

Универзитет у Београду

Архитектонски факултет

Саша М. Ђорђевић

**ГЕОМЕТРИЈСКА И СТРУКТУРНА  
ТРАНСФОРМАЦИЈА ГЕОДЕЗИЈСКИХ  
КУПОЛА ИЗ УСЛОВА ИНДУСТРИЈСКЕ  
ПРЕФАБРИКАЦИЈЕ ГРАЂЕЊА**

Докторска дисертација

Београд, 2016

University of Belgrade

Faculty of Architecture

Saša M. Đorđević

**GEOMETRIC AND STRUCTURAL  
TRANSFORMATION OF THE GEODESIC  
DOMES FROM THE CONDITIONS OF  
INDUSTRIAL PREFABRICATION BUILDING**

Doctoral dissertation

Belgrade, 2016

Ментор:

Др Милан Глишић, професор у пензији,

Универзитет у Београду, Архитектонски факултет

Чланови комисије:

- Др Милан Глишић, професор у пензији,  
Универзитет у Београду, Архитектонски факултет;
- Др Љиљана Петрушевски, редовни професор,  
Универзитет у Београду, Архитектонски факултет;
- Др Татјана Кочетов-Мишулић, доцент,  
Универзитет у Новом Саду, Факултет техничких наука.

Датум одбране докторске дисертације: \_\_\_\_\_

# **ГЕОМЕТРИЈСКА И СТРУКТУРНА ТРАНСФОРМАЦИЈА ГЕОДЕЗИЈСКИХ КУПОЛА ИЗ УСЛОВА ИНДУСТРИЈСКЕ ПРЕФАБРИКАЦИЈЕ ГРАЂЕЊА**

## **Резиме**

Геодезијска купола припада широј групи полиедарских куполастих структура. Њену структуру чини триангулисана мрежа штапова, која, заједно са сферном формом, чини основу њене крутости и стабилности. С друге стране, полиедарска куполаста структура са странама које нису у облику троугла, може бити стабилна уколико је формирана од површинских конструктивних елемената или од таквих конструктивних склопова линијских елемената, који њеним странама обезбеђују стабилан и недеформабилан облик. У том контексту, обликовање страна полиедарске куполе своди се на генерисање конструктивног склопа који је стабилан у својој равни.

Разматран конструктивни склоп формиран је од крутих штапова и меких затега, постављених у два појаса и раздвојених разупирачем. Променом дужине разупирача формиран конструктивни склоп се преднапреже, чиме му се, поред већ евидентне стабилности, обезбеђује и потребна крутост.

Наведени конструктивни склоп представља функционални елемент, који може бити произведен у условима индустријске производње, чиме се постиже већа прецизност и квалитет у његовој изради и који може бити рационалан у градњи куполастих структура. Даља рационализација примене функционалних елемената у градњи полиедарских структура омогућена је трансформацијом њене геометрије.

Полиедарска структура, формирана од функционалних елемената, захтева дефинисање посебних принципа обликовања и функционалне организације. Геометрија полиедарске куполасте структуре се може генерисати



мултипликацијом једног полигона или групе полигона, око другог. Различити облици и комбинације наведених полигона могу генерисати различиту геометрију полиедарских купола.

Генерисање геометрије полиедарских купола омогућено је анализом досадашњег фонда сазнања из области генерисања облика (теселације еуклидске равни) и тела-полиедара, правилним полигонима. Тиме је постављена основа за даља истраживања и проширење класификације на полиедарске куполе неправилне форме.

Извршена класификација полиедарских купола, осим геометријских принципа обликовања, мора испунити и статичко-конструктивне принципе обликовања таквих структура, што води ка унапређењу процеса планирања и реализације рационалних куполастих структура, уз истовремено боље искоришћење ресурса.

Резултати истраживања показују да се може формирати врло рационална полиедарска куполаста структура од преднапрегнутих функционалних елемената, чији су контурни штапови од дрвета. Основне предности овако формиране структуре су мали утрошак материјала, једноставан систем међусобних веза функционалних елемената, независно одређивање висине и распона куполасте структуре, формирање ослоначке конструкције једноставне геометрије и тако даље.

## Кључне речи

Полиедарска куполаста структура, геодезијска купола, преднапрегнути функционални елемент, просторна структура, лака тродимензионална структура, конструктивни системи, двопојасне viseће структуре, конструктивни елементи, индустријска префабрикација

Научна област: Архитектура и урбанизам

Ужа научна област: Архитектонско конструктерство

УДК број: 624.074.2:72.012(043.3)

# **GEOMETRIC AND STRUCTURAL TRANSFORMATION OF THE GEODESIC DOMES FROM THE CONDITIONS OF INDUSTRIAL PREFABRICATION BUILDING**

## **Summary**

The geodesic dome belongs to a wider group of polyhedron dome-shaped structures. Its structure contains triangulate mesh of members, which forms the basis of its stiffness and stability, together with the spherical form. On the other hand, a polyhedron dome-shaped structure with sides that are not in triangular form can be stable if it is formed from surface structural elements or from such a structural configuration of linear elements, which provides its sides a stable and undeformable shape. In this context, the formation of the polyhedron dome sides comes down to generating a stable structural system in its plane.

The considered structural system is formed from rigid members and soft suspension rods arranged in two layers and separated by a span piece. By changing the length of the span piece, the formed structural system is prestressed. The necessary stiffness is obtained, as well as the evident stability.

Aforementioned structural system represents a functional element, which can be industrially produced. Thus greater precision and quality is achieved in its production and it may be rational in the construction of the dome structures. Further rationalisation of the application of functional elements in the construction of polyhedron structures is enabled by the transformation of its geometry.

The polyhedron structure formed of functional elements requires defining the specific principles of design and functional organisation. The geometry of the polyhedron dome-shaped structure can be generated by multiplying a polygon or a group of polygons around another polygon. Various forms and combinations of those polygons can generate different geometry of polyhedron domes.

Generating polyhedron domes geometry is enabled by the analysis of knowledge so far in the field of generating forms (tessellation of the Euclidean plane) and polyhedron systems, with regular polygons. This creates the basis for further research and extension of the classification of polyhedron dome irregularly formed.

The performed classification of polyhedron domes must fulfil not only the geometric design principles, but also the static-constructive design principles, which leads to the improvement of the planning process and realisation of rational dome-shaped structures, with the better use of resources.

The research results show that a very rational polyhedron dome-shaped structure can be formed of prestressed functional elements, whose contour members are made of wood. The basic advantages of such structures are low consumption of materials, simple system of interconnected functional elements, independent determination of the level and span of dome-shaped structures, the formation of the supporting structures of simple geometry, etc.

### Key words

Polyhedron dome-shaped structures, a geodesic dome, prestressed functional element, space structure, light three-dimensional structures, structural systems, two-layered hanging structures, structural elements, industrial prefabrication

Scientific field: Architecture and Urbanism

Specific scientific field: Structural engineering in architecture

UDC: 624.074.2:72.012(043.3)

# Садржај

Преглед илустрација .....	X
Преглед табела .....	XVIII
Преглед коришћених ознака.....	XX
1 Увод .....	1
1.1 Проблем и предмет истраживања .....	1
1.2 Циљеви истраживања.....	4
1.3 Основне хипотезе истраживања.....	5
1.4 Задаци истраживања.....	7
1.5 Методологија истраживања.....	7
1.6 Научна оправданост истраживања.....	8
2 Индустриска префабрикација у изградњи структура .....	12
2.1 Префабрикована израда функционалних елемената.....	12
2.2 Аспекти рационалне примене префабрикованог система.....	14
2.2.1 Технолошка флексибилност префабрикованог система .....	15
2.2.2 Степен индустријализације префабрикованог система.....	16
2.2.3 Статичко-конструктивна својства примене префабрикованог система.....	18
2.2.3.1 Хоризонтални транспорт функционалних елемената .....	19
2.2.3.2 Вертикални транспорт функционалних елемената .....	20
2.2.3.3 Монтажа функционалних елемената .....	21
3 Генерисање облика и тела полигонима.....	22
3.1 Теселације еуклидске равни .....	22
3.1.1 Генерисање теселација равни .....	22
3.1.2 Приказ теселација равни .....	23
3.2 Полиедри .....	27
3.2.1 Основне дефиниције .....	27
3.2.2 Основне дефиниције о полиедрима.....	28
3.2.3 Платонових полиедри .....	36
3.2.3.1 Генерисање Платонових полиедара .....	38
3.2.3.2 Преглед Платонових полиедара .....	39
3.2.3.3 Геометријске карактеристике Платонових полиедара .....	40
3.2.4 Архимедових полиедри .....	42
3.2.4.1 Генерисање Архимедових полиедара .....	42

3.2.4.2	Преглед Архимедових полиедара .....	44
3.2.4.3	Геометријске карактеристике Архимедових полиедара .....	47
3.2.5	Каталанови полиедри.....	49
3.2.5.1	Преглед Каталанових полиедара.....	50
3.2.5.2	Геометријске карактеристике Каталанових полиедара.....	52
3.2.6	Џонсонови полиедри.....	53
3.2.6.1	Енумерација Џонсонових полиедара .....	54
3.2.6.2	Преглед основних Џонсонових полиедара.....	54
3.2.6.3	Геометријске карактеристике Џонсонових полиедара .....	56
3.3	Геодезијске сфере.....	56
3.3.1	Основне дефиниције .....	57
3.3.2	Фреквенција и класа геодезијске сфере .....	59
3.3.3	Икосаедарска геодезијска сфера.....	67
4	Обликовање полиедарских куполастих структура (ПКС).....	73
4.1	Геодезијске сферне структуре у архитектури.....	73
4.1.1	Истраживања Бакминстера Фулера.....	74
4.1.2	Геодезијске куполе.....	78
4.1.2.1	Форма геодезијске куполе.....	79
4.1.2.2	Структура геодезијске куполе .....	81
4.1.2.3	Рационалност коришћења геодезијске куполе.....	84
4.1.2.4	Предности и недостаци геодезијске куполе .....	86
4.2	Основни принципи обликовања ПКС .....	87
4.2.1	Дефинисање смерница у обликовању ПКС .....	88
4.2.2	Обликовање ПКС у складу са дефинисаним смерницама .....	89
4.2.2.1	Геометријска трансформација полиедарске куполе.....	90
4.2.2.2	Функционална трансформација геодезијске куполе .....	93
4.2.2.3	Обликовање преднапрегнутих функционалних елемената .....	96
4.2.3	Економичност ПКС.....	98
4.3	Карактеристике ПКС.....	100
4.3.1	Геометријска флексибилност ПКС.....	102
4.3.1.1	Фиктивни хоризонтални прстенови .....	102
4.3.1.2	Независно одређивање висине и распона ПКС .....	103
4.3.1.3	Облици основа ПКС .....	104
4.3.1.4	Форме ПКС.....	105
4.3.1.5	Мултипликација ПКС.....	105
4.3.1.6	Распони ПКС .....	107
4.3.2	Префабрикација функционалних елемената .....	108
4.3.2.1	Производња функционалних елемената.....	108
4.3.2.2	Транспорт функционалних елемената .....	110

4.3.2.3	Монтажа структуре.....	111
5	Класификација полиедарских купола.....	118
5.1	Теселација куполе.....	119
5.1.1	Геометријска трансформација теселације еуклидске равни .....	119
5.1.2	Геометријска трансформација теселације сфере .....	121
5.1.3	Генерисање нове теселације куполе.....	122
5.2	Принципи генерисања геометрије полиедарских купола.....	123
5.2.1	Основне дефиниције .....	123
5.2.2	Параметарски подаци о геометрији полиедарске куполе .....	125
5.2.3	Законитости у генерисању геометрије полиедарске куполе.....	126
5.3	Енумерација полиедарских купола.....	127
5.4	Фазе генерисања геометрије полиедарских купола .....	128
5.4.1	Одређивање положаја фиктивних прстенова .....	129
5.4.2	Одређивање положаја примарних темена.....	131
5.4.3	Одређивање положаја секундарних темена.....	132
5.4.3.1	Секундарно теме у пресеку три равни .....	132
5.4.3.2	Секундарно теме у пресеку две равни и сфере .....	134
5.5	Геометрија полиедарских купола .....	136
5.5.1	Генерисање геометрије полиедарских купола кроз класе.....	138
5.5.1.1	Генерисање геометрије полиедарских купола класе 4.....	138
5.5.1.2	Генерисање геометрије полиедарских купола класе 5.....	139
5.5.1.3	Генерисање геометрије полиедарских купола класе 6.....	139
5.5.2	Полиедарске куполе фамилије 4.....	140
5.5.2.1	Полиедарске куполе класе 4 .....	140
5.5.2.2	Полиедарске куполе класе 5 .....	146
5.5.2.3	Полиедарске куполе класе 6 .....	151
5.5.3	Полиедарске куполе фамилије 5.....	156
5.5.3.1	Полиедарске куполе класе 4 .....	156
5.5.3.2	Полиедарске куполе класе 5 .....	161
5.5.3.3	Полиедарске куполе класе 6 .....	167
5.5.4	Полиедарске куполе фамилије 6.....	173
5.5.4.1	Полиедарске куполе класе 4 .....	173
5.5.4.2	Полиедарске куполе класе 5 .....	178
5.5.4.3	Полиедарске куполе класе 6 .....	184
6	ПКС од преднапрегнутих функционалних елемената са контурним штаповима од дрвета.....	190
6.1	Карактеристике материјала .....	190
6.2	Геометрија ПКС.....	193
6.2.1	Одређивање положаја фиктивних прстенова .....	195

6.2.2	Одређивање положаја примарних темена.....	196
6.2.3	Одређивање положаја секундарних темена.....	197
6.2.4	Координате темена.....	197
6.2.5	Геометрија функционалних елемената .....	201
6.2.6	Геометрија ослоначког прстена .....	206
6.3	Обликовање веза у структури .....	207
6.3.1	Везе у оквиру функционалних елемената.....	208
6.3.1.1	Веза контурних штапова међусобно и са затегама.....	209
6.3.1.2	Разупирач и његова веза са затегама.....	211
6.3.2	Међусобне везе функционалних елемената .....	212
6.3.3	Везе функционалних елемената са ослоначким прстеном.....	213
6.4	Оптерећење ПКС .....	214
6.5	Анализа виртуелног модела ПКС .....	216
6.5.1	Димензионисање елемената структуре .....	230
6.5.2	Кројне листе контурних штапова функционалних елемената.....	232
6.5.3	Утрошак материјала у реализацији структуре .....	234
7	Закључак.....	237
	Литература .....	241
	Биографија аутора .....	246

## Преглед илустрација

Слика 3-1) Генерисање теселације равни мултипликацијом правилног полигона	23
Слика 3-2) Правилне теселације .....	24
Слика 3-3) Полуправилне теселације .....	24
Слика 3-4) Међусобна дуалност правилних теселација .....	25
Слика 3-5) Теселација круга троугловима .....	26
Слика 3-6) Dogman Luke метода конструисања дуалног тела .....	33
Слика 3-7) Дуалност између октаедра и коцке – један дуални пар .....	34
Слика 3-8) Неке од камених лопти пронађених у Шкотској.....	37
Слика 3-9) Додекаедри и икосаедри из времена римске империје.....	37
Слика 3-10) Формирање темена тетраедра, октаедра и икосаедра.....	39
Слика 3-11) Формирање темена коцке и додекаедра.....	39
Слика 3-12) Платонов полиедри .....	39
Слика 3-13) Тетраедар је дуалан сам себи .....	41
Слика 3-14) Коцка и октаедар, дуални пар .....	41
Слика 3-15) Икосаедар и додекаедар, дуални пар.....	41
Слика 3-16) Неки од геометријских односа између Платонових тела.....	42
Слика 3-17) Трунковани тетраедар, $(3.6^2)$ .....	44
Слика 3-18) Кубоктаедар, $(3.4)^2$ .....	44
Слика 3-19) Трунковани октаедар, $(4.6^2)$ .....	44
Слика 3-20) Трункована коцка, $(3.8^2)$ .....	45
Слика 3-21) Ромбикубоктаедар, $(3.4^3)$ .....	45
Слика 3-22) Трунковани кубоктаедар, $(4.6.8)$ .....	45



Слика 3-23) Икосидодекаедар, $(3.5)^2$ .....	45
Слика 3-24) Трунковани икосаедар, $(5.6^2)$ .....	46
Слика 3-25) Трунковани додекаедар, $(3.10^2)$ .....	46
Слика 3-26) Проширена коцка, $(3^4.4)$ .....	46
Слика 3-27) Ромбикосидодекаедар, $(3.4.5.4)$ .....	46
Слика 3-28) Трунковани икосидодекаедар, $(4.6.10)$ .....	47
Слика 3-29) Проширени додекаедар, $(3^4.5)$ .....	47
Слика 3-30) Трансформација ромбикубоктаедра у псеудоромбикубоктаедар.....	48
Слика 3-31) Повратна дуалност између кубоктаедра и ромбичног додекаедра ....	49
Слика 3-32) Каталанови полиедри, део 1 .....	50
Слика 3-33) Каталанови полиедри, део 2 .....	51
Слика 3-34) Џонсонови полиедри – пирамиде .....	55
Слика 3-35) Џонсонови полиедри – куполе .....	55
Слика 3-36) Џонсонови полиедри – ротонда .....	55
Слика 3-37) Триангулација појединих правилних полигона .....	60
Слика 3-38) Геодезијске сфере различитих фреквенција изведене из икосаедра ..	61
Слика 3-39) Класе геодезијских сфера .....	62
Слика 3-40) Троугаона теселација и њен дуал са ознаком подела $(3, 2)$ .....	63
Слика 3-41) Икосаедарска геодезијска сфера фреквенције $2v$ , класе I и њен дуал	64
Слика 3-42) Икосаедарске геодезијске сфере класе I, фреквенције $2v$ и $3v$ и дуал фреквенције $3v$ .....	66
Слика 3-43) Додекаедарске геодезијске сфере класе I, фреквенције $2v$ и $4v$ и дуал фреквенције $4v$ .....	66
Слика 3-44) Геодезијска сфера класе I, фреквенције $3v$ (1, 2) и њен дуал исте фреквенције, изведени из проширеног додекаедра.....	66
Слика 3-45) Икосаедарска геодезијска сфера фреквенције $4v$ у три основне класе .....	69

Слика 3-46) Дуали икосаедарске геодезијске сфере фреквенције $4v$ у три основне класе.....	69
Слика 3-47) Распоред различитих дужина ивица икосаедарске геодезијске куполе $6v$ , класе I.....	72
Слика 3-48) Распоред ивица на триангулисаној страни икосаедра чије ће се дужине променити после њихове пројекције на сферу .....	72
Слика 4-1) Планетаријум Јена, Немачка; пресвлачење носиве структуре бетоном .....	74
Слика 4-2) Модели геодезијских купола са сферним круговима .....	75
Слика 4-3) Икосаедарска геодезијска купола покривена лаким покривачем.....	75
Слика 4-4) Детал везе мембране и геодезијске куполе .....	76
Слика 4-5) Хронолошки приказ 30 Фулерових прототипова апроксимације сфере .....	76
Слика 4-6) Амерички павиљон на Светској изложби у Монтреалу .....	77
Слика 4-7) Project Eden, приказ структуре.....	78
Слика 4-8) Project Eden, поглед на структуру изнутра .....	78
Слика 4-9) Геодезијска купола велике запремине.....	79
Слика 4-10) Икосаедарска геодезијска купола фреквенције $8v$ .....	80
Слика 4-11) Контура геодезијске куполе при ослонцима .....	81
Слика 4-12) Нормални напони у штаповима геодезијске куполе.....	82
Слика 4-13) Чворна веза штапова геодезијске куполе у Монтреалу.....	82
Слика 4-14) Чвор структуре од алуминијума .....	83
Слика 4-15) Чворна веза штапова једнослојне структуре од дрвета .....	83
Слика 4-16) „Пробијање“ чвора структуре код геодезијске куполе више фреквенције.....	84
Слика 4-17) Геометријска трансформација полиедарске куполе .....	92
Слика 4-18) Триангулисана структура од крутих штапова .....	94
Слика 4-19) Преднапрезање структуре омогућава груписање затега .....	95
Слика 4-20) Функционални елементи у структури полиедарске куполе.....	95

Слика 4-21) Преднапрезање контурних штапова функционалног елемента.....	96
Слика 4-22) Стабилност форме функционалног елемента.....	97
Слика 4-23) Основе закривљеног облика ПКС.....	104
Слика 4-24) Основе полигоналног облика ПКС.....	104
Слика 4-25) ПКС са тачкастим и линијским ослањањем .....	104
Слика 4-26) ПКС као апроксимација сфере.....	105
Слика 4-27) ПКС као апроксимација елипсоида.....	105
Слика 4-28) Мултипликација ПКС у једном правцу.....	106
Слика 4-29) Мултипликација ПКС у два правца.....	106
Слика 4-30) Мултипликација ПКС у три правца.....	106
Слика 4-31) Мултипликација ПКС у једном правцу, у виду надстрешнице.....	107
Слика 4-32) Студија моста, Леонардо да Винчи .....	113
Слика 4-33) Приказ конструкције за монтажу са крутим штаповима и са меким затегама.....	114
Слика 4-34) Шематски приказ „самоносећих“ сегмената структуре у току монтаже .....	115
Слика 4-35) Монтажа структуре – фазе 1 и 2 .....	116
Слика 4-36) Монтажа структуре – фазе 3 и 4 .....	116
Слика 5-1) Закривљена теселација равни над кружним прстеном .....	120
Слика 5-2) Ослонци структуре се не налазе у истој равни.....	120
Слика 5-3) Геометријска трансформација теселације равни.....	121
Слика 5-4) Геометријски трансформисан дуал геодезијске куполе .....	122
Слика 5-5) Пример нове теселације.....	122
Слика 5-6) Променљиве у геометрији ПКС.....	124
Слика 5-7) Одређивање основне геометрије полиедарске куполе .....	129
Слика 5-8) Одређивање положаја фиктивних прстенова .....	130
Слика 5-9) Џонсонов полиедар $J_4$ и ромбикубоктаедар.....	141

Слика 5-10) ПК (4.4 <sup>1</sup> ) .....	142
Слика 5-11) ПК (4.4 <sup>2</sup> ) .....	142
Слика 5-12) ПК (4.4 <sup>3</sup> ) .....	143
Слика 5-13) ПК (4.4 <sup>4</sup> ) .....	144
Слика 5-14) ПК (4.4 <sup>5</sup> ) .....	145
Слика 5-15) ПК (4.5 <sup>1</sup> ) .....	147
Слика 5-16) ПК (4.5 <sup>2</sup> ) .....	147
Слика 5-17) ПК (4.5 <sup>3</sup> ) .....	148
Слика 5-18) ПК (4.5 <sup>4</sup> ) .....	149
Слика 5-19) ПК (4.5 <sup>5</sup> ) .....	150
Слика 5-20) Трунковани октаедар .....	151
Слика 5-21) ПК (4.6 <sup>1</sup> ) .....	152
Слика 5-22) ПК (4.6 <sup>2</sup> ) .....	152
Слика 5-23) ПК (4.6 <sup>3</sup> ) .....	153
Слика 5-24) ПК (4.6 <sup>4</sup> ) .....	154
Слика 5-25) ПК (4.6 <sup>5</sup> ) .....	155
Слика 5-26) Џонсонов полиедар J <sub>5</sub> и ромбикосидодекаедар.....	156
Слика 5-27) ПК (5.4 <sup>1</sup> ) .....	157
Слика 5-28) ПК (5.4 <sup>2</sup> ) .....	157
Слика 5-29) ПК (5.4 <sup>3</sup> ) .....	158
Слика 5-30) ПК (5.4 <sup>4</sup> ) .....	159
Слика 5-31) ПК (5.4 <sup>5</sup> ) .....	160
Слика 5-32) Додекаедар .....	161
Слика 5-33) Џонсонов полиедар J <sub>6</sub> .....	162
Слика 5-34) ПК (5.5 <sup>1</sup> ) .....	163
Слика 5-35) ПК (5.5 <sup>2</sup> ) .....	163

Слика 5-36) ПК (5.5 <sup>3</sup> ) .....	164
Слика 5-37) ПК (5.5 <sup>4</sup> ) .....	165
Слика 5-38) ПК (5.5 <sup>5</sup> ) .....	166
Слика 5-39) Трунковани икосаедар .....	167
Слика 5-40) Икосаедарска геодезијска сфера и њен дуал класе I, фреквенције 4	168
Слика 5-41) ПК (5.6 <sup>1</sup> ) .....	169
Слика 5-42) ПК (5.6 <sup>2</sup> ) .....	169
Слика 5-43) ПК (5.6 <sup>3</sup> ) .....	170
Слика 5-44) ПК (5.6 <sup>4</sup> ) .....	171
Слика 5-45) ПК (5.6 <sup>5</sup> ) .....	172
Слика 5-46) Теселација равни (3.4.6.4).....	173
Слика 5-47) ПК (6.4 <sup>1</sup> ) .....	174
Слика 5-48) ПК 2 (6.4 <sup>2</sup> ) .....	174
Слика 5-49) ПК (6.4 <sup>3</sup> ) .....	175
Слика 5-50) ПК (6.4 <sup>4</sup> ) .....	176
Слика 5-51) ПК (6.4 <sup>5</sup> ) .....	177
Слика 5-52) ПК (6.5 <sup>1</sup> ) .....	180
Слика 5-53) ПК (6.5 <sup>2</sup> ) .....	180
Слика 5-54) ПК (6.5 <sup>3</sup> ) .....	181
Слика 5-55) ПК (6.5 <sup>4</sup> ) .....	182
Слика 5-56) ПК (6.5 <sup>5</sup> ) .....	183
Слика 5-57) Теселација равни (6 <sup>3</sup> ) .....	184
Слика 5-58) ПК (6.6 <sup>1</sup> ) .....	185
Слика 5-59) ПК (6.6 <sup>2</sup> ) .....	185
Слика 5-60) ПК (6.6 <sup>3</sup> ) .....	186
Слика 5-61) ПК (6.6 <sup>4</sup> ) .....	187

Слика 5-62) ПК (6.6 <sup>5</sup> ) .....	188
Слика 6-1) Аксонометрија модела ПК (6.6 <sup>5</sup> ) .....	194
Слика 6-2) Распоред прстенова и темена .....	198
Слика 6-3) Функционална организација ПКС .....	202
Слика 6-4) Функционални елемент припремљен за транспорт .....	208
Слика 6-5) Функционални елемент припремљен за уградњу .....	208
Слика 6-6) Чворна веза штапова међусобно и штапова са затегама .....	209
Слика 6-7) Пресек разупирача и његова веза са затегама .....	211
Слика 6-8) Међусобна веза функционалних елемената .....	213
Слика 6-9) Веза функционалног елемента са ослоначким прстеном .....	214
Слика 6-10) Приказ 3Д модела структуре у основи .....	217
Слика 6-11) Перспективни приказ 3Д модела структуре .....	217
Слика 6-12) Перспективни приказ 3Д модела структуре .....	218
Слика 6-13) Приказ 3Д модела структуре споља .....	218
Слика 6-14) Приказ 3Д модела структуре изнутра .....	219
Слика 6-15) Модел структуре, приказ спреда .....	219
Слика 6-16) Модел структуре, приказ слева .....	219
Слика 6-17) Модел структуре у основи .....	220
Слика 6-18) Перспективни приказ модела структуре .....	220
Слика 6-19) Нормални напони у структури, $g$ .....	221
Слика 6-20) Деформације структуре, $g$ .....	221
Слика 6-21) Нормални напони у структури, $g+s$ .....	222
Слика 6-22) Деформације структуре, $g+s$ .....	222
Слика 6-23) Нормални напони у структури, $g+w$ .....	223
Слика 6-24) Деформације структуре, $g+w$ .....	223

Слика 6-25) Нормални напони у сегменту структуре прихваћеног краном, 1. фаза монтаже .....	224
Слика 6-26) Деформације сегмента структуре прихваћеног краном, 1. фаза монтаже .....	224
Слика 6-27) Нормални напони у структури по завршетку 1. фазе монтаже .....	225
Слика 6-28) Деформације структуре по завршетку 1. фазе монтаже .....	225
Слика 6-29) Нормални напони у сегменту структуре прихваћеног краном, 2. фаза монтаже .....	226
Слика 6-30) Деформације сегмента структуре прихваћеног краном, 2. фаза монтаже .....	226
Слика 6-31) Нормални напони у структури по завршетку 2. фазе монтаже .....	227
Слика 6-32) Деформације структуре по завршетку 2. фазе монтаже .....	227
Слика 6-33) Нормални напони у сегменту структуре прихваћеног краном, 3. фаза монтаже .....	228
Слика 6-34) Деформације сегмента структуре прихваћеног краном, 3. фаза монтаже .....	228
Слика 6-35) Нормални напони у структури по завршетку 3. фазе монтаже .....	229
Слика 6-36) Деформације структуре после завршетка 3. фазе монтаже .....	229
Слика 6-37) Склоп контурних штапова позиције 6 .....	233
Слика 6-38) Кројна листа контурних штапова позиције 6 .....	233

## Преглед табела

Табела 3-1) Геометријске карактеристике Платонових полиедара .....	40
Табела 3-2) Геометријске карактеристике Архимедових полиедара .....	47
Табела 3-3) Геометријске карактеристике Каталанових полиедара.....	52
Табела 3-4) Геометријске карактеристике Џонсонових полиедара.....	56
Табела 3-5) Однос геометријских особина лопте и правилних полиедара.....	68
Табела 3-6) Број страна икосаедарске геодезијске сфере фреквенције $f=p+q$ .....	70
Табела 3-7) Број темена икосаедарске геодезијске сфере фреквенције $f=p+q$ .....	71
Табела 3-8) Број ивица икосаедарске геодезијске сфере фреквенције $f=p+q$ .....	71
Табела 5-1) Одређивање положаја секундарног темена у пресеку три равни.....	133
Табела 5-2) Одређивање положаја секундарног темена у пресеку две равни и сфере .....	135
Табела 5-3) Геометријске карактеристике ПК (4.4 <sup>f</sup> ) .....	146
Табела 5-4) Геометријске карактеристике ПК (4.5 <sup>f</sup> ) .....	151
Табела 5-5) Геометријске карактеристике ПК (4.6 <sup>f</sup> ) .....	156
Табела 5-6) Геометријске карактеристике ПК (5.4 <sup>f</sup> ) .....	161
Табела 5-7) Геометријске карактеристике ПК (5.5 <sup>f</sup> ) .....	167
Табела 5-8) Геометријске карактеристике ПК (5.6 <sup>f</sup> ) .....	173
Табела 5-9) Геометријске карактеристике ПК (6.4 <sup>f</sup> ) .....	178
Табела 5-10) Геометријске карактеристике ПК (6.5 <sup>f</sup> ) .....	184
Табела 5-11) Геометријске карактеристике ПК (6.6 <sup>f</sup> ) .....	189
Табела 6-1) Типови ПВЦ мембрана (WG Messe Frankfurt) .....	192
Табела 6-2) Класификација ПТФЕ мембрана .....	192
Табела 6-3) Геометријске карактеристике фиктивних прстенова .....	196



Табела 6-4) Углови поделе фиктивних прстенова .....	197
Табела 6-5) Координате темена ПК (6.6 <sup>5</sup> ) .....	198
Табела 6-6) Спецификација функционалних елемената ПКС.....	202
Табела 6-7) Вредности преднапрезања функционалних елемената .....	215
Табела 6-8) Димензионисање контурних штапова функционалних елемената ...	230
Табела 6-9) Димензионисање разупирача функционалних елемената.....	231
Табела 6-10) Димензионисање затега функционалних елемената .....	231
Табела 6-11) Димензионисање ослоначког прстена .....	232
Табела 6-12) Димензионисање везе између функционалних елемената.....	232
Табела 6-13) Утрошак дрвене грађе за формирање структуре.....	234
Табела 6-14) Утрошак челика за формирање затега структуре .....	235
Табела 6-15) Утрошак челика за формирање окова и разупирача.....	235

## Преглед коришћених ознака

- $a$  дужина странице полигона (ивице полиедра)
- $b_{pr}$  број поделе прстена
- $bo_{pr}$  ширина попречног пресека ослоначког прстена
- $c_{du}$  однос између пречника кружнице уписане у темени полигон ПКС и пречника кружнице уписане у полигон омотача
- $c_p$  однос између пречника кружнице описане око теменог полигона ПКС и карактеристичне димензије полигона његовог омотача
- $c_{pr}$  однос између углова поделе фиктивног прстена
- $d_{m,n}$  мала дијагонала полигона
- $d_{pr,i}$  пречник фиктивног прстена  $i$
- $d_{up}$  пречник кружнице уписане у полигон омотача ПКС
- $d_{ut}$  пречник кружнице уписане у темени полигон ПКС
- $d_{v,n}$  велика дијагонала полигона
- $d_{ot}$  пречник кружнице описане око теменог полигона ПКС
- $e_{pr}$  ексцентричност ослоначког прстена услед његове закривљености
- $f$  вредност фреквенције геодезијске куполе и ПКС (број појасева ПКС)
- $H_k$  висина ПКС, удаљење темена сфере генерисања од основе ПКС
- $h_{p,n}$  висина полигона
- $h_{tr}$  транспортна висина сегмента ослоначког прстена
- $i$  индекс променљивих, редни број променљиве
- $I$  број ивица полиедра
- $j$  редни број у енумерацији Џонсонових полиедара (1-92)
- $J$  ознака Џонсонових полиедара у њиховој енумерацији
- $k$  број подударних полигона који граде теме теселације или полиедра
- $l$  број страница теменог полигона (*фамилија ПКС*)
- $L_k$  распон ПКС, једнак пречнику описане кружнице око основе ПКС
- $l_{pr}$  дужина сегмента ослоначког прстена

- $m$  број страница примарног полигона омотача (*класа ПКС*)  
 $n_i$  број страница полигона који гради теме теселације или полиедра  
 $O_c$  центар сфере генерисања  
 $O_{fe}$  обим функционалног елемента  
 $p$  број подела једне ивице полиедра при генерисању геодезијске сфере  
 $P_l$  површина лопте  
 $P_p$  површина полиедра  
 $p_r$  редни број прстена  
 $q$  број подела друге ивице полиедра при генерисању геодезијске сфере  
 $R_k'$  полупречник помоћне кружнице у равни генерисања ПКС  
 $R_o$  полупречник сфере описане око полиедра  
 $r_{pr,i}$  полупречник фиктивног прстена  $i$   
 $R_u$  полупречник сфере уписане у полиедар  
 $R_k$  полупречник сфере генерисања ПКС  
 $S$  број страна полиедра  
 $s$  број деобних троуглова стране икосаедра  
 $T$  број темена полиедра  
 $t$  дебљина зида кружног цевастог профила од челика  
 $X, Y, Z$  координате темена ПКС  
 $x, y, z$  осе Декартовог просторног координатног система  
 $Z_{pr,i}$  висинска кота фиктивног прстена  $i$   
 $\alpha_1$  угао 1 у подели фиктивног прстена ПКС  
 $\alpha_2$  угао 2 у подели фиктивног прстена ПКС  
 $\alpha_s$  карактеристични угао сегмента куполе  
 $\beta_p$  вертикални угао генерисања појаса ПКС  
 $\beta_{pr,i}$  вертикални угао генерисања фиктивног прстена  
 $\beta_t$  вертикални угао генерисања теменог полигона ПКС  
 $\beta_k$  вертикални угао генерисања ПКС  
 $v$  ознака за фреквенцију (грчко слово *ни*)

# **1 Увод**

Изум геодезијске сфере средином прошлог века, у циљу формирања лаке куполасте структуре, од стране Ричарда Бакминстера Фулера, омогућава формирање куполе применом минималног броја различитих штапова са унифицираним чворним везама. Сви елементи су унапред произведени, што представља велики корак у савладавању технике грађења префабрикованих система куполастих структура.

Несумњиво је да су геодезијске куполе изузетно економичне, те да су нашле своју примену у грађевинарству. Формирање лаких структура са малим бројем различитих дужина штапова омогућава унификацију спојева, тако да се формирање структуре своди на једноставно спајање штапова у чворовима система. Међутим, саме чворне везе су геометријски захтевне и скупе, с обзиром на то да се силе између спојених штапова преносе преко једне тачке (чвора структуре), а да при том мора да буде испуњен принцип унификације и једноставне монтаже.

Велика запремина геодезијске куполе у појединим случајевима може представљати њену предност, у односу на остале куполасте структуре, али у зависности од потреба крајњег корисника, може се испољити и као велики недостатак и показати разна ограничења у искоришћењу тако формиране структуре.

## **1.1 Проблем и предмет истраживања**

Претходна истраживања, спровођена у циљу формирања лаких, монтажних, полиедарских куполастих структура, најчешће су се бавила анализом геодезијске куполе израђене од штапова. Готово да не постоји истраживање које би претпоставило формирање полиедарских куполастих структура чији би

градивни елемент представљао његову страну у облику полигона, посебно уколико тај полигон није облика троугла.

У систему префабрикације функционални елемент представља основну, градивну јединицу. Полиедарске куполасте структуре могу се извести у систему префабрикованих функционалних елемената, који представљају њене стране. На овај начин формирану функционални елементи не морају бити искључиво површински, већ могу представљати и одређени конструктивни склоп крутих штапова, или крутих штапова и меких затегнутих елемената (затега), који би био префабрикован. И један и други конструктивни склоп омогућавају формирање једноставних веза између контурних ивица суседних функционалних елемената.

У конструктивном склопу функционалног елемента формираног од затега и штапова, затега могу прихватити само затезање, док штапови могу прихватити и затезање и притисак. Само они штапови који су у свим комбинацијама оптерећења напрегнути на затезање, могу се заменити затегама, у противном може доћи до њиховог опуштања и смањења крутости формиране структуре, што може угрозити њену стабилност. Да би се избегло опуштање затега, у њих се уноси прорачуната вредност стално присутне силе затезања, која преднапреже штапове контуре функционалног елемента, а тиме се повећава крутост његове контуре и обезбеђује стабилност структуре.

Технички и технолошки другачији приступ обликовању полиедарских куполастих структура могао би да омогући примену нових материјала у градњи оваких купола, али и примену познатих материјала у другачијим конструктивним системима.

Куполасте структуре, формиране од унапред произведених елемената, у индустријској производњи, са стандардизованим принципима пројектовања и извођења веза, омогућавају брзу и једноставну монтажу, што представља технолошку и економску предност у односу на традиционалан начин грађења.

У обликовању и функционалној организацији полиедарских куполастих структура, применом таквих, префабрикованих функционалних елемената, који

чине њене стране, постоје извесне геометријске специфичности. Утврђеним геометријским принципима уважавају се и одређени статичко-конструктивни захтеви, као и захтеви индустријске префабрикације функционалних елемената.

Обликовање полиедарских купола, насталих трансформацијом геометрије геодезијске сфере, може се вршити мултипликацијом основног полигона, правилног или неправилног облика са четири, пет или шест страница, око другог полигона са истим бројем страница.

Код једноставније геометрије, на овај начин формираних полиедарских купола, препознају се форме појединих Џонсонових полиедара и делови појединих Платонових или Архимедових полиедара, међутим, сложеније форме представљају неправилне полиедарске површи, са странама у облику неправилних полигона. И поједини Каталанови полиедри, дуали Архимедових полиедара, чије су стране у виду неправилних полигона, могу бити квалитетна основа за формирање мањег броја једноставнијих полиедарских купола.

Применом префабрикованих функционалних елемената, који би испуњавали претходно дефинисане услове могу се, у одређеним условима, формирати и другачије форме полиедарских структура (нпр. елипсоидне), али и форме над полигоналним основама, што у урбаним срединама представља њихову велику предност. Оваква форма омогућава се мултипликацијом основног облика у два или три правца.

Предмете истраживања дисертације представљају:

- Утврђивање принципа обликовања полиедарских куполастих структура;
- Геометријска класификација полиедарских купола, као базе формирања структура;
- Формирање полиедарских куполастих структура применом префабрикованих функционалних елемената са преднапрегнутим контурним штаповима;
- Обликовање веза полиедарске куполасте структуре;
- Формирање ослоначке конструкције једноставне геометрије;

- Анализа понашања полиедарске куполасте структуре оптерећене уобичајеним гравитационим и климатским симетричним и несиметричним оптерећењем.

## 1.2 Циљеви истраживања

Друштвени циљ истраживања је унапређење пројектовања и извођења куполастих структура. Ове структуре се могу формирати као монтажно-демонтажне, уз истовремено задовољење основних услова експлоатације. Тиме се отвара још једно поље у обликовању куполастих структура које могу наћи своју примену како у грађењу привремених објеката, тако и у грађењу трајних објеката, од спортских, привредних, изложбених, складишних, па и до стамбених. Индустијском префабрикацијом функционалних елемената обезбеђује се њихов квалитет, а самим тим и квалитет монтиране структуре током њеног експлоатационог века. Осим тога, смањују се негативни утицаји на околину у току монтаже куполасте структуре, експлоатације и рушења-демонтаже, смањује се утрошак ресурса и унапређује градња у функционалном и естетском смислу. Наведени принципи су у складу са савременим смерницама стратегије одрживог грађења и са основним принципима индустријске префабрикације.

Научни циљ истраживања захтева обезбеђење потребног нивоа научног знања у пројектовању и извођењу полиедарских куполастих структура. Предложена докторска дисертација има елементе неколико нивоа научног знања: научног описивања, класификације и типологије, научног открића и научног објашњења.

На нивоу научног описивања врше се истраживања могућности и принципа обликовања полиедарских куполастих структура и провера могућности примене претходног научног фонда у овој области. Врши се анализа постојеће класификације геометријских облика и тела генерисаних полигонима, примењивих у циљу формирања куполасте структуре. С друге стране, анализирају се геодезијске куполе из аспекта рационалне примене лаке монтажне структуре и могућности њене примене у реализацији полиедарске куполасте структуре.

Формира се скуп принципа на основу којих се врши класификација полиедарских купола, што представља следећи ниво научног сазнања. Иако су конвексни правилни полиедри класификовани, предложена класификација конвексних полиедарских купола базира се на другачијим принципима обликовања.

Научно откриће је резултат једног другачијег приступа у формирању полиедарских структура и обезбеђењу њихове крутости и стабилности. Полиедарске структуре се формирају као скуп полигона, страна полиедра, у виду функционалних елемената, префабрикованих, индустријски произведених. Стабилност таквој полиедарској структури обезбеђује крутост функционалних елемената у сопственој равни и њихов међусобни геометријски однос у простору. Крут, недеформабилан облик функционалног елемента постиже се преднапрезањем његових контурних штапова, у виду двопојасног система меких затега, што представља другачији приступ у формирању полиедарских структура у односу на досадашње.

По усвајању геометрије генерисана структура се анализира кроз одговарајући виртуелни модел. Наведени елементи припадају нивоу научног објашњења.

### **1.3 Основне хипотезе истраживања**

Анализом геометрије геодезијске куполе, у циљу формирања полиедарске куполасте структуре, може се закључити следеће:

- Геометрија геодезијске куполе подвргнута је врло строгим принципима стереометрије;
- Код дуала геодезијске куполе више фреквенције, формираног из петоугаоника и шестоугаоника, темена излазе из сфере;
- Да би се добио рационалан број различитих облика функционалних елемената, потребно је још и да центар сфере, описане око геодезијске куполе, лежи у равни њеног ослоначког прстена, у ком случају се, с друге стране, добија врло неповољан однос висина – распон структуре;



- Јавља се низ техничких и технолошких проблема при формирању геодезијске куполе над основом која није кружног облика.

Наведени разлози указују на одређену нефлексибилност геодезијске куполе, те се уочава потреба за модификовањем њене геометрије, у циљу изналажења једноставнијег начина формирања полиедарских куполастих структура.

Предложено истраживање заснива се на следећим радним хипотезама, које ће у раду бити подвргнуте провери:

- Полиедарске куполасте структуре могу се формирати применом компоненти вишег реда – функционалних елемената, који представљају њихове стране. Потребно је да наведена структура прихвати све уобичајено гравитационо и климатско оптерећење, симетрично и несиметрично, карактеристично за такве структуре.
- Поједини штапови у оквиру функционалног елемента могу се заменити одговарајућим меким линијским елементима – затегама, који могу прихватити само затезање.
- Међусобне везе функционалних елемената су једноставне и могу се остварити на рационалан начин. Захваљујући једноставно обликованим међусобним везама функционалних елемената поједностављује се и њихова монтажа.
- За изградњу овако конципираних куполастих структура може се користити дрво, врло често и неоправдано запостављен материјал, у случају реализације сличних структура. Дрво је природан и обновљив материјал, са добрим физичким и механичким особинама, а врло је лако за механизовану обраду. Уз могућност примене најједноставнијих конструктивних веза, дрво се лако афирмише у грађевинарству као материјал са изузетним могућностима у обликовању.

## **1.4 Задаци истраживања**

На основу дефинисаних циљева научног истраживања, задаци предложене докторске дисертације су:

- Анализа геометрије класификованих теселација еуклидске равни, које би се могле користити при генерисању геометрије куполастих структура;
- Анализа геометрије класификованих конвексних полиедара који би се могли применити при формирању куполастих структура;
- Анализа геометријских принципа обликовања геодезијске сфере;
- Утврђивање принципа обликовања полиедарских куполастих структура;
- Сагледавање форми полиедарских куполастих структура које би се могле формирати монтажом префабрикованих функционалних елемената;
- Дефинисање услова формирања једноставне ослоначке конструкције;
- Обликовање преднапрегнутих функционалних елемената;
- Геометријска класификација полиедарских купола;
- Обликовање веза у оквиру полиедарске куполасте структуре;
- На моделу полиедарске куполасте структуре, оптерећене уобичајеним оптерећењима, врши се провера напрезања и деформација структуре.

## **1.5 Методологија истраживања**

У оквиру предложене докторске дисертације користиће се више метода истраживања.

Методолошки поступак у формирању базе истраживања заснива се првенствено на методи анализе грађе – примарних и секундарних извора. Такође, проверавају се постојећи и прикупљају додатни подаци. Методом упоредне анализе теселација равни и сфере, одређују се смернице за формирање геометријског оквира у генерисању полиедарских куполастих структура. Анализирају се законитости у обликовању геодезијских сферних структура, њихове предности и недостаци. Методом анализе садржаја утврђују се и сређују

прикупљени подаци, постављају се чињенице и формира се основа за класификацију полиедарских купола, геометријске базе у реализацији структура.

Класификација полиедарских купола заснива се на њиховој геометријској анализи и на дефинисању сличности и разлика њихових геометријских карактеристика, али и на уважавању других услова, који су значајни при реализацији таквих структура и функционалних елемената. Дефинишу се услови обликовања полиедарских куполастих структура, функционалних елемената, међусобних веза и ослоначког прстена.

За проверу исправности полазних хипотеза користи се метода виртуелног моделовања. Формира се виртуелни модел полиедарске куполасте структуре са преднапрегнутим функционалним елементима. На наведеном моделу анализира се понашање структуре при дејству симетричног и несиметричног оптерећења. Резултати анализе користе се при обликовању структура и њихових веза.

Завршна фаза рада обухвата синтезу истраживања са провером исправности полазних хипотеза и интерпретацију резултата истраживања. Поступак обраде података и провера исправности полазних хипотеза садржи логичку и техничку контролу података, анализу и сређивање добијених података и доношење одређених закључака о подацима. Завршном фазом рада ће бити обухваћени резултати који су из датих истраживања проистекли.

## **1.6 Научна оправданост истраживања**

Сprovedено истраживање би требало да оправда усвојене хипотезе и да потврди њихову исправност. Оправданост предложене дисертације проверава се кроз друштвени и научни допринос резултата истраживања и њихову практичну примену.

Последњих деценија евидентна је промена начина размишљања у вези са развојем и заштитом животне средине, у позитивном смислу. Истраживање је усмерено ка унапређењу еколошки прихватљивих техника градње, чиме се може ублажити неповољни утицај објекта на окружење од његове реализације, преко

експлоатације, до рушења. У том контексту, термин „одрживо грађење“ представља грађење објекта које узима у обзир објекат кроз све наведене фазе, као и његов утицај на околину у свакој од њих. Циклус активности одрживог грађења чине пројектовање, изградња, употреба, одржавање, поправка, обнова, реконструкција и рециклирање – уклањање објекта.

Друштвени допринос овог истраживања огледа се у анализи и потврђивању могућности формирања лаких тродимензионалних структура и њихове рационалне примене, уз коришћење што једноставније технологије у производњи њених градивних елемената и у извођењу самих структура.

Полиедарске куполасте структуре могу испунити и одређене друге захтеве, уколико је то потребно (грађевинске физике, на пример), чиме се отварају широке могућности њихове примене.

Један од сегмената у примени полиедарских куполастих структура чини могућност брзе монтаже привремених објеката у случају елементарних непогода, миграција становништва и слично. Ти објекти могу бити привременог или трајног карактера. Овим истраживањем се, такође, подиже и ниво планирања и реализације градње лаких структура у циљу брзог спречавања и умањења нежељених друштвених, социјалних и материјалних ефеката.

Принципи обликовања полиедарских куполастих структура, који ће бити дефинисани у дисертацији, омогући ће њихову брзу реализацију, од пројектовања, преко производње до монтаже, али и њихове евентуалне демонтаже. После престанка потребе за оваквим објектом, он се може демонтирати и пренети на другу локацију или ускладиштити до следеће потребе.

Вредност ових структура је и у могућности формирања објеката трајног карактера разноврсне намене: од спортских, преко привредних, изложбених, заштитних, па и до стамбених објеката. Такође, могућност формирања објеката различитих распона и над основама различитог облика покрива подручје разноврсних потреба.

Научни допринос истраживања представља класификација полиедарских купола, заснована на скупу геометријских принципа њиховог обликовања. Преклапање ове класификације са класификацијом конвексних правилних и полуправилних, али и неправилних полиедара, било да су у питању Платонове, Архимедови или Џонсонови полиедри, само је делимично и асоцијативно. Преклапање се односи на полиедарске куполе једноставније форме, са мањим бројем страна, док би на нивоу сложеније форме оне имале неправилну полиедарску форму, што ће бити дефинисано геометријским принципима њиховог обликовања.

У досадашњим истраживањима, неправилне полиедарске форме нису заокупљале значајнију пажњу, с обзиром на то да се може формирати бесконачан низ полиедара врло различите форме, са великим бројем страна различитих облика. Из овог непрегледног скупа неправилних полиедара извршеном класификацијом би се издвојили само они који задовољавају дефинисани скуп геометријских принципа, али и статичко-конструктивних принципа при евентуалној изградњи и експлоатацији тако формиране структуре, који ће бити подвргнути провери у даљем раду. Дефинисање могућих форми полиедарских купола представља основу за даљи развој оваквих структура.

Класификација полиедарских купола и принципи њиховог обликовања су независни од примењеног материјала у изградњи таквих структура. У ери техничко-технолошке револуције свакодневно се откривају нови материјали и развијају нове технологије. Овакав приступ омогућава реализацију полиедарске куполасте структуре применом готових префабрикованих елемената у било ком материјалу, познатог или новог, или у њиховим комбинацијама и егзистирати у различитим условима, које би ти материјали испуњавали.

Примена функционалних елемената, у градњи полиедарских куполастих структура, захтева другачији приступ у њиховом обликовању. Осим у случају формирања оваквих структура помоћу функционалних елемената у виду панела, пуних или ошупљених, полиедарска куполаста структура се може формирати и на било који други начин уколико се обезбеди очување њиховог пројектованог облика, односно недеформабилност облика наведених страна.

Следећи ниво научног значаја рада је провера једног сасвим другачијег приступа и примена другачијег концепта функционалног елемента у градњи полиедарских структура, од уобичајених. Систем преднапрегнутих функционалних елемената резултат је синтезе истраживања и сазнања из области пројектовања лаких куполастих структура. Представљена је позната структура у потпуно другачијем склопу и примени од уобичајене.

Контура функционалног елемента, формирана од штапова, преднапреже се и тиме се обезбеђује очување пројектованог облика и после уградње у структуру и њеног оптерећења. Удвојени притиснути контурни штапови два суседна функционална елемента међусобно граде одређен угао и тиме један другом обезбеђују бочну стабилност. У завршном делу рада, виртуелни модел формиран од оваквих функционалних елемената, подвргава се детаљној статичкој анализи.

Полиедарске куполасте структуре, формиране монтажом унапред произведених функционалних елемената, са унифицираним спојевима, омогућавају индустријску производњу, а тиме и једноставан рад на градилишту и брзу и ефикасну монтажу. Помак у обликовању куполастих структура представља потпуни заокрет у формирању веза између функционалних елемената – уместо компликованих и скувих веза у теменима – чворовима система, везе се на једноставан начин формирају дуж ивица контура функционалних елемената.

Допринос истраживања представља и одређени степен едукације, као и подстицај на друга истраживања у оквиру ове теме или других сличних њој.

## 2 Индустриска префабрикација у изградњи структура

Градња објеката и конструкција, кроз историју, вршила се на основу знања и искуства градитеља, сопственог или наслеђеног, сходно њиховом разумевању и смелости да то знање примене. Припрема и обрада елемената конструкције, као и њихова уградња, вршена је на лицу места и на традиционалан начин, употребом компоненти, као основних јединица конструкције, употребом традиционалних алата и система веза.

### 2.1 Префабрикована израда функционалних елемената

Савремене структуре резултат су примене научних и технолошких достигнућа у њиховој префабрикацији, а у циљу задовољења растућих потреба савременог друштва. То су, често, исти конструктивни системи, познати од раније, али у другачијим условима и на другачијем степену техничко-технолошког развоја друштва, другачије је и поимање процеса реализације структуре – производња њених делова премешта се у фабричке хале, а она се само монтира на градилишту. Тиме су постављени основни принципи индустриске префабрикације елемената структуре.

*Основна разлика између традиционалних и савремених система кровних структура јесте организација производње и начин грађења. Традиционални кровови користе компоненте, самосталне, основне јединице конструкције, док је у савременим дрвеним кровним структурама функционални елемент база за организацију савремене отворене префабриковане технике грађења.<sup>1</sup>*

---

<sup>1</sup> Кујунџић, В., Текић, Ж., Ђорђевић, С., Савремени системи дрвених конструкција, Орион арт, Београд, 2004, стр. 71.

Функционални елемент представља основну, градивну јединицу у систему префабрикације. У току прошлог века, са развојем многих савремених решења и измештањем производње са градилишта у погон, омогућен је низ предности у односу на традиционалну градњу:

- Смањење трошкова грађења;
- Повећање брзине грађења;
- Подизање и одржавање степена квалитета производа;
- Максимално искоришћење материјала;
- Поједностављење израде и монтаже;
- Смањење потребног нивоа занатског знања и умећа;
- Максимално смањење утицаја временских неприлика на ток грађења;
- Продужење грађевинске сезоне.

Од примењене технике и усвојене технологије при производњи функционалних елемената зависи и домен њихове примене.

У зависности од концепције префабрикованог система, поједини системи омогућавају рационалну производњу функционалних елемената само константних димензија, док други омогућавају рационалну производњу функционалних елемената променљивих димензија.

Прву групу чине префабриковани системи код којих је, из специфичних техничко-технолошких разлога, ограничена једна, две или све три димензије функционалних елемената на одређену меру и није могуће произвести их на рационалан начин тако да имају променљиве висине попречног (и подужног) пресека. Ови елементи своју највећу рентабилност показују при формирању структура унапред одређене, стандардне геометрије и стандардних димензија.

Другу групу чине префабриковани системи код којих је могуће произвести функционалне елементе променљивих димензија и произвољног облика, без утицаја (или са занемарљивим утицајем) на њихову рентабилност. Ова могућност система је битна при формирању рационалне структуре из статичко-



конструктивних разлога, јер се на тај начин штеди на материјалу, тј. висина, ширина и дужина функционалног елемента могу да се мењају у складу са променама напрезања у његовим попречним и подужним пресецима.

Могућношћу префабрикованог система да се на рационалан начин произведу функционални елементи произвољног облика, који су прилагођени одговарајућем месту у структури, могу се добити просторне структуре са великим степеном искоришћења површине и материјала, али и са великом слободом у конципирању унутрашњег и обликовању спољашњег простора.

## **2.2 Аспекти рационалне примене префабрикованог система**

Однос цена рада и материјала је битан фактор у рационализацији одређеног префабрикованог система. Ако је цена материјала мања од цене рада, користе се функционални елементи већих димензија, чиме се штеди у раду на њиховој изради и изради веза у структури. С друге стране, веће димензије функционалних елемената захтевају већи степен механизације при њиховој уградњи.

Евентуална потреба за већим степеном квалификоване радне снаге такође повећава укупну цену структуре. Могућност коришћења јефтиније радне снаге, у односу на време трајања градње, доприноси коначној одлуци о префабрикованом систему израде функционалних елемената. Анализа је индивидуална и треба је спровести из аспекта најбољих могућности префабрикованог система у датим условима.

Једном дефинисани услови примене префабрикованог система, независно једних од других, омогућавају рационализацију система у оквиру анализиране ставке. Међутим, ако једна ставка смањује, а друга повећава његову рационалност онда треба наћи одговарајући однос када је одређена структура рационална, а када није. Ово је мера која се константно мења и зависи од многих других чинилаца, посебно од економске локалне и глобалне ситуације.

Могу се уочити две значајне релације у обликовању просторних структура:

- унутрашњи простор – структура;
- структура – спољашњи простор.

У првом случају, значајна је предност префабрикованог система уколико омогућава промену величине и геометрије структуре додавањем нових делова, или уклањањем постојећих, чиме би се структура прилагођавала потребама корисника. У овом случају од значаја је обликовање спојева, тј. могућност да се на рационалан начин формирају спојеви између функционалних елемената, али и других елемената и делова структуре. У случају куполастих структура, склоп функционалних елемената би могао бити дефинисан кроз одређену вертикалну или хоризонталну целину, у зависности од функционалне организације саме структуре.

У другом случају, структура се посматра кроз блок или насеље, као виши ниво организовања простора. У том случају структура је у функцији обликовања објекта, блока или насеља. Потребно је да префабриковани систем омогућава промену односа према спољашњој средини, кроз величину и облик.

Утицај ограничења одређеног префабрикованог система на обликовање простора опада са порастом технолошке флексибилности и степена индустријализације, у оквиру граница које су дефинисане специфичностима примене одређених материјала.

### **2.2.1 Технолошка флексибилност префабрикованог система**

*Технолошка флексибилност система је од значаја за економију и рентабилност система. Систем мора бити тако компонован да се може спровести оптимална стандардизација геометријских елемената система: да се одреди минимални број различитих серија функционалних елемената, са минималним и максималним распоном и да се у оквиру тих мера да палета*

*елемената који покривају све међураспоне са кораком који одговара одређеној модуларној мери.<sup>2</sup>*

Технолошка флексибилност се испољава на реализаторском нивоу – у процесу грађења архитектонског простора. Врло је важно донети праву одлуку о величини и разноврсности функционалних елемената. Добра технолошка флексибилност система може решити велики део проблема (супротности) у реализацији структуре и треба да да компромисно решење из аспекта пројектанта, произвођача, монтажера и корисника, у односу на величине и разноврсност функционалних елемената.

На рентабилност производње уникатних функционалних елемената утиче технолошка флексибилност префабрикованог система, тј. одређује степен рентабилности у функцији серијске производње. Мања технолошка флексибилност система захтева веће серије у производњи функционалних елемената и обрнуто. Иако је висок степен технолошке флексибилности могућ и код префабрикованих система који нису индустријализовани, ипак се највећа рентабилност остварује у спрези са индустријском префабрикацијом функционалних елемената.

### **2.2.2 Степен индустријализације префабрикованог система**

*Степен индустријске производње одређује ниво и продуктивност израде серије функционалних елемената. Такође, од степена индустријске производње зависи и стандардност производње, стандардност геометријских величина*

---

<sup>2</sup> Кујунџић, Војислав, Примена индустријализованих монтажних система са аспекта рационализације градње дрвених кровних структура, Докторска дисертација, Архитектонски факултет, Београд, 1987, стр. 81.

*готовог елемента, што је од великог значаја за исправну и брзу монтажу, за лак и ефикасан рад на градилишту, чему и тежи отворена префабрикација.*<sup>3</sup>

Начин организовања производње може бити од пресудног значаја за рентабилност одређеног система. Може бити:

- Занатски;
- Полуиндустријски и
- Индустријски.

Префабрикација није условљена индустријском производњом функционалних елемената, али многе предности овако организоване производње чине је основом за формирање рационалних система савремених структура. И у оквиру саме индустријске производње, постоје варијације у степену примене савремене технике и технологије. Применом рачунара, уз аутоматизацију многих процеса, може се подићи степен продуктивности и до неколико пута.

Према устаљеним дефиницијама, префабрикација функционалних елемената може бити затворена и отворена. У затвореној префабрикацији функционални елементи се производе за познатог корисника, тј. успостављена је релација *пројектовање–производња–градња*, док се у отвореној префабрикацији ови елементи производе за непознатог корисника, у којој је успостављена релација *производња–пројектовање–градња*. Ни затворена ни отворена префабрикација нису условљене индустријском производњом, али само кроз њу дају најбоље резултате.

У оквиру индустријске префабрикације функционалних елемената може бити примењена техника различитих могућности. Огроман развој информационе технологије омогућава висок степен аутоматизације и техничко-технолошке опремљености индустрије, у мери да се функционални елементи могу произвести

---

<sup>3</sup> Кујунџић, Војислав, Примена индустријализованих монтажних система са аспекта рационализације градње дрвених кровних структура, Докторска дисертација, Архитектонски факултет, Београд, 1987, стр. 72.

брзо и квалитетно, без значајног утицаја на њихов рок производње и без утицаја на рентабилност самог система. Овим је префабрикација ослобођена серијске производње као услова рационалне примене система, а предвиђена средства може преусмерити на повећање степена индустријализације и, посебно, аутоматизације у производњи функционалних елемената. При том, серијска производња функционалних елемената у отвореној префабрикацији није искључена, уколико за тим има потребе. Префабрикација, организована на овакав начин, може бити и затворена и отворена.

Специфичности појединих технолошких решења у производњи и монтажи функционалних елемената у неким материјалима и системима градње ограничавају организацију производње на овај начин и није је могуће спровести у потпуности. Зато је ово значајна предност одређених префабрикованих система, не само из аспекта произвођача који овакву технологију примењује, већ и из аспекта крајњег корисника, који у реалном времену добија одговарајући производ и готов префабрикован склоп.

Индустријска производња функционалних елемената у градњи просторних структура, организована на наведени начин, омогућава да се индустрија представи на другачији начин – није више место на коме се прави функционални елемент скоро искључиво у великој серији, већ он може бити уникатан и може имати одређено место у објекту и структури, уколико за тим има потребе, али без утицаја на рентабилност таквог начина производње и монтаже.

### **2.2.3 Статичко-конструктивна својства примене префабрикованог система**

*Статичко-конструктивни аспект примене префабрикованог система треба да дефинише могућност конструктивног система да се са што мање материјала супротстави укупном припадајућем оптерећењу. При том, производња функционалних елемената мора бити једноставна, лака и брза, што подразумева и једноставан систем веза. Овај аспект примене префабрикованог*

*система обухвата и транспорт и монтажу функционалних елемената, као два битна чиниоца у одређивању његове рентабилности.*<sup>4</sup>

На избор одговарајућег префабрикованог система утичу потребе корисника, које даље дефинишу услове грађевинске физике, распон и висину структуре и посебне захтеве у обликовању. На рентабилност система могуће је утицати променом система веза функционалних елемената, међусобно и са ослоначком конструкцијом. Потребно је направити одговарајући однос рада, утрошка материјала, квалификованости потребне радне снаге. Код савремених префабрикованих система разлика може бити значајна, у зависности од степена техничко-технолошке опремљености и њихове технолошке флексибилности у производњи функционалних елемената.

Транспорт функционалних елемената може значајно утицати на рационалност примене одређеног префабрикованог система, почев од транспорта материјала и компоненти, транспорта произведених функционалних елемената у погону, преко транспорта до градилишта и, на крају, транспорт на самом градилишту. Транспорт функционалних елемената може бити хоризонталан и вертикалан.

### **2.2.3.1 Хоризонтални транспорт функционалних елемената**

Хоризонтални транспорт функционалних елемената је чест ограничавајући фактор, па је пожељно да су њихове димензије у границама транспортног габарита. Нашом законском регулативом, габаритне мере у току транспорта ограничене на висину 4,00 m и ширину 2,55 m. Функционални елементи који прекорачују транспортни габарит захтевају посебну пажњу и услове транспорта, чиме поскупљују саму структуру и рационалност примене система доводе у питање. Због тога је повољно уколико систем омогућава транспорт

---

<sup>4</sup> Кујунџић, Војислав, Примена индустријализованих монтажних система са аспекта рационализације градње дрвених кровних структура, Докторска дисертација, Архитектонски факултет, Београд, 1987, стр. 72.

функционалних елемената из делова, уколико они прекорачују одређени транспортни габарит, а на градилишту би се, уз помоћ стандардних спојних средстава и монтажних наставака формирао готов функционални елемент.

Транспорт функционалних елемената може бити стандардни, који не захтева посебне услове и специфичан, условљен ограничењима тежине, ширине или висине на објектима нискоградње, максималним нагибом пута, минималним радијусом кривине итд.. Специфични услови транспорта могу и не морају бити дефинисани специфичношћу функционалних елемената, већ су обично дефинисани локацијом објекта, односно трасом транспорта и важе само у тим условима.

Транспорт функционалних елемената може бити додатно оптерећен разноврсношћу њихових димензија. Функционални елементи допремљени на градилиште се, после хоризонталног, вертикално транспортују на објекат или, чешће, у случају полиедарских куполастих структура, монтирају се на тлу чинећи одређени сегмент структуре и тако монтирани подижу и уграђују, што укључује планирање редоследа транспорта и монтаже још пре њиховог утовара, ради уштеде у времену, уколико нема других приоритета.

### **2.2.3.2 Вертикални транспорт функционалних елемената**

Вертикални транспорт функционалних елемената може се обављати ручно или механизовано, у зависности од њихове тежине, величине и материјала од ког су израђени, што директно одлучује о избору префабрикованог система.

Рационалност примене одређеног префабрикованог система се огледа и у степену потребне тешке и скупе механизације. Лаки функционални елементи захтевају и примену лакше механизације и лакшу манипулацију њима.

### 2.2.3.3 Монтажа функционалних елемената

Предност префабрикованог система се огледа у омогућавању стандардне процедуре у монтажи функционалних елемената применом стандардног алата и у томе да монтажа није условљена њиховом истоветношћу, што би утицало и на рационалност њихове серијске производње.

Потреба за изградњом скеле при монтажи функционалних елемената такође утиче на рентабилност префабрикованог система. Уколико је омогућено формирање структуре на тлу, скела би била мања и рентабилнија, јер је потребно и мање времена за њену монтажу и демонтажу. У том случају и подизање и постављање структуре на пројектовано место, уз помоћ одговарајуће механизације може бити рационалније, у зависности од димензија структуре.

Велику предност у монтажи функционалних елемената имају префабриковани системи који омогућавају брзу монтажу и формирање веза без временског одлагања, у тзв. сувом поступку, као и они системи који омогућавају уградњу свих потребних слојева пре уградње самог функционалног елемента на пројектовано место у структури.

Такође, значајна ставка је и време ангажовања механизације, лаке и тешке. Монтажа се може тако организовати да се тешка механизација ангажује само у току кратког временског периода, за време постављања структуре или њеног дела на пројектовано место, док би се за манипулацију функционалним елементима применила лака механизација (или би се њима ручно манипулисало), што би била још једна предност префабрикованог системе.



### 3 Генерисање облика и тела полигонима

Полигон (*Πολύγωνο: многоугао*), грч. – затворена изломљена линија састављена од три или више дужи надовезаних једна на другу (...) Полигоном се назива и део равни ограничен простом затвореном полигоналном линијом.<sup>5</sup>

#### 3.1 Теселације еуклидске равни

Теселација представља прекривање одређене равни полигонима који се понављају тако да се они не преклапају и да не остаје шупљина између њих. Други назив за теселацију је поплочавање, а полигони се, у том случају, називају плочицама.

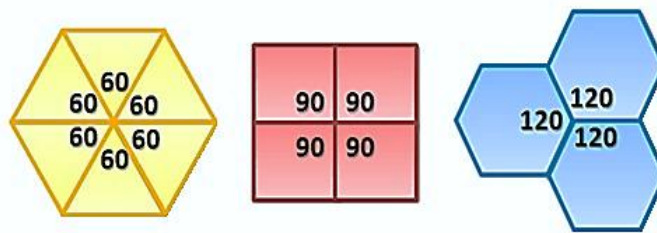
##### 3.1.1 Генерисање теселација равни

У свом делу *Хармонија света*, 1619. године, Јоханес Кеплер (*Johannes Kepler*, 1571-1630), између осталог, бавио се и теселацијама равни – дефинисао је 11 конвексних теселација равни које су униформне и коначне, а дао је и њихову енумерацију.

Да би се уз помоћ неколико полигона могла генерисати теселација равни, њихови ивични углови би морали да дају збир пуног круга,  $360^\circ$ , у противном се јављају шупљине између полигона, или се они преклапају. Број комбинација у којима би се користио исти, правилни полигон за формирање темена је само три: шест једнакостраничних троуглова, четири квадрата или три шестоугла. Три петоугла дају збир мањи од  $360^\circ$  и између њих остају шупљине.

---

<sup>5</sup> Мала енциклопедија Просвета: општа енциклопедија, 3. Књига, 4. издање, Просвета, Београд, 1986–, стр. 14.



Слика 3-1) Генерисање теселације равни мултипликацијом правилног полигона

У случају полуправилних теселација равни може се комбиновати више правилних полигона, уз услов остварења униформности – генерисано теме мора бити подударно са било којим другим. Слагањем различитих правилних полигона тако да се могу међусобно спојити својим теменима у заједничко теме, тј. да збир њихових унутрашњих углова буде тачно  $360^\circ$ , долази се до могућих 17 комбинација полигона, од којих се само 11 може даље слагати без појаве шупљина, или без преклапања.

### 3.1.2 Приказ теселација равни

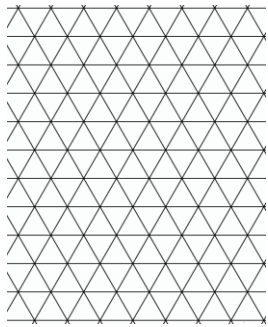
За описивање теселација равни користи се ознака  $(n_i^{[k1]}.n_{i+1}^{[k2]} \dots)^6$ . Опис теселације садржи циклични редослед полигона око његовог темена, па ако су сви полигони различити добиће се низ целих бројева који представљају бројеве страница полигона циклично распоређених око темена. Уколико се одређени полигон понавља више пута заредом, то се над бројем, којим је означен број страница наведеног полигона, ставља експонент једнак броју његовог понављања.

У опису теселације је:

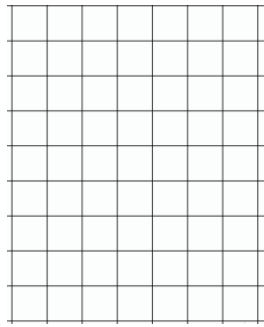
- $n_i$  – збир страница полигона који гради теме теселације;
- $k_1, k_2, \dots$  – збир подударних полигона који граде теме теселације.

---

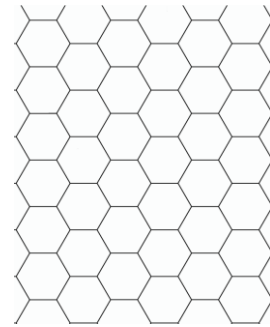
<sup>6</sup> Лучић, Зоран, Униформне теселације хиперболичке равни, докторска дисертација, Математички факултет, Београд, 1985, стр. 2



$(3^6)$

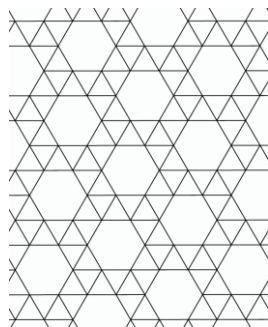


$(4^4)$

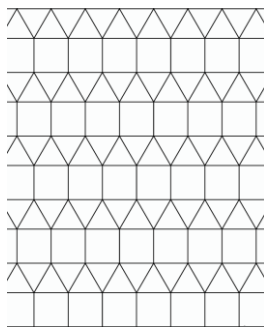


$(6^3)$

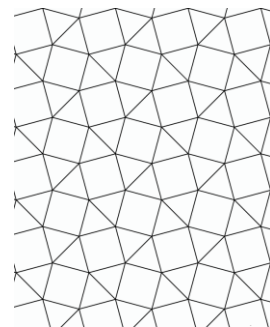
Слика 3-2) Правилне теселације



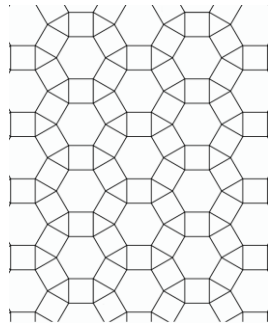
$(3^4.6)$



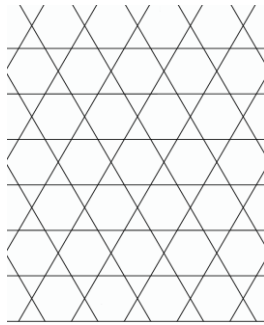
$(3^3.4^2)$



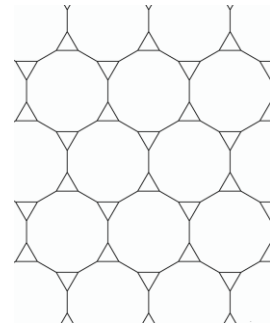
$(3^2.4.3.4)$



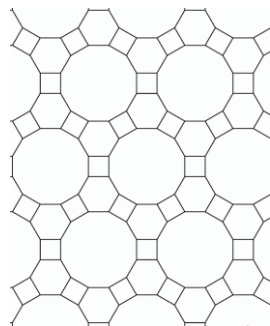
$(3.4.6.4)$



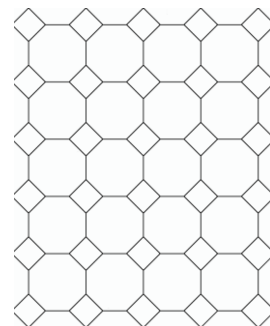
$(3.6)^2$



$(3.12^2)$



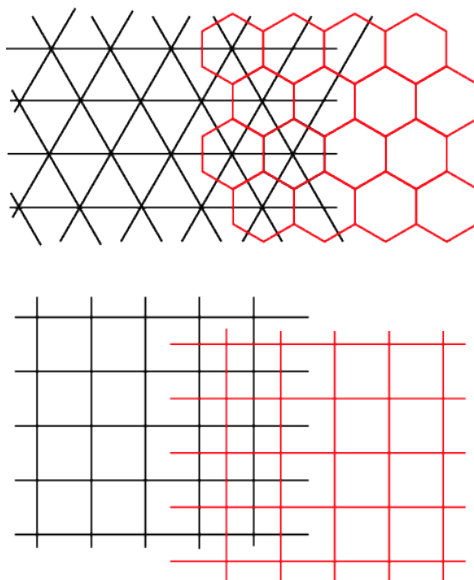
$(4.6.12)$



$(4.8^2)$

Слика 3-3) Полуправилне теселације

За два поплочавања се може рећи да су међусобно дуална ако постоји бијекција која пресликава тежишта, ивице и темена плочица једног поплочавања у, редом, темена, ивице и тежишта плочица другог поплочавања.<sup>7</sup>



Слика 3-4) Међусобна дуалност правилних теселација<sup>8</sup>

Број темена једне теселације одговара броју страна друге и обрнуто, док број ивица остаје исти, што је у складу са дефиницијом бијекције. Све теселације имају своје дуале, а њихове ознаке задржавају исте законитости. Дуали правилних теселација са ознакама  $(4^4)$ ,  $(3^6)$  и  $(6^3)$ , имају ознаке  $(4^4)$ ,  $(6^3)$  и  $(3^6)$ , датим редом, дакле, теселације  $(6^3)$  и  $(3^6)$  су међусобно дуалне, док је теселација  $(4^4)$  дуална сама себи, уједно и једина таква.

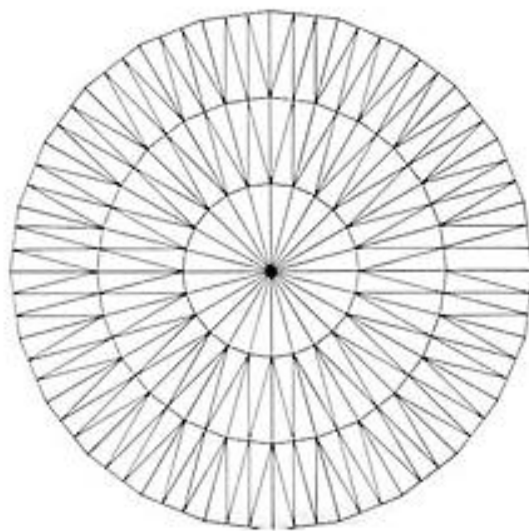
Дуалне теселације правилних теселација су такође правилне, док су дуалне теселације полуправилних теселација, неправилне. Све дуалне теселације равни (свих 11) називају се Лавесовим, по немачком кристалографу Фритцу Лавесу (*Fritz Laves, 1906-1978*).

<sup>7</sup> Бранкован, Тамара, К-униформне теселације еуклидске равни, завршни рад, Математички факултет, Београд, 2012, стр. 10.

<sup>8</sup> <http://mathworld.wolfram.com/DualTessellation.html>

Уколико су сви полигони теселације подударни, теселација се зове моноедарска. У ове теселације спадају, осим правилних униформних теселација и сви дуали полуправилних теселација, чије стране су неправилни, али подударни полигони. Већина полуправилних теселација има по два типа полигона и спада у диедарске, осим теселација (3.4.6.4) и (4.6.12), које имају по три типа полигона.

Теселација може бити ограничена или бесконачна. У случају да је теселација ограничена кругом, тачније његовом апроксимацијом (полигоном са релативно великим бројем страна), најједноставнији облик који може да чини моноедарско поплочавање је једнакокраки троугао са оштрим углом.



*Слика 3-5) Теселација круга троугловима*

## 3.2 Полиедри

Аналогно теселацијама еуклидске равни, скуп полигона који генерише одређени полиедар може се посматрати као теселација сфере. За разлику од теселација равни, које представљају бесконачан и отворен скуп полигона, теселације сфера су коначне и затворене.

### 3.2.1 Основне дефиниције

Реч теселација (*τέσσερα*: *четири*) је грчког порекла и означава коцкаст, који има облик коцке.

Полигони, који се користе у генерисању теселације, зову се стране (пљосни) теселације, заједничка страница две суседне стране је њена ивица, а тачка у којој се секу суседне ивице теселације је теме (рогаљ).

Теселације еуклидске равни (у даљем тексту: теселације равни) представљају бесконачан, отворен скуп полигона у еуклидској равни. Теселације, прихватљиве у случају генерисања полиедарских купола, су оне код којих свака два полигона деле највише једну ивицу, а зову се теселације ивица на ивицу<sup>9</sup>.

*Ако за било која два темена теселације постоји трансформација из групе њених симетрија која пресликава једно теме у друго, теселација је униформна.*<sup>10</sup>

Уколико су све стране униформне теселације равни правилне и подударне, она је правилна, а уколико су правилне, али не и подударне, онда је она полуправилна. Остале теселације равни су неправилне јер немају подударна темена, без обзира на то што могу бити генерисане помоћу правилних полигона. Дужине свих ивица правилних и полуправилних теселација равни су једнаке.

---

<sup>9</sup> Бранкован, Тамара, К-униформне теселације еуклидске равни, Завршни рад, Математички факултет, Београд, 2012, стр. 6.

<sup>10</sup> Дефиниција изведена из: Лучић, Зоран, Униформне теселације хиперболичке равни, Докторска дисертација, Математички факултет, Београд, 1985, стр. 1.

### 3.2.2 Основне дефиниције о полиедрима

Полиедар (*πολύεδρον*) је реч грчког порекла, која је настала из две речи, *поли-* (*πολύς*: *много, више-*) и *едар* (*ἔδρα, ἔδρον*: *основа, база*)<sup>11</sup>. Различите дефиниције полиедра се могу срести у литератури, од крајње поједностављених (некад и недовољно прецизних), до комплекснијих, у зависности од приступа овој области. Неке дефиниције чак искључују унутрашњост полиедра као његов саставни део. Најприхваћенија дефиниција у данашњој теорији о полиедрима је следећа:

*Полиедар је тродимензионално тело ограничено полигонима, тако да сваку ивицу деле тачно два полигона.*<sup>12</sup>

Полиедар је рогљасто геометријско тело ограничено равним полигонима (многоугловима) који се зову стране (пљосни) полиедра. Пресек две суседне стране полиедра је ивица, а тачка у којој се секу суседне ивице полиедра је теме (рогаљ). Темена су уједно и темена полигона који обавијају полиедар, а ивице полиедра су странице полигона. Дијагонала полиедра представља дуж која спаја два његова темена, а да при томе не припада ниједној његовој страни. Дакле, полиедар је, као тродимензионално тело, склоп различитих врста елемената нижег нивоа, дефинисаних кроз нула (теме), једну (ивица) или две димензије (страна полиедра).

Скуп свих полигона, који ограничавају полиедар, назива се полиедарска површ, док исти скуп полигона, развијених у једној равни, представља мрежу

---

<sup>11</sup> Израз је рашчлањен уз помоћ:

- Вујаклија, Милан, Лексикон страних речи и израза, Просвета, Београд, 2002.
- Загајац, Миливоје, Речник: грчко-српски, српско-грчки, Просвета, Београд, 2008.

<sup>12</sup> Обрадовић, Марија, Конструктивно-геометријска обрада тороидних делтаедара са правилном полигоналном основом, докторска дисертација, Архитектонски факултет, Београд, 2006, стр. 77.

полиедра. У случају полиедра, полиедарска површ је затворен скуп полигона и дели простор на спољашњи и унутрашњи, а тек заједно са унутрашњим простором чини полиедар.

Дефиницијом полиедара дата је њихова најпрепознатљивија особина – било која ивица полиедра је заједничка страница за највише два суседна полигона. Уколико једну ивицу дели три или више полигона, то тело не представља полиедар; ако постоји ивица која припада само једном полигону, онда је полиедарска површ отворена. Такође, свако теме полигона може припадати само једном темену полиедарске површи.

Због наведене особине о заједничкој ивици између само две стране било ког полиедра, могуће је успоставити посебан однос између броја његових елемената. Ову правилност је први уочио Ојлер (*Leonhard Euler*, 1707-1783) и важи за све конвексне полиедре:

$$S + T = I + 2$$

Где је:

- $S$  – број страна полиедра;
- $T$  – број темена полиедра;
- $I$  – број ивица полиедра.

Код конвексног полиедра број ивица једнак је збиру бројева страница и темена умањен за два. Разлика између, са једне стране, збира бројева страна и темена полиедра и, са друге стране, броја ивица, увек је два, уколико је у питању конвексни полиедар. У случају неконвексног полиедра ова разлика може бити два или други број различит од два. Дакле, остатак два не значи обавезно да је полиедар конвексан, али остатак различит од два је поуздан знак да је неконвексан. Због тога решавање овог обрасца спада у прву проверу конвексности одређеног полиедара.

Полиедри могу бити конвексни и неконвексни, односно конкавни. Полиедар је конвексан уколико било које две произвољне тачке полиедра могу



бити спојене помоћу дужи која у потпуности припада датом полиедру. Уколико постоји дуж која спаја две произвољне тачке полиедра, а сама не припада том полиедру у једном свом делу (или више делова), такав полиедар је неконвексан, односно конкаван је, без обзира на међусобни однос својих осталих страна.

Другим речима, ако би кроз све стране конвексног полиедра биле постављене одговарајуће равни тако да им стране у потпуности припадају, те равни не би секле унутрашњост наведеног полиедра, што значи да је свако теме полиедра испупчено. Израз неконвексан шири је по значењу од израза конкаван – док конвексан полиедар има само конвексна (испупчена) темена, докле неконвексан полиедар има и конвексна и конкавна (удубљена) темена.

Даљом анализом ће бити обухваћени само полиедри чија су темена строго конвексна, што значи да неће бити узети у обзир полиедри којима су стране компланарне.

Полиедри могу бити ограничени правилним и (или) неправилним полигонима, који међусобно могу бити подударни, односно неподударни. Темена полиедра такође могу бити правилна или неправилна, подударна или неподударна. Сходно томе, основна подела полиедара би била на правилне, полуправилне и неправилне.

Полиедар, чије су све стране правилни (регуларни) и подударни (конгруентни) полигони и чија су сва темена правилна и подударна, је правилан (регуларан) полиедар.

Полуправилни полиедри се деле на полиедре прве и друге врсте. Полуправилни полиедри прве врсте имају сва темена подударна, али она нису правилна, док су им све стране правилни, али не и подударни полигони. Такође, све ивице полуправилних полиедара прве врсте, као и ивице правилних, једнаких су дужина, што се може закључити из њихове дефиниције.

Из полуправилних полиедара прве врсте се, одређеном трансформацијом, могу добити одговарајући полуправилни полиедри друге врсте. Ови полиедри имају сва темена правилна, али та темена нису подударна, а све стране су им

подударне, али нису правилне, тј. нису правилни полигони. Због одређеног односа према полазним полиедрима, добијени полиедри се називају дуали, или дуални полиедри полазних полиедара.

Полуправилни полиедри прве врсте називају се још и једнакорогласти полуправилни полиедри, а полуправилни полиедри друге врсте називају се и једнакострани полуправилни полиедри. Неки аутори полуправилне полиедре прве врсте називају само полуправилни, а полуправилне полиедре друге врсте називају полуправилни дуални, због поменуте дуалности између полиедара прве и друге врсте.

Подгрупа полуправилних полиедара прве врсте су квазиправилни (квазирегуларни) полиедри, који имају само по два типа правилних полигона, од којих се полигони једног типа наизменично смеђују са полигонима другог типа у њиховим теменима. Ово смењивање полигона различитих типова доводи до тога да су сви диједрални углови таквих тела једнаки и све ивице подударне, па се сматра да је форма квазиправилних полиедара ближа форми правилних, у односу на остале полуправилне полиедре. Аналогно претходним дефиницијама, њихови дуали се називају квазиправилни дуални полиедри.

Неправилни полиедри су они који нису ни правилни ни полуправилни; могу имати правилне или неправилне полигоне за стране и идентична или различита темена, што може бити основа за издвајање одређених полиедара из бесконачног низа.

*Да би један полиедар био униформни, потребно је да свака његова страна буде правилан полигон, а свако теме мора бити идентично осталима. При томе, саме стране не морају бити идентични полигони.<sup>13</sup>*

---

<sup>13</sup> Обрадовић, Марија, Конструктивно-геометријска обрада тороидних делтаедара са правилном полигоналном основом, докторска дисертација, Архитектонски факултет, Београд, 2006, стр. 83.

Према претходној дефиницији и правилни и полуправилни полиедри прве врсте спадају у групу униформних полиедара. Све њихове стране су правилни полигони, а сва темена идентична осталима. При генерисању темена ових полиедара постоји одређени образац који важи за сва темена у истом или супротном, цикличном понављању полигона.

Око правилног полиедра се може описати сфера и она садржи темена полиедра. Сва темена било којег правилног полиедра налазе се на површини описане сфере око њега. Такође, у правилни полиедар се може и уписати сфера, у ком случају она додирује све његове стране, тачније, пролази кроз тежишта свих страна полиедра. И најзад, код правилног полиедра се може издвојити још и средња сфера (међусфера), која додирује средине свих његових ивица.

Са друге стране, око полуправилног полиедра прве врсте може се описати сфера која садржи сва његова темена, али се не може уписати сфера која би додиривала све стране полиедра. Због једнаких ивица може се генерисати и међусфера која би их додиривала. У полуправилни полиедар друге врсте се, са друге стране, може уписати сфера која додирује све његове стране, али не постоји сфера која би садржала сва његова темена, нити се може генерисати одговарајућа међусфера.

*Дуалност је однос између два полиедра, при којем они деле идентичан број ивица, али су им бројеви темена и страна комутативни, захваљујући сферном реципроцитету.<sup>14</sup>*

Дуални полиедар има онолико темена колико страна има полазно тело и онолико страна колико полазно тело има темена. Осим тога, дуално тело има исте симетрије као и полазно. Због ове дуалности, узајамног односа и повезаности дуалних полиедара са полазним, полиедри се често посматрају у паровима. Често

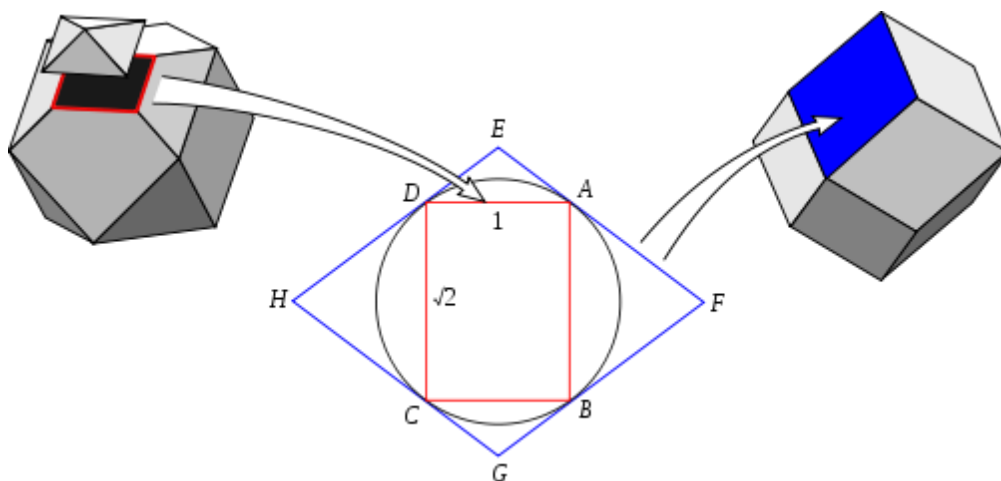
---

<sup>14</sup> Обрадовић, Марија, Конструктивно-геометријска обрада тороидних делтаедара са правилном полигоналном основом, докторска дисертација, Архитектонски факултет, Београд, 2006, стр. 55.

се неке особине појединих полиедара доказују преко особина њихових дуалних тела.

Веза између полазног и дуалног полиедра је таква да теме полазног постаје страна новог, дуалног, док се страна полазног сажима у теме новог полиедра. Један од начина конструисања дуалног тела је да се у теменима полазног тела поставе равни које тангирају сферу описану око полазног тела – дуално тело је простор дефинисан пресецима наведених равни, а који садржи центар сфере. Сфера описана око полазног тела представља сферу уписану у дуално тело.

У случају правилних полиедара, због подударности ивица и једнаких диједралних углова, равни које тангирају описану сферу у теменима полиедара подједнако су удаљене од тежишта суседних страна, па се наведена конструкција може дефинисати на једноставнији начин – темена дуалног тела се добијају сажимањем страна полазног у своја тежишта, док се стране дуалног тела добијају спајањем добијених тежишта суседних страна полазног. Сфера описана око дуалног тела представља сферу уписану у полазно тело, дакле обрнуто него у случају претходне конструкције.

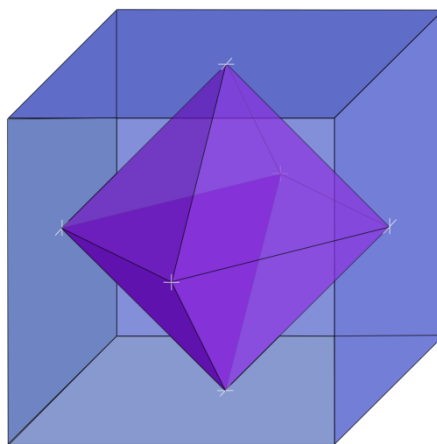


Слика 3-6) *Dortan Luke* метода конструисања дуалног тела<sup>15</sup>

<sup>15</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Dual\\_polyhedron](https://en.wikipedia.org/wiki/Dual_polyhedron)

Ова једноставнија конструкција се може применити само у случају правилних полиедара, док код осталих полиедара тежишта суседних страна нису увек и подједнако удаљена од тангирајућих равни, што може довести до тога да темена страна дуалног тела не буду компланарна, тј. да им стране буду витоперне. Проблем се јавља код полиедара чија темена чини четири или пет страна, јер број потенцијално некомпланарних темена стране дуалног тела може бити једнак наведеном броју страна умањеног за три.

Дуално тело се може конструисати и на друге начине. Конструкција приказана на примеру кубоктаедра назива се *Dorman Luke* метода<sup>16</sup> и може се применити на сва униформна тела. Прво се одреде додирне тачке међусфере и полиедра (средине ивица полиедра)  $A, B, C$  и  $D$ . Спајањем ових тачака добија се полигон са онолико страница колико страна дефинише теме полазног полиедра, који је у приказаном случају правоугаоник. Затим се кроз те тачке повлаче тангенте на круг описан око правоугаоника  $ABCD$ . Добијени ромб  $EFGH$  представља страну дуалног полиедра.



Слика 3-7) Дуалност између октаедра и коцке – један дуални пар

Двострука дуалност даје полазни полиедар, тј. дуални полиедар дуалног полиедра јесте полазни полиедар. Дуали правилних полиедара су такође правилни полиедри. Дуали полуправилних полиедара прве врсте су полиедри који за стране

---

<sup>16</sup> Kappraff, Jay, *Connections, the geometric bridge between art and science*, World Scientific, Singapore – New Jersey – London – Hong Kong, 2001, стр. 337.

имају неправилне полигоне. Како двострука дуалност даје полазни полиедар, то важи и дуалност у супротном смеру. Оваква дуалност се назива повратна дуалност. Два међусобно дуална тела чине дуални пар.

Може се закључити:

- Број страна полазног полиедра одговара броју темена дуалног;
- Број темена полазног полиедра одговара броју страна дуалног;
- Број ивица полазног полиедра једнак је броју ивица дуалног.

Занимљиво је посматрати стабилност ивичне структуре полиедра. Сами полиедри су стабилне фигуре, пошто су ограничени полигонима. Ако би се посматрао жичани модел полиедарске форме, модел састављен од штапова (ивица полиедра) зглобно повезаних у теменима, добила би се тзв. ивична структура полиедра, чија се стабилност може проверити према познатом обрасцу:

$$I = 3 \cdot T - 6$$

Ивична структура полиедра је стабилна и статички одређена уколико су све његове стране облика троугла, док би у осталим случајевима било потребно додавање одређеног броја нових штапова.

У складу са напред изнетим дефиницијама у конвексне полиедре, поред правилних, спадају и полуправилни полиедри прве и друге врсте, али и одређени неправилни полиедри. Неке од ових група су бесконачне, па ће бити приказани само карактеристични полиедри, од значаја за даљу анализу. Из тог разлога ће и од неправилних полиедара бити анализирани само они чије стране су правилни полигони.

Правилни полиедри називају се још и Платоновим полиедри.

Групу полуправилних полиедара прве врсте, у складу са претходним дефиницијама, чине Архимедови полиедри и бесконачни низови једнакоивичних призми и једнакоивичних антипризми. Посебно се издвајају Архимедови полиедри, који се могу добити и од одговарајућих правилних полиедара одређеним геометријским поступцима.

У полуправилне полиедре друге врсте спадају Каталанови полиедри.

У раду ће бити приказана и група Џонсонових полиедара, који не спадају ни у правилне ни у полуправилне полиедре, али су им стране правилни полигони. Поједини полиедри из ове групе се могу користити за формирање куполастих структура, у целости или једним својим делом.

У остале конвексне полиедре спадају призме, антипризме, пирамиде итд., а поједини правилни и полуправилни полиедри спадају и у ове, шире групе полиедара.

Поред бесконачних низова једнакоивичних призми и једнакоивичних антипризми, укупно има још само 18 конвексних полиедара који спадају у униформне, а то су Платонове и Архимедове полиедри. Низ неуниформних полиедара је бесконачан, а од набројаних у ову групу спадају Каталанови и Џонсонови полиедри, с тим да Каталанови имају стране у облику неправилних полигона, а Џонсонови у облику правилних. Ако се изузму наведени низови призми и антипризми, укупан број конвексних полиедара са странама у облику правилних полигона износи 110 – чине их Платонове, Архимедове и Џонсонови полиедри.

### **3.2.3 Платонове полиедри**

Правилним полиедрима често није придаван посебан значај у односу на друга, неправилна и несиметрична геометријска тела. Поједини облици предмета и ствари из свакодневног живота и за свакодневну употребу су били полиедри, а пронађени су и разни предмети чија намена није откривена до данашњег дана.

Тако су, на пример, у Шкотској пронађене камене лопте настале крајем неолита, око 1000 година пре Платона, од којих се око 40 налази у музејима у Шкотској и Енглеској. Ове фигуре имају уклесане орнаменте, од којих неке имају испупчења у броју темена Платонових полиедара (није пронађена фигура са 20 испупчења). Међутим, са тврдњама да ове камене лопте представљају правилне полиедре многи аутори се не слажу.



Слика 3-8) Неке од камених лопти пронађених у Шкотској<sup>17</sup>

Такође су у разним деловима Европе, углавном у северним крајевима, из времена империје старог Рима, пронађени мали, шупљи, бронзани додекаедри, чија примена још увек није утврђена.



Слика 3-9) Додекаедри<sup>18</sup> и икосаедри<sup>19</sup> из времена римске империје

Тетраедар, коцка и октаедар су били познати Египћанима бар 1000 година пре првог познатог математичког описивања ових тела, а за додекаедар се знало у Италији у предпитагорејско време, али су, изгледа, тек антички Грци приметили посебност полиедара правилне форме и доста пажње посвећивали њиховом проучавању.

Иако се правилни полиедри данас називају још и Платоновим, не слажу се сви у томе да их је он и открио. Из неких извора се може закључити да их је први открио Питагора (*Πυθαγόρας*, око 580. п.н.е. – око 497. п.н.е.). Из других извора се да закључити да је за откриће октаедра и икосаедра заслужан Теетет (*Θεαιτητος*, 417-369. п.н.е.), који је први описао свих пет полиедара, а да је Питагора познавао само тетраедар, коцку и додекаедар; сва три наведена тела имају једну заједничку

<sup>17</sup> <http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/neolithic.html>

<sup>18</sup> <http://artefacts.mom.fr/fr/result.php?id=DOD-4001&find=DOD&pagenum=1&affmode=vign>

<sup>19</sup> <http://www.romansystemsengineering.com/hypothesis.html>



особину, а то је да имају по три полигона у сваком од темена. Трећи извори, пак, сугеришу да их је Платон (*Πλάτων*, 427-347. п.н.е.) открио, с обзиром на то да је Теетет био његов савременик, а управо их је Теетет први дефинисао, конструисао и испитивао њихова заједничка својства, а највероватније и дефинисао појам правилни полиедри<sup>20</sup>. Управо због тога се откриће правилних полиедара најчешће приписује Теетету, иако се то из старих списа не може са потпуном сигурношћу тврдити.

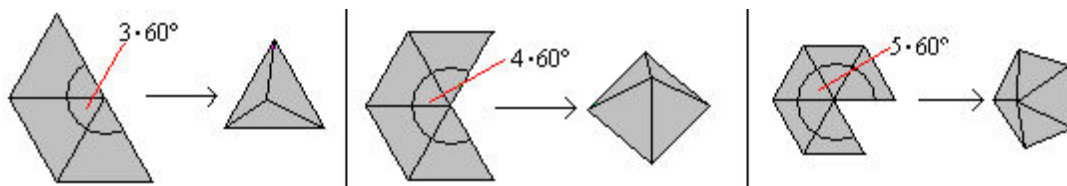
Верује се да је Теетет поставио први доказ да правилних полиедара има тачно пет и да не може постојати више ниједан правилан полиедар, као и да је прорачунао односе између дужина ивица и пречника описаних сфера за све правилне полиедре. Претпоставља се да је Еуклид (*Ευκλείδης*, 330-275. п.н.е.) на основу Теететовог рада поставио математички опис (конструкцију и однос пречника описане сфере и дужине ивице полиедра) сваког од полиедара у својим *Елементима*, у XIII књизи, тврђења 13-18. У тврђењу 18 наводи да не постоји ниједан правилан полиедар осим поменутих пет. Наравно, ово тврђење важи само за правилне конвексне полиедре, нема трагова да су правилни неконвексни полиедри били предмет изучавања у то време.

### 3.2.3.1 Генерисање Платонових полиедара

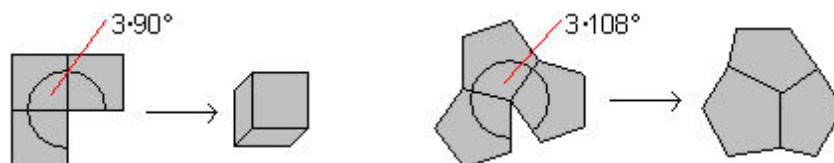
Правилан полиедар има све стране правилне и подударне и сва темена правилна и подударна. За формирање темена правилног полиедра потребна су најмање три правилна полигона, чији су ивични углови темена мањи од  $120^\circ$ .

---

<sup>20</sup> Лучић, Зоран, Униформне теселације хиперболичке равни, докторска дисертација, Математички факултет, Београд, 1985, стр. I.



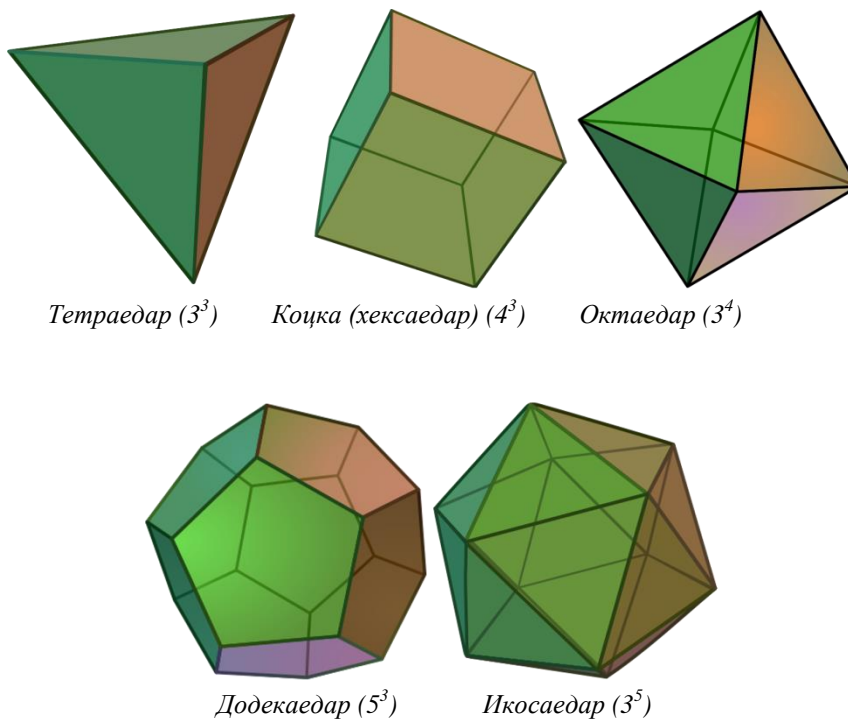
Слика 3-10) Формирање темена тетраедра, октаедра и икосаедра



Слика 3-11) Формирање темена коцке и додекаедра

### 3.2.3.2 Преглед Платонових полиедара

Постоји само пет правилних полиедара.



Тетраедар ( $3^3$ )

Коцка (хексаедар) ( $4^3$ )

Октаедар ( $3^4$ )

Додекаедар ( $5^3$ )

Икосаедар ( $3^5$ )

Слика 3-12) Платонови полиедри

За опис наведених полиедара усваја се принцип означавања по истом обрасцу као и код теселација ( $n^k$ ). На овај једноставан начин је могуће генерисати

ознаке правилних полиедара које у потпуности дефинишу карактеристике правилних полиедара.

### 3.2.3.3 Геометријске карактеристике Платонових полиедара

Између броја елемената било ког правилног полиедра и полигона који чине његове стране може се успоставити одређена релација<sup>21</sup>:

$$S = T * \frac{k}{n}, \quad T = S * \frac{n}{k}$$

$$I = S * \frac{n}{2} = T * \frac{k}{2}$$

Где је:

- $n$  – број страница полигона – стране полиедра.
- $k$  – број полигона који граде једно теме полиедра.

Табела 3-1) Геометријске карактеристике Платонових полиедара

Назив полиедра	Облик стране	Број страна у темену	Укупан број страна	Укупан број темена	Укупан број ивица	Ознака ( $n^k$ )
Тетраедар	Троугао	3	4	4	6	(3 <sup>3</sup> )
Октаедар	Троугао	4	8	6	12	(3 <sup>4</sup> )
Икосаедар	Троугао	5	20	12	30	(3 <sup>5</sup> )
Коцка	Квадрат	3	6	8	12	(4 <sup>3</sup> )
Додекаедар	Петоугао	3	12	20	30	(5 <sup>3</sup> )

Будући да све стране, сваког од полиедара појединачно, представља исти полигон, то су и све ивице једнаких дужина и подударне су, што значи да су им

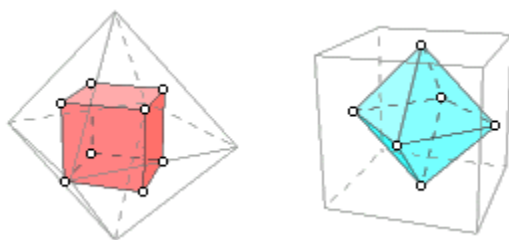
---

<sup>21</sup> Петрушевски, Љиљана, Полиедри, Математика, предавање 2, Архитектонски факултет, Београд, стр. 38.

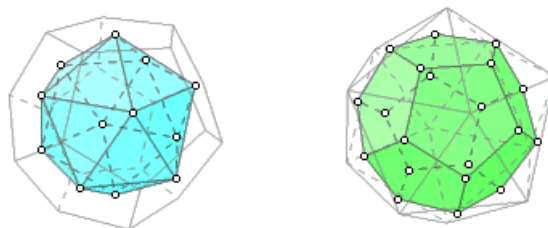
сви диедрални углови једнаки. Платонови полиедри имају три карактеристичне сфере, напред наведене: описану око тела, уписану у тело и међусферу.



Слика 3-13) Тетраедар је дуалан сам себи



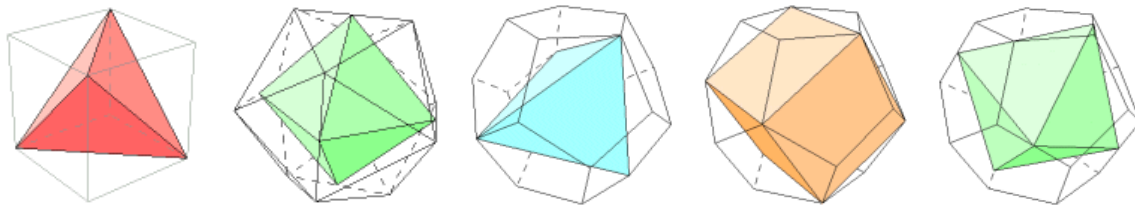
Слика 3-14) Коцка и октаедар, дуални пар



Слика 3-15) Икосаедар и додекаедар, дуални пар

Дуалност, осим поменуте између икосаедра и додекаедра, постоји и између осталих правилних полиедара – између коцке и октаедра постоји узајамна дуалност, док је тетраедар дуалан сам себи. Уписана сфера једног правилног полиедра је описана сфера његовог дуалног полиедра. Однос међусобно дуалних, конвексних, правилних полиедара се показује кроз означавање истих – ако је ознака полазног полиедра ( $n^k$ ), то је ознака дуалног полиедра ( $k^n$ ). Међусобно дуални полиедри имају и једнак број симетрија.

Осим дуалности, сва Платонова тела међусобно имају специфичан геометријски однос, од којих су неки приказани на слици 3-16.



Слика 3-16) Неки од геометријских односа између Платонових тела

### 3.2.4 Архимедови полиедри

Архимед (*Αρχιμήδης*, 287. п.н.е. – 212. п.н.е.) је био Платонов ученик. За разлику од већине својих савременика, па и Платона, није потцењивао инжењерска знања и вештине и често је до својих открића долазио прво експериментално, а тек би их касније описивао и доказивао теоријски.

Иако Архимедов спис није сачуван, захваљујући Папосу (*Πάππος*, 290-350), једном од последњих математичара античке Грчке, који је у петој књизи свог дела *Синагоге* начинио дигресију посвећену Архимедовом делу, његов садржај је, углавном, познат<sup>22</sup>. Из овог дела је познато да је Архимед истраживао и дефинисао укупно 13 тела. Нажалост, Папосово дело не садржи цртеже тих тела, тако да су многи математичари каснијих епоха покушавали да их реконструишу. То је, за свих 13, коначно пошло за руком тек Кеплеру, 1619. године, у већ поменутом делу *Хармонија света*. Овај, својевремено најистакнутији немачки математичар и астроном, реконструисаним телима је дао и имена базирана на латинској терминологији, која су још увек у употреби.

#### 3.2.4.1 Генерисање Архимедових полиедара

Архимедова тела су конвексни полиедри и спадају у одређене шире групе полиедара, али се у литератури, као и Платонова, често издвајају и посматрају независно од осталих полиедара. Ова тела су логичан наставак у систематизацији

---

<sup>22</sup> Лучић, Зоран, Униформне теселације хиперболичке равни, докторска дисертација, Математички факултет, Београд, 1985, стр. I.

полиедара, од Платонових, геометријски „савршених“, ка сложенијим и „несавршенијим“ телима. Архимедови полиедри спадају у полуправилне полиедре прве врсте – имају подударна темена, али она нису правилна, а странице су им правилни полигони, али те странице нису подударне.

Сва темена одређеног Архимедовог полиедра формира исти број полигона одређених разноврсних типова, поређаних у истом или супротном, кружном поретку, дакле, темена су подударна или симетрична. Све ивице Архимедових полиедара су једнаке, што проистиче из њихове дефиниције, односно из чињенице да су им стране правилни полигони, који и кад су различити, имају заједничке странице истих дужина.

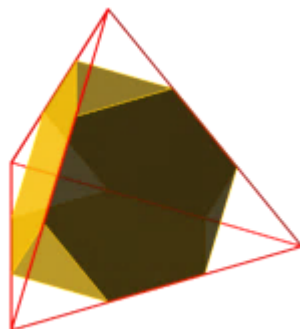
Број комбинација правилних (разноврсних) полигона који могу да формирају конвексна темена полиедара је коначан и ограничен је конвексношћу тих темена. Укупан број оних комбинација из којих се може добити конвексни полиедар је тринаест, што представља и коначан број Архимедових тела. Сва Архимедова тела се могу добити помоћу правилних полигона са 3, 4, 5, 6, 8 или 10 страница, али се у сваком од њих појављују само по два или три различита полигона.

За описивање Архимедових полиедара може се усвојити исти образац који је коришћен и за описивање теселација равни и Платонових полиедара,  $(n_1^{[k1]}.n_2^{[k2]} \dots)$ .

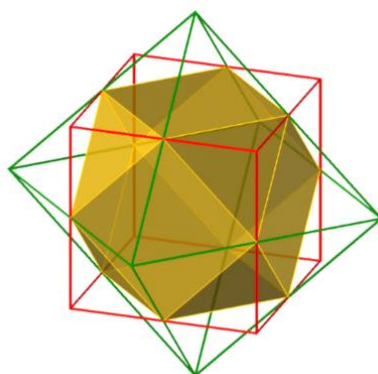
Тако, на пример, ознака  $(3.4^3)$  описује теме полиедра које је генерисано од једног једнакостраничног троугла и три квадрата. Полиедар, чије је теме генерисано од два троугла и два квадрата тако да су једнаки полигони супротни у темену, означава се са  $(3.4)^2$  (низ троугао-квадрат-троугао-квадрат), док ознака  $(3^2.4^2)$  представља тело у чијем темену су једнаки полигони један до другог (низ троугао-троугао-квадрат-квадрат). Због униформности полиедра је свеједно који је смер генерисања темена. Имена, која је Кеплер дао овим телима, као и ознаке базиране на редоследу полигона у теменима, биће приказани у табели, у наставку поглавља.

### 3.2.4.2 Преглед Архимедових полиедара

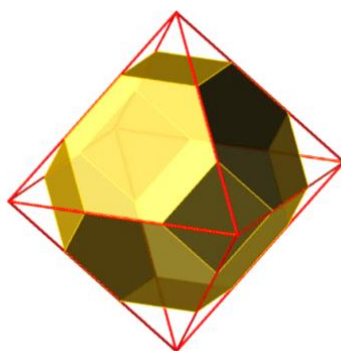
На сликама<sup>23</sup> 3-17 до 3-29 приказани су Архимедови полиедри са уобичајеним називима и са нумеричким ознакама. Ови полиедри су представљени у моделима одговарајућих Платонових полиедара, из којих такође могу настати одређеним конструкцијама.



Слика 3-17) Трунковани тетраедар,  $(3.6^2)$



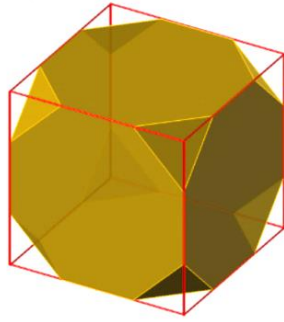
Слика 3-18) Кубоктаедар,  $(3.4^2)$



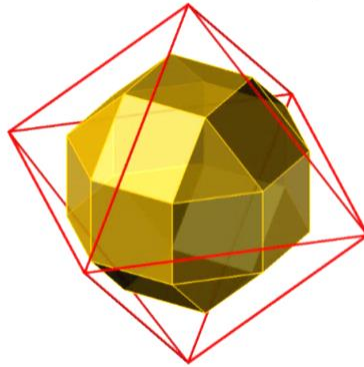
Слика 3-19) Трунковани октаедар,  $(4.6^2)$

---

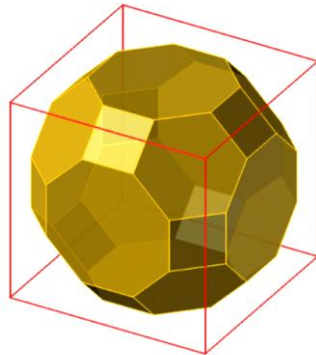
<sup>23</sup> [http://www.grad.hr/geomteh3d/posteri/polupravilni\\_poster.pdf](http://www.grad.hr/geomteh3d/posteri/polupravilni_poster.pdf)



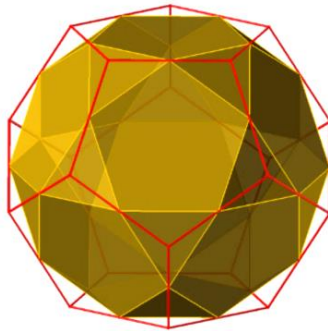
Слика 3-20) Трункована коцка,  $(3.8^2)$



Слика 3-21) Ромбикубоктаедар,  $(3.4^3)$

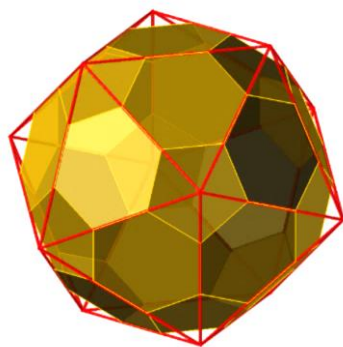


Слика 3-22) Трунковани кубоктаедар,  $(4.6.8)$

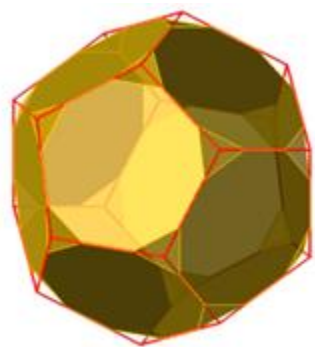


Слика 3-23) Икосидодекаедар,  $(3.5)^2$





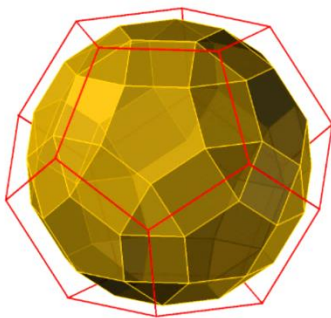
Слика 3-24) Трунковани икосаедар,  $(5.6^2)$



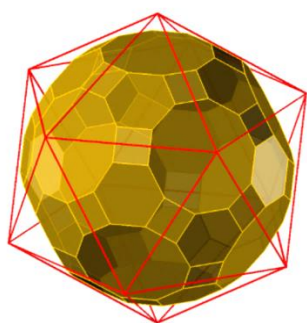
Слика 3-25) Трунковани додекаедар,  $(3.10^2)$



Слика 3-26) Проширена коцка,  $(3^4.4)$



Слика 3-27) Ромбикосидодекаедар,  $(3.4.5.4)$



Слика 3-28) Трунковани икосидодекаедар,  $(4.6.10)$



Слика 3-29) Проширени додекаедар,  $(3^4.5)$

### 3.2.4.3 Геометријске карактеристике Архимедових полиедара

У следећој табели су приказане геометријске карактеристике Архимедових полиедара.

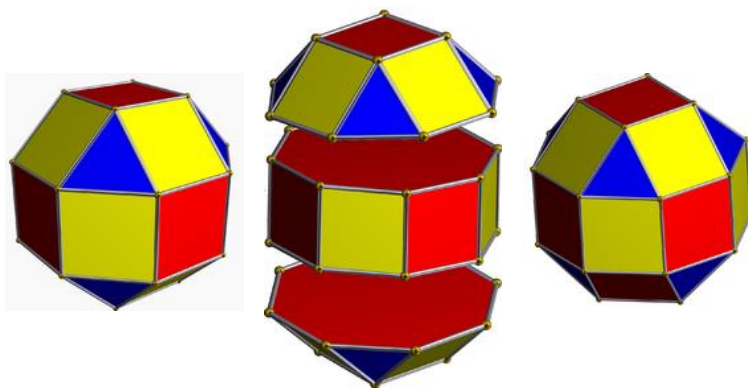
Табела 3-2) Геометријске карактеристике Архимедових полиедара

Назив полиедра	Број страница полигона	Број подударних полигона	Број страна у темену	Укупан број страна	Укупан број темена	Укупан број ивица	Нумеричка ознака
Трунковани тетраедар	3 6	4 4	3	8	12	18	$(3.6^2)$
Кубоктаедар	3 4	8 6	4	14	12	24	$(3.4)^2$
Трунковани октаедар	4 6	6 8	3	14	24	36	$(4.6^2)$
Трункована коцка	3 8	8 6	3	14	24	36	$(3.8^2)$
Ромбикуб-октаедар	3 4	8 18	4	26	24	48	$(3.4^3)$

Назив полиедра	Број страница полигона	Број подударних полигона	Број страна у темену	Укупан број страна	Укупан број темена	Укупан број ивица	Нумеричка ознака
Трунковани кубоктаедар	4 6 8	12 8 6	3	26	48	72	(4.6.8)
Икоси-додекаедар	3 5	20 12	4	32	30	60	(3.5) <sup>2</sup>
Трунковани икосаедар	5 6	12 20	3	32	60	90	(5.6 <sup>2</sup> )
Трунковани додекаедар	3 10	20 12	3	32	60	90	(3.10 <sup>2</sup> )
Проширена коцка	3 4	32 6	5	38	24	60	(3 <sup>4</sup> .4)
Ромбикоси-додекаедар	3 4 5	20 30 12	4	62	60	120	(3.4.5.4)
Трунковани икоси-додекаедар	4 6 10	30 20 12	3	62	120	180	(4.6.10)
Проширени додекаедар	3 5	80 12	5	92	60	150	(3 <sup>4</sup> .5)

Од свих Архимедових полиедара, једино кубоктаедар и икосидодекаедар спадају у подгрупу квазиправилних.

Око било ког Архимедовог полиедра се може описати сфера, која садржи сва његова темена и међусфера, која додирује средине свих његових ивица.



Слика 3-30) Трансформација ромбикубоктаедра у псеудоромбикубоктаедар

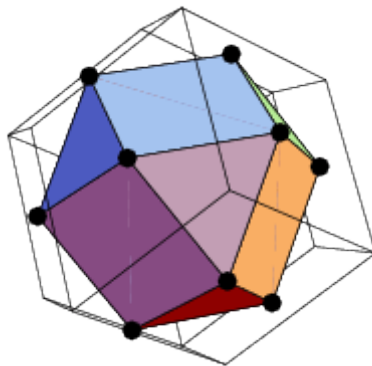
Поједини аутори у Архимедова тела убрајају и псеудоромбикубоктаедар, који се од ромбикубоктаедра разликује по томе што му је доња страна заротирана у односу на горњу за 90°, тако да нема све симетрије које има ромбикубоктаедар.

Према усвојеном означавању Архимедових полиедара, оба тела би носила ознаку  $(3.4^3)$ . Овај полиедар је познатији као Џонсонов и у енумерацији његових тела носи ознаку  $J_{37}$ .

### 3.2.5 Каталанови полиедри

Каталанови полиедри су дуали Архимедових полиедара. Названи су у част белгијског математичара, Еугена Каталана (*Eugène Catalan*, 1814–1894), који их је први публикувао.

Каталанови полиедри су полуправилни полиедри друге врсте – све њихове стране су подударни, али не и правилни полигони, а сва темена су им правилна, али она нису и подударна. По дефиницији о дуалности, да двострука дуалност полиедра даје исти, полазни полиедар, следи да су дуали Каталанових Архимедови полиедри, тј. представљају дуалне парове. Укупно има 13 дуалних парова. Било који дуални пар полиедара међусобно дели исте симетрије.

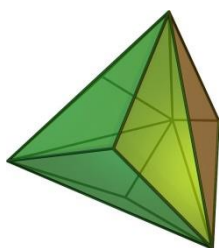


Слика 3-31) Повратна дуалност између кубоктаедра и ромбичног додекаедра

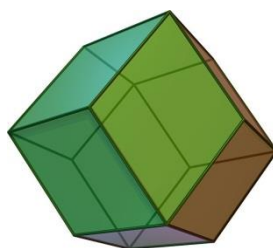
Подударност страна Каталанових полиедара потиче од подударности темена Архимедових полиедара, док правилност темена потиче од правилности цикличног понављања полигона који чине стране Архимедових полиедара, у теменима. Различитих темена има два или три типа, аналогно томе колико типова полигона има одговарајући Архимедов полиедар, чији је он дуал.

### 3.2.5.1 Преглед Каталанових полиедара

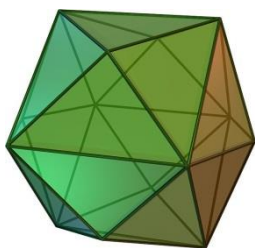
Каталанови полиедри описују се истим низом бројева, којим се описују и Архимедови полиедри, осим што тај низ почиње словом  $V$  (*vertex* – теме, чвор). Тако, на пример, ознака  $V(3.4^3)$  описује делтоидни икоситетраедар, а његов дуални пар је ромбикубоктаедар, са ознаком  $(3.4^3)$ .



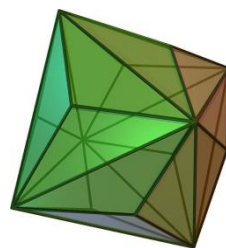
Триакис тетраедар,  $V(3.6^2)$



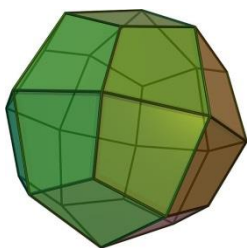
Ромбични додекаедар,  $V(3.4)^2$



Тетракис хексаедар,  $V(4.6^2)$



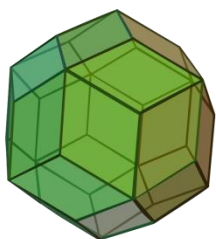
Триакис октаедар,  $V(3.8^2)$



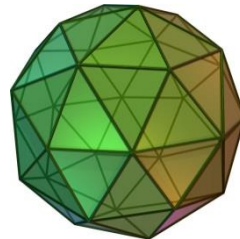
Делтоидни икоситетраедар,  $V(3.4^3)$



Дисдиакис додекаедар,  $V(4.6.8)$



Ромбични триаконтаедар,  $V(3.5)^2$

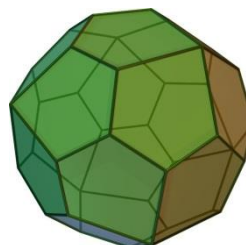


Пентакис додекаедар,  $V(5.6^2)$

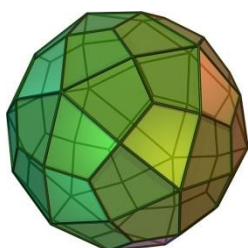
Слика 3-32) Каталанови полиедри, део 1



Триакис икосаеда,  $V(3.10^2)$



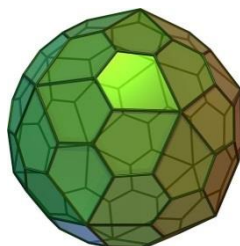
Пентагонални икоситетраеда,  $V(3^4.4)$



Делтоидни хексаконтаеда,  $V(3.4.5.4)$



Дисдиакис триаконтаеда,  $V(4.6.10)$



Пентагонални хексаконтаеда,  $V(3^4.5)$

Слика 3-33) Каталанови полиедри, део  $2^{24}$

Два Каталанова полиедра су дуали квазирегуларних Архимедових полиедара, кубоктаедра и икосидодекаедра, то су ромбични додекаеда и ромбични триаконтаеда. Ова два тела се разликују од осталих Каталанових тела као што се и квазирегуларна тела разликују од осталих полуправилних полиедара прве врсте – имају стране у облику ромбова, сложених на такав начин да су им сви диедрални углови једнаки.

---

<sup>24</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan\\_solid](https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_solid)

### 3.2.5.2 Геометријске карактеристике Каталанових полиедара

Табела 3-3) Геометријске карактеристике Каталанових полиедара

Назив полиедра	Број страница полигона	Укупан број страна	Укупан број темена	Укупан број ивица	Ознака полиедра	Дуални полиедар
Триакис тетраедар	3	12	8	18	$V(3.6^2)$	Трунковани тетраедар
Ромбични додекаедар	4	12	14	24	$V(3.4)^2$	Кубоктаедар
Тетракис хексаедар	3	24	14	36	$V(4.6^2)$	Трунковани октаедар
Триакис октаедар	3	24	14	36	$V(3.8^2)$	Трункована коцка
Делтоидни икоситетраедар	4	24	26	48	$V(3.4^3)$	Ромби-кубоктаедар
Дисдиакис додекаедар	3	48	26	72	$V(4.6.8)$	Трунковани кубоктаедар
Ромбични триаконтаедар	4	30	32	60	$V(3.5)^2$	Икоси-додекаедар
Пентакис додекаедар	3	60	32	90	$V(5.6^2)$	Трунковани икосаедар
Триакис икосаедар	3	60	32	90	$V(3.10^2)$	Трунковани додекаедар
Пентагонални икоситетраедар	5	24	38	60	$V(3^4.4)$	Проширена коцка
Делтоидни хексаконтаедар	4	60	62	120	$V(3.4.5.4)$	Ромбикоси-додекаедар
Дисдиакис триаконтаедар	3	120	62	180	$V(4.6.10)$	Трунковани икосидодекаедар
Пентагонални хексаконтаедар	5	60	92	150	$V(3^4.5)$	Проширени додекаедар

У приказаној табели су дате основне геометријске карактеристике Каталанових полиедара, са усвојеном ознаком и ознаком одговарајућег дуалног, Архимедовог тела, са којим чине дуални пар.

Дуали хиралних полиедара су такође хирални, тј. јављају се у по две симетричне форме. У случају Каталанових полиедара, то су пентагонални икоситетраедар и пентагонални хексеконтаедар.

Каталанови полиедри имају карактеристичну уписану сферу која додирује тежишта сваке од страна.

### 3.2.6 Џонсонови полиедри

Комплетан преглед конвексних полиедара чије су стране правилни полигони, извршио је Норман Џонсон (*Norman Johnson*, рођен 1930) и објавио 1966. године<sup>25</sup>. Задржавајући се на полиедрима који нису униформни успео је да избегне дуплирање већ специфицираних Платонових и Архимедових полиедара, али и формирање бесконачне листе једнакоивичних призми и једнакоивичних антипризми и да добије коначну листу од 92 тела.

Џонсон није дао доказ да ових полиедара нема више од набројаних, већ је само дао претпоставку, а доказ је публикувао Виктор Залгалер (*Виктор А. Залгаллер*, рођен 1920) већ следеће, 1967. године<sup>26</sup>. Џонсон познате полиедре дели на саставне, мање јединице и поново их комбинује, добијајући нова тела. Већина Џонсонових тела се може добити комбиновањем неколико његових једноставнијих полиедара са униформним, али има и оних која се не могу добити комбиновањем других.

---

<sup>25</sup> Norman W. Johnson, Convex Solids with Regular Faces, Canadian Journal of mathematics, 18,1966, 169-200

<sup>26</sup> В. А. Залгаллер, Выпуклые многогранники с правильными гранями, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1967, том 2, 5–221



### 3.2.6.1 Енумерација Џонсонових полиедара

Џонсонова тела су конвексна неуниформна тела чије све стране нису подударни, али су правилни полигони и чија сва темена нису подударна и могу, али не морају бити правилна. Спадају у групу једнакоивичних полиедара.

Означавање полиедара извршено је у облику  $J_j$ , а  $j$  може бити између 1 и 92.

Иако делује да су бројеви додељени без икаквог реда, у ствари су тела груписана према одређеном полазном телу и конструкцији добијања тела. На овај начин добијена имена су наизглед компликована, али баш захваљујући таквим именима лако их је препознати, јер их уједно и описују. Уочавају се називи тела која се комбинују и у називима других тела: пирамида, призма, купола, ротонда, али и називи појединих Платонових и Архимедових полиедара, а за рад су значајне две сложеније форме:

- Купола (*cupola*) је тело које за основе има два паралелна полигона са  $n$ , односно  $2n$  страница, спојена омотачем од наизменично постављених једнакостраничних троуглова и квадрата.
- Ротонда (*rotunda*) је тело које за основе има два паралелна полигона са  $n$ , односно  $2n$  страница, спојена омотачем од наизменично постављених једнакостраничних троуглова и правилних петоуглова.

### 3.2.6.2 Преглед основних Џонсонових полиедара

Најједноставнији пример Џонсоновог полиедра је пирамида над квадратном основом и четири једнакостранична троугла. Ово тело има најмањи број страна па је у нумерацији прво, са ознаком  $J_1$ . Платоново правилно тело, тетраедар, има мање страна од четворостране пирамиде, али је униформно, па самим тим не спада у групу Џонсонових полиедара. Стране Џонсонових тела су полигони са 3, 4, 5, 6, 8 или 10 страница, као и у случају Архимедових тела.

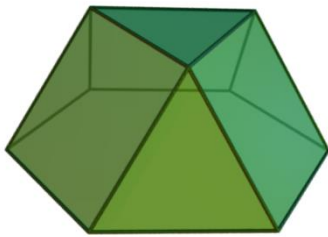


Квадратна пирамида  
( $J_1$ )

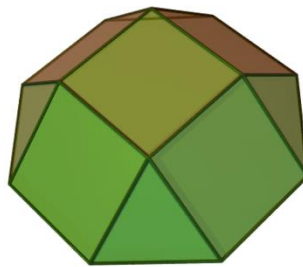


Петострана пирамида  
( $J_2$ )

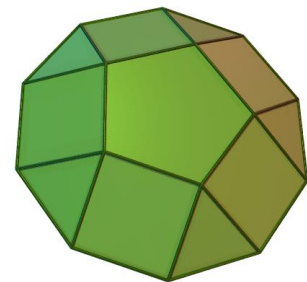
Слика 3-34) Џонсонови полиедри – пирамиде



Купола са теменим троуглом  
( $J_3$ )

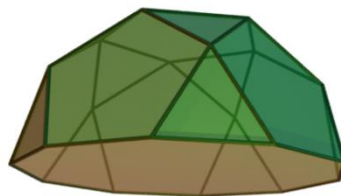


Купола са теменим квадратом  
( $J_4$ )



Купола са теменим петоуглом  
( $J_5$ )

Слика 3-35) Џонсонови полиедри – куполе



Ротонда са теменим петоуглом  
( $J_6$ )

Слика 3-36) Џонсонови полиедри – ротонда

Због великог броја Џонсонових полиедара приказано је само првих шест. Ови полиедри су основне градивне јединице које Џонсон комбинује и добија већину осталих полиедара. Представљене су две групе његових тела, тела из групе пирамида и тела из групе купола и ротонди, која се могу градити помоћу полигона правилног облика.

### 3.2.6.3 Геометријске карактеристике Џонсонових полиедара

Приказане су геометријске карактеристике шест полиедара приказаних у претходном поглављу.

Табела 3-4) Геометријске карактеристике Џонсонових полиедара

Назив полиедра	Ознака полиедра	Број страница полигона	Број подударних полигона	Укупан број страна	Укупан број темена	Укупан број ивица
Квадратна пирамида	$J_1$	3 4	4 1	5	5	8
Петострана пирамида	$J_2$	3 5	5 1	6	6	10
Купола са теменим троуглом	$J_3$	3 4 6	4 3 1	8	9	15
Купола са теменим квадратом	$J_4$	3 4 8	4 5 1	10	12	20
Купола са теменим петоуглом	$J_5$	3 4 5 10	5 5 1 1	12	15	25
Ротонда са теменим петоуглом	$J_6$	3 5 10	10 6 1	17	20	35

### 3.3 Геодезијске сфере

Посебну занимљивост у вези са геодезијским сферама представља чињеница да је њихова геометрија развијена наменски, за примену у архитектури. Наиме, средином 20. века, амерички архитекта Ричард Бакминстер Фулер (*Richard Buckminster Fuller*, 1895-1983), започео је истраживања на пољу сферних структура за премошћавање великих распона. Сама геометрија геодезијских сфера првобитно је развијана из сфере, а затим и из њене апроксимације у виду правилних и полуправилних полиедара, триангулацијом њихових страна.

### 3.3.1 Основне дефиниције

Сфера је закривљена, затворена површ чије су све тачке подједнако удаљене од једне фиксне тачке, њеног центра. Заједно са унутрашњим простором сфера чини лопту, са заједничким центром.

Пресек сфере и било које равни даје кружницу, као што пресек лопте и равни даје круг. Уколико раван садржи центар сфере, онда дели сферу на два једнака дела, две полусфере; пречник круга је једнак пречнику сфере, па се тај круг назива велики круг. Две тачке сфере које су најдаље од пресечне равни називају се половима сфере.

Добијени делови сфере су куполе, које могу, али и не морају бити полусфере. Купола представља део сфере не мањи од 5% њене површине. Удаљења полова сфере од пресечне равни чине висине одговарајућих купола.

Уколико би две произвољне тачке на сфери биле спојене правом линијом, све тачке те линије не би припадале сфери, већ и унутрашњем простору сфере. Ако би постојао услов да се произвољне тачке споје линијом која у целости припада сфери, та линија би била закривљена. Постоји само једна линија којом се две произвољне тачке на сфери могу спојити, а која би била и најкраћа, осим у случају колинеарности ових тачака са центром сфере, када постоји бесконачно много линија подједнаких дужина.

Најкраћа линија између две тачке на одређеној, математички дефинисаној површи, назива се геодезијска линија. У случају сфере, геодезијске линије су лукови. Геодезијска сфера је геометријска форма у облику сфере, формирана од комплексне мреже троуглова. Троуглови јој дају стабилност и крутост својим недеформабилним обликом.

Првобитно је геометрија служила за потребе премеравања земљишта у Египту, због чега је и добила назив са префиксом *гео*. Касније се појавио термин геодезија, као склоп грчких речи *гео* (*gē*: *земља, земаљски*) и *дезија* (*daiein*: *делити, поделити*): *грана примењене математике која одређује облике и*

*површине великих делова Земљине површине и облик Земље као целине; земљомерство, тј. картографско приказивање површине Земље и појединих њених делова*<sup>27</sup>.

Из центра сфере описане око било ког полиедра могу бити пројектоване праве кроз сва његова темена. Тачке продора права кроз сферу представљају пројекције темена полиедра на ту сферу. Аналогно томе, пројекције ивица полиедра на сферу су лукови, а добијено тело је геодезијска сфера изведена из полазног тела. Стране геодезијске сфере су закривљени, сферни полигони, а сва њена темена леже на сфери.

Ако би пројекције темена на сферу биле повезане правим линијама, добила би се апроксимација геодезијске сфере, јер таква форма не испуњава основну дефиницију о геодезијским линијама. С друге стране, сфере и куполе добијене на описан начин из статичких, конструктивних, производних, економских и других услова представљају једноставније решење. Уопште узев, геодезијском сфером се називају и наведени апроксимативни модели, чија су темена повезана правим линијама.

Будући да модел са закривљеним линијама између темена нема великог значаја за рад, а у циљу поједностављења терминологије, те коришћења препознатљивих и шире прихваћених назива, у даљем раду ће се под геодезијским сфером подразумевати њена апроксимација, форма са правим линијама између темена. У том контексту, геодезијска купола ће представљати део апроксимативног модела геодезијске сфере, тј. део модела са правим линијама између темена. Уколико је, из одређеног разлога потребно нагласити да је у питању геодезијска сфера у складу са дефиницијом, онда ће то бити урађено одговарајућом напоменом.

Усвајањем апроксимације геодезијске сфере, сферне површи ограничене луковима, које чине њене стране, губе сферни облик и постају равне или

---

<sup>27</sup> Вујаклија, Милан, Лексикон страних речи и израза, Просвета, Београд, 2002.

витоперне, у зависности од форме полазног тела. Њихова темена по дефиницији остају на површини сфере описане око полиедра.

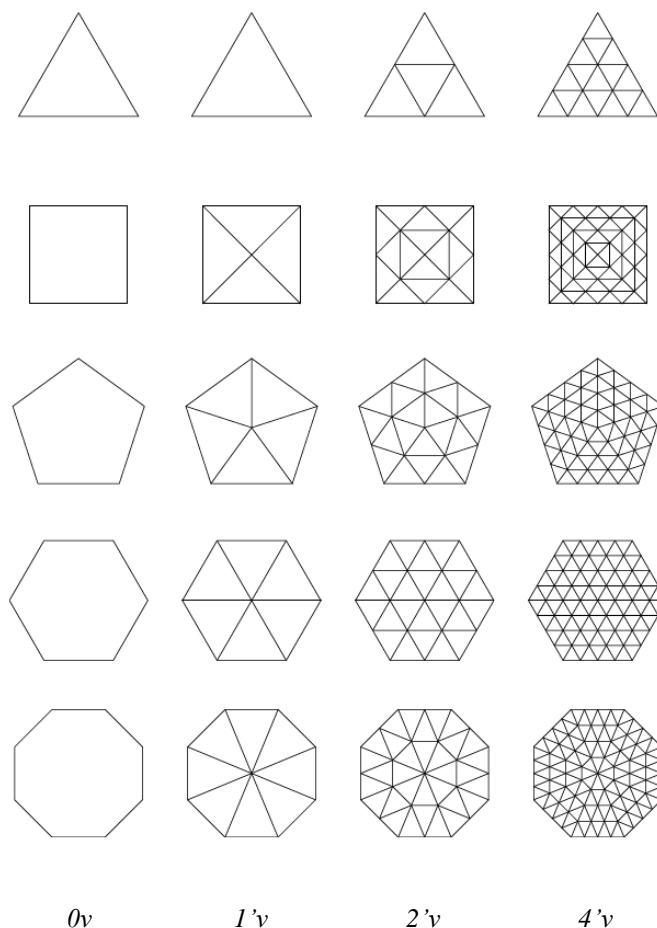
Као што је дефинисано да се у наставку рада под изразом геодезијска сфера мисли на њену апроксимацију, тако би требало појаснити и изразе изворни и полазни полиедар. Под изворним полиедром мисли се на полиедар око кога се описује сфера и чија сва темена могу, али не морају лежати на тој сфери, док се под полазним полиедром мисли на онај чија се сва темена налазе на сфери описаној око њега. То значи да, уколико изворни полиедар не задовољава наведени услов, онда се прво пројектују његова темена на сферу, како је већ дефинисано у претходном делу текста, чиме настаје полазни полиедар. Изворни и полазни полиедар могу бити исти, уколико сва темена изворног полиедра већ леже на сфери описаној око њега, што је случај код било ког правилног и полуправилног полиедра прве врсте.

За делтаедре из групе правилних полиедара (тетраедар, октаедар и икосаедар) геодезијска сфера најниже фреквенције и површи изворног и полазног полиедра, су исте форме. Сва остала тела, чије све стране нису троугаоне, морају прве претрпети триангулацију својих страна. Геодезијске сфере, посматране заједно са својим унутрашњим простором, представљају конвексне полиедре, за које важе све дефиниције исказане у поглављу о полиедрима, нпр. важи Ојлерова формула, имају своје дуалне парове итд..

### **3.3.2 Фреквенција и класа геодезијске сфере**

Комплексност форме геодезијске сфере описује се фреквенцијом, исказаном у облику  $fv$ , где је са  $f$  обележена њена вредност, а  $v$  (грчко слово *ни*) означава да је у питању фреквенција. Фреквенција геодезијске сфере, у случају када полазни полиедри имају триангулисане све стране, једнака је броју сегмената ивице полиедра која се дели. Код осталих полиедара, чије стране нису триангулисане, потребно их је прво триангулисати повезивањем свих темена сваке од страна са њеним тежиштем. У овом случају, фреквенција представља најмањи број сегмената, страница троуглова, који повезују тежиште једне

триангулисане стране са тежиштем суседне, такође триангулисане стране, полазног полиедра. Триангулацијом страна полиедра елиминише се њихова евентуална витоперност.

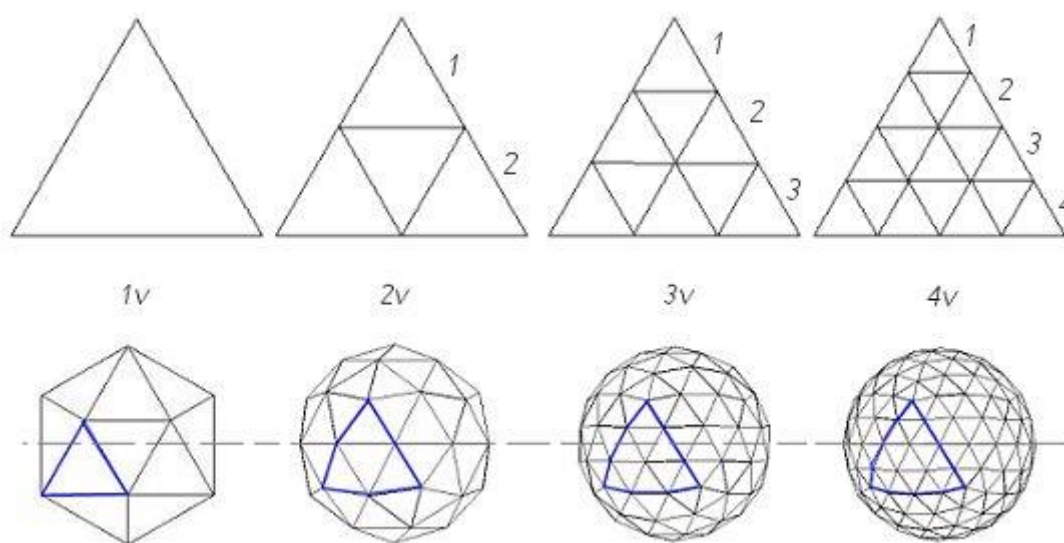


Слика 3-37) Триангулација појединих правилних полигона

Триангулацијом страна одређеног полиедра, које нису облика троугла, добија се геодезијска сфера најниже, почетне фреквенције, која може бити једнака јединици или већа од ње. Почетна фреквенција зависи од тога да ли постоје, или не, троуглови око стране полиедра над којом је извршена триангулација, као у случају проширене коцке или проширеног додекаедра. Стране полиедра триангулишу се уважавајући основну дефиницију о полиедрима да *највише две стране полиедра деле исту ивицу*.

На слици 3-37, на којој је приказана триангулација појединих правилних полигона, најниже фреквенције су обележене у облику  $f'v$ , уместо  $fv$ , управо из

разлога што ти полигони могу представљати стране различитих полазних полиедара. Остале, више фреквенције добијају се тако што се свака ивица геодезијске сфере најниже, почетне фреквенције, дели на одговарајући број сегмената, до постизања жељене фреквенције. Спајањем добијених тачака између сегмената формира се троугласта мрежа на свакој страни полиедра. Виша фреквенција геодезијске сфере означава већи број подела страна полазног полиедра. Даље анализе подела страна полазног полиедра врше се на једнакостраничном троуглу.



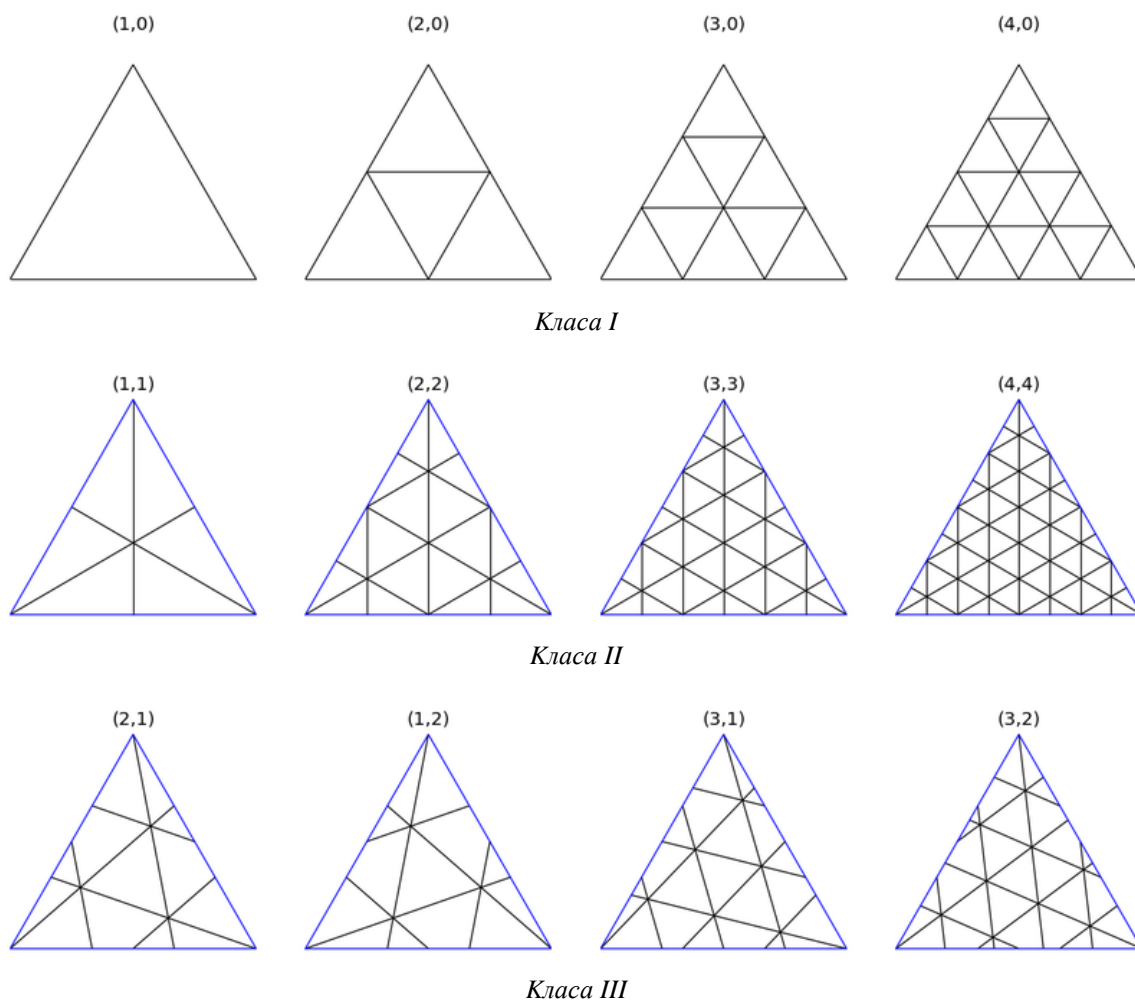
Слика 3-38) Геодезијске сфере различитих фреквенција изведене из икосаедра

Триангулацију страна полазног полиедра могуће је извести на три начина, што се означава класама. Теселација у све три класе је иста, формирана је од једнакостраничних троуглова, а разлика је само у углу који странице деобних троуглова, ивице теселације, граде са ивицама полазног полиедра. У класи I наведени угао је једнак нули, странице деобних троуглова леже на ивицама полиедра, у класи II теселација је, у односу на теселацију класе I, заротирана за угао од  $90^\circ$ , тако да су странице деобних троуглова управне на ивице полазног полиедра и деле их на два правоугла троугла. Класа III је ротација теселације за одређени угао између  $0^\circ$  и  $90^\circ$ , изузимајући наведене углове, али тако да се поклапају темена теселације са теменима полиедра. При одређивању наведеног угла битно је омогућити даљу поделу на сличне троуглове и формирање геодезијске сфере више фреквенције у истој класи. Евентуалне другачије поделе



страна полиедара настају из једне од наведених класа додавањем или уклањањем целих линија или њених делова.

Однос теселације стране полиедара, према његовој ивици, може се означити у облику  $(p, q)$ , где  $p$  и  $q$  означавају број подела ивице полиедара, при триангулацији његове стране (слика 3-39).

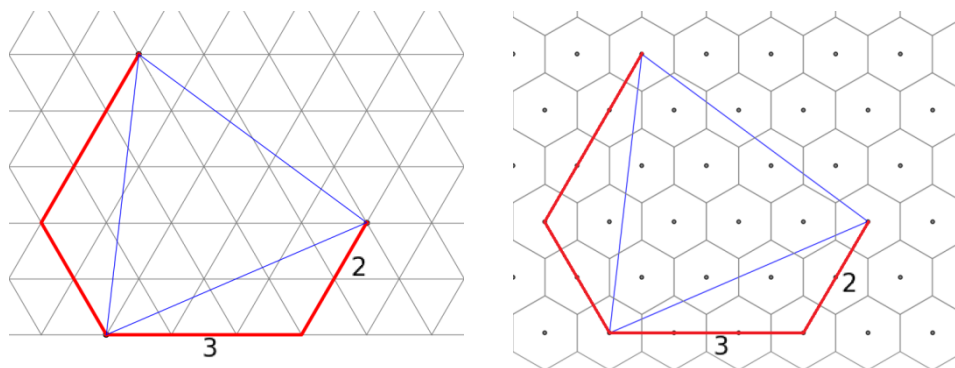


Слика 3-39) Класе геодезијских сфера

У класи I  $q$  је једнако нули (или је  $p$  једнако нули), док је у класи II  $p=q$ , што значи да је теселација у класи II могућа само у парним фреквенцијама. Будући да је теселација III могућа за више различитих углова, те односа  $p$  и  $q$ , то овакво означавање знатно доприноси дефинисању њеног прецизног односа према ивици полазног полиедара, односно распореда деобних троуглова на страни полиедара. У класи III се, заменом вредности  $p$  и  $q$ , добија хирална (симетрична)

геодезијска сфера, док у осталим класама замена вредности нема значаја. Не би требало ове поделе посматрати издвојено, оивичене ивицама једне стране полиедра, већ се поделе настављају на суседним странама, а ивице између сферних троуглова (или других полигона) губе значај и могу се елиминисати. Фреквенција ( $f_v$ ) геодезијске сфере, дефинисане на овај начин, одређена је збиром наведених вредности,  $f=p+q$ .

На слици 3-40 приказан је пример теселације стране полиедра у облику једнакостраничног троугла, у односу поделе (3,2). Подела стране у виду троугаоне теселације ( $3^6$ ) и њеног дуала, шестоугаоне теселације ( $6^3$ ), означена је истом ознаком (3,2). При закривљењу дуалне теселације из равни у сферу, елиминацијом једног једнакостраничног троугла из триангулисаног шестоугла, у коме се налази теме полиедра, наведени правилан шестоугао се трансформише у правилан петоугао. Остали правилни шестоуглови, на странама полиедра, углавном се деформишу, у зависности од фреквенције геодезијске сфере.



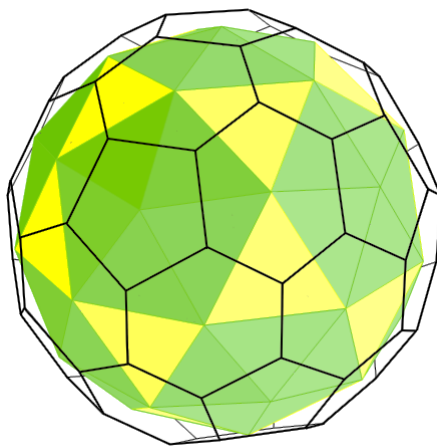
Слика 3-40) Троугаона теселација и њен дуал са ознаком подела (3, 2)

Будући да је за конструисање геодезијске сфере први и основни корак триангулација страна полазног полиедра, то се дуалност између полазног полиедра и његовог дуала губи на свим осталим фреквенцијама. Дуал геодезијске сфере одређене фреквенције се не може извести из дуала геодезијске сфере ниже или више фреквенције, већ искључиво из ње саме, а из дуала геодезијске сфере, уколико би се изводило триангулисање таквих страна, могла би се извести нова геодезијска сфера, двоструко више фреквенције.

У овом случају се не говори о дуалној геодезијској сфери, већ о дуалу геодезијске сфере, полиедарској површи која само у посебним случајевима, код

појединих геодезијских сфера ниже фреквенције, испуњава основну дефиницију да сва темена морају лежати на једној сфери. Да би сва темена дуала геодезијске сфере лежала на јединственој сфери, њен дуални пар, геодезијска сфера из које је конструисан дуал, морала би имати сферу која додирује све њене стране. Дакле, дуал геодезијске сфере може, али и не мора имати сва темена на сфери.

Над геодезијском сфером која има различите дужине ивица може се конструисати дуал који би имао једнаке дужине ивица (као што је то случај код дуалних парова из група Каталанових и Архимедових полиедара). Форма трункованог икосаедра (Архимедовог полиедра) добила би се из икосаедарске геодезијске сфере фреквенције  $2v$ , класе II (која има две различите дужине ивица). Наведена геодезијска сфера уједно има форму и пентакисдодекаедра (Каталановог полиедра), чиме је дуалност између наведена два полиедра потврђена. Међутим, овде је та повезаност редукована: дуал геодезијске сфере изведене из Каталановог полиедра је форма Архимедовог само ако полазни полиедар већ има троугаоне стране, у противном, триангулацијом страна Каталановог полиедра добија се геодезијска сфера која за дуал нема форму Архимедовог полиедра.



Слика 3-41) Икосаедарска геодезијска сфера фреквенције  $2v$ , класе I и њен дуал

За разлику од описане икосаедарске геодезијске сфере фреквенције  $2v$ , класе II, геодезијска сфера класе I изведена из истог полиедра и исте фреквенције, приказана на слици 3-41, има дуал са правилним петоугловима, али не и правилним шестоугловима, што се може закључити преко дужина ивица геодезијске сфере. Иако су форме овог дуала и напред наведеног трункованог

икосаедра сличне, оријентација петоуглова одређује правилност њихових шестоугаоних страна.

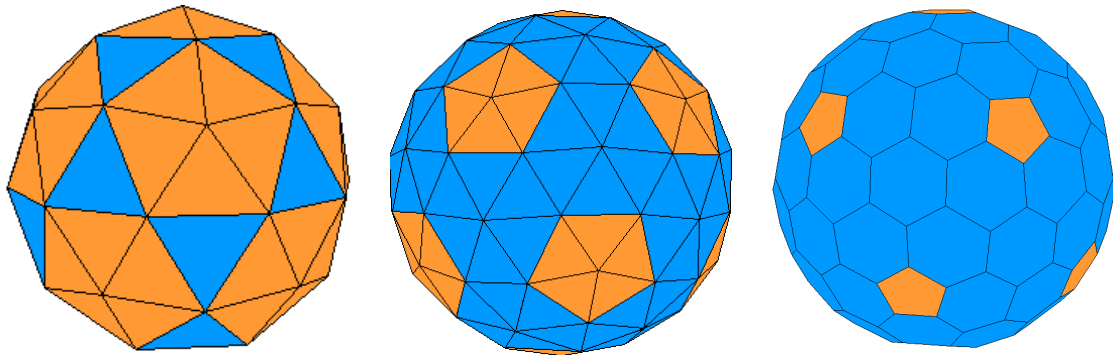
Пошто законистост која влада између дуалних парова полиедара важи и код геодезијских сфера, лако се може доћи до броја страна, темена и ивица дуала одређене геодезијске сфере: број страна дуала једнак је броју темена геодезијске сфере, број темена дуала једнак је броју страна геодезијске сфере, док је број ивица обе форме непромењен.

На сликама<sup>28</sup> од 3-42 до 3-44, приказане су геодезијске сфере класе I, изведене из икосаедра, додекаедра и проширеног додекаедра, са својим дуалима, ради лакшег сагледавања сличности и разлика. Икосаедар и додекаедар представљају међусобно дуални пар. Приказане геодезијске сфере изведене из додекаедра ( $2v$ ) и проширеног додекаедра ( $3v$ ) су најниже, полазне фреквенције наведених тела, а приказана икосаедарска геодезијска сфера је фреквенције  $2v$ , пошто је она најниже фреквенције ( $1v$ ), идентична самом икосаедру, па није значајна за извршену упоредну анализу.

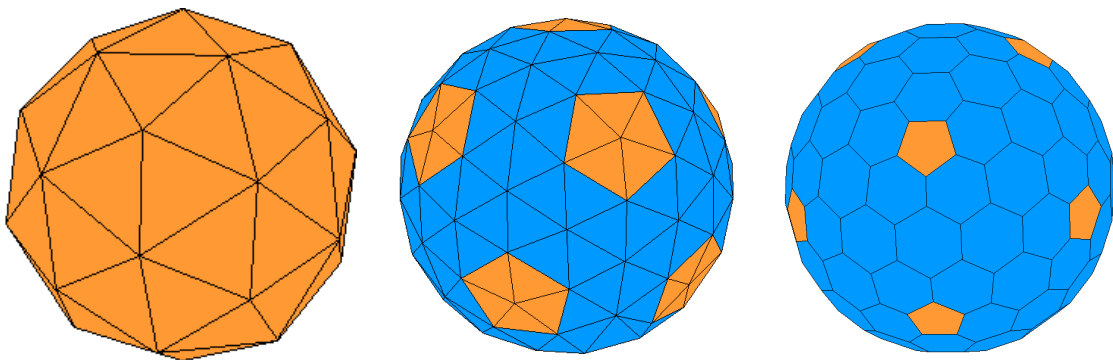
Колико је ознака фреквенције универзална може се сагледати на наведеним сликама. Приказана икосаедарска геодезијска сфера фреквенције  $2v$ , класе I, могла би бити изведена и из икосидодекаедра и била би исте фреквенције, најниже за то тело. Такође, додекаедарска геодезијска сфера класе I идентична је икосаедарској геодезијској сфери класе II, исте фреквенције, приказане у поглављу 3.3.3, а важи и обрнута аналогија. Будући да фреквенција геодезијске сфере класе II може бити само парна, тако и фреквенција додекаедарске геодезијске сфере класе I може бити само парна, јер се сабира истоветан број подела у једном и другом петоуглу. И последња, геодезијска сфера класе I изведена из проширеног додекаедра, могла би се посматрати и као икосаедарска геодезијска сфера исте фреквенције, али класе III.

---

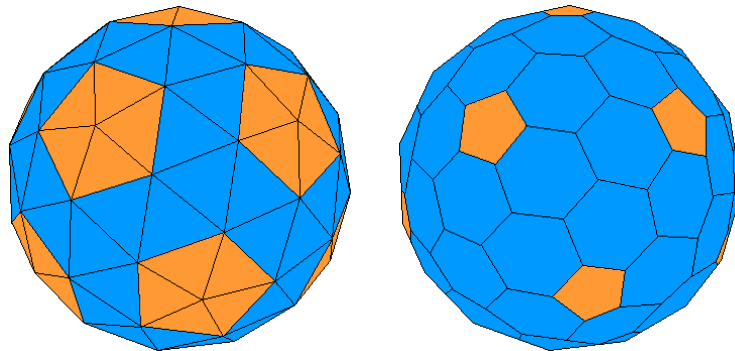
<sup>28</sup> <http://www.brefeld.homepage.t-online.de/geodaetische-kuppeln.html>



Слика 3-42) Икосаедарске геодезијске сфере класе I, фреквенције  $2v$  и  $3v$  и дуал фреквенције  $3v$



Слика 3-43) Додекаедарске геодезијске сфере класе I, фреквенције  $2v$  и  $4v$  и дуал фреквенције  $4v$



Слика 3-44) Геодезијска сфера класе I, фреквенције  $3v$  (1, 2) и њен дуал исте фреквенције, изведени из проширеног додекаедра

Геодезијске сфере имају мали број различитих дужина ивица и различитих темена. Апроксимација сфере, која би имала сва темена у јединственој сфери, може имати највише 180 ивица исте дужине и има форму трункованог икосидодекаедра, Архимедовог полиедра. Њене стране нису троуглови, већ

полигони са 4, 6 и 10 страница, па се триангулацијом ових полигона добијају још три различите дужине ивица. Уз само четири различите дужине ивица и четири типа темена могла би да се генерише триангулисана форма (геодезијска сфера) из наведеног полиедра, а имала би укупно 564 ивице. По самој дефиницији сви Архимедови полиедри имају сферу у којој се налазе сва темена одређеног полиедра и могу бити квалитетна геометријска основа за генерисање геодезијске сфере.

Уколико би геодезијска сфера била генерисана тако да има подударне стране, њихов највећи број био би једнак броју страна Каталановог полиедра дисдиакис триаконтаедра, који има 120 једнакокраких троуглова. Пошто Каталанови полиедри немају јединствену сферу у којој леже сва темена одређеног полиедра, то је потребно генерисати полазни полиедар пројектовањем темена изворног, на сферу. Добијени полиедар би испуњавао све дефиниције геодезијске сфере уколико би имао стране у облику троугла, док би, у противном, имао витоперне стране, што би се решило њиховом триангулацијом. Триангулацијом страна, у случају појединих Каталанових полиедара чије су стране у облику делтоида или ромба, може се достићи број од 120 подударних страна, као и у случају дисдиакис триаконтаедра.

### **3.3.3 Икоседарска геодезијска сфера**

За полазни полиедар, при дефинисању геодезијских сфера и купола, може се усвојити било који полиедар, али је пожељно да он представља апроксимацију што ближе сфери. Због тога је то најчешће један од Платонових или Архимедових полиедара, чија темена леже на сфери описаној око њега. Такође, с обзиром на пожељну триангулисаност страна, геодезијске сфере се најчешће формирају као икоседарске, али се могу формирати и тетраедарске, хексаедарске, октаедарске и додекаедарске, али и друге, изведене из других полиедара.

Од свих тела, из којих се може извести геодезијска сфера, потребно је наћи „најлоптастије“, чија површ представља најближу апроксимацију сфере. Критеријум за овај избор би могао бити најповољнији однос површине тела према

његовој запремини, однос између пречника сфере описане око тела и сфере уписане у њега, или пак, неки трећи.

Преко образаца за прорачун површина и запремина правилних полиедара, могу се одредити њихове површине ( $P_p$ ) тако да им запремине одговарају запремини одређене лопте ( $Pl$ ). Упоредивањем површине лопте са површинама полиедара може се одредити онај полиедар који има највиши наведени однос.

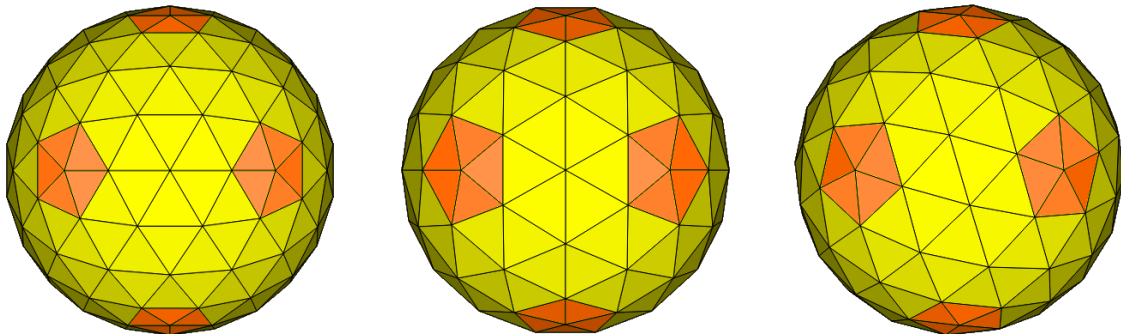
Табела 3-5) Однос геометријских особина лопте и правилних полиедара

Полиедар	$P_l/P_p$	$R_u/R_o$
Тетраедар	0.6711	0.3333
Хексаедар	0.8060	0.5774
Октаедар	0.8456	0.5774
Икосаедар	0.9393	0.7947
Додекаедар	0.9105	0.7947

Из табеле 3-5 може се уочити да је однос површине лопте према површини икосаедра највиши, што је, по усвојеном критеријуму, одређује као форму најближу сфери, па је ово тело усвојено као модел за даље анализе. У наставку табеле је дат однос између полупречника сфере уписане у полиедар ( $R_u$ ) и описане око њега ( $R_o$ ), тако да тела имају запремину једнаку одређеној запремини лопте. Иако поједина Архимедова и Каталанова тела имају повољнији однос површине и запремине од икосаедра, он има друге предности у односу на њих – све његове стране су облика једнакостраничног троугла па се њиховом триангулацијом такође добијају једнакостранични троуглови, а углови између ивица у теменима добијене геодезијске сфере су приближни и саме ивице су уједначених дужина.

Површ икосаедра већ представља геодезијску сферу фреквенције  $1v$ . У складу са потребном формом геодезијске сфере, стране икосаедра се деле на одговарајући број троуглова, а затим се добијена темена пројектују на сферу, док се троуглови добијају спајањем пројектованих темена, аналогно странама полазног полиедра. За икосаедарску геодезијску сферу било које фреквенције више од  $1v$  добијени троуглови више нису једнакостранични, нити су сви исти. На

слици 3-45 приказане су геодезијске сфере фреквенције  $4\nu$ , али различитих класа, а на слици 3-46 њихови дуали исте фреквенције и истих класа.

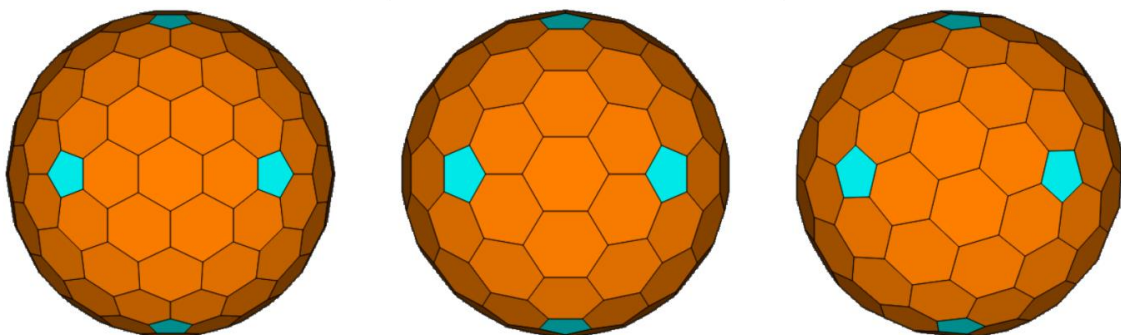


*Класа I (4, 0)*

*Класа II (2, 2)*

*Класа III (3, 1)*

*Слика 3-45) Икосаедарска геодезијска сфера фреквенције  $4\nu$  у три основне класе*



*Класа I (4, 0)*

*Класа II (2, 2)*

*Класа III (3, 1)*

*Слика 3-46) Дуали икосаедарске геодезијске сфере фреквенције  $4\nu$  у три основне класе*

Број троуглова ( $s$ ) на које се дели једна страна икосаедра, без обзира на класу, може се израчунати помоћу следећег обрасца<sup>29</sup>:

$$s = p^2 + p \cdot q + q^2$$

Укупан број геометријских елемената икосаедарске геодезијске сфере (страна, темена и ивица) може се прорачунати преко познатих образаца који дефинишу њихов међусобни нумерички однос код икосаедра, што важи и за геодезијску сферу било које фреквенције, изведене из њега:

<sup>29</sup> <http://www.3doro.de/kuppel.htm>



$$S = 20 \cdot s$$

$$I = 1,5 \cdot S$$

$$T = I - S + 2$$

За прорачун броја елемената дуала геодезијске сфере применила би се законитост међу полиедрима који чине дуалне парове. Правилних петougлова има увек 12, колико темена има икосаедар, а број шестоуглова представља остале стране и зависи од фреквенције геодезијске сфере.

Највише 20 подударних страна облика правилног полигона или 30 ивица исте дужине може формирати геодезијску сферу. Не може се формирати геодезијска сфера помоћу једнакостраничних троуглова, уколико она има више од 20 страна, колико има сам икосаедар. Геодезијска сфера фреквенције  $2\nu$ , класе I има две различите дужине ивица, али већ геодезијска сфера фреквенције  $4\nu$ , исте класе, има шест различитих дужина ивица, док она фреквенције  $6\nu$ , има девет различитих дужина ивица.

Табела 3-6) Број страна икосаедарске геодезијске сфере фреквенције  $f=p+q$

$p \setminus q$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0		20	80	180	320	500	720	980	1280	1620	2000
1	20	60	140	260	420	620	860	1140	1460	1820	2220
2	80	140	240	380	560	780	1040	1340	1680	2060	2480
3	180	260	380	540	740	980	1260	1580	1940	2340	2780
4	320	420	560	740	960	1220	1520	1860	2240	2660	3120
5	500	620	780	980	1220	1500	1820	2180	2580	3020	3500
6	720	860	1040	1260	1520	1820	2160	2540	2960	3420	3920
7	980	1140	1340	1580	1860	2180	2540	2940	3380	3860	4380
8	1280	1460	1680	1940	2240	2580	2960	3380	3840	4340	4880
9	1620	1820	2060	2340	2660	3020	3420	3860	4340	4860	5420
10	2000	2220	2480	2780	3120	3500	3920	4380	4880	5420	6000

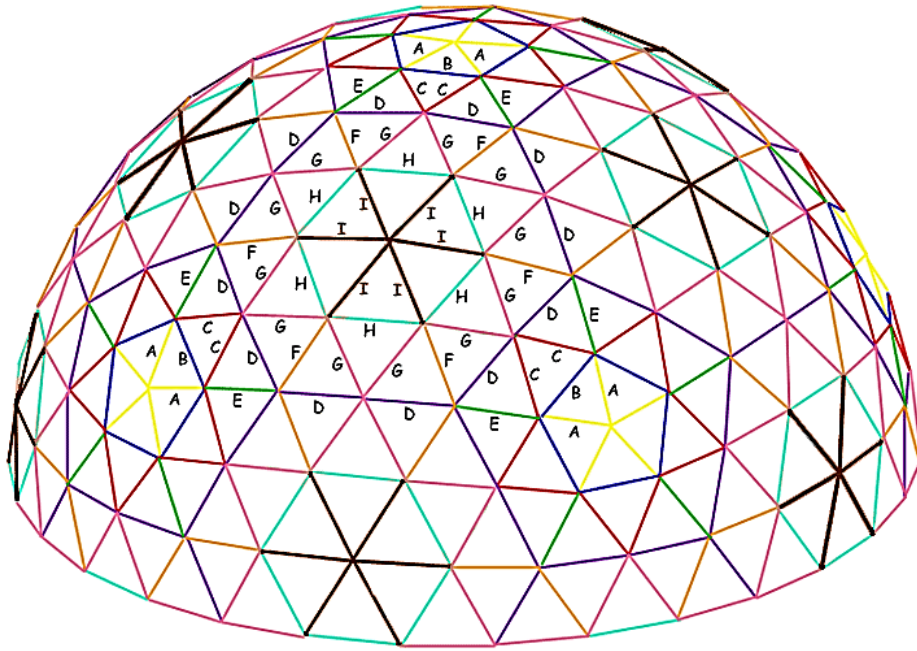
Табела 3-7) Број темена икосаедарске геодезијске сфере фреквенције  $f=p+q$

$p \backslash q$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0		12	42	92	162	252	362	492	642	812	1002
1	12	32	72	132	212	312	432	572	732	912	1112
2	42	72	122	192	282	392	522	672	842	1032	1242
3	92	132	192	272	372	492	632	792	972	1172	1392
4	162	212	282	372	482	612	762	932	1122	1332	1562
5	252	312	392	492	612	752	912	1092	1292	1512	1752
6	362	432	522	632	762	912	1082	1272	1482	1712	1962
7	492	572	672	792	932	1092	1272	1472	1692	1932	2192
8	642	732	842	972	1122	1292	1482	1692	1922	2172	2442
9	812	912	1032	1172	1332	1512	1712	1932	2172	2432	2712
10	1002	1112	1242	1392	1562	1752	1962	2192	2442	2712	3002

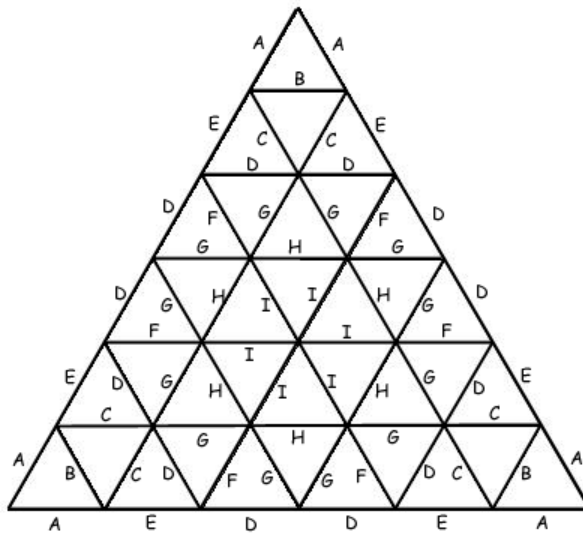
Табела 3-8) Број ивица икосаедарске геодезијске сфере фреквенције  $f=p+q$

$p \backslash q$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0		30	120	270	480	750	1080	1470	1920	2430	3000
1	30	90	210	390	630	930	1290	1710	2190	2730	3330
2	120	210	360	570	840	1170	1560	2010	2520	3090	3720
3	270	390	570	810	1110	1470	1890	2370	2910	3510	4170
4	480	630	840	1110	1440	1830	2280	2790	3360	3990	4680
5	750	930	1170	1470	1830	2250	2730	3270	3870	4530	5250
6	1080	1290	1560	1890	2280	2730	3240	3810	4440	5130	5880
7	1470	1710	2010	2370	2790	3270	3810	4410	5070	5790	6570
8	1920	2190	2520	2910	3360	3870	4440	5070	5760	6510	7320
9	2430	2730	3090	3510	3990	4530	5130	5790	6510	7290	8130
10	3000	3330	3720	4170	4680	5250	5880	6570	7320	8130	9000

Код геодезијских сфера више фреквенције, број различитих дужина ивица би се могао минимално смањити додатном корекцијом положаја темена на сфери. Распоред различитих дужина ивица приказан је на сликама 3-47 и 3-48, на примеру икосаедарске геодезијске куполе фреквенције  $6v$ , класе I.



Слика 3-47) Распоред различитих дужина ивица икосаедарске геодезијске куполе бv, класе I



Слика 3-48) Распоред ивица на триангулисаној страни икосаедра чије ће се дужине променити после њихове пројекције на сферу

## 4 Обликовање полиедарских куполастих структура (ПКС)

Форма објекта је његов примарни начин комуницирања са околином. Просторне структуре често постају знак препознавања дела насеља или целог насеља управо по својој форми.

У смислу архитектуре објекта, његова форма директно утиче и на обликовање ширег простора, у датом урбаном контексту. Својом формом објекат може унапредити одређени контекст, али и умањити му вредност, може му дати флексибилније оквире или га ограничити.

Потребно је детаљно анализирати геодезијску куполу из више аспеката, одредити њене предности и недостатке, затим усвојити одређене смернице и коначно, приступити њеној трансформацији. Ово ће бити основа за класификацију полиедарских купола извршеној у поглављу 5.

### 4.1 Геодезијске сферне структуре у архитектури

Геодезијске куполе, својевремено најављиване као најјачи, најлакши, а најефикаснији начин који је осмислио човек за премошћавање и затварање простора, представљају један од симбола структурне архитектуре и структурног инжењерства 20. века. Оне су такође и симбол индустријског доба, текуће и тек надлазеће индустријализације.

За прву изведену геодезијску куполу сматра се структура планетаријума Јена, у истоименом немачком граду. Немачки инжењер Валтер Бауерсфелд (*Walther Bauersfeld*, 1879-1959) развио је куполасту структуру распона 25 m, да би носила бетонску љуску за потребе пројектовања *звезданог неба* помоћу пројектора немачког произвођача оптике *Carl Zeiss AG*. Радови на објекту су започети крајем 1924. године, а објекат је отворен за јавност 1926. године.

Међутим, с обзиром на то да је пресвучена бетонском љуском, носећа структура од мреже штапова остала је непозната широј стручној јавности. На приложеној фотографији (слика 4-1) може се видети наведена структура у фази пресвлачења бетоном, на којој се, у горњем делу, изнад платформе, разазнаје мрежа штапова.



Слика 4-1) Планетаријум Јена, Немачка; пресвлачење носиве структуре бетоном<sup>30</sup>

#### 4.1.1 Истраживања Бакминстера Фулера

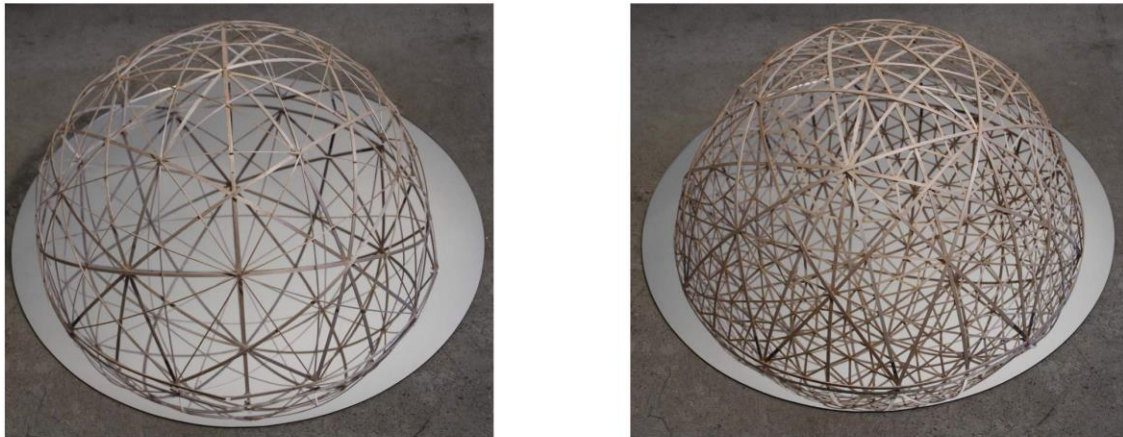
Непуне две деценије после изградње планетаријума у Јени, Фулер је спроводио истраживања на том пољу. Он је препознао могућности ових структура, те их је детаљније проучавао, развио и популаризовао.

Фулерова почетна истраживања вршена су на моделима са великим сферним круговима, чиме се добија мрежа сферних троуглова. Теоријски, ове структуре су одговарале свим дефиницијама геодезијских сфера – темена и закривљене геодезијске линије лежале су на сферама, а стране су им били сферни троуглови. Касније је Фулер напустио обликовање геодезијских купола у складу са дефиницијом о геодезијским линијама.

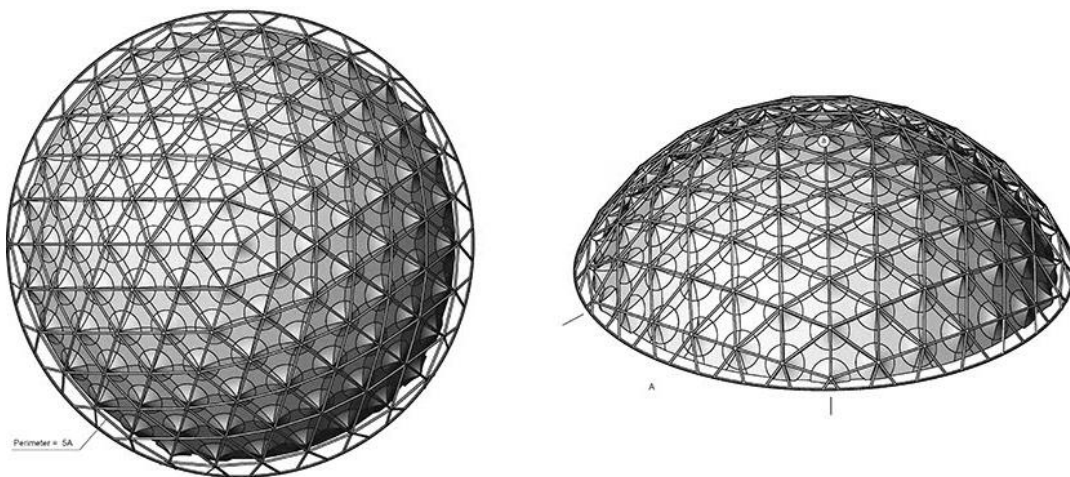
---

<sup>30</sup> [www.planetarium-jena.de](http://www.planetarium-jena.de), *Presseinformation der Ernst-Abbe-Stiftung Jena*

Фулер је у то време проучавао просторне решеткасте структуре као геометријски склоп тетраедара и октаедара, са правим штаповима, које је назвао октет (*Octet Truss system*). Овакве структуре је Александар Бел (*Alexander Graham Bell*, 1847-1922) користио градећи змајеве за своја истраживања, која је спроводио почетком 20. века. Године 1953. Фулер је саградио куполу пречника 28,3 м примењујући елементе просторне структуре<sup>31</sup>.



Слика 4-2) Модели геодезијских купола са сферним круговима<sup>32</sup>



Слика 4-3) Икосаедарска геодезијска купола покривена лаким покривачем<sup>33</sup>

<sup>31</sup> Несторовић, М., Конструктивни системи – принципи конструисања и обликовања, Архитектонски факултет, Београд, 2000, стр. 175.

<sup>32</sup> [www.sphericalatlas.com](http://www.sphericalatlas.com)

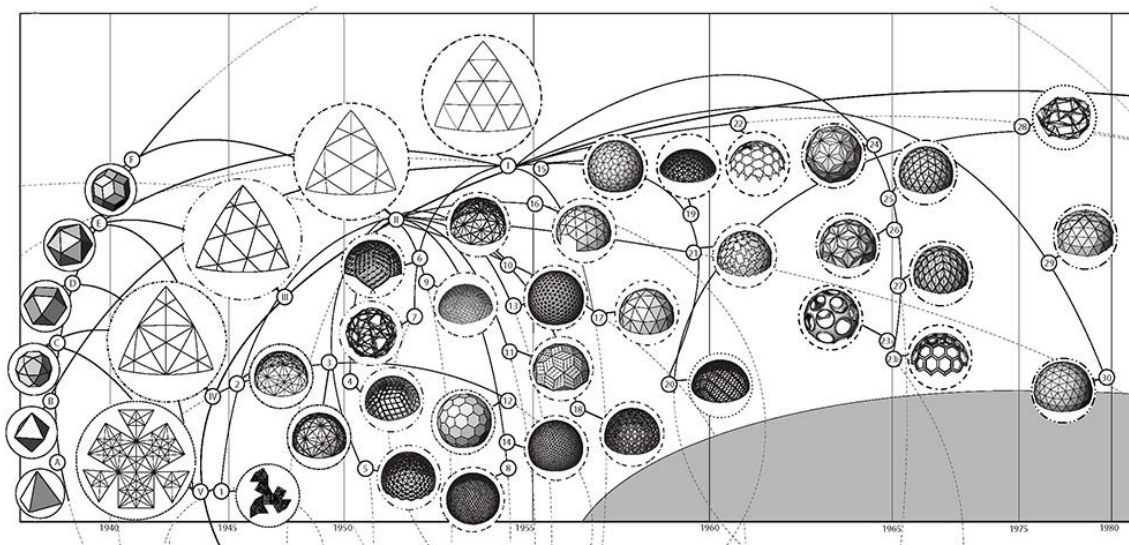
<sup>33</sup> Илустрација студената архитектуре Универзитета у Сан Дијегу: [www.sphericalatlas.com](http://www.sphericalatlas.com)



С обзиром на Фулерова проучавања и афинитете, не чуди то што су геодезијске куполе од самог почетка осмишљене као лаке структуре од штапова, предвиђене да премосте велике распоне. Омогућавање формирања куполе применом минималног броја различитих штапова, уз унифицираност чворних веза, представља значајан корак у савладавању технике грађења префабрикованих система куполастих структура.



Слика 4-4) Детаљ везе мембране и геодезијске куполе



Слика 4-5) Хронолошки приказ 30 Фулерових прототипова апроксимације сфере<sup>34</sup>

Богат истраживачки опус Бакминстера Фулера на овом пољу потврђује истраживање које су спровели студенти архитектуре Универзитета у Сан Дијегу, под називом *From Spheres to Atmospheres*. У оквиру истраживања прикупили су 30 прототипова апроксимације сфере које је Фулер израдио у периоду од 1944. до

<sup>34</sup> [www.sphericalatlas.com/home](http://www.sphericalatlas.com/home)

1980. године, почев од сферне мапе на кубоктаедру, коју је назвао Димаксион (*Dymaxion Map*), преко разних патената, па све до изведених структура.

Својом футуристичком формом и структуром геодезијске куполе су привлачиле изузетно велику пажњу стручне јавности. Структуре су погодне за објекте као што су планетаријуми, астрономске опсерваторије, изложбене хале, ботаничке баште, стакленике и слично. Фулер је, чак, анализирао и покривање читавих градова и њихових делова, како би били изоловани од негативних атмосферских утицаја. Једно од Фулерових најпознатијих остварења је амерички павиљон на Светској изложби у Монтреалу, у Канади, 1967. године.



Слика 4-6) Амерички павиљон на Светској изложби у Монтреалу

У форми дуала геодезијских купола, међу најпознатијим су *Project Eden* структуре, у Енглеској, које је пројектовао архитекта Николас Гримшоу (*Nicholas Grimshaw*, рођен 1939). Састоје се од металних цеви које граде петоуглове и шестоуглове, са транспарентним термојастуцима (*ETFE: Ethylene tetrafluoroethylene*), као покривачем. Структуре су стабилизоване преднапрезањем меким затегама, пруженим у три правца, са унутрашње стране.





*Слика 4-7) Project Eden, приказ структуре*



*Слика 4-8) Project Eden, поглед на структуру изнутра*

## **4.1.2 Геодезијске куполе**

Дуго је прорачун положаја чворова и њихова геометрија, као и геометрија штапова геодезијске куполе држан у тајности, а таква ситуација је давала Фулеру монопол над њиховом изградњом. Тек у другој половини шездесетих година настало је шире интересовање математичара за ове структуре, што је довело до појаве стручних публикација које су се бавиле њиховом геометријом и прорачунима, а самим тим и до њихове веће примене. Појавом рачунара анализа геометрије и статичких утицаја више нису представљали привилегију математичара и малог броја инжењера. Структуре се могу врло брзо анализирати из више аспеката и лако се може изабрати оптимална.

У наставку рада биће анализирана геодезијска купола чија је геометрија базирана на икосаедру, као најчешће примењиваној, уз евентуалне специфичности које има у односу на структуре изведене из других полиедара.

#### 4.1.2.1 Форма геодезијске куполе

Геодезијске куполе су прави одраз Фулеровог принципа „више са мање“: обухватају највећу могућу запремину са најмањом развијеном површином куполе и највећу корисну површину уз најмањи обим таквог простора. Однос између површине и запремине геодезијске сфере је најповољнији могући, готово као код лопте. Спољна површина сфере износи 80,6% површине коцке исте запремине, док је код квадрата овај однос још израженији.

Уколико је потребна велика запремина структуре, из аспекта грађевинске физике би геодезијске куполе имале идеалну форму. Сферна форма структуре обезбеђује велику количину ваздуха и омогућава висок ниво осветљености током целог дана. Такође, мање површине је изложено спољашњој средини.



Слика 4-9) Геодезијска купола велике запремине

Мања развијена површина геодезијске куполе, у односу на остале форме, захтева и мање материјала за израду покривача, те затварање обухваћеног простора. Поред тога, као покривачи овако конципираних, лаких структура,

користе се материјали мале тежине, који, упркос томе, морају испунити многе услове, пре свега статичку отпорност, еластичност, отпорност на многе атмосферске услове, одређене услове грађевинске физике и слично.

С друге стране, уколико се захтева структура мање висине у односу на распон, са практичног становишта, таква форма онемогућава потпуно искоришћење унутрашњег простора и приступ појединим периферним деловима структуре, или позиционирање опреме, у зависности од њене висине и намене, за разлику од грађевина оивичених равним странама.

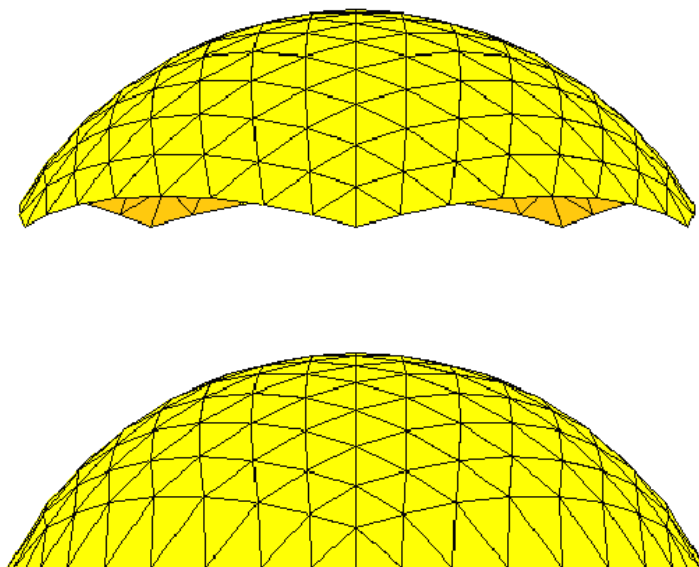
Решење овог проблема би могло бити формирање геодезијске куполе над ослоначком конструкцијом која би била на одређеној висинској разлици у односу на њену основу. Међутим, постоји само једна раван која пресеца икосаедарску геодезијску куполу на такав начин да садржи чворове свих пресечених штапова, која садржи центар сфере и то само у случају њене парне фреквенције.



*Слика 4-10) Икосаедарска геодезијска купола фреквенције 8v*

Због тога, у случају формирања геодезијске куполе другачијег односа висине и распона, овакав захват би захтевао промене у ослоначкој конструкцији или самој структури куполе – или би ослоначка конструкција пратила положај штапова и чворова, или би штапови при ослоначкој конструкцији били различитих, нестандартних дужина, у односу на штапове који се уграђују у остатак структуре.

Различитост дужина штапова при ослонцима води ка различитости геометрије чворних веза, унифицираних у складу са положајем у структури, што би резултирало производњом нових, нестандартних чворних веза. Чворне везе штапова представљају осетљив и сложен део структуре чија се геометрија изузетно пажљиво одређује.

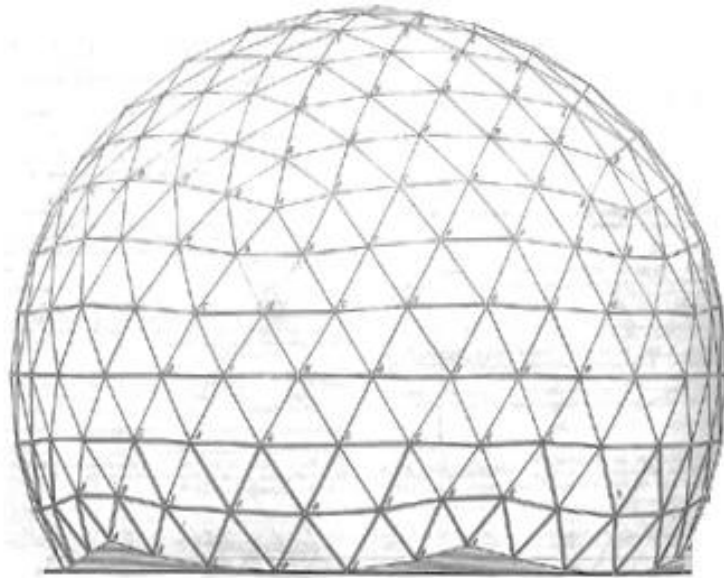


*Слика 4-11) Контура геодезијске куполе при ослонцима*

#### **4.1.2.2 Структура геодезијске куполе**

Структуру геодезијске куполе представља триангулисана мрежа штапова, што јој даје велику крутост и стабилност, па је у стању да покрије велике површине без унутрашњих ослонаца. Захваљујући сферној форми, основно напонско стање у штаповима је аксијално напрезање. Све компоненте (штапови и чворови), у структури геодезијске куполе, одређене су геометријски, положајем у структури, а не према статичким условима. Силе у штаповима и чворовима су веће при основи него при темену куполе, али се компоненте не мењају, димензионисане су за најнеповољније утицаје и све су истих димензија, без обзира на оптерећење. Ово би се лако могло кориговати, што би довело до мањег утрошка материјала, али би се тиме двоструко, па и вишеструко повећао број различитих компоненти, компликује се њихова производња и уградња и губи једна од основних предности геодезијских купола.





Слика 4-12) Нормални напони у штаповима геодезијске куполе<sup>35</sup>

За велике распоне, штапови и чворови структуре су при основи оптерећени силама већег интензитета. Силе из штапова се преносе преко једне тачке, чвора структуре, а у њима се може сустицати и до 12 штапова, код вишеслојних структура (слика 4-13). Ови чворови морају бити добро конципирани, геометријски беспрекорни, морају да испуне услов унификације, лаке израде и уградње, те су компликовани и скупи. При том су нефлексибилни и свака промена геометрије везе захтева израду новог типа чвора. Код једнослојних геодезијских купола мањих распона и оптерећених мањим оптерећењима, концепт чворне везе штапова може бити поједностављен.

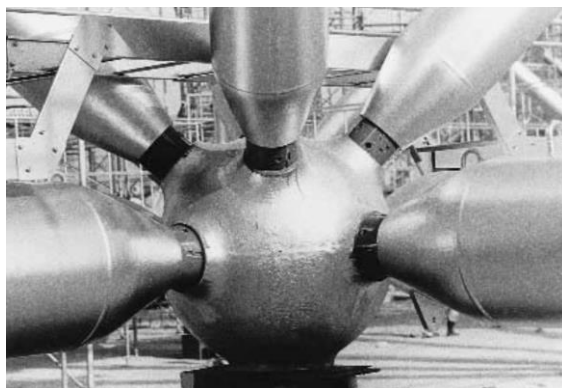


Слика 4-13) Чворна веза штапова геодезијске куполе у Монтреалу

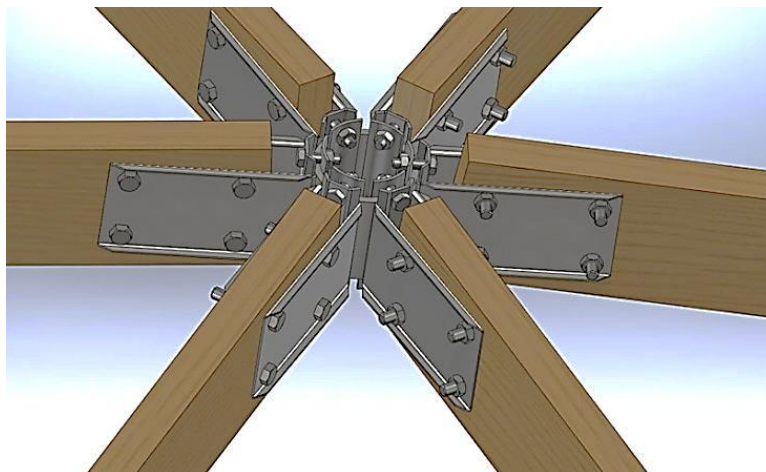
---

<sup>35</sup> Модификован цртеж из: Rühle, Herrmann, *Prostorne krovne konstrukcije njihove pojedinosti njihovo izvođenje*, Građevinska knjiga, Beograd, 1977, стр. 388.

Од материјала се, за израду геодезијских купола од штапова, најчешће користе алуминијум и челик, али се могу користити и други материјали. У случају примене других материјала, чворне везе штапова се додатно компликују. Примена сваког од материјала повлачи и одређене предности и недостатке везане за његове физичке и механичке карактеристике.



Слика 4-14) Чвор структуре од алуминијума



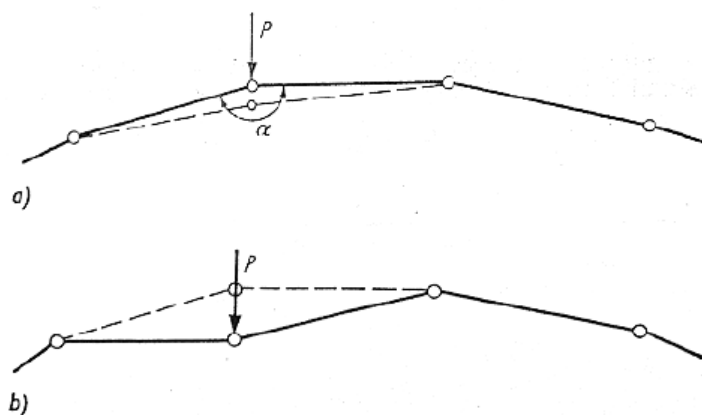
Слика 4-15) Чворна веза штапова једнослојне структуре од дрвета

У зависности од материјала и расположивих димензија компоненти које се уграђују, усваја се и потребна фреквенција структуре. Распон и оптерећење директно утичу на одлуку о једнослојној или вишеслојној структури. Једнослојне структуре се израђују у случају геодезијских купола мањих распона, док се за оне већег распона планирају вишеслојне<sup>36</sup>.

---

<sup>36</sup> Žagar, Zvonimir, Drvene unženjerske konstrukcije i njihova sigurnost, Simpozijum Cavtat 1977, стр. B5-1-4.

У случају једнослојне геодезијске куполе више фреквенције и већег распона јавља се проблем стабилности чворова структуре, а тиме и стабилности целе структуре. Велика стабилност геодезијске куполе потиче управо из триангулисаности њених страна у сферној равни. Међутим, управо на сферу, повећањем фреквенције структуре повећавају се углови између суседних страна и углови између штапова спојених у чворовима куполе, што смањује крутост саме структуре. Приближавањем овог угла опруженом углу ( $180^\circ$ ) повећава се опасност од деформисања структуре и од „пробијања“ одређеног чвора структуре услед смањења дужина притиснутих штапова<sup>37</sup>. Ова ситуација може довести до немогућности успостављања новог равнотежног стања и до колапса структуре. У таквим случајевима прибегава се вишеслојним структурама, које, с друге стране, повећавају утрошак материјала и цену рада.



Слика 4-16) „Пробијање“ чвора структуре код геодезијске куполе више фреквенције<sup>38</sup>

### 4.1.2.3 Рационалност коришћења геодезијске куполе

Због свог сферног облика и због присуства само аксијалних сила у штаповима структуре, геодезијска купола има врло повољан однос утрошеног материјала и запремине објекта. У поређењу са другим просторним структурама,

<sup>37</sup> Rühle, Herrmann, Prostorne krovne konstrukcije njihove pojedinosti njihovo izvođenje, Građevinska knjiga, Beograd, 1977, стр. 370.

<sup>38</sup> Rühle, Herrmann, Prostorne krovne konstrukcije njihove pojedinosti njihovo izvođenje, Građevinska knjiga, Beograd, 1977, стр. 370.

добија се пројектована корисна површина уз најмањи утрошак материјала, што значи и структура мале тежине. Тежина геодезијских купола великог распона, са штаповима од алуминијума, износи око  $15 \text{ kg/m}^2$ , па и мање од  $10 \text{ kg/m}^2$  за мање распоне<sup>39</sup>. Због мале тежине, геодезијске куполе се могу брзо транспортовати, а због начина остваривања веза једноставним спајањем компоненти, могу се монтирати на местима где нема никакве инфраструктуре, за потребе помоћи угроженом становништву, у војне сврхе и слично.

Геодезијска купола се гради од само две компоненте, штапова и чворова структуре, па је њена монтажа максимално поједностављена. Економска оправданост ових структура не зависи само од укупног броја штапова и чворова, већ и од њихове истоветности. Мали број штапова различитих дужина и различитих чворова представља огромну предност геодезијске куполе у односу на друге куполасте структуре, јер је тиме омогућена серијска производња и стандардизација градивних компоненти, те су геодезијске куполе прави израз индустријализације и префабрикације тог времена.

Монтажа геодезијске куполе може бити завршена за кратко време, од лаких компоненти и са радном снагом која не мора бити посебно обучавана и припремана за овај систем градње. Једноставно се могу штапови различитих дужина обележити различитим бојама или на други одговарајући начин, а градња се своди на спајање штапова и чворова структуре обележених истим ознакама.

Највећа геодезијска структура, изграђена од мреже штапова, у металу, има распон од 216 m (*Fantasy Entertainment Complex – Kyosho Isle, Japan*)<sup>40</sup>. Рационална примена дрвета у градњи геодезијских купола је до распона 30 m<sup>41</sup>.

---

<sup>39</sup> Žagar, Zvonimir, Drvene unženjerske konstrukcije i njihova sigurnost, Simpozijum Cavtat 1977, стр. B5-1-4.

<sup>40</sup> Website of the Buckminster Fuller Institute:

[https://web.archive.org/web/20100412163621/http://www.bfi.org:80/our\\_programs/who\\_is\\_buckminster\\_fuller/design\\_science/geodesic\\_domes/worlds\\_10\\_largest\\_domes](https://web.archive.org/web/20100412163621/http://www.bfi.org:80/our_programs/who_is_buckminster_fuller/design_science/geodesic_domes/worlds_10_largest_domes)

<sup>41</sup> Žagar, Zvonimir, Drvene unženjerske konstrukcije i njihova sigurnost, Simpozijum Cavtat 1977, стр. B5-1-4.



#### 4.1.2.4 Предности и недостаци геодезијске куполе

Несумњиво је да геодезијске куполе представљају економично решење у градњи куполастих структура, а свој квалитет су већ доказале кроз примену у архитектури и грађевинарству. Оне представљају једну од најефикаснијих структура у цени, времену планирања, брзини производње и изградње, прихватању и преносу оптерећења на тло.

Што се тиче функционалности геодезијске куполе, анализа је индивидуална и зависи од потреба крајњег корисника. Не постоји универзална структура, која би испунила очекивања и потребе свих корисника. Иста структура, или нека њена карактеристика, може за једног корисника бити предност, док за другог може представљати недостатак. Неки недостаци геодезијских купола могу се лако отклонити, али се тиме често умањују неке њене друге предности.

Предности геодезијских купола су:

- Велика запремина корисног простора;
- Висок ниво осветљености током целог дана;
- Велике површине без унутрашњих ослонаца;
- Мала тежина структуре јер је мали утросак материјала;
- Економичан транспорт, с обзиром на мале тежине компоненти и на њихове мале габарите;
- Лака и брза монтажа;
- Низак ниво потребног знања и обучености радне снаге;
- Не захтева инфраструктуру за монтажу;
- Индустријализована и префабрикована производња компоненти;
- Стандардност у квалитету материјала и израде.

Недостаци геодезијских купола су:

- Геометријска нефлексибилност њене форме;
- Одређивање нестандардног односа висине и распона повлачи низ техничких проблема;

- Висок однос запремине и корисне површине<sup>42</sup>;
- Формирање равне ослоначке конструкције, осим у посебним ситуацијама, захтева промену у геометрији штапова и чворова структуре;
- Високи трошкови грејања и климатизације простора због велике запремине структуре;
- Неискоришћеност периферних делова унутрашњег простора;
- Компликоване и скупе чворне везе штапова;
- Компликовање чворних веза штапова у случају примене других материјала.

## 4.2 Основни принципи обликовања ПКС

Напред наведени недостаци геодезијске куполе указују на њену одређену структурну и геометријску нефлексибилност, те се уочава потреба за њеним модификовањем. Потребно је дефинисати смернице у њеној трансформацији, у функцији рационализације у реализацији ПКС.

При дефинисању полиедарске структуре тежи се задржавању предности које има геодезијска купола, а минимализују њени недостаци. Овим би се омогућило формирање структура које би имале прихватљивију геометрију, из услова крајњег корисника, а тиме и њихово лакше прихватање и њихова популаризација кроз реализоване објекте.

Формирање коначног асортимана ПКС, базираног на нумеричким вредностима (распон, висина и сл.), само би у ограниченем степену задовољило различите потребе крајњих корисника, те је циљ формирање критеријума који би омогућили једноставније и флексибилније генерисање структура.

---

<sup>42</sup> У зависности од потреба крајњег корисника може представљати предност, али и недостатак геодезијских купола.

### 4.2.1 Дефинисање смерница у обликовању ПКС

Обликовање ПКС подразумева уважавање свих принципа који утичу на њену геометрију или структуру, укључујући геометријске принципе, статичко-конструктивне принципе, принципе префабрикације функционалних елемената, њиховог транспорта, монтаже итд..

Основне смернице за одређивање геометрије ПКС, у односу на геодезијске куполе, су:

- Тежити одређеном степену апроксимације сферне форме геодезијске куполе;
- Омогућити флексибилно одређивање односа висине и распона структуре;
- Омогућити формирање ослоначке конструкције једноставне геометрије, која би могла бити изведена и на одређеној висини у односу на терен;
- Задржати низак ниво потребног знања и обучености радне снаге;
- Тежити високом нивоу прецизности и стандардности у изради функционалних елемената и у квалитету материјала;
- Тежити високој економичности какву имају геодезијске куполе, из услова материјала и рада, тј. из услова реализације структуре.

Крајњи циљ је формирање рационалне структуре која би могла испунити захтеве већег броја крајњих корисника, што, између осталог, значи различите по питању висине, распона, структуре...

Могућност примене наведених смерница у обликовању ПКС проверавају се кроз анализу структуре геодезијске куполе и могућности модификације њене геометрије, а успешност примењених интервенција би требало да покажу карактеристике такве структуре.

#### 4.2.2 Обликовање ПКС у складу са дефинисаним смерницама

Полиедарске структуре, у које по форми спадају и геодезијске куполе, могу бити изведене у систему штапова и у систему површинских конструктивних елемената, а у зависности од тога и се обезбеђује и њихова стабилност.

У систему штапова, каква је структура геодезијске куполе, најчешће се врши триангулација њених страна, а штапови се зглобно повезују. У штаповима су доминантне аксијалне силе, које се преносе преко чворова структуре.

С друге стране, код куполастих структура формираних од површинских конструктивних елемената, неопходно је обезбедити стабилност њихових страна (у сопственој равни). Површински елементи могу да прихвате оптерећење у својој равни и управно на своју раван. У том случају се силе у структури полиедарске куполе, формиране на наведени начин, преносе смицањем по контури њених страна. Утицај момената савијања при димензионисању површинских елемената може бити знатан, што зависи од степена апроксимације сфере геометријом ПКС, димензија тих елемената и њиховог положаја у структури.

Површински конструктивни елементи могу се производити унапред, пре уградње на пројектовано место у структури, у ком случају они представљају функционалне елементе одређеног система префабрикације. Пребацивањем дела рада на изради функционалних елемената у индустрију остварује се низ предности у квалитету њихове израде, обезбеђен је висок степен у прецизности њихове израде и квалитету примењеног материјала, а тиме се постиже и одржавање достигнутог нивоа и стандардност производа и рада.

Овакав приступ у остваривању веза између функционалних елемената има позитиван ефекат из услова рационализације система. Међутим, функционални елементи су гломазни и тешки, а тежа је и манипулација њима. Решење лежи у одређеним трансформацијама постојећих система на начин који ће омогућити обједињавање предности и једног и другог система.

#### **4.2.2.1 Геометријска трансформација полиедарске куполе**

Штапови икосаедарске геодезијске куполе граде стране у облику троуглова. На овај начин формирана полиедарска купола садржи велики број функционалних елемената мањих димензија, што из аспекта индустријске префабрикације често не представља рационално решење. Због тога се приступа метаморфози геодезијске куполе усвајањем њеног дуала, који има стране у облику петоуглова и шестоуглова.

Основна предност дуала геодезијске куполе, у односу на његов дуални пар, јесте у димензијама његових страна, које су веће, а при том их има мање. Сва темена његових страна могу, али и не морају лежати на јединственој сфери. Пројектовањем темена на сферу може се обезбедити овај услов, али онда његове стране могу постати витоперне. Купола се може формирати као полиедарска само уколико су њене стране равне површи, а не витоперне, што најчешће води ка одступању од основних принципа генерисања геометрије геодезијске куполе.

##### ***4.2.2.1.1 Интегрисање страна малих димензија***

Структура од функционалних елемената облика троуглова не би била економски оправдана, јер би оваквих елемената било превише. Економски би било прихватљивије укрупњавање више мањих функционалних елемената у један већи. Транспорт функционалних елемената формираних на наведени начин, био би оптерећен њиховим повећаним габаритом, али би се то надокнадило вишеструким смањењем броја елемената и броја радњи око њихове израде и уградње. Због тога се спроводи геометријско интегрисање малих страна у веће, уз задржавање услова да те стране представљају полигоне, који по својој дефиницији не могу бити витоперни. Трансформација геометрије геодезијске куполе састоји се у кориговању положаја њених темена и елиминисању страна малих димензија, које су неповољне из услова префабрикације функционалних елемената.

#### **4.2.2.1.2 *Формирање хоризонталних сегмената структуре***

Идеја је да се омогући подела ПКС на више хоризонталних сегмената и да сваки од сегмената може бити ослоначки, у структури полиедарских купола, тј. сви функционални елементи наведеног сегмента би имали поједина темена у истој хоризонталној пресечној равни, преко којих би се ослањали на ослоначку конструкцију, или на следећи, нижи сегмент структуре.

Равни, у којима леже стране полиедарске куполе, померају се тако да се поједина темена полиедра, генерисана у пресецима суседних равни, доведу у поменуту хоризонталну раван. Оваква трансформација води ка генерисању темена полиедра од којих нека више не леже у јединственој сфери.

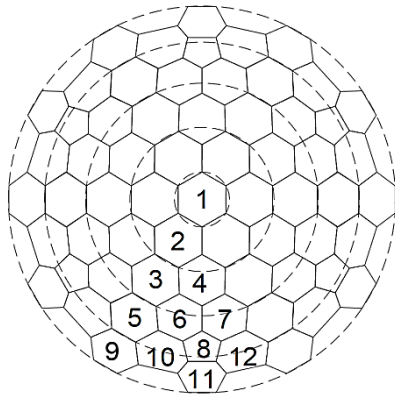
Остварење геометријске трансформације омогућава формирање ослоначке конструкције једноставне геометрије, која се налази у генерисаним хоризонталним равнима и садржи сва ослоначка темена. Осим тога, омогућено је и флексибилно и независно одређивање висине и распона структуре, без утицаја на њену функционалну организацију.

#### **4.2.2.1.3 *Пример геометријске трансформације полиедарске куполе***

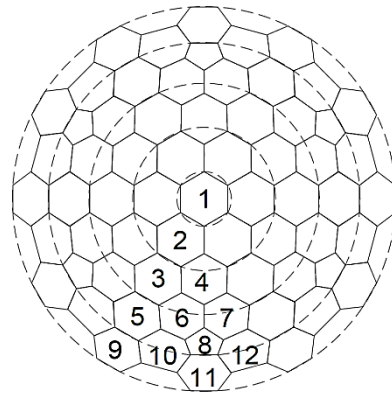
Геометријска трансформација полиедарске куполе приказана је кроз 6 корака на слици 4-17:

- 1) Сва темена куполе леже на сфери, али не и у хоризонталним равнима фиктивних прстенова, осим у основи куполе;
- 2) Усваја се да полигон 11 буде подударан полигону 9, чиме одређена темена излазе из сфере;
- 3) Темена полигона 10 и 12 се доводе до хоризонталног, ослоначког прстена, чиме они постају седмоугаони;
- 4) Врши се сажимање по два темена полигона 10 и 12, заједничка са полигоном 8, чиме се полигон 8 трансформише из петоугла у троугао;
- 5) Врши се интегрисање полигона 8 и 11, затим се сажимају два ослоначка темена полигона 11 у једно, чиме се мења његова оријентација;

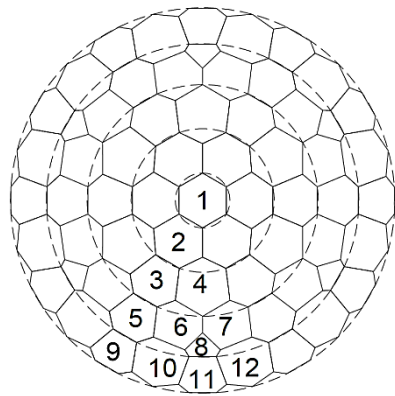
- б) Два ослоначка темена полигона 9 сажимају се у једно и он постаје петоугао. Последњом интервенцијом се, из статичких услова, добија прихватљивија геометрија свих полигона у ослоначком појасу.



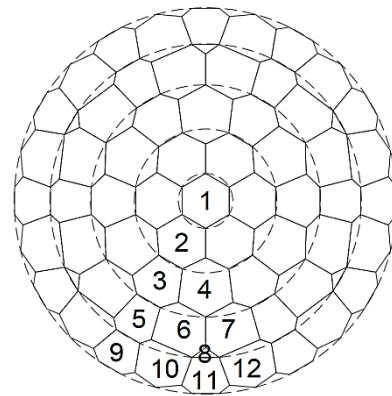
1)



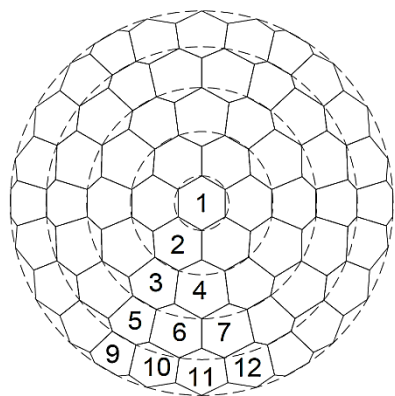
2)



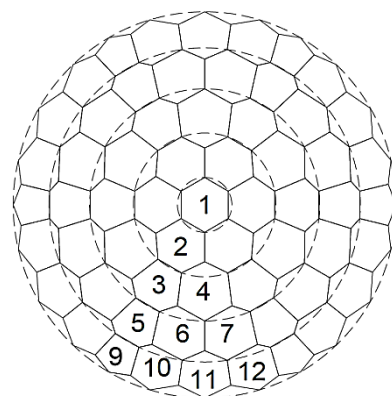
3)



4)



5)



6)

Слика 4-17) Геометријска трансформација полиедарске куполе

#### **4.2.2.2 Функционална трансформација геодезијске куполе**

Основна разлика између геодезијске куполе од штапова и ПКС је у систему градње: док се геодезијске куполе граде од компоненти, штапова и чворова структуре, дотле се ПКС граде од префабрикованих функционалних елемената. То не значи да су геодезијске куполе ослобођене префабрикације и индустријализације, штавише, обе компоненте захтевају изузетно прецизну производњу, углавном индустријску и доносе се на градилиште спремне за уградњу.

Анализирајући структуру геодезијске куполе и структуру њеног дуала, у контексту напред дефинисаних смерница, могле би се искористити предности и једних и других структура. У случају геодезијске куполе, триангулисана мрежа штапова јој омогућава крутост и стабилност, док њен дуал захтева генерисање страна које би биле круте у својој равни, управо из услова стабилности.

Сагледавањем и комбиновањем предности структуре од штапова и структуре од површинских елемената, могуће је формирати одговарајућу структуру која би била рационална.

##### ***4.2.2.2.1 Увођење меких затега у структуру геодезијске куполе***

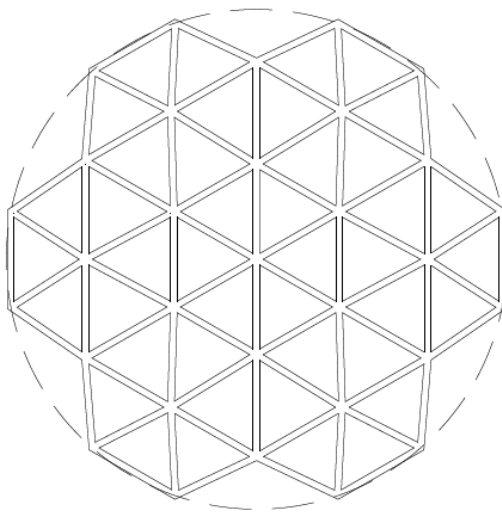
У структури геодезијске куполе доминантне су аксијалне силе, притисак и затезање. Замена одређених, затегнутих крутих штапова меким затегама, у структури геодезијске куполе, утицала би на повећање њене економичности. Међутим, постоји реална опасност да би другачије оптерећење, или комбинација могућих истовремених оптерећења могла довести до опуштања појединих затега.

Опуштање затега захтева поновно успостављање равнотеже сила у структури, јер оне могу да прихвате само силе затезања, што доводи до повећаног напрезања у осталом делу структуре. Уколико оваква ситуација не доведе до урушавања структуре и дође до успостављања нове равнотеже сила, њена крутост ће свакако била умањена, што би се одразило на повећање вредности померања њених чворова.



Структура од мреже крутих штапова постаје структура од мреже крутих штапова и меких затега, у којој су штапови оптерећени на притисак и, евентуално, затезање, док су затеге оптерећене само на затезање. Структура се мора пажљиво анализирати у функцији свих могућих оптерећења, а меке затеге, које у било којој од комбинација оптерећења могу постати опуштене, морају се заменити крутим штаповима.

Ова чињеница укупан број крутих штапова, који би се могли заменити меким затегама, своди на врло мали, у крајњем случају нерационалан број.



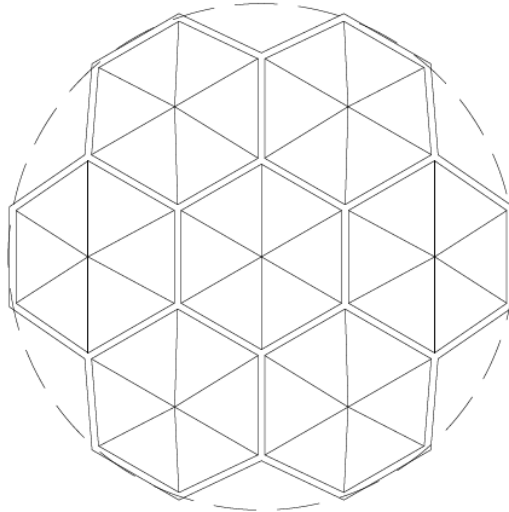
Слика 4-18) Триангулисана структура од крутих штапова

#### **4.2.2.2 Преднапрезање структуре**

Преднапрезањем целе структуре или једног њеног дела обезбеђује се стално присуство сила затезања у затегама и сила притиска у одређеним штаповима, у свим комбинацијама оптерећења. Овим се омогућава формирање одређене напонске слике у структури на коју се може утицати, те груписање одређених затега и штапова. Вредности сила преднапрезања одређују се из услова да ни у једној од комбинација оптерећења не дође до опуштања затега, односно из услова да у њима увек постоји одређена сила затезања.

Структура се анализира из услова напрезања њених елемената и из услова њене употребљивости. Повећањем сила преднапрезања повећавају се и димензије штапова и затега, самим тим и утрошак материјала, али се тиме повећава и

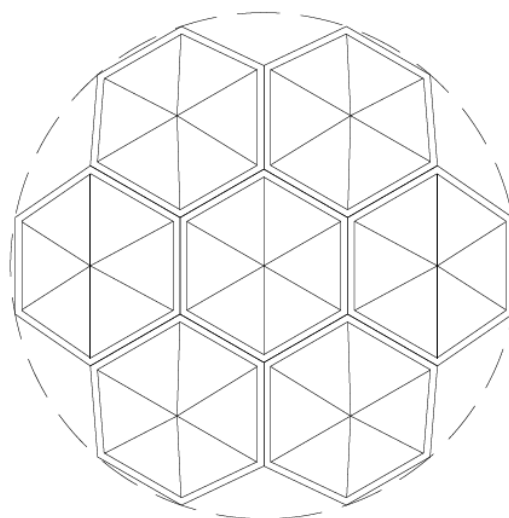
крутост структуре. Дефинисање потребне силе преднапрезања захтева остварење равнотеже између крутости структуре и утршка материјала, исказаног кроз димензије штапова, затега и чворова структуре.



Слика 4-19) Преднапрезање структуре омогућава груписање затега

#### 4.2.2.2.3 Издајање функционалног елемента из структуре

У односу на триангулисану структуру одређене геодезијске куполе, посматрајући само круте штапове, они формирају контуре страна њеног дуала ниже фреквенције. Уместо једноделних штапова структуре уводе се дводелни штапови сложеног попречног пресека.

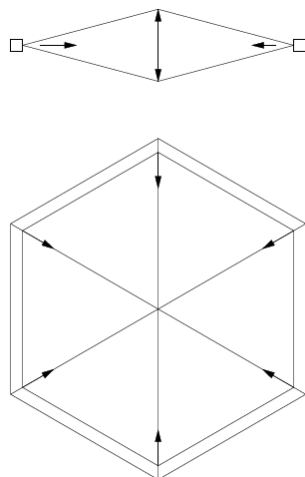


Слика 4-20) Функционални елементи у структури полиедарске куполе

Овако формирана структура омогућава издвајање по једног штапа и његово припајање функционалном елементу. Издвојен део структуре препознат је као функционални елемент који може бити произведен у префабрикованој организацији производње, а структура изграђена од таквих елемената може бити рационална.

#### 4.2.2.3 Обликовање преднапрегнутих функционалних елемената

Функционални елемент који је издвојен из структуре представља конструктивни склоп линијских елемената, крутих штапова по контури и меких затега унутар његове контуре. Да би се остварила довољна крутост функционалног елемента у његовој равни, врши се његово преднапрезање.

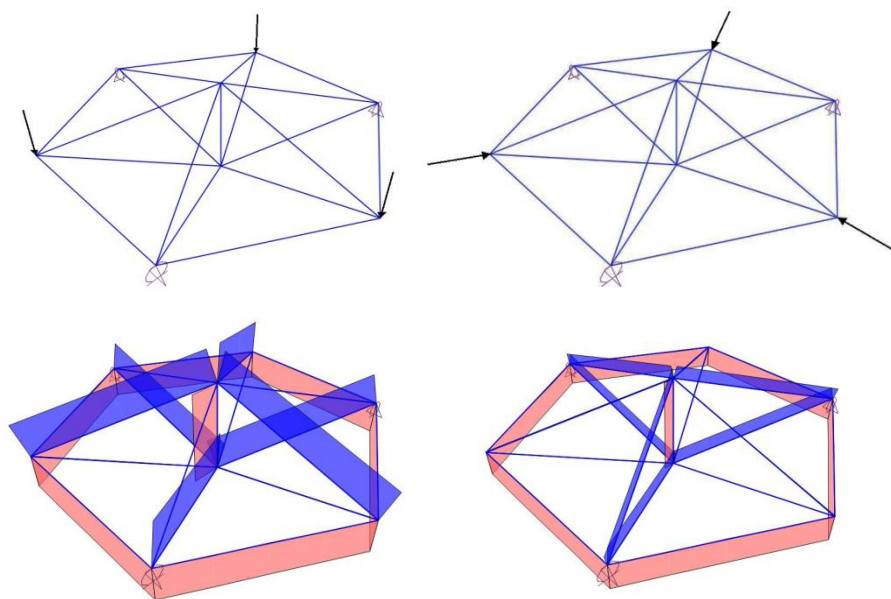


Слика 4-21) Преднапрезање контурних штапова функционалног елемента

С друге стране, преднапрезање контурних штапова функционалног елемента, када су све затега у његовој равни, може довести до његовог витоперења и губљења стабилности ван сопствене равни. Због тога се конструктивни склоп функционалног елемента усваја по аналогији са двопојасним висећим конструкцијама – формирају се два појаса меких затега са крутим штапом – разупирачем, између њих. Разупирач се налази у тежишту полигона који представља функционални елемент, односно у тежишту стране полиедарске куполе.

Предност функционалног елемента са разупирачем и два нивоа затега, огледа се у једноставности његовог преднапрезања. Променом дужине разупирача утиче се на вредност силе разупирања, а тиме и на вредности сила затезања у наведеним затегама и сила притиска у контурним штаповима функционалних елемената.

Преднапрезањем функционалног елемента обезбеђује му се потребна крутост двојачко – преко радијалних сила у његовој равни и сила управних на његову раван. Радијалне силе преднапрезања обезбеђују постојаност пројектованог облика функционалног елемента, док успостављена равнотежа сила управних на његову раван обезбеђује да не дође до његовог витоперења, а све заједно води ка очувању стабилности полиедарске структуре и повећању њене крутости.



Слика 4-22) Стабилност форме функционалног елемента

На слици 4-22 приказан је функционални елемент ослоњен у три темена, оптерећен силама управним на његову раван и у равни. У приказаној анализи није извршено преднапрезање функционалног елемента, што указује на његову стабилност и велику крутост која се преднапрезањем још повећава.

Преднапрезањем функционалног елемента обезбеђује се стално присуство сила затезања (у затегама) и сила притиска (у крутим штаповима), без обзира на

смер оптерећења. Повећањем вредности сила преднапрезања повећава се и крутост функционалног елемента, што му омогућава широку примену, за различите вредности оптерећења, различите правце и смерове оптерећења. Исти функционални елемент може бити на различитим местима у структури, у другачијем положају, преднапрегнут једнаким или различитим силама, у зависности од потребне крутости структуре.

Усвајањем разупирача веће или мање дужине, може се утицати на однос између вредности радијалних сила и сила управних на раван преднапрегнутог функционалног елемента. Преднапрезање се врши у самом функционалном елементу, те њихове међусобне везе нису оптерећене преднапрезањем. Уколико би цела структура била преднапрегнута, онда би и наведене везе биле оптерећене.

Уместо веза штапова преко чворова структуре, као у случају геодезијске куполе, остварују се везе између функционалних елемената. Везе се свде на повезивање контурних штапова два суседна функционална елемента дуж ивица. Потенцијална сложеност у формирању оваквих веза зависи првенствено од евентуалних технолошких специфичности материјала од ког су израђени функционални елементи и специфичности материјала уз помоћ којих се веза остварује.

ПКС су генерисане комбинацијама полигона различитог облика, са три до шест страница. Функционални елементи ПКС, који су у облику троуглова, представљају недеформабилне фигуре, тако да се они не преднапрежу и нема потребе за формирањем затега и разупирача. То значи и да се на њега не ослања покривач, већ само на суседне функционалне елементе, који имају више од три странице и који се преднапрежу.

### **4.2.3 Економичност ПКС**

Смерницама, датим у претходном поглављу, као један од циљева дефинисана је и тежња ка високој економичности геодезијских купола, исказану

кроз утрошак материјала и рада, али и кроз остале значајне факторе, који директно или индиректно утичу на остварење овог циља.

Економичност ПКС зависи од:

- Усвојеног система префабрикације функционалних елемената;
- Степена индустријализације у производњи;
- Примењених материјала;
- Система градње;
- Примењене технике грађења;
- Броја функционалних елемената у структури;
- Броја веза у структури;
- Организације у остварењу веза у структури (у погону или на градилишту);
- Начина остварења веза у структури;
- Економичности транспорта функционалних елемената;
- Потребне механизације у монтажи функционалних елемената;
- Потребног степена квалификованости и обучености радне снаге;
- Утрошка материјала;
- Утрошеног времена за изградњу структуре.

Није једноставно постићи економичност какву имају геодезијске куполе, поготово што се њене монтаже тиче. Да би се остварила лакоћа и брзина грађења какву имају геодезијске куполе, било би потребно формирати такве функционалне елементе, који би имали лако оствариве везе и који би били довољно велики да замене одговарајући број радњи у монтажи куполасте структуре, а уједно и довољно мали да се могу једноставно уграђивати, без примене гломазне и скупе механизације.

У односу цене рада и материјала требало би наћи основу рационализације структуре, што доприноси одлуци о конструктивном склопу и величини функционалних елемената, степену планиране механизације, примењеној техници и технологији итд.. У овом планирању великог удела имају локални услови, али и

техничко-технолошке могућности и степен опремљености произвођача и градитеља.

### 4.3 Карактеристике ПКС

После спровођења наведених геометријских трансформација више се не може говорити о геодезијским куполама, већ само о полиедарским, будући да поједина темена полиедра могу, али не морају лежати на сфери.

Полиедарске куполасте структуре не морају бити реализоване у систему преднапрегнутих функционалних елемената, већ и од другачије конципираних конструктивних склопова линијских елемената или у систему површинских конструктивних елемената, уколико за тим постоји потреба.

Основне карактеристике ПКС су:

- Форма која представља апроксимацију двоструко закривљене форме:
  - Велике површине без унутрашњих ослонаца;
  - Мала тежина структуре јер је мали утрошак материјала;
  - Покривање површина ограничених правим ивицама;
  - Висок ниво осветљености током целог дана (у случају примене транспарентног покривача);
- Геометријска флексибилност форме:
  - Независно одређивање висине и распона ПКС;
  - Формирање структуре са односом запремине и површине који је дефинисан потребама корисника;
- Формирање ослоначке конструкције једноставне геометрије:
  - Везе структуре са ослоначком конструкцијом су једноставне;
  - Могућност подизања структуре на одређену висину, у односу на њену основу;
    - Већи комфор у коришћењу и искоришћење заузете површине у целости;
    - Формирање отвора стандардних димензија и облика;

- Формирање веза дуж контура функционалних елемената:
  - Само два функционална елемента се међусобно повезују;
  - Примена материјала мање носивости;
  - Формирање једноставних веза функционалних елемената;
  - Лака и брза монтажа;
  - Низак ниво потребног знања и обучености радне снаге на градилишту;
- Укрупњавање функционалних елемената до граница стандардног транспорта и рационалне примене механизације:
  - Економичан транспорт функционалних елемената;
  - Економичну монтажу структуре;
  - Мањи број међусобних веза функционалних елемената смањењем њиховог броја;
  - Повећање диједралних углова између функционалних елемената;
- Омогућен је висок степен индустријализације и префабрикације:
  - Већа прецизност у изради функционалних елемената;
  - Стандардност у квалитету материјала и израде;
  - Низак ниво инфраструктурне опремљености градилишта;
  - Омогућена примена јефтинијих материјала;
  - Аутоматизација процеса, а тиме нижи ниво потребног знања и обучености радне снаге.

Већи део наведених карактеристика ПКС независан је од начина формирања њених страна, али је акценат на структурама формираним од преднапрегнутих функционалних елемената, са контурним штаповима од дрвета, које се детаљније анализирају и проверавају.

Извршене промене у геометрији и структури полиедарске куполе омогућавају велику флексибилност у генерисању њене форме, што води ка повећању њених обликовних могућности и широј примени и популаризацији таквих структура.



Другу значајну ставку у рационализацији полиедарских структура представља префабрикација функционалних елемената, у којој се низ осетљивих радњи пребацује у фабрички погон, док се једноставне изводе на градилишту. Да би се то постигло, потребно је ускладити низ услова, како у производњи функционалних елемената, тако и у њиховом транспорту и монтажи.

### **4.3.1 Геометријска флексибилност ПКС**

Остварење дефинисаних смерница води ка формирању структуре која је рационална, а функционално и обликовно прихватљивија за крајњег корисника, у односу на форму геодезијске куполе. У случају просторних структура, уколико то дозвољава њихов конструктивни склоп, пожељно је да оне имају сферну форму, која је, поред триангулисаности структуре, основни разлог велике стабилности геодезијске куполе и малог утрошка материјала у њиховој реализацији.

У том контексту, ПКС имају одређени степен апроксимације сфере, дефинисан њиховом геометријом, што се статички повољно одражава и на њихову рационалност. Полиедарска форма куполе омогућава генерисање повољне напонске слике у структури, коју, у њеној материјализацији, прати мали утрошак материјала. Оваква њихова форма доћи ће до изражаја чак и када представља нижи степен апроксимације сфере.

Полиедарске куполасте структуре могу наћи своје место у градњи тродимензионалних лаких структура. Форма структуре и облик њене основе омогућавају максимално прилагођавање захтевима простора. Распони структуре су највећи могући, јер је ослоначка конструкција по њеном ободу. Полиедарска форма омогућава формирање основа и полигоналног и кружног облика, у зависности од потреба корисника.

#### **4.3.1.1 Фиктивни хоризонтални прстенови**

Формирање хоризонталних сегмената структуре, те груписање појединих темена, распоређених у пресеку хоризонталне равни и одређене, карактеристичне

сфере ПКС, омогућавају дефинисање фиктивних прстенова структуре, који садрже наведена темена и који могу бити материјализовани као ослоначки прстен или ослоначка конструкција структуре. Положај потенцијално ослоначких темена одређен је принципима и законитостима генерисања геометрије структуре, дефинисаних у даљем раду.

Дефинисање фиктивних прстенова омогућава:

- Формирање ослоначке конструкције једноставне геометрије;
- Подизање ослоначке конструкције на одређену висину изнад основе структуре;
- Максимално искоришћење периферних делова структуре;
- Формирање веза између функционалних елемената и ослоначке конструкције без промене њихове геометрије;
- Једноставнију функционалну организацију ПКС;
- Једноставнију монтажу функционалних елемената;
- Једноставније прилагођавање начина монтаже специфичностима других материјала и различитих префабрикованих система.

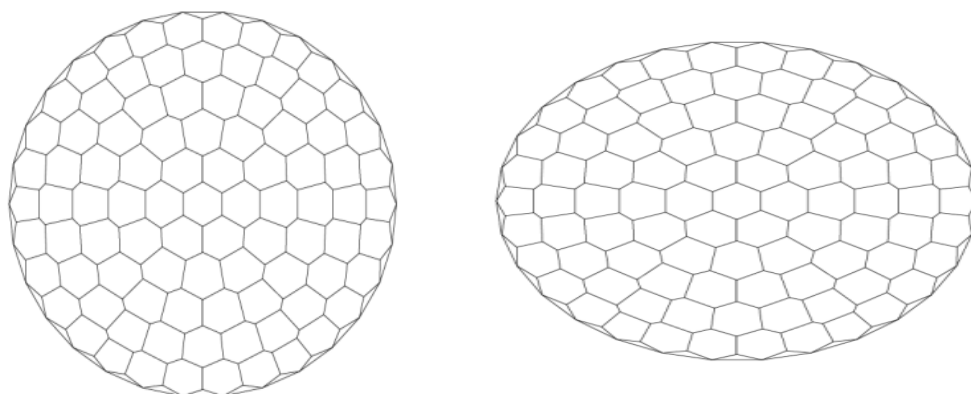
#### **4.3.1.2 Независно одређивање висине и распона ПКС**

Геометријском трансформацијом полиедарске куполе омогућено је њено генерисање у функцији два параметра, висине и распона, одређених независно једног од другог, у границама њене рационалне примене. За рационалну примену сматра се ПКС чија је висина између петине и половине распона ( $H_k=L_k/5$  до  $H_k=L_k/2$ ) њене карактеристичне сфере, која ће бити дефинисана у поглављу 5.2.1.

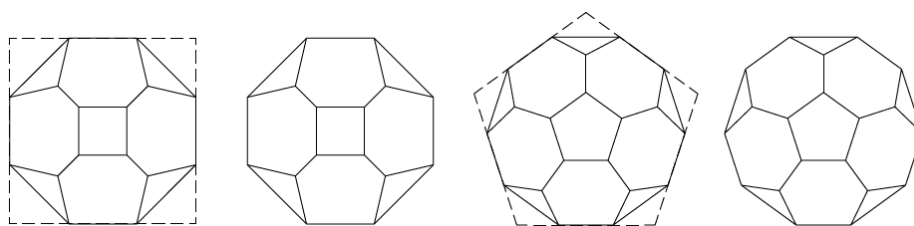
Однос висине и распона структуре дефинисан је потребама корисника, а не њеном геометријом. Смањивањем висине структуре, у односу на усвојени распон, напони и деформације у штаповима и чворовима структуре расту, међутим, са друге стране, однос запремине и површине обухваћеног простора прилагођен је потребама корисника. Флексибилнији избор распона и висине ПКС води и ка једноставнијем генерисању њене геометрије.

### 4.3.1.3 Облици основа ПКС

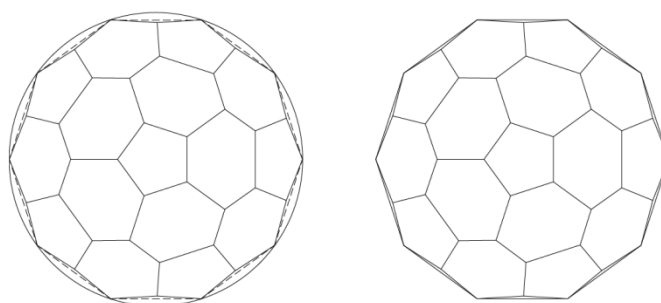
Полиедарске куполасте структуре се могу формирати над основама различитог облика, подељених у две основне групе, основе закривљеног и основе полигоналног облика. Основа може бити у облику круга, елипсе, или полигоналног облика са најмање четири странице, углавном код структура најнижег нивоа апроксимације сфере.



Слика 4-23) Основе закривљеног облика ПКС



Слика 4-24) Основе полигоналног облика ПКС



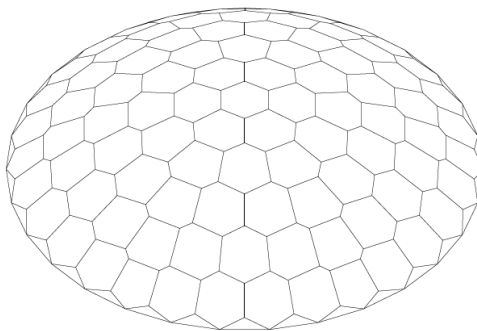
Слика 4-25) ПКС са тачкастим и линијским ослањањем

Уколико структуре у ослоначком појасу имају функционалне елементе са по два ослоначка темена, као логичније решење се намеће формирање ослоначког прстена полигоналног облика, док се структуре, које у ослоначком појасу имају

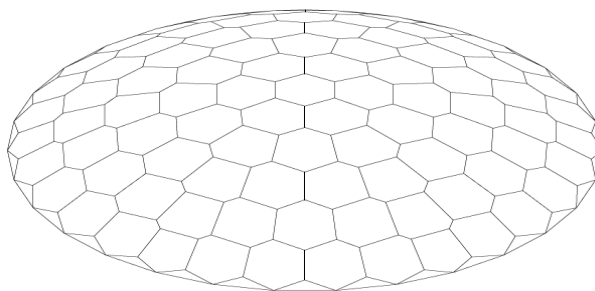
функционалне елементе са само по једним ослоначким теменом, могу ослонити како на ослоначки прстен кружног облика, тако и на прстен полигоналног облика.

#### 4.3.1.4 **Форме ПКС**

ПКС се може формирати тако да њена форма представља апроксимацију сфере и апроксимацију елипсоида. Геометрија једне и друге структуре генерисана је по истим принципима, дефинисаним у следећем поглављу. Разлика је у вредностима  $X$  (или  $Y$ ) координата темена, која се, у случају ПКС као апроксимације елипсоида, добијају множењем односа примарног и секундарног пречника елипсе, њене основе, са одговарајућим координатама генерисане полиедарске куполе која представља апроксимацију сфере.



Слика 4-26) ПКС као апроксимација сфере

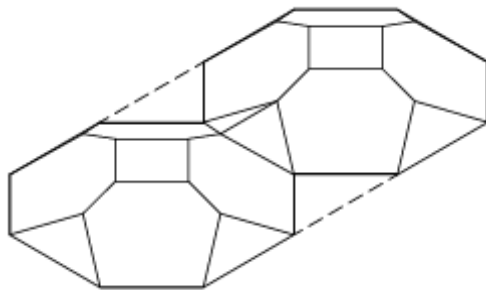


Слика 4-27) ПКС као апроксимација елипсоида

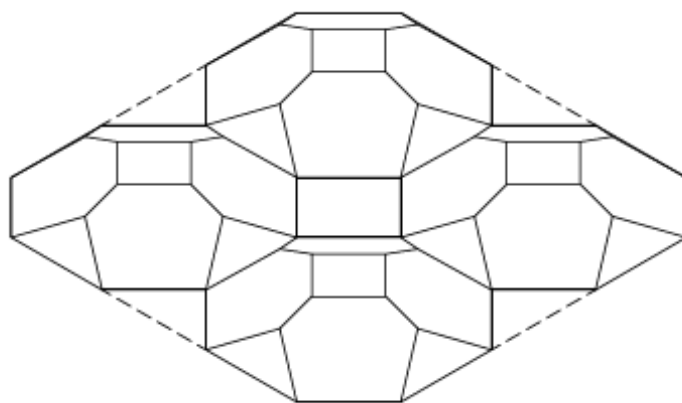
#### 4.3.1.5 **Мултипликација ПКС**

Флексибилност форме структуре омогућава њихову мултипликацију у једном, два или три правца. Применом више, углавном истих структура, могу се покрити површине ограничене правим ивицама, што је велика предност такве

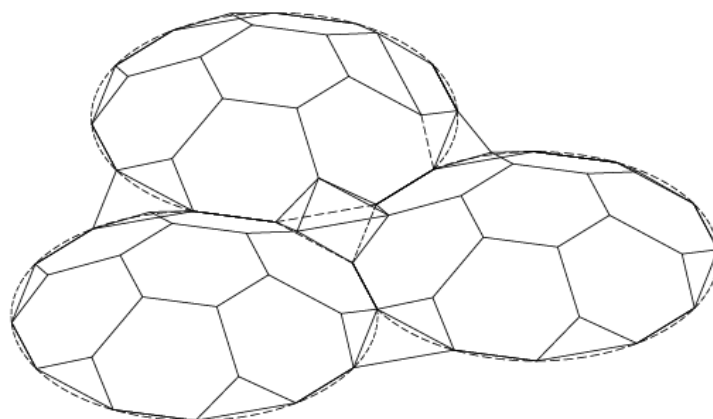
структуре у изграђеним срединама. Изводи се мултипликација структура нижег нивоа апроксимације сфере, са мањим бројем функционалних елемената.



*Слика 4-28) Мултипликација ПКС у једном правцу*



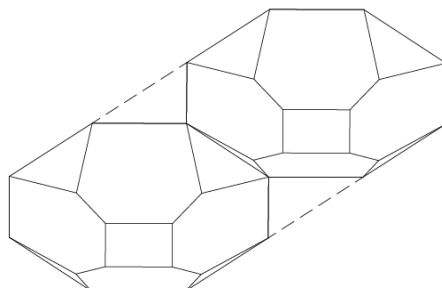
*Слика 4-29) Мултипликација ПКС у два правца*



*Слика 4-30) Мултипликација ПКС у три правца*

С обзиром на велику крутост функционалних елемената, на коју се може утицати преко вредности сила преднапрезања, то се могу формирати и структуре

које заузимају другачији положај у односу на смер оптерећења чиме се може генерисати и другачија напонска слика у функционалним елементима, као што је случај код надстрешница.



Слика 4-31) Мултипликација ПКС у једном правцу, у виду надстрешнице

#### 4.3.1.6 Распони ПКС

Анализом више структура од преднапрегнутих функционалних елемената са контурним штаповима од дрвета, у зависности од распона, ПКС се могу сврстати у 3 групе:

- ПКС малог распона, до 20 m;
- ПКС средњег распона, 20 до 40 m;
- ПКС великог распона, преко 40 m.

Полиедарске куполасте структуре малог распона су углавном структуре нижег нивоа апроксимације сфере или елипсоида.

Статичком анализом извршеном на више виртуелних модела ПКС, долази се до закључка да је њихова примена могућа на распонима и преко 60,0 m, али је условљавањем индустријском префабрикацијом функционалних елемената ова могућност редукована на само 30,0 m. У случају структура распона већег од 30 m, потребно је њихову производњу организовати у виду градилишне префабрикације. Такође, у том случају, за рационално формирање ПКС, применило би се лепљено ламелирано дрво одговарајућег квалитета.

### **4.3.2 Префабрикација функционалних елемената**

Премештањем производње функционалних елемената у фабричке хале постиже се низ предности, али постоје и извесна ограничења. Стране ПКС се формирају у виду функционалних елемената одређеног габарита, који је условљен њиховим транспортом. Механизацију у транспорту функционалних елемената и монтажи структуре требало би максимално искористити, што се постиже укрупњавањем функционалних елемената до границе стандардног транспорта.

#### **4.3.2.1 Производња функционалних елемената**

Премештање производње функционалних елемената у фабричке хале, омогућава:

- Заштићене услове производње функционалних елемената и остваривања њихових веза;
- Виши квалитет материјала и већа прецизност у изради функционалних елемената и њихових веза;
- Аутоматизацију одређених радњи;
- Олакшан приступ руковаоцима алата;
- Организована и стално присутна логистичка подршка у производњи функционалних елемената;
- Смањење степена потребне инфраструктурне опремљености градилишта;
- Мање радне снаге на градилишту и једноставнија организација монтаже;
- Транспорт мање количине материјала на градилиште, јер је све већ уграђено у функционални елемент;
- Примену јефтинијих материјала;
- Лакше и квалитетније заштитно третирање функционалних елемената и њихових компоненти – заштита од влаге, гљивица и инсеката, завршно бојење и слично;

- Могућност потпуног искоришћења материјала.

Израда функционалних елемената подразумева и остварење њихових веза, које су сложеније и осетљивије на евентуалне непрецизности у изради, док се једноставније везе, на међусобном повезивању функционалних елемената, остварују на градилишту. Везе између функционалних елемената остварују се дуж њихових контура, на једноставан начин, што омогућава:

- Повећање брзине монтаже;
- Смањење степена потребног знања и стручности радне снаге ангажоване на градилишту.

Аутоматизација одређених радњи се може сагледати кроз две групе радова:

- Аутоматизација при изради компоненти од којих се формира функционални елемент, као што су кројење штапова, затега, формирање навоја на крајевима затега, израда окова и слично;
- Аутоматизација при уградњи компоненти у функционални елемент.

Степен аутоматизације зависи пре свега од технолошке флексибилности префабрикованог система, као и степена његове индустријализације, што је дефинисано у поглављу 2.2.

Третирање компоненти пре њихове уградње у функционалне елементе је квалитетније и целисходније, у смислу да уградњом компоненти поједине њихове површине постају недоступне за заштиту и тиме осетљивије на штетна дејства због којих се и третирају. Компоненте се могу лакше третирати једноставним потапањем у одређена заштитна средства, што је на градилишту готово неизводљиво.

У току монтаже преднапрегнутих функционалних елемената са контурним штаповима од дрвета, од инфраструктуре је неопходно само напајање електричном енергијом, што се једноставно решава агрегатима за њену производњу. У случају примене других материјала у реализацији структуре и



другачијег начина остваривања њених веза, то и потребе за већом или мањом инфраструктурном опремљеношћу градилишта могу бити другачије.

#### **4.3.2.2 Транспорт функционалних елемената**

Специфични услови транспорта функционалних елемената могу економичност читаве структуре довести у питање (поглавље 2.2.3.1). Због тога би карактеристике функционалних елемената требало прилагодити условима стандардног транспорта, који није оптерећен специфичним условима транспорта, као што су издавање посебних дозвола, обавезна техничка пратња и слично.

Преднапрегнути функционални елементи имају уједначене две димензије, у својој равни, али је и њихова трећа димензија (дебљина) велика због димензија разупирача, који излазе из равни функционалних елемената. Са једне стране, уградња разупирача у фабричким условима има предности у односу на његову уградњу на градилишту, а то су већа прецизност и квалитет израде веза и самог функционалног елемента. Са друге стране, функционални елементи са уграђеним разупирачима имају веће дебљине, па се увелико смањује економичност њиховог транспорта.

Из наведеног разлога, уградња разупирача и затега за преднапрезање премешта се на градилиште. Због тога, изузев када се функционални елементи формирају у градилишној префабрикацији, потребно је увести још један ниво затега, названих транспортним затегама, којима би се фиксирао функционални елемент у фабричким, заштићеним условима и тиме обезбедио његов облик у току транспорта. Ове затеге, за разлику од затега за преднапрезање, налазе се у равни функционалног елемента и не утичу на повећање његовог габарита, па тиме не умањују економичност транспорта.

Због ограничења габаритних димензија у току транспорта, датих у поглављу 2.2.3.1, функционални елементи се транспортују у вертикалном положају, а за транспорт се најчешће користе транспортна средства са нископодним товарним простором.

Овако организован, стандардни транспорт, омогућава рационализацију структуре избалансираним односом у квалитету произведених функционалних елемената и њихових веза, са једне стране и трошкова транспорта, са друге стране.

#### **4.3.2.3 Монтажа структуре**

У зависности од специфичности израде функционалних елемената и начина остваривања веза, бира се и начин монтаже структуре.

Свакако најједноставнији начин формирања структуре био би по хоризонталним сегментима, придржаним подупирачима са тла. Међутим, оваква монтажа би захтевала постављање подупирача чије би димензије попречних пресека биле нерационалне због њихове велике виткости. У случају овакве монтаже, сваки од функционалних елемената би се подизао на пројектовано место, прихватао подупирачима и спајао са претходним функционалним елементом, до формирања пуног круга. Наредни хоризонтални сегмент би се формирао на исти начин, на претходном сегменту.

Алтернатива подупирачима може бити скела, формирана по ободу основе. Монтажом виших сегмената структуре формирала би се и скела веће висине, што може бити неекономично. На монтажи би била ангажована лакша механизација, пошто се истовремено манипулише само једним функционалним елементом, што је предност овако организоване монтаже.

У сваком случају, овакав начин монтаже структуре остаје као једна од могућности, која би у случају њене мале висине могла бити економична.

Уместо у хоризонталним сегментима, разматран је случај монтаже структуре из вертикалних сегмената, формираних на тлу. Њихова припрема, због апроксимације сферне закривљености форме, врши се уз помоћ шаблона и лаке скеле.

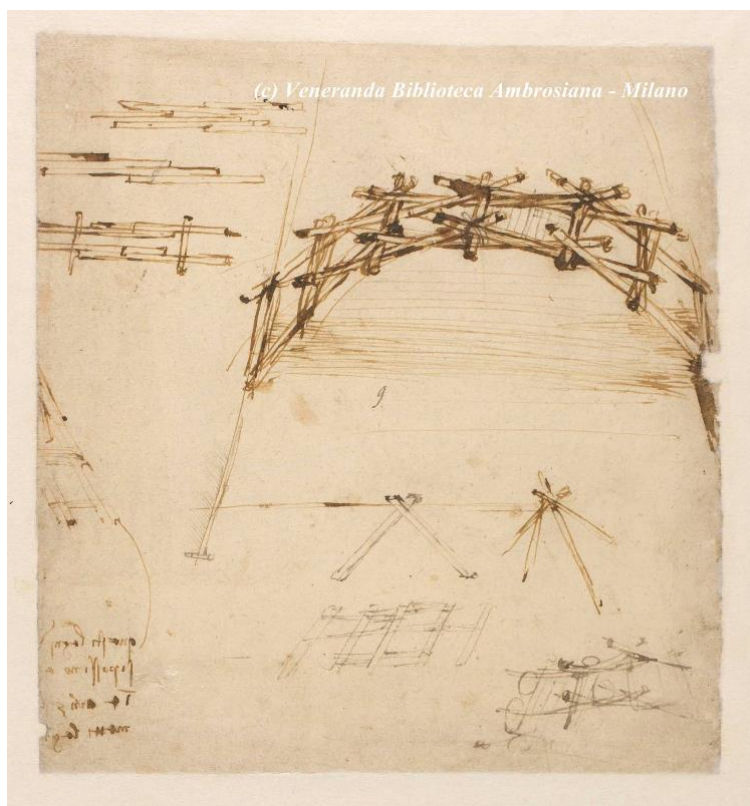
Једна фаза у току монтаже структуре представља истовремену монтажу пара наспрамних, вертикалних сегмената, позиционираних на супротним странама у коначној структури. Иако се структура може поделити на шест истоветних сегмената, тако формирано сегменти не би могли остварити потребну крутост у току монтаже. Подела структуре на сегменте врши се тако да се не угрози њихова крутост ни у попречном, ни у подужном правцу, што подразумева очување формиране полиедарске површи. У супротном, може доћи до исправљања сегмената у раван, чиме би се угрозила његова стабилност или стабилност формираног дела структуре. Због тога сваки од функционалних елемената мора бити придржан од остатка сегмента у најмање три неколинеарна темена. У свим пресецима кроз сегмент он би требало да има минималну апроксимацију закривљености, од најмање три функционална елемента. Највише један функционални елемент може бити препуштен у односу на придржани део сегмента у било ком пресеку.

Због крутости функционалних елемената, стабилност сегмента неће бити угрожена уколико се очува полигонална линија његовог попречног или подужног пресека. Пошто сегмент има већу дужину у односу на ширину, то ће се приступити обезбеђењу сегмента у подужном правцу, као угроженијем. У попречном пресеку су само три функционална елемента, а везе крајња два дела сегмента са средњим нису угрожене, јер ће се конструкција за монтажу формирати у наведеном, средњем делу.

Уколико се статичком анализом сегмента структуре у току монтаже утврди потреба за придржавањем њених крајњих функционалних елемената, у попречном правцу, то се може решити постављањем металне или дрвене греде преко удвојених штапова средњих функционалних елемената.

Да би се спречило исправљање полиедарске површи у раван и омогућило формирање довољно крутог сегмента структуре да се он може подићи и уградити, примениће се принцип формирања конструкције моста Леонарда да Винчија (*Leonardo di ser Piero da Vinci*, 1452-1519), италијанског сликара, вајара, архитекте-инжењера, истраживача, иноватора, анатома и још много другог.

Леонардо је осмислио конструкцију моста за војне потребе, тако да се он може брзо изградити од приступачног материјала и без компликованих веза.



Слика 4-32) Студија моста, Леонардо да Винчи<sup>43</sup>

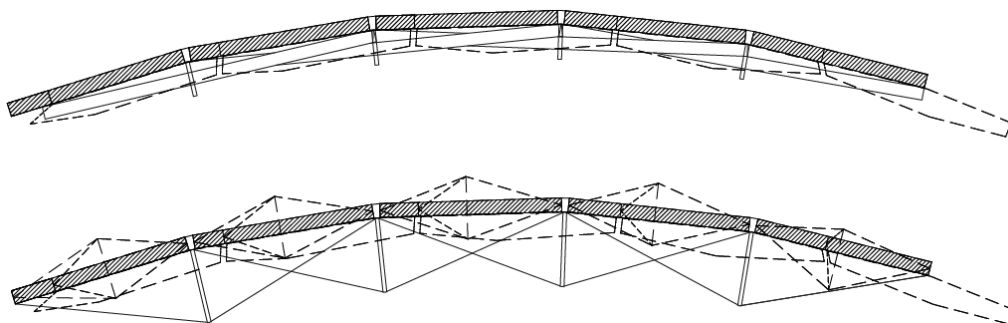
Формирање конструкције за монтажу, по наведеном принципу, најлакше се може остварити на местима функционалних елемената који имају хоризонталне контурне штапове (положај у завршеној структури). Леонардова конструкција се мора пажљиво интегрисати у сегмент структуре куполе, што није нови изазов, с обзиром на то да он већ у монтажи мора имати беспрекорну геометрију.

У Леонардовој конструкцији моста као доминантни статички утицај јављају се моменти савијања. Пречник кружнице описане око ње зависи од дужина штапова и димензија њиховог попречног пресека. У односу на Леонардову конструкцију, у случају њене примене као конструкције за монтажу, штапови би се монтирали са доње стране структуре. Крајеви штапова

---

<sup>43</sup> <http://www.leonardo-ambrosiana.it/leonardo-la-lettera-a-ludovico-il-moro-e-gli-studi-di-arte-militare/>

конструкције за монтажу повезивали би се на претходно остављене анкере или куке, а у срединама би се монтирала одбојници, крути штапови са подешавањем дужина, који би придржавали удвојене контурне штапове два суседна функционална елемента сегмента структуре. У зависности од везе одбојника и сегмента структуре, на овај начин би могло да се прихвати и затезање, те у потпуности фиксира остварени полигонални облик сегмента.



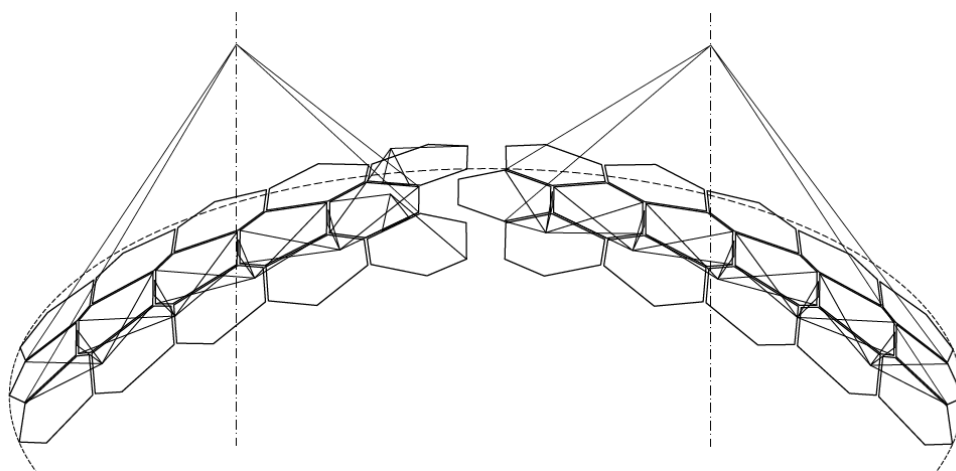
Слика 4-33) Приказ конструкције за монтажу са крутим штаповима и са меким затезама

У случају формирања ПКС од површинских, или на други начин конципираних функционалних елемената, може се применити наведена техника монтаже, с тим да би било неопходно уградити одговарајуће анкере на њиховим саставима.

Уколико су стране ПКС формиране од преднапрегнутих функционалних елемената, затега за преднапрезање могу онемогућити једноставно интегрисање конструкције за монтажу. У том случају се прибегава модификацији описаног начина увођењем меким затеза уместо крутих штапова који су напрегнути на затезање. Штапови и затега модификоване конструкције за монтажу граде пирамидалну форму и не додирују затега за преднапрезање. Њена геометрија се мора пажљиво уклопити у геометрију сегмента, да се не би унела непредвиђена напрезања, због чега се уграђују затезне спојке у затега. Овако формирана помоћна конструкција је врло рационална, а омогућава брзу и несметану уградњу сегмената структуре.

Задатак ове конструкције је да обезбеди очување пројектованих диједралних углова између функционалних елемената у току монтаже, али се мора имати у виду да конструкција за монтажу са меким затезама може прихватити

оптерећење само са једне њене стране и да се ослонци, за прихват краном, могу формирати само на крајевима такве конструкције.



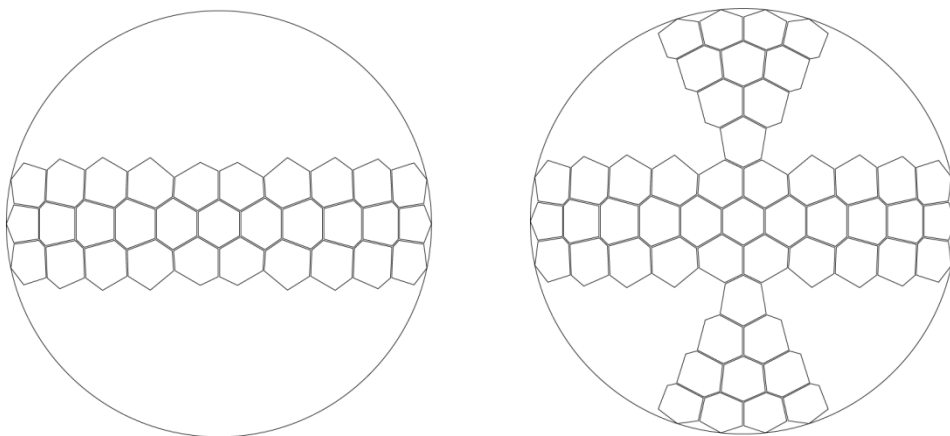
Слика 4-34) Шематски приказ „самоносећих“ сегмената структуре у току монтаже

У овом случају, конструкција за монтажу се налази са доње стране сегмента структуре, између крајњих тачака прихватања кранским сајлама. Изузетак су два функционална елемента у теменом делу левог сегмента, који, у односу на остатак сегмента структуре, чине препусте, па се конструкција за монтажу поставља са горње стране.

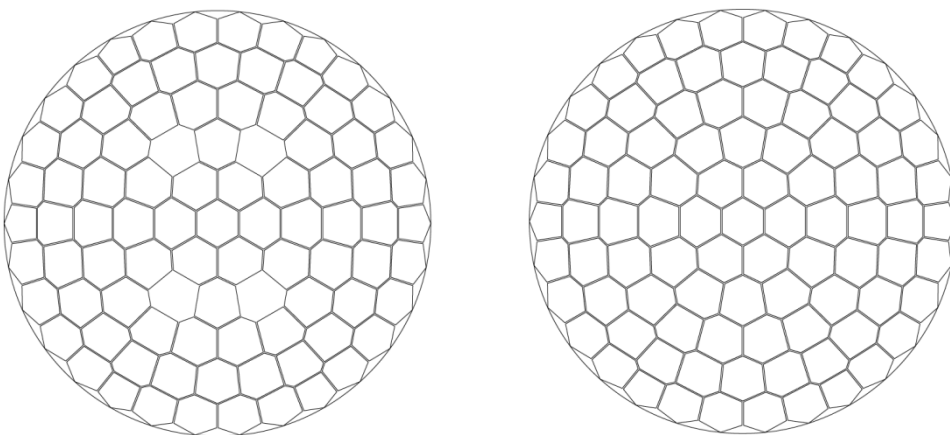
Дужине кранских сајли се одређују из услова да је кранска кука у вертикалној оси тежишта сегмента, а да сегмент са хоризонталом гради угао који је за  $10-15^\circ$  виши од угла који тај сегмент има у завршеној структури. Тиме се омогућава спуштање прво ослоначког краја сегмента, фиксирање истог у средњем ослоначком темену и, затим, спуштање темених делова два наспрамна сегмента, до њиховог међусобног спајања и остваривања веза између њих, као и веза у осталим ослоначким теменима. Такође, кранске сајле на горњем делу сегмента структуре, требало би да граде угао између  $30^\circ$  и  $45^\circ$  у односу на вертикалу, да би хоризонтална компонента од његове реакције била у прихватљивим границама, а да, с друге стране, потребна висина крана буде рационална.

У средини објекта, испод теменог функционалног елемента, потребно је монтирати скелу ради придржавања сегмената до потпуног завршетка структуре и до повезивања свих функционалних елемената у стабилну структуру. Стабилност сегмената није угрожена у тренуцима када је сваки од њих прихваћен краном на

својим крајевима, али у делу структуре формираном од само два сегмента, уграђена у првој фази монтаже, угиб централног дела изазива „избочавање“ њених делова у близини ослонаца. Иако напрезања не прекорачују дозвољена, у случају разматране структуре, усвојена је скела за придржавање њеног централног дела, будући да ће бити потребна и касније, у току монтаже покривача.



Слика 4-35) Монтажа структуре – фазе 1 и 2



Слика 4-36) Монтажа структуре – фазе 3 и 4

Такође, у случају формирања ослоначког прстена на одређеној висини у односу на основу, у првој фази монтаже је потребно спречити деформацију самог прстена од утицаја монтираних сегмената, што се може постићи и подупирањем истих у четвртинама распона структуре. Тиме се смањују деформације сегмената и делимично растеређује прстен, што утиче и на смањење његове деформације.

Формирањем скеле, делови структуре монтирани у првој фази монтаже ослањају се на њу и остају напрегнути у својим средњим деловима на исти начин

као и у току њиховог подизања краном. Осим тога, на овај начин се омогућава и остварење евентуалне временске дистанце између прве и друге фазе у монтажи структуре, што може бити значајно уколико на градилишту нема довољно простора за формирање свих сегмената, већ се после завршене прве фазе формирају сегменти за монтажу у другој фази.

У фази 2 се монтирају сегменти који су под углом  $90^\circ$  (у хоризонталној пројекцији) у односу на већ монтиране, тако да се међусобно придржавају у највишем делу структуре. Анализом разматране структуре утврђена је потреба за монтажном конструкцијом и у овој фази. У фази 3 се затвара остатак структуре, изузев четири функционална елемента која не чине компактне целине са сегментима структуре, па се, због њихове једноставније имплементације, наведени функционални елементи монтирају у засебној, четвртој фази. У трећој фази монтаже није потребно обезбеђење сегмената структуре конструкцијом за монтажу.

Конструкција за монтажу остаје у структури до њене комплетне монтаже и до остварења свих веза. Променом дужина њених кракова, затега и штапова, може се утицати на апроксимацију закривљености одређеног дела сфере, описане око структуре, уколико је то потребно због уклапања других сегмената, у осталим фазама монтаже ПКС. Такође, конструкција за монтажу се може формирати и у попречном правцу сегмента структуре, по сличним принципима, уколико је, због тежине функционалних елемената или из другог разлога, то потребно.

Алтернатива оваквој, „самоносећој“ конструкцији за монтажу, могу бити два решеткаста носача која би се монтирала дуж спојева између три подужна низа функционалних елемената. Овако формиран сегмент прихвата се кранским сајлама на крајевима решеткастих носача, да би се избегло формирање конзолних препуста и притисак у њиховим доњим појасевима, због извијања. Извијање притиснутих горњих појасева решеткастих носача спречено је придржавањем од стране сегмента структуре.



## 5 Класификација полиедарских купола

Полиедарска купола представља отворену полиедарску површ, која се од затворене разликује по томе што је изостављена њена основа (база).

Класификација полиедарских купола извршена је уважавајући статичко-конструктивне принципе обликовања структура формираних у њиховој геометрији, али и принципе префабриковане израде функционалних елемената, потребних у њиховом формирању.

Генерисана геометрија би требало да омогући формирање ПКС са бољим статичко-конструктивним перформансама, тако да се бирају структуре које, у статичкој анализи, показују прихватљивију напонску слику, док, у конструктивном смислу, предност имају структуре код којих се на једноставнији начин могу остварити њихове везе, или их има мање.

Из услова префабрикације функционалних елемената захтева се обликовање по принципу што већег уједначавања њихових димензија из услова приближног утрошка материјала по сваком од њих, економичности њиховог транспорта и примењене механизације у току монтаже. Критеријум за одређивање уједначености димензија функционалних елемената представља уједначеност пречника кружница описаних око њих, а такав критеријум уједно води и ка уједначености њихових површина и уједначеног утрошка материјала у њиховој производњи.

Међутим, ове критеријуме није једноставно усагласити. Давање већег значаја одређеном критеријуму у обликовању ПКС може довести до генерисања прихватљивије геометрије из тог аспекта, при коме димензије функционалних елемената могу бити неуједначене. У зависности од степена повећања перформанси генерисане структуре по значајнијем критеријуму, односно степена умањења по другим критеријумима, изабраће се одговарајућа геометрија.

## 5.1 Теселација куполе

Теселација куполе се разликује од теселације сфере (полиедарске површи), пошто купола својом основом лежи у равни. Пресек сфере, описане око полиедарске површи и одређене хоризонталне равни и задржавање дела теселације сфере као теселације куполе, у случају полиедарских купола, прихватљиво је само уколико је добијени пресек кружница која би садржала одређена темена међусобно повезаних полигона и уколико би се могла формирати затворена полигонална апроксимација наведене кружнице спајањем тих темена. Теселације сфере, какве су полиедарске површи или геодезијска сфера, дају такав скуп темена само уколико имају мањи број страна, у одређеном односу висине и пречника куполе и уколико имају нижу или парну фреквенцију, у случају икосаедарске геодезијске сфере. У свим осталим случајевима, њихова форма ће претрпети извесну геометријску трансформацију.

Теселација куполе се може генерисати на три начина:

- Геометријском трансформацијом теселације еуклидске равни;
- Геометријском трансформацијом теселације сфере;
- Генерисањем нове теселације.

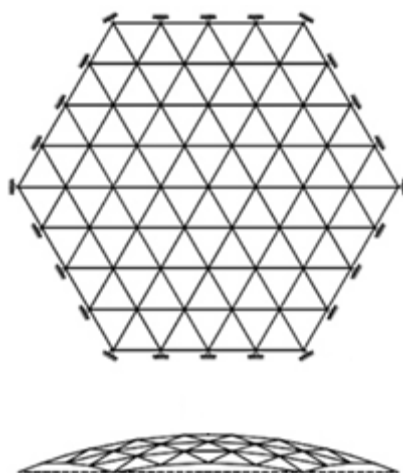
Разматраће се само теселације чија апроксимација правилним полигонима даје збир ивичних углова у темену куполе мањи од  $360^\circ$  или једнак том углу и теселације са полигонима који имају највише шест страница.

### 5.1.1 Геометријска трансформација теселације еуклидске равни

Теселација куполе полигонима може се генерисати геометријском трансформацијом теселације равни. Тиме се обично само скраћују или продужавају њене одређене ивице, тако да она добије форму куполе, у противном кружни облик основе често пресеца ивице ван темена. Све то онемогућава формирање одговарајуће структуре над кружном основом (слика 5-1).

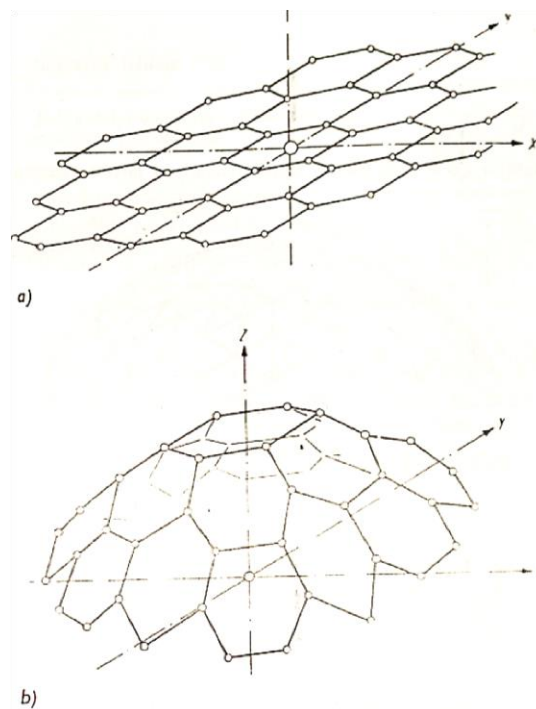


Слика 5-1) Закривљена теселација равни над кружним прстеном



Слика 5-2) Ослонци структуре се не налазе у истој равни

У овом случају се задржава правилан облик само теменог полигона, док се облици осталих полигона деформишу. Увођењем услова да се на полиедарској куполи дефинишу прстенови, потенцијално ослоначки у будућој структури, чија би равна садржала темена свих страна теселације одређеног нивоа, додатно се компликује њена геометрија. Трансформација представља развлачење теселације преко куполе тако да се поједина, карактеристична темена доведу у равни дефинисаних прстенова. Положај осталих темена, која се налазе између прстенова, одређује се из услова да стране полиедарске куполе нису витоперне.



Слика 5-3) Геометријска трансформација теселације равни<sup>44</sup>

### 5.1.2 Геометријска трансформација теселације сфере

Теселација сфере правилним полигонима ограничена је коначним бројем комбинација, датих кроз Платонове и Архимедове полиедре, док теселација куполе обухвата и поједине Џонсонове полиедре. Уколико је потребна апроксимација сфере вишег степена од добијене, то је могуће само помоћу неправилних полигона, као у случају Каталанових полиедара, геодезијских сфера или других тела.

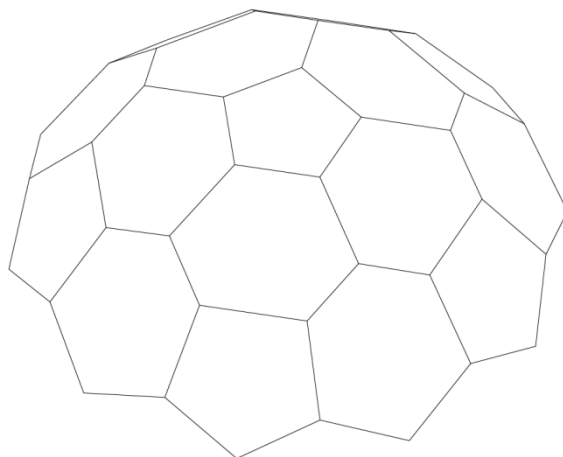
Геометријска трансформација теселације сфере представља одређивање положаја потенцијално ослоначких прстенова и корекцију положаја темена форме усвојеног полиедра. Подела страна полиедара је већ представљена кроз геодезијску сферу и њене фреквенције. Корекција положаја темена у близини

---

<sup>44</sup> Rühle, Herrmann, Prostorne krovne konstrukcije njihove pojedinosti njihovo izvođenje, Građevinska knjiga, Beograd, 1977, стр. 383.

равни пресека повлачи и корекцију облика страна таквог тела, али и положаја осталих темена, која не леже у наведеним равнима.

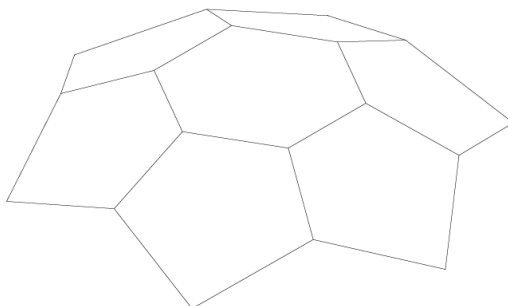
Ова трансформација није неопходна у случају полиедара на nižем нивоу сложености форме полиедарске куполе, јер већина полиедара већ има одређени скуп компланарних темена. Међутим, на вишем нивоу сложености неопходно је спровести наведену трансформацију.



Слика 5-4) Геометријски трансформисан дуал геодезијске куполе

### 5.1.3 Генерисање нове теселације куполе

Ова група теселација представља немогуће комбинације правилних полигона, како из услова теселирања сфере, тако и из услова теселирања равни.



Слика 5-5) Пример нове теселације

За разлику од теселације сфере, која је затворена, у случају теселирања куполе правилним полигонима она може бити и отворена, па су могуће и комбинације полигона попут теменог шестоугла и шест петоуглова, што би

темену дало ознаку ( $5^2.6$ ) и збир ивичних углова  $336^\circ$ . Оваква теселација од правилних полигона је могућа само кроз основне, најједноставније форме. Већ на следећем, сложенијем нивоу, почетна форма геометријском трансформацијом губи правилност својих страна.

## 5.2 Принципи генерисања геометрије полиедарских купола

Класификација полиедарских купола извршена је према принципима генерисања могућих теселација, у функцији одређених параметара, а не дефинисањем одређеног асортимана геометријски непроменљивих форми, као коначне и непроменљиве скупове. Огроман развој информационе технологије омогућава да се овако извршена класификација искористи у циљу рационализације у генерисању геометрије ПКС, али и њихове реализације.

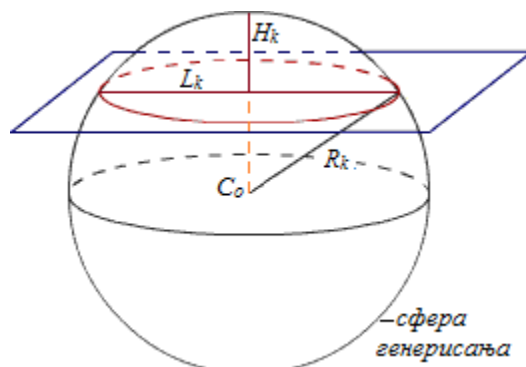
Две ПКС, чије се обликовање врши по истим геометријским принципима, имају исту теселацију, са истом ознаком, али оне могу имати различите односе висина и распона, а тиме и различите димензије функционалних елемената. Променом само једне променљиве мењају се координате темена ПКС, мењају се димензије њених функционалних елемената, али они и даље имају исти број страница, јер се не мења скуп принципа према којима се они обликују.

### 5.2.1 Основне дефиниције

При генерисању полиедарске куполе усвојен је Декартов просторни координатни систем, чији се координатни почетак налази у центру основе куполе. Да би терминологија била прецизна и недвосмислена, усвојене су основне дефиниције које ће се користити у наставку рада. Дефиниције су изведене за полиедарску куполу која представља апроксимацију сфере, али се лако могу применити и у случају полиедарске куполе као апроксимације елипсоида – кружнице постају елипсе, сфера елипсоид итд..

*Распон полиедарске куполе ( $L_k$ ) представља пречник кружнице описане око њене основе.*

Висина полиедарске куполе ( $H_k$ ) је висина одсечка сфере генерисања у њеном полу, или темену, највишој тачки сфере, у односу на основу куполе.



Слика 5-6) Променљиве у геометрији ПКС

Сфера генерисања полиедарске куполе (пречника  $R_k$ ) је она сфера која, у пресеку са хоризонталним равнима, одређује њене прстенове и појасеве.

Раван генерисања је вертикална раван која служи за дефинисање положаја прстенова полиедарске куполе. Раван генерисања садржи вертикалну осу куполе, а бира се тако да дели страницу теменог полигона на половину њене дужине.

Темени полигон се налази у полу (темену) полиедарске куполе, правилног је облика (у случају апроксимације сфере) и лежи у равни паралелној основи куполе.

Прстен, или фиктивни прстен је кружница добијена у пресеку сфере генерисања са одговарајућим хоризонталним равнима. Кружница описана око теменог полигона представља нулти прстен.

Појас полиедарске куполе означава скуп полигона чија се тежишта налазе између два суседна фиктивна прстена. Темени полигон не спада ни у један појас. Појас око теменог полигона је први, а последњи појас се назива и ослоначки појас.

Омотач полиедарске куполе означава унију свих полигона свих појасева и не садржи темени полигон.

Полигони генерисања прстенова су полигони омотача које раван генерисања пресеца.

*Темена* полиедарске куполе могу бити *примарна и секундарна*. *Примарна темена* су она која се налазе на сфери генерисања (и на прстеновима), док се *секундарна темена* налазе у простору између прстенова и углавном се не налазе на сфери генерисања. Положај секундарних темена одређује се преко положаја примарних.

*Област генерисања* је један од сферних троуглова сфере генерисања, ограничен са две суседне, потенцијалне равни генерисања и равни основе куполе. Ових области има 4-6, у зависности од облика теменог полигона, тј. од броја страница које га одређују.

*Угао генерисања* ( $\beta_k$ ) је централни угао у равни генерисања, чије је теме у центру сфере генерисања, а краци пролазе кроз тачке продора кружнице описане око основе куполе, кроз наведену раван.

*Угао генерисања теменог полигона или темени угао* полиедарске куполе ( $\beta_i$ ) је централни угао у равни генерисања, чије је теме у центру сфере генерисања, а краци пролазе кроз тачке продора нултог прстена, кроз наведену раван.

*Угао генерисања појаса или појасни угао* полиедарске куполе ( $\beta_p$ ) је централни угао у равни генерисања, чије је теме у центру сфере генерисања, а краци пролазе кроз тачке продора два суседна прстена, кроз исту полураван, делу наведене равни. Угао генерисања појаса одређује се за сваки појас посебно.

*Угао поделе прстена* ( $\alpha_i$ ) је централни угао, чије је теме у равни фиктивног прстена, а пресек његових кракова са прстеном одређује положај примарних темена полигона омотача. Кроз ова темена пролази тетива која лежи у равни полигона омотача и која представља његову дијагоналу или страницу. Углови поделе прстена одређују се за сваки прстен посебно.

## **5.2.2 Параметарски подаци о геометрији полиедарске куполе**

Избор теселације је дефинисан у комбинацијама теменог полигона и полигона омотача, који се могу препознати у постојећим теселацијама сфере и



равни, али се може генерисати и нова теселација. У зависности од теселације, одређена су и геометријска правила генерисања полиедарске куполе. Избором комбинације одређен је облик теменог полигона, као и облик полигона омотача.

Потребно је дефинисати основне параметре уз помоћ којих се генерише геометрија полиедарске куполе, у изабраној теселацији:

- Распон полиедарске куполе ( $L_k$ );
- Висина полиедарске куполе ( $H_k$ );
- Број појасева полиедарске куполе ( $f$ ).

### 5.2.3 Законитости у генерисању геометрије полиедарске куполе

Кружни облик омогућава одређену законитост у његовом дељењу. Дефинисане су основне законитости у генерисању геометрије полиедарских купола како би полигони омотача могли да се распореде по што правилнијим шемама.

Геометрија полиедарске куполе заснива се на следећим законитостима:

- Једну ивицу могу делити највише два полигона;
- Највећи број страница било ког полигона је шест;
- Стране полиедарске куполе не могу бити витоперне;
- У случају полиедарске куполе као апроксимације сфере, темени полигон је правилан;
- Темени полигон је паралелан са основом полиедарске куполе;
- Положај фиктивних прстенова се добија на сфери генерисања поделом угла куполе на одговарајући број делова, пропорционално пречницима карактеристичних кружница полигона појасева и њиховог међусобног односа, при чему се претпостављају правилни полигони;
- Положај примарних темена се добија поделом фиктивног прстена на одговарајући број делова, одређен угловима поделе прстена. При одређивању наведених односа претпостављају се правилни полигони;

- Положај секундарних темена одређује се из пресека равни у којима леже стране полиедарске куполе, осим у последњем појасу, у ком се одређују из продора пресечне праве две суседне равни кроз сферу генерисања;
- Секундарни полигон се уводи у ситуацијама када је облик примарног деформисан до те мере да функционални елемент, формиран у реализацији структуре, није рационалан из статичких услова или из услова његове префабрикације;
- Секундарни полигон може бити само у облику троугла;
- Сви примарни полигони имају најмање три примарна темена распоређена на два фиктивна прстена;
- Полиедарска купола може имати најмање један појас.

### 5.3 Енумерација полиедарских купола

С обзиром на асортиман полиедарских купола, а да би се избегла двосмисленост и евентуална сложенија терминологија, то је пожељно да се означавањем структуре она уједно и опише. Усвојена је енумерација полиедарских купола која комбинује принципе означавања полиедара и геодезијских купола, које кратким, бројчаним ознакама уједно и описују наведене структуре.

Специфичност одређене полиедарске куполе, коју би ознаке требало да истакну, распознаје се кроз следеће особине:

- Облик теменог полигона;
- Облици полигона омотача;
- Број појасева структуре.

Темени полигон може бити са 4-6 страница. С обзиром на то да се према овој особини врши основна подела полиедарских купола и да би та особина требало да буде истакнута, то ће се она назвати њеном *фамилијом*. Све полиедарске куполе исте фамилије имају темени полигон истог облика.

Омотач полиедарске куполе генерише се понављањем одређеног, примарног полигона, по претходно дефинисаним правилима. Ови полигони се могу, евентуално, комбиновати са секундарним, уколико је то потребно да би се добила прихватљивија и рационалнија структура у тој форми. Истицањем ове особине одредио би се облик примарног полигона у генерисању полиедарске куполе, па ће се ова особина назвати њеном *класом*, а иста класа означава да су сви примарни полигони омотача истог облика.

Појас полиедарске куполе садржи полигоне једног нивоа омотача. Промена оријентације полигона у оквиру појаса је могућа, али је то већ одређено условима наслеђеним из претходног појаса. Број полигона посматраног појаса ће, такође, бити одређен геометријом наслеђеном из претходног појаса. Дакле, потребно је истаћи само број појасева, док се остале особине не морају посебно наглашавати, јер су већ одређене бројем страница полигона омотача, односно класом полиедарске куполе. Пошто број појасева омотача такође има важну улогу у обликовању наведених купола, то ће ова особина представљати њихову *фреквенцију*, по аналогији са означавањем геодезијских сфера.

Усваја се означавање у облику ПК ( $l.m^f$ ), где је ПК ознака за полиедарску куполу. То значи да полиедарска купола са ознаком ПК (6.6<sup>5</sup>) има форму која је цела генерисана из шестоуглова. Вредност експонента над другим бројем означава да је купола генерисана у пет појасева.

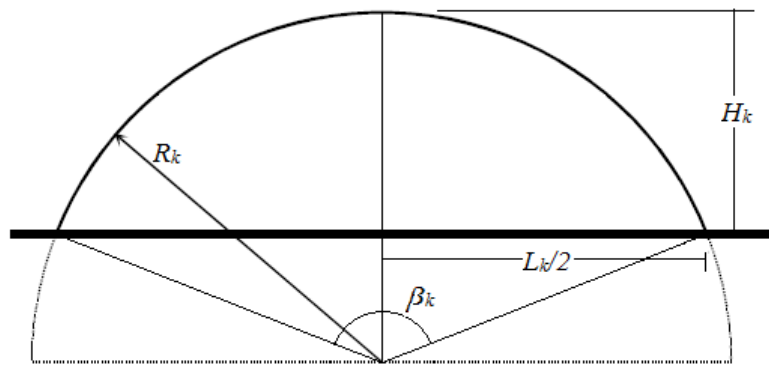
Ознака ПК (4.5<sup>3</sup>) описује полиедарску куполу која за темени полигон има четвороугао, док јој је омотач састављен од примарних полигона у облику петоугла, у три појаса.

#### **5.4 Фазе генерисања геометрије полиедарских купола**

При генерисању полиедарских купола коришћени су обрасци из аналитичке геометрије. Из параметарских података ( $L_k, H_k$ ), преко познатих образаца из планиметрије, одређују се угао генерисања куполе ( $\beta_k$ ) и полупречник сфере генерисања ( $R_k$ ), основни геометријски подаци у генерисању геометрије полиедарских купола:

$$\beta_k = 4 \cdot \operatorname{atn} \frac{2 \cdot H_k}{L_k}$$

$$R_k = \frac{L_k}{2 \cdot \sin \frac{\beta_k}{2}}$$



Слика 5-7) Одређивање основне геометрије полиедарске куполе

Спровођење усвојених принципа и законитости генерисања геометрије полиедарских купола одвија се кроз следеће фазе:

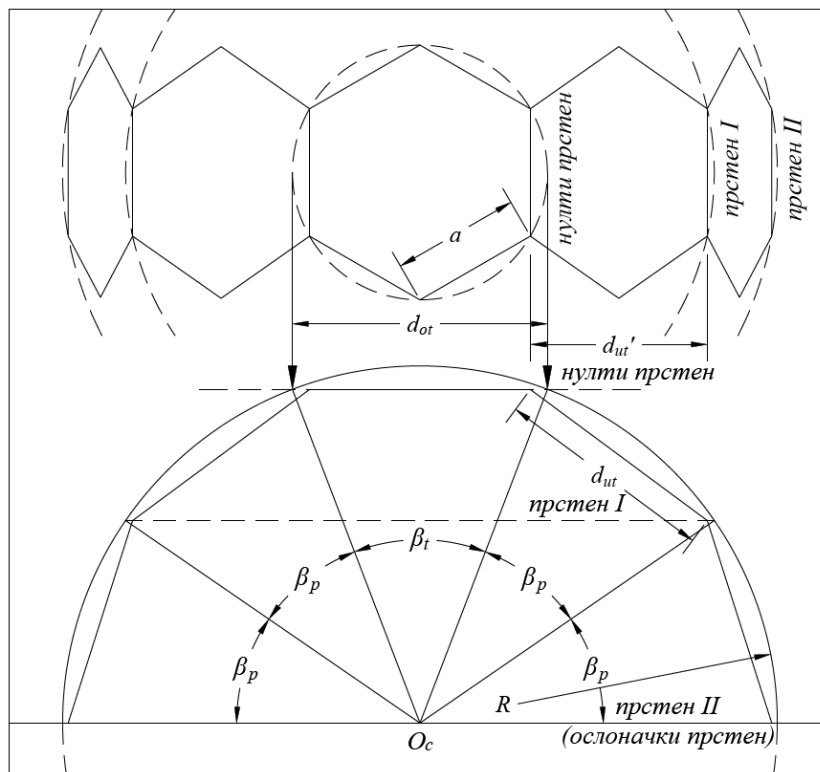
- Одређивање положаја фиктивних прстенова;
- Одређивање положаја примарних темена;
- Одређивање положаја секундарних темена.

#### 5.4.1 Одређивање положаја фиктивних прстенова

Вертикалном поделом полиедарских купола одређује се положај свих фиктивних прстенова, на којима ће се генерисати примарна темена. Одређени су у пресецима хоризонталних равни са сфером генерисања.

Положај фиктивних прстенова полиедарске куполе одређује се поделом угла куполе, у равни генерисања, на темени угао и на одређени број појасних углова, у зависности од односа дужина пресека полигона генерисања прстенова, са наведеном равни. Дужина пресека сваког од полигона зависи од броја његових

страница и његовог положаја у оквиру одређеног појаса. Од ове дужине зависи размак фиктивних прстенова. При одређивању наведеног односа, претпостављају се правилни полигони.



Слика 5-8) Одређивање положаја фиктивних прстенова

Вертикална подела се врши за сваку фамилију и класу посебно, због другачијег односа карактеристичних димензија теменог полигона и полигона омотача. Поступак је приказан на примеру ПК (6.6<sup>2</sup>), али је принцип исти и за све друге (слика 5-8):

- Одреди се однос између пречника кружнице описане око теменог полигона и дужине тетиве одређене пресеком равни генерисања са полигоном генерисања појасева;
- Део сфере генерисања изнад основе куполе дели се угловима појасева и темена ( $\beta_p$  и  $\beta_i$ ) у прорачунатом односу, на потребан број делова, а у зависности од фреквенције полиедарске куполе. Продорима кракова наведених углова кроз сферу генерисања одређен је положај прстенова.

### 5.4.2 Одређивање положаја примарних темена

Положај примарних темена одређен је оријентацијом полигона који пресецају прстенове и бројем њихових страница. Оријентација полигона наредног појаса наслеђена је геометријским условима из претходног појаса.

Принципи одређивања положаја примарних темена исти су за све фамилије у оквиру исте класе:

- Одреди се однос дужина пресека између фиктивног прстена и полигона омотача, у одређеном појасу;
- Изврши се подела куполе у равни прстена угловима поделе ( $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ) у прорачунатом односу, на број делова одређен усвојеном геометријом полиедарске куполе;

За све прстенове важи исти поступак у дељењу. Пресек фиктивног прстена и једног полигона, стране полиедарске куполе, представља тетиву прстена. Низ тетива чини хоризонтални полигон, апроксимацију фиктивног прстена и представља пресек равни прстена и полиедарске површи-куполе. Број страница наведеног хоризонталног полигона одговара броју полигона омотача које пресеца раван прстена. Хоризонтални полигон може имати странице једнаке дужине, уколико раван прстена пресеца полигоне омотача са међусобно једнаким бројем страница и уколико сви они заузимају исти положај у односу на прстен.

Уколико раван прстена пресеца полигоне омотача са различитим бројем страница или су они у другачијем положају, у односу на фиктивни прстен, онда би било потребно наћи одговарајући однос различитих дужина тетива, уз претпоставку о правилним полигонима са међусобно једнаким дужинама страница. Међутим, оваква претпоставка би дала адекватне дужине подела само у теселацији равни, док код теселација купола на ове дужине утиче још других фактора (као што је однос висине и распона полиедарске куполе), па ће се однос дужина тетива, одређен на овај начин, проверавати и евентуално кориговати при дефинисању одређених класа купола.

У нађеном односу се усвајају углови поделе за сваки од фиктивних прстенова, док се примарна темена налазе у пресецима кракова усвојених углова и фиктивног прстена. Сва темена теменог полигона су примарна и леже на нултом прстену, самим тим и на сфери генерисања.

### 5.4.3 Одређивање положаја секундарних темена

При одређивању положаја секундарних темена понављају се одређени поступци, који су издвојени у виду функција, са потребним обрасцима. Функције се позивају сваки пут када је потребно одредити положај одређеног секундарног темена, уз навођење потребних улазних података, неопходних у том поступку.

Свака од равни стране полиедра одређена је са по три примарна темена, чији је положај одређен поделом фиктивних прстенова и која нису колинеарна, пошто се налазе на наведеним прстеновима. Пресек три равни даје пресечну тачку, која је у овом случају секундарно теме полиедарске куполе, док је пресек две равни пресечна права, те се у том случају положај секундарног темена одређује из продора те праве кроз сферу генерисања. Потребан податак за одређивање положаја секундарног темена је положај одређеног броја примарних темена, којима су наведене равни дефинисане.

#### 5.4.3.1 Секундарно теме у пресеку три равни

Сваки од полигона омотача има по једно заједничко примарно теме са другим, суседним полигоном, чиме се, при генерисању секундарног темена, број потребних примарних темена може свести на шест, тако да је раван 1 одређена теменима  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ , раван 2 теменима  $T_3$ ,  $T_4$  и  $T_5$  и раван 3 теменима  $T_5$ ,  $T_6$  и  $T_1$ . Променљиве  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  и  $D_i$ , одређују се при дефинисању сваке од равни  $i$ , за  $i = 1$  до  $i = 3$ .

Функција се позива са  $Presek3R(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ . Да се обрасци не би понављали за сваку од равни, то су, у тим обрасцима, темена  $T_1$  до  $T_6$  означена тако да садрже и број равни коју одређују, што је приказано у следећој табели.

Табела 5-1) Одређивање положаја секундарног темена у пресеку три равни

$T_1$ ( $T_{11}=T_{33}$ )	$T_2$ ( $T_{12}$ )	$T_3$ ( $T_{13}=T_{21}$ )	$T_4$ ( $T_{22}$ )	$T_5$ ( $T_{23}=T_{31}$ )	$T_6$ ( $T_{32}$ )	$T_1$ ( $T_{33}=T_{11}$ )
Раван 1		Раван 2		Раван 3		
$A_1, B_1, C_1, D_1$		$A_2, B_2, C_2, D_2$		$A_3, B_3, C_3, D_3$		
Пресечна тачка три равни: $T(X,Y,Z)$						

Координате пресечне тачке добијају се решавањем детерминанти које обухватају променљиве све три равни, за  $i=1$  до  $i=3$ :

$$T_{i1}(X_{i1}, Y_{i1}, Z_{i1})$$

$$T_{i2}(X_{i2}, Y_{i2}, Z_{i2})$$

$$T_{i3}(X_{i3}, Y_{i3}, Z_{i3})$$

$$A_i = \begin{vmatrix} Y_{i2} - Y_{i1} & Z_{i2} - Z_{i1} \\ Y_{i3} - Y_{i1} & Z_{i3} - Z_{i1} \end{vmatrix}$$

$$B_i = - \begin{vmatrix} X_{i2} - X_{i1} & Z_{i2} - Z_{i1} \\ X_{i3} - X_{i1} & Z_{i3} - Z_{i1} \end{vmatrix}$$

$$C_i = \begin{vmatrix} X_{i2} - X_{i1} & Y_{i2} - Y_{i1} \\ X_{i3} - X_{i1} & Y_{i3} - Y_{i1} \end{vmatrix}$$

$$D_i = A_i \cdot X_{i1} + B_i \cdot Y_{i1} + C_i \cdot Z_{i1}$$

Положај пресечне тачке одређује се решавањем следећих детерминанти, у које се уносе решења претходних образаца за све три равни:

$$Dt_0 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$Dt_1 = \begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$Dt_2 = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}$$



$$Dt_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}$$

$$X = \frac{Dt_1}{Dt_0}$$

$$Y = \frac{Dt_2}{Dt_0}$$

$$Z = \frac{Dt_3}{Dt_0}$$

Где је:

- $X_{i1/i2/i3}$ ,  $Y_{i1/i2/i3}$ ,  $Z_{i1/i2/i3}$  – координате три неколинеарне тачке које одређују раван  $i$ ;
- $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  – променљиве које се одређују за сваку од равни;
- $Dt_0$ ,  $Dt_1$ ,  $Dt_2$ ,  $Dt_3$  – решења наведених детерминанти.

### 5.4.3.2 Секундарно теме у пресеку две равни и сфере

У последњем, ослоначком појасу полиедарске куполе, само по два суседна полигона омотача садрже секундарно теме. Пресек равни наведених полигона је права, а секундарно теме може бити било где на њој. Будући да се сва примарна темена налазе на сфери генерисања, то ће се и положај секундарног темена тражити у продору праве кроз наведену сферу. У случају када права продире кроз сферу генерисања постоје два продора, од којих један представља већ дефинисано примарно теме, док други продор представља тражено, секундарно теме.

Уколико права тангира сферу, онда би дефинисано примарно теме било једино решење, па би број темена и страница полигона били умањени за један, међутим, при генерисању полиедарских купола, у дефинисаним границама, не долази до оваквог случаја. У случају генерисања геометрије полиедарске куполе класе 5, у свим фамилијама, пресечна права не тангира сферу генерисања, нити продире кроз њу, па се усваја тачка на прави која је најближа сфери.

У табелама генерисања координата темена полиедарске куполе, позив функције ће бити назначен са  $PresekRRS(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, R_k)$ , где су са  $T_1$  до  $T_5$  обележена примарна темена, а  $R_k$  је полупречник сфере генерисања. Вредност координате  $Z$  наведених темена је коригована тако да означава њен положај у односу на центар сфере генерисања.

Раван 1 је одређена теменима  $T_1, T_2$  и  $T_3$ , а раван 2 теменима  $T_3, T_4$  и  $T_5$ . Променљиве  $A_i, B_i, C_i$  и  $D_i$ , где је  $i$  број одговарајуће равни, одређују се за обе равни, у свему као у поглављу 5.4.3.1. Како је већ речено, две равни су суседне и имају једно заједничко примарно теме ( $T_3$ ), па је потребно унети само пет темена. Да се обрасци не би понављали, темена су означена тако да садрже и ознаку равни коју одређују.

Табела 5-2) Одређивање положаја секундарног темена у пресеку две равни и сфере

$T_1$ ( $T_{11}$ )	$T_2$ ( $T_{12}$ )	$T_3$ ( $T_{13}=T_{21}$ )	$T_4$ ( $T_{22}$ )	$T_5$ ( $T_{23}$ )	$R_k$
Раван 1		Раван 2			Сфера
$A_1, B_1, C_1$		$A_2, B_2, C_2$			$R_k$
Пресек две равни и сфере: $T(X, Y, Z)$					

Положаји примарних темена генерисани су у односу на основу полиедарске куполе, тако да су и све координате  $Z$  свих темена дате у односу на њу. При прорачуну секундарног темена у пресеку две равни и сфере, као улазни подаци уносе се кориговане координате  $Z$  (у односу на центар сфере генерисања,  $O_c$ ), у противном координате неће бити тачно прорачунате.

$$T_{i1}(X_{i1}, Y_{i1}, Z_{i1} + R_k - H_k)$$

$$T_{i2}(X_{i2}, Y_{i2}, Z_{i2} + R_k - H_k)$$

$$T_{i3}(X_{i3}, Y_{i3}, Z_{i3} + R_k - H_k)$$

$$a_{dt} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$b_{dt} = - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$c_{dt} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

Променљиве  $A_i$ ,  $B_i$  и  $C_i$  одређују се како је наведено у претходном делу поглавља. Заједничко примарно теме два суседна полигона ( $T_{13}=T_{21}$ ) представља један продор праве кроз сферу. Положај другог продора, секундарног темена, одређен је следећим обрасцима:

$$Q_a = a_{dt}^2 + b_{dt}^2 + c_{dt}^2$$

$$Q_b = 2 \cdot (a_{dt} \cdot X_{13} + b_{dt} \cdot Y_{13} + c_{dt} \cdot Z_{13})$$

$$Q_c = X_{13}^2 + Y_{13}^2 + Z_{13}^2 - R_k^2 = 0$$

$$X = -a_{dt} \cdot \frac{Q_b}{Q_a} + X_{13}$$

$$Y = -b_{dt} \cdot \frac{Q_b}{Q_a} + Y_{13}$$

$$Z = -c_{dt} \cdot \frac{Q_b}{Q_a} + Z_{13} - R_k + H_k$$

## 5.5 Геометрија полиедарских купола

Уместо троуглова, као у случају геодезијске куполе, стране полиедарских купола се састоје од полигона са више од три странице. Радом нису обухваћене наведене куполе код којих је темени или примарни полигон омотача у облику троугла, већ само од полигона са 4-6 страница. Троугао се користи само као секундарни полигон, у комбинацији са другим облицима полигона.

Класификација обухвата полиедарске куполе са највише пет појасева, јер у случају минималног односа њихових висина и распона, усвојеним у анализи модела, диједрални углови између полигона, у вертикалном пресеку, достижу вредност  $172^\circ$ . Даље усложњавање форме полиедарске куполе довело би до још већег приближавања вредности наведених углова опруженом углу ( $180^\circ$ ), чиме се

повећава опасност од „пробијања“ темена (или групе темена) формиране и оптерећене структуре.

Геометрија полиедарских купола ће се проверавати на виртуелним моделима, за однос висине и распона  $H_k=L_k/5$ , у ком се може уочити евентуална геометријска неприхватљивост теселације. У овом односу наведених вредности генерисан је и модел који је коришћен у статичкој анализи структуре.

На цртежима генерисаних полиедарских купола, римским бројевима су означени фиктивни прстенови, док су арапским означени типови полигона, тако да исти број означава исти или симетричан полигон. Означени су само полигони у карактеристичној области генерисања, која је у основи полиедарске куполе обележена одговарајућим углом. Област генерисања налази се у I квадранту Декартовог просторног координатног система.

Ојлеров образац за одређивање односа између укупног броја страна, темена и ивица, важио би уколико би полиедарска купола представљала затворену полиедарску површ, дакле заједно са њеном основом као полигоном. С обзиром на то да полиедарска купола представља отворену форму, без полигона који представља њену основу, то се Ојлеров образац може трансформисати у следећи облик:

$$S + T = I + 1$$

Отворена форма полиедарске куполе има исти број ивица и темена као и полиедарска површ полиедра (која је затворена), али је број њених страна умањен за један.

Уколико је генерисање геометрије полиедарске куполе извршено трансформацијом теселације еуклидске равни или теселације сфере, то ће бити наведено у одговарајућој фамилији и класи генерисане куполе. У већини случајева, у зависности од параметарских података, може се генерисати полиедарска купола фреквенције 1, чија би геометрија у потпуности одговарала геометрији полазног полиедра. У осталим фреквенцијама ова повезаност се огледа само у делу њене форме изнад прстена I.

### 5.5.1 Генерисање геометрије полиедарских купола кроз класе

Полиедарске куполе су приказане у свим фреквенцијама, од  $f=1$  до  $f=5$ . Принципи генерисања њихове геометрије у појединим фамилијама и класама разликују се у различитим фреквенцијама, како би потенцијална структура имала најприхватљивију геометрију, првенствено из статичко-конструктивних услова, али и из услова префабриковане израде њених функционалних елемената.

Дужина пресека сваког од полигона омотача и усвојене равни генерисања зависи од броја њихових страница и њиховог положаја-оријентације у оквиру одређеног појаса.

Вертикална подела полиедарске куполе на фиктивне прстенове спроводи се за сваку фамилију посебно, због другачијег односа пречника кружнице описане око теменог полигона и карактеристичне димензије полигона омотача, док се хоризонтална подела фиктивних прстенова спроводи по истим принципима за све фамилије у оквиру исте класе, због чега је опис по класама издвојен и приказан у наставку.

#### 5.5.1.1 Генерисање геометрије полиедарских купола класе 4

Омотач полиедарске куполе класе 4 чине, уз четвороуглове, примарне полигоне, још и троуглови, као секундарни полигони. Поједине појасеве чине само четвороуглови, док друге чине четвороуглови и троуглови, генерисани наизменично. Четвороуглови су углавном облика трапеза, али постоји могућност да у некој од комбинација параметарских података, у одређеним појасевима, буду генерисани паралелограми, тј. правоугаоници и ређе, квадрати.

Одређивање положаја примарних темена врши се поделом сваког од прстенова на једнаке делове, да би сваки следећи појас могао бити генерисан од подударних полигона. На овај начин се генерише један тип подударних полигона (четвороугао) или се генеришу два типа подударних полигона (троугао и четвороугао), у истом појасу. У ком појасу полиедарске куполе ће се увести

секундарни полигон зависи од димензија генерисаног четвороугла, а што зависи од њене фамилије.

На овај начин је, код свих фамилија полиедарских купола класе 4, омогућено формирање полигоналних прстенова правилног облика, са једнаким дужинама страница, уколико је то потребно из одређених услова.

### **5.5.1.2 Генерисање геометрије полиедарских купола класе 5**

Омотач полиедарске куполе класе 5 чине петоуглови, као примарни полигони, уз секундарне, троугаоне. Одређивање положаја примарних темена врши се поделом сваког од прстенова на једнаке делове, да би сваки следећи појас могао бити генерисан од међусобно подударних полигона. На овај начин се генерише један тип подударних полигона (примарни) или се генеришу два типа подударних полигона (примарни и секундарни), у истом појасу.

### **5.5.1.3 Генерисање геометрије полиедарских купола класе 6**

Омотач полиедарске куполе класе 6 чине шестоуглови. Хоризонтална подела прстенова, или генерисање примарних темена на њима, даље одређује распоред полигона омотача у сваком од појасева. Будући да је различит број полигона омотача у сваком од појасева, то се и генерисање примарних темена врши у сваком од прстенова појединачно.

Сви полигони генерисања прстенова леже својим страницама на два суседна прстена и у целости припадају одређеном појасу. Ови полигони имају по четири примарна темена. Остали полигони омотача се налазе између њих, а њихова оријентација је промењена у односу на наведене полигоне. Прстенови их пресецају по дужини мале дијагонале, чија дужина, у односу на страницу претпостављеног правилног шестоугла ( $a$ ), износи  $a \cdot \sqrt{3}$ .

Подела првог прстена, тако да се добију тетиве чије су дужине у односу  $1:\sqrt{3}$ , није довела до генерисања полигона омотача уједначених димензија, до

чега није довела ни примена истог односа на вредности углова поделе прстена. Оба наведена односа у генерисању примарних темена дају приметну разлику у димензијама полигона омотача, с тим да је то израженије уколико се прстен подели према односу дужина тетива. Ни подела на једнаке делове, с друге стране, није довела до уједначености димензија наведених полигона. Пошто су променљиве зависне једна од друге, пробом је усвојена подела фиктивног прстена у односу углова његове поделе 1:1,25. Овај однос даје полигоне омотача најуједначенијих пречника кружница описаних око њих, како за плитке куполе, тако и за куполе висине полусфере.

Подела другог прстена врши се у односу 1:1,25:1,25, трећег у односу 1:1,25:1,25:1,25 итд.. Оријентација полигона омотача, за сваки од појасева, условљена је организацијом полигона из претходног појаса. Промена оријентације наведених полигона не даје логичну теселацију куполе и захтева секундарни полигон који би имао три, пет или седам страница. Зато су сви полигони омотача, осим оних из пресека са равни генерисања, оријентисани тако да се на следећи прстен ослањају једним примарним теменом, а на претходном имају два примарна темена.

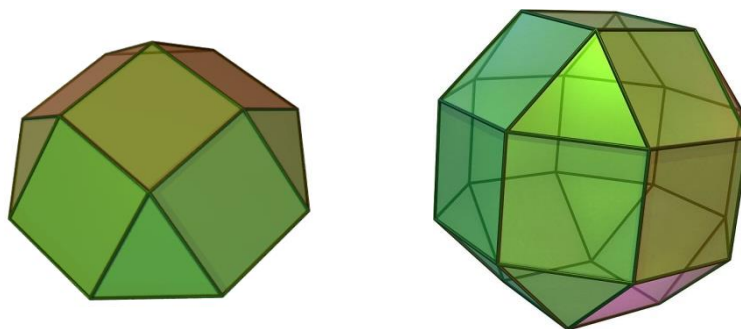
## **5.5.2 Полиедарске куполе фамилије 4**

Полиедарске куполасте структуре фамилије 4 имају темени полигон у облику квадрата. Карактеристична област генерисања представља четвртину куполе у основи, а на цртежима је означена углом од  $90^\circ$ .

### **5.5.2.1 Полиедарске куполе класе 4**

#### **5.5.2.1.1 Веза геометрије ПК (4.4<sup>f</sup>) са другим облицима и телима**

Геометрија ПК (4.4<sup>f</sup>) базирана је на геометрији Џонсоновог полиедра, куполе са теменим квадратом, у његовој енумерацији означеног са  $J_4$ .



Слика 5-9) Џонсонов полиедар  $J_4$  и ромбикубоктаедар

Наведена купола се може препознати и као део униформног, Архимедовог полиедра, ромбикубоктаедра, са ознаком  $(3.4^3)$ , који се може посматрати и као склоп две поменуте Џонсонове куполе, спојене осмостраном правилном призмом. Форма Џонсоновог полиедра се може препознати у свим фреквенцијама полиедарских купола, ове фамилије и класе, од ПК  $(4.4^1)$  до ПК  $(4.4^5)$ .

Уколико су све дужине ивица генерисане ПК  $(4.4^1)$  једнаке, онда она у потпуности одговара форми поменутог Џонсоновог полиедра.

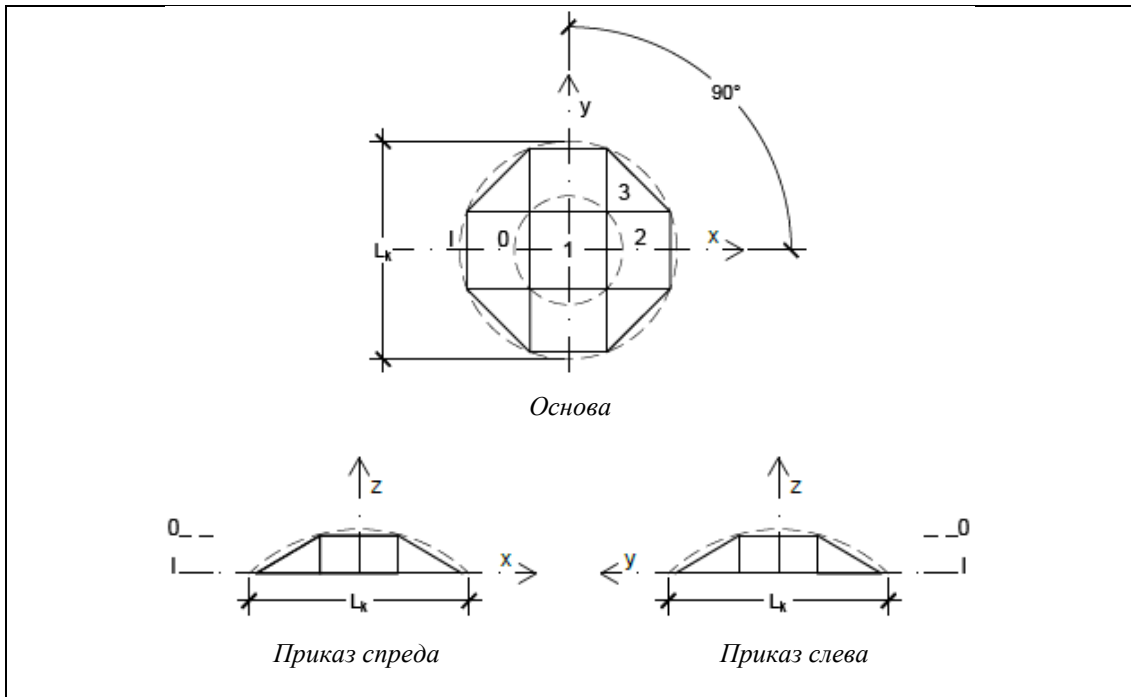
#### 5.5.2.1.2 ПК $(4.4^f)$

При одређивању односа дијагонале теменог квадрата са дужином странице  $(a)$  и полигона омотача, уз претпоставку о правилним полигонима, сви појасни углови биће једнаки, а према углу теменог полигона у односу  $1:\sqrt{2}$ .

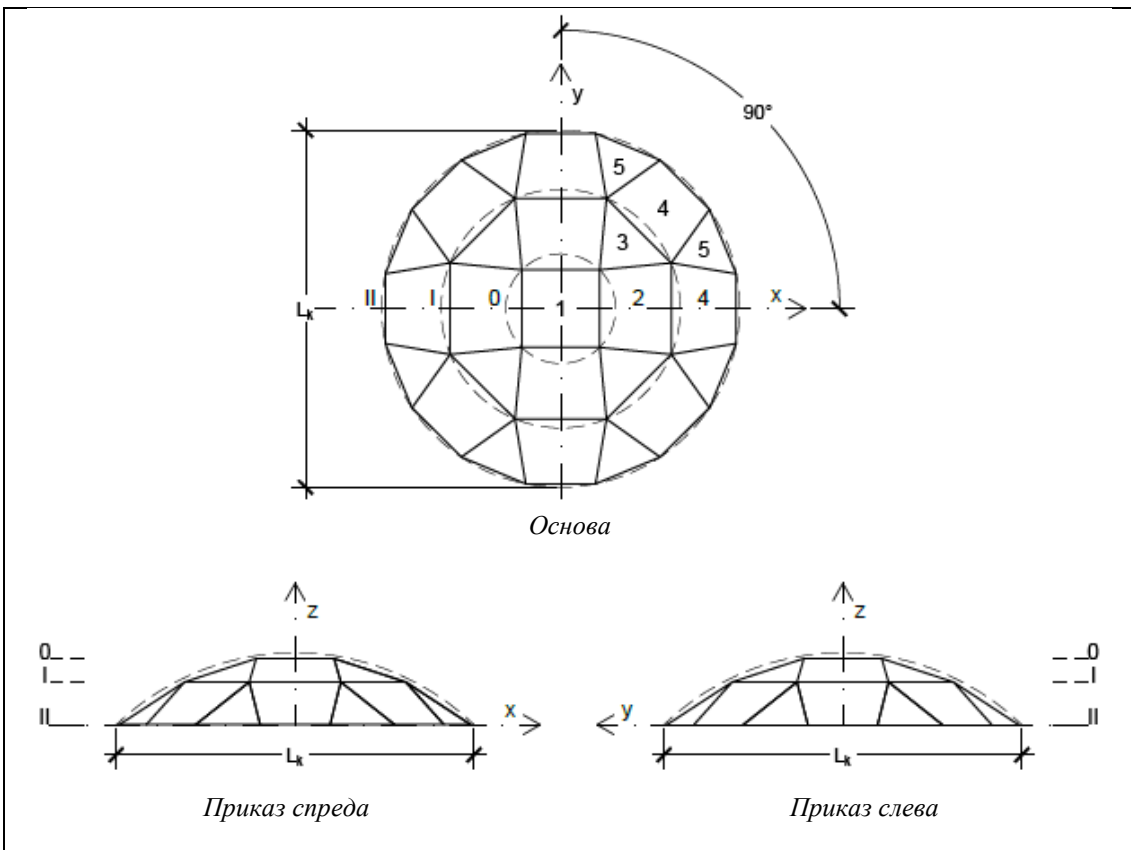
Подела фиктивних прстенова врши се на једнаке делове, тако да су генерисани полигони у сваком следећем појасу подударни. Троугаони, секундарни полигони се уводе у случајевима када димензије примарних полигона постану превелике, из услова транспорта функционалних елемената.

У појасевима 1, 2 и 5 генеришу се две групе подударних полигона, примарних и секундарних, док се у појасевима 3 и 4 генерише само по једна група подударних примарних полигона. Уколико се подела фиктивних прстенова не би вршила на једнаке делове, већ тако да четвороугаоне стране омотача куполе буду паралелограми, у следећем појасу, то би у том појасу довело до генерисања двоструко већег броја примарних полигона.

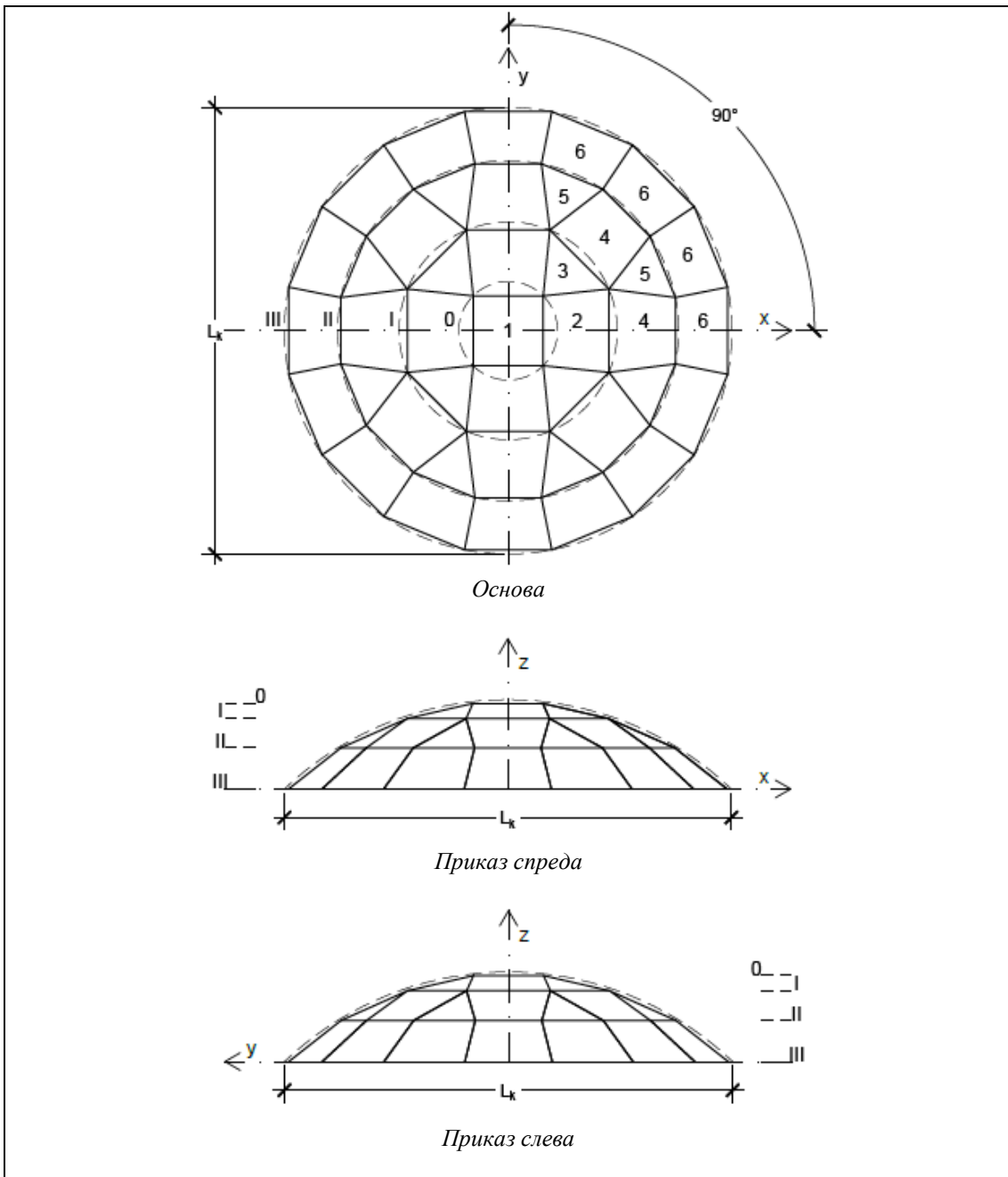




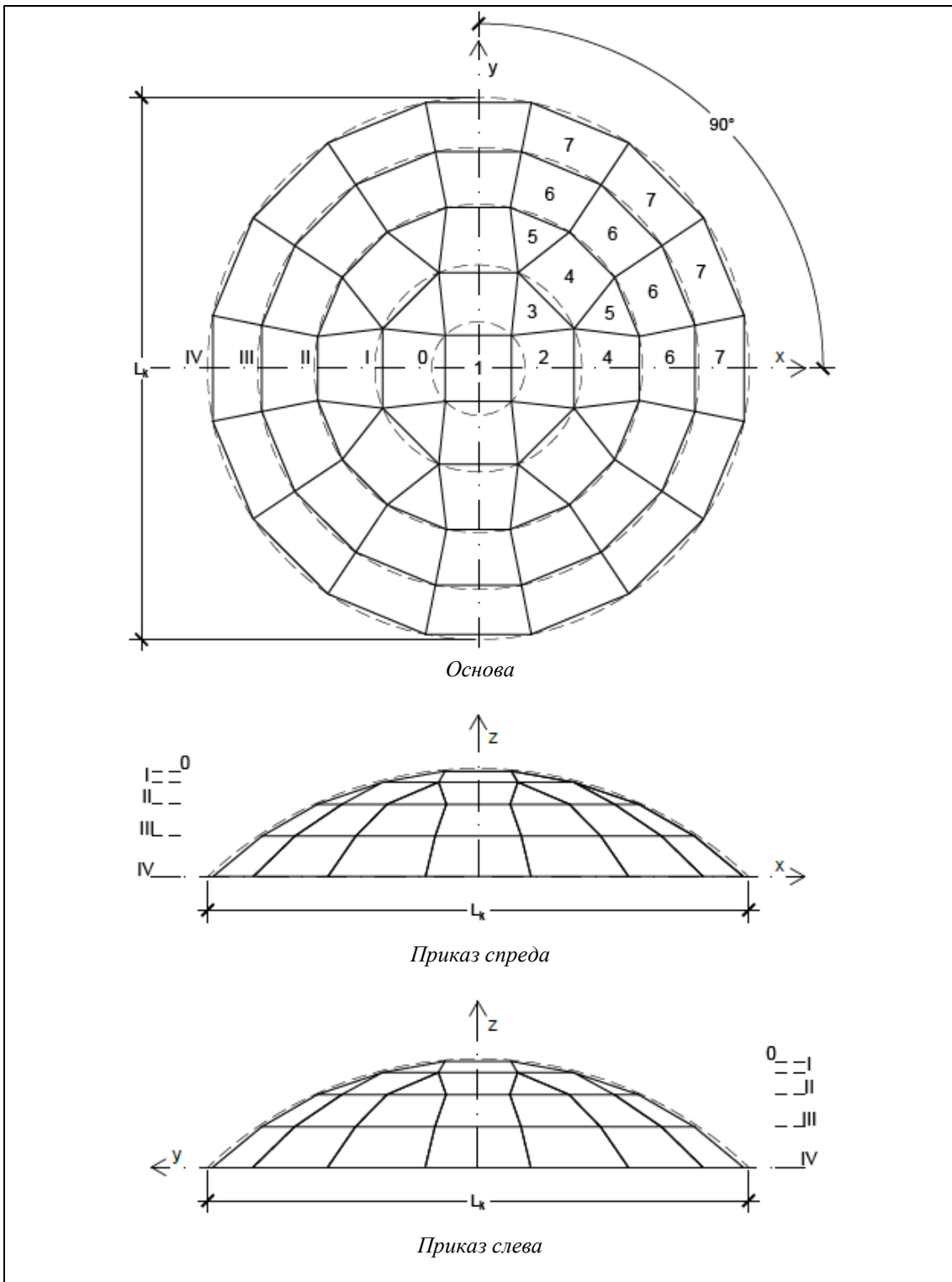
Слика 5-10) ПК (4.4<sup>1</sup>)



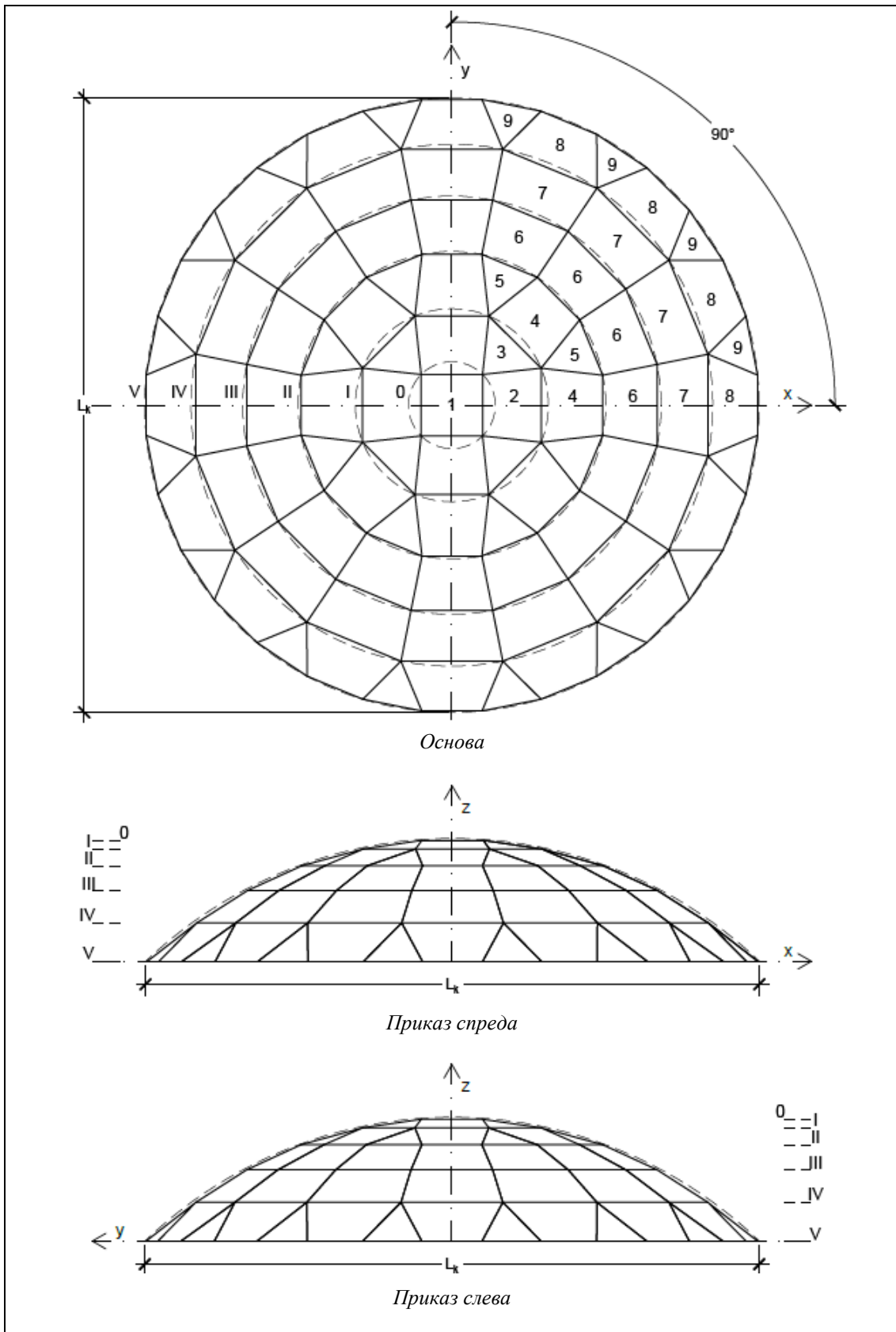
Слика 5-11) ПК (4.4<sup>2</sup>)



Слика 5-12) ПК (4.4<sup>3</sup>)



Слика 5-13) ПК (4.4<sup>4</sup>)



Слика 5-14) ПК (4.4<sup>б</sup>)

Табела 5-3) Геометријске карактеристике ПК (4.4<sup>f</sup>)

Нумеричка ознака	Облик теменог полигона	Број појасева	Облик полигона омотача	Број полигона облика из колоне (4)	Број типова полигона	Укупан број полигона	Укупан број темена	Укупан број ивица
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
(4.4 <sup>1</sup> )	4	1	4 3	4 4	3	9	12	20
(4.4 <sup>2</sup> )	4	2	4 3	12 12	5	25	28	52
(4.4 <sup>3</sup> )	4	3	4 3	28 12	6	41	44	84
(4.4 <sup>4</sup> )	4	4	4 3	44 12	7	57	60	116
(4.4 <sup>5</sup> )	4	5	4 3	60 28	9	89	92	180

### 5.5.2.2 Полиедарске куполе класе 5

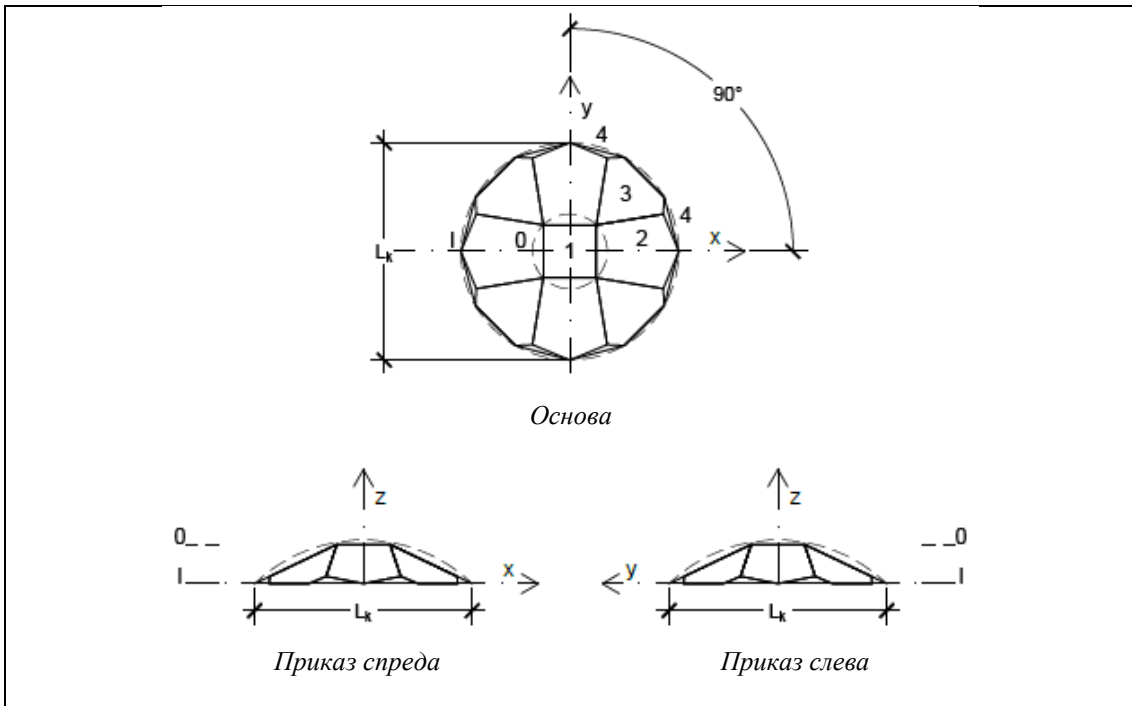
Темени полигон је облика квадрата, а полигони омотача су петоуглови, као примарни полигони и троуглови, као секундарни.

#### 5.5.2.2.1 Веза геометрије ПК (4.5<sup>f</sup>) са другим облицима и телима

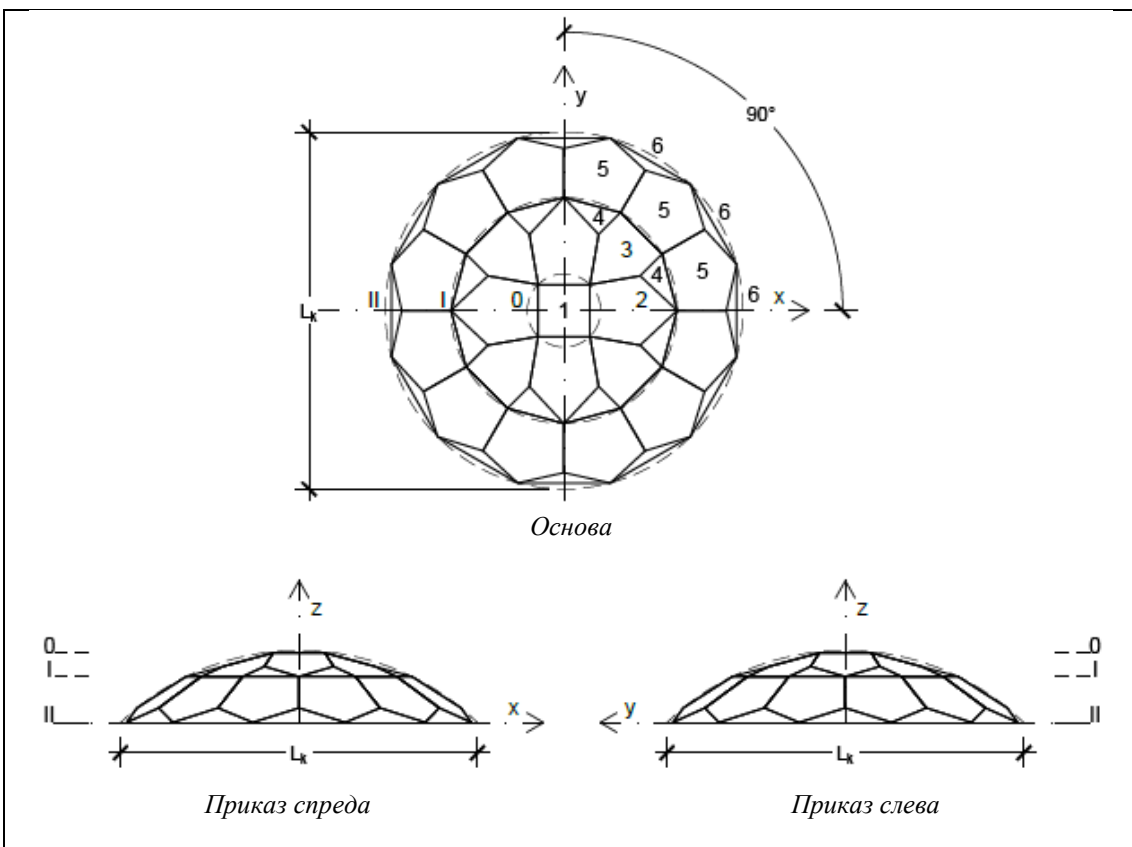
Не постоји теселација равни или сфере са дефинисаном распоредом полигона, па је генерисана нова.

#### 5.5.2.2.2 ПК (4.5<sup>f</sup>)

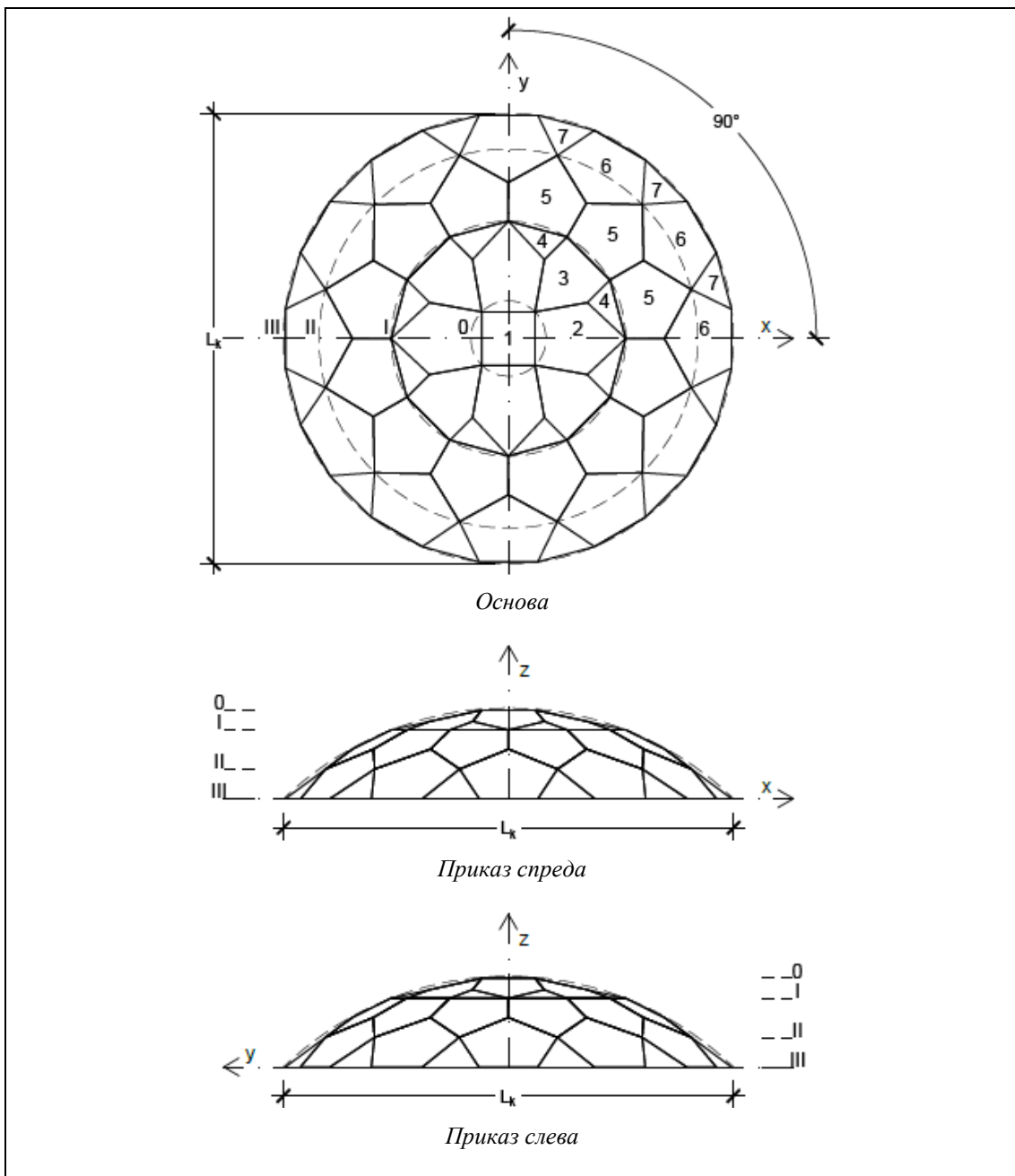
У наставку су приказане полиедарске куполе фреквенције од 1 до 5.



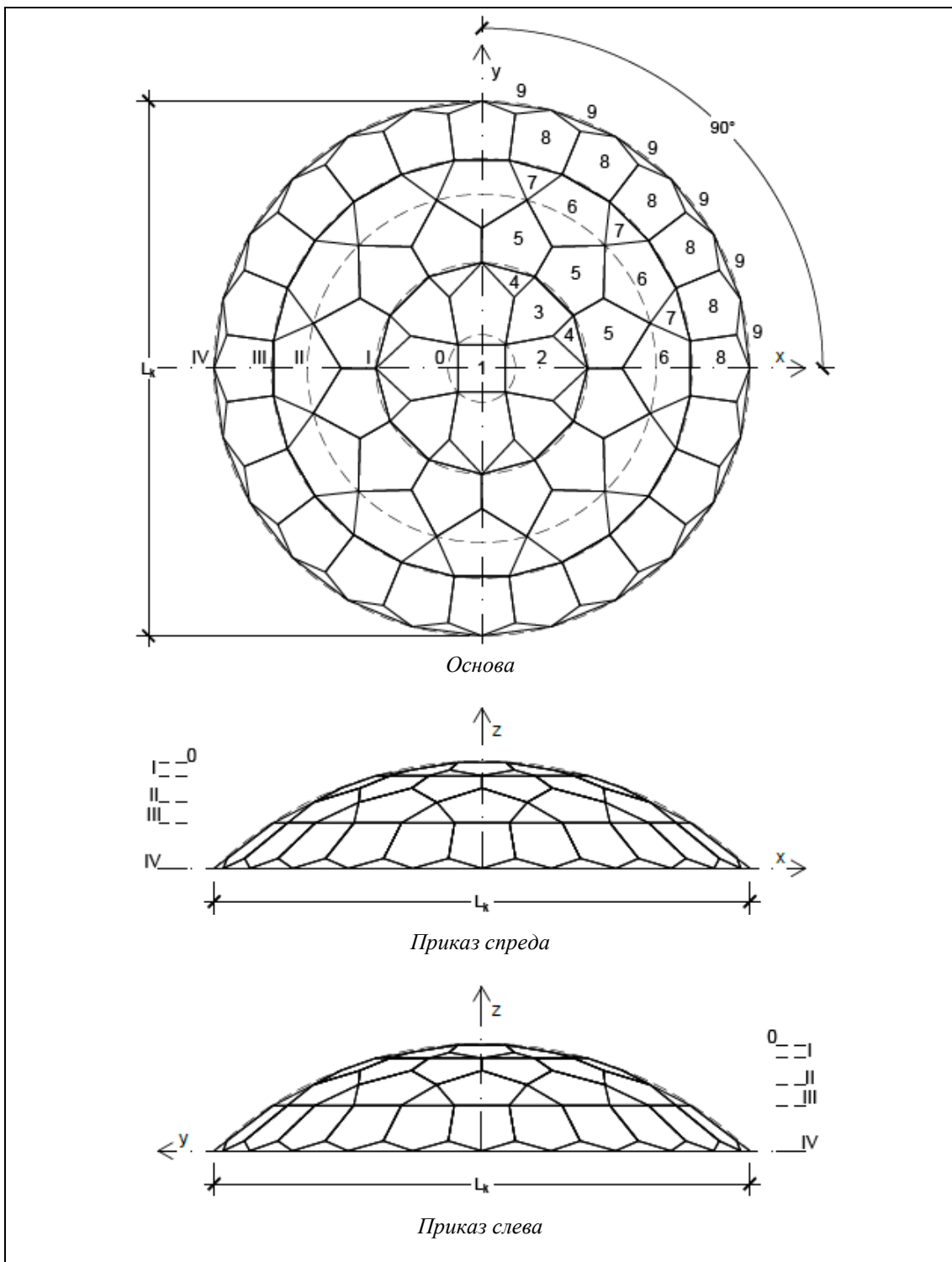
Слика 5-15) ПК (4.5<sup>1</sup>)



Слика 5-16) ПК (4.5<sup>2</sup>)

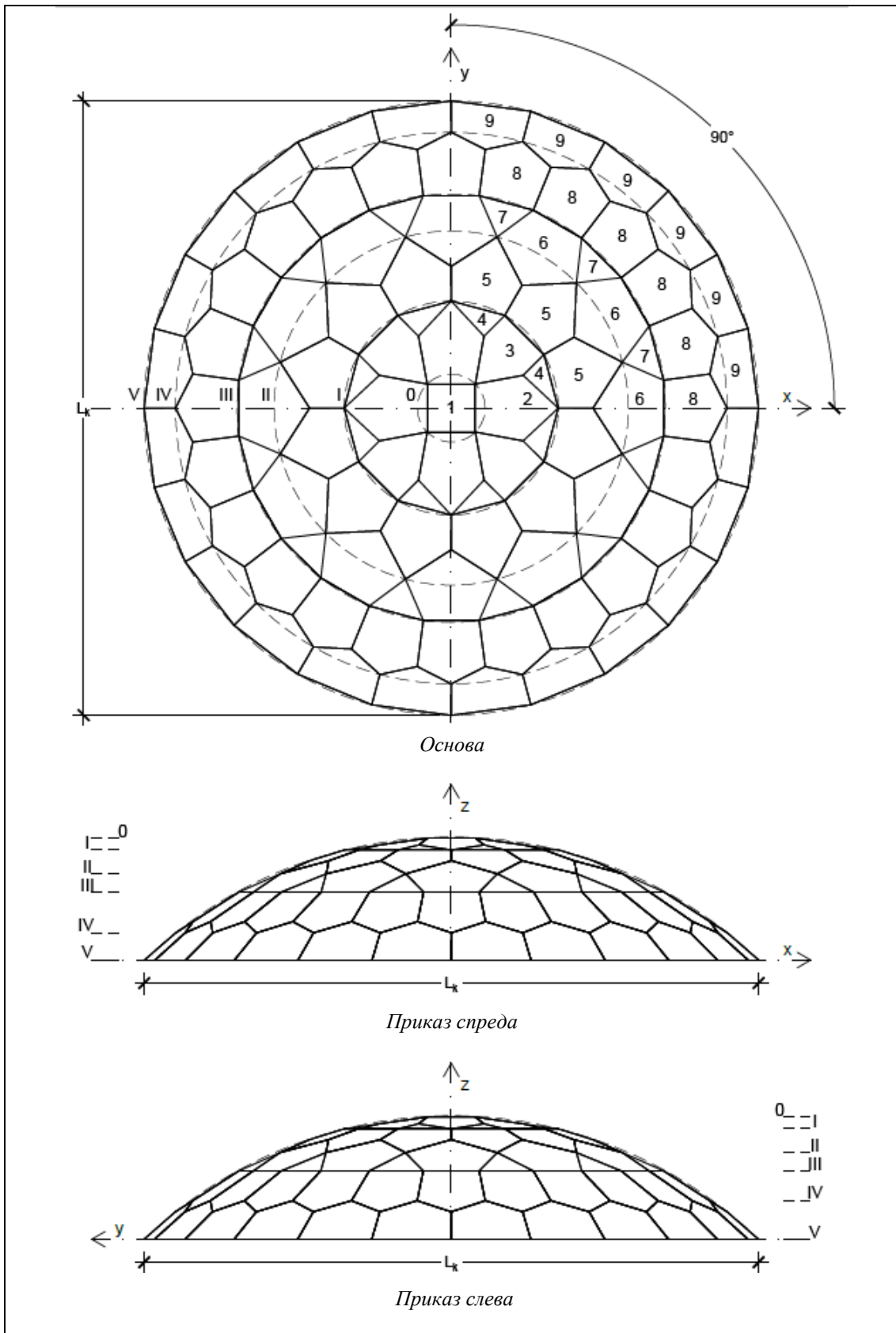


Слика 5-17) ПК (4.5³)



Слика 5-18) ПК (4.5<sup>4</sup>)





Слика 5-19) ПК (4.5<sup>5</sup>)

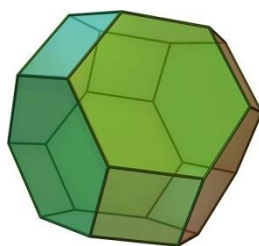
Табела 5-4) Геометријске карактеристике ПК (4.5<sup>f</sup>)

Нумеричка ознака	Облик теменог полигона	Број појасева	Облик полигона омотача	Број полигона облика из колоне (4)	Број типова полигона	Укупан број полигона	Укупан број темена	Укупан број ивица
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
(4.5 <sup>1</sup> )	4	1	5 3	8 8	4	17	24	40
(4.5 <sup>2</sup> )	4	2	5 3	20 20	6	41	48	88
(4.5 <sup>3</sup> )	4	3	5 3	32 20	7	53	72	124
(4.5 <sup>4</sup> )	4	4	5 3	56 44	9	101	120	220
(4.5 <sup>5</sup> )	4	5	5 3	80 20	9	101	144	244

### 5.5.2.3 Полиедарске куполе класе 6

#### 5.5.2.3.1 Веза геометрије ПК (4.6<sup>f</sup>) са другим облицима и телима

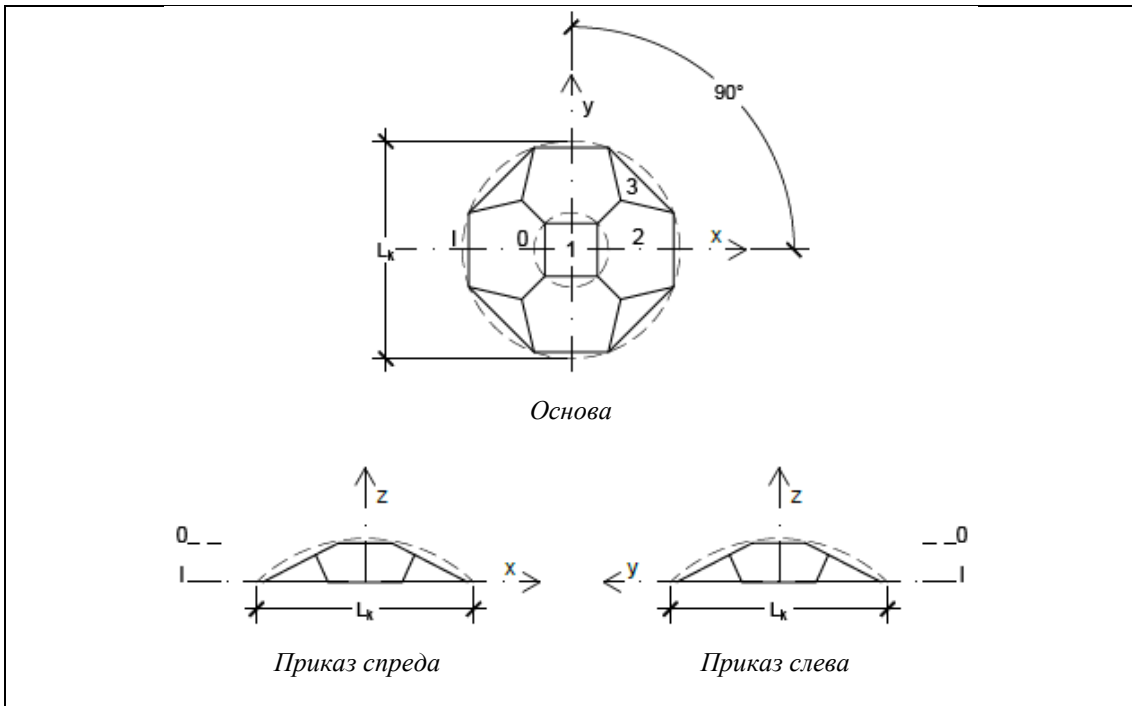
ПК (4.6<sup>1</sup>) има геометрију трункованог октаедра, са ознаком (4.6<sup>2</sup>) у еnumerацији Архимедових полиедара.



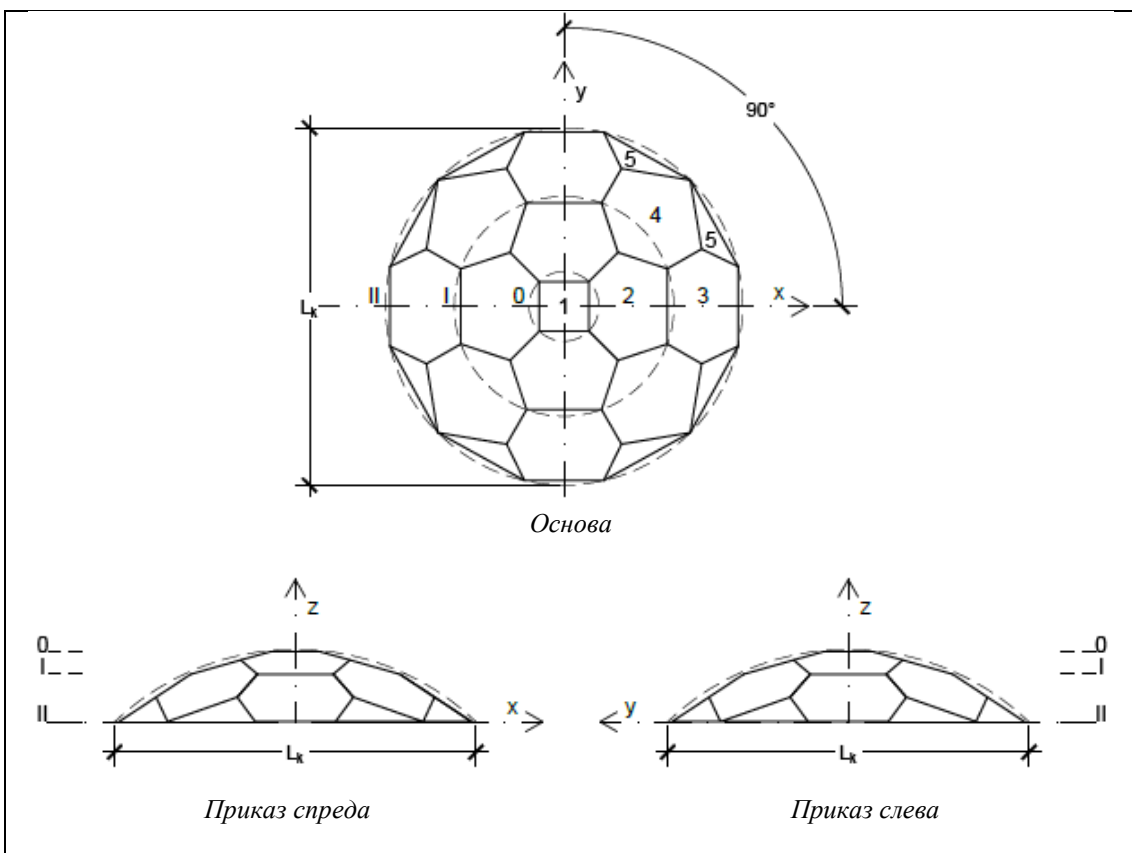
Слика 5-20) Трунковани октаедар

#### 5.5.2.3.2 ПК (4.6<sup>f</sup>)

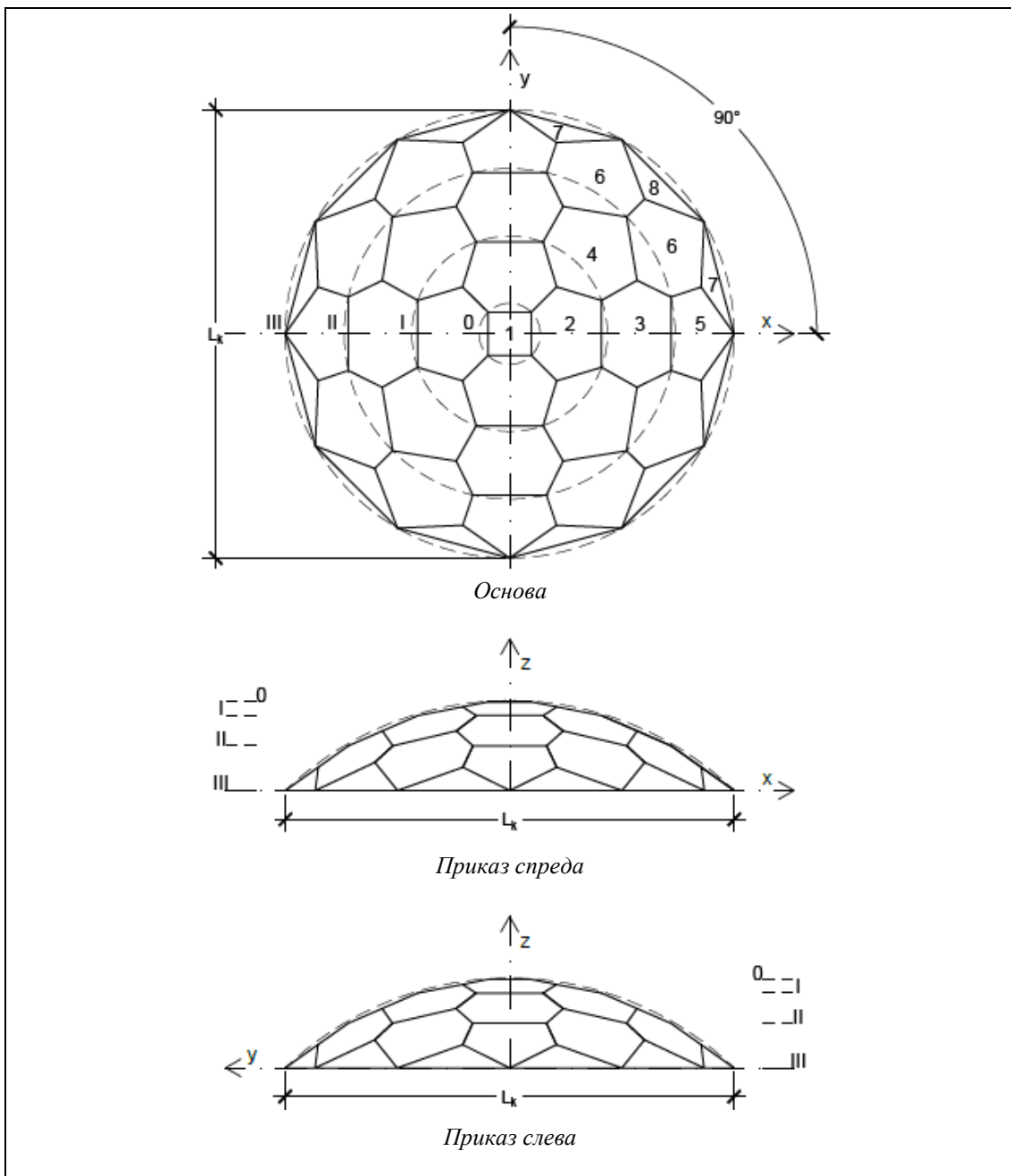
Омотач полиедарске куполе чине шестоуглови, распоређени око теменог четвороугла. У случају полиедарских купола фреквенција 3-5, шестоуглови у ослоначком појасу су замењени петоугловима, чиме сви полигони у том појасу добијају прихватљивији облик, из статичких услова формирања структуре.



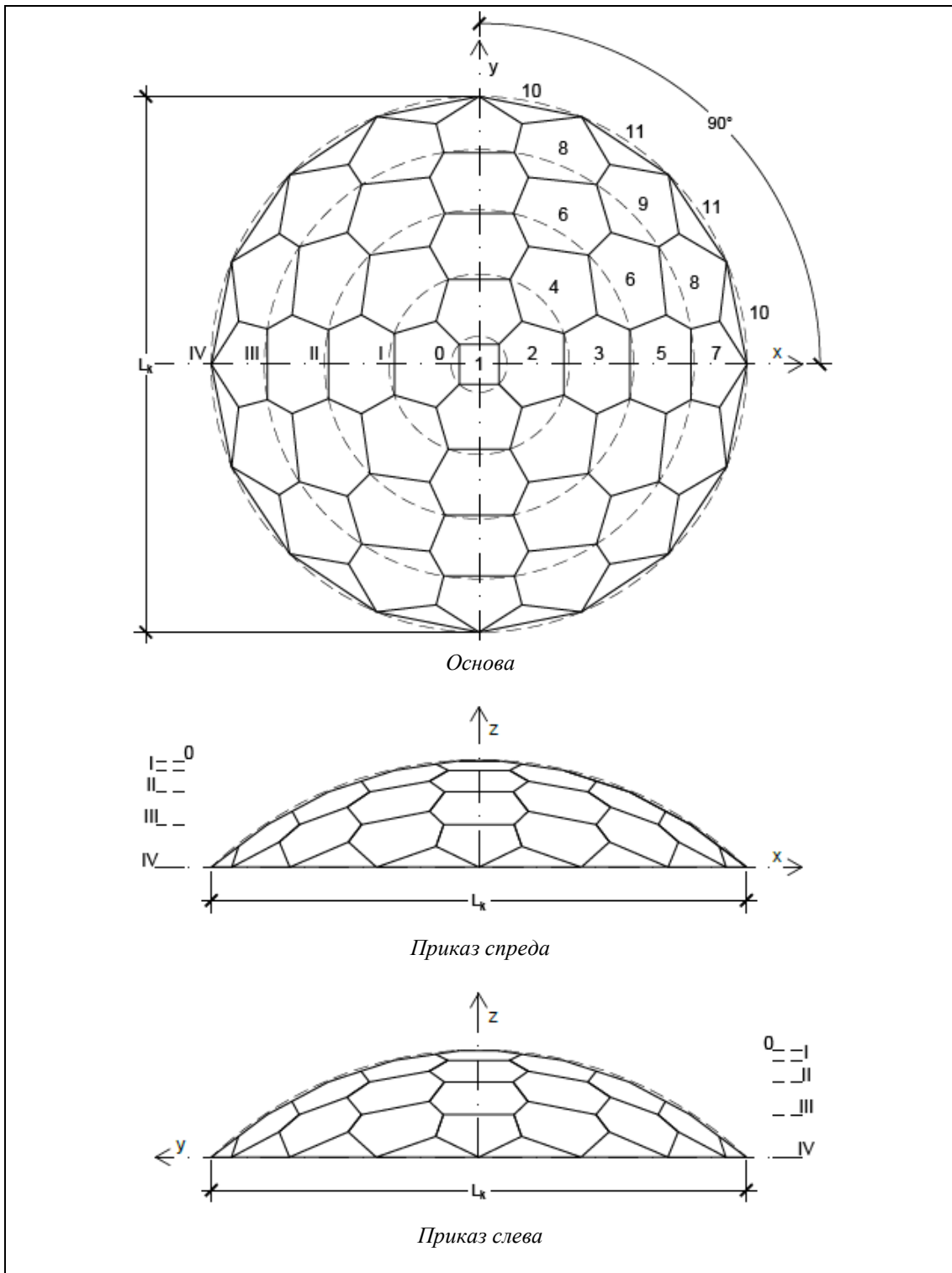
Слика 5-21) ПК (4.6<sup>1</sup>)



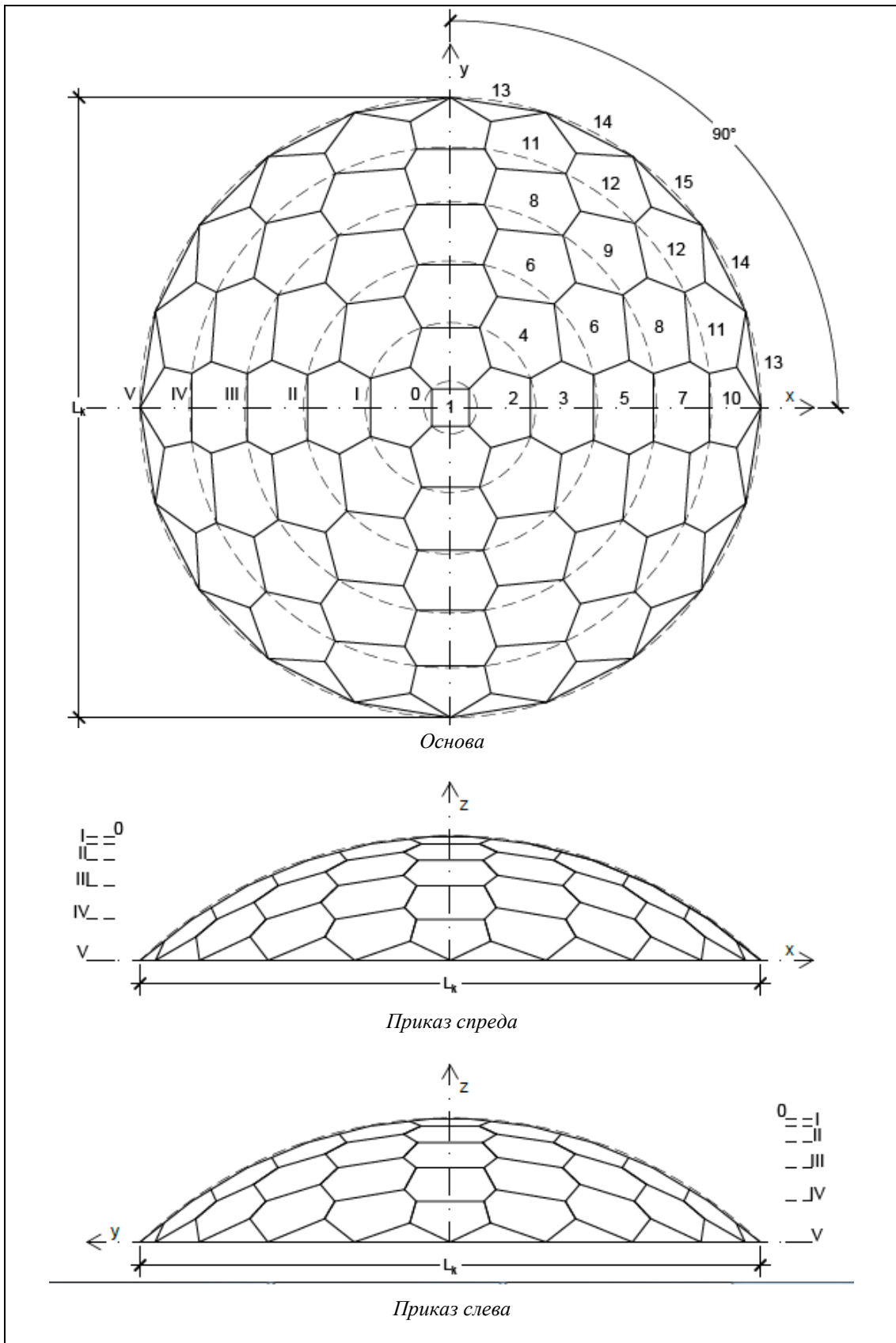
Слика 5-22) ПК (4.6<sup>2</sup>)



Слика 5-23) ПК (4.6<sup>3</sup>)



Слика 5-24) ПК (4.6<sup>4</sup>)



Слика 5-25) ПК (4.6<sup>5</sup>)

Табела 5-5) Геометријске карактеристике ПК (4.6<sup>f</sup>)

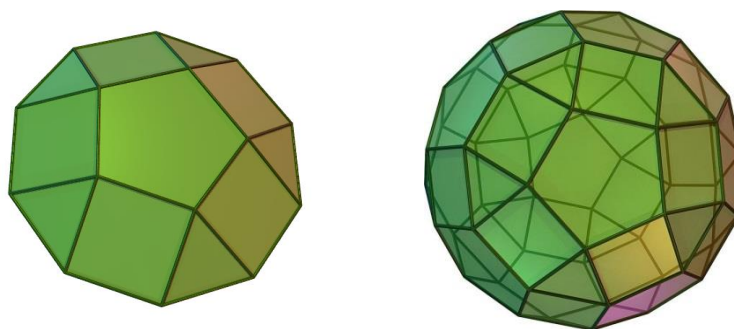
Нумеричка ознака	Облик теменог полигона	Број појасева	Облик полигона омотача	Број полигона облика из колоне (4)	Број типова полигона	Укупан број полигона	Укупан број темена	Укупан број ивица
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
(4.6 <sup>1</sup> )	4	1	6 3	4 4	3	9	16	24
(4.6 <sup>2</sup> )	4	2	6 3	12 8	5	21	36	56
(4.6 <sup>3</sup> )	4	3	6 5 3	20 4 12	8	37	60	96
(4.6 <sup>4</sup> )	4	4	6 5 3	36 4 16	11	57	96	152
(4.6 <sup>5</sup> )	4	5	6 5 3	52 4 20	15	81	140	220

### 5.5.3 Полиедарске куполе фамилије 5

#### 5.5.3.1 Полиедарске куполе класе 4

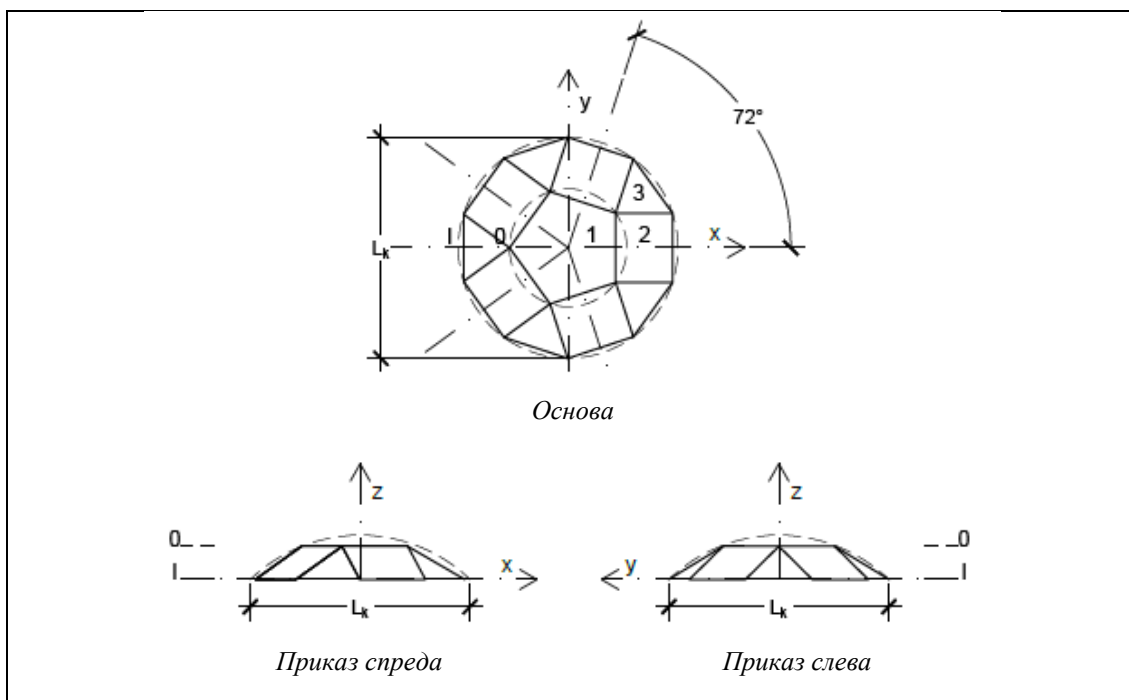
##### 5.5.3.1.1 Веза геометрије ПК (5.4<sup>f</sup>) са другим облицима и телима

Полиедарска купола изведена из Џонсонове куполе  $J_5$  може се уочити и код других Џонсонових полиедара, али и код ромбикосидодекаедра, Архимедовог полиедра, са ознаком (3.4.5.4) у њиховој еnumerацији.

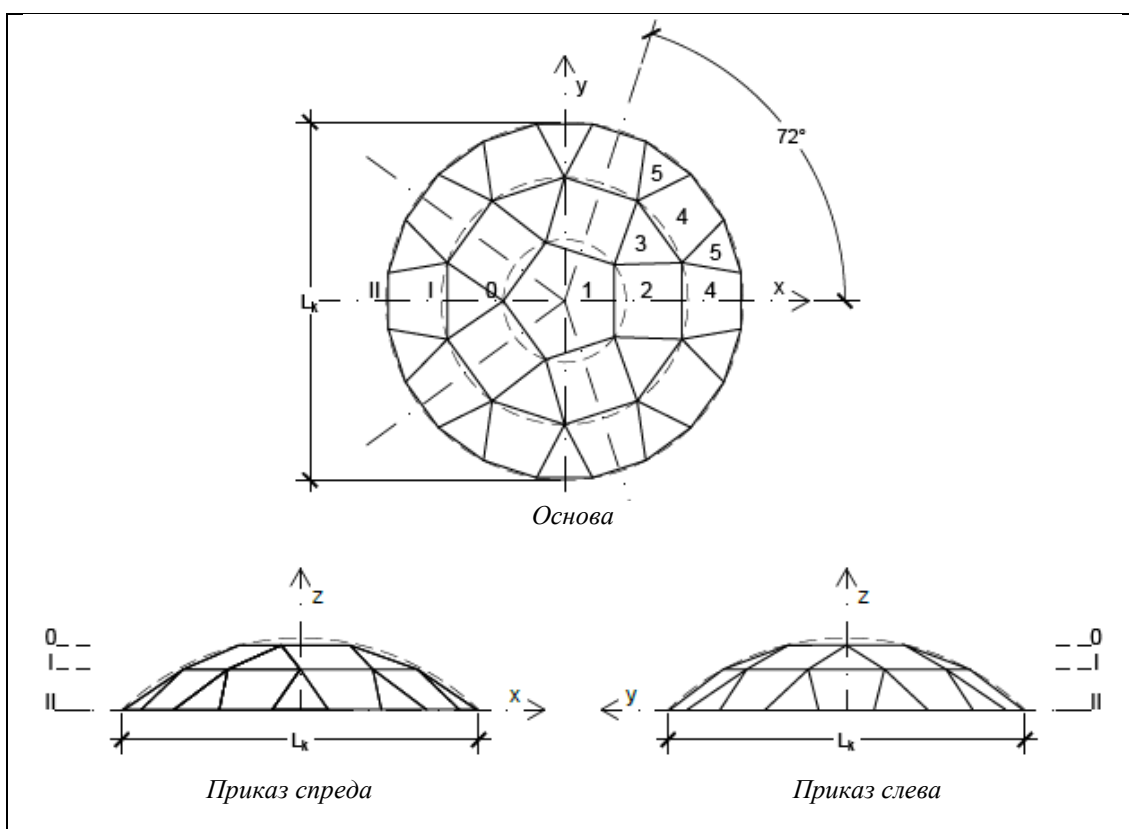


Слика 5-26) Џонсонов полиедар  $J_5$  и ромбикосидодекаедар

5.5.3.1.2 ПК (5.4<sup>f</sup>)

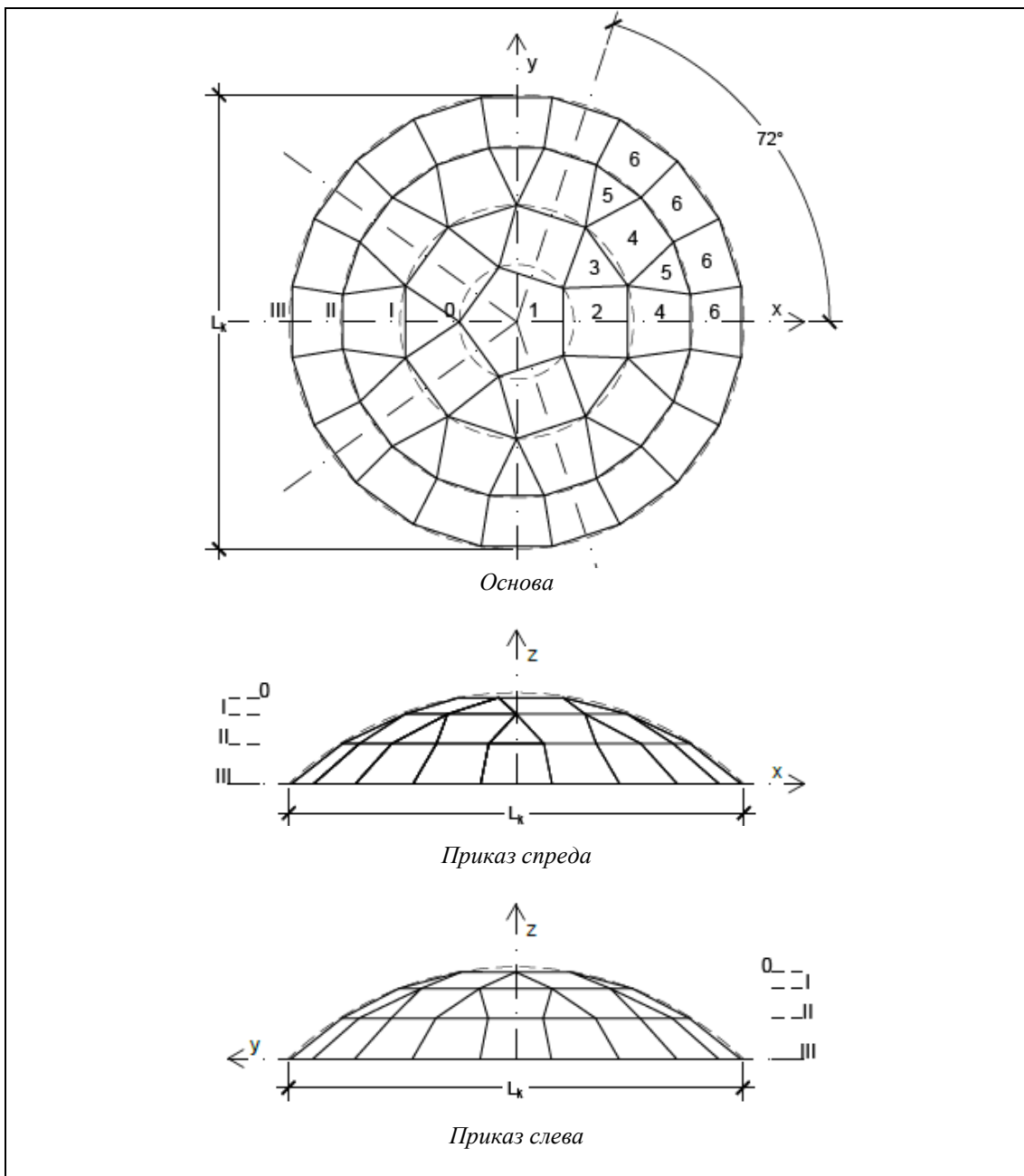


Слика 5-27) ПК (5.4<sup>1</sup>)

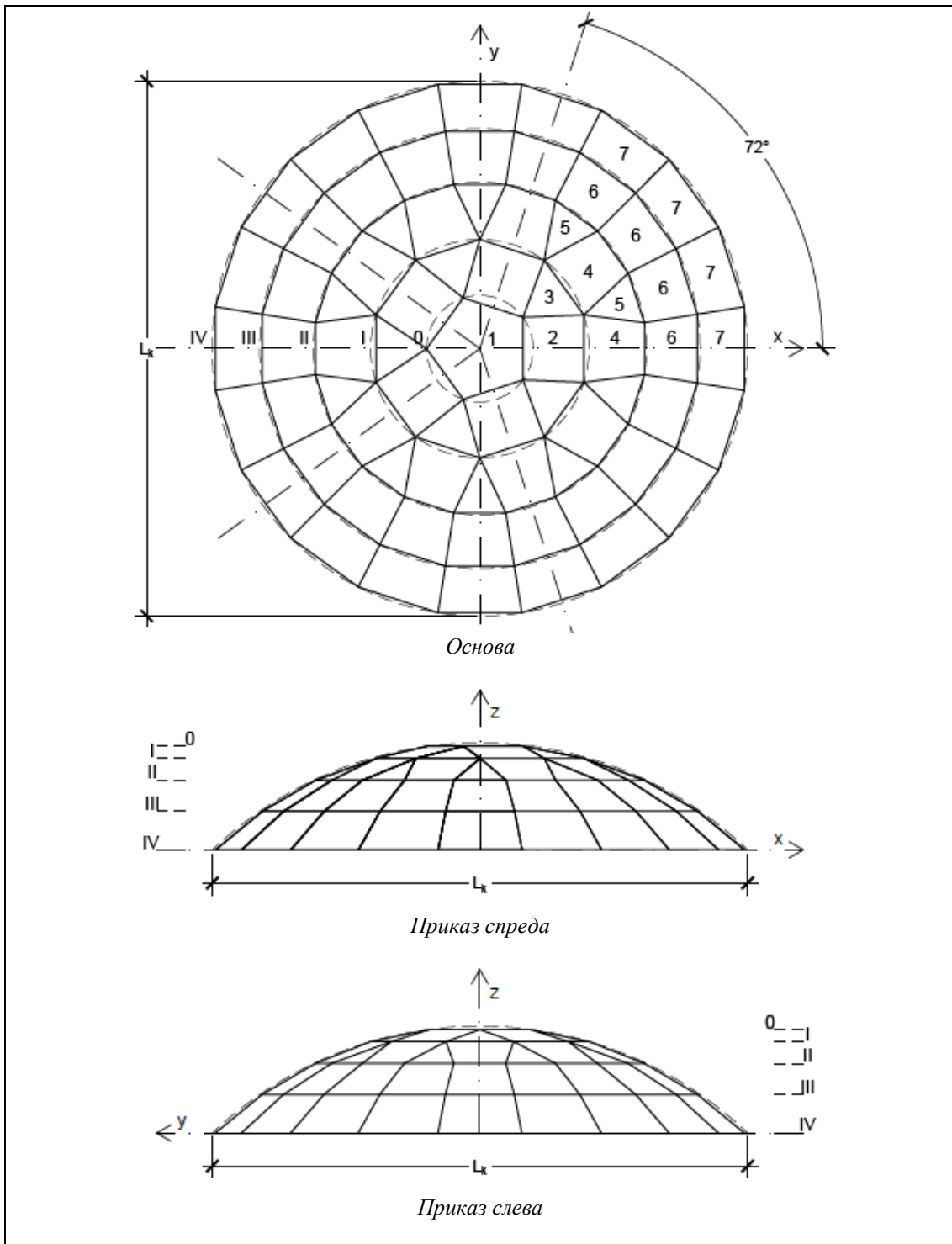


Слика 5-28) ПК (5.4<sup>2</sup>)

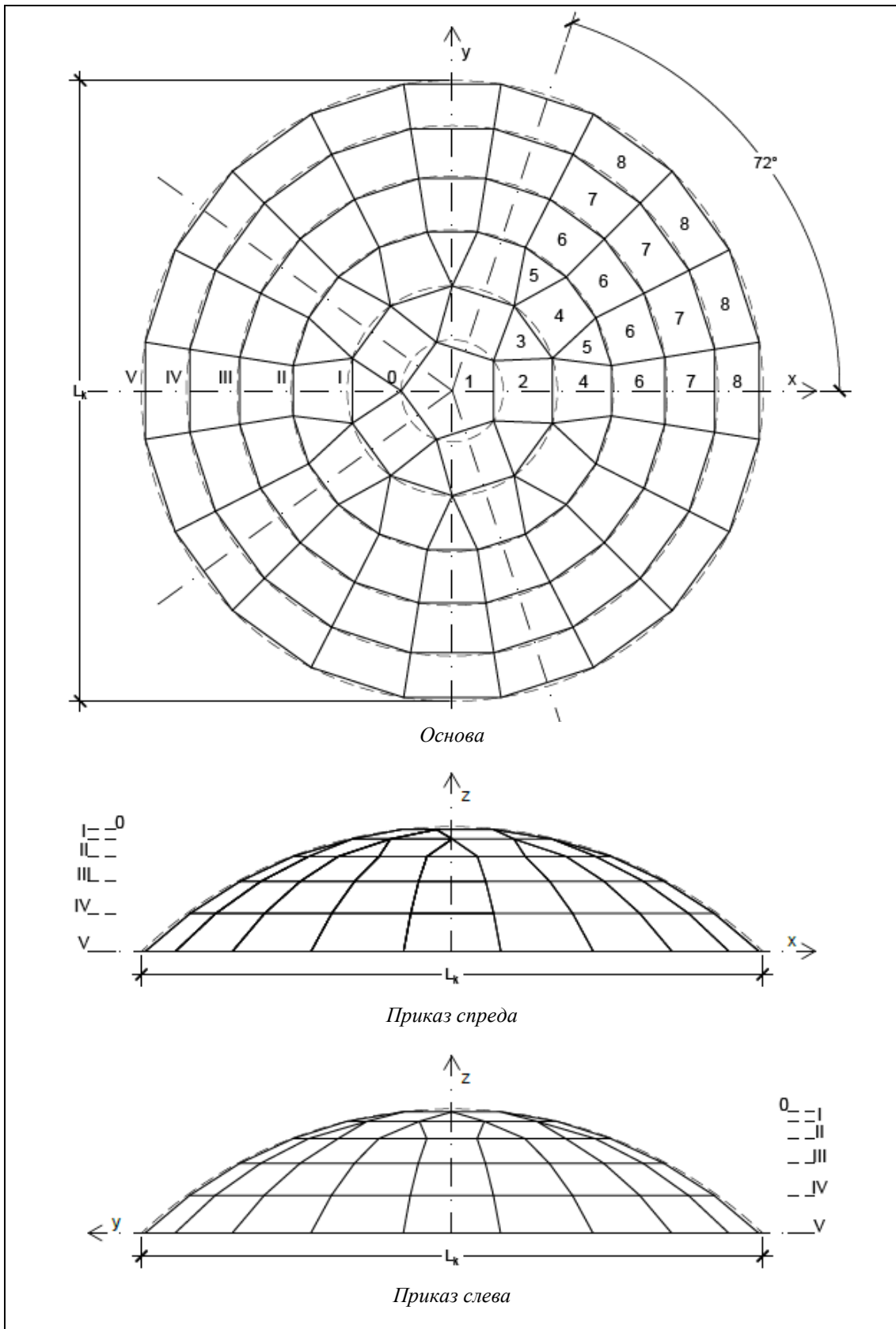




Слика 5-29) ПК (5.4<sup>3</sup>)



Слика 5-30) ПК (5.4<sup>4</sup>)



Слика 5-31) ПК (5.4<sup>б</sup>)

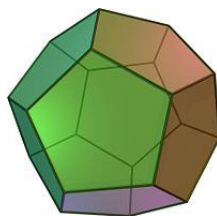
Табела 5-6) Геометријске карактеристике ПК (5.4<sup>f</sup>)

Нумеричка ознака	Облик теменог полигона	Број појасева	Облик полигона омотача	Број полигона облика из колоне (4)	Број типова полигона	Укупан број полигона	Укупан број темена	Укупан број ивица
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
(5.4 <sup>1</sup> )	5	1	4 3	5 5	3	11	15	25
(5.4 <sup>2</sup> )	5	2	4 3	15 15	5	31	35	65
(5.4 <sup>3</sup> )	5	3	4 3	35 15	6	51	55	105
(5.4 <sup>4</sup> )	5	4	4 3	55 15	7	71	75	145
(5.4 <sup>5</sup> )	5	5	4 3	75 15	8	91	95	185

### 5.5.3.2 Полиедарске куполе класе 5

#### 5.5.3.2.1 Веза геометрије ПК (5.5<sup>f</sup>) са другим облицима и телима

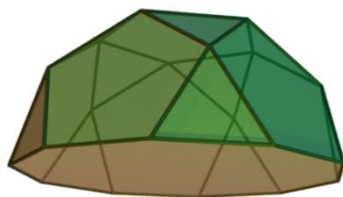
У фреквенцији 1 полиедарска купола се изводи из додекаедра, Платоновог полиедра. Међутим, куполаста форма додекаедра, од правилних полигона, не може се у потпуности генерисати у случају полиедарских купола, јер би она, у случају пет правилних петоуглова у омотачу, имала већу висину од висине половине сфере генерисања, а усвојен гранични случај при генерисању полиедарских купола износи половину висине сфере генерисања.



Слика 5-32) Додекаедар

У осталим фреквенцијама, полиедарска купола за основу има Џонсонов полиедар  $J_6$ , пентагоналну ротонду, која се може препознати у појасу изнад првог прстена. У фреквенцији 2 форма додекаедра није прихватљива, јер се генеришу

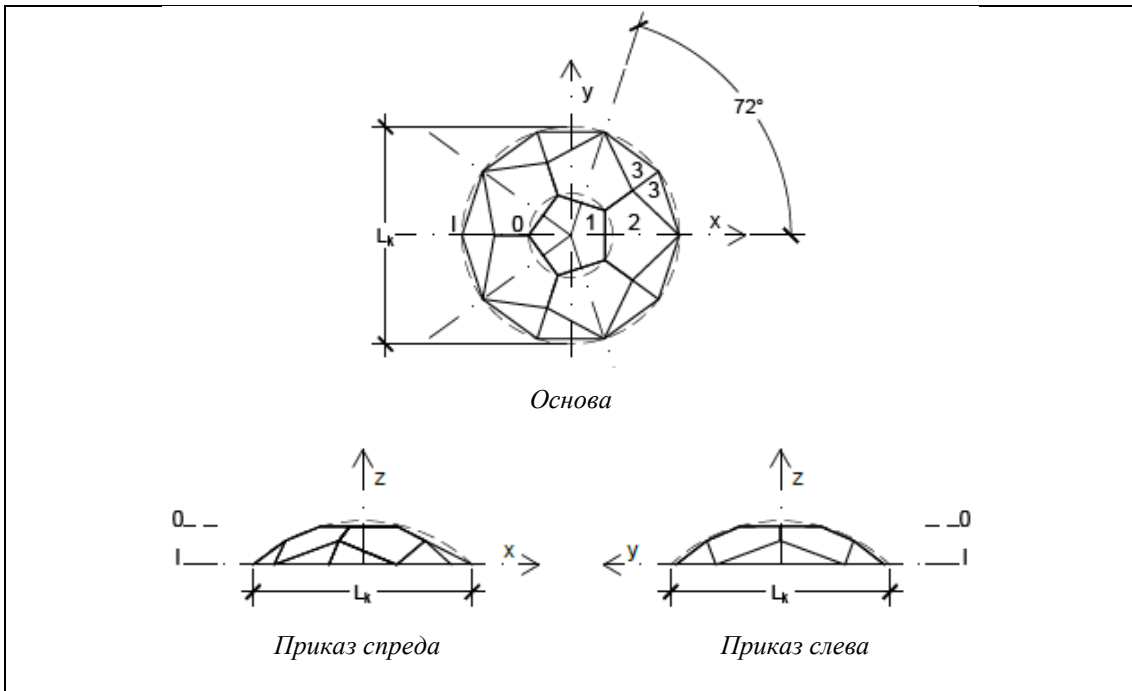
полигони са једним унутрашњим углом незнатно мањим од  $180^\circ$ , облика који је нерационалан из услова префабрикације функционалних елемената структуре.



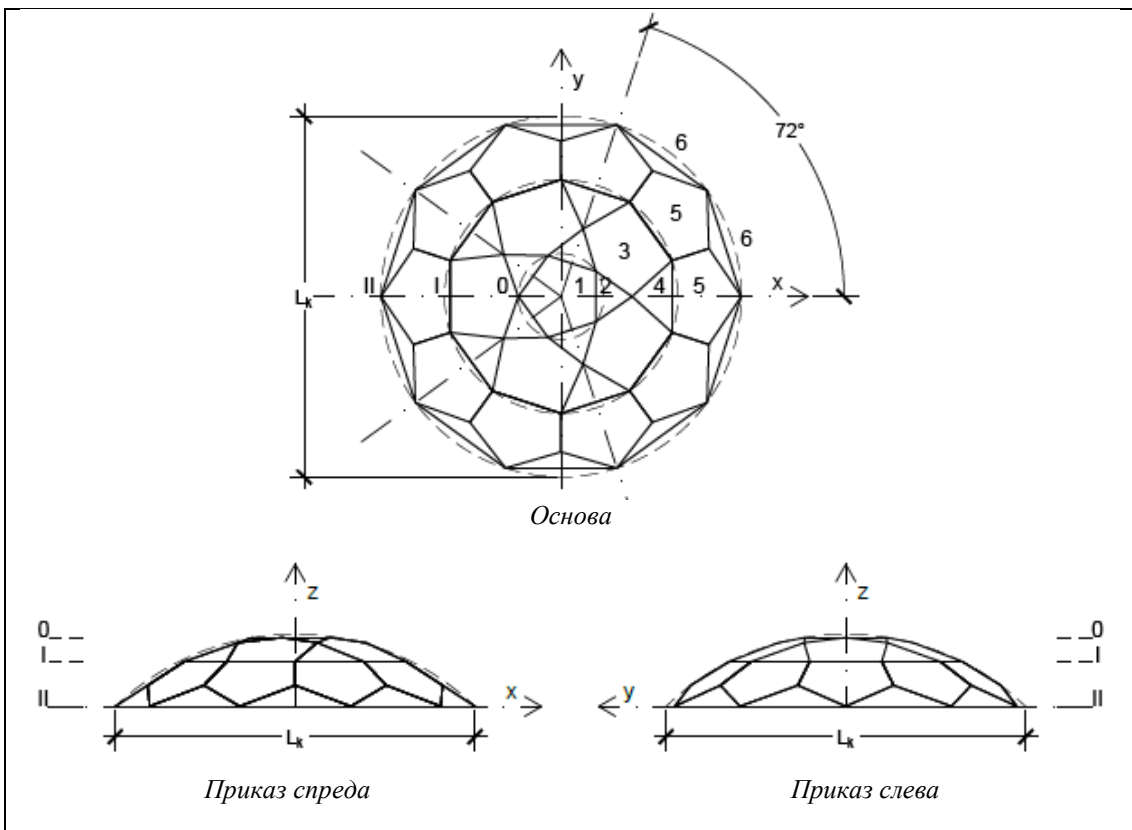
Слика 5-33) Донсонов полиедар  $J_6$

#### 5.5.3.2.2 ПК (5.5<sup>f</sup>)

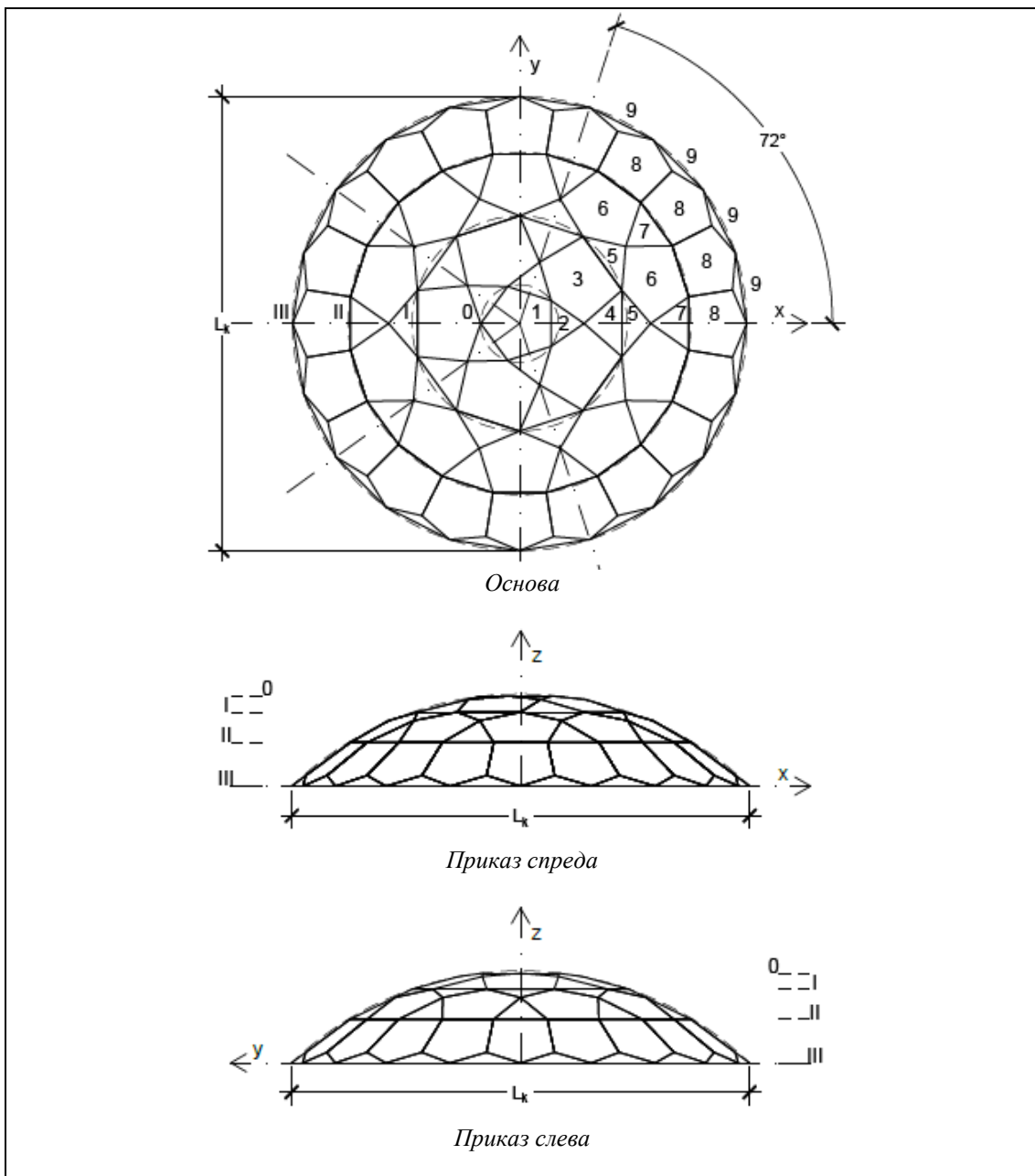
У фреквенцијама 3-5, петоугао, који је у фреквенцији 2 обележен бројем 5, деформише се у тој мери да није прихватљив при формирању структуре, па је уместо њега усвојен секундарни полигон, троугао. Генерисана полиедарска купола има пуно секундарних полигона, али је једина прихватљива из мноштва анализираних форми, чему у прилог иде и то што секундарни полигони представљају функционалне елементе са једноставним конструктивним склопом у виду контуре од крутих штапова.



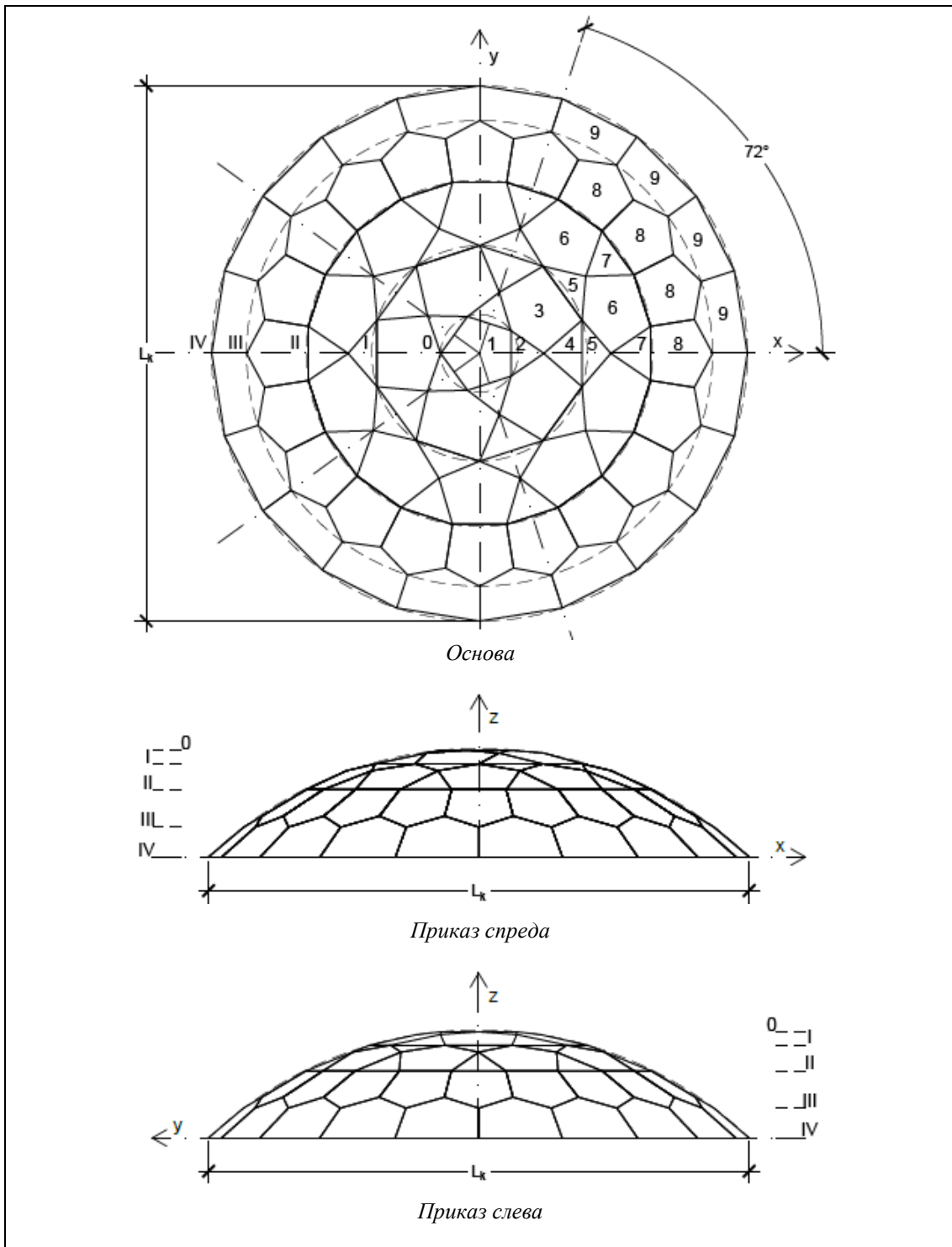
Слика 5-34) ПК (5.5<sup>1</sup>)



Слика 5-35) ПК (5.5<sup>2</sup>)

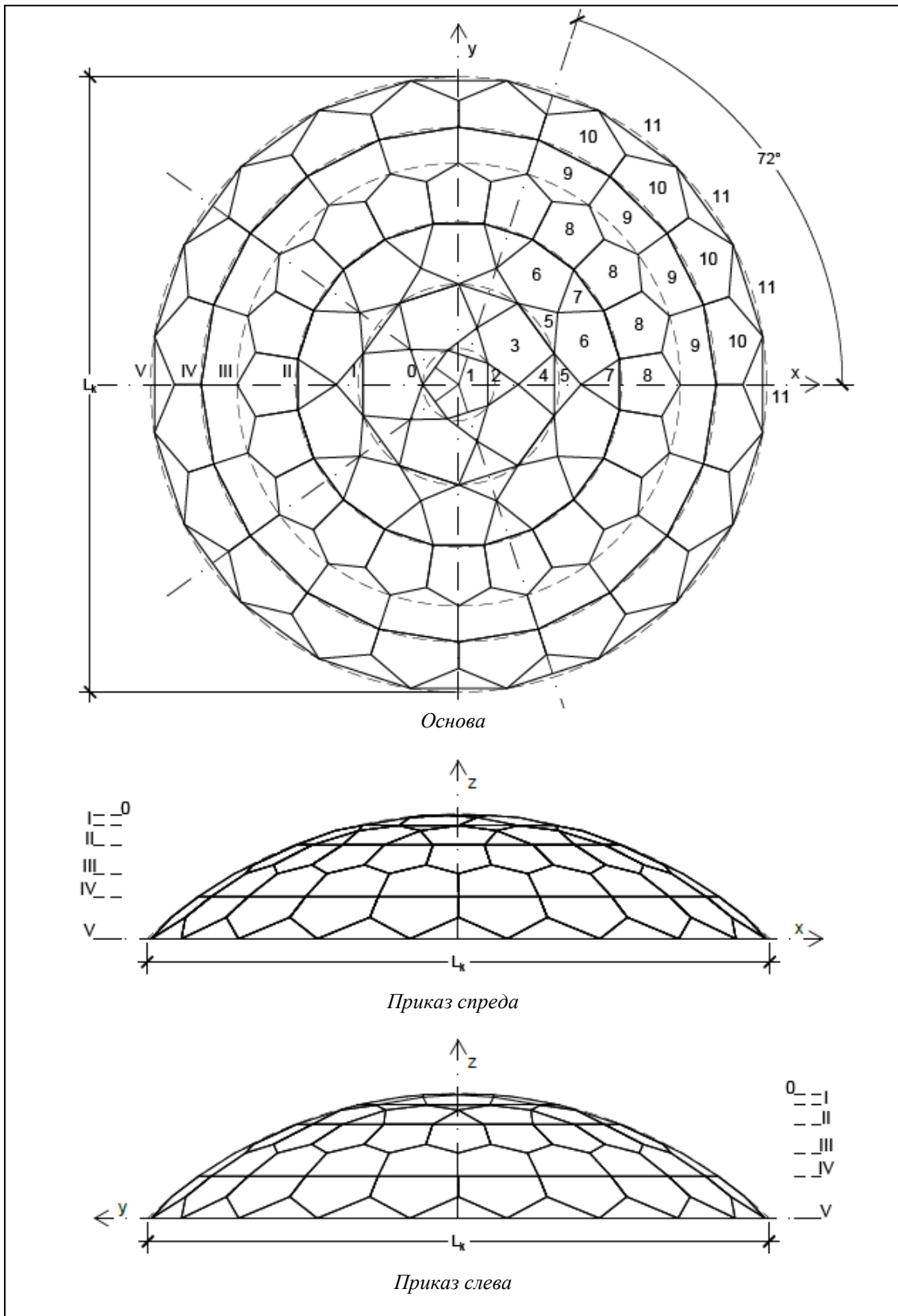


Слика 5-36) ПК (5.5<sup>3</sup>)



Слика 5-37) ПК (5.5<sup>4</sup>)





Слика 5-38) ПК (5.5<sup>5</sup>)

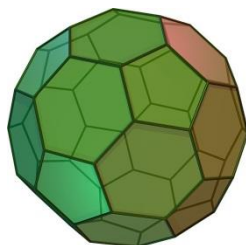
Табела 5-7) Геометријске карактеристике ПК (5.5<sup>f</sup>)

Нумеричка ознака	Облик теменог полигона	Број појасева	Облик полигона омотача	Број полигона облика из колоне (4)	Број типова полигона	Укупан број полигона	Укупан број темена	Укупан број ивица
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
(5.5 <sup>1</sup> )	5	1	5 3	5 10	3	16	20	35
(5.5 <sup>2</sup> )	5	2	5 3	15 20	6	36	40	75
(5.5 <sup>3</sup> )	5	3	5 3	35 50	9	86	90	175
(5.5 <sup>4</sup> )	5	4	5 3	55 30	9	86	110	195
(5.5 <sup>5</sup> )	5	5	5 3	75 50	11	126	150	275

### 5.5.3.3 Полиедарске куполе класе 6

#### 5.5.3.3.1 Веза геометрије ПК (5.6<sup>f</sup>) са другим облицима и телима

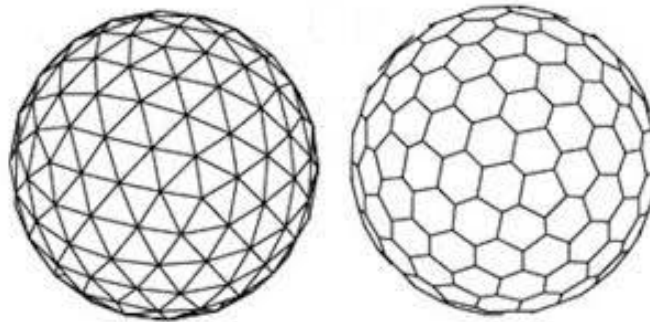
У форми ПК (5.6<sup>1</sup>) препознаје се део трункованог икосаедра ознаке (5.6<sup>2</sup>) у еnumerацији Архимедових тела. Форма је генерисана из теменог петоугла и шестоугаоних полигона омотача. Полиедарска купола у прве две фреквенције задржава све полигоне омотача у облику шестоугла, док се у остале три фреквенције, полигони који се налазе у хоризонталним осама структуре, трансформишу у петоуглове.



Слика 5-39) Трунковани икосаедар

Такође, у геометрији полиедарских купола, препознаје се и део трансформисаног дуала икосаедарске геодезијске сфере. Полиедарске куполе фреквенције 1 и 2 представљају делове наведеног тела неодређене фреквенције и

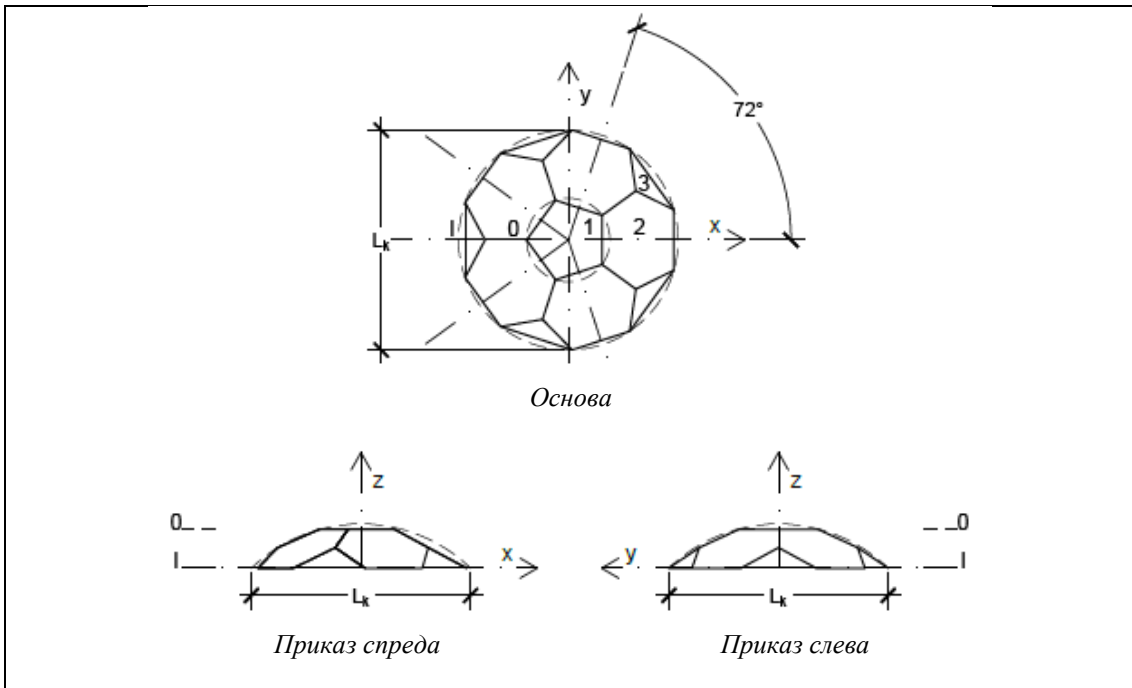
класе, док наведене куполе фреквенције 3, 4 и 5, са уведеним петоуглом у ослоначком појасу, одређују поменути дуал класе I, у енумерацији геодезијских сфера фреквенције једнаке фреквенцији полиедарске куполе.



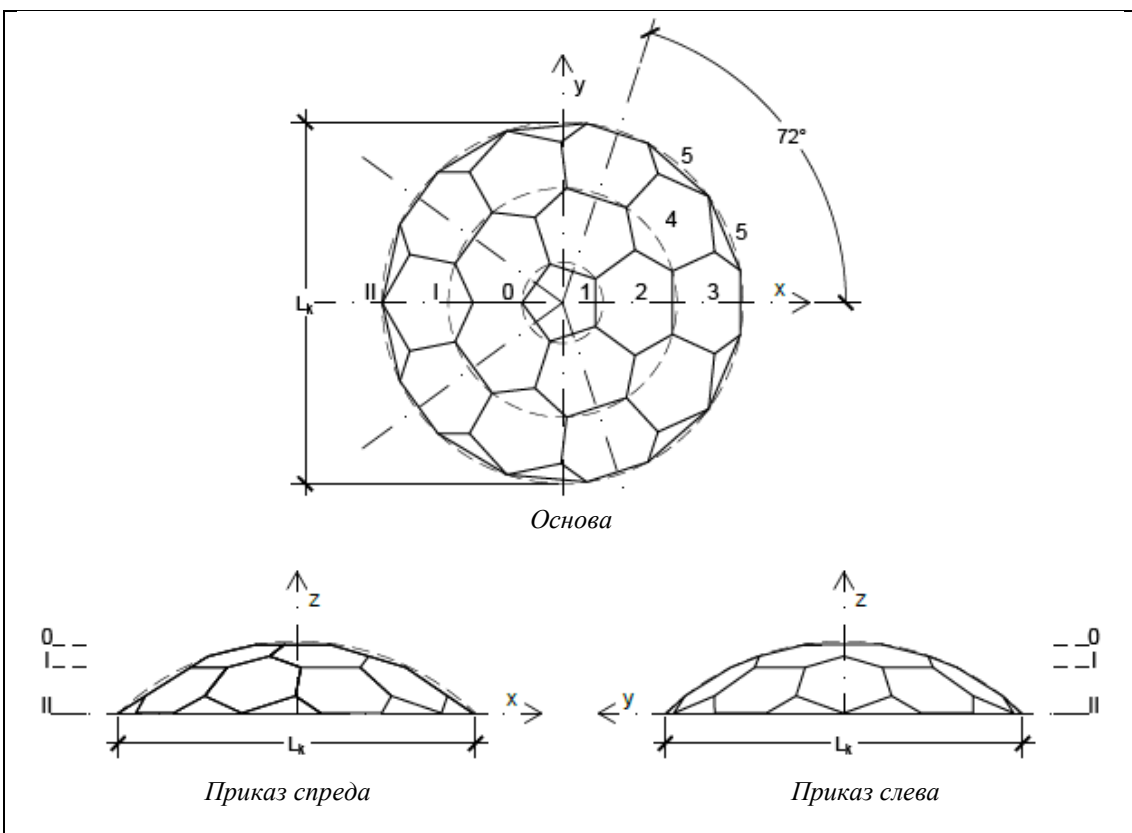
Слика 5-40) Икосаедарска геодезијска сфера и њен дуал класе I, фреквенције 4

#### 5.5.3.3.2 ПК (5.6<sup>f</sup>)

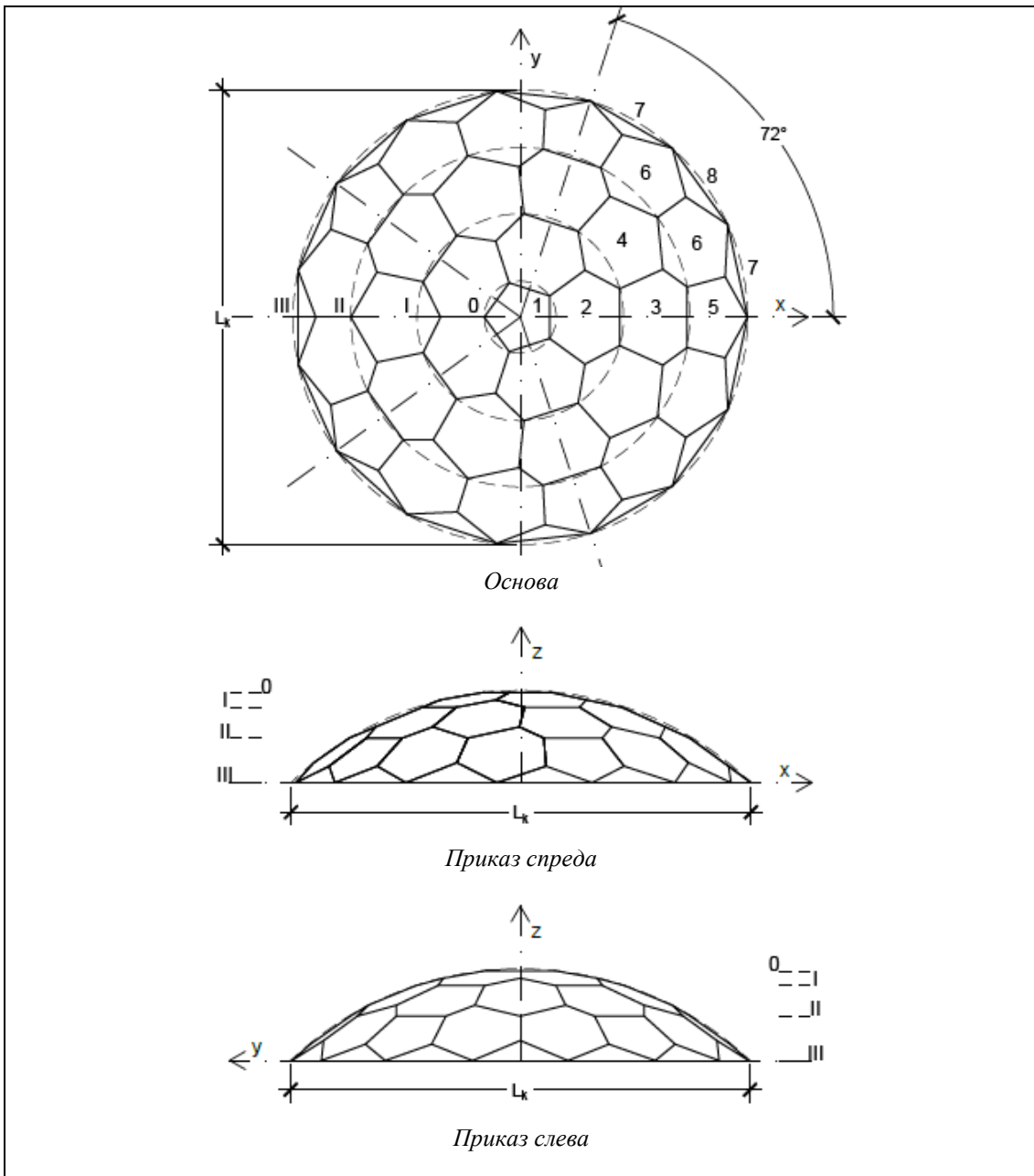
У фреквенцијама 1 и 2, задржавају се генерисани шестоугаони облици полигона омотача. У осталим фреквенцијама, у ослоначком појасу, генерисани шестоугаони облици полигона омотача, који се налазе у хоризонталним осама, трансформишу се у петоуглове.



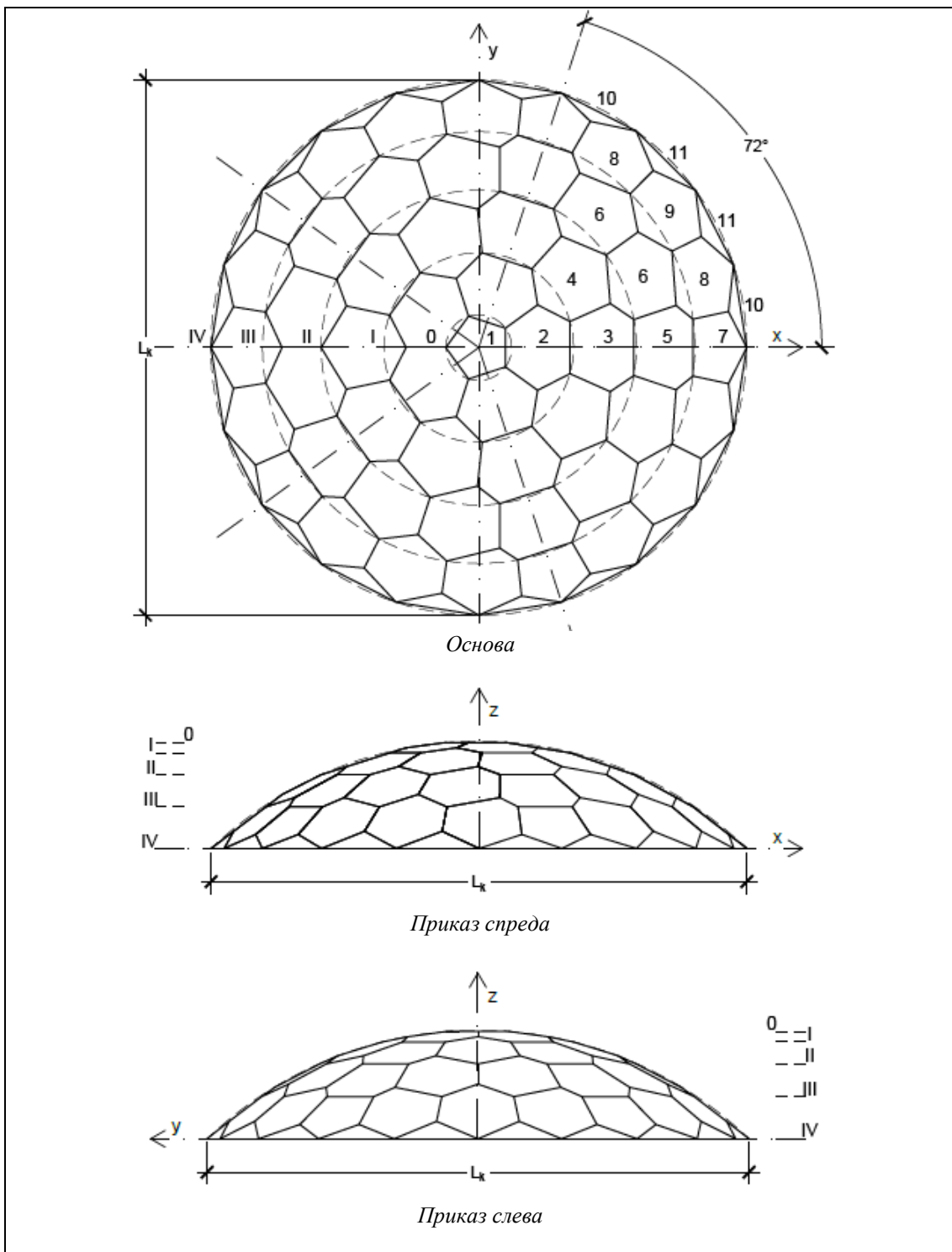
Слика 5-41) ПК (5.6<sup>1</sup>)



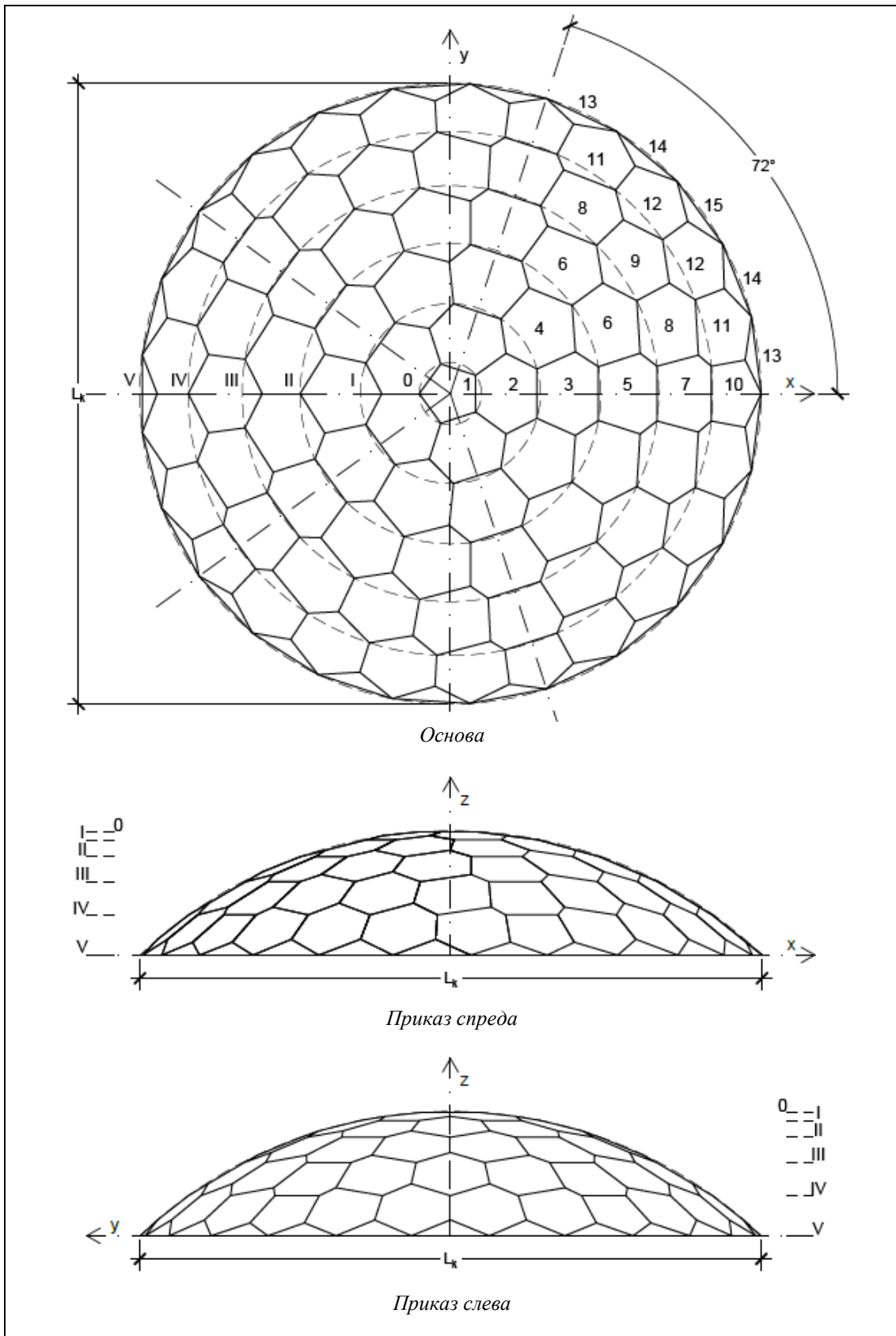
Слика 5-42) ПК (5.6<sup>2</sup>)



Слика 5-43) ПК (5.6³)



Слика 5-44) ПК (5.6<sup>4</sup>)



Слика 5-45) ПК (5.6<sup>5</sup>)

Табела 5-8) Геометријске карактеристике ПК (5.6<sup>f</sup>)

Нумеричка ознака	Облик теменог полигона	Број појасева	Облик полигона омотача	Број полигона облика из колоне (4)	Број типова полигона	Укупан број полигона	Укупан број темена	Укупан број ивица
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
(5.6 <sup>1</sup> )	5	1	6 3	5 5	3	11	20	30
(5.6 <sup>2</sup> )	5	2	6 3	15 10	5	26	45	70
(5.6 <sup>3</sup> )	5	3	6 5 3	25 5 15	8	46	75	120
(5.6 <sup>4</sup> )	5	4	6 5 3	45 5 20	11	71	120	190
(5.6 <sup>5</sup> )	5	5	6 5 3	70 5 25	15	101	175	275

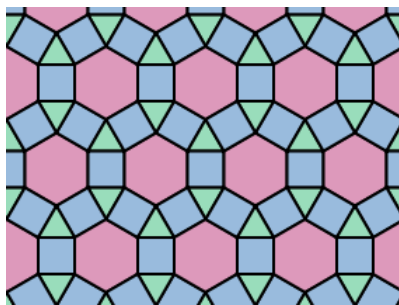
## 5.5.4 Полиедарске куполе фамилије 6

Темени полигон полиедарских купола фамилије 6 је облика правилног шестоугла, хексагона. Угао карактеристичног сектора генерисања у основи износи 60°.

### 5.5.4.1 Полиедарске куполе класе 4

#### 5.5.4.1.1 Веза геометрије ПК (6.4<sup>f</sup>) са другим облицима и телима

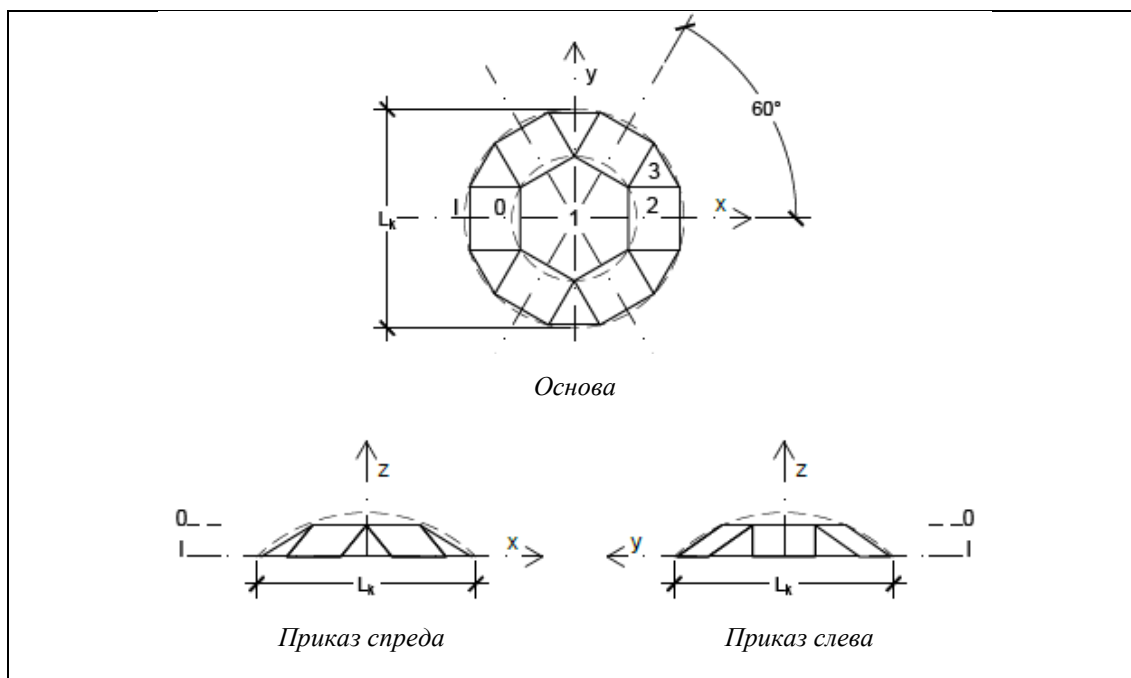
Теселација куполе базирана је на теселацији еуклидске равни (3.4.6.4).



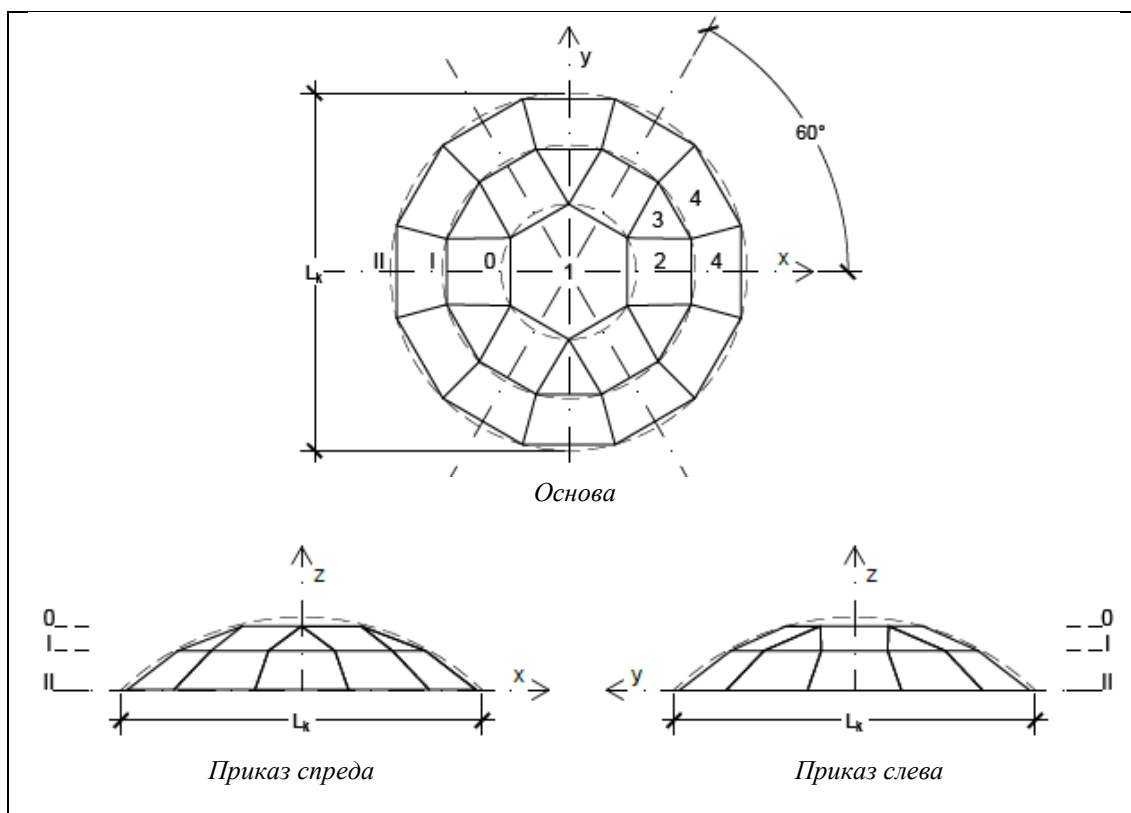
Слика 5-46) Теселација равни (3.4.6.4)



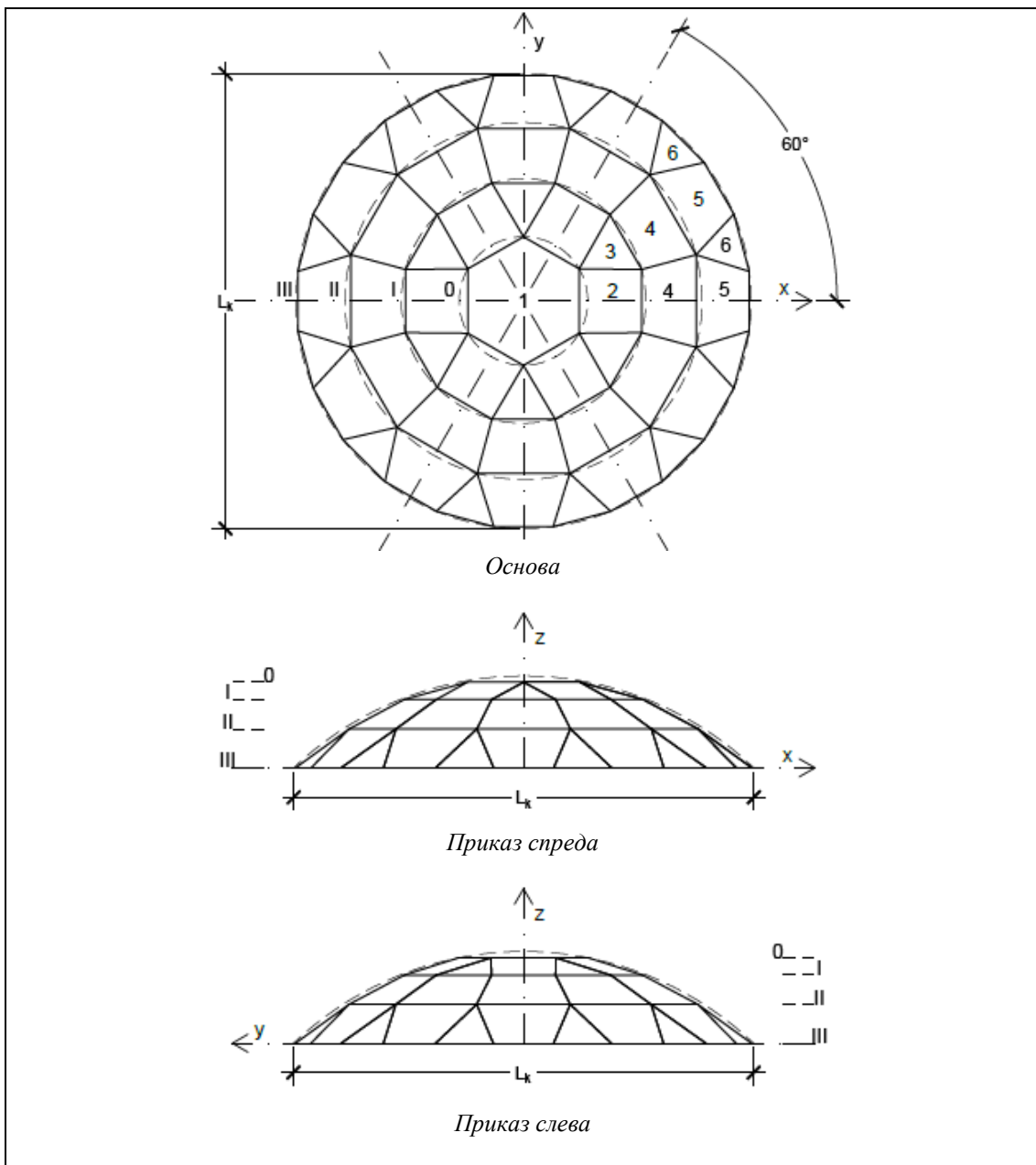
5.5.4.1.2 ПК (6.4<sup>f</sup>)



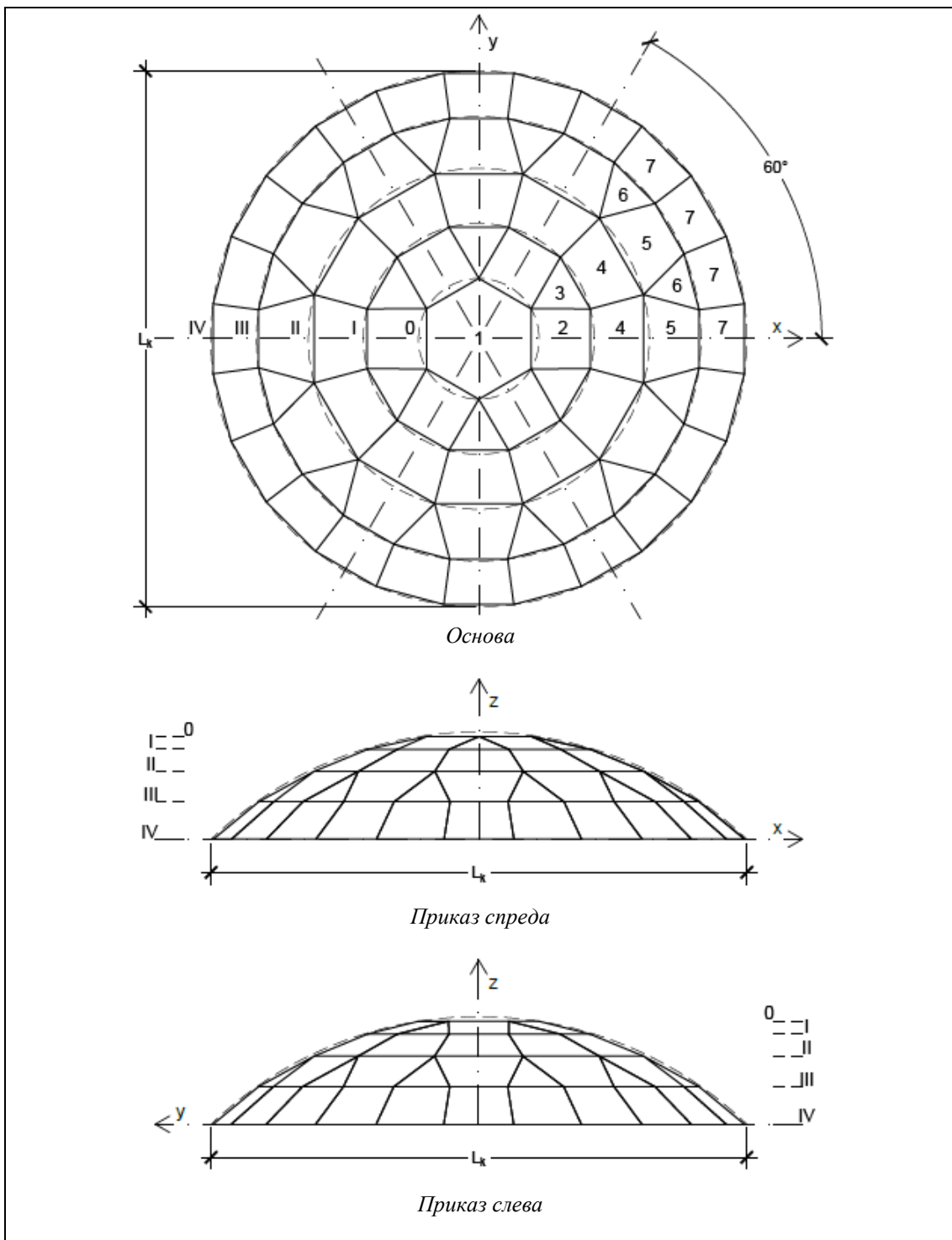
Слика 5-47) ПК (6.4<sup>f</sup>)



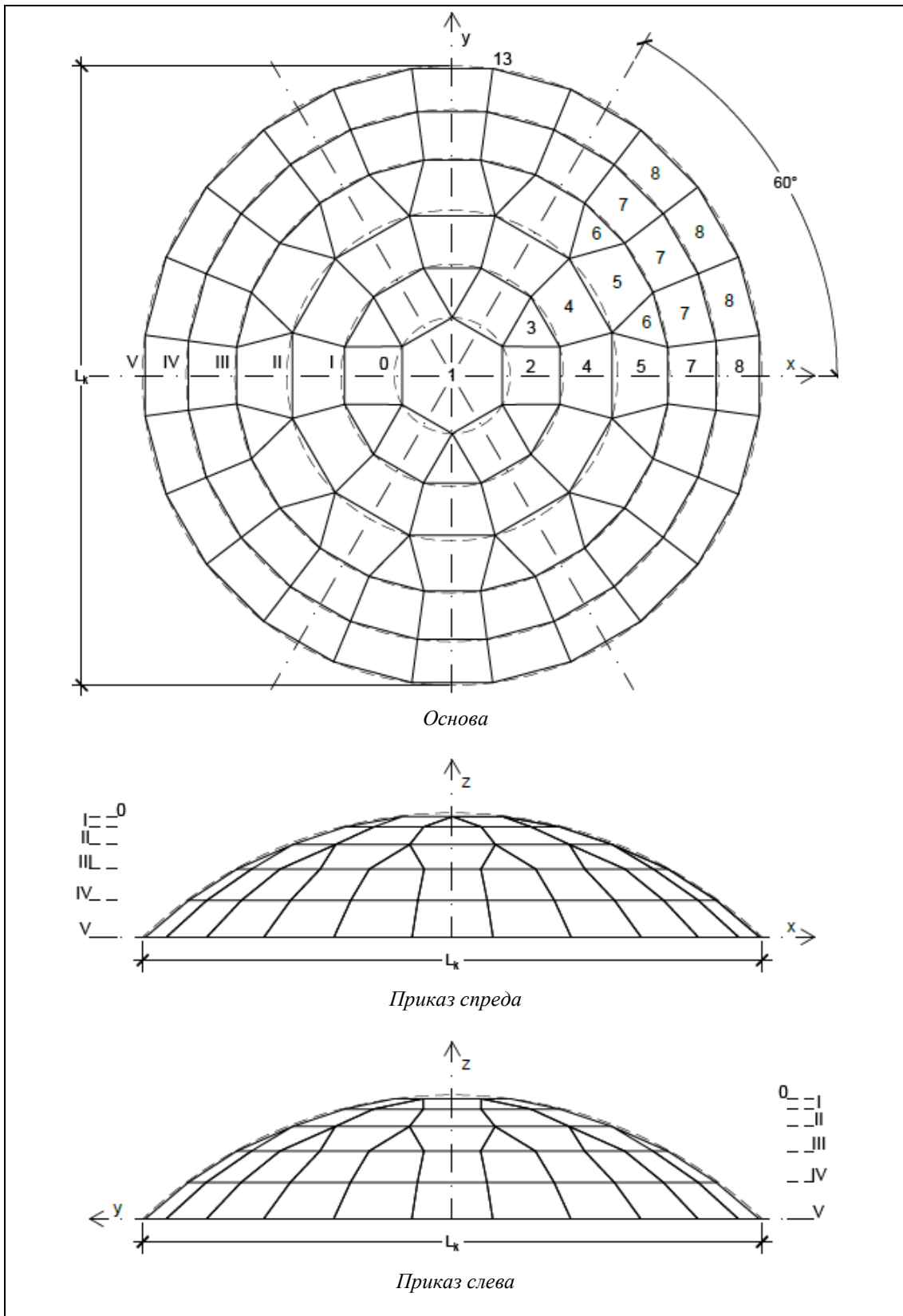
Слика 5-48) ПК 2 (6.4<sup>2</sup>)



Слика 5-49) ПК (6.4<sup>3</sup>)



Слика 5-50) ПК (6.4<sup>4</sup>)



Слика 5-51) ПК (6.4<sup>б</sup>)

Табела 5-9) Геометријске карактеристике ПК (6.4<sup>f</sup>)

Нумеричка ознака	Облик теменог полигона	Број појасева	Облик полигона омотача	Број полигона облика из колоне (4)	Број типова полигона	Укупан број полигона	Укупан број темена	Укупан број ивица
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
(6.4 <sup>1</sup> )	6	1	4 3	6 6	3	13	18	30
(6.4 <sup>2</sup> )	6	2	4 3	18 6	4	25	30	54
(6.4 <sup>3</sup> )	6	3	4 3	30 18	6	49	54	102
(6.4 <sup>4</sup> )	6	4	4 3	54 18	7	73	78	150
(6.4 <sup>5</sup> )	6	5	4 3	78 18	8	97	102	198

#### 5.5.4.2 Полиедарске куполе класе 5

##### 5.5.4.2.1 Веза геометрије ПК (6.5<sup>f</sup>) са другим облицима и телима

Геометрија куполе није генерисана из постојећих теселација, већ је генерисана нова. Формирана је од теменог шестоугла и омотача, ког чине примарни полигони, петоуглови и секундарни полигони, троуглови.

##### 5.5.4.2.2 ПК (6.5<sup>f</sup>)

Подела прстенова се врши на једнаке делове да би се у следећем, ширем појасу могли генерисати подударни полигони. Постоји разлика између полиедарске куполе фреквенције 1 и фреквенција 2-5, а састоји се у генерисању појаса изнад прстена I, без коришћења секундарних полигона између полигона омотача и теменог полигона. Полиедарска купола фреквенције 1 није погодна за формирање структуре са више појасева, због генерисане контуре у прстену I, која у основи готово да формира угао од 180°. С друге стране, полиедарска купола фреквенције 2 и више од два има пуно мањих, секундарних полигона у појасу до теменог полигона, те је нерационална при генерисању куполе фреквенције 1.

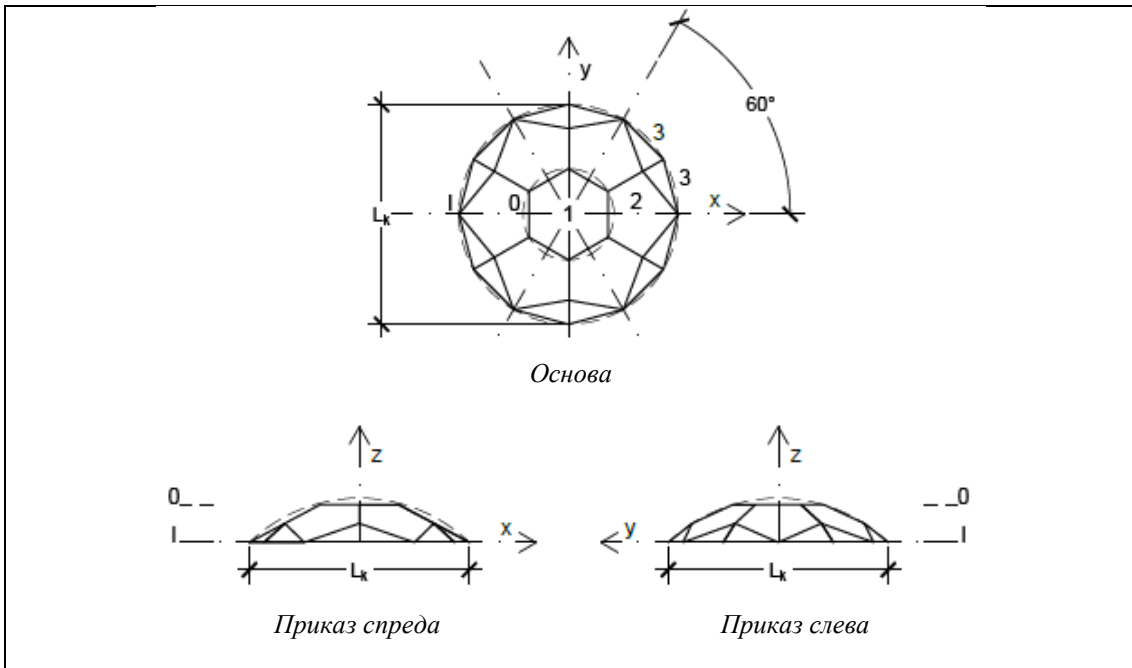
Карактеристично за полиедарску куполу фреквенције 1 јесте додавање два секундарна полигона (означена бројем 3) који имају заједничку страницу. У осталим фреквенцијама се додаје по један секундарни полигон.

У фреквенцији 2, оријентација петоуглова у појасу до теменог полигона је промењена у односу на полиедарске куполе фреквенције 1. У истом појасу генеришу се по два секундарна полигона, са заједничким теменом.

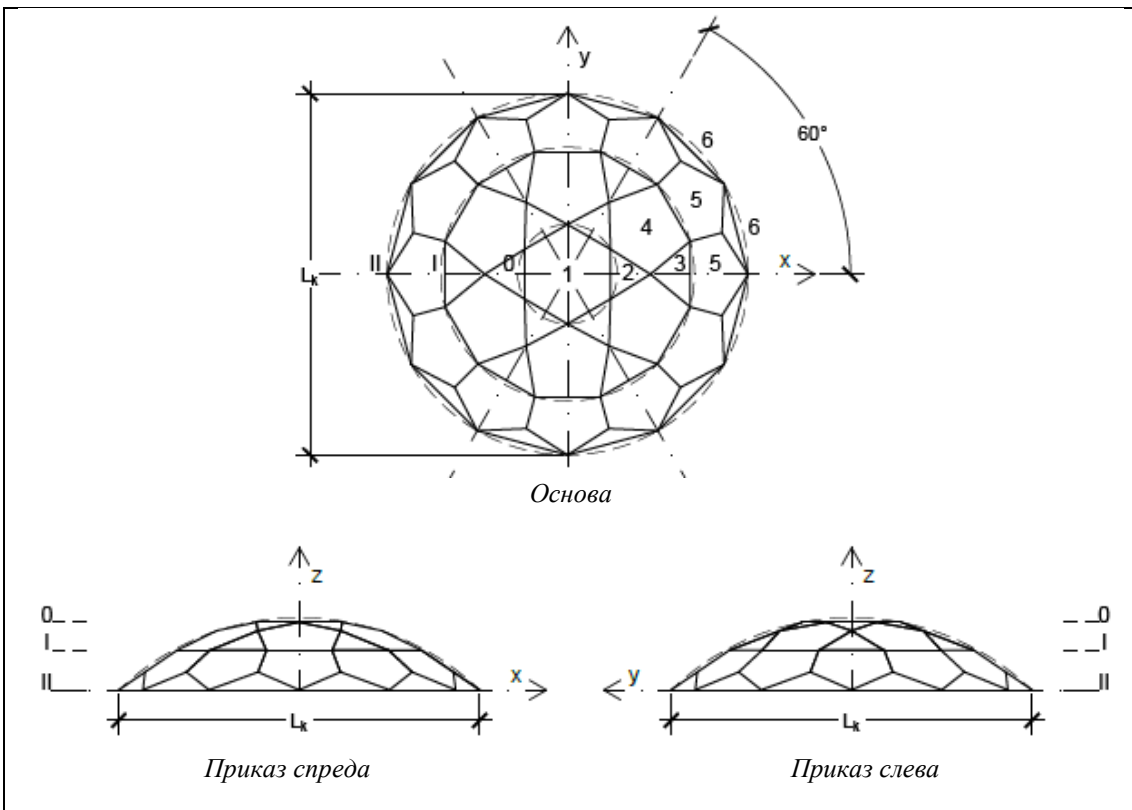
Последње генерисани појас у фреквенцији 3 има примарне полигоне облика петоугла оријентисаног тако да му је теме према центру, а прстен III додирује са два своја темена. Генерише се секундарни полигон који својом страницом лежи на наведени прстен. Подела прстена се врши на једнаке делове, тако да странице примарних и секундарних полигона чине тетиве исте дужине на прстену III.

У фреквенцији 4 се понавља оријентација петоуглова из појаса између прстенова I и II. Примарни полигони додирују прстен у основи куполе са по једним теменом.

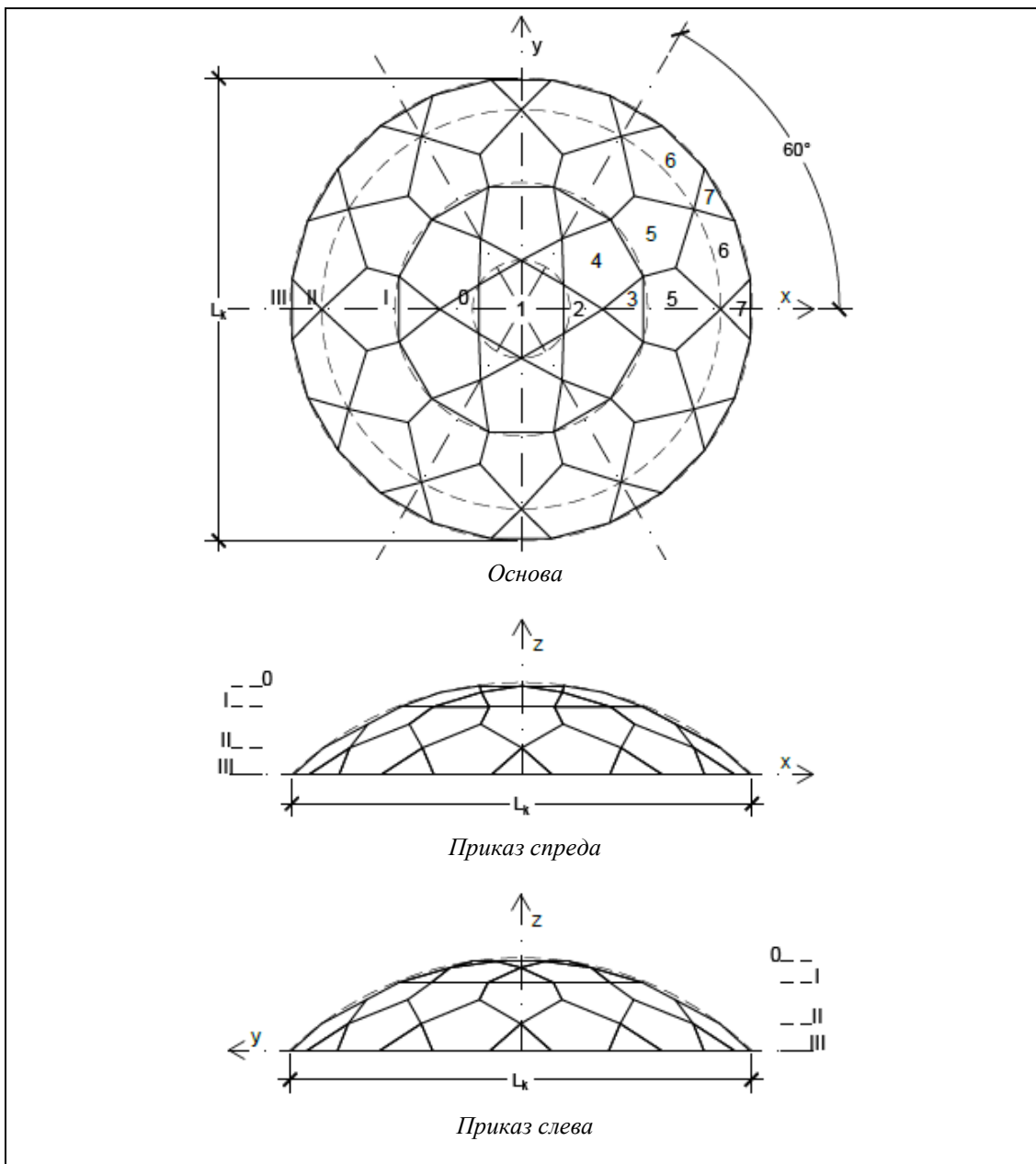
У фреквенцији 5, примарни полигони се окрећу и својим страницама леже у основи. Разлика у односу на претходни слично генерисан појас, код полиедарске куполе фреквенције 3, је у томе што се не генеришу секундарни полигони. Цео појас је генерисан само из петоуглова, јер би увођење секундарних полигона довело до генерисања великог броја примарних полигона малих димензија, али и једнак број секундарних полигона. Такође и код полиедарске куполе висине једнаке половини распона, ово представља рационалније решење.



Слика 5-52) ПК (6.5<sup>1</sup>)

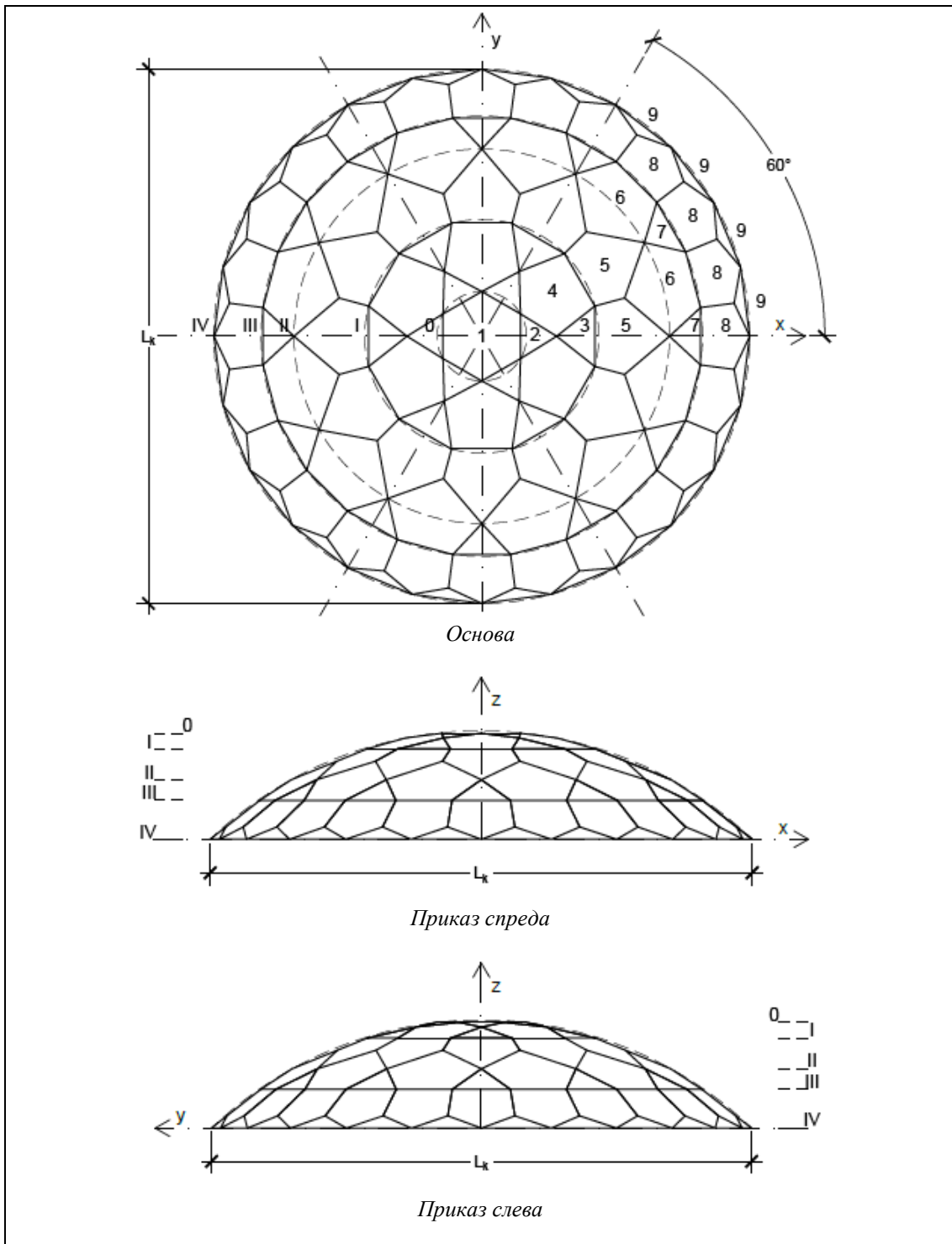


Слика 5-53) ПК (6.5<sup>2</sup>)

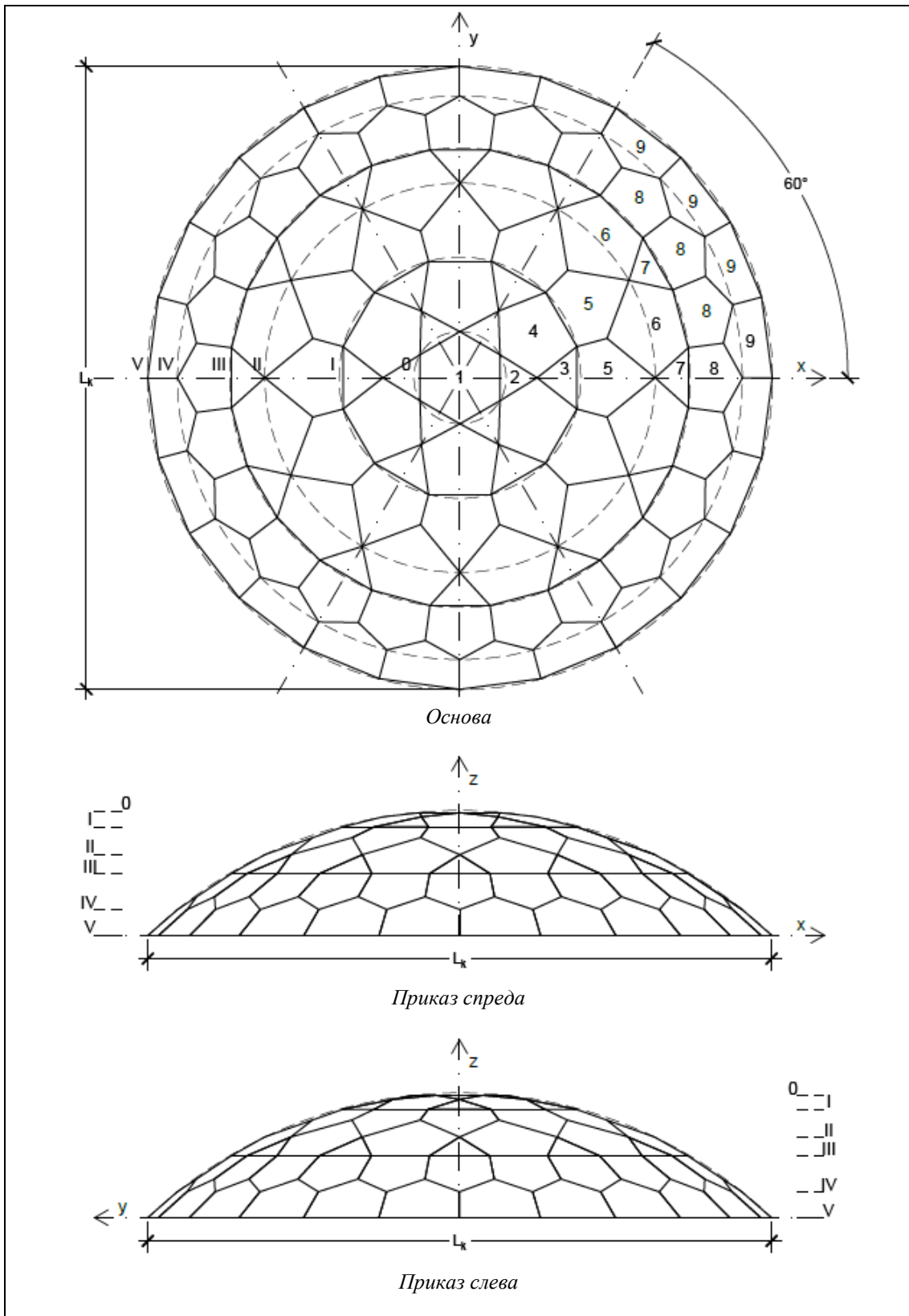


Слика 5-54) ПК (6.5<sup>3</sup>)





Слика 5-55) ПК (6.5<sup>4</sup>)



Слика 5-56) ПК (6.5<sup>5</sup>)

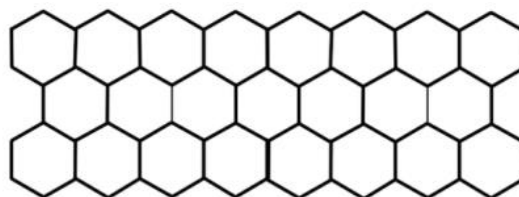
Табела 5-10) Геометријске карактеристике ПК (6.5<sup>f</sup>)

Нумеричка ознака	Облик теменог полигона	Број појасева	Облик полигона омотача	Број полигона облика из колоне (4)	Број типова полигона	Укупан број полигона	Укупан број темена	Укупан број ивица
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
(6.5 <sup>1</sup> )	6	1	5 3	6 12	3	19	24	42
(6.5 <sup>2</sup> )	6	2	5 3	18 24	6	43	48	90
(6.5 <sup>3</sup> )	6	3	5 3	30 24	7	55	72	126
(6.5 <sup>4</sup> )	6	4	5 3	54 48	9	103	120	222
(6.5 <sup>5</sup> )	6	5	5 3	78 24	9	103	144	246

### 5.5.4.3 Полиедарске куполе класе 6

#### 5.5.4.3.1 Веза геометрије ПК (6.6<sup>f</sup>) са другим облицима и телима

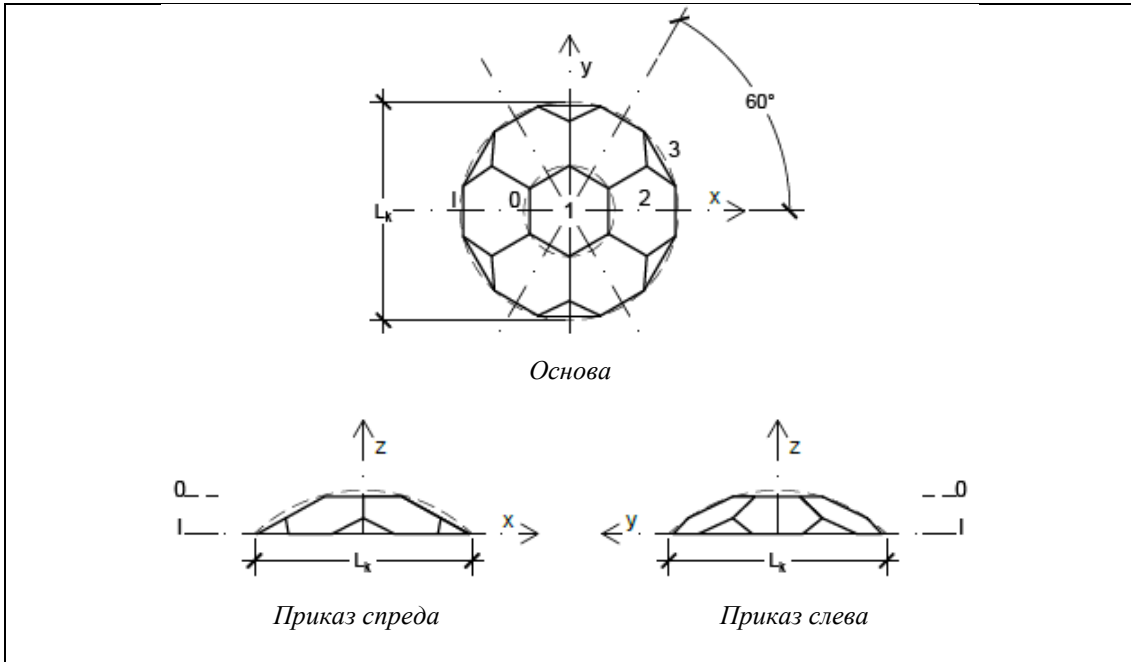
Геометрија куполе генерише се трансформацијом правилне теселације еуклидске равни, са ознаком (6<sup>3</sup>) у еnumerацији теселација, док је ознака структуре ПК (6.6<sup>f</sup>), где  $f$  означава њену фреквенцију.



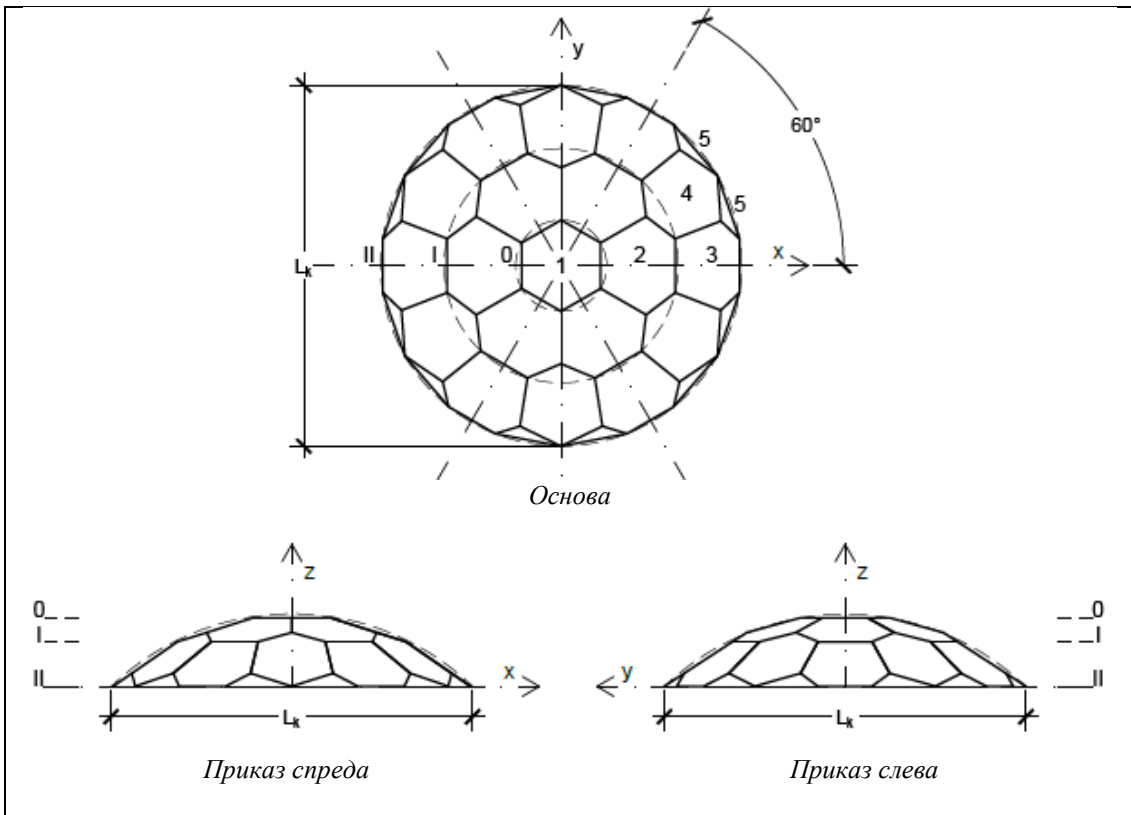
Слика 5-57) Теселација равни (6<sup>3</sup>)

#### 5.5.4.3.2 ПК (6.6<sup>f</sup>)

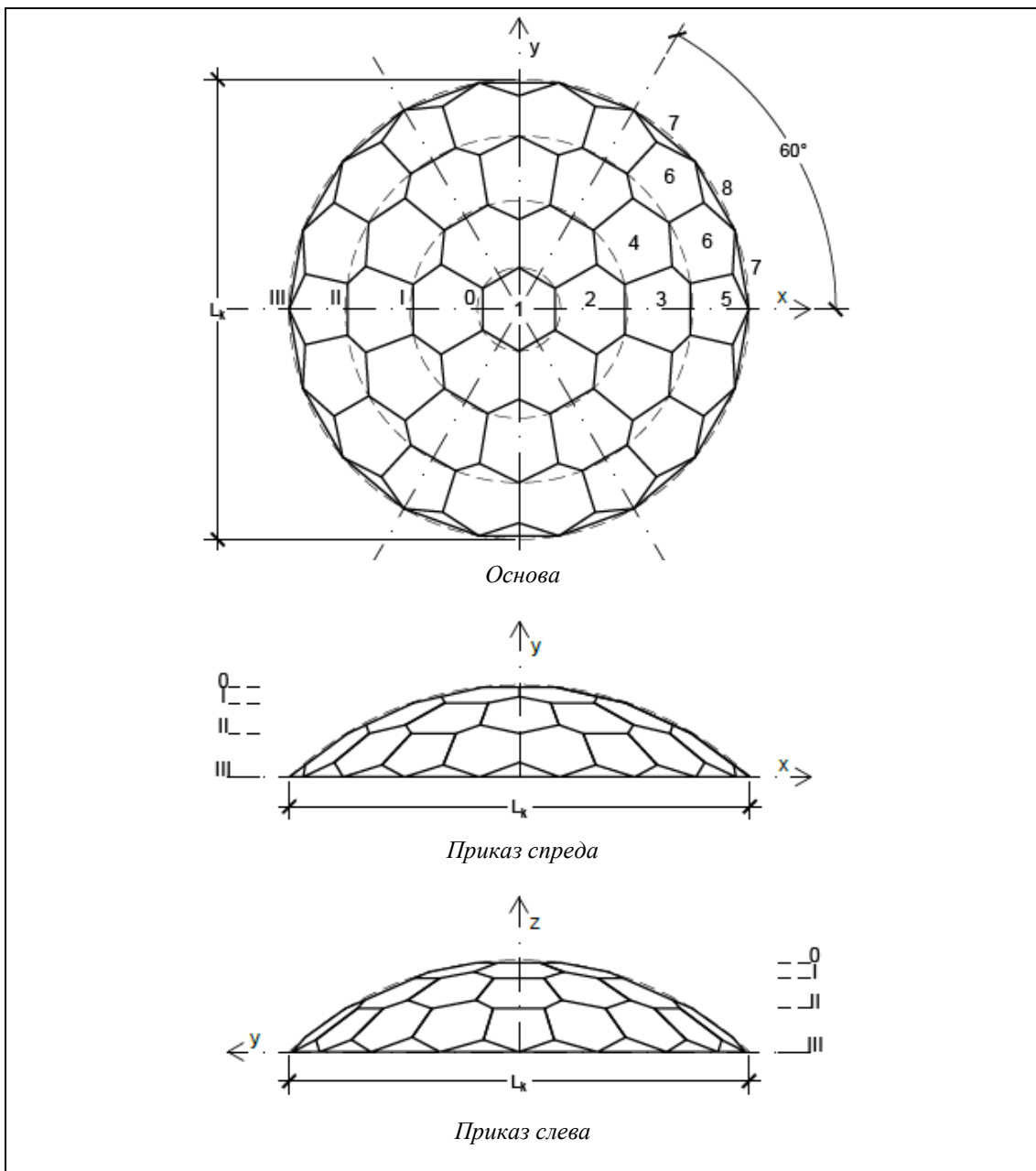
Поступак генерисања геометрије је исти као и за остале ПК исте класе.



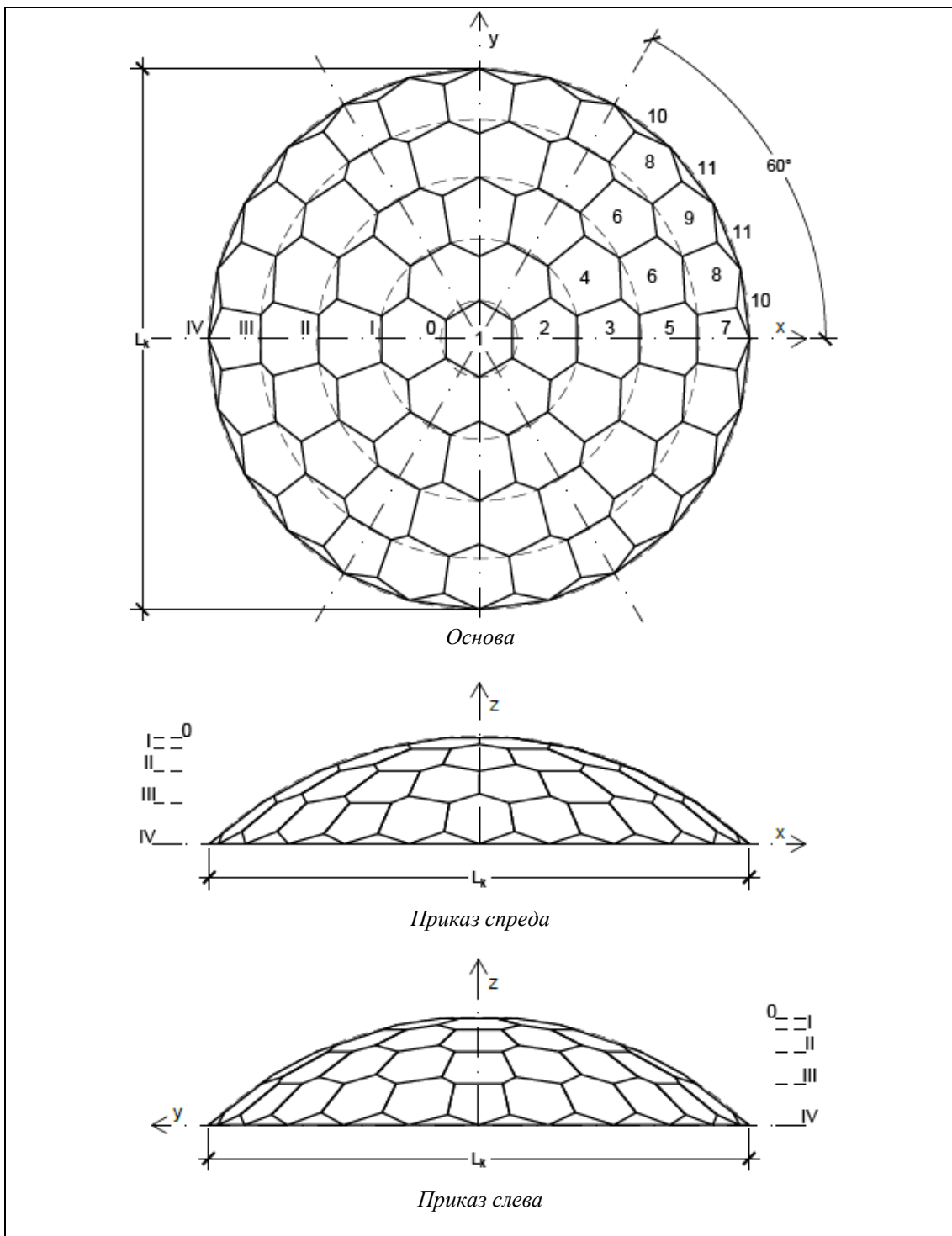
Слика 5-58) ПК (6.6<sup>1</sup>)



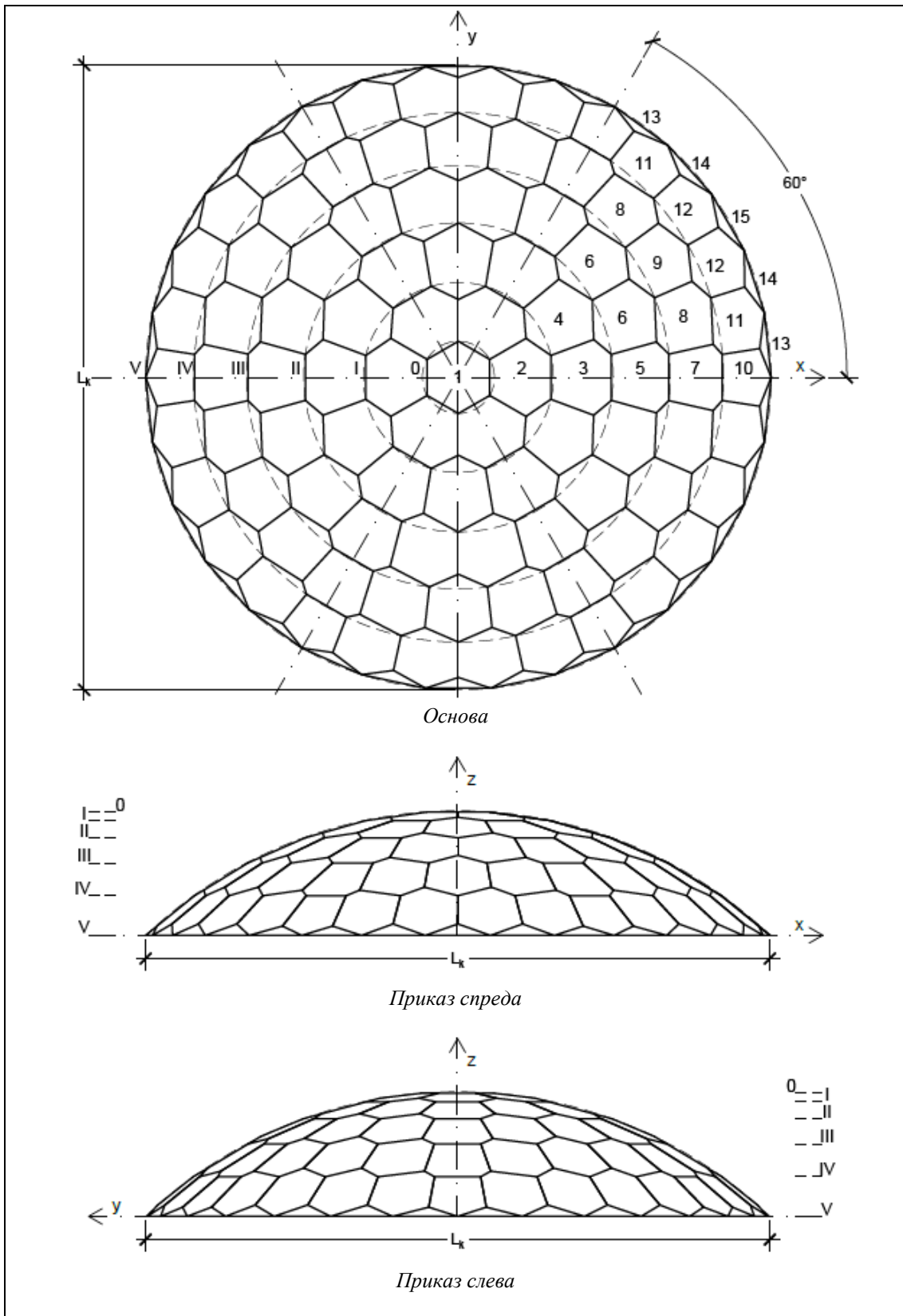
Слика 5-59) ПК (6.6<sup>2</sup>)



Слика 5-60) ПК (6.6<sup>3</sup>)



Слика 5-61) ПК (6.6<sup>А</sup>)



Слика 5-62) ПК (6.б<sup>5</sup>)

Табела 5-11) Геометријске карактеристике ПК (6.6<sup>f</sup>)

Нумеричка ознака	Облик теменог полигона	Број појасева	Облик полигона омотача	Број полигона облика из колоне (4)	Број типова полигона	Укупан број полигона	Укупан број темена	Укупан број ивица
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
(6.6 <sup>1</sup> )	6	1	6 3	6 6	3	13	24	36
(6.6 <sup>2</sup> )	6	2	6 3	18 12	5	31	54	84
(6.6 <sup>3</sup> )	6	3	6 5 3	30 6 18	8	55	90	144
(6.6 <sup>4</sup> )	6	4	6 5 3	54 6 24	11	85	144	228
(6.6 <sup>5</sup> )	6	5	6 5 3	84 6 30	15	121	210	330



## **6 ПКС од преднапрегнутих функционалних елемената са контурним штаповима од дрвета**

Производња функционалних елемената захтева одређен степен префабрикације, али и индустријализације тако организоване производње, што утиче на рационалност у реализацији ПКС.

У зависности од концепта ПКС и функционалног елемента, односно усвојене геометрије и фреквенције, односа висине и распона структуре, усвојених материјала, различито је и понашање структуре.

### **6.1 Карактеристике материјала**

Монтажу функционалних елемената потребно је остварити лако и брзо, по могућству без временске задршке. Лака механичка обрада и мале тежине компоненти конструкције, те лако руковање, истичу дрво као веома погодан материјал за формирање оваквих структура.

Дрво има бројне предности у односу на друге материјале:

- Мала специфична тежина;
- Лака механичка обрада дрвета;
- Добре физичке и механичке особине дрвета;
- Добра отпорност конструкција од дрвета на сеизмичке утицаје;
- Обрада се врши применом једноставних машина и алата;
- Лако формирање веза;
- Обновљив и еколошки прихватљив материјал;
- Добар топлотни и звучни изолатор;
- Енергетски јефтин и искористив у потпуности;
- Добра естетска својства (текстура, боја, сјај...).

Недостаци дрвета су:

- Квалитет грађе зависи од природних ресурса;
- Осетљивост на услове сушења и складиштења;
- Осетљивост на пожар, влагу, гљивице и инсекте;
- Осетљивост на УВ зрачења;
- Потреба за перманентном заштитом конструкција од дрвета;
- Осетљивост на променљивост услова за време експлоатације.

Свакако је од значаја и то што је дрво обновљив и еколошки чист материјал. Уз употребу еколошки чистих, разградивих препарата за заштитно третирање дрвета, дрво постаје незаменљив материјал.

С обзиром на то да су димензије функционалних елемената, између осталог, одређене и транспортним условима, то су димензије компоненти у границама примене монолитног дрвета (МД). У разматраној структури контурни штапови функционалних елемената формирани су од монолитног дрвета, четинара класе 2. Добијене димензије попречних пресека штапова не нарушавају економичност производње функционалних елемената, будући да се добијају мале вредности момената савијања.

Затеге у оквиру функционалних елемената су од топловаљаног округлог челика Ч-0560 (S355), оков је од одговарајућих челичних профила Ч-0360, док су вијци класе 5.6, осим навртки које се користе за остварење веза са затегама за преднапрезање, које су минималне класе 6.8. Челични елементи су малих димензија, што омогућава топло поцинковање потапањем, чиме се обезбеђује њихова дугорочна и економична заштита од корозије.

Као покривач структуре може се усвојити неки савремени, лаки материјал, као што је тенда, која се не преднапреже, термојастуци (*ETFE*), мембрана, која се преднапреже, али и слојевити термоизолациони панели. У зависности од тога, понашање структуре може бити другачије. Иако је као покривач, у случају разматране структуре, усвојена мембрана, уместо ње се може усвојити и други

покривач одговарајућег замењујућег оптерећења које делује на разупирач, без значајније промене у напрезањима структуре и њеним деформацијама.

Као покривач разматране структуре усвојена је савремена, лака мембрана од ПВЦ-а, типа 1, једна од две најчешће коришћене врсте материјала за израду мембрана<sup>45</sup>. Носеће језгро ПВЦ мембране је од полиестера, а има обострану заштиту од смесе на бази ПВЦ (*PVC: polyvinylchloride*). Други материјал који се најчешће користи за израду мембрана има носеће језгро од фибергласа и заштиту од ПТФЕ (*PTFE: polytetrafluoroethylene*). Обе врсте мембрана имају заштиту од УВ зрачења која штити и кориснике и саму структуру.

Табела 6-1) Типови ПВЦ мембрана (WG Messe Frankfurt)<sup>46</sup>

Тип	Дозвољени напони затезања, I/II правац, (kN/m)	Тежина (g/m <sup>2</sup> )
1	60/60	800
2	88/79	900
3	115/102	1050
4	149/128	1300
5	196/166	1450

Табела 6-2) Класификација ПТФЕ мембрана<sup>47</sup>

Тип	Дозвољени напони затезања, I/II правац, (kN/m)	Тежина (g/m <sup>2</sup> )
G1	26/22	500
G2	43/28	420
G3	70/70	800
G4	90/72	1000
G5	124/100	1200
G6	140/120	1500
G7	170/158	1600

<sup>45</sup> Милошевић, Вук, Оптимизација мембранских конструкција инкременталним наношењем прорачунског оптерећења снегом, Техника – наше грађевинарство 69, 2015, стр. 29.

<sup>46</sup> Blum, Rainer; Bögner, Heidrun; Némoz, Guy, Material properties and testing, Chapter 9, European Design Guide for Tensile Surface Structures, стр. 230.

<sup>47</sup> Blum, Rainer; Bögner, Heidrun; Némoz, Guy, Material properties and testing, Chapter 9, European Design Guide for Tensile Surface Structures, стр. 230.

Упоређујући мембране од ова два материјала, предност мембрана од ПВЦ-а је то што су јефтине и до пет пута, флексибилније су, чиме се, са једне стране, смањују опасности од оштећења током израде и монтаже, а са друге, омогућава се формирање једноструко и двоструко закривљених форми без набирања<sup>48</sup>. Један од основних недостатака наведених мембрана је краћи експлоатациони век (12-15 година), у односу на ПТФЕ мембране, чији је експлоатациони век и до 30 година<sup>49</sup>.

Покривач се може поставити са доње или горње стране, а у оба случаја би се монтирао за разуирач. Предвиђено је његово постављање са горње стране, а предност тога је несумњива, како из разлога заштите структуре (влага, УВ зрачење), преко онемогућавања уноса додатног оптерећења на структуру од ветра (већи отпор структуре) и снега (нагомилавање снега), тако и из практичних и економских разлога (мање радова на одржавању структуре). Било који покривач да се усвоји, он не би требало да се ослања на круте штапове или затеге, у противном би штапови били оптерећени и моментом савијања услед наведеног оптерећења, док би се ослањањем на затеге реметила пројектована вредност сила преднапрезања у њима. У случају мембране није неопходно њено причвршћење за разуираче, док би у случају других покривача њихово причвршћење било неопходно због дејства ветра.

## 6.2 Геометрија ПКС

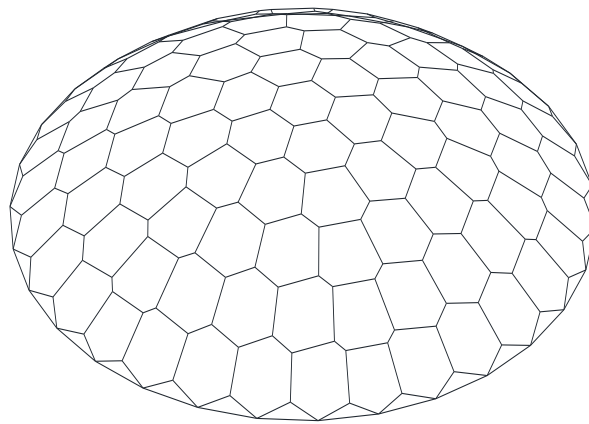
Геометријска анализа и класификација, извршене у поглављу 5, довеле су до генерисања одређених полиедарских купола, дефинисаних кроз фамилије и класе. При формирању структуре, функционални елементи могу имати различиту геометрију, у зависности од геометрије усвојене полиедарске куполе.

---

<sup>48</sup> Benjamin Nathan Bridgens, Architectural fabric properties: determination, representation & prediction, School of Civil Engineering & Geosciences at the University of Newcastle, 2005, Стр. 36

<sup>49</sup> Benjamin Nathan Bridgens, Architectural fabric properties: determination, representation & prediction, School of Civil Engineering & Geosciences at the University of Newcastle, 2005, Стр. 36

За проверу структуре, у раду је разматран статички модел базиран на геометрији ПК (6.6<sup>5</sup>), која има шестоугаоне полигоне и на месту теменог полигона и на местима полигона омотача, осим у хоризонталним осама структуре, у ослоначком појасу, где су генерисани петоуглови. Распон анализираних структуре је 30,0 метара, а дефинисан је условима транспорта функционалних елемената. Висина структуре у темену сфере генерисања износи 6,0 метара.



Слика 6-1) Аксонометрија модела ПК (6.6<sup>5</sup>)

Параметарски подаци у генерисању полиедарске куполе су распон ( $L_k=30,0$  m), висина ( $H_k=6,0$  m) и њена фреквенција ( $f=5$ ). Из наведених података се одређују угао генерисања куполе ( $\beta_k$ ) и полупречник сфере генерисања ( $R_k$ ):

$$\beta_k = 4 \cdot \operatorname{atn} \frac{2 \cdot H_k}{L_k} = 87,206^\circ$$

$$R_k = \frac{L_k}{2 \cdot \sin \frac{\beta_k}{2}} = 21,750 \text{ m}$$

Генерисање геометрије ПКС спроводи се кроз три фазе. У првој фази се одређује положај фиктивних прстенова, у којима леже сва примарна темена, у другој се одређује положај примарних темена на наведеним прстеновима, док се у трећој фази одређује положај секундарних темена структуре, која се налазе између прстенова.

### 6.2.1 Одређивање положаја фиктивних прстенова

Будући да сви полигони генерисања прстенова заузимају исти положај у односу на раван генерисања, то су углови генерисања свих појасева једнаки. Однос угла генерисања теменог полигона и угла генерисања полигона појасева ( $c_p$ ) прорачунава се из односа велике дијагонале теменог полигона према малој дијагонали полигона омотача, односно из односа пречника кружнице описане око теменог полигона према пречнику кружнице уписане у полигон омотача:

$$c_p = \frac{d_{ot}}{d_{up}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,1547$$

$$\beta_p = \frac{\beta_k}{2 \cdot \square + c_p} = 7,81784^\circ$$

$$\beta_t = c_p \cdot \beta_p = 9,02726^\circ$$

За сваки од прстенова ( $i$ ) одређује се његов угао генерисања ( $\beta_{pr,i}$ ), пречник ( $d_{pr,i}$ ) и положај ( $Z_{pr,i}$ ), у односу на центар основе, помоћу образаца:

$$\beta_{pr,i} = \beta_t + 2 \cdot i \cdot \beta_p$$

$$d_{pr,i} = 2 \cdot R_\square \cdot \sin \frac{\beta_{pr,i}}{2}$$

$$r_{pr,i} = \frac{d_{pr,i}}{2}$$

$$Z_{pr,i} = H_k - r_{pr,i} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta_{pr,i}}{4}$$

Фиктивни прстен број пет (V) је ослоначки, те је у основи куполе, тако да уједно представља и контролу прорачунатих података.

Табела 6-3) Геометријске карактеристике фиктивних прстенова

Ознака прстена	Угао генерисања прстена (°)	Полупречник прстена (m)	Висинска кота прстена (m)
Нулти	9,027	1,712	5,933
I	24,663	4,645	5,499
II	40,299	7,492	4,669
III	55,934	10,200	3,460
IV	71,570	12,718	1,894
V	87,206	15,000	0,000

## 6.2.2 Одређивање положаја примарних темена

Добијене висинске коте фиктивних прстенова су уједно и вредности  $Z$  координата примарних темена која се налазе на њима. Остале координате ће се одредити из хоризонталне поделе сваког од прстенова, у зависности од дефинисане геометрије ПК (6.6<sup>5</sup>).

С обзиром на распоред шестоуглова омотача, хоризонтална подела прстенова врши се у односу  $\alpha_{1,1} : \alpha_{2,1} = 1 : 1,25$ , за први прстен и даље, како је дефинисано у поглављу 5.5.1.3:

$$c_{pr} = \frac{\alpha_{2,i}}{\alpha_{1,i}} = 1,25$$

$$\alpha_{1,i} = \frac{\alpha_s}{1 + (b_{pr,i} - 1) \cdot c_{pr,i}}$$

$$\alpha_{2,i} = c_{pr} \cdot \alpha_{1,i}$$

осим за нулти прстен:

$$\alpha_{1,0} = \alpha_s$$

$$\alpha_{2,0} = 0$$

као и за прстен чија ознака одговара фреквенцији полиедарске куполе (у овом случају прстен V):

$$\alpha_{1,f} = 0$$

$$\alpha_{2,f} = \frac{\alpha_s}{c_{pr}}$$

Табела 6-4) Углови поделе фиктивних прстенова

Ознака прстена	Број подела прстена	Угао поделе $\alpha_{1,i}$ (°)	Угао поделе $\alpha_{2,i}$ (°)
Нулти	1	60,000	0,000
I	2	26,667	33,333
II	3	17,143	21,429
III	4	12,632	15,790
IV	5	10,000	12,500
V	5	0,000	12,000

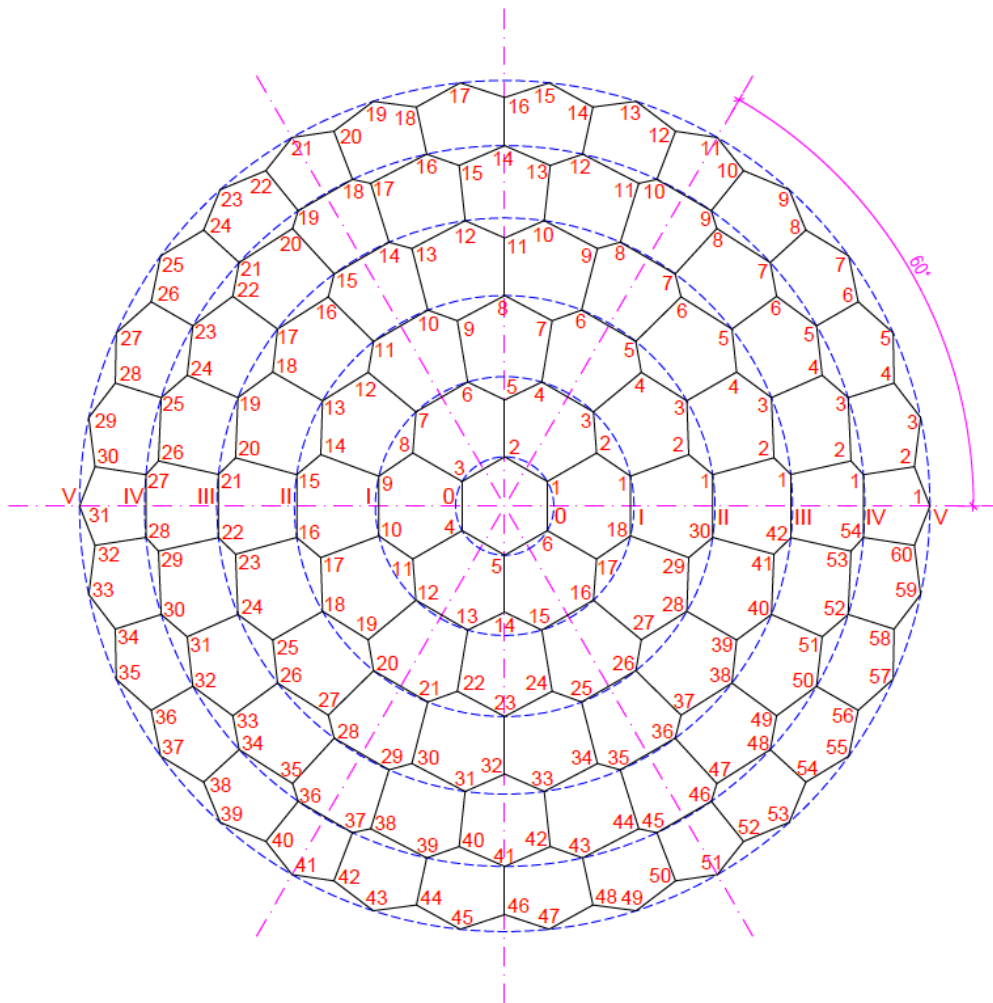
### 6.2.3 Одређивање положаја секундарних темена

Положај секундарних темена у ослоначком појасу одређује се позивањем функције *PresekRRS*, док се положај секундарних темена у осталим појасевима одређује позивањем функције *Presek3R*, како је већ дефинисано у поглављу 5.4.3. Функције, као улазне податке, захтевају положај примарних темена, којима су одређене равни суседних полигона омотача.

### 6.2.4 Координате темена

Ознака темена у табели координата садржи ознаку прстена и редни број темена у појасу око кога је описан прстен наведене ознаке, независно за сваки од њих. Темена су означена редом, без обзира да ли су примарна или секундарна. Будући да положај секундарног темена зависи од положаја примарних, то се прво одређују положаји примарних. Биће приказане координате темена у карактеристичном сегменту куполе, са углом сегмента куполе  $\alpha_s=60^\circ$ , док се координате осталих темена могу једноставно извести из добијених њиховом поларном мултипликацијом.





Слика 6-2) Распоред прстенова и темена

Табела 6-5) Координате темена ПК (6.6<sup>5</sup>)

Ознака темена	Ознака координате	Алгебарска вредност координате	Нумеричка вредност (m)
T <sub>0-1</sub>	X	$\cos(\alpha_{1,0}/2) \cdot r_{pr,0}$	1,482
	Y	$\sin(\alpha_{1,0}/2) \cdot r_{pr,0}$	0,856
	Z	$Z_{pr,0}$	5,933
T <sub>I-1</sub>	X	$\cos(\alpha_{1,I}/2) \cdot r_{pr,I}$	4,520
	Y	$\sin(\alpha_{1,I}/2) \cdot r_{pr,I}$	1,071
	Z	$Z_{pr,I}$	5,498
T <sub>I-2</sub>	X	$Presek3R(T_{I-1}, T_{0-6}, T_{0-1}, T_{0-2}, T_{I-3}, T_{II-3})$	3,299
	Y		1,905
	Z		5,673
T <sub>I-3</sub>	X	$\cos(\alpha_s - \alpha_{1,I}/2) \cdot r_{pr,I}$	3,188
	Y	$\sin(\alpha_s - \alpha_{1,I}/2) \cdot r_{pr,I}$	3,379
	Z	$Z_{pr,I}$	5,498

Ознака темена	Ознака координате	Алгебарска вредност координате	Нумеричка вредност (m)
T <sub>II-1</sub>	X	$\cos(\alpha_{1,II}/2) \cdot r_{pr,II}$	7,408
	Y	$\sin(\alpha_{1,II}/2) \cdot r_{pr,II}$	1,117
	Z	$Z_{pr,II}$	4,669
T <sub>II-2</sub>	X	$Presek3R(T_{II-1}, T_{I-18}, T_{I-1}, T_{I-3}, T_{II-3}, T_{III-3})$	6,545
	Y		1,829
	Z		4,917
T <sub>II-3</sub>	X	$\cos(\alpha_s/2) \cdot r_{pr,II}$	6,488
	Y	$\sin(\alpha_s/2) \cdot r_{pr,II}$	3,746
	Z	$Z_{pr,II}$	4,669
T <sub>II-4</sub>	X	$Presek3R(T_{II-3}, T_{I-1}, T_{I-3}, T_{I-4}, T_{II-5}, T_{III-5})$	4,857
	Y		4,754
	Z		4,917
T <sub>II-5</sub>	X	$\cos(\alpha_s - \alpha_{1,II}/2) \cdot r_{pr,II}$	4,671
	Y	$\sin(\alpha_s - \alpha_{1,II}/2) \cdot r_{pr,II}$	5,858
	Z	$Z_{pr,II}$	4,669
T <sub>III-1</sub>	X	$\cos(\alpha_{1,III}/2) \cdot r_{pr,III}$	10,138
	Y	$\sin(\alpha_{1,III}/2) \cdot r_{pr,III}$	1,122
	Z	$Z_{pr,III}$	3,460
T <sub>III-2</sub>	X	$Presek3R(T_{III-1}, T_{II-30}, T_{II-1}, T_{II-3}, T_{III-3}, T_{IV-3})$	9,532
	Y		1,705
	Z		3,729
T <sub>III-3</sub>	X	$\cos((\alpha_s - \alpha_{1,III})/3 + \alpha_{1,III}/2) \cdot r_{pr,III}$	9,450
	Y	$\sin((\alpha_s - \alpha_{1,III})/3 + \alpha_{1,III}/2) \cdot r_{pr,III}$	3,838
	Z	$Z_{pr,III}$	3,460
T <sub>III-4</sub>	X	$Presek3R(T_{III-3}, T_{II-1}, T_{II-3}, T_{II-5}, T_{III-5}, T_{IV-5})$	8,209
	Y		4,740
	Z		3,834
T <sub>III-5</sub>	X	$\cos(2 \cdot (\alpha_s - \alpha_{1,III})/3 + \alpha_{1,III}/2) \cdot r_{pr,III}$	8,049
	Y	$\sin(2 \cdot (\alpha_s - \alpha_{1,III})/3 + \alpha_{1,III}/2) \cdot r_{pr,III}$	6,265
	Z	$Z_{pr,III}$	3,460
T <sub>III-6</sub>	X	$Presek3R(T_{III-5}, T_{II-3}, T_{II-5}, T_{II-6}, T_{III-7}, T_{IV-7})$	6,242
	Y		7,402
	Z		3,729
T <sub>III-7</sub>	X	$\cos(\alpha_s - \alpha_{1,III}/2) \cdot r_{pr,III}$	6,041
	Y	$\sin(\alpha_s - \alpha_{1,III}/2) \cdot r_{pr,III}$	8,219
	Z	$Z_{pr,III}$	3,460

Ознака темена	Ознака координате	Алгебарска вредност координате	Нумеричка вредност (m)
T <sub>IV-1</sub>	X	$\cos(\alpha_{1,IV}/2) \cdot r_{pr,IV}$	12,670
	Y	$\sin(\alpha_{1,I\Box}/2) \cdot r_{pr,IV}$	1,108
	Z	$Z_{pr,IV}$	1,894
T <sub>IV-2</sub>	X	$Presek3R(T_{IV-1}, T_{III-42}, T_{III-1}, T_{III-3}, T_{IV-3}, T_{V-3})$	12,224
	Y		1,591
	Z		2,170
T <sub>IV-3</sub>	X	$\cos((\alpha_s - \alpha_{1,IV})/4 + \alpha_{1,IV}/2) \cdot r_{pr,IV}$	12,130
	Y	$\sin((\alpha_s - \alpha_{1,IV})/4 + \alpha_{1,\Box V}/2) \cdot r_{pr,IV}$	3,824
	Z	$Z_{pr,IV}$	1,894
T <sub>IV-4</sub>	X	$Presek3R(T_{IV-3}, T_{III-1}, T_{III-3}, T_{III-5}, T_{IV-5}, T_{V-5})$	11,209
	Y		4,613
	Z		2,316
T <sub>IV-5</sub>	X	$\cos(\alpha_s/2) \cdot r_{pr,IV}$	11,014
	Y	$\sin(\alpha_s/2) \cdot r_{pr,IV}$	6,359
	Z	$Z_{pr,IV}$	1,894
T <sub>IV-6</sub>	X	$Presek3R(T_{IV-5}, T_{III-3}, T_{III-5}, T_{III-7}, T_{IV-7}, T_{V-7})$	9,599
	Y		7,401
	Z		2,316
T <sub>IV-7</sub>	X	$\cos(3 \cdot (\alpha_s - \alpha_{1,IV})/4 + \alpha_{1,IV}/2) \cdot r_{pr,IV}$	9,377
	Y	$\sin(3 \cdot (\alpha_s - \alpha_{1,IV})/4 + \alpha_{1,IV}/2) \cdot r_{pr,IV}$	8,592
	Z	$Z_{pr,IV}$	1,894
T <sub>IV-8</sub>	X	$Presek3R(T_{IV-7}, T_{III-5}, T_{III-7}, T_{III-8}, T_{IV-9}, T_{V-9})$	7,490
	Y		9,791
	Z		2,170
T <sub>IV-9</sub>	X	$\cos(\alpha_s - \alpha_{1,IV}/2) \cdot r_{pr,IV}$	7,295
	Y	$\sin(\alpha_s - \alpha_{1,IV}/2) \cdot r_{pr,IV}$	10,418
	Z	$Z_{pr,IV}$	1,894
T <sub>V-1</sub>	X	$r_{pr,V}$	15,000
	Y	$\sin(0) \cdot r_{pr,V}$	0,000
	Z	$Z_{pr,V}$	0,000
T <sub>V-2</sub>	X	$PresekRRS(T_{V-1}, T_{IV-54}, T_{IV-1}, T_{IV-3}, T_{V-3}, R_k)$	14,449
	Y		1,385
	Z		0,448
T <sub>V-3</sub>	X	$\cos(\alpha_s/5) \cdot r_{pr,V}$	14,672
	Y	$\sin(\alpha_s/5) \cdot r_{pr,V}$	3,119
	Z	$Z_{pr,V}$	0,000

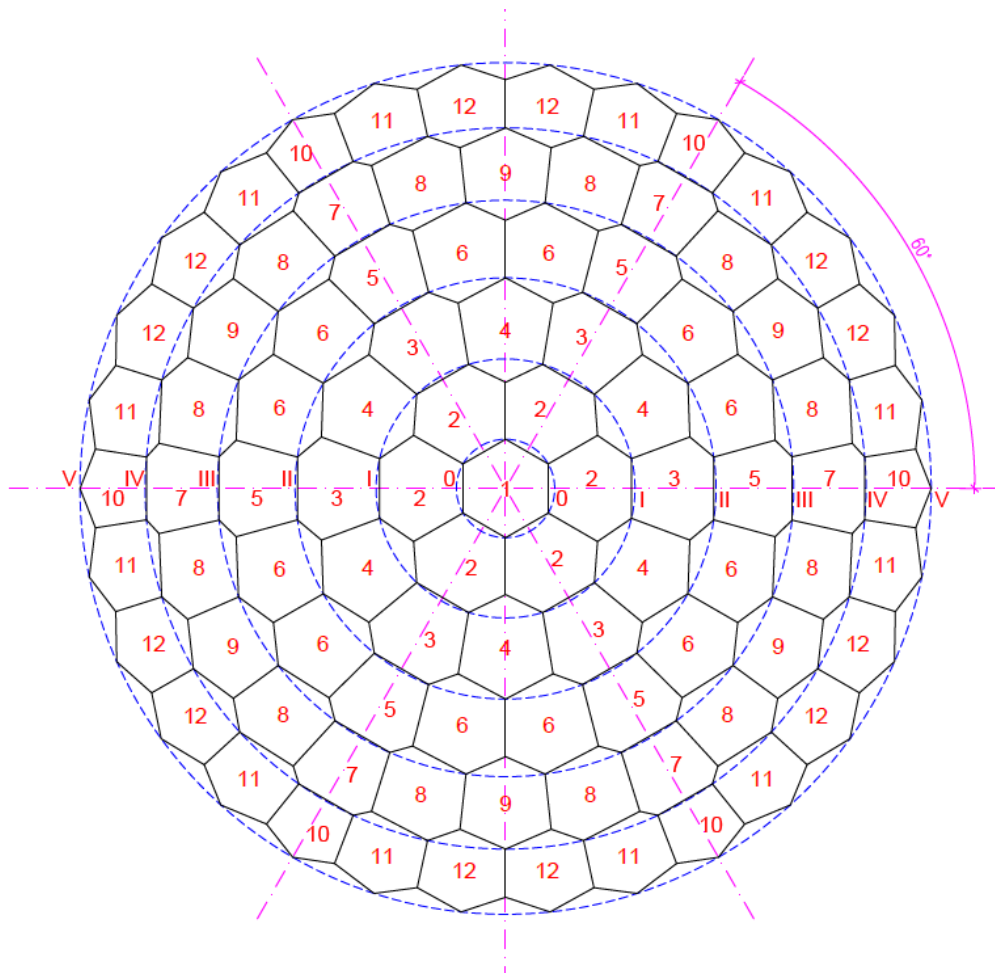
Ознака темена	Ознака координате	Алгебарска вредност координате	Нумеричка вредност (m)
T <sub>V-4</sub>	X	$PresekRRS(T_{V-3}, T_{IV-1}, T_{IV-3}, T_{IV-5}, T_{V-5}, R_k)$	13,732
	Y		4,334
	Z		0,551
T <sub>V-5</sub>	X	$\cos(2 \cdot \alpha_s/5) \cdot r_{pr,V}$	13,703
	Y	$\sin(2 \cdot \alpha_s/5) \cdot r_{pr,V}$	6,101
	Z	$Z_{pr,V}$	0,000
T <sub>V-6</sub>	X	$PresekRRS(T_{V-5}, T_{IV-3}, T_{IV-5}, T_{IV-7}, T_{V-7}, R_k)$	12,467
	Y		7,198
	Z		0,554
T <sub>V-7</sub>	X	$\cos(3 \cdot \alpha_s/5) \cdot r_{pr,V}$	12,135
	Y	$\sin(3 \cdot \alpha_s/5) \cdot r_{pr,V}$	8,817
	Z	$Z_{pr,V}$	0,000
T <sub>V-8</sub>	X	$PresekRRS(T_{V-7}, T_{IV-5}, T_{IV-7}, T_{IV-9}, T_{V-9}, R_k)$	10,619
	Y		9,726
	Z		0,551
T <sub>V-9</sub>	X	$\cos(4 \cdot \alpha_s/5) \cdot r_{pr,V}$	10,037
	Y	$\sin(4 \cdot \alpha_s/5) \cdot \square_{pr,V}$	11,147
	Z	$Z_{pr,V}$	0,000
T <sub>V-10</sub>	X	$PresekRRS(T_{V-9}, T_{IV-7}, T_{IV-9}, T_{IV-10}, T_{V-11}, R_k)$	8,424
	Y		11,821
	Z		0,448

## 6.2.5 Геометрија функционалних елемената

Иако облици већине функционалних елемената представљају полигоне са истим бројем страница, њихова геометрија варира од правилне, у темену ПКС, за случај структуре као апроксимације сфере, до неправилне, различитих дужина страница и различитих углова између њених штапова. Једино су у хоризонталним осама структуре генерисани петоуглови, сажимањем два ослоначка темена шестоугаоног функционалног елемента у једно.

За формирање структуре потребно је 12 геометријски различитих функционалних елемената, означених као 12 позиција, а има их укупно 91. Као иста позиција означени су сви подударни функционални елементи, који могу бити

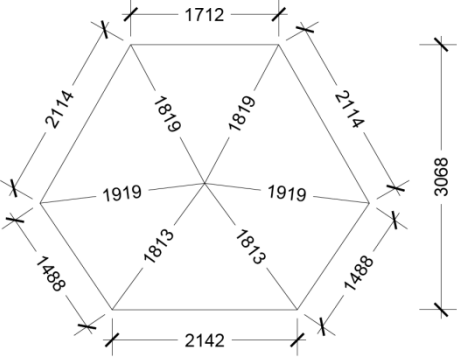
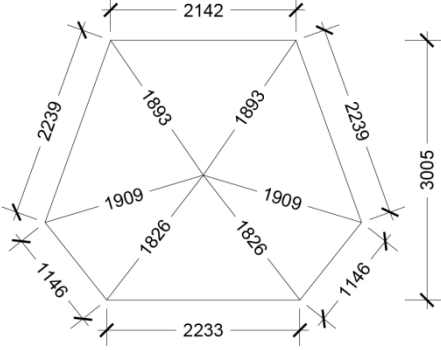
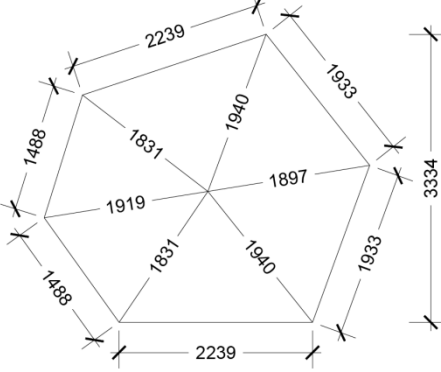
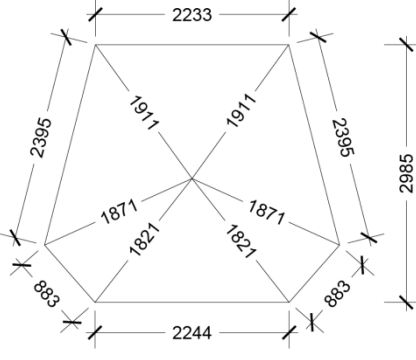
и симетрични у функционалној организацији структуре. Тек се после намонтираног разупирача разликују функционални елементи чија је контура симетрична.

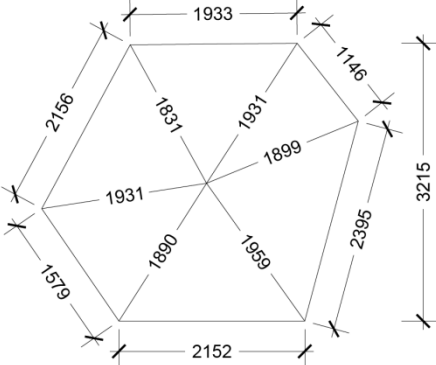
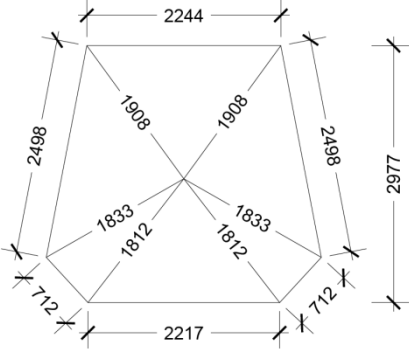
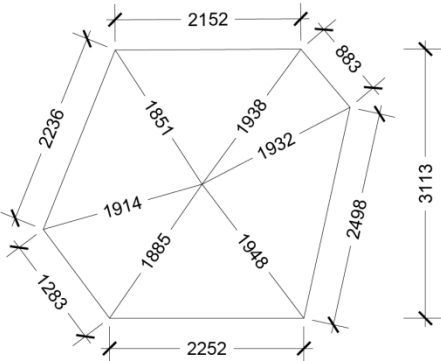
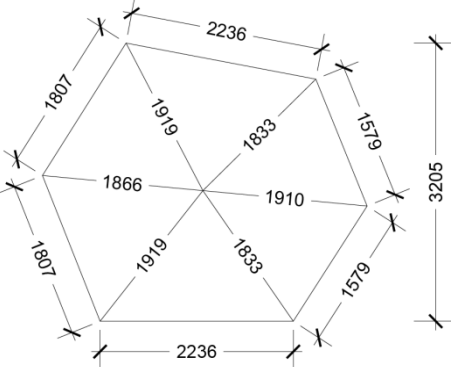


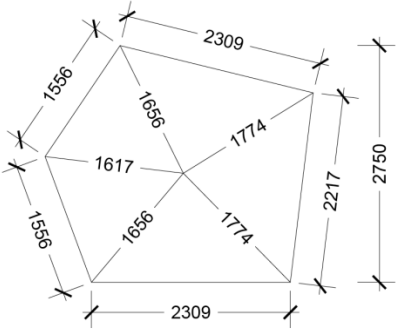
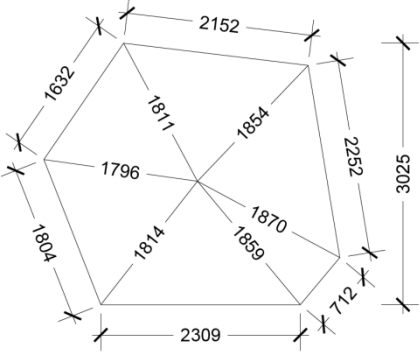
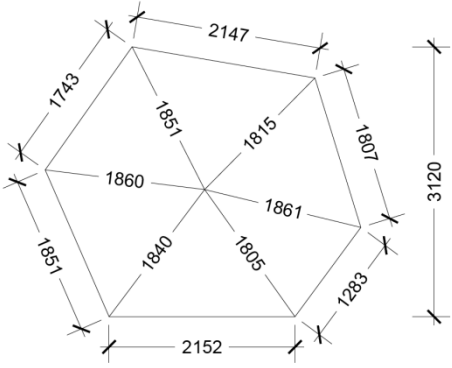
Слика 6-3) Функционална организација ПКС

Табела 6-6) Спецификација функционалних елемената ПКС

Геометрија функционалног елемента	Општи подаци о функционалном елементу
	<p><b>Ознака позиције:</b> 1</p> <p>Положај: Темени полигон</p> <p>Број комада: 1</p> <p>Површина (м<sup>2</sup>): 7,612</p> <p>Обим (м<sup>1</sup>): 10,270</p> <p>Транспортна висина (м<sup>1</sup>): 2,965</p>

Геометрија функционалног елемента	Општи подаци о функционалном елементу
	<p><b>Ознака позиције:</b> 2</p> <p>Положај: Појас 1</p> <p>Број комада: 6</p> <p>Површина (м<sup>2</sup>): 8,736</p> <p>Обим (м<sup>1</sup>): 11,059</p> <p>Транспортна висина (м<sup>1</sup>): 3,068</p>
	<p><b>Ознака позиције:</b> 3</p> <p>Положај: Појас 2</p> <p>Број комада: 6</p> <p>Површина (м<sup>2</sup>): 8,758</p> <p>Обим (м<sup>1</sup>): 11,148</p> <p>Транспортна висина (м<sup>1</sup>): 3,005</p>
	<p><b>Ознака позиције:</b> 4</p> <p>Положај: Појас 2</p> <p>Број комада: 6</p> <p>Површина (м<sup>2</sup>): 9,153</p> <p>Обим (м<sup>1</sup>): 11,323</p> <p>Транспортна висина (м<sup>1</sup>): 3,334</p>
	<p><b>Ознака позиције:</b> 5</p> <p>Положај: Појас 3</p> <p>Број комада: 6</p> <p>Површина (м<sup>2</sup>): 8,426</p> <p>Обим (м<sup>1</sup>): 11,034</p> <p>Транспортна висина (м<sup>1</sup>): 2,985</p>

Геометрија функционалног елемента	Општи подаци о функционалном елементу
	<p><b>Ознака позиције:</b> 6</p> <p>Положај: Појас 3</p> <p>Број комада: 12</p> <p>Површина (м<sup>2</sup>): 9,163</p> <p>Обим (м<sup>1</sup>): 11,361</p> <p>Транспортна висина (м<sup>1</sup>): 3,215</p>
	<p><b>Ознака позиције:</b> 7</p> <p>Положај: Појас 4</p> <p>Број комада: 6</p> <p>Површина (м<sup>2</sup>): 8,069</p> <p>Обим (м<sup>1</sup>): 10,880</p> <p>Транспортна висина (м<sup>1</sup>): 2,977</p>
	<p><b>Ознака позиције:</b> 8</p> <p>Положај: Појас 4</p> <p>Број комада: 12</p> <p>Површина (м<sup>2</sup>): 8,947</p> <p>Обим (м<sup>1</sup>): 11,305</p> <p>Транспортна висина (м<sup>1</sup>): 3,113</p>
	<p><b>Ознака позиције:</b> 9</p> <p>Положај: Појас 4</p> <p>Број комада: 6</p> <p>Површина (м<sup>2</sup>): 9,044</p> <p>Обим (м<sup>1</sup>): 11,244</p> <p>Транспортна висина (м<sup>1</sup>): 3,205</p>

Геометрија функционалног елемента	Општи подаци о функционалном елементу
	<p><b>Ознака позиције:</b> 10</p> <p>Положај: Појас 5</p> <p>Број комада: 6</p> <p>Површина (м<sup>2</sup>): 6,701</p> <p>Обим (м<sup>1</sup>): 9,949</p> <p>Транспортна висина (м<sup>1</sup>): 2,750</p>
	<p><b>Ознака позиције:</b> 11</p> <p>Положај: Појас 5</p> <p>Број комада: 12</p> <p>Површина (м<sup>2</sup>): 8,290</p> <p>Обим (м<sup>1</sup>): 10,863</p> <p>Транспортна висина (м<sup>1</sup>): 3,025</p>
	<p><b>Ознака позиције:</b> 12</p> <p>Положај: Појас 5</p> <p>Број комада: 12</p> <p>Површина (м<sup>2</sup>): 8,633</p> <p>Обим (м<sup>1</sup>): 10,984</p> <p>Транспортна висина (м<sup>1</sup>): 3,120</p>

У табели 6-6 приказана је спецификација функционалних елемената потребних за формирање ПКС, са пројектованим димензијама њихових контура. Функционални елементи су приказани у положају у ком имају најмању висину, што би била њихова највећа димензија у току транспорта. Највећу транспортну димензију има функционални елемент означен као позиција 4 и износи 3,334 m.

Све димензије су приказане у равнима функционалних елемената. Разупирач се налази у тежишту полигона, облика контуре функционалног елемента. Димензије габарита функционалних елемената одређене су контурним



штаповима, искројеним по кројним листама, али се њихова пројектована геометрија добија тек монтирањем и подешавањем транспортних затега. Затезе су међусобно повезане централним прстеном, кроз који се, после транспорта, на градилишту, поставља разупирач.

## 6.2.6 Геометрија ослоначког прстена

Структура се ослања на ослоначки прстен који може бити на одређеној висинској разлици у односу на њену основу. У анализи је разматран ослоначки прстен кружног облика, пречника 30,0 метара, од лепљеног ламелираног дрвета, израђен од четинара II класе. Ослоначки прстен може бити од различитих материјала, независан од материјала који се користи за формирање функционалних елемената и саме структуре.

Сви ослонци, на које се ослања ослоначки прстен, прихватају вертикалну реакцију. Поред тога, два наспрамна ослонца у оси  $x$  прихватају и реакције у правцу осе  $y$ , док два наспрамна ослонца у оси  $y$  прихватају реакције паралелне са правцем осе  $x$ . На тај начин се омогућава несметан рад ослоначког прстена и несметано генерисање унутрашњих сила у њему.

Прстен би се, из транспортних услова, формирао из шест лучних сегмената, а дужина сваког од њих ( $l_{pr}$ ) и транспортна висина прстена ( $h_{tr}$ ), износе:

$$l_{pr} = \frac{L_k \cdot \pi}{n_{pr}} = 15.7 \text{ m}$$

$$h_{tr} = \frac{L_k}{2} \cdot \left( 1 - \cos \frac{360^\circ}{2 \cdot n_{pr}} \right) + bo_{pr} = 2.61 \text{ m}$$

У обрасцу је:

- $L_k$  – распон куполе;
- $n_{pr}$  – број сегмената ослоначког прстена;
- $bo_{pr}$  – ширина попречног пресека ослоначког прстена.

У моделу за анализу статичких утицаја, усвојен је ослоначки прстен димензија попречног пресека 20/60 cm. Димензије попречног пресека ослоначког прстена усвојене су из услова да је његова веза са функционалним елементима центрирана, тако да реакција структуре делује у тежишту попречног пресека прстена.

С обзиром на то да је у моделу генерисан полигонални облик ослоначког прстена, а разматрани прстен је кружног облика, то постоји ексцентричност ( $e_{pr}$ ) услед његове закривљености, која се одређује према обрасцу:

$$e_{pr} = \frac{L_k}{2} \cdot \left(1 - \cos \frac{\alpha_{1,f}}{2}\right) = 0.082 \text{ m}$$

У обрасцу је са  $\alpha_{1,f}$  обележен угао поделе ослоначког прстена ознаке  $f$ .

Одређивање ексцентричности ће омогућити прорачун момената савијања услед закривљености ослоначког прстена и генерисање тачније слике статичких утицаја у њему.

### 6.3 Обликовање веза у структури

Прецизно и квалитетно формирање веза у структури, које одговарају пројектованим, врло је важно. Због тога могућност формирања појединих веза у контролисаним, фабричким условима, веза важних у геометрији функционалних елемената и геометрији коначне структуре, свакако да представља једну од значајнијих предности система.

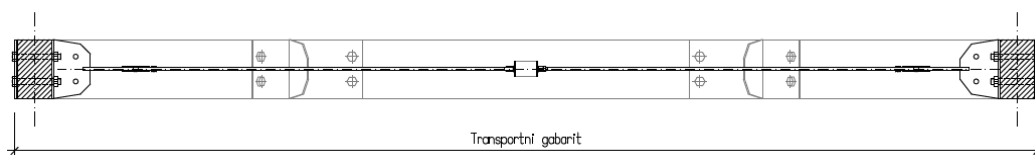
У структури полиедарских купола постоје три групе веза:

- Везе у оквиру функционалних елемената;
- Међусобне везе функционалних елемената;
- Везе између функционалних елемената и ослоначког прстена.

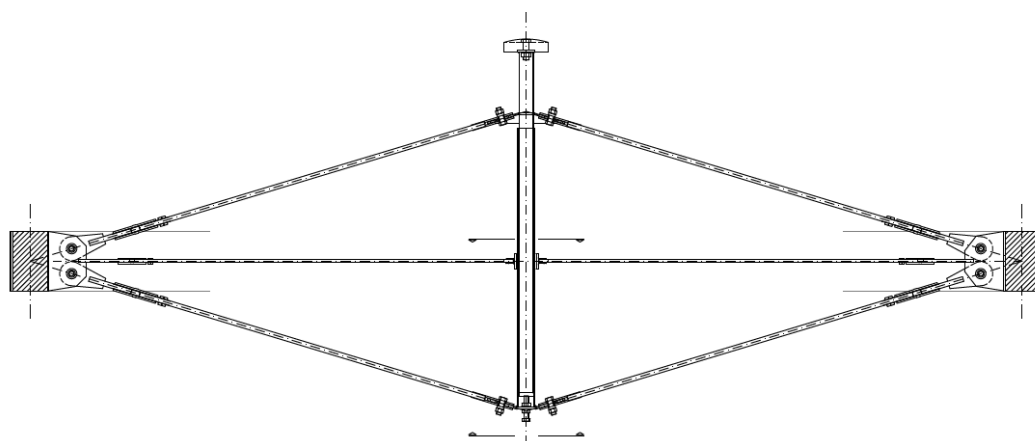
### 6.3.1 Везе у оквиру функционалних елемената

Већи број веза на формирању функционалних елемената остварује се у току њихове префабрикације, у фабричким, контролисаним условима производње. Овакви услови омогућавају повећање прецизности и квалитета у њиховој изради и одржавање достигнутог стандарда. Редослед при формирању функционалног елемента одређен је редоследом формирања његових веза. Прво се формирају међусобне везе крутих штапова, а затим и њихове везе са средњим, транспортним затегама, односно затегама у равни функционалног елемента.

С обзиром на то да се транспортне затеге налазе у средњој равни функционалног елемента, то се чворне везе контурних штапова изводе са по два вијка, монтираних по висини попречног пресека, што умањује опасност од његовог витоперења током транспорта и током уградње разупирача и затега за преднапрезање.



Слика 6-4) Функционални елемент припремљен за транспорт



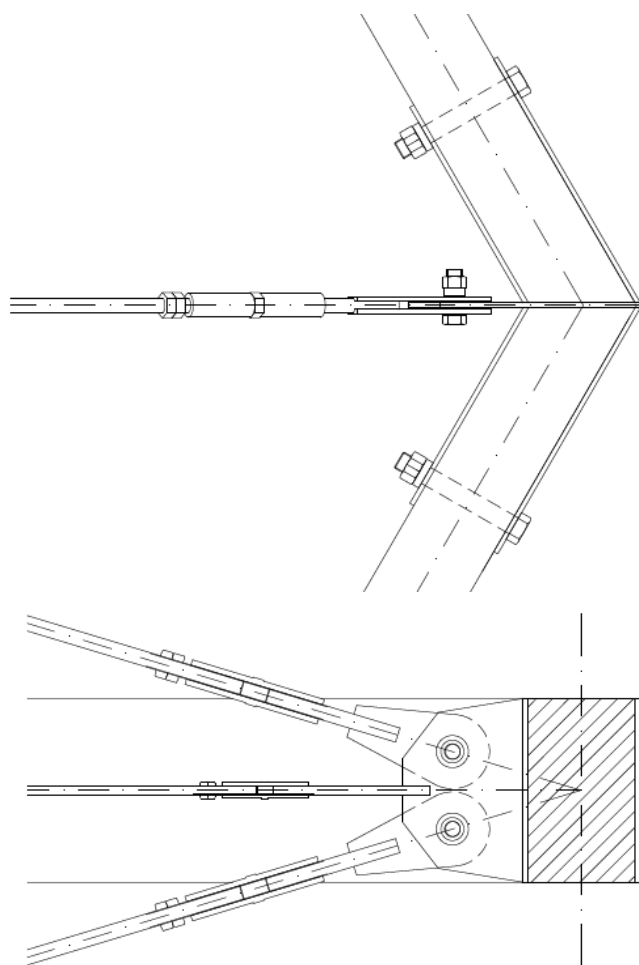
Слика 6-5) Функционални елемент припремљен за уградњу

Из услова рационализације транспорта, разупирачи и два појаса затега се монтирају на градилишту, где се врши и преднапрезање функционалног елемента, пре његове уградње на пројектовано место у структури. У случају већих

димензија функционалних елемената, када се он формира у градилишној префабрикацији, транспортне затега се могу изоставити, али могу послужити и за лакше постизање пројектованог облика функционалних елемената.

### 6.3.1.1 Веза контурних штапова међусобно и са затегама

Међусобна веза контурних, крутих штапова функционалног елемента врши се вијцима, преко окова.



Слика 6-б) Чворна веза штапова међусобно и штапова са затегама

С обзиром на то да је преднапрезањем обезбеђено присуство сила притиска у контурним штаповима у свим комбинацијама оптерећења, то се наведене силе могу пренети контактом, па се потребан број вијака за формирање њихове међусобне везе може смањити до 50%, из комбинације у којој је штап

најоптерећенији. Овим је омогућено формирање једноставне везе, под условом да се таква веза оствари без зазора и обезбеди пренос силе контактом.

У случају мањих вредности сила притиска, веза би могла бити формирана као једносечна, са једноставнијим оковом, док би у случају већих вредности сила она била формирана као двосечна, како је приказано на слици 6-6, а постоји могућност формирања и четворосечне везе, са додатним средњим лимом у оси штапа, за веће ширине његовог попречног пресека.

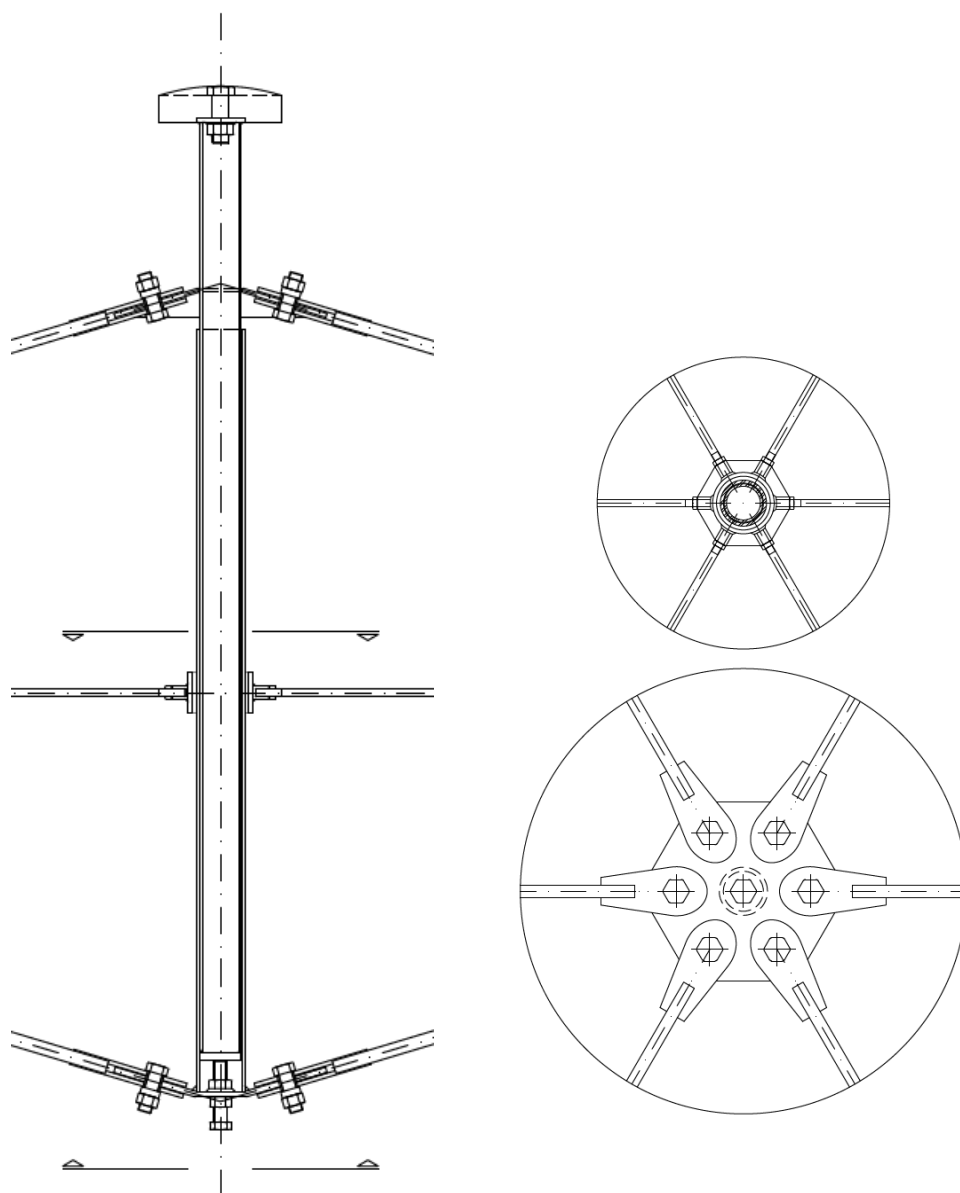
Веза крутих штапова и затега за преднапрезање остварује се помоћу вијака, чиме је омогућено формирање зглобне везе без утицаја евентуалне ексцентричности формиране везе. Свака од затега има на једном крају и затезну спојку (шпанер), преко кога се врши фино подешавање њене дужине, пре преднапрезања разупирачем. Преко ових спојки се може унети одређена сила преднапрезања, уколико би то било потребно, чиме би се различите затеге у оквиру истог функционалног елемента, могле преднапрезати различитим силама. У појединим случајевима, преднапрезање различитих затега различитим силама омогућило би формирање прихватљивије напонске слике у њима и преднапрезање самих функционалних елемената силом мањег интензитета, него у случају када су све затеге преднапрегнуте само разупирачем.

Веза транспортне затеге оковом у наведеној чворној вези и са централним прстеном, кроз који се накнадно провлачи разупирач, остварена је директним навртањем у заварени део затеге за оков, док се подешавање његове дужине и подешавање габарита функционалног елемента врши додатном затезном спојком.

Овако формирана веза крутих штапова и меких затега води ка елиминисању ексцентричности веза и евентуалног уноса непредвиђених статичких утицаја у крајеве затега (момената савијања), а омогућава и унифицирање свих веза ове врсте. Уз помоћ аутоматизованог алата формирање једне овакве везе вршило би се за само неколико минута. У превентивном смислу, против одвијања навртки услед вибрација у структури, користе се вијци са одговарајућим осигурачима, или као алтернатива, међусобно преднапрезање пара навртки.

### 6.3.1.2 Разуирач и његова веза са затегама

Разуирач представља изузетно значајан део функционалног елемента. Променом његове дужине уноси се потребна сила преднапрезања функционалног елемента. Склоп разуирача би требало да буде довољно једноставан за серијску производњу, уградњу и унос силе преднапрезања, а са друге стране потребна је његова велика поузданост при извођењу и експлоатацији структуре.



Слика 6-7) Пресек разуирача и његова веза са затегама

Разупирач је формиран од два челична цеваста профила кружног попречног пресека, различитих пречника, од којих један профил улази у други. На горњем крају профила мањег пречника налази се заобљени профил од полипласта<sup>50</sup> за ослањање мембране, док се на доњем крају профила већег пречника налази вијак за преднапрезање. Завртањем наведеног вијка повећава се дужина разупирача и врши преднапрезање функционалног елемента. Сам вијак за преднапрезање налази се са доње стране и стално је доступан, а од евентуалног неконтролисаног одвијања се осигурава одговарајућим осигурачима или међусобним преднапрезањем између додатне навртке и разупирача.

На овај једноставан начин омогућено је брзо и ефикасно преднапрезање функционалног елемента променом дужине разупирача за одређену прорачунату вредност. Дужина вијка може бити већа, уколико је потребно преднапрезање функционалног елемента силом већег интензитета.

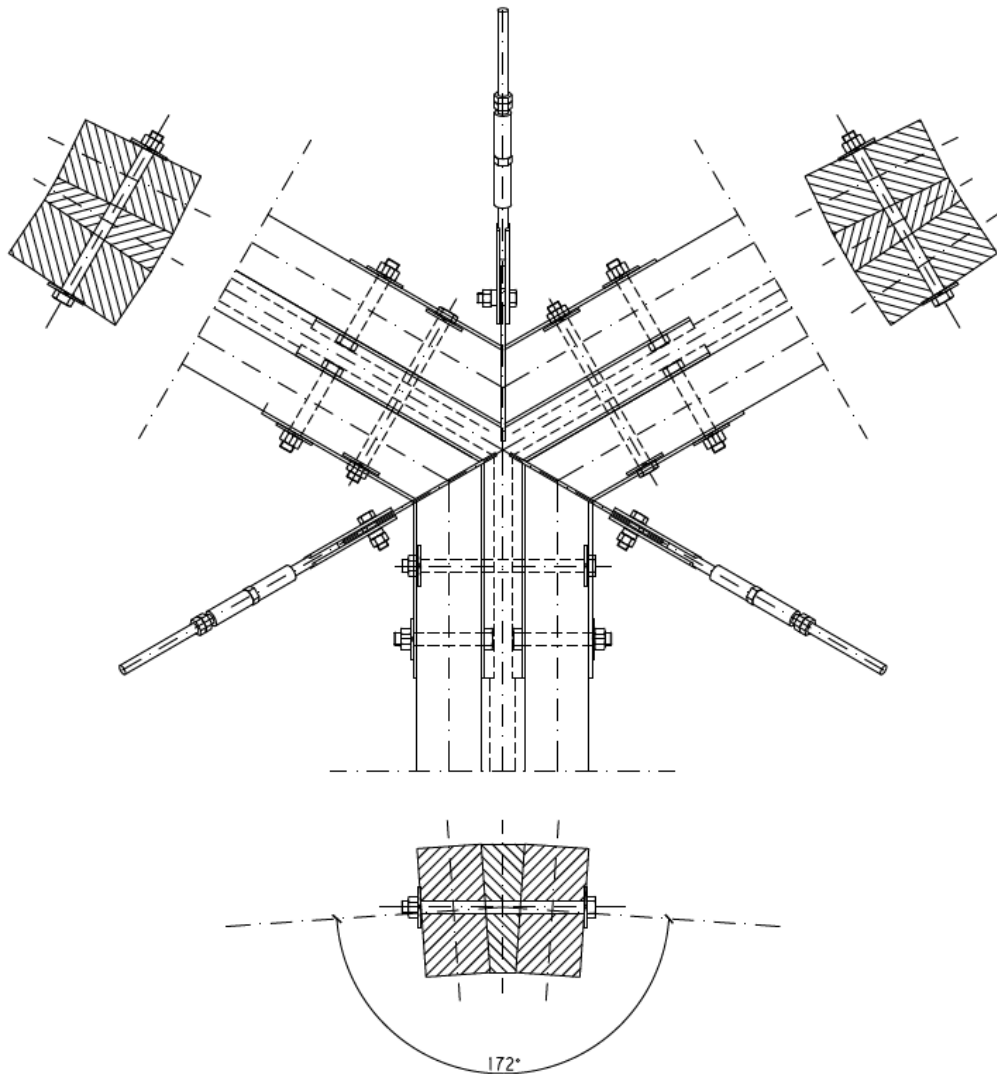
### **6.3.2 Међусобне везе функционалних елемената**

Везе између функционалних елемената остварују се једноставним спајањем удвојених контурних штапова функционалних елемената и уградњом потребног броја вијака. Будући да се ове везе остварују на градилишту, једноставност њиховог остваривања представља велику предност система. Веза се остварује стандардним алатом и на стандардни начин, тако да се не захтева посебна обученост радне снаге.

С обзиром на то да функционални елементи међусобно граде одређен диједрални угао, то и њихови контурни штапови пружају бочну стабилност један другом. Да би се остварила сигурна и компактна веза између удвојених контурних штапова два суседна функционална елемента, потребно је између њих уметнути дрвену гредицу трапезастог или петоугаоног облика попречног пресека.

---

<sup>50</sup> Кујунџић, Војислав, Дрвене конструкције у мојој архитектонској пракси, Више издавача, Београд, 2014.



Слика 6-8) Међусобна веза функционалних елемената

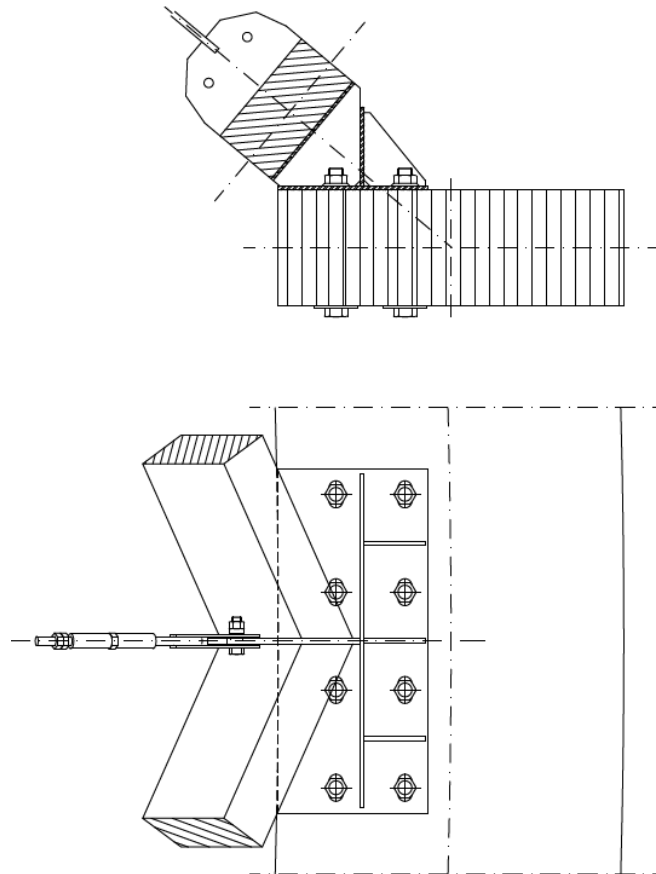
### 6.3.3 Везе функционалних елемената са ослоначким прстеном

Оков је фиксиран за функционални елемент и представља модификовану чворну везу контурних штапова. Средња чворна плоча је веће дебљине него код осталих чворних веза контурних штапова, пошто је на овом делу она оптерећена на притисак.

Уколико би ослоначки прстен био од армираног бетона, веза функционалног елемента би се формирала уз помоћ још једне чворне плоче на којој су заварени вијци, анкерисане у прстен.



Хоризонтални део ослоначког окова повезује се са ослоначким прстеном потребним бројем вијака у виду једносечне везе. Рупе за вијке су овалног облика, чиме је омогућено подешавање ослонца у правцу подужне осе ослоначког прстена.



Слика 6-9) Веза функционалног елемента са ослоначким прстеном

## 6.4 Оптерећење ПКС

При статичкој анализи разматране структуре усвојено је оптерећење за Београд:

Сопствена тежина конструкције,  $g_{st}$ :

- Монолитно дрво, четинари:  $6,00 \text{ kN/m}^3$
- Челик:  $78,5 \text{ kN/m}^3$

Тежина мембране:  $0,02 \text{ kN/m}^2$

Оптерећење снегом,  $s$ : 0,75 kN/m<sup>2</sup>

Оптерећење ветром:

- Основни притисак ветра,  $q_{m,T,10}$ : 0,245 kN/m<sup>2</sup>
- Коefицијент спољашњег притиска,  $C_{pe}$ : 0,20-0.70
- Коefицијент унутрашњег притиска,  $C_{pi}$ : 0,70

Преднапрезање мембраном (по разупирачу): 3,60 kN

У случају примене другог покривача, као алтернатива преднапрезању мембране, а без значајнијих промена у напрезањима и деформацијама структуре, његова тежина може износити око 0,30 kN/m<sup>2</sup>.

Сопствену тежину конструкције софтвер прорачунава на основу усвојених димензија конструктивних елемената и карактеристика усвојених материјала, осим тежине мембране, које делује као чворно оптерећење у горњем чвору разупирача. Сила преднапрезања мембране је одређена тако да се добије притисак на разупирач већег интензитета од интензитета силе услед дејства ветра, која одиже мембрану. На исти начин, као чворно оптерећење, унесено је и оптерећење од снега и ветра, као и оптерећење од преднапрезања мембране.

Преднапрезање мембране извршено је њеним затезањем по обиму структуре силом од 3,0 kN/m<sup>1</sup>, (уобичајена сила преднапрезања мембрана износи 3-6 kN/m, што се односи и на шаторасте структуре).

Табела 6-7) Вредности преднапрезања функционалних елемената

Појас структуре	Повећање температуре разупирача	Повећање дужине разупирача
Нулти	170°	2,0 mm
I	170°	2,0 mm
II	300°	3,5 mm
III	300°	3,5 mm
IV	513°	6,0 mm
V	770°	9,0 mm

Преднапрезање функционалних елемената у статичким моделима извршено је повећањем температуре разупирача, што води ка повећању његове дужине. Интензитет силе преднапрезања је исти у оквиру истог појаса, а различит у различитим појасевима, сходно њиховом оптерећењу. У табели 6-6 приказане су промене дужина разупирача, којима се уносе пројектоване силе преднапрезања функционалних елемената, чиме би максимално био олакшан рад на преднапрезању функционалних елемената, на градилишту.

Сеизмички утицај није меродаван за димензионисање елемената полиедарске куполасте структуре због њене мале тежине.

## 6.5 Анализа виртуелног модела ПКС

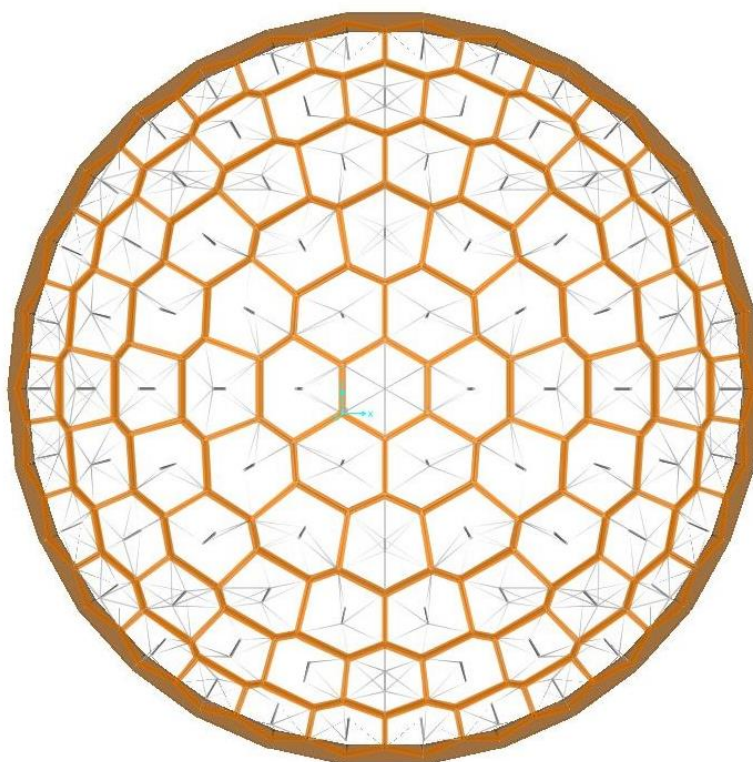
У наставку следи приказ дефинисане структуре и приказ резултата статичког прорачуна. Прорачун статичких утицаја извршен је у рачунарској апликацији за анализу конструкција САП 2000. Приказани су само меродавни утицаји, коришћени при димензионисању елемената структуре. Боје у моделу структуре означавају коришћене материјале – црвена боја представља монолитно дрво, плава челик, а ружичаста ЛЛД.

Резултати анализе потврђују велику крутост структуре. Највећа вертикална деформација структуре (не рачунајући угибе појединачних затега) измерена је на месту разупирача теменог функционалног елемента, у комбинацији гравитационог оптерећења и оптерећења од снега и износи  $f_{z,max}=3,94$  cm ( $f_{z,max}=L_k/761$ , исказано преко њеног распона), односно, на месту контурних штапова теменог функционалног елемента  $f_{z,max}=3,78$  cm ( $f_{z,max}=L_k/794$ ).

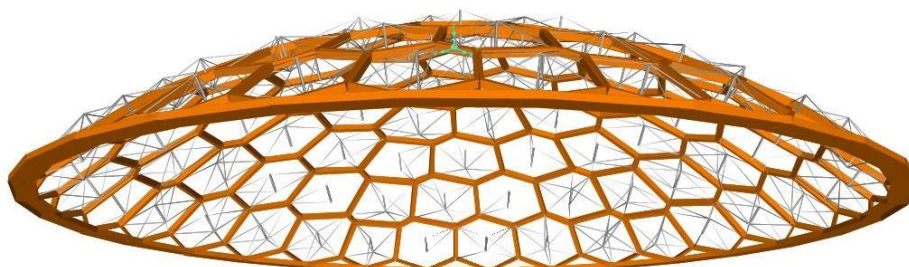
Дејство ветра не даје меродавне статичке утицаје за димензионисање структуре, с обзиром на то да је преднапрезање мембране условљено вредностима одижућег дејства ветра. Будући да се мембрана повезује по ободу ослоначког прстена, то дејство ветра у његовим ослонцима изазива вертикалне реакције од 2,29 и 2,50 kN (притисак на предњој и задњој страни структуре, у односу на правац дејства ветра) до -0,45 kN (одизање на бочним деловима структуре). Ово треба имати у виду када се формирају ослонци прстена у даљем преносу

оптерећења на тло, као и у случају када се за покривач користи лагани покривач без преднапрезања, у ком случају би дошло до одизања ослонаца саме структуре и оптерећења окова затезањем.

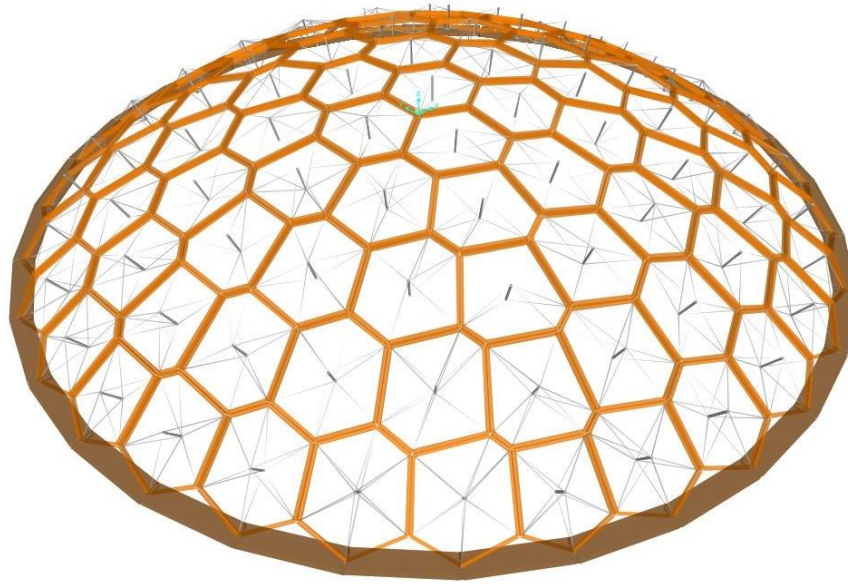
У току монтаже, разматран је случај ослањања монтираних сегмената на лаку скелу, постављену у центру основе структуре. У случају самих сегмената, анализа је извршена за време њиховог подизања краном.



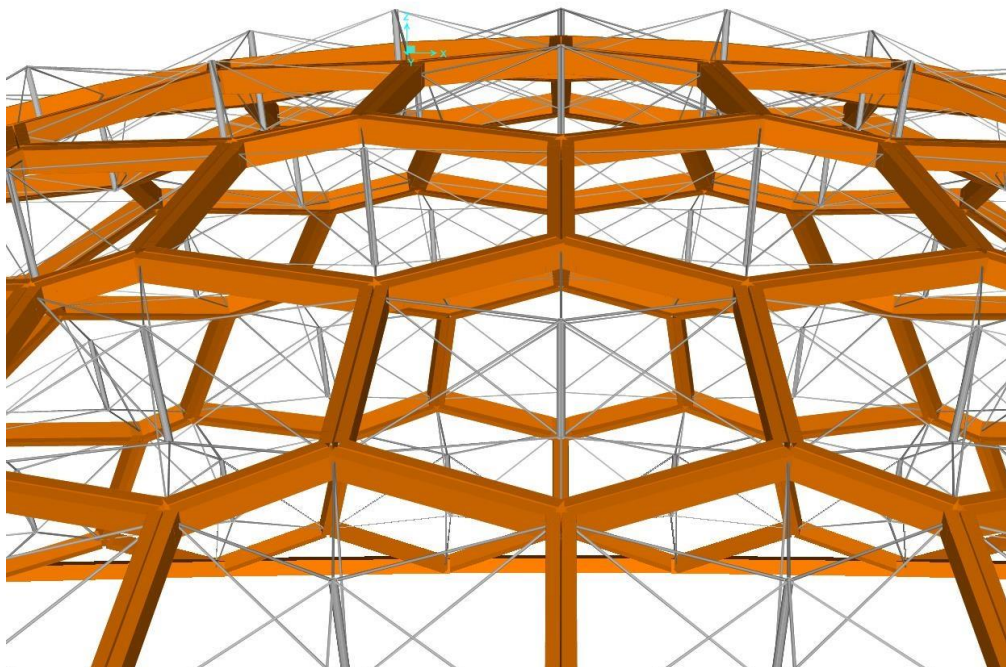
*Слика 6-10) Приказ 3Д модела структуре у основи*



*Слика 6-11) Перспективни приказ 3Д модела структуре*

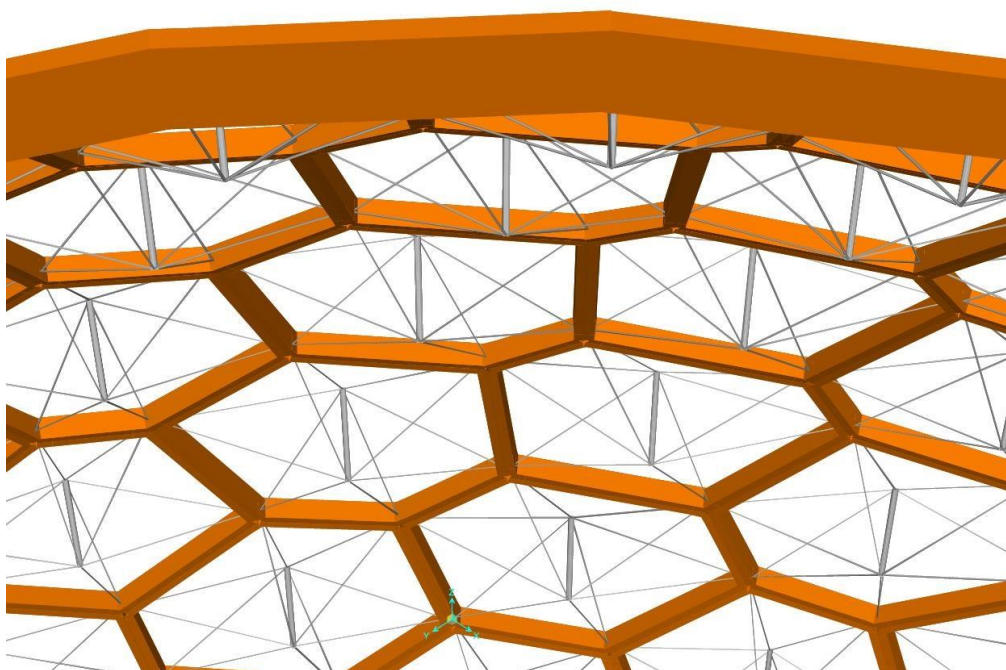


*Слика 6-12) Перспективни приказ 3Д модела структуре*

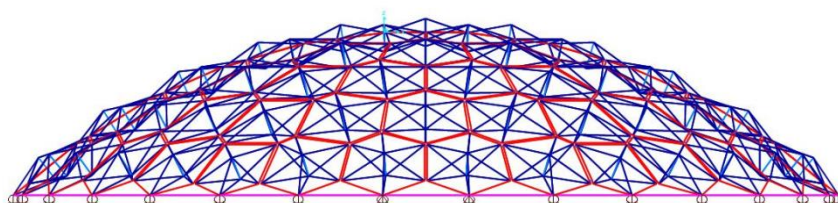


*Слика 6-13) Приказ 3Д модела структуре споља*

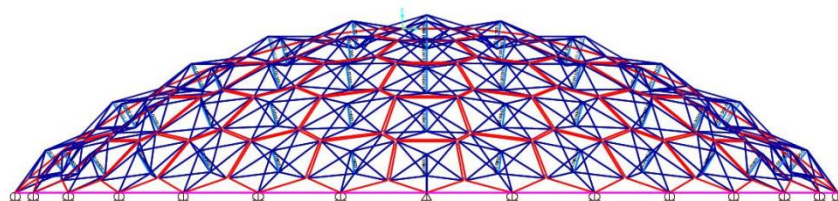




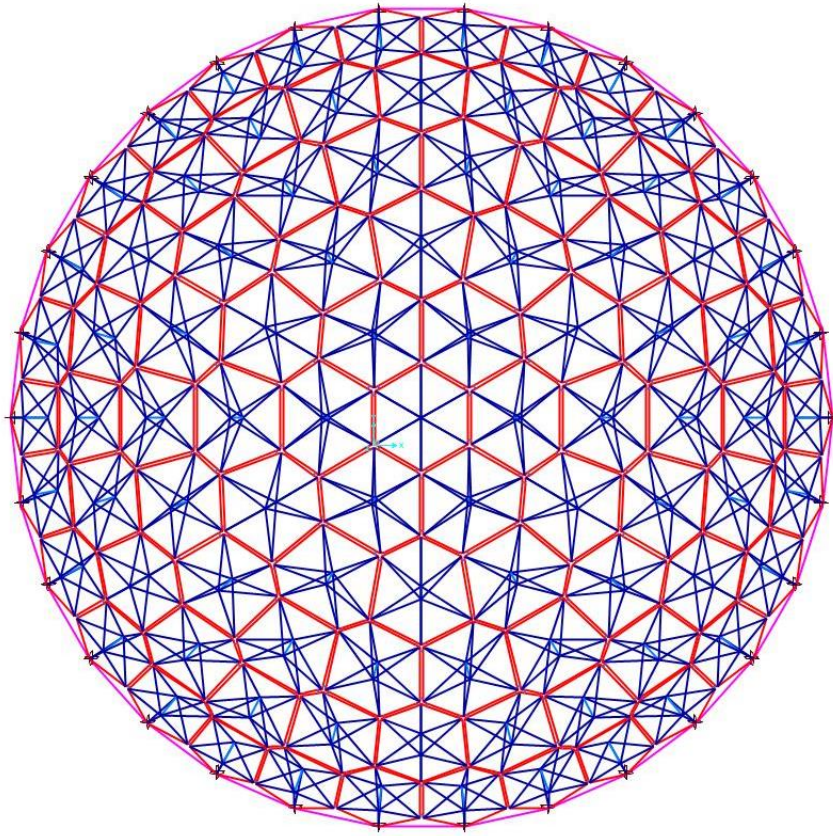
*Слика 6-14) Приказ 3Д модела структуре изнутра*



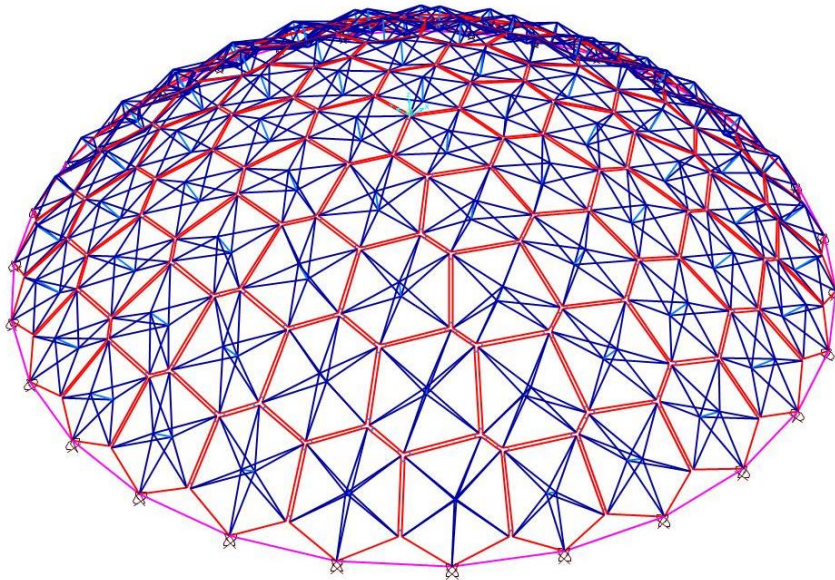
*Слика 6-15) Модел структуре, приказ спреда*



*Слика 6-16) Модел структуре, приказ слева*

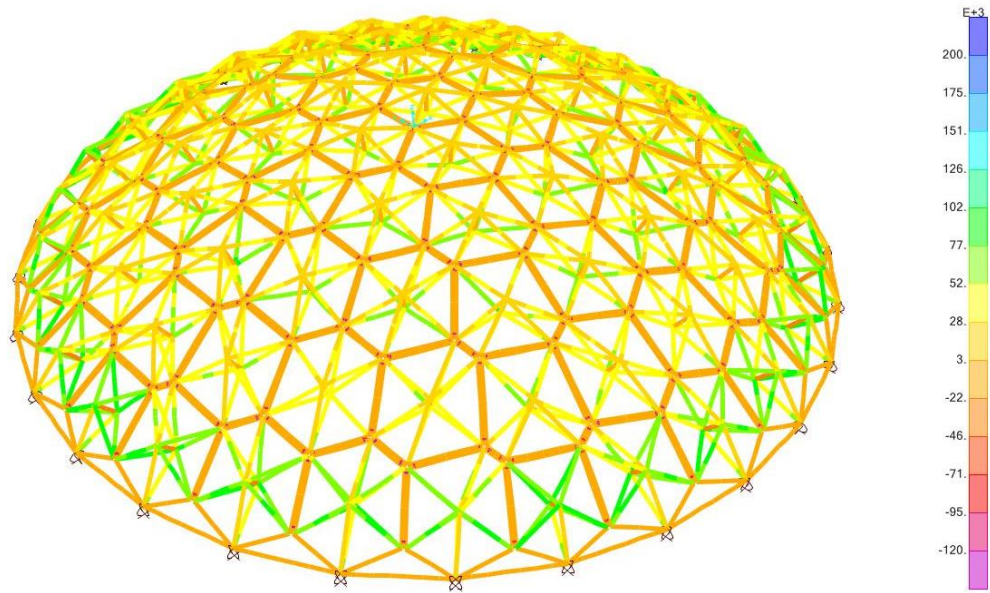


*Слика 6-17) Модел структуре у основи*

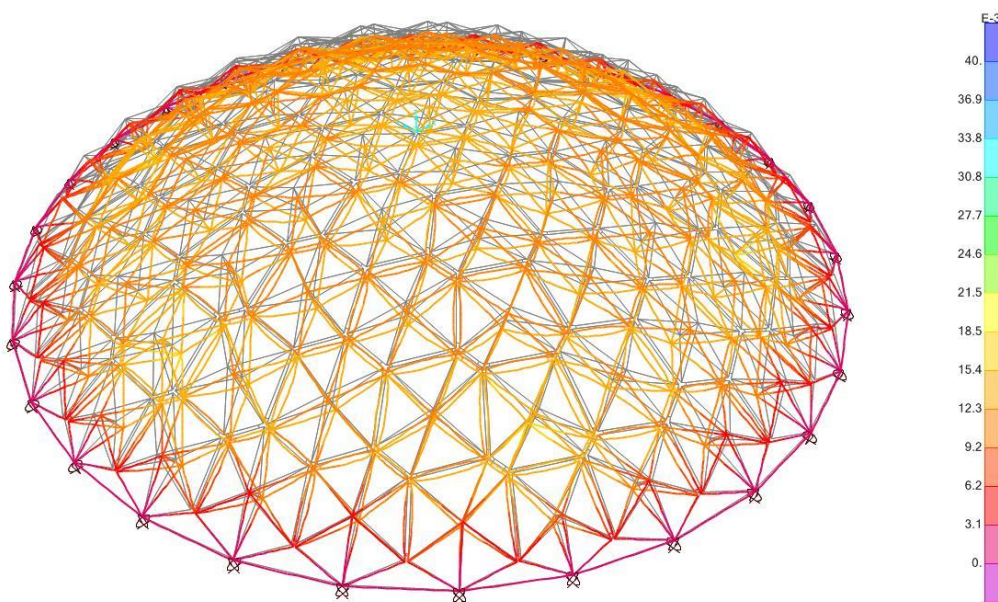


*Слика 6-18) Перспективни приказ модела структуре*



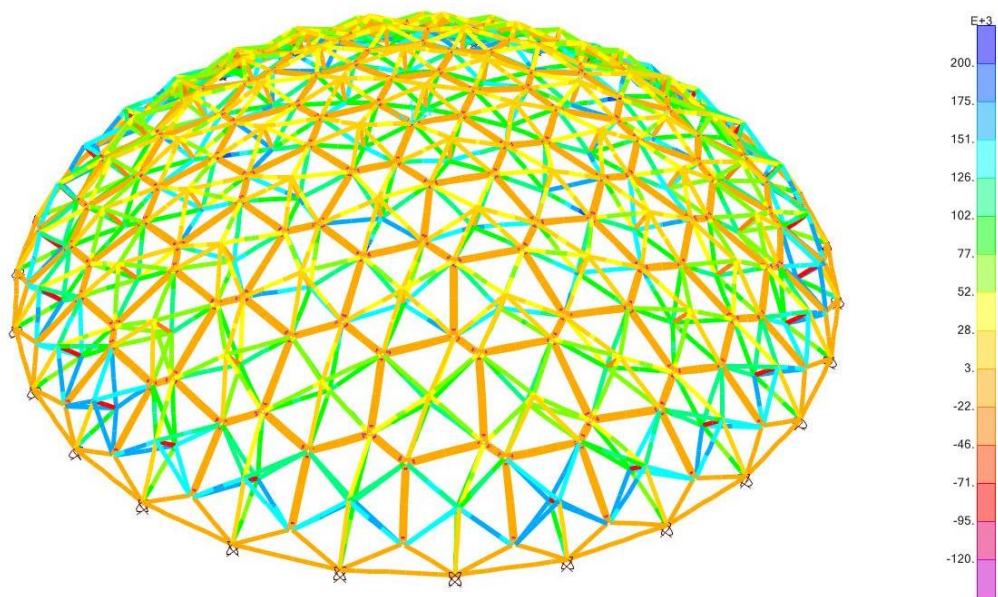


Слика 6-19) Нормални напони у структури,  $g$

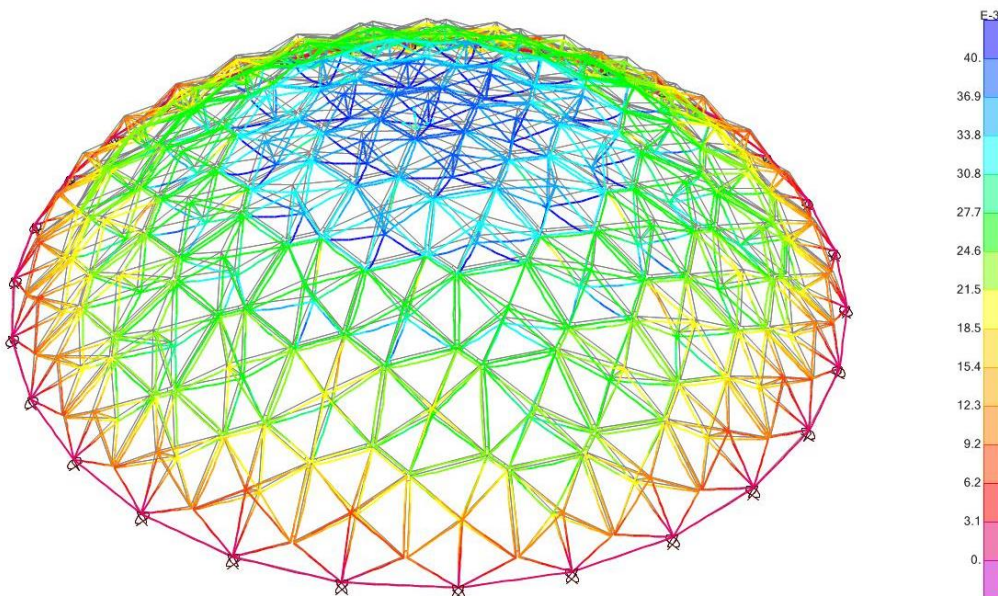


Слика 6-20) Деформације структуре,  $g$

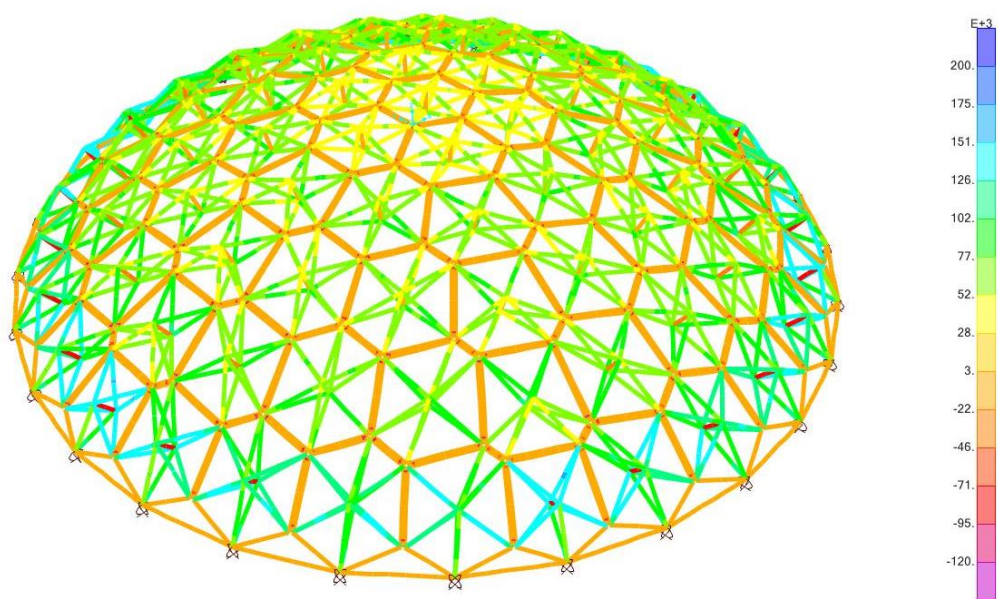




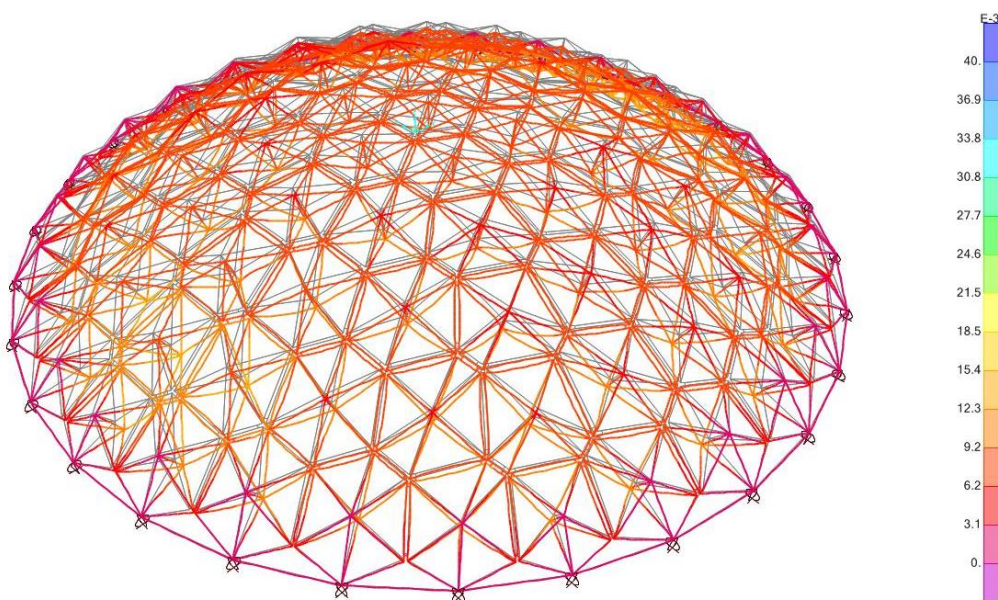
Слика 6-21) Нормални напони у структури,  $g+s$



Слика 6-22) Деформације структуре,  $g+s$

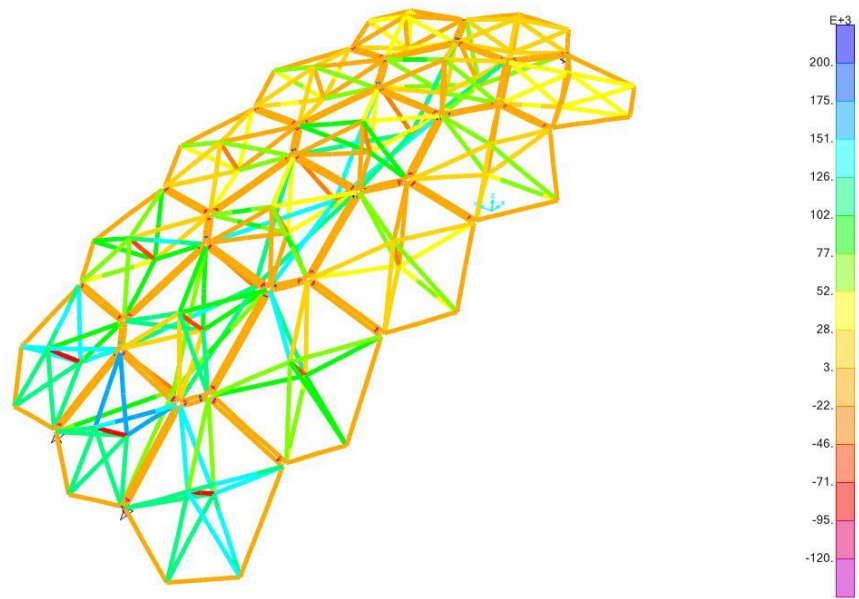


Слика 6-23) Нормални напони у структури,  $g+w$

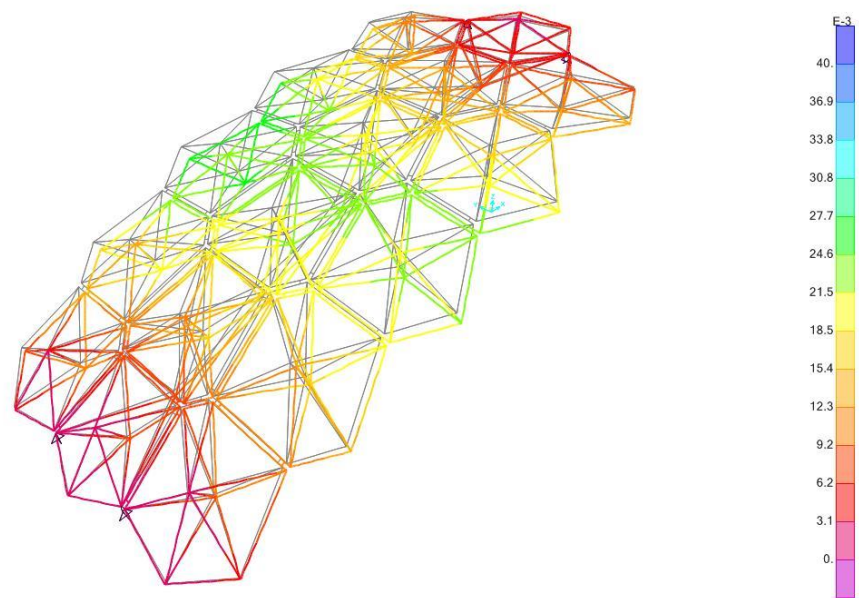


Слика 6-24) Деформације структуре,  $g+w$

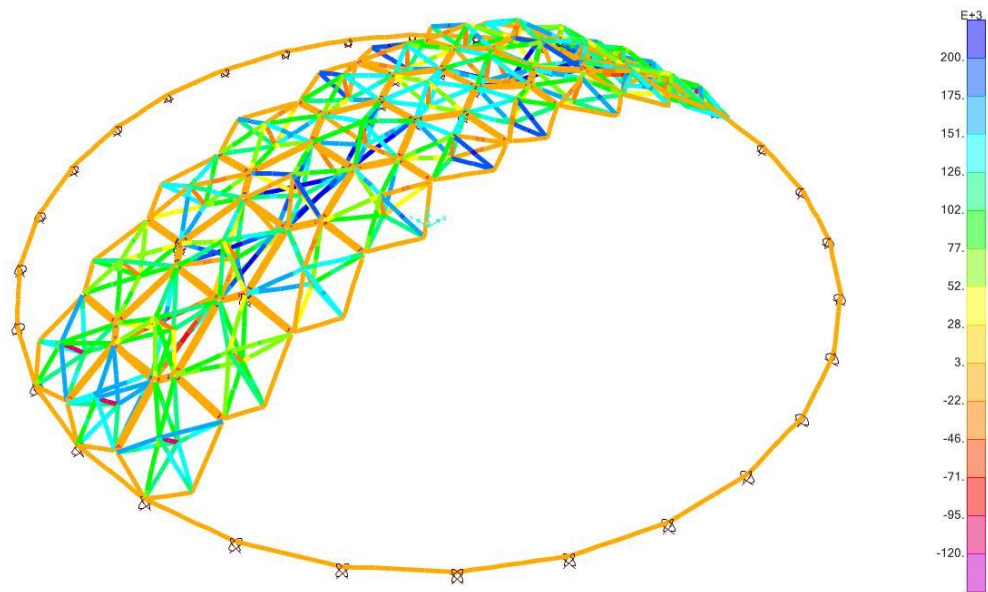




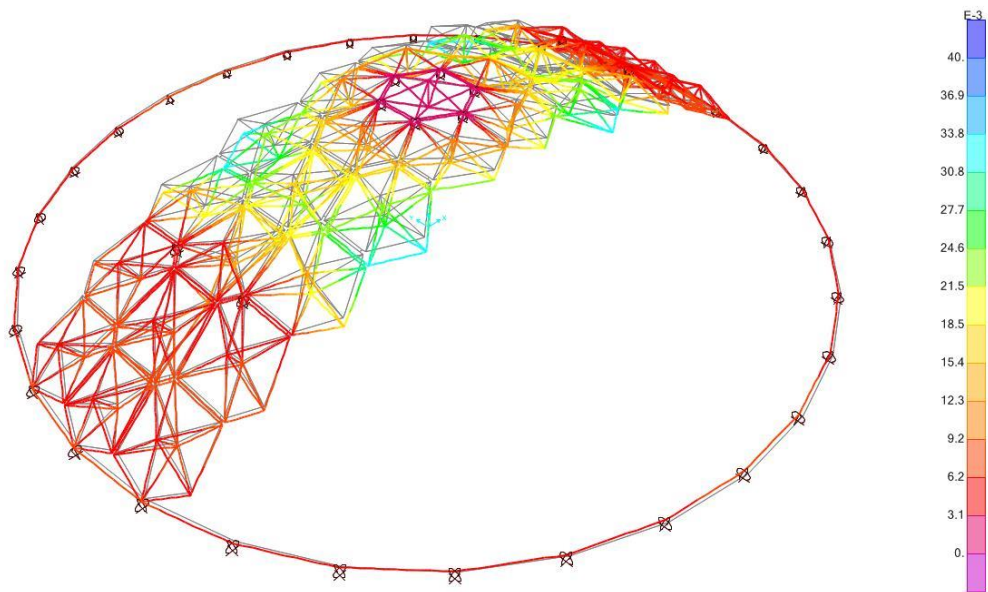
Слика 6-25) Нормални напони у сегменту структуре прихваћеног краном, 1. фаза монтаже



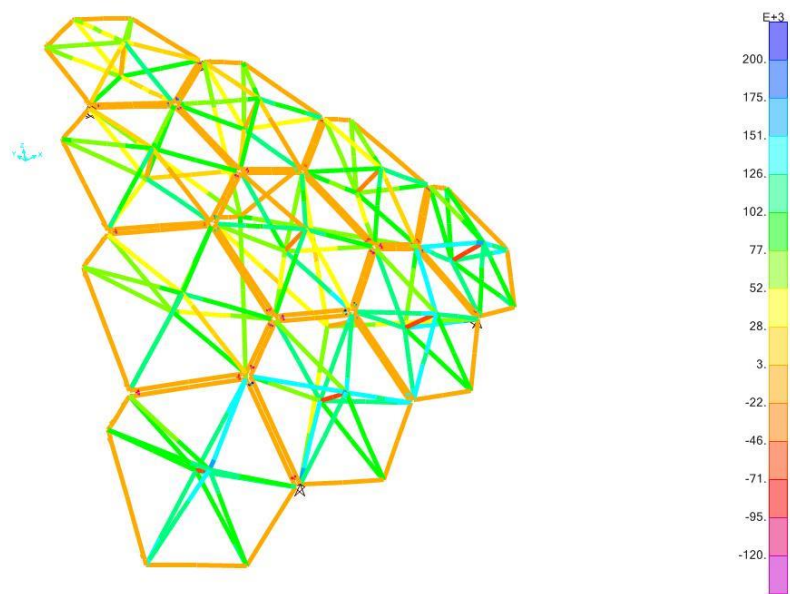
Слика 6-26) Деформације сегмента структуре прихваћеног краном, 1. фаза монтаже



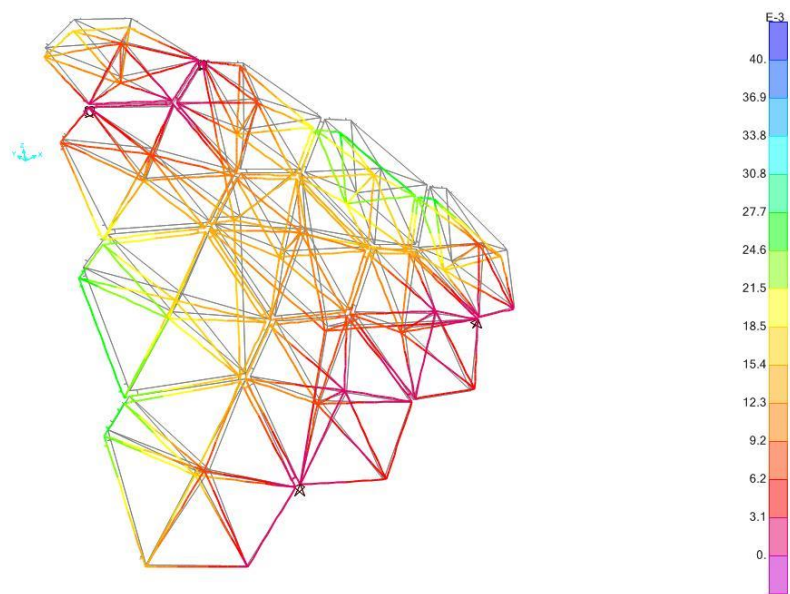
Слика 6-27) Нормални напони у структури по завршетку 1. фазе монтаже



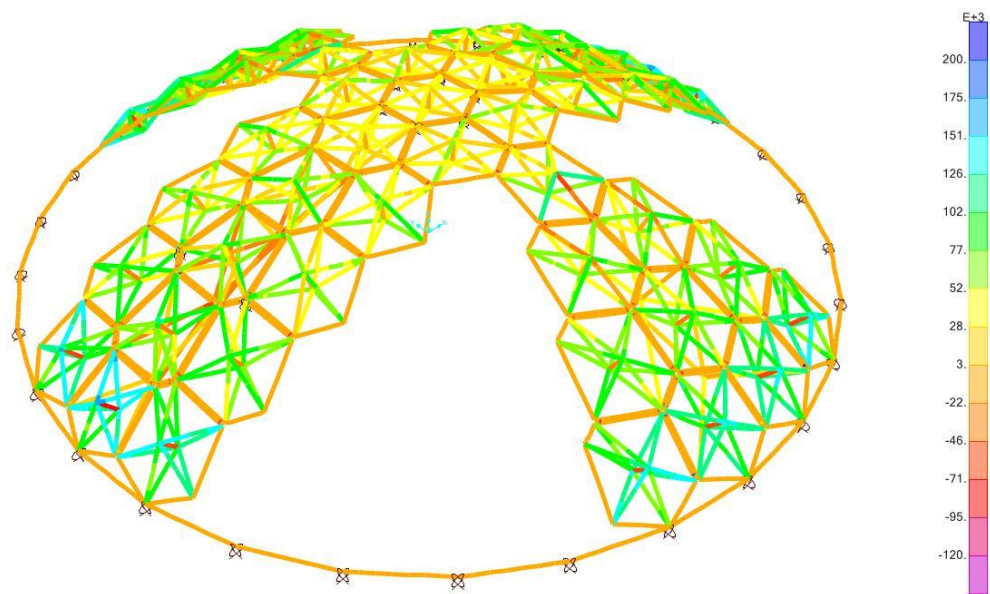
Слика 6-28) Деформације структуре по завршетку 1. фазе монтаже



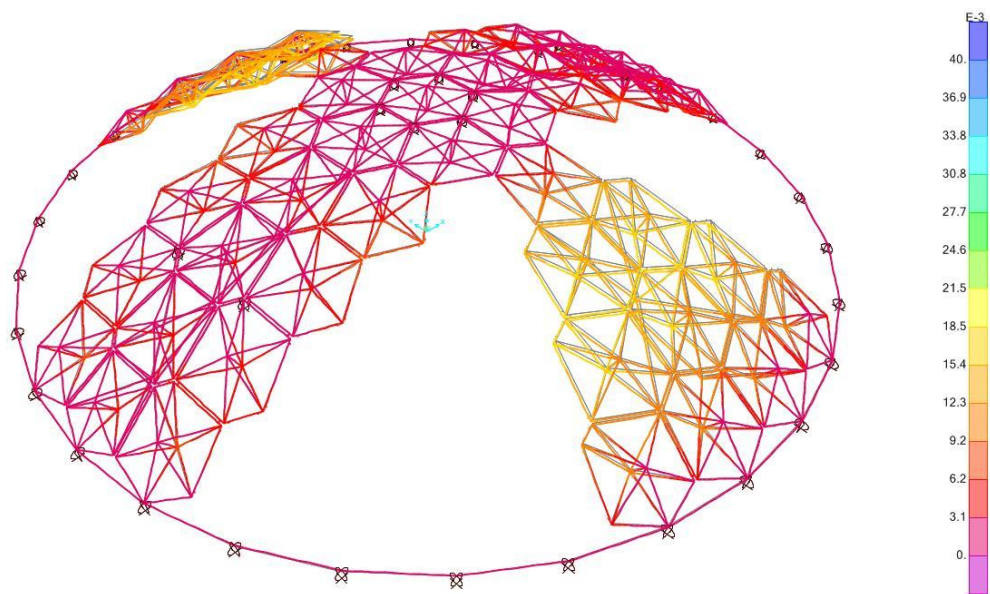
Слика 6-29) Нормални напони у сегменту структуре прихваћеног краном, 2. фаза монтаже



Слика 6-30) Деформације сегмента структуре прихваћеног краном, 2. фаза монтаже

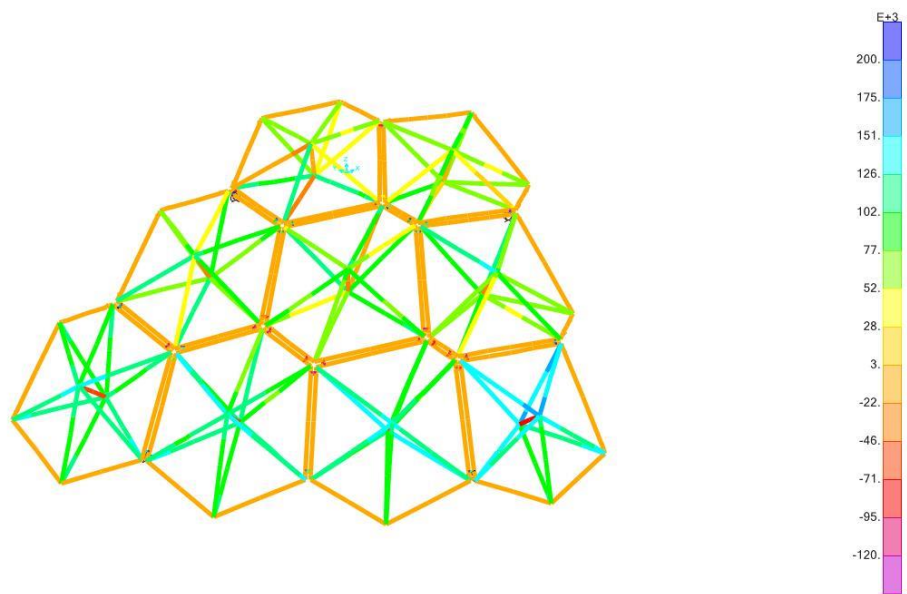


Слика 6-31) Нормални напони у структури по завршетку 2. фазе монтаже

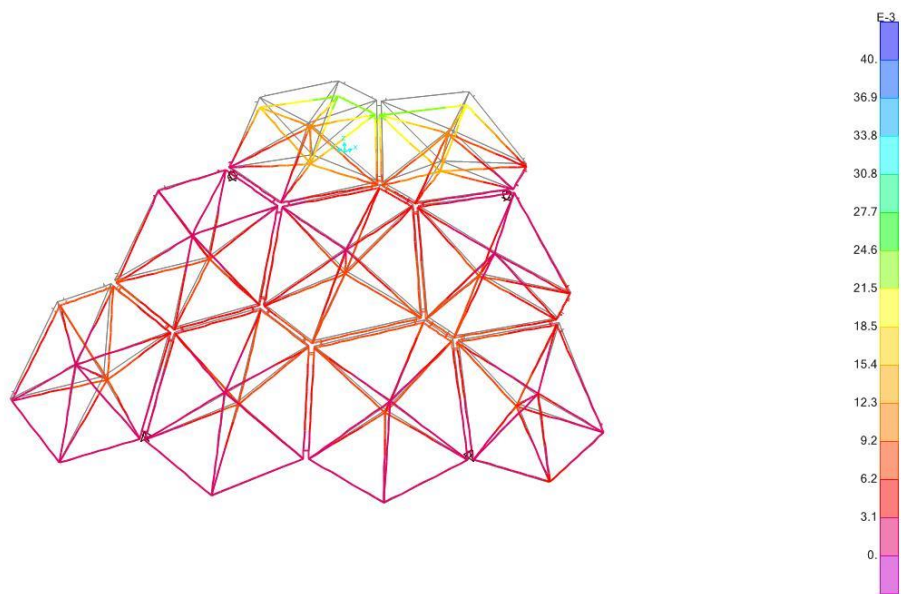


Слика 6-32) Деформације структуре по завршетку 2. фазе монтаже

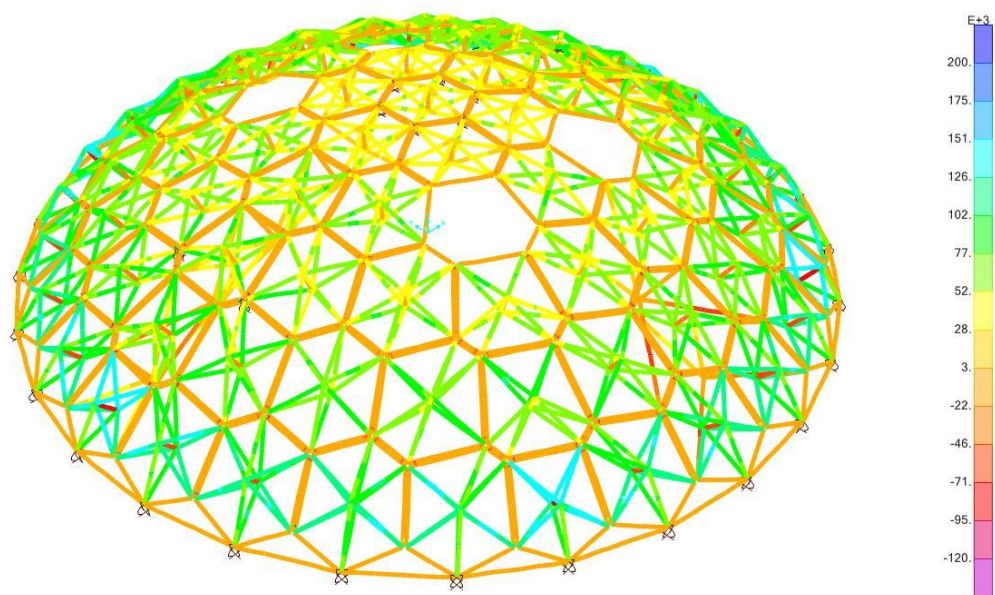




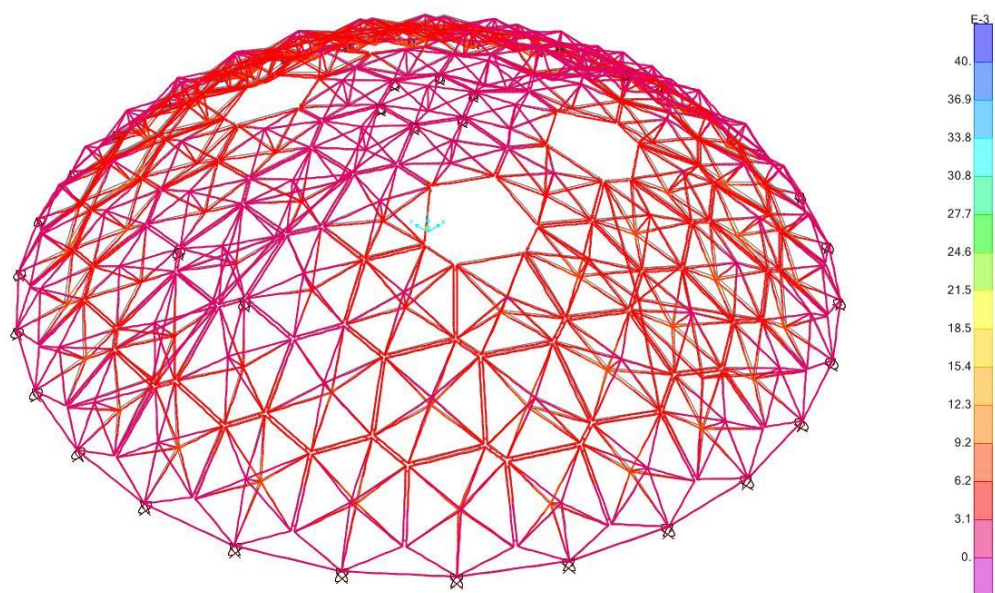
Слика 6-33) Нормални напони у сегменту структуре прихваћеног краном, 3. фаза монтаже



Слика 6-34) Деформације сегмента структуре прихваћеног краном, 3. фаза монтаже



Слика 6-35) Нормални напони у структури по завршетку 3. фазе монтаже



Слика 6-36) Деформације структуре после завршетка 3. фазе монтаже



### 6.5.1 Димензионисање елемената структуре

У табелама су приказане димензије попречних пресека елемената структуре. Осим ослоначког прстена, сви остали контруктивни елементи су приказани кроз појасеве у којима се налази одговарајући функционални елемент (у табелама означени са ФЕ). Усвојене димензије су једнаке за исте конструктивне елементе на нивоу свих функционалних елемената одговарајућег појаса.

Димензије попречних пресека контурних штапова функционалних елемената одређене су из комбинације гравитационог оптерећења и оптерећења од снега, у којој су добијени статички утицаји меродавни за њихово димензионисање.

Табела 6-8) Димензионисање контурних штапова функционалних елемената

Положај ФЕ	N (kN)	T <sub>2</sub> (kN)	T <sub>3</sub> (kN)	M <sub>2</sub> (kNm)	M <sub>3</sub> (kNm)	bxd (cm)	k <sub>iσ</sub>	k <sub>iτ</sub>
Темени полигон	-32,99	1,02	14,53	2,10	0,16	12x22	0,43	0,92
Појас I	-34,69	1,33	14,24	2,02	0,21	12x22	0,47	0,90
Појас II	-42,58	1,71	15,32	2,10	0,23	12x22	0,53	0,97
Појас III	-44,29	1,77	15,05	2,12	0,20	12x22	0,56	0,96
Појас IV	-54,43	1,71	16,94	2,73	0,23	14x22	0,55	0,92
Појас V	-74,82	1,88	16,90	2,55	0,25	14x22	0,64	0,92

Разупирач је у свим функционалним елементима истих димензија и састоји се из два дела, од којих је један увучен у други. Димензије профила су одређене из услова да остаје довољно зазора између унутрашњег и спољашњег дела разупирача за несметано подешавање његове дужине (5,6 mm), као и из услова минималне дебљине зида цевстих профила при спајању делова окова заваривањем (3,0 mm).

Табела 6-9) Димензионисање разупирача функционалних елемената

Положај ФЕ	N (kN)	$D_s \times t$ (mm)	$D_u \times t$ (mm)	$k_{i,s,\sigma}$	$k_{i,u,\sigma}$
Темени полигон	-12,44	60,3x3,2	48,3x3,2	0,15	0,18
Појас I	-12,48	60,3x3,2	48,3x3,2	0,15	0,18
Појас II	-16,39	60,3x3,2	48,3x3,2	0,20	0,23
Појас III	-16,35	60,3x3,2	48,3x3,2	0,20	0,23
Појас IV	-24,76	60,3x3,2	48,3x3,2	0,29	0,35
Појас V	-47,43	60,3x3,2	48,3x3,2	0,57	0,68

Пречници затега су одређени преко потребне површине језгра навоја профила, који је формиран ради остварења везе са затезним спојкама. Напрезања у самим затегама су мања, јер је и њихова површина већа у односу на језгра навоја.

Табела 6-10) Димензионисање затега функционалних елемената

Положај ФЕ	N (kN)	$D_z$ (mm)	$k_{i,s,\sigma}$
Темени полигон	7,43	10	0,54
Појас I	8,70	10	0,63
Појас II	12,42	10	0,90
Појас III	13,18	10	0,96
Појас IV	20,01	14	0,74
Појас V	39,05	18	0,86

Димензије попречног пресека ослоначког прстена усвојене су из услова центрирања везе између подужне осе функционалног елемента и тежишта попречног пресека прстена, као и вертикалне, подужне осе евентуалног стуба испод ослоначког прстена. У провери напрезања ослоначког прстена урачунат је моменат савијања настао услед његове закривљености. Нису разматрани услови ослањања ослоначког прстена, тако ни евентуалне екстремне вредности

напрезања. Разматран је само случај када су ослонци, на које се ослања наведени прстен, непосредно испод места ослањања функционалних елемената. При другачијем распореду ослонаца генерисали би се и другачији статички утицаји.

Табела 6-11) Димензионисање ослоначког прстена

	N (kN)	T <sub>2</sub> (kN)	T <sub>3</sub> (kN)	M <sub>2</sub> (kNm)	M <sub>3</sub> (kNm)	bxd (cm)	ki <sub>σ</sub>	ki <sub>τ</sub>
Ослон. прстен	181,60	0,30	3,44	25,19	0,35	60x20	0,38	0,04

Међусобна веза функционалних елемената остварена је са по два вијка на својим крајевима. Димензионишу се на основу трансверзалне силе која се јавља по контури функционалних елемената. Највеће силе се генеришу између функционалних елемената појаса IV, у комбинацији гравитационог оптерећења и оптерећења снегом. У разматраној структури, у овим везама се не јавља затежућа сила ни у једној комбинацији оптерећења.

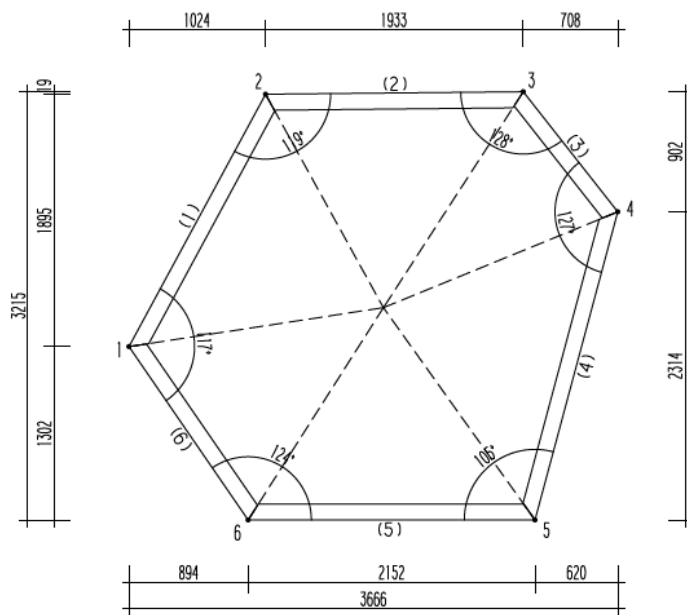
Табела 6-12) Димензионисање везе између функционалних елемената

	T <sub>2</sub> (kN)	T <sub>3</sub> (kN)	усвојено
Споне	3,50	7,99	2М20

## 6.5.2 Кројне листе контурних штапова функционалних елемената

Прецизност при формирању функционалних елемената зависи од правилне обраде крајева контурних штапова. У припреми дрвених штапова израђују се одговарајући цртежи (кројне листе) које служе да би се извршило прецизно сечење-кројење њихових крајева. Специфичност при кројењу штапова је у томе што се они не кроје по симетрали угла између суседних штапова, већ према угловима које заузимају затеге у односу на њих.

У кројној листи је приказан утросак дрвене грађе, потребне за формирање једног функционалног елемента, као и развијена површина искројених штапова, која се користи при одређивању потребне количине заштитних средстава. Све приказане мере су у милиметрима.



Слика 6-37) Склоп контурних штапова позиције 6

Објект: ПК (6.6 <sup>5</sup> )			Позиција 6			V = 0.3000 m <sup>3</sup> /kom Pr= 7.7255 m <sup>2</sup> /kom		
Ознака штапа: 1			b/h=220/120 mm			1 kom		
Ознака штапа: 2			b/h=220/120 mm			1 kom		
Ознака штапа: 3			b/h=220/120 mm			1 kom		
Ознака штапа: 4			b/h=220/120 mm			1 kom		
Ознака штапа: 5			b/h=220/120 mm			1 kom		
Ознака штапа: 6			b/h=220/120 mm			1 kom		

Слика 6-38) Кројна листа контурних штапова позиције 6

### 6.5.3 Утрошак материјала у реализацији структуре

Један од показатеља рационалности одређене структуре јесте утрошак материјала у њеној реализацији. У табелама су приказани утрошак дрвене грађе и утрошак челика за формирање затега, разупирача и окова за формирање веза.

Површина хоризонталне пројекције структуре: 706,50 m<sup>2</sup>.

Развијена површина структуре: 781,53 m<sup>2</sup>.

Табела 6-13) Утрошак дрвене грађе за формирање структуре

Ознака позиције	Комада	O <sub>гс</sub> (m <sup>1</sup> )	b (m <sup>1</sup> )	d (m <sup>1</sup> )	V <sub>p</sub> (m <sup>3</sup> /pos)
1	1	10,408	0,12	0,22	0,275
2	6	10,805	0,12	0,22	1,712
3	6	11,107	0,12	0,22	1,759
4	6	11,271	0,12	0,22	1,785
5	6	11,061	0,12	0,22	1,752
6	12	11,376	0,12	0,22	3,604
7	6	10,938	0,14	0,22	2,021
8	12	11,354	0,14	0,22	4,196
9	6	11,291	0,14	0,22	2,087
10	6	9,987	0,14	0,22	1,846
11	12	10,896	0,14	0,22	4,027
12	12	11,016	0,14	0,22	4,072
Укупно:					29,136

Утрошак дрвене грађе по хоризонталној и развијеној површини структуре:

$$d_h = \Sigma V_d / P_h = 29,136 / 706,50 = 0,0412 \text{ m} = 4,12 \text{ cm}$$

$$d_r = \Sigma V_d / P_s = 29,136 / 781,53 = 0,03728 \text{ m} = 3,73 \text{ cm}$$

Утрошак дрвета за формирање структуре је еквивалентан прекривању хоризонталне пројекције структуре дрветом у дебљини 4,12 cm, односно подшчавању целе структуре даском у дебљини 3,73 cm.

Табела 6-14) Утрошак челика за формирање затега структуре

Ознака позиције	Комада	$I_z$ ( $m^3/ком$ )	$\varphi$ (mm)	$M'$ ( $kg/m^3$ )	$M$ ( $kg/pos$ )
1	1	20,820	10	0,617	12,836
2	6	21,688	10	0,617	80,229
3	6	22,436	10	0,617	82,996
4	6	22,630	10	0,617	83,713
5	6	22,476	10	0,617	83,144
6	12	22,924	10	0,617	169,602
7	6	22,340	14	1,208	161,976
8	12	23,044	14	1,208	334,160
9	6	22,668	14	1,208	164,354
10	6	17,028	18	1,998	204,089
11	12	22,082	18	1,998	529,327
12	12	22,134	18	1,998	530,547
Укупно:					2437,000

Табела 6-15) Утрошак челика за формирање окова и разупирача

Ознака позиције	Комада	$M'$ ( $kg/ком$ )	$M$ (kg)
Разупирач	91	8,773	798,343
Оков за везу штапова	510	11,657	5945,070
Ослонички оков	30	26,657	799,710
Укупно:			7543,123

Утрошак челика (затезе, оков и разупирачи) по хоризонталној и развијеној површини структуре:

$$2437,000 + 7543,123 = 9980,123 \text{ kg}$$

$$t_{ch} = \Sigma M / P_h = 9980,123 / 706,50 = 14,126 \text{ kg}$$

$$t_{cr} = \Sigma M / P_s = 9980,123 / 781,53 = 12,770 \text{ kg}$$

Просечна тежина структуре по хоризонталној и развијеној површини структуре:

$$29,136 \cdot 6 + 99,80 = 274,62 \text{ kN}$$

$$t_{jh} = 274,62 / 706,50 = 0,3887 \text{ kN/m}^2$$

$$t_{jr} = 274,62 / 781,53 = 0,3514 \text{ kN/m}^2$$

## 7 Закључак

Одрживост привредног развоја захтева консолидацију домаће индустрије и реиндустријализацију у перспективним гранама, а грађевинарство, као грана која покреће друге делатности, спада у најперспективније. Развој технологије и глобализација у свим привредним гранама указују на неопходност усвајања одговарајућих технологија из развијених земаља, али и развијања сопствених технологија. Неки од основних разлога за укључивањем у индустријализацију грађења представљају смањење трошкова грађења, подизање квалитета производа, смањење потребног нивоа занатског рада и умећа, продужење грађевинске сезоне и многи други.

Да би префабрикација производње функционалних елемената, основне градивне јединице у префабрикацији, дала очекиване и задовољавајуће резултате, у раду се врши преглед неколико значајнијих аспеката у рационализацији префабрикованих система.

Идеја је да се у реализацији полиедарских куполастих структура користи одређена математичка површ и да се на тај начин уштеди на времену потребном у пројектовању и организацији грађења, али и на времену потребном у другим фазама. Ова идеја захтева анализу постојећег фонда знања из области генерисања облика и тела полигонима, који би у реализацији структуре представљали функционалне елементе одређеног префабрикованог система. Велики број тела, генерисаних применом правилних полигона, представља квалитетну основу за даљи развој полиедарских куполастих структура.

Савремени системи куполастих структура омогућавају висок степен у рационализацији градње. Једну од таквих структура представљају геодезијске куполе формиране од тринагулисане мреже штапова. Ове структуре представљају прави израз индустријализације и структурне архитектуре тог времена.



Несумњив је квалитет геодезијских купола. Сферни облик структуре и триангулисана мрежа штапова омогућавају премошћавање великих простора са врло мало материјала, такође, ове структуре заузимају највећу запремину према развијеној површини структуре, у односу на друге конструктивне системе. Ове и многе друге предности афирмишу геодезијску куполу као врло економичну структуру.

Упркос великим предностима оваквог система, геодезијске куполе имају и одређене недостатке. Једна од значајнијих предности ових структура је свакако већ поменут висок однос запремине и развијене површине структуре. Може се рећи да ова предност представља и њихов главни недостатак – нису честе потребе за таквим односом наведених вредности.

Формирање структуре произвољног односа висине и распона повлачи низ техничко-технолошких проблема. Штапови и чворови структуре, компоненте у систему префабрикације геодезијске куполе, морају бити беспрекорне геометрије и израде, те свака промена у структури повлачи промену њихове геометрије и израду нових компоненти. Због великог броја штапова који се сустиче у једној тачки, чворови структуре постају компликовани и скупи. Нефлексибилна и крута форма геодезијске куполе захтева прилагођавање потреба корисника структуре, уместо обрнуто.

Сви ови разлози су навели на геометријску и функционалну трансформацију геодезијских купола, који би могао задржати њихове евидентне предности и елиминисати недостатке. Геодезијске куполе представљају узор и инспирацију, а свакако да представљају и велики изазов.

Дефинисање једног новог, другачијег система куполастих структура, омогућено је класификовањем полиедарских купола, које се могу успешно применити у њиховој реализацији. У класификацији полиедарских купола, осим геометријских услова, морају се имати у виду и услови стабилности формиране структуре и генерисање што повољније напонске слике у структури, остварење једноставних веза на градилишту, економичан транспорт, једноставну монтажу

итд., у складу са стратичко-конструктивним својствима, једним од аспеката рационалне примене префабрикованог система.

Провера исправности постављених хипотеза претпоставља и проверу резултата и примене резултата, која се спроводи на виртуелном моделу полиедарске куполасте структуре. Основну градивну јединицу у њеној структури представља преднапрегнути функционални елемент од контурних дрвених штапова и челичних затега.

Дрво је одувек у нашој средини било један од основних грађевинских материјала. С друге стране, његова примена у градњи просторних структура се може сматрати изузецима, спорадичном (али врло успешним) применом разних префабрикованих система, одомаћених у нашој грађевинској пракси. Примена дрвета у оваквим структурама води ка његовој афирмацији као материјала добрих физичких и механичких карактеристика, али и популаризацији реализованих структура, којима дрво даје висок естетски квалитет.

Резултати провере виртуелног модела показују велике могућности у реализацији наведених структура. Префабрикацијом функционалних елемената омогућена је још већа рационализација у њиховој реализацији, која обухвата пројектовање, производњу, транспорт и монтажу функционалних елемената, а тиме и рационализација у реализацији самих структура.

Даља истраживања у оквиру теме могу се проширити на неколико поља. Прву област представља класификација полиедарских купола, која би се могла допунити полиедарским куполама без теменог полигона, чиме би се обухватили Каталанови полиедри у већој мери.

Такође, с обзиром на то да преднапрегнут функционални елемент представља врло круту и стабилну форму, његова примена се може проширити на градњу полиедарских структура другачије форме, а не само на куполасте. Осим конвексних, могу се формирати и неконвексне полиедарске структуре. Структуре без ослоначког прстена и без ивичног ојачања које он чини подложне су већим

деформацијама него оне са њим, па је потребна и већа пажња при генерисању њихове геометрије и при реализацији такве структуре.

Радам је само дотакнута област мултипликације структура, као један од начина њихове примене. Велики изазов представљају структуре слободне форме, над основама отвореног и неправилног облика.

## Литература

- Aravind, P. K., How Spherical Are the Archimedean Solids and Their Duals?, Mathematical Association of America, Vol. 42, No. 2, 2011, стр. 98-107.
- Bridgens, B. N., Architectural fabric properties: determination, representation & prediction, School of Civil Engineering & Geosciences at the University of Newcastle, 2005, доступно на: <https://theses.ncl.ac.uk/dspace/>
- Chilton, John, Space Grid Structures, Architectural Press, Oxford – Auckland – Boston – Johannesburg – Melbourne – New Delhi, 2000.
- Deplazes, Andrea, Архитектонске конструкције, од сировине до грађевине, Грађевинска књига, Београд, 2008.
- Fuller, R. Buckminster, Your private sky: Art Design Science, Lars Müller Publishers, Zürich, 1999.
- Fuller, R. Buckminster, Your private sky: Discourse, Lars Müller Publishers, Zürich, Museum of Design, 2001.
- Gabriel, J. François, Beyond the cube: The Architecture of space frames & polyhedra, The John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997.
- Hiel K., Кочетов Мишулић Т., Штулић Р., „Visual beauty of wooden structures in architectural design“, Зборник радова трећег интернационалног научно-стручног скупа Грађевинарство – наука и пракса, ГНП 2010, Жабљак, 2010, стр. 1163–1168.
- Hiel, K., Штулић Р., Кочетов Мишулић Т., „Wooden curved forms in architecture“, Proceedings of International conference MonGeometrija 2010, Belgrade, 2010, CD, 44/1–44/6.

- Holgate, Alar, *The Art of Structural Engineering – The Work of Jörg Schlaich and his Team*, Edition Axel Menges, Stuttgart/London, 1997.
- Johnson, Norman, *Convex Solids with Regular Faces*, Canadian Journal of mathematics, 18,1966, p. 169-200, доступно на: <http://cms.math.ca/10.4153/CJM-1966-021-8>
- Kappraff, Jay, *Connections, the geometric bridge between art and science*, World Scientific, Singapore – New Jersey – London – Hong Kong, 2001.
- Küttlinger, Georg, *Holzbau konstruktionen*, Institut für internat. Architektur-Dokumentationen, München, 1984.
- Mannes, Willibald, *Dachkonstruktionen in holz*, DVA, Stuttgart, 1987.
- Natterer, Julius, Herzog Thomas, Volz, Michael, *Holzbau Atlas*, R. Müller, Köln, 1991.
- Parke, G. A. R., Howard, C. M., *Space Structure 4*, Thomas Telford, London, 1993.
- Rühle, Herrmann, превод: Балгач, Едмунд, *Просторне кровне конструкције, њихове појединости, њихово извођење*, Грађевинска књига, Београд, 1977.
- Staub, G., Dörrhöfer, A., Rosental, M., *Components and systems*, Architektur-Dokumentation GmbH & Co. KG, München, 2008.
- Šiber, Antonio, *Arhitektura Buckminstera Fullera i oblici i energetika oblika od  $sp^2$  ugljika*, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, seminar AMACIZ, 2007.
- Šiber, Antonio, Podgornik, Rudolf, *Stability of elastic icosadeltahedral shells under uniform external pressure: Application to viruses under osmotic pressure*, PHYSICAL REVIEW E 79, 011919, 2009.
- Šiber, Antonio, *Podrijetlo oblika i structure: fizikalni pogled*, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, стручни рад у часопису Vijenac, 2007.
- Žagar, Zvonimir, *Drvene inženjerske konstrukcije i njihova sigurnost – Mogućnosti industrijske proizvodnje mrežastih struktura iz drveta*, B5-1-1, Simpozij, Cavtat, 1977.

- Žagar, Zvonimir, Drvene konstrukcije II. Modeliranje, Pretei, Zagreb, 2001.
- Žagar, Zvonimir, Drvene konstrukcije III. Prostornost i usloženost, Pretei, Zagreb, 2001.
- Анагности, Петар, Нацртна геометрија, Научна књига, Београд, 1986.
- Антон Билимовић: Улога једнако-рогљастих Архимедових полиједара у проблему више тела, Српска краљевска академија, Београд, 1941.
- Белајчић, Душан, Векторски рачун и аналитичка геометрија у простору, Научна књига, Београд, 1987.
- Белајчић, Душан, Детерминанте и матрице, Научна књига, Београд, 1987.
- Данчевић, Десимир, Конструктивни системи, Ниш, 1978.
- Ђорђевић, Саша, Обликовање функционалних елемената кровова са поткровљем у систему ЛКВ, Магистарска теза, Београд, 2010.
- Закић, Б., Кочетов Мишулић, Т., „Испитивање дрвених конструкција“. Поглавље у монографској публикацији о Испитивању конструкција, „Материјали и конструкције“, Београд, Срј, бр. 3–4, стр. 60–73, 1993.
- Залгаллер, В. А., Выпуклые многогранники с правильными гранями, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1967, том 2, 5–221, доступно на: [www.mathnet.ru/](http://www.mathnet.ru/)
- Злоковић, Ђорђе, Координирани систем конструкција, Извод из докторске дисертације, Београд, 1961.
- Злоковић, Ђорђе, Просторне структуре, Грађевинска књига, Београд, 1969.
- Кујунџић, В., Текић, Ж., Ђорђевић, С., Савремени системи дрвених конструкција, Орион Арт, Београд, 2004.
- Кујунџић, Војислав, Дрвене конструкције у мојој архитектонској пракси, Више издавача, Београд, 2014.

Кујунџић, Војислав, Примена индустријализованих монтажних система са аспекта рационализације градње дрвених кровних структура, Докторска дисертација, Архитектонски факултет, Београд, 1987.

Кујунџић, Војислав, Савремене дрвене конструкције, Београд, 1989.

Лучић, Зоран, Униформне теселације хиперболичке равни, докторска дисертација, Београд, 1985.

Митровић, Ратко, Павловић, Страхиња, Индустријализација као технологија грађења у будућности, Индис, Зборник радова, Нови Сад, 2006.

Несторовић, Миодраг, Конструктивни системи – принципи конструисања и обликовања, Архитектонски факултет, Београд, 2000.

Обрадовић, Марија, Конструктивно-геометријска обрада тороидних делтаедара са правилном полигоналном основом, Докторска дисертација, Архитектонски факултет, Београд, 2006.

Текић, Жикица, Обликовање функционалних елемената кровних дрвених структура у систему ЛКВ – програмски пакет, Магистарска теза, Архитектонски факултет, Београд, 2001.

Трбојевић, Ранко, Комбинабилитет функционалних елемената у префабрикованој стамбеној изградњи, Докторска дисертација, Архитектонски факултет, Београд, 1979.

Остали извори:

Project Gutenberg Self-Publishing Press: <http://www.gutenberg.us>

World Heritage Encyclopedia: <http://www.worldheritage.org>

Buckminster Fuller Institute: <https://bfi.org/>

<http://mathworld.wolfram.com>





## Биографија аутора

Мр Саша Ђорђевић, дипломирани инжењер архитектуре, рођен је 1968. год. у Лесковцу, где је завршио средњу школу 1987. године. Исте године уписао је Архитектонски факултет у Београду.

У току студија похађао је наставу на изборној групи предмета „Конструктивни системи“. Посебна област интересовања за време студија су конструктивни системи у архитектури, а посебно област конструктивних система у дрвету и примена рачунара у те сврхе. Дипломирао је из области пројектовања конструкција у лепљеном ламелираном дрвету 1993. године, код проф. др Војислава Кујунџића.

Након дипломирања, област посебног интересовања су му и даље конструктивни системи, са посебним интересовањем за конструкције пројектоване у дрвету. Ужа област интересовања су му конструктивни системи пројектовани у систему ЛКВ. Постдипломске студије похађао је на смеру „Конструктивни системи у архитектури“ школске 1994/95. и 1995/96. године.

Магистарску тезу под насловом „Обликовање функционалних елемената кровова са поткровљем у систему ЛКВ“ одбранио је 2010. године и стекао академски назив Магистра техничких наука из области Архитектуре и урбанизма.

У периоду школске 2002/2003. год. радио је као демонстратор на предмету Дрвене и металне конструкције. Од априла 2003. године запослен је на месту асистента приправника на предмету Дрвене и металне конструкције на Архитектонском факултету Универзитета у Београду. Учествовао је у настави на следећим предметима: Дрвене и металне конструкције, Механика и отпорност материјала, Бетонске конструкције, Конструктивни системи, Дрвене структуре, Индустријализовани системи дрвених конструкција, Конструктивни системи у дрвету, Металне конструкције 2, Конструктивне карактеристике примењених

материјала, Принципи конструисања архитектонских објеката, Студио пројекат АТ, Студио пројекат М4 (дипломске студије), Пројектовање и прорачун конструкција I.

Поред учешћа на вежбама, радио је и на изради бројних примера за вежбе и испите на предмету Дрвене и металне конструкције. Један је од аутора уџбеника „Савремени системи дрвених конструкција“, објављеног 2004. године, за потребе студената Архитектонског факултета.

Кандидат перманентно ради на стручном усавршавању у оквиру области пројектовања архитектонских објеката и конструктивних система. Учествовао је као аутор или коаутор на креирању више софтверских апликација за прорачун и обликовање конструкција, од којих се неке од њих користе као основни софтверски пакети у пројектовању и реализацији конструкција.

Поседује лиценце 300, 301 и 401 за израду пројеката архитектонских објеката и конструкција у високоградњи и извођење истих. Као надзорно лице учествује у изградњи кућа за избегло становништво са подручја бивше Југославије, које финансира хуманитарна организација HELP.

Као одговорни пројектант је испројектовао већи број конструкција и објеката:

1. Пројекат дрвене кровне конструкције Католичке мисије у Улан Батору, у Монголији, распона 50 м, у систему ЛЛД,
2. Пројекат дрвене међуспратне конструкције Католичке мисије у Улан Батору, у Монголији, пречника 50 м, у систему ЛЛД,
3. Пројекат дрвене конструкције у Виминацијуму распона 30 м, у систему ЛЛД,
4. Пројекат наборасте дрвене кровне конструкције спортске дворане у Медвеђи, распона 27 м, у систему ЛКВ,
5. Пројекат дрвене конструкције спортске дворане у Младеновцу, распона 24 м, у систему ЛЛД,

6. Више пројеката конструкција дворана за мале спортове распона 16–20 м, у систему ЛКВ,
7. Више пројеката кровних конструкција у систему ЛКВ распона до 18 м, од којих је преко 50 изведено,
8. Више пројеката конструкција стамбених објеката у дрвету, спратности П+2, у Сен Галену, Швајцарска, од којих је шест изведено,
9. Више главних пројеката панелних стамбених објеката у дрвету спратности до П+1, у земљи и иностранству,
10. Више пројеката конструкција стамбених објеката у земљи.

Аутор или коаутор је више објављених радова:

*А) Радови у научним часописима међународног значаја објављени у целини:*

1. Tekić, Ž., Nenadović, A., Đorđević, S., LOAD-BEARING CAPACITY OF TIMBER MEMBER FINGER-JOINT CONNECTIONS, TTEM – Technics Technologies Education Management, Vol. 8, No. 4, 2013, стр. 1498-1503. ISSN 1840-1503 (Print), ISSN 1986-809X (Online). SCI листа Thompson Reuters, Impact Factor: 0.414 (ISI Journal Citation Reports 2012).
2. Tekić, Ž., Nenadović, A., Đorđević, S., Terzović, J., METAL CONNECTOR PLATE – EXPERIMENTAL DETERMINATION OF PLATE ANCHORAGE CAPACITY, Tehnički vjesnik – technical gazette, Vol. 22, No. 2, 2015, стр. 375-381. ISSN 1330-3651 (Print), ISSN 1848-6339 (Online). SCI листа Thompson Reuters, Impact Factor: 0.615 (ISI Journal Citation Reports 2013).

*Б) Радови у зборнику радова са међународног научног скупа објављени у целини:*

1. Војислав Кујунџић, Жикица Текић, Саша Ђорђевић, МЕТАЛНИ КОНЕКТЕР – СПОЈНО СРЕДСТВО У ДРВЕНИМ КОНСТРУКЦИЈАМА, iNDIS 2003, Нови Сад, 2003, стр. 231-234.
2. Жикица Текић, Саша Ђорђевић, ПРИМЕНА СИСТЕМА ЛКВ ЗА ОБЈЕКТЕ СИСТЕМА ЕКО-КУЋА, iNDIS 2003, Нови Сад, 2003, стр. 483-488.

3. Саша Ђорђевић, Жикица Текић - ПРИМЕНА СИСТЕМА ЕКО-КУЋА ЗА ОБЈЕКТЕ НАМЕЊЕНЕ СТАНОВАЊУ, iNDIS 2003, Нови Сад, 2003, стр. 87-93.
4. Жикица Текић, Саша Ђорђевић, ЕКСЕРАСТИ МЕТАЛНИ КОНЕКТЕР – САВРЕМЕНО МЕХАНИЧКО СПОЈНО СРЕДСТВО У ДРВЕНИМ КОНСТРУКЦИЈАМА, iNDIS 2006, Нови Сад, 2006, стр. 443-450.
5. Саша Ђорђевић, Жикица Текић, КОНСТРУИСАЊЕ И ТИПИЗАЦИЈА ЧВОРНИХ ВЕЗА У СИСТЕМУ ЛКВ, iNDIS 2006, Нови Сад, 2006, стр. 331-338.
6. Жикица Текић, Саша Ђорђевић, Јефто Терзовић, КРОВНА ДРВЕНА КОНСТРУКЦИЈА ВИШЕНАМЕНСКЕ СПОРТСКЕ ДВОРАНЕ У ПАНЧЕВУ – ЧВОРНЕ ВЕЗЕ, iNDIS 2009, Нови Сад, 2009, стр. 443-450.
7. Саша Ђорђевић, Жикица Текић, Љиљана Арсић-Паљић, ПРИКАЗ ДРВЕНЕ КРОВНЕ КОНСТРУКЦИЈЕ СПОРТСКЕ ДВОРАНЕ У МЕДВЕЂИ, iNDIS 2009, Нови Сад, 2009, стр. 143-150.
8. Жикица Текић, Саша Ђорђевић, СПОРТСКА ДВОРАНА У ПАНЧЕВУ – КРОВНА ДРВЕНА КОНСТРУКЦИЈА, Научно-стручни скуп „Грађевинарство – наука и пракса“ ГНП 2010, Жабљак, Црна Гора, 2010, стр. 437-442.
9. Жикица Текић, Саша Ђорђевић, СПОРТСКА ДВОРАНА У ПАНЧЕВУ – КРОВНА ДРВЕНА КОНСТРУКЦИЈА, Симпозијум ТЕИК 2010, Ниш, 2010, стр. 243-251.
10. Жикица Текић, Саша Ђорђевић, Љиљана Арсић Паљић, ДРВЕНА КОНСТРУКЦИЈА РЕКРЕАТИВНОГ ЦЕНТРА У СМЕДЕРЕВСКОЈ ПАЛАНЦИ, Међународни научно-стручни скуп „Архитектура и урбанизам, грађевинарство, геодезија – јуче, данас, сутра“, Бања Лука, 2011, стр. 569-576.
11. Žikića Tekić, Saša Đorđević, DRVENA KONSTRUKCIJA KROVA U TECHNOLOGIJI LLD NAD OSNOVOM OBLIKA ZARUBLJENOG KVADRATA, Drugi međunarodni naučni skup „Stanje i pravci razvoja građevinarstva“ GTZ 2012 i Drugo savjetovanje GEO-EXPO 2012, Zbornik radova – 1. dio, Тузла, 2012, стр. 465-472.
12. Жикица Текић, Саша Ђорђевић, Јефто Терзовић, Небојша Аџић, ДРВЕНА КОНСТРУКЦИЈА РЕКРЕАТИВНОГ ЦЕНТРА У СМЕДЕРЕВСКОЈ

- ПАЛАНЦИ, 4. Интернационални научно-стручни скуп „Грађевинарство – наука и пракса“ ГНП 2012, Жабљак, Црна Гора, 2012, стр. 591-598.
13. Жикица Текић, Александра Ненадовић, Саша Ђорђевић, ПРОЈЕКТОВАЊЕ, ПРОРАЧУН И ИЗВОЂЕЊЕ ДРВЕНЕ КОНСТРУКЦИЈЕ КРОВА, Научно-стручни симпозијум ИНСТАЛАЦИЈЕ & АРХИТЕКТУРА, Архитектонски факултет Универзитета у Београду, Београд, 2013, стр. 284-290.
14. Жикица Текић, Александра Ненадовић, Саша Ђорђевић, САНАЦИЈА ЕЛЕМЕНАТА КРОВНЕ ДРВЕНЕ КОНСТРУКЦИЈЕ, Научно-стручни симпозијум ИНСТАЛАЦИЈЕ & АРХИТЕКТУРА, Архитектонски факултет Универзитета у Београду, Београд, 2015, стр. 157-162.
15. Жикица Текић, Александра Ненадовић, Саша Ђорђевић, КОНСТРУКЦИЈА ДВОВОДНОГ КРОВА У СИСТЕМУ ЛКВ, Научно-стручни симпозијум ИНСТАЛАЦИЈЕ & АРХИТЕКТУРА, Архитектонски факултет Универзитета у Београду, Београд, 2015, стр. 163-168.

*В) Радови у водећем часопису националног значаја објављени у целини:*

1. Žikica Tekić, Saša Đorđević, EKSPERIMENTALNO ODREĐIVANJE NOSIVOSTI VEZA OSTVARENIH METALNIM KONEKTERIMA, Техника, No. 5, 2014, стр. 235-241. ISSN: 0040-2176, UDC: 62(062.2) (497.1).
2. Žikica Tekić, Saša Đorđević, EXPERIMENTAL DETERMINATION OF LOAD BEARING CAPACITY OF CONNECTIONS REALIZED BY PUNCHED METAL PLATE FASTENER, Technics – special edition, YEAR LXIX 2014, стр. 25-31. ISSN: 0040-2176, UDC: 62(062.2) (497.1).

*Г) Радови у научном часопису објављени у целини:*

1. Жикица Текић, Саша Ђорђевић, Александра Ненадовић, ДРВЕНА РЕШЕТКАСТА КОНСТРУКЦИЈА КРОВА – ГРЕШКЕ У ПРОЈЕКТОВАЊУ И ИЗВОЂЕЊУ, АГГ+, часопис за архитектуру, грађевинарство, геодезију и сродне научне области, Архитектонско-грађевински факултет у Бањој Луци, Бања Лука, 2013, стр. 156-163. ISSN: 2303-6036, UDK I UDC 72.

*Д) Радови у зборнику радова са националног научног скупа објављени у целини:*

1. Жикица Текић, Саша Ђорђевић, ОБЛИКОВАЊЕ ЗАБАТНЕ РАВНИ КРОВА ПРОЈЕКТОВАНОГ У СИСТЕМУ ЛКВ, Симпозијум ЈДГК, Врњачка Бања, 2004, стр. 273-277.
2. Саша Ђорђевић, Жикица Текић, ОСНОВИ ОБЛИКОВАЊА И ПРОРАЧУНА ЛАКИХ КРОВНИХ ВЕЗАЧА, Симпозијум ЈДГК, Врњачка Бања, 2004, стр. 279-284.
3. Жикица Текић, Саша Ђорђевић, ЕКСЕРАСТИ МЕТАЛНИ КОНЕКТЕР – ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО ОДРЕЂИВАЊЕ НОСИВОСТИ, 12. конгрес ЈДГК, Врњачка Бања, 2006, стр. 143-148.
4. Саша Ђорђевић, Жикица Текић, ПРИЛОГ РЕШАВАЊУ ЕКСЦЕНТРИЧНОСТИ ВЕЗЕ ШТАПОВА ДРВЕНИХ РЕШЕТКИ У СОФТВЕРСКИМ АПЛИКАЦИЈАМА, 12. конгрес ЈДГК, Врњачка Бања, 2006, стр. 149-153.
5. Жикица Текић, Саша Ђорђевић, Јефто Терзовић, КРОВНА ДРВЕНА КОНСТРУКЦИЈА ВИШЕНАМЕНСКЕ СПОРТСКЕ ДВОРАНЕ У ПАНЧЕВУ, Симпозијум ДГКС, Златибор – Чигота, 2008, стр. 261-266.
6. Саша Ђорђевић, Жикица Текић, ИДЕЈНИ КОНСТРУКТИВНО-СТАТИЧКИ ПРОЈЕКАТ САНАЦИЈЕ И РЕКОНСТРУКЦИЈЕ ЧЕЛИЧНЕ КОНСТРУКЦИЈЕ ЗАТВОРЕНОГ БАЗЕНА, Симпозијум ДГКС, Златибор – Чигота, 2008, стр. 351-356.
7. Жикица Текић, Саша Ђорђевић, Небојша Аџић, КРОВНА ДРВЕНА КОНСТРУКЦИЈА ВИНАРИЈЕ У ПОДОСТРОГУ У ЦРНОЈ ГОРИ, 13. конгрес ДГКС, Златибор – Чигота, 2010, стр. 329-334.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани-а Саша М. Ђорђевић

број индекса \_\_\_\_\_

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

ГЕОМЕТРИЈСКА И СТРУКТУРНА ТРАНСФОРМАЦИЈА ГЕОДЕЗИЈСКИХ КУПОЛА  
ИЗ УСЛОВА ИНДУСТРИЈСКЕ ПРЕФАБРИКАЦИЈЕ ГРАЂЕЊА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

**Потпис докторанда**

У Београду, јун 2016 \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Саша М. Ђорђевић

Број индекса \_\_\_\_\_

Студијски програм Архитектура и урбанизам

Наслов рада Геометријска и структурна трансформација геодезијских купола из  
услова индустријске префабрикације грађења

Ментор др Милан Глишић

Потписани/а Саша М. Ђорђевић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис докторанда**

У Београду, јун 2016.

\_\_\_\_\_



Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

ГЕОМЕТРИЈСКА И СТРУКТУРНА ТРАНСФОРМАЦИЈА ГЕОДЕЗИЈСКИХ КУПОЛА  
ИЗ УСЛОВА ИНДУСТРИЈСКЕ ПРЕФАБРИКАЦИЈЕ ГРАЂЕЊА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

**Потпис докторанда**

У Београду, јун, 2016.\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.