



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU



Tanja Krunić

**NUMERIČKE PROCEDURE U
DEFINISANJU PRAVILNIH REŠENJA
ZAKONA ODRŽANJA**

- doktorska disertacija -

Novi Sad, 2016.

Predgovor

Problemi u raznim naučnim disciplinama, kao na primer u fizici, mehanici fluida i gasnoj dinamici se opisuju hiperboličnim zakonima održanja sa prekidnom funkcijom fluksa. Pošto hiperbolični zakoni održanja ovih naučnih disciplina opisuju probleme koji imaju široku primenu u praksi, jasno je da određivanje njihovih pravilnih rešenja doprinosi razvoju nauke i tehnologije.

U okviru ove teze ćemo posmatrati Rimanov problem skalarne jednačine zakona održanja sa dva fluksa

$$u_t + (F(x, u))_x = 0, \quad (1)$$

gde je

$$F = (H(x)g(u) + (1 - H(x))h(u)), \quad (2)$$

g i h su funkcije sa najviše jednim ekstremom na posmatranom intervalu, a $H(x)$ Hevisajdova funkcija, tj.

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases},$$

uz početni uslov

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ u_r, & x > 0 \end{cases}.$$

Jednačinu (1), (2) su analizirali mnogi naučnici pod pretpostavkom da su oba fluksa g i h konveksnog ili konkavnog tipa (tj. oba fluksa imaju na

posmatranom intervalu samo po jedan ekstrem istog tipa, minimum ili maksimum) i da se seku u najviše jednoj tački unutar intervala. Generalno, parovi realnih brojeva (A, B) koji zadovoljavaju Rankine – Hugoniotov uslov skoka u $x = 0$, tj. $h(A) = g(B)$ i koji imaju osobinu da je $h'(A) \leq 0$, $g'(B) \geq 0$ se koriste za konstrukciju rešenja ovog problema. Parovi (A, B) koji zadovoljavaju navedene osobine se u [1, 57] nazivaju “koneksijama” (engl. *connections*). Rešenje jednačine (1), (2) se tada sastoji od stacionarnog udarnog talasa u $x = 0$ određenog koneksijom, levog (koji povezuje konstante u_l i A) i desnog (koji povezuje B i u_r) putujućeg udarnog ili razređujućeg talasa.

Međutim, koneksija ima beskonačno mnogo, a razni autori se ne slažu oko toga koje koneksije daju entropijski (pravilni) stacionarni udarni talas. Drugim rečima, prema [15, 57], postoje različite teorije entropije koje su razvijane različitim pristupima i u kontekstima različitih fizičkih modela. Tako npr. u [3], autori koriste specifičan “unutrašnji” (engl. *interface*) uslov entropije koji se zasniva na izbegavanju podkompresibilnih (engl. *undercompressive*) stacionarnih udarnih talasa ($h'(A) < 0$, $g'(B) > 0$). U smislu koneksija, ovo znači da je kod pravilnih rešenja, ili $h'(A) = 0$ ili $g'(B) = 0$. Ovakvi talasi se nazivaju marginalno podkompresibilni (engl. *marginally undercompressive*) talasi i predstavljaju fizički relevantne talase za model dvofaznog protoka u heterogenoj poroznoj sredini, (više detalja se može naći u [57]). Pored toga, ovi autori su razvili algoritam baziran na postupku Godunova za konstrukciju navedenih entropijskih rešenja. U [1], ova je teorija proširena drugačijim unutrašnjim uslovom entropije koji se zasniva na znaku tzv. unutrašnje entropijske funkcionele (koja se definiše za koneksije), i konstruisana su jedinstvena entropijska rešenja za svaku koneksiju. Pošto koneksija ima beskonačno mnogo, autori ovog rada su definisali i tzv. “optimalnu koneksiju” (engl. *optimal connection*) kada se u zavisnosti od međusobnog položaja flukseva, A ili B poklapa sa argumentom jednog od ekstrema $h(u)$ ili $g(u)$. Slični koncept rešenja za numerički postupak Engquist-Osher, gde se za svaku koneksiju (A, B) dobija jedinstveno entropijsko rešenje se može naći u [14].

S druge strane, autori rada [17] su analizirali model prečišćavanja

fluida koji predstavlja kombinaciju jednačina sa dva fluksa i tri prekida. Pokazali su da fluks ovog modela zadovoljava tzv. uslov preseka (engl. *crossing condition*, ako se fluksevi g i h seku u $u_* \in I$, tada sa leve (desne) strane tačke u_* grafik fluksa h leži iznad (ispod) grafika fluksa g), i razvili su teoriju entropije zasnovanu na modifikovanom uslovu Kružkova. Pokazano je da se rešenja koja se smatraju entropijskim po ovoj teoriji poklapaju sa rešenjima koja se mogu dobiti metodom iščezavajuće viskoznosti (engl. *vanishing viscosity*) za ovaj problem. U slučaju kada se fluksevi g i h seku u u_* , dobili su jedinstveno entropijsko rešenje koje se sastoji od konstantnog stacionarnog udarnog talasa određenog koneksijom (u_*, u_*) . Uslov preseka je zadovoljen u nekim slučajevima regularnog preseka fluksa (detalji o vrstama preseka flukseva se mogu naći u glavi 4) i u slučaju podkompresibilnog preseka flukseva. Stoga, u slučaju podkompresibilnog preseka flukseva imamo podkompresibilan stacionarni udarni talas. Ovo je u suprotnosti sa teorijom izbegavanja podkompresibilnih stacionarnih udarnih talasa u $x = 0$ koja je razvijena u [3] na osnovu rezultata rada [37], gde se koristi metod iščezavajuće viskoznosti dodavanjem nestandardnog (različitog od εu_{xx} , $\varepsilon \rightarrow 0$) viskoznog člana sa desne strane jednakosti zakona održanja sa neprekidnim fluksom, što odgovara modelu dvofaznog protoka u heterogenoj poroznoj sredini. S druge strane, entropijska teorija u [17] za model prečišćavanja fluida se zasniva na standardnoj proceduri iščezavajuće viskoznosti (tj. dodaje se viskozni član oblika εu_{xx} , $\varepsilon \rightarrow 0$).

U ovoj tezi ćemo problem jednačine sa dva fluksa rešavati uvođenjem neprekidne aproksimacije $F_\varepsilon(x, u)$ fluksa $F(x, u)$ (tj. izvršićemo regularizaciju fluksa) i tražiti diskretni profil udarnog talasa (engl. *discrete shock profile*, ili skraćeno, DSP) za originalni postupak Godunova za probleme sa prostorno promenljivim fluksom za dobijenu perturbovanu jednačinu. Ukratko, DSP predstavlja tačno rešenje numeričke aproksimacije zakona održanja. Definišaćemo i odgovarajući diskretni uslov entropije. Pri tome ćemo postojanje entropijskog DSP-a postaviti kao kriterijum za dopustivost udarnih talasa. Prilikom definisanja regularizacije fluksa, nećemo uzimati u obzir ni jedan konkretan fizički model, već ćemo postavljati isključivo uslove koji su pogodni sa matematičkog

gledišta. Drugim rečima, i dobijeni diskretni uslov entropije će biti nezavisan od fizičkog modela. Pokazaće se da će entropijski DSP-ovi za regularizaciju koju ćemo definisati biti jedinstveni, te da stoga neće biti obuhvaćena rešenja za sve fizičke modele. Međutim, (slično kao kod gore pomenute viskozne regularizacije u [37] i [17]), pokazaćemo da neka od tih rešenja možemo dobiti relaksacijom uslova za regularizaciju.

U [58] je analiziran i slučaj kada je jedan od flukseva g ili h konveksnog tipa, a drugi konkavnog, pri čemu se fluksevi seku na krajevima posmatranog intervala. U tom radu je pokazano da se primenom entropijske teorije, koju je grupa autora razvila u [1], dobijaju rešenja u čijem sastavu se pojavljuju podkompresibilni stacionarni udarni talasi. U okviru ove teze ćemo pokazati da se naša teorija entropije može primeniti i u ovom slučaju, ukoliko uopštimo diskretni uslov entropije koji smo razvili u slučaju kada su oba fluksa istog tipa konveksnosti.

U [5], je analiziran i slučaj kada grafik jednog fluksa g ili h na posmatranom intervalu leži iznad grafika drugog fluksa, te zbog nemogućnosti zadovoljenja Rankine-Hugoniotovog uslova skoka u $x = 0$ nema klasičnog rešenja. Autor ovog rada je definisao tzv. slabi Rankine-Hugoniotov uslov kao i odgovarajuća generalizovana entropijska rešenja (engl. *generalized entropy solutions*, ili skraćeno GES), koja u okolini $x = 0$ uglavnom imaju oblik početnog uslova. U okviru ove teze, analiziraćemo i ovaj slučaj i dokazati postojanje rešenja u obliku singularnih udarnih talasa. Pri tome ćemo singularne udarne talase reprezentovati pomoću tzv. "talasa senki" (engl. *shadow waves*), tj. mreža deo po deo konstantnih funkcija.

Prvi deo ove doktorske teze obuhvata teorijske osnove kao i pregled važećih stavova iz literature. U prvoj glavi se može naći pregled osnovnih pojmova, definicija i teorema koje se koriste u daljem radu. Hiperbolični sistemi zakona održanja i njihova slaba rešenja su detaljno opisani u drugoj glavi. Takođe su opisani i konzervativni numerički postupci za rešavanje nelinearnih problema. Detaljno je opisan postupak Godunova. U trećoj glavi su predstavljani diskretni udarni profili i njihove opšte osobine. U četvrtoj glavi su opisani zakoni održanja sa prekidnom funkcijom

fluksa. Detaljno su opisane teorije dopustivosti rešenja po [39] i [57].

Drugi deo teze je posvećen novim rezultatima istraživanja. Drugim rečima, ovo je originalni deo teze. U okviru ovog dela, u petoj glavi se bavimo problemom pronalaženja dopustivog DSP-a za jednačinu sa dva fluksa, kako u slučaju kada su fluksevi istog, tako i kada su fluksevi različitog tipa konveksnosti. U ovom delu je dato i nekoliko numeričkih primera koji su dobijeni razvijanjem programa u programskom paketu *Mathematica*, a koji se zasniva na primeni prethodno izložene teorije. U šestoj glavi je izložena analiza egistencije singularnih rešenja u slučajevima kada ne postoje rešenja koja se sastoje od klasičnih udarnih i razređujućih talasa, kao i njihova numerička verifikacija.



Veliku zahvalnost dugujem dr Marku Nedeljkovu, redovnom profesoru Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu, na dugogodišnjoj saradnji, posebnom interesovanju, idejama i nesebičnoj pomoći u toku izrade ove doktorske teze.

Posebno se zahvaljujem dr Nataši Krejić, redovnom profesoru Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu, na podršci i velikoj pomoći u mom dosadašnjem radu.

Zahvaljujem se i dr Srboljubu Simiću, redovnom profesoru Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu, na korisnim sugestijama koje su doprinele poboljšanju konačne verzije ove teze.

Takođe se zahvaljujem porodici i prijateljima na podršci za vreme izrade ove disertacije.

Sadržaj

I	Teorijske osnove	5
1	Uvodni deo	7
1.1	Oznake	7
1.2	Osnovni pojmovi, definicije i teoreme	8
2	Zakoni održanja	15
2.1	Hiperbolični sistemi zakona održanja	15
2.2	Skalarni zakon održanja	17
2.2.1	Linearna jednačina zakona održanja	17
2.2.2	Nelinearna jednačina zakona održanja	18
2.2.3	Numeričko rešavanje nelinearnih skalarnih jednačina zakona održanja	26
2.3	Sistemi zakona održanja	40
2.3.1	Linearni hiperbolični sistemi	40
2.3.2	Nelinearni sistemi	42
2.3.3	Numeričko rešavanje sistema zakona održanja	44
2.4	Prostorno promenljivi fluksevi	47
2.4.1	Numeričko rešavanje problema zakona održanja sa prostorno promenljivim fluksom	48
2.4.2	Uslov entropije	49

3	Profili udarnih talasa	53
3.1	Diskretni profili udarnih talasa	53
3.2	Viskozni profili	56
3.3	Egzistencija DSP–a numeričkih postupaka	57
4	Zakoni održanja sa prekidnim fluksom	59
4.1	Egzistencija rešenja	60
4.2	Jedinstvenost rešenja	61
4.2.1	Teorija entropije prema Adimurthiju, Gowdi i Mis- hri	62
4.2.2	Teorija entropije po Karlsenu, Risebrou i Towersu	70
4.3	Neklasična rešenja jednačine sa dva fluksa	72
II	Rezultati istraživanja	75
5	Numeričke procedure za dopustive DSP	77
5.1	Slučaj sa fluksevima konveksnog tipa	78
5.1.1	Uvodne oznake i pretpostavke	79
5.1.2	Rimanov problem	80
5.1.3	Egzistencija entropijskih DSP–a za zakon održa- nja sa dva fluksa	82
5.1.4	DSP za multiplikativnu jednačinu	103
5.1.5	Proširenja i poređenja sa rezultatima dobijenim pomoću drugih teorija entropije	105
5.1.6	Numerički primeri	109
5.2	Konveksno – konkavni slučaj	119
5.2.1	Uvodne oznake i pretpostavke	120
5.2.2	Rimanov problem	123
5.2.3	Egzistencija DSP–ova za jednačinu sa dva fluksa u konveksno – konkavnom slučaju	125
5.2.4	Diskretni uslov entropije	130
5.2.5	Numerički primeri	138
6	Egzistencija singularnih rešenja	145

6.1	Jednačine sa RH–deficitom	146
6.2	Uvodne oznake, definicije i pretpostavke	149
6.3	Nadkompresibilni slučaj	152
6.4	Rešenja opšteg Rimanovog problema	159
6.5	Diskusije i proširenja	161
6.6	Numerička verifikacija	164
	Zaključak	169
	Indeks pojmova	171
	Bibliografija	173

I | Teorijske osnove

Uvodni deo

1.1 Oznake

\mathbb{C} - skup kompleksnih brojeva

\mathbb{R} - skup realnih brojeva

\mathbb{R}^+ - skup nenegativnih realnih brojeva

\mathbb{R}^m - vektorski prostor uređenih m -torki nad poljem realnih brojeva

$C^k(D)$ - prostor k puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na skupu D

C_0^1 - prostor neprekidno diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim nosačem

$L_1 = \{v(x) : \|v\|_1 < \infty\}$

$Supp(\varphi)$ - nosač funkcije φ

$u_x(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)$

$u_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)$

Δ - Laplasov operator

Npr. za $u = u(x,t)$, $\Delta u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$

$A = [a_{ij}]$ - matrica formata $m \times n$ sa elementima a_{ij}

A^{-1} - inverzna matrica matrice A

$x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ - vektor kolona sa komponentama x_i

$\det(A)$ - determinanta matrice A

E - jedinična matrica

$\text{diag}(a_1, \dots, a_m)$ - dijagonalna matrica formata $m \times m$ sa elementima a_1, \dots, a_m

$[r_1 \mid r_2 \mid \dots \mid r_m]$ - matrica formata $m \times m$ u čijim kolanama se nalaze karakteristični vektori neke matrice

$a \approx b$ - a približno jednako b

$a \ll b$ - a je mnogo manje od b

$\|x\|$ - proizvoljna vektorska norma

$\|x\|_p$ - vektorska p -norma, $1 \leq p \leq \infty$

$\{x^k\}$ - niz brojeva, odnosno vektora

O -simbol Landaua

$$f(x) = O(g(x)) \text{ za } x \rightarrow a \Leftrightarrow |f(x)| \leq M|g(x)|, \text{ za } x \rightarrow a.$$

□ - kraj dokaza.

1.2 Osnovni pojmovi, definicije i teoreme

Definicija 1.2.1 Neka je data matrica $A \in \mathbb{R}^{m,m}$. Broj $\lambda \in \mathbb{C}$ se naziva **karakteristični koren** matrice A ako jednačina

$$Ax = \lambda x$$

ima nenula rešenje x koje se naziva **karakteristični vektor** matrice A .

Karakteristični koreni su rešenja jednačine $\det(\lambda E - A) = 0$.

Definicija 1.2.2 Preslikavanje $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ koje zadovoljava

1. $\|x\| \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^m$; $\|x\| = 0$ samo ako je $x = 0$;

2. $\alpha \|x\| = |\alpha| \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^m$

se naziva vektorska norma.

Najčešće se koriste p -norme,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

za $p = 1, 2$ i u graničnom slučaju $p = \infty$,

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^m |x_i|, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}, \\ \|x\|_{\infty} &= \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|. \end{aligned}$$

Definicija 1.2.3 Preslikavanje $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je Freše diferencijabilno u tački $x \in D$ ako postoji linearno preslikavanje $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ takvo da je

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\|F(x + \Delta x) - F(x)\|}{\|\Delta x\|} = 0.$$

Linearni operator A se označava sa $F'(x)$ i naziva izvod preslikavanja F u tački x , a njegova matična reprezentacija je data matricom Jakobijana

$$F'(x) = \mathcal{J}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}.$$

Definicija 1.2.4 Funkcija $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je Lipšicova u tački x^* , ako postoji konstanta $K \geq 0$, tako da važi

$$|f(x) - f(x^*)| \leq K|x - x^*|$$

za svako x , $|x - x^*|$ dovoljno malo. Funkcija f je Lipšic neprekidna ako je Lipšicova u svakoj tački.

Definicija 1.2.5 Uniju otvorenih skupova O_i , $i \in I$, takvu da važi

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{i \in I} O_i$$

nazivamo otvorenim prepokrićem skupa \mathcal{K} .

Definicija 1.2.6 Skup \mathcal{K} je kompaktan ako svaki otvoreni prepokrić $\bigcup_{i \in I} O_i$ skupa \mathcal{K} postoje $O_{i_1}, O_{i_2}, \dots, O_{i_n} \in \bigcup_{i \in I} O_i$ tako da važi

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{k=1}^n O_{i_k} \subset \bigcup_{i \in I} O_i.$$

Teorema 1.2.1 U konačno dimenzionalnom normiranom linearnom prostoru, svaki zatvoren i ograničen skup je kompaktan.

Teorema 1.2.2 Neka je \mathcal{K} kompaktan skup u nekom normiranom prostoru. Tada svaki niz elemenata skupa \mathcal{K} sadrži konvergentan podniz čija je granica takođe element skupa \mathcal{K} .

Definicija 1.2.7 Funkcija $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ ima kompaktan nosač ako važi

$$\varphi(x, t) \equiv 0 \quad \text{za sve } (x, t) \notin K,$$

gde je K kompaktni podskup skupa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Kompaktni nosač iz prethodne definicije označavamo sa $\text{Supp}(\varphi)$.

Definicija 1.2.8 Neka je Ω otvoren skup u \mathbb{R}^n . Označimo sa $\mathcal{D}(\Omega)$ vektorski prostor svih funkcija iz skupa $C^\infty(\Omega)$ sa kompaktnim nosačem. Kažemo da niz funkcija $\{f_n\}$ u $\mathcal{D}(\Omega)$ "teži ka nula", u oznaci " $\{f_n\} \rightarrow 0$ " ako i samo ako važi

1. Nosači funkcija f_n su sadržani u nekom kompaktnom podskupu skupa Ω

2. Za svaki parcijalni izvod D važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} |Df_n(x)| = 0.$$

Definicija 1.2.9 Linearnu transformaciju $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ takvu da

$$T(f_n) \rightarrow 0 \quad \text{u } \mathbb{C} \quad \text{kad } \{f_n\} \rightarrow 0$$

nazivamo **distribucijom** na Ω .

Sa $\mathcal{D}'(\Omega)$ označavamo prostor svih distribucija na Ω .

Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lokalno integrabilna funkcija. Tada se odgovarajuća distribucija može definisati sa

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx \quad \text{za } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (1.1)$$

Primer 1.2.1 Dirakova delta funkcija na \mathbb{R} koju definišemo sa

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases},$$

tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1,$$

je distribucija. Možemo je posmatrati i kao graničnu vrednost funkcije δ^ε , $\varepsilon \rightarrow 0$, gde je

$$\text{supp} \delta^\varepsilon \subset [-\eta(\varepsilon), \eta(\varepsilon)],$$

pri čemu $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$ kad $\varepsilon \rightarrow 0$, i

$$\int \delta^\varepsilon(x) dx = 1.$$

Iz (1.1) imamo da je

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Proizvod funkcije $\alpha \in C^\infty(\Omega)$ i distribucije $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se definiše kao $\alpha.T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, gde je

$$(\alpha.T)(\varphi) = T(\alpha\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Izvodi distribucija su dati relacijom

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f' \varphi dx = f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f \varphi' dx = -\langle f, \varphi' \rangle,$$

pri čemu smo koristili činjenicu da test funkcija φ ima kompaktan nosač.

Neka je $H(x)$ dato sa

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}. \quad (1.2)$$

Funkciju H definisanu sa (1.2) nazivamo Hevisajdova step funkcija.

Primer 1.2.2 Izvod Hevisajdove funkcije dobijamo iz

$$\langle H', \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)dx = -\varphi(\infty) + \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Drugim rečima,

$$H' = \delta.$$

Slično, parcijalni izvodi distribucija se definišu na sledeći način: Ako je $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\frac{\partial T}{\partial x_i} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribucija data sa

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Teorema 1.2.3 Neka je data funkcija $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$, $u \in C^2([a, b] \times [c, d])$. Ako je $x, x + \Delta x, x - \Delta x \in [a, b]$ i $t \in [c, d]$, tada važi

$$\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) (\eta_1), \quad (1.3)$$

$$\frac{u(x, t) - u(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) (\eta_2) \quad (1.4)$$

gde su $0 < \eta_1, \eta_2 < \Delta x$.

Definicija 1.2.10 Količnike (1.3) i (1.4) iz prethodne teoreme nazivamo **diferencnim količnicima**. Pri tome količnik (1.3) nazivamo **diferencnim količnikom unapred**, a (1.4) **diferencnim količnikom unazad**.

Definicija 1.2.11 Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, pri čemu je $a, b \in \mathbb{R}$ i f ograničena na $[a, b]$. Neka je data podela intervala $[a, b]$ na n podintervala tačkama

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Tada sumu

$$L_n(f; a, b) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) (x_i - x_{i-1})$$

nazivamo **levom Rimanovom sumom**, a sumu

$$D_n(f; a, b) = \sum_{i=1}^n f(x_i) (x_i - x_{i-1})$$

desnom Rimanovom sumom.

Teorema 1.2.4 Neka je $f \in C^1[a, b]$. Neka je $M = \max \{f'(x) : x \in [a, b]\}$.

Tada važi

$$\left| \int_a^b f(x) dx - L_n(f; a, b) \right| \leq \frac{M}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2$$

i

$$\left| \int_a^b f(x) dx - D_n(f; a, b) \right| \leq \frac{M}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2.$$

Neka su $\{f_n\}$ i $\{g_n\}$ dva niza. Tada važi

$$\sum_{k=m}^n f_k (g_{k+1} - g_k) = (f_{n+1}g_{n+1} - f_m g_m) - \sum_{k=m}^n g_{k+1} (f_{k+1} - f_k).$$

Gore navedenu formulu nazivamo formulom parcijalnog sumiranja. Ova formula u stvari predstavlja diskretni analogon formule parcijalne integracije

$$\int f dg = fg - \int gdf.$$

Zakoni održanja

2.1 Hiperbolični sistemi zakona održanja

Jednodimenzionalni sistemi zakona održanja su sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina oblika:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}f(u(x,t)) = 0, \quad (2.1)$$

gde je $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ i $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definicija 2.1.1 *Sistem (2.1) uz početni uslov*

$$u(x,0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty, t \geq 0$$

nazivamo Košijev problem.

Definicija 2.1.2 *Ako je Jakobijan sistema zakona održanja $f'(u)$ regularna matrica sa realnim karakterističnim korenima, tada je sistem **hiperboličan**. Ako su uz to karakteristični koreni međusobno različiti, tada je sistem **strogo hiperboličan**.*

Zakon održanja možemo zapisati i u integralnom obliku:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x,t) dx = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t)). \quad (2.2)$$

Ovaj izraz zapravo izražava konzervaciju veličine označene sa u u smislu da je brzina promene u iznosu veličine u od satnja x_1 do x_2 data razlikom vrednosti funkcije $f(u)$ u tim tačkama. Stoga se, sasvim prirodno, funkcija $f(u)$ naziva **funkcijom fluksa** problema (2.2).

Integracijom po vremenu dobijamo:

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,t_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} u(x,t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} f(u(x_1,t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} f(u(x_2,t)) dt.$$

Da bismo iz integralnog dobili diferencijalni oblik zakona održanja, moramo pretpostaviti diferencijabilnost funkcija $u(x,t)$ i $f(u(x,t))$. Tada je

$$u(x,t_2) - u(x,t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) dt$$

i

$$f(u(x_2,t)) - f(u(x_1,t)) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} f(u(x,t)) dx$$

pa je na osnovu (2.2)

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(x,t)) \right\} dx dt = 0. \quad (2.3)$$

Pošto (2.3) važi na proizvoljnim intervalima $[x_1, x_2]$ i $[t_1, t_2]$, možemo zaključiti da podintegralna funkcija mora biti jednaka nuli, tj.

$$u_t + f(u)_x = 0.$$

Dakle, uz dodatnu pretpostavku o diferencijabilnosti funkcija u i $f(u)$, možemo zaključiti da su diferencijalni i integralni oblik zakona održanja ekvivalentni.

2.2 Skalarni zakon održanja

Rešenja hiperboličnih zakona održanja se pojavljuju u obliku talasa. Ne postoji precizna definicija talasa, ali ga možemo opisati intuitivno kao signal koji se prenosi sa jednog mesta u sredini do drugog, prepoznatljivom brzinom. Pri tome signal može biti bilo koji poremećaj, kao što su maksimum ili promena neke veličine.

2.2.1 Linearna jednačina zakona održanja

Posmatrajmo najpre Košijev problem za skalarni zakon održanja sa linearnom funkcijom fluksa:

$$\begin{aligned}u_t + au_x &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x),\end{aligned}\tag{2.4}$$

gde je $a \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$.

Lako se može proveriti da je rešenje datog problema funkcija

$$u(x, t) = u_0(x - at).\tag{2.5}$$

Krive oblika $x - at = x_0$ nazivamo karakteristikama skalarne jednačine održanja. Karakteristične krive zadovoljavaju diferencijalne jednačine:

$$x'(t) = a, \quad x(0) = x_0.$$

Ako $u(x, t)$ diferenciramo duž karakteristike, dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(x(t), t) &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t)x'(t) \\ &= u_t + au_x = 0.\end{aligned}$$

Oдавde vidimo da je rešenje problema (2.4) konstantno duž karakteristika, tj. da postojanje singulariteta funkcije $u_0(x)$ u nekoj tački x_0 , povlači postojanje singulariteta u rešenju duž karakteristike $x - at = x_0$, dok će duž ostalih karakteristika funkcija rešenja biti glatka. Kao što vidimo, kod linearnih hiperboličnih jednačina se singulariteti prenose samo duž karakteristika.

2.2.2 Nelinearna jednačina zakona održanja

Posmatrajmo sada nelinearnu skalarnu jednačinu zakona održanja

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (2.6)$$

pri čemu je $f(u)$ nelinearna funkcija od u . Pretpostavićemo da je f konveksna funkcija, tj. $f''(u) > 0 \forall u$ (ili, ekvivalentno tome, da je konkavna, tj. $f''(u) < 0, \forall u$).

Uzmimo, na primer da je u (2.6)

$$f(u) = \frac{1}{2}u^2,$$

gde je u diferencijabilno. Tada dobijamo jednačinu

$$u_t + uu_x = 0. \quad (2.7)$$

Jednačina (2.7) je poznata kao Burgerova jednačina i prema [47] predstavlja dobar model nelinearne jednačine skalarnog zakona održanja sa konveksnim fluksom. Stoga ćemo uvid u problematiku rešenja nelinearnih jednačina steći analiziranjem Burgerove jednačine.

Posmatraćemo najpre jednačinu (2.7) sa glatkim početnim uslovom. Karakteristike ove jednačine zadovoljavaju

$$x'(t) = u(x(t), t). \quad (2.8)$$

S obzirom da važi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t), t) &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t)x'(t) \\ &= u_t + uu_x = 0, \end{aligned}$$

vidimo da je u konstantno duž karakteristika. Na osnovu toga iz (2.8) možemo zaključiti da je $x'(t)$ konstantno pa su karakteristike prave linije određene početnim uslovom. Za t dovoljno malo tako da se karakteristike međusobno ne seku, možemo konstruisati rešenje koje prati karakteristike. Za svako (x, t) treba rešiti jednačinu

$$x = \xi + u(\xi, 0)t \quad (2.9)$$

po ξ , što nam daje rešenje jednačine (2.7) u obliku

$$u(x, t) = u(\xi, 0).$$

Međutim, za veće vrednosti t , jednačina (2.9) ne mora imati jedinstveno rešenje, što se dešava u slučaju da se karakteristike seku. A to se prema [47] može desiti ako je $u_x(x, 0) < 0$ u nekoj tački. U trenutku kada se karakteristike preseku, funkcija $u(x, t)$ dobija beskonačni nagib, talas se lomi i formira skok, nakon čega više nema klasičnih rešenja. Iz tog razloga se uvodi pojam **slabih rešenja** zakona održanja.

Osnovna ideja pri definisanju rešenja sistema zakona održanja (2.1) koje ne zahteva diferencijabilnost funkcija u i $f(u)$ se sastoji u premeštanju parcijalnih izvoda sa ovih funkcija na neku drugu, glatku funkciju. Neka je $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Ako pomnožimo sistem (2.1) funkcijom $\varphi(x, t)$ i integralimo nad intervalom $[0, \infty] \times [-\infty, \infty]$ dobijamo

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\varphi u_t + \varphi f(u)_x] dx dt = 0.$$

Nakon parcijalne integracije, imajući u vidu da funkcija φ ima kompaktn nosač, dobijamo

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\varphi_t u + \varphi_x f(u)] dx dt = - \int_{-\infty}^\infty \varphi(x, 0) u(x, 0) dx. \quad (2.10)$$

Definicija 2.2.1 Funkciju $u(x, t)$ nazivamo slabim rešenjem zakona održanja ako (2.10) važi za sve funkcije $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Napomena 2.2.1 Funkciju φ iz prethodne definicije često nazivamo „test funkcijom”.

S obzirom da ćemo u daljem radu posmatrati isključivo probleme sa prekidnim početnim uslovom, pod terminom „rešenje” smatraće se slabo rešenje.

Definicija 2.2.2 *Zakon održanja sa početnim uslovom*

$$u(x,0) = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ u_r, & x > 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

se naziva *Rimanov problem*.

Posmatrajmo sada Rimanov problem za Burgerovu jednačinu. Oblik rešenja ovog problema prema [64], [47] zavisi od međusobnog odnosa konstanti u_l i u_r , pa možemo posmatrati sledeća dva slučaja:

Slučaj I: $u_l > u_r$.

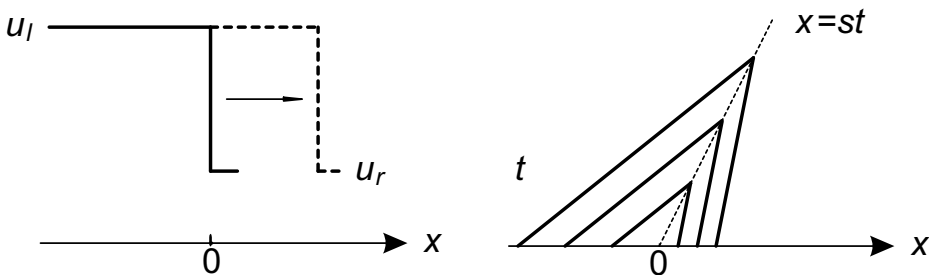
U ovom slučaju imamo jedinstveno slabo rešenje

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l, & x < st \\ u_r, & x > st \end{cases}, \quad (2.12)$$

pri čemu je

$$s = \frac{(u_l + u_r)}{2}. \quad (2.13)$$

Rešenje (2.12) nazivamo **udarnim talasom** ili **skokom** (*engl. shock wave*), a s predstavlja ovog **brzinu talasa**.

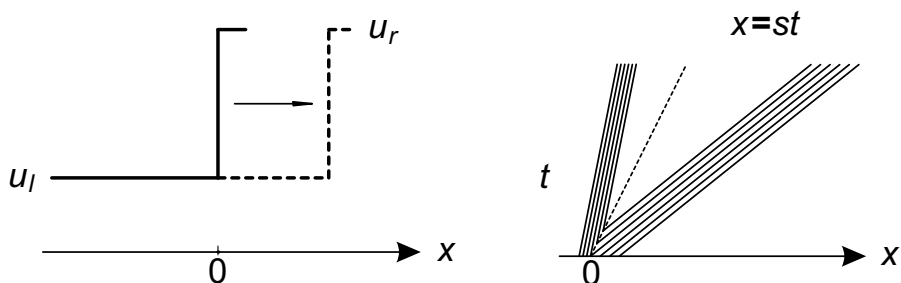


Slika 2.1: Entropijski udarni talas

wave), a s predstavlja ovog **brzinu talasa**. Iz (2.12) možemo zaključiti da se udarni talas sastoji od diskontinuiteta u obliku prekida funkcije koji putuje po vremenu brzinom s . Pimetimo da karakteristike idu ka diskontinuitetu, sl. 2.1.

Slučaj II: $u_l < u_r$.

U ovom slučaju rešenje datog problema nije jedinstveno. Jedno od mogućih rešenja je udarni talas (2.12) koji se kreće brzinom (2.13). Međutim, karakteristike ovog puta idu od diskontinuiteta (sl. 2.2), što ovo rešenje čini nestabilnim u smislu da male perturbacije promenljive u ili dodavanje zanemarljivo malog člana εu_{xx} , $\varepsilon \rightarrow 0$ desnoj strani jednačine (2.7), mogu dovesti do potpuno drugačijeg rešenja.



Slika 2.2: Neentropijski udarni talas

Drugo rešenje, koje je stabilno, je takozvani **razređujući talas** (*engl. rarefaction wave*, sl. 2.3) oblika

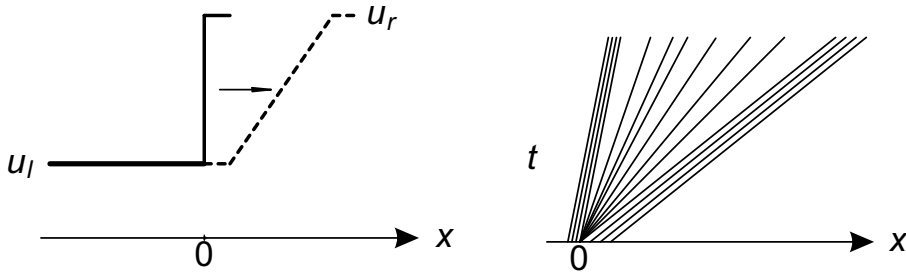
$$u(x,t) = \begin{cases} u_l, & x < u_l t \\ x/t, & u_l t \leq x \leq u_r t \\ u_r, & x > u_r t \end{cases} .$$

U opštem slučaju, razređujući talas za jednačinu (2.1) je oblika

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l, & x < f'(u_l)t \\ f'^{-1}(x/t), & f'(u_l)t \leq x \leq f'(u_r)t \\ u_r, & x > f'(u_r)t \end{cases} . \quad (2.14)$$

Rankine – Hugoniotov uslov

Udarni talas (2.12) je rešenje Burgerove jednačine samo ako je brzina talasa data sa (2.13). Brzina udarnog talasa se dobija iz zakona održanja. Ako pretpostavimo da je $st \ll M$, iz zakona održanja za Burgerovu



Slika 2.3: Razređujući talas

jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-M}^M u(x,t) dx &= f(u_l) - f(u_r) \\ &= \frac{1}{2} (u_l + u_r) (u_l - u_r). \end{aligned} \quad (2.15)$$

S druge strane, iz (2.12) imamo

$$\int_{-M}^M u(x,t) dx = (M + st) u_l + (M - st) u_r,$$

tako da je

$$\frac{d}{dt} \int_{-M}^M u(x,t) dx = s(u_l - u_r). \quad (2.16)$$

Iz (2.15) i (2.16) sledi (2.13).

Na isti način (detalji se mogu naći u [34]), se u opštem slučaju za proizvoljnu funkciju fluksa $f(u)$, može izvesti uslov za brzinu talasa

$$f(u_l) - f(u_r) = s(u_l - u_r). \quad (2.17)$$

Ovaj uslov je poznat kao **Rankine – Hugoniotov** uslov skoka, (ili skraćeno, RH-uslov). Kod skalarnih problema važi

$$s = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}.$$

Radi lakšeg obeležavanja možemo uvesti oznaku

$$s = \frac{[f]}{[u]},$$

gde je

$$[f] = f(u_l) - f(u_r) \quad \text{i} \quad [u] = u_l - u_r.$$

Entropijski uslovi

Videli smo da slabo rešenje zakona održanja ne mora biti jedinstveno pa nam je potreban dodatni uslov da bismo odredili fizički relevantno rešenje. Ovakav uslov nazivamo **uslovom entropije**, a rešenje jednačine zakona održanja koje zadovoljava uslov entropije nazivamo **entropijsko rešenje**. Pri tome pod fizički relevantnim rešenjem podrazumevamo ono rešenje koje predstavlja granicu rešenja viskozne jednačine

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon u_{xx}$$

kada $\varepsilon \rightarrow 0$. Međutim, sa ovim uslovom je komplikovano rukovati u praksi. Stoga su izvedene razne varijante uslova entropije. U ovoj tezi ćemo navesti samo one koji će nam trebati u daljem radu. Kao što smo već napomenuli, udarni talas bi trebao da ima karakteristike koje idu ka diskontinuitetu. Skok čije karakteristike idu od njega nije stabilno rešenje pa bi u tom slučaju takav skok trebalo zameniti razređujućim talasom. Ovo nam daje prvu verziju uslova entropije.

Definicija 2.2.3 (Laksov uslov entropije) [47] *Diskontinuitet koji se kreće brzinom (2.17) zadovoljava uslov entropije ako važi*

$$f'(u_l) > s > f'(u_r).$$

Primećujemo da za konveksno f , s mora biti između $f'(u_l)$ i $f'(u_r)$, što se opet, zbog konveksnosti svodi na uslov $u_l > u_r$.

Opštiji uslov entropije, koji važi i za nekonveksne funkcije fluksa je **Olejnikov** uslov entropije:

Definicija 2.2.4 [47] *Kažemo da je $u(x, t)$ entropijsko rešenje skalarnog zakona održanja (2.6) ako važi*

$$\frac{f(u) - f(u_l)}{u - u_l} \geq s \geq \frac{f(u) - f(u_r)}{u - u_r} \quad (2.18)$$

za svako $u \in [u_l, u_r]$.

Još opštiji uslov entropije je tzv. uslov **Kružkova** koji dobijamo preko definicije slabog rešenja. Neka je $\eta = \eta(u)$ konveksna funkcija, a φ nenegativna test funkcija u $C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$. Ako sa q označimo funkciju za koju važi

$$q'(u) = f'(u)\eta'(u), \quad (2.19)$$

tada imamo da je

$$\begin{aligned} 0 &= \int \int (u_t + f(u)_x - \varepsilon u_{xx}) \eta'(u) \varphi dx dt \\ &= \int \int \eta(u)_t \varphi dx dt + \int \int q'(u) u_x \varphi dx dt \\ &\quad - \varepsilon \int \int (\eta(u)_{xx} - \eta''(u)(u_x)^2) \varphi dx dt \\ &= - \int \int \eta(u) \varphi_t dx dt - \int \int q(u) \varphi_x dx dt, \quad (2.20) \\ &\quad - \varepsilon \int \int \eta(u) \varphi_{xx} dx dt + \varepsilon \int \int \eta''(u)(u_x)^2 \varphi dx dt \\ &\geq - \int \int (\eta(u) \varphi_t + q(u) \varphi_x + \varepsilon \eta \varphi_{xx}) dx dt \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili konveksnost funkcije η , tj. $\eta'' \geq 0$.

Nejednakost (2.20) možemo zapisati u distributivnom smislu kao

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta + \frac{\partial}{\partial x} q \leq \eta_{xx},$$

što za $\varepsilon \rightarrow 0$ daje

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta + \frac{\partial}{\partial x} q \leq 0. \quad (2.21)$$

Funkciju η nazivamo entropijskom funkcijom, a q entropijskim fluksem.

Uzmimo na primer

$$\eta(u) = ((u - c)^2 + \delta^2)^{1/2},$$

$\delta > 0$, za neku konstantu c . Ukoliko pustimo $\delta \rightarrow 0$, dobijamo funkciju

$$\eta(u) = |u - c| \tag{2.22}$$

i

$$q(u) = \text{sign}(u - c)(f(u) - f(c)).$$

Funkciju (2.22) nazivamo funkcijom Kružkova i prema [34] može se pokazati da ukoliko za ovu funkciju važi nejednakost

$$\int \int (\eta(u)\varphi_t + q(u)\varphi_x) dx dt \geq 0$$

za svaku konstantu $c \in \mathbb{R}$, onda ova nejednakost važi za sve konveksne funkcije. Na osnovu toga se uvodi sledeća definicija:

Definicija 2.2.5 *Kažemo da je funkcija u entropijsko rešenje Kružkova za problem (2.6) ukoliko nejednakost*

$$\frac{\partial}{\partial t} |u - c| + \frac{\partial}{\partial x} \text{sign}(u - c)(f(u) - f(c)) \leq 0 \tag{2.23}$$

važi u distributivnom smislu za svako c .

Nejednakost (2.23) u integralnom obliku postaje

$$\int \int (|u - c|\varphi_t + \text{sign}(u - c)(f(u) - f(c))\varphi_x) dx dt \geq 0$$

što treba da važi za svaku konstantu c i sve nenegativne test funkcije $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$.

2.2.3 Numeričko rešavanje nelinearnih skalarnih jednačina zakona održanja

Posmatrajmo sada problem

$$\begin{aligned}u_t + f(u)_x &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Pretpostavićemo da je funkcija fluksa f nelinearna, jer je slučaj sa nelinearnom funkcijom fluksa znatno jednostavniji (detalji se mogu naći u [47]).

Izvršićemo najpre diskretizaciju $x-t$ ravni usvajanjem mreže širine Δx i koraka po vremenu Δt . Kod hiperboličnih problema zakona održanja, uglavnom se uvodi pretpostavka

$$\Delta t / \Delta x \rightarrow \text{const} \quad \text{kada} \quad \Delta x, \Delta t \rightarrow 0.$$

Sada možemo definisati čvorove mreže (x_j, t_n) sa

$$\begin{aligned}x_j &= j\Delta x, \quad j = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \\ t_n &= n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Analogno tome možemo definisati i

$$x_{j+1/2} = x_j + \Delta x/2 = \left(j + \frac{1}{2}\right) \Delta x.$$

Definicija 2.2.6 Oblast $[x_j, x_{j+1}) \times [t_n, t_{n+1})$ nazivamo ćelijom mreže.

Neka je data funkcija $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$. Funkciju u definišemo u čvorovima mreže sa

$$u_j^n = u(x_j, t_n).$$

Možemo definisati aproksimaciju funkcije u kao deo po deo konstantnu funkciju $u_{\Delta t}(x, t)$ čija je vrednost jednaka u_j^n u (j, n) – toj ćeliji mreže, tj.

$$u_{\Delta t}(x, t) = u_j^n \quad \text{za} \quad (x, t) \in [x_j, x_{j+1}) \times [t_n, t_{n+1}).$$

Numerički postupak za rešavanje problema zakona održanja se intuitivno definiše na sledeći način: Diskretizacijom početnog uslova u_0 dobija se početna aproksimacija u^0 . Zatim se iz u^0 prema odgovarajućem pravilu konstruiše u^1 , iz u^1 , (ili eventualno i u^0) se dobija u^2 i tako dalje. Generalno rečeno, u^{n+1} se izračunava iz u^n kod **jednokoračnih postupaka**, ili preko $u^n, u^{n-1}, \dots, u^{n-r}$, $r \leq n$, kod **višekoračnih postupaka**. Međutim, za rešavanje hiperboličnih jednačina zakona održanja se uglavnom koriste jednokoračni postupci. Jedan od razloga je to što višekoračni postupci zahtevaju više memorije i postojanje posebnih startnih procedura s obzirom na činjenicu da u prvom koraku imamo samo početnu aproksimaciju u^0 .

Za konstrukciju numeričkih postupaka se uglavnom koristi diskretizacija jednačine putem zamene izvoda odgovarajućim diferencnim količnicima, tj.

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\Delta f(u)}{\Delta x} = 0.$$

Postupke kod kojih se u_j^{n+1} može izračunati direktno nazivamo **eksplicitnim postupcima**. Eksplicitne jednokoračne postupke možemo označiti sa

$$u_j^n = G(u^n; j).$$

Ukoliko se u_j^{n+1} ne može izračunati direktno, već samo preko sistema jednačina formata $N \times N$ u skalarnom slučaju, ili preko sistema formata $mN \times mN$ ako je $u \in \mathbb{R}^m$, numeričke postupke nazivamo **implicitnim postupcima**. Implicitni postupci se veoma retko koriste za rešavanje hiperboličnih problema zakona održanja, stoga ih nećemo razmatrati u ovom radu.

Konzervativni postupci

Kao što smo već videli, slaba rešenja Rimanovih problema nelinearnih zakona održanja ne moraju biti jedinstvena. S numeričke strane se

može postaviti pitanje da li će postupak koji smo odabrali konvergirati ka pravom slabom rešenju. Međutim, kod numeričkog rešavanja jednačina zakona održanja se može pojaviti i jedan mnogo ozbiljniji problem koji ćemo sagledati kroz sledeći primer.

Primer 2.2.1 *Posmatrajmo Burgerovu jednačinu*

$$u_t + uu_x = 0,$$

uz početni uslov

$$u_j^0 = \begin{cases} 1 & j < 0 \\ 0 & j \geq 0 \end{cases}.$$

Diskretizacijom uz pretpostavku da je $u_j^n \geq 0$ za sve j, n , dobijamo postupak

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_j^n (u_j^n - u_{j-1}^n). \quad (2.25)$$

Iz (2.25) vidimo da je $u_j^1 = u_j^0$ za svako j . Iz toga sledi da je $u_j^n = u_j^0$ za sve j, n . Stoga postupak (2.25) konvergira ka funkciji $u(x, t) = u_0(x)$, koja uopšte nije slabo rešenje problema.

Dakle, može se desiti da numerički postupak konvergira ka funkciji koja nije slabo rešenje jednačine zakona održanja koju rešavamo. Stoga ćemo predstaviti **konzervativne postupke**, klasu numeričkih postupaka kod kojih je pomenuti problem prevaziđen.

Uvedimo najpre, radi lakšeg zapisa, oznaku

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Definicija 2.2.7 *Numerički postupak je konzervativan, ako se može zapisati u obliku*

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n \\ &- \lambda \left[\mathcal{F}(u_{j-p}^n, u_{j-p+1}^n, \dots, u_{j+q}^n) - \mathcal{F}(u_{j-p-1}^n, u_{j-p}^n, \dots, u_{j+q-1}^n) \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Funkciju \mathcal{F} iz definicije 2.2.7 nazivamo **numeričkom funkcijom fluksa**. U najjednostavnijem slučaju, $p = 0$ i $q = 1$ pa iz (2.26) dobijamo

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda [\mathcal{F}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \mathcal{F}(u_{j-1}^n, u_j^n)]. \quad (2.27)$$

Radi jednostavnijeg zapisa možemo uvesti oznaku

$$\mathcal{F}(u^n; j) = \mathcal{F}(u_{j-p}^n, u_{j-p+1}^n, \dots, u_{j+q}^n),$$

pa postupak (2.26) možemo zapisati u obliku

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda [\mathcal{F}(u^n; j) - \mathcal{F}(u^n, j-1)]. \quad (2.28)$$

Definicija 2.2.8 *Numerički postupak (2.27) je konzistentan sa originalnom jednačinom zakona održanja ako je za $u(x, t) \equiv \bar{u}$,*

$$\mathcal{F}(\bar{u}, \bar{u}) = f(\bar{u}) \quad \forall \bar{u} \in \mathbb{R}.$$

Za konzistentnost je bitno da funkcija \mathcal{F} bude Lipšic neprekidna po svim promenljivama.

U opštem slučaju, kada je \mathcal{F} funkcija više od dve promenljive, tada se uslov konzistentnosti svodi na

$$\mathcal{F}(\bar{u}, \bar{u}, \dots, \bar{u}) = f(\bar{u}),$$

a Lipšicov uslov zahteva postojanje konstante K takve da

$$|\mathcal{F}(u_{j-p}, \dots, u_{j+q}) - f(\bar{u})| \leq K \max_{-p \leq i \leq q} |u_{j+i} - \bar{u}|,$$

važi za sve u_{j+i} dovoljno bliske sa \bar{u} .

Primeri konzervativnih postupaka

Najjednostavniji konzervativni postupak je jednosmerni postupak sa numeričkom funkcijom fluksa

$$\mathcal{F}(u^n; j) = f(u_j^n).$$

Među poznatije konzervativne postupke ubrajamo i **Lax-Friedrichs-**ov postupak

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}\lambda(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)), \quad (2.29)$$

što u konzervativnom obliku daje fluks oblika

$$\mathcal{F}(u^n; j) = \frac{1}{2\lambda}(u_j^n - u_{j+1}^n) + \frac{1}{2}(f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)).$$

Postupak poznat pod imenom **Engquist – Osher** ima funkciju fluksa oblika

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u^n; j) &= f(u_{j-1/2}) + \int_{u_{j-1/2}}^{u_{j+1/2}} (f'(u))^- du \\ &= f(u_{j+1/2}) - \int_{u_{j-1/2}}^{u_{j+1/2}} (f'(u))^+ du \\ &= \frac{1}{2}(f(u_{j-1/2}) + f(u_{j+1/2})) - \frac{1}{2} \int_{u_{j-1/2}}^{u_{j+1/2}} |f'(u)| du, \end{aligned}$$

gde je

$$f^+(u) = \max(f'(u), 0) \quad \text{i} \quad f^-(u) = \min(f'(u), 0).$$

Takođe je poznata varijanta postupka **Lax – Wendroff**, tzv. **Richtmyer-**ova šema

$$\mathcal{F}(u^n; j) = f\left(\frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n) - \lambda(f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n))\right), \quad (2.30)$$

odnosno

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n) - \frac{\lambda}{2}(f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)) \\ u_j^{n+1} &= u_j^n - \lambda(f(u_{j+1/2}^{n+1/2}) - f(u_{j-1/2}^{n+1/2})). \end{aligned}$$

Još jedan primer konzervativnog postupka je druga varijanta postupka Lax-Wendroff, tzv. **MacCormack**-ova dvokoračna šema

$$\mathcal{F}(u; j) = \frac{1}{2}(f(u_j^n - \lambda(f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n))) + f(u_j^n)), \quad (2.31)$$

tj.

$$\begin{aligned} u_j^* &= u_j^n - \lambda(f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)) \\ u_j^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_j^n + u_j^*) - \frac{\lambda}{2}(f(u_j^*) - f(u_{j-1}^*)). \end{aligned}$$

Jedan od najčešće korišćenih konzervativnih postupaka za numeričko rešavanje jednačina zakona održanja je postupak **Godunova**.

Osnovna ideja postupka Godunova se sastoji u sledećem: Numeričko rešenje u^n se koristi za definisanje deo po deo konstantne funkcije $\tilde{u}^n(x, t_n)$ koja je na ćeliji mreže $x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}$ jednaka u_j^n . Data funkcija nije konstantna nad intervalom $t_n \leq t < t_{n+1}$. Stoga koristimo $\tilde{u}^n(x, t_n)$ kao početni uslov zakona održanja koji rešavamo tačno da bismo dobili $\tilde{u}^n(x, t)$ za $t_n \leq t \leq t_{n+1}$. Zatim definišemo aproksimaciju rešenja u^{n+1} za vreme t_{n+1} kao srednju vrednost tačnog rešenja u vremenu t_{n+1} ,

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}^n(x, t_{n+1}) dx. \quad (2.32)$$

Time smo dobili vrednosti koje definišu deo po deo konstantnu funkciju $\tilde{u}^{n+1}(x, t_{n+1})$ i postupak se nastavlja. Pri tome (2.32) lako možemo dobiti iz integralnog oblika zakona održanja. Naime, pošto je \tilde{u} slabo rešenje zakona održanja, znamo da važi

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}^n(x, t_{n+1}) dx &= \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}^n(x, t_n) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tilde{u}^n(x_{j-1/2}, t)) dt \\ &\quad - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tilde{u}^n(x_{j+1/2}, t)) dt. \end{aligned}$$

Ako dobijeni izraz podelimo sa Δx , iskoristimo (2.32) i činjenicu da je $\tilde{u}^n(x, t_n) \equiv u_j^n$ na intervalu $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$, dobijamo konzervativni oblik postupka Godunova

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda [\mathcal{F}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \mathcal{F}(u_{j-1}^n, u_j^n)],$$

pri čemu je numerička funkcija fluksa \mathcal{F} data sa

$$\mathcal{F}(u_j^n, u_{j+1}^n) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tilde{u}^n(x_{j+1/2}, t)) dt \quad (2.33)$$

Izračunavanje integrala (2.33) je trivijalno, jer je \tilde{u}^n konstantno nad intervalom (t_n, t_{n+1}) u tački $x_{j+1/2}$, što sledi iz činjenice da je rešenje Rimanovog problema konstantno duž karakteristike $(x - x_{j+1/2})/t = \text{const}$. S obzirom da u konkretnom Rimanovom problemu, \tilde{u}^n duž linije $x = x_{j+1/2}$ zavisi samo od u_j^n i u_{j+1}^n , možemo \tilde{u}^n označiti sa $u^*(u_j^n, u_{j+1}^n)$. Tada numerički fluks (2.33) možemo zapisati u obliku

$$\mathcal{F}(u_j^n, u_{j+1}^n) = f(u^*(u_j^n, u_{j+1}^n)).$$

Međutim, ukoliko je interval po vremenu dovoljno veliki, može doći do interakcije talasa koji nastaju rešavanjem susednih Rimanovih problema. S obzirom da su brzine tih talasa ograničene sa $\max |f'(u)|$ i da se dva susedna Rimanova problema nalaze na udaljenosti Δx , do interakcije talasa susednih Rimanovih problema neće doći za Δt dovoljno malo. Iz tog razloga se, prema [34] uvodi sledeći uslov:

$$\lambda |f'(u)| \leq 1. \quad (2.34)$$

Definicija 2.2.9 Uslov (2.34) nazivamo *Courant-Friedrichs-Levy-evim*, ili skraćeno *CFL-uslovom*.

Konvergencija i stabilnost konzervativnih postupaka

Kao što smo već napomenuli, primenom konzervativnih postupaka izbegavamo dobijanje rešenja koja upošte ne predstavljaju slaba rešenja

problema zakona održanja koji smo posmatrali. Upravo o tome nam govori teorema Lax-a i Wendroff-a.

Teorema 2.2.1 (Lax-a i Wendroff-a) [44]. *Posmatrajmo niz mreža indeksiranih sa $l = 1, 2, \dots$, sa parametrima $\Delta t_l, \Delta x_l \rightarrow 0$, kada $l \rightarrow \infty$. Neka je $u_l(x, t)$ numerička aproksimacija dobijena konzistentnim konzervativnim postupkom na l -toj mreži. Pretpostavimo da $u_l \rightarrow u$, kada $l \rightarrow \infty$. Tada je funkcija $u(x, t)$ slabo rešenje jednačine zakona održanja.*

Kao što vidimo, teorema Lax-a i Wendroff-a nam ne garantuje samu konvergenciju postupka, niti da li će to slabo rešenje ujedno zadovoljiti uslov entropije, već samo da ukoliko konzervativni postupak konvergira ka nekoj funkciji, ona predstavlja slabo rešenje navedenog problema. Sledi kratak pregled rezultata iz oblasti konvergencije i stabilnosti konzervativnih postupaka. U tu svrhu ćemo najpre uvesti pojam **totalne varijacije** funkcije u na intervalu $[0, T]$ sa

$$TV_T(u) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} |u(x + \varepsilon, t) - u(x, t)| dx dt \quad (2.35)$$

$$+ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t + \varepsilon) - u(x, t)| dx dt.$$

Uzimajući u obzir da je numerička aproksimacija rešenja zakona održanja $u_{\Delta t}(x, t)$ deo po deo konstantna funkcija, iz (2.35) imamo da je

$$TV_T(u^n) = \sum_{n=0}^{T/\Delta t} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\Delta t |u_{j+1}^n - u_j^n| + \Delta x |u_j^{n+1} - u_j^n| \right],$$

odnosno

$$TV_T(u^n) = \sum_{n=0}^{T/\Delta t} \left[\Delta t TV(u^n) + \|u^{n+1} - u^n\|_1 \right].$$

Posmatrajmo sada skup funkcija sa uniformno ograničenom totalnom varijacijom i nosačem:

$$\mathcal{K} = \{u \in L_{1,T} : TV_T(u) \leq R \text{ i } Supp(u(\cdot, t)) \subset [-M, M], \forall t \in [0, T]\} \quad (2.36)$$

gde su $M, R \in \mathbb{R}$. Može se pokazati [47] da je skup \mathcal{K} kompaktan. Stoga svaki niz funkcija iz tog skupa mora sadržati konvergentan podniz.

Definicija 2.2.10 *Kažemo da je numerički postupak TV-stabilan, ako su sve aproksimacije $u_{\Delta t}$ za $\Delta t < \Delta t_0$ sadržane u skupu oblika (2.36).*

Teorema 2.2.2 [47] *Neka je dat konzervativni postupak sa Lipšic neprekidnim numeričkim fluksom. Ako za svaki početni uslov u_0 postoji $\Delta t_0, R > 0$ tako da je*

$$TV(u^n) \leq R \quad \forall n, \Delta t \text{ za } \Delta t < \Delta t_0 \text{ i } n\Delta t < T,$$

tada je postupak TV-stabilan.

Teorema 2.2.3 [47] *Ako je konzervativan i konzistentan postupak TV-stabilan, onda je i konvergentan.*

Jedan od najjednostavnijih načina da se obezbedi TV-stabilnost, prema [49] jeste uslov da totalna varijacija bude nerastuća tokom vremena. Kao što ćemo videti, takav uslov nam obezbeđuje da totalna varijacija u proizvoljnom trenutku vremena bude ograničena totalnom varijacijom početnog uslova. Stoga možemo definisati sledeću klasu numeričkih postupaka:

Definicija 2.2.11 *Za numerički postupak kažemo da je postupak nerastuće totalne varijacije (engl. Total variation diminishing method) ili skraćeno TVD ako važi*

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n).$$

Neposredno iz definicije sledi da za TVD -postupke važi

$$TV(u^n) \leq TV(u^0) \leq TV(u_0),$$

za svako $n \geq 0$.

Jedan od problema koji se može javiti kod numeričke aproksimacije prekidnih rešenja je pojava oscilacija u okolini diskontinuiteta. Da bismo prevazišli pomenuti problem, uvodimo definiciju postupaka koji čuvaju monotonost.

Definicija 2.2.12 [49] *Kažemo da numerički postupak čuva monotonost ako iz*

$$u_j^0 \geq (\leq) u_j^0 \text{ za svako } j$$

sledi

$$u_j^n \geq (\leq) u_j^n \text{ za svako } j, n.$$

Iz definicije se jasno vidi da korišćenjem postupka koji čuva monotonost ne može doći do pojave oscilacija u okolini diskontinuiteta, jer je Rimanov početni uslov monoton.

Teorema 2.2.4 [49] *Svaki TVD -postupak čuva monotonost.*

Definicija 2.2.13 *Kažemo da numerički postupak $u_j^{n+1} = \mathcal{G}(u^n; j)$ ima osobinu l_1 -kontrakcije, ako za svako u^n i v^n , gde je $v_j^{n+1} = \mathcal{G}(v^n; j)$ za koje $u^n - v^n$ ima kompaktn nosač, važi*

$$\|u^{n+1} - v^{n+1}\|_1 \leq \|u^n - v^n\|_1.$$

Prema [27], lako se može dokazati da je postupak Godunova l_1 -kontrakcija.

Teorema 2.2.5 [49] *Postupak sa osobinom l_1 -kontrakcije je TVD .*

S obzirom na činjenicu da su TVD -postupci konvergentni, sledi da su postupci sa osobinom l_1 -kontrakcije konvergentni.

Definicija 2.2.14 *Kažemo da je numerički postupak $u_j^{n+1} = \mathcal{G}(u^n; j)$ monoton ako važi*

$$v_j^n \geq u_j^n \quad \forall j \quad \rightarrow \quad v_j^{n+1} \geq u_j^{n+1} \quad \forall j.$$

Prema [34], da bismo pokazali da je neki numerički postupak monoton, dovoljno je proveriti da li važi

$$\frac{\partial}{\partial u_i^n} \mathcal{G}(u^n; j) \geq 0 \quad \forall i, j, u^n. \quad (2.37)$$

Primer 2.2.2 *Pokažimo da je Lax-Friedrichs-ov postupak monoton pod uslovom da je zadovoljen CFL-uslov.*

Iz (2.29) vidimo da je

$$\mathcal{G}(u^n; j) = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}\lambda(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)),$$

pa je

$$\frac{\partial}{\partial u_i^n} \mathcal{G}(u^n; j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \lambda f'(u_{j-1})) & \text{za } i = j - 1 \\ \frac{1}{2}(1 - \lambda f'(u_{j+1})) & \text{za } i = j + 1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Iz CFL-uslova imamo da je $1 \pm \lambda f'(u_j^n) \geq 0$ za svako i , pa (2.37) važi za svako i, j .

Teorema 2.2.6 [49] *Svaki monotoni postupak je l_1 -kontrakcija.*

Ako rezimiramo odnose među odgovarajućim tipovima numeričkih postupaka, dobijamo sledeću šemu:

$$\text{monoton} \rightarrow l_1 - \text{kontraktivan} \rightarrow TVD \rightarrow \text{čuva monotonost}$$

Kod numeričkih postupaka se uvek postavlja pitanje koliko dobro aproksimiraju rešenja problema koji rešavaju. Da bismo definisali red tačnosti numeričkih postupaka za rešavanje jednačina zakona održanja, moramo najpre uvesti pojam **lokalne greške odsecanja**.

Definicija 2.2.15 *Lokalnu grešku odsecanja numeričkog postupka definišemo sa*

$$L_{\Delta t}(x) = \frac{1}{\Delta t} (S(\Delta t)u - S_N(\Delta t)u)(x),$$

gde je $S(t)$ operator rešenja problema (2.24), tj. $u = S(t)u_0$ predstavlja rešenje u vremenu t , dok $S_N(t)$ predstavlja formalni operator rešenja postupka, tj.

$$S_N(\Delta t)u(x) = u(x) - \lambda (\mathcal{F}(u; j) - \mathcal{F}(u; j - 1)).$$

Definicija 2.2.16 *Kažemo da je numerički postupak reda tačnosti p ukoliko za svako glatko rešenje $u(x)$ važi*

$$|L_{\Delta t}| = O(\Delta t^p),$$

kada $\Delta t \rightarrow 0$.

Teorema 2.2.7 [47] *Monotoni postupak je najviše prvog reda tačnosti.*

Odavde možemo zaključiti da je Lax-Friedrichs-ov postupak najviše reda tačnosti jedan. Na osnovu oblika lokalne greške odsecanja, koji je prema [34] za ovaj postupak oblika

$$L_{\Delta t} = \frac{\Delta t}{2\lambda^2} \frac{\partial}{\partial x} = ((\lambda f'(u))^2 - 1)u_x + O((\Delta t)^2),$$

iz čega vidimo da je Lax-Friedrichs-ov postupak zaista reda tačnosti jedan. Isto tako, na osnovu oblika lokalne greške odsecanja, prema [34], postupak Godunova je takođe reda tačnosti jedan, dok su postupci Lax-Wendroff i MacCormack reda tačnosti dva. Postupci drugog reda tačnosti proizvode oscilacije u okolini diskontinuiteta, što nije slučaj kod postupka nižeg reda tačnosti. Iz tog razloga se često kombinuju fluksevi višeg i nižeg reda tačnosti i tako dobijaju hibridni postupci višeg reda tačnosti bez oscilacija. Više o tome se može naći u [34, 47].

Napomena 2.2.2 *Dokazi gore navedenih teorema se mogu naći u [34, 47, 49].*

Uslov entropije

Podsetimo se uslova entropije Kružkova koji zahteva postojanje skalarne entropijske funkcije $\eta(u)$ i entropijskog fluksa $q(u)$ za koje u distributivnom smislu treba da važi nejednakost (2.21). Da bismo pokazali da slabo rešenje $u(x, t)$ dobijeno konzervativnim postupkom zadovoljava uslov entropije, prema [47], dovoljno je pokazati da važi **diskretni uslov entropije**

$$\eta(u_j^{n+1}) \leq \eta(u_j^n) - \lambda[Q(u^n; j) - Q(u^n; j-1)], \quad (2.38)$$

gde je Q odgovarajući **numerički fluks entropije** koja mora biti konzistentna sa q u istom smislu kao i \mathcal{F} sa f .

Postupak Godunova je jedan od popularnijih numeričkih postupaka upravo iz razloga jer se prema [49] može pokazati da ukoliko u svakom koraku po vremenu koristimo entropijska rešenja Rimanovog problema, rešenje dobijeno ovim postupkom je takođe entropijsko.

Pretpostavimo da je $\eta(u)$ konveksna funkcija entropije, a $q(u)$ entropijski fluks, tako da svako \tilde{u}^n zadovoljava uslov entropije (2.21). Namera nam je da izvedemo diskretni uslov entropije oblika (2.38). Pošto $\tilde{u}^n(x, t)$ za $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ predstavlja tačno rešenje koje zadovoljava uslov entropije, tada integracijom nejednakosti (2.21) nad pravougaonikom $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$ dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \eta(\tilde{u}^n(x, t_{n+1})) dx &\leq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \eta(\tilde{u}^n(x, t_n)) dx \\ - \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} q(\tilde{u}^n(x_{j+1/2}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} q(\tilde{u}^n(x_{j-1/2}, t)) dt \right]. \end{aligned}$$

S obzirom da je funkcija \tilde{u}^n konstantna duž tri od četiri stranice datog

pravougaonika, imamo da je

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \eta(\tilde{u}^n(x, t_{n+1})) dx \\ & \leq \eta(u_j^n) - \lambda [q(u^*(u_j^n, u_{j+1}^n)) - q(u^*(u_{j-1}^n, u_j^n))]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Sada možemo definisati **numerički fluks entropije** sa

$$Q(u_j^n, u_{j+1}^n) = q(u^*(u_j^n, u_{j+1}^n)). \quad (2.40)$$

Jasno je da je Q konzistentno sa q . Dakle, desna strana nejednakosti (2.39) se slaže sa (2.38). Leva strana iste nejednakosti nije jednaka $\eta(u_j^{n+1})$ jer $\tilde{u}^n(x, t_{n+1})$ nije konstantno u intervalu $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$.

Međutim, pošto je η konveksna funkcija, možemo koristiti **Jensenovu nejednakost**

$$\eta \left(\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}^n(x, t_{n+1}) dx \right) \leq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \eta(\tilde{u}^n(x, t_{n+1})) dx. \quad (2.41)$$

Leva strana ove nejednakosti je jednaka $\eta(u_{j+1}^n)$. Kombinacijom izraza (2.39), (2.40) i (2.41) dobijamo traženu nejednakost entropije

$$\eta(u_j^{n+1}) \leq \eta(u_j^n) - \lambda [Q(u_j^n, u_{j+1}^n) - Q(u_{j-1}^n, u_j^n)].$$

Prema [49], fluks postupka Godunova koji daje entropijsko rešenje skalarnog zakona održanja je oblika

$$\mathcal{F}(u_j, u_{j+1}) = \begin{cases} \min_{u_j \leq u \leq u_{j+1}} f(u) & \text{za } u_j \leq u_{j+1} \\ \max_{u_{j+1} \leq u \leq u_j} f(u) & \text{za } u_{j+1} \leq u_j. \end{cases} \quad (2.42)$$

Za dobijanje entropijskih rešenja zakona održanja važna je i klasa monotonih konzervativnih postupaka. U [16] Crandall i Majda su dokazali sledeću teoremu:

Teorema 2.2.8 *Numeričko rešenje jednačine zakona održanja dobijeno konzistentnim monotonim konzervativnim postupkom sa konstantnim koeficijentom $\Delta t / \Delta x$ konvergira ka entropijskom rešenju za $\Delta t \rightarrow 0$.*

S obzirom da smo videli da je postupak Lax-Fridrichs-a monoton, možemo zaključiti da su numerička rešenja dobijena ovim postupkom entropijska.

2.3 Sistemi zakona održanja

2.3.1 Linearni hiperbolični sistemi

Posmatrajmo linearni sistem zakona održanja

$$u_t + Au_x = 0 \quad (2.43)$$

sa početnim uslovom

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

gde je $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, a $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matrica sa konstantnim koeficijentima i $f(u) = Au$. Pretpostavićemo da je sistem (2.43) strogo hiperboličan. S obzirom da su tada karakteristični koreni matrice A realni i različiti, postoji skup od m linearno nezavisnih karakterističnih vektora pa možemo izvršiti dekompoziciju:

$$A = R\Lambda R^{-1},$$

$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ gde su λ_p , $p = 1, 2, \dots, m$, karakteristični koreni matrice A , a $R = [r_1 | r_2 | \dots | r_m]$ matrica karakterističnih vektora. Tada važi

$$Ar_p = \lambda_p r_p$$

za $p = 1, 2, \dots, m$. Nakon množenja sa R^{-1} i uvođenja smene

$$v = R^{-1}u$$

dobijamo

$$v_t + \Lambda u_x = 0.$$

Pošto je Λ dijagonalna matrica, dobijamo m nezavisnih skalarnih jednačina oblika

$$(v_p)_t + \lambda_p (v_p)_x = 0$$

čija su rešenja na osnovu (2.5) data sa

$$v_p(x, t) = v_p(x - \lambda_p t, 0).$$

Iz činjenice da je

$$v(x, 0) = R^{-1} u_0(x),$$

sledi da je rešenje problema (2.43) dato sa:

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^m v_p(x, t) r_p = \sum_{p=1}^m v_p(x - \lambda_p t, 0) r_p. \quad (2.44)$$

Krive $x = x_0 + \lambda_p t$, čine familiju karakteristika, i često ih nazivamo karakteristikama p -te familije.

Rimanov problem

Posmatrajmo Rimanov problem (2.11) za strogo hiperboličan linearni sistem (2.43). Pošto su tada karakteristični koreni matrice A realni i različiti, možemo ih urediti:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m.$$

Rešenje linearnog sistema je dato sa (2.44). S obzirom da su karakteristični vektori matrice A linearno nezavisni, jer su karakteristični koreni međusobno različiti, oni čine bazu prostora \mathbb{R}^m pa vektore u_l i u_r možemo prikazati u obliku:

$$u_l = \sum_{p=1}^m \alpha_p r_p, \quad u_r = \sum_{p=1}^m \beta_p r_p.$$

Tada je

$$v_p(x, 0) = \begin{cases} \alpha_p, & x < 0 \\ \beta_p, & x > 0 \end{cases},$$

pa je

$$v_p(x, t) = \begin{cases} \alpha_p, & x - \lambda_p t < 0 \\ \beta_p, & x - \lambda_p t > 0. \end{cases}$$

Označimo sa $J(x, t)$ maksimalnu vrednost p za koju je $x - \lambda_p > 0$. Tada je

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^{J(x,t)} \beta_p r_p + \sum_{p=J(x,t)+1}^m \alpha_p r_p,$$

odnosno

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_l + \sum_{x - \lambda_p t > 0} (\beta_p - \alpha_p) r_p \\ &= u_r - \sum_{x - \lambda_p t < 0} (\beta_p - \alpha_p) r_p. \end{aligned}$$

Duž p -te karakteristike rešenje ima skok oblika

$$[u] = (\beta_p - \alpha_p) r_p. \quad (2.45)$$

Iz $f(u) = Au$ sledi

$$[f] = A[u] = (\beta_p - \alpha_p) A r_p = \lambda_p [u],$$

što nam ukazuje na činjenicu da skok (2.45) zadovoljava RH-uslov.

Napomena 2.3.1 Skok (2.45) u p -toj karakterističnoj familiji se često naziva p -talasom.

2.3.2 Nelinearni sistemi

Posmatrajmo sada nelinearni sistem

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (2.46)$$

gde je $u(x, t) \in \mathbb{R}^m$. Pretpostavićemo da je sistem (2.46) striktno hiperboličan. S obzirom da tada matrica $f'(u)$ ima realne i različite karakteristične korene koje možemo označiti sa $\lambda_1(u) < \dots < \lambda_m(u)$, postoji i odgovarajući skup linearno nezavisnih karakterističnih vektora $\{r_p(u)\}_{p=1}^m$. Rešenje Rimanovog problema za sistem (2.46) sastoji od m diskontinuiteta koji se prostiru konstantnim brzinama $s_1 < s_2 < \dots < s_m$ za $\|u_r - u_l\|$ dovoljno malo.

Posmatrajući nelinearnu skalarnu jednačinu zakona održanja smo pretpostavili da je funkcija fluksa konveksna. Sada ćemo dati uopštenje tog uslova na nelinearne sisteme jednačina zakona održanja.

Definicija 2.3.1 Za p -to karakteristično polje kažemo da je **zaista nelinearno** ako važi

$$\nabla \lambda_p(u) \cdot r_p(u) \neq 0 \quad (2.47)$$

za svako u , gde je $\nabla \lambda_p(u) = (\partial \lambda_p / \partial u_1, \dots, \partial \lambda_p / \partial u_m)$.

Napomena 2.3.2 Za $m = 1$, $\lambda_1(u) = f'(u)$, a $r_1(u) = 1$ za svako u , pa se uslov (2.47) svodi na uslov konveksnosti $f''(u) \neq 0 \forall u$.

Shodno prethodnoj definiciji možemo dati i uopštenje uslova entropije:

Definicija 2.3.2 (Laksov uslov entropije) [47] Skok sa u_l na u_r u p -tom pravom nelinearnom polju zadovoljava uslov entropije ako važi

$$\lambda_p(u_l) > s > \lambda_p(u_r), \quad (2.48)$$

pri čemu je s brzina talasa.

Skok sa u_l na u_r u p -tom pravom nelinearnom polju nazivamo p -talasom. Dakle, svaki p -talas koji predstavlja rešenje nelinearnog sistema zakona održanja mora zadovoljavati Laksov uslov entropije. U suprotnom, neentropijski p -talas valja zameniti razređujućim talasom oblika

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x \leq \xi_1 t \\ w(x/t), & \xi_1 t < x < \xi_2 t \\ u_r, & x \geq \xi_2 t \end{cases}, \quad (2.49)$$

pri čemu je w glatka funkcija, a $w(\xi_1) = u_l$ i $w(\xi_2) = u_r$. Prema [47], funkcija w u (2.49) je određena sistemom običnih diferencijalnih jednačina

$$w'(\xi) = \frac{r_p(w(\xi))}{\nabla \lambda_p(w(\xi)) \cdot r_p(w(\xi))}, \quad \xi_1 < \xi < \xi_2 \quad (2.50)$$

uz početni uslov

$$w(\xi_1) = u_l,$$

gde je $\xi_1 = \lambda_p(u_l)$ i $\xi_2 = \lambda_p(u_r)$. Iz (2.50) vidimo da u slučaju skalarne jednačine (2.49) postaje (2.14).

Definicija 2.3.3 Za p -to karakteristično polje kažemo da je **linearno degenerisano** ako važi

$$\nabla \lambda_p(u) \cdot r_p(u) \equiv 0, \quad \forall u.$$

*Diskontinuitet u linearno degenerisanom polju nazivamo **kontaktini diskontinuitet**.*

Za opšti nelinearni sistem sa p - tim linearnim degenerisanim poljem, se prema [47] može pokazati da je brzina prostiranja kontaktnog diskontinuiteta koji povezuje konstante u_l i u_r , jednaka $s = \lambda_p(u_l) = \lambda_p(u_r)$. Stoga kod sistema koji se sastoje od zaista nelinearnih i linearno degenerisanih karakterističnih polja, Laksov uslov entropije (2.48) možemo zapisati u obliku

$$\lambda_p(u_l) \geq s \geq \lambda_p(u_r).$$

2.3.3 Numeričko rešavanje sistema zakona održanja

Kao što ćemo videti, nelinearni sistemi se uglavnom mogu linearizovati, te se njihovo rešavanje svodi na rešavanje linearnih sistema zakona održanja. Stoga ćemo najpre opisati postupak Godunova za rešavanje linearnog sistema jednačina zakona održanja.

Linearni sistemi

Posmatrajmo sistem linearnih jednačina zakona održanja

$$u_t + Au_x = 0.$$

Rešavanjem Rimanovog problema za u_j^n i u_{j+1}^n , dobijamo

$$u^*(u_j^n, u_{j+1}^n) = u_j^n + \sum_{\lambda_p < 0} \alpha_p r_p = u_{j+1}^n - \sum_{\lambda_p > 0} \alpha_p r_p,$$

gde je r_p p -ti karakteristični vektor matrice A , a α_p njegov koeficijent u razvoju $u_{j+1}^n - u_j^n$. Podsetimo se da je vektor α dat sa

$$\alpha = R^{-1} (u_{j+1}^n - u_j^n),$$

pri čemu smo sa R označili matricu karakterističnih vektora matrice A .

Uvedimo sledeće oznake:

$$\lambda_p^+ = \max(\lambda_p, 0), \quad \Lambda^+ = \text{diag}(\lambda_1^+, \dots, \lambda_m^+), \quad (2.51)$$

$$\lambda_p^- = \min(\lambda_p, 0), \quad \Lambda^- = \text{diag}(\lambda_1^-, \dots, \lambda_m^-). \quad (2.52)$$

Očigledno je da važi $\Lambda^+ + \Lambda^- = \Lambda$. U skladu sa (2.51) i (2.52), uvodimo oznake

$$A^+ = R\Lambda^+R^{-1}, \quad A^- = R\Lambda^-R^{-1}.$$

Takođe važi $A^+ + A^- = A$.

Koristeći navedene oznake, fluks postupka Godunova za rešavanje sistema linearnih jednačina zakona održanja postaje

$$\begin{aligned} f(u_j^n, u_{j+1}^n) &= Au^*(u_j^n, u_{j+1}^n) \\ &= Au_j^n + \sum_{\lambda_p < 0} \alpha_p \lambda_p r_p = Au_{j+1}^n - \sum_{\lambda_p > 0} \alpha_p \lambda_p r_p \\ &= Au_j^n + A^- (u_{j+1}^n - u_j^n) \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$= Au_{j+1}^n - A^+ (u_{j+1}^n - u_j^n). \quad (2.54)$$

Ako (2.53) uzmemo za $\mathcal{F}(u_j^n, u_{j+1}^n)$, a (2.54) za $\mathcal{F}(u_{j-1}^n, u_j^n)$, tada postupak Godunova možemo zapisati u obliku

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda [A^-(u_{j+1}^n - u_j^n) + A^+(u_j^n - u_{j-1}^n)]. \quad (2.55)$$

Nelinearni sistemi

Posmatrajmo sada nelinearni sistem jednačina zakona održanja

$$u_t + f'(u)u_x = 0, \quad (2.56)$$

gde je $u \in \mathbb{R}^m$. Dati problem se prema [69] može rešiti takozvanom Roovom linearizacijom, koja se sastoji u pronalaženju matrice s konstantnim koeficijentima $\hat{A}(u_l, u_r)$ za aproksimaciju funkcije $f'(u)$. Za pomenutu matricu se postavljaju sledeći uslovi:

$$\hat{A}(u_l, u_r)(u_r - u_l) = f(u_r) - f(u_l) \quad (2.57)$$

$$\hat{A}(u_l, u_r) \text{ je regularna matrica sa realnim karakterističnim korenima} \quad (2.58)$$

$$\hat{A}(u_l, u_r) \rightarrow f'(\bar{u}) \text{ kada } u_l, u_r \rightarrow \bar{u} \quad (2.59)$$

Nakon linearizacije problema (2.56) rešavamo linearni sistem jednačina zakona održanja oblika

$$\hat{u}_t + \hat{A}(u_l, u_r)\hat{u}_x = 0. \quad (2.60)$$

Prvi uslov se odnosi na zadovoljenje RH – uslova diskontinuiteta koji se pojavljuju u rešenju. Drugi uslov obezbeđuje hiperboličnost i rešivost sistema (2.60), a treći uslov se odnosi na konzistentnost problema.

Konvergencija i stabilnost

Za opšti nelinearan sistem zakona održanja sa proizvoljnim početnim uslovom, do sada nažalost, ni jedan postupak se nije pokazao stabilnim, odnosno konvergentnim. Međutim, u [24] i [48] se na primer,

može videti da se u nekim specijalnim slučajevima dobija konvergencija. Uprkos činjenici da postupak za rešavanje skalarnog zakona održanja ne garantuje konvergenciju prilikom rešavanja proizvoljnog sistema zakona održanja, u praksi se pokazalo da proširenje nekih postupaka na sisteme daje dobre rezultate.

2.4 Prostorno promenljivi fluksevi

U dosadašnjem izlaganju smo pretpostavili da funkcija fluksa zakona održanja (2.1) ne zavisi eksplicitno od promenljivih prostora i vremena, što je tačno samo u slučaju homogene sredine. Ako posmatramo nehomogenu sredinu, funkcija fluksa eksplicitno zavisi od promenljivih prostora i vremena. Čak šta više, ova zavisnost može da bude i prekidna, kao na primer u slučaju kada se sredina sastoji od različitih slojeva. Opšti oblik skalarne jednačine sa prostorno promenljivim fluksom je

$$\begin{aligned} u_t + (F(x, u))_x &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \quad (2.61)$$

gde je u nepoznata, a F glatka funkcija fluksa koja je prostorno promenljiva. Još opštiji oblik ove jednačine dobijamo ukoliko pretpostavimo da F zavisi (prekidno ili neprekidno) i od prostorne i od vremenske promenljive,

$$\begin{aligned} u_t + (F(x, u, t))_x &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

U okviru ovog rada ćemo se baviti isključivo jednačinama oblika (2.61). Ova jednačina ima nekoliko specijalnih oblika. Ovde ćemo navesti samo dva oblika koja ćemo proučavati u daljem radu, dok se ostali oblici mogu naći u [57].

- Multiplikativni oblik

$$u_t + (a(x)f(u))_x = 0 \quad (2.62)$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

koji dobijamo za $F(x, u) = a(x)f(u)$, pri čemu $a(x)$ može da bude prekidno ili neprekidno.

- Oblik sa dva fluksa

$$\begin{aligned} u_t + (H(x)g(u) + (1 - H(x))h(u))_x &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \quad (2.63)$$

gde su g i h Lipšic neprekidne funkcije, a H tzv. Hevisajdova funkcija sa osobinom

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

2.4.1 Numeričko rešavanje problema zakona održanja sa prostorno promenljivim fluksom

Pretpostavimo sada da funkcija $F(x, u)$ u (2.61) zavisi od x neprekidno, dok ćemo se slučajem kada je ova zavisnost prekidna baviti u glavama 4 – 6.

Bale, Leveque, Mitran i Rossmann su razvili postupak Godunova za rešavanje zakona održanja sa prostorno promenljivim fluksom. Sledi kratko objašnjenje ovog postupka, dok se više detalja može naći u [7, 49].

Da bismo rešili jednačinu zakona održanja sa prostorno promenljivim fluksom, neophodno je najpre izvršiti diskretizaciju fluksa tako da dobijemo funkciju $F_j(u)$ koja važi na j -oj ćeliji mreže. Ako je jednačina zakona održanja oblika (2.61), onda diskretnu funkciju fluksa možemo definisati sa

$$F_j(u) = F(x_j, u),$$

za F dovoljno glatko u odnosu na x . Tada se Rimanov problem na ćeliji $x_{j-1/2}$ sastoji od jednačine

$$u_t + F_{j-1/2}(x, u)_x = 0,$$

zajedno sa početnim uslovom, pri čemu je

$$F_{j-1/2}(x, u) = \begin{cases} F_{j-1}(u), & x < x_{j-1/2} \\ F_j(u), & x > x_{j-1/2} \end{cases}.$$

Rešavanje gore navedenog Rimanovog problema se pak sastoji od pronalaženja konstanti $\tilde{u}_{l,j-1/2}$ i $\tilde{u}_{r,j-1/2}$ koje zadovoljavaju

$$F_{j-1}(\tilde{u}_{l,j-1/2}) = F_j(\tilde{u}_{r,j-1/2}),$$

pri čemu u_{j-1} može da se poveže sa $\tilde{u}_{l,j-1/2}$ isključivo pomoću talasa koji putuju u levo, a $\tilde{u}_{r,j-1/2}$ sa u_j isključivo pomoću talasa koji putuju u desno. Ukoliko talas koji spaja $\tilde{u}_{l,j-1/2}$ i $\tilde{u}_{r,j-1/2}$ ne bi bio stacionaran, tada rešenje problema ne bi bilo ograničeno, (videti odeljak 16.4 u [49]).

U slučaju kada je $F(x, u) = F(u)$, tj. ukoliko je funkcija fluksa prostorno nezavisna, ovaj postupak se poklapa sa standardnim postupkom Godunova čija je numerička funkcija fluksa oblika (2.42).

2.4.2 Uslov entropije

Kao i kod zakona održanja sa prostorno nezavisnim fluksom, važno je odrediti koja su rešenja dopustiva.

Multiplikativni oblik zakona održanja

Posmatrajmo najpre jednačinu oblika (2.62), i izvedimo odgovarajuću uslov entropije. Pretpostavimo da je $\eta = \eta(u)$ konveksna funkcija, a ϕ nenegativna test funkcija u $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle)$. Tada imamo da je

$$0 = \int \int (u_t + (a(x)f(u))_x - \varepsilon u_{xx}) \eta'(u) \phi dx dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int \int (u_t + a(x)f'(u)u_x + k'(x)f(u) - \varepsilon u_{xx})\eta'(u)\varphi dxdt \\
&= \int \int \eta(u)_t \varphi dxdt + \int \int a(x)q'(u)\varphi dxdt + \int \int k'(x)f(u)\eta'(u)\varphi dxdt \\
&\quad - \varepsilon \int \int u_{xx}\eta'(u)\varphi dxdt \\
&= \int \int \eta(u)_t \varphi dxdt + \int \int ((a(x)q(u))' - k'(x)q(u))\varphi dxdt \\
&\quad + \int \int k'(x)f(u)\eta'(u)\varphi dxdt - \varepsilon \int \int u_{xx}\eta'(u)\varphi dxdt \\
&= - \int \int \eta(u)\varphi_t dxdt - \int \int a(x)q(u)\varphi_x dxdt \\
&\quad - \int \int k'(x)(f(u)\eta'(u) - q(u))\varphi dxdt - \varepsilon \int \int \eta(u)\varphi_{xx} dxdt \\
&\quad + \varepsilon \int \int \eta''(u)(u_x)^2 \varphi dxdt \\
&\geq - \int \int (\eta(u)\varphi_t + a(x)q(u)\varphi_x + k'(x)(f(u)\eta'(u) - q(u))\varphi + \varepsilon\eta\varphi_{xx}) dxdt,
\end{aligned}$$

gde je $q(u)$ definisano sa (2.19) i $\eta'' \geq 0$. Uz iste pretpostavke i na potpuno isti način kao i u slučaju zakona održanja sa prostorno nezavisnim fluksom, prema [87] možemo zaključiti da je u dopustivo rešenje problema (2.62) ukoliko je nejednakost

$$\frac{\partial}{\partial t}|u - c| + \frac{\partial}{\partial x}(a(x)q(u)) + \text{sign}(u - c)k'(x)f(c) \leq 0. \quad (2.64)$$

zadovoljena u distributivnom smislu za sve konstante c .

Zakon održanja sa dva fluksa

Jednačinu (2.63) možemo zapisati i u obliku

$$u_t + F(x, u)_x = 0, \quad (2.65)$$

gde je funkcija fluksa F oblika

$$F(x, u) = H(x)g(u) + (1 - H(x))h(u).$$

U [38] se može naći uslov entropije za nešto opštiji zakon održanja oblika

$$\begin{aligned} u_t + (F(\gamma(x), u))_x &= D(u)_{xx} \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \quad (2.66)$$

koji dopustivim smatra ono rešenje $u(x, t)$ koje zadovoljava sledeću nejednakost tipa Kružkova

$$\begin{aligned} |u - c|_t + (\text{sign}(u - c) (F(\gamma(x), u) - F(\gamma(x), c)))_x + |D(u) - D(c)|_{xx} \\ + \gamma'(x) \text{sign}(u - c) F_x(\gamma(x), c) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

za svako konstantno $c \in \mathbb{R}$ u distributivnom smislu.

Pošto (2.65) sledi iz (2.66) za $\gamma(x) = x$, $D = 0$, nejednakost (2.67) u tom slučaju postaje

$$\begin{aligned} |u - c|_t + \text{sign}((u - c)(F(x, u) - F(x, c)))_x \\ + \text{sign}(u - c) F_x(x, c) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Profili udarnih talasa

3.1 Diskretni profili udarnih talasa

Neka je

$$u_t + F(x, u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (3.1)$$

sistem zakona održanja, pri čemu je $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ neprekidna funkcija fluksa, a \mathcal{U} konveksan otvoren podskup skupa \mathbb{R}^m , zajedno sa početnim uslovom

$$u_0(x) = a(x).$$

Pretpostavimo da je sistem hiperboličan u okolini u_l i u_r . Posmatraćemo ponašanje numeričkih aproksimacija sistema (3.1) na mreži $\Delta x \mathbb{Z} \times \Delta t \mathbb{N}$ i pretpostaviti da je numerički postupak konzervativan i konzistentan.

Prema [72], putujući talas od u_l do u_r nazivamo **diskretnim profilom udarnog talasa**, ili kraće, DSP (od engl. *discrete shock profile*). U stvari, DSP je rešenje jednačine (2.28) oblika

$$u_j^n = u(j - ns\lambda), \quad (3.2)$$

sa graničnim uslovom

$$u(-\infty) = u_l, \quad u(+\infty) = u_r.$$

Jednačinu (3.2) možemo zapisati i u obliku

$$u_j^n = u\left(\frac{x_j - st_n}{\Delta x}\right),$$

iz čega se jasno vidi da parametar $s \in \mathbb{R}$ predstavlja brzinu talasa. Funkciju u iz gornje jednačine nazivamo udarnim profilom. Ukoliko $\Delta x \rightarrow 0$, dobijamo talas oblika

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x < st \\ u_r, & x > st \end{cases}.$$

S obzirom na činjenicu da u , definisano sa (3.2), predstavlja putujući talas numeričke šeme, ova funkcija takođe zadovoljava jednačinu

$$\begin{aligned} u(y - s\lambda) &= u(y) + \lambda(F(\lambda; x, u(y-p), \dots, u(y+q-1)) \\ &\quad - F(\lambda; x, u(y-p+1), \dots, u(y+q))) \\ &=: G(\lambda; x, u(y-p), \dots, u(y+q)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Uvedimo sledeću oznaku:

$$\mu := s\lambda.$$

Parametar μ često nazivamo „brzinom mreže”, s obzirom da predstavlja prosečan broj tačaka napredovanja talasa po koraku vremena. Radi stabilnosti postupka, informacije se kroz numerički postupak moraju prostirati brže od talasa. Zato je neophodno da bude zadovoljen CFL uslov oblika

$$-q < \mu < p.$$

Ukoliko je npr. $p = 1$ a $q = 0$, ovaj uslov postaje $0 < \mu < 1$.

Iz jednačine (3.3) vidimo da domen profila u mora da bude translaciona invarijanta u odnosu na parametar μ . Stoga je minimalni domen profila aditivna grupa $\mathbb{Z} + \mu\mathbb{Z}$. Ukoliko je $\mu = r/l$ racionalno, tada u stvari

imamo diskretni domen $l^{-1}\mathbb{Z}$. S druge strane, ukoliko je parametar μ iracionalan, tada $\mathbb{Z} + \mu\mathbb{Z}$ postaje gust u \mathbb{R} . U ovom slučaju, pretpostavljamo da se u može definisati na celoj realnoj pravoj, a odgovarajući profil nazivamo „neprekidnim diskretnim” udarnim profilom.

Pretpostavimo da je $\mu = r/l$ racionalno i da je $r \geq 0$. Tada se jednačina (3.3) prema [10] može integraliti jedanput. Razlika $u(y) - u(y - \mu)$ se može zapisati u obliku

$$u(y) - u(y - \mu) = u(y) + \dots + u\left(y - \frac{r-1}{l}\right) - u\left(y - \frac{1}{l}\right) - \dots - u\left(y - \frac{r}{l}\right).$$

Na sličan način vršimo dekompoziciju razlike flukseva i na osnovu (3.3) zaključujemo da je izraz

$$\sum_{j=0}^{r-1} u\left(y - \frac{j}{l}\right) - \lambda \sum_{k=1}^l F\left(\lambda; x, u\left(y - p + \frac{k}{l}\right), \dots, u\left(y + q - 1 + \frac{k}{l}\right)\right)$$

konstantan u odnosu na pomeranje od $1/l$. Jasno je da ovaj izraz ostaje konstantan na celom domenu $l^{-1}\mathbb{Z}$. Njegovu vrednost dobijamo ukoliko pustimo $y \rightarrow \pm\infty$:

$$\sum_{j=0}^{r-1} u\left(y - \frac{j}{l}\right) - \lambda \sum_{k=1}^l F\left(\lambda; x, u\left(y - p + \frac{k}{l}\right), \dots\right) = ru_{l,r} - \lambda \mathcal{F}(u_{l,r}),$$

pri čemu smo koristili uslov konzistentnosti fluksa. Odavde dobijamo potreban uslov

$$F(u_r) - F(u_l) = \frac{\mu}{\lambda}(u_r - u_l),$$

što u stvari predstavlja *Rankine – Hugoniotov* uslov, koji dozvoljava spajanje konstanti u_r i u_l diskontinuitetom brzine s koji pretsavlja distributivno rešenje jednačine

$$[F(u)] = s[u].$$

Ukoliko je parametar μ iracionalan, sasvim je prirodno pretpostaviti da je profil $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ neprekidan. Tada je opet, prema (3.3) izraz

$$x \rightarrow \lambda \int_x^{x+1} F\left(\lambda; x, u(y - p), \dots, u(y + q - 1)\right) dy - \int_{x-\mu}^x u(y) dy$$

konstantan. Kada izračunamo njegove vrednosti na krajevima $\pm\infty$, dobijamo

$$\lambda \int_x^{x+1} F(\lambda; x, u(y-p), \dots, u(y+q-1)) dy - \int_{x-\mu}^x u(y) dy \equiv \lambda F(u_{l,r}) - \mu u_{l,r},$$

iz čega opet sledi RH-uslov.

3.2 Viskozni profili

Viskozni profil zadovoljava nelinearnu običnu diferencijalnu jednačinu

$$u'' = (G \circ u)',$$

u distributivnom smislu, pri čemu smo sa G označili

$$G(u) = F(u) - su.$$

Nakon integracije gornje jednačine dobijamo

$$u' = G \circ u - cst.$$

Pošto je granična vrednost u u $\pm\infty$ jednaka $u_{l,r}$, imamo da je konstanta integracije jednaka $G(u_{l,r})$, iz čega zaključujemo da je

$$G(u_l) = G(u_r),$$

što predstavlja RH-uslov.

Pošto u_l, u_r predstavljaju dve susedne nule funkcije $G - G(u_l)$, ova funkcija ima konstantan znak između njih. Viskozni profil se smatra dopustivim ukoliko se znak funkcije $G - G(u_l)$ poklapa sa znakom $u_r - u_l$. Ovaj uslov dopustivosti je u stvari Olejnikov uslov entropije.

Uslov dopustivosti viskozno profila se može predstaviti i kao uslov da ovaj profil dostiže graničnu vrednost putujućeg talasa viskozne aproksimacije jednačine

$$u_l + F(x, u)_x = \varepsilon \Delta u,$$

gde smo sa Δ označili Laplasov operator.

3.3 Egzistencija DSP–a numeričkih postupaka

Egzistencija DSP–ova kod numeričkih postupaka za rešavanje zakona održanja sa neprekidnom funkcijom fluksa je dokazana u nekoliko slučajeva. Tako na primer, u [36] je dokazana egzistencija i stabilnost DSP–a za striktno monotone šeme sa diferencijabilnom funkcijom fluksa za skalarne zakone održanja. Majda i Ralston su u [55] dokazali egzistenciju DSP za konačne diferencne šeme reda tačnosti jedan za sisteme zakona održanja kada je λs racionalno. U [79] je dokazana egzistencija DSP za šemu Lax-Wendroff kada je λs racionalno. Haitao Fan je u [26] dokazao egzistenciju i jedinstvenost Lipšic neprekidnog DSP–a za šemu Godunova. Zatim je u [27] uz pretpostavku da par (u_l, u_r) zadovoljava uslov Olejnika (2.18) dokazao sledeću teoremu:

Teorema 3.3.1 [27] *Numerički postupci sa fluksom klase C^1 koji čuvaju monotonost imaju DSP kada je λs racionalno.*

Zakoni održanja sa prekidnim fluksom

Posmatrajmo zakon održanja oblika (2.63). U skladu sa definicijom slabog rešenja zakona održanja koju smo predstavili u glavi 2, možemo reći da funkciju $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ smatramo slabim rešenjem ukoliko $\forall \varphi \in C^\infty \times \overline{\mathbb{R}}_+$ važi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (H(x)g(u) + (1 - H(x))h(u)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0.$$

Lako se može proveriti da ovo poslednje važi ako i samo ako u u slabom smislu zadovoljava

$$\begin{aligned} u_t + h(u)_x &= 0 & x < 0, \quad t > 0 \\ u_t + g(u)_x &= 0 & x > 0, \quad t > 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

i u $x = 0$ zadovoljava RH-uslov u smislu da za skoro svako t važi

$$g(u^+(t)) = h(u^-(t)), \tag{4.2}$$

gde je

$$u^+(t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} u(x, t) \quad \text{i} \quad u^-(t) = \lim_{x \rightarrow 0^-} u(x, t). \quad (4.3)$$

4.1 Egzistencija rešenja

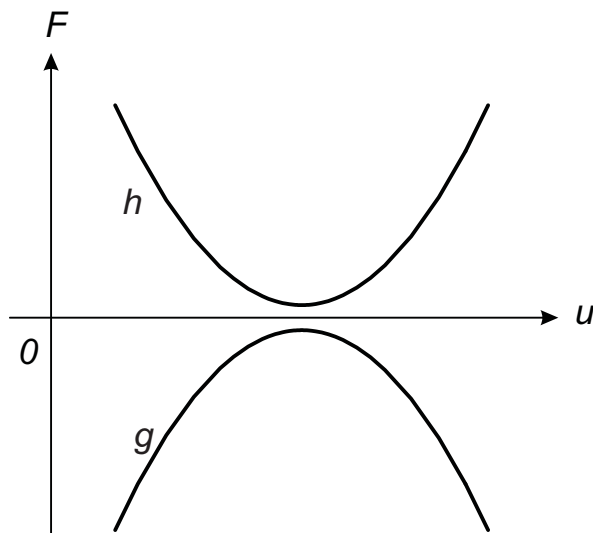
Važno je napomenuti da ne postoji uvek slabo rešenje za sve jednačine oblika (2.63). Tako na primer, problem

$$h(u) = u^2 + 1 \quad \text{i} \quad g(u) = -u^2 - 1$$

uz početni uslov

$$u_0(x) = 0$$

nema rešenja u klasičnom smislu, iz razloga što, kao što se može zaključiti sa slike 4.1, RH-uslov (4.2) ne može biti zadovoljen ni za jedan izbor realnih brojeva.



Slika 4.1: Primer flukseva za koje ne postoji slabo rešenje u klasičnom smislu

4.2 Jedinstvenost rešenja

Isto kao i kod zakona održanja sa neprekidnom funkcijom fluksa, gore definisana slaba rešenja ne moraju biti jedinstvena, pa je neophodno da zadovolje odgovarajući uslov entropije. S obzirom da funkcija fluksa ima prekid u nuli, prirodno je zahtevati da funkcija u van okoline nule zadovoljava entropijsku nejednakost Kružkova. Medjutim, zadovoljavanje entropijske nejednakosti Kružkova van okoline tačke $x = 0$ nije dovoljno da garantuje jedinstvenost rešenja. Tako na primer, ukoliko imamo problem oblika

$$g(u) = u \quad \text{i} \quad h(u) = -u, \quad (4.4)$$

uz

$$u_0(x) = 0$$

možemo konstruisati beskonačno mnogo rešenja oblika

$$u_\lambda(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{za } x < t \\ -\lambda & \text{za } t < x < 0 \\ \lambda & \text{za } 0 < x < t \\ 0 & \text{za } x > t \end{cases},$$

gde je $\lambda \in \mathbb{R}$ proizvoljno. Pored toga, $u(x, t) \equiv 0$ takođe predstavlja rešenje ovog problema. Lako se može proveriti da gore definisano u_λ predstavlja slabo rešenje problema (4.4) u smislu definicije (4) i da zadovoljava entropijsku nejednakost Kružkova van okoline nule. Da bi se obezbedila jedinstvenost rešenja, potrebno je dakle, uvesti dodatni uslov entropije u $x = 0$. Ovom problematikom su se bavili razni naučnici [2, 14, 22, 28, 37, 39, 57, 66] koji su kreirali razne uslove entropije koji dovode do različitih entropijskih rešenja. U nastavku ćemo izdvojiti teorije dopustivosti iz [39] i [57] sa kojima ćemo upoređivati rešenja koja ćemo dobiti u glavi 5.

4.2.1 Teorija entropije prema Adimurthiju, Gowdi i Mishri

Indijski naučnici Adimurthi, Gowda i Mishra su u [58] posmatrali jednačinu oblika (2.63). Prepostavili su da je $h[X] = g[X]$ i $h[Y] = g[Y]$, te da su fluksevi h i g konveksnog tipa na $I = [X, Y]$, oslanjajući se na sledeću definiciju:

Definicija 4.2.1 [57] *Neka je $f \in C^1(I)$, tada kažemo da je f*

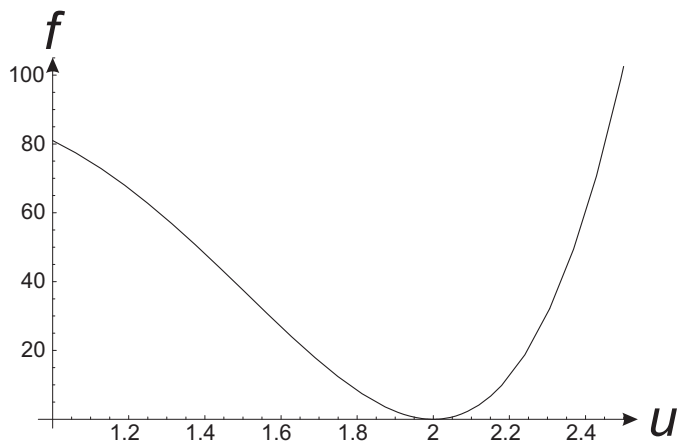
- *fluks konveksnog tipa ukoliko ima jedan minimum, a ni jedan maksimum unutar intervala I ,*
- *fluks konkavnog tipa ukoliko ima jedan maksimum, a ni jedan minimum unutar intervala I ,*

Napomena 4.2.1 *Napomenimo da fluksevi g i h ne moraju da budu konveksni. Nasuprot konveksnih funkcija čiji drugi izvod je striktno pozitivan, drugi izvod funkcije konveksnog tipa može biti promenljivog znaka na posmatranom intervalu. Tako je npr. $f = (u - 2)^2(u + 2)^4$ funkcija konveksnog tipa na intervalu $[1, 2.5]$, sl. 4.2. Primećujemo da ova funkcija ima prevojnu tačku u tački $u \approx 1.5$.*

Takođe su prepostavili sa se fluksevi seku u najviše jednoj tački u_* pomenutog intervala, pri čemu presek flukseva može biti regularan, podkompresibilan ili nadkompresibilan, u skladu sa definicijom koja sledi.

Definicija 4.2.2 [57] *Presek dva fluksa je*

- (a) **regularan** ukoliko je $h'(u_*), g'(u_*) \geq 0$ ili $h'(u_*), g'(u_*) \leq 0$
- (b) **podkompresibilan** ako je $h'(u_*) < 0$ i $g'(u_*) > 0$
- (c) **nadkompresibilan** ako je $h'(u_*) > 0$ i $g'(u_*) < 0$
- (d) **marginalno pod(nad)kompresibilan** ukoliko nije regularan i važi jedna od relacija $h'(u_*) = 0$ ili $g'(u_*) = 0$.



$$f = (u - 2)^2(u + 2)^4$$

Slika 4.2: Funkcija konveksnog tipa

Na slici 4.3 možemo videti razne mogućnosti preseka flukseva. Na sličan način se definišu i tipovi udarnih talasa, pa npr. kažemo da je udarni talas podkompresibilan ako je

$$h'(u^-) < 0 \quad \text{i} \quad g'(u^+) > 0,$$

odnosno marginalno podkompresibilan ukoliko je

$$h'(u^-) < 0 \quad \text{i} \quad g'(u^+) = 0$$

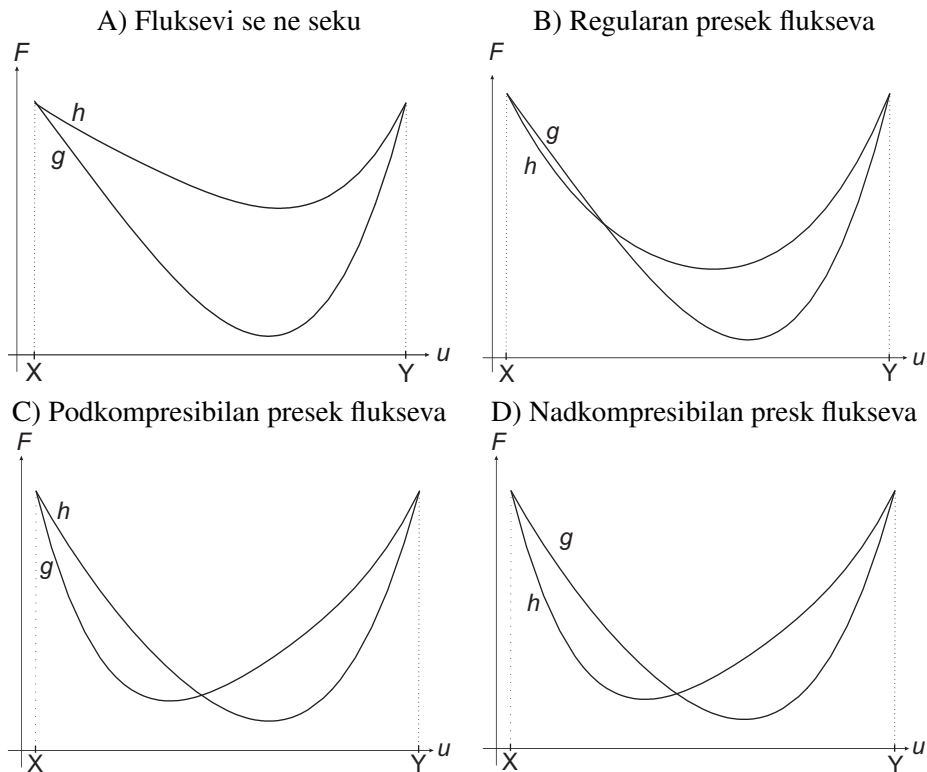
ili

$$h'(u^-) = 0 \quad \text{i} \quad g'(u^+) > 0.$$

Zatim su uveli pojam **koneksija** koje su definisali na sledeći način:

Definicija 4.2.3 Par (A, B) nazivamo **koneksijom** ukoliko važi

$$h(A) = g(B), \quad h'(A) \leq 0, \quad g'(B) \geq 0. \quad (4.5)$$



Slika 4.3: Razne mogućnosti preseka flukseva istog tipa konveksnosti

Neka su θ_g i θ_h , redom, jedinstveni minimumi funkcija g , odnosno h . Tada je jasno da se u posmatranom slučaju, relacija (4.2.3) u stvari svodi na

$$h(A) = g(B), \quad A \leq \theta_h, \quad B \geq \theta_g. \quad (4.6)$$

Za svaku koneksiju, pomenuti autori su konstruisali tzv. (A,B) – entropijsko rešenje problema (2.63) koje pored entropijske nejednakosti Kružkova van okoline nule, zadovoljava i dodatni uslov entropije u okolini nule, a koji navodimo u definiciji koja sledi.

Definicija 4.2.4 Rešenje problema (2.63) zadovoljava uslov entropije u

okolini nule ukoliko

$\text{sign}(u^-(t) - A)(h(u^-(t)) - h(A)) - \text{sign}(u^+(t) - B)(g(u^+(t)) - g(B)) \geq 0$
važi za skoro svako t .

Isti autori su zatim definisali tzv. optimalne koneksije sa

$$(A, B) = \begin{cases} (\theta_h, \bar{\theta}_h), & g(\theta_g) \leq h(\theta_h) \\ (\bar{\theta}_g, \theta_g), & g(\theta_g) \geq h(\theta_h) \end{cases}, \quad (4.7)$$

gde je

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_h \geq \theta_g & \text{ tako da } g(\bar{\theta}_h) = h(\theta_h) \text{ ako je } g(\theta_g) \leq h(\theta_h), \\ \text{i u suprotnom } \bar{\theta}_g \leq \theta_h & \text{ tako da } g(\theta_g) = h(\bar{\theta}_g). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Potom su dokazali da optimalne koneksije daju fizički relevantna rešenja za model dvofaznog protoka u heterogenoj poroznoj sredini. Ova rešenja su nazvali optimalnim entropijskim rešenjima.

Na sl. 4.4 možemo videti primer dopustive, nedopustive i optimalne koneksije prema [1].

Rešenje Rimanovog problema

Označimo sa \bar{A} tačku koja zadovoljava

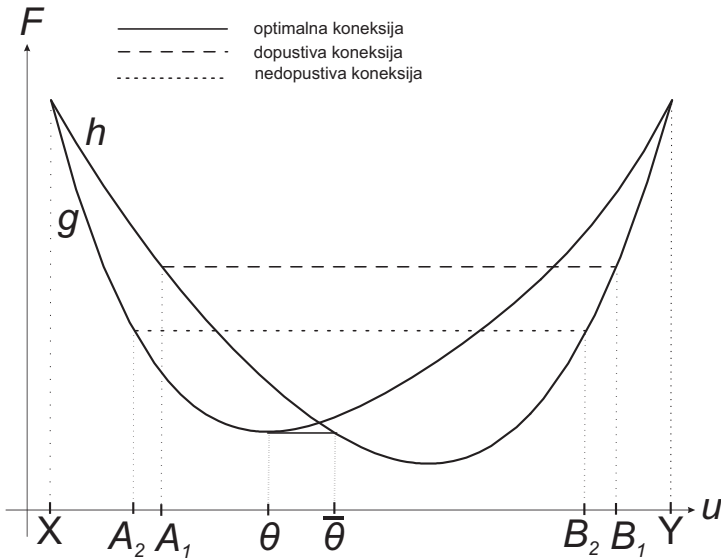
$$h(A) = h(\bar{A}) \quad \text{i} \quad \bar{A} > \theta_h. \quad (4.9)$$

Slično, neka je \bar{B} tačka koja zadovoljava

$$g(B) = g(\bar{B}) \quad \text{i} \quad \bar{B} < \theta_g. \quad (4.10)$$

Kao što smo već napomenuli, u [57] je za svaku koneksiju (A, B) konstruisano odgovarajuće entropijsko rešenje Rimanovog problema (2.11) za jednačinu (2.63). Ova rešenja se sastoje od talasa koji putuju u levo i desno, a povezani su stacionarnim talasom u $x = 0$. U tekstu ispod, prikazaćemo spisak ovih rešenja za slučaj kada se fluksevi g i h seku podkompresibilno.

Radi kraćeg zapisa, uvedimo najpre sledeće oznake:



Slika 4.4: Koneksije prema [1]

S^0 - stacionarni udarni talas u $x = 0$

\vec{S} - udarni talas pozitivne brzine

\overleftarrow{S} - udarni talas negativne brzine

\vec{R} - razređujući talas pozitivne brzine

\overleftarrow{R} - razređujući talas negativne brzine

Pri tome za neko α, β , $S(\alpha, \beta)$ označava skok sa vrednosti α na vrednost β , tj. udarni talas (2.12) brzine (2.2.2), dok $R(\alpha, \beta)$ predstavlja razređujući talas oblika (2.14).

Slučaj 1: $X \leq u_l \leq A$

Ovde imamo nekoliko podslučajeva

Slučaj 1.1: $u_r \leq \bar{B}$

Neka je $\bar{u}_r \in [X, A]$ tako da važi $h(\bar{u}_r) = g(u_r)$. Sada imamo

dva podslučaja:

Slučaj 1.1.1: $u_l \leq \bar{u}_r$. Tada imamo rešenje oblika

$$\overleftarrow{R}(u_l, \bar{u}_r) + S^0(\bar{u}_r, u_r)$$

Slučaj 1.1.2: $\bar{u}_r < u_l < A$. Tada imamo rešenje oblika

$$\overleftarrow{S}(u_l, \bar{u}_r) + S^0(\bar{u}_r, u_r)$$

Slučaj 1.2: $\bar{B} < u_r \leq B$. Tada imamo rešenje oblika

$$\overleftarrow{R}(u_l, A) + S^0(A, B) + \overrightarrow{S}(B, u_r)$$

Slučaj 1.3: $B \leq u_r \leq Y$. Tada imamo rešenje oblika

$$\overleftarrow{R}(u_l, A) + S^0(A, B) + \overrightarrow{R}(B, u_r)$$

Slučaj 2: $A < u_l < \bar{A}$. Tada imamo nekoliko podslučajeva:

Slučaj 2.1: $X \leq u_r \leq \bar{B}$. Tada imamo rešenje oblika

$$\overleftarrow{S}(u_l, \bar{u}_r) + S^0(\bar{u}_r, u_r)$$

Slučaj 2.2:

$\bar{B} < u_r \leq B$. Tada imamo rešenje oblika

$$\overleftarrow{S}(u_l, A) + S^0(A, B) + \overrightarrow{S}(B, u_r)$$

Slučaj 2.3: $B < u_r \leq Y$. Tada imamo rešenje oblika

$$\overleftarrow{S}(u_l, A) + S^0(A, B) + \overrightarrow{R}(B, u_r)$$

Slučaj 3: $\bar{A} \leq u_l \leq Y$. Neka je $\bar{u}_l \in [\theta_g, Y]$ za koje važi $g(\bar{u}_l) = h(u_l)$. Tada imamo sledeće podslučajeve:

Slučaj 3.1: $X \leq u_r \leq \bar{B}$. Tada imamo podslučajeve

Slučaj 3.1.1: $h(u_l) < g(u_r)$. Tada imamo rešenje oblika

$$\overleftarrow{S}(u_l, \bar{u}_r) + S^0(\bar{u}_r, u_r)$$

Slučaj 3.1.2: $h(u_l) \geq g(u_r)$. Tada imamo rešenje oblika

$$S^0(u_l, \bar{u}_l) + \vec{S}(\bar{u}_l, u_r)$$

Slučaj 3.2: $\bar{B} < u_r \leq Y$. Tada imamo podslučajeve

Slučaj 3.2.1: $\bar{B} < u_r < \bar{u}_l$. Tada imamo rešenje oblika

$$S^0(u_l, \bar{u}_l) + \vec{S}(\bar{u}_l, u_r)$$

Slučaj 3.2.2: $\bar{u}_l \leq u_r \leq Y$. Tada imamo rešenje oblika

$$S^0(u_l, \bar{u}_l) + \vec{R}(u_l, \bar{u}_l)$$

Numerički postupak

U [57] je konstruisan numerički postupak tipa Godunova koji za svaki izbor koneksije (A, B) aproksimira odgovarajuće entropijsko rešenje problema (2.63). Za ovaj postupak je definisan **numerički fluks u okolini** $x = 0$ sa

$$\mathcal{F}_{AB}(u_{j-1}, u_j) = \max(\mathcal{H}(u_{j-1}, A), \mathcal{G}(B, u_j)) \quad \text{za } |j| < 2$$

gde su \mathcal{H} i \mathcal{G} numerički fluksevi za postupak Godunova (2.42) konzistentni, redom, sa h i g . Zatim je definisana diskretizacija prostora sa

$$x_j = \left(\frac{2j-1}{2}\right) \Delta x \quad \text{za } j \geq 1, \quad x_j = \left(\frac{2j+1}{2}\right) \Delta x \quad \text{za } j \leq -1$$

i početnog uslova sa

$$u_{j+1}^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+3/2}} u_0(x) dx \quad \text{za } j \geq 0,$$

$$u_{j-1}^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-3/2}}^{x_{j-1/2}} u_0(x) dx \quad \text{za } j \leq 0,$$

dok je diskretizacija vremena $t_n = n\Delta t$ određena odgovarajućim CFL uslovom

$$2\lambda \max\{Lip\ g, Lip\ h\} \leq 1.$$

Numerički postupak tipa Godunova je definisan sa

$$\begin{aligned}
 u_j^{n+1} &= u_j^n - \lambda \left(\mathcal{G}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \mathcal{G}(u_{j-1}^n, u_j^n) \right) \quad \text{za } j \geq 2 \\
 u_1^{n+1} &= u_1^n - \lambda \left(\mathcal{G}(u_1^n, u_2^n) - \mathcal{F}_{AB}(u_{-1}^n, u_1^n) \right) \\
 u_{-1}^{n+1} &= u_{-1}^n - \lambda \left(\mathcal{F}_{AB}(u_{-1}^n, u_1^n) - \mathcal{H}(u_{-2}^n, u_{-1}^n) \right) \\
 u_j^{n+1} &= u_j^n - \lambda \left(\mathcal{H}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \mathcal{H}(u_{j-1}^n, u_j^n) \right) \quad \text{za } j \leq -2
 \end{aligned} \quad . \quad (4.11)$$

Kao što vidimo, ovo je u stvari postupak Godunova za $i \neq \pm 1$.

Konveksno – konkavni slučaj

U [57, 58] je jednačina (2.63) posmatrana u tzv. konveksno – konkavnom slučaju, tj. kada je jedan od flukseva g ili h konveksnog, a drugi konkavnog tipa i fluksevi se seku na krajevima intervala. Kao što će biti detaljnije objašnjeno u odeljku 5.2, u slučaju kada su fluksevi različitih tipova konveksnosti, postoji samo po jedna koneksija, i to (Y, Y) ukoliko je g konveksnog tipa, a h konkavnog tipa i (X, X) u obrnutom slučaju. U skladu s tim, i u ovom slučaju je korišćen numerički postupak oblika (4.11), ali je određivanje numeričkog fluksa \mathcal{F}_{AB} ovoga puta kompleksnije, tj. zavisi od tipa konveksnosti flukseva g i h i međusobnog odnosa vrednosti flukseva na krajevima intervala. Drugim rečima, ukoliko je g konveksnog tipa, a h konkavnog tipa, a $g(X) \leq g(Y)$, tada je \mathcal{F}_{AB} dato sa

$$\mathcal{F}_{AB}(u_{j-1}, u_j) = \min \left(\mathcal{H}(u_{j-1}, Y), \mathcal{G}(Y, u_j) \right) \quad \text{za } |j| < 2,$$

ukoliko je g konveksnog tipa, a h konkavnog tipa, a $g(X) > g(Y)$,

$$\mathcal{F}_{AB}(u_{j-1}, u_j) = \max \left(\mathcal{H}(u_{j-1}, Y), \mathcal{G}(Y, u_j) \right) \quad \text{za } |j| < 2$$

ukoliko je g konkavnog tipa, a h konveksnog tipa, a $g(X) \leq g(Y)$,

$$\mathcal{F}_{AB}(u_{j-1}, u_j) = \max \left(\mathcal{H}(u_{j-1}, X), \mathcal{G}(X, u_j) \right) \quad \text{za } |j| < 2$$

a ukoliko je g konkavnog tipa, a h konveksnog tipa, a $g(X) > g(Y)$,

$$\mathcal{F}_{AB}(u_{j-1}, u_j) = \min \left(\mathcal{H}(u_{j-1}, X), \mathcal{G}(X, u_j) \right) \quad \text{za } |j| < 2.$$

Jednostavnosti radi, ovde ćemo prikazati samo rešenja koja su dobijena u slučaju kada je g konveksnog tipa, h konkavnog tipa, a $g(X) \leq g(Y)$. U tom slučaju, ukoliko je

1. $h(u_l) < h(Y)$, tada $\exists \bar{u}_l \in (\theta_g, Y]$, $g(\bar{u}_l) = h(u_l)$. Ukoliko je pri tome

1.1 $\bar{u}_l \leq u_r$, tada je rešenje oblika $S^0(u_l, \bar{u}_l) + \overrightarrow{R}(\bar{u}_l, u_r)$, dok je u slučaju

1.2 $\bar{u}_l > u_r$, dobijeno rešenje u obliku $S^0(u_l, \bar{u}_l) + \overrightarrow{S}(\bar{u}_l, u_r)$.

Ukoliko je pak

2. $h(u_l) > h(Y)$, tada imamo rešenje oblika $\overleftarrow{S}(u_l, Y) + S^0(Y, Y) + \overrightarrow{S}(Y, u_r)$.

Rešenja u ostalim slučajevima se takođe sastoje od talasa (udarnih ili razređujućih) koji putuju u levo i desno, povezanih sa stacionarnim udarnim talasom, a mogu se naći u [57].

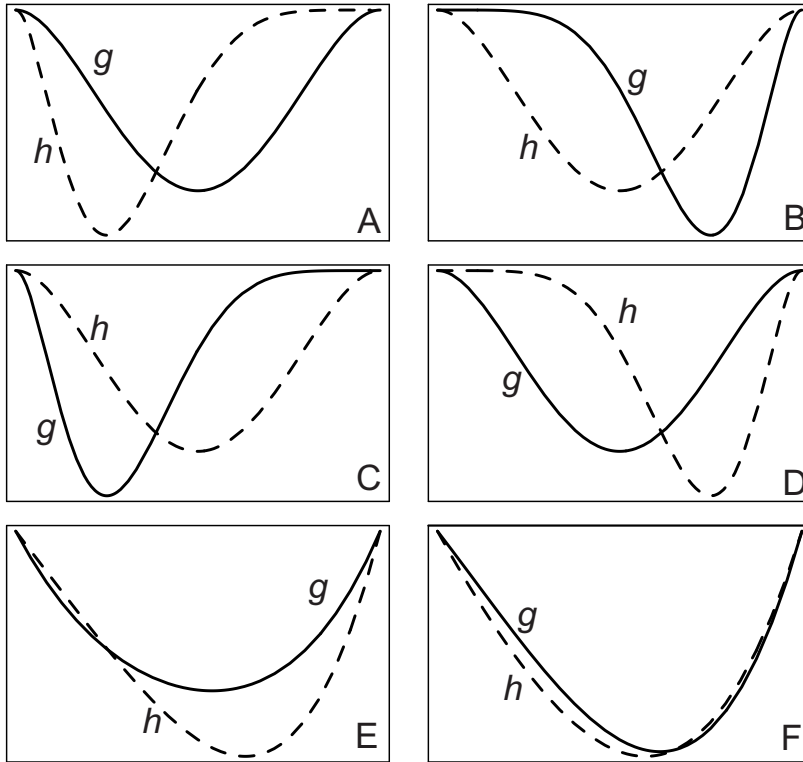
4.2.2 Teorija entropije po Karlsenu, Risebrou i Towersu

U [39] Karlsen, Risebro i Towers su posmatrali jednačinu (2.63) kada su oba fluksa istog tipa konveksnosti, uvodeći pri tome dodatni uslov entropije u okolini $x = 0$ poznat kao *slabi uslov karakteristika*.

Definicija 4.2.5 *Pretpostavimo da par (u^-, u^+) zadovoljava RH-uslov (4.2). Kažemo da (u^-, u^+) zadovoljava **slabi uslov karakteristika** ako važi*

$$\min \{0, h'(u^-)\} \max \{0, g'(u^+)\} = 0 \quad \text{ako je } u^- \neq u^+.$$

Slabi uslov karakteristika zapravo zahteva da karakteristike rešenja idu od diskontinuiteta unazad, barem sa jedne njegove strane, za $u^- \neq u^+$. U slučaju da je $u^- = u^+$, nema nikakvih ograničenja u vezi sa karakteristikama. Jasno je da je slabi uslov karakteristika zadovoljen ukoliko za $u^- \neq u^+$ (u^-, u^+) nije podkompresibilni talas, tj. nije $h'(u_-) < 0, g'(u_+) > 0$.



Slika 4.5: Razne mogućnosti preseka flukseva. Fluksevi u slučajevima C, D i E zadovoljavaju uslov preseka, a u ostalim ne

Pod pretpostavkom da je slabi uslov karakteristika zadovoljen, autori su uspeli da dokažu postojanje jedinstvenog entropijskog rešenja u slučaju da se fluksevi g i h ne seku ili zadovoljavaju tzv. uslov preseka.

Definicija 4.2.6 [39] *Kažemo da funkcije g i h zadovoljavaju uslov preseka ukoliko za svako $u, v \in [X, Y]$ važi*

$$g(u) - h(u) < 0 < g(v) - h(v) \rightarrow u < v. \quad (4.12)$$

Na slici 4.5 su prikazane mogućnosti preseka flukseva. Primetimo da se fluksevi koji zadovoljavaju uslov preseka seku podkompresibilno

(sl. 4.5 C i D), dok kod nadkompresibilnog (sl. 4.5 A i B) uslov preseka nije zadovoljen. Kod regularnog preseka, u slučaju koji vidimo na sl. 4.5 E, jeste zadovoljen uslov preseka, a u slučaju F nije.

U slučaju da se fluksevi ne seku, jedina dopustiva koneksija prema ovim autorima je koneksija (4.7). Ukoliko se fluksevi seku i zadovoljavaju uslov preseka, jedinstvena dopustiva koneksija je $(A, B) = (u_*, u_*)$, gde je u_* tačka preseka flukseva. Slučaj kada fluksevi ne zadovoljavaju uslov preseka, nije bio obuhvaćen ovom teorijom entropije.

S druge strane, ista grupa autora je u [14] razvila teoriju veoma sličnu teoriji iz [1], koja za svaku koneksiju definiše entropijsko rešenje, kao i odgovarajući numerički postupak baziran na modifikaciji postupka Engquist – Osher, čiji fluks u okolini $x = 0$ je oblika:

$$\mathcal{F}_{AB}(u_{j-1}, u_j) := \frac{1}{2} (\bar{h}(u_{j-1}) + \bar{g}(u_j)) - \frac{1}{2} \left(\int_B^{u_j} |\bar{g}'(\omega)| d\omega - \int_A^{u_{j-1}} |\bar{h}'(\omega)| d\omega \right),$$

gde je

$$\bar{h}(u) = \min(h(u), h(A)), \quad \bar{g}(u) = \min(g(u), h(B)).$$

4.3 Neklasična rešenja jednačine sa dva fluksa

U [5], indijski matematičari Adimurthi, Mishra i Gowda su analizirali slučaj jednačine sa dva fluksa kada se fluksevi g i h ne seku i $h(u) > g(u)$ (ili $h(u) < g(u)$) na posmatranom domenu pa RH-uslov (4.3) u $x = 0$ ne može biti zadovoljen. Upravo iz tog razloga, za ovaj problem ne postoje klasična slaba rešenja (koja se sastoje od udarnih i razređujućih talasa). Autori ovog rada su zamenili standardni RH-uslov takozvanim *slabim RH-uslovom* koji zavisi od međusobnog odnosa flukseva. Tako na primer, ako je h konveksnog tipa, a g konkavnog tipa i

$h(u) > g(u)$ za svako u na posmatranom intervalu, slabi RH-uslov glasi

$$h(u^-) \geq g(u^+).$$

U skladu s tim, autori ovog rada definišu *generalizovana entropijska rešenja* (GES)¹. U tom slučaju, GES je zapravo istog oblika kao i početni uslov ukoliko je zadovoljen uslov nadkompresibilnosti

$$h'(u_l) > 0 > g'(u_r).$$

Takođe su posmatrali i slučaj kada su oba fluksa linearna i $h' > 0 > g'$. Poznato je da i u ovom slučaju jednačina (2.63) nema klasična rešenja (detalji će biti izloženi u glavi 6). Opet, GES zadržava oblik početnog uslova.

Prema [5], GES predstavljaju ograničena rešenja, i mogu da se dobiju kao granične vrednosti modifikovanog postupka Godunova. Autori ovog rada upoređuju GES sa rezultatima koje bi se dobili kada bi se koristio postupak Godunova na razređenoj mreži opisan u [38], a koji je zapravo definisan za slučajeve kada RH-uslov u $x = 0$ može biti zadovoljen. U slučajevima kada RH-uslov ne može biti zadovoljen, navedena numerička šema daje rešenje u kome se u $x = 0$ pojavljuje (citiramo) *veliki prebačaj* (engl. *overshoot*, izolovana tačka čija se vrednost povećava s vremenom, tj. rešenje je neograničeno), a pokalpa se sa GES u svim ostalim delovima (tj. ukoliko izuzmemo tačku $x = 0$). Ovaj rezultat je poslužio kao podsticaj za istraživanje koje ćemo izložiti u glavi 6, gde ćemo dokazati da pomenuti prebačaj u stvari predstavlja singularni udarni talas.

¹GES – od engl. *Generalized entropy solutions*

II | Rezultati istraživanja

Numeričke procedure za dopustive DSP

U okviru ove glave ćemo izložiti teoriju o dopustivim rešenjima zakona održanja sa prekidnom funkcijom fluksa koju smo razvili tokom izrade ove teze. Analiziraćemo jednačinu sa prekidom fluksa u $x = 0$ oblika (2.63). U okviru odeljka 5.1 ćemo najpre izložiti slučaj kada su fluksevi levo i desno od tačke prekida istog tipa konveksnosti. Pri tome ćemo, bez uticaja na opštost, razmatrati samo slučaj kada su oba fluksa konveksnog tipa, jer je slučaj kada su oba fluksa konkavnog tipa veoma sličan. Takođe ćemo analizirati i specijalan oblik jednačine (2.63), tzv. multiplikativnu jednačinu oblika (2.62). Potom ćemo u okviru odeljka 5.2 analizirati slučaj kada su fluksevi različitog tipa konveksnosti.

U procesu konstrukcije rešenja za posmatrani problem, najpre ćemo izvršiti regularizaciju funkcije fluksa, a potom dokazati postojanje DSP-a za postupak Godunova za zakone održanja sa prostorno promenljivim fluksom. Da bismo iz skupa DSP-ova izdvojili pravilna rešenja, definisaćemo diskretan uslov entropije koji će povlačiti zadovoljenje entropijske

nejednakosti Kružkova talasa kome će težiti DSP kada parametar regularizacije pustimo da teži nuli.

Regularizacija fluksa koju ćemo koristiti ovom prilikom, kao i diskretni uslov entropije koji ćemo izvesti, su nezavisni od bilo kog fizičkog modela. Međutim, s obzirom na činjenicu da iste jednačine, za različite fizičke modele imaju različita relevantna rešenja, prikazaćemo i primer konstrukcije specijalnih regularizacija, konstruisanih tako da se njihovom primenom mogu dostići neka od fizički relevantnih rešenja određenih modela.

U okviru odeljka 5.1, upoređićemo dobijene rezultate sa rezultatima drugih autora.

U ovoj glavi ćemo prikazati i nekoliko numeričkih primera, u kojima se mogu videti grafici DSP-ova.

5.1 Slučaj sa fluksevima konveksnog tipa

Posmatrajmo najpre jednačinu zakona održanja sa dva fluksa (2.63) zajedno sa početnim uslovom (2.11) pod pretpostavkom da su fluksevi g i h konveksnog tipa (vidi definiciju 4.2.1). Namera nam je da dobijemo jedinstveni entropijski DSP za ovaj problem. Kao što smo videli u prethodnom poglavlju, uslovi entropije kod jednačina zakona održanja sa prekidnim fluksom se razlikuju od autora do autora. Razlog za ovo leži u tome što su oni razvijani u kontekstu različitih fizičkih modela. Prema [15], izgleda na ne postoji univerzalni uslov entropije za opšti oblik zakona održanja (2.63). U istom radu se mogu naći detalji i dodatna objašnjenja na ovu temu.

Osnovna ideja nam je da posmatramo jednačinu (2.63) u opštem slučaju, nezavisno od bilo kojeg fizičkog problema koji ova jednačina može modelovati. Namera nam je da definišemo uslove entropije koristeći DSP za perturbovanu varijantu jednačine (2.63). U odeljku 3.1 smo videli da DSP u stvari predstavlja tačno rešenje numeričke aproksimacije

zakona održanja.

Jednačinu (2.63) možemo zapisati i u obliku

$$u_t + F(x, u)_x = 0,$$

gde je

$$F(x, u) = H(x)g(u) + (1 - H(x))h(u). \quad (5.1)$$

Gornju jednačinu ćemo aproksimirati jednačinom

$$u_t + (F_\varepsilon(x, u))_x = 0, \quad (5.2)$$

gde je F_ε neprekidno diferencijabilna aproksimacija fluksa F , (vidi (5.8), (5.9)). Ovu jednačinu ćemo potom rešavati postupkom Godunova za zakone održanja sa prostorno promenljivim fluksom, koji smo opisali u odeljku 2.4.1. Od dobijenih DSP-ova ćemo izabrati onaj koji zadovoljava diskretan oblik entropijske nejednakosti Kružkova. Pri tome ćemo smatrati da je udarni talas entropijsko rešenje jednačine (2.63) ukoliko entropijski DSP njene perturbovane jednačine konvergira ka tom talasu. Drugim rečima, postojanje entropijskog DSP-a ćemo postaviti kao entropijski kriterijum za udarne talase, što predstavlja alternativan pristup kriterijumu iščezavajuće viskoznosti. Pri tome će centralni problem biti u određivanju entropijskog dela rešenja u okolini $x = 0$ gde imamo fluks koji je prostorno zavisian, dok van okoline nule imamo neprekidan, prostorno nezavisian fluks. Kao što smo napomenuli u odeljku 3.3, u slučaju neprekidnog i prostorno nezavisnog fluksa je u [27] dokazana egzistencija entropijskog DSP-a za postupak Godunova pod uslovom da je zadovoljen entropijski uslov Olejnika (2.18).

5.1.1 Uvodne oznake i pretpostavke

Radi bolje preglednosti, izdvojićemo neke od oznaka i pretpostavki (označićemo ih sa H) koje ćemo koristiti u daljem tekstu ovog odeljka.

Označimo sa $I = [X, Y]$ domen flukseva g i h , pri čemu je $-\infty < X < Y < +\infty$.

H1: Fluksevi $g, h \in C^1(I)$ i zadovoljavaju $g(X) = h(X)$ i $g(Y) = h(Y)$.

H2: U skladu sa definicijom 4.2.1, fluksevi g i h su konveksnog tipa.

Označimo jedinstvene minimume flukseva g i h na intervalu I redom sa θ_g i θ_h , tj.

$$g(\theta_g) = \min_{u \in I} g(u) \quad \text{i} \quad h(\theta_h) = \min_{u \in I} h(u).$$

Slučaj kada su oba fluksa konkavnog tipa je veoma sličan pa ga nećemo razmatrati u okviru ove teze.

H3: Fluksevi g i h se seku u najviše u jednoj tački u unutrašnjosti I . Označimo tačku preseka flukseva sa u_* . Pri tome presek flukseva može biti regularan, podkompresibilan ili nadkompresibilan, u skladu sa definicijom 4.2.2.

Koneksije u skladu sa definicijom 4.2.3, ćemo označavati sa (A, B) .

5.1.2 Rimanov problem

Objasnićemo najpre ukratko Rimanov problem koji ćemo koristiti za konstrukciju DSP–a. Posmatrajmo problem (2.63), (2.11) pod pretpostavkama H1 – H3 uvedenim u odeljku 5.1.1. U opštem slučaju, Rimanov problem (2.63), (2.11) ima jedinstveno rešenje u obliku stacionarnog udarnog talasa $S^0(A, B)$ za svaku koneksiju (A, B) u $x = 0$ koji je povezan sa levim udarnim $\overleftarrow{S}(u_l, A)$ ili razređujućim $\overleftarrow{R}(u_l, A)$ talasom, i desnim udarnim $\overrightarrow{S}(B, u_r)$ ili razređujućim $\overrightarrow{R}(B, u_r)$ talasom. Jasno je da bi levi talas morao imati negativnu brzinu, a desni pozitivnu, jer bi u suprotnom došlo do interakcije talasa. Talas u $x = 0$ je stacionaran, jer svaka koneksija povlači RH-uslov za brzinu talasa jednaku nuli.

Pojava udarnih ili razređujućih talasa sa leve i desne strane $x = 0$ zavisi od toga da li parovi (u_l, A) i (B, u_r) redom zadovoljavaju Olejnikov uslov entropije, pošto se javljaju na neprekidnom delu fluksa. Tako na primer, ukoliko par (B, u_r) zadovoljava Olejnikov uslov entropije, a (u_l, A) ne, tada je rešenje jednačine (2.63) oblika

$$\overleftarrow{R}(u_l, A) + S^0(A, B) + \overrightarrow{S}(B, u_r),$$

pri čemu operacija "+" označava spajanje talasa.

Međutim, glavni akcenat u ovoj tezi je na udarnim talasima. Bilo viskozni ili diskretni, udarni profili se uglavom razmatraju za pojedinačne talase. Upravo iz tog razloga ćemo se usredsrediti na slučaj kada u rešenju pored stacionarnog udarnog talasa imamo samo jedan putujući udarni talas, na primer desni. U skladu s tim, biramo levu konstantu početnog uslova, tj. pretpostavićemo da je $u_l = A$ (naravno, isto tako smo mogli razmatrati i levi talas, a fiksirati desnu stranu).

Dakle, razmatraćemo rešenja oblika

$$S^0(A, B) + \overrightarrow{S}(B, u_r),$$

tj.

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l = A, & x < 0 \\ B, & 0 < x < st \\ u_r, & x > st \end{cases}, \quad (5.3)$$

gde je

$$s = s(B, u_r) = \frac{g(B) - g(u_r)}{B - u_r} > 0 \quad (5.4)$$

a par (B, u_r) zadovoljava Olejnikov uslov entropije

$$\frac{g(u) - g(B)}{u - B} \geq s \geq \frac{g(u) - g(u_r)}{u - u_r} \quad (5.5)$$

za sve u između B i u_r .

Namera nam je da dokažemo egzistenciju DSP-a za (5.3) za svaku koneksiju i da odredimo koneksiju koja gradi entropijski DSP. Naglasimo da egzistencija entropijskog DSP-a za desni talas $\overrightarrow{S}(u_r, B)$ sledi iz

Olejniovog uslova entropije (5.5), što je pokazano u [27]. Dakle, glavni predmet istraživanja će u stvari biti stacionarni talas $S^0(A, B)$.

U skladu sa uslovom da desni talas ima pozitivnu brzinu i da za zadovoljava Olejnikov uslov entropije, definisaćemo dopustiv skup vrednosti u_r za svaku koneksiju sa

$$\mathcal{A}(A, B) := \{u_r | s(B, u_r) \geq 0 \text{ i (5.5) važi } \forall u \in (u_r, B)\}. \quad (5.6)$$

Primitimo da iz definicije koneksije (4.5) (vidi definiciju 4.2.3) sledi da je $S^0(A, B)$ podkompresibilan ili marginalno podkompresibilan talas. Čak šta više, naša pretpostavka $u_l = A$ znači da mi u stvari posmatramo slučaj kada je $h'(u_l) \leq 0$.

Pored toga, pokazaćemo da je naša teorija entropije takođe primenljiva i u obrnutom slučaju, tj. kada je $h'(u_l) > 0$. Ispostaviće se da tada uvek postoji entropijsko rešenje jednačine (2.63) oblika

$$S^0(u_l, \bar{u}_l) + \vec{S}(\bar{u}_l, u_r) \quad (5.7)$$

gde je \bar{u}_l dato sa

$$g(\bar{u}_l) = h(u_l) \quad \text{i} \quad \bar{u}_l > \theta_g,$$

i $u_r \in \mathcal{A}(u_l, \bar{u}_l)$. Definicija $\mathcal{A}(u_l, \bar{u}_l)$ je konzistentna sa (5.6), tako da u ovom slučaju imamo par (u_l, \bar{u}_l) umesto koneksije (A, B) . Primitimo da (u_l, \bar{u}_l) u stvari ne predstavlja koneksiju jer je $h'(u_l), g'(\bar{u}_l) > 0$, tj. $S^0(u_l, \bar{u}_l)$ je regularni udarni talas.

5.1.3 Egzistencija entropijskih DSP-a za zakon održanja sa dva fluksa

Posmatrajmo sada (2.63), (2.11) pod pretpostavkama H1 – H3 koje smo naveli u odeljku 5.1.1. Namera nam je da pronađemo DSP za perturbaciju ovog problema za svaku dopustivu koneksiju (A, B) (definiciju dopustive koneksije uvodimo u tekstu ispod) koji konvergiraju ka (5.3). Jedan deo ovoga je izuzetno jednostavan s obzirom da se, kao što smo već

napomenuli, možemo osloniti na rezultate iz [27] i dobiti DSP za putujućí talas koji je sastavni deo očekivanog rezultata. S toga nam preostaje da pronađemo entropijski DSP za stacionarni talas.

Koristićemo regularizaciju fluksa (5.1) $F_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R} \times I)$ tako da je

$$F_\varepsilon(x, u) = F(x, u) \quad \text{za} \quad |x| \geq \varepsilon, \quad (5.8)$$

gde je $\varepsilon > 0$ dovoljno malo, i perturbovani problem rešavati postupkom Godunova za zakone održanja sa prostorno promenljivim fluksom, koji smo opisali u odeljku 2.4.1. U okviru ove glave, pod nazivom „postupak Godunova”, smatraćemo postupak Godunova sa promenljivim fluksom.

Međutim, najpre ćemo uvesti dodatni uslov za dopustivost regularizacije.

Definicija 5.1.1 *Kažemo da je regularizacija $F_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R} \times I)$ data sa (5.8) dopustiva ako*

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(x, u) < F_\varepsilon(y, u) & \quad \text{za} \quad g(u) > h(u) \quad i \\ F_\varepsilon(x, u) > F_\varepsilon(y, u) & \quad \text{za} \quad g(u) < h(u) \end{aligned} \quad (5.9)$$

važi za svako $x, y \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ tako da je $x < y$, i svako $u \in I$.

Napomena 5.1.1 *Uslov (5.9) obezbeđuje da se $F_\varepsilon(x, u)$ i $F_\varepsilon(y, u)$ seku samo na krajevima intervala I i u tački preseka flukseva $u_* \in I$ za svako $x, y \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.*

Primer 5.1.1 *Navedimo uopštenje regularizacije iz [11]*

$$F_\varepsilon(x, u) = \begin{cases} h(u), & x \leq -\varepsilon \\ \frac{g(u) - h(u)}{2\varepsilon^2}(x + \varepsilon)^2 + h(u), & -\varepsilon \leq x \leq 0 \\ \frac{h(u) - g(u)}{2\varepsilon^2}(x - \varepsilon)^2 + g(u), & 0 \leq x \leq \varepsilon \\ g(u), & x \geq \varepsilon \end{cases} \quad (5.10)$$

kao primer dopustive regularizacije. Izvršimo sada diskretizaciju fluksa (5.10) na intervalu $[-\varepsilon, \varepsilon]$ gde je

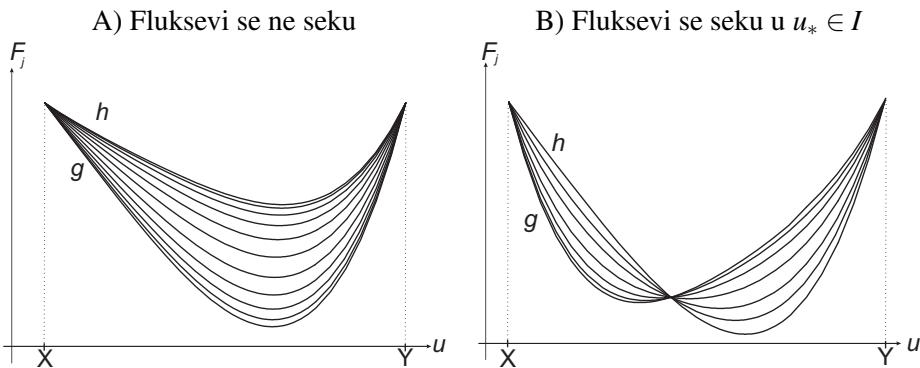
$$\varepsilon = j^* \Delta x, \quad (5.11)$$

za neko $j^* \in \mathbb{N}$ i definišimo

$$J = \{-j^*, -j^* + 1, \dots, j^*\}. \quad (5.12)$$

Diskretni nizovi flukseva $\{F_j\}_{j \in J}$ za (5.10) u slučaju kada se g i h ne seku ili se seku u jednoj tački unutar intervala I su prikazani na sl. 5.1 A) i 5.1 B) redom.

Napomena 5.1.2 Niz $\{F_j\}_{j \in J}$ na sl. 5.1 smo generisali implementirajući glačanje (5.10) u odgovarajući matematički program uz parametar $j^* = 6$. Primetimo da iz (5.12) sledi $|\{F_j\}_{j \in J}| = |J| = 2j^* + 1$, što znači da diskretna niz grafika u našem slučaju sadrži 13 krivih. Međutim, radi preglednosti slike, obrisali smo nekoliko krivih linija. Isto važi i za sl. 5.1 – sl. 5.7 ispod.



Slika 5.1: Niz diskretnih flukseva dopustive regularizacije

Napomena 5.1.3 Uslov (5.9) u stvari obezbeđuje da se $F_\varepsilon(x, u)$ i $F_\varepsilon(y, u)$ seku samo na krajevima intervala I i u tački preseka flukseva g i h tj. $u_* \in I$ za svako $x, y \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. (Ovo će biti pokazano u slučaju kada imamo flukseve različitog tipa konveksnosti, lema 5.2.1, poglavlje 5.2). Ovakva osobina regularizacije je pogodna sa matematičkog stanovišta, a pored toga relacija (5.9) definiše široku klasu regularizacija. Čak šta više, korišćenje regularizacije (5.9) u našem konceptu rešenja obezbeđuje jedinstvenost entropijskog rešenja. Međutim, kao što smo videli

u glavi 4, različiti fizički modeli imaju različita relevantna rešenja, što znači da ne možemo dostići sva rešenja koristeći regularizaciju koja zadovoljava (5.9). Rešenje ovog problema je u blagom popuštanju uslova (5.9), kako bismo dobili regularizaciju koja nam dopušta konstrukciju DSP-ova čije granične vrednosti predstavljaju fizički relevantna rešenja specifičnih modela. Detaljno objašnjenje i primeri su dati u odeljku 5.1.5.

Nakon regularizacije fluksa (5.8) koja je određena sa (5.9), jednačina (2.63) postaje

$$u_t + F_\varepsilon(x, u)_x = 0. \quad (5.13)$$

Odaberimo sada iz skupa svih koneksija one koje su dopustive u skladu sa regularizacijom u sledećem smislu:

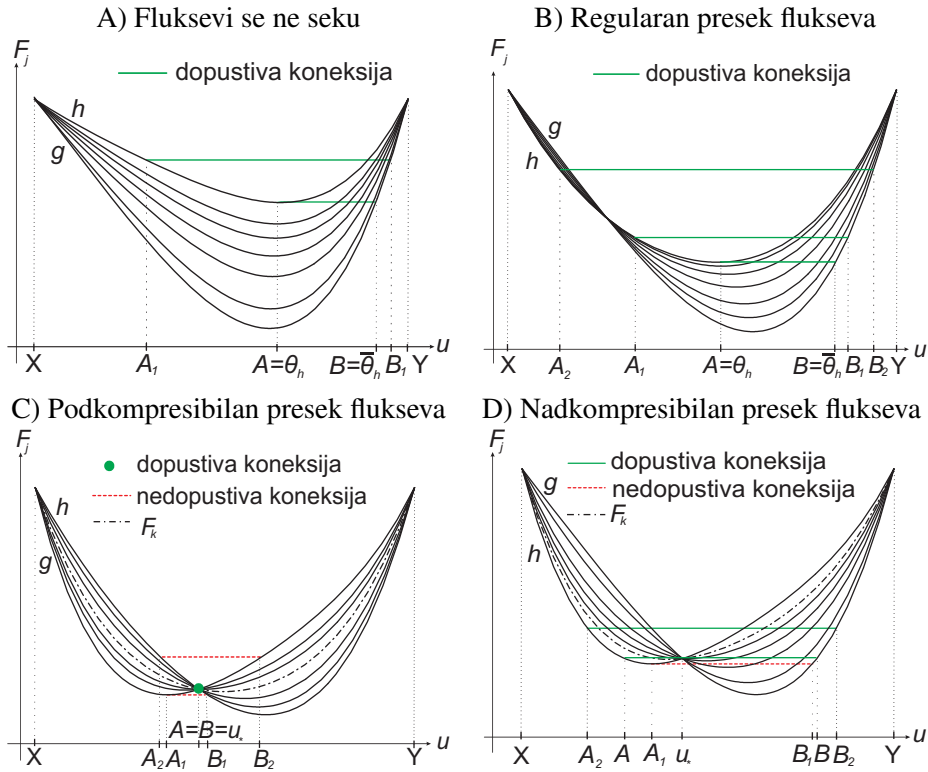
Definicija 5.1.2 Kažemo da je koneksija (A, B) dopustiva u odnosu na regularizaciju ako jednačina

$$F_\varepsilon(x, u) = h(A)$$

ima realna rešenja u intervalu I za svako $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

U nastavku, ove koneksije ćemo jednostavno zvati *dopustivim*. Na sl. 5.2 vidimo primere dopustivih i nedopustivih koneksija u raznim slučajevima preseka flukseva. Kao što vidimo, kada se fluksevi g i h ne seku, ili im je presek regularan, sl. 5.2 A) i B) redom, svaka koneksija data sa (4.5) je dopustiva. S druge strane, iz sl. 5.2 C) zaključujemo da je u slučaju podkompresibilnog preseka flukseva jedina dopustiva koneksija određena tačkom preseka, tj. $A = B = u_*$, jer druge koneksije, kao npr. (A_1, B_1) ili (A_2, B_2) ne seku F_k za svako $k \in J$. Kod nadkompresibilnih preseka flukseva, sve koneksije iznad koneksije (A, B) određene sa $h(A) = g(B) = h(u^*)$ su dopustive, sl. 5.2 D).

Teorema 5.1.1 Neka je ε dovoljno malo. Uz oznake i pretpostavke H1-H3 iz odeljka 5.1.1, jednačina (5.13) ima DSP za postupak Godunova čija granična vrednost je oblika



Slika 5.2: Dopustivost koneksija u raznim slučajevima preseka flukseva

- (5.3) za svaku dopustivu koneksiju i $u_l = A$, $u_r \in \mathcal{A}(A, B)$,
- (5.7) za $h'(u_l) > 0$ i $u_r \in \mathcal{A}(u_l, \bar{u}_l)$.

Dokaz Rešenje jednačine (2.63) je ekvivalentno rešenju sistema

$$\begin{aligned} u_t + h(u)_x &= 0, x < 0 \\ u_t + g(u)_x &= 0, x > 0 \end{aligned} \tag{5.14}$$

i u zadovoljava RH-uslov (4.2), gde su u^+ i u^- dati sa (4.3). Namera nam je da pronađemo DSP za udarne talase sa desne strane $x = 0$. Jednostavnosti radi, prikazaćemo samo dokaz egzistencije DSP-a koji za $\varepsilon \rightarrow 0$

konvergiraju ka (5.3), tj. za $A = u_l$, i $u_r \in \mathcal{A}(A, B)$, dok je dokaz egzistencije DSP-a čija je granična vrednost za $\varepsilon \rightarrow 0$ oblika (5.7) veoma slična. Stoga, neophodno je da rešimo dva problema.

Prvi problem je jednačina (5.13) zajedno sa

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l = A, & x < 0 \\ B, & 0 < x \leq \varepsilon \end{cases} . \quad (5.15)$$

Egzistencija koneksije (A, B) zahteva zadovoljenje uslova

$$F_\varepsilon(\varepsilon, B) = F_\varepsilon(-\varepsilon, A). \quad (5.16)$$

Pošto se za $x \geq \varepsilon$ problem (5.14) redukuje na

$$u_t + g(u)_x = 0, \quad (5.17)$$

sa početnim uslovom

$$u_0(x) = \begin{cases} B, & x < \varepsilon, \\ u_r, & x > \varepsilon \end{cases} , \quad (5.18)$$

problem (5.17), (5.18) predstavlja drugi problem koji treba rešavati. Očigledno je da se DSP za naš problem sastoji iz dva nezavisna dela: stojećeg DSP-a u $x = 0$, i DSP-a desno od $x = 0$, a koji se prostire od $x = \varepsilon$ u desno, tj. brzina mu je pozitivna. Upravo iz ovog razloga možemo dokaz podeliti na dva dela. Krenimo najpre od problema (5.13), (5.15).

Nakon diskretizacije ovog problema na intervalu $[-\varepsilon, \varepsilon]$ gde su j^* i J dati redom sa (5.11) i (5.12) dobijamo sledeći niz Rimanovih problema

$$u_t + F_{j-1}(u)_x = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_{j-1}^n, & x < x_{j-1/2} \\ \tilde{u}_{l, j-1/2}, & x > x_{j-1/2} \end{cases} \quad (5.19)$$

i

$$u_t + F_j(u)_x = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} \tilde{u}_{r, j-1/2}, & x < x_{j-1/2} \\ u_j^n, & x > x_{j-1/2} \end{cases} . \quad (5.20)$$

Za stacionarni DSP u $x = 0$ bi trebalo da važi $u_j^{n+1} = u_j^n = u_j$ za svako j i n . Zato, da bismo rešili probleme (5.19) i (5.20), moramo pronaći vrednosti $\tilde{u}_{l,j-1/2}$ i $\tilde{u}_{r,j-1/2}$ za koje važi (2.4.1), takve da se u_{j-1} može povezati sa $\tilde{u}_{l,j-1/2}$ isključivo pomoću talasa koji putuju u levo, tj.

$$c_{l,j} := \frac{F_{j-1}(\tilde{u}_{l,j-1/2}) - F_{j-1}(u_{j-1})}{\tilde{u}_{l,j-1/2} - u_{j-1}} \leq 0,$$

odnosno $\tilde{u}_{l,j-1/2} = u_{j-1}$ što odgovara slučaju $F_{j-1}(\tilde{u}_{l,j-1/2}) = F_{j-1}(u_{j-1})$ i $c_{l,j} = 0$, a $\tilde{u}_{r,j-1/2}$ sa u_j isključivo pomoću talasa koji putuju u desno, tj.

$$c_{r,j} := \frac{F_j(u_j) - F_j(\tilde{u}_{r,j-1/2})}{u_j - \tilde{u}_{r,j-1/2}} \geq 0,$$

odnosno $\tilde{u}_{r,j-1/2} = u_j$.

Iz činjenice $A = u_l$ sledi da je brzina $c_{l,-j^*+1} = 0$. Ukoliko bi bilo $c_{r,j} > 0$, $j < j^*$, tada bi došlo do interakcije talasa koji spaja u_j i $\tilde{u}_{r,j-1/2}$ sa talasom koji spaja $\tilde{u}_{l,j+1/2}$ i $\tilde{u}_{r,j+1/2}$ čija je brzina jednaka nuli, što bi bilo kontradiktorno sa relacijom $u_j^n = u_j$ za neko n . Za $j = j^*$ vidimo da je $g(B) = F_{j^*}(u_{j^*}) = F_{-j^*}(u_{-j^*}) = h(A)$ na osnovu (5.16). Međutim, kao što smo već videli,

$$F_{j^*-1}(\tilde{u}_{l,j^*-1/2}) = F_{j^*-1}(u_{j^*-1}) = \dots = F_{-j^*}(u_{-j^*}).$$

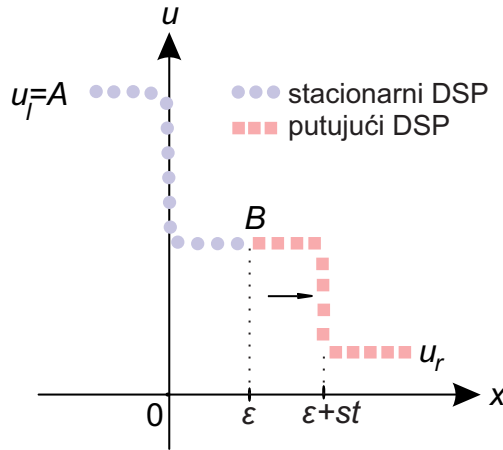
Oдавde sledi da je $c_{r,j^*} = 0$. Na osnovu toga dobijamo

$$F_j(u_j) = F_{j-1}(u_{j-1}) = g(B) = h(A), \quad j = -j^* + 1, \dots, j^*. \quad (5.21)$$

S druge strane, problem (5.17), (5.18) ima rešenje u obliku udarnog talasa brzine

$$s = \frac{g(u_r) - g(B)}{u_r - B}.$$

Kao što smo već napomenuli, postojanje DSP-a skalarne jednačine sa neprekidnim fluksom i početnim uslovom koji ima prekid u $x = 0$, je dokazana u [27]. Ovaj rezultat možemo da primenimo u našem slučaju,



Slika 5.3: Unija stacionarnog i putujućeg DSP-a daje novi DSP za problem (5.13), (2.11)

jer je naš početni problem samo transliran u $x = \varepsilon$. Preostaje nam samo još da iskombinujemo putujući talas sa gore dobijenim stacionarnim talasom. Naime, putujući DSP u ovom slučaju ima vrednost jednaku B za $\varepsilon < x < st + \varepsilon$, dok stacionarni DSP za problem (5.13), (5.15) ima vrednost jednaku B za $x = \varepsilon$, kao što smo već dokazali. S obzirom da je putujući DSP pozitivne brzine, unija ova dva DSP-a predstavlja novi DSP za problem (5.13) sa početnim vrednostima (2.11), vidi sl. 5.3. (2.11) Napomenimo još i da je dokaz postojanja DSP-a sa граниčnom vrednošću oblika (5.7) analogan, a zasnovan je na rešavanju problema (5.13) zajedno sa

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ \bar{u}_l, & 0 < x \leq \varepsilon \end{cases} \quad (5.22)$$

i (5.17) sa

$$u_0(x) = \begin{cases} \bar{u}_l, & x < \varepsilon \\ u_r, & x > \varepsilon \end{cases} .$$

Ovim je teorema dokazana. \square

Međutim, rešenje jednačine (5.21) nije jedinstveno pa iz tog razloga uvodimo odgovarajući uslov entropije. Drugim rečima, namera nam je

da pronađemo koneksiju (A, B) za (5.21) koja dopušta entropijski DSP za perturbovani problem (5.13) za različite tipove preseka flukseva za postupak Godunova. Kao što ćemo videti, ukoliko takva koneksija postoji, ispostaviće se da je ona jedinstvena.

Krenimo najpre od definisanja diskretnog uslova entropije za naš problem. Kao što smo napomenuli u odeljku 2.4.2 (strana 49), nejednakost entropije tipa Kružkova u našem slučaju na osnovu (2.68) glasi

$$|u - c|_t + \left(\text{sign}(u - c) (F_\varepsilon(x, u) - F_\varepsilon(x, c)) \right)_x + \text{sign}(u - c) F_\varepsilon(x, c)_x \leq 0. \quad (5.23)$$

Namera nam je sada da pronađemo odgovarajući diskretni oblik nejednakosti (5.23). U tu svrhu ćemo uvesti sledeću oznaku

$$G(x, u) := \text{sign}(u - c) (F_\varepsilon(x, u) - F_\varepsilon(x, c)).$$

Neka je $\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)_{app} (x_j, u_j^n)$ aproksimacija izraza $\frac{\partial G}{\partial x} (x_j, u_j^n)$ u obliku diferencnog količnika. Tada bi trebalo da važi

$$\frac{\partial G}{\partial x} (x_j, u_j^n) - \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)_{app} (x_j, u_j^n) \leq 0, \quad (5.24)$$

jer bismo u suprotnom uticali na nejednakost (5.23). Naime, koristeći obrnut znak nejednakosti u (5.24), veštački bismo smanjivali vrednost parcijalnog izvoda izraza G u svakoj tački (x_j, t_n) , što bi se akumuliralo prilikom sumiranja diskretne nejednakosti po prostoru i vremenu. Na ovaj način bismo mogli dobiti DSP koji zadovoljava diskretni oblik nejednakosti entropije (5.23), a da pri tom njegova granična vrednost uopšte ne zadovoljava nejednakost (5.23). Drugim rečima, uslov (5.24) obezbeđuje da granična vrednost DSP-a koji zadovoljava diskretni oblik nejednakosti (5.23), takođe zadovoljava uslov entropije.

Iz Tejlorovog reda za funkcije dve promenljive dobijamo

$$G(x_j \pm \Delta x, u_j^n \pm \Delta u_j^n) = G(x_j, u_j^n) \pm \Delta x \frac{\partial G}{\partial x} (x_j, u_j^n) \pm \Delta u_j^n \frac{\partial G}{\partial u} (x_j, u_j^n) + O(k_{j,n}^2)$$

gde je $\Delta u_j^n = u_j^n - u_{j-1}^n$ i $k_{j,n} = \max(\Delta x, \Delta u_j^n)$. Odavde sledi

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_j, u_j^n) - \nabla[G_j] = -\mu_j \frac{\partial G}{\partial u}(x_j, u_j^n) + O(k_{j,n}^2) \text{ za } u_{j-1}^n < u_j^n \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_j, u_j^n) - \nabla[G_j] = \mu_j \frac{\partial G}{\partial u}(x_j, u_j^n) + O(k_{j,n}^2) \text{ za } u_{j-1}^n > u_j^n \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_j, u_j^n) - \Delta[G_j] = -\mu_{j+1} \frac{\partial G}{\partial u}(x_j, u_j^n) + O(k_{j+1,n}^2) \text{ za } u_j^n < u_{j+1}^n \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_j, u_j^n) - \Delta[G_j] = \mu_{j+1} \frac{\partial G}{\partial u}(x_j, u_j^n) + O(k_{j+1,n}^2) \text{ za } u_j^n > u_{j+1}^n \quad (5.28)$$

pri čemu

$$\nabla[G_j] = \frac{G(x_j, u_j^n) - G(x_{j-1}, u_{j-1}^n)}{\Delta x}, \Delta[G_j] = \frac{G(x_{j+1}, u_{j+1}^n) - G(x_j, u_j^n)}{\Delta x},$$

redom označava aproksimaciju parcijalnog izvoda izraza G u tački (x_j, u_j^n)

pomoću diferencnih količnika unazad i unapred, a $\mu_j = \frac{|\Delta u_j^n|}{\Delta x} \geq 0$.

Iz (5.24) i (5.25) dobijamo uslov

$$\frac{\partial G}{\partial u}(x_j, u_j^n) \geq 0$$

što povlači

$$\text{sign}(u_j^n - c) \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial u}(x_j, u_j^n) = \text{sign}(u_j^n - c) F_j'(u_j^n) \geq 0 \quad (5.29)$$

Lako se može proveriti da je slučaj $c \notin (u_{j-1}^n, u_j^n)$ trivijalan, pošto je tada desna strana diskretne nejednakosti entropije dobijena korišćenjem diferencnih količnika unazad (vidi (5.30) ispod) jednaka nuli. U slučaju kada je $u_{j-1}^n < c < u_j^n$, uslov (5.29) postaje $F_j'(u_j^n) \geq 0$, pošto je tada $\text{sign}(u_j^n - c) > 0$. Slično, kombinovanjem (5.24) i (5.26), dobijamo $F_j'(u_j^n) \geq 0$, jer je tada $\text{sign}(u_j^n - c) < 0$. Na isti način, iz (5.27) i (5.28), redom, dobijamo uslov $F_j'(u_j^n) \leq 0$.

Sve u svemu, možemo zaključiti da se za $F'_j(u_j^n) \geq 0$, korektna aproksimacija izraza $\frac{\partial G}{\partial x}(x_j, u_j^n)$ dobija korišćenjem diferencnih količnika unazad, (jer se upravo ovom vrstom aproksimacije izbegava veštačko umanjenje vrednosti parcijalnog izvoda izraza G u tačkama (x_j, u_j^n) što bi moglo dovesti do pojave entropijskog DSP-a čija granična vrednost ne zadovoljava uslov entropije, što je objašnjeno u tekstu iznad). Na ovaj način dobijamo diskretni oblik nejednakosti entropije (5.23)

$$\begin{aligned} & |u_j^{n+1} - c| - |u_j^n - c| + \lambda(\text{sign}(u_j^n - c)(F_j(u_j^n) - F_j(c)) \\ & \quad - \text{sign}(u_{j-1}^n - c)(F_{j-1}(u_{j-1}^n) - F_{j-1}(c))) \\ & \quad + \lambda \text{sign}(u_j^n - c)(F_j(c) - F_{j-1}(c)) \leq 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Na sličan način kao i za $F'_j(u_j^n) \geq 0$, možemo zaključiti da se korektna aproksimacija izraza $\frac{\partial G}{\partial x}(x_j, u_j^n)$ u slučaju kada je $F'_j(u_j^n) \leq 0$ dobija korišćenjem diferencnih količnika unapred, što daje

$$\begin{aligned} & |u_j^{n+1} - c| - |u_j^n - c| + \lambda(\text{sign}(u_{j+1}^n - c)(F_{j+1}(u_{j+1}^n) \\ & \quad - F_{j+1}(c)) - \text{sign}(u_j^n - c)(F_j(u_j^n) - F_j(c))) \\ & \quad + \lambda \text{sign}(u_j^n - c)(F_{j+1}(c) - F_j(c)) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

Lako se može proveriti da obe nejednakosti (5.30) i (5.31) predstavljaju korektnu diskretizaciju nejednakosti entropije (5.23). Neka je $\varphi(x, t)$ test funkcija sa kompaktnim nosačem, tj.

$$\varphi(x, t) = 0, \text{ za } t \geq T := N\Delta t \quad \text{i} \quad \varphi(x, t) = 0, \text{ za } x \notin [-\varepsilon, \varepsilon],$$

i T dovoljno veliko. Ukoliko saberemo (5.30) za svako $j \in J$, gde su j^* i J dati redom sa (5.11) i (5.12), dobijamo

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \sum_{j=-j^*}^{j^*} \varphi(x_j, t_n)(|u_j^{n+1} - c| - |u_j^n - c|) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=0}^N \sum_{j=-j^*}^{j^*} \varphi(x_j, t_n)(Q(u^n; j) \\ & \quad - Q(u^n; j-1) + \text{sign}(u_j^n - c)(F_j(c) - F_{j-1}(c))) \leq 0, \end{aligned}$$

gde je $Q(u^n; j) = \text{sign}(u_j^n - c)(F_j(u_j^n) - F_j(c))$, $j \in J$. Parcijalnim sumiranjem dobijamo

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=-j^*}^{j^*} \varphi(x_j, 0) |u_j^0 - c| - \sum_{j=-j^*}^{j^*} \sum_{n=1}^N (\varphi(x_j, t_n) - \varphi(x_j, t_{n-1})) |u_j^n - c| \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=0}^N \sum_{j=-j^*}^{j^*} (\varphi(x_{j+1}, t_n) - \varphi(x_j, t_n)) (Q(u^n; j) + \text{sign}(u_j^n - c) F_j(c)) \leq 0. \end{aligned}$$

Nakon pregrupisanja dobijamo

$$\begin{aligned} & \Delta t \Delta x \sum_{n=1}^N \sum_{j=-j^*}^{j^*} \left(\frac{\varphi(x_j, t_n) - \varphi(x_j, t_{n-1})}{\Delta t} |u_j^n - c| \right. \\ & \left. + \frac{\varphi(x_{j+1}, t_n) - \varphi(x_j, t_n)}{\Delta x} (Q(u^n; j) + \text{sign}(u_j^n - c) F_j(c)) \right) \\ & + \Delta x \sum_{j=-j^*}^{j^*} \varphi(x_j, 0) |u_j^0 - c| \geq 0. \end{aligned}$$

Pošto ovo predstavlja Rimanovu sumu slabe formulacije nejednakosti (5.23), preostaje samo još da pustimo $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$. Dokaz u slučaju da je (5.31) takođe korektna diskretizacija nejednakosti (5.23) je veoma slična. Stoga možemo uvesti sledeću definiciju:

Definicija 5.1.3 *Kažemo da je DSP za jednačinu (5.13) entropijski ako za svaku dopustivu regularizaciju F_ε važi nejednakost (5.30) ako je $F_j'(u_j) \geq 0$, i (5.31) ako je $F_j'(u_j) \leq 0$ za svaku konstantu $c \in \mathbb{R}$ i svako $j \in J$.*

Sada možemo da definišemo postojanje entropijskog DSP-a kao entropijski kriterijum za udarne talase.

Definicija 5.1.4 *Kažemo da je udarni talas za jednačinu (2.63) entropijski ako postoji entropijski DSP za perturbovanu jednačinu (5.13) koji konvergira ka njemu.*

Lema 5.1.1 *Problem (5.13), zajedno sa (5.15) i (5.16) ima jedinstven stacionarni DSP za postupak Godunova ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova*

$$\begin{aligned} F'_j(u_j^n) &\geq 0 \text{ za svako } j \in J, \\ F'_j(u_j^n) &\leq 0 \text{ za svako } j \in J, \\ \text{ili } u_j^n &= u_* \text{ za svako } j \in J. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Drugin rečima, (5.32) predstavlja diskretni uslov entropije za stacionarni DSP.

Dokaz Pretpostavimo da (5.32) važi za svako $j \in J$. Posmatrajmo najpre slučaj kada je $F'_j(u_j^n) \geq 0$ za svako $j \in J$. Tada važi

$$\text{sign}(u_j^n - c) - \text{sign}(u_{j-1}^n - c) = -2 \quad \text{i} \quad F_{j-1}(u_{j-1}^n) - F_{j-1}(c) \geq 0$$

za svaku konstantu c takvu da je $u_j^n < c < u_{j-1}^n$, $j \in J$, (vidi sl. 5.4 A), i

$$\text{sign}(u_j^n - c) - \text{sign}(u_{j-1}^n - c) = 2 \quad \text{i} \quad F_{j-1}(u_{j-1}^n) - F_{j-1}(c) \leq 0$$

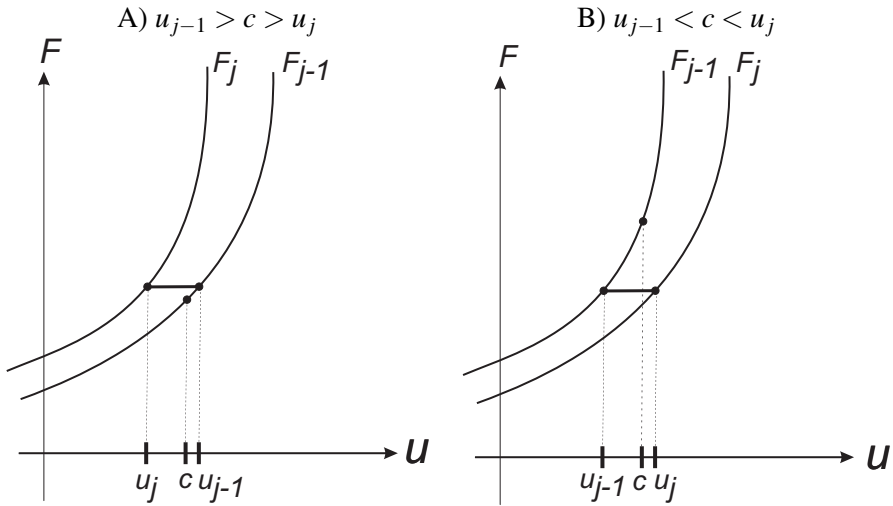
za svaku konstantu c takvu da je $u_{j-1}^n < c < u_j^n$, $j \in J$, (vidi sl. 5.4 B). Odavde sledi

$$(\text{sign}(u_j^n - c) - \text{sign}(u_{j-1}^n - c)) (F_{j-1}(u_{j-1}^n) - F_{j-1}(c)) \leq 0.$$

Uzimajući u obzir (5.21) dobijamo

$$\begin{aligned} 0 &\geq (\text{sign}(u_j^n - c) - \text{sign}(u_{j-1}^n - c)) (F_{j-1}(u_{j-1}^n) - F_{j-1}(c)) \\ &= \text{sign}(u_j^n - c) (F_j(u_j^n) + F_j(c) - F_j(c) - F_{j-1}(c)) \\ &\quad - \text{sign}(u_{j-1}^n - c) (F_{j-1}(u_{j-1}^n) - F_{j-1}(c)) \\ &= \text{sign}(u_j^n - c) (F_j(u_j^n) - F_j(c)) - \text{sign}(u_{j-1}^n - c) (F_{j-1}(u_{j-1}^n) \\ &\quad - F_{j-1}(c)) + \text{sign}(u_j^n - c) (F_j(c) - F_{j-1}(c)) \end{aligned}$$

za svako c iz intervala (u_{j-1}^n, u_j^n) . Kao što smo već napomenuli, slučaj kada je c izvan intervala (u_{j-1}^n, u_j^n) je trivijalan, pošto je tada desna strana ove nejednakosti jednaka nuli. Na osnovu $u_j^{n+1} = u_j^n$ za svako j , n i $\lambda > 0$, zaključujemo da (5.30) važi za svaku konstantu c .

Slika 5.4: Položaj $F_{j-1}(c)$ u odnosu na $F_{j-1}(u_{j-1})$

U slučaju kada je $F'_j(u_j^n) \leq 0$ polazimo od

$$0 \geq (\text{sign}(u_{j+1}^n - c) - \text{sign}(u_j^n - c)) (F_{j+1}(u_{j+1}^n) - F_{j+1}(c))$$

i na veoma sličan način kao u slučaju $F'_j(u_j^n) \geq 0$ dokazujemo da važi (5.31) za svaku konstantu c .

Ukoliko je pak $u_j^n = u_*$ za svako $j \in J$, imamo da je

$$\text{sign}(u_j^n - c) - \text{sign}(u_{j-1}^n - c) = \text{sign}(u_* - c) - \text{sign}(u_* - c) = 0,$$

odakle sledi

$$(\text{sign}(u_j^n - c) - \text{sign}(u_{j-1}^n - c)) (F_{j-1}(u_{j-1}^n) - F_{j-1}(c)) = 0.$$

Dakle, (5.30) važi za svaku c . Lako se može proveriti da relacija (5.31) takođe važi u tom slučaju pa je prema definiciji 5.1.3, DSP oblika $u_j^n = u_*$ entropijski.

Pretpostavimo sada da je dobijeni DSP entropijski. Prema definiciji 5.1.3, to znači za svako $j \in J$ važi (5.30) za $F'_j(u_j) \geq 0$, odnosno (5.31)

za $F'_j(u_j) \leq 0$. Pretpostavimo da (5.30) važi za $F'_j(u_j) \geq 0$ i svako c . Koristeći činjenicu da je $u_j^{n+1} = u_j^n$ za svako j i n , te da je $\lambda > 0$, dobijamo

$$\begin{aligned} 0 &\geq \text{sign}(u_j^n - c)(F_j(u_j^n) - F_j(c)) - \text{sign}(u_{j-1}^n - c)(F_{j-1}(u_{j-1}^n) \\ &\quad - F_{j-1}(c)) + (F_j(c) - F_{j-1}(c)) \text{sign}(u_j^n - c) \\ &= \text{sign}(u_j^n - c)(F_j(u_j^n) - F_{j-1}(c)) - \text{sign}(u_{j-1}^n - c)(F_{j-1}(u_{j-1}^n) - F_{j-1}(c)). \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir (5.21), dobijamo

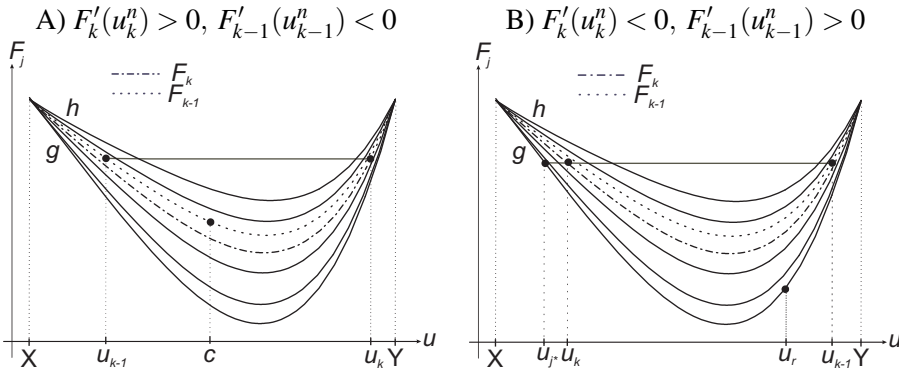
$$(\text{sign}(u_j^n - c) - \text{sign}(u_{j-1}^n - c))(F_{j-1}(u_{j-1}^n) - F_{j-1}(c)) \leq 0. \quad (5.33)$$

Pretpostavićemo sada da uslov $F'_j(u_j^n) \geq 0$ nije zadovoljen za svako $j \in J$. Tada postoji indeks $k \in J$ takav da je

$$F'_k(u_k^n) > 0 \quad \text{i} \quad F'_{k-1}(u_{k-1}^n) < 0 \quad (5.34)$$

ili

$$F'_k(u_k^n) < 0 \quad \text{i} \quad F'_{k-1}(u_{k-1}^n) > 0. \quad (5.35)$$



Slika 5.5: Neentropijski DSP

Pokažimo najpre da za (5.34), nejednakost (5.33) ne važi, izuzev kada je $u_j^n = u_*$ za svako $j \in J$. Pošto u slučaju (5.34), imao da je $u_{k-1} < u_k$, te za $c \in (u_{k-1}, u_k)$ važi

$$\text{sign}(u_k^n - c) - \text{sign}(u_{k-1}^n - c) = 2,$$

pa iz (5.33) dobijamo

$$(F_{k-1}(u_{k-1}^n) - F_{k-1}(c)) \leq 0,$$

što generalno nije tačno, vidi sl. 5.5 A). S druge strane, ako sada pretpostavimo da važi (5.35), tada ili postoji neki indeks $k_1 > k$ tako za koji važi (5.34) (iz čega opet sledi da nije zadovoljena nejednakost entropije), ili imamo da je $F_{j^*}(u_{j^*}) < 0$, što dalje povlači pojavu nedopustivog desnog talasa (u_{j^*}, u_r) negativne brzine, sl. 5.5 B).

Dokaz kada važi (5.31) se izvodi analogno pa možemo zaključiti da sistem (5.21) ima jedinstveno rešenje koje zadovoljava (5.32), a koristi se za konstrukciju jedinstvenog DSP-a za problem (5.13), (5.15). Ovim je lema dokazana. \square

Slično, u slučaju $u_l > \theta_h$, imamo sledeću lemu.

Lema 5.1.2 *Problem (5.13), zajedno (5.22) ima jedinstveni stacionarni entropijski DSP za postupak Godunova ako i samo ako*

$$F'_j(u_j^n) \geq 0 \text{ važi za svako } j \in J. \quad (5.36)$$

Na osnovu toga imamo i teoremu koja sledi:

Teorema 5.1.2 *Posmatrajmo jednačinu (5.13) zajedno sa početnim uslovom (2.11) pod pretpostavkama H1 – H3, čije rešenje se sastoji isključivo od udarnih talasa sa desne strane $x = 0$. Postupak Godunova za rešavanje ovog problema dopušta jedinstven entropijski DSP koji za $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergira ka talasu oblika*

(a) (5.3) za $u_l = A$ i $u_r \in \mathcal{A}(A, B)$ u sledećim slučajevima:

- (i) *Fluksevi se ne seku ili im je presek regularan i $h(\theta_h) > g(\theta_g)$. Entropijska koneksija je tada definisana sa $(A, B) = (\theta_h, \bar{\theta}_h)$, gde je $g(\bar{\theta}_h) = h(\theta_h)$, $\bar{\theta}_h > \theta_g$.*
- (ii) *Presek flukseva je podkompresibilan. Tada je entropijska koneksija određena sa $A = B = u_*$.*

(b) (5.7) za $h'(u_l) > 0$ i $u_r \in \mathcal{A}(u_l, \bar{u}_l)$ u sledećim slučajevima:

- (i) Fluksevi se ne seku ili je presek regularan i $h(\theta_h) > g(\theta_g)$.
- (ii) Fluksevi se ne seku ili je presek regularan, $h(\theta_h) < g(\theta_g)$ i $h(u_l) > g(\theta_g)$.
- (iii) Presek flukseva je podkompresibilan i $h(u_l) > h(u_*)$.
- (iv) Presek flukseva je nadkompresibilan i $u_l > u_*$.

Napomena 5.1.4 Ukoliko pažljivo razmotrimo slučaj (a) teoreme 5.1.2, vidimo da $u_r \in \mathcal{A}(A, B)$ u stvari znači da je $u_r < B$. Međutim, primećimo da se postupak Godunova za skalarne zakone održanja sa prostorno promenljivim fluksom može primeniti i u slučaju kada je $u_r > B$ za iste koneksije date u podslučajevima (i)-(ii). Diskretno rešenje u tom slučaju za $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergira ka kombinaciji stojećeg talasa u $x = 0$ i razređujućeg talasa desno od $x = 0$. Isto važi i u slučaju (b) za $u_r > \bar{u}_l$ uz uslove nabrojane u podslučajevima (i)-(iv). Međutim, pošto u okviru ove teze razmatramo samo DSP-e, izostavićemo ove slučajeve.

Dokaz (a)(i) Neka je $g(\theta_g) < h(\theta_h)$. Tada imamo tri mogućnosti:

- (i.1) fluksevi se ne seku,
- (i.2) $h'(u_*) < 0$, $g'(u_*) < 0$,
- (i.3) $h'(u_*) \geq 0$, $g'(u_*) \geq 0$.

(i.1) U ovom slučaju neophodno je da dokažemo da linija određena koneksijom

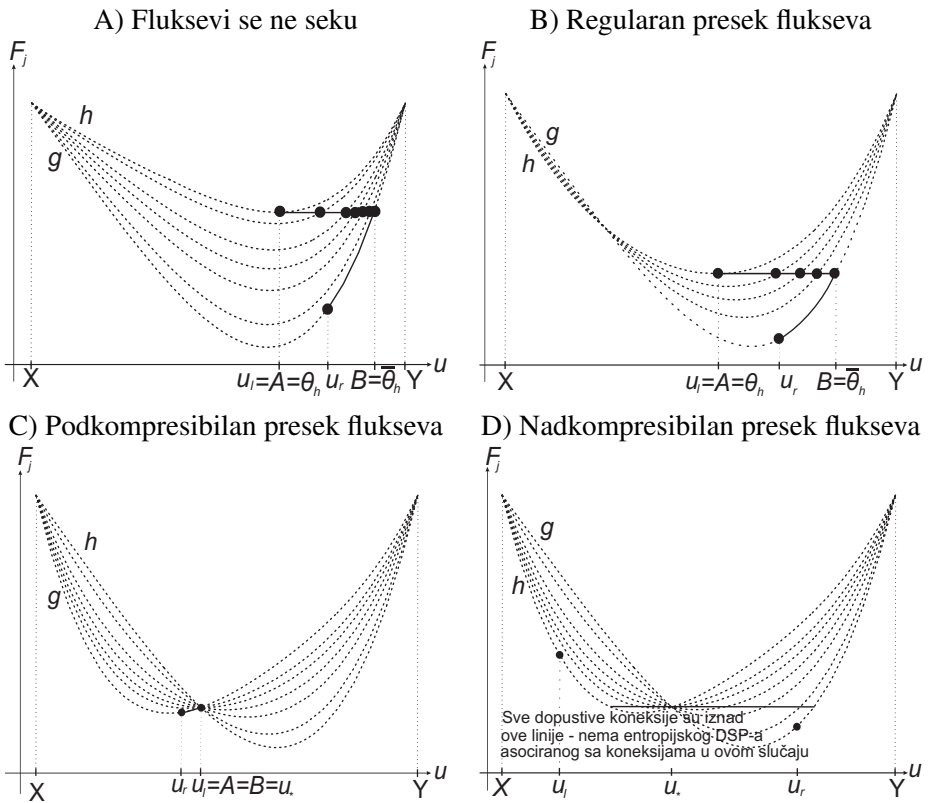
$$l := [(\theta_h, h(\theta_h)), (\bar{\theta}_h, g(\bar{\theta}_h))]$$

seče krivu

$$\omega := (u, F_\varepsilon(x, u))$$

u tački $u_{x,\varepsilon}$ tako da važi

$$F'(x, u_{x,\varepsilon}) \geq 0, \quad \text{za svako } x \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$



Slika 5.6: Struktura entropijskih DSP-a konstruisanih pomoću koneksija u raznim slučajevima preseka flukseva i $u_l = A$

Jasno je da je ω neopadajuća na intervalu $(\theta_{x,\varepsilon}, Y)$, gde $\theta_{x,\varepsilon}$ predstavlja minimum funkcije $F_\varepsilon(x, u)$ za fiksno $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Iz (5.9) sledi

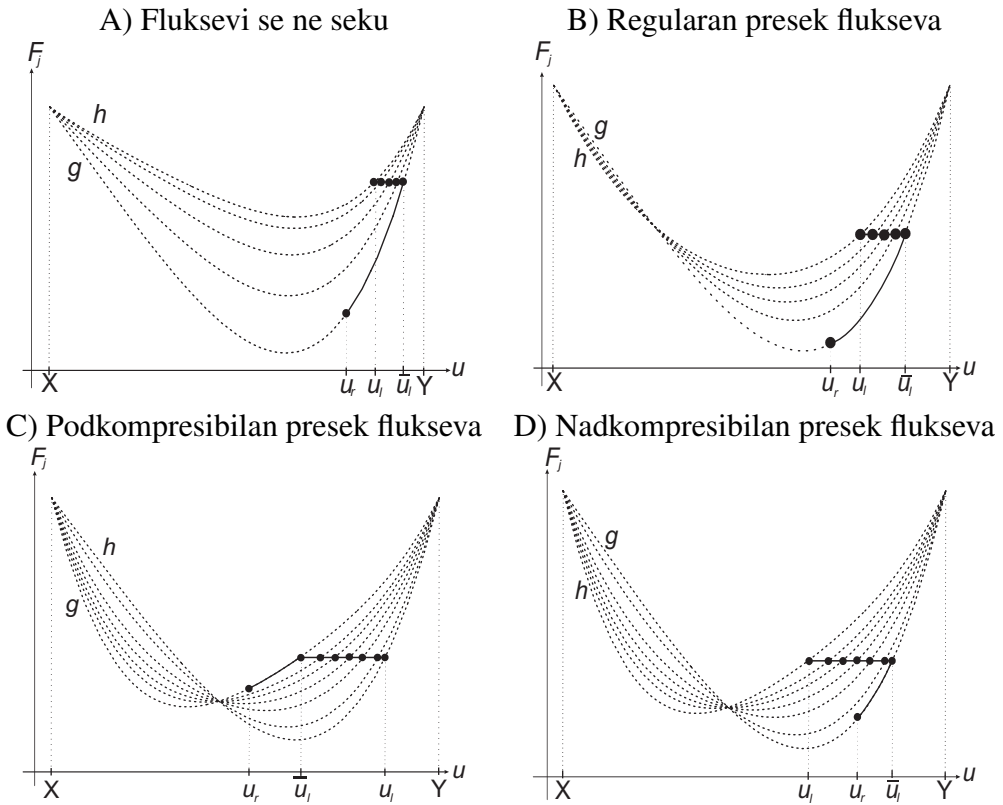
$$h(\theta_h) > F_\varepsilon(x, \theta_{x,\varepsilon}) > g(\theta_g).$$

Ovo dalje povlači

$$F'(x, u_{x,\varepsilon}) \geq 0 \quad \text{za svako } x \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Pretpostavimo sada da entropijska koneksija $(A, B) = (\theta_h, \bar{\theta}_h)$ nije jedinstvena. Tada postoji koneksija (A_1, B_1) , $A_1 \neq A$, $B_1 \neq B$ za koju linija

$$l_1 := [(A_1, h(A_1)), (B_1, g(B_1))]$$



Slika 5.7: Struktura entropijskih DSP-a u raznim slučajevima preseka flukseva za $h'(u_l) > 0$

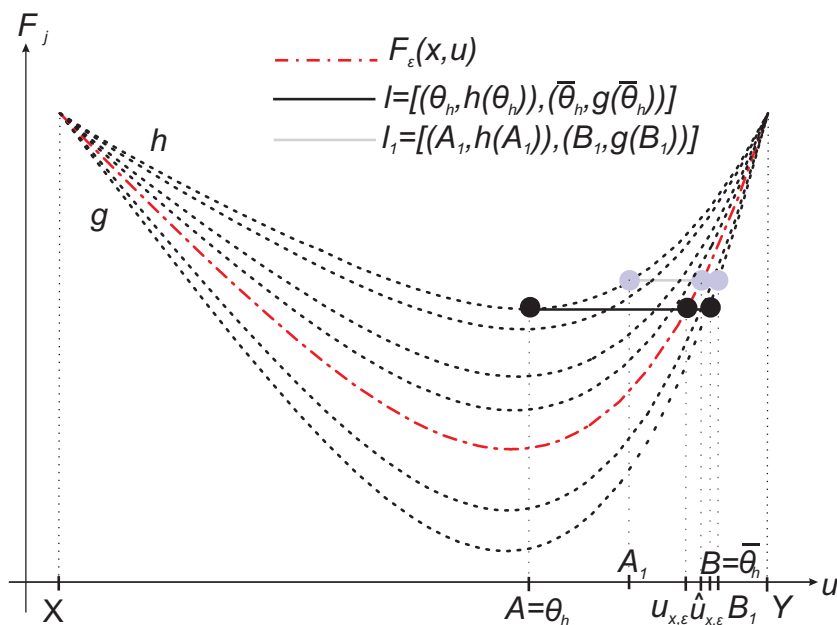
seče krivu ω u tački $\hat{u}_{x,\epsilon}$ tako da važi

$$F'(x, \hat{u}_{x,\epsilon}) \geq 0 \quad \text{za svako } x \in [-\epsilon, \epsilon],$$

vidi sl. 5.8. Ovo je u suprotnosti sa činjenicom da je

$$h'(A_1) \leq 0, \quad g'(B_1) \geq 0$$

i da je $A = \theta_h$ argument jedinstvenog minimuma fluxa h . Ovim je dokazana jedinstvenost entropijske koneksije. Dokaz u slučajevima (i.2) i (i.3) se izvodi na sličan način.



Slika 5.8: Ilustracija dokaza teoreme 5.1.2, slučaj (i.1)

(ii) Iz činjenice

$$F(x, u_*) = F(y, u_*) \quad \text{za svako } x, y \in [-\epsilon, \epsilon]$$

sledi

$$F_j(u_*) = F_i(u_*), \quad \text{za svako } i, j \in J$$

odakle sledi da je

$$u_j^n = u_* \quad \text{za svako } j \in J$$

pa možemo zaključiti da je uslov (5.32) zadovoljen. U ovom slučaju, jedinstvenost entropijske koneksije sledi iz činjenice da je $A = B = u_*$ jedina dopustiva koneksija. Na sl. 5.6 je prikazana struktura entropijskih DSP-a za slučaj (a).

(b)(i) Pretpostavimo sada da se fluksevi ne seku ili da im je presek unutar intervala $[X, Y]$ regularan, i da je $h(\theta_h) > g(\theta_g)$. Koristeći slične oznake kao u slučajevima iznad, tj.

$$\omega = (u, F_\epsilon(x, u)),$$

$\theta_{x,\varepsilon}$ predstavlja jedinstveni minimum funkcije $F_\varepsilon(x, u)$ za fiksno $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ i

$$l := [(u_l, h(u_l)), (\bar{u}_l, g(\bar{u}_l))],$$

pokazujemo da kriva ω seče liniju l u tački $u_{x,\varepsilon}$ tako da važi

$$F'_\varepsilon(x, u_{x,\varepsilon}) \geq 0 \quad \text{za svako } x \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Na osnovu (5.9) je jasno da je

$$h(\theta_h) > F_\varepsilon(x, \theta_{x,\varepsilon}) > g(\theta_g).$$

Odavde sledi da se za svako $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ tačka $(\theta_{x,\varepsilon}, F_\varepsilon(x, \theta_{x,\varepsilon}))$ nalazi ispod linije l . Uzimajući u obzir da je $h'(u_l) > 0$, možemo zaključiti da za svako $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ kriva ω seče liniju l u tači $u_{x,\varepsilon}$ tako da $F'_\varepsilon(x, u_{x,\varepsilon}) \geq 0$. Pretpostavimo sada da ovaj entropijski DSP nije jedinstven. Tada postoje dve tačke $A, B \in I$ takve da je $A \neq u_l, B \neq \bar{u}_l$ i $h(A) = g(B)$. Iz uslova entropije (5.32) sledi $h'(A), g'(B) \geq 0$ što prouzrokuje pojavu talasa (u_l, A) pozitivne brzine pa dolazi do interakcije ovog talasa sa stacionarnim talasom (A, B) , što nije dozvoljeno. Ovim smo dokazali jedinstvenost entropijske koneksije.

(ii) U ovom slučaju iz (5.9) sledi $F_\varepsilon(x, \theta_{x,\varepsilon}) < g(\theta_g)$. Opet, uzimajući u obzir da je $h'(u_l) > 0$, možemo zaključiti da tvrđenje važi. Jedinstvenost se u ovom slučaju dokazuje analogno kao i u slučaju (i).

Definišimo sada tačku $\bar{u}_* \in I$ takvu da je

$$h(\bar{u}_*) = h(u_*) \quad \text{i} \quad h'(u_*) > 0$$

u slučaju da je u tački u_* podkompresibilan presek flukseva, a

$$g(\bar{u}_*) = g(u_*) \quad \text{i} \quad g'(u_*) > 0$$

ako se radi o nadkompresibilnom preseku. Koristeći činjenicu da se u slučaju podkompresibilnog ili nadkompresibilnog preseka flukseva, za svako $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ tačka $(\theta_{x,\varepsilon}, F_\varepsilon(x, \theta_{x,\varepsilon}))$ nalazi ispod linije

$$l := [(u_*, h(u_*)), (\bar{u}_*, h(\bar{u}_*))],$$

(iii) i (iv) se dokazuje slično kao i u prethodnim slučajevima. Struktura entropijskih DSP-a za $h'(u_l) > 0$ u raznim slučajevima preseka flukseva je prikazana na sl. 5.7. \square

Na kraju, u skladu sa definicijom 5.1.4, preostaje nam samo još da pustimo $\varepsilon \rightarrow 0$ da bismo dobili entropijsko rešenje jednačine (2.63) koje se sastoji od stacionarnog udarnog talasa u $x = 0$ i udarnog talasa koji putuje u desno.

5.1.4 DSP za multiplikativnu jednačinu

Posmatrajmo sada jednačinu (2.62), (2.11). Lako se može uočiti da je ovaj problem u stvari specijalan slučaj problema (2.63), (2.11), pri čemu smo $h(u)$ zamenili sa $a_l f(u)$, a $g(u)$ sa $a_r f(u)$ za funkciju f koja je konveksnog tipa i zadovoljava uslov $f(X) = f(Y)$.

U ovom slučaju odgovarajuća perturbovana jednačina je oblika

$$u_t + (a_\varepsilon(x)f(u))_x = 0,$$

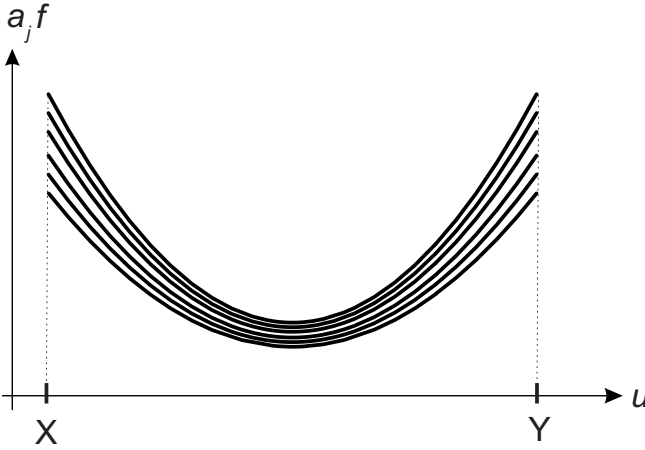
gde je

$$a_\varepsilon(x) = a(x) \quad \text{za} \quad |x| \geq \varepsilon$$

neprekidno diferencijabilna aproksimacija funkcije $a(x)$. Pretpostavićemo da je $a_\varepsilon(x)$ monotona funkcija, jer se tada lako može dokazati da je $a_\varepsilon f(u)$ dopustiva regularizacija fluksa $a(x)f(u)$ u smislu (5.9). Primer diskretnog niza flukseva koji se dobija primenom dopustive regularizacije u ovom slučaju je prikazan na sl. 5.9.

Takođe ćemo pretpostaviti i da je $a_l > a_r > 0$. U ovom slučaju, jedinstveni minimumi flukseva $a_l f$ i $a_r f$ se poklapaju. Označićemo njihovu zajedničku tačku minimuma sa θ . Drugim rečima, $\theta = \theta_h = \theta_g$. Ovo je u stvari slučaj kada se fluksevi $h = a_l f$ i $g = a_r f$ ne seku pa na osnovu teorije izložene u odeljku 5.1.3, postoji jedinstvena koneksija $(A, B) = (\theta, \bar{\theta})$, gde je

$$a_r f(\bar{\theta}) = a_l f(\theta), \quad f'(\bar{\theta}) > 0,$$



Slika 5.9: Diskretni niz flukseva za multiplikativnu jednačinu

a koja zadovoljava (5.32), tj.

$$f'(u_j^n) \geq 0 \quad \forall j \in J. \quad (5.37)$$

Ova koneksija gradi stacionarni DSP i DSP koji putuje u desno ako je $u_l = A$ i $u_r \in \mathcal{A}(A, B)$. S druge strane, ako je $u_l > \theta$, tada imamo rešenje u obliku (5.7).

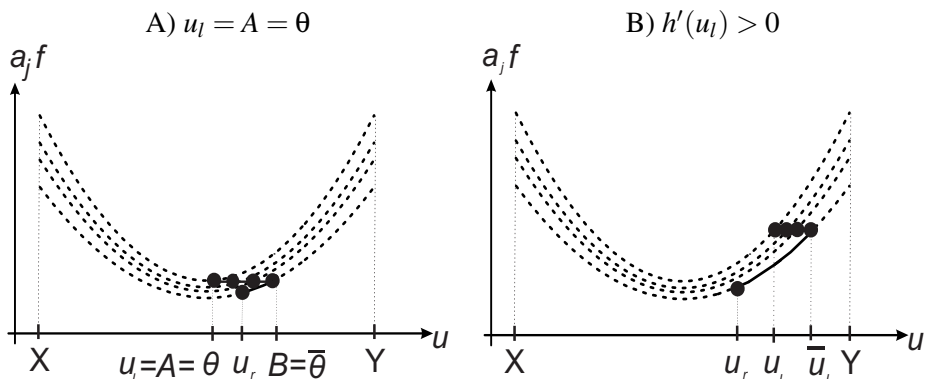
Primetimo da je (5.37) ekvivalentno sa

$$\text{sign}(u_{j-1}^n - \theta) \text{sign}(u_j^n - \theta) \geq 0 \quad \forall j \in \{-j^* + 1, \dots, j^*\}.$$

Na osnovu leme 5.1.1, stacionarni DSP zadovoljava sledeći oblik nejednakost entropije Kružkova:

$$\begin{aligned} |u_j^{n+1} - c| - |u_j^n - c| + \lambda(a_j \text{sign}(u_j^n - c)(f(u_j^n) - f(c)) \\ - a_{j-1} \text{sign}(u_{j-1}^n - c)(f(u_{j-1}^n) - f(c))) \\ + \lambda \text{sign}(u_j^n - c)(a_j - a_{j-1})f(c) \leq 0, \end{aligned}$$

za svaku konstantu c , gde a_j predstavljaju diskretne vrednosti funkcije $a_\varepsilon(x)$. I u ovom slučaju, entropičnost desnog DSP-a sledi iz Olejnikovog uslova entropije. Struktura DSP-a u slučajevima $u_l = A = \theta$ i $h'(u_l) > 0$ su prikazani redom na sl. 5.10 A) i B).



Slika 5.10: Struktura DSP-a za multiplikativnu jednačinu

5.1.5 Proširenja i poređenja sa rezultatima dobijenim pomoću drugih teorija entropije

Diskretni uslov entropije (5.32) za stacionarni DSP u $x = 0$ je izveden nezavisno od tipa regularizacije. Njegova osnovna odlika je u tome da dopušta DSP-ove za stacionarne marginalno podkompresibilne i regularne udarne talase. S druge strane, DSP-ovi za stacionarne podkompresibilne talase su dopušteni samo u slučaju konstantnog talasa.

Nasuprot tome, dopustivost koneksija u odnosu na regularizaciju, (vidi definiciju 5.1.2) zavisi od izbora regularizacije. Kao što smo napomenuli u odeljku 5.1.3, izabrali smo standardnu matematičku definiciju klase regularizacije (5.9). Međutim, postoje i druge regularizacije koje možemo implementirati u naš koncept rešenja da bismo dobili relevantna rešenja za određene fizičke modele. Slična situacija se javlja kada se dodaje standardni član (ϵu_{xx} , $\epsilon \rightarrow 0$) i nestandardni (različit od ϵu_{xx} , $\epsilon \rightarrow 0$) sa desne strane jednačine (2.63) u metodi iščezavajuće viskoznosti, vidi [37].

Drugim rečima, možemo proširiti našu teoriju ako popustimo malo uslov dopustivosti regularizacije (5.9) na sledeći način. U zavisnost od međusobnog geometrijskog odnosa flukseva, možemo izabrati pogodan

srednji fluks $z(u)$ i koristiti dopustivu regularizaciju (koja zadovoljava (5.9)), koju ćemo označiti sa $F_\varepsilon^l(x, u)$ na intervalu $[-\varepsilon, 0]$ za par flukseva h i z , i drugu dopustivu regularizaciju $F_\varepsilon^r(x, u)$ na intervalu $[0, \varepsilon]$ za par z i g . Potom ćemo konstruisati regularizaciju $F_\varepsilon(x, u)$ oblika

$$F_\varepsilon(x, u) = \begin{cases} h(u), & x \leq -\varepsilon \\ F_\varepsilon^l(x, u), & -\varepsilon \leq x \leq 0 \\ F_\varepsilon^r(x, u), & 0 \leq x \leq \varepsilon \\ g(u), & x \geq \varepsilon \end{cases} . \quad (5.38)$$

Naravno, ova regularizacija je neprekidna u odnosu na prostornu promenljivu jer je $F_\varepsilon^l(0, u) = F_\varepsilon^r(0, u) = z(u)$ i nazivamo je *dopustivom s leva i desna*.

U primeru 5.1.2 ćemo prikazati regularizaciju oblika (5.38) posebno dizajniranu da bi se dostigao marginalno podkompresibilni udarni talas u $x = 0$ u slučaju nadkompresibilnog preseka flukseva, a koji inače ne možemo dobiti putem regularizacije (5.9). Takvo rešenje je dobijeno pomoću teorije entropije koja se oslanja na nedopuštanju podkompresibilnih talasa u [3] i podudara se sa tzv. *optimalnim rešenjem* u [1, 57] (tj. predstavlja fizički relevantno rešenje za model dvofaznih protoka u heterogenoj poroznoj sredini).

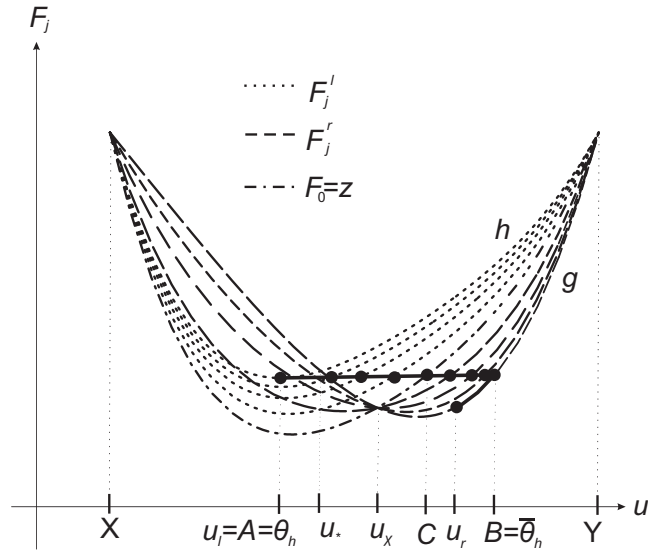
Primer 5.1.2 *Posmatrajmo slučaj nadkompresibilnog preseka flukseva. Neka je $F_\varepsilon \in C(\mathbb{R} \times I)$ regularizacija data sa (5.38). Pretpostavimo da je $u_l = A = \theta_h$. Da bismo dostigli marginalno podkompresibilni DSP u $x = 0$, možemo odabrati srednji fluks z konveksnog tipa takav da je*

$$z(X) = h(X), \quad z(Y) = h(Y), \quad z(u) < h(u),$$

na intervalu $[-\varepsilon, 0]$, i z seče fluks g u nekoj tački u_χ nadkompresibilno, vidi sl. 5.11. Na toj slici smo označili niz diskretnih flukseva F_ε^l i F_ε^r sa $\{F_j^l\}_{j \in J_l}$ i $\{F_j^r\}_{j \in J_r}$, respektivno, gde je

$$J_l = \{-j^*, \dots, -1\}, \quad J_r = \{1, \dots, j^*\}, \quad i \quad F_0 = F_0^l = F_0^r = z.$$

Ako sada koristimo koncept rešenja koji se oslanja na DSP, dobijamo



Slika 5.11: Entropijski DSP koji teži ka marginalnom podkompresibilnom udarnom talasu kod nadkompresibilnog preseka flukseva dobijen pomoću regularizacije koja je dopustiva s leva i desna

entropijski DSP (koji zadovoljava (5.32)) za koneksiju (A, C) , gde je

$$A = \theta_h \quad i \quad h(C) = h(A)$$

na intervalu $[-\varepsilon, 0]$. Pri tome je $g(C) = g(B)$, gde je

$$B = \bar{\theta}_h \quad i \quad z'(C) > 0,$$

pošto je u_x nadkompresibilno. Stoga imamo još jedan entropijski DSP (koji zadovoljava (5.36)) za koneksiju (C, B) na intervalu $[0, \varepsilon]$. Unija ovih DSP-ova daje entropijski DSP za par (A, B) , vidi sl. 5.11.

Primer 5.1.3 Ukoliko je $g(u) < 0$ i $h(u) < 0$ za $u \in I$ i g i h se seku nadkompresibilno u $u_* \in I$, tada srednji fluks z opisan u primeru 5.1.2 može biti oblika

$$z(u) = \frac{g(u) + h(u)}{2\alpha} + h(u),$$

pri čemu parametar $\alpha > 1$ izaberemo tako da je $\frac{g(u) + h(u)}{2\alpha}$ dovoljno malo u smislu da je u_χ nadkompresibilno. Tada je regularizacija (5.38) oblika

$$F_\varepsilon(x, u) = \begin{cases} h(u), & x \leq -\varepsilon \\ \frac{g(u) + h(u)}{2\alpha\varepsilon^2}(x + \varepsilon)^2 + h(u), & -\varepsilon \leq x \leq 0 \\ \frac{(1 - 2\alpha)g(u) + (1 + 2\alpha)h(u)}{2\alpha\varepsilon^2}(x - \varepsilon)^2 + g(u), & 0 \leq x \leq \varepsilon \\ g(u), & x \geq \varepsilon \end{cases} \quad (5.39)$$

Međutim, dostizanje rešenja za specifične fizičke modele je izvan doseg a teme ove teze, te ovo pitanje nećemo dalje razmatrati.

Kao što smo već napomenuli, različiti autori u svojim radovima dobijaju različita entropijska rešenja za jednačinu (2.63) jer su razvili različite teorije entropije. Osnovni predmet rasprave je uglavnom pitanje da li su (marginalno) podkompresibilni udarni talasi u $x = 0$, kao delovi celokupnog rešenja, dopušteni ili ne. Označimo sa (EXU¹) rezultate dobijene u [3] pomoću principa isključivanja podkompresibilnih udarnih talasa, sa (IEF²) entropijsku teoriju koja se oslanja na unutrašnju entropijsku funkcionalu razvijenu od strane grupe autora u [1] i [14], sa (CRO³) entropijsku teoriju razvijenu u [17] koja zahteva zadovoljenje uslova preseka, i rezultate dobijene u okviru ove teze sa (DSP). Pri tome, razmatraćemo samo DSP–ove dobijene regularizacijom oblika (5.9).

Tabela 5.1 prikazuje mogućnost pojave podkompresibilnog (označenog sa U⁴) i marginalno podkompresibilnog (MU⁵) stacionarnog udarnog talasa u $x = 0$, u različitim slučajevima preseka flukseva, za $h'(u_l) \leq 0$, iz ugla različitih entropijskih teorija.

¹EXU – od engl. *excluding undercompressive shocks*

²IEF – od engl. *interface entropy functional*

³CRO – od engl. *crossing condition*

⁴U – od engl. *undercompressive*

⁵MU – od engl. *marginally undercompressive*

U slučaju kada se fluksevi ne seku u unutrašnjosti I , sve četiri teorije entropije dopuštaju marginalno podkompresibilne stacionarne udarne talase, s tim što IEF pored toga dopušta i podkompresibilne udarne talase (tj. dobijaju entropijska rešenja za svaku koneksiju).

U slučaju regularnog preseka flukseva imamo sličnu situaciju, jedino što CRO sada dopušta konstantne regularne udarne talase oblika $S^0(u_*, u_*)$ ali pod uslovom da je zadovoljen uslov preseka.

Suprotno od EXU teorije koja dopušta samo marginalno podkompresibilne talase, i IEF koja dopušta i podkompresibilne i marginalno podkompresibilne talase, u slučaju podkompresibilnog preseka flukseva CRO i DSP dopuštaju jedino pojavu podkompresibilnog konstantnog udarnog talasa oblika $S^0(u_*, u_*)$.

S druge strane, DSP pristup zajedno sa regularizacijom oblika (5.9) ne dopušta ni podkompresibilne, ni marginalno podkompresibilne udarne talase u slučaju nadkompresibilnog preseka flukseva. Slično, nadkompresibilni presek flukseva narušava *uslov preseka* teorije CRO pa ne postoje (marginalno) podkompresibilni stacionarni udarni talasi. Nasuprot tome, EXU dopušta marginalno podkompresibilne udarne talase, a IEF dopušta i podkompresibilne i marginalno podkompresibilne udarne talase.

Na kraju, napomenimo još i da naša teorija entropije dopušta regularne stacionarne udarne talase u $x = 0$ za sve tipove preseka flukseva u slučaju kada je $h'(u_l) > 0$, tj. rešenja jednačine (2.63) oblika (5.7). Postojanje rešenja ovog tipa su takođe dokazana u [57].

5.1.6 Numerički primeri

Prikažimo sada nekoliko numeričkih primera. Najpre ćemo posmatrati slučajeve kada se fluksevi ne seku, (Primer 5.1.4 i Primer 5.1.5),

⁶U ovoj tabeli su prikazani samo DSP-ovi dobijeni regularizacijom oblika (5.9).

(Marginalno) podkompresibilni udarni talasi								
	Fluksevi se ne seku		Regularni presek		Podkompresibilni presek		Nadkompresibilni presek	
	MU	U	MU	U	MU	U	MU	U
EXU	+	-	+	-	+	-	+	-
IEF	+	+	+	+	+	+	+	+
CRO	+	-	-	-	-	+	-	-
DSP ⁶	+	-	+	-	-	+	-	-

Tabela 5.1: Pojava (marginalno) podkompresibilnih stacionarnih udarnih talasa u $x = 0$ prema različitim teorijama entropije

kao i kada se fluksevi seku podkompresibilno (Primer 5.1.6 i Primer 5.1.7). Za oba slučaja položaja flukseva ćemo posmatrati po dva različita početna uslova (jedan početni uslov kada je $h'(u_l) < 0$ i drugi kada je $h'(u_l) > 0$). Potom ćemo analizirati slučaj kada se fluksevi seku nadkompresibilno, (Primer 5.1.8 i Primer 5.1.9), sa istim početnim uslovom, ali sa različitom funkcijom glačanja (jedan primer sa glačanjem (5.10) i jedan sa (5.39)). Na kraju, u primeru 5.1.10 ćemo prikazati i jedan primer numeričkog rešavanja multiplikativne jednačine.

U svim primerima ćemo koristiti numeričku proceduru za konstruisanje DSP-a koju smo opisali u odeljku 5.1.3. Ponovimo ukratko da je glavna ideja naše numeričke procedure primena postupka Godunova za zakone održanja sa prostorno promenljivim fluksom (označimo ovaj postupak sa GSVF⁷) za rešavanje perturbovane jednačine (5.13).

U slučaju kada je $h'(u_l) < 0$, koristimo entropijske koneksije koje zadovoljavaju diskretni uslov entropije (5.32) da bismo konstruisali stacionarni DSP u $x = 0$. Jednostavnosti radi, u dokazu Teoreme 5.1.1 smo pretpostavili da je $u_l = A$ (vidi (5.15)), i pored stacionarnog DSP-a posmatrali smo isključivo desni DSP. Pošto levi talas može da se tretira

⁷GSVF – od engl. *Godunov scheme with spatially varying flux*

na isti način kao i desni, u našim numeričkim primerima posmatračemo problem (2.63), (2.11) sa proizvoljnim $u_l \in I$. To znači da ćemo rešavati perturbovanu jednačinu (5.13) sa opštijim početnim uslovom oblika

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x < -\varepsilon \\ A & -\varepsilon < x < 0 \\ B & 0 < x < \varepsilon \\ u_r, & x > \varepsilon \end{cases}, \quad (5.40)$$

koristeći šemu GSVF. Naravno, za $x < -\varepsilon$ i $x > \varepsilon$ ovo se svodi na standardni postupak Godunova sa neprekidnim fluksom h i g , respektivno.

S druge strane, ako je $h'(u_l) > 0$ prema Teoremi 5.1.1, koristimo

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ \bar{u}_l & 0 < x < \varepsilon \\ u_r, & x > \varepsilon \end{cases}, \quad (5.41)$$

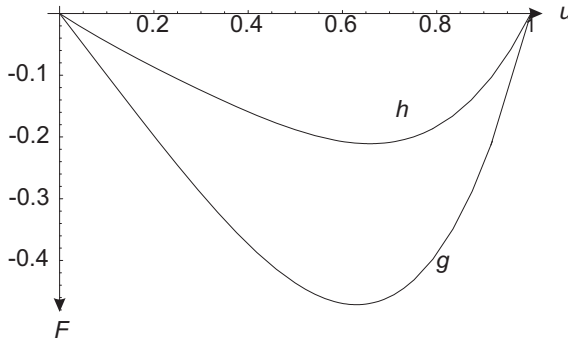
umesto (5.40).

Kao što smo već napomenuli, u primerima (5.1.4) – (5.1.8) i (5.1.10) koristićemo regularizaciju datu sa (5.10), a u primeru (5.1.9) regularizaciju (5.39). Odgovarajući parametar j^* koji definiše broj diskretnih flukseva unutar intervala glačanja $[-\varepsilon, \varepsilon]$ biramo tako da bismo dobili željenu vrednost ε u odnosu na širinu mreže Δx , vidi (5.11). Vrednosti parametara Δx , j^* i ε u primerima 5.1.4 – 5.1.10 su date u tabeli 5.2 na kraju ovog odeljka.

Napomenimo još i da smo u svrhu dobijanja numeričkih rezultata koje ćemo prikazati u okviru ove teze razvili odgovarajući softver u programskom paketu *Mathematica*, a koji se bazira na gore opisanoj numeričkoj proceduri.

Primer 5.1.4 *Posmatrajmo jednačinu (2.63) gde je*

$$h(u) = u(u-1)\left(u^2 + \frac{1}{2}\right) \quad i \quad g(u) = u(u-1)(u^2 + u + 1) \quad (5.42)$$



Slika 5.12: Osnos flukseva u primerima 5.1.4 i 5.1.5

zajedno sa početnim uslovom

$$u_0(x) = \begin{cases} 0.6, & x < 0 \\ 0.8, & x > 0 \end{cases} .$$

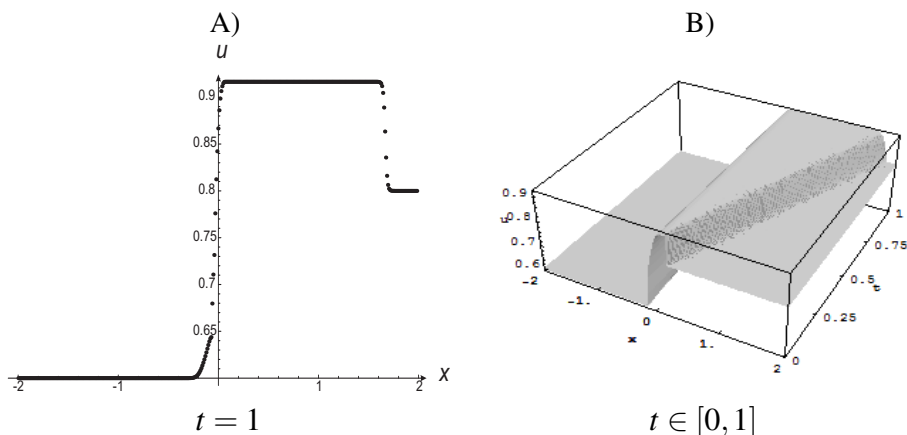
Kao što možemo videti iz sl. 5.12, fluksevi se ne seku unutar posmatranog intervala, i $h(\theta_h) > g(\theta_g)$. Pošto je $h'(u_l) = h'(0.6) < 0$, prema Teoremi 5.1.2, numeričko rešenje ćemo konstruisati pomoću jedinstvene koneksije $(A,B) = (\theta_h, \bar{\theta}_h)$ u (5.40), gde je $\theta_h = 0.65859$ i $\bar{\theta}_h = 0.91698$. Numeričko rešenje dobijeno uz pomoć GSVF postupka u $t = 1$ je prikazano na sl. 5.13 A), dok na sl. 5.13 B) možemo videti rešenje unutar intervala $t \in [0, 1]$. Kao što vidimo, pored stacionarnog i desnog DSP-a, numeričko rešenje sadrži i levi razređujući talas. Granična vrednost numeričkog rešenja kada $\varepsilon \rightarrow 0$ je oblika

$$\overleftarrow{R}(0.6, 0.65859) + S^0(0.65859, 0.91698) + \overrightarrow{S}(0.91698, 0.8).$$

Analizirajmo sada isti problem kao u primeru 5.1.4, ali sa drugim početnim uslovom.

Primer 5.1.5 Posmatrajmo jednačinu (2.63), (5.42), zajedno sa početnim uslovom

$$u_0(x) = \begin{cases} 0.8, & x < 0 \\ 0.6, & x > 0 \end{cases} .$$



Slika 5.13: Numeričko rešenje u primeru 5.1.4

Ovoga puta je $h'(u_l) = h'(0.8) > 0$ pa ćemo stacionarni DSP u $x = 0$ konstruisati koristeći par (u_l, \bar{u}_l) , gde je $\bar{u}_l = 0.9298$. Koristeći postupak GSVF sa (5.41) dobijamo numeričko rešenje koje konvergira ka

$$S^0(0.8, 0.9298) + \vec{S}(0.9298, 0.6),$$

vidi sl. 5.14.

Primer 5.1.6 Posmatrajmo sada jednačinu (2.63), gde je

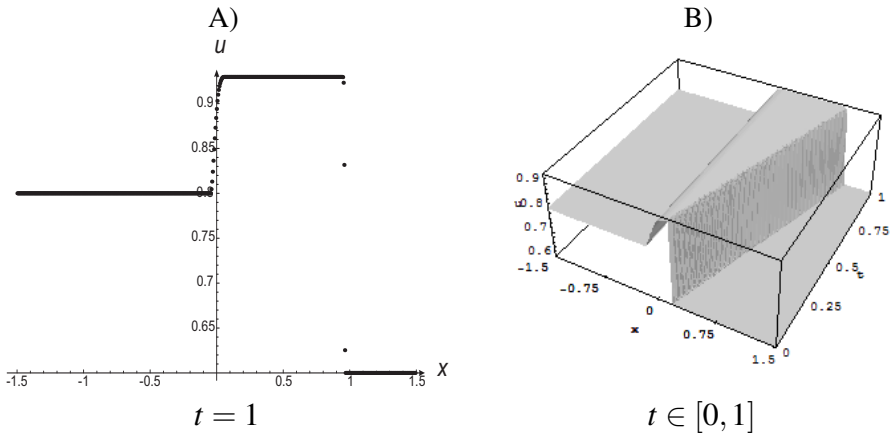
$$h(u) = u(u-1)(u^2 + u + 1) \quad i \quad g(u) = 3u(u-1)\left(u^2 - \frac{3}{2}u + 1\right) \quad (5.43)$$

zajedno sa

$$u_0(x) = \begin{cases} 0.5, & x < 0 \\ 0.3, & x > 0 \end{cases}.$$

Kao što možemo videti na sl. 5.15, fluksevi g i h se seku podkompresibilno u tački $u_* = 0.43127$, i $h'(u_l) = h'(0.5) < 0$. Stoga prema Teoremi 5.1.2 koristimo koneksiju $(A, B) = (u_*, u_*)$ pa postupak GSVF za (5.40) daje rešenje koje se sastoji od tri DSP-a, a konvergira ka

$$\overleftarrow{S}(0.5, 0.43127) + S^0(0.43127, 0.43127) + \vec{S}(0.43127, 0.3),$$



Slika 5.14: Numeričko rešenje u primeru 5.1.5

vidi sl. 5.16. *Primetimo da je stacionarni DSP u $x = 0$ konstantan u ovom primeru.*

Posmatrajmo sada opet isti primer kao gore, ali sa drugim početnim uslovom.

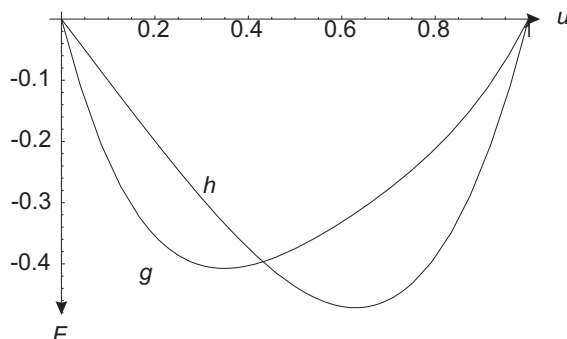
Primer 5.1.7 *Posmatrajmo jednačinu (2.63), gde su g i h dati sa 5.43 i*

$$u_0(x) = \begin{cases} 0.9, & x < 0 \\ 0.6, & x > 0 \end{cases} .$$

Ovoga puta imamo da je $h'(u_1) = h'(0.9) > 0$ pa uzimamo $u_1 = 0.9$, $\bar{u}_1 = 0.75333$, te postupak GSVF za (5.41) daje numeričko rešenje prikazano na sl. 5.17. Kao što vidimo, ovo rešenje konvergira ka

$$S^0(0.9, 0.75333) + \vec{S}(0.75333, 0.6).$$

U nastavku ćemo analizirati jedan primer u kojem se fluksevi seku nadkompresibilno pa nema DSP-ova za glačanje koje zadovoljava uslov (5.9).



Slika 5.15: Odnos flukseva u primeru 5.1.6 i 5.1.7

Primer 5.1.8 Posmatrajmo sada Rimanov problem za jednačinu (2.63), gde je

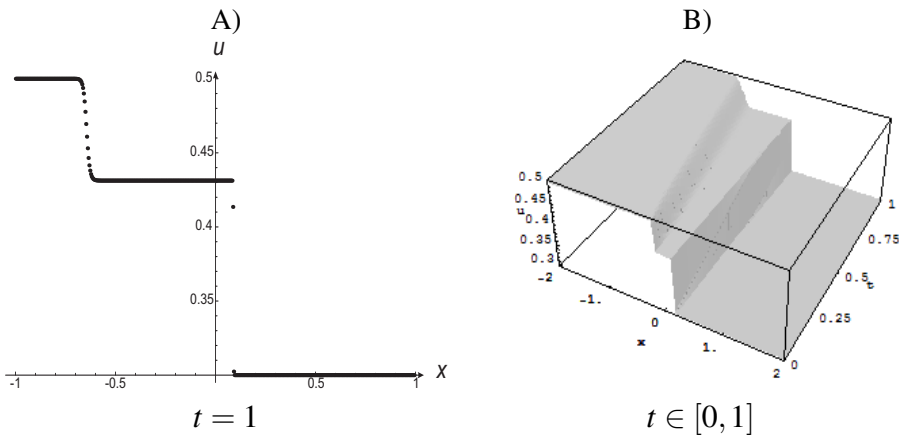
$$h(u) = 3u(u-1)\left(u^2 - \frac{3}{2}u + 1\right) \quad i \quad g(u) = u(u-1)(u^2 + u + 1), \quad (5.44)$$

zajedno sa početnim uslovom

$$u(x,0) = \begin{cases} 0.2, & x < 0 \\ 0.6, & x > 0 \end{cases}, \quad (5.45)$$

pri čemu ćemo koristiti, glačanje (5.9), baš kao i u prethodnim primerima. Fluksevi se seku nadkompresibilno u tački $u_* = 0.5$ i dostižu, redom, minimume u tačkama $\theta_h = 0.34776$ i $\theta_g = 0.62996$. U ovom slučaju imamo da se sve dopustive koneksije nalaze iznad linije određene tačkama $(\theta_h, h(\theta_h))$ i $(\bar{\theta}_h, g(\bar{\theta}_h))$, gde je $\bar{\theta}_h = 0.78226$. Lako se može proveriti da ne postoji ni jedna koneksija koja zadovoljava (5.32) pa u ovom slučaju za glačanje (5.10) nemamo dopustiv DSP za postupak Godunova.

Primer 5.1.9 Posmatrajmo sada problem (2.63) gde su fluksevi dati sa (5.44), zajedno sa početnim uslovom (5.45), pri čemu ćemo koristiti glačanje (5.39) sa parametrom $\alpha = 4$. Kao što smo videli u primeru 5.1.2 (vidi sl. 5.11), ovakvo glačanje nam omogućava da koristimo entropijsku



Slika 5.16: Numeričko rešenje primeru 5.1.6

koneksiju $(\theta_h, \bar{\theta}_h) = (0.34776, 0.78226)$ za konstrukciju DSP-a. Numeričko rešenje koje dobijamo u ovom slučaju konevrgira ka

$$\overleftarrow{R}(0.2, 0.34776) + S^0(0.34776, 0.78226) + \overrightarrow{S}(0.78226, 0.6),$$

vidi sl. 5.19.

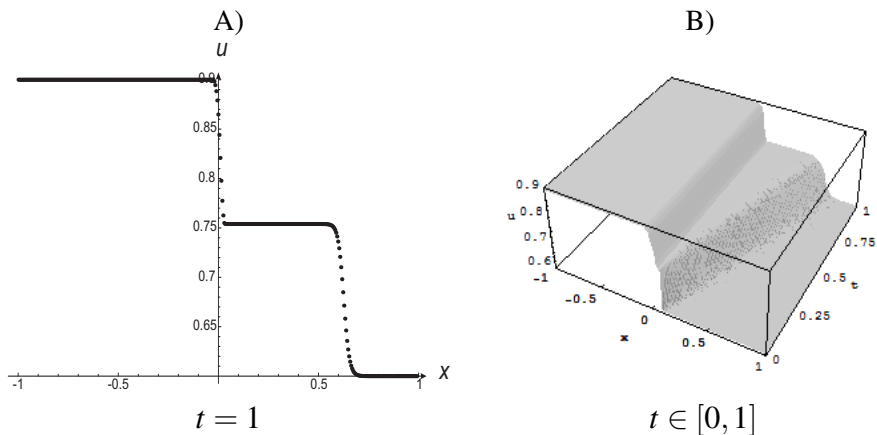
Na kraju ovog odeljka, posmatrajmo i jedan primer multiplikativne jednačine.

Primer 5.1.10 Posmatraćemo multiplikativnu jednačinu zakona održanja (2.62), gde je $f = u^2 + 2u + 3$ konveksna i ima minimum u tački $\theta = -1$. Neka je $a(x)$ dato sa

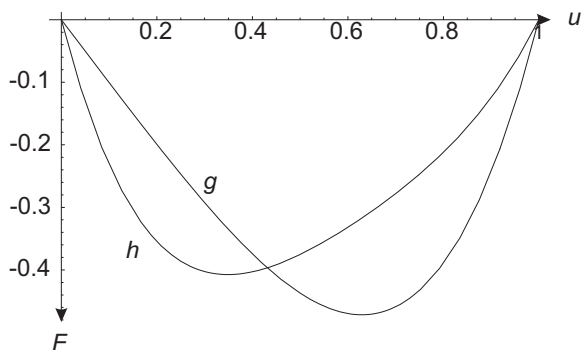
$$a(x) = \begin{cases} 1.5, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases},$$

a $u_0(x) = -1.2$.

Aproksimaciju funkcije fluksa $a(x)f(u)$ ćemo izvršiti slično kao i kod jed-



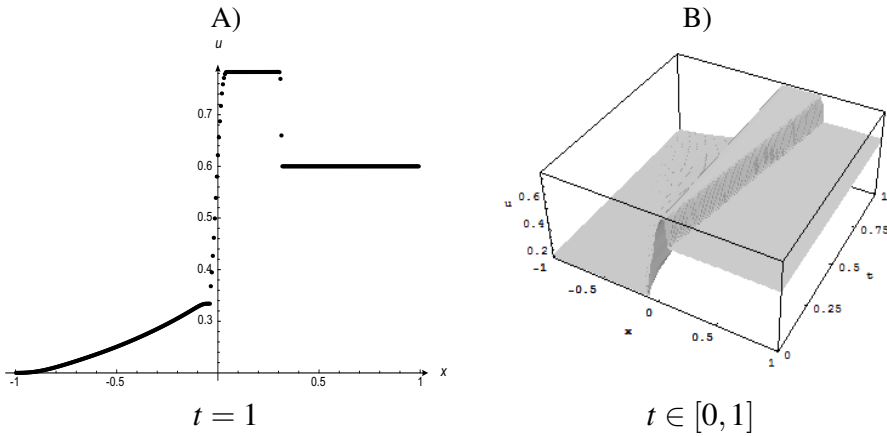
Slika 5.17: Numeričko rešenje primeru 5.1.7

Slika 5.18: Odnos flukseva g i h u primeru 5.1.8 i 5.1.9

načine sa dva fluksa, tj. u ovom slučaju (5.10) postaje

$$k_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} a_l, & x \leq -\varepsilon \\ \frac{a_r - a_l}{2\varepsilon^2}(x + \varepsilon)^2 + a_l, & -\varepsilon \leq x \leq 0 \\ \frac{a_l - a_r}{2\varepsilon^2}(x - \varepsilon)^2 + a_r, & 0 \leq x \leq \varepsilon \\ a_r, & x \geq \varepsilon \end{cases}. \quad (5.46)$$

Na sl. 5.20 možemo videti odnos flukseva u ovom primeru. Kao što



Slika 5.19: Numeričko rešenje u primeru 5.1.9

vidimo, $a_l f(\theta) > a_r f(\theta)$, pa DSP gradimo pomoću koneksije $(\theta, \bar{\theta}) = (-1, 0)$. U ovom slučaju dobijeno numeričko rešenje konvergira ka

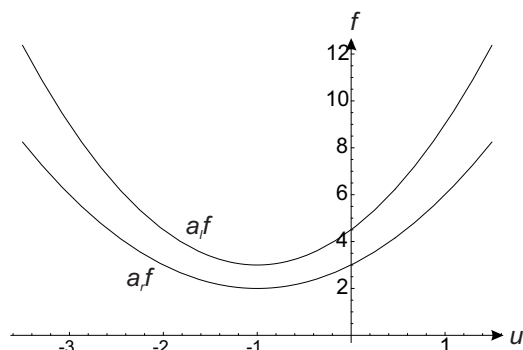
$$\overleftarrow{R}(-1.2, -1) + S^0(-1, 0) + \overrightarrow{S}(0, -1.2),$$

sl. 5.21.

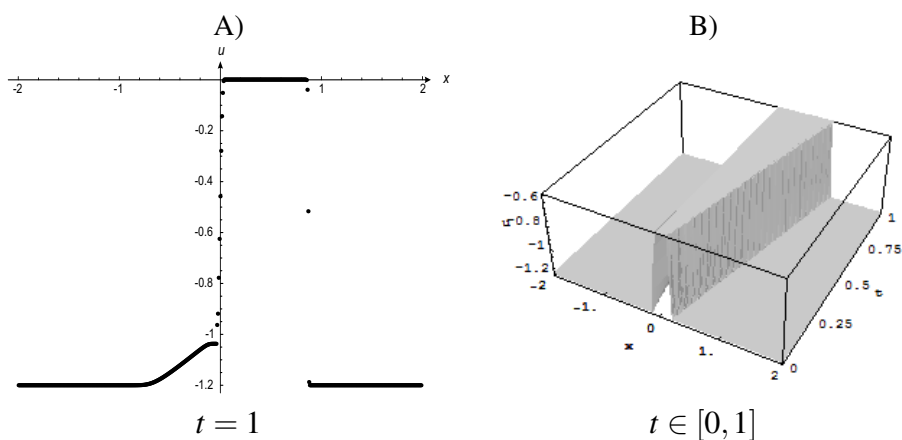
Primer	Δx	j^*	ϵ
5.1.4	0.00997	6	0.05982
5.1.5	0.00499	10	0.04990
5.1.6	0.00499	6	0.02994
5.1.7	0.00499	6	0.02994
5.1.9	0.00399	8	0.03192
5.1.10	0.02649	4	0.10596

Tabela 5.2: Vrednosti numeričkih parametara u primerima 5.1.4 – 5.1.10

Na posletku, u tabeli 5.2 navodimo i vrednosti parametara koje smo koristili u numeričkim procedurama u primerima 5.1.4 – 5.1.10.



Slika 5.20: Odnos flukseva u primeru 5.1.10



Slika 5.21: Numeričko rešenje problema u primeru 5.1.10

5.2 Konveksno – konkavni slučaj

Posmatrajmo sada jednačinu (2.63) u tzv. **konveksno – konkavnom slučaju**, tj. kada je jedan od flukseva g ili h konveksnog tipa, a drugi konkavnog tipa. U skladu s tim, u odeljku 5.2.1 ćemo uvesti i odgovarajuće pretpostavke koje će važiti u okviru ovog poglavlja. Namera nam je da i u ovom slučaju, izvršimo regularizaciju fluksa i potom reša-

vamo perturbovanu jednačinu (5.13).

Međutim, slučaj jednačine sa dva fluksa kada su fluksevi različitog tipa konveksnosti je nešto složeniji od slučaja kada su oba fluksa istog tipa konveksnosti. Naime, ispostaviće se da uslov entropije (5.32) u ovom slučaju više nije relevantan, tj. mora da se uopšti da bi obuhvatao i ovaj slučaj. Glavni problem leži u tome što za neko $j \in J$, diskretni fluks $F_\varepsilon(x_j, u)$ može imati više ekstrema (vidi primer 5.2.1), jer se regularizacija F_ε dobija kao aproksimacija originalnog fluksa (5.1) koji se sastoji od flukseva koji su različitih tipova konveksnosti. To znači da tačke DSP-a u_j^n koje zadovoljavaju uslov (5.32) nisu jedinstveno određene. Čak šta više, neki izbori DSP-a koji zadovoljavaju ovaj uslov, ne zadovoljavaju diskretnu nejednakost Kružkova.

Primer 5.2.1 *Posmatrajmo flukseve*

$$h = -(u+1) \left(\sqrt{u+1} - 1.1\sqrt{2} \right) \quad i \quad g = \frac{1}{16}(u+1) \left((u+1)^4 - 16 \right)$$

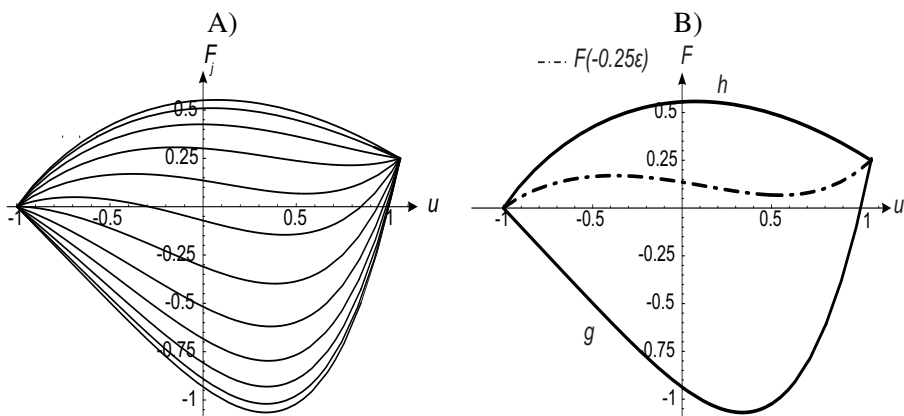
na intervalu $[-1, 1.1]$. Tada za $\varepsilon = 0.1$ fluks $F_\varepsilon(-0.25\varepsilon, u)$ definisan regularizacijom (5.10) ima maximum u $\theta_1 = -0.38$ i minimum u $\theta_2 = 0.55$. Na sl. 5.22 A) vidimo diskretni niz dobijen regularizacijom (5.10), a na sl. 5.22 B) smo izdvojili krivu $F_\varepsilon(-0.25\varepsilon, u)$.

Napomena 5.2.1 *Kao i u prethodnom poglavlju, diskretni niz flukseva na sl. 5.22 A) je dobijen pomoću programa koji smo kreirali za potrebe numeričkih primera ove teze. Međutim u nastavku, preglednosti radi, diskretni nizovi flukseva na sl. 5.25 – 5.27 su crtani ručno.*

5.2.1 Uvodne oznake i pretpostavke

Pretpostavićemo da važi pretpostavka H1 sa strane 80. Preglednosti radi, u nastavku ćemo ponoviti njenu formulaciju.

H1: Fluksevi $g, h \in C^1(I)$ zadovoljavaju $g(X) = h(X)$ i $g(Y) = h(Y)$.



Slika 5.22: Diskretni fluks sa dva ekstrema

S obzirom da sada posmatramo fluksve različitog tipa konveksnosti, jasno je da se u ovom slučaju mogu pojaviti četiri slučaja odnosa fluksveva g i h , tj.

A) g je konveksnog tipa, a h je konkavnog tipa, i

(i) $g(X) \leq g(Y)$

(ii) $g(X) > g(Y)$

B) g je konkavnog tipa, a h je konveksnog tipa, i

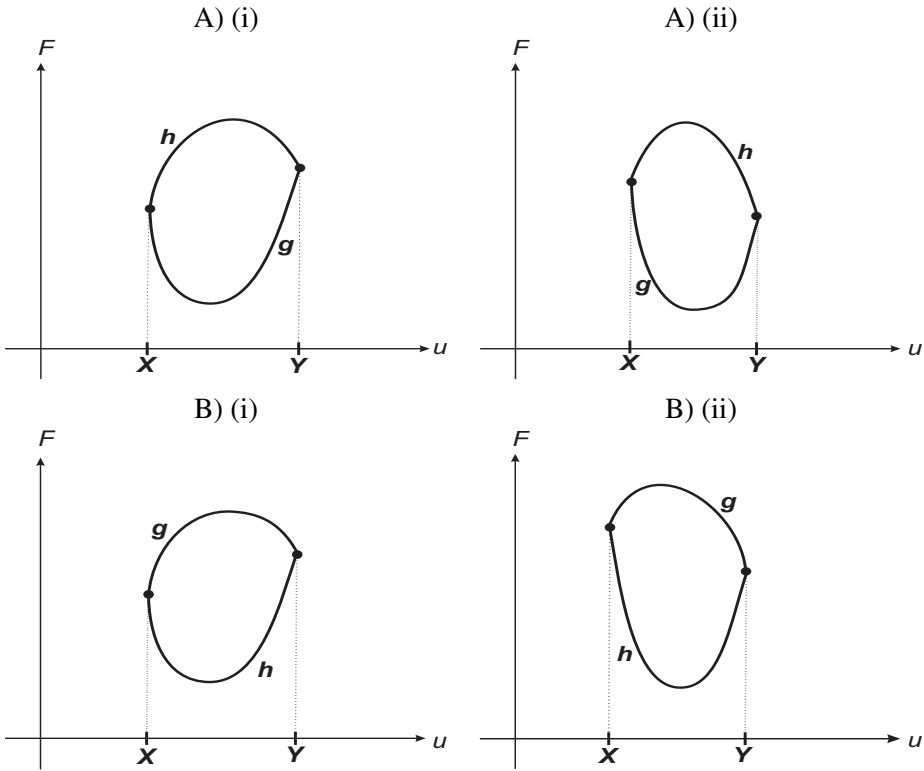
(i) $g(X) > g(Y)$

(ii) $g(X) \leq g(Y)$.

Gore navedeni slučajevi se mogu videti na sl. 5.23.

Bez uticaja na opštost, usredsredićemo se na slučaj A)(i), s obzirom na to da se ostali slučajevi mogu posmatrati na sličan način. U tom kontekstu, uvodimo sledeću pretpostavku:

H4: Fluks g je konveksnog tipa, a h je konkavnog tipa i $g(X) \leq g(Y)$.



Slika 5.23: Razne mogućnosti odnosa flukseva u konveksno – konkavnom slučaju

Uvedimo sada oznake za tačke ekstrema flukseva. Jedinostveni minimum fluksa g označavamo sa θ_g , dok jedinstveni maksimum fluksa h označavamo sa θ_h , tj.

$$g(\theta_g) = \min_{u \in I} g(u) \quad \text{i} \quad h(\theta_h) = \max_{u \in I} h(u).$$

U skladu sa pretpostavkom H4, definicija koneksije (4.2.3) se u ovom slučaju svodi na

$$h(A) = g(B), \quad A \geq \theta_h \quad \text{i} \quad B \geq \theta_g. \quad (5.47)$$

Lako se može proveriti da je u ovom slučaju $A = B = Y$ jedina koneksija, jer jedino par (Y, Y) zadovoljava uslov (5.47).

Napomena 5.2.2 *Ukoliko bismo posmatrali slučaj kada je g konkavnog, a h konveksnog tipa, onda bi jedina moguća koneksija bila data sa $A = B = X$.*

5.2.2 Rimanov problem

Posmatrajmo sada problem (5.22), (5.1) zajedno sa početnim uslovom (2.11), pod pretpostavkama H1 i H4 iz odeljka 5.2.1.

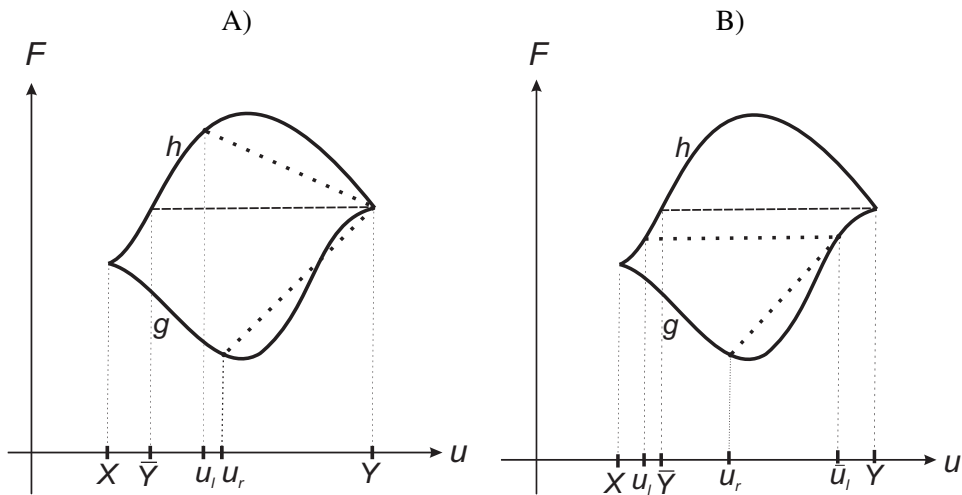
Kao što smo već napomenuli, u posmatranom slučaju jedina koneksija je $A = B = Y$. Prema [57, 58], Rimanov problem (2.63), (2.11) za ovu koneksiju ima rešenje u obliku levog udarnog i desnog (udarnog ili razređujućeg) talasa povezanog sa konstantnim udarnim talasom u $x = 0$.

Označimo levi udarni talas sa $\overleftarrow{S}(u_l, Y)$, desni udarni (razređujući) talas sa $\overrightarrow{S}(Y, u_r)$ ($\overrightarrow{R}(Y, u_r)$), a konstantni udarni talas u $x = 0$ sa $S^0(Y, Y)$. Jasno je da brzina levog talasa mora biti negativna, a brzina desnog talasa pozitivna, jer bi u suprotnom došlo do inerakcije talasa. Označimo sa \bar{Y} tačku za koju važi

$$\bar{Y} \in I, \quad g(\bar{Y}) = g(Y).$$

Kao što možemo videti sa sl. 5.24 A), ako posmatramo koneksiju (Y, Y) , levi udarni talas $\overleftarrow{S}(u_l, Y)$ ima negativnu brzinu za $u_l \in [\bar{Y}, Y]$. Isto tako, lako se može proveriti da za svako $u_l \in [\bar{Y}, Y]$ par (u_l, Y) zadovoljava Olejnikov uslov entropije (2.18). Isto važi i za par (Y, u_r) za svako $u_r \in I$. S druge strane, jasno je da je talas određen koneksijom (Y, Y) stacionaran, jer je $h(Y) = g(Y)$. Stoga za $u_l \in [\bar{Y}, Y]$, $u_r \in I = \mathcal{A}(Y, Y)$ (dopustiv skup desnih konstanti iz početnog uslova za koji postoji desni udarni talas pozitivne brzine), problem (5.2), (2.11) ima rešenje u obliku

$$\overleftarrow{S}(u_l, Y) + S^0(Y, Y) + \overrightarrow{S}(Y, u_r). \quad (5.48)$$



Slika 5.24: Rešenja Rimanovog problema u slučaju A) $u_l > \bar{Y}$ i B) $u_l < \bar{Y}$

I ovog puta, kao i u slučaju flukseva istog tipa konveksnosti, bez uticaja na opštost ćemo posmatrati specijalan slučaj (5.48) kada je $u_l = Y$ pa (5.48) postaje

$$S^0(Y, Y) + \vec{S}(Y, u_r), \quad (5.49)$$

tj. rešenje se sastoji samo iz jednog putujućeg talasa (u ovom slučaju desnog).

U suprotnom slučaju, tj. kada je $u_l \in [X, \bar{Y}]$, rešenje koje zadovoljava RH-uslov u $x = 0$ se sastoji od stacionarnog udarnog talasa $S^0(u_l, \bar{u}_l)$ povezanog sa $\vec{S}(\bar{u}_l, u_r)$ ili $\vec{R}(\bar{u}_l, u_r)$, u zavisnosti da li par (\bar{u}_l, u_r) zadovoljava (2.18) ili ne. Ovde smo sa \bar{u}_l označili tačku za koju važi

$$g(\bar{u}_l) = h(u_l).$$

Naravno, i u ovom slučaju, kao i slučaju sa dva fluksa konveksnog tipa, ograničićemo naša razmatranja samo na slučajeve kada su udarni talasi deo rešenja, tj. kada par (\bar{u}_l, u_r) zadovoljava (2.18), tj.

$u_r \in \mathcal{A}(u_l, \bar{u}_l) = [X, \bar{u}_l]$. Tada je očekivano rešenje oblika

$$S^0(u_l, \bar{u}_l) + \vec{S}(\bar{u}_l, u_r). \quad (5.50)$$

5.2.3 Egzistencija DSP–ova za jednačinu sa dva fluksa u konveksno – konkavnom slučaju

Dakle, kao i u slučaju kada su fluksevi istog tipa konveksnosti, izvršićemo najpre regularizaciju fluksa (5.1) koristeći $F_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R} \times I)$ koje zadovoljava relaciju (5.8) za dovoljno malo $\varepsilon > 0$. U posmatranom slučaju položaja flukseva (vidi H4, odeljak 5.2.1), definicija dopustive regularizacije (5.9) se svodi na

Definicija 5.2.1 Regularizacija $F_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R} \times I)$ data sa (5.8) je dopustiva ukoliko

$$F_\varepsilon(x, u) > F_\varepsilon(y, u) \quad (5.51)$$

važi za svako $x, y \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ za koje važi $x < y$, i svako $u \in I$.

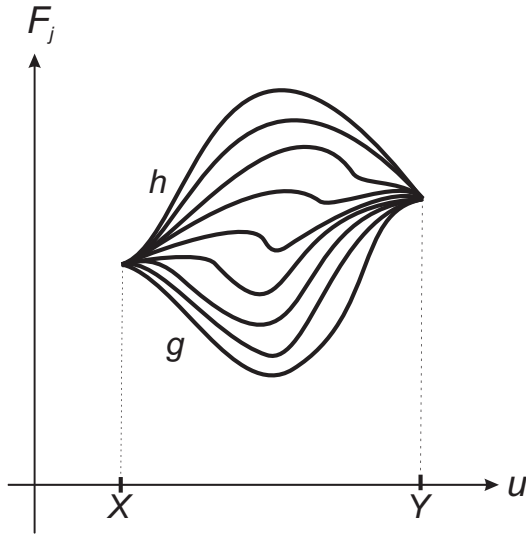
Napomena 5.2.3 Relacija (5.51) je izvedena iz (5.9) na osnovu činjenice da je na osnovu H4 $g(u) < h(u)$ za $u \in (X, Y)$. Naravno, u suprotnom slučaju ($g(u) > h(u)$), morali bismo koristiti obrnuti znak nejednakosti u relaciji (5.51).

Lako se može proveriti da je regularizacija oblika (5.10) i u ovom slučaju dopustiva. Diskretan niz flukseva $\{F_j\}$ za koji važi (5.8) je prikazan na sl. 5.25. Kao što smo najavili u poglavlju 5.1.3, relacija (5.51) nam obezbeđuje osobine koje ćemo dokazati u lemapa 5.2.1 – 5.2.3.

Lema 5.2.1 Neka je F_ε dopustiva regularizacija fluksa F . Tada je

$$F_\varepsilon(x, X) = g(X) = h(X) \quad i \quad F_\varepsilon(x, Y) = h(Y) = g(Y) \quad (5.52)$$

za sve $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Čak šta više, krajevi intervala su jedine tačke preseka flukseva $F_\varepsilon(x, u)$ i $F_\varepsilon(y, u)$ za svako $x, y \in Y$ ovog intervala.



Slika 5.25: Diskretni niz flukseva $\{F_j\}_{j \in J}$ za dopustivu regularizaciju

Dokaz Iz (5.8), (5.51) i činjenice da je

$$g(X) = h(X) \quad \text{i} \quad g(Y) = h(Y),$$

jasno je da (5.52) važi za svako $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Pretpostavimo sada da postoje

$$\tilde{x}, \tilde{y} \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \tilde{x} < \tilde{y} \quad \text{i} \quad u_* \in I, \quad u_* \neq X, Y$$

tako da je

$$F_\varepsilon(\tilde{x}, u_*) = F_\varepsilon(\tilde{y}, u_*).$$

Tada imamo da je

$$F_\varepsilon(\tilde{x}, u) > F_\varepsilon(\tilde{y}, u) \quad \text{za} \quad u \in (X, u_*)$$

i

$$F_\varepsilon(\tilde{x}, u) < F_\varepsilon(\tilde{y}, u) \quad \text{za} \quad u \in (u_*, Y),$$

ili obrnuto. Naravno,

$$F_\varepsilon(\tilde{x}, u) < F_\varepsilon(\tilde{y}, u) \quad \text{za} \quad u \in (u_*, Y)$$

je u suprotnosti sa (5.51), jer je $\tilde{x} < \tilde{y}$. Ovim je lema dokazana. \square

Kao direktnu posledicu leme 5.2.1, imamo lemu:

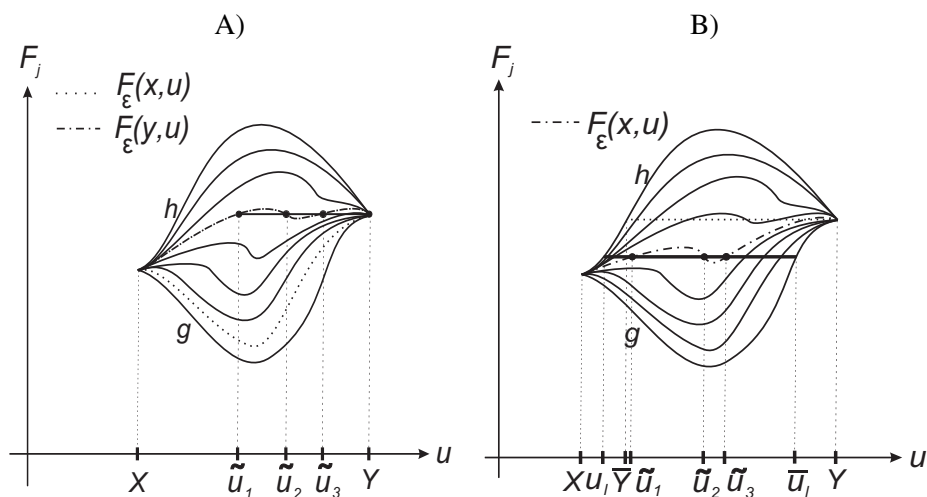
Lema 5.2.2 *Jednačina*

$$F_\varepsilon(x, u) = h(Y) = g(Y) \quad (5.53)$$

ima realna rešenja u I za svako fiksirano $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Naime, iz leme 5.2.1 nedvosmisleno sledi da uvek imamo rešenje jednačine (5.53) oblika $u = Y$ za svako $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Ali, očigledno, ovo rešenje nije jedinstveno za svako $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, vidi sl. 5.26 A). Kao što vidimo, $F_\varepsilon(x, u) = h(Y)$ ima samo jedno rešenje $u = Y$ u I , dok $F_\varepsilon(y, u) = h(Y)$ ima više od jednog rešenja, tj. $u \in \{Y, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\}$.

Podsetimo se da smo u odeljku 5.1.3 koneksije koje zadovoljavaju lemu 5.2.2 zvali *dopustivim u odnosu na regularizaciju*. Očigledno, jedina koneksija $A = B = Y$ je ujedno i dopustiva u odnosu na regularizaciju.



Slika 5.26: Rešenja jednačine A) $F_\varepsilon(x, u) = h(Y)$ i B) $F_\varepsilon(x, u) = h(u)$ u I

Lema 5.2.3 *Neka je $g(X) \leq g(Y)$ i $u_l \in [X, \bar{Y}]$. Jednačina*

$$F_\varepsilon(x, u) = h(u_l) \quad (5.54)$$

ima realna rešenja za svako fiksno $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ u I .

Čak šta više, za svako $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ postoji $\tilde{u} \in \{u | F_\varepsilon(x, u) = h(u_l)\}$ tako da

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x, \tilde{u}) > 0. \quad (5.55)$$

Dokaz Dokaz sledi direktno iz leme 5.2.1 i činjenice da je

$$g(X) < g(u_l) < g(Y),$$

vidi sl. 5.26 B). Međutim, pošto za neko $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ fluks $F_\varepsilon(x, u)$ može imati više od jednog ekstrema, jasno je da rešenje jednačine (5.54) sa osobinom (5.55) nije jedinstveno. \square

Nakon regularizacije fluksa (5.10), jednačina (2.63) poprima oblik (5.13) i imamo sledeću teoremu.

Teorema 5.2.1 *Pretpostavimo da važe hipoteze $H1$ i $H4$. Neka je ε dovoljno malo. Jednačina (5.13) ima DSP za postupak Godunova koji konvergira ka*

(a) (5.49) za $u_l = Y$ i $u_r \in I$.

(b) (5.50) za $u_l \in [X, \bar{Y}]$ i $u_r \in [X, \bar{u}_l]$.

Dokaz (a) Posmatrajmo najpre egzistenciju DSP-ova koji teže ka (5.49), tj. slučaj $u_l = A = Y$ i $u_r \in I$. Isto kao i u slučaju kada su fluksevi istog tipa konveksnosti, naš problem se sastoji iz dva dela. Prvi problem se sastoji od zakona održanja sa promenljivom funkcijom fluksa (5.13) zajedno sa

$$u_0(x) = u_l = Y, \quad (5.56)$$

za $x < \varepsilon$ čije očekivano rešenje je u obliku stacionarnog DSP-a, i

$$u_t + g(u)_x = 0, \quad (5.57)$$

sa

$$u_0(x) = \begin{cases} Y, & x < \varepsilon \\ u_r, & x > \varepsilon \end{cases}, \quad (5.58)$$

za $x > \varepsilon$, iz kojeg ćemo dobiti putujući DSP pozitivne brzine.

Pošto se $F_\varepsilon(x, u)$ podudara sa h za $x < -\varepsilon$ i $u_0 = Y$, dovoljno je da posmatramo problem (5.13), (5.15) na intervalu $[-\varepsilon, \varepsilon]$, jer za $x < -\varepsilon$ imamo zakon održanja sa neprekidnom funkcijom fluksa i konstantnim početnim uslovom, čije je opšte poznato rešenje oblika $u = Y$.

Nakon diskretizacije problema (5.13), (5.56) na skupu J datim sa (5.12), (5.11), dobijamo niz Rimanovih problema (5.19) i (5.20), te na potpuno analogan način kao i u dokazu Teoreme 5.1.1 u odeljku 5.1.3, dobijamo sistem

$$F_j(u_j) = F_{j-1}(u_{j-1}) = h(Y), \quad j \in J \setminus \{-j^*\}, \quad (5.59)$$

koji prema lemi 5.2.2 daje stacionarni DSP. Označimo dobijeni DSP sa

$$u_{stac} = \{u_j\}_{j \in J}.$$

Pošto rešenje sistema (5.59) nije jedinstveno, jasno je da ni u_{stac} nije jedinstveno određen. S toga ćemo u odeljku 5.2.4 izvesti odgovarajući diskretni entropijski uslov.

S druge strane, egzistencija DSP-a pozitivne brzine za problem (5.57), (5.58) sledi na osnovu rezultata iz [27], jer je ovo u stvari zakon održanja sa neprekidnom funkcijom fluksa i par (Y, u_r) zadovoljava Olejnikov uslov entropije (2.18) za sve $u_r \in I$. Označimo putujući DSP sa $u_{trav} = \{u_j\}_{j > j^*}$. Unija DSP-a u_{stac} i u_{trav} daje novi DSP za problem (5.13) sa početnim uslovom (2.11).

(b) Dokaz egzistencije DSP-a koji teži ka (5.50) počinje rešavanjem problema (5.13) zajedno sa

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ \bar{u}_l, & 0 < x \leq \varepsilon \end{cases} \quad (5.60)$$

i (5.57) sa

$$u_0(x) = \begin{cases} \bar{u}_l, & x < \varepsilon \\ u_r, & x > \varepsilon \end{cases} . \quad (5.61)$$

Slično kao i pod (a), rešavanjem problema (5.13), (5.60) dobijamo sistem

$$F_j(u_j) = F_{j-1}(u_{j-1}) = h(u_l), \quad j \in J \setminus \{-j^*\}. \quad (5.62)$$

Ostatak dokaza je analogan kao i pod (a). Ovim je teorema dokazana. \square

5.2.4 Diskretni uslov entropije

Kao što smo videli u prethodnom odeljku, izbor tačaka DSP-a u slučaju koji posmatramo nije jedinstven, vidi sl. 5.27 za $u_l = Y$, i sl. 5.28 za $u_l < \bar{Y}$. Stoga ćemo u tekstu ispod predstaviti diskretni uslov entropije koji će povlačiti zadovoljenje jedne od entropijskih nejednakosti Kružkova (5.30) ili (5.31).

Teorema 5.2.2 *Problem (5.13), zajedno sa (2.11) ima jedinstveni entropijski stacionarni DSP za postupak Godunova sa prostorno promenljivim fluksom, ako i samo ako*

$$(a) u_j^n = Y \quad \text{za } u_l = Y \quad (5.63)$$

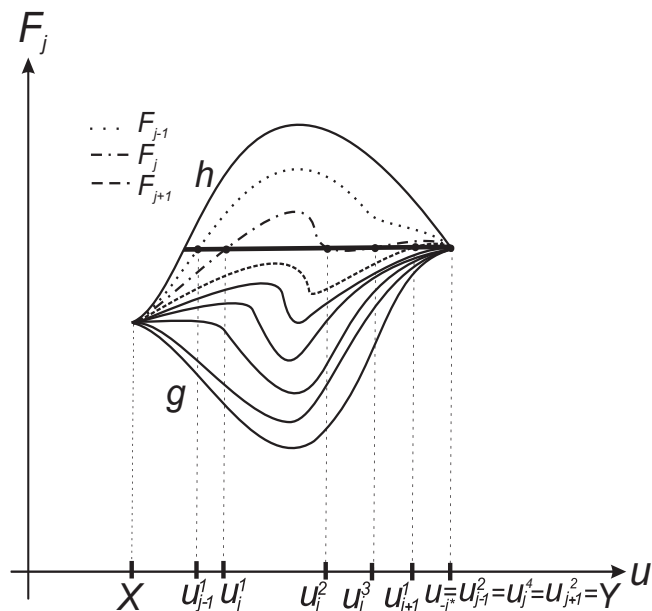
$$(b) u_j = \max S_j, \quad S_j = \{ \hat{u} | F_j(\hat{u}) = h(u_l) \wedge F_j'(\hat{u}) > 0 \}, \text{ za } u_l \leq \bar{Y} \quad (5.64)$$

važi $\forall j \in J$.

Drugim rečima, (5.63) i (5.64) predstavljaju diskretne uslove entropije za stacionarne DSP-ove u slučaju $u_l = Y$ i $u_l \leq \bar{Y}$, redom.

Dokaz (a) Pretpostavimo najpre da važi uslov (5.63). Dokažimo da je tada odgovarajući DSP entropijski, tj. da za $\forall j \in J$ za koje je $F_j'(u_j^n) \geq 0$ važi (5.30), a da za $\forall j$ za koje je $F_j'(u_j^n) \leq 0$ važi (5.31). Na osnovu pretpostavke H4 i (5.51) imamo da je

$$F_j'(u_j^n) \leq 0 \text{ za } j \leq j_k \text{ i } F_j'(u_j^n) \geq 0 \text{ za } j > j_k,$$



Slika 5.27: Razne mogućnosti rešenja jednačine $F_j(u) = Y$

gde je j_k neki indeks iz skupa J , (vidi sl. 5.27).

Za $j \leq j_k$, tj. $F_j'(u_j^n) \leq 0$ na osnovu (5.63) imamo da je

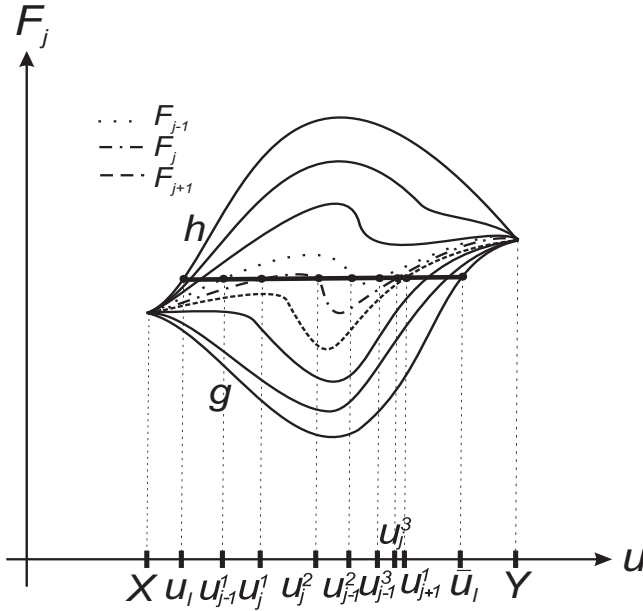
$$\text{sign}(u_{j+1}^n - c) - \text{sign}(u_j^n - c) = \text{sign}(Y - c) - \text{sign}(Y - c) = 0,$$

za svaku konstantu c , što daje

$$(\text{sign}(u_{j+1}^n - c) - \text{sign}(u_j^n - c)) (F_{j+1}(u_{j+1}^n) - F_{j+1}(c)) = 0, \quad (5.65)$$

Kombinacija relacije (5.65) sa (5.59) daje

$$\begin{aligned} 0 &= (\text{sign}(u_{j+1}^n - c) - \text{sign}(u_j^n - c)) (F_{j+1}(u_{j+1}^n) - F_{j+1}(c)) \\ &= \text{sign}(u_{j+1}^n - c) (F_{j+1}(u_{j+1}^n) - F_{j+1}(c)) \\ &\quad - \text{sign}(u_j^n - c) (F_j(u_j^n) - F_j(c) + F_j(c) - F_{j+1}(c)) \\ &= \text{sign}(u_{j+1}^n - c) (F_{j+1}(u_{j+1}^n) - F_{j+1}(c)) - \text{sign}(u_j^n - c) (F_j(u_j^n) \\ &\quad - F_j(c)) + \text{sign}(u_j^n - c) (F_{j+1}(c) - F_j(c)). \end{aligned}$$



Slika 5.28: Razne mogućnosti rešenja jednačine $F_j(u) = u_l$

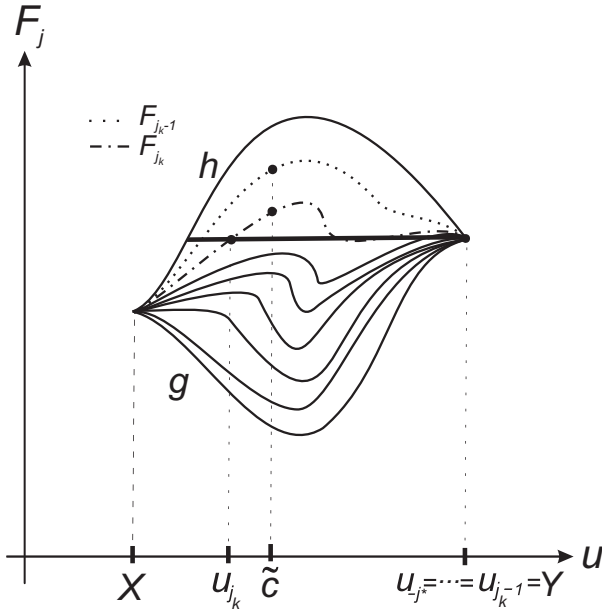
Pošto je $u_j^{n+1} = u_j^n, \forall j \in J$ i $n > 0, \lambda > 0$ zaključujemo da (5.31) važi $\forall c \in \mathbb{R}$. Na isti način, možemo pokazati da (5.30) važi za svaku konstantu c za $j > j_k$, tj. kada $F'_j(u_j^n) \geq 0$.

Pretpostavimo sada da je DSP dobijen u Teoremi 5.2.1 entropijski. Tada, prema definiciji 5.1.3, DSP zadovoljava (5.30) ako je $F'(u_j) \geq 0$ ili (5.31) ako je $F'(u_j) \leq 0$ za svako $j \in J$.

Namera nam je da pokažemo da $u_j = Y$ važi za svako $j \in J$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji indeks $j_k \in J, j_k > -j^*$, takav da $u_{j_k} \neq Y$. Bez uticaja na opštost, pretpostavićemo da je

$$F'_{j_k}(u_{j_k}) \geq 0, \tag{5.66}$$

tj. pošto je DSP entropijski, tada za svako $c \in \mathbb{R}$ važi (5.30). (Dokaz u slučaju kada je $F'_{j_k}(u_{j_k}) \leq 0$ se izvodi veoma slično). Na osnovu činjenice



Slika 5.29: Neentropijski DSP, ilustracija dokaza teoreme 5.2.2 (a),
 $F'_{j_k}(u_{j_k}^n) > 0$

da je $u_{j_k}^{n+1} = u_{j_k}^n$ za svako n i $\lambda > 0$, dobijamo

$$0 \geq \text{sign}(u_{j_k}^n - c)(F_{j_k}(u_{j_k}^n) - F_{j_k}(c)) - \text{sign}(u_{j_k-1}^n - c)(F_{j_k-1}(u_{j_k-1}^n) - F_{j_k-1}(c)) + \text{sign}(u_{j_k}^n - c) = \text{sign}(u_{j_k}^n - c)(F_{j_k}(u_{j_k}^n) - F_{j_k-1}(c)) - \text{sign}(u_{j_k-1}^n - c)(F_{j_k-1}(u_{j_k-1}^n) - F_{j_k-1}(c))$$

Uzimajući u obzir (5.59) i $u_{j_k-1} = Y$, dobijamo

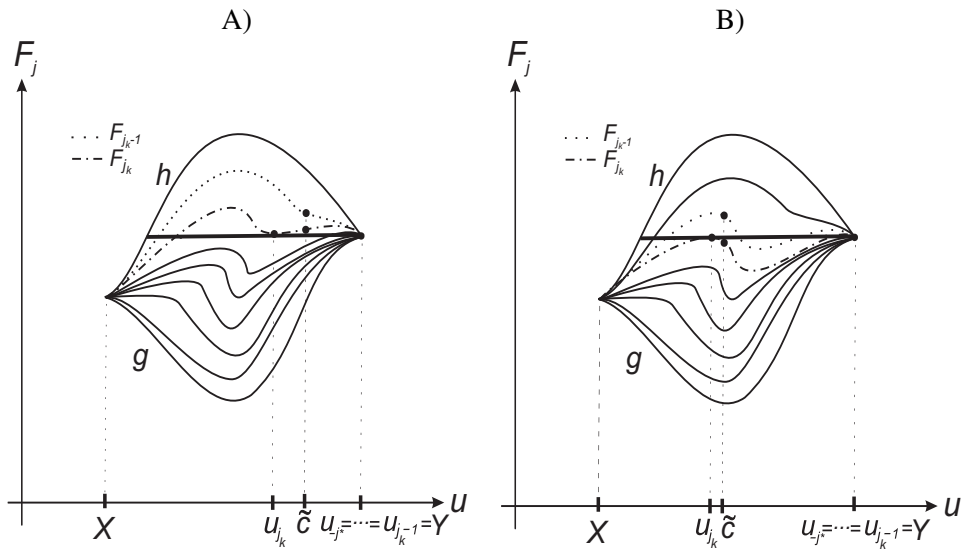
$$(\text{sign}(u_{j_k}^n - c) - \text{sign}(Y - c))(F_{j_k-1}(Y) - F_{j_k-1}(c)) \leq 0. \quad (5.67)$$

Pošto je $u_{j_k} \in (X, Y)$, tj. $u_{j_k} < Y$, za $c \in (u_{j_k-1}, Y)$ imamo da je

$$\text{sign}(u_{j_k}^n - c) - \text{sign}(Y - c) = -2,$$

pa relacija (5.67) postaje

$$F_{j_k-1}(Y) - F_{j_k-1}(c) \geq 0. \quad (5.68)$$



Slika 5.30: Neentropijski DSP, ilustracija dokaza teoreme 5.2.2 (a),

$$F'_{j_k}(u_{j_k}^n) = 0$$

Posmatrajmo najpre slučaj kada je nejednakost (5.66) striktna, tj. $F'_{j_k}(u_{j_k}^n) > 0$. Tada postoji konstanta $\tilde{c} > u_{j_k}^n$, takva da

$$F_{j_k}(\tilde{c}) > F_{j_k}(u_{j_k}^n) = F_{j_k-1}(Y), \quad (5.69)$$

vidi sl. 5.29 kao ilustraciju. Na osnovu relacije (5.51) koja važi za svaku dopustivu regularizaciju, dobijamo

$$F_{j_k-1}(\tilde{c}) > F_{j_k}(\tilde{c}),$$

te je na osnovu (5.69)

$$F_{j_k-1}(Y) - F_{j_k-1}(\tilde{c}) \leq 0,$$

što je u kontradikciji sa (5.68). Slično, ako je $F'_{j_k}(u_{j_k}^n) = 0$, tada $u_{j_k}^n$ predstavlja lokalni minimum (sl. 5.30 A) ili maksimum (sl. 5.30 B) fluksa $F_{j_k}(u)$. Opet, na osnovu (5.51) imamo da je $F_{j_k-1}(u) > F_{j_k}(u)$ pa za dovoljno malo Δx postoji konstanta $\tilde{c} > u_{j_k}$ takva da $F_{j_k-1}(\tilde{c}) > F_{j_k}(u_{j_k})$,

što je u kontradikciji sa (5.68). Stoga dobijamo da $u_j^n = Y$ važi za svako $j \in J$ i $n > 0$.

(b) Pretpostavimo sada da je $u_l \leq \bar{Y}$ i da (5.64) važi $\forall j \in J$. Dokažimo da je tada DSP entropijski. Na osnovu posmatranog položaja flukseva, jasno je da (5.64) povlači $u_{j-1} < u_j$. Slučaj kada je $c \notin (u_{j-1}, u_j)$ je trivijalan, pošto je tada

$$\text{sign}(u_j^n - c) - \text{sign}(u_{j-1}^n - c) = 0,$$

pa ćemo pretpostaviti da je $u_{j-1} < c < u_j$. Odavde sledi da je

$$\text{sign}(u_j^n - c) - \text{sign}(u_{j-1}^n - c) = 2. \quad (5.70)$$

Relacija (5.64) povlači

$$F_{j-1}(u_{j-1}^n) - F_{j-1}(c) \leq 0. \quad (5.71)$$

Kombinacijom (5.70) i (5.71), dobijamo

$$(\text{sign}(u_j^n - c) - \text{sign}(u_{j-1}^n - c)) (F_{j-1}(u_{j-1}^n) - F_{j-1}(c)) \leq 0.$$

Analogno kao i u (a), dobijamo da (5.30) važi za $\forall c \in \mathbb{R}$.

Pretpostavimo sada da je dobijeni DSP entropijski, odnosno da (5.30) važi za $F_j'(u_j) \geq 0$, dok (5.31) važi za $F_j'(u_j) < 0$. Namera nam je da pokažemo da tada važi uslov (5.64). Dokažimo najpre da važi $F_j'(u_j) > 0$ za $\forall j \in J$. Pretpostavimo suprotno, tj. da su $F_{j_k-1}'(u_{j_k-1})$ i $F_{j_k}'(u_{j_k})$ različitog znaka za neki indeks $j_k \in J$, npr.

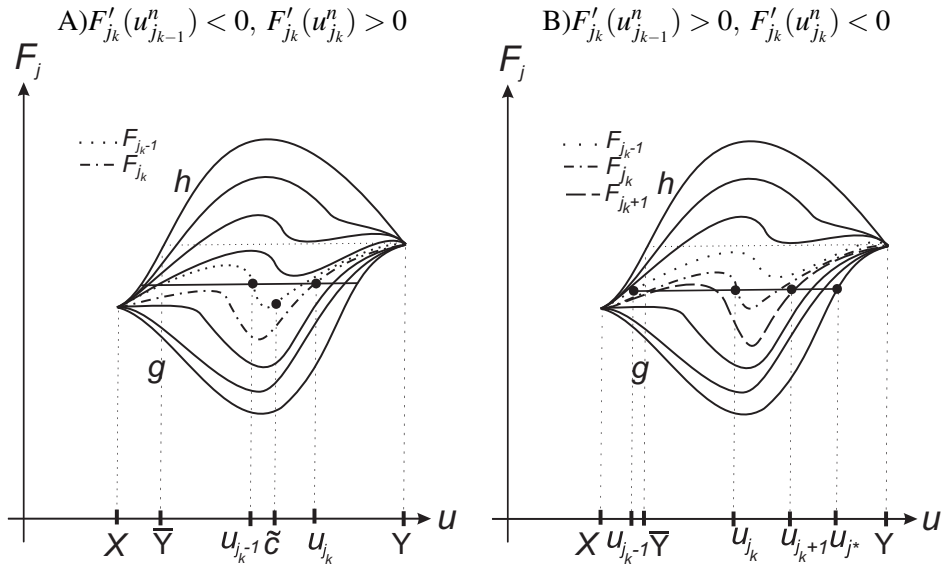
$$F_{j_k-1}'(u_{j_k-1}) < 0 \text{ i } F_{j_k}'(u_{j_k}) > 0.$$

Tada relacija (5.30) važi za j_k , što na osnovu pokazanog pod (a) povlači

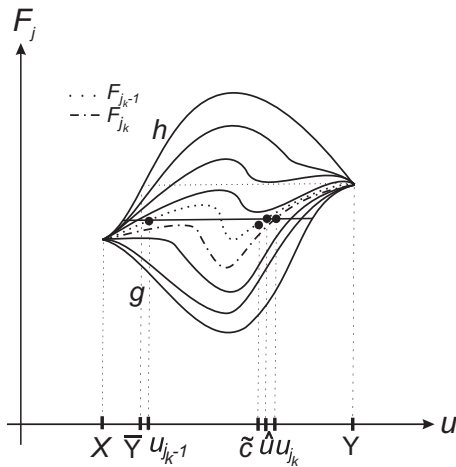
$$(\text{sign}(u_{j_k}^n - c) - \text{sign}(u_{j_k-1}^n - c)) (F_{j_k-1}(u_{j_k-1}^n) - F_{j_k-1}(c)) \leq 0 \quad (5.72)$$

Međutim, lako se može pokazati da to nije tačno jer su $F_{j_k-1}'(u_{j_k-1})$ i $F_{j_k}'(u_{j_k})$ različitog znaka, tj.

$$\text{sign}(u_{j_k}^n - c) - \text{sign}(u_{j_k-1}^n - c) = 2,$$



Slika 5.31: Neentropijski DSP, ilustracija dokaza teoreme 5.2.2 (b)



Slika 5.32: Neentropijski DSP, ilustracija dokaza teoreme 5.2.2 (b),

$$F'_{jk}(u_{jk}^n) > 0$$

a

$$F_{j_k-1}(u_{j_k-1}^n) - F_{j_k-1}(c) > 0,$$

vidi sl. 5.31 A). Isto tako, ako je

$$F'_{j_k}(u_{j_k-1}^n) > 0, \text{ i } F'_{j_k}(u_{j_k}^n) < 0,$$

tada na osnovu činjenice da je $g'(u_{j^*}) > 0$ sledi da postoji neko $k_1 > k$ (bez uticaja na opštost uzećemo da je $k_1 = k + 1$) tako da važi

$$F'_{j_k}(u_{j_k}) < 0 \text{ i } F'_{j_k+1}(u_{j_k+1}) > 0,$$

a već smo pokazali da u tom slučaju nemamo entropijski DSP. Stoga, jasno je da je $F'_j(u_j)$ istog znaka za svako $j \in J$. Čak šta više, na osnovu

$$F_{j^*} = g, u_{j^*} = \bar{u}_l \text{ i } g'(\bar{u}_l) > 0,$$

sledi da je $F'_j(u_j) > 0$.

Dokažimo sada da je $u_j = \max S_j$ za svako $j \in J$, gde je S dato sa (5.63). Pretpostavimo suprotno, tj. da za neko $j_k - 1 \in J$, $F'(u_{j_k-1}) > 0$, postoji vrednost $\hat{u} > u_{j_k-1}$ takva da je

$$F_{j_k-1}(\hat{u}) = h(u_l) \text{ i } F'_{j_k-1}(\hat{u}) > 0.$$

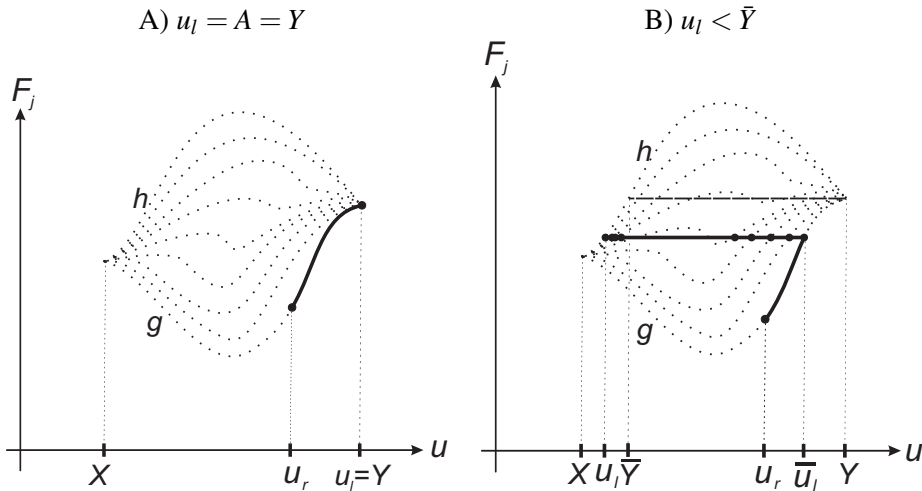
Za dovoljno malo Δx , iz $u_{j_k} > u_{j_k-1}$ i (5.72) sledi da je

$$F_{j_k-1}(u_{j_k-1}^n) - F_{j_k-1}(c) \leq 0,$$

što nije tačno za svako $c \in (u_{j_k-1}, u_{j_k})$, vidi sl. 5.32. Time je teorema dokazana. \square

Napomena 5.2.4 *Lako se može pokazati da uslov (5.63) važi i u opštem slučaju, tj. kada je $u_l > \bar{Y} \neq Y$.*

Struktura entropijskih DSP-ova se može videti na sl. 5.33.



Slika 5.33: Struktura entropijskih DSP-ova u slučaju A)(i)

5.2.5 Numerički primeri

U okviru ovog odeljka ćemo posmatrati nekoliko numeričkih primera i dati predlog za poboljšanje rezolucije rešenja na kraju ovog odeljka. U svim primerima koristimo regularizaciju (5.10), a vrednosti numeričkih parametara postupka GSVF su dati u tabeli 5.3.

Primer 5.2.2 Posmatrajmo problem (2.63), gde je

$$h = 3u - 2u^2 \quad i \quad g = 2u^2 - u \quad (5.73)$$

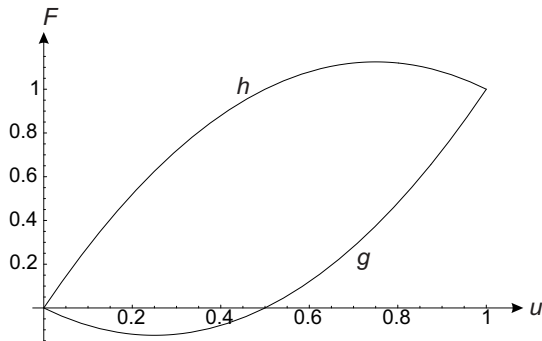
zajedno sa početnim uslovom

$$u_0(x) = 0.6.$$

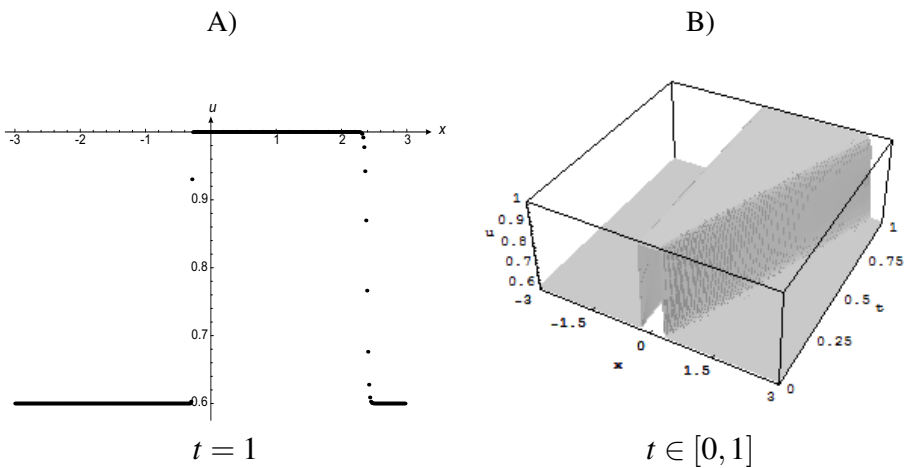
Kao što možemo videti na sl. 5.34, $h(u) > g(u)$ na posmatranom intervalu. Takođe, $u_l = 0.6 > \bar{Y} = 0.5$, pa se rešenje u postupku GSVF gradi pomoću koneksije $(Y, Y) = (1, 1)$, a sastoji iz konstantnog stacionarnog DSP-a koji je povezan sa po jednim levim i desnim DSP-om. Ovo rešenje za $\varepsilon \rightarrow 0$ teži ka

$$\overleftarrow{S}(0.6, 1) + S^0(1, 1) + \overrightarrow{S}(1, 0.6),$$

vidi sl. 5.35.



Slika 5.34: Odnos flukseva u primerima 5.2.2 – 5.2.5



Slika 5.35: Numeričko rešenje u primeru 5.2.2

U primeru koji sledi posmatraćemo iste flukseve, ali sa drugim početnim uslovom.

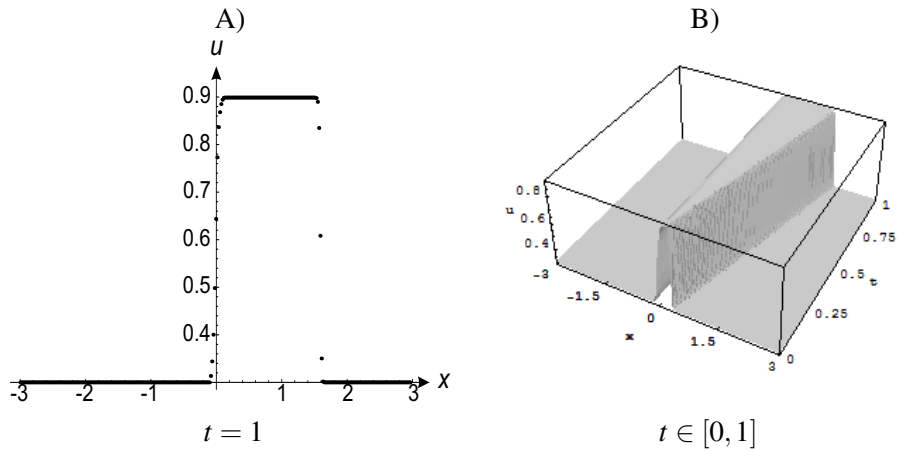
Primer 5.2.3 Posmatrajmo problem (2.63), gde su fluksevi dati sa (5.73) zajedno sa

$$u_0(x) = 0.3. \quad (5.74)$$

Na sl. 5.34 vidimo da je u ovom slučaju $ul < \bar{Y} = 0.5$, pa stacionarni DSP gradimo koristeći par (u_l, \bar{u}_l) , pri čemu je $\bar{u}_l = 0.9$. Rešenje koje dobijamo GSVF postupkom, za $\varepsilon \rightarrow 0$ teži ka

$$S^0(0.3, 0.9) + \vec{S}(0.9, 0.3),$$

vidi sl. 5.36.



Slika 5.36: Numeričko rešenje u primeru 5.2.3

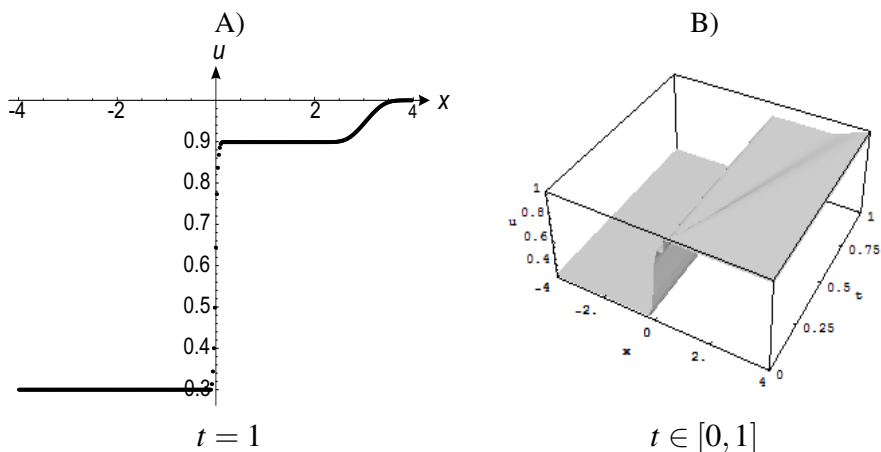
U primeru koji sledi, posmatraćemo opet iste flukseve kao i u prethodna dva primera, ali ovoga puta, konstante koje grade desni talas ne zadovoljavaju Olejnikov uslov entropije, pa će doći do formiranja razređujućeg talasa.

Primer 5.2.4 Posmatrajmo jednačinu (2.63), gde su fluksevi dati sa (5.73) zajedno sa

$$u_0(x) = \begin{cases} 0.3 & \text{za } x < 0 \\ 1 & \text{za } x > 0 \end{cases} . \quad (5.75)$$

Kao što možemo videti na sl. 5.37, rešenje koje dobijamo GSVF postupkom teži ka

$$S^0(0.3, 0.9) + \vec{R}(0.9, 1).$$



Slika 5.37: Numeričko rešenje u primeru 5.2.4

Primer	Δx	j^*	ϵ
5.1.4	0.015	6	0.09
5.1.5	0.02	6	0.12
5.1.10	0.02	6	0.12

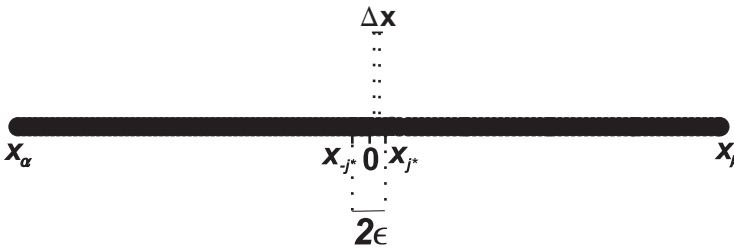
Tabela 5.3: Vrednosti numeričkih parametara u primerima 5.2.2 – 5.2.4

Numeričko poboljšanje rešenja na neekvidistantnoj mreži

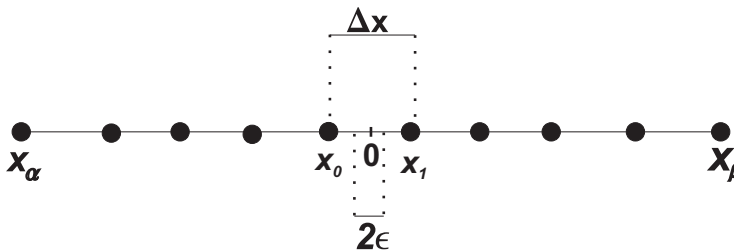
Postupak Godunova za rešavanje jednačina zakona održanja sa neprekidnom, prostorno nezavisnom funkcijom fluksa je poznat po svojoj osobini da daje numerička rešenja dobre rezolucije. Drugim rečima, širina mreže Δx može da bude relativno velika (čak i do 0.1, što znači da nam nije potreban veliki broj tačaka intervala), a da pri tome dobijamo sasvim precizno rešenje. S druge strane, u odeljku 5.1 i 5.2 smo dokazujući egzistenciju entropijskog udarnog talasa za jednačinu sa prekidnim fluksom oblika (2.63) glačali funkciju na intervalu dužine 2ϵ , $\epsilon \rightarrow 0$. Samim tim je jasno da je unutar intervala glačanja $[-\epsilon, \epsilon]$ neophodno koristiti precizniju mrežu. Ukoliko zbog toga koristimo izuzetno preciznu

mrežu na celom prostornom domenu $[x_\alpha, x_\beta]$, moraćemo koristiti nepotrebno veliki broj tačaka intervala, sl. 5.38. Ukoliko pak zbog dobre rezolucije postupka Godunova na čitavom domenu usvojimo manji broj tačaka, tj. mrežu sa većom širinom, može se desiti da unutar intervala glačanja nema tačaka (sl. 5.39), ili da, ukoliko želimo da unutar tog intervala imamo dovoljno tačaka, interval glačanja bude previše veliki, sl. 5.40.

Ovaj problem nas navodi na ideju da koristimo neekvidistantnu mrežu kao na sl. 5.41, čija širina će unutar intervala $E := [-\epsilon, \epsilon]$ biti Δx_E , a van tog intervala, tj. unutar $\bar{E} = [x_\alpha, x_\beta] \setminus E$ jednaka $\Delta x_{\bar{E}}$.

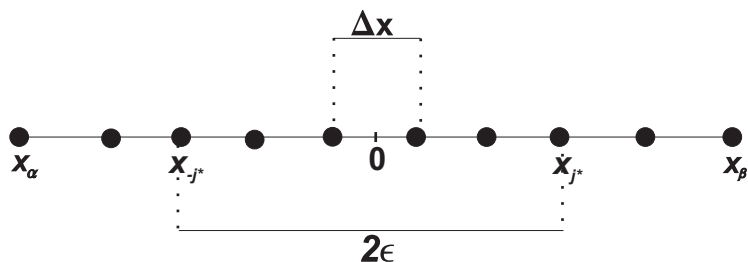


Slika 5.38: Ekvidistantna mreža: Nepotrebno veliki broj tačaka mreže

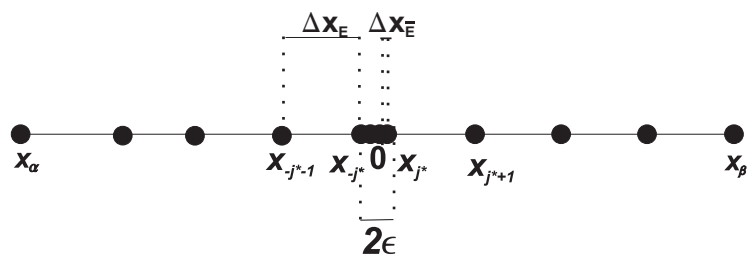


Slika 5.39: Ekvidistantna mreža: U intervalu glačanja nema tačaka mreže

Primer 5.2.5 Posmatrajmo sada jednačinu (2.63), pri čemu su fluksevi dati sa (5.73) i $u_0(x) = 0.3$. Neka je broj tačaka intervala glačanja E dat sa $j^* = 6$, tj. 12. Na slici 5.42 A) vidimo rešenje ovog problema na ekvidistantnoj mreži, pri čemu je širina mreže $\Delta x = 0.1$, tj. broj tačaka



Slika 5.40: Ekvidistantna mreža: Interval glačanja je relativno veliki

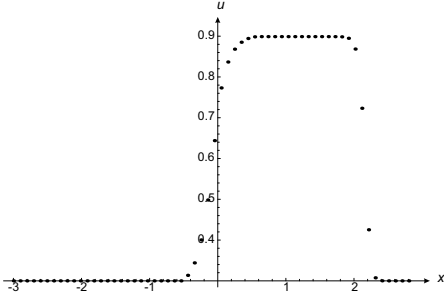


Slika 5.41: Primena neekvidistantne mreže

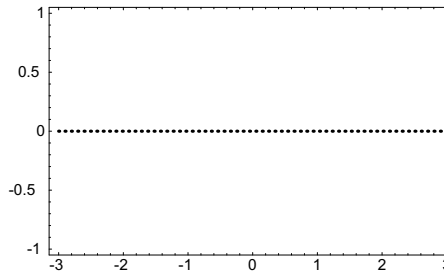
intervala $N = 60$. Kao što vidimo, rezolucija slike je loša, jer je u tom slučaju $\varepsilon = 0.6$, te je širina intervala glačanja zapravo $2\varepsilon = 1.2$. Na sl.5.42 B) je prikazan raspored tačaka prostornog intervala u ovom slučaju. Ukoliko isti problem rešavamo primenom neekvidistantne mreže sa parametrima $\Delta x_E = 0.1$, $\Delta x_E = 0.01$ (sl.5.43 B), dobijamo rešenje dobre rezolucije (sl. 5.43 A), jer je $\varepsilon = 0.06$, pri čemu je broj tačaka intervala mali, tj. $N = 72$.

S druge strane, ukoliko primenom ekvidistantne mreže želimo da postignemo jednako dobru rezoluciju (sl. 5.44 A) kao kod neekvidistantne mreže, tj. da postignemo $\varepsilon = 0.06$, neophodno je koristiti mrežu širine $\Delta x = 0.01$ (sl. 5.44 B), što znači da će nam trebati izuzetno veliki broj tačaka intervala, tj. $N = 600$. Važno je napomenuti da broj tačaka intervala utiče na vreme izvršenja numeričke procedure, te je jasno da je u našem slučaju pogodnije koristiti neekvidistantnu mrežu.

A) Rešenje problema u primeru 5.2.5

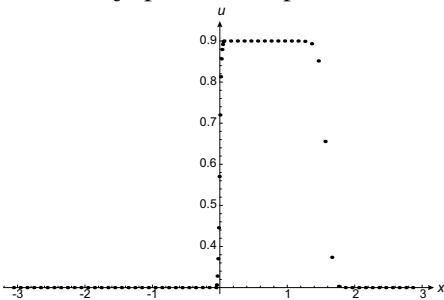


B) Raspored tačaka intervala $[x_\alpha, x_\beta]$

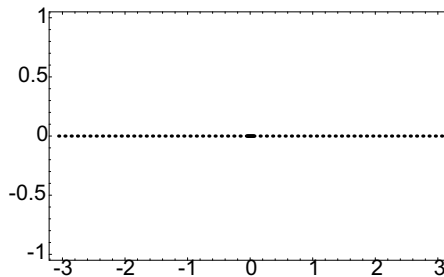


Slika 5.42: Primena ekvidistantne mreže širine $\Delta x = 0.1$

A) Rešenje problema u primeru 5.2.5

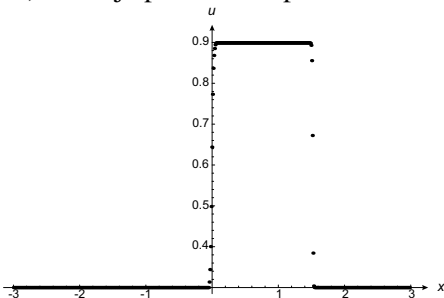


B) Raspored tačaka intervala $[x_\alpha, x_\beta]$

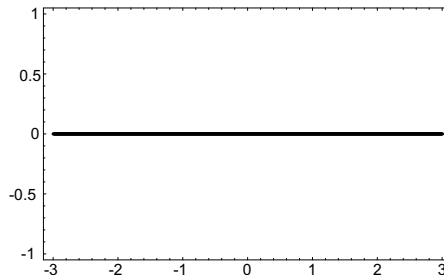


Slika 5.43: Primena neekvidistantne mreže sa parametrima $\Delta x_{\bar{E}} = 0.1$, $\Delta x_E = 0.01$

A) Rešenje problema u primeru 5.2.5



B) Raspored tačaka intervala $[x_\alpha, x_\beta]$



Slika 5.44: Primena ekvidistantne mreže širine $\Delta x = 0.01$

Dodatak: Egzistencija singularnih rešenja

U okviru ove glave ćemo analizirati postojanje neklasičnih rešenja jednačine (2.63). Drugim rečima, zanimaju nas slučajevi kada rešenje ovog problema ne može da se nađe u obliku kombinacije udarnih i razređujućih talasa. Ovakvu situaciju imamo na primer, (vidi sl. 6.1), u slučaju kada je, npr. $h(u) > g(u)$ za svako u iz posmatranog domena pa RH-uslov u $x = 0$ (4.2) ne može biti zadovoljen. Isto tako, kod linearnih flukseva, ukoliko je $h' > 0 > g'$, za proizvoljne vrednosti u_l, u_r ne postoji par (u^-, u^+) , gde su u^- i u^+ dati sa (4.3), a koji zadovoljava RH – uslov u $x = 0$, a da talas (u_l, u^-) sa leve strane $x = 0$ ne putuje u desno i talas sa desne strane (u_r, u^+) ne putuje u levo, te dolazi do njihove interakcije, sl. 6.2.

6.1 Jednačine sa RH–deficitom

Najpre ćemo posmatrati jednačinu (2.63) zajedno sa početnim uslovom oblika

$$u_0(x) = \begin{cases} u_{-1}, & x < 0 \\ u_1, & x > 0 \end{cases}, \quad (6.1)$$

u tzv. nadkompresibilnom slučaju, tj. kada važi

$$h'(u_{-1}) \geq 0 \geq g'(u_1). \quad (6.2)$$

Dakle, pošto RH-uslov u $x = 0$ ne važi, dolazi do pojave tzv. RH-deficita

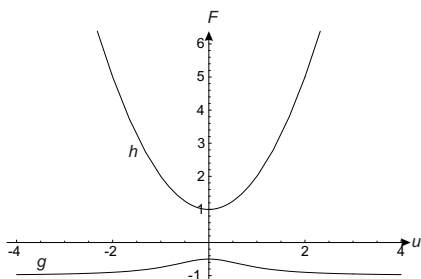
$$\kappa := h(u_{-1}) - g(u_1), \quad (6.3)$$

što znači da GES rešenja definisana u [5] (vidi odelajk 4.3) ne zadovoljavaju jednačinu (2.63) u distributivnom smislu. Takođe, u [49] se navodi da je rešenje neograničeno u slučaju kada RH-uslov ne može biti zadovoljen. Ovo nas je navelo da istražimo da li tzv. *prebačaj* u $x = 0$ o kojem autori rada [5] izveštavaju, u stvari predstavlja stacionaran singularni udarni talas (SSW)¹ snage κ (talas koji sadrži Dirakovu delta funkciju, vidi odeljak 6.2 za precizniju definiciju). Na sl. 6.3 možemo videti poređenje SSW i GES u $x = 0$.

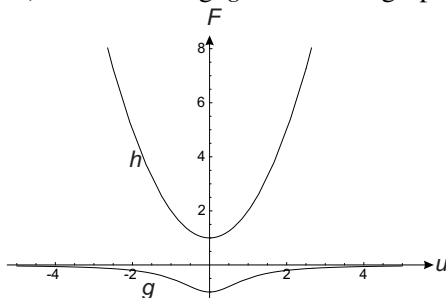
Singularna rešenja sistema zakona održanja su do sada analizirana u nizu radova i pri tome su korišćeni različiti koncepti, kao npr. primena split delta funkcija ([62, 63]), primena Kolombovih generalizovanih funkcija ([59]) kao i razni drugi metodi [8, 12, 18, 35, 40, 71, 21, 20]).

Pošto u okviru ove teze posmatramo nelinearne flukseve, ključni problem u radu sa singularnim udarnim talasima za jednačinu (2.63) je pojava stepena Dirakove delta funkcije, kao i stepenova proizvoda ove funkcije sa Hevisajdovom step funkcijom, što nije definisano. Da bismo prevazišli ovaj problem, koristićemo koncept predstavljanja singularnih udarnih talasa mrežama deo po deo konstantnih funkcija koje nazivamo

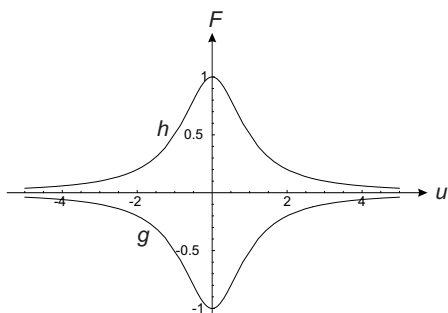
¹SSW – od engl. *singular shock wave*

A) h -konveksnog, g -konkavnog tipa

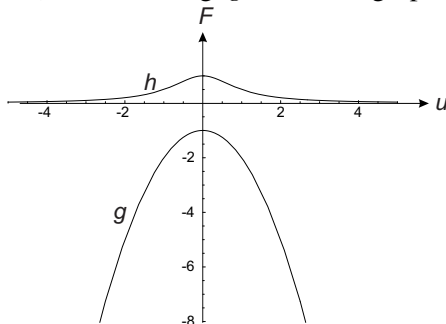
$$h = u^2 + 1, g = -\frac{2u^2 + 1}{2(u^2 + 1)}$$

B) h -konveksnog, g -konveksnog tipa

$$h = u^2 + 1, g = \frac{-1}{u^2 + 1}$$

C) h -konkavnog, g -konveksnog tipa

$$h = \frac{1}{u^2 + 1}, g = -\frac{1}{u^2 + 1}$$

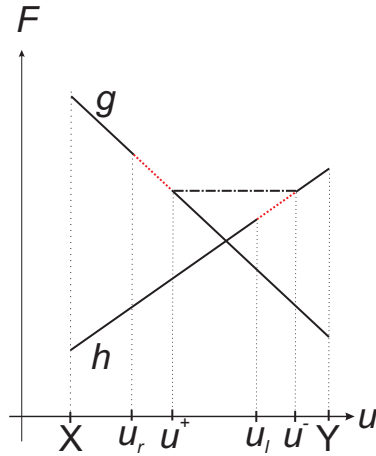
D) h -konkavnog, g -konkavnog tipa

$$h = -(u^2 + 1), g = \frac{1}{u^2 + 1}$$

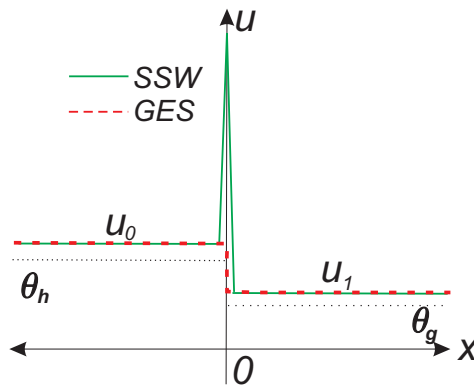
Slika 6.1: Primeri odnosa flukseva za koje jednačina (2.63) nema klasično rešenje

talasi senke, ili skraćeno SDW² (vidi [61, 60]). Osnovni princip u konstruisanju stacionarnog SDW-a u $x = 0$ je perturbacija brzine $c = 0$ talasa sa konstantama u_{-1}, u_1 sa leve i desne strane malim parametrom $\varepsilon > 0$. Nakon perturbacije, konstante u_{-1}, u_1 izvornog talasa su povezane sa tri talasa: $(u_{-1}, u_{-1, \varepsilon})$, $(u_{-1, \varepsilon}, u_{1, \varepsilon})$ i $(u_{1, \varepsilon}, u_1)$. Srednji talas je stacionaran, dok levi i desni talas imaju perturbovane brzine (pri tome levi talas ima negativnu, a desni pozitivnu brzinu da ne bi došlo do interakcije talasa). Dve međuvrednosti $u_{-1, \varepsilon}$ i $u_{1, \varepsilon}$ teže ka beskonačnosti kada $\varepsilon \rightarrow 0$.

²SDW – od engl. *shadow wave*



Slika 6.2: Nadkompresibilni slučaj linearnih flukseva



Slika 6.3: SSW nasuprot GES

Naravno, sve kalkulacije se izvode u distributivnom smislu (detalji su navedeni u odeljku 6.2).

Kao što smo već napomenuli, najpre ćemo posmatrati jednačinu 2.63 zajedno sa početnim uslovom oblika (6.1), (6.2). Pri tome (6.2) u stvari predstavlja uslov dopustivosti za SSW (vidi [20, 40, 63]), što u stvari znači da karakteristike ulaze u singularni talas sa obe strane. Ovaj uslov zovemo *uslovom nadkompresibilnosti*.

Pored toga, posmatraćemo i opšti oblik početnog uslova

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ u_r, & x > 0 \end{cases}, \quad (6.4)$$

koji ne mora da zadovoljava uslov (6.2). U tom slučaju, konstante u_l i u_r moraju biti povezane klasičnim talasima sa nekim konstantama u_{-1} i u_1 respektivno, a koje zadovoljavaju uslov (6.2). Opet, da bi se izbegle interakcije talasa, brzina talasa (u_l, u_{-1}) mora biti negativna, a talasa (u_1, u_r) pozitivna. Kao što ćemo videti u odeljku 6.4, ovaj uslov nam obezbeđuje jedinstven izbor konstanti (u_{-1}, u_1) . Stoga za proizvoljni početni uslov oblika (6.4) nakon što pustimo $\varepsilon \rightarrow 0$ dobijamo jedinstveno rešenje jednačine (2.63) u obliku kombinacije stacionarnog SSW-a i klasičnih talasa.

U nastavku, u odeljku 6.2 ćemo najpre pretpostaviti da je h konveksnog tipa, g konkavnog tipa i $h(u) > g(u)$ za svako u iz posmatranog intervala, i navesti još neke uvodne pretpostavke i oznake. Potom ćemo u odeljku 6.3 dokazati egzistenciju SSW-a za jednačinu (2.63), (6.1), (6.2) kao granične vrednosti SDW-a u nadkompresibilnom slučaju. U odeljku 6.4 ćemo proširiti naš rezultat na opšti Rimanov problem. U odeljku 6.5 posmatraćemo proširenje dobijenih rezultata na jednačinu (2.63) sa linearnim fluksevima i upoređićemo dobijene rezultate sa rezultatima koji se mogu dobiti koristeći delta split metodu. Na kraju, u odeljku 6.6 jednačinu (2.63) ćemo predstaviti u obliku sistema zakona održanja i rešiti je numerički koristeći postupak Godunova. Potom ćemo verifikovati da se dobijeno neograničeno rešenje podudara sa teorijski očekivanim SSW, a pri tome ćemo koristiti numerički test koji smo predstavili u [41].

6.2 Uvodne oznake, definicije i pretpostavke

Kao što smo već napomenuli, u okviru ovog poglavlja ćemo analizirati slučajeve kada RH-uslov zbog specifičnog položaja flukseva (npr. $h(u) > g(u)$ ili $h(u) < g(u)$ za svako u) ne može biti zadovoljen. Bez

uticaja na opštost, posmatraćemo slučaj kada je $h(u) > g(u)$ (analiza u obrnutom slučaju se izvodi veoma slično). Kao i u prethodnim poglavljima, pretpostavićemo da su fluksevi konveksnog ili konkavnog tipa. Kao što možemo videti na sl. 6.1, tada zapravo imamo četiri slučaja:

- A) h je konveksnog tipa, a g je konkavnog tipa,
- B) oba fluksa h i g su konveksnog tipa,
- C) h je konkavnog tipa, a g je konveksnog tipa,
- D) oba fluksa h i g su konkavnog tipa.

Analiza egzistencije singularnih rešenja jednačine (2.63) je slična u svim slučajevima A – D, stoga ćemo u okviru ove teze detaljno analizirati samo slučaj A, tj. uvodimo sledeću pretpostvaku:

H5: Fluks h je konveksnog tipa, g je konkavnog tipa i $h(u) > g(u)$ za svako $u \in I$.

Označimo sada minimum fluksa h sa θ_h , a maksimum fluksa g sa θ_g , tj.

$$h(\theta_h) = \min_{u \in I} h(u) \quad \text{i} \quad g(\theta_g) = \max_{u \in I} g(u).$$

Kažemo da je funkcija $f(u)$ polinomno ograničena, ukoliko postoji konstanta $M > 0$, takva da

$$|f(u)| \leq M|u^\gamma|,$$

za neko $\gamma \in \mathbb{Z}_+$. U okviru ovog odeljka ćemo pretpostaviti da su fluksevi polinomno ograničeni, tj. uvodimo sledeću pretpostavku:

H6: Fluksevi h i g su polinomno ograničeni.

U okviru ove glave ćemo koristiti relaciju \sim u sledećem kontekstu:

$$f(u) \sim u^\nu \quad \text{ako postoji } c \in (0, +\infty) \text{ tako da } \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u^\nu} = c.$$

Neka su $g_\varepsilon, h_\varepsilon$ mreže lokalno integrabilnih funkcija na nekom domenu $\omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, i $\mathcal{D}'(\omega)$ je prostor distribucija. Relaciju \approx definišemo sa

$$g_\varepsilon \approx g \in \mathcal{D}'(\omega) \quad \text{ako} \quad \int_{\omega} g_\varepsilon \varphi \rightarrow \langle g, \varphi \rangle$$

kada $\varepsilon \rightarrow 0$ za svaku test funkciju $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$. Drugim rečima, $g_\varepsilon \approx h_\varepsilon$ zapravo znači da $g_\varepsilon - h_\varepsilon \approx 0$ i kažemo da su g_ε i h_ε jednake u distributivnom smislu (imaju istu graničnu vrednost u distributivnom smislu).

Singularni udarni talas (SSW) koji povezuje vrednosti u_{-1}, u_1 je talas oblika

$$u(x, t) \approx \begin{cases} u_{-1}, & x < ct \\ u_1, & x > ct \end{cases} + k(t)\delta(x - ct), \quad (6.5)$$

gde $\delta(x)$ Dirakova delta funkcija, c je brzina talas, a $k \in C(\mathbb{R}_+)$ nazivamo “snagom SSW-a”.

Ako je $c = 0$, SSW je stacionaran, i (6.5) postaje

$$u(x, t) \approx \begin{cases} u_{-1}, & x < 0 \\ u_1, & x > 0 \end{cases} + k(t)\delta(x).$$

Kao što smo već napomenuli, očekujemo da će rešenje jednačine (2.63) biti u obliku stacionarnog SSW-a koji popunjava RH-deficit u $x = 0$. U okviru ove teze SSW-e ćemo predstaviti u obliku SDW-a, koje definišemo na sledeći način:

Definicija 6.2.1 [61, 60] *Neka su $a_\varepsilon, b_\varepsilon$ male pozitivne vrednosti. SDW je funkcija oblika*

$$u_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} u_{-1}, & x < (c - a_\varepsilon)t \\ u_{-1, \varepsilon}, & (c - a_\varepsilon)t < x < ct \\ u_{1, \varepsilon}, & ct < x < (c + b_\varepsilon)t \\ u_1, & x > (c + b_\varepsilon)t \end{cases}, \quad (6.6)$$

gde je

$$u_{-1, \varepsilon} \sim \varepsilon^{-\alpha}, \quad u_{1, \varepsilon} \sim \varepsilon^{-\beta},$$

$\alpha, \beta > 0$, $u_{-1, \varepsilon}$ i $u_{1, \varepsilon}$ se zovu “međuvrednosti”, dok c predstavlja brzinu SDW-a.

Pošto u stvari želimo da dostignemo stacionarni SSW kada pustimo $\varepsilon \rightarrow 0$, prilikom konstrukcije rešenja jednačine (2.63) pretpostavićemo da je $c = 0$ u (6.6).

Vrednost

$$k_\varepsilon(t) = a_\varepsilon u_{-1, \varepsilon t} + b_\varepsilon u_{1, \varepsilon t} \quad (6.7)$$

nazivamo "snagom SDW-a".

SDW se naziva jedinstvenim u slabom smislu ukoliko je granična vrednost

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k_\varepsilon(t) = k(t)$$

jedinstveno određena. Tada ova granična vrednost zapravo predstavlja snagu odgovarajućeg SSW – a. Jednostavnosti radi, u nastavku ćemo koristiti skraćeni pojam "jedinstveni SDW".

6.3 Nadkompresibilni slučaj

Posmatrajmo sada jednačinu (2.63) zajedno sa (6.1) i (6.2) pod pretpostavkama H5 i H6 iz odeljka 6.2. Namera nam je da pronađemo rešenje problema u obliku stacionarnog SDW-a, tj. $c = 0$ u (6.6). Pored toga, jednostavnosti radi, pretpostavićemo da su parametri perturbovane brzine talasa $a_\varepsilon, b_\varepsilon$ jednaki ε .

Teorema 6.3.1 *Neka je*

$$h(u) \sim u^{v_1}, g(u) \sim -u^{v_2} \quad (6.8)$$

i

$$i \quad \min(v_1, v_2) \leq 1, \quad (6.9)$$

Jednačina (2.63) zajedno sa početnim uslovom oblika (6.1), (6.2) ima rešenje u obliku SDW-a koji teži ka

$$u(x, t) \approx \begin{cases} u_{-1}, & x < 0 \\ u_1, & x > 0 \end{cases} + \kappa t \delta(x), \quad (6.10)$$

u distributivnom smislu, gde je κ dato sa (6.3).

Dokaz Pokazaćemo da jednačina (2.63) ima rešenje u obliku jedinstvenog SDW-a

$$u_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} u_{-1}, & x < -\varepsilon t \\ u_{-1, \varepsilon}, & -\varepsilon t < x < 0 \\ u_{1, \varepsilon}, & 0 < x < \varepsilon t \\ u_1, & x > \varepsilon t \end{cases} \quad (6.11)$$

gde je

$$u_{-1, \varepsilon} = u_{-1} + \xi_{-1} \varepsilon^{-\alpha} \text{ i } u_{1, \varepsilon} = u_1 + \xi_1 \varepsilon^{-\beta}.$$

i $\alpha, \beta > 0$, $0 \leq \xi_{-1}, \xi_1 < +\infty$. Jasno je da (6.11) u stvari teži ka (6.10) kada $\varepsilon \rightarrow 0$.

Iz (6.11) i (1.1), koristeći standardne Rankine – Hugoniot kalkulacije za udarne talase dobijamo

$$\langle \partial_t u_\varepsilon, \varphi(x, t) \rangle \approx \varepsilon \int_0^\infty (u_{-1, \varepsilon} - u_{-1}) \varphi(-\varepsilon t, t) dt - \varepsilon \int_0^\infty (u_1 - u_{1, \varepsilon}) \varphi(\varepsilon t, t) dt.$$

Koristeći Tejlorov razvoj

$$\varphi(\pm \varepsilon t, t) = \varphi(0, t) + \sum_{j=1}^m \partial_x^j \varphi(0, t) \frac{(\pm \varepsilon t)^j}{j!} + O(\varepsilon^{m+1}), \quad (6.12)$$

za $m = 1$ dobijamo

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u_\varepsilon, \varphi \rangle &\approx \int_0^\infty (-\varepsilon(u_{-1} + u_1) + \varepsilon(u_{-1, \varepsilon} + u_{1, \varepsilon})) \varphi(0, t) dt \\ &\quad + \int_0^\infty \varepsilon^2 (u_1 - u_{-1} + u_{-1, \varepsilon} - u_{1, \varepsilon}) t \varphi_x(0, t) dt \\ &\approx \langle (-\varepsilon(u_{-1} + u_1) + \varepsilon(u_{-1, \varepsilon} + u_{1, \varepsilon})) \delta(x), \varphi(x, t) \rangle \\ &\quad - \langle \varepsilon^2 (u_1 - u_{-1} + u_{-1, \varepsilon} - u_{1, \varepsilon}) t \delta'(x), \varphi(x, t) \rangle. \end{aligned}$$

Ukoliko zanemarimo članove koji teže ka nuli, dobijamo

$$\langle \partial_t u_\varepsilon, \varphi \rangle \approx \left(\varepsilon^{1-\alpha} \xi_{-1} + \varepsilon^{1-\beta} \xi_1 \right) \langle \delta(x), \varphi(x, t) \rangle \quad (6.13)$$

$$- \left(\varepsilon^{2-\alpha} \xi_{-1} - \varepsilon^{2-\beta} \xi_1 \right) \langle t \delta'(x), \varphi(x, t) \rangle.$$

S druge strane,

$$\begin{aligned} \langle \partial_x F(u_\varepsilon), \varphi \rangle &\approx \int_0^\infty (h(u_{-1,\varepsilon}) - h(u_{-1})) \varphi(-\varepsilon t, t) dt \\ &+ \int_0^\infty (g(u_{1,\varepsilon}) - h(u_{-1,\varepsilon})) \varphi(0, t) dt \\ &+ \int_0^\infty (g(u_1) - g(u_{1,\varepsilon})) \varphi(\varepsilon t, t) dt. \end{aligned}$$

Nakon korišćenja Tejlorovog razvoja (6.12) za $m = 2$ i (6.3), ovo postaje

$$\begin{aligned} \langle \partial_x F(u_\varepsilon), \varphi \rangle &\approx - \int_0^\infty \kappa \varphi(0, t) dt - \varepsilon \int_0^\infty (h(u_{-1,\varepsilon}) + g(u_{1,\varepsilon})) t \varphi_x(0, t) dt \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^\infty (h(u_{-1,\varepsilon}) - g(u_{1,\varepsilon})) t^2 \varphi_{xx}(0, t) dt \\ &\approx \langle -\kappa \delta(x), \varphi(x, t) \rangle + \langle \varepsilon t (h(u_{-1,\varepsilon}) + g(u_{1,\varepsilon})) \delta'(x), \varphi(x, t) \rangle \\ &- \langle \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} (h(u_{-1,\varepsilon}) - g(u_{1,\varepsilon})) \delta''(x), \varphi(x, t) \rangle. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Primetimo da je $\kappa > 0$ na osnovu posmatranog geometrijskog odnosa flukseva, (vidi H5). Stoga, iz (2.63), (6.13) i (6.14) dobijamo

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u_\varepsilon + \partial_x F(u_\varepsilon), \varphi \rangle &\approx \langle (-\kappa + (\varepsilon^{1-\alpha} \xi_{-1} + \varepsilon^{1-\beta} \xi_1)) \delta(x), \varphi(x, t) \rangle \\ &+ \langle (\varepsilon (h(u_{-1,\varepsilon}) + g(u_{1,\varepsilon}))) \\ &- (\varepsilon^{2-\alpha} \xi_{-1} - \varepsilon^{2-\beta} \xi_1) t \delta'(x), \varphi(x, t) \rangle \\ &- \langle \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} (h(u_{-1,\varepsilon}) - g(u_{1,\varepsilon})) \delta''(x), \varphi(x, t) \rangle \approx 0. \end{aligned}$$

Iz ovoga dalje sledi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((\xi_{-1} \varepsilon^{1-\alpha} + \xi_1 \varepsilon^{1-\beta} \xi_1)) = \kappa \quad (6.15)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\varepsilon (h(u_{-1,\varepsilon}) + g(u_{1,\varepsilon})) - (\varepsilon^{2-\alpha} \xi_{-1} - \varepsilon^{2-\beta} \xi_1) \right) = 0 \quad (6.16)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 (h(u_{-1,\varepsilon}) - g(u_{1,\varepsilon})) = 0. \quad (6.17)$$

Posmatrajmo najpre relaciju (6.15). Jasno je da je $\alpha, \beta \leq 1$, jer bi u suprotnom bilo

$$\kappa = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((\varepsilon^{1-\alpha} \xi_{-1} + \varepsilon^{1-\beta} \xi_1)) = \infty.$$

Odavde sledi da drugi član izraza sa leve strane jendakosti (6.16) nestaje, tj. relacija (6.16) postaje

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon (h(u_{-1,\varepsilon}) + g(u_{1,\varepsilon})) = 0,$$

a sistem (6.15) – (6.17) glasi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((\xi_{-1} \varepsilon^{1-\alpha} + \xi_1 \varepsilon^{1-\beta})) = \kappa \quad (6.18)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon (h(u_{-1,\varepsilon}) + g(u_{1,\varepsilon})) = 0 \quad (6.19)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 (h(u_{-1,\varepsilon}) - g(u_{1,\varepsilon})) = 0. \quad (6.20)$$

S druge strane, imamo da je $\alpha = 1$ ili $\beta = 1$, jer je $\kappa > 0$. Drugim rečima, ako bi bilo istovremeno i $\alpha < 1$ i $\beta < 1$, leva strana relacije (6.18) bi težila ka nuli, i ne bi postojao RH-deficit u $x = 0$. Uzimajući u obzir (6.8), sistem (6.18) – (6.20) postaje

$$\xi_{-1} \varepsilon^{1-\alpha} + \xi_1 \varepsilon^{1-\beta} \sim \kappa \quad (6.21)$$

$$\xi_{-1}^{v_1} \varepsilon^{1-v_1\alpha} - \xi_1^{v_2} \varepsilon^{1-v_2\beta} \sim 0 \quad (6.22)$$

$$\xi_{-1}^{v_1} \varepsilon^{2-v_1\alpha} + \xi_1^{v_2} \varepsilon^{2-v_2\beta} \sim 0. \quad (6.23)$$

Na osnovu činjenice da fluksevi g i h ispunjavaju uslov (6.9) i $\alpha = 1$ ili $\beta = 1$ možemo pokazati da je sistem (6.21) – (6.23) konzistentan. Naime, ukoliko posmatramo uslov (6.9), jasno nam je da postoji šest slučajeva koje navodimo u tabeli 6.1. Pri tome smo, bez uticaja na opštost, pretpostavili da je $v_1 \leq 1$, a v_2 proizvoljno. (Dokaz u slučaju $v_2 \leq 1$, v_1 proizvoljno, se izvodi slično.) U ovoj tabeli su date i mogućnosti izbora parametara α i β koji obezbeđuju konzistentnost sistema (6.21) – (6.23), kao i vrednosti parametara ξ_{-1} i ξ_1 koje dobijamo iz sistema. U slučajevima kada je ξ_{-1} ili ξ_1 proizvoljan broj, uzeli smo da je njegova vrednost jedanaka 1.

Slučaj	Izbor parametara	Rešenje sistema
1) $v_1 < 1$ $v_2 < 1$	$\alpha = 1$ $\beta = \frac{1}{2}$	$\xi_{-1} = \kappa$ $\xi_1 = 1$
2) $v_1 < 1$ $v_2 = 1$	$\alpha = 1$ $\beta = \frac{1}{2}$	$\xi_{-1} = \kappa$ $\xi_1 = 1$
3) $v_1 < 1$ $v_2 > 1$	$\alpha = 1$ $\beta = \frac{1}{2v_2}$	$\xi_{-1} = \kappa$ $\xi_1 = 1$
4) $v_1 = 1$ $v_2 < 1$	$\alpha = \frac{1}{2}$ $\beta = 1$	$\xi_{-1} = 1$ $\xi_1 = \kappa$
5) $v_1 = 1$ $v_2 = 1$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$	$\xi_{-1} = \frac{\kappa}{2}$ $\xi_1 = \frac{\kappa}{2}$
6) $v_1 = 1$ $v_2 > 1$	$\alpha = 1$ $\beta = \frac{1}{v_2}$	$\xi_{-1} = \kappa$ $\xi_1 = \kappa^{\frac{1}{v_2}}$

Tabela 6.1: Izbor parametara α i β i odgovarajuća rešenja sistema 6.21 – 6.23

Na osnovu vrednosti parametara α , β , ξ_1 , i ξ_2 iz tabele 6.1 se lako može proveriti da u svim slučajevima važi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon u_{-1,\varepsilon} + \varepsilon u_{1,\varepsilon}) = \kappa,$$

gde je k_ε dato sa (6.7), pa zaključujemo da je dobijeni SDW jedinstven u slabom smislu.

Na kraju, preostaje još da pustimo $\varepsilon \rightarrow 0$, te dobijamo rešenje u obliku singularnog udarnog talasa oblika (6.10) \square .

Ukoliko pažljivo razmotrimo vrednosti parametara u tabeli 6.1, možemo uočiti, u svim slučajevima sem 5) i 6), da leve strane jednačina (6.22) i (6.23) teže ka nuli, te su ove jednačine zadovoljene. U slučajevima 5) i 6), samo leva strana jednačine (6.23) teži ka nuli. Ukoliko bismo u (6.8) $g(u) \sim -u^{v_1}$ zamenili sa $g(u) \sim u^{v_1}$, ova jednačina bi bila oblika

$$\xi_{-1}^{v_1} \varepsilon^{1-v_1\alpha} + \xi_1^{v_2} \varepsilon^{1-v_2\beta} \sim 0$$

i ne bi bila rešiva, s obzirom na činjenicu da su $\xi_{-1}, \xi_1 > 0$.

S druge strane, znak fluksa g u slučajevima 1) – 4) ne igra nikakvu ulogu. Stoga, u ova četiri slučaja imamo i sledeću teoremu:

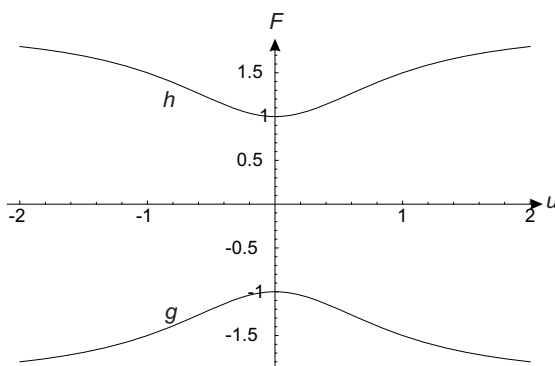
Teorema 6.3.2 *Neka je*

$$h(u) \sim u^{\nu_1}, g(u) \sim u^{\nu_2} \quad (6.24)$$

i

$$i \quad \min(\nu_1, \nu_2) < 1, \quad (6.25)$$

Jednačina (2.63) zajedno sa početnim uslovom oblika (6.1), (6.2) ima rešenje u obliku SDW-a (6.11).



Slika 6.4: Odnos flukseva u primeru 6.3.1

Primer 6.3.1 *Posmatrajmo jednačinu (2.63) gde je*

$$h(u) = \frac{1+2u^2}{1+u^2} \text{ i } g(u) = -\frac{1+2u^2}{1+u^2}, \quad (6.26)$$

zajedno sa početnim uslovom oblika $u_0(x) = 1$.

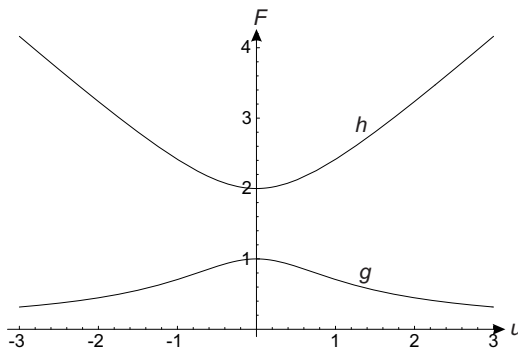
Odnos flukseva u ovom primeru je prikazan na sl. 6.4. Lako se može proveriti da je $h, g \sim u^0$ i $h'(1) > 0 > g'(1)$, tj. uslov nadkompresibilnosti je zadovoljen.

Za $\alpha = 1$ i $\beta = \frac{1}{2}$, jednačina (6.21) je oblika

$$\xi_{-1} = \kappa, \quad (6.27)$$

gde je $\kappa = h(1) - g(1) = 3$, dok izrazi sa leve strane jednačina (6.22) i (6.23) teže ka nuli, što znači da su jednačine (6.22) i (6.23) zadovoljene. Stoga možemo izabrati proizvoljno $\xi_1 \in (0, +\infty)$, recimo $\xi_1 = 1$. Kao što vidimo, na osnovu teoreme 6.3.1, rešenje ovog problema je singularni udarni talas koji spaja vrednosti $u_{-1} = 1$ i $u_1 = 1$ a njegova snaga je $\kappa t = 3t$. Drugim rečima, rešenje je asocirano sa

$$u(x,t) \approx 1 + 3t\delta(x).$$



Slika 6.5: Odnos flukseva u primeru 6.3.2

Razmotrimo sada i jedan primer flukseva istog znaka.

Primer 6.3.2 Posmatrajmo jednačinu (2.63), gde je

$$h(u) = \sqrt{u^2 + 1} + 1 \quad i \quad g(u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}},$$

uz početni uslov $u_0(x) = 1$.

Znak oba fluksa je isti na čitavom domenu, sl. 6.5. Ovaj slučaj takođe odgovara slučaju 1) iz tabele 6.1. Na osnovu teoreme 6.3.2, rešenje ove jednačine je oblika

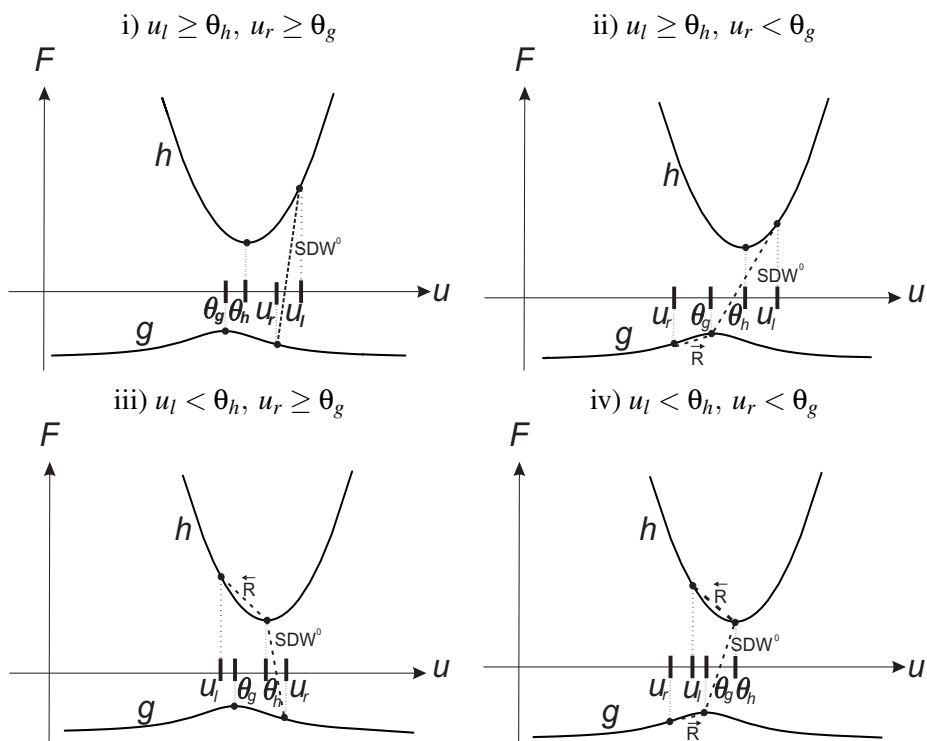
$$u(x,t) \approx 1 + \frac{2 + \sqrt{2}}{2}t\delta(x).$$

6.4 Rešenja opšteg Rimanovog problema

Posmatrajmo sada problem (2.63), zajedno sa opštim oblikom početnog uslova

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ u_r, & x > 0 \end{cases}. \quad (6.28)$$

Kao što vidimo na sl. 6.6, postoje četiri kombinacije položaja vrednosti u_l i u_r u odnosu na θ_h i θ_g respektivno. Drugim rečima, s obzirom da po-



Slika 6.6: Različiti položaji vrednosti u_l, u_r

smatramo flukseve kao što smo naveli u pretpostavkama H5 i H6, imamo sledeće podslučajeve:

i) $u_l \geq \theta_h, u_r \geq \theta_g$

$$\text{ii) } u_l \geq \theta_h, u_r < \theta_g$$

$$\text{iii) } u_l < \theta_h, u_r \geq \theta_g$$

$$\text{iv) } u_l < \theta_h, u_r < \theta_g$$

U slučaju i) uslov nadkompresibilnosti (6.2) je zadovoljen pa prema Teoremi 6.3.1, postoji SDW koji teži ka stacionarnom singularnom udarnom talasu u $x = 0$ koji spaja vrednostii u_l i u_r . Označićemo ga sa $SDW^0(u_l, u_r)$. Primitimo da je u ovom slučaju SDW jedinstveno određen. Naime, ukoliko bi postojala vrednost \hat{u}_r tako da $\hat{u}_r > \theta_g$ i $\hat{u}_r \neq u_r$ koja određuje stacionarni SDW u $x = 0$, tj. $SDW^0(u_l, \hat{u}_r)$, tada bi parom (\hat{u}_r, u_r) bio određen talas sa desne strane $x = 0$ koji bi imao negativnu brzinu. Drugim rečima, došlo bi do interakcije pomenutog talasa sa $SDW^0(u_l, \hat{u}_r)$, što nije dopušteno.

U slučaju ii), imamo da je $h'(u_l) > 0$, $g'(u_r) > 0$, tj. uslov nadkompresibilnosti nije zadovoljen. Stoga vrednost u_r moramo spojiti sa konstantom u_1 , takvom da važi $g'(u_1) \leq 0$, tj. $u_1 \geq \theta_g$. Tada par (u_l, u_1) zadovoljava uslov nadkompresibilnosti pa na osnovu Teoreme 6.3.1 sledi egzistencija $SDW^0(u_l, u_1)$. Konstante u_l i u_1 formiraju desni talas, koji je u stvari razređujući talas, jer je $u_1 > u_r$, g je konkavnog tipa i Olejnikov uslov za udarne talase

$$\frac{g(u) - g(u_1)}{u - u_1} \geq \frac{g(u_r) - g(u_1)}{u_r - u_1} \geq \frac{g(u) - g(u_r)}{u - u_r}$$

za sve u između u_r i u_1 ne može biti zadovoljen. Jedinstveni izbor konstante u_1 je

$$u_1 = \theta_g,$$

pošto bi za svako $u_1 > \theta_g$, brzina razređujućeg talasa bila $g'(u_1) < 0$, što bi prouzrokovalo interakcije sa $SDW^0(u_l, u_1)$. Stoga je rešenje u ovom slučaju oblika

$$SDW^0(u_l, \theta_g) + \vec{R}(\theta_g, u_r).$$

Slično, u slučaju iii) jedini izbor konstante u_{-1} sa kojom treba spojiti u_l tako da par u_l, u_{-1} zadovoljava uslov nadkompresibilnosti, i koji iz-

begava interakciju levog razređujućeg talasa $\overleftarrow{R}(u_l, u_{-1})$ sa $SDW^0(u_{-1}, u_r)$, je $u_{-1} = \theta_h$.

Slučaj iv) se može odrediti slično. U tabeli 6.2 su prikazana rešenja Rimanovog problema za (2.63), (6.4) u slučajevima i) – iv).

Slučaj	Pozicija konstanti u_l, u_r	Rešenje
i)	$u_l \geq \theta_h$ i $u_r \geq \theta_g$	$SDW^0(u_l, u_r)$
ii)	$u_l \geq \theta_h$ i $u_r < \theta_g$	$SDW^0(u_l, \theta_g) + \overrightarrow{R}(\theta_g, u_r)$
iii)	$u_l < \theta_h$ i $u_r \geq \theta_g$	$\overleftarrow{R}(u_l, \theta_h) + SDW^0(\theta_h, u_r)$
iv)	$u_l < \theta_h$ i $u_r < \theta_g$	$\overleftarrow{R}(u_l, \theta_h) + SDW^0(\theta_h, \theta_g) + \overrightarrow{R}(\theta_g, u_r)$

Tabela 6.2: Rešenja problema (2.63), (6.4)

6.5 Diskusije i proširenja

U okviru ovog odeljka ćemo pokazati da se naša teorija može primeniti i na slučaj kada su oba fluksa g i h linearna, te da se ovaj slučaj može verifikovati primenom tzv. delta split metoda [62, 63].

Posmatrajmo stoga (2.63), gde je

$$h(u) = p_l u + q_l \quad g(u) = p_r u + q_r,$$

$p_l \geq 0$, $p_r \leq 0$, zajedno sa počenim uslovom (6.1). Jasno je da je

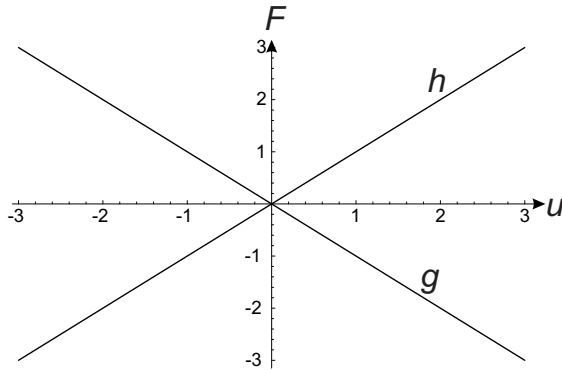
$$h'(u_{-1}) > 0 > g'(u_1)$$

za svaki izbor konstanti u_{-1}, u_1 , (vidi sl. 6.7 kao primer). Prema teoremi 6.3.1, ovaj problem ima rešenje u obliku SSW – a koji spaja vrednosti u_{-1} i u_1 , tj.

$$u(x, t) \approx U + (p_l u_{-1} - p_r u_1 + q_l - q_r) t \delta(x), \quad (6.29)$$

gde smo (6.1) označili sa $U(x)$, tj.

$$U(x) = \begin{cases} u_{-1}, & x < 0 \\ u_1, & x > 0 \end{cases} . \quad (6.30)$$



Slika 6.7: $h = u$ i $g = -u$

Primer 6.5.1 Posmatrajmo jednačinu (2.63) gde su fluksevi dati sa

$$h = u \quad i \quad g = -u \quad (6.31)$$

zajedno sa konstantnim početnim uslovom $u_0(x) = 1$.

Prema (6.29), problem (2.63), (6.31) ima rešenje oblika $SDW^0(1, 1)$ gde je $\kappa t = (h(1) - g(1))t = 2t$.

Slučaj sa linearnim fluksevima je pogodan za primenu delta split metoda pa možemo dobiti singularno rešenje na alternativni način i uporediti ga sa dobijenim rešenjem u obliku SDW-a. Osnovna ideja delta split tehnike [62, 63] se sastoji u predstavljanju delta funkcije kao linearne kombinacije delta funkcije $\delta^-(x)$ sa podrškom na skupu $(-\infty, 0)$, i $\delta^+(x)$ na skupu $(0, +\infty)$, tj.

$$\delta(x) = \mu_- \delta^-(x) + \mu_+ \delta^+(x), \quad (6.32)$$

$$\mu_- + \mu_+ = 1.$$

Pošto je izvod Hevisajdove funkcije delta funkcija, lako se može pokazati da važi

$$U'(x) = [U]\delta(x), \quad \text{gde je } [U] = u_1 - u_{-1}.$$

Proizvod step funkcije $U(x)$ oblika (6.30) i delta funkcije (6.32) je definisana sa

$$U(x)\delta(x) \approx (u_{-1}\mu_- + u_1\mu_+)\delta(x),$$

jer je

$$\begin{aligned} U(x)(\mu_- \delta^-(x) + \mu_+ \delta^+(x)) &\approx u_{-1}\mu_- \delta^-(x) + u_1\mu_+ \delta^+(x) \\ &\approx (u_{-1}\mu_- + u_1\mu_+)(\hat{\mu}_- \delta^-(x) + \hat{\mu}_+ \delta^+(x)), \end{aligned}$$

gde je

$$\hat{\mu}_- = \frac{u_{-1}\mu_-}{u_{-1}\mu_- + u_1\mu_+}, \quad \hat{\mu}_+ = \frac{u_1\mu_+}{u_{-1}\mu_- + u_1\mu_+}$$

i $\hat{\mu}_- + \hat{\mu}_+ = 1$.

Potražimo rešenje problema (2.63), (6.31) u obliku

$$u(x,t) \approx U + k(t)(\mu_- \delta^-(x) + \mu_+ \delta^+(x)). \quad (6.33)$$

Iz (6.33), dobijamo

$$\begin{aligned} F(x,u) &\approx (p_r H(x) + p_l(1 - H(x)))u(x,t) + q_r H(x) + (1 - H(x))q_l \\ &\approx p_r UH + p_l(U(x) - U(x)H(x)) + k(t)(p_r \mu_+ + p_l(1 - \mu_+))\delta(x) \\ &\quad + q_r H(x) + q_l(1 - H(x)), \end{aligned}$$

što daje

$$\begin{aligned} u_t &\approx k'(t)\delta(x) \\ F_x &\approx (p_r[UH] + p_l([U] - [UH]) + [H](q_r - q_l))\delta(x) \\ &\quad + k(t)(p_r \mu_+ + p_l(1 - \mu_+))\delta'(x). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Kombinovanjem (2.63) i (6.34), dobijamo sistem

$$\begin{aligned} k'(t) + p_r[UH] + p_l([U] - [UH]) + [H](q_r - q_l) &\approx 0 \\ p_r\mu_+ + p_l(1 - \mu_+) &\approx 0, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} k(t) &\approx p_l u_{-1} - p_r u_1 + q_l - q_r \\ \mu_- = \mu_+ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Kao što vidimo, dobijamo rešenje koje se podudara sa (6.29).

6.6 Numerička verifikacija

Na posletku, izvršićemo numeričku verifikaciju rezultata dobijenih u primeru 6.3.1. U tu svrhu, posmatrajmo jednačinu (2.63) kao nelinearan sistem jednačina oblika

$$\begin{aligned} u_t + (wg(u) + (1 - w)h(u))_x &= 0 \\ w_t &= 0, \end{aligned} \tag{6.35}$$

zajedno sa početnim uslovom

$$u_0(x) = 1, \quad w(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases},$$

gde su g i h dati sa (6.26).

Namera nam je da rešimo ovaj sistem numerički pomoću postupka Godunova za linearne sisteme zakona održanja koji smo opisali u odeljku 2.3.3 (strana 44). Naravno, najpre ćemo linearizovati sistem koristeći Rovu linearizaciju koja se sastoji u aproksimaciji sistema (6.35) u svakoj ćeliji mreže linearnim sistemom oblika (2.60) čija je matrica oblika

$$\widehat{A}_{j-1/2} = \begin{bmatrix} \mu_{j-1/2} & \rho_{j-1/2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gde je

$$\mu_{j-1/2} = \frac{(1 - 2w_{j-1})(u_{j-1} + u_j)}{(1 + u_{j-1}^2)(1 + u_j^2)} \quad \text{i} \quad \rho_{j-1/2} = \frac{-2(1 + 2u_j^2)}{(1 + u_j^2)}.$$

Karakteristični koreni matrice $\hat{A}_{j-1/2}$ su

$$\lambda_{j-1/2,1} = \mu_{j-1/2} \quad \text{i} \quad \lambda_{j-1/2,2} = 0.$$

Lako se može proveriti da su uslovi (2.57) i (2.59) zadovoljeni. Uslov (2.58) takođe važi jer $\mu_{j-1/2} \neq 0$ za svako j pošto je $u_l + u_r = 2 > 0$ i očekivano rešenje je singularni udarni talas iznad linije $u = 1$. To povlači da je $u_{j-1} + u_j \neq 0$ za sve j .

Ukoliko sada koristimo postupak Godunova za linerane sisteme hiperboličnih zakona održanja (2.55) da širinom mreže $\Delta x = 0.01$ dobijamo rezultat kao na sl.6.8 A – D.

Primitimo da je promenljiva w u sistemu (6.35) u stvari samo pomoćna promenljiva, koja predstavlja diskretnu Hevisajdovu funkciju. Kao što je i očekivano, w se ne menja sa vremenom. S druge strane, numerička aproksimacija promenljive u nije ograničena odozgo. Da bismo proverili da je u pitanju zaista singularni udarni talas, primenićemo numerički test koji smo predstavili u [41], a koji se sastoji u sledećem:

Označićemo singularni deo očekivanog rešenja (6.10) sa u_s , tj.

$$u_s = \kappa t,$$

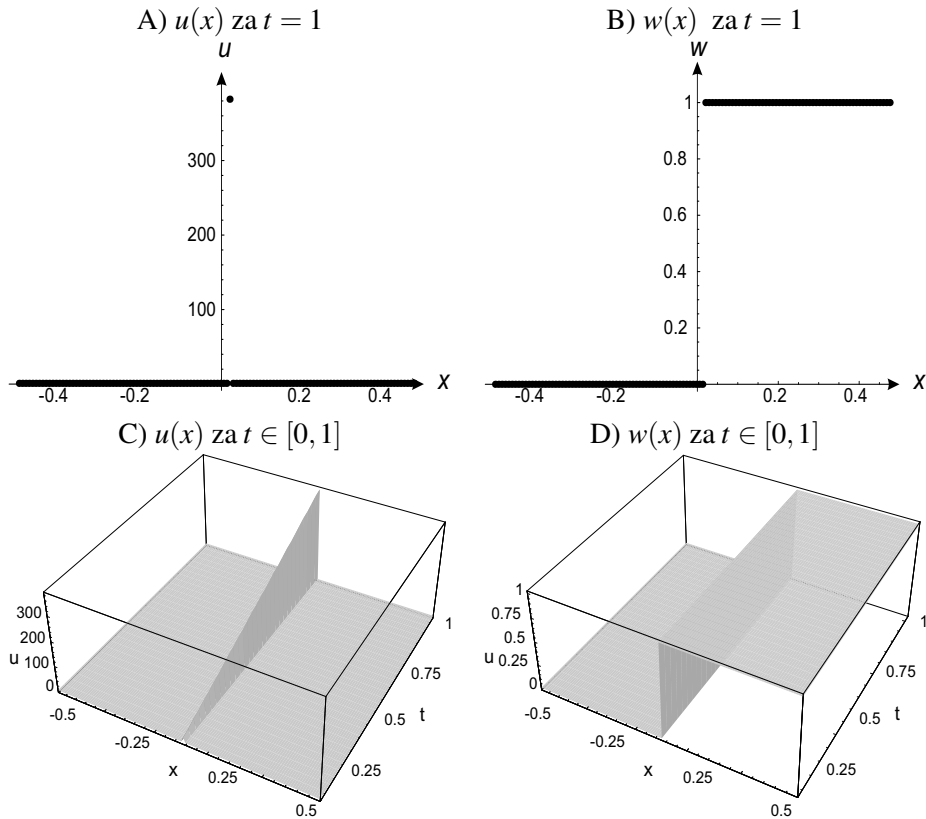
gde je κ dato sa (6.3), a površinu ispod singularnog dela rešenja sa

$$P(t) = \int u_s dx = \kappa t \int \delta(x) dx \approx \kappa t = 3t,$$

pri čemu smo iskoristili činjenicu da je

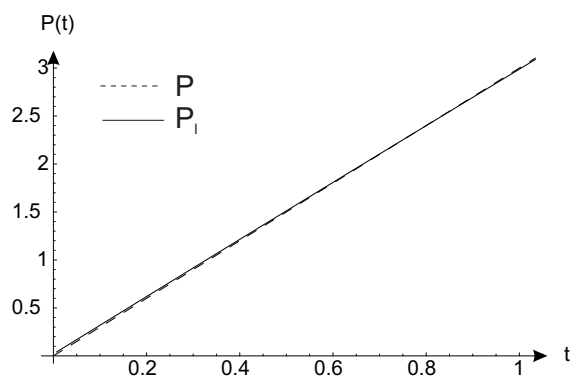
$$\int \delta(x) dx \approx 1,$$

i (kao što smo videli u primeru 6.3.1) da je u našem slučaju $\kappa = 3$.



Slika 6.8: Numeričko rešenje problema u primeru 6.3.1

U našem numeričkom testu, aproksimiraćemo $P(t)$ koristeći levu Rimanovu sumu, koju označavamo sa $P_l(t)$. Kao što možemo videti, na sl. 6.9, teorijski očekivana (isprekidana linija) i numerički dobijena (puna linija) površina ispod singularnog dela singularnog udarnog talasa nad intervalom $[0, 1]$ su veoma bliske pa možemo zaključiti da dobijeno numeričko rešenje u stvari predstavlja singularni udarni talas koji se može predstaviti u obliku $SDW^0(1, 1)$.



Slika 6.9: Test za verifikaciju singularnog udarnog talasa u primeru 6.7

Zaključak

U okviru ove teze je razvijen novi koncept rešavanja skalarne jednačine sa dva fluksa istog tipa konveksnosti koji se seku na krajevima posmatranog intervala i najviše u jednoj tački unutar intervala, a bazira se na glačanju funkcije fluksa u okolini $x = 0$ i konstrukciji DSP-ova primenom postupka Godunova za zakone održanja sa prostorno promenljivim fluksom. Na taj način, dokazano je postojanje DSP-a za postupak Godunova za jednačine sa prostorno promenljivim fluksom.

Za odabir dopustivih rešenja, izveden je i odgovarajući diskretni uslov entropije. Stacionarni udarni talas za ovu jednačinu se smatra dopustivim ukoliko postoji entropijski DSP koji konvergira ka njemu. Diskretni uslov entropije isključuje mogućnost pojave podkompresibilnih DSP-ova, sem u slučaju konstantnog talasa koji se javlja u tački preseka flukseva kada se oni seku podkompresibilno. Pri tome, posmatrane su različite mogućnosti preseka flukseva, i dati su brojni numerički primeri.

Prilikom izvođenja diskretnog uslova entropije, kao i prilikom definisanja uslova dopustive regularizacije, nismo se oslanjali ni na jedan konkretan fizički model, već na opšte matematičke principe. Međutim, iako se u okviru ove disertacije nismo detaljno bavili fizičkim modelima, pokazali smo da se mogu konstruisati i specijalne regularizacije koje nas vode do fizički relevantnih rešenja specifičnih modela.

Takođe smo pokazali da ovaj koncept može da se primeni i u slu-

čaju kada su fluksevi različitog tipa konveksnosti, a seku se na krajevima intervala. S obzirom na problem mogućnosti pojave da fluks koji dobijamo nakon glačanja ima više od jednog ekstrema u nekoj prostornoj tački unutar intervala glačanja, uspeali smo da uopštimo diskretni uslov entropije u ovom slučaju.

Na kraju, pokazali smo postojanje neograničenih rešenja skalarne jednačine sa dva fluksa u slučajevima kada se grafik jednog fluksa nalazi ispod grafika drugog fluksa na čitavom domenu koji posmatramo, pa RH-uslov u $x = 0$ ne može biti zadovoljen. Pokazali smo da tada postoje rešenja u obliku singularnih udarnih talasa koje možemo dobiti kao granične vrednosti mreže deo po deo konstantnih funkcija – tzv. talasa senki tj. SDW-a. Primena SDW koncepta nam je omogućila da posmatramo nelinearne flukseve, a da pri tome izbegnemo rad sa nedefinisanim stepenima Dirakove delta funkcije. U slučaju linearnih flukseva, dobijeni rezultati su verifikovani tzv. delta split metodom. Postojanje singularnih udarnih rešenja za jednačinu sa dva fluksa (2.63) smo takođe potvrdili i numerički, posmatranjem ove jednačine u obliku sistema zakona održanja koji smo linearizovali i potom rešavali standardnim postupkom Godunova za linearne hiperbolične sisteme zakona održanja. Pri tome smo na dobijene rezultate primenili i specifičan numerički test koji se oslanja na proračun površine ispod singularnog dela rešenja, i pokazali da dobijeno numeričko rešenje teži ka teorijski očekivanom singularnom udarnom talasu.

Indeks

- delta split metoda, 162
- diferencni količnik, 13
- Dirakova delta funkcija, 11
- diskretni profili udarnih talasa,
53
 - egzistencija, 57
- distribucija, 11
- generalizovana entropijska
rešenja, 73
- jednakost u distributivnom
smislu, 151
- karakteristični koren, 8
- karakteristični vektor, 8
- karakteristike, 17
- Košijev problem, 15
- kompaktan
 - nosač, 10
 - skup, 10
- koneksija, 63
- dopustiva, 85
- konkavan tip funkcije, 62
- konveksan tip funkcije, 62
- Lipšicova neprekidnost, 9
- nadkompresibilan presek
flukseva, 62
- numerički postupak
 - Engquist-Osher, 30
 - Godunova, 31
 - Godunova, prostorno
promenljivi fluks, 48
 - koji čuva monotonost, 35
 - konzervativni, 28
 - konzistentan, 29
 - tipa Godunova, 68
- parcijalno sumiranje, 14
- podkompresibilan presek
flukseva, 62
- polinomno ograničena funkcija,
150

- Rankine – Hugoniotov uslov,
21, 59
slabi, 72
- razređujući talas, 21
- regularan presek flukseva, 62
- regularizacija fluksa
dopustiva, 83
- Rimanova suma, 13
- Roova linearizacija, 46
- shadow wave, 151
- singularni udarni talas, 151
- slabo rešenje, 19, 59
- udarni talas, 20
- uslov entropije, 23
diskretni, 38, 94
granica rešenja viskozne
jednačine, 23
- Kružkova, 24
- Kružkova za jednačinu sa
dva fluksa, 51
- Kružkova za
multiplikativnu
jednačinu, 49
- Laksov, 23
- Olejniov, 23
- po Karlsenu, Risebrou i
Towersu, 70
- teorija prema Adimurthiju,
Gowdi i Mishri, 62
- uslov nadkompresibilnosti, 73,
148
- uslov preseka, 71
- viskozni profil, 56
- zakoni održanja
funkcija fluksa, 16
hiperbolični sistemi, 15
linearni sistemi, 40, 45
nelinearni sistemi, 42, 46
sa prekidnim fluksom, 59
sa prostorno promenljivim
fluksom, 47
skalarni, 17

Bibliografija

- [1] Adimurthi, Mishra S., Gowda G. D. V., *Optimal entropy solutions for conservation laws with discontinuous flux functions*, Journal of hyperbolic differential equations, Vol. 2, No. 4, pp. 783-837, (2005)
- [2] Adimurthi, Gowda G. D. V., *Conservation laws with discontinuous flux*, J. Math. Kyoto Univ., 43, pp.27-70, (2003)
- [3] Adimurthi, Jaffre J., Gowda G. D. V., *Godunov-type methods for conservation laws with a flux function discontinuous in space*, SIAM J.Numer. Anal., 42, pp.179-208, (2004).
- [4] Adimurthi, Mishra S., Gowda G.D.V., *Conservation laws with flux function discontinuous in the space variable. I. Optimal entropy solutions*, J. Hyperbolic Differ. Equ., 02, 783 – 837 (2005).
- [5] Adimurthi, Mishra S., Gowda G. D. V., *Conservation laws with flux function discontinuous in the space variable. II. Convex-concave type fluxes and generalized entropy solutions*, J. Comput. Appl. Math., 203, Issue 2, (2007)
- [6] Adimurthi, Mishra S., Gowda G. D. V., *Convergence of Godunov type methods for conservation laws with a spatially varying discontinuous flux function*, Mathematics of computation, 76, 1219-1242, (2007).

-
- [7] Bale D., LeVeque R. J., Mitran S., Rossmann J. A., *A wave propagation method for conservation laws and balance laws with spatially varying flux functions*, SIAM J.SCI. COMPUT. Vol 24, No. 3, pp. 955-978, (2002)
- [8] F. Bouchut, F. James, *Duality solutions for pressureless gases, monotone scalar conservation laws, and uniqueness*, Comm. PDE, 24 (1999) 2173–2190.
- [9] Benzoni-Gavage, S., Serre, D., *First-order hyperbolic systems of partial differential equations. With applications, Multidimensional hyperbolic partial differential equations*, Oxford Mathematical Monographs, (2006)
- [10] Benzoni-Gavage S., *Contribution ‘a l’etude des solutions regulieres par morceaux de syst’emes hyperboliques de lois de conservation*. Document de synth’ese pour l’habilitation ‘a diriger des recherches.
- [11] Bernard S., Colombeau J. F., *Conservation laws with discontinuous coefficients*, Journal of mathematical analysis and applications, (2001).
- [12] Brenier Y., Grenier E., *Sticky particles and scalar conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal. 35 (1998), no.6, 2317–2328.
- [13] Bultelle, M., Grassin, M., Serre D., *Unstable Godunov discrete profiles for steady shock waves*. SIAM J. Num Anal. (1998).
- [14] Bürger R., Karlsen K. H., Towers J. D., *An Equist-Osher-type scheme for conservation laws with discontinuous flux adapted to flux connections*, SIAM Journal on numerical analysis 47, Issue 3, pp 1684–1712, (2009)
- [15] Bürger R., Karlsen K. H., Mishra S., Towers J.D., *On conservation laws with discontinuous flux*, Trends in applications of mathematics to mechanics, Ber. Math., (Shaker Verlag, Aachen)pp.75-84, (2005).

-
- [16] Crandal, M.G., Majda, A., *Monotone difference approximations for scalar conservation laws*, Math. Comp. 34, (1980).
- [17] Bürger R., Karlsen K. H., Towers J. D., *A model of continuous sedimentation of flocculated suspensions in clarifier-thickener units*, SIAM J. Appl. Math. vol 65 (2005) no.3 882–940.
- [18] Chen G-Q., Liu H., *Formation of δ -shocks and vacuum states in the vanishing pressure limit of solutions to the Euler equations for isentropic fluids*, SIAM J. Math. Anal. 34 (2003), no. 4, 925–938.
- [19] Dafermos, C., *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 325. Springer-Verlag, Heidelberg, (2000)
- [20] Danilov V.G., Shelkovich V.M., *Delta-shock wave type solution of hyperbolic systems of conservation laws*, Q. Appl. Math., 29 (2005) 401–427.
- [21] Danilov V. G., Shelkovich V. M., *Dynamics of propagation and interaction of shock waves in conservation law systems*, J. Differ. Equations, 211 (2005) 333–381.
- [22] Diehl S., *On scalar conservation laws with point source and discontinuous flux function modelind continuous sedimentation*, SIAM J. Math. Anal. 26(6), (1995), pp.1425-1451.
- [23] Diehl S., *Scalar conservation laws with discontinuous flux function. I. The viscous profile condition*, Comm. Math. Phys., 176 (1996), pp.23-44
- [24] DiPerna, R. J., *Finite difference schemes for conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math. 25, (1982).
- [25] Enquist B., Osher, S., *One-sided difference approximations for non-linear conservation laws*, Math. Comp. 35 (1981)
- [26] Fan H., *Existence and uniqueness of travelling waves and error estimates for Godunov schemes of conservation laws*, Math. Comp. 67, (1998)

-
- [27] Fan H., *Existence of discrete shock profiles of a class of monotonicity preserving schemes for conservation laws*, Mathematics of computation, vol 70, no 235., (2000)
- [28] Gimse T., Risebro N. H., *Riemann problems with discontinuous flux function*, in Proceedings of the 3rd Annual International Conference on Hyperbolic Problems, Studentlitteratur, Uppsala, pp. 488-502, (1991)
- [29] Gimse T., Risebro N. H., *Solution of the Cauchy problem for a conservation law with a discontinuous flux function*, SIAM J. Math. Anal., 23, pp.635-648, (1992)
- [30] Godlewski E., Raviart, P. A., *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*. Springer-Verlag, New York, (1996).
- [31] Godunov S.K., *Difference method of numerical computation of discontinuous solutions of hydrodynamic equations*, Mat. Sb., 47, (1959).
- [32] Harten, A., Lax P. D. van Leer B. *On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM Review, 25 (1983)
- [33] Harten, A., Hayman, J., Lax P.D., *On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks*, Comm. Pure. Appl. Math. 29, (1976)
- [34] Holden H., Risebro N. H., *Front tracking for hyperbolic conservation laws*, Springer, (2002)
- [35] Huang F., *Weak solution to pressureless type system*, Comm. Partial Differential Equations, 30, no. 1-3, (2005) 283–304.
- [36] Jennings, G. *Discrete shocks*, Comm. Pure Appl. Math. 27, (1974)
- [37] Kaasschieter E., *Solving the Buckley-Leverett equation with gravity in a heterogeneous porous media*, Computational Geosciences 3(1999), pp.23-48

- [38] Karlsen K. H., Risebro N. H., Towers J. D., *Upwind difference approximations for degenerate parabolic convection-diffusion equations with a discontinuous coefficient*, IMA J. Numer. Anal., 22, pp. 623-664, (2002)
- [39] Karlsen K. H., Risebro N. H., Towers J. D., *L^1 stability for entropy solution of linear degenerate parabolic convection-diffusion equations with discontinuous coefficients*, Skr. K. Nor. Vidensk. Selsk., no. 3, pp. 1-49, (2003)
- [40] Keyfitz B.L., Kranzer H.C., *Spaces of weighted measures for conservation laws with singular shock solutions*, J. Differ. Equations, 118 (1995) 420–451.
- [41] Krejić N., Krunić T., Nedeljkov M., *Numerical verification of delta shock waves for pressureless gas dynamics*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol 345, no 1, (2008)
- [42] Krunić T., *Adaptivne mreže za delta talase*, magistrarska teza, Prirodno matematički fakultet, Univezitet u Novom Sadu, (2003).
- [43] Krunić T., Nedeljkov M., *Discrete shock profiles as solutions of scalar conservation laws with discontinuous flux functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol 435, Issue 1, pp. 986 – 1010, (2016).
- [44] Lax, P. D., *Hyperbolic systems of conservation laws. II*. Comm. Pure Appl. Math. 10, (1957)
- [45] Lax P. D., *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, SIAM Regional conference series in applied mathematics, 11, (1972).
- [46] LeVeque R., *Clawpack software*, <http://www.amath.washington.edu/rjl/clawpack.html>
- [47] LeVeque R., *Numerical methods of conservation laws*, ETH Zürich, Birkhauser, Basel, (1990).

-
- [48] LeVeque R. J., Temple B., Ren Y., *Stability of moving mesh systems of partial differential equations*, SIAM J. Sci. Comput., 20, (1999).
- [49] LeVeque R. J., *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge texts in applied mathematics, Cambridge, United Kingdom, (2004)
- [50] Liu J.G., Xin Z., *L1-stability of stationary discrete shocks*, Mathematics of computation, vol. 60, no 201, (1993).
- [51] Liu T. P. , Yu S. H., *Continuum shock profiles for discrete conservation laws. I Construction*. Comm. Pure Appl. Math. 52(1), (1999).
- [52] Liu T. P. , Yu S. H., *Continuum shock profiles for discrete conservation laws. II Construction*. Comm. Pure Appl. Math. 52(9), (1999).
- [53] Liu J., Xin Z., *Nonlinear stability of discrete shocks for systems of conservation laws*, Arch. Rational Mech. Anal. 125, 217-256, (1993)
- [54] Liu, T. P., *Nonlinear stability of shock waves for viscous conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, Mem. Amer. Math. Soc. 328 (1985).
- [55] Majda A., Ralston J., *Discrete shock profiles for systems of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math. 32, (1979).
- [56] Michelson D., *Discrete shocks for difference approximations to systems of conservation laws*, Adv. In Appl. Math. 5(4), (1984).
- [57] Mishra S., *Analysis and numerical approximation of conservation laws with discontinuous coefficients*, PHD thesis, Indian Institute of science Bangalore, (2005)
- [58] Mishra S., *Convergence of upwind finite difference schemes for a scalar conservation law with indefinite discontinuities in the flux function*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 43, No. 2, pp.559-577, (2005)

-
- [59] Nedeljkov M., *Delta and singular delta locus for one-dimensional systems of conservation laws*, Math. Method Appl. Sci., 27, Issue 8, (2004) 931–955.
- [60] Nedeljkov M., *Higher order shadow waves and delta shock blow up in the Chaplygin gas*, J. Diff. Equations 256 (2014), no.11, 3859–3887.
- [61] Nedeljkov M., *Shadow waves: Entropies and interactions for delta and singular shocks*, Arch. Rational Mech. Anal., 197 (2010), 489–537.
- [62] Nedeljkov M., *Unbounded solutions to some systems of conservation laws - split delta shock waves*, Mat. Ves., 54 (2002) 145–149.
- [63] Nedeljkov M., Oberguggenberger M., *Interactions of delta shock waves in a strictly hyperbolic system of conservation laws*, J. Math. Anal. Appl., 344 (2008), no.2, 1143–1157.
- [64] Oberguggenberger, M., *Stosswellen*, Skripta, Univerzitet Innsbruck, (1988).
- [65] Osher, S., *Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximations*, SIAM J. Num. Anal. 21, (1984).
- [66] Ostrov D.N., *Solutions of Hamilton-Jacobi equations and conservation laws with discontinuous space-time dependence*, J.Diff.Eqns., 182 (2002), 51-77
- [67] Panov E.Yu., *On existence and uniqueness of entropy solutions to the Cauchy problem for a conservation law with discontinuous flux.*, J. Hyperbolic Differ. Equ., 6(3), (2009)
- [68] Richtmyer R.D., Morton K.W., *Difference methods for initial-value problems*, Wiley-Interscience, (1967).
- [69] Roe, P. L., *Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference shemes*, J. Comput. Phys. 43, (1981).

-
- [70] Roe, P. L., *The use of the Riemann problem in finite-difference schemes*, Lecture Notes in Physics 141, Springer-Verlag, (1981).
- [71] W.E, Y.G. Rykov, Ya. G. Sinai, *Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics*, Comm. Math. Phys., 177 (1996), no. 2, 349–380.
- [72] Serre D., *CIME lecture notes on discrete shock profiles: Existence and stability*, unfinished version, (2003)
- [73] Serre D., *Discrete shock profiles and their stability*, Unite de Mathematiques Pures et Appliquees, CNRS UMR 128, (1998)
- [74] Serre, D., *Remarks about the discrete profiles of shock waves*, Mat. Contemp. 11, (1996).
- [75] Serre, D., *Systems of conservation laws*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, vol I, (1999).
- [76] Serre, D., *Systems of conservation laws*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, vol II (2000).
- [77] Serre D., *L1- stability of nonlinear waves in scalar conservation laws*, Handbook of differential equations, Evolutionary equations, volume 1, Elsevier, (2004)
- [78] Severe M., *Exchange of of conserved quantities, shock loci and Riemann problems*, Math. Meth. Appl. Sci. 24, (2001).
- [79] Shih-Hsien Yu, *Existence of discrete shock profiles for the Lax-Wendroff scheme*, preprint, (1995)
- [80] Smoller, J., *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer, (1983).
- [81] Smoller, J., *On the solution of the Riemann problem with general step data for an extended class of hyperbolic systems*, Mich. Math. J., 16, (1969).

- [82] Sod, G., *A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*, J. Comput. Phys., 27 (1978).
- [83] Sod G., *Numerical methods for fluid dynamics*, Cambridge University Press, (1985).
- [84] Strang, G., *Accurate partial difference methods II: nonlinear problems*, Numer. Math. 6, (1964).
- [85] Strikweda, J. C., *Finite difference schemes and partial differential equations*, Wadsworth & Brooks/Cole, (1989).
- [86] Tadmor, E., *Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes*, Math. Comp., 43 (1984).
- [87] Towers J. D., *Convergence of a difference scheme for conservation laws with a discontinuous flux*, SIAM J. Numer. Anal. Vol 38, No2, pp. 681-698, (2000)
- [88] Towers J. D., *A difference scheme for conservation laws with discontinuous flux: The nonconvex case*, SIAM J. Numer. Anal., 39, pp.1197-1218, (2001)

Kratka biografija



Tanja Krunic je rođena 24.10.1974 u Langenu, Savezna Republika Nemačka. Osnovnu školu je pohađala u Hemeru (Nemačka), Zadru i Kninu, a gimnaziju u Kninu i Valjevu. 1999. godine je diplomirala na Prirodno – matematičkom fakultetu u Novom Sadu na studijskom programu diplomirani matematičar, a 2003. godine je odbranila magistarsku tezu pod mentorstvom prof. dr. Nataše Krejić, na temu *Adaptivne mreže za delta talase*. 8.3.2012. godine Nastavno naučno veće Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu je prihvatilo temu doktorske disertacije *Numeričke procedure u definisanju pravilnih rešenja zakona održanja* pod mentorstvom prof. dr. Marka Nedeljkova. Koautor je dva rada na SCI listi, kategorije M21:

1. Krejić N., Krunic T., Nedeljkov M., *Numerical verification of delta shock waves for pressureless gas dynamics*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol 345, no 1, (2008)

2. Krunic T., Nedeljkov M., *Discrete shock profiles as solutions of scalar conservation laws with discontinuous flux functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol 435, Issue 1, pp. 986 – 1010, (2016).

Od 2000. godine radi u Visokoj tehničkoj školi strukovnih studija, najpre kao stručni saradnik na predmetima matematika, statistika i računari, a od 2005 kao predavač na predmetima Uvod u programiranje, Objektno–orijentisano programiranje, Uvod u veb dizajn, Internet jezici i alati 1, Internet jezici i alati 2 i Veb komunikacije na osnovnim strukovnim studijama, kao i Razvoj veb 2.0 aplikacija na specijalističkim strukovnim studijama. Od 2012 je rukovodilac studijskog programa Veb dizajn, a od 2015 šef grafičkog odseka.

Tečno govori i piše engleski i nemački jezik, i poseduje osnovno znanje italijanskog jezika. Udata je i majka troje dece.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska publikacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Doktorska teza

VR

Autor: mr Tanja Krunić

AU

Mentor: Prof. dr. Marko Nedeljkov

MN

Naslov rada: Numeričke procedure u definisanju pravilnih rešenja zakona održanja

MR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s/e

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2015

GO

Izdavački reprint:

IZ:

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: 6 glava, 181 stranica, 88 literalnih citata, 5 tabela, 60 slika

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Assesion number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record:Printed text

TR

Contents Code: PhD thesis

CC

Author: Tanja Krunić, MSc

AU

Mentor: Marko Nedeljkov, PhD

MN

Title: Numerical procedures in defining entropy solutions for conservation laws

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: Serbian, English

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2015

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Analiza i Numerička analiza

ND

Ključne reči: zakoni održanja, prekidna funkcija fluksa, regularizacija, diskretni udarni profili, singularni udarni talasi

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: U okviru ove doktorske disertacije posmatrani su zakoni održanja sa funkcijom fluksa koja ima prekid u $x = 0$, pri čemu delovi fluksa levo i desno od $x = 0$ imaju smo po jedan ekstrem. U prvoj glavi se može naći pregled osnovnih pojmova, definicija i teorema. U drugoj glavi su opisani hiperbolični sistemi zakona održanja, slaba rešenja, kao i numerički postupci za njihovo rešavanje. U trećoj glavi su predstavljene diskretni profili darnih talasa. U četvrtoj glavi su opisani zakoni održanja sa prekidnom funkcijom fluksa i ukratko su predstavljene rezultati drugih autora iz ove oblasti. U petoj glavi je najpre analizirana tzv. jednačina sa dva fluksa u slučaju kada oba dela fluksa levo i desno od $x = 0$ imaju minimum, a pri tome se seku u najviše jednoj tački unutar intervala. Primenom regularizacije na intervalu $[-\varepsilon, \varepsilon]$, za $\varepsilon > 0$ dovoljno malo, dokazano je postojanje diskretnih udarnih profila za postupak Godunova za zakone održanja sa promenljivom funkcijom fluksa. Definisana je i odgovarajući diskretni uslov entropije, a postojanje entropijskog diskretnog udarnog profila je postavljen kao kriterijum za dopustivost udarnih talasa. Potom je analizirana ista jednačina u slučaju kada deo fluksa levo od $x = 0$ ima maksimum, a deo fluksa desno od $x = 0$ minimum, dok se oba dela fluksa seku na krajevima posmatranog intervala. U ovom slučaju, uopšten je uslov entropije. U okviru ove glave je prikazano nekoliko numeričkih primera za oba opisana slučaja. Numerički rezultati su dobijeni korišćenjem softvera razvijenog za potrebe ove teze u programskom paketu *Mathematica*.

Physical description: 6 chapters, 181 pages, 88 references, 5 tables, 60 figures

PD

Science field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Analysis and Numerical analysis

SD

Key words: conservation laws, discontinuous flux function, regularization, discrete shock profiles, singular shock waves

Holding data: HD Notes:

VN

Abstract: We consider conservation laws with a flux discontinuity at $x = 0$, where the flux parts from both left and right hand side of $x = 0$ have at most one extreme on the observed domain. The first chapter provides elementary definitions and theorems. The second chapter refers to hyperbolic systems of conservation laws, their solutions, and numerical procedures. The third chapter is devoted to discrete shock profiles. The fourth chapter describes conservation laws with discontinuous flux functions and provides basic information upon known results in this field. In the fifth chapter, we first analyse the two-flux equation when both flux parts have a minimum and cross at most at one point in the interior of the domain. Using a flux regularization on the interval $[-\varepsilon, \varepsilon]$, for $\varepsilon > 0$ small enough, we show the existence of discrete shock profiles for Godunov's scheme for conservation laws with discontinuous flux functions. We also define a discrete entropy condition accordingly, and use the existence of an entropy discrete shock profile as an entropy criterion for shocks. Then we analyse the same problem in the case when the flux part on the left of $x = 0$ has a maximum and the part on the right of $x = 0$ has a minimum, whereas the fluxes cross at the edges of the interval. We derive a more general discrete entropy condition in this case. We provide several numerical examples in both of the above mentioned flux cases. All the presented numerical results are obtained using a program written in *Mathematica*. Finally, in chapter six, we prove the existence of singular shock waves in the case when the graph of one of the flux parts is above the graph of the other one on the entire domain. For that purpose, we use the shadow wave technique. At the end of this chapter, we provide a numerical verification of the obtained singular solution.

Na kraju, u šestoj glavi je analizirano postojanje neklasičnih rešenja u slučaju kada se grafik dela fluksa levo od $x = 0$ nalazi iznad grafika dela fluksa desno od $x = 0$. Primenom tehnike talasa senki (*engl. shadow waves*) pokazano je postojanje singularnih udarnih talasa u ovom slučaju. Na kraju ove glave, data je i odgovarajuća numerička verifikacija navedenog singularnog rešenja.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 8.3.2012

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Nataša Krejić, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu

Mentor: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu

Član: dr Srboľjub Simić, redovni profesor FTN-a u Novom Sadu

AB

Accepted by the Scientific Board on: 8.3.2012

Defended

Thesis defend board:

President: Nataša Krejić, PhD, full professor, Faculty of Sciences, Novi Sad

Mentor: Marko Nedeljkov, PhD, full professor, Faculty of Sciences, Novi Sad

Member: Srboľjub Simić, PhD, full professor, Faculty of Technical Sciences, Novi Sad