

Иницијални садржај  
М. Шарић

УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ			
ПРИМЉЕНО: 27.06.2016			
Орг. ј.д.	Број	ПРИЛОГ	ВРЕДНОСТ
05	660/3	-	-

**НАСТАВНО-НАУЧНОМ ВЕЋУ  
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКОГ ФАКУЛТЕТА У КРАГУЈЕВЦУ**

**ВЕЋУ ЗА ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ  
УНИВЕРЗИТЕТА У КРАГУЈЕВЦУ**

**ИЗВЕШТАЈ КОМИСИЈЕ О ОЦЕНИ УРАЂЕНЕ  
ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ**

На седници Већа за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу одржаној 15.06.2016. године, одлуком број IV-01-435/11, а на предлог Наставно-научног већа Природно-математичког факултета, одлука број 470/XIV-1 од 11.05.2016 одређени смо у Комисију за оцену и одбрану докторске дисертације под насловом

**Нумеричка апроксимација дводимензионалних параболичких проблема  
са делта функцијом**

кандидата Братислава Средојевића, дипломираног математичара.

На основу приложене документације, као и личног увида у рад кандидата, подносимо Наставно-научном већу следећи

**ИЗВЕШТАЈ**

Докторска дисертација **Нумеричка апроксимација дводимензионалних параболичких проблема са делта функцијом** написана је на 86 страна и садржи следеће делове:

- 1) Сажетак у коме је дат кратак приказ читаве докторске дисертације
- 2) Сажетак (*Summary*) докторске дисертације на енглеском језику
- 3) Садржај
- 4) Увод
- 5) Прва глава „Математички апарат“
- 6) Друга глава „Елементи теорије диференцијских схема“
- 7) Трећа глава „Конвергенција диференцијске схеме у дискретној  $\tilde{W}_2^{2,1}$  норми“
- 8) Четврта глава „Конвергенција диференцијске схеме у дискретној  $\tilde{W}_2^{1,1/2}$  норми“
- 9) Литература
- 10) Биографија кандидата
- 11) Прве стране научних радова у којима су објављени резултати из дисертације

Дисертација садржи 51 библиографску јединицу.



## 1. Преглед садржаја урађене дисертације

У уводу је изложена мотивација за израду дисертације, полазне основе истраживања, као и циљеви којима се тежило током истраживања. У теорији диференцијских схема које апроксимирају парцијалне диференцијалне једначине с генералисаним решењима један од основних проблема је проблем конвергенције. Дефинисане су оцене брзине конвергенције сагласне са глаткошћу улазних података и решења почетног проблема. Наведене су оцене у случају једначина с константним, променљивим, односно временски зависним коефицијентима.

Једна од интересантнијих класа почетно-граничних проблема су проблеми с концентрисаним капацитетом, тј. проблеми који садрже Диракову делта функцију као коефицијент уз извод по времену. Циљ дисертације је нумеричка апроксимација дводимензионалних проблема овог типа методом коначних разлика, пре свега испитивање конвергенције одговарајућих диференцијских схема.

Прва глава садржи основне појмове и тврђења потребне за разматрање парцијалних диференцијалних једначина с генералисаним решењима. Дефинисани су простори Собољева, анизотропни простори Собољева и наведене одговарајуће теореме потапања у овим просторима. Дата је лема Брамбл-Хилберта са генерализацијама, неопходна за оцењивање ограничених функционала у просторима Собољева. Дефинисани су мултипликатори у просторима Собољева и наведена основна тврђења. На крају прве главе разматран је апстрактан Кошијев проблем и доказане су одговарајуће априорне оцене.

У другој глави дати су елементи теорије диференцијских схема. Дефинисане су коначне разлике, диференцијске схеме и проблеми стабилности и конвергенције диференцијских схема. Дати су Стекловљеви оператори усредњења, неопходни за рад у случају када коефицијенти једначине нису непрекидне функције. Разматран је апстрактни оператор-диференцијски Кошијев проблем и доказане су одговарајуће априорне оцене.

У трећој глави је разматран дводимензионални параболички проблем с концентрисаним капацитетом и променљивим коефицијентима. Као моделни задатак и увод у истраживање, прво је разматрана једначина са мешовитим изводима и променљивим (али не и временски зависним) коефицијентима. Техником заснованом на леми Брамбл-Хилберта детаљно су доказане све оцене функционала. У поглављу 3.2 разматран је проблем са временски зависним коефицијентима. Уз претпоставке да су коефицијенти монотono опадајуће функције по временској променљивој и да припадају одговарајућем анизотропном простору Собољева, конструисана је диференцијска схема с усредњеном десном страном. Доказана је оцена брзине конвергенције диференцијске схеме у простору  $\tilde{W}_2^{2,1}(Q_{h\tau})$ . Добијена је оцена брзине конвергенције целобројног реда, сагласна са глаткошћу коефицијената и решења полазног проблема.

У четвртој глави је такође разматран дводимензионални параболички проблем с концентрисаним капацитетом и променљивим временски зависним коефицијентима, али уз претпоставку да коефицијенти припадају анизотропном простору Собољева мање глаткости него у претходном случају. Конструисана ја диференцијска схема с усредњеном десном страном и доказана је оцена брзине конвергенције у простору у



$\tilde{W}_2^{1,1/2}(Q_{h\tau})$ . Добијена је оцена брзине конвергенције целобројног реда, сагласна са глаткошћу коефицијената и решења полазног проблема.

## **2. Значај и допринос докторске дисертације са становишта актуелног стања у одређеној научној области**

Гранични проблеми за парцијалне диференцијалне једначине представљају математичке моделе најразноврснијих појава, као на пример провођења топлоте, механике флуида, процеса атомске физике итд. Само у ретким случајевима ови задаци се могу решити класичним методама математичке анализе, док се у свим осталим мора прибегавати приближним методама. Метод коначних разлика је један од најчешће примењиваних метода за нумеричко решавање граничних проблема за парцијалне диференцијалне једначине. У оквиру метода коначних разлика, један од главних проблема је доказивање конвергенције диференцијских схема које апроксимирају граничне проблеме. Од посебног интереса су оцене брзине конвергенције сагласне са глаткошћу коефицијената и решења почетног проблема.

Приликом нумеричке апроксимације почетно-граничних параболичких пробелма с генералисаним решењима јављају се и неки додатни проблеми: коефицијенти нису непрекидне функције, променљиви коефицијенти могу бити и временски зависни, коефицијенти и решење припадају одговарајућим нестандартним анизотропним просторима Собољева итд. Ова дисертација се управо бави тим проблемима.

У дисертацији је разматран дводимензионални почетно-гранични параболички проблем с концентрисаним капацитетом, тј проблем који садржи Диракову делта функцију као коефицијент уз извод по времену. Као мотивација за почетак истраживања, коришћени су познати резултати везани пре свега за једнодимензионални случај. Додатна потешкоћа у случају граничних проблема са Делта функцијом као коефицијентом, је да решења проблема не припадају стандардним просторима Собољева. У раду су доказане априорне оцене у одговарајућим нестандартним нормама. Уз претпоставку да коефицијенти припадају анизотропним просторима Собољева, конструисане су диференцијске схеме с усредњеном десном страном. Доказане су оцене брзине конвергенције у нестандартним дискретним анизотропним просторима Собољева. Добијене су оцене брзине конвергенције целобројног реда сагласне са глаткошћу коефицијената и решења почетног проблема.

## **3. Оцена да је урађена докторска дисертација резултат оригиналног научног рада кандидата у одговарајућој научној области**

Имајући у виду актуелно стање у области нумеричког решавања граничних проблема за парцијалне диференцијалне једначине с генералисаним решењима, можемо констатовати да докторска дисертација кандидата Братислава Средојевића садржи оригиналне научне резултате који нису били предмет ниједног до сада објављеног истраживања.



#### 4. Преглед остварених резултата кандидата у одређеној научној области

Кандидат Братислав Средојевић се бави научним радом у областима Нумеричке анализе и Парцијалних диференцијалних једначина. Активности током израде докторске дисертације реализовао је кроз следеће референце:

- D.R. Bojović, B.V. Sredojević, B.S. Jovanović, *Numerical approximation of a two-dimensional parabolic time-dependent problem containing a delta function*, J. Comp. Appl. Math. (2014), vol. 259, 129-137 [DOI 10.1016/j.cam.2013.04.012, ISSN 0377-0427, IF=1.365] (M 21)
- B.V. Sredojević, D.R. Bojović, *Finite difference approximation for parabolic interface problem with time-dependent coefficients*, Publ. Inst. Math. 99(113) (2016), 67-76, [DOI 10.2298/PIM1613067S, ISSN 0350-1302, IF=0.270] (M23)
- B.V. Sredojević, *Finite difference method for the 2D heat equation with concentrated capacity*, Krag. J. Math. (u pripremi)
- D.R. Bojovic, B.V. Sredojevic, *Numerical approximation of 2D parabolic interface problem with variable coefficients*, Methods of numerical and nonlinear analysis with applications, (2012), Beograd, Srbija, Abst. p. 7 (M64)
- D.R. Bojovic, B.V. Sredojevic, B.S. Jovanovic, *Numerical approximation of a 2D parabolic time-dependent problem with delta function*, International Congress on Computational and Applied mathematics ICCAM 2012, (2012), Gent, Belgija, Abst p. 15 (M34)

#### 5. Оцена о испуњености обима и квалитета у односу на пријављену тему

Приложена докторска дисертација у погледу обима и квалитета испуњава све захтеве који су постављени пријавом теме докторске дисертације. Циљеви докторске дисертације су испуњени и добијени су очекивани резултати.

#### 6. Научни резултати докторске дисертације

Разматран је дводимензионални параболички проблем с концентрисаним капацитетом и променљивим коефицијентима. Уз претпоставку да коефицијенти припадају одговарајућим анизотропном просторима Собољева, конструисана је диференцијска схема с усредњеном десном страном. Доказане су оцена брзине конвергенције диференцијске схеме у просторима  $\tilde{W}_2^{2,1}(Q_{h\tau})$  и  $\tilde{W}_2^{1,1/2}(Q_{h\tau})$ . Добијене су оцене брзине конвергенције целобројног реда, сагласне са глаткошћу коефицијената и решења полазног проблема.

#### 7. Применљивост и корисност резултата у теорији и пракси

Резултати добијени у овој дисертацији су применљиви у оним областима математике и других наука у којима се јавља потреба за приближним решавањем граничних проблема за парцијалне диференцијалне једначине с генералисаним решењима.

#### 8. Начин презентовања резултата научној јавности

Резултати су презентовани научној јавности кроз радове у међународним часописима и саопштењима на конференцијама, датих у оквиру тачке 4.

## ЗАКЉУЧАК И ПРЕДЛОГ

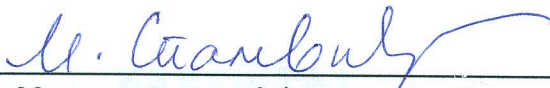
Из изложених података Комисија закључује:

- кандидат Братислав Средојевић испуњава све суштинске и формалне захтеве који се траже од кандидата за одбрану докторске дисертације;
- урађена докторска дисертација је значајна и са теоријског и са практичног становишта и представља битан научни допринос у области нумеричке анализе.

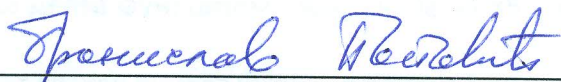
Комисија предлаже Наставно-научном већу Природно-математичког факултета у Крагујевцу и Већу за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу да позитивно оцени урађену докторску дисертацију кандидата **Братислава Средојевића**, под насловом „**Нумеричка апроксимација дводимезионалних параболичких проблема са делта функцијом**“ и одобри њену одбрану.

Крагујевац,  
20. 06. 2016.

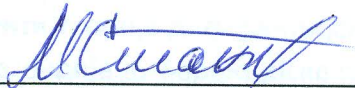
### ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ



**др Миодраг Спалевић** (председник Комисије)  
редовни професор Машинског факултета у Београду  
научна област: Математика и рачунарство



**др Бранислав Поповић**,  
ванредни професор ПМФ-а у Крагујевцу  
ужа научна област: Методика, историја и филозофија  
математике



**др Марија Станић**,  
ванредни професор ПМФ-а у Крагујевцу  
ужа научна област: Математичка анализа са применама