



ДРЖАВНИ УНИВЕРЗИТЕТ
У НОВОМ ПАЗАРУ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

Петар Соколоски

**Простори периодичних
дистрибуција, ултрадистрибуција
и таласни фронт**

Докторска дисертација

Нови Пазар, 2016.



STATE UNIVERSITY OF NOVI PAZAR
DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES

Petar Sokoloski

**Spaces of Periodic Distributions,
Ultradistributions and
the Wave Front Set**

-doctoral dissertation-

Novi Pazar, 2016

Mojim voljenim roditeljima

Sadržaj

Rezime	vii
Abstract	ix
Uvod	xi
1 Preliminarni rezultati iz teorije distribucija	1
1.1 Definicije i notacija	1
1.1.1 Skupovi	1
1.1.2 Osnovni funkcionalni prostori	4
1.1.3 Nejednačine	7
1.1.4 Konvolucija	10
1.2 Prostori nizova	10
1.3 Furijeova transformacija	12
1.4 Prostori distribucija	15
1.4.1 Prostor temperiranih distribucija \mathcal{S}'	15
1.4.2 Operacije u prostoru temperiranih distribucija	16
1.4.3 Prostori distribucija \mathcal{D}'	17
1.4.4 Prostor distribucija sa kompaktnim nosačem $\mathcal{E}'(\Omega)$	18
1.5 Sekvencijalni pristup teoriji distribucija	19
1.6 Prostori Soboljeva, $\mathcal{H}^{p,m}(\Omega)$	22
1.7 Periodične distribucije	27
1.7.1 Soboljevski prostori periodičnih funkcija	31
2 Množenje distribucija i talasni front	33
2.1 Proizvod distribucija	35
2.1.1 Teoreme tipa Pejli-Vinera	36
2.2 Talasni front distribucije	38

2.3	Periodične ekstenzije distribucija	39
2.3.1	Težinske funkcije	39
2.3.2	Množenje u potprostorima distribucija	41
2.4	Talasni front distribucije preko periodičnih ekstenzija distribucije	43
2.5	Soboljevski talasni front	46
2.6	Različiti pristupi množenju distribucija	50
3	Teorija ultradistribucija - sekvencijalni pristup	52
3.1	Uvod	52
3.1.1	Preliminarni rezultati iz teorije ultradistribucija	54
3.1.2	Ultradiferencijalni operatori	55
3.2	Fundamentalni nizovi s -ultradistribucija	60
3.2.1	Sekvencijalne ultradistribucije	63
3.2.2	Operacije sa s -ultradistribucijama	65
3.3	Nizovi s -ultradistribucija	67
3.3.1	Dejstvo na test funkcije iz $\mathcal{D}^*(\Omega)$	68
3.4	Temperirane sekvencijalne ultradistribucije	69
3.4.1	t -Temperirane sekvencijalne ultradistribucije	69
3.4.2	\tilde{t} -Temperirane sekvencijalne ultradistribucije	74
3.4.3	Temperirane ultradistribucije kao funkcionali	78
3.5	Relacije između prostorima temperiranih ultradistribucija	80
3.6	s -ultradistribucije kao neprekidni linearni funkcionali	83
4	Sekvencijalni pristup teoriji periodičnih ultradistribucija	86
4.1	Uvod	86
4.2	Fundamentalni nizovi periodičnih s -ultradistribucija	88
4.3	Operacije sa periodičnim s -ultradistribucijama	92
4.4	Nizovi periodičnih s -ultradistribucija	94
4.5	Periodične s -ultradistribucije kao funkcionali	95
4.6	Veza između klasičnih i periodičnih s -ultradistribucija	97
5	Množenje ultradistribucija i talasni front	101
5.1	Uvod	101
5.2	Teoreme tipa Pejli-Vinera za ultradistribucije	102
5.3	Prostori periodičnih ultradiferencijabilnih funkcija i ultradistribucija	104

Sadržaj

5.4	Množenje u prostorima periodičnih test funkcija	107
5.5	Talasni front ultradistribucije	108
5.6	Soboljevski talasni front ultradistribucije	111
Dodatak A Elementi iz teorije Lokalno-konveksnih prostora		114
A.1	Projektivne granice lokalno konveksnih prostora	116
A.2	Induktivne granice lokalno konveksnih prostora	121
Bibliografija		127
Kratka Biografija		136
Identifikaciona strana doktorske disertacije		139

Zahvalnica

Želim da izrazim najveću zahvalnost svome mentoru Akademiku prof. dr Stevanu Pilipoviću koji me je vodio u toku pisanja doktorske disertacije. Zahvalan sam na njegovom velikom strpljenju, podršci i pomoći koju mi je pružio. Njegovi saveti i pogledi koji su se odnosili kako na matematiku i pisanje naučnih radova, tako i na život, bili su veoma značajni za mene. Takođe sam zahvalan što mi je omogućio učešće na brojnim konferencijama, kongresima, radionicama i seminarima u Novom Sadu. Uvek je bio dostupan za mene i pored brojnih obaveza koje je imao. Iskustvo rada sa njime je bogatstvo neprocenjive vrednosti.

Takođe, želim da se zahvalim komentoru prof.dr Diani Dolićanin-Đekić čiji su korisni saveti doprineli da ova doktorska disertacija bude još bolja.

Profesoru dr Čemalu Dolićaninu dugujem veliku zahvalnost zato što je bio uvek dostupan za mene i njegova pomoć oko mog upisa i u toku studija i administracije na Univerzitetu u Novom Pazaru bila je nezamenjiva.

Ne postoje reći koji bi opisali moju zahvalnost mojim roditeljima Jordanu i Peni i bratu Antoniu za njihovu bezrezervnu ljubav, toplinu, strpljenje i podršku u najtežim trenucima. Bili su uz mene kroz čitav moj život, uvek su znali kako da me raspolože i oni su najzaslužniji za ovo.

Mojoj supruzi Jasmini se posebno zahvaljujem za njenu nesebičnu podršku, ljubav i pomoći. Radeći na ovoj disertaciji njoj, sinu Jordanu i ćerki Jovani sam uskratio mnogo zajedničkih trenutaka i za to im mnogo dugujem. Oni su najveća radost i sreća u mom životu.

Zahvaljujem se i prof.dr Ljupču Nastovskim koji je bio mentor moje magisterske teze i koji me je savetovao da produžim rad sa profesorom Pilipovićem. Velika čast za mene je što je on moj veliki prijatelj. Njegova podrška i saveti su bili dragoceni. Retki su ljudi poput njega - čistog srca, puni razumevanja i uvek voljni da pomognu.

Mojim kolegama iz IM i celog PMF-a iz Skoplja, posebno prof. dr Borku

Zahvalnica

Ilijevskim i dekanu prof. dr Icku Đorgovskim zahvalan sam za podršku koju su mi dali i razumevanje koje su imali tokom ovih godina.

Rodacima Petru, Đordiju, Stojančetu, Micetu i Tini Nusevim kao i Olgi Sokoloskom i Slavici Sretenoskom sam zahvalan na ljubavi, pažnji, pomoći i podršci koju su mi pružili.

Zahvaljujem se i svim mojim prijateljima, posebno Zoranu, Aneti, Toniju, Žarku i kumu Vladimiru koji su mi bili velika moralna podrška.

Na kraju, velika zahvalnost Ministarstvu za obrazovanje i nauku Republike Makedonije i organizaciji DAAD koji su mi omogućili finansiranje istraživačkih poseta i učešće na školama i seminarima u Novom Sadu.

Rezime

Koristeći ideje i metode koje su prisutne kod definisanja proizvoda temperiranih distribucija kod sekvencijalnog pristupa Mikusinskog, dokazaćemo neke osobine proizvoda periodičnih distribucija i ultradistribucija. Daćemo karakterizaciju talasnog fronta $WF(f)$ distribucije $f \in \mathcal{D}'$ i dokazaćemo da je nova definicija ekvivalentna sa Hermanderovom definicijom, kao i karakterizaciju Soboljevskog talasnog fronta distribucije $WF_S(f)$. Analogno sekvencijalnom pristupu Mikusinskog za distribucije, definišemo nove fundamentalne nizove glatkih funkcija koje delimo u klase ekvivalencije i te klase nazivamo s -ultradistribucijama ((s) -za sekvencijalne). Prostore ovih klasa ekvivalencije označavamo sa \mathcal{U}'^* , gde je $*$ = $(p!^t)$ ili $*$ = $\{p!^t\}$, $t > 1$. Slično definišemo prostore s -temperiranih ultradistribucija \mathcal{T}'^* , \tilde{s} -temperiranih ultradistribucija $\tilde{\mathcal{T}}'^*$. Pokazaćemo da postoji izomorfizam između prostora \mathcal{T}'^* , $\tilde{\mathcal{T}}'^*$ i \mathcal{S}'^* , gde su $\mathcal{S}'^{(t)}$ i $\mathcal{S}'^{\{t\}}$ prostori ultradistribucija tipa Berlinga i Rumijeja. Na osnovu izomorfizma prostora \mathcal{T}'^* , $\tilde{\mathcal{T}}'^*$ i \mathcal{S}'^* dobijamo izomorfizam prostora \mathcal{U}'^* i \mathcal{D}'^* , gde su $\mathcal{D}'^{(t)}$ i $\mathcal{D}'^{\{t\}}$ prostori ultradistribucija tipa Berlinga i Rumijeja. Dokazaćemo da su prostori periodičnih s -ultradistribucija \mathcal{U}'_{per} , kao potprostori s -temperiranih ultradistribucija, izomorfni sa prostorima \mathcal{A}'_{per} , gde su $\mathcal{A}'_{per}^{(t)}$ i $\mathcal{A}'_{per}^{\{t\}}$ Berlingovi i Rumijeovi prostori periodičnih ultradistribucija. Daćemo karakterizacije talasnog fronta $WF^{\{t\}}(f)$ distribucije $f \in \mathcal{D}'^{\{t\}}$ i Soboljevskog talasnog fronta $WF_S^{\{t\}}(f)$ ultradistribucije $f \in \mathcal{D}'^{\{t\}}$.

Novi Pazar, 2016.

Petar Sokoloski

Abstract

Following the ideas and the methods which are used in the definition of the product of (tempered) distributions in the Mikusinski's sequential approach to the theory of distributions, we prove some properties of the product of periodic distributions and ultradistributions. We give characterization of the wave front set $WF(f)$ of a distribution $f \in \mathcal{D}'$ and we prove that the new definition is equivalent with the Hörmander's one. Also, we give characterization of the Sobolev wave front set $WF_S(f)$ of a distribution $f \in \mathcal{D}'$. As in the Mikusinski's sequential approach to the theory of distributions, we define new fundamental sequences of smooth functions which form equivalence classes and we name them as s -ultradistributions (s - for sequential). The spaces that these equivalence classes form we denote by \mathcal{U}'^* , where $*$ = $(p!^t)$ or $*$ = $\{p!^t\}$, $t > 1$. Similarly we define the spaces of s -tempered ultradistributions \mathcal{T}'^* , \tilde{s} - tempered ultradistributions $\tilde{\mathcal{T}}'^*$. We show that there exist isomorphisms between the spaces \mathcal{T}'^* , $\tilde{\mathcal{T}}'^*$ and \mathcal{S}'^* , where $\mathcal{S}'^{(t)}$ and $\mathcal{S}'^{\{t\}}$ are the spaces of tempered ultradistributions of Beurling and Roumieu types, respectively. On the basis of the isomorphisms between \mathcal{T}'^* , $\tilde{\mathcal{T}}'^*$ and \mathcal{S}'^* we show that there is an isomorphism between the spaces \mathcal{U}'^* and \mathcal{D}'^* , where $\mathcal{D}'^{(t)}$ and $\mathcal{D}'^{\{t\}}$ are the spaces of ultradistributions of Beurling and Roumieu types, respectively. The spaces of periodic s -ultradistributions \mathcal{U}'_{per}^* , as subspaces of the spaces of s -tempered ultradistributions are isomorphic to the spaces of periodic ultradistributions \mathcal{A}'_{per}^* . By using the properties of the product of periodic ultradistributions we give new description of the wave front set $WF^{\{t\}}(f)$ of an ultradistribution $f \in \mathcal{D}'^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ in terms of Fourier series coefficients. Also, we give characterization of the Sobolev wave front set $WF_S^{\{t\}}(f)$ of an ultradistribution $f \in \mathcal{D}'^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$.

Uvod

Uticaj teorije distribucija na matematičku analizu je možda najslikovitije opisan u [93] – ona je jedna od dveju velikih revolucija u matematičkoj analizi u XX-om veku. Druga revolucija je teorija Lebegove integracije. Uopštene (generalizovane) funkcije ili distribucije su matematički objekti koji su uvedeni kako bi se rešili neki problemi matematičke analize koji nisu mogli biti rešeni korišćenjem neprekidnih funkcija. Pre svega, one su uvedene kao kompletiranje prostora neprekidnih funkcija u odnosu na operaciju diferenciranja. To je prirodno proširenje koje je analogno proširenju skupa racionalnih brojeva \mathbb{Q} sa realnim brojevima kako bi neki problemi koji nemaju rešenje u \mathbb{Q} mogli biti rešeni u \mathbb{R} . Na primer, jednačina $x^2 = 2$ nema rešenja u \mathbb{Q} , ali rešenja iste jednačine postoje u \mathbb{R} . Slično, ako je jedna funkcija lokalno integrabilna, ona ne mora da ima izvod, ali sigurno postoji njen izvod u smislu distribucija (distribucionni izvod). To je naročito važno u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina (PDJ) koje imaju veliku primenu u fizici i tehnici. Na taj način parcijalne diferencijalne jednačine rešavamo u skupu distribucija, a nakon toga proveravamo svojstva dobijenih rešenja.

Uvođenje distribucija pripisuje se Švarcu¹ nakon njegovih fundamentalnih radova [82] iz 1950. i [83] iz 1951. Za svoj rad [81] koji je napisao 1944. godine on je 1950. dobio Fildsovu medalju - najveće priznanje za rad u matematici. Međutim ima dosta diskusija oko toga ko je prvi definisao distribucije. Interesantan hronološki prikaz dat je u [96], [46] i [47] gde je navedeno da ruska škola (na primer, Geljand i Šilov u [19]) smatra Soboljeva² kao autora koji je prvi uveo uopštene funkcije u eksplicitnoj i prihvaćenoj formi u kojoj se koriste u radovima [90, 89], dok sam Soboljev u [91] navodi

¹Laurent Schwartz, francuski matematičar, 1915–2002.

²Sergej L'vovič Sobolev, sovjetski matematičar, 1908–1989.

da su pre njega u svojim radovima distribucije koristili i Adamar³, Ris⁴ i Bohner⁵. Interesantan je rad Komatsua⁶ [44] gde on navodi da je čak Furije⁷ u svom radu [17] iz 1822. koristio uopštene funkcije i tako imao uticaj na Hevisajda⁸ i Diraka⁹ koji su prethodili Švarcu.

Neosporno je da su distribucije doživele najveći razvoj nakon što ih je Švarc sistematski obradio i insistirao na mogućnosti njihove primene u mnogim oblastima. Teorija distribucija je dala veoma značajne rezultate, među kojima jedan od najvažnijih je teorema Malgranža¹⁰ i Erenprajsa¹¹ koju su nezavisno jedan od drugog dokazali 1953. i 1954. godine u kojoj je data eksplicitna forma opšteg rešenja proizvoljne parcijalne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

Neposredno nakon pojave Švarcove teorije distribucija pojavile su se i druge teorije koje su se bazirale na različitim definicijama koncepta distribucije. Takve su teorije Mikusinskog¹² [54], Templa¹³ [99], Lajthila¹⁴ [49], Silve¹⁵ [87] itd. Kod pristupa Švarca i Soboljeva uopštene funkcije definišu se kao neprekidni linearni funkcionali na nekom prostoru funkcija (test funkcije), dok se u teoriji Mikusinskog one definišu kao klase ekvivalencije nizova neprekidnih funkcija što asocira na definiciju realnih brojeva kao klase ekvivalencije nizova racionalnih brojeva. Za razliku od prvih teorija kod kojih se traži veliko poznavanje teorije vektorsko-topoloških prostora, kod teorije Mikusinskog pristup je mnogo elementarniji i zahteva samo elementarna poznavanja konvergencije nizova neprekidnih funkcija na kompaktnim skupovima. U teoriji Mikusinskog operacije između distribucijama definišu se kao operacije između elementima fundamentalnih nizova.

Prirodno se postavlja pitanje: da li pored diferenciranja, i za ostale operacije koje su definisane kod „običnih” neprekidnih funkcija, kao što su sabiranje

³Jacques Salomon Hadamard, francuski matematičar, 1865–1963.

⁴Marcell Riesz, mađarski matematičar, 1886–1969.

⁵Salomon Bochner, mađarski matematičar, 1899–1982.

⁶Hikosaburō Komatsu, japanski matematičar, 1935–.

⁷Jean-Baptiste Joseph Fourier, francuski matematičar, 1886–1969.

⁸Oliver Heaviside, engleski matematičar, fizičar i inženjer, 1895–1925.

⁹Paul Adrien Maurice Dirac, švajcarski i engleski fizičar, 1902–1984.

¹⁰Bernard Malgrange, francuski matematičar, 6 July 1928–.

¹¹Leon Ehrenpreis, američki matematičar, 1930–2010.

¹²J. Mikusiński, poljski matematičar, 1913–1987.

¹³Dom George Frederick James Temple, engleski matematičar, 1901–1992.

¹⁴Sir Michael James Lighthill, engleski matematičar, 1924 – 1998 .

¹⁵José Sebastião e Silva, portugalski matematičar, 1914 – 1972.

funkcija, množenje funkcije sa skalarom, proizvod dve funkcije, konvolucija i tako dalje, postoje analogne operacije tj. da li je moguće proširiti ove operacije do odgovarajućih operacija u prostoru distribucija? Ispostavilo se da su neke od ovih operacija analogne (kao što su zbir i proizvod sa skalarom), međutim postoje i one koje nije moguće proširiti. Operacije koje se ne mogu preneti sa prostora neprekidnih funkcija na prostor distribucija zovu se neregularne operacije. Kako je pokazao Švarc u [86] proizvod distribucija se ne može definisati u opštem slučaju. Sledeće pitanje koje se postavlja je kada je to proširenje moguće, tj. da li postoje neki karakteristični uslovi kada je proizvod dve distribucije dobro definisan i koje su karakteristike tačaka (ili skupova) gde je to moguće uraditi? Jasno je da problem nastaje u tačkama u kojima se nalaze singulariteti distribucije, tj. one tačke koje nemaju okolinu na kojoj distribucija može da se posmatra kao glatka funkcija. Skup svih ovakvih tačaka čini singularni nosač (sing supp) distribucije. Logičan odgovor je da proizvod dve distribucije postoji ako su njihovi singularni nosači disjunktni skupovi. Sledeći korak je ispitivanje postojanja proizvoda dveju distribucija čiji singularni nosači nisu disjunktni skupovi. U tom cilju, za neku tačku $x \in \text{sing supp } f$ posmatraju se pravci (frekvencije) Furijeove transformacije $\mathcal{F}(f)$ u kojima $\mathcal{F}(f)$ ne opada dovoljno brzo (takozvani singularni pravci). Ispada da je ova analiza invarijantna i da ima lokalni karakter. Dobila je ime mikrolokalna analiza. Ponašanje distribucije, u opštem slučaju, nije moguće ispitivati u konkretnoj tački, već moramo posmatrati neku okolinu te tačke. Iz tog razloga se distribucija množi sa nekom funkcijom odsecanja i posmatra se njeno ponašanje samo na nosač proizvoda. Lars Hermander¹⁶, korišćenjem koncepta talasnog fronta pokazao je da proizvod dve distribucije postoji ako su njihovi singularni pravci „dobro” postavljeni, tj. ako nisu suprotni.

Postojanje diskretizacije singularnih pravaca omogućuje veliki napredak u ovom smeru. To je moguće uraditi koristeći različite pristupe. U disertaciji koristimo pristup gde umesto distribucije posmatramo periodične produžetke njihovih lokalizacija kako bi primenili tehniku Furijeovih redova za rešavanje problema. Na ovaj način problem postojanja proizvoda distribucija prebacuje se iz prostora distribucija u neki prostor nizova u kome posmatramo ponašanje Furijeovih koeficijenata periodičnih produžetaka posmatranih distribucija. Na taj način, na raspolaganje dobijamo moćni aparat Furijeove analize koga primenjujemo kod rešavanja problema množenja distribucija. U novoj okolini nestaje problem regularnosti, jer novi funkcionali na \mathbb{Z}^d postaju

¹⁶Lars Valter Hörmander, švedski matematičar, 1931 – 2012.

funkcije koje su definisane na diskretnom skupu, tj. u svakoj njegovoj tački.

Između 1960–1961. Rumije¹⁷ u [74] i Berling¹⁸ u [4] definisali su dva tipa prostora ultradistribucija, koji su bili suštinski veći od prostora distribucija. Kompletna slika ovih prostora i njihova struktura bila je data u popularnim radovima Komatsua [38, 40, 41] posle kojih je proučavanje ultradistribucija dobilo novi snažan impuls za dalji razvoj u različitim pravcima. Teorija ultradistribucija je postala naročito važno sredstvo u mikrolokalnoj analizi.

Doktorska disertacija ima pet glave i jedan dodatak.

U prvoj glavi disertacije navedeni su osnovni pojmovi i prostori funkcija, distribucija i nizova, kao i neke njihove osobine koje se često koriste.

U drugoj glavi obrađene su teme iz mikrolokalne analize. Navedena je teorema Pejli¹⁹-Viner²⁰-Švarca za distribucije koja se često koristi u disertaciji. Takođe je data Hermanderova definicija skupa talasnog fronta, definicija talasnog fronta u diskretizovanom obliku i dokaz da su ove dve definicije ekvivalentne. Uopštenje rezultata je dato posmatranjem Soboljevskog talasnog fronta.

Treća glava je posvećena sekvencijalnom pristupu teoriji ultradistribucija. Na početku su navedena osnovna svojstva prostora ultradistribucija \mathcal{D}'^* i \mathcal{S}'^* i nakon toga radimo sa Ževrejovim²¹ nizovima. Takođe konstruišemo teoriju analognu sekvencijalnoj teoriji distribucija Mikusinskog sa odgovarajućim prilagođavanjima karakteristikama ultradistribucija. U ovoj glavi tvrđenja su navedena bez dokaza.

U četvrtoj glavi dat je sekvencijalni pristup teoriji periodičnih ultradistribucija. Uvodimo prostor \mathcal{W}'_{per}^* kao prostor klasa ekvivalencije s - p -fundamentalnih nizova, dajemo strukture konvergencije takvih prostora, kao i delovanje na odgovarajuće funkcije iz prostora ultradiferencijabilnih periodičnih funkcija \mathcal{A}'_{per}^* . U [24] je dat dokaz da su Kete²²-ešelon prostori nizova \mathbf{a}^* topološki izomorfni sa \mathcal{A}'_{per}^* . Koristeći ovaj rezultat i odgovarajuće razvoje u Furije-ove redove, uspostavljamo sekvencijalni topološki izomorfizam između \mathcal{W}'_{per}^* i \mathcal{A}'_{per}^* .

U petoj glavi je data primena periodičnih ultradistribucija u mikrolokalnoj analizi i karakterizacija talasnog i Soboljevskog talasnog fronta pomoću

¹⁷Charles Roumieu, francuski matematičar.

¹⁸Arne Carl-August Beurling, švedski matematičar, 1905 – 1986.

¹⁹Raymond Edward Alan Christopher Paley, engleski matematičar, 1907–1933.

²⁰Norbert Wiener, američki matematičar, 1894–1964.

²¹Maurice-Joseph Gevrey, francuski matematičar, 1884– 1957.

²²Gottfried Maria Hugo Kthe, austrijski matematičar, 1905–1989.

njihovih periodizacija kao i uslovi za egzistenciju multiplikativnog proizvoda ultradistribucija.

U dodatku, na kraju doktorske disertacije, navedene su najvažnije definicije i teoreme iz funkcionalne analize koje se koriste u postavljanju teorija distribucija i ultradistribucija. Ove rezultate se nalaze u svakom naprednom kursu iz funkcionalne analize. Koristili smo oznake i redosled iz [43].

U ovoj doktorskoj disertaciji dati su originalni rezultati koji su sadržani u drugoj, trećoj, četvrtoj i petoj glavi. U drugoj glavi originalni rezultati su teoreme za proizvod distribucija i glavni rezultati - dokaz ekvivalencije između klasične definicije Hermandera i talasnog fronta distribucije preko Furijeovih koeficijenata periodičnih produžetaka neke lokalizacije distribucije koji je sadržan u Teoremi 2.4.1 i karakterizacija Soboljevskog talasnog fronta (Teorema 2.5.2). Ovi rezultati su publikovani u radu [51]. Originalni rezultati navedeni u trećoj glavi publikovani su u [50]. U njima je izložen sekvencijalni pristup teoriji ultradistribucija. Rezultati koji su izloženi u četvrtoj i petoj glavi publikovani su u radovima [52] i [14] i odnose se na novom sekvencijalnom pristupu teoriji periodičnih ultradistribucija i sekvencijalnom pristupu skupu talasnog fronta ultradistribucije.

Primena rezultata predstavljenim u ovoj doktorskoj disertaciji je mnogostruka. Sekvencijalni pristup ka proučavanju teorije ultradistribucija omogućuje jednostavniji pristup shvatanju koncepta ultradistribucija, dok egzistencija multiplikativnog proizvoda dveju distribucija (ultradistribucija) je suštinski problem u mnogim oblastima savremene fizike koji ima višestruke primene. Neke od njih su navedeni na početku drugoj glavi. Koncept talasnog fronta je nerazdvojivo povezan sa ovim problemom i zato je karakterizacija koja je data u ovoj disertaciji veoma aktuelna.

Glava 1

Preliminarni rezultati iz teorije distribucija

1.1 Definicije i notacija

U ovom odeljku navešćemo definicije i oznake koje ćemo koristiti u disertaciji. To su standardizovane oznake koji se koriste u savremenoj literaturi.

1.1.1 Skupovi

- \mathbb{Z} – skup celih brojeva,
- \mathbb{N} ili \mathbb{N}_0 – skup nenegativnih celih brojeva,
- \mathbb{Z}_+ – skup pozitivnih celih brojeva,
- \mathbb{Q} – skup racionalnih brojeva,
- \mathbb{R} – polje realnih brojeva,
- \mathbb{C} – polje kompleksnih brojeva.

Simbol $:=$ označava da levu stranu definišemo izrazom na desnoj strani.

Sa $\{x : P(X)\}$ označavamo skup elemenata x koji imaju osobinu $P(x)$. Za skupu $X \neq \emptyset$ i $d \in \mathbb{Z}_+$, sa X^d označavamo skup podređenih d -torki iz X ,

$$X^d := \{(x_1, \dots, x_d) : x_i \in X \text{ za } i = 1, \dots, d\}.$$

Sa Ω , ako nije drugačije naglašeno, označavamo otvoreni skup u \mathbb{R}^d .

Simbol X° za dati skup $X \subset \mathbb{R}^d$ označava unutrašnjost skupa X .

Ako je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ fiksni otvoreni skup, oznaka $K \subset\subset \Omega$ znači da je K kompaktan podskup sadržan u Ω .

Multi-indeksi i oznake u \mathbb{R}^d

Za $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$ označavamo:

- *zbir* elemenata x i ξ sa

$$x + \xi = (x_1 + \xi_1, \dots, x_d + \xi_d);$$

- *proizvod* skalara λ i elementa x sa

$$\lambda x = \lambda(x_1, \dots, x_d) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d);$$

- *skalarni proizvod* elemenata x i ξ sa

$$x \cdot \xi = \langle x, \xi \rangle = \sum_{i=1}^d x_i \xi_i ;$$

- *norma* elementa $x \in \mathbb{R}^d$ sa

$$\|x\| = |x| := (x \cdot x)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2} ;$$

- simbol

$$\langle x \rangle = (1 + \|x\|^2)^{1/2} = (1 + x_1^2 + \dots + x_d^2)^{1/2} . \quad (1.1.1)$$

- *Multi-indeks* je svaki element iz \mathbb{N}_0^d . *Dužina multi-indeksa* je broj

$$|\alpha| = |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d.$$

Za multi-indekse $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}_0^d$, koristimo sledeće oznake

$$(\alpha \leq \beta) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, d\})(\alpha_i \leq \beta_i) ;$$

1.1. DEFINICIJE I NOTACIJA

$$(\alpha < \beta) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, d\})(\alpha_i < \beta_i);$$

$$\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_d!.$$

Za $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $\beta \in \mathbb{N}_0^d$, $\alpha \leq \beta$, definišemo binomne koeficijente

$$\binom{\beta}{\alpha} := \prod_{i=1}^d \binom{\beta_i}{\alpha_i}.$$

- Eksponenti u \mathbb{R}^d su dati sa

$$x^\xi := x_1^{\xi_1} \dots x_d^{\xi_d},$$

ako su svi množitelji (eksponenti) na desnoj strani jednačine dobro definisani. Ako $y \in \mathbb{R}$, onda $y^t := y^{t_1 + \dots + t_d}$.

- za $x \in \mathbb{R}^d$, $r \in \mathbb{N}_0^d$ koristi se simbol

$$\widehat{x}^r = (1 + |x_1|)^{r_1} \dots (1 + |x_d|)^{r_d}, \quad (1.1.2)$$

- Neka je $0 < \eta \leq 1$. Radi konciznosti, često ćemo koristiti oznaku za intervale u \mathbb{R}^d

$$I_{\eta, x} := \prod_{j=1}^d \left(x_j - \frac{\eta}{2}, x_j + \frac{\eta}{2}\right) \quad (1.1.3)$$

i

$$I_\eta := I_{\eta, 0}. \quad (1.1.4)$$

- Ako $h \in \mathbb{R}^d$ i φ je funkcija na \mathbb{R}^d , definišemo *operator translacije* τ_h sa

$$\tau_h(\varphi)(x) = (\tau_h \varphi)(x) := \varphi(x - h), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

- Ako je φ funkcija na \mathbb{R}^d , definišemo *operator refleksije (simetrije)* u odnosu na koordinatni početak R sa:

$$R(\varphi)(x) = (R\varphi)(x) = \tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

- Za $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, korišćićemo sledeću oznaku za parcijalne izvode:

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d}.$$

1.1.2 Osnovni funkcionalni prostori

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ merljiv otvoreni skup u \mathbb{R}^d . Polje nad kojem su definisani prostori je $\Phi \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

- Za $m \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{C}^m(\Omega)$ je Φ -vektorski prostor koji sadrži funkcije koje su m -puta neprekidno diferencijabilne na Ω .
- $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$ je vektorski prostor koji sadrži sve beskonačno diferencijabilne (glatke) funkcije (funkcije koje se mogu diferencirati proizvoljan broj puta) na Ω . Ako $(K_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ je niz kompaktnih skupova u Ω za koji $K_i \subset\subset K_{i+1}$ i $\cup_{i \in \mathbb{Z}_+} K_i = \Omega$, tada $\mathcal{E}(\Omega)$ postaje konveksan prostor (razdvojiv i metrizabilan) u odnosu na topologiju opredeljenu seminormama

$$p_{\alpha,n}(\varphi) := \sup_{x \in K_n} |\varphi^{(\alpha)}(x)|, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^d, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Topologija ne zavisi od izbora skupova K_i .

- (Švarcov) Prostor brzo opadajućih funkcija na \mathbb{R}^d , $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ je potprostor prostora \mathcal{E} :

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in \mathcal{E} : (\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d)(\forall \beta \in \mathbb{N}_0^d), \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty\}.$$

Topologija na \mathcal{S} definisana je familijom seminormi

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi) = \|\varphi\|_{\alpha,\beta} := \sup\{|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| : x \in \mathbb{R}^d\}.$$

Ekvivalentno, $\varphi \in \mathcal{S}$ ako i samo ako

$$(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d)(\forall N > 0)(\exists C_{\alpha,N} > 0)(\forall x \in \mathbb{R}^d)$$

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq C_{\alpha,N} \langle x \rangle^{-N}.$$

Možemo ograničiti N da bude iz \mathbb{Z}_+ .

Konvergenciju u \mathcal{S} definišemo na sledeći način: za niz $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ iz \mathcal{S} kažemo da $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$, ako $\varphi \in \mathcal{S}$ i $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d)$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \lim_{n \rightarrow \infty} |x^\alpha \partial^\beta (\varphi_n - \varphi)(x)| = 0.$$

\mathcal{S} je metrizabilan konveksan prostor sa topologijom koja je finija nego one koja je na njemu inducirana kao potprostora od \mathcal{E} u odnosu na topologiju kompaktne konvergencije za svih izvoda. \mathcal{S} je kompletan prostor (F)-prostor (Fréšetov¹ prostor) i u \mathcal{S} neprekidnost je isto što i sekvencijalna neprekidnost.

- Za $f \in \mathcal{C}(X)$, nosač funkcije f je skup

$$\text{supp}(f) = \text{supp } f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} .$$

Nosač je uvek zatvoreni skup. Ako $\text{supp}(f) \subset\subset K \subset\subset \Omega$ tada kažemo da f ima *kompaktan nosač*.

Pustimo da $K \subset\subset \Omega$. Skup glatkih funkcija na kompaktnom skupu K , \mathcal{D}_K , postaje metrizabilan konveksan prostor u odnosu na topologiju definisanu seminormama

$$p_\alpha(f) = \sup\{|f^{(\alpha)}(x)| : x \in K, \alpha \in \mathbb{N}_0^d\} .$$

$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ je (Švarcov) prostor funkcija u $\mathcal{E}(\Omega)$ koje imaju kompaktne nosače. Neka je $(K_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ niz kompaktnih skupova u Ω za kojih $K_i \subset\subset K_{i+1}$ i $\cup_{i \in \mathbb{Z}_+} K_i = \Omega$, i neka je \mathcal{D}_n vektorski potprostor prostora \mathcal{D} koji se sastoji od one funkcije sa nosačima sadržanim u K_n . Tada je \mathcal{D}_n metrizabilan. Ako uzmemo kao bazu okolina u \mathcal{D} skup svih apsolutno konveksnih absorbirujućih podskupova koji imaju neprazan presek sa svakom od \mathcal{D}_n , dobija se nemetrizabilna topologija induktivne granice. U odnosu na topologiju kompaktne konvergencije za sve izvode, \mathcal{D} (isto i \mathcal{S}) je gusti u \mathcal{E} .

Niz (δ_n) oblika

$$\delta_n := n^d \varphi(n \cdot), n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.1.5}$$

za fiksnu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ naziva se *delta niz u $\mathcal{D}'^*(\mathbb{R}^d)$* . Radi jednostavnosti uzimamo da $\varphi = 1$ u $B(0, \frac{1}{2})$ i $\varphi = 0$ van $B(0, 1)$ ($B(x_0, r)$ označava zatvorenu loptu sa centrom u x_0 i radiusom r).

Generalizacija delta-niza je delta mreža. Delta-mreža je mreža test funkcija $(\delta_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tako da za $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ važi $\text{supp}(\delta_{\varepsilon_2}) \subset \text{supp}(\delta_{\varepsilon_1})$ i kada $\varepsilon \rightarrow 0$, $\text{supp}(\delta_\varepsilon) \rightarrow \{0\}$, i $(\forall \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^d} \delta_\varepsilon(x) dx = 1, \int_{\mathbb{R}^d} |\delta_\varepsilon(x)| dx < \infty$. Primer delta-mreže je dat sa $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ za fiksnu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

¹Maurice Fréchet, francuski matematičar, 1878 – 1973.

- Neka je $1 \leq p < \infty$. $\mathcal{L}^p(\Omega)$ je prostor svih p -sumabilnih funkcija na Ω . Neka

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ je merljiva i } \|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} < \infty\}.$$

Ovaj prostor je konveksan sa normom $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$. Često koristimo oznaku $\|f\|_p$ za normu $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$ ako izbor skupa Ω je jasan iz konteksta. Za $p = 1$, $\mathcal{L}^1(\Omega)$ je prostor *apsolutno integrabilnih* funkcija na Ω sa

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

Lako se može dokazati da \mathcal{S} je gusti potprostor u \mathcal{L}^p za svaki $p \geq 0$. Za $p = \infty$ dobijamo prostor esencijalno ograničenih funkcija.

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf \{m \in \mathbb{R} : \mu(\{z : |f(z)| > m\}) = 0\}$$

je najmanji M tako da $|f(x)| \leq M$ za skoro svaki $x \in \Omega$. f je *suštinski ograničena*, ako

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty.$$

Znači, $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ ako f je merljiva i suštinski ograničena.

- Lokalne verzije prostora $\mathcal{L}^p(\Omega)$ su prostori

$$\mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega) = \mathcal{L}^{p,\text{loc}}(\Omega) := \{f : (\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)) \quad \varphi f \in \mathcal{L}^p(\Omega)\}.$$

Kažemo da $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ u $\mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega)$, ako f i f_n pripadaju u $\mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega)$ za svaki n , i ako

$$(\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi f_n = \varphi f \text{ u } \mathcal{L}^p(\Omega).$$

Ako $\Omega = \mathbb{R}^d$, onda skup nakon simbola koji opisuje prostor se izostavlja (na primer, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{D}$).

- Sa $\xrightarrow{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)}$ i $\xrightarrow{\mathcal{C}(K)}$ označavamo uniformnu konvergenciju na \mathbb{R}^d i na K nizova funkcija iz $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ i $\mathcal{C}(K)$, respektivno; $\xrightarrow{\mathcal{C}(K)}$ označava konvergenciju u $\mathcal{C}(K)$ u odnosu na supremum normu $\|\cdot\|_\infty$.

1.1. DEFINICIJE I NOTACIJA

- Označavamo niz $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ brojeva (funkcija, distribucija, ultradistribucija) kraće sa (α_n) ili $(\alpha_n)_n$ i preslikavanje $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto F(x)$ prosto sa F ili $F(x)$. Sa $\|\cdot\|_2$ označavamo normu u $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i konvergenciju u $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ sa $\xrightarrow{2}$.
- *Hermitovi polinomi* H_n i odgovarajuće *Hermitove funkcije* h_n definišu se na \mathbb{R} sa

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (e^{-x^2}), \quad h_n(x) := (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

za $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}_0$. *d-dimenzionalne Hermitove funkcije* h_n date su sa

$$h_n(x) := h_{n_1}(x_1) \dots h_{n_d}(x_d), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad n \in \mathbb{N}_0^d.$$

One formiraju ortonormalnu bazu za $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i one su sopstvene funkcije proizvoda

$$H = \prod_{i=1}^d \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + x_i^2 \right)$$

jedno-dimenzionalnim Hermitovim harmoniskim oscilatorima, pa prema tome

$$H^\alpha = \prod_{i=1}^d \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + x_i^2 \right)^{\alpha_i}$$

i

$$H^\alpha h_k(x) = (2k+1)^\alpha h_k(x) = \prod_{i=1}^d (2k_i+1)^{\alpha_i} h_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha, k \in \mathbb{N}_0^d.$$

Možemo primetiti da je H samoadjungiran operator. Za $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, Hermitovi koeficijenti su

$$c_k = \int_{\mathbb{R}^d} f h_k = (f, h_k)_{\mathcal{L}^2}, \quad \text{za } k \in \mathbb{N}_0^d.$$

1.1.3 Nejednačine

U nastavku teze ćemo koristiti klasične nejednačine koje radi celovitosti izlažemo u ovom odeljku.

Košijeva nejednakost [77]. Za svako $\varepsilon > 0$, ispunjeno je

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Za $\varepsilon = \sqrt{2}^{-1}$ dobijamo klasični oblik Košijeve nejednakosti

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Košijeva nejednakost za funkcije:

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|f(x)|^2 + |g(x)|^2) dx,$$

ili

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \left(\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 + \|g\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 \right).$$

Koši-Švarcova nejednakost. Neka $x, y \in \mathbb{R}^d$. Tada imamo

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|.$$

Jangova nejednakost [77]. Ako $p, q \in (1, \infty)$ su tako izabrani da važi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, onda

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

za sve $a, b > 0$. Ako $\varepsilon > 0$, onda [77]

$$ab \leq \varepsilon a^p + \frac{1}{(\varepsilon p)^{q/p}} \frac{b^q}{q}$$

za sve $a, b > 0$. Od gornjeg sledi da ako $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ i $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, onda $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ sa

$$\|fg\|_1 \leq \frac{1}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \|g\|_q^q. \quad (1.1.6)$$

Ako $x = \infty$ za neko $x \in \{p, q, r\}$ onda uzimamo da važi $\frac{1}{x} := 0$ i obratno, za $x = 0$, $\frac{1}{x} := \infty$.

Helderova nejednakost[77] . Neka $1 \leq p, q \leq \infty$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ako $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ i $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, onda $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ i važi

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \|g\|_{\mathcal{L}^q(\Omega)}.$$

Opšta Helderova nejednakost[77]. Neka $1 \leq p_1, \dots, p_m \leq \infty$ su takvi da je ispunjeno $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$. Ako $f_k \in \mathcal{L}^{p_k}(\Omega)$ za svako $k = 1, \dots, m$, onda proizvod $f_1 \cdots f_m \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ i

$$\|f_1 \cdots f_m\|_1 \leq \prod_{k=1}^m \|f_k\|_{p_k}.$$

Vrlo su korisne i sledeće nejednačine Pitrea² koje koristimo kod težinskih funkcija. Prvi oblik je osnovni dok su ostale forme varijante iste nejednačine.

Propozicija 1.1.1 (Nejednačina Pitrea-osnovni oblik[77]). *Za svako $s \in \mathbb{R}$ i $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$, važi*

$$\langle \xi + \eta \rangle^s \leq 2^{|s|} \langle \xi \rangle^s \langle \eta \rangle^{|s|}. \quad (1.1.7)$$

Propozicija 1.1.2 (Nejednačine Pitrea[77]). *Za svako $s \in \mathbb{R}$ i $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$, važi*

$$(1 + \|\xi + \eta\|)^s \leq 2^{|s|} (1 + \|\xi\|)^s (1 + \|\eta\|)^{|s|}.$$

Takođe

$$(\underline{\xi} + \underline{\eta})^s \leq 2^{|s|} (\underline{\xi})^s (\underline{\eta})^{|s|}$$

gde je $(\underline{\xi}) := \max\{1, \|\xi\|\}$.

Sledeći rezultat korišćemo kod dokaza ekvivalencije različitih oblika talasnog fronta.

Definicija 1.1.3. *Kažemo da su nenegativne realne funkcije f i g ekvivalentne ako postoje konstante $C_1, C_2 > 0$ tako da*

$$C_1 < \frac{f}{g} < C_2.$$

Lema 1.1.4. *Za svako $m \geq 0$ funkcije:*

(a) $1 + \|x\|^{2m}$

(b) $(1 + \|x\|^2)^m$

(c) \widehat{x}^{2m}

su ekvivalentne.

²Jaak Peetre, estonski i švedski matematičar, 1935–.

1.1.4 Konvolucija

Za funkcije $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ definišemo njihovu *konvoluciju* sa

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy.$$

Za $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, važi

$$\partial^\alpha(f * g) = \partial^\alpha f * g = f * \partial^\alpha g.$$

Ako $f, g, h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, onda $f * g = g * f$ i $(f * g) * h = f * (g * h)$. Ako iskoristimo Jangovu nejednakost, dobijamo sledeći koristan rezultat:

Teorema 1.1.5 ([32, 67, 76]). *Neka $1 \leq p, q, r \leq \infty$ su takvi da*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1.$$

*Neka $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ i $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d)$. Onda $f * g \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^d)$ i*

$$\|f * g\|_{\mathcal{L}^r} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}.$$

1.2 Prostori nizova

U klasičnoj analizi su poznati sledeći prostori nizova.

Definicija 1.2.1. *Za $p \geq 1$ kaže se da niz $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} \in \ell^p(\mathbb{Z}_+)$ ako*

$$\|a\|_{\ell^p(\mathbb{Z}_+)} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Sa $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$, $p \in [1, \infty)$, označavamo prostor generalizovanih nizova

$$\ell^p(\mathbb{Z}^d) = \{a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} : \|a\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

Za $p = \infty$, definiše se prostor

$$\ell^\infty(\mathbb{Z}^d) = \{a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} : \|a\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}^d} |a_n| < \infty\}.$$

Za dva niza $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ definišemo njihovu *konvoluciju* $c = a * b$ gde članovi niza $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ definisani su sa

$$c_n := \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} a_m b_{n-m} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} a_{n-m} b_m = \sum_{p+q=n \in \mathbb{Z}^d} a_p b_q. \quad (1.2.1)$$

U produžetku disertacije kada kažemo prostor ℓ^p mislimo na prostor $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$. U navedenim prostorima su ispunjene odgovarajuće nejednačine ranije navedenim:

- *Koši-Švarcova nejednakost.* Neka $a, b \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Tada imamo

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |a_n b_n| \leq \|a\|_{\ell^2} \|b\|_{\ell^2}.$$

- *Diskretna Helderova nejednakost.* Neka $1 \leq p, q \leq \infty$ tako da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ i $a \in \ell^p(\mathbb{Z}^d), b \in \ell^q(\mathbb{Z}^d)$. Tada

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |b_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

- *Diskretna Jangova nejednakost [77].* Neka funkcija $h : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ zadovoljava

$$C_1 := \sup_{n \in \mathbb{Z}^d} \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} |h(m, n)| < \infty, \quad C_2 := \sup_{m \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |h(m, n)| < \infty.$$

Neka je $1 \leq p \leq \infty$. Za svaki niz $a \in \ell^p$ definišimo $b : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ sa $b(m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} h(m, n) a(n)$. Tada ako $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ važi

$$\|b\|_{\ell^q} \leq C_1^{1/p} C_2^{1/q} \|a\|_{\ell^p}.$$

Za sume, u produžetku disertacije, koristimo sledeću notaciju:

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_{\alpha} := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} a_{\alpha}; \quad \sum_{0 \leq \alpha \leq \beta} a_{\alpha} := \sum_{\alpha_1=0}^{\beta_1} \cdots \sum_{\alpha_d=0}^{\beta_d} a_{\alpha}.$$

Ako je poznato u kom skupu su koeficijenti članova posmatrane sume, onda pišemo samo brojač bez skupa. Na primer, ako znamo da su koeficijenti članova sume iz \mathbb{Z} , onda pišemo

$$\sum_n a_n := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n.$$

1.3 Furijeova transformacija

Kako je navedeno u [32], cilj Furijeove analize je razlaganje neke funkcije u obliku neprekidne sume karaktera (karakter je sopstvena funkcija za operatora translacije, tj. funkcija f na \mathbb{R}^d za koju važi sledeći uslov

$$(\forall y \in \mathbb{R}^d)(\forall x \in \mathbb{R}^d) \quad f(x + y) = c(y)f(x)$$

za neko $c(y)$).

Definicija 1.3.1. [11, 76, 98] Furijeova transformacija od $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ je

$$\mathcal{F}(f(x))(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(x) dx.$$

U ovom slučaju se koriste diferencijalni operatori:

$$D_j = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \text{za } j \in \{1, \dots, d\},$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d} = \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_d} \right)^{\alpha_d} = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^{|\alpha|} \partial^\alpha.$$

Primedba 1.3.2. Furijeovu transformaciju različiti autori definišu na različite načine. Na primer, u [18, 10, 32] ona je definisana sa

$$\mathcal{F}_0(f)(\xi) := \int e^{-i \langle x, \xi \rangle} f(x) dx,$$

dok u [67] sa

$$\mathcal{F}_1(f)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{-d/2}} \int e^{-i \langle x, \xi \rangle} f(x) dx,$$

Promene u definiciji Furijeove transformacije dovode samo do promene u konstantama koje se nalaze u formulama. Kod \mathcal{F}_0 i \mathcal{F}_1 diferencijalni operatori imaju oblik:

$$D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} = -i \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \text{za } j \in \{1, \dots, d\},$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d} = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_d} \right)^{\alpha_d} = (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha.$$

1.3. FURIJEOVA TRANSFORMACIJA

Lako se može pokazati ([18]) da je Furijeova transformacija

$$\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$$

neprekidan ograničeni linearni operator čija je norma jednaka 1:

$$\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Sledeća teorema je poznata kao Lebegova teorema za dominantnu konvergenciju:

Teorema 1.3.3. [67] *Neka je $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ niz merljivih funkcija na Ω takav da $f_n \rightarrow f$ konvergira po tačkama skoro svuda na Ω kada $n \rightarrow \infty$. Ako $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ je integrabilna funkcija takva da $|f_n| \leq g$ za svako n , onda je f integrabilna i*

$$\int_{\Omega} f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dx.$$

Korišćenjem Teoreme 1.3.3, dobijamo da ako $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, tada je njena Furijeova transformacija $\mathcal{F}(f)$ neprekidna skoro svuda. Takođe, ako $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, na bazi Riman-Lebegove leme njena Furijeova transformacija $\mathcal{F}(f)$ je neprekidna funkcija na \mathbb{R}^d i važi

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f)(\xi) \rightarrow 0.$$

Tako, Furijeova transformacija povezuje osobinu lokalne regularnosti i svojstva rasta u ∞ .

Ako je $\mathcal{F}(\varphi)$ integrabilna funkcija, onda važi

$$\varphi(x) = \int e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \mathcal{F}(\varphi)(\xi) d\xi$$

(ili ako se koristi alternativna definicija Furijeove transformacije, tada

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-d} \int e^{i \langle x, \xi \rangle} \mathcal{F}_0(\varphi)(\xi) d\xi$$

ili

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-d/2} \int e^{i \langle x, \xi \rangle} \mathcal{F}_1(\varphi)(\xi) d\xi.)$$

Ova formula je definicija *inverzne Furijeove transformacije* koju kraće označavamo sa

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi)) = \mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi} = \check{\varphi} = \varphi.$$

Furijeovu transformaciju je vrlo zgodno koristiti na prostoru \mathcal{S} zbog sledeće njene osobine:

Teorema 1.3.4. *Furijeova transformacija je izomorfizam iz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ u $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tj. za $\varphi \in \mathcal{S}$, važi*

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi = \varphi \quad (\text{respektivno } \mathcal{F}_0(\mathcal{F}_0(\varphi)) = (2\pi)^d R(\varphi)).$$

Prostor \mathcal{S} ima sledeća korisna svojstva povezana sa Furijeovom transformacijom:

Lema 1.3.5. *[16, 28, 32, 67, 76, 98] Sledeće relacije su zadovoljene za sve $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$:*

1. $\mathcal{F}(\tau_h\varphi)(\xi) = e^{-2\pi i \langle \xi, h \rangle} \mathcal{F}(\varphi)(\xi)$ ili $\widehat{\tau_h\varphi}(\xi) = e^{-2\pi i \langle \xi, h \rangle} \hat{\varphi}(\xi)$
(Alternativno, $\mathcal{F}_0(\tau_h\varphi)(\xi) = e^{-i \langle \xi, h \rangle} \mathcal{F}_0(\varphi)(\xi)$)
2. $\tau_\eta(\mathcal{F}(\varphi)) = \mathcal{F}(e^{2\pi i \langle \eta, \xi \rangle} \varphi(\xi))$
3. $\mathcal{F}(D_j\varphi) = 2\pi i \xi_j \mathcal{F}(\varphi)$ ili $\widehat{D_j\varphi} = 2\pi i \xi_j \hat{\varphi}$
(Alternativno, $\mathcal{F}_0(D_j\varphi) = \xi_j \mathcal{F}_0(\varphi)$)
4. $D_j\mathcal{F}(\varphi) = -(2\pi i)\mathcal{F}(x_j\varphi)$ ili $D_j\hat{\varphi}(\xi) = -(2\pi i)\widehat{x_j\varphi}(\xi)$
(Alternativno, $\mathcal{F}_0(x_j\varphi) = (-1)D_j\mathcal{F}_0(\varphi)$)
5. $\int \mathcal{F}(\varphi)\psi dx = \int \varphi\mathcal{F}(\psi) dx$ ili $\int \hat{\varphi}\psi dx = \int \varphi\hat{\psi} dx$
6. $\int \varphi\bar{\psi} dx = \int \mathcal{F}(\varphi)\overline{\mathcal{F}(\psi)} dx$ ili $\int \varphi\bar{\psi} dx = \int \hat{\varphi}\bar{\hat{\psi}} dx$ (Parsevalova formula)
(Alternativno, $\int \varphi\bar{\psi} dx = (2\pi)^{-d} \int \mathcal{F}_0(\varphi)\overline{\mathcal{F}_0(\psi)} dx$)
7. $\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(\psi)$ ili $\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi}\hat{\psi}$
(ali $\mathcal{F}_1(\varphi * \psi) = (2\pi)^{-d/2} \mathcal{F}_1(\varphi)\mathcal{F}_1(\psi)$ što je glavni problem kod $\mathcal{F}_1!$)
8. $\mathcal{F}(\varphi\psi) = \mathcal{F}(\varphi) * \mathcal{F}(\psi)$ ili $\widehat{\varphi\psi} = \hat{\varphi} * \hat{\psi}$
(Alternativno, $\mathcal{F}_0(\varphi\psi) = (2\pi)^{-d} \mathcal{F}_0(\varphi) * \mathcal{F}_0(\psi)$)

Svojstva Furijeove transformacije koje ćemo najčešće koristiti su 7 i 8, tj. veze između konvolucionog i multiplikativnog proizvoda.

1.4 Prostori distribucija

1.4.1 Prostor temperiranih distribucija \mathcal{S}'

Ako je $X(\mathbb{C})$ vektorski prostor tada prostor

$$X' = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ je linearno i neprekidno}\}$$

je dualni prostor prostora X . Dejstvo funkcionala f nad $x \in X$ označavamo sa $f(x)$ ili $\langle f, x \rangle$, a u [43] koristi se oznaka $\langle x, f \rangle$. Od sada smatramo da $\langle f, x \rangle = \langle x, f \rangle$.

Definicija 1.4.1. $f \in \mathcal{S}'$ ako za neki niz $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ iz \mathcal{S} kada $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ u \mathcal{S} , važi $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\varphi_n) = f(\varphi)$ u \mathbb{C} , tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, \varphi_n \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ u \mathbb{C} .

Ekvivalentno, [18]: $f \in \mathcal{S}'$ je neprekidan ako i samo ako, postoji konstanta $C > 0$ i $N \in \mathbb{N}$ tako da

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|, \text{ za svaku } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Definicija 1.4.2. Prostor temperiranih distribucija \mathcal{S}' je prostor koji se sastoji od svih neprekidnih linearnih funkcionala na \mathcal{S} (ili dualni prostor prostora \mathcal{S}).

Strukturalna teorema za temperirane distribucije može da se nađe u [2, 18]. Kažemo da je φ neprekidna funkcija polinomnog rasta ako postoje konstante $C > 0, M > 0$ za koje važi

$$(\forall x \in \mathbb{R}^d) \quad |\varphi(x)| \leq C \langle x \rangle^M.$$

Propozicija 1.4.3. [2, 18] Svaka temperirana distribucija je konačan izvod neke neprekidne funkcije polinomnog rasta.

Furijeova transformacija za temperirane distribucije definiše se na sledeći način.

Definicija 1.4.4. Ako $f \in \mathcal{S}'$, tada Furijeova transformacija od f , $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$, definisana je sa

$$\langle \hat{f}, \phi \rangle := \langle f, \hat{\phi} \rangle, \text{ za svako } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Propozicija 1.4.5 ([76]). *Neka je X topološki potprostor iz \mathcal{S}' (tj., konvergencija u X povlači konvergenciju u \mathcal{S}'). Ako $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ u \mathcal{S}' i $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = v$ u X , onda $f \in X$ i $f = v$.*

Propozicija 1.4.6 ([76]). *(Princip jedinstvenosti za distribucije). Neka $u, v \in \mathcal{S}'$ i neka $\langle u, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle$ za svako $\varphi \in \mathcal{S}$. Tada $u = v$.*

Propozicija 1.4.7 (Hausdorff-Jangova nejednakost). *Neka $1 \leq p \leq 2$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ako $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ tada $\hat{u} \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d)$ i*

$$\|\hat{u}\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Propozicija 1.4.8 ([16]). *Za svaki $q \in [1, \infty]$, važi $\mathcal{S}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$ (inkluzija je neprekidna, tj. ako $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ u \mathcal{S} , tada $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ u $\mathcal{L}^q(\Omega)$).*

Za dualne prostore, ispunjena je sledeća

Propozicija 1.4.9 ([16]). *Za svako $p \in [1, \infty]$, važi $\mathcal{L}^p(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\Omega)$.*

1.4.2 Operacije u prostoru temperiranih distribucija

Definicija 1.4.10. *Za $f \in \mathcal{S}'$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, definišemo α -ti izvod od f (u distribucionom smislu) sa*

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle,$$

gde je $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$.

Propozicija 1.4.11. [76] *Ako $f \in \mathcal{S}'$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, tada $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}'$ i operator $\partial^\alpha : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ je neprekidan.*

Definicija 1.4.12. *Proizvod glatke funkcije $\psi \in \mathcal{E}$ i temperirane distribucije $f \in \mathcal{S}'$ je*

$$\langle \psi f, \varphi \rangle := \langle f, \psi \varphi \rangle$$

(ili $(\psi f)(\varphi) = f(\psi \varphi)$).

Definicija 1.4.13. *Inverzna Furijeova transformacija od $f \in \mathcal{S}'$ je unarna operacija na \mathcal{S}' definisana sa*

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(f), \varphi \rangle := \langle f, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle, \text{ za svako } \varphi \in \mathcal{S},$$

(ili drugačije zapisano, $(\mathcal{F}^{-1}(f))(\varphi) := f(\mathcal{F}^{-1}\varphi)$)

Definicija je dobra jer $\mathcal{F}^{-1}(\varphi)$ je dobro definisana za svaku $\varphi \in \mathcal{S}$.

Propozicija 1.4.14. *Inverzna Furijeova transformacija*

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$$

je neprekidna operacija na \mathcal{S}' .

Propozicija 1.4.15. [76] *Operatori \mathcal{F} i \mathcal{F}^{-1} su inverzni jedan drugome na \mathcal{S}' , i*

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \text{id}_{\mathcal{S}'}$$

1.4.3 Prostori distribucija \mathcal{D}'

Za otvoreni skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ označavamo prostor regularnih funkcija sa kompaktnim nosačem sa $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$.

Definicija 1.4.16. *Kažemo da $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ u $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ ako: $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, postoji kompaktan skup $K \subset\subset \Omega$ takav da za svako $n \in \mathbb{Z}_+$, $\text{supp}(\varphi_n) \subseteq K$, $\text{supp}(\varphi) \subseteq K$ i $\sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)(x)| \rightarrow 0$ za sve multi-indekse $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.*

Tada se $\mathcal{D}'(\Omega)$ definiše kao skup svih linearno neprekidnih funkcionala na $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ i naziva se *prostor (Švarcovih) distribucija*.

Teorema 1.4.17. [67, 76] *Linearan operator $f : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ pripada u $\mathcal{D}'(\Omega)$ ako i samo ako za svaki $K \subset\subset \Omega$ postoje konstante C i m takve da*

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad (1.4.1)$$

za sve $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ sa $\text{supp} \varphi \subseteq K$.

Najmanji prirodni broj m za koji je jednakost (1.4.1) ispunjena zove se *red distribucije f na kompaktnom skupu K* . Ako postoji m takav da je (1.4.1) ispunjena za svih kompaktnih podskupova od Ω , i pritom to je najmanji nenegativan celi broj sa tom osobinom, on se zove *red distribucije f* .

Teorema 1.4.18. [16, 67, 76] *Važi*

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{L}^p \hookrightarrow \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}',$$

za svaki $p \in [1, \infty]$. Za $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ imamo $\mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, za svaki $p \in [1, \infty]$.

1.4.4 Prostor distribucija sa kompaktnim nosačem $\mathcal{E}'(\Omega)$

Kažemo da $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ u $\mathcal{E}'(\Omega)$ ako $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{E}'(\Omega)$ i ako

$$\sup_{x \in K} \lim_{n \rightarrow \infty} |\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)(x)| = 0$$

za svakog multi-indeksa $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ i za svakog kompaktnog podskupa $K \subset \subset \Omega$.

Definicija 1.4.19. *Prostor distribucija sa kompaktnim nosačem $\mathcal{E}'(\Omega)$ je skup svih linearnih neprekidnih funkcionala $f : \mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$.*

Lako se vidi da

$$\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{D}' \hookrightarrow \mathcal{D}'$$

i za $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ važi $\mathcal{E}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$;

Za $f \in \mathcal{D}'$ kažemo da $f \equiv 0$ na Ω ako $\langle f, \varphi \rangle = 0$ za svako $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Nosač distribucije f se ne može definisati na isti način kao nosač funkcije. To je zato što distribucija se ne može definisati u svakoj tački nekog skupa.

Definicija 1.4.20. *Kaže se da je $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ različita od nule na skupu $K \subseteq \Omega$ ako $\langle f, \varphi \rangle = 0$ za svaku $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, za koju $\text{supp}(\varphi) \cap K = \emptyset$.*

Definicija 1.4.21. *Nosač distribucije f je komplement skupa tačaka $x \in \mathbb{R}^d$ za koje $f \equiv 0$ u nekoj okolini tačke x . Nosač distribucije f je najmanji zatvoreni skup na kome je f različita od nule i označava se sa $\text{supp}(f)$.*

Propozicija 1.4.22. *[67, 76] Ako nosač $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ je kompaktna, tada je f konačnog reda. Skup svih distribucija sa kompaktnim nosačem je $\mathcal{E}'(\Omega)$.*

Definicija 1.4.23. *Distribucija $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je regularna u tački $x \in \Omega$ ako postoji otvorena okolina $U \ni x$ i regularna funkcija $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U)$, tako da*

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \alpha(x)\varphi(x)dx = \langle \alpha, \varphi \rangle$$

za svako $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$.

Definicija 1.4.24. *Singularni nosač distribucije $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definiše se kao komplement skupa na kome je f regularna: $x \notin \text{sing supp } f$ ako postoji otvorena okolina U tačke x i regularna funkcija $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U)$ takva da*

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle \alpha, \varphi \rangle$$

za svaku $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$.

Jasno je iz definicije da ako $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tada je $\text{sing supp}(f)$ zatvoreni skup.

1.5 Sekvencijalni pristup teoriji distribucija

Između različitih načina definisanja distribucije možda najjednostavniji i najpristupačniji je takozvani *sekvencijalni pristup* poljskog matematičara Mikusinskog uveden prvično u [54], a koji je detaljnije izložen u [2]. Ovaj pristup bazira se na kompletiranje prostora neprekidnih funkcija klasama ekvivalencije fundamentalnih nizova koji se nazivaju distribucije (ili distribucije Mikusinskog). Tako dobiveni prostor je zatvoren u odnosu na operaciju diferenciranja. Ovaj postupak je analogan postupku kompletiranja racionalnih brojeva sa realnim brojevima.

Neka je $I \subset \mathbb{R}$ otvoreni (ograničeni ili neograničeni) interval.

Definicija 1.5.1. [2] *Kaže se da je niz funkcija $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ iz $\mathcal{C}(I)$ fundamentalan ako i samo ako*

(1) *postoje nenegativan celi broj $p \in \mathbb{N}_0$ i niz $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ u $\mathcal{C}^p(I)$ takvi da*

$$F_n^{(p)}(x) = f_n(x) \text{ za svako } x \in I, \text{ i za svaki } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.5.1)$$

(2) *niz $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ konvergira ravnomerno na svakom $K \subset\subset I$.*

Uslov (2) se još naziva *skoro ravnomerna konvergencija* na otvorenom skupu $I \subset \mathbb{R}$. U [2] označava se sa $F_n \rightrightarrows$ dok u ovoj disertaciji ćemo koristiti i oznaku $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)}$.

Definicija 1.5.2. *Dva fundamentalna niza $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ su ekvivalentna i pišemo $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} \sim (g_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, ako i samo ako postoji $p \in \mathbb{N}_0$ i nizovi $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ iz $\mathcal{C}(I)$ za kojih*

(1) $F_n^{(p)} = f_n$, $G_n^{(p)} = g_n$ za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$,

(2) *oba niza $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ i $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ konvergiraju skoro ravnomerno prema istoj granici F . Ovo se u [2] označava sa $F_n \rightrightarrows G_n$ dok mi ćemo koristiti i izraz*

$$F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} G_n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Teorema 1.5.3. [2] *Relacija \sim je ekvivalencija.*

Teorema 1.5.4. [2] Dva fundamentalna niza $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ su ekvivalentna, ako i samo ako niz:

$$f_1, g_1, f_2, g_2, \dots$$

je fundamentalan.

Definicija 1.5.5. Distribucija (u smislu Mikusinskog) je klasa ekvivalencije $[(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}] = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} / \sim$ fundamentalnih nizova u odnosu na relaciju ekvivalencije \sim definisanu u 1.5.2.

Ako posmatramo konstantnog niza $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, gde $f_n(x) = f(x)$ za svakog $n \in \mathbb{Z}_+$, očigledno je da je to jedan fundamentalan niz. Svakom elementu $f \in \mathcal{C}(I)$ moguće je pridružiti klasu ekvivalencije konstantnog niza $[(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}]$ i na taj način dobija se inkluzija prostora $\mathcal{C}(I)$ u prostor distribucija Mikusinskog.

Neka je $(K_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ rastući niz kompaktnih podskupova od I tako da $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} K_n$. Na bazi teoreme Vajerštrasa za aproksimaciju neprekidnih funkcija sledi da za svaku funkciju $f \in \mathcal{C}(I)$ postoji niz polinoma $(P_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ za koji

$$\sup_{x \in K_n} |f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n}, \text{ za svaki } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Dobija se da za proizvoljnu neprekidnu funkciju $f \in \mathcal{C}(I)$ postoji niz polinoma $(P_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ koji konvergira skoro ravnomerno prema f i svaka distribucija Mikusinskog je predstavljena kao klasa ekvivalencije $[(P_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}]$.

Definišemo distribucioni diferencijalni operator D sa

$$D[(P_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}] = [(P'_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}].$$

Lako je dokazati da je u odnosu na ovom operatoru svaka distribucija Mikusinskog beskonačno puta diferencijabilna.

Broj p u uslovu (1.5.1) može da bude ist za svakog od skupova K_n . Najmanji od ovih brojeva, ako takav postoji, kaže se da je *red distribucije* definisanoj klasom ekvivalencije $[(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}]$ i da je ta distribucija konačnog reda. Ukoliko takav nenegativan ceo broj ne postoji, kaže se da je red distribucije beskonačan.

Definicije se mogu formulisati i na sledeći način koji je praktičniji. Kažemo da je niz $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, $f_n \in \mathcal{C}(I)$, fundamentalan ako i samo ako za svaki $K \subset\subset I$ postoji $p = p(K) \in \mathbb{N}_0$ i niz $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ u $\mathcal{C}^p(I)$, tako da $F_n^{(p)} = f_n$ na K za

svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ i $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)}$. Fundamentalni nizovi $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ i $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ su ekvivalentni ako za svaki $K \subset\subset I$ postoji neko $p = p(K) \in \mathbb{N}_0$ i nizovi $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ i $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, tako da $F_n^{(p)} = f_n, G_n^{(p)} = g_n$ nad K i oba niza $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ i $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ konvergiraju ravnomerno ka istoj granici na K

$$F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} G_n, n \rightarrow \infty.$$

Distribucija u opštem slučaju je tada definisana kao klasa ekvivalencije fundamentalnih nizova.

U definiciji distribucija Mikusinskog na nekom otvorenom podskupu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, umesto fundamentalnih nizova neprekidnih funkcija koji se koriste u slučaju $d = 1$, teorija se zasniva na fundamentalnim nizovima beskonačno diferencijabilnih (glatkih) funkcija.

Razgledajmo linearni prostor $\mathcal{C}^\infty(I)$ svih beskonačno diferencijabilnih (glatkih) funkcija definisanim na nekom otvorenom (moguće i beskonačnom) intervalu $I \subset \mathbb{R}^d$.

Definicija 1.5.6. *Kaže se da je niz funkcija $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ iz $\mathcal{C}^\infty(I)$ fundamentalan ako i samo ako*

- (1) $(\exists p \in \mathbb{N}_0)(\exists (F_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}, F_n \in \mathcal{C}^\infty(I))(\forall n \in \mathbb{Z}_+) \quad F_n^{(p)} = f_n \quad \text{nad } I,$
- (2) $(\forall K \subset\subset I) \quad F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)}, n \rightarrow \infty.$

Definicija 1.5.7. *Kažemo da su fundamentalni nizovi $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}, (g_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ ekvivalentni i pišemo $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} \sim (g_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, ako i samo ako postoji $p \in \mathbb{N}_0$ i nizovi $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}, (G_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ tako da*

- (1) $F_n^{(p)}(x) = f_n(x), G_n^{(p)}(x) = g_n(x)$ za svako $x \in I$ i za svako $n \in \mathbb{Z}_+$,
- (2) oba niza $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ i $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ konvergiraju skoro ravnomerno prema istoj granici F . Ovo se označava sa $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} G_n, n \rightarrow \infty.$

Definicija 1.5.8. *Distribucija u smislu Mikusinskog je definisana kao klasa ekvivalencije $[(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}] = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} / \sim$ fundamentalnih nizova u odnosu na relaciju ekvivalencije \sim iz Definicije 1.5.7.*

Operacije kod distribucija Mikusinskog uvode se kao operacije nad elementima u klasama ekvivalencije. Neka su $f = [(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}], g = [(g_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}]$ distribucije Mikusinskog, $\lambda \in \mathbb{C}$ je skalar i $\omega \in \mathcal{C}_0^\infty$ je neka fiksna glatka funkcija nad \mathbb{R}^d . Sledeće operacije su dobro definisane, tj. svi nizovi koji se nalaze na desnoj strani su fundamentalni.

- Proizvod skalara λ i distribucije f

$$\lambda f = \lambda[(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}] = [(\lambda f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}].$$

- Zbir distribucija $f = [f_n]$ i $g = [g_n]$.

$$f + g = [(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}] + [(g_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}] = [(f_n + g_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}].$$

- Proizvod glatke funkcije ω i distribucije f

$$\omega f = \omega[(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}] = [(\omega f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}].$$

Međutim problem se javlja ako pomnožimo članove dva niza. Imeno, ako su nizovi $f = [f_n]$ i $g = [g_n]$ fundamentalni, proizvod-niz

$$(f_n g_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$$

u opštem slučaju ne mora da bude fundamentalan! Prema tome, proizvod distribucija nije definisan u opštem slučaju. Primer gde proizvod nije definisan je dat u [2] 12.5, str.275.

1.6 Prostori Soboljeva, $\mathcal{H}^{p,m}(\Omega)$

Prostori $\mathcal{H}^{p,m}(\Omega)$ su za prvi put definisani od Soboljeva sredinom 30-tih godina prošlog veka u [90] i nose njegovo ime. On ih je koristio za rešavanje PDJ pre svega iz oblasti fizike i kvantne mehanike. Ideja je bila da se iskoriste funkcije iz $\mathcal{L}^p(\Omega)$, gde je Ω otvoreni skup u \mathbb{R}^d , za kojih se zna da su svi njihovi parcijalni izvodi do nekog reda iz $\mathcal{L}^p(\Omega)$ za dobijanje konvencionalnih rešenja posmatranim PDJ. Jednačinu rešavamo u prostoru distribucija, a nakon toga proveravamo da li ta rešenja imaju neka dobra svojstva. Teorija Soboljevskih prostora je vrlo primenjivana i razrađena u mnogim tekstovima, kao na primer [1, 53, 67, 98] itd.

Definicija 1.6.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren skup i $u, v \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$. Kažemo da je v α -ti slabi parcijalni izvod od u ako za svako $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ važi*

$$\int_{\Omega} u \partial^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi \, dx.$$

Koristi se oznaka $v = \partial^\alpha u$.

Definicija 1.6.2. *Neka je $1 \leq p \leq \infty$ i $m \in \mathbb{Z}_+$. Prostor Soboljeva $\mathcal{H}^{p,m}(\Omega)$ je podskup prostora Švarcovih distribucija \mathcal{D}' za čije elemente važi:*

$$(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d)(|\alpha| \leq m) \quad \partial^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega),$$

gde je $\partial^\alpha u$ α -ti slabi izvod distribucije f).

Takođe se koriste i oznake $W_p^m(\Omega)$, $\mathcal{L}_m^p(\Omega)$. Jasno je iz definicije da

$$\mathcal{H}^{p,0}(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega), \quad \mathcal{H}^{p,m}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega) \subseteq \mathcal{S}', \text{ za } m \geq 1. \quad (1.6.1)$$

Propozicija 1.6.3. *Neka je $1 \leq p < \infty$ i $m \in \mathbb{N}_0$. Prostor $\mathcal{H}^{p,m}(\Omega)$ je normiran prostor sa normom*

$$\|u\|_{p,m,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.6.2)$$

Za $p = \infty$,

$$\|u\|_{\infty,m,\Omega} := \max_{|\alpha| \leq m} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |\partial^\alpha u|.$$

U produžetku, kada kažemo prostor $\mathcal{H}^{p,m}(\Omega)$ mislimo na normirani prostor sa normom (1.6.2).

Teorema 1.6.4. [67] *Neka je $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$. Prostor $\mathcal{H}^{p,m}(\Omega)$ je Banahov prostor. Prostor $\mathcal{H}^{2,m}(\Omega)$ je Hilbertov.*

Za $\mathcal{H}^{2,m}(\Omega)$ koristi se oznaka $\mathcal{H}^m(\Omega)$.

Teorema 1.6.5. [67] *Prostor $\mathcal{H}^{p,m}(\Omega)$, za $1 \leq p < \infty$ je separabilan, a za $1 \leq p < \infty$ je refleksivan.*

Teorema 1.6.6. [67] *Neka je $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$. Identičko preslikavanje iz $\mathcal{H}^{p,m}(\Omega)$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$ je neprekidno u odnosu na jakoj topologiji u $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Teorema 1.6.7. [67] *Neka je $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$.*

- (i) *Ako $\varphi \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ i ako su svi izvodi do reda m funkcije φ ograničeni, tada je preslikavanje $\mathcal{H}^{p,m}(\Omega) \ni f \mapsto \varphi f \in \mathcal{H}^{p,m}(\Omega)$ linearno i neprekidno.*

(ii) Za $|\alpha| \leq m$ preslikavanje

$$\partial^\alpha : \mathcal{H}^{p,m}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}^{p,m-|\alpha|}(\Omega), \quad f \mapsto \partial^\alpha f$$

je linearno i neprekidno.

Slično kao kod distribucija, postoje lokalne verzije Soboljevskih prostora.

Definicija 1.6.8. Kažemo da je

$$u \in \mathcal{H}_0^{m,p}(\Omega) = \mathcal{L}_m^{p,\text{loc}}(\Omega)$$

ako za svako $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, važi $\varphi u \in \mathcal{H}^{m,p}(\Omega) = \mathcal{L}_m^p(\Omega)$.

Definicija 1.6.9. Kažemo da $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ u $\mathcal{H}_0^{m,p}$, ako za svako $n \in \mathbb{Z}_+$ je $u_n \in \mathcal{H}_0^{m,p}(\Omega)$, $u \in \mathcal{H}_0^{m,p}(\Omega)$ i za svaku $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi u_n = \varphi u \text{ u } \mathcal{H}^{m,p}.$$

Teorema 1.6.10. [67] Neka je $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Prostor $\mathcal{H}_0^{p,m}(\Omega)$ je Banahov, dok $\mathcal{H}^{2,m}(\Omega) = \mathcal{H}^m(\Omega)$ je Hilbertov.

Teorema 1.6.11. [67] Neka je $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Prostor $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{H}^{p,m}(\Omega)$ je gusti u $\mathcal{H}^{p,m}(\Omega)$.

Teorema 1.6.12. [67] Neka je $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Prostor $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ je gusti u $\mathcal{H}^{p,m}(\mathbb{R}^d)$.

Posledica 1.6.13. [67] Ako je $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$, tada je

$$\mathcal{H}^{p,m}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{H}_0^{p,m}(\mathbb{R}^d).$$

Navešćemo neke teoreme koje se odnose na dualni prostor $(\mathcal{H}_0^{p,m}(\Omega))'$. Direktno iz definicije sledi da je on potprostor prostora $\mathcal{D}'(\Omega)$ u smislu identifikacije neprekidnih linearnih funkcionala nad gustom prostorom $\mathcal{H}_0^{p,m}(\Omega)$ i neprekidnih linearnih funkcionala nad gustom potprostorom $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ prostora $\mathcal{H}_0^{p,m}(\Omega)$.

Teorema 1.6.14. [67] Distribucija $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je neprekidan linearni funkcional nad $\mathcal{H}_0^{p,m}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ ako i samo ako f ima oblik

$$f = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha, \tag{1.6.3}$$

gde je izvod u distribucionom smislu, $f_\alpha \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ i $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ za $p \neq 1$, a za $p = 1$, $q = \infty$.

Definicija 1.6.15. $\mathcal{H}^{p,-m}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \geq 1$, je potprostor prostora $\mathcal{D}'(\Omega)$ čiji su elementi distribucije oblika

$$f = \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha^{(\alpha)}, \quad (1.6.4)$$

gde su $f_\alpha \in \mathcal{L}^p(\Omega)$.

U prostoru $\mathcal{H}^{p,-m}$ definisana je norma sa

$$\|f\|_{p,-m,\Omega} := \inf \left\{ \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}, \quad (1.6.5)$$

gde se infimum uzima po svim reprezentacijama distribucije f oblika (1.6.4).

Teorema 1.6.16. [67] Prostor neprekidnih linearnih funkcionala nad $\mathcal{H}_0^{p,m}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, sa dualnom normom

$$\|f\|'_{p,m,\Omega} = \|f\|_{q,-m,\Omega} \quad (1.6.6)$$

je izometričan prostoru $H^{q,-m}(\Omega)$ sa normom (1.6.5) (gde $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ za $p \neq 1$, $q = \infty$ za $p = 1$).

Teorema 1.6.17. [67] Ako $f \in \mathcal{H}^{p,-m}$ i $g \in \mathcal{H}^{q,-s}$, gde je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$; $p, q \in [1, \infty]$, tada konvolucija $f * g$ postoji i pripada prostoru $\mathcal{H}^{r,-m-s}$ gde je

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Naročito su interesantni prostori $\mathcal{H}^m = \mathcal{H}^{2,m}(\mathbb{R}^d)$ i $\mathcal{H}_0^m = \mathcal{H}_0^{2,m}(\mathbb{R}^d)$ jer su Hilbertovi prostori i na njih možemo da koristimo dobra svojstva Hilbertovih prostora.

Teorema 1.6.18. [67] Neka je Ω otvoreni skup u \mathbb{R}^d . Prostori $\mathcal{H}_0^m(\Omega)$ i $\mathcal{H}^{-m}(\Omega)$, za $m \in \mathbb{N}_0$ su izometrični. Izometrija tih prostora definisana je relacijom

$$\mathcal{H}_0^m(\Omega) \ni f \mapsto \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^{2\alpha} f \in \mathcal{H}^{-m}(\Omega). \quad (1.6.7)$$

Posledica 1.6.19. [67] *Prostor $\mathcal{H}^{-m}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$, je Hilbertov.*

Prostore \mathcal{H}^m i \mathcal{H}^{-m} možemo okarakterisati pomoću Furijeove transformacije.

Teorema 1.6.20. [67]

- (i) *Distribucija f pripada u \mathcal{H}^m , $m \in \mathbb{N}_0$ ako i samo ako $f \in \mathcal{S}'$ i važi $\hat{f}\langle|\xi|\rangle^m \in \mathcal{L}^2$.*
- (ii) *Distribucija f pripada u \mathcal{H}^{-m} , $m \in \mathbb{N}_0$ ako i samo ako $f \in \mathcal{S}'$ i važi $\hat{f}\langle|\xi|\rangle^{-m} \in \mathcal{L}^2$.*

Na bazi gornje teoreme, definišu se Soboljevski prostori \mathcal{H}^m za svaki $m \in \mathbb{R}$ koji se takođe nazivaju i Beselovi potencijalni prostori (F. Bessel).

Definicija 1.6.21. [67, 98] *Za proizvoljno $m \in \mathbb{R}$ sa \mathcal{H}^m označavamo prostor temperiranih distribucija za koje važi*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

tj. $f \in \mathcal{H}^m \Leftrightarrow \hat{f}\langle|\xi|\rangle^m \in \mathcal{L}^2$.

Teorema 1.6.22. [67] *Prostor \mathcal{H}^m , $m \in \mathbb{R}$ izomorfan je sa \mathcal{L}^2 . Ispunjeno je i*

$$\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{H}^m. \quad (1.6.8)$$

Teorema 1.6.23. [67] *Ako je $f \in \mathcal{H}^m$, $m \in \mathbb{R}$, tada važi*

$$(i) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f \in \mathcal{H}^{m-1}, i = 1, \dots, d.$$

(ii) *Ako je $\varphi \in \mathcal{S}$, tada je preslikavanje*

$$\mathcal{H}^m \ni f \mapsto \varphi f \in \mathcal{H}^m$$

neprekidno.

(iii) *Ako je $f \in \mathcal{H}^{m_1} \cap \mathcal{E}'$, $g \in \mathcal{H}^m \cap \mathcal{S}'$, tada je $f * g \in \mathcal{H}^{m+m_1}$.*

Teorema 1.6.24. [67] *Dual prostora \mathcal{H}^m , $m \in \mathbb{R}$, je \mathcal{H}^{-m} .*

Teorema 1.6.25. [76, 67] *Ispunjene su sledeće jednačine*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \langle x \rangle^{-s} \mathcal{H}^s, \quad \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{H}^s \subseteq \mathcal{E} \quad (1.6.9)$$

i

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \langle x \rangle^s \mathcal{H}^s, \quad \mathcal{E}' \subseteq \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{H}^s. \quad (1.6.10)$$

1.7 Periodične distribucije

Prostor periodičnih distribucija je jedan od osnovnih Švarcovih prostora i on je izučavan u mnogim knjigama i radovima tokom druge polovine prošlog stoljeća. Neke važnije od njih su [3, 82, 83, 2, 100, 88, 36]. Motivacija za izučavanje ovih distribucija je lokalna analiza i mikrolokalna analiza neke funkcije ili distribucije. Na taj način, mnogi problemi i računi koji se izvode u \mathbb{R}^d uprošćavaju se i prebacuju se na torusu \mathbb{T}^d . Teorija distribucija na torusu \mathbb{T}^d je mnogo jednostavnija nego one na \mathbb{R}^d . Kada se primeni Furijeova transformacija na funkcije definisane nad \mathbb{T}^d one se preslikavaju u funkcije nad \mathbb{Z}^d . Na primer, temperirane distribucije postaju funkcije koje su polinomnog rasta u beskonačnosti nad mrežom \mathbb{Z}^d . Kod ovih funkcija nestaju problemi sa regularnosti jer su definisane na diskretnom skupu i u svakoj njegovoj tački što ćemo dalje koristiti kod mikrolokalne analize.

Definicija 1.7.1. *Funkcija $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ je periodična sa periodom $T \in \mathbb{R}^d$ ako*

$$\tau_T \varphi = \varphi; \quad (1.7.1)$$

to znači da $(\forall x \in \mathbb{R}^d) (\tau_T \varphi)(x) = \varphi(x - T) = \varphi(x)$.

Definicija 1.7.2. *Funkcija $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ je periodična sa periodom 1 ako*

$$(\forall n \in \mathbb{Z}^d) \tau_n \varphi = \varphi. \quad (1.7.2)$$

To znači da $(\tau_n \varphi)(x) = \varphi(x - n)$, za svaki $n \in \mathbb{Z}^d$. Kako bi ovo važilo, dovoljno je da

$$\tau_{e_i} f = f, \text{ za } i = 1, \dots, d,$$

gde e_i je i -ti koordinatni vektor standardne baze

$$\{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$$

kod koga 1 je i -ta koordinata, a ostale koordinate su nule.

Postoji i druga notacija za uvođenje periodičnih funkcija korišćenjem d -dimenzionalnog torusa \mathbb{T}^d . Pritom identifikujemo 1-periodične funkcije sa njihovim restrikcijama nad $[0, 1]^d$ ili sa njihovim projekcijama nad \mathbb{T}^d . Na \mathbb{R}^d uvodi se relacija ekvivalencije: $x \sim y$ ako i samo ako $x - y \in \mathbb{Z}^d$. Faktor prostor koji se dobija je d -dimenzionalni torus,

$$\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \sim = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d = (\mathbb{R} / \mathbb{Z})^d.$$

Na primer kaže se da je $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^d)$ ako je f periodična na \mathbb{R}^d i $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Definicija 1.7.3. *Prostor m -puta neprekidno diferencijabilnih periodičnih funkcija označavamo sa $\mathcal{C}^m(\mathbb{T}^d)$, dok prostor test funkcija su elementi prostora*

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^d) := \bigcap_{m \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{C}^m(\mathbb{T}^d).$$

To su periodične glatke funkcije u \mathbb{R}^d . Topologija u \mathcal{P} može se zadati nizom normi

$$\|\varphi\|_k = \sup_{\substack{x \in (0,1)^d \\ |\alpha| \leq k}} |\varphi^{(\alpha)}(x)|, k \in \mathbb{N}_0.$$

Prostor \mathcal{P} je Frešetov ali nije normiran. Vrlo je koristan prostor $\mathcal{L}^2(\mathbb{T}^d)$ koji sadrži sve periodične kvadratno-integrabilne funkcije na $[0, 1)^d$.

Oznaka $\int_{\mathbb{T}^d}$ ima isto značenje kao i $\int_{[0,1)^d}$.

Teorema 1.7.4. *$\mathcal{L}^2(\mathbb{T}^d)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom*

$$(f, g)_{\mathcal{L}^2(\mathbb{T}^d)} = (f, g) := \int_{\mathbb{T}^d} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Skup eksponencijala

$$B_{\mathcal{P}} = \{e_\xi : \mathcal{P} \ni x \mapsto e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle} \in \mathbb{C}; \xi \in \mathbb{Z}^d, x \in \mathbb{T}^d\}$$

je ortonormalna baza za $\mathcal{L}^2(\mathbb{T}^d)$ [3, 28].

Furijeve koeficijenti funkcije $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}^d)$ su

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{T}^d} f(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} dx, \quad \xi \in \mathbb{Z}^d.$$

U [2], teorema 9.6.2, str. 234, dokazan je sledeći rezultat koji ćemo koristiti:

Teorema 1.7.5. *$\varphi \in \mathcal{P}$ ako i samo ako*

$$\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} a_n e_n,$$

gde $a_n = \int_{[0,1)^d} \varphi(x) e^{-2\pi i \langle n, x \rangle} dx = \langle \varphi, e_{-n} \rangle = (\varphi, \overline{e_n}), n \in \mathbb{Z}^d$ i

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |a_n|^2 \langle n \rangle^{2k} < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d.$$

1.7. PERIODIČNE DISTRIBUCIJE

Dual prostora \mathcal{P} je prostor periodičnih distribucija. Njega označavamo standardno sa \mathcal{P}' . To je u suštini prostor $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)$.

Teorema 1.7.6. [2, Teorema 9.3.4, str. 225]: *Svaka periodična distribucija je temperirana, tj. $\mathcal{P}' \subset \mathcal{S}'$.*

Za periodične distribucije važi rezultat analogan teoremi 1.7.5.

Teorema 1.7.7. *$f \in \mathcal{P}'$, ako i samo ako $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} b_n e_n$, i*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |b_n|^2 \langle n \rangle^{-2k_0} < \infty, \quad \text{za neko } k_0 \in \mathbb{Z}_+.$$

Dokaz se može naći na primer u [2, Teorema 9.6.1, str. 232]. Dejstvo periodične distribucije $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} a_n e_n \in \mathcal{P}'$, nad $\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} b_n e_n \in \mathcal{P}$, moguće je izraziti u obliku

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} a_n b_n.$$

Definicija 1.7.8. *Sa $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ označavamo prostor brzo opadajućih funkcija na \mathbb{Z}^d .*

$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d) = \{ \varphi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C} : (\forall M < \infty) (\exists C_{\varphi, M}) |\varphi(\xi)| \leq C_{\varphi, M} \langle \xi \rangle^{-M} \}.$$

Na $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ definiše se topologija pomoću seminormama

$$p_k(\varphi) := \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^d} \langle \xi \rangle^k |\varphi(\xi)|, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Definicija 1.7.9. *Prostor linearnih neprekidnih funkcionala na $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ nazivamo prostor temperiranih distribucija na \mathbb{Z}^d . To su funkcije $f : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^d) \rightarrow \mathbb{C}$ za koje važi:*

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} f(\xi) \varphi(\xi),$$

i koje su najviše polinomnog rasta, tj. postoje konstante $M < \infty$ i $C_{f, M}$ koja zavisi od f i M , tako da za svako $\xi \in \mathbb{Z}^d$ važi

$$|f(\xi)| \leq C_{f, M} \langle \xi \rangle^M.$$

Za ovaj prostor koristi se oznaka $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$.

Koristeći gore navedene teoreme i oblik koeficijenata u redovima koji se u njima nalaze, dobijamo vezu između prostora $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ i $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ pomoću takozvane periodične Furijeove transformacije.

Definicija 1.7.10. Periodična (toroidalna) Furijeova transformacija je preslikavanje $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^d} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$, definisano sa

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}^d}(f)(\xi) := \int_{[0,1]^d} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(x) dx,$$

koja periodičnu glatku funkciju preslikava u niz njenih Furijeovih koeficijenata.

Teorema 1.7.11. $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^d}$ je bijekcija.

Inverzno preslikavanje je $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^d}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^d) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^d)$, definisano sa

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}^d}^{-1}(g)(x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} g(\xi),$$

za svaki $g \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$.

Teorema 1.7.12 (Planšerel (Plancherel)). *Ako je $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}^d)$ i $\hat{f}(n)$ je njeni n -ti Furijeov koeficijenat, za $n \in \mathbb{Z}^d$. Tada možemo da f zapišemo u oblik*

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(n) e^{i2\pi \langle n, x \rangle}$$

i važi

$$\int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^2 dx = \|f\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{T}^d)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}(n)|^2. \quad (1.7.3)$$

Drugačije zapisano,

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{T}^d)} = \|\hat{f}\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}. \quad (1.7.4)$$

Definicija 1.7.13. Za $1 \leq p < \infty$ sa $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}^d)$ označavamo prostor svih $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T}^d)$ za kojih je

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{T}^d)} := \left(\int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Za $p = \infty$ sa $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T}^d)$ označavamo prostor svih $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T}^d)$ za kojih

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T}^d)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}^d} |f(x)| < \infty.$$

Ovi prostori su Banahovi [76].

Posledica 1.7.14. [76] Neka je $1 \leq p \leq 2$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ako je $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T}^d)$ tada je $\hat{f} \in \ell^q(\mathbb{Z}^d)$ i važi

$$\|\hat{f}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{T}^d)}.$$

1.7.1 Soboljevski prostori periodičnih funkcija

Definicija 1.7.15. Za $u \in \mathcal{P}$ i $s \in \mathbb{R}$ definišemo normu

$$\|u\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)} := \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.7.5)$$

Prostor Soboljeva $\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)$ je prostor svih 1-periodičnih distribucija u za kojih $\|u\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)} < \infty$. Njihov Furijeov razvoj je

$$u = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} \hat{u}(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle}.$$

Primer 1.7.16. 1-periodična Dirakova delta δ je data sa

$$\delta(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} = (\hat{\delta}(\xi))_{\xi \in \mathbb{Z}^d}.$$

Ispunjeno je

$$\delta \in \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d) \Leftrightarrow s < -\frac{d}{2}.$$

Propozicija 1.7.17. Za svako $s \in \mathbb{R}$ prostor $\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)$ je Hilbertov sa skalarnim proizvodom

$$(u, v)_{\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)} := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} \langle \xi \rangle^{2s} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)}.$$

Dokaz. Preslikavanje $\phi_s : \mathcal{H}^0(\mathbb{T}^d) \rightarrow \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)$, definisano sa

$$\phi_s(u)(x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} \langle \xi \rangle^{-s} \hat{u}(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle}$$

je kanonični izomorfizam i izometrija između prostora $\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^d)$ i $\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)$. Radi $\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^d) = \mathcal{L}^2(\mathbb{T}^d)$ sledi tačnost propozicije. \square

Propozicija 1.7.18. *Za $k \in \mathbb{N}_0$ uobičajena Soboljevska norma glasi*

$$\|u\|_{k,stand} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{T}^d} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.7.6)$$

Norme (1.7.5) i (1.7.6) su ekvivalentne, tj. postoji konstanta C_s za koju

$$\|u\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)} \leq \|u\|_{k,stand} \leq C_s \|u\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)}.$$

Teorema 1.7.19. *Banahov dual prostora $\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)$ je prostor $\mathcal{H}^{-s}(\mathbb{T}^d)$. Dejstvo operatora $v \in \mathcal{H}^{-s}(\mathbb{T}^d)$ na $u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)$ dato je sa*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} \hat{u}(\xi) \hat{v}(-\xi).$$

Prostor $\mathcal{H}^{-s}(\mathbb{T}^d)$ je i Hilbertov dual prostora $\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)$. Dejstvo operatora $v \in \mathcal{H}^{-s}(\mathbb{T}^d)$ na $u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)$ je dato sa

$$(u, v)_{\mathcal{H}^0(\mathbb{T}^d)} := \int_{\mathbb{T}^d} u(x) \overline{v(x)}.$$

Propozicija 1.7.20. *Za $s < t$, ulaganje*

$$\mathcal{H}^t(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)$$

je kompaktno.

Propozicija 1.7.21. *Neka je $m \in \mathbb{N}_0$, $s > m + \frac{d}{2}$. Tada $\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d) \subset \mathcal{C}^m(\mathbb{T}^d)$.*

Posledica 1.7.22. *Važe jednakosti*

$$\bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^d) \quad i \quad \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d) = \mathcal{D}(\mathbb{T}^d). \quad (1.7.7)$$

Glava 2

Množenje distribucija i talasni front

Multiplikativni proizvod dveju distribucija je operacija koja je interesantna sama po sebi, međutim ona ima i dosta primena. Na primer, propagatori Fejnmana¹ su distribucije. Štukelberg² u svojim radovima [71, 94, 95] između 1949. i 1951. primetio je da renormalizacija u suštini je problem koji se svodi na definisanje proizvoda distribucija. Međutim Švarc je 1954. pokazao da nije moguće definisati multiplikativni proizvod nad prostorom čiji je potprostor $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, tj. da nije moguće definisati multiplikativni proizvod distribucija. Fizičari su produžili da rade na ovu problematiku krajem 50-tih godina [5, 6] i u ranim 70-tim godinama prošlog stoljeća [15] nakon čega je usledila velika pauza. Matematičari su u međuvremenu proučavali teorijske osnove na kojima bi se mogao definisati neki oblik proizvoda distribucija. Detaljniji pregled različitih definicija proizvoda distribucija je izložen u [59, 60]. Kasnije ćemo iskoristiti nekih od rezultata koji se tamo nalaze.

Talasni front (ili skup talasnog fronta) je pojam koji je nastao u periodu istraživanja koja su se odnosila na klasifikaciju singulariteta pomoću njihovih spektara i on se nalazi u osnovi mikrolokalne analize. *Mikrolokalna analiza* je deo analize u kome se proučavaju osobine distribucija (i ultradistribucija) ne samo pomoću osobinama osnovnog prostora nego i korišćenjem kovarijable (frekvencije) preko njene Furijeove transformacije. Istoriski pregled razvoja mikrolokalne analize dat je na primer u [32, 9].

¹Richard Phillips Feynman, američki fizičar, 1918-1988.

²Ernst Stueckelberg, švajcarski matematičar i fizičar, 1905-1984.

Koncept sličan talasnom frontu za prvi put definisao je Sato³. U radovima [78, 79] on je uveo koncept singularnog nosača SS za hiperfunkcije koji odgovara analitičkom talasnom frontu WF_A kod distribucija. Talasnog fronta (ili skup talasnog fronta) kao takvog definisao je Hermander u [31] pomoću pseudo-diferencijalnim operatorima. U obliku u kome ćemo ga mi koristiti uveden je od Hermandera u [30].

Do 1990-ih talasni front se retko pojavljivao kod rešavanja problema iz fizike. Tokom 1990-ih godina bilo je pokazano da je skup talasnog fronta ključni kod definisanju kvantnih polja u zakrivljenim prostor-vremenima, kod polja Diraka, kvantizaciju gravitacije itd. nakon čega je počelo intenzivno proučavanje različitih tipova skupova talasnog fronta.

Poznat je rezultat da je moguće definisati proizvod dveju distribucija ako su njihovi talasni frontovi „dobro” postavljeni u odnosu jedan na drugog. Ovo nas navodi da možemo proučavati proizvod i talasne frontove koristeći prostor periodičnih distribucija. U ovom odeljku koristeći proizvod periodičnih distribucija dajemo novi pristup u opisivanju talasnog fronta i Soboljevskog talasnog fronta distribucije $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ preko koeficijente njenog razvoja u Furijeov red. Preciznije, proučavamo svojstva distribucije f u $x_0 \in \mathbb{R}^d$ preko razmatranja razvoja neke periodizacije φf u Furijeov red, gde je φ funkcija odsecanja u okolini tačke x_0 .

U [33] posmatrani su skupovi talasnog fronta težinskog tipa preko upotrebe Gaborovih i dualnih Gaborovih frejmova koji zavise od dodatnog neprekidnog parametara $\varepsilon \rightarrow 0$. U [51] dokazano je da se klasična Furijeova baza može iskoristiti za mikrolokalnu analizu. Ovaj pristup vodi ka diskretizovanim definicijama talasnog fronta preko Furijeove koeficijente. Ovo je glavni rezultat ove glave. Pored njega dokazana je i ekvivalencija između ove diskretizovane definicije i pristupa Hermandera. U dokazu se koriste rezultati izloženi u već citiranim radovima [82, 100, 88, 2, 3, 36].

Ova problematika je dosta aktuelna. U kontekst ovoga vredi napomenuti da u radu [76] i u knjizi [77] autori Ružanski⁴ i Turunen⁵ su proučavali generalizovane funkcije na torusu \mathbb{T}^d . Međutim, u njihovim radovima glavni interes su pseudo-diferencijalni operatori i mikrolokalna analiza na $\mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}^d$. Sa druge strane, Hermanderov koncept (skupa) talasnog fronta privlači dosta pažnje između matematičarima i postoji ogromna literatura koja je povezana

³Mikio Sato, japanski matematičar, 1928–.

⁴Michael Ruzhansky, ruski matematičar.

⁵Ville Turunen, finski matematičar.

sa ovim baznim pojmom i njegovom važnom ulogom u kvalitativnoj analizi parcijalnih diferencijalnih jednačina i pseudo-diferencijalnih operatora. Ovde ćemo pomenuti osnovne knjige Hermandera [32, 29] kao standardne reference za talasnog fronta klasičnog i Soboljevskog tipa; u radovima [68, 33] su posmatrani talasni frontovi težinskog tipa, dok u [12, 13] su proučavani talasni frontovi preko lokalnih i globalnih verzija u odnosu na različite Banahove i Frešetove funkcionalne prostore.

U Odeljku 2.3.2 izložen je elementaran pristup lokalnog množenja koji se bazira na Furijeove redove. Glavni rezultati su izloženi u 2.4 i 2.5. U Teoremi 2.4.1 i Teoremi 2.5.2 dajemo karakterizaciju talasnog fronta i Soboljevskog talasnog fronta distribucije $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ preko ocenjivanja Furijeovih koeficijenta njenih lokalizacija.

Napominjemo opet da toroidalni talasni frontovi su izučavani u [76, 77] koristeći Furijeove redove kao i u [51]. Pristup koji je izložen u ovoj glavi se dosta razlikuje i povezan je preciznije sa Hermanderovim talasnim frontom. Takođe, važno je istaknuti da Soboljevski talasni front nije izučavan u [76, 77].

Najprije ćemo predstaviti problem množenja distribucija, teoremu Pejli-Vinera koju ćemo koristiti kod definicije talasnog fronta i navešćemo definicije talasnog fronta. Nakon toga ćemo dati pristup množenja distribucija koji se bazira na njihovim periodizacijama. Na kraju prezentiramo rezultate iz [51].

2.1 Proizvod distribucija

Videli smo da je u prostore distribucija moguće definisati neke operacije koje su produženja odgovarajućih operacija u $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$: zbir dveju distribucija, množenje distribucije sa skalarom i množenje distribucije sa glatkom funkcijom. Ove operacije su takozvane regularne operacije. Proizvod dveju distribucija se ne može definisati u opštem slučaju kao operacija koja je ekstenzija operacije množenja neprekidnih funkcija.

Primer 2.1.1. [86] *Neka je E vektorski prostor nad poljem realnih brojeva i $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ je njegov potprostor. Nije moguće definisati operaciju množenja na celom E kao bilinearnu asocijativnu operaciju (nije neophodno da bude komutativna) i:*

1. koja se na $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ poklapa sa običnim množenjem;
2. ima jedinični (neutralni) element 1;

3. za koju postoje elementi $p.v.(\frac{1}{x}) \in E$, $\delta \in E$ za kojih je ispunjeno:

$$p.v. \left(\frac{1}{x} \right) \cdot x = 1, \quad x \cdot \delta = 0, \quad \delta \neq 0.$$

Zaista, ako uzmemo da $p.v.(\frac{1}{x})(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ za svako $\varphi \in \mathcal{S}$, tada

$$(\delta \cdot x) \cdot p.v. \left(\frac{1}{x} \right) = 0, \quad \delta \cdot \left(x \cdot p.v. \left(\frac{1}{x} \right) \right) = \delta.$$

Direktna posledica ovoga je da ne postoji natpostor prostora \mathcal{D} u kome su multiplikativni proizvod i diferenciranje istovremeno dobro definisani.

Glavni razlog zbog čega nije moguće proširenje proizvoda neprekidnih (regularnih) funkcija do proizvod distribucija je to da, za razliku od funkcija koje su definisane u svakoj tački posebno, distribucije se definišu na okoline, a vrednost distribucije u svakoj tački nije definisana u opštem slučaju. Operacija množenja distribucija moguće je definisati u nekim specijalnim slučajevima.

Teorema 2.1.2. [67] Neka $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ i

$$\text{sing supp}(f) \cap \text{sing supp}(g) = \emptyset.$$

Ako $x \notin (\text{sing supp}(f) \cap \text{sing supp}(g))$, postoji otvorena okolina U_x tačke x nad kojoj je f ili g glatka funkcija i distribucija h je definisana sa

$$h(t) = f_x(t)g(t) \text{ ili } h(t) = g_x(t)f(t), \quad x \in U_x,$$

u smislu definicije proizvoda glatke funkcije i distribucije nad U_x . (f_x (respektivno g_x) je restrikcija distribucije f (respektivno g) nad U_x).

2.1.1 Teoreme tipa Pejli-Vinera

Kako je navedeno u [93], teoreme tipa Pejli-Vinera su rezultati koji karakterišu neku informaciju o nosaču distribucije (ili funkcije) f preko uslovima analitičnosti njene Furijeove transformacije \hat{f} . Radi se glavno o tome da se karakterišu osobine f koristeći osobine njene Furijeove transformacije \hat{f} i obratno. Najčešće se koriste dva principa [28]:

a) princip glatkosti i opadanja - ako je f glatka, tada \hat{f} opada brzo; ako f opada brzo, tada je \hat{f} glatka i

b) princip neodređenosti - f i \hat{f} ne mogu istovremeno imati proizvoljno male vrednosti.

Originalna teorema Pejli-Vinera dokazana je 1934. godine u [61] i odnosila se na \mathcal{L}^2 funkcije dok Švarc je dokazao njeni analog za distribucije i zbog toga se ova teorema dosta često naziva imenom teorema Pejli-Viner-Švarca. Za $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d) \in \mathbb{C}^d$ koristimo oznake

$$|\zeta| = (|\zeta_1|^2 + \dots + |\zeta_d|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \langle |\zeta| \rangle = (1 + |\zeta|^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{i} \quad \text{Im}(\zeta) = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{2}.$$

Definicija 2.1.3. *Ako je $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, tada Furije-Laplasova transformacija distribucije f je*

$$\hat{f}(\zeta) = \int e^{-i \langle x, \zeta \rangle} f(x) dx, \quad \zeta \in \mathbb{C}^d. \quad (2.1.1)$$

Restrikcija distribucije \hat{f} nad \mathbb{R}^d je Furijeova transformacija distribucije f . Furije-Laplasova transformacija ima neka korisna svojstva koja navodimo.

Teorema 2.1.4. [18] *Ako je $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ tada je njena Furije-Laplasova transformacija $\hat{f}(\zeta)$ analitička funkcija na \mathbb{C}^d .*

Definicija 2.1.5. *Ako je $K \subset \subset \mathbb{R}^d$ kompaktan skup, definišemo njenu noseću (na engleskom: supporting) funkciju skupa K sa*

$$H_K(\xi) := \sup_{x \in K} \langle x, \xi \rangle, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad (2.1.2)$$

i ako je $\text{ch}(K)$ konveksni omotač skupa K , tada

$$x \in \text{ch}(K) \iff (\forall \xi \in \mathbb{R}^d) \langle x, \xi \rangle \leq H_K(\xi). \quad (2.1.3)$$

Teorema 2.1.6 (Pejli-Viner-Švarc). [32]

(i) *Ako $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp } f \subseteq K \subset \subset \mathbb{R}^d$ i red distribucije f je N , tada postoji konstanta C tako da*

$$|\hat{f}(\zeta)| \leq C \langle |\zeta| \rangle^N e^{H(\text{Im}(\zeta))}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^d. \quad (2.1.4)$$

Obratno, svaka cela analitička funkcija F za koju važi ograničenje

$$|F(\zeta)| \leq C \langle |\zeta| \rangle^N e^{H(\text{Im}(\zeta))}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^d, \quad (2.1.5)$$

je Furije-Laplasova transformacija neke distribucije iz \mathcal{E}' sa nosačem sadržanim u K .

(ii) Ako $f \in \mathcal{C}_0^\infty(K)$ tada

$$(\forall N > 0)(\exists C_N > 0) \quad |\hat{f}(\zeta)| \leq C \langle |\zeta| \rangle^{-N} e^{H(\text{Im}(\zeta))}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^d. \quad (2.1.6)$$

Obratno, ako je F cela analitička funkcija za koju važi

$$(\forall N > 0)(\exists C_N > 0) \quad |F(\zeta)| \leq C \langle |\zeta| \rangle^{-N} e^{H(\text{Im}(\zeta))}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^d. \quad (2.1.7)$$

tada je F Furije-Laplasova transformacija neke funkcije $f \in \mathcal{C}_0^\infty(K)$.

Ono što je karakteristično je da brzina rasta u imaginarnom delu određuje nosač inverzne Furijeove transformacije.

2.2 Talasni front distribucije

Kod definicije talasnog fronta koristimo konusne okoline nekog pravca.

Definicija 2.2.1. Skup $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ je konus ako $\xi \in \Gamma$ povlači

$$(\forall \lambda > 0) \quad \lambda \xi \in \Gamma.$$

Konusna okolina tačke ξ je otvoren konus koji sadrži ξ .

Za $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ možemo odrediti da li pripada u \mathcal{C}_0^∞ procenom rasta njene Furijeove transformacije $\mathcal{F}(f)$ u beskonačnosti. Ako $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, tada

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq C_n(1 + |\xi|)^{-N} \quad \text{ili} \quad |\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq C_n \langle \xi \rangle^{-N}. \quad (2.2.1)$$

Definicija 2.2.2. Ako $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ tada $\xi_0 \notin \Sigma(f) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ako i samo ako postoji konusna okolina Γ_{ξ_0} tačke ξ_0 tako da za svako $\xi \in \Gamma_{\xi_0}$ i za svako $N > 0$, postoji konstanta $C_N > 0$ za koje važi

$$|\hat{f}(\xi)| \leq C_N \langle \xi \rangle^{-N}.$$

Navodimo Hermanderovu definiciju (skupa) talasnog fronta.

2.3 Periodične ekstenzije distribucija

Od sada pa nadalje u ovom odeljku reč *periodična* se odnosi na funkcije ili distribucije nad \mathbb{R}^d koje su periodične sa periodom 1 u odnosu na svaku od promenljivih, tj. $f(x+n) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{Z}^d$. Sa e_y se označava $e_y(x) = e^{2\pi i \langle y, x \rangle}$, $y \in \mathbb{Z}^d$.

Definicija 2.3.1. *Ako distribucija g ima nosač sadržan u intervalu I_{η, x_0} , gde $0 < \eta < 1$, periodični produžetak (ekstenzija) distribucije g je*

$$g_p(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} g(x+n).$$

Definicija 2.3.2. *Ako $\varphi \in \mathcal{E}(I_{\eta, x_0})$, gde $0 < \eta < 1$, tada $\varphi g \in \mathcal{E}'(I_{\eta, x_0})$ je lokalizacija distribucije g u nekoj okolini tačke $x_0 \in \mathbb{R}^d$.*

Mi ćemo koristiti periodične ekstenzije nekih lokalizacija distribucije.

2.3.1 Težinske funkcije

U opštom slučaju, težinska funkcija je nenegativna funkcija.

Definicija 2.3.3. *Neka su ω i ν dve nenegativne funkcije. Tada*

(i) *funkcija ν je submultiplikativna ako*

$$\nu(x+y) \leq \nu(x)\nu(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d;$$

(ii) *funkcija ω je ν -ograničena ako postoji konstanta $C > 0$ tako da*

$$\omega(x+y) \leq C\nu(x)\omega(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Submultiplikativnost funkcije ν povlači da je ona ograničena nekom eksponencijalnom funkcijom, tj. da postoje konstante C i k , tako da

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \nu(x) \leq Ce^{k|x|}.$$

Mi ćemo koristiti samo pozitivne težinske funkcije nad \mathbb{Z}^d . Kažemo da je funkcija ω ν -ograničena težinska funkcija na \mathbb{Z}^d , ako postoji $C > 0$ tako da

$$\omega(m+n) \leq C\omega(m)\nu(n), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^d. \quad (2.3.1)$$

Ako je ν polinom tada kažemo da je funkcija ω *polinomno ograničena*.

Skup koji se sastoji od svih polinomno ograničenih težinskih funkcija na \mathbb{Z}^d označavamo sa $\mathcal{P}ol(\mathbb{Z}^d)$. Za $\omega \in \mathcal{P}ol(\mathbb{Z}^d)$, definišemo Banahov prostor

$$\mathcal{P}l_\omega^q = \{f \in \mathcal{P}' : (\omega(n)f_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} \in \ell^q, \text{ gde } f_n = \langle f, e_{-n} \rangle\}$$

sa normom

$$\|f\|_{\mathcal{P}l_\omega^q} = \|(\omega(n)f_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}\|_{\ell^q} = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (\omega(n)|f_n|)^q \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Mi ćemo razmatrati samo slučaj $q \geq 1$.

Propozicija 2.3.4. *Ako $q_1 \leq q_2$ i $\omega_2 \leq C\omega_1$, tada $\mathcal{P}l_{\omega_1}^{q_1} \subseteq \mathcal{P}l_{\omega_2}^{q_2}$.*

Biće razmatrani lokalni prostori $\mathcal{P}l_{\omega, \text{loc}}^q$ koji sadržu distribucije $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ za koje periodične ekstenzije $(\varphi f)_p \in \mathcal{P}l_\omega^q$, za svako $x_0 \in \mathbb{R}^d$ i $\varphi \in \mathcal{D}(I_{1, x_0})$. Topologija u njima je definisana familijom seminormi $\|f\|_{x_0, \varphi} = \|(\varphi f)_p\|_{\mathcal{P}l_\omega^q}$, gde $x_0 \in \mathbb{R}^d$ i $\varphi \in \mathcal{D}(I_{1, x_0})$.

Propozicija 2.3.5. $\mathcal{P}l_\omega^q \subset \mathcal{P}l_{\omega, \text{loc}}^q$.

Dokaz. Neka $f \in \mathcal{P}l_\omega^q$ i $\varphi \in \mathcal{D}(I_{1, x_0})$. Tada $(\varphi f)_p = \varphi_p f$. Razvijamo distribuciju f i periodično produženje φ u njihove Furijeove redove, $f = \sum_n f_n e_n$ i $\varphi_p = \sum_n \varphi_n e_n \in \mathcal{P}$. Koristeći (2.3.1) i generalizovanu nejednakost Minkovskog, dobijamo

$$\begin{aligned} \|\varphi_p f\|_{\mathcal{P}l_\omega^q} &\leq C \left(\sum_n \left(\sum_j \nu(j) |\varphi_j| \omega(n-j) |f_{n-j}| \right)^q \right)^{1/q} \\ &\leq C \sum_j \left(\sum_n (\nu(j) |\varphi_j| \omega(n-j) |f_{n-j}|)^q \right)^{1/q} \\ &= C \sum_j (\nu(j) |\varphi_j|) \left(\sum_n (\omega(n-j) |f_{n-j}|)^q \right)^{1/q} \\ &= C \|\varphi_p\|_{\mathcal{P}l_\nu^1} \|f\|_{\mathcal{P}l_\omega^q} < \infty. \end{aligned}$$

Ovim je pokazano da je prostor $\mathcal{P}l_{\omega, \text{loc}}^q$ dobro definisan. \square

Neka je $\omega_s(n) = \langle n \rangle^s$, $s \in \mathbb{R}$. Radi jednostavnosti, pišemo

$$\mathcal{P}l_s^q := \mathcal{P}l_{\omega_s}^q \quad \text{i} \quad \mathcal{P}l_{s, \text{loc}}^q := \mathcal{P}l_{\omega_s, \text{loc}}^q.$$

Propozicija 2.3.6. *Ispunjene su sledeće relacije:*

$$\mathcal{P} = \bigcap_{s \geq 0} \mathcal{P}l_s^q = \bigcap_{\omega \in \mathcal{P}ol(\mathbb{Z}^q)} \mathcal{P}l_\omega^q, \quad \mathcal{P}' = \bigcup_{s \leq 0} \mathcal{P}l_s^q = \bigcup_{\omega \in \mathcal{P}ol(\mathbb{Z}^q)} \mathcal{P}l_\omega^q.$$

Štaviše,

$$\mathcal{E} = \bigcap_{s \geq 0} \mathcal{P}l_{s,\text{loc}}^q = \bigcap_{\omega \in \mathcal{P}ol(\mathbb{Z}^q)} \mathcal{P}l_{\omega,\text{loc}}^q, \quad \mathcal{D}'_F = \bigcup_{s \leq 0} \mathcal{P}l_{s,\text{loc}}^q = \bigcup_{\omega \in \mathcal{P}ol(\mathbb{Z}^q)} \mathcal{P}l_{\omega,\text{loc}}^q,$$

gde sa \mathcal{E} označavamo prostor svih glatkih funkcija dok \mathcal{D}'_F je prostor distribucija konačnog reda na \mathbb{R}^d .

Dokaz. Direktno sledi iz 1.6.9 i 1.6.10. □

2.3.2 Množenje u potprostorima distribucija

U ovom odeljku ćemo izneti neke tvrdnje koje se odnose na množenju distribucija. Pretpostavljamo da su indeksi $q, q_1, q_2 \in [1, \infty]$ takvi da

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q} + 1.$$

Fiksiramo dve težinske funkcije $\omega, \nu \in \mathcal{P}ol(\mathbb{Z}^d)$ i pretpostavljamo da je funkcija ω ν -ograničena (videti (2.3.1)).

Posmatramo proizvode u prostorima tipa $\mathcal{P}l_\omega^q$. Definišimo proizvod preko Furijeovih koeficijenata.

Definicija 2.3.7. *Za dve date*

$$f_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f_{1,n} e_n \in \mathcal{P}l_\omega^{q_1}, \quad f_2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f_{2,n} e_n \in \mathcal{P}l_\nu^{q_2},$$

definišemo njihov proizvod sa $f := f_1 f_2 := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f_n e_n$, gde

$$f_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} f_{1,n-j} f_{2,j}, \quad n \in \mathbb{Z}^d.$$

Primedba 2.3.8. Moramo primetiti da je formula za Furijeove koeficijente f_n isto što i formula konvolucije na cjelobrojnoj mreži.

U Propoziciju 2.3.10 ćemo dokazati da za proizvod iz Definicije 2.3.7 važi $f \in \mathcal{P}l_{\omega}^q$. Iskoristićemo prethodnu definiciju da definišemo množenje na lokalnim verzijama ovih prostora.

Definicija 2.3.9. *Neka je $f_1 \in \mathcal{P}l_{\omega,loc}^{q_1}$ i $f_2 \in \mathcal{P}l_{\nu,loc}^{q_2}$. Njihov proizvod $f := f_1 f_2$ definišemo produžavajući lokalno: za $x_0 \in \mathbb{R}^d$ i $0 < \eta < 1$, neka $\phi \in \mathcal{D}(I_{1,x_0})$ je takva da $\phi(x) = 1$ za $x \in I_{\eta,x_0}$. Definišemo $f_{I_{\eta,x_0}} \in \mathcal{D}'(I_{\eta,x_0})$ kao restrikciju $(\phi f_1)_p(\phi f_2)_p$ na I_{η,x_0} .*

Ovde je važno naglasiti da različiti izbori funkcije ϕ vode ka različitim Furijeovim koeficijentima u razvoju. Međutim, prema propoziciji 2.3.5, važi $f_{I_{\eta,x_0}} = f_{I_{\eta',x'_0}}$ na $I_{\eta,x_0} \cap I_{\eta',x'_0}$. Prema tome, od $\{f_{I_{\eta,x_0}}\}$ dobija se distribucija $f \in \mathcal{P}l_{\omega,loc}^q$ i definišemo proizvod $f_1 f_2 := f$.

Propozicija 2.3.10. *Preslikavanja*

$$\mathcal{P}l_{\omega}^{q_1} \times \mathcal{P}l_{\nu}^{q_2} \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathcal{P}l_{\omega}^q \quad (2.3.2)$$

i

$$\mathcal{P}l_{\omega,loc}^{q_1} \times \mathcal{P}l_{\nu,loc}^{q_2} \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathcal{P}l_{\omega,loc}^q \quad (2.3.3)$$

su neprekidna.

Dokaz. Neprekidnost preslikavanja (2.3.3) sledi iz neprekidnosti (2.3.2). Za (2.3.2), koristeći Jangovu nejednakost i (2.3.1) dobijamo

$$\|f_1 f_2\|_{\mathcal{P}l_{\omega}^q} \leq C \|f_1\|_{\mathcal{P}l_{\omega}^{q_1}} \|f_2\|_{\mathcal{P}l_{\nu}^{q_2}} .$$

□

Možemo izvesti i sledeći rezultat:

Posledica 2.3.11. *Neka su $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ takvi da*

$$s_1 + s_2 \geq 0, \quad s \leq \min\{s_1, s_2\}. \quad (2.3.4)$$

Tada preslikavanja

$$\mathcal{P}l_{s_1}^{q_1} \times \mathcal{P}l_{s_2}^{q_2} \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathcal{P}l_s^q, \quad (2.3.5)$$

$$\mathcal{P}l_{s_1,loc}^{q_1} \times \mathcal{P}l_{s_2,loc}^{q_2} \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathcal{P}l_{s,loc}^q \quad (2.3.6)$$

su neprekidna.

2.4. TALASNI FRONT DISTRIBUCIJE PREKO PERIODIČNIH EKSTENZIJA DISTRIBUCIJE

Dokaz. Možemo pretpostaviti da $s_1 \geq 0$ i $s = s_2$. Očigledno je da mora da važi $s_1 \geq |s_2|$ kako bi bilo ispunjeno $s_1 + s_2 \geq 0$. Rezultat onda sledi iz Propozicije 2.3.10 kada se stavi $\omega(n) = \langle n \rangle^{s_2}$ i $\nu(n) = \langle n \rangle^{s_1}$ jer (2.3.1) važi za njih. \square

Što se tiče lokalnih proizvoda u Posljedici 2.3.11, korišćenjem istog metoda iz dokaza Teoreme 2.5.2 može se dokazati da se lokalni prostor $\mathcal{D}_{s,\text{loc}}^2$ savpada sa lokalnim prostorom Soboljeva $\mathcal{H}_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^d)$. Prema tome, multiplikativni proizvod za lokalne prostore u posledicu 2.3.11 se slaže sa onim definisanog od strane Hermandera [29, Sect. 8.2]. Štaviše, treba napomenuti da naši rezultati koji su izloženi u nastavku povlače da se može ići i dalje od lokalnih proizvoda i u stvari da se definiše multiplikativni proizvod korišćenjem *mikrolokalizacije* kao i u [29, Sect. 8.3].

Teorema 2.5.2 kaže da je mikrolokalna verzija našeg množenja saglasna sa onom kod Hermandera.

2.4 Talasni front distribucije preko periodičnih ekstenzija distribucije

U ovom odeljku naš je cilj da opišemo talasni front distribucije $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ preko koeficijente Furijeovog razvoja periodičnog proširenja neke respektivne lokalizacije f u okolini tačke $x_0 \in \mathbb{R}^d$, kao što smo objasnili u prethodnom zaglavju. Kao što smo i ranije rekli, $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$ ako postoje $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ za koju $\psi \equiv 1$ u nekoj okolini x_0 i otvoreni konus $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ koji sadrži ξ_0 takav da

$$(\forall N > 0)(\exists C_N > 0)(\forall \xi \in \Gamma)(|\widehat{\psi f}(\xi)| \leq C_N \langle \xi \rangle^{-N}). \quad (2.4.1)$$

Pomoću sledeće teoreme dokazujemo da možemo diskretizirati (2.4.1) :

Teorema 2.4.1. *Neka je $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ i $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *Postoji $\phi \in \mathcal{D}(I_{\varepsilon, x_0})$, sa $\varepsilon \in (0, 1)$ i $\phi \equiv 1$ u okolini x_0 , i otvoreni konus Γ koji sadrži ξ_0 tako da*

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+)(\exists C_N > 0)(\forall n \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d)(|\widehat{\phi f}(n)| \leq C_N \langle n \rangle^{-N}). \quad (2.4.2)$$

(ii) $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$.

Dokaz. Poznato je da stešnjavanjem konusne okoline ξ_0 , može se izabrati ψ u (2.4.1) sa proizvoljno malim nosačem u okolini x_0 . Zato, (ii) povlači (i).

Prema tome, dovoljno je da pokažemo da (i) povlači (ii).

Neka je ispunjen uslov (i). Razdelićemo dokaz na dva dela. Prvo ćemo dokazati da postoje ε' i otvoren konus $\Gamma_1 \ni \xi_0$ takvi da

$$(\forall B \text{ ograničen skup u } \mathcal{D}(I_{\varepsilon', x_0})) (\forall N > 0) (\exists C'_N > 0) \\ (\forall n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d) (\sup_{\varphi \in B} |\widehat{\varphi f}(n)| \leq \frac{C'_N}{\langle n \rangle^N}). \quad (2.4.3)$$

Biramo ε' tako da $\phi(x) = 1$ za svaki $x \in I_{\varepsilon', x_0}$. Biramo konus Γ_1 da bude otvoreni konus sa $\xi_0 \in \Gamma_1$ i $\bar{\Gamma}_1 \subset \Gamma \cup \{0\}$. Pokazaćemo da (2.4.3) važi pod ovim pretpostavkama. Neka je $c \in (0, 1)$ konstanta koja je manja od rastojanja između $\partial\Gamma$ i preseka $\bar{\Gamma}_1$ sa jediničnom sferom. Jasno je da

$$\{y \in \mathbb{R}^d : (\exists \xi \in \Gamma_1) (|\xi - y| \leq c|\xi|)\} \subset \Gamma.$$

Neka je $B \subset \mathcal{D}(I_{\varepsilon', x_0})$ ograničen skup. Za svaku $\varphi \in B$ je ispunjeno da $\phi\varphi = \varphi$. Štaviše, važno je primetiti da su $\widehat{\varphi f}(n)$ tačno Furijeovi koeficijenti periodične distribucije $(\varphi)_p(\phi f)_p$. Prema tome, za $\varphi \in B$ i $n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned} |\widehat{\varphi f}(n)| &= \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi}(j) \widehat{\phi f}(n-j) \right| \leq \left(\sum_{|j| \leq c|n|} + \sum_{|j| > c|n|} \right) |\widehat{\varphi}(j) \widehat{\phi f}(n-j)| \\ &=: I_1(n) + I_2(n) \end{aligned}$$

Sada ćemo ograničiti izraze $I_1(n)$ i $I_2(n)$:

$$I_1(n) = \sum_{|n-j| \leq c|n|} |\widehat{\varphi}(n-j)| |\widehat{\phi f}(j)| \leq C \sup_{|n-j| \leq c|n|} |\widehat{\phi f}(j)|,$$

gde konstanta C zavisi jedino od B . Od $|n-j| \leq c|n|$ sledi da $|j| \geq (1-c)|n|$,

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi \in B, n \in \Gamma_1} \langle n \rangle^N I_1(n) &\leq C \sup_{n \in \Gamma_1} \langle n \rangle^N \sup_{|n-j| \leq c|n|} |\widehat{\phi f}(j)| \\ &\leq C \sup_{j \in \Gamma_{\xi_0}} (1-c)^{-N} \langle j \rangle^N |\widehat{\phi f}(j)| = C(1-c)^{-N} C_N. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Za ocenu izraza I_2 koristimo da ako $|j| \geq c|n|$ tada $|n-j| \leq (1+c^{-1})|j|$. Štaviše, radi teoreme Pejli-Vienera, postoje konstante $M, D > 0$ za koje

$$|\widehat{\phi f}(n-j)| \leq D \langle n-j \rangle^M, \quad n, j \in \mathbb{Z}^d.$$

2.4. TALASNI FRONT DISTRIBUCIJE PREKO PERIODIČNIH
EKSTENZIJA DISTRIBUCIJE

Ako iskoristimo ograničenost skupa $B \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, dobijamo

$$\sup_{\varphi \in B} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \langle j \rangle^{M+N} |\widehat{\varphi}(j)| =: K_N < \infty.$$

Tako, za $I_2(n)$, imamo da je za svako $\varphi \in B$ ispunjeno

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \Gamma_1} \langle n \rangle^N I_2(n) &\leq D \sup_{n \in \Gamma_1} \langle n \rangle^N \sum_{|j| \geq c|n|} \langle n-j \rangle^M |\widehat{\varphi}(j)| \\ &\leq Dc^{-N}(1+c^{-1})^M K_N. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Kombinovanjem rezultata (2.4.4) i (2.4.5), dobijamo (2.4.3).

Sada možemo da zaključimo da $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$ pomoću uslova (2.4.3). Neka je $\psi \in \mathcal{D}(I_{\varepsilon', x_0})$ jednaka 1 u okolini tačke x_0 . Tada, skup

$$B = \{\varphi_t := \psi e_{-t} : t \in [0, 1)^d\}$$

je ograničeni podskup iz $\mathcal{D}(I_{\varepsilon', x_0})$. Znači

$$\sup_{t \in [0, 1)^d} |\widehat{\psi f}(n+t)| = \sup_{t \in [0, 1)^d} |\widehat{\varphi_t f}(n)| \leq \frac{C'_N}{\langle n \rangle^N}, \quad \forall n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d,$$

tj.

$$\sup_{\xi \in (\Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d) + [0, 1)^d} \langle \xi \rangle^N |\widehat{\psi f}(\xi)| \leq (1+4d)^{N/2} C'_N. \quad (2.4.6)$$

Biramo otvorenu konusnu okolinu Γ_2 tačke ξ_0 tako da $\bar{\Gamma}_2 \subset \Gamma_1 \cup \{0\}$ i biramo c' tako da $\{y \in \mathbb{R}^d : (\exists \xi \in \Gamma_2)(|\xi - y| \leq c'|\xi|)\} \subset \Gamma_1$. Zadnji uslov povlači da $\Gamma_2 \cap \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi|c' \geq 1\} \subset (\Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d) + [0, 1)^d$ i prema tome

$$\sup_{\xi \in \Gamma_2} \langle \xi \rangle^N |\widehat{\psi f}(\xi)| \leq \max\{C''_N, (1+4d)^{N/2} C'_N\} = C_N < \infty,$$

gde $C''_N = \sup_{\xi \in \Gamma_2, |\xi| < 1/c'} \langle \xi \rangle^N |\widehat{\psi f}(\xi)|$. Ovo znači da je ispunjeno $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$, čime je dokaz završen. \square

Primedba. Teorema 2.4.1 sledi iz relacije između skupova diskretnog i Hermanderovog talasnog fronta dokazanu u teoremi 7.4 u [76], kada se za beleži da je pojam lokalni i prema tome, ne zavisi od parametrizacije.

2.5 Soboljevski talasni front

U ovom odeljku ćemo razmatrati talasne frontove Soboljevskog tipa. Malo ćemo prilagoditi Hermanderovu definiciju [29].

Definicija 2.5.1. *Neka je $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ i $s \in \mathbb{R}$. Kažemo da je f Soboljevski mikrolokalno regularna u (x_0, ξ_0) reda s , tj. $(x_0, \xi_0) \notin \text{WF}_s(f)$, ako postoji otvoreni konus Γ , $\xi_0 \in \Gamma$, i $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \equiv 1$ u nekoj okolini x_0 , tako da*

$$\int_{\Gamma} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{\psi f}(\xi)|^2 d\xi < \infty. \quad (2.5.1)$$

Malo ćemo prilagoditi teoremu 2.4.1:

Teorema 2.5.2. *Neka je $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Sledeća dva uslova su ekvivalentna:*

(i) *Postoji otvoreni konus Γ koji sadrži ξ_0 , $\phi \in \mathcal{D}(I_{\eta, x_0})$, $\eta \in (0, 1)$ i $\phi \equiv 1$ u nekoj okolini x_0 , tako da*

$$\sum_{n \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} \langle n \rangle^{2s} |a_n|^2 < \infty, \quad \text{gde } (\phi f)_p = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} a_n e_n. \quad (2.5.2)$$

(ii) $(x_0, \xi_0) \notin \text{WF}_S(f)$.

Dokaz. (i) \Rightarrow (ii). Neka je ispunjen uslov (2.5.2). Biramo otvoreni konus Γ_1 tako da $\overline{\Gamma_1} \subset \Gamma \cup \{0\}$ i $\xi_0 \in \Gamma_1$. Onda biramo $\varepsilon \in (0, \eta)$ tako da za svaki $x \in I_{\varepsilon, x_0}$ bude ispunjeno $\phi(x) = 1$. Prvo ćemo pokazati sledeću tvrdnju:

Propozicija 2.5.3. *Za svaki ograničeni skup $B \subset \mathcal{D}(I_{\varepsilon, x_0})$ važi*

$$\sup_{\varphi \in B} \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{\varphi f}(n)|^2 < \infty. \quad (2.5.3)$$

Dokaz propozicije. Fiksiramo ograničeni podskup $B \subset \mathcal{D}(I_{\varepsilon, x_0})$. Od izbora konstante ε , imamo $\varphi f = \varphi \phi f$ i prema tome $\widehat{\varphi f}(n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} a_j \widehat{\varphi}(n - j)$, za

svaku $\varphi \in B$. Fiksirajmo konstantu $c \in (0, 1)$ koja je manja od rastojanja između ruba konusa $\partial\Gamma$ i preseka adherencije $\overline{\Gamma_1}$ sa jediničnom sferom, a u isto vreme i manja od rastojanja između ruba $\partial\Gamma_1$ i preseka skupa $\overline{\mathbb{R}^d \setminus \Gamma}$ sa

2.5. SOBOLJEVSKI TALASNI FRONT

jediničnom sferom. Važi da ako $\xi \in \Gamma_1$ i $y \notin \Gamma$, tada $|\xi - y| > c \max\{|\xi|, |y|\}$. Ostavljamo da $\varphi \in B$. Koristeći nejednačinu Pitrea, dobijamo

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{\varphi f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq C \left(\sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \langle j \rangle^s |a_j| \langle n - j \rangle^{|s|} |\widehat{\varphi}(n - j)| \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C(I_1(\varphi) + I_2(\varphi)), \end{aligned}$$

gde

$$I_1(\varphi) = \left(\sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{j \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \langle j \rangle^s |a_j| \langle n - j \rangle^{|s|} |\widehat{\varphi}(n - j)| \right)^2 \right)^{1/2}$$

i

$$I_2(\varphi) = \left(\sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{j \notin \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \langle j \rangle^s |a_j| \langle n - j \rangle^{|s|} |\widehat{\varphi}(n - j)| \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Iz nejednačine Janga i činjenice da je B ograničen skup, dobija se da

$$\sup_{\varphi \in B} I_1(\varphi) \leq \left(\sum_{n \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} \langle n \rangle^{2s} |a_n|^2 \right)^{1/2} \sup_{\varphi \in B} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle n \rangle^{|s|} |\varphi(n)| < \infty.$$

Sada ćemo ograničiti $I_2(\varphi)$. Imajući u vidu da ϕf ima kompaktan nosač,

$$(\forall n \in \mathbb{Z}^d) \quad \langle j \rangle^s |a_j| = \langle j \rangle^s |\widehat{\phi f}(j)| \leq D \langle j \rangle^k,$$

za neke $D > 0$ i $k > 0$. Činjenica da je B ograničen skup daje egzistenciju konstante $C' > 0$ tako da

$$|\widehat{\varphi}(j)| \leq C' \langle j \rangle^{-k-|s|-3(d+1)/2}.$$

Način na kojeg smo izabrali Γ_1 daje nam

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi \in B} (I_2(\varphi))^2 &\leq (DC')^2 \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{j \notin \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} \langle j \rangle^k \langle n - j \rangle^{-k-3(d+1)/2} \right)^2 \\ &\leq (DC')^2 c^{-2k-3(d+1)} \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \langle n \rangle^{-d-1} \left(\sum_{j \notin \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} \langle j \rangle^{-d-1} \right)^2. \end{aligned}$$

čime je nejednačina (2.5.3) dokazana. □

(*Produžetak dokaza teoreme 2.5.2*) Sada ćemo dokazati da (ii) sledi iz (2.5.3). Još jednom sužavamo konusnu okolinu u pravcu ξ_0 . Tako, neka je Γ_2 otvoreni konus čija adherencija je $\overline{\Gamma}_2 \subset \Gamma_1 \cup \{0\}$ i $\xi_0 \in \Gamma_2$. Neka je funkcija $\psi \in \mathcal{D}(I_{\varepsilon, x_0})$ jednaka 1 na nekoj okolini tačke x_0 . Postoji $r > 0$ tako da

$$\Gamma_2 \cap \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| \geq r\} \subset (\Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d) + [0, 1]^d.$$

Za svaki $n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d$, definišemo okolinu $\Lambda_n = n + [0, 1]^d$. Tada iz (2.5.3) i nejednačine Pitrea, dobija se

$$\begin{aligned} \int_{\substack{\xi \in \Gamma_2 \\ |\xi| \geq r}} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{\psi f}(\xi)|^2 d\xi &\leq C \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \langle n \rangle^{2s} \int_{\Lambda_n} |\widehat{\psi f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= C \int_{[0, 1]^d} \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{\psi f}(n+t)|^2 dt \\ &\leq C \sup_{t \in [0, 1]^d} \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{e_{-t}\psi f}(n)|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Prema tome, $(x_0, \xi_0) \notin WF_S(f)$, čime je dokaz u jednom smeru završen.

(ii) \Rightarrow (i). Možemo primeniti analizu koja je slična onoj koju smo primenili ranije, ali sa integralima umesto sumama kako bi dokazali da $(x_0, \xi_0) \notin WF_S(f)$ povlači sledeću osobinu:

Postoje otvoreni konus Γ , konstanta $\varepsilon \in (0, 1)$, tako da za svakog ograničenog skupa $B \subset \mathcal{D}(I_{\varepsilon, x_0})$ ispunjeno je

$$\sup_{\psi \in B} \int_{\Gamma} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{\psi f}(\xi)|^2 d\xi < \infty. \quad (2.5.4)$$

Detalje ćemo izostaviti. Znači, pretpostavljamo da je ispunjeno (2.5.4). Neka je Γ_1 otvoreni konus koji sadrži ξ_0 tako da $\overline{\Gamma}_1 \subset \Gamma \cup \{0\}$. Tada, postoji neko $r > 0$ tako da

$$(\Gamma_1 + [0, 1]^d) \cap \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| \geq r\} \subset \Gamma.$$

Neka je $\phi \in \mathcal{D}(I_{\varepsilon, x_0})$ takva da $\phi \equiv 1$ u nekoj okolini tačke x_0 . Razmotrićemo merljivu funkciju $t : \Gamma \rightarrow [0, 1]^d$. Ako u (2.5.4) uzmemo ograničeni skup

$$B = \{\psi_{j,t} \in \mathcal{D}(I_{\varepsilon, x_0}) : \psi_{j,t}(x) = x_j e^{-2\pi i x \cdot t(\xi)} \phi(x), \xi \in \Gamma, j = 1, \dots, d\},$$

dobijamo da postoji konstanta $C > 0$ tako da

$$\int_{\Gamma} \langle \xi \rangle^{2s} |\nabla(\widehat{\phi f})(\xi + t(\xi))|^2 d\xi < C. \quad (2.5.5)$$

2.5. SOBOLJEVSKI TALASNI FRONT

Konstanta C ne zavisi od t . Za svaki $n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d$, neka je Λ_n jedinični kub

$$\Lambda_n = n + [0, 1]^d = \prod_{j=1}^d [n_j, n_j + 1].$$

Može se primetiti da ako $|n| \geq r$, onda $\Lambda_n \subset \Gamma$. Važi da

$$\left(\sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{\phi f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \int_{\Lambda_n} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{\phi f}(n)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq I_1^{\frac{1}{2}} + I_2^{\frac{1}{2}},$$

gde

$$I_1 := \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \int_{\Lambda_n} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{\phi f}(n) - \widehat{\phi f}(\xi)|^2 d\xi$$

and

$$\begin{aligned} I_2 &:= \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \int_{\Lambda_n} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{\phi f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \sum_{|n| \leq r} \int_{\Lambda_n} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{\phi f}(\xi)|^2 d\xi + C' \int_{\Gamma} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{\phi f}(\xi)|^2 d\xi < \infty. \end{aligned}$$

Ostalo je pokazati da je integral I_1 konačan. Za dato $\theta > 0$ definišemo $t_\theta : \Gamma \rightarrow [0, 1]^d$ kao

$$t_\theta(\xi) = \begin{cases} \theta(n - \xi) & , \text{ ako } \xi \in \Lambda_n \text{ i } |\xi| \geq r, \\ 0 & , \text{ inače.} \end{cases}$$

Sada ćemo iskoristiti (2.5.5). Pošto

$$|\widehat{\phi f}(\xi) - \widehat{\phi f}(n)|^2 \leq |n - \xi| \int_0^1 |\nabla(\widehat{\phi f})(\xi + \theta(n - \xi))|^2 d\theta,$$

imamo

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \sum_{\substack{|n| \leq r \\ n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d}} \int_{\Lambda_n} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{\phi f}(n) - \widehat{\phi f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\quad + C' \sup_{\theta \in [0, 1]} \int_{\Gamma} \langle \xi \rangle^{2s} |\nabla(\widehat{\phi f})(\xi + t_\theta(\xi))|^2 d\xi < \infty. \end{aligned}$$

Ovim je dokaz završen. □

2.6 Različiti pristupi množenju distribucija

U [59] navedeni su glavni pravci za „rešavanje” problema množenja distribucija:

- 1) da se otkážemo od nekog svojstva 1, 2 ili 3 navedenih u Primeru 2.1.1 i da radimo tako što ćemo smestiti prostor distribucija u nekoj algebri ili
- 2) da definišemo proizvod distribucija na potprostorima prostora $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Prvi pristup dovodi do uopštene funkcionalne algebre. Ali termin množenje distribucija odnosi se pre svega na drugom pristupu. Tu se takođe dobijaju različiti slučajevi:

2)a. teorija množitelja (multiplier) (u kojoj množenje se posmatra kao neprekidno bilinearano preslikavanje na linearnim topološkim potprostorima iz \mathcal{D}') i

2)b. metodi koji omogućavaju da se dobiju pojedini distribucionni proizvodi (bez zahtevanja globalne neprekidnosti operacije).

Teoriju množitelja možemo koristiti kod tipičnih neprekidnih multiplikativnih preslikavanja na Lebegovim prostorima:

$$\mathcal{L}^p(\Omega) \times \mathcal{L}^q(\Omega) \ni (f, g) \mapsto fg \in \mathcal{L}^1(\Omega), \quad \text{gde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ili u prostorima Soboljeva $\mathcal{H}^s(\Omega)$ koji formiraju algebru za $s > \frac{d}{2}$ i možemo definisati proizvod

$$\mathcal{H}^s(\Omega) \times \mathcal{H}^{-s}(\Omega) \ni (f, g) \mapsto fg \in \mathcal{H}^{-s}(\Omega).$$

Drugi primer dobija se iz konvolucione algebre $\mathcal{S}'_{\Gamma}(\mathbb{R}^d)$ temperiranih distribucija sa nosačem u konusu $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d$. Inverzna slika $\mathcal{S}'_{\Gamma}(\mathbb{R}^d)$ u odnosu na Furijeovu transformaciju je algebra takozvanih retardiranih distribucija, na kojoj proizvod definisan formulom $fg = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g))$, je sekvencijalno neprekidno bilinearano preslikavanje.

Individualni distribucionni proizvodi mogu se definisati nad nekim podskupovima $\mathcal{M}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega)$. Proizvod će biti bilinearano, komutativan i parcijalno asociativan – ako $(u, v) \in \mathcal{M}(\Omega)$ i $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tada $(\varphi f, g) \in \mathcal{M}(\Omega)$, $(f, \varphi g) \in \mathcal{M}(\Omega)$ i $\varphi fg = f\varphi g$. Ako su ovi uslovi ispunjeni, moguća je lokalizacija, tj. proizvod je jednoznačno definisan pomoću njegovih restrikcija na otvorenim okolinama tačaka iz Ω . Takođe, dovoljno je definisati proizvode $(\varphi f)(\varphi g)$ za svaku $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ kako bi fg bio opredeljen.

Postoje različite definicije za ovakve proizvode. Navodimo neke od njih.

a) $\mathcal{M}_1 = \{(f, g) \in \mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega) : \text{sing supp}(f) \cap \text{sing supp}(g) = \emptyset\}$. Ovo je lokalizovana verzija proizvoda glatke funkcije sa distribucijom. Ovo je veliko ograničenje i postavlja se pitanje da li je za postojanje proizvoda dveju distribucija uvek potrebno da njihovi singularni nosači budu disjunktni. Odgovor je negativan, tj. proizvod dveju distribucija postoji i kada njihovi singularni nosači nisu disjunktni, međutim treba postaviti neka ograničenja na takozvanim pravcima singularnosti.

b) $\mathcal{M}_2 = \{(f, g) \in \mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega) : (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)) \text{ postoji } \mathcal{S}'\text{-konvolucija } \mathcal{F}(\varphi f) * \mathcal{F}(\varphi g)\}$. Definicija konvolucije u \mathcal{S}' je generalizacija konvolucije u \mathcal{S}'_{Γ} u kojoj nije potrebno svojstvo nosača. Proizvod je lokalno definisan sa $fg = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g))$. Proizvod retardiranih distribucija je specijalan slučaj ovog proizvoda kao i kriterium talasnog fronta Hermandera: Ako za $(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, $(x, \xi) \in WF(f)$ povlači $(x, -\xi) \notin WF(g)$, tada $(f, g) \in \mathcal{M}_2$.

c) $\mathcal{M}_3 = \{(f, g) \in \mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega) : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * \delta_{\varepsilon})(g * \rho_{\varepsilon}) \text{ postoji za svakog para strogih delta-mreža } (\delta_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}, (\rho_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}\}$;

d) $\mathcal{M}_4 = \{(f, g) \in \mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega) : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * \delta_{\varepsilon})(g * \delta_{\varepsilon}) \text{ postoji za svaku model-delta-mrežu } (\delta_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}\}$;

Ispunjene su stroge inkluzije $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}_{i+1}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Mi smo pokazali da je naš pristup ekvivalentan Hermanderovim i zato i on je sadržan u \mathcal{M}_2 .

Glava 3

Teorija ultradistribucija - sekvencijalni pristup

3.1 Uvod

Ultradistribucije i distribucije imaju slične strukture pa prirodno se postavlja pitanje da li je, slično kao i kod distribucija, moguće da se ultradistribucije posmatraju kao granice regularnih funkcija ili preciznije kao klase ekvivalencije nizova glatkih funkcija. Međutim, realizacija teorije ultradistribucija koristeći sekvencijalni pristup, kojim se pokazuju unutrašnje veze između odgovarajućih nizova glatkih funkcija do sada nije bila urađena. U ovom poglavlju naš cilj jeste da damo sekvencijalni pristup teoriji nekvazi-analitičkih ultradistribucija tipa Berlinga i Rumijea [38]. Analogno sekvencijalnoj teoriji distribucija u [2], definišemo sekvencijalne ultradistribucije kraće nazvane s -ultradistribucije, (" s " stoji za sekvencijalne) kao klase ekvivalencije fundamentalnih nizova glatkih funkcija koji u ovom slučaju su definisane, pomoću ultradiferencijalnih operatora umesto pomoću diferencijalnih operatora kao kod običnih distribucija. Ovo je suštinska razlika i zahteva drugačije tehnike i teža je za dokazivanje: umesto sa polinomima moramo koristiti funkcije subeksponencijalnog rasta njihove specifične osobine. Kako bi dokazali da je sekvencijalni pristup ekvivalentan uobičajenom klasičnom pristupu teoriji ultradistribucija (kao kod Komatsua [38]-[41]), moramo poznavati unutrašnje strukturne osobine ultradistribucija, kao i temperiranih ultradistribucija (videti, [11]-[35], [45]-[65]); ekvivalencija ovih dva pristupa dokazaćemo pomoću Hermitovih razvoja i nekih strukturnih osobina tempe-

riranih ultradistribucija.

Kako bi pojednostavili naše izlaganje, posmatraćemo samo Ževrejev niz oblika $(M_p) = (p!^t), p \in \mathbb{Z}_+$ za $t > 1$. Ovaj niz zadovoljava svakog od uslova koji su pretpostavljeni za opšti niz $(M_p)_{p \in \mathbb{N}_0}$. Prema tome, korišćićemo uprošćenu notaciju $\mathcal{D}^{(t)}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{D}^{\{t\}}(\Omega)$) za prostore test funkcija $\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$) na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ i $\mathcal{S}^{(t)}(\mathbb{R}^d)$ (resp. $\mathcal{S}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$) za prostore test funkcija $\mathcal{S}^{(M_p)}(\mathbb{R}^d)$ (resp. $\mathcal{S}^{\{M_p\}}(\mathbb{R}^d)$). Ovo se odnosi i na njihovim dualima, tj. $\mathcal{D}'^{(t)}(\Omega), \mathcal{D}'^{\{t\}}(\Omega)$ – prostori ultradistribucija tipa Berlinga i Rumijea na skupu Ω i $\mathcal{S}'^{(t)}(\mathbb{R}^d), \mathcal{S}'^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ – prostori temperiranih ultradistribucija tipa Berlinga i Rumijea na \mathbb{R}^d , respektivno. Indeks $*$ uobičajeno koristimo za označavanje odgovarajućih prostora i klase tipa Berlinga i tipa Rumijea, tj. $\mathcal{D}^*(\Omega), \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d), \mathcal{D}'^*(\Omega), \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ su zajednički simboli za respektivne parove prostora navedenih ranije u tekstu. Ovi prostori su istraživani u [11], [35], [38], [43], [65] kao i u mnogim drugim radovima.

Naglašavamo da postoji i drugi pristup teoriji ultradistribucija uveden od Vogta (D. Vogt), Meisea (R. Meise) i njihovih suradnika, za koji postoji obimna literatura u kojoj su razrađene i mnoge primene; navodimo samo nekih od izvora i njihove reference: [7], [8], [62], [102].

Naš sekvencijalni pristup teoriji ultradistribucija sličan je onome koji je izložen u [2] za distribucije. Počinjemo definisanjem specijalnog tipa fundamentalnih nizova glatkih funkcija i odgovarajuće klase ekvivalencije nazvane s -ultradistribucije koje su elementi prostora kojeg označavamo sa $\mathcal{U}^*(\Omega)$. Ovo je urađeno u odeljcima 3.2 i 3.3, zajedno sa analizom operacija na s -ultradistribucijama, struktura konvergencije u $\mathcal{U}^*(\Omega)$ i dejstvo s -ultradistribucija na test funkcije koji pripadaju u $\mathcal{D}^*(\Omega)$. U odeljku 3.4 uvodimo i proučavamo prostore \mathcal{T}^* i $\tilde{\mathcal{T}}^*$ kojih nazivamo t - i \tilde{t} -ultradistribucijama, respektivno. Opet analiziramo njihovu strukturu, konvergenciju u njima i proučavamo dejstvo ovih temperiranih ultradistribucija na elemente odgovarajućih prostora test funkcija. Dobro je poznato (videti [27] i dr.) da postoji topološki izomorfizam između prostora \mathbf{s}^* i $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$, gde \mathbf{s}^* je Keteov (Köthe) ešelon prostor nizova sub-eksponencijalnog rasta. Koristeći ovaj fakt dokazujemo u odeljku 3.5 da postoji sekvencijalni topološki izomorfizam između \mathcal{T}^{*s} i \mathcal{T}^* i prostora $\mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$. Konačno, koristeći rezultate iz dela 3.5, dokazujemo u delu 3.6 egzistenciju sekvencijalnog topološkog izomorfizma između prostora $\mathcal{U}^*(\Omega)$ i $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

Rezultati koji su izloženi u ovom odeljku su publikovani u radu [50].

3.1.1 Preliminarni rezultati iz teorije ultradistribucija

U ovom delu koriste se iste oznake koje smo naveli na početku. Naglašavamo da za operatore diferenciranja važi

$$D^\alpha = D_x^\alpha := D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d}, \quad \text{gde } D_j^{\alpha_j} := \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j} \text{ za } j = 1, \dots, d.$$

Za Furijeovoj transformaciji od $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ u ovom odeljku koristimo oznake:

$$\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}\varphi = \widehat{\varphi} := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-i\langle x, \cdot \rangle} dx.$$

Navodimo nekoliko osobina iz [38]. Fiksiramo $t > 1$ i razmatramo *asociranu funkciju*, koja odgovara nizu Ževreja $(p!)_{p \in \mathbb{Z}_+}$ za dato t , definisanu formulom

$$M(\rho) := \sup_{p \in \mathbb{N}_0} \log_+ \frac{\rho^p}{p!^t} = e^{k\rho^{1/t}} \text{ za } \rho > 0,$$

gde je $k > 0$ odgovarajuća konstanta. Sa \mathcal{R} označavamo skup svih nizova (r_p) pozitivnih brojeva koji strogo rastu ka beskonačnosti. Naročito, za $(r_p) \in \mathcal{R}$ definišemo niz (N_p) sa

$$N_0 := 1; \quad N_p := p!^t R_p, \quad \text{where } R_p := \prod_{j=1}^p r_j, \quad \text{za } p \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.1.1)$$

(r_p) -*asocirana funkcija*, koja odgovara datom nizu $(r_p) \in \mathcal{R}$, je funkcija:

$$N_{(r_p)}(\rho) := \sup_{p \in \mathbb{N}_0} \log_+ \frac{\rho^p}{N_p}, \quad 0 < \rho < \infty,$$

gde niz brojeva $(N_p)_{p \in \mathbb{N}_0}$ je definisan u (3.1.1). Za svaki $(r_p) \in \mathcal{R}$ i za svako $k > 0$ postoji $\rho_0 > 0$ tako da

$$N_{(r_p)}(\rho) \leq e^{k\rho^{1/t}} \quad \text{za } \rho > \rho_0,$$

(videti [38]).

Neka je $K \subset\subset \Omega$ i $h > 0$. Navešćemo definicije nekih od prostora test funkcija [38]:

$$\mathcal{E}^{t,h}(K) := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : P_{h,K}(\varphi) := \sup_{x \in K, \alpha \in \mathbb{N}_0^d} \frac{|D^\alpha \varphi(x)|}{h^{|\alpha|} \alpha!^t} < \infty\};$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_K^{t,h} &:= \mathcal{E}^{t,h}(K) \cap \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \text{supp } \varphi \subset K\}; \\ \mathcal{D}_K^{(t)} &:= \varprojlim_{h \rightarrow 0} \mathcal{D}_K^{t,h}; \quad \mathcal{D}^{(t)}(\Omega) := \varinjlim_{K \subset\subset \Omega} \mathcal{D}_K^{(t)}; \\ \mathcal{D}_K^{\{t\}} &:= \varinjlim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{D}_K^{t,h}; \quad \mathcal{D}^{\{t\}}(\Omega) := \varprojlim_{K \subset\subset \Omega} \mathcal{D}_K^{\{t\}}.\end{aligned}$$

Kako smo i ranije naveli, korišćićemo zajednički simbol $\mathcal{D}^*(\Omega)$ za prostore $\mathcal{D}^{(t)}(\Omega)$ i $\mathcal{D}^{\{t\}}(\Omega)$, a $\mathcal{D}'^*(\Omega)$ za njihove duale. Prostori Geljfanda-Šilova $\mathcal{S}^{(t)}(\mathbb{R}^d)$ i $\mathcal{S}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$, definisani su u [11] i oni su invarijantni u odnosu na Furijeovu transformaciju; dati su sa

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_h^t(\mathbb{R}^d) &:= \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) : (\exists C > 0) (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d) \frac{\|x^\alpha \partial^\beta f\|_2}{h^{|\alpha+\beta|} \alpha!^t \beta!^t} \leq C\}; \\ \mathcal{S}^{(t)}(\mathbb{R}^d) &:= \varprojlim_{h \rightarrow 0} \mathcal{S}_h^t(\mathbb{R}^d); \quad \mathcal{S}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d) := \varinjlim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{S}_h^t(\mathbb{R}^d).\end{aligned}$$

Primetimo da je prostor $\mathcal{S}^{(t)}(\mathbb{R}^d)$ netrivialan ako $t > 1/2$, dok $\mathcal{S}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ je netrivialan ako $t \geq 1/2$. Označavamo oba prostora $\mathcal{S}^{(t)}(\mathbb{R}^d)$ i $\mathcal{S}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ sa $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$, a njihovih duala sa $\mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$.

Važi

$$\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{D}'^*(\mathbb{R}^d),$$

gde simbol \hookrightarrow označava da je identično preslikavanje neprekidno i gusto ulaganje.

Generalizacija delta-niza (delta-mreže) iz 1.1.5 dobija se ako uzmemo da funkcija-model pripada u $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^d)$.

3.1.2 Ultradiferencijalni operatori

Navešćemo definicije i neke rezultate koji se odnose na ultradiferencijalne operatore iz [38]-[43]. Formalni izraz $P(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha D^\alpha$ ($a_\alpha \in \mathbb{C}$), koji odgovara analitičkoj funkciji $P(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha z^\alpha$ ($z \in \mathbb{C}^d$), naziva se *ultradiferencijalni operator klase Berlinga* ($p!^t$) (resp. *klase Rumijeja* $\{p!^t\}$), ako on zadovoljava uslov:

$$(\exists h > 0) (\text{resp. } (\forall h > 0)) (\exists C > 0) (\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d) (|a_\alpha| \leq C \frac{h^{|\alpha|}}{\alpha!^t}).$$

U slučaju Rumijea možemo koristiti sledeći ekvivalentni izraz:

$$(\exists (r_p) \in \mathcal{R}, \exists C > 0) (\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d) \quad |a_\alpha| \leq \frac{C}{(\alpha!)^t R_{|\alpha|}},$$

gde je $R_{|\alpha|}$ definisana u (3.1.1) i $t > 1$ je fiksiran u nastavku rada. Koristićemo termin *ultradiferencijalni operator klase ** za oba slučaja - Berlingovog i Rumijeovog.

Ako je $P(D)$ ultradiferencijalni operator klase Berlinga (respektivno, klase Rumijea), tada funkcija $P(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha z^\alpha, z \in \mathbb{C}^d$, prema [38, Propozicija 4.5], zadovoljava ograničenja:

$$(\exists h > 0) \text{ (resp. } (\forall h > 0)) (\exists C > 0) (\forall z \in \mathbb{C}^d) \quad |P(z)| \leq C e^{h|z|^{1/t}};$$

u slučaju Rumijea, ograničenja mogu da se predstave u sledećem ekvivalentnom obliku: Postoje $(r_p) \in \mathcal{R}$ i $C > 0$ tako da

$$(\forall \xi \in \mathbb{R}^d) \quad |P(\xi)| \leq C e^{c(|\xi|)^{1/t}},$$

gde c je *subordinirana funkcija* datog niza $(r_p) \in \mathcal{R}$, tj. rastuća funkcija na $[0, \infty)$ za koju $c(0) = 0$ i $c(\rho)/\rho \rightarrow 0$ kada $\rho \rightarrow \infty$ i koja je pridružena nizu (r_p) pomoću identiteta:

$$M(c(\rho)) = N_{(r_p)}(\rho), \quad \text{za } \rho > 0,$$

gde je $N_{(r_p)}$ (r_p) -asocirana funkcija (videti [38]).

Sa $\mathcal{P}^{(t)}$ (resp. $\mathcal{P}^{\{t\}}$) označavamo klasu ultradiferencijalnih operatora $P_r(D)$ tipa Berlinga (resp. $P_{(r_p)}(D), (r_p) \in \mathcal{R}$ tipa Rumijea) koji imaju oblik:

$$P_r(D) = (1 + D_1^2 + \dots + D_d^2)^l \prod_{p=1}^{\infty} \left[1 + \frac{D_1^2 + \dots + D_d^2}{r^2 p^{2t}} \right] \quad (= \sum_{p=0}^{\infty} a_p D^p) \quad (3.1.2)$$

(resp.,

$$P_{(r_p)}(D) = (1 + D_1^2 + \dots + D_d^2)^l \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{D_1^2 + \dots + D_d^2}{r_p^2 p^{2t}} \right) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p D^p \quad (3.1.3)$$

gde $r > 0$ (resp. $(r_p) \in \mathcal{R}$) i $l \geq 0$. Smenom D_j sa ξ_j u (3.1.2) i (3.1.3) dobijamo *ultra-polinome* $P_r(\xi)$ tipa Berlinga (resp. $P_{(r_p)}(\xi)$ tipa Rumijea) koji odgovaraju ultradiferencijalnim operatorima $P_r(D)$ (resp. $P_{(r_p)}(D)$). Oni se mogu opisati na sledeći način (videti [38]):

ultra-polinomi tipa Berlinga su subeksponencijalnog rasta, tj. postoje konstante $C_1, C_2, C > 0$ i $h_1, h_2, h > 0$ tako da

$$C_1 e^{h_1 |\xi|^{1/t}} \leq |P_r(\xi)| \leq C_2 e^{h_2 |\xi|^{1/t}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad (3.1.4)$$

i

$$|a_p| \leq C \frac{h^p}{p!^t}, \quad p \in \mathbb{N}_0.$$

Deskripcija ultra-polinoma u slučaju Rumijea je teži. Može se dokazati, slično kao u slučaju Berlinga, da za dati niz $(r_p) \in \mathcal{R}$ i za njegovu subordiniranu funkciju c postoji konstanta $C > 0$ tako da

$$C e^{c(|\xi|)^{1/t}} \leq |P_{(r_p)}(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (3.1.5)$$

Kako bi dobili odgovarajuće gornje ograničenje moramo naći niz $(r_{0,p}) \in \mathcal{R}$ i njegovu subordiniranu funkciju c_0 tako da nejednačina

$$(1 + |\xi|^2)^l |P_{(r_p)}(\xi)| \leq C_0 e^{c_0(|\xi|)^{1/t}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (3.1.6)$$

važi za neku konstantu $C_0 > 0$ i za svako $l \geq 0$. Na primer, ako $r_p = p^\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), tada $c(|\xi|) = h_0 |\xi|^{t/(t+\varepsilon)}$ za neko pogodno izabrano $h_0 > 0$ i za svako $\xi \in \mathbb{R}^d$. U ovom slučaju ograničenja su očigledna. U opštem slučaju ćemo koristiti sledeću važnu osobinu subordiniranih funkcija koja je posledica Leme 3.12 (videti i Lemu 3.10 iz [38]).

Neka je c proizvoljna subordinirana funkcija i neka $\tilde{c} := 2c$. Postoji niz $(r_p^0) \in \mathcal{R}$ tako da (r_p^0) -asocirana funkcija $N_{(r_p^0)}$ i subordinirana funkcija c_0 koji odgovaraju nizu (r_p^0) zadovoljavaju nejednačinu:

$$M(\tilde{c}(\rho)) \leq N_{(r_p^0)}(\rho) = M(c_0(\rho)), \quad \rho > 0,$$

Prema tome,

$$c_0(\rho) \geq \tilde{c}(\rho) = 2c(\rho), \quad \rho > 0.$$

Gornje primedbe mogu da se formuliraju u sledeću lemu:

Lema 3.1.1. *Za proizvoljnu subordiniranu funkciju c , koja odgovara nekom nizu $(r_p) \in \mathcal{R}$, i $h > 0$ postoji niz $(r_p^0) \in \mathcal{R}$ i njegova subordinirana funkcija c_0 , tako da*

$$c_0(\rho) \geq h c(\rho), \quad \rho > 0.$$

Naročito, za datu subordiniranu funkciju c postoji druga subordinirana funkcija c_0 (obe su pridružene odgovarajućim nizovima iz \mathcal{R}) tako da

$$c_0(\rho) \geq c(2\rho)$$

za svako $\rho > 0$.

U odeljku 3.4.2 ćemo koristiti sledeću lemu.

Lema 3.1.2. (a) *Ako je $P_r \in \mathcal{P}^{(t)}$ (resp. $P_{(r_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$), tada postoje $r_0 > 0$ (resp. $(r_p^0) \in \mathcal{R}$), $C > 0$ i $\varepsilon > 0$ tako da*

$$|D^\alpha P_r(x)| \leq \frac{C\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}} e^{r_0|x|^{1/t}}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \alpha \in \mathbb{N}_0^d$$

$$\text{(resp. } |D^\alpha P_{(r_p)}(x)| \leq \frac{C\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}} e^{c_{(r_p^0)}(|x|)^{1/t}}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \alpha \in \mathbb{N}_0^d),$$

gde je $c_{(r_p^0)}(\rho)$, $\rho > 0$, subordinirana funkcija odgovarajuća nizu $(r_p^0) \in \mathcal{R}$.

(b) *Ako $P_{\tilde{r}} \in \mathcal{P}^{(t)}$ (resp. $P_{(\tilde{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$), tada postoje $\tilde{r}_0 > 0$ (resp. $(\tilde{r}_p^0) \in \mathcal{R}$), $C > 0$ i $\varepsilon > 0$ tako da*

$$|D^\alpha (1/P_r(x))| \leq \frac{C\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}} e^{-\tilde{r}_0|x|^{1/t}}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \alpha \in \mathbb{N}_0^d$$

$$\text{(resp. } |D^\alpha (1/P_{(\tilde{r}_p)}(x))| \leq \frac{C\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}} e^{-c_{(\tilde{r}_p^0)}(|x|)^{1/t}}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \alpha \in \mathbb{N}_0^d),$$

gde je $c_{(\tilde{r}_p^0)}$ subordinirana funkcija odgovarajuća nizu (\tilde{r}_p^0) .

Koristićemo simbol \mathcal{P}^* kao zajedničku oznaku za klase ultradiferencijalnih operatora $\mathcal{P}^{(t)}$ tipa Berlinga (resp. $\mathcal{P}^{\{t\}}$ tipa Rumijeja) uvedenih ranije. Simbolom \mathcal{P}^{2*} označavamo prostor t -ultradistribucija oba tipa. Odgovarajućih prostora ultradiferencijabilnih funkcija označavaćemo simbolima \mathcal{P}_u^* (resp. \mathcal{P}_u^{2*}). Ova notacija olakšava nam da razdvojimo različite upotrebe slova

P : $P(D)$, $P(x)$ ili $P(\xi)$. U nastavku, kako bi pojednostavili izlaganje, posmatraćemo ultradiferencijalne operatore oblika (3.1.2) i (3.1.3), ali u nekim dokazima korišćićemo njihov opšti oblik.

Sa μ_β označavamo sledeći operator koji deluje na merljivoj funkciji G :

$$(\mu_\beta G)(\xi) := (i\xi)^\beta G(\xi) \quad \text{za } \xi \in \mathbb{R}^d \text{ i } \beta \in \mathbb{N}_0^d.$$

Primitimo da $\mu_0 G = G$. U nastavku ćemo koristiti sledeću tvrdnju:

Propozicija 3.1.3. *Za svako $\beta \in \mathbb{N}_0^d$, $q \in [1, \infty]$ i $P_r(D) \in \mathcal{P}^{(t)}$ gde je $r > 0$ (resp. $P_{(r_p)}(D) \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ gde je $(r_p) \in \mathcal{R}$) postoji $P_{\tilde{r}}(D) \in \mathcal{P}^{(t)}$ gde je $\tilde{r} > r$ (resp. $P_{(\tilde{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ gde je $(\tilde{r}_p) \in \mathcal{R}$, $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{r_p}{\tilde{r}_p} = 0$) tako da*

$$\begin{aligned} \mu_\beta \frac{P_r}{P_{\tilde{r}}} \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d) \quad \text{i} \quad \mathcal{F}^{-1}(\mu_\beta \frac{P_r}{P_{\tilde{r}}}) \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d) \quad (3.1.7) \\ \left(\text{resp. } \mu_\beta \frac{P_{(r_p)}}{P_{(\tilde{r}_p)}} \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d) \quad \text{i} \quad \mathcal{F}^{-1}(\mu_\beta \frac{P_{(r_p)}}{P_{(\tilde{r}_p)}}) \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d) \right) \end{aligned}$$

Analogno, ako stavimo \mathcal{P}_u^{2*} umesto \mathcal{P}_u^* , važe sledeće relacije:

$$\left(\frac{P_r(2\alpha + 1)}{P_{\tilde{r}}(2\alpha + 1)} \right)_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \in l^q \quad \left(\text{resp. } \left(\frac{P_{(r_p)}(2\alpha + 1)}{P_{(\tilde{r}_p)}(2\alpha + 1)} \right)_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \in l^q \right), \quad (3.1.8)$$

gde

$$P(2\alpha + 1) := \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k \prod_{i=1}^d (2\alpha_i + 1)^{k_i}, \quad \text{za } \alpha \in \mathbb{N}_0^d.$$

Sledeće dobro poznate navode ćemo takođe koristiti u nastavku; njihovi dokazi mogu se naći na mnogo mesta, na primer u [11, 65].

Lema 3.1.4. (a) *Glatka funkcija φ na \mathbb{R}^d pripada u $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ ako i samo ako za svaki $P \in \mathcal{P}^*$ i $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$ imamo*

$$\|P_1 P(-D)\varphi\|_2 < \infty.$$

(b) *Ako za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, $\varphi_n \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ i $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}^*} \varphi_0$ kada $n \rightarrow \infty$, tada za svaki $P \in \mathcal{P}^*$ i $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$ važi*

$$P_1 P(-D)\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}^*} P_1 P(-D)\varphi_0 \quad \text{kada } n \rightarrow \infty.$$

(c) *Ako za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, $\varphi_n \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ i $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}^*} \varphi_0$ kada $n \rightarrow \infty$, tada za svaki $P \in \mathcal{P}^*$ imamo*

$$P(H)\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}^*} P(H)\varphi_0 \quad \text{kada } n \rightarrow \infty.$$

3.2 Fundamentalni nizovi s -ultradistribucija

Švarcove distribucije u sekvencijalnom pristupu prikazanom u [2] su definisane kao klase ekvivalencije fundamentalnih nizova glatkih funkcija definisanih pomoću diferencijalnih operatora (izvoda) konačnog reda. Na sličan način uvodimo sekvencijalne ili s -ultradistribucije tipa Berlinga (resp. Rumijske). Razlika je u tome da novi fundamentalni nizovi su definisani upotrebom ultradiferencijalnih operatora $P_r(D)$ (resp. $P_{(r_p)}(D)$) umesto diferencijalnih operatora konačnog reda.

Ako $P \in \mathcal{P}^*$ i F je integrabilna funkcija sa kompaktnim nosačem, tada je $P(z)\mathcal{F}(F)(z)$, $z \in \mathbb{C}^d$, cela funkcija subeksponencijalnog rasta na \mathbb{R}^d . Ako inverzna Furijska transformacija $\mathcal{F}^{-1}(P\hat{F})$ je lokalno integrabilna funkcija, tada definišemo

$$P(D)F(x) := \mathcal{F}^{-1}(P\hat{F})(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (3.2.1)$$

formalno dejstvo ultradiferencijalnog operatora $P(D)$ na glatkoj funkciji sa kompaktnim nosačem. Ako je F glatka funkcija sa kompaktnim nosačem za koju

$$\text{supp } F \subset K_1 \subset\subset \Omega$$

i $P \in \mathcal{P}^*$ ima oblik

$$P(D) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(D),$$

gde

$$P_k(D) := \sum_{|\alpha|=0}^k a_\alpha D^\alpha,$$

i pretpostavljamo egzistenciju leve strane jednačine (3.2.1) u sledećem smislu:

$$P(D)F(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(D)F(x), \quad x \in K, \quad (3.2.2)$$

tada granica u (3.2.2) postoji i ona je glatka funkcija na K . U ovom slučaju limes definiše $f(x) = P(D)F(x)$ za $x \in K$ i daje smisla izrazu (3.2.3) dole.

Definicija 3.2.1. *Niz glatkih funkcija (f_n) definisanim na otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ naziva se s -fundamentalnim nizom tipa $*$, (tipa Berlinga ili Rumijske, respektivno) na Ω , ako za svako $K_1 \subset\subset \Omega$ i $K \subset\subset K_1^\circ$ postoje ultradiferencijalni operator $P(D) \in \mathcal{P}^*$, niz glatkih funkcija (F_n) na Ω i neprekidna funkcija F_0 na Ω , tako da*

$$f_n = P(D)F_n \text{ na } K \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \quad \text{supp } F_n \subset K_1 \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad (3.2.3)$$

$$i \quad F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_0 \quad \text{kada } n \rightarrow \infty.$$

Jednakost (3.2.3) podrazumeva se u smislu postojanja granice (3.2.2). U nastavku, za dati $K \subset\subset \Omega$ uvek ćemo uzimati skup $K_1 \subset\subset \Omega$ za koji $K \subset\subset K_1^\circ$ koji je dovoljno blizak skupu K , bez da se to posebno naglašava (moguće je pokazati, uzimajući prikladnu funkciju odsecanja, da definicija ne zavisi od izbora skupa K_1).

Primedba 3.2.2. 1° U (3.2.3) moguće je posmatrati svakog ultradiferencijalnog operatora klase $*$, a ne samo onih koji pripadaju \mathcal{P}^* , što daje opštiji oblik definicije. Kako su obe formulacije ekvivalentne, korišćemo gore navedenu radi jednostavnosti.

2° Neka su Ω_1, Ω otvoreni skupovi u \mathbb{R}^d tako da $\Omega_1 \subset \Omega$. Ako je niz (f_n) s -fundamentalna tipa $*$ u Ω , tada je on s -fundamentalna tipa $*$ u Ω_1 .

3° Neka je (f_n) niz glatkih funkcija u Ω . Ako za svaki otvoreni skup $\Omega_0 \subset \Omega$ niz $(f_n|_{\Omega_0})$ je s -fundamentalna tipa $*$ u Ω_0 , tada (f_n) je s -fundamentalna tipa $*$ u Ω .

Definicija 3.2.3. *Neka su (f_n) i (g_n) s -fundamentalni nizovi na otvorenom skupu Ω . Pišemo*

$$(f_n) \sim (g_n)$$

ako za svaki $K_1 \subset\subset \Omega$ i $K \subset\subset K_1^\circ$, postoji ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ i nizovi $(F_n), (G_n)$ glatkih funkcija na Ω tako da

$$\begin{aligned} f_n &= P(D)F_n \quad \text{nad } K, & g_n &= P(D)G_n \quad \text{nad } K \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \\ \text{supp } F_n &\subset K_1, & \text{supp } G_n &\subset K_1 \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \\ i \quad F_n &\xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F, & G_n &\xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F, \quad \text{kada } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Korišćemo oznaku

$$F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} G_n, \quad \text{kada } n \rightarrow \infty$$

kako bi označili da nizovi (F_n) i (G_n) konvergiraju u $\mathcal{C}(K)$ prema istoj neprekidnoj funkciji H na Ω (jasno je da $\text{supp } F, \text{supp } G \subset K_1$).

Od Definicije 3.2.3 dobija se da

Primedba 3.2.4. Ako su (f_n) i (g_n) s -fundamentalni nizovi u Ω , tada su oni u relaciji $(f_n) \sim (g_n)$ ako i samo ako niz $f_1, g_1, f_2, g_2, f_3, g_3, \dots$ je s -fundamentalna u Ω .

Jasno je da je relacija \sim refleksivna i simetrična. Za dokaz njene tranzitivnosti dokazaćemo nekoliko pomoćnih propozicija koje ćemo koristiti u nastavku.

Propozicija 3.2.5. *Fiksirajmo $K_1 \subset\subset \Omega$ i $K \subset\subset K_1^\circ$. Pretpostavimo da (f_n) zadovoljava Definiciju 3.2.1 u slučaju Rumijeja, tj. $f_n = P_{(r_p)}(D)F_n$ na K , $\text{supp } F_n \subset K_1$ za $n \in \mathbb{N}_0$ i $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_0$ kada $n \rightarrow \infty$ za niz (F_n) glatkih funkcija i neprekidnu funkciju F_0 na Ω . Tada postoje $P_{(\tilde{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, gde $(\tilde{r}_p) \in \mathcal{R}$ sa $r_p/\tilde{r}_p \downarrow 0$ kada $p \rightarrow \infty$ i $\mathcal{F}^{-1}(P_{(r_p)}/P_{(\tilde{r}_p)}) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, glatke funkcije \tilde{F}_n ($n \in \mathbb{Z}_+$) i neprekidna funkcija \tilde{F}_0 na Ω tako da*

$$f_n = P_{(\tilde{r}_p)}(D)\tilde{F}_n \text{ na } K \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \quad \text{supp } \tilde{F}_n \subset K_1 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

$$\text{i } \tilde{F}_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} \tilde{F}_0 \text{ kada } n \rightarrow \infty.$$

Iskaz je tačan i u slučaju Berlinga (sa odgovarajućim oznakama).

Propozicija 3.2.6. *Ako za proizvoljno $K_1 \subset\subset \Omega$ i $K \subset\subset K_1^\circ$ postoje $P \in \mathcal{P}^*$, glatke funkcije F_n ($n \in \mathbb{N}$) i neprekidna funkcija F_0 na Ω sa $\text{supp } F_n \subset K_1$ ($n \in \mathbb{N}_0$) tako da*

$$F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_0 \text{ i } P(D)F_n(x) \rightarrow 0 \text{ za } x \in K \text{ kada } n \rightarrow \infty,$$

tada $F_0 = 0$ na Ω .

Naročito, ako je F glatka funkcija na Ω i $P(D)F(x) = 0$ za $x \in \Omega$, tada $F = 0$ na Ω .

Propozicija 3.2.7. *Fiksirajmo $K, K_1 \subset\subset \Omega$ tako da $K \subset\subset K_1^\circ$. Pretpostavimo da za nizove $(r_p), (\tilde{r}_p) \in \mathcal{R}$, glatkih funkcija F_n, \tilde{F}_n na Ω ($n \in \mathbb{Z}_+$) i neprekidnih funkcija F_0, \tilde{F}_0 na Ω , važi*

$$f_n = P_{(r_p)}(D)F_n \text{ na } K \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \quad \text{supp } F_n \subset K_1 \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

$$F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_0 \text{ kada } n \rightarrow \infty$$

i

$$f_n(x) = P_{(\tilde{r}_p)}(D)\tilde{F}_n \text{ na } K \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \quad \text{supp } \tilde{F}_n \subset K_1 \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

$$\tilde{F}_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} \tilde{F}_0 \text{ kada } n \rightarrow \infty.$$

Tada postoje niz $(\bar{r}_p) \in \mathcal{R}$, za koji $\frac{r_p}{\bar{r}_p} \downarrow 0$ i $\frac{\tilde{r}_p}{\bar{r}_p} \downarrow 0$ kada $p \rightarrow \infty$ tako da

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P(r_p)}{P(\bar{r}_p)}\right), \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P(\tilde{r}_p)}{P(\bar{r}_p)}\right) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d), \quad (3.2.5)$$

i nizovi $(F_{n,1}), (F_{n,2})$ glatkih funkcija i neprekidne funkcije $F_{0,1}, F_{0,2}$ na Ω , sa $\text{supp } F_{n,1}, \text{supp } F_{n,2} \subset K_1$ ($n \in \mathbb{N}_0$), tako da

$$f_n = P_{(\bar{r}_p)}(D)F_{n,j} \text{ na } K \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \quad F_{n,j} \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_{0,j} \text{ kada } n \rightarrow \infty \quad (3.2.6)$$

za $j = 1, 2$. Štaviše $F_{0,1} = F_{0,2}$ na Ω .

Isto važi i u slučaju Berlinga (sa odgovarajućom notacijom).

Propozicija 3.2.8. *Relacija \sim uvedena u Definiciji 3.2.3 je tranzitivna.*

3.2.1 Sekvencijalne ultradistribucije

Definicija 3.2.9. *Neka je (f_n) s -fundamentalna niz (tipa $*$) u otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Klasa ekvivalencije $[f_n]$ svih s -fundamentalnih nizova (tipa $*$) ekvivalentnim sa (f_n) u odnosu na relaciju \sim naziva se sekvencijalna ultradistribucija (tipa $*$) ili kratko s -ultradistribucija (tipa $*$) i označava se*

$$f := [f_n],$$

gde (f_n) je neki predstavnik klase ekvivalencije. Skup svih s -ultradistribucija (tipa $*$) na datom otvorenom skupu Ω u \mathbb{R}^d označava se sa $\mathcal{U}^*(\Omega)$.

Primedba 3.2.10. 1° Koristeći Propoziciju 3.2.6, dobijamo da

$$f = [f_n] = 0 \text{ na } \Omega \text{ za } f \in \mathcal{U}^*(\Omega),$$

ako za proizvoljno $K_1 \subset\subset \Omega$ i $K \subset\subset K_1^\circ$ postoji niz (F_n) glatkih funkcija na Ω i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ tako da

$$\begin{aligned} f_n &= P(D)F_n \text{ na } K \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \quad \text{supp } F_n \subset K_1 \quad (n \in \mathbb{N}_0) \\ &\text{i } F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} 0 \text{ kada } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2° Neka je $f \in \mathcal{U}^*(\Omega)$. Ako $f = 0$ na Ω_1 za svako $\Omega_1 \subset \Omega$, tada $f = 0$ na Ω .

Definicija 3.2.11. Nosač s -ultradistribucije $f = [f_n] \in \mathcal{U}^*(\Omega)$ je komplement unije svih otvorenih skupova na kojih je $f = 0$. Kažemo da s -ultradistribucija $f = [f_n]$ ili s -fundamentalna niz (f_n) tipa $*$ je sa kompaktnim nosačem ako postoji $K \subset\subset \mathbb{R}^d$ tako da $\text{supp } f_n \subset K$ za $n \in \mathbb{Z}_+$. Tada pišemo $\text{supp } f \subset K$ ili $\text{supp } (f_n) \subset K$. U ovom slučaju postoji niz glatkih funkcija (F_n) , neprekidna funkcija F_0 , ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ i $K_1 \subset\subset \Omega$ tako da

$$f_n(x) = P(D)F_n(x) \text{ na } \mathbb{R}^d \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \quad \text{supp } F_n \subset K_1 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

$$\text{i } F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_0 \text{ kada } n \rightarrow \infty.$$

Primer 3.2.12. Neka je F neprekidna funkcija sa kompaktnim nosačem u \mathbb{R}^d , tj. $f \equiv 0$ van kompaktnog skupa K , (δ_n) je delta niz u $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ i neka $F_n := F * \delta_n$ za $n \in \mathbb{Z}_+$. Tada (F_n) je s -fundamentalna niz tipa $*$ na \mathbb{R}^d .

Primer 3.2.13. Neka je (f_n) s -fundamentalna niz tipa $*$ na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ i (K_n) je rastući niz kompaktnih skupova tako da $K_n \subset K_{n+1}$ za $n \in \mathbb{Z}_+$. Stavimo

$$\Omega := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} K_n.$$

Definišemo otvorene skupove

$$\Omega_n := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > 1/n\}, \quad \Omega_{n,n} := \{x \in \Omega_n : d(x, \partial\Omega_n) > 1/n\}$$

i funkcije $\kappa_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tako da

$$\kappa_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in \Omega_{n,n}, \\ 0, & \text{if } x \in \Omega_n^c, \end{cases}$$

za $n \in \mathbb{Z}_+$. Tada niz (\tilde{f}_n) , gde

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} ((\kappa_n f_n) * \delta_n)(x), & \text{if } x \in \Omega_n, \\ 0, & \text{if } x \in \Omega_n^c, \end{cases}$$

je s -fundamentalna tipa $*$ na Ω i $(f_n) \sim (\tilde{f}_n)$.

Primer 3.2.14. Neka je $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ za neki otvoreni skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, neka su $\Omega_n, \Omega_{n,n}$ i κ_n kao u primeru 3.2.13 i neka je $P_{(r_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$. Stavimo

$$F_n(x) := \begin{cases} \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f_n}/P_{(r_p)})(x), & \text{ako } x \in \Omega, \\ 0, & \text{ako } x \in \Omega_n^c, \end{cases} \quad (3.2.7)$$

za $n \in \mathbb{Z}_+$, gde

$$f_n := (\kappa_n f) * \delta_n = P_{(r_p)}(D)F_n$$

i $P_{(r_p)}$ označava u (3.2.7) funkciju koja odgovara ultradiferencijalnom operatoru $P_{(r_p)}$. Kako $\widehat{\kappa_n f}$, za svako $n \in \mathbb{Z}_+$, je ograničena polinomom, sledi iz (3.1.6) da je (f_n) s -fundamentalni niz tipa Rumijea na Ω , tj. $[f_n] \in \mathcal{U}^{\{t\}}(\Omega)$. Slično je moguće prikazati f kao element iz $\mathcal{U}^{(t)}(\Omega)$ pomoću $P_r(D)$ umesto $P_{(r_p)}(D)$.

Primedba 3.2.15. Ako je (f_n) s -fundamentalni niz tipa $*$ u smislu Definicije 3.2.1, tada $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_0$ kada $n \rightarrow \infty$ za svaki kompaktni skup $K \subset\subset \Omega$. Primeri 3.2.12 i 3.2.14 pokazuju da svakog s -fundamentalnog niza (f_n) za koga važi (3.2.3) moguće je identifikovati sa formalnom reprezentacijom

$$f = P(D)F_0$$

na K , jer iz opšte teorije ultradistribucija znamo da za svaki $K_1 \subset\subset \Omega$ i $K \subset\subset K_1^\circ$ postoje $P \in \mathcal{P}^*$ i neprekidna funkcija $F_0 \in \mathcal{C}(\Omega)$ i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$, tako da

$$f = P(D)F_0 \text{ na } K \quad \text{i} \quad \text{supp } F_0 \subset K_1.$$

Ovo biće potvrđeno sa (3.3.3).

3.2.2 Operacije sa s -ultradistribucijama

Uvodimo operacije sabiranja i množenja sa skalarom. Neka su $f = [f_n] = [f_n], g = [g_n] \in \mathcal{U}^*(\Omega)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$, za nekih s -fundamentalnih nizova (f_n) i (g_n) tipa $*$. Koristeći Propoziciju 3.2.7, moguće je dokazati da su $(f_n + g_n)$ i (λf_n) s -fundamentalni nizovi tipa $*$ na Ω , pa možemo definisati s -ultradistribucije

$$f + g := [f_n + g_n] \quad \text{i} \quad \lambda f := [\lambda f_n].$$

Radi primedbe 3.2.4 definicije su konzistentne. Prema tome, $\mathcal{U}^*(\Omega)$ je vektorski prostor.

Pokažimo da je diferenciranje operacija. Neka je $f = [f_n] \in \mathcal{U}^{\{t\}}(\Omega)$, tj. (f_n) je s -fundamentalni niz tipa Rumijea, i $\beta \in \mathbb{N}_0^d$. Dokazaćemo da je niz $(f_n^{(\beta)})_n$ s -fundamentalni niz tipa Rumijea. Za svaki $K_1 \subset\subset \Omega$ i $K \subset\subset K_1^\circ$ neka su (F_n) i $P_{(r_p)}(D)$ kao u Definiciju 3.2.1. Kako

$$f_n^{(\beta)} = P_{(r_p)}(D)F_n^{(\beta)} \text{ na } K,$$

zaključujemo prema (3.1.7) slično kao kod dokaza Propozicije 3.2.5 za $\beta = 0$ da postoje $P_{(\tilde{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, niz (\tilde{F}_n) glatkih funkcija i neprekidna funkcija \tilde{F}_0 nad Ω definisana sa

$$\tilde{F}_n := \kappa_K[\mathcal{F}^{-1}\left(\mu_\beta \frac{P_{(r_p)}}{P_{(\tilde{r}_p)}}\right) * (\kappa_K F_n)], \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

i sa nosačem $\text{supp } \tilde{F}_n \subset K_1$ ($n \in \mathbb{N}_0$), tako da

$$P_{(r_p)}(D)F_n^{(\beta)} = P_{(\tilde{r}_p)}(D)\tilde{F}_n \text{ na } K \text{ i } \tilde{F}_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} \tilde{F}_0 \text{ kada } n \rightarrow \infty.$$

Znači, $(f_n^{(\beta)})$ je s -fundamentalna i definišemo

$$f^{(\beta)} := [f_n^{(\beta)}].$$

Na bazi Primedbe 3.2.4, definicija je konzistentna i $f^{(\beta)} \in \mathcal{U}^{\{t\}}(\Omega)$. Analogna tvrdnja važi u slučaju Berlinga.

Razmotrićemo operacije množenja i konvolucije sa funkcijom iz $\mathcal{E}^*(\Omega)$. Posmatraćemo samo slučaj Rumijeja. Berlingov slučaj je sličan.

Fiksiramo $\omega \in \mathcal{E}^{\{t\}}(\Omega)$ i $f = [f_n] \in \mathcal{U}^{\{t\}}(\Omega)$. Pokazaćemo da je niz (ωf_n) s -fundamentalna, pa može se definisati

$$\omega f := [\omega f_n] \in \mathcal{E}^{\{t\}}(\Omega)$$

i definicija je konzistentna, radi primedbe 3.2.4. Za svaki $K \subset\subset \Omega$ postoje $P_{(r_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, niz glatkih funkcija (F_n) i neprekidna funkcija F_0 u Ω sa $\text{supp } F_n \subset K_1$ ($n \in \mathbb{N}_0$) tako da

$$\omega f_n = \omega P_{(r_p)}(D)F_n \text{ u } K \text{ i } F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Možemo pretpostaviti da ω ima kompaktni nosač njenim množenjem sa funkcijom odsecanja koja je 1 na K . Imamo

$$\widehat{\omega}(\xi) \leq C e^{-h|\xi|^{1/t}} \quad \text{i} \quad |P_{(r_p)}(\xi)\widehat{F}_n| \leq C_1 e^{c(|\xi|)^{1/t}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

za neke konstante $C > 0$, $C_1 > 0$, $h > 0$ i subordiniranu funkciju c , radi (3.1.6). Radi (3.1.7), postoji $P_{(\tilde{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, gde $(\tilde{r}_p) \in \mathcal{R}$ sa $r_p/\tilde{r}_p \downarrow 0$ kada $p \rightarrow \infty$, tako da

$$(\widehat{\omega} * (P_{(r_p)}\widehat{F}_n))/P_{(\tilde{r}_p)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d).$$

Ako uzmemo

$$G_n := \kappa_K \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\widehat{\omega} * (P_{(\tilde{r}_p)} \widehat{F}_n)}{P_{(\tilde{r}_p)}} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

dobijamo da

$$\begin{aligned} \omega f_n &= P_{(\tilde{r}_p)}(D)G_n \text{ na } K (n \in \mathbb{Z}_+), \quad \text{supp } G_n \subset K_1 (n \in \mathbb{N}_0) \\ \text{i } G_n &\xrightarrow{\mathcal{C}(K)} G_0 \text{ kada } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Znači, (ωf_n) je s -fundamentalni niz na Ω .

Štaviše, ako je $f = [f_n]$ i $\omega \in \mathcal{D}^{\{t\}}(\Omega)$, tada

$$\omega * f := [\omega * f_n],$$

jer

$$\omega * P(D)F_n = P(D)(\omega * F_n)$$

na svakom kompaktnom skupu $K \subset \mathbb{R}^d$ za $n \in \mathbb{Z}_+$.

Opštije, tačno je sledeće: ako su (f_n) i (g_n) s -fundamentalni nizovi na \mathbb{R}^d i $\text{supp}(g_n) \subset K_0 \subset \subset \mathbb{R}^d$, tada je $(f_n * g_n)$ s -fundamentalni niz na \mathbb{R}^d .

3.3 Nizovi s -ultradistribucija

Definicija 3.3.1. *Neka je $f^m \in \mathcal{U}^*(\Omega)$ za $m \in \mathbb{N}_0$, tj.*

$$f^m = [(f_n^m)_n],$$

gde sa $(f_n^m)_n$ označavamo s -fundamentalnog niza koji predstavlja f^m za $m \in \mathbb{N}_0$. Kažemo da niz (f^m) konvergira elementu f^0 iz $\mathcal{U}^*(\Omega)$ i pišemo

$$f^m \xrightarrow{s} f^0 \text{ kada } m \rightarrow \infty \text{ (u } \mathcal{U}^*(\Omega)) \quad \text{ili} \quad s\text{-}\lim_{m \rightarrow \infty} f^m = f^0 \text{ (u } \mathcal{U}^*(\Omega))$$

ako za svaki $K_1 \subset \subset \Omega$ i $K \subset \subset K_1^\circ$ postoje $P \in \mathcal{P}^*$, glatke funkcije F_n^m na Ω ($m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{Z}_+$) i neprekidne funkcije F^m na Ω ($m \in \mathbb{N}_0$), sa nosačima sadržanim u K_1 , tako da

$$\begin{aligned} f_n^m &= P(D)F_n^m \text{ na } K \text{ (} n \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N}_0\text{);} \\ F_n^m &\xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_n^0 \text{ kada } m \rightarrow \infty \text{ ravnomerno po } n \in \mathbb{Z}_+; \\ F_n^m &\xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F^m \text{ kada } n \rightarrow \infty \text{ (} m \in \mathbb{N}_0\text{)} \quad \text{i} \quad F^m \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F^0 \text{ kada } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Znamo da navedene tvrdnje povlače

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^m = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} F_n^m \text{ in } \mathcal{C}(K).$$

Teorema 3.3.2. *Ako limes s - $\lim_{m \rightarrow \infty} f^m$ postoji, onda je on jedinstven.*

3.3.1 Dejstvo na test funkcije iz $\mathcal{D}^*(\Omega)$

Neka je $f = [f_n] \in \mathcal{U}^*(\Omega)$, gde (f_n) je s -fundamentalna niz koji zadovoljava Definiciju 3.2.1, tj. za svako $K, K_1 \subset\subset \Omega$ tako da $K \subset\subset K_1^\circ$, i za neko $P(D) \in \mathcal{P}^*$ postoje glatke funkcije F_n ($n \in \mathbb{Z}_+$) i neprekidna funkcija F_0 na Ω tako da

$$\begin{aligned} f_n &= P(D)F_n \text{ na } K \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \quad \text{supp } F_n \subset K_1 \quad (n \in \mathbb{N}_0) \\ &\text{i } F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_0 \text{ kada } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Dejstvo f na test funkciju φ iz $\mathcal{D}^*(\Omega)$ je preslikavanje

$$f : \mathcal{D}^*(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathcal{U}^*(\Omega)} \quad (3.3.2)$$

gde

$$(f, \varphi)_{\mathcal{U}^*(\Omega)} := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K f_n(x) \varphi(x) dx = \int_K F_0(x) [P(-D)\varphi](x) dx. \quad (3.3.3)$$

Ako, pored (3.3.1), imamo

$$\begin{aligned} f_n &= \tilde{P}(D)\tilde{F}_n \text{ on } K \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \quad \text{supp } \tilde{F}_n \subset K_1 \quad (n \in \mathbb{N}_0) \\ &\text{i } \tilde{F}_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} \tilde{F}_0 \text{ kada } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

za neki $\tilde{P}(D) \in \mathcal{P}^*$, glatke funkcije \tilde{F}_n ($n \in \mathbb{Z}_+$) i neprekidnu funkciju \tilde{F}_0 na Ω , tada koristeći parcijalnu integraciju imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K f_n(x) \varphi(x) dx = \int_K \tilde{F}_0(x) [\tilde{P}(-D)\varphi](x) dx,$$

tj. definicija u (3.3.3) je konzistentna.

Jasno, (3.3.2) je linearno preslikavanje. Za dokaz da je (3.3.2) sekvencijalno neprekidno potreban nam je sledeći rezultat iz [38]: ako niz $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ kada $n \rightarrow \infty$ u $\mathcal{D}^*(\Omega)$, tada $P(D)\varphi_n \rightarrow P(D)\varphi_0$ u $\mathcal{D}^*(\Omega)$ za svakog ultradiferencijalnog operatora $P(D) \in \mathcal{P}^*$.

Teorema 3.3.3. (a) Neka je $f \in \mathcal{U}^*(\Omega)$ i $\varphi_m \rightarrow \varphi_0$ kada $m \rightarrow \infty$ u $\mathcal{D}^*(\Omega)$. Tada

$$(f, \varphi_m)_{\mathcal{U}^*(\Omega)} \rightarrow (f, \varphi_0)_{\mathcal{U}^*(\Omega)} \quad \text{kada } m \rightarrow \infty.$$

(b) Neka $f^m \rightarrow f^0$ kada $m \rightarrow \infty$ u $\mathcal{U}^*(\Omega)$. Tada

$$(f^m, \varphi)_{\mathcal{U}^*(\Omega)} \rightarrow (f^0, \varphi)_{\mathcal{U}^*(\Omega)} \quad \text{kada } m \rightarrow \infty$$

za svaku $\varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$.

3.4 Temperirane sekvencijalne ultradistribucije

Simbol \mathcal{P}^{2*} koji označava ili $\mathcal{P}^{(2t)}$ ili $\mathcal{P}^{\{2t\}}$.

3.4.1 t -Temperirane sekvencijalne ultradistribucije

Neka je $P \in \mathcal{P}^{2*}$. Koristićemo ultradiferencijalne operatore oblika

$$P(H) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_{\alpha} H^{\alpha}$$

klase Berlinga ($p!^{2t}$) (resp. klase Rumijea $\{p!^{2t}\}$) tako da

$$(\exists h > 0) (\exists C > 0) \quad (\text{resp. } (\forall h > 0) (\exists C > 0)) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d) \quad |a_{\alpha}| \leq \frac{Ch^{|\alpha|}}{(\alpha!)^{2t}};$$

u slučaju Rumijea dati uslov je ekvivalentan sa

$$(\exists (r_p) \in \mathcal{R}) (\exists C > 0) (\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d) \quad |a_{\alpha}| \leq \frac{C}{(\alpha!)^{2t} R_{|\alpha|}},$$

gde je $R_{|\alpha|}$ definisano u (3.1.1).

Definicija 3.4.1. Niz funkcija (f_n) iz $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ naziva se t -fundamentalni niz (tipa $*$) u \mathbb{R}^d ako postoji ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^{2*}$, funkcije $F_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ oblika

$$F_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,n} h_{\alpha}$$

sa koeficijentima $(c_{\alpha,n})_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \in l^2$ za $n \in \mathbb{Z}_+$ i funkcija $F_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ tako da

$$f_n = P(H)F_n \text{ na } \mathbb{R}^d \quad i \quad F_n \xrightarrow{2} F_0 \text{ kada } n \rightarrow \infty, \quad (3.4.1)$$

gde za $P(H)F_n$ iz (3.4.1) podrazumevamo da je u $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ako važi:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(H)F_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha|=0}^k a_\alpha H^\alpha F_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,n} P(2\alpha+1)h_\alpha = f_n, \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Kasnije ćemo iskoristiti sledeću tvrdnju koju nam omogućava da \mathcal{L}^2 -konvergentnog niza u reprezentaciju t -fundamentalnih nizova zamenimo nizom koji konvergira i u $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i ravnomerno na \mathbb{R}^d .

Lema 3.4.2. Neka $F_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ za $n \in \mathbb{N}_0$ i $F_n \xrightarrow{2} F_0$ kada $n \rightarrow \infty$. Označavamo

$$\tilde{F}_n := \mathcal{F}^{-1}(G_n),$$

gde

$$G_n(\xi) := (1 + |\xi|)^{-d/2} \hat{F}_n(\xi) \text{ za } \xi \in \mathbb{R}^d \text{ i } n \in \mathbb{N}_0.$$

Tada je (\tilde{F}_n) ograničeni niz glatkih funkcija tako da $\tilde{F}_n \xrightarrow{2} \tilde{F}_0$ kada $n \rightarrow \infty$ i $\tilde{F}_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} \tilde{F}_0$ kada $n \rightarrow \infty$.

Definicija 3.4.3. Neka su (f_n) i (g_n) dva t -fundamentalna niza na otvorenom skupu Ω . Pišemo $(f_n) \sim_1 (g_n)$ ako postoje nizovi $(F_n), (G_n)$ tako da funkcije $F_n, G_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), koji su konvergentni u $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i operator $P \in \mathcal{P}^{2*}$ tako da

$$f_n = P(H)F_n, \quad g_n = P(H)G_n \text{ na } \mathbb{R}^d \quad i \quad F_n - G_n \xrightarrow{2} 0 \text{ kada } n \rightarrow \infty.$$

Sledeće dve tvrdnje ćemo koristiti u produžetku.

Propozicija 3.4.4. Ako postoji $P \in \mathcal{P}^{2*}$, funkcije $F_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ za $n \in \mathbb{Z}_+$ i $F_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ tako da

$$F_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,n} h_\alpha \text{ sa } (c_{\alpha,n})_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \in l^2 \text{ za } n \in \mathbb{N}_0$$

i još $F_n \xrightarrow{2} F_0$ i $P(H)F_n \xrightarrow{2} 0$ kada $n \rightarrow \infty$, tada $F_0 = 0$ na \mathbb{R}^d .

Posebno, ako je $F \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ i $P(H)F = 0$ u $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, tada $F = 0$ na \mathbb{R}^d .

Propozicija 3.4.5. *Pretpostavimo da*

$$f_n = P_{(r_p)}(H)F_n = P_{(\tilde{r}_p)}(H)\tilde{F}_n \quad \text{na } \mathbb{R}^d \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

i

$$F_n \xrightarrow{2} F_0, \quad \tilde{F}_n \xrightarrow{2} \tilde{F}_0 \quad \text{kada } n \rightarrow \infty$$

za neke ultradiferencijalne operatore $P_{(r_p)}, P_{(\tilde{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{2t\}}$, funkcije $F_n, \tilde{F}_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ i $F_0, \tilde{F}_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ koji imaju oblik:

$$F_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,n} h_\alpha, \quad \tilde{F}_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \tilde{c}_{\alpha,n} h_\alpha \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

gde $(c_{\alpha,n})_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d}, (\tilde{c}_{\alpha,n})_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \in l^2$ za $n \in \mathbb{N}_0$. Tada postoje ultradiferencijalni operator $P_{(\tilde{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{2t\}}$, gde je $(\tilde{r}_p) \in \mathcal{R}$ sa $r_p/\tilde{r}_p \downarrow 0$ i $\tilde{r}_p/\tilde{r}_p \downarrow 0$ kada $p \rightarrow \infty$, tako da

$$\left(\frac{P_{(r_p)}(2\alpha+1)}{P_{(\tilde{r}_p)}(2\alpha+1)} \right)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \in l^\infty, \quad \left(\frac{P_{(\tilde{r}_p)}(2\alpha+1)}{P_{(\tilde{r}_p)}(2\alpha+1)} \right)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \in l^\infty, \quad (3.4.2)$$

i funkcije $G_n, \tilde{G}_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ i $G_0, \tilde{G}_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ oblika:

$$G_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{P_{(r_p)}(2\alpha+1)}{P_{(\tilde{r}_p)}(2\alpha+1)} c_{\alpha,n} h_\alpha, \quad \tilde{G}_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{P_{(\tilde{r}_p)}(2\alpha+1)}{P_{(\tilde{r}_p)}(2\alpha+1)} \tilde{c}_{\alpha,n} h_\alpha$$

za $n \in \mathbb{N}_0$, koje zadovoljavaju sledećih uslova:

$$f_n = P_{(\tilde{r}_p)}(H)G_n = P_{(\tilde{r}_p)}(H)\tilde{G}_n \quad \text{na } \mathbb{R}^d \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

i

$$G_n \xrightarrow{2} G_0, \quad \tilde{G}_n \xrightarrow{2} \tilde{G}_0 \quad \text{kada } n \rightarrow \infty. \quad (3.4.3)$$

Štaviše, $G_n = \tilde{G}_n$ nad \mathbb{R}^d za $n \in \mathbb{N}_0$.

Isto važi i u Berlingovom slučaju sa odgovarajućom notacijom.

Jasno je da je relacija \sim_1 refleksivna i simetrična. Dokazaćemo da je \sim_1 tranzitivna.

Propozicija 3.4.6. *Relacija \sim_1 je tranzitivna.*

Definicija 3.4.7. Neka je (f_n) t -fundamentalan niz (tipa $*$) u otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Klasa ekvivalencije $[f_n]$ svih t -fundamentalnih nizova (tipa $*$) koji su ekvivalentni sa (f_n) u odnosu na relaciju \sim_1 naziva se t -temperirana sekvencijalna ultradistribucija (tipa $*$) ili kratko t -ultradistribucija (tipa $*$) i označava se sa

$$f := [(f_n)] \text{ ili } f := [f_n].$$

Skup svih t -ultradistribucija (tipa $*$) na otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ označava se sa $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}^*(\mathbb{R}^d)$.

Primedba 3.4.8. Kao i kod prostora $\mathcal{U}^*(\Omega)$ (vidi 3.2.2) mogu se posmatrati odgovarajuće operacije u \mathcal{T}^* . Tu nećemo ulaziti u detalje. Samo ćemo primetiti da operacije sabiranja i množenje sa skalarima su dobro definisane na ovom skupu, tj. \mathcal{T}^* je vektorski linearan prostor.

Primer 3.4.9. Neka je $F_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i neka (δ_n) je delta-niz u $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^d)$. Definišemo

$$F_n := F_0 * \delta_n \text{ za } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Tada (F_n) je niz glatkih funkcija iz $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ koji je t -fundamentalan niz nad \mathbb{R}^d i u Berlingovom i u Rumijeovom slučaju.

Primer 3.4.10. Neka je $f = [f_n] \in \mathcal{T}^*$ oblika

$$f_n = P(H)F_n, \text{ gde } P \in \mathcal{P}^{2*} \text{ i } F_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ za } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Štaviše, pretpostavljamo da $F_n \xrightarrow{2} F_0$ kada $n \rightarrow \infty$ za neku funkciju $F_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Definišemo

$$\tilde{f}_n := P(H)(F_n * \delta_n) \text{ za } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Tada (\tilde{f}_n) je t -fundamentalan niz u \mathbb{R}^d i $(f_n) \sim_1 (\tilde{f}_n)$.

Definicija 3.4.11. Neka je $f^m \in \mathcal{T}^*$ za $m \in \mathbb{N}_0$, tj. $f^m = [(f_n^m)_n]$, gde $(f_n^m)_n$ označava t -fundamentalnog niza koji predstavlja f^m za $m \in \mathbb{N}_0$. Kažemo da niz (f^m) konvergira ka f^0 u \mathcal{T}^* i pišemo

$$f^m \xrightarrow{t} f^0 \text{ kada } m \rightarrow \infty \quad \text{ili} \quad t\text{-}\lim_{m \rightarrow \infty} f^m = f^0$$

ako postoje $P \in \mathcal{D}^{2*}$, glatke funkcije $F_n^m \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ($m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{Z}_+$) i funkcije $F^m \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, ($m \in \mathbb{N}_0$), tako da

$$\begin{aligned} f_n^m &= P(H)F_n^m \quad \text{nad } \mathbb{R}^d \quad (n \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N}_0); \\ F_n^m &\xrightarrow{2} F_n^0 \quad \text{kada } m \rightarrow \infty, \text{ uniformno po } n \in \mathbb{Z}_+; \\ F_n^m &\xrightarrow{2} F^m \quad \text{kada } n \rightarrow \infty \quad (m \in \mathbb{N}_0) \quad \text{i} \quad F^m \xrightarrow{2} F^0 \quad \text{kada } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Uslovi u definiciji povlače da

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^m = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} F_n^m \quad \text{u } \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d).$$

Teorema 3.4.12. *Ako postoji limes t - $\lim_{m \rightarrow \infty} f^m$, tada je on jedinstven.*

U nastavku trebaće nam sledeći rezultat:

Lema 3.4.13. *Neka je φ funkcija iz $\mathcal{D}^*(\Omega)$, tako da*

$$\varphi(x) = 1 \quad \text{za } x \in B(0, 1/2)$$

i označimo

$$\varphi_m(x) := \varphi(x/m) \quad \text{za } x \in \mathbb{R}^d \text{ i } m \in \mathbb{Z}_+.$$

Ako je $f = [f_n]$ t -ultradistribucija, tada $f\varphi_m \xrightarrow{t} f$ kada $m \rightarrow \infty$.

Posledica 3.4.14. *Za svaku t -ultradistribuciju f^0 postoji niz (f^m) sastavljen od t -ultradistribucijama tako da $f^m \xrightarrow{t} f^0$ kada $m \rightarrow \infty$.*

Primedba 3.4.15. Kao i u slučaju s -fundamentalnih nizova koga smo razgledali u 3.2.15, svaki t -fundamentalni niz (f_n) za koga važi (3.4.1) može se identifikovati sa formalnom reprezentacijom

$$f = P(H)F_0,$$

jer svaka reprezentacija, prema (3.4.10) iz dela 3.4.3, definiše istog elementa iz \mathcal{S}^* .

3.4.2 \tilde{t} -Temperirane sekvencijalne ultradistribucije

U ovom delu razvijamo sekvencijalnu teoriju temperiranih ultradistribucija koja je tesno povezana sa sekvencijalnim pristupom kojeg smo razradili u delovima 3.2 i 3.3.

Definicija 3.4.16. *Niz glatkih funkcija (f_n) naziva se \tilde{t} -fundamentalan niz (tipa $*$) u \mathbb{R}^d , ako postoji ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$, $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$, funkcija $F_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i niz (F_n) u $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ za $n \in \mathbb{Z}_+$ tako da*

$$f_n = P(D)(P_1 F_n) \text{ nad } \mathbb{R}^d \quad \text{i} \quad F_n \xrightarrow{2} F_0 \text{ kada } n \rightarrow \infty. \quad (3.4.4)$$

Dejstvo operatora $P(D)$ na $P_1 F_n$ podrazumeva se kao u delu 3.2; on je limes od

$$\sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha D^\alpha (P_1 F_n)(x)$$

kada $m \rightarrow \infty$ za $x \in \mathbb{R}^d$. Sledeća tvrdnja će nam omogućiti da prebacimo fundamentalan niz iz jednog oblika u drugi.

Za dato $h > 0$ subordiniranu funkciju c označavamo radi jednostavnosti

$$E_{\pm h}(u) := e^{\pm hu^{1/t}} \quad \text{i} \quad E^{\pm c}(u) := e^{\pm c(u)^{1/t}} \quad \text{za } u \geq 0.$$

Lema 3.4.17. *Neka su P_1 , F_n i F_0 kao u (3.4.4). Za P_1 pretpostavljamo da važe ograničenja (3.1.4) u Berlingovom slučaju (resp. (3.1.6) u Rumijeovom slučaju) u obliku:*

$$|P_1(x)| \leq CE_{h_1}(|x|) \quad (\text{resp. } |P_1(x)| \leq CE^{c_1}(|x|)) \quad \text{za } x \in \mathbb{R}^d,$$

gde je $h_1 > 0$ podobna konstanta (resp. c_1 je pogodna subordinirana funkcija). Tada

(a) za dato $h > 0$ (resp. za datu subordiniranu funkciju c) postoji $r > 0$ (resp. $(r_p) \in \mathcal{R}$) tako da

$$|[E_h \mathcal{F}^{-1}(P_1/P_r)](x)| < \infty \quad (\text{resp. } |[E^c \mathcal{F}^{-1}(P_1/P_{(r_p)})](x)| < \infty)$$

za svako $x \in \mathbb{R}^d$.

(b) postoji $r > 0$ (resp. $(r_p) \in \mathcal{R}$) tako da

$$E_{-2h_1} [(P_1 F_n - P_1 F_0) * \mathcal{F}^{-1}(P_1/P_r)] \xrightarrow{2} 0$$

$$(\text{resp. } E^{-c} [(P_1 F_n - P_1 F_0) * \mathcal{F}^{-1}(P_1/P_{(r_p)})] \xrightarrow{2} 0)$$

kada $n \rightarrow \infty$, gde je c subordinirana funkcija za koju $2c_1^{1/t} \leq c^{1/t}$.

Definicija 3.4.18. *Neka su (f_n) i (g_n) \tilde{t} -fundamentalni nizovi. Pišemo*

$$(f_n) \sim_2 (g_n)$$

ako postoje nizovi funkcija $(F_n), (G_n), F_n, G_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), koji konvergiraju u $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, operator $P \in \mathcal{P}^$, $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$ tako da*

$$f_n = P(D)(P_1 F_n), \quad g_n = P(D)(P_1 G_n) \quad \text{nad } \mathbb{R}^d$$

i $F_n - G_n \xrightarrow{2} 0$ kada $n \rightarrow \infty$.

Sledeća propozicija je važna kao i u prethodnim slučajevima. Ona se može dokazati korišćenjem Furijeove transformacije slično kao i kod Propozicije 3.2.7.

Propozicija 3.4.19. *Ako su tačne pretpostavke Definicije 3.4.18 za (f_n) i ako*

$$P(D)(P_1 F_n) \xrightarrow{2} 0 \quad \text{kada } n \rightarrow \infty,$$

tada $F_n \xrightarrow{2} 0$ kada $n \rightarrow \infty$. Naročito, ako $P(D)(P_1 F) = 0$, tada $F = 0$.

Glavna tvrdnja u ovom delu odnosi se na smenu predstavnika neke \tilde{t} -ultradistribucije (vidi Definiciju 3.4.22 dole). Posmatramo slučaj Rumijea.

Pretpostavimo da $P_{(r_p)}, P_{(\tilde{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, $P_{(r_p)}^1, P_{(\tilde{r}_p)}^2 \in \mathcal{P}_u^{\{t\}}$ i $(F_n), (\tilde{F}_n)$ su nizovi funkcija u $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, koji su i oba konvergentni u $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, i zadovoljavaju Definiciju 3.4.16, tj.

$$f_n = P_{(r_p)}(D)(P_{(r_p)}^1 F_n) = P_{(\tilde{r}_p)}(D)(P_{(\tilde{r}_p)}^2 \tilde{F}_n) \quad \text{nad } \mathbb{R}^d \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \quad (3.4.5)$$

tako da

$$\max \left\{ |P_{(r_p)}(x)|, |P_{(\tilde{r}_p)}(x)|, |P_{(r_p)}^1(x)|, |P_{(\tilde{r}_p)}^2(x)| \right\} \leq C e^{c(|x|)^{1/t}} \quad (3.4.6)$$

za podesno izabranu subordiniranu funkciju c i $x \in \mathbb{R}^d$. Možemo pretpostaviti, bez gubljenja opštosti, da $P_{(r_p)}^1 = P_{(\tilde{r}_p)}^2 = P_{(\tilde{r}_p)}$. Možemo iskoristiti u (3.4.5) umesto $P_{(r_p)}^1(x)F_n(x)$ i $P_{(\tilde{r}_p)}^2(x)\tilde{F}_n(x)$, respektivno, sledeće izraze:

$$P_{(\tilde{r}_p)}(x) \frac{P_{(r_p)}^1(x)F_n(x)}{P_{(\tilde{r}_p)}(x)} \quad \text{i} \quad P_{(\tilde{r}_p)}(x) \frac{P_{(\tilde{r}_p)}^2(x)\tilde{F}_n(x)}{P_{(\tilde{r}_p)}(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

gde niza $(\bar{r}_p) \in \mathcal{R}$ biramo tako da on raste dovoljno sporo kako bi sigurno imali \mathcal{L}^2 -konvergenciju nizova

$$\left(\frac{P_{(\bar{r}_p)}^1(x) F_n(x)}{P_{(\bar{r}_p)}(x)} \right)_n \quad \text{i} \quad \left(\frac{P_{(\bar{r}_p)}^2(x) \tilde{F}_n(x)}{P_{(\bar{r}_p)}(x)} \right)_n, \text{ respektivno.}$$

Ove primedbe nam pomažu da dokažemo sledeću Propoziciju:

Propozicija 3.4.20. *Neka $P_{(r_p)}, P_{(\bar{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, $P_{(\bar{r}_p)} \in \mathcal{P}_u^{\{t\}}$ i funkcije $F_n, \tilde{F}_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ za $n \in \mathbb{Z}_+$, i $F_0, \tilde{F}_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ zadovoljavaju Definiciju 3.4.16, tj.*

$$f_n = P_{(r_p)}(D)(P_{(\bar{r}_p)} F_n) = P_{(\bar{r}_p)}(D)(P_{(\bar{r}_p)} \tilde{F}_n) \quad \text{on } \mathbb{R}^d \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

i $F_n \xrightarrow{2} F_0$, $\tilde{F}_n \xrightarrow{2} \tilde{F}_0$ kada $n \rightarrow \infty$, tako da važi (3.4.6). Tada postoje $P_{(r_p^0)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ gde $(r_p^0) \in \mathcal{R}$ i funkcije $\bar{F}_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ za $n \in \mathbb{Z}_+$ i $\bar{F}_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ tako da

$$f_n = P_{(r_p^0)}(D)(P_{(\bar{r}_p)} \bar{F}_n) \quad \text{nad } \mathbb{R}^d \quad \text{i} \quad \bar{F}_n \xrightarrow{2} \bar{F}_0 \quad \text{kada } n \rightarrow \infty.$$

Kako bi dokazali da je \sim_2 iz Definicije 3.4.18 relacija ekvivalencije, dovoljno je pokazati da je tranzitivna.

Propozicija 3.4.21. *Relacija \sim_2 je tranzitivna.*

Definicija 3.4.22. *Neka je (f_n) \tilde{t} -fundamentalni niz (tipa $*$) u otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Klasa ekvivalencije $[f_n]$ svih \tilde{t} -fundamentalnih nizova (tipa $*$) ekvivalentnim sa (f_n) u odnosu na relaciju \sim_2 naziva se \tilde{t} -temperirana sekvencijalna ultradistribucija (tipa $*$) ili kratko \tilde{t} -ultradistribucija (tipa $*$) i označava se sa $f = [f_n]$. Skup svih \tilde{t} -ultradistribucija (tipa $*$) u datom otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ označava se sa $\tilde{\mathcal{T}}^* = \tilde{\mathcal{T}}^*(\mathbb{R}^d)$.*

Definišemo konvergenciju u $\tilde{\mathcal{T}}^*$.

Definicija 3.4.23. *Neka $f^m \in \tilde{\mathcal{T}}^*$ za $m \in \mathbb{N}_0$, tj. $f^m = [(f_n^m)_n]$, gde $(f_n^m)_n$ označava \tilde{t} -fundamentalni niz koji predstavlja f^m za $m \in \mathbb{N}_0$. Kažemo da niz (f^m) konvergira prema f^0 u $\tilde{\mathcal{T}}^*$ i pišemo*

$$f^m \xrightarrow{\tilde{t}} f^0 \quad \text{kada } m \rightarrow \infty \quad \text{ili} \quad \tilde{t}\text{-}\lim_{m \rightarrow \infty} f^m = f^0,$$

ako postoje $P \in \mathcal{P}^*$ i $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$, glatke funkcije $F_n^m \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ($m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{Z}_+$) i funkcije $F^m \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) tako da

$$\begin{aligned} f_n^m &= P(D)(P_1 F_n^m) \text{ nad } \mathbb{R}^d \text{ (} n \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N}_0\text{);} \\ F_n^m &\xrightarrow{2} F_n^0 \text{ kada } m \rightarrow \infty, \text{ uniformno po } n \in \mathbb{Z}_+; \\ F_n^m &\xrightarrow{2} F^m \text{ kada } n \rightarrow \infty \text{ (} m \in \mathbb{N}_0\text{) i } F^m \xrightarrow{2} F^0 \text{ kada } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Pretpostavke u definiciji povlače da

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^m = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} F_n^m \text{ u } \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d).$$

Pogodnim modifikacijama u dokazima Propozicije 3.4.19 i Teoreme 3.4.12, dokazuje se sledeća teorema:

Teorema 3.4.24. *Ako granica \tilde{t} -lim f^n postoji, tada je ona jedinstvena.*

Iz [65] znamo da svakoj $f \in \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ odgovara formalna reprezentacija $f = P(D)(P_1 F_0)$, gde je $P \in \mathcal{P}^*$, $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$ i $F_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ je funkcija oblika

$$F_0 = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,0} h_{\alpha} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \text{ sa } (c_{\alpha,0})_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \in l^2.$$

Zapravo, koristićemo sledeću dobro poznatu tvrdnju koju ovde formulišemo kao lemu:

Lema 3.4.25. *$f \in \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ ako i samo ako*

$$f = P(D)(P_1 F_0) \tag{3.4.7}$$

za nekih $P \in \mathcal{P}^*$, $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$ i $F_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ oblika

$$F_0 = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,0} h_{\alpha} \text{ gde } (c_{\alpha,0}) \in l^2, \tag{3.4.8}$$

tj.

$$(f, \varphi)_{\mathcal{S}'^*} = \int_{\mathbb{R}^d} F_0(x) P_1(x) P(-D) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d).$$

Dokaz Leme 3.4.25 je posledica vrlo poznate teoreme za reprezentaciju koja se bazira na Han-Banahovoj teoremi kao i na tvrdnje (a) i (b) iz Leme 3.1.4.

Možemo formulisati gornju tvrdnju u obliku propozicije koju ćemo koristiti u odeljku 3.5.

Propozicija 3.4.26. *Neka je $f \in \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ oblika (3.4.7)-(3.4.8). Tada je niz (f_n) , gde*

$$f_n := P(D)(P_1 F_n) \text{ i } F_n := \sum_{|\alpha|=0}^n c_{\alpha,0} h_{\alpha} \text{ za } n \in \mathbb{Z}_+,$$

\tilde{t} -fundamentalni i određuje

$$\tilde{f} = [f_n] \in \tilde{\mathcal{T}}^*.$$

Obratno, ako $\tilde{f} = [f_n] \in \tilde{\mathcal{T}}^$, gde je (f_n) \tilde{t} -fundamentalan niz oblika (3.4.4) dat u Definiciju 3.4.16, tada odgovarajuća $f = P(D)(P_1 F_0)$, gde F_0 je limes niza (F_n) u \mathcal{L}^2 , je element iz $\mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$.*

Gornja korespondencija između $\mathcal{S}'^(\mathbb{R}^d)$ i $\tilde{\mathcal{T}}^*$ definiše linearnu bijekciju između ovih prostora.*

3.4.3 Temperirane ultradistribucije kao funkcionali

Neka je $\varphi \in \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ i neka je $f = [f_n]$ element iz \mathcal{T}^* , gde funkcije f_n imaju oblik

$$f_n = P(H)F_n$$

nad \mathbb{R}^d sa $P \in \mathcal{P}^{2*}$ i $F_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ za $n \in \mathbb{Z}_+$ tako da $F_n \xrightarrow{2} F_0$ kada $n \rightarrow \infty$ za neku $F_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Definišemo dejstvo $f = [f_n]$ na $\mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ kao preslikavanje:

$$\mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d) \ni \varphi \mapsto f(\varphi) := (f, \varphi)_{\mathcal{T}^*} \in \mathbb{R}, \quad (3.4.9)$$

gde

$$(f, \varphi)_{\mathcal{T}^*} := \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} (F_0 P(H)\varphi)(x) dx = (F_0, P(H)\varphi)_{\mathcal{L}^2}. \quad (3.4.10)$$

Kao i kod s -ultradistribucija, ako postoji druga reprezentacija f_n oblika

$$f_n = \tilde{P}(H)\tilde{F}_n \text{ na } \mathbb{R}^d \text{ za } n \in \mathbb{Z}_+, \text{ gde } \tilde{P} \in \mathcal{P}^{2*} \text{ i } \tilde{F}_n \xrightarrow{2} \tilde{F}_0 \text{ kada } n \rightarrow \infty,$$

tada imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} (\tilde{F}_0 \tilde{P}(H)\varphi)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} (F_0 P(H)\varphi)(x) dx,$$

tj. definicija $(f, \varphi)_{\mathcal{T}^*}$ u (3.4.10) je konzistentna. Lema 3.1.4 povlači da je preslikavanje (3.4.9) linearno.

Dokazaćemo sada isto za $f = [f_n] \in \tilde{\mathcal{T}}^*$, gde funkcije f_n imaju oblik

$$f_n = P(D)(P_1 F_n) \text{ za } P \in \mathcal{P}^*, P_1 \in \mathcal{P}_u^*, F_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \text{ (} n \in \mathbb{Z}_+ \text{)}$$

$$\text{i } F_n \xrightarrow{2} F \text{ kada } n \rightarrow \infty \text{ za neko } F \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d).$$

Dejstvo $f = [f_n] \in \widetilde{\mathcal{T}}^*$ na $\varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ definiše se preslikavanjem:

$$\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d) \ni \varphi \mapsto (f, \varphi)_{\widetilde{\mathcal{T}}^*} \in \mathbb{R}, \quad (3.4.11)$$

gde

$$(f, \varphi)_{\widetilde{\mathcal{T}}^*} := \lim_{n \rightarrow \infty} (F_n, P_1 P(-D)\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} (F_0 P_1 P(-D)\varphi)(x) dx. \quad (3.4.12)$$

Treba primetiti da limes u (3.4.11) postoji, jer $P_1 P(-D)\varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$, kao posledica dela (b) Leme 3.1.4.

Ako f_n je prikazana u drugom obliku

$$f_n = \widetilde{P}(D)(\widetilde{P}_1 \widetilde{F}_n) \text{ nad } \mathbb{R}^d \text{ za } n \in \mathbb{Z}_+, \text{ gde } \widetilde{P}(D) \in \mathcal{P}^*, \widetilde{P}_1 \in \mathcal{P}_u^*,$$

$$\widetilde{F}_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \text{ za } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ i } \widetilde{F}_n \xrightarrow{2} \widetilde{F}_0 \text{ kada } n \rightarrow \infty \text{ za neko } \widetilde{F}_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d),$$

tada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\widetilde{F}_n, \widetilde{P}_1 \widetilde{P}(-D)\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F_n, P_1 P(-D)\varphi), \quad \text{za } \varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d),$$

tj. definicija u (3.4.12) je konzistentna. Linearost preslikavanja (3.4.11) sledi od Leme 3.1.4.

Neprekidnost preslikavanja (3.4.9) i (3.4.11) sledi zbog sledeće tvrdnje.

Propozicija 3.4.27. *Neka $f \in \mathcal{T}^*$ (resp. $f \in \widetilde{\mathcal{T}}^*$) i neka $\varphi_n \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ za $n \in \mathbb{N}_0$ su funkcije za kojih $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}^*} \varphi_0$ kada $n \rightarrow \infty$. Tada*

$$(f, \varphi_n)_{\mathcal{T}^*} \rightarrow (f, \varphi_0)_{\mathcal{T}^*} \quad (\text{resp. } (f, \varphi_n)_{\widetilde{\mathcal{T}}^*} \rightarrow (f, \varphi_0)_{\widetilde{\mathcal{T}}^*}) \quad \text{kada } n \rightarrow \infty.$$

Gornji rezultat može se generalizovati na sledeći način:

Propozicija 3.4.28. *Neka $f^m \in \mathcal{T}^*$ (resp. $f^m \in \widetilde{\mathcal{T}}^*$) i $\varphi_m \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ za $m \in \mathbb{N}_0$. Ako*

$$f^m \xrightarrow{t} f^0 \text{ (resp. } f^m \xrightarrow{\tilde{t}} f^0 \text{)} \text{ i } \varphi_m \xrightarrow{\mathcal{S}^*} \varphi_0 \text{ kada } m \rightarrow \infty,$$

tada

$(f^m, \varphi_m)_{\mathcal{T}^*} \rightarrow (f^0, \varphi_0)_{\mathcal{T}^*}$ (resp. $(f^m, \varphi_m)_{\tilde{\mathcal{T}}^*} \rightarrow (f^0, \varphi_0)_{\tilde{\mathcal{T}}^*}$) kada $m \rightarrow \infty$.

Dokaz. Kao i ranije, navodimo dokaz samo u slučaju \mathcal{T}^* . Prema Definiciji 3.4.11, imamo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f^m, \varphi_m)_{\mathcal{T}^*} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (F_n^m, P(H)\varphi_m)_{\mathcal{L}^2},$$

gde $F_n^m \xrightarrow{2} F^m$ kada $n \rightarrow \infty$ za svako $m \in \mathbb{Z}_+$ i $F^m \xrightarrow{2} F^0$ kada $m \rightarrow \infty$. Prema tome, koristeći Švarcovu nejednakost, dobijamo

$$\begin{aligned} & |(F^m, P(H)\varphi_m)_{\mathcal{L}^2} - (F^0, P(H)\varphi_0)_{\mathcal{L}^2}| \\ & \leq |(F^m, P(H)(\varphi_m - \varphi_0))_{\mathcal{L}^2}| + |(F^m - F^0, P(H)\varphi_0)_{\mathcal{L}^2}| \\ & \leq \|F^m\|_2 \cdot \|P(H)(\varphi_m - \varphi_0)\|_2 + \|F^m - F^0\|_2 \cdot \|P(H)\varphi_0\|_2. \end{aligned}$$

Sada je dovoljno primeniti deo (c) Leme 3.1.4 da bi dokaz bio kompletan. \square

3.5 Relacije između prostorima temperiranih ultradistribucija

U vezi sa prostorima $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ i njegovog duala $\mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$, gde $*$ = (t) u Berlingovom slučaju (resp. $*$ = {t} u Rumijeovom slučaju) razmotrićemo sledećih prostora koji se sastoje od brojnih nizova:

$$\mathbf{s}^* = \{(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} : \forall h > 0 \text{ (resp. } \exists h > 0) \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |a_\alpha|^2 e^{h|\alpha|^{1/(2t)}} < \infty\} \quad (3.5.1)$$

i

$$\mathbf{s}'^* = \{(b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} : \exists k > 0 \text{ (resp. } \forall k > 0) \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |b_\alpha|^2 e^{-k|\alpha|^{1/(2t)}} < \infty\}. \quad (3.5.2)$$

Prema Keteove (Köthe) teorije za ešelon prostora i koešelona prostora (koja je izložena u [37]) prostori \mathbf{s}^* i \mathbf{s}'^* sa njihovim prirodnim strukturama konvergencije čine dualni par.

Takođe, dobro je poznato da preslikavanje

$$\mathbf{s}^* \ni (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \mapsto \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d) \quad (3.5.3)$$

3.5. RELACIJE IZMEĐU PROSTORIMA TEMPERIRANIH ULTRADISTRIBUCIJA

je bijektivni izomorfizam između prostorima \mathbf{s}^* i $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$.

Sa druge strane, svakom elementu $f \in \mathcal{T}^*$ možemo pridružiti jedinstveni niz $(b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \in \mathbf{s}'^*$.

Zapravo, pretpostavimo da $f = [f_n] \in \mathcal{T}^*$ zadovoljava (3.4.1), tj.

$$f_n = P(H)F_n \text{ na } \mathbb{R}^d \text{ (} n \in \mathbb{Z}_+ \text{) i } F_n \xrightarrow{2} F_0 \text{ kada } n \rightarrow \infty, \quad (3.5.4)$$

gde

$$F_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,n} h_\alpha \text{ sa } (c_{\alpha,n})_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \in l^2 \text{ (} n \in \mathbb{N}_0 \text{)}. \quad (3.5.5)$$

Štaviše, neka $\varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ ima oblik

$$\varphi = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} r_\alpha h_\alpha. \quad (3.5.6)$$

Znamo da $(r_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \in \mathbf{s}^*$ (vidi 3.5.3).

Na osnovu (3.4.10), (3.5.4), (3.5.5) i (3.5.6), imamo

$$(f, \varphi)_{\mathcal{T}^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} P(2\alpha + 1) c_{\alpha,n} r_\alpha = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_\alpha r_\alpha, \quad (3.5.7)$$

gde

$$b_\alpha := P(2\alpha + 1) c_{\alpha,0}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^d, \quad (3.5.8)$$

jer $c_{\alpha,n} \rightarrow c_{\alpha,0}$ u l^2 kada $n \rightarrow \infty$ za $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.

Pridružićemo elementu $f = [f_n] \in \mathcal{T}^*$ niz $(b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \in \mathbf{s}'^*$ definisan u (3.5.8) koji ne zavisi od reprezentacije (f_n) distribucije f , prema Propoziciji 3.4.5.

Opisano preslikavanje je bijektivni izomorfizam između prostora \mathcal{T}^* i \mathbf{s}'^* .

Sledeća tvrdnja je dobro poznata (videti [11]-[35]):

Propozicija 3.5.1. *Bijektivni izomorfizam (3.5.3) povlači izomorfizam iz \mathbf{s}'^* u $\mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ dat sa*

$$\mathbf{s}'^* \ni (b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \mapsto \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_\alpha h_\alpha \in \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d).$$

Prema prethodnim pretpostavkama i Propoziciju 3.5.1 svakoj

$$f = [f_n] \in \mathcal{T}^*$$

moguće je jednoznačno pridružiti element iz $\mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ koji ima oblik $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_{\alpha} h_{\alpha}$. Sa druge strane, moguće je pridružiti $f = [f_n] \in \mathcal{T}^*$ linearni funkcional T na $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ koji je dat formulom

$$T(\varphi) := (f, \varphi)_{\mathcal{T}^*}, \quad \varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d), \quad (3.5.9)$$

gde desna strana $(f, \varphi)_{\mathcal{T}^*}$ je definisana u (3.5.7). Jasno, funkcional T je linearan i neprekidan na $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$, tj. $T \in \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$.

Obratno, ako $T \in \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ ima oblik $T = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_{\alpha} h_{\alpha}$, tada niz (f_n) gde su $f_n (n \in \mathbb{Z}_+)$ funkcije date sa (3.5.4), gde

$$F_n = \sum_{|\alpha|=0}^n \frac{b_{\alpha} h_{\alpha}}{P(2\alpha + 1)} \quad (n \in \mathbb{Z}_+) \quad \text{i} \quad F_0 = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{b_{\alpha} h_{\alpha}}{P(2\alpha + 1)},$$

je t -fundamentalan i $f = [f_n]$ je element iz \mathcal{T}^* koji odgovara na T .

Znači možemo formulisati sledeću propoziciju:

Propozicija 3.5.2. *Preslikavanje $B : \mathcal{T}^* \rightarrow \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ dato sa*

$$\mathcal{T}^* \ni f \mapsto T = B(f) \in \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d),$$

gde

$$T(\varphi) := (f, \varphi)_{\mathcal{T}^*} \quad \text{za} \quad \varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d),$$

je linearno sekvencijalno neprekidna bijekcija.

Formulišemo sada završnu teoremu ovog dela.

Teorema 3.5.3. *(i) Za svakog neprekidnog linearnog funkcionala T na $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ postoji jedinstvena t -ultradistribucija $f \in \mathcal{T}^*$ tako da*

$$T(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathcal{T}^*}, \quad \varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d). \quad (3.5.10)$$

Obratno, za svaku t -ultradistribuciju f , formulom (3.5.10) je definisan sekvencijalni neprekidni linearni funkcional na $\mathcal{S}^(\mathbb{R}^d)$.*

Korespondencija između neprekidnih linearnih funkcionala na $\mathcal{S}^(\mathbb{R}^d)$ i t -ultradistribucija iz \mathcal{T}^* , zadata relacijom (3.5.10), je bijekcija.*

3.6. S-ULTRADISTRIBUCIJE KAO NEPREKIDNI LINEARNI FUNKCIONALNI

(ii) Niz t -ultradistribucija (f^m) oblika $f^m = [(f_n^m)_n] \in \mathcal{T}^*$, gde $(f_n^m)_n$ su t -fundamentalni nizovi za $m \in \mathbb{Z}_+$, konvergira ka $f^0 \in \mathcal{T}^*$ ako i samo ako

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n^m, \varphi)_{\mathcal{T}^*} = (f^0, \varphi)_{\mathcal{T}^*}, \quad \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d). \quad (3.5.11)$$

Primedba 3.5.4. Već smo dokazali u Propozicijama 3.4.26 i 3.4.28 da postoji linearna neprekidna bijekcija između prostorima $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ i $\widetilde{\mathcal{T}}^*$, tj. prostori su izomorfni: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \cong \widetilde{\mathcal{T}}^*$.

Primedba 3.5.4 zajedno sa Teoremom 3.5.3 vodi nas do sledećeg zaključka:

Teorema 3.5.5. *Prostori \mathcal{T}^* i $\widetilde{\mathcal{T}}^*$ su izomorfni: $\mathcal{T}^* \cong \widetilde{\mathcal{T}}^*$. Ovo označava da svaku $f \in \mathcal{T}^*$ je moguće predstaviti kao klasu ekvivalencije \widetilde{t} -fundamentalnih nizova u smislu Definicije 3.4.16.*

Obratno, svaku $f \in \widetilde{\mathcal{T}}^$ moguće je predstaviti kao klasu ekvivalencije t -fundamentalnih nizova u smislu Definicije 3.4.1. Strukture konvergencija opisane u Definicijama 3.4.11 i 3.4.23 su ekvivalentne.*

3.6 s-ultradistribucije kao neprekidni linearni funkcionali

Znamo da linearni funkcional f na odgovarajućem prostoru test funkcija je ultradistribucija ili temperirana ultradistribucija ako je on sekvencijalno neprekidan.

Koristeći naš pristup za \widetilde{t} -ultradistribucije dokazaćemo sledeće:

Teorema 3.6.1. *Ako je $f \in \mathcal{T}^* \cong \widetilde{\mathcal{T}}^*$, tada $f \in \mathcal{U}^*(\Omega)$.*

Sledeća tvrdnja sledi od dokaza Teoreme 3.6.1.

Posledica 3.6.2. *Neka je $f \in \mathcal{T}^* \cong \widetilde{\mathcal{T}}^*$, neka je Ω otvoreni skup u \mathbb{R}^d i neka je $\theta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ funkcija za koju $\text{supp } \theta \subset \Omega$. Tada $\theta f = [f_n] \in \mathcal{U}^*(\mathbb{R}^d)$ za nekog s -fundamentalnog niza (f_n) koji ima sledeće osobine: za svaki $K \subset\subset \Omega$ postoji $P \in \mathcal{P}^*$ i niz funkcija F_n tako da*

$$f_n = P(D)F_n \text{ na } K \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{i} \quad F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} F_0 \text{ kada } n \rightarrow \infty.$$

Štaviše

$$\text{supp } F_n \subset \Omega \quad \text{za } n \in \mathbb{N}_0.$$

Sada možemo dokazati glavni rezultat ovog dela.

Teorema 3.6.3. (i) Za svakog neprekidnog linearnog funkcionala T na $\mathcal{D}^*(\Omega)$ postoji jedinstvena s -ultradistribucija $f \in \mathcal{U}^*(\Omega)$ tako da

$$T(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathcal{U}^*(\Omega)}, \quad \varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega), \quad (3.6.1)$$

gde $(f, \varphi)_{\mathcal{U}^*(\Omega)}$ je definisan sa (3.3.3).

Obratno, za svaku s -ultradistribuciju $f \in \mathcal{U}^*(\Omega)$, formulom (3.6.1) je definisan neprekidni linearni funkcional T na $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

Korespondencija između neprekidnih linearnih funkcionala na $\mathcal{D}^*(\Omega)$ i s -ultradistribucije u $\mathcal{U}^*(\Omega)$, opisana u (3.6.1), je bijektivna.

(ii) Niz s -ultradistribucija $f^m \in \mathcal{U}^*(\Omega)$ konvergira prema s -ultradistribuciji $f^0 \in \mathcal{U}^*(\Omega)$ ako i samo ako

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f^m, \varphi)_{\mathcal{U}^*(\Omega)} = (f^0, \varphi)_{\mathcal{U}^*(\Omega)} \quad \text{za svako } \varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega).$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati samo prvi deo tvrdnje (i).

Razgledajmo lokalno finitni pokrivač skupa Ω koji se sastoji od ograničenih otvorenih podskupova Ω_i i $\tilde{\Omega}_i$ skupa Ω tako da $\tilde{\Omega}_i \subset \subset \Omega_i$ i neka funkcije $\varphi_i \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ formiraju particiju jedinice za $i \in \mathbb{Z}_+$, tj. $\varphi_i(x) = 1$ ako $x \in \Omega_i$ i $\text{supp } \varphi_i \subset \tilde{\Omega}_i$ za $i \in \mathbb{Z}_+$. Ako je T neprekidan linearni funkcional na $\mathcal{D}^*(\Omega)$, tada su T_i , definisani sa $T_i(\psi) = T(\varphi_i \psi)$ za $\psi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$, neprekidni linearni funkcionali na $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$.

Na osnovu Leme 3.4.25 i Teoreme 3.5.3, postoji niz t -ultradistribucija (f^i) tako da $f^i \in \mathcal{F}^* \cong \tilde{\mathcal{F}}^*$ i $T_i(\psi) = (f^i, \psi)_{\mathcal{F}^*}$ u smislu (3.4.10) i $T_i(\psi) = (f^i, \psi)_{\tilde{\mathcal{F}}^*}$ u smislu (3.4.11) za $\psi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ i $i \in \mathbb{Z}_+$. Od Posledice 3.6.2, svaki f^i se može prikazati u obliku $f^i = [(f_n^i)_n] \in \mathcal{U}^*(\mathbb{R}^d)$, gde

$$f_n^i = P_i(D)F_n^i \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \quad F_n^i \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} F^i \quad \text{kada } n \rightarrow \infty, \quad \text{supp } F_n^i \subset \tilde{\Omega}_i \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

za neko $P_i \in \mathcal{P}^*$ i funkcije F_n^i ($n \in \mathbb{N}_0$) koji imaju odgovarajuće osobine

Fiksiramo par različitih indeksa i, j tako da $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$. Tada imamo

$$T(\varphi) = (f^i, \varphi)_{\mathcal{U}^*(\Omega)} = (f^j, \varphi)_{\mathcal{U}^*(\Omega)} \quad \text{za } \varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega_i \cap \Omega_j).$$

Posmatramo $f^i - f^j \in \mathcal{U}^*(\mathbb{R}^d)$ kao s -ultradistribuciju ograničenu na $\Omega_i \cap \Omega_j$. Postoji s -fundamentalni niz koji se sastoji od glatkih funkcija $r_n^{i,j}$ tako da

$$f^i - f^j = [(r_n^{i,j})_n] \text{ na } \Omega_i \cap \Omega_j.$$

3.6. *S*-ULTRADISTRIBUCIJE KAO NEPREKIDNI LINEARNI FUNKCIONALNI

Ovo znači da $f^i - f^j = [(r_n^{i,j})_n]$, gde $r_n^{i,j}$ su glatke funkcije sa $\text{supp } r_n^{i,j} \subset \tilde{\Omega}_i \cap \tilde{\Omega}_j$ tako da za svaki $K \subset\subset \Omega_i \cap \Omega_j$ imamo $r_n^{i,j} = P_{i,j}(D)R_n^{i,j}$ nad K za neki $P_{i,j} \in \mathcal{P}^*$ i funkcije $R_n^{i,j}$ za $n \in \mathbb{Z}_+$; i štaviše $R_n^{i,j} \rightarrow 0$ uniformno na K kada $n \rightarrow \infty$. Prema Propoziciji 3.2.6, imamo $f^i = f^j$ na $\Omega_i \cap \Omega_j$. Kako posmatrani pokrivač skupa Ω je lokalno finitan, možemo definisati

$$f := \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} f^i \varphi_i \in \mathcal{U}^*(\Omega) \quad \text{sa} \quad f|_{\Omega_i} = f^i \quad (i \in \mathbb{Z}_+). \quad (3.6.2)$$

Prema tome, $T(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathcal{U}^*(\Omega)}$ za $\varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ (videti (3.3.3)).

Ako pretpostavimo da $T(\varphi) = (f^1, \varphi)_{\mathcal{U}^*(\Omega)}$ i $T(\varphi) = (f^2, \varphi)_{\mathcal{U}^*(\Omega)}$ za $f^1, f^2 \in \mathcal{U}^*(\Omega)$ i za $\varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$. Neka $f^1 - f^2 = [g_n]$, gde (g_n) je *s*-fundamentalni niz oblika $g_n = P(D)(G_n)$ na $K \subset\subset \Omega$ za odgovarajuće P i G_n . Prema (3.3.3), imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P(D)(G_n) = 0 \text{ na } \Omega.$$

Znači, na bazi Propozicije 3.2.6, važi $f^1 - f^2 = [g_n] = 0$, pa *s*-ultradistribucija f definisana u (3.6.2) je jedinstvena. \square

Glava 4

Sekvencijalni pristup teoriji periodičnih ultradistribucija

4.1 Uvod

U ovom delu uvodimo koncept s - p -fundamentalnih nizova glatkih periodičnih funkcija. Oni formiraju klase ekvivalencije koje nazivamo periodične s -ultradistribucije. Prostore koje formiraju ove klase ćemo označavati sa $\mathcal{U}'_{per,*}$, gde $*$ = $(p!^t)$ ili $*$ = $\{p!^t\}$, za neko $t > 1$. Pokazaćemo da postoji izomorfizam između prostora $\mathcal{U}'_{per,*}$ i $\mathcal{A}'_{per,*}$, gde $\mathcal{A}'_{per}^{(t)}$ i $\mathcal{A}'_{per}^{\{t\}}$ su prostori periodičnih ultradistribucija tipa Berlinga i Rumijea.

Periodične ultradistribucije su obopštenje periodičnih distribucija. Prostori periodičnih ultradistribucija $\mathcal{A}'_{per}^{(t)}$ i $\mathcal{A}'_{per}^{\{t\}}$ tipa Berlinga i Rumijea su izučavani zadnjih 30 godina prošlog stoljeća. Neki radovi u kojima se razrađuje ta problematika su [23, 24, 64, 97], dok neke knjige su [3, 36, 103]. Mi ćemo koristiti sekvencijalni pristup teoriji periodičnih ultradistribucija tipa Berlinga i Rumijea koji je uveden u [14].

Definišemo periodične s -ultradistribucije kao klase ekvivalencije s - p -fundamentalnih nizova koji su definisani preko nizova glatkih periodičnih funkcija ali umesto diferencijalne operatore koristimo ultradiferencijalne operatore.

Navešćemo osnovne operacije sa periodičnim s -ultradistribucijama kao što su sabiranje, množenje skalarom, diferenciranje i množenje glatkom funkcijom iz \mathcal{E}^* . Definisaćemo konvergenciju u ovim prostorima, kao i sekvencijalnu neprekidnost periodičnih s -ultradistribucija. Na kraju, u Teoremi 4.6.4 ćemo pokazati da je sekvencijalni pristup periodičnim ultradistribucijama

ekvivalentan standardnom pristupu. Rezultati izloženi u ovom odeljku su publikovani u radu [52].

Radi celovitosti, navodimo neke poznate definicije i oznake koje ćemo koristiti. Kada kažemo glatka periodična funkcija u \mathbb{R}^d , u ovom odeljku zapravo podrazumevamo glatke periodične funkcije na intervalu $I_0 = (0, 2\pi)^d$. Sa I ćemo označavati $[0, 2\pi]^d$. Prostor \mathcal{A}_{per} se sastoji od elemenata iz prostora $\mathcal{L}^2(I_0) \cap \mathcal{C}^\infty(I_0)$ za koje je

$$\gamma_n(\varphi) := \sup_{|k| \leq n} \|D^k \varphi\|_2 < \infty, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (\|\varphi\|_2 = \left(\int_{I_0} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2}).$$

Koristeći [64], prisetimo se definicije sledećih prostora:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{per}^{t,h} &= \{ \varphi \in \mathcal{A}_{per} : \|\varphi\|_{h,2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d} \frac{\|\varphi^{(k)}\|_2}{h^{|k|} k!^t} < \infty \} \\ \mathcal{A}_{per}^{(t)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{A}_{per}^{t,h} \quad \mathcal{A}_{per}^{\{t\}} = \lim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{per}^{t,h}. \end{aligned}$$

Oba prostora, koja nazivamo prostorima ultradiferencijabilnih periodičnih funkcija, ćemo definisati sa \mathcal{A}_{per}^* gde, kao i ranije, $*$ predstavlja (t) ako je u pitanju Berlingov slučaj, odnosno $\{t\}$ u Rumijeovom slučaju. Duale ovih prostora, koje nazivamo prostorima periodičnih ultradistribucija, označavamo sa \mathcal{A}_{per}^* . Za $f \in \mathcal{A}_{per}^*$, njeni Furijeovi koeficijenti su definisani sa

$$c_n = \int_{I_0} f(x) e_{-n}(x) dx = (f, e_n)_{\mathcal{L}^2(I_0)}, \quad n \in \mathbb{Z}^d, \quad \text{gde je } e_n(x) = e^{i\langle n, x \rangle}.$$

U ovoj glavi ćemo sa $\delta_n = n^d \varphi(n \cdot)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, označavati delta niz u \mathcal{A}_{per}^* , gde $\varphi \in \mathcal{A}_{per}^*$ i $\varphi = 1$ na $B(0, \pi)$, $\varphi = 0$ izvan $B(0, 2\pi)$. Sledeće tvrđenje navodimo bez dokaza (dokaz sledi iz definicije, videti [23], [24], [64]).

Lema 4.1.1. (a) $\varphi \in \mathcal{A}_{per}^*$ ako i samo ako za sve $P \in \mathcal{P}^*$ važi

$$\gamma_P(\varphi) = \|P(-D)\varphi\|_2 < \infty.$$

(b) Ako φ_n , $\varphi \in \mathcal{A}_{per}^*$ i ako $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{A}_{per}^*} \varphi$, $n \rightarrow \infty$, tada

$$P(-D)\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{A}_{per}^*} P(-D)\varphi, \quad n \rightarrow \infty.$$

4.2 Fundamentalni nizovi periodičnih s -ultra- distribucija

Definicija periodičnih ultradistribucija je slična onoj kod periodičnih distribucija. Vršimo analogne promene koje odgovaraju na karakteristike ultradistribucija.

Definicija 4.2.1. *Niz $(f_n)_n$ glatkih periodičnih funkcija je s - p -fundamentalan u \mathbb{R}^d ako postoji niz $(F_n)_n$ glatkih periodičnih funkcija u \mathbb{R}^d , periodična funkcija $F \in \mathcal{L}^2(I_0)$ i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ tako da važi:*

$$f_n = P(D)F_n \text{ u } \mathbb{R}^d \text{ i } F_n \xrightarrow{I} F, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.2.1)$$

Delovanje operatora $P(D)$ u (4.2.1) podrazumeva postojanje granične vrednosti

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(D)F_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha F_n(x) = f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (4.2.2)$$

Definicija 4.2.2. *s - p -fundamentalni nizovi (f_n) i (g_n) su u relaciji $\overset{p}{\sim}$, i pišemo*

$$(f_n) \overset{p}{\sim} (g_n),$$

ako postoje nizovi (F_n) i (G_n) glatkih periodičnih funkcija u \mathbb{R}^d i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^$ tako da važi:*

$$f_n = P(D)F_n, \quad g_n = P(D)G_n \text{ u } \mathbb{R}^d, \quad F_n - G_n \xrightarrow{I} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Iz Definicije 4.2.2 direktno sledi:

Propozicija 4.2.3. *s - p -fundamentalni nizovi (f_n) i (g_n) su u relaciji $\overset{p}{\sim}$ ako je niz*

$$f_1, g_1, f_2, g_2, \dots$$

fundamentalan u \mathbb{R}^d .

Sledeća propozicija biće korišćena u nastavku. Mi ćemo formulisati i dokazati samo Rumijeov slučaj. Berlingov slučaj dokazuje se analogno.

4.2. FUNDAMENTALNI NIZOVI PERIODIČNIH
S-ULTRADISTRIBUCIJA

Propozicija 4.2.4. *Ako postoje: ultradiferencijalni operator $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, glatke periodične funkcije $F_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_{k,n} e_k$, $n \in \mathbb{Z}_+$ u \mathbb{R}^d , periodična funkcija $F = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_k e_k \in \mathcal{L}^2(I_0)$, takvi da $F_n \xrightarrow{I} F$ i $P_{r_p}(D)F_n \xrightarrow{I} 0$ kada $n \rightarrow \infty$, tada je $F = 0$ u \mathbb{R}^d . U specijalnom slučaju, ako je F periodična glatka funkcija i ako je $P_{r_p}(D)F = 0$, tada je $F = 0$ u \mathbb{R}^d .*

Dokaz. Iz

$$P_{r_p}(D)F_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} P_{r_p}(k)b_{k,n}e_k \xrightarrow{I} 0, n \rightarrow \infty,$$

dobijamo da $(b_{k,n})_{k \in \mathbb{Z}^d} \xrightarrow{\ell^2} 0$, kada $n \rightarrow \infty$. Kako $(b_{k,n})_{k \in \mathbb{Z}^d} \rightarrow (b_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ u ℓ^2 kada $n \rightarrow \infty$ imamo $F = 0$ nad svakim periodom I_0 . Kako je F periodična funkcija, tada je $F = 0$ na \mathbb{R}^d . \square

Osnovna teorema je sledeća:

Teorema 4.2.5. *Relacija $\overset{p}{\sim}$ je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Ako je niz (f_n) glatkih periodičnih funkcija s - p -fundamentalan u \mathbb{R}^d , tada je niz

$$f_1, f_1, f_2, f_2, \dots$$

fundamentalan i važi

$$(f_n) \overset{p}{\sim} (f_n),$$

tj. relacija $\overset{p}{\sim}$ je refleksivna.

Relacija $\overset{p}{\sim}$ je simetrična jer ako je fundamentalan niz

$$f_1, g_1, f_2, g_2, \dots,$$

tada fundamentalan je i niz

$$g_1, f_1, g_2, f_2, \dots$$

Dokaz tranzitivnosti je malo komplikovaniji. Svaka glatka periodična funkcija je \mathcal{L}^2 funkcija na svom periodu i ona se može razviti u Furijeov red.

Lema 4.2.6. *Neka ultradiferencijalni operatori $P_{\tilde{r}_p}, P_{\tilde{r}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, nizovi $(\tilde{F}_n)_n, (\tilde{F}_n)_n$, glatkih periodičnih funkcija u \mathbb{R}^d i periodične funkcije $\tilde{F}, \tilde{F} \in \mathcal{L}^2(I_0)$ ispunjavaju uslove Definicije 4.2.1, tj.*

$$f_n = P_{\tilde{r}_p}(D)\tilde{F}_n, f_n = P_{\tilde{r}_p}(D)\tilde{F}_n \text{ u } \mathbb{R}^d, \tilde{F}_n \xrightarrow{I} \tilde{F}, \tilde{F}_n \xrightarrow{I} \tilde{F}, n \rightarrow \infty,$$

gde su

$$\tilde{F}_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_{k,n} e_k, \quad \tilde{\tilde{F}}_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{c}}_{k,n} e_k, \quad \tilde{F} = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_k e_k, \quad \tilde{\tilde{F}} = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{c}}_k e_k$$

$(\tilde{c}_{k,n})_{k \in \mathbb{Z}^d}, (\tilde{\tilde{c}}_{k,n})_{k \in \mathbb{Z}^d}, (\tilde{c}_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}, (\tilde{\tilde{c}}_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \in \ell^2, n \in \mathbb{Z}_+$. Tada postoji ultradiferencijalni operator $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ za koga

$$\left(\frac{P_{\tilde{r}_p}(k)}{P_{r_p}(k)} \right)_{k \in \mathbb{Z}^d}, \left(\frac{P_{\tilde{\tilde{r}}_p}(k)}{P_{r_p}(k)} \right)_{k \in \mathbb{Z}^d} \in \ell^\infty, \quad (4.2.3)$$

glatke periodične funkcije

$$F_{n,1} = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{k,n} P_{\tilde{r}_p}(k)}{P_{r_p}(k)} e_k, \quad F_{n,2} = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\tilde{c}}_{k,n} P_{\tilde{\tilde{r}}_p,2}(k)}{P_{r_p}(k)} e_k, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

i periodične funkcije

$$F_1 = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{c}_k P_{\tilde{r}_p}(k)}{P_{r_p}(k)} e_k, \quad F_2 = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\tilde{c}}_k P_{\tilde{\tilde{r}}_p,2}(k)}{P_{r_p}(k)} e_k \in \mathcal{L}^2(I_0)$$

takve da važi

$$f_n = P_{r_p}(D)F_{n,1} = P_{r_p}(D)F_{n,2} \text{ nad } \mathbb{R}^d, \quad F_{n,1} \xrightarrow{I} F_1, \quad F_{n,2} \xrightarrow{I} F_2, \quad n \rightarrow \infty.$$

Štaviše, $F_1 = F_2$ u \mathbb{R}^d .

Isto tvrđenje važi i u Berlingovom slučaju, uz odgovarajuću notaciju.

Dokaz. Kako je

$$D^\alpha e_k = k^\alpha e_k, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^d, \quad k \in \mathbb{Z}^d,$$

tada iz (4.2.3) sledi

$$F_{n,1} = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_{k,n} \frac{P_{\tilde{r}_p}(k)}{P_{r_p}(k)} e_k = P_{\tilde{r}_p}(D) \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{k,n}}{P_{r_p}(k)} e_k, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Dalje,

$$P_{r_p}(D)F_{n,1} = P_{r_p}(D)P_{\tilde{r}_p}(D) \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{k,n}}{P_{r_p}(k)} e_k$$

4.2. FUNDAMENTALNI NIZOVI PERIODIČNIH
S-ULTRADISTRIBUCIJA

$$\begin{aligned}
&= P_{\tilde{r}_p}(D)P_{r_p}(D) \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{k,n}}{P_{r_p}(k)} e_k \\
&= P_{\tilde{r}_p}(D)\tilde{F}_n = f_n \quad \text{u } \mathbb{R}^d.
\end{aligned}$$

Na sličan način se može pokazati da je $f_n = P_{r_p}(D)F_{n,2}$.

Iz (4.2.3) sledi da su $F_{n,i}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, 2$, glatke periodične funkcije nad \mathbb{R}^d i $F_i \in \mathcal{L}^2(I_0)$, $i = 1, 2$. Kako $(\tilde{c}_{k,n})_{k \in \mathbb{Z}_+^d} \rightarrow (\tilde{c}_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ i $(\tilde{c}_{k,n})_{k \in \mathbb{Z}_+^d} \rightarrow (\tilde{c}_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ u ℓ^2 kada $n \rightarrow \infty$, tada $F_{n,i} \xrightarrow{I} F_i$, $n \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$. Iz Propozicije 4.2.4 sledi da je $F_1 = F_2$ nad \mathbb{R}^d . \square

(Nastavak dokaza Teoreme 4.2.5) Tvrdjenje ćemo pokazati samo u Rumi-jeovom slučaju. Neka je $(f_n) \stackrel{p}{\sim} (g_n)$ i $(g_n) \stackrel{p}{\sim} (h_n)$. Tada na osnovu Definicije 4.2.2 postoje nizovi (F_n) , (G_n) , (\tilde{G}_n) , (H_n) glatkih periodičnih funkcija u \mathbb{R}^d i ultradiferencijalni operatori $P_{\tilde{r}_p}, P_{\tilde{r}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da:

$$\begin{aligned}
f_n &= P_{\tilde{r}_p}(D)F_n, \quad g_n = P_{\tilde{r}_p}(D)G_n \quad \text{nad } \mathbb{R}^d, \quad F_n - G_n \xrightarrow{I} 0, \quad n \rightarrow \infty, \\
g_n &= P_{\tilde{r}_p}(D)\tilde{G}_n, \quad h_n = P_{\tilde{r}_p}(D)H_n \quad \text{nad } \mathbb{R}^d, \quad G_n - H_n \xrightarrow{I} 0, \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Iz Leme 4.2.6 sledi da nizove (f_n) , (g_n) i (h_n) možemo zapisati, korišćenjem operatora $P_{r_p}(D)$ umesto $P_{\tilde{r}_p}(D)$ i $P_{\tilde{r}_p}(D)$, u obliku:

$$f_n = P_{r_p}(D)F_{n,1}, \quad g_n = P_{r_p}(D)G_{n,1}, \quad g_n = P_{r_p}(D)\tilde{G}_{n,1}, \quad h_n = P_{r_p}(D)H_{n,1} \quad \text{nad } \mathbb{R}^d$$

i važi

$$F_{n,1} - G_{n,1} \xrightarrow{I} 0, \quad \tilde{H}_{n,1} = G_{n,1} - \tilde{G}_{n,1} + H_{n,1}, \quad G_{n,1} - \tilde{H}_{n,1} \xrightarrow{I} 0$$

i $F_{n,1} - \tilde{H}_{n,1} \xrightarrow{I} 0$, $n \rightarrow \infty$. Ovim je dokazana tranzitivnost. \square

Prema tome skup svih s - p -fundamentalnih nizova $(f_n)_n$ možemo podeliti na klase ekvivalencije u odnosu na relaciju $\stackrel{p}{\sim}$.

Definicija 4.2.7. Klase ekvivalencije s - p -fundamentalnih nizova, u oznaci $f = [(f_n)] = [f_n]$, nazivaju se periodičnim s -ultradistribucijama. Prostor periodičnih s -ultradistribucija označavamo sa $\mathcal{U}_{per}^* = \mathcal{U}_{per}^*(\mathbb{R}^d)$.

Primedba 4.2.8. Na bazi (4.2.3) i Propoziciji 4.2.4 imamo da je $f = [f_n] = 0$ ako je $f_n = P(D)F_n$ i ako $F_n \xrightarrow{I} 0$, $n \rightarrow \infty$.

Primer 4.2.9. Neka je $f = [(f_n)] \in \mathcal{U}'_{per}$ oblika $f_n = P(D)F_n$ u \mathbb{R}^d gde $F_n \xrightarrow{I} F$, $n \rightarrow \infty$. Tada je niz $(\tilde{f}_n) = (P(D)(F_n * \delta_n))$ s - p -fundamentalan u \mathbb{R}^d i $(f_n) \stackrel{p}{\sim} (\tilde{f}_n)$.

4.3 Operacije sa periodičnim s -ultradistribucijama

U prostoru periodičnih s -ultradistribucija mogu se definisati standardne operacije za vektorske prostore.

Teorema 4.3.1. \mathcal{U}'_{per} je linearan vektorski prostor.

Neka su $f = [f_n]$, $g = [g_n] \in \mathcal{U}'_{per}$. Suma periodičnih s -ultradistribucija $f = [f_n]$ i $g = [g_n]$ je periodična s -ultradistribucija

$$f + g := [f_n + g_n].$$

Isto se može uraditi i za proizvod sa skalarom

$$\lambda f := [\lambda f_n].$$

Koristeći Lemu 4.2.6, na sličan način kao kod s -ultradistribucija može se proveriti konzistentnost ovih definicija.

Teorema 4.3.2. Za proizvoljnu $f = [f_n] \in \mathcal{U}'_{per}^{\{t\}}$ i $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$ operacija diferenciranja

$$f^{(\beta)} := [f_n^{(\beta)}]$$

je dobro definisana.

Dokaz. Daćemo dokaz u Rumijeovom slučaju. Dovoljno je da pokažemo da je niz $(f_n^{(\beta)})_n$ s - p -fundamentalan. Tada na osnovu Definicije 4.2.2 postoji niz (F_n) , $n \in \mathbb{Z}_+$ glatkih periodičnih funkcija u \mathbb{R}^d , periodična funkcija $F \in \mathcal{L}^2(I_0)$ i ultradiferencijalni operator $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da:

$$f_n = P_{r_p}(D)F_n \text{ nad } \mathbb{R}^d, F_n \xrightarrow{I} F, n \rightarrow \infty,$$

Iz uslova $f_n^{(\beta)} = P_{r_p}(D)F_n^{(\beta)}$ nad \mathbb{R}^d , gde je $F_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_{k,n}e_k$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $F_n \xrightarrow{I} F$, $n \rightarrow \infty$, i $F = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k e_k$. Na bazi Leme 4.2.6 sledi da postoje:

4.3. OPERACIJE SA PERIODIČNIM S-ULTRADISTRIBUCIJAMA

niz (\tilde{F}_n) glatkih periodičnih funkcija iz \mathbb{R}^d i periodična funkcija \tilde{F} iz $\mathcal{L}^2(I_0)$ oblika

$$\tilde{F}_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{(ik)^\beta P_{r_p}(k) c_{k,n}}{P_{\tilde{r}_p}(k)} e_k, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \tilde{F} = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{(ik)^\beta P_{r_p}(k) c_k}{P_{\tilde{r}_p}(k)} e_k,$$

kao i ultradiferencijalni operator $P_{\tilde{r}_p}(D) \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ tako da važi

$$P_{r_p}(D)F_n^{(\beta)} = P_{\tilde{r}_p}(D)\tilde{F}_n, \quad \text{nad } \mathbb{R}^d, \quad \tilde{F}_n \xrightarrow{I} \tilde{F}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Isto tvrđenje važi i u Berlingovom slučaju. \square

Teorema 4.3.3. *Ako je $f = [f_n] \in \mathcal{U}'_{per}$ proizvoljna i $\omega \in \mathcal{E}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$, tada je proizvod*

$$\omega f := [\omega f_n]$$

dobro definisan. Takođe on je s-p-fundamentalnan.

Dokaz. Daćemo dokaz u Rumijeovom slučaju. Iz uslova, postoje niz glatkih periodičnih funkcija (F_n) , gde su $F_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_{k,n} e_k$, $n \in \mathbb{Z}_+$, funkcija $F = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k e_k \in \mathcal{L}^2(I_0)$ i ultradiferencijalni operator $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da

$$\omega f_n = \omega P_{r_p}(D)F_n \quad \text{nad } \mathbb{R}^d \quad \text{i} \quad F_n \xrightarrow{I} F, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dalje, možemo pretpostaviti da je $\omega = \omega \gamma$, gde je γ funkcija sečenja koja ima vrednost 1 na I i $\omega = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_k e_k$. Na osnovu Leme 4.2.6 postoje: niz (\tilde{F}_n) glatkih periodičnih funkcija iz \mathbb{R}^d i periodična funkcija $\tilde{F} \in \mathcal{L}^2(I_0)$ oblika

$$\tilde{F}_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{a_{k,n}}{P_{\tilde{r}_p}(k)} e_k, \quad \text{nad } \mathbb{R}^d, \quad n \in \mathbb{Z}_+; \quad \tilde{F} = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{P_{\tilde{r}_p}(k)} e_k, \quad \text{nad } \mathbb{R}^d,$$

gde su

$$a_{k,n} = \sum_{|i|=-\infty}^{\infty} P_{r_p}(i) c_{i,n} b_{k-i} \quad \text{i} \quad a_k = \sum_{|i|=-\infty}^{\infty} P_{r_p}(i) c_i b_{k-i}$$

i ultradiferencijalni operator $P_{\tilde{r}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da važi

$$P_{r_p}(D)F_n(x) = P_{\tilde{r}_p}(D)\tilde{F}_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Kako $(c_{k,n})_{k \in \mathbb{Z}^d} \rightarrow (c_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ u ℓ^2 kada $n \rightarrow \infty$, iz (4.2.3) sledi $\tilde{F}_n \xrightarrow{I} \tilde{F}$, $n \rightarrow \infty$. Dokaz u Berlingovom slučaju je isti. Dakle, niz (ωf_n) je s-p-fundamentalnan u \mathbb{R}^d . \square

4.4 Nizovi periodičnih s -ultradistribucija

Definicija 4.4.1. *Niz periodičnih s -ultradistribucija $(f^n)_n = ([f_m^n])_n$ konvergira ka periodičnoj s -ultradistribuciji $f = [f_m]$, $n \rightarrow \infty$, i koristimo oznaku*

$$f^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s-p} f, \quad \text{ili} \quad p\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f^n = f,$$

ako postoje nizovi $(F_m^n)_m$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $(F_m)_m$ glatkih periodičnih funkcija u \mathbb{R}^d , niz $(F^n)_n$ periodičnih funkcija $F^n \in \mathcal{L}^2(I_0)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, periodična funkcija $F \in \mathcal{L}^2(I_0)$ i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ takvi da:

$$\begin{aligned} f_m^n &= P(D)F_m^n, \quad f_m = P(D)F_m \text{ u } \mathbb{R}^d, \quad m, n \in \mathbb{Z}_+, \\ F_m^n &\xrightarrow{I} F_m, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{uniformno po } m \in \mathbb{Z}_+, \quad F_m \xrightarrow{I} F, \quad m \rightarrow \infty, \\ F_m^n &\xrightarrow{I} F^n, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{za svako } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ i } F^n \xrightarrow{I} F, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Zbog uniformne konvergencije možemo da promenimo redosled limesa, pa imamo $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} F_m^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} F_m^n \in \mathcal{L}^2(I_0)$.

Teorema 4.4.2. *Ako postoji $p\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f^n$, tada je on jedinstven.*

Dokaz. Tvrdjenje ćemo dokazati samo u Rumijeovom slučaju. Prepostavimo da $f^n \xrightarrow{s-p} f$ i $f^n \xrightarrow{s-p} g$ u \mathbb{R}^d , $n \rightarrow \infty$ i pokažimo da je $f = g$. Iz Definicije 4.4.1 sledi da postoje: nizovi $(F_m^n)_m$, $(\tilde{F}_m^n)_m$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $(F_m)_m$, $(\tilde{F}_m)_m$ glatkih periodičnih funkcija u \mathbb{R}^d , nizovi $(F^n)_n$, $(\tilde{F}^n)_n$ periodičnih funkcija iz $\mathcal{L}^2(I_0)$, periodične funkcije F , $\tilde{F} \in \mathcal{L}^2(I_0)$ i ultradiferencijalni operatori $P_{\tilde{r}_p}$, $P_{\tilde{r}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da:

$$\begin{aligned} f_m^n &= P_{\tilde{r}_p}(D)\tilde{F}_m^n, \quad f_m = P_{\tilde{r}_p}(D)\tilde{F}_m \text{ nad } \mathbb{R}^d, \\ \tilde{F}_m^n &\xrightarrow{I} \tilde{F}_m, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{uniformno po } m \in \mathbb{Z}_+, \quad \tilde{F}_m \xrightarrow{I} \tilde{F}, \quad m \rightarrow \infty, \\ \tilde{F}_m^n &\xrightarrow{I} \tilde{F}^n, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{za sve } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ i } \tilde{F}^n \xrightarrow{I} \tilde{F}, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} f_m^n &= P_{\tilde{r}_p}(D)\tilde{\tilde{F}}_m^n, \quad f_m = P_{\tilde{r}_p}(D)\tilde{\tilde{F}}_m \text{ nad } \mathbb{R}^d, \\ \tilde{\tilde{F}}_m^n &\xrightarrow{I} \tilde{\tilde{F}}_m, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{uniformno po } m \in \mathbb{Z}_+, \quad \tilde{\tilde{F}}_m \xrightarrow{I} \tilde{\tilde{F}}, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$\widetilde{F}_m^n \xrightarrow{I} \widetilde{F}^n, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{za sve } n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{i} \quad \widetilde{F}_m \xrightarrow{I} \widetilde{F}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Pomoću Leme 4.2.6, možemo konstruisati nizove glatkih periodičnih funkcija nad \mathbb{R}^d $(F_{m,1}^n)_m$, $(F_{m,2}^n)_m$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $(F_{m,1})_m$, $(F_{m,2})_m$, nizove periodičnih funkcija iz $\mathcal{L}^2(I_0)$ $(F_1^n)_n$, $(F_2^n)_n$, periodične funkcije F_1 , $F_2 \in \mathcal{L}^2(I_0)$ i $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ tako da:

$$\begin{aligned} f_m^n &= P_{r_p}(D)F_{m,1}^n = P_{r_p}(D)F_{m,2}^n, \quad f_m = P_{r_p}(D)F_{m,1}, \quad g_m = P_{r_p}(D)F_{m,2} \quad \text{nad } \mathbb{R}^d, \\ F_{m,1}^n - F_{m,2}^n &\xrightarrow{I} F_{m,1} - F_{m,2}, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{uniformno po } m \in \mathbb{Z}_+, \\ F_{m,1} - F_{m,2} &\xrightarrow{I} F_1 - F_2, \quad m \rightarrow \infty, \quad F_{m,1}^n - F_{m,2}^n \xrightarrow{I} F_1^n - F_2^n, \quad m \rightarrow \infty, \\ &\text{za svako } n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{i} \quad F_1^n - F_2^n \xrightarrow{I} F_1 - F_2, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Kako je

$$P_{r_p}(D)(F_{m,2} - F_{m,1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{r_p}(D)(F_{m,1}^n - F_{m,2}^n - F_{m,1} + F_{m,2}) = 0 \quad \text{nad } \mathbb{R}^d, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

iz Propozicije 4.2.4 dobijamo da $F_1 = F_2$ nad \mathbb{R}^d . Dakle, $f = g$ nad \mathbb{R}^d . \square

4.5 Periodične s -ultradistribucije kao funkcionalni

Neka je $\varphi \in \mathcal{A}_{per}^*$ i neka za niz $f = [f_n]$ važi (4.2.1). Definišimo delovanje

$$\varphi \mapsto f(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathcal{A}_{per}^*},$$

sa

$$(f, \varphi)_{\mathcal{A}_{per}^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_0} f_n \bar{\varphi} dx = \int_{I_0} F P(-D) \bar{\varphi} dx = (F, P(-D)\varphi)_{\mathcal{L}^2(I_0)}, \quad (4.5.1)$$

gde $F_n \xrightarrow{I} F$, $n \rightarrow \infty$. Dakle, na osnovu (4.5.1) možemo identifikovati $f = [f_n]$ sa $f = P(D)F$. Pokažimo konzistentnost ove definicije.

Ako

$$\begin{aligned} f_n &= \widetilde{P}(D)\widetilde{F}_n \quad \text{nad } \mathbb{R}^d; \quad \widetilde{F}_n \xrightarrow{I} \widetilde{F}, \quad n \rightarrow \infty, \\ f_n &= \widetilde{P}(D)\widetilde{F}_n \quad \text{nad } \mathbb{R}^d; \quad \widetilde{F}_n \xrightarrow{I} \widetilde{F}, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

tada parcijalnom integracijom dobijamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_0} f_n \bar{\varphi} dx = \int_{I_0} \tilde{F} \tilde{P}(-D) \bar{\varphi} dx = \int_{I_0} \tilde{\tilde{F}} \tilde{\tilde{P}}(-D) \bar{\varphi} dx,$$

jer mešoviti niz integrala

$$\int_{I_0} \tilde{P}(D) \tilde{F}_1 \bar{\varphi} dx, \int_{I_0} \tilde{\tilde{P}}(D) \tilde{\tilde{F}}_1 \bar{\varphi} dx, \int_{I_0} \tilde{P}(D) \tilde{F}_2 \bar{\varphi} dx, \int_{I_0} \tilde{\tilde{P}}(D) \tilde{\tilde{F}}_2 \bar{\varphi} dx, \dots$$

konvergira. Iz Leme 4.1.1 preslikavanje $\varphi \mapsto f(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathcal{U}'_{per}}$ je linearno.

Sekvencijalna neprekidnost je data u sledećoj teoremi.

Teorema 4.5.1. (a) Ako je $f = [f_m] \in \mathcal{U}'_{per}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, i ako su $\varphi_n \in \mathcal{A}^*_{per}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\varphi \in \mathcal{A}^*_{per}$ takvi da $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{A}^*_{per}} \varphi$, $n \rightarrow \infty$, tada $(f, \varphi_n)_{\mathcal{U}'_{per}} \rightarrow (f, \varphi)_{\mathcal{U}'_{per}}$, $n \rightarrow \infty$.

(b) Ako $(f^n = [f_m^n])_n \xrightarrow{s-p} f = [f_m]$ i ako $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{A}^*_{per}} \varphi$, kada $n \rightarrow \infty$, tada

$$(f^n, \varphi_n)_{\mathcal{U}'_{per}} \rightarrow (f, \varphi)_{\mathcal{U}'_{per}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dokaz. (a) Na osnovu (4.2.1) i (4.5.1) imamo

$$(f, \varphi_n)_{\mathcal{U}'_{per}} = (F, P(-D)\varphi_n)_{\mathcal{L}^2(I_0)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Tada iz Leme 4.1.1 (b) i

$$\begin{aligned} |(f, \varphi_n)_{\mathcal{U}'_{per}} - (f, \varphi)_{\mathcal{U}'_{per}}| &= |(F, P(-D)(\varphi_n - \varphi))_{\mathcal{L}^2(I_0)}| \\ &\leq \|F\|_2 \|P(-D)(\varphi_n - \varphi)\|_2 \\ &\leq C \|P(-D)(\varphi_n - \varphi)\|_2. \end{aligned}$$

(b) Iz Definicije 4.4.1 imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f^n, \varphi_n)_{\mathcal{U}'_{per}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} (F_m^n, P(-D)\varphi_n)_{\mathcal{L}^2(I_0)},$$

gde $F_m^n \xrightarrow{I} F^n$, $m \rightarrow \infty$, za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ i $F^n \xrightarrow{I} F$ kada $n \rightarrow \infty$. Dakle, imamo

$$\begin{aligned} |(F^n, \varphi_n)_{\mathcal{L}^2} - (F, \varphi)_{\mathcal{L}^2}| &\leq |(F^n, P(-D)(\varphi_n - \varphi))_{\mathcal{L}^2(I_0)}| \\ &\quad + |(F^n - F, P(-D)\varphi)_{\mathcal{L}^2(I_0)}| \\ &\leq \|F^n\|_2 \|P(-D)(\varphi_n - \varphi)\|_2 + \|F^n - F\|_2 \|P(-D)\varphi\|_2. \end{aligned}$$

I na kraju, iz Leme 4.1.1 (b) sledi tvrđenje. \square

Lema 4.5.2. $f \in \mathcal{A}'_{per}$ ako i samo ako postoji $F \in \mathcal{L}^2(I_0) \cap \mathcal{C}^\infty(I_0)$ i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ tako da važi $f = P(D)F$, tj.

$$(f, \varphi)_{\mathcal{A}'_{per}} = \int_{I_0} F(x)P(-D)\bar{\varphi}(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{A}'_{per}. \quad (4.5.2)$$

Dokaz Leme 4.5.2 je posledica teoreme o reprezentaciji (videti [64]) i tvrđenja (a) i (b) Leme 4.1.1.

4.6 Veza između klasičnih i periodičnih s-ultradistribucija

Posmatrajmo funkcije oblika $\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} r_k e_k \in \mathcal{L}^2(I_0) \cap \mathcal{C}^\infty(I_0)$ i označimo sa \mathbf{u}^* prostor nizova oblika $(r_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ za koje važi

$$\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} P^2(k)r_k^2 < \infty \quad \text{za sve } P \in \mathcal{P}_u^*.$$

Jasno je da je ovaj uslov ekvivalentan sa

$$(\forall h > 0)(\text{resp. } \exists h > 0) \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} r_k^2 e^{h|k|^{1/t}} < \infty. \quad (4.6.1)$$

U Rumijeovom slučaju imamo još jednu ekvivalentnu definiciju:

$$(\exists (r_p)_p \in \mathcal{R}) \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} r_k^2 e^{c(|k|)^{1/t}} < \infty, \quad (4.6.2)$$

gde je c funkcija koja odgovara nizu $(r_p)_p \in \mathcal{R}$.

Pretpostavimo da važi (4.2.1). Tada, korištenjem (4.5.1) svakom elementu $f \in \mathcal{U}'_{per}$ odgovara niz $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ sa odgovarajućim ograničenjem. Dakle, imamo

$$(f, \varphi)_{\mathcal{U}'_{per}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_{k,n} P(k) \int_{I_0} e_k \bar{\varphi} dx \quad (4.6.3)$$

gde je $F_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_{k,n} e_k$ i $\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} |c_{k,n}|^2 < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Kako

$$(c_{k,n})_{k \in \mathbb{Z}^d} \xrightarrow{\ell^2} (c_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}, \quad n \rightarrow \infty,$$

i $\varphi = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} r_k e_k$, tada je

$$(f, \varphi)_{\mathcal{U}'_{per}} = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k P(k) r_k, \quad (4.6.4)$$

gde znamo da uslovi (4.6.1) i (4.6.2) vrede za sve $(r_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \in \mathbf{u}^*$. Ovim smo dodelili periodičnoj s -ultradistribuciji f niz oblika

$$(b_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} = (P(k)c_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}.$$

Označimo sa \mathbf{u}'^* prostor nizova definisan na sledeći način:

$$\mathbf{u}'^* = \{(b_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} : b_k = P(k)c_k \text{ za neko } P \in \mathcal{P}_u^* \text{ i } (c_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \in \ell^2\}.$$

Propozicija 4.6.1. *Postoji linearna bijekcija $B : \mathcal{U}'_{per} \rightarrow \mathbf{u}'^*$.*

Dokaz. Ako je $f \in \mathcal{U}'_{per}$ određena sa $(F_n)_n F$ i $P(D)$, $F_n \xrightarrow{I} F$, $n \rightarrow \infty$, gde je $F = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k e_k$ i $\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$, tada definišimo

$$B(f) := (b_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}.$$

Iz Leme 4.2.6 sledi da različite reprezentacije od f opet daju isti niz. Lako se pokazuje da je B linearno i bijektivno preslikavanje. \square

Sledeća propozicija direktno sledi iz (3.1.4) i (3.1.6).

Propozicija 4.6.2. (a) *Niz $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \in \mathbf{u}'^*$ ako i samo ako $\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 e^{-h|k|^{1/t}} < \infty$ za neko (resp. za svako) $h > 0$.*

(b) *Niz $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \in \mathbf{u}'^*$ ako i samo ako za neko $h > 0$ postoji $C > 0$ (resp. za sve $h > 0$ postoji $C > 0$) tako da $|b_k| \leq C e^{h|k|^{1/t}}$.*

Primedba 4.6.3. Primetimo da u Rumijeovom slučaju imamo ekvivalentno tvrđenje prethodnom: Uslovi Propozicije 4.6.2 važe i sa procenom (4.6.2).

U [24] je dokazano da prostori nizova

$$\mathbf{a}^* = \{(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \text{ za sve (resp. postoji) } h > 0 : \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 e^{h|k|^{1/t}} < \infty\},$$

$$\mathbf{a}'^* = \{(b_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \text{ postoji (resp. za sve) } h > 0 : \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 e^{-h|k|^{1/t}} < \infty\}$$

4.6. VEZA IZMEĐU KLASIČNIH I PERIODIČNIH
S-ULTRADISTRIBUCIJA

sa njihovim strukturama konvergencije formiraju dualni par. Kako je $\mathbf{a}^* \equiv \mathbf{u}^*$, iz Propozicije 4.6.2, imamo $\mathbf{a}'^* \equiv \mathbf{u}'^*$. U [24] je pokazano da se prostori \mathbf{a}^* i \mathcal{A}_{per}^* mogu identifikovati kroz bijektivni izomorfizam

$$\mathbf{a}^* \ni (a_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \mapsto \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} a_k e_k \in \mathcal{A}_{per}^* \quad (4.6.5)$$

iz kog sledi izomorfizam

$$\mathbf{a}'^* \ni (b_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \mapsto \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_k e_k \in \mathcal{A}'_{per},$$

pa, na osnovu Propozicije 4.6.1 sledi da se prostori \mathbf{a}'^* i \mathcal{U}'_{per} mogu identifikovati pomoću njihovih struktura konvergencije.

Pomoću (4.5.2) je definisan linearan funkcional na \mathcal{A}_{per}^* koji je na osnovu Teoreme 4.5.1 sekvencijalno neprekidan. Glavni rezultat u ovoj glavi je sadržan u sledećoj teoremi.

Teorema 4.6.4. (i) Za svaki neprekidan linearan funkcional U u prostoru \mathcal{A}_{per}^* postoji jedinstvena periodična s-ultradistribucija $f \in \mathcal{U}'_{per}$ takva da važi

$$U(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathcal{U}'_{per}}, \quad \text{za sve } \varphi \in \mathcal{A}_{per}^*. \quad (4.6.6)$$

gde je $(f, \varphi)_{\mathcal{U}'_{per}}$ definisan sa (4.5.1).

Obratno, za sve $f \in \mathcal{U}'_{per}$ izraz (4.6.6) definiše linearan i sekvencijalno neprekidan funkcional na \mathcal{A}_{per}^* .

(ii) Niz $(f^n)_n \in \mathcal{U}'_{per}$ konvergira ka $f \in \mathcal{U}'_{per}$ ako i samo ako za sve $\varphi \in \mathcal{A}_{per}^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} (f_m^n, \varphi)_{\mathcal{U}'_{per}} = (f, \varphi)_{\mathcal{U}'_{per}}. \quad (4.6.7)$$

Dokaz. (i) Neka je $f = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_k e_k \in \mathcal{U}'_{per}$. Korištenjem Leme 4.5.2 zaključujemo da

$$F_n = \sum_{|k| \leq n} \frac{b_k}{P(k)} e_k, \quad k \in \mathbb{Z}^d, n \in \mathbb{Z}_+, \quad F = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{b_k}{P(k)} e_k$$

daju odgovarajući element iz \mathcal{U}'_{per} . Jedinstvenost sledi iz Propozicija 4.2.4 i 4.6.1.

Obratno, neka $f \in \mathcal{W}'_{per}$. Tada je sa (4.6.3) definisan sekvencijalno neprekidan i linearan funkcional na \mathcal{A}'_{per} jer iz $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{A}'_{per}} \varphi$ sledi $(f, \varphi_n)_{\mathcal{W}'_{per}} \rightarrow (f, \varphi)_{\mathcal{W}'_{per}}$, $n \rightarrow \infty$.

(ii) Dokažimo samo da iz (4.6.7) sledi $f^n \xrightarrow{s^{-p}} f$, $n \rightarrow \infty$, jer je implikacija već dokazana u Teoremi 4.5.1 (b). Neka su $F_m^n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} a_{k,m}^n e_k$,

$$F_m = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} a_{k,m} e_k, \quad m, n \in \mathbb{Z}_+ \text{ i } F = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} a_k e_k \text{ (kao u Definiciji 4.4.1).}$$

Iz dualnosti prostora \mathbf{a}^* i \mathbf{a}'^* , sledi

$$\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} a_{k,m}^n r_k \rightarrow \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} a_{k,m} r_k, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{uniformno po } m \in \mathbb{Z}_+,$$

za sve $\varphi = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} r_k e_k \in \mathcal{A}'_{per}$. Takođe,

$$(a_{k,m})_{k \in \mathbb{Z}^d} \rightarrow (a_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{u } \mathbf{a}'^*.$$

Ako se vratimo na oblike funkcija F_m^n , F_m i F , dobijamo tvrđenje. □

Glava 5

Množenje ultradistribucija i talasni front

5.1 Uvod

Množenje dveju ultradistribucija je obopštenje problema postojanja multiplikativnog proizvoda dveju distribucija. Slično talasnom frontu distribucije može se definisati talasni front ultradistribucije. Jedina razlika je u tome što umesto ograničenje nekim polinomom, sada posmatramo funkcionalne koji imaju najviše eksponencijalni rast u beskonačnosti. Takođe, umesto glatkih funkcija sa kompaktnim nosačem koje smo koristili kod mikrolokalizacije distribucija, kod mikrolokalizacije ultradistribucija korišćemo težinske funkcije koje imaju subeksponencijalni rast u beskonačnosti. Imaćemo u vidu posledice tog izbora. Težinske funkcije koje se koriste u proučavanju periodičnih ultradistribucija imaju mnogo slične karakteristike sa težinskim funkcijama koje smo koristili kod periodičnih distribucija. Oni zadovoljavaju i suštinske nejednakosti koje smo koristili kod distribucija.

U ovoj glavi mi ćemo koristiti osobine proizvoda periodičnih ultradistribucija kako bi dali novi opis talasnog fronta ultradistribucije $f \in \mathcal{D}'^*(\mathbb{R}^d)$ koristeći koeficijente njenog razvoja u odgovarajućem Furijeovom redu. Nakon toga ćemo proširiti rezultate koji su izloženi u 2.4 na prostorima nekih klasa ultradistribucija. Preciznije, analizirane su mikrolokalne osobine ultradistribucije f u $x_0 \in \mathbb{R}^d$ koje su određene preko razvoja u Furijeov red periodizacije ultradistribucije φf , gde φ je funkcija odsjecanja u okolini tačke x_0 . Koristite se rezultati koji su izloženi u nekih od radova i knjiga koji su

posvećeni toj problematici: [23, 24, 64]. Glavni rezultati u ovom odeljku publikovani su u radu [14].

5.2 Teoreme tipa Pejli-Vinera za ultradistribucije

Teoreme tipa Pejli-Vinera za distribucije imaju svoj analog kod ultradistribucija. Furijeova transformacija ultradistribucije f je

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}_0 f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx, \quad (5.2.1)$$

gde $x \in \mathbb{R}^d$ i $\xi \in \mathbb{R}^d$. Ako je f ultradistribucija sa kompaktnim nosačem, tada \hat{f} se može produžiti analitički do celu funkciju na \mathbb{C}^d , koja se naziva *Furije-Laplasova transformacija ultradistribucije* f . Teoreme tipa Pejli-Vinera karakterišu ove cele funkcije. Kompleksnu promenljivu iz \mathbb{C}^d ćemo označavati sa $\zeta = \xi + i\eta$, gde ξ i η su realni i imaginarni deo promenljive ζ .

Mi ćemo razgledati uslove pod kojih je nosač f sadržan u nekom *konveksnom kompaktnom skupu* $K \subset \mathbb{R}^d$. *Funkcija nosača* H_K na K definiše se kao

$$H_K(\zeta) = \sup_{x \in K} \text{Im} \langle x, \zeta \rangle = \sup_{x \in K} \langle x, \eta \rangle \quad (5.2.2)$$

Propozicija 5.2.1. *Ako je $f \in \mathcal{D}'_K$, tada Furije-Laplasova transformacija*

$$\hat{f}(\zeta) = \langle e^{-i\langle x, \zeta \rangle}, f \rangle \quad (5.2.3)$$

je cela funkcija.

Teorema 5.2.2 (Pejli-Viner). *Neka $K \subset \mathbb{R}^d$ je konveksan kompaktni skup. Potreban i dovoljan uslov da jedna cela funkcija $\hat{\varphi}(\zeta)$ na \mathbb{C}^d bude Furije-Laplasova transformacija od $\varphi \in \mathcal{D}'_K$ je to da $\hat{\varphi}(\zeta)$ zadovoljava sledeću nejednakost na \mathbb{C}^d :*

u slučaju Rumijea, $ = (t)$: za svaki $L > 0$, postoji konstanta C tako da*

$$|\hat{\varphi}(\zeta)| \leq C \exp\{-(L|\zeta|)^{1/t} + H_K(\zeta)\}; \quad (5.2.4)$$

U slučaju Berlinga, $ = \{t\}$: postoje konstante L i C tako da važi (5.2.4).*

Kada je neki od ovih uslova zadovoljen, φ je jednaka inverznoj Furijeovoj transformaciji od $\hat{\varphi}$:

$$\mathcal{F}_0^{-1}(\hat{\varphi}(x)) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\bar{\xi}, \quad (5.2.5)$$

gde

$$d\bar{\xi} = (2\pi)^{-d} d\xi_1 \cdots d\xi_n. \quad (5.2.6)$$

Štaviše, niz $\varphi_j \in \mathcal{D}'_K$ konvergira ka 0 ako i samo ako:
u slučaju Rumijea - za svaki $L > 0$, niz

$$\exp\{(L|\zeta|)^{1/t} - H_K(\zeta)\} \hat{\varphi}_j(\zeta) \quad (5.2.7)$$

konvergira ravnomerno na \mathbb{R}^d (ili ekvivalentno - na \mathbb{C}^d);
u slučaju Berlinga- za neki $L > 0$, niz

$$\exp\{(L|\zeta|)^{1/t} - H_K(\zeta)\} \hat{\varphi}_j(\zeta) \quad (5.2.8)$$

konvergira ravnomerno na \mathbb{R}^d (ili ekvivalentno - na \mathbb{C}^d).

Teorema 5.2.3 (Pejli-Viner). [43] Neka je K konveksan kompaktni skup u \mathbb{R}^d . Tada su sledeća tri uslova ekvivalentna za celu funkciju $\hat{f}(\zeta)$ na \mathbb{C}^d :

- a: $\hat{f}(\zeta)$ je Furije-Laplasova transformacija neke $f \in \mathcal{D}'_K$,
- b: (t): postoje konstante L i C za koje

$$|\hat{f}(\xi)| \leq C e^{L|\xi|^{1/t}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (5.2.9)$$

{t}: za svaki $L > 0$ postoji konstanta C za koju važi (5.2.9).

U svakom od gornjih slučajeva, za proizvoljan $\varepsilon > 0$, postoji konstanta C_ε takva da

$$|\hat{f}(\zeta)| \leq C_\varepsilon e^{H_K(\zeta) + \varepsilon|\zeta|}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^d. \quad (5.2.10)$$

c:

(t): Postoje konstante L i C takve da

$$|\hat{f}(\zeta)| \leq C e^{(L|\zeta|)^{1/t} + H_K(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^d. \quad (5.2.11)$$

{t}: Za svaki $L > 0$ postoji konstanta C , za koju važi (5.2.11).

Preslikavanje koje preslikava $f \in \mathcal{D}'_K$ u njenu Furije-Laplasovu transformaciju \hat{f} je injektivno. Štaviše, niz $f_j \in \mathcal{D}'_K$ konvergira ka 0 ako i samo ako u slučaju:

(t) : za neki $L > 0$

$$e^{-(L|\zeta|)^{1/t} - H_K(\zeta)} \hat{f}_j(\zeta) \quad (5.2.12)$$

konvergira ka 0 ravnomerno na \mathbb{R}^d ili ekvivalentno na \mathbb{C}^d ;

{t} : za svaki $L > 0$ (5.2.12) konvergira ka 0 ravnomerno na \mathbb{R}^d ili ekvivalentno na \mathbb{C}^d .

5.3 Prostori periodičnih ultradiferencijabilnih funkcija i ultradistribucija

Koristićemo oznake koje smo uveli ranije i koje koristimo u [14]. Za razliku od Glave 4 gde smo definisali prostore \mathcal{A}_{per}^* periodičnih ultradiferencijabilnih funkcija Berlingovog i Rumijeovog tipa sa periodom 2π , kao i njihove duale-prostore periodičnih ultradistribucija \mathcal{A}'_{per} Berlingovog i Rumijeovog tipa, u ovoj glavi ćemo posmatrati prostore u kojima funkcije i ultradistribucije su sa periodom 1 i koristiti oznaku \mathcal{P} umesto \mathcal{A}_{per} . Kao i do sada radimo jedino sa vrednostima parametara $t > 1$. Za $n \in \mathbb{Z}^d$ koristimo $e_n(x) := e^{2\pi i \langle x, n \rangle}$.

Prostor periodičnih test funkcija $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^d)$ gde $*$ = (t) (resp. $*$ = {t}), klase Berlinga (resp. Rumijeja), sastoji se od svih ultradiferencijabilnih periodičnih funkcija φ klase Berlinga (resp. Rumijeja). U [23, 24] je dokazano da je φ periodična ultradiferencijabilna funkcija reda t tipa Rumijeja $\mathcal{P}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$, (resp. Berlinga $\mathcal{P}^{(t)}(\mathbb{R}^d)$) ako i samo ako

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\varphi_n|^2 \exp(2\alpha^{1/t} |n|^{1/t}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |f_n|^2 \exp(k|n|^{1/t}) < \infty,$$

postoji (resp. za svaki) $k > 0$, gde $\varphi_n = \int_{I_1} \varphi(x) e^{-2\pi i \langle n, x \rangle} dx$, $n \in \mathbb{Z}^d$.

Dual prostora \mathcal{P}^* , je prostor periodičnih ultradistribucija, kojeg označavamo sa \mathcal{P}'^* . Koristimo i drugi rezultat iz [23]: $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f_n e_n$ je periodična ultradistribucija reda s tipa Rumijeja (Berlinga) ako i samo ako

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |f_n|^2 \exp(-2\alpha^{1/t} |n|^{1/t}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |f_n|^2 \exp(-k|n|^{1/t}) < \infty,$$

za svako (za neko) $k > 0$.

5.3. PROSTORI PERIODIČNIH ULTRADIFERENCIJABILNIH FUNKCIJA I ULTRADISTRIBUCIJA

Za $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f_n e_n \in (\mathcal{D}^*)'$ i $\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \varphi_n e_n \in \mathcal{D}^*$ dejstvo ultradistribucije f nad φ je: $\langle f, \varphi \rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f_n \varphi_{-n}$.

Posmatračemo periodične ekstenzije lokalizacija ultradistribucije u okolini neke tačke. Za $f \in \mathcal{D}^*$, $\text{supp}(f) \subset I_{\eta, x_0} = \prod_{j=1}^d (x_{0,j} - \frac{\eta}{2}, x_{0,j} + \frac{\eta}{2})$, gde $0 < \eta < 1$, njena periodična ekstenzija je

$$f_p(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(x + n).$$

Neka su ω, ν pozitivne (težinske) funkcije nad \mathbb{Z}^d . Pojmovi submultiplikativna i ν -ograničena funkcija koji su definisani u 2.4 ćemo koristiti i u ovom delu. Za neku submultiplikativnu funkciju ν , skup svih ν -ograničenih težinskih funkcija je \mathcal{M}_ν . Koristićemo oznake iz [34]:

$$\mathcal{M}_{(t)}(\mathbb{Z}^d) = \{\omega \in \mathcal{M}_\nu : (\exists C > 0)(\forall k > 0)(\forall n \in \mathbb{Z}^d)(\nu(n) \leq C e^{k|n|^{1/t}})\}.$$

$$\mathcal{M}_{\{t\}}(\mathbb{Z}^d) = \{\omega \in \mathcal{M}_\nu : (\exists C > 0)(\exists k > 0)(\forall n \in \mathbb{Z}^d)(\nu(n) \leq C e^{k|n|^{1/t}})\}.$$

Za $\omega \in \mathcal{M}_*(\mathbb{Z}^d)$, definišemo prostore

$$\mathcal{D}_\omega^{q*} = \{f \in \mathcal{D}^{t*} : \{\omega(n)f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^d} \in \ell^q, \text{ gde } f_n = \langle f, e_{-n} \rangle\}$$

na kojima se definišu norme

$$\|f\|_{\mathcal{D}_\omega^{q*}} = \|\{\omega(n)f_n\}\|_{\ell^q}.$$

Od sada pa nadalje posmatramo samo slučajeve kada $q \geq 1$. Dokaz sledeće tvrdnje je očigledan.

Propozicija 5.3.1. *Ako $q_1 \leq q_2$ i $\omega_2 \leq C\omega_1$, tada $\mathcal{D}_{\omega_1}^{q_1*} \subseteq \mathcal{D}_{\omega_2}^{q_2*}$.*

Uzećemo u obzir lokalni prostor $\mathcal{D}_{\omega, \text{loc}}^{q*}$ koji se sastoji od distribucija $f \in \mathcal{D}^{t*}(\mathbb{R}^d)$ čije periodične ekstenzije $(\varphi f)_p \in \mathcal{D}_\omega^{q*}$, za sve $x_0 \in \mathbb{R}^d$ i $\varphi \in \mathcal{D}^{\{t\}}(I_{1, x_0})$. Njegova topologija je definisana familijom seminormi

$$\|f\|_{x_0, \varphi} = \|(\varphi f)_p\|_{\mathcal{D}_\omega^{q*}},$$

gde $x_0 \in \mathbb{R}^d$ i $\varphi \in \mathcal{D}^*(I_{1, x_0})$.

Sledeća propozicija znači da je definicija prostora $\mathcal{D}_{\omega, \text{loc}}^{q*}$ konzistentna.

Propozicija 5.3.2. $\mathcal{D}'_{\omega}^{q*} \subset \mathcal{D}'_{\omega,loc}^{q*}$.

Dokaz. Tvrdjenje dokazujemo samo u Rumijeovom slučaju.

Neka $f = \sum_n f_n e_n \in \mathcal{D}'_{\omega}^{q\{t\}}$ i $\varphi = \sum_n \varphi_n e_n \in \mathcal{D}'^{\{t\}}(I_{1,x_0})$. Tada je periodična ekstenzija $(\varphi f)_p = \varphi_p f$. Iz (2.3.1) i nejednakosti Minkovskog imamo

$$\begin{aligned} \|\varphi_p f\|_{\mathcal{D}'_{\omega}^{q\{t\}}} &\leq C \left(\sum_n \left(\sum_j \nu(j) |\varphi_j| \omega(n-j) |f_{n-j}| \right)^q \right)^{1/q} \\ &\leq C \sum_j \left(\sum_n (\nu(j) |\varphi_j| \omega(n-j) |f_{n-j}|)^q \right)^{1/q} \\ &\leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \nu(j) |\varphi_j| \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (\omega(k-j) |f_{k-j}|)^q \right)^{1/q} \\ &\leq C \|\varphi_p\|_{\mathcal{D}'_{\nu}^{\{t\}}} \|f\|_{\mathcal{D}'_{\omega}^{q\{t\}}} < \infty. \end{aligned}$$

□

U produžetku, razmatračemo samo osnovne prostore tipa Rumijeja i njihove duale. Odgovarajuće rezultate u prostorima tipa Berlinga su slični i lakši za dokazivanje.

Za fiksni $t > 1$, stavljamo $\omega_k(n) = e^{k|n|^{1/t}}$, $k \in \mathbb{R}$. Radi jednostavnosti, pišemo $\mathcal{D}'_k^{q\{t\}} := \mathcal{D}'_{\omega_k}^{q\{t\}}$ i $\mathcal{D}'_{k,loc}^{q\{t\}} := \mathcal{D}'_{\omega_k,loc}^{q\{t\}}$. Jasno je da

$$\mathcal{D}'^{\{t\}} = \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{D}'_k^{q\{t\}} = \bigcap_{\omega \in \mathcal{M}_{\{s\}}(\mathbb{Z}^d)} \mathcal{D}'_{\omega}^{q\{t\}}; \quad \mathcal{D}'^{\{t\}} = \bigcup_{k \leq 0} \mathcal{D}'_k^{q\{t\}} = \bigcup_{\omega \in \mathcal{M}_{\{s\}}(\mathbb{Z}^d)} \mathcal{D}'_{\omega}^{q\{t\}}.$$

Štaviše,

$$\mathcal{E}^{\{t\}} = \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{D}'_{k,loc}^{q\{t\}} = \bigcap_{\omega \in \mathcal{M}_{\{s\}}(\mathbb{Z}^d)} \mathcal{D}'_{\omega,loc}^{q\{t\}} \quad \text{i} \quad \mathcal{D}'_F^{\{t\}} = \bigcup_{k \leq 0} \mathcal{D}'_{k,loc}^{q\{t\}} = \bigcup_{\omega \in \mathcal{M}_{\{s\}}(\mathbb{Z}^d)} \mathcal{D}'_{\omega,loc}^{q\{t\}},$$

gde $\mathcal{E}^{\{t\}}$ je prostor svih ultradiferencijabilnih funkcija reda t tipa Rumijeja i $g \in \mathcal{D}'_F^{\{t\}}$ ako postoji ultradiferencijalni operator P klase $\{t\}$ i za neko G , neprekidna na \mathbb{R}^d , važi $g = P(D)G$, [39].

5.4 Množenje u prostorima periodičnih test funkcija

Uzmimo dve fiksne težinske funkcije $\omega \in \mathcal{M}_\nu$, $\nu \in \mathcal{M}_{\{t\}}(\mathbb{Z}^d)$ (uporedi (2.3.1)).

Definicija 5.4.1. Za $f_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f_{1,n} e_n \in \mathcal{P}l_\omega^{q_1\{t\}}$ i $f_2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f_{2,n} e_n \in \mathcal{P}l_\nu^{q_2\{t\}}$. definišemo njihov proizvod sa

$$f_1 f_2 := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f_n e_n, \text{ gde } f_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} f_{1,n-j} f_{2,j}, \quad n \in \mathbb{Z}^d.$$

Ova definicija nam dozvoljava da uvedemo množenje u lokalnim verzijama ovih prostora.

Teorema 5.4.2. Neka $f_1 \in \mathcal{P}l_{\omega, \text{loc}}^{q_1\{t\}}$ i $f_2 \in \mathcal{P}l_{\nu, \text{loc}}^{q_2\{t\}}$. Za $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $0 < \eta < 1$, pustimo da $\phi \in \mathcal{D}^{\{t\}}(I_{1,x_0})$ bude tako da $\phi(x) = 1$ za $x \in I_{\eta, x_0}$. Ako $f_{I_{\eta, x_0}} \in \mathcal{D}^{\{t\}}(I_{\eta, x_0})$ je restrikcija proizvoda $(\phi f_1)_p (\phi f_2)_p$ nad I_{η, x_0} , tada proizvod $f := f_1 f_2$, je dobro definisan.

Dokaz. Različiti izbori množitelja ϕ dovode do različite Furijeove koeficijente ali, prema propoziciji 5.3.2, imamo $f_{I_{\eta, x_0}} = f_{I_{\eta', x'_0}}$ nad $I_{\eta, x_0} \cap I_{\eta', x'_0}$. Prema tome $f_{I_{\eta, x_0}} = f \in \mathcal{P}l_{\omega, \text{loc}}^{q\{t\}}$ je dobro definisana kao i proizvod $f_1 f_2 := f$. \square

Propozicija 5.4.3. Neka $q, q_1, q_2 \in [1, \infty]$ su takvi da $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q} + 1$. Tada preslikavanja

$$\mathcal{P}l_\omega^{q_1\{t\}} \times \mathcal{P}l_\nu^{q_2\{t\}} \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathcal{P}l_\omega^{q\{t\}} \quad (5.4.1)$$

i

$$\mathcal{P}l_{\omega, \text{loc}}^{q_1\{t\}} \times \mathcal{P}l_{\nu, \text{loc}}^{q_2\{t\}} \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathcal{P}l_{\omega, \text{loc}}^{q\{t\}} \quad (5.4.2)$$

su neprekidna.

Dokaz. Jangova nejednakost (1.1.6) i (2.3.1) povlače

$$\|f_1 f_2\|_{\mathcal{P}l_\omega^{q\{t\}}} \leq C \|f_1\|_{\mathcal{P}l_\omega^{q_1\{t\}}} \|f_2\|_{\mathcal{P}l_\nu^{q_2\{t\}}},$$

tj. neprekidnost preslikavanja (5.4.1). Neprekidnost preslikavanja (5.4.2) sledi direktno iz neprekidnosti preslikavanja (5.4.1). \square

Analogna Posledici 2.3.11 je sledeća:

Posledica 5.4.4. *Ako $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$,*

$$k_1 + k_2 \geq 0, \quad k \leq \min\{k_1, k_2\}, \quad (5.4.3)$$

tada preslikavanja

$$\mathcal{D}'_{k_1}^{q_1\{t\}} \times \mathcal{D}'_{k_2}^{q_2\{t\}} \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathcal{D}'_k^{q\{t\}}$$

i

$$\mathcal{D}'_{k_1, \text{loc}}^{q_1\{t\}} \times \mathcal{D}'_{k_2, \text{loc}}^{q_2\{t\}} \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathcal{D}'_{k, \text{loc}}^{q\{t\}}$$

su neprekidna.

Dokaz. Nije nikakvo ograničenje ako pretpostavimo da $k_1 \geq 0$ i $k = k_2$. Jasno je da $k_1 \geq |k_2|$ mora da važi kako bi bilo ispunjeno $k_1 + k_2 \geq 0$. Neprekidnost tada sledi iz Propozicije 5.4.3 za $\omega(n) = e^{k_2|n|^{1/t}}$ i $\nu(n) = e^{k_1|n|^{1/t}}$ jer (2.3.1) važi u ovom slučaju. \square

5.5 Talasni front ultradistribucije

Talasni front ultradistribucije je obopštenje pojma talasnog fronta distribucije. Rezultate koji smo izložili u Odeljku 2.4 ćemo obopštiti.

U ovom odeljku ćemo opisati talasni front ultradistribucije $f \in \mathcal{D}'^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ preko Furijeovih koeficijenata periodičnog produžetka neke odgovarajuće lokalizacije ultradistribucije f u okolini $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Koristićemo slične ideje kao i kod odgovarajućeg problema za distribucije. Posmatraćemo samo ultradistribucije tipa Rumijea. Kod ultradistribucija tipa Berlinga, rezultati se izvode sa odgovarajućim promenama.

Definicija 5.5.1. *Za $t > 1$, $(x_0, \xi_0) \notin WF^{\{t\}}(f)$ ako postoje $\psi \in \mathcal{D}'^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ sa $\psi \equiv 1$ u okolini x_0 i otvoreni konus $\Gamma \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ koji sadrži ξ_0 tako da*

$$(\exists N > 0)(\exists C_N > 0)(\forall \xi \in \Gamma) |\widehat{\psi f}(\xi)| \leq C_N e^{-N|\xi|^{1/t}}. \quad (5.5.1)$$

Teorema 5.5.2. *Neka je $f \in \mathcal{D}'^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ i $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) Postoje $\phi \in \mathcal{D}^{\{t\}}(I_{\varepsilon, x_0})$, gde $\varepsilon \in (0, 1)$ i $\phi \equiv 1$ u okolini tačke x_0 i otvoreni konus Γ koji sadrži ξ_0 tako da

$$(\exists N \in \mathbb{Z}_+)(\exists C_N > 0)(\forall n \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d) \quad |\widehat{\psi}f(n)| \leq C_N e^{-N|n|^{1/t}}. \quad (5.5.2)$$

(ii) $(x_0, \xi_0) \notin WF^{\{t\}}(f)$.

Dokaz. Dokaz je sličan odgovarajućim dokazom kod distribucija koji je izložen u delu 2.4 i [51], ali mi ćemo ga detaljno izložiti radi kompletnosti. Sužavanjem konusne okoline tačke ξ_0 , možemo izabrati ψ u (5.5.1) sa proizvoljno malim nosačem u okolini tačke x_0 . Odavde (ii) povlači (i).

Neka je ispunjen uslov (i). Dokazaćemo da postoje konstanta ε' i otvoreni konus $\Gamma_1 \ni \xi_0$ tako da

$$\begin{aligned} & (\forall B \text{ ograničen skup u } \mathcal{D}^{\{t\}}(I_{\varepsilon', x_0})) (\forall N > 0) (\exists C'_N > 0) \\ & (\forall n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d) \quad \sup_{\varphi \in B} |\widehat{\varphi}f(n)| \leq C'_N e^{-N|n|^{1/s}}. \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

Biramo broj ε' takav da $\phi \equiv 1$ nad I_{ε', x_0} . Biramo otvoreni konus Γ_1 tako da $\xi_0 \in \Gamma_1$ i $\bar{\Gamma}_1 \subset \Gamma \cup \{0\}$. Neka $c \in (0, 1)$ je konstanta manja od rastojanja između granice $\partial\Gamma$ konusa Γ i preseka zatvarača $\bar{\Gamma}_1$ sa jediničnom sferom. Tada $\{y \in \mathbb{R}^d : (\exists \xi \in \Gamma_1)(|\xi - y| \leq c|\xi|)\} \subset \Gamma$. Neka je $B \subset \mathcal{D}^{\{t\}}(I_{\varepsilon', x_0})$ ograničeni skup. Iz $\phi\varphi = \varphi$, $\forall \varphi \in B$ vidimo da su $\widehat{\varphi}f(n)$ Furijeovi koeficijenti periodične ultradistribucije $(\varphi)_p(\phi f)_p$. Znači, za $\varphi \in B$ i $n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned} |\widehat{\varphi}f(n)| &= \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi}(j) \widehat{\phi}f(n-j) \right| \leq \left(\sum_{|j| \leq c|n|} + \sum_{|j| > c|n|} \right) |\widehat{\varphi}(j) \widehat{\phi}f(n-j)| \\ &=: I_1(n) + I_2(n) \end{aligned}$$

Ocenjujemo $I_1(n)$:

$$I_1(n) = \sum_{|n-j| \leq c|n|} |\widehat{\varphi}(n-j)| |\widehat{\phi}f(j)| \leq C \sup_{|n-j| \leq c|n|} |\widehat{\phi}f(j)|,$$

gde konstanta C zavisi samo od skupa B . Imajući u vidu da od $|n-j| \leq c|n|$ sledi $|j| \geq (1-c)|n|$, dobijamo

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi \in B, n \in \Gamma_1} e^{-N|n|^{1/t}} I_1(n) &\leq C \sup_{n \in \Gamma_1} e^{-N|n|^{1/t}} \sup_{|n-j| \leq c|n|} |\widehat{\phi}f(j)| \\ &\leq C \sup_{j \in \Gamma_{\xi_0}} (1-c)^{-N} e^{-N|j|^{1/t}} |\widehat{\phi}f(j)| = C(1-c)^{-N} C_N. \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

Sledi ocena izraza I_2 . Za ovaj cilj koristimo da $|n - j| \leq (1 + c^{-1})|j|$ ako $|j| \geq c|n|$. Od teoreme Pejli-Viner-a, postoje $M > 0, D > 0$ tako da

$$|\widehat{\phi f}(n - j)| \leq D e^{-M|n-j|^{1/t}}, \quad n, j \in \mathbb{Z}^d.$$

Ograničenost skupa $B \subset \mathcal{D}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$, povlači da

$$\sup_{\varphi \in B} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} e^{(M+N)|j|^{1/t}} |\widehat{\varphi}(j)| := K_N < \infty.$$

Štaviše, $\forall \varphi \in B$ važi

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \Gamma_1} e^{-N|n|^{1/t}} I_2(n) &\leq D \sup_{n \in \Gamma_1} e^{-N|n|^{1/t}} \sum_{|j| \geq c|n|} e^{M|n-j|^{1/t}} |\widehat{\varphi}(j)| \\ &\leq DC^{-N}(1 + c^{-1})^M K_N. \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

Od (5.5.4) i (5.5.5), dobijamo (5.5.3).

Sada sledi dokaz da $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$ od (5.5.3). Neka $\psi \in \mathcal{D}^{\{t\}}(I_{\varepsilon', x_0})$ je jednaka 1 u okolini tačke x_0 . Tada, skup $B = \{\varphi_\tau := \psi e_{-\tau} : \tau \in [0, 1]^d\}$ je ograničeni podskup u $\mathcal{D}^{\{t\}}(I_{\varepsilon', x_0})$. Odavde

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in [0, 1]^d} |\widehat{\psi f}(n + \tau)| &= \sup_{\tau \in [0, 1]^d} |\widehat{\varphi_\tau f}(n)| \leq \frac{C'_N}{e^{N|n|^{1/t}}}, \quad \forall n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d, \\ \sup_{\xi \in (\Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d) + [0, 1]^d} |e^{N|\xi|^{1/t}} \widehat{\psi f}(\xi)| &\leq (1 + 4d)^{N/2} C'_N. \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

Neka je Γ_2 otvoreni konus pravca ξ_0 tako da $\bar{\Gamma}_2 \subset \Gamma_1 \cup \{0\}$ i neka je konstanta c' tako izabrana da $\{y \in \mathbb{R}^d : (\exists \xi \in \Gamma_2)(|\xi - y| \leq c'|\xi|)\} \subset \Gamma_1$. Tada

$$\Gamma_2 \cap \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi|c' \geq 1\} \subset (\Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d) + [0, 1]^d.$$

Prema tome

$$\sup_{\xi \in \Gamma_2} e^{N|\xi|^{1/t}} |\widehat{\psi f}(\xi)| \leq \max\{C''_N, (1 + 4d)^{N/2} C'_N\} = C_N < \infty,$$

gde

$$C''_N = \sup_{\xi \in \Gamma_2, |\xi| < 1/c'} e^{N|\xi|^{1/t}} |\widehat{\psi f}(\xi)|.$$

Ovo znači da $(x_0, \xi_0) \notin WF^{\{t\}}(f)$ i teorema je dokazana. \square

5.6 Soboljevski talasni front ultradistribucije

Slično kao kod distribucija, uvodimo Soboljevski talasni front ultradistribucije Rumijeovog tipa. Kažemo da je $f \in \mathcal{H}_{(s)}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ ako $f \in \mathcal{S}'^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ i za svako $N > 0$

$$e^{N|\cdot|^{1/t}} \widehat{f} \in \mathcal{L}^2.$$

Posmatraćemo samo par $(0, \xi_0)$ umesto (x_0, ξ_0) jer se rezultati lako prenose na (x_0, ξ_0) .

Definicija 5.6.1. *Neka je $f \in \mathcal{D}'^{\{t\}}$ i $\xi_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Kažemo da je f mikrolokalno regularna u smislu Soboljeva u $(0, \xi_0)$, tj. $(0, \xi_0) \notin WF_S^{\{t\}}(f)$, ako postoji otvorena konusna okolina Γ tačke ξ_0 , $\eta \in (0, \frac{1}{2})$ i $\psi \in \mathcal{D}'^{\{t\}}((-\eta, \eta)^d)$, $\text{supp } \psi \subset (-\eta, \eta)^d$, tako da za svaki $N > 0$*

$$\int_{\Gamma} |\widehat{\psi f}(\xi)|^2 e^{2N|\xi|^{1/t}} d\xi < \infty. \quad (5.6.1)$$

Propozicija 5.6.2. *Neka je $f \in \mathcal{D}'^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$. Sledeća dva uslova su ekvivalentna:*

$(A_S^{\{t\}})$ *Postoji otvorena konusna okolina Γ tačke ξ_0 , $\psi \in \mathcal{D}'^{\{t\}}((-\eta, \eta)^d)$ gde $\eta \in (0, \frac{1}{2})$ je izabrano tako da za $\psi f = \sum_n a_n e_n$ važi*

$$\sum_{n \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} |a_n|^2 e^{2k|n|^{1/t}} < \infty, \quad (5.6.2)$$

$(B_S^{\{t\}})$ $(0, \xi_0) \notin WF_S^{\{t\}}(f)$

Dokaz. Neka je Γ_1 zatvoreni konus koji je sadržan u $\Gamma \cup \{0\}$ gde Γ je otvoreni konus. Tada

$$\sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} |\widehat{\psi f}(n)|^2 e^{2k|n|^{1/t}} \leq \int_{\Gamma} |\widehat{\psi f}(\xi)|^2 e^{2k|\xi|^{1/t}} d\xi < \infty.$$

Prema tome $(B_S^{\{t\}})$ povlači $(A_S^{\{t\}})$.

Dokažimo tvrdnju i u obratnom smeru. Koristimo sledeću lemu:

Lema 5.6.3. *Iskaz $(B_S^{\{t\}})$ je ekvivalentan sledećoj tvrdnji:*

$(WF_S^{\{t\}})$ Postoje otvorena konusna okolina Γ , $\varepsilon \in (0, 1)$ tako da za svakom ograničenom skupu $B \subset \mathcal{D}'^{\{t\}}((-\varepsilon, \varepsilon)^d)$

$$\sup_{\varphi \in B} \int_{\Gamma} \left| \widehat{f\varphi}(\xi) \right|^2 e^{2k|\xi|^{1/t}} d\xi < \infty. \quad (5.6.3)$$

Dokaz. Neka (5.6.1) važi za ψ , tako da $\psi \equiv 1$ nad $(-\eta, \eta)^d$. Uzmimo $\varepsilon < \eta$ i neka je skup B ograničen u $\mathcal{D}'^{\{t\}}((-\varepsilon, \varepsilon)^d)$. Tada $\varphi f = \varphi\psi f$ i

$$|\widehat{\varphi f}(\xi)| = |\widehat{\varphi\psi f}(\xi)| = |\widehat{\varphi} * \widehat{\psi f}(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Biramo otvoreni konus Γ_1 tako da $\overline{\Gamma_1} \subset \Gamma \cup \{0\}$. U [69] je pokazano da postoji $c \in (0, 1)$ za koje $\xi \in \Gamma_1$ i $\eta \notin \Gamma$ povlači $|\xi - \eta| > c \max\{|\xi|, |\eta|\}$. Imamo

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Gamma_1} \left| \widehat{\varphi} * \widehat{\psi f}(\xi) \right|^2 e^{2k|\xi|^{1/t}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_{\Gamma_1} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\varphi}(\eta)| e^{k|\eta|^{1/t}} \left| \widehat{\psi f}(\xi - \eta) \right| e^{k|\xi - \eta|^{1/t}} d\eta \right)^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &:= c(I_1 + I_2), \end{aligned}$$

gde

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\int_{\Gamma_1} \left(\int_{\Gamma} |\widehat{\varphi}(\eta)| e^{k|\eta|^{1/t}} \left| \widehat{\psi f}(\xi - \eta) \right| e^{k|\xi - \eta|^{1/t}} d\eta \right)^2 d\xi \right)^{1/2}, \\ I_2 &= \left(\int_{\Gamma_1} \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus \Gamma} |\widehat{\varphi}(\eta)| e^{k|\eta|^{1/t}} \left| \widehat{\psi f}(\xi - \eta) \right| e^{k|\xi - \eta|^{1/t}} d\eta \right)^2 d\xi \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

χ_{Γ} je karakteristična funkcija okoline Γ . Tada

$$\begin{aligned} &\left\| |\widehat{\varphi}(\eta)| e^{k|\eta|^{1/t}} * (\chi_{\Gamma} |\widehat{\psi f}(\eta)|) e^{k|\eta|^{1/t}} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)} \leq \\ &\leq \left\| |\widehat{\varphi}(\eta)| e^{k|\eta|^{1/t}} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)} \left\| (\chi_{\Gamma} |\widehat{\psi f}|)(\eta) e^{k|\eta|^{1/t}} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Iz $\sup_{\varphi \in B} \left\| |\widehat{\varphi}(\eta)| e^{k|\eta|^{1/t}} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)} < C_1$ i (5.6.1), dobija se da $I_1 \leq C_0 < \infty$.

Ostaje još da se nađe ograničenje integrala I_2 . Koristimo da ψf ima kompaktni nosač. Od teoreme Pejli-Vinera, postoje $D > 0$ i $M > 0$,

$$|\widehat{\psi f}(\eta)| \leq D e^{M|\eta|^{1/t}}, \quad \eta \in \mathbb{R}^d.$$

Kako $\varphi \in B$, za svako $k > 0$, postoji $C_k > 0$ tako da

$$|\widehat{\varphi}(\xi - \eta)| \leq C_N e^{(-k-t)|\xi - \eta|^{1/t}}.$$

Od načina na koji smo izabrali Γ_1 , imamo

$$I_2 \leq D \left(\int_{\Gamma_1} \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus \Gamma} |\widehat{\varphi}(\xi - \eta)| e^{(-k-t)|\xi - \eta|^{1/t}} e^{M|\xi - \eta|^{1/t}} d\eta \right)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Za neku drugu konstantu $D_1 > 0$ i dovoljno veliko $N > 0$, dobija se

$$I_2 \leq D_1 \left(\int_{\Gamma_1} \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus \Gamma} e^{-k|\xi|^{1/t}} e^{-k|\eta|^{1/t}} e^{M|\eta|^{1/t}} d\eta \right)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prema tome, $I_2 \leq \infty$. Ovim smo dokazali ekvivalenciju $(B_S^{\{t\}})$ i $(WF_S^{\{t\}})$. \square

Sada ćemo završiti dokaz Propozicije 5.6.2, tj. da $(A_S^{\{t\}})$ povlači $(B_S^{\{t\}})$. Uzmimo konus $\Gamma_{\xi_0} = \Gamma$ tako da (5.6.2) je ispunjeno za $\psi \in \mathcal{D}'^{\{t\}}((-\varepsilon, \varepsilon)^d)$. Neka je

$$B = \left\{ \varphi = \psi e^{i\tau}, \tau \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d \right\}.$$

Neka je Γ_0 otvoreni konus za koji $\overline{\Gamma_0} \subset \Gamma \cup \{0\}$. Iz (5.6.2) dobija se

$$\begin{aligned} & \sup_{\tau \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d} \sum_{n \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \langle n, \tau \rangle} e^{i \langle \xi, \tau \rangle} (\psi f)(\tau) d\tau \right|^2 e^{N|n|^{1/t}} \\ & \leq \sum_{n \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} \sup_{\tau \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d} |\widehat{\psi f}(n + \tau)| e^{N|n|^{1/t}} < \infty. \end{aligned}$$

Kako

$$\int_{\Gamma_0} |\widehat{\psi f}(\xi)|^2 e^{N|\xi|^{1/t}} d\xi \leq \sum_{n \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} \sup_{\tau \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d} |\widehat{\psi f}(n + \tau)| e^{N|n|^{1/t}} < \infty,$$

propozicija je dokazana. \square

Dodatak A

Elementi iz teorije Lokalno-konveksnih prostora

Sa X, Y , itd. označavamo vektorske prostore nad \mathbb{C} . Vektorski prostor X je *lokalno konveksan topološki vektorski prostor* ili kraće *lokalno konveksan prostor*, ako je topološki prostor i postoji familija \mathfrak{S} sastavljena od semi-norme tako da mreža x_ν u X konvergira ka z ako i samo ako $p(x_\nu - z) \rightarrow 0$ za svaku semi-normu $p \in \mathfrak{S}$. Proizvoljna familija \mathfrak{S} semi-normi na vektorskom prostoru X određuje jedinstvenu topologiju na X . Ova topologija se naziva *lokalno konveksna topologija definisana familijom \mathfrak{S}* .

Lokalno konveksna topologija definisana familijom semi-normi \mathfrak{S} je Hausdorfova ako i samo ako \mathfrak{S} zadovoljava uslov za normu u sledećem smislu:

$$[(\forall p \in \mathfrak{S})p(x) = 0] \Rightarrow x = 0.$$

Od sada pa nadalje, pretpostavljamo da je svaka lokalno konveksna topologija Hausdorfova sem ako nije drugačije naglašeno.

Propozicija A.0.1. *Topologija lokalno konveksnog prostora X je metrizablena ako i samo ako ona može biti definisana sa najviše prebrojivo mnogo semi-normi.*

Ako je topologija prostora X definisana konačnim brojem semi-normi, tada suma ovih semi-normi je norma, koja i sama definiše topologiju na X . To znači da je X normirani prostor.

Kaže se da je lokalno konveksni prostor X *kvazi-kompletan* ako je svaki ograničen zatvoren skup u njemu kompletan. Kompletan lokalno konveksni

prostor je kvazi-kompletan, i kvazi-kompletan lokalno konveksan prostor je sekvencijalno kompletan. Ako je X metrizable, tada ova tri koncepta su ista, ali u opštem slučaju oni su različiti jedan od drugog. Kompletan metrizable lokalno konveksan prostor naziva se Fréšetov prostor, ili (F) -prostor.

Opšta osobina uniformnih prostora je da je podskup lokalno konveksnog prostora X kompaktan ako i samo ako on je prekompaktan i kompletan.

Ako je X lokalno konveksan prostor, tada možemo posmatrati, pored originalnu topologiju na X , i lokalno konveksnu topologiju definisanu familijom semi-normi $\{|\langle x, x' \rangle| : x' \in X'\}$. Ova topologija prostora X naziva se slaba topologija i označava se sa $\sigma(X, X')$. Lokalno konveksan prostor X opremljen sa njegovom slabom topologijom označava se sa X_σ . Mreža $x_\nu \in X$ konvergira ka $x \in X$ u slabo topologiji ako $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle x_\nu, x' \rangle = \langle x, x' \rangle$ za svaki $x' \in X'$. Tada kažemo da x_ν konvergira slabo ka x .

Propozicija A.0.2. *Jaki dual (DF) -prostora je Fréšetov prostor.*

Teorema A.0.3 (Grotendik¹). *Jaki dual metrizable lokalno konveksnog prostora je (DF) -prostor.*

Dijagram

$$X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z \tag{A.0.1}$$

sastavljen od vektorskih prostora i linearnih preslikavanja među njima kažemo da je *tačan* u Y ako se slika $\text{Im } S$ poklapa sa jezgrom $\ker T$. Ukoliko su X , Y i Z lokalno konveksni prostori, a S i T topološki homomorfizmi, tada se kaže da je dijagram topološki tačan. Ako je X zatvoren linearan potprostor lokalno konveksnog prostora Y , Z je faktor-prostor Y/X , i ι i π su kanonična preslikavanja, tada je niz

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{\pi} Z \longrightarrow 0 \tag{A.0.2}$$

topološki tačan, tj. on je topološki tačan svuda. Ovde 0 označava lokalno konveksni prostor koji se sastoji samo od koordinatnog početka. Obrnuto, ako (A.0.2) je topološki tačan niz, tada on je izomorfan sa tačnim nizom povezan sa zatvorenim linearnim potprostorom i faktor-prostorom. Sledeća teorema je direktna posledica definicije i teoreme Hana-Banaha:

¹Alexander Grothendieck, francuski matematičar, 1928 – 2014.

Teorema A.0.4. *Ako (A.0.2) je topološki tačan niz, tada dijagram*

$$0 \longleftarrow X' \xleftarrow{\iota'} Y' \xleftarrow{\pi'} Z' \longleftarrow 0 \quad (\text{A.0.3})$$

sastavljen od dualnih prostora i dualnih preslikavanja je tačan niz.

Otuda sledi da (A.0.3) gde su X, Y i Z opremljeni slabim topologijama je takođe topološki tačan niz. Slično, (A.0.3) je topološki tačan niz sa slabim* topologijama u X', Y' i Z' . Međutim, u odnosu na jake topologije, ι' i π' su neprekidna linearna preslikavanja ali ne nužno homomorfizmi.

A.1 Projektivne granice lokalno konveksnih prostora

Neka je $\{u_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha : \alpha \in A\}$, familija linearnih preslikavanja iz vektorskog prostora X u lokalno konveksnim prostorima X_α . Tada postoji najslabija lokalno konveksna topologija na X u odnosu na koju sva u_α su neprekidna. Ova topologija se naziva (*generalizovana*) *projektivna lokalno konveksna topologija* u odnosu na sistem (X_α, u_α) . Ako je \mathfrak{S}_α familija seminormi koja definiše topologiju na X_α , tada

$$\mathfrak{S} = \{p \circ u_\alpha : \alpha \in A, p \in \mathfrak{S}_\alpha\}$$

je familija seminormi koja definiše projektivnu lokalno konveksnu topologiju na X . Ova topologija nije nužno Hausdorfova.

Ako $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ je vektorski prostor predstavljen kao direktan proizvod lokalno konveksnih prostora X_α i ako $u_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ su kanonične projekcije, tada projektivnu lokalno konveksnu topologiju nazivamo *direktan proizvod lokalno konveksnih topologija*. Dekartov proizvod X opremljen sa ovom topologijom je *direktan proizvod* lokalno konveksnih prostora X_α .

Dalje, ako je X linearan potprostor lokalno konveksnog prostora Y , i ako je $u : X \longrightarrow Y$ ulaganje, tada najslabija lokalno konveksna topologija u odnosu na koju je u neprekidno je tačno relativna topologija prostora X kao potprostora od Y .

Ako projektivna lokalno konveksna topologija je Hausdorfova, tada ona je kombinacija gornjih dva specijalnih slučajeva u sledećem smislu: Definišemo $u : X \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ sa $u(x) = (u_\alpha(x))$; tada u je injekcija radi pretpostavke da je X Hausdorfov. Projektivna lokalno konveksna topologija na X se tada

savpada sa relativnom topologijom na X posmatran kao linearni potprostor proizvoda $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ u odnosu na u . Obratno, ako preslikavanje u defisano gore je injekcija, tada projektivna lokalno konveksna topologija na X je Hausdorfova.

Sa druge strane, obične projektivne granice lokalno konveksnih prostora definišu se na sledeći način. Neka je A nasočeni skup i pretpostavimo da je za svaki $\alpha \in A$ dat lokalno konveksni prostor X_α zajedno sa neprekidnim linearnim preslikavanjima $u_\alpha^\beta : X_\alpha \rightarrow X_\beta$ definisane za svaki par (α, β) sa $\alpha > \beta$ i $u_\gamma^\alpha = u_\gamma^\beta \circ u_\beta^\alpha$ kad god $\alpha, \beta, \gamma \in A$ i $\alpha > \beta > \gamma$. Takav sistem $(X_\alpha, u_\beta^\alpha)$ naziva se *projektivni sistem lokalno konveksnih prostora*. Tada, definišemo *projektivnu granicu lokalno konveksnih prostora* X_α da bude projektivna granica

$$\text{proj lim } X_\alpha = \{(x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha : u_\beta^\alpha(x_\alpha) = x_\beta\} \quad (\text{A.1.1})$$

vektorskih prostora X_α opremljenom sa najslabijom lokalno konveksnom topologijom u odnosu na koju kanonična preslikavanja

$$u_\alpha : \text{proj lim } X_\alpha \rightarrow X_\alpha$$

koja su definisana sa $(x_\alpha) \rightarrow x_\alpha$ su neprekidna.

Pretpostavimo da su $(X_\alpha, u_\beta^\alpha)$ i $(Y_\alpha, u_\beta^\alpha)$ projektivni sistemi lokalno konveksnih prostora sa istim nasočenim skupom A kao njihovim indeksnim skupom. Ako je dato neprekidno linearno preslikavanje $T_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$, za svaki α , i ako ono zadovoljava

$$u_\beta^\alpha \circ T_\alpha = T_\beta \circ u_\beta^\alpha, \quad \text{za sve } \alpha > \beta$$

tada neprekidno linearno preslikavanje

$$T : \text{proj lim } X_\alpha \rightarrow \text{proj lim } Y_\alpha$$

koje se definiše sa $T(x_\alpha) = (T_\alpha x_\alpha)$, nazivamo *projektivnom granicom preslikavanja* T_α .

Neka $(X_\alpha : \alpha \in A)$ je projektivan sistem lokalno konveksnih prostora. Ako $\alpha : \Lambda \rightarrow A$ je preslikavanje koje zapažava red nasočenog skupa Λ sa kofinalnom slikom $\alpha(\Lambda)$ u A , tada projektivni sistem $(X_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ definisan sa $Y_\lambda = X_{\alpha(\lambda)}$ naziva se *podsystemom* originalnog projektivnog sistema. U ovom slučaju, lako je dokazati da

$$\text{proj lim}_\lambda Y_\lambda = \text{proj lim}_\alpha X_\alpha \quad (\text{A.1.2})$$

kao kanonični izomorfizam.

Od neprekidnosti u_β^α sledi da $\text{proj lim}_\alpha X_\alpha$ je zatvoreni linearni potprostor od $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Naročito, tačna je sledeća propozicija.

Propozicija A.1.1. *Ako X_α su kompletni (respektivno kvazi-kompletni ili sekvencijalno kompletni) prostori, tada projektivna granica $\text{proj lim } X_\alpha$ je takođe kompletan (respektivno kvazi-kompletan ili sekvencijalno kompletan) prostor.*

Kada skup A je skup prirodnih brojeva \mathbb{Z}_+ , je potrebno samo da odredimo neprekidna linearna preslikavanja $u_j^{j+1} : X_{j+1} \rightarrow X_j$ za svako $j \in \mathbb{Z}_+$. Ostala preslikavanja se opredeljuju kao proizvodi ovih preslikavanja. U ovom slučaju, često označavamo projektivni sistem pomoću dijagramom:

$$X_1 \xleftarrow{u_1^2} X_2 \xleftarrow{u_2^3} X_3 \xleftarrow{u_3^4} \dots \xleftarrow{u_{j-1}^j} X_j \xleftarrow{u_j^{j+1}} \dots \quad (\text{A.1.3})$$

Ako u ovom slučaju svi X_j su Banahovi prostori, tada projektivna granica $\text{proj lim } X_j$ je kompletan i metrizabilan lokalno konveksan prostor čija topologija je definisana prebrojivom familijom semi-normi. Važi i obratno

Teorema A.1.2. *Projektivna granica niza Banahovih prostora X_j je Frešetov prostor. Obrnuto, svaki Frešetov prostor može biti izražen kao projektivna granica niza Banahovih prostora.*

Slično se može pokazati da svaki lokalno konveksni prostor X je izomorfan sa gustim linearnim potprostorom projektivne granice $\text{proj lim } X_\alpha$ Banahovih prostora. Ako, štaviše, možemo izabrati projektivni sistem tako da za svaki $\alpha > \beta$, $u_\beta^\alpha : X_\alpha \rightarrow X_\beta$ nisu samo neprekidna nego i slabo kompaktna, tada se kaže da je X *Kōmura prostor*. Štaviše, ako možemo napraviti da sva preslikavanja u_β^α budu kompaktna, tada se kaže da je X *Švarcov prostor*.

Frešetov prostor koji je takođe i Švarcov prostor (respektivno, Kōmura prostor) kraće se naziva *(FS)-prostor* (respektivno, *(FK)-prostor*). Lokalno konveksni prostor X je (FS)-prostor (respektivno (FK)-prostor) ako i samo ako njega možemo izraziti kao projektivnu granicu niza Banahovih prostora X_j tako da svako $u_j^{j+1} : X_{j+1} \rightarrow X_j$ u (A.1.3) je kompaktno (respektivno slabo kompaktno). Zbog sledeće leme X_j mogu biti proizvoljni lokalno konveksni prostori. Naime, (FS)-prostor (respektivno (FK)-prostor) X je lokalno konveksan prostor koji se može izraziti kao projektivna granica $\text{proj lim } X_j$ niza lokalno konveksnih prostora X_j tako da svako preslikavanje $u_j^{j+1} : X_{j+1} \rightarrow X_j$ je kompaktno (respektivno slabo kompaktno).

Lema A.1.3. *Neka su X i Y lokalno konveksni prostori. Linearno preslikavanje $T : X \rightarrow Y$ je kompaktno (respektivno slabo kompaktno) ako i samo ako postoji Banahov prostor N tako da je T moguće razložiti kao proizvoda dva neprekidna linearna preslikavanja*

$$X \xrightarrow{T_1} N \xrightarrow{T_2} Y,$$

gde slika $T_2(B)$ jedinične lopte B u N je kompaktna (respektivno slabo kompaktna) skup. Štaviše, ako je T injekcija, tada T_1 i T_2 mogu da se izaberu da budu injekcije.

Teorema A.1.4. *Neka je $X = \text{proj lim } X_\alpha$ projektivna granica lokalno konveksnih prostora. Ako za svaki α postoji $\beta > \alpha$ tako da $u_\alpha^\beta : X_\beta \rightarrow X_\alpha$ preslikava svakog ograničenog skupa u relativno kompaktnom skupu (respektivno relativno slabo kompaktnom skupu), tada je X semi-Montelov prostor (respektivno semi-refleksivan prostor).*

Naročito, projektivne granice semi-Montelovih prostora (respektivno semi-refleksivnih prostora) su semi-Montelovi (respektivno semi-refleksivni).

Teorema A.1.5. *Neka je Y proizvoljan zatvoreni linearni potprostor projektivne granice $\text{proj lim } X_\alpha$ lokalno konveksnih prostora. Postavljamo*

$$Y_\alpha = [u_\alpha(Y)]_{X_\alpha}, \tag{A.1.4}$$

gde su $u_\alpha : \text{proj lim } X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ kanonična preslikavanja i $[\]_{X_\alpha}$ označava zatvarač u X_α . Tada, imamo kanonični izomorfizam

$$Y = \text{proj lim } Y_\alpha. \tag{A.1.5}$$

Naročito, neka je $Y = \text{proj lim } X_\alpha$. Tada dobijamo da svaki lokalno konveksan prostor kojeg je moguće izraziti kao projektivnu granicu uvek se može predstaviti kao granica projektivnog sistema X_α lokalno konveksnih prostora u koju slika $u_\alpha : \text{proj lim } X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ je gusti skup za sve α . Ovakav projektivan sistem se kaže da je *reduciran*.

Za razliku od slučaja zatvorenih linearnih potprostora, faktor-prostor projektivne granice, u opštem slučaju, nije projektivna granica faktor-prostora. Sledeća teorema daje gotovo jedini poznati dovoljan uslov. Nazvaćemo je lemom *Mitag-Lefler-a* jer argumenti koji se koriste su isti kao i u dokazu ove poznate teoreme.

Teorema A.1.6. *Neka je*

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{I_1} & Y_1 & \xrightarrow{P_1} & Z_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow u_1^2 & & \uparrow v_1^2 & & \uparrow w_1^2 & & \\
 0 & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{I_2} & Y_2 & \xrightarrow{P_2} & Z_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow u_2^3 & & \uparrow v_2^3 & & \uparrow w_2^3 & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & X_j & \xrightarrow{I_j} & Y_j & \xrightarrow{P_j} & Z_j & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow u_j^{j+1} & & \uparrow v_j^{j+1} & & \uparrow w_j^{j+1} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array} \tag{A.1.6}$$

projektivan niz od kratkih tačnih nizova abelovih grupa, tj. komutativan dijagram abelovih grupa i linearnih preslikavanja sa tačnim redicama. Tada je tačno sledeće:

(i) Niz projektivnih granica

$$0 \longrightarrow \text{proj lim } X_j \xrightarrow{I} \text{proj lim } Y_j \xrightarrow{P} \text{proj lim } Z_j \tag{A.1.7}$$

je tačan.

(ii) Ako su X_j kompletne metrizabilne abelove grupe, u_j^{j+1} su neprekidna, i za svaki j slika $u_j^{j+2}(X_{j+2})$ je gusti skup u skupu $u_j^{j+1}(X_{j+1})$ u odnosu na topologiju metrike X_j , tada niz

$$0 \longrightarrow \text{proj lim } X_j \xrightarrow{I} \text{proj lim } Y_j \xrightarrow{P} \text{proj lim } Z_j \longrightarrow 0 \tag{A.1.8}$$

je tačan.

(iii) Ako, pored pretpostavke u (ii), svaka redica u (A.1.6) je topološki tačan niz lokalno konveksnih prostora, u opštem slučaju, u odnosu na različite topologije od metričkih topologija u (ii), sva preslikavanja su neprekidna pod tim lokalno konveksnim topologijama, i metričke topologije u (ii) su jače nego lokalno konveksne topologije, tada (A.1.8) je topološki tačan niz lokalno konveksnih prostora.

Teorema A.1.7. *Zatvoreni linearni potprostori i faktor-prostori nekog (FS)-prostora (respektivno (FK)-prostora) su (FS)-prostori (respektivno (FK)-prostori).*

Za prebrojiv broj projektivnih granica $X_j = \text{proj lim}_k X_{j,k}$ nizova Banahovih prostora (ili lokalno konveksnih prostora), njihov direktan proizvod $\prod X_j$ je izomorfan projektivnoj granici niza

$$X_{1,1} \longleftarrow X_{1,2} \times X_{2,1} \longleftarrow X_{1,3} \times X_{2,2} \times X_{3,1} \longleftarrow \cdots$$

Prema tome dobijamo:

Teorema A.1.8. *Direktni proizvodi $\prod X_j$ i projektivne granice $\text{proj lim } X_j$ prebrojivo mnogo (FS)-prostora (respektivno (FK)-prostora) su takokode (FS)-prostori (respektivno (FK)-prostori).*

A.2 Induktive granice lokalno konveksnih prostora

Promenom smeru preslikavanja u prethodnom odeljku, dobijamo induktivne granice lokalno konveksnih prostora.

Neka je X vektorski prostor, i $u^\alpha : X_\alpha \rightarrow X$, $\alpha \in A$, je familija linearnih preslikavanja definisanim na lokalno konveksnim prostorima X_α . Tada najjača lokalno konveksna topologija na X u odnosu na koju svako u^α je neprekidno naziva se (*generalizovana*) *induktivna lokalno konveksna topologija* sistema (X_α, u^α) . Semi-norma p na X je neprekidna u odnosu na ovu lokalno konveksnu topologiju ako i samo ako $p \circ u^\alpha$ je neprekidna semi-norma na X_α za svaki α . Međutim, ova lokalno konveksna topologija nije nužno Hausdorfova čak i ako $\{u^\alpha(X_\alpha)\}$ generiše X . Naglašavamo da je ova topologija, u opštem slučaju, različita od induktivne topologije kao kod topološkog prostora, tj. najjače topologije u odnosu na koju svako u^α , $\alpha \in A$, je neprekidno.

Neka je $X = \bigoplus X_\alpha$ vektorski prostor koji se izražava kao direktna suma lokalno konveksnih prostora X_α i neka su $u_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$ kanonične injekcije. Tada induktivna lokalno konveksna topologija na X naziva se *lokalno konveksna direktna suma topologija* i direktna suma X opremljena sa ovom topologijom naziva se *direktna suma lokalno konveksnih prostora* X_α . Ako je \mathfrak{S}_α familija svih neprekidnih semi-normi na X_α , tada lokalno konveksna direktna suma topologija je lokalno konveksna topologija definisana sa svim semi-normama oblika

$$p(\bigoplus x_\alpha) = \sum_{\alpha} p_\alpha(x_\alpha), p_\alpha \in \mathfrak{S}_\alpha. \quad (\text{A.2.1})$$

Naročito, lokalno konveksna direktna suma topologija je Hausdorfova.

Topologija faktor-prostora na faktor-prostoru X/Y lokalno konveksnog prostora X je takođe induktivna lokalno konveksna topologija relativna kanoničnoj projekciji $X \rightarrow X/Y$.

Opšta induktivna lokalno konveksna topologija u odnosu na sistem (x_α, u^α) je kombinacija gornjih dva slučaja ako $\{u^\alpha(X_\alpha)\}$ generiše X . Naime, u ovom slučaju, preslikavanje $u : \oplus X_\alpha \rightarrow X$ definisano sa $u(\oplus x_\alpha) = \sum_\alpha u^\alpha(x_\alpha)$ je surjektivno, i možemo posmatrati X kao faktor-prostor direktne sume $\oplus X_\alpha$. Tada se induktivna lokalno konveksna topologija na X identifikuje sa topologijom faktor-prostora lokalno konveksne direktne sume topologija.

Slično, možemo definisati obične induktivne granice lokalno konveksnih prostora. Neka je X_α , $\alpha \in A$, familija lokalno konveksnih prostora sa nasočenim skupom A kao njen skup indeksa, i $u_\beta^\alpha : X_\alpha \rightarrow X_\beta$, $\alpha < \beta$, je familija neprekidnih linearnih preslikavanja koja zadovoljavaju $u_\gamma^\alpha = u_\gamma^\beta \circ u_\beta^\alpha$ svaki put kada $\alpha < \beta < \gamma$. Tada induktivna granica vektorskih prostora X_α je faktor-prostor

$$\text{ind lim } X_\alpha = \oplus X_\alpha / \sim \tag{A.2.2}$$

gde $\oplus X_\alpha / \sim$ je linearni potprostor generisan svim elementima čija vrednost u indeksu α je $x_\alpha \in X_\alpha$ i čija vrednost u indeksu β je $u_\beta^\alpha(x_\alpha)$ za par $\alpha < \beta$, a ostale vrednosti su jednaki 0. Definišemo kanonično preslikavanje $u^\alpha : X_\alpha \rightarrow \text{ind lim } X_\alpha$ da bude preslikavanje koje preslikava $x_\alpha \in X_\alpha$ u klasu ekvivalencije koja sadrži element čija vrednost u indeksu α je x_α , i 0 u drugom slučaju. Induktivna granica $\text{ind lim } X_\alpha$ opremljena najjačom lokalno konveksnom topologijom u odnosu na koju sva kanonična preslikavanja su neprekidna naziva se *induktivna granica lokalno konveksnih prostora* X_α . Kako se može videti iz (A.2.2), ovo je isto što i faktor-prostor direktne sume lokalno konveksnih prostora. Međutim, u ovom slučaju neprekidnost u_β^α ne povlači, u opštem slučaju, da linearni potprostor je zatvoren, i prema tome induktivna lokalno konveksna topologija nije nužno Hausdorfova. Navešćemo dovoljan uslov da ona postane Hausdorfova.

Propozicija A.2.1. *Ako svi lokalno konveksni prostori X_α su bačvasti (respektivno, kvazi-bačvasti ili bornološki), tada induktivna granica $\text{ind lim } X_\alpha$ takođe je bačvast (respektivno, kvazi-bačvast ili bornološki) prostor.*

Induktivni sistem niza lokalno konveksnih prostora moguće je izraziti pomoću sledećeg dijagrama

$$X_1 \xrightarrow{u_2^1} X_2 \xrightarrow{u_3^2} X_3 \xrightarrow{u_4^3} \dots \xrightarrow{u_j^{j-1}} X_j \xrightarrow{u_{j+1}^j} \dots \tag{A.2.3}$$

Ako je $u_{j+1}^j : X_j \rightarrow X_{j+1}$ izomorfizam nad svojom slikom za svako j , tada se niz naziva striktno induktivnim nizom. U ovom slučaju, svako X_j može se posmatrati kao linearnim potprostorom od X_{j+1} u odnosu na izomorfizam u_{j+1}^j , i induktivna granica X može se posmatrati kao unija: $X = \cup X_j$. Sledeća teorema dokazuje da ova identifikacija zapazuje topologiju.

Teorema A.2.2. *Ako (A.2.3) je striktan induktivan niz lokalno konveksnih prostora, tada kanonično preslikavanje $u^j : X_j \rightarrow \text{ind lim } X_j$ je izomorfizam svoje slike za svako j . Naročito, induktivna granica $\text{ind lim } X_j$ je Hausdorfova.*

Ako, pored toga, slika $u_{j+1}^j(X_j)$ je zatvoreni linearni potprostor od X_{j+1} za svaki j , tada kanonična slika $u^j(X_j)$ u $\text{ind lim } X_j$ je zatvoreni linearni potprostor za svaki j . Štaviše, svaki ograničeni skup B u $\text{ind lim } X_j$, je slika $u^j(B_j)$ ograničenog skupa B_j u X_j za neko j .

Lokalno konveksni prostor X se kaže da je (LF)-prostor ako on može biti izražen kao striktna induktivna granica niza Frešetovih prostora X_j . Naročito, ako svi X_j su (FS)-prostori (respektivno, (FK)-prostori), tada se kaže da je X (LFS)-prostor (respektivno, an (LFK)-prostor). Od propozicije A.2.1 i teoreme A.2.2, striktna induktivna granica kompletnih Montelovih prostora je Montelov prostor. Otuda, (LFS)-prostori su Montelovi prostori.

Sada razmatramo slučaj gde su preslikavanja u_{j+1}^j u induktivnom nizu (A.2.3) kompaktne (respektivno, slabo kompaktne) linearne injekcije. Tada, prema lemi A.1.3, moguće je naći Banahove prostore Y_j između X_j i X_{j+1} i injekcije $v_{j+1}^j : Y_j \rightarrow Y_{j+1}$ tako da dijagram

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_1 & & \xrightarrow{u_2^1} & X_2 & & \xrightarrow{u_3^2} & X_3 & \longrightarrow \dots \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \\
 & & & Y_1 & & \xrightarrow{v_2^1} & Y_2 & & \xrightarrow{v_3^2} & Y_3 & \longrightarrow \dots
 \end{array} \tag{A.2.4}$$

je komutativan i slika $v_{j+1}^j(B_j)$ jedinične topke B_j u Y_j je kompaktan (respektivno, slabo kompaktan) skup u Y_{j+1} za svaki j . Jasno je da je

$$\text{ind lim } X_j = \text{ind lim } Y_j$$

kanonični izomorfizam uključujući i topologije.

Teorema A.2.3. *Neka je (A.2.3) induktivan niz lokalno konveksnih prostora X_j i slabo kompaktnih linearnih injekcija u_{j+1}^j . Tada induktivna granica*

$X = \text{ind lim } X_j$ je Hausdorfov bornološki refleksivan (DF)-prostor. Svaki ograničen skup B u X je slika u odnosu kanoničnog preslikavanja $u^j : X_j \rightarrow X$ relativno slabo kompaktnog skupa B_j u neko X_j . Ako, štaviše, sva preslikavanja u_{j+1}^j su kompaktna, tada možemo izabrati, kao gore B_j , metrizabilanog relativno kompaktnog skupa, tako da $u^j : B_j \rightarrow B$ postaje homeomorfizam. Posebno, X je Montelov prostor i niz (x_j) konvergira u X ako i samo ako $x_j = u^j(y_j)$ za neki j i (y_j) konvergira u X_j . Štaviše, topološki prostor $\text{ind lim } X_j$ u ovom slučaju savpada se sa induktivnom granicom topoloških prostora X_j . Drugim rečima, skup S u X je zatvoren (respektivno, otvoren) ako i samo ako $(u^j)^{-1}(S)$ je zatvoren (respektivno, otvoren) u X_j za svaki j . Naročito, skup S u X je zatvoren ako i samo ako on je sekvencijalno zatvoren. Za proizvoljnog topološkog prostora Y , preslikavanje $f : X \rightarrow Y$ je neprekidno ako i samo ako ono je sekvencijalno neprekidno.

Ako lokalno konveksni prostor X je predstavljen kako je prikazano gore, kao induktivna granica niza lokalno konveksnih prostora sa kompaktnim (respektivno, slabo kompaktnim) linearnim injekcijama, kažemo da je X (DFS)-prostor (respektivno, (DFK)-prostor). Prema teoremi, ovi su prostori refleksivni (DF)-prostori.

Teorema A.2.4. *Ako je $(X_\alpha, u_\alpha^\alpha)$ reduciran projektivan sistem lokalno konveksnih prostora, tada je dual njegovom projektivnom granicom, kao vektorski prostor, kanonično izomorfan induktivnoj granici duala X'_α prostora X_α :*

$$(\text{proj lim } X_\alpha)' = \text{ind lim}(X'_\alpha) \quad (\text{A.2.5})$$

Štaviše, slaba topologija na $\text{proj lim } X_\alpha$ poklapa se sa topologijom projektivne granice slabih topologija na X_α :

$$(\text{proj lim } X_\alpha)_\sigma = \text{proj lim}(X_\alpha)_\sigma. \quad (\text{A.2.6})$$

Što se tiče jake topologije na X' , duali $u_\alpha' : X'_\alpha \rightarrow X'$ kanoničnih preslikavanja $u_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ definišu kao njihovu induktivnu granicu neprekidnu bijekciju

$$(\text{ind lim } X_\alpha)'_\beta \rightarrow \text{proj lim}(X_\alpha)'_\beta. \quad (\text{A.2.7})$$

Međutim ovo nije otvoreno preslikavanje u opštem slučaju. Sledeća teorema daje opšti dovoljni uslov da (A.2.7) bude izomorfizam.

Teorema A.2.5. *Neka je $(X_\alpha, u_\alpha^\beta)$ reduciran projektivan sistem lokalno konveksnih prostora. Ako za svaki α postoji $\beta \geq \alpha$ tako da u_α^β preslikava svakog*

ograničenog skupa u relativno slabo kompaktnom skupu, tada $\text{proj lim } X_\alpha$ je semi-refleksivan, i postoji prirodni izomorfizam

$$(\text{proj lim } X_\alpha)'_\beta = \text{ind lim}(X_\alpha)'_\beta \quad (\text{A.2.8})$$

Teorema A.2.6. *Za duala induktivne granice lokalno konveksnih prostora postoji kanonični izomorfizam između vektorskih prostora:*

$$(\text{ind lim } X_\alpha)' = \text{proj lim } X'_\alpha. \quad (\text{A.2.9})$$

Ako svaki ograničeni skup u $\text{proj lim } X_\alpha$ je slika ograničenog skupa u neki X_α , tada postoji prirodni izomorfizam lokalno konveksnih prostora

$$(\text{ind lim } X_\alpha)'_\beta = \text{proj lim } (X_\alpha)'_\beta. \quad (\text{A.2.10})$$

Kada (FS)-prostor (respektivno, (FK)-prostor) X je izražen kao projekтивna granica reduciranog kompaktnog (respektivno, slabo kompaktnog) niza Banahovih prostora $(X_j)_j$, $X = \text{proj lim } X_j$, onda jaki dual X' prostora X je, prema teoremi A.2.5, izomorfan induktivnoj granici $\text{ind lim } X'_j$. Niz Banahovih prostora X'_j zadovoljava uslove teoreme A.2.3.

Teorema A.2.7. *Jaki dual (FS)-prostora (respektivno, (FK)-prostora) je (DFS)-prostor (respektivno, (DFK)-prostor). Jaki dual (DFS)-prostora (respektivno, (DFK)-prostora) je (FS)-prostor (respektivno, (FK)-prostor).*

Takođe naglašavamo da ako niz neprekidnih linearnih funkcionala x'_k na (FS)-prostoru konvergira jako, tada on konvergira ravnomerno na nekoj okolini koordinatnog početka prostora X .

Primenjujući teoremu A.2.6 na nekom (LFS)-prostoru (respektivno, (LFK)-prostoru) $X = \text{ind lim } X_j$ vidimo da jaki dual X' poklapa se sa projekтивnom granicom $\text{proj lim } X'_j$, gde $(u_j^{j+1})' : X_{j+1}' \rightarrow X_j'$ je neprekidna otvorena surjeksija između (DFS)-prostora (respektivno, (DFK)-prostora) kao dual ulaganja $u_{j+1}^j : X_j \rightarrow X_{j+1}$ zatvorenog linearnog potprostora u refleksivni.

Teorema A.2.8. *Jaki dual (LFS)-prostora (respektivno, (LFK)-prostora) je (DLFS)-prostor (respektivno, (DLFK)-prostor), jaki dual (DLFS)-prostora (respektivno, (DLFK)-prostora) je (LFS)-prostor (respektivno, (LFK)-prostor). Ovi prostori su kompletni, bornološki i refleksivni. Štaviše, (LFS)-prostori i (DLFS)-prostori su Montelovi prostori.*

Sledeća teorema se naziva *dualna Mitag-Lefflerova lema*.

Teorema A.2.9. *Neka je*

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{I_1} & Y_1 & \xrightarrow{P_1} & Z_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow u_2^1 & & \downarrow v_2^1 & & \downarrow w_2^1 & & \\
 0 & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{I_2} & Y_2 & \xrightarrow{P_2} & Z_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow u_3^2 & & \downarrow v_3^2 & & \downarrow w_3^2 & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow u_j^{j-1} & & \downarrow v_j^{j-1} & & \downarrow w_j^{j-1} & & \\
 0 & \longrightarrow & X_j & \xrightarrow{I_j} & Y_j & \xrightarrow{P_j} & Z_j & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow u_{j+1}^j & & \downarrow v_{j+1}^j & & \downarrow w_{j+1}^j & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array} \tag{A.2.11}$$

induktivan niz kratkih tačnih nizova Abelovih grupa. Tada su tačni sledeći iskazi:

(i) *Niz induktivnih granica*

$$0 \longrightarrow \text{proj lim } X_j \xrightarrow{I} \text{proj lim } Y_j \xrightarrow{P} \text{proj lim } Z_j \longrightarrow 0 \tag{A.2.12}$$

je tačan.

(ii) *Ako svaki red u (A.2.11) je topološki tačan niz Banahovih prostora, i svako od preslikavanja u_{j+1}^j , v_{j+1}^j i w_{j+1}^j je slabo kompaktna injekcija, tada jaki dual od (A.2.12):*

$$0 \longleftarrow (\text{ind lim } X_j)'_{\beta} \xleftarrow{I'} (\text{ind lim } Y_j)'_{\beta} \xleftarrow{P'} (\text{ind lim } Z_j)'_{\beta} \longleftarrow 0 \tag{A.2.13}$$

je topološki tačan.

(iii) *Ako, pored datih uslova u (ii), induktivna granica $\text{ind lim } X_j$ je Montelov prostor, tada je (A.2.12) topološki tačan.*

Teorema A.2.10. *Zatvoreni linearni potprostori i faktor-prostori (DFS)-prostora su takođe (DFS)-prostori. Faktor prostori (DFK)-prostora su (DFK)-prostori. Prebrojive direktne sume $\oplus X_j$ i induktivne granice $\text{ind lim } X_j$ nizova (DFS)-prostora (respektivno, (DFK)-prostora) su (DFS)-prostori (respektivno, (DFK)-prostori).*

Zatvoreni linearni potprostor (DFK)-prostora ne mora da bude (DFK)-prostor.

Bibliografija

- [1] R. A. Adams, *Sobolev spaces. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, xviii+268 pp., 1975.
- [2] P. Antosik, J. Mikusiński, R. Sikorski, *Theory of distributions. The sequential approach*, Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam; PWN—Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1973.
- [3] R. Beals, *Advanced mathematical analysis. Periodic functions and distributions, complex analysis, Laplace transform and applications.* Graduate Texts in Mathematics, No. 12, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
- [4] A. Beurling, *Quasi-analyticity and general distributions*, Lectures 4 and 5, Amer. Math. Soc. Summer Inst., Stanford, 1961.
- [5] N. N. Bogoljubow, D.W. Schirkow *Probleme der Quantenfeldtheorie: II. Beseitigung der Divergenzen aus der Streumatrix* Fortschr. Phys. 4 (1956) 438–517
- [6] N. N. Bogoljubow, D.W. Schirkow *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, New York: Interscience, 1959.
- [7] J. Bonet and P. Domański, *Köthe coechelon spaces as locally convex algebras*, Studia Math. 199 (2010), 241–265.
- [8] R. W. Braun, R. Meise and B. A. Taylor, *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis*, Results Math. 17 (1990), 206–237.
- [9] Christian Brouder, Nguyen Viet Dang and Frédéric Hélein, *A smooth introduction to the wavefront set*, J. Phys. A: Math. Theory 47 (2014).

- [10] J.M. Bony, G. Grubb, L. Hörmander, H. Komatsu, J. Sjöstrand, *Microlocal Analysis and Applications: Lectures given at the 2nd Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held at Montecatini Terme, Italy, July 3-11, 1989*, Springer Berlin Heidelberg, 1991.
- [11] R. Carmichael, A. Kamiński and S. Pilipović, *Boundary Values and Convolution in Ultradistribution Spaces*, Series on Analysis, Applications and Computation - Vol. 1, World Scientific, Singapore, 2007.
- [12] S. Coriasco, K. Johanson, J. Toft, *Local wave-front sets of Banach and Fréchet types, and pseudo-differential operators*, *Monatsh. Math.* 169 (2013), 285–316.
- [13] S. Coriasco, K. Johanson, J. Toft, *Global wave-front sets of Banach, Fréchet and modulation space types, and pseudo-differential operators*, *J. Differential Equations* 254 (2013), 3228–3258.
- [14] D. Dolićanin - Đekić, S. Maksimović, P. Sokoloski, *Sequential approach to periodic ultradistributions*, preprint.
- [15] H. Epstein, V. Glaser, *The role of locality in perturbation theory*, *Ann. Inst. Henri Poincaré* 19 (1973), 211–95.
- [16] G.B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications - 2nd ed.*, John Wiley and Sons, Inc., 1999.
- [17] J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, Firmin Didot, Paris, 1822; Jacques Gabay, Sceaux, 1988.
- [18] F.G. Friedlander, M. Joshi, *Introduction to the theory of distributions*, Cambridge University Press, 1999.
- [19] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized functions, Properties and Operations, Vol.1*, Academic Press, New York, 1964.
- [20] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized functions, Spaces of Fundamental and Generalized Functions, Vol.2*, Academic Press, New York, 1968.
- [21] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized functions, Theory of Differential Equations, Vol.3*, Academic Press, New York, 1967.

- [22] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized functions, Applications of Harmonic Analysis, Vol.4*, Academic Press, New York, 1964.
- [23] V. I. Gorbačuk, M. L. Gorbačuk, *Trigonometric series and generalized functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (4) 257 (1981), 799-804, (Ruski).
- [24] V. I. Gorbačuk, *On Fourier series of periodic ultradistributions*, Ukrainian Math. J. (2) 34 (1982), 144-150. (Russian).
- [25] T. Gramchev, S. Pilipović and L. Rodino, *Classes of degenerate elliptic operators in Gelfand-Shilov spaces*, New developments in pseudo-differential operators, Oper. Theory Adv. Appl., Birkhäuser, Basel, 189 (2009), 15–31.
- [26] T. Gramchev, S. Pilipović and L. Rodino, *Global regularity and stability in S -spaces for classes of degenerate Shubin operators*, Pseudo-differential operators: complex analysis and partial differential equations, Oper. Theory Adv. Appl., Birkhäuser Verlag, Basel, 205 (2010), 81–90.
- [27] T. Gramchev, A. Lecke, S. Pilipović and L. Rodino, *Gelfand-Shilov type space through Hermite expansions*, Pseudo-Differential Operators and Generalized Functions, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 245 (2015), 95-105.
- [28] K. Gröchenig, *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser, 2001. ISBN 0817640223.
- [29] L. Hörmander, *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations*, Springer-Verlag, 1997.
- [30] L. Hörmander, *Fourier integral operators I*, Acta Math. 127, (1971), 79–183.
- [31] L. Hörmander, *Linear differential operators*, Actes Congr. Int. Math. Nice, 1 (1970), 121–133.
- [32] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I: Distribution theory and Fourier analysis*, Springer-Verlag, 1983.

- [33] K. Johansson, S. Pilipović, N. Teofanov, J. Toft, *Gabor pairs, and a discrete approach to wave-front sets*, Monatsh. Math. 166 (2012), 181–199.
- [34] K. Johansson, S. Pilipović, N. Teofanov, J. Toft, *Micro-local analysis in some spaces of ultradistributions*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 92(106) (2012), 124.
- [35] A. Kamiński, D. Perišić and S. Pilipović, *On various integral transformations of tempered ultradistributions*, Demonstratio Math. 33 (2000), 641–655.
- [36] R. P. Kanwal, *Generalized functions. Theory and applications*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.
- [37] G. Köthe, *Topological vector spaces II*, Vol. II, Springer-verlag, New York Inc., 1979.
- [38] H. Komatsu, *Ultradistributions, I: Structure theorems and a characterization*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 20 (1973), 25–105.
- [39] H. Komatsu, *Ultradistributions 1, Structural theorems for a characterization*, Jour. Fac. Sci, University of Tokyo. Section 1A, Mathematics 20(1973), 25–105.
- [40] H. Komatsu, *Ultradistributions, II: The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA 24 (1977), 607–628.
- [41] H. Komatsu, *Ultradistributions III: Vector valued distributions and the theory of kernels*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Mat. 29 (1982), 653–718.
- [42] H. Komatsu, *Microlocal Analysis in Gevrey Classes and in Complex Domains*, Lecture Notes in Math. 1726, Springer, Berlin (1989), 426–493.
- [43] H. Komatsu, *An introduction to the theory of generalized functions*, Lecture Notes, Tokyo, 1999.

- [44] H. Komatsu, *Generalized Functions and Operational Calculus Discussed by Fourier and Heaviside*, <http://www.math.technion.ac.il/mcwikel/j2/komatsu.ps> Function spaces, interpolation theory, and related topics : Proceedings of the international conference in honour of Jaak Peetre on his 65th birthday : Lund, Sweden, August 17-22, 2000
- [45] D. Kovačević and S. Pilipović, *Structural properties of the space of tempered ultradistributions*, Proc. Conf. on Complex Analysis and Generalized Functions, Varna 1991, Publ. House of the Bulgar. Acad. Sci., Sofia (1993), 206–237.
- [46] S. S. Kutateladze, *Sergei Sobolev and Laurent Schwartz*, Herald of the Russian Academy of Sciences, 74:2, (2005), 183-188.
- [47] S. S. Kutateladze, *Sobolev and Schwartz: Two fates and two fames*, J. Appl. Indust. Math., 2008, V. 2, No. 3, 301310.
- [48] M. Langenbruch, *Hermite functions and weighted spaces of generalized functions*, Manuscripta Math. 119 (2006), 269-285.
- [49] M. J. Lighthill, *Introduction to Fourier analysis and generalised functions*, Cambridge University Press, (1978).
- [50] S. Maksimović, Svetlana Mincheva-Kaminska, S. Pilipović, P. Sokoloski, *Sequential approach to the spaces of ultradistributions*, Publ.Inst.Math. Nouvelle série (Beograd), tome 100(114) (2016), 17–48.
- [51] S. Maksimovic, S. Pilipovic, P.Sokoloski, J. Vindas *Wave fronts of distributions via Fourier coefficients*. Publ.Inst.Math. Nouvelle série (Beograd), tome 97(111) (2015), 1–10.
- [52] S. Maksimović, P. Sokoloski, *Sequential approach to periodic ultradistributions*, to appear.
- [53] V. G. Mazya, *Sobolev spaces. (Translated from Russian)* Zbl 0692.46023, Berlin etc.: Springer-Verlag. xix, 486 p. (1985).
- [54] J. Mikusinski, *Sur la method de généralization de M. Laurent Schwartz et sur la convergence faible*, Fund. Math. 35 (1948), 235-239.
- [55] J. Mikusiński, *Une définition de distribution*, Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III 4 (1955), 589–591.

- [56] J. Mikusiński and R. Sikorski, *The elementary theory of distributions, I*, Dissertationes Math. 12 (1957).
- [57] J. Mikusiński and R. Sikorski, *The elementary theory of distributions, II*, Dissertationes Math. 25 (1961).
- [58] S. Mincheva-Kamińska, *A sequential approach to the convolution of Roumieu ultradistributions*, submitted.
- [59] M. Oberguggenberger, *Products of distributions*, J. Math. 365 (1986) 1–11.
- [60] M. Oberguggenberger, *Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations*, Pitman Research Notes in Mathematics, Longman Scientific & Technical (1992).
- [61] R. Paley, N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, AMS Coll. Publ. XIX, NY, 1934.
- [62] H. J. Petzsche and D. Vogt, *Almost analytic extension of ultradifferentiable functions and the boundary values of holomorphic functions*, Math. Ann. 267 (1984), 17–35.
- [63] S. Pilipović, *Tempered ultradistributions*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) 2-B (1988), 235–251.
- [64] S. Pilipovic, *Structural theorems for periodic ultradistributions*, Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1986), 261–266.
- [65] S. Pilipović, *Characterization of bounded sets in spaces of ultradistributions*, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994), 1191–1206.
- [66] S. Pilipović, B. Prangoski and J. Vindas, *On Quasianalytic Classes of Gelfand-Shilov Type. Parametrix and Convolution*, preprint (<http://arxiv.org/pdf/1507.08331.pdf>).
- [67] S. Pilipović, B. Stanković, *Teorija distribucija*, Math. Soc. 98 (1986).
- [68] S. Pilipović, N. Teofanov, J. Toft, *Micro-local analysis in Fourier Lebesgue and modulation spaces. Part I*, J. Fourier Anal. Appl. 17 (2011), 374–407.

- [69] S. Pilipović, N. Teofanov, J. Toft, *Micro-local analysis in Fourier Lebesgue and modulation spaces. Part II*, J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. 1 (3) (2010), 341 – 376.
- [70] S. Pilipović, N. Teofanov, J. Toft, *Singular support and FL_q continuity of pseudo-differential operators*, in *Approximation and Computation, a volume dedicated to 60th anniversary of G.V. Milovanovic (edited by W. Gautschi, G. Mastroianni, and Th.M. Rassias)*, Springer, (2010) 357 - 376.
- [71] Rivier D. *Une méthode de délimitation des infinités en théorie des champs quantifiés. Application au moment magnétique du neutron*, Helv. Phys. Acta 22(1949), 265–318.
- [72] A. P. Robertson, W. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 53, Cambridge University Press, 1964.
- [73] L. Rodino, *Linear Partial Differential Operators in Gevrey Spaces*, World Scientific, 1993.
- [74] *Sur quelques extensions de la notion de distributions*, Sci. École Norm. Sup. Paris, 3 sér., 77 (1960), 41–121.
- [75] C. Roumieu, *Ultra-distributions définies sur \mathbb{R}^n et sur certaines classes de variétés différentiables*, J. Analyse Math., 10 (1962-63), 153–192.
- [76] M. Ruzhansky, V. Turunen, *Quantization of pseudo-differential operators on the torus*, J. Fourier Anal. Appl. 16 (2010), 943–982.
- [77] M. Ruzhansky, V. Turunen, *Pseudo-differential operators and symmetries. Background analysis and advanced Topics*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.
- [78] M. Sato, *Hyperfunctions and partial differential equations*, Proc. Int. Conf. on Funct. Anal, and Rel. Topics, Tokyo University Press, Tokyo (1969), 91–94.
- [79] M. Sato, *Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations*, Actes Congr. Int. Math. Nice 1970, 2, 785–794.

- [80] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara, *Hyperfunctions and pseudodifferential equations*, Springer Lecture Notes in Math. 287,(1973), 265–529.
- [81] L. Schwartz, *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques*, Annales Univ. Grenoble, 21 (1945), pp. 57–74.
- [82] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Tome I. Hermann, Paris, 1950.
- [83] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Tome II. Hermann, Paris, 1951.
- [84] L. Schwartz, *Transformation de Laplace des distributions*, Comm. Sém. Math. Univ. Lund (1952), 196–206.
- [85] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.
- [86] L. Schwartz, *Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions*, C. R. Acad. Sci. Paris 239 (1954), 847–848.
- [87] J.S. Silva, *Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions*, Rev. Faculdade Ciencias, Lisboa, 2^o série A 4, (1954-56) 79-186.
- [88] K. Skórnik, *Hereditarily periodic distributions*, Studia Math. 43 (1972), 245–272.
- [89] S. L. Soboleff, *Le problème de Cauchy dans l'espace des fonctionnelles*, C. R. Acad. Sci. URSS, 3:7, (1935), 291–294.
- [90] S. L. Sobolev, *Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales*, Mat. Sbornik, 1, (43), (1936), 39–72.
- [91] S. L. Sobolev, *Introduction to the Theory of Cubature Formulas*, Moscow: Nauka, 1974.
- [92] S. L. Sobolev, *Some applications of functional analysis in mathematical physics. Translated from the third Russian edition by Harold H. McFadden. With comments by V. P. Palamodov*, Translations of Mathematical Monographs, 90. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991. viii+286 pp. ISBN: 0-8218-4549-7

- [93] R. Strichartz, *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*, (Studies in Advanced Mathematics) CRC Press, 1994.
- [94] E.C.G. Stueckelberg, D.Rivier, *Causalité et structure de la matrice S*, Helv. Phys. Acta 23(1950), 215–22.
- [95] E.C.G. Stueckelberg, T.A. Green, *Elimination des constantes arbitraires dans la théorie des quanta*, Helv. Phys. Acta 24 (1951) 153–174
- [96] J. Synowiec *Distributions: The evolution of a mathematical theory*, Historia Math. Vol. 10, Issue 2, May (1983), 149–183.
- [97] A. Szász, *Periodic generalized functions*, Publ. Math. (Debrecen) 25 (1978), 227–235.
- [98] L. Tartar, *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces (Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana)*, Springer (2007).
- [99] G. Temple, *Theories and applications of generalised functions*, J. London Math. Soc. 28, (1953), 134–148.
- [100] G. Walter, *Pointwise convergence of distribution expansions*, Studia Math. 26 (1966), 143–154.
- [101] J. Vindas, R. Estrada, *Distributional point values and convergence of Fourier series and integrals*, J. Fourier Anal. Appl. 13 (2007), 551–576.
- [102] D. Vogt, *Sequence space representations of spaces of test functions and distributions. Functional analysis, holomorphy, and approximation theory* (Rio de Janeiro, 1979), pp. 405–443, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 83, Dekker, New York, 1983.
- [103] A. H. Zemanian, *Generalized integral transforms*, Interscience, New York, 1968.

Kratka Biografija



Petar Jordan Sokoloski

Adresa: ul. „Todor Proeski” br.37, Kruševo, Republika Makedonija

Broj telefona: +389 (0)78 441654

e-mail: petar@pmf.ukim.mk, petar.sokoloski@gmail.com

Datum i mesto rođenja: 19.06.1979, Bitola,
Republika Makedonija

Državljanstvo: Republika Makedonija

Obrazovanje: 2010.

Magistar matematičkih nauka,
sa prosekom 10.00,
Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet Sveti Kiril i Metodij u Skoplju,
Magistarski rad:
*„Skupovi tačaka radijalne neprekidnosti
holomorfnih funkcija na jediničnom disku”*

2003.

Diplomirani matematičar,
sa prosekom 9.55,
Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet Sveti Kiril i Metodij u Skoplju,

Radno iskustvo: 2010-danas

asistent,
Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet Sveti Kiril i Metodij u Skoplju

2010-2014.

mlađi asistent,
Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet Sveti Kiril i Metodij u Skoplju

Bibliografija-radovi:

A. Blazevski, P. Sokolowski, *Conceptual introduction to unique-valued sequences*, Poceedings of III Congress of mathematicians of Macedonia, Struga

2005.

D. Dolićanin-Đekić, S. Maksimović, P. Sokoloski, *Wave Fronts of Ultradistributions Via Fourier Series Coefficients*, Bull. math. de la Soc. des math. de la Rép. de Macédoine, Vol. 39 (LXV) No. 2 (2015), 53-59.

B. Ilievski, S. Brsakoska, P. Sokoloski, *Two substitutions in one special non-homogenous Vecua equation*, Bull. math. de la Soc. des math. de la Rép. de Macédoine, Tome LVII, Skopje 2007.

S. Mincheva-Kamińska, S. Maksimović, S. Pilipović and P. Sokoloski, *A Sequential approach to ultradistribution spaces*, Publ. Inst. Math. Beograd, 100 (114)(2016), 17-48.

S. Maksimović, P. Sokoloski, *Sequential approach to periodic ultradistributions*, to appear in Proceedings of the 5-th Mathematical Conference of the Republic of Srpska.

S. Maksimović, S. Pilipović, P. Sokoloski and J. Vindas, *Wave Fronts Via Fourier Series Coefficients*, Publ. Inst. Math. Beograd, 97 (111)(2015), 1-10.

Lj. Nastovski, P. Sokoloski, Nacevska B. *Example of a holomorphic function on a unit disc without radial limits*, Proceedings of the V Congress of mathematicians of Macedonia, Vol. 2 (2015), 41-43.

Novi Pazar, 2016

Petar Sokoloski

Identifikaciona strana doktorske disertacije

I. Autor

Ime i prezime: Petar Sokoloski

Datum i mesto rođenja: 19.06.1979. Bitola, Republika Makedonija.

Sadašnje zaposlenje: asistent na Prirodno-matematičkom fakultetu pri Univerzitetu „Sv. Kiril i Metodij“ u Skoplju.

II. Doktorska disertacija

Naslov: Prostori periodičnih distribucija, ultradistribucija i talasni front.

Broj stranica: xv+140.

Broj slika: 0.

Broj bibliografskih podataka: 103.

Ustanova i mesto gde je rad izrađen: Državni Univerzitet u Novom Pazaru, Departman za matematičke nauke, „Vuka Karadžića“ bb, Novi Pazar.

Naučna oblast: Matematika (Funkcionalna analiza).

III. Ocena i odbrana

Datum prijave teme:

Broj odluke i datum prihvatanja doktorske disertacije:

Komisija za ocenu podobnosti teme i kandidata:

Predsednik:

Član:

Član:

Komisija za ocenu doktorske disertacije:

Predsednik:

Član:

Član:

Datum odbrane doktorske disertacije: