрисно генерисана крива дата са (3 - 20), може се сада приказати у облику:

$$(3 - 21) \quad \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

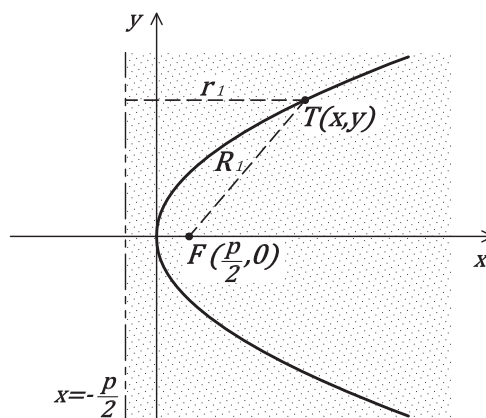
Претходна једначина се може разматрати само у полуравни:

$$(3 - 22) \quad x \geq -\frac{p}{2},$$

и квадрирањем једнакости  $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$  настаје канонски облик једначине параболе:

$$(3 - 23) \quad y^2 = 2px.$$

Парабола, као Веберова фокално-директрисно генерисана крива која задовољава услов (3 - 22), јесте генерисани скуп тачака  $T(x, y)$  који се налази у делу полуравни  $x \geq -\frac{p}{2}$  (Слика 3 - 10).



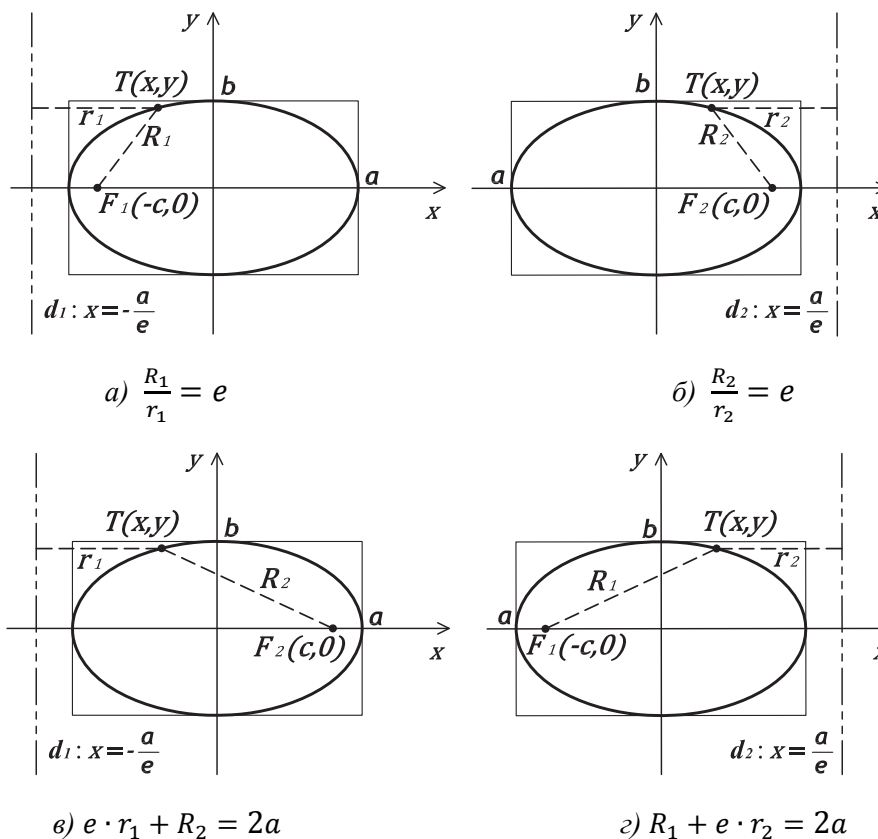
Слика 3 - 10: Парабола као фокално-директрисно генерисана крива

Криве другог реда елипса и хипербола могу бити дефинисане и као Веберове фокално-директрисно генерисане криве по Папос-Бошковићевој дефиницији коника, [118].

**ЕЛИПСА** по Папос-Бошковићевој дефиницији представља ГМТ у равни чији је однос растојања до фокуса и до директрисе константан. Другим речима, растојање до фокуса је једнако скалираном растојању до директрисе, а фактор скалирања је једнак ексцентрицитету елипсе  $e$ ,  $0 < e < 1$ . Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за елипсу:

$$(3 - 24) \quad \frac{R_1}{r_1} = e \Leftrightarrow W_{fd}^{[1]^{-e}}(0): R_1 - e \cdot r_1 = 0$$

где су  $R_1$  и  $r_1$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y)$  до фокуса  $F_1(-c, 0)$ ,  $c > 0$  и до директрисе  $d_1: x = -\frac{a}{e}$ , респективно. Нека су  $a$  и  $b$  полуосе елипсе ( $a \geq b > 0$ ), тада су параметри  $c$  и  $e$  са вредностима:  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  и  $e = \frac{c}{a} < 1$  – ексцентрицитет елипсе. На основу дефиниције (3 - 24) можемо да закључимо да елипса, попут параболе, представља најједноставнију Веберову фокално-директрисно генерисану криву (3 - 6) чији су тежински коефицијенти  $\alpha_1 = 1$  и  $\beta_1 = -e$ . Аналогно, елипса се може дефинисати помоћу фокуса  $F_2(c, 0)$ ,  $c > 0$  и директрисе  $d_2: x = \frac{a}{e}$ , (Слика 3 - 11 б).



Слика 3 - 11: Елипса као фокално-директрисно генерисана крива

Заменом једнакости (3 - 24) у формули за елипсу  $R_1 + R_2 = \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S} = 2a$  долази се до дефиниције елипсе помоћу фокуса  $F_2(c, 0)$ ,  $c > 0$  и директрисе  $d_1: x = -\frac{a}{e}$ , (Слика 3 - 11 в):

$$(3 - 25) \quad W_{fd}^{[1][e]}(2a): R_2 + e \cdot r_1 = 2a, \quad 0 < e < 1,$$

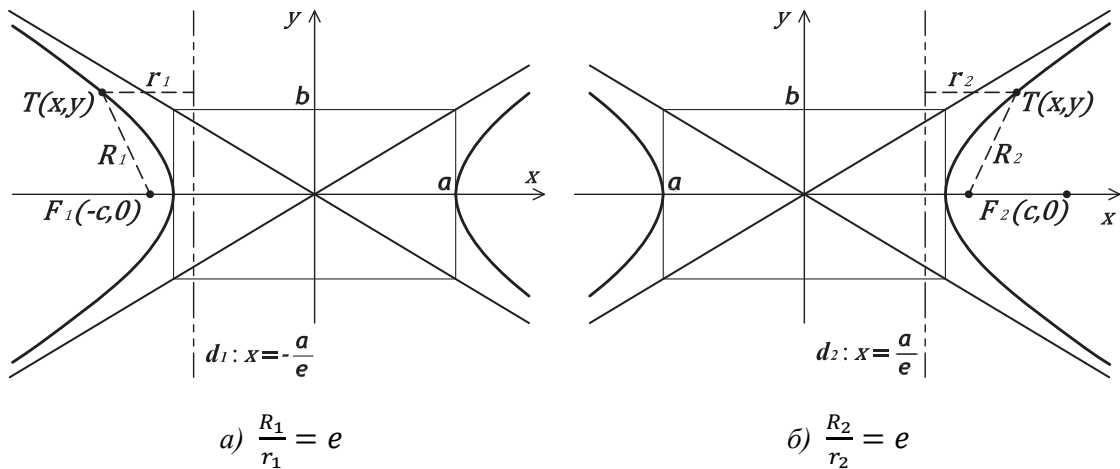
Аналогно, елипса се може дефинисати помоћу фокуса  $F_1(-c, 0)$ ,  $c > 0$  и директрисе  $d_2: x = \frac{a}{e}$ , (Слика 3 - 11 з).

Следеће једначине:  $R_1 - e \cdot r_1 = 0$ ;  $R_2 - e \cdot r_2 = 0$ ;  $R_1 + e \cdot r_2 = 2a$  и  $R_2 + e \cdot r_1 = 2a$  ( $0 < e < 1$ ) дефинишу исту елипсу (Слика 3 - 11).

**ХИПЕРБОЛА** по Папос-Бошковићевој дефиницији може да се дефинише и као ГМТ у равни чији је однос растојања до фокуса и до директрисе константан. Другим речима, растојање до фокуса је једнако скалираном растојању до директрисе, фактор скалирања је једнак ексцентрицитету хиперболе  $e > 1$ . Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за хиперболу:

$$(3 - 26) \quad \frac{R_1}{r_1} = e \iff W_{fd}^{[1][-e]}(0): R_1 - e \cdot r_1 = 0$$

где су  $R_1$  и  $r_1$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y)$  до фокуса  $F_1(-c, 0)$ ,  $c > 0$  и до директрисе  $d_1: x = -\frac{a}{e}$ , респективно. Нека су  $a$  и  $b$  одсечци на реалној и имагинарној оси хиперболе ( $a \geq b > 0$ ), тада су параметри  $c$  и  $e$  са вредностима:  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  и  $e = \frac{c}{a} > 1$ . На основу дефиниције (3 - 26) можемо да закључимо да хипербола попут параболе и елипсе, представља најједноставнију Веберову фокално-директрисно генерисану криву (3 - 6) чији су тежински коефицијенти  $\alpha_1 = 1$  и  $\beta_1 = -e$ , (Слика 3 - 12 а). Аналогним поступком може се дефинисати иста хипербола помоћу фокуса  $F_2(c, 0)$  и директрисе  $d_2: x = \frac{a}{e}$  (Слика 3 - 12 б).



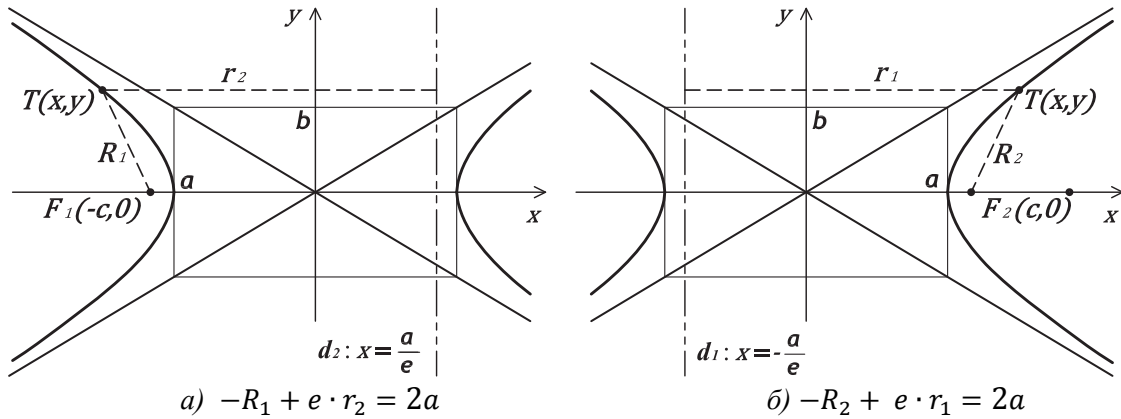
Слика 3 - 12: Хипербола као фокално-директрисно генерисана крива

Заменом једнакости (3 - 26) у формули за хиперболу  $R_1 - R_2 = \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S} = 2a$  долази се до дефиниције којом се генерише десна грана хиперболе помоћу фокуса  $F_2(c, 0)$ ,  $c > 0$  и директрисе  $d_1: x = -\frac{a}{e}$

$$(3 - 27) \quad -R_2 + e \cdot r_1 = 2a, \quad e > 1,$$

Аналогно, лева грана хиперболе (Слика 3 - 11 в) сада се генерише помоћу фокуса  $F_1(-c, 0)$ ,  $c > 0$  и директрисе  $d_2: x = \frac{a}{e}$  са следећом једнакошћу:

$$(3 - 28) \quad -R_1 + e \cdot r_2 = 2a, \quad e > 1.$$



Слика 3 - 13: Хипербола као фокално-директрисно генерисана крива  
а) лева грана хиперболе; б) десна грана хиперболе

### 3.1.1. Генеза и конструктивна интерпретација фокално генерисаних 2D елемената

Фамилији фокално генерисаних 2D елемената поред конусних пресека (круга, елипсе и хиперболе) припадају Декартови овали [22], Максвелове трифокалне криве [61] и Сахадеванове еглипсе [94], [95], у случају када се посматра константна сума растојања до фокуса; док су код константног производа растојања од фокуса најпознатије Касинијеве криве, [32], [35], [96], [119] и [120].

**ДЕКАРТОВ ОВАЛ** представља ГМТ у равни чија је сума/разлика умножака растојања до две фиксирани тачке константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за Декартов овал:

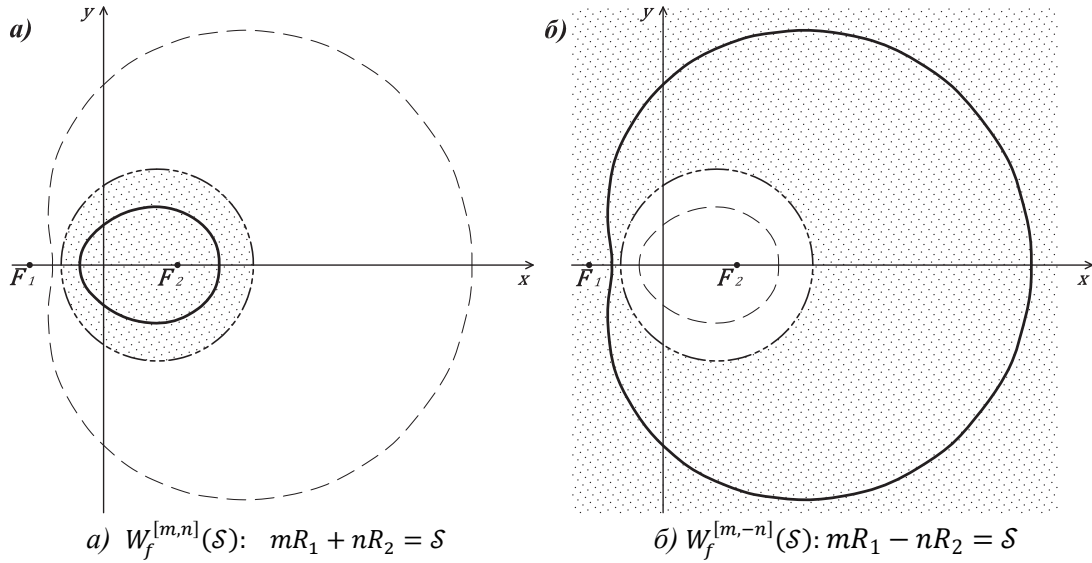
$$(3 - 29) \quad W_f^{[m, \pm n]}(\mathcal{S}): \quad mR_1 \pm nR_2 = \mathcal{S}, \quad m \neq \pm n$$

где су  $R_1$  и  $R_2$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y)$  до два фокуса  $F_1(-c, 0)$  и  $F_2(c, 0)$ ,  $c > 0$ . Нека је  $m, n \in \mathbb{R}$  и  $\mathcal{S} > 0$ . Декартов овал као Веберова двофокална крива задата са (3 - 29) сада се може приказати у облику:

$$(3 - 30) \quad m\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm n\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \mathcal{S}.$$

Квадрирањем претходне једначине следи:

$$(3 - 31) \quad \pm 2mn\sqrt{((x - c)^2 + y^2)((x + c)^2 + y^2)} = \\ = \mathcal{S}^2 - (m^2 + n^2)(x^2 + y^2) + 2c(m^2 - n^2)x - c^2(m^2 + n^2).$$



Слика 3 - 14: Декартов овал као двофокално генерисана крива

У раду [58], аутори: Б. Малешевић, М. Петровић, Б. Бањац, И. Јововић, П. Јовановић разматрају обе гране Декартових овала **a)** и **б)** које се добијају избором знака „+“ и знака „-“ у претходној једначини. Такође, у раду је дефинисана кружница (3 - 32) са полупречником  $R = \frac{1}{m^2+n^2}\sqrt{\mathcal{S}^2(m^2 + n^2) - 4c^2m^2n^2} > 0$  за вредности параметара  $\mathcal{S} > c \frac{2mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$

$$(3 - 32) \quad \left(x - \frac{c(m^2-n^2)}{m^2+n^2}\right)^2 + y^2 = R^2.$$

**a)** Ако се у формули (3 - 29) посматра операнд (+) тада лева страна једнакости (3 - 31) је позитивна и даље квадрирање је коректно само уз услов  $\mathcal{S}^2 - (m^2 + n^2)(x^2 + y^2) + 2c(m^2 - n^2)x - c^2(m^2 + n^2) \geq 0$  тј. све тачке Декартовог овала су у унутрашњости круга (Слика 3 - 14 a):

$$(3 - 33) \quad \left(x - \frac{c(m^2-n^2)}{m^2+n^2}\right)^2 + y^2 \leq R^2;$$

**б)** Ако се у формули (3 - 29) посматра операнд (-) тада лева страна једнакости (3 - 31) је негативна и даље квадрирање је коректно само уз услов  $\mathcal{S}^2 - (m^2 + n^2)(x^2 + y^2) + 2c(m^2 - n^2)x - c^2(m^2 + n^2) \leq 0$  тј. све тачке Декартовог овала су у спољашњости круга (Слика 3 - 14 б):

$$(3 - 34) \quad \left(x - \frac{c(m^2-n^2)}{m^2+n^2}\right)^2 + y^2 \geq R^2.$$

Декартов овал, као фокална крива која задовољава услов (3 - 33)/(3 - 34), јесте генерисани скуп тачака  $T(x, y)$  који се налази у унутрашњости/спољашњости круга (3 - 32).

У оба претходно разматрана случаја, квадрирањем једнакости (3 - 31) добиће се алгебарска крива четвртог реда са следећим записом:

$$(3 - 35) \quad \begin{aligned} & (m^2 - n^2)^2 x^4 + 2(m^2 - n^2)x^2 y^2 + (m^2 - n^2)^2 y^4 \\ & - 4c(m^4 - n^4)x^3 - 4c(m^4 - n^4)xy^2 \\ & + (2c^2(3m^4 + 2m^2n^2 + 3n^2) + 2S^2(m^2 + n^2))x^2 \\ & + (2c^2(n^4 - 2m^2n^2 + n^4) + 2S^2(m^2 + n^2))y^2 + 4c(m^2 - n^2)(S^2 - c^2(m^2 + n^2))x \\ & + (S + c(m + n))(S + c(m - n))(S + c(-m + n))(S + c(-m - n)) = 0. \end{aligned}$$

Специјално, за вредност параметра  $m = n$  Декартов овал се налази у унутрашњости кружнице (3 - 32) и постаје елипса, док за  $m = -n$  овај овал је у спољашњости кружнице (3 - 32) и постаје хипербола. Декартов овал је добар пример Веберове двофокално генерисане криве (3 - 3) са коефицијентима  $\alpha_1 = m$  и  $\alpha_2 = \pm n$ ,  $m \neq n$  код које се уочава повећање реда алгебарске криве. Овал (3 - 35) је реда 4, док је елипса, односно хипербола другог реда.

Рене Декарт је ове овале добио током истраживања везаних за оптику, односно, за задатак да се нађе крива на којој ће се преломити зраци који полазе из једне тачке и након њиховог прелома сви се секу у другу тачку [22]. Зраци светла који потичу из фокуса  $F_1$ , након прелома у тачкама Декартовог овала, секу се у фокусу  $F_2$ . Другим речима, овај овал дели две средине са релативним индексом прелома  $n/m$ , [96]. Касније, М. Часлес је истраживао ове овале и показао да они имају и трећи фокус, тј. да важи:

$$(3 - 36) \quad mR_1 + nR_2 = S, \quad m_1R_1 + n_1R_3 = S_1, \quad m_2R_2 + n_2R_3 = S_2.$$

Множењем прве једначине са  $S_1$  и друге са  $S$ , а затим њиховим одузимањем добија се једначина облика:

$$(3 - 37) \quad \alpha R_1 + \beta R_2 + \gamma R_3 = 0,$$

где су  $\alpha = mS_1 - m_1S$ ,  $\beta = nS_1$ ,  $\gamma = n_1S$ . Сада се може закључити за Декартове овале да важи (3 - 37). Декартови овали као Веберове трифокално генерисане криве су са колинеарним фокусима.

**ТРИФОКАЛНА ЕЛИПСА** је Веберова крива (3 - 3) са јединичним тежинским коефицијентима, (Слика 3 - 2). Она представља ГМТ у равни чија је сума растојања до три фиксиране тачке константна:

$$(3 - 38) \quad W_f^{[1,1,1]}(S): R_1 + R_2 + R_3 = S,$$

$R_1, R_2$  и  $R_3$  су Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y)$  до три фокуса  $F_1(p, 0)$ ,  $F_2(q, 0)$  и  $F_3(0, r)$ , респективно. Нека су  $p, q, r \in \mathbb{R}$  и параметар  $S > 0$ . Једнакост (3 - 38) се може приказати у облику:

$$(3 - 39) \quad \sqrt{(x - p)^2 + y^2} + \sqrt{(x - q)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y - r)^2} = S.$$

Ферма-Торичелијева тачка  $F = F(x_0, y_0) = W_f^{[1,1,1]}(S_0)$  се дефинише за минималну вредност параметра  $S = S_0$ , [33]. За вредност параметра  $0 < S < S_0$  трифокална

елипса не постоји, док за вредност  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  трифокална елипса је недегерисана алгебарска јајаста крива, [11], [79] и [116].

Ако је  $\mathcal{S} = const$ ,  $\mathcal{S} > 0$  и изрази:  $Q_1 = (x - p)^2 + y^2$ ,  $Q_2 = (x - q)^2 + y^2$ ,  $Q_3 = x^2 + (y - r)^2$ , тада је (3 - 38)  $\Leftrightarrow \sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2} + \sqrt{Q_3} = \mathcal{S}$ . Алгебарском трансформацијом – квадрирање:

$$(3 - 40) \quad (\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})^2 = (\mathcal{S} - \sqrt{Q_3})^2$$

уз услов да је  $\mathcal{S} \geq \sqrt{Q_3} \Leftrightarrow$

$$(3 - 41) \quad x^2 + (y - r)^2 \leq \rho_1^2 \quad \wedge \quad \rho_1 = \mathcal{S},$$

издвајају се оне тачке трифокалне криве (Слика 3 - 15 а) које су у унутрашњости круга (3 - 41) са центром у фокусу  $F_3$  и полупречником  $\mathcal{S}$  (Слика 3 - 15 б). За овај део алгебарске криве сада важи:

$$(3 - 42) \quad 2\sqrt{Q_1}\sqrt{Q_2} + 2\mathcal{S}\sqrt{Q_3} = \mathcal{S}^2 + Q_3 - Q_2 - Q_1.$$

Квадрирање претходне једнакости могуће је уз услов:  $\mathcal{S}^2 \geq Q_1 + Q_2 - Q_3 \Leftrightarrow$

$$(3 - 43) \quad (x - p - q)^2 + (y + r)^2 \leq \rho_2^2 \quad \wedge \quad \rho_2 = \sqrt{\mathcal{S}^2 + 2pq + 2r^2}.$$

Геометријски посматрано, услов (3 - 43) је унутрашњост круга са центром у тачки која има координате  $(p + q, -r)$  и полупречником  $\rho_2$ . Сада су тачке алгебарске криве у делу који представља пресек услова (3 - 41) и (3 - 43), односно пресек кругова (Слика 3 - 15 в).

Следеће квадрирање једнакости (3 - 42) уз претходна два услова даје:

$$(3 - 44) \quad 8\mathcal{S}\sqrt{Q_1}\sqrt{Q_2}\sqrt{Q_3} = \mathcal{S}^4 - 2\mathcal{S}^2Q_3 - 2\mathcal{S}^2Q_2 - 2\mathcal{S}^2Q_1 - 2Q_3Q_2 - 2Q_3Q_1 - 2Q_1Q_2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2$$

Треће, последње квадрирање претходне једнакости је могуће уз услов:  $\mathcal{S}^4 - 2\mathcal{S}^2Q_3 - 2\mathcal{S}^2Q_2 - 2\mathcal{S}^2Q_1 - 2Q_3Q_2 - 2Q_3Q_1 - 2Q_1Q_2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 \geq 0$ . Овај услов представља унутрашњост криве четвртог реда, [58]. Претходна три услова (Слика 3 - 15 з) и последње квадрирање једначине (3 - 44) коначно дају:

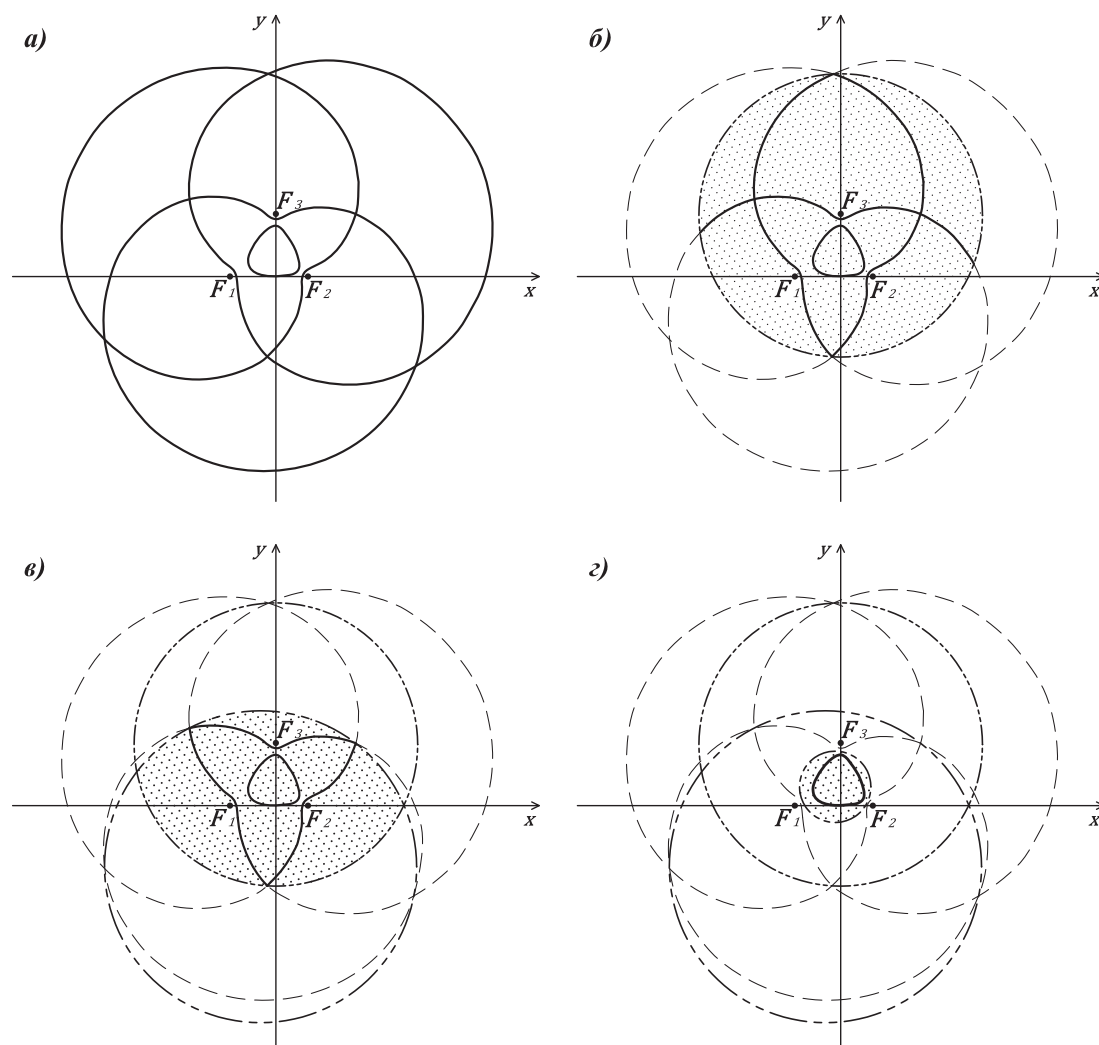
$$(3 - 45) \quad 64\mathcal{S}^2Q_1Q_2Q_3 - ((\mathcal{S}^2 + Q_3 - Q_2 - Q_1)^2 - 4Q_1Q_2 - 4\mathcal{S}^2Q_3)^2 = 0$$

односно, једнакост у експлицитном запису:

$$(3 - 46) \quad 64\mathcal{S}^2((x - p)^2 + y^2)((x - q)^2 + y^2)(x^2 + (y - r)^2) - ((\mathcal{S}^2 + x^2 + (y - r)^2 - (x - q)^2 - (x - p)^2 - 2y^2)^2 - 4((x - p)^2 + y^2)((x - q)^2 + y^2) - 4\mathcal{S}^2(x^2 + (y - r)^2))^2 = 0.$$

која представља криву осмог реда (Слика 3 - 15 а).





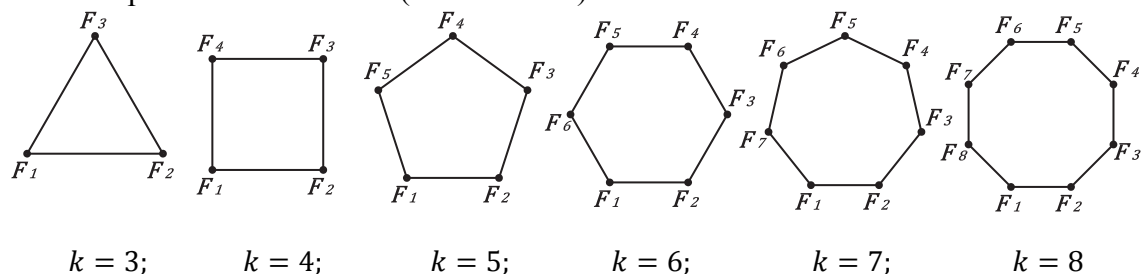
Слика 3 - 15: Трифокална крива

У претходном извођењу добија се низ услова, који одређују област која настаје као пресек две области: унутрашњости кружница и унутрашње области криве четвртог реда. На овај начин, корак по корак, издваја се онај део алгебарске криве (3 - 46) који садржи затворену јајасту трифокалну елипсу (Слика 3 - 15), резултат је објављен и у раду [58] - аутори: Б. Малешевић, М. Петровић, Б. Бањац, И. Јововић, П. Јовановић. Алгебарска једначина за трифокалну криву је изведена елементарним трансформацијама – квадрирањем. Добијени облик се подудара са обликом једначине која је добијена применом детерминанти [71] и применом Гребнерових база [11]. Напоменимо да се резултат, који су добили Ние, Парило и Штурмфелс, за трифокалну криву у развијеном облику детерминанте састоји од 2355 израза [71], док се извајањем алгебарских услова и квадрирањем, корак по корак, добија алгебарско-геометријски једноставније решење и визуелно сагледљивије. На основу услова, чији је геометријски приказ дат на Слика 3 - 15 б)-г), прецизиран је онај део алгебарске криве осмог реда која представља трифокалну елипсу, као и све криве које представљају тзв. Зариски затворење у смислу алгебарске геометрије. Такође, ово затворење су добили Ние, Парило и Штурмфелс, али помоћу детерминанти, [71].

П. В. Сахадеван први уводи појам еглипсе — нова крива са три фокуса, [95]. Такође, Сахадеван уводи и класификацију трифокалних елипси са колинеарним фокусима на следећи начин: трифокална елипса се сматра абнормалном ако је фокус  $F_3$  на средини дужи које образују фокуси  $F_1$  и  $F_2$  у супротном је нормална. Анализирајући нормалну трифокалну елипсу Сахадеван је нашао параметарске једначине ове криве и на основу њих је израчунао површину користећи елиптички интеграл прве врсте, [95]. У Индији је, на основу изведене Сахадеванове параметризације еглипсе патентиран поступак за формирање одводних канала са попречним профилем еглипсе.

Године 2008, А. Варга и Ц. Винце дали су сличну параметризацију трифокалне елипсе, као и површину ове затворене криве коју су нумерички одредили помоћу програмског пакета Maple, [107]. Поступак за одређивање обима и површине трифокалне елипсе са неколинеарним фокусима (Слика 3 - 2) објављен је у раду [79], аутора М. Петровић, Б. Бањац и Б. Малешевић. Такође, за потребе примене трифокалних елипси формирали смо посебну апликацију у Јави. Развијени Јава аплет за цртање трифокалних елипси омогућио нам је визуелни приказ оптималног решења, као и брзи обрачун нумеричке вредности параметара  $\delta$ , односно минималне суме растојања  $\delta_0$ .

Следеће чињенице: • троугао је статички најстабилнији систем у архитектури; • геометријски облик Паскаловог троугла 3-4-5 је често коришћен у архитектури; • квадратна основа је најчешће коришћена у архитектури; • правилни петоугао у себи садржи златни пресек који је вековима привлачио пажњу уметника и математичара; • архитекте примењују златни пресек као најлепшу пропорцију за најскладније облике у архитектури; • правилни шестоугао срећемо и у грађи пчелињег саћа; природа је изабрала онај облик (хексагон) који пчелама пружа највећу могућност кретања; • само једнакостраничан троугао, квадрат и правилан шестоугао, прекривају површину без празнина (поплочавање - тилинг), доводе нас до тога да разматрамо само оне криве које имају  $3 \leq k, l \leq 6$  основних елемената за генерисање тј настају од правилних полигона. С обзиром да се Еуклидска раван може поплочати правилним полигонима, тада се ове криве могу користити и као обрасци за дизајнирање сложенијих форми. У даљем делу рада дати су фокално генерисани 2D елементи, односно криве, тако да се за полазне фокусе узимају темена правилних полигона (Слика 3 - 16).

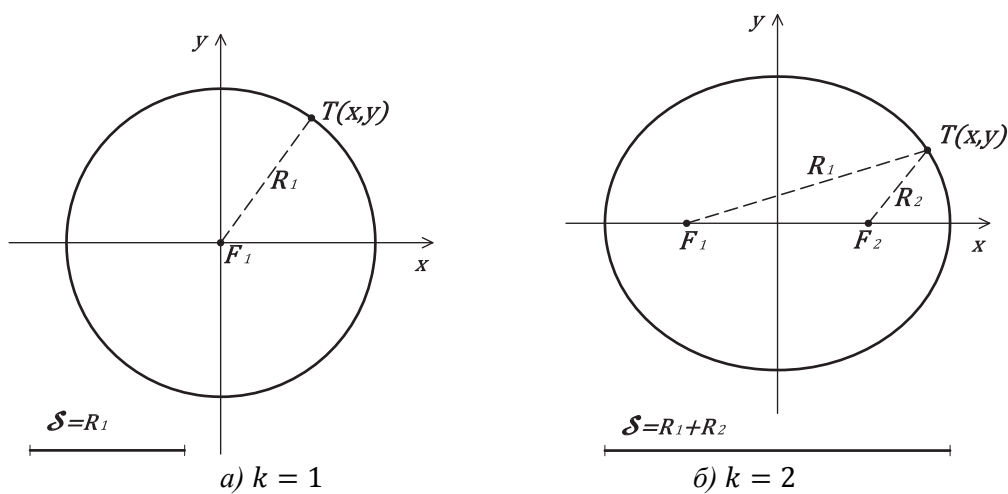


Слика 3 - 16: Фокуси - темена правилних полигона

Табеларни приказ који даје функционалну везу између свих елемената правилних полигона дат је у Прилогу I-1, док су координате фокуса, функције

расстојања до њих као и пет различитих вредности за параметар  $\mathcal{S}$  који дефинишу фокалне криве са јединичним Веберовим коефицијентима:  $W_f^{[k \times 1]}(\mathcal{S}): R_1 + R_2 + \dots + R_k = \mathcal{S}$  и фокалне криве Касинијевог типа  $C_f(\mathcal{S}): R_1 \cdot R_2 \cdot \dots \cdot R_k = \mathcal{S}^k$  дати у прилогу I-2. Разматране фокалне криве у наредном делу рада су управо са избором јединичних Веберових тежина због тога што желимо да оне имају Паладијев пропорционални склад тј. да садрже правило аритметичке и геометријске средине. У раду је графички приказано генерисање ових кривих када њихови фокуси формирају правилне полигоне (троугао, квадрат, петоугао и шестоугао).

Најједноставнија фокална крива је круг са центром у фокусу  $F_1$  и полупречником  $R_1 = \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S} > 0$ , (Слика 3 - 17 а). Ако је  $k = 1$  и  $\mathcal{S} = 0$ , тада се крива дегенерише у тачку, односно у фокус  $F_1$ .

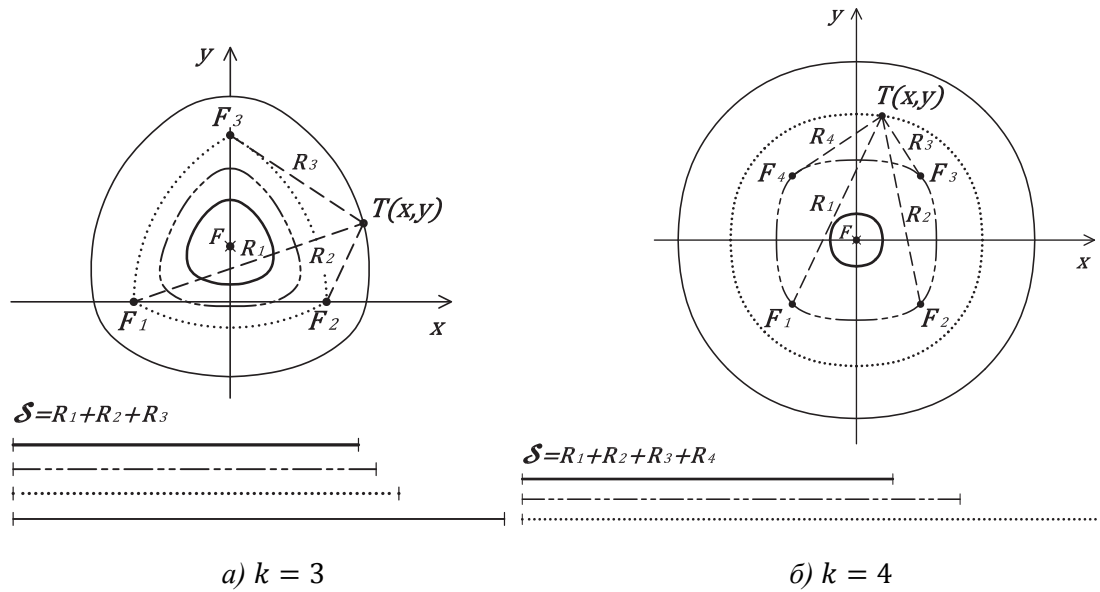


Слика 3 - 17: а) Круг (ФК за  $k = 1$ )  
б) Елипса (ФК за  $k = 2$ )

За случај два фокуса ( $k = 2$ ) и константе  $\mathcal{S} > 0$  настаје елипса са фокусима  $F_1$  и  $F_2$  за коју важи:  $R_1 + R_2 = \mathcal{S}$ , (Слика 3 - 17 б).

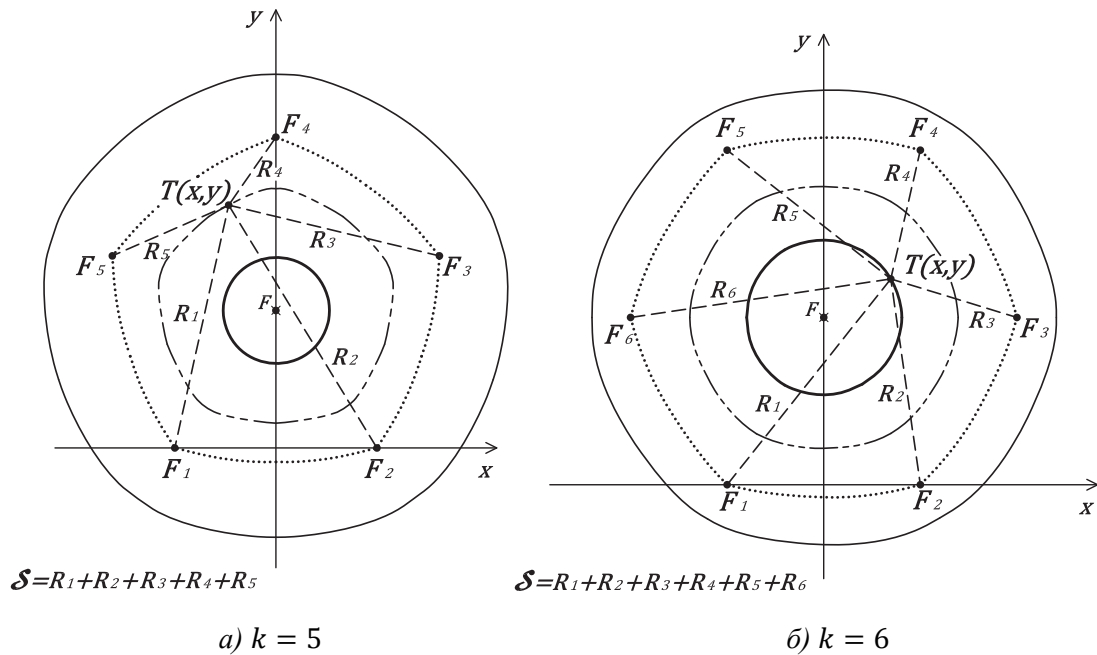
Ако је  $k = 3$  и  $\mathcal{S} > 0$ , тада трифокална крива са фокусима  $F_1, F_2$  и  $F_3$  представља GMT за које важи:  $R_1 + R_2 + R_3 = \mathcal{S}$ . Када су фокуси темена једнакостраничног троугла и  $\mathcal{S} = 2\bar{a}$ , тада трифокална крива пролази кроз фокусне тачке (Слика 3 - 18 а) крива која је приказана тачкастом линијом). На истој слици разматране су фокалне криве које настају са различитим вредностима константе  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0 = 2h_\Delta$ . За  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$  фокална крива се дегенерише у тачку - тежиште троугла, односно у Ферма-Торичелијеву тачку  $F$ .

Када су полазни фокуси  $F_1, F_2, F_3$  и  $F_4$  постављени тако да формирају квадрат тада четворофокална крива генерисана са  $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \mathcal{S}$  и за вредност параметра  $\mathcal{S} = 2\bar{a} + \bar{d}$  пролази кроз фокусне тачке (Слика 3 - 18 б) крива која је приказана испрекиданом линијом). На истој слици приказане су и фокалне криве које су генерисане за различите вредности константе  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0 = 2\bar{d}$ . За  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$  фокална крива се дегенерише у Ферма-Торичелијеву тачку  $F$  - тежиште квадрата.



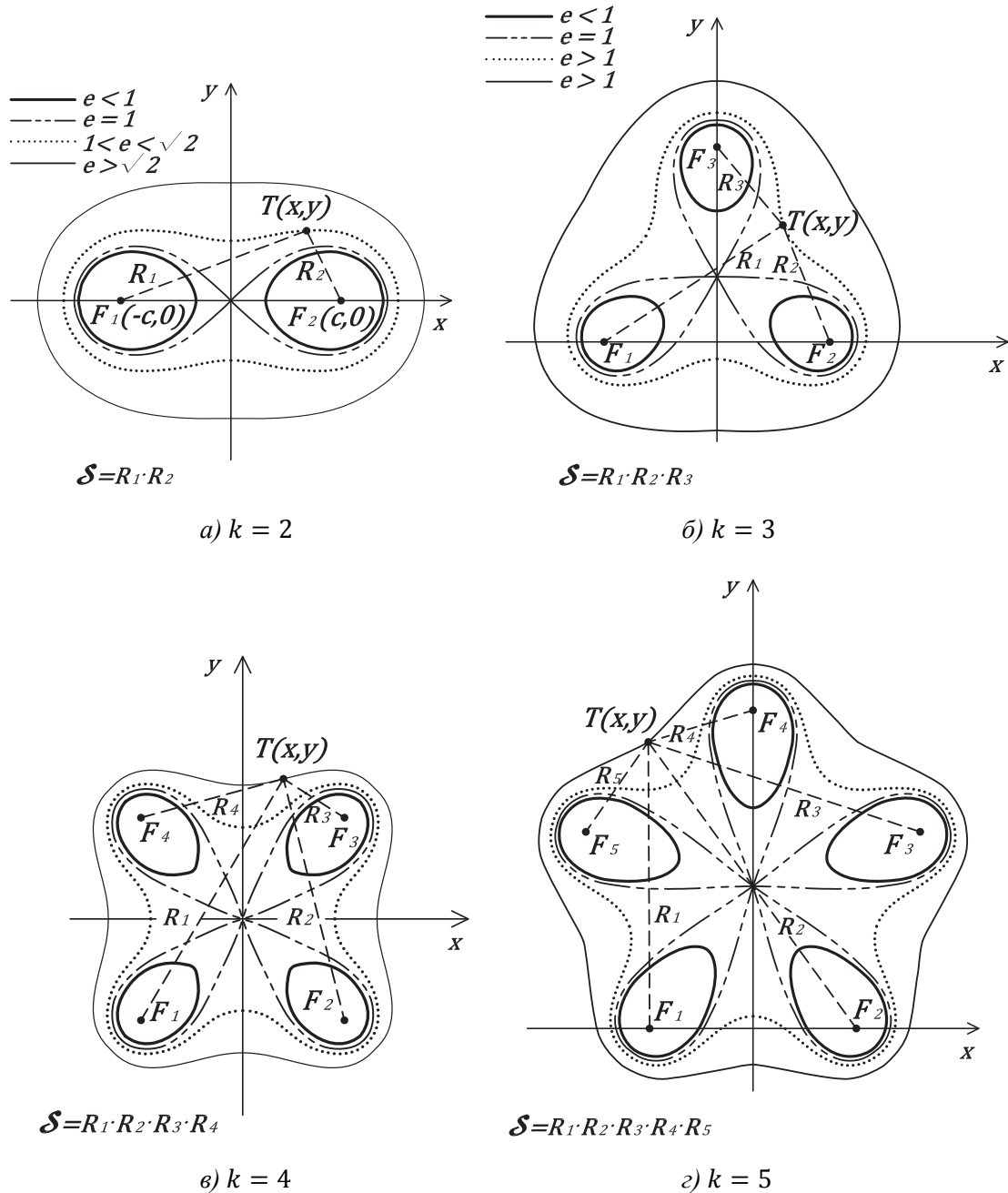
Слика 3 - 18: ФК за  $k = 3$  и  $k = 4$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$

За случај пет и више фокуса,  $k \geq 5$  и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ , тада  $k$  – фокална крива са фокусима  $F_1, \dots, F_{k-1}$  и  $F_k$  представља ГМТ за које важи:  $\sum_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$ . Када полазни фокуси формирају правилни полигон и када је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = k \cdot \bar{R}$ , тада  $k$  – фокална крива се дегенерише у тачку - тежиште полигона, тј. Ферма-Торичелијеву тачку  $F$ . За вредност  $\mathcal{S} = 2\bar{a} + \sum_{i=1}^{k-3} \bar{d}_i$ , следи да  $k$  – фокална крива пролази кроз фокусне тачке. Број  $(k - 3)$  представља број дијагонала које се могу повући из једног темена полигона. Петофокалне и шестофокалне криве (Слика 3 - 19) су приказане за различите вредности константе  $\mathcal{S} \geq \mathcal{S}_0$ .



Слика 3 - 19: ФК за  $k = 5$  и  $k = 6$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$

Следеће разматрање се односи на фокалне криве Касинијевог типа. Најједноставнији представник ове фамилије је круг (Слика 3 - 17 а). Ако је  $k = 2$  и  $\mathcal{S} > 0$ , тада су Касинијеве криве овали са два фокуса  $F_1(-c, 0)$  и  $F_2(c, 0)$ ,  $c > 0$  (Слика 3 - 20 а). Ексцентрицитет Касинијевих кривих дефинисан је односом  $e = \frac{\mathcal{S}}{c}$ , [119]. Када је  $e < 1$  тада су Касинијеве криве две јајасте криве, за  $e = 1$  добија се Бернулијева лемниската, док за  $1 < e < \sqrt{2}$  Касинијев овал је само једна затворена крива са удубљеним делом и за  $e > \sqrt{2}$  Касинијев овал има елипсасти облик (Слика 3 - 20 а).



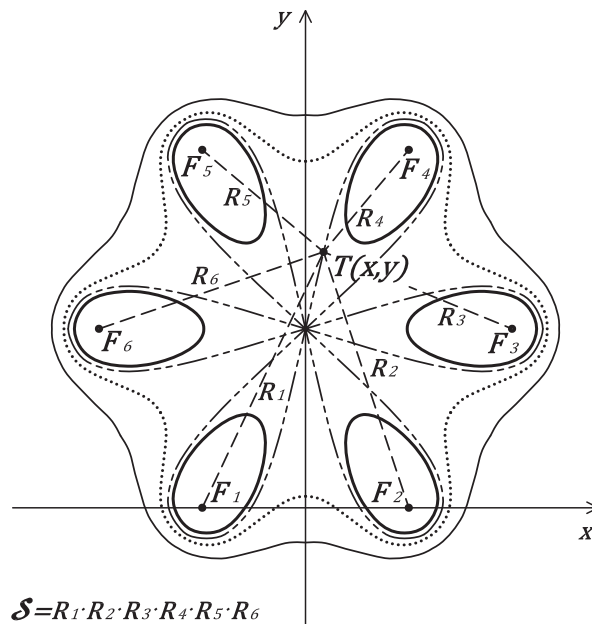
Слика 3 - 20: ФККТ за  $k = 2, 3, 4$  и  $5$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$

Ако је  $k = 3$  и  $\mathcal{S} > 0$ , тада су генерисане криве Касинијеви овали са три фокуса  $F_1, F_2$  и  $F_3$  (Слика 3 - 20 б). Ексцентрицитет Касинијевих трифокалних кривих је дефинисан односом  $e = \frac{\mathcal{S}}{c}$ , [119]. Када је  $e < 1$  тада су Касинијеве криве - три јајасте криве; за  $e = 1$  ( $c = \sqrt[3]{2\mathcal{S}}$ ) и када су фокуси постављени у теменима једнакоугаоног троугла добија се Кипертова крива или тролист, [121]; док за  $e > 1$  Касинијева крива је једна затворена крива.

Касинијеве четворофокалне криве са фокусима  $F_1, F_2, F_3$  и  $F_4$  су дефинисане једначином  $R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 = \mathcal{S}$ . Када је  $\mathcal{S} = 0$ , онда се крива распада на четири фокусне тачке. Ако је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = \bar{R}^4$ , тада ова крива постаје четворолист (Слика 3 - 20 в) - крива која је приказана испрекиданом линијом). За вредност  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ , четворофокална крива се састоји од четири криве јајастог облика, док за  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  крива је из једног дела са већим или мањим удубљењем.

Ако је  $k \geq 5$  и  $\mathcal{S} > 0$ , тада Касинијева  $k$ -фокална крива са фокусима  $F_1, \dots, F_{k-1}$  и  $F_k$  представља ГМТ за које важи:  $\prod_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$ . Када су фокуси поклопљени са теменима правилног полигона и  $\mathcal{S} = 0$ , тада ФККТ се дегенерише у  $k$  тачака, односно у фокусе - темена полигона. За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = \bar{R}^k$ , следи да ФККТ пролази кроз тежиште полигона. За вредност  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ , ФККТ се састоји од  $k$  кривих јајастог облика, док за  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  крива је из једног дела са већим или мањим удубљењем.

Петофокалне и шестофокалне Касинијеве криве када су фокуси постављени тако да формирају правилни петоугао односно шестоугао приказане су за различите вредности константе  $\mathcal{S}$  (Слика 3 - 20 б) и Слика 3 - 21). Касинијеве криве за вредности  $k = 3, 4, 5$  и  $6$  су разматране у [120].

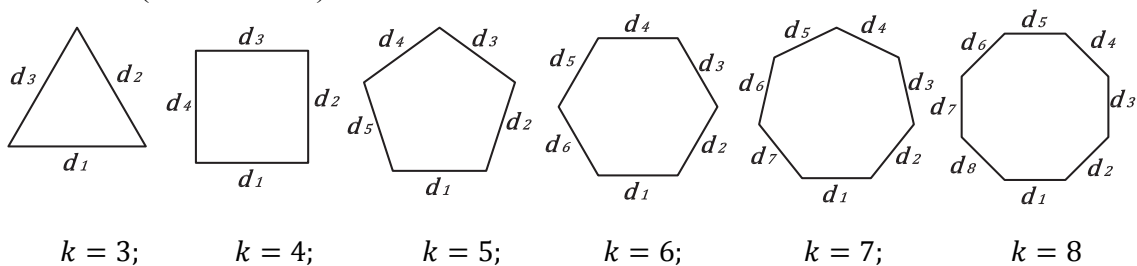


Слика 3 - 21: ФККТ за  $k = 6$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$

### 3.1.2. Директрисно генерисани 2D елементи као дуали фокално генерисаним елементима и њихова конструктивна интерпретација

У равни, дуални елемент тачке је права и важи обрнуто, дуал праве је тачка, [24]. У овом делу рада уместо фокуса разматрају се директрисне праве и анализирају се криве које настају као геометријска места тачака са константном сумом/производом растојања до директриса.

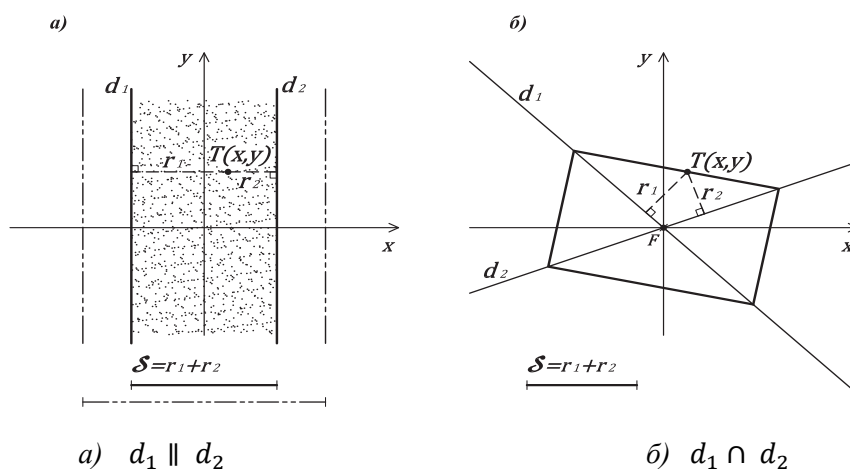
Директрисни 2D елементи (алгебарске криве) су генерисани тако да се за полазне директрисе узимају праве које су поклопљене са странама правилних полигона (Слика 3 - 22).



Слика 3 - 22: Директрисе - странице правилних полигона

Ферма-Торичелијев скуп тачака за  $k$  линија је одређена вредношћу константе  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = k \cdot \bar{r}$  (Слика 3 - 24 до Слика 3 - 25 истачкане равне фигуре ограничене  $k$  директрисним полигоном). Следећи примери кривих дати су за директрисне криве са константном сумом растојања до  $k$  директриса које су постављене у равни тако да формирају правилни полигон. Директрисе, функције растојања до њих као и три различите вредности за параметар  $\mathcal{S}$  којима се дефинише ДК дате су у прилогу I-2.

Нека је  $k = 1$  и  $\mathcal{S} = 0$  тада се директрисна крива поклапа са самом директрисом  $d_1$ . Ако је  $\mathcal{S} > 0$  тада директрисну криву представљају две паралелне линије са директрисом  $d_1$  на удаљењу  $\mathcal{S}$  тј.  $r_1 = \mathcal{S}$ .

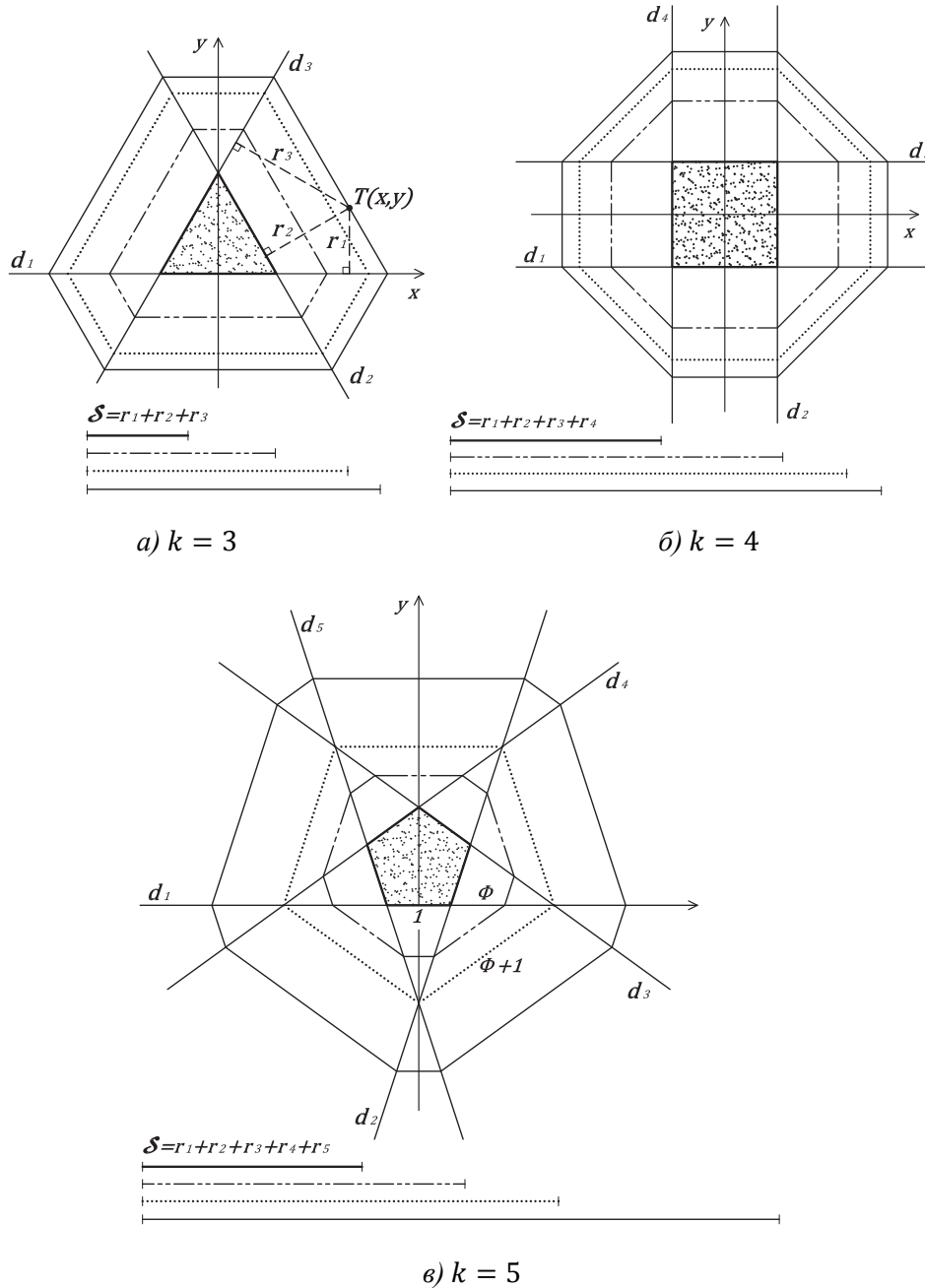


Слика 3 - 23: ДК за  $k = 2$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$



За случај две директрисе тј.  $k = 2$ ,  $d_1 \parallel d_2$  и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0 = \text{dist}(d_1, d_2)$  тада директрисну криву представљају две паралелне линије са удаљењем  $\mathcal{S}$ , (Слика 3 - 23 а) испрекидана линија). За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ , све тачке са и између директрисних линија  $d_1, d_2$  задовољавају услов  $r_1 + r_2 = \mathcal{S}$  (Слика 3 - 23 а) тачкаста површина).

Када су две директрисе ( $k = 2$ ), праве које се секу и  $\mathcal{S} > 0$  тада директрисну криву представља четвороугао са дијагоналама које су поклопљене са директрисама  $d_1$  и  $d_2$ . За вредност  $\mathcal{S} = 0$  крива се дегенерише у пресечну тачку полазних директриса – Ферма-Торичелијеву тачку  $F$ , (Слика 3 - 23 б).



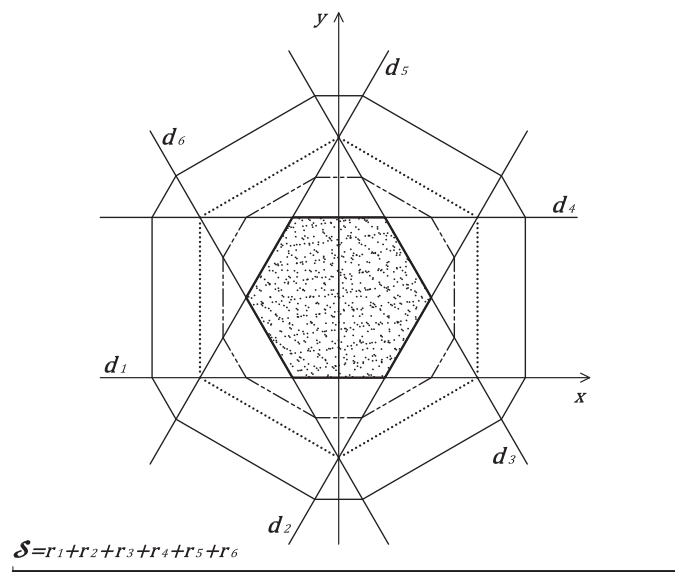
Слика 3 - 24: ДК за  $k = 3, 4$  и  $5$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$



Ако директрисне праве образују једнакостранични троугао ( $k = 3$ ) и ако је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ ,  $\mathcal{S}_0 = h_{\Delta} = 3\bar{r}$ , тада директрисна крива има облик шестоугла чије су дијагонале поклопљене са директрисама  $d_1, d_2$  и  $d_3$  (Слика 3 - 24 а). За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$  важи да све тачке са троугла као и оне у унутрашњости задовољавају услов:  $r_1 + r_2 + r_3 = \mathcal{S}$ . Истачкана површина унутар троугла, као и тачке са троугла на Слика 3 - 24 а) представљају графички приказ Ферма-Веберовог скупа тачака за три директрисе.

Нека директрисне праве образују квадрат ( $k = 4$ ) и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ ,  $\mathcal{S}_0 = 2\bar{a} = 4\bar{r}$  тада директрисна крива има облик осмоугла (Слика 3 - 24 б). За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ , све тачке директрисног квадрата и унутар квадрата задовољавају услов:  $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \mathcal{S}$ . Овај скуп тачака је Ферма-Веберов скуп тачака за 4 директрисе.

За случај правилног петоугла ( $k = 5$ ) који формирају задате директрисне праве и када је  $\mathcal{S}_0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_1$  или  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_0 = (\Phi + 2) \sin 72^\circ = 5\bar{r}$ ,  $\mathcal{S}_1 = (3\Phi + 2) \sin 72^\circ$  тада ДК има облик десетоугла. За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$  ДК је петоугао са страницом дужине  $\Phi + 1$  (Слика 3 - 24 в) линија приказана тачкицама), док за вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$  важи да све тачке у унутрашњости и на петоуглу странице чија је дужина  $l$  задовољавају услов:  $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = \mathcal{S}$  (Слика 3 - 24 г).



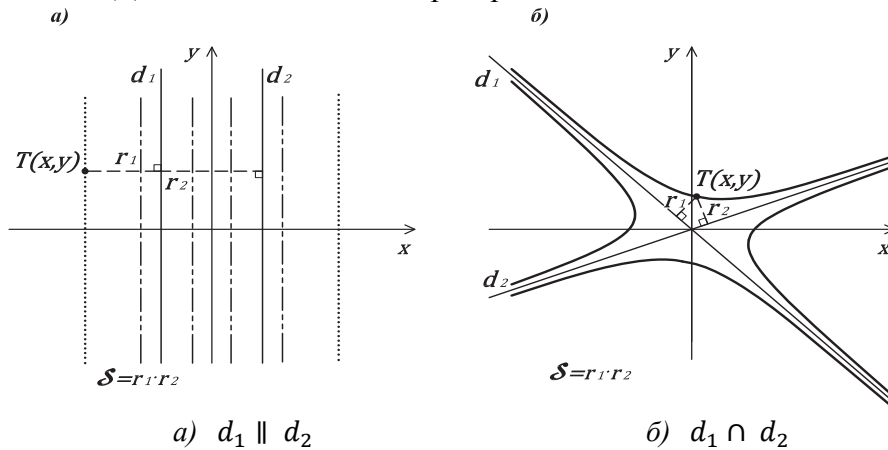
Слика 3 - 25: ДК за  $k = 6$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$

Ако је  $k \geq 6$ , директрисне праве образују правилни полигон и нека је  $\mathcal{S}_0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_1$  или  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_0 = k \cdot \bar{r}$  тада ДК има облик  $2k$ -тоугла. За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$  добија се скуп тачака који представља Ферма-Веберов скуп тачака за  $k$  линија, док за вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$  ДК је  $k$ -тоугао. За правилни шестоугао вредности параметра су:  $\mathcal{S}_0 = 6\bar{r}$ ,  $\mathcal{S}_1 = 8\bar{r}$  и претходна Слика 3 - 25 представља графички приказ ових директрисних кривих за четири различите вредности параметра  $\mathcal{S}$ . Ферма-Веберов скуп тачака је графички приказан тачкастом површином унутар шестоугла.

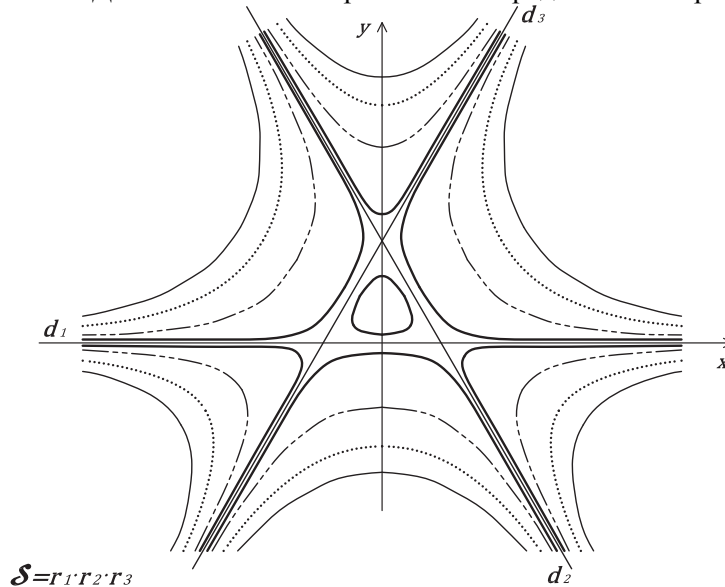
Следећи примери су дати за директрисно генерисане криве Касинијевог типа. Положај директриса у равни, функције растојања до њих као и четири различите вредности за параметар  $\mathcal{S}$  којима се дефинише ДККТ је дато у прилогу I-2.

Ако је  $k = 1$  и  $\mathcal{S} = 0$  тада се ДККТ поклапа са самом директрисом  $d_1$ , а када је  $\mathcal{S} > 0$  тада ДККТ представљају две паралелне линије са директрисом  $d_1$  на удаљењу  $\mathcal{S}$  тј.  $r_1 = \mathcal{S}$ .

За случај две директрисе  $d_1 \parallel d_2$  ( $k = 2$ ) и ако је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  тада ДККТ представљају две паралелне линије са удаљењем  $\mathcal{S}$ , (Слика 3 - 26 а) тачкаста линија). За вредност  $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ ,  $\mathcal{S}_0 = \text{dist}(d_1, d_2)/2$ , ДККТ представља четири линије (две су између директрисних линија  $d_1, d_2$ , а две су са спољашње стране) које задовољавају услов  $r_1 \cdot r_2 = \mathcal{S}$  (Слика 3 - 26 а) испрекидана линија). Ако је  $k = 2$ , директрисне праве се секу и  $\mathcal{S} > 0$  тада ДККТ представљају четири хиперболичке криве са асимптотима које су поклопљене са директрисама  $d_1$  и  $d_2$ , (Слика 3 - 26 б). Ако је  $\mathcal{S} = 0$  тада ДККТ се поклапа са директрисама.



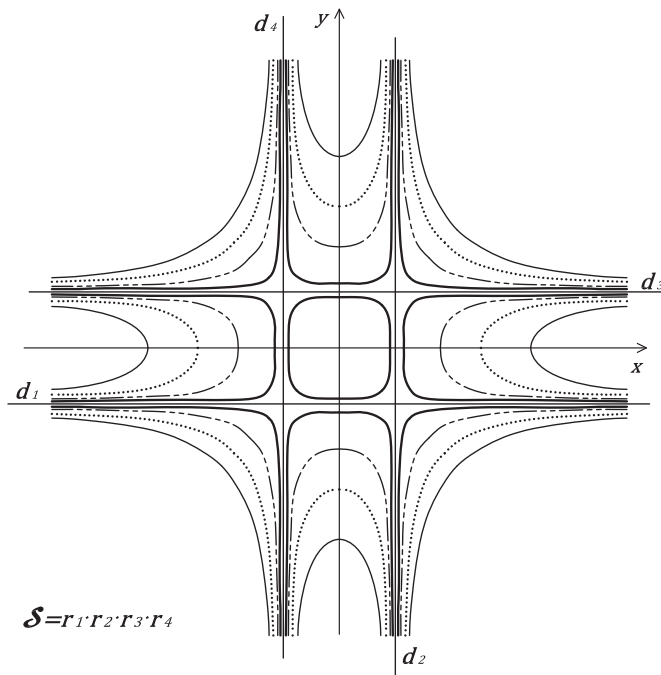
Слика 3 - 26: ДККТ за  $k = 2$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$



Слика 3 - 27: ДККТ за  $k = 3$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$

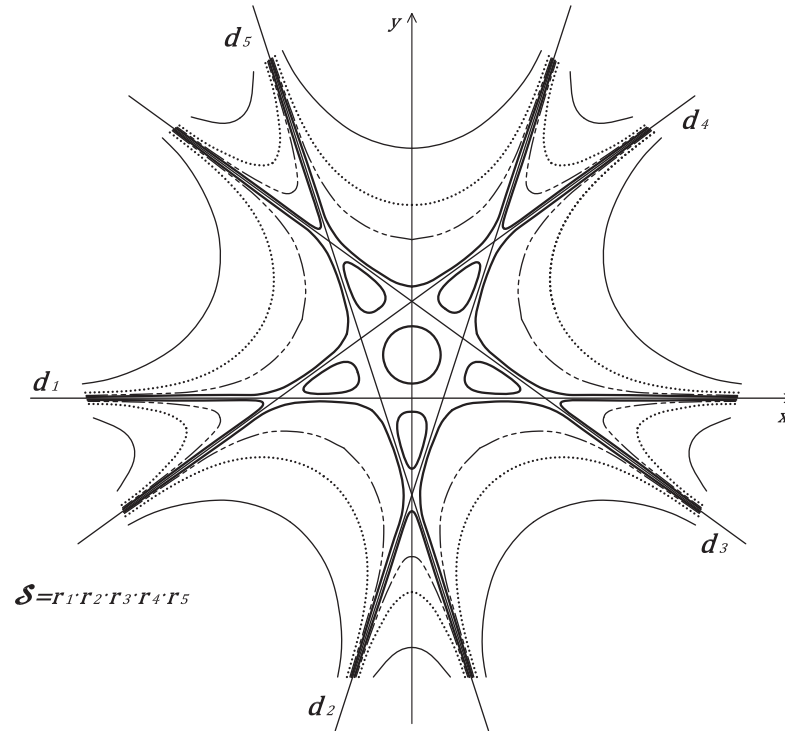
Ако је  $k = 3$ , директрисне праве образују једнакостранични троугао и нека је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ ,  $\mathcal{S}_0 = \bar{r}^3$  тада ДККТ садржи шест кривих хиперболичког типа чије су асимптоте поклопљене са директрисама. За вредност  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$  ДККТ садржи овал унутар троугла и шест кривих хиперболичког типа чије су асимптоте поклопљене са директрисама (Слика 3 - 27). Ако је  $\mathcal{S} = 0$  тада ДККТ за коју важи:  $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \mathcal{S}$  дегенерише се у три почетне директрисе  $d_1, d_2$  и  $d_3$ ; док за вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$  ДККТ поред шест кривих хиперболичког типа садржи и тежиште троугла.

Нека директрисне праве образују квадрат ( $k = 4$ ) и нека је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ ,  $\mathcal{S}_0 = \bar{r}^4$  тада ДККТ садржи осам кривих хиперболичког типа чије су асимптоте поклопљене са директрисама. За вредност  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$  ДККТ садржи суперелипсу унутар квадрата и осам кривих хиперболичког типа чије су асимптоте поклопљене са директрисама (Слика 3 - 28). Ако је  $\mathcal{S} = 0$  тада ДККТ за коју важи:  $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \mathcal{S}$  дегенерише се у четири почетне директрисе  $d_1, d_2, d_3$  и  $d_4$  док за вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$  ДККТ поред осам кривих хиперболичког типа садржи и тежиште квадрата.



Слика 3 - 28: ДККТ за  $k = 4$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$

Ако је  $k = 5$ , директрисне праве образују петоугао и нека је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ ,  $\mathcal{S}_0 = \bar{r}^5$  тада ДККТ садржи десет кривих хиперболичког типа чије су асимптоте поклопљене са директрисама. За вредност  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$  ДККТ садржи један централни овал, затим пет једнаких јајастих кривих и десет кривих хиперболичког типа чије су асимптоте поклопљене са директрисама (Слика 3 - 29). Ако је  $\mathcal{S} = 0$  тада ДККТ за коју важи:  $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5 = \mathcal{S}$  дегенерише се у пет директриса  $d_1, d_2, d_3, d_4$  и  $d_5$ , док за вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$  ДККТ поред десет кривих хиперболичког типа садржи и тежиште петоугла.

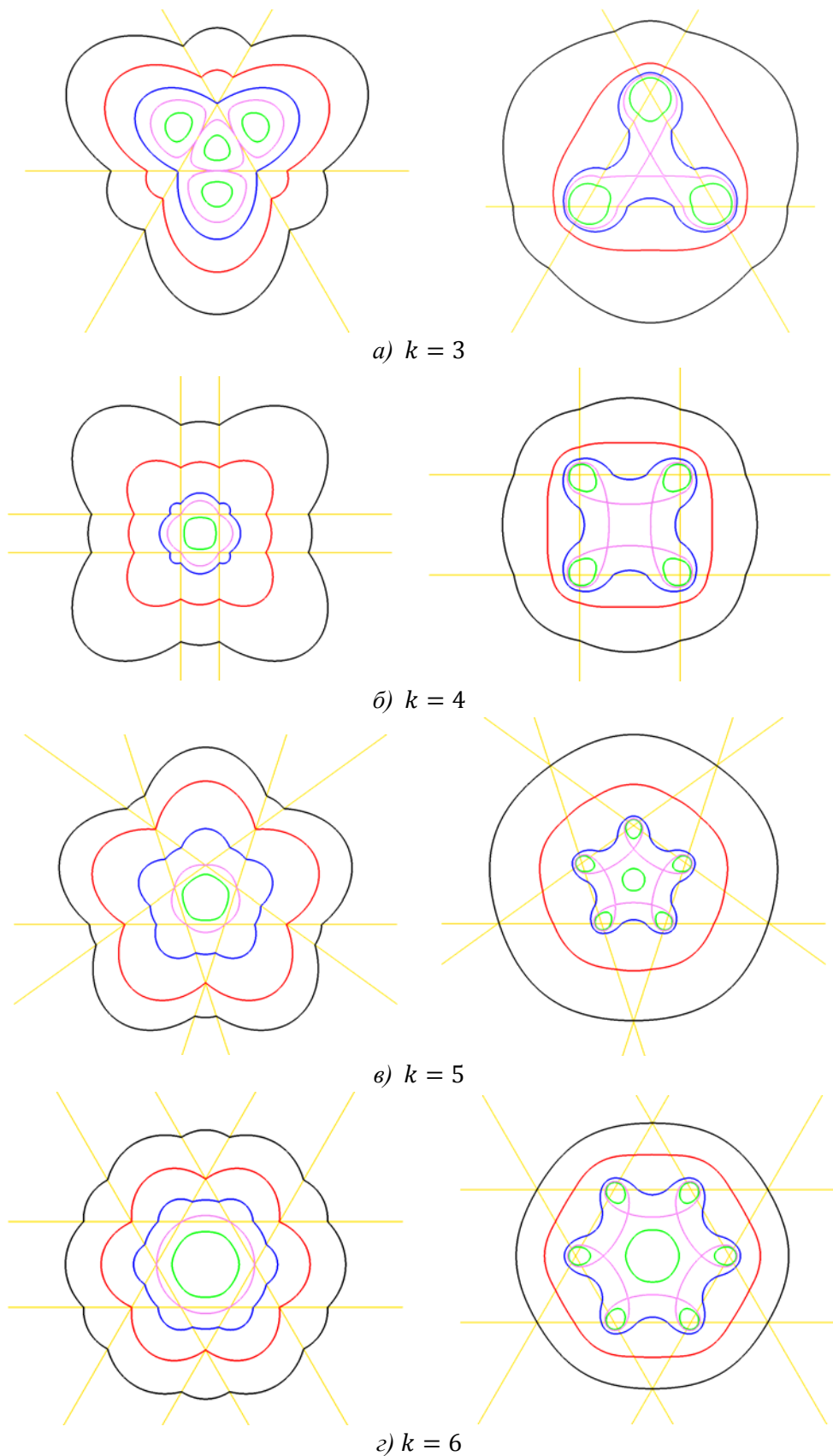


Слика 3 - 29: ДККТ за  $k = 5$  и са различитим вредностима параметра  $\mathcal{S}$

За  $k > 5$ , параметар  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ ,  $\mathcal{S}_0 = \bar{r}^k$  и ако су директрисе поклопљене са странама правилног полигона тада директрисна крива Касинијевог типа садржи  $2 \cdot k$  кривих хиперболичког типа чије су асимптоте поклопљене са директрисама. За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$  ДККТ садржи и тежиште полигона поред  $2 \cdot k$  кривих хиперболичког типа за које важи:  $\prod_{i=1}^k r_i = \mathcal{S}$ . Ако је  $\mathcal{S} = 0$  тада ДККТ се дегенерише у директрисе  $d_1, \dots, d_{k-1}$  и  $d_k$

### 3.1.3. Генеза и конструктивна интерпретација фокално-директрисно генерисаних 2D елемената као прелазни тип између фокално и директрисно генерисаних елемената

После појединачне геометријске интерпретације и графичких приказа фокално и директрисно генерисаних кривих у овом поглављу рада се генеришу нове Веберове фокално-директрисне криве. Веберове фокално-директрисно генерисане криве помоћу три фокуса и три директрисе су први пут дефинисане у раду [57], аутора Б. Малешевић, М. Петровић, М. Обрадовић, Б. Попконстантиновић. У овом раду, постављене су дефиниције генерализованих кривих (3 - 6), ради лакшег визуелног сагледавања дати су графички прикази кривих које су генерисане помоћу фокуса и директриса чије су позиције такве да формирају правилни полигон.



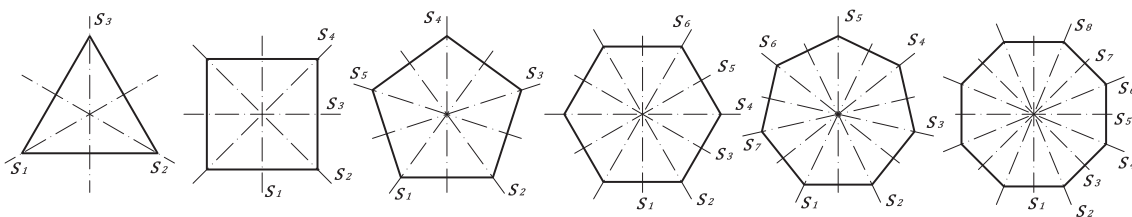
Слика 3 - 30: Веберове Ф-ДК (лево) и Ф-ДККТ (десно) за  $k = m = n, S > 0$

Ако је  $m = n = k, \alpha_i = 1, \beta_j = -1, (k \geq 3, i, j = 1..k)$  и директрисе су стране правилног полигона Слика 3 - 30 (жуте линије), док су фокуси поклопљени са теменима полигона, тада графички приказ Веберових Ф-Д кривих за које важи:  $\sum_i R_i + \sum_j r_j = \mathcal{S}$  дат је на Слика 3 - 30 (лево). На истој слици десно дате су Веберове Ф-Д криве Касинијевог типа генерисане следећом једнакошћу:  $\prod_i R_i + \prod_j r_j = \mathcal{S}$ . Координате фокуса, директриса, функције растојања до фокуса и директриса, као и пет различитих вредности за параметар  $\mathcal{S} > 0$  су дати у прилогу I-3. Све приказане криве су затвореног типа, без бесконачних тачака и представљају унију делова алгебарских кривих. Број фокуса ( $m$ ) и број директриса ( $n$ ) је ограничен на  $2 \leq m, n \leq 6$ , због тога што ред кривих са већим бројем фокуса прелази троцифрени број (Табела 3 - 1) и превазилази оквире овог истраживања. Мултифокалне/мултидиректрисне криве за  $k \geq 7$  могу бити предмет даљег истраживања.

### 3.2. Геометријска својства, ред и класификација фокално-директрисно генерисаних 2D елемената

Најважније својство кривих које су дефинисане у претходном поглављу рада је то што садрже пропорционални склад попут Паладијеве дефиниције идеалне собе јер настају као ГМТ у равни чија је сума/производ растојања до фокуса или директриса константан. Најједноставнија конструкција елипсе помоћу две чиоде и конца константне дужине, управо је могућа баш због овог геометријског својства. Веберове криве са јединичним коефицијентима по својој генези су повезане са правилом аритметичке или геометријске средине.

С обзиром да су све криве из поглавља 3.1. генерисане помоћу правилних полигона, онда оне имају исто својство геометријских фигура који их генеришу, а то је симетричност. Сваки правилни полигон са  $k$  страна има  $2k$  различитих симетрија:  $k$  рефлексција и  $k$  ротација. Рефлексције и ротације чине диедарску групу  $D_k$ . Ако је  $k$  непарно тада свака оса симетрије повезује средиште једне стране са супротним теменом, али ако је  $k$  парно тада  $k/2$  оса симетрије повезује средине супротних страна и  $k/2$  оса симетрије повезује супротна темена (Слика 3 - 31). У сваком случају, свака алгебарска крива фокално-директрисно генерисана на основу правилних полигона имаће  $k$  оса симетрије и  $2k$  елемената у групи симетрије, исто као и полигон који је генерише.



Слика 3 - 31: Схематски приказ оса симетрије правилних полигона

Поставком генерисаних елемената помоћу правилних полигона постиже се координација и конзистенција унутар великих дизајнираних система, па је модуларност још једно геометријско својство које поседују овако генерисани елементи. Ово својство кривих омогућава њихову употребу као обрасца за дизајнирање сложенијих форми, као и за поплочавање равни (тилинг).

Свака  $k$ -фокална крива  $W_f^{[k \times 1]}(\mathcal{S})$ , односно полиелипса са  $k$  фокуса је генерализована коника, [70] и има примену у оптимизационим проблемима, [62], [79], [108] и [109]. Ове алгебарске криве (3 - 3) са полиномским једначинама датим у прилогу I-2 су:

- реда  $2^k$ , ако је  $k$  непарно и
- реда  $2^k - \binom{k}{k/2}$ , ако је  $k$  парно, (Табела 3 - 1).

Фокалне криве у равни и дефинисање њиховог реда дали су Ние, Парило и Штурмфелс, [71].

Свака  $k$ -директрисна крива је полигонална линија и првог је реда.

Ред Веберове фокалне криве  $W_f^{[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]}(\mathcal{S})$  у зависности од повезаности тежинских коефицијената  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  се мења према следећој формули, [71]:

$$2^k - |P(\alpha)|,$$

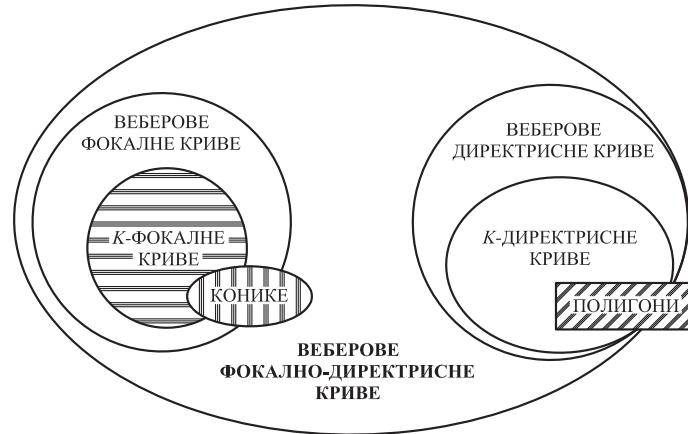
где је  $|P(\alpha)|$  број решења једначине  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_k\alpha_k = 0$  по  $x_i \in \{-1, +1\}$ .

Лемнискате које представљају ГМТ у равни са константним производом до фокуса (3 - 7) имају примену у теорији апроксимација. Полиномска апроксимација холоморфних функција може се тумачити као апроксимација нивовских кривих са лемнискатама, [70]. Ред ових фокалних кривих Касинијевог типа је  $2k$ , [120].

Табела 3 - 1: Ред  $k$ -фокалне криве и  $k$ -ФККТ

Број фокуса ( $k$ )	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Ред $k$ –фокалне криве	2	2	8	10	32	44	128	186	...
Ред $k$ –ФККТ	2	4	6	8	10	12	14	16	...

Међу Веберовим кривама постоји подела на неколико група кривих, у зависности од поменутих особина саме криве. Следећи дијаграми нам дају графички приказ ових подела у зависности од тога да ли се разматрају Веберове фокално-директрисно генерисане криве (Слика 3 - 32) или Веберове фокално-директрисно генерисане криве Касинијевог типа (Слика 3 - 33).



Слика 3 - 32: Дијаграм подела Веберових кривих



Слика 3 - 33: Дијаграм подела Веберових кривих Касинијевог типа

### 3.2.1. Варијација форме фокално-директрисно генерисаних 2D елемената у зависности од полазних параметара

Са променом Веберових тежинских коефицијената  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  и када коефицијенти нису сви истовремено једнаки нули, постиже се значајна промена облика генерисаних кривих. У овом делу рада разматраће се Веберове Ф-ДК и Ф-ДККТ код којих су тежински коефицијенти уз растојања до фокуса једнаки тј.  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m$  и тежински коефицијенти уз растојања до директриса једнаки тј.  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n$ . Такође, варијација форме генерисане криве може се постићи и само са минималном променом једног Веберовог тежинског коефицијента.

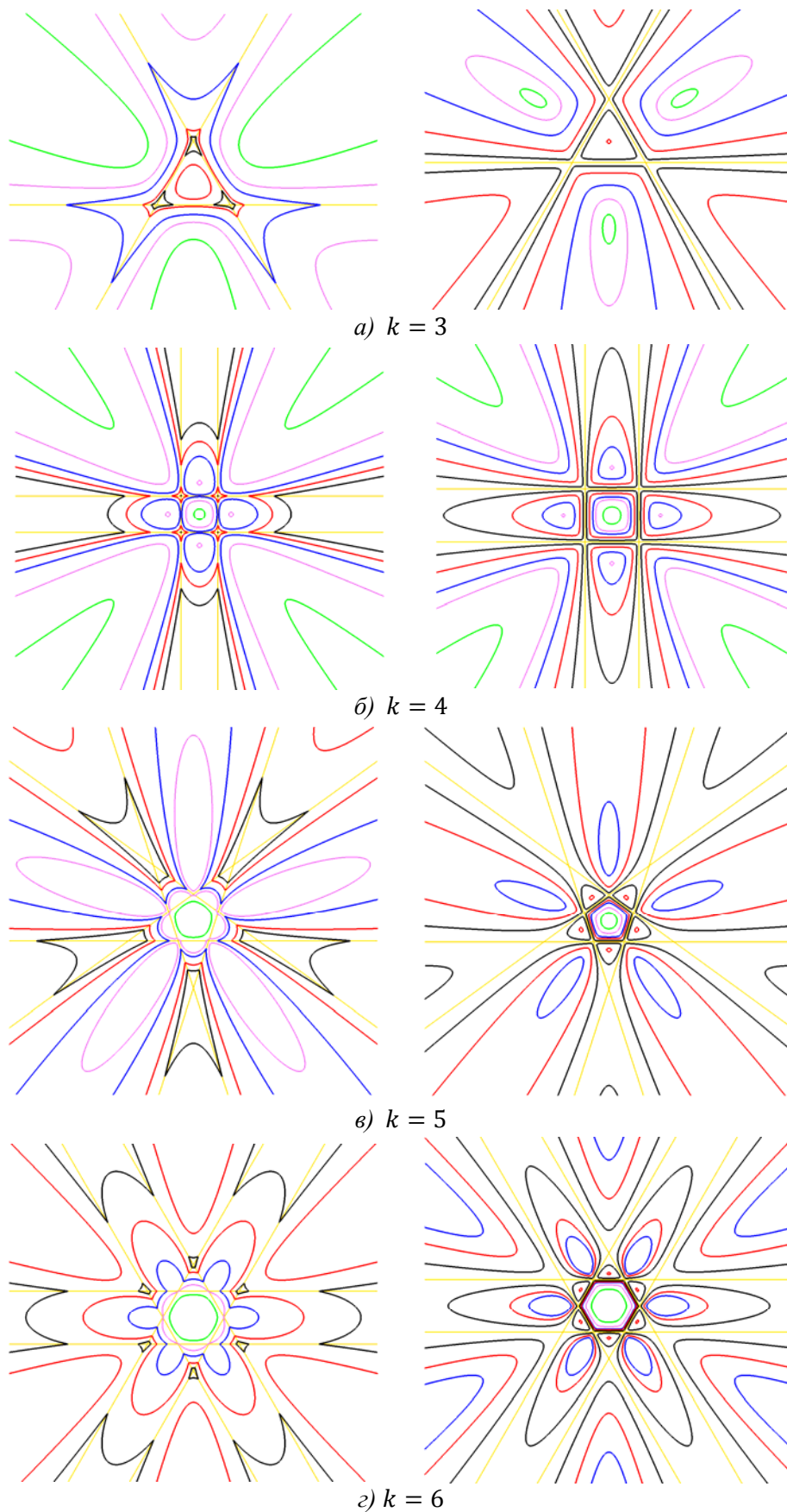
Нека је  $m = n = k, \alpha_i = \alpha = 1, \beta_j = -\beta, (k \geq 3, i, j = 1..k), \mathcal{S} = 0$ , директрисе су стране правилног полигона Слика 3 - 34 (жуте линије), док су фокуси поклопљени са теменима полигона, тада су на Слика 3 - 34 (лево) дати графички прикази Веберових Ф-ДК:

$$(3 - 47) \quad \sum_i \alpha_i R_i + \sum_j \beta_j r_j = \mathcal{S} \Leftrightarrow \frac{\sum_i R_i}{\sum_j r_j} = \beta,$$

док су на Слика 3 - 34 (десно) дати графички прикази Веберових Ф-ДККТ:

$$(3 - 48) \quad \alpha \prod_i R_i + \beta \prod_j r_j = \mathcal{S} \Leftrightarrow \frac{\prod_i R_i}{\prod_j r_j} = \beta.$$





Слика 3 - 34: Веберове Ф-ДК (лево) и Ф-ДККТ (десно) за  $k = m = n$ ,  $S = 0$

Координате фокуса, директрисе, функције растојања до фокуса и директриса, као и пет различитих вредности за параметар  $\beta > 0$  су дати у прилогу I-3. У овом случају, Веберове криве представљају ГМТ у равни када је сума/производ растојања до  $k$  фокуса једнак скалираној суми/производу растојања до  $k$  директриса.

Међу свим приказаним кривама (Слика 3 - 30 и Слика 3 - 34) има и затворених или отворених, односно са или без бесконачних тачака. Варијација форме је значајна у односу на полазне параметре, јер за мале промене Веберовог тежинског коефицијента ове криве прелазе из затвореног скупа тачака до кривих које су хиперболичког типа. Свака Веберова крива представља унију делова алгебарских кривих.

### **3.3. Анализа погодности облика фокално-директрисно генерисаних 2D елемената за примену у архитектури**

Фокално-директрисно генерисани 2D елементи, због своје генезе, припадају групи алгебарских кривих са великим бројем разноврсних облика. Ове криве другог, трећег или вишег реда настају као унија делова алгебарских кривих и то:

1. отворених кривих хиперболичког типа или сегмената хиперболичких кривих;
2. затворених кривих елиптичког облика или сегмената овала.

Компаративном анализом облика ових 2D елемената и појединих контура основа архитектонских објеката могуће је извршити апроксимацију архитектонског објекта фокално-директрисном кривом са циљем да се пронађу параметри криве која би апроксимирала дате облике са најмање одступања. Апроксимирана фокално-директрисна крива имала би примену у реконструкцији самог објекта, затим испитивањима везана за енергетску ефикасност, одређивање акустичких и оптичких особина, симулацију аеродинамичких особина.

#### **3.3.1. Примена фокално-директрисно генерисаних елемената у апроксимацији и реконструкцији контуре основе објекта**

Апроксимација контуре Римских амфитеатара помоћу елипсе или различитих облика овала, једна је од тема којом се баве многи уметници и истраживачи, како архитекте тако и математичари, [7], [8], [25], [91], [92] и [93]. Овоидне архитектонске форме и њихова апроксимација Хугелшеферовом јајастом кривом су такође анализирани у радовима [78] – магистарска теза М. Петровић и [82] аутора М. Петровић, М. Обрадовић и Р. Мијаиловић.

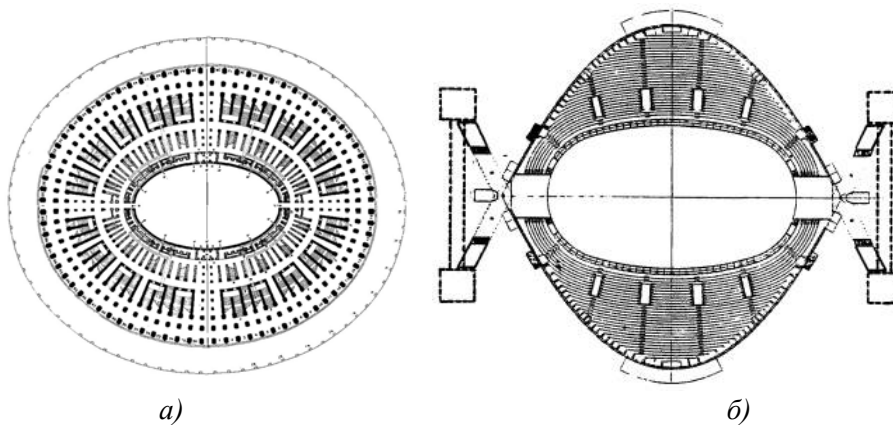
Примена Веберових фокално-директрисних кривих у циљу реконструкције основе објекта, али и партерних решења је значајна, управо због разноврсности облика ових кривих и јасно дефинисане алгебарске једначине. У даљем делу рада

---

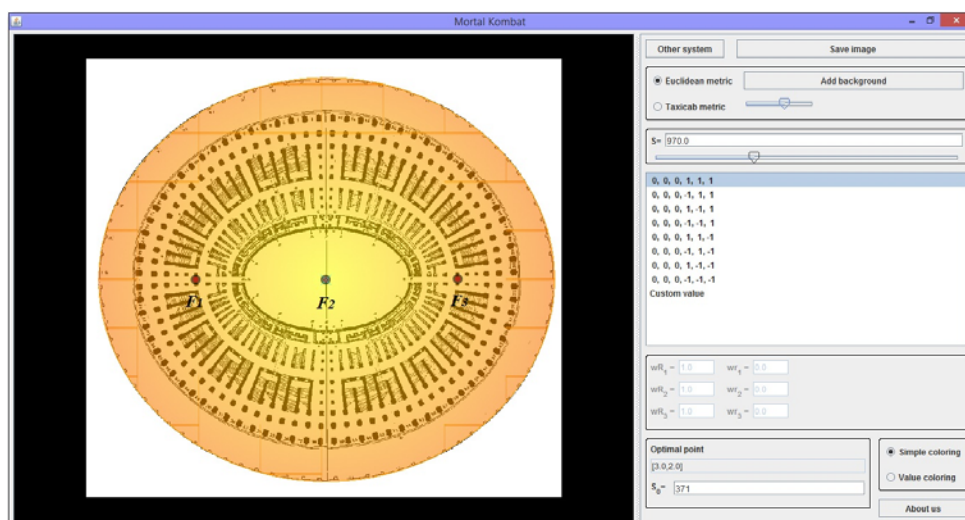
приказано је неколико основа архитектонских објеката и Веберове фокално-директрисно генерисане криве које их апроксимирају.

Следеће две основе архитектонских објеката (Слика 3 - 35) представљају подлогу (основу) за формирање Веберових ФК, односно Веберових Ф-ДК. За потребе апроксимације ових основа објеката Веберовим кривама са највише 3 фокуса и 3 директрисе, развијена је посебна Јава апликација која се налази на интернет страници <http://symbolicalgebra.etf.bg.ac.rs/Java-Applications/>, [79] аутора М. Петровић, Б. Бањац и Б. Малешевић.

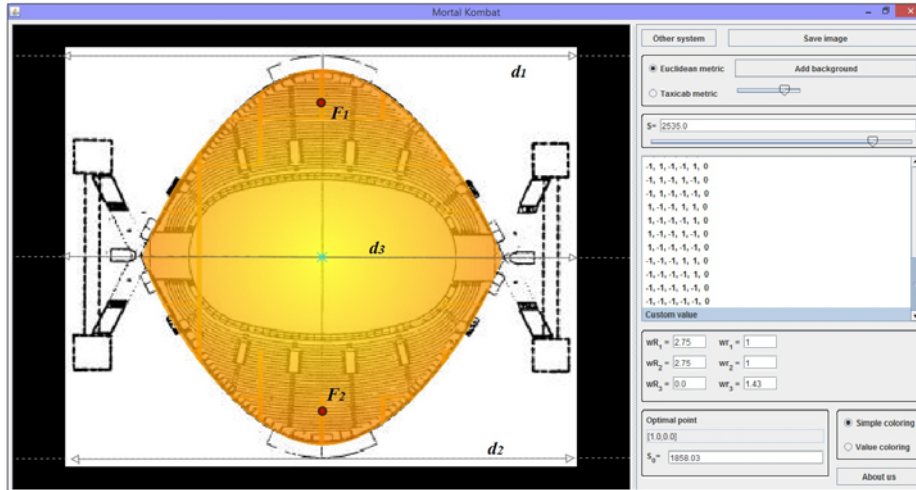
Анализирањем контурних ивица арене Колосеум и арене Дортон добијене су оптималне криве: а)  $R_1 + R_2 + R_3 = \mathcal{S}$  трифокална крива са јединичним тежинским коефицијентима и константном сумом  $\mathcal{S} = 970$  (Слика 3 - 36); б) Веберова генерисана крива са два фокуса и три директрисе  $w_1R_1 + w_2R_2 + w_{d1}r_1 + w_{d2}r_2 + w_{d3}r_3 = \mathcal{S}$  код које су тежински коефицијенти  $w_1 = w_2 = 2.75$   $w_{d1} = w_{d2} = 1$ ;  $w_{d3} = 1.43$  и која има константну суму  $\mathcal{S} = 2535$  (Слика 3 - 37).



Слика 3 - 35: а) Колосеум, Рим, Италија, [12];  
б) арена Дортон, Северна Каролина, УСА, [137]



Слика 3 - 36: Апроксимација основе контуре амфитеатра Колосеум трифокалном кривом са константном сумом растојања

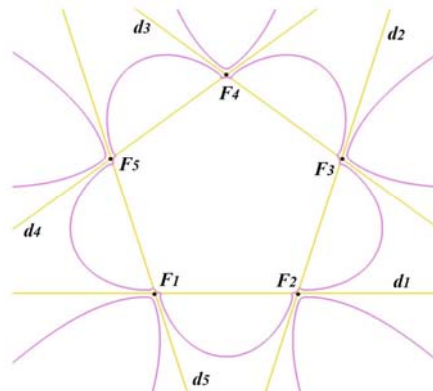


Слика 3 - 37: Апроксимација основе контуре арене Дортон  
фокално-директрисном кривом (два фокуса и три директрисе)

Следеће кровне конструкције посматране у погледу одозго такође могу бити апроксимирани фокално-директрисно генерисаним 2D елементима. Објекат изграђен за изложбу Белекспо 1988. године у Минску (Слика 3 - 38 а), има сличан облик као затворени део Веберове Ф-ДК са константном сумом  $\sum_{i=1..5} R_i + \alpha \cdot \sum_{j=1..5} r_j = 0$ ,  $\alpha = -1.512$  (Слика 3 - 38 б) даје графички приказ издвојеног дела криве са Слика 3 - 34 (лево) за  $k = 5$ , лила линија).



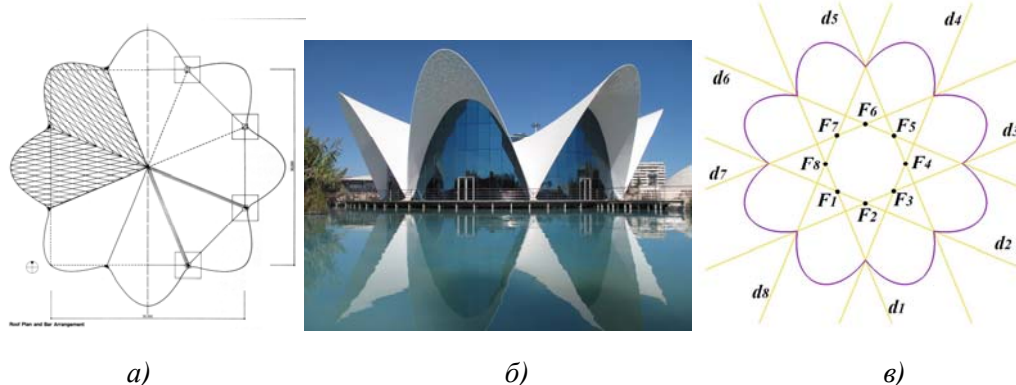
а)



б)

Слика 3 - 38: а) Белекспо 1988, Минск, Белорусија, [141];  
б) Веберова Ф-ДК за  $k = 5$

Занимљива геометријска форма која се добија из пресека четири хиперболичка параболоида, била је инспирација архитектке Феликса Канделе да формира кровну конструкцију за два објекта: ресторан Лос Манантилес (Слика 3 - 39 а) и објекат у оквиру парка Океанографије тј. комплекса Града уметности и науке у Валенсији (Слика 3 - 39 б), [8] и [23]. Ако се посматра само контура кровне конструкције, у погледу одозго, тада се уочава њена сличност са Веберовом Ф-ДК која има константну суму:  $\bar{a}_{oktaedra} * \sum_{i=1..8} R_i - \sum_{j=1..8} r_j = 3.7 * \bar{a}_{oktaedra}$  (Слика 3 - 39 в).



Слика 3 - 39: а) ресторан Лос Манантилес, Мексико, [142];  
б) објекат у оквиру комплекса Града уметности и науке, Шпанија, [142];  
в) Веберова Ф-ДК за  $k = 8$

Како је поменута апликација формирана само за Веберове Ф-ДК са највише 3 фокуса и/или 3 директрисе, за потребе апроксимације сложенијих контура објеката и претходно наведених примера могуће је дорадити и побољшати ову Јава апликацију.

### 3.3.2. Примена геометрије фокално-директрисно генерисаних 2D елемената на решавање локацијских проблема

Избор метрике је од фундаменталног значаја за решавање локацијских проблема. Природа проблема је та која дефинише метрику. Најчешће за решавање локацијских проблема се узима Еуклидско растојање, при том у пракси се често користи кориговано Еуклидско растојање. Мерење ванградских растојања по путевима се показало да је 10-30% дуже, него када се посматра одговарајуће Еуклидско растојање (растојања мерена ваздушним путем), [103]. Ако је у питању решавање локацијских урбаних проблема и ако у граду сматрамо да су улице под правим углом тада је дужину пута најбоље одредити правоугаоном метриком (*taxicab* односно Менхетн метрика), [30] и [49]. *Taxicab* криве другог реда анализирани су у радовима [42] и [81]. Аутори М. Петровић, Б. Малешевић, Б. Бањац и Р. Обрадовић у раду [81] дају графички приказ трифокалних кривих и коника у *taxicab* геометрији, али и њихов обим и површину.

У раду [79], аутора М. Петровић, Б. Бањац и Б. Малешевић, извршена је упоредна анализа оптималног локацијског решења Ферма–Торичелијевог типа добијеног на основу Јава апликације и већ постојећег решења инфраструктурних коридора у Србији.

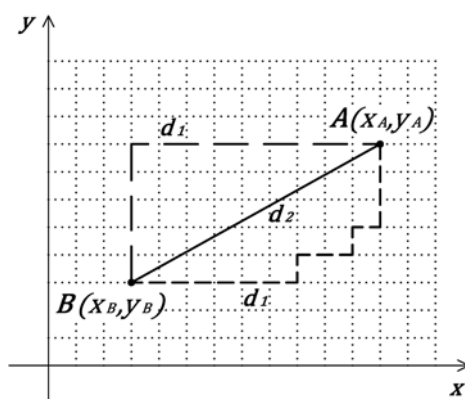
Локацијски проблеми се најчешће везују за раван. Међутим, како се Земљина површина може апроксимирати само делом равни у малим димензијама, логично је да се уместо Еуклидске користи сферна-Риманова геометрија. Тада се уместо праве линије као најкраћег растојања између два града (објекта) посматра

геодезијска линија. Геодезијске линије су криве чија је геодезијска кривина једнака нули у свакој тачки. На сфери, геодезијска линија је велики круг или ортодрома. Локсодрома је још једна геодезијска линија које се користе за одређивање растојања између две тачке на сфери. Морски путеви су већином локсодромски па је решавање локацијских проблема у водном саобраћају условљено и локсодромским растојањем.

Минковски растојање реда  $p$  за два посматрана објекта  $A(x_A, y_A)$  и  $B(x_B, y_B)$  се дефинише са, [30]:

$$(3 - 49) \quad d_p = [|x_A - x_B|^p + |y_A - y_B|^p]^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

Специјално за  $p = 1$  добија се Менхетн или градско-блок растојање (Слика 3 - 40 кратке/дуге испрекидане линије), док за  $p = 2$  Еуклидско растојање (Слика 3 - 40 континуална линија).



Слика 3 - 40: Графички приказ Менхетн и Еуклидског растојања између две тачке

Свакако да се појам „растојања“ приликом решавања различитих локацијских проблема не мора увек посматрати као геометријска дужина већ се може разматрати и време растојања, трошкови путовања или било која друга величина везана за локацијски проблем.

Примена трифокалне криве кроз анализу једног специфичног решења у урбанизму дата је у раду [79] - аутора М. Петровић, Б. Бањац и Б. Малешевић. Извршена је анализа примене Ферма-Торичелијеве тачке за три дате тачке, односно локације у чијој близини се налази градови из идејног плана гасовода Јужни ток. Гасовод почиње од јужног дела Русије, у непосредној близини града Береговаја, на дну Црног мора, до Варне у Бугарској. Укупна дужина деонице преко Црног мора је 900 километара. Копнени део у Европи је дуг 1.455 километара (Слика 3 - 41 а). Близу града Плевен у Бугарској планирано је да се гасовод дели на две стране. Једна страна гасовода би ишла из Бугарске, преко Грчке и испод мора у Италију, а друга би преко Србије и Мађарске, у Аустрију. Пројекат Јужни ток је планиран тако да гасовод у Србију уђе из Бугарске код Зајечара (исток Србије), и изађе код Суботице (север Србије).





поред наведене примене трифокалних кривих која је објављена у раду [79], може се применити конструкција мултифокалних/мултидиректрисних или фокално-директрисних кривих у зависности од полазног броја фокуса/директриса, различитих полазних параметара и тежинских коефицијената. Такође, може се разматрати и формирање функционалних урбаних области [100], [105] помоћу фокално-директрисних кривих. Отворени геометријски проблем: „Који скуп путева је бржи/краћи“ који је разматран у раду [77], представља још један пример примене фокално-директрисних кривих, а који настаје из Ердеш-Морделове неједнакости за троугао, [28].



## 4. ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИ 3D ЕЛЕМЕНТИ КАО ПРЕЛАЗНИ ТИП ИЗМЕЂУ ФОКАЛНО И ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИХ 3D ЕЛЕМЕНАТА

*„Лирика архитектуре у машинској ери“<sup>4</sup>*

### 4.1. Генеза и просторна интерпретација фокално, директрисно и фокално-директрисно генерисаних 3D елемената

Са развојем технике и технологије крајем XX и почетком XXI века, коришћење алгебарских површи другог и виших редова у дизајнирању архитектонских објеката је учестала [14] - [20], [34], [37], [40], [47], [52], [69], [83] - [89], [97], [112] - [115]. Због своје једноставне геометријске конструкције, али и сведене естетике и елеганције, цилиндар, конус, хиперболоид, параболоид, сфера, само су неке од површи које привлаче пажњу у истраживањима, како математичара, тако и архитеката. Примена ових форми у архитектури је значајна због њихове ергономије и аеродинамике, [46]. Следећи примери архитектонски објеката то и потврђују.

Елиптички цилиндар висине 21 метар је срж објекат који садржи неонске прстенове и мења боје осветљења према звуцима града и ветрова који је окружују (Слика 4 - 1 а). Ова модерна елиптичка зграда се назива Кула Ветрова. Њен аутор је јапански архитекта Тојо Ито и она је права технолошка скулптура изграђена 1986. године у Јокохами (Јапан).

Површ другог реда – конус, била је инспирација енглеског архитекте Сер Нормана Фостера за дизајн Зграде Миленијум (Слика 4 - 1 б), 1989-92. год. Изграђена је у Јапану, висине 840 метара и пројектована да издржи ураганске јачине ветрова и честе земљотресе. Конусна структура куле (170-тоспратни небодер) са спиралним кавезом је аеродинамична и смањује притисак ветрова. Челични

---

<sup>4</sup> Žan-Luj Koen (2006) *Le Corbusier: Architectural poetry in the machine age*, [45]

тенкови испуњени водом постављени су на врху куле и могу се ротирати као противтежа против ветра, [34].



а) [131]



б) [132]



в) [133]



г) [134]



д) [135]



ђ) [136]



е) [137]



ж) [137]



з) [138]



и) [139]



ј) [140]

Слика 4 - 1: Модерни архитектонски објекти са обликом алгебарских површи другог и виших редова

Једнограни хиперболоид висине 108 метара, челичне структуре црвене боје је Лучки Торањ Кобе. Изграђен је 1963. године у Кобеу, Јапан (Слика 4 - 1 *в*).

Музеј посвећен природној средини, са називом Биосфера, изграђен је у Монреалу за Ехро '67. Геодезијска купола, висине 62m и пречника 76m, формирана је тако да сложен систем нијанси акрилних ћелија контролише унутрашњу температуру (Слика 4 - 1 *з*). Архитекта овог објекта је Ричард Бакминстер Фулер.

Филипс Павиљон за Ехро '58 у Бриселу, архитекте Ле Корбизијеа, изгледао је као кластер са девет хиперболичких параболоида. Ова кућа мултимедијског спектакла која слави послератни технолошки напредак била је изграђена од челика и бетона (Слика 4 - 1 *д*). Павиљон - „чаробна кутија“ валовитих контура је био постављен само за потребе Светске изложбе, [45].

Зграда новог немачког Парламента је са великом стакленом куполом која пружа поглед на околни берлински пејзаж (Слика 4 - 1 *ђ*). Унутрашњим конусом у центру куполе уведена је дневна светлост, али и могућност да посетиоци виде рад Коморе. Футуристички и транспарентан дизајн куполе „Рајхстага“ је дело архитекте сер Нормана Фостера. Конструкција је изведена у периоду од 1993-1999. године, [34].

Архитекта Метју Новицки дизајнирао је Ј.С. Дортон Арену као објекат који се састоји од два параболочка цилиндра (Слика 4 - 1 *е, ж*). Зграда је позната под називом „Параболеум“ и изграђена је 1952. год. у Северној Каролини. Иновативна кровна конструкција објекта је седласта површ која се ослања на два армирано-бетонска лучна носача. Ови параболочки лукови су 20 метара изнад земље, а затим се настављају и испод, тако да њихови крајеви држе заједно више челичних каблова затегнуте и прихватају све силе и утицаје кровне конструкције. Геометријска форма крова је, још једна површ другог реда, хиперболички параболоид.

Зграда Геркин, још један објекат архитекте сер Нормана Фостера, има бионичку јајасту форму (Слика 4 - 1 *з*). Основа објекта је кружна и заротирана за неколико степени на сваком спрату јер је тиме постигнута максимална природна вентилација. „Краставчић“ са својим четрдесет и једним спратом је први еколошки небодер у Лондону. Висина ове аеродинамичне зграде је 108 метара. Грађена је у периоду од 1997-2004. године, [34].

Два модерна архитектонска објекта из 2012. године су са параболочним пресеком, односно елиптичном основом и са слободном формом (Слика 4 - 1 *и, ј*). Први објекат је ботаничка башта изграђена у Парку Природе у Сингапуру. Архитектонски објекти са слике 4 - 1 *ј* су небодери у Онтарију (Канада) са називом Апсолутни свет. Елиптичке основе већег небодера су заротиране 209 степени, од основе до врха чиме је истакнута слободна форма објекта.

Развојем компјутерске технике, данас је олакшано генерисање геометријских форми које имају потенцијал за примену у обликовању архитектонско-урбанистичког простора. Недавна истраживања аутора следећих

радова [4] - [6], [20], [27], [39], [52], [84] - [89] и [97], али и одбрањене докторске дисертације младих научника (Б. Денг, О. Лаб и Л. Ши) [19], [50] и [99], о општој примени алгебарских површи у архитектонском дизајну, то и потрђују.

У наредном делу рада дефинисане су површи другог реда као површи генерисане помоћу основних геометријских појмова (тачка, права и раван), [38]. Затим је извршено издвајање делова ових фокално-директрисних генерисаних површи другог реда према одговарајућим алгебарско-геометријским условима. Фокално-директрисно генерисане површи које су описане у [3] и [80] аутора М. Петровић, Б. Малешевић, Б. Бањац, представљају геометријска места тачака у простору са константном сумом растојања до 3 фокуса, 3 директрисе или 3 директрисне равни:

$$(4 - 1) \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \alpha_3 R_3 + \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \beta_3 r_3 + \gamma_1 \rho_1 + \gamma_2 \rho_2 + \gamma_3 \rho_3 = \mathcal{S},$$

где су  $R_1, R_2, R_3, r_1, r_2, r_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до фокуса (фиксиране тачке)  $F_1, F_2, F_3$ , директрисе (фиксиране праве)  $d_1, d_2, d_3$  и директрисне равни (фиксиране равни)  $D_1, D_2, D_3$ , респективно и  $\mathcal{S} = const, \mathcal{S} > 0$ . Анализиране површи које су дефинисане помоћу одговарајућих реалних бројева, тј. Веберових тежинских коефицијената  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  назване су Веберове површи.

За потребе визуелизације Веберових кривих и површи развијене су посебне Јава апликације које се налазе на интернет страници <http://symbolicalgebra.etf.bg.ac.rs/Java-Applications/> Детаљан опис развоја апликације је објављен у раду [3]. Примена ових фокално-директрисно генерисаних 2D и 3D елемената у неким оптизационим проблемима, архитектури, урбанистичком и просторном планирању презентована је у радовима: [3] аутора Б. Бањац, М. Петровић, Б. Малешевић и [79] аутора М. Петровић, Б. Бањац, Б. Малешевић.

Ред алгебарске површи одређен је степеном алгебарске једначине. У овом делу рада разматрају се површи задате са

$$(4 - 2) \quad A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz + 2A_{14}x + 2A_{24}y + 2A_{34}z + A_{44} = 0,$$

тј. алгебарске површи другог реда (квадрике) које настају као Веберове површи (4 - 1) са највише два геометријска појма.

**ЕЛИПСОИД** представља ГМТ у простору чија је сума растојања до две фиксиране тачке константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за елипсоид:

$$(4 - 3) \quad R_1 + R_2 = \mathcal{S},$$

где су  $R_1$  и  $R_2$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до фокуса  $F_1(-c, 0, 0)$  и  $F_2(c, 0, 0)$ . Нека су  $a$  и  $b$  полуосе елипсоида ( $a \geq b > 0$ ), тада су вредности параметара  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  и  $\mathcal{S} = 2a$ . Једнакост (4 - 3) се може приказати у облику:

$$(4 - 4) \quad \sqrt{(x + c)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2 + z^2} = 2a.$$

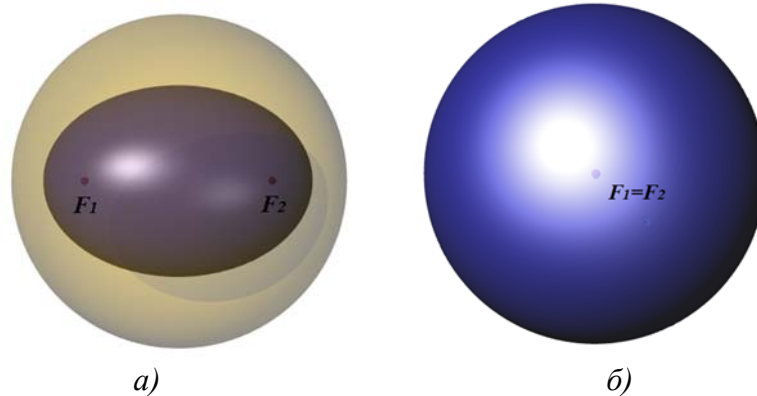
Двоструким квадрирањем ове једначине уз следећи услов

$$(4 - 5) \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

и  $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ , настаје канонски облик једначине специјалног елипсоида (сфероид – елипсоид са две једнаке осе):

$$(4 - 6) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Елипсоид је скуп свих тачака  $T(x, y, z)$  које задовољавају услов (4 - 5) тј. налази се у унутрашњости сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  (Слика 4 - 2 а). Ако се фокуси поклопе  $F_1 = F_2$  добијена површ је сфера (Слика 4 - 2 б).



Слика 4 - 2: а) Елипсоид;  
б) Сфера

Аналогно дефиницији Папус-Бошковића за елипсу, као фокално-директрисно генерисану криву другог реда, сада је могуће дефинисати елипсоид - површ другог реда, као фокално-директрисно генерисану површ:

**ЕЛИПСОИД** представља ГМТ у простору чији је растојање до фокуса једнако скалираном растојању до директрисне равни, фактор скалирања је ексцентрицитет  $e$ . Другим речима, однос између растојања до фокуса и директрисне равни је константан и износи  $e$ . Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за елипсоид:

$$(4 - 7) \quad R_1 - e \cdot \rho_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{R_1}{\rho_1} = e, \quad 0 < e < 1,$$

где су  $R_1$  и  $\rho_1$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до фокуса  $F_1(-c, 0, 0)$  и директрисне равни  $D_1: x = -\frac{a^2}{c}$ , ( $c < a$ ), респективно. Нека су  $a$  и  $b$  полуосе елипсоида ( $a \geq b > 0$ ), тада су вредности параметара  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  и  $e = c/a$ . Параметар  $e$  представља ексцентрицитет елипсоида. Једнакост (4 - 7) се може приказати у облику:

$$(4 - 8) \quad \sqrt{(x + c)^2 + y^2 + z^2} = e \cdot \left| x + \frac{a^2}{c} \right|.$$

Квадрирањем ове једначине уз следећи услов

$$(4 - 9) \quad x > -\frac{a^2}{c},$$

настаје канонски облик једначине специјалног елипсоида (сфероид – елипсоид са две једнаке осе):

$$(4 - 10) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Ако се у једнакости (4 - 7) за коефицијент скалирања узме вредност  $e > 1$ , тј.  $c > a$  и  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  тада фокално-директрисна генерисана површ је двограни хиперболоид. Овај хиперболоид се може дефинисати и на следећи начин:

**ДВОГРАНИ ХИПЕРБОЛОИД** представља ГМТ у простору чија је апсолутна вредност разлике растојања до две фиксиране тачке константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за двограни хиперболоид:

$$(4 - 11) \quad |R_1 - R_2| = \mathcal{S},$$

где су  $R_1$  и  $R_2$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до два фокуса  $F_1(-c, 0, 0)$  и  $F_2(c, 0, 0)$ . Нека су вредности параметара:  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  за  $a \geq b > 0$  и  $\mathcal{S} = 2a$ . Сада се једнакост (4 - 11) може приказати у облику:

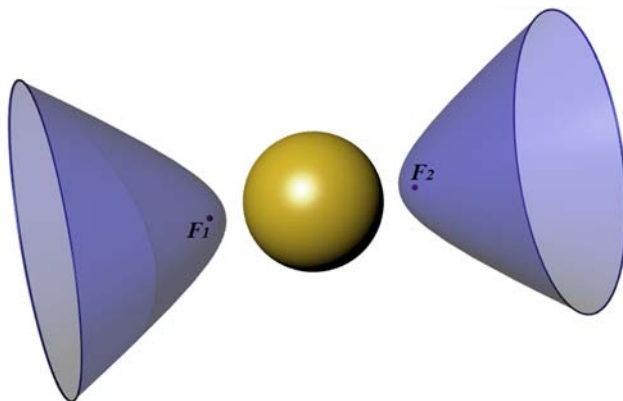
$$(4 - 12) \quad \left| \sqrt{(x + c)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2 + z^2} \right| = 2a.$$

Двоструким квадрирањем ове једначине уз следећи услов

$$(4 - 13) \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2$$

и  $R = \sqrt{a^2 - b^2}$ , настаје канонски облик једначине специјалног (кружног) двограног хиперболоида:

$$(4 - 14) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$



Слика 4 - 3: Двограни хиперболоид

Двограни хиперболоид је скуп свих тачака  $T(x, y, z)$  које задовољавају услов (4 - 13) тј. налази се у спољашњости сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  (Слика 4 - 3).

**ЕЛИПТИЧКИ ЦИЛИНДАР** представља ГМТ у простору чија је сума растојања до две фиксиране праве (директрисе) константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за елиптички цилиндар:

$$(4 - 15) \quad r_1 + r_2 = \mathcal{S},$$

где су  $r_1$  и  $r_2$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до одговарајућих директриса  $d_1 [P_{11}(-c, 0, 0), P_{12}(-c, 0, 1)]$  и  $d_2 [P_{21}(c, 0, 0), P_{22}(c, 0, 1)]$ . Вредности параметара су:  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  ( $a \geq b > 0$ ) и  $\mathcal{S} = 2a$ . Једнакост (4 - 15) се сада може приказати у облику:

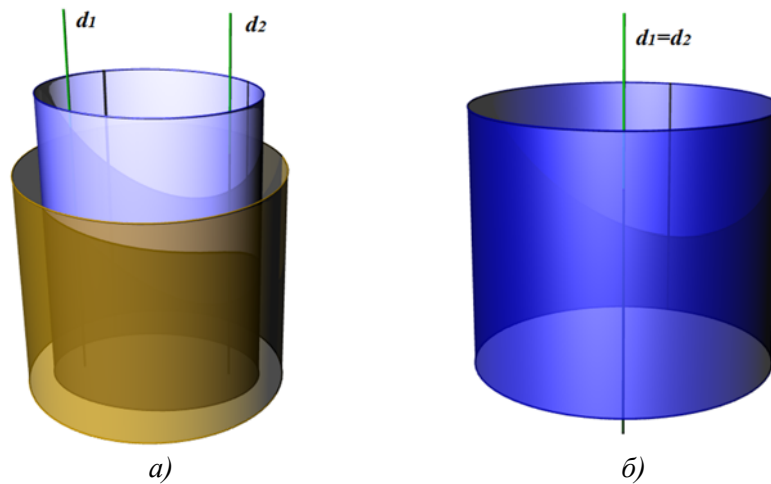
$$(4 - 16) \quad \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

Двоструким квадрирањем ове једначине уз следећи услов

$$(4 - 17) \quad x^2 + y^2 \leq R^2$$

и  $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ , настаје канонски облик једначине елиптичког цилиндра:

$$(4 - 18) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Слика 4 - 4: а) Елиптички цилиндар;  
б) Кружни цилиндар

Елиптички цилиндар је скуп свих тачака  $T(x, y, z)$  које задовољавају услов (4 - 17) тј. налази се у унутрашњости цилиндра  $x^2 + y^2 = R^2$  (Слика 4 - 4 а). Ако се директрисе покlope  $d_1 = d_2$  добијена површ је кружни цилиндар (Слика 4 - 4 б).

Елиптички цилиндар се такође може дефинисати као фокално-директрисна површ на следећи начин.

**ЕЛИПТИЧКИ ЦИЛИНДАР** представља ГМТ у простору чије је растојање до фокуса једнако скалираном растојању до директрисе, фактор скалирања је ексцентрицитет  $e$ . Другим речима, однос између растојања до фокуса и директрисе је константан и износи  $e$ . Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за елиптички цилиндар:

$$(4 - 19) \quad R_1 - e \cdot r_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{R_1}{r_1} = e, \quad 0 < e < 1,$$

где су  $R_1$  и  $r_1$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до одговарајућег фокуса  $F_1(-c, 0, 0)$  и директрисе  $d_1[P_{11}(-a^2/c, 0, 0), P_{12}(-a^2/c, 0, 1)]$ . Вредности параметара су:  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  ( $a \geq b > 0$ ) и ексцентрицитет  $e = c/a$ . Једнакост (4 - 19) се сада може приказати у облику:

$$(4 - 20) \quad \sqrt{(x + c)^2 + y^2 + z^2} = e \cdot \sqrt{(x + a^2/c)^2 + y^2}.$$

Квадрирањем претходне једнакости настаје канонски облик једначине елиптичког цилиндра:

$$(4 - 21) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

**ЕЛИПТИЧКИ ЦИЛИНДАР** представља ГМТ у простору чије је растојање до директрисе једнако скалираном растојању до директрисне равни, фактор скалирања је ексцентрицитет  $e$ . Другим речима, однос између растојања до директрисе и директрисне равни је константан и износи  $e$ . Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за елиптички цилиндар:

$$(4 - 22) \quad \frac{r_1}{\rho_1} = e \Leftrightarrow r_1 - e \cdot \rho_1 = 0, \quad 0 < e < 1,$$

где су  $r_1$  и  $\rho_1$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до одговарајуће директрисе  $d_1[P_{11}(-c, 0, 0), P_{12}(-c, 0, 1)]$  и директорне равни  $D_1: x = -a^2/c$ . Вредности параметара су:  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  ( $a \geq b > 0$ ) и ексцентрицитет  $e = c/a$ . Једнакост (4 - 22) се сада може приказати у облику:

$$(4 - 23) \quad \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = e \cdot |x + a^2/c|.$$

Квадрирањем претходне једнакости уз услов  $x > -\frac{a^2}{c}$  настаје канонски облик једначине елиптичког цилиндра:

$$(4 - 24) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ако се у једнакостима (4 - 19) и (4 - 22) за коефицијент скалирања узме вредност ексцентрицитета  $e > 1$ , тј.  $c > a$  и  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  тада фокално-директрисна генерисана површ је хиперболички цилиндар. Овај хиперболоид се може дефинисати и на следећи начин:



**ХИПЕРБОЛИЧКИ ЦИЛИНДАР** представља ГМТ у простору чија је апсолутна вредност разлике растојања до две фиксирани праве (директрисе) константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за хиперболички цилиндар:

$$(4 - 25) \quad |r_1 - r_2| = \mathcal{S},$$

где су  $r_1$  и  $r_2$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до одговарајућих директриса  $d_1 [P_{11}(-c, 0, 0), P_{12}(-c, 0, 1)]$  и  $d_2 [P_{21}(c, 0, 0), P_{22}(c, 0, 1)]$ . Вредности параметара су  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  ( $a \geq b > 0$ ) и  $\mathcal{S} = 2a$ . Сада се једнакост (4 - 25) може приказати у облику:

$$(4 - 26) \quad \left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

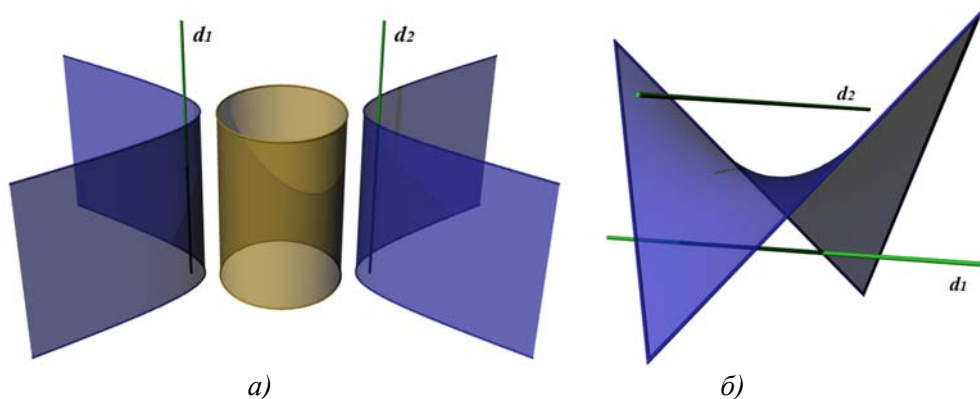
Двоструким квадрирањем ове једначине уз следећи услов

$$(4 - 27) \quad x^2 + y^2 \geq R^2$$

и  $R = \sqrt{a^2 - b^2}$ , настаје канонски облик једначине хиперболичког цилиндра:

$$(4 - 28) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Хиперболички цилиндар је скуп свих тачака  $T(x, y, z)$  које задовољавају услов (4 - 27) тј. налази се у спољашњости цилиндра  $x^2 + y^2 = R^2$  (Слика 4 - 5 а).



а) Хиперболички цилиндар;  
б) Хиперболички параболоид

**ХИПЕРБОЛИЧКИ ПАРАБОЛОИД** представља ГМТ у простору чија су растојања до две фиксирани праве (директрисе су мимоилазне праве) једнака. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за хиперболички параболоид:

$$(4 - 29) \quad r_1 - r_2 = 0,$$

где су  $r_1$  и  $r_2$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до одговарајућих директриса  $d_1 [P_{11}(-1, 0, 0), P_{12}(1, 0, 0)]$  и  $d_2 [P_{21}(0, -1, c), P_{22}(0, 1, c)]$ ,  $c \neq 0$ . Једнакост (4 - 29) се може приказати у облику:

$$(4 - 30) \quad \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (z - c)^2}.$$

Квадрирањем ове једначине настаје канонски облик једначине хиперболичког параболоида (Слика 4 - 5 б):

$$(4 - 31) \quad x^2 - y^2 = 2cz - c^2.$$

**ДЕГЕНЕРИСАНА ПОВРШ (ДВЕ РАВНИ)** представља ГМТ у простору чија су растојања до две фиксиране праве (директрисе су праве које се секу) једнака. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за ову површ:

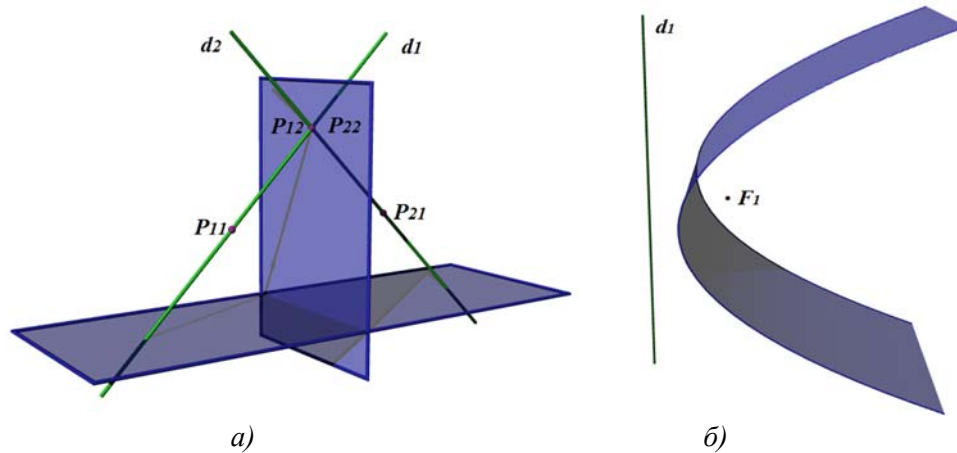
$$(4 - 32) \quad r_1 - r_2 = 0,$$

где су  $r_1$  и  $r_2$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до одговарајућих директриса  $d_1 [P_{11}(-1,0,0), P_{12}(0,0,c)]$  и  $d_2 [P_{21}(1,0,0), P_{22}(0,0,c)]$ ,  $c \neq 0$ . Претходна једнакост се може приказати у облику:

$$(4 - 33) \quad \frac{\sqrt{y^2(c^2+1)+((x+1)c-z)^2}}{\sqrt{c^2+1}} = \frac{\sqrt{y^2(c^2+1)+((x-1)c+z)^2}}{\sqrt{c^2+1}}.$$

Квадрирањем ове једначине настаје површ другог реда која се дегенерише у две равни (Слика 4 - 6 а), са једначином облика:

$$(4 - 34) \quad x(z - c) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee z = c.$$



Слика 4 - 6: а) Дегенерисна површ;  
б) Параболички цилиндар

**ПАРАБОЛИЧКИ ЦИЛИНДАР** представља ГМТ у простору чије је растојање до фокуса једнако растојању до директрисе. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за параболочки цилиндар:

$$(4 - 35) \quad R_1 - r_1 = 0,$$

где су  $R_1$  и  $r_1$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до фокуса  $F_1(p/2,0,0)$  и директрисе  $d_1 [P_{11}(-p/2,0,0), P_{12}(-p/2,0,1)]$ , респективно и  $p > 0$ ,  $F_1 \notin d_1$ . Претходна једнакост се може приказати у облику:

$$(4 - 36) \quad \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Квадрирањем ове једначине настаје канонски облик једначине параболичког цилиндра (Слика 4 - 6 б):

$$(4 - 37) \quad z^2 = 2px.$$

**ПАРАБОЛИЧКИ ЦИЛИНДАР**, такође може да се дефинише тако да представља ГМТ у простору чије је растојање до директрисе једнако растојању до директрисне равни. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за параболички цилиндар:

$$(4 - 38) \quad r_1 - \rho_1 = 0,$$

где су  $r_1$  и  $\rho_1$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до директрисе  $d_1 [P_{11}(p/2, 0, 0), P_{12}(p/2, 0, 1)]$  и директрисне равни  $D_1: x = -p/2$ , респективно и  $p > 0$ . Претходна једнакост се може приказати у облику:

$$(4 - 39) \quad \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Квадрирањем ове једначине настаје канонски облик једначине параболичког цилиндра

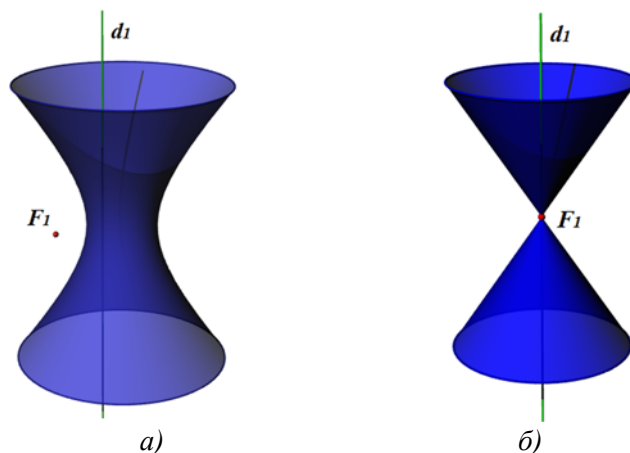
$$(4 - 40) \quad y^2 = 2px$$

**ЈЕДНОГРАНИ ХИПЕРБОЛОИД** представља ГМТ чије је растојање до фокуса једнако скалираном растојању до директрисе. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за једнограни хиперboloид:

$$(4 - 41) \quad R_1 - k \cdot r_1 = 0,$$

где су  $R_1$  и  $r_1$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до фокуса  $F_1(c, 0, 0)$  и директрисе  $d_1 [P_{11}(0, 0, 0), P_{12}(0, 0, 1)]$ , респективно. Нека је  $c \neq 0$ ,  $k > 1$  и  $F_1 \notin d_1$ . Претходна једнакост се може приказати у облику:

$$(4 - 42) \quad \sqrt{(x - c)^2 + y^2 + z^2} = k \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Слика 4 - 7: а) Једнограни хиперboloид;  
б) Конус

Ако је  $c^2 = k^2 - 1$  тада се квадрирањем претходне једначине добија канонски облик једначине специјалног (кружног) једнограног хиперболоида (Слика 4 - 7 а):

$$(4 - 43) \quad \frac{(x+1/c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

где су  $a^2 = 1 + \frac{1}{c^2}$ ;  $b^2 = k^2$ .

Ако је  $c = 0$ , тј.  $F_1 \in d_1$  тада се квадрирањем једнакости (4 - 42) добија канонски облик конусне површи (Слика 4 - 7 б):

$$(4 - 44) \quad x^2 + y^2 - \frac{z^2}{k^2-1} = 0.$$

**ПАРАБОЛОИД** представља ГМТ у простору чије је растојање до фокуса једнако растојању до директрисне равни. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за параболоид:

$$(4 - 45) \quad R_1 - \rho_1 = 0,$$

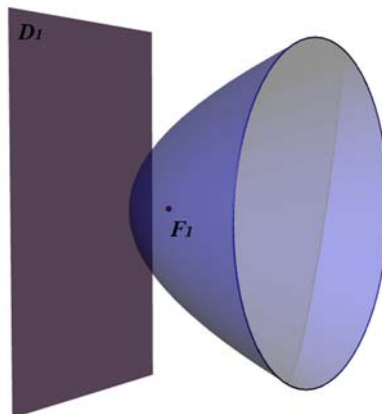
где су  $R_1$  и  $\rho_1$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до фокуса  $F_1(p/2, 0, 0)$  и директрисне равни  $D_1: x = -p/2$ , респективно. Нека је  $p > 0$  и  $F_1 \notin D_1$ . Једнакост (4 - 45) се може приказати у облику:

$$(4 - 46) \quad \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2 + z^2} = |x + p/2|.$$

С обзиром да важи  $\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2 + z^2} \geq \left| x - \frac{p}{2} \right| = -x + \frac{p}{2} > -x - \frac{p}{2} = \left| x + \frac{p}{2} \right|$ , за  $x < -p/2$ , тада се једнакост (4 - 46) може разматрати само у полупростору  $x \geq -p/2$ . За овај услов, квадрирањем (4 - 46) се добија канонска форма једначине параболоида:

$$(4 - 47) \quad y^2 + z^2 = 2px.$$

Параболоид је скуп свих тачака  $T(x, y, z)$  које задовољавају услов  $x \geq -p/2$  тј. налази се у делу полупростора  $x \geq -p/2$  (Слика 4 - 8).



Слика 4 - 8: Параболоид

**ДВОГРАНИ ХИПЕРБОЛОИД** представља ГМТ у простору чије је растојање до фокуса једнако скалираном растојању до директрисне равни. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за двограни хиперboloид:

$$(4 - 48) \quad R_1 - k \cdot \rho_1 = 0,$$

где су  $R_1$  и  $\rho_1$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до фокуса  $F_1(c, 0, 0)$  и директрисне равни  $D_1: x = 0$ , респективно. Нека је  $c \neq 0$ ,  $k > 1$  и  $F_1 \notin D_1$ . Једнакост (4 - 48) се може приказати у облику:

$$(4 - 49) \quad \sqrt{(x - c)^2 + y^2 + z^2} = k \cdot |x|.$$

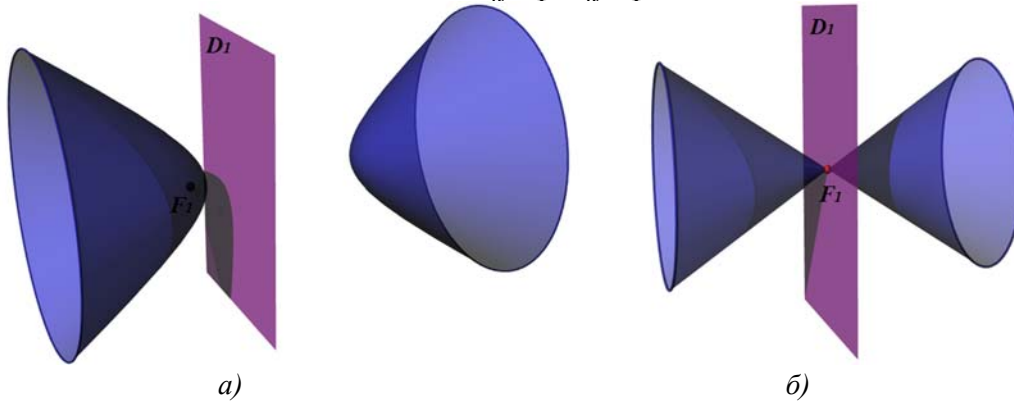
Ако је  $c^2 = k^2 - 1$  тада се квадрирањем претходне једначине добија канонски облик једначине специјалног (кружног) двограног хиперboloида (Слика 4 - 9 а):

$$(4 - 50) \quad \frac{(x+1/c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

где су  $a^2 = 1 + \frac{1}{c^2}$ ;  $b^2 = k^2$ .

Ако је  $c = 0$ , тј.  $F_1 \in d_1$  тада се квадрирањем (4 - 49) добија канонски облик једначине конусне површи (Слика 4 - 9 б):

$$(4 - 51) \quad x^2 - \frac{y^2}{k^2-1} - \frac{z^2}{k^2-1} = 0.$$



Слика 4 - 9: а) Двограни хиперboloид; б) Конус

Након оваквог генерисања квадрика може се закључити да оне припадају групи фокално-директрисно генерисаних површи које настају помоћу два геометријска елемента (тачка, права и/или раван). Аналогно издвајању лукова кривих и области дефинисаности фокално-директрисно генерисаних кривих, за сваку претходно анализирану површ дефинисани су геометријски услови, тј. издвојен је онај део простора у коме се она налази. Издвајање геометријске области у којима се фокално-директрисне криве и површи налазе, омогућило нам је да се овако задате имплицитне функције кривих и површи исцртавају брже, у реалном времену, у оквиру већ поменутих ЈАВА апликација, [149]. Ове апликације смо развили за потребе примене Ф-ДК и Ф-ДП у архитектонско-урбанистичком обликовању.

#### 4.1.1. Генерисани 3D елементи са константном сумом/производом растојања

У овом делу рада дефинисаће се уопштене геометријске форме које се генеришу помоћу  $m$  фокуса,  $n$  директриса и/или  $l$  директрисних равни. Генерализацијом једнакости (4 - 1) уводимо следећу дефиницију Веберове површи.

**ВЕБЕРОВА ПОВРШ** представља ГМТ у простору чија је сума скалираних растојања до  $m$  фиксираних тачака,  $n$  фиксираних директриса и  $l$  фиксираних равни константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за Веберову површ:

$$(4 - 52) \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i R_i + \sum_{j=1}^n \beta_j r_j + \dots + \sum_{t=1}^l \gamma_t \rho_t = \mathcal{S}, \quad m, n, l \geq 1,$$

где су  $R_1, \dots, R_m, r_1, r_2, \dots, r_n$  и  $\rho_1, \dots, \rho_l$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до фокуса  $F_1, \dots, F_m$ , до директриса  $d_1, d_2, \dots, d_n$  и до директрисних равни  $D_1, \dots, D_l$ , респективно, а фактори скалирања  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l \in \mathbb{R}$  су Веберови тежински коефицијенти (бар један коефицијент не сме да буде нула) и  $\mathcal{S} = const$

Геометријске форме које настају само помоћу фокуса разматране су у раду [71], где аутори Ј. Ние, П. Парило и Б. Штурмфелс дефинишу  $m$  –елипсоид (алгебарска површ вишег реда) као природно проширење  $m$  –елипсе у тродимензионални простор. Мултифокалне површи са константном сумом или производом растојања (тродимензионалне елипсе и лемнискате) и алгоритме за њихово приказивање анализирао је В. Пипер у раду [84]. Све остале геометријске форме је први пут дефинишу у овом раду.

Група Веберових површи садржи све полазне подгрупе чије дефиниције сада издвајамо:

**ВЕБЕРОВА ФОКАЛНА ПОВРШ** представља ГМТ у простору чија је сума скалираних растојања до  $k$  фиксираних тачака константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за Веберове фокалне површи:

$$(4 - 53) \quad \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \dots + \alpha_k R_k = \mathcal{S}, \quad k \geq 1$$

где су  $R_1, R_2, \dots, R_k$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до фокуса  $F_1, F_2, \dots, F_k$ , респективно, а фактори скалирања  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  су Веберови тежински коефицијенти и  $\mathcal{S} = const$ .

**ВЕБЕРОВА ДИРЕКТРИСНА ПОВРШ** представља ГМТ у простору чија је сума скалираних растојања до  $k$  фиксираних правих (директриса) константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за Веберову директрисну површ:

$$(4 - 54) \quad \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \dots + \beta_k r_k = \mathcal{S}, \quad k \geq 1$$

где су  $r_1, r_2, \dots, r_k$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до директриса  $d_1, d_2, \dots, d_k$ , респективно, а фактори скалирања  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  су Веберови тежински коефицијенти и  $\mathcal{S} = const$ .

**ВЕБЕРОВА ДИРЕКТОРНА ПОВРШ** представља ГМТ у простору чија је сума скалираних растојања до  $k$  фиксираних равни (директрисних равни) константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за Веберову директорну површ:

$$(4 - 55) \quad \gamma_1 \rho_1 + \gamma_2 \rho_2 + \dots + \gamma_k \rho_k = \mathcal{S}, \quad k \geq 1$$

где су  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до директрисних равни  $D_1, D_2, \dots, D_k$ , респективно, а фактори скалирања  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  су Веберови тежински коефицијенти и  $\mathcal{S} = const$ .

Комбинацијом три основна геометријска елемента (фокус, директриса и директрисна раван) могу се добити нови прелазни типови: Веберове фокално-директрисне, Веберове фокално-директорне и Веберове директрисно-директорне геометријске форме.

**ВЕБЕРОВА ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНА ПОВРШ** представља ГМТ у простору чија је сума скалираних растојања до  $m$  фокуса и  $n$  директриса константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за Веберову фокално-директрисну површ:

$$(4 - 56) \quad \alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_m R_m + \beta_1 r_1 + \dots + \beta_n r_n = \mathcal{S}, \quad m, n \geq 1,$$

где су  $R_1, \dots, R_m$  и  $r_1, \dots, r_n$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до фокуса  $F_1, \dots, F_m$ , и до директриса  $d_1, \dots, d_n$ , респективно, а фактори скалирања  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$  су Веберови тежински коефицијенти (бар један коефицијент не сме да буде нула) и  $\mathcal{S} = const$ .

**ВЕБЕРОВА ФОКАЛНО-ДИРЕКТОРНА ПОВРШ** представља ГМТ у простору чија је сума скалираних растојања до  $m$  фокуса и  $l$  фиксираних равни константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за Веберову фокално-директорну површ:

$$(4 - 57) \quad \alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_m R_m + \gamma_1 \rho_1 + \dots + \gamma_l \rho_l = \mathcal{S}, \quad m, l \geq 1,$$

где су  $R_1, \dots, R_m$  и  $\rho_1, \dots, \rho_l$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до фокуса  $F_1, \dots, F_m$  и до директрисних равни  $D_1, \dots, D_l$ , респективно, а фактори скалирања  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \gamma_1, \dots, \gamma_l \in \mathbb{R}$  су Веберови тежински коефицијенти (бар један коефицијент не сме да буде нула) и  $\mathcal{S} = const$ .

**ВЕБЕРОВА ДИРЕКТРИСНО-ДИРЕКТОРНА ПОВРШ** представља ГМТ у простору чија је сума скалираних растојања до  $n$  директриса и  $l$  фиксираних равни константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за Веберову директрисно-директорну површ:

$$(4 - 58) \quad \beta_1 r_1 + \dots + \beta_n r_n + \gamma_1 \rho_1 + \dots + \gamma_l \rho_l = \mathcal{S}, \quad n, l \geq 1,$$

где су  $r_1, \dots, r_n$  и  $\rho_1, \dots, \rho_l$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до директриса  $d_1, \dots, d_n$  и до директрисних равни  $D_1, \dots, D_l$ , респективно, а фактори скалирања  $\beta_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l \in \mathbb{R}$  су Веберови тежински коефицијенти (бар један коефицијент не сме да буде нула) и  $\mathcal{S} = const$ .

---

Аналогно једнакости (4 - 52), тј. дефиницији Веберових површи са константном сумом растојања, уводимо нову дефиницију за Веберове површи Касинијевог типа.

**ВЕБЕРОВА ПОВРШ КАСИНИЈЕВОГ ТИПА** представља ГМТ у простору чија је сума скалираних производа растојања до  $m$  фиксираних тачака,  $n$  фиксираних директриса и  $l$  фиксираних равни константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за Веберову површ Касинијевог типа:

$$(4 - 59) \quad \alpha \prod_{i=1}^m R_i + \beta \prod_{j=1}^n r_j + \gamma \prod_{t=1}^l \rho_t = \mathcal{S}, \quad m, n, l \geq 1,$$

где су  $R_1, \dots, R_m, r_1, \dots, r_n$  и  $\rho_1, \dots, \rho_l$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до фокуса  $F_1, \dots, F_m$ , до директриса  $d_1, \dots, d_n$  и до директрисних равни  $D_1, \dots, D_l$ , респективно, а фактори скалирања  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  су Веберови тежински коефицијенти (бар један коефицијент не сме да буде нула) и  $\mathcal{S} = const$ .

**ВЕБЕРОВА ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНА ПОВРШ КАСИНИЈЕВОГ ТИПА** представља ГМТ у простору чија је сума скалираних производа растојања до  $m$  фокуса и  $n$  директриса константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за Веберову фокално-директрисну површ Касинијевог типа:

$$(4 - 60) \quad \alpha R_1 \cdot \dots \cdot R_m + \beta r_1 \cdot \dots \cdot r_n = \mathcal{S}, \quad m, n \geq 1,$$

где су  $R_1, \dots, R_m$  и  $r_1, \dots, r_n$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до фокуса  $F_1, \dots, F_m$  и директриса  $d_1, \dots, d_n$ , респективно, а фактори скалирања  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  су Веберови тежински коефицијенти (бар један коефицијент не сме да буде нула) и  $\mathcal{S} = const$ .

**ВЕБЕРОВА ФОКАЛНО-ДИРЕКТОРНА ПОВРШ КАСИНИЈЕВОГ ТИПА** представља ГМТ у простору чија је сума скалираних производа растојања до  $m$  фокуса и  $l$  фиксираних равни константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за Веберову фокално-директорну површ Касинијевог типа:

$$(4 - 61) \quad \alpha R_1 \cdot \dots \cdot R_m + \gamma \rho_1 \cdot \dots \cdot \rho_l = \mathcal{S}, \quad m, l \geq 1,$$

где су  $R_1, \dots, R_m$  и  $\rho_1, \dots, \rho_l$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до фокуса  $F_1, \dots, F_m$  и до директрисних равни  $D_1, \dots, D_l$ , респективно, а фактори скалирања  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$  су Веберови тежински коефицијенти (бар један коефицијент не сме да буде нула) и  $\mathcal{S} = const$ .

**ВЕБЕРОВА ДИРЕКТРИСНО-ДИРЕКТОРНА ПОВРШ КАСИНИЈЕВОГ ТИПА** представља ГМТ у простору чија је сума скалираних производа растојања до  $n$  директриса и  $l$  фиксираних равни константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за Веберову директрисно- директорну површ Касинијевог типа:

$$(4 - 62) \quad \beta r_1 \cdot \dots \cdot r_n + \gamma \rho_1 \cdot \dots \cdot \rho_l = \mathcal{S}, \quad n, l \geq 1,$$

где су  $r_1, \dots, r_n$  и  $\rho_1, \dots, \rho_l$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до директриса  $d_1, \dots, d_n$  и до директрисних равни  $D_1, \dots, D_l$ , респективно, а фактори скалирања



$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  су Веберови тежински коефицијенти (бар један коефицијент не сме да буде нула) и  $\mathcal{S} = \text{const}$ .

Основни елементи за генерисање (тачке, праве и равни тј. фокуси, директрисе и директрисне равни) могу се поставити у простору на различите начине: произвољно или у некој узајамној вези тако да се добију разноврсне геометријске форме. Међутим, због сложености исцртавања алгебарских површи вишег реда које су имплицитно задате, у овом раду биће анализирани само оне површи које настају када се основни елементи за генерисање поставе у некој узајамној вези.

Дефинисаће се површи које настају када су фокуси и директрисе у истој равни и када формирају правилне полигоне или ако у простору формирају правилни полиедар, затим када су директрисе паралелне/мимоилазне праве које се поклапају са ивицама/дијагоналама страница призма чији је базис правилни полигон. На основу геометријских карактеристика правилних полигона и полиедара може лако да се запази и дефинише Ферма-Торичелијева тачка за одговарајуће генерисане површи. Ако би се разматрале површи које настају када се у простору произвољно поставе основни елементи за генерисање, тада би било неопходно да се изврши детаљна анализа ових алгебарских површи вишег реда, затим издвоје делови простора у коме се оне налазе и математички дефинише Ферма-Торичелијева тачка. Тема овог рада је фокусирана на истраживању у оквиру геометрије архитектонске форме и због тога ће се овде разматрати само оне површи које имају јасну геометријску поставку, односно оне површи код којих су основни елементи за генерисање постављени у некој узајамној вези и формирају правилне полигоне, призме или полиедаре.

Графички приказ површи са великим бројем фокуса и/или директриса и/или директрисних равни није најпрегледнији. Потребно би било да се развију одговарајуће апликације или софтвери за цртање имплицитно задате једначине ових површи, јер постојећи компјутерско-математички програми који имају *implicitplot3D* функцију приказују површи, али нису задовољавајући и за архитектонско пројектовање и естетско приказивање. Развој такве апликације би могао бити предмет неког даљег истраживања већег броја стручњака из области информатике, алгебре, геометрије и архитектуре. Неке од ових површи би могле и параметарски да се задају, с обзиром да већина софтвера подржавају параметарско моделовање. Због претходно наведених проблема било је неопходно да се ограничимо на мањи број основних елемената за генерисање површи како би оне биле визуелно сагледиве, функционалне, статички стабилне, али и атрактивне геометријске форме као обрасци за обликовање архитектонско-урбанистичког простора.

Визуелни прикази изабраних геометријских површи су дати у три ортогоналне пројекције и аксонометрији (Слика 4 - 10) до (Слика 4 - 107).

#### 4.1.1.A. ГЕНЕРИСАЊЕ ФОКАЛНИХ ГЕОМЕТРИЈСКИХ ФОРМИ

У овом делу рада биће приказане алгебарске површи које су генерисане помоћу фиксираних тачака (фокуса). Ове фокалне геометријске форме представљају геометријско место тачака у простору са константном сумом растојања до фокуса и када су сви Веберови тежински коефицијенти једнаки један ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 1$ ). За ове специјалне случајеве генерисаних елемената уводимо следећу дефиницију:

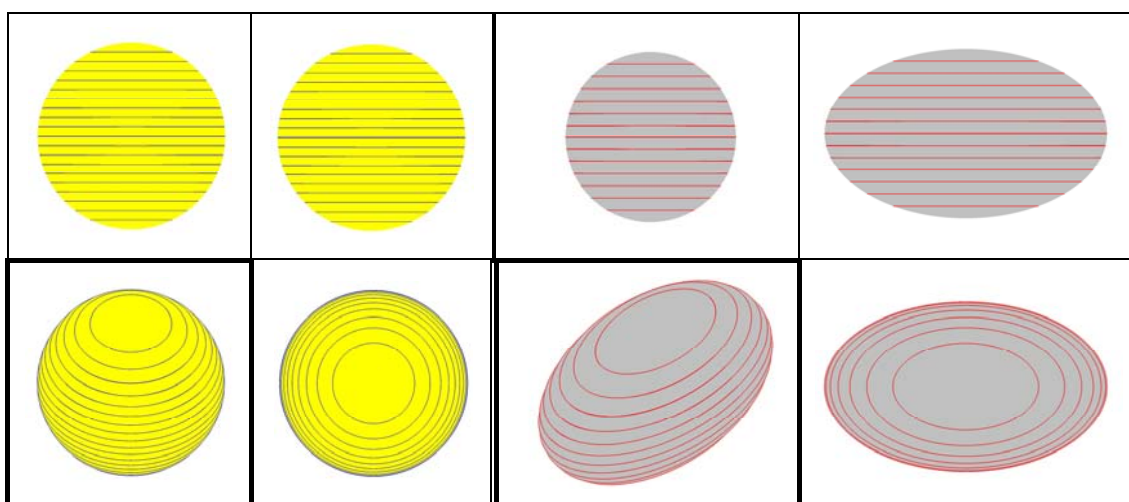
**К-ФОКАЛНА ПОВРШ** представља ГМТ у простору чија је сума растојања до  $k$  фиксираних тачака константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за  $k$ -фокалне површи:

$$(4 - 63) \quad R_1 + R_2 + \dots + R_k = \mathcal{S}, \quad k \geq 1$$

где су  $R_1, R_2, \dots, R_k$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до фокуса  $F_1, F_2, \dots, F_k$ , респективно и  $\mathcal{S} = const$ .

Ако је  $k = 1$  и  $\mathcal{S} = 0$  тада се површ дегенерише у тачку односно у фокус  $F_1$ . За случај  $\mathcal{S} > 0$  генерисана површ је сфера са центром у фокусу  $F_1$  и полупречником  $\mathcal{S} = R_1$ , (Слика 4 - 10, лево).

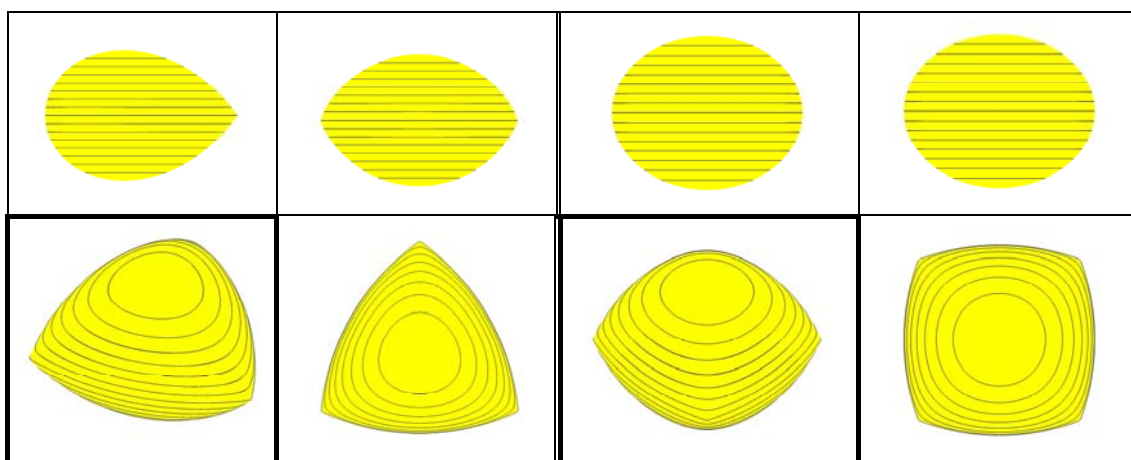
Нека је  $k = 2$  и  $\mathcal{S} > 0$  тада је површ елипсоид са фокусима  $F_1$  и  $F_2$  за који важи  $\mathcal{S} = R_1 + R_2$ . Генерисана површ је сфероид - елипсоид са две једнаке осе, (Слика 4 - 10, десно).



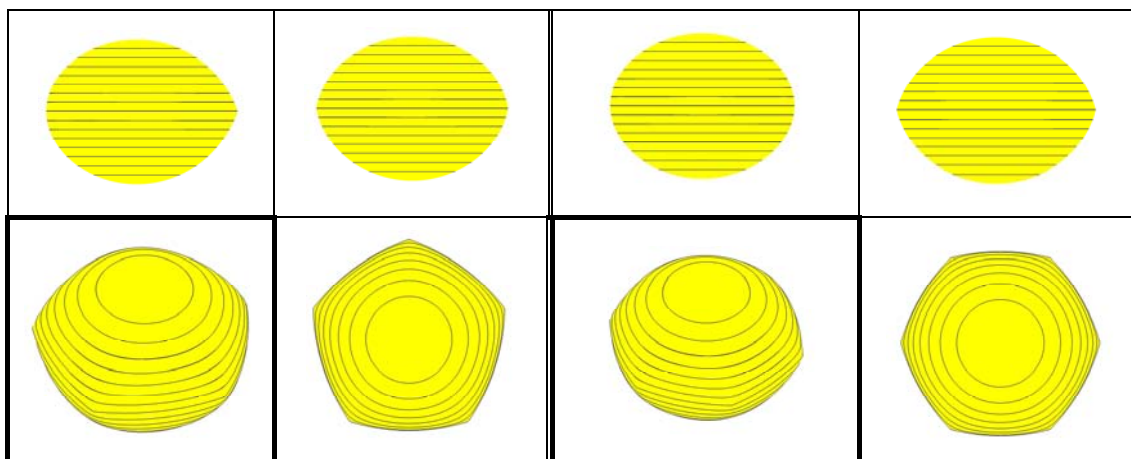
Слика 4 - 10: Сфера (лево) и елипсоид (десно)

**ФП.1.** Прва генерисања се односе на фокалне 3D елементе који настају када су задати фокуси копланарни (припадају једној равни) и постављени тако да се поклапају са теменима правилних полигона (Слика 3 - 16).

Ако је  $k = 3$  и  $\mathcal{S} > 0$  тада трифокална површ представља ГМТ у простору за које важи  $\mathcal{S} = R_1 + R_2 + R_3$ . Нека су фокуси  $F_1, F_2$  и  $F_3$  поклопљени са теменима једнакостраничног троугла, тада за вредност параметра  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = 2 \cdot h_\Delta$  трифокална површ се дегенерише у тачку (тежиште троугла). Ако је  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$  тада површ не постоји. За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 = 2\bar{a}$ , трифокална површ пролази кроз фокусне тачке (Слика 4 - 11, лево), док за вредности  $\mathcal{S}_0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_1$  или  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$  површ је јајастог облика (Слика 4 - 13, лево).



Слика 4 - 11: ФП.1. за  $k = 3$  (лево),  $k = 4$  (десно) и  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$

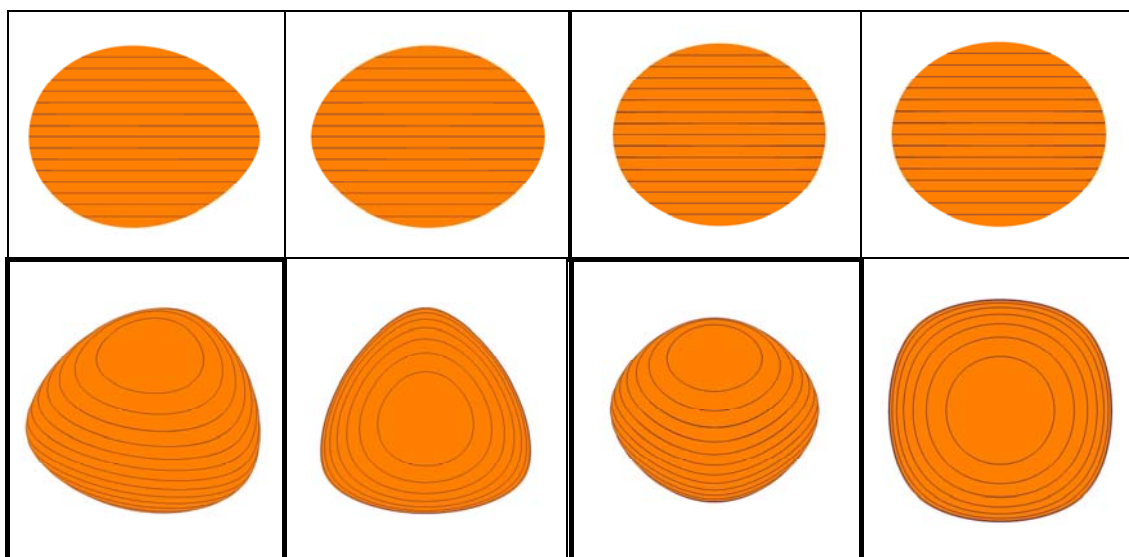


Слика 4 - 12: ФП.1. за  $k = 5$  (лево),  $k = 6$  (десно) и  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$

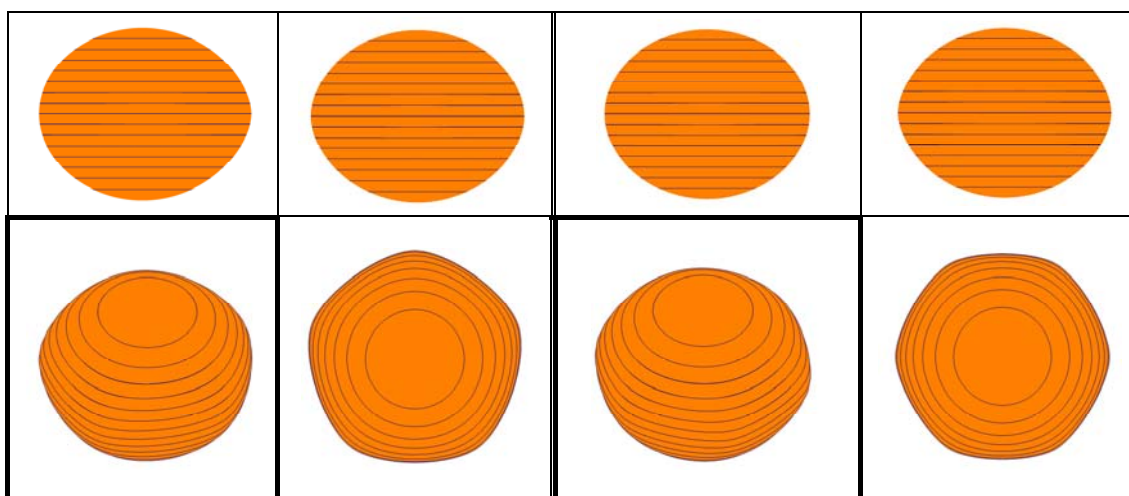
Нека је сада  $k = 4$  и константа  $\mathcal{S} > 0$ , онда 4 – фокална површ са фокусима  $F_1, F_2, F_3$  и  $F_4$  представља ГМТ у простору за које важи  $\mathcal{S} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ . Слика 4 - 13 (десно) приказује 4 –фокалну површ чији су фокуси постављени као темена квадрата и за вредност параметра  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$  (или  $\mathcal{S}_0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_1$ ).

За  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 = 2\bar{a} + \bar{d}$ , важи да 4 –фокална површ пролази кроз фокусне тачке (Слика 4 - 11, десно). Ако је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = 2\bar{d}$  тада се ова површ дегенерише у тачку (пресечна тачка дијагонале квадрата), док за вредност  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$  површ не постоји.

За  $k \geq 5$  и вредност константе  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  важи да  $k$  –фокална површ са фокусима  $F_1, \dots, F_{k-1}$  и  $F_k$  представља ГМТ у простору за које важи:  $\sum_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$ . Када су фокуси поклопљени са теменима правилног полигона и када је вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = k \cdot R$ , тада  $k$  –фокална површ се дегенерише у тачку - тежиште полигона, тј. у Ферма-Торичелијеву тачку. За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 = 2\bar{a} + \sum_{i=1}^{k-3} \bar{d}_i$ , следи да  $k$  –фокална површ пролази кроз фокусне тачке (Слика 4 - 12), где је  $(k - 3)$  број дијагонала које се могу повући из једног тена полигона. Слика 4 - 14 приказује глатку  $k$  –површ за вредност параметра  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$  ( или  $\mathcal{S}_0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_1$ ).

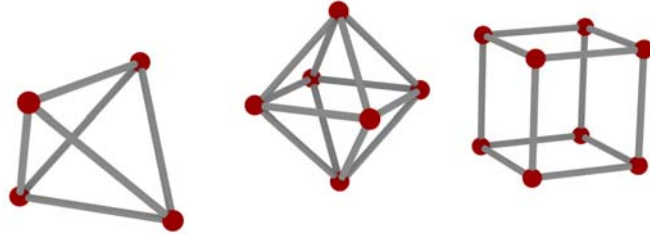


Слика 4 - 13: ФП.1. за  $k = 3$  (лево),  $k = 4$  (десно) и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$



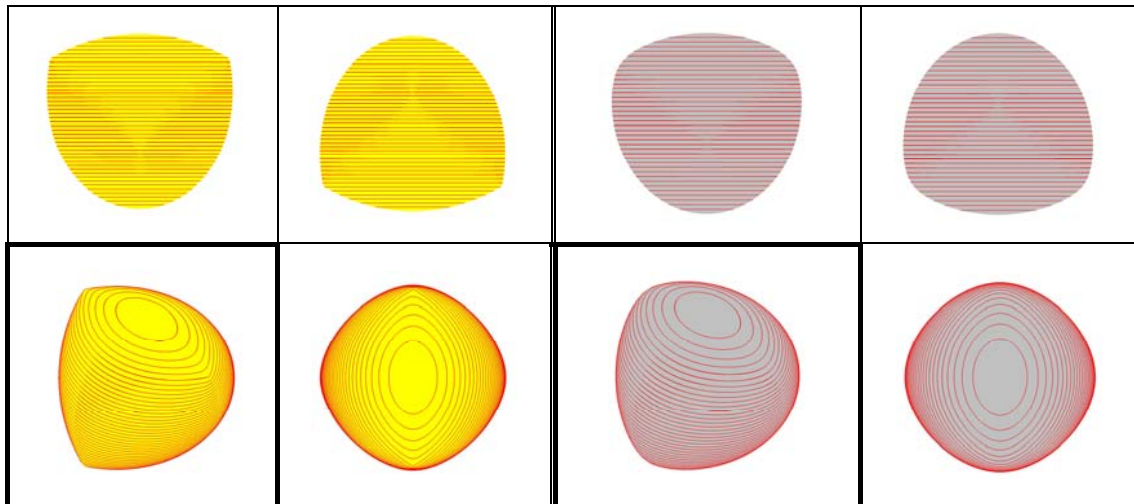
Слика 4 - 14: ФП.1. за  $k = 5$  (лево),  $k = 6$  (десно) и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$

**ФП.2.** Друго генерисање фокалних 3D елемената је изведено помоћу фокуса који су постављени у простору тако да формирају правилни полиедар (Слика 4 - 15).



Слика 4 - 15: Фокуси - темена правилних полиедара

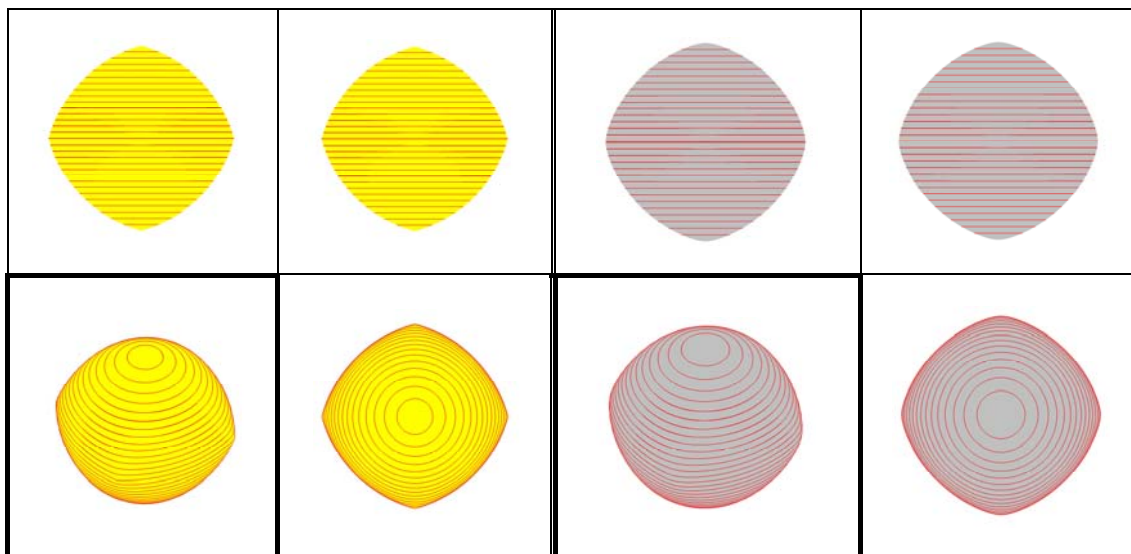
Нека су темена тетраедра фокусне тачке  $F_1, F_2, F_3$  и  $F_4$  нове 4 –фокалне површи за коју важи  $\mathcal{S} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$  и  $\mathcal{S} > 0$ . Ако је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = 4 \cdot R$  ( $R$  –полупречник сфере описане око тетраедра) тада се површ дегенерише у тачку тј. центар сфере, док за вредност  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$  површ не постоји. За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 = 3\bar{a}$ , ( $\bar{a}$  – страна тетраедра) важи да 4 –фокална површ пролази кроз фокусне тачке (Слика 4 - 16 лево). Облија површ настаје за вредности  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$  (Слика 4 - 16 десно) или  $\mathcal{S}_0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_1$ .



Слика 4 - 16: ФП.2. за  $k = 4$  (фокуси су темена тетраедра) и  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ (лево);  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$ (десно)

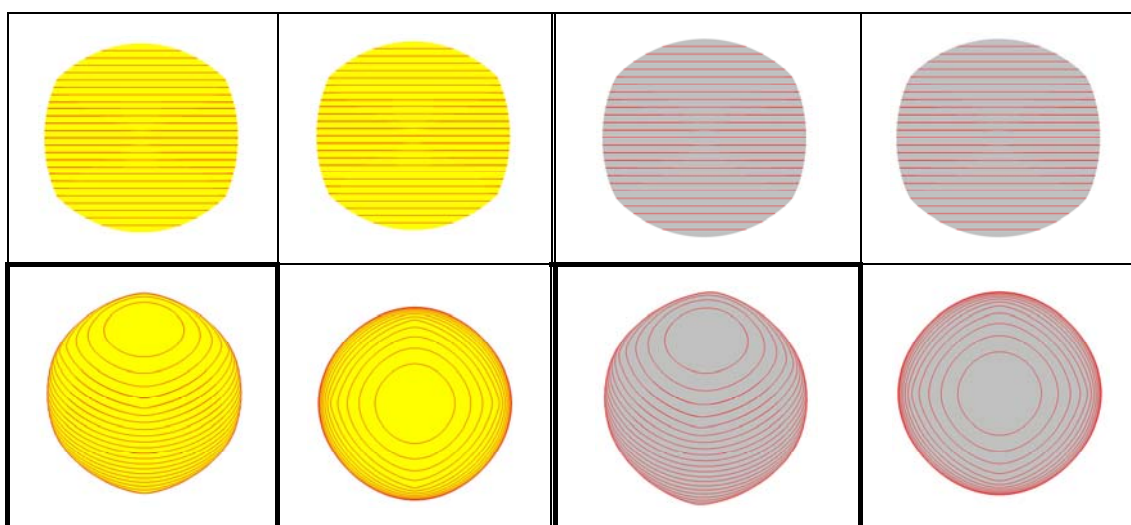
Нека су темена октаедра фокусне тачке  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$  и  $F_6$  нове 6 –фокалне површи за коју важи  $\mathcal{S} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6$  и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ . Ако је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = 6 \cdot R$  ( $R$  –полупречник сфере описане око октаедра) тада се површ дегенерише у тачку тј. центар сфере. За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 = 4\bar{a} + \bar{d}$ , ( $\bar{a}$  – страна,  $\bar{d}$  – дијагонала октаедра) важи да 6 –фокална површ пролази кроз фокусне тачке (Слика 4 - 17 лево). Облија површ настаје за вредности  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$  (Слика 4 - 17 десно) или  $\mathcal{S}_0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_1$ .





Слика 4 - 17: ФП.2. за  $k = 6$  (фокуси су темена октаедра) и  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ (лево);  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$ (десно)

Нека су темена коцке фокусне тачке  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7$  и  $F_8$  нове 8 –фокалне површи за коју важи  $\mathcal{S} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7 + R_8$  и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ . Ако је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = 8 \cdot R$  ( $R$  –полупречник сфере описане око коцке) тада се површ дегенерише у тачку тј. центар сфере. За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 = 3\bar{a} + 3\bar{d} + \bar{D}$ , ( $\bar{a}$  – страна,  $\bar{d}$  – дијагонала,  $\bar{D}$  –просторна дијагонала коцке) важи да ова 8 –фокална површ пролази кроз фокусне тачке (Слика 4 - 18 лево). Облија површ настаје за вредности  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$  (Слика 4 - 18 десно) или  $\mathcal{S}_0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_1$



Слика 4 - 18: ФП.2. за  $k = 8$  (фокуси су темена коцке) и  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ (лево);  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$ (десно)

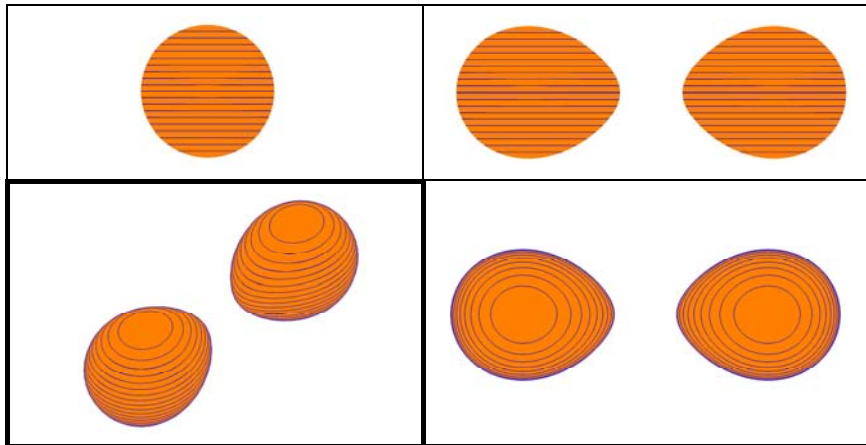
**К-ФОКАЛНА ПОВРШ КАСИНИЈЕВОГ ТИПА** представљају ГМТ у простору чији је производ растојања до  $k$  фиксираних тачака константан. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за генерализоване Касинијеве површи (тродимензионалне лемнискате):

$$(4 - 64) \quad R_1 \cdot R_2 \cdot \dots \cdot R_k = \mathcal{S}^k, \quad k \geq 1$$

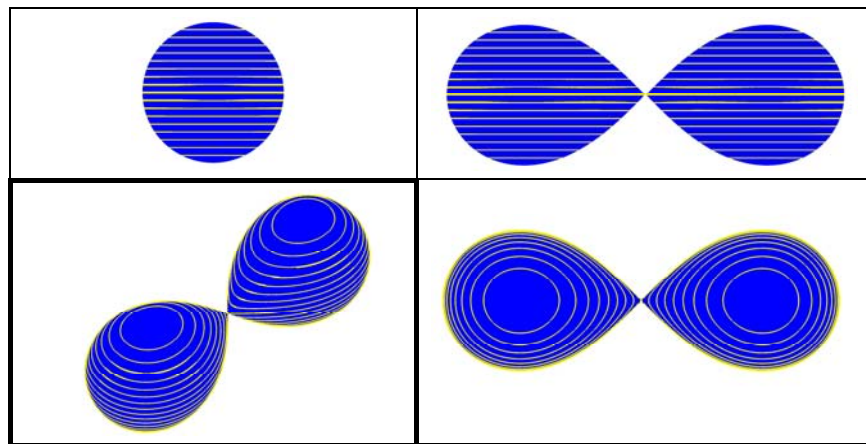
где су  $R_1, R_2, \dots, R_k$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до фокуса  $F_1, F_2, \dots, F_k$ , респективно и  $\mathcal{S} = const, \mathcal{S} \geq 0$ .

Ако је  $k = 1$  и  $\mathcal{S} = 0$  тада се површ дегенерише у тачку односно у фокус  $F_1$ , док за вредност  $\mathcal{S} > 0$  површ је сфера са центром у фокусу  $F_1$  и полупречником  $\mathcal{S}$ , (Слика 4 - 10).

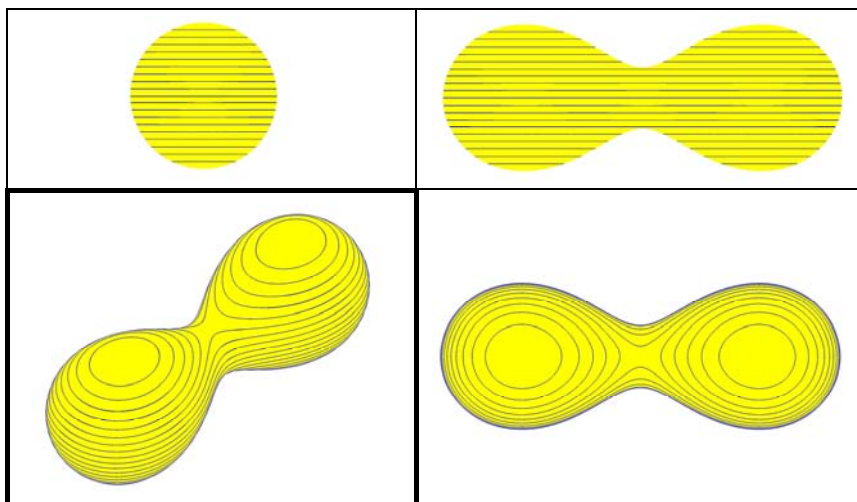
Ако је  $k = 2$  и  $\mathcal{S} > 0$  тада настају Касинијеве површи са два фокуса  $F_1$  и  $F_2$ , [122]. Када је  $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ , тада су Касинијеве површи две јајасте површи (Слика 4 - 19), за вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = dist(F_1, F_2)/2$  добија се Бернулијева површ (Слика 4 - 20), док за  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  Касинијев овоид је једна површ са обликом љуске кикирикија (Слика 4 - 21) или има облик елипсоида (Слика 4 - 22).



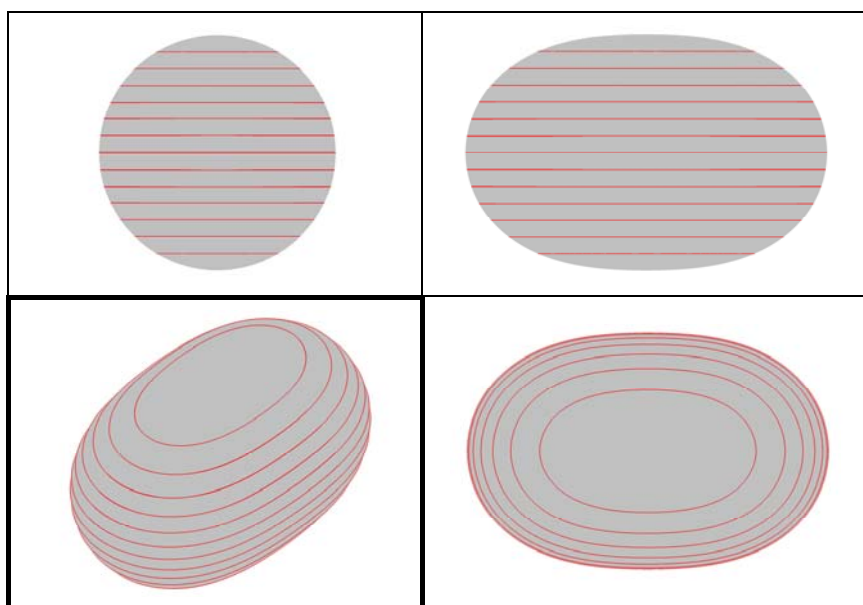
Слика 4 - 19: Двофокална јајаста површ када је  $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$



Слика 4 - 20: Двофокална јајаста површ када је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$  (Бернулијева површ)



Слика 4 - 21: Двофокална јајаста површ када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$

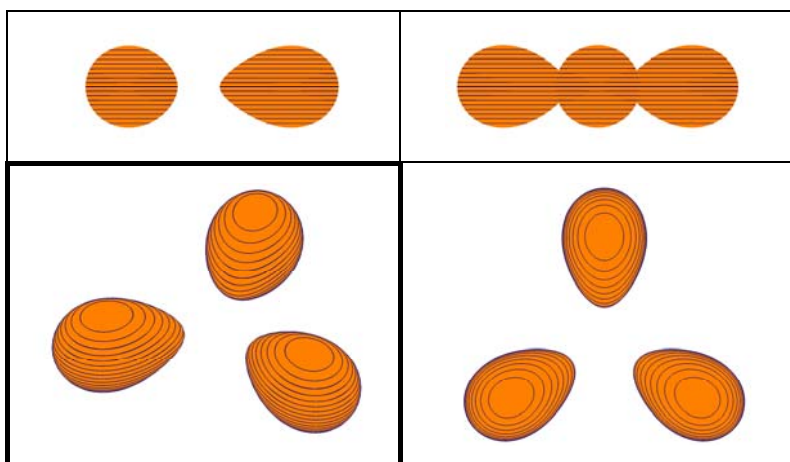


Слика 4 - 22: Двофокална јајаста површ када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$

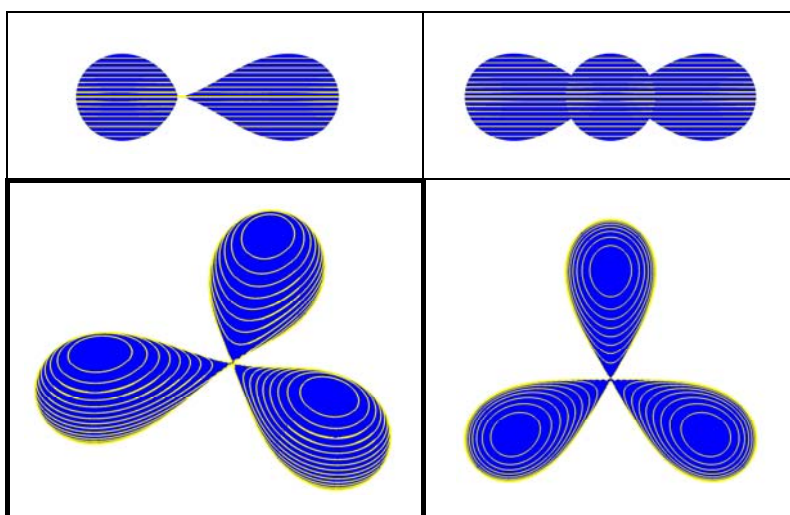
**ФПКТ.1.** Прва генерисања се односе на фокалне 3D елементе када су за полазни фокуси у једној равни и њихове позиције се поклапају са теменима правилних полигона (Слика 3 - 16).

Ако је  $k = 3$  и  $\mathcal{S} > 0$  тада су површи Касинијеви овоиди са три фокуса  $F_1, F_2$  и  $F_3$ , [122]. Нека су фокуси постављени у теменима једнакоугаоног троугла и ако је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = 2 \cdot h_{\Delta}/3$  тада се добија Кипертова површ (Слика 4 - 24). Ако је  $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$  тада су Касинијеве површи три јајасте површи (Слика 4 - 23), док за  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  Касинијев овоид је једна површ са удубљеним делом (Слика 4 - 25) или облијег облика (Слика 4 - 26).

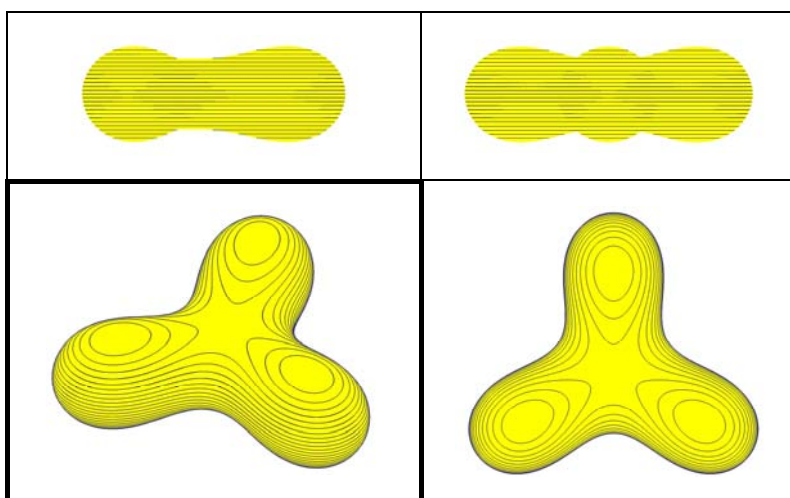




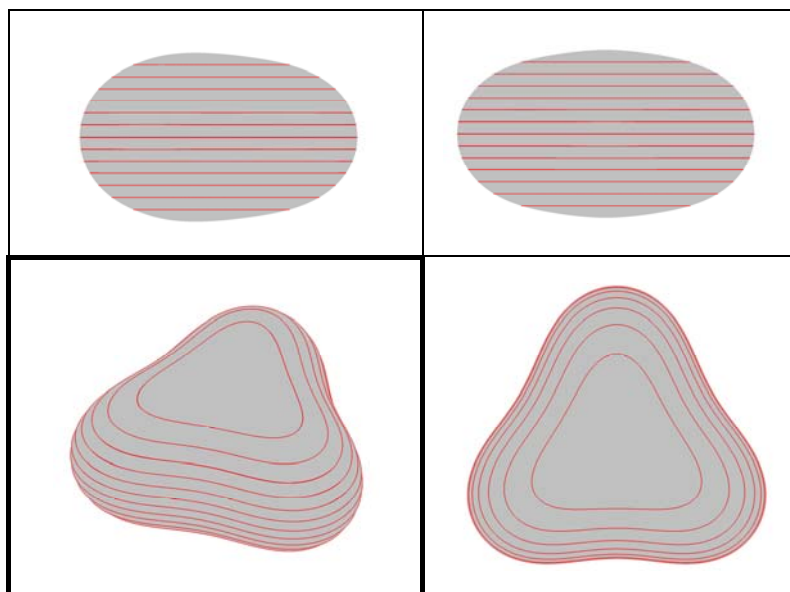
Слика 4 - 23: ФПКТ.1. за  $k = 3$  и  $\delta < \delta_0$



Слика 4 - 24: ФПКТ.1. за  $k = 3$  и  $\delta = \delta_0$

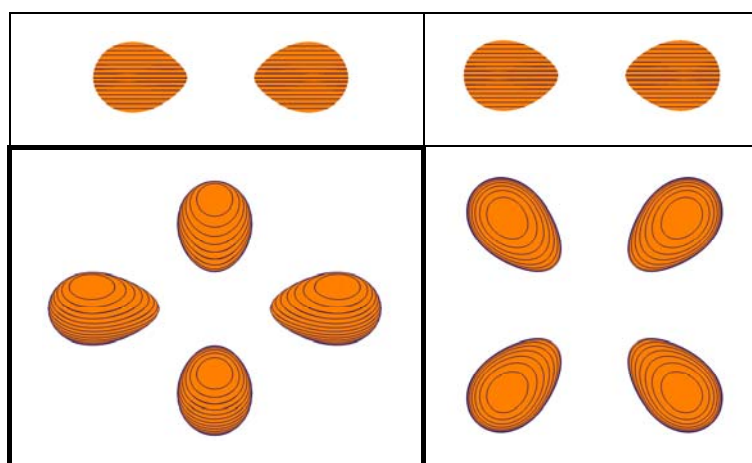


Слика 4 - 25: ФПКТ.1. за  $k = 3$  и  $\delta > \delta_0$

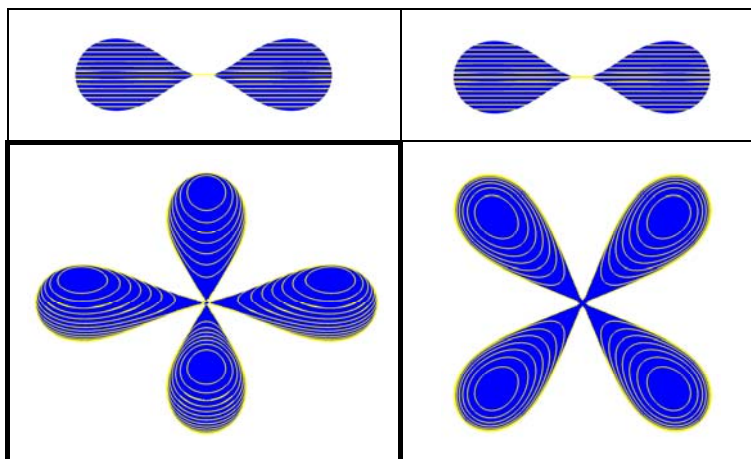


Слика 4 - 26: ФПКТ.1. за  $k = 3$  и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$

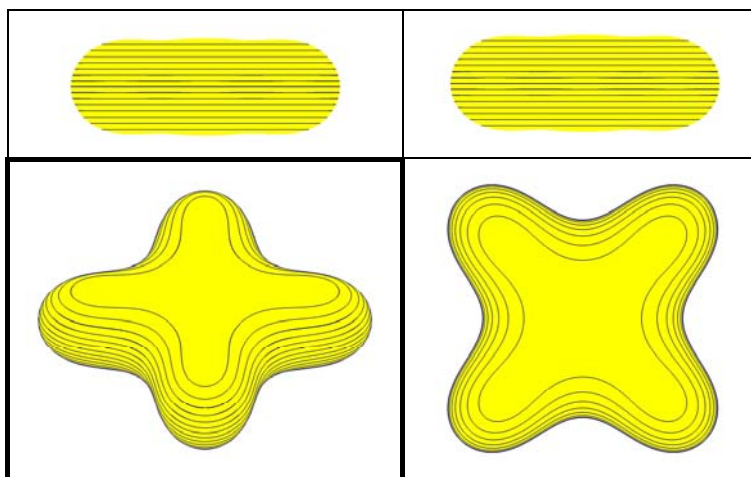
Ако је  $k = 4$  и  $\mathcal{S} > 0$  тада се ФПКТ.1. са фокусима  $F_1, F_2, F_3$  и  $F_4$  и за вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = \bar{d}/2$  састоји из четири површи које се додирују у пресечној тачки дијагонала квадрата (Слика 4 - 28). Слика 4 - 27 приказује четири одвојене јајасте површи за вредност  $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ , док за  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  важи да је ФПКТ.1. за  $k = 4$  једноделна површ (Слика 4 - 29 и Слика 4 - 30).



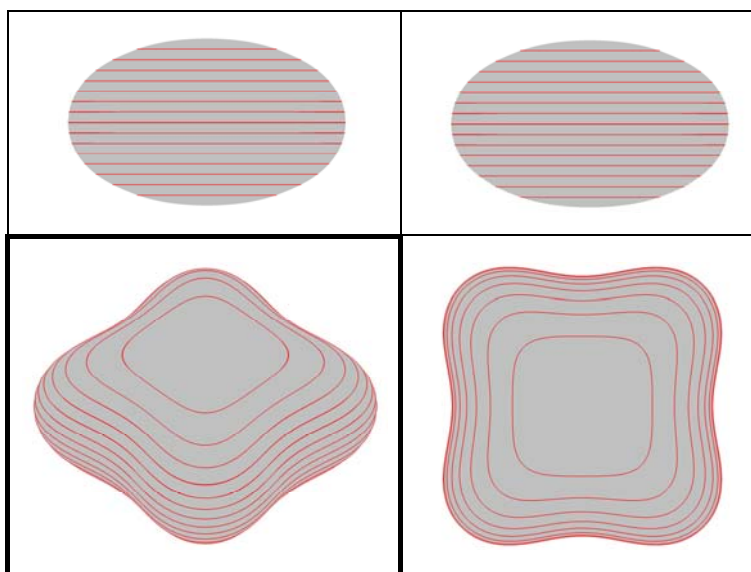
Слика 4 - 27: ФПКТ.1. за  $k = 4$  и  $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$



Слика 4 - 28: ФПКТ.1. за  $k = 4$  и  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$

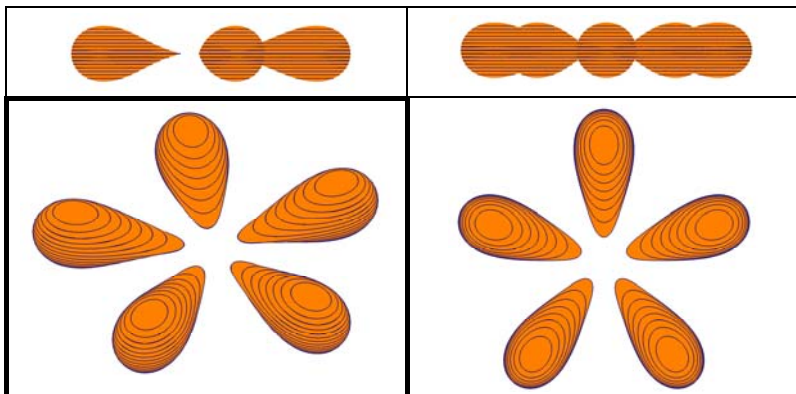


Слика 4 - 29: ФПКТ.1. за  $k = 4$  и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$

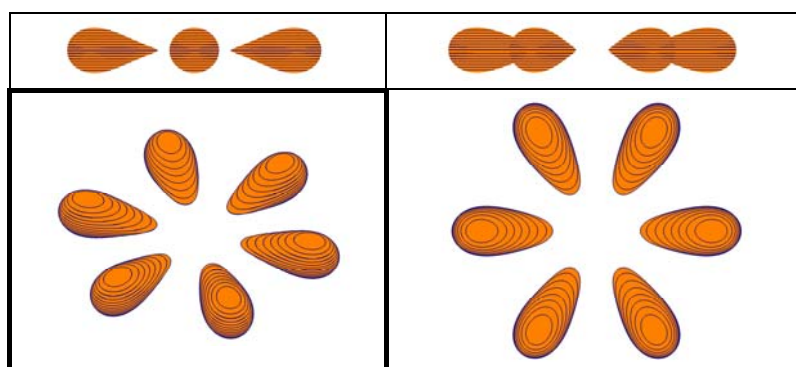


Слика 4 - 30: ФПКТ.1. за  $k = 4$  и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$

Ако је  $k \geq 5$  и  $\mathcal{S} > 0$  тада је ФПКТ.1. са фокусима  $F_1, F_2, \dots, F_k$ . Слика 4 - 31/  
Слика 4 - 32 приказује  $k$  јајастих површи које представљају ФПКТ.1. за  $k = 5$ ,  
односно  $k = 6$  чији су фокуси постављени у теменима правилног  $k$  –тоугла и за  
вредност  $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ .

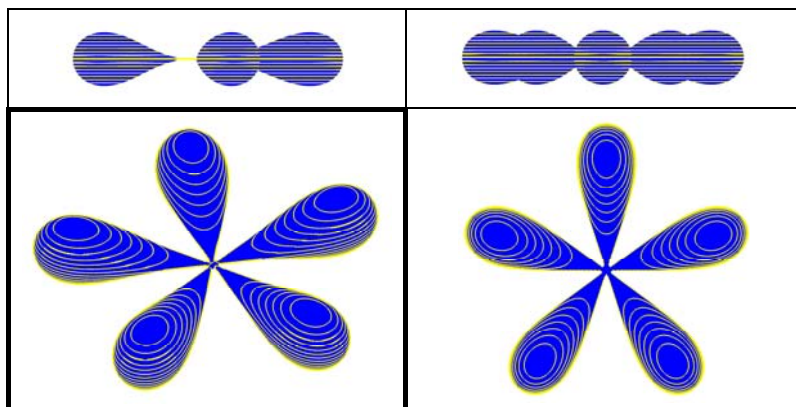


Слика 4 - 31: ФПКТ.1. за  $k = 5$  и  $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$

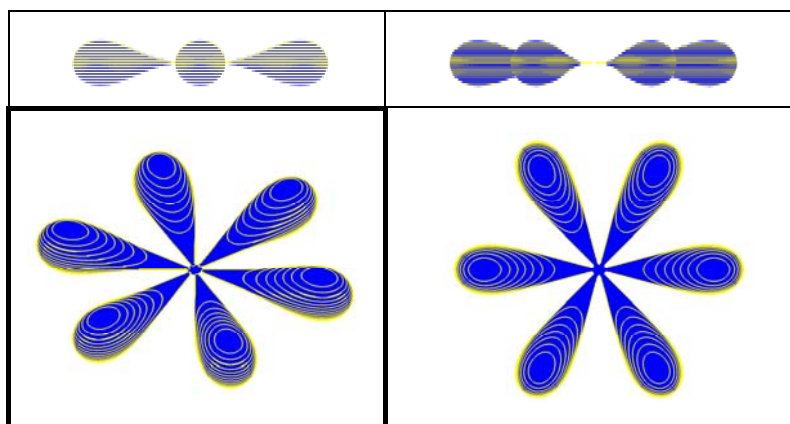


Слика 4 - 32: ФПКТ.1. за  $k = 6$  и  $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$

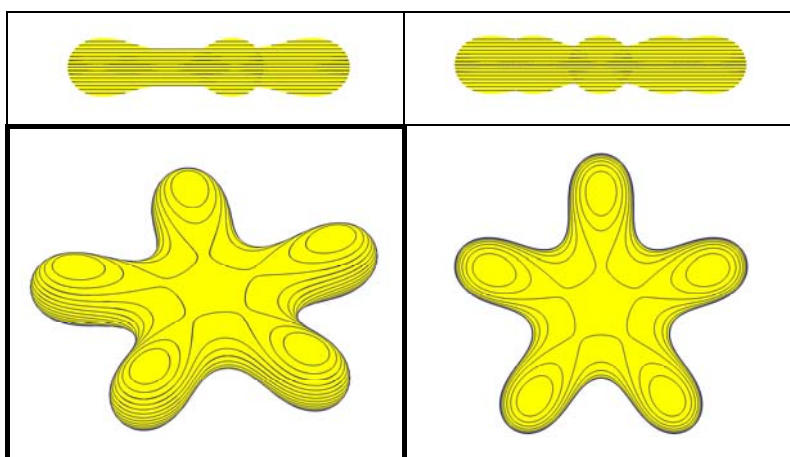
За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = \bar{R}$ , важи да се свих  $k$  делова ове површи додирују у  
центру описаног круга око правилног полигона, (Слика 4 - 33/Слика 4 - 34). Ако је  
 $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  тада је површ једноделна са већим (Слика 4 - 35/Слика 4 - 36) или са мањим  
удубљењем (Слика 4 - 37/Слика 4 - 38).



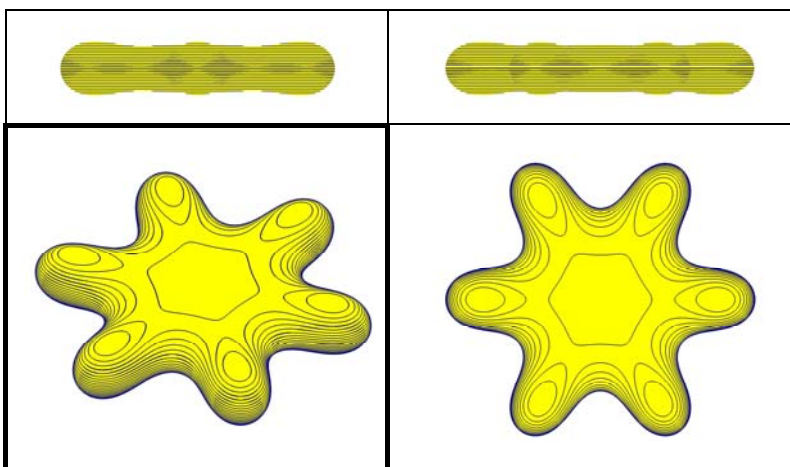
Слика 4 - 33: ФПКТ.1. за  $k = 5$  и  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$



Слика 4 - 34: ФПКТ.1. за  $k = 6$  и  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$

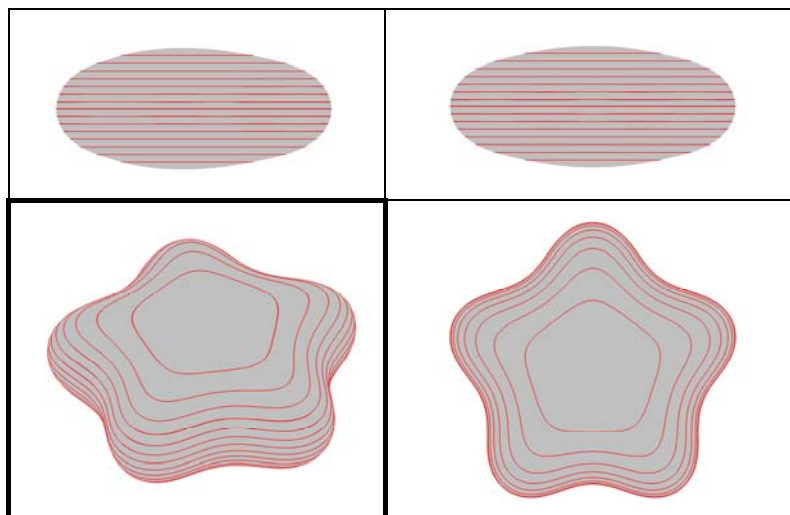


Слика 4 - 35: ФПКТ.1. за  $k = 5$  и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$

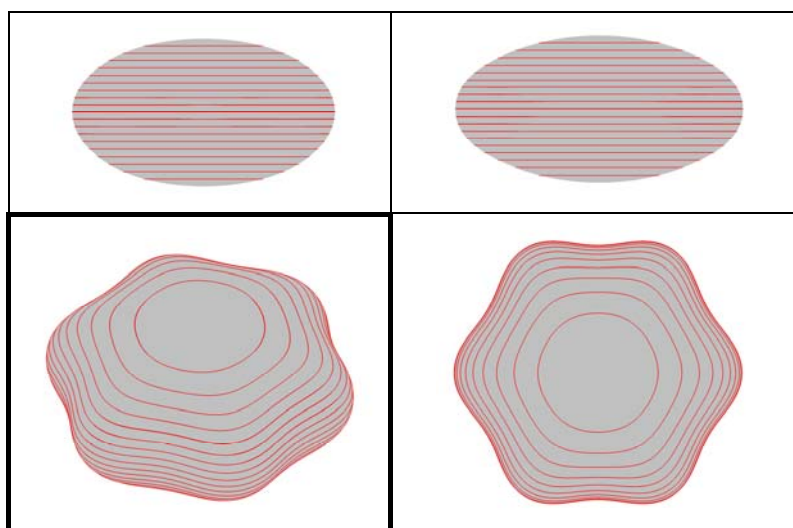


Слика 4 - 36: ФПКТ.1. за  $k = 6$  и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$





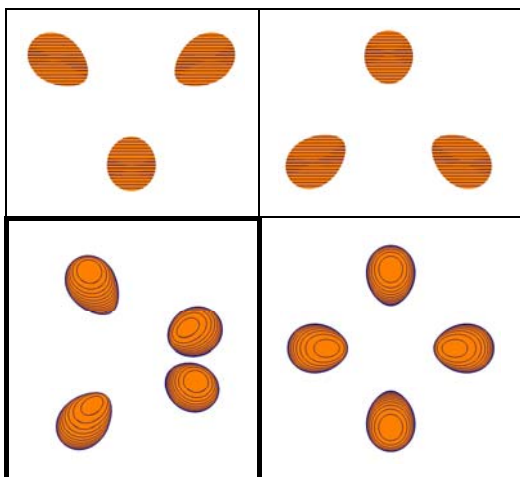
Слика 4 - 37: ФПКТ.1. за  $k = 5$  и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$



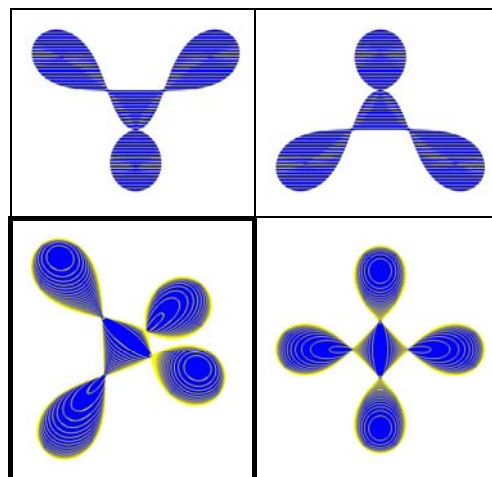
Слика 4 - 38: ФПКТ.1. за  $k = 6$  и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$

**ФПКТ.2.** Друго генерисање фокалних 3D елемената је изведено када су фокуси постављени у простору тако да се поклапају са теменима правилних полиедара (Слика 4 - 15).

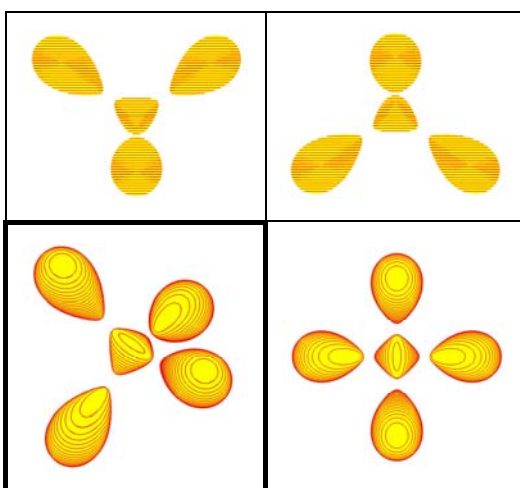
Нека су темена тетраедра фокусне тачке  $F_1, F_2, F_3$  и  $F_4$  тада ФПКТ ( $k = 4$ ) за коју важи  $\mathcal{S} = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4$  и  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ , где је  $\mathcal{S}_0 = \bar{R}^4$  садржи четири одвојене јајасте површи (Слика 4 - 39). Када је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ , тада ФПКТ садржи пет површи које се додирују (Слика 4 - 41); док за вредност  $\mathcal{S}_0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_1$  ФПКТ садржи пет одвојених површ, четири су са јајастим обликом, док је пета тетраедарског облика (Слика 4 - 40). Једноделна површ настаје за вредност  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$  (Слика 4 - 42).



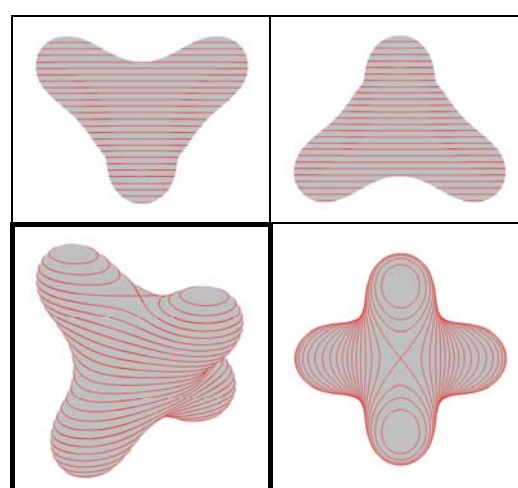
Слика 4 - 39: ФПКТ.2 за  $k = 4$  (фокуси су темена тетраедра) и  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$



Слика 4 - 41: ФПКТ.2 за  $k = 4$  (фокуси су темена тетраедра) и  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$

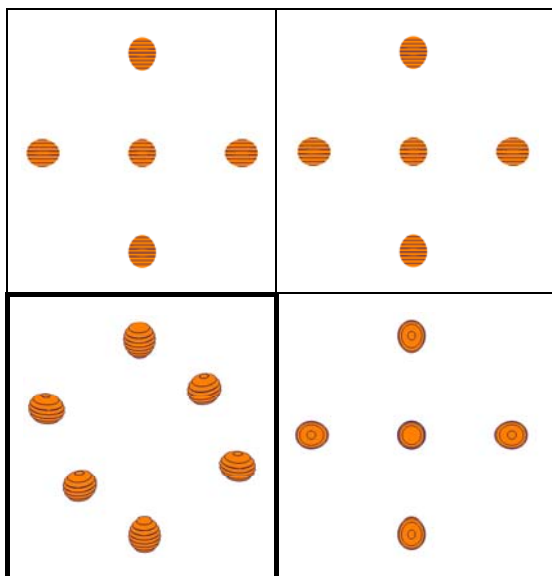


Слика 4 - 40: ФПКТ.2 за  $k = 4$  (фокуси су темена тетраедра) и  $\mathcal{S}_0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_1$

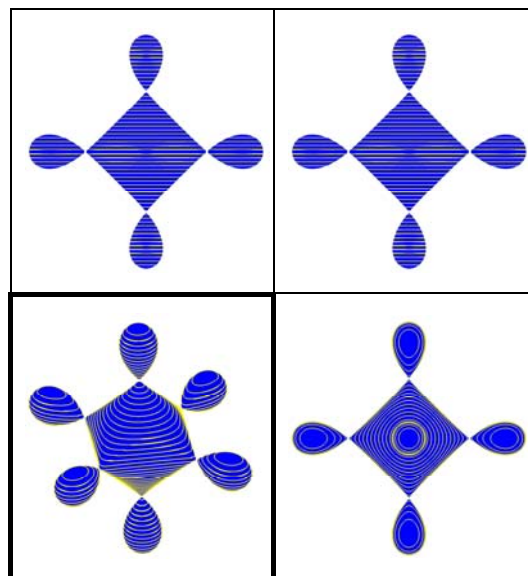


Слика 4 - 42: ФПКТ.2 за  $k = 4$  (фокуси су темена тетраедра) и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$

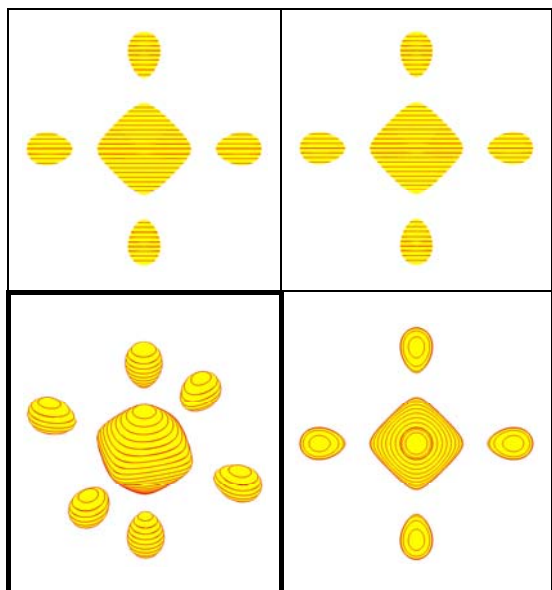
Нека су темена октаедра фокусне тачке  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$  и  $F_6$  тада ФПКТ ( $k = 6$ ) за коју важи  $\mathcal{S} = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5 \cdot R_6$  и  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ , где је  $\mathcal{S}_0 = \bar{R}^6$  садржи шест одвојених јајастих површи (Слика 4 - 43). Када је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ , тада ФПКТ садржи седам површи које се додирују (Слика 4 - 45); док за вредност  $\mathcal{S}_0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_1$  ФПКТ садржи седам одвојених површ, шест су са јајастим обликом, док је седма облика октаедра (Слика 4 - 44). Једноделна површ настаје за вредност  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$  (Слика 4 - 46).



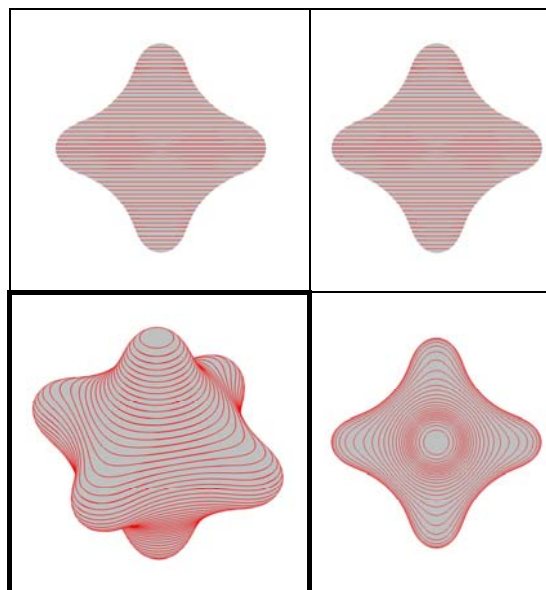
Слика 4 - 43: ФПКТ.2 за  $k = 6$  (фокуси су темена октаедра) и  $0 < \mathcal{S} = \mathcal{S}_0$



Слика 4 - 45: ФПКТ.2 за  $k = 6$  (фокуси су темена октаедра) и  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$



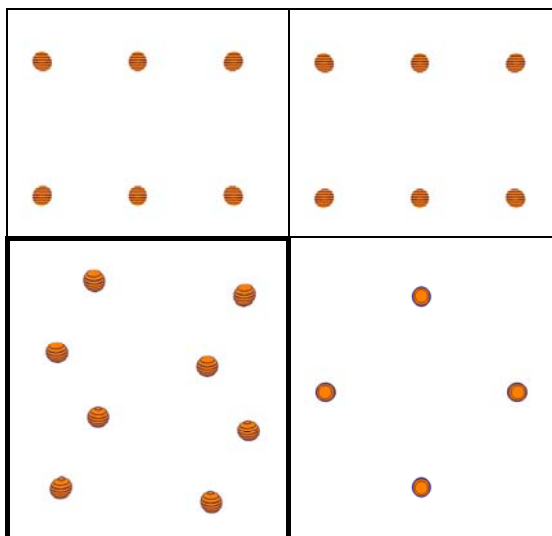
Слика 4 - 44: ФПКТ.2 за  $k = 6$  (фокуси су темена октаедра) и  $\mathcal{S}_0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_1$



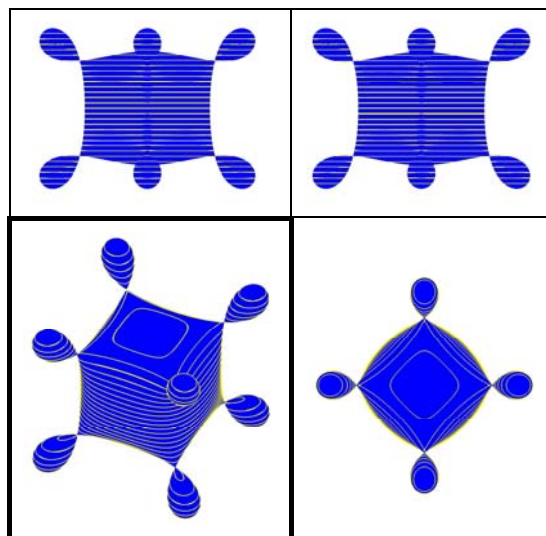
Слика 4 - 46: ФПКТ.2 за  $k = 6$  (фокуси су темена октаедра) и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$

Нека су темена коцке фокусне тачке  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7$  и  $F_8$  тада ФПКТ ( $k = 8$ ) за коју важи  $\mathcal{S} = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5 \cdot R_6 \cdot R_7 \cdot R_8$  и  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ , где је  $\mathcal{S}_0 = \bar{R}^8$  садржи осам одвојених јајастих површи (Слика 4 - 47). Када је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ , тада ФПКТ садржи девет површи које се додирују (Слика 4 - 49); док за вредност  $\mathcal{S}_0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_1$  ФПКТ садржи девет одвојених површ, осам су са јајастим обликом, док је пета тетраедарског облика (Слика 4 - 48). Једноделна површ настаје за вредност  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$  (Слика 4 - 50).

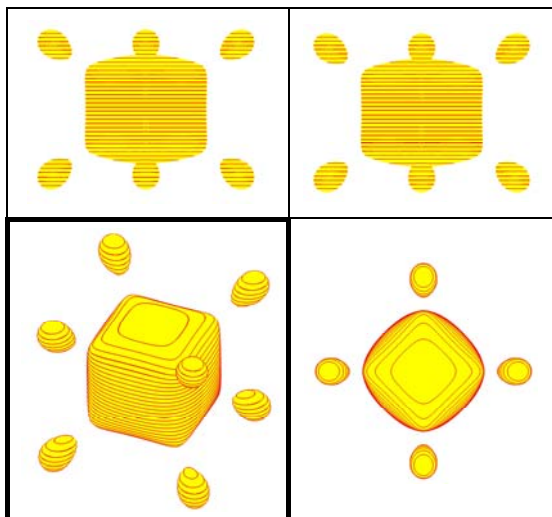




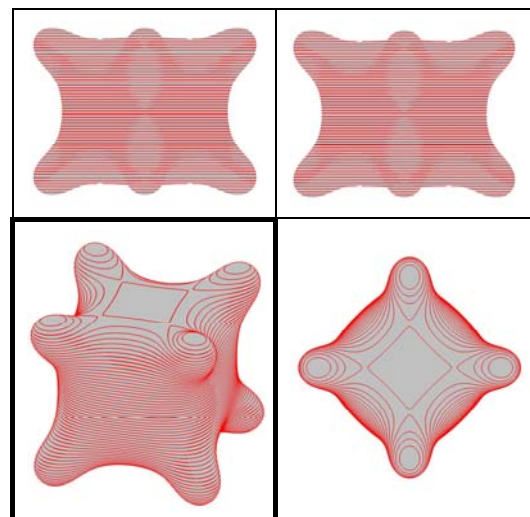
Слика 4 - 47: ФПКТ.2 за  $k = 8$  (фокуси су темена коцке) и  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$



Слика 4 - 49: ФПКТ.2 за  $k = 8$  (фокуси су темена коцке) и  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$



Слика 4 - 48: ФПКТ.2 за  $k = 8$  (фокуси су темена коцке) и  $\mathcal{S}_0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_1$



Слика 4 - 50: ФПКТ.2 за  $k = 8$  (фокуси су темена коцке) и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_1$

#### 4.1.1.Б. ГЕНЕРИСАЊЕ ДИРЕКТРИСНИХ ГЕОМЕТРИЈСКИХ ФОРМИ

**К-ДИРЕКТРИСНА ПОВРШ** представља ГМТ у простору чија је сума растојања до  $k$  фиксираних правих (директриса) константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за  $k$ -директрисну површ:

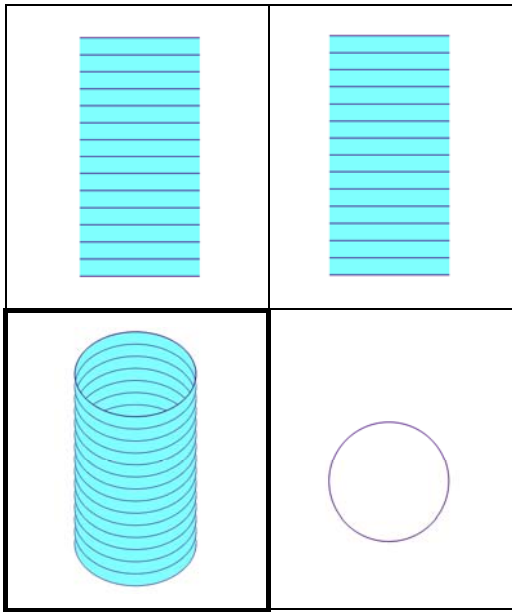
$$(4 - 65) \quad r_1 + r_2 + \dots + r_k = \mathcal{S}, \quad k \geq 1$$

где су  $r_1, r_2, \dots, r_k$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до директриса  $d_1, d_2, \dots, d_k$ , респективно и  $\mathcal{S} = const$ .

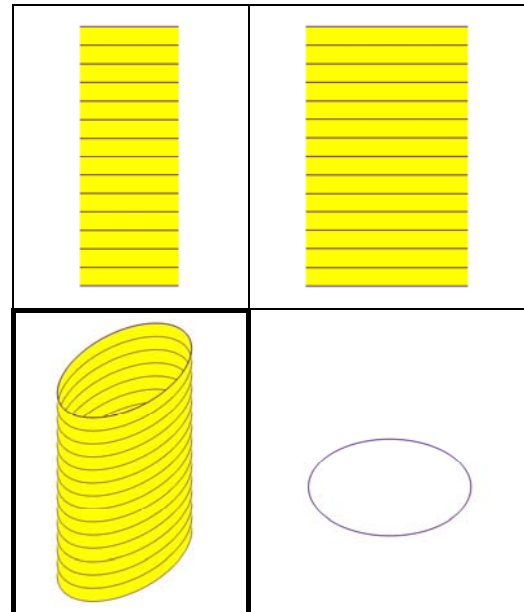
Ако је  $k = 1$  и  $\mathcal{S} = 0$  тада се директрисна површ дегенерише у праву која се поклапа са самом директрисом  $d_1$ .

Ако је  $k = 1$  и  $\mathcal{S} > 0$  тада директрисну површ представља кружни цилиндар чија је оса поклопљена са директрисом  $d_1$  полупречника  $\mathcal{S}$  тј.  $r_1 = \mathcal{S}$  (Слика 4 - 51).

Ако је  $k = 2$ ,  $d_1 \parallel d_2$  и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  тада директрисну површ представља елиптички цилиндар (Слика 4 - 52). За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = \text{dist}(d_1, d_2)$ , све тачке са и између директрисних линија  $d_1, d_2$  задовољавају услов  $r_1 + r_2 = \mathcal{S}$  и површ је раван ограничена директрисама.

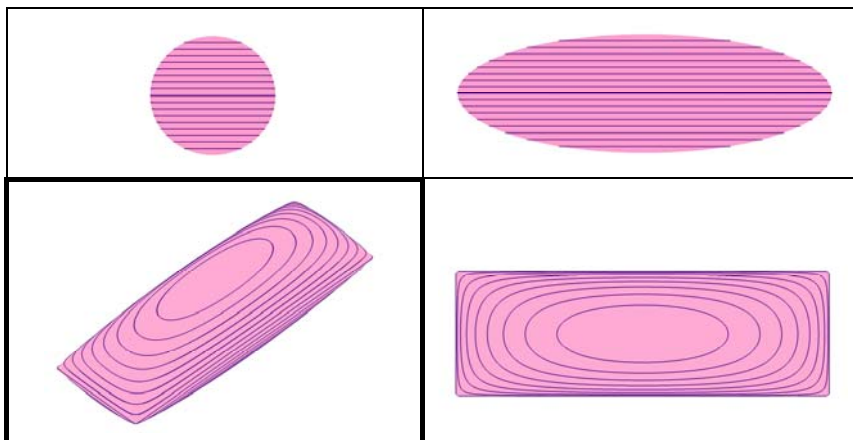


Слика 4 - 51: Цилиндар



Слика 4 - 52: Елиптички цилиндар

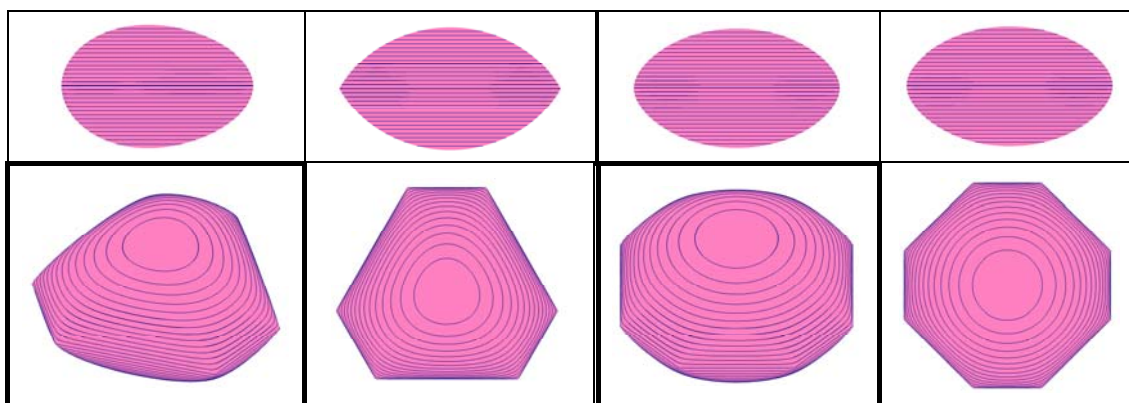
Ако је  $k = 2$ , директрисне праве  $d_1$  и  $d_2$  се секу и  $\mathcal{S} > 0$  тада директрисну површ представља површ са основом четвороугла чије су дијагонале поклопљене са директрисама, (Слика 4 - 53). Ако је  $\mathcal{S} = 0$  тада ДП се дегенерише у тачку – пресечна тачка полазних директриса.



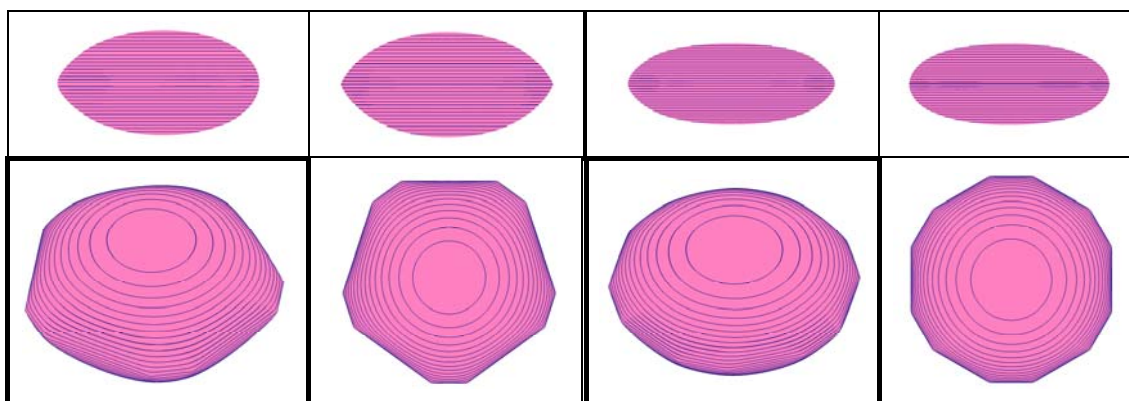
Слика 4 - 53: Дводиректрисна површ када се  $d_1$  и  $d_2$  секу и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$

**ДП.1.** Прво генерисање директрисних 3D елемената је изведено када су директрисе у равни и поклапају се са страницама правилних полигона (Слика 3 - 22).

Ако је  $k \geq 3$  и ако су директрисне праве  $d_1, \dots, d_k$  у истој равни и образују правилни полигон, тада за  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  директрисна површ постоји (Слика 4 - 54 и Слика 4 - 55). За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = k \cdot \bar{r}$  важи да све тачке са полигона као и оне у унутрашњости задовољавају услов (4 - 65), односно површ је раван ограничена полигоном. Ако је  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$  онда директрисна површ не постоји.

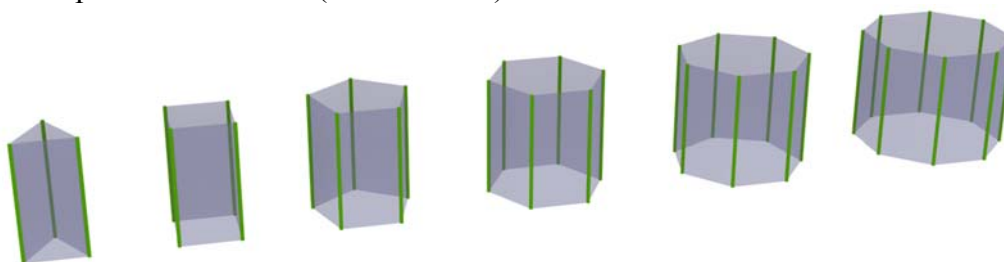


Слика 4 - 54: ДП.1. за  $k = 3$  (лево),  $k = 4$  (десно) и када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$



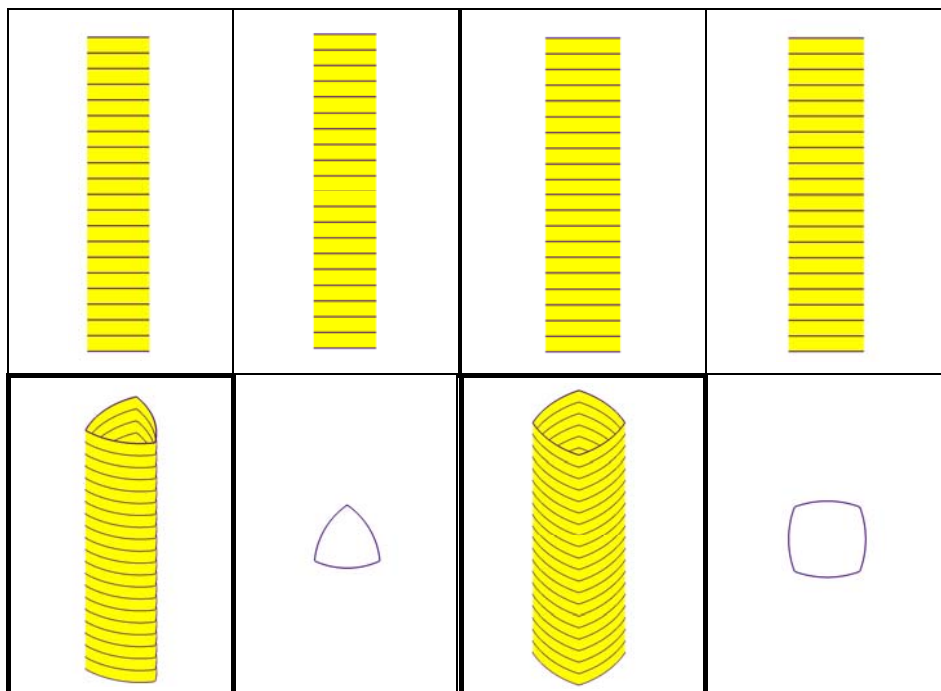
Слика 4 - 55: ДП.1. за  $k = 5$  (лево),  $k = 6$  (десно) и када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$

**ДП.2.** Други тип генерисања директрисних 3D елемената је дат када су директрисе постављене у простору као паралелне линије и поклапају се са ивицама призме чији је базис правилни полигон (Слика 4 - 56).

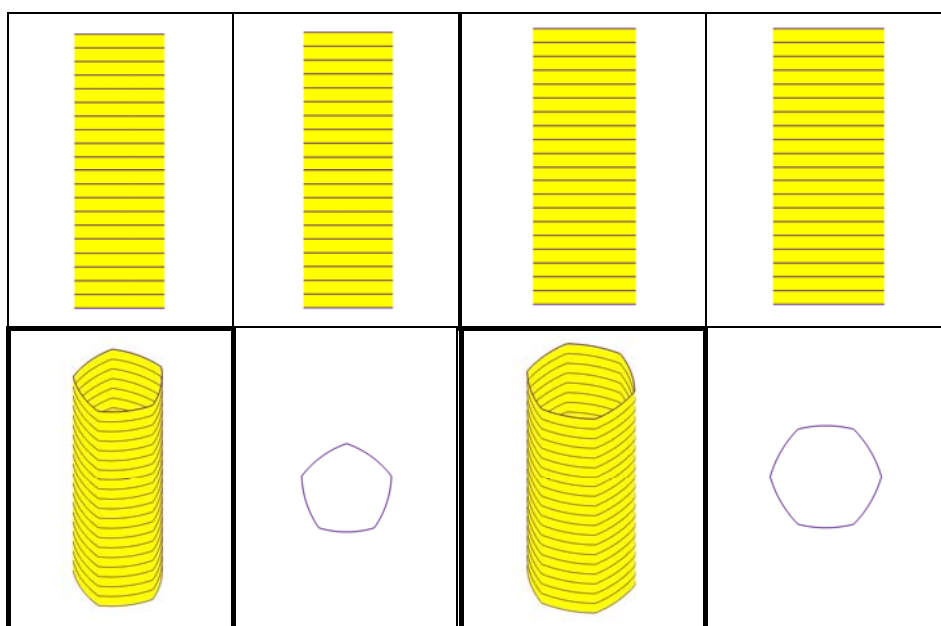


Слика 4 - 56: Директрисе - ивице призме са основом правилног полигона

Ако је  $k = 3$  и ако су директрисе праве које пролазе кроз темена једнакостраничног троугла и управне на раван троугла ( $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ ), тада за вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = 2\bar{a}$ , тридиректрисна површ је цилиндрична површ која садржи директрисе (Слика 4 - 57 лево). Ако је  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$  онда површ не постоји. За вредност  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  тридиректрисна површ је цилиндар са основом јајастог облика (Слика 4 - 59 лево).

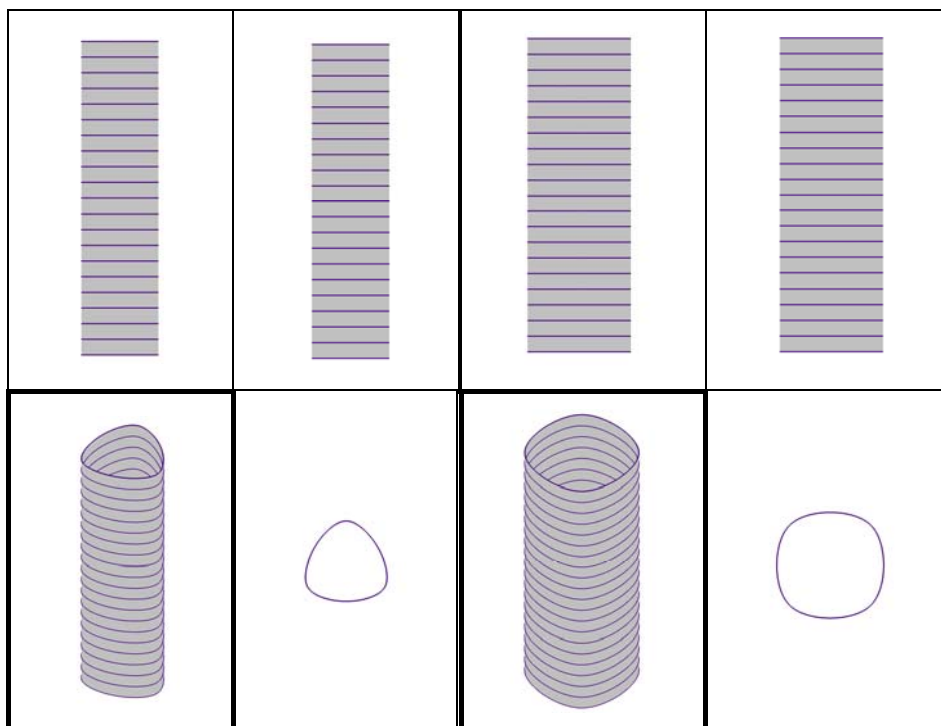


Слика 4 - 57: ДП.2. за  $k = 3$  (лево),  $k = 4$  (десно) и када је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$

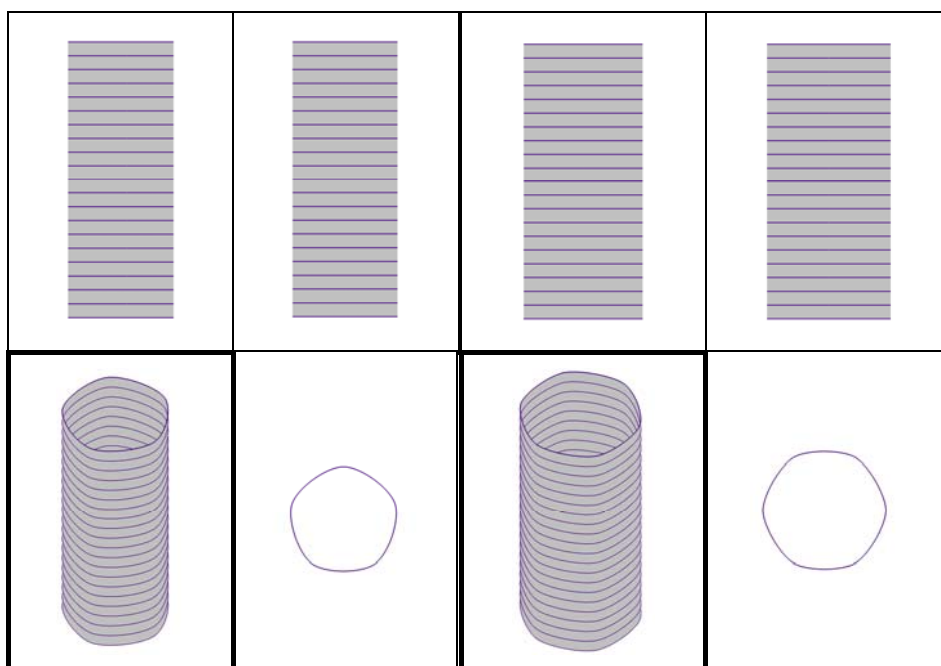


Слика 4 - 58: ДП.2. за  $k = 5$  (лево),  $k = 6$  (десно) и када је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$

Ако је  $k = 4$  и ако су директрисе праве које пролазе кроз темена квадрата и управне на раван квадрата ( $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$ ). За вредност  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  ДП.2. је цилиндар са основом облика суперелипсе (Слика 4 - 57 десно). За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = 2\bar{a} + \bar{d}$ , ова површ садржи директрисе (Слика 4 - 59 десно). Ако је  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$  онда површ не постоји.



Слика 4 - 59: ДП.2. за  $k = 3$  (лево),  $k = 4$  (десно) и када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$



Слика 4 - 60: ДП.2. за  $k = 5$  (лево),  $k = 6$  (десно) и када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$



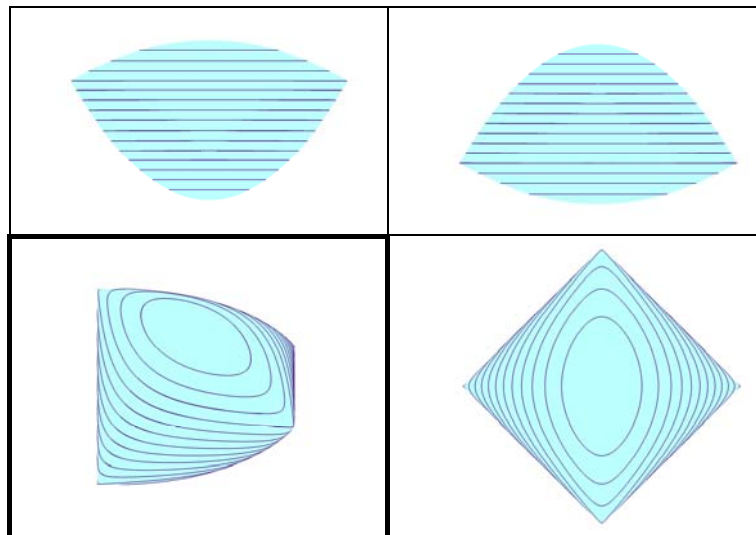
Ако је  $k \geq 5$  и ако директрисе пролазе кроз темена правилног полигона и нека су управне на раван тог полигона ( $d_1 \parallel d_2 \parallel \dots \parallel d_k$ ). За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = 2\bar{a} + \sum_{i=1}^{k-3} \bar{d}_i$ ,  $k$  – директрисни цилиндар садржи директрисе (Слика 4 - 58, лево за  $k = 5$  и десно за  $k = 6$ ). За вредност  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$   $k$  – директрисна површ је цилиндар (Слика 4 - 60, лево за  $k = 5$  и десно за  $k = 6$ ) са основом обле  $k$  – фокалне криве. Ако је  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$  онда површ не постоји.

**ДП.3.** Трећи тип генерисања директрисних 3D елемената се заснива на директрисама које су мимоилазне праве у простору. Овде су полазне директрисе постављене у простору као дијагонале страница призми чији су базиси правилни полигони (Слика 4 - 61).



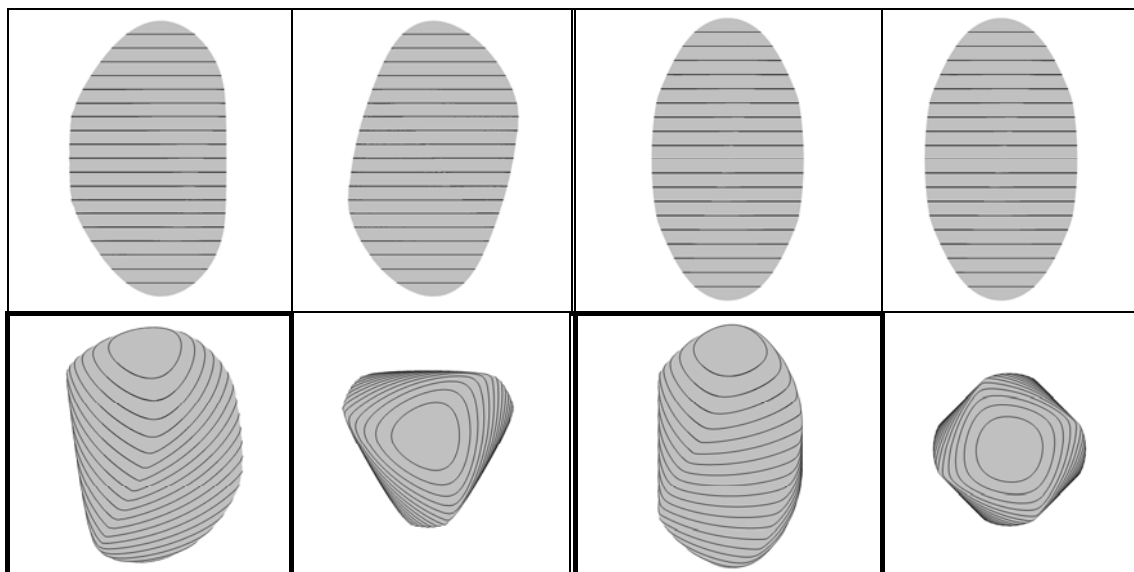
Слика 4 - 61: Директрисе - мимоилазне праве

Ако је  $k = 2$ , директрисне праве  $d_1$  и  $d_2$ , су мимоилазне праве (поклапају се са дијагоналама коцке на супротним странама) и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  тада Слика 4 - 62 приказује дводиректрисну површ. Ако је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = \text{dist}(d_1, d_2)$  тада само за тачке дужи најкраћег растојања између две мимоилазне праве важи:  $r_1 + r_2 = \mathcal{S}$ .

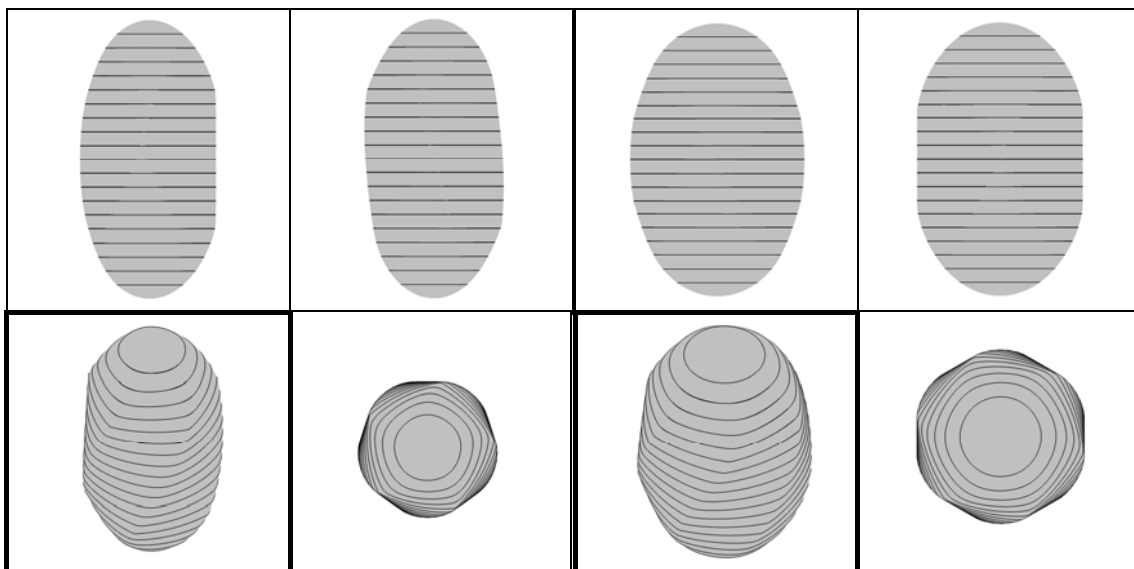


Слика 4 - 62: Дводиректрисна површ када се  $d_1$  и  $d_2$  мимоилазе и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$

Ако је  $k \geq 3$  и ако су директрисне праве  $d_1, \dots, d_k$  mimoилазне праве – дијагонале које се налазе на странама правих призми чији су базиси правилни полигони (Слика 4 - 61), тада за  $0 < \mathcal{S} \leq \mathcal{S}_0$  директрисна површ не постоји. За вредност  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0 = k \cdot \bar{r}$  добијене директрисне површи су приказане на следећим сликама (Слика 4 - 63 и Слика 4 - 64):

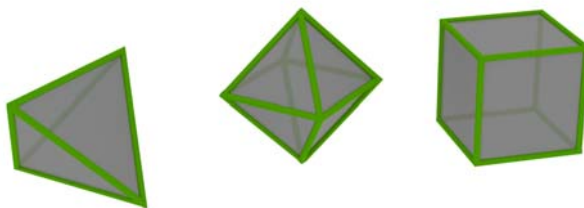


Слика 4 - 63: ДП.3. за  $k = 3$  (лево),  $k = 4$  (десно) и када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$



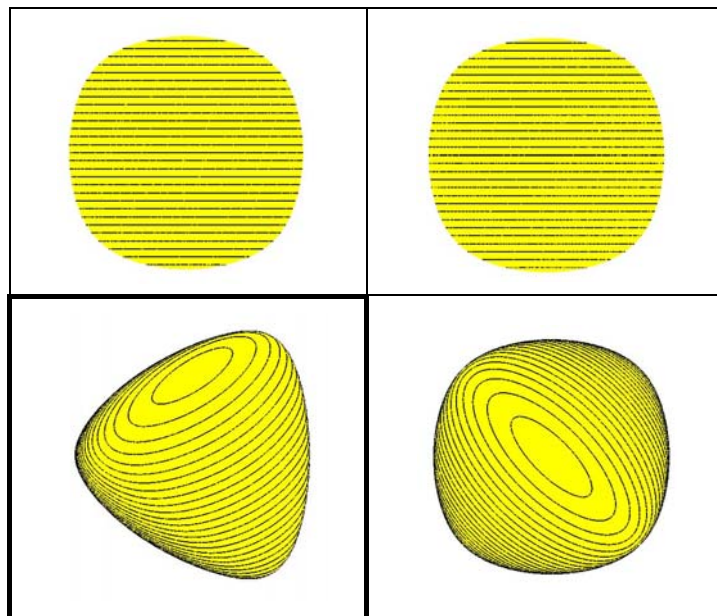
Слика 4 - 64: ДП.3. за  $k = 5$  (лево),  $k = 6$  (десно) и када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$

**ДП.4.** Четврти тип директрисних генерисаних 3D елемената је дат са директрисама које поклопљене са ивицама правилних полиедара – тетраедра, октаедра и коцке (Слика 4 - 65).

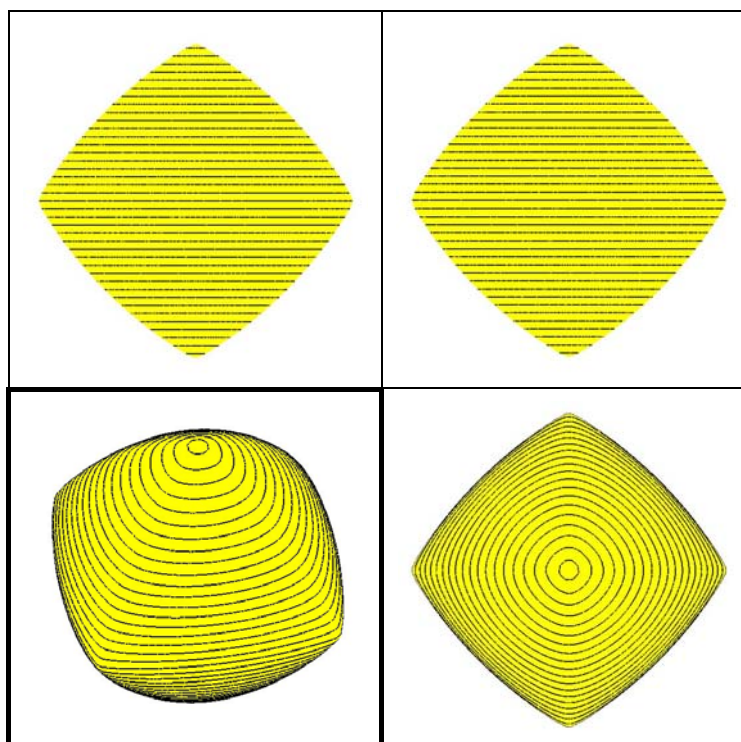


Слика 4 - 65: Директрисе - ивице правилних полиедара

Ако је  $k = n$  ( $n = 6$  или  $12$ ) и ако су директрисе  $d_1, \dots, d_k$  праве које се поклапају са ивицама правилних полиедара –тетраедра, октаедра или коцке (Слика 4 - 65), тада за  $0 < \mathcal{S} \leq \mathcal{S}_0$  директрисна површ не постоји. За вредност  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0 = k \cdot \bar{r}$  добијене директрисне површи су приказане на следећим сликама (Слика 4 - 66, Слика 4 - 67 и Слика 4 - 68):

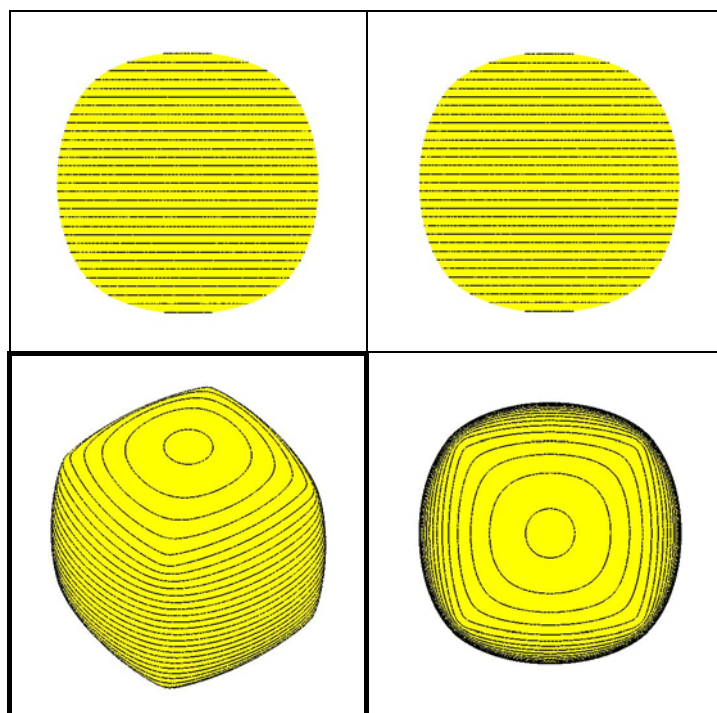


Слика 4 - 66: ДП.4. за  $k = 6$  и када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$



Слика 4 - 67: ДП.4. за  $k = 12$  и када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$





Слика 4 - 68: ДП.4. за  $k = 12$  и када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$

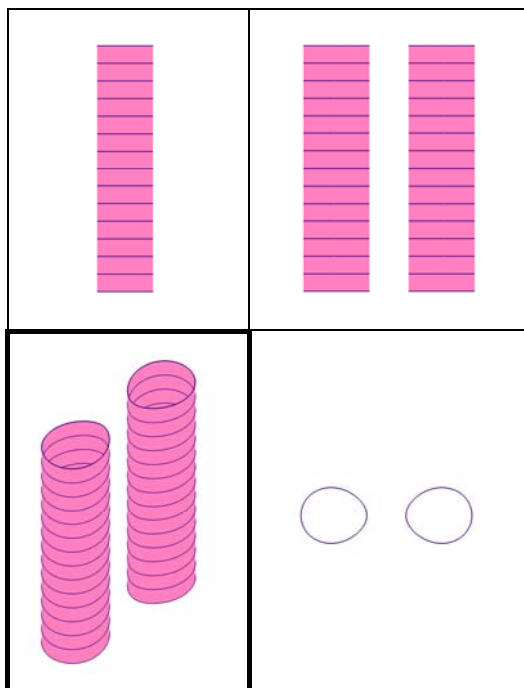
**К-ДИРЕКТРИСНА ПОВРШ КАСИНИЈЕВОГ ТИПА** представља ГМТ у простору чији је производ растојања до  $k$  фиксираних директриса константан. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за  $k$ -директрисну површ Касинијевог типа:

$$(4 - 66) \quad r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_k = \mathcal{S}, \quad k \geq 1$$

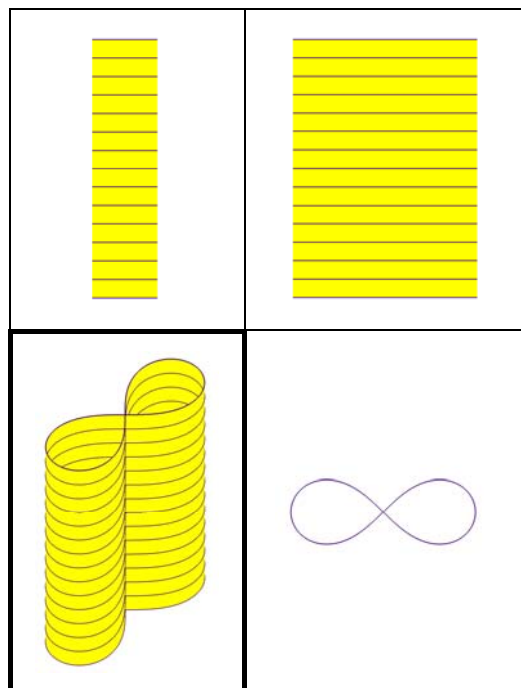
где су  $r_1, r_2, \dots, r_k$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до директриса  $d_1, d_2, \dots, d_k$ , респективно и  $\mathcal{S} = const$ .

Ако је  $k = 1$  и  $\mathcal{S} = 0$  тада се ДПКТ се дегенерише у праву која се поклапа са самом директрисом  $d_1$ . Када је  $\mathcal{S} > 0$  онда је ДПКТ кружни цилиндар чија је оса поклопљена са директрисом  $d_1$  и са полупречником базисног круга  $\mathcal{S}$  тј.  $r_1 = \mathcal{S}$  (Слика 4 - 51).

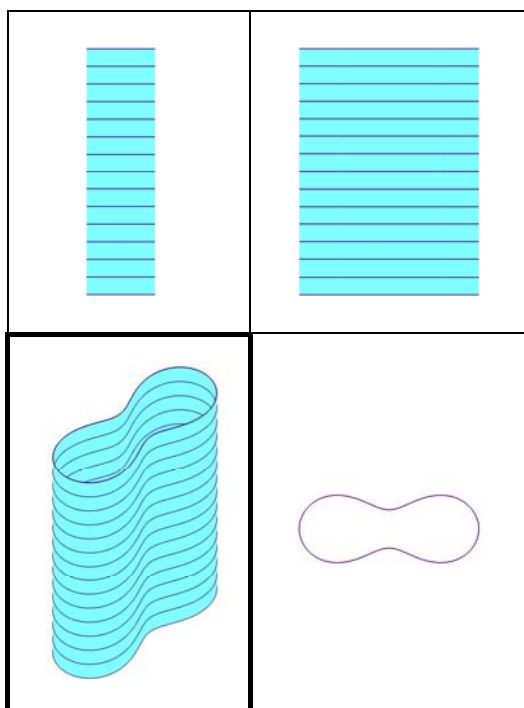
Нека је  $k = 2$  и директрисне праве паралелне линије  $d_1 \parallel d_2$  тада за вредност  $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$ ,  $\mathcal{S}_0 = dist(d_1, d_2)/2$  ДПКТ је представљена са два цилиндра који имају јајасту основу (Слика 4 - 69). Када је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$  тада ДПКТ постаје цилиндар са базисном основом облика Бернулијеве лемнискате за који важи  $r_1 \cdot r_2 = \mathcal{S}$  (Слика 4 - 71). Када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ , ДПКТ је такође цилиндар, али са базисном основом Касинијеве једноделне криве са већим или мањим удубљењем (Слика 4 - 70 и Слика 4 - 72).



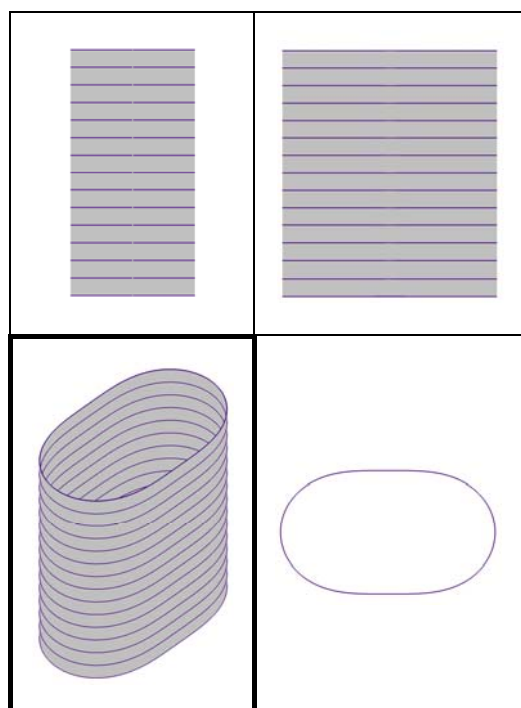
Слика 4 - 69: ДПКТ са  $d_1 \parallel d_2$   
и  $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$



Слика 4 - 71: ДПКТ са  $d_1 \parallel d_2$  и  
 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$

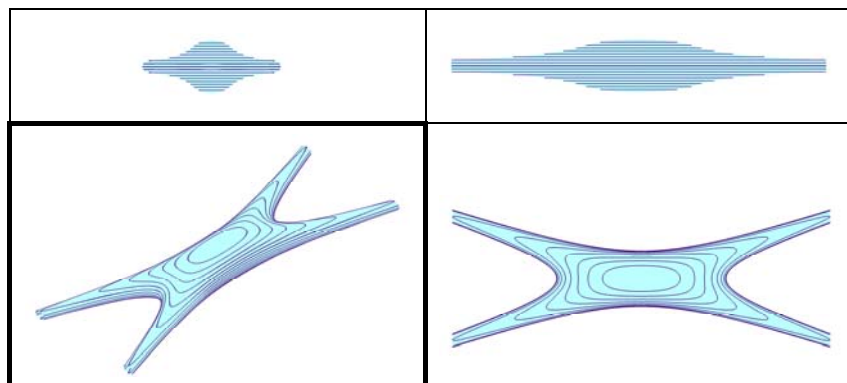


Слика 4 - 70: ДПКТ са  $d_1 \parallel d_2$  и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$



Слика 4 - 72: ДПКТ са  $d_1 \parallel d_2$  и  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$

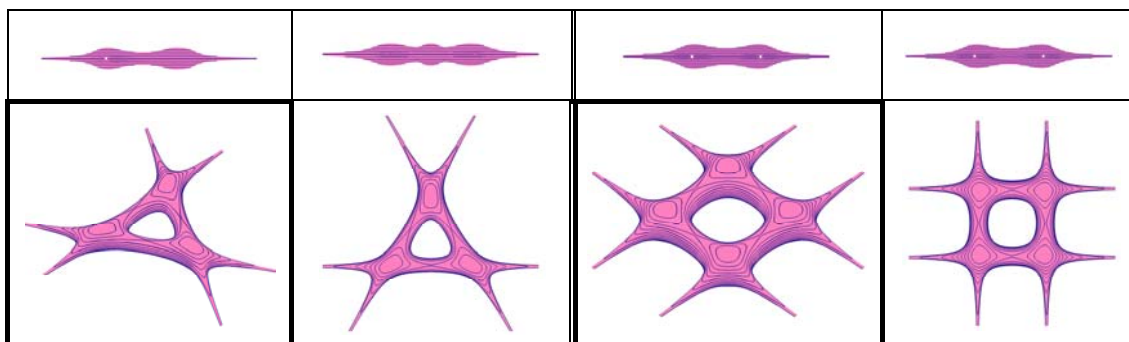
Ако је  $k = 2$ , директрисне праве ( $d_1$  и  $d_2$ ) се секу и  $\mathcal{S} > 0$  тада ДПКТ је приказана на следећој слици: (Слика 4 - 73).



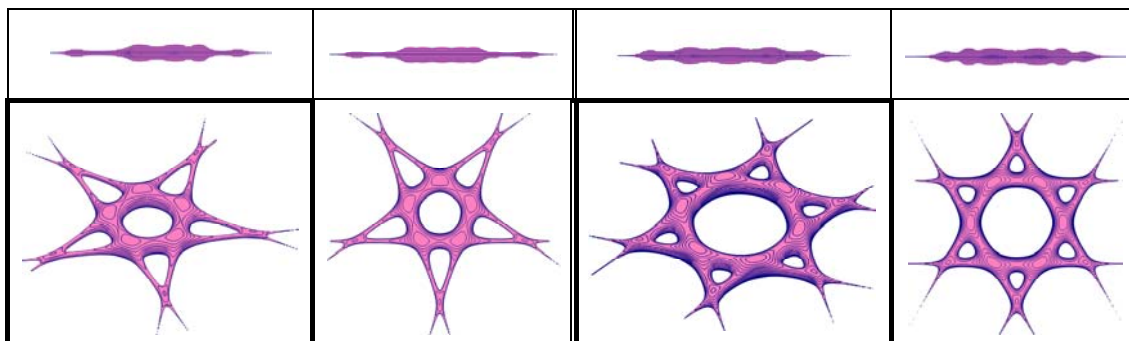
Слика 4 - 73: ДПКТ са директрисама које се секу и када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$

**ДПКТ.1.** Прво генерисање директрисних 3D елемената је изведено када су директрисе у равни и позициониране су тако да формирају правилни полигон (Слика 3 - 22).

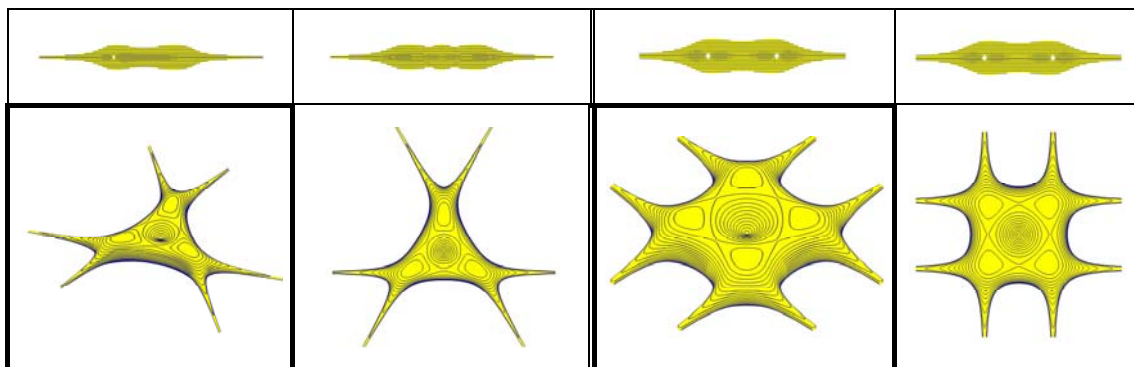
Ако је  $k \geq 3$  и ако су директрисне праве  $d_1, \dots, d_k$  у истој равни и образују правилни полигон, тада за  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$  ДПКТ (Слика 4 - 74 и Слика 4 - 75) има тороидни облик. За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = \bar{r}^k$  ДПКТ додирује тежиште полигона (Слика 4 - 76 и Слика 4 - 77). Ако је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  онда добијене ДПКТ су приказана на следећим сликама: Слика 4 - 78 и Слика 4 - 79.



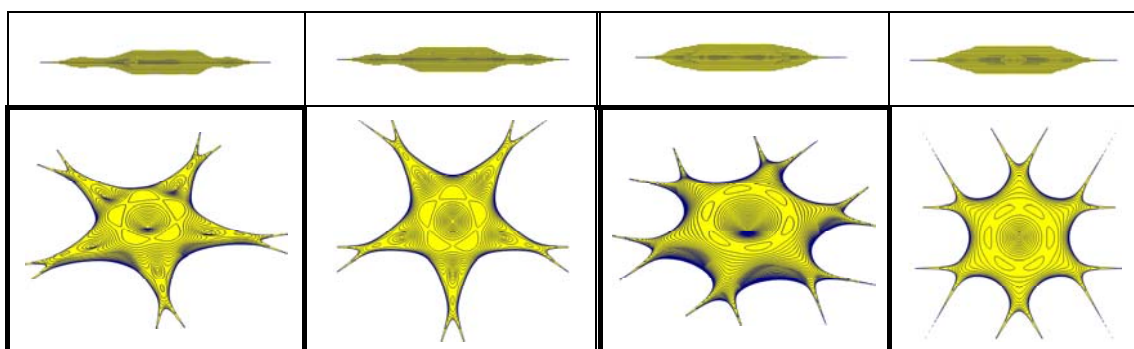
Слика 4 - 74: ДПКТ.1. за  $k = 3$  (лево),  $k = 4$  (десно) и када је  $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$



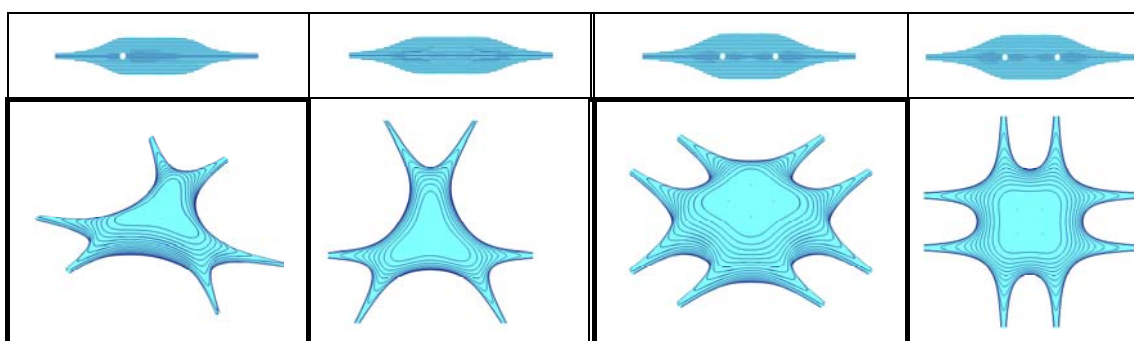
Слика 4 - 75: ДПКТ.1. за  $k = 5$  (лево),  $k = 6$  (десно) и када је  $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$



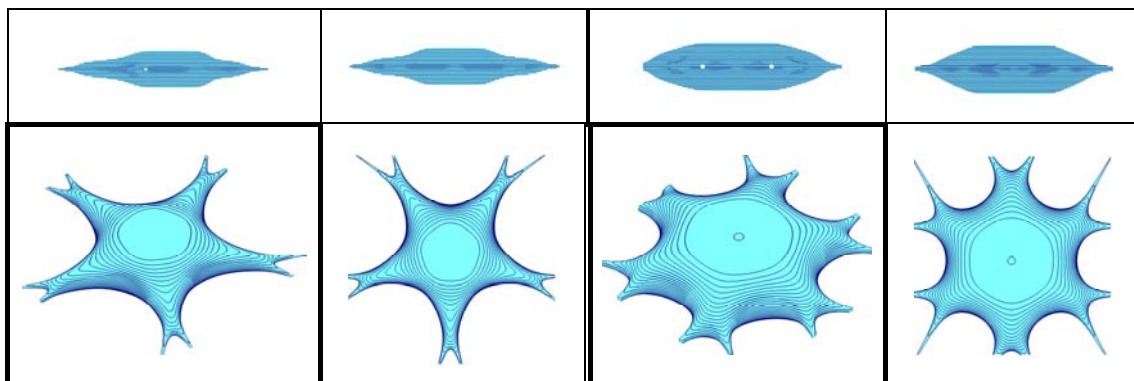
Слика 4 - 76: ДПКТ.1. за  $k = 3$  (лево),  $k = 4$  (десно) и када је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$



Слика 4 - 77: ДПКТ.1. за  $k = 5$  (лево),  $k = 6$  (десно) и када је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$



Слика 4 - 78: ДПКТ.1. за  $k = 3$  (лево),  $k = 4$  (десно) и када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$

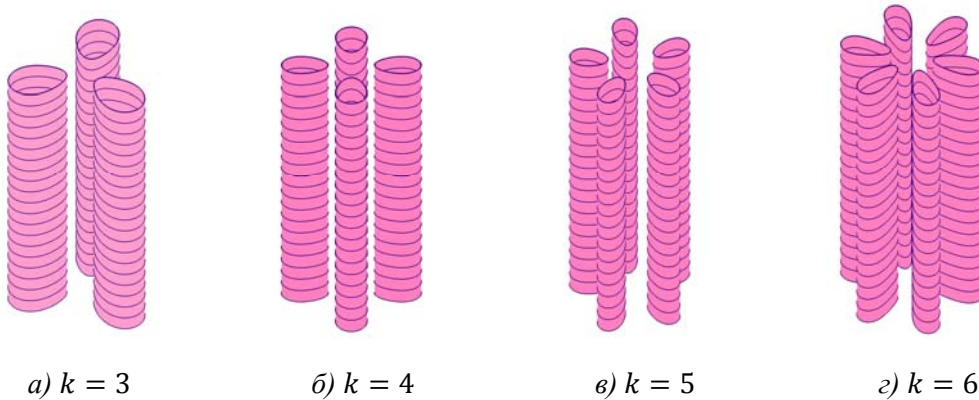


Слика 4 - 79: ДПКТ.1. за  $k = 5$  (лево),  $k = 6$  (десно) и када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$

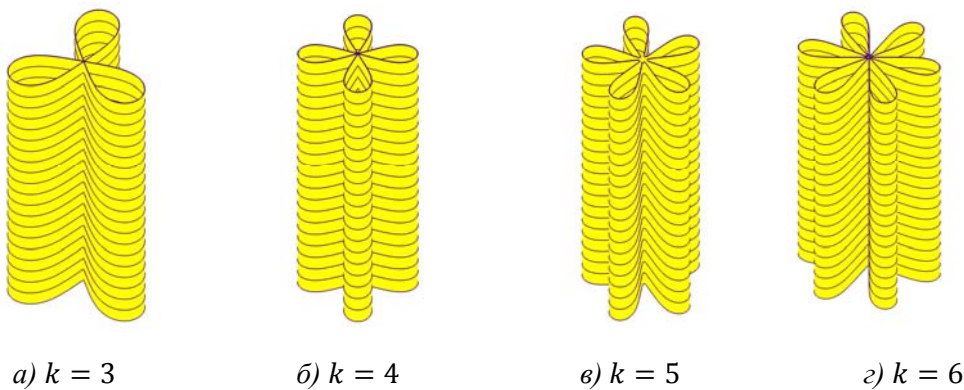


**ДПКТ.2.** Други тип генерисања директрисних 3D елемената Касинијевог типа је изведено када су директрисе постављене у простору као паралелне линије и позициониране су тако да се поклапају са ивицама призми чији су базиси правилни полигони (Слика 4 - 56).

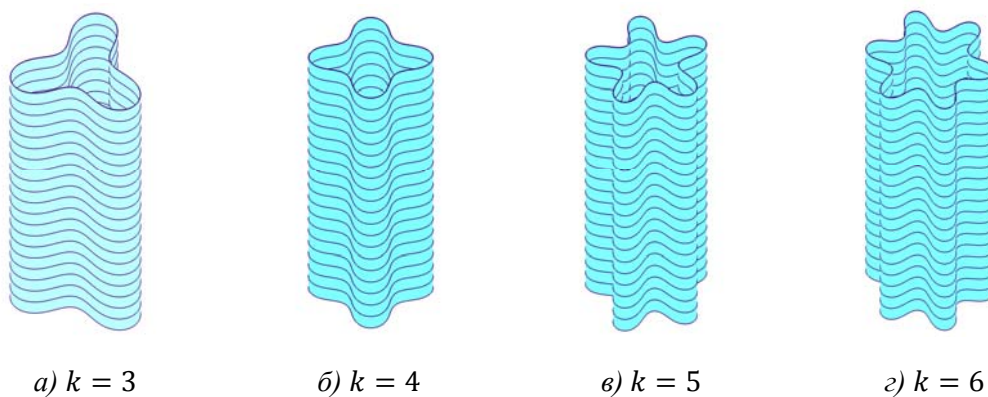
Нека је  $k \geq 3$ ,  $d_1 \parallel d_2 \parallel \dots \parallel d_k$ ,  $\mathcal{S} > 0$  и нека директрисе пролазе кроз темена правилног полигона тако да су управне на раван тог полигон. Ако је  $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$  тада је ДПКТ представљена са  $k$  цилиндра који имају основу јајастог облика тј. облика  $k$ -фокалне Касинијеве криве (Слика 4 - 80). За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = \bar{R}^k$  (Слика 4 - 81) свих  $k$ -цилиндара се додирују, односно секу по правој која пролази кроз тежиште правилног полигона. Ако је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  тада ДПКТ је представљена само једним цилиндром који има основу облика Касинијеве криве са удубљеним делом (Слика 4 - 82) или облијег облика (Слика 4 - 83). С обзиром да је у питању прави цилиндри, дати су само њихови аксонометријски прикази, јер се у првој ортогоналној пројекцији види зрчно као одговарајућа фокална крива Касинијевог типа (Слика 3 - 20 и Слика 3 - 21), док су друга и трећа пројекција ових цилиндара правоугаоници. ДПКТ.2. такође могу настати транслацијом фокално генерисаног 2D елемента које ће бити описано у поглављу 4.4.1.



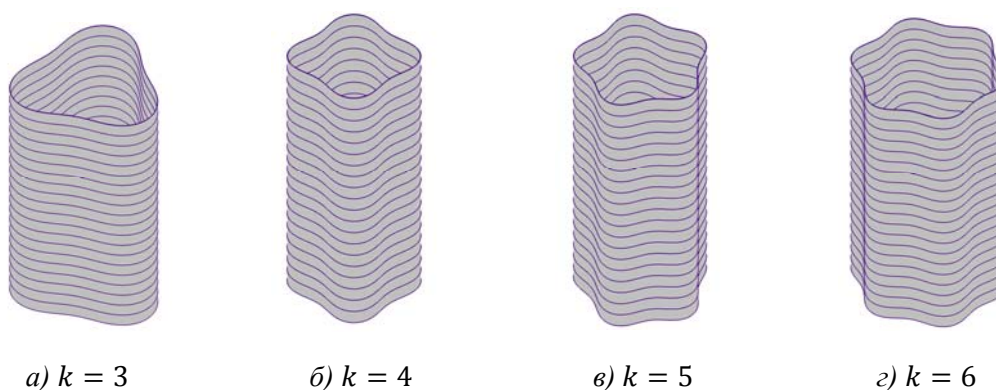
Слика 4 - 80: ДПКТ.2. када је  $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$



Слика 4 - 81: ДПКТ.2. када је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$



Слика 4 - 82: ДПКТ.2. када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$



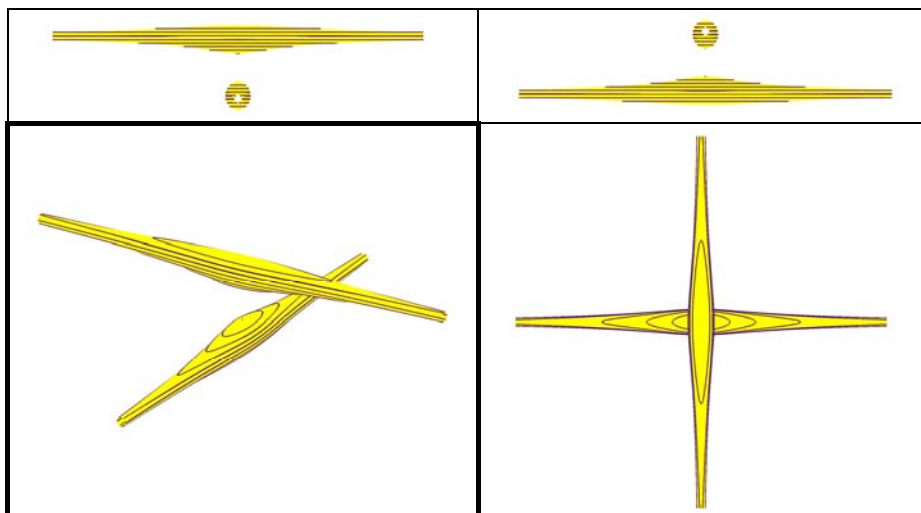
Слика 4 - 83: ДПКТ.2. када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$

**ДПКТ.3.** Трећи тип генерисања директрисних 3D елемената Касинијевог типа се базира на директрисама које су мимоилазне праве у простору. Овде су полазне директрисе постављене у простору као дијагонале страница призми чији су базиси правилни полигони (Слика 4 - 61).

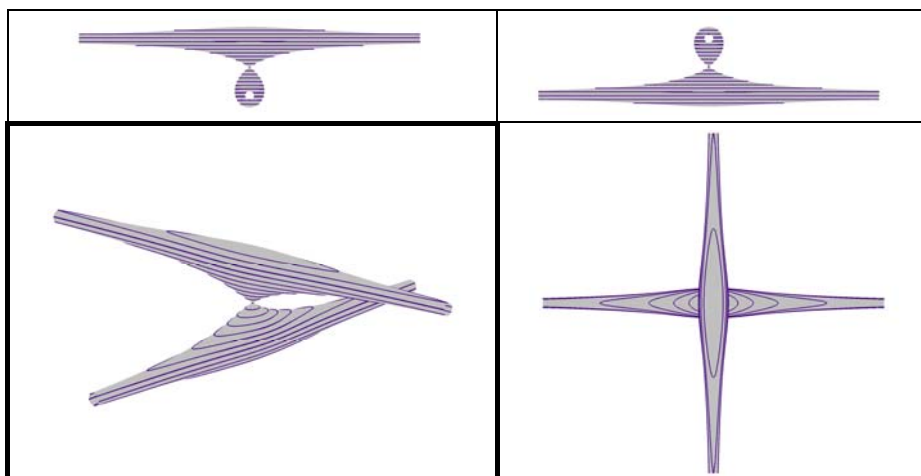
Ако је  $k = 2$ , директрисне праве  $d_1$  и  $d_2$ , су мимоилазне праве (поклапају се са дијагоналама коцке на супротним странама, Слика 4 - 65), важи:  $r_1 \cdot r_2 = \mathcal{S}$  и  $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$  тада ДПКТ се састоји из два дела која су одвојена (Слика 4 - 84). Ако је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = \text{dist}(d_1, d_2)/4$  тада ДПКТ се састоји из два дела који се додирују (Слика 4 - 85). Слика 4 - 86 приказује једноделну ДПКТ за  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$ .

Ако је  $k \geq 3$  и ако су директрисне праве  $d_1, \dots, d_k$  мимоилазне праве које се налазе на странама правих призми чији су базиси правилни полигони (Слика 4 - 61), тада за вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = \bar{r}^k$  генерисане ДПКТ.3. су дате на следећим сликама: Слика 4 - 87 и Слика 4 - 88.

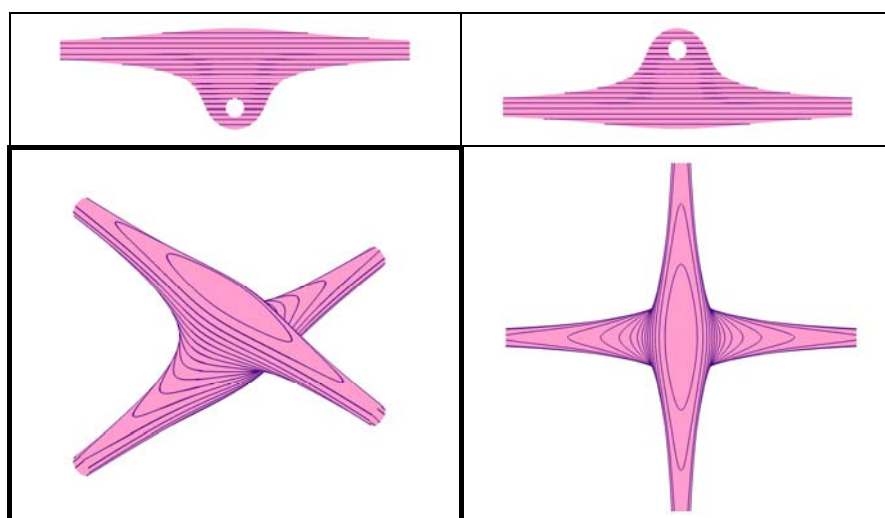
Геометријске форме ДП.1., ДП.2., ДП.3. ДПКТ.1., ДПКТ.2. и ДПКТ.3. генерисане су на основу једначина датих у прилогу II-2 до II-6. Моделовање површи, које су у овом делу рада приказане (Слика 4 - 54 до Слика 4 - 64 и Слика 4 - 74 до Слика 4 - 88) извршено је помоћу софтвера VisuMath 3.0, [148].



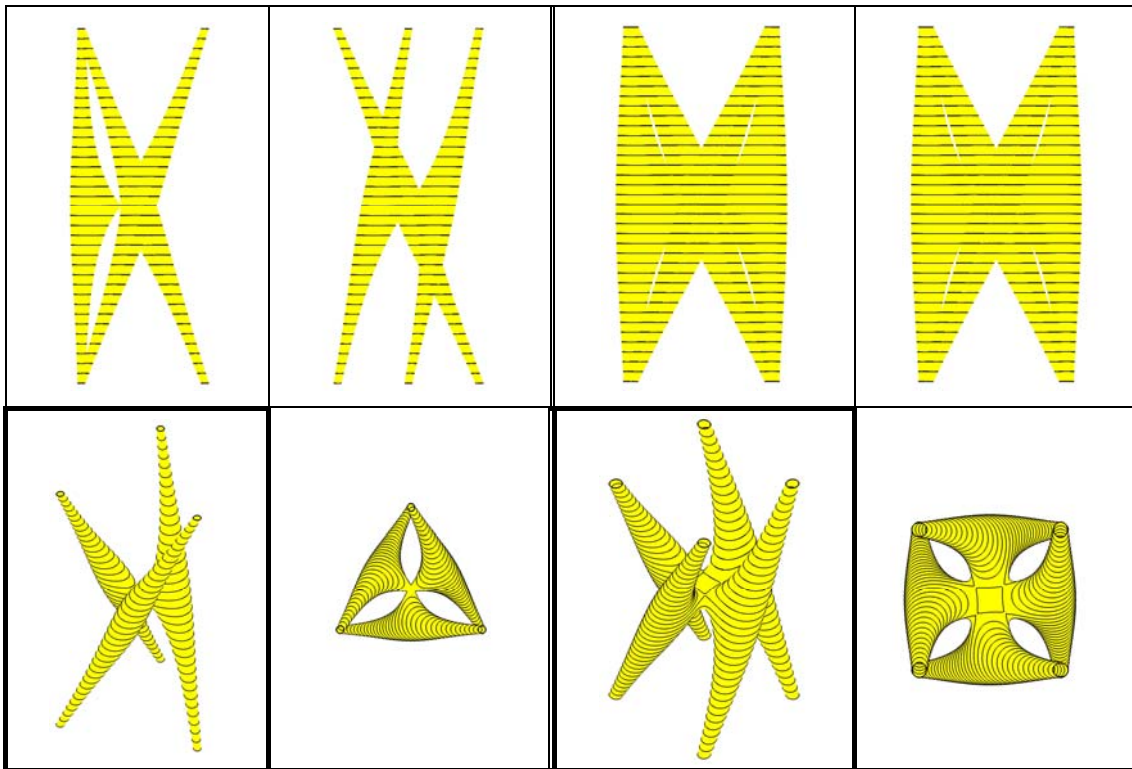
Слика 4 - 84: ДПКТ.3. за  $k = 2$  и када је  $\delta < \delta_0$



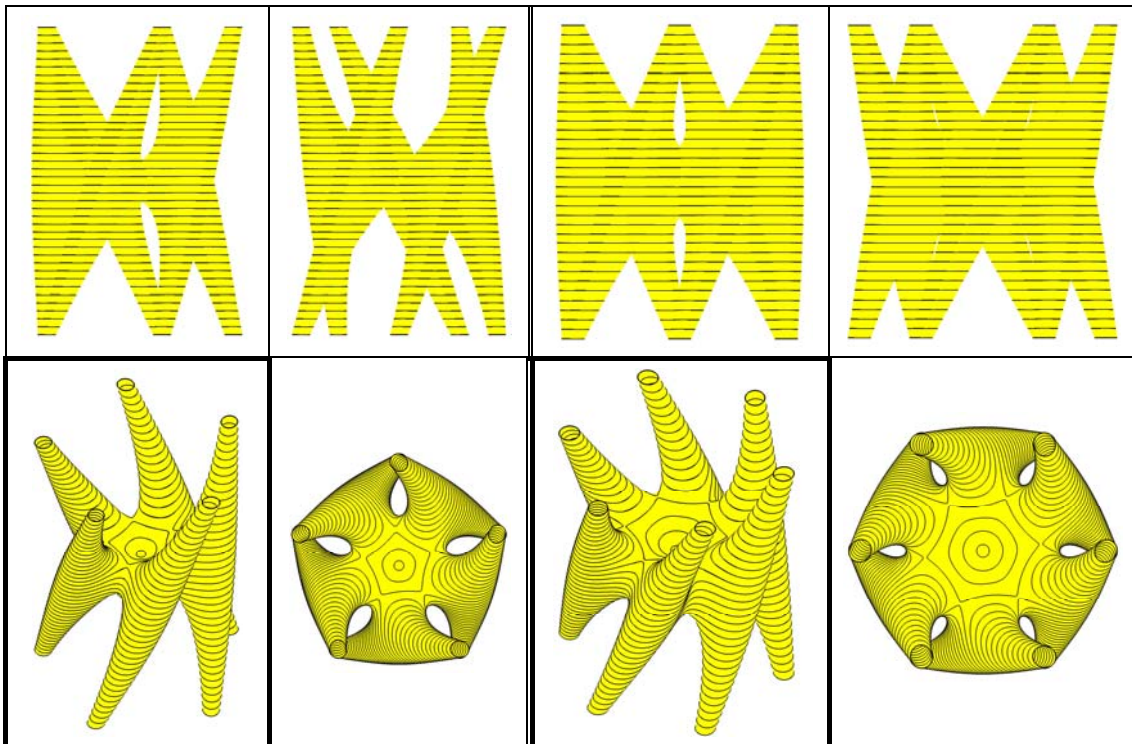
Слика 4 - 85: ДПКТ.3. за  $k = 2$  и када је  $\delta = \delta_0$



Слика 4 - 86: ДПКТ.3. за  $k = 2$  и када је  $\delta > \delta_0$



Слика 4 - 87: ДПКТ.3. за  $k = 3$  (лево),  $k = 4$  (десно)

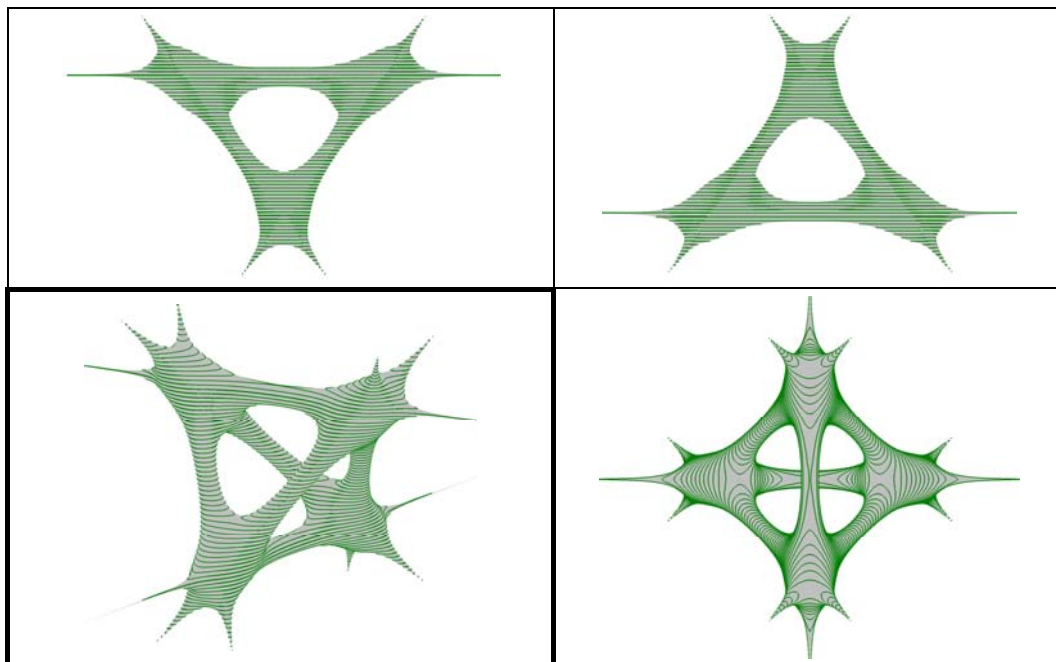


Слика 4 - 88: ДПКТ.3. за  $k = 5$  (лево),  $k = 6$  (десно)

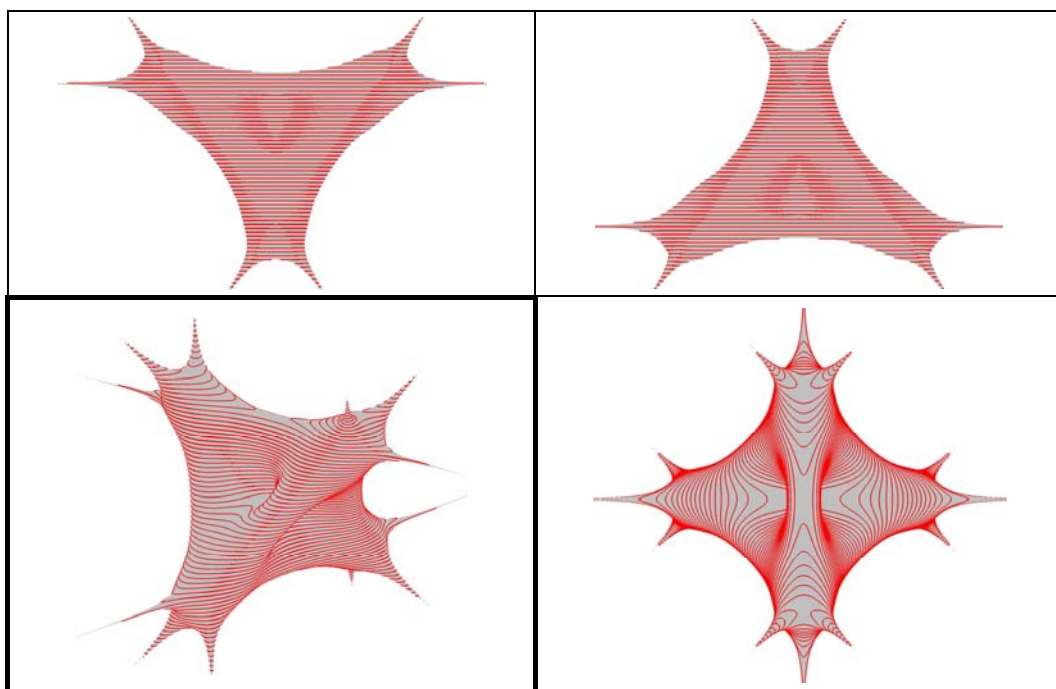


ДПКТ.4. Четврти тип директрисно генерисани 3D елементи Касинијевог типа су формирани тако да су задате директрисе поклопљене са ивицама правилних полиедара (Слика 4 - 65).

Ако је  $k = l$  ( $l = 6$  или  $12$ ) и ако су директрисе  $d_1, \dots, d_k$  праве које се поклапају са ивицама правилних полиедара, тада за  $0 < \mathcal{S} < \mathcal{S}_0$  ДПКТ има тороидни облик (Слика 4 - 89 и Слика 4 - 92).

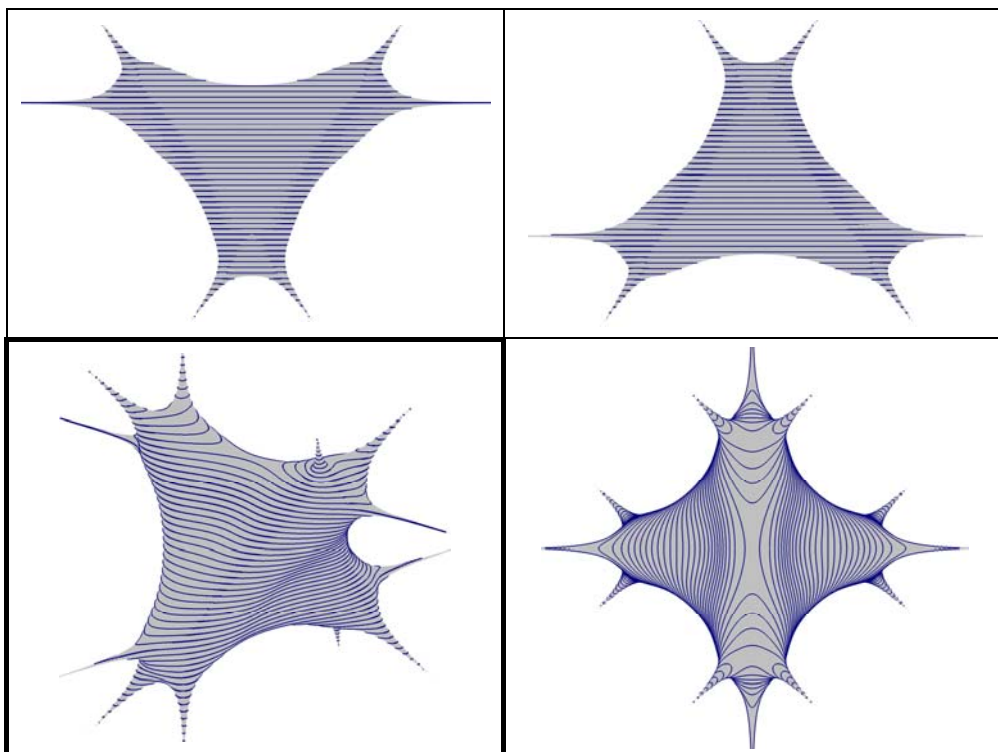


Слика 4 - 89: ДПКТ.4. за  $l = 6$  и када је  $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$

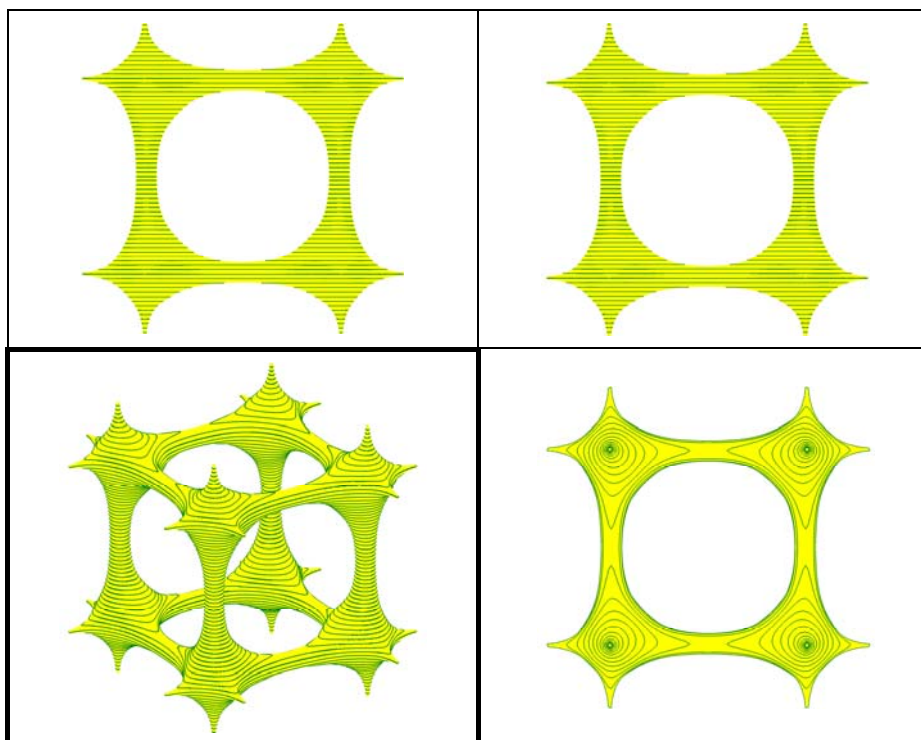


Слика 4 - 90: ДПКТ.4. за  $l = 6$  и када је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$

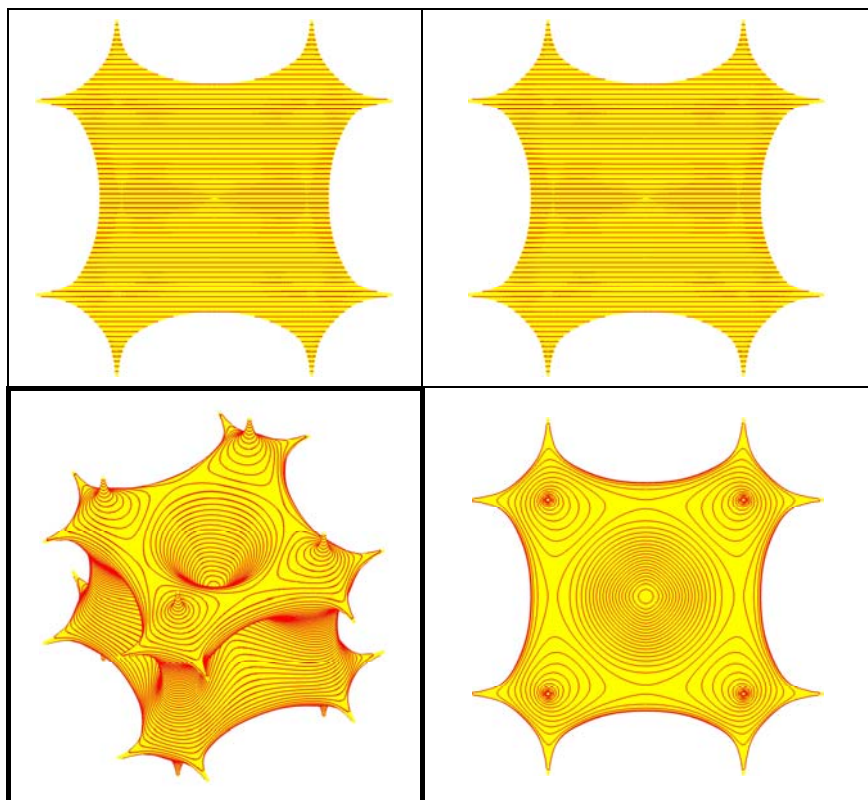
За вредност  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = (H/2)^l$  ДПКТ додирује центар уписаног круга полиедра (Слика 4 - 90 и Слика 4 - 93). Ако је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$  онда добијене ДПКТ су приказане на следећим сликама: Слика 4 - 91 и Слика 4 - 94.



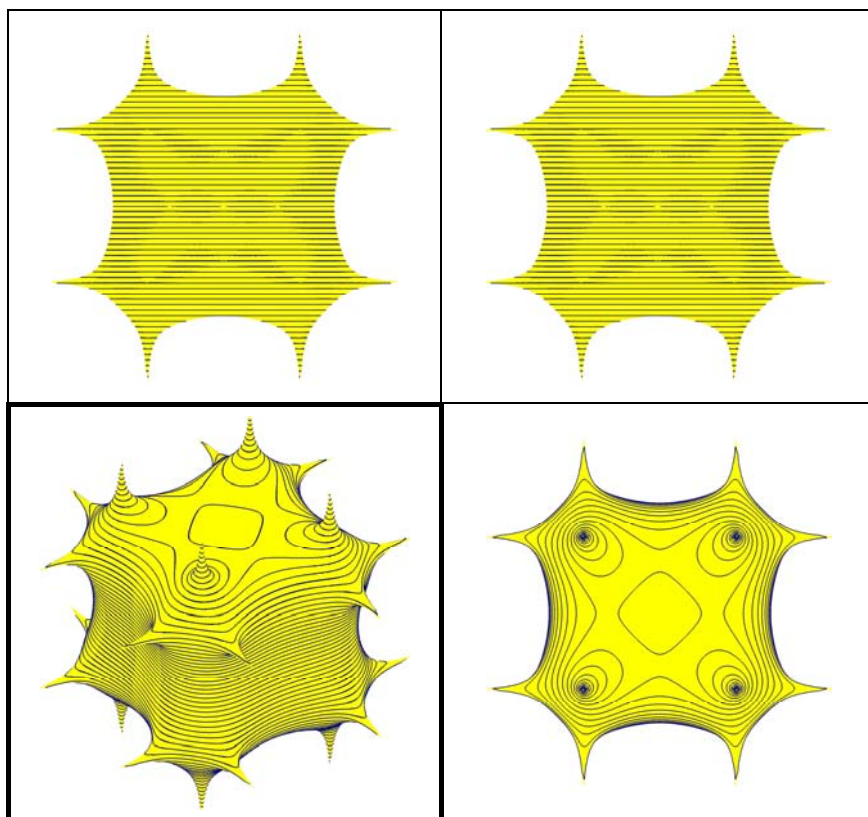
Слика 4 - 91: ДПКТ.4. за  $l = 6$  и када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$



Слика 4 - 92: ДПКТ.4. за  $l = 12$  и када је  $\mathcal{S} < \mathcal{S}_0$



Слика 4 - 93: ДПКТ.4. за  $l = 12$  и када је  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$



Слика 4 - 94: ДПКТ.4. за  $l = 12$  и када је  $\mathcal{S} > \mathcal{S}_0$

ДП.4. и ДПКТ.4. генерисане су на основу једначина датих у прилогу II-7. Моделовање површи, које су у овом делу рада приказане (Слика 4 - 66, Слика 4 - 68, Слика 4 - 89 и Слика 4 - 94) извршено је помоћу софтвера VisuMath 3.0, [148].

#### 4.1.1.В. ГЕНЕРИСАЊЕ ДИРЕКТОРНИХ ГЕОМЕТРИЈСКИХ ФОРМИ

**К-ДИРЕКТОРНА ПОВРШ** представља ГМТ у простору чија је сума растојања до  $k$  фиксираних равни константна. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за  $k$  –директорну површ:

$$(4 - 67) \quad \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_k = \mathcal{S}, \quad k \geq 1$$

где су  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до директрисних равни  $D_1, D_2, \dots, D_k$ , респективно и  $\mathcal{S} = const$ .

Ако је  $k = 1$  и  $\mathcal{S} = 0$  тада се директорна површ поклапа са самом равни  $D_1$ . За вредност  $\mathcal{S} > 0$  директорна површ је дата двома паралелним равнима са датом равни  $D_1$ . на удаљењу  $\mathcal{S}$  тј.  $\rho_1 = \mathcal{S}$ .

Ако се две директрисне равни секу ( $k = 2$ ) и  $\mathcal{S} > 0$  тада је директорна површ права призма са базисном основом облика правоугаоника. Случај паралелних директрисних равни доводи до тога да се директорна површ дегенерише у две равни које су паралелне са почетним равнима  $D_1$  и  $D_2$  на удаљењу  $\mathcal{S}$  тј.  $\rho_1 + \rho_2 = \mathcal{S}$ .

Нека су сада директрисне равни  $D_1, D_2, \dots, D_k$  ( $k \geq 3$ ) постављене у простору тако да се поклапају са странама призме чији је базис правилни полигон (Слика 4 - 56). За одговарајуће вредности  $\mathcal{S} > 0$ , директорна површ (4 - 67) постаје права призма са основом базиса која је облика директрисне криве дефинисане у поглављу 3.1.2 (Слика 3 - 24 до Слика 3 - 25).

**К-ДИРЕКТОРНА ПОВРШ КАСИНИЈЕВОГ ТИПА** представља ГМТ у простору чији је производ растојања до  $k$  фиксираних директрисних равни константан. Тачка  $T$  испуњава дефинициони услов за  $k$ -директорну површ Касинијевог типа:

$$(4 - 68) \quad \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_k = \mathcal{S}, \quad k \geq 1$$

где су  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  до директриса  $D_1, D_2, \dots, D_k$ , респективно и  $\mathcal{S} = const$ .

Ако је  $k = 1$  и  $\mathcal{S} = 0$  тада се ДРПКТ поклапа са самом равни  $D_1$ , док за вредност  $\mathcal{S} > 0$  ДРПКТ садржи две паралелне равни са датом равни  $D_1$ . на удаљењу  $\mathcal{S}$  тј.  $\rho_1 = \mathcal{S}$ .

Ако се две директрисне равни секу ( $k = 2$ ) и  $\mathcal{S} > 0$  тада је ДРПКТ прав цилиндар са базисном основом облика директрисне криве дефинисане у поглављу 3.1.2 (Слика 3 - 26 б). Случај паралелних директрисних равни доводи до тога да се ДРПКТ дегенерише у две равни које су паралелне са почетним равнима  $D_1$  и  $D_2$  на удаљењу  $\mathcal{S}$  тј.  $\rho_1 \cdot \rho_2 = \mathcal{S}$ .

Нека су сада директрисне равни  $D_1, D_2, \dots, D_k$  ( $k \geq 3$ ) постављене у простору тако да се поклапају са странама призме чији је базис правилни полигон (Слика 4 - 56). За одговарајуће вредности  $S > 0$ , ДРПКТ (4 - 68) постаје прав цилиндар са основом базиса која је облика директрисне криве дефинисане у поглављу 3.1.2 (Слика 3 - 27 до Слика 3 - 29).

#### 4.1.1.Г. ГЕНЕРИСАЊЕ ФОКАЛНО-ДИРЕКТОРНИХ ГЕОМЕТРИЈСКИХ ФОРМИ

Површи које су разматране у овом делу рада су настале на основу  $n$  фокуса који су поклопљени са теменима правилних полигона (Слика 3 - 16) и  $n$  директрисних равни које садрже стране полигона и ортогоналне су на раван овог полигона (Слика 3 - 22),  $n \geq 3$ . Генерисани елементи су површи са константном сумом и представљају геометријско место тачака у простору чија је сума ускалираних растојања до  $k$  фокуса и  $l$  директрисних равни константна и дефинисана је на следећи начин:

$$(4 - 69) \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i R_i + \sum_{j=1}^l \beta_j \rho_j = S, \quad k \geq 3, \quad l \geq 3, \quad S \geq 0$$

где су  $R_i$  и  $\rho_j$  Еуклидска растојања од тачке  $T(x, y, z)$  са површи до  $i$ -тог фокуса и  $j$ -те директрисне равни, респективно и  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Ф-ДРП.С1.** Прве фокално-директорне површи су постављене када је  $S = 0$  тј. разлика између суме растојања до фокуса једнака је двострукој суми растојања до директрисних равни. Вредности параметара су:  $\alpha_i = 1, \beta_j = -2, (i, j = 1..n, n = k = l)$ . Ове површи су облика:

$$(4 - 70) \quad \sum_i R_i = 2 \sum_i \rho_i.$$

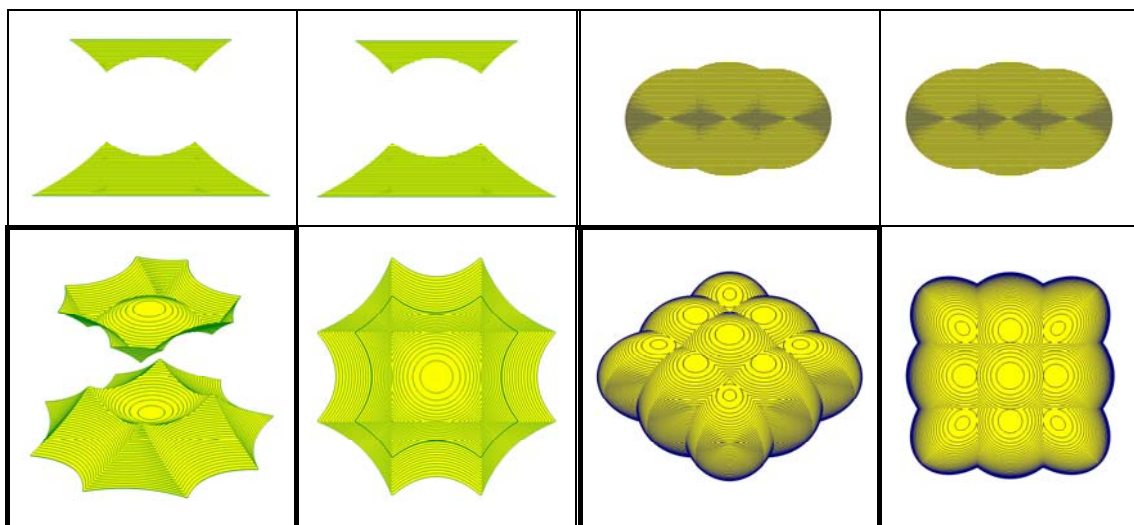
**Ф-ДРП.С2.** Друга врста фокално-директорних површи (4 - 69) генерисана је за вредности параметара  $\alpha_i = -\beta_j = 1, (i, j = 1..n, n = k = l)$  и  $S = const > 0$ .

$$(4 - 71) \quad \sum_i R_i - \sum_i \rho_i = const.$$

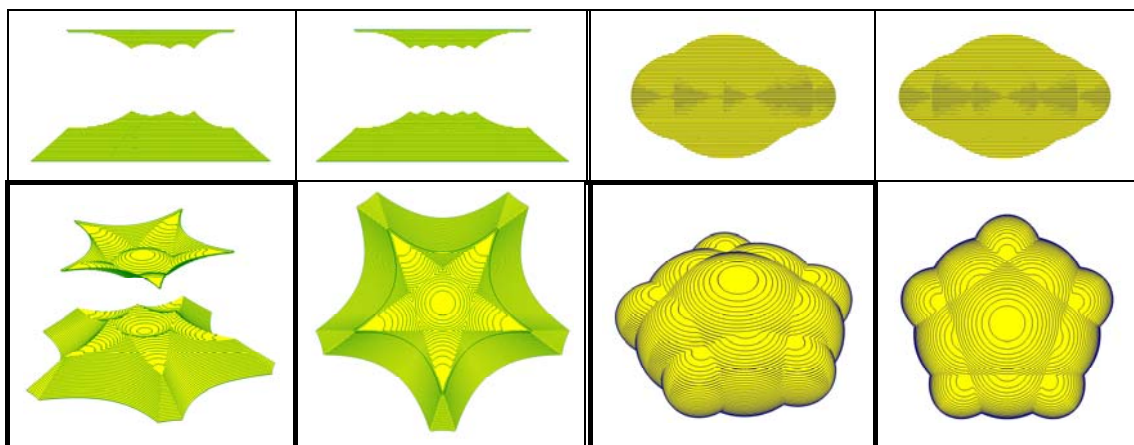
Геометријска структура површи Ф-ДРП.С1. и Ф-ДРП.С2. је иста, али са малом променом параметара варијација форме генерисаних површи је значајна. Визуелни прикази: Слика 4 - 95, Слика 4 - 96, Слика 4 - 97 представљају упоредну анализу ових површи за 4, 5, 6 фокуса и 4, 5, 6 директрисних равни, респективно.

Генерисане фокално-директрисне површи су отворене или затворене геометријске 3D форме чија се примена у архитектури разматра у поглављу 5.2. Геометријски посматрано, Ф-ДРП.С1. површи су површи хиперболичког типа и својим обликом личе на „кишобран“, док су Ф-ДРП.С2. површи су елиптичког типа и обликом подсећају на „пнеуматик“ површи. Површи Ф-ДРП.С1. и Ф-ДРП.С2. генерисане су на основу једначина датих у прилогу III-1. Моделовање површи које су у овом поглављу приказане (Слика 4 - 95 до Слика 4 - 97), извршено је помоћу софтвера VisuMath 3.0, [148]

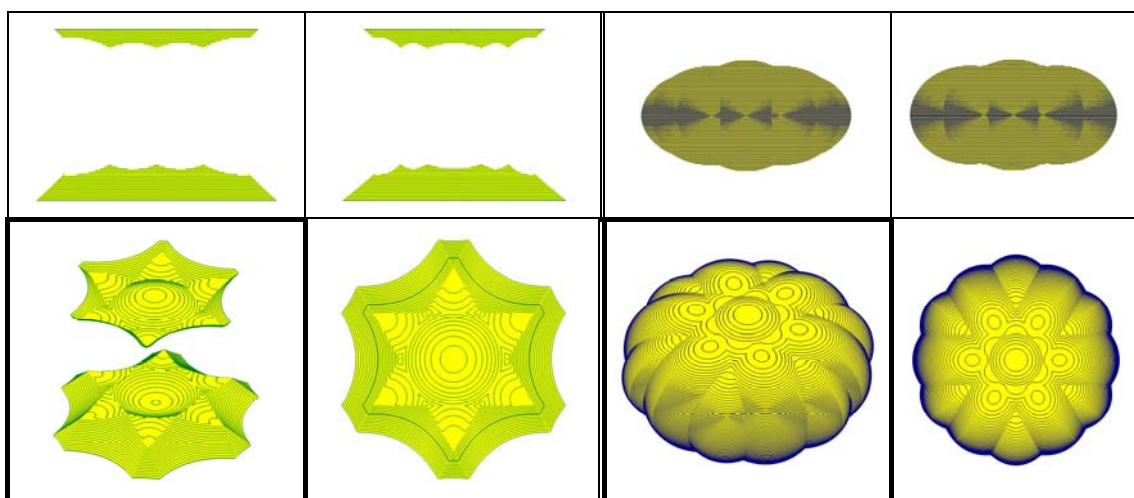




Слика 4 - 95: Ф-ДРП.С1. (лево) и Ф-ДРП.С2. (десно) за  $n = 4$



Слика 4 - 96: Ф-ДРП.С1. (лево) и Ф-ДРП.С2. (десно) за  $n = 5$



Слика 4 - 97: Ф-ДРП.С1. (лево) и Ф-ДРП.С2. (десно) за  $n = 6$

#### 4.1.2. Генерисани 3D елементи са променљивом сумом/производом растојања

**ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНА ПОВРШ СА ПРОМЕНЉИВОМ СУМОМ** представља ГМТ у простору чија је сума скалираних растојања до  $k$  фокуса и  $l$  директриса променљива и дефинисана је на следећи начин:

$$(4 - 72) \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i R_i + \sum_{j=1}^l \beta_j r_j = \mathcal{S}, \quad k \geq 3, \quad l \geq 3,$$

где су  $R_i$  и  $r_j$  Еуклидска растојања од тачке са површи до  $i$ -тог фокуса и  $j$ -те директрисе, респективно,  $\mathcal{S} = z(x, y)$  и  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Површи које су разматране у овом делу рада су настале на основу  $n$  фокуса који су у првој пројекцији поклопљени са теменима правилних полигона (Слика 3 - 16) и  $n$  директриса који су у првој пројекцији поклопљени са странама ових полигона (Слика 3 - 22).

**Ф-ДП.С1.** Прве фокално-директрисне површи су постављене тако да променљива сума  $\mathcal{S} = z(x, y)$  буде разлика између суме растојања до  $n$  директриса и суме растојања до  $n$  фокуса и представља висину сваке тачке  $T(x, y, z)$  површи (4 - 72). Вредности параметара су:  $\alpha_i = \beta_j = \pm 1, \forall i, j$ .

**Ф-ДП.С2.** Друга врста фокално-директрисних површи (4 - 72) је генерисана за вредности параметара  $\alpha_i, \beta_j$  ( $i, j = 1..n$ ) тако да важи Ердеш-Морделова неједнакост за конвексне многоуглове [13], [64]:

$$(4 - 73) \quad \cos \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n R_i \geq \sum_{j=1}^n r_j, \quad n \geq 3.$$

Променљива сума  $\mathcal{S} = z(x, y)$  је сада разлика између скалиране суме растојања до  $n$  фокуса и скалиране суме растојања до  $n$  директриса и представља висину сваке тачке  $T(x, y, z)$  површи (4 - 72). Вредности параметара за овакво генерисање површи је:  $\alpha_i = \pm \cos \frac{\pi}{n}, \beta_j = \pm 1, \forall i, j$ .

**ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНА ПОВРШ СА ПРОМЕНЉИВИМ ПРОИЗВОДОМ** представља ГМТ у простору чија је сума производа растојања до  $k$  фокуса и  $l$  директриса променљива и дефинисана је на следећи начин:

$$(4 - 74) \quad \prod_{i=1}^k \alpha_i R_i + \prod_{j=1}^l \beta_j r_j = \mathcal{S}, \quad k \geq 3, \quad l \geq 3,$$

где су  $R_i$  и  $r_j$  Еуклидска растојања од тачке са површи до  $i$ -тог фокуса и  $j$ -те директрисе, респективно,  $\mathcal{S} = z(x, y)$  и  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

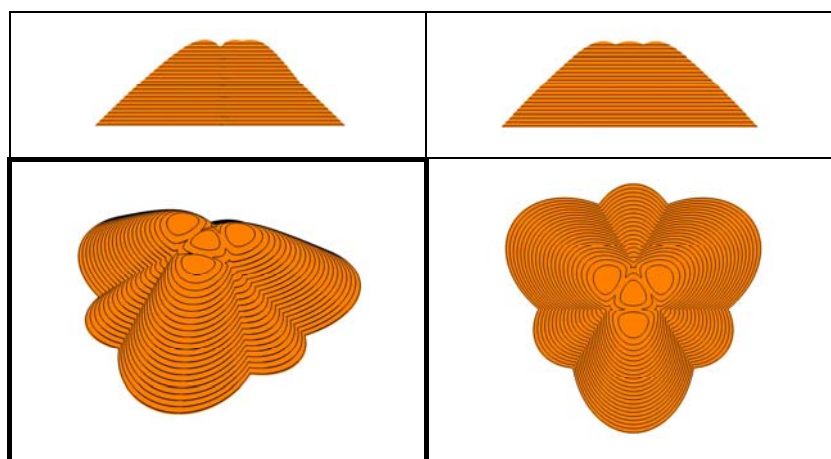
**Ф-ДП.П1.** Прва врста фокално-директрисних површи (4 - 74) су постављене тако да  $\mathcal{S} = z(x, y)$  буде разлика између производа растојања до  $n$  директриса и производа растојања до  $n$  фокуса и представља висину сваке тачке  $T(x, y, z)$  ове површи и тада су вредности параметара:  $\alpha_i = \beta_j = \pm 1, \forall i, j$ .

**Ф-ДП.П2.** Друга врста површи је генерисана за вредности параметара  $\alpha_i, \beta_j$  ( $i, j = 1..n$ ) тако да важи геометријска неједнакост Фејеш-Тота за конвексне полигоне [64]:

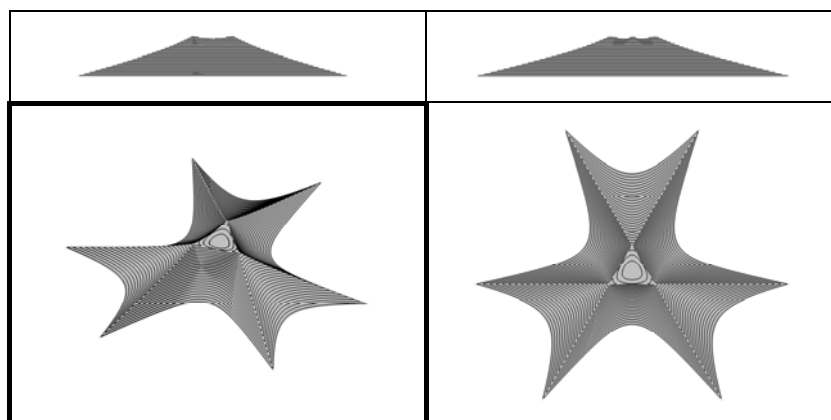
$$(4 - 75) \quad \prod_{i=1}^n R_i \geq \left(\sec \frac{\pi}{n}\right)^n \prod_{j=1}^n r_j, \quad n \geq 3.$$

Генерисана фокално-директрисна површ  $S = z(x, y)$  је таква да разлика између производа скалираног растојања до  $n$  фокуса и скалираног производа растојања до  $n$  директриса представља висину сваке тачке  $T(x, y, z)$  површи (4 - 74). Вредности параметара за ову површ се могу одредити на основу неједнакости (4 - 75):  $\alpha_i = \pm 1, \beta_j = \pm \left(\sec \frac{\pi}{n}\right)^n, \forall i, j$ .

Ако је  $k = 3, l = 3$  и  $\alpha_i = -\beta_j = -1, \forall i, j$  тада генерисана Ф-ДП.С1 је приказана на следећој слици у све три ортогоналне пројекције и аксонометрији (Слика 4 - 98), док за  $\alpha_i = 1/2, \beta_j = -1, (\forall i, j)$  тј. за вредности коефицијената Ердеш-Морделове неједнакости за троугао, површ Ф-ДП.С2 је хиперболичког типа (Слика 4 - 99).



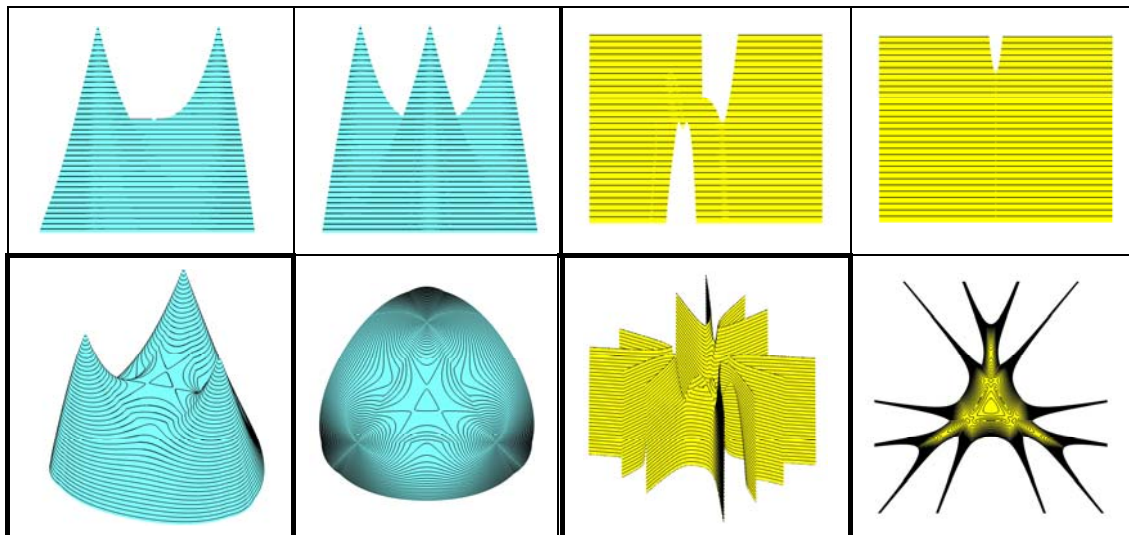
Слика 4 - 98: Ф-ДП.С1. за  $k = l = 3$



Слика 4 - 99: Ф-ДП.С2. за  $k = l = 3$

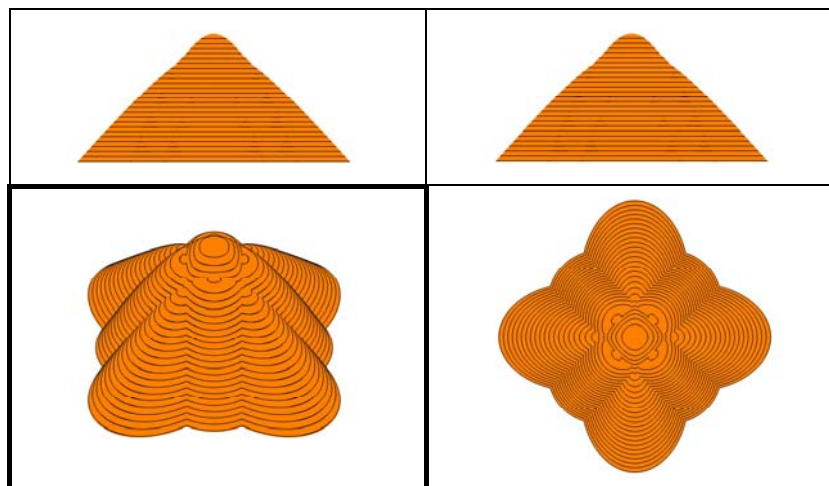


Слика 4 - 100 (лево) представља визуелни приказ Ф-ДП.П1 када су вредности коефицијената  $\alpha_i = -\beta_j = -1, (\forall i, j)$ ; док је Ф-ДП.П2 (Слика 4 - 100 десно) представљена са вредностима коефицијената Чајлдове неједнакости за троугао:  $\alpha_i = -1, \beta_j = 2^3, (\forall i, j)$ .



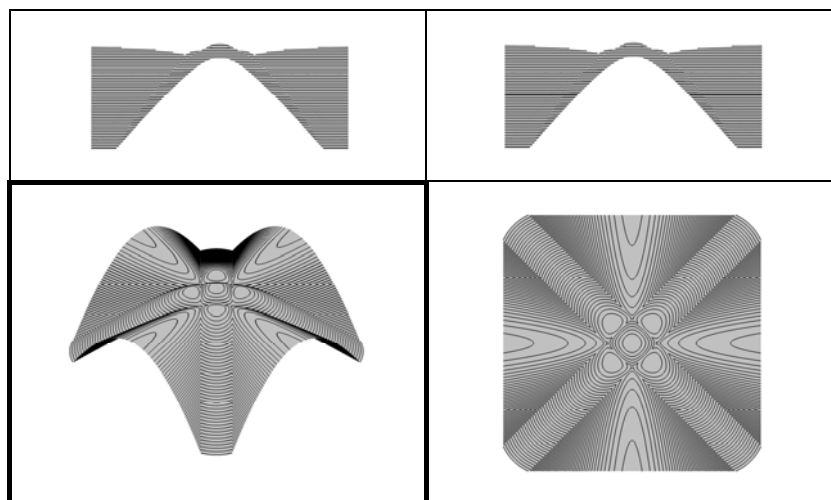
Слика 4 - 100: Ф-ДП.П1. (лево) и Ф-ДП.П2. (десно) за  $k = l = 3$

Следеће површи су генерисане за  $k = 4$  и  $l = 4$ . Нека су фокуси темена квадрата док су директрисе његове стране. За вредности  $\alpha_i = -\beta_j = -1, (\forall i, j)$  генерисана Ф-ДП.С1 је приказана Слика 4 - 101.

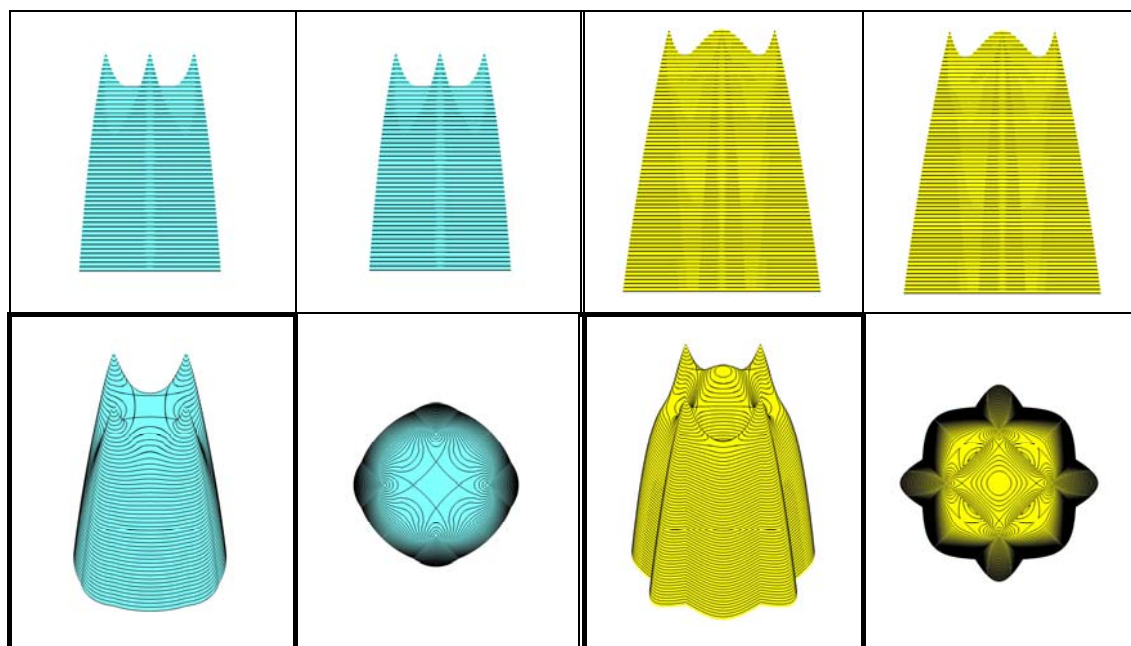


Слика 4 - 101: Ф-ДП.С1. за  $k = l = 4$

Вредности  $\alpha_i = -\sqrt{2}/2, \beta_j = 1, (\forall i, j)$  дају површ Ф-ДП.С2 Ердеш-Морделовог типа (Слика 4 - 102). Фокално-директрисне површи са променљивим производом  $\mathcal{S} = z(x, y)$  (Слика 4 - 103, лево и десно) су површи које су генерисане за вредности  $\alpha_i = -\beta_j = -1$  односно за  $\alpha_i = -1, \beta_j = (\sqrt{2})^4, (i, j = 1..4)$ , респективно.

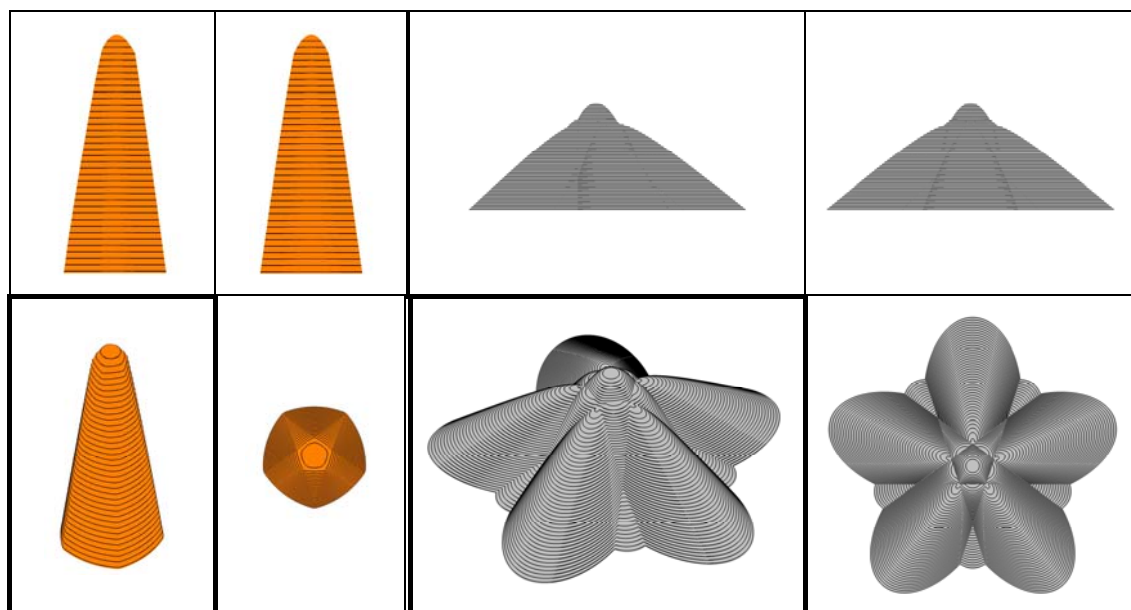


Слика 4 - 102: Ф-ДП.С2. за  $k = l = 4$

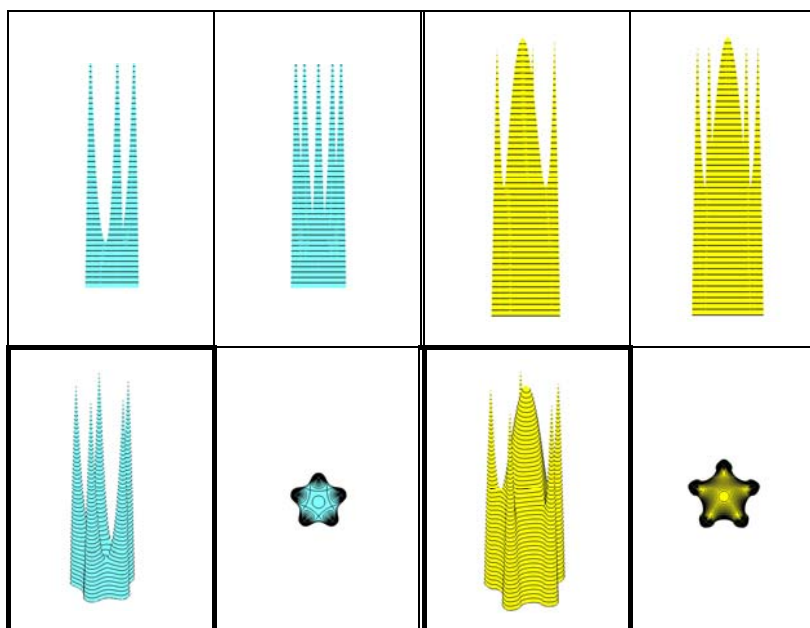


Слика 4 - 103: Ф-Д.П1. (лево) и Ф-Д.П2. (десно) за  $k = l = 4$

Ако је  $k = 5$ ,  $l = 5$  и нека су фокуси темена правилног петоугла, директрисе су његове стране. За вредности  $\alpha_i = \beta_j = -1, (\forall i, j)$  генерисана Ф-ДП.С1 је приказана на Слика 4 - 104 (лево); док за  $\alpha_i = 1, \beta_j = -(1 + \sqrt{5})/4, (\forall i, j)$  тј. за вредности коефицијената Ердеш-Морделове неједнакости за конвексни петоугао је површ Ф-ДП.С2 (Слика 4 - 104 десно). Слика 4 - 105 представља Ф-ДП.П1 и Ф-ДП.П2 за правилни петоугао када су вредности  $\alpha_i = \beta_j = -1$  (лево), односно  $\alpha_i = -1, \beta_j = (4/(1 + \sqrt{5}))^5, (\forall i, j)$ , (Слика 4 - 105, десно).

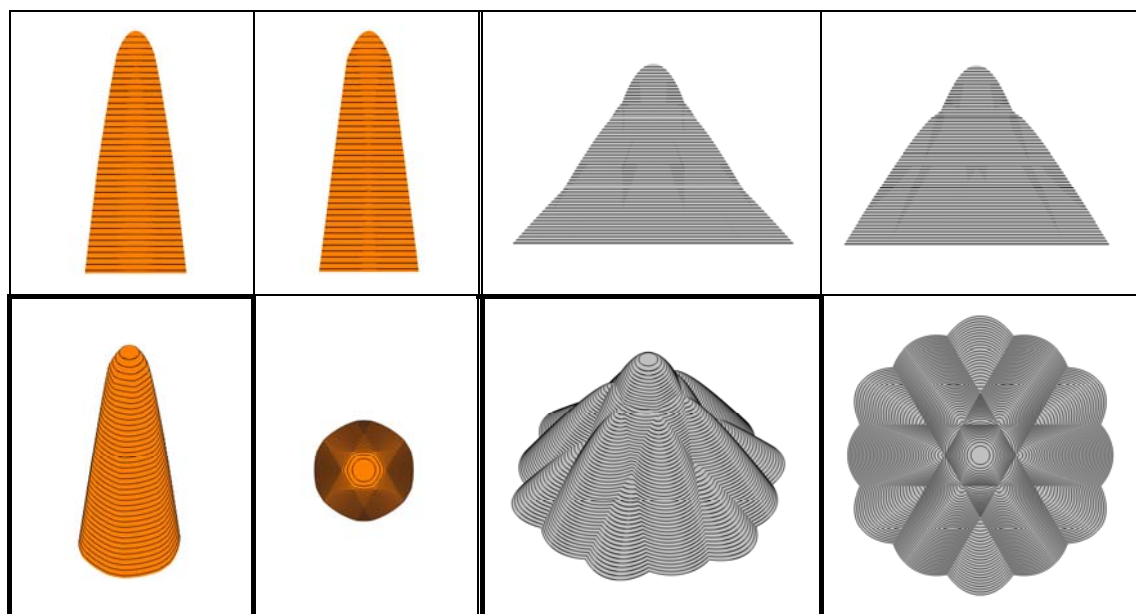


Слика 4 - 104: Ф-ДП.С1. (лево) и Ф-ДП.С2. (десно) за  $k = l = 5$

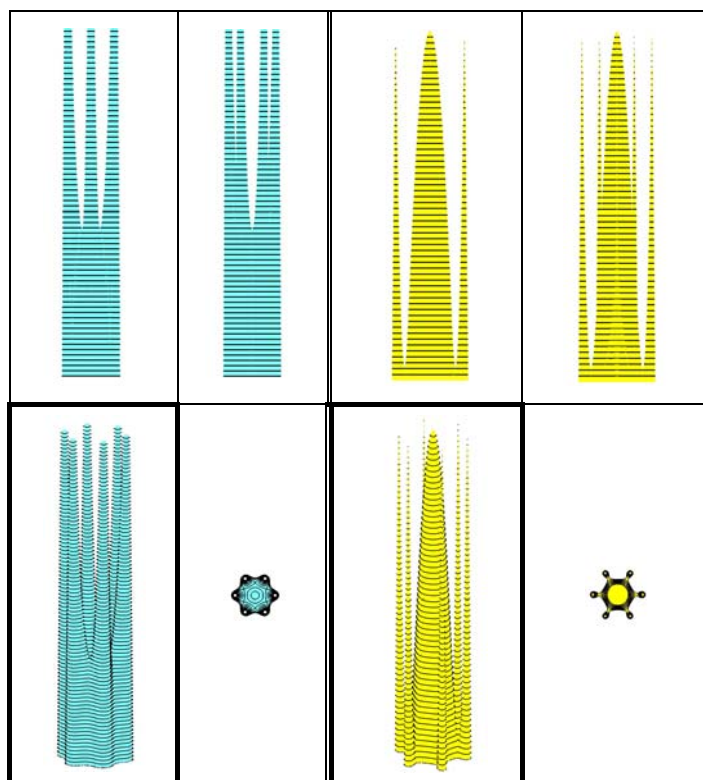


Слика 4 - 105: Ф-ДП.П1. (лево) и Ф-ДП.П2. (десно) за  $k = l = 5$

Ако је  $k = 6$ ,  $l = 6$  и нека су фокуси темена правилног шестоугла док су директрисе његове стране. За вредности  $\alpha_i = -\beta_j = -1, (\forall i, j)$  генерисана Ф-ДП.С1 је приказана на Слика 4 - 106 (лево), док за  $\alpha_i = -\sqrt{3}/2, \beta_j = 1, (\forall i, j)$  тј. за вредности коефицијената Ердеш-Морделове неједнакости за конвексни шестоугао је површ Ф-ДП.С2 (Слика 4 - 106 десно). Слика 4 - 107 представља Ф-ДП.П1 и Ф-ДП.П2 за правилни шестоугао када су вредности  $\alpha_i = \beta_j = -1$  (лево), односно  $\alpha_i = -1, \beta_j = (2/\sqrt{3})^6, (\forall i, j)$ , (Слика 4 - 107, десно).



Слика 4 - 106: Ф-ДП.С1. (лево) и Ф-ДП.С2. (десно) за  $k = l = 6$



Слика 4 - 107: Ф-ДП.П1. (лево) и Ф-ДП.П2. (десно) за  $k = l = 6$

Све фокално-директрисне површи са променљивом сумом/производом растојања нису до сада разматране. Оне су алгебарске површи виших редова и генерисане су на основу једначина датих у прилогу III-2. Моделовање површи које су у овом поглављу приказане (Слика 4 - 98 до Слика 4 - 107) извршено је помоћу софтвера VisuMath 3.0, [148].

## 4.2. Геометријска својства фокално-директрисно генерисаних елемената, класификација и ред површи

Веберове фокалне, директрисне и директорне површи са јединичним коефицијентима по својој генези су повезане са правилом аритметичке или геометријске средине. С обзиром да су неке од Веберових површи из поглавља 4.1. генерисане помоћу правилних полигона, онда оне имају исто својство геометријских фигура који их генеришу, а то је симетричност. Сваки правилни полигон са  $k$  страна има  $2k$  разлитих симетрија:  $k$  рефлексција и  $k$  ротација. Такође, Веберове површи које су генерисане помоћу правилних полиедара имају иста геометријска својства као и њихове полазне форме.

Површ је геометријска (закономерна) ако је положај сваке њене тачке одређен извесним законом (правилом), било у облику једначине између њених координата у извесном координатном систему, или у облику начина како се одређена површ изводи, [72]. На основу ове дефиниције све Веберове фокалне, директрисне, директорне, фокално-директрисне, фокално-директорне површи, као и исте површи Касинијевог типа припадају групи геометријски (закономерних) површи. Због једноставности конструисања и одређивања основних параметара, закономерне површи су најчешће примењиване у архитектонској пракси.

Избор различитих фиксираних елемената (фокуса, директриса и директрисних равни) које генеришу Веберове површи омогућује класификацију ових површи на следећи начин: по броју фиксираних тачака (фокуса), по броју фиксираних правих (директриса) и/или броју фиксираних равни (директрисних равни). Такође за сваку површ може се утврдити њен ред. Ред површи је једнак највећем степену полинома. Геометријски посматрано, то је број продора праве кроз површ.

У претходном поглављу 4 - 1, дефинисане су Веберове површи другог реда. Ове површи се могу класификовати на основу елемената помоћу којих настају. Генерисана Веберова површ са највише два геометријска елемента (фокуса, директриса и/или директрисних равни):

$$\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \gamma_1 \rho_1 + \gamma_2 \rho_2 = \mathcal{S},$$

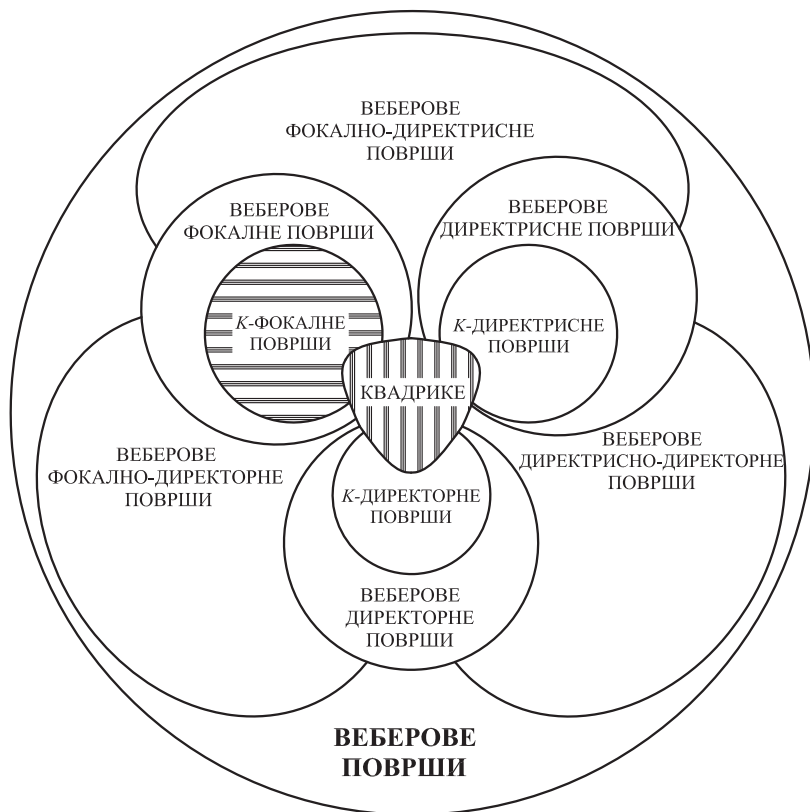
је алгебарска површ другог реда (4 - 2). Табеларним приказом (Табела 1) дата је јасна веза између Веберових коефицијената  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ , затим вредности константне суме  $\mathcal{S}$ , али и повезаност почетна два геометријска елемента на основу којих се генерише Веберова површ другог реда. Оваква класификација до сада познатих Веберових површи другог реда је добра и употребљива као полазна основа, како би се увидео значај за разматрање и планирање сложенијих форми архитектонских објеката, а које настају од већег броја полазних геометријских елемената. Познавање основних карактеристика Веберових површи од круцијалног значаја је за њихову примену у техничкој пракси.

Табела 4 - 1: Класификација Веберових површи другог реда

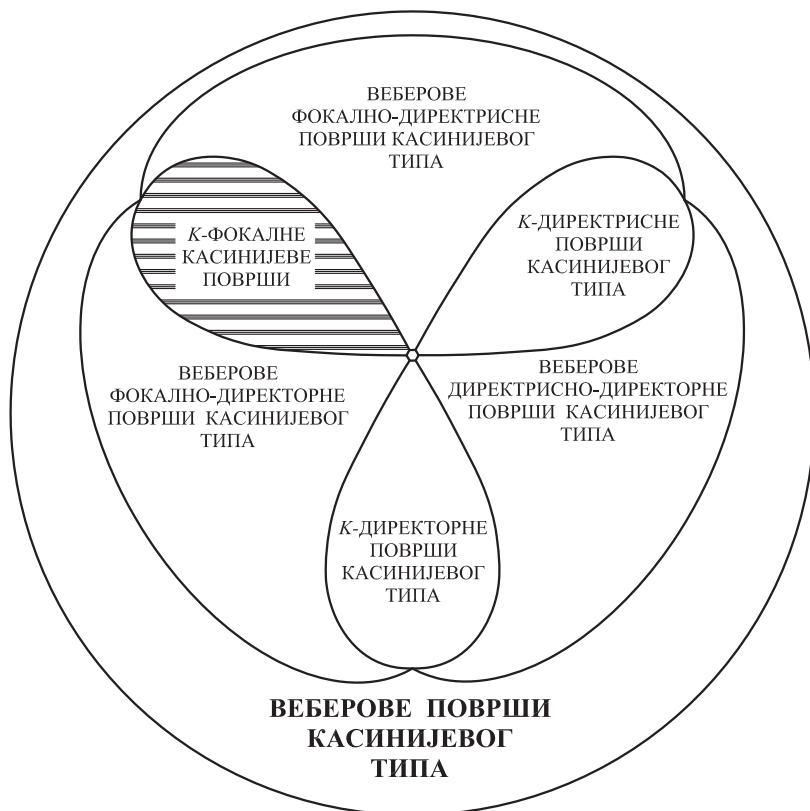
$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\mathcal{S}$	Веберова површ (4 - 1)	Ф-Д релација	Површ другог реда
1	1	0	0	0	0	$>0$	$R_1 + R_2 = \mathcal{S}$	$F_1 = F_2$	сфера
								$F_1 \neq F_2$	елипсоид
1	-1	0	0	0	0	$>0$	$ R_1 + R_2  = \mathcal{S}$	$F_1 \neq F_2$	двограни хиперboloид
0	0	1	1	0	0	$>0$	$r_1 + r_2 = \mathcal{S}$	$d_1 \parallel d_2$	елиптички цилиндар
								$d_1 = d_2$	кружни цил.
0	0	1	-1	0	0	$>0$	$ r_1 - r_2  = \mathcal{S}$	$d_1 \parallel d_2$	хиперболички цилиндар
0	0	1	-1	0	0	$=0$	$r_1 - r_2 = 0$	$d_1 \nparallel d_2$	хиперболички параболоид
								$d_1 \cap d_2$	деген.површ
1	0	-1	0	0	0	$=0$	$R_1 - r_1 = 0$	$F_1 \notin d_1$	параболички цилиндар
1	0	$-e$	0	0	0	$=0$	$R_1 - e \cdot r_1 = 0$	$0 < e < 1$	елиптички цилиндар
								$e > 1$	хиперболички цилиндар
1	0	$-k$	0	0	0	$=0$	$R_1 - k \cdot r_1 = 0$ $k > 1$	$F_1 \notin d_1$	једнограни хиперboloид
								$F_1 \in d_1$	конус
1	0	0	0	-1	0	$=0$	$R_1 - \rho_1 = 0$	$F_1 \notin D_1$	параболоид
1	0	0	0	$-e$	0	$=0$	$R_1 - e \cdot \rho_1 = 0$	$0 < e < 1$	елипсоид
								$e > 1$	двограни хиперboloид
1	0	0	0	$-k$	0	$=0$	$R_1 - k \cdot \rho_1 = 0$ $k > 1$	$F_1 \notin D_1$	двограни хиперboloид
								$F_1 \in D_1$	конус
0	0	1	0	$-e$	0	$=0$	$r_1 - e \cdot \rho_1 = 0$	$0 < e < 1$	елиптички цилиндар
								$e = 1$	параболички цилиндар
								$e > 1$	хиперболички цилиндар

Међу Веберовим површима постоји подела на неколико група површи, у зависности од њихових особина. Следећи дијаграми нам дају графички приказ ових подела у зависности од тога да ли се разматрају Веберове фокално-директрисно генерисане површи (Слика 4 - 108) или Веберове фокално-директрисно генерисане површи Касинијевог типа (Слика 4 - 109).





Слика 4 - 108: Дијаграм подела Веберових површи



Слика 4 - 109: Дијаграм подела Веберових површи Касинијевог типа

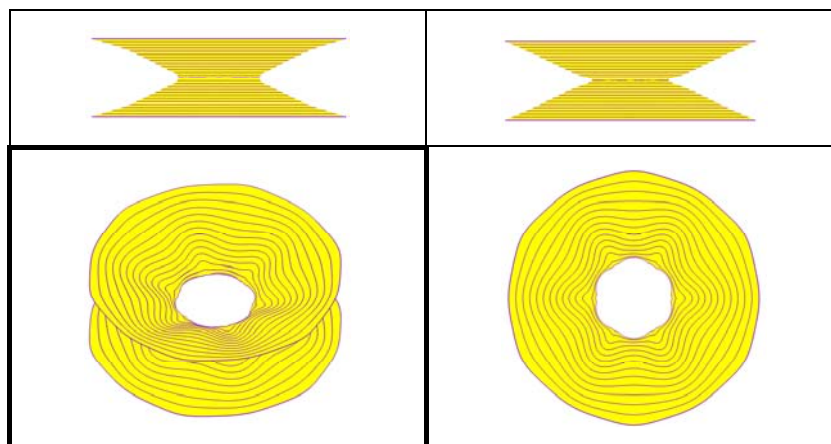
### 4.3. Варијација форме фокално-директрисно генерисаних 3D елемената у зависности од полазних параметара

Веберови фокално-директрисно генерисани 3D елементи као геометријске површи са прецизним дефиницијама и алгебарским једначинама (4 - 56), (4 - 57), (4 - 60) и (4 - 61) припадају великој групи закономерних површи са разноврсним облицима (Слика 4 - 10) – (Слика 4 - 107). Различити распоред позиција геометријских елемената у простору које генеришу ове површи је тај који омогућава да се добије широка лепеза једноставних или сложених, атрактивних просторних структура. Такође, промена вредности константе  $\mathcal{S}$ , једног или више Веберових коефицијената проширује ову групу површи. Добијене структуре форме могу се користити самостално или да се њихови сегменти користе као обрасци за обликовање архитектонско-урбанистичког простора.

Варијација форме Ф-ДП са 6 фокуса и 6 директрисе који се у простору поклапају са теменима, односно странама правилног шестоугла и када су Веберови коефицијенти унапред задати, приказана је на следећим сликама (Слика 4 - 110) – (Слика 4 - 113). Веберова Ф-ДП за  $k = l = 6$  са константном сумом растојања и са једначином  $\sum_{i=1}^k \alpha_i R_i + \sum_{j=1}^l \beta_j r_j = \mathcal{S}$  где је  $\mathcal{S} = 0$  и  $\alpha_i = 1, i = 1, \dots, 6, \beta_1 = \dots = \beta_6$   
 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^k R_i + \beta \sum_{j=1}^l r_j = 0$  када су различите вредности Веберовог коефицијента

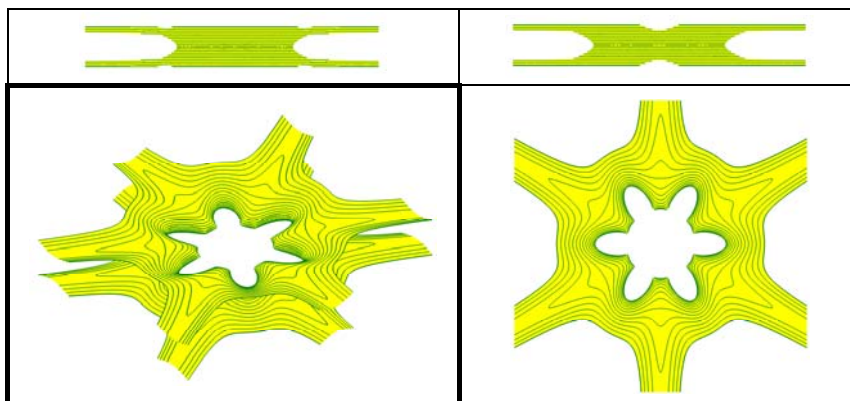
$$\beta = \begin{cases} -1.42, \\ -1.5 \\ -1.55 \\ -1.6 \end{cases} \text{ даје добар пример да се сагледа колико се мења форма саме површи са}$$

променом само једног параметра. Другим речима, ова површ може да се дефинише на следећи начин: сума растојања до фокуса једнака је скалираној суми растојања до директриса ( $\sum R_i = \beta \sum r_i$ ), фактор скалирања је дат вредностима Веберовог коефицијента  $\beta$ . Веберова површ која по облику личи на једнограни хиперboloид добијена је за вредност коефицијента  $\beta = 1.42$  (Слика 4 - 110), минимално повећање овог параметра доводи до промене форме где се унутрашње грло ове површи проширује и постаје флоралног облика (цвет са шест латица, Слика 4 - 111).



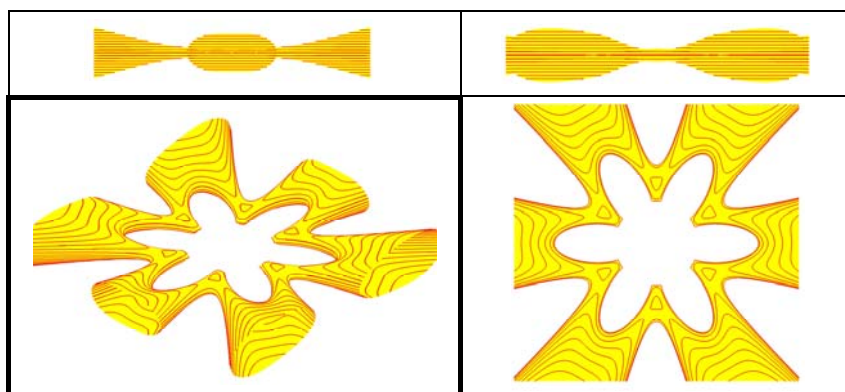
Слика 4 - 110: Ф-ДП за  $k = l = 6$  и  $\beta = 1.42$



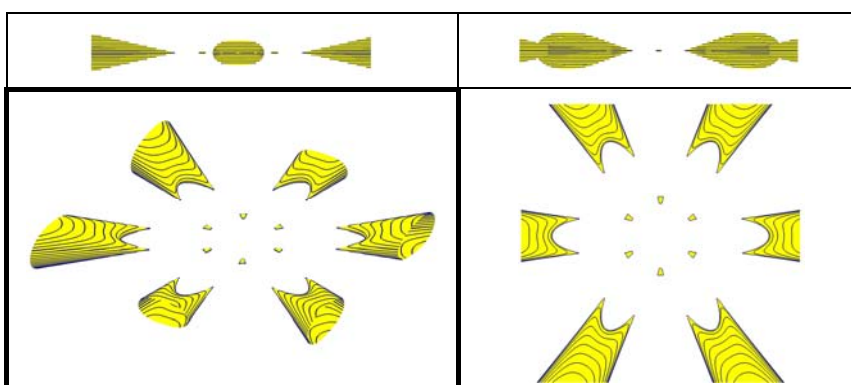


Слика 4 - 111: Ф-ДП за  $k = l = 6$  и  $\beta = 1.5$

Ново увећање за 0.05, затвара површ која је и даље из једног дела (Слика 4 - 112), док је следеће увећање дели на већи број једнаких сегмената (Слика 4 - 113).

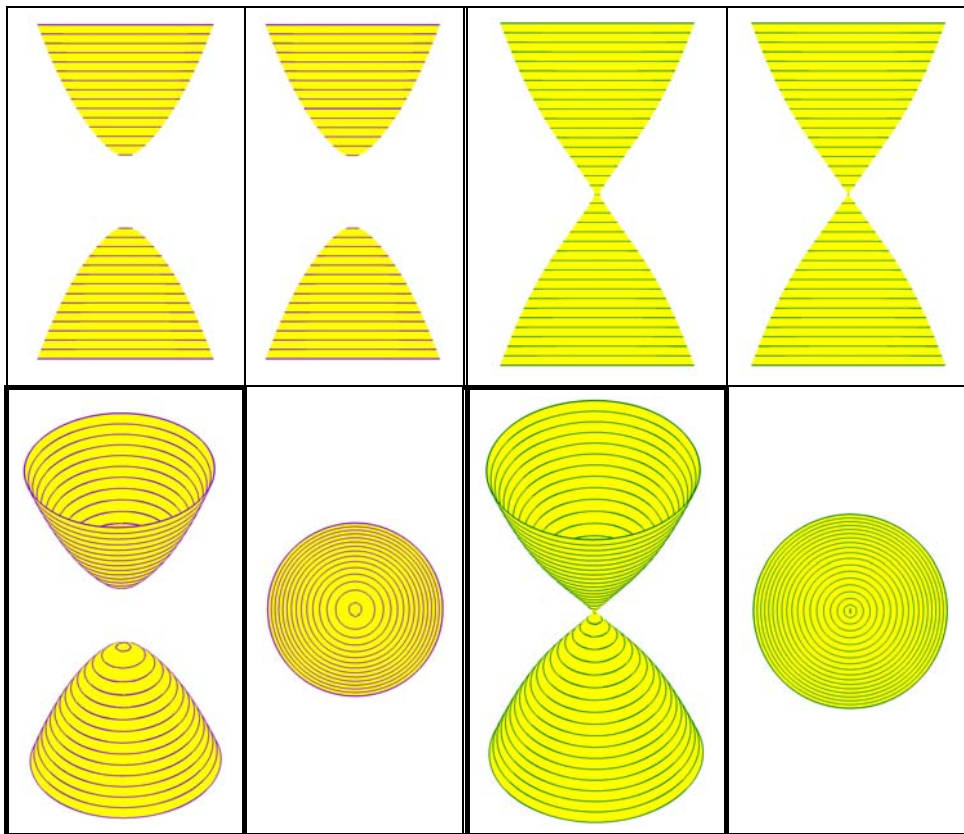


Слика 4 - 112: Ф-ДП за  $k = l = 6$  и  $\beta = 1.55$

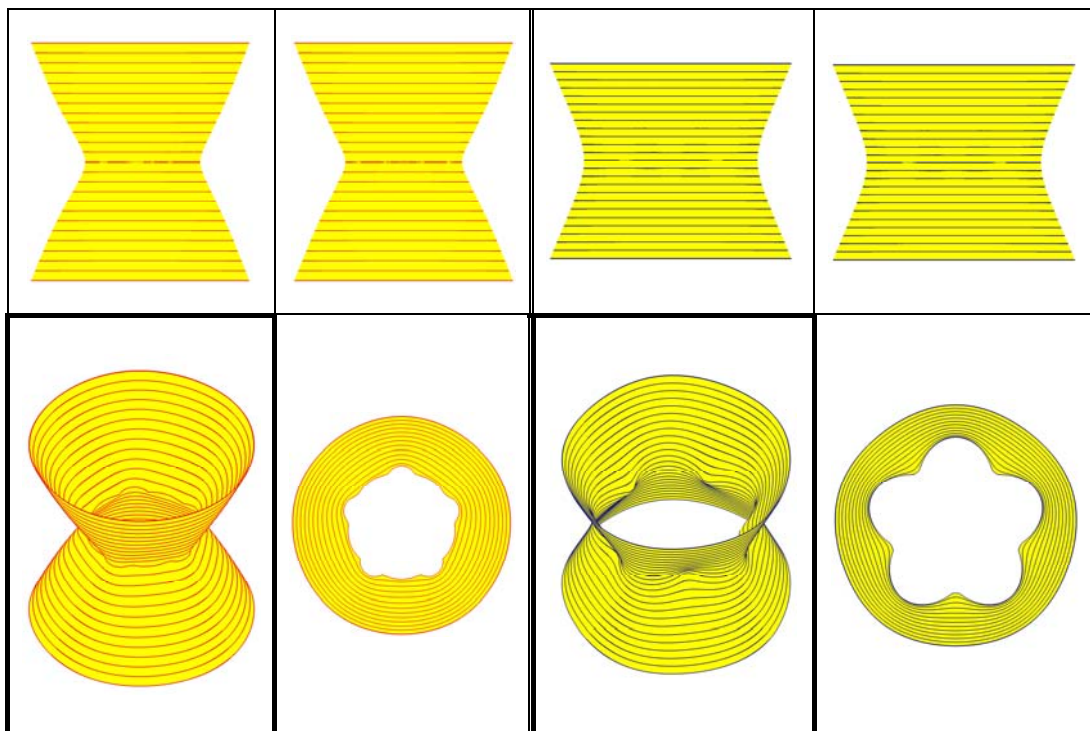


Слика 4 - 113: Ф-ДП за  $k = l = 6$  и  $\beta = 1.6$

Варијација форме Ф-ДП са константном сумом која је задата са 5 фокуса и 5 директрисе који се у простору поклапају са теменима, односно странама правилног петоугла приказана је на следећим сликама (Слика 4 - 114) – (Слика 4 - 115). Површи које настају приликом промене вредности константне суме имају такав облик да личе на двограни хиперболоид, конусну површ или једнограни хиперболоид.

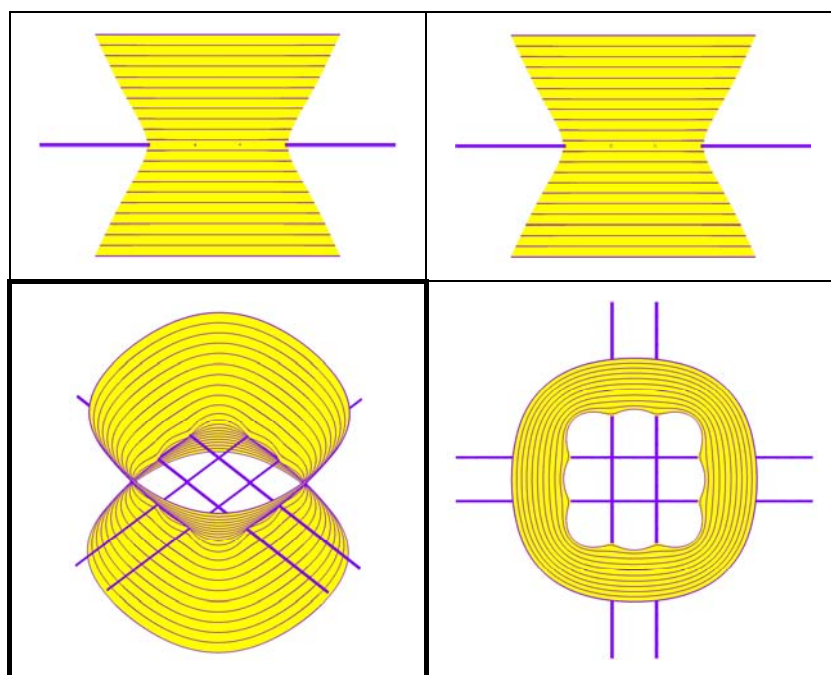


Слика 4 - 114: Ф-ДП. за  $k = l = 5$ ,  $\mathcal{S} = 1.5$  (лево) и  $\mathcal{S} = 1.62$  (десно)

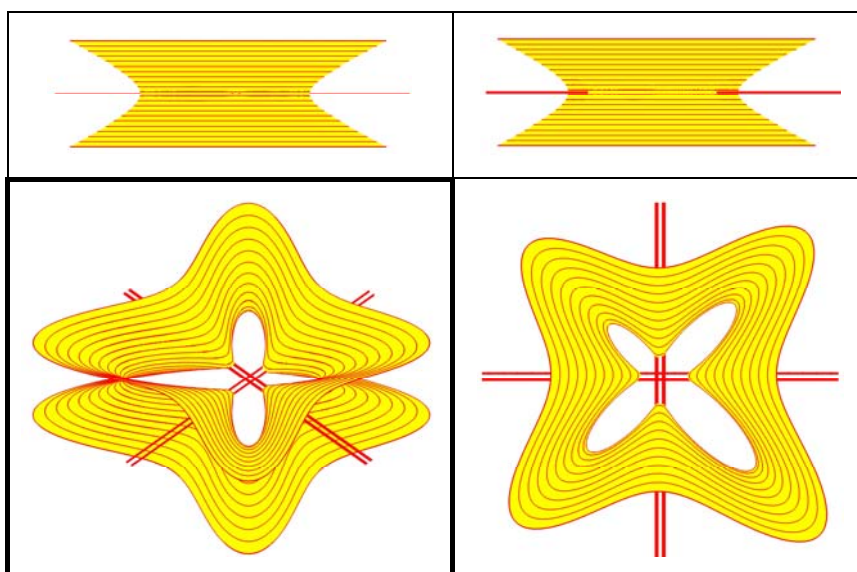


Слика 4 - 115: Ф-ДП. за  $k = l = 5$ ,  $\mathcal{S} = 4.5$  (лево) и  $\mathcal{S} = 8.5$  (десно)

Следећи пример варијације форме Ф-ДП је дат тако да је прва површ са константном сумом растојања  $S = 5$  генерисана помоћу 4 фокуса и 4 директрисе. Када се распоред фокуса и директриса у простору поклапа се са теменама, односно странама квадрата (Слика 4 - 116), тада је облик Ф-ДП сличан једнограном хиперboloиду. Са умањењем јеног фокуса ова површ има делимично измењен облик и постаје витопернија у односу на претходну (Слика 4 - 117).

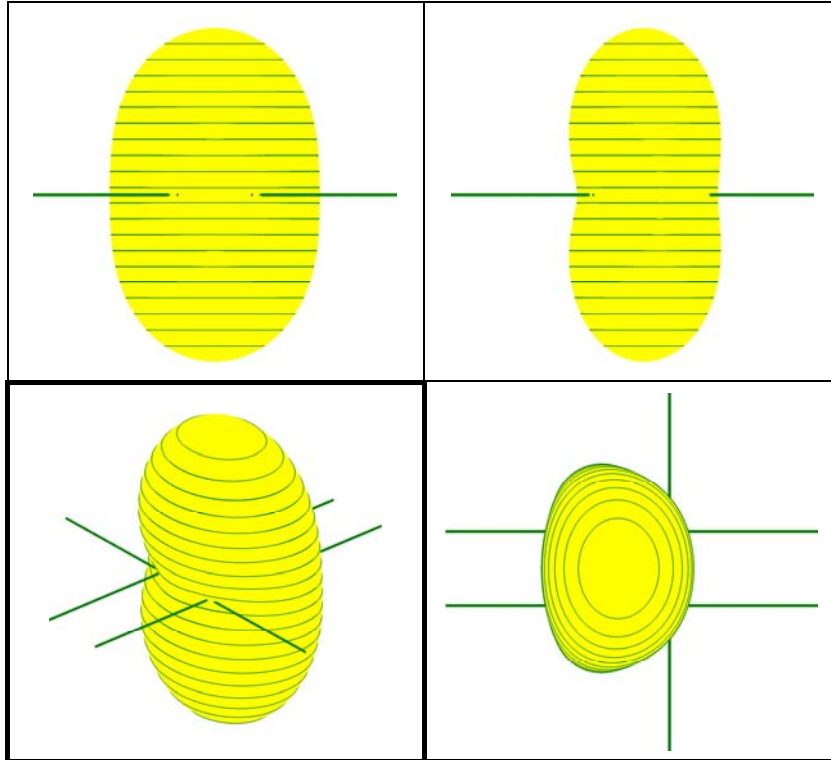


Слика 4 - 116: Ф-ДП за  $k = l = 4$  и  $S = 5$



Слика 4 - 117: Ф-ДП за  $k = 3$ ,  $l = 4$  и  $S = 5$

Велика промена облика генерисане површи са константном сумом растојања  $\mathcal{S} = 5$  настаје, када се задржи број фокуса (4), а умањи број директриса (3). Ф-ДП која настаје овом генезом је облика који подсећа на пасуљ (Слика 4 - 118) и за разлику од претходних површи затвореног је типа.



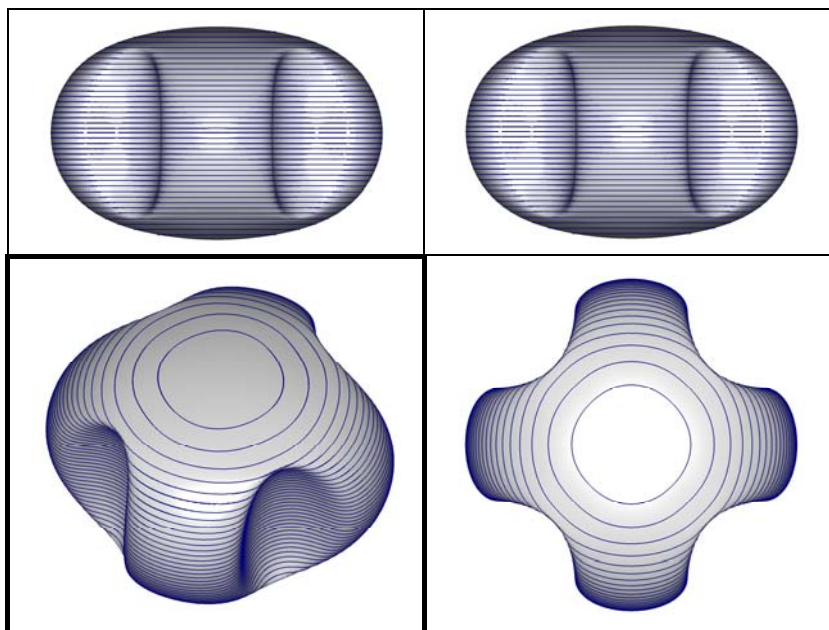
Слика 4 - 118: Ф-ДП за  $k = 4$ ,  $l = 3$  и  $\mathcal{S} = 5$

Наредна разматрања се односе на генерисане површи Касинијевог типа са константним производом растојања које су задате једначином:  $\prod_{i=1}^k \alpha_i R_i + \prod_{j=1}^l \beta_j r_j = \mathcal{S}$  и када су вредности  $\mathcal{S} = 0$ ,  $\alpha_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, 8$ ,  $\beta_1 = \dots = \beta_4$   $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^k R_i + \beta \sum_{j=1}^l r_j = 0$ . Нека су фокуси поклопљени са теменима коцке и нека

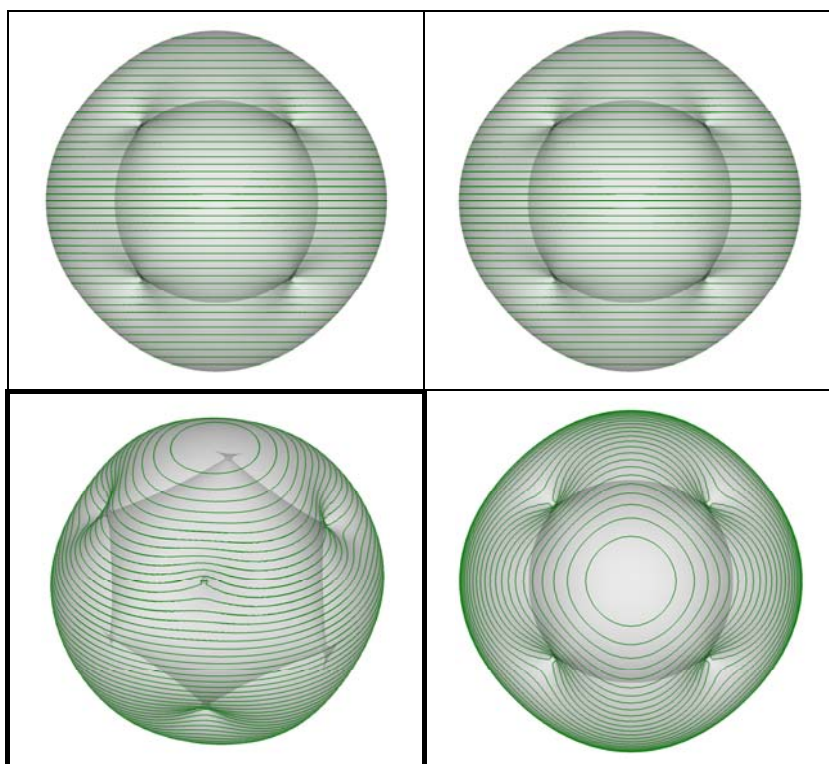
су дате различите вредности Веберовог коефицијента  $\beta = \begin{cases} -50, \\ -175 \\ -100 \\ -175 \\ -40 \end{cases}$ .

Приказане површи (Слика 4 - 119) - (Слика 4 - 123) имају различито постављене директрисе у простору. Код прве површи позиције директриса у простору су такве да се поклапају са једним системом ивице коцке. Површ која је настала на овај начин са 8 фокуса и 4 директрисе је затвореног типа (Слика 4 - 119). Нова површ, такође затвореног типа али са још једном унутрашњом, настаје за случај када су директрисе поклопљене са четири просторне дијагонале коцке (Слика 4 - 120). Нека су сада директрисе 4 мимоилазне праве које се поклапају са дијагоналама страница коцке, тада фокално-директрисна површ Касинијевог типа (Слика 4 - 121) има атрактивнији изглед него претходна два генерисана 3D елемента.



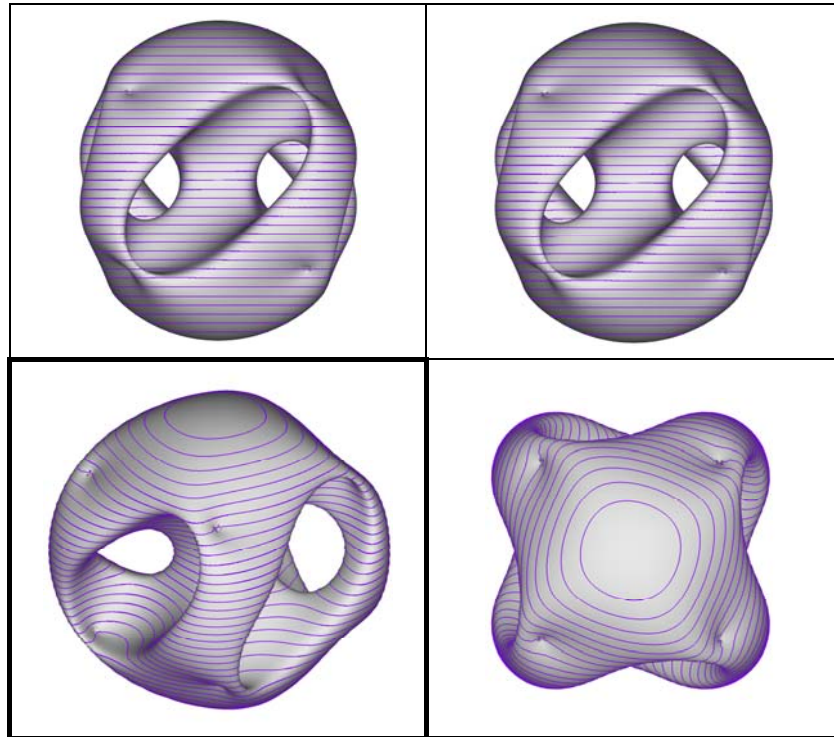


Слика 4 - 119: Ф-ДПКТ за  $k = 8$ ,  $l = 4$  и када је  $\beta = 50$

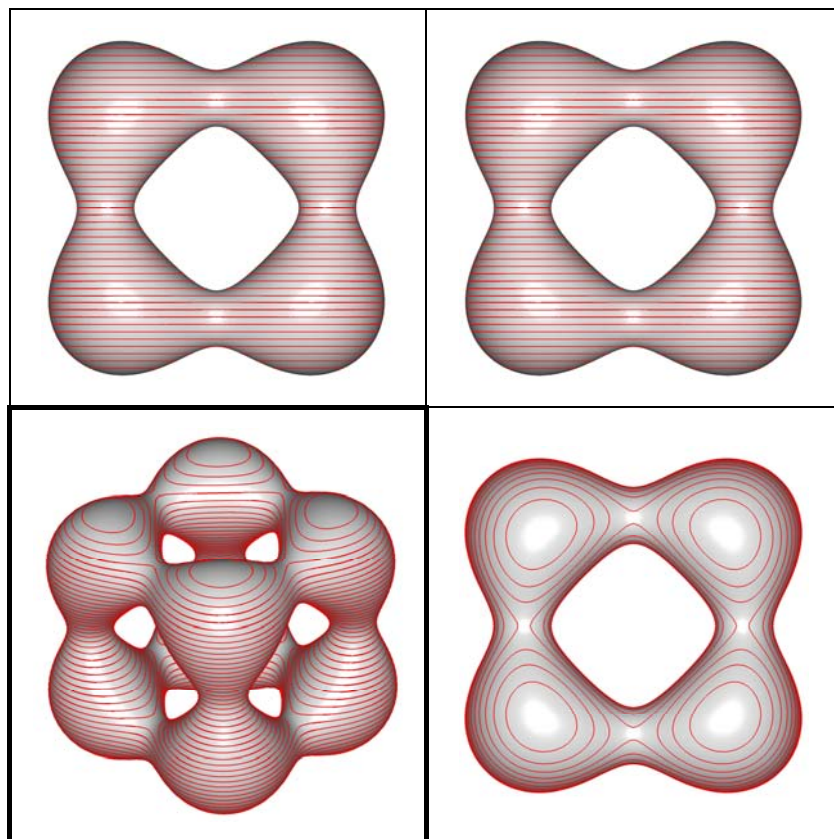


Слика 4 - 120: Ф-ДПКТ за  $k = 8$ ,  $l = 4$  и када је  $\beta = 175$

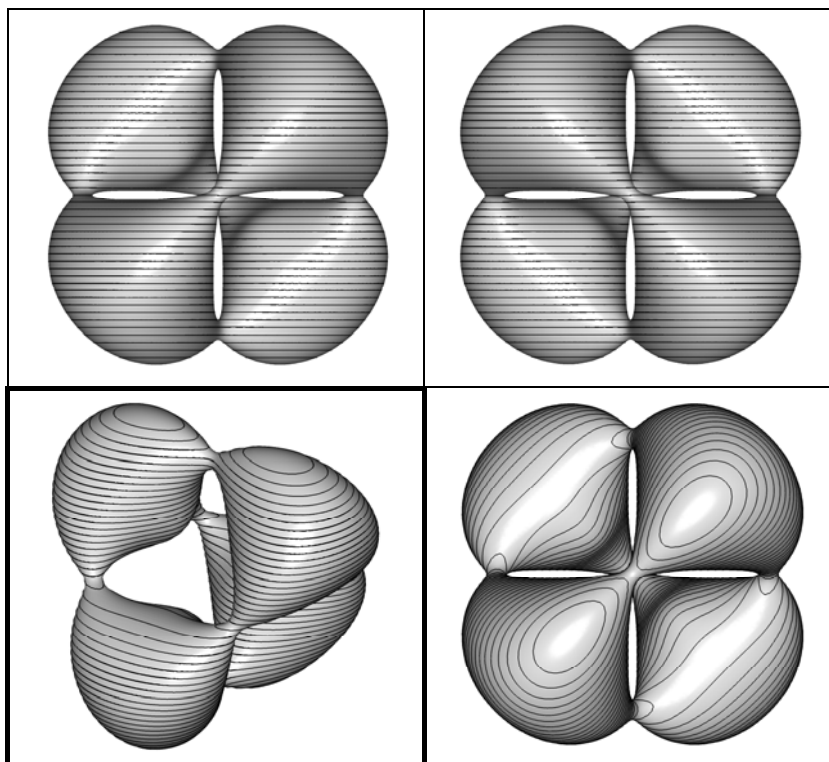
Промена облика генерисане површи настаје и када се за директрисе изаберу 3 осе симетрије коцке чија су темена фокусне тачке (Слика 4 - 122). Још једна површ интересантног облика настаје када су директрисе поклопљене са ивицама тетраедра који је уписан у коцку чија су темена фокусне тачке (Слика 4 - 123). Ова површ је генерисана са 8 фокуса и 6 директриса.



Слика 4 - 121: Ф-ДПКТ за  $k = 8$ ,  $l = 4$  и када је  $\beta = 100$



Слика 4 - 122: Ф-ДПКТ за  $k = 8$ ,  $l = 3$  и када је  $\beta = 175$



Слика 4 - 123: Ф-ДПКТ за  $k = 8$ ,  $l = 6$  и када је  $\beta = 40$

Свака површ која је приказана у овом поглављу рада 4.3. је генерисана на основу једначина датих у прилогу III-3 до III-5, њихово моделовање је извршено помоћу софтвера VisuMath 3.0, [148].

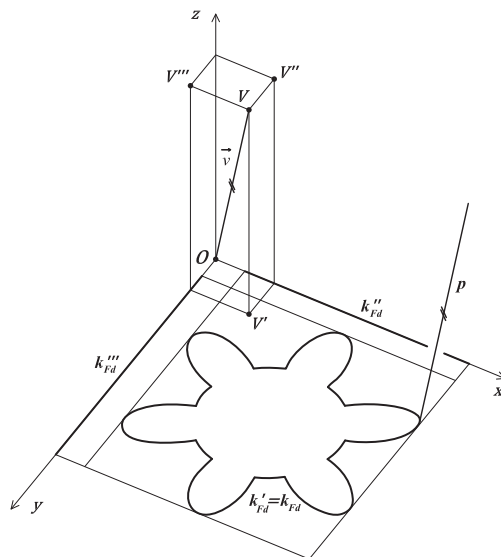
#### 4.4. 3D форме добијене транспозицијом фокално-директрисно генерисаног 2D елемента

Одређивање основних параметара геометријских површи (3D форми), односно познавање начина њихове конструктивне обраде представља базу за успешну практичну примену ових површи у инжењерству. Посебна група геометријских површи која је најчешће примењивана у обликовању различитих архитектонских форми јесте група правоизводних површи. Овој групи површи припадају све врсте облица и конуса као развојне површи једноструке закривљености. Друга група површи која има примену у архитектури су витоперне правоизводне површи. Најпознатије једноструко изводне витоперне површи су: цилиндроиди, коноиди и завојне површи. Обртањем или ротацијом неке равне или просторне криве линије око једне праве настају обртне (ротационе) површи које су такође коришћене у архитектонској пракси. У овом поглављу рада анализирају се само неке од ових површи које настају кретањем – translацијом или ротацијом равне фокално-директрисне криве по некој другој правој или кривој линији.



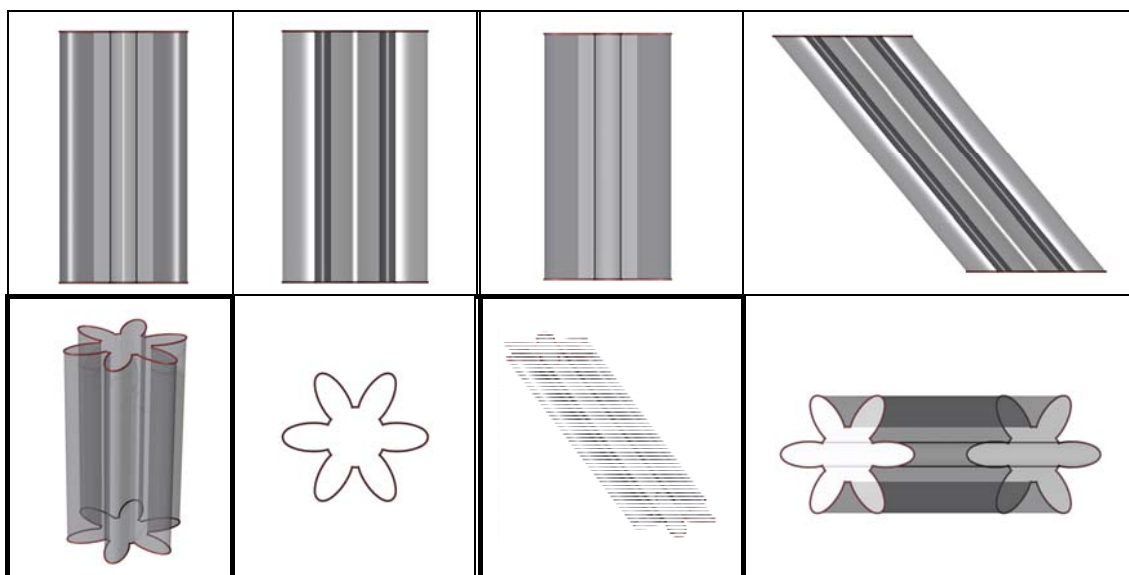
#### 4.4.1. Транслација фокално-директрисно генерисаног 2D елемента – фокално-директрисни цилиндар

Нека су у простору  $Oxyz$  дати вектор  $\vec{v} = OV$  и подскуп  $k_{Fd}$  у равни  $Oxy$ , (Слика 4 - 124). Унија свих правих  $p$  у простору које су паралелне са  $\vec{v}$  и секу  $k_{Fd}$  назива се општа цилиндарска површ над водилом  $k_{Fd}$  (у правцу вектора  $\vec{v}$ ), [78].



Слика 4 - 124: Општа цилиндарска површ у простору  $Oxyz$

Ако је вектор  $z$  –оса, тада се цилиндарска површ назива прав цилиндар (Слика 4 - 125 лево), а у случају када је вектор  $\vec{v}$  дат као на претходној слици онда је настаје коси цилиндар (Слика 4 - 125 десно). Приказане цилиндричне површи су са основама које су 2D фокално-директрисно генерисани елементи.



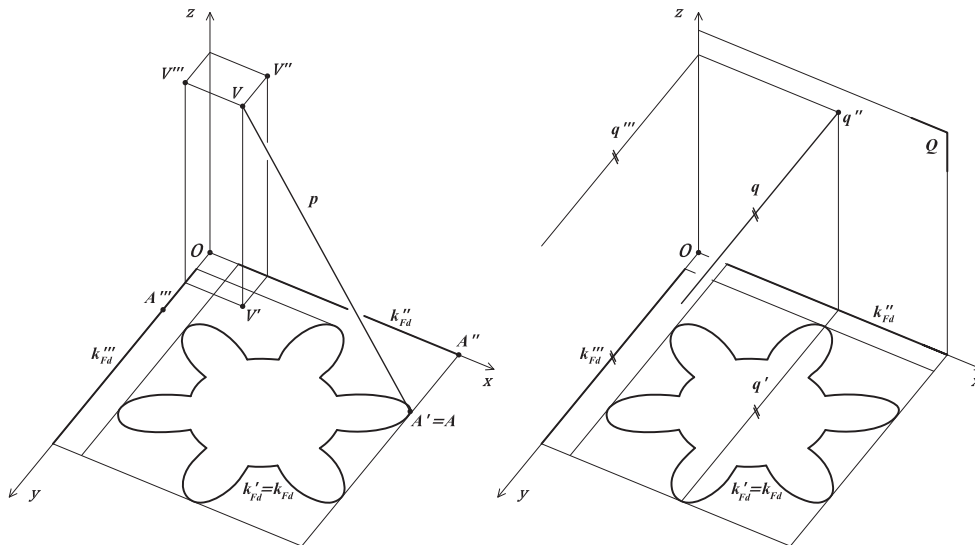
Слика 4 - 125: Прав цилиндар (лево); коси цилиндар (десно)

#### 4.4.2. Фокално-директрисно генерисани 2D елемент као директриса правоизводне површи – фокално-директрисни конус и коноид

Конус и коноид припадају групи правоизводних површи. Конус је развојна површ једноструке закривљености, док је коноид једноструко изводна, витоперна површ. Следеће дефиниције омогућавају нам да уведемо ове површи у нову групу фокално-директрисних површи које настају тако да за водиљу имају фокално-директрисно генерисани 2D елемент.

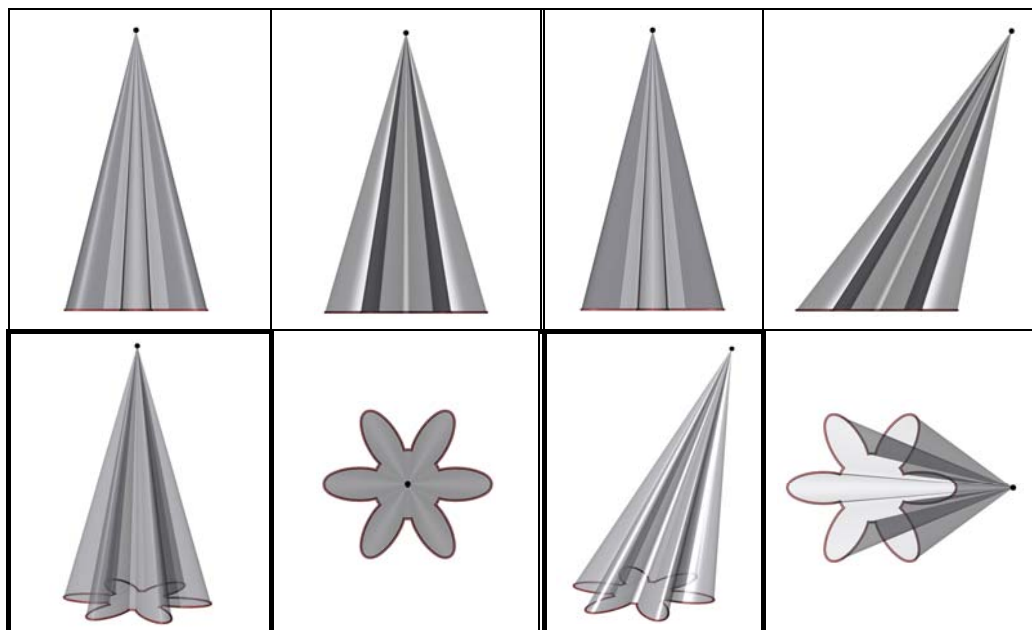
Нека су у простору  $Oxyz$  дати подскуп  $k_{Fd}$  и тачка  $V$  - врх конуса (Слика 4 - 126 лево). Унија свих правих  $p$  у простору које пролазе кроз  $V$  и  $k_{Fd}$  назива се општа конусна површ, ( $p = VA, A \in k_{Fd}$ ). Прав конус са базисом (водиљом, директрисом) који је фокално-директрисна крива  $k_{Fd}$  дат је на следећој слици (Слика 4 - 127 лево), док је на истој слици са десне стране приказан кос конус.

Нека су у простору  $Oxyz$  дати подскуп  $k_{Fd}$ , права  $q$  и раван  $Q$  (Слика 4 - 126 лево), тада правоизводна површ чије генератрисе секу праву  $q$ , секу криву  $k_{Fd}$  и паралелне су равни  $Q$  назива се коноидна површ. Раван  $Q$  је дирекциона раван, фокално-директрисна крива  $k_{Fd}$  и права  $q$  су директрисе коноидне површи (Слика 4 - 128,  $Q=F$  и  $q \parallel y$ ).

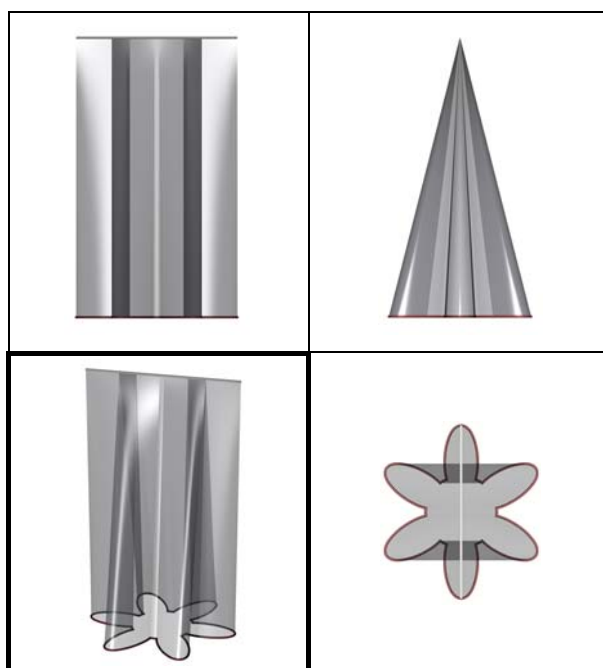


Слика 4 - 126: Општа конусна површ (лево); Коноидна површ (десно)

Конусне и коноидне површи (Слика 4 - 127 и Слика 4 - 128) приказане су са базисном основом (водиљом, директрисом) која је фокално-директрисно генерисани 2D елемент  $k_{Fd}$ . Ова водиља је генерисана као Веберова крива са 6 фокуса и 6 директрисе, дефинисана у поглављу 3.2.1. и приказана на слици (Слика 3 - 34 лево) црвеном бојом. Опште конусне и коноидне површи или само неки њихови карактеристични делови често су примењивани приликом обликовања архитектонско-урбанистичког простора.



Слика 4 - 127: Прав конус (лево); коси конус (десно)

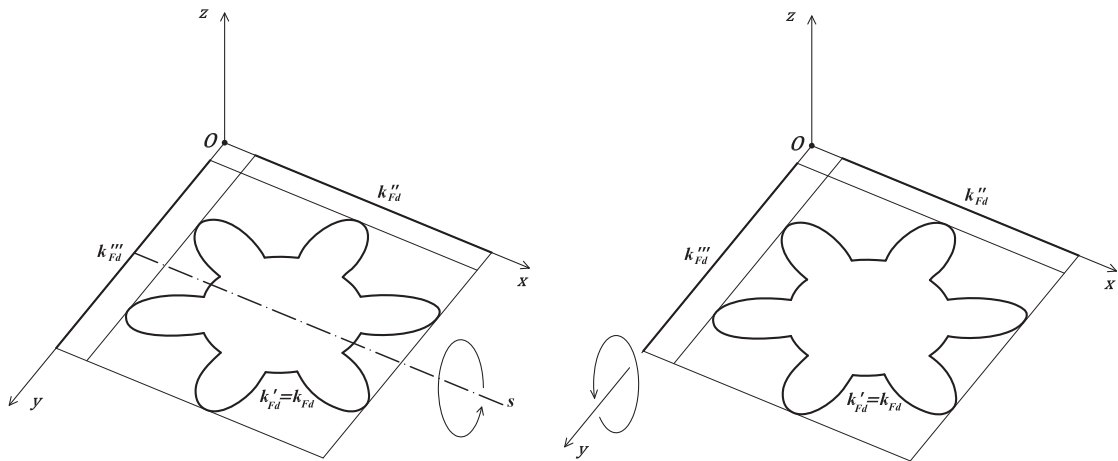


Слика 4 - 128: Коноид

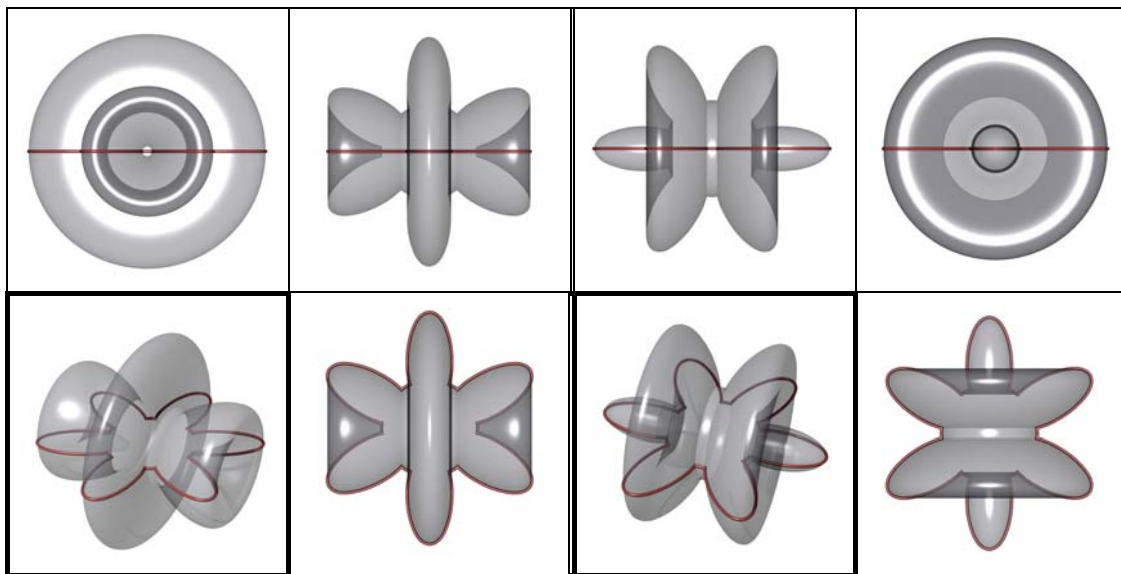
#### 4.4.3. Ротација фокално-директрисно генерисаног 2D елемента

Још једна група површи која настаје ротацијом (обртањем) фокално-директрисно генерисаног 2D елемента  $k_{Fd}$  око једне праве биће разматрана у овом поглављу рада.

Нека су у простору  $Oxyz$  дати права  $s$  и подскуп  $k_{Fd}$  у равни  $Oxy$  (Слика 4 - 129), тада површ која настаје ротацијом криве  $k_{Fd}$  (изводница) око праве  $s$  (осе) назива се ротациона површ. Оса ротације може да се поклопи са неком од карактеристичних оса изводнице  $k_{Fd}$  (Слика 4 - 129 лево) или да са изводницом нема заједничких тачака (Слика 4 - 129 десно). На следећој слици представљене су две ротационе површи: прва (Слика 4 - 130 лево) је дата када се за осу ротације  $s$  изабере прва карактеристична оса симетрије фокално-директрисне криве  $k_{Fd}$  која је паралелна са  $x$  –осом ( $s \parallel x$ ); друга (Слика 4 - 130 десно) је дата када се за осу ротације  $s$  изабере друга оса симетрије фокално-директрисне криве  $k_{Fd}$  која је паралелна са  $y$  –осом ( $s \parallel y$ ). Обе површи су ротиране за угао од  $180^\circ$ .



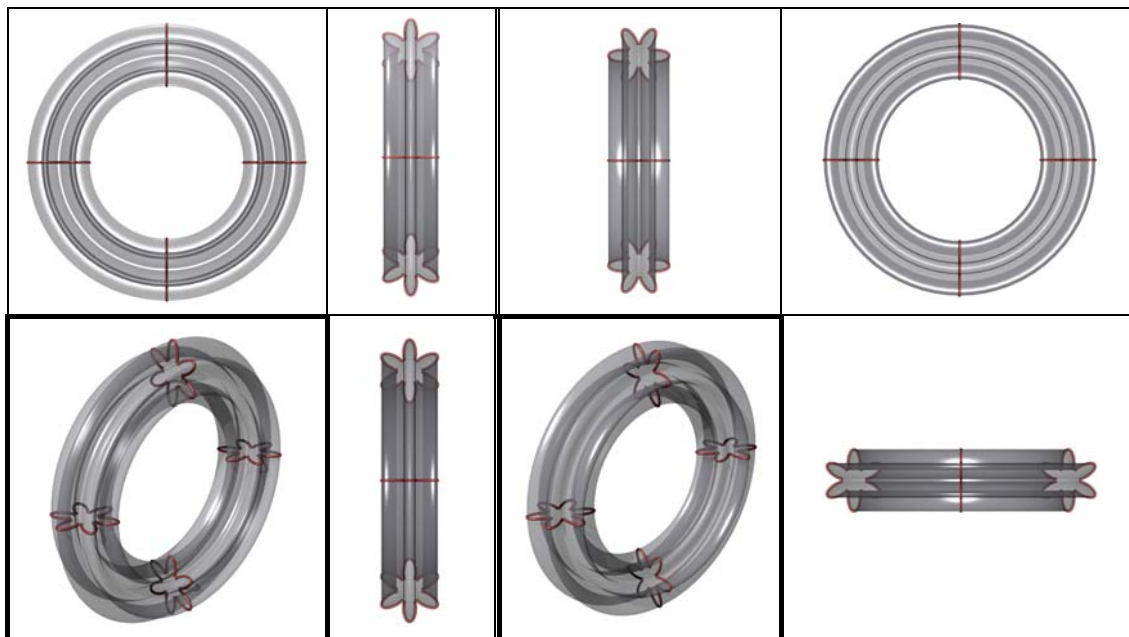
Слика 4 - 129: Ротација фокално-директрисне криве у простору  $Oxyz$



Слика 4 - 130: Ротациона површ настала ротацијом фокално-директрисне криве око праве  $s \parallel x$  (лево);  $s \parallel y$  (десно)

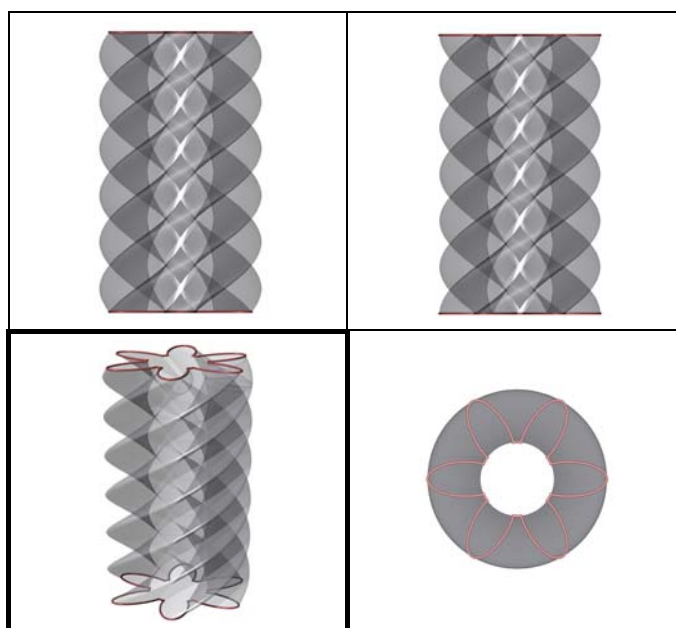
Ако се за осу ротације  $s$  изабере права која нема пресечних тачака са изводницом  $k_{Fd}$  тада настају нове ротационе површи (Слика 4 - 131). На истој

слици (лево) оса ротације је  $x$  – правца, док код површи која је приказана са десне стране оса ротације је  $y$  – правца. За обе површи угао ротације је  $360^\circ$ .



Слика 4 - 131: Ротациона површ настала ротацијом фокално-директрисне криве око  $x$  – осе (лево);  $y$  – осе (десно)

Комбинацијом транслације и ротације фокално-директрисне криве могу се добити занимљиве 3D форме. Један пример овакве површи настаје када се ротира изводница  $k_{Fd} \in Oxy$  око  $z$  – осе (оса ротације пролази кроз центар симетрије криве  $k_{Fd}$ ) за угао од  $360^\circ$  и транслира за константну висину (Слика 4 - 132).

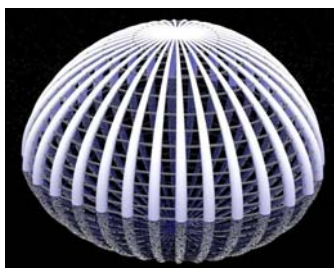


Слика 4 - 132: Површ настала ротацијом и транслацијом фокално-директрисне криве

## 4.5. Анализа погодности форме фокално-директрисно генерисаних 3D елемената за примену у архитектури

### 4.5.1. Анализа геометријских својстава у генерисању фокално-директрисно генерисаних елемената као архитектонских форми

Фокално, директрисно и фокално-директрисно генерисани 3D елементи дефинисани у поглављу 4.1. и 4.3. (површи настале од фокуса-темена или/и директриса-страна правилних полигона са константном сумом/производом растојања до њих) по својој генези, представљају геометријске форме које у себи садрже најједноставнију симетрију – раванску рефлeksiју (огледалску симетрију). Једна од равни рефлeksiје (огледало) ових површи је управо раван самог полигона. Захваљујући овом геометријском својству, део ових површи који се постави над водом, као огледалом, изгледаће тако као да је постављена целокупна генерисана површ (Слика 4 - 133 а). Дobar пример како се истиче овај ефекат у архитектури је Град уметности и науке архитекте Сантјага Калатраве, односно „град у граду“ са Великим оком (Слика 4 - 133 б).



а)



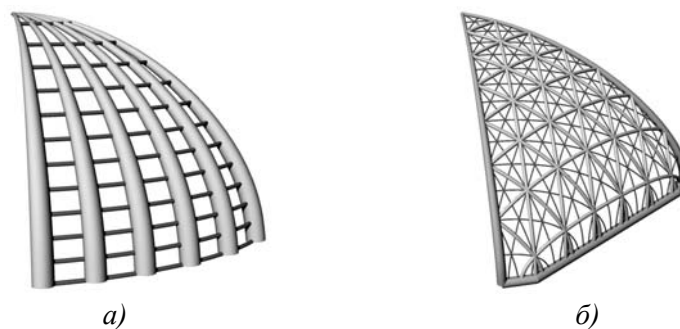
б) [143]

Слика 4 - 133: Огледалска симетрија

На основу геометријског својства-симетричност правилних полигона може се закључити да свака алгебарска површ фокално-директрисно генерисана на основу правилних полигона имаће  $k$  оса симетрије и  $2k$  елемената у групи симетрије, исто као и полигон који је генерише (Слика 3 - 31).

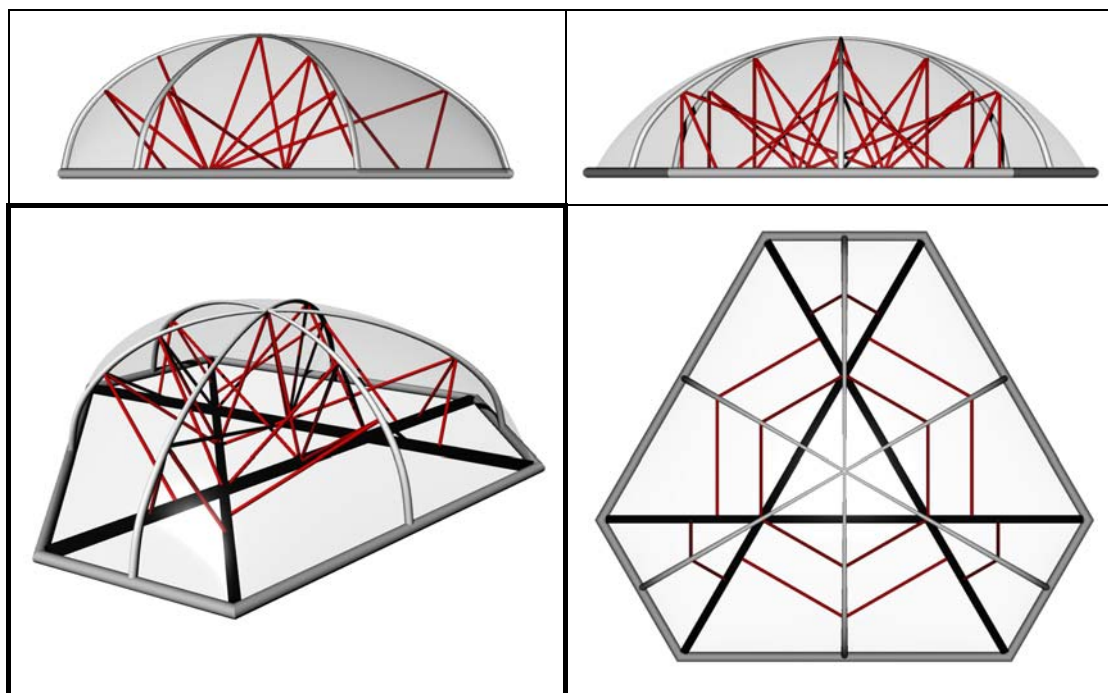
Такође, због овог својства правилних полигона, фокалне, директрисне, фокално-директрисне, као и фокално-директорне површи са константном сумом/производом погодне су за примену у архитектури јер је довољно генерисати само  $1/2k$  део површи (Слика 4 - 134 б). Огледалска симетрија ових површи даје још једну подподелу и због тога свака површи настаје из једнаких  $1/4k$  елемената (Слика 4 - 134 а). Површи које настају када је променљива сума/производ могу се формирати од  $1/2k$  истих елемената, јер код њих не важи огледалска симетрија у односу на раван у којој се налази полазни полигон.





Слика 4 - 134: а)  $1/4k$  –ти део фокалне површи ( $k = 3$ );  
б)  $1/2k$  –ти део директрисне површи ( $k = 6$ )

Свака фокална или директрисна површ са константном сумом, може да се генерише преко униформних елемената. Ако су растојања до  $n$  фокуса/директриса константна, тада је сума свих растојања/штапова из неке тачке површи до  $n$  фокуса/директриса једнаке дужине. На следећој слици (Слика 4 - 135) црвени штапови унутар тридиректрисне површи представљају растојања до директриса. Из сваке тачке са површи могуће је поставити три растојања/штапа чија је сума константна. Униформност елемената је једна од битних карактеристика која произилази након генерисања елемената са константном сумом, а самим тим се смањује количина отпада при њиховој реализацији.



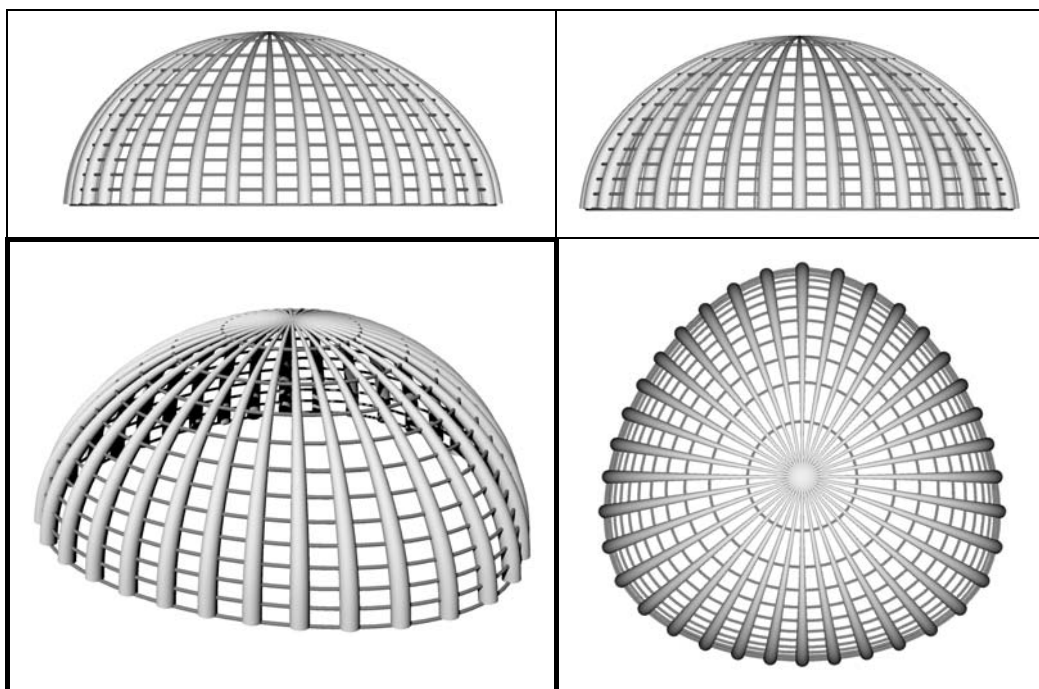
Слика 4 - 135: Директрисна калота ( $n = 3$ )

Фокално генерисани елементи, по својој дефиницији, везани су за један или више фокуса – чворова, што структурално гледано може да се реализује коришћењем МЕРО система. Такође, директрисно генерисани елементи, по својој поставци, везани су за директрисе – линије које могу у реализацији бити



хоризонтални или вертикални серклажи, армирано-бетонске, челичне или дрвене греде. Комбинацијом претходна два система могуће је извести и фокално-директрисно генерисане форме.

Трифокална калота која је дефинисана у поглављу 4.1. (горњи део површи, Слика 4 - 13 лево) сада је дата као модел са радијалним вертикалним носачима, док су хоризонталне изоленије (трифокалне криве) секундарни, хоризонтални носачи (Слика 4 - 136).



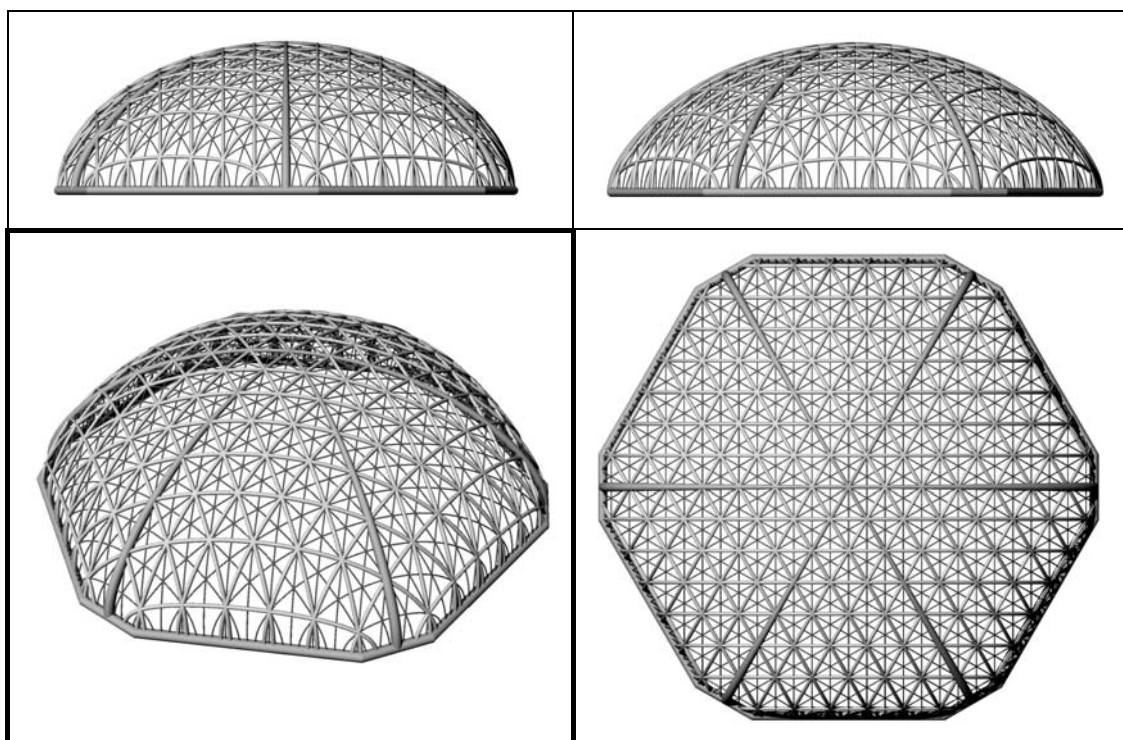
Слика 4 - 136: Трифокална калота

Због великог потенцијала конструкцијског обликовања, примена просторних решеткастих носача при реализацији разноврсних облика генерисаних 2D/3D структура је могућа. Просторни решеткасти носачи имају следеће особине: мала тежина, мала висина, велика крутост са малом деформацијом. Ове особине су добре, јер се постиже и прерасподела утицаја са једног носача на други, услед евентуалног локалног губитка носивости. Предности употребе просторних носача су важне: почев од могућности серијске - индустријске производње, лаке и брзе монтаже, веће отпорности на дејство пожара, као и естетске предности (поглавље 4.5).

Најбитнија разлика између два претходно поменути потенцијална извођења фокално и директрисно генерисаних елемената у архитектури јесте та, да други структурални систем не садржи унутрашње конструктивне елементе (чворове и греде), тако да се организација целокупног простора и постављање инсталација може искористити на флексибилнији начин (Слика 4 - 135, и Слика 4 - 138).



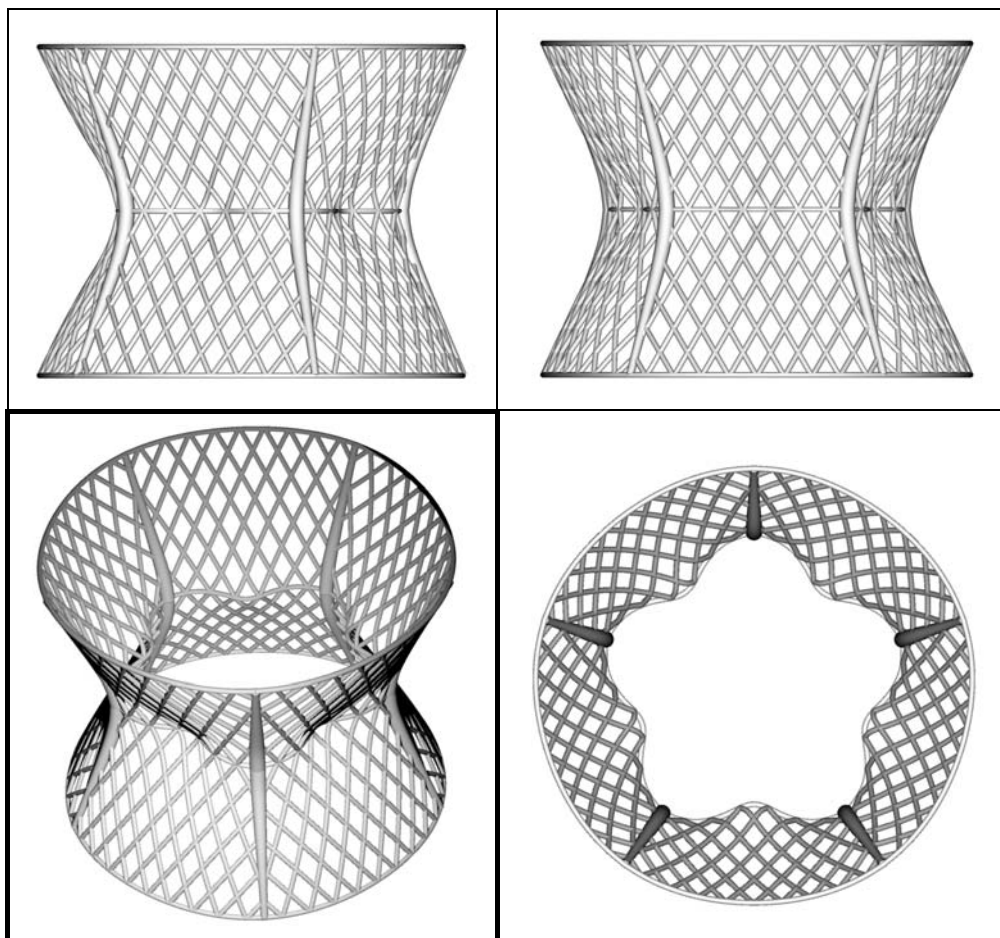
Дискретна љуска са обликом шестодиректрисне калоте (Слика 4 - 55 десно, горњи део директрисне површи која је дефинисана у поглављу 4.1.1.Б) дата је са дијагоналном мрежом под углом од  $60^\circ$  у погледу одозго (Слика 4 - 138). Ова калота са основом облика 12-гостраног полигона (Слика 4 - 138, доле десно) може да буде самостална структурна форма већих димензија, затим форма која наткрива стадион или изложбenu халу, или да буде део неког објекта. Такође, она може да буде постављена и као архитектонски детаљ или микро елемент.



Слика 4 - 138: Шестодиректрисна калота

Геометријска структура са дијагоналном мрежом приказана на следећој слици (Слика 4 - 139) обликом подсећа на једнограни хиперболоид. Дискретни елементи (штапови и носачи) прате облик  $\Phi$ -ДП која је генерисана са пет фокуса и пет директриса. Овај генерисани 3D елемент је дефинисан у поглављу 4.3 (Слика 4 - 115 десно). Вертикални носачи и дијагонални унакрсни елементи ове структуре, наглашавају њену хиперболичност, док су хоризонтални носачи изолиније облика фокално-директрисне криве са флоралним обликом која је дефинисана у поглављу 3.1.3 (Слика 3 - 30 в) за  $k = 5$ , лево,  $\Phi$ -ДК приказана црвеном бојом).

У овом поглављу рада приказана су три предложена обликовна решења која могу имати примену у дизајнирању архитектонске форме. Приказани примери просторних структура представљају иницијалне идеје за даља истраживања везана за обликовање најразличитијих геометријских форми. такође, сложене структуралне форме могу да настану спајањем или мултиплицирањем карактеристичних исечака истих или различитих фокално-директрисно генерисаних 3D елемената.



Слика 4 - 139: Фокално-директрисна површ

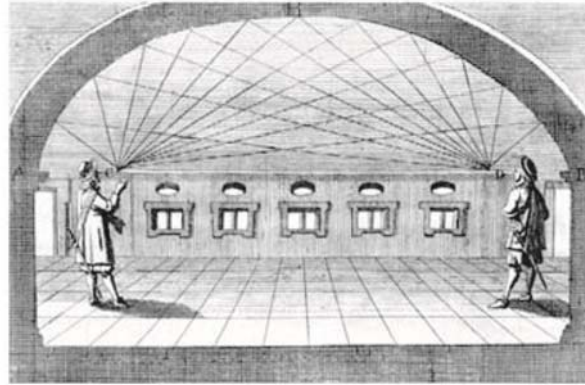
#### 4.5.3. Обликовање архитектонских простора коришћењем фокално-директрисно генерисаних 3D елемената ради постизања акустичних и оптичких ефеката

Успешно сагледавање и имплементација Веберових површи или њихових карактеристичних сегмената у геометријске форме будућих архитектонских објеката представља смерницу за даља истраживања научних истраживача из области геометрије, физике, математике, отпорности грађевинских материјала и сродних дисциплина. У овом делу рада размотрићемо само неке од карактеристика Веберових површи везаних за акустичке и оптичке ефекте.

Познат је ефекат да у грађевинама са специјалним акустичним карактеристикама, долази до преноса звука путем рефлексије, на такав начин да се на веће удаљености може пренети и звук веома ниског интензитета, практично без слабљења. На пример, једна особа може чути шапат који је изговорила друга, удаљена, особа ако се ове две особе налазе на одређеним позицијама у просторији.

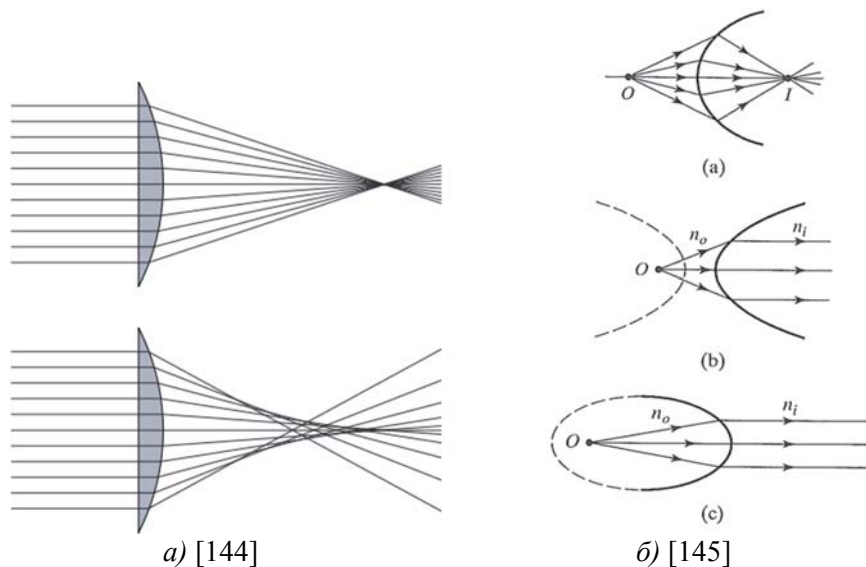
Овакве просторије се често називају „галеријама шапата“, а најпознатија просторија овог типа је свакако галерија катедрале Светог Павла у Лондону.

Ако је то просторија са сводом облика елипсоида тада се особе налазе на позицијама, тј. местима фокуса елипсоида  $F_1(-c, 0, h)$  и  $F_2(c, 0, h)$ ,  $c > 0$  (Слика 4 - 140). Удаљење између шапгача и слушаоца износи  $2c$ .



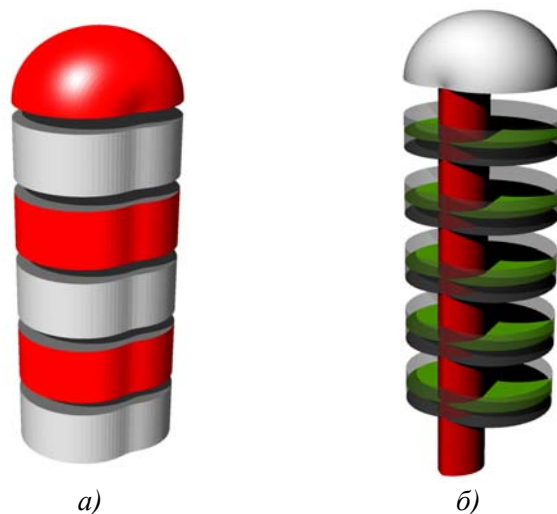
Слика 4 - 140: Елипсоидни свод и његове акустичне карактеристике, [90].

Рене Декарт је захваљујући свом истраживању из области оптике генерисао овал за који важи (3 - 29). Зраци светла који полазе из фокуса  $F_1$ , након преламања у тачкама Декартовог овала секу се у фокусу  $F_2$ , [22]. Две области тј. средине, које Декартови овали деле, имају релативни индекс преламања  $n/t$ . Као што је Декарт и открио, могуће је користити ове овале у дизајнирању сочива. Избором односа растојања од фокуса који одговара односу синуса у Снел-Декартовом закону (закон преламања светлости) и користећи ротациону површ једног од ових овала (Слика 3 - 14), где оса ротације пролази кроз фокусе, могуће је дизајнирати апланатичко сочиво без сферичне аберације, [32] и [144]. То је сочиво где сви долазни зраци пролазе кроз фокус (Слика 4 - 141 а) и назива се још перфектно сочиво.



Слика 4 - 141: а) Сферична аберација (горе - сочиво без св.аб; доле - сочиво са св.аб.)  
б) Рефракционе површи: (а) Декартов овоид;  
(б) хиперболичка површ; (с) елипсоид

Елипсоиди, хиперболичке површи и Декартове површи генерисане са релативним индексом преламања  $n_o/n_l$  припадају групи рефракционих површи, [145] (Слика 4 - 141 б).



Слика 4 - 142: Објекти са основом: а) Декартовог овала; б) Паскаловог пужа

Једнакост (3 - 29) представља Декартов овоид ако се за  $R_1$  и  $R_2$  посматрају Еуклидска 3D растојања (Слика 4 - 142 б, црвена калота објекта). Паскалов пуж се добија као специјални случај Декартовог овала. Аналогно, у 3D, може се добити калота Паскаловог пужа (Слика 4 - 142 в, бела калота). Предложена идејна решења цилиндричних површи са основом Декартовог овала (Слика 4 - 142 б) и Паскаловог пужа (Слика 4 - 142 в) и већ описаним калотама имају рефракциона оптичка својства.

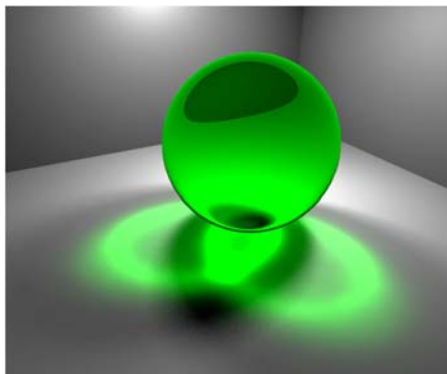
Приликом рефракције (преламања) и рефлексије (одбијања) сферног таласа на одговарајућој површи настају тзв. антикаустичне криве које представљају енvelope одбијених зрака. У раду са називом Биполарне и Мултиполарне координате, Р. Фароуки и П. В. Мун дали су табелу са класификацијом кривих са антикаустичним својством у односу на рефлексију/рефракцију ако се примени на одговарајући тип површи (Табела 4 - 2), [32].

Табела 4 - 2: Табела класификације кривих са антикаустичним својством које настају након рефлексије/рефракције на одговарајућим површима, [32];

површ	рефлексија/ рефракција	антикаустика	таласни фронт
раван	рефлексија	тачка	степен 2
раван	рефракција	елипса/хипербола	степен 8
сфера	рефлексија	Паскалов пуж	степен 10
сфера	рефракција	Декартов овал	степен 14

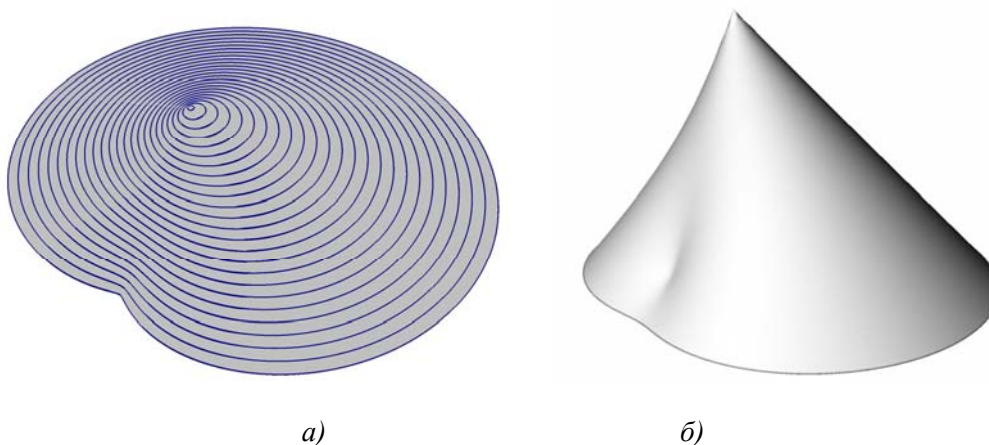


Такође, у оквиру табеле је дат и степен помераја у односу на основни таласни фронт ових антикаустика који су настали рефлексијом или рефракцијом таласа. Антикаустична крива – Паскалов пуж добијена је рефлексијом сферног таласа на равној површи, (Слика 4 - 143, одсјај на поду).



Слика 4 - 143: Паскалов пуж добијен рефлексијом са сферне површи, [146]

Декартов конус настаје као фокална површ са променљивом сумом растојања  $\mathcal{S} = z(x, y)$  (ове површи су дефинисане у поглављу 4.1.2.). Декартове површи (Слика 4 - 144 а) генерисане са једначином  $mR_1 + nR_2 = \mathcal{S}$  имају изолиније које су Декартови овали са индексом преламања светлости  $n/m$ .



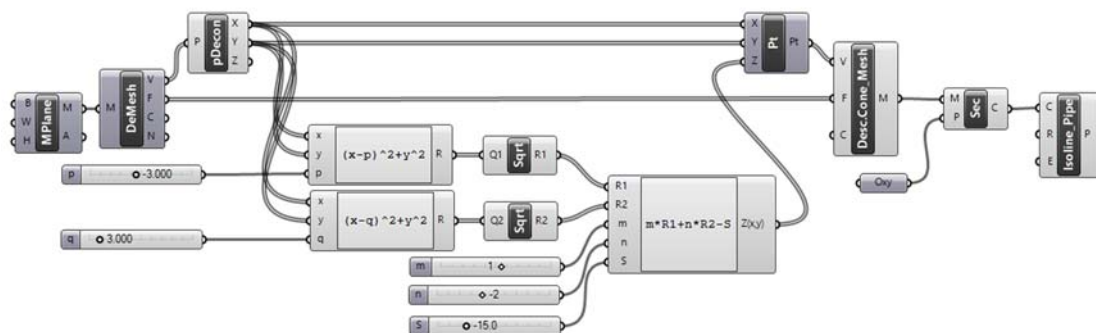
Слика 4 - 144: Модели Декартовог конуса:  $mR_1 + nR_2 = \mathcal{S}$ ,  
(двофокална површ са променљивом сумом растојања  
и различитим вредностима параметара  $m, n$  и  $\mathcal{S}$ )

Променом параметара  $m, n$  и  $\mathcal{S}$  добија се велики број разноврсних површи са изолинијама које су Декартови овали. Такође, са променом удаљења између фокусних тачака (параметара  $p$  и  $q$ ), ова група површи постаје још бројнија.

Још један пример Декартовог конуса (Слика 4 - 144 б) моделован је помоћу софтверског пакета Rhinoceros (Grasshopper). На следећој слици (Слика 4 - 145) дат је графички приказ Grasshopper дефиниције за генерисање ове геометријске форме.



Због базисне основе са обликом Декартовог овала и удубљеног дела једне стране конуса који настаје за специјални случај Декартовог овала (изолинија је тада спољашњи део криве Паскаловог пужа), ова површ је атрактивног изгледа.



Слика 4 - 145: Дефиниција Декартовог овала  
(Grasshopper, програмски пакет Rhinoceros)

Употребна вредност овако генерисаних елемената управо зависи од самог принципа конструисања и обликовања, а с'обзиром да су код ове површи хоризонталне изолиније Декартови овали, тада се она квалификује за површ са добрим оптичким особинама.

---

---

## 5. ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНО ГЕНЕРИСАНИ ЕЛЕМЕНТИ КАО ГРАФИЧКЕ ИНТЕРПРЕТАЦИЈЕ ГЕОМЕТРИЈСКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ МНОГОУГЛА

*„Алгебра и геометрија нераздвојне“<sup>5</sup>*

### 5.1. Фокално-директрисно генерисани елементи и геометријске неједнакости Ердеш-Морделовог типа

Истраживање трифокалних и тридиректрисних кривих које је описано у поглављу 3, са једне стране и геометријских неједнакости Ердеш-Морделовог типа за троугао које је објављено у раду [57] аутора Б. Малешевић, М. Петровић, М. Обрадовић и Б. Попконстантиновић, са друге стране, довело је до обједињења ове две области у општи локацијски проблем Веберовог типа који је дефинисан са (3 - 6, за  $m = n = 3$ ). Тако добијена геометријска места тачака у равни комбинованих трифокалних и тридиректрисних кривих имају везу са локацијским проблемима и називају се криве са једнаким утрошком ( тј. „*isocost*“ криве). У овом поглављу рада, постављањем фокуса/директриса тако да се поклопе са теменима/страницама правилних полигона и анализирањем позитивних и негативних коефицијената скалирања, односно Веберових тежинских фактора који стоје уз растојања до њих, приказаше се нова визуелна интерпретација Ердеш-Морделове неједнакости за конвексне многоуглове.

Фокално-директрисно генерисани 2D и 3D елементи као Веберове криве и површи дефинисане су једнакостима са (3 - 6), (4 - 56) и (4 - 57) у поглављу 3, односно поглављу 4 овог рада. На основу овако дефинисаних фокално-директрисно генерисаних елемената, дато је и геометријско проширење Ердеш-Морделове неједнакости од унутрашње области конвексног многоугла до Ердеш-Морделове криве.

---

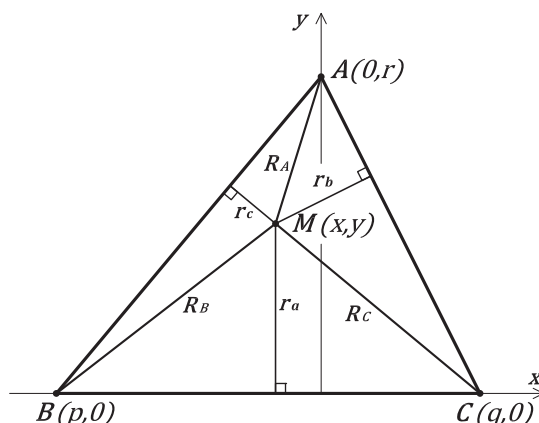
<sup>5</sup> Rida Farouki (2008) *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable*, [31]

### 5.1.1. Проширење Ердеш-Морделове неједнакости до Ердеш-Морделове криве као фокално-директрисно генерисаног 2D елемента

Ердеш-Морделова неједнакост за троугао дефинисана је везом између трифокалне суме и тридиректрисне суме:

$$(5 - 1) \quad R_A + R_B + R_C \geq 2(r_a + r_b + r_c),$$

где су  $R_A, R_B, R_C$  и  $r_a, r_b, r_c$  растојања од тачке  $M(x, y) \in \Delta ABC$  до фокуса - темена троугла  $A, B, C$  и директриса - страна троугла  $a, b, c$  (Слика 5 - 1).



Слика 5 - 1: Ердеш-Морделова неједнакост за троугао

Наведену неједнакост (5 - 1) поставио је као отворени проблем П. Ердеш, 1935. године [28], а доказао је Л. Ј. Мордел 1937. године, [68].

Узимајући у обзир неједнакост (5 - 1), циљ истраживања овог дела рада је да се одреди област у равни троугла где важе следеће три неједнакости:

$$(5 - 2) \quad R_A \geq \frac{c}{a} r_b + \frac{b}{a} r_c,$$

$$(5 - 3) \quad R_B \geq \frac{c}{b} r_a + \frac{a}{b} r_c,$$

$$(5 - 4) \quad R_C \geq \frac{b}{c} r_a + \frac{a}{c} r_b,$$

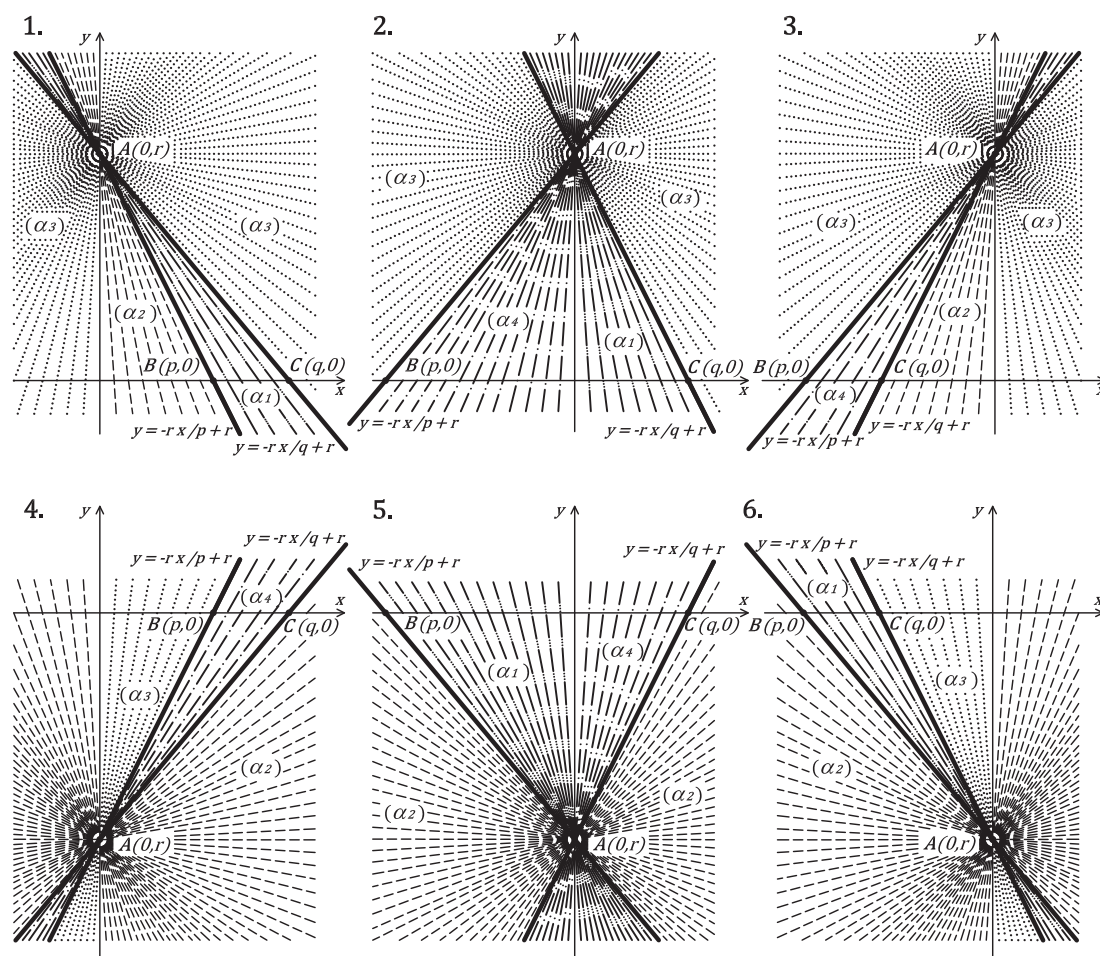
где су  $a, b, c$  дужине страница троугла  $\Delta ABC$ , тј.  $a = |BC|$ ,  $b = |CA|$  и  $c = |AB|$ , а затим да се одреди скуп свих тачака  $E$  за које важи:

$$(5 - 5) \quad R_A + R_B + R_C \geq \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) r_a + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) r_b + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) r_c.$$

Познато је да унутрашњост троугла  $\Delta ABC$  припада скупу  $E$ , [43], [48], [51]. У раду [57], аутора Б. Малешевић, М. Петровић, М. Обрадовић и Б. Попконстантиновић, показано је да је овај скуп већи од самог  $\Delta ABC$  и дата је геометријска интерпретација овог скупа. Докази Ердеш-Морделове неједнакости

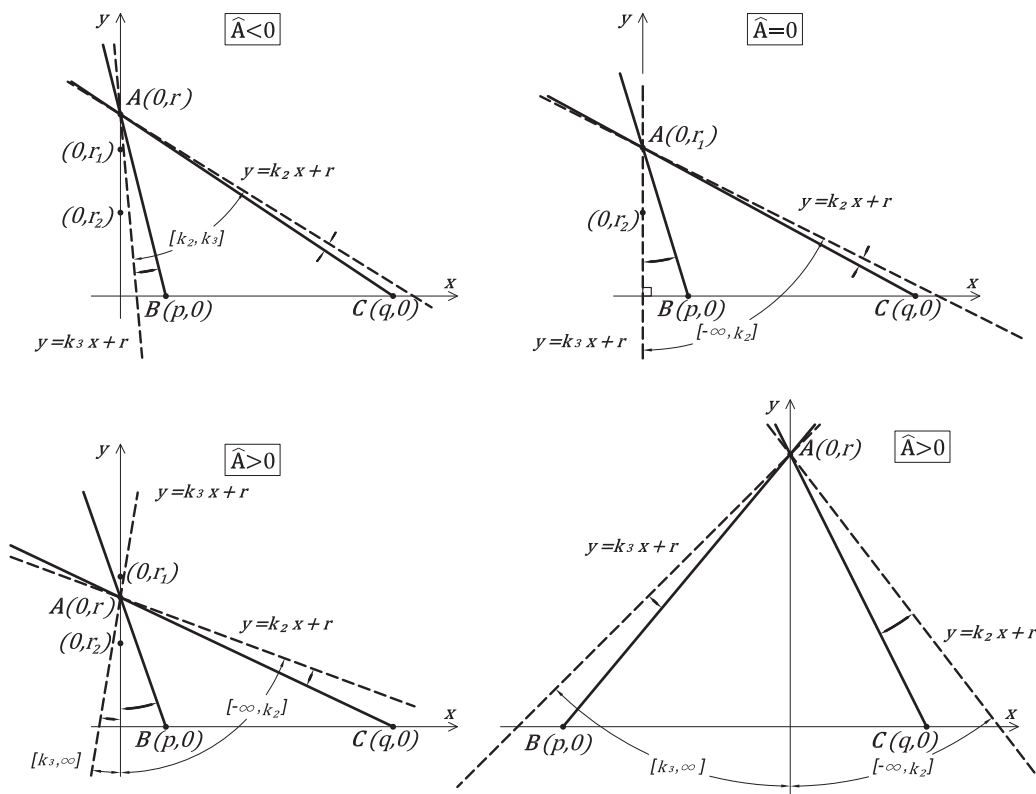
су често базирани на различитим доказима неједнакости (5 - 2) као што је дато у радовима [13], [43], [53] и [54]. Визуелни доказ ове неједнакости су дали Алсина и Нелсен, [1]. Н. Дергиадес у раду [21], доказао је да неједнакост (5 - 5) важи у целој равни тругла, где су  $r_a, r_b$  и  $r_c$  означена растојања. Сличан резултат је дао и Б. Малешевић у радовима [56], [66]. Године 2008., В. Памбуџијан даје доказ да у апсолутној геометрији, Ердеш-Морделова неједнакост представља еквивалент непозитивне закривљености равни, [76].

На почетку секције 2 рада [57], аутора Б. Малешевић, М. Петровић, М. Обрадовић и Б. Попконстантиновић, дефинисана су Еуклидска растојања између две тачке, затим Еуклидска растојања од тачке до праве једнакостима (6) – (8) за полазни тругао  $\Delta ABC$ . Позиције темена овог иницијалног тругла  $\Delta ABC$  у  $xOy$  координатном систему дате су на претходној слици (Слика 5 - 1). Анализом прамена правих  $y = kx + r, k \in \mathbb{R}$  који пролази кроз теме  $A(0, r)$  и геометријске неједнакости (5 - 2) извршена је подела равни тругла на четири угаоне области  $(\alpha_1) - (\alpha_4)$ . У нашем раду [57] ове области су задате алгебарским једначинама (13) – (16). Затим, разматране су све могуће позиције тругла 1.– 6. у Декартовом координатном систему (Слика 5 - 2) и формирана је табела о егзистенцији угаоних области у зависности од параметара  $p, q$  и  $r$  (табела 1, рад [57]).



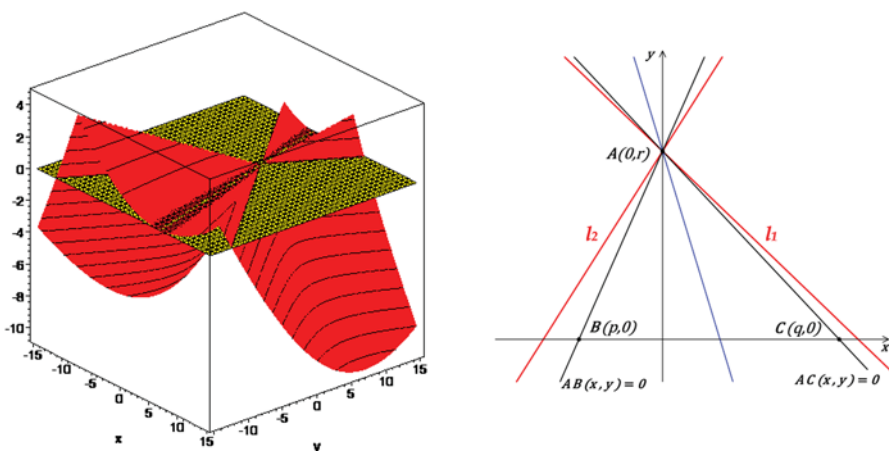
Слика 5 - 2: Егзистенција угаоних области  $(\alpha_1) - (\alpha_4)$

Низом дефинисаних лема и ставом 1. који је доказан у раду [57, видети стр. 273-277] долази се до постојања правих  $y = k_s x + r$ , ( $s = 2, 3$ ) које се налазе у спољашњости угла  $\sphericalangle BAC$  и његовог унакрсног угла. Визуелни приказ егзистенције ових правих у одговарајућим областима дата је на следећој слици (Слика 5 - 3):



Слика 5 - 3: Егзистенција правих  $y = k_s x + r$ , ( $s = 2, 3$ )

Након овог истраживања, уследила је нова просторна интерпретација и доказ постојања правих  $l_{s-1}: y = k_s x + r$ , ( $s = 2, 3$ ) помоћу конусних површи (Слика 5 - 4).



Слика 5 - 4: Конусне површи и егзистенција правих  $l_{s-1}: y = k_s x + r$ , ( $s = 2, 3$ )

У раду [74], аутори М. Обрадовић, Б. Малешевић, М. Петровић и Б. Попконстантиновић дају алгебарске једначине (19) – (22) за одговарајуће конусне површи, а затим и графички приказ сваке од њих појединачно ([74], Table 2 – Table 4, стране: 342-348). Визуелна, графичка презентација конусних површи (три стандардне пројекције и аксонометријски приказ) за три типа угла  $\sphericalangle BAC \lesseqgtr \pi/2$  и све четири угаоне области  $(\alpha_1) - (\alpha_4)$  дата је на пропратним сликама (Figure 4 – 6) које се налазе у нашем раду ([74], стране: 342-348.).

За теме  $A(0, r)$  полазног троугла  $\triangle ABC$  дефинисана је област  $E_A$  тако да важи неједнакост (5 - 2):

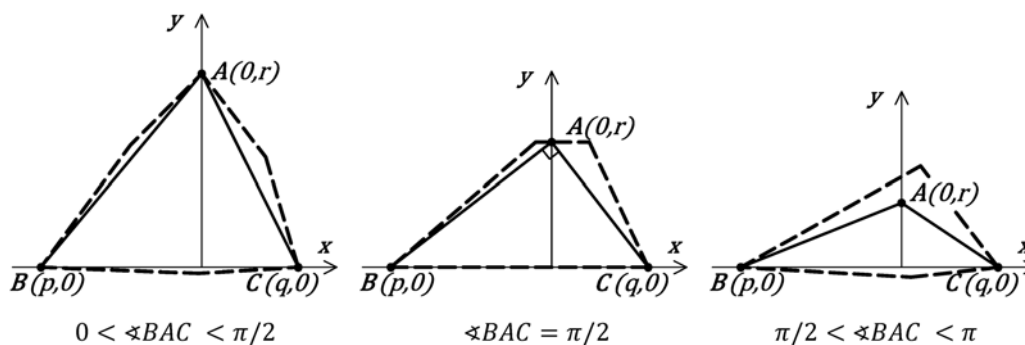
$$(5 - 6) \quad E_A = \left\{ (x, y) \mid R_A \geq \frac{c}{a}r_b + \frac{b}{a}r_c \right\}.$$

Аналогно, могу се дефинисати области  $E_B$  и  $E_C$ , за темена  $B(p, 0)$  односно  $C(q, 0)$ , тако да важи (5 - 3) односно (5 - 4):

$$(5 - 7) \quad E_B = \left\{ (x, y) \mid R_B \geq \frac{c}{b}r_a + \frac{a}{b}r_c \right\},$$

$$(5 - 8) \quad E_C = \left\{ (x, y) \mid R_C \geq \frac{b}{c}r_a + \frac{a}{c}r_b \right\}.$$

Скуп  $M$  (Слика 5 - 5) представља пресек угаоних области формираних од скупова  $E_A, E_B$  и  $E_C$  који садрже полазни  $\triangle ABC$ . Овај проширени скуп тачака, у коме важи Ердеш-Морделова неједнакост, има четвороугаони или шестоугаони облик (полигонална испрекидана линија, Слика 5 - 5) и садржан је у скупу  $E$ .



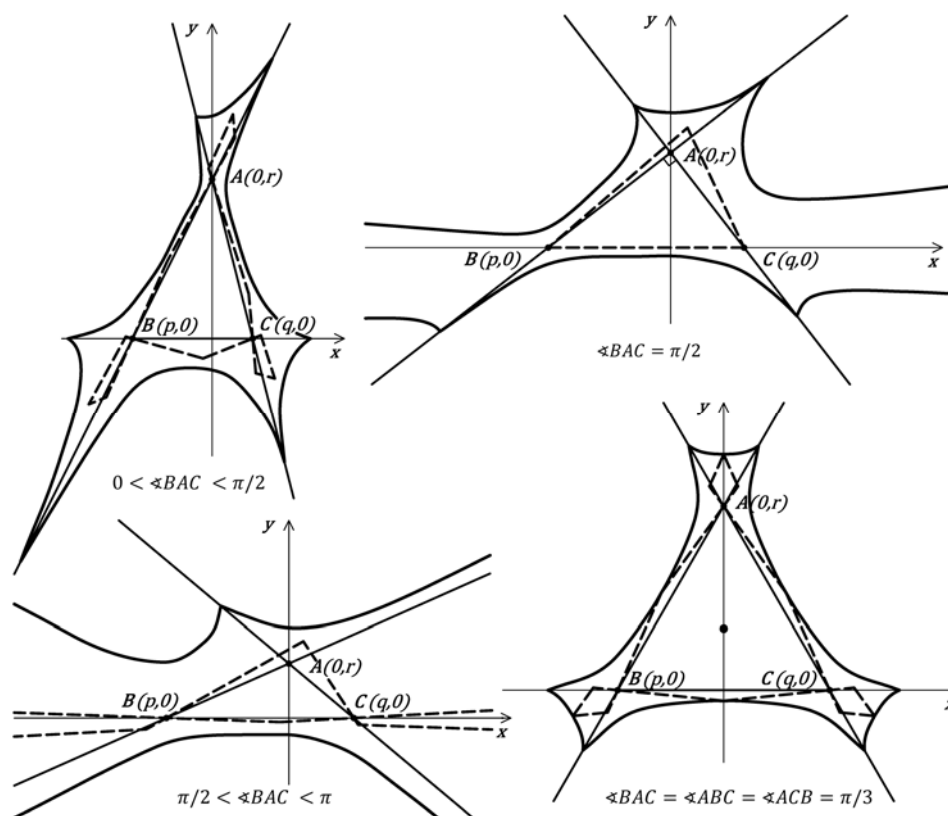
Слика 5 - 5: Проширење  $\triangle ABC$  до области  $M \subseteq E$

На крају рада [57], дефинисали смо Ердеш-Морделову криву (5 - 9) у равни троугла (Слика 5 - 6, пуна линија), као и област  $E$  (Слика 5 - 6, испрекидана линија). На овај начин, извршено је проширење скупа, у коме важи неједнакост Ердеш-Морделовог типа, са троугла до Ердеш-Морделове криве. Ако унутрашњост Ердеш-Морделове криве која садржи  $\triangle ABC$  означимо са  $E'$  тада важи:  $\triangle ABC \subseteq M \subseteq E \subseteq E'$ . Такође, приказана је визуелна презентација криве и скупа, за све могуће типове полазног троугла  $\triangle ABC$ .

$$(5 - 9) \quad R_A + R_B + R_C = 2(r_a + r_b + r_c).$$

Аналогно, сада се могу дефинисати Ердеш-Морделове криве, као Веберове фокално-директрисне криве (5 - 10), за четвороугао, петоугао, шестоугао или  $n$ -тоугао. Унутрашњост криве представља природно проширење са  $n$ -тоугла до максималне скупа тачака, односно области, када важи Ердеш-Морделова неједнакост (4 - 73):

$$(5 - 10) \quad \cos \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n R_i = \sum_{j=1}^n r_j, \quad n \geq 4.$$



Слика 5 - 6: Ердеш-Морделова крива за троугао и област  $E$

Фокално-директрисна крива (5 - 9) представља унију делова алгебарских кривих осмог реда, доказано у раду [2], аутора Б. Бањац, Б. Малешевић, М. Петровић и М. Обрадовић. Такође, у овом раду је нумерички тестиран отворени проблем који је дат у [57]: доказати или оповргнути постојање позитивног броја  $\varepsilon_0$  таквог да је површина области  $E'$  већа од  $(1 + \varepsilon_0)$ -пута површине области сваког троугла  $\Delta ABC$  тј.

$$(5 - 11) \quad P_{E'} \geq (1 + \varepsilon_0) \cdot P_{\Delta ABC}.$$

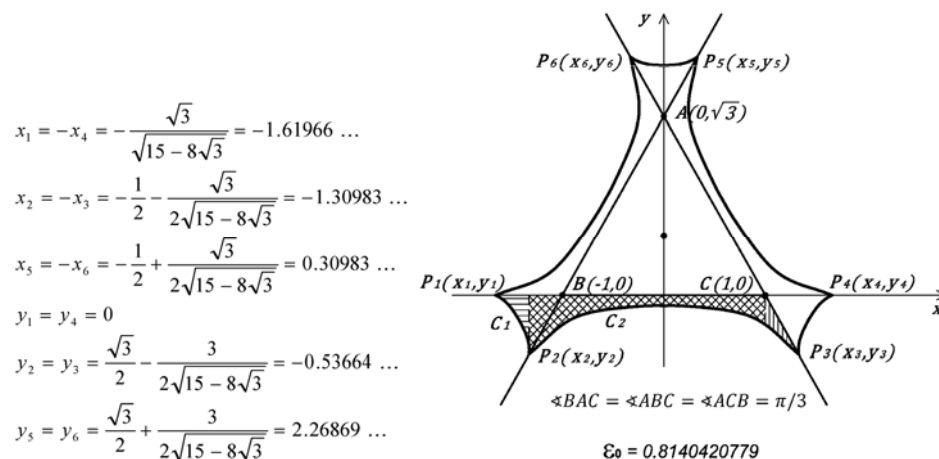
За случај једнакости, код претходне неједнакости, добијамо да је константа  $\varepsilon_0$  дефинисана на следећи начин:

$$(5 - 12) \quad \varepsilon_0 = \frac{P_{E'} - P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ABC}}.$$



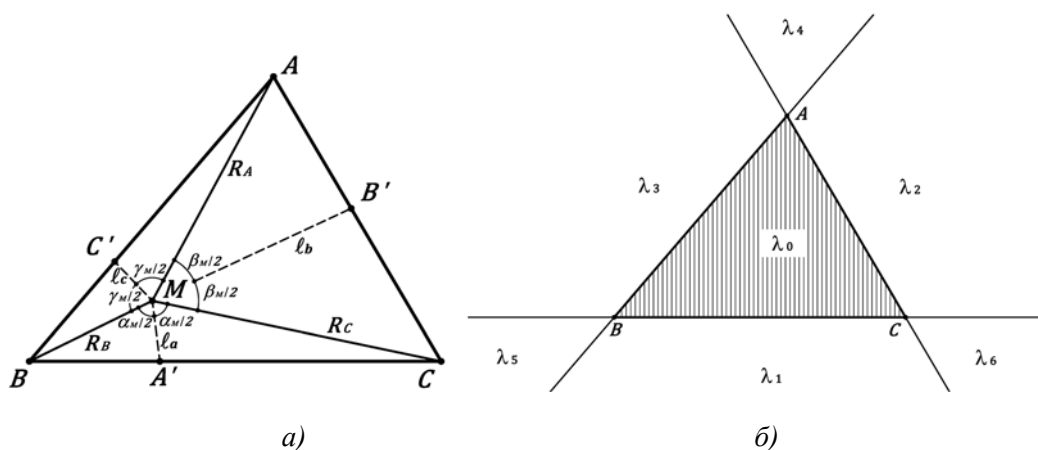
Метод за нумеричко одређивање константе  $\varepsilon_0$  која је дата са (5 - 12) за случај једнакостраничног троугла са теменом  $A(0, \sqrt{3}), B(-1, 0), C(1, 0)$  и  $P_{\Delta ABC} = \sqrt{3}$ , дат је у нашем раду [2]. Пресечне тачке Ердеш-Морделове криве са директрисама, означене са  $P_i(x_i, y_i), i = 1..6$ , (Слика 5 - 7), представљају граничне вредности за делове Ердеш-Морделове криве тј лукове  $C_1 = \text{arch}(P_1P_2)$  и  $C_2 = \text{arch}(P_2P_3)$ . Нумеричком интеграцијом, у MatLAB-у, одређена је вредност за контанту:

$$(5 - 13) \quad \varepsilon_0 = 0.8140420779.$$



Слика 5 - 7: Ердеш-Морделова крива за једнакостранични троугао

Ако се у Едеш-Морделовој неједнакости (5 - 1), уместо растојања до директриса  $r_a, r_b, r_c$ , посматрају дужине угаоних бисектора  $\ell_a, \ell_b, \ell_c$  (Слика 5 - 8 а)



Слика 5 - 8: а) Неједнакост Бароуа; б) Подела равни странама троугла

тада се добијена неједнакост назива неједнакост Бароуа:

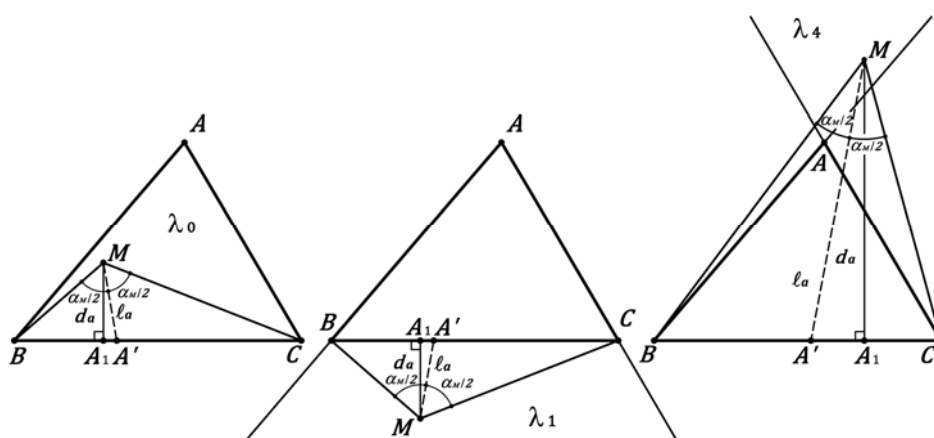
$$(5 - 14) \quad R_A + R_B + R_C \geq 2(\ell_a + \ell_b + \ell_c).$$

За сваку тачку у троуглу важи да је трифокална сума већа од двоструке вредности трибисекторалне суме. У раду [59], аутора Б. Малешевић и М. Петровић, показано је да неједнакост Бароуа важи у читавој равни троугла ако се посматрају означени

угаони бисектори. Слично, али коришћењем означених растојања, Н. Дергиадес је доказао да неједнакост Ердеш-Морделовог типа (5 - 5) важи у равни троугла, [21]. На почетку нашег рада [59], уведена је подела равни  $\triangle ABC$  (Слика 5 - 8 б) на области  $\lambda_0(+, +, +)$ ,  $\lambda_1(-, +, +)$ ,  $\lambda_2(+, -, +)$ ,  $\lambda_3(+, +, -)$ ,  $\lambda_4(+, -, -)$ ,  $\lambda_5(-, +, -)$  и  $\lambda_6(-, -, +)$ , а према означеним барицентричним координатама тачака које је дато у раду [31, поглавље 7.2].

Низом лема и теорема дефинисана је неједнакост Бароа (5 - 15) по одговарајућим областима и доказано је да она важи (формуле (14) – (29), [59]) за сваку тачку  $M$  која је у равни троугла (Слика 5 - 9).

$$(5 - 15) \quad R_A + R_B + R_C \geq \left( \frac{\sqrt{R_C}}{\sqrt{R_B}} + \frac{\sqrt{R_B}}{\sqrt{R_C}} \right) \ell_a + \left( \frac{\sqrt{R_C}}{\sqrt{R_A}} + \frac{\sqrt{R_A}}{\sqrt{R_C}} \right) \ell_b + \left( \frac{\sqrt{R_A}}{\sqrt{R_B}} + \frac{\sqrt{R_B}}{\sqrt{R_A}} \right) \ell_c.$$



Слика 5 - 9: Означена растојања  $d_a$  и означени угаони бисектори  $l_a$

Аналогно, сва претходна истраживања фокално-директрисно генерисаних елемената везана за троугао могу се проширити и за конвексне многоуглове са већим бројем страна. Због обимности истраживања, великог математичког формулисања и алгебраске поделе угаоних области равни која је задата конвексним многоуглом, генерализовање геометријских неједнакости за конвексне многоуглове превазилази оквире овог рада и може бити предмет даљег рада.

### 5.1.2. Просторна интерпретација Ердеш-Морделове неједнакости троугла

Ердеш-Морделова неједнакост за троугао (5 - 1) када се интерпретира као Ферма-Торичели-Веберов проблем има следећу формулацију: трифокална сума већа је или једнака двострукој вредности тридиректрисне суме (фокуси су темена, а директрисе стране троугла). Неједнакост (5 - 1) сада се може записати на следећи начин:

$$(5 - 16) \quad \alpha_A R_A + \alpha_B R_B + \alpha_C R_C + \beta_a r_a + \beta_b r_b + \beta_c r_c \geq 0.$$

Веберови тежински коефицијенти који се налазе поред растојања до фокуса су једнаки и јединични  $\alpha_A = \alpha_B = \alpha_C = 1$ , док су Веберови тежински коефицијенти уз растојања до директриса такође једнаки, али са негативним тежинама  $\beta_a = \beta_b = \beta_c = -2$ .

Генерисање фокално-директрисне површи која је дефинисана претходном неједнакошћу, условљено је чињеницом да постоје такве тачке  $M(x, y)$  у равни изван полазног троугла (Слика 5 - 1) где (5 - 16) не важи. Фокално-директрисно генерисани 3D елемент настаје тако, да за сваку тачку ове површи  $T(x, y, z)$ , важи да се њена прва пројекција поклапа са одговарајућом тачком  $M(x, y)$  из равни троугла ( $T'(x, y) \equiv M(x, y)$ ), док је њена  $z$  –координата представљена разликом између фокалне суме и двоструке директрисне суме тј.

$$(5 - 17) \quad z = R_A + R_B + R_C - 2(r_a + r_b + r_c).$$

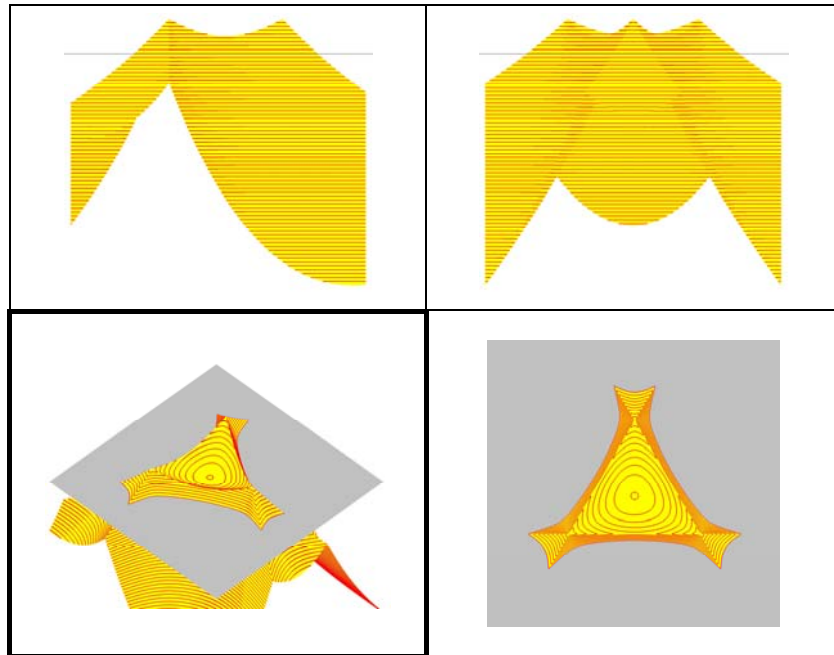
Генерисане површи које настају на овај начин нису до сада разматране. Геометријски гледано, фокално-директрисна површ (5 - 17) налази се изнад равни троугла  $\Delta ABC$ , затим сече раван троугла и иде испод ње (Слика 5 - 10 до Слика 5 - 13, аксонометријски приказ). Другим речима:

- за  $z = z(x, y) = 0$  настаје пресек генерисане површи и равни одређене троуглом  $\Delta ABC$ . Пресечна крива је Ердеш-Морделова крива која се јасно види у погледу одозго, тј. првој ортогоналној пројекцији на следећим сликама (Слика 5 - 10 до Слика 5 - 13, доле десно);
- ако је површ изнад равни  $\Delta ABC$  тј.  $z = z(x, y) > 0$ , тада важи да су пројекције тачака  $T'(x, y)$  у унутрашњој области Ердеш-Морделове криве;
- ако је површ испод равни  $\Delta ABC$  тј.  $z = z(x, y) < 0$ , тада су пројекције тачака  $T'(x, y)$  у спољашњем делу Ердеш-Морделове криве.

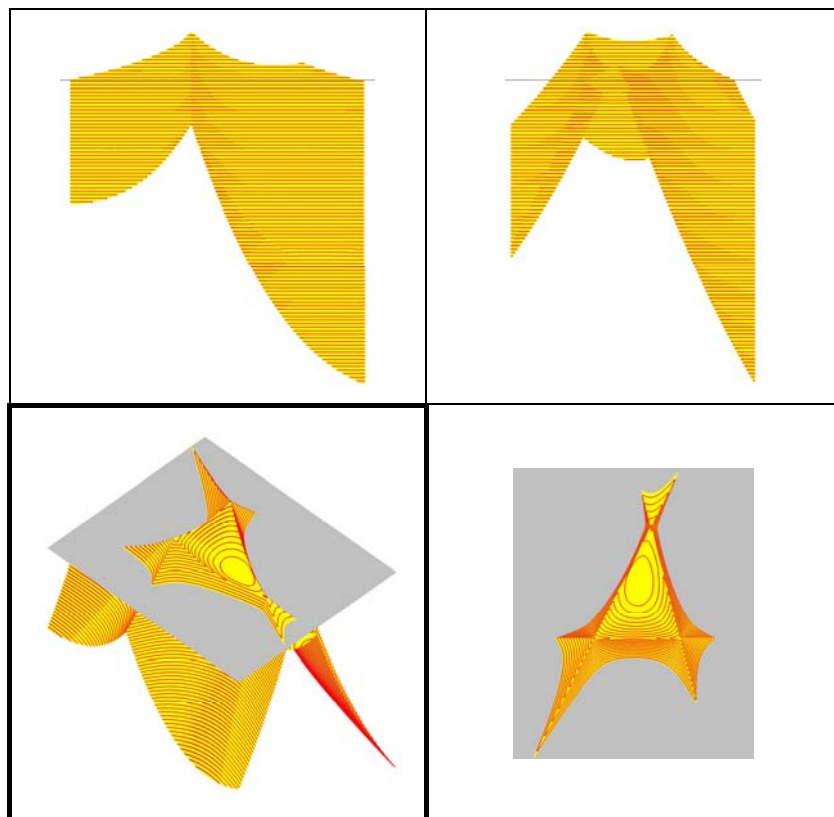
Ердеш-Морделова крива која је настала као последица проширења неједнакости Ердеш-Мордела за троугао (Слика 5 - 6) за следеће случајеве:  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \pi/3$ ;  $0 < \sphericalangle BAC < \pi/2$ ;  $\sphericalangle BAC = \pi/2$  и  $\sphericalangle BAC > \pi/2$  поклапа се са кривом која је настала као пресек фокално-директрисне површи (5 - 17) и равни која је одређена полазним троуглом  $\Delta ABC$  (Слика 5 - 10 до Слика 5 - 13, респективно).

Ако је троугао  $\Delta ABC$  једнакостранични или  $0 < \sphericalangle BAC < \pi/2$  тада је Ердеш-Морделова крива затворена крива (унија делова алгебарских кривих осмог реда).

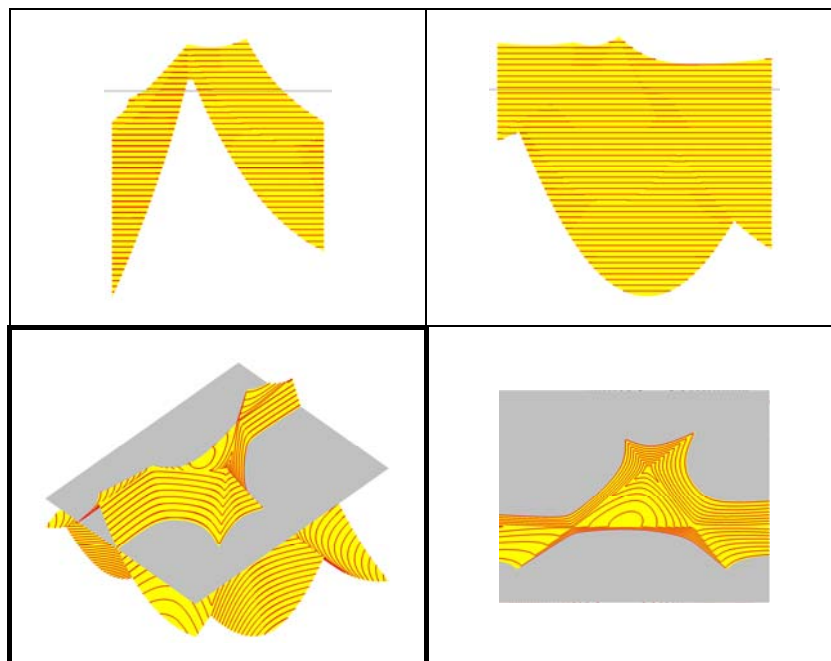
Све Ердеш-Морделове површи за троугао су фокално-директрисне површи са променљивом сумом (Ф-ДП.С2 за три фокуса и три директрисе, поглавље 4.1.2) и генерисане су на основу једначина датих у прилогу IV-1. Моделовање површи које су у овом поглављу 5.1.2 графички приказане (Слика 5 - 10 до Слика 5 - 13), извршено је помоћу софтвера VisuMath 3.0, [148].



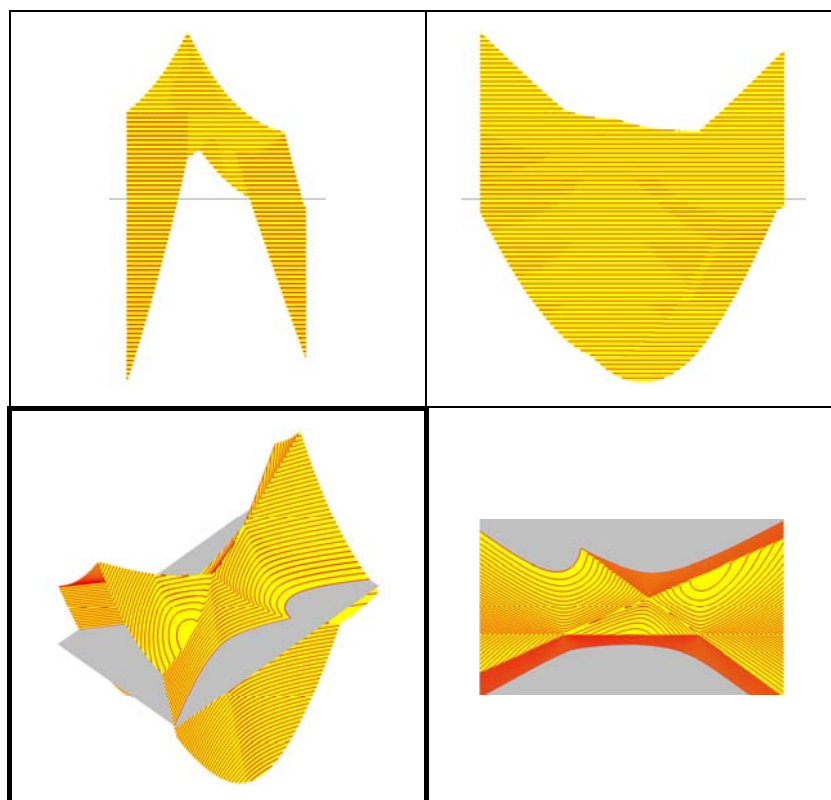
Слика 5 - 10: Ердеш-Морделова површ ( $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \pi/3$ )



Слика 5 - 11: Ердеш-Морделова површ ( $0 < \sphericalangle BAC < \pi/2$ )



Слика 5 - 12: Ердеш-Морделова површ ( $\alpha_{BAC} = \pi/2$ )



Слика 5 - 13: Ердеш-Морделова површ ( $\alpha_{BAC} > \pi/2$ )

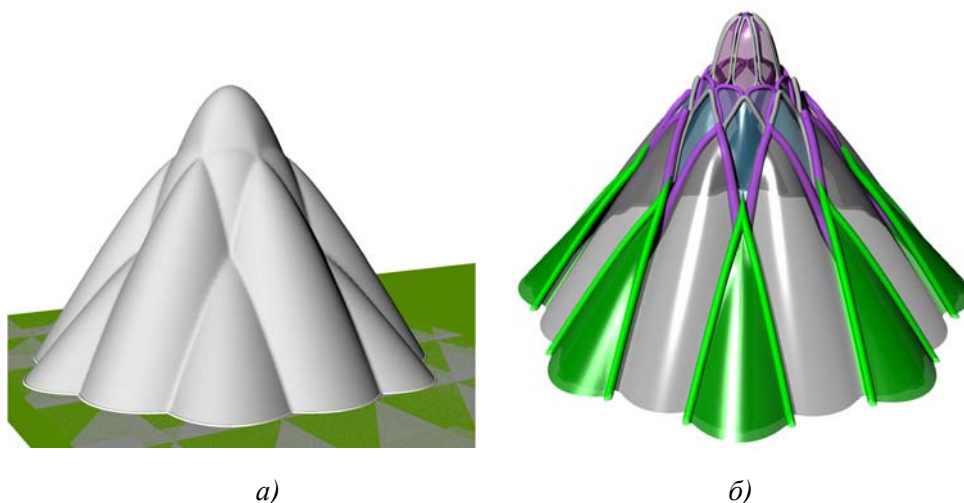
## 5.2. Просторна интерпретација неких геометријских неједнакости многоугла

Са развојем компјутера и софтвера који се примењују у архитектури и грађевинарству створени су услови да се убрзају истраживања везана за нове, сложеније геометријске форме. Иновативност, нови контекст и савремена интерпретација су битне карактеристике модерне архитектуре, [72].

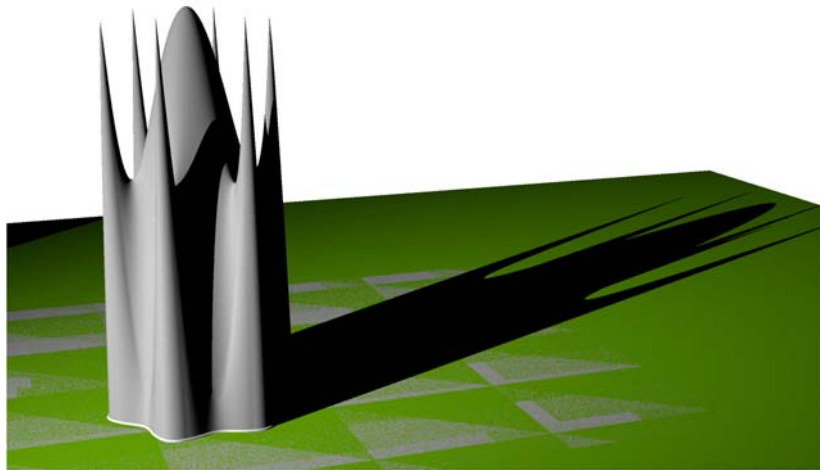
Фокално-директрисне површи са променљивом сумом растојања Ф-ДП.С2 (Слика 4 - 99, Слика 4 - 102, Слика 4 - 104 десно и Слика 4 - 106 десно) представљају пример генерисања 3D елемената коришћењем Ердеш-Морделове неједнакости за конвексне многоуглове (4 - 73) који су у специјалном положају тј за правилне полигоне.

Други тип површи који се назива фокално-директрисне површи са променљивим производом растојања Ф-ДП.П2 (Слика 4 - 100 десно, Слика 4 - 103 десно, Слика 4 - 105 десно и Слика 4 - 107 десно) представља пример генерисања 3D елемената коришћењем неједнакости Фејеш-Тота (4 - 75) за правилне полигоне.

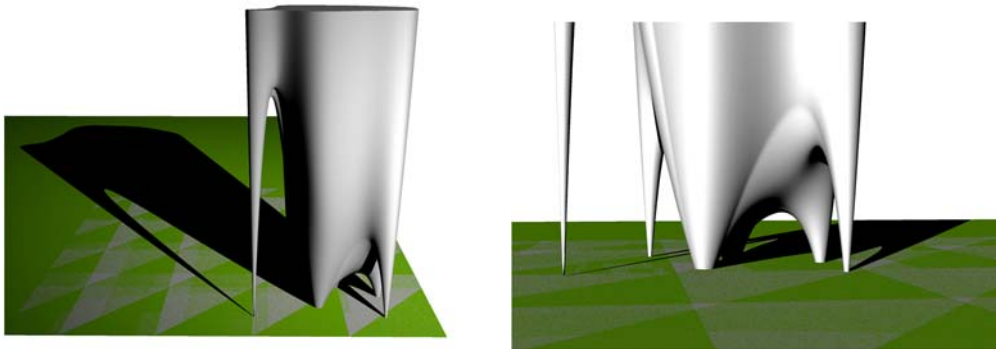
Следећи примери фокално-директрисних површи са променљивом сумом/производом растојања (Слика 5 - 14, Слика 5 - 15 и Слика 5 - 16) моделоване су помоћу софтверског пакета Rhinoceros (Grasshopper). На крају овог рада, дати су графички прилози од IV-2 до IV-5, тј. Grasshopper дефиниције за генерисање приказаних геометријских форми.



Слика 5 - 14: Ф-ДП.С2 са геометријском бионичком формом генерисана помоћу:  
а) правилног шестоугла и  
б) правилног осмоугла



Слика 5 - 15: Ф-ДП.П2 са геометријском флуидном формом генерисана помоћу  
правилног шестоугла



Слика 5 - 16: Ф-ДП. П2 са геометријском геометријском флуидном формом генерисана  
помоћу неправилног шестоугла



---

---

## 6. ПРЕДЛОГ ПРИМЕНЕ

*„Архитектура је маестрална, прецизна и величанствена игра просторних целина обједињених светлошћу“<sup>6</sup>*

Архитектонски објекти XXI века, због развоја нових технологија, пре свега технологија конструкција и нових структурних система, али и због брзог напретка у развоју компјутерске технике, добијају све комплексније геометријске облике. Традиционални ортогонални систем није више неприкосновен, док слободне, закривљене форме или параметарски дизајнирани облици доживљавају своју експанзију у архитектонско-убанистичком обликовању, [16], [19], [20], [46], [97], [101], [112] и [115].

Предмет истраживања овог рада представљају форме генерисане као геометријска места тачака чија је сума/производ растојања до  $m$  фиксираних тачака (фокуса),  $n$  фиксираних правих (директриса) и  $l$  фиксираних равни константна, као и потенцијал овако генерисаних кривих и површи за примену у архитектури. 2D и 3D елементи (криве и површи) са поменутиим геометријским својствима, могу се генерисати према унапред задатим захтевима обликовања простора. Познато је да фамилији фокално генерисаних 2D елемената припадају: конусни пресеци – елипса и хипербола (Слика 3 - 7 и Слика 3 - 9), Декартови овали (Слика 3 - 14), Максвелове трифокалне криве (Слика 3 - 2), мултифокалне криве (Слика 3 - 17 до Слика 3 - 19), Касинијеве криве (Слика 3 - 20 и Слика 3 - 21), Сахадеванове елипсе, док фамилији фокално генерисаних 3D елемената припадају неке површи другог реда – елипсоид и двограни хиперболоид (Слика 4 - 2 и Слика 4 - 3),  $m$ -елипсоид (Слика 4 - 10 до Слика 4 - 14) и Касинијеве површи (Слика 4 - 19 до Слика 4 - 50). У претходним поглављима (Поглавље 3. и Поглавље 4) овог рада анализиране су досадашње примене ових познатих Веберових кривих и површи у архитектонско-убанистичком обликовању. У овом поглављу рада биће разматране Веберове фокално-директрисне геометријске форме са аспекта могућности њихове примене у архитектури. Потенцијал примене ових форми се огледа у њиховој генези и геометријским својствима. Мењањем малог броја параметара (положаја фокуса и/или директриса) може се знатно утицати на промену облика генерисаног

---

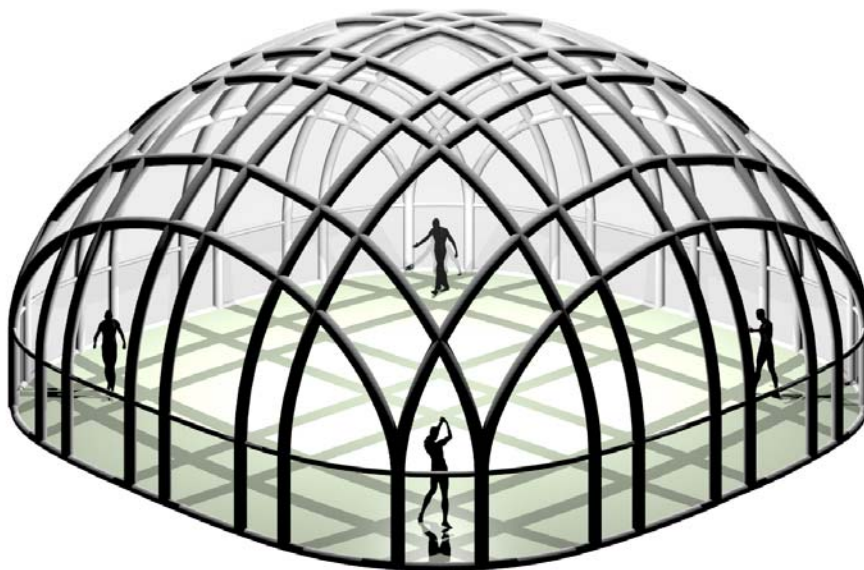
<sup>6</sup> Le Korbizije, [45]

елемента, па се ове фигуре могу подешавати, прилагођавати и трансформисати према жељеним захтевима архитектонског задатка.

## 6.1. Могућности примене фокално-директрисно генерисаних елемената у обликовању архитектонско-урбанистичког простора

Следећи примери Веберових фокално-директрисних површи представљају обликовна решења изведена помоћу рачунарског програма Rhinoceros. У оквиру овог програма формирали смо Grasshopper дефиницију за моделе приказаних геометријских форми објеката и тако омогућили једноставније и рационалније генерисање, него што је то могуће код неких других програмских пакета. Геометријска својства Веберових фокално-директрисно генерисаних елемената омогућавају да ове форме буду изведене на више начина. Начини извођења Веберових просторних структура су следећи: дискретизација површи, површ са мрежом изолинија или као монолитне површи.

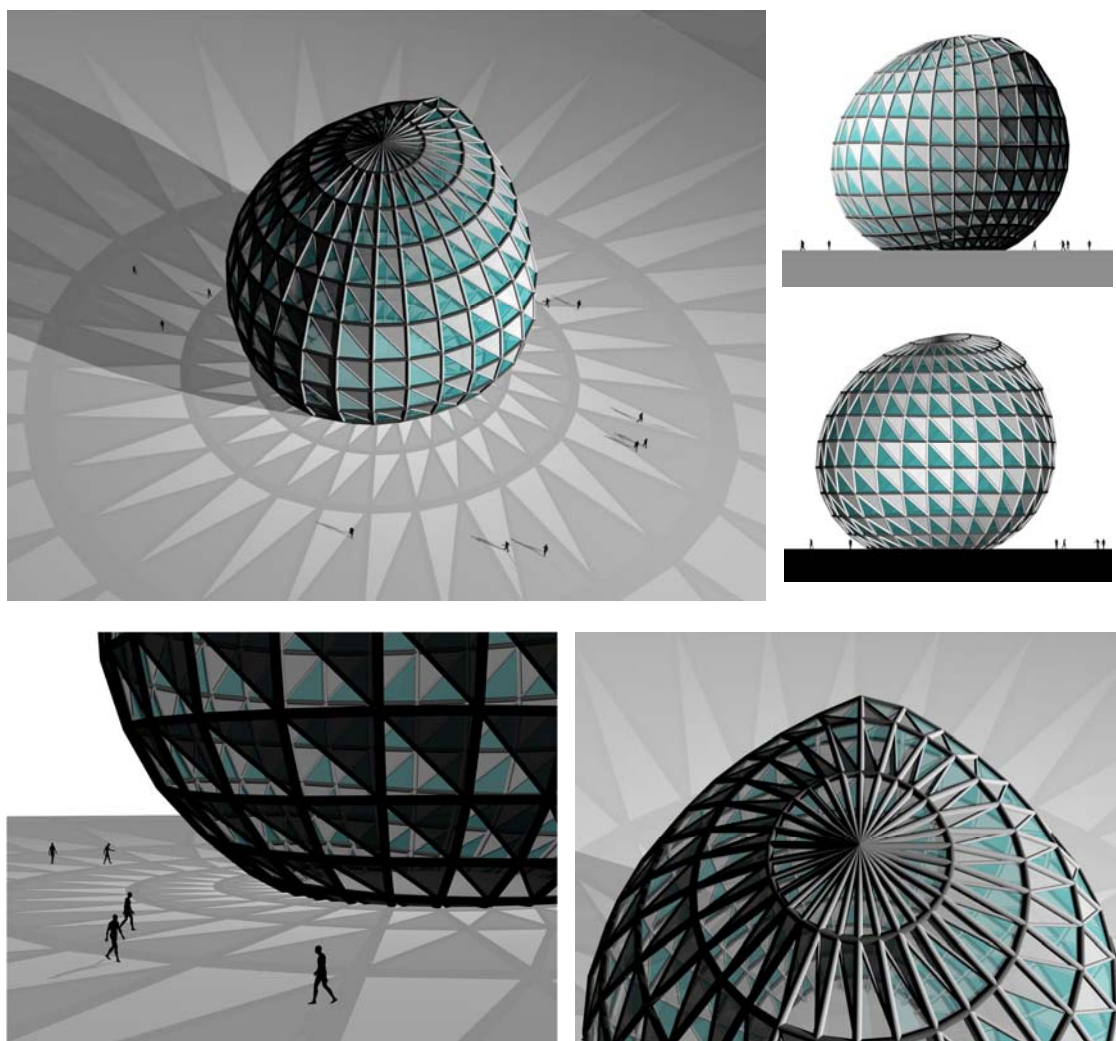
Први пример генерисања фокалне површи са могућношћу примене у обликовању архитектонског објекта дат је за 4-фокалну површ код које важи  $R_A + R_B + R_C + R_D = \mathcal{S}$ . Фокуси  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  су поклопљени са квадратом (Слика 4 - 13, десно). Ова фокална површ, тј. калота објекта представљена је и преко мреже изолинија  $x$  и  $y$  правца (Слика 6 - 1). На основу акустичких карактеристика које важе за објекте са сводом елипсоидног облика (Слика 4 - 140) и која су описана у поглављу 4.5.3. сада можемо рећи да генерисана 4-фокална калота садржи поменута својства. Овај објекат се може назвати „галеријом шапата“. Шаптач и три слушаоца се налазе на позицијама, тј. местима фокуса ове површи (Слика 6 - 1).



Слика 6 - 1: Архитектонска просторна структура (4-фокална површ)

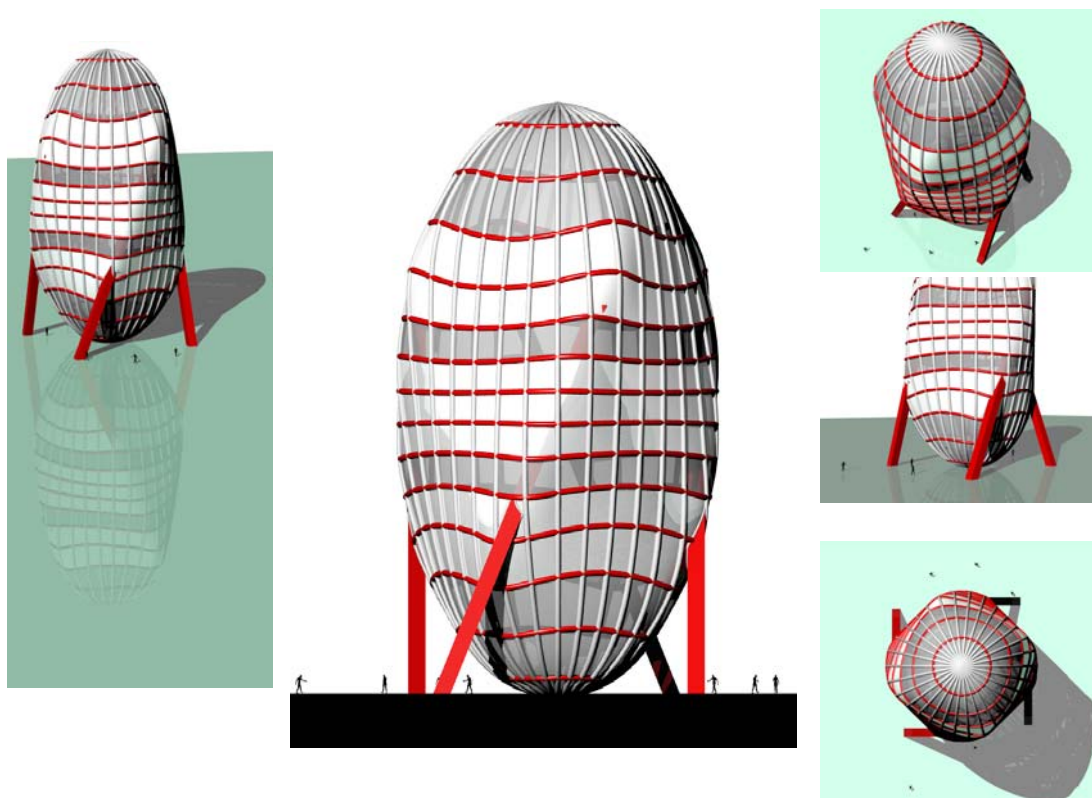
На следећој слици (Слика 6 - 2) дат је још један пример архитектонске просторне структуре која је генерисана помоћу четири фокуса и за коју важи:  $R_A + R_B + R_C + R_H = \mathcal{S}$ . Фокуси  $A, B, C$  и  $H$  ове геометријске форме постављени су тако да се поклапају са одговарајућим теменима коцке  $ABCDEFGH$  и формирају пирамиду  $ABCH$ . Ова 4-фокална геометријска јајаста форма има облик капљице, изведена је дискретизацијом површи.

Напредна компјутерска техника је омогућила да се испита и изврши симулација аеродинамичких особина објеката и да се на основу ове турбуленције дође до ергономичне форме објеката, [78]. Данас, ергономичне, јајасте форме су често коришћени облици објеката у архитектури, [138]. Такође, примена јајасте форме у архитектури није само због визуелног ефекта већ и због енергетске ефикасности (минимизирањем површине зграде спречава се нежељени губитак или добит топлоте), [138]. Користећи јајасту форму зграде, око 15% грађевинског материјала се смањује у поређењу са конвенционалним ортогоналним зградама, [147]. Због претходно наведених особина јајастих форми, приказана 4-фокална просторна структура (Слика 6 - 2) има потенцијал за примену у архитектури.



Слика 6 - 2: Архитектонска просторна структура (4-фокална површ)

Директрисна површ која је дефинисана у поглављу 4.1.1.Б. као директрисно генерисани елемент са константном сумом растојања до 4 мимоилазне директрисе (Слика 4 - 63, десно) у овом делу рада представљена је мрежом изолинија (Слика 6 - 3). У последњих пар година изводе се архитектонски објекти са овим твист ефектом. Заротираност основа сваког спрата се највише уочава у погледу одозго (Слика 6 - 3 доле десно), док мимоилазне директрисе истичу атрактивност, али и стабилност приказаног генерисаног елемента.

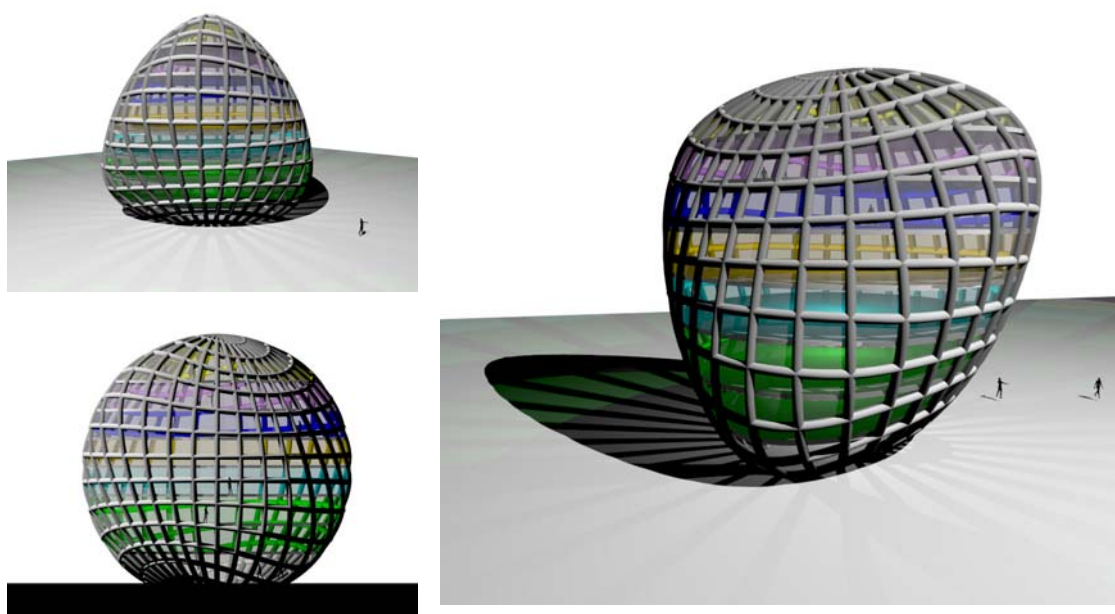


Слика 6 - 3: Архитектонска просторна структура (4-директрисна површ)

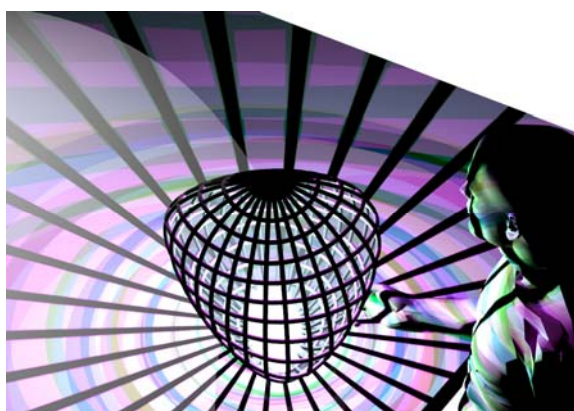
Фокално-директрисна површ која је генерисана као ГМТ са константном сумом растојања до темена тетраедра и растојања до ивица тетраедра, моделована је помоћу мреже изолинија (Слика 6 - 4). Основна геометријска структура тетраедра даје контруктивну стабилност овог објекта, а њена заобљена, флуидна форма је сврстава у групу Веберових површи којој би требало истражити аеродинамичке особине и енергетску ефикасност. Овај фокално-директрисни геометријски елемент може да се реализују и као микро елемент (Слика 6 - 5).

Због геометријски одредивих форми, флексибилности облика и морфолошке компатибилности са изводљивим структурама којима су наклоњени актуелни трендови у пројектовању, Веберове површи дају основ за истраживање њихове погодности за примену у обликовању архитектонско-урбанистичкох простора, како у 2D, тако и у 3D.





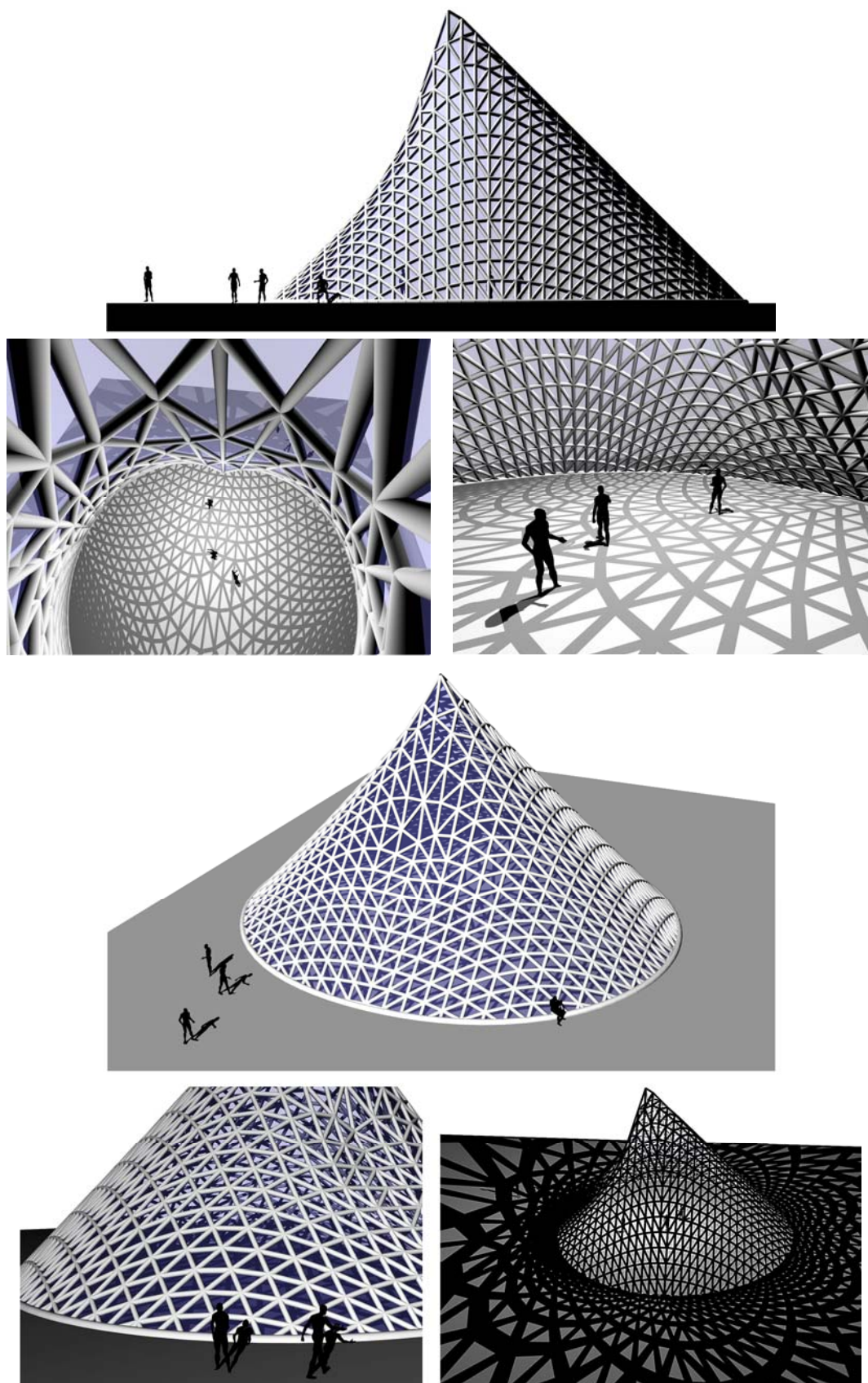
Слика 6 - 4: Архитектонска просторна структура (фокално-директрисна површ)



Слика 6 - 5: Лампа (фокално-директрисна површ)

Нови пример, у овом делу рада, јесте фокална површ која је анализирана у поглављу 4.5.3 и која је названа Декартов конус (Слика 4 - 144). Потенцијал примене овог Веберовог фокално генерисаног елемента у архитектури, огледа се у томе да су хоризонталне изоленије ове површи Декартови овали.

Приказано идејно решење павиљона (Слика 6 - 6), тј. архитектонске просторне структуре чији је образац за обликовање био Веберова површ генерисана са  $mR_1 + nR_2 = \mathcal{S}$ , где је  $\mathcal{S} = z(x, y)$  и  $m = 1, n = -2$ , изведено је помоћу триангулације површи (најчешћи начин дискретизације површи). Због својих геометријских карактеристика, Декартов конус се квалификује за површ са добрим оптичким особинама.



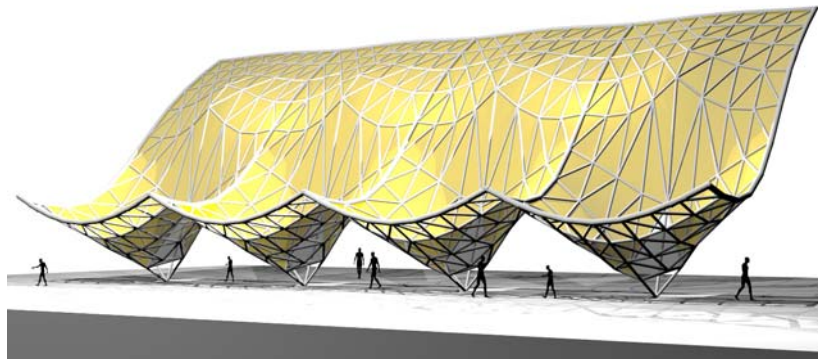
Слика 6 - 6: Архитектонска просторна структура (Декартов конус)

## 6.2. Сегмент генерисаног 3D елемента као геометријска матрица за моделовање архитектонских форми

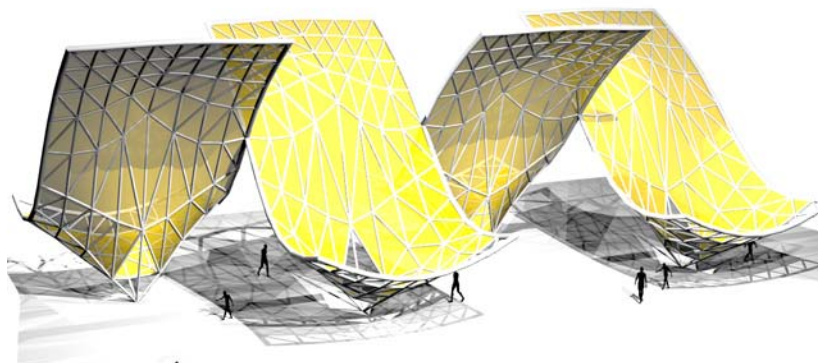
Приликом дизајнирања и реализације објеката у архитектури, један од битних аспеката је естетски. Поред естетског критеријума, Веберове површи задовољавају и критеријум универзалности. Под појмом универзалности подразумевамо да су површи, њихови исечци и склопови применљиви у обликовању архитектонских објеката различите структуре и намене, [72].

Једноставност извођења је добијена захваљујући Grasshopper дефиницијама које смо поставили за генерисање Веберових површи, док је њихова следећа обрада и анализа омогућена у оквиру програма Rhinoceros. У оквиру даљег процеса њихове реализације треба истаћи и то да је ово један од квалитетнијих програмских пакета који омогућава повезивање са рачунарски управљаним машинама, тј. 3D штампачима.

Мултипликацијом целих површи или њихових сегмената и различитим комбиновањем могуће је добити нове просторне форме. На слици 6 – 7 приказане су две архитектонске просторне структуре које настају различитим комбиновањем сегмента. Сегмент је издвојен из Веберове 3-фокалне површи са променљивом сумом:  $mR_1 + nR_2 + pR_3 = \mathcal{S}$ , где је  $\mathcal{S} = z(x, y)$  и вредности Веберових коефицијената су:  $m = 1, n = -2, p = 1$ .



а)



б)

Слика 6 - 7: Архитектонске просторне структуре  
(две комбинације мултипликације сегмента Веберове фокалне површи)



Поред естетског квалитета које поседују ове структуре, оне могу да се упореде са неким већ реализованим објектима који су засновани на много сложенијим геометријским формама.

Сводови, куполе, зидне завесе, самосталне структуре, објекти пејзажне архитектуре, ентеријерских решења, урбани мобилијар и опрема, само су неки од предлога примене Веберових површи у обликовању архитектонско-урбанистичког простора.

---

---

## 7. ЗАКЉУЧАК

### 7.1. Основни закључци и допринос истраживања

Након истраживања различитих типова равних кривих и површи које су генерисане као геометријско место тачака (ГМТ) у равни (2D) односно у простору (3D) чији је збир/производ растојања до три или више фиксираних тачака (фокуса) константан, у овом раду је показано да постоје и такве геометријске форме које настају као ГМТ са константном сумом/производом растојања до фиксираних правих (директриса). На основу генезе ових геометријских форми извршена је њихова класификација, као и конструктивно-геометријска интерпретација. На тај начин проширена су геометријска сазнања о читавој области из теорије кривих, теорије површи, неједнакости многоуглова и нова могућност обликовања у архитектури. Такође, захваљујући оваквој генези, добијена је веза фокалних и директрисних геометријских форми са Паладијевим пропорционалним системом, али и са Ферма-Веберовим скупом тачака, тј. са Веберовим локацијским проблемом. У складу са правилима у дизајну Паладијеве собе, приказане су фамилије фокално и директрисно генерисаних геометријских форми које у себи садрже правило аритметичке и геометријске средине. Генерализовањем Ферма-Веберовог оптимизационог проблема, уочила се и повезаност генерисаних елемената са неким геометријским неједнакостима многоугла, и на основу тога, формиран је прелазни тип. Прелазни тип је назван фокално-директрисно генерисани 2D и 3D елемент, тј. фокално-директрисна крива и фокално-директрисна површ.

Треће поглавље рада ставља акценат на нову групу прелазних кривих. На почетку овог дела рада, извршена је генерализација прелазног типа равних кривих са константном сумом растојања до фокуса и до директриса, односно дефинисана је Веберова фокално- директрисна крива. Прелазни тип кривих са константним производом растојања представљен је као Веберова фокално-директрисна крива Касинијевог типа. Испитана су геометријска својства, затим ред, дата је њихова класификација и графички приказ дијаграма фокално-директрисно генерисаних кривих. У наставку рада, приказане су варијације форме генерисаних 2D елемената у зависности од полазних параметара. Један део трећег поглавља посвећен је анализи погодности облика ових кривих за примену у архитектури. Због

---

разноврсности облика Веберових кривих и јасно дефинисане алгебарске једначине, истакнут је значај примене ових кривих у циљу реконструкције основе објеката и партерних решења. Примена трифокалних кривих за решавање геометрије инфраструктурних коридора и неких метричких локацијских проблема (објављен је и рад са називом Геометрија трифокалних кривих са применом у архитектури, урбанизму и просторном планирању, [79] аутора М. Петровић, Б. Бањац и Б. Малешевић) дата је на крају трећег поглавља рада.

У простору, генерисање је извршено на основу три геометријска појма (тачка – фокус; права – директриса и раван – директрисна раван). Комбинацијом основних појмова добијени су прелазни типови површи са константном сумом растојања и названи су: Веберова фокално-директрисна површ, Веберова фокално-директорна површ и Веберова директрисно-директорна површ. Прелазни типови површи са константним производом растојања дефинисани су на сличан начин као и претходне површи и назване истим именом са одредбом да су Касинијевог типа. Веберова површ и Веберова површ Касинијевог типа су називи површи које су генерисане помоћу сва три геометријска појма. Сви генерисани 3D елементи су представљени графичким приказима, испитана су геометријска својства, ред и дата је њихова класификација и дијаграм. Трећи део овог поглавља садржи варијацију форме генерисаних 3D елемената у зависности од полазних параметара. У наставку рада разматрају се 3D форме добијене транспозицијом фокално-директрисно генерисаних елемената. На крају четвртог поглавља рада анализирана је погодности облика ових површи за примену у архитектури. Извршена је анализа геометријских својстава при генерисању фокално-директрисних 3D елемената као архитектонских форми и испитана је могућност триангулације фокално-директрисно генерисаних елемената и погодности извођења у диагрид конструктивном систему. Показано је да постоје фокално-директрисно генерисани 3D елементи који могу да постану обрасци за обликовање архитектонских простора ради постизања акустичних и оптичких ефеката.

У петом поглављу анализирани су фокално-директрисно генерисани елементи као графичке интерпретације геометријских неједнакости многоугла. Извршено је проширење Ердеш-Морделове неједнакости за троугао до Ердеш-Морделове криве као фокално-директрисно генерисаног 2D елемента. Варијација форме Ердеш-Морделове криве у зависности од полазног троугла сагледана је на основу просторне интерпретације Ердеш-Морделове неједнакости за троугао, тј. када се она интерпретира као Ферма-Веберов оптимизациони проблем. Просторна интерпретација неких геометријских неједнакости многоугла у формирању фокално-директрисно генерисаних елемената је дата на крају петог поглавља.

У раду је извршена анализа погодности облика фокално-директрисно генерисаних 2D и 3D елемената за примену у архитектури. Због разноврсности облика фокално- директрисно генерисаних 2D елемената, показано је да је могућа њихова примена у апроксимацији и реконструкцији контуре основа објеката. Геометријска генеза фокално-директрисних кривих омогућава примену ових 2D елемената на решавање локацијских проблема. Мењањем малог броја параметара

---

---

(фокуса, директриса и/или Веберових коефицијената) може се знатно утицати на промену облика генерисаног 2D или 3D елемента, па се ове геометријске форме могу подешавати, прилагођавати и трансформисати према жељеним захтевима архитектонског задатка. Због својих геометријски одредивих форми, флексибилности облика и морфолошке компатибилности са изводљивим структурама којима су наклоњени актуелни трендови у пројектовању, фокално-директрисно генерисани елементи се могу користити као обрасци за обликовање архитектонско-урбанистичког простора.

## 7.2. Правци даљег истраживања

Геометријска генеза фокално-директрисних елемената омогућава да ове просторне форме могу да користе архитекте, урбанисти и дизајнери у стадијуму идејног решавања обликовања простора. Директрисне и фокално-директрисне геометријске форме нису до сада разматране и зато оне могу бити предмет даљих истраживања везаних за анализирање њихове статике и конструктивног извођења. Такође, правци даљег истраживања могу да се крећу ка испитивању аеродинамичких особина фокално-директрисних геометријских форми и њихове енергетске ефикасности.

- [1] Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2009). When Less is More: Visualizing Basic Inequalities. Math. Association of America, Sect. 7.1: *The Erdős-Mordell theorem*, pp. 93-99.
- [2] Banjac, B., Malešević, B., Petrović, M., & Obradović, M. (2013). A Computer Verification of a Conjecture About The Erdős-Mordell Curve. In *Proceedings of 21-th Telecommunications Forum, TELFOR 2013*, Beograd, Serbia, pp. 1031-1034.
- [3] Banjac, B., Petrović, M., & Malešević, B. (2014). Visualization of Weber's curves and surfaces with applications in some optimization problems. In *Proceedings of 22-nd Telecommunications Forum, TELFOR 2014*, Beograd, Serbia, pp. 1003-1006.
- [4] Barczik, G., Labs, O., & Lordick, D. (2009). Algebraic Geometry in Architectural Design. In *Proceedings of the 27<sup>th</sup> eCAADe Conference*, Istanbul, Turkey, 455-464.
- [5] Barczik, G., Labs, O., & Lordick, D. (2010). Perplexing Beauty: The Aesthetics of Algebraic Geometry in Architecture. In *Proceedings of the IAEA 2010*, Dresden.
- [6] Barczik, G., Lordick, D., & Labs, O. (2011). Algebraic Expansions: Broadening the Scope of Architectural Design through Algebraic Surfaces. In *Proceedings of the Design Modelling Symposium*, Springer Berlin Heidelberg, 8-16.
- [7] Barrallo, J. (2011). Ovals and Ellipses in Architecture, In *Proceedings of ISAMA 2011 Tenth Interdisciplinary Conference of the International Society of the Arts, Mathematics, and Architecture*, Columbia College, Chicago, Illinois, pp. 9-18.
- [8] Barrallo, J., & Sánchez-Beitia, S. (2011). The Geometry of Organic Architecture: The Works of Eduardo Torroja, Felix Candela and Miguel Fisac, *Bridges 2011: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, pp. 65-72.
- [9] Barbara, R. (2000). The Fermat-Torricelli points of n lines. *The Mathematical Gazette* 84, pp. 24-29.
- [10] Bazik, D., Dželebdžić, O. (2012) Web-based support of spatial planning in Serbia, *SPATIUM International Review*, No. 28, December 2012, pp.67-73
- [11] Beverlin, L.P. (2006). Using elimination to describe Maxwell curves, *Master Thesis*, Louisiana State University and Agricultural and Mechanical College, The Department of Mathematics.
- [12] Bomgardner, D.L. (2000). *The Story of the Roman Amphitheatre*. Taylor & Francis group, London and New York
- [13] Bottema, O., Đorđević, R. Ž., Janjić, R. R., Mitrović, D. S., & Vasić, P. M. (1969). *Geometric Inequalities*. Wolters-Noordhoff, Groningen.
- [14] Ceccato, C., Hesselgren, L., Pauly, M., Pottman, H., & Wallner, J. (2010). *Advances in Architectural Geometry*, Springer-Verlag/Viena.
- [15] Chilton, J. (2000). *Space Grid Structures*. Architectural Press, Oxford.

- 
- [16] Ching, F. (2007). *Architecture Form, Space & Order*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- [17] Coenders, J. L. (2008). *Structural Design – Special Structures*. TU Delft, Faculty of Civil Engineering and Geosciences.
- [18] Crapo, H. (1982). *Structural topology*. Interdisciplinary journal on geometry applied to problems of structure and morphology in architecture, design and engineering, Montreal.
- [19] Deng, B. (2011). *Special Curve Patterns for Freeform Architecture*. PhD Thesis. Vienna University of Technology, (mentor H. Pottmann).
- [20] Deng, B., Pottmann, H., & Wallner J. (2011). Functional webs for freeform architecture. *Computer Graphics Forum* 30(5), Symposium on Geometry Processing 2011.
- [21] Dergiades, N. (2004). Signed distances and the Erdős-Mordell inequality, *Forum Geometricorum* 4, 67–68.
- [22] Descartes, R. (1638). *Oeuvres de Descartes* (publiées par Charles Adam et Paul Tannery 1897-1913), Tome II, Paris, Retrieved from [http://fr.wikisource.org/wiki/%C5%92uvres\\_de\\_Descartes/%C3%89dition\\_Adam\\_et\\_Tannery](http://fr.wikisource.org/wiki/%C5%92uvres_de_Descartes/%C3%89dition_Adam_et_Tannery)
- [23] Domingo, A., Lazaro, C., & Serna, P. (2002) The Aesthetic of Visible Structures, *IABSE Symposium*, Melbourne 2002, pp. 1-11.
- [24] Dovniković, L. (1999). *Harmonija sfera, relativistička geometrija harmonijskih ekvivalenta*, Matica Srpska, Novi Sad
- [25] Duvernoy, S. (2002). Architecture and Mathematics in Roman Amphitheaters, *Nexus Network Journal* 4(3).
- [26] Ђукановић, Г. (2012). *Праменови кривих трећег и четвртог реда добијени прсликавањем праменова коника*, докторска дисертација, Универзитет у Београду, Архитектонски факултет;
- [27] Elkadi, M., Mourrain, B., & Piene, R. (2006). *Algebraic Geometry and Geometric Modeling*. Mathematic and Visualization. Springer-Verlag Berlin.
- [28] Erdős, P. (1935). Problem 3740, *Amer. Math. Monthly*, 42, 396.
- [29] Erdős, P., & Vincze, I. (1982). On the approximation of convex, closed plane curves by multifocal ellipses. *J. Appl. Probab.* 19A, pp. 89-96.
- [30] Farahani, R. Z., Hekmatfar, M. (2009) *Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies*, Chapter 1: Marzie Zarinbal, Distance Functions in Location Problems, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 5-18.
- [31] Farouki, R. (2008). *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable*. Series: Geometry and Computing, Vol. 1, Springer.
- [32] Farouki, R., & Moon, H.P. (2000). Bipolar and Multipolar Coordinates. In: *Cippola, R., Martin, R. (eds.) The Mathematics of Surfaces IX*, Springer, Heidelberg, pp. 348-371.
- [33] de Fermat, P. (1679). *Oeuvres de Fermat*, Livre I, Paris, English edition 1891, Chapter V: *Ad methodum de maxima et minima appendix*, p. 153., Retrieved from [http://fr.wikisource.org/wiki/%C5%92uvres\\_de\\_Fermat](http://fr.wikisource.org/wiki/%C5%92uvres_de_Fermat)
-

- 
- [34] Foster and Partners (2002) *Foster and Partners*, (editor and original texts Aurora Cuito), teNeues Publishing Group, Spain, 12-17, 46-53, 72-75.
- [35] Hanson, J. N. (2001). Cassini: His Ovals and Geocentricity. *The Biblical Astronomer*, 11(96), 37-45.
- [36] Harman, P. M. (1990). *The Scientific Letters and Papers of James Clerk Maxwell*. Vol.1, 1846-1862, Cambridge University Press, pp. 35-62.
- [37] Hensel, M., & Menges, A. (2008). *AD Versatility and Vicissitude: Performance in Morpho-Ecological Design*. Wiley, 74-79.
- [38] Hilbert, D., & Cohn-Vossen, S. (1990). *Geometry and the Imagination*, in English (*Anschauliche Geometrie*, 1932.), Chelsea Publishing Company NY, ISBN 0-8284-1087-9
- [39] Holzer, S., & Labs, O. (2006). Illustrating the Classification of Real cubic Surfaces. *Algebraic Geometry and Geometric Modeling*. Springer, Berlin, pp. 119-134.
- [40] Jüttler, B., & Piene, R. (2008). *Geometric Modeling and Algebraic Geometry*. Springer.
- [41] Karataş, M. (2013). A Multi Foci Closed Curve: Cassini Oval, its Properties and Applications, *Doğuş Üniversitesi Dergisi*, 14(2), 231-248.
- [42] Kaya, R., Akça, Z., Günaltı, I. & Özcan, M. (2000). General equation for taxicab conics and their classification. *Mitt. Math. Ges. Hamburg*, 19, 135–148.
- [43] Kazarinoff, D. K. (1957). A simple proof of the Erdős-Mordell inequality for triangles. *Michigan Mathematical Journal*, 4, 97-98.
- [44] Khilji, M. J. (2004). Multi Foci Closed Curves. *Journal of Theoretics* 6(6).
- [45] Koen, Ž-L. (2006). *Le Korbizije: 1887-1965: Lirika arhitekture u mašinskoj eri*. IPS Media, Beograd (Taschen GmbH, Germany), 84-85.
- [46] Kolarević, B. (2003). *Architecture in the Digital Age, Design and manufacturing*. Spon Press, NY, 39-45, 116-148, 177-202.
- [47] Kolarević, B., & Malkawi A.M. (2005). *Performative Architecture Beyond Instrumentality*. Spon Press, NY, 210-213.
- [48] Komornik, V. (1997). A short proof of the Erdős-Mordell theorem. *Amer.Math.Monthly*, 104, 57-60.
- [49] Krause, E. F. (1986). *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*. Dover Publications, Inc., New York.
- [50] Labs, O. (2006). *Hypersurfaces with Many Singularities. History-Constructions-Algorithms-Visualization*. PhD Thesis, Johannes Gutenberg-Universität Mainz (mentor D. van Straten).
- [51] Lee, H. (2001). Another Proof of the Erdős-Mordell theorem. *Forum Geometr.* 1, 7-8.
- [52] Liu, Y., Pottmann, H., Wallner, J., Yang Y.-L., & Wang W. (2006). Geometric Modeling with Conical Meshes and Developable Surfaces. In *ACM Trans. Graphics Proc. SIGGRAPH* 25(3), 681-689.
- [53] Liu, J. (2012). Some new inequalities for an interior point of a triangle. *Journal of Mathematical Inequalities*, 6(2), 195-204.
-



- 
- [54] Lu, Z. (2007). Erdős-Mordell inequality and beyond. *Educational Talk at the UCI Math Club* 28.11.2007. Retrieved from <http://www.math.uci.edu/~zlu/talks/2007-uci-mathclub/ucimathclub.pdf>
- [55] Mahon, B. (2003). *The Man Who Changed Everything – the Life of James Clerk Maxwell*. Hoboken, NJ: Wiley, p.16.
- [56] Malešević, B. (1985). Erdős theorem in the plane of the triangle. In *Proceedings of XI and XII Meeting of Mathematical Faculty Students of Yugoslavia 1985*, 245–250. (видети [66], pp. 318-320).
- [57] Malešević, B., Petrović, M., Obradović, M., & Popkonstantinović, B. (2014). On the Extension of the Erdős-Mordell Type Inequalities. *Mathematical Inequalities and Applications*, 17(1), 269-281.
- [58] Malešević, B., Petrović, M., Banjac, B., Jovović, I., & Jovanović, P. (2014). A method for extraction of arcs of the algebraic curves, In *Proceedings of 4th International Scientific Conference MoNGeometrija 2014 (Volume 2)*, Vlasina, Serbia, pp. 65–76.
- [59] Malešević, B., & Petrović, M. (2014). Barrow's Inequality and Signed Angle Bisectors. *Journal of Mathematical Inequalities*, 8(3), 537–544.
- [60] March, L. (2001). Palladio's Villa Emo: The Golden Proportion Hypothesis Rebutted. *Nexus Network Journal*, 3(2), 85-104.
- [61] Maxwell, J. C. (1846). On the description of oval curves, and those having a plurality of foci. On Oval Curves. On Trifocal Curves. In *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, Volume II.
- [62] Melzak, Z.A., & Forsyth, J.S. (1977). Polyconics 1: Polyellipses and optimization. *Quart. Appl. Math.* 35, 239-255.
- [63] Mladenović, N. (2004) *Kontinualni lokacijski problemi*, Matematički institut SANU, Bg.
- [64] Minculete, N. (2012). Several geometric inequalities of Erdős-Mordell type in the convex polygon, In *International Journal of Geometry* 1(1), 20-26.
- [65] Minsolmaz Yeler, G. (2015). Structures in Nature and Architecture. *Uludağ University Journal of The Faculty of Engineering*, Volume 20, Number 1, 23-38.
- [66] Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., & Volenec, V. (1988). *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London.
- [67] Мишић, С. (2012). *Конструктивно - геометријско генерисање купола са конкавним полиедарским површима*, докторска дисертација, Универзитет у Београду, Архитектонски факултет;
- [68] Mordell, L. J. (1937). Solution of Problem 3740, *Amer. Math. Monthly* 44(4). 252-254.
- [69] Motro, R. (2009). *An Antology of Structural Morphology*. World Scientific Publ.Co. Pte. Ltd.
- [70] Nagy, A. (2015) A short review on the theory of generalized conics and their applications, *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis*, 31, 81-96.
- [71] Nie, J., Parrilo, P. A., & Sturmfels, B. (2008). Semidefinite representation of the m-ellipse. In *Algorithms in algebraic geometry* (pp. 117-132). Springer New York.
-

- 
- [72] Николић, В. (2015). *Конструктивна обрада геометријских површи и њихова примена у архитектури*, докторска теза, Универзитет у Нишу, Грађевинско-архитектонски факултет.
- [73] Обрадовић, М. (2006). *Конструктивно-геометријска обрада тороидних делтаедара са правилном полигоналном основом*, докторска дисертација, Универзитет у Београду, Архитектонски факултет.
- [74] Obradović, M., Malešević, B., Petrović, M., & Popkonstantinović, B. (2012). One application of the cone surfaces on the Erdős-Mordell inequality. In *Proceedings of 3rd International Scientific Conference moNGeometrija 2012*, Novi Sad, Serbia, pp. 335-351.
- [75] Oikonomia, <http://www.oikonomia.info/wp-content/uploads/2013/05/Southstream-route.jpg> приступљено 24.11.2013.
- [76] Pambuccian, V. (2008). The Erdős-Mordell inequality is equivalent to non-positive curvature. *Journal of Geometry*, 88, 134-139.
- [77] Parks, J. M. (1999). Solving Geometry Problems in Everyday Life. In *AMTNYS Fall Meeting*, Buffalo, Nov. 11-13, 1999. Retrieved from <http://www2.potsdam.edu/parksjm/parksjm.html>
- [78] Петровић, М. (2010). *Јајасте криве и генерализација Хугелишеферове конструкције*, магистарска теза, Архитектонски факултет, Београд.
- [79] Petrović, M., Banjac, B., & Malešević, B. (2014). The Geometry of Trifocal Curves with Applications in Architecture, Urban and Spatial Planning, *SPATIUM International Review*, No. 32, December 2014, pp. 28–33. Java applet retrieved from <http://symbolicalgebra.etf.bg.ac.rs/Java-Applications/3-Ellipses/index.html>
- [80] Petrović, M., Malešević, B., & Banjac, B. (2015). Some surfaces of second order as examples of Weber's surfaces, In *Proceedings of 6th International Conference on Engineering Graphics and Design ICEGD 2015* (printed in Journal of Industrial Design and Engineering Graphics, Volume 10), Brasov, Romania, pp. 55–60.
- [81] Petrović, M., Malešević, B., Banjac, B., & Obradović, R. (2014). Geometry of some taxicab curves, In *Proceedings of 4th International Scientific Conference MoNGeometrija 2014* (Volume 2), Vlasina, Serbia, pp. 53–64.
- [82] Petrović, M., Obradović, R., & Mijailović, R. (2011). Suitability analysis of Hügelschäffer's egg curve application in architectural structures' geometry, In *Proceedings of ICEGD 2011*, (printed in Buletinul Institutului Politehnic din Iasi, Publicat de Universitatea Tehnica "Gheorghe Asachi" din Iasi, Tomul LVII (LXI), Fasc. 3), Iasi, Romania, pp.115-122.
- [83] Petruševski, Lj., Dabić, M., & Devetaković, M. (2010). Parametric curves and surfaces - MATHEMATICA demonstrations as a tool in exploration of architectural form. *SPATIUM International Review*, No. 22, July 2010, pp. 67-72.
- [84] Pieper, W. M. (2006) Multifocal Surfaces and Algorithms for Displaying Them. *Journal for Geometry and Graphics*, 10(1), 37-62.
- [85] Pottmann, H., Asperl, A., Hofer, M, & Kilian, A. (2007). *Architectural geometry*. Bentley Institute Press.
- [86] Pottmann, H., Liu, Y., Wallner, J., Bobenko A., & Wang W. (2007). Geometry of multi-layer freeform structures for architecture. *ACM Trans.Graphics* 26(3), Proc. SIGGRAPH.
-

- 
- [87] Pottmann, H., Schiftner, A., Bo, P., Schmiedhofer, H., Wang, W., Baldassini, N., & Wallner, J. (2008). Freeform surfaces from single curved panels. *ACM Trans. Graphics*, 27(3), Proc. SIGGRAPH.
- [88] Pottmann, H., & Wallner, J. (2001). *Computational line geometry. Mathematics and Visualization*. Springer Verlag, Heidelberg, Berlin.
- [89] Pottmann, H., & Wallner, J. (2008). The focal geometry of circular and conical mesh. *Adv. Comp. Math* 29, 249-268.
- [90] Reinhardt, D., Cabrera, D., Niemelä, M., Ulacco, G. & Jung, A. (2014). TriVoc: Robotic Manufacturing for Affecting Sound Through Complex Curved Geometries. *Robotic Fabrication in Architecture, Art and Design 2014*, pp 163-180.
- [91] Rosin, P. (2000). On Serlio's Construction of Ovals. *Nexus Network Journal* 2(3). Retrieved from <http://www.nexusjournal.com/the-nexus-conferences/nexus->
- [92] Rosin, P. (2004). On the construction of ovals. In *Proceedings of International Society for the Arts, Mathematics, and Architecture (ISAMA 2004)*, pp. 118-122., Retrieved from <http://www.isama.org/>
- [93] Rosin, P., & Trucco, E. (2005). The Amphitheatre Construction Problem, *Incontro Internazionale di Studi Rileggere L'Antico*, Rome.
- [94] Sahadevan, P.V. (1974). Evolution of 'N' polar curves by extension of focal points (by more than two) of an Ellipse. In *Proceedings of the Indian Academy of Sciences - Section A*, 79(6), 269-281.
- [95] Sahadevan, P.V. (1987). The theory of the eggellipse - a new curve with three focal points. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 18(1), 29-39.
- [96] Savelov, A. A. (1979). Ravninske krivulje. Poglavlje 7: *Descartesovi ovali*, Poglavlje 10: *Cassinijevi ovali*, Školska knjiga, Zagreb, pp. 1-375.
- [97] Schmiedhofer, H. (2007). *Discrete Freeform-Surfaces for Architecture*. Technischen Universität Wien, Fakultät für Architektur und Raumplanung.
- [98] Sekino, J. (1999). *m*-Ellipses and the minimum distance sum problem. *The American Mathematical Monthly*, 106(3), 193-202.
- [99] Shi, L. (2013). *Architectural Surfaces and Structures from Circular Arcs*. PhD Thesis. King Abdullah University of Science and Technology, Thuwal, Kingdom of Saudi Arabia, (mentor H. Pottman).
- [100] Srbović, D., & Gajović, V. (2013). Determination and delineation of functional urban areas in Serbia. In *Conference Proceedings, 2<sup>nd</sup> International Scientific Conference RESPAG 2013*, Belgrade, pp. 649-665.
- [101] Sterk, H. (2005). *Geometry in architecture and building*. Faculteit Wiskunde en Informatica Technische Universiteit Eindhoven.
- [102] Suppes, P. (1991) Rules of Proportion in Architecture, *Midwest Studies in Philosophy XVI*, 16(1), pp. 352-358.
- [103] Teodorović, D. (2009) *Transportne mreže*, Poglavlje 9: Lokacijski problem, Saobraćajni fakultet, Beograd, 389-399.
-

- 
- [104] Torricelli E., Loria G., Vassura G. (1919) *Opere de Evangelista Torricelli* Vol I, Part 2, English edition, Faenza, pp. 90–97.
- [105] Tošić, D., & Maksin-Mičić M. (2009). Functional Urban Regions as an Instrument for balanced Development of the Republic of Serbia. *Thematic Conference Proceedings – Volume 1. Regional development, Spacial Planning and Strategic Governance*. IAUS, Beograd, 155-178.
- [106] Uteshev, A. Yu. (2014). Analytical solution for the generalized Fermat–Torricelli problem. *The American Mathematical Monthly*, 121(4), 318-331.
- [107] Varga, A., & Vincze, C. (2008). On a lower and upper bound for the curvature of ellipses with more than two foci. *Expositiones Mathematicae*, 26(1), 55-77.
- [108] Vincze, Cs., & Nagy, A. (2011) An introduction to the theory of generalized conics and their applications, *J. Geom. Phys.*, 61(4), 815-828.
- [109] Vincze, Cs., & Nagy, A. (2012) On the theory of generalized conics with applications in geometric tomography, *J. Approx. Theory*, 164(3), 371-390.
- [110] Volek, J. (2006) Location analysis – Possibilities of use in public administration, *Verejná správa* 2006, Univerzita Pardubice, 84-85.
- [111] de Villiers, M. (2009). From the Fermat point to the De Villiers points of a triangle. In *Proceedings of the 15th Annual AMESA Congress*. University of Free State, Bloemfontein, 1-8. Retrieved from <http://frink.machighway.com/~dynamicm/weighted-airport.html>
- [112] Vouga, E., Höbinger, M., Wallner, J. & Pottmann H. (2012). Design of Self-Supporting surfaces. *ACM Trans. Graphics* 31, Proc. SIGGRAPH.
- [113] Zuk, R. (2015). From Renaissance Musical Proportions to Polytonality in Twentieth Century Architecture, *Architecture and Mathematics from Antiquity to the Future*, Volume I: Antiquity to the 1500s (Part V: Theories of Proportion, Symmetry, Periodicity; Chapter 38), K. Williams and M.J. Ostwald (eds.), Springer International Publishing Switzerland 2015, pp. 567-584
- [114] Wallner, J. & Pottmann, H., (2011). Geometric Computing for Freeform Architecture. *J. Math. Industry* 1, 1-19.
- [115] Wallner, J., Schiftner, A., Kilian, M., Flöry, S., Höbinger, M., Deng, B., Huang, Q., & Pottmann, H. (2010). Tiling freeform shapes with straight panels: Algorithmic methods. In: Ceccato, C., et al. (Eds.), *Advances in Architectural Geometry 2010*. Springer, 73–86.
- [116] Weber, A. (1929). [translated by Carl J. Friedrich from Weber's 1909 book *Über den Standort der Industrien*], *Alfred Weber's Theory of the Location of Industries*, Chicago, The University of Chicago Press.
- [117] Bauers, M. *The Mathematical Means*: <http://jwilson.coe.uga.edu/emt668/EMAT6680.2002/Bauers/6690%20Asmt%201/6690Asmt1.html>  
приступљено 10.11.2015.
- [118] *Панус-Бошковићева дефиниција коника*:  
[http://ahyco.uniri.hr/Seminari2008/konike/p\\_b\\_def.html](http://ahyco.uniri.hr/Seminari2008/konike/p_b_def.html)  
приступљено 10.10.2015.
-

- 
- [119] *Cassinian ovals*: <http://www.mathcurve.com/courbes2d/cassini/cassini.shtml>  
приступљено 04.01.2015.
- [120] *Cassinian curves, ovals*:  
<http://www.mathcurve.com/courbes2d/cassinienne/cassinienne.shtml>  
приступљено 04.01.2015.
- [121] *Kiepert curve*: <http://www.mathcurve.com/courbes2d/kiepert/kiepert.shtml>  
приступљено 04.01.2015.
- [122] *Cassinian3D*: <http://www.mathcurve.com/surfaces/cassinienne3d/casinienne3d.shtml>  
приступљено 08.02.2015.
- [123] <http://architecture.about.com/od/greatbuildings/ig/Antoni-Gaud-/Guell-Palace.htm#step-heading>  
<http://architecture.about.com/od/greatbuildings/ig/Antoni-Gaud-/Colegio-Teresiano.htm#step-heading>  
приступљено 27.02.2016.
- [124] <http://www.carteret.edu/keoughp/fromblackboard/Roman/Roman%20Coloseum.Aireal.jpg>  
приступљено 03.01.2015.
- [125] <http://amf2010blog.blogspot.rs/2015/05/gaudi-teresa-de-jesus-y-el-colegio.html>  
приступљено 27.02.2016.
- [126] The Architectural review: Gaudi's Sacred Monster: Sagrada Familia, Barcelona, Catalonia  
By David Cohn, Link <http://www.architectural-review.com/gaudis-sacred-monster-sagrada-familia-barcelona-catalonia/8633438.article>  
приступљено 02.01.2015.
- [127] <http://www.worldofarchi.com/2012/07/ellipse-project-by-vs-arquitectos.html>  
приступљено 02.01.2015.
- [128] <http://www.flickr.com/photos/55705988@N06/8480404214>  
приступљено 03.01.2015.
- [129] [http://en.wikipedia.org/wiki/Cathedral\\_of\\_Bras%C3%Adlia](http://en.wikipedia.org/wiki/Cathedral_of_Bras%C3%Adlia)  
приступљено 03.01.2015.
- [130] <http://www.designboom.com/architecture/e-kevin-schopfer-noah-new-orleans-arcology-habitat/>  
приступљено 31.08.2015.
- [131] <http://www.archdaily.com/344664/ad-classics-tower-of-winds-toyo-ito/>  
приступљено 03.01.2015.
- [132] <http://www.fosterandpartners.com/projects/millennium-tower/gallery/>  
приступљено 03.01.2015.
- [133] [http://en.wikipedia.org/wiki/Kobe\\_Port\\_Tower#mediaviewer/File:Kobe\\_Port\\_Tower03bs3200.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/Kobe_Port_Tower#mediaviewer/File:Kobe_Port_Tower03bs3200.jpg)  
приступљено 03.01.2015.
- [134] [http://en.wikipedia.org/wiki/Montreal\\_Biosph%C3%A8re#mediaviewer/File:Biosph%C3%A8re\\_Montr%C3%A9al\\_CA.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/Montreal_Biosph%C3%A8re#mediaviewer/File:Biosph%C3%A8re_Montr%C3%A9al_CA.jpg)  
приступљено 05.01.2015.
-

- 
- [135] <http://theredlist.com/wiki-2-19-879-607-638-view-le-corbusier-2-profile-le-corbusier-philips-pavilion-brussels-belgium.html>  
приступљено 03.01.2015.
- [136] <http://www.fosterandpartners.com/projects/reichstag-new-german-parliament/>  
приступљено 03.01.2015.
- [137] <http://www.ncstatefair.org/facilities/dortonhistory.htm>  
<http://info.ncagr.com/DeepFried/wp-content/uploads/2011/04/dorton.jpg>  
[http://www.remhaus.pl/pol\\_pl\\_staw\\_areny.htm](http://www.remhaus.pl/pol_pl_staw_areny.htm)  
приступљено 25.03.2015.
- [138] <http://www.fosterandpartners.com/projects/30-st-mary-axe/>  
приступљено 03.01.2015.
- [139] [http://www.architecturaldigest.com/architecture/2013-02/best-architectural-projects-slideshow\\_slideshow\\_gardens-by-the-bay\\_3](http://www.architecturaldigest.com/architecture/2013-02/best-architectural-projects-slideshow_slideshow_gardens-by-the-bay_3)  
приступљено 23.08.2015.
- [140] [http://www.architecturaldigest.com/architecture/2013-02/best-architectural-projects-slideshow\\_slideshow\\_Absolute-World\\_16](http://www.architecturaldigest.com/architecture/2013-02/best-architectural-projects-slideshow_slideshow_Absolute-World_16)  
приступљено 23.08.2015.
- [141] [http://architectuul.com/architecture/view\\_image/belexpo/8479](http://architectuul.com/architecture/view_image/belexpo/8479)  
приступљено 23.08.2015.
- [142] <http://www.styleofdesign.com/architecture/ad-classics-los-manantiales-felix-candela/>  
приступљено 23.08.2015.
- [143] <http://hragvartanian.com/2008/02/28/calatravas-city-of-arts-sciences-in-valencia-spain/>  
приступљено 31.8.2015.
- [144] [https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical\\_aberration](https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_aberration)  
приступљено 8.9.2015.
- [145] Chapter 2: Geometric optics  
<http://physics.unm.edu/Courses/Thomas/Phys463fa11/Ch2.pdf>  
приступљено 8.9.2015.
- [146] <http://cgi.tutsplus.com/tutorials/quick-tip-vray-caustics-illuminative-aa--cg-5143>  
приступљено 8.9.2015.
- [147] <http://gbssmag.com/2012/11/james-law-cybertecture/>  
приступљено 1.3.2016.
- [148] VisuMath 3.0 by Ignace Van de Woestyne (downloads free software)  
<http://www.visumath.be/>  
приступљено 30.5.2014.
- [149] <http://symbolicalgebra.etf.bg.ac.rs/Java-Applications/>  
приступљено 15.10.2014.
-

<p><b>Елементи правилних полигона:</b></p> <p><math>n</math> - број страна правилног полигона;</p> <p><math>a</math> - страница правилног полигона (<math>a = 2\sqrt{R^2 + r^2}</math>);</p> <p><math>P</math> - површина правилног полигона (<math>P = nar/2</math>);</p> <p><math>R</math> - полупречник круга описаног око полигон;</p> <p><math>r</math> - полупречник круга уписаног у полигон.</p>					
$n$	$\frac{P}{a^2}$	$\frac{P}{R^2}$	$\frac{P}{r^2}$	$\frac{R}{a}$	$\frac{R}{r}$
3	0,4330	1,2990	5,1962	0,5774	2,0000
4	1,0000	2,0000	4,0000	0,7071	1,4142
5	1,7205	2,3776	3,6327	0,8507	1,2361
6	2,5981	25981	3,4641	1,0000	1,1547
7	3,6339	2,7364	3,3710	1,1524	1,1099
8	4,8284	2,8284	3,3137	1,3066	1,0824
9	6,1818	2,8925	3,2757	1,4619	1,0642
10	7,6942	2,9389	3,2492	1,6180	1,0515
12	11,196	3,0000	3,2154	1,9319	1,0353
15	17,642	3,0505	3,1883	2,4049	1,0223
16	20,109	3,0615	3,1826	2,5629	1,0196
20	31,569	3,0902	3,1677	3,1962	1,0125
24	45,575	3,1058	3,1597	3,8306	1,0086
32	81,225	3,1214	3,1517	5,1012	1,0048
48	183,08	3,1326	3,1461	7,6449	1,0021
64	325,69	3,1366	3,1441	10,190	1,0012
...	...	...	...	...	...
$\infty$	$\infty$	Пи	Пи	$\infty$	1



**ПРИЛОГ I-2**

Фокуси Директрисе Равни:	Функције растојања:	Дефиниција генерисаних 2D елемената:	$\mathcal{S}_0$ $\mathcal{S}$	Бр. сл. / Бр. стр.
<b><math>k = 3</math></b>				
$F_1(-1,0)$ $F_2(1,0)$ $F_3(0,\sqrt{3})$ $d_1(F_1, F_2)$ $d_2(F_2, F_3)$ $d_3(F_3, F_1)$ $\bar{a} = 2$ $\bar{R} = 2\sqrt{3}/3$ $\bar{r} = \sqrt{3}/3$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ $R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ $R_3 = \sqrt{x^2 + (y-\sqrt{3})^2}$ $r_1 =  y $ $r_2 = 0.5 \cdot  x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} $ $r_3 = 0.5 \cdot  x\sqrt{3} - y + \sqrt{3} $	$R_1 + R_2 + R_3 = \mathcal{S}$	$\mathcal{S}_0 = 3\bar{R} = 2\sqrt{3}$ , Ф-Т тачка $F$ $\mathcal{S} = \begin{cases} 3.58, & \text{_____} \\ 3.75, & \text{_____} \\ 4, & \text{_____} \\ 5, & \text{_____} \end{cases}$ $\mathcal{S}_1 = 2\bar{a} = 4$	Слика 3 - 18 а) / 37. стр.
		$R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = \mathcal{S}$	$\mathcal{S} = \begin{cases} 1.4, & \text{_____} \\ 1.539, & \text{_____} \\ 2.1, & \text{_____} \\ 7, & \text{_____} \end{cases}$ $\mathcal{S}_0 = \bar{R}^3 = 1.539$	Слика 3 - 20 б) / 38. стр.
		$r_1 + r_2 + r_3 = \mathcal{S}$	$\mathcal{S}_0 = 3\bar{r} = \sqrt{3}$ , Ф-Т тачка за 3 линије $\mathcal{S} = \begin{cases} 4, & \text{_____} \\ 6, & \text{_____} \\ 7, & \text{_____} \end{cases}$	Слика 3 - 24 а) / 41. стр.
		$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \mathcal{S}$	$\mathcal{S} = \begin{cases} 0.1, & \text{_____} \\ 2, & \text{_____} \\ 5, & \text{_____} \\ 8, & \text{_____} \end{cases}$	Слика 3 - 27 / 34. стр.
<b><math>k = 4</math></b>				
$F_1(-1,-1)$ $F_2(1,-1)$ $F_3(1,1)$ $F_4(-1,1)$ $d_1(F_1, F_2)$ $d_2(F_2, F_3)$ $d_3(F_3, F_4)$ $d_4(F_4, F_1)$ $\bar{a} = 2$ $\bar{R} = \sqrt{2}$ $\bar{r} = 1$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$ $R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$ $R_3 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ $R_4 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$ $r_1 =  y+1 $ $r_2 =  x-1 $ $r_3 =  y-1 $ $r_4 =  x+1 $	$\sum_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$	$\mathcal{S}_0 = 4\bar{R} = 4\sqrt{2}$ , Ф-Т тачка $F$ $\mathcal{S} = \begin{cases} 5.8, & \text{_____} \\ 6.828, & \text{_____} \\ 9, & \text{_____} \\ 12, & \text{_____} \end{cases}$ $\mathcal{S}_1 = 2\bar{a} + \bar{d} = 6.828$	Слика 3 - 18 б) / 37. стр.
		$\prod_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$	$\mathcal{S} = \begin{cases} 3.75, & \text{_____} \\ 4, & \text{_____} \\ 4.65, & \text{_____} \\ 7, & \text{_____} \end{cases}$ $\mathcal{S}_0 = \bar{R}^4 = 4$	Слика 3 - 20 в) / 38. стр.
		$\sum_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$	$\mathcal{S}_0 = 4\bar{r} = 4$ , Ф-Т тачка за 4 линије $\mathcal{S} = \begin{cases} 7, & \text{_____} \\ 9, & \text{_____} \\ 10, & \text{_____} \end{cases}$	Слика 3 - 24 б) / 41. стр.
		$\prod_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$	$\mathcal{S} = \begin{cases} 0.2, & \text{_____} \\ 2, & \text{_____} \\ 5, & \text{_____} \\ 10, & \text{_____} \end{cases}$	Слика 3 - 28 / 44. стр.

<b>k = 5</b>				
$F_1(-1,0)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$	$\sum_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$	$\mathcal{S}_0 = 5\bar{R},$ Ф-Т тачка $F$ $\mathcal{S} = \begin{cases} 8.7, & \text{_____} \\ 9.5, & \text{-----} \\ 10.5, & \text{.....} \\ 13, & \text{_____} \end{cases}$ $\mathcal{S}_1 = 2\bar{a} + 2\bar{d} = 9.5$	Слика 3 - 19 а) / 37. стр.
$F_2(1,0)$	$R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$			
$F_3(\Phi, 1.9)$	$R_3 = \sqrt{(x-\Phi)^2 + (y-1.9)^2}$			
$F_4(0,3.07)$	$R_4 = \sqrt{x^2 + (y-3.07)^2}$			
$F_5(-\Phi, 1.9)$	$R_5 = \sqrt{(x+\Phi)^2 + (y-1.9)^2}$			
$\Phi = 1.618$		$\prod_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$	$\mathcal{S} = \begin{cases} 14, & \text{_____} \\ 14.25, & \text{-----} \\ 16.18, & \text{.....} \\ 22, & \text{_____} \end{cases}$ $\mathcal{S}_0 = \bar{R}^5 = 14.25$	Слика 3 - 20 з) / 38. стр.
$d_1(F_1, F_2)$	$r_1 =  y $			
$d_2(F_2, F_3)$	$r_2 = 0.5 (1-\Phi)y + 1.9(x-1) $			
$d_3(F_3, F_4)$	$r_3 = 0.5 \cdot  \Phi y + 1.17x - 4.98 $			
$d_4(F_4, F_5)$	$r_4 = 0.5 \cdot  -\Phi y + 1.17x + 4.98 $			
$d_5(F_5, F_1)$	$r_5 = 0.5 (\Phi-1)y + 1.9(x+1) $	$\prod_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$	$\mathcal{S} = \begin{cases} 2.63, & \text{_____} \\ 15, & \text{-----} \\ 40, & \text{.....} \\ 120, & \text{_____} \end{cases}$	Слика 3 - 29 / 45. стр.
<b>k = 6</b>				
$F_1(-1,0)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$	$\sum_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$	$\mathcal{S}_0 = 6\bar{R} = 6\bar{a},$ Ф-Т тачка $F$ $\mathcal{S} = \begin{cases} 12.5, & \text{_____} \\ 13.5, & \text{-----} \\ 14.9, & \text{.....} \\ 17, & \text{_____} \end{cases}$ $\mathcal{S}_1 = 4\bar{a} + 4\bar{d}$ $= 8 + 4\sqrt{3} = 14.928$	Слика 3 - 19 б) / 37. стр.
$F_2(1,0)$	$R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$			
$F_3(2, \sqrt{3})$	$R_3 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-\sqrt{3})^2}$			
$F_4(1, 2\sqrt{3})$	$R_4 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2\sqrt{3})^2}$			
$F_5(-1, 2\sqrt{3})$	$R_5 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2\sqrt{3})^2}$			
$F_6(-2, \sqrt{3})$	$R_6 = \sqrt{(x+2)^2 + (y-\sqrt{3})^2}$	$\prod_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$	$\mathcal{S} = \begin{cases} 63, & \text{_____} \\ 64, & \text{-----} \\ 80, & \text{.....} \\ 130, & \text{_____} \end{cases}$ $\mathcal{S}_0 = \bar{R}^6 = 64$	Слика 3 - 21 / 39. стр.
$d_1(F_1, F_2)$	$r_1 =  y $			
$d_2(F_2, F_3)$	$r_2 = 0.5 \cdot  -y + \sqrt{3}(x-1) $			
$d_3(F_3, F_4)$	$r_3 = 0.5 \cdot  y + \sqrt{3}(x-3) $			
$d_4(F_4, F_5)$	$r_4 =  y - 2\sqrt{3} $			
$d_5(F_5, F_6)$	$r_5 = 0.5 \cdot  -y + \sqrt{3}(x+3) $	$\sum_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$	$\mathcal{S}_0 = 6\bar{r} = 6\sqrt{3},$ Ф-Т тачка за 6 линија $\mathcal{S} = \begin{cases} 12, & \text{_____} \\ 13.85, & \text{.....} \\ 18, & \text{_____} \end{cases}$	Слика 3 - 25 / 42. стр.
$d_6(F_6, F_1)$	$r_6 = 0.5 \cdot  y + \sqrt{3}(x+1) $			

**ПРИЛОГ I-3**

Фокуси Директрисе Равни:	Функције растојања:	Дефиниција генерисаних 2D елемената:	$\alpha$ $-\beta$ $\mathcal{S}$	Бр. сл./ Бр. стр.
<b><math>k = 3</math></b>				
$F_1(-1,0)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$	$\alpha(R_1 + R_2 + R_3)$ $+\beta(r_1 + r_2 + r_3) = \mathcal{S}$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\mathcal{S} = \begin{cases} 4, & \text{црна} \\ 3, & \text{црвена} \\ 2.3, & \text{плава} \\ 2, & \text{лила} \\ 1.8, & \text{зелена} \end{cases}$	Слика 3 - 30 а) (лево) / 46. стр.
$F_2(1,0)$	$R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$		$\alpha = 1$ $\beta = \begin{cases} 2.2, & \text{црна} \\ 2.1, & \text{црвена} \\ 1.8, & \text{плава} \\ 1.65, & \text{лила} \\ 1.5, & \text{зелена} \end{cases}$ $\mathcal{S} = 0$	Слика 3 - 34 а) (лево) / 50 стр.
$F_3(0, \sqrt{3})$	$R_3 = \sqrt{x^2 + (y - \sqrt{3})^2}$			
$d_1(F_1, F_2)$	$r_1 =  y $	$\alpha(R_1 \cdot R_2 \cdot R_3)$ $+\beta(r_1 \cdot r_2 \cdot r_3) = \mathcal{S}$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\mathcal{S} = \begin{cases} 9, & \text{црна} \\ 2.5, & \text{црвена} \\ 1.55, & \text{плава} \\ 1.355, & \text{лила} \\ 1.1, & \text{зелена} \end{cases}$	Слика 3 - 30 а) (десно) / 46. стр.
$d_2(F_2, F_3)$	$r_2 = 0.5 \cdot  x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} $		$\alpha = 1$ $\beta = \begin{cases} 28, & \text{црна} \\ 8, & \text{црвена} \\ 3.9, & \text{плава} \\ 3, & \text{лила} \\ 2.7, & \text{зелена} \end{cases}$ $\mathcal{S} = 0$	Слика 3 - 34 а) (десно) / 50 стр.
$d_3(F_3, F_1)$	$r_3 = 0.5 \cdot  x\sqrt{3} - y + \sqrt{3} $			
<b><math>k = 4</math></b>				
$F_1(-1, -1)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$	$\alpha \sum_{i=1}^k R_i + \beta \sum_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\mathcal{S} = \begin{cases} 10, & \text{црна} \\ 6, & \text{црвена} \\ 3.3, & \text{плава} \\ 2.8, & \text{лила} \\ 2.2, & \text{зелена} \end{cases}$	Слика 3 - 30 б) (лево) / 46. стр.
$F_2(1, -1)$	$R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$		$\alpha = 1$ $\beta = \begin{cases} 1.7, & \text{црна} \\ 1.65, & \text{црвена} \\ 1.6, & \text{плава} \\ 1.52, & \text{лила} \\ 1.43, & \text{зелена} \end{cases}$ $\mathcal{S} = 0$	Слика 3 - 34 б) (лево) / 50 стр.
$F_3(1, 1)$	$R_3 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$	$\alpha \prod_{i=1}^k R_i + \beta \prod_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\mathcal{S} = \begin{cases} 40, & \text{црна} \\ 9.5, & \text{црвена} \\ 4.5, & \text{плава} \\ 3.2, & \text{лила} \\ 2.7, & \text{зелена} \end{cases}$	Слика 3 - 30 б) (десно) / 46. стр.
$F_4(-1, 1)$	$R_4 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$		$\alpha = 1$ $\beta = \begin{cases} 40, & \text{црна} \\ 15, & \text{црвена} \\ 8.5, & \text{плава} \\ 6.5, & \text{лила} \\ 4.5, & \text{зелена} \end{cases}$ $\mathcal{S} = 0$	Слика 3 - 34 б) (десно) / 50 стр.
$d_1(F_1, F_2)$	$r_1 =  y + 1 $			
$d_2(F_2, F_3)$	$r_2 =  x - 1 $			
$d_3(F_3, F_4)$	$r_3 =  y - 1 $			
$d_4(F_4, F_1)$	$r_4 =  x + 1 $			

<b>k = 5</b>							
$F_1(-1,0)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$	$\alpha \sum_{i=1}^k R_i + \beta \sum_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\mathcal{S} = \begin{cases} 13, & \text{црна} \\ 10, & \text{црвена} \\ 6, & \text{плава} \\ 3.6, & \text{лила} \\ 2.7, & \text{зелена} \end{cases}$	Слика 3 - 30 в) (лево) / 46. стр.			
$F_2(1,0)$	$R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$		$\alpha \prod_{i=1}^k R_i + \beta \prod_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\mathcal{S} = \begin{cases} 1700, & \text{црна} \\ 200, & \text{црвена} \\ 16.7, & \text{плава} \\ 11.1, & \text{лила} \\ 9.7, & \text{зелена} \end{cases}$	Слика 3 - 30 в) (десно) / 46. стр.		
$F_3(\Phi, 1.9)$	$R_3 = \sqrt{(x-\Phi)^2 + (y-1.9)^2}$			$\alpha \prod_{i=1}^k R_i + \beta \prod_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\mathcal{S} = \begin{cases} 40, & \text{црна} \\ 14.5, & \text{црвена} \\ 9, & \text{плава} \\ 5, & \text{лила} \\ 3.5, & \text{зелена} \end{cases}$	Слика 3 - 34 в) (десно) / 50. стр.	
$F_4(0,3.07)$	$R_4 = \sqrt{x^2 + (y-3.07)^2}$				$\alpha \sum_{i=1}^k R_i + \beta \sum_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\mathcal{S} = \begin{cases} 12, & \text{црна} \\ 8.7, & \text{црвена} \\ 6, & \text{плава} \\ 4.5, & \text{лила} \\ 3, & \text{зелена} \end{cases}$	Слика 3 - 30 з) (лево) / 46. стр.
$F_5(-\Phi, 1.9)$	$R_5 = \sqrt{(x+\Phi)^2 + (y-1.9)^2}$					$\alpha \sum_{i=1}^k R_i + \beta \sum_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\mathcal{S} = \begin{cases} 1.6, & \text{црна} \\ 1.55, & \text{црвена} \\ 1.48, & \text{плава} \\ 1.43, & \text{лила} \\ 1.33, & \text{зелена} \end{cases}$
$\Phi = 1.618$	$R_6 = \sqrt{(x+2)^2 + (y-\sqrt{3})^2}$	$\alpha \prod_{i=1}^k R_i + \beta \prod_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$					$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\mathcal{S} = \begin{cases} 1800, & \text{црна} \\ 400, & \text{црвена} \\ 78, & \text{плава} \\ 50.2, & \text{лила} \\ 43, & \text{зелена} \end{cases}$
$d_1(F_1, F_2)$	$r_1 =  y $		$\alpha \prod_{i=1}^k R_i + \beta \prod_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$				$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\mathcal{S} = \begin{cases} 70, & \text{црна} \\ 30, & \text{црвена} \\ 22, & \text{плава} \\ 10, & \text{лила} \\ 5, & \text{зелена} \end{cases}$
$d_2(F_2, F_3)$	$r_2 = 0.5 (1-\Phi)y + 1.9(x-1) $						
$d_3(F_3, F_4)$	$r_3 = 0.5 \cdot  \Phi y + 1.17x - 4.98 $						
$d_4(F_4, F_5)$	$r_4 = 0.5 \cdot  -\Phi y + 1.17x + 4.98 $						
$d_5(F_5, F_1)$	$r_5 = 0.5 (\Phi-1)y + 1.9(x+1) $						
<b>k = 6</b>							
$F_1(-1,0)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$	$\alpha \sum_{i=1}^k R_i + \beta \sum_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\mathcal{S} = \begin{cases} 12, & \text{црна} \\ 8.7, & \text{црвена} \\ 6, & \text{плава} \\ 4.5, & \text{лила} \\ 3, & \text{зелена} \end{cases}$	Слика 3 - 30 з) (лево) / 46. стр.			
$F_2(1,0)$	$R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$		$\alpha \prod_{i=1}^k R_i + \beta \prod_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\mathcal{S} = \begin{cases} 1800, & \text{црна} \\ 400, & \text{црвена} \\ 78, & \text{плава} \\ 50.2, & \text{лила} \\ 43, & \text{зелена} \end{cases}$	Слика 3 - 30 з) (десно) / 46. стр.		
$F_3(2, \sqrt{3})$	$R_3 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-\sqrt{3})^2}$			$\alpha \sum_{i=1}^k R_i + \beta \sum_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\mathcal{S} = \begin{cases} 70, & \text{црна} \\ 30, & \text{црвена} \\ 22, & \text{плава} \\ 10, & \text{лила} \\ 5, & \text{зелена} \end{cases}$	Слика 3 - 34 з) (десно) / 50. стр.	
$F_4(1, 2\sqrt{3})$	$R_4 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2\sqrt{3})^2}$				$\alpha \prod_{i=1}^k R_i + \beta \prod_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$		
$F_5(-1, 2\sqrt{3})$	$R_5 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2\sqrt{3})^2}$					$\alpha \prod_{i=1}^k R_i + \beta \prod_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$	
$F_6(-2, \sqrt{3})$	$R_6 = \sqrt{(x+2)^2 + (y-\sqrt{3})^2}$	$\alpha \prod_{i=1}^k R_i + \beta \prod_{j=1}^k r_j = \mathcal{S}$					
$d_1(F_1, F_2)$	$r_1 =  y $						
$d_2(F_2, F_3)$	$r_2 = 0.5 \cdot  -y + \sqrt{3}(x-1) $						
$d_3(F_3, F_4)$	$r_3 = 0.5 \cdot  y + \sqrt{3}(x-3) $						
$d_4(F_4, F_5)$	$r_4 =  y - 2\sqrt{3} $						
$d_5(F_5, F_6)$	$r_5 = 0.5 \cdot  -y + \sqrt{3}(x+3) $						
$d_6(F_6, F_1)$	$r_6 = 0.5 \cdot  y + \sqrt{3}(x+1) $						

**ПРИЛОГ II-1**

Фокуси Директрисе Равни:	Функције растојања:	Дефиниција генерисаних 3D елемената:	$\mathcal{S}$	Бр. сл. / Бр. стр.
<b><math>k = 1</math></b>				
$F_1(0,0,0)$	$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$R_1 = \mathcal{S}$	1	Слика 4 - 10 (лево)/ 75. стр.
$P_1(0,0,0) \in d_1$ $d_1: z - \text{оса}$	$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$	$r_1 = \mathcal{S}$	1	Слика 4 - 51/ 91. стр.
<b><math>k = 2</math></b>				
$F_1(-1,0,0)$ $F_2(1,0,0)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$ $R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$	$R_1 + R_2 = \mathcal{S}$	2.5	Слика 4 - 10 (десно)/ 75. стр.
		$R_1 \cdot R_2 = \mathcal{S}$	0.95	Слика 4 - 19/ 80. стр.
			1	Слика 4 - 20/ 80. стр.
			1.05	Слика 4 - 21/ 81. стр.
			2.5	Слика 4 - 22/ 81. стр.
$P_1(-1,0,0) \in d_1$ $P_2(1,0,0) \in d_2$ $d_1 \parallel d_2 \parallel z$	$r_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ $r_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$	$r_1 + r_2 = \mathcal{S}$	2.5	Слика 4 - 52/ 91. стр.
		$r_1 \cdot r_2 = \mathcal{S}$	0.9	Слика 4 - 69/ 99. стр.
			1.1	Слика 4 - 70/ 99. стр.
			1	Слика 4 - 71/ 99. стр.
			2	Слика 4 - 72/ 99. стр.
$P_1(3, -1, 0) \in d_1$ $P_2(0, 0, 0) \in d_1, d_2$ $P_3(3, 1, 0) \in d_2$	$r_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \sqrt{(-x-3y)^2 + 10z^2}$ $r_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \sqrt{(x-3y)^2 + 10z^2}$	$r_1 + r_2 = \mathcal{S}$	5	Слика 4 - 53 / 91. стр.
		$r_1 \cdot r_2 = \mathcal{S}$	2	Слика 4 - 73/ 100. стр.
$P_1(-1,0,0) \in d_1$ $P_2(1,0,0) \in d_1$ $P_3(0, -1, 1) \in d_2$ $P_4(0, 1, 1) \in d_2$	$r_1 = \sqrt{y^2 + z^2}$ $r_2 = \sqrt{x^2 + (z-1)^2}$	$r_1 + r_2 = \mathcal{S}$	2	Слика 4 - 62/ 95. стр.
		$r_1 \cdot r_2 = \mathcal{S}$	0.2	Слика 4 - 84/ 104. стр.
			0.25	Слика 4 - 85/ 104. стр.
			0.5	Слика 4 - 86/ 104. стр.

ПРИЛОГ II-2

Фокуси Директрисе Равни:	Функције растојања:	Дефиниција генерисаних 3D елемената:	$\mathcal{S}$	Бр. сл. / Бр. стр.
$k = 3$				
$F_1(-1,0,0)$ $F_2(1,0,0)$ $F_3(0,\sqrt{3},0)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$ $R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ $R_3 = \sqrt{x^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2}$	$R_1 + R_2 + R_3 = \mathcal{S}$	4	Слика 4 - 11 / 76. стр.
			4.5	Слика 4 - 13 / 77. стр.
		$R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = \mathcal{S}$	1.5	Слика 4 - 23 / 82. стр.
			$\frac{8\sqrt{3}}{9}$	Слика 4 - 24 / 82. стр.
			$\sqrt{3}$	Слика 4 - 25 / 82. стр.
3	Слика 4 - 26 / 83. стр.			
$P_1(-1,0,0)$ $P_2(1,0,0)$ $P_3(0,\sqrt{3},0)$ $d_1(P_1, P_2)$ $d_2(P_2, P_3)$ $d_3(P_3, P_1)$	$r_1 = \sqrt{y^2 + z^2}$ $r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(x\sqrt{3} + y - \sqrt{3})^2 + 4z^2}$ $r_3 = \frac{1}{2}\sqrt{(x\sqrt{3} - y + \sqrt{3})^2 + 4z^2}$	$r_1 + r_2 + r_3 = \mathcal{S}$	5	Слика 4 - 54 (лево) / 92. стр.
			1/9	Слика 4 - 74 (лево) / 100. стр.
		$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \mathcal{S}$	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	Слика 4 - 76 (лево) / 101. стр.
			0.5	Слика 4 - 78 (лево) / 101. стр.
$P_1(-1,0,0) \in d_1$ $P_2(1,0,0) \in d_2$ $P_3(0,\sqrt{3},0) \in d_3$ $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel z$	$r_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ $r_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ $r_3 = \sqrt{x^2 + (y-\sqrt{3})^2}$	$r_1 + r_2 + r_3 = \mathcal{S}$	4	Слика 4 - 57 (лево) / 93. стр.
			4.5	Слика 4 - 59 (лево) / 94. стр.
		$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \mathcal{S}$	1.5	Слика 4 - 80 a) / 102. стр.
			$\sqrt{3}$	Слика 4 - 81 a) / 102. стр.
			$\frac{8\sqrt{3}}{9}$	Слика 4 - 82 a) / 103. стр.
3	Слика 4 - 83 a) / 103. стр.			
$P_1(-1,0,0)$ $P_2(1,0,0)$ $P_3(0,\sqrt{3},0)$ $P_4(-1,0,h)$ $P_5(1,0,h)$ $P_6(0,\sqrt{3},h)$ $d_1(P_1, P_5)$ $d_2(P_2, P_6)$ $d_3(P_3, P_4)$ $h = 5,$ $q = \frac{1}{\sqrt{h^2+4}}$	$r_1 = q \sqrt{\frac{(h(x+1)-2z)^2 + (h^2+4)y^2}{(h(x-1)+z)^2 + (\sqrt{3}(1-x)-y)^2 + (\sqrt{3}z-hy)^2}}$ $r_2 = q \sqrt{\frac{(h(x-1)+z)^2 + (\sqrt{3}(1-x)-y)^2 + (\sqrt{3}z-hy)^2}{(h(\sqrt{3}-y)-\sqrt{3}z)^2 + (\sqrt{3}(1+x)-y)^2 + (z+hx)^2}}$ $r_3 = q \sqrt{\frac{(h(\sqrt{3}-y)-\sqrt{3}z)^2 + (\sqrt{3}(1+x)-y)^2 + (z+hx)^2}{(h(x+1)-2z)^2 + (h^2+4)y^2}}$	$r_1 + r_2 + r_3 = \mathcal{S}$	2	Слика 4 - 63 (лево) / 96. стр.
			$\frac{\sqrt{3}}{9}$	Слика 4 - 87 (лево) / 105. стр.

ПРИЛОГ II-3

Фокуси Директрисе Равни:	Функције растојања:	Дефиниција генерисаних 3D елемената:	$\mathcal{S}$	Бр. сл. / Бр. стр.
<b><math>k = 4</math></b>				
$F_1(-1, -1, 0)$ $F_2(1, -1, 0)$ $F_3(1, 1, 0)$ $F_4(-1, 1, 0)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2}$ $R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2}$ $R_3 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}$ $R_4 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2}$	$\sum_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$	$4 + 2\sqrt{2}$	Слика 4 - 11/ 76. стр.
			8	Слика 4 - 13/ 77. стр.
		$\prod_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$	3.9	Слика 4 - 27 / 83. стр.
			4	Слика 4 - 28 / 84. стр.
			5	Слика 4 - 29 / 84. стр.
8	Слика 4 - 30 / 84. стр.			
$P_1(-1, -1, 0)$ $P_2(1, -1, 0)$ $P_3(1, 1, 0)$ $P_4(-1, 1, 0)$ $d_1(P_1, P_2), d_2(P_2, P_3),$ $d_3(P_3, P_4), d_4(P_4, P_1)$	$r_1 = \sqrt{(y+1)^2 + z^2}$ $r_2 = \sqrt{(x-1)^2 + z^2}$ $r_3 = \sqrt{(y-1)^2 + z^2}$ $r_4 = \sqrt{(x+1)^2 + z^2}$	$\sum_{i=1}^k r_i = \mathcal{S}$	8	Слика 4 - 54 (десно) / 92. стр.
			$\frac{1}{2}$	Слика 4 - 74 (десно) / 100. стр.
		$\prod_{i=1}^k r_i = \mathcal{S}$	1	Слика 4 - 76 (десно) / 101. стр.
			3	Слика 4 - 78 (десно) / 101. стр.
$P_1(-1, -1, 0) \in d_1$ $P_2(1, -1, 0) \in d_2$ $P_3(1, 1, 0) \in d_3$ $P_4(-1, 1, 0) \in d_4$ $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \parallel z$	$r_1 = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$ $r_2 = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$ $r_3 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ $r_4 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$	$\sum_{i=1}^k r_i = \mathcal{S}$	$4 + 2\sqrt{2}$	Слика 4 - 57(десно) / 93. стр.
			8	Слика 4 - 59 (десно) / 94. стр.
		$\prod_{i=1}^k r_i = \mathcal{S}$	3.9	Слика 4 - 80 б)/102. стр.
			5	Слика 4 - 81 б)/102. стр.
			4	Слика 4 - 82 б)/103. стр.
8	Слика 4 - 83 б)/103. стр.			
$P_1(-1, -1, 0)$ $P_2(1, -1, 0)$ $P_3(1, 1, 0)$ $P_4(-1, 1, 0)$ $P_5(-1, -1, h)$ $P_6(1, -1, h)$ $P_7(1, 1, h)$ $P_8(-1, 1, h)$ $d_1(P_1, P_6),$ $d_2(P_2, P_7),$ $d_3(P_3, P_8),$ $d_4(P_4, P_5),$ $h = 5,$ $q = \frac{1}{\sqrt{h^2+4}}$	$r_1 = q \sqrt{\frac{(h(x+1) - 2z)^2 + (h^2+4)y^2}{}}$ $r_2 = q \sqrt{\frac{h^2(x-1)^2 + (2-2x)^2 + (2z-hy)^2}{}}$ $r_3 = q \sqrt{\frac{(h(x-1) + 2z)^2 + h^2(y-2)^2 + (4-2y)^2}{}}$ $r_4 = q \sqrt{\frac{(2z+h(y-2))^2 + h^2(x+1)^2 + (2+2x)^2}{}}$	$\sum_{i=1}^k r_i = \mathcal{S}$	5	Слика 4 - 63 (десно)/ 96. стр.
			1	Слика 4 - 87 (десно)/ 105. стр.



ПРИЛОГ II-4

Фокуси Директрисе Равни:	Функције растојања:	Дефиниција генерисаних 3D елемената:	$\mathcal{S}$	Бр. сл. / Бр. стр.		
<b><math>k = 5</math></b>						
$F_1(-1,0,0)$ $F_2(1,0,0)$ $F_3(\Phi, 1.90211,0)$ $F_4(0,3.07768,0)$ $F_5(-\Phi, 1.90211,0)$ $\Phi = 1.618033$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$ $R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ $R_3 = \sqrt{(x-\Phi)^2 + (y-1.9)^2 + z^2}$ $R_4 = \sqrt{x^2 + (y-3.07768)^2 + z^2}$ $R_5 = \sqrt{(x+\Phi)^2 + (y-1.9)^2 + z^2}$	$\sum_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$	4 + 4 $\Phi$	Слика 4 - 12/ 76. стр.		
			11.5	Слика 4 - 14/ 77. стр.		
				$\prod_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$	14.25	Слика 4 - 31/ 85. стр.
					14.253	Слика 4 - 33/ 85. стр.
					15	Слика 4 - 35/ 86. стр.
25	Слика 4 - 37/ 87. стр.					
$P_1(-1,0,0)$ $P_2(1,0,0)$ $P_3(\Phi, 1.9,0)$ $P_4(0,3.077,0)$ $P_5(-\Phi, 1.9,0)$ $d_1(P_1, P_2),$ $d_2(P_2, P_3),$ $d_3(P_3, P_4),$ $d_4(P_4, P_5),$ $d_5(P_5, P_1)$	$r_1 = \sqrt{y^2 + z^2}$ $r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{((\Phi-1)y + 1.9(x-1))^2 + 4z^2}$ $r_3 = \frac{1}{2}\sqrt{(-\Phi y - 1.17x + 4.98)^2 + 4z^2}$ $r_4 = \frac{1}{2}\sqrt{(-\Phi y + 1.17x + 4.98)^2 + 4z^2}$ $r_5 = \frac{1}{2}\sqrt{((\Phi-1)y + 1.9(x+1))^2 + 4z^2}$	$\sum_{i=1}^k r_i = \mathcal{S}$	10	Слика 4 - 55 (лево) / 92. стр.		
			2	Слика 4 - 75 (лево) / 100. стр.		
				$\prod_{i=1}^k r_i = \mathcal{S}$	4.94	Слика 4 - 77 (лево) / 101. стр.
					15	Слика 4 - 79 (лево) / 101. стр.
$P_1(-1,0,0) \in d_1$ $P_2(1,0,0) \in d_2$ $P_3(\Phi, 1.9,0) \in d_3$ $P_4(0,3.07,0) \in d_4$ $P_5(-\Phi, 1.9,0) \in d_5$ $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$ $\parallel d_5 \parallel z$	$r_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ $r_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ $r_3 = \sqrt{(x-\Phi)^2 + (y-1.9)^2}$ $r_4 = \sqrt{x^2 + (y-3.07)^2}$ $r_5 = \sqrt{(x+\Phi)^2 + (y-1.9)^2}$	$\sum_{i=1}^k r_i = \mathcal{S}$	4 + 4 $\Phi$	Слика 4 - 58 (лево) / 93. стр.		
			11.5	Слика 4 - 60 (лево) / 94. стр.		
				$\prod_{i=1}^k r_i = \mathcal{S}$	14	Слика 4 - 80 в) / 102. стр.
					15	Слика 4 - 81 в) / 102. стр.
					14.253	Слика 4 - 82 в) / 103. стр.
					30	Слика 4 - 83 в) / 103. стр.

ПРИЛОГ II-5

Фокуси Директрисе Равни:	Функције растојања:	Дефиниција генерисаних 3D елемената:	$\mathcal{S}$	Бр. сл. / Бр. стр.
<b><math>k = 5</math></b>				
$P_1(-1,0,0)$ $P_2(1,0,0)$ $P_3(\Phi, 1,9,0)$ $P_4(0,3.077,0)$ $P_5(-\Phi, 1,9,0)$ $P_6(-1,0,h)$ $P_7(1,0,h)$ $P_8(\Phi, 1,9,h)$ $P_9(0,3.077,h)$ $P_{10}(-\Phi, 1,9,h)$ $d_1(P_1, P_7),$ $d_2(P_2, P_8),$ $d_3(P_3, P_9),$ $d_4(P_4, P_{10}),$ $d_5(P_5, P_6)$ $h = 5,$ $q = \frac{1}{\sqrt{h^2+4}},$	$r_1 = q \sqrt{\frac{(h(x+1) - 2z)^2 + (h^2 + 4)y^2}{}}$	$\sum_{i=1}^k r_i = \mathcal{S}$	9	Слика 4 - 64 (лево) / 96. стр.
	$r_2 = q \sqrt{\frac{(h(x-1) - (\Phi-1)z)^2 + (1.9(1-x) + (\Phi-1)y)^2 + (1.9z - hy)^2}{}}$			
$d_1(P_1, P_7),$ $d_2(P_2, P_8),$ $d_3(P_3, P_9),$ $d_4(P_4, P_{10}),$ $d_5(P_5, P_6)$ $h = 5,$ $q = \frac{1}{\sqrt{h^2+4}},$	$r_3 = q \sqrt{\frac{(h(x-\Phi) + \Phi z)^2 + (4.97 - 1.17x - \Phi y)^2 + (1.17z - h(y-1.9))^2}{}}$	$\prod_{i=1}^k r_i = \mathcal{S}$	4.94	Слика 4 - 88 (лево) / 105. стр.
	$r_4 = q \sqrt{\frac{(h(y-3.077) + 1.17z)^2 + (4.97 + 1.17x - \Phi y)^2 + (\Phi z + hx)^2}{}}$			
	$r_5 = q \sqrt{\frac{(h(x+\Phi) - (\Phi-1)z)^2 + (1.9(1+x) + (\Phi-1)y)^2 + (1.9z - h(y-1.9))^2}{}}$			
<b><math>k = 6</math></b>				
$P_1(-1,0,0)$ $P_2(1,0,0)$ $P_3(2,\sqrt{3},0)$ $P_4(1,2\sqrt{3},0)$ $P_5(-1,2\sqrt{3},0)$ $P_6(-2,\sqrt{3},0)$ $P_7(-1,0,h)$ $P_8(1,0,h)$ $P_9(2,\sqrt{3},h)$ $P_{10}(1,2\sqrt{3},h)$ $P_{11}(-1,2\sqrt{3},h)$ $P_{12}(-2,\sqrt{3},h)$ $d_1(P_1, P_8),$ $d_2(P_2, P_9),$ $d_3(P_3, P_{10}),$ $d_4(P_4, P_{11}),$ $d_5(P_5, P_{12}),$ $d_6(P_6, P_7)$ $h = 4,$ $q = \frac{1}{\sqrt{h^2+4}},$	$r_1 = q \sqrt{\frac{(h(x+1) - 2z)^2 + (h^2 + 4)y^2}{}}$	$\sum_{i=1}^k r_i = \mathcal{S}$	13	Слика 4 - 64 (десно) / 96. стр.
	$r_2 = q \sqrt{\frac{(h(x-1) - z)^2 + (y - \sqrt{3}(x-1))^2 + (\sqrt{3}z - hy)^2}{}}$			
$d_1(P_1, P_8),$ $d_2(P_2, P_9),$ $d_3(P_3, P_{10}),$ $d_4(P_4, P_{11}),$ $d_5(P_5, P_{12}),$ $d_6(P_6, P_7)$ $h = 4,$ $q = \frac{1}{\sqrt{h^2+4}},$	$r_3 = q \sqrt{\frac{(h(x-2) + z)^2 + (-h(y-\sqrt{3}) + \sqrt{3}z)^2 + (\sqrt{3}(3-x) - y)^2}{}}$	$\prod_{i=1}^k r_i = \mathcal{S}$	27	Слика 4 - 88 (десно) / 105. стр.
	$r_4 = q \sqrt{\frac{(h(x-1) + 2z)^2 + h^2(y - 2\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3} - 2y)^2}{}}$			
	$r_5 = q \sqrt{\frac{(h(x+1) + z)^2 + (h(y - 2\sqrt{3}) + \sqrt{3}z)^2 + (\sqrt{3}(x+3) - y)^2}{}}$			
$d_1(P_1, P_8),$ $d_2(P_2, P_9),$ $d_3(P_3, P_{10}),$ $d_4(P_4, P_{11}),$ $d_5(P_5, P_{12}),$ $d_6(P_6, P_7)$ $h = 4,$ $q = \frac{1}{\sqrt{h^2+4}},$	$r_6 = q \sqrt{\frac{(h(x+2) - z)^2 + (h(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3}z)^2 + (\sqrt{3}(x+1) + y)^2}{}}$			

ПРИЛОГ II-6

Фокуси Директрисе Равни:	Функције растојања:	Дефиниција генерисаних 3D елемената:	$\mathcal{S}$	Бр. сл. / Бр. стр.	
<b><math>k = 6</math></b>					
$F_1(-1,0,0)$ $F_2(1,0,0)$ $F_3(2,\sqrt{3},0)$ $F_4(1,2\sqrt{3},0)$ $F_5(-1,2\sqrt{3},0)$ $F_6(-2,\sqrt{3},0)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$ $R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ $R_3 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2}$ $R_4 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 + z^2}$ $R_5 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 + z^2}$ $R_6 = \sqrt{(x+2)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2}$	$\sum_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$	$8 + 4\sqrt{3}$	Слика 4 - 12 / 76. стр.	
				16	Слика 4 - 14 / 77. стр.
			$\prod_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$	63.9	Слика 4 - 32 / 85. стр.
				64	Слика 4 - 34 / 86. стр.
				70	Слика 4 - 36 / 86. стр.
				150	Слика 4 - 38 / 87. стр.
$P_1(-1,0,0)$ $P_2(1,0,0)$ $P_3(2,\sqrt{3},0)$ $P_4(1,2\sqrt{3},0)$ $P_5(-1,2\sqrt{3},0)$ $P_6(-2,\sqrt{3},0)$ $d_1(P_1, P_2), d_2(P_2, P_3),$ $d_3(P_3, P_4), d_4(P_4, P_5),$ $d_5(P_5, P_6), d_6(P_6, P_1)$	$r_1 = \sqrt{y^2 + z^2}$ $r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3}(1-x) + y)^2 + 4z^2}$ $r_3 = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3}(3-x) - y)^2 + 4z^2}$ $r_4 = \sqrt{(2\sqrt{3} - y)^2 + z^2}$ $r_5 = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3}(3+x) - y)^2 + 4z^2}$ $r_6 = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3}(1+x) + y)^2 + 4z^2}$	$\sum_{i=1}^k r_i = \mathcal{S}$	12	Слика 4 - 55 (десно) / 92. стр.	
				5	Слика 4 - 75 (десно) / 100. стр.
			$\prod_{i=1}^k r_i = \mathcal{S}$	27	Слика 4 - 77 (десно) / 101. стр.
				80	Слика 4 - 79 (десно) / 101. стр.
$P_1(-1,0,0) \in d_1$ $P_2(1,0,0) \in d_2$ $P_3(2,\sqrt{3},0) \in d_3$ $P_4(1,2\sqrt{3},0) \in d_4$ $P_5(-1,2\sqrt{3},0) \in d_5$ $P_6(-2,\sqrt{3},0) \in d_6$ $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$ $\parallel d_5 \parallel d_6 \parallel z$	$r_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ $r_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ $r_3 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-\sqrt{3})^2}$ $r_4 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2\sqrt{3})^2}$ $r_5 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2\sqrt{3})^2}$ $r_6 = \sqrt{(x+2)^2 + (y-\sqrt{3})^2}$	$\sum_{i=1}^k r_i = \mathcal{S}$	$8 + 4\sqrt{3}$	Слика 4 - 58 (десно) / 93. стр.	
				16	Слика 4 - 60 (десно) / 94. стр.
			$\prod_{i=1}^k r_i = \mathcal{S}$	63.9	Слика 4 - 80 з) / 102. стр.
				70	Слика 4 - 81 з) / 102. стр.
				64	Слика 4 - 82 з) / 103. стр.
				150	Слика 4 - 83 з) / 103. стр.

ПРИЛОГ II-7

Фокуси Директрисе Равни:	Функције растојања:	Дефиниција генерисаних 3D елемената:	$\mathcal{S}$	Бр. сл. / Бр. стр.
<b><math>k = 4, l = 6, \text{тетраедар}</math></b>				
$F_1(-1,0,0)$ $F_2(1,0,0)$ $F_3(0, -1, \sqrt{2})$ $F_4(0,1, \sqrt{2})$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$	$\sum_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$	6	Слика 4 - 16 / 78. стр.
	$R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$		6.5	Слика 4 - 16 / 78. стр.
	$R_3 = \sqrt{x^2 + (y+1)^2 + (z-\sqrt{2})^2}$	$\prod_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$	2.2	Слика 4 - 39 / 88. стр.
	$R_4 = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (z-\sqrt{2})^2}$		2.3	Слика 4 - 40 / 88. стр.
			2.31	Слика 4 - 41 / 88. стр.
		3	Слика 4 - 42 / 88. стр.	
$P_1(1,1, -1)$ $P_2(-1, -1, -1)$ $P_3(-1,1,1)$ $P_4(1, -1,1)$ $d_1(P_1, P_2),$ $d_2(P_1, P_3),$ $d_3(P_1, P_4),$ $d_4(P_2, P_3),$ $d_5(P_2, P_4),$ $d_6(P_3, P_4)$	$r_1 = \sqrt{(x-y)^2 + 2(z+1)^2}/\sqrt{2}$	$\sum_{i=1}^l r_i = \mathcal{S}$	15	Слика 4 - 66 / 97. стр.
	$r_2 = \sqrt{(x+z)^2 + 2(y-1)^2}/\sqrt{2}$			
	$r_3 = \sqrt{2(x-1)^2 + (y+z)^2}/\sqrt{2}$	$\prod_{i=1}^l r_i = \mathcal{S}$	1/15	Слика 4 - 89/ 106. стр.
	$r_4 = \sqrt{2(x+1)^2 + (y-z)^2}/\sqrt{2}$		1/8	Слика 4 - 90/ 106. стр.
	$r_5 = \sqrt{(x-z)^2 + 2(y+1)^2}/\sqrt{2}$		1/4	Слика 4 - 91/ 107. стр.
	$r_6 = \sqrt{(x+y)^2 + 2(z-1)^2}/\sqrt{2}$			
<b><math>k = 6, l = 12, \text{октаедар}</math></b>				
$F_1(-1,0,0)$ $F_2(0, -1,0)$ $F_3(1,0,0)$ $F_4(0,1,0)$ $F_5(0,0, -1)$ $F_6(0,0,1)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$	$\sum_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$	$2+4\sqrt{2}$	Слика 4 - 17 / 79. стр.
	$R_2 = \sqrt{x^2 + (y+1)^2 + z^2}$		9	Слика 4 - 17 / 79. стр.
	$R_3 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$	$\prod_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$	1	Слика 4 - 43 / 89. стр.
	$R_4 = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2}$		1.15	Слика 4 - 44 / 89. стр.
	$R_5 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+1)^2}$		1.185	Слика 4 - 45 / 89. стр.
	$R_6 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$		2	Слика 4 - 46 / 89. стр.

<b><math>k = 8, l = 12, \text{коцка}</math></b>					
$F_1(-1,0,0)$ $F_2(0,-1,0)$ $F_3(1,0,0)$ $F_4(0,1,0)$ $F_5(-1,0,\sqrt{2})$ $F_6(0,-1,\sqrt{2})$ $F_7(1,0,\sqrt{2})$ $F_8(0,1,\sqrt{2})$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$ $R_2 = \sqrt{x^2 + (y+1)^2 + z^2}$ $R_3 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ $R_4 = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2}$ $R_5 = \sqrt{x^2 + (y+1)^2 + (z-\sqrt{2})^2}$ $R_6 = \sqrt{x^2 + (y+1)^2 + (z-\sqrt{2})^2}$ $R_7 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-\sqrt{2})^2}$ $R_8 = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (z-\sqrt{2})^2}$	$\sum_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$	$6 + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}$	Слика 4 - 18 / 79. стр.	
			13	Слика 4 - 18 / 79. стр.	
			$\prod_{i=1}^k R_i = \mathcal{S}$	5	Слика 4 - 47 / 90. стр.
				7.1	Слика 4 - 48 / 90. стр.
				7.32	Слика 4 - 49 / 90. стр.
				10	Слика 4 - 50 / 90. стр.
	$P_1(1,1,-1)$ $P_2(-1,1,-1)$ $P_3(-1,-1,-1)$ $P_4(1,-1,-1)$ $P_5(1,1,1)$ $P_6(-1,1,1)$ $P_7(-1,-1,1)$ $P_8(1,-1,1)$ $d_1(P_1, P_5),$ $d_2(P_2, P_6),$ $d_3(P_3, P_7),$ $d_4(P_4, P_8),$ $d_5(P_1, P_2),$ $d_6(P_2, P_3),$ $d_7(P_3, P_4),$ $d_8(P_4, P_1),$ $d_9(P_5, P_6),$ $d_{10}(P_6, P_7),$ $d_{11}(P_7, P_8),$ $d_{12}(P_8, P_5)$	$r_1 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ $r_2 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$ $r_3 = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$ $r_4 = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$ $r_5 = \sqrt{(y-1)^2 + (z+1)^2}$ $r_6 = \sqrt{(x+1)^2 + (z+1)^2}$ $r_7 = \sqrt{(y+1)^2 + (z+1)^2}$ $r_8 = \sqrt{(x-1)^2 + (z+1)^2}$ $r_9 = \sqrt{(y-1)^2 + (z-1)^2}$ $r_{10} = \sqrt{(x+1)^2 + (z-1)^2}$ $r_{11} = \sqrt{(y+1)^2 + (z-1)^2}$ $r_{12} = \sqrt{(x-1)^2 + (z-1)^2}$	$\sum_{i=1}^l r_i = \mathcal{S}$	20	Слика 4 - 68 / 98. стр.
			$\prod_{i=1}^l r_i = \mathcal{S}$	$20\sqrt{2}$	Слика 4 - 92 / 107. стр.
				$10\sqrt{41}$	Слика 4 - 93 / 108. стр.
				250	Слика 4 - 94 / 108. стр.

ПРИЛОГ III-1

Фокуси Директрисе Равни:	Функције растојања:	Дефиниција генерисаних 3D елемената:	$\alpha$ $\beta$ $\mathcal{S}$	Бр. сл. / Бр. стр.
<b><math>k = 4</math></b>				
$F_1(-1,0,0)$ $F_2(1,0,0)$ $F_3(1,2,0)$ $F_4(-1,2,0)$ $D_1((F_1, F_2) \perp H)$ $D_2((F_2, F_3) \perp H)$ $D_3((F_3, F_4) \perp H)$ $D_4((F_4, F_1) \perp H)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$ $R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ $R_3 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2}$ $R_4 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2}$ $\rho_1 =  y $ $\rho_2 =  x-1 $ $\rho_3 =  y-2 $ $\rho_4 =  x+1 $	$\alpha \sum_{i=1}^k R_i + \beta \sum_{i=1}^k \rho_i = \mathcal{S}$	1 -2 0	Слика 4 - 95 (лево) / 111. стр.
$D_1((F_1, F_2) \perp H)$ $D_2((F_2, F_3) \perp H)$ $D_3((F_3, F_4) \perp H)$ $D_4((F_4, F_1) \perp H)$	$\rho_1 =  y $ $\rho_2 =  x-1 $ $\rho_3 =  y-2 $ $\rho_4 =  x+1 $		1 -1	Слика 4 - 95 (десно) / 111. стр.
<b><math>k = 5</math></b>				
$F_1(-1,0,0)$ $F_2(1,0,0)$ $F_3(\Phi, 1.9, 0)$ $F_4(0, 3.07768, 0)$ $F_5(-\Phi, 1.9, 0)$ $D_1((F_1, F_2) \perp H)$ $D_2((F_2, F_3) \perp H)$ $D_3((F_3, F_4) \perp H)$ $D_4((F_4, F_5) \perp H)$ $D_5((F_5, F_1) \perp H)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$ $R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ $R_3 = \sqrt{(x-\Phi)^2 + (y-1.9)^2 + z^2}$ $R_4 = \sqrt{x^2 + (y-3.07768)^2 + z^2}$ $R_5 = \sqrt{(x+\Phi)^2 + (y-1.9)^2 + z^2}$ $\rho_1 =  y ; \quad \Phi = 1.618033$ $\rho_2 = 0.5 \cdot  (1-\Phi)y + 1.9(x-1) $ $\rho_3 = 0.5 \cdot  \Phi y + 1.17x - 4.98 $ $\rho_4 = 0.5 \cdot  -\Phi y + 1.17x + 4.98 $ $\rho_5 = 0.5 \cdot  (\Phi-1)y + 1.9(x+1) $	$\alpha \sum_{i=1}^k R_i + \beta \sum_{i=1}^k \rho_i = \mathcal{S}$	1 -2 0	Слика 4 - 96 (лево) / 111. стр.
$D_1((F_1, F_2) \perp H)$ $D_2((F_2, F_3) \perp H)$ $D_3((F_3, F_4) \perp H)$ $D_4((F_4, F_5) \perp H)$ $D_5((F_5, F_1) \perp H)$	$\rho_1 =  y ; \quad \Phi = 1.618033$ $\rho_2 = 0.5 \cdot  (1-\Phi)y + 1.9(x-1) $ $\rho_3 = 0.5 \cdot  \Phi y + 1.17x - 4.98 $ $\rho_4 = 0.5 \cdot  -\Phi y + 1.17x + 4.98 $ $\rho_5 = 0.5 \cdot  (\Phi-1)y + 1.9(x+1) $		1 -1	Слика 4 - 96 (десно) / 111. стр.
<b><math>k = 6</math></b>				
$F_1(-1,0,0)$ $F_2(1,0,0)$ $F_3(2, \sqrt{3}, 0)$ $F_4(1, 2\sqrt{3}, 0)$ $F_5(-1, 2\sqrt{3}, 0)$ $F_6(-2, \sqrt{3}, 0)$ $D_1((F_1, F_2) \perp H)$ $D_2((F_2, F_3) \perp H)$ $D_3((F_3, F_4) \perp H)$ $D_4((F_4, F_5) \perp H)$ $D_5((F_5, F_6) \perp H)$ $D_6((F_6, F_1) \perp H)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$ $R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ $R_3 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2}$ $R_4 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 + z^2}$ $R_5 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 + z^2}$ $R_6 = \sqrt{(x+2)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2}$ $\rho_1 =  y $ $\rho_2 = 0.5 \cdot  -y + \sqrt{3}(x-1) $ $\rho_3 = 0.5 \cdot  y + \sqrt{3}(x-3) $ $\rho_4 =  y - 2\sqrt{3} $ $\rho_5 = 0.5 \cdot  -y + \sqrt{3}(x+3) $ $\rho_6 = 0.5 \cdot  y + \sqrt{3}(x+1) $	$\alpha \sum_{i=1}^k R_i + \beta \sum_{i=1}^k \rho_i = \mathcal{S}$	1 -2 0	Слика 4 - 97 (лево) / 111. стр.
$D_1((F_1, F_2) \perp H)$ $D_2((F_2, F_3) \perp H)$ $D_3((F_3, F_4) \perp H)$ $D_4((F_4, F_5) \perp H)$ $D_5((F_5, F_6) \perp H)$ $D_6((F_6, F_1) \perp H)$	$\rho_1 =  y $ $\rho_2 = 0.5 \cdot  -y + \sqrt{3}(x-1) $ $\rho_3 = 0.5 \cdot  y + \sqrt{3}(x-3) $ $\rho_4 =  y - 2\sqrt{3} $ $\rho_5 = 0.5 \cdot  -y + \sqrt{3}(x+3) $ $\rho_6 = 0.5 \cdot  y + \sqrt{3}(x+1) $		1 -1	Слика 4 - 97 (десно) / 111. стр.

ПРИЛОГ III-2

Фокуси Директрисе Равни:	Функције растојања:	Дефиниција генерисаних 3D елемената:	$\mathcal{S} = z(x, y)$ $\alpha$ $\beta$	Бр. сл. / Бр. стр.	
<b><math>k = 3, l = 3</math></b>					
$F'_1(-1,0)$ $F'_2(1,0)$ $F'_3(0, \sqrt{3})$ $d_1(F'_1, F'_2)$ $d_2(F'_2, F'_3)$ $d_3(F'_3, F'_1)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ $R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ $R_3 = \sqrt{x^2 + (y-\sqrt{3})^2}$	$\alpha(R_1 + R_2 + R_3)$ $+\beta(r_1 + r_2 + r_3) = \mathcal{S}$	$\alpha = -1$ $\beta = 1$	Слика 4 - 98 / 113. стр.	
			$\alpha = 1/2$ $\beta = -1$	Слика 4 - 99 / 113. стр.	
		$r_1 =  y $ $r_2 = 0.5 \cdot  x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} $ $r_3 = 0.5 \cdot  x\sqrt{3} - y + \sqrt{3} $	$\alpha(R_1 \cdot R_2 \cdot R_3)$ $+\beta(r_1 \cdot r_2 \cdot r_3) = \mathcal{S}$	$\alpha = -1$ $\beta = 1$	Слика 4 - 100 (лево) / 114. стр.
				$\alpha = -1$ $\beta = 2^3$	Слика 4 - 100 (десно) / 114. стр.
<b><math>k = 4, l = 4</math></b>					
$F'_1(-1,0)$ $F'_2(0, -1)$ $F'_3(1,0)$ $F'_4(0,1)$ $d_1(F'_1, F'_2)$ $d_2(F'_2, F'_3)$ $d_3(F'_3, F'_4)$ $d_4(F'_4, F'_1)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ $R_2 = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$ $R_3 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ $R_4 = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$	$\alpha \sum_{i=1}^k R_i + \beta \sum_{j=1}^l r_j = \mathcal{S}$	$\alpha = -1$ $\beta = 1$	Слика 4 - 101 / 114. стр.	
			$\alpha = -\sqrt{2}/2$ $\beta = 1$	Слика 4 - 102 / 115. стр.	
		$r_1 =  y + x + 1  \cdot \sqrt{2}/2$ $r_2 =  -y + x - 1  \cdot \sqrt{2}/2$ $r_3 =  y + x - 1  \cdot \sqrt{2}/2$ $r_4 =  -y + x + 1  \cdot \sqrt{2}/2$	$\alpha \prod_{i=1}^k R_i + \beta \prod_{j=1}^l r_j = \mathcal{S}$	$\alpha = -1$ $\beta = 1$	Слика 4 - 103 (лево) / 115. стр.
				$\alpha = -1$ $\beta = (\sqrt{2})^4$	Слика 4 - 103 (десно) / 115. стр.
<b><math>k = 5, l = 5</math></b>					
$F'_1(-1,0)$ $F'_2(1,0)$ $F'_3(\Phi, 1.9)$ $F'_4(0, 3.07)$ $F'_5(-\Phi, 1.9)$ $\Phi = 1.618$ $d_1(F'_1, F'_2)$ $d_2(F'_2, F'_3)$ $d_3(F'_3, F'_4)$ $d_4(F'_4, F'_5)$ $d_5(F'_5, F'_1)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ $R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ $R_3 = \sqrt{(x-\Phi)^2 + (y-1.9)^2}$ $R_4 = \sqrt{x^2 + (y-3.07)^2}$ $R_5 = \sqrt{(x+\Phi)^2 + (y-1.9)^2}$	$\alpha \sum_{i=1}^k R_i + \beta \sum_{j=1}^l r_j = \mathcal{S}$	$\alpha = -1$ $\beta = -1$	Слика 4 - 104 (лево) / 116. стр.	
			$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ $\beta = 1$	Слика 4 - 104 (десно) / 116. стр.	
		$r_1 =  y $ $r_2 = 0.5 (1-\Phi)y + 1.9(x-1) $ $r_3 = 0.5 \cdot  \Phi y + 1.17x - 4.98 $ $r_4 = 0.5 \cdot  -\Phi y + 1.17x + 4.98 $ $r_5 = 0.5 (\Phi-1)y + 1.9(x+1) $	$\alpha \prod_{i=1}^k R_i + \beta \prod_{j=1}^l r_j = \mathcal{S}$	$\alpha = -1$ $\beta = -1$	Слика 4 - 105 (лево) / 116. стр.
				$\alpha = -1$ $\beta = \left(\frac{4}{1+\sqrt{5}}\right)^5$	Слика 4 - 105 (десно) / 116. стр..
<b><math>k = 6, l = 6</math></b>					
$F'_1(-1,0)$ $F'_2(1,0)$ $F'_3(2, \sqrt{3})$ $F'_4(1, 2\sqrt{3})$ $F'_5(-1, 2\sqrt{3})$ $F'_6(-2, \sqrt{3})$ $d_1(F'_1, F'_2)$ $d_2(F'_2, F'_3)$ $d_3(F'_3, F'_4)$ $d_4(F'_4, F'_5)$ $d_5(F'_5, F'_6)$ $d_6(F'_6, F'_1)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ $R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ $R_3 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-\sqrt{3})^2}$ $R_4 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2\sqrt{3})^2}$ $R_5 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2\sqrt{3})^2}$ $R_6 = \sqrt{(x+2)^2 + (y-\sqrt{3})^2}$	$\alpha \sum_{i=1}^k R_i + \beta \sum_{j=1}^l r_j = \mathcal{S}$	$\alpha = -1$ $\beta = -1$	Слика 4 - 106 (лево) / 117. стр.	
			$\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\beta = 1$	Слика 4 - 106 (десно) / 117. стр.	
		$r_1 =  y $ $r_2 = 0.5 \cdot  -y + \sqrt{3}(x-1) $ $r_3 = 0.5 \cdot  y + \sqrt{3}(x-3) $ $r_4 =  y - 2\sqrt{3} $ $r_5 = 0.5 \cdot  -y + \sqrt{3}(x+3) $ $r_6 = 0.5 \cdot  y + \sqrt{3}(x+1) $	$\alpha \prod_{i=1}^k R_i + \beta \prod_{j=1}^l r_j = \mathcal{S}$	$\alpha = -1$ $\beta = -1$	Слика 4 - 107 (лево) / 117. стр.
				$\alpha = -1$ $\beta = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^6$	Слика 4 - 107 (десно) / 117. стр.



ПРИЛОГ III-3

Фокуси Директрисе Равни:	Функције растојања:	Дефиниција генерисаних 3D елемената:	$\mathcal{S}, \beta$	Бр. сл. / Бр. стр.				
<b><math>k = 6, l = 6</math></b>								
$F_1(-1,0,0)$ $F_2(1,0,0)$ $F_3(2,\sqrt{3},0)$ $F_4(1,2\sqrt{3},0)$ $F_5(-1,2\sqrt{3},0)$ $F_6(-2,\sqrt{3},0)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$ $R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$	$\sum_{i=1}^k R_i = \beta \sum_{j=1}^l r_j$	1,42	Слика 4 - 110/ 121. стр.				
	$R_3 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2}$ $R_4 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 + z^2}$				1.5	Слика 4 - 111/ 122. стр.		
	$R_5 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 + z^2}$ $R_6 = \sqrt{(x+2)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2}$		1.55	Слика 4 - 112/ 122. стр.				
	$r_1 = \sqrt{y^2 + z^2}$ $r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3}(1-x)+y)^2 + 4z^2}$ $r_3 = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3}(3-x)-y)^2 + 4z^2}$						1.6	Слика 4 - 113/ 122. стр.
	$r_4 = \sqrt{(2\sqrt{3}-y)^2 + z^2}$ $r_5 = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3}(3+x)-y)^2 + 4z^2}$ $r_6 = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3}(1+x)+y)^2 + 4z^2}$							
	<b><math>k = 5, l = 5</math></b>							
$F_1(-1,0,0)$ $F_2(1,0,0)$ $F_3(\Phi, 1.9, 0)$ $F_4(0, 3.07768, 0)$ $F_5(-\Phi, 1.9, 0)$ $d_1(F_1, F_2),$ $d_2(F_2, F_3),$ $d_3(F_3, F_4),$ $d_4(F_4, F_5),$ $d_5(F_5, F_1)$ $\Phi = 1.618033$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$ $R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ $R_3 = \sqrt{(x-\Phi)^2 + (y-1.9)^2 + z^2}$ $R_4 = \sqrt{x^2 + (y-3.07768)^2 + z^2}$ $R_5 = \sqrt{(x+\Phi)^2 + (y-1.9)^2 + z^2}$	$\sum_{i=1}^k R_i - \sum_{j=1}^l r_j = \mathcal{S}$			1.5	Слика 4 - 114 (лево) / 123. стр.		
	$r_1 = \sqrt{y^2 + z^2}$ $r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{((\Phi-1)y + 1.9(x-1))^2 + 4z^2}$ $r_3 = \frac{1}{2}\sqrt{(-\Phi y - 1.17x + 4.98)^2 + 4z^2}$						1.62	Слика 4 - 114 (десно) / 123. стр.
	$r_4 = \frac{1}{2}\sqrt{(-\Phi y + 1.17x + 4.98)^2 + 4z^2}$ $r_5 = \frac{1}{2}\sqrt{((\Phi-1)y + 1.9(x+1))^2 + 4z^2}$		4.5	Слика 4 - 115/ (лево) / 123. стр.				
					8.5	Слика 4 - 115 (десно) / 123. стр.		

**ПРИЛОГ III-4**

Фокуси Директрисе Равни:	Функције растојања:	Дефиниција генерисаних 3D елемената:	$\mathcal{S}$	Бр. сл. / Бр. стр.
			<b><math>k = 4, l = 4</math></b>	
$F_1(-1,0,0)$ $F_2(1,0,0)$ $F_3(1,2,0)$ $F_4(-1,2,0)$ $d_1(F_1, F_2),$ $d_2(F_2, F_3),$ $d_3(F_3, F_4),$ $d_4(F_4, F_1)$	$R_1 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$	$\sum_{i=1}^k R_i - \sum_{j=1}^l r_j = \mathcal{S}$	5	Слика 4 - 116/ 124. стр.
	$R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$		<b><math>k = 3, l = 4</math></b>	
	$R_3 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2}$		5	Слика 4 - 117/ 124. стр.
	$R_4 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2}$		<b><math>k = 4, l = 3</math></b>	
	$r_1 = \sqrt{y^2 + z^2}$		5	Слика 4 - 118/ 125. стр.
	$r_2 = \sqrt{(x-1)^2 + z^2}$			
	$r_3 = \sqrt{(y-2)^2 + z^2}$			
	$r_4 = \sqrt{(x+1)^2 + z^2}$			

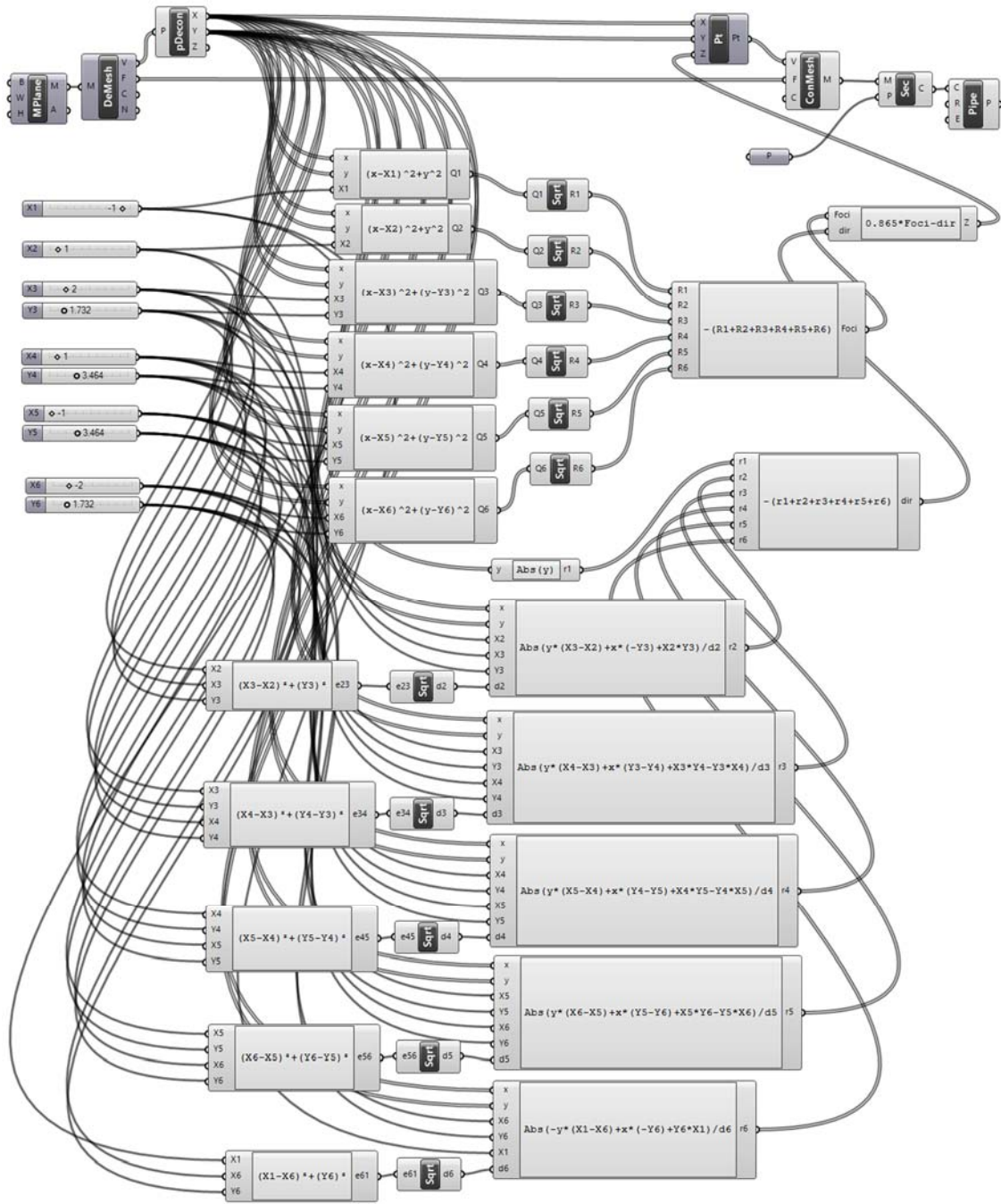
ПРИЛОГ III-5

Фокуси Директрисе Равни:	Функције растојања:	Дефиниција генерисаних 3D елемената:	$\beta$	Бр. сл. / Бр. стр.
<b><math>k = 8</math>, коцка</b>				
$F_1(1,1,-1)$ $F_2(-1,1-1)$ $F_3(-1,-1-1)$ $F_4(1,-1-1)$ $F_5(1,1,1)$ $F_6(-1,1,1)$ $F_7(-1,-1,1)$ $F_8(1,-1,1)$	$R_1 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$ $R_2 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$ $R_3 = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2}$ $R_4 = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2}$ $R_5 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$ $R_6 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$ $R_7 = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2}$ $R_8 = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2}$			
$d_1(F_1, F_5)$ , $d_2(F_2, F_6)$ , $d_3(F_3, F_7)$ , $d_4(F_4, F_8)$	$r_1 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ $r_2 = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$ $r_3 = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$ $r_4 = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$	$\prod_{i=1}^k R_i = \beta \prod_{j=1}^4 r_j$	50	Слика 4 - 119/ 126. стр.
$d_1(F_1, F_7)$ , $d_2(F_2, F_8)$ , $d_3(F_3, F_5)$ , $d_4(F_4, F_6)$	$r_1 = \sqrt{(x-y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2}/\sqrt{3}$ $r_2 = \sqrt{(x+y)^2 + (x-z)^2 + (y+z)^2}/\sqrt{3}$ $r_3 = \sqrt{(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2}/\sqrt{3}$ $r_4 = \sqrt{(x-y)^2 + (x+z)^2 + (y-z)^2}/\sqrt{3}$	$\prod_{i=1}^k R_i = \beta \prod_{j=1}^4 r_j$	175	Слика 4 - 120/ 126. стр.
$d_1(F_1, F_6)$ , $d_2(F_2, F_7)$ , $d_3(F_3, F_8)$ , $d_4(F_4, F_5)$	$r_1 = \sqrt{(x+z)^2 + 2(y-1)^2}/\sqrt{2}$ $r_2 = \sqrt{2(x+1)^2 + (y+z)^2}/\sqrt{2}$ $r_3 = \sqrt{(x-z)^2 + 2(y+1)^2}/\sqrt{2}$ $r_4 = \sqrt{2(x-1)^2 + (y-z)^2}/\sqrt{2}$	$\prod_{i=1}^k R_i = \beta \prod_{j=1}^4 r_j$	100	Слика 4 - 121/ 127. стр.
$P_1(0,0,-1)$ , $P_2(0,0,1)$ , $P_3(0,1,0)$ , $P_4(0,-1,0)$ , $P_5(-1,0,0)$ , $P_6(1,0,0)$ , $d_1(P_1, P_2)$ , $d_2(P_3, P_4)$ , $d_3(P_5, P_6)$	$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ $r_2 = \sqrt{x^2 + z^2}$ $r_3 = \sqrt{y^2 + z^2}$	$\prod_{i=1}^k R_i = \beta \prod_{j=1}^3 r_j$	175	Слика 4 - 122/ 127. стр.
$d_1(F_1, F_3)$ , $d_2(F_1, F_8)$ , $d_3(F_3, F_8)$ , $d_4(F_6, F_8)$ , $d_5(F_3, F_6)$ , $d_6(F_1, F_6)$	$r_1 = \sqrt{(x-y)^2 + 2(z+1)^2}/\sqrt{2}$ $r_2 = \sqrt{2(x-1)^2 + (y+z)^2}/\sqrt{2}$ $r_3 = \sqrt{(x-z)^2 + 2(y+1)^2}/\sqrt{2}$ $r_4 = \sqrt{(x+y)^2 + 2(z-1)^2}/\sqrt{2}$ $r_5 = \sqrt{2(x+1)^2 + (y-z)^2}/\sqrt{2}$ $r_6 = \sqrt{(x+z)^2 + 2(y-1)^2}/\sqrt{2}$	$\prod_{i=1}^k R_i = \beta \prod_{j=1}^6 r_j$	40	Слика 4 - 123/ 128. стр.

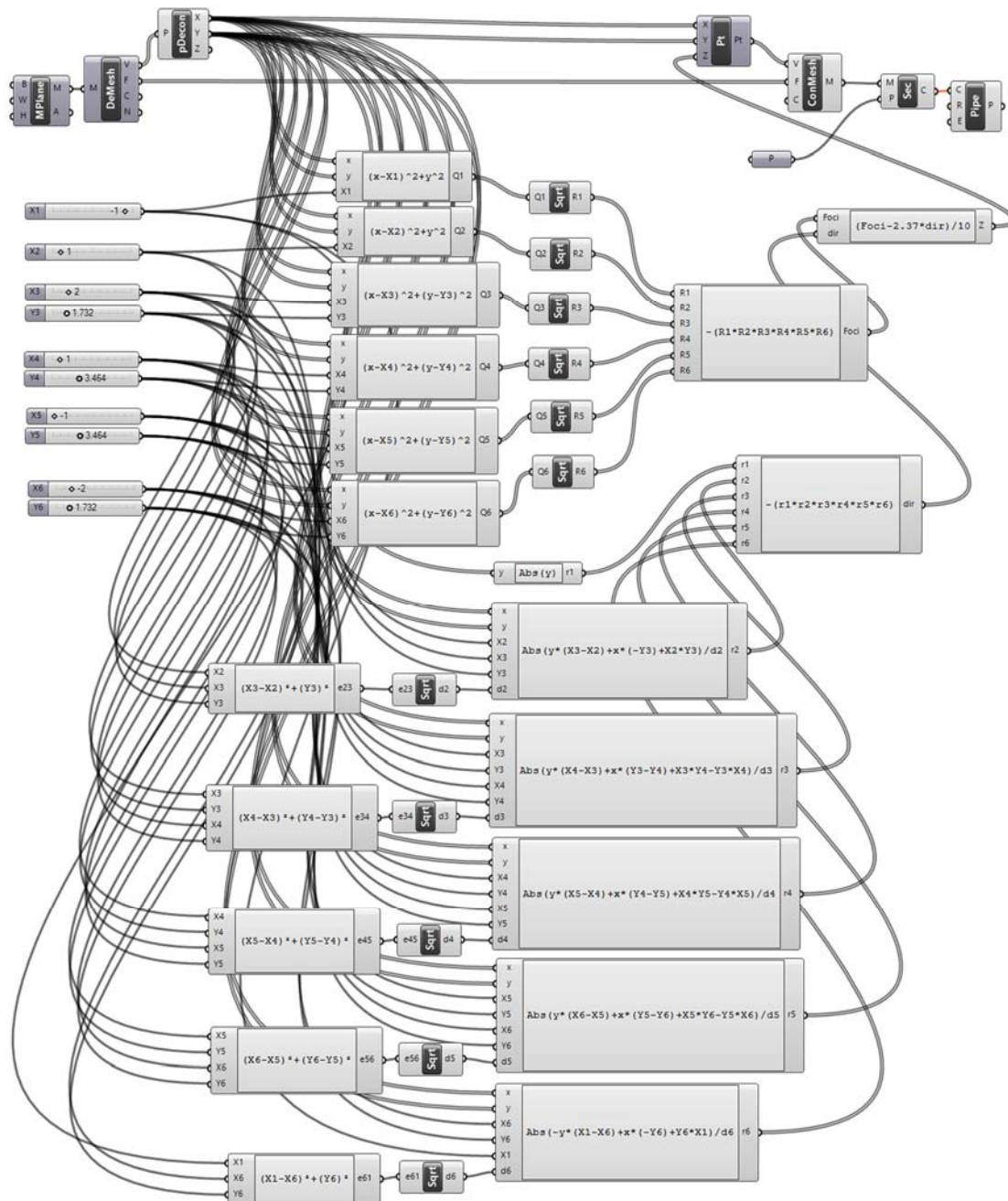
ПРИЛОГ IV-1

Фокуси Директрисе	Функције растојања:	Дефиниција генерисаног 3D елемента (Ердеш-Морделова површ):	$p$ $q$ $r$	Бр. сл. / Бр. стр.
$k = 3, l = 3$				
$F'_1(p, 0)$	$R_1 = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$	$R_1 + R_2 + R_3$ $-2(r_1 + r_2 + r_3) = z(x, y)$	-1	Слика 5 - 10 / 153. стр.
$F'_2(q, 0)$	$R_2 = \sqrt{(x - q)^2 + y^2}$		1	
$F'_3(0, r)$	$R_3 = \sqrt{x^2 + (y - r)^2}$		$\sqrt{3}$	
$d_1(F'_1, F'_2)$	$r_1 =  y $		-1.63	Слика 5 - 11 / 153. стр.
$d_2(F'_2, F'_3)$	$r_2 = \frac{ qr - qy - rx }{\sqrt{q^2 + r^2}}$		0.83	
$d_3(F'_3, F'_1)$	$r_3 = \frac{ pr - py - rx }{\sqrt{p^2 + r^2}}$		3.23	-2.5
		1.5	$\sqrt{ pq }$	
			-2.5	Слика 5 - 13 / 154. стр.
			1.5	
			1.1	

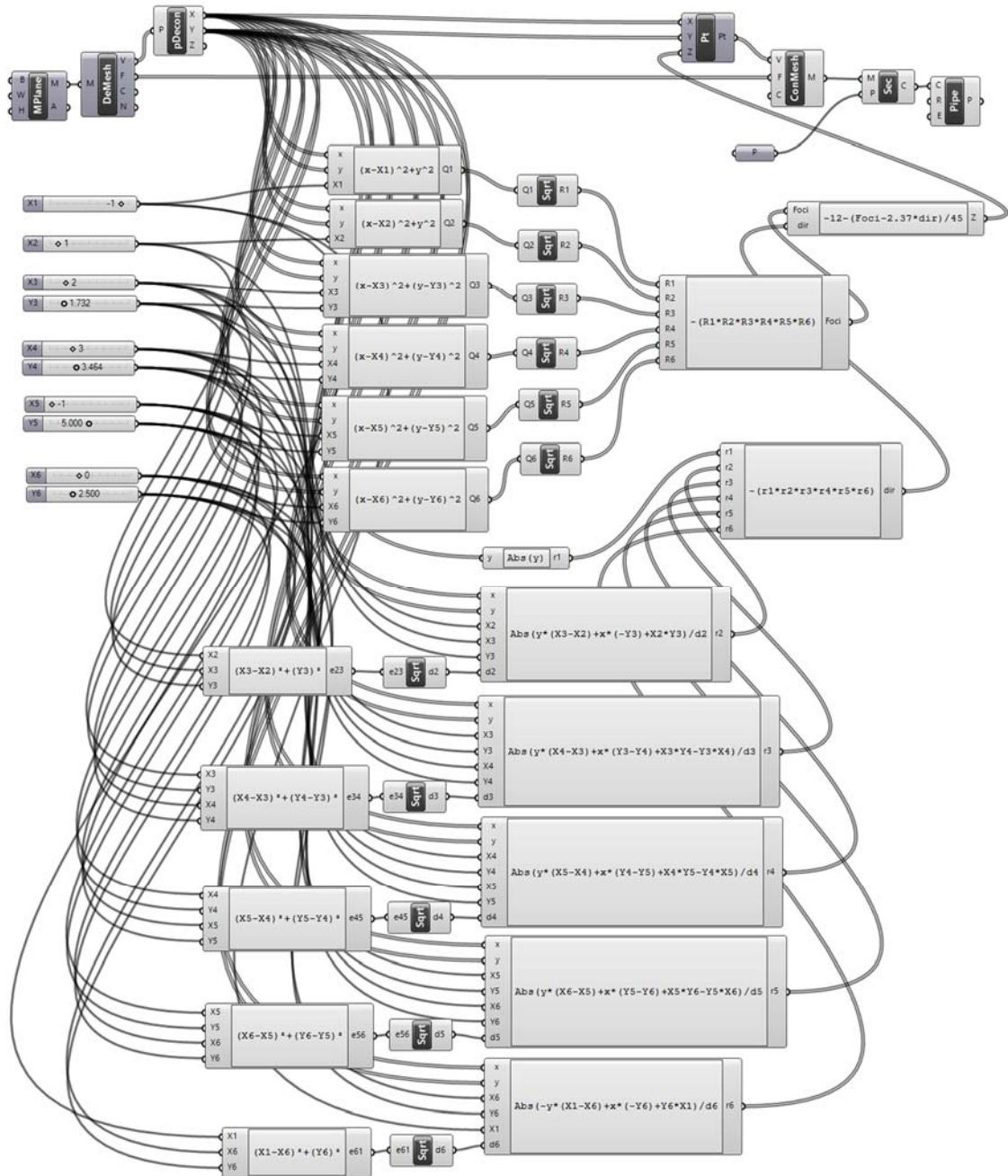
ПРИЛОГ IV-2



ПРИЛОГ IV-3



ПРИЛОГ IV-4





---

---

## БИОГРАФИЈА

Маја М. Петровић, магистар техничких наука – област архитектуре и урбанизма, рођена је у Књажевцу 5. 5. 1973. године. Основну и средњу школу завршила је са одличним успехом и Вуковим дипломама у Књажевцу. После завршене Гимназије са стеченим звањем математичко-програмерски сарадник, уписала је Природно-математички факултет у Нишу, одсек: Математика, смер: Рачунарство и информатика. Основне студије на ПМФ-у завршила је 2000. године са просечном оценом 8,06. Архитектонски одсек на Грађевинском факултету у Нишу уписала је шк. 1995/96. године, одслушала све предмете и апсолвирала је школске 2001/02. год. са просечном оценом 8,80. Након што је положила предмете Нацртна геометрија 1 и Нацртна геометрија 2 са највишим оценама ангажована је за демонстратора на поменутиим предметима у периоду од 1998. до 2001. године, а затим је радила као сарадник-истраживач Грађевинско-архитектонског факултета до 2004. године.

Последипломске студије из Нацртне геометрије, научно подручје Графичко представљање, конструисање и обликовање простора у архитектури и инжењерству уписала је децембра 2002. године на Архитектонском факултету Универзитета у Београду. Све испите положила је са просечном оценом 10 (десет) и септембра 2010. год. одбранила магистарску тезу „Јајасте криве и генерализација Хугелшеферове конструкције“ под менторским руководством проф. др Љиљане Петрушевски.

На Саобраћајном факултету у Београду, школске 2004/05. године ангажована је као хонорарни сарадник за извођење вежби на предмету Нацртна геометрија, а затим од фебруара 2006. године радила је као асистент-приправник на истом предмету. Од септембра 2011. године је у звању асистента на предмету Нацртна геометрија, Саобраћајног факултета Универзитета у Београду.

Мр Маја М. Петровић је аутор и коаутор више научних радова објављених у часописима, на домаћим и иностраним конференцијама. Била је члан Организационог одбора следећих конференција из Нацртне геометрије и Инжењерске графике: XX домаћа конференција моНГеометрија 2000 (одржана у Нишу); XXII домаћа конференција моНГеометрија 2004 (одржана у Београду); II међународна конференција моНГеометрија 2010 (одржана у Београду) и V међународна конференција моНГеометрија 2016 (одржаће се у Београду). Члан је Српског удружења за геометрију и графику.

### СПИСАК СТРУЧНИХ И НАУЧНИХ РАДОВА:

#### Магистарска теза:

1. **Петровић М.:** *Јајасте криве и генерализација Хугелшеферове конструкције*, Архитектонски факултет Универзитета у Београду, одбрањена 27.09.2010. године, **M72**

---

**Научни радови у часописима у категорији M20:**

2. Malešević, B. & Petrović M. (2014). Barrow's Inequality and Signed Angle Bisectors. *Journal of Mathematical Inequalities* 8(3), pp. 537–544, doi:10.7153/jmi-08-40 (IF 2013: 0.718, IF 2014: 0.632), ISSN: 1848-9575, **M21**
3. Malešević, B., Petrović, M., Obradović, M. & Popkonstantinović B. (2014). On the Extension of the Erdős-Mordell Type Inequalities. *Mathematical Inequalities and Applications* 17 (1), pp. 269–281, doi:10.7153/mia-17-22 (IF 2014: 0.645), ISSN: 1331-4343, **M22**
4. Petrović, M., Banjac, B. & Malešević, B. (2014). The Geometry of Trifocal Curves with Applications in Architecture, Urban and Spatial Planning. *SPATIUM International Review*, No. 32, December 2014, pp. 28–33, doi: 10.2298/SPAT1432028P, ISSN: 1450-569X, **M24**

**Радови у зборницима међународних конференција (M30):**

5. Obradović, M. & Petrović, M. (2008). The spatial interpretation of Hügelschäffer's construction of the egg curve. In *Proceedings of 1<sup>st</sup> International Conference for Geometry and Graphics moNGeometrija 2008*, Vrnjačka Banja, Serbia, pp. 222–232, ISBN 978-86-80295-83-1, **M33**  
<http://mongeometrija.com/zbornici/2008/259-marija-obradovi-maja-petroviprostornaintercijacija-hgelschffer-ove-konstrukcije-jajaste-krive>
6. Petrović, M. & Obradović, M. (2010). The complement of the Hügelschäffer's construction of the egg curve. In *Proceedings of 2<sup>nd</sup> International Conference for Geometry and Graphics moNGeometrija 2010*, Belgrade, Serbia, pp. 520-531, ISBN 978-86-7924-038-5, **M33**  
[http://mongeometrija.com/zbornici/2010/156-petrovic-obradovic-complement-of-the-hugelschaffer\\_s-construction-of-the-egg-curve](http://mongeometrija.com/zbornici/2010/156-petrovic-obradovic-complement-of-the-hugelschaffer_s-construction-of-the-egg-curve)
7. Obradović, M., Malešević, B. & Petrović, M. (2010). Conic sections of a type of egg curve based conoid. In *Proceedings of 2<sup>nd</sup> International Conference for Geometry and Graphics moNGeometrija 2010*, Belgrade, Serbia, pp. 447-466, ISBN 978-86-7924-038-5, **M33**  
<http://mongeometrija.com/zbornici/2010/138-obradovic-malesevic-petrovic-conic-sections-of-a-type-of-egg-curve-based-conoid>
8. Petrović, M. & Obradović, M. (2010). Constructing the egg curves using the golden ratio of pentagon. In *Proceedings of 2<sup>nd</sup> International Conference for Geometry and Graphics moNGeometrija 2010*, Belgrade, Serbia, pp. 532-541, ISBN 978-86-7924-038-5, **M33**  
<http://mongeometrija.com/zbornici/2010/159-petrovic-obradovic-constructing-the-eggcurves-using-the-golden-ratio-of-pentagon>

- 
9. **Petrović, M.** & Obradović, M. (2010). Solving the situation of Airport Bled by digital terrain modeling using the software package Rhinoceros. In *Proceedings of 2<sup>nd</sup> International Conference for Geometry and Graphics moNGeometrija 2010*, Belgrade, Serbia, pp. 555-564, ISBN 978-86-7924-038-5, **M33**  
<http://mongeometrija.com/zbornici/2010/165-petrovic-obradovic-solving-the-situation-of-airport-bled-by-digital-terrain---modeling-using-the->
  10. Obradović, M., Popkonstantinović, B., Mišić, S. & **Petrović, M.** (2011). Possibilities of deltahedral concave cupola form application in architecture. In *Proceedings of ICEGD Conference*, Iasi Romania, Buletinul Institutului Politehnic din Iasi, Publicat de Universitatea Tehnica "Gheorghe Asachi" din Iasi, Tomul LVII (LXI), Fasc. 3, 2011, pp. 123-140, **M33**  
[http://www.cm.tuiasi.ro/docs/CM\\_fasc3\\_2011-engleza.pdf](http://www.cm.tuiasi.ro/docs/CM_fasc3_2011-engleza.pdf)
  11. **Petrović, M.**, Obradović, M. & Mijailović, R. (2011). Suitability analysis of Hügelschäffer's egg curve application in architectural structures' geometry. In *Proceedings of ICEGD Conference*, Iasi Romania, Buletinul Institutului Politehnic din Iasi, Publicat de Universitatea Tehnica "Gheorghe Asachi" din Iasi, Tomul LVII (LXI), Fasc. 3, 2011, pp. 115-122, **M33**  
[http://www.cm.tuiasi.ro/docs/CM\\_fasc3\\_2011-engleza.pdf](http://www.cm.tuiasi.ro/docs/CM_fasc3_2011-engleza.pdf)
  12. Obradović, M., Mišić, S. & **Petrović, M.** (2012). Investigating Composite Polyhedral forms obtained by combining concave cupolae of II sort with Archimedean Solids. In *Proceedings of 3<sup>rd</sup> International Scientific Conference moNGeometrija 2012*, Novi Sad, Serbia, pp. 109-123, ISBN 978-86-7892-405-7, **M33**  
<http://mongeometrija.com/zbornici/2012>
  13. Obradović, M., Malešević, B., **Petrović, M.** & Popkonstantinović, B. (2012). One application of the cone surfaces on the Erdős-Mordell inequality. In *Proceedings of 3<sup>rd</sup> International Scientific Conference moNGeometrija 2012*, Novi Sad, Serbia, pp. 335-351, ISBN 978-86-7892-405-7, **M33**  
<http://mongeometrija.com/zbornici/2012>
  14. Obradović, M., Malešević, B., **Petrović, M.** & Đukanović, G. (2013). Generating Curves of Higher Order Using the Generalisation of Hügelschäffer's Egg Curve Construction. In *Proceedings of ICEGD Conference*, Timișoara Romania (Buletinul Științific al Universității „POLITEHNICA“ din Timișoara), Tom 58(72), Fasc. 1, 2013, pp. 110-115, **M33**  
[http://www.ct.upt.ro/icegd2013/ICEGD\\_2013.pdf](http://www.ct.upt.ro/icegd2013/ICEGD_2013.pdf)
  15. Banjac, B., Malešević, B., **Petrović, M.** & Obradović, M. (2013). A Computer Verification of a Conjecture About The Erdős-Mordell Curve. In *Proceedings of 21<sup>th</sup> Telecommunications Forum TELFOR 2013*, Belgrade, Serbia, pp. 1031-1034, **M33**
-

- 
16. Banjac, B., Nenezić, M., **Petrović, M.**, Malešević, B. & Obradović R. (2014). Trifocal curves in MATLAB and JAVA, In *Proceedings of 4th International Conference for Geometry and Graphics moNGeometrija 2014*, Belgrade, Serbia, Vol.1, pp. 345-353, ISBN 978-86-88601-13-9, **M33**  
<http://mongeometrija.com/zbornici/2014>
  17. **Petrović, M.**, Malešević, B., Banjac, B. & Obradović, R. (2014). Geometry of some taxicab curves, In *Proceedings of 4th International Conference for Geometry and Graphics moNGeometrija 2014*, Belgrade, Serbia, Vol.2, pp. 53-64, ISBN 978-86-88601-14-6, **M33** <http://mongeometrija.com/zbornici/2014>
  18. Malešević, B., **Petrović, M.**, Banjac, B., Jovović, I. & Jovanović, P. (2014). A method of arcs of the algebraic curves, In *Proceedings of 4th International Conference for Geometry and Graphics moNGeometrija 2014*, Belgrade, Serbia, Vol.2, pp. 65-76, ISBN 978-86-88601-14-6, **M33**  
<http://mongeometrija.com/zbornici/2014>
  19. Banjac, B., **Petrović, M.** & Malešević, B. (2014). Visualization of Weber's curves and surfaces with applications in some optimization problems. In *Proceedings of 22<sup>nd</sup> Telecommunications Forum TELFOR 2014*, Belgrade, Serbia, pp. 1031-1034, **M33**
  20. **Petrović, M.**, Malešević, B., & Banjac, B. (2015). Some surfaces of second order as examples of Weber's surfaces, In *Proceedings of 6th International Conference on Engineering Graphics and Design ICEGD 2015* (printed in Journal of Industrial Design and Engineering Graphics, Volume 10), Brasov, Romania, pp. 55–60, **M33**

**Остали научни и стручни радови:**

21. **Petrović, M.** & Obradović, M. (2010). Forming a regular pentagon, decagon and pentagram using origami technique. *VisMath – Visual Mathematics* (electronic journal) published by Mathematical Institute SANU, Belgrade 2010, Volume 12, No. 3, ISSN 1821-1437.  
<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/petrovic2010/origami.pdf>
22. Obradović, M., **Petrović, M.** & Malešević B. (2009). About planar sections of a type of egg curve based conoid. *XVIII Conference on Applied Mathematics, PRIM 2009*, Subotica, **M64**
23. Banjac, B., Malešević, B., **Petrović, M.** & Obradović, M. (2013). *EMC software*, **M85** <http://symbolicalgebra.etf.bg.ac.rs/Java-Applications/>
24. Banjac, B., Malešević, B. & **Petrović, M.** (2014). *3-Ellipses software*, **M85**  
<http://symbolicalgebra.etf.bg.ac.rs/Java-Applications/>
25. Banjac, B., Malešević, B. & **Petrović, M.** (2014). *WeberCS-software*, **M85**  
<http://symbolicalgebra.etf.bg.ac.rs/Java-Applications/>

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани-а Маја Петровић

број уписа \_\_\_\_\_

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

### ГЕНЕРИСАЊЕ ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНИХ ГЕОМЕТРИЈСКИХ ФОРМИ КАО ОБРАСЦА ЗА ОБЛИКОВАЊЕ АРХИТЕКТОНСКО-УРБАНИСТИЧКОГ ПРОСТОРА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

**Потпис докторанда**

У Београду, март 2016.

*Maја Petrović*

---

Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Маја Петровић

Број уписа \_\_\_\_\_

Студијски програм \_\_\_\_\_

Наслов рада ГЕНЕРИСАЊЕ ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНИХ ГЕОМЕТРИЈСКИХ  
ФОРМИ КАО ОБРАСЦА ЗА ОБЛИКОВАЊЕ  
АРХИТЕКТОНСКО-УРБАНИСТИЧКОГ ПРОСТОРА

Ментор проф. др Љиљана Петрушевски

Потписани/а Маја Петровић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис докторанда**

У Београду, март 2016.

Maја Petrović

Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

ГЕНЕРИСАЊЕ ФОКАЛНО-ДИРЕКТРИСНИХ ГЕОМЕТРИЈСКИХ ФОРМИ КАО  
ОБРАСЦА ЗА ОБЛИКОВАЊЕ АРХИТЕКТОНСКО-УРБАНИСТИЧКОГ ПРОСТОРА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

**Потпис докторанда**

У Београду, март 2016.

*Maja Petrović*



1. Ауторство - Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.