УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ
ФАКУЛТЕТ

Департман за математику

Миодраг С. Ђорђевић

ДОПРИНОС АНАЛИЗИ ВРЕМЕНСКИХ НИЗОВА СА ЦЕЛОБРОЈНИМ ВРЕДНОСТИМА

Докторска дисертација

Ниш, 2016.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

Department of Mathematics

Miodrag S. Đorđević

CONTRIBUTIONS TO THE ANALYSIS OF INTEGER-VALUED TIME SERIES

PhD Thesis

Niš, 2016

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	др Мирослав М. Ристић, редовни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Нишу
Наслов:	ДОПРИНОС АНАЛИЗИ ВРЕМЕНСКИХ НИЗОВА СА ЦЕЛОБРОЈНИМ ВРЕДНОСТИМА
Резиме:	Дефинисани су нови тининг оператори као разлике два негативна биномна тининг оператора. На основу овако дефинисаних оператора, конструисани су целобројни временски низови са дискретном Лапласовом маргиналном расподелом. Одређене су најбитније статистичке особине ових низова. Изведене су оцене непознатих параметара и доказане њихове асимптотске особине. Сваки од модела је проверен на симулираним подацима, упоређен са неким постојећим моделима и за сваки је дата примена на реалним подацима. Приказан је и начин за идентификовање латентних компоненти модела.
Научна област:	математика
Научна дисциплина:	статистика случајних процеса
Кључне речи:	DLINAR, SDLINAR, CSDLINAR, INAR, маргинална дискретна Лапласова расподела, негативни биномни тининг оператор, оцењивање параметара, идентификација латентних компоненти
УДК:	519.246/.8(043.3)
CERIF класификација:	P160 Статистика, операционо истраживање, програмирање, актуарска математика
Тип лиценце Креативне заједнице:	

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	PhD Miroslav M. Ristić, full professor, University of Niš, Faculty of Sciences and Mathematics
Title:	CONTRIBUTIONS TO THE ANALYSIS OF INTEGER-VALUED TIME SERIES
Abstract:	New thinning operators are defined as differences of two negative binomial thinning operators. On the basis of such defined operators, time series with discrete Laplace marginals are defined. Some important features of all introduced models are determined. Estimators of unknown parameters are derived and their asimptotic behaviour are discussed. All models are checked on simulated data and compared with some of existing models. An application in real-life situations are presented. Also, a method for identification of latent components of the models are given
Scientific Field:	mathematics
Scientific Discipline:	statistics for stochastic processes
Key Words:	DLINAR, SDLINAR, CSDLINAR, INAR, discrete Laplace marginal distribution, negative binomial thinning operator, parameter estimation, identification of latent components
UDC:	519.246/.8(043.3)
CERIF Classification:	P160 Statistics, operations research, programming, actuarial mathematics
Creative Commons License Type:	**CC BY-NC-ND**

Милени, мами и тати

Садржај

Предговор

У многим ситуацијама из реалног живота, у природи и у друштву, појављују се временски низови који представљају податке добијене из неких повезаних система, чије вредности могу бити само ненегативни или из система чије вредности могу бити и негативни, и ненегативни цели бројеви. У циљу што бољег математичког моделирања таквих појава, развијени су ауторегресивни временски низови са целобројним вредностима. Као полазна тачка у разрешењу ове проблематике, појавили су се ауторегресивни процеси са непрекидним маргиналним расподелама. Они су се, нажалост, успешно могли примењивати само у случајевима када се радило о појавама које генеришу велике вредности. У ситуацијама када је требало пребројавати мали број одређених елемената неке популације или број реализација неког догађаја, овакви модели нису били адекватни. Седамдесетих година двадесетог века развијени су дискретни ауторегресивни модели покретних средина који су дали нешто боље резултате. Међутим, средином осамдесетих година двадесетог века, долази до, може се рећи, револуције у моделирању поменутих појава. Долази до развоја, такозваних, $INAR$ модела заснованих на биномном тининг оператору. Такви модели су били погодни за моделирање података који представљају бројност популација у којима елементи, у односу на претходно стање, могу да опстану или не. За популације чија се бројност може променити, не само преживљавањем, тј. ишчезавањем елемената, већ и интеракцијом постојећих елементата, овакви модели нису били адекватни. Нови помак у том правцу донели су Ristić, Bakouch и Nastić (2009), уводећи негативни биномни тининг оператор и $NGINAR$ временске низове са геометријском маргиналном расподелом.

У жижи овог рада се налазе управо модели временских низова у чијем су темељу управо негативни биномни тининг оператор и временски низови са маргиналном геометријском расподелом. Наиме, дефинисан је нови тининг оператор који представља разлику два негативна биномна тининг оператора и, уз помоћ тако дефинисаног тининг оператора, модел временских низова који је, у расподели, једнак разлици два независна временска низа са геометријским маргиналним расподелама. Овако добијени временски низови имају маргиналну дискретну Лапласову расподелу.

Након кратке историје развоја теорије целобројних ауторегресивних временских низова и прегледа битнијих резултата, у другој глави рада, уведен је нови тининг оператор као разлика два негативна биномна тининг оператора са једнако расподељеним бројачким низовима. На основу овог оператора, генерише се временски низ који, у расподели, представља разлику два независна временска низа са ненегативним целобројним вредностима, са истом маргиналном геометријском расподелом. Овако добијен временски низ има маргиналну симетричну дискретну Лапласову расподелу. Након најбитнијих особина тининг оператора, дате су и карактеристике временског низа, моменти, корелациона структура и условне статистичке величине, као и оцене непознатих параметара модела и њихово понашање. На крају су приказани резултати симулације и примена на реалним подацима. Овај део је базиран на резултатима објављеним у раду Nastić, Ristić и Djordjević (2016).

У трећој глави рада се дефинишу тининг оператор и нови временски низ који представљају уопштење оператора и модела из претходне главе. То уопштење се односи на нарушавање симетричности маргиналне расподеле. Наиме, тининг оператор сада представља разлику два негативна биномна тининг оператора чији бројачки низови имају различите геометријске расподеле, а временски низ, у расподели, представља разлику два независна временска низа са различитим маргиналним геометријским расподелама. Овако дефинисан низ има маргиналну асиметричну дискретну Лапласову расподелу. Као и у претходном делу, и у овде су детаљно анализиране особине тининг оператора. За временске низове је одређена расподела иновациониог временског низа, изведени моменти и корелациона структура. Посебна пажња је дата оцењивању параметара, где је изведено неколико различитих статистика које се могу користити као оцене параметара модела. Њихове карактеристике су приказане у резултатима симулације, а на крају је дата примена на реалним подацима. Већина резултата представљених у овом делу се ослања на рад Djordjević (2016a) и на нека још необјављена достигнућа.

Након тога је представљен комбиновани модел реда p, са маргиналном асиметричном дискретном Лапласовом расподелом. И за овај модел су изведене све битне особине, одређене оцене параметара и доказана њихова асимптотска карактеризација. Теоријски доказане особине су демонстриране на симулираним подацима, а на крају је дата примена на реалним подацима. Четврта глава рада се заснива на резултатима објављеним у Djordjević (2016b).

У последњем делу је приказана још једна примена ових модела. С обзиром на то да су посматрани временски низови, у расподели, добијени као разлика два независна временска низа са ненегативним целобројним вредностима, представљен је начин за идентификовање и евентуалну прогнозу тих латентних компоненти само на основу вредности реализација временског низа. Дакле, грубо речено, представљена је могућност откривања умањеника и умањиоца само на основу вредности разлике. И овај начин моделирања је проверен на симулираним моделима и, такође, примењен на реалним подацима.

Срдачно се захваљујем ментору, др Мирославу М. Ристићу, редовном професору Природно-математичког факултета у Нишу, на стрпљењу, упорности и великој помоћи, подједнако, како у досадашњем научно-истраживачком раду у области целобројних временских низова, тако и у изради ове дисертације.

Огромно хвала др Александру С. Настићу, ванредном професору Природно-математичког факултета у Нишу, на константној помоћи и безрезервној подршци током досадашњег научно-истраживачког рада и израде ове дисертације.

Захваљујем се и др Биљани Ч. Поповић, редовном професору Природно-математичког факултета у Нишу, пре свега на увођењу у свет статистике, а затим и на подршци и корисним сугестијама током израде дисертације.

Захвалност дугујем и др Миомиру С. Станковићу, редовном професору Факултета заштите на раду у Нишу, на великој пажњи коју је посветио овом раду.

Захваљујем се и пријатељима и колегама на подршци свих ових година. Хвала Ани на подршци, разумевању и стрпљењу. Хвала мојој породици на свим одрицањима, разумевању, подршци и вери.

Глава 1

Увод

Исходи многих појава у природи и у друштву, упркос истим околностима у којима се одвијају, нису увек исти. Због тога је за њихово описивање путем неког математичког модела пожељно користити статистичке методе и моделе. Дакле, исходи таквих појава се могу везати за реализације неких случајних променљивих. Ако се исходи неке појаве посматрају током времена, у одређеним временским интервалима, онда се од тих података добија реализација једног временског низа. Временски низ је један од појмова изведен из општијег - случајног процеса.

Нека је дат простор вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где је Ω скуп свих елементарних исхода, $\mathcal{F}$ σ-алгебра свих мерљивих догађаја у односу на меру вероватноћа P. Фамилија случајних променљивих дефинисаних на датом простору вероватноћа, $\{X_t,\ t \in T\}$, чини један случајни процес. У зависности од кардиналности индексног скупа T, постоје случајни процеси са непрекидним временом ако је скуп T непребројив, односно, случајни процеси са дискретним временом, у случају да је кардиналност скупа T једнака кардиналности скупа природних бројева. Временски низ ће бити случајни процес чији је индексни скуп T подскуп скупа целих бројева $\mathbb{Z}$.

Одређивање адекватног модела временских низова који би добро представио посматрану појаву је основни проблем. Избор модела зависи од много фактора, међу њима и од саме природе појаве. Уколико су регистроване вредности велике, онда се таква појава може добро моделирати временским низом чије су вредности реални бројеви. Као последица се, врло често, добија да је расподела вредности блиска нормалној расподели, јер релативно велики број расподела дискретног типа се може добро апроксимирати нормалном расподелом. Међутим, у ситуацијама када су вредности регистроване током времена цели бројеви, мали (мањи од 10^6) по апсолутној вредности или чак у случају појаве великог броја нула, претходно поменути модели се не могу успешно користити. Претходна ситуација може бити врло чест случај када се вредности реализација добијају као резултат пребројавања неких догађаја или пребројавања елемената неке популације. Такви подаци се неретко срећу у економији и финансијама, осигурању, медицини, метеорологији, телекомуникацијама, биологији, екологији, криминалистици, спорту.

1.1 Кратка еволуција $INAR$ модела

Последња четвртина двадесетог века је донела много помака на пољу моделирања појава са малим целим бројевима. У низу радова Jacobs и Lewis (1978a,b,c, 1983) су увели метод за формирање стационарних низова зависних случајних променљивих са одговарајућим маргиналним расподелама и корелационом структуром. Ови модели су базирани на ауторегресивним моделима покретних средина, $ARMA$ моделима.

Осамдесетих година долази до развоја различитих модела временских низова који се могу користити у решавању претходно описаних проблема. Модели који су показали велику способност у моделирању бројних појава, како у природи, тако и у друштву, су модели из класе целобројних ауторегресивних (integer-valued autoregressive - $INAR$) временских низова базираних на тининг операторима. Тининг оператор је дефинисан у раду Steutel и van Harn (1979) на следећи начин

$$\alpha \circ X = \sum_{i=1}^{X} B_i, \qquad (1.1.1)$$

где су случајне променљиве $B_i, i \geq 1$, независне и једнако расподељене по Бернулијевом закону расподеле са параметром $\alpha \in (0,1)$ и случајна променљива X је независна од случајних променљивих

$B_i, i \geq 1$. Случајне променљиве $B_i, i \geq 1$, представљају тзв. бројачки низ. С обзиром на то да случајна променљива $\alpha \circ X|X$ има биномну расподелу, овако дефинисан тининг оператор је назван биномни тининг оператор. Биномни тининг оператор, као и други тининг оператори представљаће основу за дефиницију великог броја ауторегресивних модела временских низова.

Први $INAR$ модели су уведени у раду McKenzie (1985) и, независно, у раду Al-Osh и Alzaid (1987). У поменутим радовима коришћен је биномни тининг оператор. $INAR$ модел првог реда је дефинисан на следећи начин

$$X_n = \alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n, \ n \geq 1,$$

где је $\alpha \in (0, 1)$, $\{\varepsilon_n\}$ је низ независних једнако расподељених ненегативних целобројних случајних променљивих са очекивањем μ_ε и коначном дисперзијом σ_ε^2, при чему су ε_n и X_{n-k} независне случајне променљиве за свако $k > 0$. Елементи бројачког низа биномног тининг оператора су независни од X_{n-1} и од елемената случајног низа $\{\varepsilon_n\}$. С обзиром на природу Бернулијеве расподеле, тј. чињеницу да елементи бројачког низа могу да узимају само вредности 0 и 1, овако дефинисан модел је био идеалан за пребројавање елемената неке популације, на такав начин да део $\alpha \circ X_{n-1}$ представља број елемената из претходног стања у популацији који су преживели до тренутног стања, а део ε_n може да представља број новопридошлих елемената у популацији. Отуда и назив за случајни низ $\{\varepsilon_n\}$ - иновациони низ. Показано је у овим радовима да овако дефинисан временски низ чини један стационаран, Марковски процес првог реда. Такође је приказана и презентација временског низа у облику покретних средина бесконачног реда. Дата је корелациона структура ових временских низова. Аутоковаријансна функција временског низа, $\gamma(k)$, задовољава рекурентну релацију $\gamma(k) = \alpha\gamma(k-1), k \geq 1$, односно, $\gamma(k) = \alpha^k\gamma(0)$. Јасно се види да су ово позитивно корелирани временски низови. На основу тога се лако, методом Yule-Walker-а изводе оцене непознатих параметара. Такође, израчунате су и оцене методом условних најмањих квадрата и методом максималне веродостојности. Израчунате су оцене за конкретан случај са Пуасоновом маргиналном расподелом.

Након тога, дошло је до развоја теорије $INAR$ модела и различитих уопштавања тининг оператора. Појавио се велики број

$INAR$ модела са различитим маргиналним расподелама. У радовима McKenzie (1986) и Al-Osh и Aly (1992) анализирани су модели са негативном биномном и геометријском маргиналном расподелом. Притом је у конструкцији временских низова коришћен биномни тининг оператор. Потврђена је претходно наведена рекурентна релација коју задовољава аутоковаријансна функција. Самим тим, и овде је реч о позитивно корелираним временским низовима. Доказана је стационарност временског низа и показано да су математичко очекивање и дисперзија елемента временског низа, условљеног претходном реализацијом, линеарне функције те реализације.

У раду Freeland и McCabe (2005) анализиране су особине модела са Пуасоновом маргиналном расподелом. Овај модел је претходно дефинисан у радовима Al-Osh и Alzaid (1987) и McKenzie (1985) и такође је заснован на биномном тининг оператору на следећи начин

$$X_n = \alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n, \ n \geq 1,$$

где је $\{X_n\}$ стационаран временски низ са Пуасоновом маргиналном расподелом са параметром $\lambda > 0$, $\mathcal{P}(\lambda)$, чији су елементи независни од елемената бројачког низа оператора $\alpha\circ$, $\{\varepsilon_n\}$ је низ независних једнако расподељених случајних променљивих са Пуасоновом маргиналном расподелом са параметром $\lambda/(1-\alpha)$, такође, независних од елемената бројачког низа, при чему су ε_n и X_{n-k} независне случајне променљиве за свако $k > 0$. У овом раду су дате оцене непознатих параметара методом условних најмањих квадрата, као и Yule-Walker-овом методом и доказана је асимптотска еквивалентност ових оцена, тј. њихова конвергенција у расподели ка истом закону расподеле - нормалном.

Анализа изложена у раду Du и Li (1991) се није односила ни на једну расподелу конкретно, већ је посматран уопштени модел реда p. Доказана је егзистенција модела и потврђене ергодичност и стационарност. Што се корелационе структуре модела тиче, показана је нешто сложенија, сразмерно реду модела, рекурентна релација $\gamma(k) = \alpha_1\gamma(k-1) + \alpha_2\gamma(k-2) + \cdots + \alpha_p\gamma(k-p), k \in \mathbb{Z}$, а самим тим и позитивна корелираност временских низова овог типа.

У раду Ristić, Bakouch и Nastić (2009) уведен је временски низ са геометријском маргиналном расподелом, базиран на негативном биномном тининг оператору. Наиме, аутори су дефинисали нови тининг оператор на следећи начин

$$\alpha * X = \sum_{i=1}^{X} W_i, \tag{1.1.2}$$

где су случајне променљиве $W_i, i \geq 1$, независне и једнако расподељене, са геометријском, $Geom(\alpha/(1+\alpha))$, расподелом, $\alpha \in (0,1)$ је математичко очекивање случајних променљивих $W_i, i \geq 1$, и случајна променљива X је независна од случајних променљивих $W_i, i \geq 1$. С обзиром на то да случајна променљива $\alpha * X|X$ има негативну биномну расподелу, овако дефинисан тининг оператор је назван негативни биномни тининг оператор. Временски низ, означен са $NGINAR(1)$, је дефинисан на следећи начин

$$X_n = \alpha * X_{n-1} + \varepsilon_n, \; n \geq 1,$$

где је $\{X_n\}$ стационаран временски низ са геометријском маргиналном расподелом, $Geom(\mu/(1+\mu)), \mu > 0$, са математичким очекивањем μ, притом независан од бројачког низа $\{W_n\}$ оператора $\alpha*$, $\{\varepsilon_n\}$ је низ независних једнако расподељених ненегативних целобројних случајних променљивих, такође, независних од елемената бројачког низа, при чему су ε_n и X_{n-k} независне случајне променљиве за свако $k > 0$. За разлику од Бернулијеве расподеле, која може да, приликом реализација, добије само две вредности, 0 и 1, геометријска расподела може да генерише било који ненегативан број. То је донело нови квалитет у моделирању. Наиме, овако дефинисан временски низ је могао да се користи приликом моделирања појава у којима елементи популације нису само преживљавали или не, него су могли да интерагују и да на тај начин генеришу нове елементе популације. Наравно број елемената популације је и даље могао да се увећа путем новопридошлих елемената, што се на модел одсликавало преко иновационог низа. Овако дефинисан модел је Марковљев процес првог реда, ергодичан и строго стационаран. Аутори су потврдили да је корелациона структура облика $\gamma(k) = \alpha^k \gamma(0)$. Изведене су Yule-Walker-ове оцене и оцене методом условних најмањих квадрата и доказана њихова асимптотска еквивалентност.

Упоредо са сложеношћу појава из стварног живота које су захтевале математички модел, нови $INAR$ модели су развијани. Системи код којих тренутно стање не зависи само од претходног стања, већ зависи од p претходних стања, индуковали су развој целобројних ауторегресивних модела вишег реда. Такви модели су разматрани у радовима Alzaid и Al-Osh (1990) и Du и Li (1991).

Нешто сложеније моделе који представљају мешавину геометријски расподељених бројачких низова уводе Ristić и Nastić (2012). У том раду се временски низ дефинише користећи биномни тининг оператор $\alpha\circ_n$, дефинисан изразом (1.1.1) и негативни биномни тининг оператор $\alpha *_n$, дефинисан изразом (1.1.2), са одређеним вероватноћама, на следећи начин

$$X_n = \begin{cases} \alpha \circ_n X_{n-1} + \varepsilon_n, & \text{са вероватноћом } \phi_1, \\ \alpha *_n X_{n-2} + \varepsilon_n, & \text{са вероватноћом } \phi_2, \\ \alpha *_n X_{n-3} + \varepsilon_n, & \text{са вероватноћом } \phi_3, \quad n \geq 1, \\ \vdots & \\ \alpha *_n X_{n-p} + \varepsilon_n, & \text{са вероватноћом } \phi_p, \end{cases}$$

где је $\sum_{i=1}^{p} \phi_i = 1$, $\alpha \in (0,1)$, и важе следећи услови: i)$\{\varepsilon_n\}$ је низ независних и једнакорасподељених случајних променљивих са коначним математичким очекивањем и коначном дисперзијом, ii) случајна променљива ε_n је независна од X_m, $\alpha \circ_{m+1} X_m$, $\alpha *_{m+j} X_m$, $m < n$, $j = 2, \ldots, p$, iii) тининг оператори се у једном тренутку примењују независно један од другог, iv) тининг оператори примењени приликом генерисања случајне променљиве X_n су независни од случајних променљивих $X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots$ Доказана је егзистенција и јединственост овог модела. Такође, потврђене су ергодичност и строга стационарност. Аутоковаријансна функција овог модела вишег реда задовољава следећу рекурентну релацију $\gamma(k) = \alpha_1\phi_1\gamma(|k-1|) + \alpha_2\phi_1\gamma(|k-2|) + \cdots + \alpha_p\phi_p\gamma(|k-p|), k \in \mathbb{Z}$. Израчунате су оцене непознатих параметара и доказана њихова асимптотска нормалност и строга постојаност.

Поменути модели су били модели са целобројним вредностима, али ограничени искључиво на ненегативне вредности. Примена је захтевала развој целобројних временских низова са вредностима у комплетном скупу целих бројева. У раду Freeland (2010), уведен је временски низ са симетричном Скеламовом расподелом, назван $TINAR(1)$ временски низ. Наиме, аутор је дефинисао нови тининг оператор на следећи начин

$$\alpha \star Z_n = (\alpha \circ X_n - \alpha \circ Y_n)|(X_n - Y_n),$$

где је $\alpha \in [0,1)$, $\alpha\circ$ биномни тининг оператор, а X_n и Y_n су две независне случајне променљиве са Пуасоновом расподелом са параметром $\lambda/(1-\alpha)$. Затим је користећи резултате рада Freeland и McCabe (2005), у којем је анализиран $INAR(1)$ временски низ са Пуасоновом маргиналном расподелом, дефинисао нови целобројни ауторегресивни временски низ на следећи начин

$$Z_n = \alpha \star Z_{n-1} + \varepsilon_n,\ n \geq 1,$$

где су $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ два независна $INAR(1)$ временска низа са Пуасоновом маргиналном расподелом са параметром $\lambda/(1-\alpha)$ и са, такође независним, иновационим низовима, опет, расподељеним по Пуасоновом закону расподеле са параметром λ. Поред, стандардно доказаних стационарности, ергодичности, особине Маркова и позитивне корелираности, дефинисан је алтернативни модел на следећи начин

$$Z_n = \alpha \star (-Z_{n-1}) + \varepsilon_n,\ n \geq 1.$$

Показано је даје овако дефинисан модел негативно корелисан и да за њега важе слична својства као и за оригинални модел.

У раду Chesneau и Kachour (2012) дефинисан је, такозвани, знаковни $INAR$ временски низ. Прво су искористили знаковни тининг оператор, дефинисан у Latour и Truquet (2008), на следећи начин

$$F \circ X = \begin{cases} sgn(X)\sum_{i=1}^{|X|} Y_i, & X \neq 0 \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

где су елементи бројачког низа, случајне променљиве $Y_n, n \geq 1$ независне и једнако расподељене по закону расподеле F, а случајна променљива X независна од елемената бројачког низа. Знаковни $INAR(1)$ временски низ, у ознаци $SINAR(1)$, је дефинисан на следећи начин

$$X_n = F \circ X_{n-1} + \varepsilon_n,\ n \geq 1,$$

где је $\{\varepsilon_n\}$ је низ независних једнако расподељених случајних променљивих са математичким очекивањем μ_ε и коначном дисперзијом

σ_{ε}^2, независних од елемената бројачког низа тининг оператора $F\circ$, при чему су ε_n и X_{n-k} независне случајне променљиве за $k > 0$. За овако дефинисан модел, аутори су показали начин за одређивање маргиналне расподеле временског низа на основу задате расподеле иновационог низа.

Још један занимљив модел са могућим негативним вредностима је дефинисан у раду Alzaid и Omair (2014). Најпре је дефинисан, такозвани, проширени биномни тининг оператор на следећи начин

$$S_{\alpha,\theta}(Z) = (sgnZ)\sum_{i=1}^{|Z|} Y_i + \sum_{i=1}^{W(Z)} B_i,$$

где је Z целобројна случајна променљива, $\alpha \in [0,1]$, $\theta \geq 0$, $\{Y_i\}$ низ независних и једнако расподељених случајних променљивих са Бернулијевом расподелом са параметром α, независних од случајних променљивих B_i, Z и $W(Z)$. $\{B_i\}$ је низ независних и једнако расподељених случајних променљивих са законом расподеле

$$B_i : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \alpha(1-\alpha) & 1-2\alpha(1-\alpha) & \alpha(1-\alpha) \end{pmatrix},$$

независних од Z и $W(Z)$, а $W(Z)$ је случајна променљива таква да $W(Z)|Z = z$ има Беселову расподелу са параметрима $|z|, \theta$. Целобројни, ауторегресивни временски низ, означен са $PDINAR(1)$ се дефинише на следећи начин

$$Z_t = \delta S_{\alpha,\theta}(Z_{t-1}) + \varepsilon_t, \; t \geq 1,$$

где је $\{\varepsilon_t\}$ низ независних, једнако расподељених случајних променљивих чија расподела одговара разлици две независне Пуасонове расподеле са параметрима θ_1 и θ_2, односно, Скеламовој двопараметарској расподели, при чему је ε_t независно од $Z_{t-k}, k \geq 1$. δ је параметар који узима вредности 1 и -1.

Затим је у раду Nastić, Ristić и Djordjević (2016) разматран временски низ са симетричном дискретном Лапласовом расподелом. Користећи негативни биномни тининг оператор, уведен у раду Ristić, Bakouch и Nastić (2009), најпре је дефинисан нови тининг оператор на следећи начин

$$\alpha \odot Z_n = (\alpha * X_n - \alpha * Y_n)|(X_n - Y_n),$$

где је $\alpha \in [0, 1)$, $\alpha*$ негативни биномни тининг оператор, а X_n и Y_n су две независне случајне променљиве са геометријском расподелом са параметром $\mu/(1 + \mu)$. Затим је конструисан нови целобројни ауторегресивни временски низ са дискретном Лапласовом расподелом, на следећи начин

$$Z_n = \alpha \odot Z_{n-1} + e_n,\ n \geq 1,$$

где је $\{Z_n\}$ временски низ са дискретном Лапласовом расподелом, иновациони низ $\{e_n\}$, низ независних, једнако расподељених случајних променљивих таквих да су e_n и Z_{n-k} независне случајне променљиве за свако $k > 0$. Овај временски низ има ознаку $DLINAR(1)$. За овако дефинисан временски низ важи да је то један Марковљев, строго стационаран и ергодичан временски низ. Такође потвђена је позитивна корелираност елеманта низа, као и дата форма за добијање временског низа са скоро идентичним карактеристикама, али негативном аутокорелационом функцијом. Приказана је и врло интересантна презентација овог модела коришћењем негативног биномног тининг оператора.

Временски низ са асиметричном дискретном Лапласовом расподелом био је у центру пажње рада Barreto-Souza и Bourguignon (2015). Овај модел представља, у неком смислу, уопштење $DLINAR(1)$ модела јер су маргиналне расподеле $NGINAR(1)$ временских низова који се користе у дефиницији тининг оператора $\alpha\odot$ различите геометријске расподеле.

У раду Djordjević (2016a) дато је уопштење временских низова са дискретном Лапласовом расподелом дефинисањем $SDLINAR(1)$ модела, модела са асиметричном дискретном Лапласовом маргиналном расподелом, са сва четири различита параметра. Претходно поменути модели временских низова са дискретном Лапласовом маргиналном расподелом су главна тема овог рада. У раду су потврђене особина Маркова, ергодичност и строга стационарност. Позитивна корелираност овог временског низа је представљена нешто сложенијом формулом

$$\gamma_Z(k) = \alpha^{|k|}\gamma_{ZZ^+}(0) + \beta^{|k|}\gamma_{ZZ^-}(0), k \in \mathbb{Z},$$

где је $\gamma_Z(k)$ аутоковаријансна функција временског низа $\{Z_n\}$, а $\gamma_{ZZ^+}(0)$ и $\gamma_{ZZ^-}(0)$ коваријансе низа $\{Z_n\}$ и $\{Z_n^+\}$, односно, низа $\{Z_n\}$

и $\{Z_n^-\}$. При томе су случајне променљиве Z_n^+ и Z_n^- дефинисане на следећи начин $Z_n^+ = Z_n I_{\{Z_n \geq 0\}}$, а $Z_n^- = -Z_n I_{\{Z_n < 0\}}$.

Упоредо са сложеношћу појава из стварног живота које су захтевале математички модел, развијани су и нови $INAR$ модели који би требало да представљају решење постављених проблема. Системи код којих тренутно стање не зависи само од претходног стања, већ зависи од p претходних стања, индуковали су развој целобројних ауторегресивних модела вишег реда. У раду Kim и Park (2008) дефинисан је целобројни ауторегресивни модел реда p, коришћењем знаковног биномног тининг оператора, $INAR(p)$. Најпре је дефинисан знаковни биномни тининг оператор на следећи начин

$$\alpha \odot X = sgn(\alpha) sgn(X) \sum_{i=1}^{|X|} W_i,$$

где су елементи бројачког низа, случајне променљиве $W_n, n \geq 1$, независне и једнако расподељене случајне променљиве са Бернулијевом расподелом са параметром $|\alpha|$, $\alpha \in (-1, 1)$. Елементи бројачког низа су независни и од случајне променљиве X. На основу овако дефинисаног оператора, конструише се целобројни ауторегресивни временски низ на следећи начин

$$X_n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \odot X_{n-i} + \epsilon_n,\ \ n \geq p,$$

где је $\{\epsilon_n\}$ низ независних и једнако расподељених случајних променљивих са коначним математичким очекивањем и коначном дисперзијом, а $\alpha_i \in [-1, 1], i = 1, \ldots, p$. За елементе низа $\{\epsilon_n\}$ мора да важи и услов да је случајна променљива ϵ_n некорелисана са X_{n-k}, $k \geq 1$. Такође, елементи бројачких низова који учествују у $\alpha_i \odot X_n, i = 1, \ldots, p$, морају бити независне и једнако расподељене сучајне променљиве које су и независне од X_n. У овом раду је, између осталог, доказана егзистенција и јединственост овог модела.

У раду Kachour и Truquet (2011), такође је разматран $INAR$ временски низ реда p дефинисан на основу знаковног биномног тининг оператора. Користећи тининг оператор дефинисан у Latour и Truquet (2008), конструише се целобројни ауторегресивни временски низ реда p, $SINAR(p)$ на следећи начин

$$X_n = \sum_{i=1}^{p} F_i \circ X_{n-i} + \xi_n, \ n \geq p,$$

где је тининг оператор $F_i\circ$ дефинисан изразом (1.1.3), $\{\xi_n\}$ низ независних и једнако расподељених случајних променљивих са коначним математичким очекивањем и дисперзијом. Елементи низа $\{\xi_n\}$ су, такође, независни од елемената бројачких низова. Такође и бројачки низови који се користе у дефиницији различитих тининг оператора су независни међусобно.

Приступ сличан претходним, уз коришћење знаковног биномног тининга, заступљен је и у радовима Andersson и Karlis (2014) и Wang и Zhang (2010).

У раду Zhang, Wang и Zhu (2010) уводи се целобројни ауторегресивни модел реда p, $GINARS(p)$, на бази знаковног тининг оператора са бројачким низом чији су елементи расподељени по законима расподела представљених помоћу коефицијената степених редова. Овако дефинисан временски низ је строго стационаран, ергодичан и Марковљев процес реда p.

Осим класичних модела реда p, код којих се тренутно стање система налази под утицајем p претходних стања, развијани су и модели код којих, такође, постоји утицај неколико претходних стања, али не свих заједно одједном, већ у једном тренутку, са одређеном вероватноћом, само једног од p претходних. У радовима Zhu и Joe (2006) и Weiß (2008), помоћу биномног тининг оператора, су дефинисани комбиновани $INAR$ модели реда p, на следећи начин

$$X_n = D_{n,1}(\alpha \circ_n X_{n-1}) + D_{n,2}(\alpha \circ_n X_{n-2}) + \cdots + D_{n,p}(\alpha \circ_n X_{n-p}) + \epsilon_n, \ n \geq p,$$

где је $\{\epsilon_n\}$ низ независних једнако расподељених случајних променљивих са ненегативним вредностима, $\alpha \in (0, 1)$. $\mathbf{D}_n$ је низ независних, једнако расподељених, p-димензионалних случајних вектора, облика $\mathbf{D}_n = (D_{n,1}, \dots, D_{n,p})$, који са вероватноћама ϕ_i, $i = 1, \dots, p$, добијају вредност i-те врсте јединичне матрице. Низ $\{\mathbf{D}_n\}$ је независан од $\{\epsilon_n\}$ и следећи услови морају бити испуњени: i) тининг оператори у тренутку n се примењују независно један од другог, независно од $\{\epsilon_n\}$ и $\mathbf{D}_n$ и независно од X_k, $k < n$, ii) случајне променљиве ϵ_n и $\mathbf{D}_n$ су независне од X_k и од $\alpha \circ_{k+j} X_k$, за $k < n$ и $j = 1, 2, \dots, p$, iii) вероватноће $P(\alpha \circ_{n+1} X_n, \dots, \alpha \circ_{n+p} X_n | X_n = x_n, \mathcal{H}_{n-1})$ и $P(\alpha \circ_{n+1} X_n, \dots, \alpha \circ_{n+p} X_n | X_n = x_n)$ су једнаке, где $\mathcal{H}_{n-1}$ означава прошлост низа свих X_k и $\alpha \circ_{k+j} X_k$, $k < n$, $j = 1, 2, \dots, p$.

На сличан начин, само користећи негативни биномни тининг оператор, у раду Nastić, Ristić и Bakouch (2012) конструисан је комбиновани целобројни ауторегресивни модел реда p са геометријском маргиналном расподелом, $CGINAR(p)$. Овај модел је послужио као основа за дефиницију комбинованог модела реда p са асиметричном дискретном Лапласовом расподелом који је једна од тема овог рада.

1.2 Неки корисни резултати

У овом поглављу ће бити приказани резултати других аутора који ће бити коришћени у доказивању многих особина целобројних временских низова са симетричном или асиметричном дискретном Лапласовом расподелом као маргиналном расподелом. Међу њима има неколико веома битних теорема које су изазвале праву револуцију у теорији целобројних ауторегресивних процеса и спадају међу најцитираније резултате.

С обзиром на то да је маргинална расподела временских низова који су у фокусу овог рада дискретна Лапласова расподела, најпре ће бити представљене неке есенцијалне особине ове расподеле. Дискретну Лапласову расподелу су увели Inusah и Kozubowski (2006) као дискретни аналогон истоимене расподеле апсолутно-непрекидног типа са функцијом густине $f(x) = e^{-\frac{|x-m|}{b}}/2b, m \in \mathbb{R}, b > 0$. За случајну променљиву X се каже да има дискретну Лапласову расподелу са параметром $p \in (0, 1)$ уколико је њен закон расподеле дат изразом

$$P(X = x) = \frac{1+p}{1-p} p^{|x|}, \; x \in \mathbb{Z}. \tag{1.2.1}$$

Да случајна променљива X има дискретну Лапласову расподелу са параметром p, биће означено са $X : DL(p)$. Једна интересантна чињеница, везана за симетричну дискретну Лапласову расподелу, је приказана у истом раду, Inusah и Kozubowski (2006). Она представља везу између дискретне Лапласове расподеле и геометријске расподеле. Показано је да се случајна променљива са дискретном Лапласовом расподелом може у расподели представити као разлика две независне, једнако расподељене случајне променљиве са геометријском расподелом са параметром p, са вредностима из скупа $\{0, 1, 2, \dots\}$. С обзиром на ту чињеницу, биће уведена мала измена у означавању. Наиме, дискретна Лапласова расподела ће бити означавана са $DL(\mu/(1+\mu))$, где је $\mu > 0$ математичко очекивање поменутих случајних променљивих са геометријском расподелом.

У таквом светлу, за случајну променљиву Z ће се рећи да има дискретну Лапласову расподелу ако је њен закон расподеле дат следећим изразом

$$P(Z = z) = \frac{1}{1+2\mu}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{|z|}, \; z \in \mathbb{Z}, \; \mu > 0. \tag{1.2.2}$$

Kozubowski и Inusah (2006) су увели и уопштење симетричне дискретне Лапласове расподеле, дефинишући асиметричну дискретну Лапласову расподелу са параметрима $\mu > 0$ и $\nu > 0$, у ознаци $SDL(\mu/(1+\mu), \nu/(1+\nu))$, на следећи начин

$$P(Z = z) = \begin{cases} \frac{1}{1+\nu+\mu}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{z}, & z \geq 0, \\ \frac{1}{1+\nu+\mu}\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{-z}, & z < 0. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

Аналогно симетричном случају, за случајну променљиву Z са асиметричном дискретном Лапласовом расподелом са параметрима μ и ν, $SDL(\mu/(1+\mu), \nu/(1+\nu))$, важи да се може, у расподели, представити у облику разлике две независне случајне променљиве X и Y, са геометријским расподелама са параметрима μ и ν, респективно, $Geom(\mu/(1+\mu))$ и $Geom(\nu/(1+\nu))$,

$$Z \stackrel{d}{=} X - Y. \tag{1.2.4}$$

Знајући закон расподеле случајне променљиве са асиметричном дискретном Лапласовом расподелом, лако се може добити израз карактеристичне функције ове случајне променљиве. Карактеристична функција случајне променљиве Z са асиметричном дискретном Лапласовом расподелом $SDL(\mu/(1+\mu), \nu/(1+\nu))$ је

$$\varphi_Z(t) \;=\; \varphi_X(t)\varphi_Y(-t) = \frac{1}{(1+\mu-\mu e^{it})(1+\nu-\nu e^{-it})}. \qquad (1.2.5)$$

На основу облика карактеристичне функције, лако се, користећи њене особине, могу одредити математичко очекивање и дисперзија случајне променљиве Z,

$$E(Z) = \mu - \nu \quad \text{и} \quad Var(Z) = \mu(1+\mu) + \nu(1+\nu).$$

Такође, једноставно се може добити и израз за $E|Z|$, који ће бити од користи у неким каснијим израчунавањима,

$$E|Z| = \frac{\mu(1+\mu)+\nu(1+\nu)}{1+\mu+\nu}. \qquad (1.2.6)$$

Још једна од битних особина дискретних Лапласових расподела је и та што оне имају коначне моменте и апсолутне моменте било ког реда облика

$$\begin{aligned} E(|Z|^k) &= \frac{(1+\mu)(1+\nu)}{(1+\mu+\nu)} \sum_{j=1}^{k} j! S(k,j) \left(\frac{\mu^j}{(1+\nu)} + \frac{\nu^j}{(1+\mu)} \right) \\ E(Z^k) &= \frac{(1+\mu)(1+\nu)}{(1+\mu+\nu)} \sum_{j=1}^{k} j! S(k,j) \left(\frac{\mu^j}{(1+\nu)} + (-1)^k \frac{\nu^j}{(1+\mu)} \right), \end{aligned}$$

где $S(k,j)$ представља Стирлингове бројеве прве врсте. Стирлингови бројеви прве врсте су коефицијенти полиномског развоја Похамеровог уопштеног опадајућег факторијела,

$$(x)_k = x(x-1)\cdots(x-k+1) = \sum_{j=0}^{k} S(k,j) x^j.$$

Ова чињеница је доказана у радовима Kozubowski и Inusah (2006) и Barreto-Souza и Bourguignon (2015).

Биће корисно, за неке касније доказе, одредити расподелу разлике две независне случајне променљиве са негативним биномним расподелама. Ова расподела је одређена у следећој примедби.

Примедба 1.2.1 *Нека су A и B две независне случајне променљиве са негативном биномном $NB(r,p)$ и $NB(l,q)$ расподелом, респективно, и нека је C њихова разлика, $A-B$. Нека је k ненегативни цео број. Тада је вероватноћа*

$$\begin{aligned} p_{DNB}(k;r,p;l,q) &= P\{C=k\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{A=k+i, B=i\} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k+i+r-1}{k+i} p^{k+i}(1-p)^r \binom{i+l-1}{i} q^i(1-q)^l \\ &= p^k(1-p)^r(1-q)^l \binom{k+r-1}{k} {}_2F_1(k+r,l,k+1,pq), \end{aligned}$$

где је ${}_2F_1(a,b;c;z)$ Гаусова хипергеометријска функција, дефинисана на следећи начин

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i} \frac{z^i}{i!}, \ |z|<1.$$

Слично, за $k<0$, добија се да је

$$\begin{aligned} &p_{DNB}(k;r,p;l,q) = P\{C=k\} \\ &\qquad = (1-p)^r(1-q)^l q^{-k} \binom{-k+l-1}{-k} {}_2F_1(-k+l,r,-k+1,pq). \end{aligned}$$

У погледу строге стационарности и ергодичности анализираних временских низова биће корисни следећи резултати.

Теорема 1.2.1 (Nastić (2012), теорема 2.1.1) *$INAR(1)$ временски низ са геометријским бројачким низом је ергодичан.*

Дефиниција 1.2.1 (Breiman (1992), дефиниција 6.30) *Строго стационаран временски низ $\{X_n\}$ је ергодичан уколико сваки догађај, инваријантан у односу на σ-алгебру генерисану елементима тог низа, има вероватноћу нула или један.*

Тврђење 1.2.1 (Breiman (1992), тврђење 6.32) *Нека је дат строго стационаран временски низ $\{X_n\}$. Сваки догађај, инваријантан у односу на σ-алгебру генерисану елементима тог низа, је, уједно, и репни догађај.*

Теорема 1.2.2 (Breiman (1992), теорема 3.12 - Колмогоровљев закон 0-1) *Нака је дат низ независних случајних променљивих* $\{X_n\}$. *Вероватноћа сваког догађаја који припада репној* σ*-алгебри генерисаној елементима низа* $\{X_n\}$ *има вероватноћу реализације 0 или 1.*

Приликом доказивања асимптотских особина временских низова са маргиналном асиметричном дискретном Лапласовом расподелом вишег реда, користиће се и резултат из, може се слободно рећи, буквара теорије временских низова, књиге Brockwell и Davis (1987).

Тврђење 1.2.2 (Brockwell и Davis (1987), тврђење 5.1.1) *Ако је дисперзија временског низа позитивна и аутоковаријансна функција тежи нули, када се корак бесконачно увећава, тада је коваријансна матрица низа* $\{X_i\}_{i=1}^n$, $\Gamma_n = [\gamma(i-j)]_{i,j=1,\dots,n}$, *регуларна за свако* n. *Функција* $\gamma(h)$ *представља аутоковаријансну функцију временског низа.*

У вези са асимптотским особинама оцена параметара добијених методом условних најмањих квадрата, кључни су резултати из рада Tjøstheim (1986). Нека је дат d-димензионални временски низ $\{X_t\}$ и нека је $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ вектор параметара. Нека је $\mathcal{F}_{t-1}^X$ σ-алгебра генерисана случајним променљивама $\{X_s, s \le t-1\}$, а $\mathcal{F}_{t-1}^X(m)$, σ-алгебра која је генерисана случајним променљивама $\{X_s, t-m \le s \le t-1\}$. Нека је даље $\tilde{X}_{t|t-1}(\beta) = E(X_t|\mathcal{F}_{t-1}^X(m))$ и нека је функција $Q_N(\beta)$ дефинисана са

$$Q_N(\beta) = \sum_{t=m+1}^{N} (X_t - \tilde{X}_{t|t-1}(\beta))^2.$$

Следећа теорема даје довољне услове за егзистенцију и строгу постојаност оцена добијених методом условних најмањих квадрата.

Теорема 1.2.3 (Tjøstheim (1986), teorema 3.1) *Нека је* $\{X_t\}$ *строго стационаран, ергодичан временски низ са коначним другим моментом, такав да је функција* $\tilde{X}_{t|t-1}(\beta)$ *скоро сигурно три пута непрекидно диференцијабилна на неком отвореном скупу који садржи стварну вредност параметра* β^0 *и нека су задовољени услови:*

C1. $E\left\{\left|\dfrac{\partial\tilde{X}_{t|t-1}}{\partial\beta_i}(\beta^0)\right|^2\right\}<\infty, i\in\{1,2,\ldots,r\}$,

$$E\left\{\left|\frac{\partial^2\tilde{X}_{t|t-1}}{\partial\beta_i\partial\beta_j}(\beta^0)\right|^2\right\}<\infty, i,j\in\{1,2,\ldots,r\},$$

C2. Важи линеарна независност вектора $\frac{\partial\tilde{X}_{t|t-1}(\beta^0)}{\partial\beta_i}$, $i\in\{1,2,\ldots,r\}$, *у средњеквадратном смислу тј. за произвољне реалне бројеве* $a_1,a_2,\ldots,a_r$, *услов* $E\left\{\left|\sum_{i=1}^r a_i\frac{\partial\tilde{X}_{t|t-1}}{\partial\beta_i}(\beta^0)\right|^2\right\}=0$ *имплицира да су ти бројеви једнаки нули, односно,* $a_1=a_2=\cdots=a_r=0$,

C3. Постоје функције $G_{t-1}^{ijk}(X_1,X_2,\ldots,X_{t-1})$ *и* $H_t^{ijk}(X_1,X_2,\ldots,X_t)$ *такве да је :*

$$\left|\frac{\partial\tilde{X}_{t|t-1}}{\partial\beta_i}(\beta)\frac{\partial^2\tilde{X}_{t|t-1}}{\partial\beta_j\partial\beta_k}(\beta)\right|\le G_{t-1}^{ijk}, E\left(G_{t-1}^{ijk}\right)<\infty,$$

$$\left|\left(X_t-\tilde{X}_{t|t-1}(\beta)\right)\frac{\partial^3\tilde{X}_{t|t-1}}{\partial\beta_i\partial\beta_j\partial\beta_k}(\beta)\right|\le H_t^{ijk}, E\left(H_t^{ijk}\right)<\infty,$$

$$i,j,k\in\{1,2,\ldots,r\}$$

Тада постоји низ оцена $\hat{\beta}_N$ *који минимизира функцију* $Q_N(\beta)$, *такав да* $\hat{\beta}_N\stackrel{с.и.}{\to}\beta_0, N\to\infty$.
Ознака $\stackrel{с.и.}{\to}$ *представља скоро извесну конвергенцију.*

Следећа теорема се односи на асимптотску нормалност оцена добијених методом условних најмањих квадрата. Пре тога морају бити задовољена следећа два услова:

а) Постоји m, такво да је за $t\ge m+1$,

$$E\left(\mathbf{X}_t|\mathcal{F}_{t-1}^X\right)\stackrel{\text{с.и.}}{=}E\left(\mathbf{X}_t|\mathcal{F}_{t-1}^X(m)\right),$$

б) Постоји m, такво да је за $t\ge m+1$,

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{t|t-1}&\stackrel{\text{деф.}}{=}E\left\{\left(\mathbf{X}_t-\tilde{\mathbf{X}}_{t|t-1}\right)\left(\mathbf{X}_t-\tilde{\mathbf{X}}_{t|t-1}\right)^T\left|\mathcal{F}_{t-1}^X\right.\right\}\\&\stackrel{\text{с.и.}}{=}E\left\{\left(\mathbf{X}_t-\tilde{\mathbf{X}}_{t|t-1}\right)\left(\mathbf{X}_t-\tilde{\mathbf{X}}_{t|t-1}\right)^T\left|\mathcal{F}_{t-1}^X(m)\right.\right\}.\end{aligned}$$

Нека је
$$\mathbf{U} = E\left\{ \frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}^T_{t|t-1}}{\partial \beta}(\beta^0) \frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}_{t|t-1}}{\partial \beta}(\beta^0) \right\},$$
где је $\frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}_{t|t-1}}{\partial \beta}(\beta^0)$ матрица реда $d \times r$, у којој су вектори колона једнаки $\frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}_{t|t-1}}{\partial \beta_i}(\beta^0)$, $i = 1, \ldots, r$.

Теорема 1.2.4 (Tjøstheim (1986), teorema 3.2) *Нека су задовољени услови (а) и (б) и услови $C1 - C3$ претходне теореме и нека је уз то задовољен и услов*

D*1.* $\mathbf{R} = E\left\{ \frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}^T_{t|t-1}}{\partial \beta}(\beta^0) \mathbf{f}_{t|t-1}(\beta^0) \frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}_{t|t-1}}{\partial \beta}(\beta^0) \right\} < \infty.$

Тада за низ оцена $\{\hat{\beta}_N\}$ из претходне теореме важи да
$$N^{1/2}\left(\hat{\beta}_N - \beta_0\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{U}^{-1}\right), N \to \infty.$$
Ознака $\xrightarrow{d}$ представља конвергенцију у расподели.

Што се тиче оцена непознатих параметара модела које су добијене Yule-Walker-овим методом, приликом описивања њиховог асимптотског понашања, веома битну улогу имају резултати рада Silva и Silva (2006). У њему се посматра $INAR(p)$ временски низ са ненегативним вредностима, дефинисан на следећи начин
$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i * X_{t-i} + e_t, \tag{1.2.7}$$
где је $\{e_t\}$ низ независних и једнако расподељених случајних променљивих са коначним моментима до четвртог реда, симбол $*$ означава тининг оператор, дефинисан са
$$\alpha_i * X_{t-i} = \sum_{j=1}^{X_{t-i}} Y_{i,j}, i = 1, \ldots, p,$$
где су $\{Y_{i,j}\}$ низови независних и једнако расподељених случајних променљивих са коначним моментима до четвртог реда, независни

од $\{e_t\}$, а $\alpha_i \in [0,1), i = 1, \ldots, p-1$, и $\alpha_p \in (0,1)$. За овако дефинисан временски низ потребно је да има репрезентацију у облику

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t &\overset{d}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}^j * \mathbf{W}_{t-j}, \\ X_t &\overset{d}{=} \mathbf{H}\mathbf{X}_t, \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

где је $\mathbf{X}_t = [X_t \ X_{t-1} \ \cdots \ X_{t-p+1}]^T$, $\mathbf{H} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$, $\mathbf{W}_t = [e_t \ 0 \ \cdots \ 0]^T$, а

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

У раду се, између осталог, анализирају асимптотске особине узорачке аутоковаријансне функције. Наиме, нека су

$$\begin{aligned} \hat{R}(k) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} (X_t - \overline{X})(X_{t+k} - \overline{X}), \\ R^*(k) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (X_t - \mu_X)(X_{t+k} - \mu_X). \end{aligned}$$

Тада важи следећа теорема.

Теорема 1.2.5 (Silva и Silva (2006), teorema 1) *Нека је* $\{X_t\}$ $INAR(p)$ *временски низ, дефинисан изразом* (1.2.7) *и нека за тај временски низ важи репрезентација* (1.2.8). *Ако је* $\sum_{i=0}^{\infty} |\mathbf{A}^i| < \infty$ *и ако је* $R(\cdot)$ *аутоковаријансна функција временског низа* $\{X_t\}$, *тада за сваки ненегативни цео број* h, *важи*

$$\begin{bmatrix} \overline{X} \\ \hat{R}(0) \\ \vdots \\ \hat{R}(h) \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \mu_X \\ R(0) \\ \vdots \\ R(h) \end{bmatrix}, N^{-1}\mathbf{V}_R \right)$$

где је

$$\mathbf{V}_R = \begin{bmatrix} [V_{11}]_{1\times 1} & [V_{12}]_{1\times(h+1)} \\ [V_{12}]^T_{1\times(h+1)} & [V_{22}]_{(h+1)\times(h+1)} \end{bmatrix},$$

a

$$
\begin{aligned}
&V_{11} = \lim_{N\to\infty} NVar(\overline{X})\\
&[V_{12}]_{k+1} = \lim_{N\to\infty} NCov(\overline{X}, R^*(k)), k = 0, 1, \ldots, h\\
&[V_{22}]_{k+1,j+1} = \lim_{N\to\infty} NCov(R^*(k), R^*(j)), k, j = 0, 1, \ldots, h.
\end{aligned}
$$

На крају, с обзиром на то да се у овом раду анализирају временски низови чија аутоковаријансна, а самим тим и аутокорелациона функција тежи нули са бесконачним увећањем корака, дакле, низови који припадају категорији слабо корелираних низова, било би интересантно повезати их са теоријом која може да произведе неке евентуално лепе резултате. То је теорија мера слабе повезаности случајних низова. Ова теорија иако је имала своје зачетке још средином тридесетих година двадесетог века, експанзију је доживела тек у другој половини двадесетог века, са радовима Rosenblatt (1956) и Kolmogorov и Rozanov (1960), а нарочито крајем двадесетог и почетком двадесетпрвог века у радовима R. C. Bradley-ја. У овом делу ће бити поменути само неки аспекти слабе повезаности временских низова.

У следећој дефиницији ће бити дефинисане две мере слабе повезаности.

Дефиниција 1.2.2 (Bradley (2005)) *Нека је дат простор вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Нека су* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, *било које две* σ*-алгебре из* $\mathcal{F}$. *Мере повезаности две* σ*-алгебре* $\alpha(\cdot,\cdot)$ *и* $\rho(\cdot,\cdot)$ *се дефинишу на следећи начин*

$$
\begin{aligned}
\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &\overset{деф.}{=} \sup |P(A \cap B) - P(A)P(B)|, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B},\\
\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &\overset{деф.}{=} \sup |Corr(f, g)|, f \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A}), g \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B}),
\end{aligned}
$$

где $\mathcal{L}^2$ *представља скуп функција мерљивих у средњеквадратном смислу. Коефицијент* $\alpha(\cdot,\cdot)$ *се назива коефицијент јаког мешања, а коефицијент* $\rho(\cdot,\cdot)$, *коефицијент максималне корелације.*

Одговарајући коефицијенти за случајне низове се дефинишу на следећи начин.

Дефиниција 1.2.3 (Bradley (2005)) *Нека је дат временски низ* $\{X_n\}$. *Нека су* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, *било које две* σ*-алгебре из* $\mathcal{F}$. *Коефицијенти* $\alpha(n)$ *и*

$\rho(n)$ се дефинишу на следећи начин

$$\alpha(n) \overset{\text{деф.}}{=} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \alpha(\mathcal{F}_{-\infty}^{j}, \mathcal{F}_{j+n}^{-\infty}),$$
$$\rho(n) \overset{\text{деф.}}{=} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \rho(\mathcal{F}_{-\infty}^{j}, \mathcal{F}_{j+n}^{-\infty}),$$

где је са $\mathcal{F}_i^j$ означена σ-алгебра генерисана случајним промењљивама $\{X_t, i \leq t \leq j\}$.

Временски низ код кога $\alpha(n) \to 0$, $n \to \infty$, зове се низ јаког мешања или низ α-мешања. Временски низ код кога $\rho(n) \to 0$, $n \to \infty$, зове се низ ρ-мешања.

Примедба 1.2.2 *Код неких аутора, као на пример у* Rosenblatt (1971), *се појам ρ-мешања другачије назива и асимптотска некорелираност. Међутим у књизи* Pesaran (2015), *под асимптотском некорелиранош- ћу се подразумева „блажи” појам.*

Дефиниција 1.2.4 (Pesaran (2015)) *За временски низ $\{X_n\}$ се каже да је асимптотски некорелиран уколико постоји низ константи $\{\rho_n\}$, за који важи да је $\rho_n \in (0,1), n \geq 1$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n < \infty$, тако да је за свако k*

$$Corr(X_k, X_{k+n}) \leq \rho_n.$$

У овом раду асимптотска некорелираност означава „блажи” појам, појам из претходне дефиниције.

Глава 2

$DLINAR(1)$ модел

Временски низови са целобројним вредностима представљају модел који се може користити приликом описивања многих појава у природи и друштву. Пар деценија уназад, дефинисано је неколико таквих модела, од којих су многи поменути у уводном делу. Интересантно је да као разлог за реализовање позитивних и негативних вредности могу да буду два фактора која делују супротно један од другог. Таква структура је била инспирација за дефинисање модела који ће овде бити приказан. Модел је представљен у облику разлике две независне латентне компоненте. Сличан начин описивања појава је већ био присутан у Freeland (2010) и Barreto-Souza и Bourguignon (2015). Такви модели се могу користити за описивање, рецимо, разлике у поенима на неком спортском мечу, промене неких целобројних индекса, у метеорологији, за поређење појава које имају бројачки карактер, као што је, на пример, број пријављених кривичних дела или број симптома неке болести, пре и после терапије и слично.

Овде ће бити представљен један стационаран ауторегресиван временски низ са целобројним вредностима, са дискретном Лапласовом маргиналном расподелом. Најпре ће, помоћу негативног биномног тининг оператора $\alpha*$, који су увели Ristić, Bakouch и Nastić (2009), бити дефинисан нови оператор. Затим ће бити анализиране неке најбитније особине новог оператора. Након тога ће бити дефинисан модел временског низа, биће одређене неке битне особине модела, корелациона структура и регресионе карактеристике. Такође, биће разматран и проблем оцењивања непознатих параметара модела, као и асимптотско понашање добијених оцена. Биће приказани резултати симулација, предности и мане овог модела у односу на друге, сличне, већ познате моделе и биће потврђена апроксимациона својства оцена. На крају ће бити приказана примена новог модела на реалним подацима.

Рецимо да истраживач може бити заинтересован за поређење бројева извесних случајних догађаја добијених из два независна процеса, при чему интеракције елемената алнализираних популација могу резултирати генерисањем нових случајних догађаја. Таква промена бројности може бити моделирана помоћу геометријски расподељених бројачких низова, као што је то урађено у Ristić и Nastić (2012). С друге стране, негативне вредности које се могу добити приликом оваквог поређења се могу моделирати тининг оператором који би представљао разлику два негативна биномна тининг оператора.

Пре самог увођења новог оператора, требало би поново напоменути да се у његовој бази налази дискретна Лапласова расподела, $DL(\mu/(1+\mu))$, $\mu > 0$, и већ поменута чињеница да се случајна променљива Z са дискретном Лапласовом расподелом може, у расподели, представити као разлика две независне случајне променљиве, X и Y са истом геометријском расподелом, $Z \stackrel{d}{=} X - Y$. Такође, биће коришћена и случајна променљива која има асиметричну дискретну Лапласову расподелу која се може добити као разлика две независне случајне променљиве са различитим геометријским расподелама.

2.1 Конструкција тининг оператора $\alpha\odot$

Приликом дефинисања новог тининг оператора, који ће бити означен са $\odot$, полази се од приступа сличног оном који је коришћен у Freeland (2010). Наиме, у том раду тининг оператор је дефинисан као $(\alpha \star Z_n)\,|Z_n = (\alpha \circ X_n - \alpha \circ Y_n)\,|\,(X_n - Y_n)$, где су X_n и Y_n две независне случајне променљиве са Пуасоновом, $\mathcal{P}(\lambda)$, расподелом, а $\alpha\circ$ биномни тининг оператор, $\alpha \in [0,\ 1)$ и $\lambda > 0$. У овом случају, изузетак је да се уместо биномног тининг оператора користи негативни биномни тининг оператор $\alpha*$. Негативни биномни тининг оператор $\alpha*$ је уведен у Ristić, Bakouch и Nastić (2009) на следећи начин:

$$\alpha * X = \sum_{i=1}^{X} W_i,$$

где је $\{W_i\}$ низ независних и једнако расподељених случајних променљивих са геометријском расподелом $Geom(\alpha/(1+\alpha))$, $\alpha \in [0,1)$, а W_i и X су независне случајне променљиве за свако $i \geq 1$. Нека је Z_n случајна променљива са дискретном Лапласовом $DL(\mu/(1+\mu))$, $\mu > 0$, расподелом, датом у (1.2.2) и нека су X_n и Y_n две независне случајне променљиве са геометријском, $Geom(\mu/(1+\mu))$, расподелом. Тада ће, у складу са примедбом (1.2.4), важити да је $Z_n \stackrel{d}{=} X_n - Y_n$.

Нови тининг оператор, $\alpha\odot$ се дефинише на следећи начин

$$(\alpha \odot Z_n)|Z_n \stackrel{d}{=} (\alpha * X_n - \alpha * Y_n)|(X_n - Y_n), \tag{2.1.1}$$

где су елементи бројачких низова у $\alpha * X_n$ и $\alpha * Y_n$ међусобно независне случајне променљиве са $Geom(\alpha/(1+\alpha))$ расподелом и, такође, независне од случајних променљивих X_n, Y_n и Z_n.

Још један, сличан, нешто општији тининг оператор, посматран је у раду Barreto-Souza и Bourguignon (2015). У овом раду, аутори су увели тининг оператор $\odot$ као $\alpha \odot Z_n \stackrel{d}{=} \alpha * X_n - \alpha * Y_n$, где су X_n и Y_n две независне случајне променљиве са геометријским расподелама са очекивањем $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$, респективно. Расподела случајне променљиве Z_n је, у овом случају, асиметрична дискретна Лапласова, $SDL(\mu_1/(1+\mu_1), \mu_2/(1+\mu_2))$, расподела.

На почетку ће бити дискутоване условне вероватноће случајне променљиве $\alpha \odot Z_n$ за дато Z_n, односно, вероватноће прелаза, $g_\alpha(j,k) \equiv P(\alpha \odot Z_n = j | Z_n = k)$ за $j,k \in \mathbb{Z}$. Вероватноће прелаза имају важну улогу у израчунавању вредности функције максималне веродостојности и, такође, ће бити коришћене приликом доказивања неких особина оператора и модела који ће, у наставку, бити дефинисан. Нека је прво $j \geq 0$ и $k \geq 0$. У циљу поједностављивања записа, нека је $p_\alpha(j,k,l) \equiv P(\alpha * X_n - \alpha * Y_n = j | X_n = l+k, Y_n = l)$. Тада се, на основу дефиниције новог тининг оператора (2.1.1) и чињенице да случајне променљиве X_n и Y_n имају геометријску, $Geom(\mu/(1+\mu))$, расподелу, а случајна променљива Z_n, дискретну

Лапласову, $DL(\mu/(1+\mu))$, расподелу, добија да је

$$\begin{aligned} g_\alpha(j,k) &= \frac{P(\alpha \odot Z_n = j, Z_n = k)}{P(Z_n = k)} \\ &= \frac{1+2\mu}{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^k} P(\alpha * X_n - \alpha * Y_n = j, X_n - Y_n = k) \\ &= \frac{1+2\mu}{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^k} \sum_{l=0}^{\infty} P(\alpha * X_n - \alpha * Y_n = j, X_n = k+l, Y_n = l). \end{aligned}$$

Изражавајући вероватноће пресека преко условних вероватноћа и коришћењем независности случајних променљивих X_n и Y_n, израз за вероватноћу прелаза добија следећи облик

$$\begin{aligned} g_\alpha(j,k) &= \frac{1+2\mu}{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^k} \sum_{l=0}^{\infty} p_\alpha(j,k,l) P(X_n = k+l) P(Y_n = l) \\ &= \frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2} \sum_{l=0}^{\infty} p_\alpha(j,k,l) \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2l}. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

С обзиром на то да случајна променљива

$$\alpha * X_n | \{X_n = k+l\} = \sum_{i=1}^{X_n} W_i \Bigg| \{X_n = k+l\} = \sum_{i=1}^{k+l} W_i,$$

представља збир $k+l$ независних, једнако расподељених случајних променљивих са геометријском $Geom(\alpha/(1+\alpha))$ расподелом, њена расподела ће бити негативна биномна расподела са параметрима $k+l$ и $\alpha/(1+\alpha)$, $NB(k+l, \alpha/(1+\alpha))$. Истом логиком добијамо и да је расподела случајне променљиве $\alpha * Y_n | \{Y_n = l\}$, такође, негативна биномна, али са параметрима l и $\alpha/(1+\alpha)$, $NB(l, \alpha/(1+\alpha))$.

Ова чињеница ће се на вероватноћу $p_\alpha(j,k,l)$ одразити на следећи начин:

$$\begin{aligned}
p_\alpha(j,k,l) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(\alpha * X_n = i+j, \alpha * Y_n = i | X_n = l+k, Y_n = l) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} P(\alpha * X_n = i+j | X_n = l+k) P(\alpha * Y_n = i | Y_n = l) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+j+k+l-1}{i+j} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{i+j} \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{l+k} \\
&\qquad \times \binom{i+l-1}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{i} \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{l} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+j+k+l-1}{i+j} \binom{i+l-1}{i} \frac{\alpha^{2i+j}}{(1+\alpha)^{2i+j+2l+k}} \\
&= \frac{\alpha^j}{(1+\alpha)^{j+2l+k}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+j+k+l-1)!}{(i+j)!(l+k-1)!} \frac{(i+l-1)!}{i!(l-1)!} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{2i}
\end{aligned}$$

Уколико се, сада, сваки сабирак реда помножи и подели факторијелима бројева $j+k+l-1, i$ и j, а затим одговарајући чланови формирају биномне коефицијенте, добиће се

$$p_\alpha(j,k,l) = \frac{\alpha^j \binom{j+k+l-1}{j}}{(1+\alpha)^{j+k+2l}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\binom{i+j+k+l-1}{i}\binom{i+l-1}{i}}{\binom{i+j}{i}} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{2i},$$

што се, на другачији начин, може записати

$$\begin{aligned}
p_\alpha(j,k,l) &= \frac{\alpha^j \binom{j+k+l-1}{j}}{(1+\alpha)^{j+k+2l}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\frac{(i+j+k+l-1)_i}{i!} \frac{(i+l-1)_i}{i!}}{\frac{(i+j)_i}{i!}} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{2i} \\
&= \frac{\alpha^j \binom{j+k+l-1}{j}}{(1+\alpha)^{j+k+2l}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+j+k+l-1)_i \ (i+l-1)_i}{(i+j)_i \ i!} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{2i},
\end{aligned}$$

где ознака $(x)_i$ представља Похамеров симбол за уопштени опадајући факторијел, $(x)_i = x(x-1)\cdots(x-i+1)$.

Коначно, користећи дефиницију Гаусове хипергеометријске функције

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i (b)_i}{(c)_i} \frac{z^i}{i!}, \ |z| < 1,$$

добија се израз за вероватноћу $p_\alpha(j,k,l)$

$$p_\alpha(j,k,l) = \frac{\alpha^j \binom{j+k+l-1}{j}}{(1+\alpha)^{j+k+2l}} \, {}_2F_1\left(l, j+k+l; j+1; \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2\right). \quad (2.1.3)$$

Спајајући (2.1.2) и (2.1.3), добија се

$$\begin{aligned} g_\alpha(j,k) &= \frac{(1+2\mu)\alpha^j}{(1+\mu)^2(1+\alpha)^{k+j}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{(1+\alpha)(1+\mu)}\right)^{2l} \binom{j+k+l-1}{j} \\ &\quad \times {}_2F_1\left(l, j+k+l; j+1; \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Слично се показује да, за $j \geq 0$ и $k < 0$, важи

$$\begin{aligned} g_\alpha(j,k) &= \frac{(1+2\mu)\alpha^j}{(1+\mu)^2(1+\alpha)^{-k+j}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{(1+\alpha)(1+\mu)}\right)^{2l} \binom{j+l-1}{j} \\ &\quad \times {}_2F_1\left(l-k, j+l; j+1; \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Наиме,

$$g_\alpha(j,k) = \frac{1+2\mu}{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{-k}} \sum_{l=0}^{\infty} P(\alpha * X_n - \alpha * Y_n = j, X_n = l, Y_n = l-k)$$

и на сличан начин као и у случају за $k \geq 0$ последња једнакост постаје

$$g_\alpha(j,k) = \frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2} \sum_{l=0}^{\infty} p_\alpha(j,k,l-k) \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2l}. \quad (2.1.5)$$

С обзиром на то да је $k < 0$, вероватноћа $p_\alpha(j,k,l-k)$ ће бити

$$\begin{aligned} p_\alpha(j,k,l-k) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(\alpha * X_n = i+j | X_n = l) P(\alpha * Y_n = i | Y_n = l-k) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+j+l-1}{i+j} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{i+j} \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{l} \\ &\quad \times \binom{i+l-k-1}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{i} \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{l-k} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+j+l-1}{i+j} \binom{i+l-k-1}{i} \frac{\alpha^{2i+j}}{(1+\alpha)^{2i+j+2l-k}}, \end{aligned}$$

а сличним трансформацијама као и у случају за ненегативно k, добија се

$$p_\alpha(j,k,l-k) = \frac{\alpha^j \binom{j+l-1}{j}}{(1+\alpha)^{j-k+2l}} \, {}_2F_1\left(l-k, j+l; j+1; \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2\right).$$

Након замене вредности вероватноће $p_\alpha(j,k,l-k)$ у израз (2.1.5), добија се једнакост (2.1.4).

Када је $j < 0$, а $k \geq 0$, вероватноћа прелаза је

$$g_\alpha(j,k) = \frac{1+2\mu}{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^k} \sum_{l=0}^{\infty} P(\alpha * X_n - \alpha * Y_n = j, X_n = l+k, Y_n = l),$$

што након истих трансформација као у случају када је $j \geq 0$ и $k \geq 0$ даје

$$\begin{aligned} g_\alpha(j,k) &= \frac{1+2\mu}{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^k} \sum_{l=0}^{\infty} p_\alpha(j,k,l) P(X_n = k+l) P(Y_n = l) \\ &= \frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2} \sum_{l=0}^{\infty} p_\alpha(j,k,l) \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2l}. \end{aligned}$$

Међутим,

$$\begin{aligned}
p_\alpha(j,k,l) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(\alpha * X_n = i, \alpha * Y_n = i-j | X_n = l+k, Y_n = l) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} P(\alpha * X_n = i | X_n = l+k) P(\alpha * Y_n = i-j | Y_n = l) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+k+l-1}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{i} \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{l+k} \\
&\qquad \times \binom{i-j+l-1}{i-j} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{i-j} \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{l} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+k+l-1}{i} \binom{i-j+l-1}{i-j} \frac{\alpha^{2i-j}}{(1+\alpha)^{2i-j+2l+k}} \\
&= p_\alpha(-j,-k,l+k),
\end{aligned}$$

што је вероватноћа p_α у случају ненегативног j и негативног k. Због тога је, у случају када је $j<0$ и $k \geq 0$, $g_\alpha(j,k) = g_\alpha(-j,-k)$.

И, на крају, када је $j<0$ и $k<0$ вероватноћа прелаза је

$$g_\alpha(j,k) = \frac{1+2\mu}{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{-k}} \sum_{l=0}^{\infty} P(\alpha * X_n - \alpha * Y_n = j, X_n = l, Y_n = l-k).$$

Аналогно као у случају $j \geq 0$ и $k<0$ добија се

$$\begin{aligned}
g_\alpha(j,k) &= \frac{1+2\mu}{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{-k}} \sum_{l=0}^{\infty} p_\alpha(j,k,l) P(X_n = l) P(Y_n = l-k) \\
&= \frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2} \sum_{l=0}^{\infty} p_\alpha(j,k,l-k) \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2l}.
\end{aligned}$$

Затим је

$$p_\alpha(j,k,l-k) = \sum_{i=0}^{\infty} P(\alpha * X_n = i | X_n = l) P(\alpha * Y_n = i-j | Y_n = l-k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+l-1}{i}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{i}\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{l}\\
&\qquad\times\binom{i-j+l-k-1}{i-j}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{i-j}\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{l-k}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+l-1}{i}\binom{i-j+l-k-1}{i-j}\frac{\alpha^{2i-j}}{(1+\alpha)^{2i-j+2l-k}},\\
&= p_{\alpha}(-j,-k,l),
\end{aligned}
$$

а то је вероватноћа p_α у случају $j \geq 0$ и $k \geq 0$, одакле следи да, када је $j < 0$ и $k < 0$, поново је $g_\alpha(j,k) = g_\alpha(-j,-k)$. Тиме су вероватноће прелаза одређене за свако $j \in \mathbb{Z}$ и свако $k \in \mathbb{Z}$.

Карактеристична функција случајне промељиве на јединствен начин описује расподелу случајне променљиве, а такође се може искористити за лакше извођење многих особина случајне променљиве. Релативно лако се може добити израз карактеристичне функције случајне променљиве $\alpha \odot Z_n$. Њен облик је дат следећом теоремом.

Теорема 2.1.1 *Карактеристична функција случајне променљиве $\alpha \odot Z_n$ је*

$$
\varphi(t) = \frac{(1+\alpha-\alpha e^{it})\,(1+\alpha-\alpha e^{-it})}{[1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)e^{it}]\,[1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)e^{-it}]}\,. \tag{2.1.6}
$$

Доказ. Карактеристичну функцију случајне променљиве $\alpha \odot Z_n$ је једноставно извести користећи дефиницију оператора (2.1.1)

$$
\varphi_{\alpha\odot Z_n}(t) \;=\; \sum_{z=-\infty}^{\infty} E\left(e^{it(\alpha\odot Z_n)}|Z_n=z\right)P(Z_n=z).
$$

Користећи чињеницу да се случајна променљива Z_n, са дискретном Лапласовом расподелом, може, у расподели, представити као разлика две независне случајне променљиве X_n и Y_n са истом геометријском расподелом, добија се

$$\begin{aligned}
\varphi_{\alpha\odot Z_n(t)} &= \sum_{z=-\infty}^{-1}\sum_{y=0}^{\infty} E\left(e^{it(\alpha*X_n-\alpha*Y_n)}|X_n=y,Y_n=y-z\right)\\
&\qquad\qquad \times P(X_n=y,Y_n=y-z)\\
&+ \sum_{z=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} E\left(e^{it(\alpha*X_n-\alpha*Y_n)}|X_n=y+z,Y_n=y\right)\\
&\qquad\qquad \times P(X_n=y+z,Y_n=y). \qquad (2.1.7)
\end{aligned}$$

За дате $X_n=y$ и $Y_n=y-z$, $\alpha*X_n$ и $\alpha*Y_n$ су независне случајне променљиве са $NB(y,\alpha/(1+\alpha))$ и $NB(y-z,\alpha/(1+\alpha))$ расподелом, респективно. То имплицира да је

$$\begin{aligned}
&E\left(e^{it(\alpha*X_n-\alpha*Y_n)}|X_n=y,Y_n=y-z\right)\\
&\quad= E\left(e^{it\alpha*X_n}|X_n=y\right)E\left(e^{-it\alpha*Y_n}|Y_n=y-z\right)\\
&\quad= \left(1+\alpha-\alpha e^{it}\right)^{-y}\left(1+\alpha-\alpha e^{-it}\right)^{-y+z}. \qquad (2.1.8)
\end{aligned}$$

На сличан начин се добија да је

$$\begin{aligned}
&E\left(e^{it(\alpha*X_n-\alpha*Y_n)}|X_n=y+z,Y_n=y\right)\\
&\quad= \left(1+\alpha-\alpha e^{it}\right)^{-y-z}\left(1+\alpha-\alpha e^{-it}\right)^{-y}. \qquad (2.1.9)
\end{aligned}$$

Ако се, у циљу једноставнијег записивања, уведу следеће ознаке, $A=1+\alpha-\alpha e^{it}$ и $B=1+\alpha-\alpha e^{-it}$, замењујући (2.1.8) и (2.1.9) у (2.1.7), добија се

$$\begin{aligned}
\varphi_{\alpha\odot Z_n}(t) &= \sum_{z=-\infty}^{-1}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{1}{A^yB^{y-z}}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2y-z}\frac{1}{(1+\mu)^2}\\
&+ \sum_{z=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{1}{A^{y+z}B^y}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2y+z}\frac{1}{(1+\mu)^2}.
\end{aligned}$$

Након сумирања редова, карактеристична функција добија облик

$$\begin{aligned}
\varphi_{\alpha\odot Z_n}(t) &= \frac{AB}{AB(1+\mu)^2-\mu^2}\sum_{z=1}^{\infty}\frac{1}{B^z}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^z\\
&+ \frac{AB}{AB(1+\mu)^2-\mu^2}\sum_{z=0}^{\infty}\frac{1}{A^z}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^z,
\end{aligned}$$

односно,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\alpha\odot Z_n}(t) &= \frac{AB}{AB(1+\mu)^2-\mu^2}\left(\frac{\mu}{B(1+\mu)-\mu}+\frac{A(1+\mu)}{A(1+\mu)-\mu}\right)\\
&= \frac{AB}{(A(1+\mu)-\mu)(B(1+\mu)-\mu)}\\
&= \frac{(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\alpha-\alpha e^{-it})}{[1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)e^{it}][1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)e^{-it}]}.
\end{aligned}$$

□

Израз (2.1.6) истовремено представља и карактеристичну функцију случајне променљиве $\alpha * X_n - \alpha * Y_n$, где су X_n и Y_n две независне једнако расподељене случајне променљиве са $Geom(\mu/(1+\mu))$ расподелом, а $\alpha*$ негативни биномни тининг оператор. На основу тога, добија се следећи резултат.

Последица 2.1.1 *(а)* $\alpha \odot Z_n \stackrel{d}{=} \alpha * X_n - \alpha * Y_n$; *(б)* $E(\alpha \odot Z_n) = 0$; *(в)* $Var(\alpha \odot Z_n) = 2\alpha\mu(1+2\alpha+\alpha\mu)$; *(г)* $0 \odot Z_n \stackrel{s.v.1}{=} 0$; *симбол* $\stackrel{s.v.1}{=}$ *означава једнакост случајних променљивих у скоро извесном смислу.* *(д)* $1 \odot Z_n \stackrel{d}{\neq} Z_n$.

Доказ. (а) Узимајући у обзир везу карактеристичне функције, $\varphi_{\alpha*X_n}(t)$, и функције генератрисе вероватноћа, $\Phi_{\alpha*X_n}(t)$, $\varphi_{\alpha*X_n}(t) = \Phi_{\alpha*X_n}(e^{it})$, уз израз за функцију генератрисе вероватноћа, дат у раду Ristić, Bakouch и Nastić (2009),

$$\Phi_{\alpha*X_n}(t) = \frac{1+\alpha-\alpha t}{1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)t},$$

и чињенице да је

$$\Phi_{\alpha*X_n-\alpha*Y_n}(t) = \Phi_{\alpha*X_n}(t)\Phi_{\alpha*Y_n}(t^{-1}),$$

једноставно се долази до закључка да је

$$\varphi_{\alpha\odot Z_n}(t) = \varphi_{\alpha*X_n-\alpha*Y_n}(t).$$

Једнакост карактеристичних функција је еквивалентна једнакости случајних променљивих у расподели.

(б) С обзиром на то да случајне променљиве $\alpha * X_n$ и $\alpha * Y_n$ имају исту расподелу, јасно је да је математичко очекивање $E(\alpha \odot Z_n) = E(\alpha * X_n) - E(\alpha * Y_n) = 0$.
(в) Користећи особине карактеристичне функције случајне променљиве $\alpha \odot Z_n$, односно њен први и други извод, лако се може доћи до израза за дисперзију случајне променљиву $\alpha \odot Z_n$, $Var(\alpha \odot Z_n) = 2\alpha\mu(1 + 2\alpha + \alpha\mu)$.
(г) Пошто је $\alpha = 0$, на основу особине (в), следи да је $0 \odot Z_n$ скоро извесно константа. Како је и њено математичко очекивање једнако нули, доказ је завршен.
(д) Иако је у дефиницији оператора $\alpha \in [0, 1)$, да би се истакле разлике у односу на биномни тининг оператор и операторе који су изведени из биномног тининга, биће указано и на гранични случај када је $\alpha = 1$.

Узимајући у обзир резултат под (а) и резултат из Ristić, Bakouch и Nastić (2009) да је

$$1 * X = \begin{cases} 0, & \text{с.в. } 1/(1+\mu) \\ X, & \text{с.в. } \mu^2/(1+\mu)^2 \\ X + Y, & \text{с.в. } \mu/(1+\mu)^2, \end{cases}$$

где, међусобно независне случајне променљиве X и Y имају геометријске, $Geom(\mu/(1+\mu))$ и $Geom((1+\mu)/(2+\mu))$, расподеле, очигледно је да је $1 \odot Z_n \overset{d}{\neq} Z_n$. $\square$

Неке основне условне особине случајне променљиве $\alpha \odot Z_n$ за задато Z_n су дате у следећој теореми.

Теорема 2.1.2 *Условно очекивање и условна дисперзија случајне променљиве $\alpha \odot Z_n$ за задато Z_n су*

$$\begin{aligned} E(\alpha \odot Z_n | Z_n) &= \alpha Z_n, \\ Var(\alpha \odot Z_n | Z_n) &= \alpha(1+\alpha)|Z_n| + \frac{2\alpha(1+\alpha)\mu^2}{1+2\mu}. \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Доказ. Најпре треба показати да је за $k \geq 0$

$$E((\alpha\odot Z_n)^k|Z_n=z)=E((\alpha*X_n-\alpha*Y_n)^k|X_n-Y_n=z)$$
$$=\begin{cases}\frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2}\sum\limits_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2y}E((\alpha*X_n-\alpha*Y_n)^k|X_n=y+z,Y_n=y), & z\geq 0,\\ \frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2}\sum\limits_{x=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2x}E((\alpha*X_n-\alpha*Y_n)^k|X_n=x,Y_n=x-z), & z<0.\end{cases}$$

Нека је $z\geq 0$. Тада је

$$\begin{aligned}E((\alpha\odot Z_n)^k|Z_n=z)&=E((\alpha*X_n-\alpha*Y_n)^k|X_n-Y_n=z)\\&=\sum_{i=0}^{\infty}i^kP\left(\alpha\odot Z_n=i|Z_n=z\right)=\sum_{i=0}^{\infty}i^k\frac{P\left(\alpha\odot Z_n=i,Z_n=z\right)}{P\left(Z_n=z\right)}\\&=\frac{1+2\mu}{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^z}\sum_{i=0}^{\infty}i^k\sum_{y=0}^{\infty}P\left(\alpha\odot Z_n=i,X_n=z+y,Y_n=y\right).\end{aligned}$$

Изражавајући вероватноћу пресека преко условне вероватноће, добија се

$$\begin{aligned}&E((\alpha\odot Z_n)^k|Z_n=z)=\\&=\frac{1+2\mu}{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^z}\sum_{i=0}^{\infty}i^k\sum_{y=0}^{\infty}P\left(\alpha\odot Z_n=i|X_n=z+y,Y_n=y\right)\\&\qquad\qquad\times P\left(X_n=z+y\right)P\left(Y_n=y\right)\\&=\frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2}\sum_{i=0}^{\infty}i^k\sum_{y=0}^{\infty}P\left(\alpha\odot Z_n=i|X_n=z+y,Y_n=y\right)\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2y}\\&=\frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2}\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2y}\sum_{i=0}^{\infty}i^kP\left(\alpha\odot Z_n=i|X_n=z+y,Y_n=y\right)\\&=\frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2}\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2y}E\left((\alpha\odot Z_n)^k|X_n=z+y,Y_n=y\right).\end{aligned}$$

На сличан начин се добија и одговарајући израз у случају када је $z<0$.

На основу особина негативног биномног тининга из леме 3, Ristić, Bakouch и Nastić (2009), конкретно, $E(\alpha*X)=\alpha E(X)$, добија се да је

$$E(\alpha * X - \alpha * Y | X = x, Y = y) \;=\; \alpha x - \alpha y.$$

Тада се, за $z \geq 0$, добија да је

$$\begin{aligned}
E(\alpha \odot Z_n | Z_n = z) &= E(\alpha \odot Z_n)|X_n - Y_n = z) \\
&= \frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2} \sum_{y=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2y} E\left(\alpha \odot Z_n | X_n = z + y, Y_n = y\right) \\
&= \frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2} \sum_{y=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2y} \\
&\qquad \times E\left(\alpha * X_n - \alpha * Y_n | X_n = z + y, Y_n = y\right) \\
&= \frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2} \sum_{y=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2y} \left(\alpha(z+y) - \alpha y\right) \\
&= \frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2} \sum_{y=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2y} \alpha z \\
&= \frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2} \cdot \frac{\alpha z}{1 - \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^2} = \alpha z.
\end{aligned}$$

Случај када је $z < 0$ се доказује по истом принципу. Једина разлика је у томе што се уместо услова $X_n = z + y, Y_n = y$, користи $X_n = y, Y_n = y + z$.

Што се условне дисперзије тиче, израчунавање је врло слично. Приликом извођења, поново се користе особине негативног биномног тининга из леме 3, Ristić, Bakouch и Nastić (2009). Овога пута $E((\alpha * X)^2) = \alpha^2 E(X^2) + \alpha(1+\alpha)E(X)$. Добија се да је

$$\begin{aligned}
E((\alpha * X_n - \alpha * Y_n)^2 | X_n = x, Y_n = y) &= E((\alpha \odot Z_n)^2 | X_n = x, Y_n = y) \\
&= \alpha(1+\alpha)(x+y) + \alpha^2 (x-y)^2.
\end{aligned}$$

Нека је сада $z \geq 0$. Тада је

$$\begin{aligned}
Var(\alpha \odot Z_n | Z_n = z) &= E\left((\alpha \odot Z_n)^2 | Z_n = z\right) - \left(E\left(\alpha \odot Z_n | Z_n = z\right)\right)^2 \\
&= \frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2} \sum_{y=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2y} E\left((\alpha \odot Z_n)^2 | X_n = z + y, Y_n = y\right) - (\alpha z)^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2}\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2y}\left(\alpha(1+\alpha)(z+2y)+\alpha^2z^2\right)-(\alpha z)^2.$$

Због чињенице да је $\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2y}=\frac{(1+\mu)^2}{1+2\mu}$, умањилац $(\alpha z)^2$ може да анулира исти израз унутар реда. Сада је

$$\begin{aligned}
&Var(\alpha\odot Z_n|Z_n=z)\\
&= \frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2}\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2y}\alpha(1+\alpha)(z+2y)\\
&= \frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2}\left[\alpha(1+\alpha)z\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2y}+2\alpha(1+\alpha)\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2y}y\right]\\
&= \frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2}\left[\frac{\alpha(1+\alpha)z}{1-\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^2}+\frac{2\alpha(1+\alpha)\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^2\right)^2}\right]\\
&= 2\alpha(1+\alpha)\frac{\mu^2}{1+2\mu}+\alpha(1+\alpha)z.
\end{aligned}$$

У случају када је $z<0$, добија се израз

$$Var(\alpha\odot Z_n|Z_n=z)=2\alpha(1+\alpha)\frac{\mu^2}{1+2\mu}-\alpha(1+\alpha)z,$$

што комплетира доказ теореме. $\square$

Осим приказаних условних мера, које ће бити од користи приликом доказивања неких карактеристика које ће бити поменуте касније, још једна особина је врло интересантна. Наиме, оператор $\alpha\odot$ се може довести у везу са неким другим тининг операторима. Следећа теорема даје алтернативну репрезентацију случајне променљиве $\alpha\odot Z_n$ преко негативног биномног тининг оператора $\alpha *$.

Теорема 2.1.3 *Нека је дата случајна променљива Z_n са дискретном Лапласовом, $DL(\mu/(1+\mu))$, расподелом и нека су X_n и Y_n случајне променљиве са геометријском, $Geom(\mu/(1+\mu))$, расподелом. Нека је $\{D_j,\ j\geq 1\}$ низ независних случајних променљивих са дискретном Лапласовом, $DL(\alpha/(1+\alpha))$, расподелом и нека су случајне променљиве*

Z_n, X_n, Y_n, $D_j, j \geq 1$ и случајне променљиве које учествују у $\alpha*$ независне. Тада

$$\alpha \odot Z_n \stackrel{d}{=} sgn(Z_n)(\alpha * |Z_n|) + \sum_{j=1}^{\min(X_n,Y_n)} D_j, \tag{2.1.11}$$

где је $\sum_{j=1}^{\min(X_n,Y_n)} D_j = 0$ када је $\min(X_n, Y_n) = 0$, а sgn је функција знака.

Доказ. У циљу доказа ове теореме, биће показано да су карактеристичне функције случајних променљивих $\alpha \odot Z_n$ и $sgn(Z_n)(\alpha * |Z_n|) + \sum\limits_{j=1}^{\min(X_n,Y_n)} D_j$ једнаке.

Пошто су случајне променљиве $sgn(Z_n)(\alpha * |Z_n|)$ и $\sum\limits_{j=1}^{\min(X_n,Y_n)} D_j$ независне, карактеристична функција њиховог збира ће бити производ појединачних карактеристичних функција. Нека је $\varphi_I(t)$ карактеристична функција случајне променљиве $sgn(Z_n)\,(\alpha * |Z_n|)$. На основу дефиниције случајне променљиве Z_n и негативног биномног тининг оператора $\alpha*$, добија се да је

$$\begin{aligned}
\varphi_I(t) &= E\left(e^{it\cdot sgn(Z_n)(\alpha*|Z_n|)}\right) \\
&= \sum_{z=-\infty}^{\infty} E\left(e^{it\cdot sgn(Z_n)(\alpha*|Z_n|)}|Z_n = z\right) P(Z_n = z) \\
&= \frac{1}{1+2\mu}\sum_{z=0}^{\infty} E\left(e^{it(\alpha*Z_n)}|Z_n = z\right)\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^z \\
&+ \frac{1}{1+2\mu}\sum_{z=1}^{\infty} E\left(e^{-it(\alpha*Z_n)}|Z_n = -z\right)\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^z \\
&= \frac{1}{1+2\mu}\left[\sum_{z=0}^{\infty} E\left(e^{it\sum_{i=1}^{Z_n} W_i}|Z_n = z\right)\frac{1}{1+2\mu}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^z\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{z=1}^{\infty} E\left(e^{-it\sum_{i=1}^{Z_n} W_i}|Z = -z\right)\frac{1}{1+2\mu}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^z\right].
\end{aligned}$$

С обзиром на то да је $\sum_{i=1}^{Z_n} W_i$ збир независних, једнако расподељених случајних променљивих са геометријском, $Geom(\frac{\mu}{1+\mu})$, расподелом, а математичко очекивање у реду, његова карактеристична функција, условљена реализацијом случајне променљиве Z_n, тражени израз добија следећи облик

$$\begin{aligned}\varphi_I(t) &= \frac{1}{1+2\mu}\left[\sum_{z=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha e^{it}}\right)^z\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^z\right.\\ &\qquad\left.+\sum_{z=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha e^{-it}}\right)^z\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^z-1\right].\end{aligned}$$

Након једноставног израчунавања вредности степених редова, добија се

$$\begin{aligned}\varphi_I(t) &= \frac{1}{1+2\mu}\left[\frac{(1+\mu)(1+\alpha-\alpha e^{it})}{(1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)e^{it})}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{(1+\mu)(1+\alpha-\alpha e^{-it})}{(1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)e^{-it})}-1\right]\\ &= \frac{(1+\mu)^2(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\alpha-\alpha e^{-it})-\mu^2}{(1+2\mu)(1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)e^{it})(1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)e^{-it})}.\end{aligned}$$

Нека је, са друге стране, $\varphi_{II}(t)$ карактеристична функција случајне променљиве $\sum_{j=1}^{\min(X_n,Y_n)} D_j$. Тада је

$$\begin{aligned}\varphi_{II}(t) &= E\left(e^{it\sum_{j=1}^{\min(X_n,Y_n)} D_j}\right)\\ &= \sum_{0\leq y,x<\infty} E\left(e^{it\sum_{j=1}^{\min(X_n,Y_n)} D_j}\middle| X_n=x, Y_n=y\right) P\left(X_n=x, Y_n=y\right)\\ &= \frac{1}{(1+\mu)^2}\sum_{0\leq y\leq x<\infty} E\left(e^{it\sum_{j=1}^{Y_n} D_j}\middle| X_n=x, Y_n=y\right)\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{x+y}\\ &+ \frac{1}{(1+\mu)^2}\sum_{0\leq x<y<\infty} E\left(e^{it\sum_{j=1}^{X_n} D_j}\middle| X_n=x, Y_n=y\right)\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{x+y}.\end{aligned}$$

Математичко очекивање које фигурише у редовима, представља карактеристичну функцију збира независних, једнако расподељених случајних променљивих са геометријском, $Geom(\frac{\mu}{1+\mu})$, расподелом, условљеног реализацијама случајих променљивих X_n и Y_n. Због тога је

$$\begin{aligned}\varphi_{II}(t) &= \sum_{0\le y\le x<\infty}\frac{1}{[(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\alpha-\alpha e^{-it})]^y}\cdot\frac{\mu^{x+y}}{(1+\mu)^{x+y+2}}\\ &+ \sum_{0\le x<y<\infty}\frac{1}{[(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\alpha-\alpha e^{-it})]^y}\cdot\frac{\mu^{x+y}}{(1+\mu)^{x+y+2}}\\ &= \frac{1}{(1+\mu)^2}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\mu^x}{(1+\mu)^x}\sum_{y=0}^{x}\frac{1}{[(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\alpha-\alpha e^{-it})]^y}\cdot\frac{\mu^y}{(1+\mu)^y}\\ &+ \frac{1}{(1+\mu)^2}\sum_{y=1}^{\infty}\frac{\mu^y}{(1+\mu)^y}\sum_{x=0}^{y-1}\frac{1}{[(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\alpha-\alpha e^{-it})]^x}\cdot\frac{\mu^x}{(1+\mu)^x}.\end{aligned}$$

Унутрашњи редови нису ништа друго до редови геометријских прогресија. Њиховим израчунавањем, добијају се елементарни степени редови чије се вредности лако рачунају. Сређивањем добијеног разломка се, за карактеристичну функцију случајне променљиве $\sum_{j=1}^{\min(X_n,Y_n)} D_j$, добија израз

$$\varphi_{II}(t) = \frac{(1+2\mu)(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\alpha-\alpha e^{-it})}{(1+\mu)^2(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\alpha-\alpha e^{-it})-\mu^2}.$$

На крају, множењем карактеристичних функција $\varphi_I(t)$ и $\varphi_{II}(t)$ добија се (2.1.6), што и представља карактеристичну функцију случајне променљиве $\alpha\odot Z_n$. $\square$

Треба приметити и да се десна страна једнакости (2.1.11) може интерпретирати као збир два тининг оператора. Први сабирак, $sgn(Z_n)(\alpha*|Z_n|)$, представља знаковни тининг оператор који су увели Latour и Truquet (2008). Елементи бројачког низа овог оператора, у конкретном случају имају геометријску, $Geom(\frac{\alpha}{1+\alpha})$, расподелу. Други сабирак, $\sum_{j=1}^{\min(X_n,Y_n)} D_j$, се може симболички записати у облику $\alpha\circ'\min(X_n,Y_n)$, где $\alpha\circ'$ представља тининг оператор са бројачким низом независних, једнако расподељених случајних променљивих D_j са дискретном Лапласовом, $DL(\frac{\alpha}{1+\alpha})$, расподелом, а који се примењује на случајну променљиву са геометријском расподелом, с обзиром на то да случајна променљива $\min(X, Y)$ има геометријску расподелом са очекивањем $(\mu/(1+\mu))^2$. Треба нагласити, такође, да, у складу са Kozubowski и Inusah (2006), случајна променљива $\sum_{j=1}^{\min(X,Y)} D_j$, има, у општем случају, асиметричну дискретну Лапласову расподелу. Овакво, алтернативно представљање оператора $\alpha \odot Z_n$ омогућује оперативнији рад јер, видеће се касније, приликом генерисања вредности случајног низа $\{Z_n\}$ не мора бити обавезно познавање компоненти $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$, већ вредности из претходних тренутака самог низа $\{Z_n\}$.

2.2 Конструкција модела

У овом делу ће бити дефинисан један нов, стационаран, позитивно корелиран, ауторегресиван временски низ са целобројним вредностима, са дискретном Лапласовом маргиналном расподелом. Нека је временски низ $\{Z_n, n \geq 0\}$ са дискретном Лапласовом, $DL(\frac{\mu}{1+\mu})$, магриналном расподелом, дефинисан на следећи начин:

$$Z_n = \alpha \odot Z_{n-1} + e_n,\ n \geq 1, \tag{2.2.1}$$

где је Z_0 случајна променљива са дискретном Лапласовом, $DL(\frac{\mu}{1+\mu})$, расподелом, $\{e_n, n \geq 1\}$ низ независних и једнако расподељених целобројних случајних променљивих, таквих да су e_n и Z_{n-l} независни за свако $l \geq 1$, тининг оператор $\alpha\odot$ је дефинисан изразом (2.1.1), а елементи бројачког низа у $\alpha \odot Z_{n-1}$ су случајне променљиве независне од Z_n и e_m за свако n и m. Овај модел ће надаље бити означен као $DLINAR(1)$ временски низ, што је акроним енглеског назива, Discrete Laplace INteger-valued AutoRegressive time series of the first order, дакле, целобројни, ауторегресивни временски низ првог реда са дискретном Лапласовом маргиналном расподелом.

У наставку ће бити разматране особине $DLINAR(1)$ временског низа. Најпре ће бити анализиран иновациони временски низ. Како изгледа расподела случајне променљиве e_n? Може се показати да случајна променљива e_n представља мешавину четири случајне променљиве, и то, две случајне променљиве са дискретном Лапласовом расподелом и две случајне променљиве са асиметричном дискретном Лапласовом расподелом. Ова чињеница је поткрепљена следећом теоремом.

Теорема 2.2.1 *Ако је* $\alpha \in (0, \mu/(1+\mu)], \mu > 0$*, тада је расподела случајне промењљиве* e_n *облика*

$$e_n \stackrel{d}{=} \begin{cases} DL\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right), & \text{с.в.}\ \left(1-\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\right)^2, \\ SDL\left(\frac{\mu}{1+\mu}, \frac{\alpha}{1+\alpha}\right), & \text{с.в.}\ \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\left(1-\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\right), \\ SDL\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\mu}{1+\mu}\right), & \text{с.в.}\ \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\left(1-\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\right), \\ DL\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right), & \text{с.в.}\ \left(\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\right)^2, \end{cases}$$

где ознака „с.в." значи „са вероватноћом".

Доказ. Нека је $\varphi_{e_n}(t)$ карактеристична функција случајне промењљиве e_n. На основу (2.2.1), независности елемената бројачког низа у $\alpha \odot Z_{n-1}$ и e_n, карактеристичних функција случајних промењљивих Z_n и $\alpha \odot Z_{n-1}$, датих изразима (1.2.5) и (2.1.6), добија се да је

$$\begin{aligned} \varphi_{e_n}(t) &= \frac{\varphi_{Z_n}(t)}{\varphi_{\alpha\odot Z_{n-1}}(t)} \\ &= \frac{(1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)e^{it})(1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)e^{-it})}{(1+\mu-\mu e^{it})(1+\mu-\mu e^{-it})(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\alpha-\alpha e^{-it})} \\ &= \left(\frac{1-a}{1+\mu-\mu e^{it}}+\frac{a}{1+\alpha-\alpha e^{it}}\right)\left(\frac{1-a}{1+\mu-\mu e^{-it}}+\frac{a}{1+\alpha-\alpha e^{-it}}\right), \end{aligned}$$

где је $a = \alpha\mu/(\mu-\alpha)$. Након трансформације се добија да је

$$\begin{aligned} \varphi_e(t) &= \frac{(1-a)^2}{(1+\mu-\mu e^{it})(1+\mu-\mu e^{-it})} + \frac{a(1-a)}{(1+\mu-\mu e^{it})(1+\alpha-\alpha e^{-it})} \\ &\quad + \frac{a(1-a)}{(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\mu-\mu e^{-it})} + \frac{a^2}{(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\alpha-\alpha e^{-it})}. \end{aligned}$$

Коначно, користећи чињеницу да су

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{(1+\mu-\mu e^{it})(1+\mu-\mu e^{-it})},\ \varphi_2(t)=\frac{1}{(1+\mu-\mu e^{it})(1+\alpha-\alpha e^{-it})},$$

$$\varphi_3(t)=\frac{1}{(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\mu-\mu e^{-it})},\ \varphi_4(t)=\frac{1}{(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\alpha-\alpha e^{-it})}$$

карактеристичне функције случајних променљивих са $DL\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $SDL\left(\frac{\mu}{1+\mu}, \frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$, $SDL\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\mu}{1+\mu}\right)$ и $DL\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$ расподелама, респективно, и да бројеви $(1-a)^2, a(1-a), a(1-a)$ и a^2 представљају вероватноће неког потпуног система догађаја, тј. $(1-a)^2 + a(1-a) + a(1-a) + a^2 = 1$ и $(1-a)^2 \geq 0, a(1-a) \geq 0$ и $a^2 \geq 0$, добијамо доказ теореме. $\square$

Треба приметити то да је услов да је $\alpha \in (0, \mu/(1+\mu)]$ неопходан да би расподела случајне променљиве e_n била добро дефинисана јер да би случајна променљива e_n била мешавина поменуте четири случајне променљиве, потребно је да вредности $(1-a)^2$, $a(1-a)$ и a^2 буду вероватноће неких могућих догађаја, тј. да припадају интервалу $(0,\ 1]$, као и да збир $(1-a)^2 + 2a(1-a) + a^2$, као збир вероватноћа неког потпуног система догађаја, буде једнак 1.

На основу претходне теореме и чињенице да се дискретна Лапласова расподеле може представити као разлика две случајне променљиве са геометријском расподелом, може се доћи до интересантног закључка који је дат следећом последицом.

Последица 2.2.1 *Ако је* $\alpha \in (0, \mu/(1+\mu)]$, *тада је* $e_n \stackrel{d}{=} \varepsilon_n - \eta_n$, *где су* ε_n *и* η_n *две независне и једнако расподељене случајне променљиве чија је расподела дата са:*

$$\begin{cases} Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right), & с.в.\ 1-\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}, \\ Geom\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right), & с.в.\ \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}. \end{cases}$$

Расподела иновационог временског низа $\{\varepsilon_n\}$, приказана у овом облику може поједноставити извођење многих особина самог иновационог, а и генерално, $DLINAR(1)$ временског низа. Једна од њих је дата у следећој последици.

Последица 2.2.2 *На основу особина иновационог временског низа* $\{\varepsilon_n\}$ *приказаних у* Ristić, Bakouch и Nastić (2009),

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_n) &= (1-\alpha)\mu, \\ Var(\varepsilon_n) &= (1+\alpha)\mu((1+\mu)(1-\alpha)-\alpha), \end{aligned}$$

добија се да за временски низ $\{e_n\}$ *важи*

$$\begin{aligned} E(e_n) &= 0 \\ Var(e_n) &= 2(1+\alpha)\mu((1+\mu)(1-\alpha)-\alpha). \end{aligned}$$

Примедба 2.2.1 На основу алтернативног представљања оператора $\alpha\odot$, датог у теореми 2.1.3, следи да је могуће конструисати, помоћу негативног биномног тининг оператора, стационаран временски низ са дискретном Лапласовом маргиналном расподелом. Може се посматрати стационаран временски низ $\{Z_n\}$ са дискретном Лапласовом маргиналном расподелом, дат изразом

$$Z_n = sgn(Z_{n-1})(\alpha * |Z_{n-1}|) + \xi_n, n \geq 1,$$

где је Z_0 случајна промењлива са дискретном Лапласовом, $DL(\frac{\mu}{1+\mu})$, расподелом, низ случајних промењливих $\{\xi_n\}$ дефинисан изразом $\xi_n = \sum_{j=1}^{\min(X_n,Y_n)} D_j + e_n, n \geq 1$, елементи низова $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ и $\{D_j\}$ су случајне промењливе које задовољавају услове теореме 2.1.3, а елементи низа e_n, случајне промењливе које имају расподелу одређену теоремом 2.2.1 и које су независне од елемената случајног низа $\{D_j\}$.

Ова последица се, на једноставан начин, може доказати анализирајући облик карактеристичне функције случајне промењливе $Z_n = sgn(Z_{n-1})(\alpha * |Z_{n-1}|) + \xi_n$. Наиме, узимајући у обзир резултат и доказ теорема 2.1.3 и 2.2.1, односно карактеристичне функције одговарајућих случајних промењливих.

2.3 Особине модела

У овом одељку ће бити изведене и анализиране основне особине $DLINAR(1)$ временског низа. Занимљиво је приметити да се многе особине $DLINAR(1)$ временског низа могу извести посматрајући временски низ као разлику два независна $NGINAR(1)$ временска низа $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$, дефинисана на следећи начин

$$\begin{aligned} X_n &= \alpha * X_{n-1} + \varepsilon_n, \ n \geq 1 \\ Y_n &= \alpha * Y_{n-1} + \eta_n, \ n \geq 1, \end{aligned}$$

где су $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ два независна, стационарна, ауторегресивна временска низа са геометријском, $Geom(\mu/(1+\mu)), \mu > 0$, маргиналном расподелом, $\{\varepsilon_n\}$ и $\{\eta_n\}$ два, такође, узајамно независна, низа независних и једнако расподељених случајних променљивих чије су расподеле дате у последици 2.2.1, X_{n-l} и ε_n, као и Y_{n-l} и η_n су независне случајне променљиве за свако $l \geq 1$. Треба приметити, такође, да је $NGINAR(1)$ временски низ добро дефинисан за $\alpha \in (0, \mu/(1+\mu)]$. Маргинална расподела ова два $NGINAR(1)$ временска низа је геометријска $Geom(\mu/(1+\mu))$ расподела. На основу последица 2.1.1 и 2.2.1, добија се да је:

$$X_n - Y_n = (\alpha * X_{n-1} - \alpha * Y_{n-1}) + (\varepsilon_n - \eta_n) \stackrel{d}{=} \alpha \odot Z_{n-1} + e_n = Z_n, \quad (2.3.1)$$

тј. $Z_n \stackrel{d}{=} X_n - Y_n$, за свако $n \geq 0$. Због тога важи да је $E(Z_n) = 0$ и $Var(Z_n) = 2\mu(1+\mu)$.

За $DLINAR(1)$ временски низ, дефинисан са (2.2.1), важи и следећи резултат.

Теорема 2.3.1 *$DLINAR(1)$ временски низ $\{Z_n\}$ је строго стационаран и ергодичан процес Маркова.*

Доказ. Најпре ће бити доказано, да је $DLINAR(1)$ временски низ процес Маркова. На основу представљања оператора $\alpha\odot$, датог у теореми 2.1.3, следи да је $\alpha \odot Z_{n-1} \stackrel{d}{=} sgn(Z_{n-1})(\alpha * |Z_{n-1}|) + \xi_n$, где је $\{\xi_n\}$ низ независних случајних променљивих расподељених као случајна променљива $\sum_{j=1}^{\min(X_n,Y_n)} D_j$ и независних од Z_{n-1} и од елемената бројачког низа у $\alpha * |Z_{n-1}|$. Случајна променљива $\alpha * |Z_{n-1}|$ условљена својом прошлошћу има негативну биномну расподелу са параметрима $|z_{n-1}|$ и $\frac{\alpha}{1+\alpha}$, јер је

$$\begin{aligned} \alpha * |Z_{n-1}| \Big| \{Z_{n-1}=z_{n-1},\ldots,Z_0=z_0\} &= \sum_{i=1}^{|Z_{n-1}|} W_i \Big| \{Z_{n-1}=z_{n-1},\ldots,Z_0=z_0\} \\ &= \sum_{i=1}^{|z_{n-1}|} W_i \end{aligned}$$

збир $|z_{n-1}|$ независних, једнако расподељених случајних променљивих са геометријском, $Geom(\frac{\alpha}{1+\alpha})$, расподелом. Због тога је

$$P(Z_n=z_n | Z_{n-1}=z_{n-1},\ldots,Z_0=z_0)=$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{j=0}^{\infty}P(sgn(Z_{n-1})(\alpha*|Z_{n-1}|)=z_n|Z_{n-1}=z_{n-1},...,Z_0=z_0)\\
&\qquad\times P(\xi_n+e_n=z_n-j\cdot sgn(z_{n-1}))\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{|z_{n-1}|+j-1}{j}\frac{\alpha^j}{(1+\alpha)^{|z_{n-1}|+j}}P(\xi_n+e_n=z_n-j\cdot sgn(z_{n-1})).
\end{aligned}
$$

Међутим, пошто последња једнакост зависи само од z_{n-1}, јасно следи да је $DLINAR(1)$ временски низ процес Маркова.

У циљу једноставнијег записа, нека је догађај

$$A_{m,i} = \{Z_{m+i} = z_i, Z_{m+i-1} = z_{i-1}, \ldots, Z_{m+1} = z_1\}.$$

Да би се доказала строга стационарност случајног низа $\{Z_n\}$, треба показати да, за свако $n \geq 1$ и свако $k \geq 1$ важи

$$P(A_{0,k}) = P(A_{n,k}). \tag{2.3.2}$$

С обзиром на то да је $DLINAR(1)$ процес Маркова, следи

$$
\begin{aligned}
P(A_{n,k}) &= P(Z_{n+k}=z_k|A_{n,k-1})P(A_{n,k-1})\\
&= P(Z_{n+1}=z_1)\prod_{i=2}^{k}P(Z_{n+i}=z_i|Z_{n+i-1}=z_{i-1})\\
&= P(Z_{n+1}=z_1)\prod_{i=2}^{k}P(\alpha\odot Z_{n+i-1}+e_{n+i}=z_i|Z_{n+i-1}=z_{i-1})\\
&= P(Z_{n+1}=z_1)\prod_{i=2}^{k}P(\alpha\odot Z_{n+i-1}=m,e_{n+i}=z_i-m|Z_{n+i-1}=z_{i-1})\\
&= P(Z_{n+1}=z_1)\prod_{i=2}^{k}\sum_{m=-\infty}^{\infty}P(\alpha\odot Z_{n+i-1}=m|Z_{n+i-1}=z_{i-1})\\
&\qquad\qquad\times P(e_{n+i}=z_i-m).
\end{aligned}
$$

Елементи временског низа $\{Z_n\}$ су једнако расподељене случајне променљиве, па је $P(Z_{n+1} = z_1) = P(Z_1 = z_1)$. Такође, за свако $n \geq 1$ и свако $i, 2 \leq i \leq k$ важи

$$P(\alpha\odot Z_{n+i-1}=m|Z_{n+i-1}=z_{i-1})=g_\alpha(m,z_{i-1})=P(\alpha\odot Z_{i-1}=m|Z_{i-1}=z_{i-1}),$$

а, с обзиром на то да су и елементи иновационог низа $\{e_n\}$ једнако расподељени, важи да је и $P(e_{n+i} = z_i - m) = P(e_i = z_i - m)$. На овај начин се добија да је

$$\begin{aligned} P(A_{n,k}) &= P(Z_1 = z_1) \prod_{i=2}^{k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} P(\alpha \odot Z_{i-1} = m | Z_{i-1} = z_{i-1}) \\ &\qquad \times P(e_i = z_i - m). \end{aligned}$$

Враћајући поступак извођења уназад, добија се да је,

$$P(A_{n,k}) = P(A_{0,k}).$$

На крају, у циљу доказа ергодичности, може се применити исти апарат као у доказу теореме 2.1.1 из докторске дисертације Nastić (2012) и чињеница да је σ-алгебра генерисана случајним променљивама $Z_n, Z_{n-1}, \ldots$ подскуп σ-алгебре генерисане независним случајним променљивама $\xi_n, e_n, W^{(n)}, \xi_{n-1}, e_{n-1}, W^{(n-1)}, \ldots$, где су $W^{(n)}$ случајне променљиве укључене у $\alpha * |Z_{n-1}|$. $\square$

Још неке особине које ће бити приказане и анализиране у наставку могу бити врло битне за карактеризацију $DLINAR(1)$ временских низова. То су k-корачно условно очекивање, аутокорелациона структура и спектрална густина временског низа. Ове особине, такође, играју велику улогу и у процесу оцењивања непознатих параметара модела.

Теорема 2.3.2 *k-корачно условно очекивање $DLINAR(1)$ временског низа $\{Z_n\}$, дефинисаног изразом (2.2.1) једнако је $E(Z_{n+k}|Z_n) = \alpha^k Z_n$, $k \geq 0$.*

Доказ. Доказ ће бити изведен индукцијом. За $k = 0$, тривијално је да једнакост важи. Нека, сада, једнакост важи за свако $k < m$. На основу тога, треба показати да је једнакост тачна и за $k = m$. Користећи особине условног математичког очекивања, као и марковско својство временског низа $\{Z_n\}$, добија се

$$\begin{aligned} E(Z_{n+m}|Z_n) &= E(E(Z_{n+m}|Z_{n+m-1}, Z_n)|Z_n) = E(E(Z_{n+m}|Z_{n+m-1})|Z_n) \\ &= E(\alpha Z_{n+m-1}|Z_n) = \alpha\alpha^{m-1} Z_n = \alpha^m Z_n. \ \square \end{aligned}$$

Сада се може доказати следећи резултат.

Теорема 2.3.3 *$DLINAR(1)$ временски низ $\{Z_n\}$ дефинисан изразом (2.2.1) је позитивно корелиран временски низ са аутокорелационом функцијом $Corr(Z_n, Z_{n-k}) = \alpha^{|k|}$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Доказ. Нека је $k \geq 0$. Пошто је временски низ $\{Z_n\}$ строго стационаран, k-корачно условно очекивање је $E(Z_n|Z_{n-k}) = \alpha^k Z_{n-k}$ и дисперзија временског низа је коначна, $Var(Z_n) = 2\mu(1+\mu)$, израз за аутоковаријансну функцију $Cov(Z_n, Z_{n-k})$ се може добити на једноставан начин

$$\begin{aligned} Cov(Z_n, Z_{n-k}) &= Cov(Z_{n-k}, Z_n) = Cov(Z_{n-k}, E(Z_n|Z_{n-k})) \\ &= Cov(Z_{n-k}, \alpha^k Z_{n-k}) = \alpha^k Var(Z_{n-k}) = 2\alpha^k \mu(1+\mu). \end{aligned}$$

Дакле, аутокорелациона функција је $Corr(Z_n, Z_{n-k}) = \alpha^k$.

Узимајући у обзир симетричност аутоковаријансне функције, случај када је $k < 0$ се изводи на исти начин и добија се да је $Cov(Z_n, Z_{n-k}) = 2\alpha^{-k}\mu(1+\mu)$, одакле се добија да је аутокорелациона функција $Corr(Z_n, Z_{n-k}) = \alpha^{-k}$. □

На основу облика аутокорелационе функције, може се закључити да она експоненцијално опада ка нули, када се корак k бесконачно увећава. Ова особина сврстава $DLINAR(1)$ временске низове у категорију слабо корелираних временских низова. Веома битна особина овог временског низа је и то што он припада класи асимптотски некорелираних низова. С обзиром на то да се из сваког стања временског низа $\{Z_n\}$, може, после одређеног броја корака, стићи у било које друго стање, односно, посматрајући вероватноће прелаза, важи да за свако $i, j \geq 1$, постоји $m < \infty$, тако да је $P(Z_{n+m} = j|Z_n = i) > 0$, временски низ $\{Z_n\}$ је иредуцибилан. Такође, из било ког стања, је могуће, за произвољан, ненегативан број корака, поново вратити се у исто стање, тј. за свако $i \geq 1$ и за свако $m \geq 0$, важи да је $P(Z_{n+m} = i|Z_n = i) > 0$, односно, временски низ $\{Z_n\}$ је апериодичан. Због тога, на основу теореме 3.2 из рада Bradley (2005), следи да је временски низ $\{Z_n\}$ низ јаког мешања.

Користећи облик аутокорелационе функције, може се одредити и спектрална густина $DLINAR(1)$ временског низа. Спектрална густина представља Фуријеову трансформацију аутоковаријансне функције. Она, такође, може бити значајан алат у проучавању понашања временског низа, нпр. у откривању и описивању неслучајних компоненти временског низа. По дефиницији је то

$$f_Z(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_Z(k)e^{-i\lambda k},\ \lambda\in[-\pi,\pi],$$

где је $\gamma_Z(k) = Cov(Z_{n+k}, Z_n)$.

Спектрална густина $DLINAR(1)$ временског низа ће бити

$$\begin{aligned} f_Z(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k 2\mu(1+\mu)e^{-i\lambda k} + \sum_{k=-\infty}^{-1}\alpha^{-k}2\mu(1+\mu)e^{-i\lambda k}\right) \\ &= \frac{2\mu(1+\mu)}{2\pi}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-i\lambda}} + \frac{1}{1-\alpha e^{i\lambda}} - 1\right) \\ &= \frac{\mu(1+\mu)}{\pi}\cdot\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\lambda},\ \lambda\in[-\pi,\pi]. \end{aligned}$$

У следећој теореми је дата $MA(\infty)$ репрезентација $DLINAR(1)$ временског низа дефинисаног изразом (2.2.1).

Теорема 2.3.4 *$DLINAR(1)$ временски низ $\{Z_n\}$ се може представити, у расподели, као $MA(\infty)$ временски низ*

$$Z_n \overset{d}{=} \sum_{j=0}^{\infty}\alpha\odot^{(j)} e_{n-j}, \tag{2.3.3}$$

где је $\alpha *^{(0)} \varepsilon_n = \varepsilon_n$, $\alpha *^{(j)} \varepsilon_{n-j} \overset{деф}{=} \alpha * (\alpha *^{(j-1)} \varepsilon_{n-j})$, $\alpha *^{(0)} \eta_n = \eta_n$, $\alpha *^{(j)} \eta_{n-j} \overset{деф}{=} \alpha * (\alpha *^{(j-1)} \eta_{n-j})$, и $\alpha\odot^{(j)} e_{n-j} \overset{деф}{=} \alpha *^{(j)} \varepsilon_{n-j} - \alpha *^{(j)} \eta_{n-j}$, $j\geq 1$.

Доказ. На основу (2.3.1) и дефиниције $\alpha\odot^{(k)}$ и $\alpha *^{(k)}$, је

$$\begin{aligned} Z_n &\overset{d}{=} \alpha * X_{n-1} + \varepsilon_n - \alpha * Y_{n-1} - \eta_n \\ &= \alpha * (\alpha * X_{n-2} + \varepsilon_{n-1}) + \varepsilon_n - \alpha * (\alpha * Y_{n-1} + \eta_{n-1}) - \eta_n. \end{aligned}$$

С обзиром на то да је негативни биномни тининг оператор адитиван у расподели, тј. важи да је

$$\alpha * (X+Y) = \sum_{i=1}^{X+Y} W_i \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{X} W_i' + \sum_{i=1}^{Y} W_i'' = \alpha * X + \alpha * Y,$$

где су W_i, W_i' и W_i'', $i \geq 1$, независне и једнако расподељене случајне промењиве са геометријском, $Geom(\alpha/(1+\alpha))$, расподелом, следи да је

$$\begin{aligned} Z_n &\stackrel{d}{=} \alpha *^{(2)} X_{n-2} - \alpha *^{(2)} Y_{n-2} + (\alpha * \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n) - (\alpha * \eta_{n-1} + \eta_n) \\ &\stackrel{d}{=} \alpha *^{(2)} X_{n-2} - \alpha *^{(2)} Y_{n-2} + (\alpha \odot e_{n-1} + e_n). \end{aligned}$$

Настављајући овај поступак, добија се, а лако се доказује математичком индукцијом, да је

$$Z_n \stackrel{d}{=} \alpha *^{(k)} X_{n-k} - \alpha *^{(k)} Y_{n-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha \odot^{(j)} e_{n-j}.$$

Сада треба одредити расподелу случајне промењиве $\alpha *^{(k)} X_{n-k}$. За функцију генератрисе вероватноћа збира X независиних једнако расподељених случајних промењивих $U_i, i \geq 1$, где је X такође случајна промењива, важи

$$\Phi_{\sum_{i=1}^{X} U_i}(s) = \Phi_X \left(\Phi_U(s)\right),$$

при чему је Φ_X функција генератрисе вероватноћа случајне промењиве X, а Φ_U функција генератрисе вероватноћа случајних промењивих U_i. Функција генератрисе вероватноћа случајне промењиве $\alpha *^{(k)} X_{n-k}$ је

$$\Phi_{\alpha *^{(k)} X_{n-k}}(s) \ = \ \Phi_{\alpha * (\alpha *^{(k-1)} X_{n-k})}(s).$$

На основу дефиниције негативног биномног тининг оператора $\alpha *$ је $\alpha * (\alpha *^{(k-1)} X_{n-k}) = \sum_{i=1}^{\alpha *^{(k-1)} X_{n-k}} W_i$. Због тога је

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha *^{(k)} X_{n-k}}(s) &= \Phi_{\sum_{i=1}^{\alpha *^{(k-1)} X_{n-k}} W_i}(s) = \Phi_{\alpha *^{(k-1)} X_{n-k}} \left(\Phi_W(s)\right) \\ &= \Phi_{\alpha * (\alpha *^{(k-2)} X_{n-k})}(\Phi_W(s)) = \Phi_{\sum_{i=1}^{\alpha *^{(k-2)} X_{n-k}} W_i}(\Phi_W(s)) \\ &= \Phi_{\alpha *^{(k-2)} X_{n-k}} \left(\Phi_W(\Phi_W(s))\right) = \Phi_{\alpha *^{(k-2)} X_{n-k}} \left(\Phi_W^2(s)\right). \end{aligned}$$

Након још $k-2$ корака, опет, лако се доказује математичком индукцијом, добија се да је

$$\Phi_{\alpha *^{(k)} X_{n-k}}(s) = \Phi_{X_{n-k}} \left(\Phi_W^k(s)\right).$$

С обзиром на то да случајне промењљиве $W_i, i \geq 1$ имају геометријску, $Geom(\frac{\alpha}{1+\alpha})$, расподелу, њихова функција генератрисе вероватноћа је $\Phi_W(s) = \frac{1}{1+\alpha-\alpha s}$. То имплицира, а математичком индукцијом се веома лако доказује, да је $\Phi_W^{(k)}(s) = \frac{1-\alpha^{k+1}-\alpha(1-\alpha^k)s}{1-\alpha^{k+2}-\alpha(1-\alpha^{k+1})s}$. Пошто и случајна промењљива X_{n-k} има геометријску, $Geom(\frac{\mu}{1+\mu})$, расподелу, онда њена функција генератрисе вероватноћа има облик $\Phi_{X_{n-k}}(s) = \frac{1}{1+\mu-\mu s}$. Због тога се за функције генератрисе вероватноћа случајне промењљиве $\alpha *^{(k)} X_{n-k}$ добија

$$\Phi_{\alpha *^{(k)} X_{n-k}}(s) = \frac{1 + \frac{\alpha-\alpha^{k+2}}{1-\alpha}(1-s)}{1 + \left[\frac{\alpha-\alpha^{k+2}}{1-\alpha} + \mu\alpha^{k+1}\right](1-s)}.$$

Добијена функција генератрисе вероватноћа се може записати у, за даљу анализу, погоднијем облику

$$\Phi_{\alpha *^{(k)} X_{n-k}}(s) = \frac{\frac{\frac{\alpha-\alpha^{k+2}}{1-\alpha}}{\frac{\alpha-\alpha^{k+2}}{1-\alpha}+\mu\alpha^{k+1}}}{1} + \frac{\frac{\mu\alpha^{k+1}}{\frac{\alpha-\alpha^{k+2}}{1-\alpha}+\mu\alpha^{k+1}}}{1 + \left[\frac{\alpha-\alpha^{k+2}}{1-\alpha} + \mu\alpha^{k+1}\right](1-s)}.$$

Овако записана, функција генератрисе вероватноћа случајне промењљиве $\alpha *^{(k)} X_{n-k}$ представља линеарну комбинацију функција генератриса вероватноће две случајне промењљиве, и то једне, дегенерисане, која је у расподели једнака нули и једне случајне промењљиве са геометријском, $Geom\left(\frac{\frac{\alpha-\alpha^{k+2}}{1-\alpha}+\mu\alpha^{k+1}}{1+\frac{\alpha-\alpha^{k+2}}{1-\alpha}+\mu\alpha^{k+1}}\right)$, расподелом

$$\Phi_0(s) = 1 \quad \text{и} \quad \Phi_{Geom}(s) = \frac{1}{1 + \left[\frac{\alpha-\alpha^{k+2}}{1-\alpha} + \mu\alpha^{k+1}\right](1-s)}.$$

Уз то је и збир бројилаца, тј. коефицијената поменуте линеарне комбинације једнак јединици, што значи да случајна промењљива $\alpha *^{(k)} X_{n-k}$ представља мешавину две случајне промењљиве

$$\alpha *^{(k)} X_{n-k} = \begin{cases} 0, & \text{с.в. } \frac{\frac{\alpha-\alpha^{k+2}}{1-\alpha}}{\frac{\alpha-\alpha^{k+2}}{1-\alpha}+\mu\alpha^{k+1}} \\ Geom\left(\frac{\frac{\alpha-\alpha^{k+2}}{1-\alpha}+\mu\alpha^{k+1}}{1+\frac{\alpha-\alpha^{k+2}}{1-\alpha}+\mu\alpha^{k+1}}\right), & \text{с.в. } \frac{\mu\alpha^{k+1}}{\frac{\alpha-\alpha^{k+2}}{1-\alpha}+\mu\alpha^{k+1}}. \end{cases}$$

Када k тежи бесконачности, добија се

$$\alpha *^{(k)} X_{n-k} \xrightarrow{d} \begin{cases} 0, & \text{с.в. } 1 \\ Geom\,(\alpha)\,, & \text{с.в. } 0. \end{cases} \overset{\text{с.в.}1}{=} 0$$

Исти закључак се добија и када је у питању случајна променљива $\alpha *^{(k)} Y_{n-k}$. И на крају, пошто случајне променљиве $\alpha *^{(k)} X_{n-k}$ и $\alpha *^{(k)} Y_{n-k}$ ишчезавају у бесконачности, добија се тражена $MA(\infty)$ репрезентација временског низа $\{Z_n\}$. $\square$

На крају, треба истаћи и један, може се рећи, недостатак, овако дефинисаног $DLINAR(1)$ модела. То је његова позитивна аутокорелираност, која може умањити поље примене овог модела. Овај недостатак се, ипак, може елиминисати. Наиме, у раду Freeland (2010) се посматра позитивно корелиран временски низ $\{Z_n\}$ са Скеламовом маргиналном расподелом који је дефинисан као разлика два узајамно независна временска низа $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ са истом Пуасоновом маргиналном расподелом, $Z_n = X_n - Y_n$. Осим тог низа, посматра се и временски низ, овога пута, негативно корелиран, дефинисан на следећи начин $Z_n = (-1)^n(X_n - Y_n)$. Пратећи ову технику, може се дефинисати стационаран, ауторегресиван временски низ са целобројним вредностима, са дискретном Лапласовом маргиналном расподелом, са негативном једнокорачном аутокорелацијом, на следећи начин

$$Z_n = \alpha \odot (-Z_{n-1}) + e_n, \;\; n \geq 1, \tag{2.3.4}$$

где је $Z_n \overset{d}{=} X_n - Y_n, \alpha \in (0, \mu/(1+\mu)]$, Z_0 случајна променљива са дискретном Лапласовом, $DL(\mu/(1+\mu))$, расподелом $\{e_n\}$ низ независних, једнако расподељених целобројних случајних променљивих таквих да је су e_n и Z_{n-l} независни за свако $l \geq 1$ и $e_n \overset{d}{=} (-1)^n(\varepsilon_n - \eta_n)$, за свако $l \geq 1$ и $e_n \overset{d}{=} (-1)^n(\varepsilon_n - \eta_n)$. За свако $n \geq 0$, тининг оператор $\alpha\odot$ је дефинисан изразом (2.1.1), а елементи бројачког низа из $\alpha \odot (-Z_{n-1})$ су случајне променљиве независне од Z_n и e_m за свако n и m.

То да је маргинална расподела овако дефинисаног временског низа иста као и маргинална расподела временског низа дефинисаног изразом (2.2.1), доказује се лако. Наиме, разлике $\alpha * X_n - \alpha * Y_n$

и $\alpha * Y_n - \alpha * X_n$ имају исту расподелу јер и X_n, и Y_n имају исту расподелу. С друге стране, због једнаке расподељености случајних променљивих ε_n и η_n, су и разлике $\varepsilon_n - \eta_n$ и $\eta_n - \varepsilon_n$ једнако расподељене. За временски низ дефинисан изразом (2.3.4) се могу доказати исте или сличне особине као и за временски низ дефинисан изразом (2.2.1).

Теорема 2.3.5 *$DLINAR(1)$ временски низ $\{Z_n\}$, дефинисан изразом* (2.3.4)*, је строго стационаран и ергодичан процес Маркова.*

Приликом доказивања марковског својства низа $\{Z_n\}$ треба само испратити доказ одговарајуће теореме за његов позитивно корелирани аналогон. Важи исто представљање оператора $\alpha\odot$ преко оператора $\alpha *$. Једина разлика је што ће функција $sgn(Z_{n-1})$ имати супротан знак. Међутим, то неће променити чињеницу да елемент Z_n, од читаве своје прошлости, зависи само од Z_{n-1}. Строга стационарност и ергодичност се доказују на идентичан начин као у случају позитивно корелираног временског низа.

Следеће две особине се могу доказати на исти начин као што је то урађено у одговарајућим теоремама за временски низ дефинисан изразом (2.2.1).

Теорема 2.3.6 *k-корачно условно очекивање $DLINAR(1)$ временског низа $\{Z_n\}$ дефинисаног изразом* (2.3.4) *је $E(Z_{n+k}|Z_n) = (-\alpha)^k Z_{n-k}$, $k \geq 0$.*

На основу претходне теореме се може закључити да ће приликом једнокорачне прогнозе, предвиђена вредност у сваком наредном кораку бити супротног знака од реализоване вредности у претходном кораку.

Теорема 2.3.7 *$DLINAR(1)$ временски низ $\{Z_n\}$ дефинисан изразом* (2.3.4) *је корелиран временски низ са $Corr(Z_n, Z_{n-k}) = (-\alpha)^k$, $k \geq 0$.*

Претходна теорема показује да је једнокорачна аутокорелација низа дефинисаног изразом (2.3.4). Општије, све аутокорелације непарног корака су негативне, а све аутокорелације парног корака су позитивне.

Спектрална густина временског низа $\{Z_n\}$ дефинисаног изразом (2.3.4) је једнака

$$f_Z(\lambda) = \frac{2\mu(1+\mu)}{2\pi} \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2+2\alpha\cos\lambda}, \ \lambda \in [-\pi, \pi]\,.$$

Такође, важи и $MA(\infty)$ репрезентација $DLINAR(1)$ временског низа дефинисаног изразом (2.3.4). На исти начин као у доказу одговарајуће теореме за позитивно корелирани временски низ добија се да је

$$Z_n \stackrel{d}{=} \alpha *^{(k)} (-1)^k X_{n-k} - \alpha *^{(k)} (-1)^k Y_{n-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha \odot^{(j)} (-1)^k e_{n-j}.$$

Међутим, због исте расподеле низова $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ и комутативности сабирања добија се да је

$$\alpha *^{(k)} (-1)^k X_{n-k} - \alpha *^{(k)} (-1)^k Y_{n-k} \stackrel{d}{=} \alpha *^{(k)} X_{n-k} - \alpha *^{(k)} Y_{n-k}.$$

Такође је и $\varepsilon_n - \eta_n \stackrel{d}{=} \eta_n - \varepsilon_n$, тј. $e_n \stackrel{d}{=} -e_n$ па је сасвим јасно да је

$$Z_n \stackrel{d}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha \odot^{(j)} e_{n-j}.$$

2.4 Оцењивање непознатих параметара

За оцењивање непознатих параметара $DLINAR(1)$ временског низа $\{Z_n\}$ задатог изразом (2.2.1) ће бити коришћени Yule-Walker-ов метод и метод условних најмањих квадрата. Прво ће бити одређене оцене непознатих параметара Yule-Walker-овим методом.

Нека је $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_N)$ случајан узорак временског низа обима N. На основу теореме 2.3.3 је $Corr(Z_n, Z_{n-1}) = \alpha$ и како је, притом, $E(Z_n) = 0$, за свако $n \geq 0$, добија се Yule-Walker-ова оцена параметра α

$$\hat{\alpha}^{YW} = \frac{\sum_{n=2}^{N} Z_n Z_{n-1}}{\sum_{n=1}^{N} Z_n^2} = \frac{\hat{\gamma}_Z(1)}{\hat{\gamma}_Z(0)}, \tag{2.4.1}$$

где је $\hat{\gamma}_Z(1)$ једнокорачна узорачка коваријанса, а $\hat{\gamma}_Z(0)$ узорачка дисперзија.

Параметар μ се оцењује користећи чињеницу да је $Var(Z_n) = E(Z_n^2) = 2\mu(1+\mu)$. Изједначавајући теоријску и узорачку дисперзију, добија се квадратна једначина

$$2\mu^2 + 2\mu - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Z_n^2 = 0.$$

Решавајући ову квадратну једначину и узимајући у обзир да је $\mu > 0$, добија се да је Yule-Walker-ова оцена параметра μ :

$$\hat{\mu}^{YW} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N} Z_n^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2\hat{\gamma}_Z(0)}\,. \qquad (2.4.2)$$

Да би се доказале асимптотске особине статистика (2.4.1) и (2.4.2) биће коришћена и следећа тврђења.

Теорема 2.4.1 (White (1984), теорема 5.15) *Нека је $\{Z_n\}$ строго стационаран и ергодичан низ случајних променљивих са коначним моментом другог реда, $EZ_n^2 = \sigma^2 < \infty$, такав да $E(Z_n|\mathcal{F}_{n-m}) \stackrel{с.к.}{\to} 0$, када $m \to \infty$, и $\sum_{j=0}^{\infty} (Var(R_{nj}))^{1/2} < \infty$, где је случајна променљива $R_{nj} = E(Z_n|\mathcal{F}_{n-j}) - E(Z_n|\mathcal{F}_{n-j-1})$. Тада је $\overline{\sigma}_n^2 \to \overline{\sigma}^2 < \infty,\ n \to \infty$, и ако је $\overline{\sigma}^2 > 0$, тада*

$$\frac{\sqrt{n}\ \overline{Z}_n}{\overline{\sigma}} \stackrel{d}{\to} \mathcal{N}(0,1),$$

где је $\overline{\sigma}_n^2 = Var\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)/n$, а ознака $\stackrel{с.к.}{\to}$ представља конвергенцију у средње-квадратном смислу.

Последица 2.4.1 *У складу са ознакама из претходне теореме, за $DLINAR(1)$ временски низ $\{Z_n\}$ важи*

$$\frac{\sqrt{n}\ \overline{Z}_n}{\overline{\sigma}} \stackrel{d}{\to} \mathcal{N}(0,1).$$

Доказ. За случајан низ $\{Z_n\}$ важи

$$E(Z_n) = 0, E(Z_n^2) = Var(Z_n) = 2\mu(1+\mu), Cov(Z_n, Z_{n-1}) = 2\alpha\mu(1+\mu).$$

С обзиром на то да је $\{Z_n\}$ процес Маркова, важи да је

$$E(Z_n|\mathcal{F}_{n-m}) = E(Z_n|Z_{n-m}) = \alpha^m Z_{n-m},$$

па следи да је

$$E|\alpha^m Z_{n-m}|^2 = \alpha^{2m} Var(Z_{n-m}) = \alpha^{2m} 2\mu(1+\mu) \to 0,\ m \to \infty,$$

што значи да $E(Z_n|\mathcal{F}_{n-m}) \stackrel{s.k.}{\to} 0,\ m \to \infty$.

С обзиром на то да је $E(Z_n|\mathcal{F}_{n-m}) = \alpha^m Z_{n-m}$, следи да је

$$R_{nj} = \alpha^j Z_{n-j} - \alpha^{j+1} Z_{n-j-1}.$$

Због тога је

$$\begin{aligned}
Var(R_{nj}) &= E\left(R_{nj}^2\right) - (ER_{nj})^2 = E\left(R_{nj}^2\right) \\
&= E\left(\alpha^{2j} Z_{n-j}^2 - 2\alpha^{2j+1} Z_{n-j} Z_{n-j-1} + \alpha^{2j+2} Z_{n-j-1}^2\right) \\
&= \alpha^{2j} Var(Z_{n-j}) - 2\alpha^{2j+1} Cov(Z_{n-j}, Z_{n-j-1}) \\
&+ \alpha^{2j+2} Var(Z_{n-j-1}) \\
&= 2\alpha^{2j}\mu(1+\mu) - 4\alpha^{2j+1}\alpha\mu(1+\mu) + 2\alpha^{2j+2}\mu(1+\mu) \\
&= 2\mu(1+\mu)\alpha^{2j}(1-\alpha^2),
\end{aligned}$$

а затим, и

$$\sum_{j=0}^{\infty} (Var(R_{nj}))^{1/2} = \sqrt{2\mu(1+\mu)(1-\alpha^2)} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = \frac{\sqrt{2\mu(1+\mu)(1-\alpha^2)}}{1-\alpha} < \infty.$$

Даље је

$$\begin{aligned}
Var\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^2 = E\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 + 2\sum_{i<j} Z_i Z_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left(Z_i^2\right) + 2\sum_{i<j} E\left(Z_i Z_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Var\left(Z_i\right) + 2\sum_{i<j} Cov\left(Z_i, Z_j\right) \\
&= 2n\mu(1+\mu) + 2\sum_{i<j} 2\alpha^{j-i}\mu(1+\mu) \\
&= 2n\mu(1+\mu) + 4\mu(1+\mu)\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\alpha^i.
\end{aligned}$$

С обзиром на то да је

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\alpha^i &= n\sum_{i=1}^{n-1}\alpha^i - \sum_{i=1}^{n-1} i\alpha^i \\ &= n\frac{\alpha(1-\alpha^{n-1})}{1-\alpha} - \frac{\alpha(1+(n-1)\alpha^n - n\alpha^{n-1})}{(1-\alpha^2)},\end{aligned}$$

након краћег израчунавања, следи да је

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \frac{2\mu(1+\mu)}{(1-\alpha)^2}\left(2\alpha^{n+1} - n\alpha^2 - 2\alpha + n\right).$$

Одатле следи да је

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_n^2 &= \frac{Var\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)}{n} \\ &= \frac{2\mu(1+\mu)}{(1-\alpha)^2}\left(2\frac{\alpha^{n+1}}{n} - \alpha^2 - 2\frac{\alpha}{n} + 1\right) \to \overline{\sigma}^2 = 2\mu(1+\mu)\frac{1+\alpha}{1-\alpha} > 0.\end{aligned}$$

Пошто је временски низ $\{Z_n\}$ строго стационаран и ергодичан и, при томе, за њега важе сви услови претходне теореме следи да

$$\frac{\sqrt{n}\ \overline{Z}_n}{\overline{\sigma}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1). \ \square$$

Теорема 2.4.2 (White (2001), теорема 3.34) *Нека је $\{Z_n\}$ строго стационаран и ергодичан низ случајних променљивих са коначним апсолутним моментом првог реда, $E|Z_n| < \infty$. Тада важи*

$$\overline{Z}_n \xrightarrow{c.в.1} EZ_n.$$

Теорема 2.4.3 (White (2001), теорема 3.35) *Нека је дат простор вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, низ случајних променљивих $\{Z_n\}$ и $\mathcal{F}-$мерљива функција $g : \mathbb{R}^{2k+1} \to \mathbb{R}$. Нека је низ $\{Y_n\}$ дефинисан на следећи начин*

$$Y_n = g(Z_{n-k}, Z_{n-k+1}, \ldots, Z_{n-1}, Z_n, Z_{n+1}, \ldots, Z_{n+k-1}, Z_{n+k}).$$

Ако је низ $\{Z_n\}$ строго стационаран и ергодичан, онда је такав и низ $\{Y_n\}$.

Теорема 2.4.4 (теорема о непрекидном пресликавању) *Нека је* $\{X_n\}$ *низ* $k-$*димензионалних случајних променљивих и нека је пресликавање* $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ *непрекидно. Тада важи*

$$X_n \to X \Rightarrow g(X_n) \to g(X),$$

при чему се тврђење односи на конвергенције у вероватноћи, расподели и скоро извесном смислу.

Последица 2.4.2 (теорема о конвергенцији количника) *Нека низови случајних променљивих* $\{X_n\}$ *и* $\{Y_n\}$ *конвергирају истовремено у вероватноћи, расподели или скоро извесном смислу,* $X_n \to X$, $Y_n \to Y$. *Ако је* $Y \neq 0$, *с.в.1, тада важи*

$$\frac{X_n}{Y_n} \to \frac{X}{Y},$$

при чему тип конвергенције количника одговара конвергенцији дељеника и делиоца.

На основу претходних теорема се може, као последица, извести следећи закључак.

Теорема 2.4.5 *Нека је* $\{Z_n\}$ *један* $DLINAR(1)$ *временски низ. Тада важи*

i) *низови* $\{Z_n^2\}$ *и* $\{Z_n Z_{n-1}\}$ *су строго стационарни и ергодични*

ii) $\hat{\gamma}_Z(0) \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_n^2 \overset{c.в.1}{\to} EZ_n^2 = \gamma_Z(0)$

iii) $\hat{\gamma}_Z(1) \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_n Z_{n-1} \overset{c.в.1}{\to} E(Z_n Z_{n-1}) = \gamma_Z(1)$

Доказ. Доказ првог дела се добија применом теореме 2.4.3 на низ $\{Z_n\}$ и функције $g(Z_n) = Z_n^2$ и $h(Z_{n-1}, Z_n) = Z_n Z_{n-1}$. Други и трећи део су последица примене теореме 2.4.2 на низове $\{Z_n^2\}$ и $\{Z_n Z_{n-1}\}$. □

Теорема 2.4.6 (Brockwell и Davis (1987), тврђење 6.3.9) *Нека су* $\{X_n\}$ *и* $\{Y_{nj}\}$, $n, j \geq 1$, *низови* $k-$*димензионалних случајних променљивих који задовољавају следеће услове* *i)* $Y_{nj} \xrightarrow{d} Y_j, n \to \infty \ \forall j \geq 1$

ii) $Y_j \xrightarrow{d} Y, j \to \infty$

iii) $\lim_{j\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\left(|X_n - Y_{nj}| > \varepsilon\right) = 0, \forall \varepsilon > 0$

Тада $X_n \xrightarrow{d} Y, n \to \infty$.

Тврђење 2.4.1 (Brockwell и Davis (1987), тврђење 6.3.1 (the Cramer-Wold device)) *Нека је* $\{X_n\}$ *низ* $k-$*димензионалних случајних промењливих.* $X_n \xrightarrow{d} X$ *ако и само ако* $\lambda^T X_n \xrightarrow{d} \lambda^T X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^k$.

Теорема 2.4.7 (Brockwell и Davis (1987), теорема 6.4.2) *Нека је* $\{X_n\}$ *строго стационаран,* $m-$*зависан низ случајних промењливих, са математичким очекивањем 0 и аутоковаријансном функцијом* $\gamma(k)$. *Ако је*

$$v_m = \gamma(0) + 2\sum_{i-1}^{m} \gamma(i) \neq 0,$$

тада је

i) $\lim_{n\to\infty} nVar\left(\overline{X}_n\right) = v_m$

ii) $\overline{X}_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, n^{-1}v_m)$.

Наредна два тврђења се односе на асимптотске особине узорачке аутокорелационе функције $DLINAR(1)$ временског низа и биће корисна приликом описивања асимптотских особина оцена непознатих параметара.

Нека је изразом

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k}\left(Z_i - \overline{Z}_N\right)\left(Z_{i+k} - \overline{Z}_N\right), k \in \mathbb{Z} \qquad (2.4.3)$$

дефинисана узорачка аутоковаријансна функција временског низа $\{Z_n\}$. Нека је, затим, дефинисана и функција $\gamma^*(k)$ на следећи начин

$$\gamma^*(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Z_i - \mu_Z\right)\left(Z_{i+k} - \mu_Z\right), k \in \mathbb{Z}, \qquad (2.4.4)$$

где је $\mu_Z = EZ_n$. Најпре ће бити доказана асимптотска нормалност функције $\gamma^*(k)$, а затим ће бити доказана и једнакост граничних расподела узорачке аутоковаријансне функције и функције $\gamma^*(k)$.

Тврђење 2.4.2 *Нека је дат $DLINAR(1)$ временски низ $\{Z_n\}$ и нека је $\gamma(k)$ његова аутоковаријансна функција. Тада, за свако $k \in \mathbb{N}_0$, важи*

$$\begin{bmatrix} \gamma^*(0) \\ \gamma^*(1) \\ \vdots \\ \gamma^*(h) \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \gamma(0) \\ \gamma(1) \\ \vdots \\ \gamma(h) \end{bmatrix}, N^{-1}\mathbf{V}_\gamma \right),$$

где је функција $\gamma^*(k)$ дефинисана изразом (2.4.4), *а елементи матрице $\mathbf{V}_\gamma$ одређени на следећи начин*

$$V_{\gamma[i,j]} = \lim_{N\to\infty} NCov\left(\gamma^*(i), \gamma^*(j)\right), i, j \in \{0, 1, \ldots, h\}.$$

Доказ. Доказ тврђења прати ток доказа аналогне теореме за ненегативне $INAR$ временске низове, из рада Silva и Silva (2006).

Прво треба напоменути да је $DLINAR(1)$ временски низ $\{Z_n\}$, дефинисан изразом (2.2.1), строго стационаран и да се може представити у облику покретних средина бесконачног реда, $MA(\infty)$, као $Z_n \stackrel{d}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha \odot^i \varepsilon_{n-i}$, где су $\varepsilon_n, n \geq 1$, независне једнако расподељене случајне променљиве. Нека је $EZ_n = \mu_Z$. У случају $DLINAR(1)$ временског низа, $\mu_Z = 0$, али у циљу повећања општости ове теореме и њене касније примене на несиметричне временске низове, тј. временске низове чије је очекивање различито од 0, овај податак неће бити узет у обзир као олакшавајућа околност.

Прво се, за произвољно, а константно $m > 0$, конструишу „одсечене” случајне променљиве Z_n^* на следећи начин

$$Z_n^* = \sum_{i=0}^{m} \alpha \odot^i \varepsilon_{n-i}.$$

Нека је $\mu_m = EZ_n^*$. Важи да је

$$\mu_m = E\left(\sum_{i=0}^{m} \alpha \odot^i \varepsilon_{n-i}\right) = \frac{1-\alpha^{m+1}}{1-\alpha} E\varepsilon_n = (1-\alpha^{m+1})\mu_Z.$$

Сада се конструише центриран низ случајних променљивих $\{Y_n^*\}$ на следећи начин

$$Y_n^* = Z_n^* - \mu_m.$$

Очигледно је да низови $\{Y_n^*\}$ и $\{Z_n^*\}$ имају једнаке аутоковаријансне функције,

$$\gamma_{Y,m}^*(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i^* Y_{i+k}^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Z_i^* - \mu_m)(Z_{i+k}^* - \mu_m) = \gamma_m^*(k).$$

Користећи низ $\{Y_n^*\}$, формира се низ $(h+1)-$димензионалних случајних променљивих $\{U_n\}$,

$$U_n = \begin{bmatrix} Y_n^* Y_n^* \\ Y_n^* Y_{n+1}^* \\ \vdots \\ Y_n^* Y_{n+h}^* \end{bmatrix} \stackrel{d}{=} \begin{bmatrix} (Z_n^* - \mu_m)(Z_n^* - \mu_m) \\ (Z_n^* - \mu_m)(Z_{n+1}^* - \mu_m) \\ \vdots \\ (Z_n^* - \mu_m)(Z_{n+h}^* - \mu_m) \end{bmatrix}.$$

Очигледно је да је

$$\overline{U}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U_i = \begin{bmatrix} \gamma_m^*(0) \\ \gamma_m^*(1) \\ \vdots \\ \gamma_m^*(h) \end{bmatrix}.$$

С обзиром на то да је низ случаниј променљивих $\{U_n\}$ $(m+h)-$зависан, коришћењем тврђења 2.4.1 и теореме 2.4.7 лако се показује да

$$\overline{U}_N \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \gamma_m(0) \\ \gamma_m(1) \\ \vdots \\ \gamma_m(h) \end{bmatrix}, N^{-1}\mathbf{V}_m \right),$$

где је $\gamma_m(k)$ аутоковаријансна функција низа $\{Z_n^*\}$, а елементи матрице $\mathbf{V}_m$ одређени на следећи начин

$$V_{m[i,j]} = \lim_{N\to\infty} NCov\left(\gamma_m^*(i), \gamma_m^*(j)\right), i, j \in \{0, 1, \ldots, h\}.$$

Сада се, на основу представљеног поступка, формира низ случајних промењљивих $\{Z^*_{nm}\}$ као

$$Z^*_{nm} = \sum_{i=0}^{m} \alpha \odot^i \varepsilon_{n-i}.$$

Нека је $\gamma_m(k)$ аутоковаријансна функција случајног низа $\{Z^*_{nm}\}$, а $\gamma^*_m(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Z^*_{im}-\mu_m)(Z^*_{(i+k)m}-\mu_Z)$. За низ $(h+1)-$димензионалних случајних промењљивих $\{T_{Nm}\}$, дефинисан на следећи начин

$$T_{Nm} = \sqrt{N}\begin{bmatrix} \gamma^*_m(0) - \gamma_m(0) \\ \gamma^*_m(1) - \gamma_m(1) \\ \vdots \\ \gamma^*_m(h-)\gamma_m(h) \end{bmatrix},$$

важи да, у расподели, конвергира ка случајној промењљивој са нормаланом расподелом,

$$T_{Nm} \xrightarrow{d} T_m : \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \mathbf{V}_m\right), N \to \infty,$$

где је матрица $\mathbf{V}_m$ са елементима

$$V_{m[i,j]} = \lim_{N\to\infty} NCov\left(\gamma^*_m(i), \gamma^*_m(j)\right), i, j \in \{0, 1, \ldots, h\}.$$

Такође важи и

$$T_m \xrightarrow{d} T : \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \mathbf{V}_\gamma\right), m \to \infty.$$

Ако се сада посматра вероватноћа

$$P\left(\sqrt{N}\left|\gamma^*_m(k) - \gamma_m(k) - \gamma^*(k) + \gamma(k)\right| > \varepsilon\right),$$

може се закључити да је, на основу Чебишевљеве неједнакости

$$\begin{aligned} P\left(\sqrt{N}\left|\gamma^*_m(k) - \gamma^*(k)\right| > \varepsilon\right) &\leq \frac{N}{\varepsilon^2} Var\left(\gamma^*_m(k) - \gamma^*(k)\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(NVar\left(\gamma^*_m(k)\right) + NVar\left(\gamma^*(k)\right) - 2NCov\left(\gamma^*_m(k), \gamma^*(k)\right)\right). \end{aligned}$$

Међутим,

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty}\limsup_{N\to\infty} NVar\left(\gamma^*_m(k)\right) &= \limsup_{N\to\infty}\lim_{m\to\infty} NVar\left(\gamma^*_m(k)\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} NVar\left(\gamma^*(k)\right) \end{aligned}$$

и

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{N\to\infty} NCov\left(\gamma_m^*(k), \gamma^*(k)\right) = \limsup_{N\to\infty}\lim_{m\to\infty} NCov\left(\gamma_m^*(k), \gamma^*(k)\right)$$
$$= \lim_{N\to\infty} NCov\left(\gamma^*(k), \gamma^*(k)\right) = \lim_{N\to\infty} NVar\left(\gamma^*(k)\right).$$

Због тога је

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{N\to\infty} P\left(\sqrt{N}\left|\gamma_m^*(k) - \gamma^*(k)\right| > \varepsilon\right) = 0, \forall\varepsilon > 0.$$

Аналогно је и

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{N\to\infty} P\left(\sqrt{N}\left|\gamma_m(k) - \gamma(k)\right| > \varepsilon\right) = 0, \forall\varepsilon > 0,$$

па је онда и

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{N\to\infty} P\left(\sqrt{N}\left|\gamma_m^*(k) - \gamma_m(k) - \gamma^*(k) + \gamma(k)\right| > \varepsilon\right) = 0, \forall\varepsilon > 0.$$

Пошто низови $\{T_{Nm}\}$, $\{T_m\}$ и низ чији су елементи

$$\begin{bmatrix} \gamma^*(0) - \gamma(0) \\ \gamma^*(1) - \gamma(1) \\ \vdots \\ \gamma^*(h) - \gamma(h) \end{bmatrix}$$

задовољавају услове теореме 2.4.6, следи да

$$\begin{bmatrix} \gamma^*(0) \\ \gamma^*(1) \\ \vdots \\ \gamma^*(h) \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \gamma(0) \\ \gamma(1) \\ \vdots \\ \gamma(h) \end{bmatrix}, N^{-1}\mathbf{V}_\gamma\right). \ \square$$

У доказу следеће теореме биће коришћени резултати, представљени у књизи Brockwell и Davis (1987), који се односе на везу конвергенција у расподели и вероватноћи, као и заједничке граничне расподеле два „блиска" низа случајних промењљивих.

Тврђење 2.4.3 (Brockwell и Davis (1987), тврђење 6.3.2) *Ако за низ $k-$димензионалних случајних промењљивих $\{\mathbf{X}_n\}$ важи $\mathbf{X}_n \xrightarrow{p} \mathbf{X}$, онда важи и* *i)* $E\left|e^{it'\mathbf{X}_n} - e^{it'\mathbf{X}}\right| \to 0, n \to \infty,$ *за свако* $t \in \mathbb{R}^k$,

ii) $\mathbf{X}_n \xrightarrow{d} \mathbf{X}$.

Тврђење 2.4.4 (Brockwell и Davis (1987), тврђење 6.3.3) *Ако су* $\{\mathbf{X}_n\}$ *и* $\{\mathbf{Y}_n\}$ *два низа* $k-$*димензионалних случајних промењљивих таквих да је* $\mathbf{X}_n - \mathbf{Y}_n = o_p(1)$ *и* $\mathbf{X}_n \xrightarrow{d} \mathbf{X}$, *тада* $\mathbf{Y}_n \xrightarrow{d} \mathbf{X}$.

Теорема 2.4.8 *Нека је дат* $DLINAR(1)$ *временски низ* $\{Z_n\}$ *и нека је* $\gamma(k)$ *његова аутоковаријансна функција. Тада, за свако* $k \in \mathbb{N}_0$, *важи*

$$\begin{bmatrix} \hat{\gamma}(0) \\ \hat{\gamma}(1) \\ \vdots \\ \hat{\gamma}(h) \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \gamma(0) \\ \gamma(1) \\ \vdots \\ \gamma(h) \end{bmatrix}, N^{-1}\mathbf{V}_\gamma \right),$$

где је функција $\hat{\gamma}(k)$ *узорачка аутоковаријансна функција, дефинисана изразом* (2.4.3), *а елементи матрице* $\mathbf{V}_\gamma$ *одређени на исти начин као у тврђењу 2.4.2.*

Доказ. Доказ теореме је аналоган доказу одговарајуће теореме за ненегативне $INAR$ временске низове, из рада Silva и Silva (2006).

Нека је $0 \le k \le h$. Тада је разлика функција $\gamma^*(k)$ и $\hat{\gamma}(k)$ једнака

$$\begin{aligned}
\sqrt{N}(\gamma^*(k)-\hat{\gamma}(k)) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=N-k+1}^{N} (Z_i-\mu_Z)(Z_{i+k}-\mu_Z) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N-k} \big((Z_i-\mu_Z)(Z_{i+k}-\mu_Z)-(Z_i-\overline{Z}_N)(Z_{i+k}-\overline{Z}_N)\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=N-k+1}^{N} (Z_i-\mu_Z)(Z_{i+k}-\mu_Z) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{N}}(\overline{Z}_N-\mu_Z)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k} Z_i + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k} Z_{i+k} - \left(1-\frac{k}{N}\right)(\overline{Z}_N+\mu_Z)\right).
\end{aligned}$$

С обзиром на то да је

$$\begin{aligned}
E\left|\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=N-k+1}^{N} (Z_i-\mu_Z)(Z_{i+k}-\mu_Z)\right| &\le \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=N-k+1}^{N} E|(Z_i-\mu_Z)(Z_{i+k}-\mu_Z)| \\
&\le \frac{1}{\sqrt{N}} k\gamma(0) \to 0,\ N \to \infty,
\end{aligned}$$

следи да је $\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=N-k+1}^{N}(Z_i-\mu_Z)(Z_{i+k}-\mu_Z)=o_p(1)$.

Такође, на основу последице 2.4.1, $\sqrt{N}(\overline{Z}_N-\mu_Z)\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,V)$, где је $V=\lim_{N\to\infty}NVar\left(\overline{Z}_N\right)$, па следи да је $\sqrt{N}(\overline{Z}_N-\mu_Z)=O_p(1)$. Даље је, на основу слабог закона великих бројева за покретне средине, тј. тврђења 6.3.10, из Brockwell и Davis (1987), следи да је $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k}Z_i\xrightarrow{p}\mu_Z$, због чега се добија да је

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k}Z_i+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k}Z_{i+k}-\left(1-\frac{k}{N}\right)(\overline{Z}_N+\mu_Z)=o_p(1).$$

То имплицира да је

$$\sqrt{N}\left(\gamma^*(k)-\hat{\gamma}(k)\right)=o_p(1).$$

На крају, на основу тврђења 2.4.3 и 2.4.4, следи асимптотска нормалност вектора аутоковаријансних функција. □

Теорема 2.4.9 Yule-Walker*-ова оцена* $\hat{\alpha}^{YW}$ *је строго постојана оцена параметра* α *и*

$$\sqrt{N-1}\left(\hat{\alpha}^{YW}-\alpha\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\frac{(1+\alpha)[\alpha+2\mu(1+\mu)(1+\alpha+2\mu(1-\alpha))]}{2\mu(1+\mu)(1+2\mu)}\right),$$

кад $N\to\infty$.

Доказ. Пошто је $DLINAR(1)$ временски низ $\{Z_n\}$ строго стационаран и ергодичан, а оцена $\hat{\alpha}^{YW}$ је непрекидна функција узорачке дисперзије и једнокорачне узорачке коваријансе, следи, на основу чињенице представљене у теореми 2.4.5, да су узорачка дисперзија и једнокорачна узорачка коваријанса строго постојане оцене дисперзије и једнокорачне коваријансе временског низа, тј.

$$\hat{\gamma}_Z(0)\xrightarrow{\text{с.в.1}}\gamma_Z(0)=Var(Z_n)\quad \text{и}\quad \hat{\gamma}_Z(1)\xrightarrow{\text{с.в.1}}\gamma_Z(1),$$

и последице 2.4.2 да је статистика $\hat{\alpha}^{YW}$ строго постојана оцена параметра α. Да би се одредила асимптотска расподела ове статистике, посматра се статистика $\sqrt{N-1}\left(\hat{\alpha}^{YW}-\alpha\right)$. Она се може записати у облику

$$\sqrt{N-1}\left(\hat{\alpha}^{YW}-\alpha\right)=\frac{\frac{N-1}{N}\cdot\frac{1}{\sqrt{N-1}}\sum\limits_{n=2}^{N}Z_{n-1}(Z_n-\alpha Z_{n-1})-\frac{\sqrt{N-1}}{N}\alpha Z_N^2}{\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}Z_n^2}.$$

Нека је, сада, временски низ $\{D_N\}$ дефинисан на следећи начин: $D_N = \sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}(Z_n - \alpha Z_{n-1})$. Прво треба показати да је низ $\{D_N\}$, низ мартингала. Да би то било тачно, потребно је да важи да је $E(D_{N+1}|\mathcal{F}_N) = D_N$, где је $\mathcal{F}_N = \sigma(Z_N, Z_{N-1}, ..., Z_1)$ σ-алгебра генерисана случајним променљивама $Z_1, Z_2, ..., Z_N$. Математичко очекивање случајне променљиве D_N условљене прошлошћу која је записана у облику $\sigma-$алгебре $\mathcal{F}_{N-1}$ је

$$\begin{aligned}
E(D_N|\mathcal{F}_{N-1}) &= E\left(\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}(Z_n - \alpha Z_{n-1})|Z_{N-1}, \ldots, Z_1\right) \\
&= \sum_{n=2}^{N-1} Z_{n-1}(Z_n - \alpha Z_{n-1}) + E\left(Z_{N-1}(Z_N - \alpha Z_{N-1})|Z_{N-1}\right) \\
&= \sum_{n=2}^{N-1} Z_{n-1}(Z_n - \alpha Z_{n-1}) + Z_{N-1}(E\left(Z_N|Z_{N-1}\right) - \alpha Z_{N-1}) \\
&= \sum_{n=2}^{N-1} Z_{n-1}(Z_n - \alpha Z_{n-1}) = D_{N-1}.
\end{aligned}$$

На основу претходног извођења, може се закључити да је D_N мартингал, а $D_N - D_{N-1} = Z_{N-1}(Z_N - \alpha Z_{N-1})$ разлика мартингала. Ово је стационарни, ергодични временски низ који представља разлику мартингала. Математичко очекивање ове случајне променљиве је 0, а дисперзија се може израчунати на следећи начин

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &\equiv E\left(Z_{n-1}(Z_n - \alpha Z_{n-1})\right)^2 \\
&= \sum_{z=-\infty}^{\infty} E\left(\left(Z_{n-1}(Z_n - \alpha Z_{n-1})\right)^2 \middle| Z_{n-1} = z\right) P(Z_{n-1} = z) \\
&= \sum_{z=-\infty}^{\infty} \left[E(Z_{n-1}^2 Z_n^2|Z_{n-1} = z) - 2\alpha E(Z_{n-1}^3 Z_n|Z_{n-1} = z)\right. \\
&\qquad \left. +\alpha^2 E(Z_{n-1}^4|Z_{n-1} = z)\right] P(Z_{n-1} = z) \\
&= \sum_{z=-\infty}^{\infty} \left[E(Z_{n-1}^2 Z_n^2|Z_{n-1} = z) - 2\alpha E(Z_{n-1}^3 Z_n|Z_{n-1} = z)\right. \\
&\qquad \left. +\alpha^2 E(Z_{n-1}^4|Z_{n-1} = z)\right] P(Z_{n-1} = z)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{z=-\infty}^{\infty} \left[z^2 E(Z_n^2|Z_{n-1}=z) - 2\alpha z^3 E(Z_n|Z_{n-1}=z) + \alpha^2 z^4\right] P(Z_{n-1}=z).$$

Користећи дефиницију (2.2.1) $DLINAR(1)$ временског низа добија се

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{z=-\infty}^{\infty} \left[z^2 E((\alpha \odot Z_{n-1} + e_n)^2|Z_{n-1}=z)\right.\\ &\qquad \left. -2\alpha z^3 E((\alpha \odot Z_{n-1} + e_n)|Z_{n-1}=z) + \alpha^2 z^4\right] P(Z_{n-1}=z).\end{aligned}$$

Узимајући у обзир условне особине случајне променљиве $\alpha \odot Z_{n-1}$ дате у теореми 2.1.2 и особине иновационог низа $\{e_n\}$ дате у последици 2.2.2, као и независност случајних променљивих e_n и Z_{n-1}, следи да је

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{1+2\mu} \sum_{z=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{|z|} \left[z^2 Var(\alpha \odot Z_{n-1}|Z_{n-1}=z)\right.\\ &\qquad +z^2(E(\alpha \odot Z_{n-1}|Z_{n-1}=z))^2 + z^2 Var(e_n) + z^2(E(e_n))^2\\ &\qquad \left.-2\alpha z^3 E(\alpha \odot Z_{n-1}|Z_{n-1}=z) + \alpha^2 z^4\right]\\ &= \frac{1}{1+2\mu} \sum_{z=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{|z|} [\alpha(1+\alpha)|z|z^2 + \frac{2\alpha(1+\alpha)}{1+2\mu} z^2 + \alpha^2 z^4\\ &\qquad +2z^2(1+\alpha)\mu((1+\mu)(1-\alpha)-\alpha)) - 2\alpha^2 z^4 + \alpha^2 z^4]\\ &= \frac{1+\alpha}{1+2\mu} \sum_{z=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{|z|} \left[\alpha|z|^3 + \frac{2\alpha\mu^2 + 2\mu(1+2\mu)((1+\mu)(1-\alpha)-\alpha)}{1+2\mu} z^2\right].\end{aligned}$$

С обзиром на то да су вредности редова

$$\sum_{z=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{|z|} |z|^3 = 2\sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{z} z^3 = 2\mu(1+\mu)(1+6\mu+6\mu^2),$$

$$\sum_{z=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{|z|} z^2 = 2\sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{z} z^2 = 2\mu(1+\mu)(1+2\mu),$$

добија се да је

$$\sigma^2 = \frac{2\mu(1+\mu)(1+\alpha)}{1+2\mu}[\alpha + 2\mu(1+\mu)(1+\alpha+2\mu(1-\alpha))].$$

На основу централне граничне теореме за мартингале следи да је

$$(N-1)^{-1/2}\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}(Z_n-\alpha Z_{n-1}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,\sigma^2),\ N\to\infty.$$

На основу ергодичности $DLINAR(1)$ временских низова, следи да је $\frac{\sqrt{N-1}}{N}\alpha Z_N^2 = o(1)$, с.в. 1, када $N \longrightarrow \infty$. Тада, по теореми Slutsky-ја

$$\frac{N-1}{N\sqrt{N-1}}\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}(Z_n-\alpha Z_{n-1}) - \frac{\sqrt{N-1}}{N}\alpha Z_N^2 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,\sigma^2),\ N\to\infty.$$

Поново, због ергодичности $DLINAR(1)$ временских низова, следи и да је $\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} Z_n^2 \xrightarrow{\text{с.в.}1} 2\mu(1+\mu)$ кад $N\to\infty$. Примењујући, по други пут, теорему Slutsky-ја, добија се да

$$\sqrt{N-1}\left(\hat{\alpha}^{YW}-\alpha\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0,\frac{\sigma^2}{4\mu^2(1+\mu)^2}\right),\ \text{кад } N\to\infty.\ \square$$

Још два резултата из књиге Brockwell и Davis (1987) ће бити употребљена и у доказу следеће теореме, а биће корисни и приликом доказивања неких тврђења касније.

Тврђење 2.4.5 (Brockwell и Davis (1987), тврђење 6.4.1) *Нека случајна промењива $X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mu,\sigma_n^2)$, где $\sigma_n^2\to 0,\ n\to\infty$. Ако је функција $g(X)$ дифренцијабилна у тачки μ, тада*

$$g(X_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(g(\mu), g'(\mu)^2\sigma_n^2).$$

Тврђење 2.4.6 (Brockwell и Davis (1987), тврђење 6.4.3) *Нека $k-$димензионална случајна промењива $\mathbf{X}_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mu, c_n^2\Sigma)$, где је Σ симетрична, ненегативно дефинитна матрица, а $c_n\to 0,\ n\to\infty$. Ако је $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = (g_1(\mathbf{X}),\ldots,g_m(\mathbf{X}))^T$ пресликавање из простора $\mathbb{R}^k$ у простор $\mathbb{R}^m$, такво да је свака његова координатна функција непрекидно дифренцијабилна у околини тачке μ, и ако матрица $D\Sigma D^T$ има на дијагонали све елементе различите од 0, где је матрица D Јакобијан пресликавања $\mathbf{g}$, тада*

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{g}(\mu), c_n^2 D\Sigma D^T).$$

Теорема 2.4.9 се, на други начин, може доказати и применом претходног тврђења и чињенице да су узорачка дисперзија и узорачка коваријанса временског низа $\{Z_n\}$ асимптотски нормално расподељене.

Теорема 2.4.10 Yule-Walker-*ова оцена параметра* μ, $\hat{\mu}^{YW}$, *је асимптотски нормално расподељена и строго је постојана.*

Доказ. Пошто је $DLINAR(1)$ временски низ, $\{Z_n\}$, ергодичан и строго стационаран, узорачка дисперзија је строго постојана оцена дисперзије временског низа. Због тога ће и оцена $\hat{\mu}^{YW}$, као непрекидна функција узорачке дисперзије, такође, бити строго постојана.

Са друге стране, на основу теореме 2.4.8, узорачка дисперзија временског низа $\{Z_n\}$ је асимптотски нормално расподељена. Како је оцена μ_{YW} диференцијабилна функција узорачке дисперзије, то, на основу тврђења 2.4.5, и она сама има асимптотски нормалну расподелу са очекивањем $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+2\gamma_Z(0)} = \mu$, и дисперзијом $\sigma^2_{\hat{\gamma}_Z(0)}/4(1+2\mu)^2$, где је $\sigma^2_{\hat{\gamma}_Z(0)} = \lim_{N\to\infty} NVar(\gamma^*_Z(0))$, а $\gamma^*_Z(0)$ дефинисана изразом (2.4.4). Другим речима

$$\mu_{YW} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2_{\hat{\gamma}_Z(0)}}{4(1+2\mu)^2}). \ \Box$$

На крају, очигледно је да се пресликавањем

$$\mathbf{g}(x_1,x_2) = (g_1(x_1,x_2), g_2(x_1,x_2))$$

са непрекидно диференцијаблиним координатним функцијама

$$\begin{aligned} g_1(x_1,x_2) &= \frac{x_2}{x_1}, \\ g_2(x_1,x_2) &= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+2x_1}, \end{aligned}$$

пресликава вектор $(\hat{\gamma}_Z(0), \hat{\gamma}_Z(1))^T$ у вектор $(\hat{\alpha}^{YW}, \hat{\mu}^{YW})^T$. Због тога се може, на основу тврђења 2.4.6, рећи да за вектор оцена $(\hat{\alpha}^{YW}, \hat{\mu}^{YW})^T$ важи

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}^{YW} \\ \hat{\mu}^{YW} \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \mu \end{bmatrix}, N^{-1}D\Sigma D^T \right),$$

где је Σ матрица са елементима

$$\Sigma_{i,j} = \lim_{N\to\infty} NCov(\gamma_Z^*(i-1), \gamma_Z^*(j-1)),\ i,j \in \{1,2\},$$

а матрица

$$D = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2\mu(1+\mu)} & \frac{1}{2\mu(1+\mu)} \\ \frac{1}{4(1+2\mu)^2} & 0 \end{bmatrix},$$

Јакобијан пресликавања $\mathbf{g}(x_1, x_2)$ за $x_1 = \gamma_Z(0)$ и $x_2 = \gamma_Z(1)$.

Што се оцена непознатих параметара методом условних најмањих квадрата тиче, оне се добијају минимизацијом функције грешке,

$$Q_N(\mu, \alpha) = \sum_{n=2}^{N} (Z_n - E(Z_n|Z_{n-1}))^2 = \sum_{n=2}^{N} (Z_n - \alpha Z_{n-1})^2 .$$

На жалост, с обзиром на то да параметар μ не фигурише у функцији грешке, методом условних најмањих квадрата, користећи једнокорачни метод, није могуће одредити оцену овог параметра. У једначинама које се добијају двокорачним методом условних најмањих квадрата, који је разматран у раду Karlsen и Tjøstheim (1988), параметар μ фигурише у облику аргумента полиномских функција четвртог и вишег степена, те због тога, овај метод неће бити анализиран. Дакле, једнокорачним методом условних најмањих квадрата је оцењен једино параметар α.

Парцијални извод функције грешке по промењљивој α је

$$\frac{\partial Q_N}{\partial \alpha} = -2 \sum_{n=2}^{N} Z_{n-1} (Z_n - \alpha Z_{n-1}) .$$

Након изједначавања са нулом и решавања једначине по непознатом параметру α, добија се оцена параметра α методом условних најмањих квадрата

$$\hat{\alpha}^{cls} = \frac{\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1} Z_n}{\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}^2}.$$

Међутим, може се показати да важи да је $\hat{\alpha}^{YW} - \hat{\alpha}^{cls} = o(N^{-\frac{1}{2}})$, са вероватноћом 1.

Наиме, важи да је

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}^{cls} &= \frac{\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}Z_n}{\sum_{n=2}^{N} Z_n^2} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}Z_n}{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Z_n^2 - \frac{1}{N}Z_1^2} \\ &= \hat{\alpha}^{YW} + \frac{Z_1^2}{N}\frac{\hat{\gamma}_Z(1)}{\hat{\gamma}_Z(0)\left(\hat{\gamma}_Z(0) - \frac{Z_1^2}{N}\right)}.\end{aligned}$$

Због тога је $\lim_{N\to\infty}\sqrt{N-1}\left(\hat{\alpha}^{YW} - \hat{\alpha}^{cls}\right) = 0$, с.в. 1. С обзиром на то да низ оцена $\hat{\alpha}^{YW}$ конвергира у расподели ка нормалној расподели која је дата у теореми 2.4.9, а разлика оцена $\hat{\alpha}^{YW} - \hat{\alpha}^{cls}$ бар у вероватноћи тежи нули када се обим узорка N бесконачно увећава, онда ће и расподела оцене $\hat{\alpha}^{cls}$ бити једнака расподели оцене $\hat{\alpha}^{YW}$, тј.

$$\sqrt{N-1}\left(\hat{\alpha}^{cls} - \alpha\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{(1+\alpha)[\alpha + 2\mu(1+\mu)(1+\alpha+2\mu(1-\alpha))]}{2\mu(1+\mu)(1+2\mu)}\right),$$

кад $N \to \infty$.

Строга постојаност и асимптотска нормалност ове оцене се још могу доказати и коришћењем теорема 3.1 и 3.2 из рада Tjøstheim (1986). Наиме, с обзиром на то да за парцијалне изводе условног очекивања $E(Z_n|Z_{n-1})$ важи да је

$$\frac{\partial E(Z_n|Z_{n-1})}{\partial\alpha} = Z_{n-1},\ \frac{\partial^2 E(Z_n|Z_{n-1})}{\partial\alpha^2} = 0,\ \frac{\partial^3 E(Z_n|Z_{n-1})}{\partial\alpha^3} = 0,$$

услов $C1$ теореме 3.1, се своди на $E|Z_{n-1}|^2 < \infty$, што је свакако испуњено, јер је, на основу особина случајне променљиве са дискретном Лапласовом расподелом датих у уводном делу и у радовима Kozubowski и Inusah (2006), односно, Barreto-Souza и Bourguignon (2015), $E|Z_{n-1}|^2 = Var(Z_{n-1}) = 2\mu(1+\mu)$. Услов $C2$ се своди на $E\left(|aZ_{n-1}|^2\right) = 0 \Rightarrow a = 0$, тј. $|a|^2 E\left(|Z_{n-1}|^2\right) = 0 \Rightarrow a = 0$, што, опет, важи, јер из $|a|^2 E\left(|Z_{n-1}|^2\right) = 2|a|^2\mu(1+\mu) = 0$, следи да је $a = 0$. С обзиром на то да су други и трећи парцијални изводи условног очекивања $E(Z_n|Z_{n-1})$ по параметру α једнаки нули, то услов $C3$ постаје тривијалан.

Услов $D1$ теореме 3.2 се може формулисати на следећи начин

$$E\left(Z_{n-1}^2 Var(Z_n|Z_{n-1})\right) < \infty$$

и своди се на

$$E\left(Z_{n-1}^2\left(\alpha(1+\alpha)|Z_{n-1}|+\frac{2\alpha(1+\alpha)\mu^2}{1+2\mu}+2(1+\alpha)\mu((1+\mu)(1-\alpha)-\alpha)\right)\right)<\infty,$$

односно,

$$\alpha(1+\alpha)E|Z_{n-1}|^3+\left(\frac{2\alpha(1+\alpha)\mu^2}{1+2\mu}+2(1+\alpha)\mu((1+\mu)(1-\alpha)-\alpha)\right)E|Z_{n-1}|<\infty,$$

што је, поново, испуњено, у складу са већ поменутим особинама апсолутних момената случајних променљивих са дискретном Лапласовом расподелом. Испуњеност услова ове две теореме, обезбеђује строгу постојаност и асимптотску нормалност статистике $\hat{\alpha}^{cls}$.

Слични резултати се могу добити и за $DLINAR(1)$ временски низ $\{Z_n\}$ задат изразом (2.3.4). С обзиром на особине овако дефинисаног временског низа, конкретно $E(Z_n|Z_{n-1}) = -\alpha Z_{n-1}$ и $\gamma_Z(1) = -\alpha\gamma_Z(0)$, Yule-Walker-овим методом добија се да је

$$\hat{\alpha}^{YW} = \frac{|\hat{\gamma}_Z(1)|}{\hat{\gamma}_Z(0)} \text{ и } \hat{\mu}^{YW} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+2\hat{\gamma}_Z(0)},$$

односно, методом условних најмањих квадрата

$$\hat{\alpha}^{cls} = \frac{\left|\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}Z_n\right|}{\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}^2}.$$

2.5 Симулације

Да би се провериле перформансе оцена непознатих параметара $DLINAR(1)$ временског низа, представљене у теоремама у претходним поглављима, урађена је симулација Монте Карло методом. За различите вредности параметара μ и α генерисано је 1000 узорака обима $N = 5000$. Коришћена је чињеница да је расподела посматраног временског низа једнака расподели разлике два независна $NGINAR(1)$ временска низа, $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$. Приликом симулације $NGINAR(1)$ временских низова требало је моделирати реализације случајних променљивих са геометријском расподелом. Коришћена је чињеница да је $X \stackrel{d}{=} \lfloor S \rfloor$, где случајне промењиве X и S имају геометријску и експоненцијалну расподелу са одговарајућим параметрима, респективно, а $\lfloor \cdot \rfloor$ је „највећи цео број". Такође, за симулацију иновационих низова $\{\varepsilon_n\}$ и $\{\eta_n\}$ коришћено је њихово представљање у облику мешавине две случајне промењиве са геометријском расподелом, како је то већ приказано у последици 2.2.1.

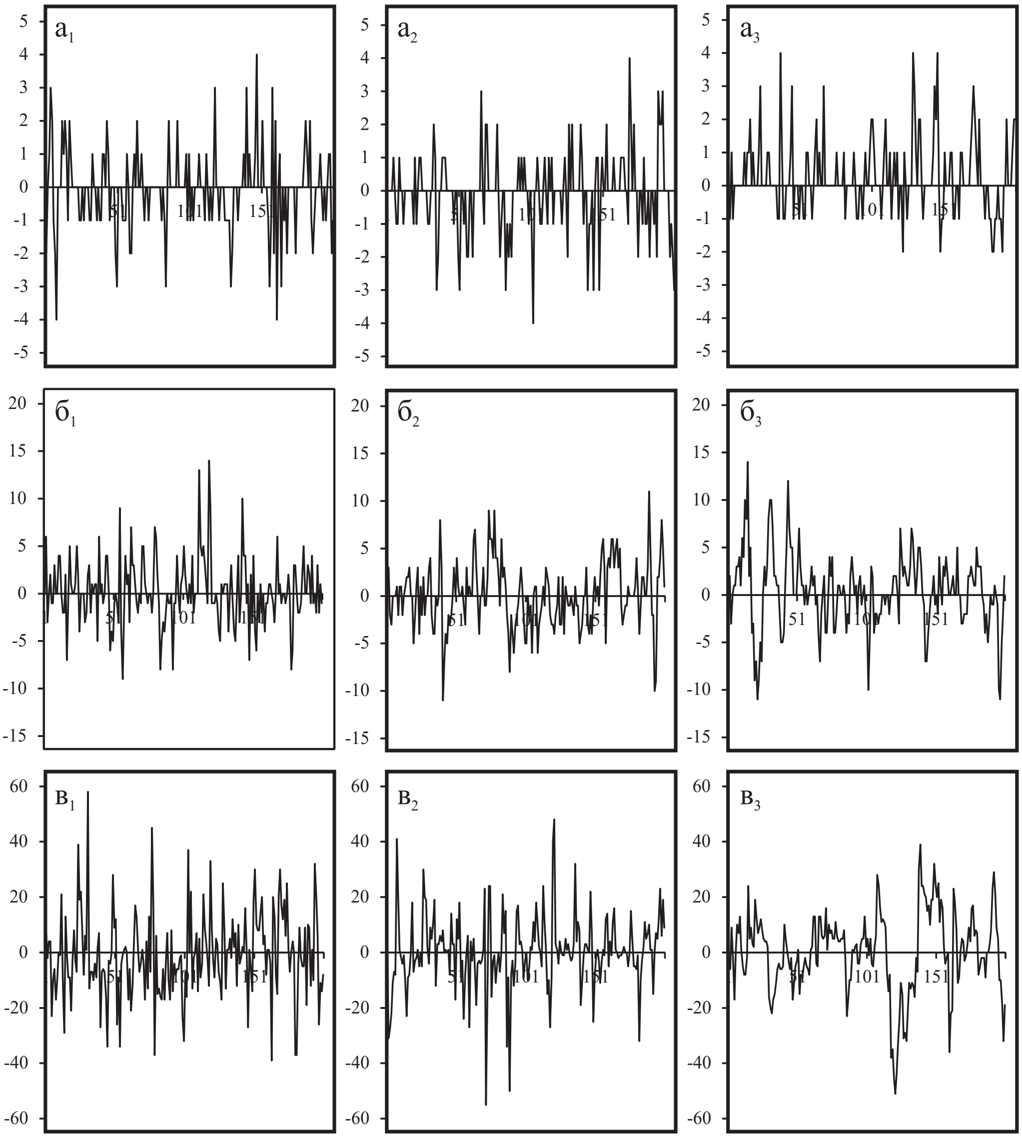
Прво је генерисана вредност за X_1 и, независно од ње, за Y_1. Онда су, за $n = 2, 3, \ldots, 5000$ генерисане вредности за X_n и Y_n као $X_n = \alpha * X_{n-1} + \varepsilon_n$ и $Y_n = \alpha * Y_{n-1} + \eta_n$. Затим је сваки пар реализација X_n и Y_n искоришћен у генерисању вредности $Z_n = X_n - Y_n$.

Као праве вредности параметра μ употребљене су вредности 0,5, 2 и 10, а као вредности параметра α употребљене су 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,6 и 0,8. Због ограничења која важе за параметар α, $\alpha \in (0, \mu/(1+\mu)]$, неки од парова вредности нису разматрани. Циљ је био да се прикаже понашање временског низа у случајевима када параметар μ има вредност блиску нули, затим вредност која одступа мало више од нуле и на крају, трећа вредност која је прилично већа од нуле. Очекивало се да мале вредности параметра μ изазову мало варирање вредности временског низа, а да са повећањем вредности параметра μ долази до повећања „амплитуде", тј. повећања варијације временског низа. Исти критеријум је употребљен и за избор вредности параметра α. Изабрана је једна вредност која је блиска нули, једна вредност која се налази близу средине дозвољеног опсега $(0, \mu/(1+\mu)]$ и трећа вредност која је близу горње границе опсега. Овакав избор је направљен, не би ли се видео утицај вредности параметра α на аутокорелациону функцију. Очекивало се да симулације низова са већим вредностима параметра α имају веће вредности корелације.

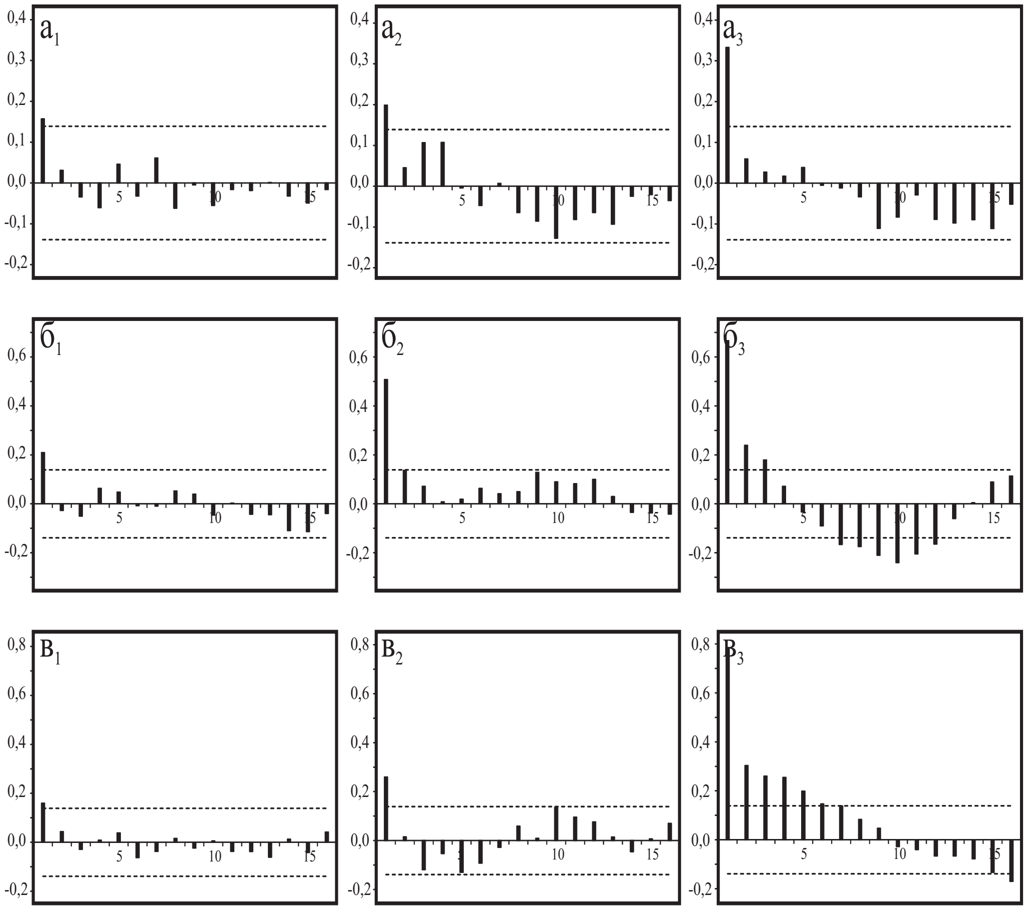
На сликама 2.1 и 2.2 приказани су дијаграми реализација симулираних временских низова са одговарајућим параметрима и њихове аутокорелационе функције. Са дијаграма добијених реализација се може уочити да је код временских низова са истом вредношћу параметра μ понашање, у смислу варијације и опсега достигнутих вредности, слично. То је и очекивано, с обзиром на то да дисперзија $DLINAR(1)$ временског низа зависи само од вредности параметра μ. С друге стране, са дијаграма 2.2 може се уочити утицај само вредности параметра α на аутокорелациону функцију, тј. најмање вредности производе један шаблон вредности аутокорелационе функције, вредност аутокорелационе функције у тачки један је, очекивано, највећа у односу на остале вредности, али не тако доминантна у односу на границу значајности. Остале вредности аутокорелационе функције су, у већини случајева, врло блиске нули. Вредности параметра α узете из средине опсега, генеришу другачији шаблон, вредност у тачки један је већа од осталих вредности, али за разлику од претходног случаја, остале вредности аутокорелационе функције су мање, али близу границе значајности, са доње стране. Вредности блиске горњој граници области дефинисаности, генеришу трећи облик понашања аутокорелационе функције. Вредност у тачки један веома је доминантна у односу на све остале вредности. У низу вредности аутокорелационе функције постоји неколико вредности које премашују границу значајности, али су и оне далеко мање од еднокорачне корелације. И то је сасвим логична последица особина $DLINAR(1)$ временских низова јер аутокорелациона функција зависи искључиво од вредности параметра α.

За сваки пар вредности параметара α и μ посматрани су подузорци пет различитих обима, 200, 500, 1000, 3000 и 5000. За сваки од подузорака израчунате су Yule-Walker-ове оцене параметара. У случају задатих вредности параметра α које су блиске нули, могуће је на основу узорка добити негативне оцене. У тим случајевима, као оцена, узимана је позитивна вредност блиска нули, $\hat{\alpha} = 10^{-6}$. Такође, у случају правих вредности параметра α које су блиске горњој граници области дефинисаности параметра, могуће је добити оцену чија је вредност већа од $\mu/(1+\mu)$. У тим случајевима, као вредност оцене параметра је узета вредност $\hat{\alpha} = \hat{\mu}/(1+\hat{\mu})$. Дакле, вредност параметра α је дата следећим изразом:

$$\hat{\alpha} = \begin{cases} 10^{-6}, & \left(\sum\limits_{n=2}^{N} z_n z_{n-1}\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{N} z_n^2\right)^{-1} \in (-\infty, 0] \\ \frac{\sum_{n=2}^{N} z_n z_{n-1}}{\sum_{n=1}^{N} z_n^2}, & \frac{\sum_{n=2}^{N} z_n z_{n-1}}{\sum_{n=1}^{N} z_n^2} \in (0, \hat{\mu}/(1+\hat{\mu})] \\ \hat{\mu}/(1+\hat{\mu}), & \left(\sum\limits_{n=2}^{N} z_n z_{n-1}\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{N} z_n^2\right)^{-1} \in (\hat{\mu}/(1+\hat{\mu}), \infty) \end{cases}$$



Слика 2.1: Дијаграми реализација временских низова са одговарајућим параметрима (а$_1$) $\mu = 0,5,\ \alpha = 0,1$, (а$_2$) $\mu = 0,5,\ \alpha = 0,2$, (а$_3$) $\mu = 0,5,\ \alpha = 0,3$, (б$_1$) $\mu = 2,\ \alpha = 0,2$, (б$_2$) $\mu = 2,\ \alpha = 0,4$, (б$_3$) $\mu = 2,\ \alpha = 0,6$, (в$_1$) $\mu = 10,\ \alpha = 0,2$, (в$_2$) $\mu = 10,\ \alpha = 0,4$, (в$_3$) $\mu = 10,\ \alpha = 0,8$



Слика 2.2: Дијаграми вредности аутокорелационих функција симулираних временских низова са одговарајућим параметрима (а$_1$) $\mu = 0,5,\ \alpha = 0,1$, (а$_2$) $\mu = 0,5,\ \alpha = 0,2$, (а$_3$) $\mu = 0,5,\ \alpha = 0,3$, (б$_1$) $\mu = 2,\ \alpha = 0,2$, (б$_2$) $\mu = 2,\ \alpha = 0,4$, (б$_3$) $\mu = 2,\ \alpha = 0,6$, (в$_1$) $\mu = 10,\ \alpha = 0,2$, (в$_2$) $\mu = 10,\ \alpha = 0,4$, (в$_3$) $\mu = 10,\ \alpha = 0,8$

У табели 2.1, приказане су узорачке средине и стандардне девијације добијених оцена за сваки пар задатих вредности. Може се закључити да добијене оцене, са повећањем обима узорка, бивају све ближе теоријским вредностима параметара, а да се, у исто време, њихова стандардна девијација смањује. На основу добијених вредности у табели, види се да се, у случајевима малих вредности параметара μ и α, брже достиже тачна вредност, што је и разумљиво, јер са мањим вредностима параметра μ, мања је варијабилност вредности временског низа, а и мањи је опсег дефинисаности параметра α.

У прилог асимптотској нормалности оцена параметара α и μ говори (више него хиљаду речи) слика 2.3, на којој су приказане расподеле учестаности реализованих вредности оцена $\hat{\mu}^{YW}$ и $\hat{\alpha}^{YW}$ добијених на основу 1000 узорака обима 5000. Одступање расподела реализација посматраних оцена од нормалне расподеле је тестирано неким од стандардних статистичких тестова за упоређивање емпиријских и теоријских расподела, као што су тест Колмогоров-Смирнова, χ^2 тест, Shapiro-Wilk-ов тест, Anderson-Darling-ов тест, Lilliefors-ов тест и Jarque-Bera-ов тест. У табели 2.2 су приказане значајности ових тестова за расподелу сваке од посматраних оцена. Може се закључити да ни у једном случају не постоји значајно одступање од нормалне расподеле.

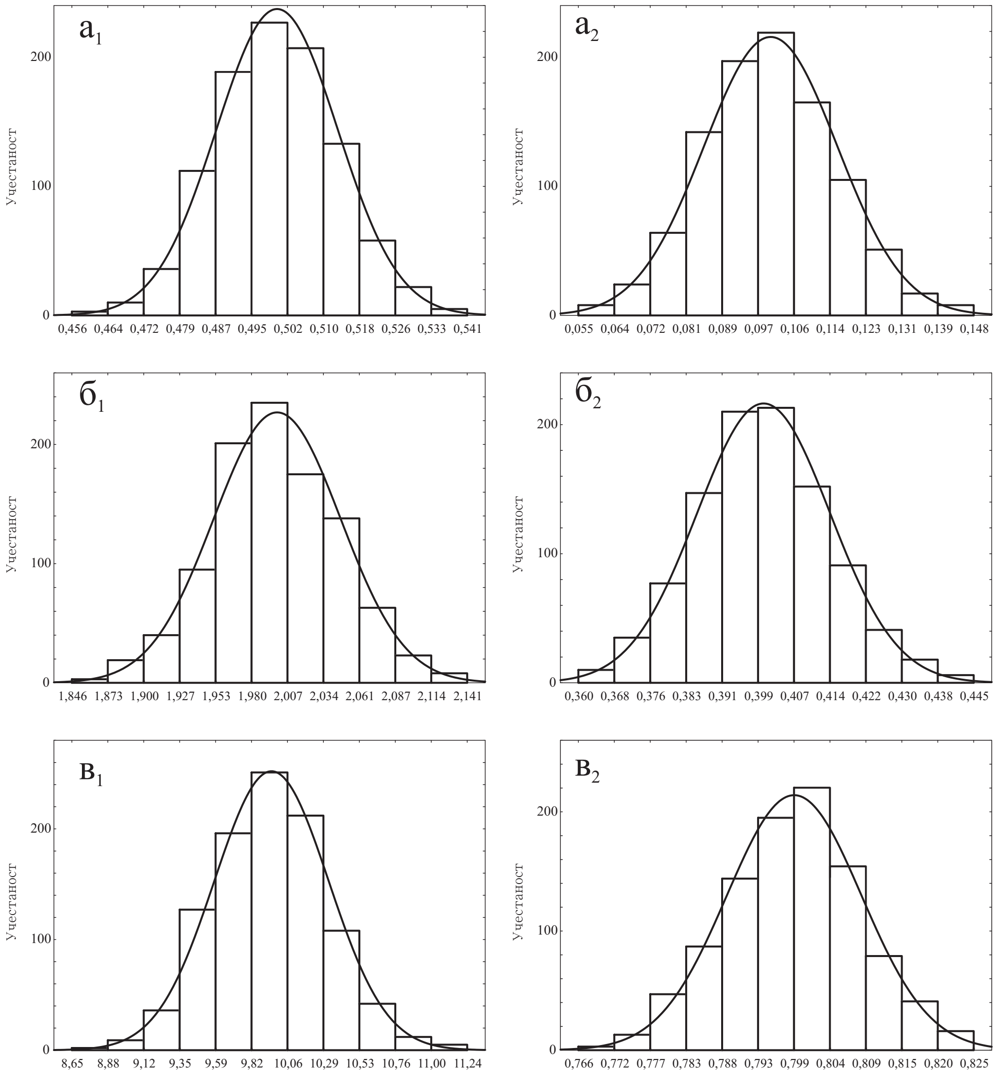
2.6 Примена на реалним подацима

Што се примене на реалним подацима тиче, посматрана је разлика у броју пријављених преступа између две полицијске станице. Број преступа, грубо речено, по својој природи, би требало да се покорава геометријској расподели, с обзиром на то да у активностима тог типа постоји низ од неколико узастопних успешних реализација догађаја који се завршава једним неуспехом, или, ако се проблем погледа са друге стране (закона), постоји низ од неколико узастопних неуспешних реализација догађаја који се окончава успешном реализацијом. Да би $DLINAR(1)$ модел био адекватан, један од услова је да средње вредности броја пријављених недела обема полицијским станицама буду приближно исте. Посматран је број крађа моторних возила које су месечно пријављиване полицијским станицама број 1608 и 2811, у Питсбургу, Пенсилванија, Табела 2.1: Реализоване вредности оцена параметара μ и α, средње вредности и стандардне девијације

	$\mu = 0,5,\ \alpha = 0,1$			$\mu = 0,5,\ \alpha = 0,2$			$\mu = 0,5,\ \alpha = 0,3$		
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$
200	0,495 (0,063)	0,099 (0,073)	0,099 (0,074)	0,495 (0,069)	0,193 (0,080)	0,194 (0,080)	0,493 (0,075)	0,288 (0,081)	0,289 (0,081)
500	0,497 (0,041)	0,100 (0,048)	0,100 (0,048)	0,498 (0,044)	0,197 (0,051)	0,198 (0,051)	0,496 (0,047)	0,294 (0,052)	0,294 (0,052)
1000	0,498 (0,029)	0,100 (0,033)	0,100 (0,033)	0,498 (0,031)	0,197 (0,037)	0,197 (0,037)	0,498 (0,034)	0,297 (0,038)	0,297 (0,038)
3000	0,500 (0,017)	0,100 (0,020)	0,100 (0,020)	0,500 (0,018)	0,199 (0,021)	0,199 (0,021)	0,499 (0,019)	0,298 (0,022)	0,298 (0,022)
5000	0,500 (0,013)	0,100 (0,016)	0,100 (0,016)	0,500 (0,014)	0,199 (0,016)	0,199 (0,016)	0,499 (0,015)	0,299 (0,017)	0,299 (0,017)

	$\mu = 2,\ \alpha = 0,2$			$\mu = 2,\ \alpha = 0,4$			$\mu = 2,\ \alpha = 0,6$		
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$
200	1,981 (0,200)	0,194 (0,072)	0,195 (0,072)	1,978 (0,239)	0,394 (0,073)	0,396 (0,073)	1,956 (0,307)	0,583 (0,070)	0,586 (0,070)
500	1,994 (0,129)	0,197 (0,047)	0,197 (0,047)	1,993 (0,150)	0,399 (0,048)	0,400 (0,048)	1,975 (0,197)	0,592 (0,044)	0,593 (0,044)
1000	1,997 (0,090)	0,198 (0,033)	0,198 (0,033)	1,997 (0,109)	0,400 (0,033)	0,400 (0,034)	1,984 (0,145)	0,594 (0,032)	0,595 (0,032)
3000	1,998 (0,052)	0,199 (0,019)	0,199 (0,019)	1,999 (0,060)	0,400 (0,019)	0,400 (0,019)	1,996 (0,084)	0,598 (0,019)	0,598 (0,019)
5000	2,000 (0,039)	0,199 (0,015)	0,199 (0,015)	1,998 (0,047)	0,400 (0,014)	0,400 (0,014)	1,998 (0,065)	0,599 (0,015)	0,599 (0,015)

	$\mu = 10,\ \alpha = 0,2$			$\mu = 10,\ \alpha = 0,4$			$\mu = 10,\ \alpha = 0,8$		
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$
200	9,896 (0,869)	0,198 (0,069)	0,199 (0,070)	9,855 (0,956)	0,394 (0,066)	0,396 (0,066)	9,616 (1,703)	0,785 (0,050)	0,789 (0,050)
500	9,940 (0,561)	0,198 (0,044)	0,198 (0,044)	9,940 (0,611)	0,397 (0,040)	0,397 (0,040)	9,795 (1,097)	0,794 (0,031)	0,796 (0,031)
1000	9,974 (0,398)	0,200 (0,033)	0,200 (0,033)	9,968 (0,437)	0,397 (0,029)	0,398 (0,029)	9,871 (0,800)	0,796 (0,022)	0,797 (0,022)
3000	9,999 (0,220)	0,199 (0,018)	0,199 (0,018)	9,990 (0,259)	0,399 (0,017)	0,399 (0,017)	9,923 (0,482)	0,798 (0,013)	0,798 (0,013)
5000	9,996 (0,171)	0,199 (0,014)	0,199 (0,014)	9,993 (0,198)	0,399 (0,013)	0,399 (0,013)	9,948 (0,372)	0,798 (0,010)	0,799 (0,010)



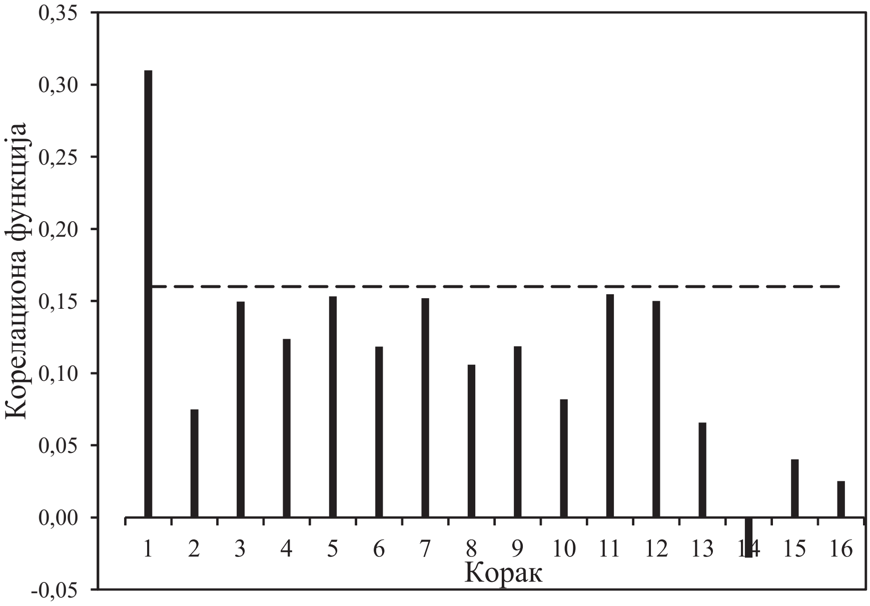
Слика 2.3: Хистограми реализованих вредности оцена параметара μ и α (а$_1$) $\mu = 0,5,\ \alpha = 0,1$, (а$_2$) $\hat{\alpha}^{YW}$ $\mu = 0,5,\ \alpha = 0,1$, (б$_1$) $\hat{\mu}^{YW}$ $\mu = 2,\ \alpha = 0,4$, (б$_2$) $\hat{\alpha}^{YW}$ $\mu = 2,\ \alpha = 0,4$, (в$_1$) $\hat{\mu}^{YW}$ $\mu = 10,\ \alpha = 0,8$, (в$_2$) $\hat{\alpha}^{YW}$ $\mu = 10,\ \alpha = 0,8$,

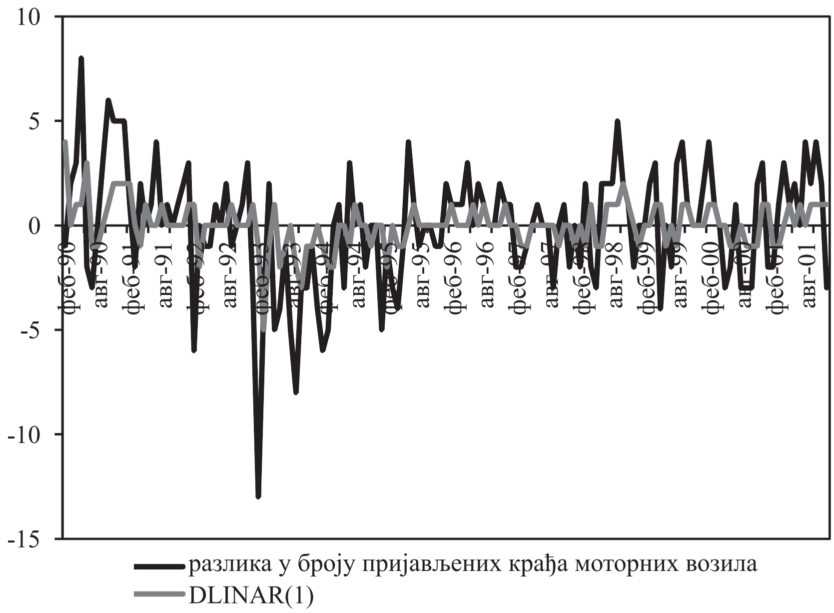
Табела 2.2: Значајности тестова за испитивање нормалности расподела оцена параметара μ и α

Праве вредности	$\mu = 0,5,\ \alpha = 0,1$			$\mu = 2,\ \alpha = 0,4$			$\mu = 10,\ \alpha = 0,8$		
Тест	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$
Kolmogorov-Smirnov	0,673	0,814	0,822	0,503	0,634	0,688	0,932	0,692	0,710
χ^2	0,279	0,699	0,559	0,371	0,732	0,622	0,405	0,520	0,460
Shapiro-Wilk	0,539	0,465	0,498	0,523	0,373	0,450	0,282	0,246	0,232
Anderson-Darling	0,290	0,556	0,755	0,222	0,507	0,613	0,372	0,249	0,209
Lilliefors	0,232	0,423	0,414	0,101	0,195	0,248	0,681	0,254	0,292
Jarque-Bera	0,721	0,432	0,344	0,663	0,485	0,514	0,193	0,603	0,606

САД, у периоду од јануара 1990. до децембра 2001. године. На основу узорка обима $N = 144$ добијена је средња вредност $\overline{z} = 0,02$, узорачка дисперзија је $\hat{\gamma}_Z(0) = 10,59$, а једнокорачна узорачка корелација $\hat{\rho}_Z(1) = 0,33$. Оцене непознатих параметара модела су $\hat{\mu}^{YW} = 1,86$ и $\hat{\alpha}^{YW} = 0,33$. Као критеријум ваљаности модела узет је корен средње-квадратне грешке, тј. RMSE критеријум. Добијена је вредност $RMSE = 2,66$, што је прилично мала вредност, ако се узме у обзир распон реализованог узорка. Било би интересантно упоредити апроксимацију коју даје $DLINAR(1)$ модел са апроксимацијом неког другог модела. С обзиром на то да је реализација временског низа $\{Z_n\}$ добијена као разлика два временска низа, било би адекватно упоредити овај модел са моделом предложеним у Freeland (2010). Међутим, такво поређење би, у случају оцена добијених Yule-Walker-овим методом и методом условних најмањих квадрата, било бесмислено јер се као оцена параметра α и у том случају добија $\hat{\alpha} = \hat{\gamma}_Z(1)/\hat{\gamma}_Z(0)$, а, такође, је и условно очекивање $E(Z_n|Z_{n-1}) = \alpha Z_{n-1}$, па би се добила иста формула за предвиђање. Слична ситуација је са још неким од поменутих модела са целобројним вредностима.

На слици 2.4 је приказана аутокорелациона функција, која јасно показује да је примена модела првог реда адекватна у моделирању ових података, затим реализација временског низа, као и $DLINAR(1)$ модел. Може се видети да $DLINAR(1)$ модел добро апроксимира посматране податке и да се веће грешке добијају само приликом наглих скокова.





Слика 2.4: Разлика у броју пријављених крађа моторних возила између полицијских станица број 1608 и 2811. Аутокорелациона функција, реализоване вредности и одговарајући $DLINAR(1)$ модел

Глава 3

$SDLINAR(1)$ модел

У претходној глави приказани $DLINAR(1)$ модел представља новину у односу на већину до тада дефинисаних модела са целобројним вредностима јер уместо биномног тининг оператора, користи негативни биномни тининг оператор, али и поред тога, чињеница да је математичко очекивање временског низа једнако нули, ограничава поље примене овог модела. Због тога је било сасвим логично уопштити и тининг оператор и модел временског низа. У том циљу ће, сада, најпре, бити дефинисан нови тининг оператор и биће приказана нека његова најбитнија својства, а затим ће, на основу тог тининг оператора, бити конструисан нови $INAR(1)$ модел временског низа, биће доказане неке његове битне карактеристике. Такође, биће разматран и проблем оцењивања непознатих параметара. Биће изведене Yule-Walker-ове оцене свих непознатих параметара модела, као и оцене параметара α и β методом условних најмањих квадрата. Затим ће бити анализирано асимптотско понашање тих оцена. На крају ће бити приказани резултати симулација које потврђују асимптотска својства оцена, као и примена овог модела на реалним подацима и поређење са неким другим моделима.

3.1 Конструкција тининг оператора

И сада, као што је то било у случају тининг оператора $\alpha\odot$, нови тининг оператор ће бити дефинисан користећи разлику два негативна биномна тининг оператора, али с том разликом, што ће параметри геометријске расподеле ова два тининга бити различити.

Дакле, полази се, поново, од негативног биномног тининг оператора $\alpha *$, дефинисаног у Ristić, Bakouch и Nastić (2009). Нека је Z_n случајна променљива са асиметричном дискретном Лапласовом расподелом $SDL(\mu/(1+\mu), \nu/(1+\nu))$, $\mu > 0, \nu > 0$, чији је закон расподеле дат у (1.2.4). Нека су X_n и Y_n две независне случајне променљиве са геометријским $Geom(\mu/(1+\mu)), \mu > 0$, и $Geom(\nu/(1+\nu)), \nu > 0$, расподелама, респективно. Нека су, даље, $\alpha *$ и $\beta *$ два негативна биномна тининг оператора са узајамно независним бројачким низовима $\{W_i\}$ и $\{V_i\}$, независних, једнако расподељених случајних променљивих са геометријским расподелама, $Geom(\alpha/(1+\alpha)), \alpha \in [0,1)$, и $Geom(\beta/(1+\beta)), \beta \in [0,1)$, респективно. Нека су елементи бројачких низова независни од случајних променљивих X_n, Y_n и Z_n. Нови тининг оператор, у ознаци $(\alpha, \beta)\odot$, ће бити дефинисан на следећи начин

$$((\alpha, \beta) \odot Z_n)|Z_n \stackrel{d}{=} (\alpha * X_n - \beta * Y_n)|(X_n - Y_n). \tag{3.1.1}$$

Да овако дефинисани оператор представља уопштење два постојећа тининг оператора, показује следећа примедба.

Примедба 3.1.1 *У случају једнакости параметара α и β, добија се оператор који је дефинисан у раду* Barreto-Souza и Bourguignon (2015). *Ако је још и $\mu = \nu$, онда се добија оператор $\alpha\odot$, дефинисан у претходној глави, тј. оператор дефинисан у раду* Nastić, Ristić и Djordjević (2016).

Сада ће бити дискутоване неке битне особине новодефинисаног тининг оператора $(\alpha, \beta) \odot$.

Карактеристична функција може бити искоришћена за израчунавање момената случајне променљиве $(\alpha, \beta) \odot Z_n$. Њен облик даје следећа теорема.

Теорема 3.1.1 *Карактеристична функција случајне променљиве $(\alpha, \beta) \odot Z_n$ је*

$$\varphi_{(\alpha,\beta)\odot Z_n}(t) = \frac{(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\beta-\beta e^{-it})}{[1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)e^{it}][1+\beta(1+\nu)-\beta(1+\nu)e^{-it}]}. \tag{3.1.2}$$

Доказ. Користећи једнакост у расподели случајне променљиве Z_n и разлике случајних променљивих, $X_n - Y_n$, добија се да се тражена карактеристична функција може израчунати на следећи начин.

$$\begin{aligned}
\varphi_{(\alpha,\beta)\odot Z_n}(t) &= \sum_{z=-\infty}^{\infty} E\left(e^{it((\alpha,\beta)\odot Z_n)} | Z_n = z\right) P(Z_n = z) \\
&= \sum_{z=-\infty}^{-1} \sum_{y=0}^{\infty} E\left(e^{it(\alpha * X_n - \beta * Y_n)} | X_n = y, Y_n = y - z\right) \\
&\qquad\qquad \times P(X_n = y, Y_n = y - z) \\
&+ \sum_{z=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} E\left(e^{it(\alpha * X_n - \beta * Y_n)} | X_n = y + z, Y_n = y\right) \\
&\qquad\qquad \times P(X_n = y + z, Y_n = y). \qquad (3.1.3)
\end{aligned}$$

Како су, за задато $X_n = y$ и $Y_n = y - z$, случајне променљиве $\alpha * X_n$ и $\beta * Y_n$ независне случајне променљиве са негативним биномним $NB(y, \alpha/(1+\alpha))$ и $NB(y - z, \beta/(1+\beta))$ расподелама, респективно, добија се да је

$$\begin{aligned}
E&\left(e^{it(\alpha * X_n - \beta * Y_n)} | X_n = y, Y_n = y - z\right) \\
&= \left(1 + \alpha - \alpha e^{it}\right)^{-y} \left(1 + \beta - \beta e^{-it}\right)^{-y+z}. \qquad (3.1.4)
\end{aligned}$$

Слично је и

$$\begin{aligned}
E&\left(e^{it(\alpha * X_n - \beta * Y_n)} | X_n = y + z, Y_n = y\right) \\
&= \left(1 + \alpha - \alpha e^{it}\right)^{-y-z} \left(1 + \beta - \beta e^{-it}\right)^{-y}. \qquad (3.1.5)
\end{aligned}$$

Ако се, у циљу једноставнијег записивања, уведу следеће ознаке, $A = 1 + \alpha - \alpha e^{it}$ и $B = 1 + \beta - \beta e^{-it}$, замењујући (3.1.4) и (3.1.5) у (3.1.3), добија се

$$\begin{aligned}
\varphi_{(\alpha,\beta)\odot Z_n}(t) &= \sum_{z=-\infty}^{-1} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{A^y B^{y-z}} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^y \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{y-z} \frac{1}{(1+\mu)(1+\nu)} \\
&+ \sum_{z=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{A^{y+z} B^y} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{y+z} \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^y \frac{1}{(1+\mu)(1+\nu)}.
\end{aligned}$$

Након израчунавања ових редова, добија се да је

$$\begin{aligned}\varphi_{(\alpha,\beta)\odot Z_n}(t) &= \frac{AB}{AB(1+\mu)(1+\nu)-\mu\nu}\sum_{z=1}^{\infty}\frac{1}{B^z}\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^z \\ &+ \frac{AB}{AB(1+\mu)(1+\nu)-\mu\nu}\sum_{z=0}^{\infty}\frac{1}{A^z}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^z,\end{aligned}$$

на основу чега следи

$$\begin{aligned}\varphi_{(\alpha,\beta)\odot Z_n}(t) &= \frac{AB}{AB(1+\mu)(1+\nu)-\mu\nu}\left(\frac{\nu}{B(1+\nu)-\nu}+\frac{A(1+\mu)}{A(1+\mu)-\mu}\right) \\ &= \frac{AB}{(A(1+\mu)-\mu)(B(1+\nu)-\nu)} \\ &= \frac{(1+\alpha-\alpha e^{it})\,(1+\beta-\beta e^{-it})}{[1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)e^{it}]\,[1+\beta(1+\nu)-\beta(1+\nu)e^{-it}]}.\end{aligned}$$

□

Може се закључити, на основу особина негативног биномног тининг оператора, датих у Ristić, Bakouch и Nastić (2009), да су карактеристичне функције случајних променљивих $\alpha * X_n$ и $\beta * Y_n$,

$$\varphi_{\alpha * X_n}(t) = \frac{1+\alpha-\alpha e^{it}}{1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)e^{it}}$$

и

$$\varphi_{\beta * Y_n}(t) = \frac{1+\beta-\beta e^{it}}{1+\beta(1+\nu)-\beta(1+\nu)e^{it}},$$

респективно, где су X_n и Y_n две независне случајне променљиве са геометријским $Geom(\mu/(1+\mu))$ и $Geom(\nu/(1+\nu))$ расподелама, респективно, а $\alpha*$ и $\beta*$ су два негативна биномна тининг оператора. Добијена карактеристична функција, $\varphi_{(\alpha,\beta)\odot Z_n}(t)$, је, такође, и карактеристична функција случајне променљиве $\alpha * X_n - \beta * Y_n$. Једнакост карактеристичних функција имплицира и једнакост у расподели, те стога следи последица.

Последица 3.1.1 *Случајна променљива* $(\alpha,\beta)\odot Z_n$ *има следеће особине:*

1. $(\alpha,\beta)\odot Z_n \stackrel{d}{=} \alpha * X_n - \beta * Y_n$,

2. $E((\alpha,\beta)\odot Z_n) = \alpha\mu - \beta\nu$,

3. $Var((\alpha,\beta)\odot Z_n) = \alpha\mu(1+2\alpha+\alpha\mu) + \beta\nu(1+2\beta+\beta\nu)$.

Доказ. Користећи облик карактеристичне функције, лако се долази до доказа три наведена тврђења:

1. С обзиром на већ поменуту једнакост карактеристичних функција случајних променљивих $(\alpha,\beta)\odot Z_n$ и $\alpha * X_n - \beta * Y_n$, једнакост у расподели ових двеју случајних променљивих је јасна последица.

2. Како је на основу особина негативног биномног тининга $E(\alpha * X_n) = \alpha E(X_n) = \alpha\mu$ и $E(\beta * Y_n) = \beta\nu$, због претходно показане једнакости у расподели, и очекивања ових двеју случајних променљивих ће бити једнака.

3. Поново, на основу особина негативног биномног тининг оператора, дисперзије случајних променљивих $\alpha * X_n$ и $\beta * Y_n$ ће, респективно, бити $Var(X_n) = \alpha\mu(1+2\alpha+\alpha\mu)$ и $Var(Y_n) = \beta\nu(1+2\beta+\beta\nu)$. Због независности случајних променљивих $\alpha * X_n$ и $\beta * Y_n$ дисперзија разлике ће бити једнака збиру појединачних дисперзија, те је и доказ ове последице завршен. $\square$

Теорема 3.1.2 *Условно очекивање и условна дисперзија случајне променљиве* $(\alpha,\beta)\odot Z_n$ *за задато* Z_n *су*

$$\begin{aligned}
&E((\alpha,\beta)\odot Z_n|Z_n)\\
&\qquad =(\alpha-\beta)\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu}+Z_n\big(\alpha I_{\{Z_n\geq 0\}}+\beta I_{\{Z_n<0\}}\big),\\
&Var((\alpha,\beta)\odot Z_n|Z_n)\\
&\qquad =(\alpha-\beta)^2\frac{\mu(1+\mu)\nu(1+\nu)}{(1+\mu+\nu)^2}+(\alpha(1+\alpha)+\beta(1+\beta))\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu}\\
&\qquad +|Z_n|\big(\alpha(1+\alpha)I_{\{Z_n\geq 0\}}+\beta(1+\beta)I_{\{Z_n<0\}}\big).
\end{aligned}$$

Доказ. Слично као и у симетричној варијанти оператора, прво треба показати да је за $k \geq 0$

$$
\begin{aligned}
&E(((\alpha,\beta)\odot Z_n)^k|Z_n{=}z){=}E((\alpha{*}X_n{-}\beta{*}Y_n)^k|X_n{-}Y_n{=}z)\\
&=\begin{cases} \frac{1+\mu+\nu}{(1+\mu)(1+\nu)}\sum\limits_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^y\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^y E((\alpha{*}X_n{-}\beta{*}Y_n)^k|X_n{=}y{+}z,Y_n{=}y),\ z{\geq}0,\\ \frac{1+\mu+\nu}{(1+\mu)(1+\nu)}\sum\limits_{x=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^x\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^x E((\alpha{*}X_n{-}\beta{*}Y_n)^k|X_n{=}x,Y_n{=}x{-}z),\ z{<}0.\end{cases}
\end{aligned}
$$

Нека је $z \geq 0$. Тада је

$$
\begin{aligned}
E(((\alpha,\beta)\odot Z_n)^k|Z_n{=}z)&=\sum_{i=0}^{\infty}i^k P((\alpha,\beta)\odot Z_n{=}i|Z_n{=}z)\\
&=\sum_{i=0}^{\infty}i^k\frac{P((\alpha,\beta)\odot Z_n{=}i,Z_n{=}z)}{P(Z_n{=}z)}\\
&=\frac{1+\mu+\nu}{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^z}\sum_{i=0}^{\infty}i^k\sum_{y=0}^{\infty}P((\alpha,\beta)\odot Z_n{=}i,X_n{=}z{+}y,Y_n{=}y).
\end{aligned}
$$

Замењујући вероватноћу пресека догађаја формулом за условну вероватноћу добија се

$$
\begin{aligned}
&E(((\alpha,\beta)\odot Z_n)^k|Z_n{=}z)=\\
&=\frac{1+\mu+\nu}{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^z}\sum_{i=0}^{\infty}i^k\sum_{y=0}^{\infty}P((\alpha,\beta)\odot Z_n{=}i|X_n{=}z{+}y,Y_n{=}y)\\
&\qquad\qquad\times P(X_n{=}z{+}y)P(Y_n{=}y)\\
&=\frac{1+\mu+\nu}{(1+\mu)(1+\nu)}\sum_{i=0}^{\infty}i^k\sum_{y=0}^{\infty}P((\alpha,\beta)\odot Z_n{=}i|X_n{=}z{+}y,Y_n{=}y)\left(\frac{\mu\nu}{(1+\mu)(1+\nu)}\right)^y\\
&=\frac{1+\mu+\nu}{(1+\mu)(1+\nu)}\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu\nu}{(1+\mu)(1+\nu)}\right)^y\sum_{i=0}^{\infty}i^k P((\alpha,\beta)\odot Z_n{=}i|X_n{=}z{+}y,Y_n{=}y)\\
&=\frac{1+\mu+\nu}{(1+\mu)(1+\nu)}\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu\nu}{(1+\mu)(1+\nu)}\right)^y E\big(((\alpha,\beta)\odot Z_n)^k|X_n{=}z{+}y,Y_n{=}y\big).
\end{aligned}
$$

У случају када је $z < 0$, поступак је исти, осим што се догађај у услову $X_n = z + y, Y_n = y$ замењује догађајем $X_n = x, Y_n = x - z$. На тај начин се добија одговарајућа једнакост.

Помоћу леме 3 из Ristić, Bakouch и Nastić (2009), тј. особине $E(\alpha * X) = \alpha E(X)$ и независности случајних променљивих X_n и Y_n, добија се да је

$$E(\alpha * X - \beta * Y | X = x, Y = y) \;=\; \alpha x - \beta y.$$

Одатле, за $z \geq 0$, следи да је

$$\begin{aligned}
&E((\alpha,\beta)\odot Z_n|Z_n{=}z){=}\\
&\quad=\frac{1{+}\mu{+}\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}\right)^{y}E((\alpha,\beta)\odot Z_n|X_n{=}z{+}y,Y_n{=}y)\\
&\quad=\frac{1{+}\mu{+}\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}\right)^{y}\\
&\qquad\qquad\times E(\alpha{*}X_n{-}\beta{*}Y_n|X_n{=}z{+}y,Y_n{=}y)\\
&\quad=\frac{1{+}\mu{+}\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}\right)^{y}(\alpha(z{+}y){-}\beta y)\\
&\quad=\frac{1{+}\mu{+}\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}\right)^{y}(\alpha z{+}(\alpha{-}\beta)y).
\end{aligned}$$

Израчунавајући степени ред, добија се

$$\begin{aligned}
&E((\alpha,\beta)\odot Z_n|Z_n{=}z){=}\\
&\quad=\frac{1{+}\mu{+}\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}\left(\frac{\alpha z(1{+}\mu)(1{+}\nu)}{1{+}\mu{+}\nu}{+}\frac{(\alpha{-}\beta)(1{+}\mu)(1{+}\nu)\mu\nu}{(1{+}\mu{+}\nu)^2}\right)\\
&\quad=(\alpha{-}\beta)\frac{\mu\nu}{1{+}\mu{+}\nu}{+}\alpha z.
\end{aligned}$$

Ако је $z < 0$, истим поступком, само уз услов $X_n = x, Y_n = x - z$, тражено условно очекивање ће бити

$$\begin{aligned}
&E((\alpha,\beta)\odot Z_n|Z_n{=}z){=}\\
&\quad=\frac{1{+}\mu{+}\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{\mu\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}\right)^{x}(\alpha x{-}\beta(x{-}z))\\
&\quad=\frac{1{+}\mu{+}\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{\mu\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}\right)^{x}((\alpha{-}\beta)x{+}\beta z).
\end{aligned}$$

Сумирајући ред, добија се да је

$$\begin{aligned}&E((\alpha,\beta)\odot Z_n|Z_n{=}z){=}\\&\quad=\frac{1{+}\mu{+}\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}\left(\frac{(\alpha{-}\beta)(1{+}\mu)(1{+}\nu)\mu\nu}{(1{+}\mu{+}\nu)^2}+\frac{\beta z(1{+}\mu)(1{+}\nu)}{1{+}\mu{+}\nu}\right)\\&\quad=(\alpha{-}\beta)\frac{\mu\nu}{1{+}\mu{+}\nu}{+}\beta z,\end{aligned}$$

што комплетира тражени израз за условно математичко очекивање случајне променљиве $(\alpha, \beta) \odot Z_n$ при задатом Z_n.

Приликом извођења израза за условну дисперзију случајне променљиве $(\alpha, \beta) \odot Z_n$ користи се лема 3, из Ristić, Bakouch и Nastić (2009), и то особине $E(\alpha * X) = \alpha E(X)$ и $E(\alpha * X)^2 = \alpha^2 E(X^2) + \alpha(1 + \alpha)E(X)$. На основу њих се може извести да је $Var(\alpha * X|X) = \alpha(1 + \alpha)X$. Због тога следи да је

$$E(((\alpha,\beta)\odot Z_n)^2|X{=}x,Y{=}y){=}\alpha(1{+}\alpha)x{+}\beta(1{+}\beta)y{+}(\alpha x{-}\beta y)^2.$$

Нека је прво $z \geq 0$. Тада је

$$\begin{aligned}&Var((\alpha,\beta)\odot Z_n|Z_n{=}z){=}E\big(((\alpha,\beta)\odot Z_n)^2|Z_n{=}z\big){-}(E((\alpha,\beta)\odot Z_n|Z_n{=}z))^2\\&={\frac{1{+}\mu{+}\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}}\left[\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}\right)^y E\big(((\alpha,\beta)\odot Z_n)^2|X_n{=}z{+}y,Y_n{=}y\big)\right]\\&-\Big((\alpha{-}\beta)\frac{\mu\nu}{1{+}\mu{+}\nu}{+}\alpha z\Big)^2\\&={\frac{1{+}\mu{+}\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}}\left[\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}\right)^y \big(\alpha(1{+}\alpha)(y{+}z){+}\beta(1{+}\beta)y\right.\\&\left.{+}(\alpha(y{+}z){-}\beta y)^2\big)\right]{-}\Big((\alpha{-}\beta)\frac{\mu\nu}{1{+}\mu{+}\nu}{+}\alpha z\Big)^2\\&={\frac{1{+}\mu{+}\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}}\left[\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu\nu}{(1{+}\mu)(1{+}\nu)}\right)^y \big((\alpha(1{+}\alpha){+}\beta(1{+}\beta){+}2\alpha(\alpha{-}\beta)z)y\right.\\&\left.{+}(\alpha{-}\beta)^2y^2{+}\alpha(1{+}\alpha)z{+}\alpha^2z^2\big)\right]{-}((\alpha{-}\beta)\frac{\mu\nu}{1{+}\mu{+}\nu}{+}\alpha z)^2.\end{aligned}$$

С обзиром на то да се у последњем изразу јављају степени редови

$$\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu\nu}{(1+\mu)(1+\nu)}\right)^y = \frac{(1+\mu)(1+\nu)}{1+\mu+\nu},$$

$$\sum_{y=0}^{\infty} y \left(\frac{\mu\nu}{(1+\mu)(1+\nu)} \right)^y = \frac{(1+\mu)(1+\nu)\mu\nu}{(1+\mu+\nu)^2},$$
$$\sum_{y=0}^{\infty} y^2 \left(\frac{\mu\nu}{(1+\mu)(1+\nu)} \right)^y = \frac{(1+\mu)(1+\mu)\mu\nu((1+\mu)(1+\nu)+\mu\nu)}{(1+\mu+\nu)^3},$$

условна дисперзија добија коначан облик

$$\begin{aligned} &Var((\alpha,\beta)\odot Z_n|Z_n=z) \\ &\quad = (\alpha-\beta)^2\frac{\mu(1+\mu)\nu(1+\nu)}{(1+\mu+\nu)^2} + (\alpha(1+\alpha)+\beta(1+\beta))\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} \\ &\quad +\alpha(1+\alpha)z. \end{aligned}$$

На аналоган начин, за $z<0$, добија се да је

$$\begin{aligned} &Var((\alpha,\beta)\odot Z_n|Z_n=z) \\ &\quad = (\alpha-\beta)^2\frac{\mu(1+\mu)\nu(1+\nu)}{(1+\mu+\nu)^2} + (\alpha(1+\alpha)+\beta(1+\beta))\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} \\ &\quad -\beta(1+\beta)z. \ \Box \end{aligned}$$

Као и у случају симетричног тининга $\alpha\odot$, тако се и асиметрични $(\alpha,\beta)\odot$ тининг оператор може повезати са негативним биномним тининг оператором $\alpha*$. У случају оператора $(\alpha,\beta)\odot$ та веза је за нијансу сложенија, а приказана је у следећој теореми.

Теорема 3.1.3 *Нека случајне променљиве Z_n, X_n и Y_n имају респективно $SDL(\mu/(1+\mu),\nu/(1+\nu))$, $Geom(\mu/(1+\mu))$ и $Geom(\nu/(1+\nu))$ расподелу, где су $\mu,\nu>0$. Нека је $\{D_j, j\geq 1\}$ низ независних случајних променљивих са $SDL(\alpha/(1+\alpha),\beta/(1+\beta))$, $\alpha,\beta\in[0,1)$, расподелом и нека су још случајне променљиве Z_n, X_n, Y_n, $D_j, j\geq 1$ и случајне променљиве које учествују у $\alpha*$ и $\beta*$ независне. Тада је*

$$(\alpha,\beta)\odot Z_n \stackrel{d}{=} (\alpha*|Z_n|)I_{\{Z_n\geq 0\}} - (\beta*|Z_n|)I_{\{Z_n<0\}} + \sum_{j=1}^{\min(X_n,Y_n)} D_j, \quad (3.1.6)$$

где је $\sum_{j=1}^{\min(X_n,Y_n)} D_j = 0$ *када је* $\min(X_n,Y_n)=0$.

Доказ. Нека је $m_n = \min(X_n, Y_n)$ и $M_n = \max(X_n, Y_n)$. На основу последице 3.1.1, важи да је

$$(\alpha,\beta)\odot Z_n \;\stackrel{d}{=}\; \alpha * X_n - \beta * Y_n = \sum_{j=1}^{X_n} W_j - \sum_{j=1}^{Y_n} V_j,$$

где су $\{W_n, n \geq 1\}$ и $\{V_n, n \geq 1\}$ узајамно независни бројачки низови тининг оператора $\alpha*$ и $\beta*$, са геометријским, $Geom(\alpha/(1+\alpha))$ и $Geom(\beta/(1+\beta))$, расподелама, респективно. Након промене редоследа сабирака, добија се да је

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta)\odot Z_n &= \sum_{j=1}^{m_n} W_j - \sum_{j=1}^{m_n} V_j + \sum_{j=m_n+1}^{M_n} (W_j I_{\{X_n \geq Y_n\}} - V_j I_{\{X_n < Y_n\}}) \\ &= \sum_{j=1}^{m_n}(W_j - V_j) + \sum_{j=1}^{M_n - m_n} (W_{j+m_n} I_{\{X_n \geq Y_n\}} - V_{j+m_n} I_{\{X_n < Y_n\}}).\end{aligned}$$

С обзиром на то да је расподела разлике две независне случајне променљиве са геометријским расподелама, дискретна Лапласова, и да је $\max(X_n, Y_n) - \min(X_n, Y_n) = |X_n - Y_n|$, добија се да је

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta)\odot Z_n &\stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{m_n} D_j + \sum_{j=1}^{|X_n - Y_n|} (W_j I_{\{X_n \geq Y_n\}} - V_j I_{\{X_n < Y_n\}}) \\ &\stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{m_n} D_j + I_{\{X_n \geq Y_n\}} \sum_{j=1}^{|Z_n|} W_j - I_{\{X_n < Y_n\}} \sum_{j=1}^{|Z_n|} V_j \\ &= (\alpha*|Z_n|) I_{\{Z_n \geq 0\}} - (\beta*|Z_n|) I_{\{Z_n < 0\}} + \sum_{j=1}^{m_n} D_j \\ &= sgn(Z_n)(\alpha*|Z_n|) I_{\{Z_n \geq 0\}} + sgn(Z_n)(\beta*|Z_n|) I_{\{Z_n < 0\}} + \sum_{j=1}^{m_n} D_j. \;\square\end{aligned}$$

Претходна теорема представља оператор $(\alpha,\beta)\odot$ у облику збира два тининг оператора. Први сабирак (један од два) представља знаковни тининг оператор који су увели Latour и Truquet (2008). Елементи бројачког низа овог оператора имају, у случају да је случајна променљива $Z_n \geq 0$, геометријску, $Geom(\frac{\alpha}{1+\alpha})$, или, у случају да је случајна променљива $Z_n < 0$, $Geom(\frac{\beta}{1+\beta})$, расподелу. Други сабирак, $\sum_{j=1}^{m_n} D_j$, се може записати у облику $(\alpha, \beta) \circ' m_n$, где $(\alpha, \beta)\circ'$ представља тининг оператор са бројачким низом независних, једнако расподељених случајних променљивих D_j са асиметричном дискретном Лапласовом, $SDL(\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\beta}{1+\beta})$, расподелом, а који се примењује на случајну променљиву са геометријском расподелом.

Примедба 3.1.2 *С обзиром на то да случајна променљива* $\min(X_n, Y_n)$ *има геометријску,* $Geom(\mu\nu/[(1+\mu)(1+\nu)])$, *расподелу, у складу са ставом* 4.2 *из* Kozubowski и Inusah (2006), *случајна променљива* $\sum_{j=1}^{\min(X_n,Y_n)} D_j$ *има асиметричну дискретну Лапласову расподелу.*

3.2 Конструкција модела

Користећи нови тининг оператор, може се дефинисати један нови стационаран, ауторегресиван низ са целобројним вредностима $\{Z_n, n \geq 0\}$ на следећи начин

$$Z_{n+1} = (\alpha, \beta) \odot Z_n + e_{n+1}, \ n \geq 0, \tag{3.2.1}$$

где су $Z_n, n \geq 0$, случајне променљиве са асиметричном дискретном Лапласовом, $SDL(\mu/(1+\mu), \nu/(1+\nu))$, $\mu, \nu > 0$, расподелом, затим $\{e_n, n \geq 1\}$ је низ независних и једнако расподељених случајних променљивих, таквих да су e_n и $Z_k, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ независне случајне променљиве, тининг оператор $(\alpha, \beta)\odot$ је дефинисан на основу израза (3.1.1) и елементи бројачког низа у $(\alpha, \beta) \odot Z_n$ су случајне променљиве које су независне од Z_{n+1} и e_m за свако n и m, а $\alpha \in (0, \mu/(1+\mu)]$ и $\beta \in (0, \nu/(1+\nu)]$. Овај модел ће бити означен са $SDLINAR(1)$, што је акроним енглеског назива Skew Discrete Laplace INteger-valued AutoRegressive time series of the first order, што значи целобројни, ауторегресивни временски низ првог реда са асиметричном дискретном Лапласовом маргиналном расподелом.

Најпре ће бити описан иновациони низ $SDLINAR(1)$ модела. За временски низ независних, једнако расподељених случајних променљивих $\{e_n\}$ важи да се може, у расподели, представити као мешавина четири случајне променљиве са асиметричном дискретном Лапласовом расподелом. Следећа теорема даје расподелу иновационог низа, тј. расподелу случајне променљиве e_n.

Теорема 3.2.1 *Ако је* $\alpha \in (0, \mu/(1+\mu)]$ *и* $\beta \in (0, \nu/(1+\nu)]$, $\mu, \nu > 0$, *онда је расподела случајне променљиве* e_n

$$e_n \stackrel{d}{=} \begin{cases} SDL\left(\frac{\mu}{1+\mu}, \frac{\nu}{1+\nu}\right), & с.в. \ \left(1 - \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\right)\left(1 - \frac{\beta\nu}{\nu-\beta}\right), \\ SDL\left(\frac{\mu}{1+\mu}, \frac{\beta}{1+\beta}\right), & с.в. \ \left(1 - \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\right)\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}, \\ SDL\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\nu}{1+\nu}\right), & с.в. \ \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\left(1 - \frac{\beta\nu}{\nu-\beta}\right), \\ SDL\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\beta}{1+\beta}\right), & с.в. \ \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha} \cdot \frac{\beta\nu}{\nu-\beta}. \end{cases}$$

Доказ. Користећи (3.2.1) и независност случајних променљивих $(\alpha, \beta) \odot Z_{n-1}$ и e_n, добија се израз за карактеристичну функцију случајне променљиве e_n

$$\begin{aligned} \varphi_{e_n}(t) &= \frac{\varphi_{Z_n}(t)}{\varphi_{(\alpha,\beta)\odot Z_{n-1}}(t)} \\ &= \frac{(1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)e^{it})(1+\beta(1+\nu)-\beta(1+\nu)e^{-it})}{(1+\mu-\mu e^{it})(1+\nu-\nu e^{-it})(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\beta-\beta e^{-it})} \\ &= \left(\frac{1-\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}}{1+\mu-\mu e^{it}} + \frac{\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}}{1+\alpha-\alpha e^{it}}\right)\left(\frac{1-\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}}{1+\nu-\nu e^{-it}} + \frac{\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}}{1+\beta-\beta e^{-it}}\right). \end{aligned}$$

С обзиром на то да су бројеви $\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}$ и $\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}$ већи од 0, а мањи од 1, претходни облик карактеристичне функције случајне променљиве e_n представља производ две карактеристичне функције мешавина по две случајне променљиве са геометријским расподелама. Након множења, карактеристична функција $\varphi_{e_n}(t)$ добија следећи облик:

$$\begin{aligned} \varphi_{e_n}(t) &= \frac{\left(1 - \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\right)\left(1 - \frac{\beta\nu}{\nu-\beta}\right)}{(1+\mu-\mu e^{it})(1+\nu-\nu e^{-it})} + \frac{\left(1 - \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\right)\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}}{(1+\mu-\mu e^{it})(1+\beta-\beta e^{-it})} \\ &+ \frac{\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\left(1 - \frac{\beta\nu}{\nu-\beta}\right)}{(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\nu-\nu e^{-it})} + \frac{\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}}{(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\beta-\beta e^{-it})}. \end{aligned}$$

С обзиром на то да су функције

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{(1+\mu-\mu e^{it})(1+\nu-\nu e^{-it})},\quad \varphi_2(t)=\frac{1}{(1+\mu-\mu e^{it})(1+\beta-\beta e^{-it})},$$
$$\varphi_3(t)=\frac{1}{(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\nu-\nu e^{-it})},\quad \varphi_4(t)=\frac{1}{(1+\alpha-\alpha e^{it})(1+\beta-\beta e^{-it})},$$

карактеристичне функције случајних променљивих са асиметричним дискретним Лапласовим, $SDL\left(\frac{\mu}{1+\mu},\frac{\nu}{1+\nu}\right)$, $SDL\left(\frac{\mu}{1+\mu},\frac{\beta}{1+\beta}\right)$, $SDL\left(\frac{\alpha}{1+\alpha},\frac{\nu}{1+\nu}\right)$ и $SDL\left(\frac{\alpha}{1+\alpha},\frac{\beta}{1+\beta}\right)$, расподелама, респективно, а бројеви $\left(1-\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\right)\left(1-\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}\right)$, $\left(1-\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\right)\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}$, $\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\left(1-\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}\right)$ и $\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\cdot\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}$ представљају вероватноће неког потпуног система догађаја јер је $\alpha\in(0,\mu/(1+\mu)]$ и $\beta\in(0,\nu/(1+\nu)]$, доказ теореме је завршен. $\Box$

Оно што је, такође, битно нагласити је да су услови претходне теореме, $\alpha\in(0,\mu/(1+\mu)]$ и $\beta\in(0,\nu/(1+\nu)]$, потребни да би четири поменута броја с краја доказа била вероватноће неких могућих догађаја, тј. да би њихова вероватноћа припадала интервалу $(0,1]$. Претходна теорема и чињеница да разлика две независне случајне променљиве са геометријском расподелом има дискретну Лапласову расподелу доводе до следећег закључка.

Последица 3.2.1 *Ако је* $\alpha\in(0,\mu/(1+\mu)]$ *и* $\beta\in(0,\nu/(1+\nu)]$, *тада је* $e_n\stackrel{d}{=}\varepsilon_n-\eta_n$, *где су* ε_n *и* η_n *две независне случајне променљиве са расподелама:*

$$\varepsilon_n\stackrel{d}{=}\begin{cases} Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right), & с.в.\ 1-\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha},\\ Geom\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right), & с.в.\ \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\end{cases},\eta_n\stackrel{d}{=}\begin{cases} Geom\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right), & с.в.\ 1-\frac{\beta\nu}{\nu-\beta},\\ Geom\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right), & с.в.\ \frac{\beta\nu}{\nu-\beta}\,.\end{cases}$$

Овај облик расподеле иновационог низа може се искористити за извођење неких корисних особина или за њихово лакше доказивање. Колико већ, следећа последица је добар пример за то. Премда се она може доказати коришћењем везе карактеристичне функције и момената случајне променљиве, много је једноставније, приликом њеног доказивања, искористити облик расподеле иновационог низа дат у последици 3.2.1.

Последица 3.2.2 *Математичко очекивање и дисперзија иновационог низа* $\{e_n\}$, $SDLINAR(1)$ *модела, су*

$$\begin{aligned} E(e_n) &= \mu(1-\alpha)-\nu(1-\beta) \\ Var(e_n) &= \mu(1+\alpha)\left[(1+\mu)(1-\alpha)-\alpha\right]+\nu(1+\beta)\left[(1+\nu)(1-\beta)-\beta\right]. \end{aligned}$$

3.3 Особине модела

И у основи $SDLINAR(1)$ модела налази се $NGINAR(1)$ модел. Због тога, нека су дата два независна $NGINAR(1)$ временска низа $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$, дефинисана на следећи начин

$$\begin{aligned} X_n &= \alpha * X_{n-1}+\varepsilon_n, n\geq 1 \\ Y_n &= \beta * Y_{n-1}+\eta_n, n\geq 1, \end{aligned}$$

са геометријским, $Geom(\mu/(1+\mu))$ и $Geom(\nu/(1+\nu))$, $\mu,\nu>0$, маргиналним расподелама, $\{\varepsilon_n\}$ и $\{\eta_n\}$ два, такође, узајамно независна, низа независних и једнако расподељених случајних променљивих чије су расподеле дате у последици 3.2.1, X_{n-l} и ε_n, као и Y_{n-l} и η_n нека су независне случајне променљиве за свако $n\geq 1$ и $l\geq 1$, а низови $\{X_n\}$ и $\{\eta_n\}$, као и низови $\{Y_n\}$ и $\{\varepsilon_n\}$, узајамно независни.

На основу последица 3.1.1 и 3.2.1 добија се следећи закључак

$$X_n-Y_n=(\alpha * X_{n-1}-\alpha * Y_{n-1})+(\varepsilon_n-\eta_n)\stackrel{d}{=}\alpha\odot Z_{n-1}+e_n=Z_n, \quad (3.3.1)$$

тј. добија се да је $Z_n\stackrel{d}{=}X_n-Y_n$, за свако $n\geq 0$.

Следеће ће бити анализиране вероватноће прелаза $SDLINAR(1)$ временског низа, односно условне вероватноће $P\{Z_{n+1}=k|Z_n=j\}$. Нека је j ненегативни цео број. Важи следеће

$$\begin{aligned} p_Z(k,j) &\equiv P(Z_{n+1}{=}k|Z_n{=}j){=}P((\alpha,\beta)\odot Z_n{+}e_{n+1}{=}k|Z_n{=}j) \\ &= P(\alpha{*}X_n{-}\beta{*}Y_n{+}e_{n+1}{=}k|X_n{-}Y_n{=}j) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}P(\alpha{*}X_n{-}\beta{*}Y_n{+}e_{n+1}{=}k|X_n{=}m{+}j,Y_n{=}m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}P(\alpha{*}X_n{-}\beta{*}Y_n{=}k{-}l,e_{n+1}{=}l|X_n{=}m{+}j,Y_n{=}m). \end{aligned}$$

Због независности случајних променљивих $\alpha * X_n$, $\beta * Y_n$, X_n и Y_n од e_{n+1}, добија се да је

$$p_Z(k,j) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} p_{DNB}\left(k-l; m+j, \frac{\alpha}{1+\alpha}, m, \frac{\beta}{1+\beta}\right) p_e(l),$$

где је p_{DNB} вероватноћа из закона расподеле случајне променљиве која представља разлику две независне случајне променљиве са негативном биномном расподелом, дефинисана изразом (1.2.1), а $p_e(l) = P(e_{n+1} = l)$ вероватноћа

$$p_e(l)=\begin{cases} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^l\left(1-\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\right)\frac{1+\mu+\beta(1+\nu)}{(1+\mu+\nu)(1+\mu+\beta)}+\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^l\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\frac{1+\alpha+\beta(1+\nu)}{(1+\alpha+\nu)(1+\alpha+\beta)}, & l\geq 0\\ \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{-l}\left(1-\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}\right)\frac{1+\nu+\alpha(1+\mu)}{(1+\nu+\mu)(1+\nu+\alpha)}+\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{-l}\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}\frac{1+\beta+\alpha(1+\mu)}{(1+\beta+\mu)(1+\beta+\alpha)}, & l<0, \end{cases}$$

јер је e_{n+1} мешавина случајних променљивих са дискретном Лапласовом расподелом.

За случај када је $j < 0$, поступак извођења је потпуно аналоган претходном. Разлика је у томе што се услов $X_n = m + j, Y_n = m$ замењује условом $X_n = m, Y_n = m - j$. На тај начин се добија да је

$$p_Z(k,j) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} p_{DNB}\left(k-l; m, \frac{\alpha}{1+\alpha}, m-j, \frac{\beta}{1+\beta}\right) p_e(l).$$

На основу овога може се формулисати једна важна особина $SDLINAR(1)$ временског низа.

Теорема 3.3.1 $SDLINAR(1)$ *временски низ* $\{Z_n\}$ *је процес Маркова са вероватноћама прелаза*

$$p_Z(k,j) = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} p_{DNB}(k-l; m+j, \frac{\alpha}{1+\alpha}, m, \frac{\beta}{1+\beta})p_e(l), & j \geq 0,\\ \sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} p_{DNB}(k-l; m, \frac{\alpha}{1+\alpha}, m-j, \frac{\beta}{1+\beta})p_e(l), & j < 0, \end{cases}$$

где је p_{DNB} *вероватноћа из закона расподеле случајне променљиве која представља разлику две независне случајне променљиве са негативном биномном расподелом, дефинисана изразом (1.2.1), а* $p_e(l) = P(e_n = l)$ *вероватноћа из закона расподеле иновационог низа.*

Користећи Марковско својство, могу се доказати строга стационарност и ергодичност $SDLINAR(1)$ временског низа, тј. важи следећа теорема.

Теорема 3.3.2 *$SDLINAR(1)$ временски низ $\{Z_n\}$ је строго стационаран и ергодичан временски низ.*

Доказ. Строга стационарност $SDLINAR(1)$ временског низа се доказује на идентичан начин као у случају симетричног $DLINAR(1)$ модела те стога доказ неће бити наведен.

Да би се доказала ергодичност временског низа $\{Z_n\}$, може се поћи од дефиниције 6.30 из Breiman (1992), која каже да је стационаран низ $\{Z_n\}$ ергодичан уколико је вероватноћа сваког инваријантног догађаја (у односу на низ $\{Z_n\}$) 0 или 1. На основу тврђења 6.32 из Breiman (1992), сваки инваријантни догађај, у односу на неки стационарни низ, је истовремено и репни догађај. Међутим, за свако $n \geq 1$, σ-алгебра $\mathcal{F}(Z_n, Z_{n-1}, \dots)$, генерисана случајним променљивама $Z_n, Z_{n-1}, \dots$, је подскуп σ-алгебре $\mathcal{F}(e_n, W_n, V_n, e_{n-1}, W_{n-1}, V_{n-1}, \dots)$, где су W_k и V_k елементи бројачких низова који се користе у дефиниције тининг оператора $\alpha*$ и $\beta*$ приликом генерисања случајне променљиве Z_k. Захваљујући независности случајних променљивих $\{e_n, W_n, V_n\}$, применом Колмогоровљевог закона $0-1$, сваки репни догађај има вероватноћу 0 или 1, чиме је и потврђена ергодичност низа $\{Z_n\}$. $\Box$

У наставку ће бити описани k-корачно условно очекивање, аутокорелациона структура, спектрална густина и још неке особине које имају битну улогу у карактеризацији временског низа и у оцењивању непознатих параметара $SDLINAR(1)$ модела.

Теорема 3.3.3 *k-корачно условно очекивање $SDLINAR(1)$ временског низа, дефинисаног изразом (3.2.1) је*

$$E(Z_{n+k}|Z_n)=(\alpha^k-\beta^k)\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu}+\mu(1-\alpha^k)-\nu(1-\beta^k)+\alpha^k Z_n^+-\beta^k Z_n^-,$$

где је $Z_n^+ = Z_n I_{\{Z_n \geq 0\}}$, а $Z_n^- = -Z_n I_{\{Z_n < 0\}}$.

Доказ. Како је $Z_{n+k} \stackrel{d}{=} X_{n+k} - Y_{n+k}$, то следи да је

$$\begin{aligned} E(Z_{n+k}|Z_n = z) &= E(X_{n+k} - Y_{n+k}|X_n - Y_n = z) \\ &= E(X_{n+k}|X_n - Y_n = z) - E(Y_{n+k}|X_n - Y_n = z). \end{aligned}$$

На основу особина условног математичког очекивања $NGINAR(1)$ временског низа $\{X_n\}$, приказаних у раду Ristić, Bakouch и Nastić (2009), важи да је

$$E(X_{n+k}|X_n = x) = \alpha^k x + (1-\alpha^k)\mu.$$

На сличан начин као што је то урађено у доказу теореме 3.1.2, може се доказати да је

$$\begin{aligned} &E(X_{n+k}^r|Z_n{=}z){=}E(X_{n+k}^r|X_n{-}Y_n{=}z)\\ &\quad=\begin{cases} \frac{1+\mu+\nu}{(1+\mu)(1+\nu)}\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^y\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^y E(X_{n+k}^r|X_n{=}y{+}z,Y_n{=}y), & z\geq 0,\\ \frac{1+\mu+\nu}{(1+\mu)(1+\nu)}\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^x\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^x E(X_{n+k}^r|X_n{=}x,Y_n{=}x{-}z), & z<0. \end{cases}\end{aligned}$$

Са претходно поменутим условним очекивањем $NGINAR(1)$ временског низа и $r = 1$, добија се да је

$$\begin{aligned} &E(X_{n+k}|Z_n{=}z)\\ &\quad=\begin{cases} \frac{1+\mu+\nu}{(1+\mu)(1+\nu)}\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^y\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^y(\alpha^k(y{+}z){+}(1{-}\alpha^k)\mu), & z\geq 0\\ \frac{1+\mu+\nu}{(1+\mu)(1+\nu)}\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^x\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^x(\alpha^k x{+}(1{-}\alpha^k)\mu), & z<0. \end{cases}\end{aligned}$$

Израчунавајући, сада већ добро познате редове, добија се да је

$$E(X_{n+k}|Z_n = z) \;=\; \begin{cases} \alpha^k\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + (1-\alpha^k)\mu + \alpha^k z, & z\geq 0\\ \alpha^k\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + (1-\alpha^k)\mu, & z<0, \end{cases}$$

или, једном речју,

$$E(X_{n+k}|Z_n) = \alpha^k\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + (1-\alpha^k)\mu + \alpha^k Z_n^+. \tag{3.3.2}$$

На исти начин добија се да је

$$E(Y_{n+k}|Z_n) = \beta^k\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + (1-\beta^k)\nu - \beta^k Z_n^-.$$

Спајајући последња два израза и узимајући у обзир независност случајних промењивих X_n и Y_n, добија се да је

$$E(Z_{n+k}|Z_n){=}(\alpha^k{-}\beta^k)\frac{\mu\nu}{1{+}\mu{+}\nu}{+}\mu(1{-}\alpha^k){-}\nu(1{-}\beta^k){+}\alpha^k Z_n^+{-}\beta^k Z_n^-. \;\square$$

Корелациона структура $SDLINAR(1)$ временског низа приказана је у следећој теореми.

Теорема 3.3.4 $SDLINAR(1)$ *временски низ* $\{Z_n\}$ *задат релацијом* (3.2.1) *је позитивно корелиран временски низ са аутокорелационом функцијом*

$$\rho(k) = Corr(Z_{n+k}, Z_n) = \frac{\alpha^{|k|}\mu(1+\mu) + \beta^{|k|}\nu(1+\nu)}{\mu(1+\mu)+\nu(1+\nu)}, k \in \mathbb{Z}.$$

Доказ. Нека је $k > 0$. Као што је то показано у претходним теоремама, временски низ $\{Z_n\}$ је строго стационаран временски низ са k-корачним очекивањем

$$E(Z_{n+k}|Z_n)=(\alpha^k-\beta^k)\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu}+\mu(1-\alpha^k)-\nu(1-\beta^k)+\alpha^k Z_n^+-\beta^k Z_n^-.$$

Дисперзија временског низа је коначна, $Var(Z_n) = \mu(1+\mu)+\nu(1+\nu)$. Због тога се коваријанса може израчунати на следећи начин

$$\begin{aligned} Cov(Z_{n+k}, Z_n) &= Cov(E(Z_{n+k}|Z_n), Z_n) \\ &= \alpha^k Cov(Z_n^+, Z_n) - \beta^k Cov(Z_n^-, Z_n). \end{aligned}$$

Затим је

$$\begin{aligned} Cov(Z_n^+, Z_n) &= E(Z_n^2 I_{\{Z_n \geq 0\}}) - E(Z_n)E(Z_n I_{\{Z_n \geq 0\}}) \\ &= \frac{1}{1+\mu+\nu}\sum_{i=0}^{\infty} i^2 \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^i \\ &- (\mu-\nu)\frac{1}{1+\mu+\nu}\sum_{i=0}^{\infty} i \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^i = \mu(1+\mu). \end{aligned}$$

На сличан начин се добија и да је $Cov(Z_n^-, Z_n) = -\nu(1+\nu)$, одакле следи да је $Cov(Z_{n+k}, Z_n) = \alpha^k\mu(1+\mu) + \beta^k\nu(1+\nu)$ и, коначно,

$$\rho(k) = Corr(Z_{n+k}, Z_n) = \frac{\alpha^k\mu(1+\mu) + \beta^k\nu(1+\nu)}{\mu(1+\mu)+\nu(1+\nu)}.$$

Због симетричности коваријансе, аналоган резултат се добија и у случају када је $k < 0$. $\square$

На основу облика аутокорелационе функције може се видети да је $SDLINAR(1)$ временски низ позитивно корелиран. Такође, када k тежи бесконачности, вредност аутокорелационе функције тежи нули, и то експоненцијално, што $SDLINAR(1)$ временски низ сврстава у слабо корелиране временске низове. Ова особина имплицира неке, веома интересантне, карактеристике.

Чињеница је да се $SDLINAR(1)$ временски низ $\{Z_n\}$ истовремено може представити, и као разлика два независна $NGINAR(1)$ временска низа $Z_n = X_n - Y_n$, и као разлика временских низова $\{Z_n^+\}$ и $\{Z_n^-\}$, $Z_n = Z_n^+ - Z_n^-$. Због тога се дисперзија временског низа може представити у облику збира дисперзија појединачних компоненти

$$Var(Z_n) = Var(X_n) + Var(Y_n) = \mu(1+\mu) + \nu(1+\nu),$$

али исто тако и у следећем облику

$$Var(Z_n) = Cov(Z_n, Z_n) = Cov(Z_n^+, Z_n) - Cov(Z_n^-, Z_n) = \mu(1+\mu) + \nu(1+\nu).$$

Два последња израза су послужила као инспирација да се потражи веза између временских низова $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$, с једне стране и $\{Z_n^+\}$ и $\{Z_n^-\}$, с друге.

Одмах се могу уочити следеће једнакости

$$Var(X_n) = Cov(Z_n^+, Z_n) \text{ и } \; Var(Y_n) = -Cov(Z_n^-, Z_n). \tag{3.3.3}$$

Ове једнакости су прилично очигледне узимајући у обзир особине $NGINAR(1)$ временских низова и доказ теореме 3.3.4.

Међутим, може се доказати и још општије тврђење.

Теорема 3.3.5 *Нека је дат $SDLINAR(1)$ временски низ $\{Z_n\}$ са маргиналном $SDL(\frac{\mu}{1+\mu}, \frac{\nu}{1+\nu})$, $\mu, \nu > 0$, расподелом и нека су $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ два независна $NGINAR(1)$ временска низа са маргиналним $Geom(\frac{\mu}{1+\mu})$, и $Geom(\frac{\nu}{1+\nu})$, расподелама, респективно, одговарајуће латентне компоненте временског низа $\{Z_n\}$, тј. нека је $Z_n \stackrel{d}{=} X_n - Y_n$. Нека су $\{Z_n^+\}$ и $\{Z_n^-\}$ низови случајних промењљивих дефинисаних на следећи начин $Z_n^+ = Z_n I_{\{Z_n \geq 0\}}$ и $Z_n^- = -Z_n I_{\{Z_n < 0\}}$. Тада важи да је*

$$Cov(X_{n+k}, X_n) = Cov(Z_{n+k}^+, Z_n) \quad \textit{и} \quad Cov(Y_{n+k}, Y_n) = -Cov(Z_{n+k}^-, Z_n).$$

Доказ. На основу особина $NGINAR(1)$ временских низова, приказаних у Ristić, Bakouch и Nastić (2009), је

$$Cov(X_{n+k}, X_n) = \alpha^k \mu(1+\mu).$$

На основу израза (3.3.2) и особина условног математичког очекивања добија се да је

$$\begin{aligned} Cov(X_{n+k}, Z_n) &= Cov(E(X_{n+k}|Z_n), Z_n) \\ &= Cov\left((1-\alpha^k)\mu + \alpha^k\left(\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + Z_n^+\right), Z_n\right) \\ &= \alpha^k Cov(Z_n^+, Z_n) = \alpha^k \mu(1+\mu). \end{aligned}$$

Сада још треба показати да је $Cov(X_{n+k}, Z_n) = Cov(Z_{n+k}^+, Z_n)$. Прво је

$$E(Z_{n+k}^+|Z_n) = (1-\alpha^k)\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu} + \alpha^k Z_n^+.$$

Ова једнакост се доказује математичком индукцијом. За $k = 0$ је очигледно да је $E(Z_{n+k}^+|Z_n) = E(Z_n^+|Z_n) = Z_n^+$. Сада, под условом да полазна једнакост важи за свако $k \le m$, треба доказати да је тачна и за $k = m+1$. Користећи Марковско својство временског низа $\{Z_n\}$, $E(f(Z_{n+1}|Z_n, Z_{n-1}, \dots)) = E(f(Z_{n+1}|Z_n))$, и добро познате особине условног математичког очекивања, добија се следеће

$$\begin{aligned} E(Z_{n+m+1}^+|Z_n) &= E(E(Z_{n+m+1}^+|Z_n)|Z_n) = E(E(Z_{n+m+1}^+|Z_{n+m}, Z_n)|Z_n) \\ &= E(E(Z_{n+m+1}^+|Z_{n+m})|Z_n) \\ &= E\left((1-\alpha)\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu} + \alpha Z_{n+m}^+|Z_n\right) \\ &= (1-\alpha)\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu} + \alpha E(Z_{n+m}^+|Z_n). \end{aligned}$$

С обзиром на то да за $E(Z_{n+m}^+|Z_n)$ важи индукцијска хипотеза, односно $E(Z_{n+m}^+|Z_n) = (1-\alpha^m)\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu} + \alpha^m Z_n^+$, добија се да је

$$E(Z_{n+m+1}^+|Z_n) = (1-\alpha^{m+1})\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu} + \alpha^{m+1} Z_n^+.$$

Ово имплицира да је разлика између два условна очекивања $E(X_{n+k}|Z_n)$ и $E(Z_{n+k}^+|Z_n)$ константа, тј.

$$E(X_{n+k}|Z_n) = \frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + E(Z_{n+k}^+|Z_n).$$

На основу приказаног је

$$\begin{aligned} Cov(X_{n+k}, Z_n) &= Cov(E(X_{n+k}|Z_n), Z_n) = Cov(E(Z^+_{n+k}|Z_n), Z_n) \\ &= Cov(Z^+_{n+k}, Z_n). \end{aligned}$$

На сличан начин се добија и да је $Cov(Y_{n+k}, Y_n) = -Cov(Z^-_{n+k}, Z_n)$. □

Да би се слика корелационе структуре $SDLINAR(1)$ временских низова комплетирала, биће анализиране и релације између временских низова $\{Z^+_n\}$ и $\{Z^-_n\}$.

Теорема 3.3.6 *Нека је дат $SDLINAR(1)$ временски низ $\{Z_n\}$ са маргиналном $SDL(\frac{\mu}{1+\mu}, \frac{\nu}{1+\nu})$, $\mu, \nu > 0$, расподелом и нека су $\{Z^+_n\}$ и $\{Z^-_n\}$ низови случајних променљивих које су дефинисане на следећи начин $Z^+_n = Z_n I_{\{Z_n \geq 0\}}$ и $Z^-_n = -Z_n I_{\{Z_n < 0\}}$. Тада су аутоковаријансне и кросковаријансне функције низова $\{Z^+_n\}$ и $\{Z^-_n\}$ дате следећим изразима*

$$\begin{aligned} \gamma_{Z^+}(k) &\equiv Cov(Z^+_{n+k}, Z^+_n) = \alpha^k \frac{\mu(1+\mu)\big((1+\mu)^2 + \nu(1+2\mu)\big)}{(1+\mu+\nu)^2}, \\ \gamma_{Z^-}(k) &\equiv Cov(Z^-_{n+k}, Z^-_n) = \beta^k \frac{\nu(1+\nu)\big((1+\nu)^2 + \mu(1+2\nu)\big)}{(1+\mu+\nu)^2}, \\ \gamma_{Z^+Z^-}(k) &\equiv Cov(Z^+_{n+k}, Z^-_n) = -\alpha^k \frac{\mu(1+\mu)\nu(1+\nu)}{(1+\mu+\nu)^2}, \\ \gamma_{Z^-Z^+}(k) &\equiv Cov(Z^-_{n+k}, Z^+_n) = -\beta^k \frac{\mu(1+\mu)\nu(1+\nu)}{(1+\mu+\nu)^2}. \end{aligned}$$

Доказ. Најпре ће бити изведена прва формула. Користећи својство Маркова временског низа $\{Z_n\}$ и особине условног математичког очекивања, добија се да је

$$\begin{aligned} E(Z^+_{n+k} Z^+_n) &= E(E(Z^+_{n+k} Z^+_n | Z_n)) = E(Z^+_n E(Z^+_{n+k}|Z_n)) \\ &= E(Z^+_n((1-\alpha^k)\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu} + \alpha^k Z^+_n)) \\ &= (1-\alpha^k)\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu} E(Z^+_n) + \alpha^k E((Z^+_n)^2) \\ &= (1-\alpha^k)\left(\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu}\right)^2 + \alpha^k \frac{\mu(1+\mu)(1+2\mu)}{1+\mu+\nu}, \end{aligned}$$

јер је $E(Z_n^+) = \frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu}$ и $E((Z_n^+)^2) = \frac{\mu(1+\mu)(1+2\mu)}{1+\mu+\nu}$. Даље је

$$\begin{aligned}\gamma_{Z^+}(k) &= E(Z_{n+k}^+ Z_n^+) - E(Z_{n+k}^+)E(Z_n^+) \\ &= \alpha^k \frac{\mu(1+\mu)\big((1+\mu)^2 + \nu(1+2\mu)\big)}{(1+\mu+\nu)^2}.\end{aligned}$$

На сличан начин се доказује и друга једнакост. Трећа и четврта једнакост се доказују користећи линеарност коваријансе

$$Cov(Z_{n+k}^+, Z_n^-) = Cov(Z_{n+k}^+, Z_n^+) - Cov(Z_{n+k}^+, Z_n),$$

$$Cov(Z_{n+k}^-, Z_n^+) = Cov(Z_{n+k}^-, Z_n^-) + Cov(Z_{n+k}^-, Z_n). \ \Box$$

С обзиром на то да вредности аутокорелационих функција случајних низова $\{Z_n^+\}$ и $\{Z_n^-\}$ експоненцијално теже нули, може се закључити да ова два случајна низа припадају класи асимптотски некорелираних низова. Такође, из сваког стања временског низа $\{Z_n\}$, могуће је, након коначно много корака, стићи у било које стање. Другим речима, за било која два цела броја i и j, постоји природан број m такав да је $P(Z_{n+m} = j|Z_n = i) > 0$, тј. временски низ $\{Z_n\}$ је иредуцибилан. Временски низ $\{Z_n\}$ је и апериодичан јер је из сваког стања могуће вратити се, након коначног броја корака, у исто стање, односно, за било која два природна броја i и m, $P(Z_{n+m} = i|Z_n = i) > 0$. С обзиром на то да је низ $\{Z_n\}$ иредуцибилан, апериодичан Марковљев процес, на основу теореме 3.2 из рада Bradley (2005), следи да је временски низ $\{Z_n\}$ низ јаког мешања.

Такође, још две, врло битне особине временских низова $\{Z_n^+\}$ и $\{Z_n^-\}$ се могу извести. Временски низови $\{Z_n^+\}$ и $\{Z_n^-\}$ су строго стационарни и ергодични. Доказ за то се може представити као последица теореме 2.4.3.

Последица 3.3.1 *Нека је дат строго стационаран и ергодичан низ случајних променљивих $\{Z_n\}$. Случајни низови $\{Z_n^+\}$ и $\{Z_n^-\}$, дефинисани са $Z_n^+ = Z_n I_{\{Z_n \geq 0\}}$ и $Z_n^- = Z_n I_{\{Z_n < 0\}}$ су строго стационарни и ергодични.*

Доказ. Случајна променљива $Z_n^+ = Z_n I_{\{Z_n \geq 0\}}$ се може представити и у облику $Z_n^+ = g(Z_n) = \frac{|Z_n| + Z_n}{2}$. С обзиром на чињеницу да је апсолутна вредност мерљиве функције, такође, мерљива функција, да је збир две мерљиве функције мерљива функција и да је производ мерљиве функције и константе, такође, мерљива функција, јасно је да је претходно дефинисана функција g $\mathcal{F}$-мерљива. На основу теореме 2.4.3, следи да је низ случајних променљивих $\{Z_n^+\}$ строго стационаран и ергодичан. На аналоган начин се доказује и строга стационарност и ергодичност низа случајних променљивих $\{Z_n^-\}$. $\square$

3.4 Оцењивање непознатих параметара

У овом делу ће бити разматране различите оцене непознатих параметара $SDLINAR(1)$ модела. Биће разматране оцене добијене Yule-Walker-овим методом, као и оцене добијене методом условних најмањих квадрата. Такође, биће анализирано и асимптотско понашање добијених оцена.

Нека је дат случајни узорак обим N, $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_N)$. Користећи чињеницу да су

$$\begin{aligned} E(Z_n) &= \mu - \nu, \\ Var(Z_n) &= \mu(1+\mu) + \nu(1+\nu) \end{aligned}$$

и уводећи узорачке моменте уместо теоријских, добијају се следеће једначине

$$\begin{aligned} \overline{Z}_N &= \hat{\mu}^{YW_1} - \hat{\nu}^{YW_1}, \\ \hat{\gamma}_Z(0) &= \hat{\mu}^{YW_1}\left(1+\hat{\mu}^{YW_1}\right) + \hat{\nu}^{YW_1}\left(1+\hat{\nu}^{YW_1}\right), \end{aligned}$$

одакле се, решавањем по $\hat{\mu}^{YW_1}$ и $\hat{\nu}^{YW_1}$, добијају Yule-Walker-ове оцене непознатих параметара μ и ν.

$$\begin{aligned} \hat{\mu}^{YW_1} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\overline{Z}_N + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \overline{Z}_N^2 + 2\hat{\gamma}_Z(0)}, \\ \hat{\nu}^{YW_1} &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\overline{Z}_N + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \overline{Z}_N^2 + 2\hat{\gamma}_Z(0)}, \end{aligned}$$

где су $\overline{Z}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Z_i$ узорачка средина, а $\hat{\gamma}_Z(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N (Z_i - \overline{Z}_N)^2$ узорачка дисперзија. Користећи, затим, изразе за коваријансу,

$$\begin{aligned} \gamma_Z(1) &= \alpha\mu(1+\mu) + \beta\nu(1+\nu), \\ \gamma_Z(2) &= \alpha^2\mu(1+\mu) + \beta^2\nu(1+\nu), \end{aligned}$$

и, поново, замењујући теоријске коваријансе узорачким, добијају се једначине

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_Z(1) &= \hat{\alpha}^{YW_1}\hat{\mu}^{YW_1}(1+\hat{\mu}^{YW_1}) + \hat{\beta}^{YW_1}\hat{\nu}^{YW_1}(1+\hat{\nu}^{YW_1}),\\
\hat{\gamma}_Z(2) &= \left(\hat{\alpha}^{YW_1}\right)^2\hat{\mu}^{YW_1}\left(1+\hat{\mu}^{YW_1}\right) + \left(\hat{\beta}^{YW_1}\right)^2\hat{\nu}^{YW_1}\left(1+\hat{\nu}^{YW_1}\right),
\end{aligned}$$

чијим се решавањем по $\hat{\alpha}^{YW_1}$ и $\hat{\beta}^{YW_1}$ добијају Yule-Walker-ове оцене непознатих параметара α и β

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}^{YW_1} &= \hat{\rho}(1) + \sqrt{\frac{\tilde{M}^-}{\tilde{M}^+}(\hat{\rho}(2)-\hat{\rho}(1)^2)},\\
\hat{\beta}^{YW_1} &= \hat{\rho}(1) - \sqrt{\frac{\tilde{M}^+}{\tilde{M}^-}(\hat{\rho}(2)-\hat{\rho}(1)^2)},
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

односно

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}^{YW_1} &= \hat{\rho}(1) - \sqrt{\frac{\tilde{M}^-}{\tilde{M}^+}(\hat{\rho}(2)-\hat{\rho}(1)^2)},\\
\hat{\beta}^{YW_1} &= \hat{\rho}(1) + \sqrt{\frac{\tilde{M}^+}{\tilde{M}^-}(\hat{\rho}(2)-\hat{\rho}(1)^2)},
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

где су $\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}_Z(k)}{\hat{\gamma}_Z(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N-k}(Z_i-\overline{Z}_N)(Z_{i+k}-\overline{Z}_N)}{\sum_{i=1}^{N}(Z_i-\overline{Z}_N)^2}, k = 1, 2,$ једнокорачна и двокорачна узорачка корелација, $\hat{\gamma}_Z(k), k = 1, 2,$ једнокорачна и двокорачна узорачка коваријанса, а статистике $\tilde{M}^+$ и $\tilde{M}^-$ се рачунају по следећим формулама

$$\begin{aligned}
\tilde{M}^+ &= \frac{\hat{\mu}^{YW_1}\left(1+\hat{\mu}^{YW_1}\right)}{\hat{\gamma}_Z(0)} = \frac{\hat{\gamma}_Z(0)+\overline{Z}_N\sqrt{1-\overline{Z}_N^2+2\hat{\gamma}_Z(0)}}{2\hat{\gamma}_Z(0)},\\
\tilde{M}^- &= \frac{\hat{\nu}^{YW_1}\left(1+\hat{\nu}^{YW_1}\right)}{\hat{\gamma}_Z(0)} = 1-\tilde{M}^+ = \frac{\hat{\gamma}_Z(0)-\overline{Z}_N\sqrt{1-\overline{Z}_N^2+2\hat{\gamma}_Z(0)}}{2\hat{\gamma}_Z(0)}.
\end{aligned}$$

У наставку ће бити анализирано асимптотско понашање добијених Yule-Walker-ових оцена.

Теорема 3.4.1 Yule-Walker-*ове оцене* $\hat{\mu}^{YW_1}, \hat{\nu}^{YW_1}, \hat{\alpha}^{YW_1}$ *и* $\hat{\beta}^{YW_1}$ *параметара* μ, ν, α *и* β *имају асимптотски нормалну расподелу и строго су постојане.*

Доказ. На основу чињенице да је $SDLINAR(1)$ временски низ $\{Z_n\}$ строго стационаран и ергодичан, следи, на основу теореме 2.4.5, да су узорачки моменти $\overline{Z}_N$, $\hat{\gamma}_Z(0)$, $\hat{\gamma}(1)$ и $\hat{\gamma}(2)$ строго постојане оцене теоријских момената $E(Z_n)$, $\gamma_Z(0)$, $\gamma(1)$ и $\gamma(2)$, респективно. С обзиром на то да су статистике $\hat{\mu}^{YW_1}, \hat{\nu}^{YW_1}, \hat{\alpha}^{YW_1}$ и $\hat{\beta}^{YW_1}$ непрекидне функције поменутих узорачких момената, следи да су и оне строго постојане оцене одговарајућих параметара.

Што се асимптотске нормалности оцена тиче, најпре треба рећи, да, као што је то раније напоменуто, теорема 2.4.8, о асимптотској нормалности узорачких коваријанси, важи и за несиметричне низове. Све четири Yule-Walker-ове оцене, $\hat{\mu}^{YW_1}$, $\hat{\nu}^{YW_1}$, $\hat{\alpha}^{YW_1}$ и $\hat{\beta}^{YW_1}$, су непрекидно-диференцијабилне функције аргумената $\overline{Z}_N$, $\hat{\gamma}_Z(0)$, $\hat{\gamma}(1)$ и $\hat{\gamma}(2)$. Прецизније, у духу тврђења 2.4.6, пресликавање

$$\mathbf{g}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_1^2+2x_2} \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x_1^2+2x_2} \\ \frac{x_3}{x_2} \pm \sqrt{\frac{x_2-x_1\sqrt{1-x_1^2+2x_2}}{x_2+x_1\sqrt{1-x_1^2+2x_2}}\left(\frac{x_4}{x_2}-\left(\frac{x_3}{x_2}\right)^2\right)} \\ \frac{x_3}{x_2} \mp \sqrt{\frac{x_2+x_1\sqrt{1-x_1^2+2x_2}}{x_2-x_1\sqrt{1-x_1^2+2x_2}}\left(\frac{x_4}{x_2}-\left(\frac{x_3}{x_2}\right)^2\right)} \end{bmatrix}$$

са непрекидно-диференцијабилним координатним функцијама, вектор статистика $\left(\overline{Z}_N, \hat{\gamma}_Z(0), \hat{\gamma}_Z(1), \hat{\gamma}_Z(2)\right)^T$ пресликава у вектор статистика $\left(\hat{\mu}^{YW_1}, \hat{\nu}^{YW_1}, \hat{\alpha}^{YW_1}, \hat{\beta}^{YW_1}\right)^T$. На основу тога се може закључити да $\hat{\mu}^{YW_1}$, $\hat{\nu}^{YW_1}$, $\hat{\alpha}^{YW_1}$ и $\hat{\beta}^{YW_1}$ такође имају асимптотски нормалну расподелу. Тачније,

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu}^{YW_1} \\ \hat{\nu}^{YW_1} \\ \hat{\alpha}^{YW_1} \\ \hat{\beta}^{YW_1} \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \mu \\ \nu \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, N^{-1}D\mathbf{V}D^T\right),$$

где матрица D представља вредност Јакобијана пресликавања $\mathbf{g}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ у тачки (μ,ν,α,β), симетрична матрица V има елементе дефинисане на следећи начин

$$\begin{aligned} V_{1,1} &= \lim_{N\to\infty} NVar(\overline{Z}_N), \\ V_{1,j} &= \lim_{N\to\infty} NCov(\overline{Z}_N, \gamma_Z^*(j-2)),\ j \in \{2,3,4\} \\ V_{i,j} &= \lim_{N\to\infty} NCov(\gamma_Z^*(i-2), \gamma_Z^*(j-2)),\ i,j \in \{2,3,4\}, \end{aligned}$$

а функција $\gamma_Z^*(k)$ дефинисана изразом (2.4.4). $\square$

Ако се у циљу одређивања Yule-Walker-ових оцена, употреби чињеница да је

$$\begin{aligned} E(Z_n) &= \mu - \nu, \\ E\,|Z_n| &= \frac{\mu(1+\mu)+\nu(1+\nu)}{1+\mu+\nu}, \end{aligned}$$

добијају се једначине

$$\begin{aligned} \overline{Z}_N^+ - \overline{Z}_N^- &= \hat{\mu}^{YW_2} - \hat{\nu}^{YW_2}, \\ \overline{Z}_N^+ + \overline{Z}_N^- &= \frac{\hat{\mu}^{YW_2}(1+\hat{\mu}^{YW_2}) + \hat{\nu}^{YW_2}(1+\hat{\nu}^{YW_2})}{1+\hat{\mu}^{YW_2}+\hat{\nu}^{YW_2}}, \end{aligned}$$

чијим се решавањем по $\hat{\mu}^{YW_2}$ и $\hat{\nu}^{YW_2}$ добијају следеће статистике:

$$\hat{\mu}^{YW_2} = -\tfrac{1}{2} + \overline{Z}_N^+ + \tfrac{1}{2}\sqrt{1+4\overline{Z}_N^+\overline{Z}_N^-},$$
$$\hat{\nu}^{YW_2} = -\tfrac{1}{2} + \overline{Z}_N^- + \tfrac{1}{2}\sqrt{1+4\overline{Z}_N^+\overline{Z}_N^-},$$

где су $\overline{Z}_N^+ = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N Z_n^+$ и $\overline{Z}_N^- = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N Z_n^-$.

Ако се овако добијене оцене искористе за израчунавање статистика $\tilde{M}^+$ и $\tilde{M}^-$ и затим, користећи формуле (3.4.1) и (3.4.2), одреде оцене параметара α и β, добијају се статистике

$$\hat{\alpha}^{YW_2} = \hat{\rho}(1) + \sqrt{\frac{\overline{Z}_N^-}{\overline{Z}_N^+}\left(\hat{\rho}(2)-\hat{\rho}(1)^2\right)},$$
$$\hat{\beta}^{YW_2} = \hat{\rho}(1) - \sqrt{\frac{\overline{Z}_N^+}{\overline{Z}_N^-}\left(\hat{\rho}(2)-\hat{\rho}(1)^2\right)},$$

односно

$$\hat{\alpha}^{YW_2} = \hat{\rho}(1) - \sqrt{\frac{\overline{Z}_N^-}{\overline{Z}_N^+}\left(\hat{\rho}(2)-\hat{\rho}(1)^2\right)},$$
$$\hat{\beta}^{YW_2} = \hat{\rho}(1) + \sqrt{\frac{\overline{Z}_N^+}{\overline{Z}_N^-}\left(\hat{\rho}(2)-\hat{\rho}(1)^2\right)}.$$

Теорема 3.4.2 Yule-Walker-*ове оцене* $\hat{\mu}^{YW_2}, \hat{\nu}^{YW_2}, \hat{\alpha}^{YW_2}$ *и* $\hat{\beta}^{YW_2}$ *параметара* μ, ν, α *и* β *имају асимптотски нормалну расподелу и строго су постојане.*

Доказ. Већ је раније показано да узорачка средина, узорачка дисперзија, као и узорачке једнокорачне и двокорачне коваријансе временског низа $\{Z_n\}$ имају асимптотски нормалну расподелу. С друге стране, треба показати да и на низове $\{Z_n^+\}$ и $\{Z_n^-\}$ може применити централна гранична теорема, тј. да статистике $\overline{Z}_N^+$ и $\overline{Z}_N^-$ асимптотски имају нормалну расподелу. Приликом доказа овог тврђења биће коришћен апарат из теореме 2.4.1.

Најпре, нека је низ случајних промењљивих $\{K_n\}$ дефинисан на следећи начин

$$K_n = Z_n^+ - EZ_n^+ = Z_n^+ - \frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu}.$$

Јасно је, на основу теореме 3.3.6, да је

$$EK_n = 0 \text{ и } Var(K_n) = Var(Z_n^+) = \frac{\mu(1+\mu)\left((1+\mu)^2 + \nu(1+2\mu)\right)}{(1+\mu+\nu)^2}.$$

Условно очекивање $E(K_n|\mathcal{F}_{n-j}^+)$, где је $\mathcal{F}_{n-j}^+$ $\sigma-$алгебра генерисана случајним промењљивама K_{n-j},K_{n-j-1},..., се може израчунати на следећи начин

$$E(K_n|\mathcal{F}_{n-j}^+) = E\left(E(K_n|\mathcal{F}_{n-j}, \mathcal{F}_{n-j}^+)|\mathcal{F}_{n-j}^+\right),$$

где је $\mathcal{F}_{n-j}$ $\sigma-$алгебра генерисана случајним промењљивама Z_{n-j}, Z_{n-j-1}, ..., која је, свакако, надалгебра алгебре $\mathcal{F}_{n-j}^+$. На основу особина временског низа $\{Z_N^+\}$, приказаних у доказу теореме 3.3.6, добија се да је

$$\begin{aligned} E(K_n|\mathcal{F}_{n-j}^+) &= E\left(E\left(Z_n^+ - \frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu}\bigg|\mathcal{F}_{n-j}\right)\bigg|\mathcal{F}_{n-j}^+\right) \\ &= E\left(E\left(Z_n^+ - \frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu}\bigg|Z_{n-j}\right)\bigg|\mathcal{F}_{n-j}^+\right) \\ &= E\left(\alpha^j Z_{n-j}^+|\mathcal{F}_{n-j}^+\right) = \alpha^j Z_{n-j}^+. \end{aligned}$$

Ако се посматра средње-квадратна конвергенција овако добијених условних очекивања ка нули, долази се до следећег закључка

$$\begin{aligned} E\big(E(K_n|\mathcal{F}^+_{n-j})\big)^2 &= E\big(\alpha^{2j}(Z^+_{n-j})^2\big)=\alpha^{2j}\big(Var(Z^+_{n-j})+E(Z^+_{n-j})^2\big) \\ &= \alpha^{2j}\left(\frac{\mu(1+\mu)((1+\mu)^2+\nu(1+2\mu))}{(1+\mu+\nu)^2}+\frac{\mu^2(1+\mu)^2}{(1+\mu+\nu)^2}\right). \end{aligned}$$

На основу добијеног израза, јасно је да $E(K_n|\mathcal{F}^+_{n-j}) \stackrel{s.k.}{\to} 0,\ j \to \infty$.

Сада треба проверити да ли је $\sum_{j=0}^{\infty}(Var(R_{nj}))^{1/2} < \infty$, где је $R_{nj} = E(K_n|\mathcal{F}^+_{n-j}) - E(K_n|\mathcal{F}^+_{n-j-1})$. На основу израза за условно математичко очекивање, добија се да је $R_{nj} = \alpha^j Z^+_{n-j} - \alpha^{j+1}Z^+_{n-j-1}$. Дисперзија овако добијене случајне променљиве је

$$\begin{aligned} Var(R_{nj}) &= ER^2_{nj} - (ER_{nj})^2 \\ &= \alpha^{2j}E(Z^+_{n-j})^2 + \alpha^{2j+2}E(Z^+_{n-j})^2 - \alpha^{2j+1}E(Z^+_{n-j}Z^+_{n-j-1}) \\ &- \big(\alpha^j EZ^+_{n-j} - \alpha^{j+1}EZ^+_{n-j-1}\big)^2. \end{aligned}$$

Користећи изразе за дисперзију и коваријансу низа $\{Z^+_n\}$, датих у теореми 3.3.6, добија се да је

$$Var(R_{nj}) = \alpha^{2j}(1-\alpha)^2\frac{\mu(1+\mu)\left((1+\mu)^2+\nu(1+2\mu)\right)+\mu^2(1+\mu)^2}{(1+\mu+\nu)^2}.$$

Због тога је

$$\sum_{j=0}^{\infty}(Var(R_{nj}))^{1/2} = \frac{\sqrt{\mu(1+\mu)\left((1+\mu)^2+\nu(1+2\mu)\right)+\mu^2(1+\mu)^2}}{(1+\mu+\nu)} < \infty.$$

Такође је и

$$\begin{aligned} Var\left(\sum_{i=1}^{n}K_i\right) &= \sum_{i=1}^{n}Var(K_i)+2\sum_{i<j}Cov(K_i,K_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}Var(Z^+_i)+2\sum_{i<j}Cov(Z^+_i,Z^+_j) \\ &= nVar(Z^+_1)+2Var(Z^+_1)\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\alpha_i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{Var(Z_1^+)}{(1-\alpha)^2}\big(2\alpha^{n+1}-n\alpha^2-2\alpha+n\big)\\
&= \frac{\mu(1+\mu)((1+\mu)^2+\nu(1+2\mu))}{(1+\mu+\nu)^2(1-\alpha)^2}\big(2\alpha^{n+1}-n\alpha^2-2\alpha+n\big).
\end{aligned}
$$

На основу добијеног, следи да је

$$
\overline{\sigma}_n^2 \equiv \frac{Var(\sum_{i=1}^n K_i)}{n} = \frac{\mu(1+\mu)((1+\mu)^2+\nu(1+2\mu))}{(1+\mu+\nu)^2(1-\alpha)^2}\left(2\frac{\alpha^{n+1}}{n}-\alpha^2-2\frac{\alpha}{n}+1\right),
$$

па је

$$
\overline{\sigma}_+^2 \equiv \lim_{n\to\infty}\overline{\sigma}_n^2 = \frac{\mu(1+\mu)\left((1+\mu)^2+\nu(1+2\mu)\right)}{(1+\mu+\nu)^2}\frac{1+\alpha}{1-\alpha} > 0.
$$

С обзиром на то да је низ $\{K_n\}$ строго стационаран и ергодичан и, притом, су сви услови теореме 2.4.1 испуњени, може се рећи да

$$
\frac{\sqrt{n}\,\overline{K}_n}{\overline{\sigma}_+} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1),
$$

односно

$$
\overline{Z}_n^+ \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu}, \frac{\overline{\sigma}_+^2}{n}\right).
$$

Аналогно се долази до асимптотске расподеле за $\overline{Z}_n^-$,

$$
\overline{Z}_n^- \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\frac{\nu(1+\nu)}{1+\mu+\nu}, \frac{\overline{\sigma}_-^2}{n}\right),
$$

где је

$$
\overline{\sigma}_-^2 = \frac{\nu(1+\nu)\left((1+\nu)^2+\mu(1+2\nu)\right)}{(1+\mu+\nu)^2}\frac{1+\alpha}{1-\alpha}.
$$

Примењујући тврђење 2.4.6 на пресликавање $\mathbf{g}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ са непрекидно-диференцијабилним координатним функцијама, дефинисано на следећи начин

$$
\mathbf{g}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \begin{bmatrix}
-\frac{1}{2}+x_1+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x_1x_2}\\
-\frac{1}{2}+x_2+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x_1x_2}\\
\frac{x_4}{x_3} \pm \sqrt{\frac{x_2}{x_1}\left(\frac{x_5}{x_3}-\left(\frac{x_4}{x_3}\right)^2\right)}\\
\frac{x_4}{x_3} \mp \sqrt{\frac{x_1}{x_2}\left(\frac{x_5}{x_3}-\left(\frac{x_4}{x_3}\right)^2\right)}
\end{bmatrix}
$$

које пресликава вектор статистика $\left(\overline{Z}_N^+, \overline{Z}_N^-, \hat{\gamma}_Z(0), \hat{\gamma}_Z(1), \hat{\gamma}_Z(2)\right)^T$ у $\left(\hat{\mu}^{YW_2}, \hat{\nu}^{YW_2}, \hat{\alpha}^{YW_2}, \hat{\beta}^{YW_2}\right)^T$, добија се да и статистике $\hat{\mu}^{YW_2}$, $\hat{\nu}^{YW_2}$, $\hat{\alpha}^{YW_2}$ и $\hat{\beta}^{YW_2}$ такође, имају асимптотски нормалну расподелу.

Строга постојаност следи из строге стационарности и ергодичности временског низа $\{Z_n\}$, строге постојаности његове узорачке средине, узорачке дисперзије, као и узорачке једнокорачне и двокорачне коваријансе, строге стационарности и ергодичности низова $\{Z_n^+\}$ и $\{Z_n^-\}$, строге постојаности њихових узорачких средина и чињенице да су оцене $\hat{\mu}^{YW_2}$, $\hat{\nu}^{YW_2}$, $\hat{\alpha}^{YW_2}$ и $\hat{\beta}^{YW_2}$ непрекидне оцене узорачких момената. $\square$

Ако се приликом одређивања Yule-Walker-ових оцена за параметре μ и ν употребе једнакости (3.3.3), добијају се следеће једначине

$$\mu(1+\mu) = Cov(Z_n^+, Z_n) \quad \text{и} \quad \nu(1+\nu) = -Cov(Z_n^-, Z_n).$$

Заменом теоријских вредности, узорачким, добија се

$$\hat{\mu}^{YW_3}(1+\hat{\mu}^{YW_3}) = \hat{\gamma}_{ZZ^+}(0) \quad \text{и} \quad \hat{\nu}^{YW_3}(1+\hat{\nu}^{YW_3}) = -\hat{\gamma}_{ZZ^-}(0).$$

Решавањем ових двеју једначина по $\hat{\mu}^{YW_3}$ и $\hat{\nu}^{YW_3}$, добијају се следеће оцене

$$\hat{\mu}^{YW_3} = \frac{-1+\sqrt{1+4\hat{\gamma}_{ZZ^+}(0)}}{2} \quad \text{и} \quad \hat{\nu}^{YW_3} = \frac{-1+\sqrt{1+4\hat{\gamma}_{ZZ^-}(0)}}{2},$$

где су $\hat{\gamma}_{ZZ^+}(0)$ и $\hat{\gamma}_{ZZ^-}(0)$ узорачке крос-коваријансе (са кораком нула) временских низова $\{Z_n\}$ и $\{Z_n^+\}$, односно $\{Z_n\}$ и $\{Z_n^-\}$.

Пратећи ову логику, може се доћи и до оцена параметара α и β. Наиме, користећи особину $NGINAR(1)$ временских низова дату у Ristić, Bakouch и Nastić (2009) да је $\alpha = \gamma_X(1)/\gamma_X(0)$ и резултате теореме 3.3.5, добијају се оцене

$$\hat{\alpha}^{YW_3} = \frac{\hat{\gamma}_{ZZ^+}(1)}{\hat{\gamma}_{ZZ^+}(0)} \quad \text{и} \quad \hat{\beta}^{YW_3} = \frac{\hat{\gamma}_{ZZ^-}(1)}{\hat{\gamma}_{ZZ^-}(0)}.$$

Могуће је показати да су статистике $\hat{\mu}^{YW_3}$, $\hat{\nu}^{YW_3}$, $\hat{\alpha}^{YW_3}$ и $\hat{\beta}^{YW_3}$ строго постојане и асимптотски нормалне оцене параметара μ, ν, α и β.

Теорема 3.4.3 *Статистике* $\hat{\mu}^{YW_3}$, $\hat{\nu}^{YW_3}$, $\hat{\alpha}^{YW_3}$ *и* $\hat{\beta}^{YW_3}$ *су строго постојане и асимптотски нормалне оцене параметара* μ, ν, α *и* β.

Доказ. Нека је низ случајних променљивих $\{U_n\}$ дефинисан на следећи начин

$$U_N = \sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}\left(Z_n - (c + \alpha Z_{n-1}^{+} - \beta Z_{n-1}^{-})\right),$$

где је $c = [(1-\alpha)\mu(1+\mu) - (1-\beta)\nu(1+\nu)] \,/\, (1+\mu+\nu)$. Прво треба показати да је овако дефинисани низ мартингал. Да би то било тачно, потребно је показати да је $E(U_k|\mathcal{F}_{k-1}) = U_{k-1}$, при чему је $\mathcal{F}_k = \sigma(Z_k, Z_{k-1}, ..., Z_1)$ $\sigma-$алгебра дефинисана случајним променљивама $\{Z_k, Z_{k-1}, ..., Z_1\}$. Математичко очекивање случајне променљиве U_N, условљене својом прошлошћу је

$$E(U_N|\mathcal{F}_{N-1}) = E\left(\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}\left(Z_n - (c + \alpha Z_{n-1}^{+} - \beta Z_{n-1}^{-})\right)|Z_{N-1}, \ldots, Z_1\right).$$

Случајне променљиве које учествују у првих $n-2$ сабирака суме су садржане и у услову. Због тога се, условљене саме собом, у очекивању понашају као константе. Само у последњем сабирку учествује случајна променљива Z_N, једина која се не појављује у услову. Због тога се добија

$$\begin{aligned}
E(U_N|\mathcal{F}_{N-1}) &= \sum_{n=2}^{N-1} Z_{n-1}(Z_n - (c + \alpha Z_{n-1}^{+} - \beta Z_{n-1}^{-})) \\
&+ Z_{N-1} E\left(Z_N - (c + \alpha Z_{N-1}^{+} - \beta Z_{N-1}^{-})|Z_{N-1}\right) \\
&= \sum_{n=2}^{N-1} Z_{n-1}(Z_n - (c + \alpha Z_{n-1}^{+} - \beta Z_{n-1}^{-})) \\
&+ Z_{N-1}(E\left(Z_N|Z_{N-1}\right) - (c + \alpha Z_{N-1}^{+} - \beta Z_{N-1}^{-})).
\end{aligned}$$

С обзиром на то да је

$$E\left(Z_N|Z_{N-1}\right) = c + \alpha Z_{N-1}^{+} - \beta Z_{N-1}^{-},$$

добија се да је

$$E(U_N|\mathcal{F}_{N-1}) = \sum_{n=2}^{N-1} Z_{n-1}(Z_n - (c + \alpha Z_{n-1}^{+} - \beta Z_{n-1}^{-})) = U_{N-1}.$$

На основу централне граничне теореме за мартингале, следи да случајна променљива $\overline{U}_N$ има асимптотски нормалну расподелу. То значи да случајна променљива

$$\begin{aligned}\overline{U}_N &= \frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}\big(Z_n-(c+\alpha Z_{n-1}^{+}-\beta Z_{n-1}^{-})\big)\\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}Z_n - c\frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}+\alpha\frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}Z_{n-1}^{+}-\beta\frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}Z_{n-1}^{-}\\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}Z_n - c\frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}+\alpha S_N^{+}-\beta S_N^{-},\end{aligned}$$

где је $S_N^{+} = \frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}Z_{n-1}^{+}$ и $S_N^{-} = \frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}Z_{n-1}^{-}$, има асимптотски нормалну расподелу. С обзиром на то да узорачка средина и узорачка аутоковаријансна функција временског низа $\{Z_n\}$ имају асимптотски нормалну расподелу, следи да суме $\frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}Z_n$ и $\frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}$ имају асимптотски нормалну расподелу. То значи да случајна променљива

$$A_N = \alpha S_N^{+} - \beta S_N^{-} = U_N - \sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}Z_n + c\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1},$$

као линеарна комбинација асимптотски нормално расподељених променљивих, такође има асимптотски нормалну расподелу. Са друге стране, као последица асимптотски нормалне расподељености узорачке дисперзије временског низа $\{Z_n\}$, и случајна променљива

$$\begin{aligned}B_N &= S_N^{+} - S_N^{-} = \frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}Z_{n-1}^{+} - \frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}Z_{n-1}^{-}\\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}(Z_{n-1}^{+} - Z_{n-1}^{-}) = \frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}^{2},\end{aligned}$$

има асимптотски нормалну расподелу. Сада се случајне променљиве S_N^{+} и S_N^{-} могу представити на следећи начин

$$S_N^{+} = \frac{A_N - \beta B_N}{\alpha - \beta} \quad \text{и} \quad S_N^{-} = \frac{A_N - \alpha B_N}{\alpha - \beta}.$$

Као линеарне комбинације случајних промењљивих са асимптотски нормалном расподелом, и оне су асимптотски нормално расподељене.

Ово доводи до тога да се може закључити да се вектор Yule-Walker-ових оцена $\left(\hat{\mu}^{YW_3},\ \hat{\nu}^{YW_3},\ \hat{\alpha}^{YW_3},\ \hat{\beta}^{YW_3}\right)^T$ може добити као вредност функције

$$\mathbf{g}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\begin{bmatrix}\frac{-1+\sqrt{1+4x_1}}{2}\\ \frac{-1+\sqrt{1+4x_2}}{2}\\ x_3/x_1\\ x_4/x_2\end{bmatrix}$$

у тачки $(\hat{\gamma}_{ZZ^+}(0),\hat{\gamma}_{ZZ^-}(0),\hat{\gamma}_{ZZ^+}(1),\hat{\gamma}_{ZZ^+}(1))^T$. Примењујући тврђење 2.4.6, закључује се да оцене $\hat{\mu}^{YW_3}$, $\hat{\nu}^{YW_3}$, $\hat{\alpha}^{YW_3}$ и $\hat{\beta}^{YW_3}$ имају асимптотски нормалну расподелу.

Строга постојаност ових оцена следи из ергодичности и строге стационарности временског низа $\{Z_n\}$ и непрекидности функције $\mathbf{g}$.
$\square$

На крају, као последњи начин за оцењивање непознатих параметара $SDLINAR(1)$ модела биће представљен метод условних најмањих квадрата.

Функција грешке, односно сума квадрата коју треба минимизирати је

$$\begin{aligned}Q_N &= Q_N(\mu,\nu,\alpha,\beta)=\sum_{n=2}^{N}(Z_n-E(Z_n|Z_{n-1}))^2\\ &= \sum_{n=2}^{N}\left(Z_n-\left((\alpha-\beta)\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu}+\mu(1-\alpha)-\nu(1-\beta)+\alpha Z_{n-1}^+-\beta Z_{n-1}^-\right)\right)^2\\ &= \sum_{n=2}^{N}\left(Z_n-\left(\frac{(1-\alpha)\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu}-\frac{(1-\beta)\nu(1+\nu)}{1+\mu+\nu}+\alpha Z_{n-1}^+-\beta Z_{n-1}^-\right)\right)^2.\end{aligned}$$

Ако се уведу ознаке $M^+=\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu}$ и $M^-=\frac{\nu(1+\nu)}{1+\mu+\nu}$, добија се

$$Q_N=\sum_{n=2}^{N}(Z_n-((1-\alpha)M^+-(1-\beta)M^-+\alpha Z_{n-1}^+-\beta Z_{n-1}^-))^2.$$

Једначине које се добијају на основу првих парцијалних извода по непознатим параметрима M^+ и M^- су еквивалентне

$$\sum_{n=2}^{N}(Z_n - ((1-\alpha)M^+ - (1-\beta)M^- + \alpha Z_{n-1}^+ - \beta Z_{n-1}^-)) = 0.$$

То за последицу има смањење ефективног броја једначина на основу којих се могу добити тражене статистике. Због тога се уводи још једна смена која ће елиминисати два непозната параметра и претворити их у један

$$M = (1-\alpha)M^+ - (1-\beta)M^-.$$

То неће поправити ситуацију у погледу добијања оцена за параметре μ и ν, али ће се добити потребан број ефективних једначина. Добијају се следеће једначине:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=2}^{N}(Z_n - M - \alpha Z_{n-1}^+ + \beta Z_{n-1}^-),\\
0 &= \sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}^+(Z_n - M - \alpha Z_{n-1}^+ + \beta Z_{n-1}^-),\\
0 &= \sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}^-(Z_n - M - \alpha Z_{n-1}^+ + \beta Z_{n-1}^-).
\end{aligned}$$

Након елиминације параметра M из прве једначине, добија се да је

$$M = \frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N}\left(Z_n - \alpha Z_{n-1}^+ + \beta Z_{n-i}^-\right) = \overline{Z}_N^{(1)} - \alpha \overline{Z}_N^{+(0)} + \beta \overline{Z}_N^{-(0)},$$

где су

$$\overline{Z}_N^{(1)} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N} Z_n, \quad \overline{Z}_N^{+(0)} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N-1} Z_n^+, \quad \overline{Z}_N^{-(0)} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N-1} Z_n^-.$$

Заменом у преостале две једначине, добија се

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}^+\left(Z_n - \overline{Z}_N^{(1)} - \alpha\left(Z_{n-1}^+ - \overline{Z}_N^{+(0)}\right) + \beta\left(Z_{n-1}^- - \overline{Z}_N^{-(0)}\right)\right),\\
0 &= \sum_{n=2}^{N} Z_{n-1}^-\left(Z_n - \overline{Z}_N^{(1)} - \alpha\left(Z_{n-1}^+ - \overline{Z}_N^{+(0)}\right) + \beta\left(Z_{n-1}^- - \overline{Z}_N^{-(0)}\right)\right).
\end{aligned}$$

Ако се сада од ових једначинама одузму нуле, у облику

$$\overline{Z}_N^{+(0)} \sum_{n=2}^{N} \left(Z_n - \overline{Z}_N^{(1)} - \alpha \left(Z_{n-1}^+ - \overline{Z}_N^{+(0)} \right) + \beta \left(Z_{n-1}^- - \overline{Z}_N^{-(0)} \right) \right) \text{ и}$$

$$\overline{Z}_N^{-(0)} \sum_{n=2}^{N} \left(Z_n - \overline{Z}_N^{(1)} - \alpha \left(Z_{n-1}^+ - \overline{Z}_N^{+(0)} \right) + \beta \left(Z_{n-1}^- - \overline{Z}_N^{-(0)} \right) \right),$$

респективно, добија се систем

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=2}^{N} \left(Z_{n-1}^+ - \overline{Z}_N^{+(0)} \right) \left(Z_n - \overline{Z}_N^{(1)} - \alpha \left(Z_{n-1}^+ - \overline{Z}_N^{+(0)} \right) + \beta \left(Z_{n-1}^- - \overline{Z}_N^{-(0)} \right) \right), \\ 0 &= \sum_{n=2}^{N} \left(Z_{n-1}^- - \overline{Z}_N^{+(0)} \right) \left(Z_n - \overline{Z}_N^{(1)} - \alpha \left(Z_{n-1}^+ - \overline{Z}_N^{+(0)} \right) + \beta \left(Z_{n-1}^- - \overline{Z}_N^{-(0)} \right) \right). \end{aligned}$$

Дељењем са $N-1$, систем постаје

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{ZZ^+}(1) &= \alpha \hat{\gamma}_{Z^+}(0) - \beta \hat{\gamma}_{Z^+Z^-}(0), \\ \hat{\gamma}_{ZZ^-}(1) &= \alpha \hat{\gamma}_{Z^+Z^-}(0) - \beta \hat{\gamma}_{Z^-}(0), \end{aligned}$$

где је $\hat{\gamma}_{ZZ^+}(1)$ узорачка једнокорачна крос-коваријанса низова $\{Z_n\}$ и $\{Z_n^+\}$, $\hat{\gamma}_{ZZ^-}(1)$ узорачка једнокорачна крос-коваријанса низова $\{Z_n\}$ и $\{Z_n^-\}$, $\hat{\gamma}_{Z^+}(0)$, $\hat{\gamma}_{Z^-}(0)$ узорачке дисперзије низова $\{Z_n^+\}$ и $\{Z_n^-\}$, а $\hat{\gamma}_{Z^+Z^-}(0)$ њихова узорачка крос-коваријанса. Узорачка крос-коваријанса два низа се дефинише на следећи начин

$$\hat{\gamma}_{Z'Z''}(k) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} (Z'_i - \overline{Z}'_N)(Z''_{i+k} - \overline{Z}''_N), \; k \geq 0.$$

Решавајући систем, добија се

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^{cls} &= \frac{\hat{\gamma}_{ZZ^+}(1)\hat{\gamma}_{Z^-}(0) - \hat{\gamma}_{ZZ^-}(1)\hat{\gamma}_{Z^+Z^-}(0)}{\hat{\gamma}_{Z^+}(0)\hat{\gamma}_{Z^-}(0) - \hat{\gamma}^2_{Z^+Z^-}(0)}, \\ \hat{\beta}^{cls} &= \frac{\hat{\gamma}_{ZZ^-}(1)\hat{\gamma}_{Z^+}(0) - \hat{\gamma}_{ZZ^+}(1)\hat{\gamma}_{Z^+Z^-}(0)}{\hat{\gamma}_{Z^+}(0)\hat{\gamma}_{Z^-}(0) - \hat{\gamma}^2_{Z^+Z^-}(0)}, \\ \hat{M}^{cls} &= \overline{Z}_N^{(1)} - \hat{\alpha}^{cls} \overline{Z}_N^{+(0)} + \hat{\beta}^{cls} \overline{Z}_N^{-(0)}. \end{aligned}$$

Да би се потврдила асимптотска нормалност и строга постојаност ових оцена, биће употребљени резултати теореме 3.1 из рада Tjøstheim (1986). Прво треба приметити да парцијални изводи првог реда условног очекивања не зависе од непознатих параметара и да су, највише, линеарне функције случајних променљивих Z_{n-1}^{+} и Z_{n-1}^{-},

$$\frac{\partial E(Z_n|Z_{n-1})}{\partial\alpha} = Z_{n-1}^{+},$$
$$\frac{\partial E(Z_n|Z_{n-1})}{\partial\beta} = -Z_{n-1}^{-},$$
$$\frac{\partial E(Z_n|Z_{n-1})}{\partial M} = 1.$$

Да би услов $C1$ био испуњен, потребно је, најпре, да важи да је

$$E\left(\left|\frac{\partial E(Z_n|Z_{n-1})}{\partial\alpha}\right|^2\right) < \infty,$$
$$E\left(\left|\frac{\partial E(Z_n|Z_{n-1})}{\partial\beta}\right|^2\right) < \infty,$$
$$E\left(\left|\frac{\partial E(Z_n|Z_{n-1})}{\partial M}\right|^2\right) < \infty.$$

Слично као што је то урађено у доказу теореме 3.3.4, следи да је

$$\begin{aligned} E\left(\left|\frac{\partial E(Z_n|Z_{n-1})}{\partial\alpha}\right|^2\right) &= E\left(Z_{n-1}^{+}\right)^2 = \frac{1}{1+\mu+\nu}\sum_{i=0}^{\infty} i^2\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^i \\ &= \frac{\mu(1+\mu)(1+2\mu)}{1+\mu+\nu} < \infty. \end{aligned}$$

Аналогно се доказује и да је

$$E\left(\left|\frac{\partial E(Z_n|Z_{n-1})}{\partial\beta}\right|^2\right) = \frac{\nu(1+\nu)(1+2\mu)}{1+\mu+\nu} < \infty,$$

а тривијално да је

$$E\left(\left|\frac{\partial E(Z_n|Z_{n-1})}{\partial M}\right|^2\right) = 1 < \infty.$$

Други део услова $C1$, који се односи на друге парцијалне изводе условног очекивања, је такође тривијалан јер су сви други парцијални изводи једнаки нули. Због тога и услов $C3$ постаје такође тривијално испуњен.

Услов $C2$ се своди на негацију линеарне повезаности случајних промењљивих Z_{n-1}^+ и Z_{n-1}^-. Наиме,

$$E\left|a_1\frac{\partial E(Z_n|Z_{n-1})}{\partial\alpha}+a_2\frac{\partial E(Z_n|Z_{n-1})}{\partial\beta}+a_3\frac{\partial E(Z_n|Z_{n-1})}{\partial M}\right|^2$$
$$=E\left|a_1Z_{n-1}^+-a_2Z_{n-1}^-+a_3\right|^2.$$

Ако се изразу унутар математичког очекивања дода и одузме вредност $a_1EZ_{n-1}^+-a_2EZ_{n-1}^-$, добиће се

$$E\left|a_1Z_{n-1}^+-a_2Z_{n-1}^-+a_3\right|^2=E\left|T-E(T)+c\right|^2=Var(T)+c^2,$$

где је случајна промењљива $T=a_1Z_{n-1}^+-a_2Z_{n-1}^-$, а константа $c=a_3+a_1EZ_{n-1}^+-a_2EZ_{n-1}^-$. С обзиром на то да су и $Var(T)$, и c^2 ненегативни бројеви, израз $Var(T)+c^2$ ће бити једнак нули само ако су оба сабирка једнака нули. Из чињенице да је $Var(T)=0$ следи да је случајна промењљива T константа, скоро извесно, тј. важи да је $a_1Z_{n-1}^+-a_2Z_{n-1}^-=const,\ $ с.в.1. То значи да су случајне промењљиве Z_n^+ и Z_n^- линеарно повезане, што је немогуће јер је, при свакој реализацији, бар једна од ове две случајне промењљиве једнака нули. Дакле константе a_1 и a_2 морају бити једнаке нули. С друге стране је $c=a_3+a_1EZ_{n-1}^+-a_2EZ_{n-1}^-=0$, што имплицира да је и $a_3=0$.

Пошто су сва три услова теореме 3.1 из рада Tjøstheim (1986) задовољена, следи да су оцене добијене методом усовних најмањих квадрата строго постојане.

Да би се потврдила и њихова асимптотска нормалност, потребно је проверити и услов $D1$, теореме 3.2 из истог рада. Пошто је функција $f_{n|n-1}=Var(Z_n|Z_{n-1})$, то се на основу теореме 3.1.2, добија да је

$$f_{n|n-1}=Var(Z_n|Z_{n-1})=\alpha(1+\alpha)Z_{n-1}^++\beta(1+\beta)Z_{n-1}^-+C,$$

где је

$$C=(\alpha-\beta)^2\frac{\mu(1+\mu)\nu(1+\nu)}{(1+\mu+\nu)^2}+(\alpha(1+\alpha)+\beta(1+\beta))\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu}+Var(e_n).$$

Услов $D1$ постаје

$$E\left(\begin{bmatrix} Z_{n-1}^{+} \\ -Z_{n-1}^{-} \\ 1 \end{bmatrix} Var(Z_n|Z_{n-1}) \begin{bmatrix} Z_{n-1}^{+} & -Z_{n-1}^{-} & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= E\left(\begin{bmatrix} (Z_{n-1}^{+})^2 & 0 & Z_{n-1}^{+} \\ 0 & (Z_{n-1}^{-})^2 & -Z_{n-1}^{-} \\ Z_{n-1}^{+} & -Z_{n-1}^{-} & 1 \end{bmatrix} Var(Z_n|Z_{n-1})\right) < \infty.$$

Елементи матрице из услова $D1$ ће бити коначни уколико су коначни моменти првог, другог и трећег реда случајних променљивих Z_{n-1}^{+} и Z_{n-1}^{-}. С обзиром на то да су моменти првог и другог реда већ раније израчунати

$$EZ_{n-1}^{+} = \frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu},\ E\left(Z_{n-1}^{+}\right)^2 = \frac{\mu(1+\mu)(1+2\mu)}{1+\mu+\nu},$$

а момент трећег реда је

$$E\left(Z_{n-1}^{+}\right)^3 = \frac{1}{1+\mu+\nu}\sum_{i=0}^{\infty} i^3 \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^i = \frac{\mu(1+\mu)(6\mu^2+6\mu+1)}{1+\mu+\nu}$$

и аналогно,

$$EZ_{n-1}^{-} = \frac{\nu(1+\nu)}{1+\mu+\nu},\ E\left(Z_{n-1}^{-}\right)^2 = \frac{\nu(1+\nu)(1+2\nu)}{1+\mu+\nu},$$

$$E\left(Z_{n-1}^{-}\right)^3 = \frac{\nu(1+\nu)(6\nu^2+6\nu+1)}{1+\mu+\nu},$$

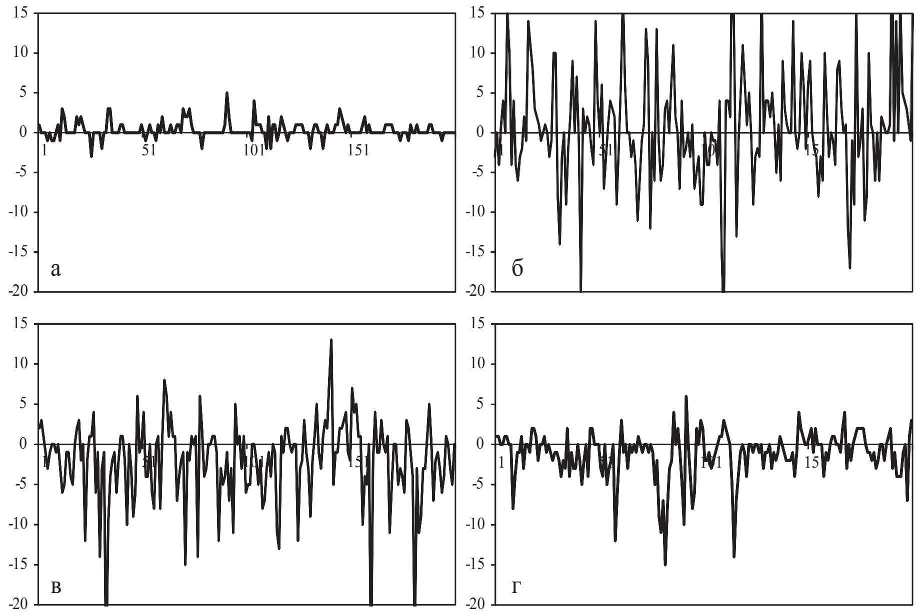
може се закључити да је и услов $D1$ теореме 3.2 испуњен. Тиме је потврђена и асимптотска нормалност оцена условних најмањих квадрата. С тога се може формулисати следећа теорема.

Теорема 3.4.4 *Статистике $\hat{\alpha}^{cls}$, $\hat{\beta}^{cls}$ и $\hat{M}^{cls}$ су асимптотски нормалне и строго постојане оцене параметара α, β и M.*

3.5 Симулације

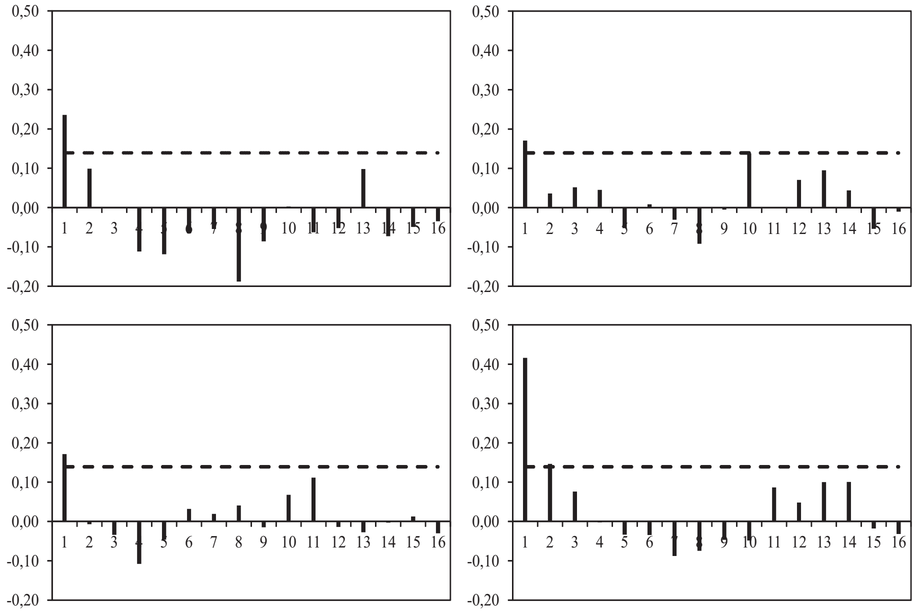
Да би се илустровале асимптотске особине добијених статистика, урађена је симулација примера који одговарају $SDLINAR(1)$

моделу. Примењен је Монте Карло метод. Слично као и у случају симетричног модела, и овде су најпре генерисане случајне променљиве са геометријском расподелом, а онда су оне употребљене за генерисање два независна $NGINAR(1)$ низа, од којих је, као њихова разлика, добијена реализација $SDLINAR(1)$ временског низа. За различите задате вредности параметара μ, ν, α и β, генерисано је 1000 узорака обима $N = 5000$. Један од циљева је био и да се одговарајућим избором параметара прикаже понашање временских низова за што различитије случајеве.



Слика 3.1: Дијаграми реализација временских низова са одговарајућим параметрима (а) $\mu = 0,5$, $\nu = 0,2$, $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,1$ (б) $\mu = 5$, $\nu = 4$, $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$ (в) $\mu = 2$, $\nu = 4$, $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,2$ (г) $\mu = 1$, $\nu = 2$, $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,5$

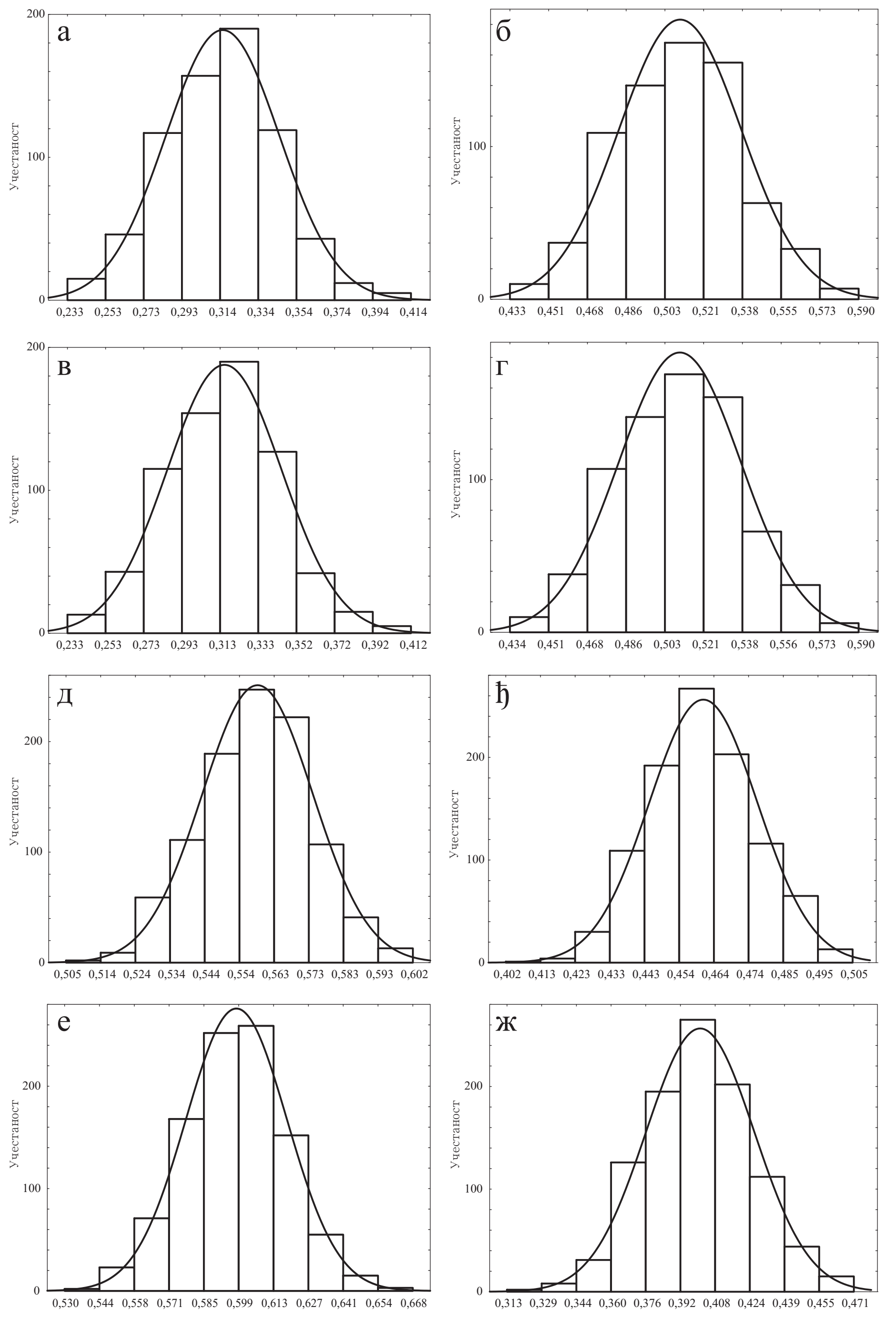
Тако су, с циљем да се дочара утицај параметара μ и ν на положај и варирање вредности реализација, ови параметри бирани да буду, у једном случају, што ближи доњој граници дефинисаности, тј. нули, затим, у другом, да имају релативно високе вредности и, у трећем и четвртом, да имају вредности које ће бити из средине распона претходно изабраних „екстрема”. Такође, са



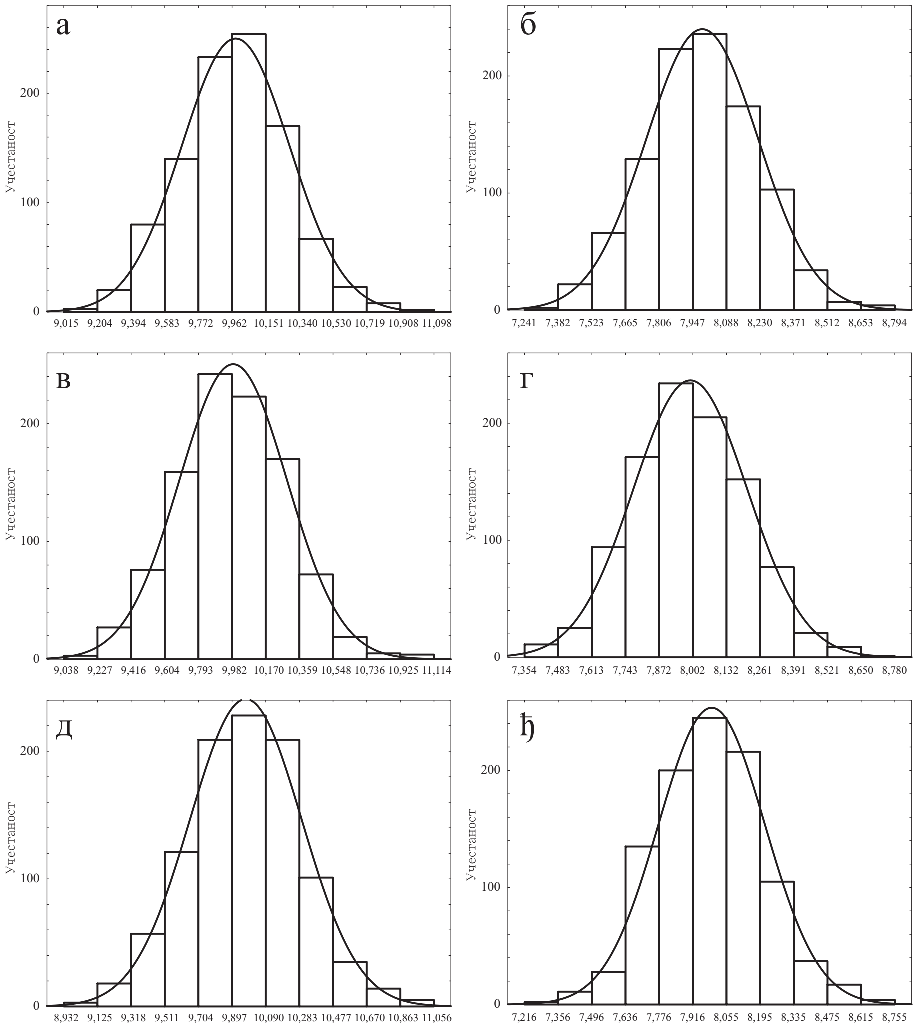
Слика 3.2: Дијаграми аутокорелационих функција симулираних временских низова са одговарајућим параметрима (а) $\mu = 0,5$, $\nu = 0,2$, $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,1$ (б) $\mu = 5$, $\nu = 4$, $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$ (в) $\mu = 2$, $\nu = 4$, $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,2$ (г) $\mu = 1$, $\nu = 2$, $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,5$

истим циљем, у неким случајевима је параметар μ био већи од параметра ν, а у неким случајевима је било обрнуто. Слична логика је, у циљу одсликавања утицаја параметара α и β на аутокорелациону функцију, коришћена и приликом одређивања правих вредности параметара α и β. Разматран је случај када су ови параметри били врло блиски нули, затим када су били блиски горњим границама дефинисаности и када изабрани из средишњег дела дозвољеног распона. Изабране су следеће комбинације правих вредности параметара: најпре $\mu = 0,5$, $\nu = 0,2$, $\alpha = 0,3$ и $\beta = 0,1$, затим $\mu = 1$, $\nu = 2$, $\alpha = 0,3$ и $\beta = 0,5$, потом $\mu = 2$, $\nu = 4$, $\alpha = 0,5$ и $\beta = 0,2$, онда $\mu = 5$, $\nu = 4$, $\alpha = 0,1$ и $\beta = 0,1$ и на крају $\mu = 10$, $\nu = 8$, $\alpha = 0,6$ и $\beta = 0,4$. Да би се показале асимптотске особине и дочарала конвергенција оцена ка правим вредностима, коришћени су подузорци обима 500, 1000, 3000 и цео узорак.

Током оцењивања јавило се неколико проблема. Вредности



Слика 3.3: Расподеле реализованих оцена параметара α и β; (а) $\hat{\alpha}^{YW_1}(0,3)$; (б) $\hat{\beta}^{YW_1}(0,5)$; (в) $\hat{\alpha}^{YW_2}(0,3)$; (г) $\hat{\beta}^{YW_2}(0,5)$; (д) $\hat{\alpha}^{YW_3}(0,6)$; (ђ) $\hat{\beta}^{YW_3}(0,4)$; (е) $\hat{\alpha}^{cls}(0,6)$; (ж) $\hat{\beta}^{cls}(0,4)$;



Слика 3.4: Расподеле реализованих оцена параметара μ и ν; (а) $\hat{\mu}^{YW_1}(10)$; (б) $\hat{\nu}^{YW_1}(8)$; (в) $\hat{\mu}^{YW_2}(10)$; (г) $\hat{\nu}^{YW_2}(8)$; (д) $\hat{\mu}^{YW_3}(10)$; (ђ) $\hat{\nu}^{YW_3}(8)$;

оцена $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ требало би да припадају интервалима $(0, \hat{\mu}/(1+\hat{\mu})]$ и $(0, \hat{\nu}/(1+\hat{\nu})]$, респективно. Међутим, за мале задате вредности параметара α и β било је случајева да реализације њихових оцена, било методом условних најмањих квадрата, било Yule-Walker-овим методом, буду негативне. У тим случајевима, као вредност оцене параметра узимана је вредност блиска нули, 10^{-7}. Такође, за велике вредности параметара α и β било је ситуација да реализације њихових оцена буду веће од $\hat{\mu}/(1+\hat{\mu})$ и $\hat{\nu}/(1+\hat{\nu})$. Тада је, као вредност оцене параметра узета вредност $\hat{\mu}/(1+\hat{\mu})$ и $\hat{\nu}/(1+\hat{\nu})$, респективно.

У ситуацијама када су задате вредности параметара α и β биле блиске једна другој, дешавало се да је поткорена величина $\hat{\rho}(2) - \hat{\rho}(1)^2$ негативна. У тим случајевима је поткорена величина апроксимирана нулом, што је проузроковало да је $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{\rho}(1)$. У оваквим ситуацијама $SDLINAR(1)$ модел се редуковао на модел $STINAR(1)$, уведен у раду Barreto-Souza и Bourguignon (2015).

Такође, било је могуће, а у овим симулацијама се није догодило, да и поткорена величина $1 - \overline{Z}_N^2 + 2\hat{\gamma}_Z(0)$ буде негативна. То би требало да буду ситуације при којима се низ састоји само од (или огромне већине) позитивних или само од (или огромне већине) негативних вредности. У таквим случајевима би требало за вредност оцене тог параметра прогласити вредност блиску нули, 10^{-6}.

На слици 3.1 приказани су дијаграми реализација симулираних временских низова са различитим параметрима. На слици се јасно уочава утицај параметара μ и ν на распон вредности временског низа, као и на положај средње вредности. Повећање вредности μ и ν изазива повећање распона и варијације. Може се приметити да и уколико је параметар μ већи, онда на „позитивној" страни временски низ достиже веће, по апсолутној вредности, реализације. У случајевима где је параметар ν већи, види се да се, по апсолутној вредности, веће реализације достижу на „негативној" страни. Такође, на овим сликама се може наслутити стационарност ових временских низова, с обзиром на то да се средња вредност низа не мења током времена, односно, да је појас амплитуда ових реализација паралелан апсциси. На слици 3.2 приказане су вредности аутокорелационих функција симулираних временских низова са одговарајућим параметрима. За разлику од симетричног модела, код кога је било једноставно са графикона аутокорелационе функције приближно утврдити вредност параметра α, у овом случају то није тако једноставно, с обзиром на сложенији израз аутокорелационе функције која зависи од сва четири параметра. Међутим, како вредност једнокорачне корелације једина прелази границу статистичке значајности, јасно је да је у питању модел првог реда.

На сликама 3.3 и 3.4 приказани су хистограми расподела реализованих вредности различитих оцена параметара α, β, μ и ν добијених на основу 1000 узорака обима $N = 5000$. На слици 3.3 су оцењени параметри α и β, по једном, на сваки од анализираних начина, док су на слици 3.4 Yule-Walker-ове оцене параметара μ и ν. Ове две слике јасно наводе на чињеницу да су све представљене оцене асимптотски нормалне. Значајност одступања расподела добијених реализација од нормалне расподеле је тестирана стандардним тестовима који се користе у ту сврху. Значајности ових тестова, приказане у табелама 3.1 и 3.2, потврђују да расподеле посматраних оцена не одступају значајно од нормалне расподеле.

Табела 3.1: Значајности тестова за испитивање нормалности расподела оцена параметара μ и ν

Праве вредности	$\mu = 10,\ \nu = 8$		$\mu = 10,\ \nu = 8$		$\mu = 10,\ \nu = 0,8$	
Тест	$\hat{\mu}^{YW_1}$	$\hat{\nu}^{YW_1}$	$\hat{\mu}^{YW_2}$	$\hat{\nu}^{YW_2}$	$\hat{\mu}^{YW_3}$	$\hat{\nu}^{YW_3}$
Колмогоров-Смирнов	0,823	0,976	0,981	0,912	0,864	0,954
χ^2	0,127	0,318	0,531	0,891	0,752	0,095
Shapiro-Wilk	0,151	0,545	0,351	0,553	0,587	0,062
Anderson-Darling	0,245	0,820	0,806	0,588	0,373	0,120
Lilliefors	0,444	0,841	0,866	0,631	0,522	0,758
Jarque-Bera	0,393	0,724	0,262	0,380	0,642	0,062

Средње вредности и стандардне девијације свих представљених оцена непознатих параметара, добијене на основу узорака обима 200, 500, 1000, 3000 и 5000, су приказане у табелама 3.3 и 3.4. Може се приметити да се код свих оцена стандардне девијације смањују са порастом обима узорка, што упућује на постојаност

Табела 3.2: Значајности тестова за испитивање нормалности расподела оцена параметара α и β

Праве вредности	$\alpha = 0,3,\ \beta = 0,5$				$\alpha = 0,6,\ \beta = 0,4$			
Тест	$\hat{\alpha}^{YW_1}$	$\hat{\beta}^{YW_1}$	$\hat{\alpha}^{YW_2}$	$\hat{\beta}^{YW_2}$	$\hat{\alpha}^{YW_3}$	$\hat{\beta}^{YW_3}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\beta}^{cls}$
Колмогоров-Смирнов	0,928	0,531	0,743	0,598	0,600	0,650	0,992	0,982
χ^2	0,498	0,023	0,392	0,102	0,294	0,141	0,322	0,523
Shapiro-Wilk	0,450	0,205	0,485	0,190	0,285	0,101	0,912	0,640
Anderson-Darling	0,459	0,099	0,397	0,084	0,181	0,171	0,798	0,731
Lilliefors	0,676	0,120	0,321	0,168	0,169	0,214	0,921	0,889
Jarque-Bera	0,811	0,248	0,829	0,222	0,571	0,225	0,783	0,976

оцена. Такође може се видети да се код правих вредности параметара μ и ν које су ближе нули, брже достиже тачна вредност. Код већих вредности конвергенција ка тачним вредностима је мало спорија. Такође, може се видети да оцене $\hat{\mu}^{YW_2}$ и $\hat{\nu}^{YW_2}$ за нијансу брже достижу тачне вредности параметара или већу тачност. У случају оцена параметара α и β може се уочити да метод условних најмањих квадрата даје резултате који су најближи тачним вредностима, међутим, оцене $\hat{\alpha}^{YW_3}$ и $\hat{\beta}^{YW_3}$ имају најмању стандардну девијацију, те су тако и најстаблиније.

3.6 Примена на реалним подацима

На крају је приказано како $SDLINAR(1)$ модел може бити примењен на реалним подацима. Посматрана је разлика у месечном броју преступа пријављених полицијским станицама у Рочестеру, Њујорк, САД, од јануара 1991. до децембра 2001. Подаци су доступни на интернет страници http://www.forecastingprinciples.com, у делу са подацима о преступима. На овај начин, може се пратити и упоређивати ефикасност различитих полицијских станица током неког периода. На истим подацима су примењена и упоређена три модела: $TINAR(1)$, који је увео Freeland (2010), $STINAR(1)$, који су увели Barreto-Souza и Bourguignon (2015) и $SDLINAR(1)$ модел. За сваки модел су израчунате реализоване вредности оцена параме-

Табела 3.3: Реализоване вредности оцена параметара μ и ν, средње вредности и стандардне девијације

N	$\mu = 0,5,\ \nu = 0,2$					
	$\hat{\mu}^{YW_1}$	$\hat{\nu}^{YW_1}$	$\hat{\mu}^{YW_2}$	$\hat{\nu}^{YW_2}$	$\hat{\mu}^{YW_3}$	$\hat{\nu}^{YW_3}$
500	0,497	0,199	0,499	0,200	0,496	0,199
	(0,056)	(0,036)	(0,053)	(0,029)	(0,062)	(0,031)
1000	0,499	0,199	0,500	0,200	0,499	0,199
	(0,041)	(0,025)	(0,039)	(0,020)	(0,045)	(0,022)
3000	0,500	0,200	0,501	0,200	0,500	0,200
	(0,025)	(0,014)	(0,023)	(0,011)	(0,027)	(0,012)
5000	0,501	0,200	0,501	0,200	0,501	0,200
	(0,019)	(0,011)	(0,018)	(0,009)	(0,021)	(0,010)

N	$\mu = 1,\ \nu = 2$					
	$\hat{\mu}^{YW_1}$	$\hat{\nu}^{YW_1}$	$\hat{\mu}^{YW_2}$	$\hat{\nu}^{YW_2}$	$\hat{\mu}^{YW_3}$	$\hat{\nu}^{YW_3}$
500	0,987	1,986	0,994	1,993	0,990	1,983
	(0,136)	(0,210)	(0,109)	(0,203)	(0,117)	(0,224)
1000	0,993	1,991	0,997	1,994	0,994	1,990
	(0,093)	(0,146)	(0,074)	(0,142)	(0,080)	(0,157)
3000	0,998	1,998	0,998	1,998	0,997	1,998
	(0,052)	(0,086)	(0,042)	(0,083)	(0,044)	(0,092)
5000	1,000	1,997	1,000	1,997	0,999	1,998
	(0,041)	(0,067)	(0,033)	(0,065)	(0,035)	(0,072)

N	$\mu = 2,\ \nu = 4$					
	$\hat{\mu}^{YW_1}$	$\hat{\nu}^{YW_1}$	$\hat{\mu}^{YW_2}$	$\hat{\nu}^{YW_2}$	$\hat{\mu}^{YW_3}$	$\hat{\nu}^{YW_3}$
500	1,991	4,001	2,002	4,012	1,997	3,996
	(0,235)	(0,273)	(0,213)	(0,259)	(0,227)	(0,298)
1000	1,996	4,002	2,002	4,008	2,001	3,998
	(0,165)	(0,185)	(0,150)	(0,177)	(0,160)	(0,201)
3000	1,997	3,996	1,999	3,997	1,999	3,995
	(0,095)	(0,113)	(0,085)	(0,106)	(0,091)	(0,123)
5000	1,999	3,996	1,999	3,996	1,999	3,996
	(0,076)	(0,088)	(0,067)	(0,084)	(0,072)	(0,096)

N	$\mu = 5,\ \nu = 4$					
	$\hat{\mu}^{YW_1}$	$\hat{\nu}^{YW_1}$	$\hat{\mu}^{YW_2}$	$\hat{\nu}^{YW_2}$	$\hat{\mu}^{YW_3}$	$\hat{\nu}^{YW_3}$
500	4,990	3,977	4,995	3,982	4,989	3,974
	(0,326)	(0,298)	(0,302)	(0,266)	(0,362)	(0,305)
1000	4,998	3,982	5,003	3,987	4,995	3,983
	(0,231)	(0,207)	(0,214)	(0,186)	(0,258)	(0,214)
3000	4,993	3,992	4,998	3,997	4,989	3,997
	(0,129)	(0,119)	(0,123)	(0,108)	(0,141)	(0,124)
5000	4,997	3,993	4,999	3,995	4,993	3,996
	(0,100)	(0,092)	(0,095)	(0,085)	(0,110)	(0,095)

N	$\mu = 10,\ \nu = 8$					
	$\hat{\mu}^{YW_1}$	$\hat{\nu}^{YW_1}$	$\hat{\mu}^{YW_2}$	$\hat{\nu}^{YW_2}$	$\hat{\mu}^{YW_3}$	$\hat{\nu}^{YW_3}$
500	9,886	7,915	9,915	7,944	9,885	7,916
	(0,934)	(0,756)	(0,927)	(0,709)	(0,980)	(0,727)
1000	9,926	7,957	9,939	7,970	9,917	7,966
	(0,670)	(0,496)	(0,665)	(0,465)	(0,696)	(0,488)
3000	9,964	7,978	9,968	7,982	9,957	7,986
	(0,380)	(0,292)	(0,380)	(0,278)	(0,403)	(0,279)
5000	9,977	7,982	9,983	7,989	9,970	7,989
	(0,302)	(0,235)	(0,300)	(0,219)	(0,320)	(0,220)

Табела 3.4: Реализоване вредности оцена параметара α и β, средње вредности и стандардне девијације

N	$\alpha=0,3,\ \beta=0,1$							
	$\hat{\alpha}^{YW_1}$	$\hat{\beta}^{YW_1}$	$\hat{\alpha}^{YW_2}$	$\hat{\beta}^{YW_2}$	$\hat{\alpha}^{YW_3}$	$\hat{\beta}^{YW_3}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\beta}^{cls}$
500	0,279 (0,060)	0,090 (0,079)	0,279 (0,060)	0,090 (0,078)	0,276 (0,064)	0,148 (0,076)	0,292 (0,070)	0,097 (0,103)
1000	0,286 (0,048)	0,091 (0,077)	0,286 (0,048)	0,091 (0,077)	0,281 (0,045)	0,152 (0,054)	0,297 (0,049)	0,101 (0,073)
3000	0,292 (0,039)	0,092 (0,071)	0,291 (0,039)	0,092 (0,071)	0,282 (0,027)	0,152 (0,032)	0,299 (0,029)	0,100 (0,043)
5000	0,292 (0,036)	0,095 (0,068)	0,292 (0,035)	0,094 (0,068)	0,283 (0,021)	0,152 (0,024)	0,299 (0,023)	0,100 (0,032)

N	$\alpha=0,3,\ \beta=0,5$							
	$\hat{\alpha}^{YW_1}$	$\hat{\beta}^{YW_1}$	$\hat{\alpha}^{YW_2}$	$\hat{\beta}^{YW_2}$	$\hat{\alpha}^{YW_3}$	$\hat{\beta}^{YW_3}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\beta}^{cls}$
500	0,291 (0,170)	0,495 (0,074)	0,291 (0,169)	0,495 (0,074)	0,370 (0,063)	0,468 (0,055)	0,293 (0,106)	0,493 (0,065)
1000	0,301 (0,151)	0,493 (0,061)	0,301 (0,150)	0,493 (0,061)	0,371 (0,045)	0,470 (0,038)	0,295 (0,076)	0,495 (0,045)
3000	0,311 (0,118)	0,493 (0,042)	0,311 (0,118)	0,493 (0,042)	0,372 (0,027)	0,473 (0,022)	0,296 (0,045)	0,498 (0,026)
5000	0,316 (0,104)	0,492 (0,037)	0,316 (0,104)	0,492 (0,037)	0,373 (0,021)	0,474 (0,018)	0,297 (0,034)	0,499 (0,020)

N	$\alpha=0,5,\ \beta=0,2$							
	$\hat{\alpha}^{YW_1}$	$\hat{\beta}^{YW_1}$	$\hat{\alpha}^{YW_2}$	$\hat{\beta}^{YW_2}$	$\hat{\alpha}^{YW_3}$	$\hat{\beta}^{YW_3}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\beta}^{cls}$
500	0,452 (0,172)	0,202 (0,074)	0,452 (0,173)	0,201 (0,074)	0,369 (0,077)	0,232 (0,047)	0,489 (0,133)	0,195 (0,056)
1000	0,463 (0,155)	0,206 (0,057)	0,463 (0,155)	0,206 (0,057)	0,375 (0,056)	0,234 (0,032)	0,497 (0,095)	0,197 (0,038)
3000	0,473 (0,127)	0,207 (0,044)	0,473 (0,127)	0,207 (0,044)	0,377 (0,032)	0,236 (0,019)	0,500 (0,053)	0,199 (0,022)
5000	0,479 (0,107)	0,205 (0,036)	0,479 (0,107)	0,205 (0,036)	0,377 (0,025)	0,236 (0,015)	0,501 (0,041)	0,199 (0,018)

N	$\alpha=0,1,\ \beta=0,1$							
	$\hat{\alpha}^{YW_1}$	$\hat{\beta}^{YW_1}$	$\hat{\alpha}^{YW_2}$	$\hat{\beta}^{YW_2}$	$\hat{\alpha}^{YW_3}$	$\hat{\beta}^{YW_3}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\beta}^{cls}$
500	0,120 (0,094)	0,109 (0,108)	0,120 (0,094)	0,109 (0,108)	0,096 (0,052)	0,100 (0,059)	0,094 (0,068)	0,103 (0,09)
1000	0,115 (0,078)	0,107 (0,098)	0,115 (0,078)	0,107 (0,098)	0,099 (0,037)	0,099 (0,043)	0,099 (0,048)	0,099 (0,064)
3000	0,108 (0,064)	0,104 (0,081)	0,108 (0,064)	0,104 (0,081)	0,100 (0,021)	0,100 (0,025)	0,101 (0,028)	0,100 (0,037)
5000	0,105 (0,057)	0,103 (0,074)	0,105 (0,057)	0,103 (0,074)	0,100 (0,016)	0,101 (0,019)	0,100 (0,021)	0,101 (0,028)

N	$\alpha=0,6,\ \beta=0,4$							
	$\hat{\alpha}^{YW_1}$	$\hat{\beta}^{YW_1}$	$\hat{\alpha}^{YW_2}$	$\hat{\beta}^{YW_2}$	$\hat{\alpha}^{YW_3}$	$\hat{\beta}^{YW_3}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\beta}^{cls}$
500	0,589 (0,085)	0,404 (0,125)	0,589 (0,085)	0,405 (0,125)	0,555 (0,048)	0,458 (0,050)	0,595 (0,062)	0,396 (0,078)
1000	0,591 (0,072)	0,408 (0,103)	0,591 (0,072)	0,408 (0,103)	0,557 (0,034)	0,460 (0,036)	0,597 (0,044)	0,399 (0,055)
3000	0,587 (0,054)	0,414 (0,079)	0,587 (0,054)	0,414 (0,079)	0,557 (0,020)	0,460 (0,021)	0,596 (0,026)	0,400 (0,031)
5000	0,590 (0,047)	0,412 (0,068)	0,590 (0,047)	0,412 (0,068)	0,558 (0,016)	0,461 (0,016)	0,598 (0,020)	0,400 (0,025)

тара и $RMSE$ вредност као критеријум квалитета апроксимације.

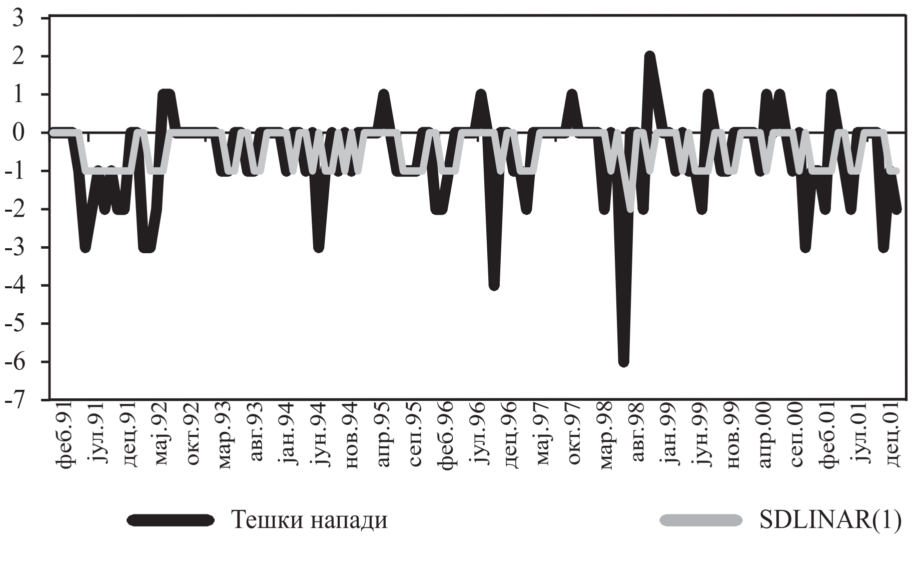
У табели 3.5, приказане су оцењене вредности параметара сва три модела, добијене на основу података који представљају разлику у броју тешких напада пријављених полицијској станици број 3605508702 и полицијској станици 3605501700. Затим, приказане су оцењене вредности параметара које су добијене на основу података који представљају разлику у броју имовинских кривичних дела (провала, крађа, пљачки, крађа возила), пријављених полицијској станици 3605508702 и полицијској станици 3605503300. На крају, приказане су оцене параметара добијене на основу података који представљају разлику у броју насилних кривичних дела (убистава, убиства из нехата, силовања, пљачки, тешких напада), пријављених полицијској станици 3605508702 и полицијској станици 3605501400.

На сликама 3.5 до 3.7, приказане су трајекторије временских низова који представљају разлике у броју тешких напада, имовинских кривичних дела и насилних кривичних дела пријављених одговарајућим полицијским станицама, као и моделиране вредности добијене на основу $SDLINAR(1)$ модела. За оцењивање непознатих параметара коришћен је Yule-Walker-ов метод, и то оцене $\hat{\mu}^{YW_1}$, $\hat{\nu}^{YW_1}$, $\hat{\alpha}^{YW_1}$ и $\hat{\beta}^{YW_1}$. Може се приметити да $SDLINAR(1)$ модел представља добар избор за моделирање ових података. Ситуације у којима постоји одступање модела од стварних података су нагли пикови. Такође, релативно велика $RMSE$ вредност за други скуп података се може објаснити природом самих података, јер су у питању велике вредности.

Као што се види у табели 3.5, $SDLINAR(1)$ модел је боље применити у оваквим ситуацијама, него преостала два посматрана модела. Разлика у вредностима $RMSE$ статистика јесте мала и то је последица релативно сличног облика условног математичког очекивања код сва три модела.

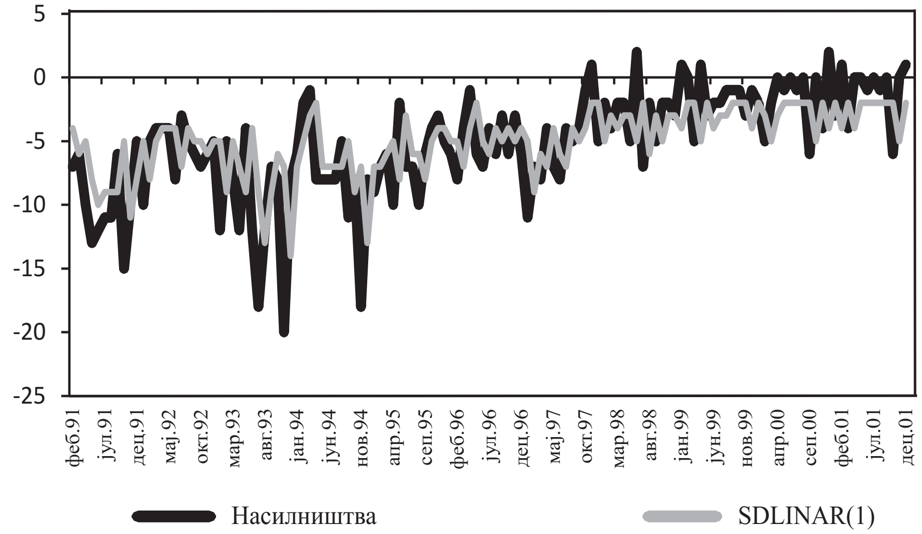
Табела 3.5: Оцене параметара и $RMSE$ вредности за $TINAR(1)$, $STINAR(1)$ и $SDLINAR(1)$

	Тешки напади		Имовинска кривична дела		Насилна кривична дела	
Модел	Оцене	$RMSE$	Оцене	$RMSE$	Оцене	$RMSE$
$TINAR(1)$	$\hat{\alpha} = 0,159$	1,149	$\hat{\alpha} = 0,420$	8,152	$\hat{\alpha} = 0,497$	3,617
	$\hat{\lambda_1} = 0,285$		$\hat{\lambda_1} = 23,66$		$\hat{\lambda_1} = 3,073$	
	$\hat{\lambda_2} = 0,762$		$\hat{\lambda_2} = 23,73$		$\hat{\lambda_2} = 5,646$	
$STINAR(1)$	$\hat{\alpha} = 0,161$	1,149	$\hat{\alpha} = 0,42$	8,152	$\hat{\alpha} = 0,505$	3,617
	$\hat{\mu_1} = 0,147$		$\hat{\mu_1} = 6,553$		$\hat{\mu_1} = 0,345$	
	$\hat{\mu_2} = 0,716$		$\hat{\mu_2} = 6,682$		$\hat{\mu_2} = 5,459$	
$SDLINAR(1)^{YW_1}$	$\hat{\mu} = 0,106$	1,107	$\hat{\mu} = 5,845$	8,095	$\hat{\mu} = 10^{-6}$	3,602
	$\hat{\nu} = 0,674$		$\hat{\nu} = 5,973$		$\hat{\nu} = 5,114$	
	$\hat{\alpha} = 0,096$		$\hat{\alpha} = 0,01$		$\hat{\alpha} = 10^{-7}$	
	$\hat{\beta} = 0,159$		$\hat{\beta} = 0,849$		$\hat{\beta} = 0,497$	
$SDLINAR(1)^{YW_2}$	$\hat{\mu} = 0,148$	1,149	$\hat{\mu} = 6.553$	8,064	$\hat{\mu} = 0.345$	3,589
	$\hat{\nu} = 0,716$		$\hat{\nu} = 6.682$		$\hat{\nu} = 5,459$	
	$\hat{\alpha} = 0,128$		$\hat{\alpha} = 10^{-7}$		$\hat{\alpha} = 10^{-7}$	
	$\hat{\beta} = 0,161$		$\hat{\beta} = 0,849$		$\hat{\beta} = 0,561$	
$SDLINAR(1)^{YW_3}$	$\hat{\mu} = 0,139$	1,159	$\hat{\mu} = 5,528$	8,081	$\hat{\mu} = 0.335$	3,687
	$\hat{\nu} = 0,657$		$\hat{\nu} = 6,269$		$\hat{\nu} = 3.639$	
	$\hat{\alpha} = 10^{-7}$		$\hat{\alpha} = 0,262$		$\hat{\alpha} = 0.250$	
	$\hat{\beta} = 0,193$		$\hat{\beta} = 0,570$		$\hat{\beta} = 0,506$	



Слика 3.5: Разлике у броју тешких напада пријављених полицијским станицама 3605508702 и 3605501700

Слика 3.6: Разлике у броју имовинских кривичних дела пријављених полицијским станицама 3605508702 и 3605501400



Слика 3.7: Разлике у броју насилних кривичних дела пријављених полицијским станицама 3605508702 и 3605501700

Глава 4

Комбиновани $SDLINAR(p)$ модел

У неким процесима и појавама, тренутно стање система не зависи само од стања у претходном тренутку, већ може зависити и од p последњих стања или од једног од p последњих стања. У таквим случајевима, ауторегресивни модели првог реда неће бити адекватно решење, већ се модел мора усложнити. Једно од решења је да се примењује модел реда p или комбиновани модел реда p, респективно. У овом делу ће управо један такав модел, са маргиналном дискретном Лапласовом расподелом, бити представљен.

4.1 Конструкција тининг оператора

Пре саме дефиниције тининг оператора, треба напоменути да је као инспирација за овакав тининг оператор послужио рад Nastić, Ristić и Bakouch (2012) и да се коришћена методологија и конструкција оператора заснивају, управо, на резултатима тог рада.

Нека је дата случајна променљива Z_n која има асиметричну дискретну Лапласову, $SDL(\mu/(1+\mu), \nu(1+\nu))$ расподелу, са параметрима $\mu/(1+\mu), \mu > 0$ и $\nu/(1+\nu), \nu > 0$. Тининг оператор $(\alpha, \beta)\odot_m$ се дефинише на следећи начин

$$((\alpha, \beta) \odot_m Z_n)|Z_n \stackrel{d}{=} (\alpha *_m X_n - \beta *_m Y_n)|(X_n - Y_n), \tag{4.1.1}$$

где је $m \geq 1$, $\alpha *_m$ и $\beta *_m$ негативни биномни тининг оператори, дефинисани у Nastić, Ristić и Bakouch (2012) као $\alpha *_m X_n = \sum_{i=1}^{X_n} W_i^{(m)}$ и $\beta *_m Y_n = \sum_{i=1}^{Y_n} V_i^{(m)}$, где су $\{W_i^{(m)}\}$ и $\{V_i^{(m)}\}$ два, узајамно независна, низа независних и једнако расподељених случајних променљивих са геометријским, $Geom(\alpha/(1+\alpha))$, $\alpha \in [0,1)$ и $Geom(\beta/(1+\beta))$, $\beta \in [0,1)$, расподелама, респективно. Случајне променљиве $W_i^{(m)}$ и X_n, као и $V_i^{(m)}$ и Y_n су, притом, независне за свако $i \geq 1$. Случајне променљиве X_n и Y_n су независне и имају, респективно, геометријске $Geom(\mu/(1+\mu))$ и $Geom(\nu/(1+\nu))$ расподеле. Треба напоменути да индекс оператора m означава да је тининг оператор примењен у тренутку m, на исти начин као што је то урађено у радовима Nastić, Ristić и Bakouch (2012) и Weiß (2008). У самој дефиницији тининг оператора, тренутак примене не игра неку битну улогу, па је сасвим очигледно да оператор $(\alpha,\beta)\odot_m$ има исте особине као и оператор $(\alpha,\beta)\odot$, дефинисан у претходној глави и у раду Djordjević (2016a).

Због тога ће неке битне особине случајне променљиве $(\alpha,\beta)\odot_m Z_n$ бити само наведене, без доказа.

Примедба 4.1.1 *Случајна променљива $(\alpha,\beta)\odot_m Z_n$ има следеће особине:*

1. *Карактеристична функција случајне променљиве $(\alpha,\beta)\odot_m Z_n$ је* $\varphi_{(\alpha,\beta)\odot_m Z_n}(t) = \frac{\left(1+\alpha-\alpha e^{it}\right)\left(1+\beta-\beta e^{-it}\right)}{\left(1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)e^{it}\right)\left(1+\beta(1+\nu)-\beta(1+\nu)e^{-it}\right)}$;
2. $(\alpha,\beta)\odot_m Z_n \stackrel{d}{=} \alpha *_m X_n - \beta *_m Y_n$, *где су X_n и Y_n независне случајне променљиве са геометријским, $Geom(\mu/(1+\mu))$ и $Geom(\nu/(1+\nu))$ расподелама, респективно;*
3. $E((\alpha,\beta)\odot_m Z_n) = \alpha\mu - \beta\nu$;
4. $Var((\alpha,\beta)\odot_m Z_n) = \alpha\mu(1+2\alpha+\alpha\mu) + \beta\nu(1+2\beta+\beta\nu)$;
5. $E((\alpha,\beta)\odot_m Z_n|Z_n) = (\alpha-\beta)\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + \alpha Z_n I_{\{Z_n\geq 0\}} + \beta Z_n I_{\{Z_n<0\}}$;
6. $$Var((\alpha,\beta)\odot_m Z_n|Z_n) = (\alpha-\beta)^2\frac{\mu(1+\mu)\nu(1+\nu)}{(1+\mu+\nu)^2} + \mu\nu\frac{\alpha(1+\alpha)+\beta(1+\beta)}{1+\mu+\nu} + \alpha(1+\alpha)Z_n I_{\{Z_n\geq 0\}} - \beta(1+\beta)Z_n I_{\{Z_n<0\}}.$$

4.2 Конструкција модела

Користећи оператор $(\alpha,\beta)\odot_m$, може се дефинисати комбиновани целобројни, ауторегресивни временски низ $\{Z_n, n \geq 0\}$ на следећи начин,

$$Z_n = \begin{cases} (\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-1} + e_n, & \text{с.в. } \phi_1, \\ (\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-2} + e_n, & \text{с.в. } \phi_2, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ (\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-p} + e_n, & \text{с.в. } \phi_p, \end{cases} \quad n > p, \tag{4.2.1}$$

при чему је $\phi_i \in [0,1], i = 1,\dots,p$ и $\sum_{i=1}^{p}\phi_i = 1$, и важе следећи услови:

i) $\{e_n\}$ је низ независних, једнако расподељених случајних променљивих, при чему су случајне променљиве e_n и Z_m, као и случајне променљиве e_n и $(\alpha,\beta)\odot_{m+i} Z_m$ независне за $m < n$ и $i = 1,\dots,p$,

ii) бројачки низови тининг оператора примењених у тренутку m су узајамно независни и независни од елемената низа $\{e_n\}$,

iii) бројачки низови тининг оператора примењеног на случајну променљиву Z_n и случајне променљиве $Z_{n-1}, Z_{n-2},\dots$ су независни,

iv) условне вероватноће

$$P\{(\alpha,\beta)\odot_{n+1} Z_n = i_1,\dots,(\alpha,\beta)\odot_{n+p} Z_n = i_p | Z_n = z, H_{n-1}\} \text{ и}$$
$$P\{(\alpha,\beta)\odot_{n+1} Z_n = i_1,\dots,(\alpha,\beta)\odot_{n+p} Z_n = i_p | Z_n = z\}$$

су једнаке, где је са H_{n-1} обележена прошлост случајних променљивих Z_m и $(\alpha,\beta)\odot_{m+i} Z_m$, $m < n$ и $i = 1,\dots,p$,

v) случајне променљиве $(\alpha,\beta)\odot_{n+1} Z_n,\dots,(\alpha,\beta)\odot_{n+p} Z_n$, условљене случајном променљивом Z_n, су независне.

У случају када важе претходних пет услова и када је маргинална расподела временског низа $\{Z_n\}$ асиметрична дискретна Лапласова, $SDL(\frac{\mu}{1+\mu}, \frac{\nu}{1+\nu})$, расподела, вредност параметра α припада интервалу $(0, \mu/(1+\mu)]$, а параметра β интервалу $(0, \nu/(1+\nu)]$, добија се један стационаран, ауторегресиван временски низ реда p, са целобројним вредностима, у ознаци $CSDLINAR(p)$, што је акроним назива на енглеском језику, Combined Skew Discrete Laplace INAR process of order p.

Треба, опет, напоменути да је конструкција модела преузета из рада Nastić, Ristić и Bakouch (2012), само што је у овом случају у питању целобројни низ, како са позитивним, тако и са негативним вредностима.

Сада ће бити анализиране неке основне особине $CSDLINAR(p)$ временског низа.

У складу са резултатима представљеним у радовима Djordjević (2016a) и Nastić, Ristić и Bakouch (2012) важи следећа примедба.

Теорема 4.2.1 *Иновациони низ $\{e_n\}$ има следеће особине:*

i) *Ако је $\alpha \in (0, \mu/(1+\mu)]$ и $\beta \in (0, \nu/(1+\nu)]$ онда је расподела случајне променљиве e_n дата са*

$$e_n \stackrel{d}{=} \begin{cases} SDL\left(\frac{\mu}{1+\mu}, \frac{\nu}{1+\nu}\right), & \text{с.в. } \left(1-\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\right)\left(1-\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}\right), \\ SDL\left(\frac{\mu}{1+\mu}, \frac{\beta}{1+\beta}\right), & \text{с.в. } \left(1-\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\right)\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}, \\ SDL\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\nu}{1+\nu}\right), & \text{с.в. } \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\left(1-\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}\right), \\ SDL\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\beta}{1+\beta}\right), & \text{с.в. } \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}. \end{cases}$$

ii) $E(e_n) = \mu(1-\alpha) - \nu(1-\beta)$,

iii) $Var(e_n) = \mu(1+\alpha)\left[(1+\mu)(1-\alpha)-\alpha\right] + \nu(1+\beta)\left[(1+\nu)(1-\beta)-\beta\right]$.

Доказ. Користећи дефиницију 4.2.1, независност случајних променљивих $(\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-i}, i = 1,\ldots,p$ и e_n и чињеницу да све случајне променљиве $Z_{n-i}, i = 1,\ldots,p$ имају исту расподелу, карактеристична функција случајне променљиве e_n добија се на следећи начин.

Најпре се карактеристична функција случајне променљиве Z_n може приказати у облику

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(t) &= \sum_{i=1}^{p} \phi_i \varphi_{(\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-i}}(t)\varphi_{e_n}(t) = \varphi_{e_n}(t)\sum_{i=1}^{p} \phi_i \varphi_{(\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-i}}(t) \\ &= \varphi_{e_n}(t)\sum_{i=1}^{p} \phi_i \varphi_{(\alpha,\beta)\odot_n Z}(t) = \varphi_{e_n}(t)\varphi_{(\alpha,\beta)\odot_n Z}(t),\end{aligned}$$

где случајна променљива Z има асиметричну дискретну Лапласову $SDL(\mu/(1+\mu), \nu/(1+\nu))$ расподелу. Користећи претходно добијени израз за карактеристичну функцију случајне променљиве Z_n, добија се да је

$$\varphi_{e_n}(t) = \frac{\varphi_{Z_n}(t)}{\varphi_{(\alpha,\beta)\odot_n Z}(t)}.$$

Надаље, истим поступком као у доказу теореме 3.2.1, добија се карактеристична функција случајне променљиве e_n у облику суме карактеристичних функција случајних промељивих из исказа теореме, пондерисаних вероватноћама неког потпуног система догађаја. На основу тога следи да се случајна променљива e_n може, у расподели, представити у облику мешавине четири случајне променљиве са асиметричном дискретном Лапласовом расподелом.

Користећи, затим, добијену карактеристичну функцију, тј. њен први и други извод, добија се тражени израз за математичко очекивање и дисперзију иновационог процеса. □

Имајући у виду расподелу иновационог низа приказану у облику мешавине случајних променљивих са асиметричном дискретном Лапласовом расподелом и чињеницу да се та расподела може представити у облику разлике двеју независних случајних променљивих са одговарајућим геометријским расподелама, може се извести следећа последица.

Последица 4.2.1 *Ако су* $\alpha \in (0, \mu/(1+\mu)]$ *и* $\beta \in (0, \nu/(1+\nu)]$, *тада је* $e_n \stackrel{d}{=} \varepsilon_n - \eta_n$, *где су* ε_n *и* η_n *две независне случајне променљиве које су расподељене на следећи начин*

$$\varepsilon_n \stackrel{d}{=} \begin{cases} Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right), & с.в.\ 1-\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}, \\ Geom\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right), & с.в.\ \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha} \end{cases}, \quad \eta_n \stackrel{d}{=} \begin{cases} Geom\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right), & с.в.\ 1-\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}, \\ Geom\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right), & с.в.\ \frac{\beta\nu}{\nu-\beta}. \end{cases}$$

На основу репрезентације случајне променљиве $(\alpha,\beta)\odot_n Z_n$, дате у примедби 4.1.1(2) и репрезентације иновационог низа, датог у претходној последици, $CSDLINAR(p)$ временски низ, $\{Z_n\}$, се може, у расподели, приказати као разлика два независна $CGINAR(p)$ временска низа, $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$, дефинисаних у Nastić, Ristić и Bakouch (2012) са геометријским, $Geom(\mu/(1+\mu))$ и $Geom(\nu/(1+\nu))$, маргиналним расподелама и са, у претходној последици поменутим, низовима $\{\varepsilon_n\}$ и $\{\eta_n\}$ као иновационим низовима.

Последица 4.2.2 *Нека је* $\{Z_n\}$ *један* $CSDLINAR(p)$ *временски низ дефинисан изразом* (4.2.1), *а* $\{X_n\}$ *и* $\{Y_n\}$ *два независна* $CGINAR(p)$ *временска низа, дефинисана на следећи начин*

$$X_n=\begin{cases}\alpha *_n X_{n-1}+\varepsilon_n, & \text{с.в. } \phi_1,\\ \alpha *_n X_{n-2}+\varepsilon_n, & \text{с.в. } \phi_2,\\ \quad\vdots & \quad\vdots\\ \alpha *_n X_{n-p}+\varepsilon_n, & \text{с.в. } \phi_p,\end{cases}\qquad Y_n=\begin{cases}\beta *_n Y_{n-1}+\eta_n, & \text{с.в. } \phi_1,\\ \beta *_n Y_{n-2}+\eta_n, & \text{с.в. } \phi_2,\\ \quad\vdots & \quad\vdots\\ \beta *_n Y_{n-p}+\eta_n, & \text{с.в. } \phi_p,\end{cases}$$

где су $\{\varepsilon_n\}$ *и* $\{\eta_n\}$ *два узајамно независна низа независних, једнако расподељених случајних променљивих. Тада је* $Z_n \overset{d}{=} X_n - Y_n$.

Врло битне особине $CSDLINAR(p)$ низова су својство Маркова, стационарност и ергодичност. Ове особине су битне у карактеризацији временских низова, као и приликом описивања корелационе структуре низова и оцена непознатих параметара модела. С тим у вези може се исказати следећа теорема.

Теорема 4.2.2 $CDSLINAR(p)$ *временски низ* $\{Z_n\}$ *је строго стационаран и ергодичан процес Маркова реда* p.

Доказ. Чињеница да је $CDSLINAR(p)$ временски низ процес Маркова реда p следи директно из саме дефиниције временског низа. Вероватноће прелаза се могу израчунати помоћу вероватноћа прелаза $SDLINAR(1)$ временског низа које су дате у теореми 3.3.1, на следећи начин

$$P(Z_n=z_n|H_{n-1})=\sum_{i=1}^{p}\phi_i P(Z_n=z_n|Z_{n-i}=z_{n-i})=\sum_{i=1}^{p}\phi_i p_Z(z_n,z_{n-i}),$$

где је

$$p_Z(k,j)=\begin{cases}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}p_{DNB}(k-l;m+j,\frac{\alpha}{1+\alpha},m,\frac{\beta}{1+\beta})p_e(l) & ,\ j\geq 0\\ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}p_{DNB}(k-l;m,\frac{\alpha}{1+\alpha},m-j,\frac{\beta}{1+\beta})p_e(l) & ,\ j<0,\end{cases}$$

$p_{DNB}(k;r,p;l,q)$ представља закон расподеле вероватноћа разлике две независне промењливе са негативном биномном расподелом,

$$p_{DNB}(k;r,p;l,q)=\begin{cases}p^k(1-p)^r(1-q)^l\binom{k+r-1}{k}{}_2F_1(k+r,l,k+1,pq) & ,\ k\geq 0\\ (1-p)^r(1-q)^l q^{-k}\binom{-k+l-1}{-k}{}_2F_1(-k+l,r,-k+1,pq) & ,\ k<0,\end{cases}$$

$p_e(l)$ је закон расподеле вероватноћа иновационог низа $\{e_n\}$,

$$p_e(l)=P\{e_n=l\}=\begin{cases}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^l\left(1-\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\right)\frac{1+\mu+\beta(1+\nu)}{(1+\mu+\nu)(1+\mu+\beta)}\\ +\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^l\frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}\frac{1+\alpha+\beta(1+\nu)}{(1+\alpha+\nu)(1+\alpha+\beta)}, & l\geq 0\\ \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{-l}\left(1-\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}\right)\frac{1+\nu+\alpha(1+\mu)}{(1+\nu+\mu)(1+\nu+\alpha)}\\ +\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{-l}\frac{\beta\nu}{\nu-\beta}\frac{1+\beta+\alpha(1+\mu)}{(1+\beta+\mu)(1+\beta+\alpha)}, & l<0,\end{cases}$$

а ${}_2F_1(k,l,m,p)$ је Гаусова хипергеометријска функција.

Користећи својство Маркова и једнаку расподељеност елемената временског низа $\{Z_n\}$, строга стационарност се може лако доказати на следећи начин.

Нека је $A_{n,k}$, $n,k\in\mathbb{N}$ случајни догађај дефинисан на следећи начин $A_{n,k}=\{Z_{n+k}=z_k, Z_{n+k-1}=z_{k-1},\ldots,Z_{n+1}=z_1\}$. Да би се доказала строга стационарност, довољно је показати једнакост вероватноћа $P(A_{0,k})=P(A_{n,k})$.

Како је временски низ $\{Z_n\}$ процес Маркова, то се вероватноћа $P(A_{0,k})$ може представити на следећи начин

$$\begin{aligned}P(A_{0,k}) &= P(Z_k{=}z_k|H_{k-1})P(Z_{k-1}{=}z_{k-1},...,Z_1{=}z_1)\\ &= P(Z_k{=}z_k|H_{k-1})P(Z_{k-1}{=}z_{k-1}|H_{k-2})P(Z_{k-2}{=}z_{k-2},...,Z_1{=}z_1)\\ &= P(Z_1{=}z_1)\prod_{i=0}^{k-2}P(Z_{k-i}{=}z_{k-i}|H_{k-i-1}).\end{aligned}$$

С обзиром на то да вероватноће прелаза $p_Z(k,l)$ не зависе од позиције елемента у низу, већ само од растојања два елемента, добија се да је $P(Z_{k-i} = z_{k-i}|H_{k-i-1}) = P(Z_{n+k-i} = z_{k-i}|H_{n+k-i-1})$. Како све случајне променљиве $Z_i, i \geq 1$ имају исту расподелу, следи да је $P(Z_1 = z_1) = P(Z_{n+1} = z_1)$. Замењујући поменуте вероватноће и враћајући се уназад, добија се да је

$$P(A_{0,k}) \;=\; P(Z_{n+1} = z_1) \prod_{i=0}^{k-2} P(Z_{n+k-i} = z_{k-i}|H_{n+k-i-1}) = P(A_{n,k}).$$

Да би се доказала ергодичност временског низа $\{Z_n\}$, може се поћи од дефиниције 6.30 из Breiman (1992), која каже да је стационаран низ $\{Z_n\}$ ергодичан уколико је вероватноћа сваког инваријантног (у односу на низ $\{Z_n\}$) догађаја 0 или 1. На основу става 6.32 из Breiman (1992), сваки инваријантни догађај, у односу на неки стационарни низ, је истовремено и репни догађај. Међутим, за свако $n \geq 1$, σ-алгебра $\mathcal{F}(Z_n, Z_{n-1}, \dots)$, генерисана случајним променљивама $Z_n, Z_{n-1}, \dots$, је подскуп σ-алгебре $\mathcal{F}(e_n, \mathbf{W}^{(n)}, \mathbf{V}^{(n)}, e_{n-1}, \mathbf{W}^{(n-1)}, \mathbf{V}^{(n-1)}, \dots)$, где су $\mathbf{W}^{(k)} = \{W_i^{(k)}\}$ и $\mathbf{V}^{(k)} = \{V_i^{(k)}\}$ бројачки низови који генеришу случајну променљиву Z_k. Захваљујући независности временских низова $\{e_n, \mathbf{W}^{(n)}, \mathbf{V}^{(n)}\}$, применом Колмогоровљевог закона $0-1$, сваки репни догађај има вероватноћу 0 или 1, чиме је и потврђена ергодичност низа $\{Z_n\}$. $\square$

Приликом предвиђања временских низова, као и приликом оцењивања параметара, врло битну улогу имају условне статистичке величине. Математичко очекивање и дисперзија произвољног елемента $CSDLINAR(p)$ временског низа, условљеног прошлошћу, дати су у наредној теореми. У циљу поједностављивања појединих израза нека је $Z_n^+ = Z_n I_{\{Z_n \geq 0\}}$ и $Z_n^- = -Z_n I_{\{Z_n < 0\}}$.

Теорема 4.2.3 *Једнокорачно условно очекивање и једнокорачна условна дисперзија $CSDLINAR(p)$ временског низа $\{Z_n\}$ су дати следећим изразима*

$$\begin{aligned} E\left(Z_n|H_{n-1}\right) &= (\alpha-\beta)\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + \mu(1-\alpha) - \nu(1-\beta) \\ &\quad +\alpha\sum_{i=1}^{p}\phi_i Z_{n-i}^{+} - \beta\sum_{i=1}^{p}\phi_i Z_{n-i}^{-}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var\left(Z_n|H_{n-1}\right) = Var(e_n) + (\alpha-\beta)^2\frac{\mu(1+\mu)\nu(1+\nu)}{(1+\mu+\nu)^2} \\
+\mu\nu\frac{\alpha(1+\alpha)+\beta(1+\beta)}{1+\mu+\nu} \\
+\alpha\sum_{i=1}^{p}\phi_i Z_{n-i}^{+}(1+\alpha+\alpha Z_{n-i}^{+}-\alpha\sum_{j=1}^{p}\phi_j Z_{n-j}^{+}+\beta\sum_{j=1}^{p}\phi_j Z_{n-j}^{-}) \\
+\beta\sum_{i=1}^{p}\phi_i Z_{n-i}^{-}(1+\beta+\beta Z_{n-i}^{-}+\alpha\sum_{j=1}^{p}\phi_j Z_{n-j}^{+}-\beta\sum_{j=1}^{p}\phi_j Z_{n-j}^{-}).
\end{aligned}
$$

Доказ. Користећи особине случајне променљиве $(\alpha,\beta)\odot_m Z_n$, наведене у примедби 4.1.1(5) и особина иновационог низа, наведених у теореми 4.2.1, добија се да је

$$
\begin{aligned}
E\left(Z_n|H_{n-1}\right) &= \sum_{i=1}^{p} E\left((\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-i}+e_n|H_{n-1}\right)\phi_i \\
&= \sum_{i=1}^{p} E\left((\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-i}|H_{n-1}\right)\phi_i+\sum_{i=1}^{p} E\left(e_n\right)\phi_i \\
&= (\alpha-\beta)\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu}+\alpha\sum_{i=1}^{p}\phi_i Z_{n-i}^{+}-\beta\sum_{i=1}^{p}\phi_i Z_{n-i}^{-} \\
&+ \mu(1-\alpha)-\nu(1-\beta).
\end{aligned}
$$

Што се условне дисперзије тиче, следи да је

$$
\begin{aligned}
Var\left(Z_n|H_{n-1}\right) &= E\left(Z_n^2|H_{n-1}\right)-E\left(Z_n|H_{n-1}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p} E\left(((\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-i}+e_n)^2|H_{n-1}\right)\phi_i \\
&- \left(\sum_{i=1}^{p} E\big(((\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-i}+e_n)|H_{n-1}\big)\phi_i\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p} E\left(((\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-i})^2+2\left((\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-i}\right)e_n+e_n^2)|H_{n-1}\right)\phi_i \\
&- \left(\sum_{i=1}^{p} E\left((\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-i}|H_{n-1}\right)\phi_i+E\left(e_n\right)\right)^2.
\end{aligned}
$$

Након квадрирања, узимајући у обзир чињеницу да су случајне променљиве e_n и $Z_{n-i}, 1 \leq i$, независне, скратиће се двоструки производи из развијеног облика квадрата бинома и остаће само квадратни чланови. Такође, моменти другог реда случајних променљивих $(\alpha, \beta) \odot_n Z_{n-i}$ се замене збиром дисперзија и квадрата момената првог реда и добија се да је

$$
\begin{aligned}
Var(Z_n|H_{n-1}) = & \sum_{i=1}^{p} Var((\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-i}|H_{n-1})\phi_i \\
& + \sum_{i=1}^{p} (E((\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-i}|H_{n-1}))^2 \phi_i + E(e_n^2) \\
& - \left(\sum_{i=1}^{p} E((\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-i}|H_{n-1})\phi_i \right)^2 - E(e_n)^2 \\
& = Var(e_n) + \sum_{i=1}^{p} Var((\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-i}|H_{n-1})\phi_i \\
& + \sum_{i=1}^{p} (E((\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-i}|H_{n-1}))\phi_i \\
& \times \left[(E((\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-i}|H_{n-1})) - \sum_{j=1}^{p} E((\alpha,\beta)\odot_n Z_{n-j}|H_{n-1})\phi_j \right]
\end{aligned}
$$

Користећи поново резултате примедбе 4.1.1, добија се да је

$$
\begin{aligned}
Var\,(Z_n|H_{n-1}) = & \; Var(e_n) + (\alpha-\beta)^2 \frac{\mu(1+\mu)\nu(1+\nu)}{(1+\mu+\nu)^2} \\
& + \mu\nu \frac{\alpha(1+\alpha)+\beta(1+\beta)}{1+\mu+\nu} \\
& + \alpha \sum_{i=1}^{p} \phi_i Z_{n-i}^{+} (1+\alpha+\alpha Z_{n-i}^{+} - \alpha \sum_{j=1}^{p} \phi_j Z_{n-j}^{+} + \beta \sum_{j=1}^{p} \phi_j Z_{n-j}^{-}) \\
& + \beta \sum_{i=1}^{p} \phi_i Z_{n-i}^{-} (1+\beta+\beta Z_{n-i}^{-} + \alpha \sum_{j=1}^{p} \phi_j Z_{n-j}^{+} - \beta \sum_{j=1}^{p} \phi_j Z_{n-j}^{-}). \square
\end{aligned}
$$

У следећим тврђењима ће бити описана корелациона структура $CSDLINAR(p)$ временских низова.

Теорема 4.2.4 *Коваријансна функција $CSDLINAR(p)$ временског низа $\{Z_n\}$ задовољава следећу једначину,*

$$\gamma_Z(k) = \sum_{i=1}^{p} \left(\alpha\gamma_{ZZ^+}(k-i) - \beta\gamma_{ZZ^-}(k-i)\right)\phi_i,$$

где је $\gamma_Z(k)$ вредност аутоковаријансне функције временског низа $\{Z_n\}$, $\gamma_{ZZ^+}(k)$ вредност крос-коваријансне функције временских низова $\{Z_n\}$ и $\{Z_n^+\}$ за корак k, а $\gamma_{ZZ^-}(k)$ вредност крос-коваријансне функције временских низова $\{Z_n\}$ и $\{Z_n^-\}$ за корак k.

Доказ. Користећи особине условног математичког очекивања, као и резултате теореме 4.2.3, добија се да је

$$\begin{aligned}
\gamma_Z(k) &= Cov(E(Z_{n+k}|Z_n), Z_n) = Cov(E(E(Z_{n+k}|H_{n+k-1})|Z_n), Z_n) \\
&= Cov(E(Z_{n+k}|H_{n+k-1}), Z_n) \\
&= Cov\Bigg((\alpha-\beta)\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + \mu(1-\alpha) - \nu(1-\beta) \\
&\qquad + \alpha\sum_{i=1}^{p}\phi_i Z_{n+k-i}^{+} - \beta\sum_{i=1}^{p}\phi_i Z_{n+k-i}^{-}, Z_n\Bigg) \\
&= Cov\left(\alpha\sum_{i=1}^{p}\phi_i Z_{n+k-i}^{+}, Z_n\right) - Cov\left(\beta\sum_{i=1}^{p}\phi_i Z_{n+k-i}^{-}, Z_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left(\alpha\phi_i Cov(Z_{n+k-i}^{+}, Z_n) - \beta\phi_i Cov(Z_{n+k-i}^{-}, Z_n)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left(\alpha\gamma_{ZZ^+}(k-i) - \beta\gamma_{ZZ^-}(k-i)\right)\phi_i. \square
\end{aligned}$$

Примедба 4.2.1 *Пошто се коваријансна функција $CSDLINAR(p)$ временског низа $\{Z_n\}$, $\gamma_Z(k)$, може представити у облику разлике две крос-коваријансне функције $\gamma_Z(k) = \gamma_{ZZ^+}(k) - \gamma_{ZZ^-}(k)$, биће корисно потврдити да важе следеће рекурентне релације*

$$\gamma_{ZZ^+}(k) = \alpha\sum_{i=1}^{p}\phi_i\gamma_{ZZ^+}(k-i) \quad и \quad \gamma_{ZZ^-}(k) = \beta\sum_{i=1}^{p}\phi_i\gamma_{ZZ^-}(k-i).$$

Доказ. За почетак треба доказати једнакост

$$E(Z_{n+1}^{+}|H_n) = (1-\alpha)\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu} + \alpha\sum_{i=1}^{p}\phi_i Z_{n+1-i}^{+}.$$

Најпре је

$$\begin{aligned}
E(Z_{n+1}^{+}|H_n) &= E(Z_{n+1}I_{\{Z_{n+1}\geq 0\}}|H_n)\\
&= \sum_{i=1}^{p}\phi_i E\Big(((\alpha,\beta)\odot_{n+1} Z_{n+1-i}+e_{n+1})\\
&\qquad \times I_{\{(\alpha,\beta)\odot_{n+1}Z_{n+1-i}+e_{n+1}\geq 0\}}|H_n\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{p}\phi_i E\Big(((\alpha,\beta)\odot_{n+1} Z_{n+1-i}+e_{n+1})\\
&\qquad \times I_{\{(\alpha,\beta)\odot_{n+1}Z_{n+1-i}+e_{n+1}\geq 0\}}|Z_{n+1-i}\Big).
\end{aligned}$$

На основу једнакости добијене у доказу теореме 3.3.5, следи да је

$$\begin{aligned}
E(Z_{n+1}^{+}|Z_n) &= E(((\alpha,\beta)\odot Z_n + e_{n+1})I_{\{(\alpha,\beta)\odot Z_n+e_{n+1}\geq 0\}}|Z_n)\\
&= (1-\alpha)\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu} + \alpha Z_n^{+}.
\end{aligned}$$

С обзиром на сличност тининг оператора $(\alpha,\beta)\odot$ и $(\alpha,\beta)\odot_n$, може се искористити претходна једнакост и тада се добија да је

$$E(Z_{n+1}^{+}|H_n) = (1-\alpha)\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu} + \alpha\sum_{i=1}^{p}\phi_i Z_{n+1-i}^{+}.$$

Даље се, на сличан начин како је то урађено у доказу теореме 3.3.3, може доказати да важи да је

$$E(X_{n+1}|H_n) = (1-\alpha)\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu} + \frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + \alpha\sum_{i=1}^{p}\phi_i Z_{n+1-i}^{+}.$$

Наиме, важи следеће,

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}|H_n) &= \sum_{i=1}^{p}\phi_i E(\alpha *_{n+1} X_{n+1-i} + \varepsilon_{n+1}|H_n)\\
&= \sum_{i=1}^{p}\phi_i E(\alpha *_{n+1} X_{n+1-i} + \varepsilon_{n+1}|Z_{n+1-i}).
\end{aligned}$$

Поново, на основу сличности, овога пута, тининг оператора $\alpha*$ и $\alpha*_n$ и израза за условно очекивање (3.3.2), добијеног у доказу теореме 3.3.3,

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}|Z_n) &= E(\alpha * X_n + \varepsilon_{n+1}|Z_n) = \alpha\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + (1-\alpha)\mu + \alpha Z_n^+ \\ &= (1-\alpha)\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu} + \frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + \alpha Z_n^+, \end{aligned}$$

добија да је

$$E(X_{n+1}|H_n) = (1-\alpha)\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu} + \frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + \alpha\sum_{i=1}^{p}\phi_i Z_{n+1-i}^+.$$

На основу претходно доказаног, важи да је

$$E(X_{n+1}|H_n) = \frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + E(Z_{n+1}^+|H_n).$$

Може се показати да важи и општије тврђење,

$$E(X_{n+k}|H_n) = \frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + E(Z_{n+k}^+|H_n).$$

Користећи особине условног математичког очекивања, с обзиром на то да се H_n садржи у H_{n+k-1}, добија се да је

$$\begin{aligned} E(X_{n+k}|H_n) &= E(E(X_{n+k}|H_{n+k-1})|H_n) \\ &= E(\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + E(Z_{n+k}^+|H_{n+k-1})|H_n) \\ &= \frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + E(E(Z_{n+k}^+|H_{n+k-1})|H_n) \\ &= \frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + E(Z_{n+k}^+|H_n). \end{aligned}$$

То имплицира да је $Cov(X_{n+k}, Z_n) = Cov(Z_{n+k}^+, Z_n)$ јер је

$$\begin{aligned} Cov(X_{n+k}, Z_n) &= Cov(E(X_{n+k}|Z_n), Z_n) = Cov(E(E(X_{n+k}|H_n)|Z_n), Z_n) \\ &= Cov(\frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + E(E(Z_{n+k}^+|H_n)|Z_n), Z_n) \\ &= Cov(E(E(Z_{n+k}^+|H_n)|Z_n), Z_n) = Cov(Z_{n+k}^+, Z_n). \end{aligned}$$

Важе аналогне једнакости и за умањилац $\{Y_n\}$,

$$E(Y_{n+1}|H_n) = \frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + E(Z^-_{n+1}|H_n) \text{ и } Cov(Y_{n+k}, Z_n) = Cov(Z^-_{n+k}, Z_n).$$

На крају, користећи независност временских низова $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$, добија се да важи $Cov(X_{n+k}, X_n) = Cov(X_{n+k}, Z_n) = Cov(Z^+_{n+k}, Z_n)$ и $Cov(Y_{n+k}, Y_n) = -Cov(Y_{n+k}, Z_n) = -Cov(Z^-_{n+k}, Z_n)$.

С обзиром на то да на основу корелационе структуре комбинованих $GINAR(p)$ временских низова, датих у Nastić, Ristić и Bakouch (2012), коваријансне функције временских низова $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ задовољавају задате рекурентне релације, задовољавају их и крос-корелационе функције $\gamma_{ZZ^+}(k)$ и $\gamma_{ZZ^-}(k)$. □

Узимајући у обзир претходну теорему, тј. чињеницу да ауто-коваријансне и крос-коваријансне функције задовољавају приказане рекурентне релације, следи да оне експоненцијално теже нули, када вредност корака тежи бесконачности. Наиме, важи следеће. Ако је $\gamma_{p,max} = \max\limits_{0\le i\le p} |\gamma_{ZZ^+}(i)|$, тада је $|\gamma_{ZZ^+}(k)| \le \alpha^j \gamma_{p,max}$, $jp < k \le (j+1)p$. Ова чињеница сврстава низ $\{Z_n\}$ у категорију асимптотски некорелираних низова. Такође, из сваког стања временског низа $\{Z_n\}$, могуће је, након коначно много корака, стићи у било које стање. Другим речима, за било која два цела броја i и j, постоји природан број m такав да је $P(Z_{n+m} = j|Z_n = i) > 0$, тј. временски низ $\{Z_n\}$ је иредуцибилан. Временски низ $\{Z_n\}$ је и апериодичан јер је из сваког стања могуће вратити се, након коначног броја корака, у исто стање, односно, за било која два природна броја i и m, $P(Z_{n+m} = i|Z_n = i) > 0$. С обзиром на то да је низ $\{Z_n\}$ иредуцибилан, апериодичан Марковљев процес, на основу теореме 3.2 из рада Bradley (2005), следи да је временски низ $\{Z_n\}$ низ јаког мешања.

4.3 Оцењивање непознатих параметара

У циљу добијања оцена непознатих параметара $CSDLINAR(p)$ модела употребљена су два стандардна метода, метод условних најмањих квадрата и Yule-Walker-ов метод.

Прво ће за оцењивање непознатих параметара $CSDLINAR(p)$ модела бити коришћен метод условних најмањих квадрата. Нека је $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_N)$ случајан узорак $CSDLINAR(p)$ временског низа $\{Z_n\}$, обима N. Функција грешке, тј. сума квадрата коју треба минимизирати је

$$\begin{aligned} Q_N &= \sum_{n=p+1}^{N} (Z_n - E(Z_n|H_{n-1}))^2 \\ &= \sum_{n=p+1}^{N} \Bigg(Z_n - \Bigg(\frac{(1-\alpha)\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu} - \frac{(1-\beta)\nu(1+\nu)}{1+\mu+\nu} \\ &\qquad + \alpha \sum_{i=1}^{p} \phi_i Z_{n-i}^{+} - \beta \sum_{i=1}^{p} \phi_i Z_{n-i}^{-} \Bigg) \Bigg)^2. \end{aligned}$$

Ако се уведу ознаке $\theta_i = \alpha\phi_i$, $\xi_i = \beta\phi_i$, $M^+ = \frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu}$ и $M^- = \frac{\nu(1+\nu)}{1+\mu+\nu}$ добија се да је

$$Q_N = \sum_{n=p+1}^{N} \Bigg(Z_n - \Bigg(\Big(1 - \sum_{i=1}^{p} \theta_i\Big) M^+ - \Big(1 - \sum_{i=1}^{p} \xi_i\Big) M^- + \sum_{i=1}^{p} \theta_i Z_{n-i}^{+} - \sum_{i=1}^{p} \xi_i Z_{n-i}^{-} \Bigg) \Bigg)^2.$$

Једначине које се добијају на основу парцијалних извода функције грешке по параметрима M^+ и M^- су еквивалентне. Такав однос доводи до губитка једне једначине приликом решавања система. Због тога се уводи још једна смена,

$$M = (1 - \sum_{i=1}^{p} \theta_i) M^+ - (1 - \sum_{i=1}^{p} \xi_i) M^-.$$

На овај начин се проблем добијања оцена за μ и ν не решава, али је зато број непознатих параметара и број употребљивих једначина исти. Са овако постављеним проблемом, може се добити оцена само за израз $M = \frac{(1-\alpha)\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu} - \frac{(1-\beta)\nu(1+\nu)}{1+\mu+\nu}$. Сума квадрата сада постаје

$$Q_N = \sum_{n=p+1}^{N} (Z_n - (M + \sum_{i=1}^{p} \theta_i Z_{n-i}^{+} - \sum_{i=1}^{p} \xi_i Z_{n-i}^{-}))^2.$$

Од једначина $\frac{\partial Q}{\partial M} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial \theta_j} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial \xi_j} = 0, j = 1, \ldots, p$ се добија следећи систем

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=p+1}^{N}(Z_n-(M+\sum_{i=1}^{p}\theta_i Z^{+}_{n-i}-\sum_{i=1}^{p}\xi_i Z^{-}_{n-i}))=0\\
&\sum_{n=p+1}^{N}Z^{+}_{n-j}(Z_n-(M+\sum_{i=1}^{p}\theta_i Z^{+}_{n-i}-\sum_{i=1}^{p}\xi_i Z^{-}_{n-i}))=0, j=1,2,\dots,p\\
&\sum_{n=p+1}^{N}Z^{-}_{n-j}(Z_n-(M+\sum_{i=1}^{p}\theta_i Z^{+}_{n-i}-\sum_{i=1}^{p}\xi_i Z^{-}_{n-i}))=0, j=1,2,\dots,p.
\end{aligned}$$

Ако се свакој једначини из другог реда дода нула у облику

$$\overline{Z}_N^{+(p-j)}\sum_{n=p+1}^{N}(Z_n-(M+\sum_{i=1}^{p}\theta_i Z^{+}_{n-i}-\sum_{i=1}^{p}\xi_i Z^{-}_{n-i})),$$

а свакој једначини из трећег, у облику

$$\overline{Z}_N^{-(p-j)}\sum_{n=p+1}^{N}(Z_n-(M+\sum_{i=1}^{p}\theta_i Z^{+}_{n-i}-\sum_{i=1}^{p}\xi_i Z^{-}_{n-i})),$$

добија се систем

$$\begin{aligned}
M &= \overline{Z}_N^{(p)}-\sum_{i=1}^{p}\theta_i\overline{Z}_N^{+(p-i)}+\sum_{i=1}^{p}\xi_i\overline{Z}_N^{-(p-i)}\\
\hat{\gamma}^{*}_{ZZ^{+}}(p,p-i) &= \sum_{j=1}^{p}\theta_j\hat{\gamma}^{*}_{Z^{+}}(p-j,p-i)-\sum_{j=1}^{p}\xi_j\hat{\gamma}^{*}_{Z^{-}Z^{+}}(p-j,p-i), i=1,2,\cdots,p\\
\hat{\gamma}^{*}_{ZZ^{-}}(p,p-i) &= \sum_{j=1}^{p}\theta_j\hat{\gamma}^{*}_{Z^{+}Z^{-}}(p-j,p-i)-\sum_{j=1}^{p}\xi_j\hat{\gamma}^{*}_{Z^{-}}(p-j,p-i), i=1,2,\cdots,p,
\end{aligned}$$

где индекс (k) означава узорачку средину добијену од $N-p$ елемената узорка који се, у узорку, налазе након $k-$тог елемента узорка:

$$\overline{Z}_N^{(k)}=\frac{1}{N-p}\sum_{i=1}^{N-p}Z_{k+i},\ \overline{Z}_N^{+(k)}=\frac{1}{N-p}\sum_{i=1}^{N-p}Z^{+}_{k+i},\ \overline{Z}_N^{-(k)}=\frac{1}{N-p}\sum_{i=1}^{N-p}Z^{-}_{k+i},$$

а $\hat{\gamma}^*_{Z'Z''}(k,l)$ представља узорачку крос-коваријансу два подниза обима $N-p$ који почињу након $k-$тог и након $l-$тог елемента низа Z', односно, Z'', респективно, тј.

$$\hat{\gamma}^*_{Z'Z''}(k,l) \;=\; \frac{1}{N-p}\sum_{i=1}^{N-p}(Z'_{k+i}-\overline{Z'}^{(k)})(Z''_{l+i}-\overline{Z''}^{(l)}).$$

Решавајући систем Cramer-овим правилом, добија се да је

$$\hat{\theta}_i^{cls}=\frac{D_i^*}{D^*},\ \hat{\xi}_i^{cls}=\frac{D_{p+i}^*}{D^*},\ i=1,2,\cdots,p,\quad \hat{M}^{cls}=\overline{Z}_N^{(p)}-\sum_{i=1}^{p}\hat{\theta}_i^{cls}\overline{Z}_N^{+(p-i)}+\sum_{i=1}^{p}\hat{\xi}_i^{cls}\overline{Z}_N^{-(p-i)},$$

где су D_i^* и D^* детерминанте које се стандардно користе у Cramer-овом правилу. Матрица система је блок матрица облика

$$\Delta=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \gamma_{Z^+}(0) & \cdots & \gamma_{Z^+}(p-1) & \gamma_{Z^-Z^+}(0) & \cdots & \gamma_{Z^-Z^+}(p-1)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma_{Z^+}(p-1) & \cdots & \gamma_{Z^+}(0) & \gamma_{Z^-Z^+}(p-1) & \cdots & \gamma_{Z^-Z^+}(0)\\ \hline \gamma_{Z^+Z^-}(0) & \cdots & \gamma_{Z^+Z^-}(p-1) & \gamma_{Z^-}(0) & \cdots & \gamma_{Z^-}(p-1)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma_{Z^+Z^-}(p-1) & \cdots & \gamma_{Z^+Z^-}(0) & \gamma_{Z^-}(p-1) & \cdots & \gamma_{Z^-}(0) \end{array}\right].$$

Матрица Δ представља коваријансну матрицу вектора случајних променљивих $[Z^+_{n-1},Z^+_{n-2},\dots,Z^+_{n-p},Z^-_{n-1},Z^-_{n-2},\dots,Z^-_{n-p}]^T$. Ова матрица ће бити регуларна уколико су случајне променљиве $Z^+_{n-1},\ \dots,\ Z^+_{n-p}$, $Z^-_{n-1},\ \dots,\ Z^-_{n-p}$, линеарно независне. Да би се то доказало, биће примењен став 5.1.1 из Brockwell и Davis (1987). Прво треба преуредити случајне променљиве тако да оне формирају следећи вектор $[Z^+_{n-1},Z^-_{n-1},Z^+_{n-2},Z^-_{n-2},\dots,Z^+_{n-p},Z^-_{n-p}]^T$. Прва ствар коју треба поменути, у вези са коваријансном матрицом преуређеног вектора, је да су елементи на дијагонали позитивни јер су то $\gamma_{Z^+}(0)$ и $\gamma_{Z^-}(0)$, дисперзије одговарајућих случајних променљивих. Такође, коваријансе компонената вектора су $\gamma_{Z^+}(k)$, $\gamma_{Z^-}(k)$, $\gamma_{Z^+Z^-}(k)$ и $\gamma_{Z^-Z^+}(k)$ и, пошто ове функције задовољавају рекурентне релације из теореме 4.2.4 или из примедбе 4.2.1, онда све оне експоненцијално теже нули, кад k тежи бесконачности. Нека је сада низ случајних променљивих $\{L_i\}$ дефинисан као $L_{2i-1}=Z^+_{n-i}$ и $L_{2i}=Z^-_{n-i}$, $1\le i\le p$. Овако дефинисан низ случајних променљивих задовољава услове поменутог става 5.1.1, тако да се може закључити да је коваријансна матрица регуларна, што обезбеђује јединственост решења система, тј. јединственост оцена.

Пошто је $\sum_{i=1}^{p}\theta_i = \alpha$, $\sum_{i=1}^{p}\xi_i = \beta$ и $\phi_i = \frac{\theta_i}{\alpha}$ и такође, $\phi_i = \frac{\xi_i}{\beta}$, добија се да је

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}^{cls} &= \frac{\sum_{i=1}^{p} D_i^*}{D^*}, \quad \hat{\beta}^{cls} = \frac{\sum_{i=1}^{p} D_{p+i}^*}{D^*}, i = 1, 2, \cdots, p, \\
\hat{\phi}_i'^{cls} &= \frac{D_i^*}{\sum_{i=1}^{p} D_i^*}, \quad \hat{\phi}_i''^{cls} = \frac{D_{p+i}^*}{\sum_{i=1}^{p} D_{p+i}^*}, i = 1, 2, \cdots, p.
\end{aligned}$$

С обзиром на то да се за свако ϕ_i, $i = 1, \ldots, p$ добијају по две оцене, коначна оцена се добија као њихова аритметичка средина, $\hat{\phi}_i^{cls} = (\hat{\phi}_i'^{cls} + \hat{\phi}_i''^{cls})/2$.

Да би се доказала строга постојаност и асимптотска нормалност добијених оцена, прво $\hat{M}^{cls}$, $\hat{\theta}_i^{cls}$ и $\hat{\xi}_i^{cls}$, а затим и $\hat{\alpha}^{cls}$, $\hat{\beta}^{cls}$, $\hat{\phi}_i'^{cls}$ и $\hat{\phi}_i''^{cls}$, биће коришћени резултати рада Tjøstheim (1986), тачније, теореме 3.1 и 3.2.

Парцијални изводи првог реда условног очекивања $E(Z_n|H_{n-1})$ по непознатим параметрима су константа или линеарне функције аргумената Z_{n-i}^+ или Z_{n-i}^-,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E(Z_n|H_{n-1})}{\partial \theta_i} &= Z_{n-i}^+, \ 1 \le i \le p \\
\frac{\partial E(Z_n|H_{n-1})}{\partial \xi_i} &= -Z_{n-i}^-, \ 1 \le i \le p \\
\frac{\partial E(Z_n|H_{n-1})}{\partial M} &= 1.
\end{aligned}$$

Да би услов $C1$ теореме 3.1 из поменутог рада био испуњен, потребно је, најпре, да важи да је

$$\begin{aligned}
E\left(\left|\frac{\partial E(Z_n|H_{n-1})}{\partial \theta_i}\right|^2\right) &< \infty, \ 1 \le i \le p \\
E\left(\left|\frac{\partial E(Z_n|H_{n-1})}{\partial \xi_i}\right|^2\right) &< \infty, \ 1 \le i \le p \\
E\left(\left|\frac{\partial E(Z_n|H_{n-1})}{\partial M}\right|^2\right) &< \infty.
\end{aligned}$$

Слично као што је то урађено у случају модела првог реда, добија се да је

$$E\left(\left|\frac{\partial E(Z_n|H_{n-1})}{\partial \theta_i}\right|^2\right) = E\left(Z^+_{n-i}\right)^2 = \frac{1}{1+\mu+\nu}\sum_{j=0}^{\infty} j^2\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^j$$
$$= \frac{\mu(1+\mu)(1+2\mu)}{1+\mu+\nu} < \infty.$$

Аналогно је и

$$E\left(\left|\frac{\partial E(Z_n|H_{n-1})}{\partial \xi_i}\right|^2\right) = \frac{\nu(1+\nu)(1+2\mu)}{1+\mu+\nu} < \infty.$$

Тривијално да је

$$E\left(\left|\frac{\partial E(Z_n|H_{n-1})}{\partial M}\right|^2\right) = 1 < \infty.$$

Други део услова $C1$, који се односи на друге парцијалне изводе условног очекивања, је такође тривијалан јер су сви други парцијални изводи једнаки нули. Због тога и услов $C3$ постаје такође тривијално испуњен.

Услов $C2$ захтева следеће

$$E\left(\left|\sum_{i=1}^{p}\left(a_i\frac{\partial E(Z_n|H_{n-1})}{\partial \theta_i}+a_{i+p}\frac{\partial E(Z_n|H_{n-1})}{\partial \xi_i}\right)+a_{2p+1}\frac{\partial E(Z_n|H_{n-1})}{\partial M}\right|^2\right)=0$$
$$\Rightarrow a_i=0, i=1,2,...2p+1.$$

Међутим,

$$E\left(\left|\sum_{i=1}^{p}\left(a_i\frac{\partial E(Z_n|H_{n-1})}{\partial \theta_i}+a_{i+p}\frac{\partial E(Z_n|H_{n-1})}{\partial \xi_i}\right)+a_{2p+1}\frac{\partial E(Z_n|H_{n-1})}{\partial M}\right|^2\right)$$
$$= E\left(\left|\sum_{i=1}^{p}\left(a_i Z^+_{n-i} - a_{i+p}Z^-_{n-i}\right)+a_{2p+1}\right|^2\right).$$

Ако се унутар апсолутне вредности дода и одузме математичко очекивање случајне променљиве $T \equiv \sum_{i=1}^{p}\left(a_i Z_{n-i}^{+} - a_{i+p} Z_{n-i}^{-}\right)$, добија се да је

$$E\left(\left|\sum_{i=1}^{p}\left(a_i Z_{n-i}^{+} - a_{i+p} Z_{n-i}^{-}\right) + a_{2p+1}\right|^2\right) = E\left(|T - ET + c|^2\right),$$

где је $c = a_{2p+1} + ET$. Даље се добија да је

$$E\left(|T - ET + c|^2\right) = Var(T) + 2cE(T - ET) + c^2 = Var(T) + c^2.$$

Једнакост последњег израза са нулом имплицира да је $Var(T) = 0$ и $c = 0$. Сада треба показати да у случају временског низа $\{Z_n\}$, важи да из $Var(T) = 0$ следи $a_i = 0$, $1 \le i \le 2p$.

Чињеница $Var(T) = 0$ значи да је $T = const$, скоро извесно, што даље имплицира да су случајне променљиве Z_{n-1}^{+}, ..., Z_{n-p}^{+}, Z_{n-1}^{-}, ..., Z_{n-p}^{-} линеарно зависне, осим у случају када је $T = 0$ и $a_i = 0$, $1 \le i \le 2p$. Биће доказано да је поменути изузетак једина могућа ситуација.

Наиме, коваријансна матрица вектора случајних променљивих $[Z_{n-1}^{+}, Z_{n-1}^{-}, Z_{n-2}^{+}, Z_{n-2}^{-}, \ldots, Z_{n-p}^{+}, Z_{n-p}^{-}]^T$ је, претходно поменута, матрица Δ, за коју је већ показано да је регуларна. Регуларност коваријансне матрице искључује линеарну зависност посматраних променљивих, па је једино могуће да је $T = 0$ и $a_i = 0$, $1 \le i \le 2p$. Уз чињеницу да је и $c = 0$, следи да је $a_{2p+1} = 0$.

На тај начин су сва три услова теореме 3.1 из рада Tjøstheim (1986) задовољена, што значи да су добијене оцене строго постојане.

Да би се доказала асимптотска нормалност, потребно је применити теорему 3.2, такође из рада Tjøstheim (1986). Пошто је функција $f_{n|n-1} = Var(Z_n|H_{n-1})$, услов $D1$ захтева да сви елементи матрице

$$\begin{aligned} R \;\equiv\; E\Big(& \left(Z_{n-1}^{+}, Z_{n-2}^{+}, \ldots, Z_{n-p}^{+}, Z_{n-1}^{-}, Z_{n-2}^{-}, \ldots, Z_{n-p}^{-}, 1\right)^T Var(Z_n|H_{n-1}) \\ & \times \left(Z_{n-1}^{+}, Z_{n-2}^{+}, \ldots, Z_{n-p}^{+}, Z_{n-1}^{-}, Z_{n-2}^{-}, \ldots, Z_{n-p}^{-}, 1\right)\Big) \end{aligned}$$

буду коначни. Да би се то доказало, биће довољно показати да су заједнички моменти $E(A^{k_1}B^{k_2}C^{k_3}D^{k_4})$ коначне величине, где случајне променљиве A, B, C и D могу бити Z^+_{n-i} или Z^-_{n-i}, $1 \le i \le p$ и $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Прво, случајне променљиве Z^+_{n-i} и Z^-_{n-i} имају коначне моменте било ког реда. Важи следеће,

$$E(Z^+_{n-i})^k = \frac{1}{1+\mu+\nu} \sum_{x=0}^{\infty} x^k \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^x < \infty.$$

Аналогно се закључује и за случајну променљиву Z^-_{n-i}. Сада, користећи неједнакост Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky добија се да је

$$\begin{aligned} E(A^{k_1}B^{k_2}C^{k_3}D^{k_4}) &\le \sqrt{E(A^{2k_1}B^{2k_2})E(C^{2k_3}D^{2k_4})} \\ &\le \sqrt{\sqrt{E\left(A^{4k_1}\right)E\left(B^{4k_2}\right)}\sqrt{E\left(C^{4k_3}\right)E\left(D^{4k_4}\right)}} \\ &= \sqrt[4]{E\left(A^{4k_1}\right)E\left(B^{4k_2}\right)E\left(C^{4k_3}\right)E\left(D^{4k_4}\right)} < \infty. \end{aligned}$$

То значи да је, на основу теореме 3.2 из рада Tjøstheim (1986), вектор оцена $\tilde{\theta}^{cls}_N \equiv \left(\hat{\theta}^{cls}_1, \dots, \hat{\theta}^{cls}_p, \hat{\xi}^{cls}_1, \dots, \hat{\xi}^{cls}_p, \hat{M}^{cls}\right)^T$ асимптотски нормално расподељен,

$$N^{-1/2}(\tilde{\theta}^{cls}_N - \theta') \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, U^{-1}RU^{-1}),$$

где је $\theta' = (\theta_1, \dots, \theta_p, \xi_1, \dots, \xi_p, M)^T$ и U је блок матрица

$$U = E\left[\begin{array}{c|c|c} Z^+_{n-i}Z^+_{n-j} & Z^+_{n-i}Z^-_{n-j} & Z^+_{n-i} \\ \hline Z^-_{n-i}Z^+_{n-j} & Z^-_{n-i}Z^-_{n-j} & Z^-_{n-i} \\ \hline Z^+_{n-i} & Z^-_{n-j} & 1 \end{array}\right], 1 \le i, j \le p.$$

Нека је, сада, дефинисано пресликавање

$$\mathbf{g}(x_1, x_2, \dots, x_{2p+1}) = (g_1(x_1, x_2, \dots, x_{2p+1}), \dots, g_{p+3}(x_1, x_2, \dots, x_{2p+1}))$$

са координатним функцијама:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_{2p+1}) &= \sum_{i=1}^{p} x_i, \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_{2p+1}) &= \sum_{i=1}^{p} x_{p+i}, \\ g_{2+j}(x_1, x_2, \dots, x_{2p+1}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_j}{\sum_{i=1}^{p} x_i} + \frac{x_{p+j}}{\sum_{i=1}^{p} x_{p+i}}\right), j = 1, \dots p, \end{aligned}$$

$$g_{p+3}(x_1, x_2, \ldots, x_{2p+1}) \;=\; x_{2p+1}.$$

Пошто је $\mathbf{g}(\hat{\theta}_1^{cls}, \ldots, \hat{\theta}_p^{cls}, \hat{\xi}_1^{cls}, \ldots, \hat{\xi}_p^{cls}, \hat{M}^{cls}) = (\hat{\alpha}^{cls}, \hat{\beta}^{cls}, \hat{\phi}_1^{cls}, \ldots, \hat{\phi}_p^{cls}, \hat{M}^{cls})$ и пресликавање $\mathbf{g}$ непрекидно, то имплицира да су оцене $\hat{\alpha}^{cls}$, $\hat{\beta}^{cls}$, $\hat{\phi}_i^{cls}, i = 1, \ldots p$ и $\hat{M}^{cls}$, такође, строго постојане. Такође, с обзиром на то да су координатне функције пресликавања $\mathbf{g}$ непрекидно-диференцијаблине функције и матрица $U^{-1}RU^{-1}$ симетрична и ненегативно дефинитна, задовољени су услови става 6.4.3 из Brockwell и Davis (1987), те су због тога и оцене $\hat{\alpha}^{cls}$, $\hat{\beta}^{cls}$, $\hat{\phi}_i^{cls}, i = 1, \ldots p$ и $\hat{M}^{cls}$, асимптотски нормално расподељене. Након свега, може се изрећи следећа теорема.

Теорема 4.3.1 *Статистике $\hat{\alpha}^{cls}$, $\hat{\beta}^{cls}$, $\hat{\phi}_i^{cls}, i = 1, \ldots p$ и $\hat{M}^{cls}$, добијене методом условних најмањих квадрата, су строго постојане и асимптотски нормално расподељене оцене параметара α, β, $\phi_i, i = 1, \ldots p$ и M, $CSDLINAR(p)$ модела,*

$$N^{-1/2}(\hat{\theta}_N^{cls} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, JU^{-1}RU^{-1}J^T),$$

где је $\hat{\theta}_N^{cls} = (\hat{\alpha}^{cls}, \hat{\beta}^{cls}, \hat{\phi}_1^{cls}, \ldots, \hat{\phi}_p^{cls}, \hat{M}^{cls})^T$, $\theta = (\alpha, \beta, \phi_1, \ldots, \phi_p, M)^T$, а матрица J је Јакобијан пресликавања $\mathbf{g}$.

Други метод који је употребљен за добијање оцена непознатих параметара μ, ν, α, β и $\phi_i, i = 1, 2, \ldots, p$ је Yule-Walker-ов метод. Притом су искоришћене оцене за математичко очекивање, дисперзију и коваријансу временског низа $\{Z_n\}$. Добијени су следећи резултати.

Да би се оценили параметри μ и ν, довољно је, као и у случају модела првог реда, искористити оцене математичког очекивања и дисперзије временског низа $\{Z_n\}$, тј. изразе $\overline{Z}_N = \mu - \nu$ и $\hat{\gamma}_Z(0) = \mu(1+\mu) + \nu(1+\nu)$. На тај начин се добијају оцене $\hat{\mu}^{YW}$ и $\hat{\nu}^{YW}$,

$$\hat{\mu}^{YW} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\overline{Z}_N + \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \overline{Z}_N^2 + 2\hat{\gamma}_Z(0)}$$
$$\hat{\nu}^{YW} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\overline{Z}_N + \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \overline{Z}_N^2 + 2\hat{\gamma}_Z(0)}.$$

Да би се добиле и оцене параметара α, β и $\phi_i, i = 1, 2, \ldots, p$, треба искористити системе једначина

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_{ZZ^+}(k) &= \alpha\sum_{i=1}^{p}\phi_i\hat{\gamma}_{ZZ^+}(k-i), k=1,2,\dots,p\\ \hat{\gamma}_{ZZ^-}(k) &= \beta\sum_{i=1}^{p}\phi_i\hat{\gamma}_{ZZ^-}(k-i), k=1,2,\dots,p.\end{aligned}$$

Замењујући, поново, $\alpha\phi_i$ са θ_i и $\beta\phi_i$ са ξ_i, добија се

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_{ZZ^+}(k) &= \sum_{i=1}^{p}\theta_i\hat{\gamma}_{ZZ^+}(k-i), k=1,2,\dots,p\\ \hat{\gamma}_{ZZ^-}(k) &= \sum_{i=1}^{p}\xi_i\hat{\gamma}_{ZZ^-}(k-i), k=1,2,\dots,p.\end{aligned}$$

Решавајући добијене системе Cramer-овим правилом, добија се

$$\hat{\theta}_i^{YW} = \frac{D_{A_i}}{D}, \hat{\xi}_i^{YW} = \frac{D_{B_i}}{D}, \tag{4.3.1}$$

где су D, D_{A_i}, D_{B_i} детерминанте које се стандардно користе у Cramer-овом правилу. Матрица система је блок матрица облика

$$\Delta' = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \gamma_{ZZ^+}(0) & \cdots & \gamma_{ZZ^+}(p-1) & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma_{ZZ^+}(p-1) & \cdots & \gamma_{ZZ^+}(0) & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & \cdots & 0 & \gamma_{ZZ^-}(0) & \cdots & \gamma_{ZZ^-}(p-1)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_{ZZ^-}(p-1) & \cdots & \gamma_{ZZ^-}(0) \end{array}\right].$$

С обзиром на то да је крос-коваријансна функција низова $\{Z_n\}$ и $\{Z_n^+\}$ једнака аутоковаријансној функцији $CGINAR(p)$ низа $\{X_n\}$, а крос-коваријансна функција низова $\{Z_n\}$ и $\{Z_n^-\}$ једнака аутоковаријансној функцији $CGINAR(p)$ низа $\{Y_n\}$, следи да су дијагонални блокови матрице Δ', у ствари, аутоковаријансне матрице низова $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$. На основу резултата представљених у Nastić, Ristić и Bakouch (2012), ове две матрице су регуларне. Самим тим ће и матрица Δ' бити регуларна, што ће проузроковати да систем једначина има јединствено решење, тј. да су добијене оцене јединствено одређене. Користећи, затим, чињеницу да је $\sum_{i=1}^{p} \theta_i = \alpha$ и $\sum_{i=1}^{p} \xi_i = \beta$, добијају се оцене

$$\hat{\alpha}^{YW} = \frac{\sum_{i=1}^{p} D_{A_i}}{D}, \ \hat{\beta}^{YW} = \frac{\sum_{i=1}^{p} D_{B_i}}{D} \quad \text{и}$$

$$\hat{\phi}_i'^{YW} = \frac{D_{A_i}}{\sum_{i=1}^{p} D_{A_i}} \text{ и } \hat{\phi}_i''^{YW} = \frac{D_{B_i}}{\sum_{i=1}^{p} D_{B_i}}, i = 1, 2, \dots, p.$$

Поново, коначна оцена параметара $\phi_i, i = 1, \dots, p$ биће средња вредност две добијене оцене $\hat{\phi}_i^{YW} = (\hat{\phi}_i'^{YW} + \hat{\phi}_i''^{YW})/2$.

Детерминанте које су коришћене приликом решавања су полиноми аутоковаријансних и крос-коваријансних функција, тако да ће оцене параметара бити рационалне функције аутоковаријансних и крос-коваријансних функција. Пошто је временски низ $\{Z_n\}$ ергодичан и строго стационаран, у складу са теоремама 2.4.2 и 2.4.3, узорачке коваријансе су строго постојане оцене теоријских коваријанси. Као рационалне функције строго постојаних оцена, статистике $\hat{\theta}_i^{YW}$, $\hat{\xi}_i^{YW}$ и $\hat{\phi}_i^{YW}$, $1 \leq i \leq p$, су, такође, строго постојане.

На сличан начин како је то урађено у раду Silva и Silva (2006), може се показати да су узорачке аутоковаријансне и крос-коваријансне функције временских низова $\{Z_n\}$, $\{Z_n^+\}$ и $\{Z_n^-\}$ асимптотски нормално расподељене. То значи да

$$N^{-1/2}(\tilde{\theta}_N^{YW} - \theta'') \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, CVC^T),$$

где је вектор статистика $\tilde{\theta}_N^{YW} = (\hat{\theta}_1^{YW}, \dots, \hat{\theta}_p^{YW}, \hat{\xi}_1^{YW}, \dots, \hat{\xi}_p^{YW}, \overline{Z}_N, \hat{\gamma}_Z(0))^T$, вектор параметара $\theta'' = (\theta_1, \dots, \theta_p, \xi_1, \dots, \xi_p, EZ_n, \gamma_Z(0))^T$, а V је блок матрица

$$V = \begin{bmatrix} [V_{11}]_{1\times 1} & [V_{12}]_{1\times 1} & [V_{13}]_{1\times(p+1)} & [V_{14}]_{1\times(p+1)} \\ [V_{12}]_{1\times 1} & [V_{22}]_{1\times 1} & [V_{23}]_{1\times(p+1)} & [V_{24}]_{1\times(p+1)} \\ [V_{13}]^T_{1\times(p+1)} & [V_{23}]^T_{1\times(p+1)} & [V_{33}]_{(p+1)\times(p+1)} & [V_{34}]_{(p+1)\times(p+1)} \\ [V_{14}]^T_{1\times(p+1)} & [V_{24}]^T_{1\times(p+1)} & [V_{34}]^T_{(p+1)\times(p+1)} & [V_{44}]_{(p+1)\times(p+1)} \end{bmatrix},$$

са елементима

$$
\begin{array}{ll}
[V_{11}]=\lim\limits_{N\to\infty} NVar(\overline{Z}_N) & [V_{23}]_{1,j}=\lim\limits_{N\to\infty} NCov(\hat{\gamma}_Z(0),\hat{\gamma}_{Z^+}(j-1)) \\
[V_{12}]=\lim\limits_{N\to\infty} NCov(\overline{Z}_N,\hat{\gamma}_Z(0)) & [V_{24}]_{1,j}=\lim\limits_{N\to\infty} NCov(\hat{\gamma}_Z(0),\hat{\gamma}_{Z^-}(j-1)) \\
[V_{13}]_{1,j}=\lim\limits_{N\to\infty} NCov(\overline{Z}_N,\hat{\gamma}_{Z^+}(j-1)) & [V_{33}]_{i,j}=\lim\limits_{N\to\infty} NCov(\hat{\gamma}_{Z^+}(i-1),\hat{\gamma}_{Z^+}(j-1)) \\
[V_{14}]_{1,j}=\lim\limits_{N\to\infty} NCov(\overline{Z}_N,\hat{\gamma}_{Z^-}(j-1)) & [V_{34}]_{i,j}=\lim\limits_{N\to\infty} NCov(\hat{\gamma}_{Z^+}(i-1),\hat{\gamma}_{Z^-}(j-1)) \\
[V_{22}]=\lim\limits_{N\to\infty} NVar(\hat{\gamma}_Z(0)) & [V_{44}]_{i,j}=\lim\limits_{N\to\infty} NCov(\hat{\gamma}_{Z^-}(i-1),\hat{\gamma}_{Z^-}(j-1))
\end{array}
$$

где је $1 \le i, j \le p+1$, а матрица C Јакобијан пресликавања које пресликава узорачке коваријансе, на основу Cramer-ових формула, тј. на основу израза (4.3.1), у статистике $\hat{\theta}_i^{YW}$, $\hat{\xi}_i^{YW}$, $1 \le i \le p$. Поново, на основу става 6.4.3 из Brockwell и Davis (1987), су и оцене $\hat{\theta}_i^{YW}$ и $\hat{\xi}_i^{YW}, i = 1, \ldots, p$ као рационалне функције аутокорелација и крос-корелација, асимптотски нормално расподељене. Користећи, затим пресликавање

$$\mathbf{g}^*(x_1, x_2, \ldots, x_{2p+2}) = (g_1^*(x_1, x_2, \ldots, x_{2p+2}), \ldots, g_{p+4}^*(x_1, x_2, \ldots, x_{2p+2}))$$

са координатним функцијама:

$$
\begin{aligned}
g_1^*(x_1, x_2, \ldots, x_{2p+2}) &= \sum_{i=1}^{p} x_i, \\
g_2^*(x_1, x_2, \ldots, x_{2p+2}) &= \sum_{i=1}^{p} x_{p+i}, \\
g_{2+j}^*(x_1, x_2, \ldots, x_{2p+2}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_j}{\sum_{i=1}^{p} x_i} + \frac{x_{p+j}}{\sum_{i=1}^{p} x_{p+i}}\right), j = 1, \ldots p, \\
g_{p+3}^*(x_1, x_2, \ldots, x_{2p+2}) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_{2p+1} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - x_{2p+1}^2 + 2x_{2p+2}}, \\
g_{p+4}^*(x_1, x_2, \ldots, x_{2p+2}) &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_{2p+1} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - x_{2p+1}^2 + 2x_{2p+2}},
\end{aligned}
$$

пресликава се вектор $(\hat{\theta}_1^{YW}, \ldots, \hat{\theta}_p^{YW}, \hat{\xi}_1^{YW}, \ldots, \hat{\xi}_p^{YW}, \overline{Z}_N, \hat{\gamma}_Z(0))$ у вектор $(\hat{\alpha}^{YW}, \hat{\beta}^{YW}, \hat{\phi}_1^{YW}, \ldots, \hat{\phi}_p^{YW}, \hat{\mu}^{YW}, \hat{\nu}^{YW})$. Поново, на основу става 6.4.3 из Brockwell и Davis (1987), следи да и оцене $\hat{\mu}^{YW}$, $\hat{\nu}^{YW}$, $\hat{\alpha}^{YW}$, $\hat{\beta}^{YW}$ и $\hat{\phi}_i^{YW}, i = 1, \ldots, p$ имају асимптотски нормалну расподелу.

Говорећи у форми теореме, може се формулисати следеће.

Теорема 4.3.2 *Статистике добијене* Yule-Walker-*овим методом,* $\hat{\mu}^{YW}$, $\hat{\nu}^{YW}$, $\hat{\alpha}^{YW}$, $\hat{\beta}^{YW}$ *и* $\hat{\phi}_i^{YW}$, $i = 1, \ldots, p$ *су строго постојане и асимптотски нормално расподељене оцене параметара* μ, ν, α, β *и* $\phi_i, i = 1, \ldots p$, $CSDLINAR(p)$ *модела,*

$$N^{-1/2}(\hat{\theta}_N^{YW} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, GCVC^TG^T),$$

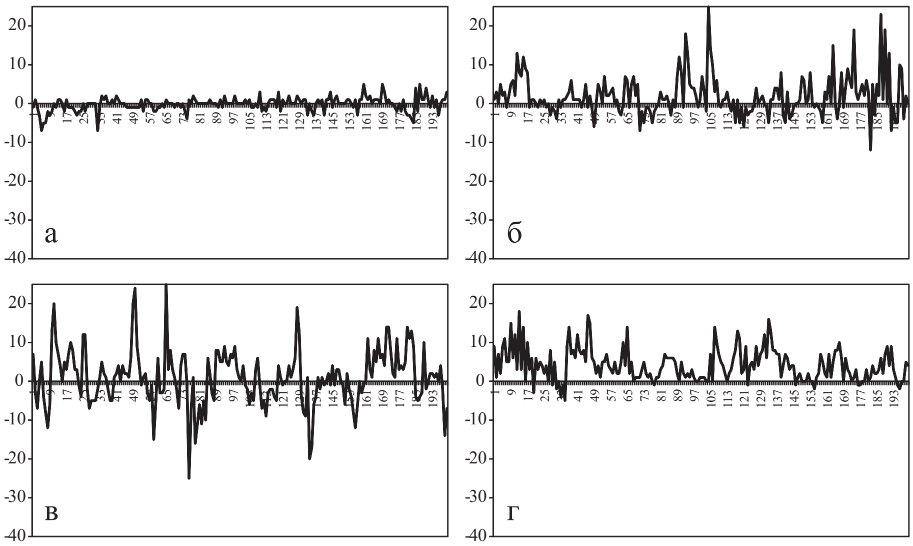
где је вектор $\hat{\theta}_N^{YW} = (\hat{\mu}^{YW}, \hat{\nu}^{YW}, \hat{\alpha}^{YW}, \hat{\beta}^{YW}, \hat{\phi}_1^{YW}, \ldots, \hat{\phi}_p^{cls}, \hat{M}^{cls})^T$, *вектор* $\theta = (\alpha, \beta, \phi_1, \ldots, \phi_p, M)^T$, *а матрица* G *је Јакобијан пресликавања* $\mathbf{g}^*$.

4.4 Симулације

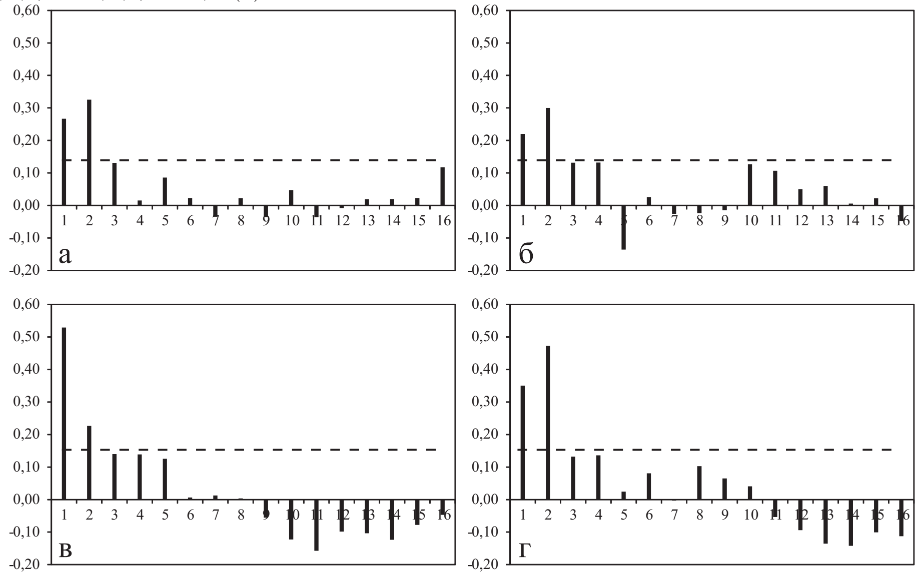
У овом делу ће бити приказани неки практични резултати. Да би се илустровао утицај параметара на кретање временског низа и асимптотско понашање добијених оцена непознатих параметара, за различите вредности параметара модела другог и трећег реда, симулирано је 1000 узорака обима 5000, а затим су, на основу подузорака обима 500, 1000, 3000 и 5000, израчунате оцене и њихове стандардне девијације.

У циљу провере закључака о асимптотским особинама добијених оцена непознатих параметара, урађене су симулације, за различите праве вредности параметара, по 1000 реализованих узорака $CSDLINAR(2)$ и $CSDLINAR(3)$ временских низова, сваки обима $N = 5000$. Симулације су извршене применом метода Монте Карло. Логика која је коришћена приликом симулација комбинованих модела реда два и три, подудара се са симулацијама које су урађене у случају симетричног и асиметричног модела првог реда. Приликом симулација је коришћена чињеница да се $CSDLINAR(p)$ процес може, у расподели, представити у облику разлике два независна $CGINAR(p)$ временска низа. Најпре су генерисане по две, у случају $CSDLINAR(2)$ модела, односно, три иницијалне вредности, у случају $CSDLINAR(3)$ модела, и за један, и за други $CGINAR$ низ, по геометријском закону расподеле са одговарајућим параметрима. Такође, симулиране су и по две помоћне дискретне, независне једна од друге, случајне променљиве са два стања, за модел реда два, односно, са три стања, за модел реда три, са одговарајућим вероватноћама ϕ_i, које су одређивале по једну од претходо генерисаних реализација низова, на које ће бити примењен тининг оператор. На крају је, коришћењем дефиниција $CGINAR(p)$ временских низова, генерисан остатак низова. И коначно, $CSDLINAR(p)$ временски низ је добијен као разлика два генерисана $CGINAR$ временска низа.

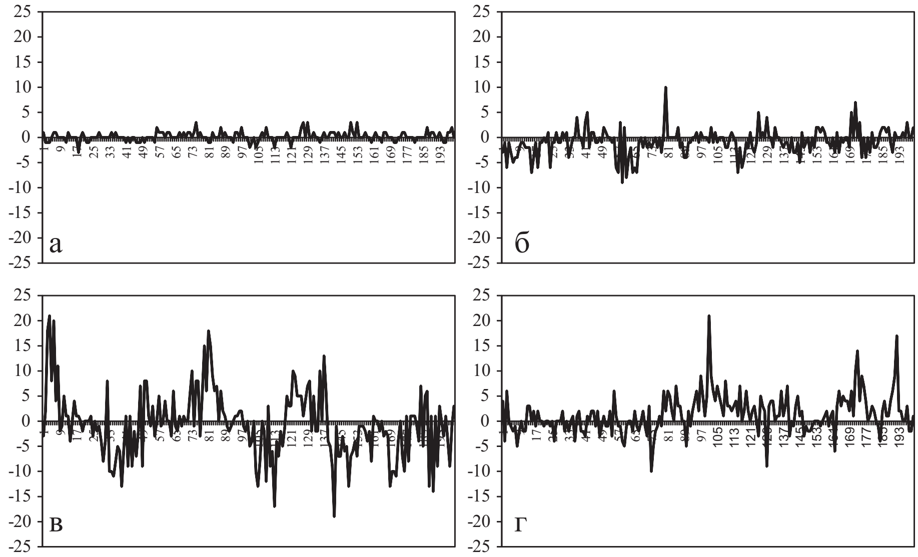
Праве вредности параметара су биране тако да што боље одсликају утицај на понашање временског низа. Коришћена је иста логика као и у случају модела првог реда. За параметре μ и ν, да би се илустровао њихов утицај на очекивану вредност и расипање вредности временског низа, изабране су вредности које су, у једном случају блиске нули, у другом, релативно, прилично далеко од нуле, затим, поново релативно, умерено далеко од нуле. Такође, вредности су биране тако да је у неким примерима μ веће од ν, а у другом случају, обрнуто. Слично је урађено и када су у питању параметри α и β. Да би се приказао њихов утицај на корелацију и варирање временског низа, ови параметри су, у једном случају бирани из доњег дела области дефинисаности, тј. тако да буду близу нули, затим су бирани тако да буду близу горње границе области дефинисаности, тј. близу $\mu/(1+\mu)$ и $\nu/(1+\nu)$ и бирани су из средине дозвољеног опсега. Опет, некад су α и β бирани тако да су близу један другом, а у другом случају, тако да се прилично разликују. У неким ситуацијама α је веће од β, у неким је обрнуто. Вероватноће $\phi_i, i = 1,2$, у случају $CSDILNAR(2)$ модела, односно, $\phi_i, i = 1,2,3$, у случају симулација модела $CSDLINAR(3)$, су изабране тако да су, или близу једна другој, или постоји бар једна која се по својој вредности одваја од других, не би ли такав разнолик њихов однос открио на који начин ови параметри утичу на понашање временског низа. Комбинације вредности правих параметара које су коришћене приликом симулација $CSDLINAR(2)$ модела су: $\mu = 0,6$, $\nu = 0,8$, $\alpha = 0,3$ и $\beta = 0,4$, $\phi_1 = 0,5$, $\phi_2 = 0,5$, за први симулирани модел, затим, за други $\mu = 4$, $\nu = 2$, $\alpha = 0,5$ и $\beta = 0,4$, $\phi_1 = 0,3$, $\phi_2 = 0,7$, за трећи, $\mu = 5$, $\nu = 6$, $\alpha = 0,5$ и $\beta = 0,8$, $\phi_1 = 0,9$, $\phi_2 = 0,1$, и за четврти су изабрани параметри $\mu = 6$, $\nu = 1$, $\alpha = 0,8$ и $\beta = 0,4$, $\phi_1 = 0,3$, $\phi_2 = 0,7$. Изабране вредности правих параметара које су коришћене приликом симулација $CSDLINAR(3)$ модела су: $\mu = 0,5$, $\nu = 0,2$, $\alpha = 0,3$ и $\beta = 0,1$, $\phi_1 = 0,2$, $\phi_2 = 0,2$, $\phi_3 = 0,6$, за први модел, за други $\mu = 1$, $\nu = 2$, $\alpha = 0,3$ и $\beta = 0,5$, $\phi_1 = 0,1$, $\phi_2 = 0,7$, $\phi_3 = 0,2$, за трећи, $\mu = 4$, $\nu = 10$,



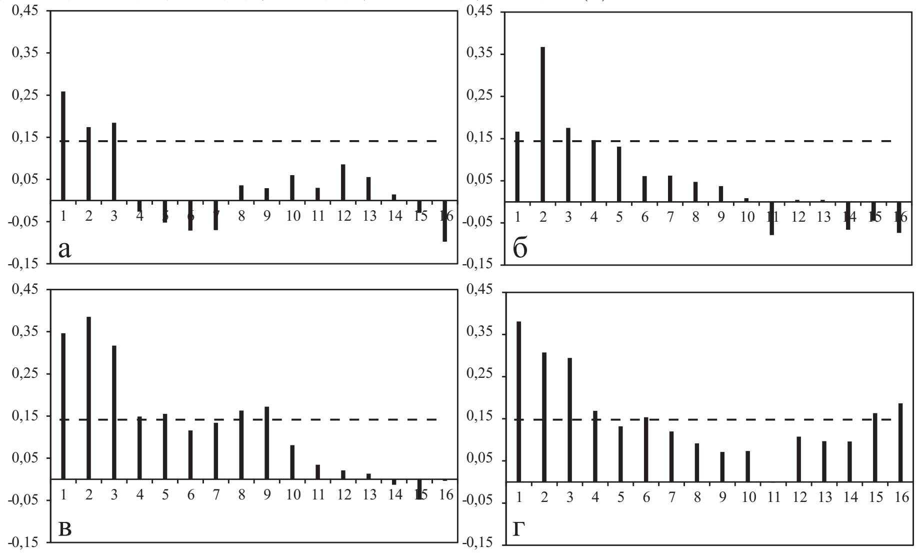
Слика 4.1: Трајекторије симулираних временских низова са вредностима параметара $\mu = 0,6$, $\nu = 0,8$, $\alpha = 0,3$ $\beta = 0,4$, $\phi_1 = 0,5$, $\phi_2 = 0,5$ (а), $\mu = 4$, $\nu = 2$, $\alpha = 0,5$ и $\beta = 0,4$, $\phi_1 = 0,3$, $\phi_2 = 0,7$ (б), $\mu = 5$, $\nu = 6$, $\alpha = 0,5$ и $\beta = 0,8$, $\phi_1 = 0,9$, $\phi_2 = 0,1$ (в) и $\mu = 6$, $\nu = 1$, $\alpha = 0,8$ и $\beta = 0,4$, $\phi_1 = 0,3$, $\phi_2 = 0,7$ (г)



Слика 4.2: Аутокорелационе функције симулираних временских низова са вредностима параметара $\mu = 0,6$, $\nu = 0,8$, $\alpha = 0,3$ $\beta = 0,4$, $\phi_1 = 0,5$, $\phi_2 = 0,5$ (а), $\mu = 4$, $\nu = 2$, $\alpha = 0,5$ и $\beta = 0,4$, $\phi_1 = 0,3$, $\phi_2 = 0,7$ (б), $\mu = 5$, $\nu = 6$, $\alpha = 0,5$ и $\beta = 0,8$, $\phi_1 = 0,9$, $\phi_2 = 0,1$ (в) и $\mu = 6$, $\nu = 1$, $\alpha = 0,8$ и $\beta = 0,4$, $\phi_1 = 0,3$, $\phi_2 = 0,7$ (г)



Слика 4.3: Трајекторије симулираних временских низова са вредностима параметара $\mu = 0,5$, $\nu = 0,2$, $\alpha = 0,3$ $\beta = 0,1$, $\phi_1 = 0,2$, $\phi_2 = 0,2$, $\phi_3 = 0,6$ (а), $\mu = 1$, $\nu = 2$, $\alpha = 0,3$ $\beta = 0,5$, $\phi_1 = 0,1$, $\phi_2 = 0,7$, $\phi_3 = 0,2$ (б), $\mu = 4$, $\nu = 10$, $\alpha = 0,7$ $\beta = 0,9$, $\phi_1 = 0,3$, $\phi_2 = 0,4$, $\phi_3 = 0,3$ (в) и $\mu = 6$, $\nu = 2$, $\alpha = 0,8$ $\beta = 0,4$, $\phi_1 = 0,5$, $\phi_2 = 0,33$, $\phi_3 = 0,17$ (г)



Слика 4.4: Аутокорелационе функције симулираних временских низова са вредностима параметара $\mu = 0,5$, $\nu = 0,2$, $\alpha = 0,3$ $\beta = 0,1$, $\phi_1 = 0,2$, $\phi_2 = 0,2$, $\phi_3 = 0,6$ (а), $\mu = 1$, $\nu = 2$, $\alpha = 0,3$ $\beta = 0,5$, $\phi_1 = 0,1$, $\phi_2 = 0,7$, $\phi_3 = 0,2$ (б), $\mu = 4$, $\nu = 10$, $\alpha = 0,7$ $\beta = 0,9$, $\phi_1 = 0,3$, $\phi_2 = 0,4$, $\phi_3 = 0,3$, (в) и $\mu = 6$, $\nu = 2$, $\alpha = 0,8$ $\beta = 0,4$, $\phi_1 = 0,5$, $\phi_2 = 0,33$, $\phi_3 = 0,17$ (г)

$\alpha = 0,7$ и $\beta = 0,9$, $\phi_1 = 0,3$, $\phi_2 = 0,4$, $\phi_3 = 0,3$, и за четврти $\mu = 6$, $\nu = 2$, $\alpha = 0,8$ и $\beta = 0,4$, $\phi_1 = 0,5$, $\phi_2 = 0,33$, $\phi_3 = 0,17$. На сликама 4.1 и 4.3 су приказане трајекторије реализованих вредности симулација $CSDLINAR(2)$ и $CSDLINAR(3)$ временских низова. Узимајући у обзир вредности параметара, може се уочити очигледан утицај параметара μ и ν на положај очекиваних вредности као и на распон вредности. У случајевим када је параметар μ био већи од ν, на позитивној страни су достизане веће вредности, док у случајевима када је параметар ν био већи од μ, на негативној страни су симулирани низови достизали веће, по апсолутној вредности, реализације. Такође, може се видети и да повећање вредности параметара α и β, утиче на повећање варијабилности реализованих вредности временског низа. На сликама 4.2 и 4.4 су приказане аутокорелационе функције симулираних модела. На овим сликама се, на основу вредности које премашују границу значајности, може наслутити ред модела који су симулирани. У већини приказаних случајева се може приметити да однос „значајних” корелација одговара односу вредности коришћених вероватноћа. Утицај параметара α и β, с обзиром на сложеност рекурентне корелационе везе, није тако очигледан.

Приликом оцењивања параметара симулираних модела коришћени су метод условних најмањих квадрата и Yule – Wallker-ов метод. Једнокорачним методом условних најамњих квадрата није било могуће оценити параметре μ и ν, него, већ поменуту функцију аргумената μ и ν, вредност $M = (1-\alpha)\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu+\nu} + (1-\beta)\frac{\nu(1+\nu)}{1+\mu+\nu}$. Да би се илустровала постојаност добијених оцена, за сваки модел је узето по четири узорка различитог обима, 500, 1000, 3000 и 5000. Резултати оцењивања, средње вредности и стандардне девијације реализованих оцена, су приказани у табелама 4.1-4.4.

Очигледно, оба коришћена метода дају оцене које конвергирају ка правим вредностима параметара. На основу података приказаних у табелама 4.1 и 4.2, може се закључити да приликом оцењивања параметара $CSDLINAR(2)$ модела, у скоро свим случајевима, оцене добијене методом условних најмањих квадрата, за исти обим узорка, дају реализације које су ближе тачним вредностима параметара. То једино није тако у случају оцењивања параметра $\alpha = 0,5$, у другом, од четири приказана модела. С

Табела 4.1: Реализоване вредности оцена параметара μ, ν, α и β $CSDLINAR(2)$ модела; средње вредности и стандардне девијације

$\mu=4,\ \nu=2,\ \alpha=0,5,\ \beta=0,4$						
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{cls}$	$\hat{\beta}^{YW}$
500	3,978	1,967	0,486	0,448	0,378	0,328
	(0,376)	(0,258)	(0,083)	(0,071)	(0,176)	(0,083)
1000	3,987	1,979	0,492	0,455	0,391	0,338
	(0,267)	(0,177)	(0,060)	(0,051)	(0,126)	(0,062)
3000	3,996	1,991	0,499	0,461	0,396	0,344
	(0,156)	(0,103)	(0,036)	(0,03)	(0,069)	(0,035)
5000	3,996	1,993	0,500	0,463	0,396	0,345
	(0,120)	(0,079)	(0,027)	(0,023)	(0,052)	(0,027)

$\mu=5,\ \nu=6,\ \alpha=0,5,\ \beta=0,8$						
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{cls}$	$\hat{\beta}^{YW}$
500	4,919	5,945	0,485	0,483	0,796	0,716
	(0,564)	(0,961)	(0,082)	(0,061)	(0,070)	(0,062)
1000	4,974	5,953	0,488	0,489	0,805	0,727
	(0,403)	(0,682)	(0,060)	(0,044)	(0,049)	(0,045)
3000	4,986	5,981	0,489	0,492	0,812	0,735
	(0,235)	(0,398)	(0,034)	(0,025)	(0,028)	(0,027)
5000	4,989	5,977	0,489	0,492	0,813	0,736
	(0,181)	(0,302)	(0,026)	(0,020)	(0,021)	(0,021)

$\mu=0,6,\ \nu=0,8,\ \alpha=0,3,\ \beta=0,4$						
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{cls}$	$\hat{\beta}^{YW}$
500	0,590	0,795	0,284	0,254	0,388	0,349
	(0,076)	(0,094)	(0,122)	(0,081)	(0,101)	(0,081)
1000	0,596	0,797	0,289	0,261	0,395	0,356
	(0,055)	(0,068)	(0,086)	(0,059)	(0,072)	(0,058)
3000	0,598	0,800	0,294	0,265	0,401	0,362
	(0,031)	(0,040)	(0,047)	(0,033)	(0,042)	(0,035)
5000	0,599	0,798	0,295	0,266	0,401	0,363
	(0,023)	(0,031)	(0,038)	(0,026)	(0,033)	(0,027)

$\mu=6,\ \nu=1,\ \alpha=0,8,\ \beta=0,4$						
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{cls}$	$\hat{\beta}^{YW}$
500	5,824	0,831	0,778	0,762	0,374	0,348
	(0,994)	(0,524)	(0,059)	(0,056)	(0,349)	(0,104)
1000	5,919	0,904	0,791	0,776	0,391	0,368
	(0,736)	(0,379)	(0,040)	(0,039)	(0,229)	(0,076)
3000	5,975	0,967	0,799	0,784	0,399	0,378
	(0,441)	(0,218)	(0,024)	(0,024)	(0,126)	(0,046)
5000	5,979	0,980	0,801	0,786	0,394	0,379
	(0,341)	(0,168)	(0,019)	(0,019)	(0,099)	(0,036)

Табела 4.2: Реализоване вредности оцена параметара ϕ_1, и ϕ_2 $CSDLINAR(2)$ модела; средње вредности и стандардне девијације

$\phi_1 = 0,3,\ \phi_2 = 0,7$				
N	$\hat{\phi}_1^{cls}$	$\hat{\phi}_1^{YW}$	$\hat{\phi}_2^{cls}$	$\hat{\phi}_2^{YW}$
500	0,317 (0,137)	0,299 (0,101)	0,683 (0,137)	0,701 (0,101)
1000	0,295 (0,095)	0,303 (0,068)	0,705 (0,095)	0,697 (0,068)
3000	0,295 (0,055)	0,305 (0,037)	0,705 (0,055)	0,695 (0,037)
5000	0,298 (0,039)	0,305 (0,028)	0,702 (0,039)	0,695 (0,028)

$\phi_1 = 0,9,\ \phi_2 = 0,1$				
N	$\hat{\phi}_1^{cls}$	$\hat{\phi}_1^{YW}$	$\hat{\phi}_2^{cls}$	$\hat{\phi}_2^{YW}$
500	0,884 (0,069)	0,874 (0,079)	0,116 (0,069)	0,126 (0,079)
1000	0,890 (0,054)	0,869 (0,055)	0,110 (0,054)	0,131 (0,055)
3000	0,892 (0,034)	0,865 (0,030)	0,108 (0,034)	0,135 (0,030)
5000	0,892 (0,027)	0,864 (0,024)	0,108 (0,027)	0,136 (0,024)

$\phi_1 = 0,5,\ \phi_2 = 0,5$				
N	$\hat{\phi}_1^{cls}$	$\hat{\phi}_1^{YW}$	$\hat{\phi}_2^{cls}$	$\hat{\phi}_2^{YW}$
500	0,513 (0,152)	0,516 (0,113)	0,487 (0,152)	0,484 (0,113)
1000	0,509 (0,108)	0,508 (0,088)	0,491 (0,108)	0,492 (0,088)
3000	0,503 (0,055)	0,502 (0,049)	0,497 (0,055)	0,498 (0,049)
5000	0,502 (0,041)	0,501 (0,037)	0,498 (0,041)	0,499 (0,037)

$\phi_1 = 0,3,\ \phi_2 = 0,7$				
N	$\hat{\phi}_1^{cls}$	$\hat{\phi}_1^{YW}$	$\hat{\phi}_2^{cls}$	$\hat{\phi}_2^{YW}$
500	0,372 (0,197)	0,317 (0,103)	0,628 (0,197)	0,683 (0,103)
1000	0,340 (0,154)	0,317 (0,072)	0,660 (0,154)	0,683 (0,072)
3000	0,310 (0,102)	0,316 (0,041)	0,690 (0,102)	0,684 (0,041)
5000	0,301 (0,083)	0,316 (0,031)	0,699 (0,083)	0,684 (0,031)

друге стране, оцене добијене Yule-Walker-овим методом су, судећи по вредностима стандардних девијација које брже опадају ка нули, за нијансу стабилније од оцена добијених методом условних најмањих квадрата.

Сличне су и карактеристике оцена вероватноћа ϕ_1 и ϕ_2. Метод условних најмањих квадрата резултира вредностима оцена које су ближе тачним вредностима параметара. Једино одступање од овог „правила" постоји приликом оцењивања вероватноћа трећег модела, када су незнатно ближе тачним вредностима Yule-Walker-ове оцене. И овде се може уочити да стандардне девијације Yule-Walker-овиx оцена брже теже нули. Такође, може се приметити да су одступања од тачних вредности оцена вероватноћа ϕ_1 и ϕ_2 једнака, било да се ради о методу условних најмањих квадрата, било о Yule-Walker-овом методу. И стандардне девијације одговарајућих парова оцена су једнаке. Ово је последица чињенице да је $\phi_1 + \phi_2 = 1$.

Као што је то било приликом оцењивања параметара модела другог реда, и у случају оцењивања параметара $CSDLINAR(3)$ модела, и Yule-Walker-ов метод и метод условних најмањих квадрата дају оцене које конвергирају ка правим вредностима параметара. У погледу прецизности и стабилности посматраних оцена, може се рећи да, у случају параметара α и β, оцене добијене методом условних најмањих квадрата, судећи по реализованим вредностима, за нијансу брже конвергирају ка правим вредностима. Са друге стране, $\mathrm{Yule-Wallker}$-ове оцене су за нијансу стабилније, узимајући у обзир мање вредности стандардних девијација. У случају оцена параметара $\phi_i, i = 1, 2, 3$, не постоји јасно одвајање у квалитету само једне врсте оцена па се може рећи да су оба метода уједначених перформанси.

Што се асимптотског понашања добијених оцена и илустративне потврде теорема 4.3.1 и 4.3.2 тиче може се рећи да је тежња расподеле сваке од посматраних оцена, приликом увећања обима узорка, ка нормалној расподели очигледна. То показују слике 4.5 и 4.6, на којима су приказане расподеле учестаности реализација неких оцена комбинованиг модела другог реда и слике 4.7 и 4.8, на којима су приказане расподеле учестаности реализација неких оцена $CSDLINAR(3)$ модела. Одступање расподела учестаности реализација ових оцена од нормалне расподеле је проверавано

Табела 4.3: Реализоване вредности оцена параметара μ, ν, α и β $CSDLINAR(3)$ модела; средње вредности и стандардне девијације

$\mu = 0,5$ $\nu = 0,2$ $\alpha = 0,3$ $\beta = 0,1$						
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{cls}$	$\hat{\beta}^{YW}$
500	0,499	0,197	0,288	0,265	0,082	0,079
	(0,058)	(0,035)	(0,100)	(0,086)	(0,184)	(0,088)
1000	0,500	0,199	0,296	0,273	0,091	0,085
	(0,041)	(0,025)	(0,071)	(0,062)	(0,130)	(0,063)
3000	0,500	0,199	0,299	0,278	0,097	0,086
	(0,025)	(0,015)	(0,042)	(0,037)	(0,075)	(0,037)
5000	0,501	0,199	0,300	0,279	0,097	0,087
	(0,019)	(0,011)	(0,033)	(0,029)	(0,058)	(0,028)

$\mu = 1$ $\nu = 2$ $\alpha = 0,3$ $\beta = 0,5$						
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{cls}$	$\hat{\beta}^{YW}$
500	0,990	1.984	0,278	0,256	0,486	0,443
	(0,131)	(0,212)	(0,193)	(0,088)	(0,097)	(0,081)
1000	0,997	1.995	0,286	0,263	0,496	0,454
	(0,096)	(0,150)	(0,130)	(0,063)	(0,068)	(0,059)
3000	0,998	1.996	0,293	0,269	0,502	0,459
	(0,056)	(0,085)	(0,078)	(0,039)	(0,041)	(0,034)
5000	0,999	1.997	0,294	0,269	0,502	0,460
	(0,043)	(0,066)	(0,060)	(0,030)	(0,032)	(0,027)

$\mu = 4$ $\nu = 10$ $\alpha = 0,7$ $\beta = 0,9$						
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{cls}$	$\hat{\beta}^{YW}$
500	3.463	9.551	0,665	0,641	0,874	0,848
	(1.141)	(2.477)	(0,173)	(0,098)	(0,058)	(0,056)
1000	3.732	9.791	0,681	0,662	0,888	0,865
	(0,879)	(1.875)	(0,107)	(0,067)	(0,040)	(0,038)
3000	3.926	9.925	0,688	0,676	0,900	0,878
	(0,548)	(1.149)	(0,058)	(0,038)	(0,022)	(0,022)
5000	3.949	9.935	0,689	0,679	0,902	0,880
	(0,425)	(0,889)	(0,046)	(0,030)	(0,017)	(0,017)

$\mu = 6$ $\nu = 2$ $\alpha = 0,8$ $\beta = 0,4$						
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{cls}$	$\hat{\beta}^{YW}$
500	5.875	1.859	0,786	0,748	0,395	0,402
	(1.043)	(0,520)	(0,069)	(0,066)	(0,217)	(0,088)
1000	5.923	1.915	0,799	0,762	0,384	0,406
	(0,735)	(0,377)	(0,046)	(0,045)	(0,146)	(0,065)
3000	5.963	1.976	0,808	0,772	0,390	0,416
	(0,429)	(0,218)	(0,026)	(0,025)	(0,083)	(0,037)
5000	5.979	1.988	0,810	0,775	0,389	0,418
	(0,336)	(0,172)	(0,021)	(0,021)	(0,064)	(0,029)

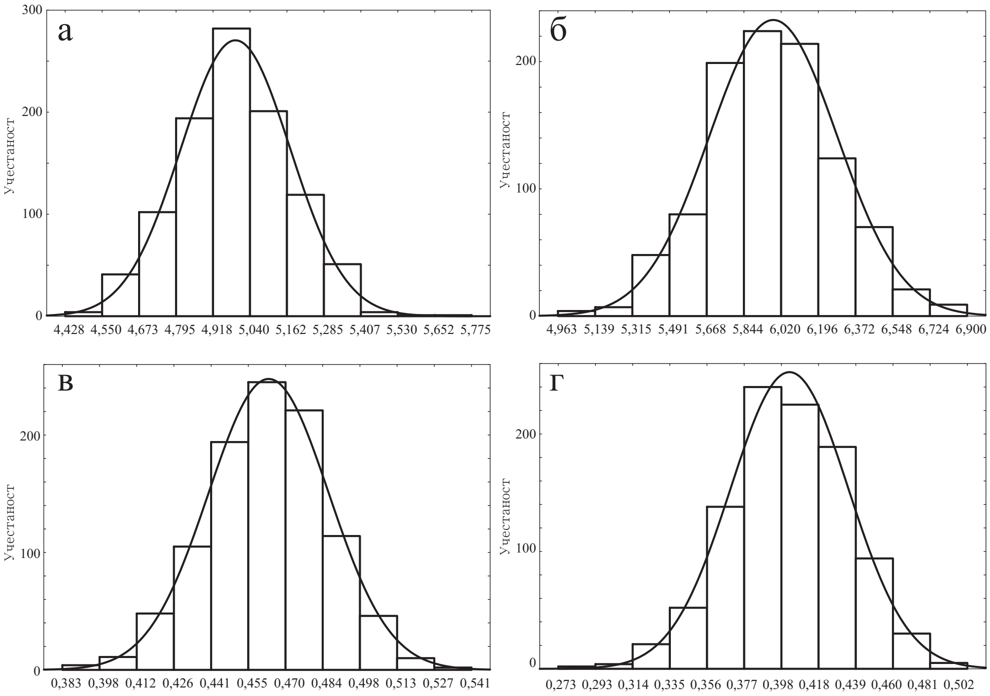
Табела 4.4: Реализоване вредности оцена параметара ϕ_1, ϕ_2, и ϕ_3 $CSDLINAR(3)$ модела; средње вредности и стандардне девијације

$\phi_1 = 0,2$ $\phi_2 = 0,2$ $\phi_3 = 0,6$						
N	$\hat{\phi}_1^{cls}$	$\hat{\phi}_1^{YW}$	$\hat{\phi}_2^{cls}$	$\hat{\phi}_2^{YW}$	$\hat{\phi}_3^{cls}$	$\hat{\phi}_3^{YW}$
500	0,177	0,193	0,175	0,186	0,648	0,621
	(0,287)	(0,332)	(0,482)	(0,494)	(0,591)	(0,490)
1000	0,196	0,195	0,181	0,184	0,622	0,621
	(0,141)	(0,125)	(0,140)	(0,125)	(0,157)	(0,141)
3000	0,196	0,197	0,196	0,196	0,608	0,607
	(0,075)	(0,069)	(0,077)	(0,071)	(0,088)	(0,081)
5000	0,198	0,199	0,199	0,199	0,603	0,602
	(0,056)	(0,052)	(0,057)	(0,053)	(0,065)	(0,060)

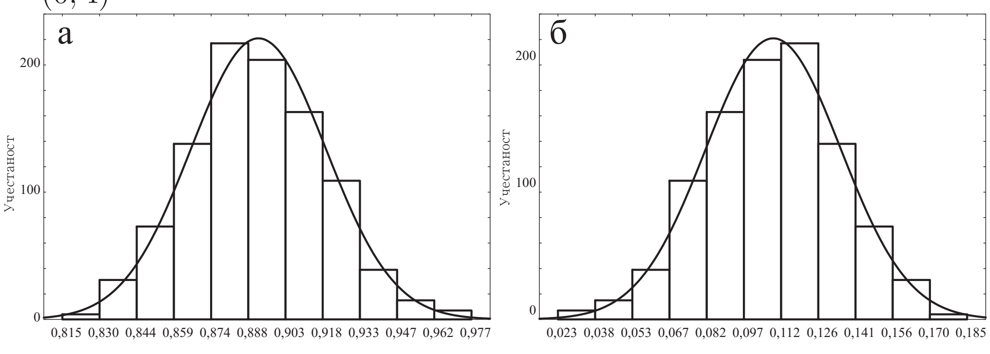
$\phi_1 = 0,1$ $\phi_2 = 0,7$ $\phi_3 = 0,2$						
N	$\hat{\phi}_1^{cls}$	$\hat{\phi}_1^{YW}$	$\hat{\phi}_2^{cls}$	$\hat{\phi}_2^{YW}$	$\hat{\phi}_3^{cls}$	$\hat{\phi}_3^{YW}$
500	0,233	0,091	0,628	0,723	0,140	0,187
	(0,652)	(0,282)	(0,645)	(0,335)	(0,756)	(0,292)
1000	0,352	0,103	0,214	0,699	0,435	0,198
	(0,350)	(0,083)	(0,223)	(0,096)	(0,119)	(0,081)
3000	0,089	0,107	0,719	0,692	0,192	0,201
	(0,089)	(0,046)	(0,101)	(0,051)	(0,084)	(0,046)
5000	0,092	0,106	0,711	0,691	0,197	0,203
	(0,061)	(0,035)	(0,068)	(0,038)	(0,058)	(0,034)

$\phi_1 = 0,3$ $\phi_2 = 0,4$ $\phi_3 = 0,3$						
N	$\hat{\phi}_1^{cls}$	$\hat{\phi}_1^{YW}$	$\hat{\phi}_2^{cls}$	$\hat{\phi}_2^{YW}$	$\hat{\phi}_3^{cls}$	$\hat{\phi}_3^{YW}$
500	0,304	0,300	0,422	0,398	0,274	0,301
	(0,223)	(0,079)	(0,345)	(0,078)	(0,298)	(0,077)
1000	0,303	0,301	0,401	0,397	0,296	0,302
	(0,068)	(0,055)	(0,068)	(0,055)	(0,070)	(0,055)
3000	0,302	0,301	0,400	0,398	0,298	0,302
	(0,039)	(0,033)	(0,040)	(0,034)	(0,038)	(0,032)
5000	0,301	0,300	0,400	0,397	0,299	0,302
	(0,029)	(0,024)	(0,030)	(0,026)	(0,030)	(0,025)

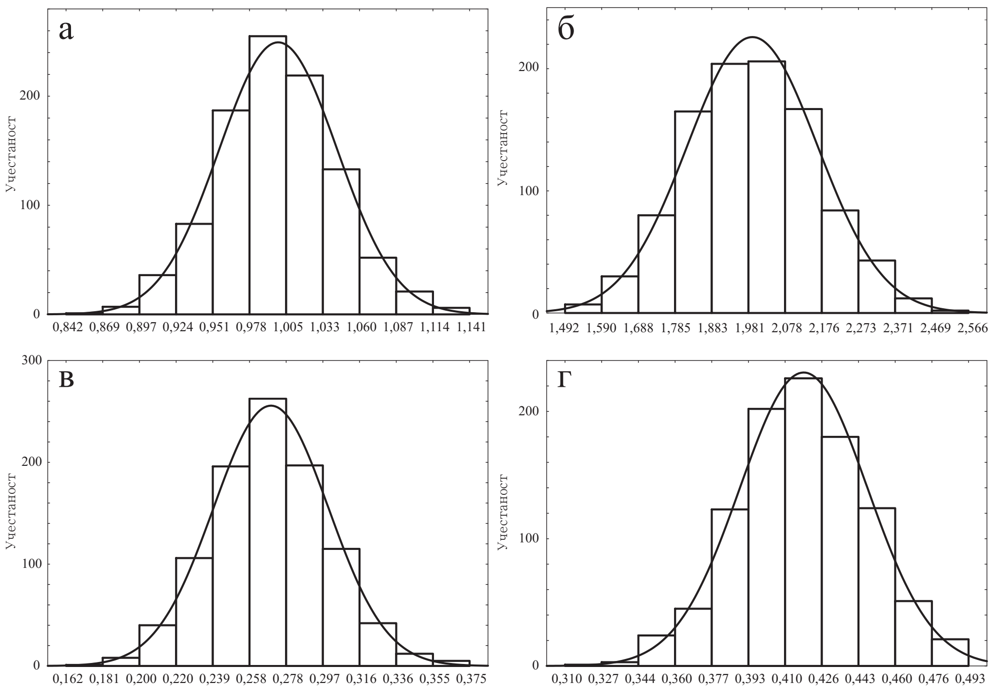
$\phi_1 = 0,5$ $\phi_2 = 0,33$ $\phi_3 = 0,17$						
N	$\hat{\phi}_1^{cls}$	$\hat{\phi}_1^{YW}$	$\hat{\phi}_2^{cls}$	$\hat{\phi}_2^{YW}$	$\hat{\phi}_3^{cls}$	$\hat{\phi}_3^{YW}$
500	0,437	0,498	0,387	0,326	0,176	0,176
	(0,097)	(0,094)	(0,095)	(0,093)	(0,085)	(0,083)
1000	0,552	0,496	0,356	0,329	0,091	0,175
	(0,071)	(0,069)	(0,071)	(0,069)	(0,063)	(0,061)
3000	0,511	0,493	0,329	0,330	0,160	0,177
	(0,040)	(0,039)	(0,042)	(0,041)	(0,037)	(0,035)
5000	0,505	0,492	0,332	0,331	0,163	0,177
	(0,032)	(0,031)	(0,033)	(0,032)	(0,030)	(0,029)



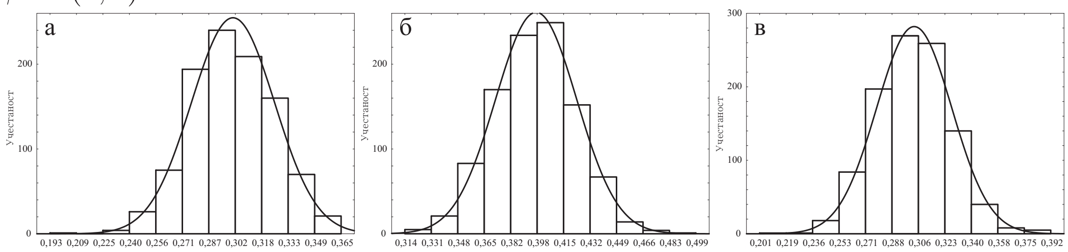
Слика 4.5: Расподеле реализованих оцена параметара μ, ν, α и β $CSDLINAR(2)$ модела; (а) $\hat{\mu}^{YW}(5)$, (б) $\hat{\nu}^{YW}(6)$, (в) $\hat{\alpha}^{YW}(0,5)$, (г) $\hat{\beta}^{YW}(0,4)$



Слика 4.6: Расподеле реализованих оцена параметара ϕ_1 и ϕ_2 $CSDLINAR(2)$ модела; (а) $\hat{\phi}_1^{cls}(0,9)$, (б) $\hat{\phi}_2^{cls}(0,1)$



Слика 4.7: Расподеле реализованих оцена параметара μ, ν, α и β $CSDLINAR(3)$ модела; (а) $\hat{\mu}^{YW}(1)$, (б) $\hat{\nu}^{YW}(2)$, (в) $\hat{\alpha}^{YW}(0,3)$, (г) $\hat{\beta}^{YW}(0,4)$



Слика 4.8: Расподеле реализованих оцена параметара ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_3 $CSDLINAR(3)$ модела; (а) $\hat{\phi_1}^{cls}(0,3)$, (б) $\hat{\phi_2}^{cls}(0,4)$, (в) $\hat{\phi_3}^{cls}(0,3)$

неким од стандардних статистичких тестова који се користе у ту сврху, као што су тест Колмогоров-Смирнова, χ^2 тест, Shapiro-Wilk-ов тест, Anderson-Darling-ов тест, Lilliefors-ов тест и Jarque-Bera-ов тест. Значајности ових тестова су, за оцене параметара модела $CSDLINAR(2)$, приказане у табелама 4.5 и 4.6. Уочава се велики број врло високих значајности што указује на мали степен одступања посматраних расподела од нормалне расподеле. Такође, слично као и код једнакости стандардних девијација, због чињенице да је $\phi_1+\phi_2=1$, и значајности одговарајућих оцена параметара ϕ_1 и ϕ_2 су једнаке (осим за χ^2 тест што је последица интервалног груписања података).

Значајности тестова којима је тестирано одступање расподеле оцена параметара комбинованог модела трећег реда од нормалне расподеле су приказане у табелама 4.7 и 4.8. И у овим табелама се могу приметити високе вредности значајности коришћених тестова. Оне указују на веома мало одступање расподела посматраних оцена од нормалне расподеле.

Дакле, на крају се може закључити да су симулације временских низова који припадају $CSDLINAR(2)$ и $CSDLINAR(3)$ моделима потврдиле асимптотска својства теоријски доказана у претходном поглављу.

4.5 Примена на реалним подацима

Временски низови базирани на тининг операторима су пронашли своју примену у многим областима живота, захваљујући својој способности да моделирају број случајних догађаја или елемената популације чија промена може бити изазвана преживљавањем постојећих, уласком нових или генерисањем нових елемената који могу бити резултат интеракције постојећих елемената. Изворно, добијен као разлика два $INAR$ временска низа, $CSDLINAR$ модел може бити адекватан предлог за поређење два система или процеса са поменутим особинама. Овде је фокус постављен на анализу криминалистичких података. Извршено је поређење ефикасности две полицијске станице у вези са различитим преступима. Подаци представљају разлику у броју пријављених преступа, на месечном нивоу, двема полицијским станицама у Рочестеру, у држави

Табела 4.5: Значајности тестова за испитивање нормалности расподела оцена параметара μ, ν, α и β $CSDLINAR(2)$ модела

Праве вредности	$\mu = 5,\ \nu = 6$		$\alpha = 0,5,\ \beta = 0,4$		$\alpha 0,5,\ \beta = 0,4$	
Тест	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\beta}^{cls}$
Колмогоров-Смирнов	0,777	0,940	0,978	0,931	0,857	0,811
χ^2	0,053	0,918	0,940	0,565	0,993	0,437
Shapiro-Wilk	0,211	0,867	0,889	0,436	0,770	0,765
Anderson-Darling	0,512	0,807	0,781	0,505	0,531	0,534
Lilliefors	0,369	0,710	0,851	0,685	0,508	0,423
Jarque-Bera	0,731	0,932	0,582	0,390	0,486	0,970

Табела 4.6: Значајности тестова за испитивање нормалности расподела оцена параметара ϕ_1 и ϕ_2 $CSDLINAR(2)$ модела

Праве вредности	$\phi_1 = 0,9,\ \phi_2 = 0,1$		$\phi_1 = 0,9,\ \phi_2 = 0,1$	
Тест	$\hat{\phi}_1^{YW}$	$\hat{\phi}_2^{YW}$	$\hat{\phi}_1^{cls}$	$\hat{\phi}_2^{cls}$
Колмогоров-Смирнов	0,926	0,926	0,464	0,464
χ^2	0,572	0,866	0,371	0,137
Shapiro-Wilk	0,415	0,415	0,132	0,132
Anderson-Darling	0,526	0,526	0,184	0,184
Lilliefors	0,671	0,671	0,087	0,087
Jarque-Bera	0,472	0,472	0,108	0,108

Табела 4.7: Значајности тестова за испитивање нормалности расподела оцена параметара μ, ν, α и β $CSDLINAR(3)$ модела

Праве вредности	$\mu=1,\ \nu=2$		$\alpha=0,3,\ \beta=0,4$		$\alpha=0,3,\ \beta=0,5$	
Тест	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{cls}$	$\hat{\beta}^{cls}$
Колмогоров-Смирнов	0,883	0,482	0,665	0,992	0,982	0,389
χ^2	0,267	0,560	0,444	0,602	0,938	0,189
Shapiro-Wilk	0,589	0,213	0,421	0,492	0,334	0,393
Anderson-Darling	0,409	0,150	0,306	0,930	0,510	0,086
Lilliefors	0,562	0,097	0,229	0,924	0,870	0,055
Jarque-Bera	0,335	0,117	0,146	0,800	0,415	0,517

Табела 4.8: Значајности тестова за испитивање нормалности расподела оцена параметара ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_3 $CSDLINAR(3)$ модела

Праве вредности	$\phi_1=0,3,\ \phi_1=0,4,\ \phi_3=0,3$			$\phi_1=0,3,\ \phi_1=0,4,\ \phi_3=0,3$		
Тест	$\hat{\phi}_1^{YW}$	$\hat{\phi}_2^{YW}$	$\hat{\phi}_3^{YW}$	$\hat{\phi}_1^{cls}$	$\hat{\phi}_2^{cls}$	$\hat{\phi}_3^{cls}$
Колмогоров-Смирнов	0,948	0,998	0,802	0,694	0,960	0,976
χ^2	0,118	0,419	0,222	0,801	1,000	0,930
Shapiro-Wilk	0,068	0,820	0,062	0,073	0,999	0,494
Anderson-Darling	0,441	0,918	0,261	0,238	0,933	0,538
Lilliefors	0,738	0,968	0,408	0,260	0,780	0,843
Jarque-Bera	0,650	0,806	0,092	0,233	0,936	0,389

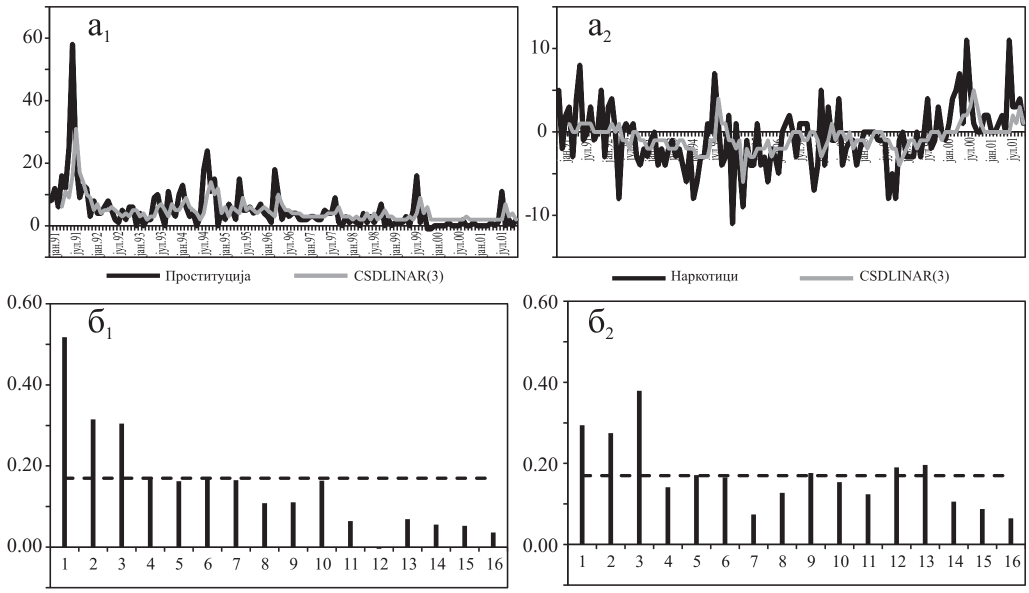
Њујорк, у САД, од јануара 1991. до децембра 2001. Ови подаци су доступни на интернет страници The Forecasting Principles site (http://www.forecastingprinciples.com), у секцији за криминалистичке податке. Најпре је посматрана разлика у броју преступа у вези са наркотицима пријављених полицијским станицама број 36055001600 и 36055009500, а затим је посматрана разлика у броју пријављених случајева проституције полицијским станицама број 36055001600 и 36055006000. Да би се приказале предности и мане $CSDLINAR(p)$ модела, извршено је његово поређење са неким другим, постојећим, моделима, и то са $CINARS(p)$ моделом који је уведен у раду Zhang, Wang и Zhu (2010), са $SDLINAR$ моделом првог реда, који је представљен у претходној глави и са $CSDLINAR(2)$ моделом. Као конкурентни модели, изабрани су и модели првог и другог реда да би се, у конкретном случају, илустровало побољшање приликом повећања реда модела. Метод који је коришћен за добијање оцена непознатих параметара је Yule-Walker-ов метод.

У табели 4.9 су приказане реализоване вредности оцена параметара, као и вредност RMSE статистике, која представља оцену квалитета апроксимације за сваки од изабраних модела. Такође, на слици 4.9, приказане су трајекторије реализација посматраних појава, као и одговарајући $CSDLINAR(p)$ модели и аутокорелационе функције добијене на основу реализованих узорака.

На основу RMSE критеријума, може се рећи да је, у односу на друге посматране моделе, за моделирање посматраних података прикладнији $CSDLINAR(3)$ модел. На слици 4.9 се може видети да $CSDLINAR$ модел добро прати понашање посматраних података. Такође, треба нагласити да се, захваљујући сличном облику условних математичких очекивања, $CINARS$ и $CSDLINAR$ модели разликују такорећи у нијансама и да се трајекторије ова два модела разликују у веома малом броју тачака.

Табела 4.9: Вредности оцењених параметара и RMSE критеријума $CINARS(3)$, $SDLINAR(1)$, $CSDLINAR(2)$ и $CSDLINAR(3)$ модела

	Наркотици		Проституција	
Модел	Оцене параметара	RMSE	Оцене параметара	RMSE
$CINARS(3)$	$\hat{\alpha}_1 = 0,172$	3,265	$\hat{\alpha}_1 = 0,476$	5,822
	$\hat{\alpha}_2 = 0,140$		$\hat{\alpha}_2 = -0,016$	
	$\hat{\alpha}_3 = 0,298$		$\hat{\alpha}_3 = 0,168$	
	$\hat{\mu}_\varepsilon = -0,230$		$\hat{\mu}_\varepsilon = 1,829$	
$SDLINAR(1)$	$\hat{\mu} = 1,797$	3,647	$\hat{\mu} = 6,209$	5,901
	$\hat{\nu} = 2,411$		$\hat{\nu} = 1,293$	
	$\hat{\alpha} = 0,643$		$\hat{\alpha} = 0,578$	
	$\hat{\beta} = 0,638$		$\hat{\beta} = 0,564$	
$CSDLINAR(2)$	$\hat{\mu} = 1.751$	3.320	$\hat{\mu} = 6.173$	5.897
	$\hat{\nu} = 2.446$		$\hat{\nu} = 1.431$	
	$\hat{\alpha} = 0.349$		$\hat{\alpha} = 0.553$	
	$\hat{\beta} = 0.376$		$\hat{\beta} = 0.321$	
	$\hat{\phi}_1 = 0.502$		$\hat{\phi}_1 = 0.870$	
	$\hat{\phi}_2 = 0.498$		$\hat{\phi}_2 = 0.130$	
$CSDLINAR(3)$	$\hat{\mu} = 1,751$	3,255	$\hat{\mu} = 6,173$	5,771
	$\hat{\nu} = 2,446$		$\hat{\nu} = 1,431$	
	$\hat{\alpha} = 0,502$		$\hat{\alpha} = 0,625$	
	$\hat{\beta} = 0,522$		$\hat{\beta} = 0,492$	
	$\hat{\phi}_1 = 0,280$		$\hat{\phi}_1 = 0,718$	
	$\hat{\phi}_2 = 0,252$		$\hat{\phi}_2 = 0,100$	
	$\hat{\phi}_3 = 0,468$		$\hat{\phi}_3 = 0,182$	



Слика 4.9: Разлика у броју случајева проституције пријављених полицијским станицама број 36055001600 и 36055006000 (a1) и броју преступа у вези са наркотицима пријављених полицијским станицама број 36055001600 и 36055009500 (a2) и њихове аутокорелационе функције (a2, б2), респективно

Глава 5

Идентификација и предвиђање латентних компоненти

Као што је до сада више пута речено, временски низови представљени у овом раду, временски низови са симетричном или асиметричном дискретном Лапласовом маргиналном расподелом, могу се, у расподели, представити у облику разлике два независна временска низа са ненегативним вредностима, $Z_n \stackrel{d}{=} X_n - Y_n$. Та чињеница је, на неки начин, представљала полазни степеник у формирању $INAR$ временских низова са дискретном Лапласовом расподелом као маргиналном. Такође, може се видети из дефиниције модела, два $INAR$ временска низа са геометријском маргиналном расподелом чине основу читавог концепта.

Такође, приказано је и како се временски низ са дискретном Лапласовом маргиналном расподелом, $\{Z_n\}$, може представити као разлика своје ненегативне компоненте $\{Z_n^+\}$ и „непозитивне" компоненте $\{Z_n^-\}$, $Z_n = Z_n^+ - Z_n^-$. На два начина представљен временски низ $\{Z_n\}$ био је инспирација да се постави питање да ли је могуће повезати његове латентне компоненте $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ са компонентама $\{Z_n^+\}$ и $\{Z_n^-\}$.

У делу који следи биће представљене и анализиране могућности да се на основу реализација временског низа $\{Z_n\}$, самим тим и реализација случајних низова $\{Z_n^+\}$ и $\{Z_n^-\}$, идентификују латентне компоненете, тј. случајни низови $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$, који, у супротном смеру један другом, утичу на вредности временског низа $\{Z_n\}$. У основи ових резултата се налази израз за израчунавање математичког очекивања случајне променљиве X_{n+k} условљене реализацијом случајне променљиве Z_n, $E(X_{n+k}|Z_n)$. Ова формула је, између осталих анализираних особина, изведена за сваки од посматраних временских низова, било са симетричном, било са асиметричном дискретном Лапласовом расподелом, првог или вишег реда. Такође, поменуто условно математичко очекивање ће бити изведено и за случај $TINAR(1)$ модела, представљених у раду Freeland (2010) и биће приказана идентификација и предвиђање латентних компоненти и за ову врсту временских низова. Изрази за идентификацију и прогнозу латентних компоненти биће функције случајних низова $\{Z_n\}$, као и параметара маргиналних расподела ових низова. С обзиром на то да метод условних најмањих квадрата има недостатак, у смислу немогућности оцењивања параметара μ и ν, приликом оцењивања непознатих параметара ових модела, биће коришћене оцене добијене Yule-Walker-овим методом, приказане претходно за сваки од проучаваних модела временских низова. Све оцене ће бити израчунате на основу случајног узорка одговарајућег временског низа $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_N)$ обима N.

За сваки тип временских низова, осим израза за идентификацију и предвиђање латентних компоненти, биће приказани и резултати симулација, на основу којих се, адекватним мерама, може проценити квалитет моделирања. Такође, биће приказане и примене ове врсте моделирања на подацима из реалног живота.

5.1 $DLINAR(1)$ модел

У погледу идентификације и предвиђања латентних компоненти $DLINAR(1)$ временског низа, од користи ће бити теорема 2.1.2, односно њен доказ. На аналоган начин као у доказу ове теореме, може се показати да је

$$E(X_{n+k}^r|Z_n = z) = \begin{cases} \frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2} \sum\limits_{y=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2y} E(X_{n+k}^r|X_n = y+z, Y_n = y), & z \geq 0, \\ \frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2} \sum\limits_{x=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{2x} E(X_{n+k}^r|X_n = x, Y_n = x-z), & z < 0. \end{cases}$$

Користећи особине условног математичког очекивања $NGINAR(1)$ временских низова (за случај када је $r = 1$), након сумирања већ познатих редова, добија се да је

$$E(X_{n+k}|Z_n = z) = \alpha^k \frac{\mu^2}{1+2\mu} + (1-\alpha^k)\mu + \alpha^k Z_n^+.$$

На основу добијеног, лако се изводе изрази за потребна условна очекивања,

$$\begin{aligned} E(X_n|Z_n = z) &= \frac{\mu^2}{1+2\mu} + Z_n^+, \\ E(Y_n|Z_n = z) &= \frac{\mu^2}{1+2\mu} + Z_n^- \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}|Z_n = z) &= \alpha\frac{\mu^2}{1+2\mu} + (1-\alpha)\mu + \alpha Z_n^+, \\ E(Y_{n+1}|Z_n = z) &= \alpha\frac{\mu^2}{1+2\mu} + (1-\alpha)\mu + \alpha Z_n^-. \end{aligned}$$

И коначно, формуле за моделирање латентних компоненти су

$$\begin{aligned} \hat{X}_n &= \frac{\hat{\mu}^2}{1+2\hat{\mu}} + Z_n^+, n \geq 1, \\ \hat{Y}_n &= \frac{\hat{\mu}^2}{1+2\hat{\mu}} + Z_n^-, n \geq 1, \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

односно,

$$\begin{aligned} \hat{X}_{n+1} &= \hat{\alpha}\frac{\hat{\mu}^2}{1+2\hat{\mu}} + (1-\hat{\alpha})\hat{\mu} + \hat{\alpha} Z_n^+, n \geq 1, \\ \hat{Y}_{n+1} &= \hat{\alpha}\frac{\hat{\mu}^2}{1+2\hat{\mu}} + (1-\hat{\alpha})\hat{\mu} + \hat{\alpha} Z_n^-, n \geq 1. \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

5.1.1 Симулација

Да би се провериле апроксимативне особине модела за идентификацију и предвиђање латентних компоненти $DLINAR(1)$ модела, извршена је симулација, на већ раније описани начин, по 1000 узорака обима $N = 5000$, за сваки од два независна $NGINAR(1)$ случајна низа. На основу тих вредности генерисане су, као разлика два независна $NGINAR(1)$ случајна низа, реализације $DLINAR(1)$ временског низа. Користећи добијене реализације временских низова, оцењени су параметри, μ и α, посматраног модела. За сваки добијени низ израчунате су Yule-Walker-ове оцене параметара модела, а затим је, уз помоћ оцењених параметара и добијених реализација $DLINAR(1)$ временског низа, извршено моделирање латентних компоненти, тј. $NGINAR(1)$ временских низова. Тачније, коришћењем израза (5.1.1), извршена је идентификација, односно, реконструкција, а коришћењем израза (5.1.2), извршено је једнокорачно предвиђање латентних $NGINAR(1)$ компоненти. Квалитет моделирања је оцењиван кореном средњеквадратне грешке, односно, $RMSE$ статистиком. С обзиром на то да је квалитет и понашање оцена параметара анализирано раније и притом су потврђене строга постојаност и асимптотска нормалност, у овом делу добијене оцене неће бити у фокусу, већ само погодност модела за идентификацију и предвиђање латентних компоненти. Због тога ће, у оквиру резултата моделирања, бити приказане само средње вредности и стандардне девијације реализација оцена параметара, добијених на основу 1000 узорака обима 5000. Вредност статистике $RMSE$ је рачуната за сваки од 1000 узорака, али биће приказане само минималне и максималне забележене вредности ове статистике. Симулирано је четири модела са различитим параметрима. За први модел, вредности параметара су $\mu = 0,6$ и $\alpha = 0,2$. За други модел коришћени су параметри $\mu = 0,8$ и $\alpha = 0,3$. У трећем моделу, параметри су $\mu = 1,2$ и $\alpha = 0,2$. И коначно, у четвртом, изабрани су параметри $\mu = 2$ и $\alpha = 0,4$. Резултати моделирања су приказани у табелама 5.1 и 5.2.

Може се приметити да се, на овај начин, $NGINAR(1)$ латентне компоненте $DLINAR(1)$ временских низова, могу добро моделирати. У прилог овој тврдњи говоре мале вредности $RMSE$ статистике. Такође, приметно је и то да је опсег вредности реализација ових статистика прилично мали. Код предвиђања $NGINAR(1)$ компоненти, реализоване вредности $RMSE$ статистика су, разумљиво, нешто већи него у случају реконструкције, али су и даље у неком разумно малом опсегу. На слици 5.1 се могу видети реа-

Табела 5.1: Средње вредности и стандардне девијације реализованих вредности оцена параметара μ и α $DLINAR(1)$ модела и минималне и максималне реализоване вредности $RMSE$ статистике као критеријума ваљаности модела за реконструкцију

$\mu = 0,6$ $\alpha = 0,2$				
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	0,600 (0,016)	0,200 (0,015)	0,422	0,511

$\mu = 0,8$ $\alpha = 0,3$				
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	0,800 (0,021)	0,299 (0,016)	0,545	0,663

$\mu = 1,2$ $\alpha = 0,2$				
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	1,200 (0,027)	0,200 (0,015)	0,809	0,951

$\mu = 2$ $\alpha = 0,4$				
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	2,000 (0,049)	0,400 (0,015)	1,136	1,299

Табела 5.2: Средње вредности и стандардне девијације реализованих вредности оцена параметара μ и α $DLINAR(1)$ модела и минималне и максималне реализоване вредности $RMSE$ статистике као критеријума ваљаности модела за предвиђање

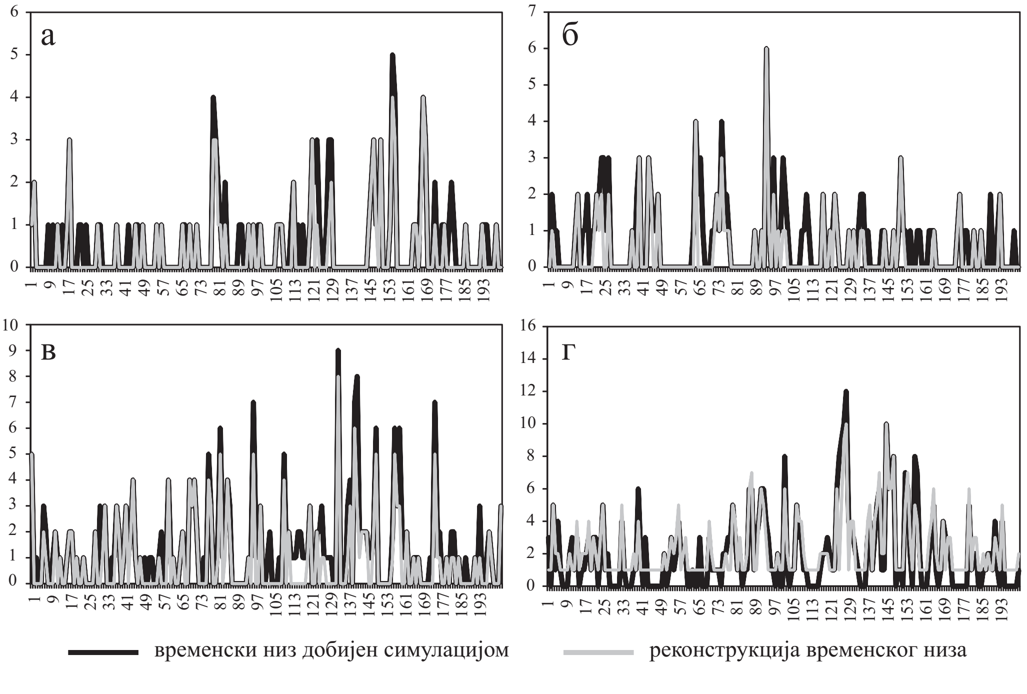
$\mu = 0,6$ $\alpha = 0,2$				
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	0,600 (0,016)	0,200 (0,015)	0,985	1,130

$\mu = 0,8$ $\alpha = 0,3$				
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	0,800 (0,021)	0,299 (0,016)	1,129	1.279

$\mu = 1,2$ $\alpha = 0,5$				
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	1,200 (0,027)	0,200 (0,015)	1,489	1,739

$\mu = 2$ $\alpha = 0,4$				
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	2,000 (0,049)	0,400 (0,015)	2,162	2,519

лизације симулираних низова све четири комбинације параметара и њихове одговарајуће моделе за реконструкцију. С обзиром на немогућност графичког приказа целог узорка, приказани су само иницијални подузорци обима 200, за сваки од посматраних модела. На слици се може уочити да модели за реконструкцију добро „фитују" симулирану реализацију. Међутим, код четвртог примера се може приметити известан недостатак. Наиме, како се на основу израза (5.1.1) види, минимална вредност модела је $\hat{\mu}^2/(1+2\hat{\mu})$. Да би модел био способан да достигне све вредности $NGINAR(1)$ компоненте, потребно је да претходно поменута граница, $\hat{\mu}^2/(1+2\hat{\mu})$, буде мања од $0,5$, не би ли приликом заокругљивања могла да достигне и вредност 0. То ће бити могуће уколико је вредност параметра $\hat{\mu}$ мања од $(1+\sqrt{3})/2$. У супротном, постојаће одређени појас, за ове моделе, недостижних вредности.



Слика 5.1: Симулирани $DLINAR(1)$ низови и њихове реконструкције

Што се овог проблема, у случају модела за предвиђање тиче, у складу са изразом (5.1.2), добија се за нијансу сложенији услов који параметри морају да задовоље не би ли модел могао да има вредности у целом скупу $\mathbb{N}_0$, ненегативних целих бројева,

$$\frac{2\mu^2}{1+2\mu} < \frac{1}{2-\alpha}.$$

5.1.2 Примена на реалним подацима

Формуле за реконструкцију латентних компоненти су примењене на постојеће реалне податке. На основу разлике броја пријављених крађа моторних возила станицама 1608 и 2811, добијени су модели низова који представљају податке за сваку станицу посебно. На сликама 5.2 и 5.3 су приказани оригинални подаци и резултат моделирања. Може се видети да моделирани подаци прилично добро прате трајекторију реалних вредности. Вредност $RMSE$ статистике износи 1,690. С обзиром на то да се ради о симетричном моделу, $RMSE$ вредност је иста за обе компоненте. Узимајући у обзир распон вредности података о пријављеним крађама моторних возила овим двема полицијским станицама, може се рећи да је примењен адекватан статистички модел.

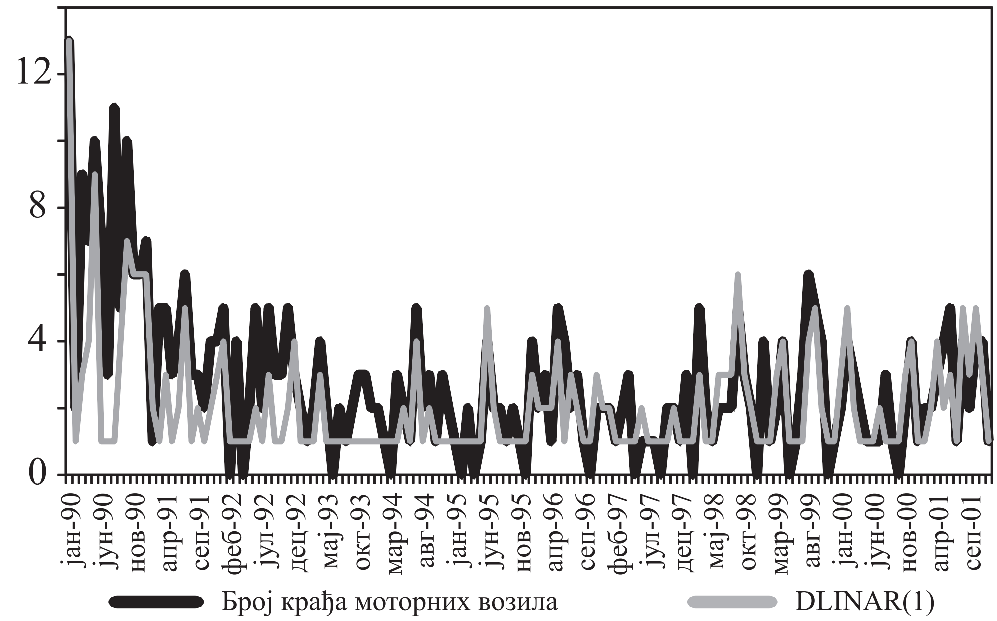
5.2 $SDLINAR(1)$ модел

И у случају $INAR$ временског низа са асиметричном дискретном Лапласовом маргиналном расподелом, на сличан начин као што је то урађено у претходном, може се доћи до формула за моделирање латентних компоненти. Решење тог проблема лежи у доказу теореме 3.3.3, изразу 3.3.3 и теореми 3.3.5.

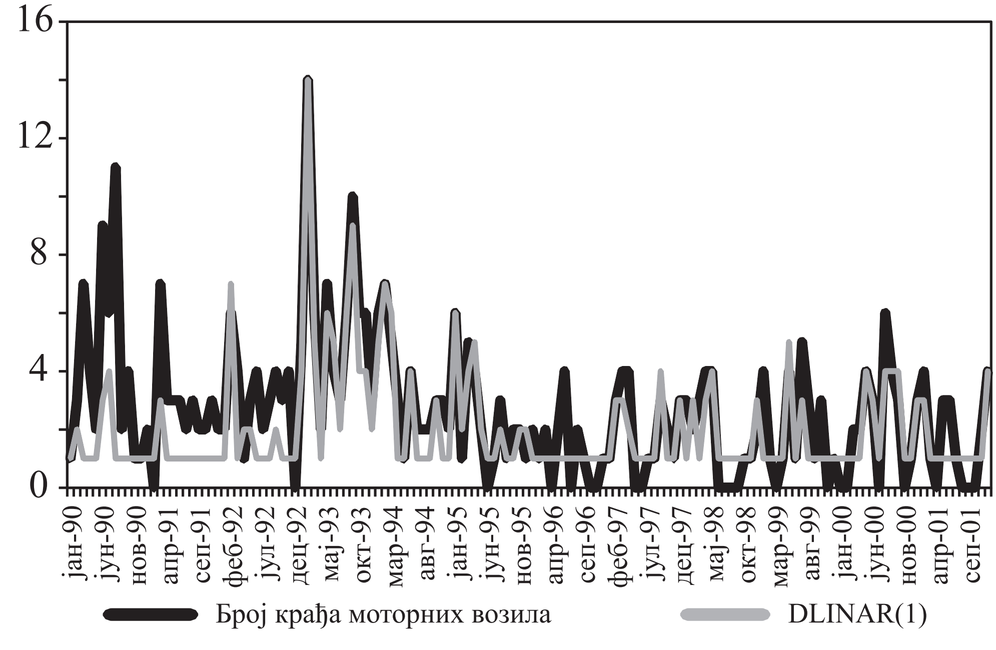
Наиме, важи следећа веза између временских низова $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ и низова $\{Z_n^+\}$ и $\{Z_n^-\}$

$$\begin{aligned} E(X_{n+k}|Z_n) &= \alpha^k \frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + (1-\alpha^k)\mu + \alpha^k Z_n^+, \\ E(Y_{n+k}|Z_n) &= \beta^k \frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + (1-\beta^k)\nu - \beta^k Z_n^-. \end{aligned}$$

Ове две једнакости омогућавају да се, за $k=0$, добију формуле по којима би било могуће реконструисати вредности латентних



Слика 5.2: Број крађа моторних возила пријављених полицијској станици број 1608 и реконструкција тог низа



Слика 5.3: Број крађа моторних возила пријављених полицијској станици број 2811 и реконструкција тог низа

компоненти, временских низова $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$

$$\begin{aligned}\hat{X}_n &= \frac{\hat{\mu}\hat{\nu}}{1+\hat{\mu}+\hat{\nu}} + Z_n^+, n \geq 1,\\ \hat{Y}_n &= \frac{\hat{\mu}\hat{\nu}}{1+\hat{\mu}+\hat{\nu}} + Z_n^-, n \geq 1. \qquad (5.2.1)\end{aligned}$$

У случају када је $k = 1$, добијају се формуле за једнокорачно предвиђање вредности латентних компоненти, временских низова $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$, на основу реализација временског низа $\{Z_n\}$

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+1} &= \hat{\alpha}\frac{\hat{\mu}\hat{\nu}}{1+\hat{\mu}+\hat{\nu}} + (1-\hat{\alpha})\hat{\mu} + \hat{\alpha}Z_n^+, n \geq 1,\\ \hat{Y}_{n+1} &= \hat{\beta}\frac{\hat{\mu}\hat{\nu}}{1+\hat{\mu}+\hat{\nu}} + (1-\hat{\beta})\hat{\nu} + \hat{\beta}Z_n^-, n \geq 1. \qquad (5.2.2)\end{aligned}$$

5.2.1 Симулација

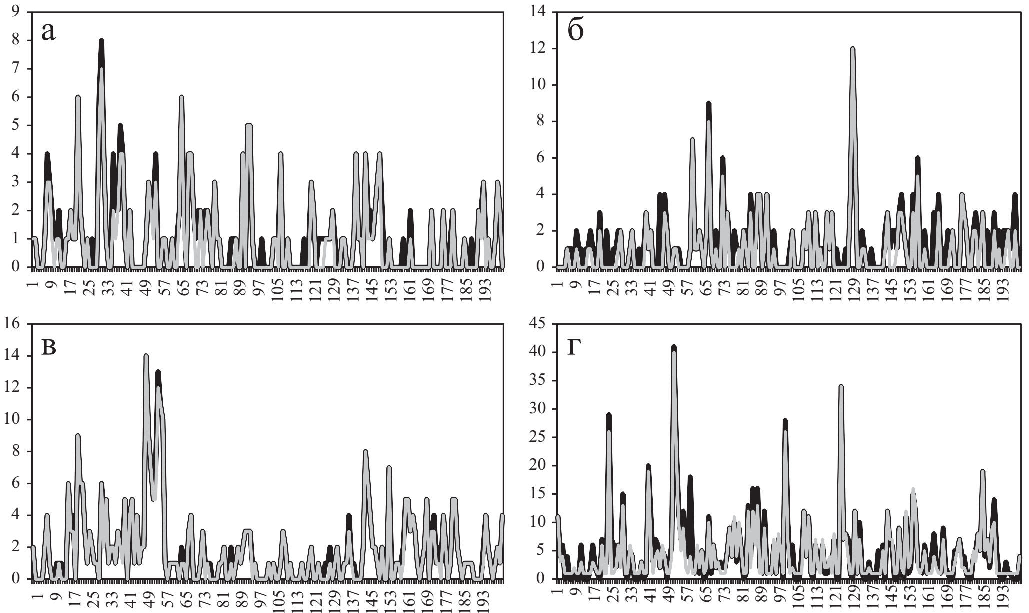
Као и у претходно описаним симулацијама за симетрични модел, и у случају асиметричног $SDLINAR(1)$ модела је извршена симулација, најпре два независна $NGINAR(1)$ временска низа, а затим је на основу тако добијених реализација, као разлика два независна низа добијена и реализација временског низа са асиметричном дискретном Лапласовом маргиналном расподелом. Симулирано је 1000 узорака обима $N = 5000$. Симулиране су вредности за четири модела са различитим комбинацијама вредности параметара. За први модел су изабрани параметри $\mu = 1$, $\nu = 0,5$, $\alpha = 0,4$ и $\beta = 0,2$. За други модел су коришћене вредности $\mu = 1,2$, $\nu = 1$, $\alpha = 0,1$ и $\beta = 0,2$. У трећем су параметри били $\mu = 2$, $\nu = 0,2$, $\alpha = 0,5$ и $\beta = 0,1$. Четврти модел је симулиран са параметрима $\mu = 2$, $\nu = 4$, $\alpha = 0,5$ и $\beta = 0,2$. На основу симулираних вредности, за сваки узорак су оцењени параметри. Коришћене су Yule-Walker-ове оцене и то $\hat{\mu}^{YW_3}$, $\hat{\nu}^{YW_3}$, $\hat{\alpha}^{YW_3}$ и $\hat{\beta}^{YW_3}$, дате у теореми 3.4.3. На основу добијених реализација $SDLINAR(1)$ временскиог низа и добијених оцена параметара, коришћењем израза (5.2.1), извршена је реконструкција латентних компоненти. Помоћу израза (5.2.2), извршено је једнокорачно предвиђање латентних компоненти.

Као мера квалитета моделирања, и у овом случају, је коришћен корен средњеквадратне грешке, $RMSE$. Као ни код симетричног модела, ни у овом случају акценат није на вредностима оцена, тако да ће бити приказани резултати само на узорцима обима 5000.

Резултати моделирања су приказани у табелама 5.3 и 5.4.

Модели добијени у овом случају представљају добар начин за реконструкцију и предвиђање вредности латентних компоненти. Вредности реализација $RMSE$ статистике су, у односу на распон вредности симулираних низова, релативно мале и притом је интервал кретања $RMSE$ вредности доста узак. Такође, у прилог квалитета моделирања иду и мали распони реализација $RMSE$ статистика које оцењују грешку приликом једнокорачног предвиђања. Сасвим је очекивано да те вредности буду веће од одговарајућих за реконструкцију. Међутим, у односу на распон вредности временског низа, то је и даље на задовољавајућем нивоу.

На слици 5.4 се, на први поглед, може приметити још боље



Слика 5.4: Симулирани $SDLINAR(1)$ низови и њихове реконструкције

пријањање моделираних вредности на симулиране податке, него што је то био случај код симетричног модела. Ова слика је још

Табела 5.3: Средње вредности и стандардне девијације реализованих вредности оцена параметара μ, ν, α и β $SDLINAR(1)$ модела и минималне и максималне реализоване вредности $RMSE$ статистике као критеријума ваљаности модела за реконструкцију

$\mu=1\ \nu=0,5\ \alpha=0,4\ \beta=0,2$						
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	0,999 (0,037)	0,499 (0,019)	0,373 (0,019)	0,270 (0,021)	0,476	0,591
$\mu=1,2\ \nu=1\ \alpha=0,1\ \beta=0,2$						
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	1,200 (0,033)	1,000 (0,038)	0,155 (0,017)	0,220 (0,022)	0,751	0,873
$\mu=2\ \nu=0,2\ \alpha=0,5\ \beta=0,1$						
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	1,996 (0,067)	0,200 (0,011)	0,487 (0,017)	0,160 (0,029)	0,347	0,434
$\mu=2\ \nu=4\ \alpha=0,5\ \beta=0,2$						
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	1,997 (0,072)	3,999 (0,095)	0,431 (0,022)	0,216 (0,016)	1,446	1,694

Табела 5.4: Средње вредности и стандардне девијације реализованих вредности оцена параметара μ, ν, α и β $SDLINAR(1)$ модела и минималне и максималне реализоване вредности $RMSE$ статистике као критеријума ваљаности модела за предвиђање

$\mu=1\ \nu=0,5\ \alpha=0,4\ \beta=0,2$						
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	0,999 (0,037)	0,499 (0,019)	0,373 (0,019)	0,270 (0,021)	0,881	1,858
$\mu=1,2\ \nu=1\ \alpha=0,1\ \beta=0,2$						
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	1,200 (0,033)	1,000 (0,038)	0,155 (0,017)	0,220 (0,022)	1,074	1,745
$\mu=2\ \nu=0,2\ \alpha=0,5\ \beta=0,1$						
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	1,996 (0,067)	0,200 (0,011)	0,487 (0,017)	0,160 (0,029)	0,369	2,346
$\mu=2\ \nu=4\ \alpha=0,5\ \beta=0,2$						
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	1,997 (0,072)	3,999 (0,095)	0,431 (0,022)	0,216 (0,016)	2,135	4,025

једна потврда квалитета посматране реконструкције. С обзиром на немогућност приказаивања целих узорака обима 5000, приказани су само иницијални подузорци обима 200.

Да би модел за реконструкцију могао и теоријски да обезбеди све вредности у скупу целих, ненегативних бројева, потребно је да важи да је $2\hat{\mu}\hat{\nu} < 1 + \hat{\mu} + \hat{\nu}$. У случају једнокорачног предвиђања латентних компоненти потребна су два услова, један за латентну компоненту $\{X_n\}$, други за $\{Y_n\}$. То су следећи услови,

$$(1 + \hat{\mu} + \hat{\nu})(1 - 2\hat{\mu}) + 2\hat{\alpha}\hat{\mu}(1 + \hat{\mu}) > 0,$$

$$(1 + \hat{\mu} + \hat{\nu})(1 - 2\hat{\nu}) + 2\hat{\beta}\hat{\nu}(1 + \hat{\nu}) > 0.$$

5.2.2 Примена на реалним подацима

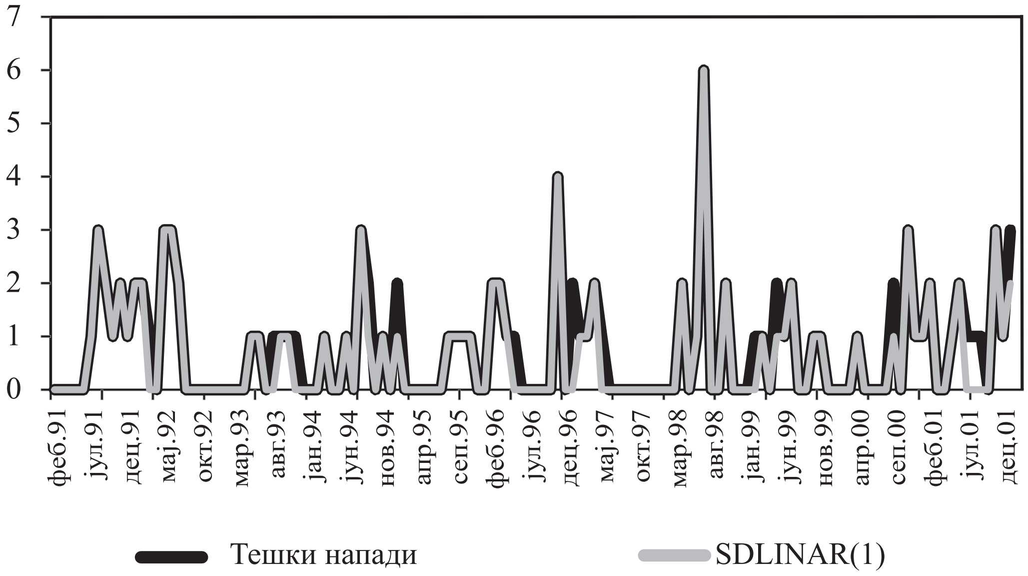
Добијене формуле су тестиране на реалним подацима. На основу разлике у броју тешких напада пријављених полицијским станицама 3605501700 и 3605508702, добијен је број пријављених напада само станици 3605501700. Прави и моделирани подаци су приказани на слици 5.5. Вредност $RMSE$ статистике износи 0,369.

Такође, на основу разлике у броју насилних кривичних дела пријављених полицијским станицама 3605508702 и 3605501400, добијен је низ вредности које представљају број насилних кривичних дела пријављених само станици 3605501400. Стварне и моделиране вредности су упоређене на слици 5.6. Реализована вредност $RMSE$ статистике износи 1,034.

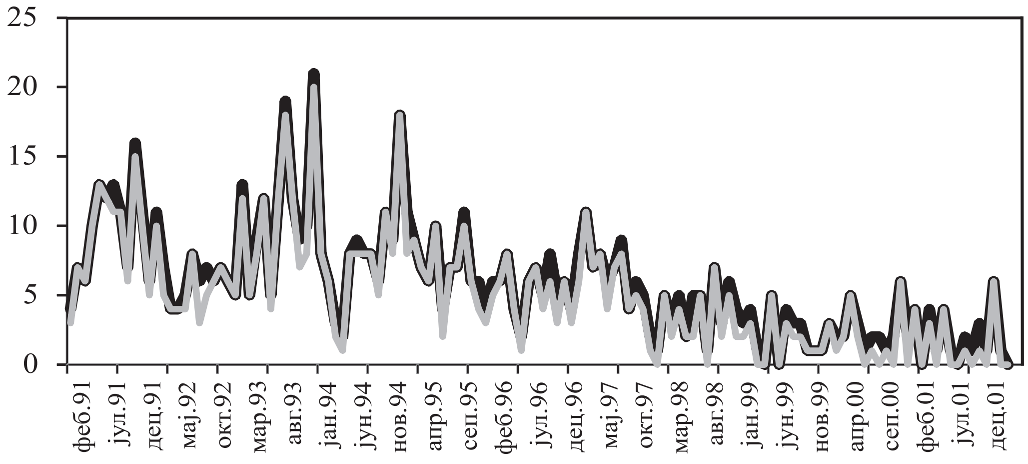
И на једној и на другој слици се примећује скоро идеално поклапање модела са подататцима о посматраним кривичним делима. Вредности корена средњеквадратне грешке су, у односу на вредности оригиналних података веома ниске, што квалификује овај модел за успешно моделирање латентних компоненти.

5.3 $CSDLINAR(p)$ модел

Чињеница да се аутокорелационе фунције $CGINAR(p)$ временских низова $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ могу изразити у терминима временског низа $\{Z_n\}$ и изрази за математичко очекивање случајних променљивих X_{n+k} и Y_{n+k}, условљених прошлошћу временског низа Z_n,



Слика 5.5: Број тешких напада пријављен, на месечном нивоу, полицијској станици број 3605501700 и његова реконструкција



Слика 5.6: Број насилних кривичних дела пријављених, на месечном нивоу, полицијској станици број 3605501400 и његова реконструкција

H_n, изведени у доказу примедбе 4.2.1, отвара могућност идентификације и реконструкције и, евентуално, предвиђања латентних компоненти $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ само на основу реализација временског низа $\{Z_n\}$. Наиме, математичко очекивање случајних променљивих X_{n+k} и $Y_{n+k,}$ условљених прошлошћу временског низа Z_n су

$$\begin{aligned} E(X_{n+k}|H_n) &= (1-\alpha^k)\mu + \alpha^k \frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + \alpha^k \sum_{i=1}^{p} \phi_i Z^+_{n+1-i}, \\ E(Y_{n+k}|H_n) &= (1-\beta^k)\nu + \beta^k \frac{\mu\nu}{1+\mu+\nu} + \beta^k \sum_{i=1}^{p} \phi_i Z^-_{n+1-i}. \end{aligned}$$

За $k = 0$, добија се формула која омогућује реконструкцију латентних компоненти на основу реализације временског низа $\{Z_n\}$,

$$\begin{aligned} \hat{X}_n &= \frac{\hat{\mu}\hat{\nu}}{1+\hat{\mu}+\hat{\nu}} + \sum_{i=1}^{p} \hat{\phi}_i Z^+_{n+1-i}, n \geq p, \\ \hat{Y}_n &= \frac{\hat{\mu}\hat{\nu}}{1+\hat{\mu}+\hat{\nu}} + \sum_{i=1}^{p} \hat{\phi}_i Z^-_{n+1-i}, n \geq p. \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

За $k = 1$, добија се формула којом се могу предвидети вредности латентних компоненти за један корак у будућности,

$$\begin{aligned} \hat{X}_{n+1} &= (1-\hat{\alpha})\hat{\mu} + \hat{\alpha} \frac{\hat{\mu}\hat{\nu}}{1+\hat{\mu}+\hat{\nu}} + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^{p} \hat{\phi}_i Z^+_{n+1-i}, n \geq p, \\ \hat{Y}_{n+1} &= (1-\hat{\beta})\hat{\nu} + \hat{\beta} \frac{\hat{\mu}\hat{\nu}}{1+\hat{\mu}+\hat{\nu}} + \hat{\beta} \sum_{i=1}^{p} \hat{\phi}_i Z^-_{n+1-i}, n \geq p. \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

5.3.1 Симулација

Симулацијама комбинованог модела са асиметричном дискретном Лапласовом маргиналном расподелом је, сада већ традиционално, извршена тако што су најпре симулирана два независна $CNGINAR(2)$ временска низа, а затим је на основу њихових реализација, као разлика два независна низа добијена и реализација $CSDLINAR$ временског низа реда два. И у овом случају је симулирано, за сваки од четири модела, по 1000 узорака обима $N = 5000$.

Комбинације правих вредности параметара које су изабране да би што боље приказале примењљивост модела су изабране на следећи начин, за први модел су изабрани параметри $\mu = 0,5$, $\nu = 0,8$, $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,5$, $\phi_1 = 0,3$ и $\phi_2 = 0,7$. За други модел су изабране вредности $\mu = 1,2$, $\nu = 1$, $\alpha = 0,1$ и $\beta = 0,2$, $\phi_1 = 0,6$ и $\phi_2 = 0,4$. У трећем су за параметре коришћене вредности $\mu = 2$, $\nu = 0,2$, $\alpha = 0,5$ и $\beta = 0,1$, $\phi_1 = 0,2$ и $\phi_2 = 0,8$. Четврти модел је симулиран са параметрима $\mu = 2$, $\nu = 4$, $\alpha = 0,5$ и $\beta = 0,2\phi_1 = 0,5$ и $\phi_2 = 0,5$. Користећи добијене реализације, оцењени су параметри за сваки узорак. Коришћене су Yule-Walker-ове оцене и то дате у теореми 4.3.2. Након тога су, за сваки узорак, на основу израза (5.3.1), реконструисане две латентне компоненте. Користећи израз (5.2.2), извршено је једнокорачно предвиђање латентних компоненти.

Корен средњеквадратне грешке, $RMSE$, је, и овога пута, коришћен као мера квалитета „фитовања”. Резултати добијени на узорцима обима 5000 су приказани у табелама 5.5 и 5.6.

Као што је и раније потврђено, добијене оцене се углавном подударају са правим вредностима параметара. Реализоване вредности $RMSE$ статистика су прилично мале у односу на реализоване вредности временског низа, тако да се може рећи да се овај модел може искористити за поуздану реконструкцију латентних компоненти. Што се модела за прогнозу тиче, ту су реализоване вредности $RMSE$ статистика нешто више, али је распон и даље веома мали, што указује на извесну стабилност оваквог начина моделирања. На слици 5.7 се може видети веома добро поклапање реконструисаног модела и реализације која је добијена симулацијом. И у овом случају је приказан само иницијални подузорак обима 200. Код четвртог модела се може уочити да је минимална вредност коју моделирани низ може добити 1, тј. вредност 0 остаје ван скупа могућих реализованих вредности. Отуда и нешто веће реализоване вредности $RMSE$ статистике код четвртог модела. Да се то не би дешавало потребно је да приликом реконструкције, за реализоване оцене параметара важи $2\hat{\mu}\hat{\nu} < 1 + \hat{\mu} + \hat{\nu}$. У случају једнокорачног предвиђања латентних компоненти потребно је да важи

$$(1 + \hat{\mu} + \hat{\nu})(1 - 2\hat{\mu}) + 2\hat{\alpha}\hat{\mu}(1 + \hat{\mu}) > 0,$$

Табела 5.5: Средње вредности и стандардне девијације реализованих вредности оцена параметара μ, ν, α, β, ϕ_1 и ϕ_2 $CSDLINAR(2)$ модела и минималне и максималне реализоване вредности $RMSE$ статистике као критеријума ваљаности модела за реконструкцију

$\mu=0,5$ $\nu=0,8$ $\alpha=0,3$ $\beta=0,5$ $\phi_1=0,3$ $\phi_2=0,7$								
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$		
5000	0,500 (0,022)	0,800 (0,029)	0,261 (0,027)	0,367 (0,026)	0,303 (0,037)	0,697 (0,037)	0,435	0,550
$\mu=1,2$ $\nu=1$ $\alpha=0,1$ $\beta=0,2$ $\phi_1=0,6$ $\phi+2=0,4$								
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$		
5000	1,199 (0,031)	0,998 (0,030)	0,090 (0,021)	0,153 (0,022)	0,602 (0,082)	0,394 (0,082)	0,753	0,871
$\mu=2$ $\nu=0,2$ $\alpha=0,5$ $\beta=0,1$ $\phi_1=0,2$ $\phi_2=0,8$								
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$		
5000	1,998 (0,069)	0,200 (0,037)	0,489 (0,023)	0,091 (0,026)	0,206 (0,092)	0,794 (0,092)	0,357	0,446
$\mu=2$ $\nu=4$ $\alpha=0,5$ $\beta=0,2$ $\phi_1=0,5$ $\phi_2=0,5$								
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$		
5000	2,000 (0,084)	3,998 (0,085)	0,362 (0,029)	0,201 (0,020)	0,501 (0,039)	0,496 (0,039)	1,446	1,720

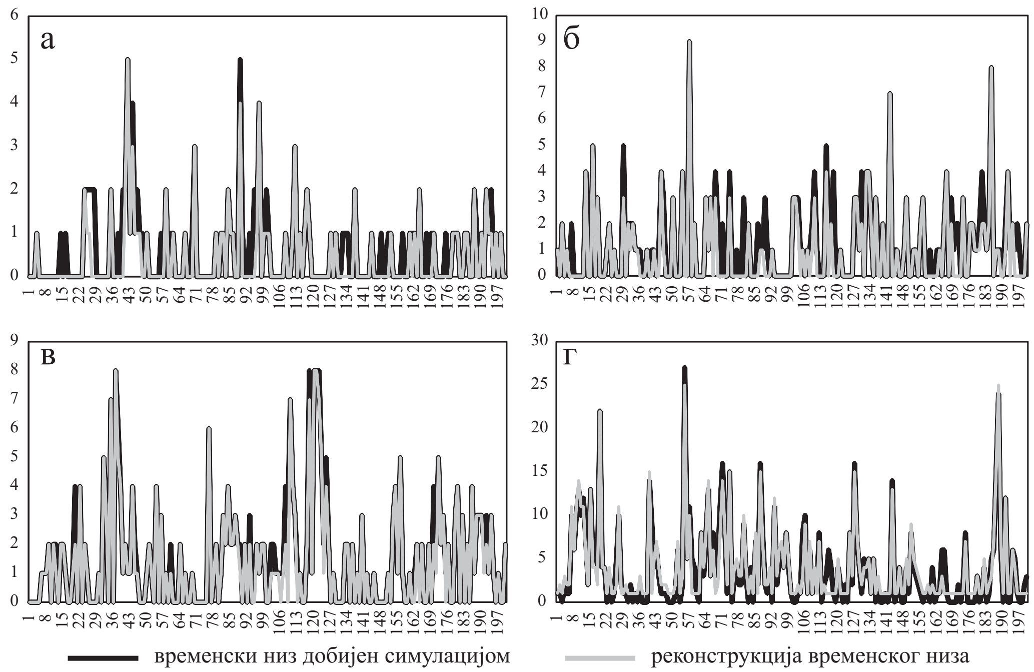
Табела 5.6: Средње вредности и стандардне девијације реализованих вредности оцена параметара μ, ν, α, β, ϕ_1 и ϕ_2 $CSDLINAR(2)$ модела и минималне и максималне реализоване вредности $RMSE$ статистике као критеријума ваљаности модела за предвиђање

$\mu=0,5$ $\nu=0,8$ $\alpha=0,3$ $\beta=0,5$ $\phi_1=0,3$ $\phi_2=0,7$								
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$		
5000	0,500 (0,022)	0,800 (0,029)	0,261 (0,027)	0,367 (0,026)	0,303 (0,037)	0,697 (0,037)	0,889	1,436
$\mu=1,2$ $\nu=1$ $\alpha=0,1$ $\beta=0,2$ $\phi_1=0,6$ $\phi+2=0,4$								
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$		
5000	1,199 (0,031)	0,998 (0,030)	0,090 (0,021)	0,153 (0,022)	0,602 (0,082)	0,394 (0,082)	1,494	2,159
$\mu=2$ $\nu=0,2$ $\alpha=0,5$ $\beta=0,1$ $\phi_1=0,2$ $\phi_2=0,8$								
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$		
5000	1,998 (0,069)	0,200 (0,037)	0,489 (0,023)	0,091 (0,026)	0,206 (0,092)	0,794 (0,092)	0,531	3,058
$\mu=2$ $\nu=4$ $\alpha=0,5$ $\beta=0,2$ $\phi_1=0,5$ $\phi_2=0,5$								
N	$\hat{\mu}^{YW}$	$\hat{\nu}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$\hat{\beta}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$		
5000	2,000 (0,084)	3,998 (0,085)	0,362 (0,029)	0,201 (0,020)	0,501 (0,039)	0,496 (0,039)	2,401	5,560

за латентну компоненту $\{X_n\}$ и

$$(1+\hat{\mu}+\hat{\nu})(1-2\hat{\nu})+2\hat{\beta}\hat{\nu}(1+\hat{\nu})>0,$$

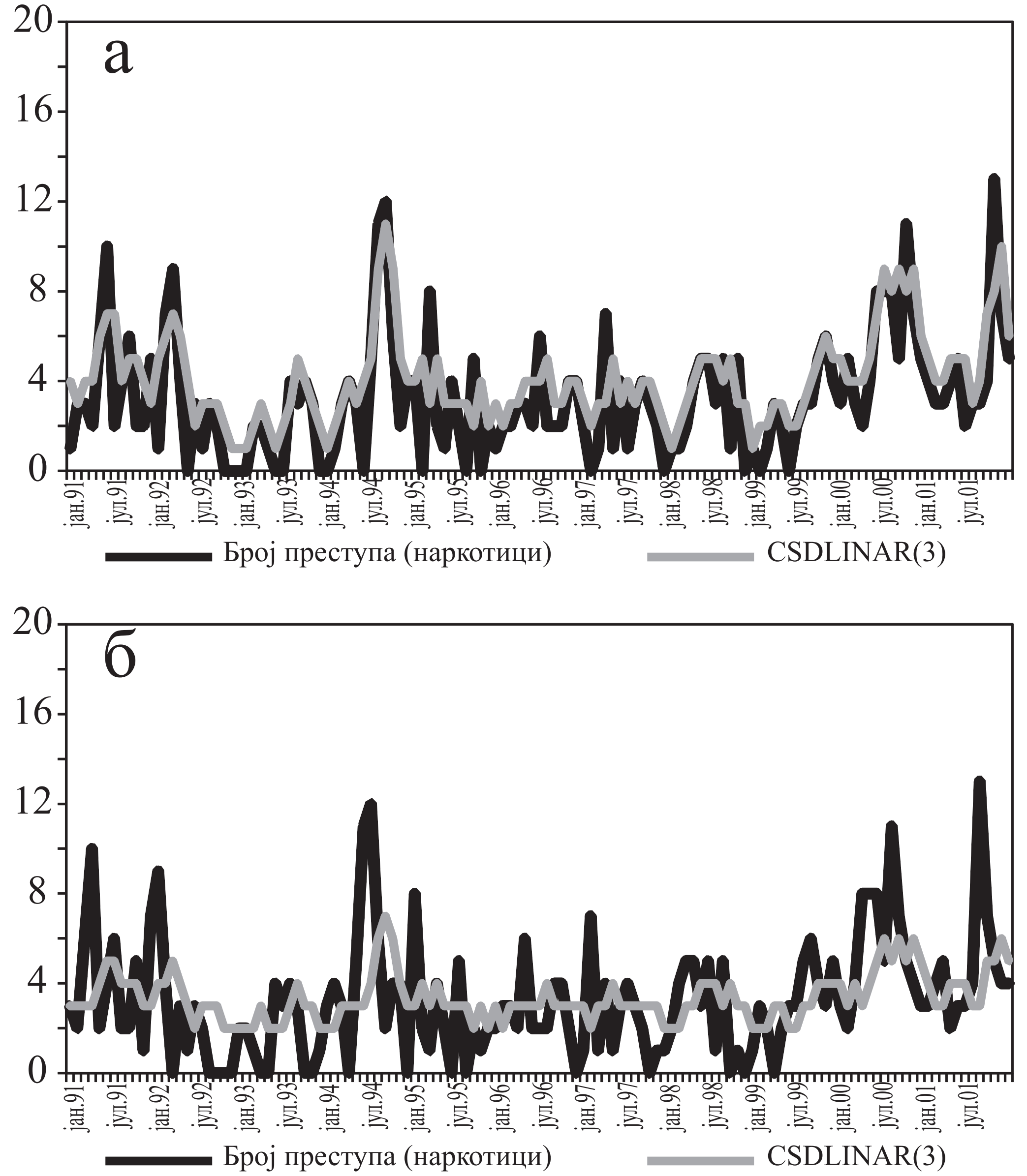
за компоненту $\{Y_n\}$.



Слика 5.7: Симулирани $CSDLINAR(2)$ низови и њихове реконструкције

5.3.2 Примена на реалним подацима

У случају података о кривичним делима у вези са наркотицима и у вези са проституцијом могуће је проверити квалитет ових формула јер постоје подаци о свакој полицијској станици посебно. На слици 5.8 је приказан број кривичних дела у вези са наркотицима који је месечно пријављиван полицијској станици 36055001600 и реализација временског низа реда 3, која представља реконструкцију ових података (а) добијена само на основу вредности разлика између полицијских станица 36055001600 и 36055009500, као



Слика 5.8: Број кривичних дела у вези са наркотицима пријављен полицијској станици 36055001600, на месечном нивоу, реконструкција тог низа (а) и његово једнокорачно предвиђање (б)

и реализација временског низа реда 3, која представља једнокорачну прогнозу (б) броја посматраних кривичних дела. Добијене вредности $RMSE$ оцене квалитета моделирања износе $1,712$ и $2,545$, респективно. На основу реализованих вресдности статистика $RMSE$ и на основу трајекторија приказаних на слици 5.8, може се рећи да приказани начин моделирања може да буде прихваћен као адекватан за овај тип података. За ред модела је изабрана вредност 3 зато што је претходно, у делу у којем је представљен комбиновани $SDLINAR$ модел, тачније, по резултатима приказаним у табели 4.9, модел реда 3 изабран као адекватан модел за моделирање података о броју преступа у вези са наркотицима.

5.4 $TINAR(1)$ модел

Као што је то раније поменуто, $INAR$ модели са симетричном и асиметричном дискретном Лапласовом маргиналном расподелом нису једини који би могли да се представе као разлика две латентне компоненете, тј. као разлика два временска низа. Осим њих и $TINAR$ модел временских низова, који је уведен у раду Freeland (2010), може се, такође, представити као разлика два ненегативна, независна, $INAR$ временска низа, али са Пуасоновом маргиналном расподелом. С обзиром на то да је, на неки начин, овај модел послужио као инспирација за дефинисање различитих модела са дискретном Лапласовом маргиналном расподелом, било би интересантно проверити да ли се и како на $TINAR(1)$ временске низове може применити до сада описана идентификација и предвиђање латентних компоненти.

Нека је $\{Z_n\}$ један $TINAR(1)$ временски низ са симетричном Скеламовом, $Skellam(\lambda/(1-\alpha))$ расподелом. Нека су $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ два независна $INAR$ временска низа са Пуасоновом, $\mathcal{P}(\lambda/(1-\alpha))$, расподелом, дефинисана помоћу биномног тининг оператора на следећи начин

$$X_{n+1} = \alpha \circ X_n + \varepsilon_{n+1} \text{ и } Y_{n+1} = \alpha \circ Y_n + \eta_{n+1}, \tag{5.4.1}$$

где је $\alpha\circ$ биномни тининг оператор, елементи бројачких низова су независне, једнако расподељене случајне променљиве са Бернулијевом расподелом са параметром α. Нека ова два временска низа представљају латентне компоненте низа, тј. нека важи

$$Z_n \stackrel{d}{=} X_n - Y_n. \tag{5.4.2}$$

Како би се одредиле формуле за реконструисање и предвиђање латентних компоненти на основу реализација временског низа $\{Z_n\}$, потребно је, за $k = 0, 1$, одредити условна очекивања $E(X_{n+k}|Z_n = z)$ и $E(Y_{n+k}|Z_n = z)$. Начин извођења ће бити сличан као у случају временских низова са дискретном Лапласовом маргиналном расподелом.

Нека је $z > 0$. Тада је

$$\begin{aligned}
E(X_n|Z_n = z) &= \sum_{x=0}^{\infty} xP(X_n = x|Z_n = z) = \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{P(X_n = x, Z_n = z)}{P(Z_n = z)} \\
&= \frac{1}{P(Z_n = z)} \sum_{x=0}^{\infty} x \sum_{y=0}^{\infty} P(X_n = x, X_n = y+z, Y_n = y) \\
&= \frac{1}{P(Z_n = z)} \sum_{x=0}^{\infty} x \sum_{y=0}^{\infty} P(X_n = x|X_n = y+z, Y_n = y) \\
&\qquad \times P(X_n = y+z)P(Y_n = y).
\end{aligned}$$

Заменом места редовима, добија се да је

$$\begin{aligned}
E(X_n|Z_n = z) &= \frac{e^{\frac{-2\lambda}{1-\alpha}}}{P(Z_n = z)} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^{2y+z}}{y!(y+z)!} E(X_n|X_n = y+z, Y_n = y) \\
&= \frac{e^{\frac{-2\lambda}{1-\alpha}}}{P(Z_n = z)} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^{2y+z}}{y!(y+z)!}(y+z) \\
&= \frac{e^{\frac{-2\lambda}{1-\alpha}}}{P(Z_n = z)} \frac{\lambda}{1-\alpha} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^{2y+z-1}}{y!(y+z-1)!}.
\end{aligned}$$

Узимајући у обзир чињеницу са је маргинална расподела временског низа $\{Z_n\}$ Скеламова, $Skellam(\lambda/(1-\alpha))$, расподела, тј. да је

$$P(Z_n = z) = e^{\frac{-2\lambda}{1-\alpha}} I_z\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right),$$

где је $I_z(x)$ модификована Беселова функција првог реда, дефинисана на следећи начин

$$I_z(x) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2y+z}}{y!\Gamma(y+z+1)},$$

добија се да је

$$E(X_n|Z_n = z) = \frac{\lambda}{1-\alpha} \frac{I_{z-1}\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)}{I_z\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)}.$$

На сличан начин, за $z \le 0$, добија се да је

$$E(X_n|Z_n = z) = \frac{\lambda}{1-\alpha} \frac{I_{-z+1}\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)}{I_{-z}\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)}.$$

С обзиром на то да је маргинална расподела временског низа симетрична, условно очекивање случајне променљиве Y_n, за дато Z_n ће бити

$$E(Y_n|Z_n = z) = \begin{cases} \frac{\lambda}{1-\alpha} \frac{I_{z+1}\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)}{I_z\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)}, z > 0 \\ \frac{\lambda}{1-\alpha} \frac{I_{-z-1}\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)}{I_{-z}\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)}, z \le 0. \end{cases}$$

Што се предвиђања латентних компоненти тиче, потребно је одредити вредност условног очекивања $E(X_{n+1}|Z_n = z)$. Извођење се одвија на скоро потпуно исти начин као и у случају идентификације летентних компоненти. Једино треба узети у обзир особину $TINAR(1)$ временских низова приказану у Freeland (2010), $E(X_{n+1}|X_n) = \alpha X_n + \lambda$.

Нека је $z > 0$. Тада је

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}|Z_n{=}z) &= \sum_{x=0}^{\infty} x P(X_{n+1}{=}x|Z_n{=}z) {=} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{P(X_{n+1}{=}x, Z_n{=}z)}{P(Z_n{=}z)} \\ &= \frac{1}{P(Z_n{=}z)} \sum_{x=0}^{\infty} x \sum_{y=0}^{\infty} P(X_{n+1}{=}x, X_n{=}y{+}z, Y_n{=}y) \\ &= \frac{1}{P(Z_n{=}z)} \sum_{x=0}^{\infty} x \sum_{y=0}^{\infty} P(X_{n+1}{=}x|X_n{=}y{+}z, Y_n{=}y) \\ &\qquad \times P(X_n{=}y{+}z) P(Y_n{=}y). \end{aligned}$$

Заменом места редовима, добија се да је

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}|Z_n{=}z) &= \frac{e^{\frac{-2\lambda}{1-\alpha}}}{P(Z_n{=}z)}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^{2y+z}}{y!(y{+}z)!}E(X_{n+1}|X_n{=}y{+}z,Y_n{=}y) \\ &= \frac{e^{\frac{-2\lambda}{1-\alpha}}}{P(Z_n{=}z)}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^{2y+z}}{y!(y{+}z)!}(\alpha(y{+}z){+}\lambda) \\ &= \frac{e^{\frac{-2\lambda}{1-\alpha}}}{P(Z_n{=}z)}\left(\frac{\alpha\lambda}{1{-}\alpha}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^{2y+z-1}}{y!(y{+}z{-}1)!}{+}\lambda\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^{2y+z}}{y!(y{+}z)!}\right). \end{aligned}$$

Користећи поново Скеламову расподелу случајне променљиве Z_n и дефиницију модификоване Беселове функције првог реда, добија се да је

$$E(X_{n+1}|Z_n = z) = \frac{\lambda}{1-\alpha}\frac{I_{z-1}\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)}{I_z\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)} + \lambda.$$

На сличан начин, за $z \leq 0$, добија се да је

$$E(X_{n+1}|Z_n = z) = \frac{\lambda}{1-\alpha}\frac{I_{-z+1}\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)}{I_{-z}\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)} + \lambda.$$

Коначан облик траженог условног очекивања је

$$E(X_{n+1}|Z_n = z) = \begin{cases} \frac{\alpha\lambda}{1-\alpha}\frac{I_{z-1}\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)}{I_z\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)} + \lambda, z > 0 \\ \frac{\alpha\lambda}{1-\alpha}\frac{I_{-z+1}\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)}{I_{-z}\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)} + \lambda, z \leq 0, \end{cases}$$

односно,

$$E(Y_{n+1}|Z_n = z) = \begin{cases} \frac{\alpha\lambda}{1-\alpha}\frac{I_{z+1}\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)}{I_z\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)} + \lambda, z > 0 \\ \frac{\alpha\lambda}{1-\alpha}\frac{I_{-z-1}\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)}{I_{-z}\left(\frac{2\lambda}{1-\alpha}\right)} + \lambda, z \leq 0. \end{cases}$$

Коначно, изрази за реконструкцију вредности временских низова $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ ће бити

$$\hat{X}_n = \begin{cases} \frac{\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\frac{I_{Z_n-1}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)}{I_{Z_n}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)}, Z_n > 0 \\ \frac{\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\frac{I_{-Z_n+1}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)}{I_{-Z_n}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)}, Z_n \leq 0 \end{cases} \text{ и } \hat{Y}_n = \begin{cases} \frac{\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\frac{I_{Z_n+1}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)}{I_{Z_n}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)}, Z_n > 0 \\ \frac{\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\frac{I_{-Z_n-1}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)}{I_{-Z_n}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)}, Z_n \leq 0, \end{cases} \quad (5.4.3)$$

или краће

$$\hat{X}_n = \frac{\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}} \frac{I_{|Z_n-1|}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)}{I_{|Z_n|}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)} \text{ и } \hat{Y}_n = \frac{\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}} \frac{I_{|Z_n+1|}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)}{I_{|Z_n|}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)},$$

а изрази за предвиђање,

$$\hat{X}_{n+1} = \begin{cases} \frac{\hat{\alpha}\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}} \frac{I_{Z_n-1}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)}{I_{Z_n}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)} + \hat{\lambda}, Z_n > 0 \\ \frac{\hat{\alpha}\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}} \frac{I_{-Z_n+1}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)}{I_{-Z_n}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)} + \hat{\lambda}, Z_n \leq 0 \end{cases}$$

$$\hat{Y}_{n+1} = \begin{cases} \frac{\hat{\alpha}\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}} \frac{I_{Z_n+1}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)}{I_{Z_n}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)} + \hat{\lambda}, Z_n > 0 \\ \frac{\hat{\alpha}\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}} \frac{I_{-Z_n-1}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)}{I_{-Z_n}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)} + \hat{\lambda}, Z_n \leq 0, \end{cases} \tag{5.4.4}$$

или краће

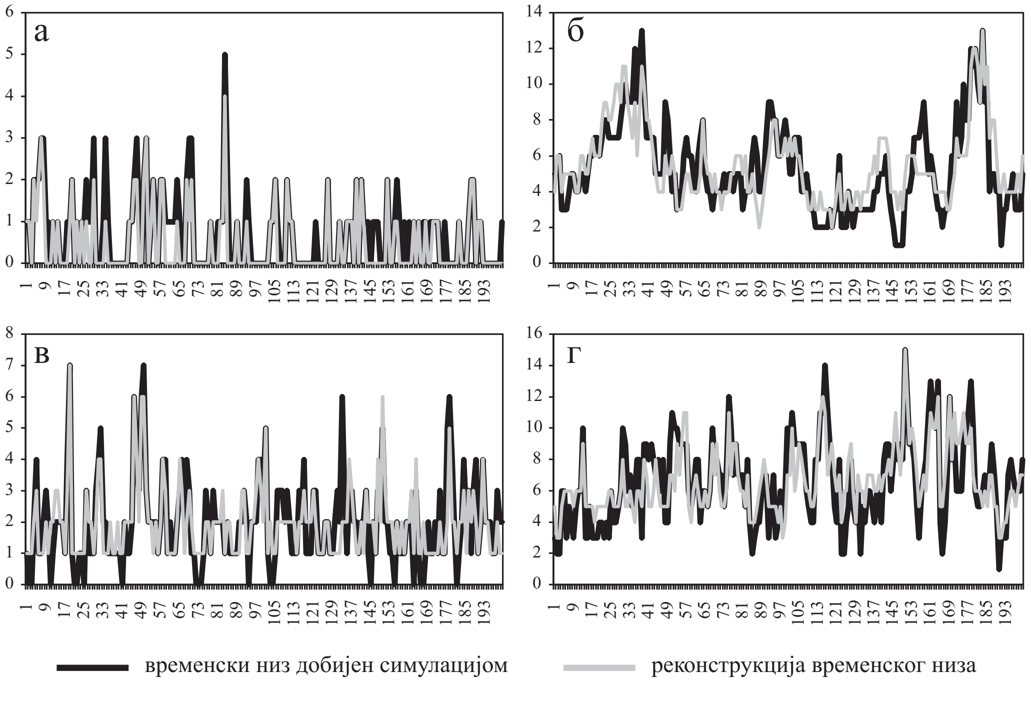
$$\hat{X}_{n+1} = \frac{\hat{\alpha}\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}} \frac{I_{|Z_n-1|}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)}{I_{|Z_n|}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)} + \hat{\lambda} \text{ и } \hat{Y}_{n+1} = \frac{\hat{\alpha}\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}} \frac{I_{|Z_n+1|}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)}{I_{|Z_n|}\left(\frac{2\hat{\lambda}}{1-\hat{\alpha}}\right)} + \hat{\lambda}.$$

5.4.1 Симулација

Приликом симулација је коришћена логика слична оној која је употребљена приликом симулирања $DLINAR(1)$ низова. Овога пута су генерисане две независне случајне променљиве X_1 и Y_1 са Пуасоновом расподелом са математичким очекивањем $\lambda/(1-\alpha)$ и два независна низа, $\{\varepsilon_n\}$ и $\{\eta_n\}$, независних и једнако расподељених случајних променљивх са Пуасоновом расподелом са параметром λ, који представљају иновационе низове. Затим су конструисани низови независних случајних променљивих са Бернулијевом расподелом са параметром α, који су коришћени као бројачки низови биномног тининг оператора. Након тога су, употребом израза (5.4.1) и (5.4.2), генерисане латентне компоненте и сам $TINAR(1)$ временски низ. За сваки од четири модела са различитим избором вредности параметара λ и α, формирано је по 1000 узорака обима $N = 5000$. За први модел су изабране вредности $\lambda = 0,5$ и $\alpha = 0,3$, за други $\lambda = 1$ и $\alpha = 0,8$, за трећи модел $\lambda = 1,2$ и $\alpha = 0,6$ и за четврти $\lambda = 2,5$ и $\alpha = 0,6$.

Вредности параметара су оцењене на основу Yule-Walker-ових оцена датих у раду Freeland (2010). Након тога је, на основу израза (5.4.3) и (5.4.4) извршене реконструкција и једнокорачна прогноза вредности латентних компоненти симулираних $TINAR(1)$ временских низова.

$RMSE$ критеријум је, поново, узет као критеријум адекватности модела. Резултати моделирања су приказани у табелама 5.7 и 5.8. Може се видети да су, што се тиче оцена параметара, достигнуте праве вредности. Реализоване вредности $RMSE$ статистика су поново, врло ниске у односу на вредности временских низова. Распон реализованих вредности $RMSE$ статистика је поново врло мали. Све то указује да би овакав начин био адекватан приликом моделирања података овакве или сличне природе.



Слика 5.9: Симулирани $TINAR(1)$ низови и њихове реконструкције

Табела 5.7: Средње вредности и стандардне девијације реализованих вредности оцена параметара λ и α $TINAR(1)$ модела и минималне и максималне реализоване вредности $RMSE$ статистике као критеријума ваљаности модела за реконструкцију

$\lambda = 0,5$ $\alpha = 0,3$				
N	$\hat{\lambda}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	0,500 (0,014)	0,300 (0,015)	0,544	0,620

$\lambda = 1$ $\alpha = 0,8$				
N	$\hat{\lambda}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	1,000 (0,022)	0,800 (0,008)	1,453	1,723

$\lambda = 1,2$ $\alpha = 0,4$				
N	$\hat{\lambda}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	1,200 (0,028)	0,400 (0,013)	0,937	1,013

$\lambda = 2,5$ $\alpha = 0,6$				
N	$\hat{\lambda}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	2,500 (0,056)	0,600 (0,011)	1,687	1,913

Табела 5.8: Средње вредности и стандардне девијације реализованих вредности оцена параметара λ и α $TINAR(1)$ модела и минималне и максималне реализоване вредности $RMSE$ статистике као критеријума ваљаности модела за предвиђање

$\lambda = 0,5$ $\alpha = 0,3$				
N	$\hat{\lambda}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	0,500 (0,014)	0,300 (0,015)	0,860	0,922

$\lambda = 1$ $\alpha = 0,8$				
N	$\hat{\lambda}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	1,000 (0,022)	0,800 (0,008)	1,734	2,030

$\lambda = 1,2$ $\alpha = 0,4$				
N	$\hat{\lambda}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	1,200 (0,028)	0,400 (0,013)	1,314	1,436

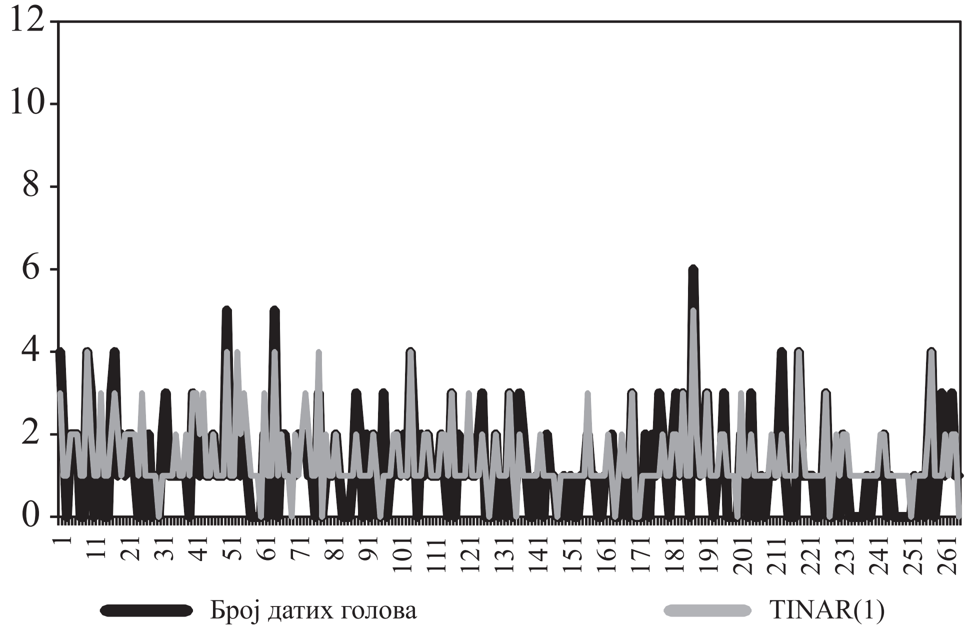
$\lambda = 2,5$ $\alpha = 0,6$				
N	$\hat{\lambda}^{YW}$	$\hat{\alpha}^{YW}$	$RMSE_{min}$	$RMSE_{max}$
5000	2,500 (0,056)	0,600 (0,011)	2,193	2,376

На слици 5.9 могу се видети трајекторије симулираних и моделираних временских низова. Приказане су вредности само првих 200 реализација. Уочава се да моделиране вредности добро прате кретање латентних компоненти. Код трећег модела се види да би вредност 0 могла да буде недостижна, али и поред тога, реализована вредност $RMSE$ статистике је, за тај модел, и даље ниска.

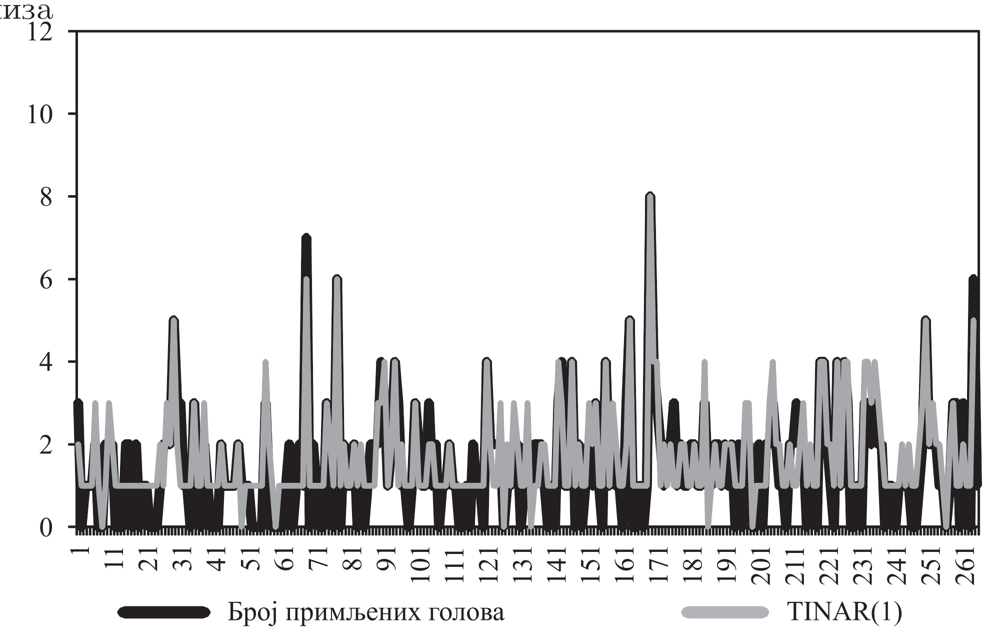
5.4.2 Примена на реалним подацима

Ови резултати ће бити представљени и на примеру из реалног живота. Подаци на којима ће бити примењене ове формуле представљају гол-разлику фудбалског клуба Астон Вила, који се до сезоне 2015/16. стандардно такмичио у енглеској Премијер лиги. Подаци су праћени почевши од сезоне 2008/09. до сезоне 2014/15. и могу се наћи на интернет страници http://int.soccerway.com. Клуб Астон Вила је изабран јер је у посматраном периоду, углавном, био позициониран у средишњем делу табеле, па се, као такав, учинио погодним за модел чије је математичко очекивање 0.

Укупно је обрађено 266 података о свим лигашким утакмицама. Обележје које ће бити праћено у овој анализи, гол-разлика, изабрано је због саме природе Пуасонове расподеле, јер случајна променљива расподељена по Пуасоновом закону би, интуитивно, требало да представља број реализација неког догађаја током одређеног временског интервала, што би требало да одговара броју датих или примљених голова током 90 минута. Користећи добијене формуле, на основу гол-разлике је реконструисан број голова које је постигла Астон Вила и број голова које су постигли њихови ривали. На сликама 5.10 и 5.11 су приказани стварни подаци и вредности добијене на основу изведених формула. Вредност $RMSE$ статистике износи 0,803, и за реконструисани број голова Астон Виле, и за број голова њихових противника. Оно што се може приметити на сликама је да моделирани низови имају трајекторије која се, у већем делу, поклапају са реалним подацима, али да оне, углавном одступају од реалних података када се реализује вредност 0, и у случају постигнутих, и у случају примљених голова. Ниска вредност $RMSE$ статистике и поред поменутих одступања, указује да је примена овог модела оправдана.



Слика 5.10: Број голова које је постигао фудбалски клуб Астон Вила од сезоне 2008/09. до сезоне 2014/15. и реконструкција тог низа



Слика 5.11: Број голова које је примио фудбалски клуб Астон Вила од сезоне 2008/09. до сезоне 2014/15. и реконструкција тог низа

Закључак

У овом раду су анализирани ауторегресивни временски низови са целобројним, како ненегативним, тако и негативним вредностима. Ови временски низови се базирају на примени негативног биномног тининг оператора дефинисаног у раду Ristić, Bakouch и Nastić (2009) и ауторегресивних целобројних временских низова са ненегативним вредностима $NGINAR(1)$ и $CGINAR(p)$ уведених у радовима Ristić, Bakouch и Nastić (2009) и Nastić, Ristić и Bakouch (2012). Анализирани временски низови су дефинисани као разлика два независна временска низа са ненегативним вредностима, са геометријским маргиналним расподелама.

На почетку је дат кратак преглед развоја тининг оператора, почевши од биномног тиниг оператора па до његових многобројних уопштења, међу којима је, за овај рад најзначајнији негативни биномни тининг оператор. Такође, посматран је и развој најпре целобројних ауторегресивних временских низова са ненегативним вредностима, а затим и целобројних, у најширем смислу те речи, аутогересивних временских низова чија се дефиниција заснива на примени тининг оператора. Целобројни ауторегресивни временски низови и са ненегативним и са негативним вредностима су дефинисани коришћењем уопштења тининг оператора, тј. најчешће, увођењем функције знака, $sgn(\cdot)$. Други начин дефинисања ауторегресивних временских низова, и са ненегативним, и са негативним целобројним вредностима је помоћу разлике два независна $INAR$ временска низа. Главна тема овог рада су били временски низови дефинисани, управо на други поменути начин.

Најпре је дефинисан нови тининг оператор $\alpha\odot$. Овај тининг оператор, у расподели, представља разлику два негативна тиниг оператора са истим параметром бројачких низова. Користећи тако дефинисан оператор, конструише се ауторегресиван временски низ са целобројним вредностима чија је маргинална расподела дискретна Лапласова расподела, $DLINAR(1)$ временски низ. Приказане су битне особине новодефинисаног тининг оператора и његова веза са неким већ постојећим тининг операторима. Такође анализиране су особине $DLINAR(1)$ временских низова. Приказане су условне статистичке мере, корелациона структура, као и доказани Марковско својство, ергодичност и строга стационарност. Изведене су оцене параметара модела методом условних најмањих квадрата и Yule-Walker-овим методом и приказане њихове асимптотске особине. Извршена је симулација неколико временских низова са различитим параметрима, на којима су демонстриране, већ теоријски доказане особине. Такође, на крају овог дела, дата је и примена на реалним подацима. Узимајући у обзир позитивну корелираност дефинисаног низа, уведен је и његов анлаогон са негативним корелацијама и, такође, приказане његове најбитније особине.

С обзиром на то да је симетричност маргиналне расподеле дефинисаног модела смањивало општост и ограночавало примену, наметнуло се логично проширење у смислу асиметричности. Такав модел је представљен у трећој глави рада. Прво је дефинисан тининг оператор који, у расподели, представља разлику два негативна геометријска тининг оператора, али са различитим параметрима бројачких низова. Доказане су његове најбитније особине, а затим је дефинисан модел ауторегресивних временских низова са целобројним вредностима, са асиметричном дискретном Лапласовом расподелом као маргиналном расподелом. Сходно енглеском називу, овај модел је обележен са $SDLINAR(1)$. Приказане су најбитније особине овог модела, показано Марковско својство, ергодичност и строга стационарност. Непознати параметри модела су оцењени методом условних најмањих квадрата, као и Yule-Walker-овим методом, с тим што је, за потоњи, дато неколико различитих варијанти оцена. Приказани су резултати симулација који потврђују доказане особине и асимптотску расподелу оцена параметара. Дато је неколико примера из стварног живота на којима се виде веома добре апроксимативне могућности овог модела. $SDLINAR(1)$ модел има изузетно добар апроксимациони потенцијал, с обзиром на то да се одговарајућим подешавањем његових параметара могу „угађати” и корелациона структура и положај података. $SDLINAR(1)$ модел је на подацима из стварног живота, упоређен са неким, већ раније дефинисаним, моделима и на изабраним подацима се, по питању квалитета моделирања, показало да је $SDLINAR(1)$ модел у предности над осталим.

Слично је урађено и у следећем делу рада. На основу тининг оператора дефинисаног по угледу на тининг оператор из треће главе рада, дефинисан је комбиновани ауторегресивни временски низ са целобројним вредностима реда p, са маргиналном асиметричном дискретном Лапласовом расподелом. И овако дефинисани временски низови имају све „лепе” особине које су претходно доказане за моделе првог реда. Дате су оцене параметара модела, које, због саме сложености модела, имају сложенију структуру од одговарајућих оцена за моделе првог реда. Извршна је симулација, на основу чијег резултата се могу јасно уочити показане особине. На крају је дата примена на подацима из стварног живота као и поређење са другим, већ постојећим моделима.

У последњем делу је приказана једна интересантна могућност, могућност идентификације и предвиђања вредности две латентне компоненте, које дејством у супротним смеровима, као резултат дају посматрани временски низ. Овај потенцијал је приказан за сваки од претходно анализираних модела са маргиналном дискретном Лапласовом расподелом, као и за један модел са маргиналном Пуасоновом расподелом.

Наравно, овим нису исцрпљена сва питања која се односе на ову тематику. Даља истраживања могу бити усмерена на посматрање модела код којих латентне компоненте нису независне или код којих латентне компоненте немају расподеле истог типа. Такође, могао би се направити још који корак унапред по питању оцењивања параметара, нарочито методом условних најмањих квадрата.

На овај начин су приказане најбитније особине модела временских низова са дискретном Лапласовом маргиналном расподелом. Ова анализа потврђује да би се овако дефинисани модели могли, са великим успехом, користити у пракси за решавање одговарајућих проблема. Даље побољшање ових модела може само проширити поље њихове успешне примене.

Литература

Al-Osh, M.A., Aly, E.E.A.A. (1992), First order autoregressive time series with negative binomial and geometric marginals, *Communications in Statistics - Theory Methods* **21**, 2483-2492.

Al-Osh, M.A., Alzaid, A.A. (1987), First-order integer-valued autoregressive (INAR(1)) process, *Journal of Time Series Analysis* **8**, 261-275.

Al-Osh, M.A., Aly, E.E.A.A. (1992), First order autoregressive time series with negative binomial and geometric marginals, *Communications in Statistics - Theory Methods* **21**, 2483-2492.

Alzaid, A.A., Al-Osh, M.A. (1990), An integer-valued pth-order autoregressive structure (INAR(p)) process, *Journal of Applied Probability* **27**, 314-324.

Alzaid, A.A., Omair, M.A. (2014), Poisson difference integer valued autoregressive model of order one, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society* **37(2)**, 465-485.

Andersson, J., Karlis, D. (2014), A parametric time series model with covariates for integers in $\mathbb{Z}$, *Statistical Modelling* **14(2)**, 135-156.

Souza, W.B., Bourguignon, M. (2015), A skew INAR(1) process on Z, *Advances in Statistical Analysis* **99(2)**, 189-208.

Bradley, R.C. (2005), Basic Properties of Strong Mixing Conditions. A Survey and Some Open Questions, *Probability Surveys* **2**, 107-144.

Breiman, L. (1992), Probability, *The Society for Industrial and Applied Mathematics* Philadelphia.

Brockwell, P.J., Davis, R.A. (1987), Time Series - Theory and Methods, *Springer* New York.

Chesneau, C., Kachour, M. (2012), A parametric study for the first-order signed integer-valued autoregressive process, *Journal of Statistical Theory and Practice* **6(4)**, 760-782.

Djordjević, M.S. (2016a), An extension on INAR models with discrete Laplace marginal distributions, *Communication in Statistics - Theory and Methods* http://dx.doi.org/10.1080/03610926.2015.1115071.

Djordjević, M.S. (2016b), A combined $SDLINAR(p)$ model and identification and prediction of its latent components, *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*.

Du Jin-Guan, Li Yuan (1991), The integer-valued autoregressive (INAR(p)) model, *Journal of Time Series Analysis* **12**, 129-142.

Freeland, R.K., McCabe,B. (2005), Asymptotic properties of CLS estimators in the Poisson AR(1) model, *Statistics and Probability Letters* **73**, 147-153.

Freeland, R.K. (2010) True integer value time series, *Advances in Statistical Analysis* **94**, 217-229.

Inusah, S., Kozubowski, T.J. (2006), A discrete analogue of the Laplace distribution, *Journal of Statistical Planning and Inference* **136**, 1090-1102.

Jacobs, P. A., Lewis, P. A. (1978a), Discrete time series generated by mixtures. I: Correlational and runs properties, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)* **40(1)**, 94-105.

Jacobs, P. A., Lewis, P. A. (1978b), Discrete time series generated by mixtures. II: asymptotic properties, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)* **40(2)**, 222-228.

Jacobs, P. A., Lewis, P. A. (1978c), Discrete time series generated by mixtures. III: Autoregressive processes (DAR(p)), *Technical report* Monterey, California. Naval Postgraduate School.

Jacobs, P. A., Lewis, P. A. (1983), Stationary discrete autoregressive-moving average time series generated by mixtures, *Journal of Time Series Analysis* **4(1)**, 19-36.

Kachour, M., Truquet, L. (2011), A p-Order signed integer-valued autoregressive (SINAR(p)) model, *Journal of Time Series Analysis* **32(3)**, 223-236.

Karlsen, H., Tjøstheim, D. (1988), Consistent estimates for the NEAR(2) and NLAR(2) time series models, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* **50**, 313-320.

Kim, H.Y. and Park, Y. (2008), A non-stationary integer-valued autoregressive model, *Statistical Papers* **49**, 485-502.

Kolmogorov, A. N., Rozanov, Y. A. (1960), On strong mixing condition for stationary Gaussian processes, *Theory of Probability and its Applications* **5**, 204-208.

Kozubowski, T.J., Inusah, S. (2006), A skew Laplace distribution on integers, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **58**, 555-571.

Latour, A., Truquet, L. (2008), An integer-valued bilinear type model, *Research report*, available on http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00373409.

Lehmann, E.L. (1999), Elements of Large-Sample Theory, *Springer* New York.

McKenzie, E. (1985), Some simple models for discrete variate time series, *Water Resources Bulletin* **21**, 645-650.

McKenzie, E. (1986), Autoregressive moving-average processes with negative binomial and geometric distributions, *Advances in Applied Probability* **18**, 679-705.

McKenzie, E. (1988), Some $ARMA$ models for dependent sequences of Poisson counts, *Advances in Applied Probability* **20**, 822-835.

Nastić, A.S., Ristić, M.M., Bakouch, H.S. (2012), A combined geometric INAR(p) model based on negative binomial thinning, *Mathematical and Computer Modelling* **55**, 1665-1672.

Nastić, A.S. (2012), Doprinos analizi vremenskih nizova sa nenegativnim celobrojnim vrednostima generisanih geometrijskim brojachkim nizovima, *Doktorska disertacija* Prirodno-matematichki fakultet u Nishu.

Nastić, A.S., Ristić, M.M., Djordjević, M.S. (2016), An INAR model with discrete Laplace marginal distributions, *Brazilian Journal of Probability and Statistics* **30**, 107-126.

Peligrad, M. (1992), On the central limit theorem for weakly dependent sequences with a decomposed strong mixing coefficient, *Stochastic Processes and their Applications* **42**, 181-193

Pesaran, H. (2015), Time Series and Panel Data Econometrics, *Oxford University Press*, Oxford.

Ristić, M.M., Bakouch, H.S., Nastić, A.S. (2009), A new geometric first-order integer-valued autoregressive (NGINAR(1)) process, *Journal of Statistical Planning and Inference* **139**, 2218-2226.

Ristić, M.M., Nastić, A.S., Jayakumar, K., Bakouch, H.S. (2012), A bivariate INAR(1) time series model with geometric marginals, *Applied Mathematics Letters* **25**, 481-485.

Ristić, M.M., Nastić, A.S. (2012), A mixed INAR(p) model, *Journal of Time Series Analysis* **33**, 903-915.

Rosenblatt, M. (1956), A central limit theorem and a strong mixing conidotion, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **42**, 43-47.

Rosenblatt, M. (1971) Markov Processes. Structure and Asymptotic Behavior, *Springer-Verlag* Berlin Heidelberg New York.

Silva, I., Silva, M.E. (2006), Asymptotic distribution of the Yule-Walker estimator for INAR(p) processes, *Statistics and Probability Letters* **76(15)**, 1655-1663.

Steutel, F., Van Harn, K. (1979), Discrete analogues of self-decomposability and stability, *The Annals of Probability* **7(5)**, 893-899.

Tjøstheim, D. (1986), Estimation in nonlinear time series models, *Stochastic Processes and their Applications* **21**, 251-273.

Truquet, L., Yao, J. (2012), On the quasi-likelihood estimation for random coeficient autoregressions, *Statistics* **46(4)**, 505-521.

Wang, D., Zhang, H. (2010), Generalized RCINAR(p) process with signed thinning operator, *Communications in Statistics - Simulation and Computation* **40(1)**, 13-44.

Weiß, C.H. (2008), The combined $INAR(p)$ models for time series of counts, *Statistics and Probability Letters* **78**, 1817-1822.

White, H. (1984) Asymptotic theory for econometrics, *Academic Press* San Diego.

White, H. (2001) Asymptotic theory for econometrics, 2nd edition, *Academic Press* San Diego.

Zhang, H., Wang, D., Zhu, F. (2010), Inference for INAR(p) processes with signed generalized power series thinning operator, *Journal of Statistical Planning and Inference* **140**, 667-683.

Zheng, H., Basawa, I.V., Datta, S. (2006), Inference for pth-order random coefficient integer-valued autoregressive processes, *Journal of Time Series Analysis* **27**, 411-440.

Zhu, R., Joe, H. (2006), Modelling count data time series with Markov process based on binomial thinning, *Journal of Time Series Analysis* **27**, 725-738.

Биографија аутора

Миодраг Ђорђевић је рођен 20. децембра 1974. године у Лесковцу. Основну и средњу школу је завршио, такође, у Лесковцу. Школске 1993/94. године је уписао Филозофски факултет на Одсеку за математику, смер Рачунарство и информатика. Дипломирао је септембра 1999. године постигавши просечну оцену 9,32.

Последипломске студије је уписао школске 1999/00. године на Природно-математичком факултету у Нишу, на Одсеку за математику. Школске 2008/09. године прешао је на докторске академске студије на Департману за математику Природно-математичког факултета у Нишу. На докторским студијама је положио све наставним планом предвиђене исите и, притом, постигао просечну оцену 9,92. Током студија, објавио је четири рада у домаћим и међународним часописима са импакт фактором. Један је од аутора два универзитетска уџбеника.

Од 1999. запослен је најпре на Филозофском факултету у Нишу, а након раздвајања факултета, од јуна 2000. године запослен је на Природно-математичком факултету, најпре као асистент-приправник, а затим и као асистент, на групи предмета из статистике.

Био је учесник пројекта Министарства за науку Републике Србије „Дискретни и непрекидни стохастички модели са применама“, број 1834, од 2002. до 2005. године.

Течно говори италијански и енглески језик. Обожава спорт и путовања.

Библиографија

1. Miroslav M. Ristić, Biljana Č. Popović, Aleksandar Nastić and Miodrag Đorđević, A bivariate Marshall and Olkin exponential minification process, FILOMAT, 22 (2008), 69-77.

2. Aleksandar S. Nastić, Miroslav M. Ristić and Miodrag S. Djordjević, An INAR model with discrete Laplace marginal distributions, Brazilian Journal of Probability and Statistics 30 (2016), 107-126.
3. Miodrag S. Djordjević, An extension on INAR models with discrete Laplace marginal distributions, Communication in Statistics - Theory and Methods (2016), http://dx.doi.org/10.1080/03610926.2015.1115071.
4. Miodrag S. Djordjević, A combined SDLINAR(p) model and identification and prediction of its latent components, Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics (2016), прихваћен за штампу.
5. Biljana Popović, Aleksandar Nastić, Miodrag Đorđević, Zbirka zadataka iz matematičke statistike, Univerzite u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, (2014), ISBN: 987-86-6275-030-3.

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални / графички
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Миодраг С. Ђорђевић
Ментор, **МН**:	Мирослав М. Ристић
Наслов рада, **НР**:	ДОПРИНОС АНАЛИЗИ ВРЕМЕНСКИХ НИЗОВА СА ЦЕЛОБРОЈНИМ ВРЕДНОСТИМА
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2016.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	218 стр., граф. прикази
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	статистика случајних процеса
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	DLINAR, SDLINAR, CSDLINAR, INAR, маргинална дискретна Лапласова расподела, негативни биномни тининг оператор, оцењивање параметара, идентификација латентних компоненти
УДК	519.246/.8(043.3)
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	Дефинисани су нови тининг оператори као разлике два негативна биномна тининг оператора. На основу овако дефинисаних оператора, конструисани су целобројни временски низови са дискретном Лапласовом маргиналном расподелом. Одређене су најбитније статистичке особине ових низова. Изведене су оцене непознатих параметара и доказане њихове асимптотске особине. Сваки од модела је проверен на симулираним подацима, упоређен са неким постојећим моделима и за сваки је дата примена на реалним подацима. Приказан је и начин за идентификовање латентних компоненти модела.

Датум прихватања теме, **ДП**:		12.01.2015.
Датум одбране, **ДО**:		
Чланови комисије, **КО**:	Председник:	
	Члан:	
	Члан:	
	Члан: ментор:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Прилог 4/2

	ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ НИШ
	KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual / graphic
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Miodrag S. Đorđević
Mentor, **MN**:	Miroslav M. Ristić
Title, **TI**:	CONTRIBUTIONS TO THE ANALYSIS OF INTEGER-VALUED TIME SERIES
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2016
Publisher, **PB**:	author's reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/gr	218 p. ; graphic representations
Scientific field, **SF**:	mathematics
Scientific discipline, **SD**:	statistics for stochastic processes
Subject/Key words, **S/KW**:	DLINAR, SDLINAR, CSDLINAR, INAR, discrete Laplace marginal distribution, negative binomial thinning operator, parameter estimation, identification of latent components
UC	519.246/.8(043.3)
Holding data, **HD**:	library
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:	New thinning operators are defined as differences of two negative binomial thinning operators. On the basis of such defined operators, time series with discrete Laplace marginals are defined. Some important features of all introduced models are determined. Estimators of unknown parameters are derived and their asimptotic behaviour are discussed. All models are checked on simulated data and compared with some of existing models. An application in real-life situations are presented. Also, a method for identification of latent components of the models are given
Accepted by the Scientific Board on,	12.01.2015.
Defended on, **DE**:	
Defended Board, President:	
Member:	
Member	
Member, Mentor:	

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

ДОПРИНОС АНАЛИЗИ ВРЕМЕНСКИХ НИЗОВА СА ЦЕЛОБРОЈНИМ ВРЕДНОСТИМА

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 31.08.2016. године
Аутор дисертације: Миодраг С. Ђорђевић

Потпис аутора дисертације:

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНОГ И ЕЛЕКТРОНСКОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

ДОПРИНОС АНАЛИЗИ ВРЕМЕНСКИХ НИЗОВА СА ЦЕЛОБРОЈНИМ ВРЕДНОСТИМА

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 31.08.2016. године
Аутор дисертације: Миодраг С. Ђорђевић

Потпис аутора дисертације:

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

ДОПРИНОС АНАЛИЗИ ВРЕМЕНСКИХ НИЗОВА СА ЦЕЛОБРОЈНИМ ВРЕДНОСТИМА

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
3. **Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу, 31.08.2016. године
Аутор дисертације: Миодраг С. Ђорђевић

Потпис аутора дисертације:

Ђорђевић