



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА У
НОВОМ САДУ



Дејан Јеркан

**Динамички модел трофазне кавезне
асинхроне машине заснован на методи
коначних елемената**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Нови Сад, 2016



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ • ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР:	
Идентификациони број, ИБР:	
Тип документације, ТД:	Монографска документација
Тип записа, ТЗ:	Текстуални штампани материјал
Врста рада, ВР:	Докторска дисертација
Аутор, АУ:	Дејан Јеркан
Ментор, МН:	др Дарко Марчетић
Наслов рада, НР:	Динамички модел трофазне кавезне асинхроне машине заснован на методи коначних елемената
Језик публикације, ЈП:	српски
Језик извода, ЈИ:	српски
Земља публикавања, ЗП:	Република Србија
Уже географско подручје, УГП:	АП Војводина
Година, ГО:	2016.
Издавач, ИЗ:	Ауторски репринт
Место и адреса, МА:	Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, 21000 Нови Сад
Физички опис рада, ФО: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	6/189/81/0/99/0/0
Научна област, НО:	Електротехничко и рачунарско инжењерство
Научна дисциплина, НД:	Електричне машине
Предметна одредница/Кључне речи, ПО:	Метода коначних елемената, трофазне кавезне асинхроне машине, жљебни хармоници, засићење, кварови у кавезном ротору
УДК	
Чува се, ЧУ:	У библиотеци Факултета техничких наука, Нови Сад
Важна напомена, ВН:	
Извод, ИЗ:	Тема докторске дисертације је развој и верификација новог динамичког модела трофазне кавезне асинхроне машине, који је заснован на методи коначних елемената. Применом линеарних магнетостатичких симулација и time-harmonic нелинеарних симулација се реконструишу индуктивности динамичког модела машине заснованог на вишеструко спрегнутим електричним колима. Модел се затим користи у истраживању феномена везаних за појаву жљебних хармоника, сатурацијом индукованих хармоника, као и у развоју нове методе детекције сломљених шипки у роторском кавезу.
Датум прихватања теме, ДП:	24.09.2015.
Датум одбране, ДО:	
Чланови комисије, КО:	Председник: др Владимир Катић, редовни професор Члан: др Веран Васић, редовни професор Члан: др Слободан Вукосавић, редовни професор Члан: dr Marian Grecopici, ванредни професор Члан, ментор: др Дарко Марчетић, ванредни професор
	Потпис ментора



UNIVERSITY OF NOVI SAD • FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES
21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 6

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	Monographic publication
Type of record, TR :	Textual printed material
Contents code, CC :	
Author, AU :	Dejan Jerkan
Mentor, MN :	dr Darko Marčetić
Title, TI :	Dynamic model of three-phase squirrel-cage induction machine based on finite elements method
Language of text, LT :	Serbian
Language of abstract, LA :	Serbian
Country of publication, CP :	Republic of Serbia
Locality of publication, LP :	Autonomous Province of Vojvodina
Publication year, PY :	2016.
Publisher, PB :	Author's reprint
Publication place, PP :	Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad
Physical description, PD : <small>(chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)</small>	6/189/81/0/99/0/0
Scientific field, SF :	Electrical engineering
Scientific discipline, SD :	Electrical machines
Subject/Key words, S/KW :	Finite element method, three-phase squirrel-cage induction machines, rotor slot harmonics, saturation, squirrel-cage faults
UC	
Holding data, HD :	Library of the Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad
Note, N :	
Abstract, AB :	Topic of this thesis is development and verification of the novel dynamical model of the three phase squirrel-cage induction machine, which is based on the finite elements method. Linear magnetostatic simulations and nonlinear time-harmonic simulations are used for calculation of the inductances of the dynamic model of the machine based on the multiple coupled circuit approach. Model is then used for investigation of the rotor slot harmonics, saturation induced harmonics and in the development of the novel method for broken rotor bars detection.
Accepted by the Scientific Board on, ASB :	24.09.2015.
Defended on, DE :	
Defended Board, DB :	
President:	dr Vladimir Katić, full professor
Member:	dr Veran Vasić, full professor
Member:	dr Slobodan Vukosavić, full professor
Member:	dr Marian Greconici, associate professor
Member, Mentor:	dr Darko Marčetić, associate professor
	Mentor's sign

Садржај

Садржај	1
1. Увод	1
1.1 Оправданост примене методе коначних елемената у анализи рада асинхроних машина.....	3
1.2 Кратак садржај и организација рада	5
2. Метода коначних елемената и могућности њене примене у анализи електричних машина.....	9
2.1 Општа теорија електромагнетских поља.....	10
2.2 Потенцијали електромагнетских поља	14
2.3 Формулација методе коначних елемената у дводимензионалном домену.....	17
2.4 Решавање дводимензионалних магнетостатичких проблема методом коначних елемената.....	28
2.4.1 Линеарне магнетостатичке симулације	30
2.4.2 Нелинеарне магнетостатичке симулације.....	36
2.5 Решавање дводимензионалних статичких проблема побуђених наизменичним струјама методом коначних елемената.....	44
2.5.1 Линеарне time-harmonic симулације	46
2.5.2 Нелинеарне time-harmonic симулације.....	48
2.5.3 Коришћење резултата time-harmonic симулација.....	56
2.6 Решавање дводимензионалних транзијентних проблема методом коначних елемената.....	58
3. Динамички модел трофазне кавезне асинхроне машине који уважава ефекте жљобних хармоника и засићења	70
3.1 Процеси пројектовања и експлоатације машина из перспективе сложености коришћеног математичког апарата	70
3.2 Модел вишеструко спрегнутих електричних кола	76
3.3 Утицај спреге статорских намотаја.....	83
3.4 Израчунавање индуктивности кавезне асинхроне машине	85
3.4.1 Утицај закошења роторских проводника на индуктивности машине.....	91
3.4.2 Уважавање ефекта засићења на тренутне вредности индуктивности машине.....	92
3.5 Блок шема новог динамичког модела кавезне асинхроне машине	95
3.6 Пример израчунавања индуктивности кавезне асинхроне машине.....	97

3.6.1	Пример прорачуна индуктивности машине са незакошеним роторским проводницима.....	101
3.6.2	Модификација индуктивности уважавањем ефекта закошења.....	112
3.6.3	Израчунавање индуктивности уз уважавање ефекта засићења	117
4.	Примена новог динамичког модела кавезне асинхроне машине.....	130
4.1	Детекција жљобних и засићењем индукованих хармоника у спектру статорских струја исправне машине	131
4.1.1	Жљобни хармоници у спектру статорских струја	131
4.1.2	Верификација одзива линеарног динамичког модела за случај незакошеног кавеза.....	140
4.1.3	Верификација линеарног динамичког модела за случај закошеног роторског кавеза.....	147
4.1.4	Верификација нелинеарног динамичког модела.....	154
4.2	Примена динамичког модела у детекцији сломљених роторских шипки.....	161
4.2.1	Спектар статорских струја у присуству сломљених шипки у кавезном ротору	162
4.2.2	Метод противструјног кочења за детекцију сломљених шипки у роторском кавезу.....	166
5.	Закључак	179
6.	Коришћена литература.....	183

1. Увод

Предмет научне расправе у овој дисертацији је развој динамичког модела трофазне кавезне асинхроне машине који у себи уважава специфичности конструкције модерних изведби машина, како исправних, тако и машина са одређеним типом квара. Нарочит акценат се ставља на утицај који конструкција има на процес електромеханичке конверзије енергије, те на феномене везане за успостављање сложенопериодичних струја у намотајима машине. Правилно квантификован и теоријски објашњен удео виших хармоничких чланова у спектру струја машине се затим може користити као полазиште за развијање нових и поузданих метода за детекцију кварова у машинама.

Асинхроне машине представљају основну покретачку снагу модерне индустрије, самим тим и друштва у целини. Процењује се да преко 50% данашње потрошње електричне енергије отпада на индустријске погоне, у којима по правилу доминирају они који као погонску машину користе неку од изведби трофазних асинхроних машина. Од свих изведби најдоминантнија је она у којој је ротор израђен као кавезни, те стога не чуде вишедеценијски напори да се велике предности раније коришћених погона са машинама једносмерних струја (једноставна управљивост и регулација, како по брзини, тако и по оствареном моменту) покушају пренети на погоне са асинхроним моторима. Без уређаја енергетске електронике, примене микропроцесора и великог напретка у развоју алгоритама регулације, овај прелаз не би био нити могућ, нити исплатив.

Динамика механичких процеса који се намећу модерним електромоторним погонима захтева развијање изузетно брзих и робусних алгоритама управљања, те се стога развој математичких модела којима се описује процес електромеханичке конверзије у машинама свео на оне који са минималним бројем променљивих стања довољно веродостојно описују примарни процес конверзије. Теорија вишефазних електричних машина [1]-[2] је дала ефикасан одговор на ове, често сучељене захтеве. Применом трансформационих метода сложени електромагнетни и механички процеси унутар електричних машина се уместо са мноштвом нелинеарних, описују са свега неколико линеарних диференцијалних једначина.

Асинхрона машина какву је замислио и првобитно израдио њен изумитељ Никола Тесла је претрпела разне измене на путу до савремених изведби. Те промене су се првенствено односиле на примене нових материјала (посебна пажња се посвећује квалитету изолационих материјала, као и употреби феромагнетских материјала са што мањим специфичним губицима), изведбе намотаја (највећа промена, поред примене расподељених намотаја је била увођење кавезног уместо ротора са намотајима од танких бакарних проводника), технике за ефикасније

хлађење и слично. Смањење количине употребљеног материјала за израду машине, такозване специфичне масе по киловолт амперу снаге су довеле до тога да се данашње машине израђују за значајно већом густином електромагнетне енергије по јединици масе него што је то био случај раније.

Електрични мотор се сматра критичним елементом процеса, а због великих напрезања која су наметнута динамиком самог процеса и употребом претварача и уређаја енергетске електронике са једне стране, те све израженијим захтевима за израдом машине са великом специфичном снагом по јединици масе са друге стране, за очекивати је да се машине често могу довести у режиме прекомерних механичких, електричних или магнетних напрезања, које могу довести до кварова и заустављања целог индустријског процеса. Кварови у машини изазивају неуравнотеженост, те се стога не могу описивати моделима прилагођеним брзим алгоритмима управљања, који су уведени и разрађени под претпоставком потпуне симетрије и идеално синусне расподеле електромагнетних поља, што их чини у потпуности слепим за овакве појаве.

Алгоритми управљања погонима са асинхроним машинама имају специфичност и због саме природе процеса електромеханичке конверзије у машини. Као што је познато, асинхроне машине не могу постићи брзину која је једнака синхроној, а да се у таквом режиму истовремено врши и процес електромеханичке конверзије, те стога за ненулту снагу конверзије захтевају одступање механичке брзине ротора од брзине синхроно ротирајућег магнетног поља. То доводи до закључка да тренутна брзина вратила машине зависи и од оптерећења, те да би се прецизно могла познавати, потребно је или користити сензоре брзине (и/или положаја) постављене на вратило машине, или применити неке од техника естимације брзине. Последње поменуте технике се у највећем броју случајева заснивају на процени стварне брзине, тачније клизања, које се покушава рачунским путем добити на основу параметара еквивалентних шема машине прилагођених алгоритмима управљања у реалном времену, што је често врло тежак задатак, јер се ти алгоритми ослањају на прецизне податке заменских шема, који представљају релативно грубу апроксимацију машине, а због свог малог броја ти параметри су и значајно подложнији променама у процесу експлоатације.

Наведени недостаци модела заснованих на заменским шемама, нарочито у ситуацијама када се због несавршености у процесу конверзије као последица саме конструкције машине, али и евентуалних појава кварова навели су истраживаче и конструкторе машина да за специфичне потребе свог рада користе и сложеније моделе електричних машина. Сложенији модели нуде могућност детаљнијег приказа електромагнетних процеса у машини, служе се и значајно већим бројем конструкционих параметара машина, али су због тога и значајно захтевнији за нумеричку анализу и рачунарску имплементацију, што их чини непрактичним и неприменљивим у ситуацијама када се захтева брз резултат прорачуна. Ипак, употребом детаљних прорачуна у разним режимима рада машина може се доћи до изузетно значајних и корисних података, који се у неким случајевима могу користити и у алгоритмима намењеним за извршавање у реалном времену. Стога је употреба сложених математичких модела у експанзији у последње време, највише захваљујући развоју рачунарских система који садрже моћне микропроцесорске јединице које су способне да извршавају огроман број нумеричко-логичких операција у јединици времена. Ипак, показује се да још увек процесорска моћ није досегла толики ниво који би омогућио да се резултати сложених нумеричких прорачуна добијају брзо у свим својим применама, што је нарочито случај у анализи рада електричних машина, посебно када је реч о машинама великих димензија.

Закључак овог уводног излагања је да је потреба за компромисом између две водеће парадигме у моделовању и анализи рада електричних машина (оне која се заснива на моделу упрошћених заменских шема и оне која се заснива на изузетно прецизним, али и сложеним нумеричким методама) веома актуелна тема, будући да је и сам јаз у филозофији ова два приступа толико велик, да практично опредељује истраживаче да се посвете само једном од та два правца.

Ово истраживање осветљава више различитих аспеката примене методе коначних елемената у анализи рада кавезних асинхронних машина. Због тога је тешко на једном месту спровести свеобухватан преглед литературе, а да то не буде скопчано са потешкоћама у постизању потребне прегледности и лаког праћења материје. Због тога ће се у поглављима у којима је представљен најзначајнији допринос развијених модела и метода извршити локалан преглед литературе за конкретан проблем који се у том поглављу обрађује.

1.1 *Оправданост примене методе коначних елемената у анализи рада асинхронних машина*

Метода коначних елемената (*Finite Element Analysis - FEA*) представља нумеричко-графичку методу за решавање електромагнетних поља у доменима са сложеном диспозицијом извора поља и сложеном геометријом домена од интереса. Модерне изведбе електричних машина, са сложеном геометријом и дистрибуираним намотајима представљају један од највећих изазова у примени алгоритама методе коначних елемената. Најзахтевнији аспект имплементације тих метода у анализи рада ротационих електричних машина јесте променљива геометрија као последица ротације ротора у односу на статор, са једним степеном слободе (у случају анализе понашања када машина има одређену врсту ексцентритета, ово кретање може да буде и значајно сложеније за проучавање), као и употреба нелинеарних феромагнетних материјала за израду магнетног кола машине. Под одређеним условима, примена методе се може ограничити и на случајеве када се не захтева анализа режима који уважавају кретање ротора, као што је на пример истраживање феномена у кратком споју тј. режиму са закоченим ротором [2]. Такође, када се не захтева изузетно прецизно моделовање геометрије тродимензионалним графичким доменом у реалној величини физичке машине, могуће је апроксимирати проблем дводимензионалним пресеком [3], што у великој мери поједностављује, а самим тим и убрзава потребне нумеричке операције током анализе.

Оправданост примене ове методе у ротационим електричним машинама је у највећем броју случајева одређена употребном вредношћу добијених резултата у односу на ресурсе које је потребно уложити за њено коришћење (у ресурсе се, поред улагања у комерцијални софтвер који имплементира методу морају убројати и обука кадра за руковање софтвером, као и време које мора протећи од почетка формулације проблема до добијања конкретних излазних резултата прорачуна). Стога је за очекивати да ће методу коначних елемената користити уско специјализована група инжењера који су ангажовани у индустрији која се бави пројектовањем и израдом прототипова електричних машина великих снага, као и универзитетски или научни радници у институтима, који остварују тесну сарадњу са поменутом граном индустрије. Анализом резултата добијених прорачуном се могу добити изузетно детаљни подаци о електромагнетним појавама у електричној машини, у било ком делу њеног пресека, што је најчешће важно пројектантима

електричних машина, јер могу донети закључке о томе да ли је изабрано решење повољно са становишта наметнутих критеријума, а модерни комерцијални софтвери нуде и могућност аутоматске оптимизације по унапред дефинисаним параметрима, као што је унапред задата максимална вредност магнетне индукције, специфичне снаге губитака, таласности електромагнетног момента, виших хармоника у индикованим напонима и статорским струјама и слично [5]-[6].

Раније је већ помињано да се алгоритми намењени управљању у реалном времену ослањају на релативно мали број променљивих стања и мали број параметара заменских еквивалентних шема, док се развој алгоритама који се служе естимацијом механичке брзине и угаоне позиције, а не њиховим мерењем, покушавају надоместити тај податак неким упрошћеним рачунским путем, који је често подложен грешкама због варијације самих параметара. Метода коначних елемената може да буде од помоћи и у таквим истраживањима, јер се помоћу ње могу истражити феномени као што су појава виших хармоника у статорским струјама које су последица варијације ефективне ширине ваздушног зазора због присуства жљебова на статору и ротору, односно у ту варијацију се посредно утискује и тренутна механичка брзина [7]-[17]. Такође, због оптималне искористивости магнетног кола, које ради на граници засићења, одређени делови машине (нарочито унутрашњи обод статора и спољашњи обод ротора) улазе и дубље у засићење, а пошто је магнетно поље обртно, домен који је тренутно у најдубљој сатурацији ротира заједно са пољем које га је изазвало, али са двоструко већом фреквенцијом (из простог разлога што је ниво сатурације који се може описати локалном вредношћу релативне магнетне пермеабилности исти било да је магнетно поље у свом максимуму или минимуму) [7]. Локално смањење релативне пермеабилности је еквивалентно замишљеном проширењу ваздушног зазора, што значи и да се ова појава може искористити за праћење положаја обртног поља, али и тренутне вредности брзине и положаја вратила машине. Када се резултатима детаљног прорачуна методом коначних елемената истраже одређене сложене појаве, генерални закључци се могу користити и циљаном модификацијом алгоритама управљања у реалном времену, без њиховог великог усложњавања.

Кварови у електричним машинама представљају изузетно широку област због специфичности конструкције машине и потенцијалних хаварија које могу да настану. Поузданост погона у великој мери зависи од тога да ли је могуће благовремено уочити неке неправилности у раду машине, што је често тешко установити визуелном инспекцијом и обиласком самог погона, који неретко могу да буду неприступачни. Из тих разлога су атрактивне методе које се ослањају на спорадичну инспекцију машине кроз мониторинг статорских струја или праћења показивања додатних сензора који се уграђују на одговарајућим местима у машини и праћењу неких карактеристичних обележја која се сматрају поузданим показатељима (не)исправности машине. Критични проблем овог приступа је проналажење довољно поузданих обележја, јер се у случају непоуздано изведених закључака може беспотребно или прерано извршити ремонт или заустављање погона, што изазива додатне трошкове [8]. Разне имплементације методе коначних елемената могу и у овим применама да буду од велике користи и то двојачко. Прво, симулацијама у софтверима који имплементирају методу могу се симулирати кварови на моделу уместо да се чека појава неког конкретног квара у експлоатацији или да се на неким прототиповима намерно изазивају кварови, што може да буде изузетно скупо и непрактично, а када је реч о великим машинама на високим напонима чак и опасно, јер је у великим геометријама и великим замајним масама тешко ограничити подручје квара, који се услед тога може неконтролисано ширити

и изазвати веће хаварије и угрозити људство, опрему и просторије. Такође, детаљном анализом резултата из тих прорачуна могу се истражити, међусобно упоредити и коначно изабрати најпоузданија обележја појединих врста кварова [9] [21]-[22]. Генерализације најпоузданијих обележја на шири опсег снага и напонских нивоа машина се могу испоставити веома непоузданим, те се и због тога метода коначних елемената сматра за добро решење да се разграниче подручја поузданости неких обележја.

Поред очигледних погодности, комерцијалне верзије софтвера који имплементирају методу коначних елемената имају и низ недостатака. Најважнији недостатак методе се огледа у изузетно великим захтевима по питању рачунарских ресурса, нарочито када се истражују феномени који захтевају велику прецизност и дугачко време симулације (неки феномени захтевају снимање карактеристика добијених симулацијама којима се моделује процес који може релативно дуго да траје ако би се истоветан феномен истраживао експерименталним путем). По правилу се детаљна истраживања и експерименти много чешће врше на машинама великих снага и димензија, што за методу представља додатно оптерећење, јер се нумерички проблем мора решавати у великом броју тачака. Поред рачунарских ресурса, велики проблем представља и време које је потребно да се изврши нека симулација, које се често мери у данима, чак и недељама. Скраћење потребног времена, а без губитка прецизности се може постићи коришћењем симетрије машине, јер се слика магнетног поља у машини циклично понавља онолико пута колико машина има магнетних полова. Та особина дозвољава да се моделује само једна “кришка” пресека машине, која заузима ширину само једног магнетног пола. Ово упрошћење се никако не сме користити када се симулирају машине са циљем истраживања унутрашњих кварова, јер је практично немогуће очекивати појаву таквих кварова који би били симетрично дистрибуирани по целом ободу машине и то са онолико појављивања колико има магнетних полова у машини.

Због наведених предности, а нарочито због побројаних мана, атрактивно је размотрити и алтернативне начине моделовања сложених феномена у електричним машинама. Те методе морају са једне стране бити довољно прецизне (значајно прецизније од метода моделовања заснованих на еквивалентним шемама), а са друге стране морају представљати мање захтевно оруђе (значајно мање захтевно од сложенијих имплементација методе коначних елемената). Решење које се захтева би у суштини требало да представља компромис између два сучељена приступа моделовању електричних ротационих машина и на тај начин успостави мост међу њима.

1.2 Кратак садржај и организација рада

Рад се састоји из шест поглавља. Прво поглавље служи као увод у примену методе коначних елемената за моделовање електричних машина. Дискутовани су аспекти оправданости употребе тако нумерички захтевних приступа, те предности и мане њихове употребе. Поглављем је обухваћен и кратак преглед постојеће литературе која изучава поменућу област.

Због постојања различитих имплементација методе коначних елемената, које се међусобно разликују како по сложености, тако и по могућностима квантификовања одређених појава у електричним машинама, у другом поглављу се приступило детаљном извођењу статичких и динамичких метода коначних елемената. Почевши

од теорије електромагнетних поља, описане Максвеловим једначинама, увођењем потенцијала електромагнетних поља, а затим и извођењем израза за Поасонову и Лапласову диференцијалну једначину се стигло до полазишта за развијање сваке од метода коначних елемената која се користила у сврху овог истраживања. Реч је о магнетостатичким, *time-harmonic* и транзијентним симулацијама, како над линеарним, тако и над нелинеарним доменима. Током извођења се сваком могућом приликом напоменула особеност примене конкретне методе у анализи кавезних асинхроних машина, са истицањем предности, мана, али и ограничења појединих метода. То је било могуће урадити само детаљним поступцима извођења, мада је већина релација опште позната по форми, али не и по особеностима њихове примене, којих у техници има јако много. Уједно су дати и јасни наговештаји које ће методе имплементације бити фаворизоване у даљем излагању.

У трећем поглављу се приступило детаљном развоју динамичког модела трофазне кавезне асинхроне машине. Сам математички модел је опште познат, али се овим истраживањем развио потпуно нови приступ у израчунавању параметара потребних динамичком моделу, у првом реду матрица индуктивности. Примена линеарних магнетостатичких симулација се испоставила као најбоље и најефикасније решење у израчунавању индуктивности машине, а највећа новина развијеног решења је увођење представе индуктивности помоћу Фуријеових редова, чиме се драстично смањује број потребних магнетостатичких симулација, а уједно се оставља простор за ефектно аналитичко доказивање постојања одређених компонената у спектру флуksних обухвата и индукованих струја, што у статорским, што у роторским намотајима машине. Развијен је и потпуно нов метод уважавања ефекта засићења на тренутне вредности индуктивности, који је заснован на комбинованој примени *time-harmonic* симулација и одговарајућих магнетостатичких симулација заснованих на методи „замрзнутих пермеабилности“ [11], која се углавном користила за прорачун трансформисаних вредности индуктивности, али не и за кориговање физичких индуктивности нетрансформисаног математичког модела машине. Тим се поступком успело указати на одређене непрецизности постојећих метода уважавања нелинеарности, што је још један од доприноса овог истраживања.

У четвртом поглављу је прво илустрована примена развијеног динамичког модела у анализи спектра статорских струја за случај исправне машине, а затим је представљена и потпуно нова метода за детекцију сломљених шипки у роторском кавезу. Нарочит нагласак током примене и верификације развијеног модела у анализи спектра статорских струја исправне машине је стављен на појаву жљебних хармоника, те хармоника изазваних засићењем. Изведен је и оригиналан доказ постојања жљебних хармоника у спектру статорских струја, узрокованих искључиво варијацијама статорских учестаности, чији је утицај у другом плану у постојећој литератури. Одзиви модела су упоређени са одзивима транзијентних симулација у комерцијалном софтверу Opera2D, који имплементира методу коначних елемената, али и са резултатима добијеним експерименталним путем. У свим наведеним случајевима је постигнуто врло добро слагање одзива, што је потврдило веродостојност закључака који се могу извести у датим применама употребом развијеног динамичког модела.

Нова метода детекције квара у роторском кавезу, која је илустрована симулацијама над развијеним моделом је уједно верификована и путем експеримената. Велики допринос новоразвијене методе детекције квара је у могућности раног откривања квара без икакве потребе за терећењем машине, а уз то је за потребе експеримената довољно користити помоћни извор напајања, снаге

свега неколико вати. У петом поглављу је изнесен закључак о целокупном истраживању које је тема овог рада, док шесто поглавље садржи списак коришћене литературе.

2. Метода коначних елемената и могућности њене примене у анализи електричних машина

Метода коначних елемената је изведена из опште теорије електромагнетних поља, увођењем одређених помоћних векторских и електричних величина које су познате под називом потенцијали електромагнетног поља. Строго узевши, потенцијали електромагнетских поља се аналитички могу увести и изразити једино у хомогеним срединама, али је употребом нумеричких метода могућност њихове примене проширена на практично све области проучавања макроскопских поља, која се врло често успостављају у срединама које се не могу сматрати нити хомогеним, нити линеарним, а врло често ни изотропним. За израду магнетских кола електричних машина се користе нелинеарни феромагнетски материјали, а основи разлог за њихову примену је велика релативна пермеабилност (пермеабилност феромагнетских материјала је изузетно сложена величина, која је зависна од интензитета магнетског поља, брзине промене извора поља, а у случају анизотропних материјала и правца и смера магнетног поља). У феромагнетској средини у којој има губитака релација између вектора јачине магнетског поља и вектора магнетске индукције није ни линеарна, ни једнозначна и њено описивање је неретко скопчано са одређеним потешкоћама, али и поред свих наведених недостатака феромагнетске материјале карактерише велика запреминска густина електромагнетне енергије коју су у стању да каналишу, што значи да је потребно уложити најмање материјала за израду електричне машине одређене снаге. Поред тога што феромагнетске материјале карактерише нелинеарност, у зависности од начина израде материјала који се користе за пакете лимова феромагнетских језгара електричних машина, у неким применама се користе и анизотропни материјали (у области електроенергетике анизотропни материјали се користе за израду феромагнетских језгара елемената који врше електромеханичку конверзију са линеарним степеном слободе кретања, као што су разне котве, електромагнетски окидачи или релеји, а изузетно је важно споменути и једне од најзаступљенијих елемената сваког електроенергетског система, енергетске трансформаторе и незаобилазну опрему сваког мерног система у електроенергетици, чији су саставни део мерни трансформатори). У свим поменутих уређајима главни ток електромагнетног поља је доминантно оријентисан у једном правцу дуж феромагнетског језгра, па је за њихову израду довољно користити оријентисане

феромагнетске лимове, који су анизотропни. Проучавање кварова, ивичних ефеката или транзијентних појава у оваквим уређајима (посебно се треба водити рачуна о поменутиим феноменима приликом појаве струја кратких спојева на њиховим прикључцима или ударних струја приликом укључења) је стога изузетно захтевна проблематика, будући да се просторна оријентација магнетских поља може значајно разликовати од оних које се очекују у нормалним погонским стањима. Без могућности примене методе коначних елемената у анизотропним срединама ови феномени би практично остали непознаница и њихов утицај би се могао процењивати искључиво скупим експериментима и непрецизним искуствено изведеним изразима. Полазећи од опште теорије електромагнетских поља, описане Максвеловим једначинама, могуће је поступно доћи до релација којима се уводе потенцијали, а у зависности од специфичности средине и извора поља могу се даље упрошћавати добијени изрази. Увођење потенцијала је уједно и основ за формулацију методе коначних елемената, те ће се стога увођењу ових помоћних векторских и скаларних величина посветити посебна пажња. Пошто је већина излагања у овом поглављу проистекла из добро познатих и литературом веома богато покривених проблема електромагнетских поља, референце које су коришћене током излагања се неће изнова понављати, већ ће бити овде наведене. Практично сва извођења и приказани поступци у овом поглављу се могу наћи у [24]-[26],[13] и [14].

2.1 Општа теорија електромагнетских поља

За описивање електромагнетних поља у срединама произвољних карактеристика и произвољне конфигурације извора користе се Максвелове једначине и једначина континуитета у интегралном облику:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.1)$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J}_{izv} + \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (2.2)$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_v \rho dv \quad (2.3)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.4)$$

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_v \rho dv \quad (2.5)$$

Наведене релације редом су познате под именима: Фарадејев закон електромагнетне индукције, уопштени Амперов закон, уопштени Гаусов закон, закон конзервације магнетског флуksа и једначина континуитета. Вектори и скаларне величине коришћени у овим изразима су дефинисани као: вектор јачине (индукованог) електричног поља \vec{E} [V/m], вектор магнетске индукције \vec{B} [T], вектор јачине магнетског поља \vec{H} [A/m], вектор густине струје извора \vec{J}_{izv} [A/m²], вектор густине кондукционе струје \vec{J} [A/m²], вектор електричног помераја \vec{D} [C/m²] и

густина запремински расподељеног слободног наелектрисања ρ [C/m³], док величине l , S и v представљају непокретне контуре, површи и запремине по којима се врши интеграција у изразима (2.1)-(2.5). Предност наведених релација јесте што не зависе директно од параметара средине у којој се поље проучава. Ипак, векторске и скаларне величине уведене у овим законима нису једине величине којима се описује поље, али уједно нису ни довољне, те је поред још неких недостатака о којима ће бити касније речи, њихова употреба сасвим ограниченог карактера.

Међу свим уведеним векторским величинама постоје и неке додатне везе, а до њих се може доћи увођењем додатних вектора (којима се уводе макроскопски еквиваленти утицаја средине на укупно електромагнетно поље), као и параметара вакуума, којима је Максвел постулирао да и светлост има природу електромагнетског поља, јер се повинује законима распрострањања електромагнетских таласа.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.6)$$

У наведеним изразима ε_0 [F/m] и μ_0 [H/m] представљају пермитивност и пермеабилност вакуума, вектор поларизације \vec{P} [C/m²] представља макроскопску запреминску густину микроскопских момената (индукованих) електричних дипола, док вектор \vec{M} [A/m] описује макроскопску запреминску густину магнетних момената микроскопских струјних контура, а σ [S/m] представља електричну проводност средине. У случају изотропних средина векторске величине електричног (\vec{D} , \vec{E} и \vec{P}), односно магнетног (\vec{B} , \vec{H} и \vec{M}) поља су међусобно колинеарне, док у анизотропним срединама то није случај за све правце у простору. Анизотропни материјали имају преферентне осе поларизације (магнетизације) дуж којих су тројке наведених вектора међусобно колинеарне, те је стога могуће користити и такве материјале за израду магнетних и електричних кола, под условом да се они пројектују тако да се унапред зна које је просторне оријентације поље које ће се у њима успостављати.

Управо због колинеарности поменутих вектора у изотропним срединама, могуће је увести додатне везе између појединих величина:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r; \vec{B} = \mu \vec{H}, \mu = \mu_0 \mu_r \quad (2.7)$$

Релативна пермитивност ε_r и релативна пермеабилност μ_r представљају бездимензионе величине којима се описује релативна промена пермитивности и пермеабилности изотропних средина у односу на њихове вредности у вакууму. Параметри само у случају средина линеарних у ужем смислу (то су средине без губитака и средине којима су параметри независни од брзине промене електромагнетског поља) постају константне вредности. У свим осталим случајевима се за потребе прецизних анализа не могу сматрати константним, што у многама утиче на ефикасност имплементације методе коначних елемената у

нелинеарним срединама, док се у случају анизотропних средина морају уводити и тензорске матрице пермеабилности и пермитивности.

Максвелове једначине и једначина континуитета (2.1)-(2.5) су опште у смислу да се помоћу њих може описати било какво електромагнетно поље у срединама било каквих параметара и при било каквим променама примарних извора поља (примарни извори електромагнетног поља су наелектрисања у кретању и мировању). Ипак, интегрални облик једначина има ограничену примену, нарочито због тога што је за ефикасно израчунавање уведених интеграла потребно унапред познавати облик поља и спрам тога бирати облике контура и површина које оивичавају домене интеграције тако да су правац и смер векторске величине под интегралом унапред познати на граници изабраних домена. Најпогодније је изабрати такве домене интеграције за које важи да је векторска величина искључиво нормална или тангенцијална на граници домена. Због наведеног ограничења је очигледно да се у сложеној геометрији конструкције савремених електричних ротационих машина интегрални облици једначина могу користити искључиво уз значајна упрошћења, међу којима је најважније занемарење жљебова статора и ротора, односно претпоставка идеалне цилиндричности ваздушног зазора.

Ако се уважи чињеница да је од примарног интереса у овом истраживању процес електромеханичке конверзије у електричним машинама заснован на енергији каналисаној у магнетском, а не електричном пољу (електростатичком пољу нагомиланих наелектрисања), уопштени Гаусов закон није од интереса и може се изопштити из даљег разматрања. Из истог разлога, а уз чињеницу и да је електромагнетно поље у електричним машинама квазистатичке природе, трећи члан у интегралу са десне стране уопштеног Амперовог закона којим се описује повратни утицај брзопроменљивог електричног поља на магнетско поље се такође може занемарити. Због квазистатичности се упрошћава и једначина континуитета, која прераста у интегралну формулацију првог Кирхофовог закона. Уз уважавање ових поједностављења, једначине (2.1)-(2.5) прелазе у (2.8)-(2.11).

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.8)$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J}_{izv} + \vec{J}) \cdot d\vec{S} \quad (2.9)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.10)$$

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.11)$$

Диференцијални облик Максвелових једначина представља много употребљивији облик, због тога што се релације у њима не везују за неке домене, већ су локализоване у тачки (под појмом тачке се подразумева физички мала запремина у којој се може извршити макроскопско усредњавање микроскопских величина без губитка прецизности са једне, али и без залажења у промене на нивоу атома са друге стране). За потребе извођења релација у диференцијабилном облику ће се сматрати да су све векторске и скаларне величине диференцијабилне у времену и по свим

просторним координатама довољан број пута (изузев можда на границама између домена различитих својстава, што ће се посебно нагласити и обрадити одговарајућим граничним условима о којима ће бити речи касније), тако да се то неће посебно наглашавати.

За прелаз у диференцијални облик се користе оператори просторног диференцирања, који су за неку векторску величину \vec{X} дефинисани са (2.12) за оператор дивергенције и са (2.13) за оператор ротор.

$$\text{rot}\vec{X} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \oint_S \vec{dS} \times \vec{X} \quad (2.12)$$

$$\text{div}\vec{X} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \oint_S \vec{X} \cdot \vec{dS} \quad (2.13)$$

Изрази за ротор и дивергенцију у једначинама (2.12) и (2.13) су општег карактера, а облици који се много чешће користе су изведени из ових израза, уважавајући коришћење одговарајућих ортогоналних координатних система. Најчешће коришћени координатни системи су Декартов, цилиндрични и сферни координатни систем. Изрази за ротор и дивергенцију у Декартовом координатном систему су дати са (2.14) и (2.15).

$$\text{rot}\vec{X} = \begin{vmatrix} \vec{l}_x & \vec{l}_y & \vec{l}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X_x & X_y & X_z \end{vmatrix} = \vec{l}_x \left(\frac{\partial X_z}{\partial y} - \frac{\partial X_y}{\partial z} \right) + \vec{l}_y \left(\frac{\partial X_x}{\partial z} - \frac{\partial X_z}{\partial x} \right) + \vec{l}_z \left(\frac{\partial X_y}{\partial x} - \frac{\partial X_x}{\partial y} \right) \quad (2.14)$$

$$\text{div}\vec{X} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \vec{X} = X_x \vec{l}_x + X_y \vec{l}_y + X_z \vec{l}_z \quad (2.15)$$

Применом оператора просторног диференцирања на интегралне једначине (2.8)-(2.11), уз примену познатих теорема векторске анализе, као што су Стоксова и теорема Гаус-Остроградског, долази се до њиховог диференцијалног облика, датог релацијама (2.16)-(2.19).

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.16)$$

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j}_{izv} + \vec{j} \quad (2.17)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (2.18)$$

$$\text{div}\vec{j} = 0 \quad (2.19)$$

2.2 Потенцијали електромагнетских поља

Жеља за даљим упрошћавањем математичког модела смањивањем броја непознатих које је потребно решити да би се могло реконструисати целокупно електромагнетно поље у домену од интереса довело је до увођења магнетског вектор потенцијала \vec{A} [Vs/m], до којег се долази на основу следећих разматрања. Из једначине (2.18), која представља закон конзервације магнетног флукса употребом познатог идентитета векторске анализе:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{X}) = 0, \quad (2.20)$$

који важи за било коју векторску величину, дозвољено је увести претпоставку да се вектор магнетске индукције \vec{B} може представити као ротор неке друге векторске функције, која се управо назива магнетски вектор потенцијал. Заменом идентитета:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B} \quad (2.21)$$

у једначину (2.16) која представља Фарадејев закон електромагнетске индукције у диференцијалном облику, добија се друга веза помоћу које се вектор индукованог електричног поља такође може описати помоћу магнетског вектор потенцијала једначином:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A} \quad (2.22)$$

Релација (2.22) за случај непрекидности оператора rot , (који је једино прекидан на местима дисконтинуитета средине, али се тај проблем превазилази употребом граничних услова који се изводе из интегралног облика Максвелових једначина) прелази у облик:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}V. \quad (2.23)$$

Скаларна величина V [V] представља електрични скалар потенцијал и његово увођење у релацију (2.23) је последица идентитета векторске анализе (2.24а) (ротор векторске величине се неће променити ако му се дода градијент произвољног скалара), док је дефиниција оператора градијент дефинисана изразима (2.24б) и (2.24ц), респективно. Градијент електричног скалар потенцијала представља конзервативну компоненту вектора јачине електричног поља и о могућности

његовог изостављања спрам методе имплементација методе коначних елемената која ће се користити у овом истраживању ће бити речи нешто касније.

$$\text{rot}(\text{grad}V) = 0 \quad (2.24a)$$

$$\text{grad}V = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \oint_S V d\vec{S} \quad (2.24b)$$

$$\text{grad}V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{t}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{t}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{t}_z \quad (2.24c)$$

Ако се још уваже и везе које су дате једначинама (2.6) и (2.7), Амперов закон у диференцијалном облику се може написати на следећи начин:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) = \vec{J}_{0izv} + \vec{J} = \vec{J}_{0izv} + \sigma \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}V \right) \quad (2.25)$$

Важно је напоменути да кондукциона струја, успостављена услед индукованог електричног поља у проводној средини у себи обухвата све могуће сценарије који могу довести до њеног успостављања. Наиме, за успостављање индукованог електричног поља је потребно временски променљиво магнетно поље, било да је оно последица временски променљивог извора, било да се оно индукује као последица кретања проводника у константном магнетском пољу, било комбинацијом ових узрочника. У различитим деловима електричне машине долази до различитих механизма успостављања струја, па се због тога приликом формулације методе коначних елемената (наравно у зависности од тога која се метода жели имплементирати: магнетостатичка, стационарна са временски променљивим изворима или транзијентна) индуковано електрично поље мора третирати са посебном пажњом.

Пермеабилност средине је у општем случају сложена функција времена и координата, али и правца, смера и интензитета примењеног магнетног поља, $\mu = \mu(\vec{H}, t, x, y, z)$, те се стога не може као константан параметар извући ван операције просторног диференцирања. Међутим, применом методе коначних елемената се целокупни домен од интереса издељује на дисјунктне коначне елементе уз додатну напомену да пермеабилност може да се разликује од елемента до елемента, али да у чворовима одређеног елемента има константну вредност (константну вредност у смислу да се њена коначна нумерички добијена вредност не мења у чворовима коначног елемента за случај магнетостатичких прорачуна или да има непроменљиву вредност током временског периода којим се дискретизује континуална промена у времену за случај прорачуна поља са временски променљивим изворима и/или геометријом проблема). Стога је, докле год се врше трансформације појединих израза на нивоу чворова једног коначног елемента, дозвољено тумачити пермеабилност као константан параметар, који се по потреби може извући испред оператора диференцирања.

Применом идентитета векторске анализе о двострукој операцији ротора, добија се нешто другачија формулација уопштеног Амперовог закона, описана релацијом

(2.26), која је позната и под називом дифузиона диференцијална једначина. У идентитету се појављује лапласијан векторске величине, чија је дефиниција дата изразом (2.27), као и познати набла оператор, чија је дефиниција дата релацијом (2.28) за случај примене Декартовог координатног система.

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) = \frac{1}{\mu} (\text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}) = \vec{J}_{0izv} + \sigma \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} V \right) \quad (2.26)$$

$$\Delta \vec{A} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \oint_S (\vec{dS} \cdot \nabla) \vec{A} \quad (2.27)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{l}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{l}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{l}_z \quad (2.28)$$

Лапласијан векторске функције се у случају примене Декартовог координатног система може свести на нешто једноставнију форму, као векторски збир три лапласијана скаларних функција које представљају пројекције магнетског вектор потенцијала на осе координатног система (2.29). Дефиниција лапласијана произвољне скаларне функције f је дата релацијом (2.30).

$$\Delta \vec{A} = \Delta A_x \vec{l}_x + \Delta A_y \vec{l}_y + \Delta A_z \vec{l}_z \quad (2.29)$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2.30)$$

Пре него што се утврди коначан облик једначине погодне за имплементацију методе коначних елемената, потребно је осврнути се на Хелмхолцову теорему која прописује потребне и довољне услове за једнозначну одређеност неке векторске величине у домену од интереса. Наиме, поред познавања ротора неке векторске величине, неопходно је и познавање његове дивергенције у разматраној области (у суштини, нужен је и услов да векторска величина тежи нули у бесконачности и то минимално брзином функције реципрочне вредности квадрата растојања. Како је домен електричне машине коначан, а поље ограничено на тај домен самом конструкцијом и обликом формираног поља, овај додатни услов је подразумевано испуњен и не мора се проверавати). Ротор магнетског вектор потенцијала је познат и представља алтернативну дефиницију вектора магнетске индукције (2.21), док се увођењем различитих дефиниција дивергенције добијају различите врсте потенцијала. За временски споропроменљива електромагнетска поља, каква се имају у ротационим електричним машинама је најповољнија формулација преко тзв. Кулоновог услова, по којем се усваја да је дивергенција магнетског вектор потенцијала једнака нули. Са овим употпуњењем дефиниције магнетског вектор потенцијала, релација (2.26) се додатно поједностављује. Уважавањем дефиниције лапласијана векторске функције у Декартовом координатном систему, добија се коначан облик диференцијалне једначине, познате и под називом Поасонова диференцијална једначина, који се користи као полазна тачка за имплементацију методе коначних елемената (2.31).

$$\frac{1}{\mu} \left(\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \vec{l}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \vec{l}_y + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \vec{l}_z \right) = -\vec{J}_{0izv} + \sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad}V \right) \quad (2.31)$$

Једначина (2.31) представља парцијалну, нелинеарну диференцијалну једначину чијим се решавањем добија вредност магнетског вектор потенцијала у домену од интереса, а применом веза (2.21) и (2.22) се могу добити и вредности осталих вектора и скалара електромагнетског поља који су од интереса. Једначина (2.31) представља основну једначину на којој се заснива метода коначних елемената која ће бити описана у наредном одељку овог поглавља.

Додатна компликација у вези решавања ове диференцијалне једначине јесте нелинеарност као последица променљиве пермеабилности, па се у одређеним ситуацијама и режимима рада електричних машина у којима се може увести претпоставка линеарности магнетног кола једначина решава једноставније, будући да у том случају магнетна пермеабилност не подлеже корекцији у зависности од тренутне вредности вектора јачине магнетног поља, већ се може сматрати за константу. Једначина се, за случај простопериодичних промена извора поља и непроменљиве геометрије (дозвољена је и сложенопериодична промена) може свести на простију парцијалну диференцијалну једначину у комплексном облику у којој је диференцирање по времену замењено одговарајућим комплексним оператором. У случају магнетостатичке формулације, ишчезава било каква промена извора у времену при којој се једначина још више поједностављује, док је у случајевима када се уједно и средина може сматрати линеарном формулација и само решавање једначине драстично упрошћено и убрзано. Управо се у ове две наведене апроксимације крије једна од водећих идеја представљених у овом истраживању.

2.3 Формулација методе коначних елемената у дводимензионалном домену

Једначина (2.31) омогућава формулацију методе коначних елемената у тродимензионалном домену у којем се утицај електростатичког поља може занемарити, а услов квазистатичности је испуњен. Процес електроинергијске конверзије у електричним ротационим машинама је управо такве природе, те ће се стога даља разматрања примене ове релације усмерити у ту страну.

За потребе овог истраживања ће се усвојити неке претпоставке које ће упростити реализацију методе, али ће се због тога претрпети одређене последице, које ће се највише огледати у губитку прецизности представе реалне машине изабраним моделом. Због своје изузетне компликованости и нумеричке захтевности ће се одустати од формулације методе у тродимензионалном простору, па ће се усвојити дводимензионална апроксимација електричне машине представљена њеним попречним пресеком који је управан на осу пакета лимова. Ако се усвоји да се оса ротације и пакета лимова поклапа са z осом простора у ком је уведена релација

(2.31), јасно је да ће сви дефинисани вектори густине струје имати искључиво z компоненту (јер су струје последица протицања кроз намотаје статора постављене у жљебовима који су у оваквој формулацији паралелни оси z , што је такође случај и са индукованим струјама у роторским проводницима који чине кавез), што природно повлачи да ће и магнетски вектор потенцијал имати искључиво z компоненту. Због дводимензионалне представе се такође мора усвојити апроксимација да ниједна векторска и скаларна величина не може бити зависна од z координате (ово наравно није случај у свим изведбама реалних машина, а нарочито када је реч о кавезним асинхроним машинама код којих је приликом израде кавезног ротора примењено одређено закошење, што значи да у оваквим врстама машина постоји зависност скаларних и векторских величина електромагнетског поља и од координате z . Овај недостатак се може донекле накнадно уважити, о чему ће бити више речи у каснијим поглављима). Дводимензионална апроксимација машине такође не може да уважи домене који се налазе изван попречног пресека и дужине обухваћене пакетом лимова, као што су бочне везе статорских намотаја и краткоспојни прстенови кавезног намотаја ротора, те се о њима мора посебно водити рачуна. Из истог разлога се, ако је задатак моделовање дводимензионалног домена куплованог са екстерним извором електричне енергије, мора додатно водити рачуна и о повезивању домена обухваћеног прорачуном са екстерним електричним колима.

Ако се, за сад купловање са екстерним елементима остави по страни, уважавајући наведене услове дводимензионалне представе проблема, релација (2.31) може слободно да се интерпретира и као скаларна једначина, у којој све наведене векторске величине имају искључиво z компоненту.

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) = -J_{0izv} + \sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \text{grad}_z V \right) \quad (2.32)$$

Метода ће се даље разрађивати на релацији (2.32). Најчешћи облик методе коначних елемената се заснива на Галеркиновој методи тежинских резидуала.

Нека се посматра операторска једначина облика $\mathcal{L}(x) = 0$ која је дефинисана у неком домену Ω оивиченом границом C (у случају дводимензионалног проблема, домен представља планарну површ, а граница домена представља планарну контуру). Ако се уместо егзактног решења у релацију убади приближно решење \hat{x} , једначина неће бити задовољена, већ се може говорити о некој врсти грешке, то јест резидуала.

$$\mathcal{L}(\hat{x}) = R \quad (2.33)$$

Галеркинова метода резидуала се заснива на увођењу такозване слабе формулације, тако што се, у општем случају диференцијална једначина, преводи у интегралну једначину у домену од интереса. Резидуал једначине се множи са погодном изабраном тежинском функцијом W , а затим се интеграција спроводи на новонасталом тежинском резидуалу, са циљем његове минимизације, односно

изједначавања са нулом. Када сам резидуал испуни унапред задати критеријум, решење интегралне једначине се проглашава решењем оригиналне једначине. Тежинским резидуалом се у суштини форсира облик решења, а сама тежинска функција представља дистрибуцију којом се обликује решење. Отуд и објашњење појма слабе формулације, јер се од свих могућих решења почетне једначине форсира оно са унапред одабраним карактеристикама. Ако се за резидуал усвоји израз добијен из релације (2.32) у којем су сви чланови пребачени на једну страну, а уместо егзактног решења уведе приближно решење за магнетски вектор потенцијал, резидуал дате функције добија облик:

$$R = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 \hat{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{A}_z}{\partial y^2} \right) + J_{0izv} - \sigma \left(\frac{\partial \hat{A}_z}{\partial t} + grad_z V \right) \quad (2.34)$$

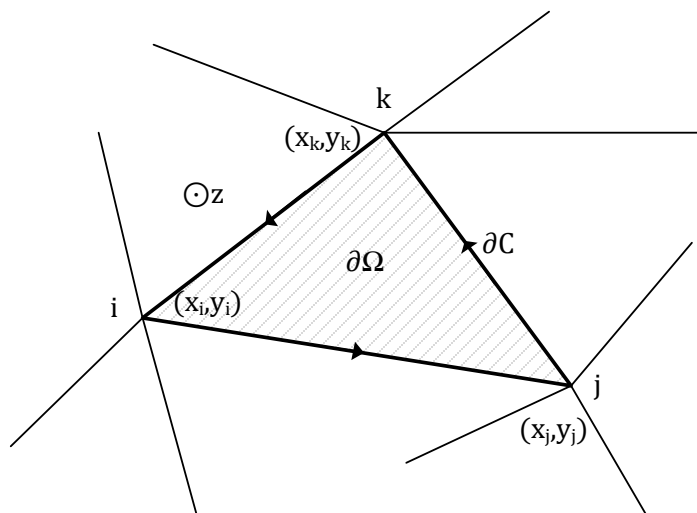
Множењем резидуала тежинском функцијом и изједначавањем интеграла тако добијеног тежинског резидуала над доменом са нулом се добија тражена интегрална једначина (2.35).

$$\iint_{\Omega} RW dx dy = 0 \quad (2.35)$$

Уврштавањем резидуала датог релацијом (2.34) у интегралну једначину (2.35), добија се релација (2.36).

$$\begin{aligned} & - \iint_{\Omega} W \left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 \hat{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{A}_z}{\partial y^2} \right) \right) dx dy + \iint_{\Omega} W \left(\sigma \left(\frac{\partial \hat{A}_z}{\partial t} + grad_z V \right) \right) dx dy = \\ & \iint_{\Omega} W J_{0izv} dx dy \end{aligned} \quad (2.36)$$

Домен интеграције у релацији (2.35) представља површ једног од мноштва коначних елемената на које је издељена цела област од интереса. Пошто је област дводимензионална, коначни елементи могу бити многоуглови, али је најчешћи случај да се усвајају сегменти троугаоног облика. Уместо континуалног проблема, метода коначних елемената има за циљ решавање магнетског вектор потенцијала у теменима, односно чворовима мреже троугаоних сегмената, док се вредност потенцијала у произвољним тачкама унутар сегмента добија интерполацијом вредности потенцијала у чворовима. Ако се област издели на коначне елементе довољно густо, тако да се не губи значајно на прецизности методе, често је довољно усвојити да се вредност потенцијала унутар сегмента добије линеарном интерполацијом потенцијала чворова.



Слика 2.1 Коначни елемент у облику троугаоног сегмента

Ако се уочи произвољни сегмент са индексима његових темена (i, j, k) , магнетски вектор потенцијал унутар тог сегмента се може изразити као:

$$\hat{A}_z(x, y) = \hat{A}_{zi}N_i + \hat{A}_{zj}N_j + \hat{A}_{zk}N_k \quad (2.37),$$

где су $N_{i,j,k}$ функције облика сегмента, а $\hat{A}_{zi,zj,zk}$ представљају претпостављене вредности магнетског вектор потенцијала у теменима сегмента. Функције облика из релације (2.37) су описане релацијом (2.38), док су коефицијенти у тој релацији описани изразом (2.39). Наравно, $(x_{i,j,k}, y_{i,j,k})$ представљају координате темена текућег сегмента.

$$N_{i,j,k} = \frac{1}{2\Omega} (a_{i,j,k} + b_{i,j,k}x + c_{i,j,k}y) \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j, & b_i &= y_j - y_k, & c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k, & b_j &= y_k - y_i, & c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i, & b_k &= y_i - y_j, & c_k &= x_j - x_i \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ако се искористи матрична нотација, релације (2.37) и (2.38) се могу записати у компактнијој форми, погоднијој за нумеричку анализу.

$$\hat{A}_z(x, y) = [N_i \quad N_j \quad N_k] \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix} = N_{i,j,k}^T \cdot \{\hat{A}_{z,i,j,k}\} \quad (2.40)$$

$$N_{i,j,k}^T = \frac{1}{2\Omega} [a_i + b_i x + c_i y \quad a_j + b_j x + c_j y \quad a_k + b_k x + c_k y] \quad (2.41)$$

У сврху даљег извођења израза потребно је увести први Гринов идентитет, који за случај две скаларне функције φ и ψ , које су довољан број пута диференцијабилне у одређеном домену $\partial\Omega \in \mathbb{R}^2$ оивиченом контуром ∂C , има следећу форму:

$$\iint_{\partial\Omega} (\psi \Delta \varphi + \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} \psi) dx dy = \oint_{\partial C} \psi (\text{grad} \varphi \cdot \vec{n}) dc = \oint_{\partial C} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dc \quad (2.42)$$

Пројекција градијента скаларне функције на неку осу је по дефиницији једнака изводу скаларне функције у правцу те осе. Линијски интеграл на десној страни релације се врши по контури која ограничава домен, а вектор нормале \vec{n} представља по дефиницији спољашњу нормалу на планарну контуру. Поређењем једначина (2.42) и (2.36) постаје јасно да се први Гринов идентитет може применити на први интеграл са леве стране релације (2.36), уважавајући да се за функцију ψ усвоји тежинска функција W , док се за функцију φ узима скаларна величина $\frac{1}{\mu} \hat{A}_z$.

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \left(W \Delta \left(\frac{1}{\mu} \hat{A}_z \right) + \text{grad} W \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{\mu} \hat{A}_z \right) \right) dx dy &= \oint_{\partial C} W \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial n} dc \Rightarrow \\ \iint_{\partial\Omega} \left(W \Delta \left(\frac{1}{\mu} \hat{A}_z \right) + \text{grad} W \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{\mu} \hat{A}_z \right) \right) dx dy &= \\ \iint_{\partial\Omega} \left(W \left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 \hat{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{A}_z}{\partial y^2} \right) \right) + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial W}{\partial y} \vec{i}_y \right) \cdot \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \hat{A}_z}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial y} \vec{i}_y \right) \right) dx dy &= \\ \iint_{\partial\Omega} \left(W \left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 \hat{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{A}_z}{\partial y^2} \right) \right) + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial y} \right) \right) dx dy &= \oint_{\partial C} W \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial n} dc \Rightarrow \\ - \iint_{\partial\Omega} W \left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 \hat{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{A}_z}{\partial y^2} \right) \right) dx dy &= \iint_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial y} \right) dx dy - \oint_{\partial C} W \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial n} dc \end{aligned} \quad (2.43)$$

После примене Гриновог идентитета, добија се модификована верзија интегралне једначине тежинског резидуала (2.36), која је приказана релацијом (2.44).

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial y} \right) dx dy - \oint_{\partial C} W \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial n} dc + \iint_{\partial\Omega} W \left(\sigma \left(\frac{\partial \hat{A}_z}{\partial t} + \text{grad}_z V \right) \right) dx dy &= \\ \iint_{\partial\Omega} W J_{0izv} dx dy & \end{aligned} \quad (2.44)$$

Ако се усвоји да $\partial\Omega$ представља домен једног коначног елемента, а спрам тога ∂C чини његову границу, интегрална формулација (2.44) се може проширити на цео домен од интереса, увођењем суме по свим коначним елементима (2.45).

$$\sum_{l=1}^L \left\{ \iint_{\partial\Omega^l} \frac{1}{\mu^l} \left(\frac{\partial W^l}{\partial x} \frac{\partial \hat{A}_z^l}{\partial x} + \frac{\partial W^l}{\partial y} \frac{\partial \hat{A}_z^l}{\partial y} \right) dx dy - \oint_{\partial C^l} W^l \frac{1}{\mu^l} \frac{\partial \hat{A}_z^l}{\partial n} dc + \iint_{\partial\Omega^l} W^l \left(\sigma^l \left(\frac{\partial \hat{A}_z^l}{\partial t} + \text{grad}_z V^l \right) \right) dx dy - \iint_{\partial\Omega^l} W^l J_{0izv}^l dx dy \right\} = 0 \quad (2.45)$$

Укупан број коначних елемената је означен са L , док је индекс текућег елемента означен са l . Јасно је да пермеабилност, проводност, вектор густине струје, тежинска функција и сам магнетски вектор потенцијал варирају од елемента до елемента, самим тим је и за њих неопходно увођење индекса.

Позитиван смер обиласка контуре у линијским интегралима је наравно усклађен са референтним смером нормале на површ која се ослања на контуру по правилу десне руке, а за нормалу се усваја да се по правцу и смеру поклапа са осом z . Из тог разлога је очигледно да ће доћи до поништавања линијских интеграла у унутрашњости целокупног домена, јер ће се линијски интеграл израчунати кроз сваку страницу троугаоних сегмената два пута у различитим смеровима, будући да суседни троугаони сегменти деле по једну те исту ивицу. Као резултат сумирања ће остати само они делови линијског интеграла на којима се интеграција врши само једанпут, односно остаће само линијски интеграл који са спољне стране оивичава целокупан домен. Начин третирања овог линијског интеграла је у директној вези са граничним условима које је потребно дефинисати да би проблем био једнозначно и правилно одређен. Најчешће коришћени гранични услови у решавању оваквих проблема су Дирихлеов и Нојманов гранични услов, а када се жели смањити домен за прорачунавање коришћењем периодичности у конструкцији ротационих машина, потребно је користити додатне (анти)периодичне услове, који се обично свде на комбинацију Дирихлеовог и Нојмановог услова.

Дирихлеовим условом се у тачкама у којима се дефинише унапред задаје вредност магнетског вектор потенцијала, а ако се иста вредност зада дуж неке линије или површи, она у том случају постаје еквипотенцијална. Ако је еквипотенцијална линија или површ на изабраном нултом потенцијалу, такав тип Дирихлеовог граничног услова се зове хомоген Дирихлеов гранични услов. Примена овог услова у анализи електричних машина може бити од користи ако се спољашњи обод статорског пакета лимова прогласи за еквипотенцијалну површ нултог потенцијала (односно еквипотенцијалну контуру у дводимензионалном приказу машине), јер се тиме поље ограничава искључиво на домен пакета лимова статора и ротора, односно ваздушни зазор. Јасно је да се овај гранични услов не може користити ако се желе истраживати токови расипног флуksа који се успостављају и изван пакета лимова (када се жели истражити утицај расипних флуksева на стварање додатних губитака у кућишту машине, индуковање лежајних струја и

напона, могућност детекције кварова мерењем расипног флуksа у околини машине и слично), те се за потребе таквог истраживања, које није предмет овог рада, користи Дирихлеов гранични услов на граници домена који је већи од саме границе пакета лимова. Јасно је да ако се хомогеним Дирихлеовим условом одреди вредност магнетског вектор потенцијала на граници домена, линијски интеграл у релацији (2.45) постаје идентички једнак нули.

Нојмановим граничним условом се дефинише, не вредност магнетског вектор потенцијала на граници домена од интереса, већ се дефинише вредност извода у правцу спољашње нормале на контуру, који такође фигурише у линијским интегралима у релацији (2.45). Ако је вредност овог израза постављена на нулу, линијски интеграл поново постаје идентички једнак нули (такав Нојманов гранични услов се зове природни гранични услов), само што је у овом случају интерпретација услова нешто другачија од хомогеног Дирихлеовог граничног услова. Извод у правцу нормале представља пројекцију градијента скаларне функције на њен правац, што се јасно види из Гриновог идентитета (2.42), што значи да је градијент потенцијала тангентијалан на граници домена, односно да нема промене потенцијала у правцу нормале. Примена овог граничног услова на спољну ивицу статорског пакета лимова се своди на то да ће еквипотенцијалне линије магнетског вектор потенцијала бити тангентне на раздвојну површ, што је у суштини идентично закључку да ће и вектор магнетске индукције бити тангентан на раздвојну површ, што и јесте случај у ротационим машинама.

Да би проблем решавања магнетског вектор потенцијала био једнозначно одређен, потребно је и да се у макар једној тачки унапред дефинише његова вредност (аналогно увођењу тачке референтног електричног скалар потенцијала у методама решавања електричних мрежа или електростатичким проблемима). Ако се узму у обзир претходна разматрања о граничним условима, може се усвојити да је за потребе овог истраживања најповољнији хомоген Дирихлеов гранични услов у којем се спољашњи обод статорског пакета лимова проглашава за контуру нултог потенцијала. Тиме се поље ограничава на унутрашњост домена, а уједно се и линијски интеграл у релацији (2.45) идентички изједначава са нулом, што је описано релацијом (2.46).

$$\sum_{l=1}^L \left\{ \begin{aligned} & \iint_{\partial\Omega^l} \frac{1}{\mu^l} \left(\frac{\partial W^l}{\partial x} \frac{\partial \hat{A}_z^l}{\partial x} + \frac{\partial W^l}{\partial y} \frac{\partial \hat{A}_z^l}{\partial y} \right) dx dy + \\ & \iint_{\partial\Omega^l} W^l \left(\sigma^l \left(\frac{\partial \hat{A}_z^l}{\partial t} + \text{grad}_z V^l \right) \right) dx dy - \iint_{\partial\Omega^l} W^l J_{0izv}^l dx dy \end{aligned} \right\} = 0 \quad (2.46)$$

Овако припремљена једначина минимизације резидуала се даље мора решавати подесним избором тежинских функција за сваки коначни елемент у проблему. Галеркинов приступ решавања једначине се заснива на увођењу тежинских функција које су за сваки текући коначни елемент једнаке са функцијама облика самог елемента. Избор оваквих тежинских функција има бројне предности, што ће се потврдити даљим развијањем релације (2.46), уз уважавање изабраних тежинских функција.

Део кондукционе струје који је последица градијента електричног скалар потенцијала се у електричној машини може појавити услед наметања временски константног напона на њеним прикључцима (у регулисаним електромоторним погонима се наизменичним машинама намеће једносмерни напон у ситуацијама када се жели закочити ротор након искључења погона, или у случајевима када се ротор жели држати у закоченом стању, под оптерећењем, што је врло честа појава у погонима са потенцијалним оптерећењем, као што су разне дизалице, елеватори, лифтови и слично), или је са друге стране наметнут временски променљив напонски извор који се у току једног временског периода дискретизације континуалне промене може сматрати константним. Управо из тог разлога се тај члан може значајно упростити, увођењем претпоставке да се потенцијал услед довођења спољашњег напона текућем сегменту U^l_{ext} (приликом увођења појма наметнутог напона текућем елементу се намећу додатни проблеми извођења везе између тих напона и екстерног напона на прикључцима. Јасно је да се у том случају мора водити рачуна и о томе како су намотаји формиран, са нарочитим нагласком на број паралелних грана, редно везаних секција и укупног броја проводника, јер се на тај начин може прецизно утврдити колики део од споља наметнутог напона припада једном коначном елементу) равномерно распоређује по осној дужини машине, која се довољно прецизно може сматрати једнака дужини пакета лимова h :

$$grad_z V^l = \frac{1}{h} U^l_{ext} \quad (2.47)$$

Када се усвоји предложени облик тежинских функција, уврштавањем релације (2.40) у појединачне интеграле из релације (2.46), добијају се следеће релације:

$$\iint_{\partial\Omega^l} \frac{1}{\mu^l} \left(\frac{\partial W^l}{\partial x} \frac{\partial \hat{A}_z^l}{\partial x} + \frac{\partial W^l}{\partial y} \frac{\partial \hat{A}_z^l}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\partial\Omega^l} \frac{1}{\mu^l} \left(\frac{\partial N_{i,j,k}^l}{\partial x} \cdot \frac{\partial (N_{i,j,k}^{lT} \cdot \{\hat{A}_{z,i,j,k}^l\}^l)}{\partial x} + \frac{\partial N_{i,j,k}^l}{\partial y} \cdot \frac{\partial (N_{i,j,k}^{lT} \cdot \{\hat{A}_{z,i,j,k}^l\}^l)}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.48)$$

$$\iint_{\partial\Omega^l} W^l \left(\sigma^l \left(\frac{\partial \hat{A}_z^l}{\partial t} + grad_z V^l \right) \right) dx dy = \iint_{\partial\Omega^l} N_{i,j,k}^l \sigma^l \left(\frac{\partial (N_{i,j,k}^{lT} \cdot \{\hat{A}_{z,i,j,k}^l\}^l)}{\partial t} + \frac{1}{h} U^l_{ext} \right) dx dy \quad (2.49)$$

$$\iint_{\partial\Omega^l} W^l J_{0izv}^l dx dy = \iint_{\partial\Omega^l} N_{i,j,k}^l J_{0izv}^l dx dy \quad (2.50)$$

Због увођења слабе формулације решења, по којем се вредност магнетског вектор потенцијала унутар троугаоног сегмента апроксимира линеарном интерполацијом вредности потенцијала у теменима, диференцирање по просторним координатама у (2.48) се врши само над функцијама облика, а будући да су оне

линеарне функције координата, подинтегралне функције постају величине независне од координата унутар текућег коначног елемента:

$$\frac{\partial N_{i,j,k}^l}{\partial x} = \frac{1}{2\partial\Omega^l} \begin{bmatrix} b_i \\ b_j \\ b_k \end{bmatrix}^l \quad (2.51a)$$

$$\frac{\partial N_{i,j,k}^l}{\partial y} = \frac{1}{2\partial\Omega^l} \begin{bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_k \end{bmatrix}^l \quad (2.51b)$$

$$\frac{\partial (N_{i,j,k}^{lT} \cdot \{\hat{A}_{z,i,j,k}\}^l)}{\partial x} = \frac{1}{2\partial\Omega^l} [b_i \quad b_j \quad b_k]^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l \quad (2.51c)$$

$$\frac{\partial (N_{i,j,k}^{lT} \cdot \{\hat{A}_{z,i,j,k}\}^l)}{\partial y} = \frac{1}{2\partial\Omega^l} [c_i \quad c_j \quad c_k]^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l \quad (2.51d)$$

Уврштавањем релација (2.51a-2.51d) у интеграл (2.48), после простих матричних операција над константним матрицама се добија површински интеграл константне подинтегралне функције над облашћу једног коначног елемента, који се своди на производ површине елемента и подинтегралне функције:

$$\iint_{\partial\Omega^l} \frac{1}{\mu^l} \left(\frac{\partial W^l}{\partial x} \frac{\partial \hat{A}_z^l}{\partial x} + \frac{\partial W^l}{\partial y} \frac{\partial \hat{A}_z^l}{\partial y} \right) dx dy =$$

$$\frac{1}{4\partial\Omega^l \mu^l} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix}^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l = \frac{1}{4\partial\Omega^l \mu^l} \begin{bmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} \end{bmatrix}^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l \quad (2.52)$$

Сличним операцијама се може трансформисати и релација (2.49), уз додатак да се члан проистекао из наметања временски константног напона оправдано може изоставити, нарочито зато што се нека временски константна компонента струје у намотајима може придодати струји извора, те се на тај начин накнадно уважити у релацији (2.50), која је сличним поступком примењеним у релацијама (2.52-2.53) трансформисана у релацију (2.54).

$$\iint_{\partial\Omega^l} N_{i,j,k}^l \sigma^l \left(\frac{\partial (N_{i,j,k}^{lT} \cdot \{\hat{A}_{z,i,j,k}\}^l)}{\partial t} \right) dx dy =$$

$$\sigma^l \iint_{\partial\Omega^l} N_{i,j,k}^l N_{i,j,k}^{lT} \frac{\partial (\{\hat{A}_{z,i,j,k}\}^l)}{\partial t} dx dy = \frac{\sigma^l \partial \Omega^l}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l \quad (2.53)$$

$$\iint_{\partial\Omega^l} N_{i,j,k}^l \left(J_{oizv}^l + \sigma^l \frac{1}{h} U^l_{ext} \right) dx dy = \iint_{\partial\Omega^l} N_{i,j,k}^l J_{izv}^l dx dy =$$

$$J_{izv}^l \iint_{\partial\Omega^l} N_{i,j,k}^l dx dy = \frac{J_{izv}^l \partial \Omega^l}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Релација (2.46), којом се описује резидуал над целим доменом коначних елемената се након пређашњих модификација може записати у значајно компактнијој форми:

$$\sum_{l=1}^L \left\{ \frac{1}{4\partial\Omega^l \mu^l} \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{ik} \\ S_{ij} & S_{jj} & S_{jk} \\ S_{ik} & S_{jk} & S_{kk} \end{bmatrix}^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \right.$$

$$\left. \frac{\sigma^l \partial \Omega^l}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l - \frac{J_{izv}^l \partial \Omega^l}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (2.55)$$

Оно што је неопходно истаћи када се осмотри форма релације (2.55) у односу на релацију (2.46) јесте то што се од система парцијалних диференцијалних једначина добио систем једначина у којима фигурише искључиво извод по времену претпостављених вредности магнетског вектор потенцијала у чворовима мреже коначних елемената. Релација (2.55) представља најподесније обликовано полазиште за нумеричку имплементацију методе у различитим сценаријима њене примене. У зависности од тога какав се феномен жели истражити, ова релација се може даље упрошћавати, али се у најкомплекснијим имплементацијама методе систему једначина (2.55) морају придружити додатне релације којима се описује веза домена са екстерним електричним колима, па чак и механичко кретање појединих делова домена. У распону могућих имплементација поменуте релације има се са једне стране њена примена у магнетостатици у линеарним срединама, што изузетно упрошћава њен облик и решавање, док се са друге стране има примена у домену са променљивом геометријом, временски зависном побудом и нелинеарним материјалима. Јасно је да се решавање система једначина (уз евентуално придодате релације) драстично разликује у ова два екстремна случаја, те је стога пожељно добро познавати начин на који одређени софтвери имплементирају методу

коначних елемената, те се спрам тога одредити за варијанту проблема којим се довољно временски ефикасно може истраживати одређени феномен, наравно не са значајним губитком прецизности.

За потребе овог истраживања ће се најкомплекснија имплементација методе, позната и под називом *time-stepping FEA* користити само као једна од верификација (поред експерименталних резултата, *time-stepping* метода се сматра најпоузданијом методом верификације) предложених упрошћених и временски ефикаснијих метода. Као што је познато, *time-stepping* метода (даље у тексту транзијентна метода) омогућава истраживање феномена при произвољној временској промени извора електромагнетног поља и уз дозвољено кретање одређеног дела домена од интереса, најчешће са једним степеном слободе. Због тога ће јој се посветити најмање времена у наредним поглављима. Велики недостатак те методе, поред чињенице да је нумерички најзахтевнија јесте и тај што не нуди могућност истраживања појединачних утицаја на неку појаву која се жели истражити, или је за такав приступ потребно извршити већи број дугих симулација, што је најчешће недопуштен луксуз са становишта расположивости ресурса и људства, а такође и временских ограничења која намеће истраживање у фази развоја прототипова машина, или истраживања са циљем откривања нових метода детекције феномена важних у експлоатацији машине, као што је, на пример, појава кварова.

Због побројаних ограничења транзијентне методе, предложено решење у овом истраживању се ослања на имплементацију једноставнијих метода коначних елемената, у првом реду магнетостатичких проблема побуђених константним струјним изворима у линеарној средини, што представља веома добро полазиште за развијање нумеричког модела асинхроне машине који је у стању да прецизно предвиђа мноштво феномена унутар саме машине. За потребе приближавања предложеног нумеричког модела дешавањима у физичкој електричној машини нужно је обогатити податке добијене из магнетостатичких симулација утицајем нелинеарности феромагнетских материјала, за шта ће се користити новоразвијена метода, заснована на познатом приципу такозваних „замрзнутих пермеабилности“, о којој ће више речи бити у наредним поглављима. Такође, због принципа електромеханичке конверзије енергије у кавезним асинхроним машинама, који се заснива на индуковању струја у роторским проводницима, утицај променљиве учестаности у роторским проводницима, у првом реду на промену њихове отпорности услед појаве површинског ефекта се по потреби може накнадно уважити. За оба наведена побољшања изворних резултата магнетостатичких симулација у линеарним срединама се могу користити резултати добијени статичним симулацијама у којима се домену коначних елемената намећу простопериодични струјни извори променљиве учестаности, што омогућава увођење комплексне нотације, уместо потребе за временском дискретизацијом релације (2.55), а као последица диференцирања у времену. Ове методе, познате још и под именом *time-harmonic* методе, иако нешто захтевније од магнетостатичких, су и даље значајно једноставније од транзијентних метода, нарочито зато што су симулације статичне, а потребан број симулација за добијање жељених зависности прилично мали.

2.4 Решавање дводимензионалних магнетостатичких проблема методом коначних елемената

У овом поглављу ће се, на основу релације (2.55) детаљно разрадити решавање магнетостатичких проблема у електричним машинама, како у линеарној, тако и у нелинеарној средини. Уједно ће се образложити значај овог приступа за потребе развоја предложеног динамичког модела трофазне кавезне асинхроне машине.

Под појмом магнетостатичких проблема се подразумевају ситуације када се у непокретним срединама успоставља искључиво магнетно поље, а као последица побуђивања временски непроменљивим струјама и/или перманентним магнетима. Овакав режим се изузетно ретко дешава у ротационим машинама (раније је већ помињана ситуација када се мотор побуђује константним струјама са циљем закочења ротора), а основни разлог за то јесте што су све ротационе машине конструисане са циљем континуиране електромеханичке конверзије енергије, што наравно није случај у магнетостатици. За континуалну електромеханичку конверзију енергије је неопходно истовремено присуство и електричног и магнетског поља, јер се искључиво кроз њихову интеракцију снага може преносити електромагнетним путем, што потврђује и Поинтингова теорема. Наравно, пошто није довољно само да се енергија преноси електромагнетним путем, већ је циљ и њена конверзија, неопходно је да систем изменом своје геометрије уједно и мења количину акумулиране енергије у пољу, што поново није случај у магнетостатици, која по дефиницији представља физички непокретан систем. Са друге стране, магнетостатика је изузетно важна из разлога што се помоћу ње могу израчунати неки статички параметри, као што су у првом реду индуктивности машине.

Индуктивности израчунате помоћу магнетостатичких симулација представљају најзначајније полазиште у развијању динамичког модела машине, али не треба испустити из вида која се ограничења том приликом појављују. У магнетостатици не постоји никаква временска промена, па се не може говорити о варијацији параметара којима се посредно описује електромеханичка конверзија у зависности од брзине те промене, односно у најчешћем случају фреквенције, будући да се ротационе машине напајају из наизменичних извора простопериодичних напона и струја (у случају примене уређаја енергетске електронике, појам природе извора се мора проширити и на сложенопериодичне изворе, али најчешће са доминантном основном компонентом, што је последица примењених техника модулације). Испоставља се, међутим, да је утицај учестаности на варијацију параметара прорачунатих помоћу магнетостатичких симулација занемарљив, највише због тога што електричне машине раде на, са техничке стране гледано, веома малим учестаностима. Примена уређаја енергетске електронике у одређеној мери уноси у хармонијски спектар извора и више учестаности, које срећом нису праћене високим амплитудама њихових компоненти у магнетном пољу, те стога не утичу значајно на варијацију параметара, са становишта доминантног процеса електромеханичке конверзије. Њихова појава у одређеној мери доводи до повећања специфичних губитака у машини, па се приликом пројектовања машине мора водити рачуна и о аспекту напајања за који се машина предвиђа.

Овде се наравно не подразумева да исто занемарење важи и за отпорности роторских проводника у кавезним асинхроним машинама, већ се у првом реду мислило на вредности индуктивности у машини. Много значајнија варијација индуктивности се има као последица појаве засићења у феромагнетским материјалима, што је неминовност у експлоатацији сваке комерцијалне електричне машине.

У уводу је већ дискутовано како је процес израде и пројектовања електричних машина еволуирао ка максималном искоришћењу материјала, како у електричном, тако и у магнетном смислу, све са циљем што економичнијег утrophка. Радом са магнетним пољем на самој ивици засићења се феромагнетски материјал рационално искоришћава, али се због тога могу очекивати неповољне ситуације приликом драстичнијих варијација мрежног напона, или приликом појаве кварова у електричној мрежи (ово је нарочито случај када се разматра утицај засићења у генераторима на струје кратких спојева у њиховој близини). Такође, засићење неповољно утиче и на фактор снаге машина, а у режимима са малим оптерећењем доводи и до значајнијег изобличења таласног облика статорских струја, што ће бити показано кроз експерименте и симулације на развијеном динамичком моделу, а уједно и уз помоћ комерцијалног софтвера за имплементацију методе коначних елемената.

Феномен засићења у ротационим електричним машинама је значајно другачији од традиционалне представе каква се има у статичким електромагнетним уређајима, као што су на пример трансформатори. У трансформаторима се врши готово хомогена магнетизација дуж једног одређеног правца, тако да се порастом струје (било услед потребе за успостављањем одговарајућег интензитета флуksа зарад индуковања контраелектромоторне силе код напонски напајаних машина, било услед пораста наизменичне струје код струјно напајаних машина, као што су на пример струјни мерни трансформатори) цео феромагнетски регион који каналише магнетно поље симултано доводи у засићење, па је могуће објаснити феномен засићења кретањем радне тачке по нормалној криви магнетисања материјала, те на основу ње врло прецизно реконструисати таласни облик струје за случај напонског напајања, или таласни облик флуksног обухвата, односно индукованог напона за случај струјног напајања.

Ротационе машине, изузевши машине једносмерних струја и неке специјалне импулсно напајане наизменичне машине, свој рад заснивају на принципу обртног магнетног поља, које настаје подесним просторним распоредом вишефазног намотаја по ободу статора, односно ротора, који су истовремено напајани одговарајућим системом напона или струја. Оно што је карактеристично за обртно поље, нарочито у устаљеном стању рада машине, јесте да је оно константно по амплитуди, а да му се мења тренутни положај по ободу машине услед ротације поља. То нужно повлачи да се у ротационим машинама домен који се налази у засићењу није целокупан простор којим се каналише магнетски флуks у фермагнетику, већ они делови језгра у којима се у датом тренутку успоставља највећа вредност магнетне индукције, невезано за њен предзнак (до истог нивоа засићења доводи вектор магнетске индукције истог интензитета, без обзира на његов предзнак, а код изотропних материјала ни правац вектора нема никакав утицај). Проблем постаје још компликованији када се узме у обзир и да се линије магнетског поља другачије

затварају кроз јарам у односу на зупце феромагнетског језгра машина, што ће бити илустровано резултатима прорачуна. Ова појава резултује тиме да су региони у најдубљем засићењу на различитим местима у јарму у односу на зупце. Тачан положај обртног поља, према томе, на сложен начин мења тренутну слику феромагнетског материјала из угла нивоа засићења у појединим његовим деловима, те се стога приликом уважавања феномена засићења и његовог утицаја на промену индуктивности мора реконструисати такво стање у феромагнетику (што је у принципу једино могуће ако се спроводе најкомпликованије транзијентне симулације), а да се истовремено на очигледан и једноставан начин из њега могу прорачунати варијације индуктивности (што је могуће једино када се један намотај побуди једносмерном струјом, па се на основу тога прорачунава сопствена индуктивност намотаја преко енергије у магнетном пољу, или прорачунавањем флуksних обухвата када се жели израчунати међусобна индуктивност тог намотаја и осталих намотаја у машини. Проблем који притом искрсава је што се побуђивањем само једног намотаја не може ни у ком случају постићи таласни облик вектора магнетске индукције и просторна расподела засићења као што је то иначе случај у раду машине). Ова два, на први поглед контрадикторна захтева се на елегантан начин могу задовољити применом методе „замрзнутих пермеабилности“, о чему ће нешто више речи бити касније.

Најзначајнији закључак овог кратког увода о феномену засићења у ротационим електричним машинама јесте да је он изузетно сложен, временски и просторно променљив и практично независан од предзнака вектора магнетске индукције. То ће бити од велике помоћи приликом уважавања феномена засићења и његовог утицаја на варијацију индуктивности машине.

2.4.1 *Линеарне магнетостатичке симулације*

Сада ће се акценат ставити на нумерички аспект решавања проблема у магнетостатици, полазећи од релације (2.55). Имајући на уму временску непроменљивост свих величина, упрошћена релација (2.56) описује проблем минимизације резидуала по Галеркиновом приступу у магнетостатичком случају.

Вектор густине струје извора у себи обједињује два феномена, један је последица струје струјног извора, док је други последица Омовог закона у интегралном облику, за случај да се уједно у домену од интереса намеће и напонски извор електричне енергије. Најпростија варијанта ове методе је ако се та компонента струје изостави, што је овде већ унапред учињено, стављањем J_{0izv}^l уместо J_{izv}^l .

$$\sum_{l=1}^L \left\{ \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{ik} \\ S_{ij} & S_{jj} & S_{jk} \\ S_{ik} & S_{jk} & S_{kk} \end{bmatrix}^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l - \frac{J_{0izv}^l \partial\Omega^l}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (2.56)$$

Вектор густине струје у текућем коначном елементу J_{0izv}^l је у јасној релацији са струјом која се успоставља из екстерног извора, која ће се сада нешто детаљније

описати. Као што је већ речено, за потребе магнетостатичког прорачуна је довољно претпоставити напајање машине из извора константног интензитета струје, а начин на који се та струја успоставља кроз саме намотаје је у директној вези са начином међусобног повезивања појединачних проводника који сачињавају навојке, затим секције, односно и сам фазни намотај. Ако су сви проводници који сачињавају један фазни намотај међусобно редно везани, јасно је да кроз сваки од њих протиче целокупна струја из спољашњег извора. У том случају се вектор густине струје у једном коначном елементу који припада попречном пресеку одређеног проводника може лако изразити помоћу релације (2.57).

$$J_{0izv}^l = \frac{I_{ext}}{S_{pp}} \quad (2.57)$$

Интензитет струје спољног извора је означен са I_{ext} , док S_{pp} представља површину попречног пресека појединачног проводника фазног намотаја. Овако једноставна релација је на снази искључиво у случају временски константних струја, јер код њих не постоји површински ефекат који би изазвао неравномерну расподелу вектора густине струје по попречном пресеку проводника. Строго узевши, када се за израду намотаја користе танки жичани проводници, оправдано је и у случају временски променљивих струја претпоставити равномерну расподелу вектора густине струје по попречном пресеку, али се то ни у ком случају не сме користити када је реч о профилним или проводницима са великим попречним пресеком, као што је то случај са штапним проводницима који сачињавају роторски кавез асинхронних машина.

За случај да у фазном намотају постоји више паралелних грана, тада се струја из спољашњег струјног извора дели на те паралелне гране подједнако. У том случају се вектор густине струје у текућем коначном елементу (који припада попречном пресеку неког проводника) рачуна помоћу релације (2.58), где је са a означен број паралелних грана конкретног фазног намотаја.

$$J_{0izv}^l = \frac{I_{ext}}{aS_{pp}} \quad (2.58)$$

Ако је више намотаја побуђено различитим струјним изворима, за сваки од њих се може применити нека од последње две релације.

Најпре ће се у кратким цртама изложити поступак решавања магнетостатичког проблема у линеарном региону побуђеног константном струјом. Пошто је метода коначних елемената графо-нумеричка, након прецизне формулације геометрије домена (данас постоје бројни софтвери за израду прецизних графичких цртежа, а практично сви софтвери који имплементирају методу коначних елемената поред уграђених алата за цртање нуде и могућност њиховог увожења из других апликација) неопходно је дефинисати сваку дисјунктну област цртежа у смислу својстава материјала који јој се приписује. Софтвери поседују богате библиотеке свих

комерцијално коришћених материјала у изради електричних машина, али такође нуде могућност дефинисања и нових (нарочито је интересантно у почетним фазама истраживања занемарити неке аспекте реалних материјала, па је стога у софтверима дозвољено креирати материјале са нултом проводношћу, нереално великом проводношћу, пермеабилношћу или слично).

Ако се истражује ротациона електрична машина, највише пажње, а самим тим и времена треба посветити начину на који су формираны намотаји електричне машине, употребом такозваног листа намотавања, помоћу којег се прецизно дефинише који проводници (и у ком референтном смеру) проводе струју, те на који начин су међусобно повезани у сачињавању фазног намотаја.

За случај да је разматрани проблем релативно мале површине попречног пресека, може се користити у целини, али је каткад веома корисно користити само део попречног пресека који одговара једном магнетном полу, будући да се слика која одговара једном полу периодично пресликава на остатак пресека. Свакакако је неопходно одмах дефинисати и одговарајуће граничне услове (хомоген Дирихлеов услов за спољашњи обод попречног пресека, те одговарајуће (анти)периодичне услове за случај да се користи само исечак целокупног попречног пресека).

Када је проблем једнозначно дефинисан, може се приступити такозваном „меширању“ домена, односно његовој подели на коначне елементе. Софтвери имају уграђене рутине за оптималну поделу на коначне елементе, али никако није препоручљиво ослањати се на њихова подразумевана подешавања, јер она по правилу доводе до формирања мреже елемената која је недовољно густа, односно састоји се од коначних елемената недовољно малих димензија. Усвајање такве мреже као коначне ће резултовати у решењима која неће довољно прецизно реконструисати поље у проблему и то из макар два најважнија разлога. Прво, мали број коначних елемената подразумева и мали број чворова мреже, а будући да се метода заснива на решавању потенцијала у чворовима, уз интерполацију у унутрашњости елемената, са правом се може очекивати сувише груба апроксимација реалне слике дешавања. Друго, у ситуацијама када се поље успоставља у нелинеарним срединама, у теменима коначних елемената са сувише великом површином се по дефиницији мора утврдити јединствена вредност магнетне пермеабилности, што опет по правилу доводи до погрешних и непрецизних резултата. Иста ситуација је и када се утврђује утицај површинског ефекта на вектор густине струје у штапним проводницима. Јако је непрактично уводити и сувише велики број коначних елемената, зато што се у том случају драстично увећава број непознатих које треба израчунати, нарочито ако се не спроводе магнетостатички прорачуни, већ неки који уважавају временске промене поља и/или променљиву геометрију, па је потребно извршити низ прорачуна за различите временске тренутке.

Одређеним степеном искуства се могу превазићи ове недоумице око избора подесно густе мреже коначних елемената, а под тиме се првенствено подразумева оријентационо познавање таласног облика и путева за успостављање магнетног поља без решавања конкретног проблема. Као што је познато, ротационе машине карактерише постојање изузетно уског ваздушног простора између покретног и непокретног дела машине, познатијег под називом ваздушни зазор. Оно што је важно знати јесте да се енергија од извора преко статора кроз ваздушни зазор

електромагнетним пољем преноси на ротор (или обрнуто, што је у сваком случају ирелевантно за ово разматрање), те је из тог разлога нужно да ваздушни зазор буде узак, јер су магнетска својства ваздуха значајно лошија него ли код феромагнетика, те би се приличан део магнетне енергије морао задржати у самом зазору да би се у њему успоставила довољна вредност магнетне индукције (која је диктирана наметнутим напоном и димензијама машине, те граничним условима на раздвојној површи феромагнетик-ваздух) за овај пренос енергије. То би на крају резултовало у неповољном фактору снаге машине, што би се негативно одразило на њене перформансе и на њену економичност. Помињано је да је често корисно неке материјале представити помоћу нереално високих пермеабилности и проводности, што би довело до приближавања идеализованој слици електричне машине са идеалним проводницима и феромагнетицима са бесконачно великом пермеабилношћу. У таквим идеализованим срединама се уз занемарљиву јачину магнетског поља може успоставити велика вредност магнетне индукције у феромагнетицима, док је стварни износ потребне магнетопобудне силе диктиран искључиво геометријом и својствима ваздушног зазора, као делом домена са најлошијим магнетским својствима. Јасно је да је у том случају ваздушни зазор уско грло целокупног процеса конверзије (то је у принципу увек случај и у реалним електричним машинама), те је стога прецизно познавање поља у њему од суштинског значаја. Ваздушни зазор додатно добија на важности и када се узме у обзир начин на који комерцијални софтвери рачунају механичку силу односно моменат који покреће ротор машине. Наиме, у транзијентним анализама се моменат електромеханичке конверзије по правилу рачуна применом Максвелових напона у ваздушном зазору, о којима ће нешто више бити речено у наредним одељцима овог поглавља.

Изузетно је важно што прецизније одредити вектор магнетске индукције и у зупцима статора и ротора, будући да се магнетно поље на свом протицању од статора ка ротору и обратно тежи успоставити доминантно у оном делу домена са повољнијим магнетским својствима. Због тога често долази до појаве дубоког засићења у зупцима машине, па се у фази пројектовања одабиру њиховог облика и првенствено ширине мора посветити посебна пажња. Зупци, а нарочито сами њихови врхови представљају област где се могу очекивати највећи специфични губици у феромагнетском материјалу, а за случај да су жљебови машине сувише дубоки, постоји опасност појаве пулсационих компоненти вектора магнетске индукције већег интензитета и повишених фреквенција, што може довести до значајног пораста специфичних губитака у феромагнетику машине.

Ако се анализирају перформансе кавезних асинхроних машина, тада је поред потребе за што детаљнијом сликом дешавања у зупцима машине неопходно и што веродостојније утврдити просторну расподелу вектора густине индукованих струја у роторским жљебовима, будући да се услед ефекта потискивања струја мења отпорност протицању наизменичних струја роторских проводника. То се обилато користи за постизање различитих перформанси машине у зависности од облика и величине роторских жљебова, што, испоставља се, директно утиче и на вредности полазних струја, полазног и превалног момента, те фактора снаге машине.

Поред побројаних домена у попречном пресеку машине у којима се очекују изузетно важне појаве за процес конверзије и свеопште перформансе машине,

постоје и делови у којима није нужно сувише прецизно реконструисање поља. Ту се пре свега мисли на спољашњи ободни регион статорског јарма и унутрашњост роторског пакета лимова. Овај други домен нарочито може бити третиран са мањим нивоом прецизности ако је анализирана машина са већим бројем магнетских полова (већим или једнаким од четири), јер се у том случају главни магнетски ток не затвара кроз њега, па је за очекивати да смањена густина мреже коначних елемената неће изазвати значајне потешкоће са тачношћу прорачуна. У неким ситуацијама се тај домен може и у потпуности изоставити из „меширања“, али се у том случају мора увести још један гранични услов којим се онемогућава пролаз линијама магнетног поља кроз граничну површ, што се у принципу природно успоставља код вишеполних машина. Наравно, ако је циљ прорачуна утврђивање утицаја расипних флуксева на индуковање струја у вратилу мотора, ова упрошћења се не могу спровести.

Познато је да се статорски намотаји асинхроних машина мањих и средњих снага по правилу формирају од танких жичаних проводника у којима се површински ефекат може занемарити, а имајући у виду и да је њихова пермеабилност практично једнака са пермеабилношћу вакуума, оправдано се може претпоставити да ће значајно мањи део линија магнетног поља успоставити свој ток кроз жљебове, понекад је оправдано и тај домен прекрити мрежом коначних елемената нешто мање густине. Ипак, не сме се сметнути са ума да статорски зупци често улазе у дубоко засићење, па због тога при евентуалном даљем порасту интензитета вектора магнетске индукције може да се деси да и кроз жљебове протекне више линија магнетског поља, па се избору ређе мреже у статорским жљебовима треба приступити са опрезом.

Након изложених смерница по питању густине мреже коначних елемената, потребно је напоменути и да је препоручљиво да се у ваздушном зазору изаберу максимално дозвољене дужине страница троугаоних сегмената које ће гарантовати креирање мреже од бар неколико слојева, што је довољна гаранција за прецизно рачунање поља у зазору. Будући да је ширина ваздушног зазора код кавезних асинхроних машина мања у односу на остале типове машина, а како је фокус овог истраживања на машинама мањих и евентуално средњих снага, очекиване ширине зазора се крећу од 0.2-1mm, па се спрам тога бира максимална дужина странице троугаоних сегмената од реда 0.04-0.2 mm. Нешто веће димензије су дозвољене за област жљебова статора и ротора, те зубаца ротора, са максималном дужином странице од 0.5-1 mm се могу очекивати врло прецизни резултати. Са осталим доменима се може испробати избор већих дужина страница, опсег од 1-5 mm по правилу даје високу прецизност, а по потреби се ова граница може и смањити, али и проширити. Уз употребу периодичности машине, изузетно смањење домена који је потребно анализирати (нарочито код машина са више магнетних полова) дозвољава креирање и знатно гушћих мрежа, али је то ретко потребно учинити.

Када се домен за решавање припреми за спровођење транзијентних анализа, у ваздушном зазору се мора креирати посебан домен који ваздушни зазор дели на два дисјунктна дела, од којих се један придодаје статичној мрежи коначних елемената статора, а други мрежи елемената ротора. Овом методом се избегава потреба да се приликом померања ротора изнова врши меширање целокупног домена због промењене геометрије, већ се мења геометрија искључиво по једног слоја елемената

који чине поменути дисјунктну границу са њене две стране, што донекле убрзава већ и онако захтевну транзијентну анализу.

Након дефинисања жељене густине мреже коначних елемената се може приступити њеном генерисању, што се по правилу изводи аутоматски, већ помињаним уграђеним рутинама. Софтвери одмах нуде и графички приказ генерисане мреже, те се она може и простом визуелном инспекцијом прогласити задовољавајућом, или се по потреби може поново генерисати, са измењеним препорученим димензијама елемената. Важно је напоменути да рутине за генерисање мреже по правилу праве елементе који могу бити и значајно мањи од прописаних, што је нарочито случај у областима где постоје оштри прелази неправилног облика између средина различитих својстава. То је добра особина зато што се линије магнетског поља згушњавају и значајније криве на таквим местима, па ће их финална мрежа елемената прецизније описати.

Након генерисања мреже троугаоних сегмената коначно се може приступити решавању једначине (2.56). Ако се приликом дефинисања својстава материјала усвојило да су сви материјали линеарни, једначина се може релативно брзо решити и то без икаквог итеративног поступка. Уз познате локације чворова генерисане мреже, лако се одређују коефицијенти матрица у једначини, а пошто је пермеабилност у целом домену непроменљива, добијање потенцијала у чворовима се своди на решавање система линеарних једначина, којих има онолико колико има чворова у мрежи. У овом истраживању се неће посвећивати посебна пажња имплементираним алгоритму решавања система једначина (данас постоје изузетно брзи и робусни алгоритми за њихово решавање, чак и у ситуацијама када систем има на хиљаде непознатих, што управо може бити случај овде), једино што треба напоменути је да сама матрица система једначина није сувише густа, будући да су само суседни чворови у међусобној корелацији приликом формирања матрица.

Пошто у линеарном магнетостатичком проблему не постоји потреба за линеаризацијом једначина, испоставља се да итеративног поступка уопште и нема, већ се вредности магнетског вектор потенцијала у чворовима мреже добијају непосредним решавањем система једначина. Решавање се, наравно, мора ускладити и са унапред дефинисаним граничним условима који систем једначина чине потпуно одређеним.

$$\begin{bmatrix} A_{zi} \\ A_{zj} \\ A_{zk} \end{bmatrix}^l = \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{ik} \\ S_{ij} & S_{jj} & S_{jk} \\ S_{ik} & S_{jk} & S_{kk} \end{bmatrix}^{l-1} \frac{4J_{0izv}^l \partial \Omega^l \partial \Omega^l \mu^l}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, l = [1, L] \quad (2.59)$$

Онога тренутка када се из анализираног магнетостатичког проблема израчунају вредности потенцијала, могуће је помоћу њих реконструисати било коју магнетну величину у домену, од вектора магнетске индукције, преко јачине магнетног поља, магнетног флукса, магнетне енергије или коенергије, а што је најважније могуће је одредити и магнетне величине које се везују за одређене

намотаје фаза као што су флуксни обухвати, који уз струју која кроз њих протиче представљају основ за израчунавање индуктивности.

О даљој употреби добијених резултата ће више бити речи приликом формулације идеје о развоју динамичког модела трофазне кавезне асинхроне машине, док је у овом поглављу главни акценат на описивање варијација имплементације методе коначних елемената, чиме ће се непосредно апострофирати предности и мане сваке од њих, што ће додатно поткрепити опредељеност овог истраживања ка појединим од њих.

Чини се да је примена магнетостатичких симулација у линеарним срединама готово неупотребљива у анализи рада електричних машина које су, између осталог, синоним за нелинеарност. Испоставиће се да је овај принцип и те како врло користан, а да се појава засићења може накнадно уважити и то поступком који је изузетно ефикасан, готово као и малопре приказани поступак, уз наравно неке очигледне разлике. Наиме, ако би се помоћу неких других имплементација методе коначних елемената утврдио механизам сатурације у неком радном режиму машине, из тог режима би се могле „позајмити“ тренутне вредности пермеабилности унутар коначних елемената, а затим се те вредности могу употребити у квазилинеарној магнетостатичкој симулацији, за потребе израчунавања тренутних вредности индуктивности.

2.4.2 *Нелинеарне магнетостатичке симулације*

Магнетостатичке методе у нелинеарним срединама се разликују од претходно приказаних због променљивости магнетне пермеабилности, што доводи до компликације приликом решавања система једначина, будући да у том случају пермеабилности у њих не улазе као константан параметар, већ су и саме зависне од величина у чијем израчунавању учествују. Оно што се мора познавати пре него што се приступи решавању, овог сада нелинеарног система једначина, је карактеристика свих нелинеарних материјала који се користе за израду машине, што је, ако се симулације ограниче само на домен унутар пакета лимова карактеристика феромагнетског лима који се користи за израду статорског и роторског језгра.

Раније је већ дискутовано да постоје разне карактеристике којима се описују нелинеарна својства феромагнетских материјала. У потреби су најчешће крива првобитног магнетисања материјала, нормална крива магнетисања (која се добија спајањем врхова хистерезисних петљи које се формирају цикличном магнетизацијом са променљивом јачином магнетног поља), а када се жели истражити феномен дисипације енергије у материјалима и вишезначна хистерезисна петља. Ако примарни циљ изучавања нису механизми стварања губитака у феромагнетској средини, описивање материјала нелинеарном и вишезначном хистерезисном петљом често није од примарног интереса, зато што се у ротационим машинама са сложеном геометријом и изузетно нехомогеним пољем радије користи појам специфичних губитака по јединици масе и одређеном интензитету вектора магнетске индукције и фреквенције, па се за процену губитака користе неке од емпиријских формула. У прилог овом опредељењу иде и чињеница да су хистерезисне петље феромагнетских лимова изузетно уске, због потребне магнетне

мекоће материјала којом се гарантује лако премагнетисавање, што је од суштинског значаја у машинама наизменичних струја. Примена хистерезисне петље за моделовање губитака је много чешћа у уређајима који не врше електромеханичку конверзију и/или у којима се поље у већем делу домена може сматрати хомогеним, као што је то случај са трансформаторима. За потребе овог истраживања је довољно користити нормалну криву магнетисања материјала, која је лако доступна од произвођача феромагнетских лимова.

Нормална крива магнетисања се може представити низом парова тачака (јачина магнетског поља – вектор магнетске индукције), а међувредности се из овог низа могу добити линеарном интерполацијом. Често се користи и фитовање ове нелинеарне зависности полиномом, најчешће је довољна апроксимација до полинома трећег степена. Обично се не врши фитовање целе криве одједном, зато што би то захтевало формирање полинома великог степена, већ се радије прибегава фитовању сваког њеног сегмента појединачно. У софтверима који имплементирају методу коначних елемената је дозвољено на произвољан начин дефинисати нормалну криву магнетисања, тако да ју је могуће представити и идеализовану тако да када наступи засићење не долази до пораста магнетске индукције без обзира на пораст јачине магнетног поља, што може бити од користи када се жели у што песимистичнијем сценарију истражити ефекат засићења на вредности струја машине у режиму празног хода.

Када је систем једначина који се треба решавати нелинеаран, један од најпопуларнијих поступака за његово решавање је итеративни поступак, уз претходну линеаризацију релација. Линеаризација се по правилу врши развојем у Тејлоров ред у околини претпостављених решења (када се улази у прву итерацију прорачуна) или у околини решења добијених у текућој итерацији, уз занемарење извода вишег реда.

Поступак формирања мреже коначних елемената и дефиниције вектора густине струја кроз елементе који припадају фазним проводницима, те дефиниција граничних услова је идентична као у случају решавања линеарних магнетостатичких проблема, па се о томе не треба нешто посебно додатно дискутовати. Такође се и сама матрична једначина система непознатих потенцијала чворова мреже формира на већ описани начин. Стога ће се одмах приступити објашњавању феномена линеаризације постављеног система једначина.

Нека се посматра једна од једначина у суми приказаној релацијом (2.56):

$$\frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{ik} \\ S_{ij} & S_{jj} & S_{jk} \\ S_{ik} & S_{jk} & S_{kk} \end{bmatrix}^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l - \frac{J_{0izv}^l \partial\Omega^l}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.60)$$

Ова матрична једначина се састоји од три скаларне једначине, које ће се редом приказати следећим релацијама:

$$F = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} [S_{ii} \quad S_{ij} \quad S_{ik}]^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix} - \frac{J_{0izv}^l \partial\Omega^l}{3} \quad (2.61)$$

$$G = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} [S_{ji} \quad S_{jj} \quad S_{jk}]^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix} - \frac{J_{0izv}^l \partial\Omega^l}{3} \quad (2.62)$$

$$H = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} [S_{ik} \quad S_{jk} \quad S_{kk}]^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix} - \frac{J_{0izv}^l \partial\Omega^l}{3} \quad (2.63)$$

Свака од ових релација се линеаризује диференцирањем по магнетском вектор потенцијалу у чворовима мреже.

Парцијални изводи функције F по магнетским вектор потенцијалима чворова текућег коначног елемента су приказани релацијама (2.64-2.66).

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{A}_{zi}} = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} S_{ii} + \frac{1}{4\partial\Omega^l} (S_{ii}\hat{A}_{zi} + S_{ij}\hat{A}_{zj} + S_{ik}\hat{A}_{zk})^l \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{A}_{zj}} = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} S_{ij} + \frac{1}{4\partial\Omega^l} (S_{ii}\hat{A}_{zi} + S_{ij}\hat{A}_{zj} + S_{ik}\hat{A}_{zk})^l \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{A}_{zk}} = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} S_{ik} + \frac{1}{4\partial\Omega^l} (S_{ii}\hat{A}_{zi} + S_{ij}\hat{A}_{zj} + S_{ik}\hat{A}_{zk})^l \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \quad (2.66)$$

Сличним поступком се формирају парцијални изводи функције G , што је приказано релацијама (2.67-2.69)

$$\frac{\partial G}{\partial \hat{A}_{zi}} = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} S_{ij} + \frac{1}{4\partial\Omega^l} (S_{ij}\hat{A}_{zi} + S_{jj}\hat{A}_{zj} + S_{jk}\hat{A}_{zk})^l \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \hat{A}_{zj}} = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} S_{jj} + \frac{1}{4\partial\Omega^l} (S_{ij}\hat{A}_{zi} + S_{jj}\hat{A}_{zj} + S_{jk}\hat{A}_{zk})^l \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \hat{A}_{zk}} = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} S_{jk} + \frac{1}{4\partial\Omega^l} (S_{ij}\hat{A}_{zi} + S_{jj}\hat{A}_{zj} + S_{jk}\hat{A}_{zk})^l \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \quad (2.69)$$

Аналогно следе изрази парцијалних извода функције H (2.70-2.72).

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{A}_{zi}} = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} s_{ik} + \frac{1}{4\partial\Omega^l} (s_{ik}\hat{A}_{zi} + s_{jk}\hat{A}_{zj} + s_{kk}\hat{A}_{zk})^l \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{A}_{zj}} = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} s_{jk} + \frac{1}{4\partial\Omega^l} (s_{ik}\hat{A}_{zi} + s_{jk}\hat{A}_{zj} + s_{kk}\hat{A}_{zk})^l \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{A}_{zk}} = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} s_{kk} + \frac{1}{4\partial\Omega^l} (s_{ik}\hat{A}_{zi} + s_{jk}\hat{A}_{zj} + s_{kk}\hat{A}_{zk})^l \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \quad (2.72)$$

Важно је напоменути да је диференцирање нелинеарне реципрочне вредности пермеабилности по магнетском вектор потенцијалу чвора текућег елемента замењено, применом сложеног извода, диференцирањем по квадрату интензитета вектора магнетске индукције (2.73). Ово је сасвим природно, зато што је много лакше доћи до извода по вектору магнетске индукције, будући да се он лако може добити из саме нормалне криве магнетисања.

$$\frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial \hat{A}_{zk}} = \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \quad (2.73)$$

Након дефинисања потребних парцијалних извода се може приступити формирању једначина по Њутн-Рапсоновом итеративном поступку, за све три скаларне једначине добијене из почетне матричне релације.

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{A}_{zi}} \Delta \hat{A}_{zi} + \frac{\partial F}{\partial \hat{A}_{zj}} \Delta \hat{A}_{zj} + \frac{\partial F}{\partial \hat{A}_{zk}} \Delta \hat{A}_{zk} = -F(\hat{A}_{zi}, \hat{A}_{zj}, \hat{A}_{zk})^l \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \hat{A}_{zi}} \Delta \hat{A}_{zi} + \frac{\partial G}{\partial \hat{A}_{zj}} \Delta \hat{A}_{zj} + \frac{\partial G}{\partial \hat{A}_{zk}} \Delta \hat{A}_{zk} = -G(\hat{A}_{zi}, \hat{A}_{zj}, \hat{A}_{zk})^l \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{A}_{zi}} \Delta \hat{A}_{zi} + \frac{\partial H}{\partial \hat{A}_{zj}} \Delta \hat{A}_{zj} + \frac{\partial H}{\partial \hat{A}_{zk}} \Delta \hat{A}_{zk} = -H(\hat{A}_{zi}, \hat{A}_{zj}, \hat{A}_{zk})^l \quad (2.76)$$

Заменом дефиниционих израза за парцијалне изводе датих релацијама (2.64-2.72), добија се развијени облик претходних релација.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} (s_{ii}\Delta\hat{A}_{zi} + s_{ij}\Delta\hat{A}_{zj} + s_{ik}\Delta\hat{A}_{zk})^l + \\ & \frac{1}{4\partial\Omega^l} (s_{ii}\hat{A}_{zi} \quad s_{ij}\hat{A}_{zj} \quad s_{ik}\hat{A}_{zk})^l \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \left(\frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \Delta\hat{A}_{zi} + \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \Delta\hat{A}_{zj} + \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \Delta\hat{A}_{zk} \right)^l = \quad (2.77) \\ & - \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} (s_{ii}\hat{A}_{zi} + s_{ij}\hat{A}_{zj} + s_{ik}\hat{A}_{zk})^l + \frac{J_{oizv}^l \partial\Omega^l}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} (s_{ij}\Delta\hat{A}_{zi} + s_{jj}\Delta\hat{A}_{zj} + s_{jk}\Delta\hat{A}_{zk})^l + \\ & \frac{1}{4\partial\Omega^l} (s_{ij}\hat{A}_{zi} \quad s_{jj}\hat{A}_{zj} \quad s_{jk}\hat{A}_{zk})^l \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \left(\frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \Delta\hat{A}_{zi} + \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \Delta\hat{A}_{zj} + \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \Delta\hat{A}_{zk} \right)^l = \quad (2.78) \\ & - \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} (s_{ij}\hat{A}_{zi} + s_{jj}\hat{A}_{zj} + s_{jk}\hat{A}_{zk})^l + \frac{J_{oizv}^l \partial\Omega^l}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} (s_{ik}\hat{A}_{zi} + s_{jk}\hat{A}_{zj} + s_{kk}\hat{A}_{zk})^l + \\ & \frac{1}{4\partial\Omega^l} (s_{ik}\hat{A}_{zi} \quad s_{jk}\hat{A}_{zj} \quad s_{kk}\hat{A}_{zk})^l \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \left(\frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \Delta\hat{A}_{zi} + \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \Delta\hat{A}_{zj} + \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \Delta\hat{A}_{zk} \right)^l = \quad (2.79) \\ & - \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} (s_{ik}\hat{A}_{zi} + s_{jk}\hat{A}_{zj} + s_{kk}\hat{A}_{zk})^l + \frac{J_{oizv}^l \partial\Omega^l}{3} \end{aligned}$$

Подесније је, зарад лакше нумеричке имплементације, представити релације (2.77-2.79) у матричној форми, која ће затим омогућити компактније обједињавање релација у једну велику матрицу. Простим груписањем се добијају следећи матрични облици, приказани релацијама (2.80-2.82). Коначно, обједињавањем ове три релације у јединствену матричну форму, добија се линеаризована једначина која се након тога може решавати применом Њутн-Рапсоновог итеративног поступка (2.83). Јасно је да се оваква матрична релација мора формирати за сваки коначни елемент у домену, па постаје очито већ на први поглед колико усложњавање проблема уноси нелинеарност феромагнетских материјала.

Помињано је раније да се нелинеарност задата нормалном кривом магнетисања може задати на више различитих начина, али након потребе за увођењем диференцирања реципрочне вредности пермеабилности по квадрату интензитета вектора магнетске индукције, постаје јасно да је најприроднији начин њеног задавања помоћу неког полинома, јер се на тај начин диференцирање своди на прилично једноставну форму. Мада на први поглед звучи атрактивно да се крива магнетисања зада из делова линеарних апроксимација, то би овде било непрактично решење.

Познато је да брзина и уопште могућност конвергирања итеративног поступка у многеме зависи од претпостављања добрих почетних вредности. Понекад је тешко са поузданошћу тврдити која почетна апроксимација даје најбољи резултат, али је вероватно најповољнији сценарио да се за почетне вредности пермеабилности претпоставе оне које се имају на линеарном делу карактеристике магнетисања. Ако

за то постоје могућности, још повољнији сценарио би био да се прво спроведе простији нумерички прорачун уз претпоставку линеарности средине, па да се решења магнетских вектор потенцијала у чворовима мреже такође усвоје као почетне вредности нелинеарног проблема.

Због распореда линија магнетног поља у ротационима машинама постоје јако добре шансе да за приличан део домена коначна решења итеративног поступка уопште не одступају много од оних добијених решавањем линеарног проблема, што свакако доприноси стабилности процеса конвергенције.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} [S_{ii} \quad S_{ij} \quad S_{ik}]^l \begin{bmatrix} \Delta\hat{A}_{zi} \\ \Delta\hat{A}_{zj} \\ \Delta\hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \\ & \frac{1}{4\partial\Omega^l} \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \left[\left(\sum_{n=i}^k S_{in}\hat{A}_{zn} \right) \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \quad \left(\sum_{n=i}^k S_{in}\hat{A}_{zn} \right) \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \quad \left(\sum_{n=i}^k S_{in}\hat{A}_{zn} \right) \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \right]^l \begin{bmatrix} \Delta\hat{A}_{zi} \\ \Delta\hat{A}_{zj} \\ \Delta\hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} & = -\frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} [S_{ii} \quad S_{ij} \quad S_{ik}]^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \frac{J_{0izv}^l \partial\Omega^l}{3} \\ & \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} [S_{ij} \quad S_{jj} \quad S_{jk}]^l \begin{bmatrix} \Delta\hat{A}_{zi} \\ \Delta\hat{A}_{zj} \\ \Delta\hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \\ & \frac{1}{4\partial\Omega^l} \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \left[\left(\sum_{n=i}^k S_{jn}\hat{A}_{zn} \right) \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \quad \left(\sum_{n=i}^k S_{jn}\hat{A}_{zn} \right) \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \quad \left(\sum_{n=i}^k S_{jn}\hat{A}_{zn} \right) \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \right]^l \begin{bmatrix} \Delta\hat{A}_{zi} \\ \Delta\hat{A}_{zj} \\ \Delta\hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} & = -\frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} [S_{ij} \quad S_{jj} \quad S_{jk}]^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \frac{J_{0izv}^l \partial\Omega^l}{3} \\ & \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} [S_{ik} \quad S_{jk} \quad S_{kk}]^l \begin{bmatrix} \Delta\hat{A}_{zi} \\ \Delta\hat{A}_{zj} \\ \Delta\hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \\ & \frac{1}{4\partial\Omega^l} \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \left[\left(\sum_{n=i}^k S_{kn}\hat{A}_{zn} \right) \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \quad \left(\sum_{n=i}^k S_{kn}\hat{A}_{zn} \right) \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \quad \left(\sum_{n=i}^k S_{kn}\hat{A}_{zn} \right) \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \right]^l \begin{bmatrix} \Delta\hat{A}_{zi} \\ \Delta\hat{A}_{zj} \\ \Delta\hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$= -\frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} [S_{ik} \quad S_{jk} \quad S_{kk}]^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \frac{J_{0izv}^l \partial\Omega^l}{3}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{ik} \\ S_{ij} & S_{jj} & S_{jk} \\ S_{ik} & S_{jk} & S_{kk} \end{bmatrix}^l \begin{bmatrix} \Delta\hat{A}_{zi} \\ \Delta\hat{A}_{zj} \\ \Delta\hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \\
 & \frac{1}{4\partial\Omega^l} \frac{\partial^1}{\partial B^2} \begin{bmatrix} (\sum_{n=i}^k S_{in}\hat{A}_{zn}) & (\sum_{n=i}^k S_{in}\hat{A}_{zn}) & (\sum_{n=i}^k S_{in}\hat{A}_{zn}) \\ (\sum_{n=i}^k S_{jn}\hat{A}_{zn}) & (\sum_{n=i}^k S_{jn}\hat{A}_{zn}) & (\sum_{n=i}^k S_{jn}\hat{A}_{zn}) \\ (\sum_{n=i}^k S_{kn}\hat{A}_{zn}) & (\sum_{n=i}^k S_{kn}\hat{A}_{zn}) & (\sum_{n=i}^k S_{kn}\hat{A}_{zn}) \end{bmatrix}^l \begin{bmatrix} \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \\ \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \\ \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \end{bmatrix}^l \begin{bmatrix} \Delta\hat{A}_{zi} \\ \Delta\hat{A}_{zj} \\ \Delta\hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l \quad (2.83) \\
 & = -\frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{ik} \\ S_{ij} & S_{jj} & S_{jk} \\ S_{ik} & S_{jk} & S_{kk} \end{bmatrix}^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \frac{J_{0izv}^l \partial\Omega^l}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Матрична релација (2.83) је сада у потпуности спремна за нумеричку имплементацију. Након претпостављања почетних вредности магнетског вектор потенцијала у свим чворовима мреже, те усвојеним почетним вредностима магнетске пермеабилности, уз уважавање постављених граничних услова се у првој итерацији прорачуна добијају прираштаји магнетског вектор потенцијала у свим чворовима, који служе за формирање нових претпостављених вредности за следећу итерацију прорачуна. Уједно се, након израчунатих вредности магнетског вектор потенцијала у текућој итерацији израчунава и вредност вектора магнетске индукције у свим чворовима мреже, са циљем да се коригује претпостављена вредност магнетске пермеабилности, наравно у оним деловима домена који имају нелинеарна магнетска својства. Поступак којим се од добијених вредности магнетског вектор потенцијала у чворовима добија вредност вектора магнетске индукције је приказан следећим релацијама.

Најпре се, уважавајући дефиницију вектора магнетске индукције применом ротора магнетског вектор потенцијала (2.21), изводи вредност за квадрат интензитета вектора магнетске индукције, потребан у горе наведеним релацијама диференцирања.

$$B(x, y)^{l2} = \left(\frac{\partial \hat{A}_z(x, y)^l}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{A}_z(x, y)^l}{\partial y} \right)^2 \quad (2.84)$$

Ако се усвоји да су тежинске функције проста линеарна комбинација вредности потенцијала у теменима коначног елемента, вредност магнетског вектор потенцијала у унутрашњости елемента се описује развијеним обликом релације (2.37).

$$\hat{A}_z(x, y)^l = \frac{(a_i + b_i x + c_i y)^l}{2\partial\Omega^l} \hat{A}_{zi}^l + \frac{(a_j + b_j x + c_j y)^l}{2\partial\Omega^l} \hat{A}_{zj}^l + \frac{(a_k + b_k x + c_k y)^l}{2\partial\Omega^l} \hat{A}_{zk}^l \quad (2.85)$$

Након примене парцијалног диференцирања по просторним координатама израза (2.84), добијају се изрази потребни за израчунавање квадрата вектора магнетске индукције.

$$\frac{\partial \hat{A}_z(x,y)^l}{\partial x} = \frac{(\hat{A}_{zi}^l b_i + \hat{A}_{zj}^l b_j + \hat{A}_{zk}^l b_k)^l}{2\partial\Omega^l} \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial \hat{A}_z(x,y)^l}{\partial y} = \frac{(\hat{A}_{zi}^l c_i + \hat{A}_{zj}^l c_j + \hat{A}_{zk}^l c_k)^l}{2\partial\Omega^l} \quad (2.87)$$

Коначно, уврштавањем израза (2.86-2.87) у релацију (2.84), добија се вредност квадрата интензитета вектора магнетске индукције, који служи за формирање матрица за следећу итерацију прорачуна, али уједно служи и за кориговање вредности магнетне пермеабилности, тако да јој се вредност усклади са тренутно прорачунатим нивоом засићења у домену.

$$B(x,y)^{l^2} = \frac{\left((\hat{A}_{zi}^l b_i + \hat{A}_{zj}^l b_j + \hat{A}_{zk}^l b_k)^l\right)^2 + \left((\hat{A}_{zi}^l c_i + \hat{A}_{zj}^l c_j + \hat{A}_{zk}^l c_k)^l\right)^2}{4\partial\Omega^{l^2}} \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial B(x,y)^{l^2}}{\partial \hat{A}_{zi}^l} = \frac{2b_i(\hat{A}_{zi}^l b_i + \hat{A}_{zj}^l b_j + \hat{A}_{zk}^l b_k)^l + 2c_i(\hat{A}_{zi}^l c_i + \hat{A}_{zj}^l c_j + \hat{A}_{zk}^l c_k)^l}{4\partial\Omega^{l^2}} \quad (2.89)$$

$$\frac{\partial B(x,y)^{l^2}}{\partial \hat{A}_{zj}^l} = \frac{2b_j(\hat{A}_{zi}^l b_i + \hat{A}_{zj}^l b_j + \hat{A}_{zk}^l b_k)^l + 2c_j(\hat{A}_{zi}^l c_i + \hat{A}_{zj}^l c_j + \hat{A}_{zk}^l c_k)^l}{4\partial\Omega^{l^2}} \quad (2.90)$$

$$\frac{\partial B(x,y)^{l^2}}{\partial \hat{A}_{zk}^l} = \frac{2b_k(\hat{A}_{zi}^l b_i + \hat{A}_{zj}^l b_j + \hat{A}_{zk}^l b_k)^l + 2c_k(\hat{A}_{zi}^l c_i + \hat{A}_{zj}^l c_j + \hat{A}_{zk}^l c_k)^l}{4\partial\Omega^{l^2}} \quad (2.91)$$

Критеријум конвергенције итеративног процеса се може по жељи задати, тако да се тиме може утицати на трајање симулација, али не без губитка прецизности исте. Будући да није цео домен од интереса сачињен од материјала са нелинеарним својствима, овај сложенији, итеративни приступ се не примењује у целокупном израчунавању. Делови домена као што су ваздушни зазор и жљебови испуњени проводницима од неферомагнетских материјала могу бити решени применом простих система линеарних једначина.

Пре него што се закључи ово поглавље о решавању магнетостатичких проблема у ротационим електричним машинама, згодно би било напоменути да је могуће, мада то на први поглед звучи неизводљиво, помоћу серије магнетостатичких симулација у нелинеарним срединама прилично веродостојно описати ситуацију

идеалног празног хода асинхроног мотора напајаног из наизменичног извора. Наиме, ако се претпостави да је у режиму празног хода брзина обртања практично једнака синхроној брзини, може се доћи до простог закључка да у том режиму практично не долази ни до каквог стварања момента конверзије, нити индуковања струја у роторским проводницима, пошто они у том случају немају релативну брзину у односу на синхроноротирајуће обртно поље статора (ово није у потпуности тачно, из разлога што приликом магнетног спрезања статорских и роторских намотаја постоје виши хармонични чланови који не ишчежавају попут основне компоненте спреге која се мења по простопериодичном закону исте учестаности као што је и учестаност обртног поља, али су амплитуде на тај начин индукованих струја толико мале у поређењу са номиналним струјама у роторским проводницима, да се њихов утицај може готово у потпуности занемарити).

Уз та мала занемарења, линије магнетног поља се у машини, а нарочито кроз ротор, успостављају на готово истоветан начин као у празном ходу, из чега се може закључити да се слика засићења у празном ходу може практично у потпуности реконструисати са одређеним бројем сукцесивних магнетостатичких симулација у којима се побуђивање статорских намотаја константним струјама врши тако да се њима описује један замрзнути тренутак у времену. У једном од наредних поглавља ће се разрадити ова идеја, са циљем њеног уважавања у развоју динамичког модела асинхроне машине.

2.5 Решавање дводимензионалних статичких проблема побуђених наизменичним струјама методом коначних елемената

Након описа имплементације методе коначних елемената у магнетостатичким проблемима, следећи проблеми електромагнетских поља који могу бити од користи у анализи рада електричних машина јесу статички домени побуђени временски променљивим струјама, у првом реду простопериодичним. У страниој литератури која се бави проучавањем метода коначних елемената се овакви прорачуни називају *time-harmonic* прорачуни, зато што је њихова најмасовнија примена проучавање утицаја временски променљивог магнетног поља на индуковање струја у проводним срединама, са значајним акцентом на ефекте потискивања струја и површински ефекат, те прорачун губитака у феромагнетним лимовима. Наравно, помоћу ових метода се изузетно детаљно могу анализирати статички уређаји који раде на принципу електромагнетног поља, као што су разне врсте трансформатора, сензора, статичких мерних уређаја и слично. Њихова примена у ротационим машинама се мора пажљиво размотрити јер може бити скопчана са одређеним потешкоћама и погрешним тумачењима, о којима ће бити нешто више речи у овом поглављу.

Феномен индукованих вртложних струја је од изузетног значаја за анализу рада кавезних асинхроних машина, зато што се њихов рад управо заснива на индуковању струја у роторским проводницима, а обликом жљебова ротора се уједно коришћењем ефекта потискивања струја директно утиче на промену отпорности роторског намотаја, што се одражава на вредности полазних струја и момената, а такође и моментних карактеристика.

Још једна важна примена овог приступа јесу прорачуни губитака у феромагнетским лимовима, изазвани индуковањем вртложних струја у њима, уз уважавање феномена хистерезисних губитака. За потребе овог истраживања су модели губитака у феромагнетним лимовима од секундарног значаја, те им се стога неће поклањати значајнија пажња. Оправдање за њихово занемаривање је да због коришћења танких, међусобно изолованих лимова, повратни утицај поља изазваног индукованим вртложним струјама на њихов извор у смислу изобличавања и слабљења поља може да се занемари. Фокус истраживања у овом раду је развој динамичког модела који је оријентисан на веродостојно приказивање процеса електромеханичке конверзије и успостављања струја у намотајима статора, те хармонијска анализа истих, како у нормалним погонским стањима, тако и у режимима са кваром, па је механизам креирања губитака у феромагнетском материјалу, уз тврдњу о њиховом занемарљивом утицају на облик магнетног поља са правом изостављен.

У претходном одељку о магнетостатичким симулацијама је врло детаљно изложен поступак формирања система једначина потребних за решавање проблема, како у линеарним, тако и у нелинеарним доменима, те ће се стога све оно што статички прорачуни са простопериодичним струјама имају заједничко са магнетостатичким прорачунима бити коришћено, без детаљнијих појашњења. Такође, исте препоруке и смернице по питању формирања мреже коначних елемената и употребе одговарајућих граничних услова и овде остају на снази. Пошто је у овом поглављу главни акценат на примену методе у изучавању ефекта засићења и површинског ефекта на расподелу струја по дубини роторског жљеба, важно је напоменути да се тај домен мора прекрити довољно густом мрежом елемената (нарочито се домен жљебова који је најближи ваздушном зазору мора густо прекрити), да би се што прецизније нумерички истражио у смислу засићења и промене отпорности роторских проводника успостављању наизменичне струје у функцији учестаности тих струја. Та учестаност, као што је познато, директно зависи од тога колика је релативна брзина кретања обртног поља у односу на роторске проводнике, која се у случају напајања из стандардне електричне мреже креће у распону од 0 Hz (у случају празног хода) до 50 Hz (у случају кратког споја, односно поласка машине из стања мировања).

Током свих досадашњих излагања се у први план истицало истраживање могућности примене методе коначних елемената на такав начин да она представља само помоћно средство у развоју динамичког модела електричне машине, који би онда био у могућности да на значајно економичнији начин (у смислу временских ресурса) описује сложене феномене индуковања струја и напона, те електромеханичку конверзију. Имајући ово у виду, поставља се питање како је могуће спровести нумеричку анализу рада електричне машине са циљем истраживања утицаја променљиве учестаности на ниво засићења и вредности отпорности роторских проводника, а да се притом не мора посегнути за најкомплекснијом имплементацијом методе, то јест без коришћења транзијентне анализе која дозвољава инкорпорацију кретања домена који представља ротор машине?

Одговор на ово питање постоји, а такво решење се користи већ дужи низ година приликом реконструисања параметара роторског кола заменске

еквивалентне шеме мотора. Наиме, ако се не жели користити транзијентна анализа не би ли се при стандардном напајању статорских намотаја и одређеној механичкој брзини ротора изазвала жељена релативна брзина роторских проводника, односно жељена фреквенција индукованих струја у њима, може се применити статична симулација у којој нема никакве релативне брзине изазване механичким кретањем ротора, већ се она посредно постиже на тај начин што се статорским намотајима наметне побуда на оној учестаности која одговара учестаности клизања ротора. Тиме се у роторским проводницима изазива ефекат врло сличан ономе који би се имао у трнзијентној анализи, па је чак могуће израчунати и електромагнетни моменат који том приликом делује на ротор машине.

Највећи недостатак статичке анализе је немогућност анализирања ефеката променљиве геометрије на појаву виших хармоника у магнетном пољу, те самим тим и у струјама машине, па је погрешно доносити генерализоване закључке на основу тих симулација.

Очигледно је да овај приступ нуди много могућности за анализу електричних машина, али су његова ограничења та што се обично користи за реконструисање параметара заменских електричних шема или добијање статичких моментних карактеристика. Заменске еквивалентне шеме нису од интереса у овом истраживању, будући да се њиховом применом губи јако много информација на којима се темељи ова расправа, а то су првенствено хармонијске анализе статорских струја. Ако се машина представи заменском еквивалентном шемом, она служи да се са свега неколико отпорности и индуктивности што веродостојније опише процес електромеханичке конверзије са аспекта преноса снаге на основном хармонику напона и струја, без залажења у конструкцијске особености машине које доводе до варијација параметара који, чак и уз занемарење феномена засићења доводе до хармонијског изобличења напона и/или струја машине. Статичне анализе нису у могућности да тај феномен истраже, што значи да се мора користити транзијентна анализа, ако се то жели учинити применом методе коначних елемената.

2.5.1 *Линеарне time-harmonic симулације*

Као што је то био случај приликом разраде решавања магнетостатичких проблема, и овде ће се имплементација методе описати како за случај линеарних, тако и у случају нелинеарних домена. Која год да је имплементација у питању, полазна релација је (2.51), која је због прегледности поново наведена (2.92).

$$\sum_{l=1}^L \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{ik} \\ S_{ij} & S_{jj} & S_{jk} \\ S_{ik} & S_{jk} & S_{kk} \end{bmatrix}^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \\ \frac{\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l - \frac{J_{izv}^l\partial\Omega^l}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} = 0 \quad (2.92)$$

Пошто је циљ да се истражи утицај променљиве учестаности у роторском колу на феномен засићења и промену отпорности роторских проводника, а не сам механизам успостављања статорски струја као примарног извора променљивог поља, за шта је по правилу потребно имати напонски извор електричне енергије, довољно је претпоставити да се као извор електричног поља форсира простопериодична струја жељене учестаности, не улазећи у то како би се она физички могла остварити. Ако је то случај, онда је дозвољено увести комплексну нотацију, којом се диференцирање по времену замењује комплексним оператором $j\omega$, а саме величине у магнетном пољу постају фазори (2.93). Такође је потребно задати и побудну струју преко комплексних представника, нарочито ако се трофазни намотај статора истовремено жели напајати одговарајућом симетричном тројком фазора, што у себи подразумева одређени фазни померај. Очигледно је да матрица у којој фигурише комплексни оператор у релацији (2.92) описује повратни утицај променљивог магнетног поља на тај начин што се у срединама са ненултом проводношћу индукују додатне струје, које на тај начин, суперпонирајући се на наметнуте струје (ако их у том домену има), мењају њихову равномерну расподелу. У овој анализи то није случај, будући да се у доменима који припадају статорским намотајима успоставља струја из спољног извора, а повратни утицај магнетног поља се због димензија проводника може занемарити, док у доменима роторских проводника постоји јак утицај индукованих струја, али због тога не постоји компонента струја наметнутих из спољног извора, будући да роторски кавез нема електричних приступа. То, међутим не повлачи нужно потребу да се релација (2.92) напише у различитим облицима за сваки од типова домена који се у машини могу наћи, те ће се стога њеном решавању приступити са аспекта општости.

$$\sum_{l=1}^L \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{ik} \\ S_{ij} & S_{jj} & S_{jk} \\ S_{ik} & S_{jk} & S_{kk} \end{bmatrix}^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \\ \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l - \frac{J_{izv}^l\partial\Omega^l}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} = 0 \quad (2.93)$$

Да би се избегло увођење нових ознака за комплексне представнике величина, којима би се нагласио прелазак у комплексни домен, сматраће се да су све до сада коришћене величине (осим параметара средине) комплексне величине, уз непромењене ознаке. Треба напоменути да је, под одређеним условима, могуће увести и параметре средине као комплексне вредности (за све параметре изузев проводности, код којих је тај поступак непотребан и бесмислен), чиме би се могли посредно уважити губици који се јављају у срединама, али је већ раније речено да се утицај губитака у овом истраживању занемарује, а други недостатак тог поступка је

што би се том приликом, посредно увело линеаризовање материјала (хистерезисне петље би се трансформисале у елипсе одређеног, константног нагиба).

Ако се, као што је то и до сада био случај, наредни изрази ограниче на домен једног коначног елемента, у случају линеарне средине се решење за магнетске вектор потенцијале у чворовима може добити прилично брзо, прегруписавањем претходне релације, наравно без икакве потребе за увођењем итеративног поступка.

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l = \left(\frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{ik} \\ S_{ij} & S_{jj} & S_{jk} \\ S_{ik} & S_{jk} & S_{kk} \end{bmatrix} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \frac{J_{izv}^l\partial\Omega^l}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

Добијање решења за магнетске вектор потенцијале само по себи није од интереса, колико је важно на основу њих прорачунати друге величине, првенствено вектор густине струје у доменима у којима долази до њиховог индуковања, а затим и флуksне обухвате појединих намотаја. О том поступку ће више речи бити након разрађивања методе за случај нелинеарних средина.

2.5.2 *Нелинеарне time-harmonic симулације*

Поступак решавања у нелинеарним срединама се може урадити на два начина. Један начин је да се примени комплексна нотација као и у случају линеарне средине, а постоји и опција решавања у временском домену, када се поред линеаризације релација мора увести и дискретизација по времену. Поступак решавања у временском домену ће бити у нешто краћим цртама изложен у поглављу о транзијентној анализи, док ће се овде применити линеаризација у комплексном домену.

Оно што се често занемарује применом оваквог поступка је да се уз форсирану простопериодичну побуду добијају сложенопериодични одзиви у магнетном пољу, а као последица нелинеарности феромагнетских материјала. Стога резултате прорачуна треба условно схватити, јер се увођењем фазора занемарује чињеница да се променом тренутне вредности простопериодичне величине у временском домену мења и ниво засићења, па стога неки аутори предлажу другачије третирање резултата увођењем појма ефективне пермеабилности, која еквивалентира проблем са аспекта средње вредности снаге у магнетном пољу (попут појма ефективне вредности напона и струја), али се то ради првенствено у анализама које имају за циљ утврђивање губитака у феромагнетским лимовима.

Мотивација примене комплексне нотације у нелинеарним срединама, зарад лакше имплементације методе (применом комплексне нотације ишчежава потреба за извођењем низа сукцесивних симулација у временском домену) у овом истраживању је другачије природе. Наиме, није од примарног интереса да се установи стваран таласни облик струја у ротору, већ да се помоћу једног замрзнутог тренутка у времену, а посматрањем свих роторских проводника (код којих ће тренутна вредност индукованих струја зависити од њиховог положаја у по ободу машине),

нађе усредњени ефекат промене њихове отпорности, тако што ће се тренутна вредност израчунате снаге Џулових губитака у сваком од њих поделити са квадратом укупне струје кроз њих и на тај начин добити тренутна вредност њихове отпорности наизменичној струји. Пошто ће сваки од роторских проводника на некин начин, спрам њиховог положаја по ободу ротора моделовати (у одређеном дискретном броју узорака, који је једнак броју жљебова, то јест проводника) ситуацију у којој се нађе један од њих током одређеног временског периода који одговара једној периоди индукованих струја, усредњавањем тако добијених вредности се може добити врло прецизна слика ефекта потискивања описана једним макроскопским параметром као што је то отпорност.

Уважавањем нелинеарности се уједно веродостојније приказује пут линија магнетног поља, које су директно одговорне за то како ће се вртложне струје индуковати, а јасно је да се то не може дешавати на потпуно идентичан начин као у случају анализе у линеарним срединама, јер сатурацијом феромагнетик губи примат апсолутно најповољнијег пута успостављања линија магнетног поља, па се ипак могу очекивати неке разлике у ова два сценарија. Исти је случај и када се желе истражити расипне индуктивности намотаја, што међутим у овом истраживању није од интереса, јер се развијени динамички модел заснива на правим сопственим и међусобним индуктивностима, а не сведеним и трансформисаним као што се то ради у класичној анализи трансформатора и електричних ротационих машина, увођењем појма заједничког и расутог флукса.

Ефекат потискивања струја проводника у неферомагнетској средини, односно проводника у такозваном слободном простору се драстично разликује од тог ефекта у присуству феромагнетске супстанце, нарочито када се проводници смештају у жљебове. Наиме, код проводника у слободном простору се може десити да у неком делу проводника индукована струја доминира у односу на наметнуту струју, па да чак струја протиче кроз тај домен у супротном смеру. Код проводника смештених у жљебове то није случај, односно код њих се само дешава потискивање струје ка површини жљеба, док у дубљим деловима проводника густина струје постепено пада.

Поступак линеаризације релације (2.93) је веома сличан оном који је спроведен за случај нелинеарних магнетостатичких проблема. Нека се посматра једна од једначина у суми приказаној релацијом (2.93):

$$\frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{ik} \\ S_{ij} & S_{jj} & S_{jk} \\ S_{ik} & S_{jk} & S_{kk} \end{bmatrix}^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix} - \frac{J_{oizv}^l\partial\Omega^l}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.95)$$

Ова матрична једначина се састоји од три скаларне једначине, које ће се редом приказати следећим релацијама:

$$F = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \left([S_{ii} \ S_{ij} \ S_{ik}]^l + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} [2 \ 1 \ 1] \right) \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l - \frac{J_{oizv}^l\partial\Omega^l}{3} \quad (2.96)$$

$$G = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \left([S_{ji} \ S_{jj} \ S_{jk}]^l + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} [1 \ 2 \ 1] \right) \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l - \frac{J_{oizv}^l\partial\Omega^l}{3} \quad (2.97)$$

$$H = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \left([S_{ik} \ S_{jk} \ S_{kk}]^l + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} [1 \ 1 \ 2] \right) \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l - \frac{J_{oizv}^l\partial\Omega^l}{3} \quad (2.98)$$

Сличним поступком као у поглављу о магнетостатичкој формулацији, свака од ових релација се линеаризује диференцирањем по магнетском вектор потенцијалу у чворовима мреже.

Парцијални изводи функције F по магнетским вектор потенцијалима чворова текућег коначног елемента су приказани релацијама (2.99-2.101).

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{A}_{zi}} = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \left(S_{ii} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{6} \right) + \frac{1}{4\partial\Omega^l} \left(\begin{matrix} \left(S_{ii} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{6} \right) \hat{A}_{zi} + \\ \left(S_{ij} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) \hat{A}_{zj} + \\ \left(S_{ik} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) \hat{A}_{zk} \end{matrix} \right)^l \frac{\partial \frac{1}{\mu^l} \frac{\partial B^2}{\partial B^2}}{\partial \hat{A}_{zi}} \quad (2.99)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{A}_{zj}} = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \left(S_{ij} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) + \frac{1}{4\partial\Omega^l} \left(\begin{matrix} \left(S_{ii} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{6} \right) \hat{A}_{zi} + \\ \left(S_{ij} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) \hat{A}_{zj} + \\ \left(S_{ik} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) \hat{A}_{zk} \end{matrix} \right)^l \frac{\partial \frac{1}{\mu^l} \frac{\partial B^2}{\partial B^2}}{\partial \hat{A}_{zj}} \quad (2.100)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{A}_{zk}} = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \left(S_{ik} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) + \frac{1}{4\partial\Omega^l} \left(\begin{matrix} \left(S_{ii} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{6} \right) \hat{A}_{zi} + \\ \left(S_{ij} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) \hat{A}_{zj} + \\ \left(S_{ik} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) \hat{A}_{zk} \end{matrix} \right)^l \frac{\partial \frac{1}{\mu^l} \frac{\partial B^2}{\partial B^2}}{\partial \hat{A}_{zk}} \quad (2.101)$$

Сличним поступком се формирају парцијални изводи гункције G , што је приказано релацијама (2.102-2.104)

$$\frac{\partial G}{\partial \hat{A}_{zi}} = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \left(s_{ij} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) + \frac{1}{4\partial\Omega^l} \left(\begin{array}{l} \left(s_{ij} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) \hat{A}_{zi} + \\ \left(s_{jj} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{6} \right) \hat{A}_{zj} + \\ \left(s_{jk} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) \hat{A}_{zk} \end{array} \right)^l \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \quad (2.102)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \hat{A}_{zj}} = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \left(s_{jj} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{6} \right) + \frac{1}{4\partial\Omega^l} \left(\begin{array}{l} \left(s_{ij} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) \hat{A}_{zi} + \\ \left(s_{jj} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{6} \right) \hat{A}_{zj} + \\ \left(s_{jk} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) \hat{A}_{zk} \end{array} \right)^l \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \hat{A}_{zk}} = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \left(s_{jk} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) + \frac{1}{4\partial\Omega^l} \left(\begin{array}{l} \left(s_{ij} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) \hat{A}_{zi} + \\ \left(s_{jj} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{6} \right) \hat{A}_{zj} + \\ \left(s_{jk} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) \hat{A}_{zk} \end{array} \right)^l \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \quad (2.104)$$

Аналогно следе изрази парцијалних извода функције H (2.105-2.107).

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{A}_{zi}} = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \left(s_{ik} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) + \frac{1}{4\partial\Omega^l} \left(\begin{array}{l} \left(s_{ik} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) \hat{A}_{zi} + \\ \left(s_{jk} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) \hat{A}_{zj} + \\ \left(s_{kk} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{6} \right) \hat{A}_{zk} \end{array} \right)^l \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \quad (2.105)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{A}_{zj}} = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \left(s_{jk} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) + \frac{1}{4\partial\Omega^l} \left(\begin{array}{l} \left(s_{ik} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) \hat{A}_{zi} + \\ \left(s_{jk} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) \hat{A}_{zj} + \\ \left(s_{kk} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{6} \right) \hat{A}_{zk} \end{array} \right)^l \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \quad (2.106)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{A}_{zk}} = \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \left(S_{kk} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{6} \right) + \frac{1}{4\partial\Omega^l} \left(\begin{array}{c} \left(S_{ik} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) \hat{A}_{zi} + \\ \left(S_{jk} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{12} \right) \hat{A}_{zj} + \\ \left(S_{kk} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l}{6} \right) \hat{A}_{zk} \end{array} \right)^l \frac{\partial \frac{1}{\mu^l}}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \quad (2.107)$$

Након дефинисања потребних парцијалних извода се може приступити формирању једначина по Њутн-Рапсоновом итеративном поступку, за све три скаларне једначине добијене из почетне матричне релације.

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{A}_{zi}} \Delta \hat{A}_{zi} + \frac{\partial F}{\partial \hat{A}_{zj}} \Delta \hat{A}_{zj} + \frac{\partial F}{\partial \hat{A}_{zk}} \Delta \hat{A}_{zk} = -F(\hat{A}_{zi}, \hat{A}_{zj}, \hat{A}_{zk})^l \quad (2.108)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \hat{A}_{zi}} \Delta \hat{A}_{zi} + \frac{\partial G}{\partial \hat{A}_{zj}} \Delta \hat{A}_{zj} + \frac{\partial G}{\partial \hat{A}_{zk}} \Delta \hat{A}_{zk} = -G(\hat{A}_{zi}, \hat{A}_{zj}, \hat{A}_{zk})^l \quad (2.109)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{A}_{zi}} \Delta \hat{A}_{zi} + \frac{\partial H}{\partial \hat{A}_{zj}} \Delta \hat{A}_{zj} + \frac{\partial H}{\partial \hat{A}_{zk}} \Delta \hat{A}_{zk} = -H(\hat{A}_{zi}, \hat{A}_{zj}, \hat{A}_{zk})^l \quad (2.110)$$

Заменом дефиниционих израза за парцијалне изводе датих релацијама (2.99-2.107), добија се развијени облик претходних релација.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \left(\frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+6s_{ii}}{6} \Delta \hat{A}_{zi} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{ij}}{12} \Delta \hat{A}_{zj} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{ik}}{12} \Delta \hat{A}_{zk} \right)^l + \\ & \frac{1}{4\partial\Omega^l} \frac{\partial \frac{1}{\mu^l}}{\partial B^2} \left(\left(\begin{array}{c} \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+6s_{ii}}{6} \hat{A}_{zi} + \\ \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{ij}}{12} \hat{A}_{zj} + \\ \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{ik}}{12} \hat{A}_{zk} \end{array} \right) \left(\frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \Delta \hat{A}_{zi} + \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \Delta \hat{A}_{zj} + \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \Delta \hat{A}_{zk} \right) \right)^l = \\ & - \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \left[\frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+6s_{ii}}{6} \quad \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{ij}}{12} \quad \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{ik}}{12} \right]^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix} + \frac{J_{0izv}^l\partial\Omega^l}{3} \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \left(\frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{ij}}{12} \Delta\hat{A}_{zi} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+6s_{jj}}{6} \Delta\hat{A}_{zj} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{jk}}{12} \Delta\hat{A}_{zk} \right)^l + \\ & \frac{1}{4\partial\Omega^l} \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \left(\left(\frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{ij}}{12} \hat{A}_{zi} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+6s_{jj}}{6} \hat{A}_{zj} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{jk}}{12} \hat{A}_{zk} \right) \left(\frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \Delta\hat{A}_{zi} + \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \Delta\hat{A}_{zj} + \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \Delta\hat{A}_{zk} \right) \right)^l = \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \left[\frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{ij}}{12} \quad \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+6s_{jj}}{6} \quad \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{jk}}{12} \right]^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \frac{J_{oizv}^l \partial\Omega^l}{3} \\ & \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \left(\frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{ik}}{12} \Delta\hat{A}_{zi} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{jk}}{12} \Delta\hat{A}_{zj} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+6s_{kk}}{6} \Delta\hat{A}_{zk} \right)^l + \\ & \frac{1}{4\partial\Omega^l} \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \left(\left(\frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{ik}}{12} \hat{A}_{zi} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{jk}}{12} \hat{A}_{zj} + \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+6s_{kk}}{6} \hat{A}_{zk} \right) \left(\frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \Delta\hat{A}_{zi} + \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \Delta\hat{A}_{zj} + \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \Delta\hat{A}_{zk} \right) \right)^l = \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$- \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \left[\frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+6s_{ik}}{12} \quad \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{jk}}{12} \quad \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{kk}}{6} \right]^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \frac{J_{oizv}^l \partial\Omega^l}{3}$$

Поново је zgodније, као што је то био случај и у приликом развијања методе у случају примене у магнетостатичким прорачунима, а зарад лакше нумеричке имплементације, представити релације (2.111-2.113) у матричној форми, која ће затим омогућити прикладно обједињавање релација у једну матричну релацију. Простим груписањем се добијају следећи матрични облици, приказани релацијама (2.114-2.116).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} [S_{ii} \quad S_{ij} \quad S_{ik}]^l \begin{bmatrix} \Delta\hat{A}_{zi} \\ \Delta\hat{A}_{zj} \\ \Delta\hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \\ & \frac{1}{4\partial\Omega^l} \frac{\partial^{\frac{1}{\mu^l}}}{\partial B^2} \left[\left(\sum_{n=i}^k S_{in} \hat{A}_{zn} \right) \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \quad \left(\sum_{n=i}^k S_{in} \hat{A}_{zn} \right) \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \quad \left(\sum_{n=i}^k S_{in} \hat{A}_{zn} \right) \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \right]^l \begin{bmatrix} \Delta\hat{A}_{zi} \\ \Delta\hat{A}_{zj} \\ \Delta\hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l \quad (2.114) \\ & = - \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} [S_{ii} \quad S_{ij} \quad S_{ik}]^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \frac{J_{oizv}^l \partial\Omega^l}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} [S_{ij} \quad S_{jj} \quad S_{jk}]^l \begin{bmatrix} \Delta\hat{A}_{zi} \\ \Delta\hat{A}_{zj} \\ \Delta\hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \frac{1}{4\partial\Omega^l} \frac{\partial^{\frac{1}{l}}}{\partial B^2} \left[\left(\sum_{n=i}^k S_{jn}\hat{A}_{zn} \right) \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \quad \left(\sum_{n=i}^k S_{jn}\hat{A}_{zn} \right) \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \quad \left(\sum_{n=i}^k S_{jn}\hat{A}_{zn} \right) \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \right]^l \begin{bmatrix} \Delta\hat{A}_{zi} \\ \Delta\hat{A}_{zj} \\ \Delta\hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l \quad (2.115)$$

$$= -\frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} [S_{ij} \quad S_{jj} \quad S_{jk}]^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \frac{J_{oizv}^l \partial\Omega^l}{3} \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} [S_{ik} \quad S_{jk} \quad S_{kk}]^l \begin{bmatrix} \Delta\hat{A}_{zi} \\ \Delta\hat{A}_{zj} \\ \Delta\hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \frac{1}{4\partial\Omega^l} \frac{\partial^{\frac{1}{l}}}{\partial B^2} \left[\left(\sum_{n=i}^k S_{kn}\hat{A}_{zn} \right) \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \quad \left(\sum_{n=i}^k S_{kn}\hat{A}_{zn} \right) \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \quad \left(\sum_{n=i}^k S_{kn}\hat{A}_{zn} \right) \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \right]^l \begin{bmatrix} \Delta\hat{A}_{zi} \\ \Delta\hat{A}_{zj} \\ \Delta\hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l \quad (2.116)$$

$$= -\frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} [S_{ik} \quad S_{jk} \quad S_{kk}]^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \frac{J_{oizv}^l \partial\Omega^l}{3}$$

У наведеним релацијама су, зарад што прегледнијег записа, уведене нове матрице-врсте у којима су обједињени поједини елементи и названи новим именима, са великим уместо малим латиничним словом „S“. Дефиниција новодобијене матрице која се добија интегрисањем три матрице-врсте у једну квадратну матрицу је дата релацијом (2.117).

$$\begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{ik} \\ S_{ij} & S_{jj} & S_{jk} \\ S_{ik} & S_{jk} & S_{kk} \end{bmatrix}^l = \begin{bmatrix} \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+6s_{ii}}{6} & \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{ij}}{12} & \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{ik}}{12} \\ \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{ij}}{12} & \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+6s_{jj}}{6} & \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{jk}}{12} \\ \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{ik}}{12} & \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+12s_{jk}}{12} & \frac{j\omega\sigma^l\partial\Omega^l+6s_{kk}}{6} \end{bmatrix}^l \quad (2.117)$$

Дата матрица се користи и за обједињавање матричних релација (2.114-2.116) у јединствену матричну релацију, која је коначно дата изразом (2.118), која је по форми врло слична оној добијеној за случај нелинеарних магнетостатичких прорачуна (2.83), са важном разликом да је овога пута реч о комплексној матричној релацији, што са собом повлачи практично двоструко више непознатих за решавање (за сваког комплексног представника је потребно пронаћи његов реални, односно имагинарни део). У овој чињеници се крије потврда претпоставке да су прорачуни са

просто периодичном побудом статичких домена комплексним рачуном нумерички захтевнији од класичних магнетостатичких проблема, наравно ако је реч о проблемима са истом геометријом и истом густином мреже коначних елемената. Штавише, испоставља се да је због свих побројаних проблема везаних за просторну расподелу вектора густине индукованих вртложних струја често потребно развити и нешто гушћу мрежу коначних елемената од аналогног магнетостатичког проблема, што додатно компликује нумерички поступак, доводећи до његовог још већег трајања. Ипак, трајање поступка је још увек драстично краће од транзијентне анализе, чак и када се пореди само један итеративни поступак у једном дискретизованом временском периоду са оваквом статичком анализом, јер је у транзијентној анализи потребно израчунати више величина потребних за следећи временски одбирак него што је то случај у статичкој анализи.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{ik} \\ S_{ij} & S_{jj} & S_{jk} \\ S_{ik} & S_{jk} & S_{kk} \end{bmatrix}^l \begin{bmatrix} \Delta\hat{A}_{zi} \\ \Delta\hat{A}_{zj} \\ \Delta\hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \\
 & \frac{1}{4\partial\Omega^l} \frac{\partial^1}{\partial B^2} \begin{bmatrix} (\sum_{n=i}^k S_{in}\hat{A}_{zn}) & (\sum_{n=i}^k S_{in}\hat{A}_{zn}) & (\sum_{n=i}^k S_{in}\hat{A}_{zn}) \\ (\sum_{n=i}^k S_{jn}\hat{A}_{zn}) & (\sum_{n=i}^k S_{jn}\hat{A}_{zn}) & (\sum_{n=i}^k S_{jn}\hat{A}_{zn}) \\ (\sum_{n=i}^k S_{kn}\hat{A}_{zn}) & (\sum_{n=i}^k S_{kn}\hat{A}_{zn}) & (\sum_{n=i}^k S_{kn}\hat{A}_{zn}) \end{bmatrix}^l \begin{bmatrix} \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zi}} \\ \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zj}} \\ \frac{\partial B^2}{\partial \hat{A}_{zk}} \end{bmatrix}^l \\
 & = -\frac{1}{4\partial\Omega^l\mu^l} \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{ik} \\ S_{ij} & S_{jj} & S_{jk} \\ S_{ik} & S_{jk} & S_{kk} \end{bmatrix}^l \begin{bmatrix} \hat{A}_{zi} \\ \hat{A}_{zj} \\ \hat{A}_{zk} \end{bmatrix}^l + \frac{J_{oizv}^l \partial\Omega^l}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.118}$$

Јасно је да се релација (2.118) без проблема може решавати итеративним поступком за сваки коначни елемент у домену, што уз уважавање граничних услова доводи до јединственог решења задатог статичког проблема. Поступак решавања је аналоган већ описаном поступку за случај магнетостатичких проблема. Поново је, као и у претходном поглављу, примарни интерес на основу израчунатих вредности магнетског вектор потенцијала у чворовима реконструисати остале величине од већег значаја, у првом реду степен засићења у домену попречног пресека машине, те вектор магнетске индукције, векторе густине индукованих струја у домену роторских проводника, а по потреби и флуксне обухвате одређених намотаја, индуктивности или реактансе итд.

Још један важан резултат на којем се темељи оправданост примене ове методе у развоју динамичког модела машине је могућност да се након завршеног итеративног поступка, који у себи укључује и кориговање вредности пермеабилности спрам интензитета вектора магнетске индукције, те вредности пермеабилности задрже за потребе израчунавања у квазилинеарним магнетостатичким прорачунима. Наиме, ако се за сваки коначни елемент унапред дефинише фиксна вредност

пермеабилности, каква год она била и одакле год њена вредност проистекла, такав проблем прераста у магнетостатички проблем у линеарној средини, па према томе не подлеже итеративном поступку и изузетно брзо доводи до жељених резултата. Такав поступак се зове метод „замрзнутих пермеабилности“ и у широкој је употреби приликом израчунавања индуктивности за потребе класичних динамичких модела који су из основног модела машине добијени применом трансформација свођења на двофазне системе, уз елиминацију утицаја променљивог положаја ротора на тренутне вредности индуктивности. Оно што је важно напоменути да је у том случају дакле реч о трансформисаним индуктивностима које нису функција положаја ротора, па је за њихово израчунавање довољно поставити фазоре статорских струја у одређени положај који гарантује постојање само једне од две компоненте трансформисаног флуksа, а самим тим добијање само једне од жељених индуктивности. Наравно, променом тројке фазора статорских струја се на сличан начин добија и друга жељена индуктивност. Сличан метод побуђивања машине изабраним фазором статорских струја се користи и приликом експерименталног поступка за утврђивање истих индуктивности.

Поменути метод се, до сада није користио у кориговању нетрансформисаних вредности индуктивности, које су практично све функција положаја ротора (због варијације магнетних својстава ваздушног зазора, као последица постојања жљебова, а такође и услед промене међусобног положаја оса намотаја услед кретања ротора), а што ће се у овом истраживању употребити за корекцију индуктивности добијених линеарним прорачунима.

2.5.3 *Коришћење резултата time-harmonic симулација*

На крају овог одељка ће се приказати како је на основу добијених вредности магнетског вектор потенцијала у чворовима мреже могуће израчунати векторе густине индукованих струја у роторским проводницима, а даље на основу тога и макроскопску вредност отпорности тог проводника.

Пошто роторски кавез не може да се прикључи на електрични извор, једина компонента вектора густине струје која се у његовим проводницима може појавити је вектор густине индукованих струја, чији се комплексни представник на нивоу једног коначног елемента који припада домену једног проводника може изразити на следећи начин:

$$J_z^l(x, y) = j\omega\sigma^l A_z^l(x, y) \quad (2.119)$$

Тренутна вредност Џулових губитака у текућем коначном елементу се може даље разрадити коришћењем познатих образаца:

$$p^l = \iint_{\partial\Omega^l} \frac{|J_z^l(x, y)|^2}{\sigma^l} dx dy \quad (2.120)$$

Ако се узме у обзир да је магнетски вектор потенцијал магнетна величина и да се, према томе, изражава преко максималних вредности, средња вредност Џулових губитака се може израчунати применом обрасца (2.121).

$$P^l = \Re \left\{ \frac{1}{2\sigma^l} \iint_{\partial\Omega^l} J_z^l(x, y) \cdot J_z^l(x, y)^* dx dy \right\} \quad (2.121)$$

Ако се подразумева да је за дефинисање магнетског вектор потенцијала унутар троугаоног сегмента усвојено представљање линеарном интерполацијом вредности потенцијала у теменима, иста зависност се односи и на вектор густине струје унутар истог троугаоног сегмента, што се може видети у развијеном облику у релацији (2.122).

$$J_z^l(x, y) = \frac{1}{2\partial\Omega^l} \sum_{n=i}^k \{ (a_n + b_n x + c_n y) J_{zn}^l \} = \frac{j\omega\sigma^l}{2\partial\Omega^l} \sum_{n=i}^k \{ (a_n + b_n x + c_n y) A_{zn}^l \} \quad (2.122)$$

Даљим развојем, односно уврштавањем релације (2.122) у (2.121), добија се релација (2.123), помоћу које се може добити облик средње снаге губитака који се затим може интеграцијом свести на значајно простији образац, зависан само од израчунатих вредности магнетског вектор потенцијала у теменима текућег троугаоног сегмента (2.123-2.124).

$$P^l = \Re \left\{ \frac{\omega^2 \sigma^l}{8\partial\Omega^{l^2}} \iint_{\partial\Omega^l} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ (a_i + b_i x + c_i y) A_{zi}^l + (a_j + b_j x + c_j y) A_{zj}^l \right\}^* \\ \quad + (a_k + b_k x + c_k y) A_{zk}^l \\ \left\{ (a_i + b_i x + c_i y) A_{zi}^l + (a_j + b_j x + c_j y) A_{zj}^l \right\} \\ \quad + (a_k + b_k x + c_k y) A_{zk}^l \end{array} \right\} dx dy \right\} \quad (2.123)$$

$$P^l = \frac{\omega^2 \sigma^l \partial\Omega^l}{12} \left(\begin{array}{l} |A_{zi}^l|^2 + |A_{zj}^l|^2 + |A_{zk}^l|^2 + \\ \Re \{ (A_{zi}^l A_{zj}^{l*} + A_{zi}^l A_{zk}^{l*} + A_{zk}^l A_{zj}^{l*}) \} \end{array} \right) \quad (2.124)$$

Сада је једноставно одредити укупну снагу Џулових губитака на нивоу једног роторског проводника, простим сумирањем појединачних снага свих коначних елемената који припадају домену посматраног проводника:

$$P = \sum_l \left\{ \frac{\omega^2 \sigma^l \partial\Omega^l}{12} \left(\begin{array}{l} |A_{zi}^l|^2 + |A_{zj}^l|^2 + |A_{zk}^l|^2 + \\ \Re \{ (A_{zi}^l A_{zj}^{l*} + A_{zi}^l A_{zk}^{l*} + A_{zk}^l A_{zj}^{l*}) \} \end{array} \right) \right\} \quad (2.125)$$

Укупна индукована струја која се успоставља кроз један роторски проводник, тачније њен комплексни представник, се може лако израчунати применом суме површинских интеграла вектора густине струје на нивоу једног коначног елемента:

$$I = \sum_l I^l = j\omega \sum_l \sigma^l \iint_{\partial\Omega^l} \left\{ \begin{array}{l} (a_i + b_i x + c_i y) A_{zi}^l + (a_j + b_j x + c_j y) A_{zj}^l \\ + (a_k + b_k x + c_k y) A_{zk}^l \end{array} \right\} dx dy \quad (2.126)$$

$$I = \frac{j\omega}{3} \sum_l \{ \sigma^l \partial\Omega^l \cdot (A_{zi}^l + A_{zj}^l + A_{zk}^l) \} \quad (2.127)$$

Коначно, отпорност роторског проводника у функцији учестаности индукованих вртложних струја се добија из релације (2.128).

$$R_{ac}(\omega) = \frac{2P}{|I|^2} \quad (2.128)$$

2.6 Решавање дводимензионалних транзијентних проблема методом коначних елемената

Након изложених статичких метода коначних елемената, које су прилично детаљно развијене, у овом поглављу ће у краћим цртама бити описана имплементација методе која допушта побуђивање домена произвољним изворима (било струјним, било напонским изворима, са било каквом променом у времену), уз дозвољено кретање одређеног дела домена. Значајне разлике у односу на статичке симулације чини потреба за сукцесивном применом итеративних поступака (уз претпоставку уважавања нелинеарности феромагнетика) које се извршавају у дискретизованим временским интервалима којима се континуална временска промена мења низом одбирака. Ако се под уважавањем кретања подразумева и механички транзијент, он се такође мора представити дискретизованим релацијама које су са анализом над доменом коначних елемената повезане израчунатим моментом конверзије (за случај простог ротационог кретања), што представља додатан нумерички захтеван поступак.

Због свега наведеног постаје очигледно зашто је транзијентна анализа драстично нумерички захтевнија од статичких анализа, нарочито ако се захтева проучавање феномена који траје дуго у реалном времену и/или захтева фину дискретизацију у времену и/или густу мрежу коначних елемената.

Пошто транзијентна анализа дозвољава побуђивање домена произвољним изворима, потребно је додатно описати начин на који се успоставља струја кроз описано електрично коло (исти проблем се може формулисати и у случају статичких анализа када је домен побуђен напонским изворима, уместо форсираних струјних извора помоћу којих су описане методе у претходном поглављу). Наиме, електрично

коло се састоји од извора и спољних елемената, као што су отпорности и реактансе које не могу бити обухваћене дводимензионалном представом машине (отпорности и реактансе расипања бочних веза статорских намотаја и роторских караткоспојних прстенова). Срећна околност је што се те вредности могу накнадно суперпонирати на оне које припадају домену покривеном мрежом коначних елемената, а због чињенице да се онај део расутог флукса који се на њима реализује доминантно затвара кроз ваздух је оправдано сматрати их константним и независним од промена унутар домена обухваћеног пакетом феромагнетских лимова. Ту се наравно не подразумева њихова независност у односу на промене температуре машине као последица променљивих услова амбијента или услед варијације оптерећења. Ако се термички ефекти ставе у други план (у најгорем случају, могуће је пораст температуре уважити макроскопски, увећањем укупне отпорности одређеног намотаја, што у одређеном смислу занемарује чињеницу да се поједини делови намотаја налазе на различитим апсолутним температурама), може се закључити да се са ефектима који нису обухваћени дводимензионалном анализом може поступати као са константним параметрима, чије се вредности могу добити аналитички, или накнадно уважити кориговањем резултата симулација са експериментално добијеним одзивима статорских струја.

Како год се до тих параметара дошло, може се тврдити да они не утичу на хармонијску слику дешавања у машини, већ у одређеном малом износу утичу на интензитет струје која ће се успоставити кроз намотаје у појединим режимима рада машине, те се стога начин утврђивања њихових вредности не сматра за одвише важан задатак са становишта главне теме у овом истраживању. У сличну категорију се могу сврстати и параметри мреже из које се машина напаја за потребе извођења експеримената, односно сматраће се да се машина напаја из идеалних извора (осим када је случај приказивање резултата експеримената проведених над машином која се напаја из неког од уређаја енергетске електронике, што је у данашњој експлоатацији све чешћи случај). Испоставиће се, међутим, да због природе потрошача (махом рачунарска и друга електронска опрема) који су у електричном смислу близу мрежном извору енергије који се користио за напајање машина над којима се вршила експериментална верификација, квалитет напона напајања, мада задовољава стандарде са становишта дозвољеног хармонијског изобличења, ипак поседује значајан удео виших хармоничких чланова непарног реда, који доприносе малом изобличењу одзива у односу на очекиване и то највише у режиму празног хода машине. Тај се ефекат може уважити хармонијском анализом напајања, те уважавањем његовог спектра у симулационим моделима, ако за то има потребе, о чему ће се дискутовати у поглављима која се тичу развоја самог динамичког модела и његове верификације путем симулација.

Ако се усвоји чешћи тип извора напајања, односно напонско напајање, потребно је увести додатне једначине којима се описује упаривање домена прекривеног коначним елементима са споља додатим деловима којима се комплетира електрично коло. То су по правилу једначине напонске равнотеже, у којима се веза између спољашњег и домена коначних елемената остварује преко флуксних обухвата фазних намотаја статора, односно индукованих електромоторних сила у намотајима. Додатне једначине наравно представљају додатну потешкоћу за имплементацију саме методе, а пошто је реч о диференцијалним једначинама

напонске равнотеже, потребно је извршити и њихову дискретизацију по времену, што повећава већ и онако велики број релација које се морају решити у току једног временског одбирка.

Када се за извор напајања користи напонски извор, потребно је симултано са диференцијалним једначинама напонске равнотеже, које описују повезивање са доменом прекривених мрежом коначних елемената уједно водити рачуна и о томе како се споља наметнути напон расподељује на оне делове региона који припадају намотају машине. Ту се мора водити рачуна и о начину како су намотаји формиран, колико укупно активних страна постоји, и каква је оријентација сваког проводника који учествује у формирању намотаја, јер од тога директно зависи којег је знака део споља наметнутог напона појединим елементима (од чега директно зависи и знак градијента потенцијала), али такође од тога зависи и како ће сви у домену индуктовани напони да се суперпонирају и тиме путем индуктоване електромоторне силе намотаја супротставе споља наметнутом напону. Слично резонување важи и за успостављање струја у намотајима фаза, које су последица суперпонирања струја паралелних грана (ако их има) и прорачуна напонске равнотеже са споља наметнутим напонима.

Да би се на правилан начин приступило решавању транзијентних проблема, разматрање се мора вратити тумачењу дифузионе једначине (2.26), јер се само њеним добрим сагледавањем може јасно формулисати проблем. Овде ће, зарад прегледности, релација бити поново наведена, са нешто другачијом формулацијом. Ако се претпостави да нема компоненте услед постојања струјног извора, струја која се успоставља у одређеном домену може бити последица споља наметнутог напонског извора, затим може постојати компонента индуктованих струја као последица изложености проводне средине временски променљивим магнетним пољем које може у случају транзијентне анализе да потиче од два потпуно различита узрока. Један начин за индуковање струја је када се у статичком домену успоставља временски променљиво поље, а други начин је кретање дела домена у односу на извор магнетног поља. У асинхроним машинама постоје оба феномена, али је практично немогуће разграничити колики удео у укупној струји неког намотаја има поједина компонента индуктованих струја.

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}\right)=\vec{j} \quad (2.129)$$

Вектор густине струје сачињавају три наведене компоненте (уз занемарење компоненте услед постојања струјног извора):

$$\vec{j}=-\sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\sigma\frac{V_{ext}}{l}+\sigma\vec{v}\times\vec{B} \quad (2.130)$$

Са V_{ext} је, као и у ранијим поглављима, описан део споља наметнутог напона. Који припада текућем коначном елементу, са „дубином“ дводимензионалног домена

l , док \vec{v} представља релативну брзину кретања домена у односу на споља наметнуто магнетно поље. Наравно, прва и трећа компонента у укупном вектору густине струје представљају два поменути механизма излагања проводне средине променљивом магнетном пољу, а важно је још једном напоменути да се њихов појединачан утицај у укупном вектору густине струје не може раздвојити.

Када се уважи дефиниција вектора магнетске индукције преко магнетског вектор потенцијала, релација (2.129) се може преформулисати у следећи облик, дат релацијом (2.131).

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \frac{V_{ext}}{l} + \sigma \vec{v} \times \text{rot} \vec{A} \quad (2.131)$$

Овако формулисана једначине је непрактична и компликована за решавање, али се срећом то може избећи ако се примени увођење различитих референтних координатних система за поједине домене у пресеку машине. Ако се, за потребе овог истраживања, анализа задржи само на случају кавезних асинхроних машина, важно је напоменути да се ова релација засебно имплементира на домен статорског пакета лимова, те на аналоган начин и на домен роторског пакета. То је могуће извести у транзијентној анализи једино ако се раздвоје мрежа коначних елемената статора и ротора, односно ако се креирање мреже која описује релативно кретање ротора у односу на статор оствари увођењем мреже ваздушног зазора која на себе преузима деформацију услед кретања, док су мреже које припадају статору, односно ротору фиксирани за своје домене. На тај начин се мрежа коначних елемената статора фиксира за статорски референтни координатни систем, који је стојећи, а роторска мрежа коначних елемената се фиксира за ротор, који има релативну брзину обртања у односу на статорску мрежу која је једнака брзини клизања у тренутном временском одбирку симулације. Деформабилна мрежа ваздушног зазора (ова мрежа нужно постаје деформабилна, будући да је њена дужност да за сваки релативан положај ротора уклопи две фиксне мреже у јединствену мрежу која одговара тренутном временском одбирку) представља одличан избор из неколико важних аспеката. Прво, због тога што је ваздушни зазор прилично узак у односу на остатак домена, њему припада мрежа са значајно мањим бројем коначних елемената (чак и када су ти елементи осетно мањих димензија од оних који се користе за прекривање осталих домена), па је овим поступком фиксирања мрежа статора и ротора ишчезла потреба за генерисањем комплетне мреже током сваког временског одбирка (алгоритми формирања оптималне мреже могу да буду прилично компликовани и нису предмет ове расправе). Пошто је ваздушни зазор непроводна средина у којој притом нема извора, дифузионе једначине за коначне елементе који припадају деформабилној мрежи зазора у себи не садрже ниједан од механизма индуковања струја, те стога оне постају хомогене диференцијалне једначине. Стога временска променљивост и деформације мреже зазора, које доводе до појаве релативне брзине кретања у односу на споља наметнуто магнетно поље бивају ограничене на домен непроводне средине, где не представљају никакву потешкоћу.

Проблем формулације дифузионе једначине за различите домене се након претходне дискусије значајно поједностављује, тиме што везивањем референтног

координатног система за одређени елемент ишчезава његово релативно механичко кретање у односу на поље. Да би се тај принцип могао применити на домен ротора, потребно је узети у обзир да су фреквенције индукованих струја у ротору пропорционалне клизању. Примена методе на статорски домен се просто своди на ишчезавање члана са релативном брзином кретања.

Поступак превођења дифузионе једначине у диференцијалну једначину прилагођену дводимензионалној представи машине и увођење Галеркинове формулације и линеаризација модела (ако се уважава нелинеарност феромагнетских материјала) се изводи на потпуно аналоган начин као што је то био случај у статичким анализама, а након тога се мора приступити и дискретизацији по времену извода магнетског вектор потенцијала по времену. Општи принцип дискретизације по времену се изводи по следећем обрасцу:

$$\beta \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}^{t+\Delta t} + (1 - \beta) \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}^t = \frac{\{A\}^{t+\Delta t} - \{A\}^t}{\Delta t} \quad (2.132)$$

Параметром β се подешава врста дискретизације, где случај $\beta = 0$ представља такозвану замену „унапред“, избор $\beta = 1$ представља замену „уназад“. Дозвољено је узимање и неке међувредности из тог интервала, где је, на пример, опција $\beta = 0.5$ позната и под називом Кренк-Николсонов метод (*Crank-Nicholson Method*). Дискретизацији подлежу и све једначине напонске равнотеже којима се описује повезаност домена прекривеног мрежом коначних елемената са екстерним електричним колима, које се такође морају дискретизовати по истом поступку. Пошто транзијентна анализа обухвата у себи и једначину кретања, за њу такође важи исти принцип.

За крај излагања о транзијентној анализи је остављено разматрање о додатним величинама у електромагнетном пољу које је потребно израчунати да би се он на ефикасан начин могао повезати са механичким и електричним транзијентима. Реч је, наравно о оствареном моменту конверзије, те флуksним обухватима статорских фазних намотаја.

Постоје различити начини израчунавања момента конверзије након реконструисања формираног магнетног поља у текућем временском одбирку. Могуће је израчунати момент применом фундаменталног обрасца за Лоренцову силу (са оправданим занемаривањем удела електричног поља на укупну силу) или применом методе виртуелних помераја или уз помоћ Максвелових напона.

Лоренцова сила, мада на снази у било ком могућем сценарију формирања квазистатичког магнетног поља у проводним и/или феромагнетским срединама, најбољу примену има у случајевима када се разматрају танки проводници од неферомагнетских материјала у неферомагнетским срединама, најчешће ваздуху. Њена примена у електричним машинама би захтевала израчунавање силе на сваки коначни елемент ротора, те њихово векторско сабирање, што представља непрактично и сувише компликовано решење које би потрошило сувише рачунарских ресурса, а самим тим и времена, те се стога одбацује.

Метода виртуелних помераја са заснива на прорачунавању промене магнетне енергије на основу разлике у конфигурацији проблема која се има кад се домену са слободом кретања допусти замишљени инфинитезимални померај. Метода се ослања на два приступа, у зависности од тога да ли су приликом замишљеног померања извори електромагнетног поља прикључени или не. Ако су током замишљеног померања извори енергије остали прикључени, тада се сматра да је прираштај магнетне енергије настао као последица рада извора поља. У ситуацији када се врши виртуелни померај без прикључених извора, сматра се да је до промене у енергији дошло на рачун смањења акумулиране енергије у домену. Испоставља се да су ова два приступа у потпуности аналогна, тако да им је примена равноправна. Недостатак овог приступа се огледа у томе што је потребно израчунати магнетну енергију за изабране положаје у целокупном простору. То са собом повлачи потребу за израчунавањем квантова енергије садржаних у сваком коначном елементу домена, што опет представља захтеван нумерички поступак.

У поглављу у којем ће се развијати динамички модел асинхроне машине ће од највећег значаја бити управо примена методе виртуелних помераја, али ће се њена имплементација драстично упростити, увођењем интегралних елемената за акумулисање магнетне енергије, уместо мноштва коначних елемената. Реч је, наравно, о индуктивностима намотаја машине. Због тога ће се више пажње овој методи посветити у наредним поглављима.

Трећи метод израчунавања сила, односно момената којим магнетно поље делује на средину са одређеним степеном слободе кретања јесте примена Максвелових напона. Принцип примене Максвелових напона се заснива на трансформацији израза за Лоренцову силу у израз који је повољнији за израчунавање, тако што се уместо прорачунавања запреминског интеграла густине Лоренцове силе (што изискује интеграцију по целокупном домену над којим се жели израчунати сила, у случају електричних машина реч је, дакле о ротору), скупом подесних операција тај интеграл трансформише у површински интеграл по површини која оивичава домен од интереса. Очигледно је да се овим трансформацијама значајно смањује број потребних нумеричких операција потребних за израчунавање силе на ротор, што примену Максвелових напона чини изузетно атрактивном у транзијентној анализи. Још једна велика предност примене Максвелових напона у електричним машинама се огледа у томе што је површ која обухвата ротор смештена у ваздушни зазор, где се због линеарности средине трансформације израза могу спровести простије него за случај нелинеарних средина.

Ако се у извођење Максвелових напона крене од запреминске густине Лоренцове силе у магнетном пољу (2.133), имајући у виду да се трансформације врше над изразима који важе у вакууму, уважавањем диференцијалног облика Амперовог закона за случај квазистатичког поља се добија израз (2.134).

$$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B} \quad (2.133)$$

$$\vec{f} = \left(\frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B} \right) \times \vec{B} \quad (2.134)$$

Под појмом вектора густине струје се, поред већ описаних механизма успостављања кондукционе струје, може по потреби уважити и увођење макроскопских ефеката микроскопских Амперових струја, што површинских, што запреминских. Овај ефекат би се морао уважити приликом проучавања сила на феромагнетске материјале, а као последица променљиве магнетске отпорности изазване кретањем одређеног дела домена, или ако у домену од интереса постоје и стални магнети. Наиме, познато је да постоје системи за електромеханичку конверзију енергије путем магнетског поља који не захтевају постојање кондукционих струја унутар домена са степеном слободе кретања на које би магнетно поље деловало (у ротационим машинама се ради о синхроним машинама са перманентним магнетима и/или израженом релуктантном компонентом момента који се јавља као последица истурености. Познато је да такве машине могу да врше конверзију чак и у одсуству побудног намотаја или перманентних магнета). Лоренцова сила, а самим тим и Максвелови напони се могу користити и у том случају, али је нужно ефекте намагнетисаности супстанце заменити еквивалентним макроскопским изворима, што је у принципу могуће урадити и у случају да домен има релуктанцију која је функција положаја, што се своди на увођење променљиве пермеабилности, која се такође може описати увођењем еквивалентних струјних извора, применом теореме компензације. Ови феномени су од секундарног значаја у анализи рада кавезних асинхроних машина, будући да се њихов рад заснива на индуковању струја у роторским проводницима које су врло великог интензитета, па је доминантна компонента магнетског момента потиче од њих, а како је познато да кавезне машине имају практично занемарљиву релуктантну компоненту момента (због изузетно мале истурености, која је једино последица постојања жљебова, што се додатно да умањити њиховим закошењем), њихов утицај ће бити занемарен, што свакако не утиче на поступак увођења Максвелових напона, јер су они функција резултантног поља, које у себи свакако уважава све ефекте који доводе до његовог формирања.

Ако се добијени израз развије у Декартовом координатном систему, за x компоненту густине силе се добија израз (2.135).

$$f_x = \frac{1}{\mu_0} \left(B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \quad (2.135)$$

Додавањем и одузимањем члана $\frac{1}{\mu_0} B_x \frac{\partial B_x}{\partial x}$ претходној релацији и сређивањем се добија израз (2.136), а уз мало прегруписавање, уз уважавање дефиниције дивергенције вектора магнетске индукције се добија коначан израз x компоненте запреминске густине Лоренцове силе (2.137-2.138).

$$f_x = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial B_x^2}{\partial x} B_x^2 + B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (B_x^2 + B_y^2) \right) \quad (2.136)$$

$$f_x = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(B_x^2 - \frac{1}{2} |\vec{B}|^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (B_x B_y) - B_x \operatorname{div} \vec{B} \right) \quad (2.137)$$

$$f_x = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(B_x^2 - \frac{1}{2} |\vec{B}|^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (B_x B_y) \right) \quad (2.138)$$

Сличним поступком се може добити пројекција запреминске густине Лоренцове силе на уосу, што је представљено изразом (2.139).

$$f_y = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} (B_x B_y) + \frac{\partial}{\partial y} \left(B_y^2 - \frac{1}{2} |\vec{B}|^2 \right) \right) \quad (2.139)$$

Овако написане релације се могу очигледно представити преко дивергенције векторских величина, такозваних тензора, на следећи начин:

$$f_x = \operatorname{div} T_x = \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \right) \quad (2.140)$$

$$f_y = \operatorname{div} T_y = \left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \right) \quad (2.141)$$

$$f = \operatorname{div} T = \frac{1}{\mu_0} \left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(B_x^2 - \frac{1}{2} |\vec{B}|^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (B_x B_y) \\ \frac{\partial}{\partial x} (B_x B_y) + \frac{\partial}{\partial y} \left(B_y^2 - \frac{1}{2} |\vec{B}|^2 \right) \end{array} \right] \quad (2.142)$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{xy} & T_{yy} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2} |\vec{B}|^2 & B_x B_y \\ B_x B_y & B_y^2 - \frac{1}{2} |\vec{B}|^2 \end{bmatrix} \quad (2.143)$$

Максвелови напони управо представљају компоненте тензора приказаног претходним релацијама. Укупна сила на неки домен запремине v се израчунава преко запреминског интеграла густине Лоренцове силе, што се уважавањем дефиниције компоненти силе преко тензора и коришћење идентитета векторске анализе – теореме Гаус-Остроградског своди на површински интеграл по површи која се ослања на домен од интереса.

$$F = \int_v f dv = \int_v \operatorname{div} T dv = \oint_S \vec{T} \cdot \vec{dS} \quad (2.144)$$

$$M = \left| \int_V \vec{r} \times \vec{f} dv \right| = \oint_S r \vec{T} \cdot \vec{dS} \quad (2.145)$$

Ако се усвоји да је површина по којој се врши интеграција тензора цилиндрична површ која се ослања на површину ротора, очигледно је да се помоћу израчунатих компоненти силе на површини домена врло лако може израчунати и укупан електромагнетни моменат којим се делује на ротор (2.145). Центар ротације је уједно и центар цилиндричне површи по којој се врши интеграција у површинском интегралу (за случај представљања машине дводимензионалном апроксимацијом површински интеграл прераста у линијски интеграл по кружности, а ефекат површине се добија простим множењем добијеног резултата дужином пакета лимова. Ако се жели уважити и закошење роторских проводника, потребно је користити тродимензионалну формулацију проблема или надоместити закошење у дводимензионалној представи сабирањем инфинитезималних површинских интеграла који су функција тренутног положаја по осној висини пакета). Наравно, практична имплементација линијског интеграла често може бити скопчана са потешкоћама, нарочито због тога што се често затворена контура бира тако да се креће по ивицама коначних елемената у ваздушном зазору, што доводи до одступања облика контуре у односу на кружницу и појаву грешака. Ако се усвоји да је контура кружног облика, трансформацијама над изразом (2.144) се из Декартових координата може прећи на представу магнетног поља преко компоненти које су управне, односно тангенцијалне на цилиндричну површ, чиме се на илустративнији начин описује како се кроз интеракцију међусобно управних компоненти магнетног поља остварује моменат. Густине тангенцијалне и нормалне силе на граничној површи су дате изразима (2.146-2.147).

$$f_t = \frac{B_t B_n}{\mu_0} \quad (2.146)$$

$$f_n = \frac{B_n^2 - B_t^2}{\mu_0} \quad (2.147)$$

За правилно упаривање домена коначних елемената са спољашњим елементима електричног кола је потребно израчунати и флуksне обухвате статорских фаза, јер се помоћу њих израчунава индукована електромоторна сила. Након завршетка итеративног поступка у текућем временском одбирку познате су вредности магнетског вектор потенцијала у целом пресеку машине. На основу тих вредности је могуће одредити вредност вектора магнетске индукције применом ротора потенцијала, а затим се на основу вектора магнетске индукције може израчунати жељени флуksни обухвати. Овакав поступак израчунавања флуksних обухвата се ипак не примењује, зато што се применом познатог идентитета векторске анализе – Стоксове теореме, флуks вектора магнетске индукције кроз неку површ своди на линијски интеграл магнетског вектор потенцијала по контури која оивичава површ (2.148).

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \int_S \text{rot} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} \quad (2.148)$$

Претходни израз за израчунавање магнетног флукса се мора прилагодити дводимензионалној представи машине и геометрији намотаја да би се помоћу њега могао израчунати флуксни обухват целог намотаја фазе. Као што је познато, бројем навојака се постиже много већи флуксни обухват за исту геометрију и интензитет вектора магнетске индукције. Флуксни обухват намотаја који се састоје од навојака истог облика и димензија и навојака прожетих истим флуksom се може просто добити од флукса кроз контуру која се ослања на површ једног навојка множењем флукса израчунатог преко (2.148) укупним бројем навојака. Класичан случај примене овог поступка је израчунавање флуксних обухвата намотаја трансформатора.

Ротационе машине по правилу имају расподељене намотаје, који се често могу састојати од навојака различитих димензија (односно секција намотаја различитих ширина), што нужно доводи до фазног помераја у флуксним обухватима појединих навојака и разлике у њиховим износима, што значи да се укупни флуксни обухват мора добити као сума појединачних флуксних обухвата сваког навојка који сачињава намотај. У дводимензионалној представи пресека машине уважава се и апроксимација да је линијски интеграл магнетског вектор потенцијала довољно израчунати само дуж активних страна проводника који сачињавају један навојак, док се удео ових интеграла на бочним везама не може директно уважити (њихов утицај се посредно уважава употребом расипних индуктивности бочних веза, о којима је већ било речи). Пошто број проводника смештених у један жљеб може да буде прилично велик, прибегава се нешто мање прецизном израчунавању линијског интеграла магнетског вектор потенцијала зарад уштеде рачунарских ресурса. Наиме, уместо да се рачуна линијски интеграл дуж активне стране сваког проводника у машини, уводи се појам средње вредности магнетског вектор потенцијала по попречном пресеку жљеба, и онда се та средња вредност користи за израчунавање линијског интеграла сваког проводника у текућем жљебу. Оправдање за ову апроксимацију се може наћи у чињеници да су жљебови испуњени неферромагнетским материјалом, те да се вектор магнетске индукције прилично равномерно расподељује по попречном пресеку жљеба.

Узимајући у обзир наведене особености израчунавања флуксног обухвата за случај расподељених намотаја, за потребе наведених израчунавања обухвата статорских намотаја у дводимензионалној представи пресека машина се користи следећи израз:

$$\Psi_j = 2pl \frac{N_z}{N_{pg}} \sum_{q=1}^{\frac{N_s}{2p}} k_{jq} \frac{1}{S_q} \int_{S_q} A_z dS, j = a, b, c \quad (2.149)$$

У претходној релацији p представља број пари полова машине, l дужину пакета лимова, N_z број проводника у жљебу, N_{pg} број паралелних грана фазних намотаја, $N_s/2p$ број статорских жљебова по полу, S_q површину попречног пресека жљеба, а k_{jq}

представља коефицијент фазног намотаја за текући жљеб, који у себи уважава присутност проводника одређене фазе у текућем жљебу, његову оријентацију, као и чињеницу да намотај може бити изведен као једнослојни, или двослојни.

Приказана релација се наравно може користити и приликом израчунавања индуктивности намотаја, са разликом да се у том случају користи побуђивање домена једносмерним струјама, али је након завршеног прорачуна магнетског вектор потенцијала у домен од интереса коришћење њихових вредности за потребе ових прорачунавања идентично поступку који је описан релацијом (2.149).

Овим се завршава детаљно излагање о методи коначних елемената која је прилагођена дводимензионалној апроксимацији попречног пресека ротационих машина, у првом реду трофазних кавезних машина. Пошто је примарни циљ употреба методе као помоћног средства у развоју динамичког модела машине, највећи нагласак је био на простијим имплементацијама методе, које ће својим резултатима послужити за добијање улазних параметара модела.

Темељно излагање је било потребно због тога што су се хтеле нагласити особености сваке од наведених имплементација, те је на крају овог поглавља неопходно још једном подвући да је са становишта времена и рачунарских ресурса најповољније користити статичке симулације, по могућству магнетостатичке симулације у линеарним срединама. Додатно поједностављење се има у случају ако се за примарни извор магнетног поља усвоје струјни извори, чиме ишчезава потреба да се решавају додатне релације које се имају приликом наметања напонских генератора као извора поља. Пошто примена магнетостатичких метода не може верно да представи путеве успостављања магнетног поља у пресеку машине (изузев можда у режиму празног хода, јер тада је реакција ротора занемарљива), поред магнетостатичких анализа је потребно користити и статичке анализе над доменом побуђеним простопериодичним струјама извора. Примена анализе са примарним изворима поља који се у времену мењају по простопериодичном закону омогућава увођење комплексне нотације увођењем комплексних представника, што значајно поједностављује једначине поља, преводећи их из диференцијалних у алгебарске једначине, а за случај линеарних средина и у линеарне једначине. Променом фреквенције наметнутих извора се може истражити реакција ротора на примарно магнетно поље изазвано побуђивањем статорских намотаја, што се даље може користити у описивању феномена засићења и ефекта потискивања струја у роторским проводницима. Ефекат засићења описан на овај начин се затим може искористити у магнетостатичким симулацијама помоћу којих се могу добити кориговане вредности индуктивности, чиме се опис процеса електромеханичке конверзије и успостављања струја у статорским намотајима може још верније описати.

За случај да ефекат засићења не игра важну улогу у процесу који се жели истражити помоћу динамичког модела, оно се може и изоставити, што у многеме поједностављује и убрзава процес добијања улазних података потребних моделу. У поглављу у којем ће се разрађивати једна од метода детекције кварова у роторском кавезу ће бити показано да је ефекат засићења у потпуности могуће занемарити.

3. Динамички модел трофазне кавезне асинхроне машине који уважава ефекте жљебних хармоника и засићења

У овом поглављу ће се детаљно описати развој динамичког модела трофазног кавезног асинхроног мотора, чији се улазни параметри добијају применом разрађених варијанти методе коначних елемената. Модел је динамички, јер омогућава проучавање транзијентних феномена у електричним машинама, што ће бити од изузетне користи приликом развијања нове методе за детекцију кварова у кавезном ротору, која се заснива на транзијентном одзиву погона. Динамика коју модел поседује није предвиђена за имплементацију управљања погоном у реалном времену, мада се може користити као помоћно средство за корекцију класичних динамичких модела, заснованих на трансформацијама координатних система, будући да поседује значајно више података о конструкцији машине него што је то случај у примени класичних модела.

3.1 Процеси пројектовања и експлоатације машина из перспективе сложености коришћеног математичког апарата

Као што је познато, електрична машина представља сложен склоп намењен електромеханичкој конверзији енергије, а у случају наизменичних електричних машина се тај процес доминантно ослања на пренос енергије посредством магнетног поља. Постоји више различитих начина на који се тај процес конверзије може описати, а њихова прецизност је у директној вези са нивоом детаљности којим се машина представља. Са теоријског аспекта је свакако најдетаљније моделовати машину применом закона електромагнетних поља, који се због сложене геометрије преводе у облик погоднији за нумеричку анализу. На тај начин је и дошло до примене методе коначних елемената у електричним машинама, која се доказала као неприкосновена у случајевима када се машина жели детаљно анализирати, нарочито у самом зачетку њеног развоја, када је исплативије спровести оптимизацију дизајна софтверски, него ли израђивањем физичке машине као међуфазе у конструисању прототипа. Опредељење ка оваквом приступу моделовања машина није без

недостатака, који се првенствено огледају у времену потребном да се кроз симулације добију конкретни одговори на неке конструкционе недоумице које је пожељно отклонити пре него што се приступи изради прототипа.

И дан данас се многи конструктори машина ослањају на искуствени приступ пројектовању електричних машина, који нужно повлачи употребу бројних емпиријских формула, специфичних за одређене типове машина, њихове снаге, напон напајања, број пари полова и слично. Пошто је примарни циљ електричних машина произвођење напона (за генераторе) и електромагнетног момента, често се у процес пројектовања улази под претпоставком идеалности појединих материјала који се користе у конструкцији, што олакшава почетне фазе развоја. Овакве претпоставке омогућавају конструкторима да са одређеном грешком процене димензије машине, или да се за случај унапред познатих ограничења које машина мора да задовољи уклопе својим дизајном (овде је наравно реч о развоју прототипа великих снага и димензија, чијем се пројектовању посвећује највећа пажња) у постојеће погоне или постројења. Неретко се има случај да је циљ модернизација критичних погона, који су раније користили машине једносмерних струја као погонске машине, а да се сада за циљ има њихова замена машинама наизменичних струја. Због различитог принципа рада машина, а уз унапред постављене услове о габаритима и потребној снази и брзини наизменичне машине се управо има описани проблем у почетним фазама конструисања.

Најзначајније почетне апроксимације су претпоставка о идеалности феромагнетских материјала (бесконачна пермеабилност и одсуство магнетних губитака), те идеална цилиндричност ваздушног зазора (ако је реч о асинхроним машинама) уз идеално простопериодичну просторну расподелу магнетског поља по ободу зазора. Када се овим претпоставкама придружи услов ограничења максимално дозвољене вредности вектора магнетске индукције у зазору (због максималне искористивости феромагнетског материјала, уз избегавања одласка реалног феромагнетског материјала у осетније zasiћење), овакве почетне претпоставке гарантују врло добру процену снаге и момента машине. Након оријентационог избора геометрије се мора имати у виду и напонски ниво за који је машина предвиђена, чиме се одређује конфигурација намотаја којима се уз задату геометрију и максимално дозвољену вредност вектора магнетске индукције одређује потребан број навојака, њихова геометрија, начин повезивања у секције и намотаје. Уједно се мора водити рачуна и о потребном пресеку проводника који сачињавају намотај, па се на основу тога одређују и потребне димензије жљебова у које ће проводници бити смештени.

Након ових оријентационих избора пројектанти се морају окренути детаљнијем дизајну, који је првенствено окренут енергетској ефикасности и квалитету процеса електромеханичке конверзије, те термичким и механичким аспектима тог процеса. Увођење жљебова за смештање проводника је био природан искорак у еволуцији конструисања електричних машина, јер се тиме омогућава веће динамичко напрезање проводника без њихове деформације, будући да су жљебови начињени на пакету феромагнетских лимова на себе преузели притисак који би проводници иначе трпели да су се смештали по ободу идеално цилиндричног феромагнетског језгра. Увођење жљебова „дискретизује“ начин смештања проводника и формирања намотаја, ограничавајући им могућност за стварање идеално простопериодичне

просторне расподеле магнетопобудних сила, а самим тим и вектора магнетске индукције, што се непосредно пресликава и на таласни облик индукованих напона. Стога је развоју низа конфигурација намотаја посвећена изузетно велика пажња, практично од самих зачетака развоја ротационих машина. Конфигурација која обезбеђује просторну расподелу поља са мањим изобличењем ће сразмерно томе произвести и мање специфичне губитке у машини (нарочито у феромагнетском материјалу, чији губици зависе од учестаности поља које су њима успоставља), а због мањег изобличења напона ће и квалитет електричне енергије (који је данас један од најважнијих аспеката производње и потрошње електричне енергије) бити већи. Мање изобличење гарантује и електроинженерску конверзију са мање осцилација, што је изузетно важан аспект због механичке стабилности и избегавања резонанције која може да доведе до уништења машине или погона за који је намењена.

Не сме се сметнути са ума да је процес пројектовања електричних машина надасве прожет економским критеријумима, па се спрам тренутне цене сировина на тржишту, постојећих залиха истих и процењеног броја јединица које треба произвести од мноштва сличних решења, од којих свако има предности и мана у односу на остала бира оно за које се сматра да је и економски најповољније. Класичан пример овог приступа је одустајање од израде машина са повољнијим таласним обликом магнетног поља у зазору, јер би оно захтевало примену двослојних намотаја, који су сложенији за извођење и имају већи утрошак материјала, тако да се по правилу мотори који се производе у највећим серијама (мотори малих снага) изводе управо са простијим варијантама намотаја.

Увођење жљебова уједно и доводи до губитка идеалне цилиндричности ваздушног зазора, нарочито са аспекта магнетне перемеабилности, а ако се уједно узму у обзир постојање жљебова и на статору и ротору, њихов оптималан број, облик и величина доводе до додатних усложњавања процеса пројектовања, у којем се морају анализирати проблеми са вишим хармоницима који изазивају додатну буку и вибрације, појаву паразитивних момената конверзије, те проблеми са покретањем мотора (асинхроних мотора у првом реду) и слично.

Проблеми који могу настати приликом пројектовања машина, а за које се на први поглед чини да се не тичу директно самог процеса електроинженерске конверзије су у првом реду развој ефикасног система за одвођење топлоте изазване губицима у машини. У уводу је већ помињано да се данашње машине пројектују тако да се максимално искористи и магнетно коло, али и проводници намотаја, тиме што ће се подићи специфична снага машине по јединици масе. То нужно доводи и до пораста специфичних губитака, који највише угрожавају изолацију намотаја, која се мора изводити као врло танка, јер би у супротном машина морала бити значајно већих димензија да би била у могућности да смести потребан број проводника са дебљом изолацијом, што је крајње нееконично. Правилна процена губитака је стога изузетно важна, јер од ње зависе улазни подаци које је потребно дати пројектантима расхладног система. Класичан приступ одређивања губитака, заснован на емпиријским формулама за такозване хистерезисне губитке и губитке услед појаве вртложних струја у лим пакетима машине се ослања на претпоставке које нису у потпуности тачне за случај ротационих машина. Наиме, карактеристике губитака које даје произвођач су по правилу добијене експериментима који се спроводе излагањем узорка лима наизменичном пулсационом пољу (управо

онаквом какво се има у статичким уређајима), те одговарајућим мерењем снаге која се притом дисипира у узорку, коју обезбеђује наизменични извор магнетног поља. Магнетно поље у наизменичним ротационим машинама се успоставља на потпуно другачији начин у односу на статичке електромагнетне уређаје, или уређаје са линеарним степеном слободе кретања, а нарочитост те разлике се огледа у томе што је феромагнетски лим у ротационим машинама изложен пољу променљивог правца, које се понаша као обртно, пре него ли пулсационо поље. Такође, сложеност геометрије лимова доприноси чињеници да су различити делови машине изложени другачијим интензитетима поља, са битно другачијим примесима виших хармоничких чланова (очигледно је да је јарам статорског пакета лимова, који примарно служи да обезбеди повољан пут за затварање линија поља које пролази кроз ваздушни зазор не трпи због променљиве геометрије изазване кретањем, као што је то случај са зупцима). Због наведених особености магнетног поља у ротационим машинама у односу на статичке уређаје нужно се повлачи закључак да су процене губитака засноване на карактеристикама добијеним од произвођача лимова често неадекватне, а што је најгоре, обично доводе до предвиђања губитака који су мањи од стварних. Ови недостаци се често отклањају инжењерским приступом у којем се, спрам дугогодишњих искустава, на процењене губитке додаје нека сигурносна маргина.

Други приступ овом феномену је примена методе коначних елемената, која ће дати верну слику магнетног поља у целокупном пресеку лимова, али је на самим корисницима како ће те резултате искористити, будући да комерцијални софтвери такође нуде могућност уноса специфичних губитака добијених од произвођача као улазних параметара. То се поново своди на примену емпиријских формула, које ће се додуше применити у локалној форми, што дозвољава коришћење локалних вредности магнетске индукције, самим тим и прецизније резултате. Овим приступом се ипак занемарује чињеница да магнетно поље није пулсационо, те неки аутори предлажу извођење експеримената над узорком феромагнетног лима на тај начин што ће он бити изложен обртном пољу, па да се специфични губици добијени тим експериментом користе као улазни параметар у прорачуну губитака методом коначних елемената. Овај приступ је још увек предмет дискусија, тако да је питање хоће ли бити прихваћен као званичан метод.

Смештање проводника у жљебове драстично утиче на локалну дистрибуцију топлоте дисипиране као последица протицања струје кроз намотаје, тако да се и о овој појави мора водити рачуна, нарочито зато што се локалне вредности температура у машини не могу познавати без уграђивања сензора, а контрола пораста температуре мерењем промене отпорности намотаја је често сувише усредњен податак који се пре користи за кориговање параметара еквивалентних шема помоћу којих се имплементирају алгоритми регулације, него ли као средство контроле загрејаности намотаја. Управо се из ових разлога често мора прибегавати и термичкој формулацији методе коначних елемената, која се бави прорачунавањем расподеле температурног поља у машини, изазваног дисипацијом топлоте као последица губитака.

Опште правило које се може извести на основу уводног излагања о проблемима који се јављају током процеса пројектовања ротационих електричних машина је да се математички апарат који је потребан за описивање рада машине усложњава

сваким новим детаљом који се жели додатно квантификовати, или још тачније речено, осветљавање одређеног новог аспекта рада машине захтева одбацавање упрошћења које је убрзавало сам процес пројектовања. Колико ће се далеко отићи у овом враћању комплексности моделовања зависи од користи која се том приликом може остварити, наравно у поређењу са додатним трошковима.

Феномен сличан овом који се има током поступка пројектовања се има и у процесу експлатације електричних машина. Крајњим корисницима неког погона је једино важно да ли изабрана погонска машина задовољава са аспекта потребне снаге и брзине која се захтева за правилно функционисање њиховог процеса. На пројектантима погона је да правилно изабере машину која излази у сусрет захтевима корисника, који у модерној индустрији могу бити веома динамични и сложени. Стога се најчешће много више времена посвећује избору и програмирању уређаја који обезбеђују напајање и дигитално управљање самим погоном, него ли самој ротационој машини. Управо се из тог разлога тежи описивању процеса унутар саме машине на што једноставнији начин, са најмањим могућим бројем променљивих стања, тако да примарни задатак машине буде описан са довољном тачношћу. Такав приступ захтева одбацавање велике количине информација, у првом реду свих појава унутар машине које се не манифестују кроз основне хармонике терминалних величина (напона и струја). То укључује примену пофазних еквивалентних шема (за случај анализирања устаљених стања) и динамичких шема у којима је извршена трансформација над сложенијим моделом машине, његовим свођењем на двофазни систем намотаја на статору, односно ротору.

Да би се уопште могао применити принцип свођења модела машине на еквивалентну шему, прво је било потребно развити модел који описује процес електромеханичке конверзије увођењем интегралних елемената за акумулацију и размену електромагнетне енергије, односно индуктивности. На тај начин се проблем измешта из теорије електромагнетних поља у теорију електричних кола, која је много лакша за имплементацију и решавање. У том поступку се губи одређена количина информација, будући да се увођењем индуктивности многи феномени интегрално, односно усредњено обједињују у њима. Индуктивности машине су сложене функције тренутног положаја ротора и нивоа zasiћења у машини, па би систем једначина машине (које се увођењем индуктивности своди на макроскопске једначине напонске равнотеже и једначине кретања, уз додатне релације којима се описују флуksни обухвати фаза) сачињавале нелинеарне диференцијалне једначине, које су сувише захтевне да би се решавале у реалном времену, што погони са одређеном динамиком захтевају. Поред овог проблема остаје и отворено питање на који би се начин ове индуктивности могле израчунати, што се не може урадити без методе коначних елемената, осим ако се не примене значајна упрошћења и апроксимације. Ту се поново долази до сличних корака који су описивани приликом излагања о почетним фазама у пројектовању машина. Занемаривањем виших хармоничких чланова у просторној расподели магнетног поља, уважавањем идеалне цилиндричности ваздушног зазора велики број индуктивности добија константну вредност, док оне индуктивности које остају функција положаја ротора (за случај асинхроних машина реч је о међусобним индуктивностима статор-ротор) постају простпериодичне функције положаја. Модел са овако припремљеним индуктивностима се може лако трансформисати у поменуто заменске шеме.

Ни овај поступак упрошћавања врло често не може да прође без последица, које неретко враћају инжењере сложенијим приступима, а најважнији разлог за то је покушај смањења потребног броја сензора за оптимално управљање погоном, те истраживање могућности детекције унутрашњих кварова у машини, који не доводе тренутно до прекида фаза или осетног пораста статорских струја, а чије неоткривање може временом да доведе до значајно већих хаварија, те самим тим и опаснијих по цео погон.

У уводу је већ помињана могућност управљања погоном са асинхроним машинама у којем се тренутна вредност брзине (и/или положаја) не мери путем сензора, већ се покушава или проценити на основу математичког модела изведеног из еквивалентних шема, применом разних естиматора, обсервера и слично, или праћењем несавршености машина које се пресликавају у више хармоничке чланове у статорским струјама. Овде се у првом реду мисли на такозване жљебне хармонике, који настају као последица варијације магнетне пермеабилности ваздушног зазора у функцији тренутног положаја и брзине ротора, што се непосредно утискује и у варијације у индуктивностима машине, што се даље посредством флуксних обухвата пресликава у индуковане електростатичке силе статорских намотаја, те на крају и у струје намотаја. Исти ефекат изазива и дискретна дистрибуција магнетопобудне силе роторског кавезног намотаја, али је она за разлику од варијације пермеабилности зависна од оптерећења, те се искључиво ослањање на њу може показати као изразито непоуздано у случају рада погона са малим оптерећењем на вратилу. Испоставља се да не поседују све машине могућност за детектовање жљебних хармоника, јер њихова видљивост зависи како од броја роторских жљебова, тако и од броја пари полова машине и саме спреге статорских намотаја. [7], [15], [16]. О овом феномену ће више бити речи у поглављу које ће се бавити дискусијом резултата симулација над развијеним моделом и њиховим поређењем са експериментално добијеним резултатима.

Варијације пермеабилности услед тренутне брзине ротора се могу детектовати и утискивањем високофреквентних напонских сигнала малих амплитуда које се суперпонирају на основно напајање машине преко статорских прикључака, који не утичу битно на процес конверзије, али изазивају фреквенцијски одзив машине који је готово искључиво условљен тренутним вредностима индуктивности. Наиме, реактансе машине на високим учестаностима су драстично веће од отпорности, па се са правом може тврдити да је одзив машине на високим учестаностима искључиво последица индуктивности. Филтрирањем тих одзива из сигнала статорских струја (које се може лако спровести због довољне фреквенцијске раздвојености одзива) се може установити тренутна вредност брзине.

Очигледно је да је потребно користити сложеније моделе (укључујући и методу коначних елемената) да би се квантификовао утицај варијације пермеабилности на модулацију статорских струја виших хармоничним члановима који у себи крију податак о тренутној брзини, да би се тај ефекат могао правилно искористити за детекцију брзине у реалном времену.

Проблем унутрашњих кварова у електричним машинама је у последње време веома атрактиван, те се све више простора посвећује њиховом истраживању и развијању метода за њихово рано откривање. Јасно је да је за њихово теоријско

разматрање неопходно користити моделе машина који су значајно сложенији од заменских шема које се користе за управљање у реалном времену, те се опет намеће потреба за коришћењем методе коначних елемената, или неког другог, мање захтевног, а довољно тачног приступа.

Овим уводним разматрањем је још једном апострофирана важност примене сложенијих математичких модела електричних машина, како са стране пројектаната машина, тако и са стране оних који се баве пројектовањем погона са машином као главном покретачком снагом. После детаљног описивања методе коначних елемената, уз наговештаје које од наведених имплементација могу бити од велике користи када је уштеда ресурса критичан критеријум ће се коначно приступити развоју динамичког модела трофазне кавезне асинхроне машине. Сам систем релација који ће се користити је опште познат и заснива се на општој теорији електричних машина у оригиналном, нетрансформисаном подручју, са веома важном разликом која се огледа у начину на који су се прибавили улазни подаци неопходни за формирање, у првом реду, матрице индуктивности, а затим и осталих матрица које се користе у моделу.

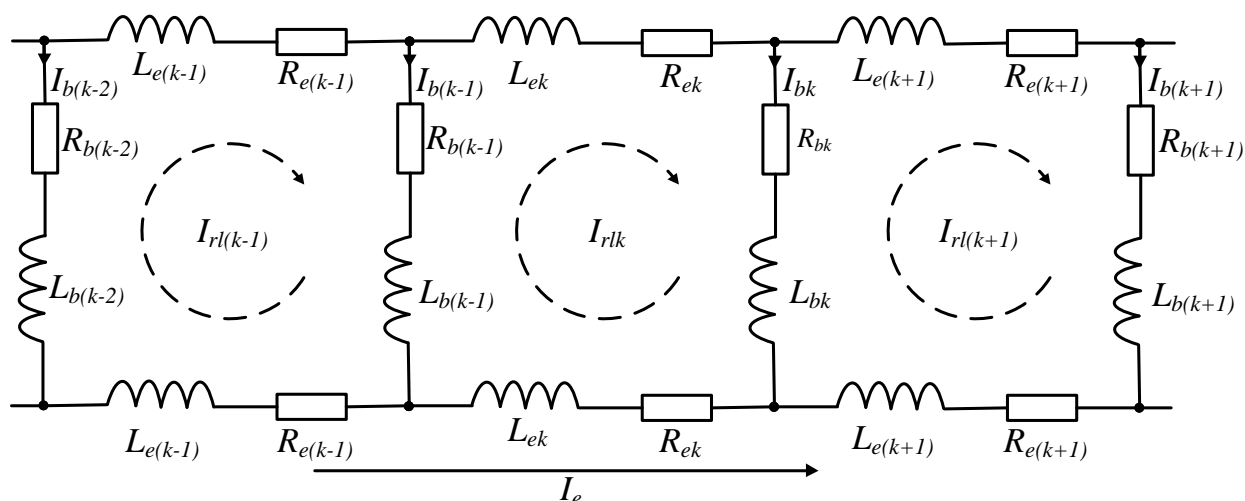
3.2 Модел вишеструко спрегнутих електричних кола

Када се процес конверзије у електромагнетном пољу представи преко интегралних параметара, као што су индуктивности и отпорности намотаја, тада се из теорије електромагнетних поља прелази у теорију електричних кола, за коју постоје разрађене и веома ефикасне методе за њихово решавање. Такав приступ је прво заживео у моделовању статичких уређаја, као што су индуктивности, трансформатори и разне врсте сензора, пошто се у њима није вршио никакав процес електромеханичке конверзије, тако де се целокупна динамика могла представити само преко једначина напонске равнотеже. У случају уређаја са степеном слободе кретања, морале су се увести додатне релације којима се описивала механика тог процеса, те утицај енергије која се измењује електромагнетним путем на тај механички процес (било путем момента или путем силе конверзије). Тако је настао познати скуп релација на који се ослања општа теорија електричних машина, које су познате и под називом „модел вишеструко спрегнутих електричних кола“ (*Multiple Coupled Circuit Approach - МССА*) [17]-[18]. Претпоставке које се морају узети у обзир приликом примене ове методе су занемаривање феномена попут капацитивних спрега међу намотајима, струја цурења које се затварају мимо проводника, губитака у магнетном колу машине и (у првобитним верзијама овог приступа) нелинеарности магнетног кола. Пошто се метод користи за моделовање различитих типова ротационих машина, додатне особености које се тичу конкретних врста машина се морају посебно размотрити, што ће сада бити урађено у случају асинхроних кавезних машина.

Да би се овај метод могао применити на кавезне асинхроне машине, потребно је дефинисати на који начин ће се описивати успостављање струја у роторским проводницима. Чињеница је да роторски кавез нема електричних приступа, те да се на први поглед не могу дефинисати појединачна електрична кола у њему. Решење овог проблема се пронашло увођењем такозваних роторских петљи. Једну роторску петљу сачињава затворен проводни пут који се састоји од две суседне роторске

шипке и два наспрамна сегмента краткоспојних прстенова. Треба приметити да један роторски проводник учествује у формирању две суседне роторске петље, те да се струја која протиче кроз проводник добија као разлика суседних контурних струја које протичу кроз роторске петље. Концепт роторских петљи је повољан из разлога што се помоћу таквог приступа лако може формулисати појам флуksног обухвата, што не би био случај да се сваки од роторских проводника посматра појединачно. Из тог разлога су роторске петље погодан начин описивања електричног кола роторског кавеза, јер се помоћу затворених петљи могу лако дефинисати сопствене и међусобне индуктивности, како унутар самог ротора, тако и према статорским намотајима.

Уз уважавање претходних дефиниција, детаљ развијеног роторског кавеза са означеним петљама и макроскопским елементима којима се моделују отпорности и индуктивности је приказан на слици (3.1). Индексом k су означене вредности које се односе на текућу роторску петљу, док су са L_e и R_e означене индуктивности расипања и отпорност сегмента краткоспојног прстена, са L_b и R_b су означене индуктивности расипања и отпорност роторске шипке, а са I_l , I_b и I_e су означене струја роторске петље, роторске шипке и струје кроз сегмент краткоспојног прстена, респективно.



Слика 3.1 Детаљ развијене електричне шеме роторског кавеза приказаног помоћу петљи

Важно је напоменути да постоје две циркуларне струје које пролазе кроз два краткоспојна прстена, али се испоставља да је довољно у математичком моделу уважити само једну од њих, будући да је једна од струја у затвореним контурама последица вредности струја у преосталим петљама, те је стога она зависна променљива (слично као код примене методе контурних струја у решавању електричних кола). Ако се са N_B означи број роторских петљи, очигледно је да је потребно израчунати укупно $(N_B + 1)$ струју у роторском колу да би се на основу њих могле добити вредности струја у роторским шипкама и краткоспојним прстеновима.

Како број роторских шипки може да буде врло велик (неколико десетина и више), јасно је због чега овај приступ решавању није нумерички једноставан.

Пошто је реч о електричним колима са временски променљивим струјама, једначина напонске равнотеже за целокупну електричну машину се може у матричној форми записати помоћу релације (3.1).

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}\mathbf{I} + \frac{d}{dt}(\mathbf{L}\mathbf{I}) \quad (3.1)$$

Вектор \mathbf{U} представља вектор напона свих електричних кола којима је машина моделована и он се састоји од три статорска напона и $(N_B + 1)$ роторских напона помињаних независних роторских петљи, који су због чињенице да роторски кавез нема електричних приступа идентички једнаки нули. Елементи вектора напона су детаљније изложени у релацији (3.2)

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_s \ \mathbf{U}_r]^T, \mathbf{U}_s = [u_a \ u_b \ u_c]^T, \mathbf{U}_r = [0 \ 0 \dots 0 \ 0]^T_{N_B+1} \quad (3.2)$$

На сличан начин се може дефинисати и вектор струја \mathbf{I} , који је у развијеној форми приказан релацијом (3.3).

$$\mathbf{I} = [\mathbf{I}_s \ \mathbf{I}_r]^T, \mathbf{I}_s = [i_a \ i_b \ i_c]^T, \mathbf{I}_r = [i_{rl1} \ i_{rl2} \dots i_{rlN_B} \ i_e]^T_{N_B+1} \quad (3.3)$$

У складу са димензијама вектора напона и струја се дефинишу остали елементи матричне релације (3.1). Матрица отпорности \mathbf{R} се састоји од две субматрице, од којих је једна проста дијагонална матрица, док се у другој матрици крије више података због начина успостављања напонске равнотеже у роторским петљама, будући да су оне описане увођењем контурних струја, те стога не могу бити дијагоналне матрице.

Субматрица статорских отпорности \mathbf{R}_s је дакле дијагонална матрица димензија 3×3 , док је субматрица роторских отпорности \mathbf{R}_r димензија $(N_B + 1) \times (N_B + 1)$. Као што је већ напоменуто, у субматрици роторских отпорности се крије топологија роторског кавеза описаног контурним струјама, које се морају на подесан начин утиснути и у једначину напонске равнотеже за сваку роторску петљу. Ако се уочи текућа роторска петља са индексом k , за њу се једначина напонске равнотеже може написати у форми релације (3.4).

$$R_{ek}i_{rlk} + R_{bk}(i_{rlk} - i_{rl(k+1)}) + R_{ek}(i_{rlk} - i_e) - R_{b(k-1)}(i_{rl(k-1)} - i_{rlk}) + \frac{d\Psi_{lk}}{dt} = 0 \quad (3.4)$$

$$i_{bk} = i_{lk} - i_{l(k+1)} \quad (3.5)$$

Очигледно је да је струја у текућој роторској шипки једнака разлици контурних струја две суседне роторске петље (3.5), док се струја у једном од краткоспојних сегмената роторске петље на сличан начин може добити као разлика струје текуће петље са циркулационом струјом краткоспојног прстена. О формирању флуksног обухвата за сваку роторску петљу ће бити више речи када се буду дефинисале матрице индуктивности.

Када се по узору на релацију (3.4) уваже једначине напонске равнотеже за сваку роторску петљу, увођењем укупне отпорности једне роторске петље (која се састоји од збира отпорности две суседне роторске шипке и два краткоспојна прстена, што је приказано релацијом (3.6)), коначно се могу дати развијени облици субматрица статорских и роторских отпорности, што је приказано релацијама (3.7) односно (3.8).

$$R_{lk} = R_{bk} + R_{b(k+1)} + 2R_{ek} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \\ & \mathbf{R}_r \end{bmatrix}, \mathbf{R}_s = \text{diag}(R_s \quad R_s \quad R_s) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} R_{l1} & -R_{b2} & 0 & \dots & 0 & -R_{bN_B} & -R_{e1} \\ -R_{b1} & R_{l2} & -R_{b3} & \dots & 0 & 0 & -R_{e2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_{l(N_B-1)} & -R_{bN_B} & -R_{e(N_B-1)} \\ -R_{b1} & 0 & 0 & \dots & -R_b & R_{lN_B} & -R_{eN_B} \\ -R_{e1} & -R_{e2} & -R_{e3} & \dots & -R_{e(N_B-1)} & -R_{eN_B} & \sum_{i=1}^{N_B} R_{ei} \end{bmatrix}_{(N_B+1) \times (N_B+1)} \quad (3.8)$$

Једначина напонске равнотеже контуре краткоспојног прстена је другачија од једначина за петље које садрже роторске шипке, будући да се на сваком сегменту роторског прстена његова контурна струја одузима са контурном струјом текуће петље роторских шипки, те је због тога последња врста, односно колона роторске матрице отпорности потпуно попуњена нултим елементима. Роторске петље сачињене од шипки су са становишта матрице отпорности у интеракцији само са суседним роторским петљама, те је отуд очигледно зашто у њиховим врстама постоје нулти елементи само непосредно испред и непосредно након елемента по главној дијагонали (уз наравно елемент у последњој колони који описује интеракцију са контуром краткоспојног прстена).

Матрицама индуктивности се описује међусобна спрега намотаја као и могућност за индуковање електромоторних сила услед протицања сопствене струје, те се на тај начин дефинишу међусобне и сопствене индуктивности намотаја. За разлику од матрица отпорности, ове матрице су по правилу пуне, а за случај моделовања у оригиналном подручју се састоје од елемената који су функција

различитих величина, попут тренутног положаја ротора, засићења, учестаности напајања и слично. Њихова променљивост се неће посебно означавати у самим матрицама, само зарад што компактнијег записа. У поглављу у којем је детаљно описана метода коначних елемената је на више места напоменута суштинска важност матрице индуктивности, те ће јој се стога касније посветити далеко највише пажње, док се у овом делу излагања само жели увести њена форма за потребе имплементације математичког модела.

Матрица индуктивности L се за разлику од матрице отпорности састоји од четири субматрице. Субматрица статорских индуктивности L_{ss} је симетрична матрица димензија 3×3 , са добро познатим ознакама за сопствене индуктивности статорских фаза, те међусобне индуктивности које ову матрицу чине симетричном (3.9).

$$L = \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix}, L_{ss} = \begin{bmatrix} L_a & M_{ab} & M_{ac} \\ M_{ba} & L_b & M_{bc} \\ M_{ca} & M_{cb} & L_c \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Роторска матрица индуктивности је значајно сложенија од матрица отпорности и статорске матрице индуктивности, узимајући у обзир њене димензије и велики број међусобних спрега. Поред чињенице да се и у њој мора уважити начин описивања роторског кавеза увођењем контурних струја, узимање у обзир променљивости ове матрице у функцији положаја ротора (иако врло мале, показале се да ове варијације драстично утичу на перформансе машине, нарочито ако није примењено закошање роторских проводника) додатно компликују њену форму. Форма матрице роторских индуктивности у себи крије два феномена истовремено. Попуњеност матрице ненултим елементима је последица постојања магнетних спрега између свих роторских контура сачињених од роторских шипки, а додатни чланови који се одузимају од међусобних индуктивности суседних петљи су опет на сличан начин као у роторској матрици отпорности последица примене контурних струја. Оправдано је претпоставити да због геометрије роторског кавеза нема значајнијих магнетних спрега између краткоспојних прстенова и роторских петљи сачињених од шипки, тако да је начин формирања последње врсте и колоне матрице индуктивности врло сличан са аналогним проблемом у матрици отпорности. Сопствена индуктивност роторске петље је означена са L_{rk} , међусобне индуктивности између појединих роторских петљи су означене са M_{rkj} , док је индуктивност расипања шипке означена са L_{bk} . Индуктивност расипања сегмента краткоспојног прстена је означена са L_{ek} ($1 \leq k, j \leq N_B$).

$$\mathbf{L}_{rr} = \begin{bmatrix} L_{r1} & M_{r12} - L_{b2} & M_{r13} & \dots & M_{r1(N_B-1)} & M_{r1N_B} - L_{bN_B} & -L_{e1} \\ M_{r21} - L_{b1} & L_{r2} & M_{r23} - L_{b3} & \dots & M_{r2(N_B-1)} & M_{r2N_B} & -L_{e2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{r(N_B-1)1} & M_{r(N_B-1)2} & M_{r(N_B-1)3} & \dots & L_{r(N_B-1)} & M_{r(N_B-1)N_B} - L_{bN_B} & -L_{e(N_B-1)} \\ M_{rN_B1} - L_{b1} & M_{rN_B2} & M_{rN_B3} & \dots & M_{rN_B(N_B-1)} - L_{b(N_B-1)} & L_{rN_B} & -L_{eN_B} \\ -L_{e1} & -L_{e2} & -L_{e3} & \dots & -L_{e(N_B-1)} & -L_{eN_B} & \sum_{i=1}^{N_B} L_{ei} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Најважније субматрице индуктивности су оне које описују спрегу између статора и ротора, пошто се помоћу њих описује доминантна компонента оствареног електромагнетног момента, а у случају идеализоване представе машине у којој се занемарују варијације статорско-статорских и роторско-роторских индуктивности и једина компонента. Такође се и механизам индуковања напона у роторским проводницима доминантно ослања на спрегу са статорским намотајима. Ове субматрице, за разлику од претходно дефинисаних, су сложенопериодичне функције положаја ротора (претходне матрице су функција положаја ротора само у случају ако се варијације магнетне пермеабилности као последица постојања жљебова или сатурације узму у обзир. Статорско-статорске и роторско-роторске индуктивности се врло често сматрају константним, а уважавање утицаја жљебова доводи до утискивања малих варијација око средње, тј. константне вредности), а због симетричног просторног распореда намотаја на статору и ротору, у нормалним погонским стањима (када није дошло до појаве ексцентритета или кратког спајања одређеног дела неког од статорских намотаја) сви елементи у матрици имају исти таласни облик, уз унапред дефинисан међусобни фазни померај (ово не важи за елементе који описују спрегу између петље краткоспојног прстена и статорских намотаја. Та магнетна спrega је практично занемарљива). Форма статорско-роторске субматрице је дата релацијом (3.11), док се због симетрије роторско-статорска матрица добија транспоновањем. О таласним облицима, спектру појединих елемената матрица индуктивности и избору погодног начина њиховог представљања ће више бити речи у наредним одељцима овог поглавља.

$$\mathbf{L}_{sr} = \begin{bmatrix} M_{ar1} & M_{ar2} & \dots & M_{arN_B} & 0 \\ M_{br1} & M_{br2} & \dots & M_{brN_B} & 0 \\ M_{cr1} & M_{cr2} & \dots & M_{crN_B} & 0 \end{bmatrix}_{(N_B+1)}, \quad \mathbf{L}_{rs} = \mathbf{L}_{sr}^T \quad (3.11)$$

Оно што је потребно напоменути након излагања о форми матрица отпорности и индуктивности јесте да се у њима налазе елементи од којих се већина може израчунати применом дводимензионалне имплементације методе коначних елемената, али да су за неке потребни додатни прорачуни, било применом тродимензионалне имплементације методе, било коришћењем неких емпиријских

образаца. Наравно, реч је о параметрима краткоспојних прстенова и оних делова статорских намотаја који нису смештени у жљобовима, у првом реду је дакле реч о расипним индуктивностима бочних веза намотаја. У транзијентној анализи методом коначних елемената се ти делови третирају као екстерно купловани региони са оним који се прекрива мрежом коначних елемената, док се у моделу који се заснива на електричним колима и једначинама напонске равнотеже они могу просто додати на елементе прорачунате дводимензионалном формулацијом. Већ је помињано да су то по правилу врло мале и константне величине (јер се расипање флукса на њима углавном манифестује кроз ваздух, дакле у линеарној средини), тако да не утичу доминантно на процес конверзије и таласне облике величина, тако да се њихове вредности врло често могу накнадно уважити кориговањем одзива у поређењу са експериментално добијеним резултатима. Најчешће је довољно ускладити њихове вредности поређењем статорских струја. Пошто је примарни циљ овог истраживања прецизна спектрална слика статорских струја у разним режимима експлоатације машина, како у нормалним погонским стањима, тако и у случају настанка неких конкретних кварова, јасно је да елементи као што су реактансе расипања бочних веза занемарљиво утичу на те феномене.

За крај излагања о основном математичком моделу кавезне асинхроне машине су остављене релације такозваног механичког подсистема и начина на који долази до настанка момента конверзије. У излагању о методи коначних елемената је наведено да постоји више начина на који се може израчунати електромагнетни моменат ротационог кретања, где се у транзијентној анализи најчешће користе Максвелови напони. За њихово израчунавање је потребно познавање вектора магнетске индукције у ваздушном зазору, што је очигледно немогуће урадити ако се машина моделује искључиво преко спрегнутих електричних кола. Због тога је код њих изузетно корисно и атрактивно користити такозвану методу виртуелних помераја, која се заснива на израчунавању промене магнетне енергије у домену од интереса, ако се покретном делу дозволи мали прираштај координате по којој има слободу кретања. Пошто је увођењем индуктивности складиштење магнетне енергије додељено дискретним елементима, уместо традиционалне представе акумулације енергије у самом пољу, имплементација методе виртуелних помераја за случај ротационог кретања се своди на примену познате релације (3.12). Са T_e је означен електромагнетни моменат, p представља број пари полова, а ϑ је електрични угао тренутног положаја ротора. Математичком моделу се мора придодати и Њутнова једначина за случај ротационог кретања (3.13), где је са T_m означен моменат оптерећења (у који се могу урачунати и механички губици машине), J је укупни моменат инерције покретног дела погона, а ω_m представља тренутну вредност механичке угаоне брзине.

$$T_e = \frac{1}{2} p \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix}^T \frac{d}{d\vartheta} \left(\begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$T_e - T_m = J \frac{d\omega_m}{dt} \quad (3.13)$$

Избором нивоа детаљности којима се израчунава матрица индуктивности машине се одређује и колики је утицај појединих њених субматрица. Ако се занемари утицај жљебова и нелинеарности на модулисање тренутних вредности индуктивности, тада у процесу конверзије учествују искључиво статорско-роторске, односно роторско-статорске субматрице. Ако се притом занемари утицај виших хармоничких чланова у њима, та занемаривања представљају почетне кораке за упрошћавање основног модела применом познатих трансформација.

3.3 Утицај спреге статорских намотаја

Математички модел представљен у претходном поглављу није узимао у обзир начин на који се напон доводи статорским намотајима, односно није вођено рачуна о начину повезивања статорских фаза међусобно. Као што је познато, избором спреге намотаја се директно утиче на спектар статорских струја, односно на могућност успостављања струја виших хармоника одређеног реда, како у самим намотајима, тако и у струјама које мотор повлачи из мреже. Избором спреге намотаја се значајно утиче и на имплементацију напредних метода заштите које штите мотор приликом појаве кварова, или инсталације опреме којом се врши надзор над погоном. Због тога је важно посветити пажњу овом феномену приликом моделовања електричних машина, нарочито када се истражују могућности примене модела у истраживању метода за поуздано откривање кварова.

Ако су статорски намотаји спрегнути у троугао, практично не постоји никакво ограничење за успостављање струја вишег хармонијског реда у њима, док се струје које мотор повлачи из мреже могу добити њиховим векторским збрајањем, што наравно доводи до тога да се спектар струја које мотор у тој спрузи повлачи из мреже може осетно разликовати од струја које протичу кроз саме намотаје. Свака од струја у фазним намотајима независно (у смислу ограничења наметнутим конститутивним релацијама спреге, односно једначинама по првом Кирхофовом закону) тече од струја у осталим фазама, те оне тада представљају три независне променљиве. Стога се, за случај спреге статорских намотаја троугао не захтева никаква модификација релација напонске равнотеже приказаних у претходном одељку поглавља.

Приликом спрезања статорских намотаја у спрегу звезда уводи се зависност међу статорским струјама, из простог разлога што се звездиште мотора практично никада не уземљује, чиме се намеће услов да у сваком тренутку збир струја намотаја буде једнак нули (3.14).

$$i_a + i_b + i_c = 0 \quad (3.14)$$

Постаје очигледно да струје више не могу бити међусобно независне, те је потребно уважавање спреге статорских намотаја у једначинама напонске равнотеже намотаја статора, али и ротора, због постојања магнетне спреге међу њима. Ако се усвоји да се струја у фази c изрази преко струја у друге две фазе, једначине за флуksне обухвате статорских, односно роторских намотаја (пошто је речено да се

оправдано занемарују спреге између статорских намотаја и петље краткоспојног прстена, приказаће се једначине флуксних обухвата намотаја по форми обухваћених утицајем спреге) се могу приказати следећим релацијама:

$$\begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a & M_{ab} & M_{ac} \\ M_{ba} & L_b & M_{bc} \\ M_{ca} & M_{cb} & L_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ -i_a - i_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ar1} & M_{ar2} & \dots & M_{arN_B} \\ M_{br1} & M_{br2} & \dots & M_{brN_B} \\ M_{cr1} & M_{cr2} & \dots & M_{crN_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{rl1} \\ \vdots \\ i_{rlN_B} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{rl1} \\ \Psi_{rl2} \\ \vdots \\ \Psi_{rl(N_B-1)} \\ \Psi_{rlN_B} \\ \Psi_e \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{rr} \begin{bmatrix} i_{rl1} \\ i_{rl2} \\ \vdots \\ i_{rl(N_B-1)} \\ i_{rlN_B} \\ i_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ar1} & M_{ar2} & \dots & M_{arN_B} & 0 \\ M_{br1} & M_{br2} & \dots & M_{brN_B} & 0 \\ M_{cr1} & M_{cr2} & \dots & M_{crN_B} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ -i_a - i_b \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Даљим сређивањем се од релације (3.15) добија (3.17), а сличним поступком се од релације (3.16) добија релација (3.18).

$$\begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a - M_{ac} & M_{ab} - M_{ac} \\ M_{ba} - M_{bc} & L_b - M_{bc} \\ M_{ca} - L_c & M_{cb} - L_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ar1} & M_{ar2} & \dots & M_{arN_B} \\ M_{br1} & M_{br2} & \dots & M_{brN_B} \\ M_{cr1} & M_{cr2} & \dots & M_{crN_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{rl1} \\ \vdots \\ i_{rlN_B} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{rl1} \\ \Psi_{rl2} \\ \vdots \\ \Psi_{rlN_B} \\ \Psi_e \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{rr} \begin{bmatrix} i_{rl1} \\ i_{rl2} \\ \vdots \\ i_{rlN_B} \\ i_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ar1} - M_{cr1} & M_{ar2} - M_{cr2} & \dots & M_{arN_B} - M_{crN_B} \\ M_{br1} - M_{cr1} & M_{br2} - M_{cr2} & \dots & M_{brN_B} - M_{crN_B} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Оваквом изменом релација се уважава спрега статорских намотаја, чиме се на правилан начин, кроз једначине система, ограничава појава појединих компоненти у спектру статорских струја, што доводи до ваљаних резултата у симулацијама. Битно је напоменути да другог начина уважавања овог феномена у једначинама напонске равнотеже нема, о чему није вођено довољно рачуна у постојећој литератури. Овим изменама се ред система једначина смањује за један, те се након израчунатих струја у два статорска намотаја струја у преосталој фази добија применом релације (3.14).

Сличним поступком се може уважити и било каква друга повезаност статорских намотаја, укључујући и испад фазе, чиме се може моделовати са хармонијског

аспекта и такав екстреман случај у раду машине. Такође, познато је да се у погонима са моторима који се напајају из претварача енергетске електронике користе и разне имплементације брзог заустављања погона успостављањем једносмерне струје кроз намотаје, што се може урадити на више начина, међу којима се користи напајање само једне, две или све три фазе, при чему се напајање све три фазе једносмерном струјом може извести на више различитих начина. Сваки од тих сценарија се може описати увођењем додатних релација у којима се описује повезаност намотаја, на веома сличан начин као што је то урађено приликом извођења релације за спрегу намотаја звезда.

3.4 Израчунавање индуктивности кавезне асинхроне машине

Математички модел електричних машина заснован на вишеструко спрегнутим електричним колима захтева познавање свих сопствених и међусобних индуктивности машине. Један од познатих начина мерења индуктивности је напајање намотаја наизменичним струјама, уз отворене све остале намотаје, где се посредством мерења индукованих електромоторних сила у напајаном и осталим намотајима могу лако израчунати тражене индуктивности. Међутим, експериментално утврђивање њихових вредности за случај кавезних асинхроних машина је практично немогуће. Наиме, да би се измерила нека сопствена или међусобна индуктивност, потребно је обезбедити напајање на тај начин да се у флуksном обухвату текућег намотаја појави само компонента која је последица сопствене индуктивности, а да се у свим осталим намотајима флуksни обухвати састоје само од компоненти који потичу од спреге са напајаним намотајем. Проблем са овим приступом је што се приликом напајања текућег намотаја извором наизменичне струје индукују струје у роторским проводницима, јер је кавез машине кратко спојен. На тај начин струје у ротору доприносе флуksним обухватима осталих намотаја и тиме онемогућавају мерење сопствених и међусобних индуктивности. Делимично решење овог проблема је да се уместо ротора са формираним кавезним намотајем у машину уметне роторски пакет лимова без проводника (са становишта магнетских својстава је свеједно је ли роторски жљеб испуњен проводним неферромагнетним материјалом или ваздухом, наравно ако се онемогући индуковање струја у проводном материјалу), али се на тај начин могу измерити само индуктивности статорских намотаја. Ако би се желеле израчунати индуктивности роторског намотаја, као и статорско-роторске индуктивности (које су кључне за процес конверзије), морао би се направити роторски кавез који се по потреби може растављати и из делова уметати у роторске жљебове, тако да је могуће извести напајање само једне роторске петље. Јасно је да је овакав поступак изузетно технолошки компликован и скуп, те да би захтевао велики број мерења при различитом међусобном положају статора и ротора, те практично не долази у обзир као неко прихватљиво решење.

У тренутку настанка модела вишеструко спрегнутих електричних кола рачунарска техника није била на нивоу да је поседовала довољну процесорску моћ која би омогућавала масовнију примену методе коначних елемената за

израчунавање индуктивности машине. Штавише, сврха интензивније употребе методе вишеструко спрегнутих кола је у првом реду и била замишљена као алтернатива методи коначних елемената. Ипак, остало је отворено питање на који начин би се могле добити вредности потребне за формирање матрице индуктивности. Понуђено решење које је и данас у употреби се заснива на такозваном приступу примене функције намотаја (*WFA – Winding Function Approach* и *MWFA – Modified Winding Function Approach*)[19]-[26]. Основне претпоставке за примену ове методе су усвајање идеалне цилиндричности ваздушног зазора (за примену WFA, док се MWFA управо разликује по томе што се у њој покушавају уважити варијације облика ваздушног зазора као последица постојања жљебова), те бесконачно велике пермеабилности феромагнетских лимова. Потребно је познавати конфигурацију намотаја машине, да би се помоћу ње могао конструисати таласни облик магнетопобудне силе намотаја (као што се то чини у класичним методама анализе таласних облика магнетних величина у ваздушном зазору), те на основу ње се лако може израчунати јачина магнетног поља у ваздушном зазору, односно вектор магнетске индукције. Из познате просторне расподеле вектора магнетске индукције и конфигурације појединих намотаја се могу израчунати флуksни обухвати, а на крају из њих и жељене сопствене и међусобне индуктивности.

Примена ове методе има бројне недостатке, који се нажалост огледају у њеној непрецизности. Прво, реконструисање таласног облика магнетопобудне силе као последица побуђивања одређеног намотаја струјом се изводи усвајањем скоковитих промена у таласном облику увођењем претпоставке да је струја у одређеном жљебу концентрисана на једном месту. Мала корекција овог проблема се може извршити увођењем линеарне промене магнетопобудне силе по ширини жљеба кроз који протиче наметнута струја, али такав приступ не илуструје довољно прецизно облик жљеба и његов утицај на таласни облик магнетопобудне силе. Такође, ако се ваздушни зазор не може сматрати врло танким и идеално цилиндричним, грешке које притом настају бивају још веће, јер се приступом који подразумева директно пресликавање магнетопобудне силе у јачину магнетског поља занемарује чињеница да се линије магнетног поља значајније криве у ваздушном зазору који тада није веома узак, па се на тај начин не узимају у обзир значајније тангенцијалне компоненте поља у зазору, као што је на пример цик-цак расипни флуks, који се затвара између зубаца, тангенцијално. Сличан проблем се има и када се ова метода покушава применити на синхроне машине са сталним магнетима, било да је реч о површински монтираним или утиснутим магнетима [27]. Наравно, и код класичних синхроних машина са израженим магнетским половима се такође јавља сличан проблем.

Модификовани приступ примене методе функције намотаја, MWFA [17], [28], [29], покушава да уважи варијацију облика ваздушног зазора услед постојања жљебова, увођењем такозване инверзне функције ширине ваздушног зазора којом се множи магнетопобудна сила да би се добио веродостојнији таласни облик вектора јачине магнетског поља у зазору. Мада овај приступ у одређеној мери уноси очекивани хармонијски садржај у таласне облике магнетног поља у ваздушном зазору, он је по правилу недовољно прецизан из разлога што се варијација ширине ваздушног зазора моделује множењем ширине идеално цилиндричног зазора тригонометријским функцијама које зависе од тренутног положаја ротора, уз

најчешће уважавање врло малог броја тригонометријских функција (тима се недовољно прецизно моделује периодична варијација таласног облика зазора, која је далеко од простопериодичне).

Две поменуте методе такође не уважавају утицај неравномерне расподеле вектора густине струје по дубини роторског жљеба у кавезним машинама, што се директно огледа у промени тренутне вредности отпорности роторских шипки у функцији тренутне брзине, односно клизања. Такође, због компликованог начина уважавања варијација ширине ваздушног зазора се често занемарује утицај те варијације на сопствене и међусобне индуктивности статорског намотаја, које се готово увек проглашавају константним [30] (ако се не уважава засићење феромагнетског језгра). Због овог занемарења се погрешно тумаче и резултати симулација које имају за циљ анализу утицаја који доводе до појаве жљебних хармоника у спектру статорских струја. За потребе овог истраживања су израђени асинхрони мотори са различитим степеном закошења роторских проводника, а све са циљем анализе утицаја конструкције на варијацију свих индуктивности у машини. Показаће се да варијације статорских индуктивности, мада врло мале, ни у ком случају не би смеле бити занемарене, а нарочито у ситуацијама када је машина врло мало оптерећена, будући да је хармонијски спектар статорских струја тада доминантно зависан од конфигурације статорских намотаја и варијације статорских индуктивности, јер је реакција ротора на расподелу магнетног поља врло мала због малих струја у роторском кавезу.

Након представљања математичког модела трофазне кавезне асинхроне машине, коначно се може приступити описивању поступка израчунавања индуктивности машине применом методе коначних елемената. Детаљно су дискутоване различите имплементације методе коначних елемената помоћу којих се могу моделовати различити режими рада електричних машина. За потребе израчунавања индуктивности је најподесније користити магнетостатичке симулације у којима се побуђује одређени намотај и то једносмерном струјом, па се на основу израчунатих флуksних обухвата израчунавају сопствене и међусобне индуктивности. Због зависности индуктивности од тренутног положаја ротора потребно је урадити већи број симулација за различите положаје ротора, што се може урадити на ефикасан начин, коришћењем симетрије машине.

Оно што је важно узети у обзир је и начин на који ће се добијени резултати интерпретирати за потребе динамичког модела. Сличан проблем постоји и приликом примене WFA и MWFA метода. У практично свим радовима на ову тему се индуктивности представљају преко низа одбирака, који се за потребе рачунарских симулација користе у виду такозваних lookup табела, које доводе до дискретизације феномена електромеханичке конверзије, који је по својој природи континуалан, као и саме индуктивности. У овом истраживању ће се прибећи другачијем приступу, који је са становишта проблема природнији и боље осликава феномене у електричној машини [25].

Приступ се заснива на чињеници да су све индуктивности у ротационој машини периодичне функције положаја ротора (било због промене релативног положаја намотаја међусобно, када је реч о статорско-роторским индукностима, било као последица варијације облика ваздушног зазора, када је реч о осталим

индуктивностима), те се стога одбирци добијени дискретним магнетостатичким симулацијама могу представити преко коефицијената Фуријеовог развоја у ред. Нека се разматра периодична функција $f(x)$ са основном периодом 2π . Таква функција се може представити преко суме у облику Фуријеовог реда (3.19), док је дефиниција коефицијената реда дата релацијом (3.20).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx) \quad (3.19)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx \quad (3.20)$$

Проблем са резултатима добијеним магнетостатичким симулацијама се огледа у томе што су добијене вредности дискретне, те се на њих не може применити развој у Фуријеов ред који је дефинисан за континуалне функције. Један начин превазилажења овог проблема је да се покуша са представљањем одбирака применом дискретне Фуријеове трансформације (DFT), али се у овом истраживању прибегло поступку који више одговара природи индуктивности, које су по дефиницији континуалне вредности.

Предложено решење јесте да се одбирци применом линеарне интерполације представе као континуалне функције. Ако се уоче два текућа одбирка $(n-1)$ и n одређене индуктивности $L(\vartheta)$, где је са ϑ означен електрични угао релативног положаја ротора у односу на статор $(\vartheta^{n-1}, L^{n-1})$ и (ϑ^n, L^n) , линеарна интерполација функције индуктивности која је валидна на интервалу $(\vartheta^{n-1}, \vartheta^n)$ се може представити релацијом (3.21).

$$L(\vartheta) = L^{n-1} + (L^n - L^{n-1}) \frac{\vartheta - \vartheta^{n-1}}{\vartheta^n - \vartheta^{n-1}}, \vartheta \in (\vartheta^{n-1}, \vartheta^n) \quad (3.21)$$

Низ одбирака одређене индуктивности $L = \{L^1, L^2, \dots, L^{k-1}, L^k\}$ одабираних у тренуцима $\vartheta = \{\vartheta^1, \vartheta^2, \dots, \vartheta^{k-1}, \vartheta^k\}$ се у сваком интервалу $(\vartheta^{i-1}, \vartheta^i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ интерполира применом релације (3.21).

Да би предложени метод веродостојно приказао индуктивности машине, потребно је урадити довољан број магнетостатичких симулација, о чему ће бити више речи када се буде разрађивао модел за конкретну машину. Проблем који треба апрострофирати је и чињеница да функција која се састоји из делова линеарних сегмената није диференцијабилна у свим тачкама (подсећања ради, у поглављу о нелинеарним магнетостатичким симулацијама је било речи о начину представљања криве реципрочне вредности релативне пермеабилности из делова сегмената, који су за потребе методе коначних елемената моделовани преко полинома трећег степена, управо због потребне двоструке диференцијабилности), али се тај проблем превазилази диференцирањем чланова Фуријеовог реда, што је још једна велика предност коришћења овог приступа.

Применом овог поступка се коначно могу дефинисати изрази за развој у Фуријеов ред свих индуктивности машине. Познато је и да су таласни облици индуктивности за различите фазе статорских намотаја исти, али просторно померени у складу са начином формирања самих намотаја зарад постизања феномена обртног поља. Због тога је довољно израчунати индуктивности само једне статорске фазе, док се индуктивности осталих фаза могу просто добити применом фазног померања (наравно, када је реч о исправној машини).

Ако се, на пример, сопствена индуктивност статорске фазе а добије из серије магнетостатичких симулација, а затим представи развојем у Фуријеов ред (3.22), исти чланови реда се могу корисити и за представљање сопствених индуктивности преостале две фазе, што је приказано релацијама (3.23)-(3.24).

$$L_a(\vartheta) = L_{ss0} + \sum_{n=1}^{\infty} L_{ssan} \cdot \cos(n\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} L_{ssbn} \cdot \sin(n\vartheta) \quad (3.22)$$

$$L_b(\vartheta) = L_{ss0} + \sum_{n=1}^{\infty} L_{ssan} \cdot \cos\left(n\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} L_{ssbn} \cdot \sin\left(n\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (3.23)$$

$$L_c(\vartheta) = L_{ss0} + \sum_{n=1}^{\infty} L_{ssan} \cdot \cos\left(n\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} L_{ssbn} \cdot \sin\left(n\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (3.24)$$

Истим поступком се из израза за међусобну индуктивност две фазе статорског намотаја могу добити и остале две међусобне индуктивности, што је илустровано релацијама (3.25)-(3.27).

$$M_{ab}(\vartheta) = M_{ss0} + \sum_{n=1}^{\infty} M_{ssan} \cdot \cos(n\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} M_{ssbn} \cdot \sin(n\vartheta) \quad (3.25)$$

$$M_{ac}(\vartheta) = M_{ss0} + \sum_{n=1}^{\infty} M_{ssan} \cdot \cos\left(n\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} M_{ssbn} \cdot \sin\left(n\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (3.26)$$

$$M_{bc}(\vartheta) = M_{ss0} + \sum_{n=1}^{\infty} M_{ssan} \cdot \cos\left(n\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} M_{ssbn} \cdot \sin\left(n\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (3.27)$$

На сличан начин се могу извести и изрази за међусобну индуктивност између статорских фаза и роторских петљи. Наиме, ако се из магнетостатичких симулација израчуна међусобна индуктивност између статорске фазе а и роторске петље 1, а затим представи преко Фуријеовог реда (3.28), међусобна индуктивност између било које статорске фазе и било које роторске петље k , где је $k = 1, \dots, N_B$, се може добити применом израза (3.29)-(3.31), где је $\alpha = \frac{2\pi p}{N_B}$. Важно је приметити и да међусобне индуктивности статор-ротор немају средњу вредност, пошто је реч о правим сложенопериодичним функцијама.

$$M_{aR_1}(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{sran} \cdot \cos(n\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} M_{srbn} \cdot \sin(n\vartheta) \quad (3.28)$$

$$M_{aR_k}(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} M_{sran} \cdot \cos n(\vartheta - (k-1)\alpha) + \\ M_{srbn} \cdot \sin n(\vartheta - (k-1)\alpha) \end{array} \right\} \quad (3.29)$$

$$M_{bR_k}(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} M_{sran} \cdot \cos n\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} - (k-1)\alpha\right) + \\ M_{srbn} \cdot \sin n\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} - (k-1)\alpha\right) \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

$$M_{cR_k}(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} M_{sran} \cdot \cos n\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3} - (k-1)\alpha\right) + \\ M_{srbn} \cdot \sin n\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3} - (k-1)\alpha\right) \end{array} \right\} \quad (3.31)$$

Описаним поступком се могу приказати и роторске индуктивности, а периодичност и фазни померај у индуктивностима због конструкције кавезног ротора су у овом случају од још значајније користи, будући да је број сопствених и међусобних индуктивности у роторском кавезу изузетно велик ($N_B \times N_B$). Потребно је из магнетостатичких симулација израчунати сопствену индуктивност једне роторске петље да би се помоћу ње могле изразити све остале сопствене индуктивности, што је илустровано релацијама (3.32) и (3.33).

$$L_{l1}(\vartheta) = L_{rr0} + \sum_{n=1}^{\infty} L_{rran} \cdot \cos(n\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} L_{rrbn} \cdot \sin(n\vartheta) \quad (3.32)$$

$$L_{lk}(\vartheta) = L_{rr0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} L_{rran} \cdot \cos n(\vartheta - (k-1)\alpha) + \\ L_{rrbn} \cdot \sin n(\vartheta - (k-1)\alpha) \end{array} \right\} \quad (3.33)$$

Када се из симулација израчунају међусобне индуктивности једне роторске петље према свим осталим роторским петљама, на основу тих ($N_B - 1$) индуктивности се могу израчунати све остале међусобне индуктивности између било које две роторске петље. Ако се, на пример, израчуна међусобна индуктивност између роторских петљи j и k , њена представа помоћу Фуријеовог реда (3.34) се може користити и за представљање било које друге међусобне индуктивности намотаја l и m , за које важи да су у истом релативном положају у роторском кавезу, што се може дефинисати кроз услов $|j - k| = |l - m|$. Ово је илустровано релацијом (3.35).

$$M_{rjk}(\vartheta) = M_{|j-k|0} + \sum_{n=1}^{\infty} M_{|j-k|an} \cdot \cos(n\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} M_{|j-k|bn} \cdot \sin(n\vartheta) \quad (3.34)$$

$$M_{rlm}(\vartheta) = M_{|j-k|0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} M_{|j-k|an} \cdot \cos n(\vartheta - (l-j)\alpha) + \\ M_{|j-k|bn} \cdot \sin n(\vartheta - (l-j)\alpha) \end{array} \right\} \quad (3.35)$$

Приказаним поступком се у потпуности реконструише матрица индуктивности машине, на начин који је изузетно практичан за рачунарску имплементацију динамичког модела. Представом помоћу Фуријеових редова се може изабрати до ког нивоа детаљности се саме индуктивности користе у моделу, а такође се и селективним укључивањем или искључивањем појединих чланова Фуријеовог реда може нумерички истражити које варијације индуктивности имају доминантан утицај на неке феномене у електричним машинама, као што су на пример појава жљебних хармоника у статорским струјама, компоненте везане за појаву кварова у роторским шипкама, ексцентритетима, кратким спојевима између навојака статорских намотаја и слично.

3.4.1 Утицај закошења роторских проводника на индуктивности машине

Приказан поступак добијања коефицијената Фуријеовог реда остаје на снази и када је ротор машине изведен са одређеним степеном закошења, само што је тада потребно на неки начин уважити то закошење пре самог развоја у ред. Закошење проводника се у принципу може тачно урачунати једино у случају примене тродимензионалне имплементације методе коначних елемената, што је прилично захтеван и компликован нумерички поступак. Просторни модел машине захтева формирање тродимензионалне мреже коначних елемената, најчешће тетраедара, чији је број драстично већи од броја троугаоних сегмената у дводимензионалној имплементацији методе, самим тим је и број чворова мреже у којој се решавају потенцијали већи, док сами потенцијали постају зависни од све три просторне координате. Смањење броја чворова за формирање тродимензионалне мреже би довело до губитка прецизности, што је нарочито осетљив проблем када се модел развија са циљем анализе виших хармоничких чланова у спектру статорских струја, што је случај у овом истраживању. Број једначина по чворовима мреже је драматично већи од дводимензионалне методе, а и саме једначине су компликованије. Више није могуће користити просту линеарну интерполацију за добијање вредности магнетског вектор потенцијала унутар коначног елемента, а успут треба напоменути и да је фитовање криве инверзне релативне пермеабилности феромагнетског материјала потенцијално компликованије.

Закошење се у матрицама индуктивности може уважити увођењем појма подужне индуктивности L' (по јединици дужине пакета лимова), која је функција како положаја ротора, тако и позиције по осној дужини пакета лимова $\epsilon \in [0, l]$ [31]:

$$L'(\vartheta, \epsilon) = \frac{L(\vartheta + \epsilon \frac{\gamma}{l})}{l}, \quad (3.36)$$

где је са ϑ означен угао закошења роторских проводника, док је са L означена индуктивност добијена применом дводимензионалних магнетостатичких симулација. Вредност индуктивности са уважавањем закошења, означеној са $L_z(\vartheta)$ се затим може добити применом обрасца (3.37):

$$L_z(\vartheta) = \int_0^l L'(\vartheta, \epsilon) d\epsilon. \quad (3.37)$$

На овај начин се добија усредњено уважавање ефекта закошења роторских проводника, односно његовог утицаја на таласне облике индуктивности машине. То је свакако мање детаљно од тродимензионалног моделовања, али са друге стране пружа могућност делимичног уважавања ефекта закошења на свеобухватне перформансе машине. Исправност овог приступа ће бити верификована поређењем рачунарских симулација на развијеном математичком моделу са резултатима добијеним експерименталним путем.

3.4.2 *Уважавање ефекта засићења на тренутне вредности индуктивности машине*

Утицај засићења на индуктивности машине је изузетно тешко правилно узети у обзир, највише из разлога што се дати феномен значајно разликује од засићења у статичким уређајима у којима главни ток магнетног поља не мења правац. У статичким уређајима цео домен феромагнетског материјала симултано улази у засићење, док је код ротационих машина, због постојања обртног поља, тај ефекат зависан од тренутног положаја просторног вектора обртног поља. Предложена решења овог проблема се заснивају или на примени транзијентне анализе методом коначних елемената [32]-[34], или накнадним модификовањем МССА модела узимајући у обзир неке експерименталне резултате [35].

Транзијентна анализа, мада најдетаљнија, најчешће није добро решење за истраживање ефекта засићења, највише због чињенице да је изузетно нумерички захтевна, па самим тим и изискује много времена, што је често јак ограничавајући фактор. Стога су се неки аутори определили за модификовање МССА модела уважавањем ефекта засићења на основу експериментално добијених резултата. Наиме, експериментима се покушава доћи до вредности индуковане електромоторне силе у намотајима машине, те се поређењем њене вредности са вредношћу добијеном симулацијама на линеарном МССА моделу добијају корекциони фактори којима се модификује инверзна функција ширине ваздушног зазора. Та коригована вредност се затим користи у MWFA приступу израчунавања индуктивности [36], [20]. Модификована инверзна функција ширине ваздушног зазора g_s је дата изразом:

$$g_s = g' \left[1 - \rho \cos \left(2p(\vartheta - \vartheta_f) \right) \right], \quad (3.38)$$

где је са g' означена средња вредност инверзне функције ширине зазора, са ρ је означена амплитуда варијације ширине зазора услед сатурације, p означава број пари полова машине, а ϑ_f угао положаја просторног вектора обртног поља по ободу машине. У случају примене изотропних материјала, што се може рећи за лимове од којих се израђују језгра ротационих машина, ниво засићења у неком домену језгра је исти било да је он изложен магнетном пољу позитивне, или негативне вредности. Када се овоме придода и да је магнетно поље у наизменичним машинама обртно, постаје јасно да домен погођен највишим степеном засићења ротира на двоструко већој учестаности од самог обртног поља [37]-[38], што је очигледно из релације (3.38). Средња вредност инверзне функције ширине зазора g' се од средње вредности ширине у линеарној средини g_0 добија применом обрасца:

$$g' = g_0 \frac{3K_s}{K_s+2}, \quad (3.39)$$

док се амплитуда варијације ширине зазора услед сатурације ρ добија применом релације:

$$\rho = \frac{2(K_s-1)}{3K_s}. \quad (3.40).$$

Параметар сатурације K_s , коришћен у релацијама (3.39)-(3.40) је управо однос електромоторних сила добијених експериментом и симулацијама на линеарном МССА моделу:

$$K_s = \frac{E_{sat}}{E_{lin}}, \quad (3.41)$$

где је су са E_{sat} и E_{lin} означене експериментом, односно симулацијом утврђене вредности индуковане електромоторне силе статора, респективно. Усваја се да је за веродостојно добијање вредности електромоторне силе путем експеримента довољно применити следећи образац:

$$E_{sat} = U_a - (R_s + jX_{\gamma s})I_a. \quad (3.41)$$

Недостаци оваквог приступа се огледају у томе што се усваја да је модулација ширине ваздушног зазора засићењем довољно веродостојно описана само простопериодичном функцијом, те да је индукована електромоторна сила дефинисана преко параметара простих заменских шема машине довољно добра

представа сложеног феномена индуковања напона [39]. Такође, на овај начин се ефекат засићења на подједнак начин манифестује за све индуктивности у електричној машини, што ће се показати као сасвим нетачно тврђење.

Предлог новог приступа који ће се применити у овом истраживању се заснива на такозваној методи „замрзнутих пермеабилности“ [11], о којој је било речи приликом разрађивања методе коначних елемената у ранијим поглављима. Да би се избегла употреба захтевних транзијентних анализа, поново ће се прибећи анализи статичких домена побуђених простопериодичним струјама. Да би резултати били веродостојни, предлаже се да се прво ураде експерименти над физичком машином, са циљем добијања вредности статорских струја за различита оптерећења на вратилу, односно за различите брзине ротора. Тако добијене вредности струја се затим могу искористити као улазне величине потребне у статичким анализама методом коначних елемената.

Нужност примене методе „замрзнутих пермеабилности“ се огледа у чињеници да је приликом израчунавања индуктивности употребом магнетостатичких метода (које су коришћене приликом развоја линеарног модела машине) потребно познавати на који начин је дошло до засићења у машини у актуелном режиму, што је могуће утврдити једино ако се узму у обзир све величине које на то засићење утичу. Традиционални приступ у којем се за ниво засићења проглашава стање које се има у празном ходу машине је у потпуности погрешан, јер се тим приступом долази до закључка да се порастом оптерећења смањује засићење у машини, што уопште није тачно. Ова погрешна тврдња се заснива на закључцима која се изводе на основу разматрања које важе у пофазним еквивалентним шемама машина. Наиме, у њима напон на оточној грани, којом се моделује индуковање напона, пада како расте оптерећење машине, будући да се повећава пад напона на редној грани машине. У стварности до пада индукованог напона долази због повећања нивоа засићења, односно због смањења тренутних вредности индуктивности као последица истог [40]-[41]. То потврђују и транзијентне анализе спроведене над моделима машина, а такође и методе уважавања засићења које се заснивају на приступу изложеном на почетку овог одељка.

Реконструисање „замрзнутих пермеабилности“ ће се извршити применом time-harmonic симулација које ће као улазне параметре имати вредности статорских струја које одговарају одређеној брзини, односно оптерећењу, те фреквенцију која одговара клизању у текућем режиму рада. На тај начин ће се изазвати одговарајућа реакција ротора на магнетно поље наметнуто са стране статора, па ће и слика магнетног поља одговарати једном замрзнутом тренутку текућег режима рада. Ако се притом усвоји нелинеарност феромагнетског материјала, дата симулација ће као резултат дати и кориговане вредности магнетне пермеабилности у целом пресеку машине. Те се пермеабилности затим могу „замрзнути“, односно користити као константне вредности у магнетостатичким симулацијама које ће послужити за израчунавање коригованих вредности индуктивности машине. Остаје још само да се реши проблем како изазвати ротацију „замрзнутих пермеабилности“, са циљем постизања ефекта обртног поља. То је могуће урадити на два потпуно нова начина, који су развијени током овог истраживања.

Један приступ постизању ефекта обртног поља је да се за сваки жељени релативни положај ротора уради по једна статичка симулација побуђивањем наизменичним струјама, чије се замрзнуте тренутне вредности мењају тако да осликавају време које протекне преласком ротора из једног жељеног положаја у други. Пошто је реч о симулацијама у комплексном домену, ово се може врло лако урадити променом фазног става фазорима статорских струја. Након сваке симулације се затим замрзну тренутне вредности пермеабилности и помоћу њих се одради једна магнетостатичка симулација за потребе израчунавања индуктивности. Оваквим приступом се истовремено уважава и ефекат реакције ротора на резултантно магнетно поље, без којег нема правилног описивања феномена засићења. Једино је у случају симулација којима се описује режим сличан идеалном празном ходу (режим у којем практично нема значајнијих индукованих струја у ротору) могуће у потпуности занемарити реакцију ротора, што се прилично веродостојно може искористити за описивање режима реалног празног хода. Јасно је да је тада потребно наметнути статорске струје као једносмерне вредности, јер је у том случају учестаност роторских величина једнака нули. То се у принципу своди на серију магнетостатичких симулација у нелинеарној средини, где се за потребе сваке од симулација врши ротација за одређени угао (спрам жељене тачности) и истовремена промена вредности статорских струја.

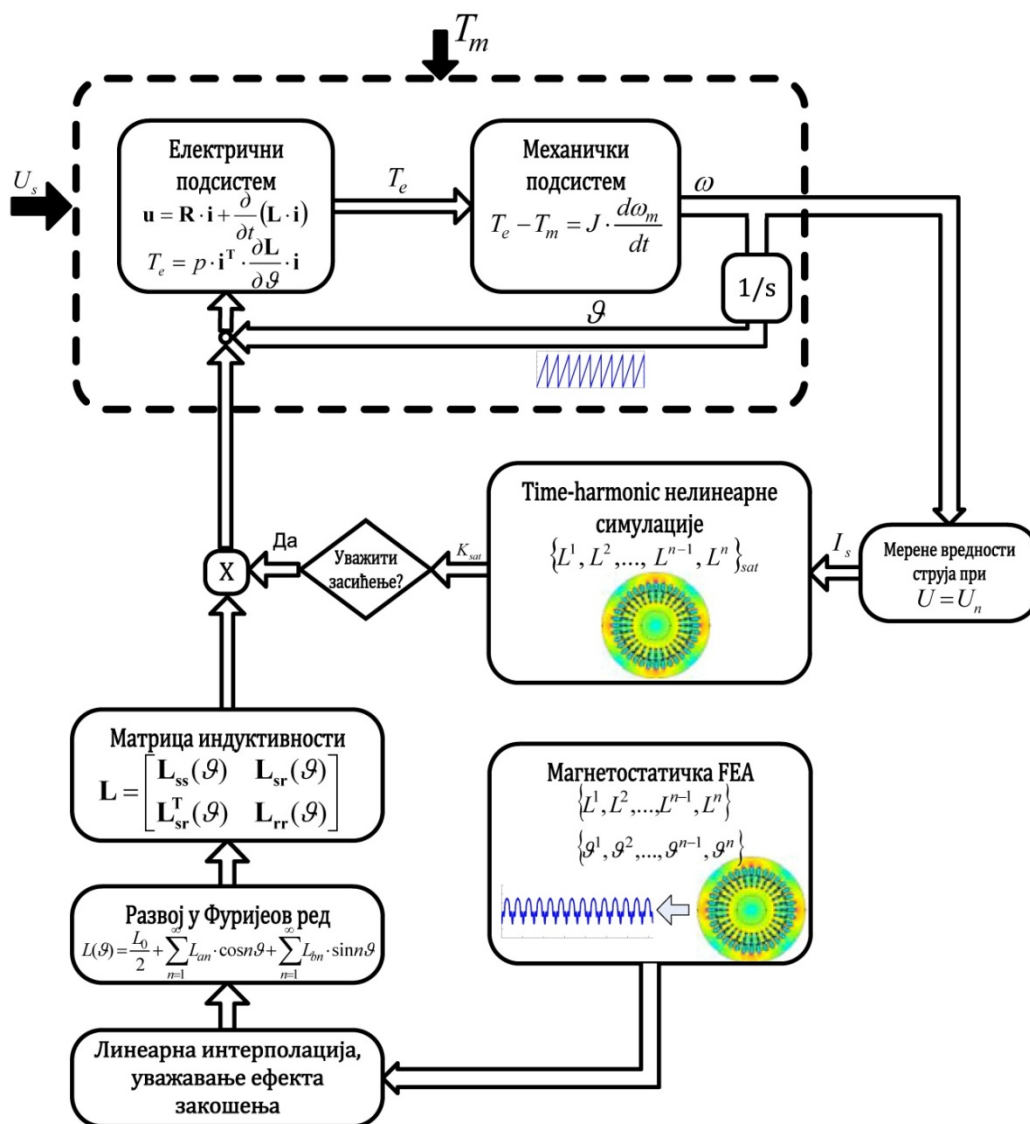
Други приступ је да се из једне статичке симулације побуђене наизменичним статорским струјама израчунају фазори индукованих струја у роторским проводницима (по потреби је могуће и поделити роторски проводник на „кришке“ по дубини жљеба, чиме се уважава и ефекат потискивања), те да се ти фазори заједно са фазорима статорских струја користе за серију магнетостатичких симулација. Прво би се урадила по једна магнетостатичка симулација за текући положај ротора за коју су узете тренутне вредности свих фазора статорских и роторских струја, са циљем постизања правилне расподеле поља, а самим тим и засићења у машини. Затим би се применило замрзавање пермеабилности за потребе магнетостатичке симулације за израчунавање тренутне вредности индуктивности.

Пошто је позната физичка брзина којом машина ротира у режиму који се жели истражити овим приступима, лако је утврдити промену фазних ставова свих фазора струја, а до којих долази током времена потребног да се ротор физичке машине помери из једног положаја у други. Од велике користи је и у овом случају симетрија машине, што значи да је потребно урадити онолико симулација колико је довољно да се реконструише само једна четвртинс периоде ротације обртног поља, што је за случај машине са више пари полова двоструко олакшање. Прво, због већег броја пари полова је довољно анализирати само једну „кришку“ попречног пресека машине, а уједно је и пут који талас обртног поља пређе у једној четвртини периоде сразмерно томе краћи. У овом истраживању је примењен први приступ реконструисања ефекта обртног поља, мада је у принципу свеједно који ће се од ова два приступа применити.

3.5 Блок шема новог динамичког модела кавезне асинхроне машине

Када се цео поступак формирања математичког модела прикаже графички, добија се блок шема предложеног динамичког модела трофазне кавезне асинхроне

машине. Оног тренутка када се из серије магнетостатичких симулација добију вредности појединих индуктивности и за различите положаје ротора израчунају коефицијенти Фуријеовог реда, математички модел за случај линеарне интерпретације постаје независан од методе коначних елемената. Матрица линеарних индуктивности се користи као улазни параметар у динамичком моделу, а њена интерпретација у виду нивоа детаљности њене представе се решава у подпроцедурама које су написане за потребе самог модела. Овако формиран модел у себи може да уважи и утицај закошења који је описан у претходном одељку, ако за тим има потребе. Кључна предност овако формираног математичког модела у односу на постојећа решења је та што се по потреби могу уважити или одбацити поједини чланови Фуријеовог развоја неких индуктивности и тиме директно утицати на брзину извршавања самих симулација. Такође, на тај начин се могу квантитативно истражити ефекти појединих виших хармоничких чланова на појаве у машини који се могу пратити кроз спектралну анализу статорских струја.



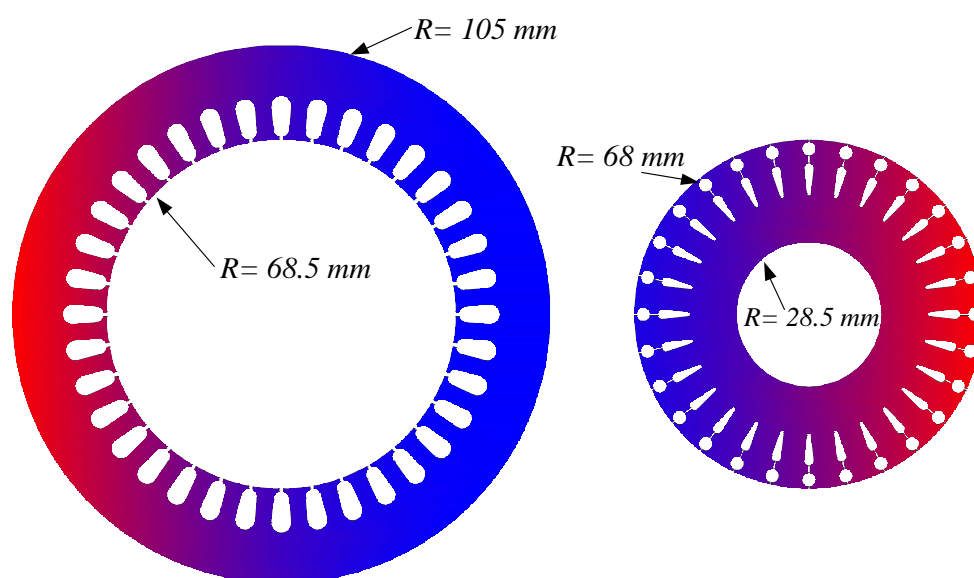
Слика 3.2 Блок шема динамичког модела машине

Модел добија на сложености ако се жели уважити и утицај zasiћења на тренутни режим рада. Ако се имплементација ограничи на услов при номиналном напону напајања, тада је пре имплементације динамичког модела потребно поред серије линеарних магнетостатичких симулација извршити и серију time-harmonic симулација у нелинеарним срединама, које као улазни параметар добијају тренутну вредност брзине која се прослеђује као излаз динамичког модела. У зависности од тренутне брзине се из скупа вредности струја намотаја статора, које су добијене експерименталним путем, бирају оне које одговарају тренутној брзини машине, па се из унапред урађених нелинеарних симулација за тај режим рада из постојеће базе података извлаче коефицијенти сатурације, којима се множи матрица индуктивности добијена магнетостатичким линеарним симулацијама.

3.6 Пример израчунавања индуктивности кавезне асинхроне машине

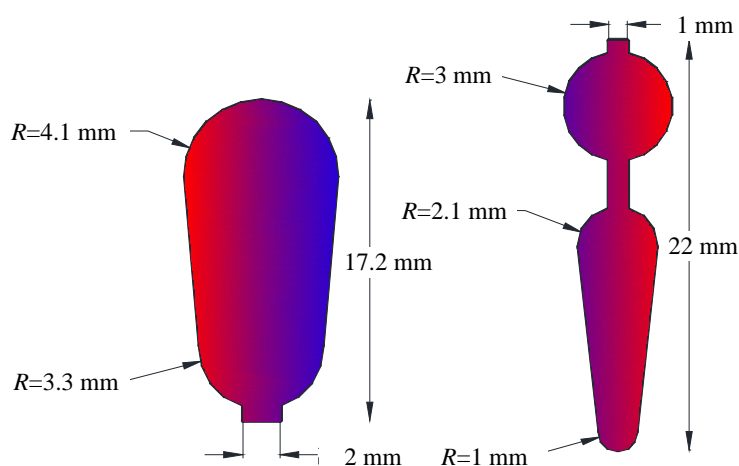
Предложени поступци за израчунавање индуктивности трофазне кавезне асинхроне машине ће се у овом одељку применити на конкретној машини, што ће уједно послужити и као припрема динамичког модела за верификацију, о којој ће више речи бити у наредном поглављу.

За потребе овог истраживања је израђена трофазна кавезна асинхрона машина о чијим карактеристикама ће се сада рећи нешто више. Статорски намотај је израђен као тетивни двослојни намотај, смештен у 36 жљебова. Број пари полова машине износи $p = 2$. На слици 3.3 је приказан попречни пресек статорског и роторског пакета лимова, са назначеним унутрашњим, односно спољашњим полупречницима. Са слике је очигледно и да је ширина ваздушног зазора 0.5 mm .

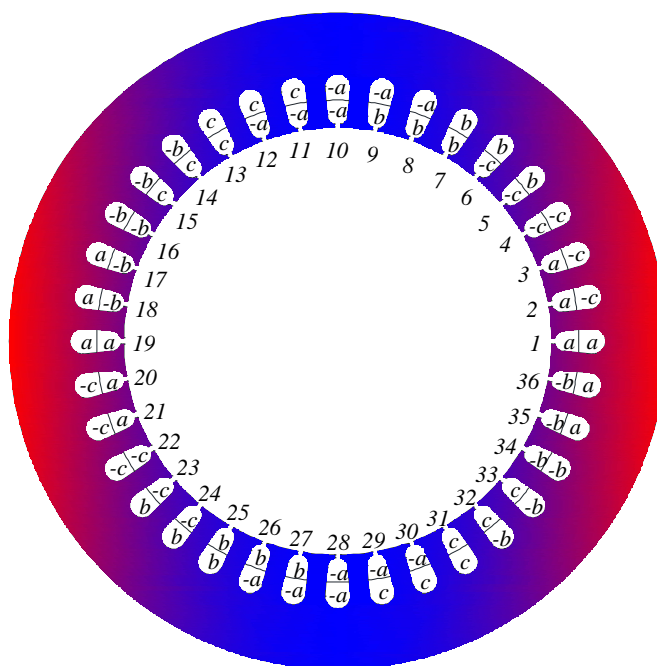


Слика 3.3 Димензије и попречни пресеци статорског и роторског пакета лимова

На слици 3.4 су приказани попречни пресеци статорског и роторског жљеба, са назначеним карактеристичним димензијама, док је на слици 3.5 приказана шема статорског трофазног четворополног намотаја, са кораком намотавања 7/9, односно на статору је примењено скраћење корака намотавања за два жљобна места. Очигледно је да је намотај изведен као двослојни, уз податак да је у једном статорском жљебу смештено укупно 26 проводника. Дужина статорског и роторског пакета лимова је подједнака и износи 205 mm. Машина је предвиђена за рад у спреси статорских намотаја троугао, при номиналном напону напајања од 400 V, уз фреквенцију од 50 Hz. Номинална струја мотора износи 22 A, а брзина 1454 o/min.

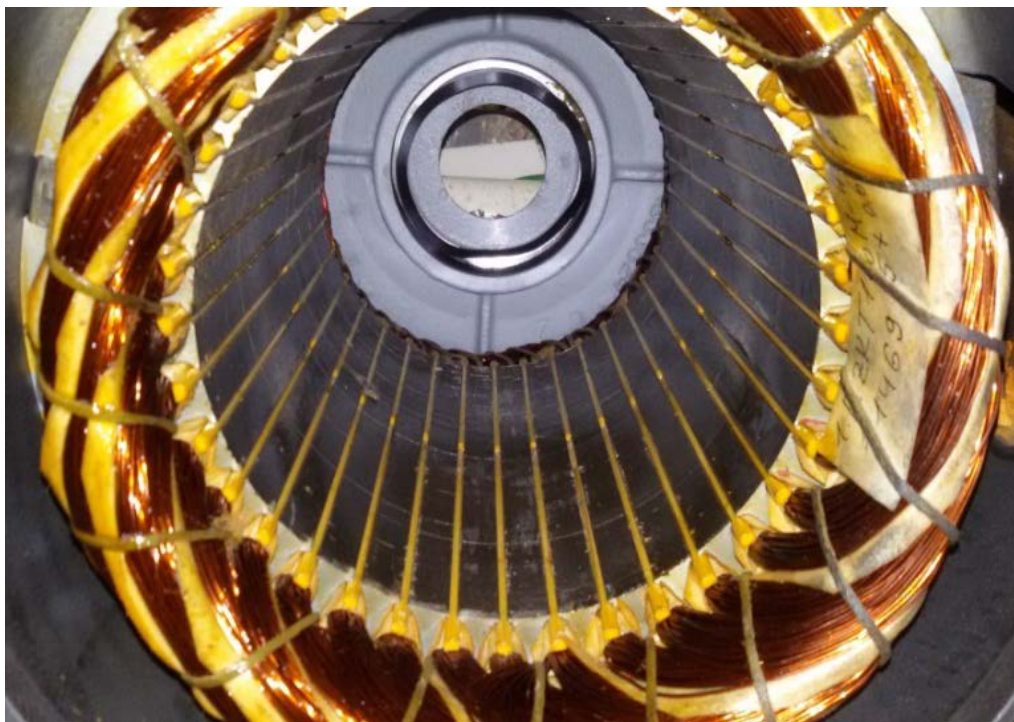


Слика 3.4 Попречни пресек жљеба статора и ротора



Слика 3.5 Шема трофазног статорског намотаја

Детаљ статорског намотаја је приказан на слици 3.6, на којој је дата фотографија машине без ротора, тако да је могуће уочити статорски пакет лимова и двослојни намотај смештен у жљебове.



Слика 3.6 Детаљ статорског пакета лимова и формираног двослојног тетивног намотаја

За потребе овог истраживања је израђена асинхрона машина са могућношћу уметања кавезних ротора са различитим степеном закошења роторских проводника. Израђене су и две врсте кавезних ротора, од којих је код једне примењено закошење проводника, док је друга врста израђена без закошења. Обе врсте кавезних ротора имају исти број жљебова (28) као и подједнаке димензије и облик феромагнетских лимова. На слици 3.7 је приказана фотографија поменути два типа кавезних ротора, где је код једног (на фотографији горе) примењено закошење роторских проводника за једно жљобно место, док код другог (на фотографији доле) није изведено никакво закошење.



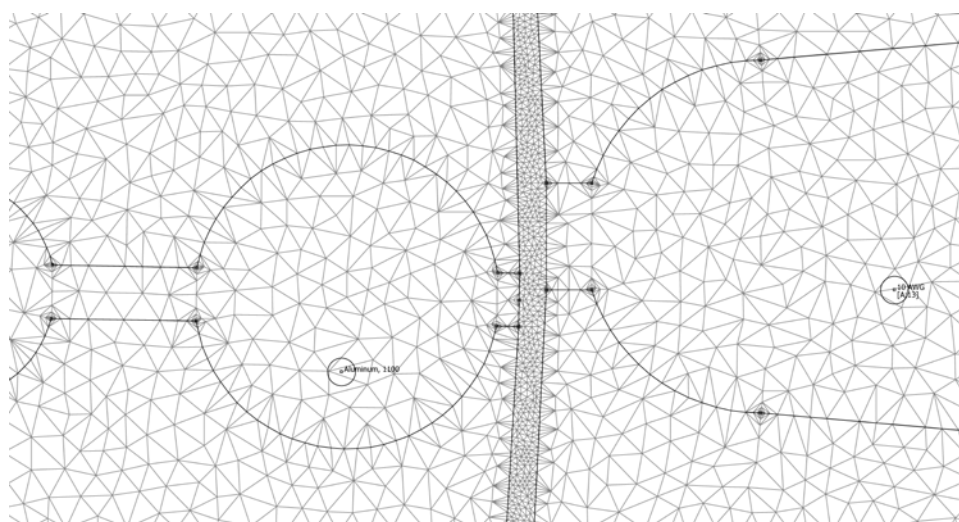
Слика 3.7 Изглед две изведбе роторског кавеза

На основу задатих димензија статорског и роторског пакета лимова, те конфигурације статорских намотаја је коначно могуће приступити формулацији дводимензионалне магнетостатичке имплементације методе коначних елемената. За потребе овог истраживања је коришћен бесплатни софтвер *FEMM 4.2*, који је доступан за скидање са интернета без икаквих посебних ограничења. Неће се детаљно улазити у сам поступак формулације проблема у датом софтверском окружењу, већ ће се кроз неколико илустрација приказати неки од карактеристичних одзива унутар самог програма.

FEMM 4.2 омогућава увожење цртежа из других програмских пакета, што је велико олакшање, будући да су рутине за цртање у самом програму прилично просте и не омогућавају једноставно креирање цртежа са сложенијом геометријом, као што је то управо случај са пакетима лимова ротационих машина. Након импортовања се може приступити поступку дефинисања својстава материјала сваком дисјунктном делу цртежа. Изузетно је важно да се цртеж састави од скупа делова који су јасно међусобно разграничени, тако да би се избегле ситуације конфликта међу различитим својствима која би се притом грешком приписала истом дисјунктном делу. Након дефинисања материјала од којег је сачињен одређени део попречног пресека машине, може се приступити и формирању намотаја машине, тако што се домену који припада одређеном статорском жљебу додели и припадност одређеном електричном колу, са припадајућим бројем проводника који су смештени у том жљебу, а уједно се задаје и оријентација самих проводника. Важно је додати и да сам програм дозвољава искључиво побуђивање струјним изворима, што представља одређену потешкоћу која се може превазићи комбиновањем симулација са експерименталним резултатима (овде се првенствено мисли на симулације у нелинеарним срединама).

3.6.1 Пример прорачуна индуктивности машине са незакошеним роторским проводницима

Након правилно формулисане геометрије проблема и својстава сваког дела попречног пресека машине, може се приступити дефинисању густине мреже коначних елемената. У поглављу о магнетостатичким симулацијама је детаљно дискутовано о чему се све треба водити рачуна приликом овог поступка, тако да ће се овде само приказати (слика 3.8) један детаљ правилно формиране мреже у околини ваздушног зазора. Неколико слојева елемената у ваздушном зазору су гаранција за постизање високе прецизности симулација. Приказана мрежа се конкретно користила за серију магнетостатичких симулација у линеарној средини, које служе за израчунавање свих индуктивности у машини.



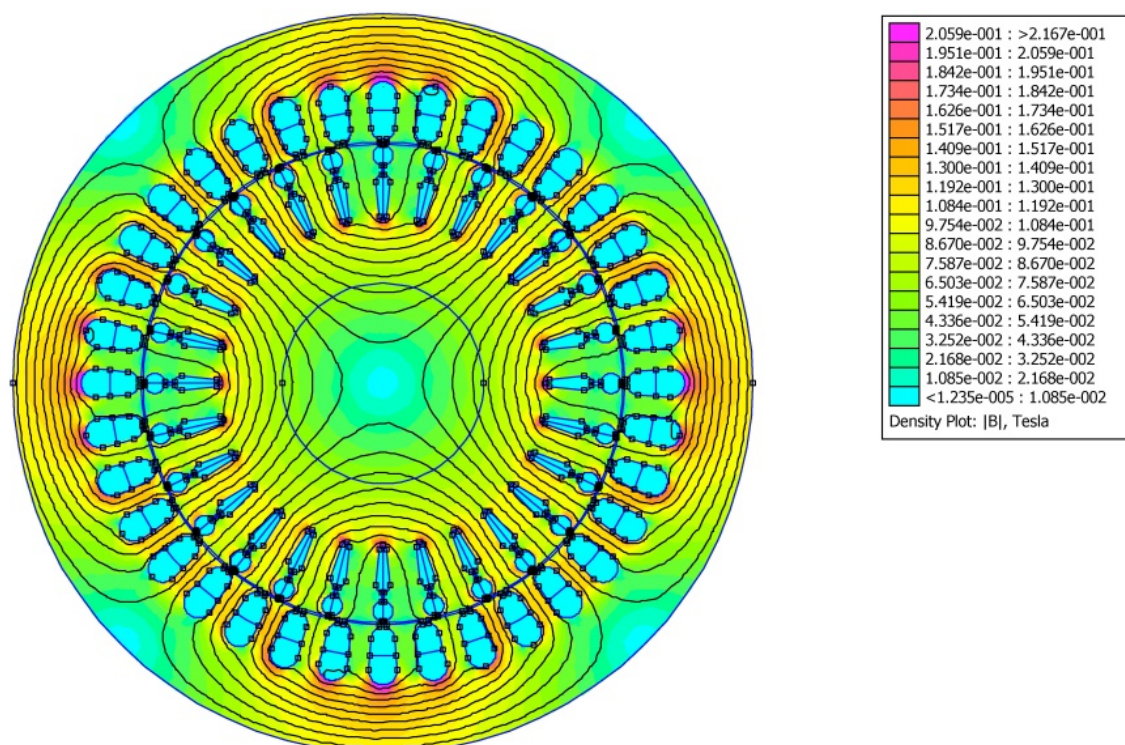
Слика 3.8 Детаљ мреже коначних елемената

Пошто је реч о линеарној средини, релативна пермеабилност феромагнетског материјала има високу вредност, па је за тачност симулација најрелевантније колико је густо мрежом троуглова прекривен ваздушни зазор, јер је готово сва магнетна енергија складиштена у њему.

Интензитет наметнутог магнетног поља нема утицаја на промене пермеабилности линеарних материјала, па стога струје којом се побуђују намотаји могу имати произвољно изабрану вредност. Због тога је погодно подесити вредност струје побуђиваног намотаја на $I = 1\text{ A}$, јер се тиме лако израчунава сопствена индуктивност намотаја и међусобне индуктивности ка свим осталим намотајима машине, пошто су тада индуктивности бројчано једнаке припадајућим флуksним обухватима. Раније описаним поступком израчунавања флуksних обухвата (релација (2.149), страна 65) се аутоматски долази и до вредности текуће сопствене, односно међусобних индуктивности напајаног намотаја. За тај поступак постоје готове уграђене рутине у самом софтверу, што у многостручно олакшава обраду резултата симулација. Циљ магнетостатичких симулација је да се израчунају индуктивности машине у функцији положаја ротора, па је потребно извршити серију

магнетостатичких симулација за различите положаје ротора, што се постиже sukcesивном ротацијом домена ротора за унапред дефинисани угао. За аутоматизацију овог процеса је згодно користити тзв. Lua Script, у ком се могу написати скрипте за аутоматско извршавање низа наредби и похрањивање резултата појединачних симулација у одговарајуће излазне датотеке које су у форми која је лака за даље обрађивање.

На слици 3.9 је приказан одзив магнетостатичке симулације над линеарним моделом машине, за случај побуђивања намотаја фазе a једносмерном струјом интензитета $I = 1 \text{ A}$.

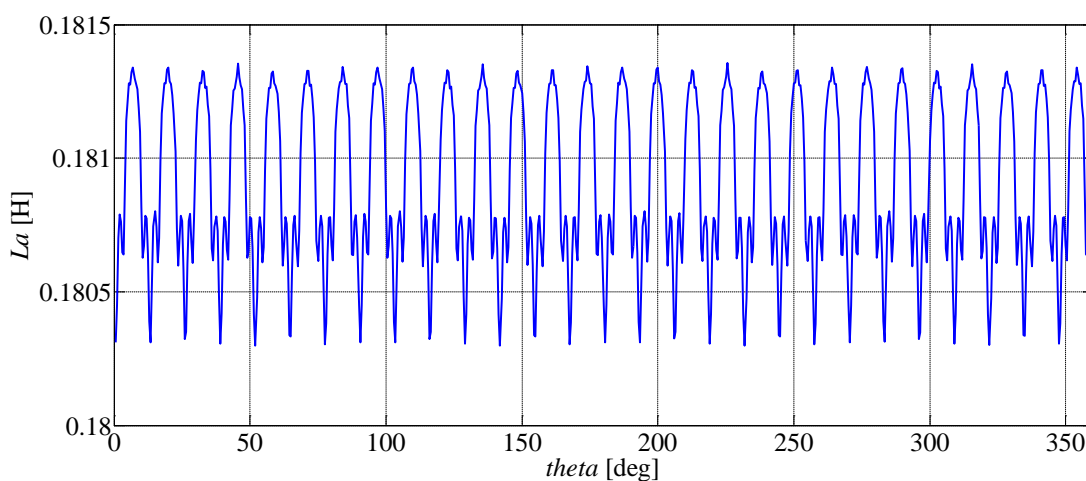


Слика 3.9 Одзив линеарне магнетостатичке симулације. Намотај фазе a побуђен једносмерном струјом интензитета $I = 1 \text{ A}$

Још једном треба поменути да је због симетрије машине са већим бројем полова дозвољено користити модел који покрива „кришку“ ширине једног пола, што би се у овом случају свело на симулацију над само једном четвртином попречног пресека машине. Управо је ова чињеница и искоришћена у свим симулацијама, али је за потребе слика урађена једна симулација над целим попречним пресеком, зарад прегледности и лепшег визуелног приказа.

Након извршења аутоматизованог процеса sukcesивних магнетостатичких симулација се добија таласни облик сопствене индуктивности фазе $L_a(\vartheta)$, која је приказана на слици 3.10. Вредност индуктивности је добијена низом симулација које покривају један пун обртај ротора (360°) са кораком од 0.2° , што значи да је за потребе реконструисања овог таласног облика извршено 1800 магнетостатичких симулација. То је изузетно висока резолуција, јер је за толики померај ротора у

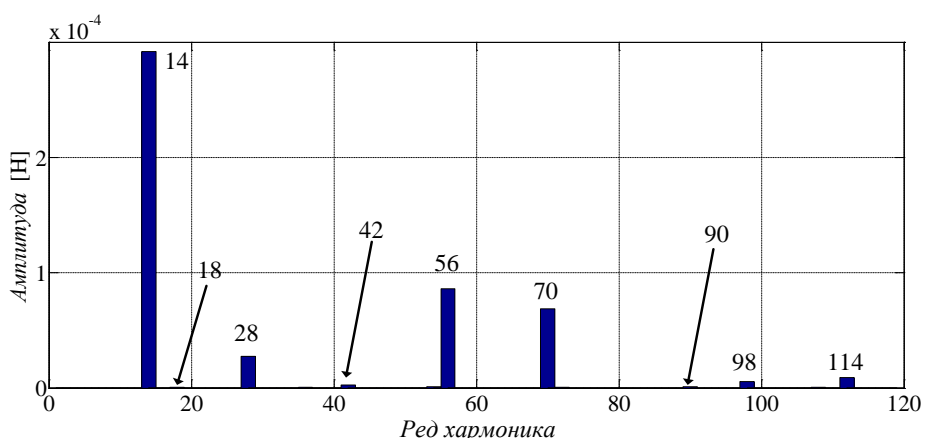
номиналном режиму рада (око 1454 o/min) потребно да прође свега 0.000023 s , што је далеко мање од стандардних периода одабирања које се користе у савременим електромоторним погонима, а уједно и далеко мање од периода PWM сигнала који се користе за напајање машина из фреквентних претвараача. Просечно трајање једне магнетостатичке симулације на стандардном рачунару (уз коришћење симетрије машине) не прелази 5 секунди, односно укупно време потребно да се реконструише таласни облик индуктивности се креће око 2.5h. Повећањем угла између сукцесивних симулација се ово време може још додатно смањити. На пример, кораком од 1° се описује феномен који у реалном времену, при номиналној брзини обртања, траје свега 0.00011 s , што је и даље врло мала вредност, која гарантује очување великог броја информација везаних за појаву виших хармоника, како у магнетном пољу, тако и у флуksним обухватима намотаја, а самим тим и у индукованим електромоторним силама, те на крају и у струјама намотаја.



Слика 3.10 Сопствена индуктивност $L_a(\vartheta)$. Линеарна магнетостатичка симулација

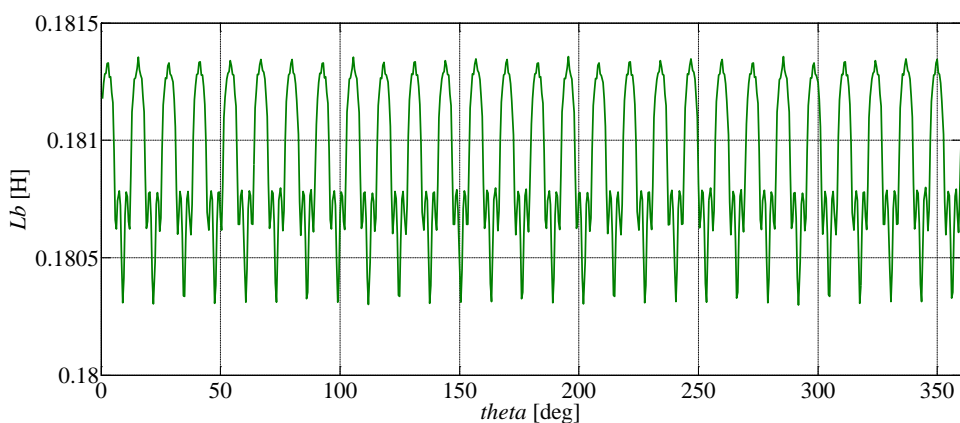
Потребан број симулација се може још драстичније смањити када се на слици 3.10 уочи поновљива секвенца у таласном облику индуктивности, а која је последица варијације магнетских својстава ваздушног зазора услед постојања роторских жљебова. Наиме, са слике се јасно може уочити 28 периода секвенце у једном пуном обртају мотора, које су управо последица броја роторских жљебова, којих такође има 28. Одавде постаје очигледно да је за реконструисање целокупног таласног облика индуктивности $L_a(\vartheta)$ довољно симулацијама покрити свега $360^\circ/28 \approx 12.86^\circ$ од целог обртаја, што представља прилично велику уштеду.

Сада до изражаја излази метода развијена у овом истраживању, где се резултати добијени само једном магнетостатичком симулацијом користе за реконструисање свих осталих сродних индуктивности машине. На слици 3.11 је приказан спектар виших хармоника (без средње вредности) индуктивности $L_a(\vartheta)$, у којем су доминантни хармоници умношка 14, што је и логично, пошто анализирани мотор има 14 жљебова по пару полова. Уочава се и врло мали удео виших хармоника који су умножак броја 18, што је управо једнако броју статорских жљебова по пару полова, које је очигледно оправдано и занемарити.

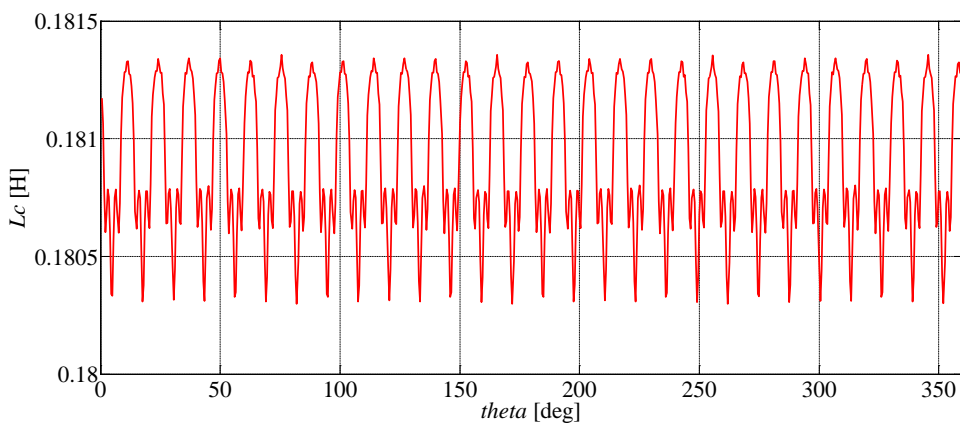


Слика 3.11 Спектар виших хармоника сопствене индуктивности $L_a(\vartheta)$

Користећи симетрију машине и принцип фазног помераја међу индуктивностима, након интерполације и развијања у Фуријеов ред применом релација (3.19)-(3.24) се коначно могу реконструисати и остале две сопствене индуктивности, које су приказане на сликама 3.12 и 3.13, респективно.

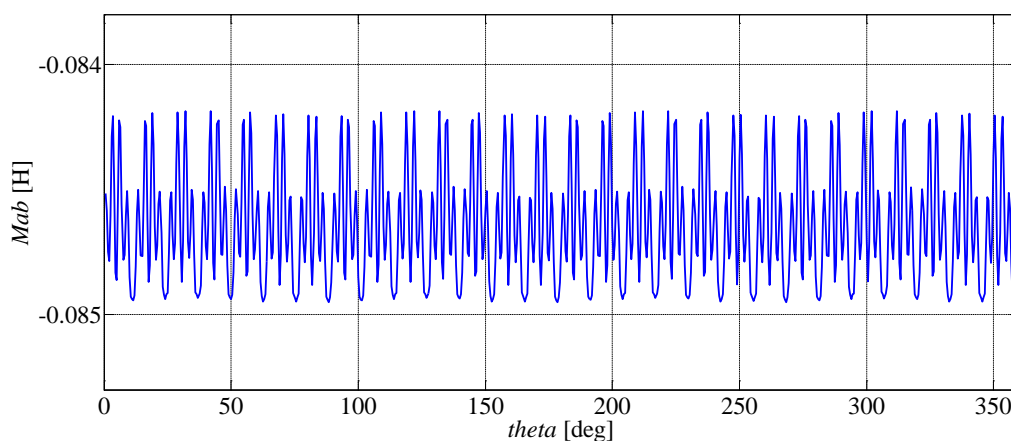


Слика 3.12 Сопствена индуктивност $L_b(\vartheta)$. Реконструисана на основу $L_a(\vartheta)$

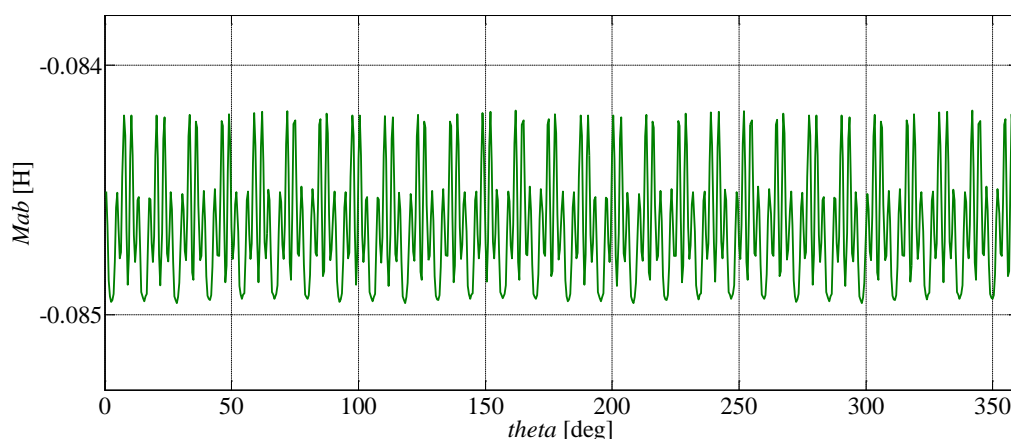


Слика 3.13 Сопствена индуктивност $L_c(\vartheta)$. Реконструисана на основу $L_a(\vartheta)$

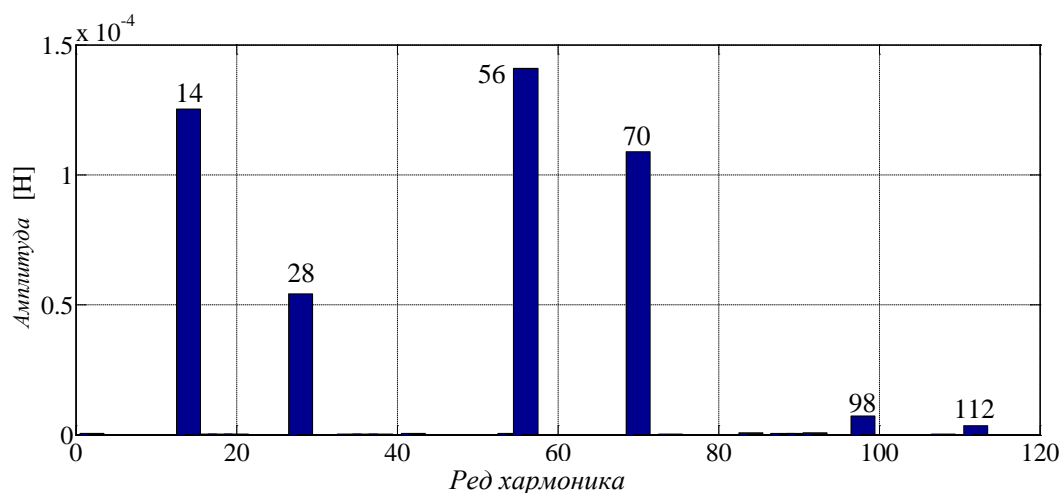
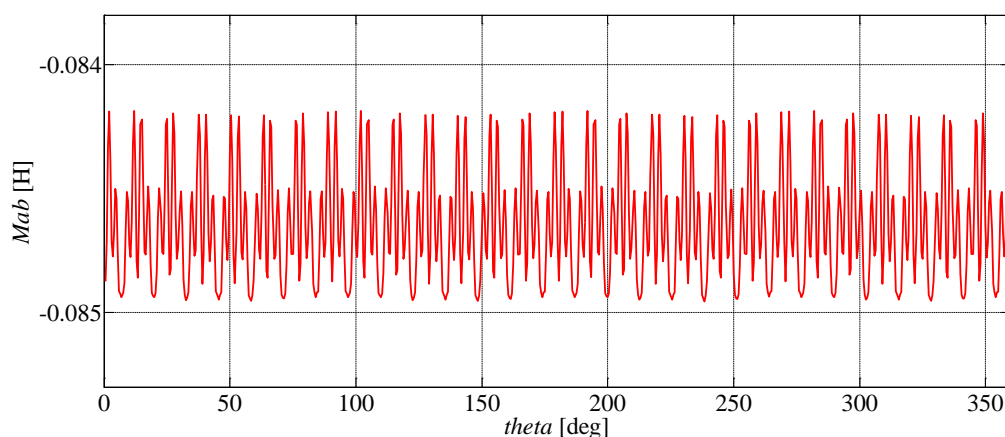
Индуктивности које се могу израчунати из истог низа магнетостатичких симулација су и међусобне индуктивности $M_{ab}(\vartheta)$ и $M_{ac}(\vartheta)$, које су приказане на сликама 3.14 и 3.15, респективно. Спектар (без средње вредности) међусобне индуктивности $M_{ab}(\vartheta)$ је приказан на слици 3.16. За ову конструкцију машине се испоставило да се спектар међусобних статорских индуктивности састоји од виших хармониика истог умношка као и за случај сопствених индуктивности, али је њихова вредност значајно већа. То је нарочито изражено за хармонике реда 28, 56 и 70. Након сличног поступка интерполације и добијања чланова Фуријеовог реда помоћу релација (3.19)-(3.21), простим фазним померањем по правилима дефинисаним релацијама (3.25)-(3.27) се реконструише и трећа међусобна индуктивност $M_{bc}(\vartheta)$, која је приказана на слици 3.17.



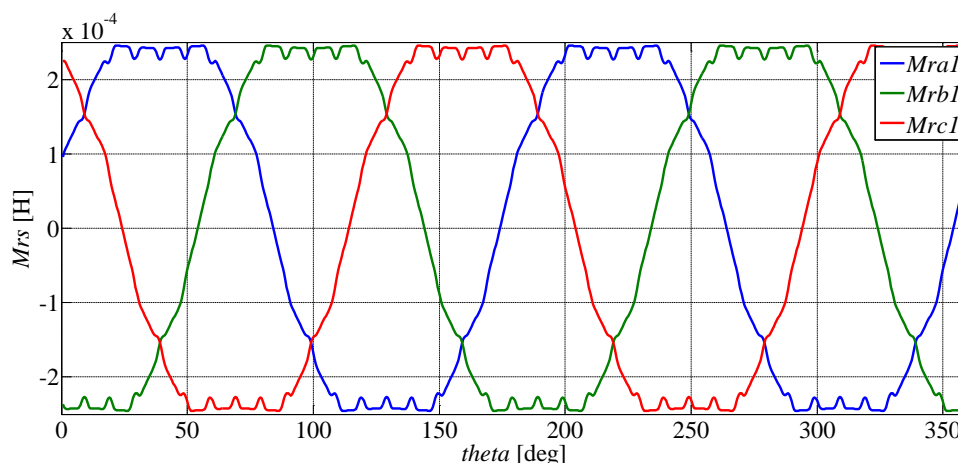
Слика 3.14 Међусобна индуктивност $M_{ab}(\vartheta)$. Линеарна магнетостатичка симулација



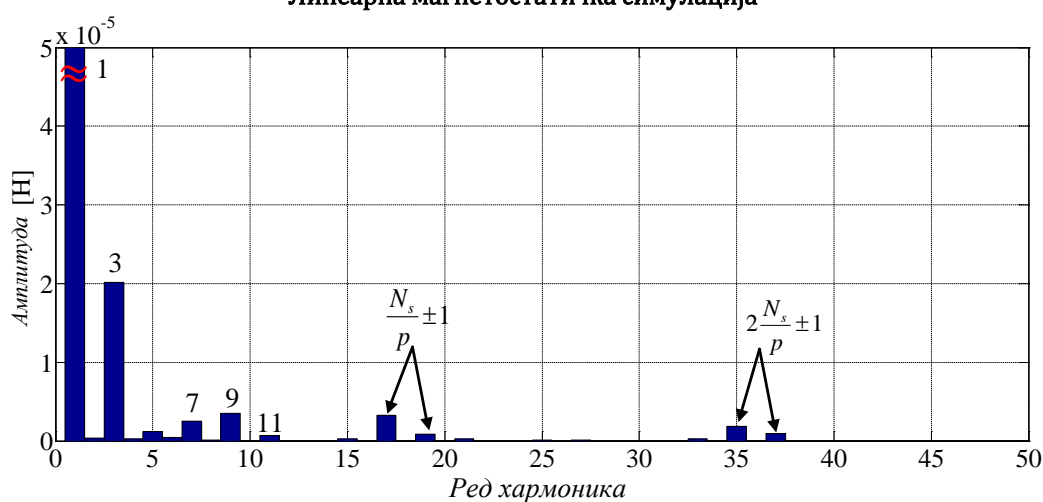
Слика 3.15 Међусобна индуктивност $M_{ac}(\vartheta)$. Линеарна магнетостатичка симулација

Слика 3.16 Спектар виших хармоника индуктивности $M_{ab}(\vartheta)$ Слика 3.17 Међусобна индуктивност $M_{bc}(\vartheta)$. Реконструисана на основу $M_{ab}(\vartheta)$

Из истог низа магнетостатичких симулација се могу израчунати и међусобне индуктивности фазе a и свих роторских петљи, означених са $M_{ran}(\vartheta)$, $n \in \{1, \dots, 28\}$. За разлику од сопствених и међусобних индуктивности статора, које карактерише средња вредност око које индуктивност варира услед утицаја промене релативне ширине ваздушног зазора због променљиве геометрије изазване кретањем, међусобне индуктивности статор-ротор су праве наизменичне величине. То је наравно последица промене релативног положаја непокретног намотаја статора и роторске петље услед кретања ротора. Аналогно као и у случају статорских индуктивности се након интерполације и развоја у Фуријеов ред од индуктивности $M_{ra1}(\vartheta)$ може добити било која статорско-роторска међусобна индуктивност применом правила дефинисаних релацијама (3.28)-(3.31). Због сликовитог приказа су на слици 3.18 упоредо дати таласни облици међусобне индуктивности роторске петље 1 према статорским фазама a , b и c , односно $M_{ra1}(\vartheta)$, $M_{rb1}(\vartheta)$ и $M_{rc1}(\vartheta)$, респективно. Спектар индуктивности $M_{ra1}(\vartheta)$ је приказан на слици 3.19.



Слика 3.18 Међусобне индуктивности роторске петље 1 и статорских фаза $M_{ra1}(\vartheta)$, $M_{rb1}(\vartheta)$ и $M_{rc1}(\vartheta)$.
Линеарна магнетостатичка симулација



Слика 3.19 Спектар виших хармоника индуктивности $M_{ra1}(\vartheta)$

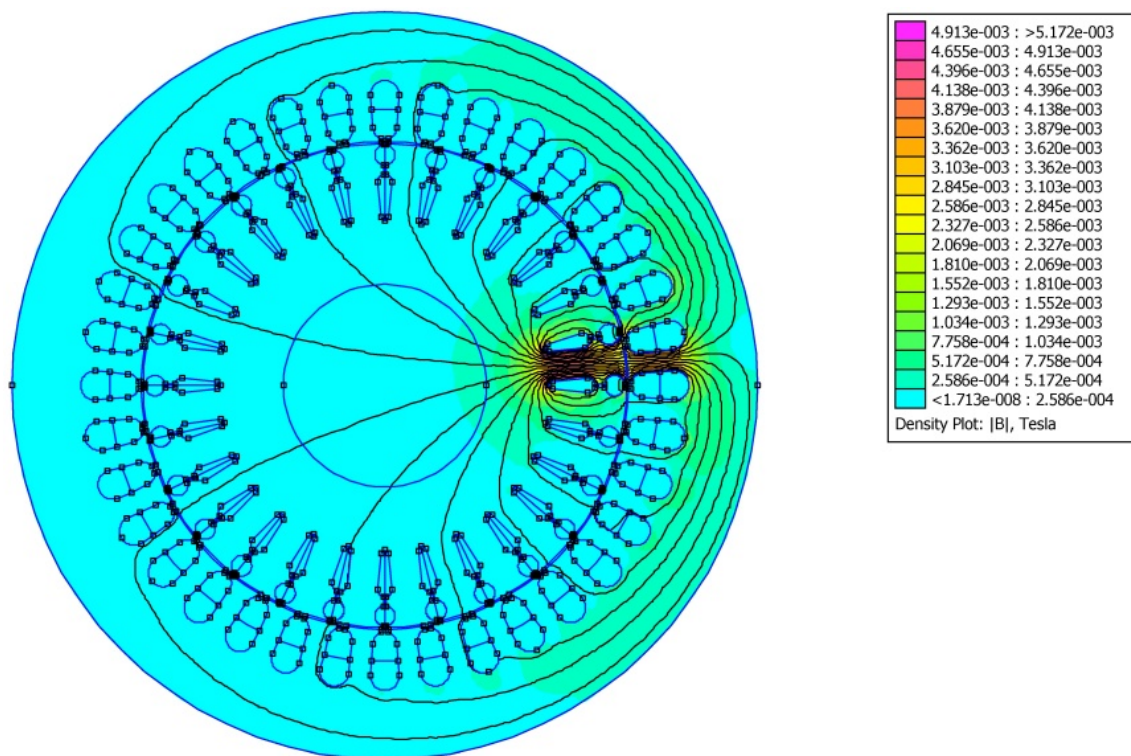
Доминантне компоненте у спектру, поред основног хармоника, су непарни хармоници реда 3, 5, 7, 9 и 11. Постојање ових хармоника је последица дискретног смештања проводника статорских намотаја у жљебове, којима се форсира магнетопобудна сила карактеристичног трапезоидног и степеничастог облика [42]. Ти облици се традиционално користе приликом појашњавања феномена магнетног поља и његовог таласног облика у ваздушном зазору, али и као полазиште за имплементацију WFA и MWFA метода [28]. Тај облик се може јасно уочити и на слици 3.18, где наравно постоје и додатне компоненте због детаљне геометрије која се методом коначних елемената може уважити. За разлику од статорских индуктивности, статорско-роторске индуктивности имају компоненте које су функција броја статорских жљебова по пару полова, али су оне врло мале.

Оно што је важно напоменути јесу релативно мале амплитуде ових међусобних индуктивности, па се на први поглед чини да је удео њихових виших хармоника на појаву виших хармоника у осталим величинама електромагнетног поља занемарљив. Вредност индуктивности је врло мала зато што су петље којима се моделује кавезни ротор практично састоје од свега једног навојка, сачињеног од

роторских шипки и сегмената краткоспојних прстенова. Ипак, не сме се сметнути са ума да су струје у роторским проводницима далеко већих интензитета него ли у статорском намотају, тако да због тога успевају да изазову велики утицај путем ових спрега.

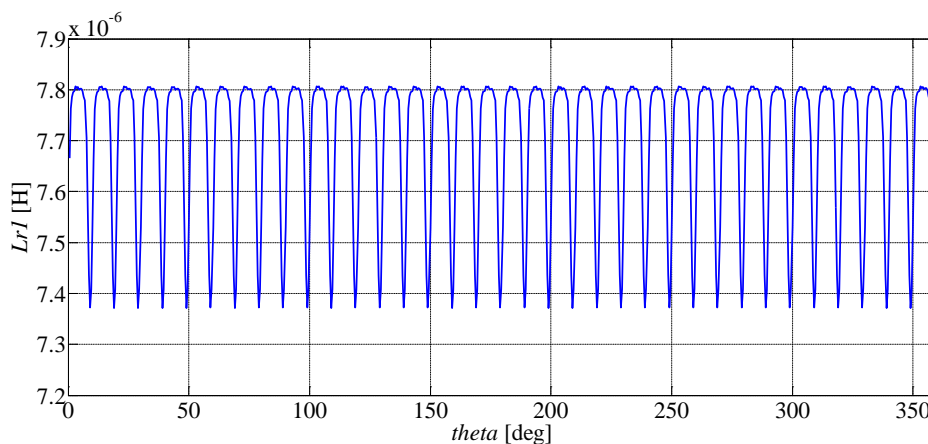
Све статорске и статорско-роторске индуктивности се могу добити из једне секвенце магнетостатичких симулација, што је детаљно илустровано у претходном делу одељка. Тек након што се приказао таласни облик статорско-роторске индуктивности се може донети коначан суд о минималном броју магнетостатичких симулација које су довољне за целокупно реконструисање свих илустрованих индуктивности. За реконструисање статорских индуктивности је довољно симулацијама покрити свега $360^\circ/28 \approx 12.86^\circ$ од пуног круга, али то очигледно није довољно за реконструисање статорско-роторских индуктивности. Због тога што је анализирана машина четворополна, са слике 3.18 је очигледно да се унутар 360° смести две периоде статорско-роторске индуктивности, те да је за њихово реконструисање довољно покрити само једну четвртину периоде (узлазну или силазну ивицу таласног облика), те да је на основу ње могуће реконструисати цео таласни облик. Четвртину периоде одговара осмина круга, или угао $360^\circ/8 = 45^\circ$. Са веома високом резолуцијом од 0.2° се тај угао „пребрише“ са укупно 225 магнетостатичких симулација. Уз просечно трајање симулације од 5 секунди, укупно трајање симулација износи око 20 минута, што је изузетно ефикасно, нарочито зато што се након добијања вредности индуктивности оне даље помоћу својих коефицијената Фуријеовог реда користе као улазни подаци у динамичком моделу који је значајно временски ефикаснији. Ове симулације са друге стране нису довољне за реконструисање роторско-роторских индуктивности, из простог разлога што је за њихово добијање потребно напајати неку од роторских петљи једносмерном струјом.

Друга секвенца магнетостатичких симулација се добија побуђивањем једне роторске петље једносмерном струјом, те сукцесивном ротацијом за унапред дефинисани угао (који се може разликовати од угла који се користио приликом израчунавања статорских и статорско-роторских индуктивности). На слици је приказан одзив магнетостатичке симулације у којој је роторска петља 1 побуђена једносмерном струјом интензитета $I = 1 \text{ A}$. Пошто роторска петља нема просторно расподељену структуру по ободу машине, као што је то случај са индуктивностима везаним за статорске намотаје, јасно је зашто се добија изразито нехомогено магнетно поље тим поступком. То наравно не представља проблем када се симулације спроводе у линеарној средини, односно распоред линија магнетног поља не утиче на вредности израчунатих индуктивности.

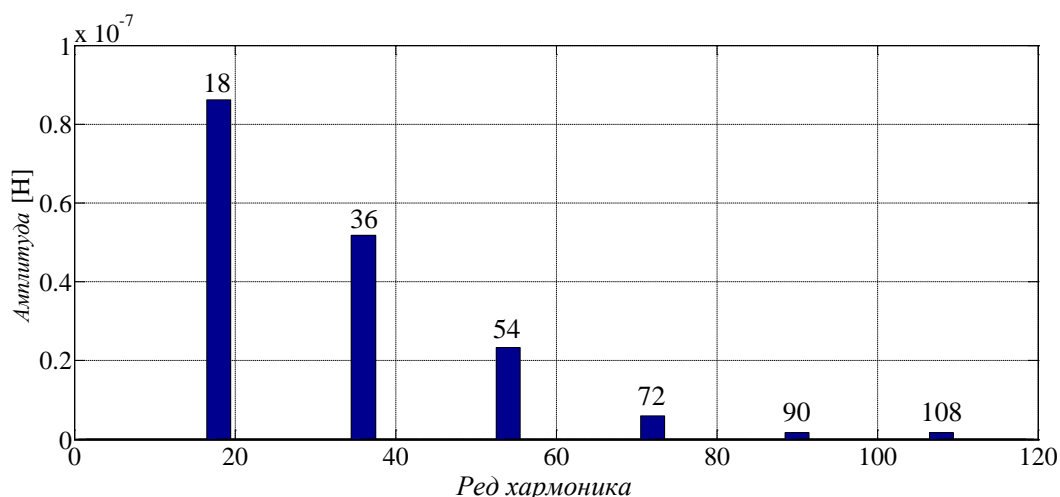


Слика 3.20 Одзив линеарне магнетостатичке симулације. Намотај роторске петље 1 побуђен једносмерном струјом интензитета $I = 1 \text{ A}$

На слици 3.21 је приказана сопствена индуктивност роторске петље 1, са ознаком $L_{r1}(\vartheta)$. Индуктивност је добијена низом магнетостатичких симулација. Примећује се карактеристична периодична секвенца, која има укупно 36 периода, што је једнако броју статорских жљобова. То је и очекивано, будући да приликом ротације ротора намотаји на ротору бивају изложени променљивој релативној ширини ваздушног зазора, која је изазвана статорским жљобовима, будући да међу статорским жљобовима и роторским проводницима постоји релативна промена положаја. Спектар виших хармоничких чланова индуктивности $L_{r1}(\vartheta)$ је приказан на слици 3.22, на којој се јасно види доминантан удео виших хармоника умношка 18.



Слика 3.21 Сопствена индуктивност роторске петље 1, $L_{r1}(\vartheta)$. Линеарна магнетостатичка симулација

Слика 3.22 Спектар виших хармоника индуктивности $L_{r1}(\vartheta)$

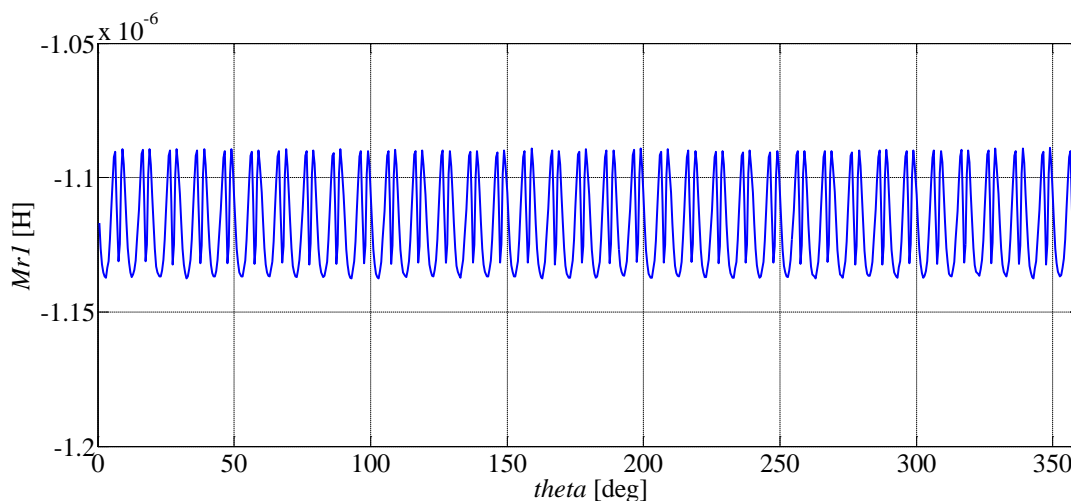
Свака од преосталих 27 сопствених индуктивности роторских петљи има исти таласни облик као што је и облик индуктивности $L_{r1}(\vartheta)$. Сопствене индуктивности суседних роторских петљи су наравно фазно померене за угао $2\pi/28$, као што уосталом и предвиђају релације (3.32)-(3.33), којима се уједно описује поступак њиховог генерисања, на основу симулацијама добијених вредности индуктивности $L_{r1}(\vartheta)$. Због великог броја сопствених индуктивности истог таласног облика, овде се оне неће посебно приказивати, на супрот приказивања сопствених индуктивности статора.

За разлику од статорско-статорских и статорско-роторских међуиндуктивности, које имају међусобно идентичне таласне облике, роторско-роторске међусобне индуктивности практично имају 27 различитих таласних облика. То је последица чињенице да једна роторска петља има у принципу различит релативни геометријски положај према свим осталим петљама, што нужно повлачи да су им и међусобне индуктивности различите. Такође, њихове средње вредности се много разликују међусобно, што је и очекивано, пошто удаљене роторске петље имају веома мали међусобни утицај путем магнетске спреге.

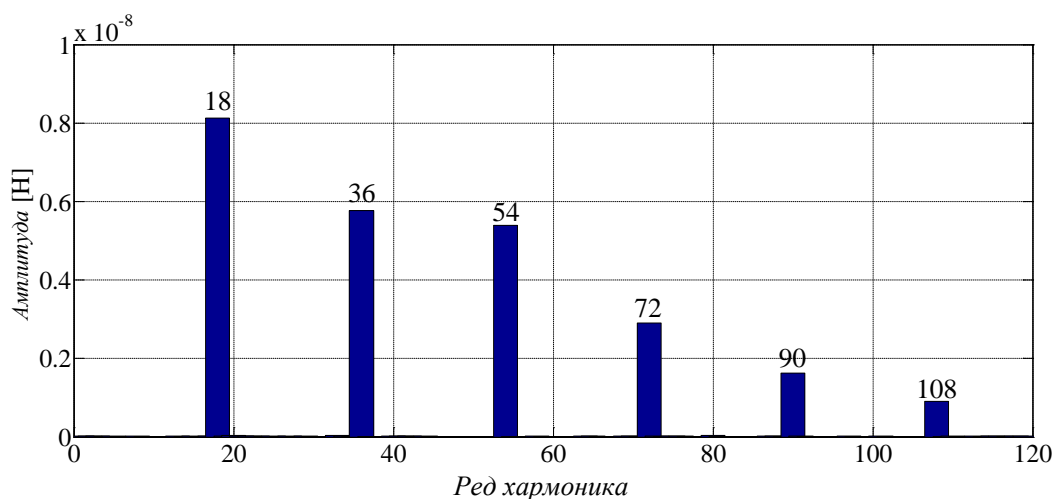
Овде се због прегледности неће приказивати сви таласни облици међуиндуктивности, већ ће се изабрати само неке од карактеристичних. На слици 3.23 је самостално приказана међусобна индуктивност између роторских петљи 1 и 2, означеној са $M_{r1}(\vartheta)$. Ово је уједно и највећа међусобна индуктивност роторског кола по апсолутној вредности, због чињенице да су суседне роторске петље на најкраћем могућем растојању, па је због тога и међусобни утицај путем магнетских спрега далеко највећи. Овакав таласни облик имају и све међуиндуктивности између било које друге две суседне роторске петље, а поступак њиховог генерисања на основу добијених чланова развоја у Фуријеов ред индуктивности $M_{r1}(\vartheta)$ је описан релацијама (3.34)-(3.35).

На слици 3.24 је приказан спектар виших хармоничких чланова развоја у Фуријеов ред индуктивности $M_{r1}(\vartheta)$. Као што је то био случај код сопствених индуктивности роторских петљи, и овде су уочљиви доминантни виши хармоници

умношка 18, који су настали из истих разлога који су наведени током објашњавања спектра сопствених роторских индуктивности. Важно је приметити да највећа роторска међуиндуктивност има средњу вредност која је за скоро ред величине мања од средње вредности роторских сопствених индуктивности, што се уједно може приметити и за њене више хармоничке чланове.



Слика 3.23 Међусобна индуктивност роторских петљи 1 и 2, $M_{r1}(\vartheta)$. Линеарна магнетостатичка симулација

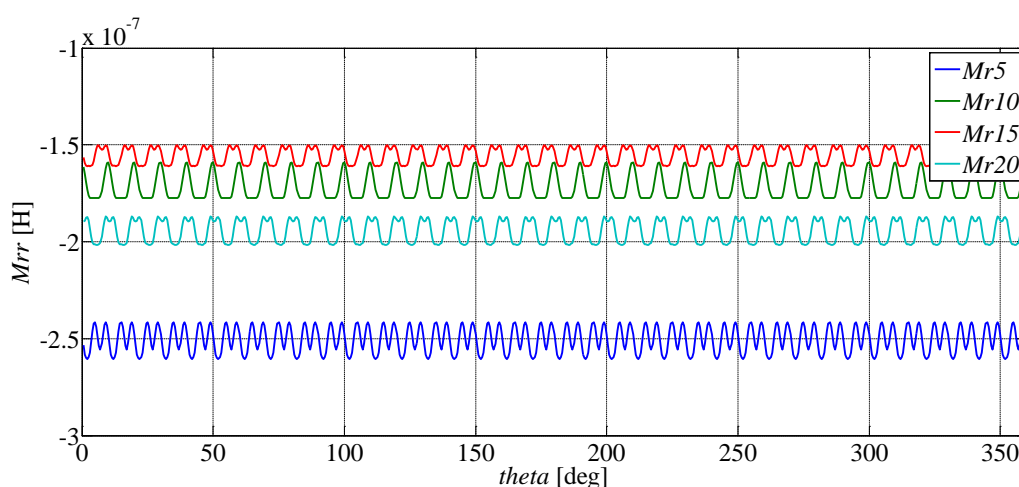


Слика 3.24 Спектар виших хармоника индуктивности $M_{r1}(\vartheta)$

Од осталих међусобних индуктивности роторске петље 1 су приказане само неке карактеристичне, са циљем да се илуструје њихов таласни облик и средње вредности. На слици 3.25 су приказане међусобне индуктивности роторске петље 1 са роторским петљама 6, 11, 16 и 21, означене редом са $M_{r5}(\vartheta)$, $M_{r10}(\vartheta)$, $M_{r15}(\vartheta)$ и $M_{r20}(\vartheta)$. Индексом у њиховим ознакама се наглашава растојање од роторске петље 1. Изабране су тако да се прикажу спреге са петљама на различитим местима по ободу

ротора, чиме се вредношћу оивичавају и све остале међусобне индуктивности, које нису посебно приказиване.

Оно што се може приметити је да све приказане индуктивности имају различит таласни облик, али и да се секвенца која је утиснута око њихових средњих вредности понавља исти број пута као што је то био случај и са претходно приказаним роторским индуктивностима. Закључује се да ће и њихов спектар бити сличан, али са много мањим амплитудама виших хармоничких чланова него што је то био случај у спектрима индуктивности $L_{r1}(\vartheta)$ и $M_{r1}(\vartheta)$. Такође се може приметити да је већина међусобних индуктивности драматично мање средње вредности од оне коју има средња вредност сопствених роторских индуктивности, што може послужити као оправдање за занемаривање њихових виших хармоничких чланова.



Слика 3.25 Међусобне индуктивности роторске петље 1 са роторским петљама 6, 9, 14 и 19 $M_{r5}(\vartheta)$, $M_{r10}(\vartheta)$, $M_{r15}(\vartheta)$ и $M_{r20}(\vartheta)$. Линеарна магнетостатичка симулација

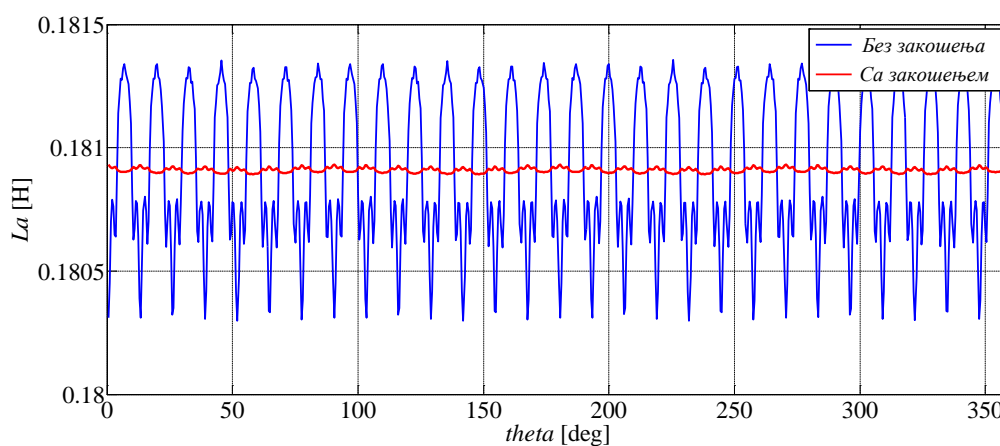
3.6.2 Модификација индуктивности уважавањем ефекта закошења

У ранијим поглављима су дискутоване предности и мане које има дводимензионална имплементација методе коначних елемената. Предности се првенствено огледају у једноставнијем процесу генерисања мреже коначних елемената, те чињенице да је број чворова у мрежи за које потребно израчунати вредности магнетског вектор потенцијала значајно мањи од тродимензионалних имплементација. Једна од главних мана тог приступа је што онемогућава уважавање утицаја конструкције машина које имају променљиву геометрију по дубини пакета лимова. Када је реч о кавезним машинама, та променљивост се најчешће огледа у ефекту закошења роторских проводника. Закошење проводника се врши из више разлога, међу којима су доминантни смањење таласности момента конверзије, као и поправљање таласних облика магнетног поља у ваздушном зазору. То се даље повољно манифестује кроз смањење буке и виших хармоничких чланова у спектру статорских струја и напона.

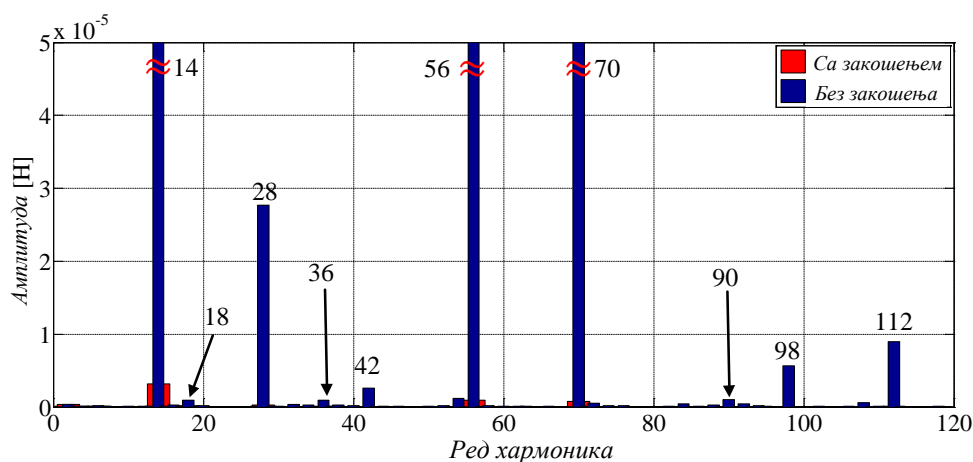
МССА модел заснован на дводимензионалној имплементацији методе коначних елемената не може у потпуности да уважи овај ефекат, из простог разлога што он користи индуктивности које су функција само једне просторне координате, тј. релативног положаја ротора. Овај се ефекат може уважити усредњено, на начин који је приказан релацијама (3.36)-(3.37).

Приликом израде кавезних ротора се примењује различит степен закошења проводника, али ће се овде приказати утицај закошења само у случају закошења за једно жљебно место, будући да физичка машина израђена за потребе овог истраживања има изведбу ротора са овим степеном закошења.

На слици 3.26 су упоредо приказани таласни облици индуктивности $L_a(\vartheta)$ са и без примењеног закошења. Пошто је примењено закошење за једно жљебно место ротора, за очекивати је да је постигнуто значајно смањење виших хармоничких чланова у спектру индуктивности, што се и може закључити на основу слике 3.27, где су упоредо приказани спектри индуктивности $L_a(\vartheta)$ за случај са и без примењеног закошења.



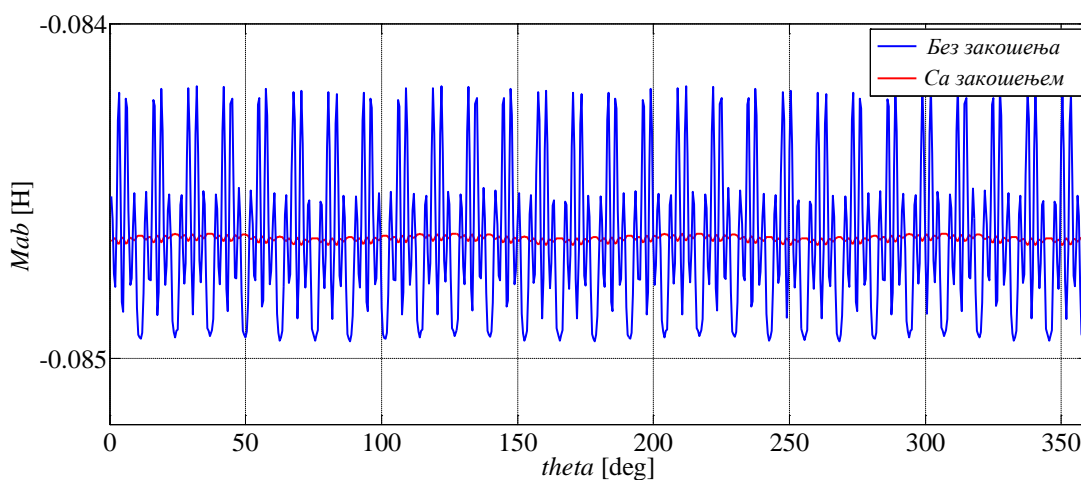
Слика 3.26 Упоредни приказ сопствене индуктивности $L_a(\vartheta)$



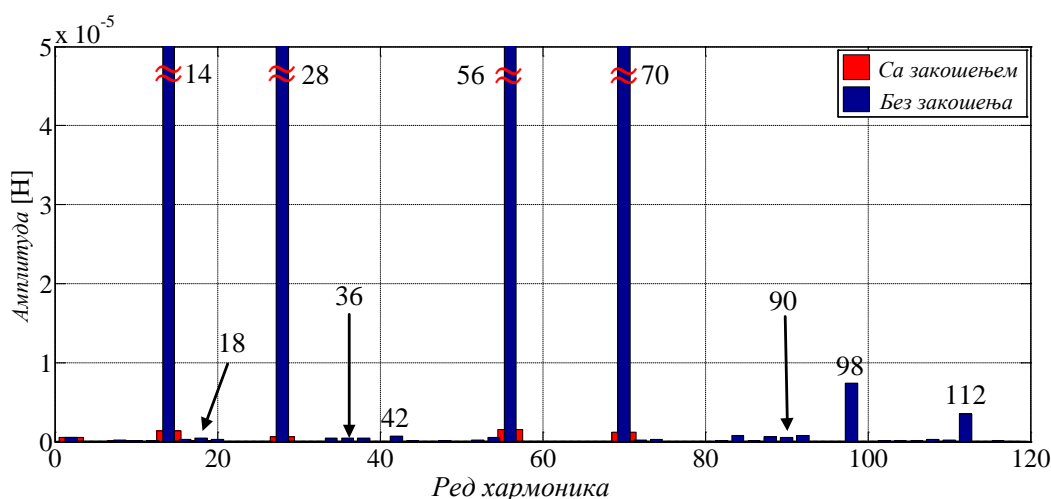
Слика 3.27 Упоредни спектар виших хармоника сопствене индуктивности $L_a(\vartheta)$

На сличан начин се ефекат закошења испољава и на међусобним индуктивностима статора, што је илустровано упоредним приказом таласних облика међусобне индуктивности $M_{ab}(\vartheta)$, на слици 3.28. Упоредним приказом спектра виших хармоника индуктивности $M_{ab}(\vartheta)$, за случај са и без примењеног закошења роторских проводника (слика 3.29) се такође потврђује значајно смањење амплитуде виших хармоничких чланова који су последица жљебова ротора.

Ефекат закошења на остале статорске индуктивности је истоветан овим ефектима приказаним на сликама 3.26-3.29, те се стога неће додатно истицати новим сликама.



Слика 3.28 Упоредни приказ међусобне индуктивности $M_{ab}(\vartheta)$

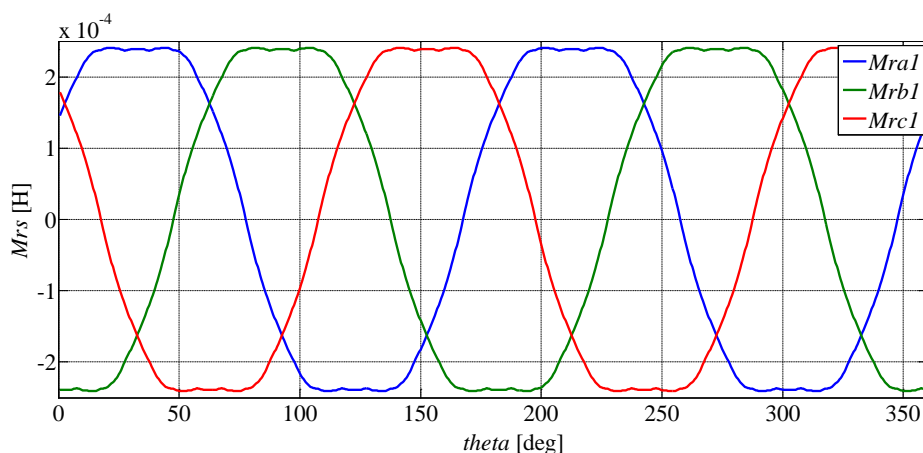


Слика 3.29 Упоредни спектар виших хармоника индуктивности $M_{ab}(\vartheta)$

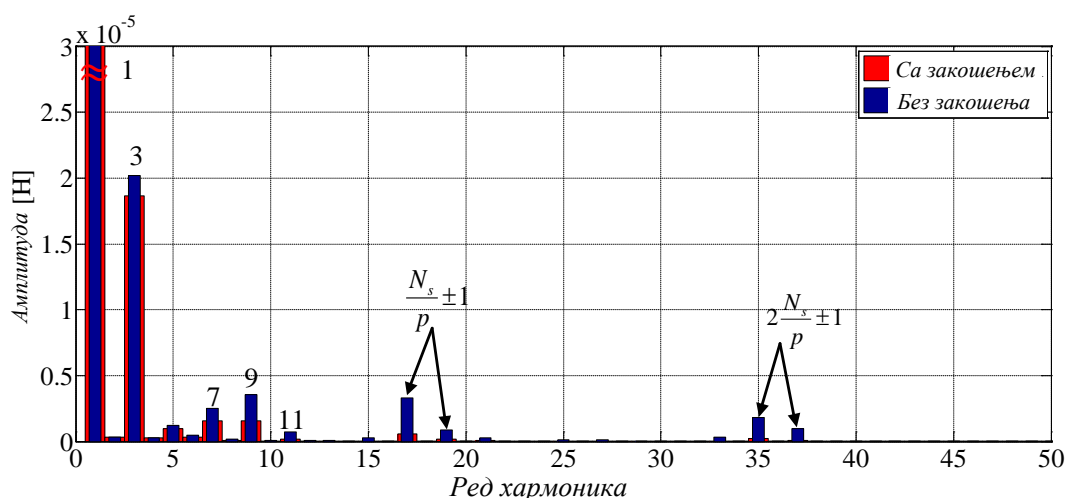
Овим упоредним илустрацијама се потврђује јак утицај закошења на смањење таласности статорских индуктивности. То је било и за очекивати, јер је највећи ефекат таласности статорских индуктивности био последица варијације релативне

ширине ваздушног зазора изазване роторским жљебовима. Примењивањем закошења се долази до усредњавања овог ефекта, самим тим и до његовог смањења.

Утицај закошења роторских проводника је видљив и у таласним облицима статорско-роторских индуктивности, што се може приметити на слици 3.30, где су упоредо приказане међусобне индуктивности $M_{ra1}(\vartheta)$, $M_{rb1}(\vartheta)$ и $M_{rc1}(\vartheta)$. Упоредни спектар индуктивности $M_{ra1}(\vartheta)$ за случај са и без примењеног закошења је приказан на слици 3.31. Примећује се незнатно умањење доминантних виших хармоничких чланова, што је и било за очекивати, будући да је њихово порекло везано за феномене различите од ефекта роторских жљебова. Спектар статорско-роторских индуктивности доминантно зависи од дистрибуције статорских намотаја, те се стога мало мења закошењем роторских проводника. Нешто веће умањење су претрпели хармонички чланови који су последица постојања жљебова на статору. То је такође очекиван резултат закошења, пошто је број жљебова статора истог реда величине са бројем роторских жљебова, а и димензије статорских и роторских жљебова су сличне.

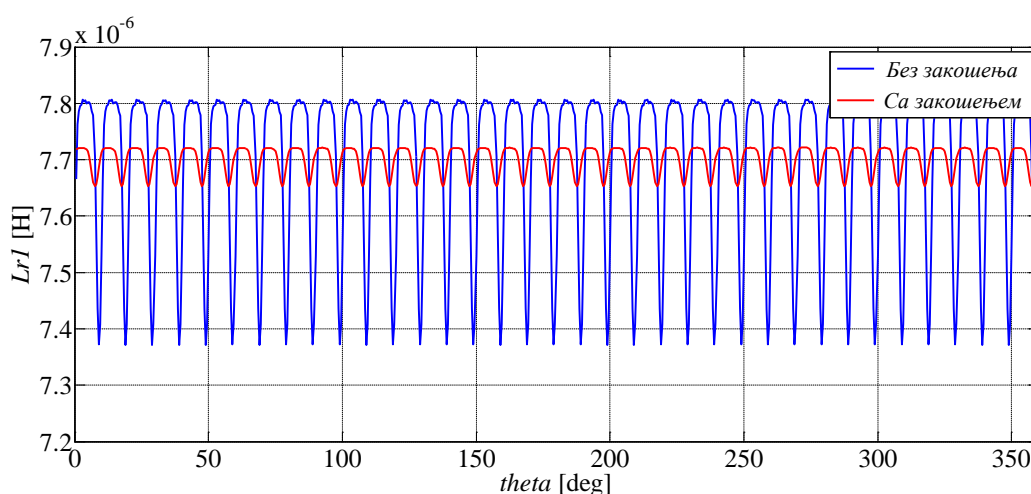
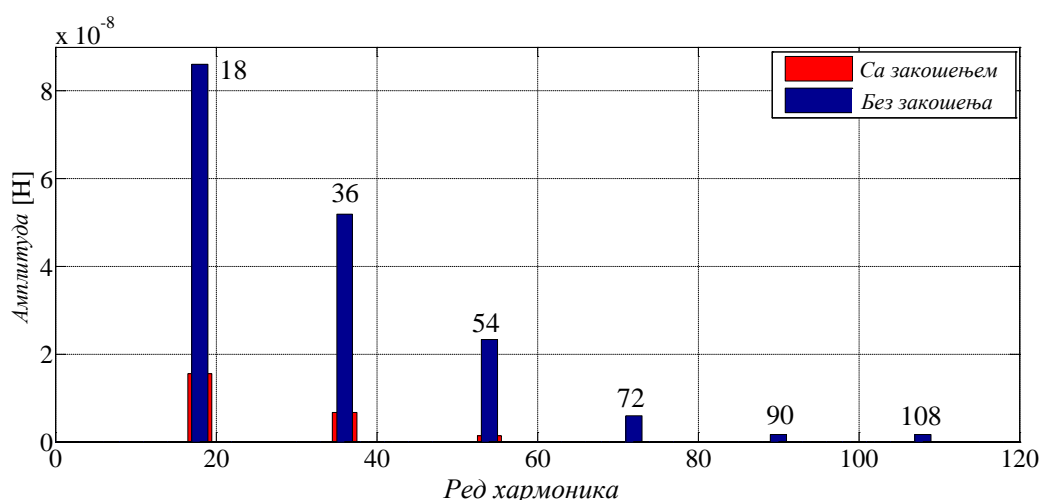


Слика 3.30 Међусобне индуктивности роторске петље 1 и статорских фаза a , b и c , $M_{ra1}(\vartheta)$, $M_{rb1}(\vartheta)$ и $M_{rc1}(\vartheta)$. Уважено закошење роторских проводника

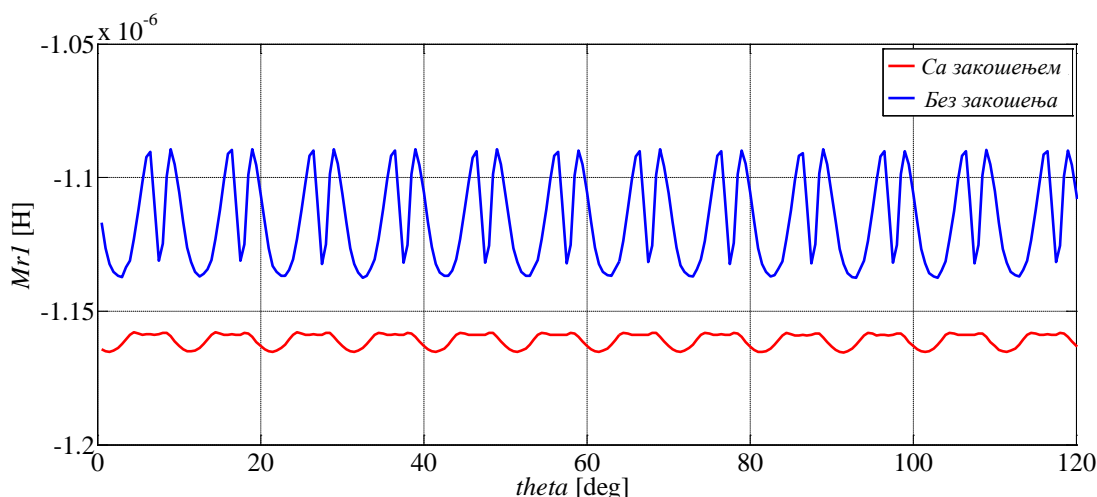
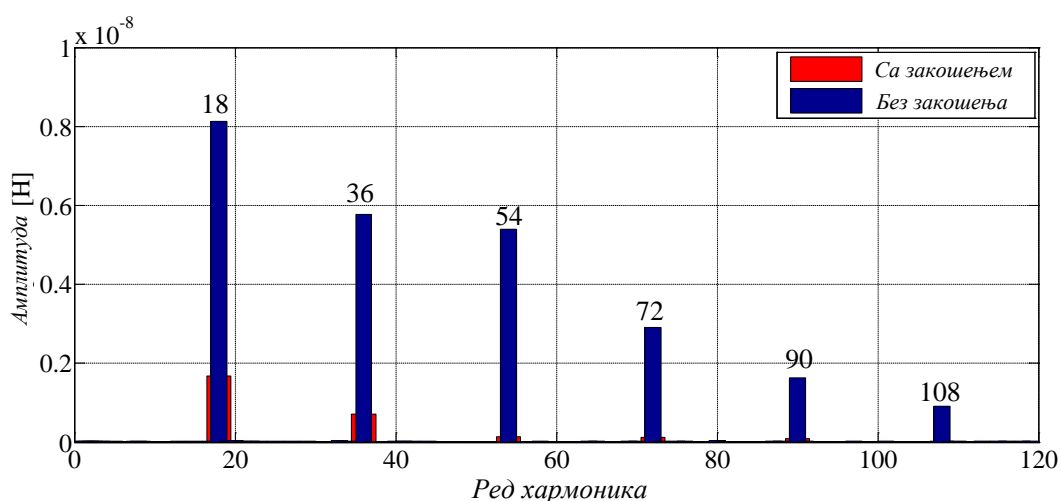


Слика 3.31 Упоредни спектар виших хармоника индуктивности $M_{ra1}(\vartheta)$

На слици 3.32 су упоредо приказани таласни облици сопствене индуктивности роторске петље 1, односно $L_{r1}(\vartheta)$. Примећује се делимично смањење таласности изазване жљебовима на статору (на сличан начин као што је то био случај са статорско-роторским индуктивностима), али и мало повећање средње вредности индуктивности. Ово је лако објаснити на основу чињенице да је применом закошења роторских проводника уједно порасла и површина једне роторске петље у односу на ситуацију без закошења, што се наравно испољава и у порасту сопствене индуктивности. На слици 3.33 је приказан упоредни спектар виших хармоничких чланова индуктивности $L_{r1}(\vartheta)$ за случај са и без закошења роторских проводника, која још једном потврђује ефекат делимичног смањења виших хармоника изазваних постојањем жљебова на статору.

Слика 3.32 Упоредни приказ сопствене индуктивности $L_{r1}(\vartheta)$ Слика 3.33 Упоредни спектар виших хармоника индуктивности $L_{r1}(\vartheta)$

Сличан ефекат закошења се може видети и на сликама 3.34 и 3.35, за случај индуктивности $M_{r1}(\vartheta)$, те стога додатна дискусија није потребна.

Слика 3.34 Упоредни приказ међусобне индуктивности $M_{r1}(\vartheta)$ Слика 3.35 Упоредни спектар виших хармоника индуктивности $M_{r1}(\vartheta)$

Сличним поступком се може приказати ефекат закошења и на остале међусобне индуктивности роторског кола, али ће то бити изостављено. Оправдање за то произилази из чињеница изведених на основу резултата приказаних на слици 3.25, где се уочава варијација индуктивности незакошене машине на много мањем нивоу него што је то случај са индуктивностима $L_{r1}(\vartheta)$ и $M_{r1}(\vartheta)$.

3.6.3 Израчунавање индуктивности уз уважавање ефекта засићења

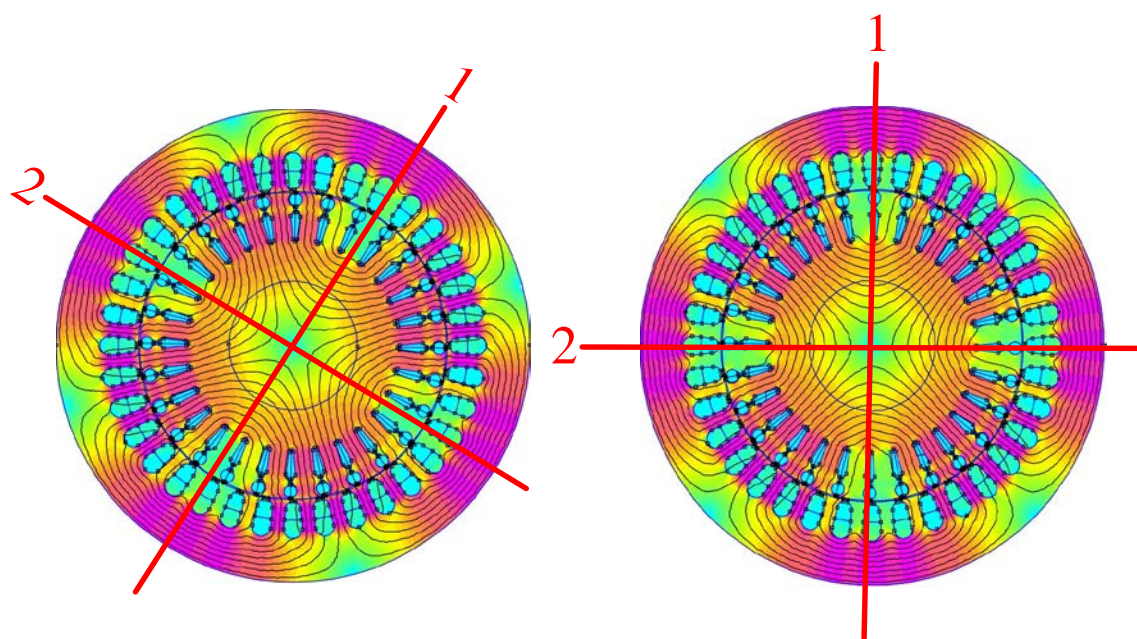
Засићење на сложен начин мења тренутне вредности индуктивности, а интензитет тог утицаја зависи од више различитих фактора. Свакако најпознатији фактор предствља напон који се намеће статорским намотајима, што у стандардним методама анализе, моделовања и испитивања машина представља и једини извор помоћу којег се ефекат засићења описује. Под тим се претпоставкама закључује да се при константном напону напајања највећи ниво засићења постиже у режиму празног

хода. Испоставља се, међутим, да је ово тврђење у потпуности погрешно. Наиме, оправдање за ову тврдњу се често налази у чињеници да је у режиму празног хода највеће хармонијско изобличење статорских струја, али се притом заборавља чињеница да је и оптерећење у режиму празног хода практично занемарљиво, што резултује у веома малој активној компоненти у статорским струјама.

Реакција роторског кола на обртно поље изазвано статорским струјама је у празном ходу практично занемарљива, што значи да нема ни роторских струја које би својим успостављањем изазвале локална засићења по ободу ротора и статора. Порастом оптерећења расте и реакција ротора, а самим тим и ниво засићења, али се оно не манифестује у великој мери на изобличење статорских струја, јер су сада оне великих интензитета, због великог удела радне компоненте.

Једно оправдање због чега се ефекат засићења поистовећује са оним који се има у режиму празног хода је тај што у том режиму постоји опасност од неконтролисаног пораста статорских струја, а највише због тога што изостаје реакција ротора. У режиму са оптерећењем постоји јака и стабилна реакција ротора, која смањује интензитет магнетног поља у ваздушном зазору, али на рачун пораста магнетског пада напона у феромагнетском језгру, које због појачаног засићења захтева већи део магнетопобудне силе него што је то случај у незасићеном стању. Управо се због тога и погрешно сматра да је засићење у режимима са оптерећењем мање него ли у празном ходу.

На слици 3.36 је илустрован ефекат засићења у анализираној четворополној машини, са посебним нагласком на утицај обртног поља. На левој илустрацији је приказан замрзнут тренутак у току рада електричне машине, где је очигледно да у попречном пресеку машине постоје области са већим интензитетом магнетног поља (области обојене тамнијом бојом). У тим доменима је тренутна вредност релативне пермеабилности мања због већег нивоа засићења. Важно је приметити да се домени са већим степеном засићења у јарму не налазе на истим местима по ободу машине где је наступило засићење у околини ваздушног зазора. На илустрацији десно је приказан један каснији тренутак у раду машине, где се јасно уочава промена места где је ниво засићења највећи, како у јарму, тако и у околини ваздушног зазора. Управо се на овај начин врло сликовито показује ефекат обртног поља на феномен променљивог засићења у машини, које је дакле зависно и од тренутног положаја вектора обртног поља. Уједно се јасно уочава и да је број региона у јарму (или региона у околини зазора) погођених највећим нивоом засићења једнак броју полова машине, чиме се потврђује чињеница да се ефекат засићења утискује у тренутне вредности индуктивности на двострукој учестаности угла тренутног положаја просторног вектора обртног поља. То наравно не значи и да је сама функција модулације индуктивности простопериодична величина, као што се то упрошћено представља у постојећој литератури.



Слика 3.36 Илустрација утицаја обртног поља на засићење у машини

У одељку 3.4.2 је описан нови поступак заснован на методи „замрзнутих пермеабилности“ помоћу којег се може, употребом time-harmonic симулација у нелинеарним срединама, постићи ефекат обртног поља низом статичких симулација у којима се је сукцесивни померај ротора праћен променом фазног става комплексних представника струја статора. Фазни померај се врши за онај електрични угао који обртно поље пређе у временском интервалу потребном ротору да се при дефинисаној брзини обртања помери из једног статичког положаја у наредни, за растојање унапред задате вредности угла. Истовремено се одговарајућа реакција ротора постиже наметањем фреквенције статорских струја које одговарају фреквенцији клизања коју има ротор при дефинисаној брзини обртања. Већ је дискутовано да није неопходно да се симулацијама покрије пун обртај ротора, већ је довољно прећи једну осмину обртаја (једна узлазна или силазна ивица таласа обртног поља који има две периоде по ободу машине, слично попут статорско-роторских међуиндуктивности). Струју коју треба наметнути статорским намотајима треба усагласити са струјом коју физичка машина узима при номиналном напону напајања и дефинисаној брзини ротора. Пошто FEMM 4.2 не нуди могућност напонског побуђивања намотаја, ово је једини начин да се веродостојно прикаже ефекат засићења у машини. За прецизније анализе је могуће и задавати вредност струја статорским намотајима на основу дигитално обрађених података мерења на физичкој машини (због тога што струје нису чисто простопериодичне), али то неће значајно поправити квалитет методе, пошто time-harmonic симулације подразумевају простопериодично напајање.

Након сваке сукцесивне нелинеарне time-harmonic симулације је потребно „замрзнати“ пермеабилности (те вредности су свакако познате и могу се лако добити након конвергирања итеративног процеса) у целом попречном пресеку, те одрадити по две магнетостатичке симулације (које су фиксирањем пермеабилности

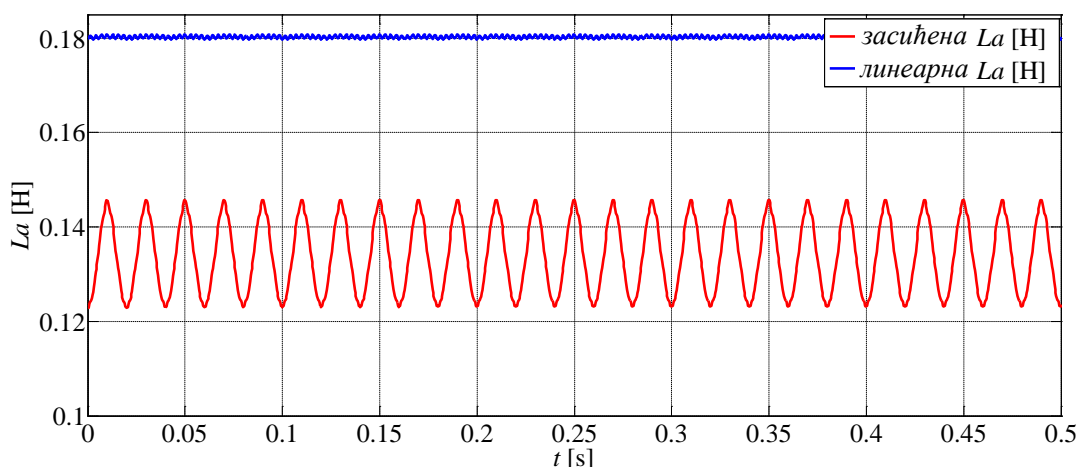
постале линеарне). Две симулације су потребне из разлога што се једном добијају тренутне вредности статорских и статорско-роторских индуктивности везаних за изабрану статорску фазу која се напаја јединичном једносмерном струјом, док се помоћу друге симулације добијају роторске индуктивности везане за изабрану роторску петљу која се такође тада напаја јединичном једносмерном струјом.

Пошто примарни циљ симулација нису тако детаљни феномени као што је варијација индуктивности услед постојања жљебова, угао сукцесивне ротације може да буде реда величине 1° , па и већи. Међутим, сада је за један текући положај ротора потребно одрадити 3 симулације, од којих је једна нелинеарна time-harmonic симулација, које по правилу трају доста дуже од линеарних магнетостатичких симулација. Срећна околност је што се применом „замрзнутих пермеабилности“ трајање time-harmonic симулације може драстично смањити. У принципу, само прва time-harmonic симулација траје значајно дуже од линеарних магнетостатичких симулација (реда и преко 60 секунди), док се већ приликом следеће симулације могу користити вредности „замрзнутих пермеабилности“ добијене претходном симулацијом, чиме се значајно убрзава итеративни поступак. Наиме, прва симулација почиње извршавање са претпостављеним вредностима релативне пермеабилности које одговарају линеарном делу карактеристике магнетисања, што за високе интензитете очекиваног магнетног поља, које се притом прилично нехомогено успоставља по попречном пресеку машине повлачи извршење великог броја итеративних поступака за једначине чворова у областима са већим засићењем. За следећу итерацију је већ могуће користити пермеабилности добијене конвергирањем претходног итеративног поступка (уједно су то и „замрзнуте пермеабилности“ претходних магнетостатичких симулација). Тиме је следећи итеративни поступак значајно боље припремљен почетним условима, пошто се следећа симулација извршава над тренутком у којем је обртно поље прешло мали угао, тако да се у драстично мањем броју чворова мора донекле кориговати вредност релативне пермеабилности, које су већ и онако веома блиске крајњим вредностима након конвергирања итеративног поступка. Коришћењем ових предности се трајање time-harmonic симулације драстично смањује на неких 10-15 секунди.

Недостатак овог приступа је што се резултатима добијеним једном секвенцом сукцесивне ротације и кориговања фазних ставова побудних струја статора може добити зависност индуктивности од засићења за само једну брзину обртања, при унапред дефинисаном напону напајања. Потребно је дакле извршити низ оваквих секвенцијалних симулација за различите брзине обртања, како би се у потпуности могао сагледати веома сложен феномен засићења у ротационим машинама. Ту од користи може да буде познавање природе моментних карактеристика машине. Ако се машина експлоатише искључиво на линеарном делу механичке карактеристике, могуће је са свега неколико низова сукцесивних симулација стећи увид у феномен засићења конкретне машине. То се дугује чињеници да је промена брзине на линеарном делу карактеристике у веома уским границама. Ако се притом жели истражити и утицај промене напона напајања на ниво засићења, потребно је тај низ сукцесивних симулација поновити за неколико различитих вредности напона напајања. Ту већ долази до значајног повећања броја потребних симулација, што превазилази оквире овог истраживања. Овде је примарни циљ био предлагање нове

методе за уважавање ефекта засићења, која указује на значајне недостатке постојећих метода, те самим тим нуди много простора за даља истраживања.

На слици 3.37 је дат упоредни приказ сопствене индуктивности L_a за случај режима идеалног празног хода при номиналном напону напајања од $U_n = 400V$. Вредност индуктивности у линеарној симулацији је реконструисана на основу већ извршених магнетостатичких симулација, простим надовезивањем потребног броја секвенци при једном пуном обртају машине. Симулацијом се реконструисао временски период од 0.5 секунди у реалном времену, за које обртно поље направи 12.5 обртаја при синхроној брзини од 1500 o/min . Отуд је очигледно да се у нелинеарну индуктивност утисне 25 периода изазваних засићењем. Мада варијација индуктивности веома подсећа на простопериодичну, ипак је очигледно да поседује значајан удео виших хармоника умношка броја 2.



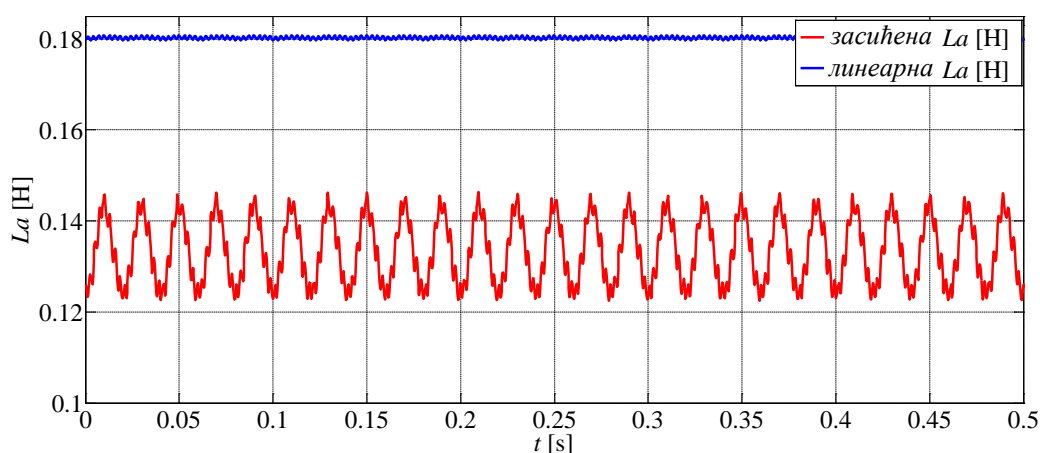
Слика 3.37 Упоредни приказ сопствене индуктивности L_a . Линеарна и нелинеарна симулација при празном ходу машине и I_0 за $U_n = 400V$

Важно је уочити да се резултати симулација који су приказани на слици 3.37 односе на режим идеалног празног хода, у којем готово и да нема реакције роторског кола на обртно поље, тако да је варијација засићења по ободу ваздушног зазора изазвана таласним обликом резултантног магнетног поља које потиче искључиво од магнетопобудних сила намотаја статора. Када оптерећење машине почне да расте, појављује се и све већа реакција роторског кола, која доводи до изобличавања резултантног поља у ваздушном зазору, што самим тим доводи и до изобличења модуларности индуктивности изазване засићењем.

На слици 3.38 је дат упоредни приказ сопствене индуктивности L_a за случај номиналног режима рада, са брзином од 1454 o/min при номиналној ефективној вредности струје статора од $I_s = 22A$ и номиналном напону напајања од $U_n = 400V$. Уочава се значајније изобличење индуктивности које је изазвано засићењем, због присутне реакције ротора. Сама амплитуда варијације, као и средња вредност засићене индуктивности се не разликује значајно од вредности приказане на слици 3.37, што је и очекивано, будући да су брзине у ова два случаја врло блиске. Тиме се

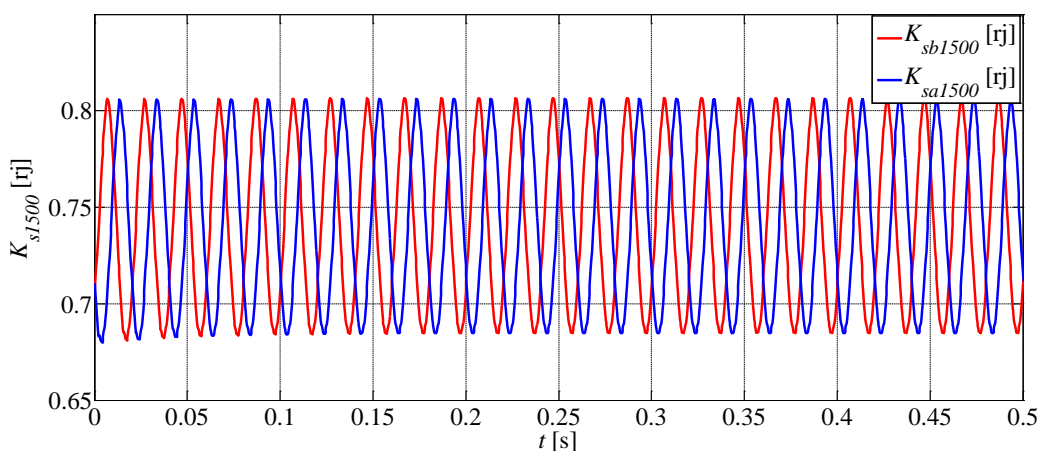
донекле може упростити уважавање ефекта засићења, при брзинама које су блиске номиналним вредностима, увођењем такозваног коефицијента засићења K_{sn} , који се дефинише као количник засићене (L_{asat}) и незасићене (L_{alin}) индуктивности при одређеној брзини обртања n [o/min] (уз услов константности напона напајања):

$$K_{sn} = \frac{L_{asat}}{L_{alin}} \quad (3.41)$$



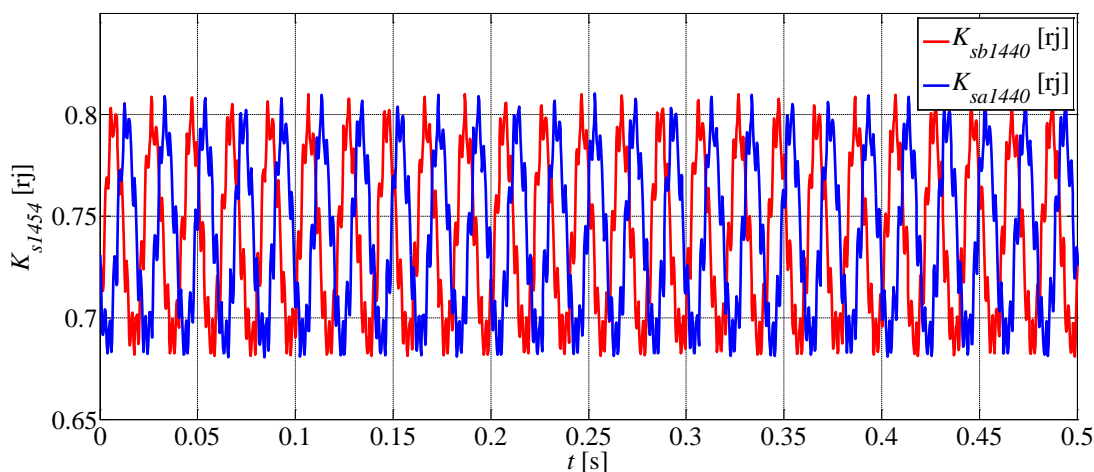
Слика 3.38 Упоредни приказ сопствене индуктивности L_a . Линеарна и нелинеарна симулација при номиналној брзини машине од 1454 o/min и $I_s = 22A$ при $U_n = 400V$

На слици 3.39 је упоредо дат коефицијент засићења сопствених индуктивности L_a , означен са K_{sa1500} (који је добијен количником индуктивности приказаних на слици 3.37, применом формуле (3.41)) и коефицијент засићења индуктивности L_b , означен са K_{sb1500} , који је добијен фазним померањем коефицијента K_{sa1500} за угао од $2\pi/3$. За остале статорске индуктивности се може применити сличан таласни облик, али се мора узети у обзир фазни померај који постоји међу индуктивностима.



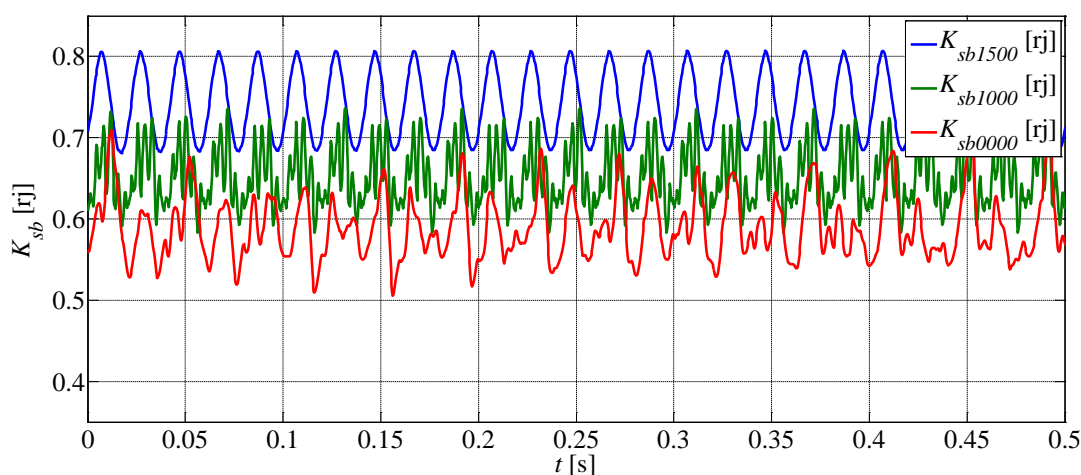
Слика 3.39 Коефицијент засићења $K_{sa1500}[rj]$ сопствене индуктивности L_a и коефицијент засићења $K_{sb1500}[rj]$ сопствене индуктивности L_b

На слици 3.40 је упоредо дат коефицијент zasiћења сопствених индуктивности L_a , означен са K_{sa1454} (који је добијен количником индуктивности приказаних на слици 3.38, применом формуле (3.41)) и коефицијент zasiћења индуктивности L_b , означен са K_{sb1454} , који је опет добијен фазним померањем коефицијента K_{sa1454} за угао од $2\pi/3$. Сличним поступком се може добити коефицијент и за остале статорске индуктивности.



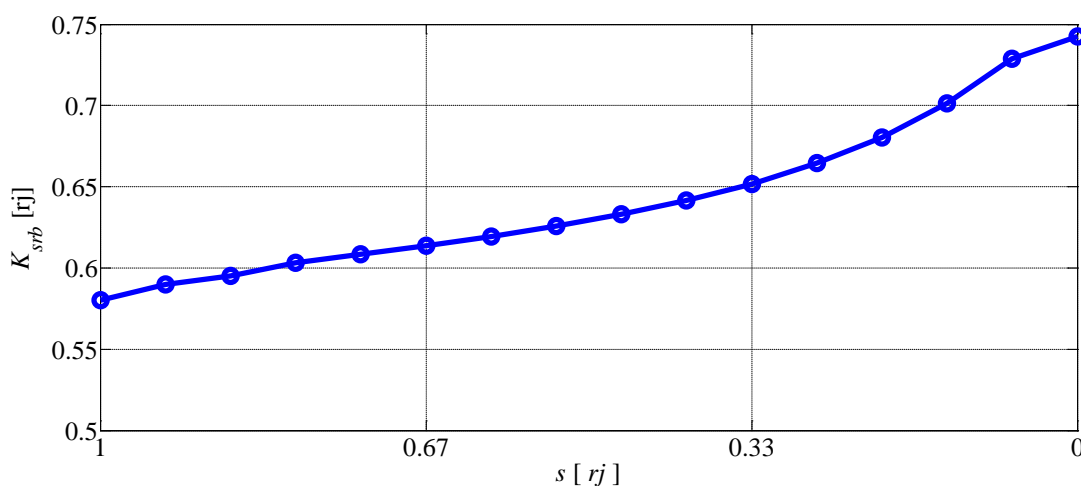
Слика 3.40 Коефицијент zasiћења $K_{sa1454}[rj]$ сопствене индуктивности L_a и коефицијент zasiћења $K_{sb1454}[rj]$ сопствене индуктивности L_b

У постојећој литератури се наводи да порастом оптерећења долази до повећања zasiћења, што се испоставља као тачно, али се уједно тврди и да модулација на двострукој учестаности брзине обртног поља такође добија на амплитуди у том процесу. Симулације спроведене у току овог истраживања оповргавају ово тврђење. Наиме, испоставља се да индуктивности губе на средњој вредности како оптерећење машине расте, али се зато амплитуда модулације zasiћењем готово и не повећава. На слици 3.41 је дат упоредни приказ коефицијената zasiћења сопствене индуктивности L_b , за различите брзине обртања, при номиналном напону напајања. Конкретно, упоредо су приказани коефицијенти при брзинама обртања од 1500 o/min , 1000 o/min и при устаљеном кратком споју машине. Потврђује се драстичније изобличење коефицијената како оптерећење машине расте, али амплитуда варијације не трпи готово никакве промене. Природно је очекивати све већи степен zasiћења, како се машина примиче режиму кратког споја, што се може приметити падом средње вредности илустрованих коефицијената.



Слика 3.41 Коефицијент zasiћења $K_{sb}[rj]$ сопствене индуктивности L_b при брзинама обртања од 1500 o/min, 1000 o/min и при устаљеном кратком споју

Промена средње вредности коефицијента zasiћења индуктивности L_b , означеног са $K_{srb}[rj]$, за брзине у опсегу кратког споја, па све до синхроне брзине је приказана на слици 3.42. Зависност је добијена помоћу симулација за карактеристичне брзине обртања $n \in \{0, 100, 200, \dots, 1400, 1500\}$ o/min, али је због ефектнијег приказа промена илустрована у функцији клизања.



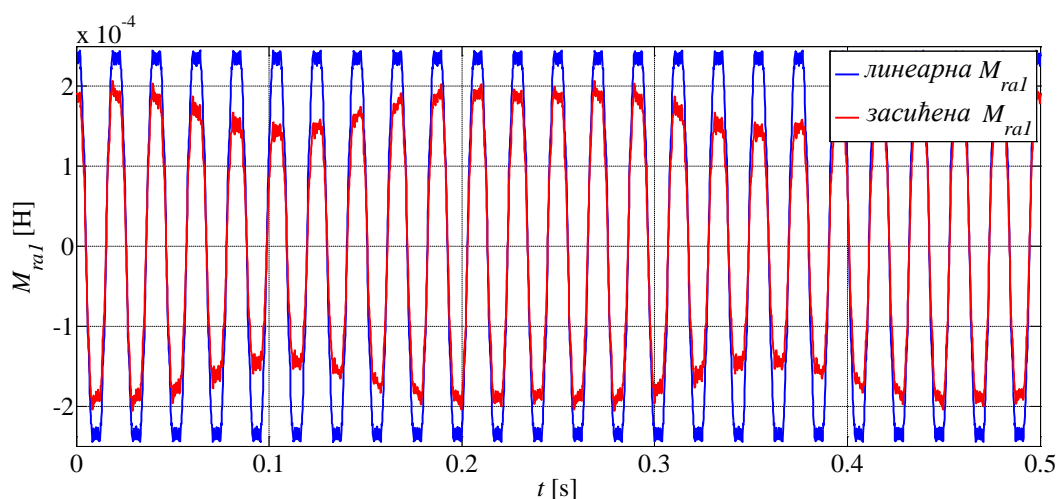
Слика 3.42 Средња вредност коефицијента zasiћења $K_{srb}[rj]$ индуктивности L_b за разне вредности брзина, при номиналном напону напајања машине

Оно што се може закључити на крају овог излагања о ефекту zasiћења на статорске индуктивности је да се за веродостојно уважавање овог ефекта при брзинама које припадају линеарном делу моментне карактеристике довољно користити простопериодичну функцију константне амплитуде, којом се моделује варијација индуктивности око средње вредности, док се промена средње вредности при некој брзини може добити помоћу корекционог фактора промене средње

вредности коефицијента засићења, који је приказан на слици 3.42. Због облика ове зависности, могуће је лако извршити фитовање криве полиномом другог или евентуално трећег степена, што у многоне олакшава нумеричку имплементацију овог ефекта.

Утицај засићења се на потпуно другачији физички начин манифестује на статорско-роторским и роторским индуктивностима. Овај феномен се објашњава чињеницом да обртно поље има релативну брзину кретања у односу на роторске проводнике која је једнака брзини клизања у текућем режиму, што доводи до утискивања варијације индуктивности услед засићења на веома ниским учестаностима (при брзинама које се имају на линеарном делу моментне карактеристике). Нема смисла приказивати варијацију ових индуктивности у празном ходу машине, пошто тада оне не изазивају никакву реакцију, будући да су интензитети струја у ротору тада врло мали.

На слици 3.43 је дат упоредни приказ међусобне индуктивности M_{ra1} за случај номиналног режима рада, са брзином од 1454 o/min при номиналној ефективној вредности струје статора од $I_s = 22\text{A}$ и номиналном напону напајања од $U_n = 400\text{V}$.

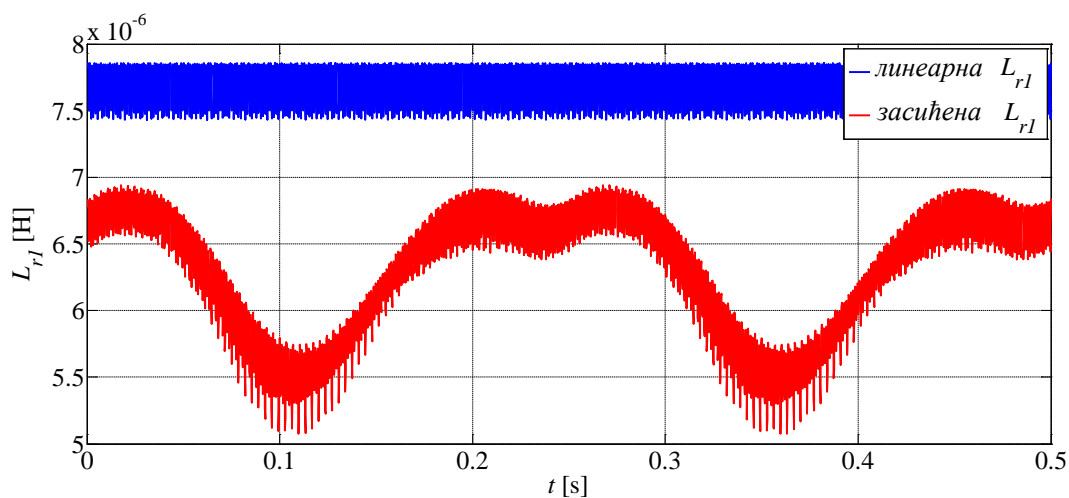


Слика 3.43 Упоредни приказ међусобне индуктивности M_{ra1} . Линеарна и нелинеарна симулација при номиналној брзини машине од 1454 o/min и $I_s = 22\text{A}$ при $U_n = 400\text{V}$

Уочава се варијација амплитуде засићене вредности индуктивности на веома ниској вредности двоструке учестаности клизања (при номиналној брзини обртања фреквенција роторских струја износи око 2 Hz , што значи да се у току 0.5 секунди изврше две периоде варијације индуктивности, која је на учестаности од 4 Hz , што се јасно може уочити са слике 3.43).

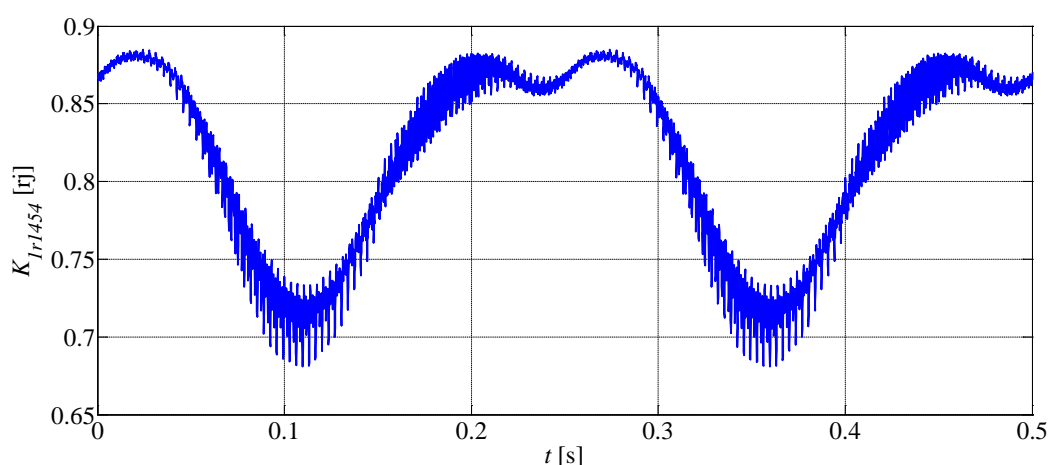
Исти феномен се може приметити ако се упоредо прикаже таласни облик линеарне и засићене вредности сопствене индуктивности L_{r1} (слика 3.44), које су добијене симулацијама изведеним под истим, номиналним условима, као што је то случај и са резултатима приказаним на претходној слици. Ови одзиви су повољнији за прорачување коефицијента засићења роторских индуктивности, пошто је реч о

величинама које нису наизменичне, па им се без математичких потешкоћа лако може дефинисати количник.



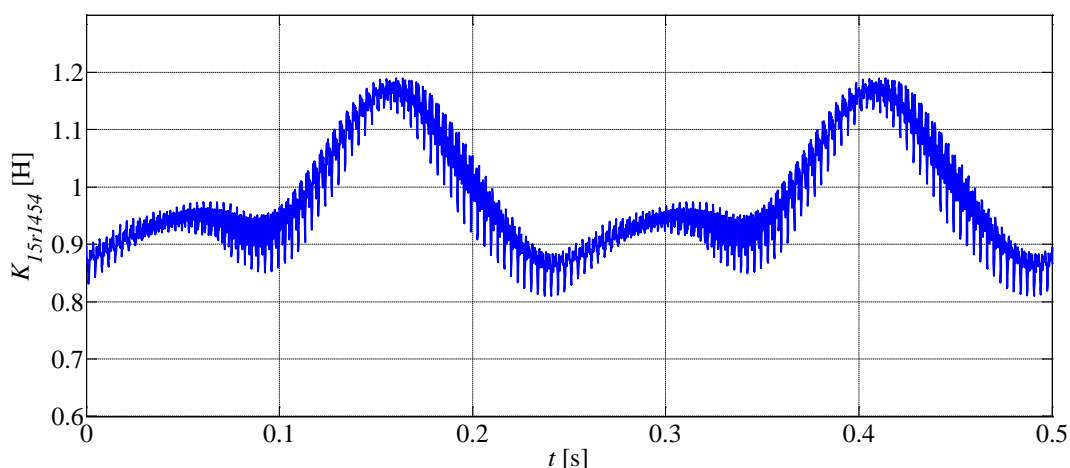
Слика 3.44 Упоредни приказ сопствене индуктивности L_{r1} . Линеарна и нелинеарна симулација при номиналној брзини машине од 1454 o/min и $I_s = 22\text{A}$ при $U_n = 400\text{V}$

На слици 3.45 је приказан коефицијент засићења за роторску петљу 1, при номиналним условима рада, означен са K_{1r1454} . Идентичан талас се користи и за кориговање индуктивности M_{ra1} , док се за индуктивности исте петље према друге две статорске фазе мора применити промена фазног става од $\pm 2\pi/3$. Ако се желе добити таласни облици за друге роторске петље, онда се истовремено мора применити фазни померај који је умножак угла $\pm 2\pi/28$, у зависности од тога колико је текућа роторска петља удаљена од петље 1.



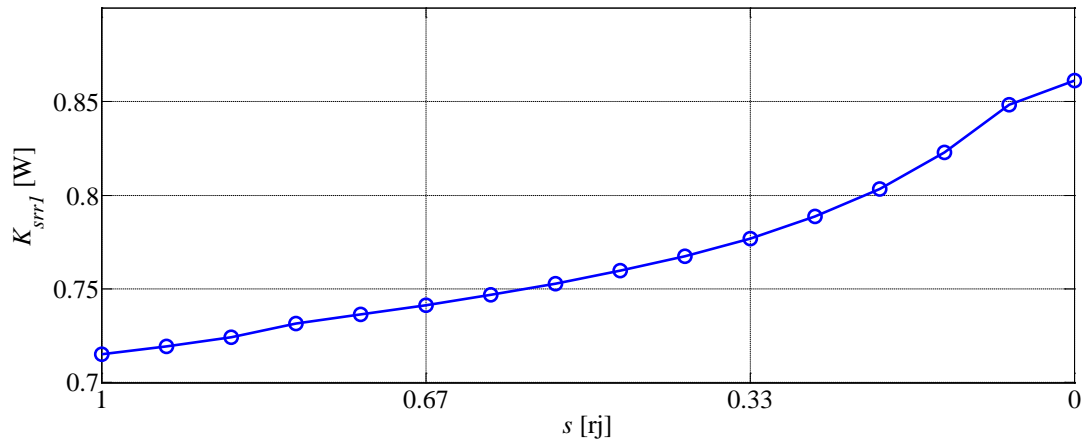
Слика 3.45 Коефицијент засићења $K_{1r1454} [rj]$ сопствене индуктивности L_{r1}

Примећује се да овај коефицијент има осетно другачији таласни облик (изузимајући различите учестаности, наравно) од коефицијента засићења статорских индуктивности у истом режиму, те и да му је средња вредност већа за неких 20%. То је још једна потврда погрешног тумачења и моделовања ефекта засићења у постојећој литератури, где се усваја да варијација релативне пермеабилности у околини ваздушног зазора подједнако утиче на промену свих индуктивности у машини. То је било и за очекивати, јер намотаји статора и роторске петље имају сасвим другачију геометрију, те на њих засићење не утиче подједнако. Из истог разлога и све роторске међусобне индуктивности имају потпуно другачије коефицијенте засићења. Чак је могуће да неке међусобне индуктивности мало и порасту због ефекта засићења, што није тешко разумети ако се има у виду да се засићењем појединих региона у околини ваздушног зазора осетно могу променити путеви успостављања линија магнетног поља, тако да се у одређеним регионима пролази више линија него што би то био случај да је средина линеарна. Илустровање овог ефекта је приказано коефицијентом засићења међусобне индуктивности роторских петљи 1 и 5, означеним са $K_{15r1454}$, при номиналним условима рада, који је приказан на слици 3.46.



Слика 3.46 Коефицијент засићења $K_{15r1454}$ [H] међусобне индуктивности M_{r15}

Уважавање свих ових феномена у роторском колу би био изузетно компликован нумерички поступак, који би довео у питање примену МССА методе у те сврхе. Срећом, у дискусији резултата линеарних магнетостатичких симулација је наведено да су међусобне индуктивности у роторском колу драстично мање од сопствених индуктивности роторских петљи, те је стога оправдано занемарити њихове варијације изазване засићењем. То упрошћење значајно поједностављује уважавање овог ефекта. На слици 3.47 је приказана средња вредност коефицијента засићења индуктивности L_{r1} , добијена истим поступком као зависност K_{srb} са слике 3.42.



Слика 3.47 Средња вредност коефицијента zasiћења $K_{srr1}[rj]$ индуктивности L_{r1} за разне вредности брзина, при номиналном напону напајања машине

4. Примена новог динамичког модела кавезне асинхроне машине

Након детаљних излагања о методи коначних елемената примењеној у анализи кавезних асинхроних машина, те развоја динамичког модела заснованог на разним имплементацијама те методе, на реду је верификација развијеног модела. Резултати симулација ће бити поређени са резултатима добијеним путем експеримената на физичкој машини израђеној за потребе овог истраживања, али и са резултатима добијеним у комерцијалном софтверу Opera2D, путем транзијентних симулација.

У ранијим поглављима је више пута наглашено да је главни циљ развијања динамичког модела машине могућност анализирања ефеката које сама конструкција машине има на таласне облике и спектар статорских струја. Ова појава ће бити илустрована на неколико карактеристичних примера. У ово истраживање се првобитно кренуло са циљем анализирања механизма настанка жљобних хармоника, са посебним нагласком на покушај квантификовања доминантног утицаја на њихово настајање. Управо је из тог разлога и израђена машина са два различита типа роторских кавеза, које карактерише различит степен закошења проводника. Након тога је природан искорак у анализи рада машине био покушај квантификовања и других компоненти у спектру статорских струја које су се уочиле анализом спектра експериментално измерених струја, а које нису последица жљобних хармоника, или виших хармоника узрокованих изобличењем напона напајања машине. Тако се искристалисала потреба за покушајем проширења основног, линеарног модела машине на режиме који у себи уважавају и ефекат засићења. Као што се испоставило, ефекат засићења се показао као далеко најсложенији феномен у раду кавезних асинхроних машина, да би и сам по себи био више него довољан за више различитих истраживања. Стога је дати ефекат детаљно истражен само у условима константног напона напајања, али је дато довољно наговештаја у ком се правцу могу наставити будућа истраживања. Најважнији допринос овог истраживања на тему засићења је оповргавање појединих аспеката постојећих решења у литератури, који су на погрешан и непрецизан начин квантификовали тај феномен [43]-[44]. На крају се природно наметнула потреба за потврдом веродостојности предложеног динамичког модела и у режимима са одређеним типом квара, конкретно при појави прекида једне или већег броја шипки роторског кавеза. Ови су се кварови показали као изузетно атрактивно подручје за

даља истраживања, јер представљају практично неисцрпан извор за развијање нових метода њихове детекције.

4.1 Детекција жљебних и засићењем индукованих хармоника у спектру статорских струја исправне машине

У верификацију развијеног динамичког модела ће се ући поређењем резултата добијених на самом моделу са резултатима симулација спроведених у комерцијалном софтверу Opera2D, а уједно и поређењем са експериментално добијеним резултатима.

Спектар статорских струја исправних кавезних асинхроних машина је богат вишим хармоничким члановима, међу којима се издвајају две доминантне групе. Прву групу чине виши хармоници који су прост умножак основног хармоника, те им се фреквенција не мења током рада машине у различитим режимима (осим ако и сам извор не мења фреквенцију током рада у различитим режимима). То су првенствено виши хармоници настали услед хармонијског изобличења напона напајања, било да је реч о мрежном напајању, било да се машина напаја из неког од уређаја енергетске електронике. По правилу је реч о вишим хармоничким члановима непарног реда (изузимајући непарне бројеве умношка броја 3, који се ретко појављују, а чак и тада су углавном занемарљиви). Такви хармонички чланови се могу појавити и као последица конструкције саме машине, а нарочит утицај на њихову појаву има трапезаста расподела магнетопобудних сила намотаја статора, што је опште позната чињеница, која је карактеристична за синхроне машине [4]. Другу групу чине виши хармоници чија је фреквенција зависна од тренутног режима рада машине, где се првенствено мисли на зависност тих хармоника од тренутне брзине ротора. Међу тим хармоничким члановима се највише својом појавом истичу жљебни хармоници, који се већ дужи низ година користе како у развоју алгоритама за естимацију брзине без сензора на вратилу машине, тако и као помоћно средство за детектовање различитих типова кварова у машини [45]-[47], [16]. У те кварове се убрајају делимично или потпуно пуцање једне или више роторских шипки, сегмената краткоспојних прстенова роторског кавеза, те разне методе за детекцију појаве ексцентритета или међунавојних кратких спојева у намотајима статора. У више хармонике чија фреквенција зависи од тренутне брзине машине се убрајају и засићењем индуковани хармоници, као и хармоници настали услед појаве неког типа ексцентритета ротора, који се такође могу користити за детекцију брзине или као индикатор појаве неке од наведених врста кварова.

4.1.1 Жљебни хармоници у спектру статорских струја

Појава жљебних хармоника је у директној вези са геометријом роторског кола кавезне машине, јер у првом реду свој настанак додују жљебовима ротора. Учестаности жљебних хармоника, означене са f_{RSH} , на којима се у спектру статорских струја појављују хармоници су функција броја роторских шипки (тј. жљебова) N_B , броја пари полова p , као и учестаности статорског напајања f_s , што је приказано релацијом (4.1). Природним бројем ν се оставља могућност да извор статорског

напајања поседује и осетнији удео виших хармоника, који су за случај напајања из мреже, а и из уређаја енергетске електронике по правилу непарни бројеви облика $\nu = 6k \pm 1$ за $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

$$f_{RSH} = \left(n \cdot N_B \frac{1-s}{p} \pm \nu \right) \cdot f_s, n \in \{1, 2, 3, \dots\} \quad (4.1)$$

Жљебни хармоници за $n = 1$ су познати и под називом *Principle Slot Harmonics* – PSH [48]. Важно је приметити да при врло малом оптерећењу машине жљебни хармоници прерастају у просте умношке основне учестаности. Због тога их је понекад тешко користити као поуздан показатељ тренутне брзине машине, јер при малим клизањима бивају „замаскирани“ постојећим вишим хармоницима проистеклим из изобличења извора напајања. То је нарочито случај за машине које имају непаран број роторских жљебова по пару полова.

Математички се може показати постојање жљебних хармоника проистеклих искључиво услед варијације статорских индуктивности узроковане жљебовима ротора. Мотивација за описивање тог механизма се изродила из чињенице да се у постојећој литератури као главни механизам настанка жљебних хармоника истиче дискретна расподела магнетопобудне силе ротора због скоковитих промена које ствара концентрисана струјна расподела роторских проводника. Због тога та расподела магнетопобудне силе у себи носи информацију о броју роторских жљебова, а тиме посредно и податак о тренутној брзини машине. У највећем броју радова се чак и не помиње ефекат који на генерисање жљебних хармоника имају варијације статорских индуктивности [49] (показало се у претходним поглављима да је њихова варијација доминантно изазвана жљебовима ротора, наравно не рачунајући ту ефекат засићења), док је у [50] поменуто да оба ефекта производе жљебне хармонике на истим учестаностима, те да је раздвајање њихових утицаја готово немогуће остварити, осим када машина ради са врло малим оптерећењем, па је магнетопобудна сила роторског кола занемарљива.

Ако се напише израз за део флуksног обухвата статорске фазе а, који је искључиво последица спрезања статорских фаза међусобно, узимајући у обзир да статорске струје могу да имају више хармонике реда $\nu = 6l \pm 1$ за $l \in \{1, 2, 3, \dots\}$, добија се следећи израз, где је са $I_{max\nu}$ означена амплитуда статорских струја хармоника реда ν , а са $\varphi_{0\nu}$ је означен почетни фазни став те струје:

$$\Psi_{as} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \begin{bmatrix} L_a(\vartheta) \\ M_{ab}(\vartheta) \\ M_{ac}(\vartheta) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} I_{max\nu} \cos(\nu\omega_s t + \varphi_{0\nu}) \\ I_{max\nu} \cos\left(\nu\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) + \varphi_{0\nu}\right) \\ I_{max\nu} \cos\left(\nu\left(\omega_s t + \frac{2\pi}{3}\right) + \varphi_{0\nu}\right) \end{bmatrix} \quad (4.2).$$

Када се уваже дефиниције развоја статорских индуктивности у Фуријеов ред, које су дате релацијама (3.22)-(3.27), претходни израз се може даље развити, уз

услов да се узимају у обзир само чланови развоја који су последица роторских жљебова. Пошто су индуктивности представљене развојем у Фуријеов ред у функцији електричног угла положаја ротора, виши хармонички чланови постају умножак броја роторских жљебова по пару полова.

$$\Psi_{as} = \sum_{v=1}^{\infty} I_{maxv} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} L_{ssan} \cos\left(\frac{N_B}{p} n \vartheta\right) + L_{ssbn} \sin\left(\frac{N_B}{p} n \vartheta\right) \\ M_{ssan} \cos\left(\frac{N_B}{p} n \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right)\right) + M_{ssbn} \sin\left(\frac{N_B}{p} n \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ M_{ssan} \cos\left(\frac{N_B}{p} n \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right)\right) + M_{ssbn} \sin\left(\frac{N_B}{p} n \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right)\right) \end{array} \right]^T \\ \left[\begin{array}{l} \cos(v\omega_s t + \varphi_{0v}) \\ \cos\left(v\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) + \varphi_{0v}\right) \\ \cos\left(v\left(\omega_s t + \frac{2\pi}{3}\right) + \varphi_{0v}\right) \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

Чланови Фуријеовог реда одређене индуктивности представљени синусном и косинусном функцијом за исто n се могу простом тригонометријском трансформацијом свести на само један израз, што се након множења матрица у релацији (4.3) своди на следећи израз:

$$\Psi_{as} = \sum_{v=1}^{\infty} I_{maxv} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} L_{ssn} \cos(v\omega_s t + \varphi_{0v}) \cos\left(\frac{N_B}{p} n \vartheta - \varphi_{L_{ssn}}\right) + \\ M_{ssn} \cos\left(v\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) + \varphi_{0v}\right) \cos\left(\frac{N_B}{p} n \vartheta - \frac{N_B}{p} n \frac{2\pi}{3} - \varphi_{M_{ssn}}\right) + \\ M_{ssn} \cos\left(v\left(\omega_s t + \frac{2\pi}{3}\right) + \varphi_{0v}\right) \cos\left(\frac{N_B}{p} n \vartheta + \frac{N_B}{p} n \frac{2\pi}{3} - \varphi_{M_{ssn}}\right) \end{array} \right\} \quad (4.4).$$

Нове ознаке у претходној релацији су дефинисане са:

$$\begin{aligned} L_{ssn} &= \sqrt{L_{ssan}^2 + L_{ssbn}^2}, M_{ssn} = \sqrt{M_{ssan}^2 + M_{ssbn}^2}, \\ \varphi_{L_{ssn}} &= \arg(L_{ssn}(\vartheta)), \varphi_{M_{ssn}} = \arg(M_{ssn}(\vartheta)). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Трансформисањем производа тригонометријских функција у збир и заменом $\vartheta = (1 - s)\omega_s$ се добија следећи израз:

$$\Psi_{as} = \left. \sum_{v=1}^{\infty} \frac{I_{maxv}}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} L_{ssn} \left(\begin{array}{l} \cos \left(\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) + v \right) \omega_s t + \varphi_{0v} - \varphi_{L_{ssn}} \right) + \\ \cos \left(\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) - v \right) \omega_s t - \varphi_{0v} - \varphi_{L_{ssn}} \right) \end{array} \right) \\ \\ M_{ssn} \left(\begin{array}{l} \cos \left(\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) + v \right) \omega_s t - v \frac{2\pi}{3} + \varphi_{0v} - \varphi_{M_{ssn}} \right) + \\ \cos \left(\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) - v \right) \omega_s t + v \frac{2\pi}{3} - \varphi_{0v} - \varphi_{M_{ssn}} \right) \\ \cos \left(\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) + v \right) \omega_s t + \left(\frac{N_B}{p} n + v \right) \frac{2\pi}{3} + \varphi_{0v} - \varphi_{M_{ssn}} \right) + \\ \cos \left(\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) - v \right) \omega_s t + \left(\frac{N_B}{p} n - v \right) \frac{2\pi}{3} - \varphi_{0v} - \varphi_{M_{ssn}} \right) \end{array} \right) \end{array} \right\} \quad (4.6)$$

Сличним поступком који је детаљно приказан претходним релацијама се може стићи и до израза за делове флуksних обухвата преостале две статорске фазе, што је приказано релацијама (4.7)-(4.8).

$$\Psi_{bs} = \left. \sum_{v=1}^{\infty} \frac{I_{maxv}}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} L_{ssn} \left(\begin{array}{l} \cos \left(\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) + v \right) \omega_s t - \left(\frac{N_B}{p} n + v \right) \frac{2\pi}{3} + \varphi_{0v} - \varphi_{L_{ssn}} \right) + \\ \cos \left(\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) - v \right) \omega_s t - \left(\frac{N_B}{p} n - v \right) \frac{2\pi}{3} - \varphi_{0v} - \varphi_{L_{ssn}} \right) \end{array} \right) \\ \\ M_{ssn} \left(\begin{array}{l} \cos \left(\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) + v \right) \omega_s t + \varphi_{0v} - \varphi_{M_{ssn}} \right) + \\ \cos \left(\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) - v \right) \omega_s t - \varphi_{0v} - \varphi_{M_{ssn}} \right) \\ \cos \left(\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) + v \right) \omega_s t - \left(\frac{N_B}{p} n - v \right) \frac{2\pi}{3} + \varphi_{0v} - \varphi_{M_{ssn}} \right) + \\ \cos \left(\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) - v \right) \omega_s t - \left(\frac{N_B}{p} n + v \right) \frac{2\pi}{3} - \varphi_{0v} - \varphi_{M_{ssn}} \right) \end{array} \right) \end{array} \right\} \quad (4.7)$$

$$\Psi_{cs} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{I_{maxv}}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} L_{ssn} \left(\begin{array}{l} \cos \left(\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) + v \right) \omega_s t + \left(\frac{N_B}{p} n + v \right) \frac{2\pi}{3} + \varphi_{0v} - \varphi_{L_{ssn}} \right) + \\ \cos \left(\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) - v \right) \omega_s t + \left(\frac{N_B}{p} n - v \right) \frac{2\pi}{3} - \varphi_{0v} - \varphi_{L_{ssn}} \right) \end{array} \right) \\ M_{ssn} \left(\begin{array}{l} \cos \left(\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) + v \right) \omega_s t - \left(\frac{N_B}{p} n + v \right) \frac{2\pi}{3} + \varphi_{0v} - \varphi_{M_{ssn}} \right) + \\ \cos \left(\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) - v \right) \omega_s t - \left(\frac{N_B}{p} n - v \right) \frac{2\pi}{3} - \varphi_{0v} - \varphi_{M_{ssn}} \right) \\ \cos \left(\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) + v \right) \omega_s t + \left(\frac{N_B}{p} n - v \right) \frac{2\pi}{3} + \varphi_{0v} - \varphi_{M_{ssn}} \right) + \\ \cos \left(\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) - v \right) \omega_s t + \left(\frac{N_B}{p} n + v \right) \frac{2\pi}{3} - \varphi_{0v} - \varphi_{M_{ssn}} \right) \end{array} \right) \end{array} \right\} \quad (4.8)$$

При одређеним комбинацијама параметара N_B, p, n и v неке од наведених компоненти у деловима флуksних обухвата не могу постојати (што је нарочито важно када је машина спрегнута у спрегу статорских намотаја Y), или се њихов ефекат на индуковање напона и струја не види изван фазних намотаја (за спрегу статорских намотаја Δ). Наиме, када су компоненте флуksних обухвата у различитим статорским намотајима међусобно у фази, те компоненте ће покушати да индукују струје у намотајима, посредством електромоторних сила које су на истим учестаностима. Ако су намотаји статора спрегнути у звезду (која се по правилу не уземљује), такве се струје не могу успоставити, док се у спреси троугао такве струје могу успоставити кроз намотаје машине, али се не могу видети изван спреге. Због толерабилних несавршености у физичким машинама може да дође до појаве мале неуравнотежености у намотајима машине, што би се пресликало и у неједнакост делова флуksних обухвата који би требало да буду међусобно у фази, што може довести до појаве струја на тим учестаностима и изван спреге троугао.

Примера ради, за конкретну машину за коју важи $N_B = 28, p = 2$ и $v = 1$ компоненте у флуksним обухватима које су на учестаностима $\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) + 1\right) \omega_s$ су међусобно у фази за $n = 1$, док исто то важи за компоненте у флуksним обухватима на учестаностима $\left(\frac{N_B}{p} n(1-s) + 1\right) \omega_s$ када је $n = 2$. Обично су од највећег значаја жљебни хармоници за $n = 1$ и $n = 2$, при $v = 1$, па ће се анализом резултата добијених помоћу симулација и експеримената потврдити присуство, односно одсуство дискутованих компоненти у спектру мрежних струја.

Дискусија о пореклу жљебних хармоника као последица варијације статорских индуктивности не може бити комплетна без анализе утицаја струја индукованих на учестаностима жљебних хармоника на роторско коло. Увидом у спектар статорско-роторских индуктивности је уочено да се оне доминантно састоје од виших хармоника непарног реда, због карактеристичног трапезастог облика. Анализа утицаја роторског кола као одговор на струје жљебних хармоника са статора се довољно тачно може извршити ако се спрега међу намотајима статора и ротора

описе само преко основне компоненте Фуријеовог развоја статорско-роторских индуктивности, будући да је поступак за више хармонијске чланове потпуно аналоган. Такође, довољно је уважити утицај статора само преко индуковане струје жљобних хармоника на учестаностима $\left(\frac{N_B}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s$, пошто је анализа за остале компоненте такође потпуно аналогна.

Део флуksног обухвата роторске петље k , који је последица спрезања са статорским фазама се може написати помоћу релације (4.9), где је са $I_{maxRSH1}$ означена амплитуда, а са φ_0 је означена фаза статорских струја на учестаности PSH жљобног хармоника.

$$\Psi_{rk} = \sum_{v=1}^{\infty} \begin{bmatrix} M_{rak}(\vartheta) \\ M_{rbk}(\vartheta) \\ M_{rck}(\vartheta) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} I_{maxRSH1} \cos\left(\left(\frac{N_B}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + \varphi_0\right) \\ I_{maxRSH1} \cos\left(\left(\frac{N_B}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t - \frac{2\pi}{3} + \varphi_0\right) \\ I_{maxRSH1} \cos\left(\left(\frac{N_B}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + \frac{2\pi}{3} + \varphi_0\right) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Када се уважи дефиниција развоја у Фуријеов ред статорско-роторских индуктивности, дата релацијама (3.28)-(3.31), уврштавањем у (4.9) се добија израз (4.10).

$$\Psi_{rk} = I_{maxRSH1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} M_{ra1} \cos(\vartheta - (k-1)\alpha) + M_{rb1} \sin(\vartheta - (k-1)\alpha) \\ M_{ra1} \cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} - (k-1)\alpha\right) + M_{rb1} \sin\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} - (k-1)\alpha\right) \\ M_{ra1} \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3} - (k-1)\alpha\right) + M_{rb1} \sin\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3} - (k-1)\alpha\right) \end{array} \right]^T \cdot \\ \left[\begin{array}{l} \cos\left(\left(\frac{N_B}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + \varphi_0\right) \\ \cos\left(\left(\frac{N_B}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t - \frac{2\pi}{3} + \varphi_0\right) \\ \cos\left(\left(\frac{N_B}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + \frac{2\pi}{3} + \varphi_0\right) \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (4.10)$$

Сличним поступком као за случај статорских индуктивности, сума тригонометријских функција се преводи у производ, што је приказано релацијом (4.11).

$$\Psi_{rk} = M_{sr} I_{maxRSH1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos(\vartheta - (k-1)\alpha - \varphi_{M_{sr}}) \cos\left(\left(\frac{N_B}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + \varphi_0\right) + \\ \cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} - (k-1)\alpha\right) \cos\left(\left(\frac{N_B}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t - \frac{2\pi}{3} + \varphi_0\right) + \\ \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3} - (k-1)\alpha\right) \cos\left(\left(\frac{N_B}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + \frac{2\pi}{3} + \varphi_0\right) \end{array} \right\} \quad (4.11)$$

Дефиниција нових ознака је дата релацијом (4.12).

$$M_{sr} = \sqrt{M_{ra1}^2 + M_{rb1}^2}, \varphi_{M_{sr}} = \arg(M_{sr}(\vartheta)), k \in \{1, 2, \dots, N_B\} \quad (4.12)$$

Сређивањем израза (4.11), и смењивањем $\vartheta = (1-s)\omega_s$, те применом тригонометријских трансформација се добија израз (4.13).

$$\Psi_{rk} = \frac{M_{sr} I_{maxRSH1}}{2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\left(\frac{N_B+p}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + \varphi_0 - (k-1)\alpha - \varphi_{M_{sr}}\right) + \\ \cos\left(\left(\frac{N_B-p}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + \varphi_0 + (k-1)\alpha - \varphi_{M_{sr}}\right) + \\ \cos\left(\left(\frac{N_B+p}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + \varphi_0 - \frac{4\pi}{3} - (k-1)\alpha - \varphi_{M_{sr}}\right) + \\ \cos\left(\left(\frac{N_B-p}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + \varphi_0 + (k-1)\alpha - \varphi_{M_{sr}}\right) + \\ \cos\left(\left(\frac{N_B+p}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + \varphi_0 + \frac{4\pi}{3} - (k-1)\alpha - \varphi_{M_{sr}}\right) + \\ \cos\left(\left(\frac{N_B-p}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + \varphi_0 + (k-1)\alpha - \varphi_{M_{sr}}\right) \end{array} \right\} \quad (4.13)$$

Пажљивим посматрањем претходно изведеног израза се може уочити да од свих приказаних компоненти остаје трострука вредност компоненте на учестаностима $\left(\frac{N_B-p}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s$, будући да је збир компоненти на учестаностима $\left(\frac{N_B-p}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s$ једнак нули. Део флуksног обухвата, након сређивања, прераста у израз (4.14).

$$\Psi_{rk} = \frac{3M_{sr} I_{maxRSH1}}{2} \cdot \cos\left(\left(\frac{N_B-p}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + \varphi_0 + (k-1)\alpha + \varphi_{M_{sr}}\right) \quad (4.14)$$

Флуksни обухват дат последњим изразом ће се појавити у свим роторским петљама, где ће посредством индукованих електромоторних сила успоставити струје на учестаностима $\left(\frac{N_B-p}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s$. Сада је потребно изразити повратни утицај ових струја на статорске намотаје, посредством електромагнетне спреге која се моделује статорско-роторским индуктивностима.

Ако се поново узму у обзир само основне компоненте статорско-роторских индуктивности, компоненте роторских струја на учестаностима $\left(\frac{N_B-p}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s$, са амплитудом I_{max1} и почетним фазним ставом γ_0 , ће у статорским намотајима створити делове флуksних обухвата по следећем обрасцу:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{ar} \\ \Psi_{br} \\ \Psi_{cr} \end{bmatrix} = M_{sr} I_{max1} \cdot \sum_{k=1}^{N_B} \begin{bmatrix} \cos(\vartheta - (k-1)\alpha - \varphi_{M_{sr}}) \cos\left(\left(\frac{N_B-p}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + (k-1)\alpha + \gamma_0\right) \\ \cos\left(\vartheta - (k-1)\alpha - \frac{2\pi}{3} - \varphi_{M_{sr}}\right) \cos\left(\left(\frac{N_B-p}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + (k-1)\alpha + \gamma_0\right) \\ \cos\left(\vartheta - (k-1)\alpha + \frac{2\pi}{3} - \varphi_{M_{sr}}\right) \cos\left(\left(\frac{N_B-p}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + (k-1)\alpha + \gamma_0\right) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Сличним тригонометријским трансформацијама као и у претходним извођењима се добија израз (4.16).

$$\begin{bmatrix} \Psi_{ar} \\ \Psi_{br} \\ \Psi_{cr} \end{bmatrix} = \frac{M_{sr} I_{max1}}{2} \cdot \sum_{k=1}^{N_B} \begin{bmatrix} \left(\cos\left(\left(\frac{N_B}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + \gamma_0 - \varphi_{M_{sr}}\right) + \cos\left(\left(\frac{N_B-2p}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + \gamma_0 + 2(k-1)\alpha + \gamma_0 + \varphi_{M_{sr}}\right) \right) \\ \left(\cos\left(\left(\frac{N_B}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t - \frac{2\pi}{3} + \gamma_0 - \varphi_{M_{sr}}\right) + \cos\left(\left(\frac{N_B-2p}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + \frac{2\pi}{3} + \gamma_0 + 2(k-1)\alpha + \gamma_0 + \varphi_{M_{sr}}\right) \right) \\ \left(\cos\left(\left(\frac{N_B}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t + \frac{2\pi}{3} + \gamma_0 - \varphi_{M_{sr}}\right) + \cos\left(\left(\frac{N_B-2p}{p}(1-s) - 1\right)\omega_s t - \frac{2\pi}{3} + \gamma_0 + 2(k-1)\alpha + \gamma_0 + \varphi_{M_{sr}}\right) \right) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Компоненте флуksног обухвата једне статорске фазе на учестаностима $\left(\frac{N_B - 2p}{p}(1 - s) - 1\right)\omega_s$ које потичу од свих роторских петљи формирају симетричну звезду, због тога што им је међусобни фазни померај 2α , што ће довести до њиховог поништавања. Коначно, делови флуksних обухвата статорских намотаја као последица одговора роторског кола на жљебне хармонике у струјама статора је у форми која је приказана изразом (4.17).

$$\begin{bmatrix} \Psi_{ar} \\ \Psi_{br} \\ \Psi_{cr} \end{bmatrix} = \frac{M_{sr} I_{max1}}{2} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\left(\frac{N_B}{p}(1 - s) - 1\right)\omega_s t + \gamma_0 - \varphi_{M_{sr}}\right) \\ \cos\left(\left(\frac{N_B}{p}(1 - s) - 1\right)\omega_s t - \frac{2\pi}{3} + \gamma_0 - \varphi_{M_{sr}}\right) \\ \cos\left(\left(\frac{N_B}{p}(1 - s) - 1\right)\omega_s t + \frac{2\pi}{3} + \gamma_0 - \varphi_{M_{sr}}\right) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Постаје очигледно да одговор роторског кола неће произвести нове компоненте у спектру статорских струја, пошто у изразу (4.17) постоје само компоненте на учестаностима $\left(\frac{N_B}{p}(1 - s) - 1\right)\omega_s$. Сличан се поступак може применити и за било коју другу учестаност коју жљебни хармоници могу поседовати, а резултати ће бити исти и ако се уваже виши хармонички чланови у статорско-роторским индуктивностима. На основу свега изложеног се може закључити доказ о пореклу жљебних хармоника у спектру статорских струја услед варијације статорских индуктивности због постојања роторских жљебова.

У научном раду који је објављен у току овог истраживања је показано да за одређене типове машина доминантан утицај на стварање жљебних хармоника имају управо варијације индуктивности статора, а као последица постојања жљебова на ротору. Ово је нарочито тачно за машине са незакошеним роторским проводницима.

У [7] је показано да засићење нема никаквог ефекта на амплитуде и појаву жљебних хармоника (што ће се усталом потврдити и у овом истраживању, увидом у спектар експериментално и симулацијама добијеним вредностима мрежних струја), тако да је за потребе верификације динамичког модела у смислу његове способности да правилно опише ефекат појаве жљебних хармоника довољно користити његову линеарну варијанту. Због тога је претходно изложена анализа о настанку жљебних хармоника на снази у било ком режиму рада машине.

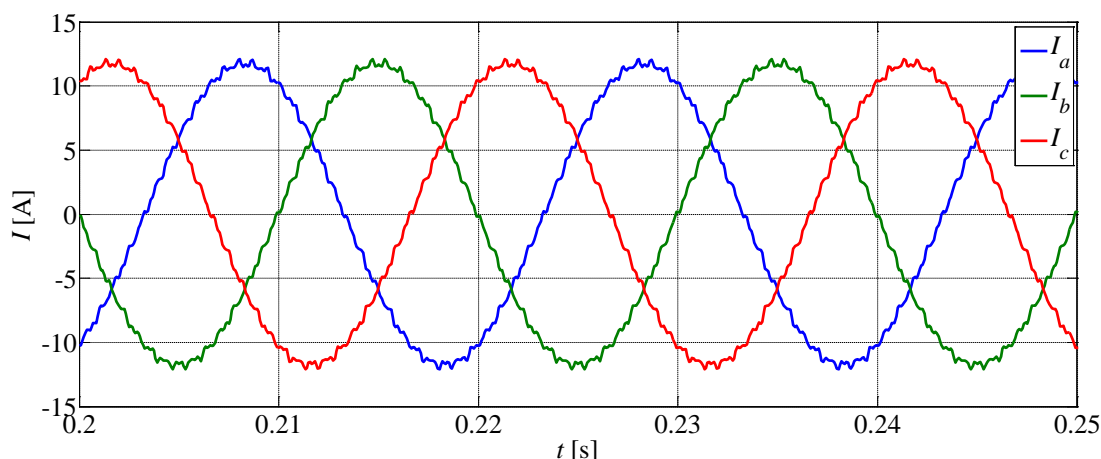
Динамички модел добија изузетно много на брзини коришћењем линеарних матрица индуктивности, а уважавањем или одбацавањем појединих хармоничких чланова у Фуријеовим редовима индуктивности се симулације над моделом могу још значајније убрзати. На пример, може се поставити граница до ког највишег хармоничког члана уважавати развој у Фуријеов ред, или пак поставити маргину амплитуде тако да се сви чланови реда који се налазе испод те маргине одбацују. Комбиновањем ових ефеката се добијају изузетно временски ефикасне симулације. Примера ради, симулација која описује рад машине који траје једну секунду у реалном времену се извршава за свега неколико десетина секунди.

Насупрот томе, алтернатива овом приступу је примена линеарних транзијентних симулација у комерцијалним софтверима, која за исти феномен у реалном времену потроши и до десетак сати. Овде треба напоменути да је феномен жљобних хармоника захтеван са становишта прецизности и густине мреже коначних елемената, што представља додатан терет за транзијентну анализу. Са друге стране, детаљно је дискутовано и илустровано како се индуктивности из линеарних магнетостатичких симулација са густом мрежом и веома малим кораком ротације добијају за свега двадесетак минута, а затим се по жељи могу користити у динамичком моделу неограничени број пута.

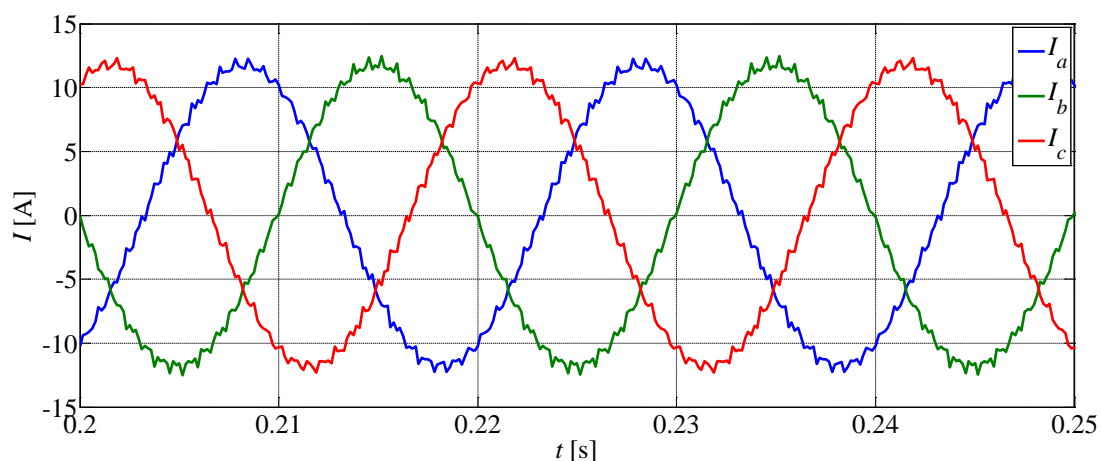
Динамички модел се изузетно лако прилагођава моделовању кварова у роторском кавезу, а затим и врло брзо истражује краткотрајним симулацијама. У поглављу које говори о детекцији кварова у кавезу машине је развијена нова метода за детекцију кварова, заснована на динамичком моделу који уважава само основне хармонике статорско-роторских индуктивности и константне вредности свих осталих индуктивности. Таква имплементација се у симулацијама извршава неколико пута брже од класичних линеарних симулација ефекта жљобних хармоника, те је упоредива са реалним временом трајања неких експеримената. Без развијеног модела ни откривање нове методе детекције не би било могуће, што ће бити јасније описано у самом поглављу о кваровима. Насупрот томе се исти феномен помоћу транзијентне анализе мора истражити покретањем још једне дуготрајне симулације, на чије се резултате мора дуго чекати. Такође, транзијентна анализа не може да уважава или одбацује поједине ефекте који утичу на настанак жљобних хармоника или обележја карактеристичних за неки тип квара, већ може само свеобухватно да их урачуна. Смањење видљивости виших хармоничких чланова у транзијентним симулацијама се може постићи искључиво увођењем мање густе мреже коначних елемената, или повећавањем корака симулације, што директно утиче и на прецизност методе, повећавајући њену грешку. Пошто је динамички модел снабдевен индуктивностима које су генерисане изузетно густом мрежом коначних елемената, одбацавање виших хармоничких чланова у матрицама индуктивности неће довести до смањења тачности којом су израчунати нижи хармонички чланови, као што је то случај у транзијентним анализама са ређом мрежом коначних елемената.

4.1.2 *Верификација одзива линеарног динамичког модела за случај незакошеног кавеза*

Сада ће се коначно приступити поређењу резултата добијених развијеним динамичким моделом у линеарном режиму рада са линеарним транзијентним симулацијама спроведеним у комерцијалном софтверу Opera2D, за изведбу мотора са незакошеним роторским проводницима. На сликама 4.1 и 4.2 је приказана мрежна струја у режиму празног хода добијена симулацијама над развијеним моделом и транзијентном симулацијом, респективно.



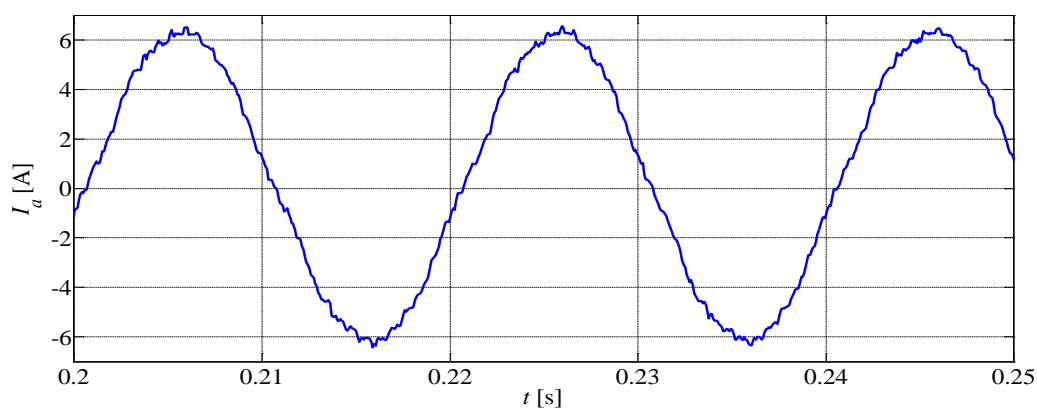
Слика 4.1 Мрежне струје у режиму празног хода, линеарна симулација над динамичким моделом, при номиналном напону напајања машине



Слика 4.2 Мрежне струје у режиму празног хода, линеарна транзијентна симулација при номиналном напону напајања машине

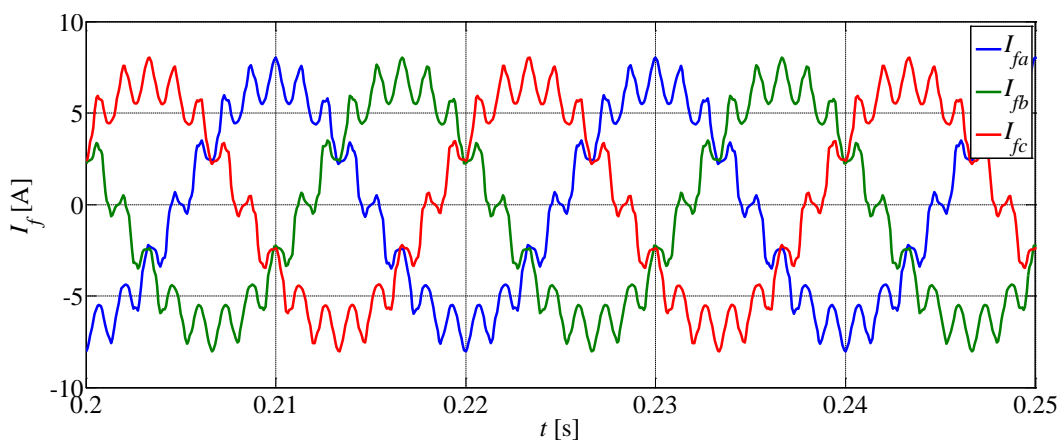
Симулација су извршене над моделом машине који не уважава закошење роторских проводника. У транзијентној симулацији су занемарени губици у магнетном колу машине, подешавањем вредности специфичних губитака по јединици масе феромагнетског материјала на нулту вредност, што уједно важи и за све наредне резултате симулација. Одмах се може уочити веома велико поклапање међу одзивима, што свакако иде у прилог развијеном динамичком моделу. Пошто су симулације спроведене над линеарним моделом, тешко је извршити њихово поређење са експериментално добијеним резултатима, будући да физичка машина напајана номиналним напонем у режиму празног хода има изражене ефекте засићења. Ипак, могуће је макар визуелно уочити веома добро поклапање ако се прикажу резултати огледа празног хода при сниженом напону напајања, тако да то смањење значајно ослаби ефекат засићења, а да се при томе не изгубе премисе празног хода, тј. брзина које је веома блиска синхроној. На слици 4.3 је управо приказана статорска струја у режиму празног хода са сниженим напонем напајања,

који је износио око $200V$. Уочава се велико поклапање са резултатима симулација над развијеним динамичким моделом, а притом треба додати да је током експеримента примењено мрежно напајање које због великог броја електронских уређаја у непосредној околини лабораторије поседује доста богат спектар виших хармоника непарног реда. Највише се уочава присуство петог и седмог хармоника, што доприноси малом изобличењу мерене струје. Сличност одзива добијених симулацијама над развијеним динамичким моделом и експериментално добијених одзива је чак и већа него ли са одзивима добијеним транзијентним симулацијама. То се може објаснити чињеницом да је мрежа коначних елемената која је генерисана за потребе транзијентних симулација ређа од оне која се користила у магнетостатичким симулацијама за израчунавање индуктивности, те је стога и таласни облик струја сачињен од виших хармоника који нису толико верно описани нумеричком апроксимацијом континуалног електромагнетног феномена.

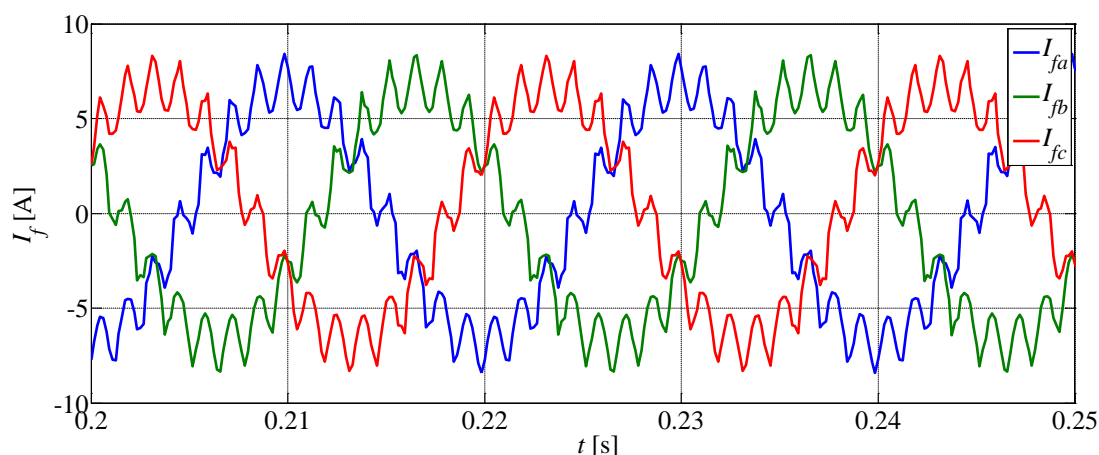


Слика 4.3 Мрежна струја у режиму празног хода, експериментални резултати при напону $U = 200V$

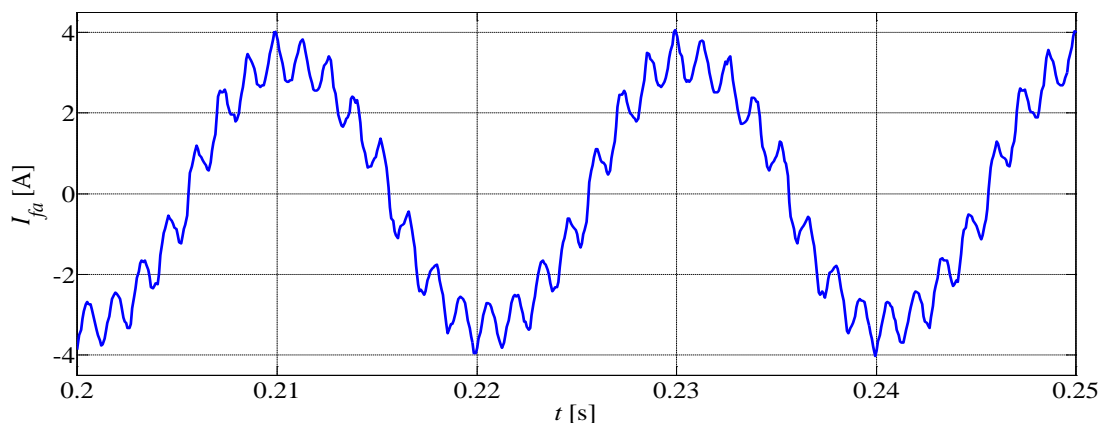
На сликама 4.4, 4.5 и 4.6 су приказани одзиви фазних струја машине у режиму празног хода. Сlike су приказане истим редоследом као за случај мрежних струја са слика 4.1, 4.2 и 4.3.



Слика 4.4 Фазне струје у режиму празног хода, линеарна симулација над динамичким моделом, при номиналном напону напајања машине



Слика 4.5 Фазне струје у режиму празног хода, линеарна транзијентна симулација при номиналном напону напајања машине

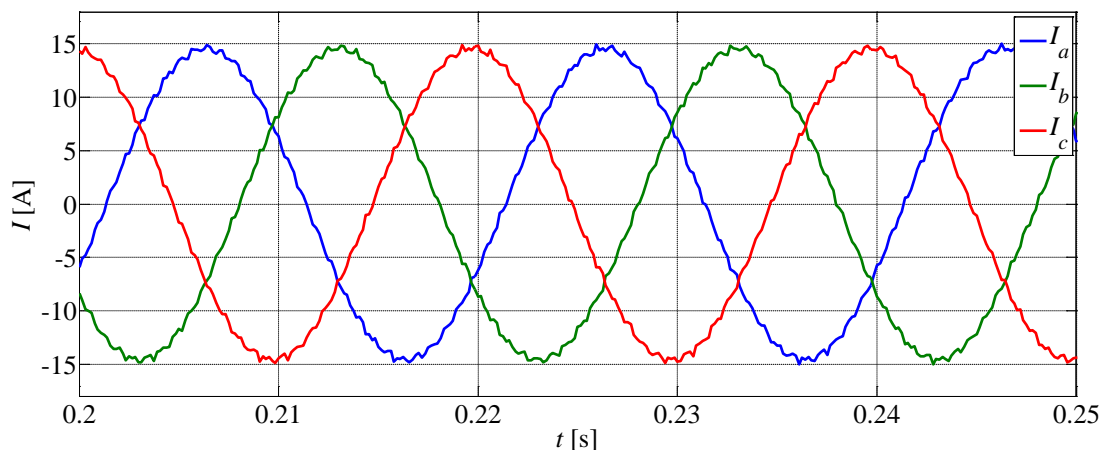


Слика 4.6 Фазна струја у режиму празног хода, експериментални резултати при напону $U = 200V$

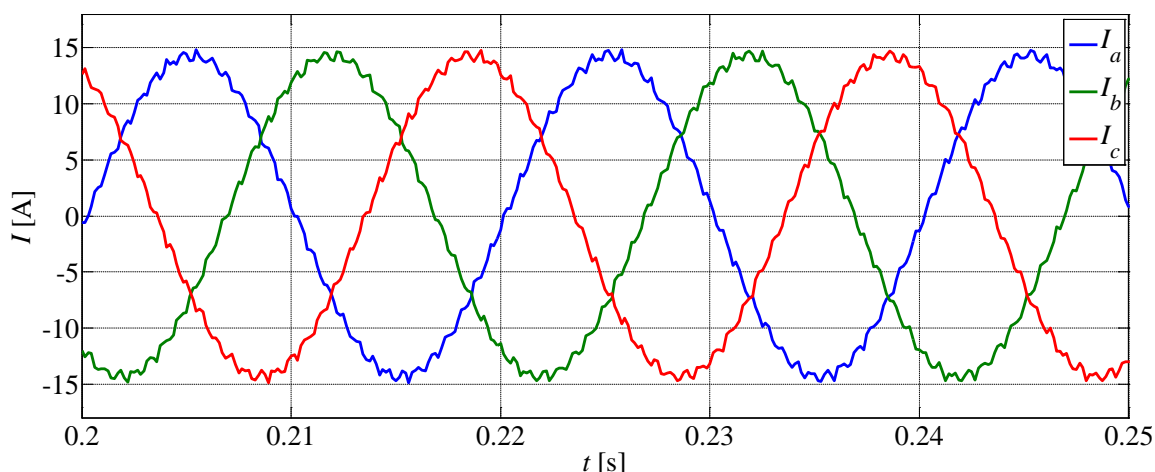
Приметно је значајно изобличење фазних струја, што је и очекивано, пошто је машина предвиђена за рад у спреси статорских намотаја троугао. Наиме, познато је да се унутар фазних проводника спрегнутих у троугао могу успостављати струје виших хармоника које су умножак броја 3, а које по правилу не би требале да се успостављају у самој мрежи одакле се машина напаја. Такође, у самим намотајима спрегнутим у троугао се могу успостављати и нулте компоненте основног хармоника струја, али и нулте компоненте виших хармоничких чланова. Уз то, унутар спреге троугао не постоји никакво ограничење за успостављање било које компоненте струје на учестаностима жљобних хармоника, те је стога фазна струја у спреси троугао изузетно богатог спектра. Поново се уочавају веома добра поклапања између резултата добијених симулацијама на развијеном динамичком моделу са резултатима добијених транзијентним симулацијама, а уједно и са експериментално добијеним вредностима фазне струје.

На слици 4.7 је приказан одзив мрежне струје добијене симулацијама на динамичком моделу, при брзини обртања од 1480 o/min и номиналном напону

напајања. Одзив мрежних струја у истим условима рада, добијених линеарном транзијентном симулацијом је приказан на слици 4.8.



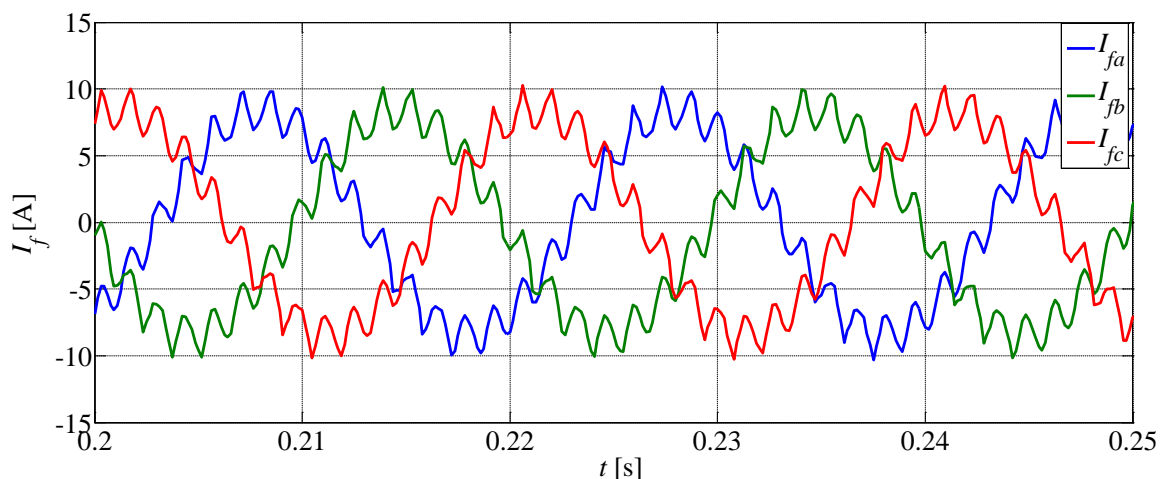
Слика 4.7 Мрежне струје при брзини обртања од 1480 о/мин, линеарна симулација над динамичким моделом, при номиналном напону напајања машине



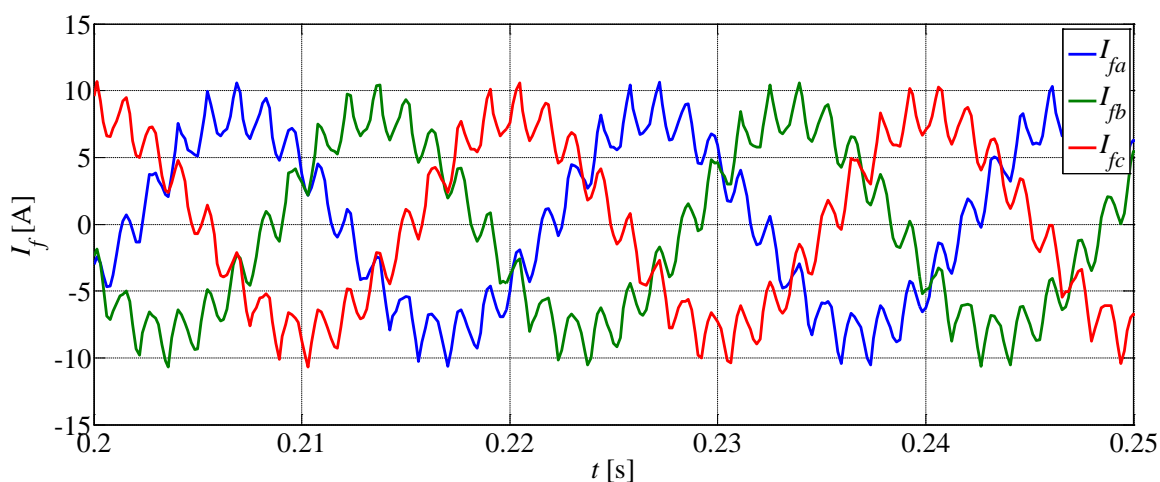
Слика 4.8 Мрежне струје при брзини обртања од 1480 о/мин, линеарна транзијентна симулација при номиналном напону напајања машине

Овде се неће дати упоредни приказ са експерименталним резултатима, будући да се није покушало терећење мотора при сниженом напону са циљем постизања жељене брзине, а без појаве засићења. Стога ће поређење тих резултата бити извршено када се буде верификовала нелинеарна имплементација развијеног динамичког модела. Поново се може уочити веома добро поклапање резултата, што потврђује да развијени метод даје добре резултате и у условима делимичног оптерећења машине.

На сликама 4.9 и 4.10 су приказани таласни облици фазних струја при истим условима рада машине као и на сликама 4.7 и 4.8.



Слика 4.9 Фазне струје при брзини обртања од 1480 о/min, линеарна симулација над динамичким моделом, при номиналном напону напајања машине



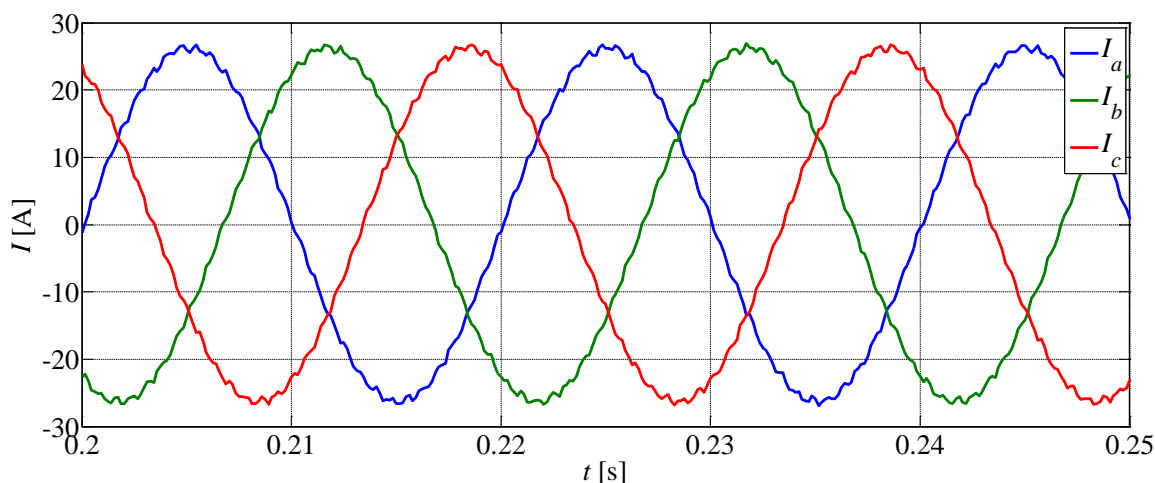
Слика 4.10 Фазне струје при брзини обртања од 1480 о/min, линеарна транзијентна симулација при номиналном напону напајања машине

Поново се може приметити веома добро поклапање између резултата добијених симулацијама над развијеним динамичким моделом и резултата добијених линеарним транзијентним симулацијама.

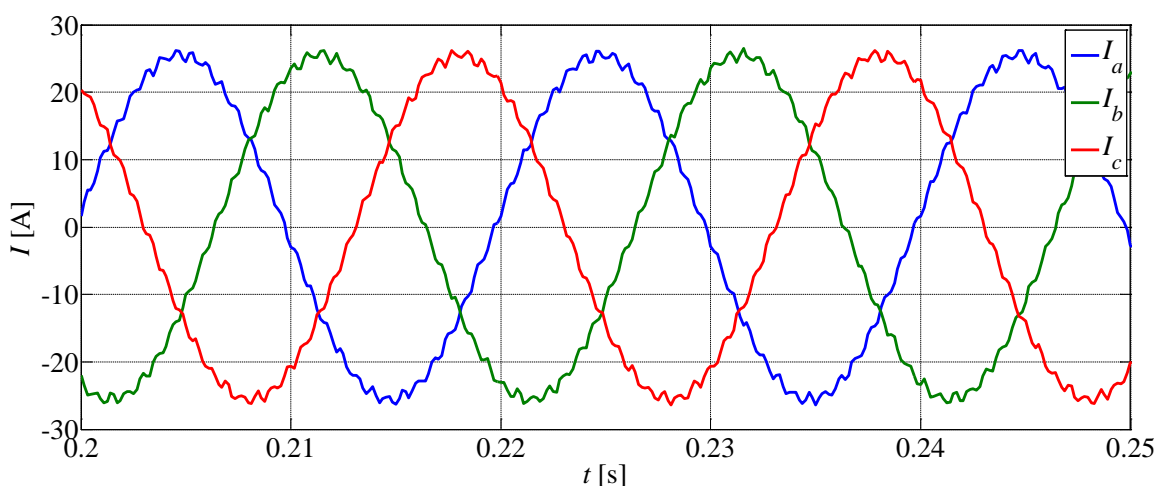
На слици 4.11 је приказан одзив мрежне струје добијене симулацијама на динамичком моделу, при номиналној брзини обртања од 1454 о/min и номиналном напону напајања. Одзив мрежних струја у истим условима рада, добијених линеарном транзијентном симулацијом је приказан на слици 4.12. Поново се, као и до сада, могу уочити веома добра поклапања међу одзивима.

На сликама 4.13 и 4.14 су приказани таласни облици фазних струја под номиналним условима рада, добијених симулацијама на развијеном динамичком моделу и линеарним транзијентним симулацијама, респективно. Поново се може уочити веома добро поклапање међу одзивима, чиме се коначно потврђује да

развијени динамички модел може у потпуности да замени линеарне транзијентне симулације, без готово икаквог губитка информација у погледу таласног облика статорских струја. Њихови спектри се због тога неће поредити међусобно, што због малог узорка транзијентних симулација, што због очигледно великог поклапања таласних облика, како међусобно, тако и са експерименталним резултатима.



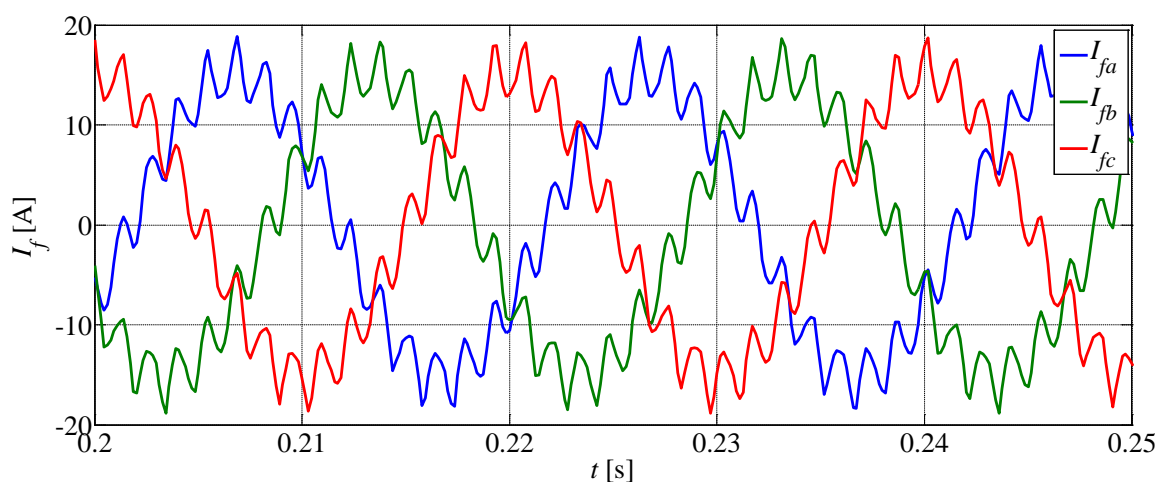
Слика 4.11 Мрежне струје при брзини обртања од 1454 о/min, линеарна симулација над динамичким моделом, при номиналном напону напајања машине



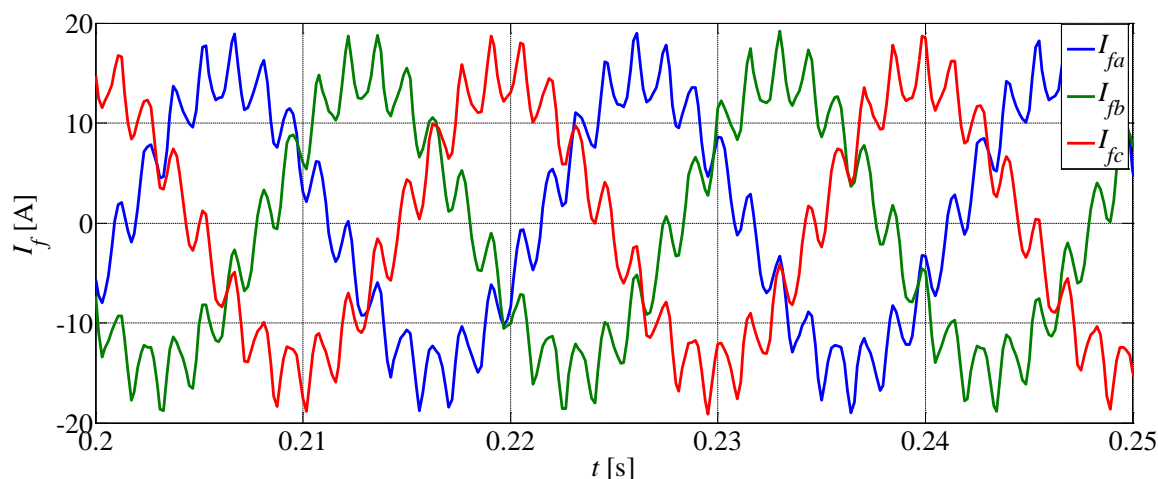
Слика 4.12 Мрежне струје при брзини обртања од 1454 о/min, линеарна транзијентна симулација при номиналном напону напајања машине

Овим сликама се уједно и завршава поређење развијеног линеарног модела без уваженог закошења роторских проводника са транзијентном линеарном имплементацијом методе коначних елемената. Намеће се закључак да је развијени модел потпуно равноправан са линеарним транзијентним симулацијама, макар у ситуацијама када је од примарног интереса реконструисање таласних облика мрежних и струја које теку кроз намотаје машине. Наравно да транзијентна анализа

даје неупоредиво више података о машини, али не без додатне цене у виду трајања симулација. Развијени модел се лако може преобличити тако да уважава повезаност фазних намотаја статора у спрегу звезда, али то овде није верификовано путем симулација или експеримената, што свакако не повлачи да се тај принцип не би успешно показао и у том случају, те се стога то може оставити за нека даља истраживања.



Слика 4.13 Фазне струје при брзини обртања од 1454 о/мин, линеарна симулација над динамичким моделом, при номиналном напону напајања машине



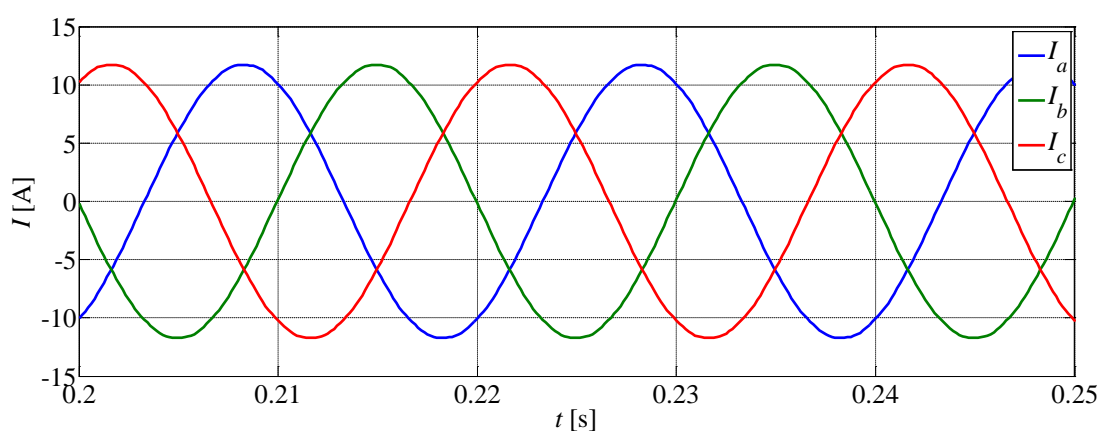
Слика 4.14 Фазне струје при брзини обртања од 1454 о/мин, линеарна транзијентна симулација при номиналном напону напајања машине

4.1.3 *Верификација линеарног динамичког модела за случај закошеног роторског кавеза*

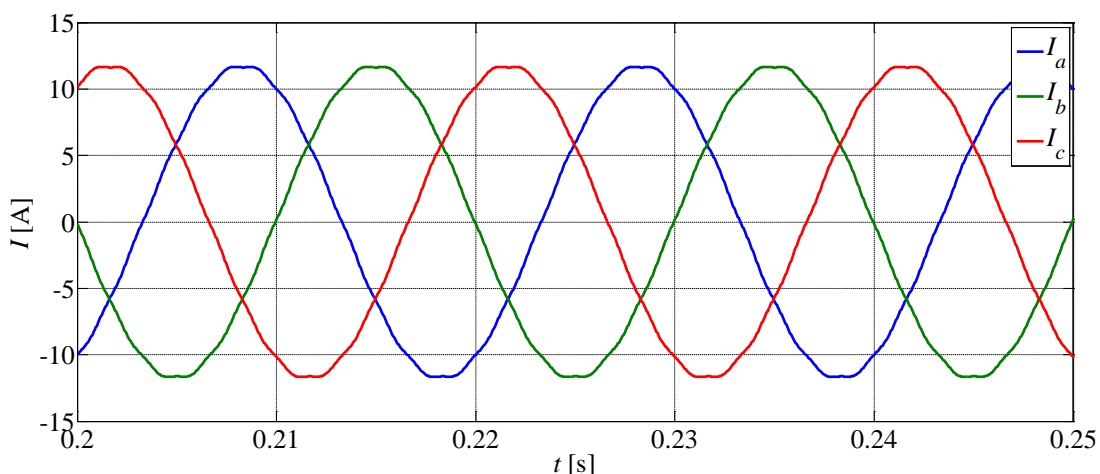
Сличним поступком као за случај незакошеног ротора се могу извршити симулације и над динамичким моделом који у себи уважава закошење роторских

проводника. То не представља никакву потешкоћу за развијени динамички модел, али зато продужава трајање транзијентних симулација. Наиме, због сложеног начина на који комерцијални софтвери који имплементирају дводимензионалне методе коначних елемената уважавају ефекат закошења, симулације могу да трају и преко 50% времена дуже од аналогних за случај незакошених проводника. Због тога ће се у овом одељку показати нешто мање упоредних резултата.

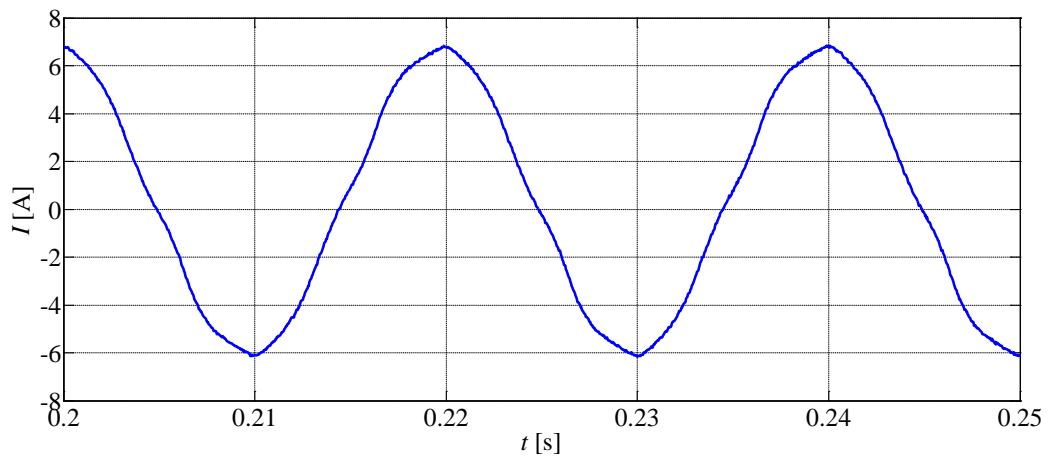
На сликама 4.15-4.20 су приказани одзиви струја у истом редоследу као што је то био случај са резултатима симулација и експериментима у празном ходу код машине са незакошеним роторским проводницима. Слично је и са сликама 4.21-4.24, за случај симулација у номиналном режиму рада, који опет нису упоређени са експерименталним резултатима, као и код машине са незакошеним проводницима.



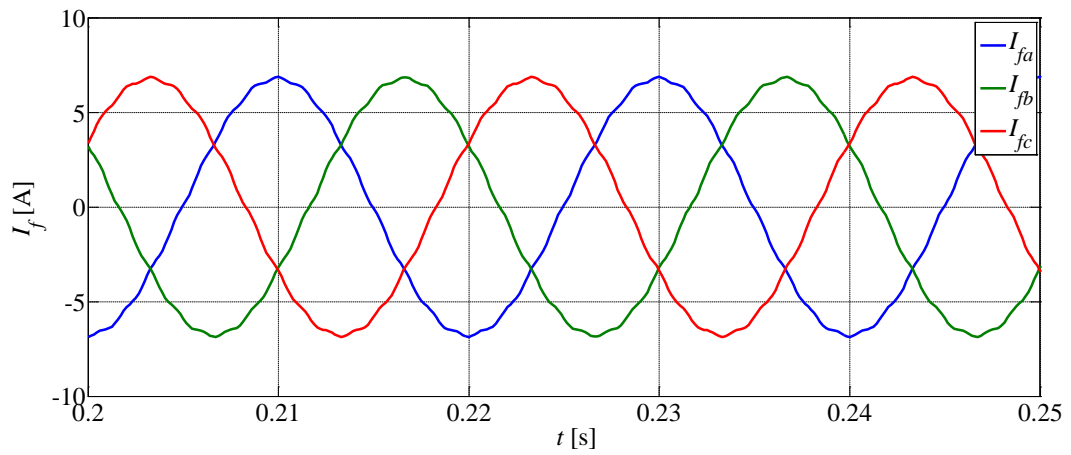
Слика 4.15 Мрежне струје у режиму празног хода, линеарна симулација над динамичким моделом, при номиналном напону напајања машине



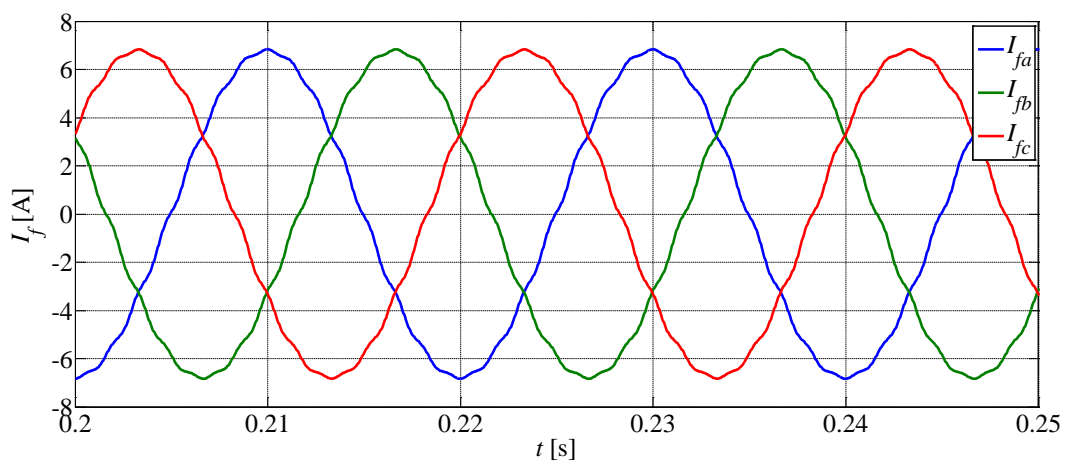
Слика 4.16 Мрежне струје у режиму празног хода, линеарна транзијентна симулација при номиналном напону напајања машине



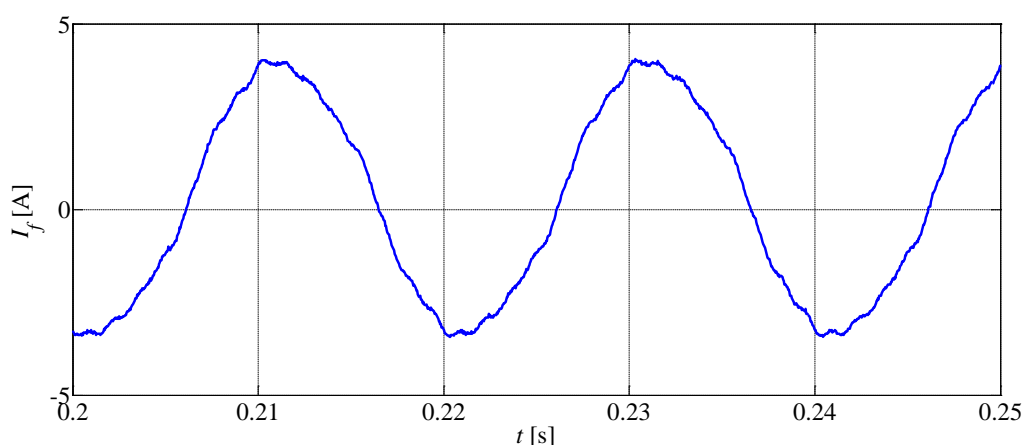
Слика 4.17 Мрежна струја у режиму празног хода, експериментални резултати при напону $U = 200V$



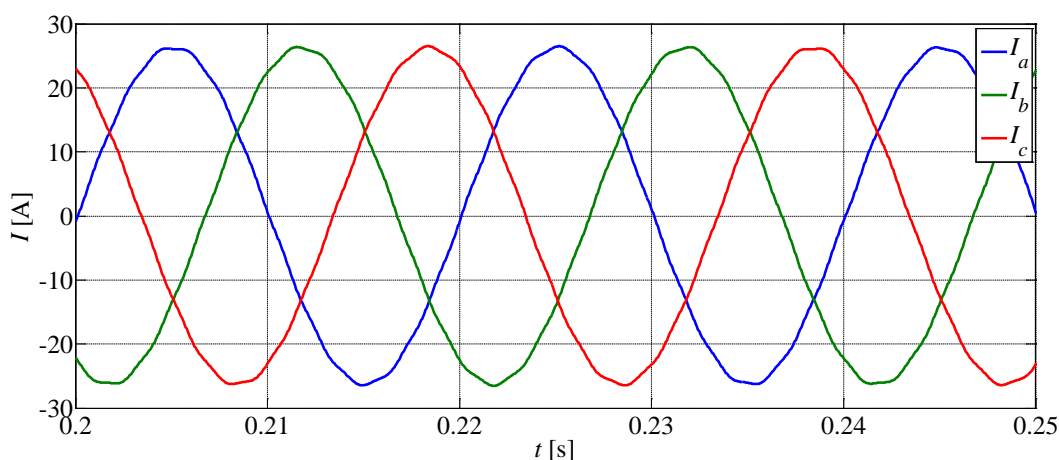
Слика 4.18 Фазне струје у режиму празног хода, линеарна симулација над динамичким моделом, при номиналном напону напајања машине



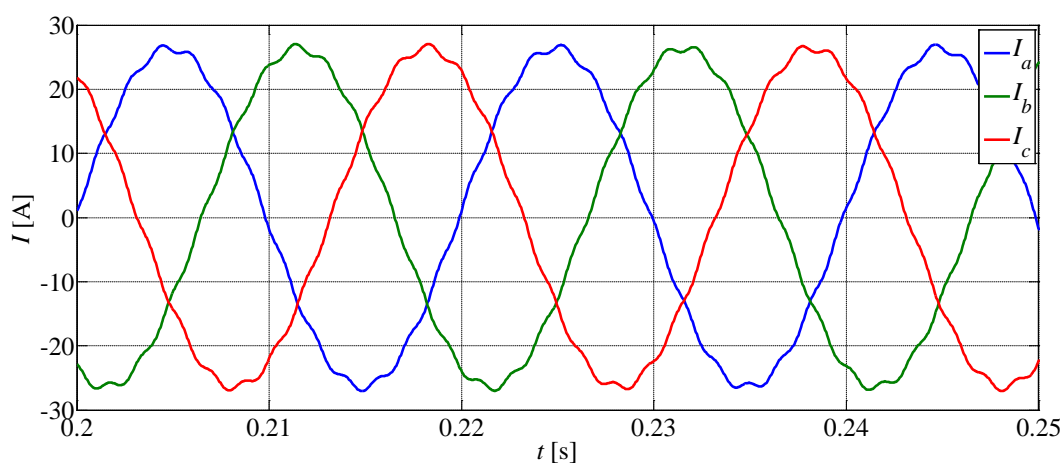
Слика 4.19 Фазне струје у режиму празног хода, линеарна транзијентна симулација при номиналном напону напајања машине

Слика 4.20 Фазна струја у режиму празног хода, експериментални резултати при напону $U = 200V$

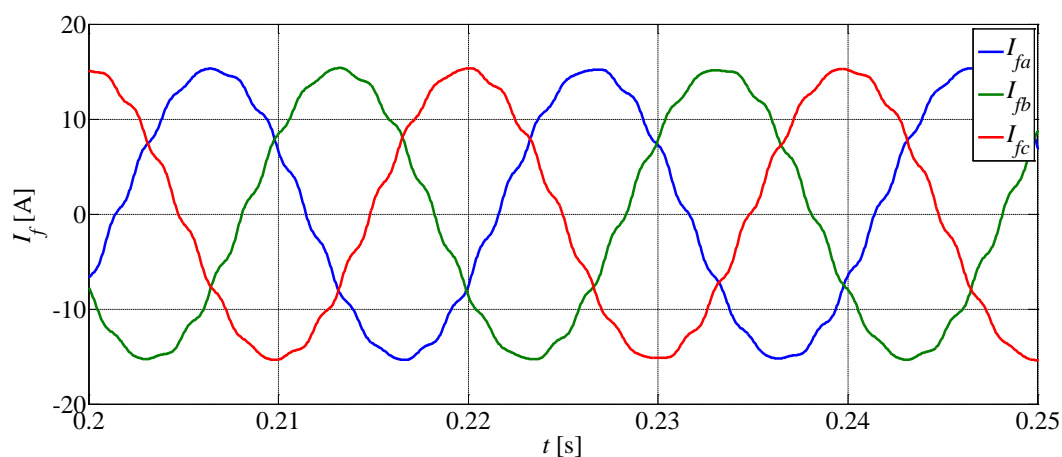
Оно што је важно приметити на овим сликама је драстично смањење таласности струја, нарочито када је реч о струјама кроз саме намотаје. Ово је последица позитивних ефеката закошења роторских проводника на спектар статорских струја. Постоје нека одступања у таласним облицима, а нарочито у онима добијеним симулацијама у односу на експериментално утврђене. Разлика у одзивима која се примећује када се посматрају таласни облици добијени симулацијама над развијеним моделом и резултати добијени транзијентним симулацијама постоје из простог разлога што је у развијеном моделу ефекат закошења обухваћен усредњено, што доводи до нешто већег губитка информација него што је то случај у транзијентној анализи, које применом сложенијих алгоритама покушавају да уваже овај тродимензионални ефекат. Већа одступања одзива оба метода према онима који су добијени мерењем се објашњавају чињеницом да се применом закошења роторских проводника укидају доминантне компоненте у спектру струја, па до већег изражаја долазе и оне компоненте изазване хармонијским изобличењем мрежног напајања, којег у симулацијама нема. Стицање правог утиска о веродостојности резултата добијених симулацијама над развијеним моделом ће бити могуће када се међусобно упореде спектри струја.



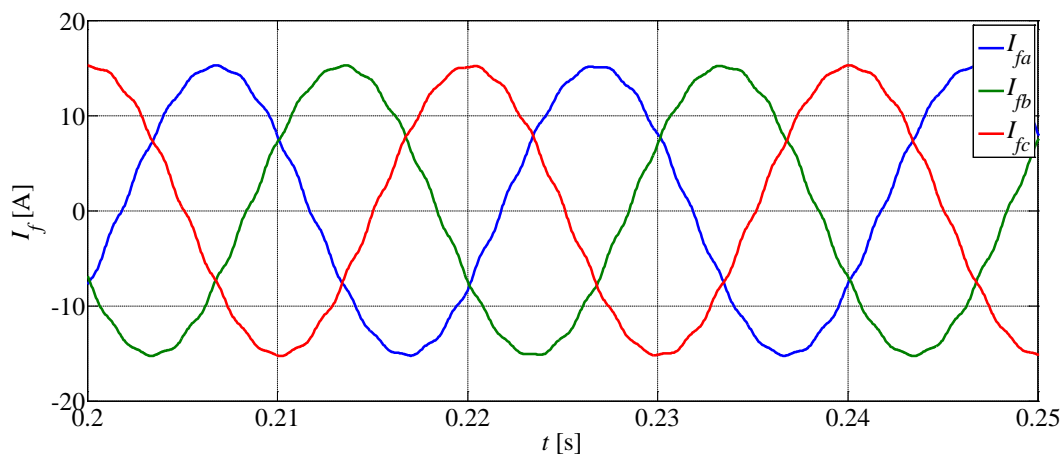
Слика 4.21 Мрежне струје при брзини обртања од 1454 о/min, линеарна симулација над динамичким моделом, при номиналном напону напајања машине



Слика 4.22 Мрежне струје при брзини обртања од 1454 о/мин, линеарна транзијентна симулација при номиналном напону напајања машине



Слика 4.23 Фазне струје при брзини обртања од 1454 о/мин, линеарна симулација над динамичким моделом, при номиналном напону напајања машине



Слика 4.24 Фазне струје при брзини обртања од 1454 о/мин, линеарна транзијентна симулација при номиналном напону напајања машине

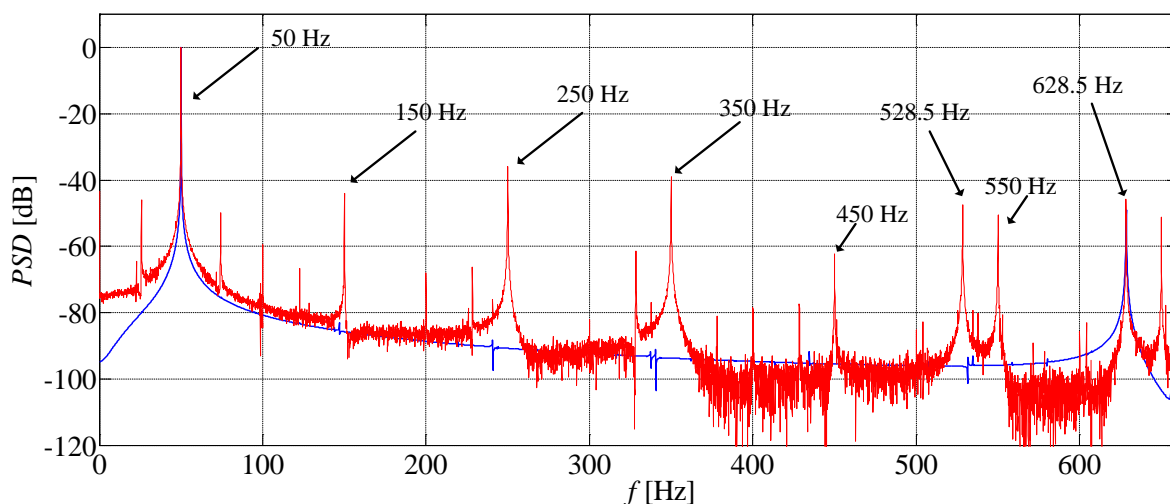
Као што је већ помињано, веродостојност симулација над развијеним динамичким моделом машине у случају закошења роторских проводника ће бити илустрована поређењем спектра струја. Иначе, у постојећој литератури се веродостојност модела који уважавају више хармонике упоређује искључиво поређењем спектра струја, највише из разлога што се таласни облици доста визуелно разликују, а ипак носе исте информације. Овде је ипак одлучено да се одзиви упореде и визуелно, нарочито зато што је постигнуто изузетно слагање за случај незакошених проводника и доста добро слагање за случај закошених проводника. То се све наравно дугује комбинованом приступу моделовања електричних машина, који је главна идеја и смисао овог истраживања.

Вршиће се само поређење спектра струја добијених симулацијама на развијеном моделу и експериментално добијених вредности. Разлог за то је што су транзијентне симулације рађене са циљем добијања одзива који у реалном времену трају пола секунде (због уштеде у времену), што је мали узорак за добијање доброг спектра применом брзе Фуријеове трансформације (Fast Fourier Transform - FFT).

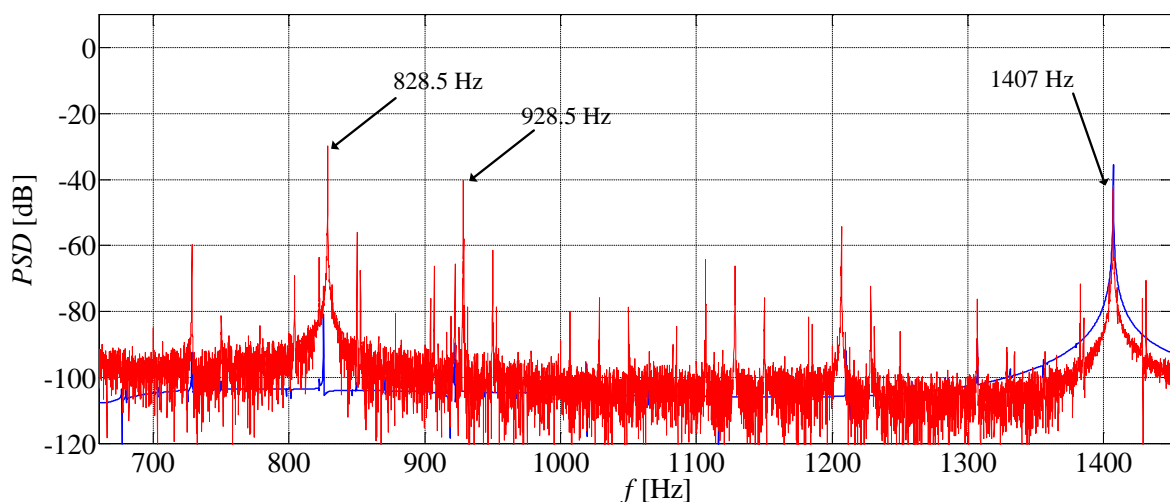
На сликама 4.24 и 4.25 је дат упоредни спектар мрежне струје статора у номиналном режиму рада, при брзини од 1454 о/min. Црвеном бојом је означен спектар експериментално измерене струје, док је плавом бојом приказан спектар добијен симулацијом на развијеном динамичком моделу. Спектар је нормализован на компоненту основне учестаности, те стога она има амплитуду од 0 dB. Оно што се прво може приметити је потпуно одсуство виших хармоника основне учестаности у спектру струје добијене симулацијом. То је и очекивано, будући да се симулација изводила са наметањем идеалног простопериодичног напајања. Оно што је важно уочити је поклапање компоненти на учестаностима 628.5 Hz и 1407 Hz. То су управо фреквенције жљобних хармоника које одговарају брзини машине од 1454 о/min, што се лако може утврдити уврштавањем клизања које одговара овој брзини у израз (4.1). При томе се за учестаност 628.5 Hz усваја $n = 1$ и $v = -1$, док се за учестаност 1407 Hz усваја $n = 2$ и $v = +1$. Приметно је одсуство другог пара жљобних хармоника при $n = 1$ и $v = +1$, односно при $n = 2$ и $v = +1$, што је у потпуној сагласности са теоријском анализом на почетку овог поглавља. Остаје још да се објасни присуство компоненти на учестаностима 528.5 Hz, 828.5 Hz и 928.5 Hz, који су последица ефекта засићења, којег нема у линеарној симулацији. О њима ће више бити речи када се буде верификовао модел који уважава нелинеарности. Друге компоненте које су такође видљиве у спектру су много мањих амплитуда и последице су малог, али допуштеног нивоа ексцентритета или других несавршености у конструкцији машине, те им се стога неће посвећивати сувише велика пажња. Треба се осврнути и на постојање компоненти од 150 и 450 Hz, којих у принципу не би требало да буде. Ипак, њихово постојање се може објаснити несиметријом виших хармоника напона који их узрокују, а које је последица постојања мноштва монофазних електронских потрошача у околној електричној мрежи.

Да би се показало како је могуће изазвати појаву компоненти које су целобројни умножак основне учестаности, урађена је још једна симулација над линеарним динамичким моделом, у којој је на идеално синусно напајање суперпонирана група уравнотежених трофазних извора напона, на учестаностима од

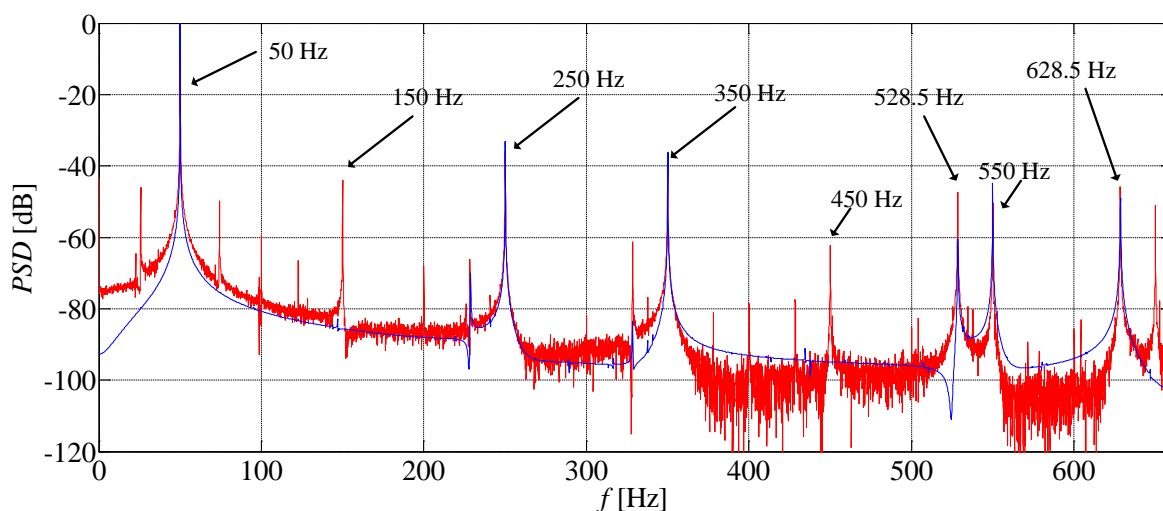
150, 250, 350, 450 и 550 Hz. Ефективне вредности додатих компоненти су редом износиле 3, 7, 5, 2 и 5 V. Ефективне вредности ових хармоника су добијене спектралним анализатором напона мреже. Упоредни спектар до учестаности 660 Hz је поново приказан на слици 4.27, где је сада очигледно поклапање свих компоненти у спектру, осим оних изазваним засићењем, као и већ поменутих компонентама на учестаностима 150 и 450 Hz, које су последица несиметрије њихових компоненти у мрежном напону.



Слика 4.25 Упоредни спектар мрежне струје у номиналном режиму. Распон учестаности 0-660 Hz



Слика 4.26 Упоредни спектар мрежне струје у номиналном режиму. Распон учестаности 660-1450 Hz



Слика 4.27 Упоредни спектар мрежне струје у номиналном режиму. Распон учестаности 0-660 Hz. Уважено хармонијско изобличење напона у линеарној симулацији

Важан закључак на крају овог одељка је да је кроз симулације и експерименте показано да је развијени динамички модел у могућности да успешно описује појаву жљебних хармоника у статорским струјама, те да је њихова амплитуда потпуно независна од ефекта засићења, које ствара хармонике на сопственим учестаностима, о којима ће више речи бити у следећем одељку.

4.1.4 Верификација нелинеарног динамичког модела

Утицај нелинеарности на понашање развијеног динамичког модела ће бити илустрован само на случају машине која има ротор са незакошеним кавезом. Разлог за то је што је ефекат засићења није од примарног значаја у овом истраживању, али му се ипак посветила одређена пажња, што је довело до значајних открића и бољег увида у тај иначе изузетно сложен феномен. Још један разлог за овај приступ је и тај што транзијентне симулације у нелинеарним срединама захтевају драматично више времена за извршење од линеарних транзијентних симулација, па би се за свеобухватно поређење резултата утрошило сувише много времена. Нарочито су проблематичне нелинеарне транзијентне симулације које уз то уважавају и ефекат закошења роторских проводника. Стога ће се у само пар карактеристичних случајева приказати одзиви добијени симулацијама на нелинеарном динамичком моделу, те транзијентном моделу без ефекта закошења (само за случај празног хода) и одзиви добијени експерименталним путем. Опет је у први план стављено визуелно поређење таласних облика добијених различитим поступцима међусобно, да би се нагласио квалитет предложеног решења.

На самом крају овог одељка ће се приказати и упоредни спектар мрежне струје добијене симулацијама над нелинеарним динамичким моделом и експерименталним резултатима. Спектар одзива добијених транзијентном анализом није рађен, будући да су симулације рађене са врло малим временом симулације, због уштеде временских ресурса (тек толико да се прикаже таласни облик одзива).

Хармоници настали услед ефекта засићења имају унапред дефинисане учестаности f_{SAT} , које су дате изразом (4.18). Механизам њиховог настанка је сличан оном који важи за настанак жљебних хармоника, само што је сада појава засићења у околини ваздушног зазора одговорна за модулацију индуктивности на двострукој учестаности, што у интеракцији са роторским струјама чије су учестаности функција клизања доводи до модулације флуksних обухвата статорских намотаја у функцији тренутне брзине машине.

$$f_{SAT} = \left(n \cdot N_B \frac{1-s}{p} \pm 3 \right) \cdot f_s, n \in \{1,2,3, \dots\} \quad (4.18)$$

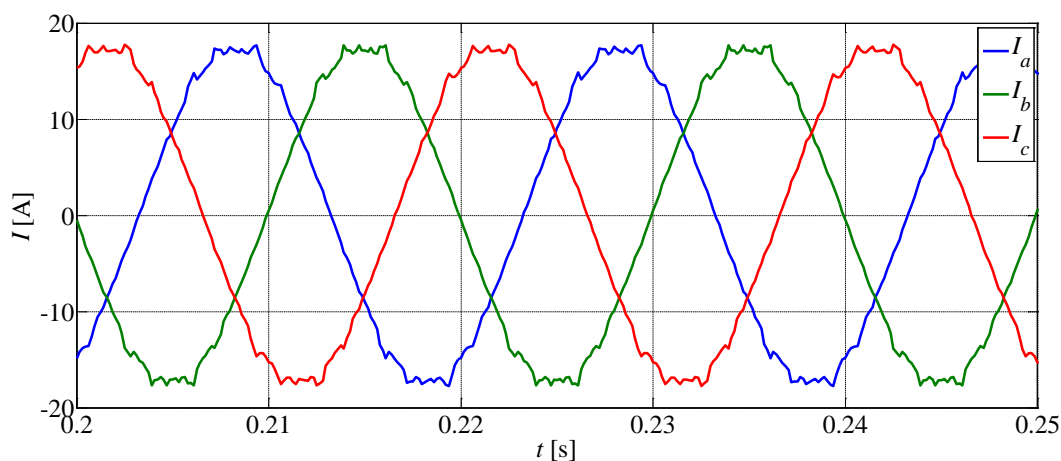
Динамички модел машине је модификован на такав начин да се чланови матрице индуктивности множе одговарајућим коефицијентима засићења (изведеним у поглављу о прорачуну индуктивности), спрам тренутне механичке брзине. Пошто се само хтео илустровати ефекат засићења, кориговање индуктивности је рађено само за интервал брзина од номиналне, до брзине празног хода. У [17] је предложено да се фазни став основне компоненте коефицијента засићења ϑ_f (релација (3.38)) одређује на основу фазног става извода просторног вектора статорских флуksних обухвата:

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial t} = \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \Psi_a}{\partial t} + e^{j\frac{2\pi}{3}} \frac{\partial \Psi_b}{\partial t} + e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right) \quad (4.19)$$

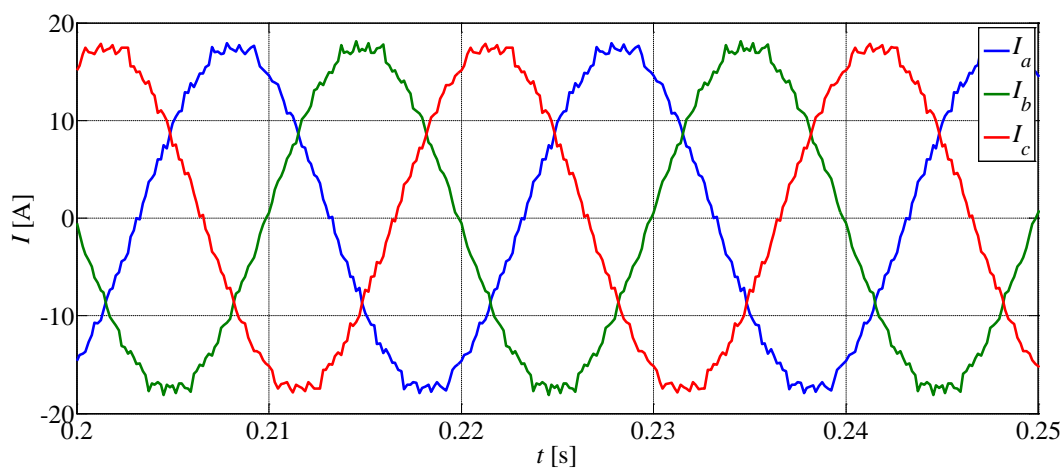
$$\vartheta_f = \tan^{-1} \frac{\text{Im}\left\{\frac{\partial \Psi_s}{\partial t}\right\}}{\text{Re}\left\{\frac{\partial \Psi_s}{\partial t}\right\}} \quad (4.20)$$

Овај се приступ применио и у овом истраживању, са додатком да су коефицијенти засићења описани са више хармоничких чланова, те да се након утврђеног фазног става основне компоненте употребом релација (4.19)-(4.20) лако добијају фазни ставови виших хармоничких чланова, будући да је познат њихов фазни помак у односу на основну компоненту.

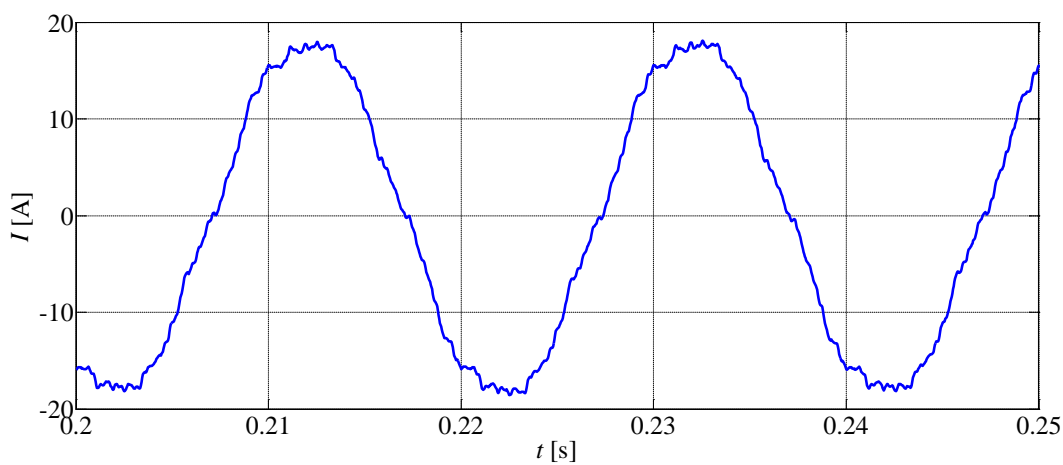
На сликама 4.28-4.30 су редом приказане мрежне струје у режиму празног хода машине при номиналном напајању, добијене симулацијама над развијеним нелинеарним динамичким моделом, нелинеарним транзијентним симулацијама и експерименталним путем, респективно. Примећује се веома добро визуелно поклапање у сва три одзива. Пошто је реч о празном ходу, нема смисла приказивати упоредне спектре мрежних струја, будући да ће у њима ефекат засићења бити замаскиран истовремено и жљебним хармоницима, али и хармоницима услед изобличења напона. Сасвим мало одступање у односу на експерименталне резултате се поново може објаснити малим уделом хармонијског изобличења које постоји у напајању, али је реч о занемарљивом ефекту.



Слика 4.28 Мрежне струје у режиму празног хода, нелинеарна симулација над динамичким моделом, при номиналном напону напајања машине

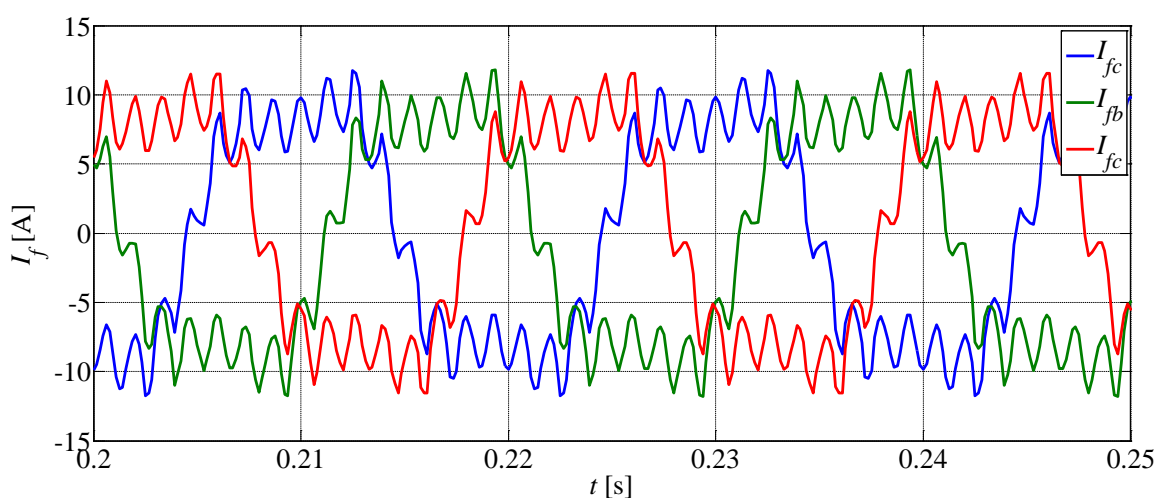


Слика 4.29 Мрежне струје у режиму празног хода, нелинеарна транзијентна симулација, при номиналном напону напајања машине

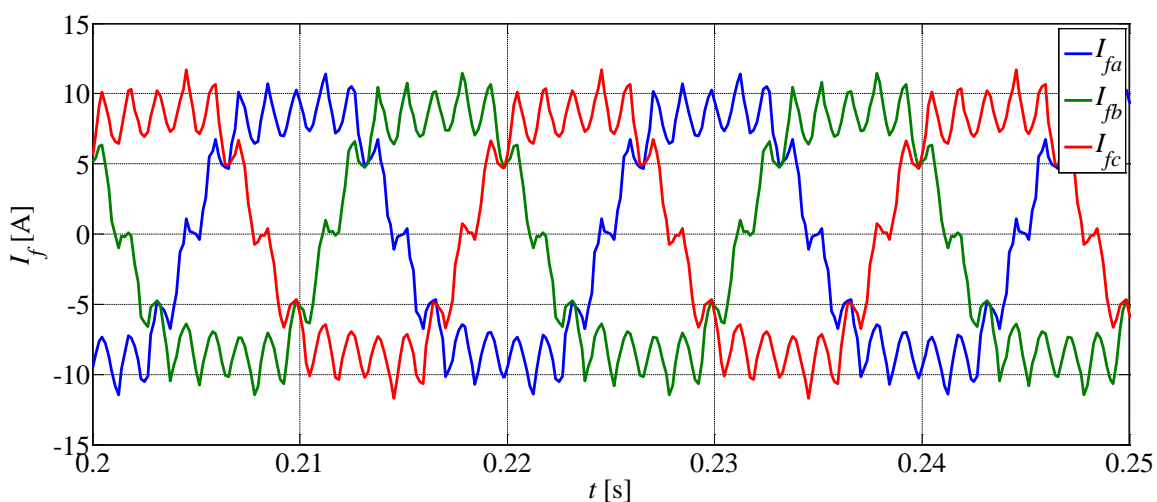


Слика 4.30 Мрежна струја у режиму празног хода, експериментални резултати при номиналном напону напајања машине

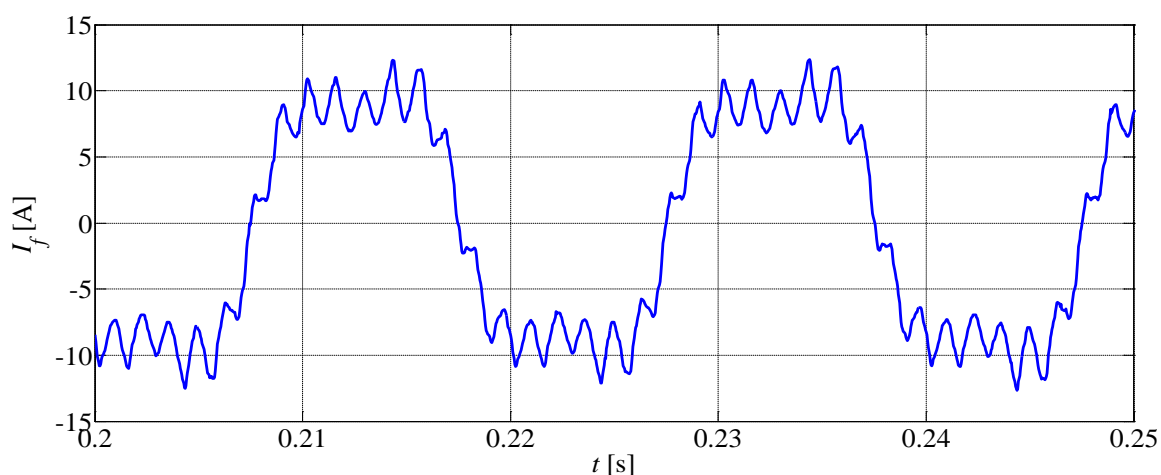
На сликама 4.31-4.33 су редом приказане фазне струје у режиму празног хода машине, такође при номиналном напону напајања. Одзиви су поново добијени симулацијама над развијеним нелинеарним динамичким моделом, нелинеарним транзијентним симулацијама и експерименталним путем, респективно. И овде се може приметити веома велика сличност међу одзивима, што поново иде у прилог веродостојности предложених решења. Оно што је упечатљиво за струје у фазним проводницима, као што је то уосталом био случај и у линеарним симулацијама над моделом, јесте изузетно велико хармонијско изобличење, које је сада последица комбинованог утицаја засићења и жљобних хармоника, пошто је реч о машини са незакошеним роторским проводницима.



Слика 4.31 Фазне струје у режиму празног хода, нелинеарна симулација над динамичким моделом, при номиналном напону напајања машине

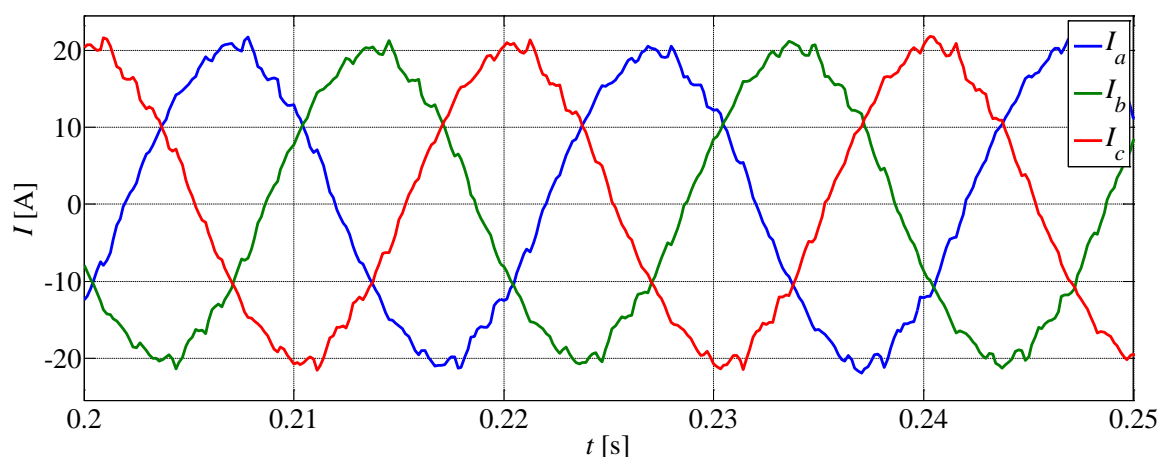


Слика 4.32 Фазне струје у режиму празног хода, нелинеарна транзијентна симулација, при номиналном напону напајања машине

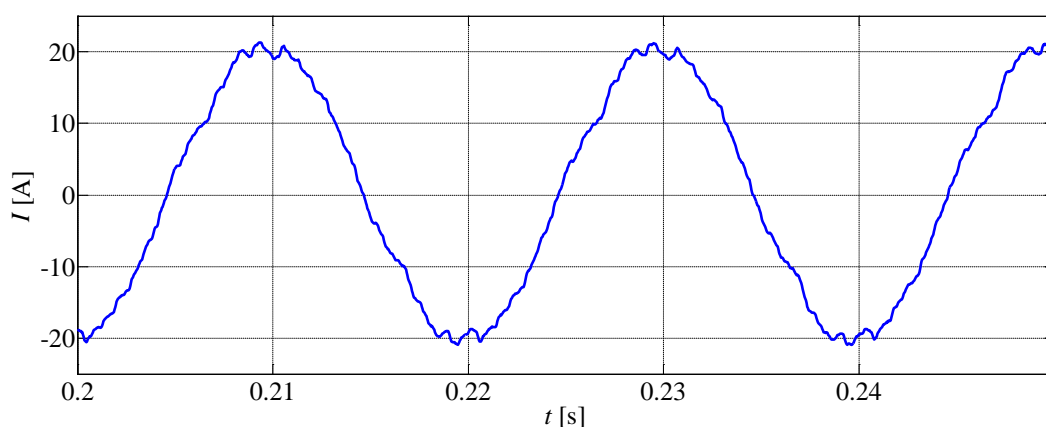


Слика 4.33 Фазна струја у режиму празног хода, експериментални резултати при номиналном напону напајања машине

На сликама 4.34-4.35 су редом приказане мрежне струје у режиму рада машине са брзином од 1480 о/min, при номиналном напону напајања. Одзиви су добијени симулацијама над развијеним нелинеарним динамичким моделом и експерименталним путем, респективно. Овог пута су изостављени одзиви нелинеарне транзијентне симулације, због уштеде у времену, будући да уз појачану реакцију ротора у односу на режим празног хода, машина одлази у дубље засићење, те је потребно значајно више времена за извршавање симулација, од чега се одустало. Довољна верификација развијеног модела се добија и поређењем са експерименталним резултатима, што се може јасно уочити са приложених слика.

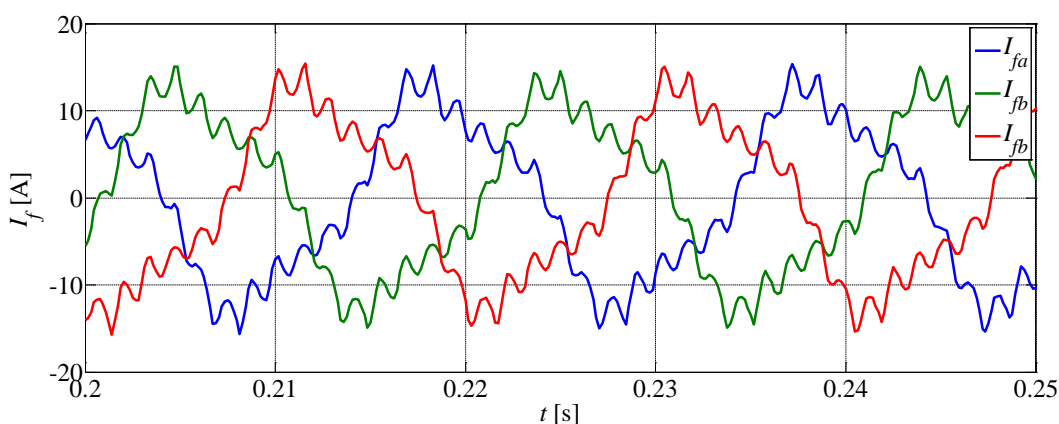


Слика 4.34 Мрежне струје при брзини обртања од 1480 о/min, линеарна симулација над динамичким моделом, при номиналном напону напајања машине

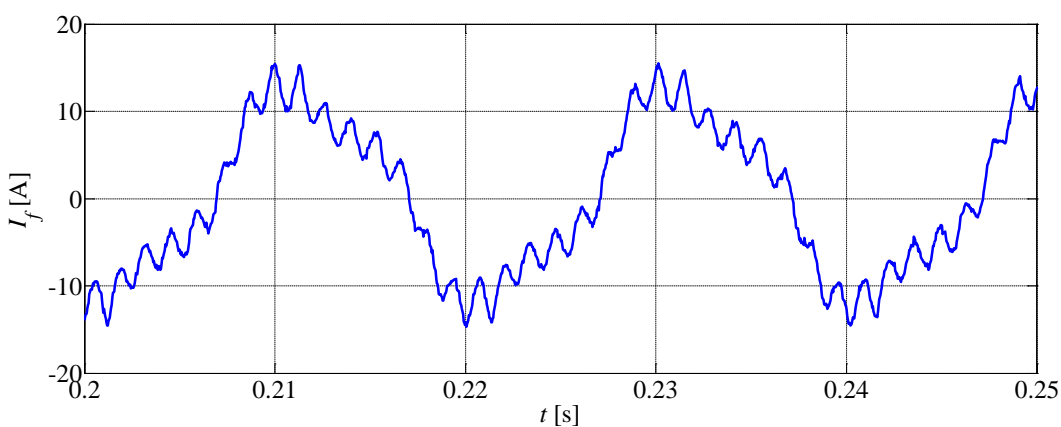


Слика 4.35 Мрежна струја при брзини обртања од 1480 о/min, експериментални резултати при номиналном напону напајања машине

На сликама 3.36 и 3.37 су приказани одзиви фазних струја, добијени симулацијама и експериментом под истим условима као што је то био случај и за одзиве са претходне две слике.



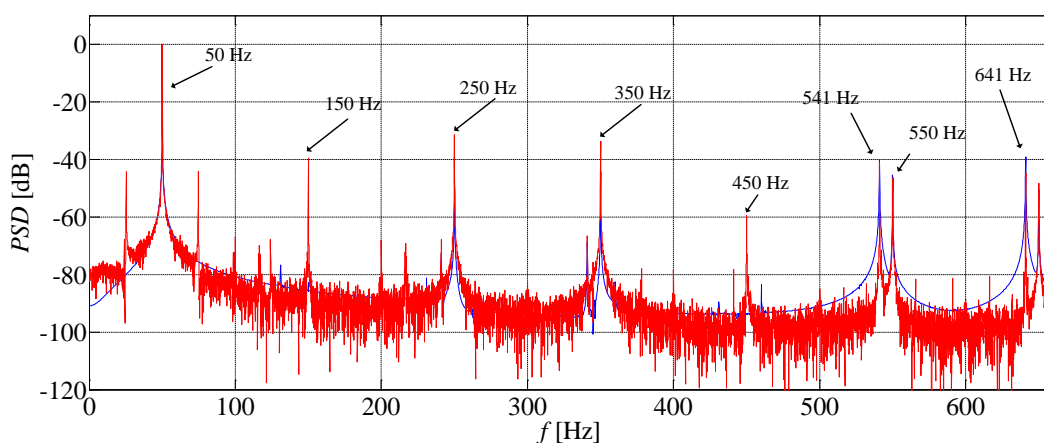
Слика 4.36 Фазне струје при брзини обртања од 1480 о/min, нелинеарна симулација над динамичким моделом, при номиналном напону напајања машине



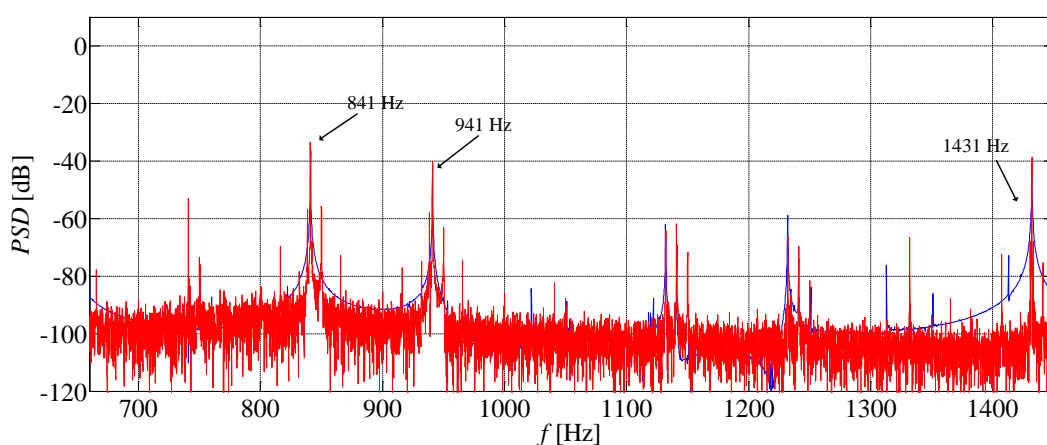
Слика 4.37 Фазна струја при брзини обртања од 1480 о/min, експериментални резултати при номиналном напону напајања машине

Поново се уочава јако добро поклапање таласних облика, а упечатљиво је и да порастом активне компоненте струје долази и до значајних промена у облику у односу на готово правоугаоне сигнале фазних струја у режиму празног хода. Даљим порастом оптерећења ће се ситуација још више поправити.

За крај излагања о верификацији нелинеарног динамичког модела ће се дати упоредни приказ спектра мрежних струја, добијен на основу резултата симулација и мерења на физичкој машини. Режим рада машине је брзина од 1480 о/мин, при номиналном напону напајања. У симулацијама је одмах уважен и утицај хармонијског изобличења напона напајања, са отприлике истим вредностима као за спектар приказан сликом 4.27.



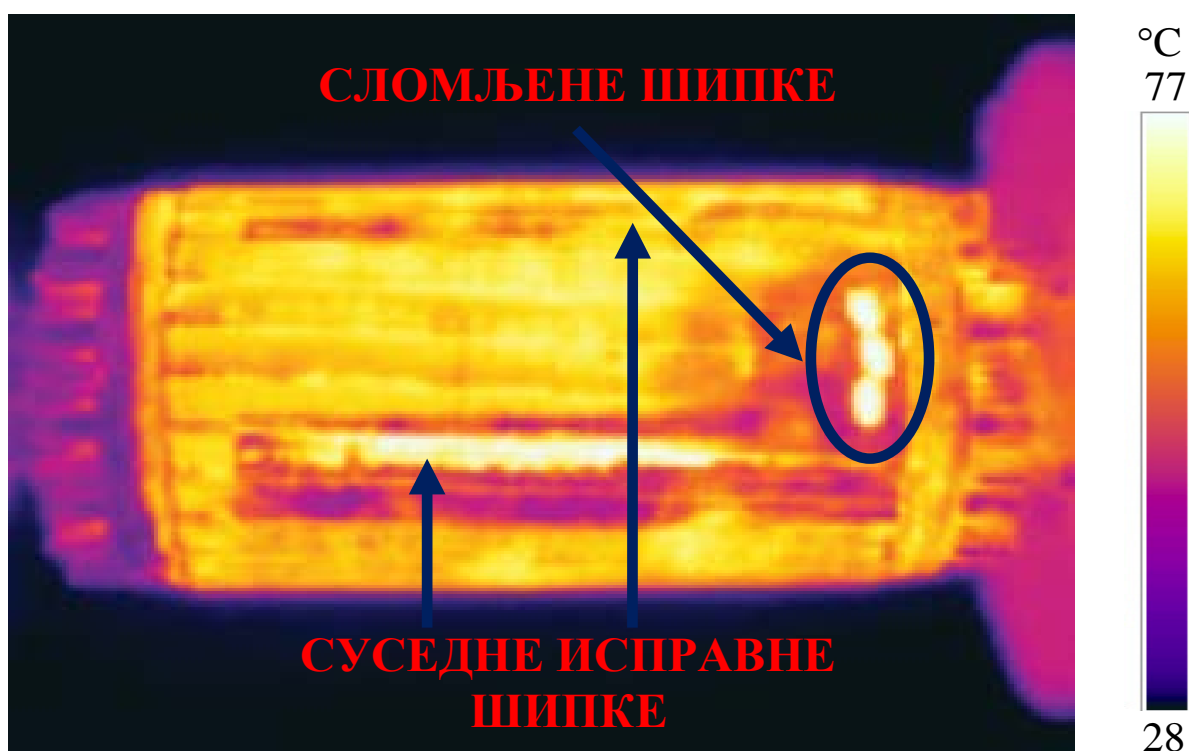
Слика 4.38 Упоредни спектар мрежне струје при брзини обртања од 1480 о/мин. Распон учестаности 0-660 Hz. Уважено хармонијско изобличење напона у линеарној симулацији



Слика 4.39 Упоредни спектар мрежне струје при брзини обртања од 1480 о/мин. Распон учестаности 660-1450 Hz. Уважено хармонијско изобличење напона у линеарној симулацији

4.2 Примена динамичког модела у детекцији сломљених роторских шипки

Једна од најзначајнијих примена МССА модела је анализа феномена који се јављају у машини када наступи делимичан или потпун прекид једне или већег броја роторских шипки. Оно што је карактеристично за овај тип квара је да он не изазива тренутно велике и опасне последице по машину и цео погон, тако да машина са таквим кваром на кавезном ротору може да настави са радом. До тежих последица по погон може да дође временом, пошто се због прекида појединих роторских проводника повећава струја у исправним шипкама које се налазе у непосредној близини шипки са кваром [51]. Овај феномен је илустрован на слици 4.40, на којој је приказана температурна слика кавезног ротора са три сломљене шипке. Јасно се види осетни пораст температуре суседних исправних шипки, што потврђује да су биле изложене струјама већих интензитета него што је то било очекивано у том режиму да је машина била потпуно исправна [52]-[55]. Слика је направљена помоћу термовизијске камере, тако што је након дуготрајног огледа оптерећења машине ротор брзо извађен из кућишта и фотографисан.



Слика 4.40 Температурна слика кавезног ротора са три сломљене шипке. Очигледан је пораст температуре суседних исправних шипки

4.2.1 Спектар статорских струја у присуству сломљених шипки у кавезном ротору

Познато је да појава сломљених шипки изазива одређене компоненте у спектру статорских струја у устаљеном стању, али и током транзијента. Постојање тих компоненти је у литератури доказано упрошћеним поступком, који се ослања на упрошћену представу машине, у првом реду роторског кола, које се еквивалентира као трофазно коло [56]. Овде ће се извести доказ без тих упрошћења, који се ослања на развијени динамички модел машине.

Сам доказ је врло сличан доказу постојања жљобних хармоника у спектру статорских струја, који је изведен у претходном поглављу, али да би се тај поступак могао применити на ситуацију са кваром, мора се нешто рећи и о теорији симетричних компоненти примењеној у полифазним системима [1], [57]. Сломљене роторске шипке изазивају неуравнотеженост у роторском колу, што доводи до појаве несиметрије у струјама роторских шипки, а самим тим и у струјама роторских петљи. Примењивањем везе између струја суседних роторских петљи и струје заједничке им шипке (3.5) на комплетно роторско коло се може извести следећа веза између вектора струја роторских шипки и вектора струја роторских петљи:

$$\begin{bmatrix} i_{b1} \\ i_{b2} \\ \vdots \\ i_{b(N_B-1)} \\ i_{bN_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{rl1} \\ i_{rl2} \\ \vdots \\ i_{rl(N_B-1)} \\ i_{rlN_B} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Од вектора струја роторских шипки \mathbf{I}^b се применом матрице распрезања \mathbf{F} добија вектор симетричних компоненти струја роторских шипки \mathbf{I}^s . Дефиниција оба вектора струја и матрице распрезања \mathbf{F} је дата релацијама (4.23) и (4.24), респективно.

$$\mathbf{I}^s = \mathbf{F} \mathbf{I}^b \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^s &= [i_1^s \quad i_2^s \quad \dots \quad i_{(N_B-1)}^s \quad i_{N_B}^s]^T \\ \mathbf{I}^b &= [i_{b1} \quad i_{b2} \quad \dots \quad i_{b(N_B-1)} \quad i_{bN_B}]^T \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{N_B} \begin{bmatrix} 1 & a & \dots & a^{1(N_B-2)} & a^{1(N_B-1)} \\ 1 & a^2 & \dots & a^{2(N_B-2)} & a^{2(N_B-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & a^{N_B-1} & \dots & a^{(N_B-1)(N_B-2)} & a^{(N_B-1)(N_B-1)} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}, \alpha = e^{-j\frac{2\pi}{N_B}} \quad (4.24)$$

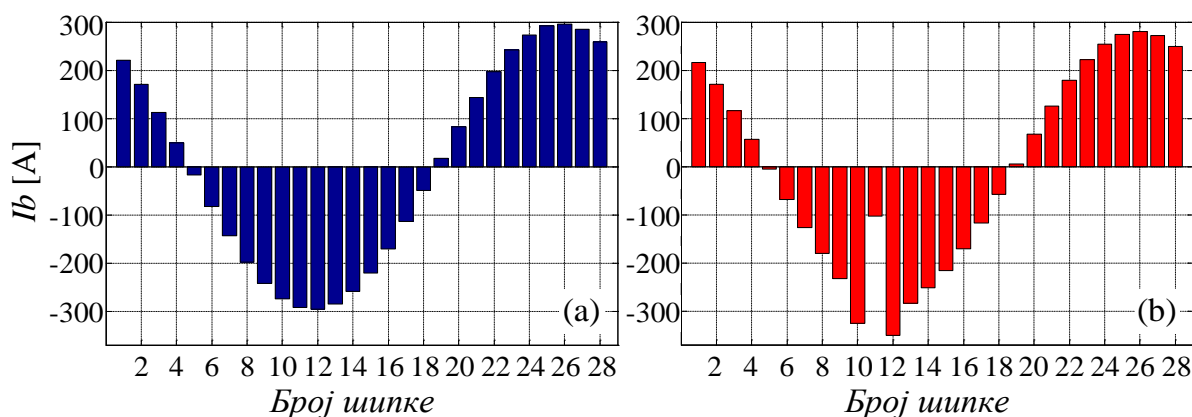
У поглављу у ком је развијен динамички модел машине је наведено на који се начин може симулирати квар у роторском колу, променом отпорности конкретног елемента у роторској матрици отпорности R_r , чија је форма дата релацијом (3.8). Ако се, на пример, промени отпорност роторске шипке k , због начина формирања роторске матрице отпорности, која у себи уважава и формирање отпора роторских петљи, више елемената у матрици отпорности претрпи промене због тога [52]. На слици 4.41 је дат детаљ роторске матрице отпорности, у којој су уоквирени елементи којима се променила вредност због пораста отпорности роторске шипке k .

Под утицајем повећане отпорности шипке k

$$\begin{array}{cccccccc}
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & -R_{b(k-2)} & R_{l(k-1)} & -R_{bk} & 0 & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & 0 & -R_{b(k-1)} & R_{lk} & -R_{b(k+1)} & 0 & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & 0 & -R_{bk} & R_{l(k+1)} & -R_{b(k+2)} & 0 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

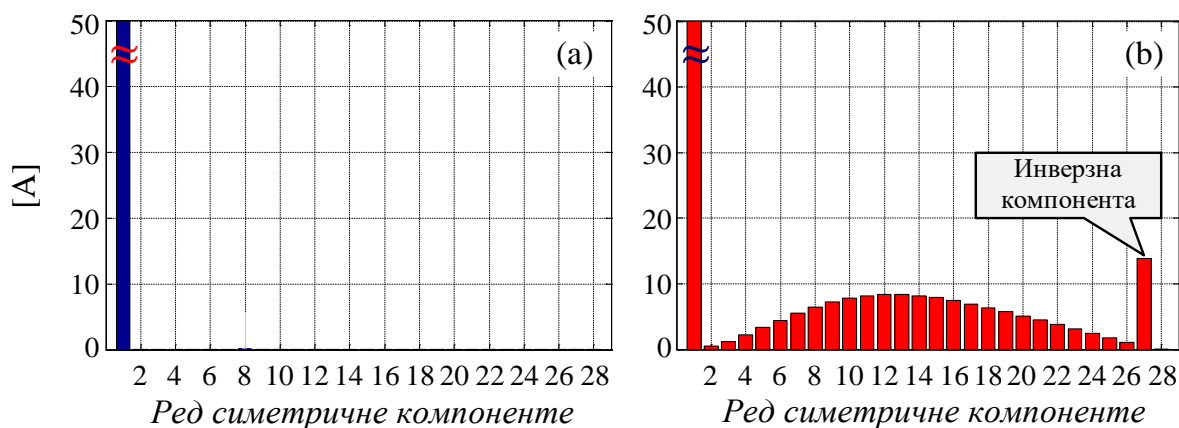
Слика 4.41 Илустрација утицаја промене отпора роторске шипке k на поједине елементе у матрици R_r .

На слици 4.42 су упоредо приказани резултати симулација над линеарним динамичким моделом машине, где је на слици под (а) приказана расподела амплитуде струја у роторским шипкама у неком замрзнутом тренутку устаљеног рада мотора оптерећеног моментом који износи око 60% номиналног оптерећења, док је на слици под (б) приказан исти одзив у условима делимичног прекида роторске шипке број 11. Симулације се спроведене над линеарним моделом у којем су занемарени сви виши хармоници у свим индуктивностима машине. И кроз симулације се потврђује да чак и делимично оштећење неког роторског проводника повећава струју у суседним проводницима.



Слика 4.42 Симулиране вредности струја у роторским шипкама. (а) Исправан кавез. (б) Делимично поломљена шипка бр. 11

Када се на тренутне вредности струја приказане на претходној слици примени трансформација распрезања дефинисана изразом (4.22), добијају се симетричне компоненте струја роторских шипки, које су упоредо приказане на слици 4.43.



Слика 4.43 Симетричне компоненте полифазног роторског система струја. (а) Исправан ротор. (б) Ротор са делимично сломљеном шипком бр. 11

Оно што се може приметити са слике је постојање само једне симетричне компоненте за случај исправне машине, док се код машине са једном делимично сломљеном шипком уочава мноштво различитих симетричних компоненти, од којих је најважнија претпоследња, под редним бројем 27, која је у вектору симетричних компоненти I^s означена са $i_{(N_B-1)}^s$. За ту симетричну компоненту по дефиницији важи да су њене представнице у суседним роторским шипкама померене за фазни угао од $(N_B - 1) \frac{2\pi}{N_B}$, што је у ствари еквивалентно са фазним померајем од $-\frac{2\pi}{N_B}$. Управо због тога се та симетрична компонента назива инверзна компонента, јер је фазни померај између њених представница у суседним роторским шипкама истог интензитета, а различитог знака у односу на фазни померај директних компоненти. У овој симетричној компоненти се крије главни механизам за детекцију оваквих типова кварова праћењем спектра статорских струја. Тако очигледно правило не важи за остале симетричне компоненте са слике (4.42б), па због тога оне нису погодне за теоријску анализу.

Утврђивање утицаја којег поменуте симетричне компоненте инверзног редоследа имају на спектар статорских струја ће се теоријски утврдити поступком који је веома сличан са оним који се користио приликом анализе појаве жљебних хармоника, тј. путем индуктивних спрега између роторских петљи и статорских фаза. Прво, пошто је утврђено да симетричне компоненте инверзног редоследа постоје у струјама роторских шипки, очигледно је да оне морају постојати и у струјама роторских петљи. Згодније је анализу пребацити на роторске петље, јер су статорско-роторске индуктивности управо и дефинисане за њих. Део флуksног обухвата статорске фазе a , као последица магнетног спрезања са инверзним компонентама струја роторских петљи је приказан следећом релацијом:

$$\Psi_{ai} = \sum_{k=1}^{N_B} M_{rak}(\vartheta) \cdot i_{l(N_B-1)k}^s = \sum_{k=1}^{N_B} M_{rak}(\vartheta) \cdot i_{lik}^s \quad (4.25)$$

Због компактнијег записа је инверзна симетрична компонента роторске петље $i_{l(N_B-1)k}^s$ замењена ознаком i_{lik}^s . Када се међусобна индуктивност $M_{rak}(\vartheta)$ замени првим чланом развоја у Фуријеов ред (који је овде већ сведен на једну тригонометријску функцију, са истим ознакама као и у релацијама за жљебне хармонике, релација (4.12)), а уместо инверзне компоненте струје i_{lik}^s стави њен таласни облик у временском домену, добија се израз (4.26). Са I_{lik}^s је означена амплитуда инверзне компоненте струје, а γ_{0i} је њен почетни фазни став.

$$\Psi_{ai} = \sum_{k=1}^{N_B} \left\{ \begin{array}{l} M_{rak} \cos \left(\vartheta + \frac{(k-1)2\pi}{N_B} + \varphi_{0M_{sr}} \right) \cdot \\ I_{lik}^s \cos \left(\omega_r t - \frac{(k-1)2\pi}{N_B} + \gamma_{0i} \right) \end{array} \right\} \quad (4.26)$$

Простим тригонометријским трансформацијама се од израза (4.26) добија израз (4.27), у којем је због прегледнијег записа стављено $\varphi_1 = \varphi_{M_{sr}} + \gamma_{0i}$ и $\varphi_2 = \varphi_{M_{sr}} - \gamma_{0i}$.

$$\Psi_{ai} = \sum_{k=1}^{N_B} \frac{I_{lik}^s \cdot M_{rak}}{2} \left\{ \begin{array}{l} \cos \left(\omega_s t + \frac{4\pi(k-1)}{N_B} + \varphi_1 \right) + \\ \cos \left((1-2s)\omega_s t + \varphi_2 \right) \end{array} \right\} \quad (4.27)$$

Сличним поступком се могу извести изрази и за делове флуksних обухвата изазваних инверзним компонентама струја роторских петљи за остале две статорске фазе. Коначни облици су дати релацијама (4.28) и (4.29).

$$\Psi_{bi} = \sum_{k=1}^{N_B} \frac{I_{lik}^s \cdot M_{brk}}{2} \left\{ \begin{array}{l} \cos \left(\omega_s t + \frac{4\pi(k-1)}{N_B} + \varphi_1 - \frac{2\pi}{3} \right) + \\ \cos \left((1-2s)\omega_s t + \varphi_2 - \frac{2\pi}{3} \right) \end{array} \right\} \quad (4.28)$$

$$\Psi_{ci} = \sum_{k=1}^{N_B} \frac{I_{lik}^s \cdot M_{crk}}{2} \left\{ \begin{array}{l} \cos \left(\omega_s t + \frac{4\pi(k-1)}{N_B} + \varphi_1 + \frac{2\pi}{3} \right) + \\ \cos \left((1-2s)\omega_s t + \varphi_2 + \frac{2\pi}{3} \right) \end{array} \right\} \quad (4.29)$$

На основу израза за делове флуksних обухвата статорских фаза постаје очигледно да се поред компоненти на основној честаности статорског напајања јављају и компоненте на учестаности $(1-2s)\omega_s$. Управо су оне последица постојања инверзних компоненти струја, те су стога тражено обележје квара у кавезном ротору, будући да ће се из делова флуksних обухвата на тим учестаностима индуковати електромоторне силе, а затим и струје. Ако се уважи присуство виших хармоника у

статорским струјама, сличан се поступак може применити и на њих, што ће резултовати у појави компонентни у спектру статорских струја које су облика $(1 - 2ks)\omega_s$, $k \in \{2,3, \dots\}$, али су оне по правилу много мањег интензитета од компоненте на учестаности $(1 - 2s)\omega_s$. Показано је и да због присуства ових компоненти долази до таласности у електромагнетном моменту, који ће изазвати таласност у брзини, која ће се у спектру манифестовати пресликавањем компоненти $(1 - 2s)\omega_s$ на десну страну од основне учестаности, те ће се појавити и компоненте фреквенције $(1 + 2s)\omega_s$. То ће уједно узроковати и компоненте облика $(1 \pm 2ks)\omega_s$, $k \in \{2,3, \dots\}$.

Овим је заокружен доказ постојања специфичних компоненти у спектру статорских струја строго се држећи развијеног динамичког модела, што самом доказу даје посебну тежину.

4.2.2 *Метод противструјног кочења за детекцију сломљених шипки у роторском кавезу*

Већина постојећих метода детекције сломљених шипки које свој рад заснивају на анализи спектра статорских струја (тзв. *Motor Current Signature Analysis - MCSA*) [58]-[69] се ослањају на детекцију компоненти на учестаностима $(1 \pm 2ks)\omega_s$, односно $(1 \pm 2ks)f_s$, где је f_s фреквенција основног хармоника статорског напајања. Атрактивност детекције кварова у машини анализом спектра статорских струја се огледа у томе што већина машина за које је важна рана детекција кварова (а то су по правилу машине критичне за индустријски процес) већ има имплементирану напреднију заштиту од неких стандардних типова кварова у машини (попут прекида фаза или кратких спојева, али и многих других), која подразумева мерење и аквизицију статорских струја. Због тога се без великих улагања може применити MCSA метод. Такође и све машине које се напајају из неког од претварача енергетске електронике имају аквизицију статорских струја за потребе управљачког алгорита, па се и код њих метода може лако применити, бар са становишта постојања податка о таласном облику статорских струја. На самим методама је да на основу податка о статорској струји поуздано утврде присуство квара.

Детекција се може вршити било у стационарном стању, било у транзијентима, а зависно од примењеног поступка зависи и на који начин ће се обавити обрада добијених података.

Методе које се заснивају на анализи статорских струја у стационарном стању најчешће користе FFT за добијање спектра статорских струја. Компликације које могу настати приликом детекције квара у стационарном стању су бројне. Први и највећи проблем је како обезбедити довољно велико и стабилно оптерећење на вратилу машине, да би се остварило довољно велико клизање [70]. Ово је пожељно учинити зато што се компоненте квара при осетнијим клизањима могу лакше раздвојити од доминантне компоненте основне статорске учестаности f_s . Да би раздвајање компоненти било што ефикасније, потребно је да оптерећивање машине константним моментом траје што дуже (и преко 100 секунди), како би се постигла висока резолуција за спровођење FFT-а. Већа резолуција гарантује и финију

представу спектра након примене FFT-а, па се компоненте блиске основној учестаности могу лакше уочити и правилно квантификовати. Међутим, стабилно оптерећење у дужем временском периоду је најчешће тешко остварити, а када је реч о машинама великих снага проблем може бити и обезбеђивање довољног момента оптерећења. Ако оптерећење варира током експеримента, варираће и брзина машине, што ће довести до „замрљања“ компоненти спектра зависних од клизања, што представља још једно потешкоћу. Не треба сметнути са ума и чињеницу да у дуготрајним експериментима мотора напајаних из мреже може да дође и до варијација мрежне учестаности, које колико год да су мале изазивају сличан ефекат на спектар струје као и варијација брзине услед варијације оптерећења [71].

Ови проблеми у огледима стационарних стања се могу на неки начин превазићи применом напреднијих техника обраде сигнала. Ту се убраја примена ускопојасних филтара [72], примена Хилбертове трансформације [73], којом се основна компонента укида њеним премештањем на једносмерну вредност, а у последње време се користи и анализа спектра анvelope статорске струје [74].

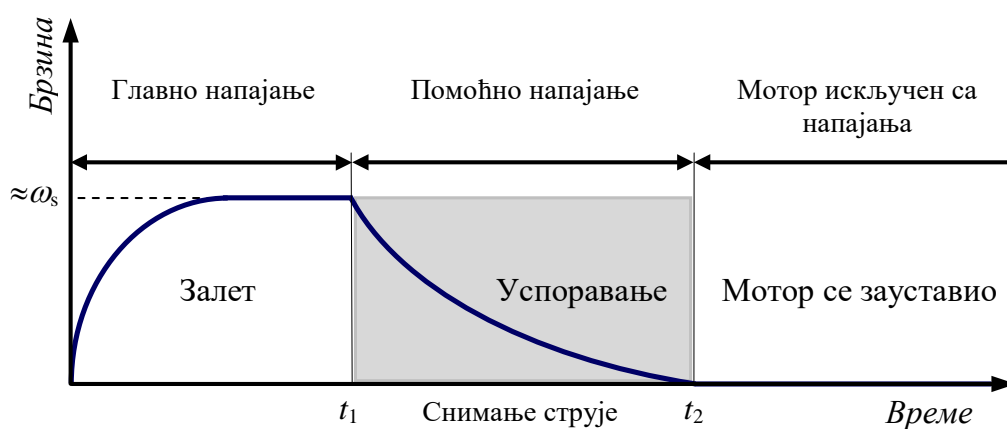
Ови поступци ипак не могу да превазиђу чињеницу да су методе у стационарном стању подложне грешкама због дуготрајних мерења и варијација брзине и оптерећења. Скраћење трајања експеримента је могуће употребом Zoom-FFT методе [75], или тзв. ESPRIT метода [76], али су оне прилично нумерички захтевне.

Други приступ детекцији кварова су експерименти током транзијентног рада машине, где се првенствено подразумева анализа спектра статорских струја током поласка машине. Оно што је сигурно је да се током старта машине обезбеђује довољна раздвојеност компоненти индикације квара од основне компоненте спектра, али је компликација та што су сада те компоненте на променљивој учестаности, па се због тога морају применити технике анализе нестационарних сигнала. Најчешће коришћене методе су Wavelet трансформација и Short-Time Фуријеова Трансформација – STFT [77]-[81]. Недостатак метода је што је током залета потребно обезбедити извор велике снаге. За случај да обезбеђивање извора довољне снаге није проблем, могу се очекивати и неки други проблеми. Сувише кратко време трајања залета може утицати на резолуцију трансформација, а сувише дуг залет може изазвати проблеме са превеликом количином складиштених података. Такође, смањење напона напајања током залета зарад мањег струјног удара и обезбеђивања довољне резолуције може произвести слабији одговор роторског кола.

Нова метода, развијена током овог истраживања нуди решење за практично свеу презентоване проблеме. Метода се ослања на компоненте у спектру статорских струја на фреквенцији $(1 - 2s)\omega_s$, а главни допринос нове методе је начин на који се постиже довољна вредност клизања, без оптерећивања мотора или потребе за извором велике снаге. Метода се заснива на режиму противструјног кочења, уз важну напомену да се кочење спроводи са веома малим напоном напајања (свега неколико волти), тако да не може да изазове никакве последице по мотор због протицања изузетно великих струја, како у статору, тако и у ротору. Предности методе су што није потребно обезбедити никакво оптерећење машини и што се експеримент може вршити коришћењем помоћног извора врло мале снаге (свега

неколико вати). За случај напајања машине из претварача енергетске електронике, оставља се могућност програмирања претварача на тај начин да у посебном режиму рада може да наметне машини напоне врло малих ефективних вредности. У експериментима извођеним за потребе овог истраживања је коришћен помоћни извор напајања у виду аутотрансформатора са могућношћу подешавања врло малог излазног напона.

Процедура самог огледа је приказана на слици 4.44. Потребно је прво залетети неоптерећени мотор до постизања пуне брзине празног хода. Због неоптерећености машине се може рећи да је постигнута брзина практично једнака синхроној брзини. Након тога (тренутак t_1 на слици 4.44) се искључује извор главног напајања, те машина по инерцији у почетку задржава постигнуту брзину обртања. Непосредно након тога се може укључити извор помоћног напајања (транзијенти у машини након искључења ишчезавају врло брзо, свега неколико периода учестаности главног напајања је довољно да би они готово потпуно нестали, нарочито код нисконапонских машина). Помоћно напајање је доведено машини тако да форсира обртно поље супротног смера од оног наметнутог главним напајањем, пре његовог искључења. Такав поступак је познат и под називом противструјно кочење. Напон помоћног напајања износи свега неколико волти, што је мање од једног процента номиналне вредности, па је остварени кочиони моменат потпуно занемарљив. То значи да ће машина постепено да се зауставља искључиво услед сопствене инерције и трења.



Слика 4.44 Процедура извођења огледа противструјног кочења

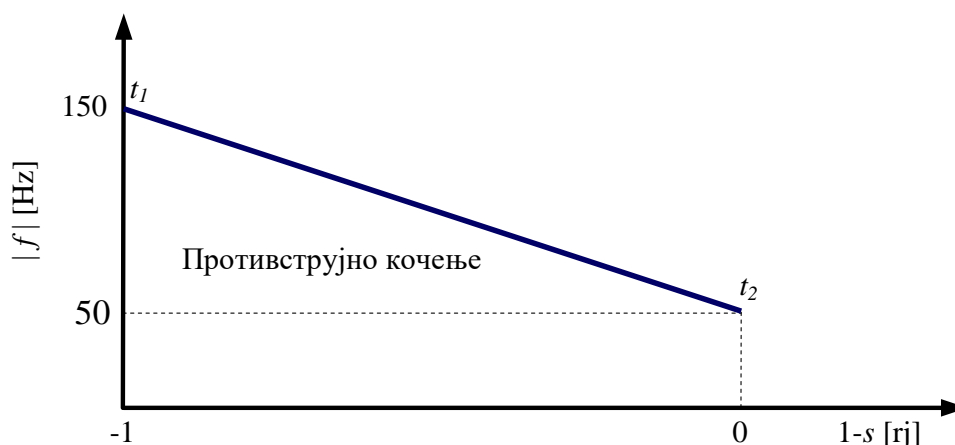
Мада је кочиони моменат потпуно занемарљив, то није случај са реакцијом ротора на поље наметнуто са статора. Тренутна брзина ротора је негативна за новонаметнуту брзину обртног поља, што значи да је клизање машине у почетку блиско вредности 2. Мада је амплитуда обртног поља веома мала, она изазива релативну брзину кретања роторских проводника која је у почетку укључења помоћног напајања готово двоструко већа од синхроне брзине, што је драстично веће од клизања која се имају у стандардним огледима оптерећивања, која се крећу око вредности од свега неколико процената синхроне брзине. Због тога ће и вредност индукованих електромоторних сила у роторским петљама имати велику

вредност, наравно спрам ниског напона наметнутог статору. Одзив роторског кола са аспекта амплитуде индукованих струја је врло стабилан и мало променљив током практично целог огледа противструјног кочења, што се лако може објаснити ако се узме у обзир и да су индуктивни отпори роторског кола зависни од фреквенције клизања, те да су у режимима са веома великим клизањима значајно већи од отпорности у ротору. Због тога је струја сразмерна количнику датом следећом упрошћеном релацијом:

$$I_r = \frac{\omega_{kl}\Psi_m}{(\omega_{kl}L_r)^2 + R_r^2} \sim \frac{\Psi_m}{L_r} \sim \text{const.} \quad (4.30)$$

Овде је искоришћена нотација која више одговара приказу роторског кола преко заменске пофазне шеме, зарад јасноће тврдње о стабилном одзиву струје. Са I_r је означена пофазна роторска струја, L_r и R_r параметри пофазне шеме, ω_{kl} је фреквенција у роторском колу, односно фреквенција клизања, а Ψ_m представља заједнички флуks статора и ротора.

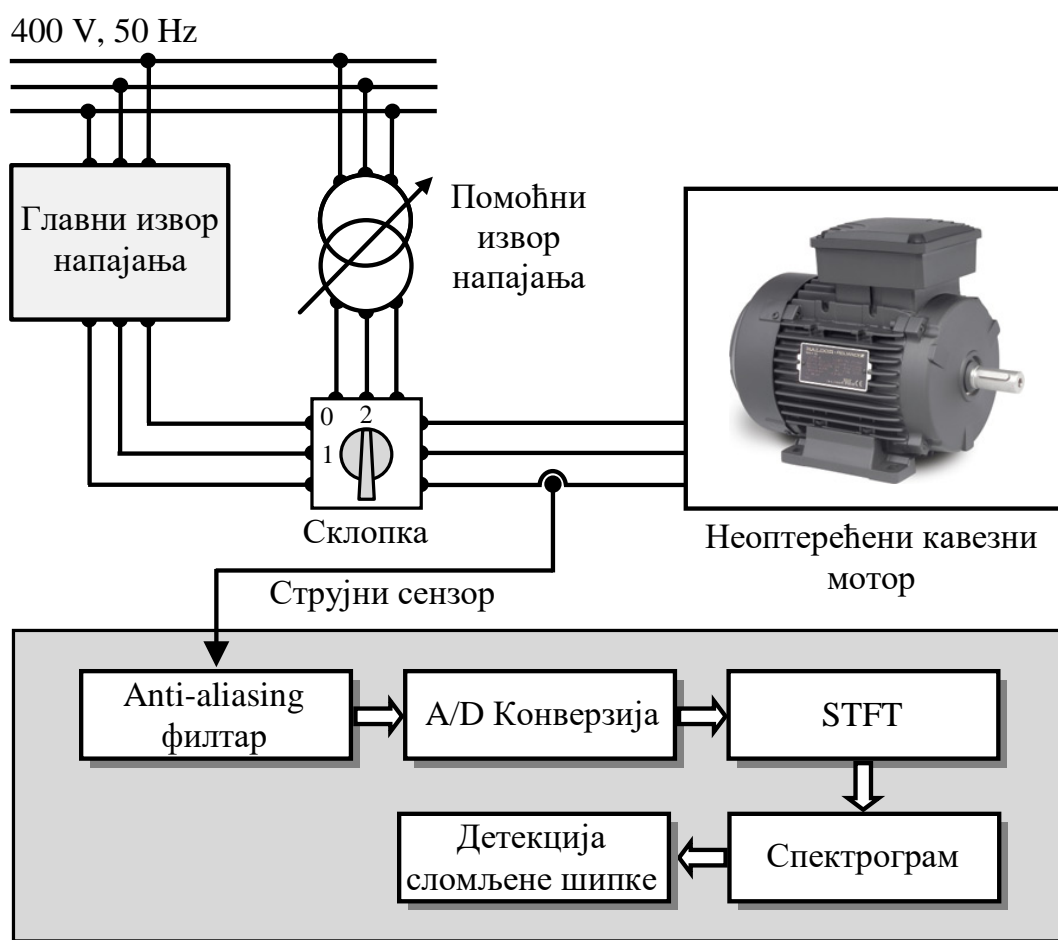
Истовремено се услед постојања квара у роторском колу појављују компоненте у спектру статорских струја, које су на учестаностима $(1 - 2s)f_s$, што значи да у самом почетку огледа имају високу фреквенцију од $|(1 - 2 \cdot 2)50| = 150$ Hz, а на самом крају огледа, након заустављања имају вредност од $|(1 - 2 \cdot 1)|50 = 50$ Hz. То је илустровано сликом 4.45. Овим је наговештено да се у одзивима статорских струја добијених мерењима у презентованом режиму противструјног кочења компоненте које служе као индикатор постојања квара у роторском колу морају тражити у поменутом опсегу фреквенција. Такође постаје очигледно и да је њихова фреквенција променљива, те да ће за њихово успешно откривање бити нужна примена техника обраде нестационарних сигнала.



Слика 4.45 Илустрација променљиве учестаности компоненте показатеља квара на учестаности $(1 - 2s)f_s$ током огледа противструјног кочења

На овај начин се очигледно постигло ефектно раздвајање компоненти у спектру које су индикатор квара од компоненте на основној учестаности, чиме је превазиђен један велики проблем стационарних метода детекције. Такође, постигнуто је и да само компонента која је последица квара има променљиву фреквенцију, а да су фреквенције спектра помоћног напајања константне.

Због чињенице да се предложеном методом детекције добијају фреквенцијске компоненте које су променљиве током трајања експеримента, потребно је применити трансформацију која те компоненте може да успешно издвоји и ефектно графички и квантитативно прикаже. Одлучено је да се за те потребе користи STFT трансформација, највише због чињенице да се њеном применом јасно види разлика између компоненти на променљивој и непроменљивој учестаности током експеримента. Блок дијаграм мерења и обраде добијених резултата је приказан на слици 4.46.

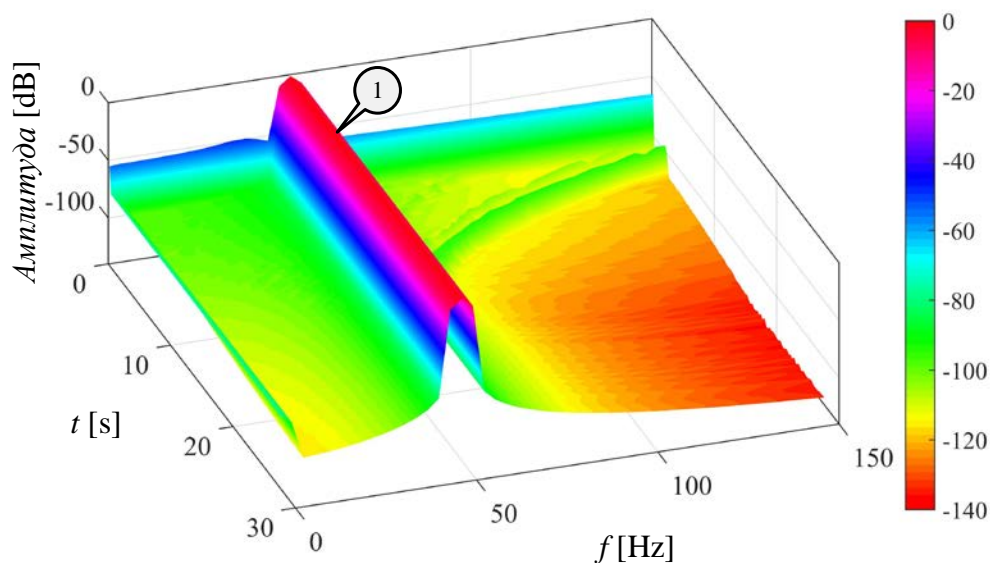


Слика 4.46 Блок дијаграм мерења и обраде добијених података

Најпре ће се предложена метода верификовати путем рачунарских симулација спроведених над развијеним динамичким моделом, у којем су занемарени сви утицаји виших хармоничких чланова у матрици индуктивности. За потребе

верификације ће се поново користити мотор који је служио за експерименталне и резултате симулација у претходним поглављима. Пошто заустављање мотора може да траје и по неколико минута (за погоне са великом инерцијом), било би апсолутно неприхватљиво користити транзијентну методу коначних елемената, чије би симулације трајале данима, а можда и дуже. Пошто је већ показано да засићење нема утицаја на амплитуду појединих компоненти у спектру статорских струја, оно је у потпуности занемарено, што би се свакако могло урадити будући да је напон напајања који се намеће машини свега неколико волти, па нема ни говора о било каквом засићењу. Резултати симулација након примењене STFT трансформације ће бити приказани у форми спектрограма, тродимензионалним графиком. Спектрограм је нормализован на амплитуду компоненте струје на основној учестаности напајања, тако да она има вредност од 0 dB, те су самим тим све остале компоненте у спектру са негативним амплитудама. Амплитуда је приказана на вертикалној оси спектрограма, док је на хоризонталним осама приказно време трајања експеримента, односно фреквенција компоненти у спектру.

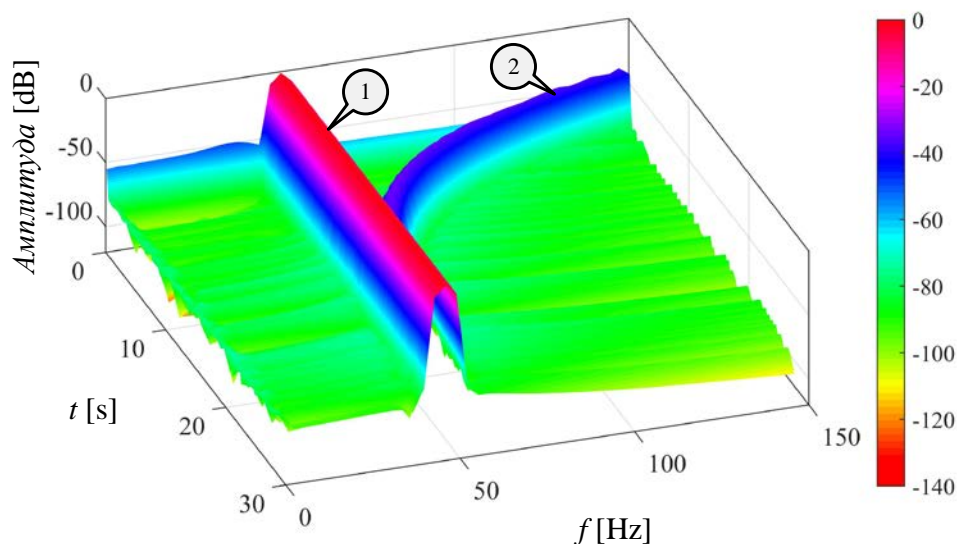
На слици 4.47 је приказан спектрограм статорске струје машине са исправним ротором, који је добијен симулацијама над динамичким моделом. Оно што се може приметити је готово потпуно одсуство компоненти у спектру, изузев наравно основне компоненте напајања. Најважније је да се не уочава компонента асоцирана за појаву квара у роторском кавезу, која би по теоријским предвиђањима спектра статорских струја у ситуацији са кваром у роторском колу требало да буде континуално видљива у опсегу учестаности од 150-50 Hz.



Слика 4.47 STFT спектрограм исправног мотора. Симулација на динамичком моделу

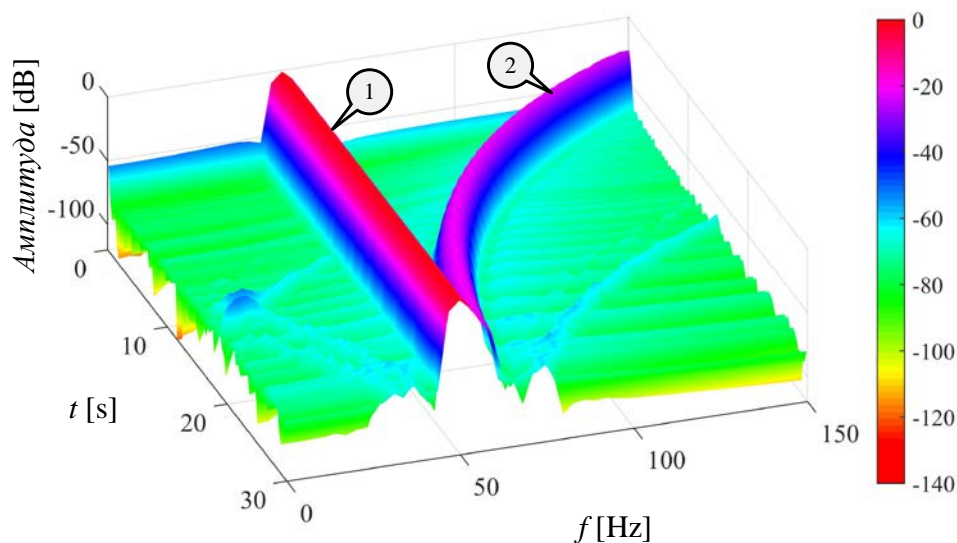
На слици 4.48 је приказан спектрограм статорске струје машине са једном делимично пукнутом роторском шипком, који је добијен симулацијама над динамичким моделом. Делимичан прекид једне роторске шипке је у симулацијама моделован повећањем њене отпорности на вредност која је десет пута већа од нормалне. Примећује се стабилан одзив у опсегу фреквенција 150-50 Hz, који током

целог огледа има амплитуду од око -42 dB. Поређењем са спектрограмом исправног мотора постаје очигледна велика уочљивост компоненте изазване кваром.



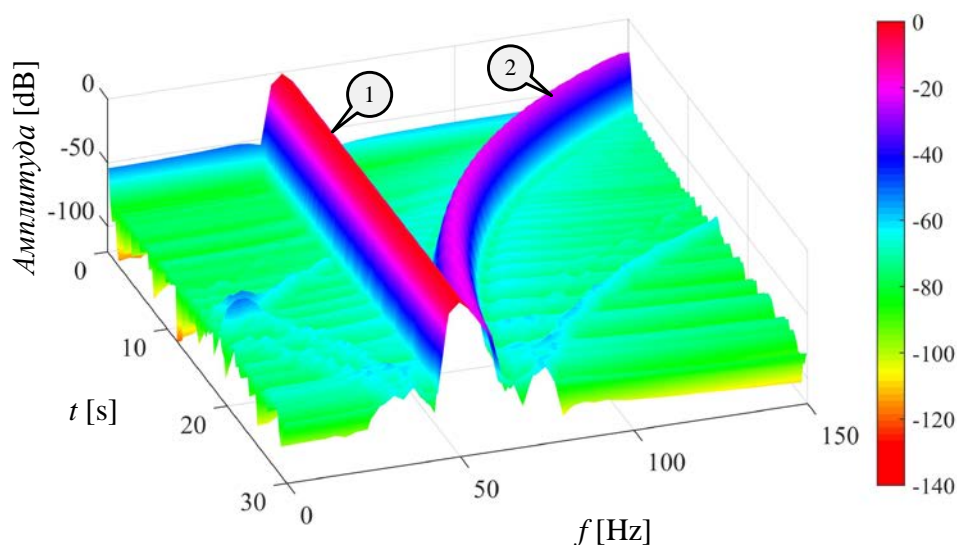
Слика 4.48 STFT спектрограм мотора са једном делимично сломљеном шипком. Симулација на динамичком моделу. Компонента 1 је компонента основне учестаности, компонента 2 је последица квара

На слици 4.49 је приказан спектрограм статорске струје машине са две делимично прекинуте суседне роторске шипке, који је поново добијен симулацијама над развијеним динамичким моделом. Прекид роторских шипки је у симулацијама моделован повећањем њихових отпорности на вредност која је десет пута већа од нормалне. Сада је одзив у опсегу фреквенција $150-50$ Hz још и веће амплитуде, што потврђује осетљивост методе спрам озбиљности насталог квара. Током читавог огледа компонента индикације квара има амплитуду од око -35 dB.



Слика 4.49 STFT спектрограм мотора са две делимично сломљене шипке. Симулација на динамичком моделу. Компонента 1 је компонента основне учестаности, компонента 2 је последица квара

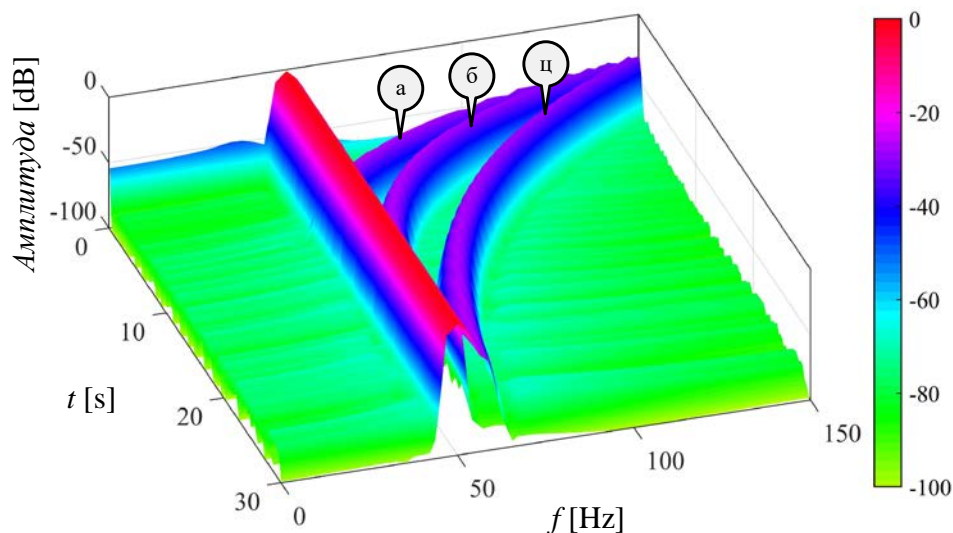
На слици 4.50 је приказан спектрограм статорске струје машине са три делимично прекинуте суседне роторске шипке, који је опет добијен симулацијама над развијеним динамичким моделом. Прекид роторске шипке је у симулацијама моделован повећањем њихових отпорности на вредност која је поново десет пута већа од нормалне. Одзив у опсегу фреквенција 150-50 Hz показује још већи пораст у амплитуди, наравно спрам озбиљности насталог квара. Током читавог огледа компонента индикације квара има амплитуду од око -22 dB.



Слика 4.50 STFT спектрограм мотора са три делимично сломљене шипке. Симулација на динамичком моделу. Компонента 1 је компонента основне учестаности, компонента 2 је последица квара

Питање које се природно поставља након приказаних огледа је да ли предложена метода губи на детектабилности компоненти изазваних кваром у зависности од тога колика је ефективна вредност наметнутих напона током режима противструјног кочења? Зарад разрешења ове дилеме су спроведене три симулације над динамичким моделом са две делимично сломљене суседне шипке, које су резултовале одзивима услед противструјног кочења за ефективне вредности струја кочења од 25, 5 и 1 А. Струја од 25 А је блиска номиналној вредности струје, па је изабрана као нека природна граница при којој је још увек безбедно изводити противструјно кочење (у суштини, због кратког трајања кочења, могла би се дозволити и већа струја). Будући да би противструјно кочење при номиналном напону напајања могло да изазове струје које су чак до два пута веће од полазних струја (које су 5 до 7 пута веће од номиналне струје за машине мањих до средњих снага), говори се о струјама које би могле да премаше номиналну вредност и више од десет пута. Закључак је да је потребно наметнути напон за противструјно кочење макар десет пута мањи од номиналног, да би се имала номинална струја статора. За струје од свега 1 А се тај напон мора спустити на свега неколико волти. Упоредним приказом спектрограма за три наведене вредности струја кочења, који је приказан сликом 4.51 се долази до важног закључка. Наиме, очигледно је да је предложена

метода потпуно независна од интензитета струје противструјног кочења, јер за све три наведене вредности струја компонента изазвана кваром има практично исту амплитуду. То је у суштини највећа предност ове методе над свим другим методама, пошто је поуздан показатељ квара могуће детектовати извором снаге од свега неколико вати. Чак је и повољније користити извор који даје мању струју кочења, јер ће мотор након успешног заустављања остати у стању мировања, а и сам оглед ће трајати довољно дуго, што ће бити илустративније за приказ.



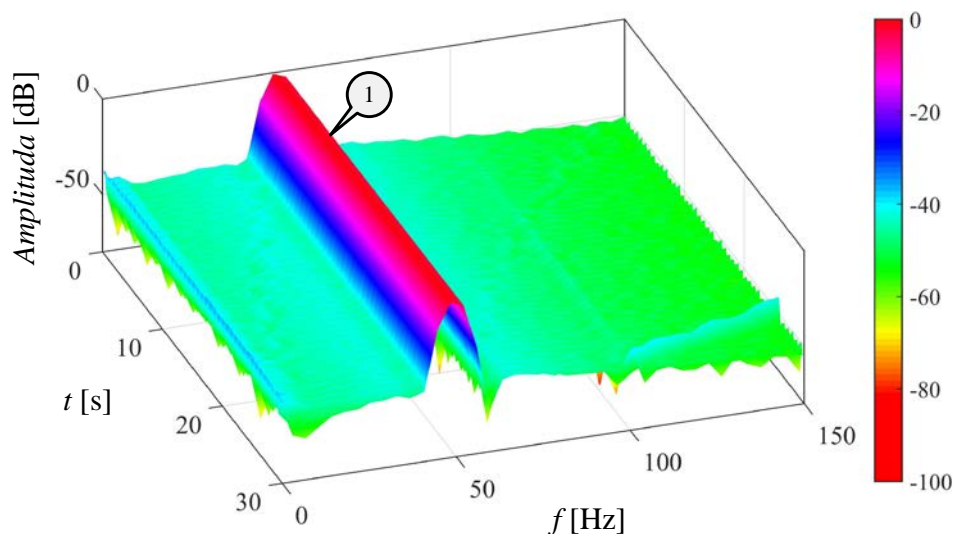
Слика 4.51 Упоредни спектрограми за три различите вредности струје противструјног кочења. Симулација над моделом са две делимично сломљене шипке. (а) Струја кочења од 25А. (б) Струја кочења од 5А. (ц) Струја кочења од 1А

Веродостојност методе ће бити потврђена и поређењем са експериментима на физичкој машини. За потребе експеримената су коришћена три ротора истих карактеристика, од којих је један исправан, други има једну сломљену роторску шипку, а трећи има три сломљене роторске шипке. Прекид шипке је изведен бушењем до дубине где почиње вратило мотора.



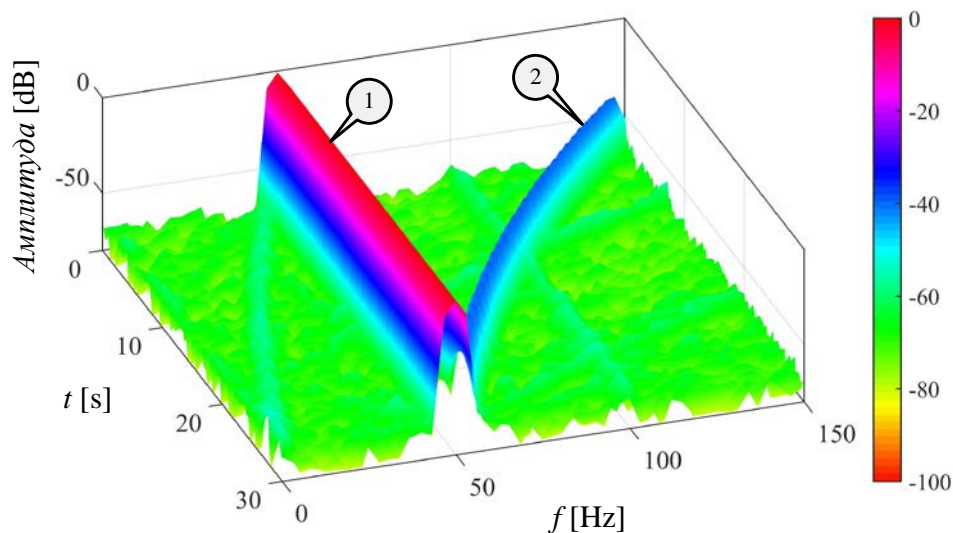
Слика 4.52 Кавезни ротори коришћени у експериментима

На слици 4.53 је приказан спектрограм статорске струје машине са исправним ротором, добијен експерименталним путем. Струја противструјног кочења је подешена на вредност од око 0.5 А, са напоном напајања од око 2 V. У спектру се само уочава компонента на основној учестаности.



Слика 4.53 STFT спектрограм исправног мотора. Експериментални резултати

На слици 4.54 је приказан спектрограм статорске струје машине са једном сломљеном шипком, добијен експерименталним путем. Струја противструјног кочења је поново подешена на вредност од око 0.5 А. Услед постојања квара у ротору се уочава стабилна компонента у спектру у очекиваном распону учестаности од 150-50 Hz. Амплитуда те компоненте је око -40 dB. Примећује се да је то у доброј сагласности са симулацијама за квар сличне озбиљности, где се добила амплитуда исте компоненте од око -42 dB.

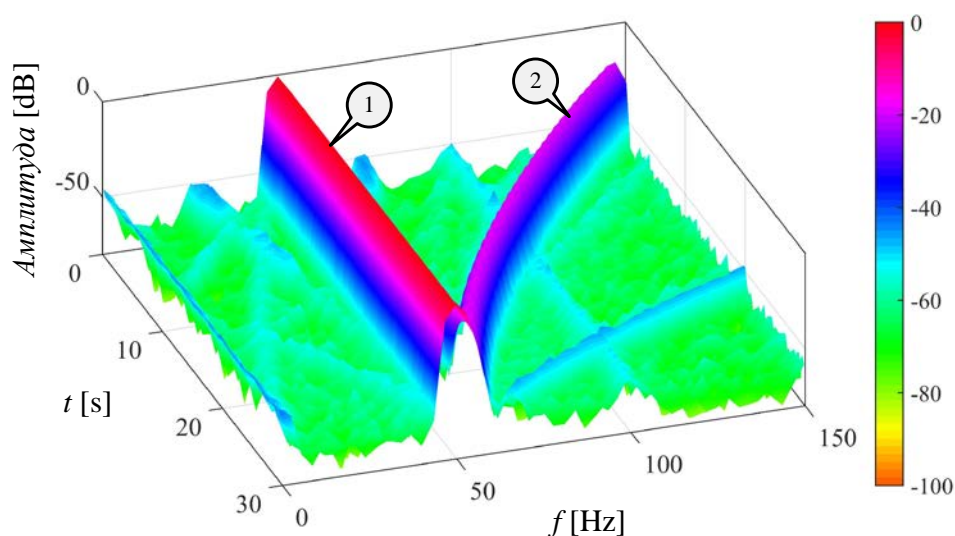


Слика 4.54 STFT спектрограм мотора са једном сломљеном шипком. Експериментални резултати.
Компонента 1 је компонента основне учестаности, компонента 2 је последица квара

На слици 4.55 је приказан спектрограм статорске струје машине са три сломљене роторске шипке, који је добијен експерименталним путем. Струја противструјног кочења током експеримента је поново подешена на вредност од око

0.5 А. Услед постојања још озбиљнијег квара у ротору се јасно уочава стабилна компонента у спектру у очекиваном распону учестаности од 150-50 Hz. Амплитуда те компоненте је око -20 dB. Примећује се да је то у доброј сагласности са симулацијама за квар сличне озбиљности, где се добила амплитуда исте компоненте од око -22 dB.

На појединим сликама се могу уочити и друге компоненте у спектру статорских струја, које су значајно мање амплитуде, али поседују променљиву учестаност током извођења огледа. Реч је о осталим компонентама у спектру струја које су зависне од брзине обртања, као што су жљебни хармоници и ексцентритетима индуковани хармоници (хармоника индукованих засићењем нема јер су напони наметнути машини врло мали). Пошто практично свака физички изведена машина има одређен мали степен ексцентритета, видљивост компоненти асоцираних тој појави је очекивана, а уједно и врло мале амплитуде говоре у прилог тврдњи да испитивана машина нема проблема са ексцентритетом. Овде се да наслутити да је за будућа истраживања атрактивно размотрити примену предложеног метода противструјног кочења и за детектовање других типова кварова у машини. Чак је у неким спектрограмима добијеним анализом експериментално измерених струја статора видљива и компонента која је смештена у распону учестаности од 50-0 Hz. Ту је наравно реч о компоненти индукованих струја изазваних реманентном индукцијом. Наиме, наметнут напон и успостављена струја током огледа су врло мале амплитуде, тако да постаје видљива компонента у спектру изазвана заосталом магнетизацијом из ранијих режима са пуним напоном напајања. Са становишта те индукције се у овом огледу машина понаша као синхрона машина са сталним магнетима, на променљивој брзини. Та компонента је и иначе присутна у нормалном раду машина, али је далеко мање видљива у условима номиналног напајања, те се стога и не уочава. Овде је ипак мало уочљива због изузетно мале вредности наметнутог напона. Иначе, ако би се машина без напајања механичким путем обртала брзином која је блиска номиналној или синхроној брзини, индуковани напон услед заостале магнетизације би се кретао око 1-2 волта у случају конкретно испитиване машине.



Слика 4.55 STFT спектрограм мотора са три слоњене шипке. Експериментални резултати. Компонента 1 је компонента основне учестаности, компонента 2 је последица квара

Након изложених резултата добијених експериманталним путем се може потврдити веродостојност изложене методе за детекцију сломљених роторских шипки. Важно је напоменути да је компонента изазвана кваром на само једној шипци прилично видљива, чак и у случају када је реч о њеном непотпуном прекиду. Суштински важно за ову методу је управо чињеница да има добру осетљивост и приликом појаве мање озбиљних кварова у ротору. Због тога је она изузетно повољна као средство за мониторинг и рану детекцију кварова у ротору, са циљем благовременог и превентивног деловања, које би спречило настанак већих хаварија у погону.

5. Закључак

У овој дисертацији је извршена научна расправа и предложен нови динамички модел трофазне кавезне асинхроне машине, који је заснован на резултатима добијеним применом симулација које нумерички имплементирају методу коначних елемената. Идеја је била да се обједине различити приступи у пројектовању, анализи и експлоатацији електричних машина приликом развоја динамичког модела, тако да се као крајњи резултат добије средство које садржи кључне предности различитих приступа, али да по могућству нема ниједну њихову изражену ману.

Приступи моделовању и анализи електричних машина коришћењем методе коначних елемената могу бити реализовани различитим имплементацијама, које се међусобно разликују по сложености математичког апарата, али и по богатству информација које се помоћу њих могу добити. Због тога је у другом поглављу овог излагања детаљно описана свака од статичких имплементација методе која се користи у анализи електричних машина, са нарочитим освртом на особености њихове примене у анализи кавезних асинхроних машина. Редом су се продискутовале могућности које нуде линеарне и нелинеарне магнетостатичке симулације, затим линеарне и нелинеарне *time-harmonic* симулације, те на крају и најзахтевније транзијентне симулације. Показало се да се свака од наведених имплементација може искористити за осветљавање одређених аспеката и особености које имају кавезне асинхроне машине. Линеарне магнетостатичке симулације могу да послуже за прорачун индуктивности када је ефекат засићења од секундарног значаја, што своју примену проналази у истраживању феномена као што су појава жљобних хармоника или хармоника изазваних одређеном врстом квара у машини. Нелинеарним магнетостатичким симулацијама се могу израчунати варијације трансформисаних индуктивности у пофазним еквивалентним шемама машина, а под одређеним условима се може уважити и ефекат засићења на физичке индуктивности намотаја машине. *Time-harmonic* симулације могу успешно да описују феномене везане за индуковање вртложних струја у проводним срединама, конкретно у проводницима кавезног ротора. Такође, могу да послуже и за прорачун промене тренутне вредности отпорности роторских шипки у функцији клизања, што је у суштини еквивалентно са реконструисањем расподеле индукованих струја по дубини роторског жљеба. Вештим приступом се чак могу реконструисати режими врло слични онима који се имају у нормалном раду машине под оптерећењем, где је основни циљ таквог приступа покушај реконструисања расподеле магнетног поља

по попречном пресеку машине, како би се покушало квантификовање нелинеарности машине. Транзијентне анализе су описане са најмање детаља, пошто је основни циљ овог истраживања проналажење методе која може веродостојно да квантификује спектар статорских струја у разним условима рада, односно да се развије метода која у одређеној мери може да парира изузетно захтевним транзијентним симулацијама. Због тога је транзијентна анализа, поред експеримената, само послужила као један вид верификације развијених решења.

У трећем поглављу се приступило детаљном развоју предложеног динамичког модела, у којем је главна идеја била у начину прибављања, али и математичке интерпретације таласних облика индуктивности машине. За потребе развоја линеарног модела је довољно користити серију линеарних магнетостатичких симулација, које су најједноставније и најмање захтевне за нумеричку имплементацију. Ефектним коришћењем симетрије машине и математичким представљањем индуктивности у форми Фуријеових редова се са врло мало магнетостатичких симулација може реконструисати комплетна матрица индуктивности. Та се матрица практично може користити за квантификовање свих спектралних компоненти у статорским струјама, осим оних које су изазване појавом засићења. Искористићена су и постојећа решења за усредњено уважавање закошења роторских проводника, а представљена су и потпуно нова решења за уважавање сложеног феномена засићења и утицаја који он има на модулацију индуктивности машине. У четвртом поглављу је оригиналним поступцима доказано присуство одређених компоненти у спектру статорских струја, а које су последица постојања жљебова на ротору и последица појаве квара у роторским проводницима. Развијени динамички модел је на више карактеристичних примера упоређен са резултатима транзијентних симулација и резултатима експеримената, са врло добрим поклапањима. На крају поглавља је представљена и потпуно нова метода детекције прекида роторских проводника, заснована на методи противструјног кочења и спектралној анализи транзијентних сигнала у струји статора. Метода не изискује никакво оптерећивање машине, а додатна велика предност је што се квар може поуздано и рано детектовати помоћним извором напајања врло ниског напона и снаге од свега неколико вати.

Провером веродостојности одзива развијеног модела у више различитих ситуација које могу бити од интереса током рада кавезне асинхроне машине се у потпуности утврдило да модел има способност детаљног квантификовања својстава машине која се могу уочити у спектру статорских струја, те да је по томе готово равноправан са сложеним транзијентним симулацијама методе коначних елемената. Највећа предност модела је што је он драматично мање нумерички захтеван од транзијентних симулација методе коначних елемената и што приступом развоја у Фуријеов ред нуди могућности појединачног квантификовања утицаја на одређене појаве у спектру статорских струја, што није могуће урадити у транзијентним анализама методом коначних елемената.

Развијени динамички модел нуди бројне могућности за даља истраживања, међу којима се истичу развијање потпуно нових метода за рано и поуздано откривање унутрашњих кварова у кавезним асинхроним машинама, као што су ексцентритети ротора или међунавојни кратки спојеви у статорским намотајима. Такође, атрактивна је могућност проширивања примене развијеног модела и на

друге типове наизменичних машина. Ту се у првом реду мисли на клизноколутне асинхроне машине те трофазне синхроне машине са побудним намотајем и пригушним намотајем на ротору. Предложени модел се за случај анализе клизноколутних асинхроних машина може искористити за развијање нових метода детекције кварова у роторском колу, док се у примени на поменуте синхроне машине може искористити за развијање метода откривања кварова у побудном колу или у пригушном намотају, који се по правилу изводи као кавезни.

У последње време су све атрактивније вишефазне асинхроне машине, код којих рана детекција кварова добија јако много на важности, будући да због повећаног броја статорских намотаја ове машине нуде могућност повећане робусности, али уједно имају и повећан ризик од појаве унутрашњих кварова. Због специфичне изведбе статорских намотаја ових машина се могу очекивати потпуно другачији механизми успостављања кваром индукованих компоненти у спектру статорских струја, чиме се отварају бројне могућности за даља истраживања.

6. Коришћена литература

- [1] W. C. Duesterhoeft, M. W. Schulz, and E. Clarke, "Determination of Instantaneous Currents and Voltages by Means of Alpha, Beta, and Zero Components," *Trans. Am. Inst. Electr. Eng.*, vol. 70, no. 2, pp. 1248–1255, Jul. 1951.
- [2] P. Baldassari and N. A. Demerdash, "A combined finite element-state space modeling environment for induction motors in the ABC frame of reference: the blocked-rotor and sinusoidally energized load conditions," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 7, no. 4, pp. 710–720, Dec. 1992.
- [3] M. N. Uddin, W. Wang, and Z. R. Huang, "Modeling and Minimization of Speed Ripple of a Faulty Induction Motor with Broken Rotor Bars," in *IEEE Industry Applications Society Annual Meeting, 2008. IAS '08*, 2008, pp. 1–8.
- [4] C. A. M. Weber and F. W. Lee, "Harmonics Due to Slot Openings," *Am. Inst. Electr. Eng. Trans. Of*, vol. XLIII, pp. 687–694, Jan. 1924.
- [5] M. M. Liwischitz, "Field Harmonics in Induction Motors," *Am. Inst. Electr. Eng. Trans. Of*, vol. 61, no. 11, pp. 797–803, Nov. 1942.
- [6] M. Ishida and K. Iwata, "A New Slip Frequency Detector of an Induction Motor Utilizing Rotor Slot Harmonics," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. IA-20, no. 3, pp. 575–582, May 1984.
- [7] S. Nandi, "A detailed model of induction machines with saturation extendable for fault analysis," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 40, no. 5, pp. 1302–1309, Sep. 2004.
- [8] S. Choi, E. Pazouki, J. Baek, and H. R. Bahrami, "Iterative Condition Monitoring and Fault Diagnosis Scheme of Electric Motor for Harsh Industrial Application," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 62, no. 3, pp. 1760–1769, Mar. 2015.
- [9] K. N. Gyftakis and J. C. Kappatou, "The Zero-Sequence Current as a Generalized Diagnostic Mean in #x0394;-Connected Three-Phase Induction Motors," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 29, no. 1, pp. 138–148, Mar. 2014.
- [10] K. N. Gyftakis, J. Kappatou, K. N. Gyftakis, and J. Kappatou, "The Impact of the Rotor Slot Number on the Behaviour of the Induction Motor, The Impact of the Rotor Slot

-
- Number on the Behaviour of the Induction Motor,” *Adv. Power Electron. Adv. Power Electron.*, vol. 2013, 2013, p. e837010, Feb. 2013.
- [11] Z. Ling, L. Zhou, S. Guo, and Y. Zhang, “Equivalent Circuit Parameters Calculation of Induction Motor by Finite Element Analysis,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, no. 2, pp. 833–836, Feb. 2014.
- [12] M. Schwartz, *Principles of electrodynamics*. New York: McGraw-Hill, 1972.
- [13] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [14] S. J. Salon, “Introduction to Finite Elements,” in *Finite Element Analysis of Electrical Machines*, Springer US, 1995, pp. 1–16.
- [15] S. Nandi, S. Ahmed, and H. A. Toliyat, “Detection of rotor slot and other eccentricity related harmonics in a three phase induction motor with different rotor cages,” *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 16, no. 3, pp. 253–260, Sep. 2001.
- [16] S. Nandi, S. Ahmed, H. A. Toliyat, and R. Mohan Bharadwaj, “Selection criteria of induction machines for speed-sensorless drive applications,” *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 39, no. 3, pp. 704–712, May 2003.
- [17] S. Nandi, “A detailed model of induction machines with saturation extendable for fault analysis,” *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 40, no. 5, pp. 1302–1309, Sep. 2004.
- [18] A. Ceban, R. Pusca, and R. Romary, “Study of Rotor Faults in Induction Motors Using External Magnetic Field Analysis,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 59, no. 5, pp. 2082–2093, May 2012.
- [19] G. Bossio, C. De Angelo, J. Solsona, G. Garcia, and M. I. Valla, “A 2-D model of the induction machine: an extension of the modified winding function approach,” *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 19, no. 1, pp. 144–150, Mar. 2004.
- [20] M. Ojaghi and J. Faiz, “Extension to Multiple Coupled Circuit Modeling of Induction Machines to Include Variable Degrees of Saturation Effects,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, no. 11, pp. 4053–4056, Nov. 2008.
- [21] D. C. Patel and M. C. Chandorkar, “Modeling and Analysis of Stator Interturn Fault Location Effects on Induction Machines,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 61, no. 9, pp. 4552–4564, Sep. 2014.
- [22] K. Boughrara, N. Takorabet, R. Ibtouen, O. Touhami, and F. Dubas, “Analytical Analysis of Cage Rotor Induction Motors in Healthy, Defective, and Broken Bars Conditions,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 51, no. 2, pp. 1–17, Feb. 2015.
- [23] N. A. Al-Nuaim and H. A. Toliyat, “A novel method for modeling dynamic air-gap eccentricity in synchronous machines based on modified winding function theory,” *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 13, no. 2, pp. 156–162, Jun. 1998.
- [24] M. Babaei, J. Faiz, B. M. Ebrahimi, S. Amini, and J. Nazarzadeh, “A Detailed Analytical Model of a Salient-Pole Synchronous Generator Under Dynamic Eccentricity Fault,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 47, no. 4, pp. 764–771, Apr. 2011.
-

-
- [25] Dejan Jerkan and Darko Marčetić, "Advanced model of IM including rotor slot harmonics," *COMPEL - Int. J. Comput. Math. Electr. Electron. Eng.*, vol. 34, no. 1, pp. 261–278, Jan. 2015.
- [26] Q. Graham, "The M. M. F. Wave of Polyphase Windings With Special Reference to Sub-Synchronous Harmonics," *Am. Inst. Electr. Eng. Trans. Of*, vol. XLVI, pp. 19–29, Jan. 1927.
- [27] N. A. Al-Nuaim and H. A. Toliyat, "A novel method for modeling dynamic air-gap eccentricity in synchronous machines based on modified winding function theory," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 13, no. 2, pp. 156–162, Jun. 1998.
- [28] G. Joksimovic, J. Riger, T. Wolbank, N. Peric, M. Vasak, G. Stojvic, and V. Lesic, "Dynamic induction machine model accounting for stator and rotor slotting," in *2012 XXth International Conference on Electrical Machines (ICEM)*, 2012, pp. 207–212.
- [29] S. Nandi, "Slot permeance effects on rotor slot harmonics in induction machines," in *Electric Machines and Drives Conference, 2003. IEMDC'03. IEEE International*, 2003, vol. 3, pp. 1633–1639 vol.3.
- [30] A. Khezzar, M. Y. Kaikaa, M. El Kamel Oumaamar, M. Boucherma, and H. Razik, "On the Use of Slot Harmonics as a Potential Indicator of Rotor Bar Breakage in the Induction Machine," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 56, no. 11, pp. 4592–4605, Nov. 2009.
- [31] J. M. Gojko, D. D. Momir, and O. B. Aleksandar, "Skew and linear rise of MMF across slot modelling-winding function approach," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 14, no. 3, pp. 315–320, Sep. 1999.
- [32] M. Ojaghi and S. Nasiri, "Modeling Eccentric Squirrel-Cage Induction Motors With Slotting Effect and Saturable Teeth Reluctances," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 29, no. 3, pp. 619–627, Sep. 2014.
- [33] A. S. Abdel-Khalik, S. Ahmed, A. A. Elserougi, and A. M. Massoud, "A Voltage-Behind-Reactance Model of Five-Phase Induction Machines Considering the Effect of Magnetic Saturation," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 28, no. 3, pp. 576–592, Sep. 2013.
- [34] L. A. Pereira, C. C. Scharlau, L. F. A. Pereira, and S. Haffner, "Influence of Saturation on the Airgap Induction Waveform of Five-Phase Induction Machines," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 27, no. 1, pp. 29–41, Mar. 2012.
- [35] A. Ghoggal, S. E. Zouzou, H. Razik, M. Sahraoui, and A. Hadri-Hamida, "Application of the convolution theorem for the modeling of saturated induction motors," in *IECON 2010 - 36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, 2010, pp. 772–777.
- [36] J. O. Ojo, A. Consoli, and T. A. Lipo, "An improved model of saturated induction machines," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 26, no. 2, pp. 212–221, Mar. 1990.
- [37] D. Wu, S. D. Pekarek, and B. Fahimi, "A Voltage-Input-Based Field Reconstruction Technique for Efficient Modeling of the Fields and Forces Within Induction Machines," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 57, no. 3, pp. 994–1001, Mar. 2010.

-
- [38] J. C. Moreira and T. A. Lipo, "Modeling of saturated AC machines including air gap flux harmonic components," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 28, no. 2, pp. 343–349, Mar. 1992.
- [39] T. A. Lipo and A. Consoli, "Modeling and Simulation of Induction Motors with Saturable Leakage Reactances," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. IA-20, no. 1, pp. 180–189, Jan. 1984.
- [40] B. J. Deken and S. D. Pekarek, "Enhanced Field Reconstruction Method for the Efficient Analysis of Permanent Magnet Synchronous Machines," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 27, no. 3, pp. 661–669, Sep. 2012.
- [41] J. Faiz and M. Ojaghi, "Stator Inductance Fluctuation of Induction Motor as an Eccentricity Fault Index," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 47, no. 6, pp. 1775–1785, Jun. 2011.
- [42] Q. Graham, "The M. M. F. Wave of Polyphase Windings With Special Reference to Sub-Synchronous Harmonics," *Am. Inst. Electr. Eng. Trans. Of*, vol. XLVI, pp. 19–29, Jan. 1927.
- [43] M. Ojaghi and J. Faiz, "Extension to Multiple Coupled Circuit Modeling of Induction Machines to Include Variable Degrees of Saturation Effects," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, no. 11, pp. 4053–4056, Nov. 2008.
- [44] J. O. Ojo, A. Consoli, and T. A. Lipo, "An improved model of saturated induction machines," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 26, no. 2, pp. 212–221, Mar. 1990.
- [45] M. Pucci and C. Serporta, "Finite-Element Analysis of Rotor Slotting Saliency in Induction Motors for Sensorless Control," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 2, pp. 650–653, Feb. 2010.
- [46] G. C. Paap, "The analysis of 3-phase squirrel-cage induction motors including space harmonics and mutual slotting in transient and steady state," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 6, no. 1, pp. 69–75, Mar. 1991.
- [47] G. Petrovic, T. Kilic, and B. Terzic, "Sensorless speed detection of squirrel-cage induction machines using stator neutral point voltage harmonics," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 23, no. 3, pp. 931–939, Apr. 2009.
- [48] S. Williamson and Y. N. Feng, "Slot-Harmonic Fields in Closed-Slot Machines," in *Electric Machines Drives Conference, 2007. IEMDC '07. IEEE International, 2007*, vol. 1, pp. 482–488.
- [49] S. Nandi, "Slot permeance effects on rotor slot harmonics in induction machines," in *Electric Machines and Drives Conference, 2003. IEMDC'03. IEEE International, 2003*, vol. 3, pp. 1633–1639 vol.3.
- [50] G. M. Joksimović, J. Riger, T. M. Wolbank, N. Perić, and M. Vašak, "Stator-Current Spectrum Signature of Healthy Cage Rotor Induction Machines," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 60, no. 9, pp. 4025–4033, Sep. 2013.
- [51] P. Zhang, Y. Du, T. G. Habetler, and B. Lu, "A survey of condition monitoring and protection methods for medium voltage induction motors," in *2009 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition, 2009*, pp. 3165–3174.

-
- [52] A. Ceban, R. Pusca, and R. Romary, "Study of Rotor Faults in Induction Motors Using External Magnetic Field Analysis," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 59, no. 5, pp. 2082–2093, May 2012.
- [53] M. Riera-Guasp, M. F. Cabanas, J. A. Antonino-Daviu, M. Pineda-Sanchez, and C. H. R. Garcia, "Influence of Nonconsecutive Bar Breakages in Motor Current Signature Analysis for the Diagnosis of Rotor Faults in Induction Motors," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 25, no. 1, pp. 80–89, Mar. 2010.
- [54] X. Ying, "Characteristic Performance Analysis of Squirrel Cage Induction Motor With Broken Bars," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 2, pp. 759–766, Feb. 2009.
- [55] G. Y. Sizov, A. Sayed-Ahmed, C.-C. Yeh, and N. A. O. Demerdash, "Analysis and Diagnostics of Adjacent and Nonadjacent Broken-Rotor-Bar Faults in Squirrel-Cage Induction Machines," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 56, no. 11, pp. 4627–4641, Nov. 2009.
- [56] G. B. Kliman, R. A. Koegl, J. Stein, R. D. Endicott, and M. W. Madden, "Noninvasive detection of broken rotor bars in operating induction motors," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 3, no. 4, pp. 873–879, Dec. 1988.
- [57] R. H. Park and B. L. Robertson, "The Reactances of Synchronous Machines," *Trans. Am. Inst. Electr. Eng.*, vol. 47, no. 2, pp. 514–535, Apr. 1928.
- [58] S. Nandi, H. A. Toliyat, and X. Li, "Condition monitoring and fault diagnosis of electrical motors-a review," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 20, no. 4, pp. 719–729, Dec. 2005.
- [59] G. Didier, E. Ternisien, O. Caspary, and H. Razik, "A new approach to detect broken rotor bars in induction machines by current spectrum analysis," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 21, no. 2, pp. 1127–1142, Feb. 2007.
- [60] S. Shin, J. Kim, S. B. Lee, C. Lim, and E. J. Wiedenbrug, "Evaluation of the Influence of Rotor Magnetic Anisotropy on Condition Monitoring of Two-Pole Induction Motors," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 51, no. 4, pp. 2896–2904, Jul. 2015.
- [61] V. Climente-Alarcon, J. A. Antonino-Daviu, F. Vedreno-Santos, and R. Puche-Panadero, "Vibration Transient Detection of Broken Rotor Bars by PSH Sidebands," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 49, no. 6, pp. 2576–2582, Nov. 2013.
- [62] S. Choi, B. Akin, M. M. Rahimian, and H. A. Toliyat, "Implementation of a Fault-Diagnosis Algorithm for Induction Machines Based on Advanced Digital-Signal-Processing Techniques," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 58, no. 3, pp. 937–948, Mar. 2011.
- [63] S. B. Lee, D. Hyun, T. j Kang, C. Yang, S. Shin, H. Kim, S. Park, T. S. Kong, and H. D. Kim, "Identification of False Rotor Fault Indications Produced by Online MCSA for Medium-Voltage Induction Machines," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 52, no. 1, pp. 729–739, Jan. 2016.
- [64] X. Ying, "Characteristic Performance Analysis of Squirrel Cage Induction Motor With Broken Bars," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 2, pp. 759–766, Feb. 2009.

-
- [65] B. Xu, L. Sun, and H. Ren, "A New Criterion for the Quantification of Broken Rotor Bars in Induction Motors," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 25, no. 1, pp. 100–106, Mar. 2010.
- [66] G. G. Acosta, C. J. Verucchi, and E. R. Gelso, "A current monitoring system for diagnosing electrical failures in induction motors," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 20, no. 4, pp. 953–965, May 2006.
- [67] C. Concari, G. Franceschini, C. Tassoni, and A. Toscani, "Validation of a Faulted Rotor Induction Machine Model With an Insightful Geometrical Interpretation of Physical Quantities," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 60, no. 9, pp. 4074–4083, Sep. 2013.
- [68] A. Gandhi, T. Corrigan, and L. Parsa, "Recent Advances in Modeling and Online Detection of Stator Interturn Faults in Electrical Motors," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 58, no. 5, pp. 1564–1575, May 2011.
- [69] J. Milimonfared, H. M. Kelk, S. Nandi, A. D. Minassians, and H. A. Toliyat, "A novel approach for broken-rotor-bar detection in cage induction motors," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 35, no. 5, pp. 1000–1006, Sep. 1999.
- [70] B. Akin, S. Choi, U. Orguner, and H. A. Toliyat, "A Simple Real-Time Fault Signature Monitoring Tool for Motor-Drive-Embedded Fault Diagnosis Systems," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 58, no. 5, pp. 1990–2001, May 2011.
- [71] V. Climente-Alarcon, J. A. Antonino-Daviu, A. Haavisto, and A. Arkkio, "Diagnosis of Induction Motors Under Varying Speed Operation by Principal Slot Harmonic Tracking," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 51, no. 5, pp. 3591–3599, Sep. 2015.
- [72] B. Ayhan, H. J. Trussell, M. Y. Chow, and M. H. Song, "On the Use of a Lower Sampling Rate for Broken Rotor Bar Detection With DTFT and AR-Based Spectrum Methods," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 55, no. 3, pp. 1421–1434, Mar. 2008.
- [73] R. Puche-Panadero, M. Pineda-Sanchez, M. Riera-Guasp, J. Roger-Folch, E. Hurtado-Perez, and J. Perez-Cruz, "Improved Resolution of the MCSA Method Via Hilbert Transform, Enabling the Diagnosis of Rotor Asymmetries at Very Low Slip," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 24, no. 1, pp. 52–59, Mar. 2009.
- [74] A. Sapena-Baño, M. Pineda-Sanchez, R. Puche-Panadero, J. Martinez-Roman, and Ž. Kanović, "Low-Cost Diagnosis of Rotor Asymmetries in Induction Machines Working at a Very Low Slip Using the Reduced Envelope of the Stator Current," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 30, no. 4, pp. 1409–1419, Dec. 2015.
- [75] A. Yazidi, H. Henaou, G. A. Capolino, F. Betin, and F. Filippetti, "A Web-Based Remote Laboratory for Monitoring and Diagnosis of AC Electrical Machines," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 58, no. 10, pp. 4950–4959, Oct. 2011.
- [76] B. Xu, L. Sun, L. Xu, and G. Xu, "Improvement of the Hilbert Method via ESPRIT for Detecting Rotor Fault in Induction Motors at Low Slip," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 28, no. 1, pp. 225–233, Mar. 2013.

-
- [77] M. Riera-Guasp, J. A. Antonino-Daviu, J. Roger-Folch, and M. P. M. Palomares, "The Use of the Wavelet Approximation Signal as a Tool for the Diagnosis of Rotor Bar Failures," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 44, no. 3, pp. 716–726, May 2008.
- [78] A. Bouzida, O. Touhami, R. Ibtouen, A. Belouchrani, M. Fadel, and A. Rezzoug, "Fault Diagnosis in Industrial Induction Machines Through Discrete Wavelet Transform," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 58, no. 9, pp. 4385–4395, Sep. 2011.
- [79] H. Keskes and A. Braham, "Recursive Undecimated Wavelet Packet Transform and DAG SVM for Induction Motor Diagnosis," *IEEE Trans. Ind. Inform.*, vol. 11, no. 5, pp. 1059–1066, Oct. 2015.
- [80] P. Karvelis, G. Georgoulas, I. P. Tsoumas, J. A. Antonino-Daviu, V. Climente-Alarcon, and C. D. Stylios, "A Symbolic Representation Approach for the Diagnosis of Broken Rotor Bars in Induction Motors," *IEEE Trans. Ind. Inform.*, vol. 11, no. 5, pp. 1028–1037, Oct. 2015.
- [81] O. A. Mohammed, Z. Liu, S. Liu, and N. Y. Abed, "Internal Short Circuit Fault Diagnosis for PM Machines Using FE-Based Phase Variable Model and Wavelets Analysis," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 43, no. 4, pp. 1729–1732, Apr. 2007.