

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Лука М. Лазаревић

**ОДРЕЂИВАЊЕ КВАЛИТЕТА ГЕОМЕТРИЈЕ  
КОЛОСЕКА ПРИМЕНОМ ФРАКТАЛНЕ  
АНАЛИЗЕ МЕРЕНИХ ПОДАТАКА**

докторска дисертација

Београд, 2016

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Luka M. Lazarević

**ASSESSMENT OF TRACK GEOMETRY QUALITY  
USING FRACTAL ANALYSIS  
OF MEASURED DATA**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2016

ОДРЕЂИВАЊЕ КВАЛИТЕТА ГЕОМЕТРИЈЕ КОЛОСЕКА  
ПРИМЕНОМ ФРАКТАЛНЕ АНАЛИЗЕ МЕРЕНИХ ПОДАТАКА

Докторска дисертација

Лука М. Лазаревић  
Универзитет у Београду  
Грађевински факултет

МЕНТОР: др Зденка Поповић, редовни професор,  
Универзитет у Београду, Грађевински факултет

Чланови Комисије за преглед, оцену и одбрану докторске дисертације:

др Зденка Поповић, редовни професор,  
Универзитет у Београду, Грађевински факултет

др Драган Петровић, редовни професор,  
Универзитет у Крагујевцу, Факултет за машинство и  
грађевинарство у Краљеву

др Љиљана Брајовић, ванредни професор,  
Универзитет у Београду, Грађевински факултет

др Слободан Петричевић, ванредни професор,  
Универзитет у Београду, Електротехнички факултет

др Драган Станков, доцент,  
Универзитет у Београду, Рударско-геолошки факултет

ДАТУМ ОДБРАНЕ: \_\_\_\_\_

Лука М. Лазаревић

ОДРЕЂИВАЊЕ КВАЛИТЕТА ГЕОМЕТРИЈЕ КОЛОСЕКА  
ПРИМЕНОМ ФРАКТАЛНЕ АНАЛИЗЕ МЕРЕНИХ ПОДАТАКА

Докторска дисертација

Београд, 2016

Универзитет у Београду

Грађевински факултет

Кључне речи: параметри геометрије колосека, квалитет геометрије колосека, фрактална анализа, фрактална димензија, услови ослањања прагова, пропадање геометрије колосека, стање горњег строја, стање доњег строја

Научна област: Техничко-технолошке науке, област Грађевинарство

Ужа научна област: Планирање и пројектовање железница  
Конструкција, грађење и одржавање железница

УДК број: 625.1/.5 (043.3)

## *ЗАХВАЛНИЦА*

*Посебну захвалност дугујем ментору, проф. др Зденки Поповић, која ми је пружила подршку у досадашњем научном и стручном усавршавању у области железница, као и у изради Дисертације.*

*Захваљујем свим члановима Комисије на подршци и на корисним сугестијама током израде и прегледа Дисертације.*

*Захваљујем запосленима у Секцији за одржавање пруга у Ваљевоу и њиховом руководиоцу Миодрагу Влајковићу, дипл.грађ.инж., на пружању подршке током извођења теренских испитивања, као и компанији CNTG d.o.o. из Београда и доц. др Дејану Вучковићу на организовању и спровођењу теренских испитивања. Захваљујем и запосленима у предузећу Железнице Србије а.д. који су посредно или непосредно пружили подршку током израде Дисертације.*

*Захваљујем компанији ЗГОП а.д. из Новог Сада на пружању подршке у досадашњем раду у области железница, а нарочито дугогодишњем Техничком директору Алексију Павловићу, дипл.грађ.инж., на сталној подршци и сарадњи.*

*Захваљујем својим родитељима који су ми пружали безусловну подршку. А нарочито се захваљујем мојој Александри на инспирацији, љубави и стрпљењу.*

*Лука Лазаревић*

## САЖЕТАК

Предмет истраживања у овој Дисертацији је одређивање квалитета геометрије колосека применом фракталне анализе над измереним параметрима геометрије колосека. У оквиру Дисертације је дат преглед главних параметара геометрије колосека и њихових граница толеранције у складу са серијом стандарда *EN 13848*. Извршено је тестирање четири методе фракталне анализе на примеру једног параметра геометрије колосека, након чега је изабрана метода којом су добијени најпоузданији резултати – бокс метода.

За примену бокс методе развијен је софтверски алат коришћењем програмског језика *AutoLISP*, који омогућава представљање резултата анализе у *CAD* окружењу. Применом бокс методе извршена је анализа параметара геометрије колосека на деоници Лајковац-Ваљево железничке пруге Београд-Врбница. Параметри геометрије колосека су прво анализирани појединачно, како би се утврдили одсеци на којима сваки параметар има најлошији квалитет, односно највећу фракталну димензију. Потом је предложена методологија за дефинисање индекса квалитета колосека применом фракталне анализе. Утврђене су две референтне деонице, од којих једна има најбољи, а друга најлошији квалитет геометрије колосека.

На референтним деоницама су спроведена одговарајућа теренска испитивања применом савремених недеструктивних техника мерења, како би се доказало да лош квалитет геометрије колосека указује на лоше стање конструкције горњег и доњег строја железничке пруге. Резултати спроведених теренских испитивања су потврдили да се применом фракталне анализе параметара геометрије колосека може одредити квалитет геометрије као индикатор стања конструкције горњег и доњег строја железничке пруге.

**КЉУЧНЕ РЕЧИ:** параметри геометрије колосека, квалитет геометрије колосека, фрактална анализа, фрактална димензија, услови ослањања прагова, пропадање геометрије колосека, стање горњег строја, стање доњег строја

## ABSTRACT

The research presented in this thesis implies assessment of track geometry quality using fractal analysis of measured data. This research presents main track geometry parameters and their limits according to standard series *EN 13848*. Four fractal analysis methods were tested using single track geometry parameter. Afterwards, box method was chosen due to the most reliable results it provided.

Application of box method was conducted using software tool developed with *AutoLISP* programming language, since it provides representation of the obtained results in CAD environment. Box method was applied for the analysis of track geometry parameters on the section Lajkovac-Valjevo on the rail line Belgrade-Vrbnica. Track geometry parameters were analysed separately in order to determine section with worst geometry (section with largest fractal dimension) for each parameter. New method for assessment of track geometry quality using fractal analysis was proposed. Two reference sections were defined using the proposed method, one with best track geometry quality and other with worst geometry quality.

Two reference sections were additionally investigated in the field in order to prove that poor track geometry quality indicates poor condition of railway superstructure and substructure. Results of field investigations confirmed that fractal analysis of track geometry parameters could provide basis for determination of railway superstructure and substructure condition.

**KEYWORDS:** track geometry parameters, track geometry quality, fractal analysis, fractal dimension, box method, track geometry degradation, superstructure condition, substructure condition

# САДРЖАЈ

<b>1</b>	<b>УВОД.....</b>	<b>20</b>
<b>2</b>	<b>КВАЛИТЕТ ГЕОМЕТРИЈЕ КОЛОСЕКА .....</b>	<b>25</b>
2.1	Параметри геометрије колосека .....	27
2.1.1	Ширина колосека.....	29
2.1.2	Вертикално одступање.....	30
2.1.3	Одступање смера .....	32
2.1.4	Надвишење.....	33
2.1.5	Витоперност.....	33
2.2	Квалитет геометрије колосека .....	34
2.2.1	Нивои квалитета геометрије колосека.....	34
2.2.2	Утицај параметара геометрије колосека на интеракције у систему колосек-возило.....	38
2.2.3	Оцена квалитета геометрије колосека .....	41
<b>3</b>	<b>УВОД У ФРАКТАЛНУ ГЕОМЕТРИЈУ .....</b>	<b>47</b>
3.1	Основна својства фрактала .....	48
3.1.1	Непрекидност и диференцијабилност .....	48
3.1.2	Самосличност .....	51
3.1.3	Димензија.....	52
3.2	Теоријске основе <i>Hausdorff</i> -ове димензије .....	55
3.2.1	<i>Hausdorff</i> -ова мера.....	55
3.2.2	<i>Hausdorff</i> -ова димензија.....	56
3.2.3	Бокс димензија.....	59
3.2.4	<i>Hausdorff</i> -ова димензија или бокс димензија.....	61
3.3	Математички генерисани фрактали .....	62
3.3.1	Апсолутно самослични фрактали .....	62
3.3.2	Статистички самослични фрактали .....	71
3.4	Фрактали као резултат природних процеса и појава.....	72
3.4.1	Самосличност .....	73
3.4.2	Одређивање фракталне димензије .....	73
3.4.3	Фракталне димензије у природи .....	78
3.5	Мултифрактали.....	79
<b>4</b>	<b>ФРАКТАЛНА АНАЛИЗА ПАРАМЕТАРА ГЕОМЕТРИЈЕ КОЛОСЕКА.....</b>	<b>80</b>
4.1	Методе за одређивање фракталне димензије .....	82
4.1.1	Бокс метода .....	84
4.1.2	Метода корачања .....	91
4.1.3	Измењена метода корачања .....	98
4.1.4	Метода прелазака .....	101
4.2	Тестирање метода за одређивање фракталне димензије.....	103
4.2.1	Тестирање бокс методе .....	104
4.2.2	Тестирање методе корачања.....	106



4.2.3	Тестирање измењене методе корачања .....	107
4.2.4	Тестирање методе прелазака .....	109
4.3	Одређивање фракталне димензије параметара геометрије колосека.....	110
4.3.1	Фрактална анализа одступања ширине колосека .....	111
4.3.2	Фрактална анализа вертикалног одступања .....	111
4.3.3	Фрактална анализа одступања смера .....	112
4.3.4	Фрактална анализа одступања надвишења .....	113
4.3.5	Фрактална анализа витоперности .....	113
4.3.6	Анализа добијених резултата .....	114
4.4	Предлог методе за одређивање индекса <i>TOI</i> применом фракталне анализе .....	116
<b>5</b>	<b>ТЕОРИЈСКА АНАЛИЗА УТИЦАЈА УСЛОВА ОСЛАЊАЊА ПРАГОВА .....</b>	<b>120</b>
5.1	Механички систем прага у застору .....	122
5.2	Механички систем за анализу природних фреквенција осциловања прага ....	124
5.3	Анализа природних фреквенција осциловања прага.....	126
5.3.1	Добро ослоњен праг .....	127
5.3.2	Делимично ослоњен праг.....	129
5.3.3	Неослоњен праг .....	134
5.4	Утицај услова ослањања на вибрације прага .....	135
<b>6</b>	<b>УТВРЂИВАЊЕ УСЛОВА ОСЛАЊАЊА МЕРЕЊЕМ МИКРОТРЕМОРА ПРАГОВА .....</b>	<b>136</b>
6.1	Методе за утврђивање услова ослањања прагова.....	137
6.2	Утврђивање услова ослањања прагова применом анализе микротремора .....	141
6.2.1	Карактеристике примењеног мерног система.....	141
6.2.2	Избор мерних деоница за узорковање микротремора.....	142
6.2.3	Узорковање и анализа микротремора прагова на <i>Деоници А</i> .....	144
6.2.4	Узорковање и анализа микротремора прагова на <i>Деоници В</i> .....	152
6.3	Упоредна анализа услова ослањања прагова и параметара геометрије колосека.....	160
<b>7</b>	<b>СЕИЗМОМЕТРИЈСКО ТОМОГРАФСКО КАРТИРАЊЕ ДОЊЕГ СТРОЈА .....</b>	<b>164</b>
7.1	Анализа пропадања вертикалне геометрије.....	164
7.2	Испитивање стања доњег строја.....	167
<b>8</b>	<b>ЗАКЉУЧАК И СМЕРНИЦЕ ЗА ДАЉА ИСТРАЖИВАЊА.....</b>	<b>170</b>
	<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>175</b>
	<b>ПРИЛОЗИ</b>	
	<b>БИОГРАФСКИ ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ</b>	

## ЛИСТА СЛИКА

Слика 2.1 Принцип мерења геометрије колосека и координатни систем колосека .....	28
Слика 2.2 Горња површ главе шине .....	29
Слика 2.3 Положај додирне тачке између додирне површи и возне површи на глави шине .....	29
Слика 2.4 Ширина колосека са уграђеним новим шинама [2] .....	30
Слика 2.5 Ширина колосека са уграђеним коришћеним шинама .....	30
Слика 2.6 Принцип мерења вертикалног одступања леве и десне шине .....	31
Слика 2.7 Принцип мерења одступања смера колосека [2] .....	32
Слика 2.8 Одступање смера као бочно одступање положаја леве и десне шине .....	32
Слика 2.9 Принцип мерења надвишења .....	33
Слика 2.10 Принцип мерења витоперности колосека .....	34
Слика 2.11 <i>IAL</i> вредности за витоперност колосека .....	37
Слика 2.12 Дијаграм за одређивање класе квалитета колосека [7] .....	45
Слика 3.1 Развој графика <i>Weierstrass</i> -ове функције на интервалу $[0,5]$ .....	50
Слика 3.2 Апсолутна самосличност код <i>Coch</i> -ове криве .....	52
Слика 3.3 Примери изоморфних пресликавања и њихове тополошке димензије .....	54
Слика 3.4 Графичка интерпретација <i>Hausdorff</i> -ове димензије .....	57
Слика 3.5 Итеративни поступак конструисања <i>Cantor</i> -овог скупа .....	63
Слика 3.6 Итеративни поступак конструисања тепиха <i>Sierpinski</i> -ог .....	64
Слика 3.7 Итеративни поступак конструисања <i>Menger</i> -овог сунђера .....	64
Слика 3.8 Итеративни поступак конструисања троугла <i>Sierpinski</i> -ог .....	65
Слика 3.9 Итеративни поступак конструисања криве <i>Sierpinski</i> -ог .....	66
Слика 3.10 Итеративни поступак конструисања <i>Coch</i> -ове криве .....	67
Слика 3.11 Итеративни поступак конструисања две варијације <i>Coch</i> -ове криве .....	68
Слика 3.12 Итеративни поступак конструисања квадратне <i>Coch</i> -ове криве .....	69
Слика 3.13 Фрактална контура <i>Mandelbrot</i> -овог скупа [28] .....	70
Слика 3.14 Јулијини скупови као део <i>Mandelbrot</i> -овог скупа .....	71
Слика 3.15 Пример конструисања произвољне <i>Coch</i> -ове криве .....	72
Слика 3.16 Поступак за приближно одређивање фракталне димензије <i>Coch</i> -ове криве .....	74
Слика 3.17 Процена фракталне димензије <i>Coch</i> -ове криве .....	75
Слика 3.18 Приближно одређивање фракталне димензије границе Србије .....	76
Слика 3.19 Процена фракталне димензије границе Србије .....	76
Слика 3.20 Приближно одређивање фракталне димензије железничке мреже Србије .....	77
Слика 3.21 Фрактална димензија железничке мреже Србије .....	78
Слика 4.1 Алгоритам за одређивање фракталне димензије применом бокс методе .....	85
Слика 4.2 Измењени алгоритам за одређивање фракталне димензије применом бокс методе .....	88
Слика 4.3 Примена измењеног алгоритма бокс методе на примеру <i>Coch</i> -ове криве .....	89

Слика 4.4 Фрактална димензија <i>Coch</i> -ове криве применом измењеног алгоритма бокс методе.....	90
Слика 4.5 Бокс метода са покривањем <i>Coch</i> -ове криве правоугаоницима .....	90
Слика 4.6 Фрактална димензија <i>Coch</i> -ове криве применом бокс методе са покривањем правоугаоницима.....	91
Слика 4.7 Алгоритам за одређивање фракталне димензије применом методе корачања.....	92
Слика 4.8 Примена методе корачања на примеру <i>Coch</i> -ове криве .....	93
Слика 4.9 Фрактална димензија <i>Coch</i> -ове криве применом методе корачања .....	93
Слика 4.10 Резултат корачања са почетним кораком дужине $\delta_0=30\text{ km}$ .....	96
Слика 4.11 Фрактална димензија граница Србије применом методе корачања .....	97
Слика 4.12 Алгоритам за одређивање фракталне димензије.....	100
Слика 4.13 Алгоритам за одређивање фракталне димензије применом методе прелазака .....	102
Слика 4.14 Дијаграми витоперности колосека на две деонице железничке пруге Београд-Врбница за тестирање софтверског алата за фракталну анализу.....	104
Слика 4.15 Фракталне димензије применом бокс методе за деонице 1 (лево) и 2 (десно).....	105
Слика 4.16 Фракталне димензије применом бокс методе за различите односе дужине колосека и вредности витоперности .....	106
Слика 4.17 Фракталне димензије применом методе корачања за деонице 1 (лево) и 2 (десно) .....	106
Слика 4.18 Фракталне димензије применом методе корачања за различите односе дужине колосека и вредности витоперности .....	107
Слика 4.19 Фракталне димензије применом измењене методе корачања за деонице 1 (лево) и 2 (десно) .....	108
Слика 4.20 Привидна вишедимнезионалност као резултат примене измењене методе корачања .	108
Слика 4.21 Фракталне димензије применом измењене методе корачања за различите односе дужине колосека и вредности витоперности .....	109
Слика 4.22 Фракталне димензије применом методе прелазака за деонице 1 и 2 .....	110
Слика 4.23 Фракталне димензије одступања ширине колосека на деоници Лајковац-Ваљево .....	111
Слика 4.24 Фрактална димензија вертикалног одступања на деоници Лајковац-Ваљево.....	112
Слика 4.25 Фрактална димензија одступања смера на деоници Лајковац-Ваљево.....	112
Слика 4.26 Фрактална димензија одступања надвишења на деоници Лајковац-Ваљево .....	113
Слика 4.27 Фрактална димензија витоперности на деоници Лајковац-Ваљево .....	114
Слика 4.28 Укупне вредности фракталне димензије геометрије колосека на деоници Лајковац-Ваљево.....	117
Слика 4.29 Класификација квалитета геометрије колосека на деоници Лајковац-Ваљево .....	118
Слика 4.30 Класификација квалитета геометрије колосека на деоници Лајковац-Ваљево .....	119
Слика 5.1 Подела прагова према условима ослоњања: (1) ослоњени, (2) ослоњени са празнином у средини, (3) делимично ослоњени, и (4) неослоњени.....	121
Слика 5.2 Механички систем прага у застору .....	122
Слика 5.3 Механички систем за анализу природних фреквенција осциловања прага у застору ....	125
Слика 5.4 Фаза осциловања прага при амплитудама вертикалног померања и обртања .....	126

Слика 5.5 Механички систем прага за случај неослоњене средње зоне.....	128
Слика 5.6 Утицај дужине неослоњене средње зоне на природне фреквенције прага .....	129
Слика 5.7 Механички систем прага са различитим дужинама неослоњених крајева .....	129
Слика 5.8 Зависност природних фреквенција од дужине неослоњене зоне на једном крају прага	131
Слика 5.9 Модални облици вибрација за различите дужине неослоњене зоне на крају прага .....	131
Слика 5.10 Зависност природних фреквенција од дужине неослоњених зона на оба краја прага..	132
Слика 5.11 Механички систем за случај када праг није ослоњен и у средини и у зонама крајева .	132
Слика 5.12 Зависност природних фреквенција прагова без ослонца у средини при смањивању дужине неослоњених зона на оба краја прага.....	134
Слика 6.1 Испитивање угиба прагова применом опита са падајућим теретом [86] .....	138
Слика 6.2 Бежични сензор за мерење вибрација [87].....	138
Слика 6.3 Примена оптичког сензора положаја за мерење угиба на прагу.....	139
Слика 6.4 Уређај за континуално мерење крутости колосека [89] .....	139
Слика 6.5 Промене у крутости колосека дуж једне деонице железничке пруге у Шведској [90]...	140
Слика 6.6 Мерни систем <i>ТМ-3С400</i> за узорковање микротремора.....	141
Слика 6.7 Вертикално одступање и витоперност на <i>Деоници А</i> и <i>Деоници В</i> .....	144
Слика 6.8 Позиције узорковања микротремора на <i>Деоници А</i> .....	145
Слика 6.9 Максималне амплитуде померања за прагове <i>1-20</i> .....	146
Слика 6.10 Максималне амплитуде померања за прагове <i>21-40</i> .....	147
Слика 6.11 Максималне амплитуде померања за прагове <i>41-60</i> .....	148
Слика 6.12 Максималне амплитуде померања за прагове <i>61-80</i> .....	149
Слика 6.13 Промене највећих амплитуда померања дуж <i>Деонице А</i> применом филтера <i>Running Average</i> са: (1) 3 тачке и (2) 7 тачака.....	150
Слика 6.14 Промена спектралних карактеристика дуж <i>Деонице А</i> .....	151
Слика 6.15 Дијаграм просторне расподеле зависности амплитуде од фреквенције на <i>Деоници А</i> .	151
Слика 6.16 Амплитуде померања дуж <i>Деонице А</i> при различитим фреквенцијама .....	152
Слика 6.17 Позиције узорковања микротремора на <i>Деоници В</i> .....	153
Слика 6.18 Максималне амплитуде померања за прагове <i>1-39</i> (лева страна).....	154
Слика 6.19 Максималне амплитуде померања за прагове <i>2-40</i> (десна страна).....	155
Слика 6.20 Максималне амплитуде померања за прагове <i>41-79</i> (лева страна).....	156
Слика 6.21 Максималне амплитуде померања за прагове <i>42-80</i> (десна страна).....	157
Слика 6.22 Промене највећих амплитуда померања на левој страни (1) и десној страни (2) дуж <i>Деонице В</i> применом филтера <i>Running Average</i> са 5 тачака .....	158
Слика 6.23 Промена спектралних карактеристика дуж <i>Деонице В</i> .....	159
Слика 6.24 Дијаграм просторне расподеле зависности амплитуде од фреквенције на <i>Деоници В</i> .	159
Слика 6.25 Амплитуде померања дуж <i>Деонице В</i> при различитим фреквенцијама .....	160
Слика 6.26 Упоредна анализа услова ослањања прагова <i>1-39</i> и: (горе) вертикалног одступања леве шине, (доле) витоперности колосека .....	161

Слика 6.27 Упоредна анализа услова ослањања прагова 40-80 и: (горе) вертикалног одступања леве шине, (доле) витоперности колосека.....	162
Слика 6.28 Однос између максималних амплитуда вертикалног померања и вертикалног одступања леве шине .....	163
Слика 7.1 Упоредни приказ дијаграма вертикалног одступања леве шине у две узастопне инспекције на <i>Деоници А</i> .....	165
Слика 7.2 Упоредни приказ дијаграма вертикалног одступања десне шине у две узастопне инспекције на <i>Деоници А</i> .....	165
Слика 7.3 Пропадање вертикалне геометрије дуж <i>Деонице А</i> .....	166
Слика 7.4 Последица слегања доњег строја железничке пруге.....	167
Слика 7.5 Сеизмометријски аквизициони систем <i>RAS-24</i> [98].....	167
Слика 7.6 Шема сеизмометријског прозрачивања планума на <i>Деоници А</i> .....	168
Слика 7.7 Карта расподеле брзина простирања таласа кроз планум на <i>Деоници А</i> .....	169

## ЛИСТА ТАБЕЛА

Табела 2.1 Координате $\Delta Y$ и $\Delta Z$ додирне тачке на возној површи главе шине.....	29
Табела 2.2 Граничне вредности одступања ширине колосека у складу са [6].....	36
Табела 2.3 Граничне вредности вертикалног одступања у складу са [6].....	36
Табела 2.4 Граничне вредности одступања смера у складу са [6].....	37
Табела 2.5 Граничне вредности витоперности за $\ell=3$ m у складу са [6].....	38
Табела 2.6 Утицај комбинација параметара геометрије колосека на одзив возила [6].....	41
Табела 2.7 Одређивање TQC на основу граничне вредности стандардне девијације вертикалног одступања [7].....	46
Табела 2.8 Одређивање TQC на основу граничне вредности стандардне девијације одступања смера [7].....	46
Табела 3.1 Фрактали у природи и њихове димензије (подаци преузети из [34]).....	79
Табела 4.1 Методе за одређивање фракталне димензије.....	84
Табела 4.2 Положаји станица на деоници Лајковац-Ваљево железничке пруге Београд-Врбница	114
Табела 4.3 Максималне и минималне вредности фракталне димензије по међустаничним растојањима.....	115
Табела 4.4 Рангирање међустаничних растојања.....	116
Табела 4.5 Класификација квалитета према укупној фракталној димензији колосека.....	118
Табела 5.1 Улазни подаци за одређивање природних фреквенција прага.....	127
Табела 6.1 Параметри аквизиције при узорковању микротремора.....	142
Табела 7.1 Параметри аквизиције за сеизмометријско томографско картирање.....	168

## ЛИСТА СИМБОЛА

### Поглавље 2

$(\Delta Y, \Delta Z)$  – релативна координата тачке додира на глави шине

$Z_P$  – вертикално растојање између додирне површи и равни ширине колосека

$G$  – ширина колосека

$y_P$  – положај бока леве и десне шине у нивоу равни ширине колосека

$Z_P'$  – одступање нивоа горње површи главе шине

$\lambda$  – таласна дужина одступања параметра геометрије

$D_1, D_2, D_3$  – интервали таласних дужина

$V$  – брзина

$Y_P$  – одступање смера колосека у односу на референтну линију

$\Delta D$  – разлика надвишења

$\ell$  – дужина мерне базе

$Y$  – бочна сила

$Q$  – вертикална сила

$Y_{qstat}$  – квази-статичка бочна сила

$Q_{qstat}$  – квази-статичка вертикална сила

$\Sigma Y$  – сума бочних сила

$P_O$  – статичко осовинско оптерећење

$\alpha$  – коефицијент који зависи од врсте кола

$Y/Q$  – параметар којим се вреднује ризик од исклизнућа возила из колосека

$(Y/Q)_{lim}$  – гранична вредност за процену ризика од исклизнућа возила из колосека

$a_y$  – бочна компонента убрзања унутар сандука возила

$a_z$  – вертикална компонента убрзања унутар сандука возила

$SD$  – стандардна девијација

$y_i$  – тренутна вредност измереног параметра

$\bar{y}$  – средња вредност сигнала

$n$  – број вредности

$CoSD$  – комбинована стандардна девијација

$SD_{TG}$  – стандардна девијација ширине колосека

$SD_{LL}$  – стандардна девијација средњег вертикалног одступања за обе шине

$SD_A$  – стандардна девијација средњег одступања смера за обе шине

$SD_{CL}$  – стандардна девијација надвишења

$w_{TG}$  – тежински коефицијент за ширину колосека

$w_{LL}$  – тежински коефицијент за вертикално одступање

$w_A$  – тежински коефицијент за одступање смера  
 $w_{CL}$  – тежински коефицијент за одступање надвишења  
 $w_{TW}$  – тежински коефицијент за витоперност  
 $SD_{LL-L}$  – стандардна девијација вертикалног одступања леве шине  
 $SD_{LL-R}$  – стандардна девијација вертикалног одступања десне шине  
 $SD_{A-L}$  – стандардна девијација одступања смера леве шине  
 $SD_{A-R}$  – стандардна девијација одступања смера десне шине  
 $L_S$  – дужина полигоналне линије која представља дијаграм мерних резултата на дужини мерне деонице  
 $L_O$  – дужина мерне деонице, која се добија као разлика крајње и почетне стационаже  
 $A, B, C, D, E$  – класе квалитета геометрије колосека

### Поглавље 3

$W(x)$  – Weierstrass-ова функција  
 $d$  – тополошка димензија  
 $H^s(A)$  –  $s$ -димензионална Hausdorff-ова мера скупа  $A$   
 $s = \dim_H A$  – Hausdorff-ова димензија скупа  $A$   
 $N_\delta(A)$  – најмањи број скупова пречника не већег од  $\delta$  који могу покрити скуп  $A$   
 $\dim_B A$  – бокс димензија скупа  $A$   
 $R^2$  – коефицијент детерминације  
 $FD$  – фрактална димензија

### Поглавље 4

$N(\delta)$  – број квадрата, корака, прелазака или слично (зависно од анализираног својства)  
 $\gamma_v(t)$  – вариограм  
 $\gamma_m(t)$  – мадограм  
 $f(\omega)$  – густина спектра снаге  
 $v(t)$  – варијанса  
 $L_h(k)$  – дужина криве  
 $C(r)$  – број парова тачака у оквиру задатог растојања  
 $i$  – тренутна итерација  
 $n$  – укупан број итерација  
 $\delta_0$  – почетна вредност скалирајућег својства које се анализира  
 $t_i$  – општи облик тачака које представљају резултат фракталне анализе  
 $N_i(\delta)$  – број квадрата, корака, прелазака или др. у  $i$ -тој итерацији фракталне анализе  
 $y_{max}, y_{min}$  – екстремне вредности анализираног скупа података



$p$  – најмањи број квадрата странице  $\delta_0$  (предложени алгоритам за бокс методу)  
 $\Delta X$  – опсег анализираног скупа података дуж апсцисе  
 $r$  – броја тачака у анализираном скупу података  
 $L_i(\delta)$  – дужина криве добијене у  $i$ -тој итерацији фракталне анализе  
 $\delta_{lim}$  – гранична вредност корака  
 $FD^*$  – фрактална димензија када је дужина корака мања од  $\delta_{lim}$   
 $(\delta_{lim}, N(\delta_{lim}))$  – прелазна тачка (тачка у којој се мења вредност фракталне димензије)  
 $t_j$  – скуп прелазних тачака  
 $m$  – број прелазних тачака  
 $\delta_{max}$  – максимална дужина корака  
 $\delta_{min}$  – дужина корака  
 $d$  – параметар од којег зависи максимална и минимална дужина корака  
 $s$  – почетна итерација за примену измењене методе корачања  
 $q$  – коефицијент вертикалног увећања анализираног параметра геометрије  
 $p_{norm}$  – нормирана вредност параметра геометрије колосека  
 $p_{mer}$  – измерена вредност параметра геометрије колосека  
 $IAL_p$  – граница хитне интервенције за анализирани параметар геометрије колосека  
 $FD_U$  – укупна фрактална димензија геометрије колосека  
 $FD_{TG}$  – фрактална димензија ширине колосека  
 $FD_{LL}$  – фрактална димензија вертикалног одступања (већа од две вредности)  
 $FD_A$  – фрактална димензија одступања смера (већа од две вредности)  
 $FD_{CL}$  – фрактална димензија надвишења  
 $FD_{TW}$  – фрактална димензија витоперности

## Поглавље 5

$m$  – маса система  
 $c$  – пригушење система  
 $k$  – крутост система  
 $F$  – спољашња сила  
 $\omega_s$  – фреквенција осциловања  
 $\xi$  – коефицијент пригушења система  
 $\omega_n$  – природна фреквенција осциловања  
 $A, B$  и  $C$  – амплитуде осцилација  
 $\psi$  – фаза осциловања  
 $m_s$  – маса прага  
 $L_s$  – дужина прага  
 $k_b$  – крутост туцаника по дужини прага

$k_r$  – крутост шинског уметка

$d$  – осно растојање шина

$I_S$  – динамички момент инерције прага

$\omega_{n,w}$  – природна фреквенција осциловања за вертикално померање прага

$\omega_{n,\varphi}$  – природна фреквенција осциловања за обртање прага око тежишта

$f_{n,w}$  – природна фреквенција осциловања за вертикално померање прага изражена у Hz

$f_{n,\varphi}$  – природна фреквенција осциловања за обртање прага око тежишта изражена у Hz

$u$  – двострука дужина препуста прага

$a$  – дужина неослоњене зоне на левом крају прага

$b$  – дужина неослоњене зоне на десном крају прага

$d'$  – дужина неослоњене зоне у средини прага

$d_1$  – усвојена смена променљивих

$d_2$  – усвојена смена променљивих

$d_3$  – усвојена смена променљивих

$\tilde{\omega}$  – усвојена смена променљивих

## Поглавље 6

$R_i$  – максимално напрезање у стезаљкама за  $i$  узастопних неослоњених прагова

$q_i$  – максимално вертикално убрзање возила за  $i$  узастопних неослоњених прагова

$P_i$  – максимална сила у додиру точак-шина за  $i$  узастопних неослоњених прагова

$\sigma_{bi}$  – максимални напон притиска на планум за  $i$  узастопних неослоњених прагова

## ЛИСТА СКРАЋЕНИЦА

*CEN* – Европски комитет за стандардизацију (*Comité Européen de Normalisation*)

*ИСС* – Институт за стандардизацију Србије

*SRPS* – ознака за српски стандард

*TG* – ширина колосека (*Track Gauge*)

*LL* – вертикално одступање (*Longitudinal Level*)

*A* – одступање смера (*Alignment*)

*CL* – надвишење (*Cross Level*)

*TW* – витоперност (*Track Twist*)

*IAL* – граница хитне интервенције (*Immediate Action Limit*)

*IL* – граница интервенције (*Intervention Limit*)

*AL* – граница упозорења (*Alert Limit*)

*TQI* – индекс квалитета колосека (*Track Quality Index*)

*TQC* – класа квалитета колосека (*Track Quality Class*)

*FRA* – Федерална железничка управа у Америци (*Federal Railroad Administration*)

*PMA* – метода анализе убрзања материјалне тачке (*Point Mass Acceleration*)

*VRA* – метода анализе одзива возила (*Vehicle Response Analysis*)

*PSD* – анализа густине спектра снаге (*Power Spectral Density*)

*GPS* – систем за глобално позиционирање (*Global Positioning System*)

# 1 УВОД

Одржавање конкурентности железничког саобраћаја и укључивање железнице у транспортни ланац подразумева инфраструктуру са високом поузданошћу и расположивошћу. Са друге стране, динамичко напрезање конструкције горњег и доњег строја под утицајем све већег саобраћајног и осовинског оптерећења и све већих брзина има за последицу различита оштећења инфраструктуре. Пропадање стања инфраструктуре кроз време током целокупног животног века изразито зависи од почетног квалитета и од примењене стратегије одржавања. Успоравање пропадања инфраструктуре помоћу мера одржавања одлаже се замена делова конструкције и на тај начин се утиче на смањење укупних трошкова током животног века.

Железнички систем је комплексан систем са високим захтевима у погледу безбедности и расположивости. Због тога се железничка грађевинска инфраструктура прегледа и одржава превентивно, циклично и корективно. У оквиру инспекције стања железничке инфраструктуре утврђује се и оцењује стање геометрије колосека. При прекорачењу дозвољеног прага толеранције параметара геометрије колосека морају се планирати и предузети мере редовног одржавања, корективног одржавања (санација) или реконструкције. Дугорочно усклађивање одржавања и реконструкције је суштински задатак ефикасног управљања инфраструктуром. Циљ управљања је да се у економски најповољнијем тренутку

примени одговарајућа техничка мера. На тај начин се реализује техничко-економско одржавање, које се одликује правовременим и циљно усмереним активностима одржавања/реконструкције, планирањем и оптималним коришћењем ангажованих ресурса, дугим животним веком при високој расположивости и минималним трошковима животног века железничке инфраструктуре.

Квалитет геометрије колосека је кључни фактор који одређује удобност и безбедност вожње и утиче на век трајања и трошкове одржавања железничке пруге и возила током целокупног животног века железничке пруге. Стога су разумевање и правилно дефинисање нивоа квалитета геометрије колосека од изузетног значаја за ефикасно управљање одржавањем колосека.

У циљу дефинисања јединствених критеријума за мерење и тумачење параметара геометрије колосека на европској железничкој мрежи усвојена је серија стандарда *EN 13848 Railway applications – Track – Track geometry quality – Part 1-6*. Делови 1-5 овог стандарда дефинишу главне параметре геометрије колосека, методе мерења на терену и дозвољене границе толеранције за сваки параметар. Поређењем измерених вредности параметара геометрије колосека са дозвољеним вредностима које прописује стандард утврђује се потреба за активностима одржавања, односно мерама организације саобраћаја. Поред тога, на основу снимљених параметара геометрије колосека планирају се активности одржавања.

Примена података снимљене геометрије колосека у области планирања активности одржавања и прогнозе стања геометрије колосека захтева сажето представљање мерних дијаграма преко одговарајућих нумеричких показатеља или статистичких параметара. У складу са тим, циљ шестог дела стандарда из серије *EN 13848*, који је усвојен од стране *CEN*-а (европског комитета за стандардизацију) 2014. године, било је дефинисање јединствених критеријума за одређивање индекса и класе квалитета колосека. Међутим, овај део стандарда је дефинисао методе за одређивање квалитета геометрије колосека на нивоу препорука и информација, а у складу са уобичајеном праксом одређених железничких управа. Дакле, одређивање квалитета геометрије колосека је остала отворена тема.

Предмет истраживања у Дисертацији је фрактална анализа података добијених снимањем геометрије колосека и њена примена у области дефинисања квалитета геометрије, планирања активности одржавања и оцене узрока пропадања геометрије. Истраживања су била усмерена на пропадање вертикалне геометрије, зато што је стање вертикалне геометрије колосека уско повезано са стањем конструкције горњег и доњег строја железничке пруге.

Циљ Дисертације је унапређење ефикасности одржавања колосека на основу утврђивања оптималне методе за дефинисање фракталне димензије снимљених података геометрије колосека, унапређења методе обраде измерених података о геометрији колосека применом фракталне анализе, дефинисања фракталне димензије мерних дијаграма као јединственог показатеља квалитета постојеће геометрије, испитивања корелације резултата мерења вертикалне геометрије колосека и стања конструкције горњег и доњег строја, као и истраживања могућности примене фракталне димензије дијаграма геометрије колосека у области планирања активности одржавања на постојећим пругама.

Након уводних разматрања, у **другом поглављу** је дат преглед главних параметара геометрије колосека, њихових граница толеранције и преглед метода за одређивање квалитета геометрије колосека у складу са релевантном серијом европских стандарда (усвојених као српски стандарди).

У **трећем поглављу** је дат преглед развоја области фракталне геометрије. Представљене су теоријске поставке *Hausdorff*-ове димензије, као основне дефиниције фракталне димензије, и тзв. бокс димензије која се најчешће примењује као метода за одређивање фракталне димензије. У наставку су дата основна својства фрактала и њихова подела по својству самосличности. Наведено је да својство самосличности карактерише сваки фрактал и да постоје три врсте у зависности од врсте фрактала: апсолутна самосличност, квази-самосличност и статистичка самосличност. Истакнуто је да параметри геометрије колосека, као и многи други параметри који се мере у функцији времена или простора, представљају статистички самосличне фрактале. У последњем делу поглавља су приказани практични примери одређивања фракталне димензије применом дефиниције бокс димензије.

На почетку **четвртог поглавља** је дат преглед истраживања која су се до сада бавила применом фракталне анализе у области транспортне инфраструктуре. У наставку је дат преглед различитих метода фракталне анализе, које се могу применити у зависности од конкретног случаја. За тестирање на параметрима геометрије колосека су изабране четири методе: бокс метода (одређивање бокс димензије), метода корачања, измењена метода корачања и метода прелазака. Оригинални софтверски алат за тестирање ових метода је развијен коришћењем програмског језика *AutoLISP*, који омогућава једноставно представљање резултата у *CAD* окружењу, а тиме и брзу визуелну контролу тачности добијених резултата и могућност инжењерског тумачења. Све четири методе су тестиране на две деонице железничке пруге Београд-Врбница за различите улазне податке добијене снимањем геометрије колосека помоћу мерних кола. Најмања дисперзија резултата је добијена применом бокс методе, због чега је ова метода изабрана за фракталну анализу параметара геометрије колосека у Дисертацији. У овом поглављу је предложена метода за класификацију геометрије колосека у складу са добијеним вредностима фракталне димензије, чијом применом су одређене две референтне деонице на посматраној прузи – једна са најбољим квалитетом и друга са најлошијим квалитетом геометрије колосека.

У **петом поглављу** је представљена теоријска анализа утицаја услова ослањања прагова на параметре вертикалне геометрије колосека, односно на вибрације прагова у колосеку. Приказани су аналитички модели за анализу фреквенција вибрација прагова у застору од туцаника при различитим условима ослањања прагова. Коришћењем модела срачунате су природне фреквенције прагова у условима када се праг целом доњом површином ослања на застор, као и у условима делимичног ослањања. На основу анализа срачунатих природних фреквенција прагова утврђена је њихова зависност од начина ослањања прага, као и масе и дужине прага.

У **шестом поглављу** је представљено испитивање услова ослањања прагова на деоници Лајковац-Ваљево железничке пруге Београд-Врбница. На терену је спроведено сеизмометријско профилисање узорковањем микротрмора у поступку детектовања аномалијских зона ослањања прагова. Након теренских испитивања, извршена је анализа микровибрација прагова (микротрмора), које се

могу директно повезати са условима ослањања прагова, односно са променама у параметрима вертикалне геометрије колосека. Узорковање микротремора је извршено на две референтне деонице. Приликом анализе микротремора коришћени су теоријски ставови из Поглавља 5. Резултати анализе микротремора су потврдили постојање везе између услова ослањања прагова и стања вертикалне геометрије колосека.

У **седмом поглављу** је представљено испитивање стања доњег строја на референтној деоници пруге Београд-Врбница са најлошијим квалитетом геометрије колосека. Теренска испитивања су спроведена применом недеструктивне методе сеизмометријског томографског картирања. Резултати анализа мерних података су потврдили полазну претпоставку да су зоне са израженим пропадањем вертикалне геометрије колосека последица слегања доњег строја.

На крају, у **осмом поглављу** су наведена закључна разматрања, као и смернице за даља истраживања. У закључним разматрањима су наведени резултати истраживања, који обухватају предлог оригиналног индекса квалитета геометрије колосека заснованог на фракталној димензији нормираног скупа података добијених стандардним мерним колима. Као смернице за даља истраживања наводи се одређивање збирног утицаја параметара геометрије колосека на удобност и безбедност возње мерењима у лабораторијским условима на пробници и на терену.



## 2 КВАЛИТЕТ ГЕОМЕТРИЈЕ КОЛОСЕКА

У периоду од 2003. до 2014. године Европски комитет за стандардизацију *CEN (Comité Européen de Normalisation)* је израдио серију стандарда *EN 13848* (делови 1-6), са циљем да се дефинише јединствен приступ оцени стања квалитета геометрије колосека на европској железничкој мрежи. Ова група стандарда представља основу за хармонизацију техничке регулативе за одржавање геометрије колосека железничке мреже у Републици Србији.

Институт за стандардизацију Србије (*ИСС*) је усвојио поменуте стандарде у периоду од децембра 2010. године до јануара 2015. године [1]. Након усвајања, поменута група европских стандарда је означена префиксом *SRPS* (скраћеница од *српски стандард*), у складу са правилима Института.

Примена стандарда из групе *SRPS EN 13848* представља обавезу при пријему радова на изградњи нових и реконструисаних колосека, као и одржавању колосека магистралних пруга. На пругама које нису обухваћене међународним уговорима за сада не постоји обавеза примене ових стандарда, све док позивање на поменуте стандарде не постане саставни део подзаконских аката.

У овом раду су представљени основни аспекти примене групе стандарда *SRPS EN 13848* [1-7]:

- Део 1 (*SRPS EN 13848-1:2010*): Дефинисање параметара геометрије колосека. Овим делом стандарда дефинишу се услови за хомологацију параметара

квалитета геометрије колосека мерених уређајима који су инсталирани у мерним колима. Такође, овим стандардом су дефинисани главни параметри геометрије колосека, као и услови за мерење, методе анализе и представљање резултата.

- Део 2 (*SRPS EN 13848-2:2011*): Мерни системи – Возила за мерење параметара геометрије колосека. Овим делом стандарда дефинишу се минимални услови које мора да испуни опрема за мерење параметара геометрије колосека, са циљем да се остваре упоредиви резултати.

- Део 3 (*SRPS EN 13848-3:2011*): Мерни системи – Машине за грађење и одржавање колосека. Овим делом стандарда се дефинишу минимални услови које морају да испуне мерни системи постављени у машине за грађење и одржавање колосека како би се извршила процена квалитета геометрије колосека мерењем једног или више параметара геометрије, који су описани у првом делу стандарда.

- Део 4 (*SRPS EN 13848-4:2013*): Мерни системи – Ручни и лаки уређаји. Овим делом стандарда дефинишу се минимални услови које морају да испуне мерни системи којима су опремљена колица за мерење геометрије колосека и ручни мерни уређаји како би се извршила процена квалитета геометрије колосека мерењем једног или више параметара геометрије, који су описани у првом делу стандарда. Неопходно је напоменути да коришћење ручних метода мерења није могуће мерити геометрију колосека под оптерећењем.

- Део 5 (*SRPS EN 13848-5:2011*): Нивои квалитета геометрије колосека. Овим делом стандарда дефинишу се минимални услови за нивое квалитета геометрије колосека и граничне вредности са аспекта безбедности за сваки параметар геометрије који је описан у првом делу стандарда. Поред наведеног, овај стандард укључује: опис нивоа квалитета, релативни значај параметара, границу предузимања хитних активности и разматрање других нивоа квалитета.

- Део 6 (*SRPS EN 13848-6:2015*): Одређивање квалитета геометрије колосека. Овим делом стандарда обухваћени су следећи аспекти: опис квалитета геометрије колосека, класификација квалитета колосека у складу са параметрима геометрије колосека, и разматрање могућности примене ове класификације.

## 2.1 Параметри геометрије колосека

Пре дефинисања параметара геометрије колосека у складу са *SRPS EN 13848-1:2010*, неопходно је образложити два термина – пројектовану (номиналну) геометрију и стварну геометрију колосека, која представља геометрију колосека у експлоатацији.

Пројектована геометрија колосека је тродимензионална геометрија одређена параметрима трасе и елементима попречног профила железничке пруге. Параметри трасе којима се дефинише пројектована геометрија обухватају:

- параметре ситуационог плана – правци, прелазне и кружне кривине;
- параметре подужног профила – подужне нагибе и вертикалне кривине, којима је одређена горња површ главе леве и десне шине у вертикалној равни дуж колосека;
- параметре попречног профила – пројектована надвишења и ширина колосека.

Пројектована геометрија колосека је практично дефинисана грађевинским пројектом железничке пруге, који пружа тачне просторне податке у глобалном координатном систему, неопходне за полагање колосека и активности на одржавању колосека. Током експлоатације долази до неминовног пропадања геометрије колосека, које се манифестује кроз развој нерегуларности параметара геометрије колосека. Овај процес представља саставни део животног века колосека.

Стварна геометрија колосека директно утиче на квалитет вожње шинских возила, што указује на неопходност прецизног мерења и анализе измерених вредности параметара геометрије колосека са циљем процене безбедности одвијања саобраћаја. Свако геометријско одступање просторног положаја колосека мора бити процењено и кориговано на основу његове вредности и таласне дужине. Основни циљ је да се обезбеди удобност вожње уз прихватљиве трошкове одржавања, као и превенција пропадања колосека до услова у којима може да дође до исклизнућа, угрожавања слободног профила, повреда путника и/или оштећења робе због неравномерне вожње и сл.

У складу са [2], главни параметри геометрије колосека су:

- ширина колосека (*track gauge – TG*),
- вертикално одступање (*longitudinal level – LL*),

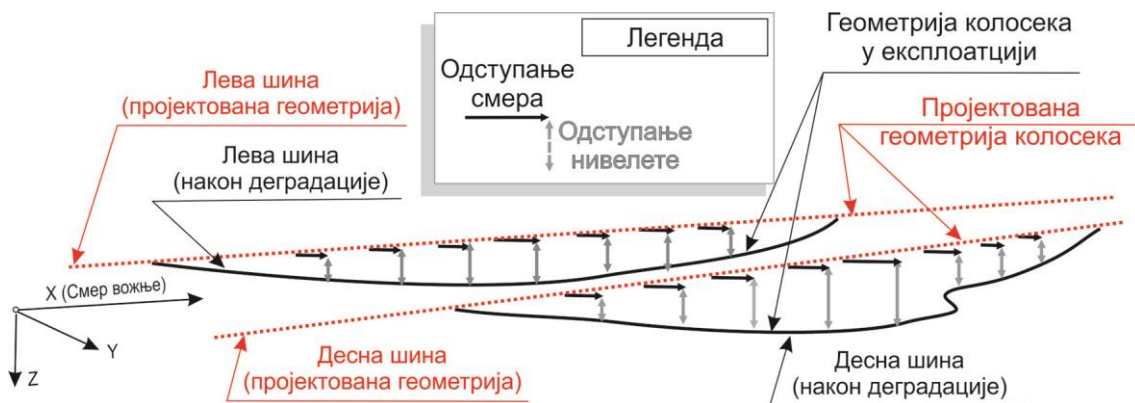
- одступање смера (*alignment – A*),
- надвишење (*cross level – CL*) и
- витоперност (*track twist – TW*).

Стандард дефинише сваки од поменутих пет параметара и даје услове за мерење, методе анализе и начин представљања резултата. Такође, квалитет геометрије колосека је дефинисан као оцена одступања од просечних или пројектованих вредности параметара геометрије у вертикалној и попречној равни, који утичу на безбедност или су у корелацији са квалитетом вожње.

Квалитет геометрије колосека се описује коришћењем релативног правоуглог координатног система, који је центриран у колосеку и оријентисан у смеру казаљке на сату. Слика 2.1 приказује позицију координатног система *XYZ* колосека у складу са [2]:

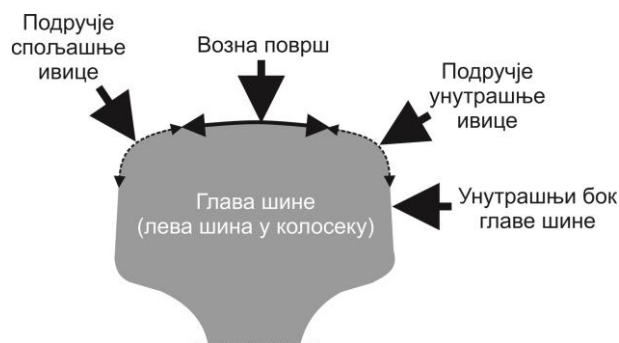
- *X*-оса се поклапа са подужном осом колосека у смеру вожње,
- *Y*-оса је паралелна равни додира точкова осовинског склопа и шина у колосеку,
- *Z*-оса је управна на раван додира и усмерена на доле.

Такође, слика 2.1 приказује принцип мерења геометрије колосека у складу са серијом европских стандарда *SRPS EN 13848* (делови 1-6).



Слика 2.1 Принцип мерења геометрије колосека и координатни систем колосека

Додирна површ је дефинисана као закривљена површ која се генерише подужним померањем праве управне на осу колосека и тангира возне површи обе главе шине [2]. Возна површ је горња површ главе шине, као што је приказано на слици 2.2.

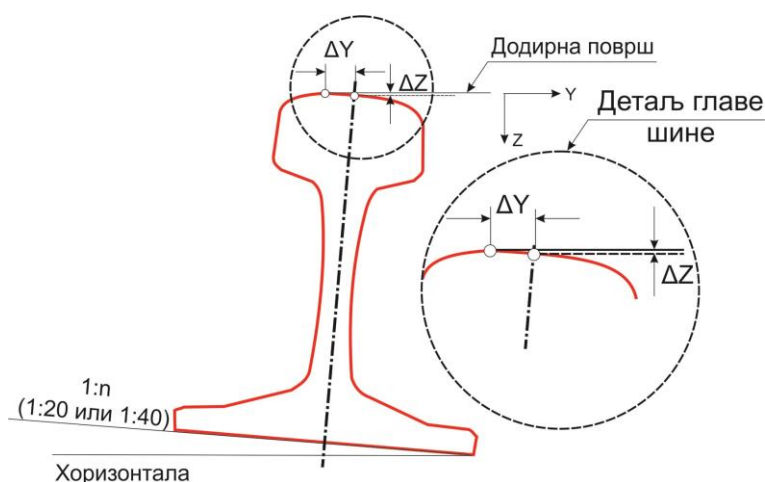


Слика 2.2 Горња површ главе шине

Координате  $\Delta Y$  и  $\Delta Z$  (слика 2.3) одређују положај додирне тачке возне површи и додирне равни, а зависе од профила шине и нагиба шине у попречној равни (инклинација шине) (табела 2.1).

Табела 2.1 Координате  $\Delta Y$  и  $\Delta Z$  додирне тачке на возној површи главе шине

Попречни нагиб	Координате $\Delta Y$ и $\Delta Z$	Профил шине 60E1	Профил шине 49E1
1:20	$\Delta Y$ [mm]	11,69	14,98
	$\Delta Z$ [mm]	0,35	0,37
1:40	$\Delta Y$ [mm]	5,50	7,40
	$\Delta Z$ [mm]	0,09	0,09



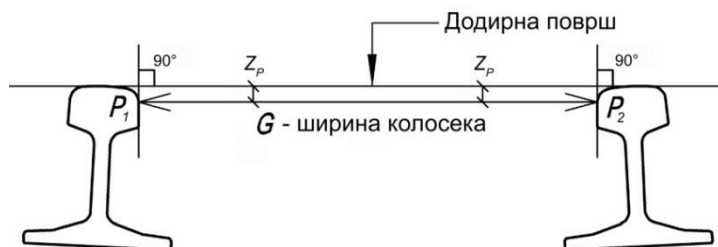
Слика 2.3 Положај додирне тачке између додирне површи и возне површи на глави шине

### 2.1.1 Ширина колосека

У складу са [2], ширина колосека  $G$  према изразу (2.1) представља најкраће растојање између правих које су управне на додирну површ и додирују главе шина у тачкама  $P_1$  и  $P_2$ . Ове тачке се налазе на боку главе леве и десне шине са

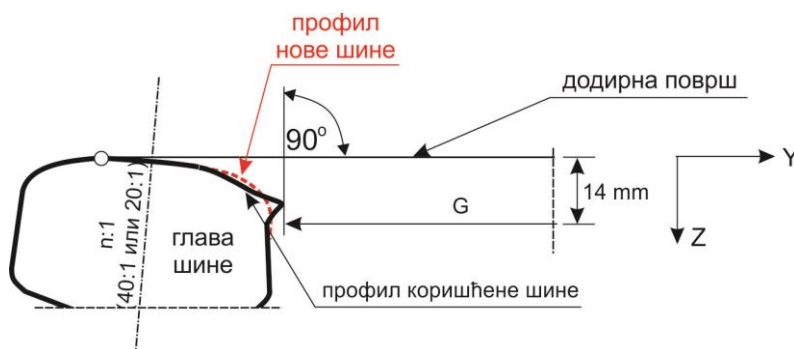
унутрашње стране колосека у зони  $Z_P=14 \text{ mm}$  испод додирне површи, као што је приказано на слици 2.4. Вредност ширине колосека у координатном систему  $XYZ$  може се утврдити на основу израза (2.1).

$$G = G(x) = y_{P_2} - y_{P_1} \quad (2.1)$$



Слика 2.4 Ширина колосека са уграђеним новим шинама [2]

Овај принцип одређивања ширине колосека се примењује и за колосек у кривинама, који се пројектује са одговарајућим надвишењем. Са друге стране, када у колосек нису уграђене нове шине ширина колосека се одређује поступком приказаним на слици 2.5.

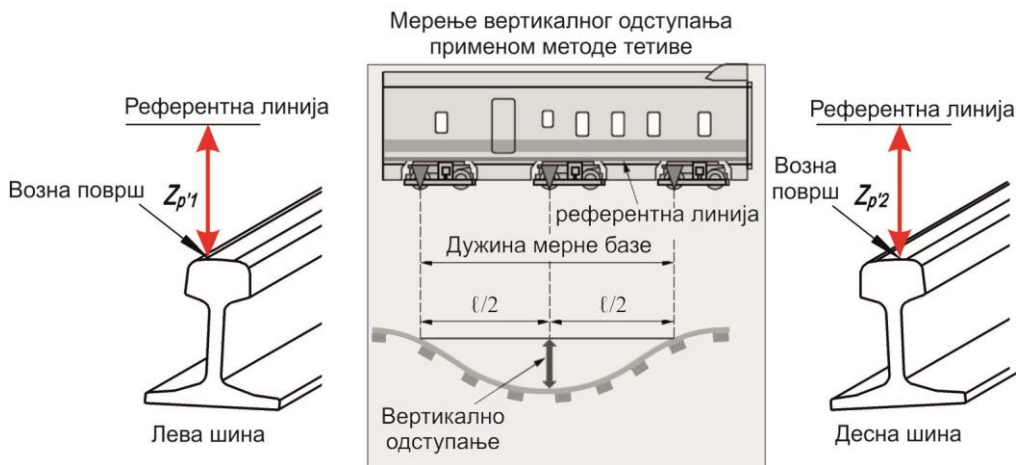


Слика 2.5 Ширина колосека са уграђеним коришћеним шинама

## 2.1.2 Вертикално одступање

У складу са [2], вертикално одступање  $Z_P$  је одступање нивоа горње површи главе леве и/или десне шине у правцу  $Z$ -осе, изражено као померање у односу на средњи вертикални положај (референтну линију). Вертикално одступање се може разматрати као одступање смера колосека у вертикалној подужној равни.

Принцип мерења вертикалног одступања леве и десне шине у колосеку је приказан на слици 2.6.



Слика 2.6 Принцип мерења вертикалног одступања леве и десне шине

Приликом анализе вертикалног одступања потребно је разматрати три опсега таласних дужина:

- интервал таласних дужина  $D_1$ :  $3 m < \lambda \leq 25 m$  (препоручује се смањивање доње границе за  $D_1$  на  $1 m$  како би се детектовали дефекти кратких таласних дужина),
- интервал таласних дужина  $D_2$ :  $25 m < \lambda \leq 70 m$ , и
- интервал таласних дужина  $D_3$ :  $70 m < \lambda \leq 150 m$  (дефекти дугих таласних дужина, који су релевантни на пругама за велике брзине  $V > 250 km/h$ ).

Интервал таласних дужина  $D_1$  има највећи утицај на квалитет геометрије колосека и на мирноћу хода возила. Диференцијално слегање колосека је главни узрок појаве вертикалног одступања. Подбијањем прагова се у највећој мери утиче на стање равности возне површи у интервалу таласних  $D_1$ .

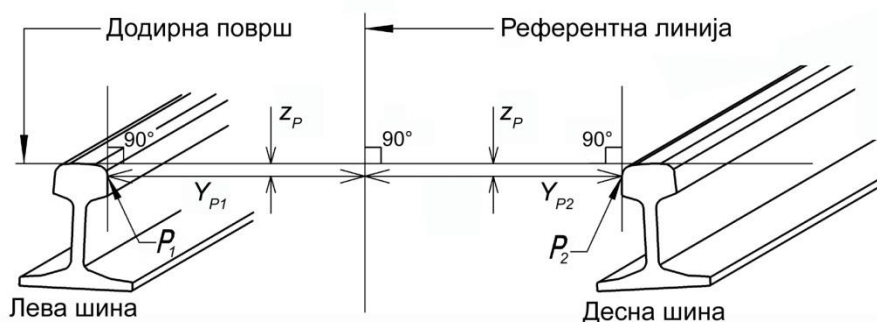
Посебну пажњу треба усмерити на дефекте кратких таласних дужина ( $0 m < \lambda \leq 3 m$ ), нарочито у случају великих амплитуда која може да угрози безбедност одвијања саобраћаја.

Интервал средњих таласних дужина  $D_2$  настаје као последица грешака при полагању колосека, нерегуларности одржавања, или деформације подтла. Утицај ових таласних дужина на пропадање геометрије колосека обично није велики.

Интервал веома дугачких таласних дужина  $D_3$  настаје као последица грешака пројекта, полагања, или одржавања колосека.

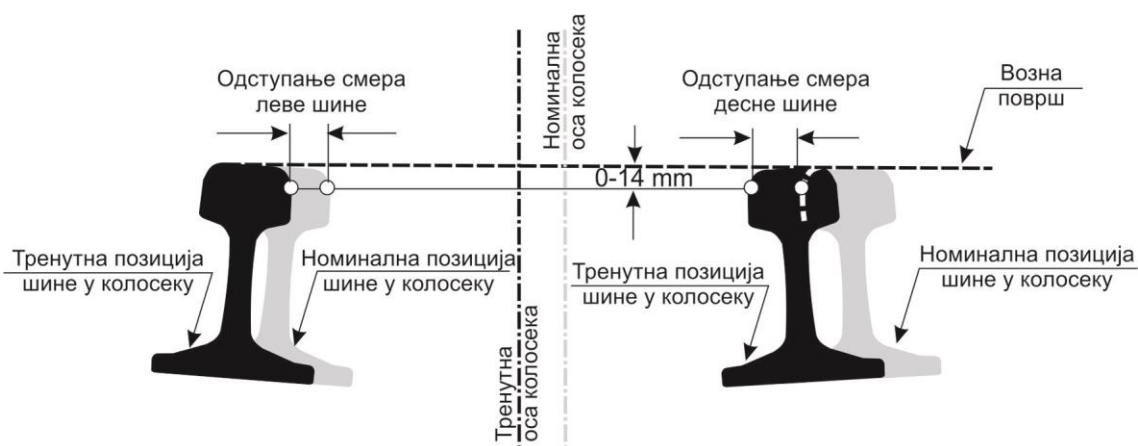
### 2.1.3 Одступање смера

Одступање смера колосека (бочно одступање) је одступање леве и десне шине у правцу  $Y$ -осе, које се мери у зони  $Z_P=14\text{ mm}$  испод додирне површи. У складу са [2], одступање смера колосека  $Y_P$  је одступање дуж  $Y$ -осе у односу на средњи хоризонтални положај (референтну линију). Принцип мерења одступања смера колосека је приказан на слици 2.7.



Слика 2.7 Принцип мерења одступања смера колосека [2]

Слика 2.8 приказује номинални (средњи) положај шина у колосеку (сива боја) и поперечно одступање смера за оба актуелна положаја шина (црна боја).



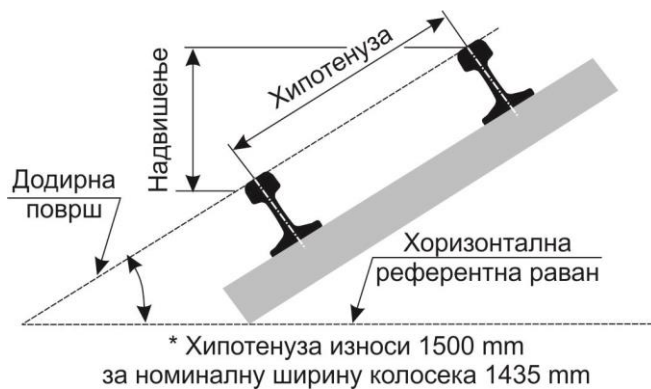
Слика 2.8 Одступање смера као бочно одступање положаја леве и десне шине

Приликом анализе одступања смера колосека потребно је разматрати исте опсеге таласних дужина као и код вертикалног одступања.



## 2.1.4 Надвишење

У складу са [2], надвишење је дефинисано као разлика висина наспрамних возних површи глава шине. Надвишење се рачуна на основу угла између додирне површи и референтне хоризонталне равни (слика 2.9).

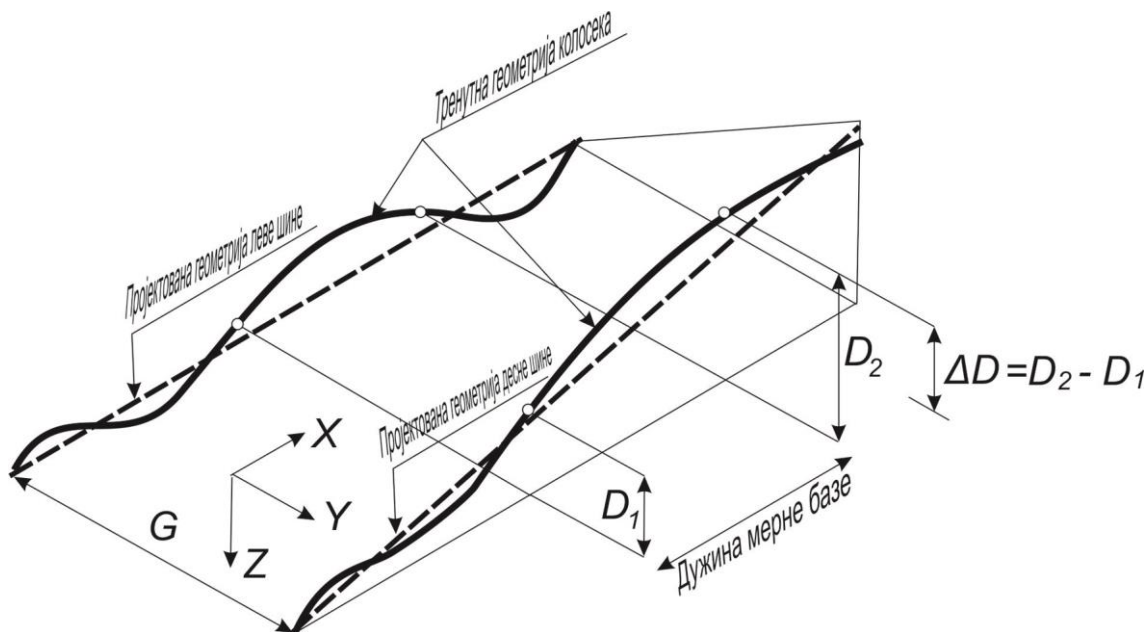


Слика 2.9 Принцип мерења надвишења

Неопходно је напоменути да се надвишење, као параметар геометрије колосека, не односи на пројектовану вредност надвишења колосека у кривинама, већ представља разлику између апсолутних висина пресека возне површи и леве и десне шине. Дакле, овај параметар се мери и на колосеку у правцу и на колосеку у кривини – на правцу представља одступање у односу на референтну вредност 0, док у кривинама представља одступање у односу на пројектовану вредност надвишења.

## 2.1.5 Витоперност

Витоперност је промена надвишења на датом растојању дуж колосека [2]. Витоперност се дефинише као алгебарска разлика два надвишења  $\Delta D$  на дужина мерне базе  $\ell$  (слика 2.10). Витоперност представља критичан проблем у прелазним кривинама.



Слика 2.10 Принцип мерења витоперности колосека

## 2.2 Квалитет геометрије колосека

Експерименталне и теоријске анализе су показале да сви параметри геометрије колосека имају утицај на одзив железничких возила. Другим речима, да би се дефинисао квалитет геометрије колосека, неопходно је изабрати и комбиновати релевантне параметре геометрије колосека и одредити праг безбедности узимајући у обзир аспект интеракције колосека и возила. Неопходно је напоменути да одређене комбинације параметара геометрије колосека могу имати изразито јак утицај на одзив возила.

### 2.2.1 Нивои квалитета геометрије колосека

Стандард *SRPS EN 13848-5* разматра утицаје индивидуалних параметара геометрије колосека (одступање ширине колосека, вертикално одступање, одступање смера и витоперност) на одзив возила и дефинише три главна нивоа за параметре геометрије које треба узети у разматрање [6]:

- граница хитне интервенције (*IAL – Immediate Action Limit*) – у случају прекорачења ове граничне вредности захтева се предузимање мера у циљу

смањења ризика од исклизнућа на прихватљив ниво, што се постиже затварањем пруге за саобраћај, увођењем споре вожње или поправком геометрије колосека;

- граница интервенције (*IL – Intervention Limit*) – у случају прекорачења ове граничне вредности неопходно је предузети одговарајуће мере корективног одржавања како би се спречило достизање *IAL* границе пре следеће инспекције;
- граница упозорења (*AL – Alert Limit*) – у случају прекорачења ове граничне вредности захтева се анализа стања геометрије колосека и по потреби се предметна деоница укључује у план активности на одржавању.

Стандард *SRPS EN 13848-5* дефинише информативне *IL* и *AL* граничне вредности, које су дате у интервалу од минималне до максималне вредности за све главне параметре геометрије колосека дефинисане у [2]. Информативне *IL* и *AL* вредности, које су дефинисане у [6], одражавају уобичајену праксу већине европских управа инфраструктуре. У складу са тим, сваки Управљач инфраструктуре треба да дефинише сопствене граничне вредности за параметре геометрије колосека на мрежи узимајући у обзир пројектне параметре трасе, начин извођења радова, као и карактеристике саобраћаја. Дакле, Управљач инфраструктуре дефинише политику одржавања за своју железничку мрежу, која може бити усмерена или само на осигурање безбедности одвијања саобраћаја, или на достизање доброг квалитета вожње уз мање трошкове животног века железничке пруге, или на понуду атрактивних услуга за кориснике уз осигурање безбедности. Усвојена политика одржавања утиче на квалитет вожње и динамичко оптерећење колосека, радове и трошкове одржавања, као и трошкове одржавања возила.

У наставку је дат преглед граничних вредности за све главне параметре геометрије колосека у складу са [6].

### **2.2.1.1 Граничне вредности одступања ширине колосека**

Табела 2.2 приказује граничне вредности одступања ширине колосека у зависности од брзине. Приказане вредности се односе на изоловане грешке.

Табела 2.2 Граничне вредности одступања ширине колосека у складу са [6]

Брзина [km/h]	AL [mm]		IL [mm]		IAL [mm]	
	Min	Max	Min	Max	Min	Max
$V \leq 80$	-7	+25	-9	+30	-11	+35
$80 < V \leq 120$	-7	+25	-9	+30	-11	+35
$120 < V \leq 160$	-6	+25	-8	+30	-10	+35
$160 < V \leq 230$	-4	+20	-5	+23	-7	+28
$230 < V \leq 300$	-3	+20	-4	+23	-5	+28

### 2.2.1.2 Граничне вредности вертикалног одступања

Табела 2.3 приказује граничне вредности вертикалног одступања у зависности од брзине и интервала таласних дужина грешака. Приказане вредности се односе на изоловане грешке.

Табела 2.3 Граничне вредности вертикалног одступања у складу са [6]

Брзина [km/h]	AL [mm]		IL [mm]		IAL [mm]	
	Интервал		Интервал		Интервал	
	$D_1$	$D_2$	$D_1$	$D_2$	$D_1$	$D_2$
$V \leq 80$	12 – 18	-	17 – 21	-	28	-
$80 < V \leq 120$	10 – 16	-	13 – 19	-	26	-
$120 < V \leq 160$	8 – 15	-	10 – 17	-	23	-
$160 < V \leq 230$	7 – 12	14 – 20	9 – 14	18 – 23	20	33
$230 < V \leq 300$	6 – 10	12 – 18	8 – 12	16 – 20	16	28

### 2.2.1.3 Граничне вредности одступања смера

Табела 2.4 приказује граничне вредности одступања смера у зависности од брзине и интервала таласних дужина грешака. Приказане вредности се односе на изоловане грешке.

Табела 2.4 Граничне вредности одступања смера у складу са [6]

Брзина [km/h]	AL [mm]		IL [mm]		IAL [mm]	
	Интервал		Интервал		Интервал	
	$D_1$	$D_2$	$D_1$	$D_2$	$D_1$	$D_2$
$V \leq 80$	12 – 15	-	15 – 17	-	22	-
$80 < V \leq 120$	8 – 11	-	11 – 13	-	17	-
$120 < V \leq 160$	6 – 9	-	8 – 10	-	14	-
$160 < V \leq 230$	5 – 8	10 – 15	7 – 9	14 – 17	12	24
$230 < V \leq 300$	4 – 7	8 – 13	6 – 8	12 – 14	10	20

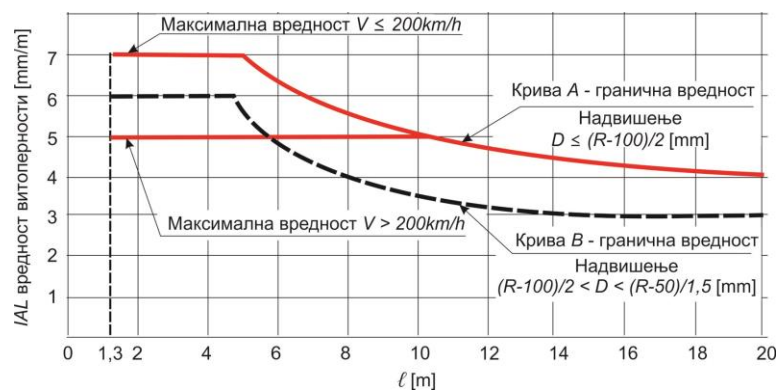
#### 2.2.1.4 Граничне вредности одступања надвишења

У оквиру [6] нису прописане  $IL$  и  $AL$  граничне вредности за надвишење, јер је ризик који проистиче из одступања надвишења у вези са витоперношћу колосека и мањком надвишења. Граничне вредности за витоперност су дате у наставку, а граничне вредности за мањак надвишења зависе од пројектних параметара трасе, начина извођења радова и карактеристика саобраћаја.

У општем случају, препоручује се да одступање измереног надвишења у односу на референтну вредност не сме да буде веће од  $\pm 20 \text{ mm}$  [6].

#### 2.2.1.5 Граничне вредности витоперности

Граничне вредности за витоперност колосека зависе од дужине мерне базе  $\ell$  и вредности надвишења, у складу са дијаграмом на слици 2.11.



Слика 2.11 IAL вредности за витоперност колосека

Табела 2.5 приказује граничне вредности витоперности у зависности од брзине за мерну базу дужине  $\ell=3\text{ m}$ . Приказане вредности се односе на изоловане грешке.

Табела 2.5 Граничне вредности витоперности за  $\ell=3\text{ m}$  у складу са [6]

Брзина [km/h]	$AL$ [mm]	$IL$ [mm]	$IAL$ [mm]
$V \leq 80$	4	5	7
$80 < V \leq 120$	4	5	7
$120 < V \leq 160$	4	5	7
$160 < V \leq 200$	4	5	7
$200 < V \leq 300$	3	4	5

### 2.2.2 Утицај параметара геометрије колосека на интеракције у систему колосек-возило

Главни недостатак стандарда *SRPS EN 13848-5* је што разматра изоловане грешке, односно средњу вредност одступања на одговарајућој дужини колосека, при чему се не разматра брзина промене, распоред грешака (редослед и положај), комбинација различитих параметара, пројектована геометрија колосека (хоризонтална закривљеност, мањак или вишак надвишења), утицај оптерећења од ветра, геометрија у додиру точка и шине (укључујући и еквивалентну коничност), тип и конструкција возила и стратегија одржавања. Набројани утицаји могу неповољно да утичу на динамички одзив возила на локалне грешке геометрије колосека.

Због претходно наведених разлога, стандард *SRPS EN 13848-5* је допуњен информативним анексом *A*, у оквиру којег се разматрају утицаји на интеракцију између колосека и железничког возила. У складу са [6], неопходно је размотрити три критеријума који утичу на интеракције у систему колосек-возило: безбедност, удобност вожње и животни век колосека и возила.

### 2.2.2.1 Критеријуми безбедности

Под параметрима који утичу на безбедност подразумевају се: сума бочних сила  $\Sigma Y$ , комбинација бочних  $Y$  и вертикалних сила  $Q$ , и квази-статичке бочне  $Y_{qstat}$  и вертикалне силе  $Q_{qstat}$ .

Сума бочних сила представља параметар којим се утврђује ризик од бочног померања колосека. Сума бочних сила зависи од вертикалних сила које делују на колосек, а може се једноставно изразити помоћу тзв. *Prud'Homme*-ове границе:

$$\Sigma Y \leq \alpha \cdot \left( 10 + \frac{P_o}{3} \right) \quad (2.2)$$

где је  $P_o$  статичко осовинско оптерећење изражено у  $kN$ , а  $\alpha$  је коефицијент који износи  $1,0$  за локомотиве и кола за превоз путника, односно  $0,85$  за теретна кола [6]. При томе, сума бочних сила треба да буде мања од отпора бочном померању колосека. Вредност отпора бочном померању колосека зависи од тежине прагова, површине ослањања прагова, коефицијента трења између доње површине прагова и застора од туцаника, као и од количине и збијености туцаника испред чела прагова.

Приликом анализе бочних и вертикалних сила неопходно је размотрити и њихов међусобни однос  $Y/Q$ . Овим односом се утврђује ризик од исклизућа возила из колосека. Вредност  $Y/Q$  треба да буде нижа од критичне вредности, која зависи од угла налетања венца точка на шину, услова у додиру точка и шине, брзине и других фактора. У складу са [8,9], гранична вредност за однос бочне и вертикалне силе износи  $(Y/Q)_{lim}=1,2$ . Ова гранична вредност служи за проверу сигурности од исклизућа нових возила. Испитивањем у екстремним условима утврђено је да овој граничној вредности одговара сигурност од исклизућа са вероватноћом од  $97,5\%$ .

Са друге стране, да би дошло до пењања точка на шину, однос  $Y/Q$  мора на одређеној дужини колосека да буде већи од  $1,2$ . Због тога се у анализи узима вредност  $Y/Q$  која се јавља на дужини колосека већој од  $2 m$ . При кретању већим брзинама однос бочних и вертикалних сила се брзо мења, тако да је ризик од исклизућа већи при малим брзинама, нарочито у случају празних кола [10].

До појаве исклизнућа долази услед прекорачења граничне вредности односа бочне и вертикалне силе и ефекта трења између венца точка и бока главе шине. У складу са тим, смањење ризика од исклизнућа возила подразумева примену мера за смањивање поменутог ефекта трења, што се постиже подмазивањем бока главе спољашње шине у кривинама малих радијуса. Ова активност спада у мере превентивног одржавања, коју Управљач инфраструктуре спроводи у циљу продужавања животног века шина у колосеку.

Квази-статичке бочне и вертикалне силе је неопходно анализирати у свим кривинама малог полупречника  $R \leq 600 \text{ m}$ , како би се испитали услови проласка меродавног обртног постоља и утврдила потреба за проширењем колосека [10,11].

#### **2.2.2.2 Критеријуми удобности возње**

Удобност возње представља важан критеријум са аспекта корисника железнице. Овај критеријум представља и један од примарних циљева развоја европског железничког система [12]. Удобност возње је важна како са аспекта превоза путника, тако и са аспекта превоза робе железницом. Параметри којима се одређује удобност возње су бочна  $a_y$  и вертикална  $a_z$  компонента убрзања унутар сандука возила.

#### **2.2.2.3 Критеријуми везани за животно век колосека и возила**

Животно век колосека и возила, односно њихових елемената, у највећој мери зависи од бочних и вертикалних сила. Услед бочних сила долази до хабања бока главе шине и венца точка. Са друге стране, услед вертикалних сила долази до висинског хабања главе шине, као и до појаве дефеката на глави шине и бандажу точка. Дакле, Управљач инфраструктуре и Управљач железничких возила треба да дефинишу своје планове одржавања узимајући у обзир све релевантне параметре, тако да се постигне најдужи животно век и колосека и возила.

#### **2.2.2.4 Утицај параметара геометрије колосека на релевантне критеријуме**

Квалитет геометрије колосека треба да се дефинише комбиновањем релевантних параметара геометрије колосека, уз одређивање граничних вредности параметара са аспекта безбедности, комфора и животног века колосека и возила. На основу искуства и бројних теоријских анализа утврђено је да практично сви параметри геометрије колосека имају утицај на динамички одзив возила. При



томе, поједине комбинације параметара геометрије колосека могу да имају изузетно велики утицај. Табела 2.6 приказује утицај појединих комбинација параметара геометрије колосека на динамички одзив возила.

Табела 2.6 Утицај комбинација параметара геометрије колосека на одзив возила [6]

Одзив возила	Параметри геометрије колосека			
	Ширина колосека	Вертикално одступање	Витоперност / Надвишење	Одступање смера
$\Sigma Y$	X		X	X
$Q$		X	X	X
$a_y$			X	X
$a_z$		X		
$Y/Q$	X	X	X	X

### 2.2.3 Оцена квалитета геометрије колосека

Стандард *SRPS EN 13848-6* дефинише индекс квалитета колосека (*TQI – Track Quality Index*) као меру помоћу које се даје оцена квалитета геометрије колосека. Вредност *TQI* одређује квалитет геометрије на анализираној деоници колосека у складу са параметрима и методама мерења дефинисаним у оквиру стандарда [2-6]. Вредност *TQI* и брзина на анализираној деоници колосека представљају основу за дефинисање класе квалитета колосека (*TQC – Track Quality Class*).

#### 2.2.3.1 Индекс квалитета колосека

Стандардна девијација представља један од најчешћих показатеља за *TQI*, који користи већина железничких управа у Европи. Стандардна девијација је мера расипања скупа измерених података (параметара геометрије колосека) у односу на средњу вредност, а дефинисана је изразом (2.3):

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y})^2}{n-1}} \quad (2.3)$$

где је:

$SD$  – стандардна девијација,

$y_i$  – тренутна вредност измереног параметра,

$\bar{y}$  – средња вредност сигнала,

$n$  – број вредности.

Стандардна девијација се уобичајено користи као индекс квалитета за вертикално одступање и одступање смера, при чему у оба случаја треба разматрати интервал таласних дужина  $D_1$ . Поред тога, стандардна девијација може да се користи за све главне параметре геометрије колосека уз разматрање интервала таласних дужина  $D_2$ . Будући да се вертикално одступање и одступање смера мере појединачно за леву и десну шину у колосеку, препоручено је да се и стандардна девијација за ове параметре рачуна одвојено за сваку шину. Поред тога, може се користити стандардна девијација средње вредности одступања за обе шине, боља или лошија од две вредности стандардне девијације, или стандардна девијација вредности измерених на спољашњој шини у кривинама [7].

За одређивање индекса квалитета колосека може да се користи број грешака по јединици дужине колосека. Овај начин одређивања вредности  $TQI$  се обично користи за: вертикално одступање (интервали таласних дужина  $D_1$  и  $D_2$ ), одступање смера (интервали таласних дужина  $D_1$  и  $D_2$ ), витоперност, ширину колосека и надвишење [7].

Једна од метода за одређивање индекса квалитета колосека подразумева комбиновање стандардних девијација појединачних параметара геометрије колосека помножених одговарајућим тежинским коефицијентима. Комбинована стандардна девијација је дефинисана изразом (2.4):

$$CoSD = \sqrt{w_G \cdot SD_G^2 + w_{LL} \cdot SD_{LL}^2 + w_A \cdot SD_A^2 + w_{CL} \cdot SD_{CL}^2} \quad (2.4)$$

где је:

$CoSD$  – комбинована стандардна девијација,

$SD_{TG}$  – стандардна девијација ширине колосека,

$SD_{LL}$  – стандардна девијација средњег вертикалног одступања за обе шине,

$SD_A$  – стандардна девијација средњег одступања смера за обе шине,

$SD_{CL}$  – стандардна девијација надвишења,

$w_{TG}$ ,  $w_{LL}$ ,  $w_A$ ,  $w_{CL}$  – тежински коефицијенти за одговарајуће параметре.

Вредности тежинских коефицијената прописује Управљач инфраструктуре у складу са политиком одржавања. Комбинована стандардна девијација се користи за оцену индекса квалитета колосека, јер боље одражава свеукупно деловање параметара геометрије колосека на возило у односу на анализу појединачних вредности стандардне девијације.

У литератури се могу срести различите методе за одређивање вредности  $TQI$ . На пример, Правилник за одржавање железничких пруга у Кини дефинише  $TQI$  као суму стандардних девијација свих параметара геометрије колосека [13]. Неопходно је напоменути да су овим Правилником дефинисани исти параметри геометрије колосека као у [2], а приликом одређивања вредности  $TQI$  сабирају се појединачне стандардне девијације вертикалног одступања и одступања смера за обе шине у складу са изразом .

$$TQI = SD_G + SD_{LL-L} + SD_{LL-R} + SD_{A-L} + SD_{A-R} + SD_{CL} + SD_{TW} \quad (2.5)$$

где је:

$SD_G$  – стандардна девијација одступања ширине колосека,

$SD_{LL-L}$  и  $SD_{LL-R}$  – стандардне девијације вертикалног одступања леве и десне шине,

$SD_{A-L}$  и  $SD_{A-R}$  – стандардне девијација одступања смера леве и десне шине,

$SD_{CL}$  – стандардна девијација надвишења,

$SD_{TW}$  – стандардна девијација витоперности.

Федерална железничка управа у Америци ( $FRA$  – *Federal Railroad Administration*) је на основу испитивања на својој железничкој мрежи установила индекс квалитета који се рачуна појединачно за сваки параметар геометрије колосека применом израза (2.6):

$$TQI = \left( \frac{L_s}{L_o} - 1 \right) \cdot 10^6 \quad (2.6)$$

где је:

$L_s$  – дужина полигоналне линије која представља дијаграм мерних резултата на дужини мерне деонице, а

$L_0$  – дужина мерне деонице, која се добија као разлика крајње и почетне стационаже [14,15].

*Sadeghi* је на почетку свог истраживања представио преглед великог броја различитих метода које се могу користити за одређивање вредности *TQI*. У наставку је предложио методу за одређивање вредности *TQI*, која се заснива на комбинацији четири параметра геометрије колосека: ширини колосека, вертикалном одступању, одступању смера и витоперности. Тежински коефицијенти су одређени на основу претходних анализа података снимљених на посматраним деоницама [16].

Стандард *SRPS EN 13848-6* дефинише на нивоу информације неколико метода које могу да се користе за одређивање вредности *TQI*, као што су метода анализе убрзања материјалне тачке (*PMA – Point Mass Acceleration*), метода анализе одзива возила (*VRA – Vehicle Response Analysis*) и анализа густине спектра снаге (*PSD – Power Spectral Density*).

У оквиру истраживања које су спровели *Molodova u sar.* развијен је мерни систем који служи за мерење убрзања осовинског склопа [17]. Овај систем је заснован на *PMA* методи и може да се користи за одређивање вредности *TQI*. Са друге стране, вредности *TQI* би могле да се одреде коришћењем мерних осовинских склопова којима се мере вертикалне и бочне силе, будући да њихове вредности и међусобан однос представљају основне параметре који утичу на безбедност. У истраживању које је спровео *Bižić* развијена је метода помоћу које се добијају изузетно поуздани резултати мерења вертикалних и бочних сила, њиховог односа и положаја тачке додира точка и шине [18].

### **2.2.3.2 Класе квалитета колосека**

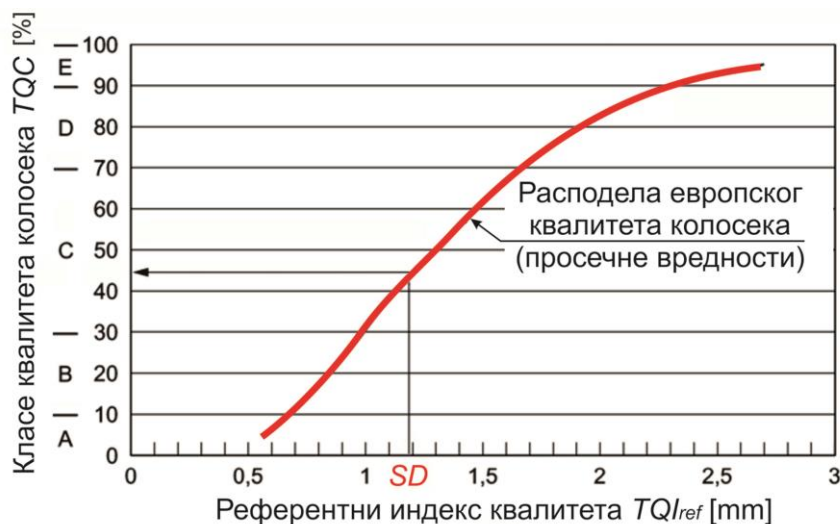
Стандард *SRPS EN 13848-6* дефинише пет класа квалитета колосека *TQC*, као стандардну девијацију вертикалног одступања и одступања смера, за пет интервала брзина. Дефиниције *TQC*-а су засноване на расподели кумулативне фреквенције просечних вредности помножених тежинским коефицијентима. Ова анализа је спроведена за сваку од 13 железничких мрежа које су учествовале у европској анкети квалитета колосека (37% укупне дужине европске железничке мреже): *ÖBB-Infrastruktur* (Аустрија), *Infrabel* (Белгија), *SŽDC* (Чешка), *Rail Net*

*Denmark* (Данска), *FTA* (Финска), *SNCF/RF* (Француска), *DB Netz* (Немачка), *RFI* (Италија), *ProRail* (Холандија), *REFER* (Португалија), *SBB* (Швајцарска), *Trafikverket* (Шведска) и *NetworkRail* (Велика Британија).

Пет *TQC* класа је дефинисано на следећи начин [7]:

- класа *A* – најбољих 10% расподеле,
- класа *B* – између 10% и 30% расподеле,
- класа *C* – између 30% и 70% расподеле,
- класа *D* – између 70% и 90% расподеле, и
- класа *E* – представља најлошијих 10% расподеле европског квалитета колосека.

Слика 2.12 приказује принцип за одређивање класа квалитета колосека на основу вредности  $TQI_{ref}$ , која може да се односи на стандардну девијацију вертикалног одступања или стандардну девијацију одступања смера.



Слика 2.12 Дијаграм за одређивање класе квалитета колосека [7]

Табела 2.7 дефинише граничне вредности стандардне девијације вертикалног одступања за интервал таласних дужина  $D_1$ , на основу којих се одређује *TQC*.

Табела 2.7 Одређивање  $TQC$  на основу граничне вредности стандардне девијације вертикалног одступања [7]

Брзина [km/h]	Граничне вредности за $SD_{LL}$ [mm]				
	$TQC$				
	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$
$V \leq 80$	< 1,25	1,75	2,75	3,75	> 3,75
$80 < V \leq 120$	< 0,75	1,10	1,80	2,50	> 2,50
$120 < V \leq 160$	< 0,65	0,85	1,40	1,85	> 1,85
$160 < V \leq 230$	< 0,60	0,75	1,15	1,60	> 1,60
$230 < V \leq 300$	< 0,40	0,55	0,85	1,15	> 1,15

Табела 2.8 дефинише граничне вредности стандардне девијације одступања смера за интервал таласних дужина  $D_1$ , на основу којих се одређује  $TQC$ .

Табела 2.8 Одређивање  $TQC$  на основу граничне вредности стандардне девијације одступања смера [7]

Брзина [km/h]	Граничне вредности за $SD_A$ [mm]				
	$TQC$				
	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$
$V \leq 80$	< 0,90	1,25	1,95	2,70	> 2,70
$80 < V \leq 120$	< 0,50	0,70	1,05	1,45	> 1,45
$120 < V \leq 160$	< 0,45	0,55	0,75	1,00	> 1,00
$160 < V \leq 230$	< 0,40	0,50	0,70	0,90	> 0,90
$230 < V \leq 300$	< 0,35	0,40	0,50	0,65	> 0,65

У оквиру европске анкете квалитета колосека нису разматране граничне вредности стандардне девијације за интервал таласних дужина  $D_1$  и брзине веће од  $300 \text{ km/h}$ , као ни за интервал таласних дужина  $D_2$  и брзине веће од  $160 \text{ km/h}$ .

### 3 УВОД У ФРАКТАЛНУ ГЕОМЕТРИЈУ

Уобичајено поимање и описивање природе се заснива на објектима класичне геометрије, односно на тзв. еуклидској геометрији. Међутим, класична геометрија представља прву апроксимацију структуре физичких објеката [19]. Као таква она не може прецизно да опише нпр. облик планине, морске обале, облака на небу, крошње дрвета, мреже крвотока или мреже неурона у телу човека, јер уобичајене форме из природе не подлежу правилним геометријским облицима. Многи структурни шаблони који се јављају у природи су до те мере неправилни да показују не само виши степен, већ и потпуно другачији ниво сложености [20].

Дакле, у природи практично постоји велики (бесконачан) број структурних шаблона и форми, које су занемарене у класичној геометрији. Односно, *Euclides* је при постављању темеља геометрије занемарио све облике за које је сматрао да су аморфни. У наредним вековима се и даље наставило избегавање ових неправилних облика, све док *Mandelbrot* није осмислио и развио нову врсту геометрије засновану на природи, која је нашла примену у бројним областима. Та нова врста геометрије је названа фрактална геометрија.

Фрактална геометрија представља допуну класичне геометрије и пружа нови увид у природу тј. све што нас окружује. У уводу своје књиге, *Barnsley* упозорава потенцијалног читаоца да фрактална геометрија мења начин поимања света, те да

је опасно наставити читање, јер ће доћи до трајног губитка спознаје света коју смо стекли у детињству [20].

*Mandelbrot* је термин фрактал извео од латинске речи *fractus*, што значи сломљен, односно преломљен. Са друге стране, глагол *frangere* значи сломити, преломити, односно разбити у неправилне фрагменте. Фрактали представљају фамилију облика која обухвата све неправилне облике и структурне шаблоне из природе, код којих је степен неправилности идентичан на свим размерама посматрања.

Класична математика се углавном бавила оним скуповима и функцијама који су били утемељени на правилним геометријским облицима, док су сви други скупови и функције били занемаривани, јер је важило мишљење да не постоји јединствена теорија која би их све обухватила. Тек је у XX веку отворено ново поглавље у математици. Период модерне математике практично почиње са дефинисањем *Cantor*-овог скупа и *Peano*-ве просторне криве, а на даљи развој су посредно или непосредно утицали: *Lebesgue*, *Hausdorff*, *Besicovitch*, *Bolzano*, *von Koch*, *Sierpinski* и многи други.

## 3.1 Основна својства фрактала

У наставку рада је дат преглед основних својстава фрактала.

### 3.1.1 Непрекидност и диференцијабилност

Криза класичне математике је почела 1872. године, када је немачки математичар *Karl Weierstrass* представио функцију која је по њему и добила име. Наиме, та функција је имала врло необична својства. У дотадашњој математици важио је став да ако је функција:

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, D_f \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

непрекидна за свако  $x \in D_f$ , онда је она и диференцијабилна за свако  $x \in D_f$ , осим можда на изолованом интервалу  $[a, b] \in D_f$ . Насупрот овоме, *Weierstrass*-ова



функција је непрекидна за свако  $x \in D_f$ , док ни у једној својој тачки није диференцијабилна, односно  $\nexists x \in D_f$  за које је функција диференцијабилна.

*Weierstrass*-ова функција није први пример функције која је имала ово својство, али је први званично објављени пример. Најранији познати пример овакве функције дао је чешки математичар *Bolzano* око 1830. године, која је објављена први пут тек 1922. године [21].

После објављивања *Weierstrass*-ове функције у часопису „*Journal für die reine und angewandte Mathematik*“, многи други математичари су дали свој допринос у развоју нове области.

*Weierstrass*-ова функција је дефинисана изразом (3.2), а облик графика зависи од усвојених вредности параметара  $a$  и  $b$ . Дакле, *Weierstrass*-ова функција обухвата фамилију кривих дефинисаних изразом (3.2).

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot \cos(b^n \cdot \pi \cdot x) \quad (3.2)$$

где за параметре  $a$  и  $b$  важе услови (3.3):

$$\begin{aligned} 0 < a < 1 \\ b = 2 \cdot k + 1, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ a \cdot b > 1 + \frac{3}{2} \cdot \pi \end{aligned} \quad (3.3)$$

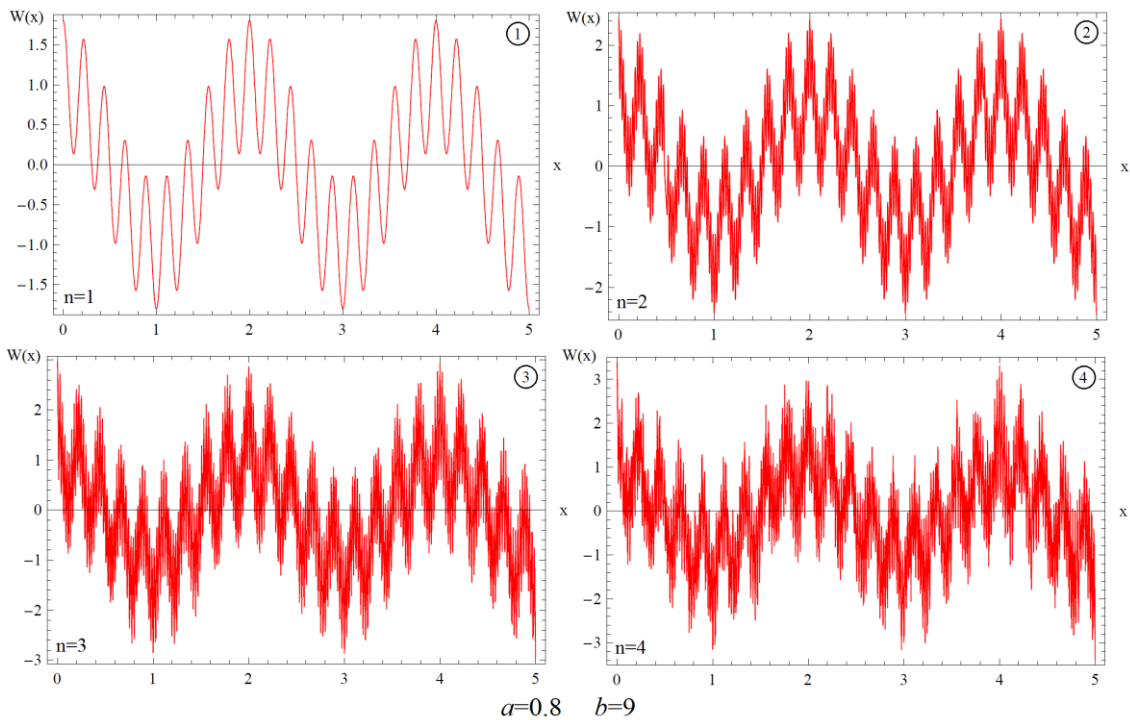
Пре званичног објављивања рада 1875. године, *Weierstrass*-ова функција је била представљена у другачијем облику (3.4) [21], који се и даље може срести у бројној литератури.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(a^n \cdot x)}{b^n}, \quad \frac{a}{b} > 1 \quad (3.4)$$

Недиференцијабилност *Weierstrass*-ове функције је последица чињенице да је она аналитички дефинисана бесконачним редом (сумом), датим изразом (3.5).

$$W(x) = \cos(\pi \cdot x) + a \cdot \cos(b \cdot \pi \cdot x) + a^2 \cdot \cos(b^2 \cdot \pi \cdot x) + \dots + a^n \cdot \cos(b^n \cdot \pi \cdot x) \quad (3.5)$$

Ако се посматра само први члан овог реда ( $n=0$ ), то је класична косинусна функција. Како се број чланова у суми повећава, функција добија све сложенији облик, односно све већи број веома блиских локалних минимума и максимума. Слика 3.1 приказује развој једног графика *Weierstrass*-ове функције са повећавањем посматране парцијалне суме на интервалу  $x \in [0, 5]$ . Када  $n \rightarrow \infty$ , добије се график функције која није ни глатка нити диференцијабилна на било ком интервалу који припада области дефинисаности.



Слика 3.1 Развој графика *Weierstrass*-ове функције на интервалу  $[0, 5]$

*Weierstrass*-ова функција има глобални максимум у  $x=0$ , па заменом ове вредности у (3.5) следи:

$$W(0) = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \quad (3.6)$$

Израз (3.6) представља геометријски ред. Како параметар  $a$  по дефиницији *Weierstrass*-ове функције испуњава услов  $0 < a < 1$ , овај ред конвергира:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \Leftrightarrow 0 < a < 1 \quad (3.7)$$

Дакле, у складу са (3.7), вредност *Weierstrass*-ове функције у  $x=0$  зависи само од усвојене вредности параметра  $a$ . За случај  $a=0,8$  (слика 3.1), добије се  $W(0)=5$ .

Увидом у графике 1-4 на слици 3.1, стиче се увид у проблем са којим су се сусрели математичари *XIX* века, који је касније довео до развоја нове области математике.

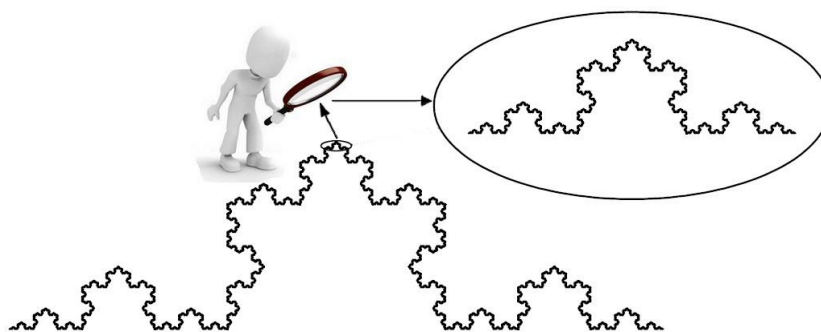
### 3.1.2 Самосличност

Као што је раније речено, код фрактала је степен неправилности идентичан на свим размерама посматрања, што значи да је сваки произвољан део апсолутно или приближно сличан целини. Ова особина се назива самосличност и представља једно од основних својстава фрактала. Дакле, сваки фрактал поседује својство самосличности, али не важи и обрнуто, односно није сваки облик који поседује својство самосличности уједно и фрактал. Тривијални пример самосличности представља дуж подељена на сегменте једнаке дужине, где је сваки сегмент сличан целини.

Могу се разликовати три врсте самосличности [22]:

- апсолутна самосличност – потпуна сличност на свим размерама посматрања (један од бројних примера је *Coch*-ова крива),
- квази-самосличност – приближна сличност на различитим размерама посматрања (један од примера је *Mandelbrot*-ов скуп),
- статистичка самосличност – сличност која се остварује захваљујући постојању одређене величине, чија се вредност не мења на различитим размерама посматрања; пример може да буде сваки фрактал који је настао као резултат неког случајног процеса или појаве.

Код апсолутно самосличних фрактала сваки бесконачно мали сегмент је, теоријски гледано, сличан фигури у целини. Слика 3.2 приказује пример апсолутне самосличности код *Coch*-ове криве. Колико год увећавали један сегмент *Coch*-ове криве, он ће увек задржавати идентичну структуру као и цела крива. Међутим, у практичном смислу постоје ограничења при рачунарски подржаној конструкцији фрактала – фрактал можемо приказати само до оног нивоа детаљности који је омогућен расположивом меморијом рачунара, односно резолуцијом.



Слика 3.2 Апсолутна самосличност код *Coch*-ове криве

Основна особина већине детерминистичких фрактала је самоафиност, која представља генерализацију самосличности. Самоафини објекти представљају унију увећаних и/или умањених (рескалираних) копија себе самих. При томе, рескалирање је анизотропно, тј. зависно од правца. Након анизотропног скалирања, део самоафиног објекта је сличан објекту у целини [23].

### 3.1.3 Димензија

Постоје различите дефиниције појма димензије. У општем случају димензија представља одговарајући нумерички параметар, који се везује за посматрани простор. Са друге стране, простор представља скуп тачака са јасно дефинисаном метриком, односно растојањем између тачака.

У наставку су дате дефиниције димензије у еуклидском простору, тополошке димензије и фракталне димензије.

### 3.1.3.1 Еуклидска димензија

У смислу еуклидске геометрије, димензија се најједноставније може представити као број реалних параметара неопходан да се у одговарајућем простору дефинише тачка. Ако се посматра бројна права, свака тачка је дефинисана једним реалним параметром који представља растојање од референтне тачке дуж те праве. За дефинисање тачке која припада равни потребно је одредити њено хоризонтално и вертикално растојање од референтне тачке. Тачка у физичком простору који нас окружује се описује са три реална параметра, који означавају растојања од референтне тачке по три главна правца тог простора. Дакле, у општем случају, у  $n$ -димензионалном простору ( $n \in \mathbb{Z}$ ) је потребно  $n$  реалних параметара да би се дефинисала тачка.

Други приступ одређивању Еуклидске димензије је одређивање броја степени слободе кретања у оквиру датог простора. При томе је неопходан услов да су правци кретања међусобно ортогонални. Дакле, тачка на линији може да се креће само у једном правцу, са једног на други крај линије. Тачка у равни може да се креће у два, а у телу у три независна међусобно ортогонална правца.

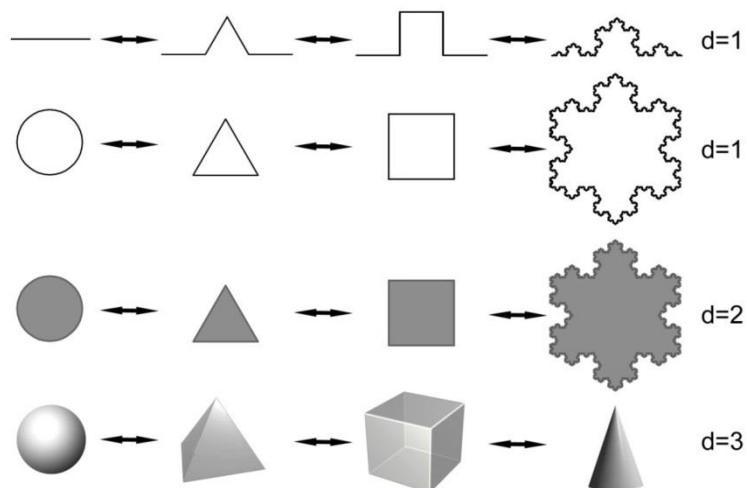
### 3.1.3.2 Тополошка димензија

Тополошка димензија представља највећу локалну димензију најмање димензионалног објекта који има својство да подели посматрани простор на два дела [24]. По дефиницији, тополошка димензија празног скупа  $\{\emptyset\}$  једнака је  $-1$ , док је димензија сваког пребројивог скупа једнака  $0$ .

Тополошко својство неког простора (или објекта грубо речено) је својство које остаје непроменљиво при непрекидним пресликавањима  $I-I$ . Оваква пресликавања се називају изоморфна или хомеоморфна пресликавања. Дакле, уколико су два простора (објекта) хомеоморфна онда су тополошки идентична, односно имају исту тополошку димензију.

*Coch*-ова крива као геометријски објекат заузима еуклидску раван. Међутим, тополошка димензија *Coch*-ове криве није идентична тополошкој димензији равни, јер ова два објекта нису изоморфна. Тачније, не постоји непрекидно изоморфно пресликавање које би један објекат пресликало у други. Са друге стране, постоји изоморфно пресликавање праве линије у *Coch*-ову криву, одакле следи да је тополошка димензија ове криве једнака  $1$ . Овај став се може

генерализовати – свака непрекидна крива која заузима еуклидску раван има тополошку димензију  $1$ . Међутим, нису све криве које испуњавају претходни услов изоморфне. У складу са тим, на слици 3.3 су дати примери објеката који се могу изоморфно пресликати једни у друге, као и њихове тополошке димензије  $d$ .



Слика 3.3 Примери изоморфних пресликавања и њихове тополошке димензије

### 3.1.3.3 Фрактална димензија

Фрактална димензија је идентична *Hausdorff*-овој (*Hausdorff-Besicovitch*) димензији, која представља ненегативан реалан број који се може повезати са било којим простором. *Hausdorff*-ова димензија објекта еуклидске геометрије је једнака његовој тополошкој димензији, док *Hausdorff*-ова димензија фрактала може имати вредност било ког позитивног реалног броја.

*Mandelbrot* је фрактал дефинисао као сваки објекат чија је *Hausdorff*-ова димензија строго већа од тополошке димензије. Ако је тополошка димензија неког фрактала  $d$ , онда његова фрактална димензија припада интервалу  $(d, d+1)$ . Дакле, како тополошка димензија *Coch*-ове криве износи  $1$ , њена *Hausdorff*-ова димензија има одређену вредност која припада интервалу  $(1, 2)$ .

Свака крива у равни има вредност фракталне димензије која припада интервалу  $(1, 2)$ , а која зависи од тога колико посматрана крива испуњава раван у којој се налази. Исти став важи и за сваку површ у простору, при чему вредност фракталне димензије површи припада интервалу  $(2, 3)$ . Стога, фрактална димензија може да се користи за поређење комплексности две криве или две

површи [25], односно за поређење комплексности било која два изоморфна објекта.

## 3.2 Теоријске основе *Hausdorff*-ове димензије

У наставку је дат преглед основних дефиниција и теорема које се односе на *Hausdorff*-ову меру и њен специјалан случај – *Hausdorff*-ову димензију. Преглед теорије је урађен у складу са [22].

### 3.2.1 *Hausdorff*-ова мера

Нека је дат скуп  $U \neq \emptyset$  за који важи  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Пречник овог скупа, у ознаци  $|U|$ , дефинише се као супремум растојања између ма које две тачке  $x_i \in U, i=1, \dots, n$ . Односно за пречник скупа  $U$  важи израз (3.8).

$$|U| = \sup \{ (x_i, x_j) : i, j = 1, \dots, n \} \quad (3.8)$$

Нека је дат скуп  $A \subset \mathbb{R}^n$ .  $\delta$ -покривач скупа  $A$  је број скупова  $\{U_i\}$  чији је пречник највише  $\delta$ , односно за који важи (3.9).

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad 0 < |U_i| \leq \delta \quad (3.9)$$

За свако  $\delta > 0$ , уз услов да је параметар  $s > 0$ , може се дефинисати:

$$H_{\delta}^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ је } \delta\text{-покривач скупа } A \right\} \quad (3.10)$$

Израз (3.10) монотонно расте када  $\delta \rightarrow 0+$ , па следи:

$$H^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} H_{\delta}^s(A) \quad (3.11)$$

Израз (3.11) представља  $s$ -димензионалну *Hausdorff*-ову меру скупа  $A$ .

### 3.2.1.1 Теорема о хомотетичном пресликавању

Нека је дат скуп  $A \subset \mathbb{R}^n$  и нека је дата константа  $\lambda > 0$ . Тада важи израз (3.12), који представља хомотетично пресликавање скупа  $A$  са фактором  $\lambda$  у односу на координатни почетак.

$$H^s(\lambda \cdot A) = \lambda^s \cdot H^s(A) \quad , \quad \lambda \cdot A = \{\lambda \cdot x : \forall x \in A\} \quad (3.12)$$

### 3.2.1.2 Теорема о непрекидности пресликавања

Нека је дат скуп  $A \subset \mathbb{R}^n$  и нека је дато пресликавање  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  за које важи *Hölder*-ов услов (3.13):

$$|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|^\alpha \quad (3.13)$$

где су  $c$  и  $\alpha$  константе за које важи  $c > 0$  и  $\alpha > 0$ , а  $\{x, y\} \in A$ . Тада за свако  $s \geq 0$  важи израз (3.14).

$$H^{\frac{s}{\alpha}}(f(A)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \cdot H^s(A) \quad (3.14)$$

## 3.2.2 Hausdorff-ова димензија

Полазећи од дефиниције (3.10) уз претпоставку да је  $0 < \delta < 1$ , тада за сваки скуп  $A \subset \mathbb{R}^n$  важи:

$$H^s(A) \geq H_\delta^t(A) \quad (3.15)$$

где је  $s < t$ . За сваки  $\delta$ -покривач скупа  $A$  из  $\{U_i\}$  следи:

$$0 < |U_i| < 1 \quad (3.16)$$



$$0 < \frac{|U_i|}{\delta} \leq 1 \quad (3.17)$$

На основу дефиниције (3.15) и израза (3.17) следи:

$$\left(\frac{|U_i|}{\delta}\right)^s \geq \left(\frac{|U_i|}{\delta}\right)^t \quad (3.18)$$

$$\delta^{t-s} \cdot |U_i|^s \geq |U_i|^t \quad (3.19)$$

$$\delta^{t-s} \cdot \sum_i |U_i|^s \geq \sum_i |U_i|^t \quad (3.20)$$

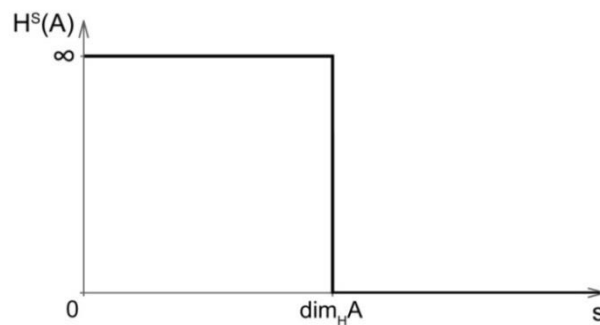
$$\delta^{t-s} \cdot H_\delta^s(A) \geq H_\delta^t(A) \quad (3.21)$$

Уз претпоставку да  $H^s(A)$  има коначну вредност, из израза (3.21) се уз услов  $\delta \rightarrow 0+$  могу дефинисати два случаја:

1)  $H^t(A) = 0 \Leftrightarrow t > s$

2)  $H^t(A) = \infty \Leftrightarrow t < s$ .

Дакле, за случај  $t=s$  долази до скоковите промене *Hausdorff*-ове мере скупа  $A$  са вредности  $\infty$  на вредност  $0$  (слика 3.4). Вредност  $s$  при којој долази до ове скоковите промене се назива *Hausdorff*-ова димензија скупа  $A$  и означава са  $\dim_H A$ .



Слика 3.4 Графичка интерпретација *Hausdorff*-ове димензије

На основу претходних разматрања, *Hausdorff*-ова димензија се може дефинисати изразом (3.22):

$$\dim_H A = \inf \{s: H^s(A)=0\} = \sup \{s: H^s(A)=\infty\} \quad (3.22)$$

при чему важи:

$$\begin{aligned} s < \dim_H A &\Leftrightarrow H^s(A) = \infty \\ s > \dim_H A &\Leftrightarrow H^s(A) = 0 \\ s = \dim_H A &\Leftrightarrow H^s(A) \in (0, \infty) \end{aligned} \quad (3.23)$$

*Hausdorff*-ова димензија има следеће особине:

- ако је  $A \subset \mathbb{R}^n$  отворен скуп, онда је  $\dim_H A = n$ ;
- ако је  $A$  глатка (непрекидно диференцијабилна)  $m$ -димензионална површ простора  $\mathbb{R}^n$ , онда је  $\dim_H A = m$ ;
- ако је  $A \subset B$ , онда је  $\dim_H A \leq \dim_H B$ ;
- ако је  $A_1, A_2, \dots, A_n$  пребројив низ скупова, онда важи:

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^n A_i = \sup_{1 \leq i \leq n} \{\dim_H A_i\} \quad (3.24)$$

- ако је скуп  $A$  пребројив, онда је  $\dim_H A = 0$ .

### 3.2.2.1 Теорема о непрекидности пресликавања

Теорема о непрекидности пресликавања важи и за *Hausdorff*-ову димензију. Заменом услова (3.23) у израз (3.14) следи:

$$\dim_H f(A) \leq \frac{s}{\alpha} \quad (3.25)$$

$$\dim_H f(A) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \dim_H A \quad (3.26)$$

Дакле, ако је скуп  $A \subset \mathbb{R}^n$  и ако за пресликавање  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  важи *Hölder*-ов услов (3.13), тада за свако  $\dim_H A \geq 0$  важи (3.26).

Вредност параметра  $\alpha=1$  дефинише посебан случај непрекидног пресликавања – тзв. *Lipschitz*-ово пресликавање. За овај случај важи:

$$\dim_H f(A) \leq \dim_H A \quad (3.27)$$

Ако пресликавање  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  представља би *Lipschitz*-ово пресликавање, односно уколико је испуњен услов (3.28) онда важи израз (3.29):

$$c_1 \cdot |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2 \cdot |x - y| \quad (3.28)$$

$$\dim_H f(A) = \dim_H A \quad (3.29)$$

где су  $c_1$  и  $c_2$  константе за које важи  $0 \leq c_1 \leq c_2 < \infty$  и  $\{x, y\} \in A$

### 3.2.3 Бокс димензија

Нека је  $A \subset \mathbb{R}^n$  непразан и ограничен скуп и нека је  $N_\delta(A)$  најмањи број скупова пречника не већег од  $\delta$  који могу покрити скуп  $A$ . Доња и горња бокс димензија дефинисане су изразима (3.30) и (3.31), тим редоследом.

$$\underline{\dim}_B A = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{\log \frac{1}{\delta}} \quad (3.30)$$

$$\overline{\dim}_B A = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{\log \frac{1}{\delta}} \quad (3.31)$$

Ако су доња и горња бокс димензија једнаке, онда се та заједничка вредност назива бокс димензија скупа  $A$  (3.32).

$$\dim_B A = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{\log \frac{1}{\delta}} \quad (3.32)$$

### 3.2.3.1 Теорема о бокс димензији

Нека је  $A \subset \mathbb{R}^n$  непразан и ограничен скуп. Нека је простор  $\mathbb{R}^n$  подељен кубном мрежом на једнаке коцке, од којих свака има странице дужине  $\delta$ , тада су димензије те мреже дефинисане изразом (3.33):

$$[k_1 \cdot \delta, (k_1 + 1) \cdot \delta] \times \dots \times [k_n \cdot \delta, (k_n + 1) \cdot \delta] \quad (3.33)$$

где су  $k_1, k_2, \dots, k_n$  цели бројеви. У практичном смислу, у простору  $\mathbb{R}^1$  ова коцка је линеарни сегмент, а у простору  $\mathbb{R}^2$  је квадрат. Даље, нека је са  $N'_\delta(A)$  означен најмањи број коцки странице  $\delta$  које имају заједничких тачака са скупом  $A$ . Тада за горњу и доњу бокс димензију, аналогно претходно дефинисаним (3.30) и (3.31), важе изрази (3.34) и (3.35).

$$\underline{\dim}_B A = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(A)}{\log \frac{1}{\delta}} \quad (3.34)$$

$$\overline{\dim}_B A = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(A)}{\log \frac{1}{\delta}} \quad (3.35)$$

Уколико су горња и доња бокс димензија једнаке, онда аналогно изразу (3.32) за бокс димензију скупа  $A$  важи (3.36):

$$\dim_B A = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{\log \frac{1}{\delta}} \quad (3.36)$$

При томе,  $N_\delta(A)$  може да буде било који од следећих бројева:

- најмањи број скупова пречника највише  $\delta$  који покривају  $A$ ,

- најмањи број квадрата странице  $\delta$  које покривају  $A$ ,
- најмањи број затворених лопти полупречника  $\delta$  које покривају  $A$ ,
- најмањи број коцки странице  $\delta$  из кубне мреже које покривају  $A$ .

### 3.2.3.2 Теорема о односу Hausdorff-ове и бокс димензије

Нека је скуп  $A \subset \mathbb{R}^n$  непразан и ограничен. Тада важи (3.37).

$$\dim_H A \leq \underline{\dim}_B A \leq \overline{\dim}_B A \quad (3.37)$$

### 3.2.3.3 Теорема о бокс димензији затвореног скупа

Нека је дат скуп  $A \subset \mathbb{R}^n$  и нека је  $\bar{A} \subset \mathbb{R}^n$  најмањи затворен скуп који садржи скуп  $A$ . Тада важе (3.38) и (3.39).

$$\underline{\dim}_B \bar{A} = \underline{\dim}_B A \quad (3.38)$$

$$\overline{\dim}_B \bar{A} = \overline{\dim}_B A \quad (3.39)$$

## 3.2.4 Hausdorff-ова димензија или бокс димензија

*Hausdorff*-ова димензија представља основну дефиницију фракталне димензије и веома је важна за разумевање теорије фрактала. Међутим, велика мана *Hausdorff*-ове димензије је њено тешко срачунавање или процена применом уобичајених рачунских метода.

Постоје бројне дефиниције димензије које се могу користити. Заједничко за све је да подразумевају премеравање скупа за различите размере величина  $\delta$ . Дакле, свако премеравање занемарује нерегуларности реда величине мање од  $\delta$ , а циљ је да се утврди мера када  $\delta \rightarrow 0$  [22].

У пракси се најчешће користи дефиниција бокс димензије за процену фракталне димензије. У складу са (3.37), тиме се практично добија горња гранична вредност *Hausdorff*-ове димензије посматраног скупа (објекта).

### 3.3 Математички генерисани фрактали

Фрактали се геометријски конструишу применом итеративног мапирања, односно итеративних система функција. У теоријском смислу, поступак конструисања се одвија кроз бесконачно много итерација, а у практичном до одређеног нивоа детаљности.

#### 3.3.1 Апсолутно самослични фрактали

У наставку су приказани поступци конструисања неколико познатих фрактала који имају својство апсолутне самосличности. За сваки фрактал је аналитички одређена димензија.

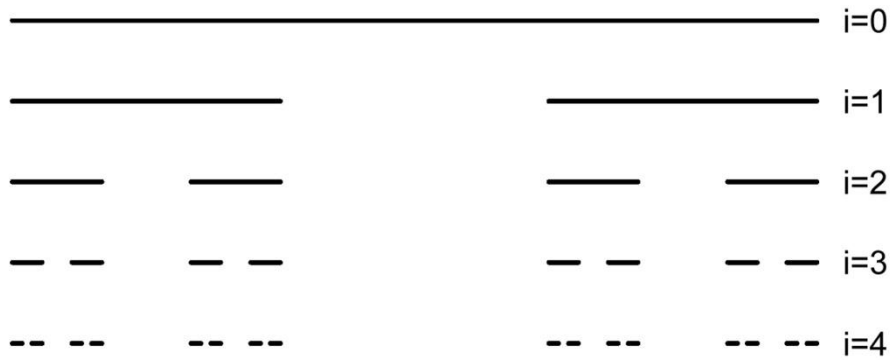
##### 3.3.1.1 Cantor-ов скуп

Cantor-ов скуп се добија полазећи од линије јединичне (произвољне) дужине. У првом кораку се исеца средња трећина линије, чиме се добијају две линије. У другом кораку се исеца средња трећина од линија добијених у претходном кораку. Исти поступак се понавља  $n$  пута. Када  $n \rightarrow \infty$  добија се подскуп бројева из интервала  $(0, 1)$ , који чине сви бројеви облика:

$$a_1 \cdot 3^{-1} + a_2 \cdot 3^{-2} + a_3 \cdot 3^{-3} + \dots \quad (3.40)$$

где је  $a_j=0$  или  $a_j=2$  за свако  $j$  [26]. У складу са претходним теоријским разматрањима, тополошка димензија Cantor-овог скупа износи  $d=0$ , што значи да фрактална димензија припада интервалу  $(0, 1)$ .

Слика 3.5 приказује прва четири корака у поступку конструисања Cantor-овог скупа. У првом кораку добијају се два сегмента дужине  $1/3$ , у другом кораку 4 сегмента дужине  $1/9$  итд. Дакле, у  $n$ -том кораку се добија  $2^n$  сегмената сваки дужине  $3^{-n}$ .



Слика 3.5 Итеративни поступак конструисања Cantor-овог скупа

Cantor-ов скуп је самосличан, тако да се његова фрактална димензија може одредити анализом било које две узастопне итерације [27] и применом израза (3.36) за рачунање бокс димензије, односно:

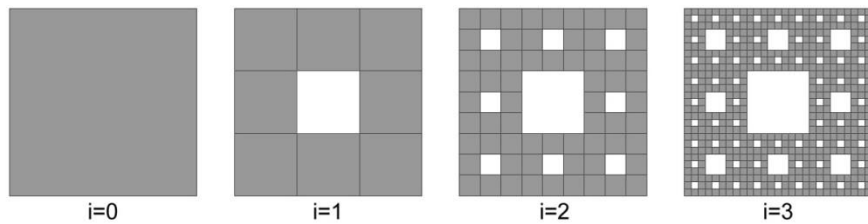
$$FD = \frac{\log N_{\delta}(A)}{\log \frac{1}{\delta}} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,631 \quad (3.41)$$

Овај принцип одређивања фракталне димензије биће примењен код свих фрактала представљених у наставку рада.

### 3.3.1.2 Tenux Sierpinski-ог

Тепих Sierpinski-ог се добија сличним поступком као и Cantor-ов скуп, при чему је полазни објекат квадрат са страницом јединичне дужине. У првом кораку квадрат се подели мрежом на 9 идентичних квадрата и исече се онај у средини. У другом кораку се на 8 преосталих квадрата понови идентичан поступак. Када број корака  $n \rightarrow \infty$  добија се скуп тачака у равни, чије координате испуњавају услов (3.40). Дакле, тополошка димензија овог објекта је  $d=1$ , односно фрактална димензија припада интервалу (1,2).

Слика 3.6 приказује прва три корака у поступку конструисања тепиха Sierpinski-ог. У првом кораку се добија 8 квадрата са страницом дужине  $1/3$ , у другом кораку се добија 64 квадрата са страницом дужине  $1/9$  итд. Дакле, у  $n$ -том кораку се добија  $8^n$  квадрата сваки са страницом дужине  $3^{-n}$ .



Слика 3.6 Итеративни поступак конструисања тепиха Sierpinski-ог

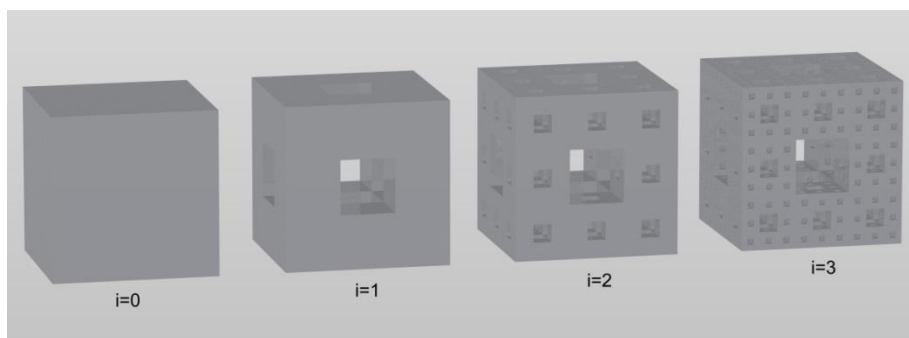
Фрактална димензија тепиха Sierpinski-ог је дата изразом (3.42).

$$FD = \frac{\log N_{\delta}(A)}{\log \frac{1}{\delta}} = \frac{\log 8}{\log 3} = 1,893 \quad (3.42)$$

### 3.3.1.3 Menger-ов сунђер

Menger-ов сунђер се добија сличним поступком као и тепих Sierpinski-ог, при чему је полазни објекат коцка са ивицом јединичне дужине. У првом кораку коцка се подели мрежом на 27 идентичних коцки, а потом се исече коцка из средишта и 6 коцки са средине сваке стране. У другом кораку се на 20 преосталих коцки понови идентичан поступак. Када број корака  $n \rightarrow \infty$  добија се скуп тачака у простору, чије координате испуњавају услов (3.40). Дакле, тополошка димензија овог објекта је  $d=2$ , односно фрактална димензија припада интервалу  $(2,3)$ .

Слика 3.7 приказује прва три корака у поступку конструисања овог фрактала. У првом кораку се добија 20 коцки са ивицом дужине  $1/3$ , у другом кораку се добија 400 коцки са ивицом дужине  $1/9$  итд. Дакле, у  $n$ -том кораку се добија  $20^n$  коцки свака са ивицом дужине  $3^{-n}$ .



Слика 3.7 Итеративни поступак конструисања Menger-овог сунђера



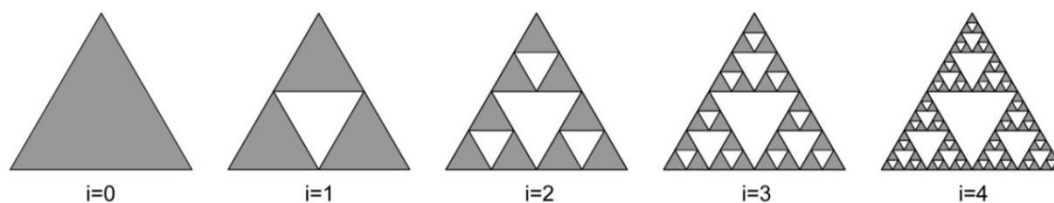
Фрактална димензија *Menger*-овог сунђера је дата изразом (3.43).

$$FD = \frac{\log N_{\delta}(A)}{\log \frac{1}{\delta}} = \frac{\log 20}{\log 3} = 2,727 \quad (3.43)$$

### 3.3.1.4 Троугао *Sierpinski*-ог

Полазни објекат за конструисање троугла *Sierpinski*-ог је једнакостранични троугао. У првом кораку се исеца троугао који се добија спајањем средина сваке странице. Тиме се добијају 3 троугла, сваки са страницом 2 пута мањом од странице полазног троугла. У другом кораку се понавља описани поступак на претходно добијена 3 троугла. Када број корака  $n \rightarrow \infty$  добија се скуп тачака у равни. Дакле, тополошка димензија овог објекта је  $d=1$ , односно фрактална димензија припада интервалу  $(1,2)$ .

Слика 3.8 приказује прва четири корака у поступку конструисања овог фрактала. У првом кораку се добија 3 троугла са страницом дужине  $1/2$ , у другом кораку се добија 9 троуглова са страницом дужине  $1/4$  итд. Дакле, у  $n$ -том кораку се добија  $3^n$  троуглова сваки са страницом дужине  $2^{-n}$ .



Слика 3.8 Итеративни поступак конструисања троугла *Sierpinski*-ог

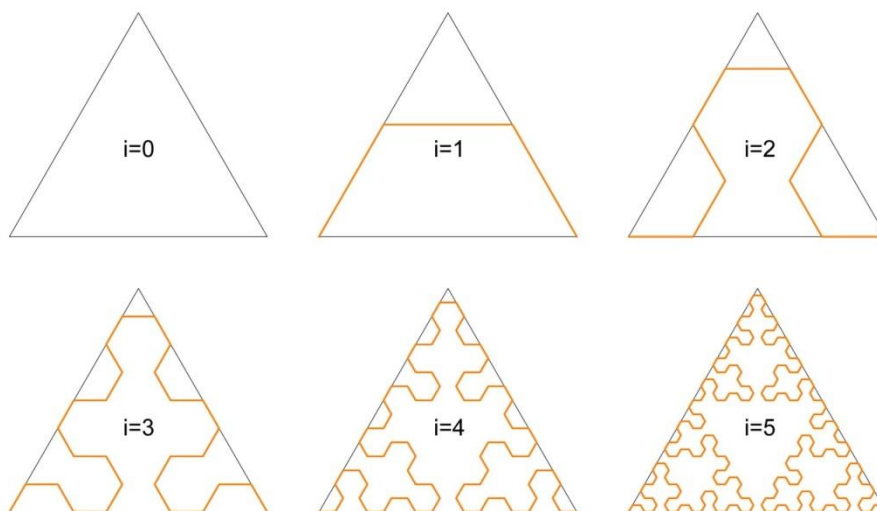
Фрактална димензија троугла *Sierpinski*-ог је дата изразом (3.44).

$$FD = \frac{\log N_{\delta}(A)}{\log \frac{1}{\delta}} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,585 \quad (3.44)$$

Приказани итеративни поступак може да се примени на било ком троуглу, чиме се добијају афине трансформације троугла *Sierpinski*-ог. Свака од ових

трансформација задржава исту фракталну димензију, што и следи из особине самоафиности.

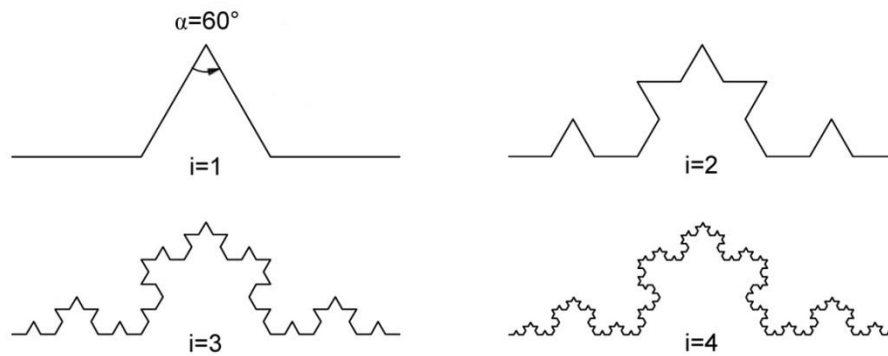
Користећи троуглове који се добијају кроз приказани итеративни поступак, може се конструисати фрактална крива идентичне фракталне димензије (слика 3.9).



Слика 3.9 Итеративни поступак конструисања криве Sierpinski-ог

### 3.3.1.5 Coch-ова крива

Полазни објекат за конструисање Coch-ове криве је линија јединичне дужине. Слика 3.10 приказује почетна четири корака у поступку конструисања ове криве. У првом кораку се исеца средња трећина и над њом се конструишу две линије обе дужине  $1/3$ . Тиме се добија изломљена крива линија са 4 праволинијска сегмента. У другом кораку се понавља описани поступак на претходно добијена 4 праволинијска сегмента. Када број корака  $n \rightarrow \infty$  добија се непрекидна и недиференцијабилна крива у равни. Фрактална димензија ове криве припада интервалу  $(1,2)$ .

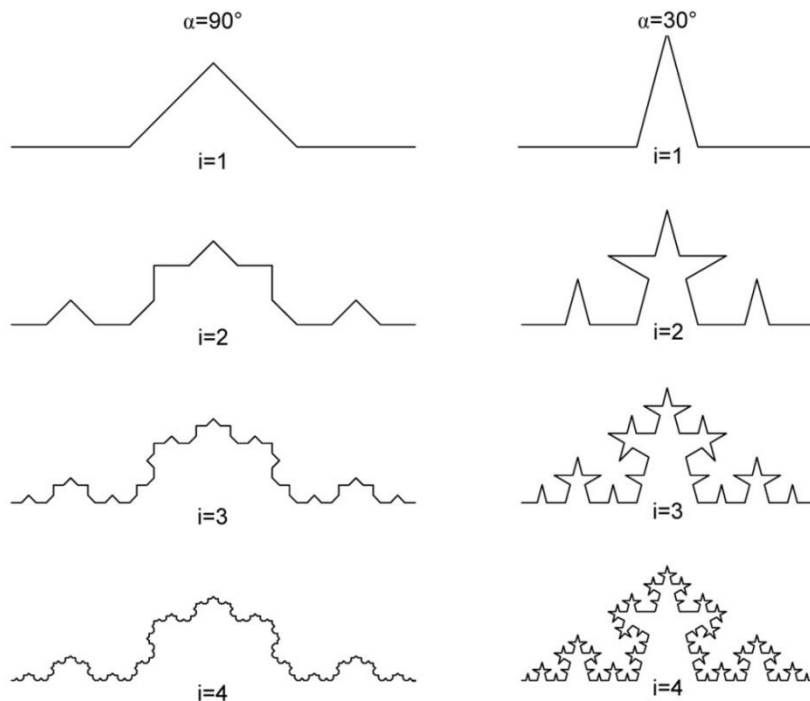


Слика 3.10 Итеративни поступак конструисања *Coch*-ове криве

У првом кораку се добија изломљена крива линија са 4 праволинијска сегмента сваки дужине  $1/3$ . У другом кораку се добија изломљена крива линија са 16 праволинијских сегмената сваки дужине  $1/9$  итд. Дакле, у  $n$ -том кораку се добија  $4^n$  сегмената сваки дужине  $3^{-n}$ . Одавде следи да *Coch*-ова крива има бесконачну дужину, а површина испод криве има коначну вредност. Фрактална димензија *Coch*-ове криве је дата изразом (3.45).

$$FD = \frac{\log N_{\delta}(A)}{\log \frac{1}{\delta}} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,262 \quad (3.45)$$

Постоје варијације *Coch*-ове криве, које се добијају променом угла  $\alpha$  код полазног објекта. Са теоријског аспекта, овај угао може да има вредност у распону од  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , па фрактална димензија криве која се добија може да варира у интервалу од 2 до 1. Дакле, повећањем вредности угла смањује се вредност фракталне димензије. Слика 3.11 приказује две варијације *Coch*-ове криве, једну са углом  $\alpha=90^\circ$  и другу са углом  $\alpha=30^\circ$ .



Слика 3.11 Итеративни поступак конструисања две варијације Соч-ове криве

На основу слике 3.11 може се закључити да крива са углом  $\alpha=90^\circ$  има мању вредност фракталне димензије од криве са углом  $\alpha=30^\circ$ . Вредност  $\delta^{-1}$ , неопходна за одређивање фракталне димензије, добија се на основу геометријске анализе полазног објекта. Фрактална димензија ове две криве је дата изразима (3.46) и (3.47).

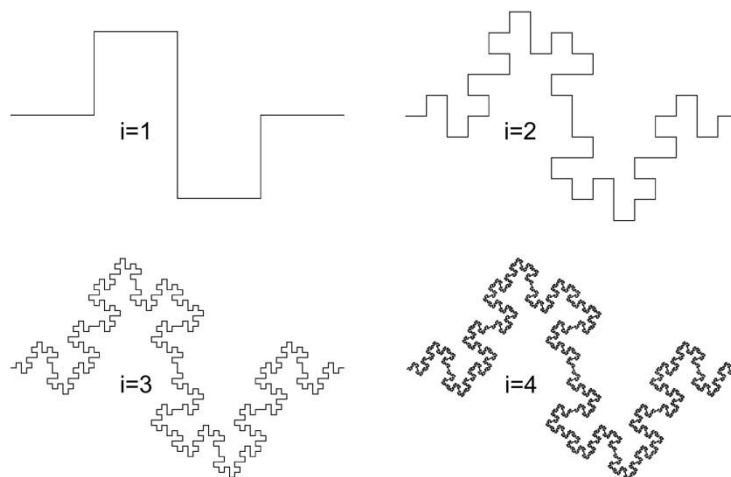
$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \frac{1}{\delta} = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow FD_{\alpha=90^\circ} = \frac{\log N_\delta(A)}{\log \frac{1}{\delta}} = \frac{\log 4}{\log 3,414} = 1,129 \quad (3.46)$$

$$\alpha = 30^\circ \Rightarrow \frac{1}{\delta} = 2 + 2 \cdot \sin 15^\circ \Rightarrow FD_{\alpha=30^\circ} = \frac{\log N_\delta(A)}{\log \frac{1}{\delta}} = \frac{\log 4}{\log 2,518} = 1,501 \quad (3.47)$$

### 3.3.1.6 Квадратна Соч-ова крива

Полазни објекат за конструисање квадратне Соч-ове криве је линија јединичне дужине. Слика 3.12 приказује почетна четири корака у поступку конструисања ове криве. Када број корака  $n \rightarrow \infty$  добија се непрекидна и

недиференцијабилна крива у равни. Фрактална димензија ове криве припада интервалу  $(1,2)$ .



Слика 3.12 Итеративни поступак конструисања квадратне Koch-ове криве

У првом кораку се добија изломљена крива линија са 8 праволинијских сегмената сваки дужине  $1/4$ . У другом кораку се добија изломљена крива линија са 64 праволинијска сегмента сваки дужине  $1/16$  итд. Дакле, у  $n$ -том кораку се добија  $8^n$  сегмената сваки дужине  $4^{-n}$ . Фрактална димензија квадратне Koch-ове криве је дата изразом (3.48).

$$FD = \frac{\log N_{\delta}(A)}{\log \frac{1}{\delta}} = \frac{\log 8}{\log 4} = 1,5 \quad (3.48)$$

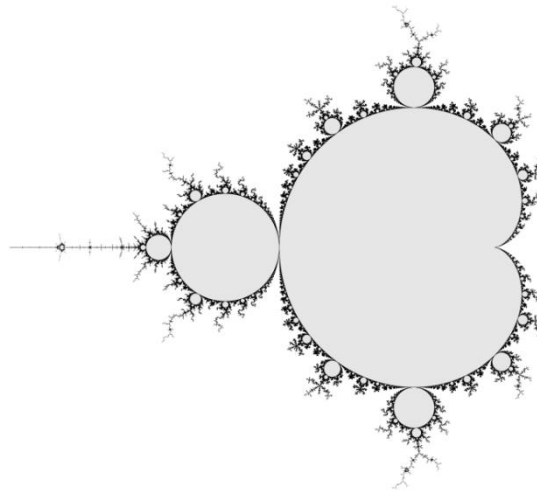
### 3.3.1.7 Квази-самослични фрактали

Квази-самослични фрактали не испуњавају својство самосличности на свим размерама посматрања за цео објекат, као што је приказано у претходним примерима. Овај тип фрактала поседује самосличност између дела целог објекта и произвољног малог сегмента [22].

Најчешћи пример квази-самосличног фрактала који се може срести у литератури је *Mandelbrot*-ов скуп. Овај скуп се добија применом пресликавања:

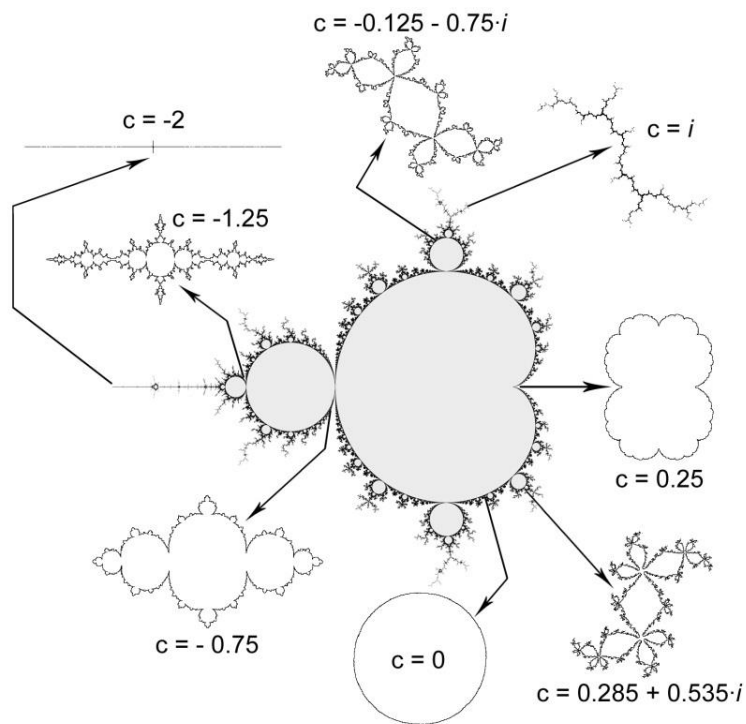
$$f: z_{n+1} \rightarrow z_n^2 + c \quad (3.49)$$

где су  $z \in \mathbb{C}$ ,  $c = x_0 + i \cdot y_0$  и  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ . Дакле, овај скуп се добија применом итеративне функције (3.49) у комплексној равни. Слика 3.13 приказује контуре *Mandelbrot*-овог скупа након великог броја итерација. Фрактална димензија приказане контуре износи 2, што указује на висок ниво сложености.



Слика 3.13 Фрактална контура *Mandelbrot*-овог скупа [28]

*Mandelbrot*-ов скуп садржи 8 Јулијиних скупова (слика 3.14), који такође припадају групи квази-самосличних фрактала. Јулијини скупови су добили назив по француском математичару који их је дефинисао око 1910. године [24]. Добијају се применом итеративне функције (3.49) за конкретне вредности комплексног броја  $c$ .

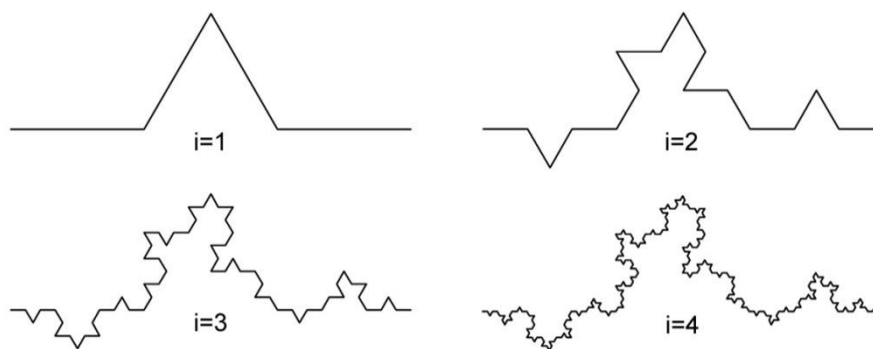


Слика 3.14 Јулијини скупови као део Mandelbrot-овог скупа

Дакле, квази-самослични фрактали су везани за различита итеративна мапирања скупа тачака у комплексној равни, односно скупа тачака на *Riemann*-овој сфери [24,29].

### 3.3.2 Статистички самослични фрактали

Статистички самослични фрактали могу да се добију увођењем насумичности (случајности) у поступак конструисања. Математички пример за ову врсту самосличности је произвољна *Coch*-ова крива, код које би се нпр. бацањем новчића одредило са које стране ће бити конструисан пар линија на средњој трећини сваког сегмента [22]. Слика 3.15 приказује један од могућих исхода при оваквом конструисању *Coch*-ове криве.



Слика 3.15 Пример конструисања произвољне *Coch*-ове криве

Увођење насумичности у поступак конструисања криве не утиче на промену фракталне димензије (3.45), јер постоји мера која остаје иста кроз све итерације. Када број корака  $n \rightarrow \infty$  добија се непрекидна и недиференцијабилна крива код које постоји статистичка самосличност, односно статистички се очекује да постоје делови криве са које су слични кривој у целини.

### 3.4 Фрактали као резултат природних процеса и појава

*Mandelbrot* је увидео да облаци нису сфере, планине нису купе, обале нису лукови, кора дрвета није глатка, као и да се муња не простире по правој путањи [20]. Све појаве и облици у природи показују много виши ниво сложености од онога што класична геометрија може да опише. Управо ово опажање га је подстакло на развој нове области геометрије засноване на појавама у природи.

Поједини фрактали представљају скупове тачака, криве или површи, други су сложене просторне структуре, док велики број фрактала има до те мере сложен облик и структуру да их је тешко описати адекватним терминима. Међутим, оно што је заједничко за све фрактале уопште је да могу врло успешно да подражавају структурне форме и појаве из природе.

Фрактали имају примену у бројним областима. Значајно је споменути примену фракталних антена, које имају много шири опсег фреквенција од уобичајених [22]. Фракталне антене могу да буду веома сложеног облика, уз истовремено заузимање релативно малог простора, што их чини идеалним за



уграђивање у мобилне телефоне, као и друге уређаје за примање и одашиљање сигнала.

Мерењем различитих променљивих добијају се непрекидне функције код којих постоји идентичан степен хаотичности (неправилности) на различитим размерама посматрања, односно на оним размерама посматрања које омогућава резолуција мерења. Функције са истим својствима се добијају и праћењем многих појава у природи. Све овакве функције поседују одређена својства, због којих је могуће квантификовати их преко фракталне димензије. Зато се за фракталну димензију често каже да представља меру којом се квантификује хаос.

Ниједна појава, односно променљива у природи није у потпуности хаотична, већ постоје одређени детерминистички закони по којима се оне мењају. Зато се у литератури често употребљава термин детерминистички хаос, који указује да постоје одређена својства која се не мењају без обзира на очигледну хаотичност. Свака појава у природи се може представити преко математичког модела за који важи тачно одређен систем једначина. Насупрот томе, мерење (праћење) појаве даје резултате који имају својства фрактала.

Концепт фракталне геометрије се показао веома корисним у описивању процеса у експерименталним системима [30]. У складу са тим, дошло је до њене примене у различитим научним дисциплинама као што су физика, биологија, медицина, економија, инжењерство и друге.

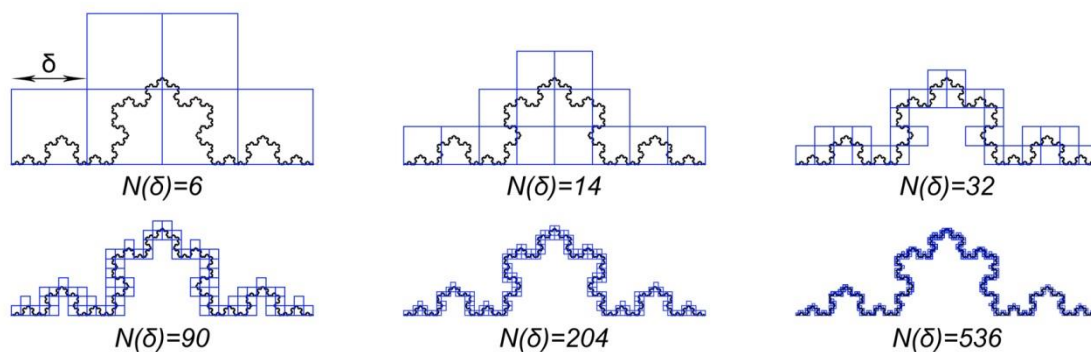
### **3.4.1 Самосличност**

Фрактали који се јављају у природи поседују својство статистичке самосличности, што значи да постоји одређена нумеричка, односно статистичка мера која остаје иста на различитим размерама посматрања. Фрактална димензија сама по себи представља меру која не зависи од размере посматрања [31].

### **3.4.2 Одређивање фракталне димензије**

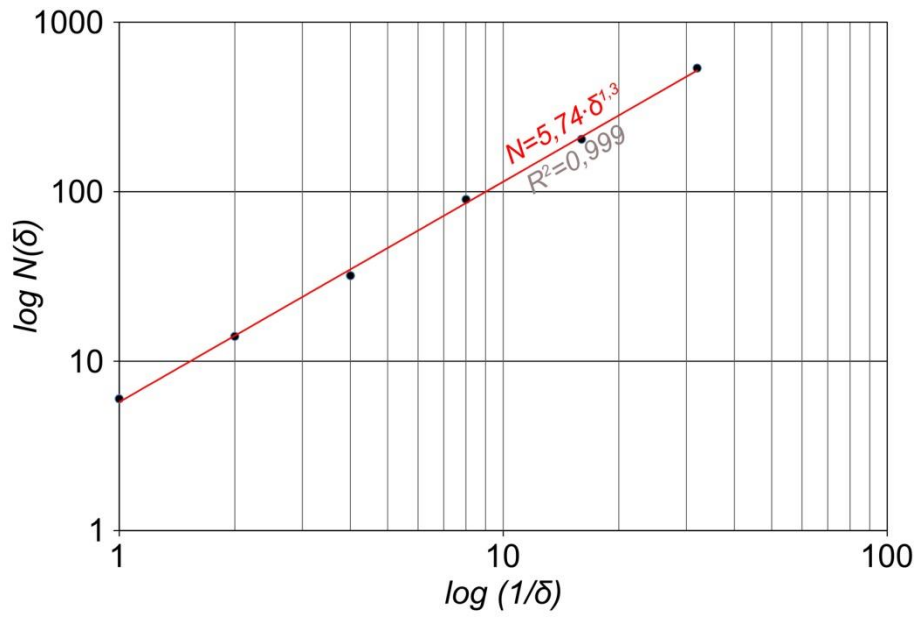
Одређивање димензије фрактала који се јављају у природи се углавном може извршити применом дефиниције бокс димензије (3.36). Одређивање димензије апсолутно самосличних фрактала је било једноставно, јер су они стриктно математички дефинисани. При томе је одређиван број скупова пречника

највише  $\delta$  који покривају цео скуп анализом било које две итерације у поступку конструисања. За одређивање димензије фрактала у природи потребно је анализирати га на неколико размера посматрања, па потом утврдити најтачнију апроксимацију вредности фракталне димензије. Слика 3.16 приказује поступак за приближно одређивање фракталне димензије *Coch*-ове криве пребројавањем квадрата који је покривају за 6 различитих размера посматрања.



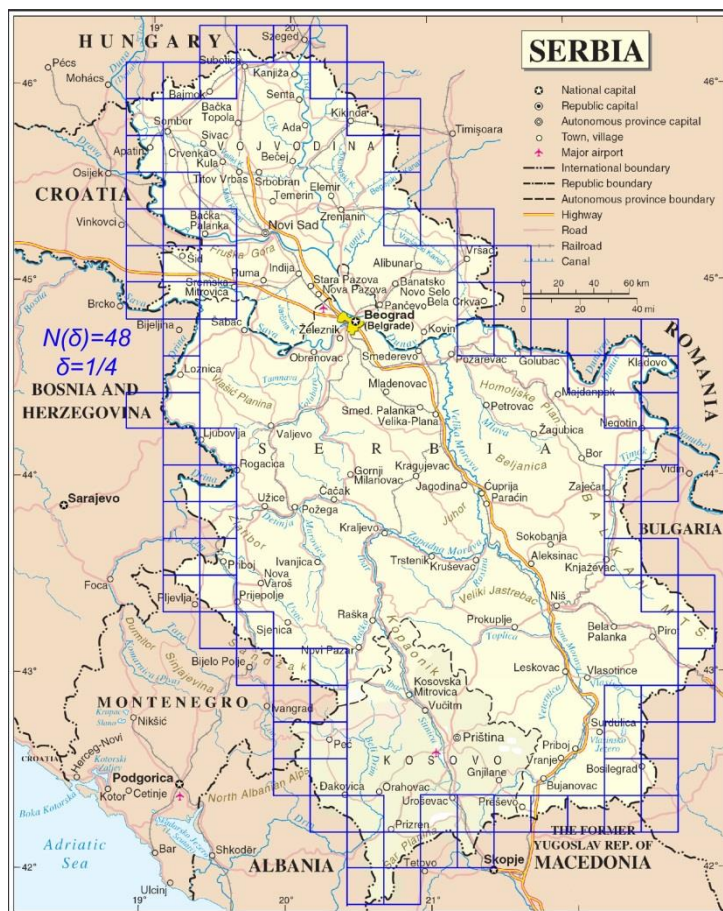
Слика 3.16 Поступак за приближно одређивање фракталне димензије *Coch*-ове криве

Након пребројавања квадрата који покривају криву у сваком од 6 случајева приказаних на слици 3.16, добијене вредности се уносе у виду тачака на дијаграм са логаритамском размером (слика 3.17). Нагиб праве, која са највећим коефицијентом детерминације апроксимира анализирани тачке, представља приближну вредност фракталне димензије. Вредност нагиба (фракталне димензије) може се одредити применом методе најмањих квадрата у складу са [32]. Приближна вредност фракталне димензије добијена овом методом износи 1,3, што је 3% веће од стварне вредности (3.45).

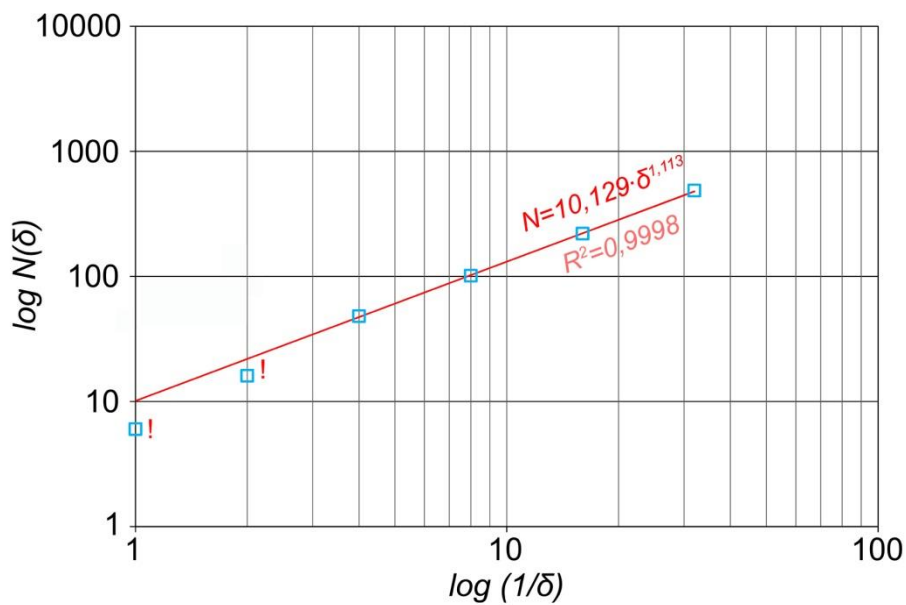


Слика 3.17 Процена фракталне димензије Сосч-ове криве

На слици 3.18 је приказан један корак у поступку приближног одређивања фракталне димензије границе Србије применом покривања квадратима странице  $\delta$ . Резултат одређивања фракталне димензије је приказан на слици 3.19.



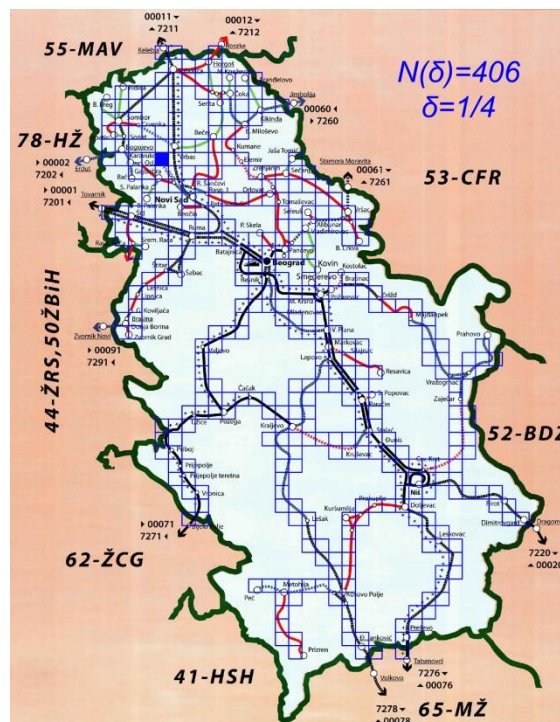
Слика 3.18 Приближно одређивање фракталне димензије границе Србије



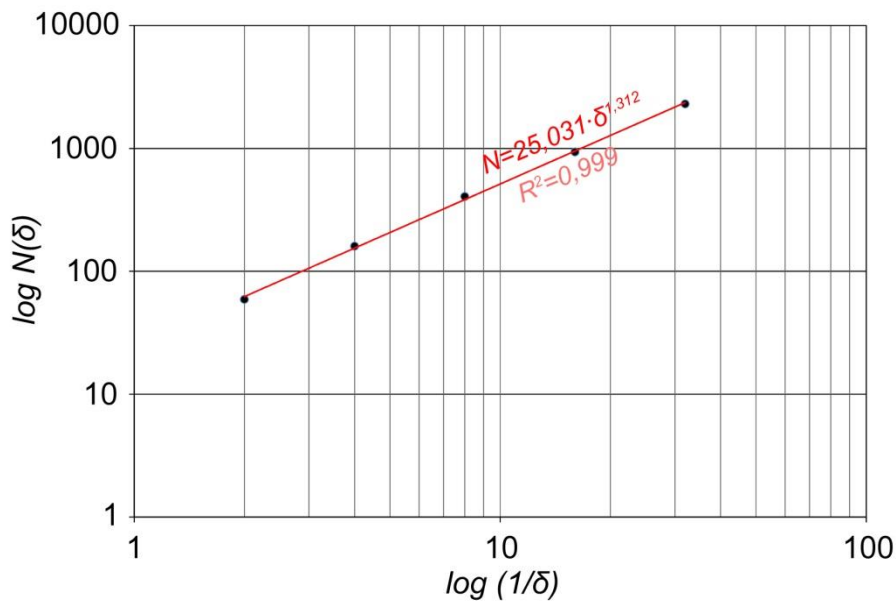
Слика 3.19 Процена фракталне димензије границе Србије

Приликом одређивања фракталне димензије прве две тачке су искључене из анализе. На тај начин је кроз преостале четири тачке добијена апроксимација праве са максималним коефицијентом детерминације. Дакле, приближна вредност фракталне димензије границе Србије износи  $\sim 1,11$ .

На слици 3.20 је приказан један корак у поступку приближног одређивања фракталне димензије железничке мреже Србије применом покривања квадратима странице  $\delta$ . Резултат одређивања фракталне димензије је приказан на слици 3.21.



Слика 3.20 Приближно одређивање фракталне димензије железничке мреже Србије



Слика 3.21 Фрактална димензија железничке мреже Србије

Приликом одређивања фракталне димензије прва тачка је искључена из анализе, чиме је добијена апроксимација праве са коефицијентом детерминације 0,999. Приближна вредност фракталне димензије железничке мреже Србије износи  $\sim 1,31$ .

### 3.4.3 Фракталне димензије у природи

Појаве у природи могу да имају широк опсег вредности фракталних димензија. На пример, велики број линеарних феномена у природи углавном има димензију реда величине 1,2 – 1,3 [33].

Фракталне димензије природних феномена се у највећем броју случајева одређују применом дефиниције бокс димензије. У табели 3.1 је дат преглед процењених фракталних димензија појдиних појава у природи.

Табела 3.1 Фрактали у природи и њихове димензије (подаци преузети из [34])

Фрактал	Димензија
Обала Аустралије	1,13
Обала Ирске	1,22
Обала Велике Британије	1,25
Обала Норвешке	1,52
Силуета дрвета	1,73
Карфиол	2,33
Згужван лист папира	2,50
Броколи	2,66
Површина мозга човека	2,79
Површина плућа човека	2,97

### 3.5 Мултифрактали

Фрактали који су претходно били изложени и анализирани представљају монофрактале, односно фрактале које карактерише јединствена вредност фракталне димензије. Међутим, постоје фрактали које карактерише неколико вредности фракталне димензије, тзв. мултифрактали. Будући да мултифрактали превазилазе оквир овог рада, у наставку неће бити посебно анализирани.

Мултифрактали представљају сложене структуре које се често јављају у природи. Њихова динамика је таква да се не могу описати коришћењем једне фракталне димензије. Постојање неколико фракталних димензија указује на чињеницу да код мултифрактала постоји неколико редова величина неправилности на различитим размерама посматрања.

Број фракталних димензија и њихове појединачне вредности могу да се одреде применом дефиниције бокс димензије за одговарајући број итерација. Приликом анализе мултифрактала, тачке које се уносе на дијаграм логаритамске размере не би било могуће апроксимирати јединственом правом уз максималну вредност коефицијента детерминације, већ би постојало неколико правих којима би се апроксимирали скупови одговарајућег броја узастопних тачака.

## 4 ФРАКТАЛНА АНАЛИЗА ПАРАМЕТАРА ГЕОМЕТРИЈЕ КОЛОСЕКА

Фрактална анализа и примена фракталне димензије као квалитативног показатеља се примењује у бројним инжењерским областима, од којих су поједине примене изложене у [35]. У области транспортне инфраструктуре може да се примени за потребе различитих анализа на нивоу мреже. *Benguigui* и *Daoud* су анализирали распоред станица на градској железничкој мрежи у Паризу [36], на основу чега су утврдили да је фрактална димензија распореда станица у корелацији са густином насељености. *Benguigui* је детаљније испитивао фракталну димензију исте железничке мреже, на основу чега је установио да се кроз време може очекивати да сваки градски железнички систем, односно транспортни систем уопште, тежи фракталној димензији  $\approx 2$  [37].

*De Keersmaecker* и *cap.* су анализирали утицај морфологије града на различите економске параметре на примеру Брисела. Установили су да се фрактална анализа може успешно применити за симулацију развоја градова [38]. *Sun* и *cap.* су на примеру Даилана у Кини испитивали однос између фракталне димензије градске путне мреже и густине насељености [39]. У складу са резултатима поменутога два истраживања, може се закључити да се фрактална анализа може применити за формирање плана развоја града као целине, као и пратеће стратегије развоја градске инфраструктуре.



Са друге стране, резултати истраживања које су спровели *Jian* и *Yuanchun* су показали да се фрактална анализа може применити за потребе краткорочних предвиђања обима железничког саобраћаја [40], што може допринети развијању планова, мера и стратегија на нивоу мреже и на нивоу деонице железничке пруге.

Фрактална анализа се може применити за потребе утврђивања стања железничке инфраструктуре, а пре свега стања горњег строја. У истраживању које су спровели *Hyslip* и *Vallejo*, испитивана је веза између фракталне димензије зрна агрегата и њиховог облика, стања површине и криве просејавања [41]. Резултати овог истраживања показују да је фрактална димензија у корелацији са обликом зрна туцаника и садржајем ситних фракција, стога може да се користи као показатељ стања, односно за утврђивање степена пропадања застора од туцаника. У сличном истраживању које су спровели *Ho* и *cap.* потврђено је да вредност фракталне димензије расте са већим степеном пропадања застора од туцаника [42]. У складу са тим, одређивање фракталне димензије туцаника може да послужи као основа за планирање радова на одржавању.

Примену фракталне анализе у циљу квантификације параметара геометрије колосека први је започео *Hyslip* [43]. *Hyslip* је одређивао вредност фракталне димензије за вертикално одступање горње ивице шине. Висока вредност фракталне димензије овог параметра може да укаже на лоше стање доњег строја или на висок степен пропадања застора од туцаника железничке пруге [43-45].

Циљ овог рада је да се испита могућност примене фракталне анализе за квантификацију сваког од параметра геометрије колосека, дефинисаних у складу са европским стандардом *SRPS EN 13848-1* [2], као и да се на основу добијених вредности фракталне димензије испита могућност примене у одређивању квалитета геометрије колосека. У складу са тим, у наставку дисертације представљен је преглед метода које се могу користити за одређивање фракталне димензије. Одговарајуће, претходно изабране методе су тестиране, а на основу анализе добијених резултата изабрана је метода за примену у испитивању параметара геометрије колосека на изабраној деоници железничке пруге.

## 4.1 Методе за одређивање фракталне димензије

Развојем теорије фрактала у математици дошло је и до развоја бројних метода за одређивање фракталне димензије. Класична бокс метода (одређивање бокс димензије) може да се примени за сваку појаву која има фрактална својства. Међутим, примена ове методе код појединих фрактала може да буде праћена бројним практичним проблемима. Због овог разлога, многи аутори су развијали различите нове методе или унапређења постојећих, које би се могле применити у сврху процене фракталне димензије за одговарајуће типове фрактала. Треба нагласити да поједине методе могу дати различите резултате при анализи истог фрактала [46]. Различити резултати могу бити последица примене неадекватних метода. У неким случајевима разлика у добијеним резултатима је очекивана, јер не анализира свака метода иста фрактална својства [47].

Дакле, није свака метода за одређивање фракталне димензије универзално примењива. Избор методе укључује следеће критеријуме:

- димензионалност фрактала – да ли се анализира монофрактал или мултифрактал,
- зависност фрактала од времена – да ли фрактал представља тзв. временску серију,
- тополошка димензија фрактала – да ли је фрактал дефинисан у простору  $\mathbb{R}^1$ ,  $\mathbb{R}^2$  или  $\mathbb{R}^3$ .

Поред наведеног, код појединих метода треба узети у обзир и да ли фрактал има својство самосличности или самоафиности. Међутим, овај критеријум није разматран у наставку, јер параметри геометрије колосека припадају групи статистички самосличних фрактала.

Све методе за одређивање фракталне димензије могу да се поделе у три групе: методе засноване на бокс димензији, методе варијансе и спектралне методе [48]. *Lopes* и *Betrouni* су предложили поделу метода за одређивање фракталне димензије у зависности од тога да ли се анализирају монофрактали или мултифрактали [49]. *Gneiting* и *cap.* су испитивали неколико метода над фракталима који имају познату димензију и установили су да је за одређивање фракталне димензије временских серија и линераних података најефикаснија

примена мадограм методе, а за дводимензионалне структуре су препоручили примену једне варијанте методе прелазака [50].

*Higuchi* је у оквиру својих истраживања предложио методу која је погодна за примену на временским серијама [51,52]. *Higuchi*-јева метода се заснива на израчунавању дужине фракталне криве у случају самоафине геометрије графа временске серије [23]. Ова метода је релативно једноставна за примену, због чега су је многи аутори користили у својим истраживањима, посебно у области анализе биосигнала [23,53].

Поједини аутори су предложили различита унапређења *Higuchi*-јеве методе. *Spasić* је у свом истраживању предложила методу која представља уопштавање *Higuchi*-јеве методе [53]. *Hasegawa и сар.* су предложили измену методе увођењем тежинских коефицијената у анализу [54].

*Wong и сар.* су предложили методу за брзу процену фракталне димензије у једном пролазу кроз скуп података, при чему је меморија рачунара потребна за анализу у линеарној зависности са количином података [55]. Аутори су ову методу назвали *tug-of-war* (метода повлачења) и тестирали су је на примерима математички генерисаних фрактала и фракталних појава из природе. Метода повлачења може да се примени на сваки скуп тачака у  $n$ -димензионалном простору (хиперпростору). Након одговарајућих трансформација скупа тачака (података), ова метода се своди на *pair-counting* методу (методу парова). Због ефикасности и брзине методе повлачења, препоручена је за примену на великим скуповима података [55].

Табела 4.1 приказује неколико метода за одређивање фракталне димензије, као и њима одговарајуће опште облике функција које дефинишу скалирајућа својства. У релевантној литератури се могу видети и бројне друге методе [49,50,56].

Табела 4.1 Методе за одређивање фракталне димензије

Метода	Својство које се анализира	Функција скалирања
Бокс метода ( <i>box</i> )	$N(\delta)$ - број боксова (квадрата)	$N(\delta) \sim \delta^{-FD}$
Метода корачања ( <i>divider</i> )	$N(\delta)$ - број корака	$N(\delta) \sim \delta^{-FD}$
Метода прелазака ( <i>level crossing</i> )	$N(\delta)$ - број прелазака преко задате граничне вредности	$N(\delta) \sim \delta^{1-FD}$
Вариограм метода ( <i>variogram</i> )	$\gamma_v(t)$ - вариограм	$\gamma_v(t) \sim t^{4-2FD}$
Мадограм метода ( <i>madogram</i> )	$\gamma_m(t)$ - мадограм	$\gamma_m(t) \sim t^{2-FD}$
Спектрална метода ( <i>spectral</i> )	$f(\omega)$ - густина спектра снаге	$f(\omega) \sim \omega^{2FD-5}$
Таласна метода ( <i>wavelet</i> )	$v(\tau)$ - варијанса	$v(\tau) \sim \tau^{4-2FD}$
<i>Higuchi</i> -јев метод	$L_h(k)$ - дужина криве	$L_h(k) \sim k^{-FD}$
Метода парова ( <i>pair-counting</i> )	$C(r)$ - број парова тачака у оквиру задатог растојања	$C(r) \sim r^{FD}$

За тестирање фракталне анализе параметара геометрије колосека у овој докторској дисертацији изабране су:

1. бокс метода,
2. метода корачања,
3. измењена метода корачања (корачање дуж једне од главних оса) и
4. метода прелазака.

У наставку овог поглавља је дат кратак преглед сваке од изабраних метода, као и алгоритми на основу којих ће бити одређивана фрактална димензија.

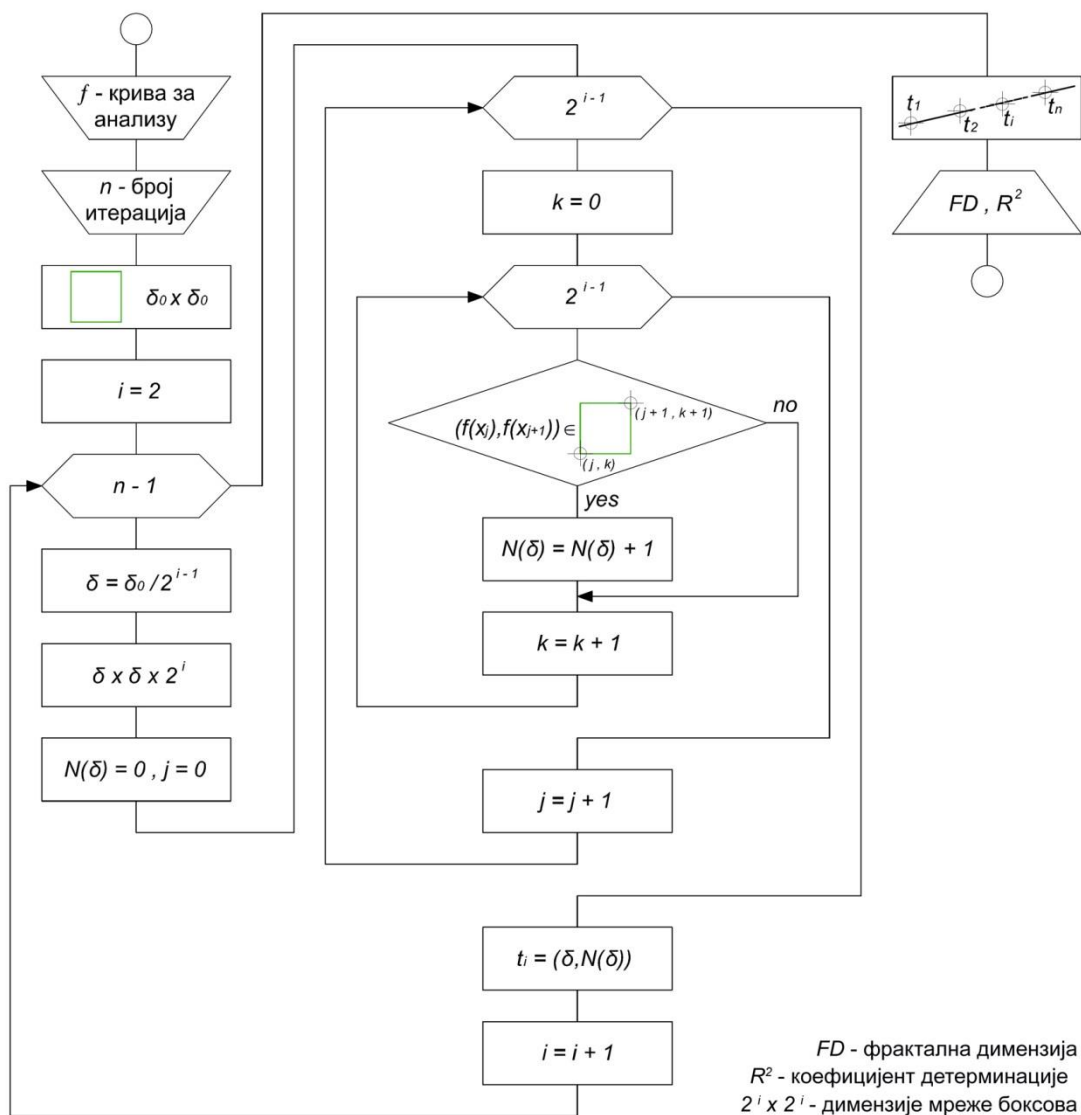
#### 4.1.1 Бокс метода

Бокс метода је заснована на дефиницији бокс димензије, а подразумева покривање скупа квадратима различитих величина и пребројавање квадрата потребних да се скуп покрије при различитим размерама посматрања. Поступци у примени ове методе су:

- покривање целог скупа једним квадратом странице  $\delta_0$ ,
- подела полазног квадрата на 4 квадрата странице  $\delta_0/2$ ,

- пребројавање квадрата странице  $\delta_0/2$  који покривају скуп,
- подела сваког од добијених квадрата на 4 квадрата странице  $\delta_0/4$ ,
- пребројавање квадрата странице  $\delta_0/4$  који покривају скуп,
- понављање поделе и пребројавања до достизања поделе на квадрате странице  $\delta_i = \delta_0/2^{i-1}$ , где је  $i$  број итерација.

На слици 4.1 је приказан алгоритам за одређивање фракталне димензије применом бокс методе у складу са претходно наведеним корацима.



Слика 4.1 Алгоритам за одређивање фракталне димензије применом бокс методе

Слика 3.16 приказује резултат извршавања алгоритма за бокс методу на примеру *Coch*-ове криве за итерације од  $i=3$  до  $i=9$ . У складу са разматрањима из претходног поглавља, резултати покривања криве у свакој итерацији се уносе на дијаграм логаритамске размере у виду тачака  $t_i=(\delta_i, N_i(\delta))$ . Општи облик праве која апроксимира те тачке са највећим коефицијентом детерминације, односно праве која најбоље описује зависност броја квадрата од дужине странице квадрата је дефинисан изразом (4.1).

$$N_i(\delta) \sim \left( \frac{1}{\delta_i} \right)^{FD} = \delta_i^{-FD} \quad (4.1)$$

Израз (4.1) се изводи на основу израза (3.36). Треба напоменути да израз (3.36) може да се примени искључиво за апсолутно самосличне фрактале, а дефинише праву која на дијаграму логаритамске размере пролази кроз координатни почетак. Узимајући у обзир да при практичној примени бокс методе апроксимирана права у највећем броју случајева неће пролазити кроз координатни почетак дијаграма, може се дефинисати израз (4.2) који представља функцију зависности броја квадрата од странице квадрата.

$$N_i(\delta) = A \cdot \left( \frac{1}{\delta_i} \right)^{FD} = A \cdot \delta_i^{-FD} \quad (4.2)$$

Константа  $A$  у изразу (4.2) може имати вредност било ког позитивног броја. Неопходно је нагласити да на вредност фракталне димензије не утиче начин представљања странице квадрата на апсциси.

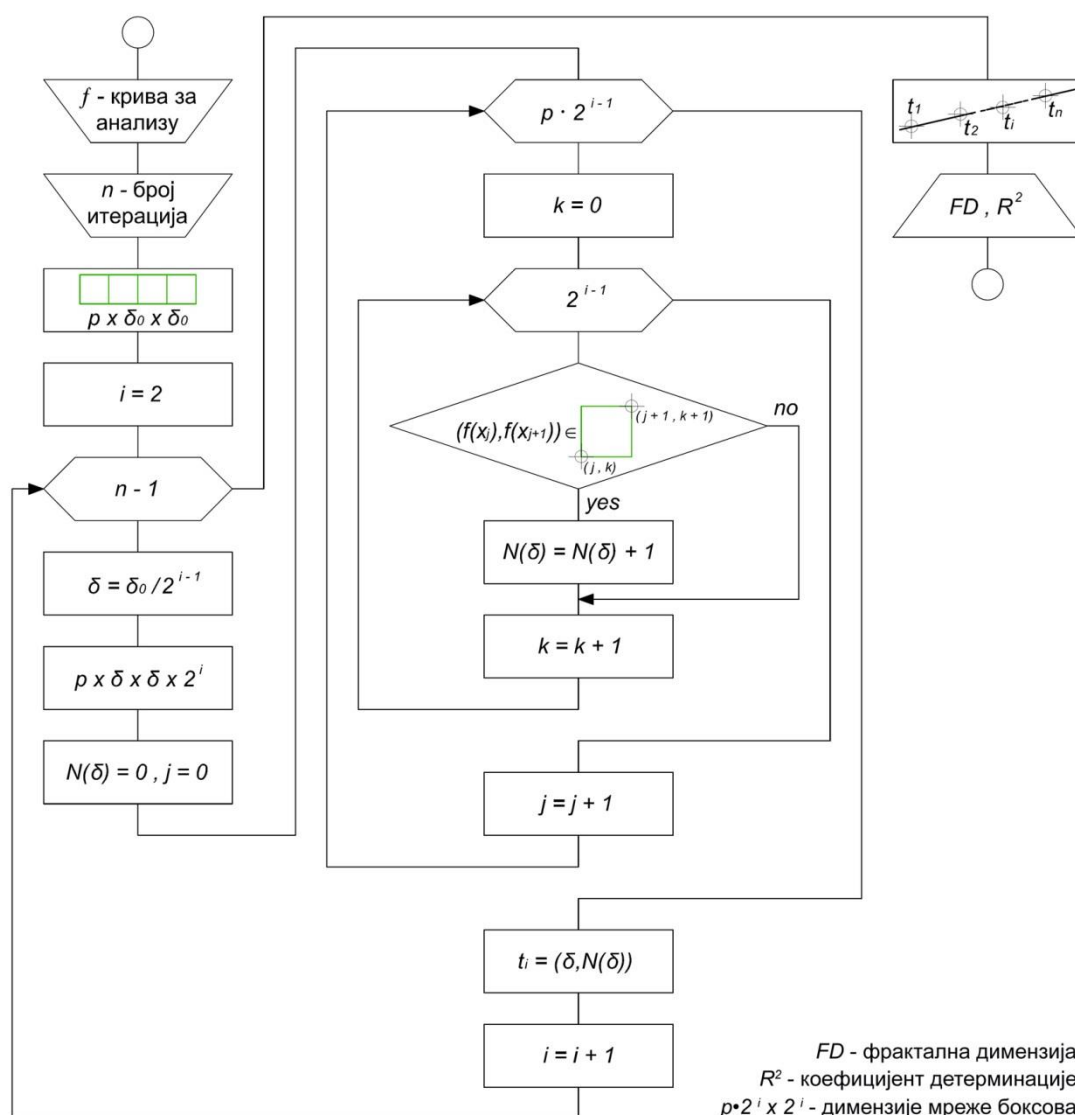
Да би се добиле коректне вредности фракталне димензије неопходно је да скуп који се анализира има велики број тачака [47]. Приликом одређивања фракталне димензије на дијаграму логаритамске размере, требало би искључити прва два случаја – покривање скупа са једним и са четири квадрата. Са друге стране, број итерација треба одредити тако да страница квадрата у последњој итерацији не буде мања од резолуције података [47].

Дакле, код практичне примене бокс методе треба прво дефинисати почетну ( $\delta_{max}=\delta_0$ ) и крајњу ( $\delta_{min}$ ) дужину странице квадрата, па потом спровести потребан број итерација, уз услов да страница квадрата у свакој итерацији припада интервалу  $[\delta_{min}, \delta_{max}]$ .

Бокс метода је захтевна са аспекта анагажовања меморије рачунара, али и са аспекта времена потребног за анализу. Други проблем који може да се јави код ове методе је појава остатка при покривању, односно немогућност равномерног покривања целог скупа квадратима [47]. Ова појава може да утиче на вредност фракталне димензије која се добија у анализи.

*Lovejoy и сар.* су у свом истраживању изнели став да примена бокс методе не мора нужно да подразумева покривање скупа квадратима, односно да се скуп може покрити и правоугаонцима [57]. Коришћењем правоугаоника у неким случајевима може да се оствари равномерније покривање скупа него коришћењем квадрата.

Слика 4.2 приказује измењени алгоритам, помоћу којег ће у овом раду бити одређивана фрактална димензија применом бокс методе.



Слика 4.2 Измењени алгоритам за одређивање фракталне димензије применом бокс методе

Узимајући у обзир став да при одређивању фракталне димензије треба искључити случајеве покривања са једним и са четири квадрата, идеја приказаног алгоритма је да се у првој итерацији скуп покрије дуж  $x$ -осе са најмање  $p$  квадрата стране  $\delta_0$  у складу са изразима (4.3) и (4.4):

$$\delta_0 = \delta_{max} = y_{max} - y_{min} \quad (4.3)$$

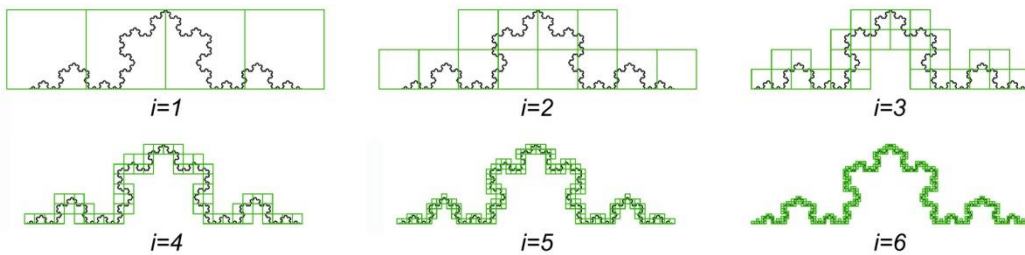


$$p = \text{mod} \left( \frac{\Delta X}{\delta_0} \right) + 1 \quad (4.4)$$

где су  $y_{\max}$  и  $y_{\min}$  екстремне вредности ордината посматраног скупа, а  $\Delta X = x_k - x_l$  је опсег скупа дуж апсцисе. Број итерација треба одредити тако да за крајњу дужину странице квадрата важи (4.5).

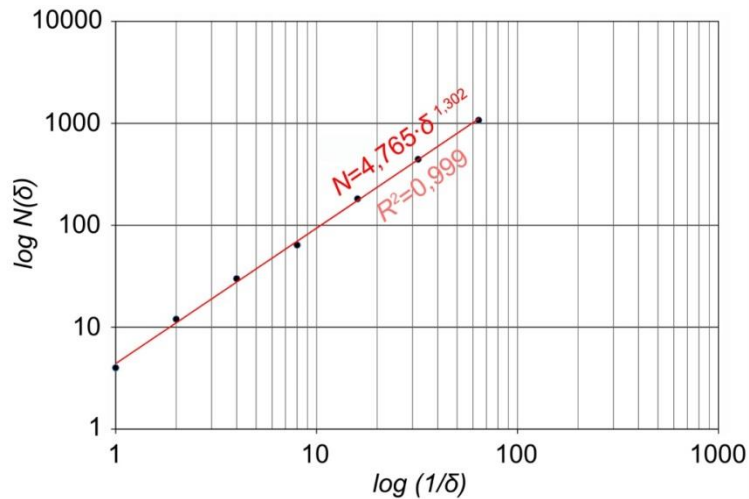
$$\delta_{\min} = a \cdot \min_{k=2}^r \{x_k - x_{k-1}\}, a \in (0, 1) \quad (4.5)$$

Резултат извршавања измењеног алгоритма након шест итерација на примеру *Coch*-ове криве је приказан на слици 4.3.



Слика 4.3 Примена измењеног алгоритма бокс методе на примеру *Coch*-ове криве

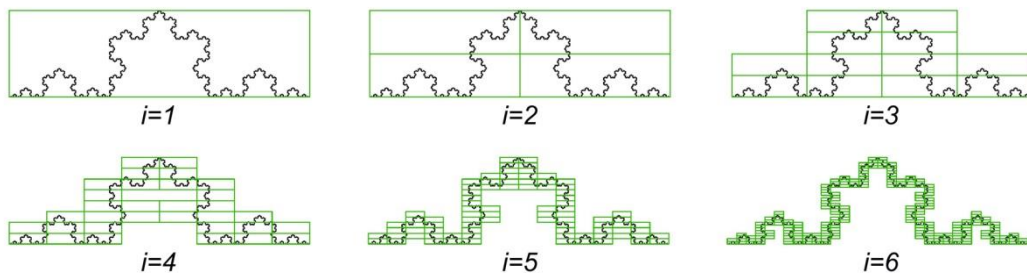
Слика 4.4 приказује резултат одређивање фракталне димензије *Coch*-ове криве применом измењеног алгоритма бокс методе. На основу анализе, уз искључивање прве тачке из анализе, добија се вредност фракталне димензије  $\sim 1,30$ . Идентична вредност се добија применом класичне бокс методе (слика 3.17), уз искључивање прва два случаја покривања из анализе у складу са [47].



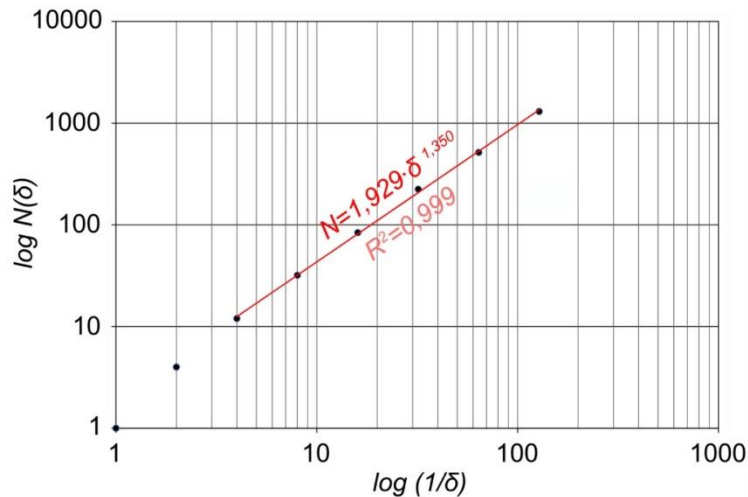
Слика 4.4 Фрактална димензија *Coch*-ове криве применом измењеног алгоритма бокс методе

*Catrakis* је у свом истраживању представио другачији приступ бокс методе, који подразумева да се у свакој итерацији пребројавају „празни“ квадрати, односно квадрати који не покривају скуп [58]. Овакав приступ не утиче на вредност фракталне димензије која се добија у анализи.

На слици 4.5 је приказано тестирање варијанте бокс методе, која подразумева покривање скупа правоугаоницима, у складу са [57], на примеру *Coch*-ове криве. Резултат одређивања фракталне димензије за овај поступак је приказан на слици 4.6.



Слика 4.5 Бокс метода са покривањем *Coch*-ове криве правоугаоницима



Слика 4.6 Фрактална димензија *Coch*-ове криве применом бокс методе са покривањем правоугаоницима

У складу са ставом из [47], из анализе су искључене прве две тачке на дијаграму, односно искључени су случајеви покривања са једним и са четири правоугаоника. Вредност фракталне димензије за случај покривања *Coch*-ове криве правоугаоницима износи 1,35, што је око 7% веће од стварне вредности. Дакле, примена покривања правоугаоницима није адекватна за примену на *Coch*-овој кривој.

На основу добијених одступања могао би да се изведе закључак да бокс метода није адекватна за одређивање фракталне димензије. Међутим, одступања фракталне димензије *Coch*-ове криве указују на чињеницу да се јавља значајан остатак при покривању на појединим размерама. Са друге стране, у анализи је коришћена шеста генерација *Coch*-ове криве, што значи да се смањивањем странице квадрата не покривају финији детаљи криве.

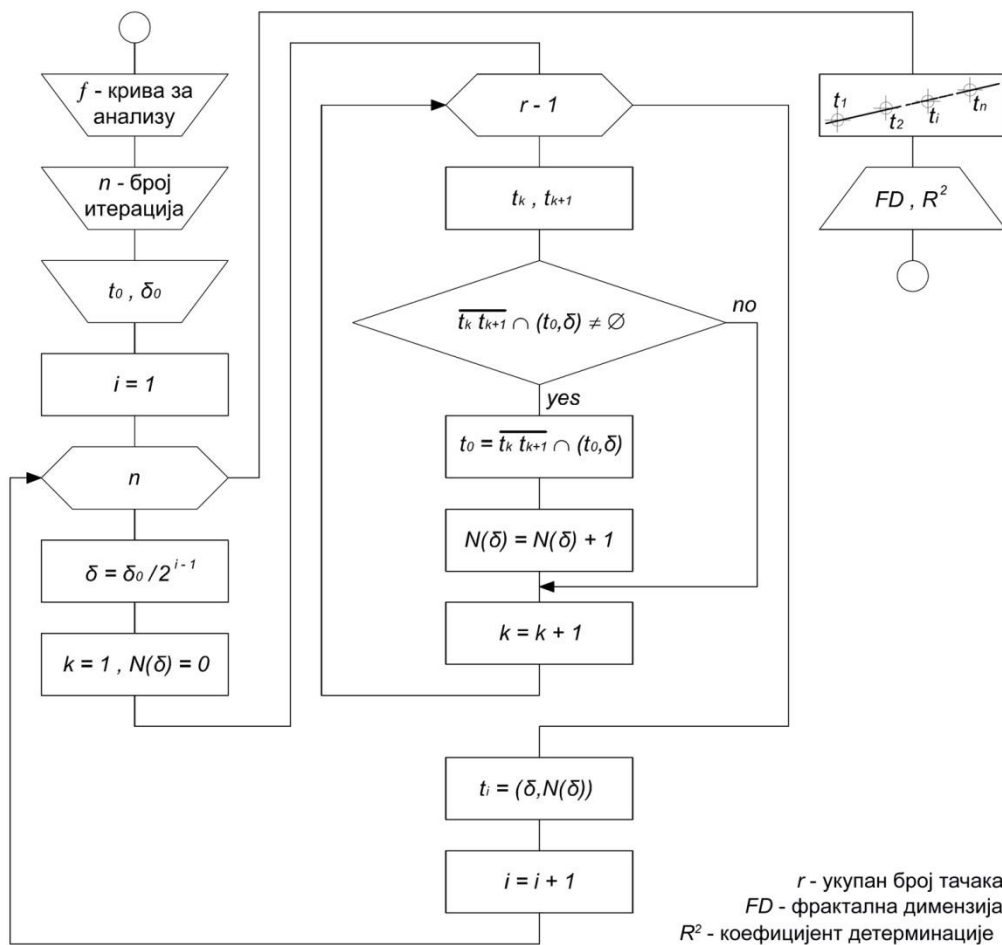
#### 4.1.2 Метода корачања

Метода корачања подразумева покривање скупа корацима (дужима) различитих дужина и пребројавање корака потребних да се скуп покрије при различитим размерама посматрања. Поступци у примени ове методе су:

- покривање целог скупа корацима дужине  $\delta_0$  (почетна дужина корака),
- пребројавање корака дужине  $\delta_0$ ,
- покривање целог скупа корацима дужине  $\delta_0/2$ ,

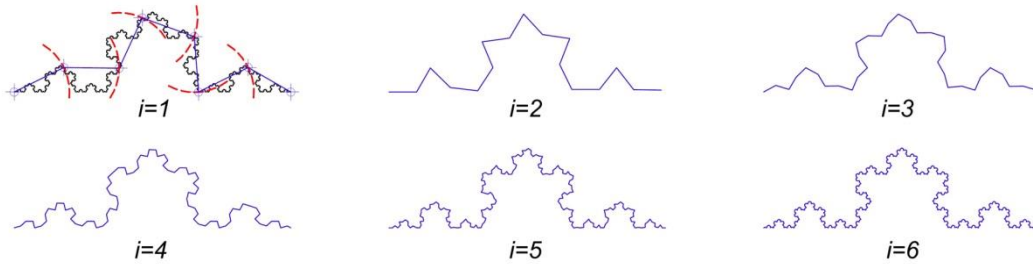
- пребројавање корака дужине  $\delta_0/2$ ,
- понављање корачања и пребројавања до достизања корака дужине  $\delta_0/2^{i-1}$ , где је  $i$  број итерација.

Слика 4.7 приказује алгоритам за одређивање фракталне димензије применом методе корачања у складу са претходно наведеним поступком.



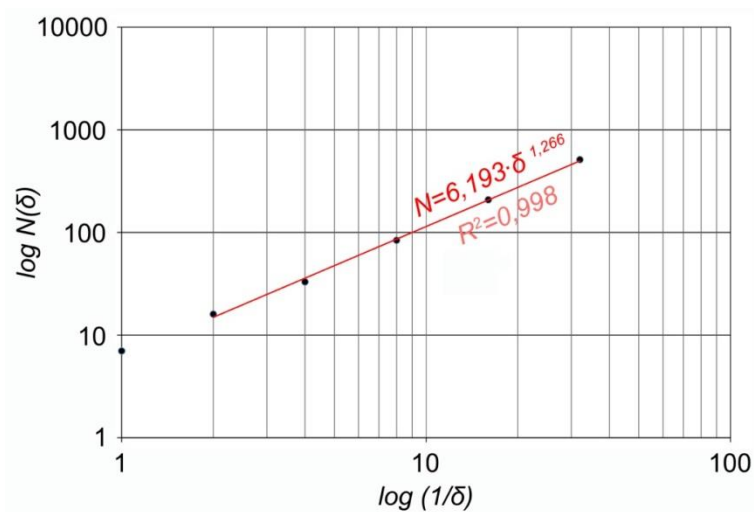
Слика 4.7 Алгоритам за одређивање фракталне димензије применом методе корачања

На слици 4.8 је приказан резултат извршавања алгоритма за методу корачања након шест итерација на примеру *Coch*-ове криве. За прву итерацију је приказан поступак корачања, а за остале је дата крива која је резултат корачања. Почетна дужина корака је изабрана произвољно.



Слика 4.8 Примена методе корачања на примеру *Coch*-ове криве

Имајући у виду теоријске основе *Coch*-ове криве, изложене у поглављу 3.3.1, није могуће аналитички одредити пресечне тачке дуж криве применом методе корачања. Због наведеног разлога у анализи је коришћена шеста генерација *Coch*-ове криве, која се састоји од коначног броја тачака  $r$ . На слици 4.8 се може уочити сличност између кривих добијених у итерацијама 2-6 и поступка за конструкцију *Coch*-ове криве (слика 3.10). На слици 4.9 је приказан резултат одређивања фракталне димензије *Coch*-ове криве применом изложеног алгоритма.



Слика 4.9 Фрактална димензија *Coch*-ове криве применом методе корачања

Искључивањем прве итерације из анализе добија се вредност фракталне димензије  $\sim 1,266$ , што је око 0,3% веће од стварне вредности. Дакле, применом методе корачања за случај *Coch*-ове криве добија се вредност фракталне димензије која је скоро идентична теоријској вредности.

Метода корачања је заснована на техници која је коришћена у картографији за одређивање дужина различитих неправилних природних облика на картама, као што су дужине река, обала, граница и слично. Наиме, ако се са  $L_i(\delta)$  означи дужина криве у  $i$ -тој итерацији, тада важи израз (4.6).

$$L_i(\delta) = N_i(\delta) \cdot \frac{\delta_0}{2^{i-1}} \quad (4.6)$$

Изразом (4.7) је дефинисан општи облик функције зависности броја корака од дужине корака:

$$N_i(\delta) = A \cdot \left( \frac{\delta_0}{2^{i-1}} \right)^{-FD} \quad (4.7)$$

где је  $A$  позитиван број. Одавде следи коначни облик израза за дужину криве (4.8).

$$L_i(\delta) = A \cdot \left( \frac{\delta_0}{2^{i-1}} \right)^{1-FD} \quad (4.8)$$

За све природне облике који се могу представити на карти постоји гранична вредност корака  $\delta_{lim}$ , односно број итерација, након којег важи (4.9).

$$L_i(\delta) = L_{i+1}(\delta) = L_{i+2}(\delta) = \dots = const. \quad (4.9)$$

Дакле, изрази (4.6)-(4.8) важе за дужину корака која припада интервалу  $[\delta_{lim}, \delta_0]$ . Гранична вредност корака зависи од резолуције карте, као и од степена неправилности анализираних криве. За дужину корака мању од  $\delta_{lim}$  важе функције (4.10) и (4.11):

$$N_i(\delta) = B \cdot \left( \frac{\delta_0}{2^{i-1}} \right)^{-FD^*} \quad (4.10)$$

$$L_i(\delta) = B \cdot \left( \frac{\delta_0}{2^{i-1}} \right)^{1-FD^*} \quad (4.11)$$

у којима је  $B$  позитиван број за који важи  $A \neq B$ . Узимајући у обзир да се смањењем корака на вредности мање од  $\delta_{lim}$  остварује потпуно покривање анализираниг скупа, за фракталну димензију у изразима (4.10) и (4.11) важи  $FD^* = 1$ . Дакле, за све случајеве у којима је  $\delta < \delta_{lim}$  важи линеарна зависност између дужине корака и броја корака, а дужина криве је независна од дужине корака и износи:

$$L = B = A \cdot \delta_{lim}^{1-FD} \quad (4.12)$$

Тачка са координатама  $(\delta_{lim}, N(\delta_{lim}))$  представља прелазну тачку. У овој прелазној тачки долази до промене вредности фракталне димензије на вредност  $FD^* = 1$  (са теоријског аспекта) тј. на вредност  $FD^* \approx 1$  (са аспекта практичне примене методе). Треба напоменути да прелазна тачка зависи од резолуције података, а дефинише се на идентичан начин за све методе одређивања фракталне димензије.

Имајући у виду да мултифрактале карактерише неколико вредности фракталних димензија, код њих постоје најмање две прелазне тачке. Изразима (4.13) и (4.14) дефинисане су функција зависности броја корака од дужине корака и функција зависности дужине криве од дужине корака за  $m$ -димензионални фрактал, при чему важе услови (4.15):

$$N(\delta) = A(\delta_j) \cdot \delta^{-FD_j} \quad (4.13)$$

$$L(\delta) = A(\delta_j) \cdot \delta^{1-FD_j} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
 j &= 1, \dots, m \\
 \delta &\in [\delta_0, \delta_m] \\
 t_j &= (\delta_j, N(\delta_j))
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

где  $t_j$  представља скуп од  $m$  прелазних тачака. Код свих статистички самосличних фрактала, независно од њихове димензионалности, постоји гранична вредност корака  $\delta_m = \delta_{lim}$  након које се може прекинути примена методе.

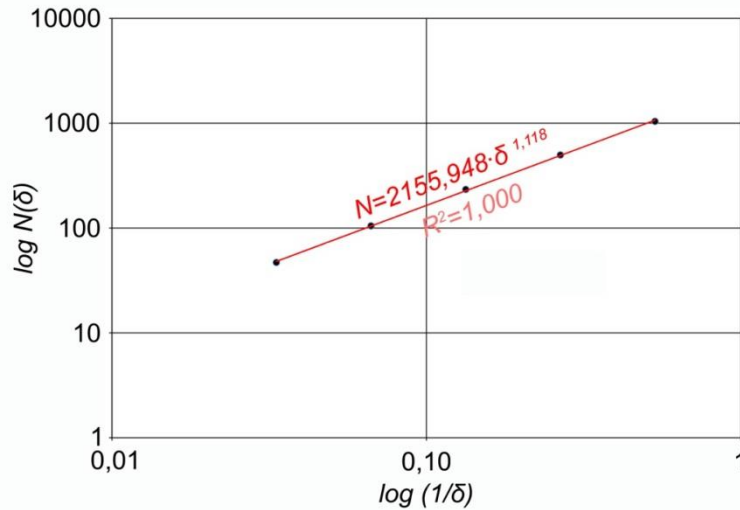
У наставку ће бити приказана примена методе корачања за одређивање фракталне димензије граница Србије, као и примена изложених теоријских ставова за одређивање дужине граница. За потребе ових анализа дужина корака неће бити анализирана као општи број, већ је усвојена почетна вредност корака  $\delta_0 = 30 \text{ km}$ . Слика 4.10 приказује резултат корачања дуж граница Србије применом овог почетног корака.



Слика 4.10 Резултат корачања са почетним кораком дужине  $\delta_0 = 30 \text{ km}$

На слици 4.11 је приказан резултат одређивања фракталне димензије граница Србије. На основу анализе, добија се вредност фракталне димензије  $\sim 1,12$ , што одговара резултату који се добија применом бокс методе (слика 3.19).





Слика 4.11 Фрактална димензија граница Србије применом методе корачања

Да би се одредила дужина граница Србије треба одредити граничну вредност корака  $\delta_{lim}$  и заменити је у израз (4.12). Ова вредност корака не може да се одреди аналитички, већ је треба одредити графички као прелазну тачку на дијаграму зависности дужине корака од броја корака. Међутим, за графички поступак је потребно наставити са применом методе корачања док се не испуни услов (4.9). Са друге стране, могуће је проценити  $\delta_{lim}$  као најмањи ред величине неправилности који се јавља на карти. На основу увида у облик граница, може се усвојити да су најмање неправилности реда величине до  $0,5 \text{ km}$ . Заменом ове вредности у израз (4.12), добија се дужина граница Србије од  $2339,7 \text{ km}$ , што је  $\sim 12 \text{ km}$  веће од званичне вредности [59].

Из претходно изложених теоријских и практичних разматрања може се закључити да је за тачност методе корачања и оптимизацију времена потребног за анализу неопходно изабрати одговарајуће дужине почетног и крајњег корака. У складу са [60], препоручује се да се прво одреди средње растојање између парова суседних тачака дуж анализираних криве (4.16), а да се потом одреде дужине почетног (4.17) и крајњег корака (4.18). Дакле, број итерација у примени ове методе зависи од дужине почетног и крајњег корака.

$$d = \frac{1}{r-1} \cdot \sum_{k=2}^r |x_k - x_{k-1}| \quad (4.16)$$

$$\delta_{max} = \delta_0 = \frac{d \cdot (r-1)}{2} \quad (4.17)$$

$$\delta_{min} = \frac{d}{2} \quad (4.18)$$

Иако су применом методе корачања у приказаним примерима добијене коректне процене вредности фракталне димензије, то не значи да ова метода нема недостатке, односно ограничења у примени. *Andrle* је у истраживању могућности примене методе корачања дефинисао три проблема који могу да утичу на њену тачност: остатак након последњег корака, утицај промене полазне тачке за корачање на крајњи резултат анализе, и значајна одступања појединих тачака од апроксимиране праве на логаритамском дијаграму [61]. Дакле, приликом примене методе корачања потребно је:

- заокружити остатак након последњег корака ако припада интервалу  $(\delta/2, \delta)$ , или га занемарити ако припада интервалу  $(0, \delta/2]$ ,
- померањем полазне тачке у одговарајућим границама испитати промене резултата анализе,
- анализирати вредност одступања сваке тачке од апроксимиране праве.

### 4.1.3 Измењена метода корачања

У литератури се могу срести два приступа дискретизацији методе корачања. Један облик дискретизације је предложен у истраживању које је спровео *Clark*, а подразумева корачање којим се прескаче тачно одређени број тачака у низу. Зависност дужине криве од дужине корака је дефинисана изразом (4.8), исто као и за класичну методу корачања. Треба напоменути да је резултат *Clark*-ове дискретизације различита дужина корака, па је за сваку итерацију потребно одредити средњу дужину корака [62].

Са друге стране, *Cox* и *Wang* су предложили дискретизацију која поразумева корачање дуж апсцисе ( $x$ -осе) и одређивање пресечних тачака између криве и вертикале на сваком кораку [63]. За дужину криве коју одређују пресечне тачке важи израз (4.8). Оба поменута облика дискретизације могу да се примене само на

кривама које испуњавају својства сурјекције („на“ пресликавања). У наставку рада, термин измењена метода корачања ће се односити на дискретизацију коју су предложили *Cox* и *Wang*.

*Hyslip* је у својим истраживања применио измењену методу корачања за одређивање фракталне димензије вертикалног одступања горње ивице шине [43-45]. Измењена метода корачања је изабрана за тестирање у оквиру овог рада управо због чињенице да је већ била успешно примењена за анализу једног параметра геометрије колосека.

Поступци у примени ове методе су:

- корачање  $x$ -осом кораком дужине  $\delta_0$  (почетна дужина корака),
- одређивање пресечних тачака на кривој облика  $t_j=(j\cdot\delta_0, f(j\cdot\delta_0))$ , при чему важи  $j=0, 1, \dots, N(\delta)$
- корачање  $x$ -осом кораком дужине  $\delta_0/2$ ,
- одређивање пресечних тачака на кривој облика  $t_j=(j\cdot\delta_0/2, f(j\cdot\delta_0/2))$ , при чему важи  $j=0, 1, \dots, 2\cdot N(\delta)$ ,
- понављање корачања  $x$ -осом до достизања корака дужине  $\delta_0/2^{i-1}$  и одређивање пресечних тачака на кривој облика  $t_j=(j\cdot\delta_0/2^{i-1}, f(j\cdot\delta_0/2^{i-1}))$ , при чему важи  $j=0, 1, \dots, 2^{i-1}\cdot N(\delta)$ , а  $i$  је број итерација.

Предност измењене методе корачања је у томе што корак дуж  $x$ -осе може да се изабере тако да не постоји остатак након последњег корака. Да би се остварио овај услов потребно је применити израз (4.19) за одређивање почетног корака. При томе, треба изабрати што већу вредност параметра  $s$ , али истовремено треба узети у обзир да ће се тиме смањити број итерација за примену ове методе, јер зависи од дужине почетног и крајњег корака. За одређивање дужине крајњег корака може се употребити израз (4.18), који важи за класичну методу корачања.

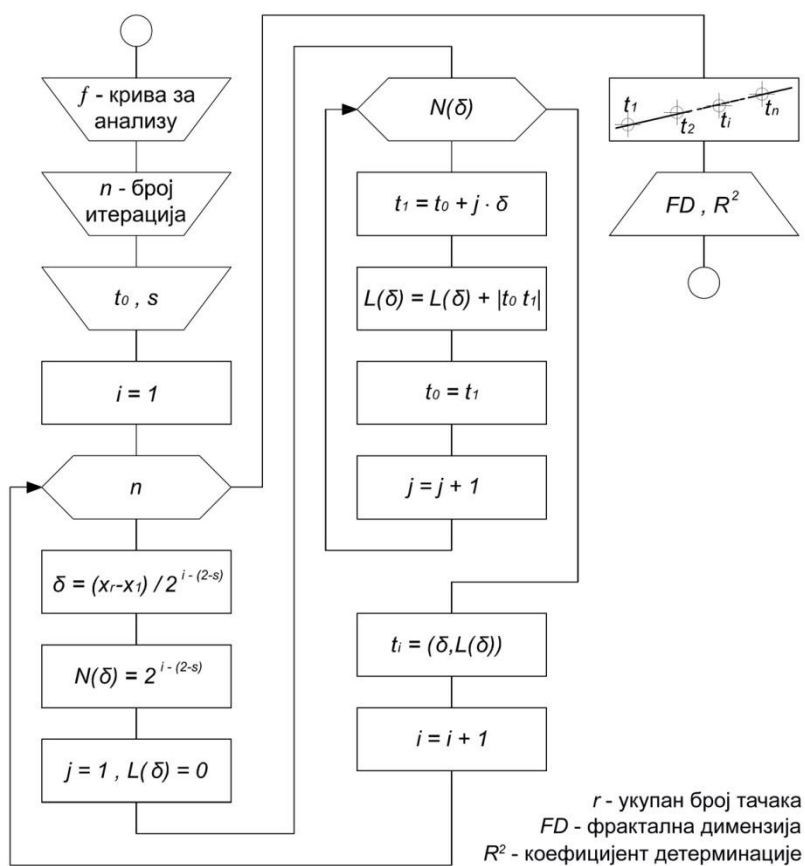
$$\delta_{max} = \delta_0 = \frac{x_r - x_l}{2^{s-1}}, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (4.19)$$

Узимајући у обзир (4.19), могу се извести коначни облици израза за број корака дуж  $x$ -осе (4.20) и дужину криве (4.21).

$$N_i(\delta) = 2^{i-(2-s)} \quad (4.20)$$

$$L_i(\delta) = A \cdot \left( \frac{\delta_0}{2^{i-(2-s)}} \right)^{1-FD} \quad (4.21)$$

Слика 4.12 приказује алгоритам за одређивање фракталне димензије применом методе корачања у складу са наведеним поступком и претходним разматрањима.



Слика 4.12 Алгоритам за одређивање фракталне димензије применом измењене методе корачања

*Coch*-ова крива не испуњава услове за примену методе корачања, тако да не може бити искоришћена за приказивање резултата извршавања приказаног алгоритма. Резултати извршавања ове методе ће бити приказани у наставку рада

на примерима параметара геометрије колосека, а добијене вредности фракталне димензије биће упоређене са вредностима добијеним бокс методом и класичном методом корачања.

#### 4.1.4 Метода прелазака

Метода прелазака се заснива на принципу да криве мањег степена неправилности имају мањи број прелазака (прекорачења) одређеног нивоа (границе), док за криве већег степена неправилности важи обрнуто [64]. Дакле, анализа броја прелазака преко одређених граница може да се искористи за процену фракталне димензије. Ова метода може да се примени само на кривама које испуњавају својства сурјекције („на“ пресликавања).

Метода прелазака је заснована на истоименој статистичкој методи за анализу континуалних стохастичких процеса, која има бројне примене у различитим научним дисциплинама [65].

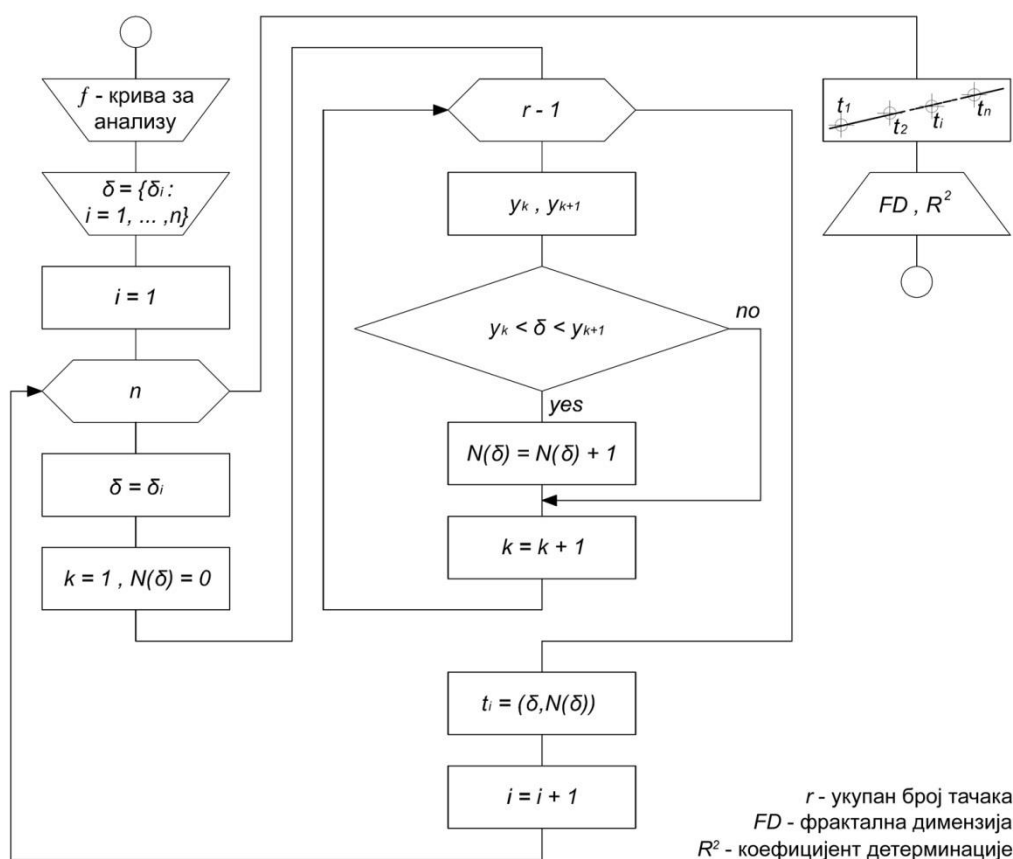
Метода прелазака је у досадашњим истраживањима углавном примењивана за анализу различитих турбулентних појава [58,66,67]. Ова метода је нарочито погодна за испитивање појава са аспекта прекорачења одређене граничне (допуштене) вредности. На пример, у истраживању које су спровели *Edwards* и *Hurst*, испитиване су дужине временских периода када је прекорачена допуштена вредност брзине ветра [67].

Вредности фракталне димензије ће бити испитане за случај избора почетне граничне вредности, која ће потом, применом одговарајуће функције скалирања, бити смањивана уз пребројавање броја прелазака.

Поступци у примени ове методе су:

- избор граничних вредности  $\delta_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) - где  $\delta_i$  представља или одговарајуће, унапред изабране, граничне вредности или граничне вредности за које важи одговарајућа функција скалирања,
- пребројавање прелазака преко граничне вредности  $\delta_i$ .

Слика 4.13 приказује алгоритам за одређивање фракталне димензије применом методе прелазака у складу са наведеним поступком.



Слика 4.13 Алгоритам за одређивање фракталне димензије применом методе прелазака

Резултат примене методе прелазака не зависи од претходне припреме података, а омогућује релативно брзу процену фракталне димензије. Резултати извршавања методе у складу са претходним алгоритмом ће бити приказани у наставку рада на примерима параметара геометрије колосека, а добијене вредности фракталне димензије упоређене са вредностима добијеним бокс методом и методама корачања. Неопходно је напоменути да се очекују другачије вредности фракталне димензије у поређењу са другим методама, што не искључује могућност примене ове методе за квантификацију параметара геометрије колосека.

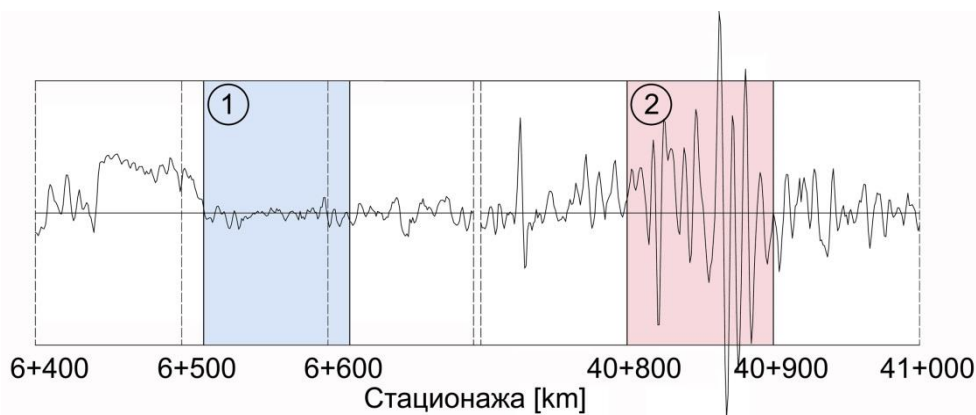
## 4.2 Тестирање метода за одређивање фракталне димензије

Изабране методе (бокс метода, метода корачања, измењена метода корачања и метода прелазака) за одређивање фракталне димензије су тестиране коришћењем софтверског алата, који је развијен коришћењем програмског језика *AutoLISP* и претходно изложених принципа и алгоритама. Овај програмски језик је изабран зато што резултате великог броја анализа може истовремено графички да представи у *CAD* окружењу. У поступку тестирања метода је предвиђено да се графички резултати анализа у свакој итерацији смештају у различите лејере, чиме је омогућена валидација коришћених софтверских алата.

Први проблем који може да се јави код примене појединих метода фракталне анализе је начин представљања података. Наиме, све реалне појаве у природи су такве да се снимају у функцији времена и/или у функцији просторног положаја. Да би се графички представила снимљена појава, на апсциси и ординати се у одговарајућем међусобном односу приказују физичке величине које углавном имају различите јединице мере. Од овог међусобног односа зависиће вредност фракталне димензије која се добија применом бокс методе, класичне и измењене методе корачања.

Параметри геометрије колосека се изражавају у  $mt$ , а мере се по дужини колосека која се изражава у  $m$ . Будући да се обе величине изражавају преко одговарајућих јединица дужине, могло би се закључити да треба користити њихов реалан однос приликом примене неке од метода фракталне анализе. Међутим, изражавањем параметара геометрије колосека у  $m$  изгубила би се информација о степену неправилности, односно као резултат сваке анализе добијала би се вредност фракталне димензије  $\sim 1$ , као што је био случај у претходним истраживањима [43-45]. Фрактална димензија параметара геометрије колосека треба да припада интервалу  $(1,2)$ . У складу са овим ставом, неопходно је извршити калибрацију између улаза и излаза, односно треба изабрати начин представљања података који даје одговарајуће, међусобно упоредиве вредности фракталне димензије.

За тестирање су изабрани дијаграми витоперности колосека на две деонице железничке пруге Београд-Врбница (слика 4.14): (1) деоница између стационажа  $km\ 6+515$  и  $km\ 6+615$  на којој се искуствено очекује мања вредност фракталне димензије, (2) деоница између стационажа  $km\ 40+800$  и  $km\ 40+900$  на којој се искуствено очекује већа вредност фракталне димензије. Ови дијаграми витоперности су снимљени мерним колима *Plasser&Theurer EM-80 L* дана 12. марта 2014. године. Поменути мерна кола се користе за инспекцију железничке мреже у Србији, а дијаграм витоперности приказују у односу  $1\ m$  дужине колосека  $\equiv 0.4\ mm$  витоперности.



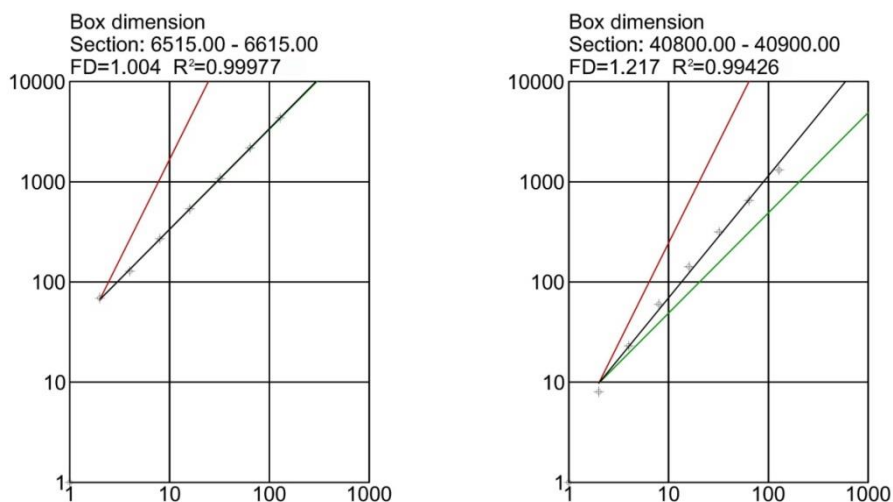
Слика 4.14 Дијаграми витоперности колосека на две деонице железничке пруге Београд-Врбница за тестирање софтверског алата за фракталну анализу

Тестирање бокс методе, класичне и измењене методе корачања је извршено за неколико односа дужине колосека и вредности витоперности. Метода прелазака није тестирана на овај начин, будући да се код ове методе резултат анализе не мења променом односа на дијаграму.

#### 4.2.1 Тестирање бокс методе

Слика 4.15 приказује резултат одређивања фракталне димензије за деонице 1 и 2, при чему је усвојен однос  $1\ m$  дужине колосека  $\equiv 1\ mm$  витоперности.





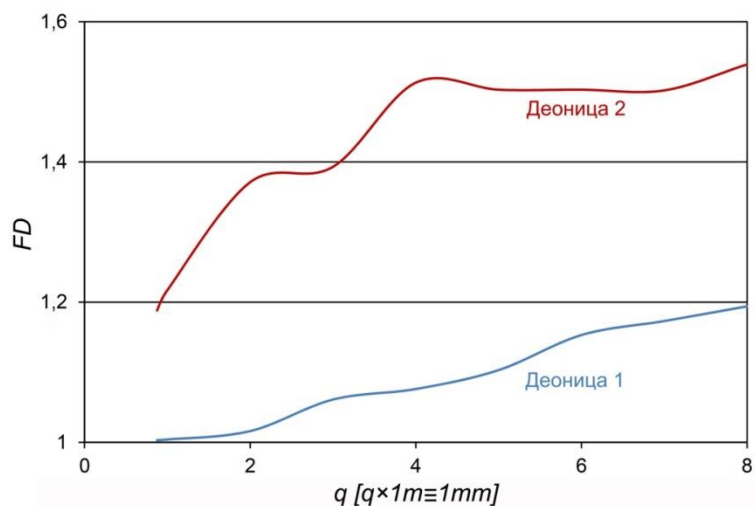
Слика 4.15 Фракталне димензије применом бокс методе за деонице 1 (лево) и 2 (десно)

Фрактална димензија на првој деоници износи  $\approx 1$ , док на другој деоници износи  $1,217$ . Као што се може видети на слици 4.15, при графичком представљању резултата фракталне анализе, поред апроксимиране праве приказују се и две праве које дефинишу граничне вредности фракталне димензије:

- права зелене боје – фрактална димензија  $1$ ,
- права црвене боје – фрактална димензија  $2$ .

На тај начин је омогућена брза визуелна оцена анализираног параметра.

На слици 4.16 је приказан резултат тестирања бокс методе за односе дужине колосека и вредности витоперности који припадају интервалу  $[0,8]$ . При даљем повећању овог односа дијаграм витоперности се значајно мења, а фрактална димензија наставља да расте приближно степенасто.

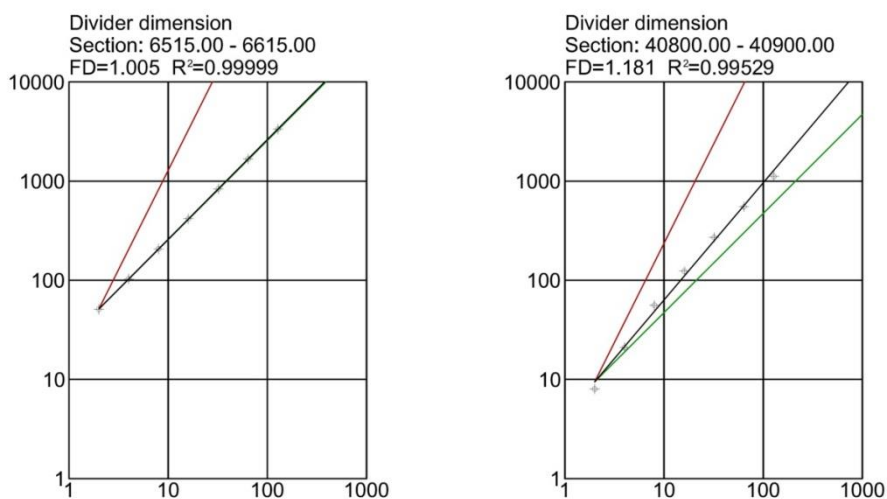


Слика 4.16 Фракталне димензије применом бокс методе за различите односе дужине колосека и вредности витоперности

Највећи распон између фракталних димензија за две анализиране деонице се добија за однос  $4\text{ m}$  дужине колосека  $\equiv 1\text{ mm}$  витоперности.

#### 4.2.2 Тестирање методе корачања

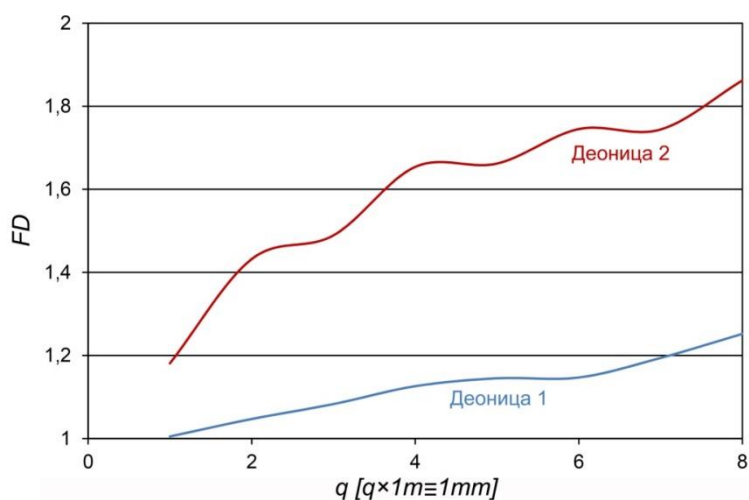
На слици 4.17 је приказан резултат одређивања фракталне димензије за деонице 1 и 2, при чему је усвојен однос  $1\text{ m}$  дужине колосека  $\equiv 1\text{ mm}$  витоперности.



Слика 4.17 Фракталне димензије применом методе корачања за деонице 1 (лево) и 2 (десно)

Фрактална димензија на првој деоници износи  $\approx 1$ , док на другој деоници износи  $1,181$ , што је око  $3\%$  мање од резултата који се добија применом бокс методе.

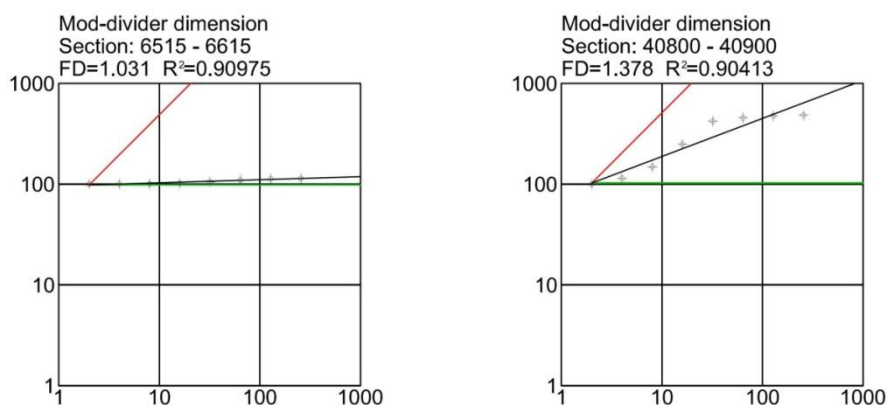
На слици 4.18 је приказан резултат тестирања методе корачања за односе дужине колосека и вредности витоперности који припадају интервалу  $[0,8]$ . Даљим повећањем овог односа дијаграм витоперности се значајно мења, а фрактална димензија наставља да расте приближно степенасто, исто као и случају на слици 4.16.



Слика 4.18 Фракталне димензије применом методе корачања за различите односе дужине колосека и вредности витоперности

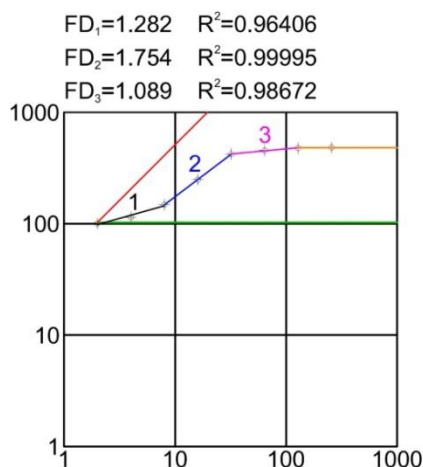
### 4.2.3 Тестирање измењене методе корачања

На слици 4.19 је приказан резултат одређивања фракталне димензије за деонице 1 и 2, при чему је усвојен однос  $1\text{ m}$  дужине колосека  $\equiv 1\text{ mm}$  витоперности.



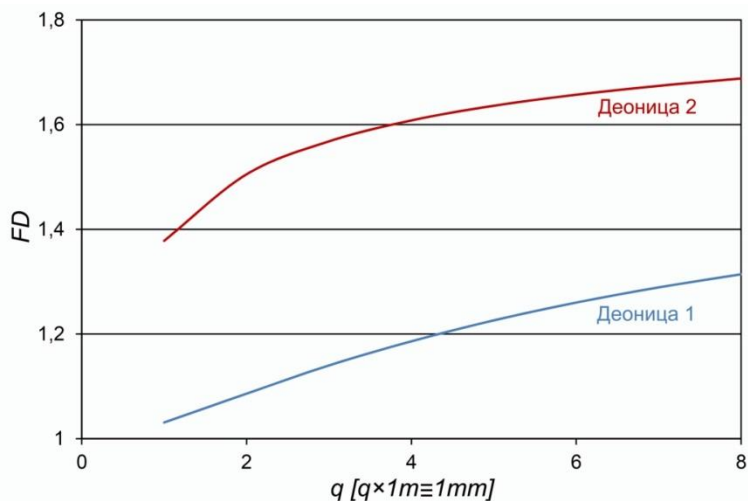
Слика 4.19 Фракталне димензије применом измењене методе корачања за деонице 1 (лево) и 2 (десно)

Права која најбоље апроксимира скалирајућа својства дијаграма витоперности на обе деонице има мању вредност коефицијента детерминације у поређењу са бокс методом и методом корачања. Са друге стране, детаљнија анализа дијаграма на деоници 2 може да наведе на закључак да постоји вишедимензионалност, односно неколико фракталних димензија које описују витоперност колосека на овој деоници (слика 4.20), што није случај код примене бокс методе и класичне методе корачања. Исти резултати се добијају тестирањем измењене методе корачања на другим деоницама.



Слика 4.20 Привидна вишедимнезионалност као резултат примене измењене методе корачања

На слици 4.21 је приказан резултат тестирања измењене методе корачања за односе дужине колосека и вредности витоперности који припадају интервалу  $[0,8]$ . Даљим повећањем овог односа дијаграм витоперности се значајно мења, а фрактална димензија расте до достизања максималне вредности од око  $1,35$  на деоници  $1$ , односно око  $1,7$  на деоници  $2$ .

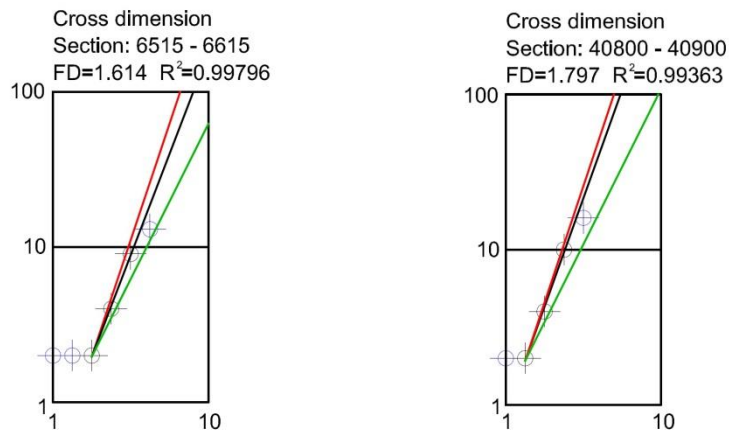


Слика 4.21 Фракталне димензије применом измењене методе корачања за различите односе дужине колосека и вредности витоперности

#### 4.2.4 Тестирање методе прелазака

Приликом тестирања методе прелазака уочено је неколико недостатака. Пре свега, вредност фракталне димензије може да се одреди за ограничен број итерација, односно граничних вредности (углавном 3 до 4). Изабране граничне вредности утичу на вредност фракталне димензије, при чему случајеве када не постоји ниједан прелазак преко задате граничне вредности није могуће представити на дијаграму логаритамске размере.

Основни закључак који се може извести након тестирања је да се вредности фракталне димензије витоперности колосека по методи прелазака углавном крећу у границама од  $1,5$  до  $2$ . Будући да даља испитивања методе прелазака превазилазе оквир ове Дисертације, у наставку је на слици 4.22 приказан само резултат одређивања фракталне димензије за деонице  $1$  и  $2$ . При томе, за почетну граничну вредност је усвојена максимална вредност витоперности, а за остале граничне вредности важи  $\delta_{i+1} = 0,75 \cdot \delta_i$ .



Слика 4.22 Фракталне димензије применом методе прелазака за деонице 1 и 2

### 4.3 Одређивање фракталне димензије параметара геометрије колосека

За потребе одређивања фракталне димензије параметара геометрије колосека дуж неке деонице неопходно је извршити аутоматизацију методе. Тестирањем бокс методе на различитим деоницама дуж железничке пруге Београд-Врбница, уз усвајање различитих односа дужине колосека и витоперности, добијена је најмања дисперзија резултата у односу на апроксимирану праву (вредност фракталне димензије). Због овог разлога ова метода је изабрана за аутоматизацију фракталне анализе.

За потребе аутоматизације фракталне анализе параметара геометрије колосека, софтверски алат је допуњен опцијом одређивања клизне фракталне димензије, слично поступку приказаном у [39]. Улазни подаци које треба унети приликом покретања алата за фракталну анализу су:

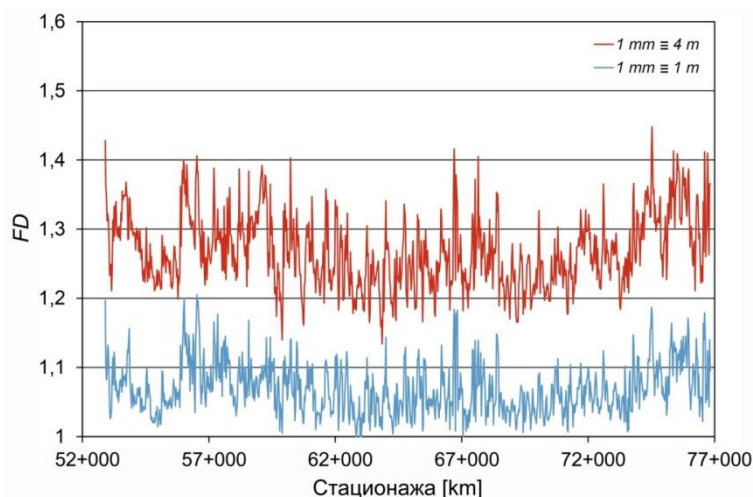
- почетна и крајња стационажа деонице која се анализира,
- дужина клизног опсега на којем се одређује фрактална димензија,
- преклапање узастопних клизних опсега,
- број итерација за одређивање фракталне димензије.

Фрактална анализа параметара геометрије колосека је извршена на деоници Лајковац-Ваљево, железничке пруге Београд-Врбница, при чему је коришћен

клизни опсег дужине  $100\text{ m}$ , уз коефицијент преклапања  $75\%$ . Дакле, фрактална димензија је одређивана за опсеге дужине  $100\text{ m}$  на сваких  $25\text{ m}$  дуж колосека. Сваки од параметра геометрије колосека је анализиран за два односа дужине колосека и вредности параметра –  $1\text{ m} \equiv 1\text{ mm}$  и  $4\text{ m} \equiv 1\text{ mm}$ .

### 4.3.1 Фрактална анализа одступања ширине колосека

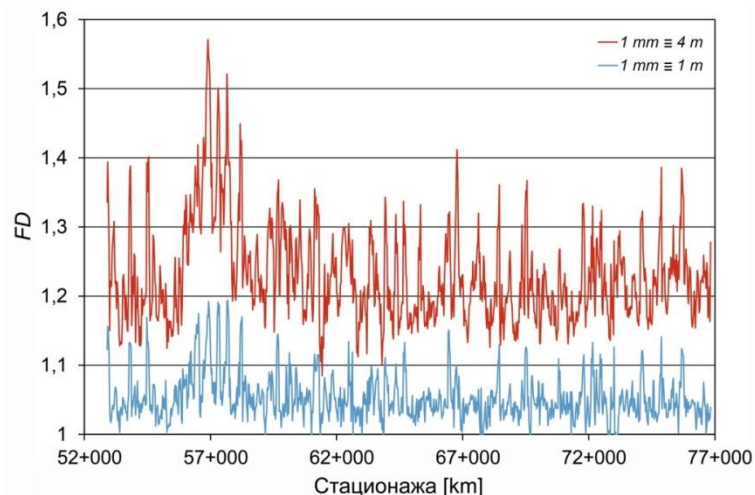
На слици 4.23 су приказане фракталне димензије одступања ширине колосека дуж предметне деонице. Фракталне димензије се крећу у распону од  $\sim 1,0$  до  $\sim 1,2$  за однос  $1\text{ m} \equiv 1\text{ mm}$ , односно од  $\sim 1,15$  до  $\sim 1,45$  за однос  $4\text{ m} \equiv 1\text{ mm}$ .



Слика 4.23 Фракталне димензије одступања ширине колосека на деоници Лајковац-Ваљево

### 4.3.2 Фрактална анализа вертикалног одступања

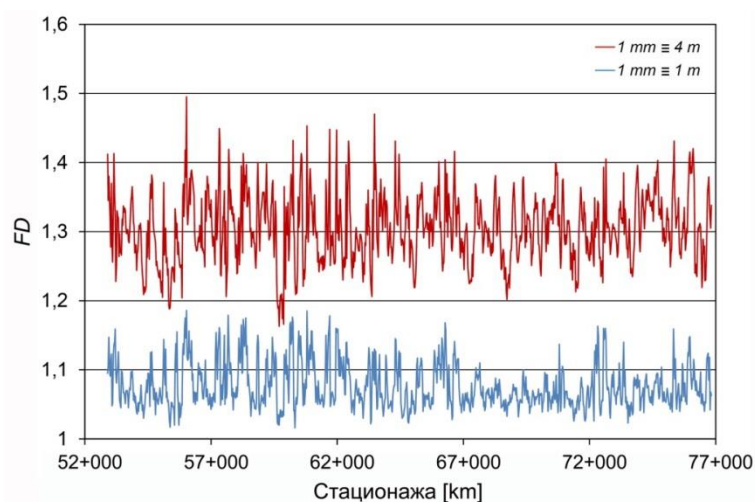
На слици 4.24 су приказане фракталне димензије вертикалног одступања дуж предметне деонице. Будући да се вертикално одступање мери и на левој и на десној шини у колосеку, вредности фракталних димензија су одређене за обе шине, а на дијаграму је приказана већа од две вредности за сваки клизни опсег. Фракталне димензије се крећу у распону од  $\sim 1,0$  до  $\sim 1,2$  за однос  $1\text{ m} \equiv 1\text{ mm}$ , односно од  $\sim 1,1$  до  $\sim 1,55$  за однос  $4\text{ m} \equiv 1\text{ mm}$ .



Слика 4.24 Фрактална димензија вертикалног одступања на деоници Лајковац-Ваљево

### 4.3.3 Фрактална анализа одступања смера

На слици 4.25 су приказане фракталне димензије одступања смера дуж предметне деонице. Будући да се одступање смера мери и на левој и на десној шини у колосеку, вредности фракталних димензија су одређене за обе шине, а на дијаграму је приказана већа од две вредности за сваки клизни опсег. Фракталне димензије се крећу у распону од  $\sim 1,0$  до  $\sim 1,2$  за однос  $1 m \equiv 1 mm$ , односно од  $\sim 1,15$  до  $\sim 1,5$  за однос  $4 m \equiv 1 mm$ .

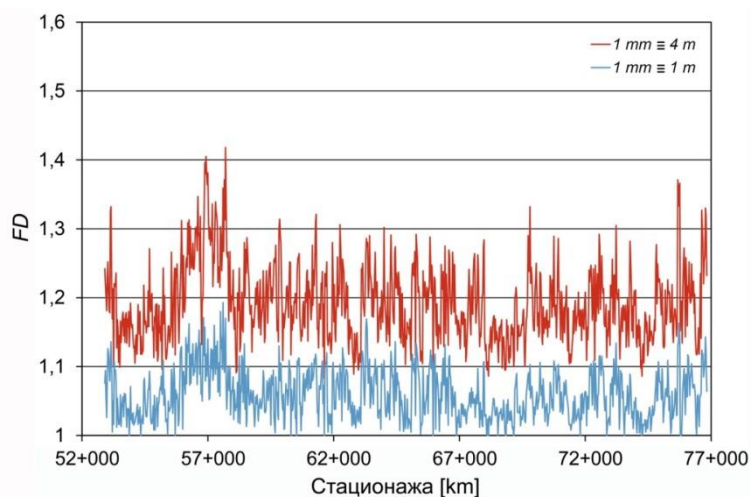


Слика 4.25 Фрактална димензија одступања смера на деоници Лајковац-Ваљево



#### 4.3.4 Фрактална анализа одступања надвишења

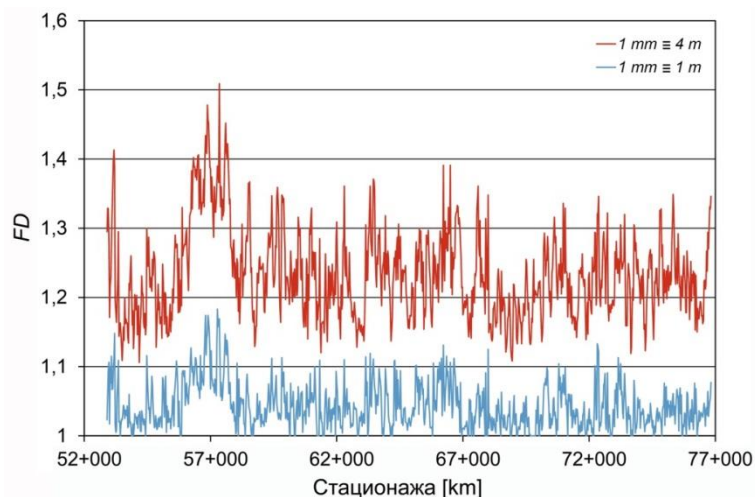
На слици 4.26 су приказане фракталне димензије одступања надвишења дуж предметне деонице. Фракталне димензије се крећу у распону од  $\sim 1,0$  до  $\sim 1,2$  за однос  $1\text{ m} \equiv 1\text{ mm}$ , односно од  $\sim 1,1$  до  $\sim 1,4$  за однос  $4\text{ m} \equiv 1\text{ mm}$ .



Слика 4.26 Фрактална димензија одступања надвишења на деоници Лајковац-Ваљево

#### 4.3.5 Фрактална анализа витоперности

На слици 4.27 су приказане фракталне димензије витоперности дуж предметне деонице. Фракталне димензије се крећу у распону од  $\sim 1,0$  до  $\sim 1,2$  за однос  $1\text{ m} \equiv 1\text{ mm}$ , односно од  $\sim 1,1$  до  $\sim 1,4$  за однос  $4\text{ m} \equiv 1\text{ mm}$ .



Слика 4.27 Фрактална димензија витперности на деоници Лајковац-Ваљево

### 4.3.6 Анализа добијених резултата

Променом односа дужине и вредности параметра не мења се значајно облик дијаграма фракталне димензије, али се додатно истичу деонице са максималним вредностима, што представља предност вертикалног скалирања дијаграма.

Дијаграми на сликама 4.23-4.27 приказују вредности фракталне димензије на целој дужини деонице, укључујући и главне пролазне колосеке у станицама. У табели 4.2 су приказани положаји станица на анализираној деоници.

Табела 4.2 Положаји станица на деоници Лајковац-Ваљево  
железничке пруге Београд-Врбница

Р.бр.	Станица	Улазна скретница	Излазна скретница
1	Лајковац	51+967,75	52+853,32
2	Словац	58+496,85	59+347,49
3	Дивци	66+755,74	67+604,40
4	Ваљево	76+879,76	78+050,54

У табели 4.3 су приказане средње, максималне и минималне вредности фракталне димензије по међустаничним растојањима, односно на деоницама отворене пруге, за однос  $4\text{ m}$  дужине  $\equiv 1\text{ mm}$  вредности параметра.

Табела 4.3 Максималне и минималне вредности  
фракталне димензије по међустаничним растојањима

Међустанично растојање	Параметар	$FD_{sr}$	$FD_{min}$	Стационажа минимума	$FD_{max}$	Стационажа максимума
(1) km 52+853,32 – km 58+496,85	$TG$	1,285	1,199	55+778,32	1,428	52+903,32
	$LL$	1,271	1,125	55+278,32	1,571	56+903,32
	$A$	1,303	1,188	55+353,32	1,495	56+028,32
	$CL$	1,210	1,091	58+128,32	1,418	57+703,32
	$TW$	1,263	1,106	54+178,32	1,509	57+353,32
(2) km 59+347,49 – km 66+755,74	$TG$	1,245	1,134	63+853,32	1,416	66+703,32
	$LL$	1,223	1,085	61+428,32	1,386	66+753,32
	$A$	1,303	1,163	59+703,32	1,470	63+478,32
	$CL$	1,195	1,083	61+628,32	1,321	61+303,32
	$TW$	1,234	1,120	61+378,32	1,391	66+228,32 66+503,32
(3) km 67+604,40 – km 76+879,76	$TG$	1,271	1,165	69+178,32	1,448	74+528,32
	$LL$	1,213	1,126	68+078,32	1,386	74+878,32
	$A$	1,307	1,202	68+728,32	1,431	75+353,32
	$CL$	1,179	1,086	74+253,32	1,371	75+678,32
	$TW$	1,217	1,108	68+953,32	1,349	75+328,32

Средња вредност фракталне димензије за свих пет параметара геометрије колосека би могла да се интерпретира као показатељ квалитета колосека. Међутим, параметри геометрије колосека су различитог реда величине, као и различитих граничних вредности одступања, тако да њихове фракталне димензије нису међусобно упоредиве.

Са друге стране, могуће је међусобно поредити деонице са аспекта фракталних димензија појединачних параметара геометрије колосека. У табели 4.4 је приказано рангирање међустаничних растојања 1, 2 и 3 (ознаке растојања

према табели 4.3) на основу средње вредности фракталне димензије за сваки параметар. Може се закључити да се међустанично растојање 3 (Дивци-Ваљево) одликује најбољим квалитетом геометрије колосека. Са друге стране, за међустанично растојање 1 (Лајковац-Словац) се може сматрати да је најлошијег квалитета геометрије колосека.

Табела 4.4 Рангирање међустаничних растојања

Параметар геометрије	Међустанично растојање са најмањим $FD_{sr}$
Ширина колосека	2
Вертикално одступање	3
Одступање смера	2, 3
Надвишење	1
Витоперност	3

#### 4.4 Предлог методе за одређивање индекса $TQI$ применом фракталне анализе

Због чињенице да параметри геометрије колосека нису истог реда величине, ни истих граничних вредности одступања, њихове фракталне димензије нису међусобно упоредиве. Међутим, уколико се изврши одговарајуће нормирање вредности параметара геометрије, а потом одреде фракталне димензије нормираних дијаграма геометрије, тада би било могуће међусобно поређење.

За нормирање снимљених параметара геометрије колосека коришћен је израз (4.22):

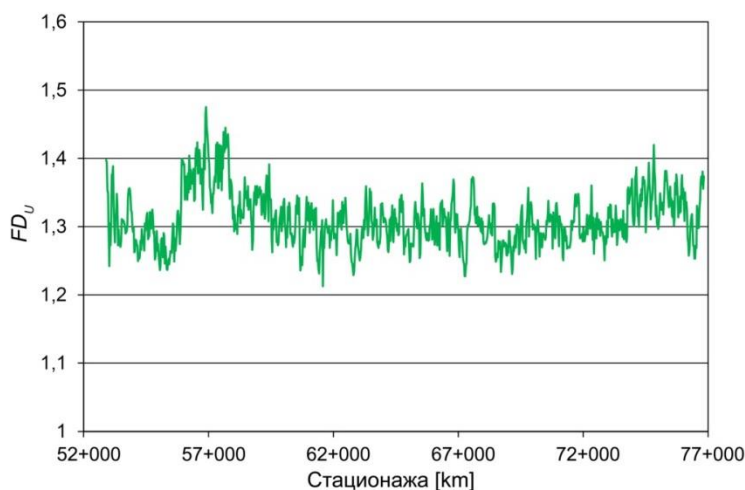
$$p_{norm} = \frac{p_{mer}}{IAL_p} \cdot 100 [\%] \quad (4.22)$$

где је  $p_{norm}$  нормирана вредност,  $p_{mer}$  је измерена вредност, а  $IAL_p$  је граница хитне интервенције за параметар. Дакле, дијаграми параметара геометрије колосека су нормирани тако да представљају процентуално одступање параметара од одговарајућих граница хитне интервенције дуж колосека.

Нормирање омогућује коришћење фракталних димензија појединачних параметара за дефинисање укупне фракталне димензије геометрије колосека. За одређивање укупне фракталне димензије геометрије колосека може се користити израз (4.23):

$$FD_U = w_{TG} \cdot FD_{TG} + w_{LL} \cdot FD_{LL} + w_A \cdot FD_A + w_{CL} \cdot FD_{CL} + w_{TW} \cdot FD_{TW} \quad (4.23)$$

где су  $w_{TG}$ ,  $w_{LL}$ ,  $w_A$ ,  $w_{CL}$  и  $w_{TW}$  тежински коефицијенти за сваки параметар геометрије, а  $FD_{TG}$ ,  $FD_{LL}$ ,  $FD_A$ ,  $FD_{CL}$  и  $FD_{TW}$  су њима одговарајуће фракталне димензије. Вредности тежинских коефицијената, слично изразу (2.4), треба прописати у складу са политиком одржавања. Дакле, вредности  $FD_U$  практично представљају индексе квалитета колосека. Слика 4.28 приказује укупне вредности фракталне димензије геометрије колосека на деоници Лајковац-Ваљево. При томе, вредност  $FD_U$  је одређена усвајањем исте вредности за све тежинске коефицијенте ( $w=0,20$ ), односно усвајањем једнаког релативног утицаја за сваки параметар геометрије колосека.



Слика 4.28 Укупне вредности фракталне димензије геометрије колосека на деоници Лајковац-Ваљево

Табела 4.5 приказује предложен метод класификације колосека према укупној фракталној димензији као показатељу индекса  $TQI$ . Предложене границе

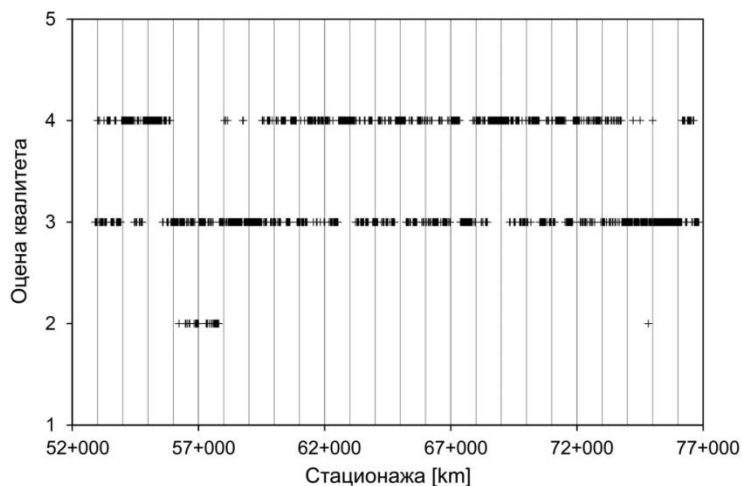
у табели 4.5 су одређене на основу анализе опсега добијених вредности фракталне димензије сваког параметра.

Табела 4.5 Класификација квалитета према укупној фракталној димензији колосека

Вредност $FD$	Оцена квалитета	Опис квалитета
$< 1,20$	5	Одличан
$< 1,30$	4	Добар
$< 1,40$	3	Средњи
$< 1,50$	2	Лош
$\geq 1,50$	1	Изразито лош

За класификацију колосека применом предложених граница у табели 4.5, могу се прво одредити појединачне оцене квалитета за сваки параметар геометрије колосека, па потом одредити њихову средњу вредност као показатељ квалитета колосека.

На слици 4.29 је приказана класификација квалитета геометрије колосека на деоници Лајковац-Ваљево, у складу са табелом 4.5. Највећа средња оцена квалитета је добијена на другом међустаничном растојању (3,52), а најмања на првом међустаничном растојању (3,23).

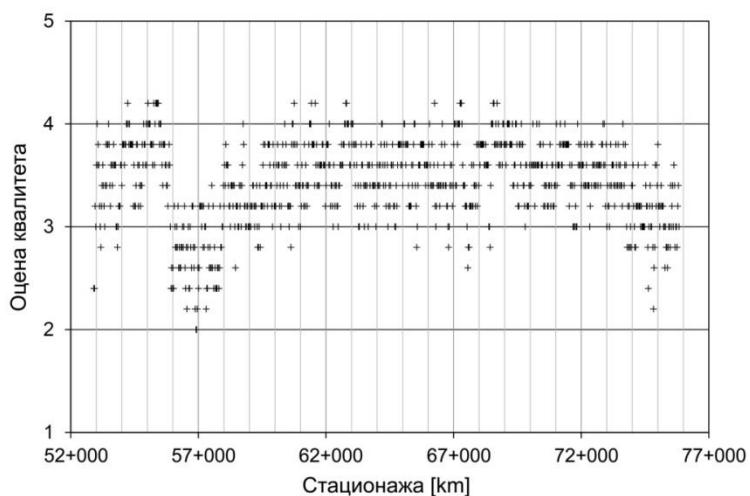


Слика 4.29 Класификација квалитета геометрије колосека на деоници Лајковац-Ваљево

На анализираној деоници су, такође, одређене средње оцене квалитета на одсесима дужине 1 km. У складу са добијеним резултатима, најлошији квалитет геометрије колосека је на деоници од km 56+828,32 до km 57+828,32 (средња

оцена 2,46), а најбољи на деоници од  $km\ 68+478,32$  до  $km\ 69+478,32$  (средња оцена 3,95).

За класификацију колосека применом предложених граница у табели 4.5, могу се прво одредити појединачне оцене квалитета за сваки параметар геометрије колосека, па потом одредити њихову средњу вредност као показатељ квалитета колосека. Применом ове методе за оцену квалитета добија се бољи утисак о стању геометрије на појединачним деоницама (слика 4.30).



Слика 4.30 Класификација квалитета геометрије колосека на деоници Лајковац-Ваљево

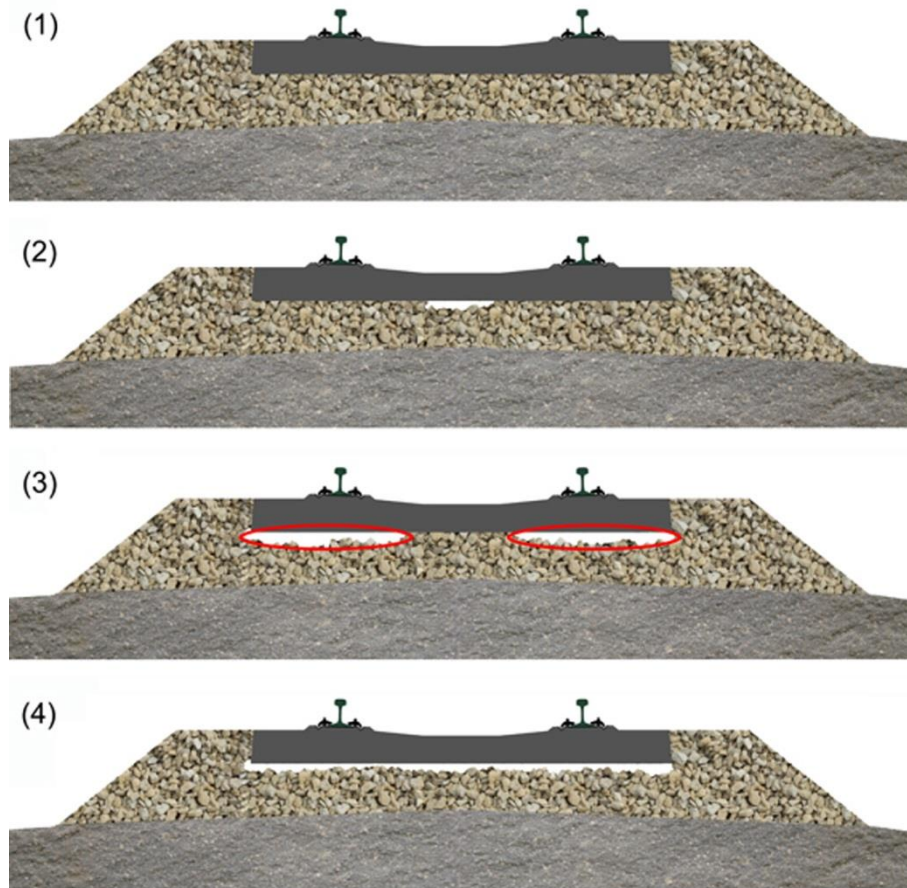
## 5 ТЕОРИЈСКА АНАЛИЗА УТИЦАЈА УСЛОВА ОСЛАЊАЊА ПРАГОВА

Под дејством саобраћајног оптерећења кроз време долази до неравномерног слегања застора, услед чега се јављају нерегуларности ослањања појединих прагова. Ова појава је била предмет великог броја истраживања, на основу којих су утврђене последице до којих може доћи на терену. Те последице подразумевају, пре свега, утицај на квалитет геометрије колосека, стабилност и сигурност колосека, као и на чешћу појаву механичких оштећења на елементима шинских причвршћења, праговима и застору [68]. Дакле, главни узрок пропадања геометрије колосека су нерегуларно ослоњени прагови.

У општем случају, са аспекта услова ослањања, за прагове у застору од туцаника се може рећи да су:

- ослоњени – праг се целом дужином доње површине (слика 5.1-1), или одговарајућом дужином (од крајева ка средини) ослања на застор (слика 5.1-2),
- делимично ослоњени – различите дужине и распоред зона преко којих се праг ослања на застор (слика 5.1-3 приказује посебан случај делимичног ослањања када праг у пресецима испод шина није ослоњен), и
- неослоњени – праг се уопште не ослања на застор (слика 5.1-4).





Слика 5.1 Подела прагова према условима ослањања: (1) ослоњени, (2) ослоњени са празнином у средини, (3) делимично ослоњени, и (4) неослоњени

Већина поступака за прорачун напона савијања прагова подразумева да се праг или ослања преко целе доње површине, или да само централни део није ослоњен [69,70], па се због тог разлога у овим случајевима сматра да је праг ослоњен (услови ослањања 1 и 2 на слици 5.1). Став да постоји празнина у централној зони испод прага је оправдан и са аспекта одржавања, будући да машина за подбијање регулише збијеност туцаника испод прага у зонама око шина.

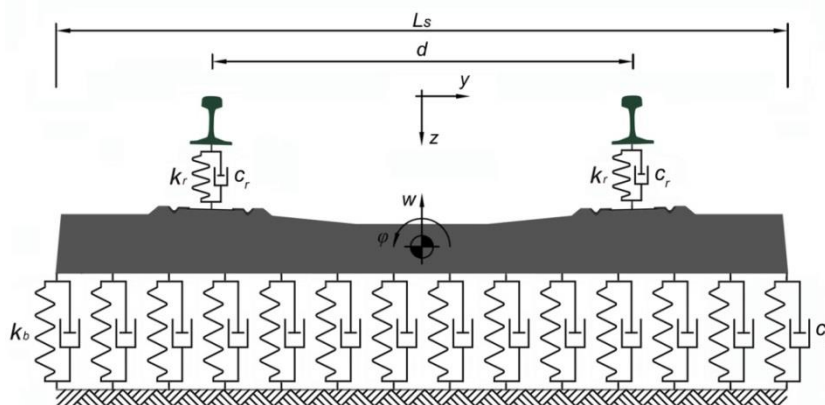
Услед акумулираног саобраћајног оптерећења и неравномерног слегања застора од туцаника, временом долази до појаве зона различитих облика и величина у којима праг губи ослонац. Даљим акумулирањем саобраћајног оптерећења и напретком слегања може доћи до потпуног губитка ослонца испод прага, када једини ослонац у вертикалном смислу представљају шине за које је праг везан преко система причвршћења (слика 5.1-4).

Дакле, механизам појаве и развоја нерегуларности ослањања прагова је у директној вези са акумулираним саобраћајним оптерећењем. Истовремено постоји директна веза између акумулираног саобраћајног оптерећења у милионима бруто тона и степена пропадања геометрије колосека [71].

Оправдано је очекивати да услед побуде од саобраћајног оптерећења неће бити исти одзив (вибрације) ослоњених, делимично ослоњених и неослоњених прагова. У складу са овим ставом, у наставку је извршена теоријска анализа утицаја услова ослањања на сопствене фреквенције вибрација прагова.

## 5.1 Механички систем прага у застору

На слици 5.2 је представљен механички систем прага у застору од туцаника. Овај механички систем има два степена слободе, односно може да се помера вертикално (у правцу  $z$ -осе) и обрће (ротира) око референтне тачке – тежишта масе.



Слика 5.2 Механички систем прага у застору

Застор од туцаника на који се праг ослања представљен је у виду деформабилних ослонаца крутости  $k_b$  и пригушења  $c_b$ , који су континуално распоређени дуж доње површине прага. Расподела притисака испод прагова у стварном колосеку није константна [70,72,73]. Из практичних разлога се усваја идеализована константна расподела. Утицај туцаника у правцу  $y$ -осе је занемарен.

Везе шина са прагом су представљене у виду деформабилних ослонаца крутости  $k_r$  и пригушења  $c_r$ , којима одговара укупна крутост и пригушење примењеног система шинског причвршћења.

За сваки механички систем на који делују спољашње силе важи општи облик диференцијалне једначине осцилаторног кретања (5.1):

$$m \cdot \ddot{z} + c \cdot \dot{z} + k \cdot z = F \quad (5.1)$$

где су:

$z$  – оса у правцу које се систем креће,

$m$  – маса система,

$c$  – пригушење система,

$k$  – крутост система и

$F$  – спољашња сила.

Уколико се једначина (5.1) подели са  $m$  и уведу смене променљивих (5.2) и (5.3),

$$\omega_s^2 = \frac{k}{m} \quad (5.2)$$

$$\zeta = \frac{c}{2 \cdot \sqrt{k \cdot m}} \quad (5.3)$$

једначина осциловања добија коначан облик (5.4):

$$\ddot{z} + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_s \cdot \dot{z} + \omega_s^2 \cdot z = \frac{F}{m} \quad (5.4)$$

где су:

$\omega_s$  – фреквенција осциловања у  $rad/s$ ,

$\zeta$  – коефицијент пригушења система.

## 5.2 Механички систем за анализу природних фреквенција осциловања прага

Природна фреквенција представља фреквенцију осциловања којој ће систем да тежи у одсуству пригушења. Одсуство пригушења значи да се систем креће без губитка механичке енергије, односно систем наставља да се креће и након престанка дејства силе. Осцилаторно кретање је, у овом случају, описано диференцијалном једначином (5.5):

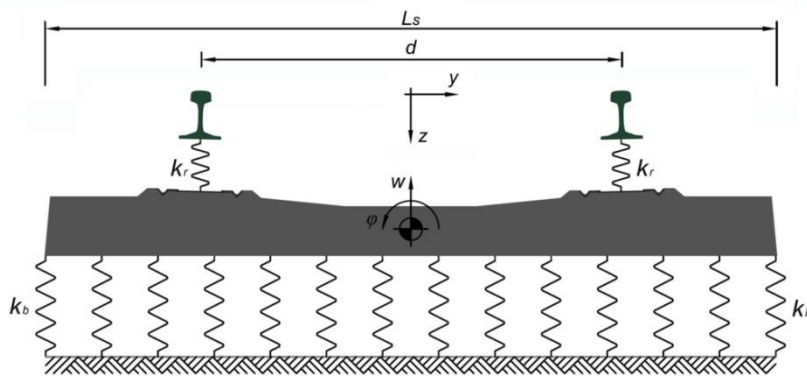
$$\zeta = 0 \Leftrightarrow \ddot{z} + \omega_n^2 \cdot z = 0 \quad (5.5)$$

где је  $\omega_n$  природна фреквенција осциловања, која се углавном изражава у  $rad/s$ . Ово је хомогена диференцијална једначина другог реда, а њена решења у општем случају могу имати неки од облика у складу са (5.6).

$$z(t) \in \{A \cdot \cos(\omega_n t + \psi), B \cdot \sin(\omega_n t + \psi), C \cdot e^{i \cdot \omega t}\} \quad (5.6)$$

где су  $A$ ,  $B$  и  $C$  амплитуде осцилација, а  $\psi$  параметар који зависи од почетних услова (фаза осциловања).

Механички систем прага у застору за анализу природних фреквенција осциловања је приказан на слици 5.3. Приликом утврђивања природних фреквенција осциловања праг се може разматрати као круто тело. Ова претпоставка је оправдана у случају анализе бетонског прага, услед чињенице да овај тип прага има велику крутост. Испитивањем представљеним у [74,75], добијене су незнатне разлике у вредностима природних фреквенција за случај анализе прага као крутог тела и анализе која је укључила одговарајућу еластичност прага.



Слика 5.3 Механички систем за анализу природних фреквенција осциловања прага у застору

Будући да праг у застору може да се помера у вертикалном правцу и обрће око тежишта, за ова два случаја су дефинисане диференцијалне једначине осциловања:

$$m_s \cdot \ddot{w}(t) + \int_{-L_s/2}^{L_s/2} k_b \cdot (w(t) + y \cdot \varphi(t)) dy + 2 \cdot k_r \cdot w(t) = 0 \quad (5.7)$$

$$I_s \cdot \ddot{\varphi}(t) + \int_{-L_s/2}^{L_s/2} k_b \cdot (w(t) + y \cdot \varphi(t)) \cdot y dy + 2 \cdot k_r \cdot \varphi(t) \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} = 0 \quad (5.8)$$

где су:

$m_s$  – маса прага у  $kg$ ,

$L_s$  – дужина прага у  $m$ ,

$k_b$  – крутост туцаника по дужини прага у  $kN/mm/mm$ ,

$k_r$  – крутост шинског уметка у  $kN/mm$ ,

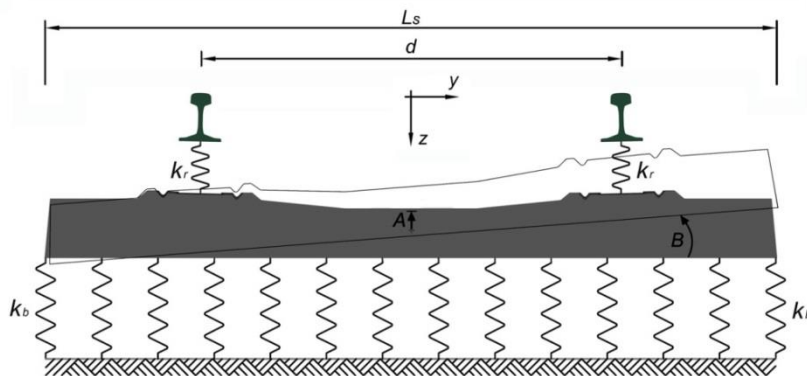
$d$  – осно растојање шина ( $1500 mm$  за номиналну ширину колосека  $1435 mm$ ) и

$I_s$  – динамички момент инерције прага у  $kg \cdot m^2$ .

За решење приказаних диференцијалних једначина усвојене су следеће функције у складу са (5.6):

$$\begin{aligned} w(t) &= A \cdot \cos(\omega_n t) \\ \varphi(t) &= B \cdot \cos(\omega_n t) \end{aligned} \quad (5.9)$$

где параметри  $A$  и  $B$  представљају амплитуде осцилација. На слици 5.4 је приказана фаза осциловања прага при амплитудама вертикалног померања и обртања у односу на равнотежни положај.



Слика 5.4 Фаза осциловања прага при амплитудама вертикалног померања и обртања

Како је стварну вредност динамичког момента инерције бетонског прага тешко одредити аналитички због променљивог попречног пресека, за прорачун је коришћен израз (5.10) који занемарује ову чињеницу.

$$I_s = \frac{1}{12} \cdot m_s \cdot L_s^2 \quad (5.10)$$

### 5.3 Анализа природних фреквенција осциловања прага

У наставку је анализиран утицај услова ослањања на природне фреквенције прага. Да би било могуће међусобно упоредити добијене вредности природних фреквенција, неопходно је усвојити одговарајуће нумеричке параметре који се јављају у једначинама (5.7) и (5.8). Табела 5.1 приказује улазне податке на основу којих ће бити рачунате вредности природних фреквенција.

Табела 5.1 Улазни подаци за одређивање природних фреквенција прага

Улазни подаци	Ознака	Вредност
Дужина прага	$L_s$	2,4 m
Маса прага	$m_s$	270 kg
Осно растојање шина	$d$	1,5 m
Крутост шинског уметка	$k_r$	60 kN/mm
Крутост туцаника по дужини прага	$k_b$	40 N/mm/mm

### 5.3.1 Добро ослоњен праг

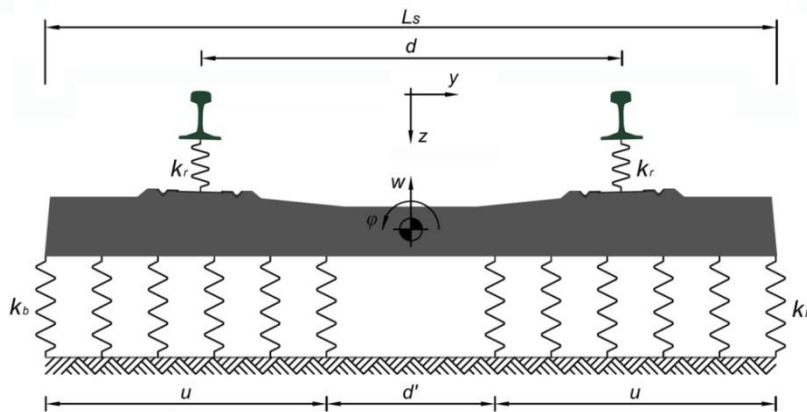
Механичком систему са слике 5.3 одговара случај када се праг целом својом доњом површином ослања на застор од туцаника (случај ослањања 1 на слици 5.1). Заменом израза (5.9) у (5.7) и (5.8) добијају се две вредности природне фреквенције, једна за вертикално померање  $\omega_{n,w}$  и друга за обртање око тежишта  $\omega_{n,\varphi}$ .

$$\omega_{n,w} = \sqrt{\frac{2k_r + k_b \cdot L_s}{m_s}} \quad (5.11)$$

$$\omega_{n,\varphi} = \sqrt{\frac{6k_r \cdot d^2 + k_b \cdot L_s^3}{12I_s}} \quad (5.12)$$

Заменом одговарајућих вредности, добијају се природне фреквенције вертикалног померања и обртања прагова  $f_{n,w} = 142,35 \text{ Hz}$  и  $f_{n,\varphi} = 149 \text{ Hz}$ .

Као што је раније напоменуто, већина поступака за прорачун напрезања прагова претпоставља да постоји средишњи део прага који није ослоњен (случај ослањања 2 слици 5.1). Механички систем за овај случај ослањања је приказан на слици 5.5.



Слика 5.5 Механички систем прага за случај неослоњене средње зоне

На великом броју железница се примењује израз (5.13) за одређивање ефективне дужине ослањања прага. Заменом овог израза у једначине (5.7) и (5.8) и променом граница интеграције, одређене су природне фреквенције прага који нема ослонац у средишњем делу.

$$u = L_s - d \quad (5.13)$$

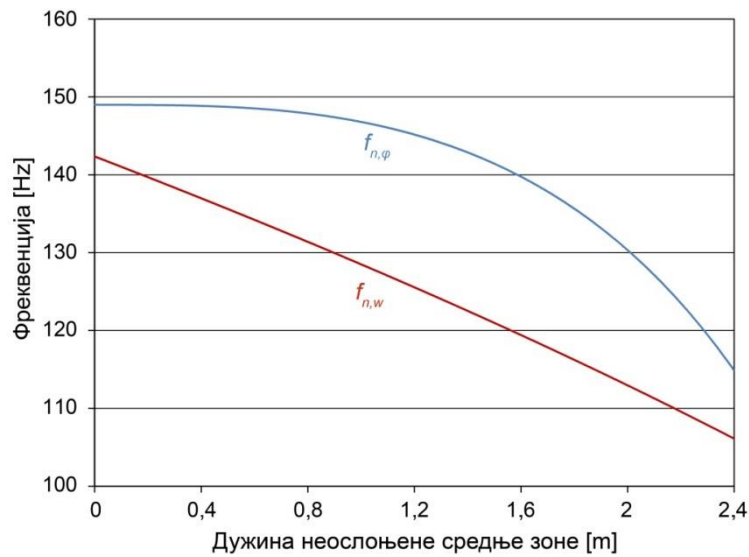
где је  $u$  двострука дужина препуста прага.

$$\omega_{n,w} = \sqrt{\frac{2}{m_s} \cdot (k_r + k_b \cdot (L_s + d))} \quad (5.14)$$

$$\omega_{n,\varphi} = \sqrt{\frac{1}{6I_s} \cdot (k_r \cdot 3d^2 + k_b \cdot ((L_s - d)^3 + 3d^2 \cdot (L_s - d)))} \quad (5.15)$$

Заменом одговарајућих вредности (табела 5.1), добијају се природне фреквенције  $f_{n,w}=134,21 \text{ Hz}$  и  $f_{n,\varphi}=148,52 \text{ Hz}$ . Дакле, за неослоњен средишњи део дужине  $0,6 \text{ m}$  вредност природне фреквенције за вертикално померање се смањује  $5,72\%$  у односу на потпуно ослоњен праг, док вредност природне фреквенције обртања остаје приближно иста. На слици 5.6 је приказан ефекат смањивања природне фреквенције прага са повећањем дужине неослоњене средње зоне.





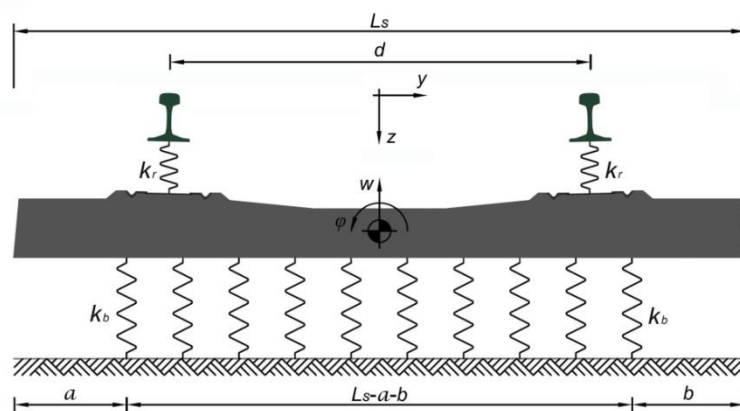
Слика 5.6 Утицај дужине неослоњене средње зоне на природне фреквенције прага

### 5.3.2 Делимично ослоњен праг

Анализирана су два случаја делимично ослоњеног прага: праг који није ослоњен на крајевима и праг који није ослоњен и на крајевима и у средини.

#### 5.3.2.1 Праг без ослоња на крајевима

Слика 5.7 приказује механички систем прага који није ослоњен у зонама око крајева. У општем случају, дужине неослоњених зона на крајевима прага су различите: (a) дужина неослоњене зоне на левом крају прага, (b) дужина неослоњене зоне на десном крају прага.



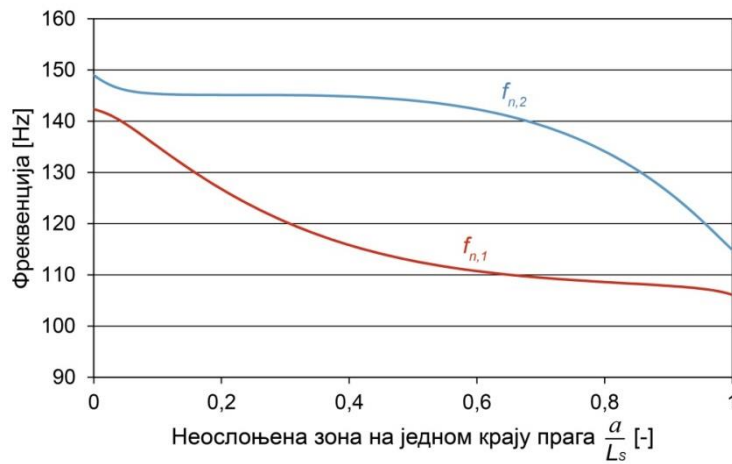
Слика 5.7 Механички систем прага са различитим дужинама неослоњених крајева

Интеграцијом једначина (5.7) и (5.8) у границама  $[-L_s/2+a, L_s/2-b]$ , добија се систем две хомогене диференцијалне једначине са две непознате – амплитуде осцилација  $A$  и  $B$ . Да би овај систем имао нетривијално решење, детерминанта система треба да буде једнака нули. Применом изложене методе, даље се могу одредити вредности природних фреквенција. Након тога, заменом ових вредности у полазне диференцијалне једначине добијају се међусобни односи амплитуда  $A$  и  $B$ , односно тзв. модални облици вибрација. У зависности од облика побуде, праг вибрира или у једном од два модална облика, или у форми периодичног кретања које је резултат комбинације модалних облика [76].

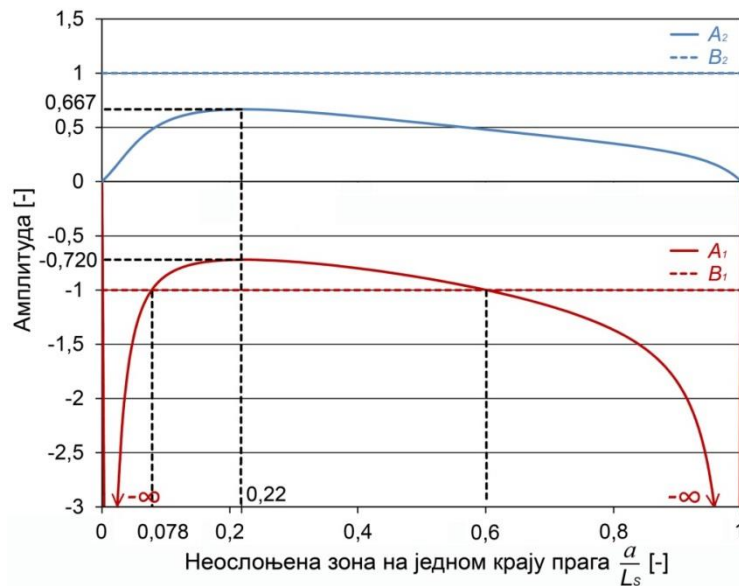
За систем приказан на слици 5.7 добијају се два пара вредности природних фреквенција  $(\pm\omega_{n1}, \pm\omega_{n2})$  у складу са изразом (5.16).

$$\omega_n^2 = k_b \cdot \left( \frac{1}{48I_s} \cdot ((L_s - 2a)^3 + (L_s - 2b)^3) + \frac{1}{2m_s} \cdot (L_s - a - b) \right) + k_r \cdot \left( \frac{1}{m_s} + \frac{d^2}{4I_s} \right) \pm \sqrt{\left( k_b \cdot \left( \frac{1}{48I_s} \cdot ((L_s - 2a)^3 + (L_s - 2b)^3) + \frac{1}{2m_s} \cdot (L_s - a - b) \right) + k_r \cdot \left( \frac{1}{m_s} + \frac{d^2}{4I_s} \right) \right)^2 - \frac{1}{m_s \cdot I_s} \cdot \left( \begin{array}{l} k_r^2 \cdot d^2 + k_b^2 \cdot \left( \frac{1}{24} \cdot (L_s - a - b) \cdot ((L_s - 2a)^3 + (L_s - 2b)^3) \right) \\ - \frac{1}{4} \cdot (a - b)^2 \cdot (L_s - a - b)^2 \\ + k_b \cdot k_r \cdot \left( \frac{d^2}{2} \cdot (L_s - a - b) + \frac{1}{12} \cdot ((L_s - 2a)^3 + (L_s - 2b)^3) \right) \end{array} \right)} \quad (5.16)$$

На слици 5.8 је приказана зависност природних фреквенција од дужине неослоњене зоне на једном крају прага, односно случај у коме су дужине неослоњених зона на крајевима прага различите, тако да важи  $b=0$  и  $a \neq 0$ . На слици 5.9 су дати модални облици вибрација који одговарају свакој од природних фреквенција прагова.



Слика 5.8 Зависност природних фреквенција од дужине неослоњене зоне на једном крају прага

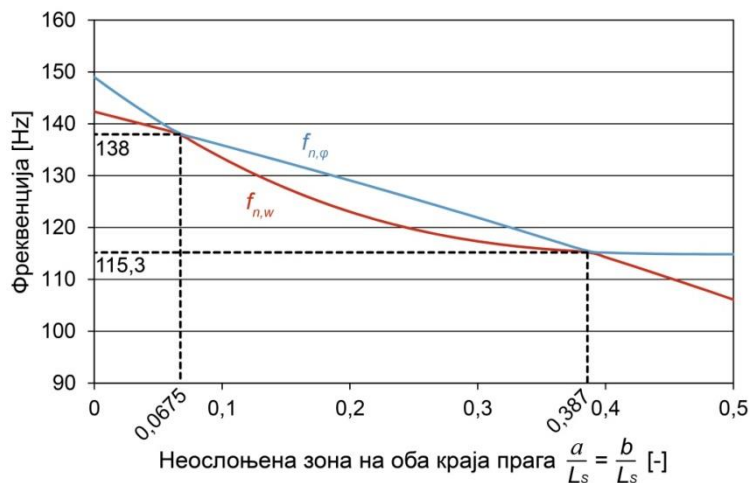


Слика 5.9 Модални облици вибрација за различите дужине неослоњене зоне на једном крају прага

На слици 5.9 се види да су, у општем случају, за фреквенције  $f_{n,2}$  израженије амплитуде обртања него вертикалног померања. За фреквенције  $f_{n,1}$  постоје два случаја у којима су израженије амплитуде вертикалног померања ( $a/L_s \approx 0$  и  $a/L_s \approx 1$ ), док у осталим случајевима вибрације прага подразумевају различите комбинације вертикалног померања и обртања око тежишта. Повећавањем дужине неослоњене зоне прага до вредности  $a/L_s \approx 0,22$  повећава се релативна

амплитуда вибрација до вредности  $A1=0,72$  и  $A2=0,667$ . Даљим повећањем дужине неослоњене зоне прага амплитуде вибрација се смањују.

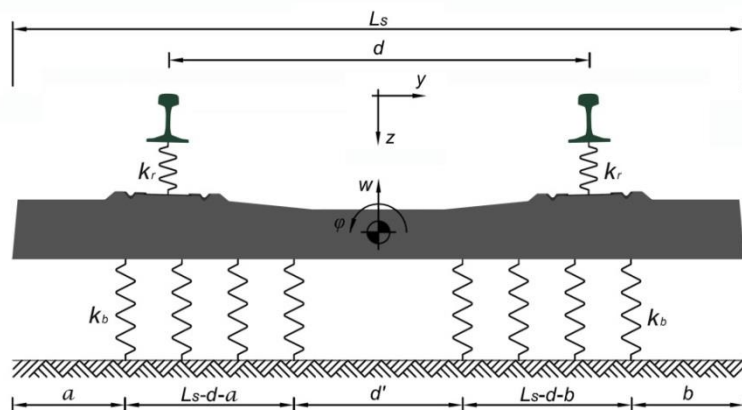
На слици 5.10 је приказана зависност природних фреквенција од дужине неослоњене зоне једнаке дужине на оба краја прага, тако да важи  $a=b \neq 0$ . За дужине неослоњене зоне прага  $a/L_s=b/L_s \approx 0,0675$  и  $a/L_s=b/L_s \approx 0,387$  праг вибрира у неком од модалних облика.



Слика 5.10 Зависност природних фреквенција од дужине неослоњених зона на оба краја прага

### 5.3.2.2 Праг без ослоњаца и на крајевима и у средини

На слици 5.11 је приказан механички систем за случај када праг нема ослонац и у средини и у зонама око крајева.



Слика 5.11 Механички систем за случај када праг није ослоњен и у средини и у зонама око крајева

За систем приказан на слици 5.11 добијају се два пара вредности природних фреквенција ( $\pm\omega_{n1}, \pm\omega_{n2}$ ) у складу са изразом (5.21), при чему су усвојене смене променљивих (5.17)-(5.20).

$$d_1 = (2L_s - a - b - 2d) \quad (5.17)$$

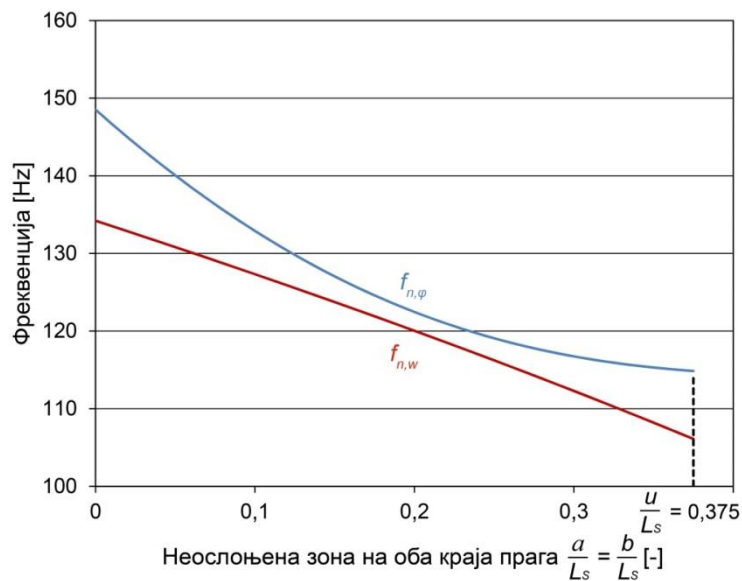
$$d_2 = (a - b)^2 \cdot (L_s - a - b)^2 \quad (5.18)$$

$$d_3 = (L_s - 2a)^3 + (L_s - 2b)^3 + 2 \cdot (L_s - 2d)^3 \quad (5.19)$$

$$\tilde{\omega} = k_b \cdot \left( \frac{d_3}{48I_s} + \frac{d_2}{2m_s} \right) + k_r \cdot \left( \frac{1}{m_s} + \frac{d^2}{4I_s} \right) \quad (5.20)$$

$$\omega_n^2 = \tilde{\omega} \pm \sqrt{\tilde{\omega}^2 - \frac{k_r^2 \cdot d^2 + k_b^2 \cdot \left( \frac{d_2 \cdot d_3}{24} - \frac{1}{4} \cdot d_2 \right) + k_b \cdot k_r \cdot \left( \frac{d^2 \cdot d_1}{2} + \frac{d_3}{12} \right)}{m_s \cdot I_s}} \quad (5.21)$$

Слика 5.12 приказује зависност природних фреквенција од дужине неослоњене зоне на оба краја прага, уз претпоставку да је дужина неослоњене средње зоне дефинисана изразом (5.13). При томе, мора да важи однос  $a, b \leq u$ .



Слика 5.12 Зависност природних фреквенција прагова без ослоња у средини при смањивању дужине неослоњених зона на оба краја прага

Повећањем дужине неослоњене зоне на оба краја прага (слика 5.12), сопствене фреквенције опадају већом брзином у односу на случај неослоњене зоне на једном крају (слика 5.8).

### 5.3.3 Неослоњен праг

Како код неослоњеног прага (услови ослањања 4 на слици 5.1) не постоји додир између његове доње површине и туцаника, природне фреквенције вибрација се могу једноставно одредити заменом израза  $k_b=0$  у изразе (5.11) и (5.12). Тада се добијају следећи изрази за природне фреквенције прагова:

$$\omega_{n,w} = \sqrt{\frac{2k_r}{m_s}} \quad (5.22)$$

$$\omega_{n,\varphi} = \sqrt{\frac{k_r \cdot d^2}{2I_s}} \quad (5.23)$$

Заменом одговарајућих вредности, добијају се фреквенције  $f_{n,w}=106,10 \text{ Hz}$  и  $f_{n,\varphi}=114,86 \text{ Hz}$ . Дакле, у случају када се праг уопште не ослања својом доњом

површином на туцаник, вредност природне фреквенције за вертикално померање се смањује за 25,5%, а вредност природне фреквенције обртања се смањује за 22,9% у односу на потпуно ослоњен праг.

## **5.4 Утицај услова ослањања на вибрације прага**

Смањивањем ефективне површине ослањања прага смањују се његове природне фреквенције. Дакле, услед деловања исте спољашње побуде, добро ослоњени прагови ће имати мање амплитуде вибрација у поређењу са делимично ослоњеним и неослоњеним праговима. Без обзира на услове ослањања, спољашњу побуду и модални облик, највеће амплитуде вибрација су на крајевима прага.

Неопходно је напоменути да на фреквенције вибрација прага, поред услова ослањања, утичу и крутост застора и крутост система причвршћења, као и маса прага. Фреквенције вибрација расту са смањењем масе прага. Са друге стране, смањењем крутости застора и/или система причвршћења фреквенције вибрација се смањују, што важи и у случају повећања међусобног односа ове две крутости.

Уколико елементи горњег строја на две деонице железничке пруге немају иста механичка својства, тада ће се при деловању исте побуде разликовати фреквенције при којима долази до амплитуде вибрација прагова. Дакле, прагови са истим условима ослањања на две деонице са различитим горњим стројем неће имати исте амплитуде вибрација. Такође, прагови различитих маса са истим условима ослањања неће имати исте амплитуде вибрација.

На деоницама железничке пруге на којима је лошији квалитет геометрије колосека, може се очекивати постојање одређеног броја прагова који нису добро ослоњени, односно прагова који би при деловању исте спољашње побуде имали веће амплитуде вибрација.

## 6 УТВРЂИВАЊЕ УСЛОВА ОСЛАЂАЊА МЕРЕЊЕМ МИКРОТРЕМОРА ПРАГОВА

Истраживања на терену су показала да се за више од 50% прагова може сматрати да нису ослоњени [77]. Истраживања које су спровели *Li* и *Sun* потврђују претходно поменут став, уз изношење става да се прагови који нису ослоњени често јављају у низу на дужини од  $1 - 4 m$ , као и да се висина празнине испод прага креће у границама од  $2 - 4 mm$  [78,79]. *Zhang* и *cap.* су утврдили постојање корелације између висине празнине испод прага и вертикалног оптерећења у додиру точак-шина. Ова корелација постоји у свим случајевима у којима до 6 прагова у низу није ослоњено [80].

Интеракција застора од туцаника и прагова значајно утиче на динамичко понашање колосека [68]. Дакле, уколико један или неколико прагова у низу нису ослоњени, то ће довести до значајног повећања динамичких утицаја. Тада динамичке силе у додиру точак-шина могу бити и до 80% веће у поређењу са деоницама на којима су прагови ослоњени [68]. У том случају ће и напони у додиру точак-шина бити до 80% већи на деоницама са праговима који нису ослоњени. Уколико напони у додиру прекораче границу еластичности шинског челика, доћи ће до ремећења његове микроструктуре и до појаве пластичних деформација. Описани механизам доводи до појаве и развоја шинских дефеката услед замора материјала [81-84].



У оквиру истраживања које су спровели *Shi и сар.* развијен је модел колосека применом методе коначних елемената, на коме је потом испитиван утицај броја узастопних неослоњених прагова на напрезање појединих елемената конструкције горњег и доњег строја, стабилност колосека и сигурност вожње. Прво је анализиран случај са ослоњеним праговима, а потом су добијени резултати поређени са резултатима анализе за случајеве са једним до четири узастопна прага који нису ослоњени. У прорачуну је усвојена висина празнине испод прага  $4\text{ mm}$ , осовинско оптерећење  $250\text{ kN}$  и брзина возила  $140\text{ km/h}$ . Анализом добијених резултата утврђен је пораст напрезања у горњем и доњем строју са повећањем броја узастопних неослоњених прагова  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  [79]:

- максимално напрезање у стезаљкама:  $R_1=1,35\cdot R_0$  ,  $R_4=3,20\cdot R_0$

- максимално вертикално убрзање возила:  $q_2=1,35\cdot q_0$  ,  $q_3=1,69\cdot q_0$  ,  $q_4=2,38\cdot q_0$

- максимална сила у додиру точак-шина:  $P_1=1,03\cdot P_0$  ,  $P_4=1,12\cdot P_0$

- максимални напон притиска на планум:  $\sigma_{b1}=1,01\cdot \sigma_{b0}$  ,  $\sigma_{b4}=1,60\cdot \sigma_{b0}$  .

Наведени утицаји могу додатно да се увећају у условима вишка или мањка надвишења у кривинама, услед чега је једна шина у колосеку оптерећенија од друге, чиме је и расподела оптерећења испод прага неравномерна [69].

## 6.1 Методе за утврђивање услова ослањања прагова

На терену је у досадашњој пракси примењивано неколико метода мерења у циљу утврђивања услова ослањања прагова у застору. Ове методе мерења могу да буду директне и индиректне. У директне методе спада скенирање застора  $x$ -зрацима или георадаром. У индиректне методе спадају методе којима се мере вибрације или угиби прагова, на основу чега се посредно могу утврдити услови ослањања прагова.

У истраживању које су спровели *Kim и сар.* вршено је испитивање вертикалних угиба прагова на три деонице пруге за велике брзине у Јужној Кореји [85]. Вредности измерених угиба су послужиле као основа за доношење закључка о условима ослањања испитиваних прагова. У овом истраживању примењене су три методе мерења: класичан систем са сензором вертикалног померања, модификовани опит са падајућим теретом (као на слици 6.1) и оптички систем за

мерење угиба. Анализом резултата мерења и испитивањем на терену утврђено је да су неослоњени прагови имали највеће вредности угиба.



Слика 6.1 Испитивање угиба прагова применом опита са падајућим теретом [86]

Угиб прагова може се одредити посредно преко мерења вертикалних вибрација, а потом двоструком интеграцијом добијених сигнала. Овај метод је примењен у истраживању које су спровели *Brajović и сар.* на индустријској прузи за превоз угља [87]. На слици 6.2 је приказан бежични сензор за мерење вибрација који је у сврху овог истраживања коришћен на терену.



Слика 6.2 Бежични сензор за мерење вибрација [87]

На истој деоници железничке пруге, *Brajović и сар.* су испитивали угибе прагова применом оптичког сензора положаја, који је био причвршћен за врат

шине (слика 6.3). Иста метода је примењена у теренским истраживањима које су спровели *Pinto и сар.* на прузи за велике брзине у Португалији [88].



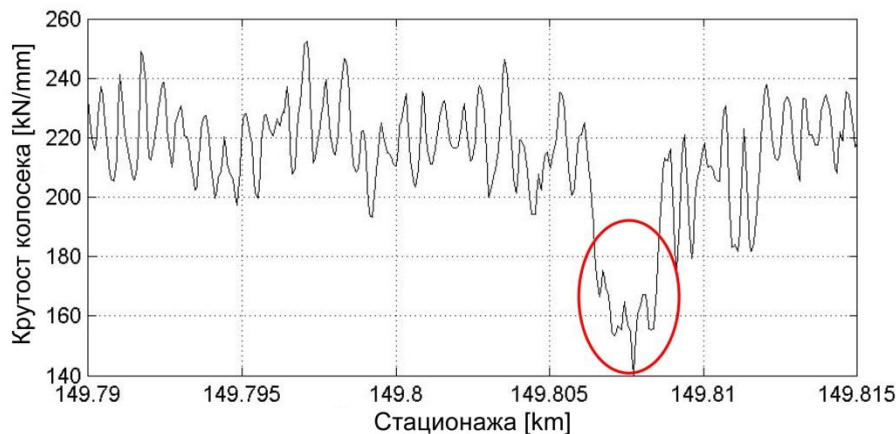
Слика 6.3 Примена оптичког сензора положаја за мерење угиба на прагу

Оправдано је очекивати да у зонама са делимично ослоњеним или неослоњеним праговима долази до промене (смањења) укупне крутости колосека. Да би се овакве зоне утврдиле може се користити снимак са уређаја за континуално мерење крутости колосека. На слици 6.4 је приказан један овакав уређај у примени на шведским железницама, који континуално мери вертикалну силу и убрзање [89]. Вредност вертикалног угиба, неопходна за прорачун крутости, одређује се двоструком интеграцијом измереног убрзања (као у [87]).



Слика 6.4 Уређај за континуално мерење крутости колосека [89]

На слици 6.5 је приказан дијаграм измерене крутости дуж једне деонице железничке пруге у Шведској. Локални максимуми, који се на дијаграму јављају на правилном растојању, представљају крутости колосека у пресецима изнад прагова.



Слика 6.5 Промене у крутости колосека  
дуж једне деонице железничке пруге у Шведској [90]

На дијаграму се може уочити нагли пад крутости колосека (нагло повећање угиба) на три прага у близини стационоже *km 149+807*. Дакле, може се очекивати да се ова три прага не ослањају својом доњом површином на туцаник [90]. Међутим, неопходно је напоменути да крутост у општем случају није хомогена дуж колосека [91,92]. До регистровања изненадних промена крутости долази приликом преласка мерног уређаја преко свих дисконтинуитета у колосеку, као што су механички спојеве, изоловани спојеве, прелазне конструкције на прилазу мосту или пропусту, скретнице, дилатационе справе. Зато је за тумачење дијаграма промене крутости дуж колосека и утврђивање потенцијалних места са нерегуларно ослоњеним праговима неопходно располагати детаљним подацима о уграђеним елементима горњег строја .

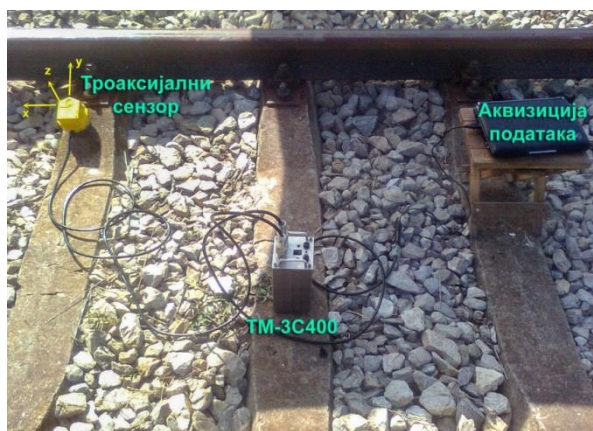
## 6.2 Утврђивање услова ослањања прагова применом анализе микротремора

За потребе утврђивања услова ослањања прагова примењена је анализа микротремора прагова, која подразумева анализу одзива прагова на континуалне амбијенталне микровибрације тла које се преносе на све околне објекте [93]. Мерење и интерпретација микротремора је корисна геофизичка метода која може да се примени у различитим областима [94,95].

Микротремори су узорковани по систему праг по праг. Полазна хипотеза у истраживању је да прагови који нису добро ослоњени на туцаник имају веће амплитуде вибрација у поређењу са добро ослоњеним праговима (у складу са теоријским разматрањима у поглављу 5).

### 6.2.1 Карактеристике примењеног мерног система

За потребе узорковања микротремора примењен је мерни систем *TM-3C400* (развијен од стране компаније *CNTG* д.о.о. Београд), који представља сеизмометријски 24-битни аквизициони систем (слика 6.6). На систем су прикључени троаксијални велосиметри фреквентног опсега од  $0,1 \text{ Hz}$  до  $600 \text{ Hz}$ , као и троаксијални *Geo-Space* сензор. Подаци се складиште у меморију рачунара у реалном времену. Инструмент има аутономно напајање великог капацитета, које омогућава 48 сати непрекидног рада.



Слика 6.6 Мерни систем *TM-3C400* за узорковање микротремора

У табели 6.1 су приказани параметри аквизиције при којима је вршено узорковање микротремора на праговима. Током аквизиције је коришћен софтверски пакет *AcDat*. Над свим узоркованим подацима је спроведена спектрална анализа (брза Фуријеова трансформација) по  $x$ ,  $y$  и  $z$  оси коришћењем софтверског пакета *GeoDas 2.10*.

Табела 6.1 Параметри аквизиције при узорковању микротремора

	Параметри аквизиције	Вредност параметра
1	Трајање узорковања	60 s
2	Број регистрованих узорака	2400
3	Фреквенција узорковања	400 Hz
4	Временски интервал	0,0025 s
5	Број оса сензора	3
6	Резолуција амплитуде	24-bit

Коришћењем софтверског пакета *Grapher 2.0* одређени су спектри максималних амплитуда померања. Потом су сви добијени спектри поређани управно на подужну осу пруге, у складу са стационажама на којима је вршено узорковање. Интеграцијом овако организованих спектра, применом софтверског пакета *Surfer 8*, најпре је формирана површ која представља промену спектралних карактеристика, а потом су од ове површи формиране карте просторне расподеле зависности амплитуде од фреквенције.

### 6.2.2 Избор мерних деоница за узорковање микротремора

Уколико један или неколико прагова у низу нису добро ослоњени, на том делу колосека ће приликом проласка мерних кола доћи до појаве већих угиба, што ће у одређеној мери утицати на снимљене параметаре геометрије колосека. Узимајући у обзир дефиниције параметара геометрије колосека, које су детаљно образложене у поглављу 2.1, оправдано је очекивати да ће се већи вертикални угиб пре свега рефлектовати као изненадна промена на дијаграму вертикалног одступања леве и десне шине, али у одређеним случајевима и на дијаграму витоперности. Нагле промене на овим дијаграмима могу да укажу и на места са повећаним диференцијалним слегањем колосека, па је на тим местима на терену неопходно извршити додатна испитивања.

На основу методе за одређивање индекса  $TQI$ , која је примењена у поглављу 4.4, утврђене су две референтне деонице:

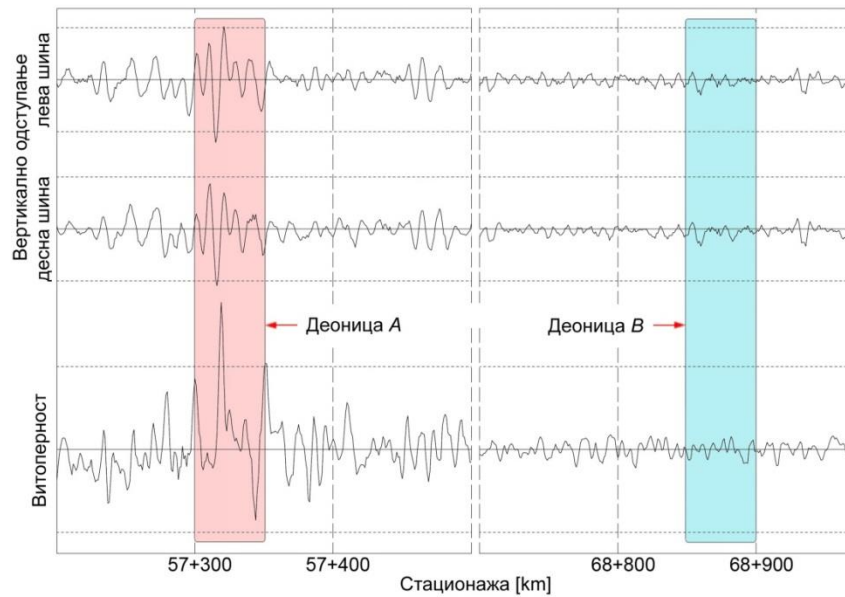
- од  $km\ 56+828,32$  до  $km\ 57+828,32$  – најлошији квалитет геометрије колосека,
- од  $km\ 68+478,32$  до  $km\ 69+478,32$  – најбољи квалитет геометрије колосека.

Дакле, на деоници са најлошијим квалитетом неопходно је изабрати одсек на којем ће бити примењена анализа микротремора прагова, са циљем утврђивања броја и распореда прагова који немају регуларне услове ослањања. Са друге стране, на деоници са најбољим квалитетом се очекује да су сви прагови ослоњени, или да постоји занемарљив број прагова који нису ослоњени. Дакле, на другој деоници се може изабрати било који одсек за примену анализе микротремора прагова.

У складу са претходно изнетим ставовима, изабране су две тест-деонице за примену анализе микротремора прагова:

- *Деоница А*: од  $km\ 57+300$  до  $km\ 57+350$ , на којој се очекује значајан број прагова који нису добро ослоњени,
- *Деоница В*: од  $km\ 68+850$  до  $km\ 68+900$ , на којој се не очекују нерегуларности ослањања прагова.

*Деоница А* је изабрана на основу дијаграма вертикалног одступања леве и десне шине и витоперности колосека (слика 6.7). Наиме, на сва три дијаграма се могу уочити нагле промене, које одступају у односу на генерални ток вредности параметара. Насупрот томе, на *Деоници В* се могу уочити минимална вертикална одступања и витоперност колосека у односу на граничне вредности (слика 6.7).



Слика 6.7 Вертикално одступање и витоперност на Деоници А и Деоници В

Колосек на *Деоници А* се састоји од бетонских прагова домаће производње који су уграђени на растојању  $0,65\text{ m}$  (прагови типа *IM2*,  $L_S=2,4\text{ m}$  и  $m_s\approx 190\text{ kg}$ ), *K* система шинског причвршћења и профила шине *49E1*. Колосек на *Деоници В* се састоји од бетонских прагова који су уграђени на растојању  $0,60\text{ m}$  (прагови типа *B70 W54*,  $L_S=2,4\text{ m}$  и  $m_s\approx 270\text{ kg}$ ), *W14* система шинског причвршћења и профила шине *49E1*. Дакле, због различите конструкције колосека није могуће поредити прагове на једној са праговима на другој деоници.

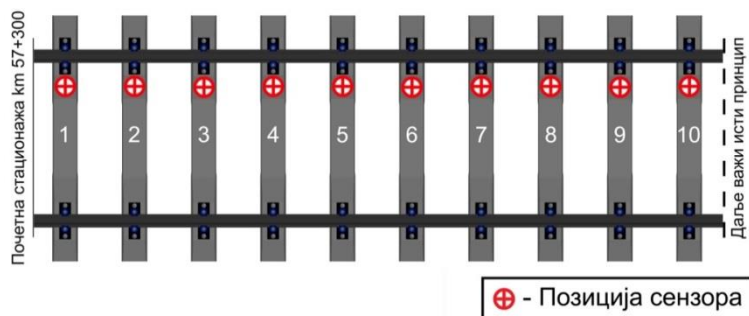
Теренска истраживања су подразумевала узорковање микротремора на  $80$  прагова на *Деоници А* и  $80$  прагова на *Деоници В*, што одговара дужини од приближно  $100\text{ m}$  колосека. Узорковање микротремора је извршено током августа (*Деоница А*) и септембра (*Деоница В*)  $2014.$  године.

### 6.2.3 Узорковање и анализа микротремора прагова на *Деоници А*

На слици 6.8 је дат шематски приказ позиција узорковања микротремора на праговима на *Деоници А*. Трoаксијални сензор је постављан на позицију непосредно поред шинског причвршћења са унутрашње стране колосека. Овакво позиционирање сензора је изабрано из практичних разлога, јер би са спољашње стране колосека било неопходно уклонити туцаник са крајева прагова. На овој позицији неће бити регистровано максимално вертикално померање прага.



Међутим, полазни став је био да се одреде амплитуде вертикалних померања прагова на изабраним мерним позицијама, па да се на основу распона добијених вредности одреде услови ослањања прагова.



Слика 6.8 Позиције узорковања микротрмора на Деоници А

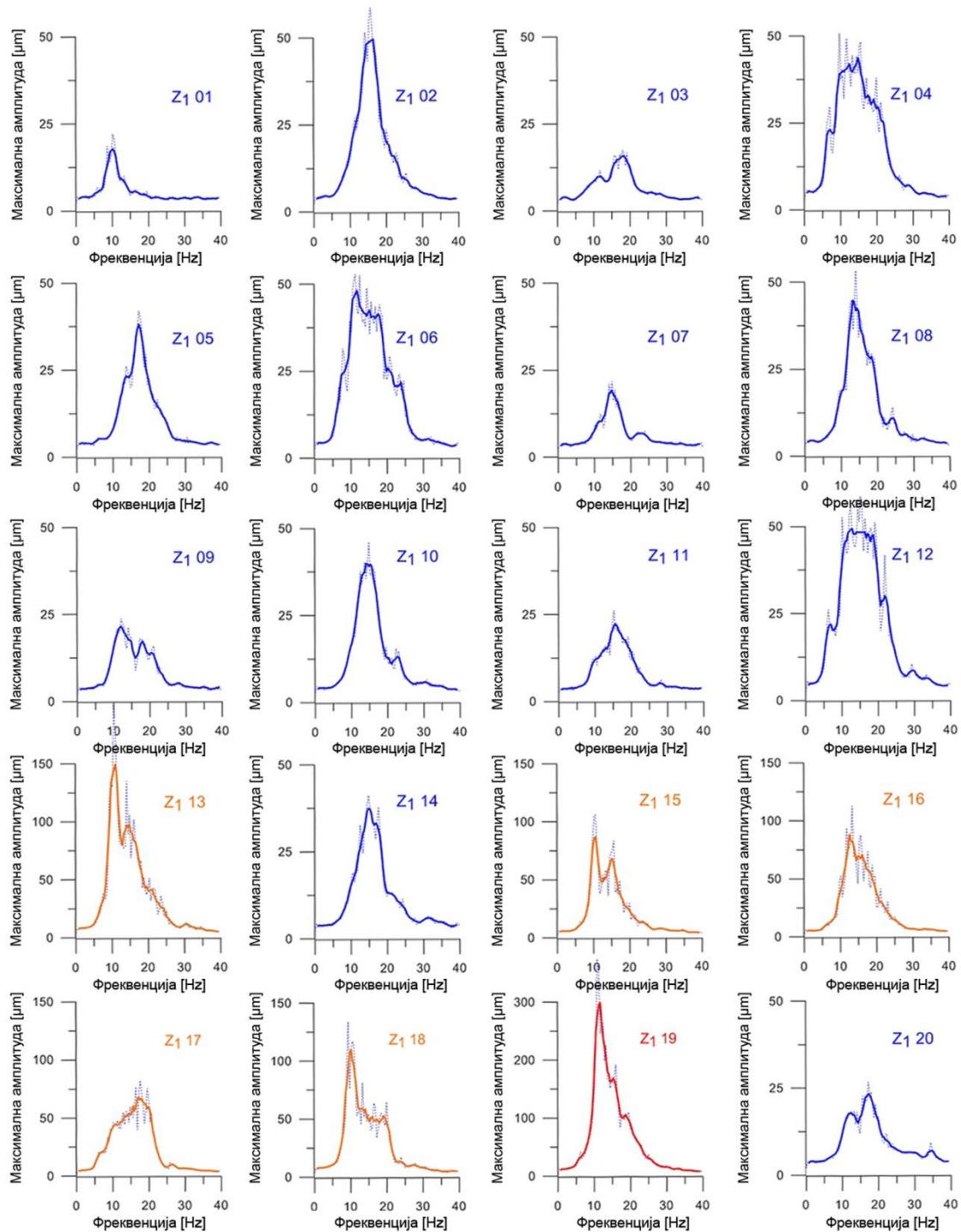
Приликом узорковања  $z$ -оса троаксијалног сензора није била управна на раван колосека, већ се налазила под одређеним углом у односу на нормалу. Код прагова на *Деоници А* овај угао износи  $18,122^\circ$ , што значи да ће измерене вредности амплитуда померања у правцу нагнуте осе сензора бити 5% мање у односу на стварна вертикална померања. Међутим, овај параметар ће бити занемарен, јер нема утицај на закључак о условима ослањања прагова.

Након узорковања микротрмора и обраде добијених података, дефинисана су три случаја ослањања прагова у складу са три усвојена опсега релативних амплитуда у правцу  $z$ -осе:

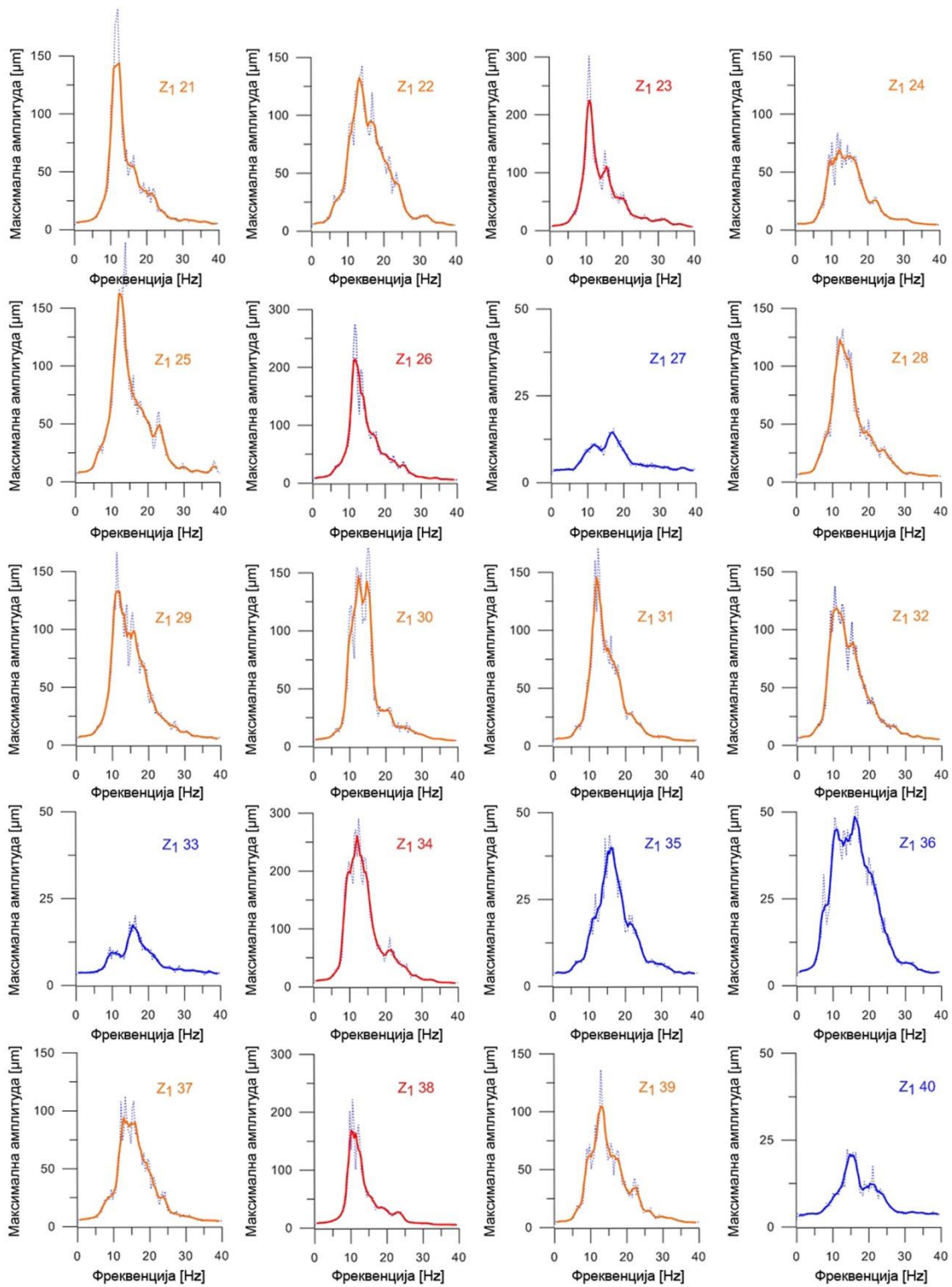
- добри услови ослањања – релативне амплитуде до  $50 \mu m$  (плава боја на дијаграмима),
- средњи услови ослањања – релативне амплитуде од  $50 \mu m$  до  $150 \mu m$  (наранџаста боја на дијаграмима), и
- лоши услови ослањања – релативне амплитуде од  $150 \mu m$  до  $300 \mu m$  (црвена боја на дијаграмима).

На сликама 6.9-6.12 су приказани дијаграми зависности максималне амплитуде померања у правцу  $z$ -осе од фреквенције за 80 узоркованих микротрмора на праговима. Дијаграми приказују измерене вредности амплитуда (испрекидана линија) и вредности амплитуда добијених филтрирањем података функцијом *Running Average* са 3 тачке (пуна линија). Утврђено је да на *Деоници А*

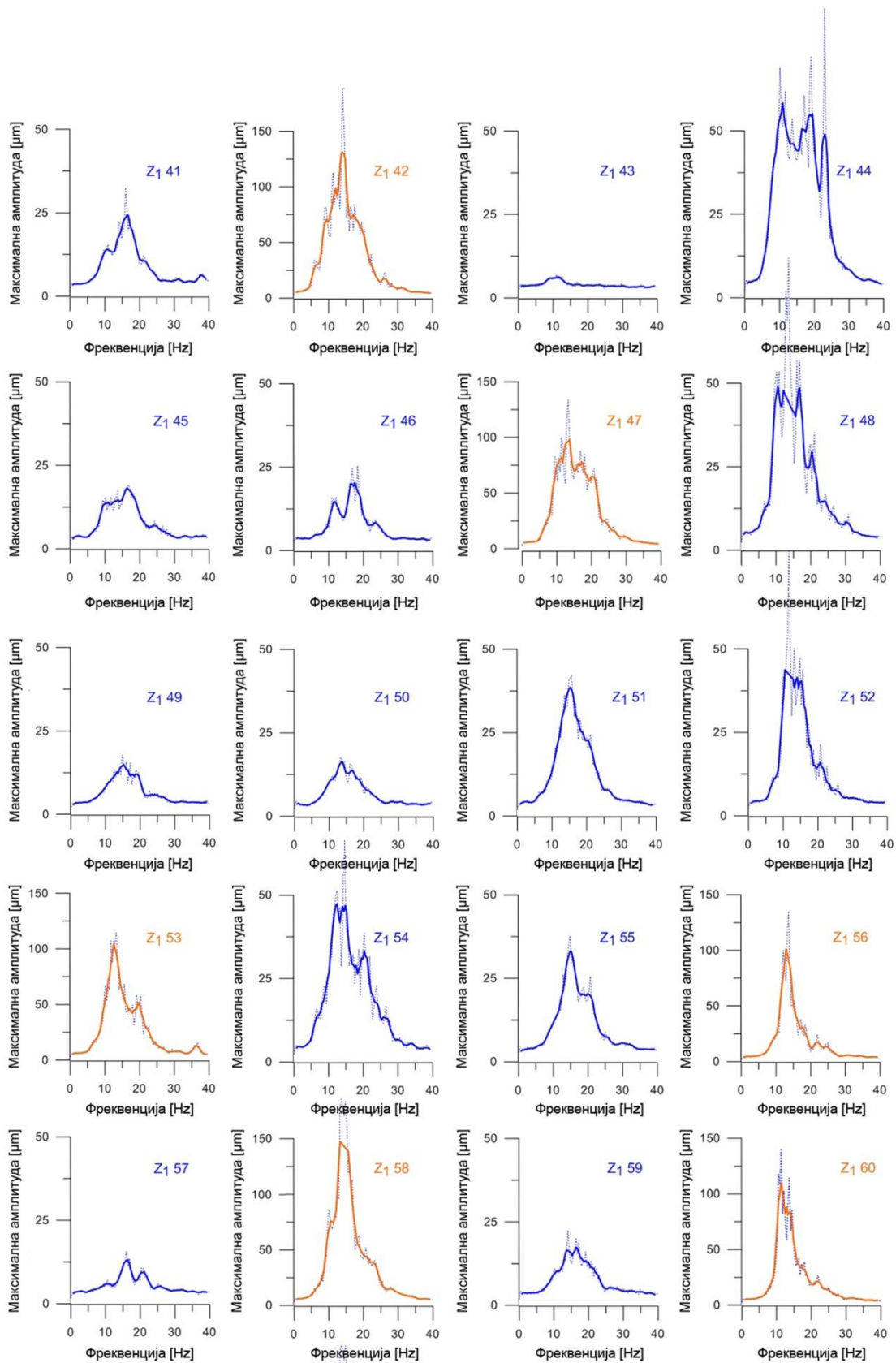
постоји 43 прага са добрим, 30 прагова са средњим и 7 прагова са лошим условима ослањања. Такође, са дијаграма се може уочити да су највећа вертикална померања регистрована при фреквенцијама распона од 10 Hz до 20 Hz.



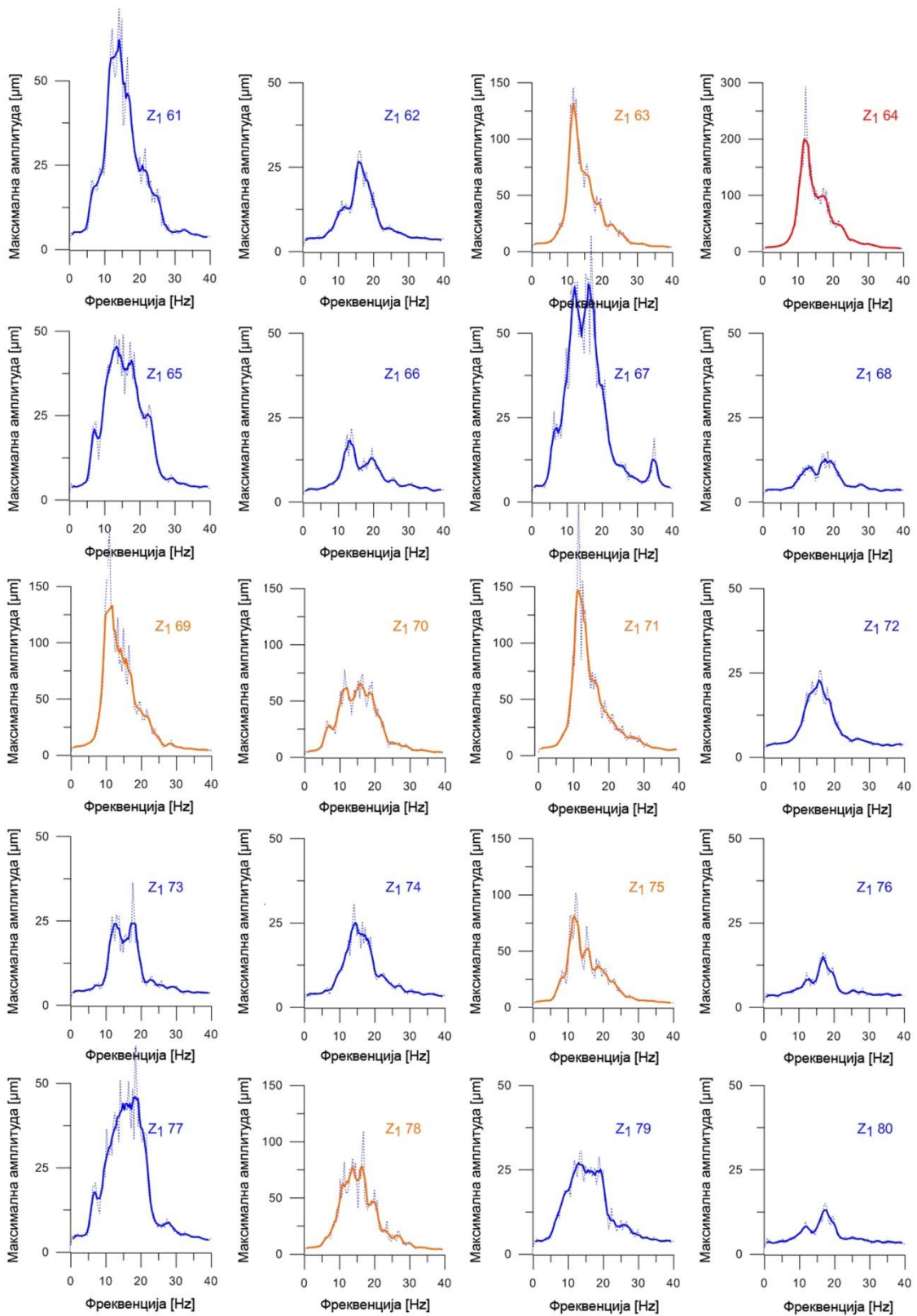
Слика 6.9 Максималне амплитуде померања за прагове 1-20



Слика 6.10 Максималне амплитуде померања за прагове 21-40

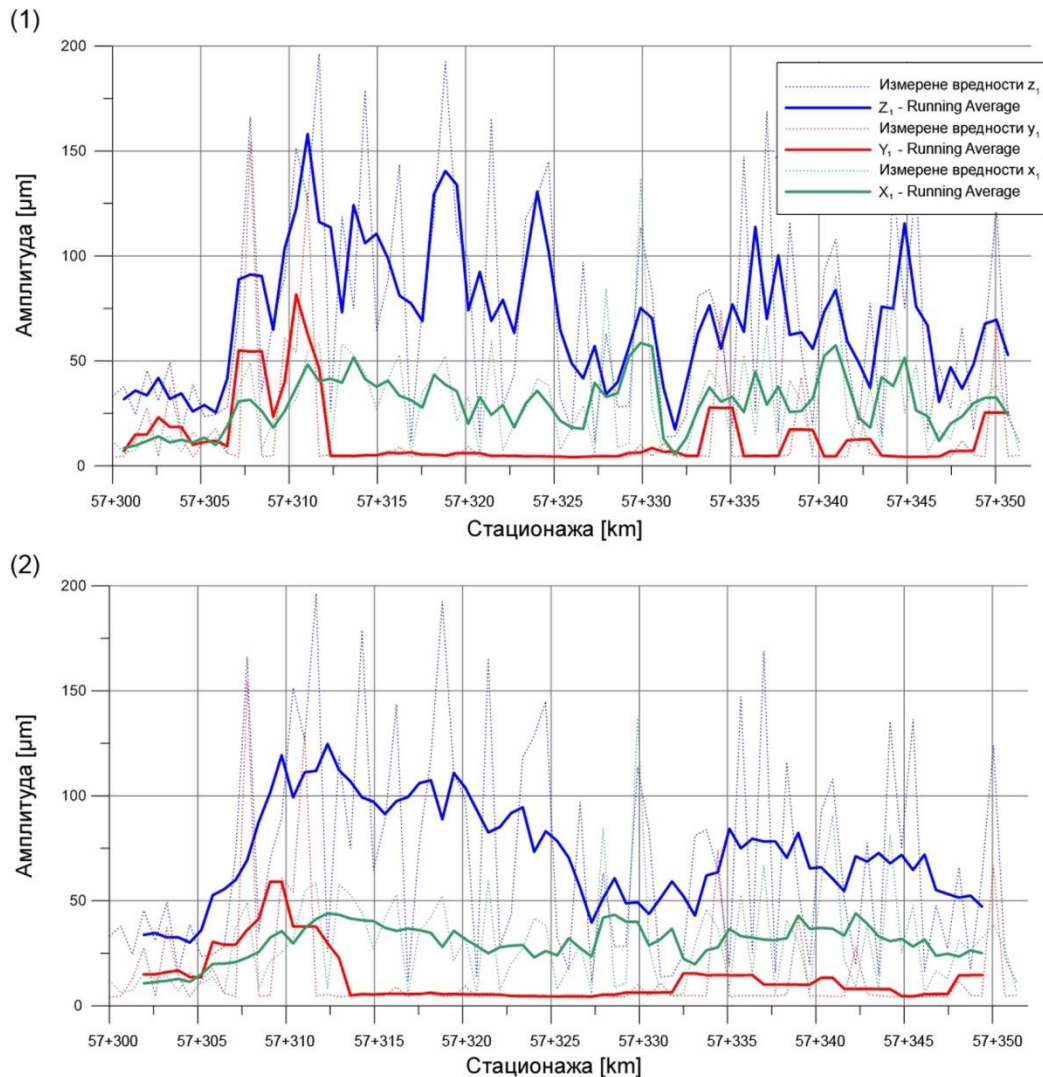


Слика 6.11 Максималне амплитуде померања за прагове 41-60



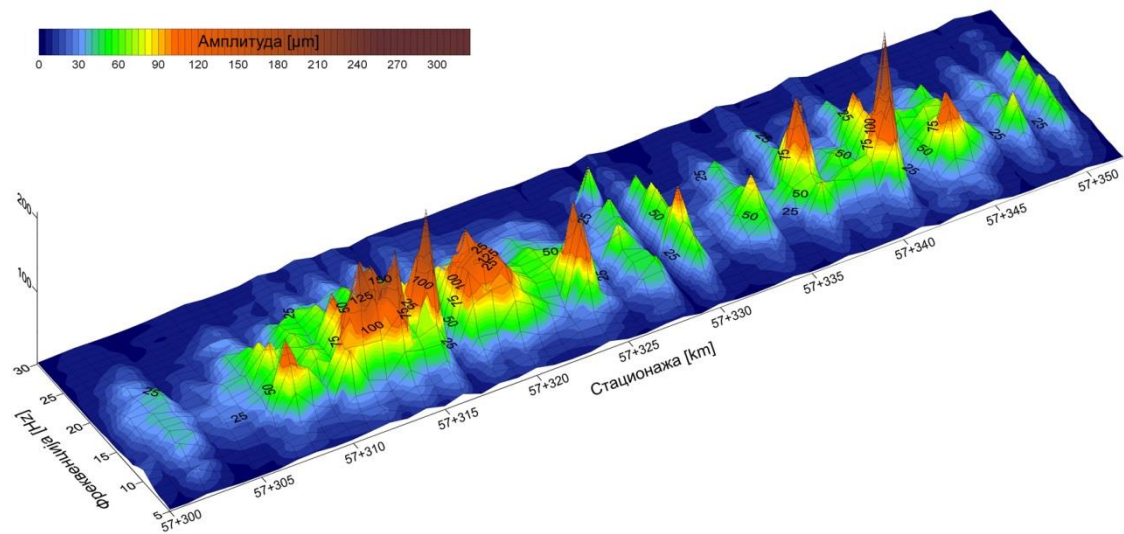
Слика 6.12 Максималне амплитуде померања за прагове 61-80

На слици 6.13 су дати дијаграми промене највећих амплитуда померања по стационажама дуж прве мерне деонице. На дијаграму (1) је извршено филтрирање података функцијом *Running Average* са 3 тачке, а на дијаграму (2) са 7 тачака. Овим поступком филтрирања су ублажене скоковите промене.

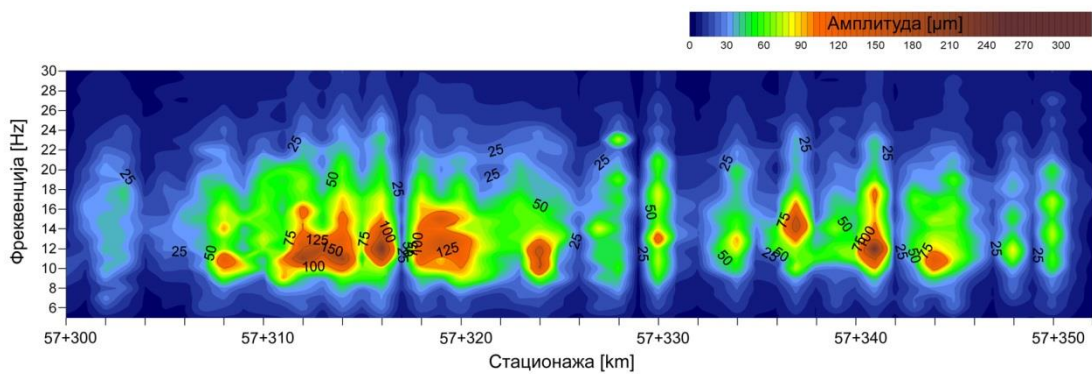


Слика 6.13 Промене највећих амплитуда померања дуж Деонице А применом филтера *Running Average* са: (1) 3 тачке и (2) 7 тачака

На слици 6.14 је, применом раније изложеног поступка, приказана 3D површ која представља промену спектралних карактеристика дуж мерне деонице. Потом је на слици 6.15 приказан дијаграм просторне расподеле зависности амплитуде од фреквенције.



Слика 6.14 Промена спектралних карактеристика дуж Деонице А

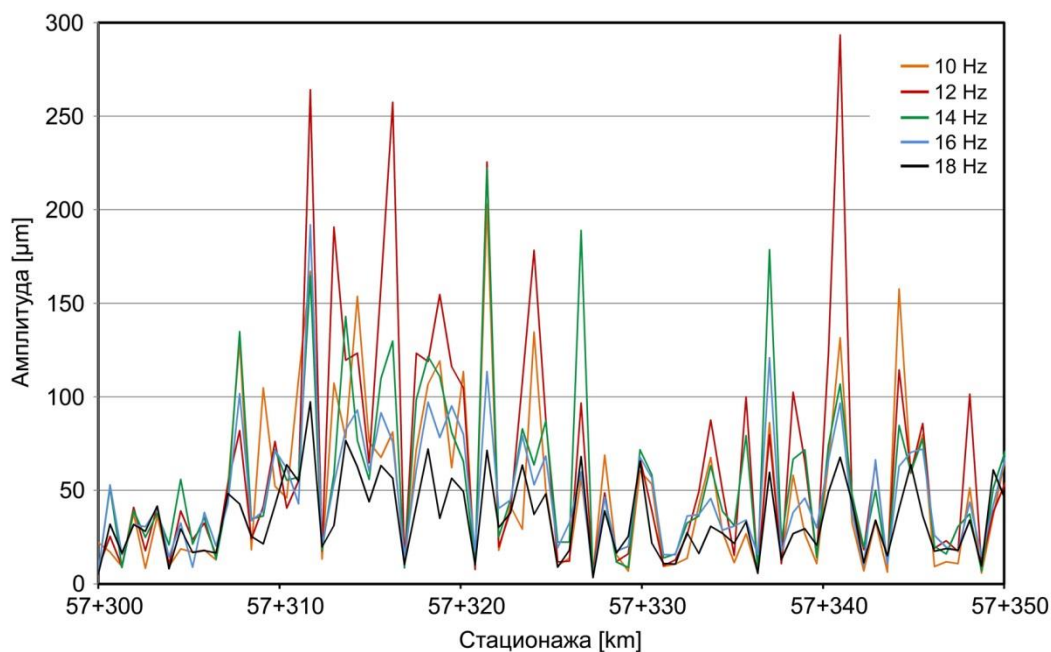


Слика 6.15 Дијаграм просторне расподеле  
зависности амплитуде од фреквенције на Деоници А

У складу са сликом 6.15, може се видети да од стационаже *km* 57+311 до *km* 57+322 колосек нема добре услове ослањања. Поред тога, у околини стационажа *km* 57+308, 57+324, 57+330, 57+334 и 57+344 постоје изоловане зоне на којима прагови немају добре услове ослањања.

Како би се истакле промене спектралних карактеристика дуж Деонице А, на слици 6.16 је приказано пет дијаграма. Ови дијаграми представљају амплитуде вертикалног померања за фреквенције: 10, 12, 14, 16 и 18 Hz. Дакле, ових пет дијаграма представља пет подужних профила површи са слике 6.14 – по један

профил за сваку од наведених фреквенција. Може се уочити да се највеће амплитуде померања јављају при фреквенцији 12 Hz.

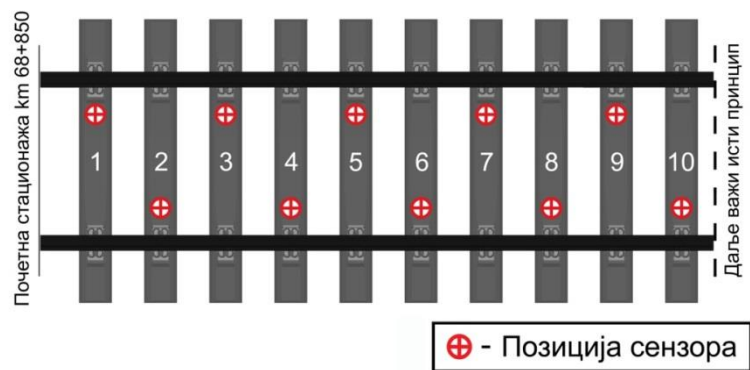


Слика 6.16 Амплитуде померања дуж Деонице А при различитим фреквенцијама

#### 6.2.4 Узорковање и анализа микротремора прагова на Деоници В

На слици 6.17 је дат шематски приказ позиција узорковања микротремора на праговима на Деоници В. Троаксијални сензор је, као и на претходној деоници, постављан на позицију непосредно поред шинског причвршћења са унутрашње стране колосека. На овој деоници узорковање је вршено наизменично са леве и десне стране, како би се утврдиле разлике релативних амплитуда вертикалног померања дуж леве и десне стране прагова у колосеку. Узорковање је вршено на сваком другом прагу, а потом су снимљени подаци филтрирани функцијом *Running Average* са три тачке како би се истакао општи тренд вертикалног померања прагова на овој деоници.



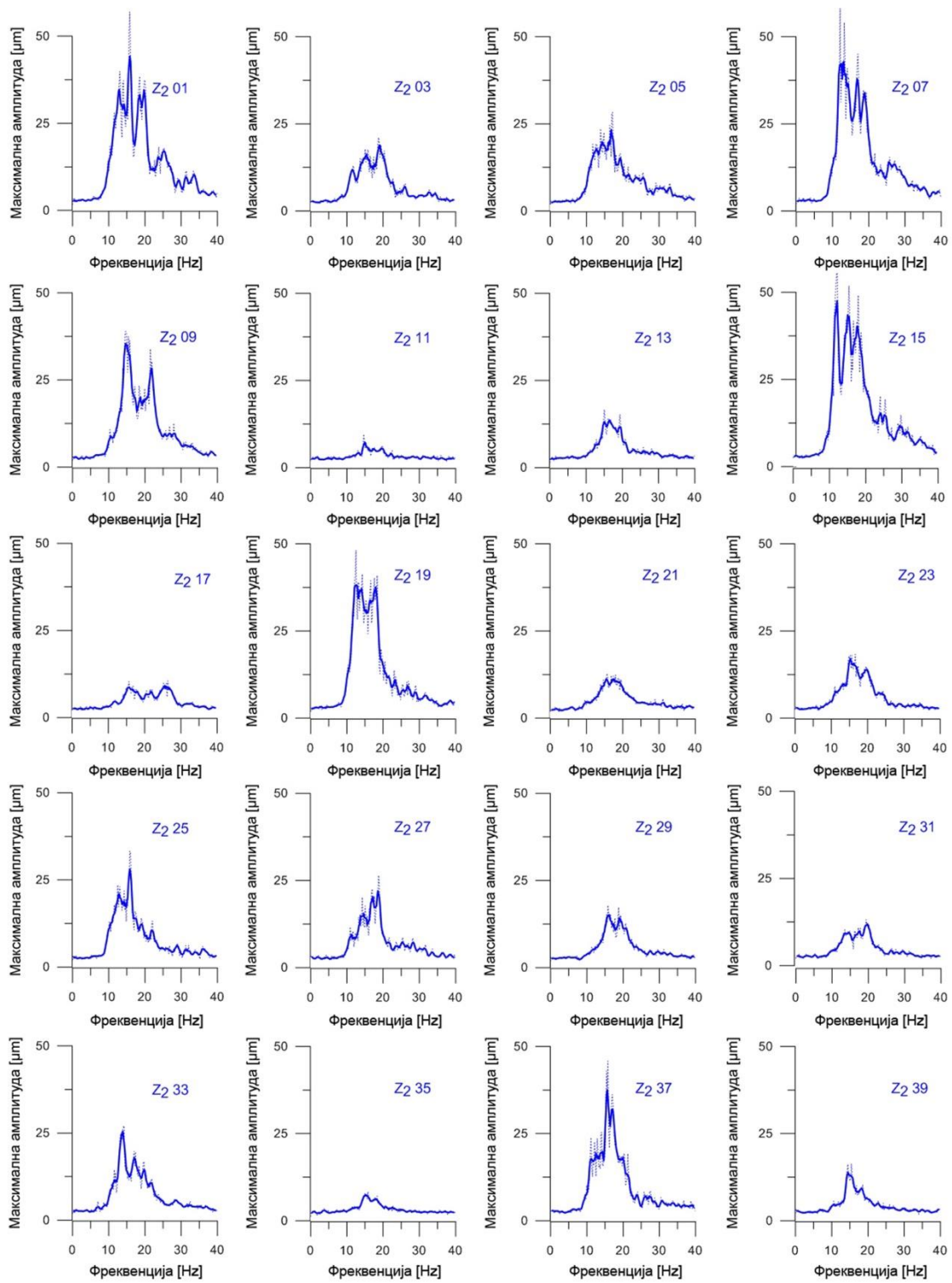


Слика 6.17 Позиције узорковања микротрмора на Деоници В

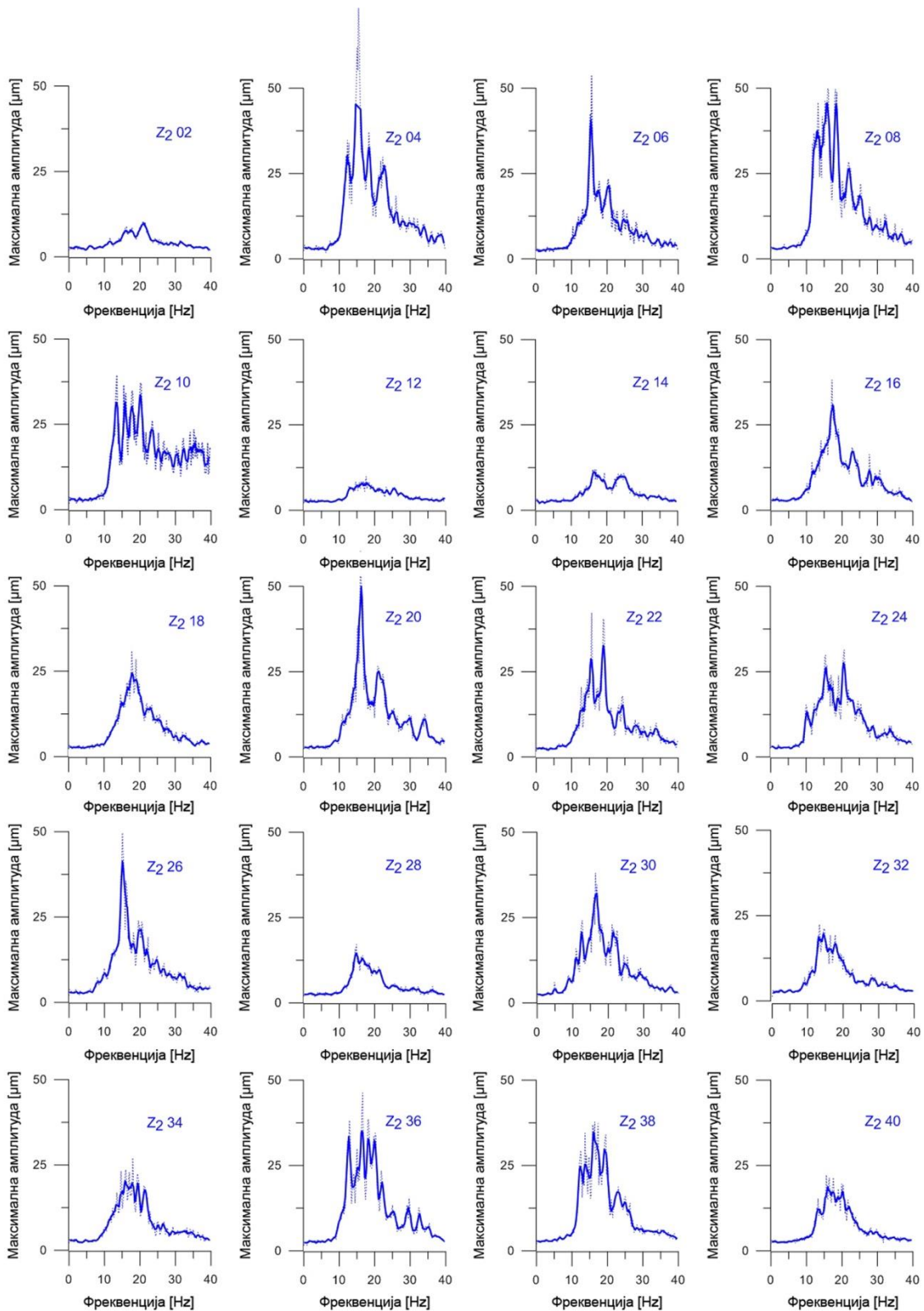
Приликом узорковања  $z$ -оса троаксијалног сензора није била управна на раван колосека, већ се налазила под одређеним углом у односу на нормалу. Код прагова на *Деоници В* овај угао износи  $4,289^\circ$ , што неће имати утицај на стварна вертикална померања.

Након узорковања микротрмора и обраде добијених података, а у складу са три претходно усвојена опсега релативних амплитуда у правцу  $z$ -осе, утврђено је да сви прагови на овој деоници имају добре услове ослањања. Резултат узорковања је потврдио полазну претпоставку да на *Деоници В* не постоји проблем са ослањањем прагова.

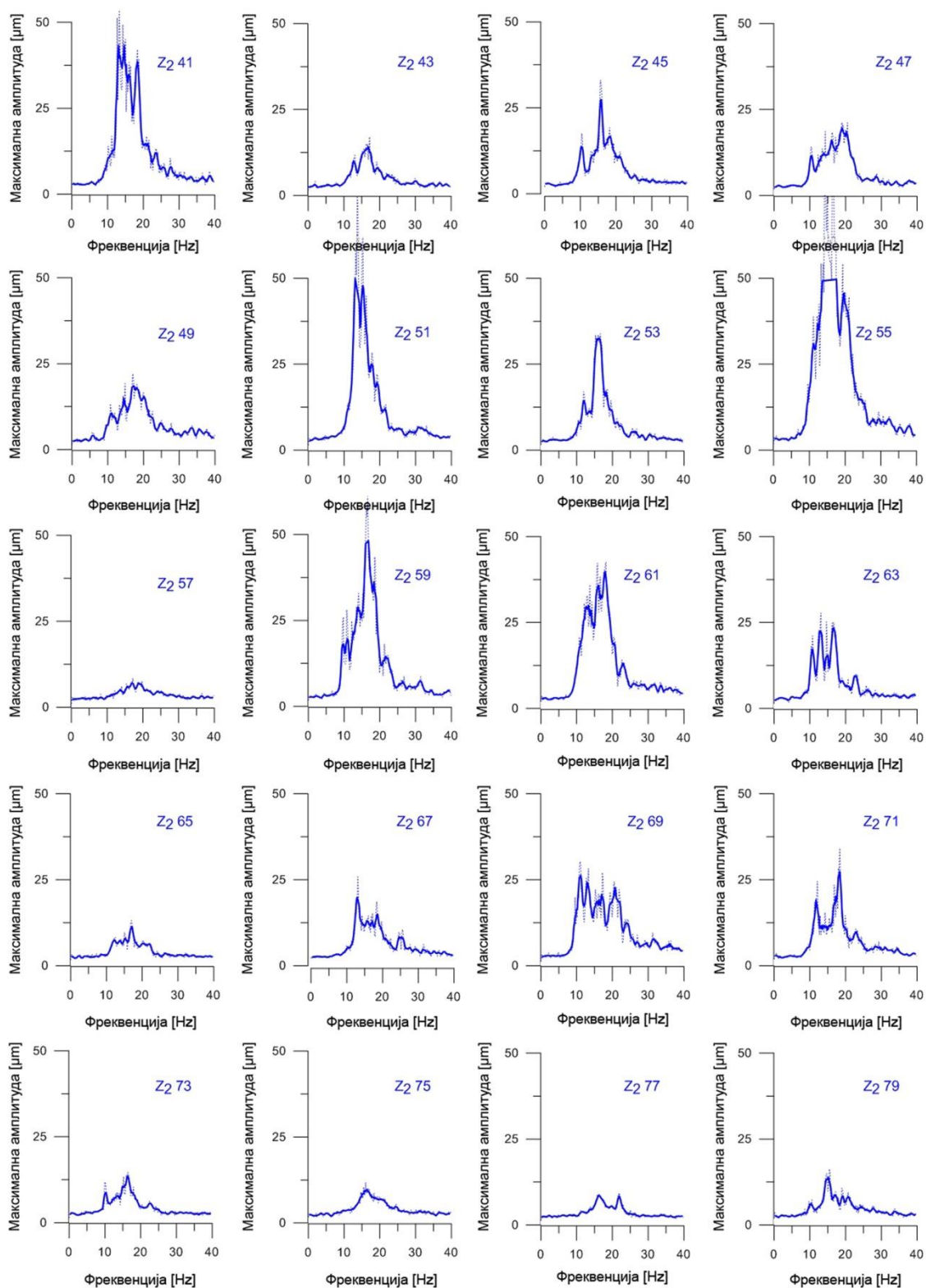
На сликама 6.18-6.21 су приказани дијаграми зависности максималне амплитуде померања у правцу  $z$ -осе од фреквенције за 80 узоркованих микротрмора на праговима. Дијаграми приказују измерене вредности амплитуда (испрекидана линија) и вредности амплитуда добијене филтрирањем података функцијом *Running Average* са 3 тачке (пуна линија).



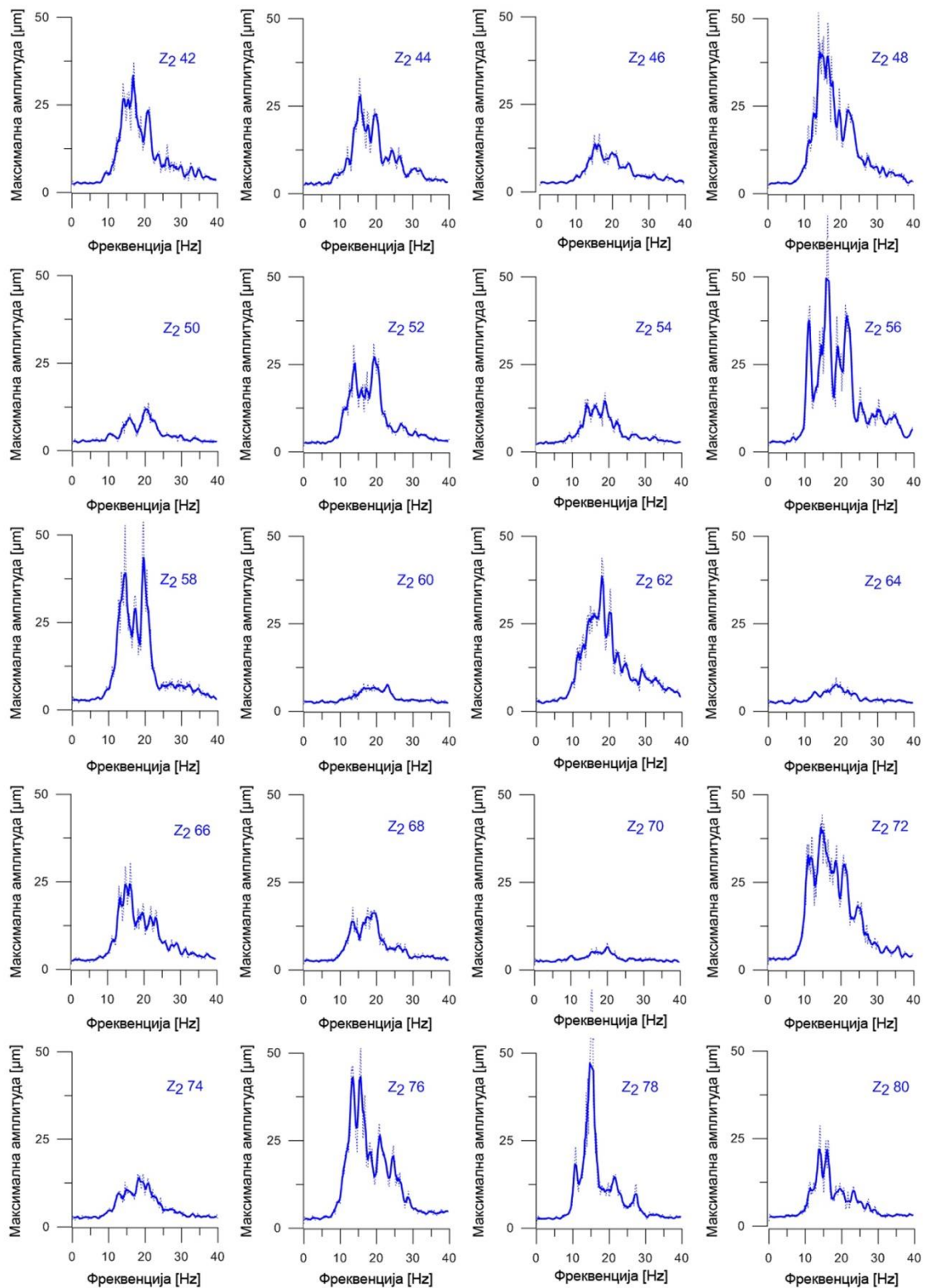
Слика 6.18 Максималне амплитуде померања за прагове 1-39 (лева страна)



Слика 6.19 Максималне амплитуде померања за прагове 2-40 (десна страна)

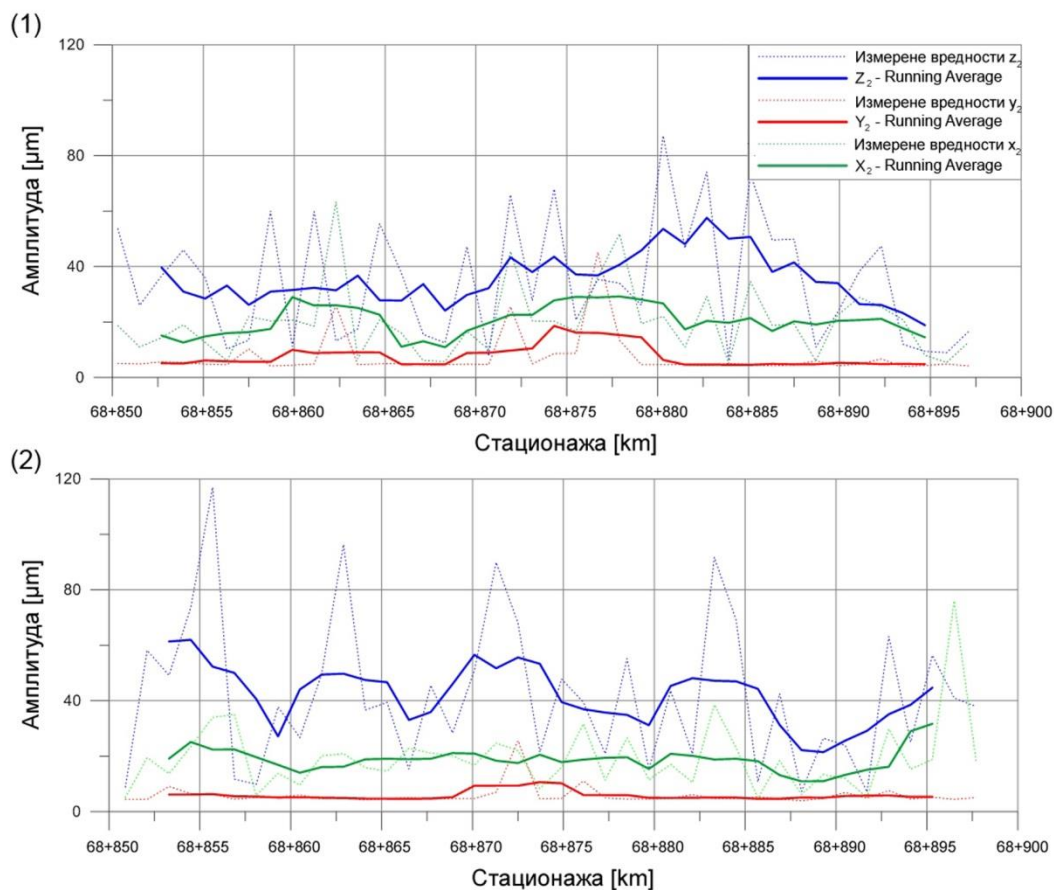


Слика 6.20 Максималне амплитуде померања за прагове 41-79 (лева страна)



Слика 6.21 Максималне амплитуде померања за прагове 42-80 (десна страна)

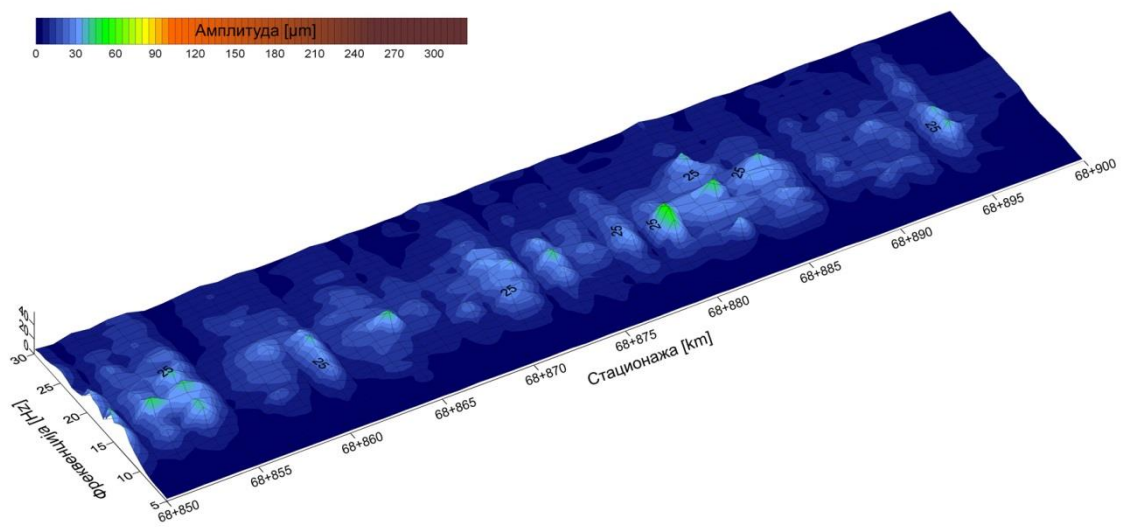
На слици 6.22 су дати дијаграми промене највећих амплитуда по стационажама дуж леве (1) и десне (2) стране колосека. При формирању дијаграма извршено је филтрирање података функцијом Running Average са пет тачака.



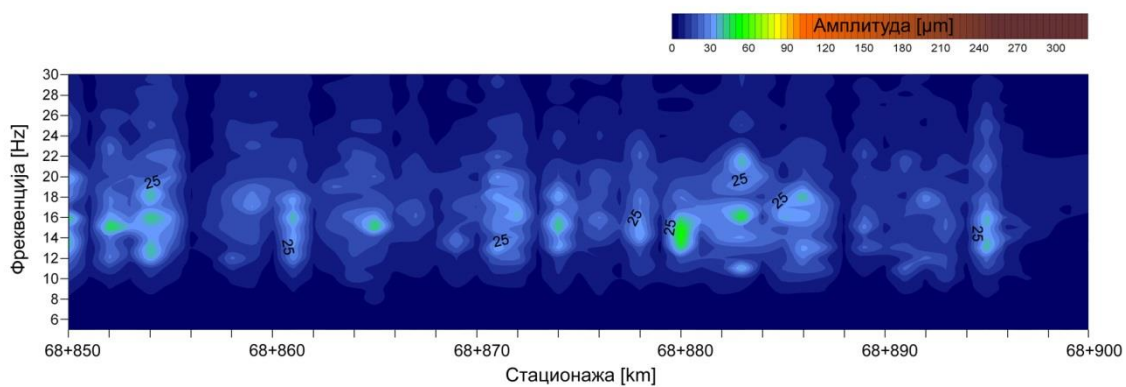
Слика 6.22 Промене највећих амплитуда померања на левој страни (1) и десној страни (2) дуж Деонице В применом филтера Running Average са 5 тачака

Четири прага на слици 6.22-2 имају амплитуде вертикалног померања веће од  $80 \mu m$ , што значајно утиче на облик филтрираног сигнала. Међутим, филтрирани сигнали дуж десне и леве стране Деонице В припадају истом опсегу амплитуда од  $20 \mu m$  до  $60 \mu m$ .

На слици 6.23 је приказана 3D површ која представља промену спектралних карактеристика дуж Деонице В. Потом је на слици 6.24 приказан дијаграм просторне расподеле зависности амплитуде од фреквенције.

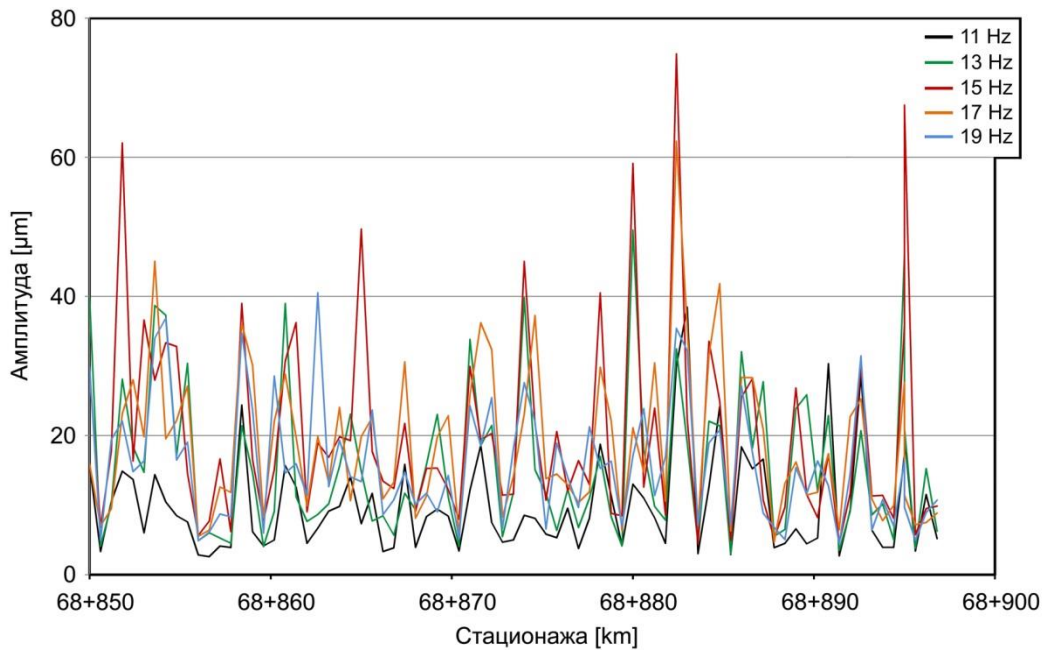


Слика 6.23 Промена спектралних карактеристика дуж Деонице В



Слика 6.24 Дијаграм просторне расподеле зависности амплитуде од фреквенције на деоници В

Највеће вредности амплитуда померања на Деоници В су се јавиле на фреквенцији 15 Hz (слика 6.25), на супрот фреквенцији од 12 Hz на Деоници А. Разлика у вредности фреквенција при којима долази до амплитуда померања је последица различитих маса прагова на две деонице.



Слика 6.25 Амплитуде померања дуж Деонице В при различитим фреквенцијама

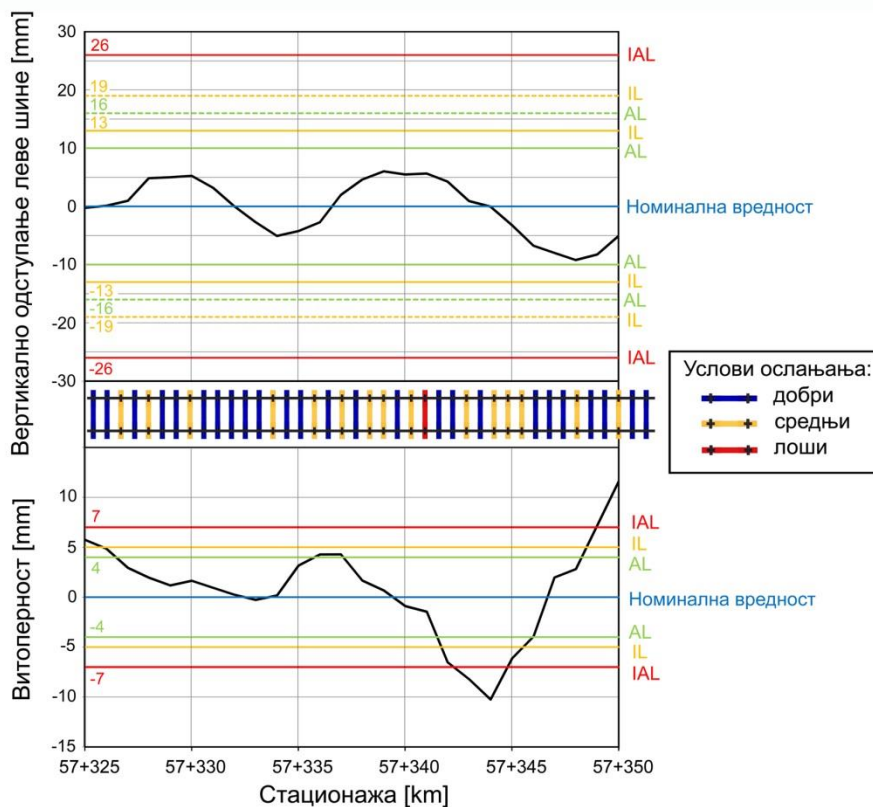
### 6.3 Упоредна анализа услова ослањања прагова и параметара геометрије колосека

Резултати анализе микротремора на *Деоници А* су упоређени са дијаграмима вертикалног одступања и витоперности колосека. Будући да су микротремори на *Деоници А* узорковани на левој страни сваког прага, поређење резултата анализе је извршено за дијаграм вертикалног одступања леве шине. На *Деоници В* није вршено ово поређење обзиром на униформне резултате анализе микротремора и занемарљива вертикална одступања и витоперност.

Упоредни преглед услова ослањања прагова и одговарајућих параметара геометрије дуж *Деонице А* је приказан на сликама 6.26 и 6.27. Слика 6.26 покрива одсек од  $km\ 57+300$  до  $km\ 57+325$  (прагови 1-39), а слика 6.27 покрива одсек од  $km\ 57+325$  до  $km\ 57+350$  (прагови 40-80). У складу са [2], на сликама 6.26 и 6.27 су приказане  $AL$ ,  $IL$  и  $IAL$  вредности вертикалног одступања и витоперности за опсег брзина  $80 < V_{max} \leq 120\ km/h$ .





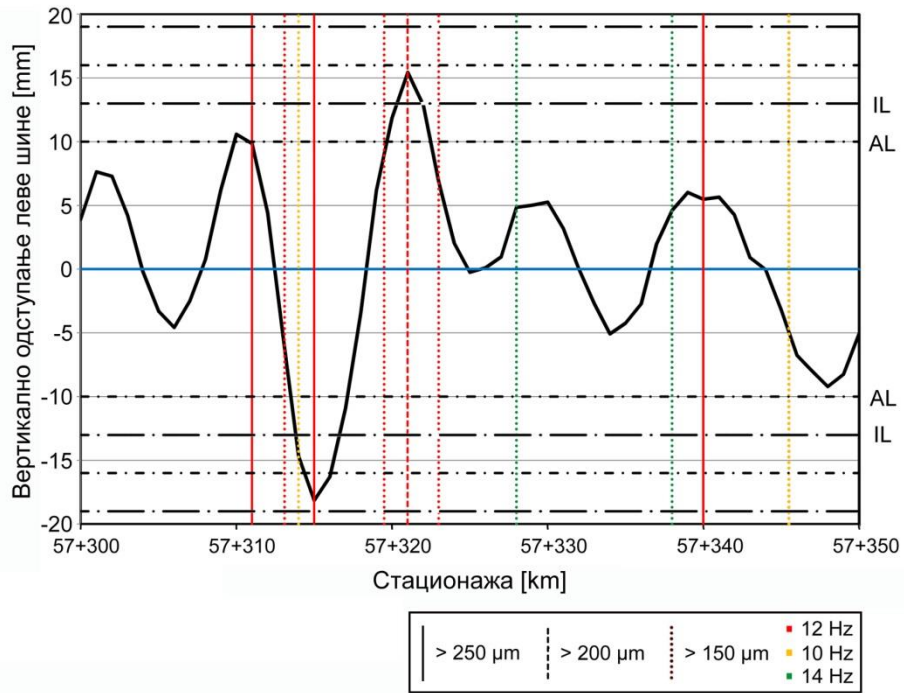


Слика 6.27 Упоредна анализа услова ослањања прагова 40-80 и:  
(горе) вертикалног одступања леве шине, (доле) витоперности колосека

Од стационаже *km* 57+325 до *km* 57+337 постоји неколико прагова са средњим условима ослањања. Одсек са значајним бројем прагова са средњим условима ослањања почиње после стационаже *km* 57+337, што је праћено значајним променама у витоперности колосека и мање израженим вертикалним одступањем леве шине. Да би се ова појава на терену додатно испитала неопходно би било извршити узорковање микротремора на десној страни прагова дуж Деонице А.

Услови ослањања прагова дуж Деонице А, приказани на сликама 6.26 и 6.27, потврђују став да се нерегуларно ослоњени прагови углавном јављају у низу на одређеној дужини колосека, као што је истакнуто у [78].

Слика 6.28 приказује однос између максималних амплитуда померања (слика 6.16) и вертикалног одступања леве шине дуж Деонице А. У складу са сликом 6.28, амплитуде вертикалног померања преко 200  $\mu\text{m}$  се поклапају са максималним вредностима вертикалног одступања.



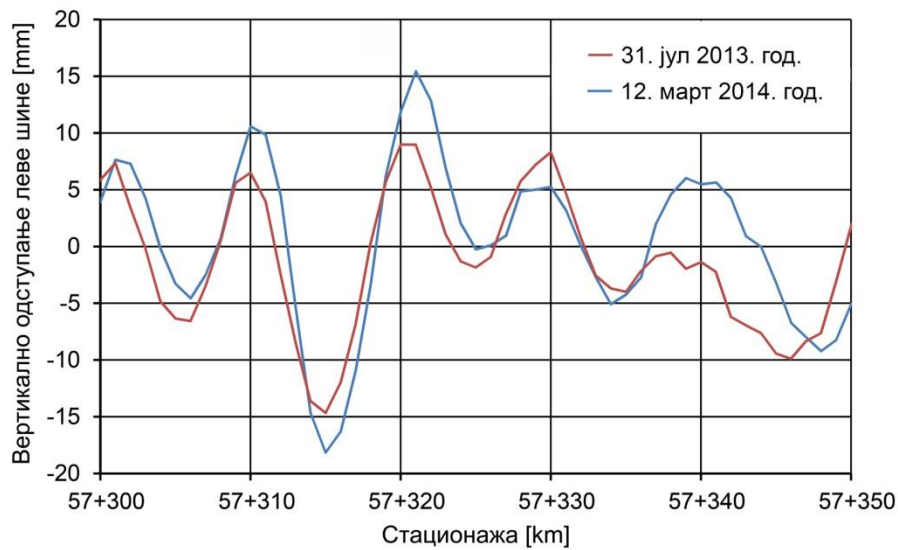
Слика 6.28 Однос између максималних амплитуда вертикалног померања и вертикалног одступања леве шине

## **7 СЕИЗМОМЕТРИЈСКО ТОМОГРАФСКО КАРТИРАЊЕ ДОЊЕГ СТРОЈА**

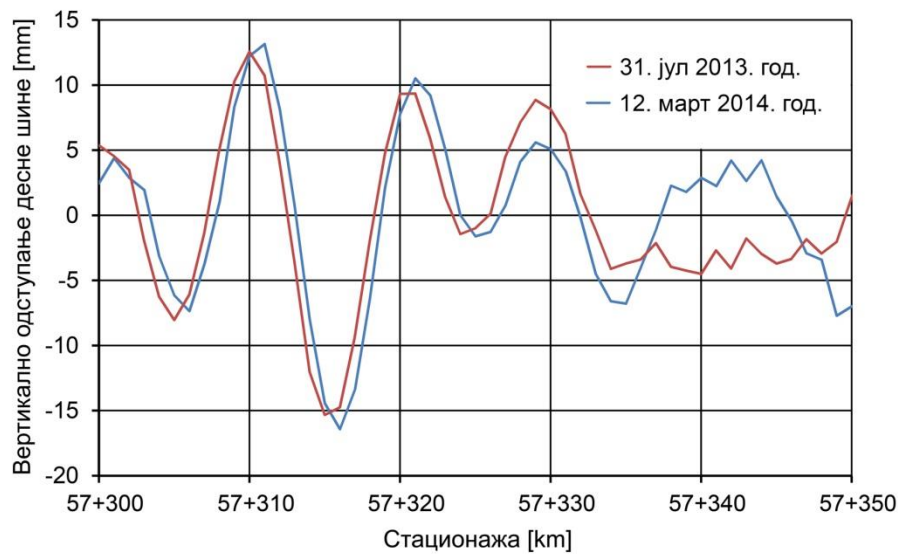
Деонице колосека са лошим квалитетом вертикалне геометрије су последица диференцијалног слегања колосека услед пропадања застора од туцаника и/или накнадног слегања доњег строја [96]. Нагле промене на дијаграмима вертикалног одступања могу да укажу на овакве деонице. Са друге стране, овакве деонице се одликују и брзим степеном пропадања вертикалне геометрије.

### **7.1 Анализа пропадања вертикалне геометрије**

На *Деоници А* (поглавље 6.2.2) су извршене инспекције мерним колима 31. јула 2013. године и 12. марта 2014. године. У међувремену нису вршене корекције геометрије колосека на овој деоници. Упоредном анализом дијаграма вертикалног одступања леве и десне шине, који су снимљени током ове две инспекције, може да се оцени стање вертикалне геометрије колосека на *Деоници А*. Сlike 7.1 и 7.2 приказују дијаграме вертикалног одступања леве и десне шине, снимљене током поменутих инспекција. На њима се могу уочити велика вертикална одступања на појединим деоницама.

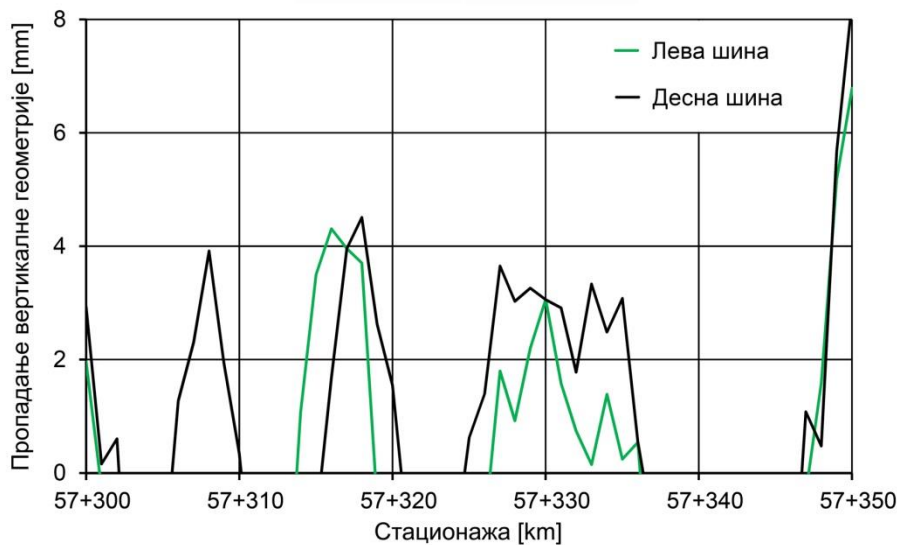


Слика 7.1 Упоредни приказ дијаграма вертикалног одступања леве шине у две узастопне инспекције на Деоници А



Слика 7.2 Упоредни приказ дијаграма вертикалног одступања десне шине у две узастопне инспекције на Деоници А

У циљу једноставније анализе, на слици 7.3 је приказана промена вертикалне геомтрије као разлика вертикалног одступања из два мерења.



Слика 7.3 Пропадање вертикалне геометрије дуж Деонице А

Дакле, у периоду од 31. јула 2013. године до 12. марта 2014. године, највећи ниво промене вертикалне геометрије на Деоници А је износио до око 4 mm. У близини стационаже km 57+350 највећи ниво промене вертикалне геометрије је износио око 8 mm. Треба нагласити да би достизање овако великих вредности било могуће услед изразито великог слегања доњег строја. Међутим, ове вредности могу бити последица снимања геометрије у различитом периоду у току године, као и последица непоклапања стационажа при различитим мерењима [97]. Наиме, у летњим месецима се услед високих спољашњих температура може очекивати мање присуство влаге у доњем строју на критичним деоницама, чиме се смањује његова стишљивост, односно смањују се угиби при оптерећењу. У складу са тим, одсеци са највећим променама вертикалне геометрије представљају места на којима се може очекивати слегање доњег строја. Са друге стране, применом савремених мерних кола грешке неподударања стационажа у различитим мерењима се у највећој мери отклањају применом *GPS (Global Positioning System)* опреме, а може се спровести и анализа и поправка података снимљених мерним колима [97].

У околини стационаже km 57+308 се може очекивати значајније слегање доњег строја у пресеку испод десне шине, док се у близини стационажа km 57+317 и km 57+350, као и на одсеку од km 57+325 до km 57+335 очекују значајна слегања доњег строја на целој ширини планума.

## 7.2 Испитивање стања доњег строја

Испитивање стања доњег строја је извршено применом поступка сеизмометријског томографског картирања, које је засновано на појави да се сеизмо-акустички таласи преносе различитим брзинама кроз средине са различитим физичко-механичким својствима. На местима слегања доњег строја долази до појаве локалних улегнућа планума које испуњава туцаник (тзв. засторни џепови и засторне вреће) и у којима углавном долази до задржавања воде (слика 7.4). Приликом проласка таласа кроз описане деформације на плануму, долази до промене њихове брзине простирања.



Слика 7.4 Последица слегања доњег строја железничке пруге

Мерења на *Деоници А*, која су спроведена за потребе ове Дисертације уз техничку подршку *CNTG д.о.о. Београд*, реализована су у августу 2014. године примеом сеизмометријског аквизиционог система *RAS-24* (приказан на слици 7.5), чији је произвођач компанија *Seistronix (USA)*. Табела 7.1 приказује параметре аквизиције помоћу којих је извршено сеизмометријско томографско картирање.



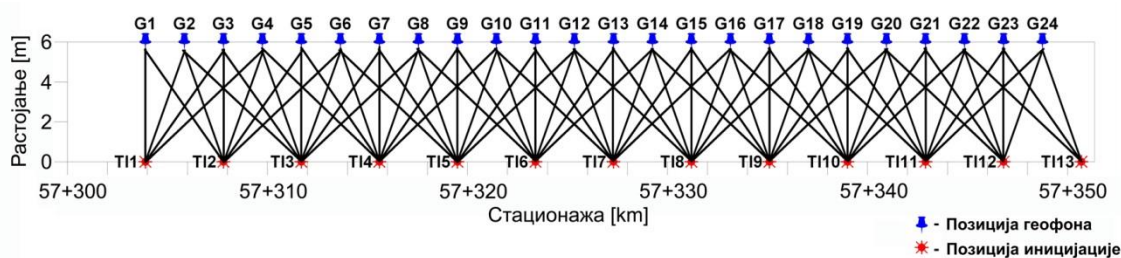
Слика 7.5 Сеизмометријски аквизициони систем RAS-24 [98]

Табела 7.1 Параметри аквизиције за сеизмометријско томографско картирање

Параметар аквизиције	Вредност
Број геофона (канала)	24
Растојање између геофона	1,95 m
Број тачака иницијације (побуде)	13
Извор сеизмо-акустичких таласа	Маљ масе 8 kg
Сопствена фреквенција геофона	14 Hz
Интервал узорковања	125 $\mu$ s
Трајање снимања	100 ms

Дужина геофонског диспозитива била је 44,85 m, док је растојање између тачака иницијације и наспрамних геофона износило 5,6 m. Површина која је тако покривена износила је око 251 m<sup>2</sup>.

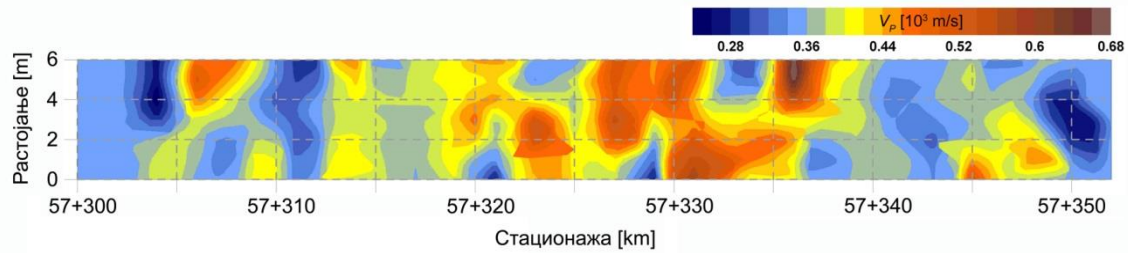
Слика 7.6 приказује шему сеизмометријског прозрачивања планума која је примењена у испитивању *Деонице А*. Тачке иницијације представљају тачке у којима се задаје побуда (ударац маљем). Таласни фронт са сваке од тачака иницијације региструју сви геофони. Међутим, улазни угао таласних зракова се повећава са удаљавањем од тачке иницијације, па на удаљенијим геофонима долази до појаве различитих сметњи. Да би се отклонили ови ефекти, у процесу обраде података коришћени су подаци са седам сензора – једног наспрамног у односу на тачку иницијације и по три са леве и десне (слика 7.6).



Слика 7.6 Шема сеизмометријског прозрачивања планума на Деоници А

Обрада и моделовање података добијених поступком сеизмометријског томографског картирања, изведене су програмским пакетима *RAS-24 System Software* и *GeoTomCG 8.5*. Моделовањем обрађених података добија се карта расподеле брзина простирања таласа између геофона и тачака иницијације (слика 7.7).





Слика 7.7 Карта расподеле брзина простирања таласа кроз планум на Деоници А

Упоредном анализом слика 7.3 и 7.7 потврђено је:

- слегање доњег строја са десне стране у близини стационаже *km 57+308*,
- слегања доњег строја на целој ширини планума у близини стационажа *km 57+317* и *km 57+350*, као и на одсеку од *km 57+325* до *km 57+335*.

У близини стационаже *km 57+306* може се уочити постојање промена у брзини простирања таласа на левој страни планума. Међутим, ова појава може да буде последица слабијег прозрачивања планума, односно мањег броја таласних зрака у попречним пресецима код почетне и крајње тачке иницијације (слика 7.6).

## 8 ЗАКЉУЧАК И СМЕРНИЦЕ ЗА ДАЉА ИСТРАЖИВАЊА

Стварање јединственог европског железничког система, захтева интероперабилност и компатибилност железничке инфраструктуре. На тај начин би се постигло стање јединства и повезаности, као и функционално усклађивање међусобно условљених делова сложеног железничког система, укључујући железничку инфраструктуру. Србија је део европске транспортне мреже, кроз чију територију пролазе два европска саобраћајна коридора, од којих је један железнички коридор X. Неопходност интеграције железничке мреже Србије у европску железничку мрежу подразумева унапређење нивоа квалитета железничке инфраструктуре у складу са европским техничким условима.

Примена савремене европске саобраћајне политике подразумева искоришћавање предности које железнички транспорт пружа у поређењу са другим видовима. Кроз време се очекује повећање саобраћајних и осовинских оптерећења, као и брзина возова у условима високе расположивости железничког система. Једна од последица очекиваног раста обима железничког саобраћаја је повећање потребних финансијских средстава и смањење неопходног времена за активности одржавања, како би се осигурала безбедност и удобност возње, у условима максималног искоришћења животног века свих елемената конструкције горњег и доњег строја железничке пруге.

Познато је да услед акумулираног саобраћајног оптерећења долази до неизбежног пропадања геометрије колосека. У складу са тим, неопходно је дефинисати политику и стратегију одржавања колосека, са циљем да се континуално прати стање и предвиђа тренд пропадања геометрије колосека како би се утврдили и спроводили краткорочни и дугорочни планови оптималног одржавања. У том смислу, неопходан је јединствен приступ у вредновању квалитета геометрије колосека. На нивоу Европске Уније још увек је отворено питање вредновања квалитета геометрије колосека и постоји широк простор за даља истраживања у том смеру. Тема Докторске дисертације је истраживање примене фракталне анализе података добијених снимањем геометрије колосека у области вредновања квалитета геометрије, планирања активности одржавања и оцене узрока пропадања геометрије колосека. Истраживање је усмерено на пропадање вертикалне геометрије. Циљ Дисертације је давање дела одговора на отворена питања вредновања квалитета геометрије колосека кроз предлагање оригиналног индекса квалитета геометрије колосека (*TQI – Track Quality Index*) који је заснован на фракталној димензији.

У Дисертацији се полази од става да је инспекција геометрије колосека заснована на праћењу пет главних параметара геометрије колосека, дефинисаних стандардом *EN 13848-1*. Европским стандардима, који су прихваћени као српски стандарди, експлицитно су дефинисане толеранције за сваки параметар појединачно само на нивоу граница хитне интервенције (*IAL – Immediate Action Limit*). Прекорачењем ове граничне вредности захтева се предузимање мера у циљу смањења ризика од исклизнућа на прихватљив ниво, што се постиже затварањем пруге за саобраћај, увођењем споре возње или неодложном поправком геометрије колосека. Управљачу инфраструктуре је препуштен широк простор за дефинисање толеранција на нивоу граница интервенције (*IL – Intervention Limit*) и граница упозорења (*AL – Alert Limit*) узимајући у обзир карактеристике мреже, возног парка и стратегије одржавања, уз јасну законску обавезу у погледу одржавања и унапређивања безбедности према европским захтевима [99-101].

На нивоу европске железничке инфраструктуре није прописан јединствен метод помоћу којег ће одступања по појединачним параметрима геометрије

колосека бити тумачена као индекс квалитета геометрије колосека. За сада, различите железничке управе користе различите показатеље квалитета геометрије колосека. Стандардна девијација одступања параметара је један од најчешће коришћених *TQI* показатеља геометрије колосека. Она описује расподелу сигнала мерених параметара на деоници колосека у односу на средњу вредност сигнала на тој деоници. Поред стандардне девијације, у употреби су и метода анализе убрзања материјалне тачке (*PMA – Point Mass Acceleration*), метода анализе одзива возила (*VRA – Vehicle Response Analysis*) и анализа густине спектра снаге (*PSD – Power Spectral Density*).

У оквиру Дисертације је истраживана примена фракталне димензије као показатеља квалитета геометрије колосека. Примена фракталне анализе у овој области је идеја која је започета *Hyslip*-овим истраживањима 2002. године. *Hyslip* је због једноставности примене и брзине спровођења анализе (тадашње хардверско ограничење) применио измењену методу корачања за фракталну анализу параметра вертикалног одступања. Недостаци ове методе су већа одступања фракталних димензија које се добијају као резултат анализе, као и стварање привида о фракталној вишедимензионалности вертикалног одступања као једног од параметара геометрије колосека. У закључку својих истраживања, *Hyslip* упућује на неопходност теренских испитивања како би се доказала оправданост коришћења *TQI* показатеља заснованог на фракталној димензији. У складу са таквим закључком, теренска испитивања су спроведена на две референтне деонице пруге Београд-Врбница за потребе ове Дисертације, а резултати мерења и њихова анализа су приказани у поглављима 6 и 7.

За разлику од претходних истраживања, у којима је примењивана једна метода фракталне анализе на једном параметру геометрије колосека, у овој Дисертацији је на основу истраживања расположивих метода за фракталну анализу издвојен скуп метода погодних за анализу параметара геометрије колосека (бокс метода, метода корачања, измењена метода корачања и метода прелазака). Након тестирања метода из овог скупа, предност је дата бокс методи због мале дисперзије резултата добијених тестирањем параметра витоперности колосека на две деонице пруге. С обзиром да је у литератури бокс метода оцењена као захтевна за програмирање [47,48], у овој Дисертацији су најпре утврђени и

решени практични и програмерски проблеми везани за њену примену, након чега је развијен оригиналан софтверски алат коришћењем програмског језика *AutoLISP*. Овај програмски језик омогућује једноставно графичко представљање резултата анализе у *CAD* окружењу, што је искоришћено за потребе визуелне провере добијених резултата. Применом развијеног софтверског алата извршена је фрактална анализа параметара геометрије колосека на деоници Лајковац-Ваљево железничке пруге Београд-Врбница. Развијени софтверски алат омогућује аутоматско одређивање фракталне димензије, уз искључивање субјективности корисника. За коришћење алата корисник не мора да располаже претходним знањима из области фракталне анализе, што омогућује његову широку примену.

У Дисертацији је предложено да се пре примене фракталне анализе изврши нормирање параметара геометрије колосека. Значај оваквог приступа се најлакше објашњава на примеру параметра ширине колосека, с обзиром на то да једнаке вредности проширења и сужења колосека имају драстично различит утицај на безбедност саобраћаја. Неопходно је истаћи да је однос толеранција за проширење и сужење у опсегу од 3 до 6 пута у зависности од дозвољене брзине. Уколико би се фрактална анализа извршила без претходног нормирања, фрактална димензија не би репрезентовала квалитет геометрије колосека (слично као и стандардна девијација). Такође, нормирањем се даје основа за међусобно поређење фракталних димензија различитих параметара. Ово је од посебног значаја када се анализира сложен једновремени утицај сужења, надвишења и витоперности на посматраној деоници.

Фракталне димензије параметара геометрије колосека добијене у анализи су послужиле као основ за вредновање квалитета колосека. У Дисертацији су предложене две методе вредновања у складу са утврђеним распонима вредности фракталне димензије:

- прва метода подразумева одређивање средње вредности фракталне димензије за све параметре геометрије колосека, на основу које се одређује *TQI* додељивањем оцене од 1 (изразито лош) до 5 (одличан);
- друга метода подразумева додељивање оцена од 1 (изразито лош) до 5 (одличан) за сваки параметар геометрије колосека на основу његове фракталне димензије, након чега се *TQI* одређује као средња оцена за све параметре. Применом ове

методе се добија бољи визуелни увид у квалитет геометрије дуж анализиране деонице.

У нумеричким примерима који су приказани у Дисертацији дат је једнак утицај на безбедност за сваки параметар геометрије колосека. Оставља се могућност да се једноставним увођењем тежинских коефицијената у складу са појединачним утицајем параметра унесе преференција Управљача инфраструктуре (према карактеристикама возног парка, трасе, захтеване удобности вожње и слично). На основу анализе квалитета геометрије колосека на деоници Лајковац-Ваљево, утврђена је Деоница А са најмањом просечном оценом (најлошијим квалитетом) и Деоница В са највећом просечном оценом (најбољим квалитетом).

Предложен  $TQI$  показатељ заснован на фракталној димензији може да се користи на нивоу анализе неопходне за средњерочно одржавање колосека и планирање обнове, као и на нивоу анализе неопходне за доношење стратешких одлука за одржавање железничке мреже. Са друге стране, оцена индивидуалних одступања параметара геометрије колосека и даље је неопходна на нивоу детаљне анализе за доношење одлука за локалне захтеве, кратке периоде одржавања колосека и ограничења одвијања саобраћаја.

Теренска испитивања спроведена за потребе ове Дисертације су обухватала мерење микротремора прагова и сеизмометријско томографско картирање доњег строја. Анализа резултата испитивања је доказала да на *Деоници А* постоји узајамна веза између параметара вертикалне геометрије колосека и нерегуларно ослоњених прагова са једне стране, односно стања доњег и горњег строја са друге стране.

Наставак истраживања треба усмерити на одређивање збирног утицаја параметара геометрије колосека на удобност и безбедност вожње мерењима у лабораторијским условима на пробници и на терену, са циљем ближег одређивања тежинских коефицијената неопходних за срачунавање комбинованог  $TQI$  показатеља заснованог на више-параметарској фракталној анализи.

# Литература

- [1] <http://www.iss.rs>
- [2] CEN: *EN 13848-1 – Railway applications – Track – Track geometry quality – Part 1: Characterisation of track geometry*. European Standard, 2008, Brussels, Belgium, p. 25.
- [3] CEN: *EN 13848-2 – Railway applications-Track-Track geometry quality-Part 2: Measuring systems - Track recording vehicles*. European Standard, 2006, Brussels, Belgium, p. 35.
- [4] CEN: *EN 13848-3 – Railway applications - Track - Track geometry quality - Part 3: Measuring systems - Track construction and maintenance machines*. European Standard, 2009, Brussels, Belgium, p. 25.
- [5] CEN: *EN 13848-4 – Railway applications - Track - Track geometry quality - Part 4: Measuring systems - Manual and lightweight devices*. European Standard, 2011, Brussels, Belgium, p. 29.
- [6] CEN: *EN 13848-5 – Railway applications - Track - Track geometry quality - Part 5: Geometric quality levels - Plain line*. European Standard, 2010, Brussels, Belgium, p. 22.
- [7] CEN: *EN 13848-6 – Railway applications - Track - Track geometry quality - Part 6: Characterisation of track geometry quality*. European Standard, 2014, Brussels, Belgium, p. 28.

- [8] CEN: *EN 14363 – Railway applications - Testing for the acceptance of running characteristics of railway vehicles - Testing of running behaviour and stationary tests*. European Standard, 2005, Brussels, Belgium, p. 118.
- [9] UIC: *UIC 518 - Testing and approval of railway vehicles from the point of view of their dynamic behaviour - Safety - Track fatigue - Ride quality*. 2009, Paris, France, p. 129.
- [10] Z. Popović and L. Lazarević: *Defining the cause and mechanism of track widening phenomenon on reconstructed sections Trebaljevo-Kolašin and Mijatovo kolo-Mojkovac on rail line Vrbnica-Bar*. Case study, CLF Bologna, 2013, p. 26.
- [11] Z. Popović, L. Lazarević and N. Vatin: *Analysis of track gauge widening in curves with small radius*. Applied Mechanics and Materials, 2015, Vol. 725-726, pp. 967-973.
- [12] Z. Popović, L. Lazarević and L. Puzavac: *The potential for passenger rail transportation in the Republic of Serbia*. Proceedings of the First International Conference on Railway Technology: Research, Development and Maintenance (Ed. Joao Pombo): Las Palmas de Gran Canaria, Spain, April 18-20, 2012, paper 168, pp. 1-13.
- [13] P. Xu, Q. Sun, R. Liu and F. Wang: *A short-range prediction model for track quality index*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit, 2011, Vol. 225, No. 3, pp. 277-285.
- [14] M. El-Sibaie and Y.J. Zhang: *Objective track quality indices*. Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board, 2004, Vol. 1863, pp. 81-87.
- [15] Y.J. Zhang, M. El-Sibaie and S. Lee: *FRA track quality indices and distribution characteristics*. Proceedings of Annual Conference AREMA 2004: Nashville, USA, September 19-22, 2004, pp. 1-26.
- [16] J. Sadeghi: *Development of railway track geometry indexes based on statistical distribution of geometry data*. Journal of Transportation Engineering, 2010, Vol. 136, No. 8, pp. 693-700.
- [17] M. Molodova, Z. Li, A. Núñez and R. Dollevoet: *Parametric study of axle box acceleration at squats*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit, 2014, Vol. 229, No. 8, pp. 841-851.



- [18] M. Bižić: *Istraživanje uticajnih parametara u interakciji točak-šina na stabilnost kretanja železničkih vozila*. Doktorska disertacija, Fakultet za mašinstvo i građevinarstvo u Kraljevu, Univerzitet u Kragujevcu, 2015, p. 241.
- [19] M. Barnsley: *Fractals everywhere*. San Diego, USA: Academic Press, 1988, p. 531.
- [20] B. Mandelbrot: *The fractal geometry of nature*. New York, USA: W.H. Freeman and Company, 1983, p. 468.
- [21] J. Thim: *Continuous nowhere differentiable functions*. Master thesis, Lulea University of Technology, Sweden, 2003, p. 98.
- [22] K. Falconer: *Fractal geometry - Mathematical foundations and applications*. Chichester, England: John Wiley & Sons, Ltd, 2003, p. 337.
- [23] S. Spasić: *Chaos theory and biosignal fractal analysis*. PhD thesis, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Serbia, 2007, p. 174.
- [24] G. Elert: *The chaos hypertextbook*. <http://hypertextbook.com/chaos/>
- [25] B. Dubuc, J.F. Quiniou, C. Roques-Carmes, C. Tricot, S.W. Zucker: *Evaluating the fractal dimension of profiles*. Physical Review A, 1989, Vol. 39, No. 3, pp. 1500-1513.
- [26] D. Stankov: *Fraktalna interpolacija nekih funkcija*. Magistarski rad, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Srbija, 1995, p. 66.
- [27] L. Liebovitch and T. Toth: *A fast algorithm to determine fractal dimensions by box counting*. Physics Letters A, 1989, Vol. 141, No. 8-9, pp. 386-390.
- [28] [https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot\\_set](https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set)
- [29] G. Edgar: *Measure, topology, and fractal geometry*. New York, USA: Springer, 2008, p. 268.
- [30] O. Malcai, D.A. Lidar, O. Biham and D. Avnir: *Scaling range and cutoffs in empirical fractals*, Physical Review E, 1997, Vol. 56, No. 3, pp. 2817-2828.
- [31] G. Chan and A.T.A. Wood: *Estimation of fractal dimension for a class of non-Gaussian stationary processes and fields*. The Annals of Statistics, 2004, Vol. 32, No. 3, pp. 1222-1260.
- [32] X. Yan and X.G. Su: *Linear regression analysis – Theory and computing*. Singapore: World Scientific Publishing Co, 2009, p. 349.

- [33] P.A. Burrough: *Fractal dimension of landscapes and other environmental data*. Nature, 1981, Vol. 294, pp. 240-242.
- [34] [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_fractals\\_by\\_Hausdorff\\_dimension](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension)
- [35] J. Lévy-Véhel and E. Lutton: *Fractals in engineering - New trends in theory and applications*. Germany: Springer-Verlag, 2005, p. 289.
- [36] L. Benguigui and M. Daoud: *Is the suburban railway system a fractal*. Geographical Analysis, 1991, Vol. 23, No. 4, pp. 362-368.
- [37] L. Benguigui: *Some speculations on fractals and railway networks*. Physica A, 1992, Vol. 191, No. 1-4, pp. 75-78.
- [38] M.L. de Keersmaecker, P. Frankhauser and I. Thomas: *Using fractal dimensions for characterizing intra-urban diversity: The example of Brussels*. Geographical Analysis, 2003, Vol. 35, No. 4, pp. 310–328.
- [39] Z. Sun, P. Jia, H. Kato and Y. Hayashi: *Distributive continuous fractal analysis for urban transportation network*. Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies, 2007, Vol. 7, pp. 1519-1531.
- [40] J. Li and Y. Huang: *Short-term traffic flow forecasting of urban rail transit based on fractal theory*. Proceedings of the Third International Conference on Transportation Engineering ICTE 2011 (Eds. Qiyuan Peng, Kelvin C.P. Wang, Yanjun Qiu, Yun Pu and Bin Shuai): Chengdu, China, July 23-25, 2011, pp. 192-197.
- [41] J.P. Hyslip and L.E. Vallejo: *Fractal analysis of the roughness and size distribution of granular materials*. Engineering Geology, 1997, Vol. 48, No. 3-4, pp. 231-244.
- [42] C.L. Ho, R.S. Lambert and J.P. Hyslip: *Fractal analysis of fouled rail ballast*. The Transportation Research Board Annual Meeting, 2015, Washington, USA, Paper No. 3403.
- [43] J.P. Hyslip: *Fractal analysis of geometry data for railway track condition assessment*. PhD Thesis, University of Massachusetts, Amherst, USA, 2002, p. 175.
- [44] J.P. Hyslip: *Fractal analysis of track geometry data*. Transportation Research Record, 2002, No. 1785, pp. 50-57.
- [45] J.P. Hyslip, M.J. Trosino and E.T. Selig: *Fractal analysis of track geometry data*. Proceedings of Annual Conference AREMA, 2002, Paper 22.

- [46] W. Ju and N.S.N. Lam: *An improved algorithm for computing local fractal dimension using the triangular prism method*. Computers & Geosciences, 2009, Vol. 35, No. 6, pp. 1224-1233.
- [47] B. Klinkenberg: *A review of methods used to determine the fractal dimension of linear features*. Mathematical Geology, 1994, Vol. 26, No. 1, pp. 23-46.
- [48] J. Lia, Q. Dub and C. Suna: *An improved box-counting method for image fractal dimension estimation*. Pattern Recognition, 2009, Vol. 42, No. 11, pp. 2460-2469.
- [49] R. Lopes and N. Betrouni: *Fractal and multifractal analysis: A review*. Medical Image Analysis, 2009, Vol. 13, No. 4, pp. 634-649.
- [50] T. Gneiting, H. Ševčíková and D.B. Percival: *Estimators of fractal dimension: Assessing the roughness of time series and spatial data*. Statistical Science, 2012, Vol. 27, No. 2, pp. 247-277.
- [51] T. Higuchi: *Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory*. Physica D, 1988, Vol. 31, No.2, pp. 277-283.
- [52] T. Higuchi: *Relationship between the fractal dimension and the power law index for a time series: A numerical investigation*. Physica D, 1990, Vol. 46, No.2, pp. 254-264.
- [53] S. Spasić: *On 2D generalization of Higuchi's fractal dimension*. Chaos, Solitons & Fractals, 2014, Vol. 69, pp. 179-187.
- [54] S. Hasegawaa, H. Anadab and S. Kanagawa: *Pursuit fractal analysis of time-series data*. arXiv:1310.3564, 2013, p. 5.
- [55] A. Wong, L. Wu, P.B. Gibbons and C. Faloutsos: *Fast estimation of fractal dimension and correlation integral on stream data*. Information Processing Letters, 2005, Vol. 93, No. 2, pp. 91-97.
- [56] A. Annadhasan: *Methods of fractal dimension computation*. International Journal of Computer Science and Information Technology & Security, 2012, Vol. 2, No. 1, pp. 166-169.
- [57] S. Lovejoy, D. Schertzer and A.A. Tsonis: *Functional box-counting and multiple elliptical dimensions in rain*. Science, 1987, Vol. 235, pp. 1036-1038.
- [58] H.J. Catrakis: *The multiscale-minima meshless (M3) method: A novel approach to level crossings and generalized fractals with applications to turbulent interfaces*. Journal of Turbulence, 2008, Vol. 9, No. 22, pp. 1-25.

- [59] <https://goo.gl/jBDP9F>
- [60] R. Uthayakumar and P. Paramanathan: Fractal dimension of irregular digitalized curves by divider method. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, Vol. 189, No. 1, pp. 68–71.
- [61] R. Andrieu: *Estimating fractal dimension with the divider method in geomorphology*. *Geomorphology*, 1992, Vol. 5, No. 1-2, pp. 131-141.
- [62] N.N. Clark: *Three techniques for implementing digital fractal analysis of particle shape*. *Powder Technology*, 1986, Vol. 46, No. 1, pp. 45-52.
- [63] B.L. Cox and J.S.Y. Wang: *Fractal surfaces: Measurement and applications in the earth sciences*. *Fractals*, 1993, Vol. 1, No. 1, pp. 87-115.
- [64] A. Feuerverger, P. Hall and A.T.A. Wood: *Estimation of fractal index and fractal dimension of a Gaussian process by counting the number of level crossings*. *Journal of Time Series Analysis*, 1994, Vol. 15, No. 6, pp. 587-606.
- [65] K.I. Hopcraft, E. Jakeman and K.D. Ridley: *The dynamics of discrete populations and series of events*. UK, London: Taylor & Francis Group, CRC Press, 2014, p. 220.
- [66] H.J. Catrakis: *Distribution of scales in turbulence*. *Physical Review E*, 2000, Vol. 62, No. 1, pp. 564-578.
- [67] P.J. Edwards and R.B. Hurst: *Level-crossing statistics of the horizontal wind speed in the planetary surface boundary layer*. *Chaos*, 2001, Vol. 11, No. 3, pp. 611-618.
- [68] S. Kaewunruen and A.M. Remennikov: *Investigation of free vibrations of voided concrete sleepers in railway track system*. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 2007, Vol. 221, No. 4, pp. 495-507.
- [69] J. Sadeghi and H. Shoja: *Impact of superelevation deficiencies on the loading pattern of railway sleepers*. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 2012, Vol. 227, No. 3, pp. 286-295.
- [70] J. Sadeghi and A. Babae: *Structural optimization of B70 railway prestressed concrete sleepers*. *Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B, Engineering*, 2006, Vol. 30, No. 4, pp. 461-473.
- [71] J. Sadeghi: *Field investigation on vibration behavior of railway track systems*. *International Journal of Civil Engineering*, 2010, Vol. 8, No. 3, pp. 232-241.

- [72] J. Sadeghi and P. Barati: *Evaluation of conventional methods in analysis and design of railway track system*. International Journal of Civil Engineering, 2010, Vol. 8, No. 1, pp. 44-56.
- [73] M.T. McHenry: *Pressure measurement at the ballast-tie interface of railroad track using matrix based tactile surface sensors*. Master Thesis, University of Kentucky, 2013, p. 106.
- [74] E. Rezaei: *Vibrations of partly supported concrete railway sleeper*. Degree Project, Linköping University, 2010, p. 80.
- [75] E. Rezaei and T. Dahlberg: *Dynamic behavior of an in situ partially supported concrete railway sleeper*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit, 2011, Vol. 225, No. 5, pp. 501-508.
- [76] F.Y. Cheng: *Matrix analysis of structural dynamics - Applications and earthquake engineering*. New York, USA: Marcel Dekker Inc, 2000, p. 997.
- [77] S. Augustin, G. Gudehus, G. Huber and A. Schunemann: *Numerical model and laboratory tests on settlement of ballast track*. In: K. Popp and W. Schiehlen (editors) – System dynamics and long-term behaviour of railway vehicles, track and subgrade. Berlin, Germany: Springer Verlag, 2003, pp. 317-336.
- [78] Z.F. Li and J.G. Sun: *Maintenance and cause of unsupported sleeper*. China Railway Build, 1992, Vol. 2, pp. 15–17.
- [79] J. Shi, A.H. Chan and M. Burrow: *Influence of unsupported sleepers on the dynamic response of a heavy haul railway embankment*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit, 2013, Vol. 227, No. 6, pp. 657–667.
- [80] S. Zhang, X. Xiao, Z. Wen and X. Jin: *Effect of unsupported sleepers on wheel/rail normal load*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2008, Vol. 28, No. 8, pp. 662-673.
- [81] Z. Popović and V. Radović: *Analysis of cracking on running surface of rails*. Građevinar, 2013, Vol. 65, No. 3, pp. 251-259.
- [82] Z. Popović, V. Radović, L. Lazarević, V. Vukadinović and G. Tepić: *Rail inspection of rcf defects*. Metallurgy, 2013, Vol. 52, No. 4, pp. 537-540.

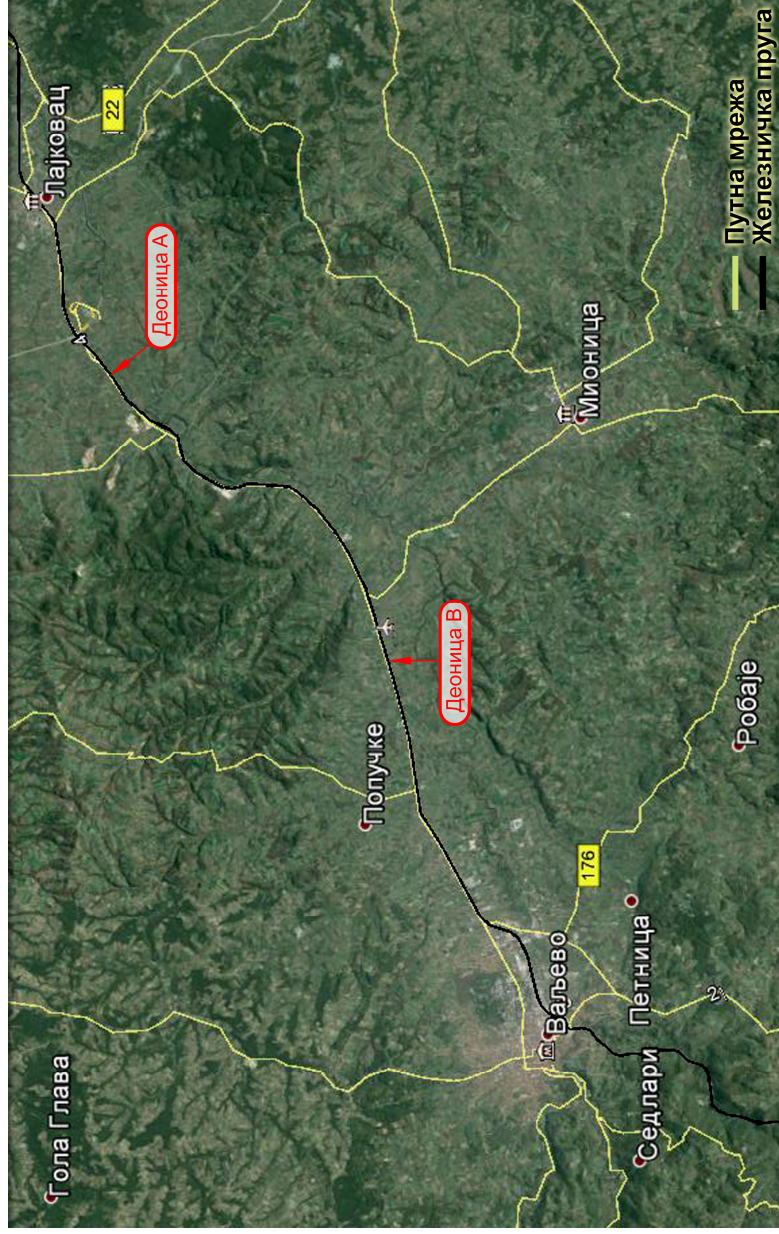
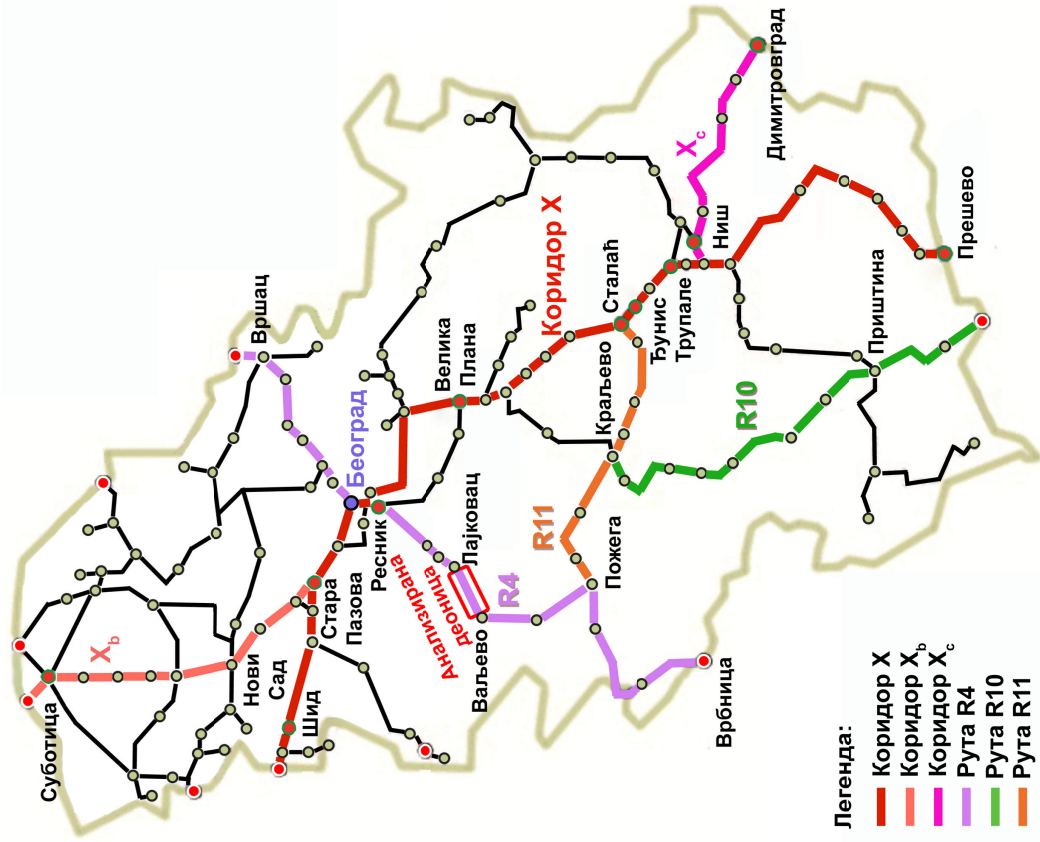
- [83] Z. Popović, Lj. Brajović, L. Lazarević, L. Milosavljević: *Rail defects head checking on the Serbian railways*. Technical Gazette, 2014, Vol. 21, No. 1, pp. 147-153.
- [84] Z. Popović, L. Lazarević, Lj. Brajović, P. Gladović: *Managing rail service life*. Metallurgy, 2014, Vol. 53, No. 4, pp. 721-724.
- [85] D.S. Kim, S.D. Kim and J. Lee: *Easy detection and dynamic behavior of unsupported sleepers in high speed ballasted track*. In: Seventh World Congress on Railway Research 2006, Montreal, Canada, paper 414, p. 8.
- [86] <https://www.zorn-instruments.com>
- [87] Lj. Brajović, M. Malović, Z. Popović and L. Lazarević: *Wireless system for sleeper vibrations measurements*. Communications, Scientific Letters of the University of Žilina, 2014, Vol. 16, No. 4, pp. 21-26.
- [88] N. Pinto, C.A. Ribeiro, J. Gabriel and R. Calçada: *Dynamic monitoring of railway track displacement using an optical system*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit, 2015, Vol. 229, No. 3, pp. 280-290.
- [89] E. Berggren: *Dynamic track stiffness measurement - A new tool for condition monitoring of track substructure*. Licentiate Thesis, KTH Royal Institute of Technology, 2005, p. 101.
- [90] T. Dahlberg: *Railway track stiffness variations - Consequences and countermeasures*. International Journal of Civil Engineering, 2010, Vol. 8, No. 1, pp. 1-12.
- [91] L. Puzavac, Z. Popović and L. Lazarević: *Influence of track stiffness on track behaviour under vertical load*. Promet – Traffic&Transportation, 2012, Vol. 24, No. 5, pp. 405-412.
- [92] L. Milosavljević, Z. Popović and L. Lazarević: *Track stiffness and the vertical track geometry deterioration modeling*. Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering, 2012, Vol. 10, No. 2, pp. 157-162.
- [93] F.J. Sanchez-Sesma, M. Rodriguez, U. Iturraran-Viveros, F. Luzón, M. Campillo, L. Margerin, A. García-Jerez, M. Suarez, M.A. Santoyo and A. Rodríguez-Castellanos: *A theory for microtremor H/V spectral ratio – Application for a layered medium*. Geophysical Journal International, 2011, Vol. 186, No. 1, pp. 221-225.

- [94] J. Delgado, J. Lopez Casado, J. Giner, A. Estévez, A. Cuenca and S. Molina: *Microtremors as a geophysical exploration tool – Applications and limitations*. Pure and Applied Geophysics, 2000, Vol. 157, No. 9, pp. 1445-1462.
- [95] Z. Papanova, D. Papan and J. Kortis: *Microtremor vibrations in the soil – Experimental investigation and FEM simulation*. Communications, Scientific Letters of the University of Žilina, 2014, Vol. 16, No. 4, pp. 41-47.
- [96] H. Khabbaz and B. Fatahi: *How to overcome geotechnical challenges in implementing high speed rail systems in Australia*. Geotechnical Engineering Journal, 2014, Vol. 45, No. 1, pp. 39-47.
- [97] P. Xu, Q.X. Sun, R.K. Liu, F.T. Wang: *Key equipment identification model for correcting milepost errors of track geometry data from track inspection cars*. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2013, Vol. 35, pp. 85-103.
- [98] [http://www.seistronix.com/ras\\_g.htm](http://www.seistronix.com/ras_g.htm)
- [99] Commission Regulation (EU) No 1299/2014: *Technical specifications for interoperability relating to the ‘infrastructure’ subsystem of the rail system in the European Union*. Official Journal of the European Union, 2014, p.109. (<http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32014R1299&from=EN>)
- [100] Република Србија: *Закон о безбедности и интероперабилности железнице*. Службени гласник РС бр. 104/2013, 66/2015-др. закон и 92/2015, р. 99. (<http://www.parlament.gov.rs/upload/archive/files/cir/pdf/zakoni/2013/2913-13.pdf>)
- [101] Република Србија: *Закон о железници*. Службени гласник РС, бр. 45/2013 и 91/2015, р. 46. (<http://www.parlament.gov.rs/upload/archive/files/cir/pdf/zakoni/2013/1343-13.pdf>)

# ПРИЛОЗИ



# ПРИЛОГ 1



Положај анализиране деонице Лајковац-Валјево на железничкој мрежи Србије (лево) и положај тест-деоница А и В (десно)

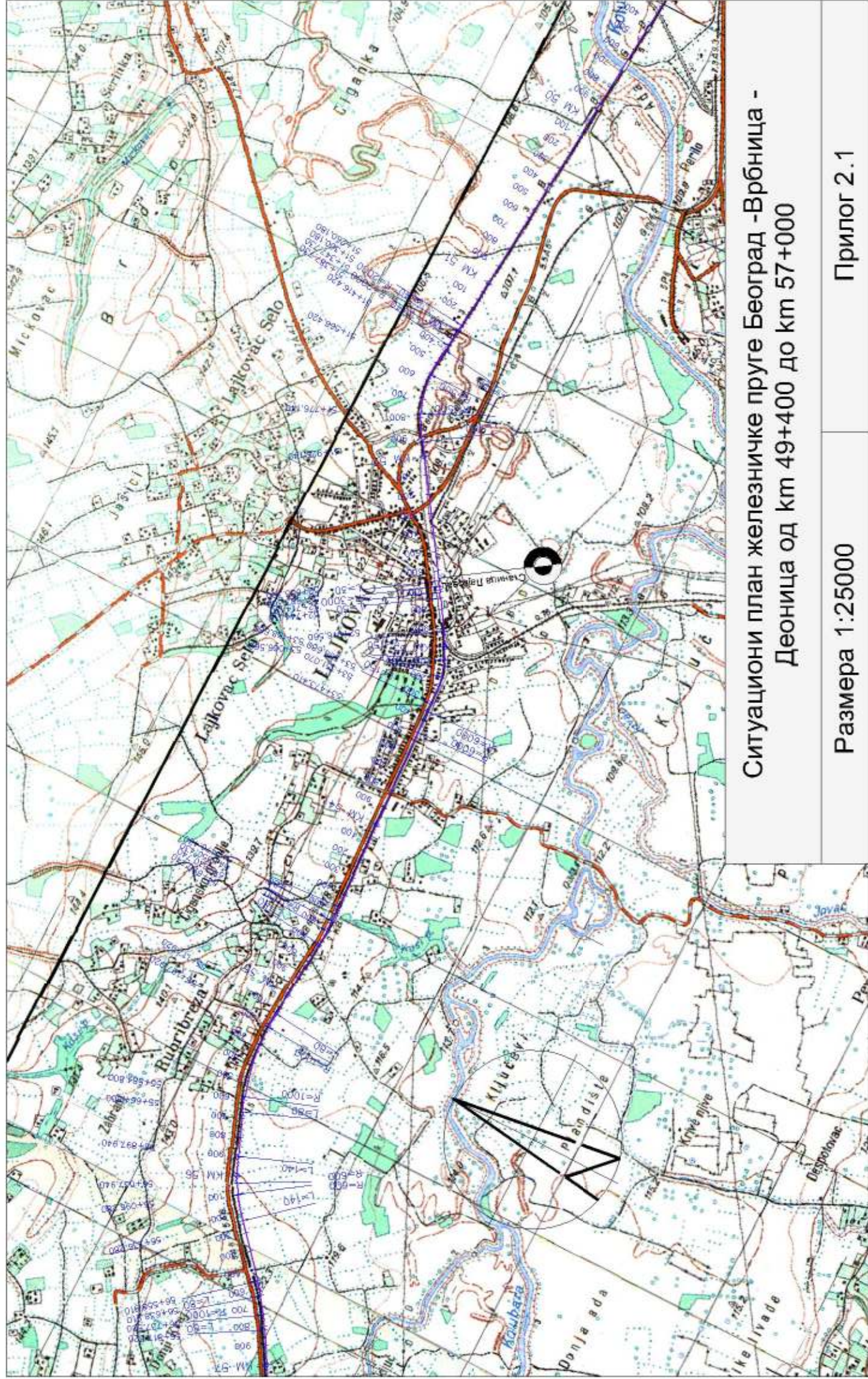
## ПРИЛОГ 2

**Прилог 2.1** Ситуациони план железничке пруге Београд-Врбница – Деоница од  
km 49+400 до km 57+000

**Прилог 2.2** Ситуациони план железничке пруге Београд-Врбница – Деоница од  
km 57+000 до km 65+100

**Прилог 2.3** Ситуациони план железничке пруге Београд-Врбница – Деоница од  
km 65+100 до km 72+400

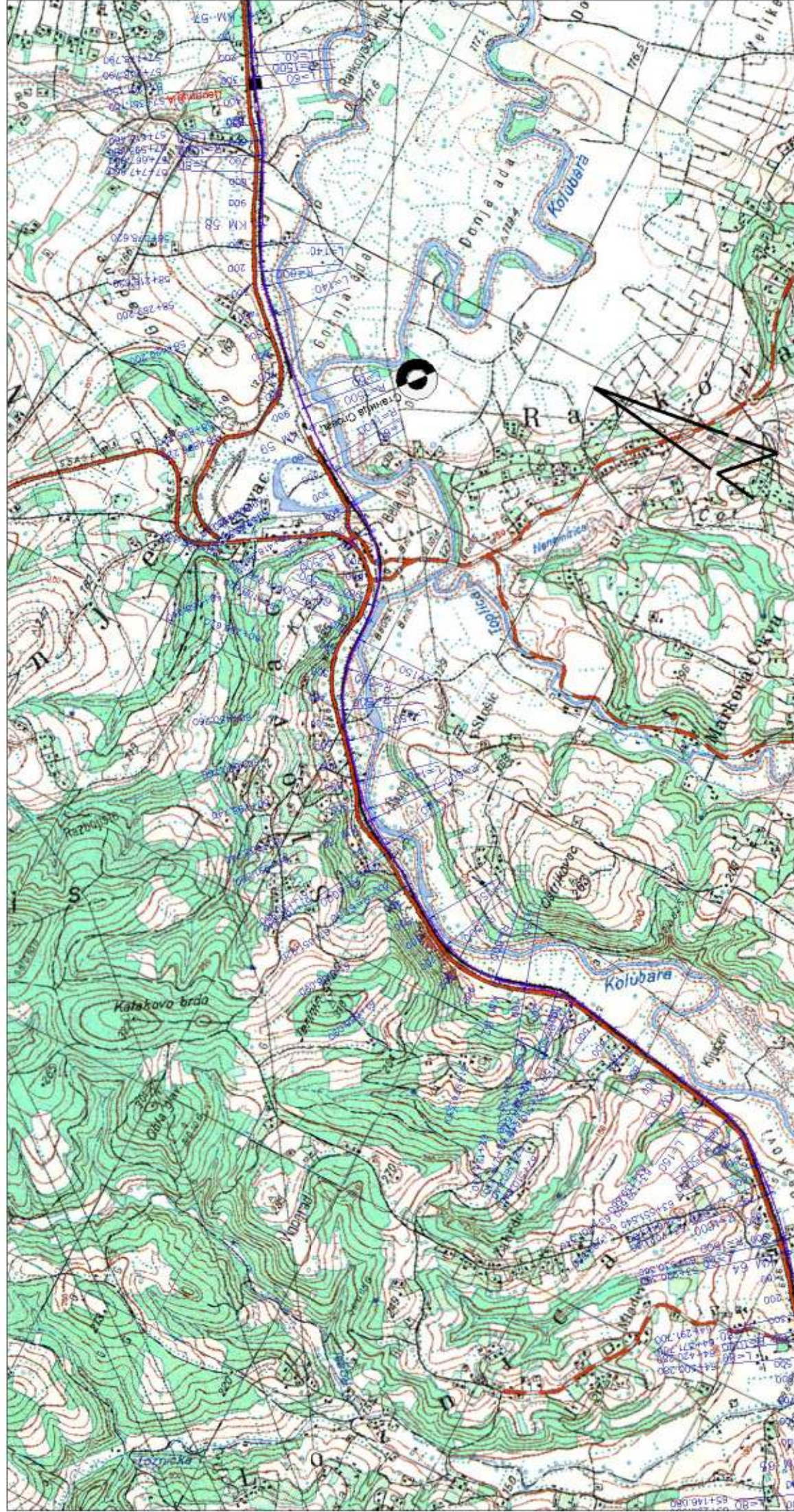
**Прилог 2.4** Ситуациони план железничке пруге Београд-Врбница – Деоница од  
km 72+400 до km 79+700



Ситуациони план железничке пруге Београд -Врбница -  
Деоница од km 49+400 до km 57+000

Размера 1:25000

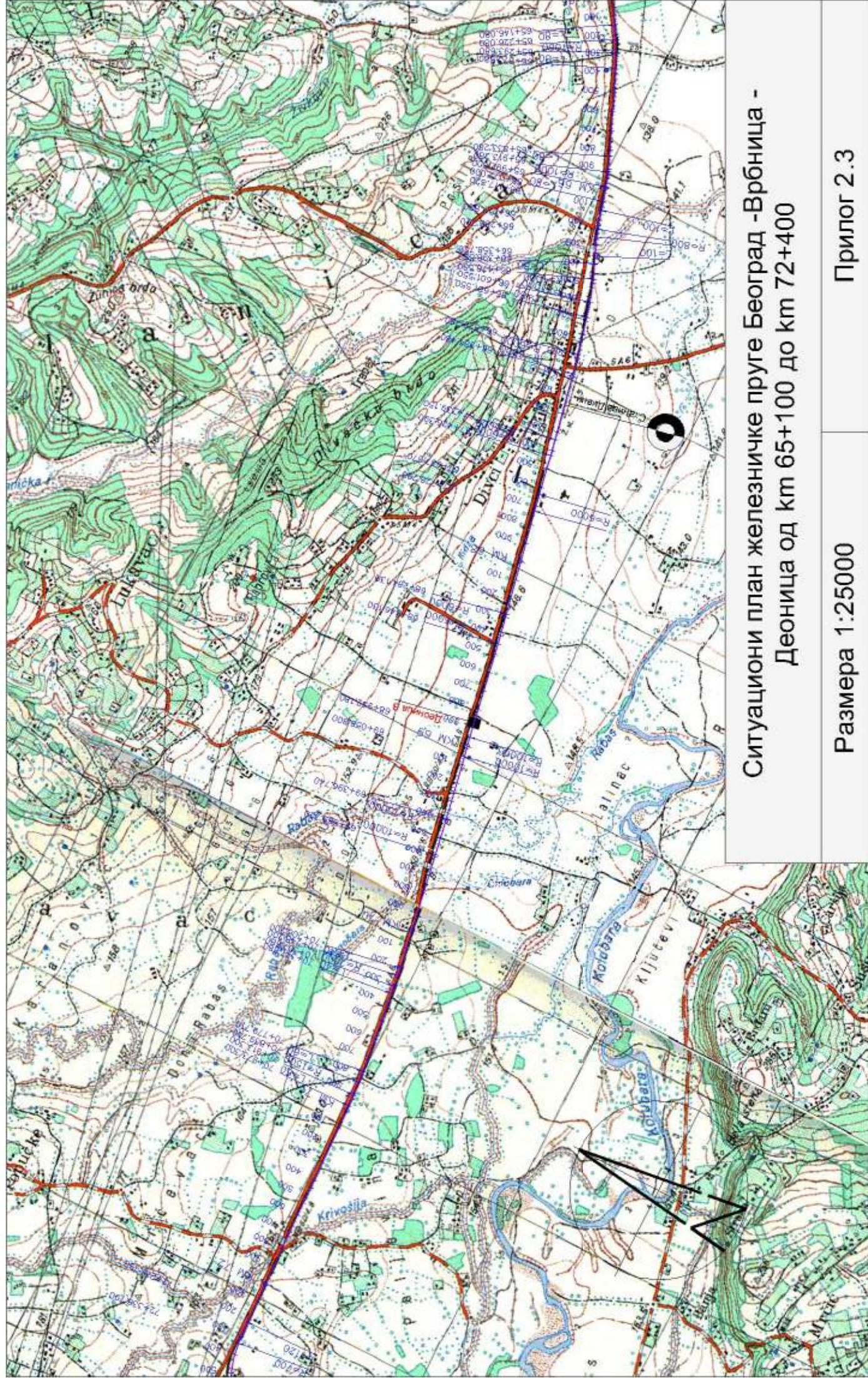
Прилог 2.1



Ситуациони план железничке пруге Београд -Врбница -  
Деоница од км 57+000 до км 65+100

Размера 1:25000

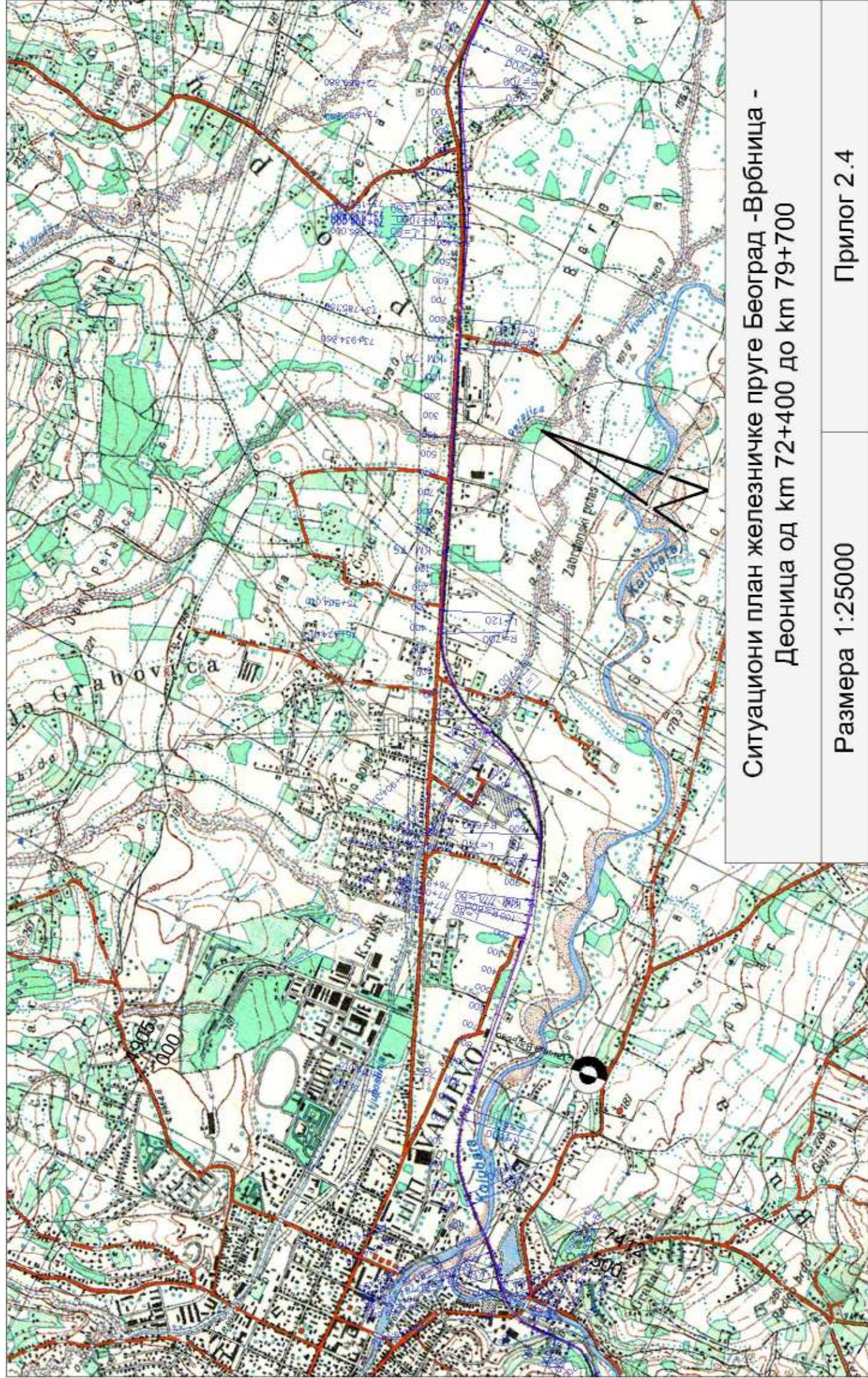
Прилог 2.2



Ситуациони план железничке пруге Београд -Врбница -  
Деоница од km 65+100 до km 72+400

Размера 1:25000

Прилог 2.3



Ситуациони план железничке пруге Београд -Врбница -  
Деоница од km 72+400 до km 79+700

Размера 1:25000

Прилог 2.4



## ПРИЛОГ 3

**Прилог 3.1** Подужни профил железничке пруге Београд-Врбница – Деоница од  
km 51+100 до km 57+700

**Прилог 3.2** Подужни профил железничке пруге Београд-Врбница – Деоница од  
km 57+700 до km 64+500

**Прилог 3.3** Подужни профил железничке пруге Београд-Врбница – Деоница од  
km 64+500 до km 71+300

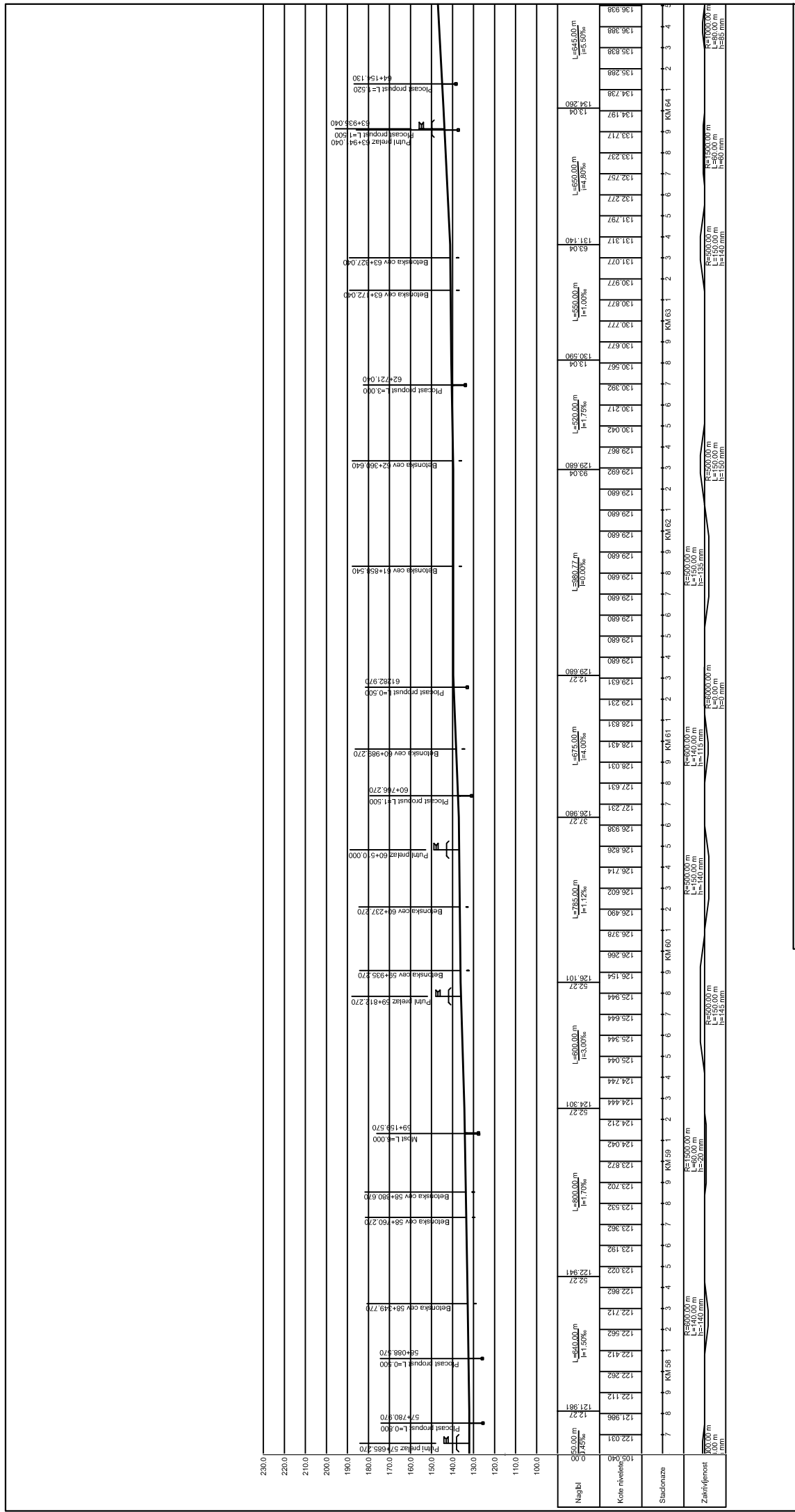
**Прилог 3.4** Подужни профил железничке пруге Београд-Врбница – Деоница од  
km 71+300 до km 78+000



# Подужни профил железничке пруге Београд-Врбница - Деоница од km 57+700 до km 64+500

Размера 1:25000/2500

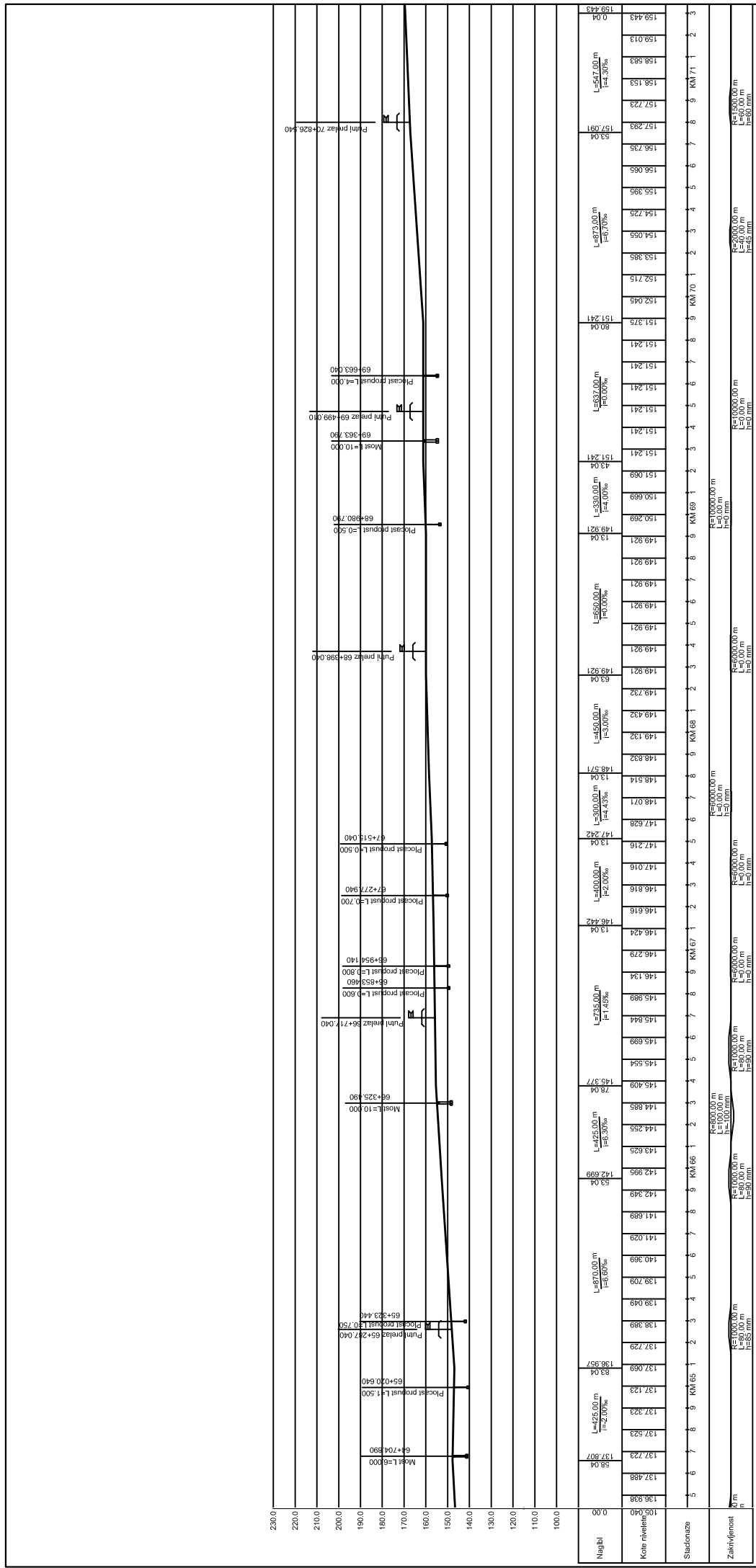
Прилог 3.2



# Подужни профил железничке пруге Београд-Врбница - Деоница од km 64+500 до km 71+300

Размера 1:25000/2500

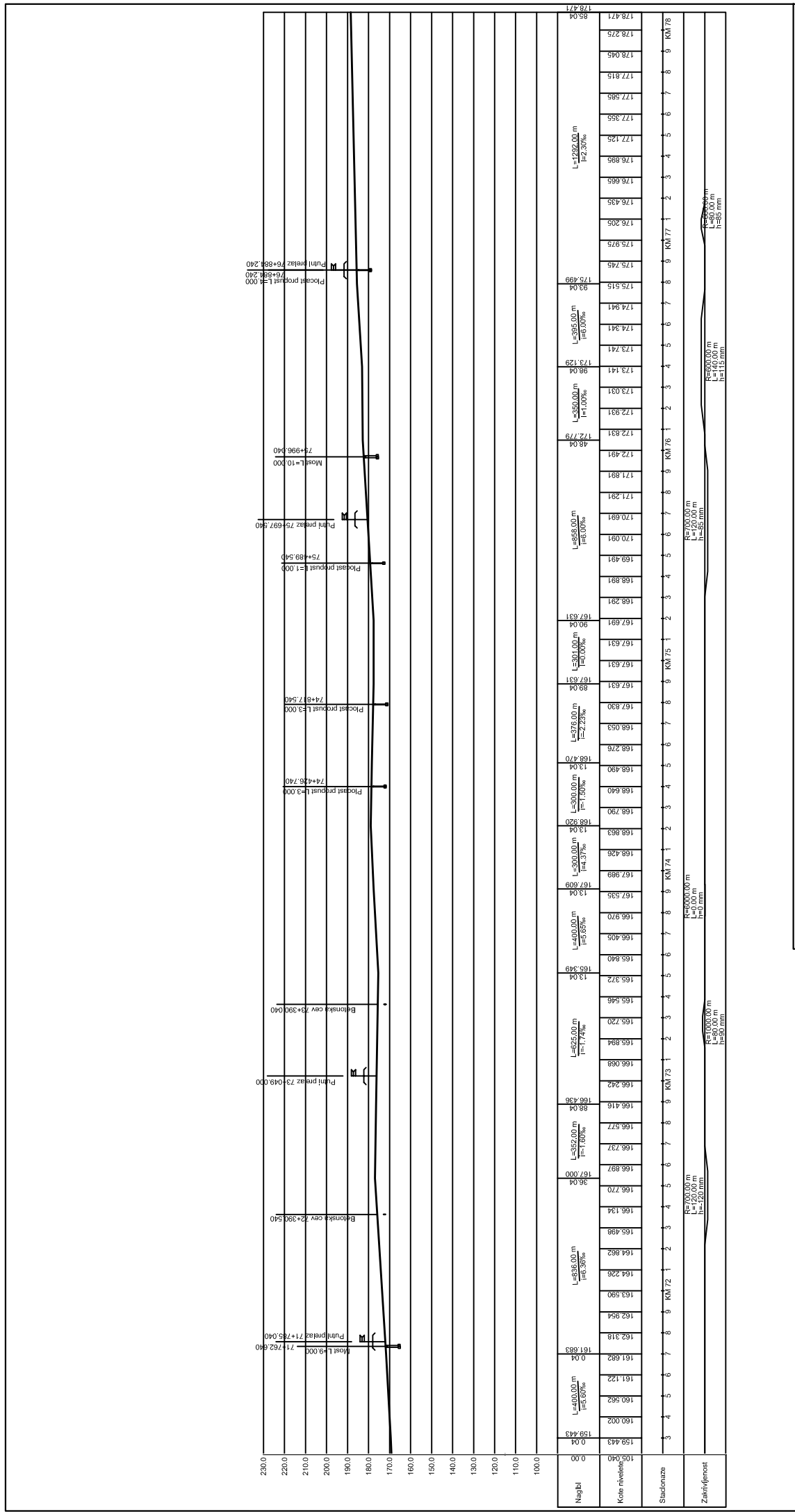
Прилог 3.3



# Подужни профил железничке пруге Београд-Врбница - Деоница од km 71+300 до km 78+000

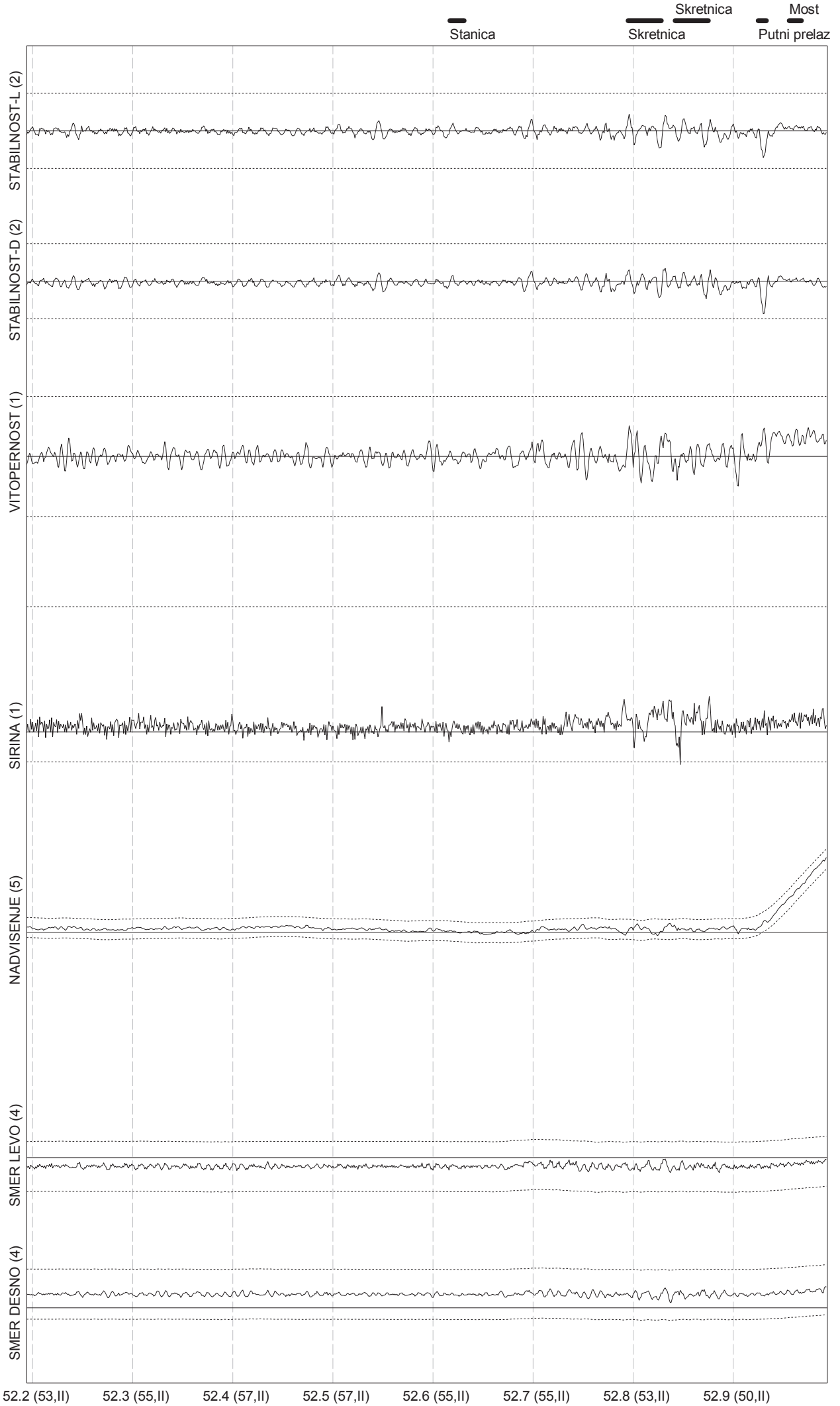
Размера 1:25000/2500

Прилог 3.4



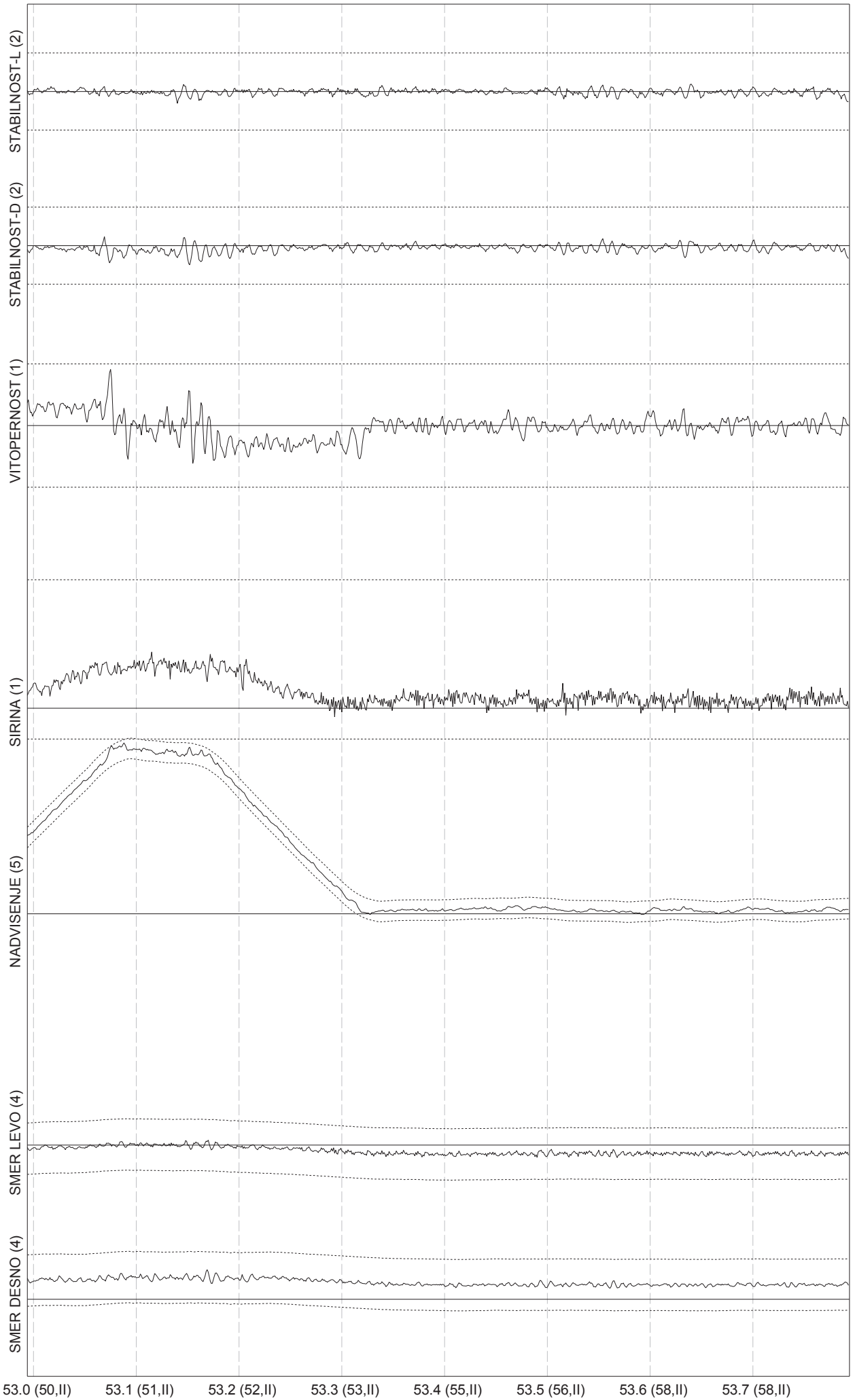
## ПРИЛОГ 4

Merna vožnja: RESNIK-VALJEVO, 12.03.2014. str. 65/96

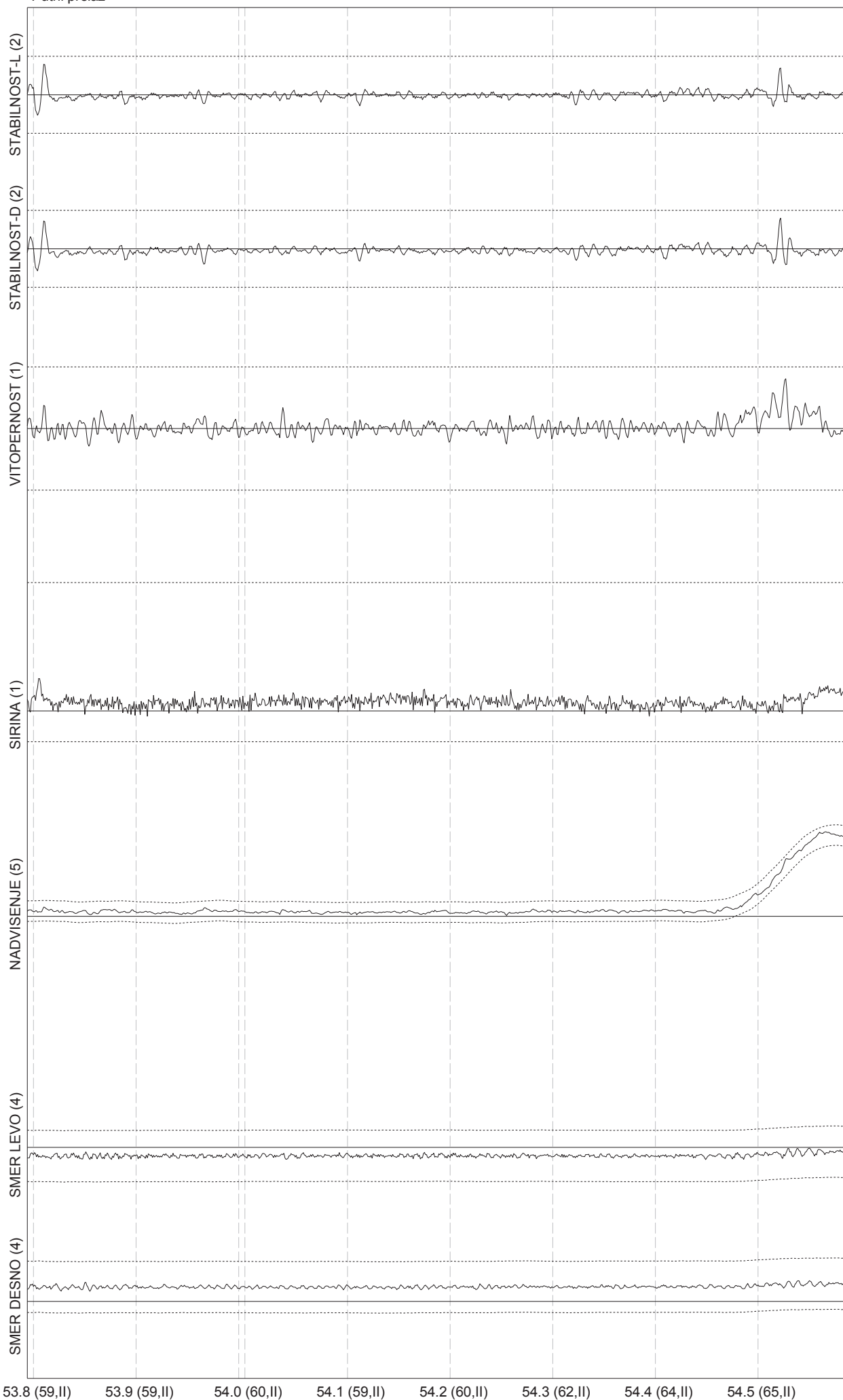




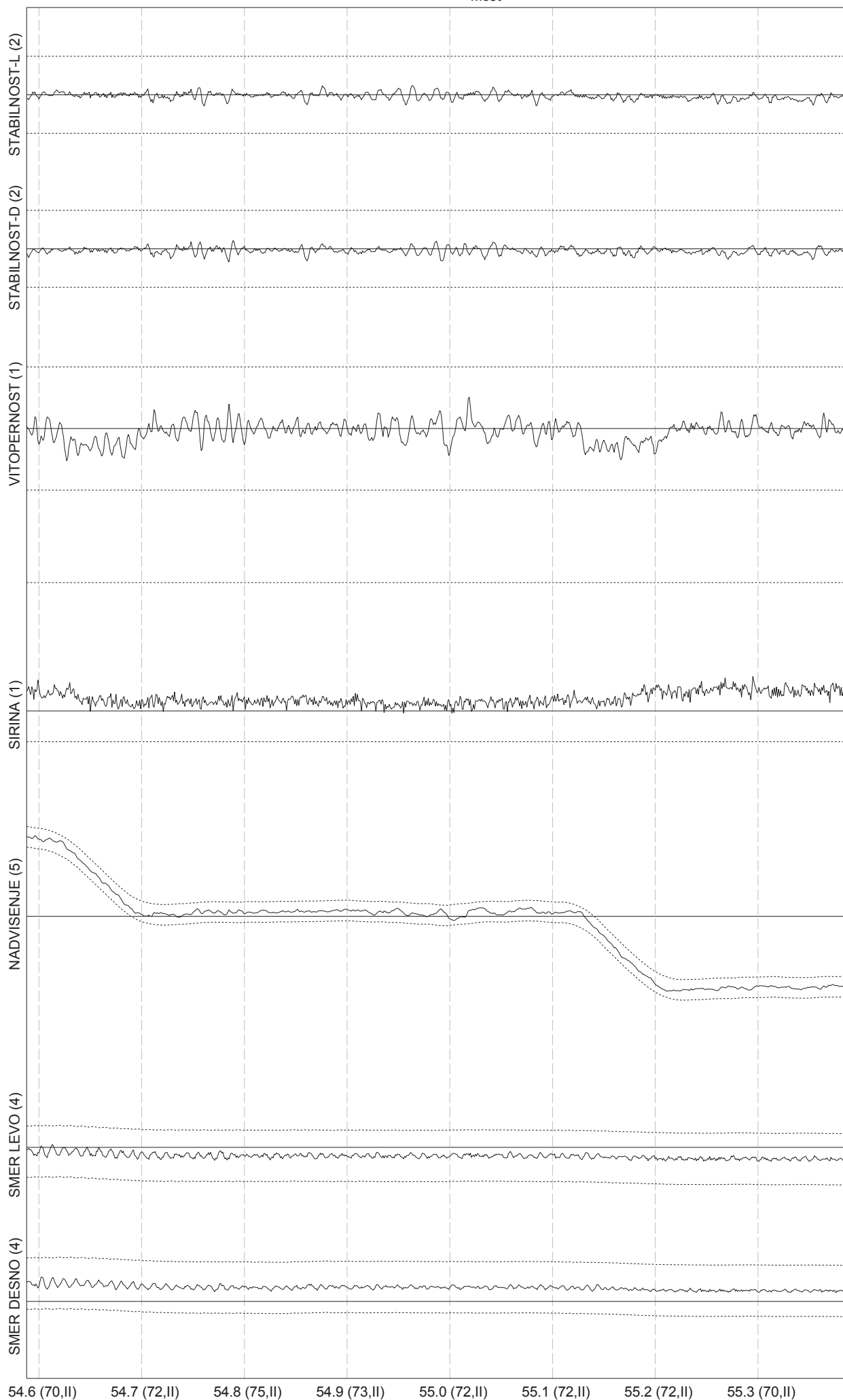
Merna vožnja: RESNIK-VALJEVO, 12.03.2014. str. 66/96

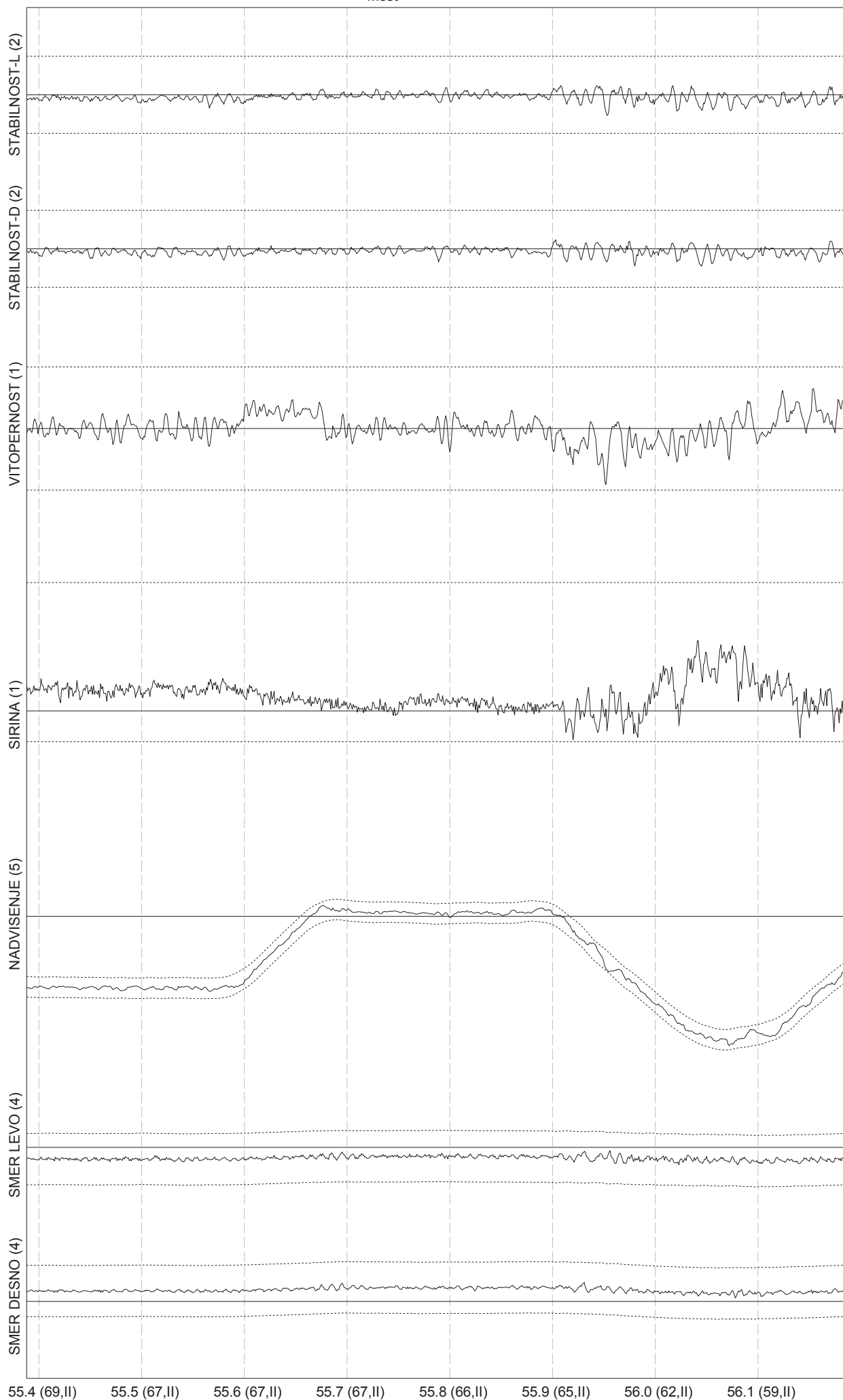


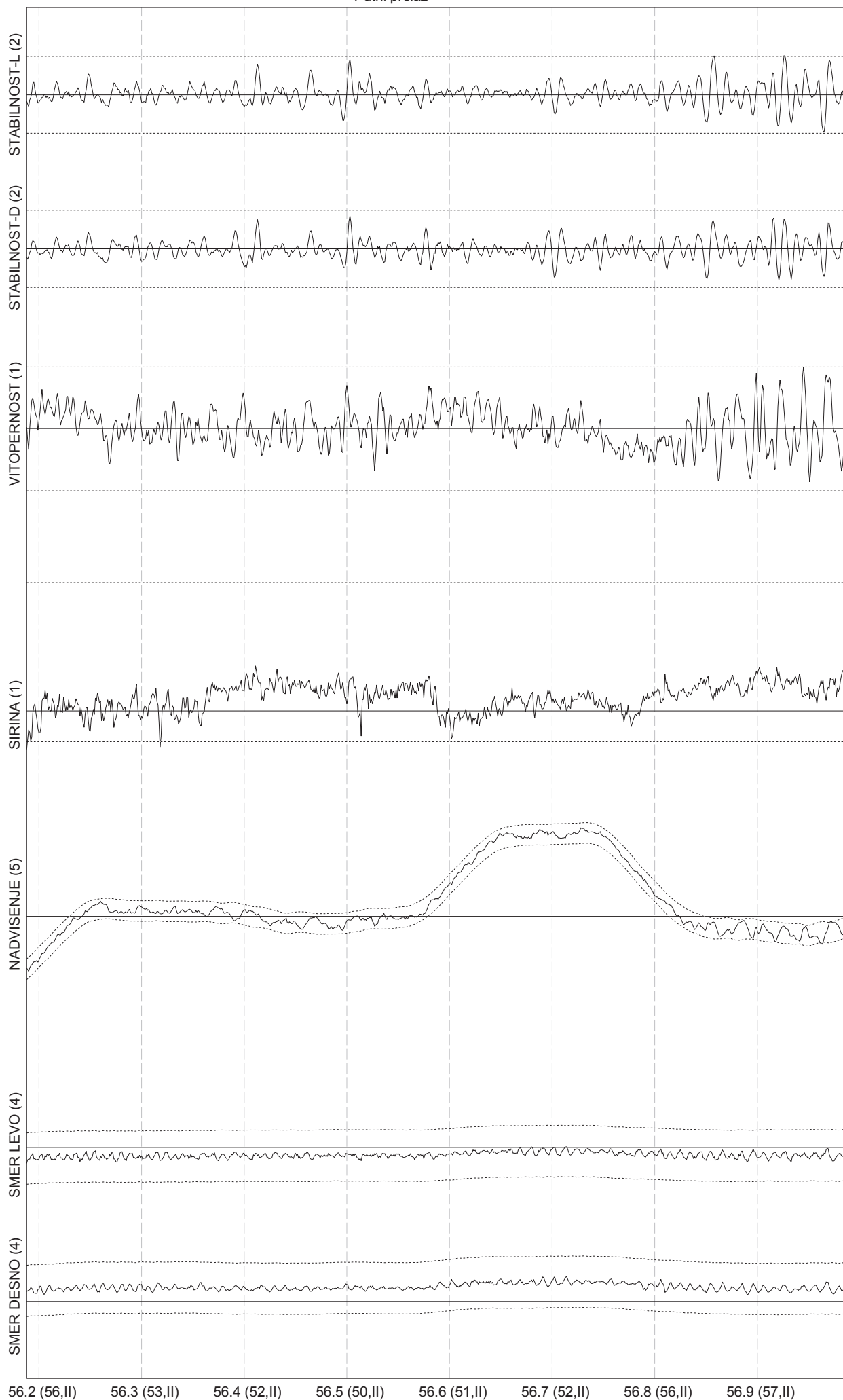
Merna vožnja: RESNIK-VALJEVO, 12.03.2014. str. 67/96

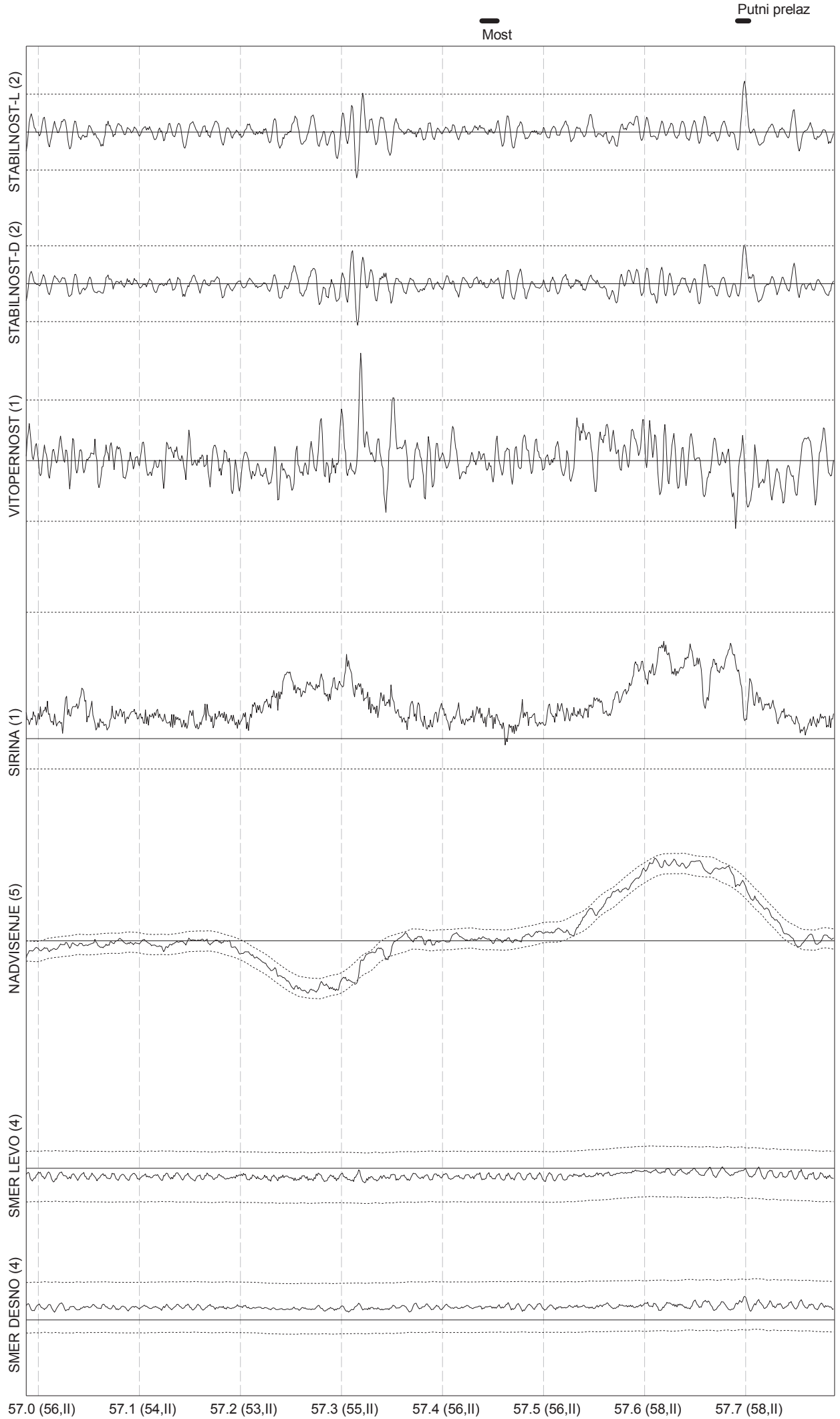


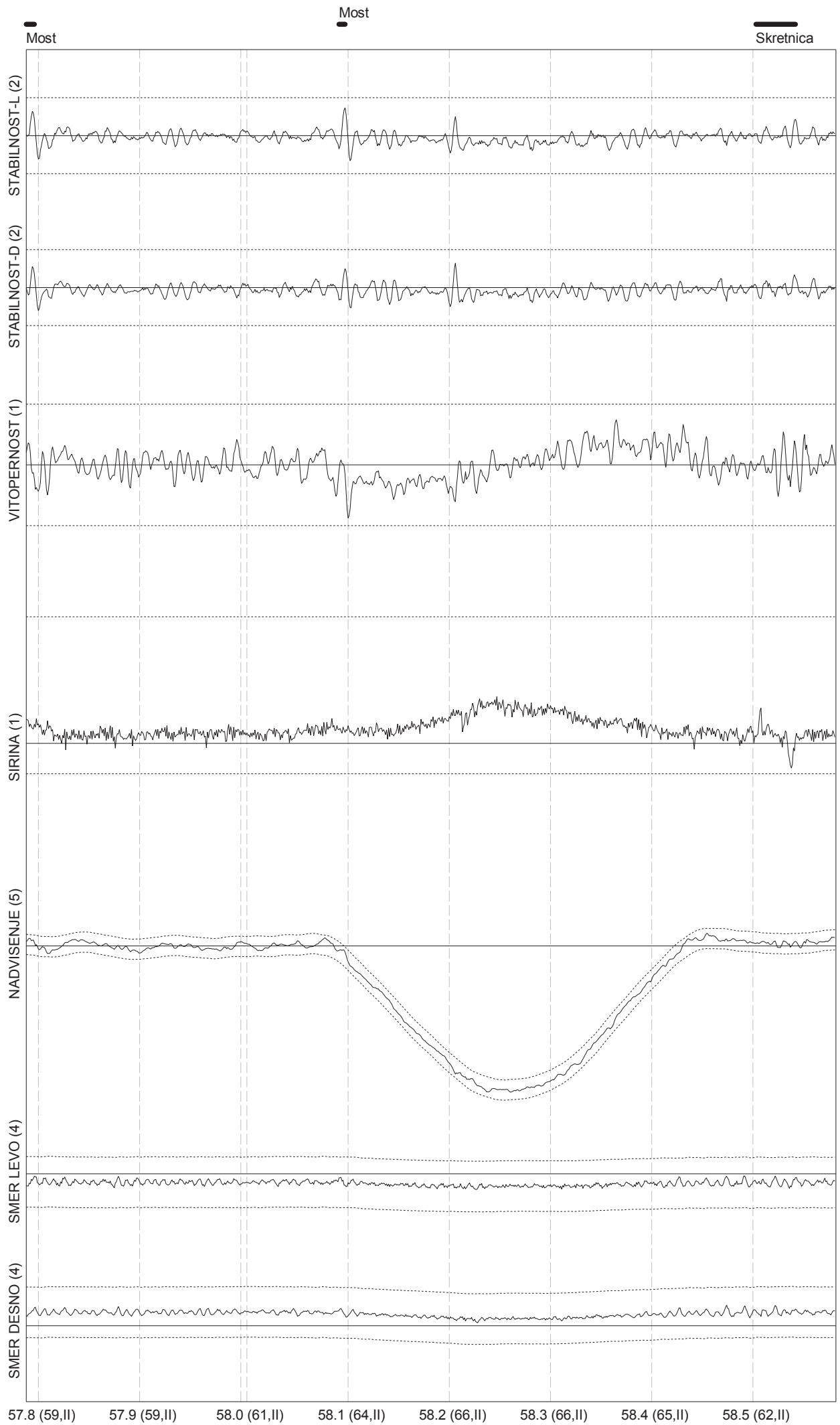
Merna vožnja: RESNIK-VALJEVO, 12.03.2014. str. 68/96



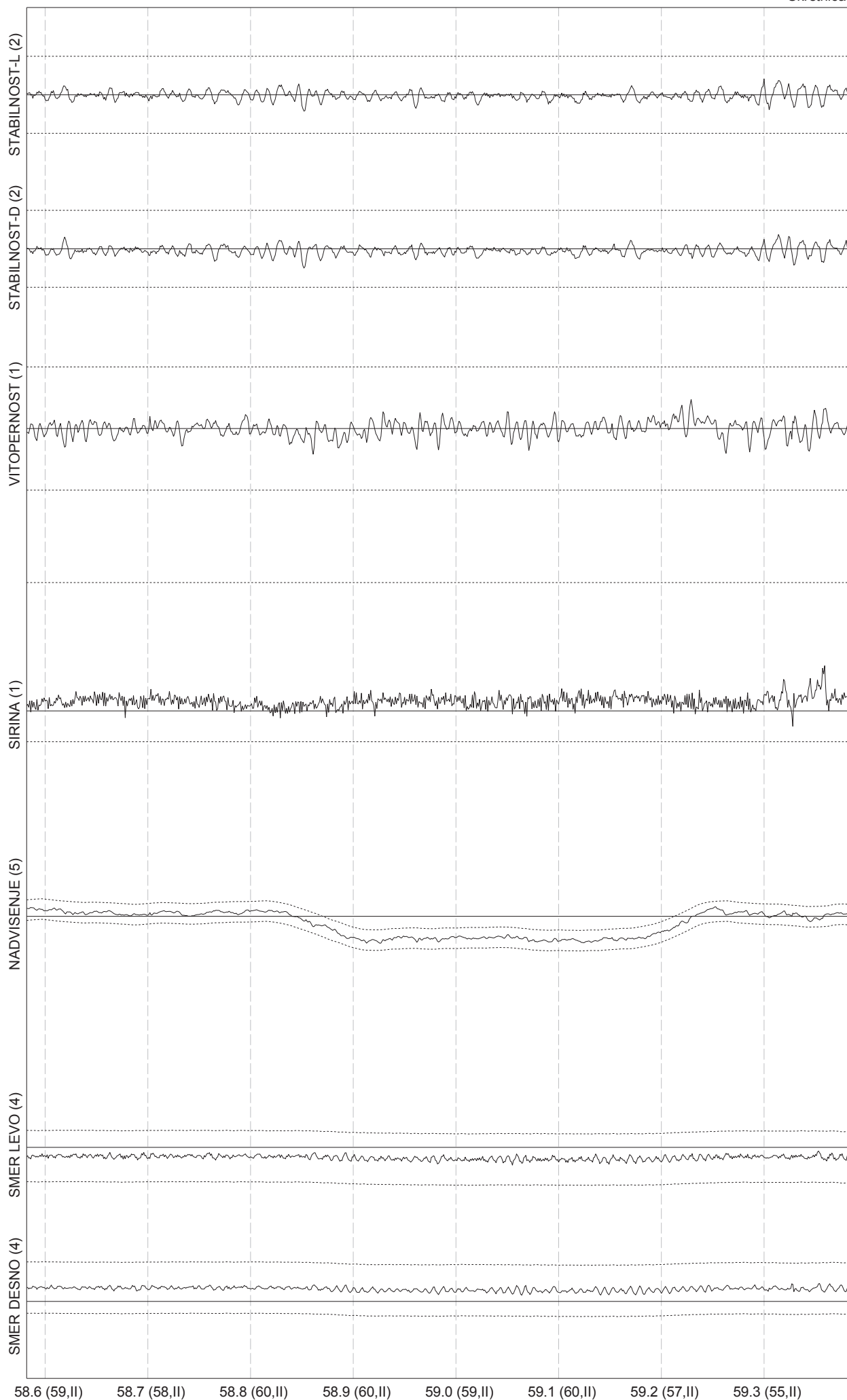




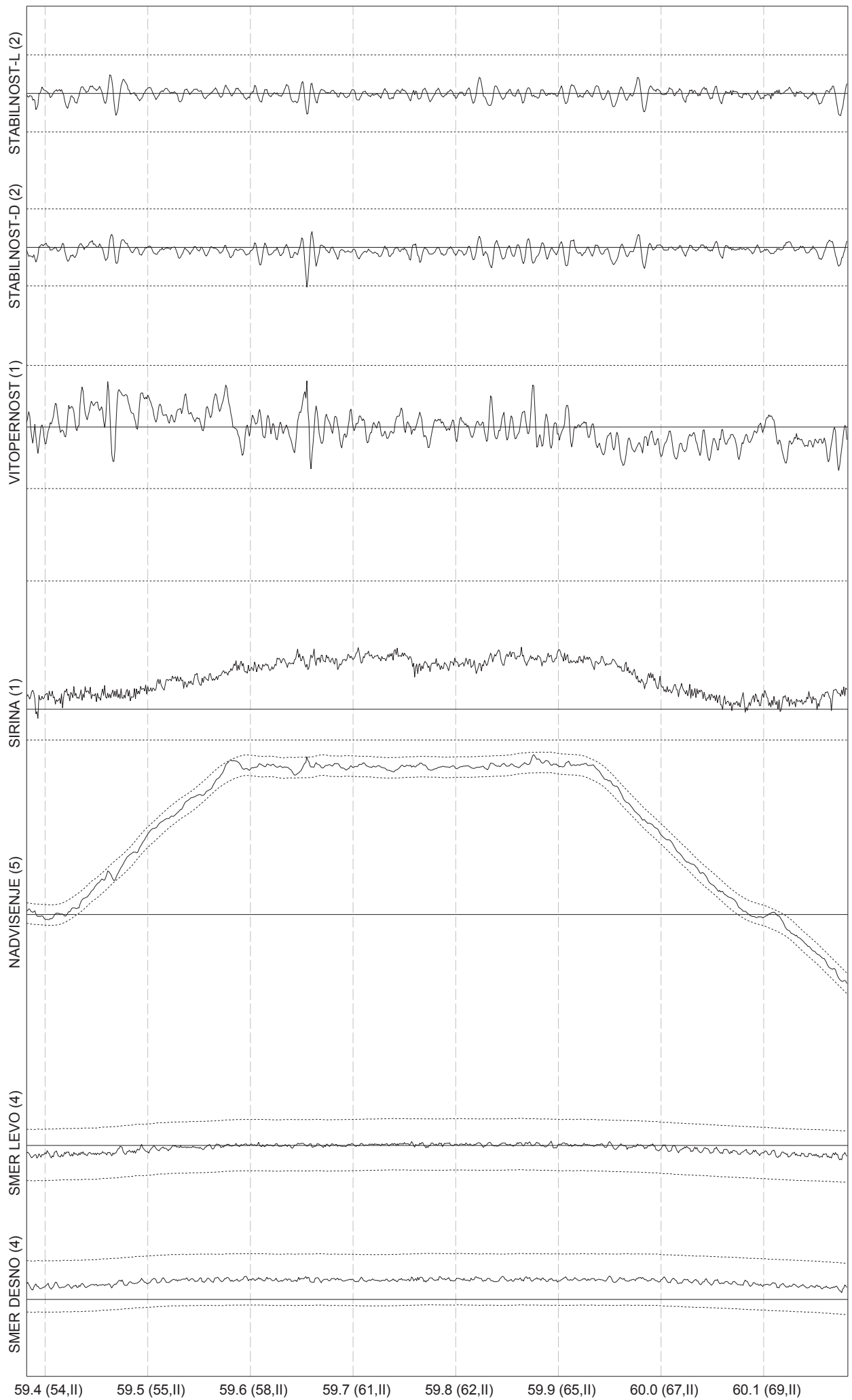




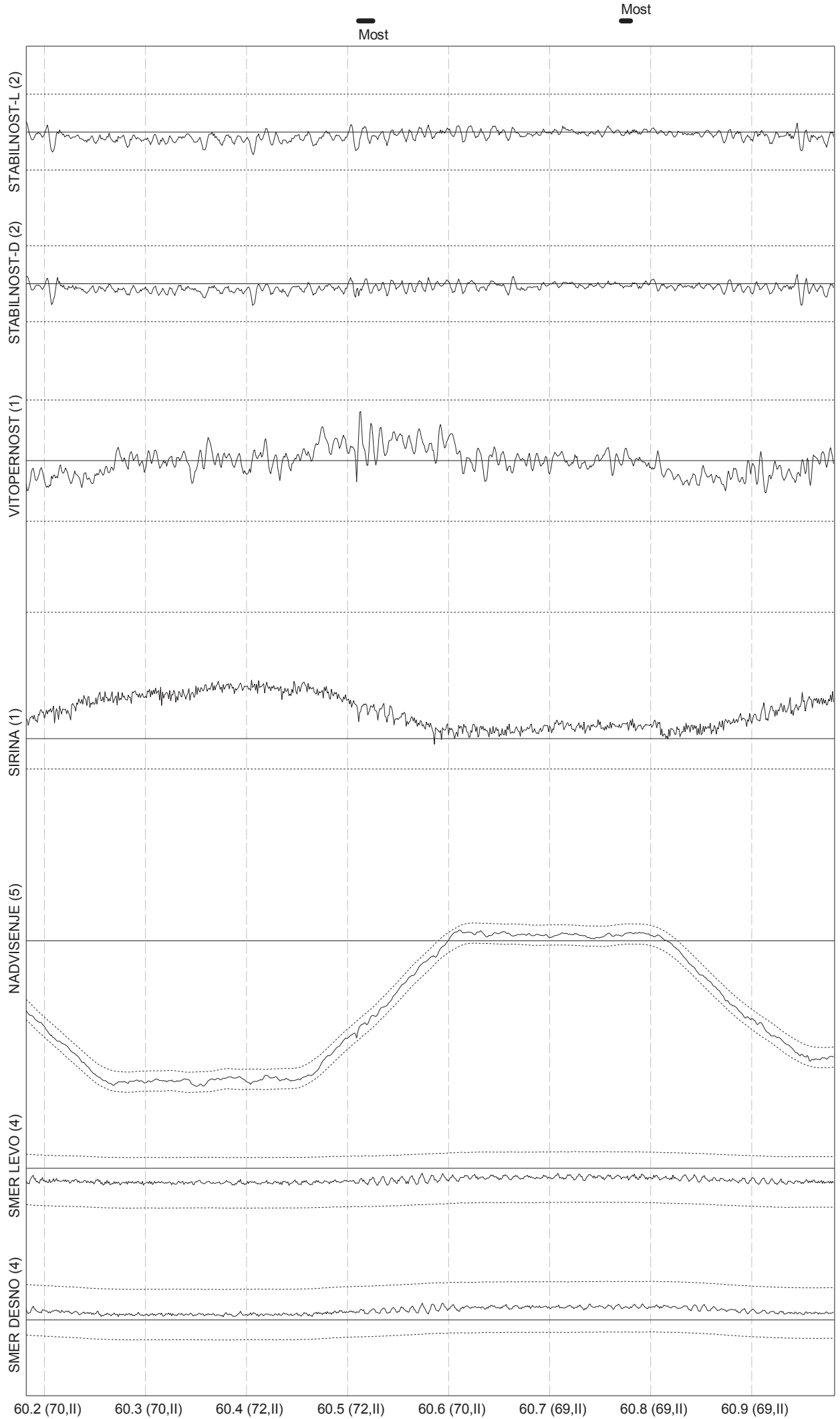
Merna vožnja: RESNIK-VALJEVO, 12.03.2014. str. 73/96

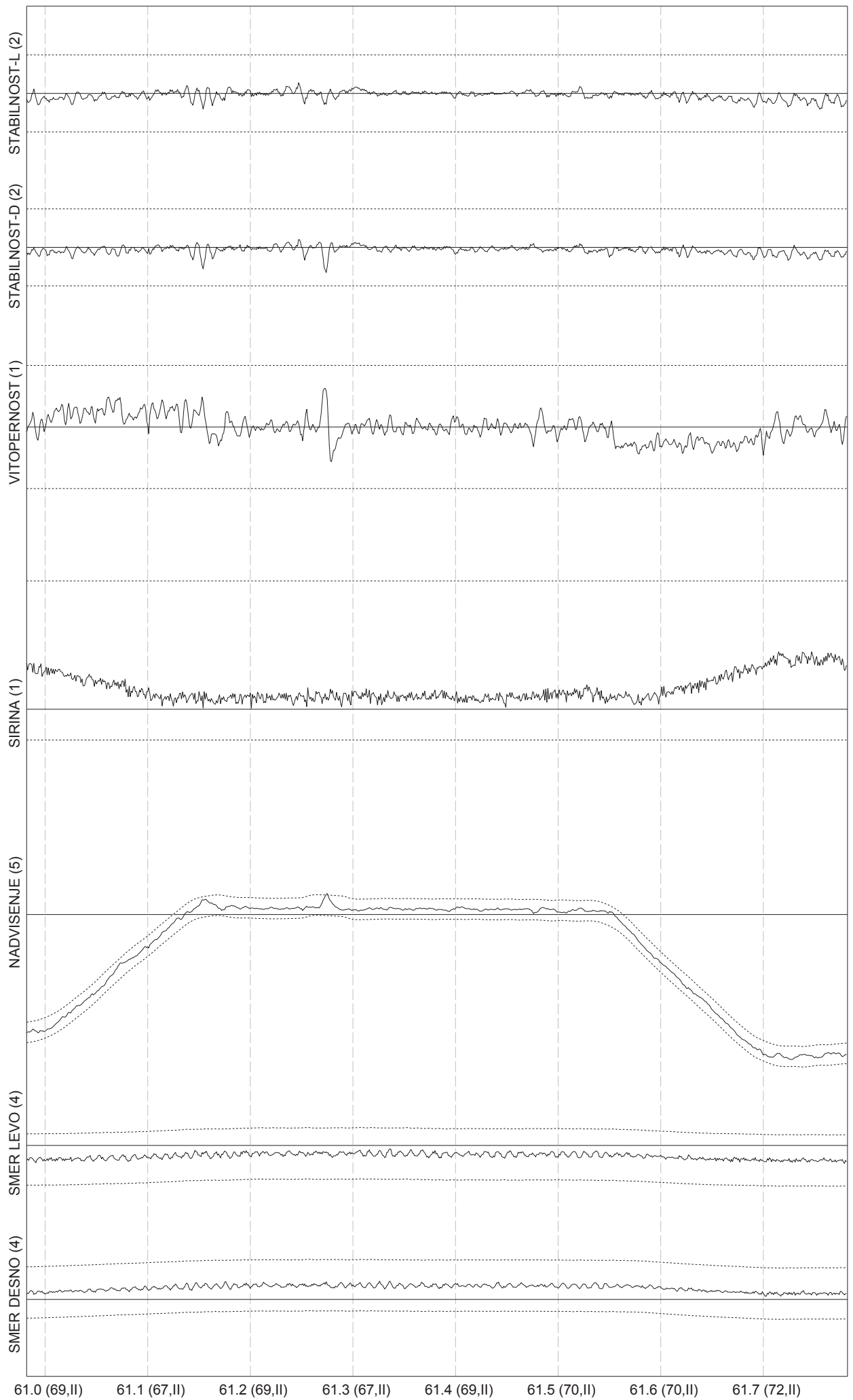


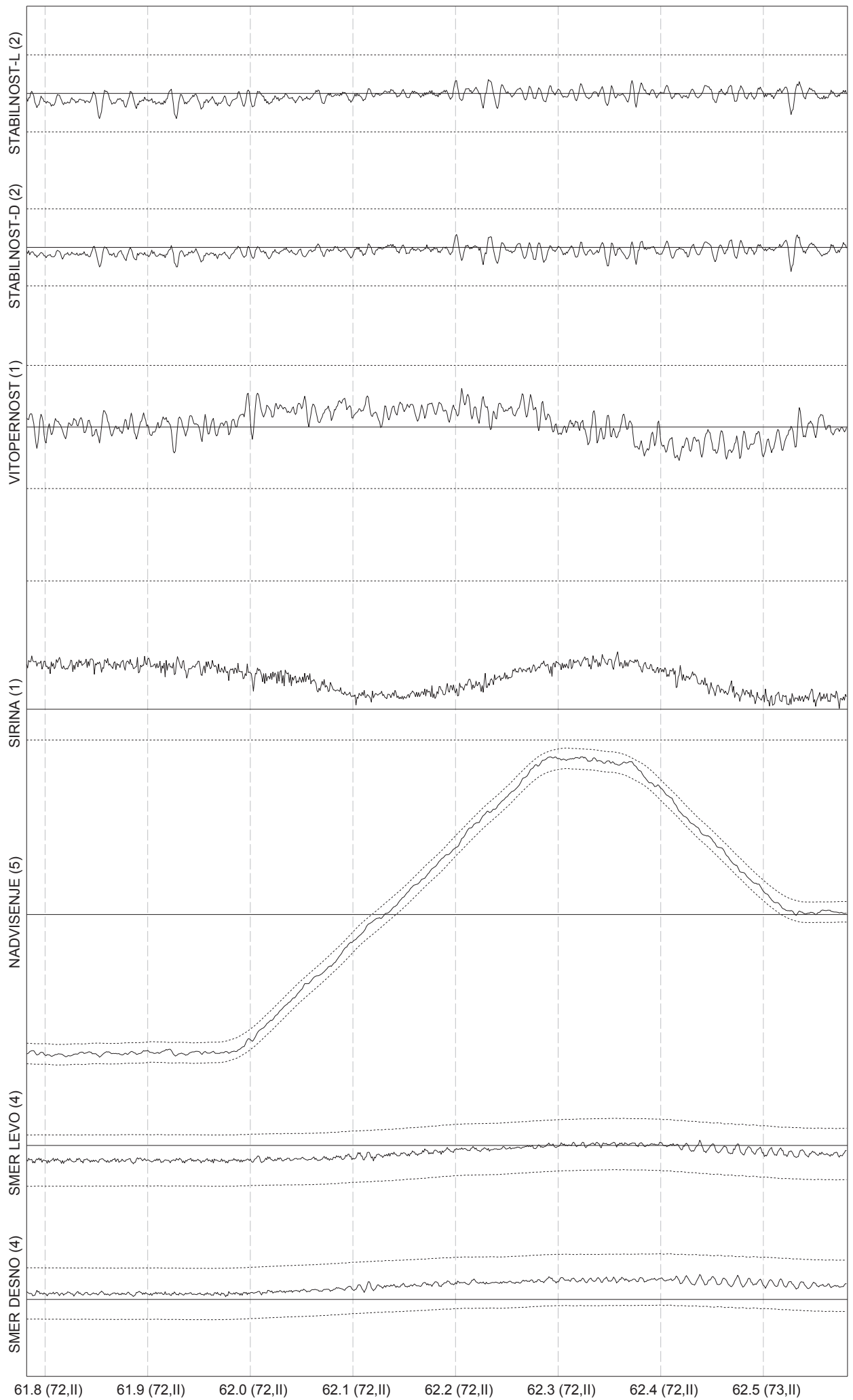


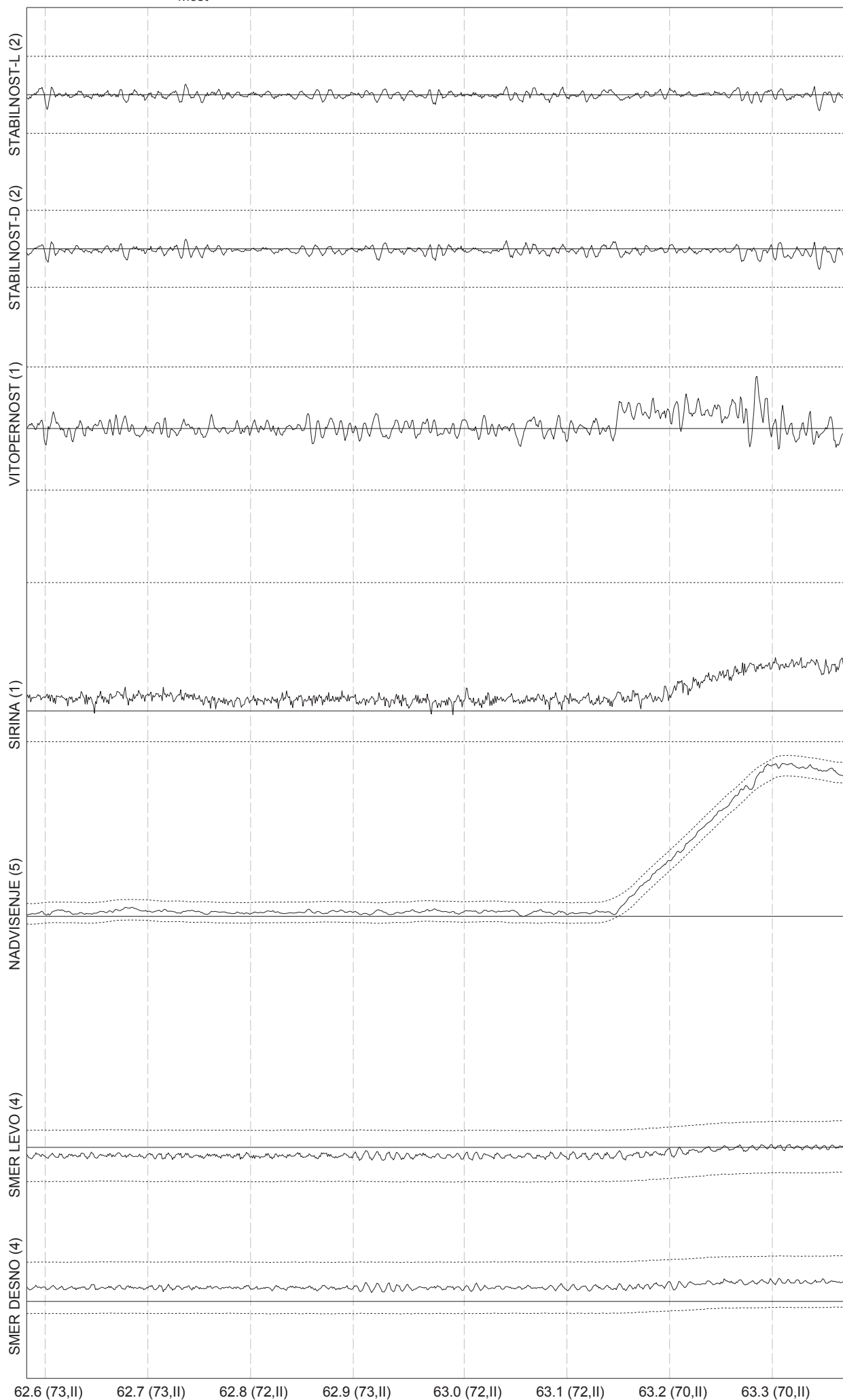


Merna vožnja: RESNIK-VALJEVO, 12.03.2014. str. 75/96

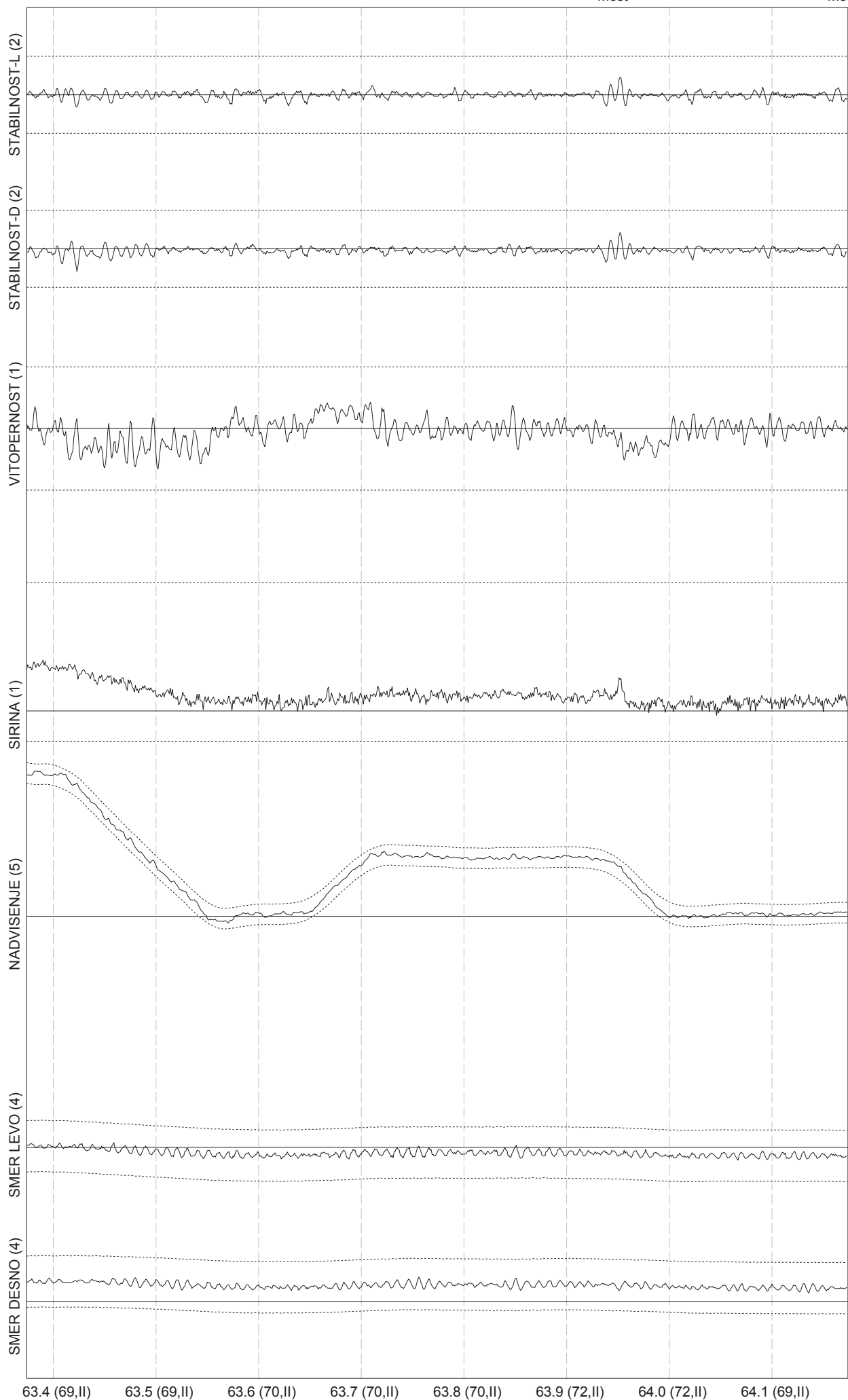




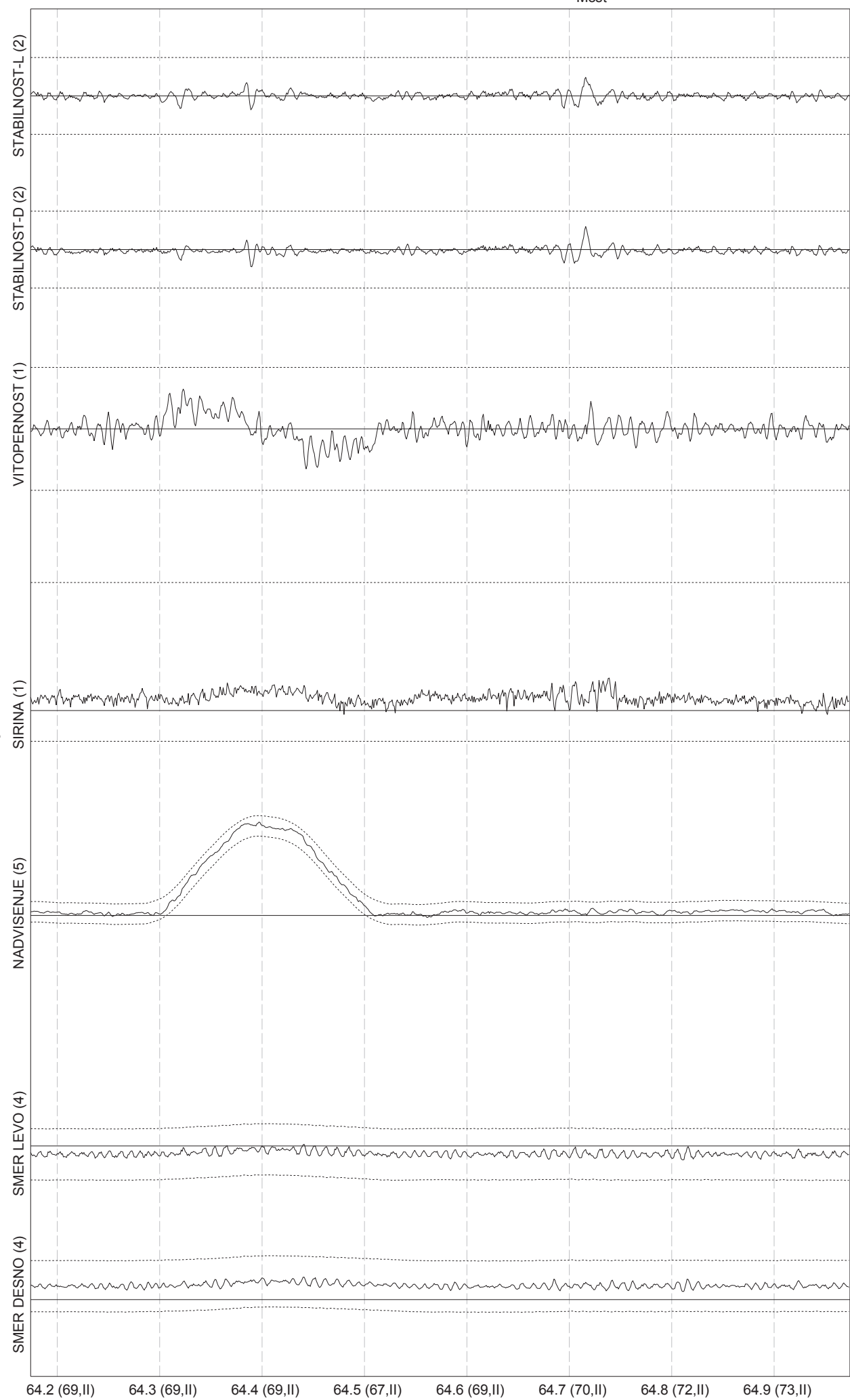


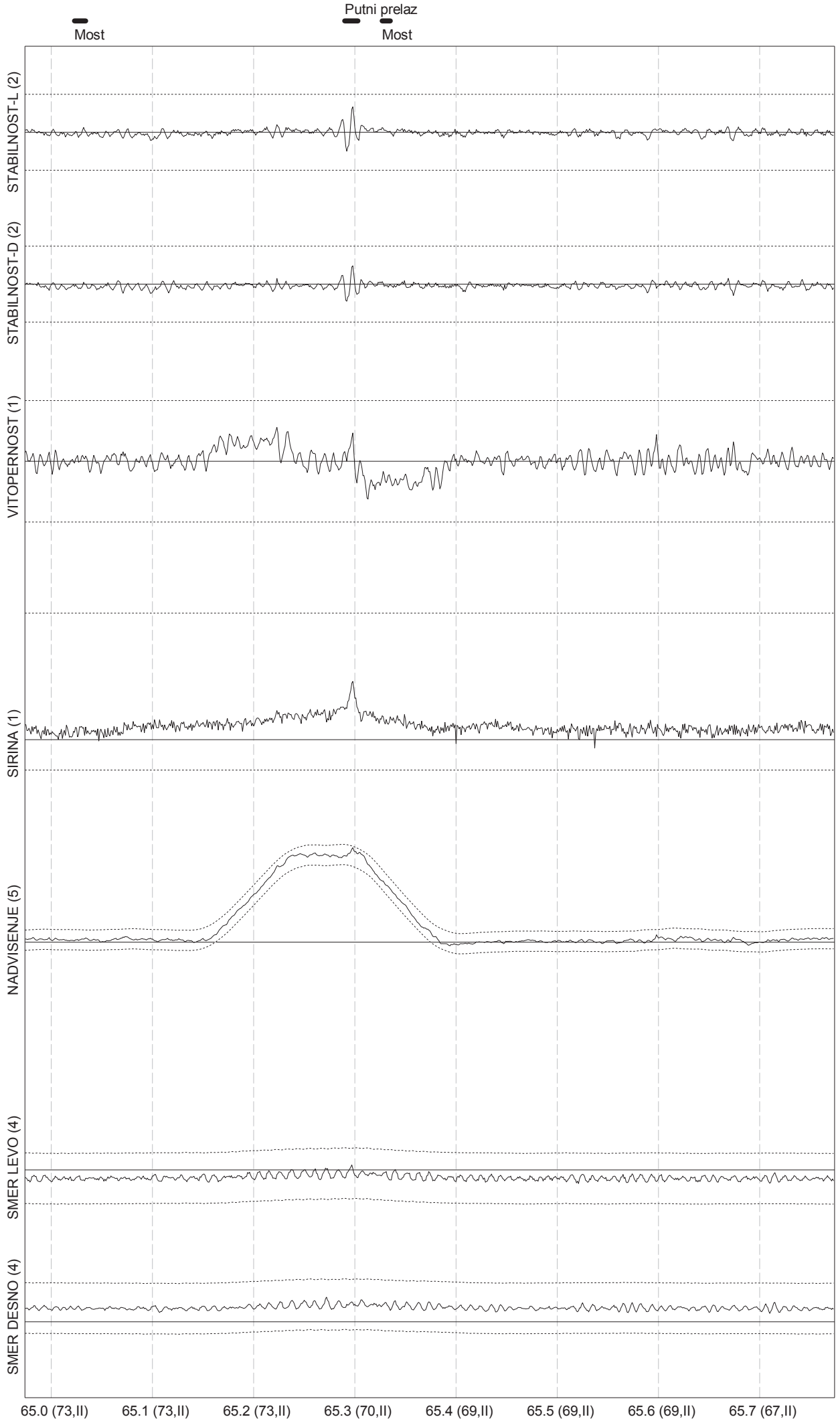


Merna vožnja: RESNIK-VALJEVO, 12.03.2014. str. 79/96



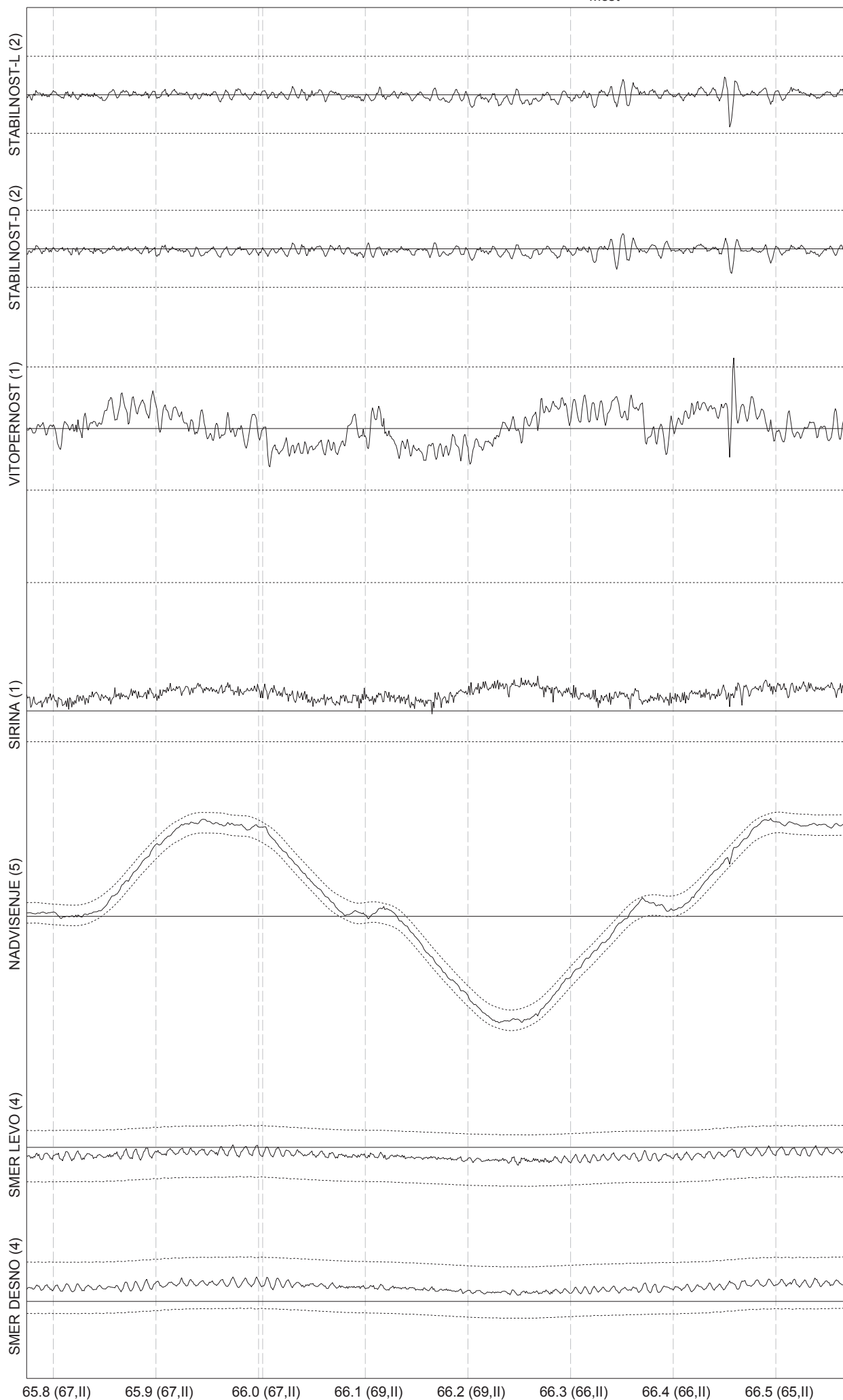
Merna vožnja: RESNIK-VALJEVO, 12.03.2014. str. 80/96

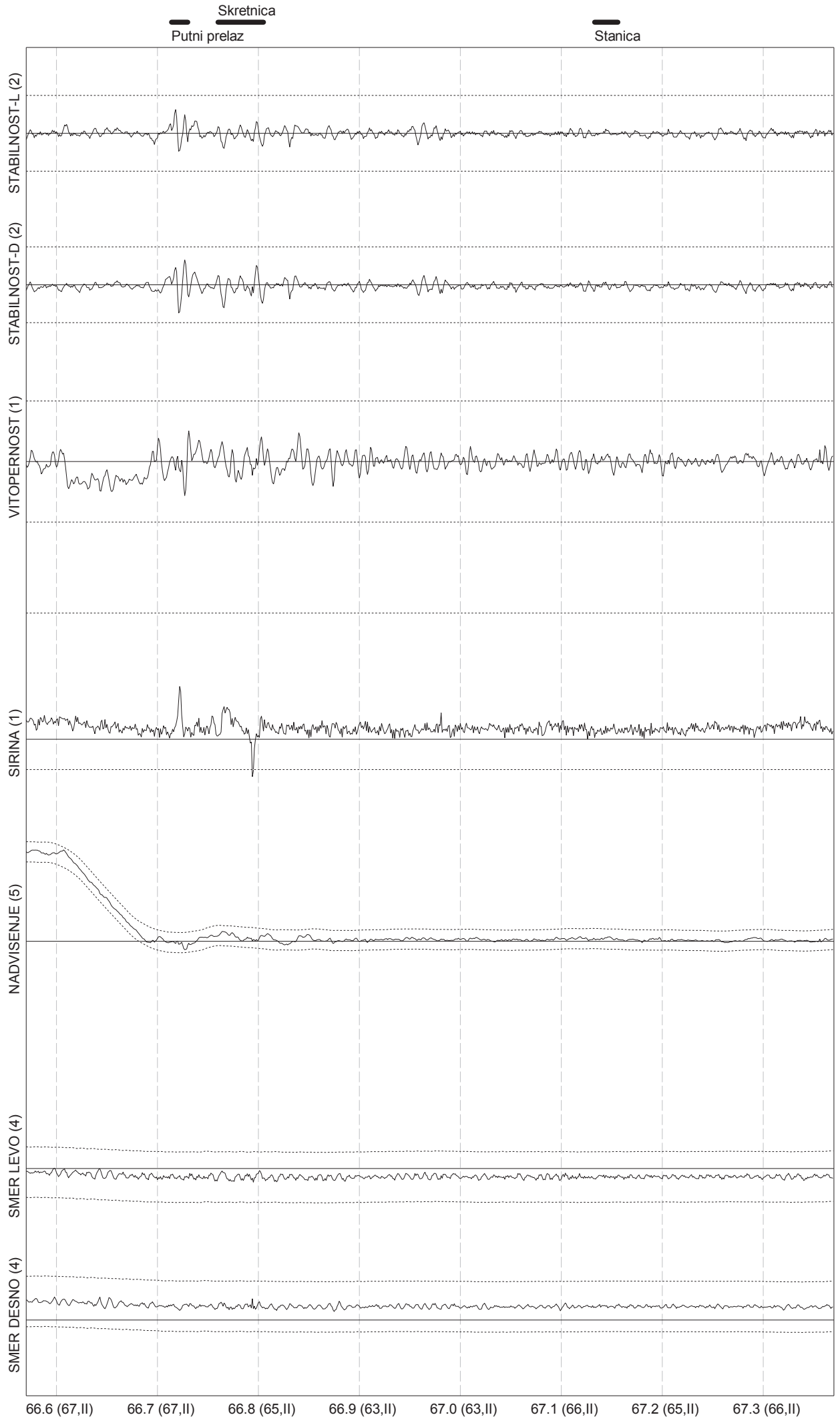






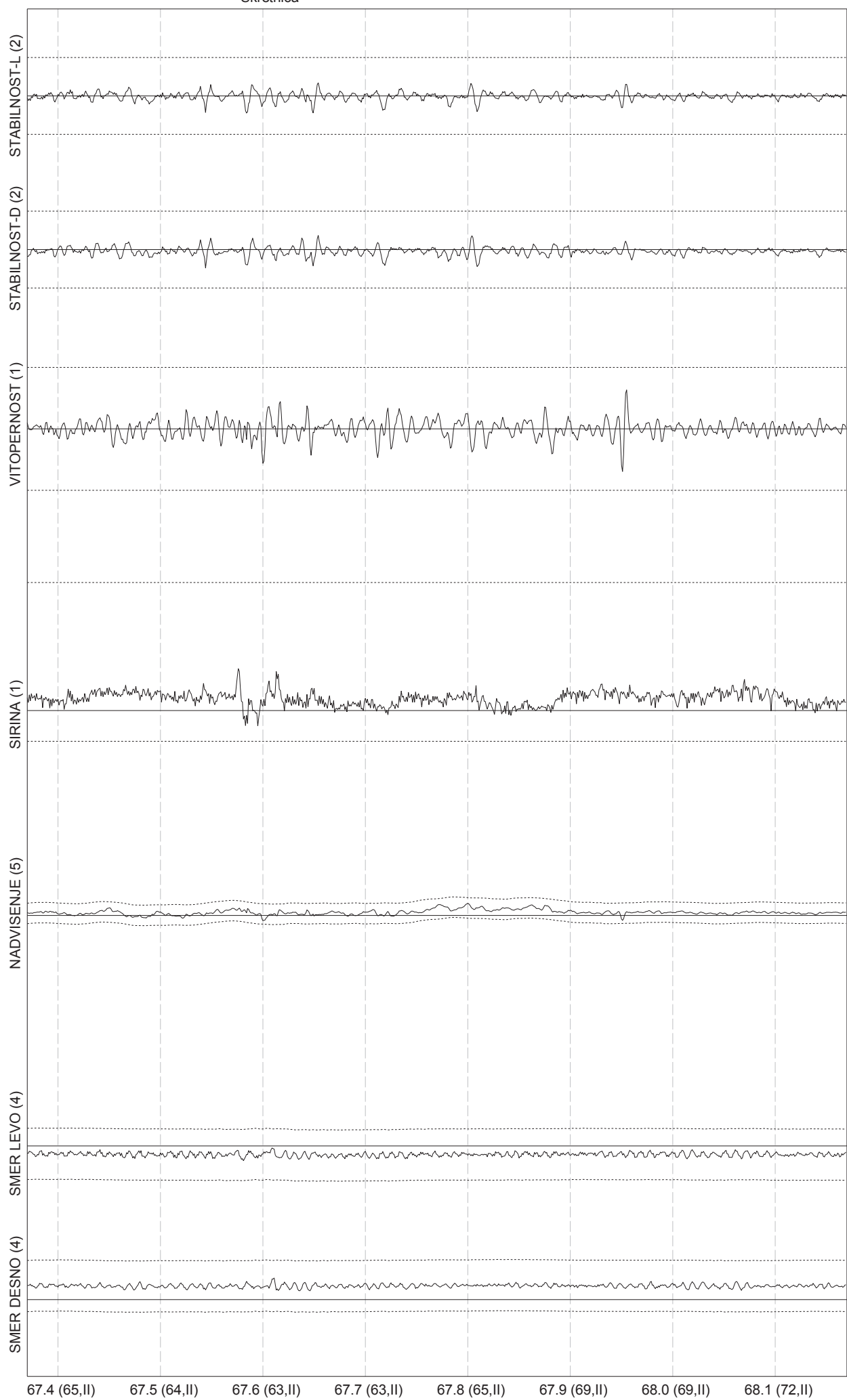
Merna vožnja: RESNIK-VALJEVO, 12.03.2014. str. 82/96





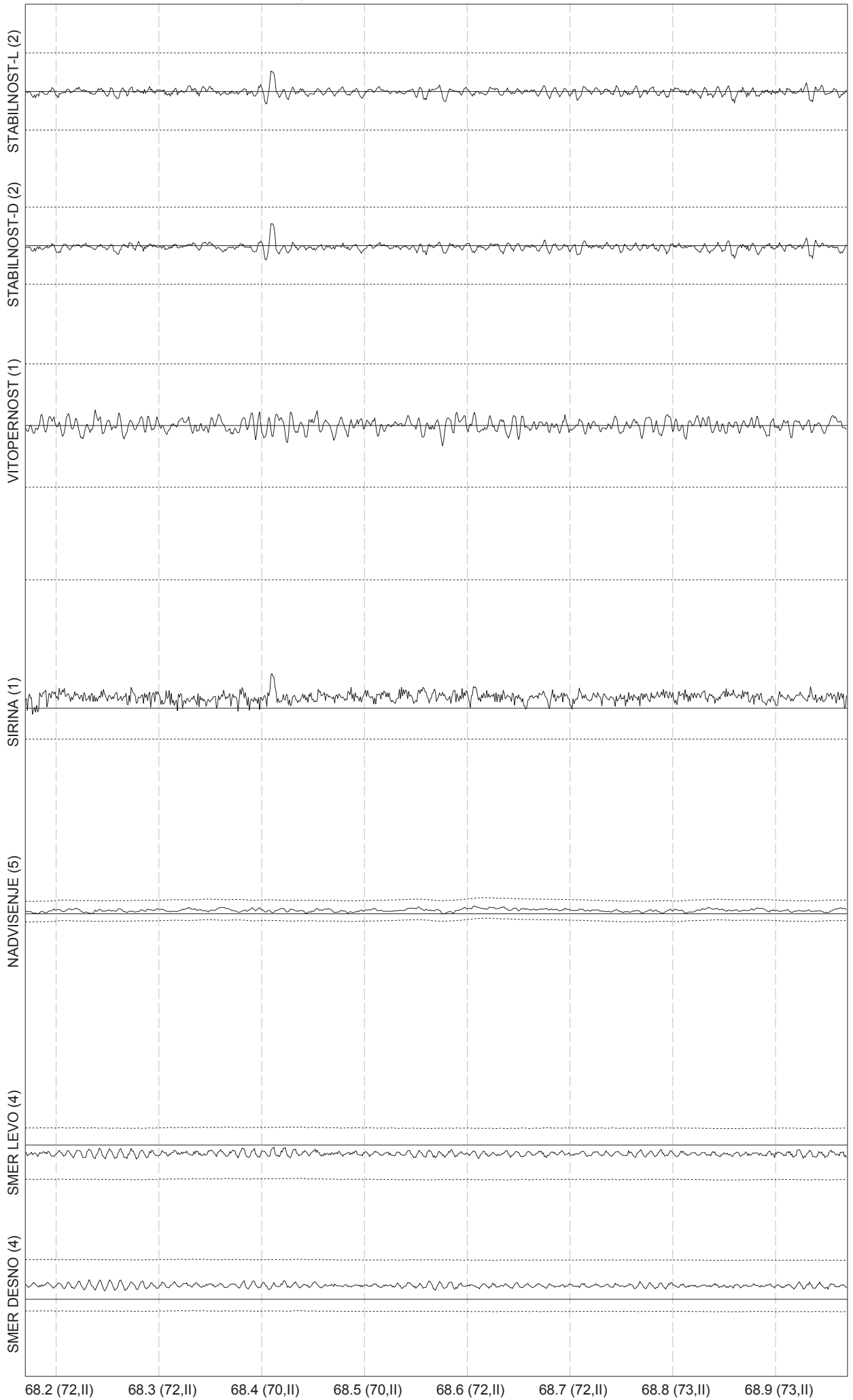
Skretnica

Merna vožnja: RESNIK-VALJEVO, 12.03.2014. str. 84/96

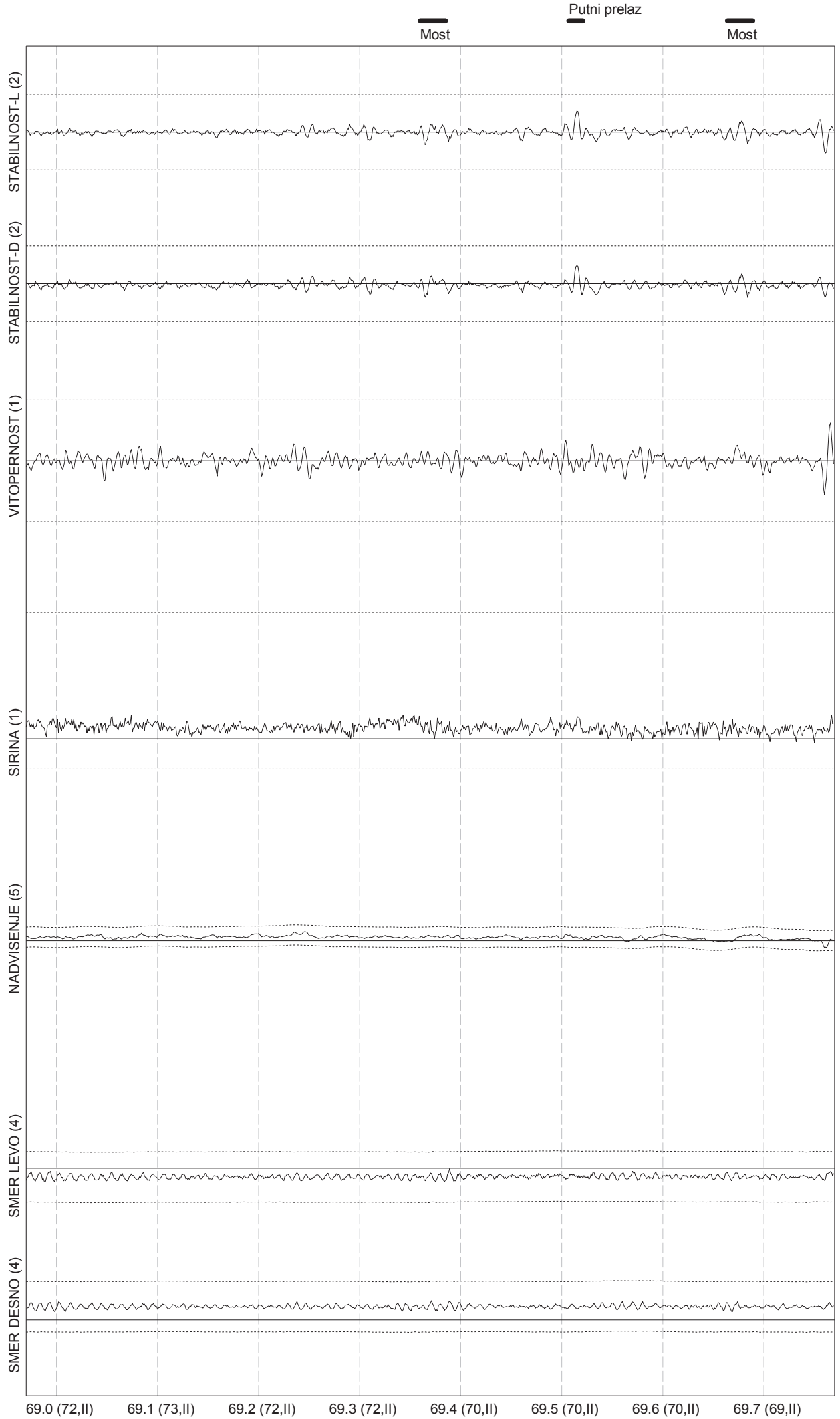


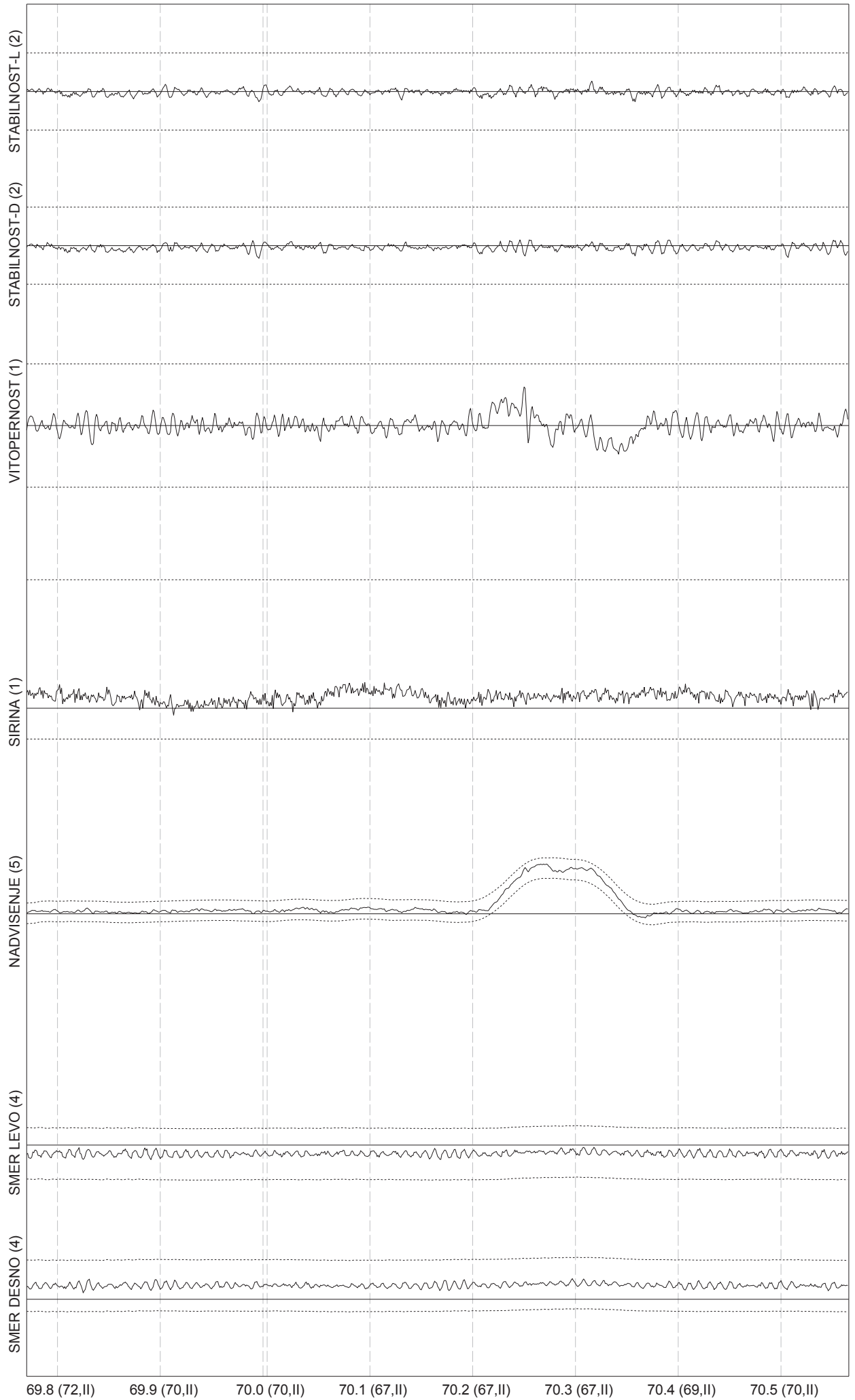
Putni prelaz

Merna vožnja: RESNIK-VALJEVO, 12.03.2014. str. 85/96



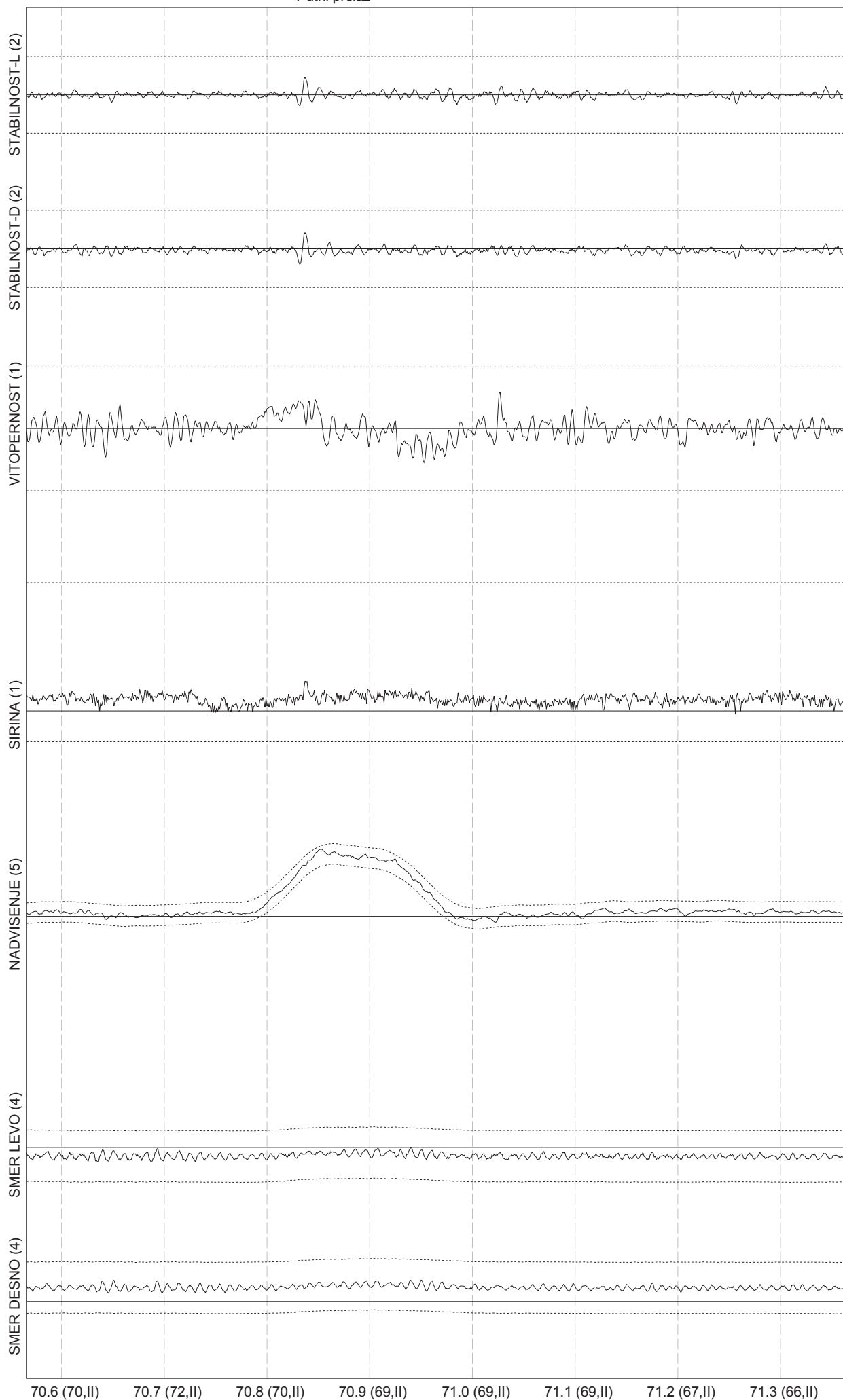
Merna vožnja: RESNIK-VALJEVO, 12.03.2014. str. 86/96



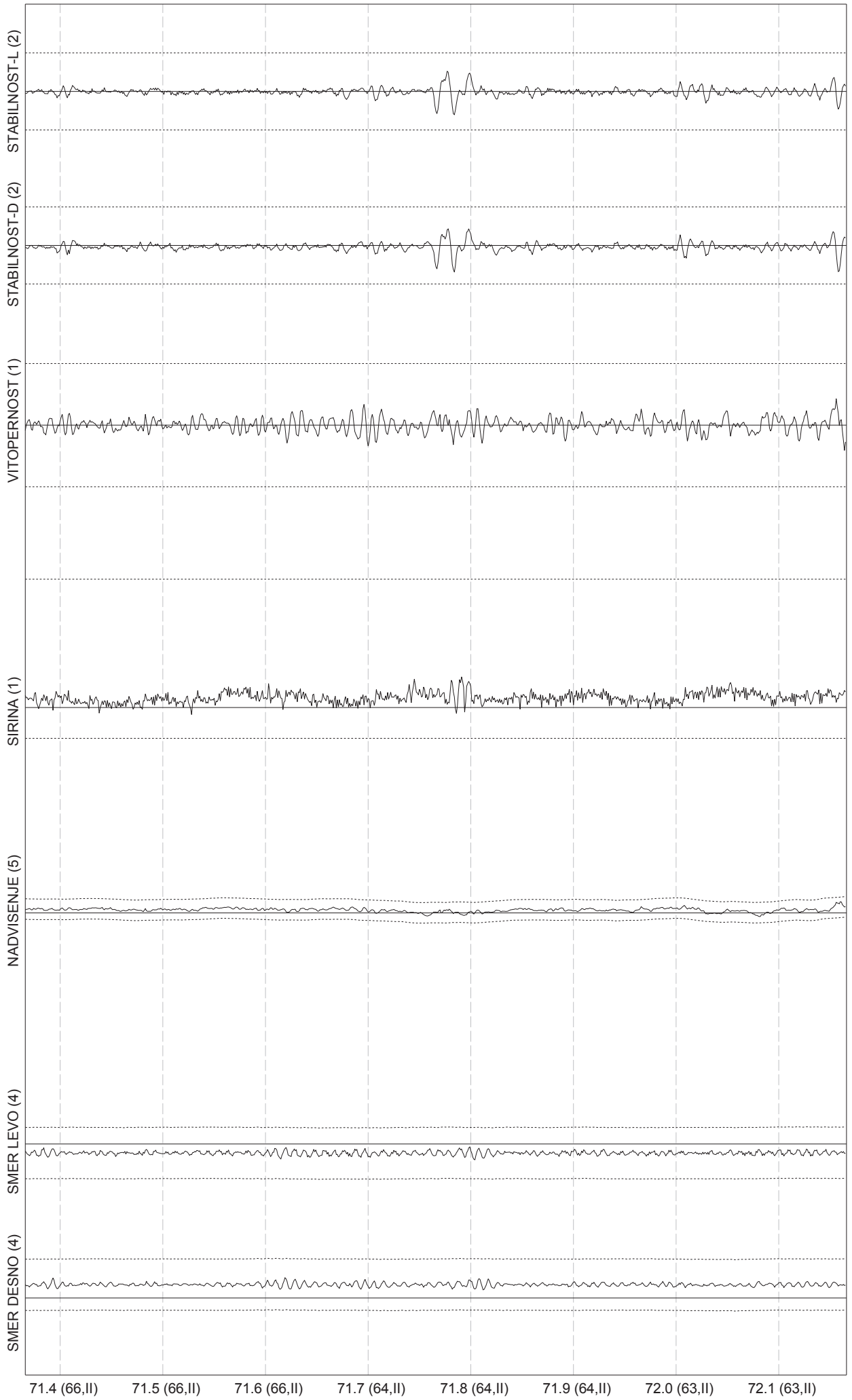


Putni prelaz

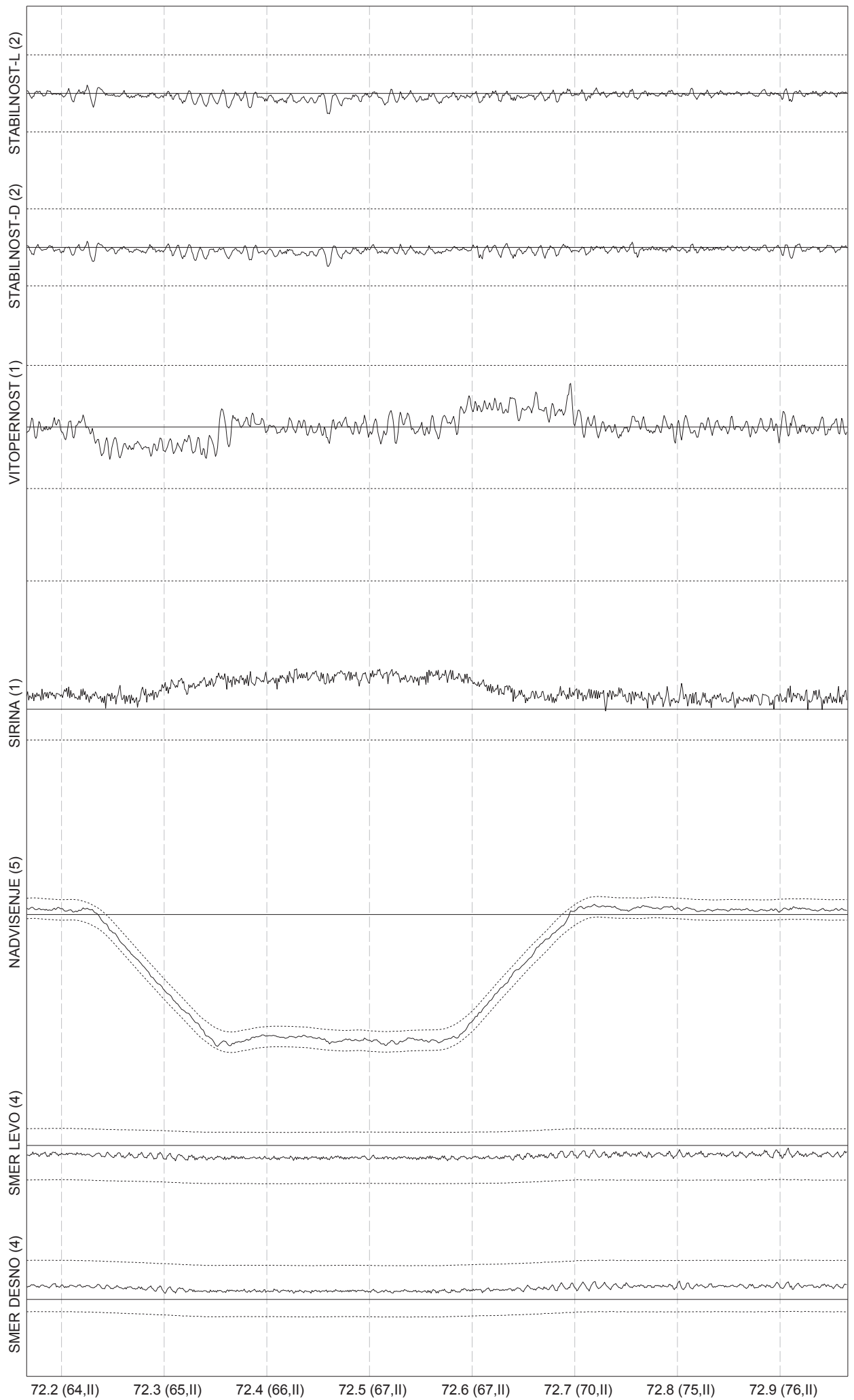
Merna vožnja: RESNIK-VALJEVO, 12.03.2014. str. 88/96



Merna vožnja: RESNIK-VALJEVO, 12.03.2014. str. 89/96

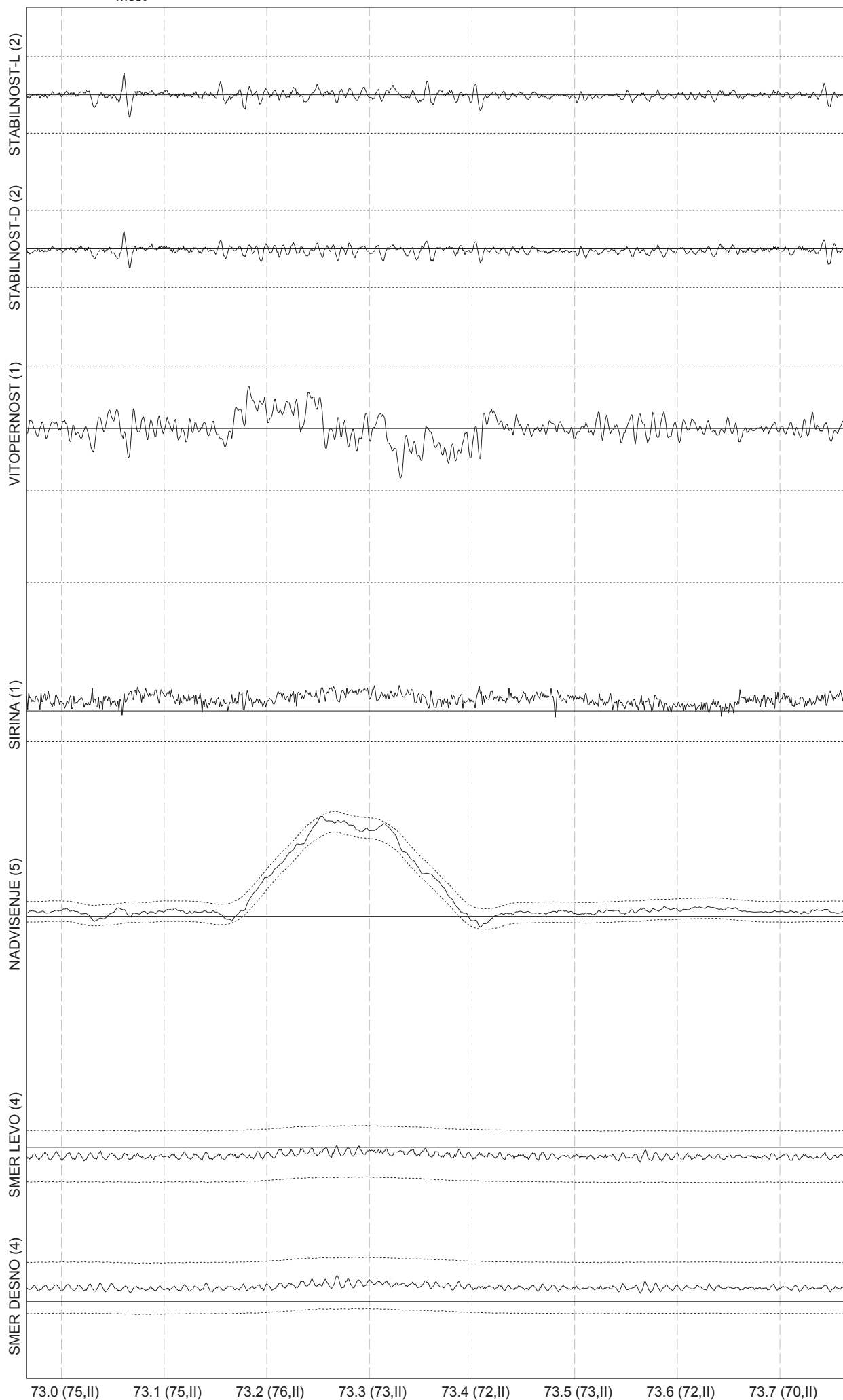




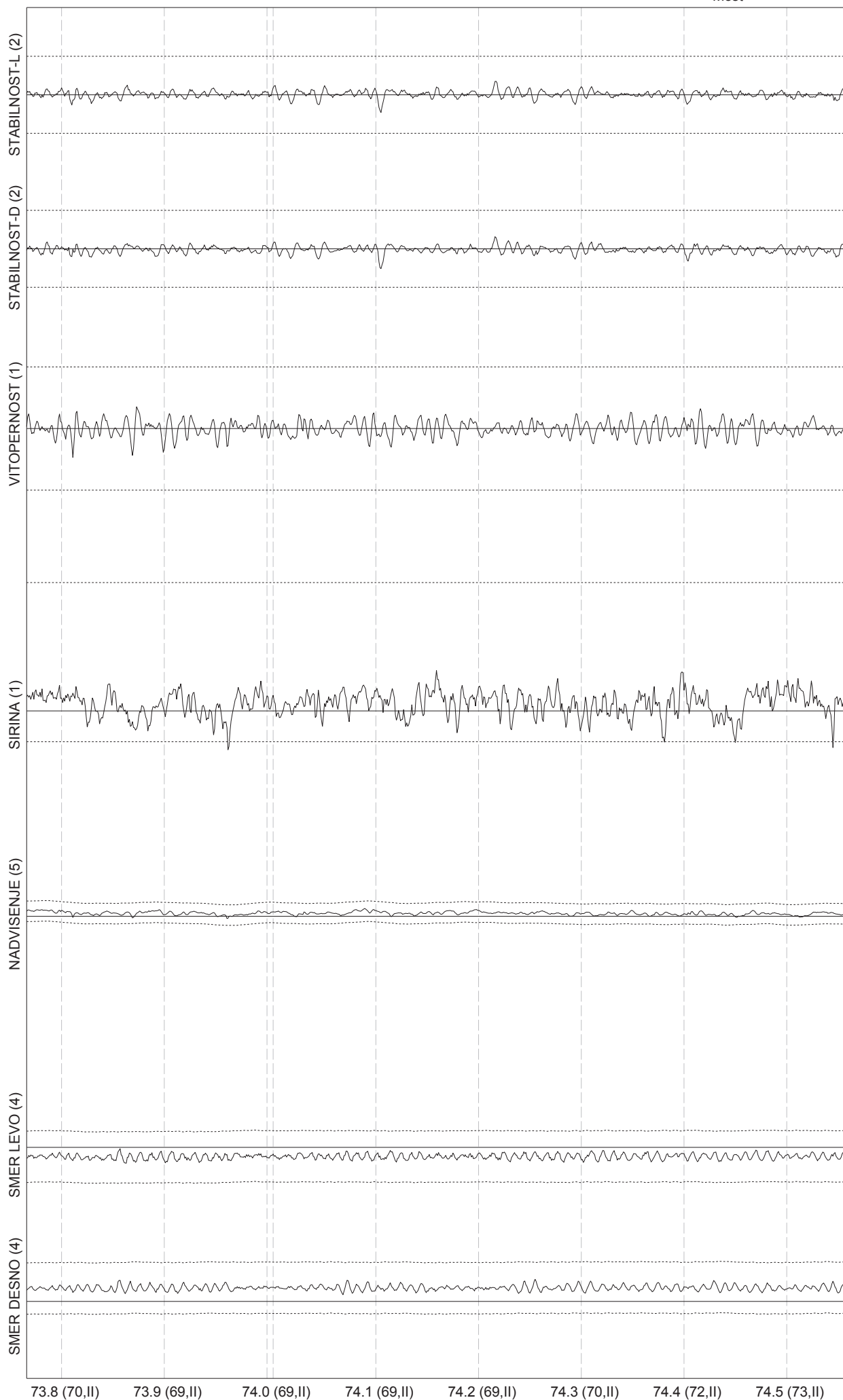


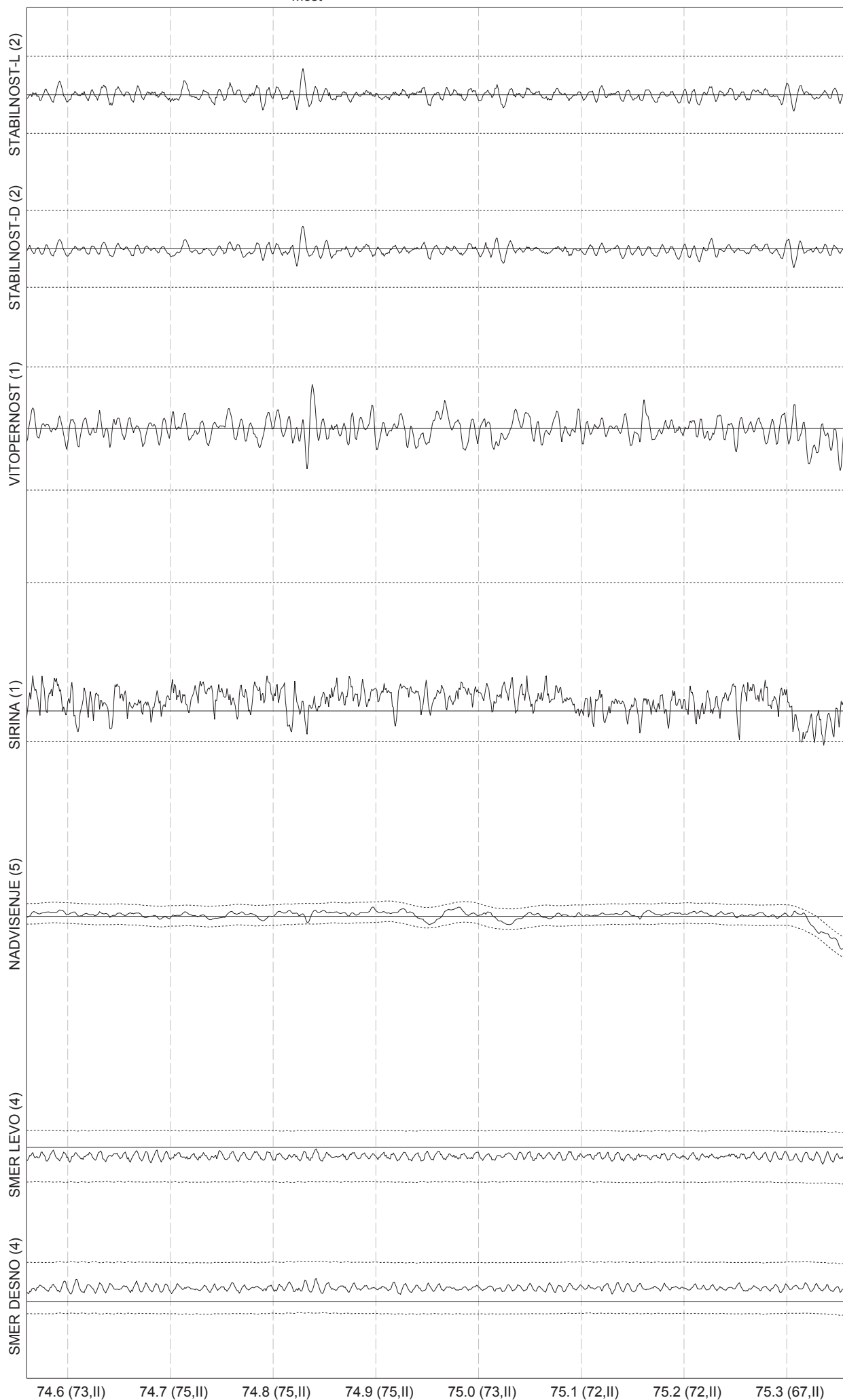
—  
Most

Merna vožnja: RESNIK-VALJEVO, 12.03.2014. str. 91/96

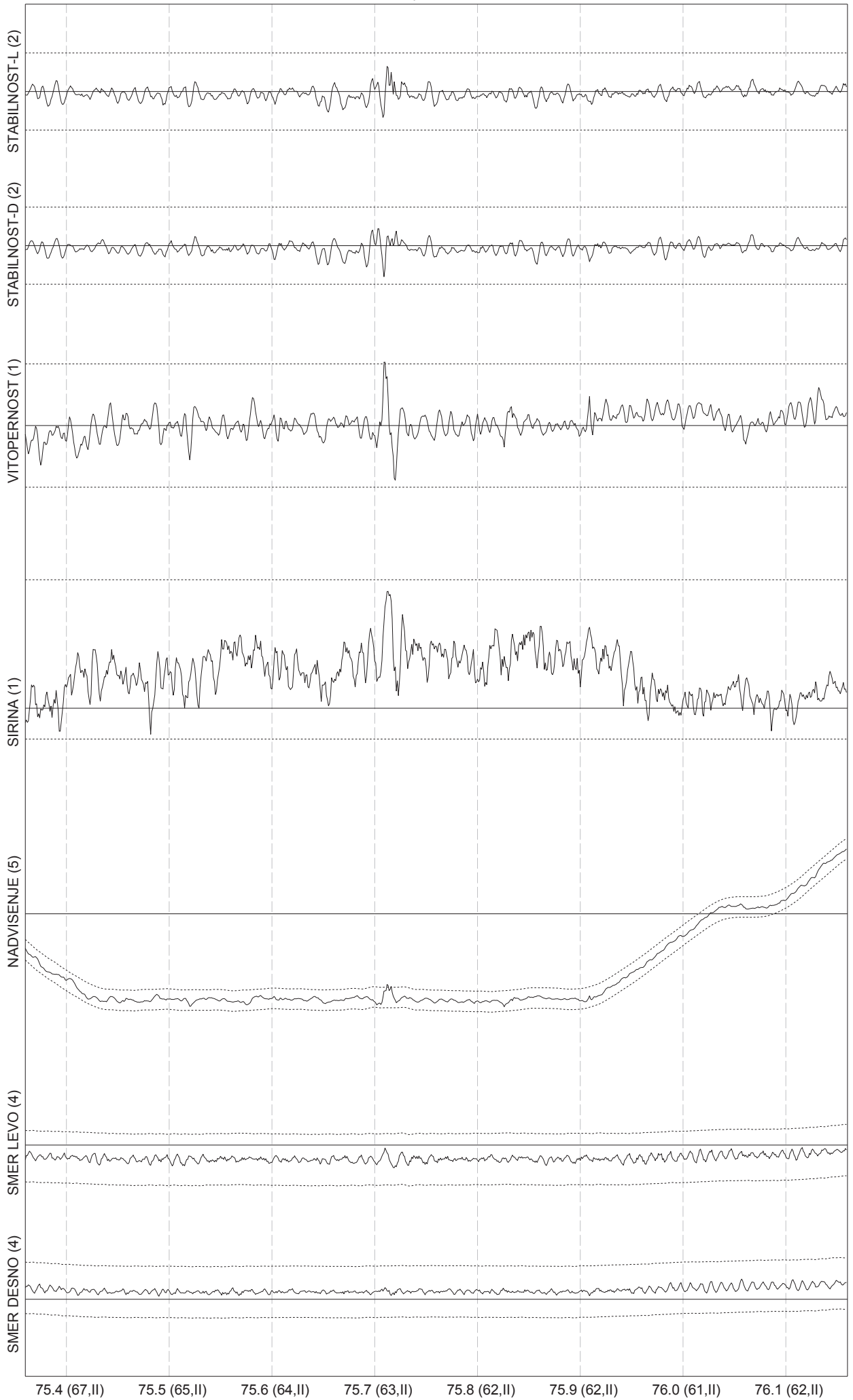


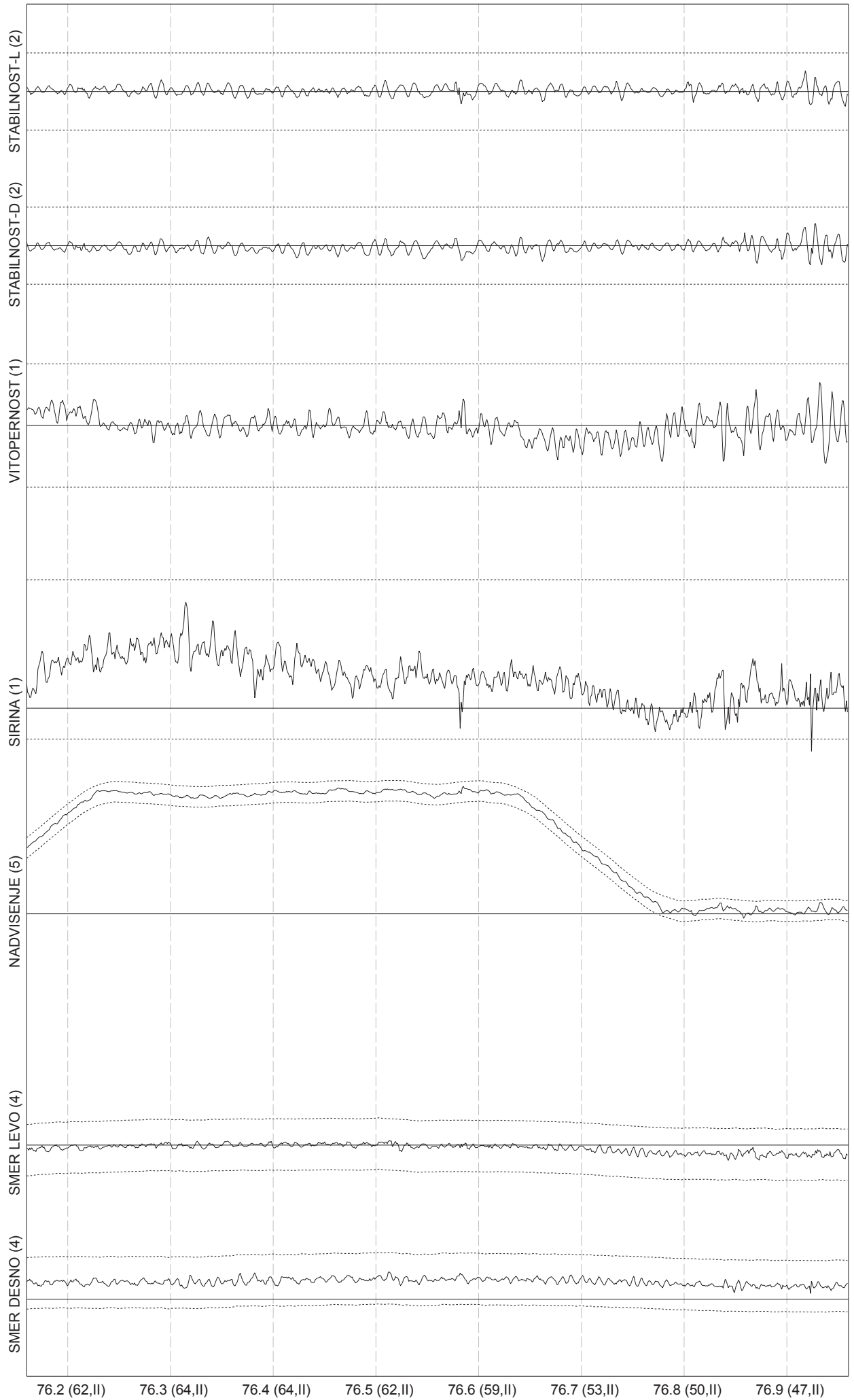
Merna vožnja: RESNIK-VALJEVO, 12.03.2014. str. 92/96

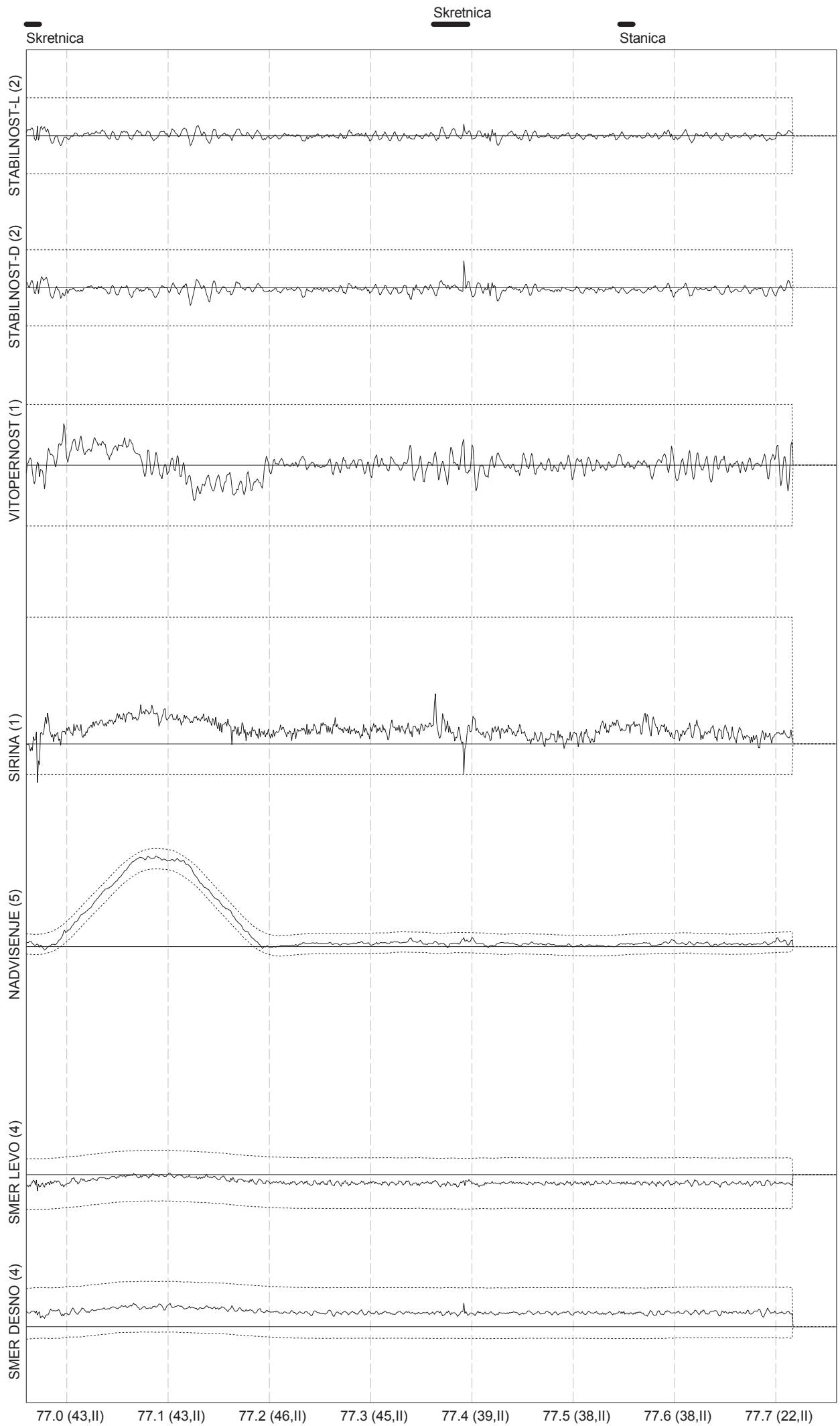




Merna vožnja: RESNIK-VALJEVO, 12.03.2014. str. 94/96







## ***Биографски подаци о кандидату***

Лука Лазаревић је рођен 10.06.1986. године у Ваљеву, где је завршио Основну школу и Гимназију са одличним успехом. Грађевински факултет Универзитета у Београду уписао је 2005. год. Дипломирао је 2009. год. са просечном оценом 8,40. Синтезни пројекат са темом „*Просторно обликовање рампе за надвишење према европским нормама ENV 13803-1*“ одбранио је са оценом 10. Мастер академске студије је завршио 2010. год. са просечном оценом 10. Мастер рад са темом „*Рампа за надвишење као просторни елемент трасе железничке пруге*“ одбранио је са оценом 10.

Докторске академске студије на Грађевинском факултету Универзитета у Београду уписао је 2010. год. На поменутиим студијама положио је све испите са просечном оценом 10. Запослен је на Грађевинском факултету Универзитета у Београду у звању асистента за уже научне области Планирање и пројектовање железница и Конструкција, грађење и одржавање железница. У настави је ангажован на извођењу вежби на предметима „Планирање и пројектовање железница 1“, „Планирање и пројектовање железница 2“, „Горњи строј железница“, „Одржавање железничких пруга“, „Саобраћајнице и животна средина“ и „Железничке станице“, као и на предмету „Саобраћајни инфраструктурни системи“ у периоду од 2011-2013 год. Досадашњи педагошки рад Луке Лазаревића високо је оцењен од стране предметних наставника и студената.

Активно учествује у истраживању и изради радова у научним часописима и на научним скуповима домаћег и међународног значаја. Коаутор је два поглавља у монографији међународног значаја (катеорије M14). До сада је објавио 7 радова у часописима на SCI листи (2 рада категорије M22 и 5 радова категорије M23), 3 рада категорије M24, 39 радова на међународним конгресима (36 радова категорије M33 и 3 рада категорије M34), 12 радова у домаћим часописима, 3 рада у часописима у SCOPUS бази, 5 радова на домаћим конгресима (катеорије M63). Остварио је 35 хетероцитата (од тога 2 хетероцитата у часописима категорије M21 и 3 хетероцитата у часописима категорије M23), као и 34 аутоцитата (од тога 12



аутоцитата у часописима са SCI листе). Учествовао је у изради две стручне студије, од којих је једна међународног карактера.

Учесник је Технолошког пројекта Министарства за просвету, науку и технолошки развој Републике Србије бр. 36012 „Истраживање техничко-технолошке, кадровске и организационе оспособљености Железница Србије са аспекта садашњих и будућих захтева Европске Уније“, чија је реализација у току. Учествовао је на једном међународном пројекту.

Члан је Кластера железница за Југоисточну Европу, као и Алијансе SEESARI (South East Europe Alliance for Rail Innovation). Члан је групе за грађевински део у Комисији за стандардизацију (П 256 – Примене на железници), Института за стандардизацију Србије. Члан је међуресорне радне групе за израду подзаконских аката на основу Закона о жичарама за транспорт лица.

## Изјава о ауторству

Потписани Лука Лазаревић

број уписа 5/2010

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

**ОДРЕЂИВАЊЕ КВАЛИТЕТА ГЕОМЕТРИЈЕ КОЛОСЕКА  
ПРИМЕНОМ ФРАКТАЛНЕ АНАЛИЗЕ МЕРЕНИХ ПОДАТАКА**

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 15.03.2016.



## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Лука Лазаревић

Број индекса 5/2010

Студијски програм Грађевинарство

Наслов рада Одређивање квалитета геометрије колосека применом фракталне анализе мерених података

Ментор проф. др Зденка Поповић, дипл. грађ. инж.

Потписани Лука Лазаревић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис докторанда**

У Београду, 15.03.2016.



## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

---

### ОДРЕЂИВАЊЕ КВАЛИТЕТА ГЕОМЕТРИЈЕ КОЛОСЕКА ПРИМЕНОМ ФРАКТАЛНЕ АНАЛИЗЕ МЕРЕНИХ ПОДАТАКА

---

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

Потпис докторанда

У Београду, 15.03.2016.

