

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Сања М. Грекуловић

**МОДЕЛИРАЊЕ ГУСТИНЕ ЗЕМЉИНЕ
КОРЕ ПРИ РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМА
ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ
ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ**

Докторска дисертација

Београд, 2014

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Сања М. Грекуловић

**MODELING OF THE EARTH CRUST
DENSITY IN SOLVING THE BOUNDARY
VALUE PROBLEMS OF THE GRAVITY
POTENTIAL**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2014

ИНФОРМАЦИЈЕ О МЕНТОРУ И ЧЛАНОВИМА КОМИСИЈЕ

Ментор:

В. проф. др Олег Одаловић, дипл. инж. геод.,
Грађевински факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије:

Проф. др Драган Благојевић, дипл. инж. геод.,
Грађевински факултет, Универзитет у Београду

Доц. др Ивана Васиљевић, дипл. инж. геол.,
Рударско-геолошки факултет, Универзитет у Београду

Датум одбране: _____, Београд.

С дубоким поштовањем се захваљујем свом ментору В. проф. др Олегу Одаловићу на залагању, саветима и стручној помоћи, коју ми је несебично пружао током израде ове дисертације.

Захвалност дугујем Проф. др Драгану Благојевићу и Доц. др. Ивани Васиљевић на помоћи, разумевању и пажљивом прегледу рада.

Захваљујем се и Проф. др Мирославу Старчевићу на изузетно корисним саветима током израде тезе.

Велико хвала мојим родитељима и брату на безрезервној подршци.

И на крају, свим срцем се захваљујем мом Небојши на љубави, стрпљењу и безграничној подршци.

Сања Грекуловић

МОДЕЛИРАЊЕ ГУСТИНЕ ЗЕМЉИНЕ КОРЕ ПРИ РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМА ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

РЕЗИМЕ

Докторска дисертација посвећена је моделирању густина Земљине коре у поступку одређивања гравитационог утицаја топографских маса на аномалијски потенцијал и његове функционале на територији Републике Србије.

Гравитациони утицаји топографских маса одређени су на основу података дигиталног модела терена на територији Србије и глобалног модела терена SRTM (Shuttle Radar Topography Mission) за утицаје топографских маса ван граница Србије. Сагласно расположивим и релевантним подацима креиран је дигитални модел густина до геоида, док је топографским масама ван граница Србије додељена вредност константне густине $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$.

Све топографске масе подељене су на праве призме правоугаоне основе, а за моделирање њиховог гравитационог утицаја примењена су два поступка: класична теренска корекција и резидуални модел терена. Моделирање утицаја топографских маса урађено је са:

- густинама из дигиталног модела густина и
- константном густином, $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$.

Анализом добијених резултата, показано је да утицај густина топографских маса није занемарљив у поступку решавања граничних проблема потенцијала Земљине теже, а посебно при одређивању геоида центиметарске тачности.

Кључне речи: топографске масе, класична теренска корекција, резидуални модел терена, аномалијски потенцијал, аномалије убрзања, аномалија висине, квазигеоид, геоид.

Научна област: Геодезија

Уже научне области: Геодетске референтне мреже и Апроксимација гравитационог поља

УДК број: 52-336/528.41(043.3)

MODELLING OF THE EARTH CRUST DENSITY IN SOLVING THE BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE GRAVITY POTENTIAL

ABSTRACT

The doctoral dissertation is dedicated to density modelling of the Earth crust while determining the gravity effects of topographic masses to the anomaly potential and its functionals at the territory of Republic of Serbia.

The gravity effects of topographic masses are determined on the basis of the digital terrain model data at the territory of Republic of Serbia and the global terrain model SRTM (Shuttle Radar Topography Mission) for topography masses influences out of Serbia borders.

In concordance with available and relevant data a digital terrain model with the density down to the geoid was created, whilst the topographic masses out of Serbia borders were given the value of a constant density $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$.

All topographic masses were divided in right prisms with rectangular base and for modelling their gravity effects there were two methods that were applied: classic terrain correction and residual terrain model. Topographic masses influence modelling was done with:

- densities out of digital model and
- constant density, $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$.

By analyzing of gained results, it was shown that the effects of topographic masses densities is not irrelevant in the procedure of solving the boundary value problems of gravity potential, especially while determining geoid of centimeters precision.

Key words: topographic masses, classic terrain correction, residual terrain model, anomaly potential, gravity anomalies, height anomaly, quasigeoid, geoid.

Scientific field: Geodesy

Field of academic expertise: Geodetic reference networks and gravity field approximation

UDK number: 52-336/528.41(043.3)

Списак скраћеница

| | | |
|---------|---|---|
| ASV | - | Аномалија слободног ваздуха |
| ГПС | - | Глобални система за позиционирање |
| GGM | - | Глобални геопотенцијални модел |
| GRS80 | - | Geodetic Reference System 80 |
| ДГП | - | Детаљни гравиметријски премер |
| ДМТ | - | Дигитални модел терена |
| ДМГ | - | Дигитални модел густина |
| 2Д-ДМГ | - | Дводимензионални модел густина |
| 3Д-ДМГ | - | Тродимензионални модел густина |
| ЕГМ2008 | - | Гравитациони модел Земље 2008 (Earth Gravitational Model 2008) |
| IAG | - | Међународна асоцијација за геодезију (International Association of Geodesy) |
| IGSN71 | - | Међународна гравиметријска стандардизована мрежа 1971 (International Gravity Standardization Network 1971) |
| ITRS | - | Међународни терестрички референтни систем (International Terrestrial Reference System) |
| ITRF96 | - | Међународни терестрички референтни оквир за епоху 96 (International Terrestrial Reference Frame 96) |
| MA | - | Оператор <i>moving average</i> |
| НВТ1 | - | Нивелман високе тачности 1 Србије |
| НВТ2 | - | Нивелман високе тачности 2 Србије |
| ОСП | - | Основни статистички подаци |
| РТМ | - | Резидуални модел терена |
| РТМ5 | - | Резидуални модел терена резолуције пет лучних минута |
| РТМ1 | - | Резидуални модел терена резолуције једне лучне минуте |
| РТМ15 | - | Резидуални модел терена резолуције једне лучне минуте унапред припремљен на поља величине 15" |
| СФРЈ | - | Социјалистичка Федеративна Република Југославија |
| SRTM | - | Дедицирана сателитска мисија (Shuttle Radar Topography Mission) |

Списак слика

| | |
|--|-----|
| Слика 1.1: Сфере земље (геосфере) | 6 |
| Слика 1.2: Унутрашњи слојеви Земље према хемијском саставу и физичким особинама (по узору на Hamblin and Christiansen, 2004) | 9 |
| Слика 2.1: Вектор силе Земљине теже | 13 |
| Слика 2.2: Однос референтних површи | 17 |
| Слика 2.3: Однос вектора убрзања и нормалне теже | 19 |
| Слика 3.1: Сферно растојање..... | 27 |
| Слика 3.2: Сферна апроксимација | 29 |
| Слика 3.3: Основни концепт remove-restore методе | 42 |
| Слика 4.1: Шематска структура коре у CRUST2 | 52 |
| Слика 4.2: Ејри-Хајсканенов изостатички модел | 54 |
| Слика 5.1: Призма са правоугаоном основом, константне густине..... | 60 |
| Слика 5.2: Карактеристични положаји тачке рачунања | 62 |
| Слика 5.3: Трансформација између система удаљене призме и локалног система тачке рачунања (утицај закривљености Земље)..... | 65 |
| Слика 5.4: Геометрија сферног тесероида (Heck and Seitz, 2007) | 67 |
| Слика 5.5: Распоред густина маса унутар тесероида..... | 68 |
| Слика 5.6: Изглед топографије у сферној апроксимацији | 70 |
| Слика 5.7: Веза локалног правоуглог и сферног координатног система (по узору на Grombein, T., 2013) | 71 |
| Слика 5.8: Ефекти топографских маса | 81 |
| Слика 5.9: Маса изнад и испод Бугеове плоче | 82 |
| Слика 5.10: Теренска корекција..... | 83 |
| Слика 5.11: Референтна (средња елевациона) површ | 85 |
| Слика 5.12: Тачка унутар топографских маса..... | 85 |
| Слика 6.1: Моделирање утицаја топографских маса у оквиру remove-restore методе..... | 89 |
| Слика 6.2: Ток нумеричких истраживања | 90 |
| Слика 6.3: Распоред тачака гравиметријског премера Србије | 94 |
| Слика 6.4: Распоред тачака у којима су одређена убрзања применом апсолутног гравиметра и полигони нове основне гравиметријске мреже Србије | 95 |
| Слика 6.5: Геолошка карта Србије..... | 98 |
| Слика 6.6: Подела призме на слојеве до геоида | 99 |
| Слика 6.7: Просторни распоред заједничких репера мрежа НВТ1 и НВТ2 | 106 |
| Слика 6.8: Просторни распоред заједничких тригонометара..... | 109 |
| Слика 6.9: Утицај локалних и удаљених маса..... | 113 |
| Слика 6.10: Просторни распоред тачака финалног скупа..... | 115 |
| Слика 6.11: Општи облик површи атмосферских корекција (еквидистанца=0.03 mgal) | 117 |
| Слика 6.12: Општи облик површи аномалија слободног ваздуха (еквидистанца=20 mgal)..... | 118 |
| Слика 6.13: Хистограм аномалија слободног ваздуха..... | 119 |

| | |
|--|-----|
| Слика 6.14: Општи облик површи аномалија убрзања одређених применом EGM2008 (еквидистанца=20 mgal) | 120 |
| Слика 6.15: Општи облик површи аномалијских висина одређених применом EGM2008 (еквидистанца=0.2 m) | 121 |
| Слика 6.16: Општи облик површи резидуалних аномалија применом теренске корекције (еквидистанца=20 mgal) | 123 |
| Слика 6.17: Општи облик површи резидуалних аномалија применом РТМ (резолюције 5') (еквидистанца=20 mgal) | 124 |
| Слика 6.18: Хистограм резидуалних аномалија: Горе: применом теренске корекције, Доле: применом РТМ (резолюције 5') | 125 |
| Слика 6.19: Припрема РТМ резолуције 1' за моделирање топографских маса | 126 |
| Слика 6.20: Општи облик површи резидуалних аномалија применом РТМ (резолюције 1') (еквидистанца=20 mgal) | 127 |
| Слика 6.21: Хистограм резидуалних аномалија применом РТМ резолуције 1' | 128 |
| Слика 6.22: Општи облик површи разлика теренске корекције са густином из ДМГ и константном густином (еквидистанца=0.2 mgal)..... | 130 |
| Слика 6.23: Општи облик површи разлика РТМ15 са густином из ДМГ и константном густином (еквидистанца=1 mgal) | 131 |
| Слика 6.24: Хистограм разлика утицаја топографских маса на аномалије убрзања при различитим густинама: Горе:теренска корекција; Доле:РТМ15 | 132 |
| Слика 6.25: Корелација топографије са променом густине | 134 |
| Слика 6.26: Промена индиректног ефекта у зависности од густине..... | 136 |
| Слика 6.27: Општи облик површи разлика индиректног ефекта са густином из ДМГ и константном густином (еквидистанца=1 cm)..... | 138 |
| Слика 6.28: Општи облик површи разлика РТМ15 утицаја на аномалијске висине са густином из ДМГ и константном густином (еквидистанца=1 cm) | 139 |
| Слика 6.29: Хистограм разлика утицаја топографских маса на аномалијске висине при различитим густинама: Горе: индиректни ефекат; Доле: РТМ15..... | 140 |
| Слика 1: Општи облик површи хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу x-осе | 152 |
| Слика 2: Општи облик површи хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу y-осе | 153 |
| Слика 3: Општи облик површи хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу x-осе | 154 |
| Слика 4: Општи облик површи хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу y-осе | 155 |
| Слика 5: Општи облик површи хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу x-осе | 156 |
| Слика 6: Општи облик површи хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу y-осе | 157 |
| Слика 7: Општи облик површи хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу x-осе | 158 |
| Слика 8: Општи облик површи хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу y-осе | 159 |
| Слика 9: Вектори положаја применом теренске корекције са константном густином | 160 |
| Слика 10: Вектори положаја применом теренске корекције са густином из ДМГ | 161 |
| Слика 11: Вектори положаја применом РТМ15 са константном густином | 162 |
| Слика 10: Вектори положаја применом РТМ15 са густином из ДМГ | 163 |

Списак табела

| | |
|--|-----|
| Табела 5.1: Случајеви сингуларитета у зависности од положаја тачке рачунања | 62 |
| Табела 6.1: Критеријуми за дефинисање висина и густина слојева призме..... | 100 |
| Табела 6.2: Критеријуми за дефинисање висине и густине слоја за водене површине | 101 |
| Табела 6.3: Статистички подаци разлика висина НВТ2 и висина НВТ1 | 106 |
| Табела 6.4: Оцењене вредности коефицијената површи другог степена..... | 107 |
| Табела 6.5: Оцењене вредности параметара датумске трансформације..... | 111 |
| Табела 6.6: Основни статистички подаци одабраног скупа тачака ДГП | 115 |
| Табела 6.7: ОСП атмосферске корекције и аномалија слободног ваздуха | 119 |
| Табела 6.8: ОСП дуготаласних карактеристика аномалија убрзања и аномалијских висина | 121 |
| Табела 6.9: ОСП теренске корекције и утицаја РТМ резолуције 5'са константном густином..... | 122 |
| Табела 6.10: ОСП резидуалних аномалија са константном густином..... | 126 |
| Табела 6.11: ОСП утицаја РТМ (1') на аномалије убрзања и одговарајуће резидуалне аномалије | 128 |
| Табела 6.12: ОСП разлика теренске корекције и утицаја РТМ15 са густином из ДМГ и константном густином..... | 129 |
| Табела 6.13: ОСП индиректног ефекта и утицаја РТМ15 са константном густином | 135 |
| Табела 6.14: ОСП индиректног ефекта и утицаја РТМ15 са густином из ДМГ | 136 |
| Табела 6.15: Промена индиректног ефекта у зависности од густине..... | 136 |
| Табела 6.16: ОСП разлика индиректног ефекта и утицаја РТМ15..... | 141 |
| Табела 1: ОСП хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу х-осе са густином из ДМГ | 152 |
| Табела 2: ОСП хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу у-осе са густином из ДМГ | 153 |
| Табела 3: ОСП хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу х-осе са константном густином | 154 |
| Табела 4: ОСП хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу у-осе са константном густином | 155 |
| Табела 5: ОСП хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу х-осе са густином из ДМГ | 156 |
| Табела 6: ОСП хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу у-осе са густином из ДМГ | 157 |
| Табела 7: ОСП хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу х-осе са константном густином... .. | 158 |
| Табела 8: ОСП хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу у-осе са константном густином | 159 |

САДРЖАЈ

| | |
|--|-----------|
| Списак скраћеница..... | III |
| Списак слика..... | IV |
| Списак табела | VI |
| УВОД | 1 |
| ПОГЛАВЉЕ 1 | |
| ОСНОВНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ О ГРАЂИ ЗЕМЉЕ..... | 5 |
| 1.1. СПОЉАШЊИ СЛОЈЕВИ ЗЕМЉЕ | 6 |
| 1.1.1. Атмосфера | 6 |
| 1.1.2. Биосфера | 8 |
| 1.1.3. Хидросфера..... | 8 |
| 1.2. УНУТРАШЊИ СЛОЈЕВИ ЗЕМЉЕ | 8 |
| 1.2.1. Унутрашњи слојеви Земље према хемијском саставу | 9 |
| 1.2.2. Унутрашњи слојеви Земље према физичким особинама | 10 |
| ПОГЛАВЉЕ 2 | |
| ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА..... | 12 |
| 2.1. НОРМАЛНИ ПОТЕНЦИЈАЛ И ЕЛИПСОИД..... | 14 |
| 2.2. АНОМАЛИЈСКИ ПОТЕНЦИЈАЛ..... | 16 |
| 2.3. УНДУЛАЦИЈА ГЕОИДА И АНОМАЛИЈА ВИСИНЕ | 16 |
| 2.4. АНОМАЛИЈА УБРЗАЊА И ПОРЕМЕЋАЈНО УБРЗАЊЕ | 18 |
| 2.5. ГЕОДЕТСКИ ПРОБЛЕМИ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ | 19 |
| ПОГЛАВЉЕ 3 | |
| РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ | 22 |
| 3.1. ПАРАМЕТАРСКИ ПРИСТУП..... | 22 |
| 3.1.1. Стоксово решење | 24 |

| | |
|---|-----------|
| 3.1.2.Решење Молоденског | 27 |
| 3.1.3.Решење на основу сателитих опажања | 33 |
| 3.2. ОПЕРАЦИОНИ ИЛИ ИНТЕГРАЛНИ ПРИСТУП | 33 |
| 3.2.1.Решења интегралног модела | 36 |
| 3.3. REMOVE-RESTORE МЕТОДА..... | 41 |
| 3.3.1.Дуготаласна карактеристика..... | 44 |
| 3.3.2.Краткоталасна карактеристика | 45 |
| 3.3.3.Средњеталасна карактеристика | 46 |

ПОГЛАВЉЕ 4

| | |
|--|-----------|
| МОДЕЛИ ТОПОГРАФСКИХ МАСА ЗЕМЉЕ..... | 49 |
| 4.1. ДИГИТАЛНИ МОДЕЛ ТЕРЕНА..... | 49 |
| 4.2. ДИГИТАЛНИ МОДЕЛ ГУСТИНА..... | 51 |
| 4.3. ИЗОСТАТИЧКИ МОДЕЛИ | 53 |
| 4.3.1.Ејри-Хајсканенов изостатички модел | 53 |
| 4.3.2.Прат-Хајфордов модел | 55 |

ПОГЛАВЉЕ 5

| | |
|--|-----------|
| МЕТОДЕ ОДРЕЂИВАЊА ГРАВИТАЦИОНОГ УТИЦАЈА ТОПОГРАФСКИХ МАСА ЗЕМЉЕ | 58 |
| 5.1. ГРАВИТАЦИОНИ ПОТЕНЦИЈАЛ ПРАВЕ ПРАВОУГАОНЕ ПРИЗМЕ..... | 58 |
| 5.1.1.Утицај закривљености Земље на гравитациони утицај призме | 64 |
| 5.2. ГРАВИТАЦИОНИ ПОТЕНЦИЈАЛ ТЕСЕРОИДА..... | 66 |
| 5.3. МОДЕЛИРАЊЕ ГРАВИТАЦИОНОГ УТИЦАЈА ТОПОГРАФСКИХ МАСА | 80 |
| 5.3.1.Теренска корекција | 81 |
| 5.3.2.Резидуални модел терена | 84 |

ПОГЛАВЉЕ 6

| | |
|-----------------------------------|-----------|
| НУМЕРИЧКА ИСТРАЖИВАЊА..... | 88 |
|-----------------------------------|-----------|

| | |
|--|------------|
| 6.1. РАСПОЛОЖИВИ ПОДАЦИ..... | 93 |
| 6.1.1.Детаљни гравиметријски премер..... | 93 |
| 6.1.2.Дигитални модел терена..... | 96 |
| 6.1.3.Дигитални модел густина..... | 97 |
| 6.1.4.Глобални геопотенцијални модел | 101 |
| 6.1.5.Резидуални модел терена | 103 |
| 6.2. ПРИПРЕМА ПОДАКА..... | 105 |
| 6.2.1.Трансформација висина тачака детаљног гравиметријског премера..... | 105 |
| 6.2.2. Трансформација вредности убрзања из Потсдамског система у систем IGSN71 | 107 |
| 6.2.3.Трансформација координата тачака на елипсоид GRS80 | 108 |
| 6.3. ПОДЕЛА ТОПОГРАФСКИХ МАСА НА ПРАВЕ ПРАВОУГАОНЕ ПРИЗМЕ..... | 111 |
| 6.4. АНАЛИЗА И ФОРМИРАЊЕ ФИНАЛНОГ СКУПА ПОДАКА | 114 |
| 6.4.1.Аномалије слободног ваздуха..... | 116 |
| 6.5. ДУГОТАЛАСНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ АНОМАЛИЈА СЛОБОДНОГ ВАЗДУХА И АНОМАЛИЈСКИХ ВИСИНА | 119 |
| 6.6. ГРАВИТАЦИОНИ УТИЦАЈ ТОПОГРАФСКИХ МАСА КОНСТАНТНЕ ГУСТИНЕ НА АНОМАЛИЈЕ УБРЗАЊА | 122 |
| 6.6.1.Резидуалне аномалије..... | 122 |
| 6.7. РАЗЛИКА УТИЦАЈА ТОПОГРАФСКИХ МАСА НА АНОМАЛИЈЕ УБРЗАЊА СА ГУСТИНАМА ИЗ МОДЕЛА И КОНСТАНТНОМ ГУСТИНОМ | 129 |
| 6.8. ГРАВИТАЦИОНИ УТИЦАЈ ТОПОГРАФСКИХ МАСА КОНСТАНТЕ ГУСТИНЕ НА АНОМАЛИЈСКЕ ВИСИНЕ | 135 |
| 6.9. ГРАВИТАЦИОНИ УТИЦАЈ ТОПОГРАФСКИХ МАСА НА АНОМАЛИЈСКЕ ВИСИНЕ СА РАЗЛИЧИТИМ ГУСТИНАМА | 135 |
| 6.9.1.Разлика утицаја топографских маса на аномалијске висине са густинама из модела и константном густином | 137 |

ПОГЛАВЉЕ 7

| | |
|----------------------------------|------------|
| ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА | 142 |
| ЛИТЕРАТУРА | 146 |
| ПРИЛОЗИ..... | 152 |
| Биографија аутора..... | 171 |

УВОД

Главни циљеви физичке геодезије су одређивање геоида и спољашњег гравитационог поља Земље. Наведени циљеви се могу остварити решавањем проблема граничних вредности теорије потенцијала, на основу познатих опажања на површини Земље и геометријски дефинисаног елипсоида.

Моделирање Земљиног гравитационог поља се може раздвојити на одређивање нормалног потенцијала и одређивање аномалијског потенцијала.

Нормални потенцијал се у потпуности може одредити усвајањем неопходног и довољног броја параметара, док се одређивање аномалијског потенцијала своди на решавање једног од три граничних проблема (Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2005).

Одређивање аномалијског потенцијала базира се на обради података опажања у оквиру методе remove-restore, одређивањем дуготаласних, средњеталасних и краткоталасних карактеристика резултата опажања.

Устаљена наведена подела подразумева:

- примену глобалних геопотенцијалних модела за потребе одређивања дуготаласних карактеристика,
- обраду резултата опажања функциоанала аномалијског потенцијала за одређивање средњеталасних карактеристика и
- моделирање гравитационог утицаја топографских маса за одређивање краткоталасних карактеристика.

Гравитациони утицај топографских маса на аномалијски потенцијал и његове функционале представља важан извор информација за гравитационо поље. Моделирање гравитационог утицаја топографских маса углавном се своди на примену постојећих дигиталних модела висина, а због недовољног познавања

распореда густина унутар Земљине коре, уводе се и одређене хипотетичке претпоставке о густинама. Досадашње процене су да разлика у густини може изазвати грешку у ортометријској висини, односно у одређивању геоида и до 1-2 dm (Hofmann-Wellenhof, B., Moritz, H., 2005).

Увођење дигиталног модела густина може унапредити досадашњи приступ усвајања хипотезе о константној густини маса Земљине коре и то:

- за потребе предикције функционала аномалијског потенцијала,
- у смислу квалитетније интерпертације резултата гравиметријских испитивања, што би у крајњем довело до боље дефиниције распореда минералних сировина у Земљиној унутрашњости.

Дводимензионални модели густине (2Д-ДМГ) обично су довољни за одређивање геоида и могу бити креирани на основу информација распореда густине из геолошких карата. Тродимензионални модели густина (3Д-ДМГ) били би идеални за потребна моделирање топографских маса унутар литосфере до геоида и Мохо слоја (Sanso, F., Sideris, G. M., 2013). У циљу побољшања тачности одређивања геоида, препорука је да се, уколико је на располагању, користи дигитални модел густина (Kuhn, M., 2003; Olugbenga, E., 2000).

Ова дисертација предлаже полазне идеје, предлоге и приступе како искористити расположиве податке, креирати дигитални модел густина и применити исти у поступку одређивања гравитационог утицаја топографских маса на аномалијски потенцијал и његове функционале (аномалије убрзања, аномалијске висине).

Управо из тог разлога, полазна хипотеза дисертације је:

применом адекватног модела густина маса Земљине коре, могуће је одредити аномалијски потенцијал и било који његов функционал са високом тачношћу и поузданошћу.

За потребе нумеричких истраживања ове дисертације креиран је дигитални модел густина и применом класичне теренске корекције и резидуалног модела терена одређен је гравитациони утицај топографских маса на аномалије убрзања

силе Земљине теже и аномалијске висине. Поред наведеног, приказани су општи облици површи и основни статистички подаци за гравитациони утицај топографских маса на

-хоризонталне компоненте вектора убрзања силе Земљине теже (V_x, V_y):

- применом класичне теренске корекције (Прилог 1-Прилог 4),
- применом резидуалног модела терена. (Прилог 5-Прилог 8).

-као и вектор положаја V_{xy} (Прилог 9-Прилог 12)

Сви наведени прорачуни су урађени са вредностима густина из дигиталног модела густина и са константном вредности густине, са циљем да се из разлике ових утицаја утврди: да ли модел густина у поступку моделирања топографских маса може да побољша тачност одређивања геоида?

Дисертација је подељена у седам поглавља од којих су прва четири посвећена опису слојева Земље према физичким и хемијским карактеристикама, граничним проблемима теорије потенцијала и поступцима за њихово решавање, опису постојећих модела топографије Земље, начинима моделирања утицаја топографских маса, а у последња два поглавља приказана су нумеричка истраживања извођена за потребе дисертације, као и низ закључака и препорука за будућа истраживања.

У поглављу ОСНОВНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ О ГРАЂИ ЗЕМЉЕ посебна пажња посвећена је опису слојева Земље према њиховим физичким карактеристикама, а мањим делом описани су слојеви Земље и према хемијском саставу појединих слојева.

Поглавље ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА садржи опис потенцијала силе теже Земље, раздвајање потенцијала на одређивање спољашњег и унутрашњег потенцијала, увођење аномалијског потенцијала и његових функционала, све до дефиниције проблема граничних вредности теорије потенцијала.

У поглављу РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ приказани су начини решавања проблема граничних вредности теорије потенцијала.

Модел који данас постоје и користе се за изучавање облика Земље: глобални дигитални модели терена, дигитални модели густина, изостатички модели, приказане су у поглављу МОДЕЛИ ТОПОГРАФСКИХ МАСА ЗЕМЉЕ.

Поглавље МЕТОДЕ ОДРЕЂИВАЊЕ ГРАВИТАЦИОНОГ УТИЦАЈА ТОПОГРАФСКИХ МАСА ЗЕМЉЕ садржи описе поступака за моделирање утицаја топографије, а посебна пажња посвећена је моделирању топографских маса применом теренске корекције и резидуалног модела терена, односно одређивању краткоталасне карактеристике у оквиру remove-restore методе.

И на крају, поглавље НУМЕРИЧКА ИСТРАЖИВАЊА обухвата све поступке моделирања и нумеричких одређивања утицаја топографских маса на функционале аномалијског потенцијала са различитим густинама и константном вредности густине. Приказани су општи облици површи и основни статистички подаци добијених резултата. Сви прорачуни урађени су у одређеном броју тачака гравиметријског премера на територији Републике Србије.

ПОГЛАВЉЕ 1

ОСНОВНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ О ГРАЂИ ЗЕМЉЕ

Планета Земља представља систем гаса, течности и чврстих материја, међусобно повезаних и зависних. Земља је терестричка планета, односно планета која има чврсту површину и има један природни сателит, Месец.

Због положаја у Сунчевом систему, једина је планета са обиљем кисеоника у атмосфери, са водом у течном, чврстом и гасовитом стању и органским светом, који се развио и задржао на њеној површини.

У Сунчевом систему је пета по величини, а трећа по удаљености од Сунца, око којег ротира по елиптичној путањи, на средњем растојању од око 149 милиона километара. Време неопходно да Земља пређе путању око Сунца износи 365.26 дана (Hamblin and Christiansen, 2004).

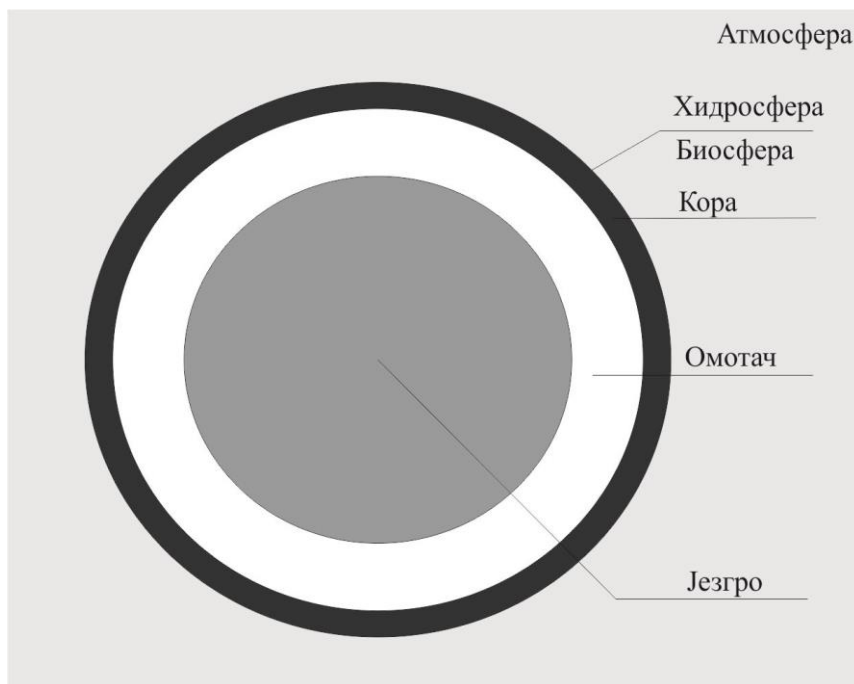
Облик Земље у првој апроксимацији је сфера, у другој ротациони елипсоид, а најближа апроксимација Земље је неправилна површ која се назива геоид (сферно тело спљоштено на половима). Сплљоштеност је последица њене ротације, чији период износи 23 часа, 56 минута и 4 секунде.

Геоид је по облику најсличнији двоосном ротационом елипсоиду. Елипсоид се користи као апроксимација облика Земље, а користи се и у поступку редуковања величина, мерених на физичкој површи Земље. За наше просторе усвојен је елипсоид GRS80 (Geodetic Reference System 1980) са дужином полуосе на екватору $a=6378137.000$ m, а на половима $b=6356752.314$ m.

Сплљоштеност Земље, која се дефинише као количник разлике дужина полуоса и велике полуосе, износи $1/298$. Површина планете Земље износи око 510×10^6 km²,

њена запремина је око $1.083 \times 10^{12} \text{ km}^3$, маса износи $5.98 \times 10^{21} \text{ t}$, а средња густина 5.52 g/cm^3 (Илић М., и остали, 1998).

Земља се одликује концентрично-љускастом грађом и чини је више сфера које се деле на спољашње и унутрашње (Слика 1.1).



Слика 1.1: Сфере Земље (геосфере)

Спољашње сфере Земље су атмосфера, биосфера и хидросфера, док се унутрашњост Земље може поделити на три геосфере: кору, омотач и језгро.

1.1. СПОЉАШЊИ СЛОЈЕВИ ЗЕМЉЕ

Спољашњи слојеви Земље су атмосфера, биосфера и хидросфера. Из планетарне перспективе, атмосфера изгледа као танак, гасовити слој који окружује Земљу, хидросфера као плава водена површина и биосфера или органски свет као тамно зелене површине, које се виде на континентима или острвима.

1.1.1. Атмосфера

Земљина атмосфера представља слој гасова који окружују планету Земљу и заједно са њом ротирају око заједничке осе ротације. Садржи око четири петине

азота и једну петину кисеоника, док су количине осталих гасова незнатне и у траговима. Густина атмосфере се смањује са повећањем висине, док густина ваздуха на нивоу мора износи $1.2 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$.

Атмосферу чини више слојева, који се међусобно разликују по наглим променама у температури и који се протежу више стотина километара изнад површине:

- Тропосфера (до висине око 12 km) је најнижи и најгушћи део атмосфере у којем се одвија живот и догађају све временске појаве. Садржи велике количине водене паре. Како се висина повећава, температура падне у просеку за око 6.5 °C на сваки километар изнад Земљине површине.
- Стратосфера (до висине око 50 km) садржи озон и штити од штетног зрачења из свемира. Температура је у нижим слојевима стратосфере стална, док у вишим слојевима температура расте.
- Мезосфера (до висине око 85 km) је слој у ком долази до наглог пада температуре и представља најхладнији слој атмосфере. У овом слоју долази до пада температуре и до -100 °C.
- Термосфера (од 85 km и навише) или "топлотна сфера". Овај слој карактерише висока температура јер се ултраљубичасто зрачење од Сунца претвара у топлоту. Температуре су често до 2000 °C или више. Овај слој чини јоносфера и егзосфера.
 - ♦ Јоносфера или доњи део термосфере (до висине око 500 km) садржи јоне, наелектрисане честице. У овом слоју честице гаса апсорбују ултраљубичасте и x-зраке од Сунца и на тај начин постају наелектрисане честице (јони). Ово је област у којој сателити круже око Земље и то на висини од 150 km до 300 km.
 - ♦ Егзосфера или горњи део термосфере је прелазно подручје према вакууму и простире се изнад 500 km висине. Ово је слој са врло разређеним гасом.

Прелазна подручја између слојева атмосфере су тропопауза, стратопауза и мезопауза (Hamblin and Christiansen, 2004).

1.1.2. Биосфера

Животни облици чине биосферу планете. Простире се свуда где има живота од највиших делова атмосфере до најдубљих предела океана. Сачињава је од 3 до 30 милиона биљних и животињских врста и непознат број врста микроорганизама. Инсекти чине више од једне половине свих познатих врста, којих је 1.6 милиона, а такође се разликује и 4000 врста сисара. Она је пресудно значајна за размену материје и енергије и остваривање јединства планете. У биосфери се обједињују сви ступњеви организације живог света, тако да биосфера представља врхунски биолошки систем (Hamblin and Christiansen, 2004).

1.1.3. Хидросфера

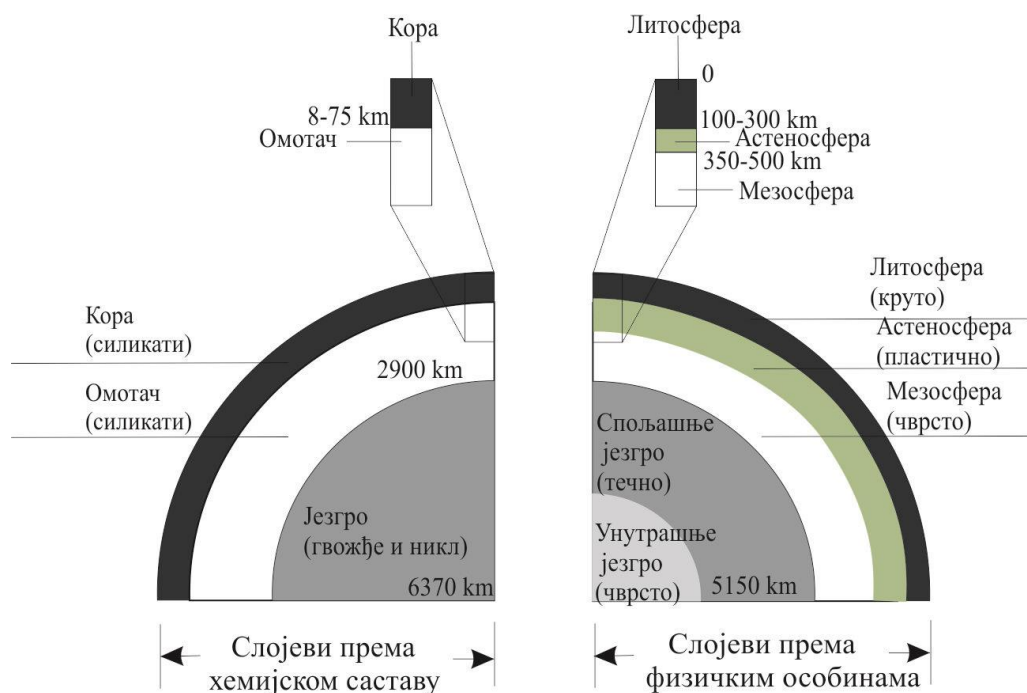
Хидросферу чине све воде у течном и залеђеном агрегатном стању. Вода покрива 71 % Земљине површине. Највећи део водених површина су морске воде (98 %), густине 1.02 g/cm^3 , а мањи део (2 %) чине потоци, језера, подземне воде и глечери.

1.2. УНУТРАШЊИ СЛОЈЕВИ ЗЕМЉЕ

Унутрашња структура Земље је веома сложена. Могу се издвојити слојеви који су различити по свом хемијском саставу и слојеви који се разликују по својим физичким особинама, као што су крутост и пластичност (Слика 1.2).

Ове особине описују механичко понашање слојева услед дејства силе:

- крутост је физичка особина материјала која изражава отпорност материјала да се одупре промени геометрије при деловању силе,
- пластичност је могућност промене геометрије, односно облика, а да не дође до лома.



Слика 1.2: Унутрашњи слојеви Земље према хемијском саставу и физичким особинама (по узору на Hamblin and Christiansen, 2004)

Унутрашња слојеви Земље различити по хемијском саставу су кора, омотач и језгро, док слојеви који се разликују по свом механичком понашању су литосфера, астеносфера, мезосфера, спољашње језгро и унутрашње језгро.

1.2.1. Унутрашњи слојеви Земље према хемијском саставу

Земљина кора је слој најмање дебљине и представља чврст спољашњи омотач Земље. Геологија Земљине коре се интензивно проучава, па се управо због тога располаже са много више информација о њеној структури и саставу него о структури и саставу омотача и језгра. Простире се до границе која се назива Мохоровичићев дисконтинуитет (Мохо граница). На овој граници долази до наглог скока брзине простирања еластичних таласа. Генерално, кора се састоји од стена различитог хемијског састава, а поред тога, има и значајних разлика у механичким и физичким особинама (Старчевић, М., 1991).

Земљина кора се дели на континенталну и океанску кору. Дебљина континенталне коре је до 75 km, и састоји се од гранитних стена са просечном густином око 2.67 g/cm^3 . Насупрот томе, океанска кора је дебљине око 8 km,

састоји се од нешто гушћих магматских стена, базалта, са просечном густином 3.0 g/cm^3 .

Земљин омотач захвата простор испод коре, односно Мохо границе, окружује језгро и достиже дебљину до 2900 km. Омотач се састоји од силикатних стена, које садрже обиље гвожђа и магнезијума и дели се на горњи и доњи омотач. Његова структура није хомогена. До 400 km дубине горњи омотач је чврстог агрегатног стања, а након те дубине и све до 2900 km, агрегатно стање омотача се мења у житко (полурастопљено). Густина се повећава са дубином па је у горњем делу омотача густина око 4.2 g/cm^3 , док је у доњем, у близини контакта са језгром, око 5.5 g/cm^3 . До информација о горњем делу омотача углавном се долази на основу података о кретању сеизмичких таласа, магнетног и гравитационог поља и лабораторијских испитивања стена и минерала у његовом саставу.

Земљино језгро чини централни део Земље и достиже дебљину до 3500 km. Густина језгра се повећава са дубином и у просеку износи око 10.8 g/cm^3 . Језгро је у највећој мери сачињено од гвожђа и никла и због велике густине, чини 32% укупне масе Земље.

1.2.2. Унутрашњи слојеви Земље према физичким особинама

На основу физичких особина материјала од којих су сачињени поједини слојеви, у унутрашњој грађи Земље може се издвојити пет карактеристичних слојева.

Чврст и стеновити спољни слој планете је *литосфера*, која обухвата кору и највиши горњи слој омотача. Њена дебљина варира од 10 km у неким океанским областима, до 80 km у континенталним областима. Литосферу чине тектонске плоче, које се крећу независно једна од друге.

У оквиру горњег омотача, непосредно испод литосфере, постоји прелазна зона, *астеносфера*, у којој долази до смањења брзине сеизмичких таласа. Због високог притиска у астеносфери, стене постају меке и пластичне и имају релативно ниску

густину. Налази се на дубини од око 50 km до 400 km испод океана, и на дубини од око 80 km до 250 km испод континента.

Стене испод астеносфере имају већу чврстину од стена у самој астеносфери. На овим дубинама, долази до компензације високог притиска и високе температуре, што узрокује да стене постану чвршће. Област између астеносфере и језгра назива се *мезосфера*.

Према физичким особинама језгро се може поделити на два дела, *спољашње течна језгро* и *унутрашње чврсто језгро*. Спољашње језгро се налази на дубини 4980 km. Дебљина спољашњег језгра је око 2270 km, што је знатно више од дебљине унутрашњег језгра који износи око 1200 km (Hamblin and Christiansen, 2004).

ПОГЛАВЉЕ 2

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА

На свако тело које се налази на физичкој површи Земље, које има масу и учествује у Земљиној ротацији делују две силе: гравитациона сила Земље (\vec{F}) и центрифугална сила (\vec{f}). Резултанта ове две силе представља силу Земљине теже

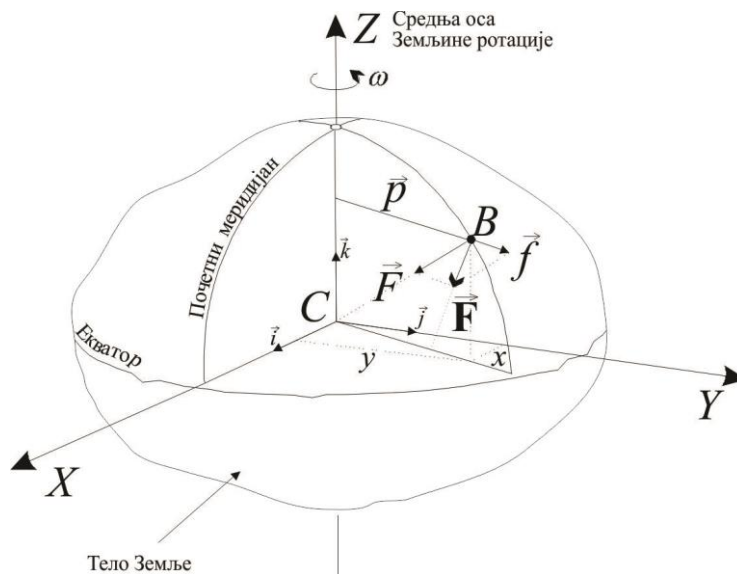
$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{F} + \vec{f}. \quad (2.1)$$

Свакој тачки простора се може придружити вектор убрзања силе Земљине теже и на тај начин се дефинише векторско поље убрзања

$$\vec{g}(\vec{r}_B) = k \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_B|^3} (\vec{r} - \vec{r}_B) d\Omega + \vec{p} \omega^2, \quad (2.2)$$

где је k -универзална гравитациона константа, ρ -густина, Ω -област интеграције (тело Земље), ω -угаона брзина Земљине ротације, \vec{r}, \vec{r}_B -вектор положаја елемента запремине $d\Omega$ и вектор положаја тачке B , \vec{p} -вектор управан на осу Земљине ротације, чији се интензитет може одредити из правоуглих геоцентричних координата тачке у којој је дефинисан вектор убрзања теже (Слика 2.1).

Правец и смер силе Земљине теже дефинисан је правцем и смером резултанте двеју сила, док интензитет силе зависи од положаја тела на физичкој површи Земље. Јединице убрзања силе теже су m/s^2 (јединица SI система) и gal (у част Галилеа), при чему је $\text{gal} = 0.01 \text{ m/s}^2$ (Одаловић, О., 2010).



Слика 2.1: Вектор силе Земљине теже

Векторско поље убрзања може се заменити скаларним пољем, а функција којом се скаларно поље убрзања Земљине теже дефинише назива се потенцијал убрзања Земљине теже. У математичком запису убрзање силе теже је градијент потенцијала (Vaniček, P., 1999)

$$\vec{g} = \text{grad } W . \quad (2.3)$$

Потенцијална функција W у скаларном облику је дефинисана збиром скаларних функција

$$W = V + \Phi , \quad (2.4)$$

где је V потенцијал убрзања гравитационе силе и Φ потенцијал убрзања центрифугалне силе (Heiskanen, W., Moritz H., 2000). Из дефиниције потенцијала силе теже јасно је да потенцијал гравитационе силе опада са удаљавањем од Земље, док центрифугални потенцијал расте са повећањем удаљености од осе ротације. Потенцијал Земљине теже делује само на тела која се налазе на Земљи. Ако се тело одвоји од Земље престаје његова ротација и центрифугални потенцијал постаје неважан. С обзиром на особине потенцијала V и Φ , може се

доћи до уопштене Поасонове диференцијалне једначине потенцијала силе теже (Heiskanen, W., Moritz H., 2000)

$$\Delta W = -4\pi k\rho + 2\omega^2. \quad (2.5)$$

Физичка површ Земље садржи дисконтинуитете у густини. Њена густина креће се од $1.2 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ (колика је густина ваздуха) до 2.67 g/cm^3 (колика је средња густина горњих слојева Земљине коре). Уколико занемаримо густину ваздуха изван Земље $\rho = 0$, једначина (2.5) прелази у Лапласову диференцијалну једначину

$$\Delta W = 2\omega^2. \quad (2.6)$$

На тај начин се потенцијал може раздвојити на

- спољашњи потенцијал, за који важи $\Delta W = 2\omega^2$,
- унутрашњи потенцијал, за који важи $\Delta W = -4\pi k\rho + 2\omega^2$.

У физичком смислу, површ константног потенцијала која најбоље апроксимира облик Земље, назива се геоид ($W_0 = const.$). Поред одређивања геометријског облика Земље, геоид омогућава и одређивање њеног гравитационог поља и управо због тога је усвојен да буде референтна површ ортометријских висина.

2.1. НОРМАЛНИ ПОТЕНЦИЈАЛ И ЕЛИПСОИД

У математичком погледу, облику Земље најбоље одговара двоосни ротациони елипсоид. Ротациони елипсоид је нивоска површ властитог поља убрзања силе теже и има практични значај за проучавање реалног поља.

Нормално поље је се математички може изразити путем једноставних једначина и одређено са четири параметра, два физичка параметра: маса елипсоида, која је једнака маси Земље и угаона брзина ротације, која одговара брзини ротације Земље и два геометријска параметра: велика полуоса елипсоида и спљоштеност

елипсоида. Овако дефинисано тело често се назива нормалном Земљом (Одаловић, О., 2010).

Реално убрзање силе теже g замењује његова математичка апроксимација, нормално убрзање силе теже γ_0 , у тачки на елипсоиду са геодетском латитудом B . Вредност γ_0 на елипсоиду може се одредити према изразу Сомилјанија

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_a \cos^2 B + b\gamma_b \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \quad (2.7)$$

где су γ_a и γ_b нормално убрзање силе теже на екватору и полу, a и b велика и мала полуоса елипсоида (Torge, W., 2001).

Аналогно реалном убрзању и потенцијалу силе теже, нормално убрзање силе теже је градијент нормалног потенцијала

$$\vec{\gamma} = \text{grad } U, \quad (2.8)$$

док за нормални потенцијал нормалне Земље важи релација

$$U = V_U + \Phi_U, \quad (2.9)$$

при чему је V_U потенцијал убрзања гравитационе силе нормалне Земље, а Φ_U потенцијал убрзања центрифугалне силе, која је последица ротације нормалне Земље. Такође, за нормални потенцијал важи Поасонова једначина

$$\Delta U = -4\pi k \rho_E + 2\omega^2, \quad (2.10)$$

али ако занемаримо густину ваздуха изван нормалне Земље $\rho_E = 0$, једначина (2.10) прелази у Лапласову диференцијалну једначину

$$\Delta U = 2\omega^2. \quad (2.11)$$

На тај начин се и нормални потенцијал може раздвојити на

- спољашњи потенцијал, за који важи $\Delta U = 2\omega^2$,
- унутрашњи потенцијал, за који важи $\Delta U = -4\pi k \rho_E + 2\omega^2$.

У физичком смислу, елипсоид константног потенцијала је дефинисан тако да што боље апроксимира површ геоида. Елипсоид генерише нормални потенцијал чија је вредност једнака вредности стварног потенцијала на геоиду ($U_0 = W_0$) и усвојен да буде референтна површ елипсоидних висина.

2.2. АНОМАЛИЈСКИ ПОТЕНЦИЈАЛ

Разлика између реалног потенцијала Земље W и нормалног потенцијала U представља аномалију потенцијала односно поремећајни потенцијал T за који важи (Bjerhamer, A., 1969)

$$T = W - U = V + \Phi - (V_U + \Phi_U). \quad (2.12)$$

Аналогно особинама реалног и нормалног потенцијала, поремећајни потенцијал је хармонијска функција ван тела Земље и може се раздвојити на

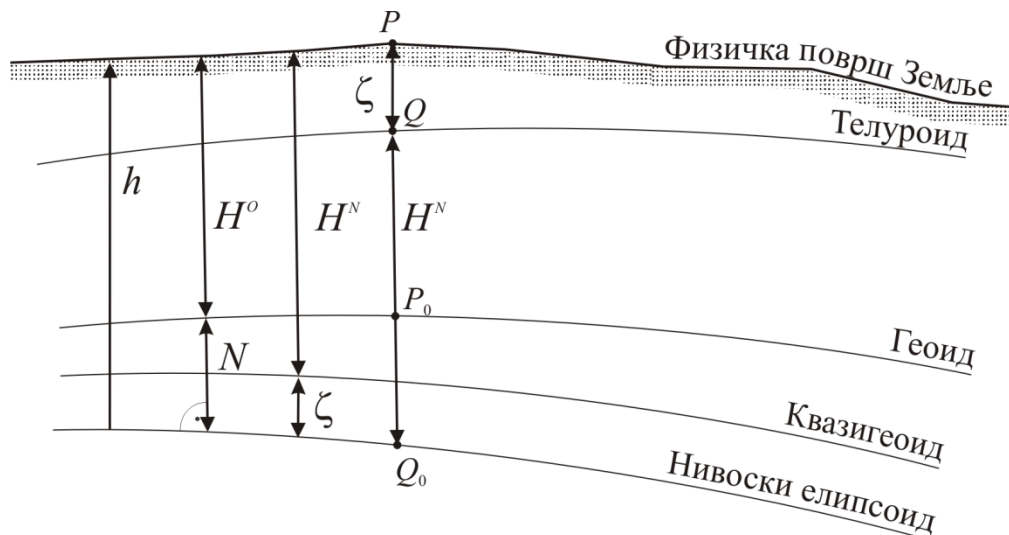
- спољашњи потенцијал, за који важи $\Delta T = 0$,
- унутрашњи потенцијал, за који важи $\Delta T = -4\pi k(\rho - \rho_E)$.

2.3. УНДУЛАЦИЈА ГЕОИДА И АНОМАЛИЈА ВИСИНЕ

Висина тачке на физичкој површи Земље изнад површи геоида је ортометријска висина H^o , док геометријска висина тачке изнад површи елипсоида представља геодетску или елипсоидну висину h (Слика 2.2). Разлика геометријске и ортометријске висине представља ундулацију геоида:

$$N = h - H^o \quad (2.12)$$

Ундулација геоида N представља вертикално растојање, дуж нормале на елипсоид, од тачке P_0 на геоиду до тачке Q_0 на елипсоиду (Jianliang, H., 2002).



Слика 2.2: Однос референтних површи

Површ чији је нормални потенцијал у свакој тачки једнак стварном потенцијалу у одговарајућој тачки на површи Земље, назива се телуроид.

Вертикално растојање од елипсоида до телуроида је нормална висина H^N . Аналогно ундулацији геоида, аномалија висина представља разлику између геометријске и нормалне висине:

$$\zeta = h - H^N. \quad (2.13)$$

Вертикално растојање између телуроида и површи Земље, дуж нормале на телуроид, назива се аномалија висине ζ .

Аномалије висина се могу нанети и изнад елипсоида. На тај начин се добија површ квазигеоида, која се добија и на начин да се нормалне висине свих тачака на површи Земље нанесу на доле, у њену унутрашњост. Он се на подручју мора и океана поклапа са геоидом. Висина тачке изнад квазигеоида је нормална висина H^N .

Може се показати да за ундулацију геоида и аномалију висина важи теорема Брунса (Heiskanen, W., Moritz H., 2000)

$$N = \frac{T_{P_0}}{\gamma_{Q_0}} \text{ и } \zeta = \frac{T_P}{\gamma_Q}, \quad (2.14)$$

при чему су T_{P_0}, T_P -вредност аномалијског потенцијала у тачки на геоиду и тачки на површи Земље, респективно, а γ_{Q_0}, γ_Q -вредност нормалног убрзања силе теже на елипсоиду и телуроиду. Ундулација геоида и аномалијска висина носе информације о аномалијском потенцијалу, па се преко њих може одредити спољашњи потенцијал убрзања Земљине теже.

2.4. АНОМАЛИЈА УБРЗАЊА И ПОРЕМЕЋАЈНО УБРЗАЊЕ

У тачки на геоиду могуће је дефинисати вектор аномалијског убрзања силе Земљине теже, који представља разлику вектора убрзања теже у тачки на геоиду \vec{g}_P и вектора убрзања нормалне теже у тачки на елипсоиду $\vec{\gamma}_Q$ (Слика 2.3). Интензитет вектора аномалијског убрзања дефинисан изразом

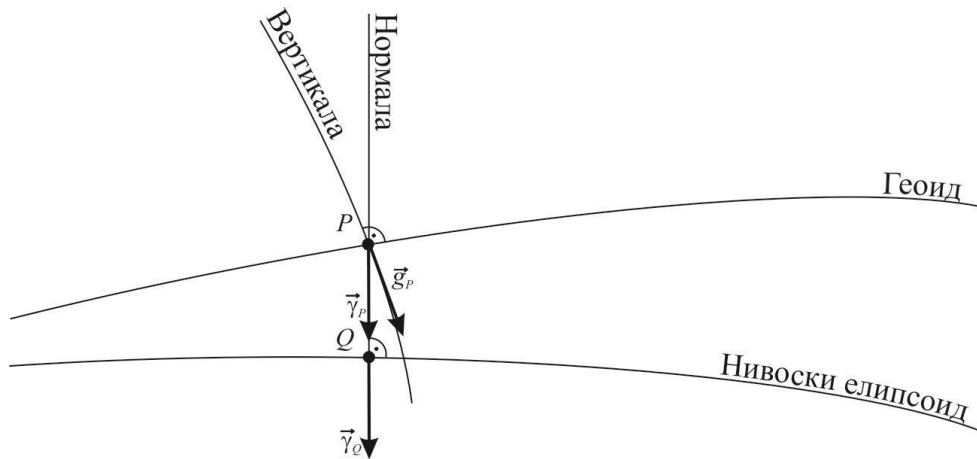
$$\Delta g = g_P - \gamma_Q, \quad (2.15)$$

назива се аномалија убрзања (Одаловић, О., 2010).

У истој тачки на геоиду могуће је дефинисати и вектор поремећајног убрзања силе Земљине теже, који представља разлику вектора убрзања теже у тачки на геоиду \vec{g}_P и вектора убрзања нормалне теже у тачки на геоиду $\vec{\gamma}_P$ (Слика 2.3). Интензитет вектора поремећајног убрзања дефинисан изразом

$$\delta g = g_P - \gamma_P, \quad (2.16)$$

назива се поремећајно убрзање (Одаловић, О., 2010).



Слика 2.3: Однос вектора убрзања и нормалне теже

Може се показати веза између поремећајног убрзања и аномалија убрзања са градијентом аномалијског потенцијала, па тако за поремећајно убрзања важи релација

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial n}, \quad (2.17)$$

а за аномалију убрзања

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{1}{\gamma} T, \quad (2.18)$$

која уједно и представља основну једначину физичке геодезије (Heiskanen, W., Moritz H., 2000).

2.5. ГЕОДЕТСКИ ПРОБЛЕМИ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

Код решавања геодетског проблема граничних вредности поред геометрије граничне површ S , потребно је одредити и потенцијал убрзања силе теже W . Како се потенцијал не може директно измерити, представљамо га преко мерљивих величина. Мерене величине се могу изразити у линеарном облику, као изводи

аномалијског потенцијала T на геоиду и на тај начин дефинишу граничне услове. Решење граничних услова је тражена гранична површ, односно приближни облик Земље.

Први проблем граничних вредности теорије потенцијала или Дирихлеов проблем подразумева одређивање функције, која је хармонијска унутар или изван површи S , на основу њених познатих вредности на површи S . Тако се вредност аномалијског потенцијала T може одредити у спољашњем простору с обзиром на његове вредности познате свуда на граници подручја (Claessens S. J., 2006).

Одређивање функције која је хармонијска унутар или изван површи S на основу вредности њеног првог парцијалног извода у правцу нормале на површ S представља други проблем граничних вредности теорије потенцијала или Нојманов проблем.

Вредност аномалијског потенцијала T се у спољашњем простору може одредити из познатих вредности њеног првог извода свуда на граници подручја, односно на основу вредности поремећајног убрзања δg , који представља градијент аномалијског потенцијала (израз (2.17)).

Одређивање функције, која је хармонијска унутар или изван површи S , на основу вредности линеарне комбинације вредности аномалијског потенцијала и његовог нормалног извода на површ S , представља трећи проблем граничних вредности теорије потенцијала.

Вредност аномалијског потенцијала T се у спољашњем простору може одредити из познатих вредности аномалије убрзања на граници подручја, односно на основу основне једначине физичке геодезије (израз (2.18)) (Heiskanen, W., Moritz H., 2000).

Решавањем граничних проблема одређује се аномалијски потенцијал T , а затим се на основу Брунсове теореме могу одредити вредности ундулација N или аномалијске висине ζ (Moritz, H., 1966).

Решавање првог проблема граничних вредности данас је омогућено применом сфернохармонијске анализе, односно развојем потенцијала Земљине теже у ред сферних хармоника, док се трећи проблем, базиран на основној једначини физичке геодезије, решава параметарским приступом, решењем Стокса, редовима Молоденског или применом интегралног модела геодезије, односно колокацијом (Rumel R., Teunissen, P., 1986).

Други проблем граничних вредности, или Нојманов проблем, постаје актуелан од појаве глобалних навигационих сателитских система, од када се и посебно посвећује пажња овом проблему, како теоријски, тако и експериментално.

ПОГЛАВЉЕ 3

РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

За решавање проблема граничних вредности теорије потенцијала, односно одређивање аномалијског потенцијала T ван граничног подручја, уз додатни услов на граници подручја, могуће је користити два приступа:

- параметарски приступ и
- операциони или интегрални приступ.

Параметарски приступ подразумева да је аномалијски потенцијал аналитичка функција једног или низа параметара. Ако се аномалијски потенцијал представи преко параметра који се директно опажа на физичкој површи Земље, приступ је непосредан или директан, али уколико се представи преко параметра који су функција величине која се опажа, приступ је посредан или индиректан.

Потребно је напоменути да и посредни и непосредни математички модел подразумева да су резултати опажања само једне величине познати у свим тачкама области за коју се модел формира.

Операциони или интегрални приступ подразумева једновремено одређивање аномалијског потенцијала из резултата опажања низа величина, који су преузети само у коначном броју тачака (Одаловић, О., 2005).

3.1. ПАРАМЕТАРСКИ ПРИСТУП

Два значајна параметарска приступа за решавање проблема граничних вредности, која се међусобно разликују у односу на редукцију мерених величина су:

- Стоксово решење, при чему се као решење добија површ геоида (мерења се редукују на геоид и уводе се хипотезе о распореду густина маса унутар Земље),
- приступ по Молоденском, чијим се решењем добија квазигеоид (нема редукације, користе се резултати мерења на физичкој површи Земље).

Поменута решења се, применом директног параметарског приступа, добијају на основу фундаменталне једначине физичке геодезије:

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{r}T = -\Delta g, \quad (3.1)$$

али у сферној апроксимацији, где је r полупречник сфере (Moritz, H., 1980).

Како Стоксово решење и приступ по Молоденском користе податке гравиметријских метода мерења, њихово решење даје веома добру локалну резолуцију поља силе Земљине теже, међутим, дуготаласна компонента поља садржи систематске грешке, због неједнаког распореда мерених вредности аномалија (Anderson E., 1976).

За разлику од директног приступа, идиректни параметарски приступ подразумева да се поменута решења могу одредити преко параметара који се посредно одређују из модела. Тако се, на основу резултата опажања путања сателита, одређују коефицијенти сферно хармонијског развоја, а затим се на основу њих може одредити аномалијски потенцијал, као и остали елементи поља убрзања силе теже, што уједно представља решење првог проблема граничних вредности теорије потенцијала (Moritz, H., 1980).

Глобални геопотенцијални модел представља дуготаласни, углачани модел поља убрзања силе теже, који не садржи локалне, детаљне карактеристике поља. Ограничавајући фактор модела, који су развијени само на основу сателитских података, је мањи квалитет у односу на моделе који користе и терестричке податке. Управо због тога сателитско решење има хомогену дуготаласну компоненту поља, без систематских грешака, али има слабију локалну резолуцију.

Очигледно да је комбинацијом података могуће елиминисати неке недостатке сваког појединог поступка. Из практичних и теоретских разлога неопходно је у обзир узети бар три врсте података: терестричка мерења (аномалије силе теже, односно поремећајне аномалије силе теже или отклоне вертикале), глобални геопотенцијални модел и податке о топографији.

Ово уједно представља и концепт комбиноване remove-restore методе, која ће детаљно бити описана у поглављу 3.3.

3.1.1. Стоксово решење

Стокс је аномалијски потенцијал одредио решавањем трећег граничног проблема теорије потенцијала, када је линеарна комбинација аномалијског потенцијала и његовог првог извода позната у виду вредности аномалија убрзања на површи геоида.

Може се показати да су изразом:

$$\Delta g(r, \theta, \lambda) = \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \left(\frac{r_A^2 - R^2}{l^3} - \frac{1}{r} - \frac{2R}{r^2} \cos \psi \right) \Delta g(R, \theta, \lambda) d\sigma, \quad (3.2)$$

дефинисане вредности аномалија убрзања у тачкама ван сфере $r = R$, из вредности аномалија убрзања познатих у тачкама на сфери $r = R$. То омогућава да се гранични услов (3.1) може решавати као парцијална диференцијална једначина (Zhiling, F., 2000).

Ако се лева и десна страна помноже са r^2 , а затим интеграле у границама од r до ∞ , добија се једначина облика:

$$-\int_r^{\infty} \left[r^2 \frac{\partial T}{\partial r} + 2rT \right] dr = \int_r^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T) dr = \int_r^{\infty} r^2 \Delta g dr, \quad (3.3)$$

односно

$$-r^2 T \Big|_r^\infty = r^2 T \Big|_r^\infty = r^2 T - \lim_{r \rightarrow \infty} (r^2 T) = - \int_r^\infty r^2 \Delta g dr. \quad (3.4)$$

Како је

$$T = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} T_n = \frac{R^3}{r^3} T_2 + \frac{R^4}{r^4} T_3 + \dots = \frac{1}{r^2} \left(\frac{R^3}{r} T_2 + \frac{R^4}{r^2} T_3 \dots \right), \quad (3.5)$$

следи

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r^2 T) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{R^3}{r} T_2 + \frac{R^4}{r^2} T_3 \dots \right) = 0, \quad (3.6)$$

и једначина постаје

$$r^2 T = - \int_r^\infty r^2 \Delta g dr. \quad (3.7)$$

Заменом за Δg из израза (3.2) добија се

$$r^2 T = \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[\int_{\infty}^r \left(-\frac{r^3 - R^2 r}{l^3} + 1 + \frac{3R}{r} \cos \psi \right) \Delta g \right] d\sigma, \quad (3.8)$$

а како је

$$\int_{\infty}^r \left(-\frac{r^3 - R^2 r}{l^3} + 1 + \frac{3R}{r} \cos \psi \right) \Delta g = \frac{2r^2}{l} + r - 3l - R \cos \psi \left(5 + 3 \ln \left(\frac{r - R \cos \psi + l}{2r} \right) \right) \quad (3.9)$$

следи

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[\frac{2r^2}{l} + r - 3l - R \cos \psi \left(5 + 3 \ln \left(\frac{r - R \cos \psi + l}{2r} \right) \right) \right] d\sigma. \quad (3.10)$$

Увођењем смене

$$S(r, \psi) = \frac{2R}{l} + \frac{R}{l} - 3 \frac{Rl}{r^2} - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos \psi \left(5 + 3 \ln \left(\frac{r - R \cos \psi + l}{2r} \right) \right), \quad (3.11)$$

једначина постаје

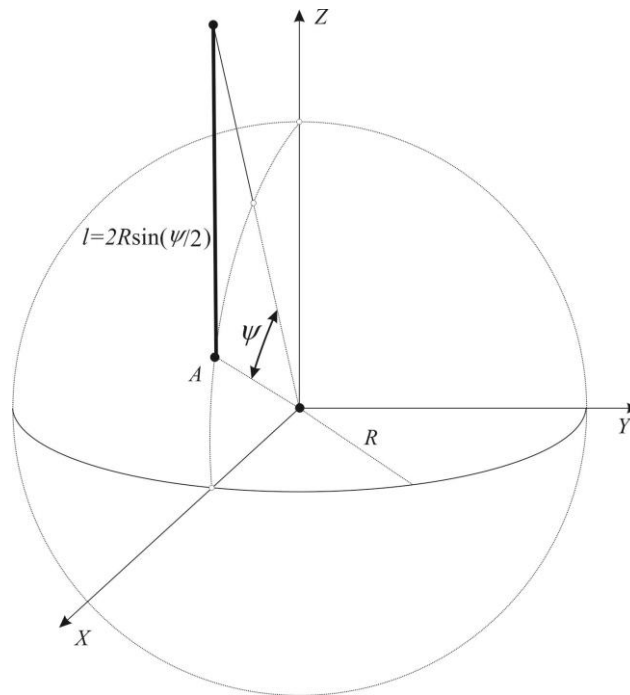
$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(r, \psi) \Delta g d\sigma. \quad (3.12)$$

На површи терестричке сфере, где је $r = R, l = 2R \sin \frac{\psi}{2}$ (Слика 3.1), функцију аномалијског потенцијала је могуће приказати у облику:

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g d\sigma, \quad (3.13)$$

где је $S(\psi)$ Стоксова функција облика:

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin \left(\frac{\psi}{2} \right)} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right). \quad (3.14)$$



Слика 3.2: Сферно растојање

Коришћењем Брунсове теореме добија се једначина облика:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g d\sigma, \quad (3.15)$$

која се назива **формулом Стокса**.

3.1.2. Решење Молоденског

Код приступа Молоденског аномалије се односе на тачке физичке површи Земље, а аномалијски потенцијал на телуроид. Због тога се приступ по Молоденском може дефинисати на следећи начин: одредити ону функцију T која је хармонијска ван телуроида Σ , такву да на телуроиду задовољава гранични услов (3.1).

Молоденски је аномалијски потенцијал представио у облику потенцијала масе Φ кондензоване на телуроиду:

$$T = \iint_{\Sigma} \frac{\Phi}{l} d\Sigma, \quad (3.16)$$

где је $\Phi = k\kappa$ производ гравитационе константе и површинске густине.

Како је потенцијал у овом облику већ хармонијска функција, следи да се решење проблема Молоденског добија одвајањем оног решења из скупа свих могућих, које задовољава дефинисани гранични услов.

Парцијални извод аномалијског потенцијала у правцу спољашње нормале на елемент телуроида $d\Sigma$ дефинисан је са:

$$\frac{\partial T}{\partial r_p} = -2\pi\Phi \cos \beta + \iint_{\Sigma} \Phi \frac{\partial}{\partial r_p} \left(\frac{1}{l} \right) d\Sigma, \quad (3.17)$$

тако да се гранични услов може приказати у облику линеарне интегралне једначине

$$2\pi\Phi \cos \beta - \iint_{\Sigma} \Phi \left[\frac{\partial}{\partial r_p} \left(\frac{1}{l} \right) + \frac{2}{r_p} \frac{1}{l} \right] d\Sigma = \Delta g, \quad (3.18)$$

где је β угао између нормале на елемент $d\Sigma$ и нормалне вертикале.

Увођењем сферне апроксимације за $r_p, l, d\Sigma$ (Слика 3.2):

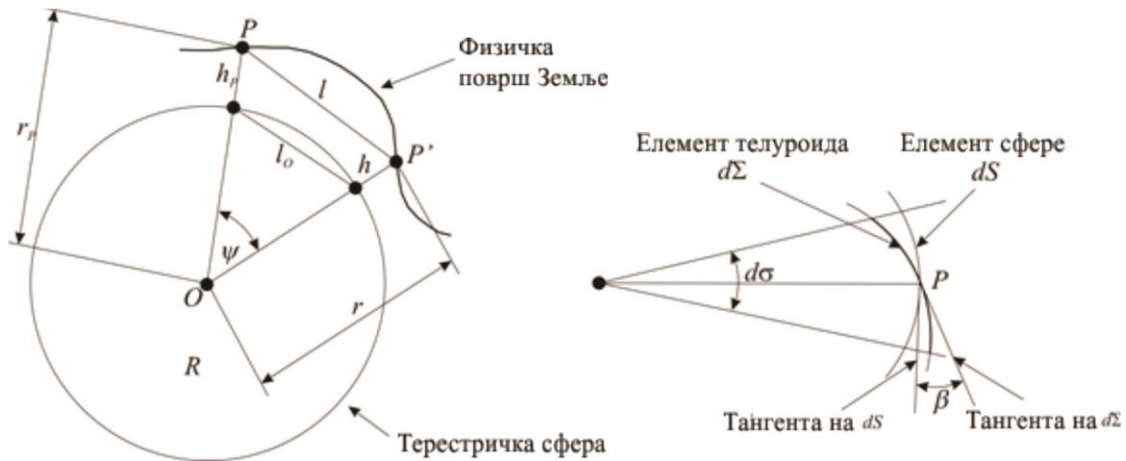
$$\begin{aligned} r_p &= h_p + R, \quad r = h + R, \\ l &= \sqrt{r_p^2 + r^2 - 2r_p r \cos \psi}, \quad d\Sigma = r^2 \sec \beta d\sigma, \end{aligned} \quad (3.19)$$

добија се једначина

$$2\pi\Phi \cos \beta - \iint_{\sigma} \Phi \left[\frac{3}{2l} + \frac{r^2 - r_p^2}{2rl^3} \right] \frac{r^2}{r_p} \sec \beta d\sigma = \Delta g, \quad (3.20)$$

која представља основну интегралну једначину проблема Молоденског у сферној апроксимацији, а аномалијски потенцијал могуће је приказати у облику:

$$T = \iint_{\sigma} \frac{\Phi}{l} r^2 \sec \beta d\sigma. \quad (3.21)$$



Слика 3.2: Сферна апроксимација

Ако се радијус вектор прикаже у облику

$$r = h + R = R \left(1 + \frac{h}{R} \right), \quad (3.22)$$

а након тога занемари вредност члана h/R , чини се грешка мања од грешке која се уводи при коришћењу сферне апроксимације. Оваква раванска апроксимација подразумева да је:

$$r = r_p = R, \quad (3.13)$$

након чега је могуће писати:

$$\frac{r^2}{r_p} = R, \quad (3.23)$$

$$r^2 - r_p^2 = (r - r_p)(r + r_p) = 2R(h - h_p).$$

Применом исте апроксимације за растојање l следи:

$$l^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{\psi}{2} \left(1 + \frac{h + h_p}{R} + \frac{hh_p}{R^2} \right) + (h - h_p)^2, \quad (3.24)$$

односно, након одбацивања чланова $\frac{hh_p}{R^2}$ и $\frac{h + h_p}{R}$:

$$l = l_0 \sqrt{1 + \left(\frac{h - h_p}{l_0} \right)^2}, \quad (3.25)$$

при чему је $l_0 = 2R \sin \frac{\psi}{2}$.

Интегрална једначина сада постаје

$$2\pi\Phi \cos \beta - \iint_{\sigma} \Phi \left[\frac{3}{2l} + \frac{R^2(h - h_p)}{l^3} \right] \sec \beta d\sigma = \Delta g, \quad (3.26)$$

и дефинитивно израз

$$2\pi\chi(1 + \tan^2 \beta)^{-1} - \iint_{\sigma} \left[\frac{3}{2l} + \frac{R^2(h - h_p)}{l^3} \right] \chi d\sigma = \Delta g, \quad (3.27)$$

представља основну интегралну једначину проблема Молоденског у раванској апроксимацији. Увођењем густине $\chi = \Phi \sec \beta$, аномалијски потенцијал се сада може написати у облику:

$$T = R^2 \iint_{\sigma} \frac{\chi}{l} d\sigma. \quad (3.28)$$

Решавањем једначине (3.27) по непознатој χ , Молоденски је добио решења у облику интегралне једначине:

$$\chi = \frac{1}{2\pi} G_n + \frac{3}{16\pi^2} \iint_{\sigma} G_n S(\psi) d\sigma. \quad (3.29)$$

а за аномалијски потенцијал решење у облику степеног реда (Moritz, Н., 1980):

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} T_n, \quad (3.30)$$

где су

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_0 S(\psi) d\sigma, \\ T_1 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_1 S(\psi) d\sigma, \\ T_2 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_2 S(\psi) d\sigma - \frac{R^2}{2} \iint \frac{(h-h_p)}{l_0^3} \chi_0 d\sigma, \\ T_3 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_3 S(\psi) d\sigma - \frac{R^2}{2} \iint \frac{(h-h_p)}{l_0^3} \chi_1 d\sigma, \end{aligned} \quad (3.31)$$

и где је

$$\begin{aligned} G_0 &= \Delta g, \\ G_1 &= \frac{R^2}{2} \iint \frac{(h-h_p)}{l_0^2} \chi_0 d\sigma, \\ G_2 &= \frac{R^2}{2} \iint \frac{(h-h_p)}{l_0^3} \chi_1 d\sigma - \frac{3R}{4} \iint \frac{(h-h_p)^2}{l_0^3} \chi_0 d\sigma + 2\pi \chi_0 \tan^2 \beta, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$G_3 = \frac{R^2}{2} \iint \frac{(h-h_p)}{l_0^3} \chi_2 d\sigma - \frac{3R}{4} \iint \frac{(h-h_p)^2}{l_0^3} \chi_1 d\sigma - \frac{3R^2}{2} \iint \frac{(h-h_p)^3}{l_0^5} \chi_0 d\sigma + 2\pi\chi_1 \tan^2 \beta$$

Може се показати да је ред (3.30) конвергентан, као и то да су на овај начин одређена решења јединствена.

Након одређеног аномалијског потенцијала, аномалијске висине могуће је одредити применом Брунсове формуле, при чему се у практичним применама најчешће користе само прва два члана реда (формула Молоденског) (Moritz, Н., 1980):

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} (\Delta g + G_1) d\sigma. \quad (3.33)$$

Веома је битно нагласити да коришћењем израза за ундулацију геоида и аномалијску висину, као разлике елипсоидних и ортометријских висина, односно нормалних висина важи:

$$N = \zeta + \frac{\Delta g_B}{\bar{\gamma}} H^o, \quad (3.34)$$

где је Δg_B вредност Бугеове аномалије, $\bar{\gamma}$ средња вредност нормалног убрзања теже дуж одсечка вертикале од нивоског елипсоида до телуроида, H^o ортометријска висина.

Другим речима, из одређених аномалијских висина могуће је одредити ундулацију геоида. Међутим, обрнуто не важи, што није тешко закључити упоређењем решења Стокса и редова Молоденског.

3.1.3. Решење на основу сателитних опажања

Одређивање аномалијског потенцијала T , на основу резултата опажања путања сателита сматра се индиректним параметарским приступом при решавању проблема граничних вредности теорије потенцијала.

На основу резултата опажања путања могуће је оценити вредности орбиталних параметара, а затим, на основу математичких веза између познатих вредности прираштаја орбиталних параметара и коефицијената сферно хармонијског развоја и саме вредности коефицијената.

Скуп овако одређених коефицијената сферно хармонијског развоја потенцијала силе Земљине теже назива се глобални геопотенцијални модел.

Глобални геопотенцијални модел омогућава рачунање елемената поља убрзања силе теже за сваку тачку на и ван Земље, на основу аномалијског потенцијала који се може добити из модела развојем у ред по сферним хармоницима:

$$T = \frac{kM}{r} \sum_2^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos m\lambda + \bar{K}_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (3.35)$$

при чему су n, m степен и ред развоја глобалног модела, r, θ, λ сферне координате, a велика полуоса елипсоида, M укупна маса Земље, $\bar{J}_{nm}, \bar{K}_{nm}$ вредности коефицијената, \bar{P}_{nm} нормализовани Лежандрови полиноми.

3.2. ОПЕРАЦИОНИ ИЛИ ИНТЕГРАЛНИ ПРИСТУП

При одређивању функционала аномалијског потенцијала, положај тачака се сматра познатим, а сами функционали се приказују у функцији положаја. У циљу заједничке обраде резултата геометријски и физички дефинисаних величина, неопходно је дефинисати математички модел за истовремено одређивање координата тачака и функционала аномалијског потенцијала убрзања Земљине теже.

Прве покушаје у дефинисању једног оваквог математичког модела учинили су Ег и Краруп 1973. године, у свом раду под насловом *Интегрална геодезија*, и

називали га интегралним моделом. У раду Хелмута Морица, *Операциони приступ у физичкој геодезији*, 1978. године, овакав приступ је назван операциона геодезија (Moritz, H., 1980).

Интегрални приступ подразумева следеће поставке:

- да се истинита вредност величине која се опажа третира као функција непознатих параметара, вектора координата \mathbf{x} и потенцијала убрзања силе Земљине теже $W(\mathbf{x})$:

$$L = F(\mathbf{x}, W(\mathbf{x})), \quad (3.36)$$

- затим, да су резултати мерених величина ослобођени утицаја периодичних промена величина које се опажају и,
- да нема никакве редукције, чиме се елиминише увођење претпоставки о густинама маса унутар тела Земље.

Дефинисањем математичког модела, његовог функционалног и стохастичког дела и применом методе најмањих квадрата, могуће је оценити непознате величине.

Примена методе најмањих квадрата у функционалном делу математичког модела подразумева линеарне функције веза између истините вредности мерених величина и непознатих параметара.

Увођењем приближних вредности непознатих параметара, нелинеарне функције везе се линеаризују развојем у Тејлоров ред, у околини приближних вредности, при чему се задржавају само линеарни чланови развоја (нулти и први члан).

Приближну вредност вектора положаја \mathbf{x}_0 могуће је одредити на основу терестричких, астрономских или сателитских метода, док се за приближну вредност стварног потенцијала усваја вредност нормалног потенцијала $W_0(\mathbf{x}) \approx U(\mathbf{x})$. Очигледно је да се и код интегралног приступа одређивање стварног потенцијал раздваја на дефинисање нормалног и аномалијског потенцијала.

Након увођења приближних вредности, непознате параметре могуће је приказати у облику збира приближних вредности и прираштаја:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x},$$

$$W(\mathbf{x}) = W_0(\mathbf{x}) + \delta W(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x}).$$
(3.37)

где је $\delta\mathbf{x}$ вектор прираштаја вектора положаја, $\delta\mathbf{x}^T = [\delta x \ \delta y \ \delta z]$, $T(\mathbf{x})$ аномалијски потенцијал (Одаловић, О., 2005).

За q резултата опажања се може написати систем линеарних једначина који представља **функционални део модела интегралне геодезије**, односно функционални модел колокације са параметрима:

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{t} + \mathbf{n},$$
(3.38)

где је $\mathbf{l}_{(q \times 1)}$ вектор разлика резултата опажања и приближних вредности, $\mathbf{A}_{(q \times n)}$ матрица коефицијената уз прираштаје вектора положаја и низа непознатих параметара, $\mathbf{x}_{(n \times 1)}$ вектор прираштаја детерминистичких параметара, $\mathbf{R}_{(q \times k)}$ матрица коефицијената уз вектор функционала аномалијског потенцијала, $\mathbf{t}_{(k \times 1)}$ вектор функционала аномалијског потенцијала, $\mathbf{n}_{(q \times 1)}$ вектор случајних грешака, при чему је n број елемената вектора прираштаја детерминистичких параметара, а k број елемената вектора сигнала. Вектор случајних грешака \mathbf{n} назива се вектором **шума**, а вектор функционала \mathbf{t} вектором **сигнала**.

Стохастички део модела интегралне геодезије базира се на претпоставкама које се односе на елементе ова два вектора:

- елементи вектора шума и сигнала сматрају се случајним величинама,
- укупно очекивање елемената једнако је нули, односно елементи вектора шума и сигнала су центриране случајне величине

$$\bar{E}[n_i] = EM[n_i] = E[n_i] = 0, \quad i = 1, \dots, q,$$

$$\bar{E}[t_j] = EM[t_j] = M\{t_j\} = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

- укупно очекивање производа $n_i t_j$ такође је једнако нули, одакле следи да су елементи међусобно независни

$$\bar{E}[n_i t_j] = EM[n_i t_j] = E[n_i] M\{t_j\} = 0,$$

- коваријансе елемената су познате и дефинисане изразима

$$\begin{aligned} C_{n_i n_i} &= \bar{E}[n_i n_i] = EM[n_i n_i] = E[(n_i)^2], \\ C_{n_i n_j} &= \bar{E}[n_i n_j] = EM[n_i n_j] = E[n_i n_j], \\ C_{t_i t_i} &= \bar{E}[t_i t_i] = EM[t_i t_i] = M\{(t_i)^2\}, \\ C_{t_i t_j} &= \bar{E}[t_i t_j] = EM[t_i t_j] = M\{t_i t_j\}. \end{aligned}$$

Коваријансе и унакрсне коваријансе елемената вектора сигнала морају се изводити из базне или основне функције коваријанси за коју се усваја функција коваријанси аномалијског потенцијала. Употребљене ознаке имају следеће значење: E - је оператор математичког очекивања елемената вектора шума,

$M\{t\} = \frac{1}{8\pi^2} \int \int \int t(\theta, \lambda) \sin \theta d\alpha d\lambda d\theta$ - је оператор хомогено-изотропног очекивања

елемената вектора сигнала, \bar{E} - је оператор укупног математичког очекивања елемената вектора шума и елемената вектора сигнала.

Како приступ не подразумева било какве редукације, следи да се применом интегралног модела одређују функционали аномалијског потенцијала, који се и односе на физичку површ Земље и на површ телуроида.

3.2.1. Решења интегралног модела

Функционални део модела интегралне геодезије се може посматрати као збир детерминистичког дела (\mathbf{Ax}), који се односи на прираштаје непознатих параметара, и стохастичког дела (\mathbf{Rt}), који се односи на елементе вектора сигнала.

У зависности од приступа дефинисаним деловима могу се анализирати три различита модела:

- основни или потпуни модел, чијим се решавањем добијају оцене непознатих детерминистичких параметара и оцене елемената вектора сигнала

$$\mathbf{l} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Rt} + \mathbf{n}, \quad (3.39)$$

и посебни модели

- модел без детерминистичког дела, чијим се решавањем добијају оцене вектора сигнала

$$\mathbf{l} = \mathbf{Rt} + \mathbf{n}, \mathbf{Ax} = 0, \quad (3.40)$$

- модел без стохастичког дела, чијим се решавањем добијају само оцене непознатих детерминистичких параметара

$$\mathbf{l} = \mathbf{Ax} + \mathbf{n}, \mathbf{Rt} = 0. \quad (3.41)$$

Решавање интегралног модела, односно, оцена непознатих величина основног модела, подразумева проширење класичног услова минимума, који се примењује код класичног приступа.

Дакле, поставља се услов да збир позитивно дефинитних квадратних форми

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \hat{\mathbf{n}} \text{ и } \hat{\mathbf{t}}^T \mathbf{C}_{tt}^{-1} \hat{\mathbf{t}}, \\ \hat{R} = \hat{\mathbf{n}}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{t}}^T \mathbf{C}_{tt}^{-1} \hat{\mathbf{t}}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

буде мањи од било ког другог збира облика:

$$\bar{R} = \bar{\mathbf{n}}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \bar{\mathbf{n}} + \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{C}_{tt}^{-1} \bar{\mathbf{t}}, \quad (3.43)$$

где су $\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{t}}$ вредности вектора прираштаја параметара и вектора сигнала који задовољавају једначину модела $\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{R}\hat{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{n}}$ и $\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{R}\bar{\mathbf{t}} + \bar{\mathbf{n}}$, док су \mathbf{C}_{nn} и \mathbf{C}_{tt} матрице коваријанси вектора шума и вектора сигнала.

Услов се најчешће приказује у облику

$$R = \mathbf{n}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{n} + \mathbf{t}^T \mathbf{C}_{tt}^{-1} \mathbf{t} = \text{minimum}, \quad (3.44)$$

и назива се хибридни услов минимума или принцип минимума колокације са параметрима, а саме оцене непознатих величина могуће је одредити применом методе Лагранжових мултипликатора (Moritz, Н., 1980).

Применом наведеног поступка, **решење основног модела**, односно оцена вектора прираштаја детерминистичких параметара, оцена вектора шума и вектора сигнала је облика

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{I}, \\ \hat{\mathbf{n}} &= \mathbf{C}_{nn} \bar{\mathbf{C}}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}), \\ \hat{\mathbf{t}} &= \mathbf{C}_{tt} \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (3.45)$$

при чему је $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{R}\mathbf{C}_{tt}\mathbf{R}^T + \mathbf{C}_{nn}$ и $\mathbf{C}_{st} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{tt} \\ \mathbf{C}_{nn} \end{bmatrix}$.

Тачност решења може се одредити применом израза

$$\begin{aligned} \bar{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_x \boldsymbol{\varepsilon}_x^T] &= (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A})^{-1}, \\ \bar{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^T] &= \mathbf{C}_{tt} \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \left(\mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right) \right] \mathbf{R} \mathbf{C}_{tt}, \\ \bar{E}_{xt}[\boldsymbol{\varepsilon}_x \boldsymbol{\varepsilon}_t^T] &= -(\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{C}_{tt}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

док се за случај предикције додатних сигнала користе

$$\begin{aligned}
\bar{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_x \boldsymbol{\varepsilon}_x^T] &= (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A})^{-1}, \\
\bar{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s^T] &= \mathbf{C}_{ss} - \mathbf{C}_{st} \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \left(\mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right) \mathbf{R} \mathbf{C}_{ts}, \\
\bar{E}_{xt}[\boldsymbol{\varepsilon}_x \boldsymbol{\varepsilon}_s^T] &= -\mathbf{A} (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{C}_{ts}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Може се показати да приказани изрази за оцене тачности непознатих вектора \mathbf{x} , \mathbf{t} или \mathbf{s} представљају најбоље линеарне непомерене оцене (Moritz, H., 1980).

Решења посебних модела добијају се из решења основног модела, па за модел без детерминистичког дела $\mathbf{l} = \mathbf{Rt} + \mathbf{n}$, $\mathbf{Ax} = 0$ решење је облика

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{t}} &= \mathbf{C}_{tt} \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{l}, \\
\hat{\mathbf{s}} &= \mathbf{C}_{st} \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{l}, \\
\bar{\mathbf{C}} &= \mathbf{R} \mathbf{C}_{tt} \mathbf{R}^T + \mathbf{C}_{nn} \text{ и } \mathbf{C}_{st} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{tt} \\ \mathbf{C}_{nn} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.48}$$

док је решење за модел без стохастичког дела $\mathbf{l} = \mathbf{Ax} + \mathbf{n}$, $\mathbf{Rt} = 0$ облика

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{l}, \\
\bar{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}_{nn}.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Интегрални модел у потпуности зависи од начина дефинисања облика аналитичких функција коваријанси. Функција коваријансе дефинише понашање поља убрзања силе теже, односно дефинише математичку законитост по којој се понашају улазне (мерене) величине. Применом те законитости се врши предикција вредности функционала у произвољним тачкама.

Функција коваријанси мора да задовољи низ захтева:

- мора да буде дефинисана и непрекидна за подручје за које се одређује,
- реална функција чије су променљиве такође из скупа реалних бројева,

- хармонијска у свим тачкама дефинисаности,
- хомогено-изотропна,
- позитивно дефинитна и
- она која на површи сфере представља најбољу апроксимацију емпиријских коваријанси.

Емпиријским коваријансама се називају коваријансе одређене применом нумеричке интеграције из резултата опажања дискретног скупа.

У основи се разликују две врсте аналитичких функција коваријанси: глобалне и локалне.

Глобалне функције коваријанси одређују се коришћењем резултата опажања функционала аномалијског потенцијала који су правилно распоређени по читавој површи Земље, а локалне функције коваријанси коришћењем резултата опажања која прекривају локално подручје.

Поремећајни потенцијал T се може посматрати као стохастички процес на сфери, чија је средња вредност нула.

Функција коваријанси је средња вредност свих резултата поремећајног потенцијала T_P и T_Q за сферну удаљеност ψ између тачака P и Q :

$$\text{cov}\{T_P T_Q, \psi\} = M\{T_P T_Q\}_{\psi}. \quad (3.50)$$

Функција коваријансе поремећајног потенцијала $C(P, Q)$ може се представити на површини сфере развојем у ред по сферним функцијама

$$M\{T_P T_Q\}_{\psi} = C(P, Q) = C(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n^2 P_n(\cos \psi), \quad (3.51)$$

где су $P_n(\cos \psi)$ Лежандрови полиноми, ψ сферно растојање, и σ_n^2 степене варијансе модела. Развој функције коваријанси у простору има облик:

$$C(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n^2 \left(\frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi). \quad (3.52)$$

при чему је R полупречник сфере (средњи полупречник Земље), а r_P и r_Q су геоцентрична растојања тачака P и Q .

Након одређивања аналитичког облика функција коваријанси, примена модела се своди на решавање приказаних матричних једначина.

Данас се, у литератури, може наћи велики број радова који се баве дефинисањем функције коваријанси и у којима се даје низ предлога, који указују на начине одређивања реда функције и уклапање коваријанси (Hein et al., 1989).

3.3. REMOVE-RESTORE МЕТОДА

Као што је већ напоменуто, при моделирању поља убрзања силе Земљине теже, најчешће се комбинују сателитске и терестричке методе, јер се на тај начин могу елиминисати недостаци сваке поједине методе.

Комбинацијом метода и подаци се могу поделити према томе какав утицај имају на функционале аномалијског потенцијала:

- подаци глобалног геопотенцијалног модела имају дуготаласни утицај (растојање до 100 km),
- терестрички подаци имају средњеталасни утицај (растојање 2-10 km),
- подаци о топографији имају краткоталасни утицај (растојање зависи од резолуције дигиталног модела терена).

Мерена величина се може представити као линеарни функционал t аномалијског потенцијала:

$$t = t' + t'' + t''', \quad (3.53)$$

па је укупна вредност функционала аномалијског потенцијала представљена као збир дуготаласне, средњеталасне и краткоталасне карактеристике функционала што истовремено представља и концепт remove-restore методе.

Метода подразумева три основне фазе (Слика 3.3):

- отклањање - на основу физичких особина функционала аномалијског потенцијала отклонити онај део, који се унапред математички може моделирати (дуготаласна и краткоталасна карактеристика),
- пресликавање - из преосталог дела резултата опажања, а на основу теоријски дефинисаних веза између аномалијског потенцијала и његових функционала, одреди се тражени функционал (средњеталасна карактеристика-резидуална вредност функционала),
- враћање - одређивање оног дела функционала који настаје као последица дела резултата опажања који је елиминисан у фази отклањања и његово додавање на вредности које су одређене у фази пресликавања.



Слика 3.3: Основни концепт remove-restore методе

Свака од фаза remove-restore методе се кратко може описати на следећи начин:

- У тачкама мерења функционала t аномалијског потенцијала одреде се дуготаласне карактеристике мереног функционала t' ,
- а затим и краткоталасне карактеристике t'' ,
- формирају се разлике које се често називају резидуалним функционалима (примера ради резидуалне аномалије, резидуалне компоненте одступања вертикале,...)

$$t'' = t - t' - t''' . \quad (3.54)$$

- Применом теоријски дефинисаних веза f између функционала аномалијског потенцијала у тачкама одређивања одреди се онај део ундулација који одговара резидуалним функционалима:

$$t_R \xrightarrow{f} N'' = N_R , \quad (3.55)$$

- а затим се одређују краткоталасне карактеристике ундулација N''' ,
- као и њене дуготаласне карактеристике, а финално укупна ундулација се добија у облику збира:

$$N = N_R + N''' + N' . \quad (3.56)$$

Описани поступак remove-restore методе, у општем случају, важи за све функционале аномалијског потенцијала (аномалијске висине, аномалије убрзања, ундулације...), али прецизно дефинисање њеног тока зависи од скупа метода путем којих се одређују карактеристике функционала аномалијског потенцијала (Moritz, H., 1980)

Такође је битно напоменути следеће: део отклањања remove-restore мора бити такав да се његовом применом обезбеде резидуалне вредности резултата опажања функционала аномалијског потенцијала, са следећим карактеристикама:

- да имају средњу вредност која је приближно једнака нули,
- да је стандардна девијација резидуалних вредности мања од стандардне девијације резултата мерења.

То значи да резидуалне вредности резултата морају испуњавати услов центрираности, а њихова површ мора бити погодна за предикцију.

3.3.1. Дуготаласна карактеристика

Дуготаласна карактеристика одређује се коришћењем глобалних геопотенцијалних модела. Како глобални геопотенцијални модел представља развој аномалијског потенцијала у ред по сферним функцијама, основни израз којим се долази до вредности дуготаласних карактеристика функционала аномалијског потенцијала је израз за аномалијски потенцијал у функцији (ортонормираних) сферних хармоника:

$$T = \frac{kM}{r} \sum_2^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos m\lambda + \bar{K}_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (3.57)$$

Уколико знак ∞ заменимо максималним степеном глобалног геопотенцијалног модела N_{\max} , а непознате теоријске вредности коефицијената $\bar{J}_{nm}, \bar{K}_{nm}$ емпиријским вредностима $\bar{J}'_{nm}, \bar{K}'_{nm}$, добија се израз за одређивање вредности дуготаласне карактеристике аномалијског потенцијала у произвољној тачки која се налази на физичкој површи Земље:

$$T_{GGM} = \frac{kM}{r} \sum_2^{N_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos m\lambda + \bar{K}'_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (3.58)$$

На основу теоријски дефинисаних односа аномалијског потенцијала и његових линеарних функционала, лако се могу извести изрази за дуготаласне карактеристике функционала, као на пример, израз за аномалију убрзања:

$$\Delta g_{GGM} = \frac{kM}{r^2} \sum_2^{N_{\max}} (n-1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos m\lambda + \bar{K}'_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \quad (3.59)$$

док се на основу Брунсове теореме може одредити дуготаласна карактеристика аномалијских висина:

$$\zeta_{GGM} = \frac{kM}{r\gamma} \sum_2^{N_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}^U_{nm}) \cos m\lambda + \bar{K}'_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (3.60)$$

Тачност са којом ће дуготаласне карактеристике бити одређене зависи од квалитета опаљачког материјала који се користио при одређивању глобалног геопотенцијалног модела, односно од тачности са којом су одређени коефицијенти глобалног модела, као и од степена и реда глобалног модела.

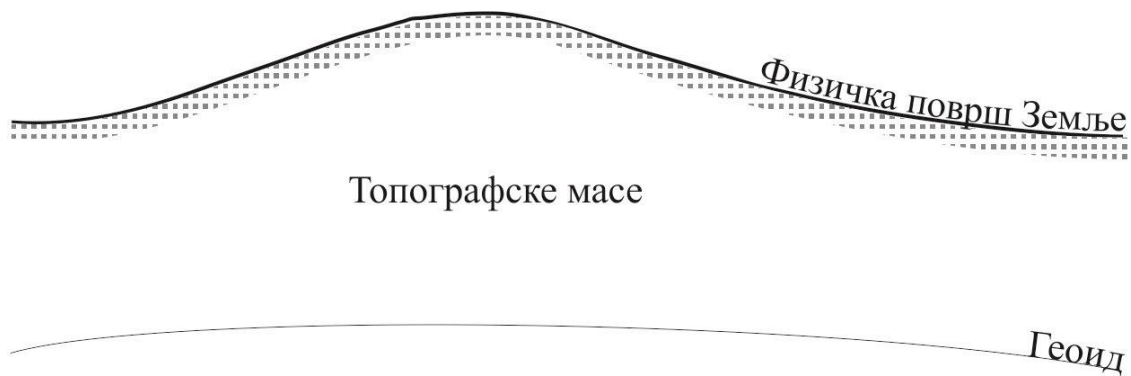
Потребно је напоменути да се тачност дуготаласних карактеристика аномалијских висина, при коришћењу глобалних геопотенцијалних модела високог степена и реда, креће у границама од 2 m до неколико дециметара.

3.3.2. Краткоталасна карактеристика

Краткоталасна карактеристика последица је постојања топографских маса и може се одредити на више начина.

При разматрању гравитационог утицаја топографских маса најчешће се полази од концепта видљивих маса, односно свих маса изнад нивоа мора, тј. површи геоида (Слика 3.4). Могуће је посебно разматрати утицаје локалних топографских маса и утицаја удаљених маса.

Утицај локалних маса није исти на све функционале аномалијског потенцијала управо због нехомогеног распореда и различитих густина топографских маса. Различити локални ефекти допуштају и различит третман топографије при одређивању краткоталасних карактеристика. Из тога разлога је наредно поглавље посвећено детаљнијој анализи модела који се користе у поступку моделирања топографије (Одаловић, О., 2005).



Слика 3.4: Видљиве топографске масе

На регионалном нивоу, када се у обзир узимају топографске маса до неколико стотина километара од тачке рачунања, утицај топографских маса је изузетно велики на све функционале.

3.3.3. Средњеталасна карактеристика

У литератури се може наћи низ предлога и метода за одређивање средњеталасне карактеристике, али се најчешће примењује Стоксово решење, решење Молоденског или колокација односно интегрални модел геодезије (Heiskanen, W., Moritz, H., 2000).

Стоксова формула и решење Молоденског примењују се када се искључиво располаже са резултатима гравиметријских мерења, коришћењем резидуалних резултата, који су последица примене remove-restore методе.

Приликом примене решења Молоденског процес remove-restore методе одговара оном, који је већ објашњен. Међутим, у случају примене формуле Стокса процес методе се донекле мења. Разлог промене процеса је потреба за познавањем аномалија убрзања на геоиду.

Масе изнад геоида се отклањају, кондензују на површ геоида или пребацују унутар геоида, тада изнад геоида нема маса, а сам утицај топографије је садржан у вредности аномалије. Из тог разлога се у процесу remove-restore методе неће директно појавити одређивање краткоталасних карактеристика. Међутим, регуларизација доводи до појаве индиректног ефекта, који се након одређивања

средњеталасних карактеристика мора додатно моделирати. Решења добијена овим путем представљају решења у сферној апроксимацији и због тога се након читавог процеса, одређеним ундулацијама мора додати и вредност елипсоидне корекције (Одаловић, О., 2005).

При примени колокације у remove-restore методи могуће је користити све релевантне расположиве податке.

Основни услов колокације је центрираност аномалијског потенцијала и његових функционала на површини тела Земље:

$$M\{T\} = 0, M\{t\} = 0, \quad (3.61)$$

где је M оператор хомогено-изотропног очекивања.

Remove-restore методу је могуће објаснити анализом тренда који поседују резултати опажања функционала на локалном подручју. Након одређивања тренда функционала аномалијског потенцијала на бази познавања детерминистичких особина функционала (одређивањем дуготаласних и краткоталасних карактеристика), могуће је формирати резултате опажања ослобођене тренда, извршити предикцију аномалијских висина, а затим одредити и одговарајући утицај претходно елиминисаног тренда на аномалијске висине (одредити дуготаласну и средњеталасну карактеристику аномалијских висина на локалном подручју), након чега се добијају укупне вредности аномалијских висина.

Елиминацију тренда, као што је већ напоменуто, могуће је изводити само на бази познавања детерминистичких особина аномалијског потенцијала и његових функционала, а не путем уобичајених статистичких метода. На пример, елиминација тренда одузимањем средње вредности резултата опажања функционала од сваког појединог резултата опажања нарушава детерминистичке особине аномалијског потенцијала. Како при наведеним прорачунима, није потребно вршити никакве редукције резултата, следи да се применом овог модела одређују аномалијске висине, док се вредности ундулација могу одредити применом израза којим је дефинисана разлика између геоида и квазигеоида.

Међутим, постоји и други приступ, као код примене формуле Стокса: извршити редуkcију на ниво мора, тада се одређивање краткоталасних карактеристика у процесу не појављује, али се додатно мора моделирати утицај индиректног ефекта.

Како се и интегралним моделом подразумева сферна апроксимација, следи да се након читавог процеса, одређеним ундулацијама мора додати вредност елипсоидне корекције.

ПОГЛАВЉЕ 4

МОДЕЛИ ТОПОГРАФСКИХ МАСА ЗЕМЉЕ

Топографско-изостатички модели, са информацијама о распореду густина маса и висинама тачака на површи Земље, представљају моделе који се данас упешно користе у поступку одређивања облика Земље, као и анализи феномена у области геодезије и геофизике. Најчешће су то:

- дигитални модел терена (ДМТ), за моделирање облика топографије,
- дигитални модел густина (ДМГ), за моделирање просторне расподеле густине топографије, као и густине нижих слојева,
- изостатички модели, за аналитичко моделирање спољашњих маса Земље,
- Хелмертов метод кондензације, као једноставан модел који задовољава претпоставку Стоксовог решења (Важрачарја S., 2003).

Ови модели имају углавном геофизичко значење, осим Хелмертове методе кондензације, која се користи чисто као математички приступ за уклањање маса изван нивоа мора и задовољава хипотезу Стоксовог решења (Heiskanen, W., Moritz H., 2000).

4.1. ДИГИТАЛНИ МОДЕЛ ТЕРЕНА

Дигитални модел терена представља дигитални приказ топографије Земље, односно, изглед топографије на основу тачака са познатим хоризонталним координатама и висинама. Неки ДМТ садрже информације само о висинама на површи Земље (висина топографије и дубине океана), док постоје и други модели који садрже, на пример, информације о дебљини глечера или дубинама језера. Велики број дигиталних модела терена је тренутно доступан.

ETOPO1 (Earth Topography 1-minute) је глобални модел терена Земљине површи резолуције једне лучне минуте, који обухвата топографију терена и области океана. Настао је интеграцијом бројних глобалних и регионалних скупова података од стране Националног центра за геофизичке податке (National Geophysical Data Center-NGDC), који је део Националне администрације за океане и атмосферу (National Oceanic and Atmospheric Administration-NOAA). Доступан је и у верзији која обухвата површине под ледом (врх Антарктика и ледене плоче на Гренланду). Претходне верзије глобалног дигиталног модела су ETOPO2 и ETOPO5, резолуције две и пет лучних минута респективно, који су и даље на располагању (<http://www.ngdc.noaa.gov>).

GLOBE (Global Land One-kilometer Base Elevation) је глобални дигитални модел висина, који је развијен од стране међународне групе стручњака: комисија за сателитско посматрање Земље (Committee on Earth Observation Satellites-CEOS), радна група за информационе системе и услуге (Working Group on Information Systems and Services-WGISS), међународни подаци геосфере-биосфере и информациони систем (International Geosphere-Biosphere Programme's Data and Information System-IGBP-DIS) и IGBP радна група IV/6 (IGBP Working Group IV/6). GLOBE је резолуције 30 лучних секунди у правцу лонгитуде и латитуде са висинама копнених површина. Подаци модела су доступни и могу се преузети на интернет адресама (<http://www.ngdc.noaa.gov>, <http://www.globe.gov>).

SRTM (Shuttle Radar Topography Mission) је топографска карта Земље, тј. дигитални модел висина на глобалном нивоу и резултат је међународног пројекта који предводи америчка Национална геопросторна обавештајна агенција (National Geospatial-Intelligence Agency-NGA) и Национална управа за аеронаутику и свемирска истраживања (National Aeronautics and Space Administration-NASA). SRTM је резолуције три лучне секунде. Произведен је и модел резолуције једне лучне секунде, али није доступан за све земље (<http://srtm.csi.cgiar.org>).

У оквиру нумеричких истраживања овог рада, за територију ван граница Републике Србије, коришћени су подаци SRTM, резолуције три лучне секунде. Подаци који су коришћени за формирања дигиталног модела терена на територији

Србије су производ пројекта Војногеографског института Војске Србије и Црне Горе, што ће детаљно бити описано у поглављу 6.

4.2. ДИГИТАЛНИ МОДЕЛ ГУСТИНА

Дигитални модели густина често описују само површинске густине, на основу информација са геолошких карата, с обзиром на то да распоред стварне густине Земљине коре још увек није прецизно дефинисан.

Стварна густина топографије може да се разликује чак више од 10% од константне вредности густине која се усваја при моделирању топографских маса, па би у принципу, било који разумни модел густина побољшао поступак моделирања топографских маса. Тродимензионални дигитални модел густина је веома тешко обезбедити на глобалном нивоу, док су дводимензионални дигитални модели густина данас доступни за поједине регионе.

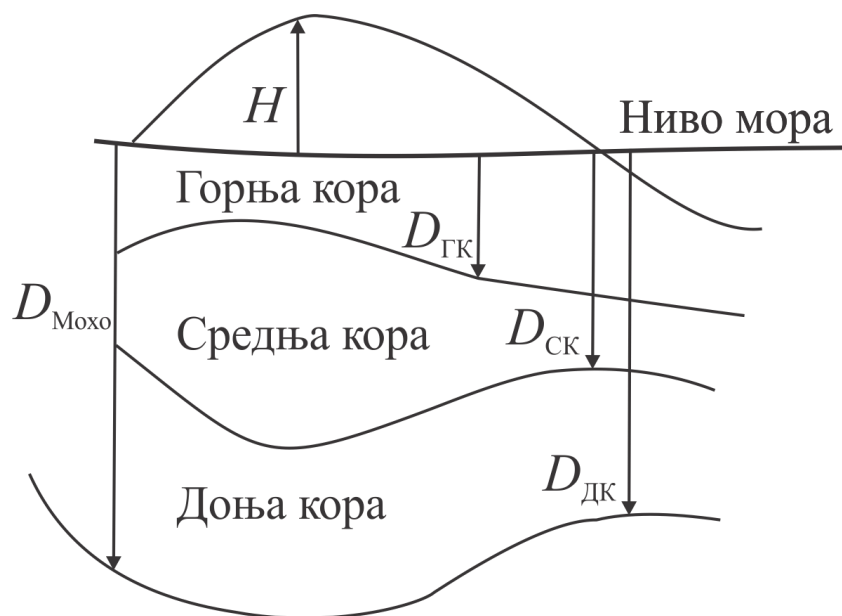
CRUST2.0 је једини, до сада, глобални дигитални модел густина који садржи информације о распореду густина Земљине коре до дубине која представља границу између коре и горњег омотача, односно до Мохо дубине. Овај модел представља ажурирану верзију модела CRUST5.1 (Bagherbandi, M., 2011). Резолуција модела CRUST2.0 је два степена у оба правца и користи податке недавно израђеног модела са подацима дебљина слојева, резолуције једног степена.

У моделу CRUST2.0 кора је подељена у три слоја (Слика 4.1):

- горња кора ($D_{ГК}$),
- средња кора ($D_{СК}$) и
- доња кора ($D_{ДК}$).

Дубине граница између два суседна слоја се одређују у односу на ниво мора. $D_{Мохо}$ је Мохо дубина или граница између горњег омотача и коре, H је висина топографије која се може преузети из глобалног дигиталног модела терена, нпр. из SRTM, а на слици 4.1 се може видети из којих односа дубина се дефинишу границе између слојева.

Најновији модел који је произведен и представља ажурирану верзију модела CRUST2.0 је CRUST1.0 резолуције један степен у оба правца. Подаци модела се могу преузети са званичне интернет странице (<http://igppweb.ucsd.edu>).



Слика 4.3: Шематска структура коре у CRUST2

Поред глобалног модела, постоји више дигиталних модела густина за поједине регионе, као што су: EuCRUST-07, дигитални модел густина за западну и централну Европу, CEUS модел густина за централни и источни део САД-а итд.. Углавном су сви модели креирани на основу података сеизмичких мерења и модела дебљине седимената.

Подаци који су коришћени за креирање 2Д дигиталног модела густина Србије добијени су векторизацијом геолошке карте Србије, која је претходно генерализована на области са значајним променама густине (река Дунав, са густином $\rho_{\min} = 1.00 \text{ gcm}^{-3}$ и распон густина топографије од $\rho_{\min} = 2.20 \text{ gcm}^{-3}$ до $\rho_{\max} = 2.80 \text{ gcm}^{-3}$). Распоред површинских густина је добијен трансформацијом области одговарајуће густине на генерализованој геолошкој карти 1:500 000 у дигитални облик.

За креирање грубог дигиталног модела густина, ван граница Републике Србије, коришћена је вредност константне густине $\rho = 2.67 \text{ gcm}^{-3}$. Поступак креирања

дигиталног модела густина на основу површинских густина, као и креирање модела густина до геоида, биће описани у оквиру нумеричких истраживања.

4.3. ИЗОСТАТИЧКИ МОДЕЛИ

Изостазија се заснива на претпоставци да мање густа Земљина литосфера плива на гушћој астеносфери и да су тада гравитациона сила која привлачи Земљину литосферу, вертикално ка центру масе Земље и сила потиска, којом астеносфера делује у супротном смеру, у стању равнотеже.

Топографске масе се не уклањају потпуно већ се распоређују између нивоа компензације и нивоа мора, како би оригиналну вредност густине Земљине коре довеле на константну стандардну вредност, а затим се уклањају заједно са својом компензацијом. На овом принципу се заснивају различити модели изостатичке компензације.

4.3.1. Ејри-Хајсканенов изостатички модел

Ејријев изостатички модел подразумева да испод планина константне густине $\rho_c = 2.67 \text{ g/cm}^3$ (средња густина коре), постоје коренске формације веће густине $\rho_m = 3.27 \text{ g/cm}^3$ (густина омотача), док испод површи океана постоје ткз. антикоренске формације мање густине $\rho_v = 1.02 \text{ g/cm}^3$ (густина морске воде) (Moritz, H., 1990).

У случају раванске апроксимације, топографске масе и масе које се компензују дате су као:

$$M_p^T = \sum_{i=0}^l (\rho_i - \rho_{l+1}) \cdot h_i \cdot d\sigma, \quad (4.1)$$

$$M_p^C = \Delta\rho \cdot t \cdot d\sigma.$$

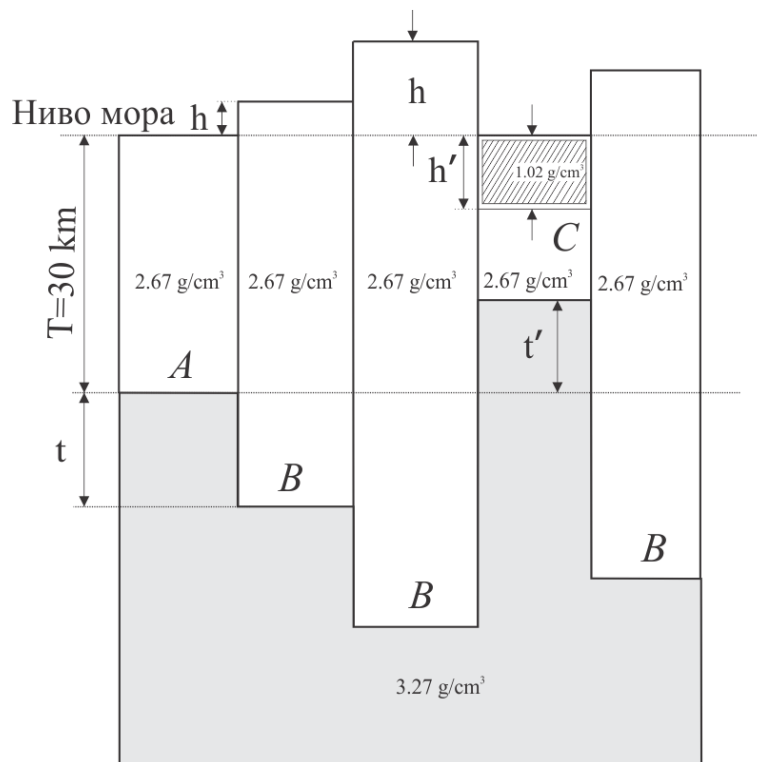
респективно, при чему је $d\sigma$ - елемент површине области интеграције σ . Дебљину корена могуће је одредити на основу једнакости:

$$t = \frac{1}{\Delta\rho} \sum_{i=0}^l (\rho_i - \rho_{l+1}) \cdot h_i, \quad (4.2)$$

где $\Delta\rho$ разлика између густине омотача и коре, а h је висина топографије (Слика 4.2). Аналогно томе, за дубину h' мора/океана, могуће је одредити дебљину антикорена:

$$t' = \frac{1}{\Delta\rho} \sum_{i=0}^l (\rho_i - \rho_{l+1}) \cdot h'_i, \quad (4.3)$$

при чему је $\Delta\rho$ разлика густина коре и густине воде.



Слика 4.2: Ејри-Хајсканенов изостатички модел

Дебљина Земљине коре T_k ће зависити од дебљина корена и антикорена:

$$T_k = \begin{cases} T + t + h \\ T - t' + h' \end{cases}, \quad (4.4)$$

где је $T = 30 \text{ km}$ просечна дебљина Земљине коре (просечна Мохо дубина).

Уколико је густина стена еквивалентна густини топографских маса:

$$M_P^T = \sum_{i=0}^l (\rho_i - \rho_{i+1}) \cdot h_i \cdot d\sigma = \rho_c \cdot h_{\text{eq}} \cdot d\sigma, \quad (4.5)$$

следи

$$h_{\text{eq}} = \frac{\sum_{i=0}^l (\rho_i - \rho_{i+1}) \cdot h_i}{\rho_c}, \quad (4.6)$$

а уколико топографске масе имају једну константну густину (један слој) следи

$$h_{\text{eq}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{копно : } h_{\text{eq}} = h \\ \text{океани : } h_{\text{eq}} = \frac{\rho_c - \rho_v}{\rho_c} h' \end{array} \right\}. \quad (4.7)$$

У овом случају, дебљина корена или антикорена се одређује:

$$t_{\text{eq}} = \frac{\rho_c}{\Delta\rho} h_{\text{eq}}. \quad (4.8)$$

Како се топографске масе премештају и тако попуњавају корене, резултат примене овог модела је Земљина кора са хомогеним распоредом маса.

4.3.2. Прат-Хајфордов модел

Општи опис Прат-Хајфордовога изостатичког модела заснива се на принципу хидростатичке равнотеже, која се достиже у дубини D . За одређивање промена густине, топографске и изостатичке масе су такође подељене на појединачне блокове.

Подразумева да је густина испод нивоа компензације униформна, а изнад нивоа компензације, маса сваке призме истог попречног пресека је једнака. Нека је D дубина компензације рачуната од нивоа мора (обично се усваја $D = 100 \text{ km}$), а ρ_0 је густина призме висине D (Слика 4.3).

Густина ρ призме висине $D + h$, где је h висина топографије, тада задовољава једначину која изражава услов једнакости масе (Moritz, Н., 1990):

$$(D + h)\rho = D\rho_0. \quad (4.9)$$

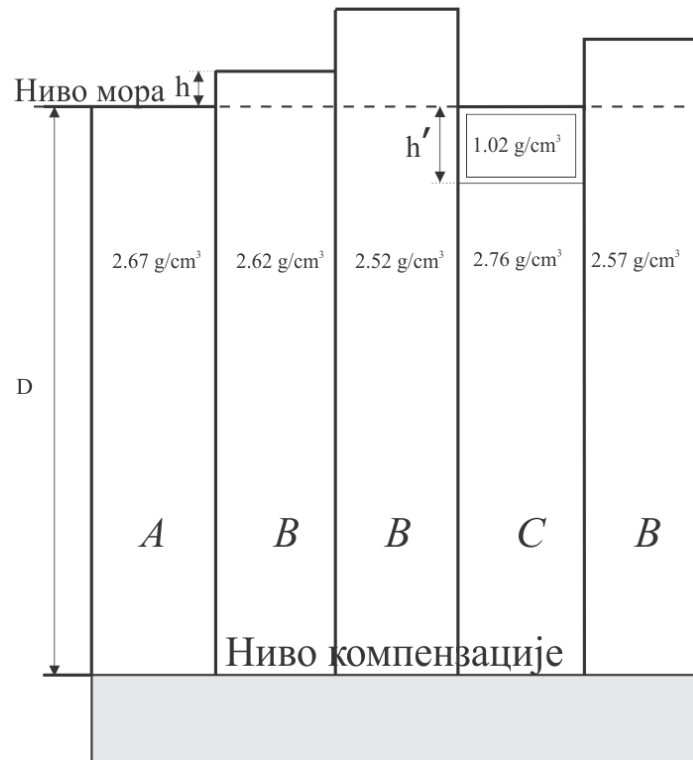
Ако се усвоји да је густина $\rho_0 = 2.67 \text{ g/cm}^3$, онда је густина ρ мања од нормалне вредности ρ_0 , па постоји мањак масе:

$$\Delta\rho = \rho_0 - \rho = \frac{h}{D + h} \rho_0. \quad (4.10)$$

На океанима услов једнакости маса је:

$$(D - h')\rho + h'\rho_v = D\rho_0, \quad (4.11)$$

где је $\rho_v = 1.02 \text{ g/cm}^3$, а h' је дубина океана.



Слика 4.3: Прат-Хајфордов изостатички модел

Вишак маса, који постоји код подокеанских призми, се може одредити изразом:

$$\rho - \rho_0 = \frac{h'}{D - h'} (\rho_0 - \rho_v). \quad (4.12)$$

С обзиром на закривљеност Земље, призме ће конвергирати према њеном центру, па је потребно увести побољшања и за овај утицај. Због тога је, у практичним применама, овај модел ређе заступљен.

ПОГЛАВЉЕ 5

МЕТОДЕ ОДРЕЂИВАЊА ГРАВИТАЦИОНОГ УТИЦАЈА ТОПОГРАФСКИХ МАСА ЗЕМЉЕ

Утицаји топографских маса могу се одредити на основу аналитичких и нумеричких метода (директни метод интеграције, брзе Фуријеове трансформације, сферно-хармонијски развој итд.).

Од природе проблема, расположивих података и потребног нивоа тачности зависи који ће метод бити примењен. Детаљи о наведеним методама се могу наћи у различитим публикацијама (Forsberg, R., 1984; Tsoulis, D., 1999, Nagy et al. 2000; Li, Y. and Sideris, M., 1993, Li, Y. and Sideris, M., 1994).

У оквиру нумеричких истраживања овог рада, за одређивање гравитационог утицаја топографских маса на аномалијски потенцијал и његове функционале примењен је метод директне интеграције.

Метод интеграције подразумева да се топографске масе деле на елементе правилног геометријског облика, праве правоугаоне призме, при чему се утицај сваке призме на аномалијски потенцијал и његове функционале може одредити применом затворених израза (Nagy et al. 2000).

Укупан утицај топографских маса на поље убрзања силе теже добија се сумирањем утицаја свих појединачних призми.

5.1. ГРАВИТАЦИОНИ ПОТЕНЦИЈАЛ ПРАВЕ ПРАВОУГАОНЕ ПРИЗМЕ

Сви подаци потребни за одређивање гравитационог утицаја призме дефинисани су дигиталним моделом терена.

Правоугаоне призме, хомогене густине, третирају се као тачкасте масе на које се примењује Њутнов закон гравитације, па је њихов гравитациони потенцијал (Nagy, 2000):

$$V = k \iiint_V \rho(Q) \frac{1}{l(PQ)} dV_Q. \quad (5.1)$$

где је k је универзална гравитациона константа, $\rho(Q)$ густина масе призме, P је тачка рачунања са правоуглим координатама (x', y', z') , Q је привлачећа тачка призме (ξ, η, ζ) и dV_Q елемент запремине призме.

Координате се односе на исти Декартов правоугли координатни систем који је оријентисан тако да се координатни почетак налази у тачки рачунања P , сила привлачења је усмерена ка маси тела које привлачи тачку, а Z -оса се поклапа са правцем силе Земљине теже (Слика 5.1).

Растојање $l(PQ)$ је растојање између тачке рачунања P и привлачеће тачке $Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и може се представити изразом (Tsoulis, 1999):

$$l(PQ) = \sqrt{(\xi_i - x')^2 + (\eta_i - y')^2 + (\zeta_i - z')^2}. \quad (5.2)$$

при чему су (ξ_i, η_i, ζ_i) , $i=1,2$ координате доњег левог и горњег десног темена призме.

Због недостатка информација о распореду густина топографских маса, претпоставља се да је вредност густине ρ константна, а померањем координатног почетка у тачку рачунања P следи

$$V = k\rho \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz. \quad (5.3)$$

где су $x_1 = \xi_1 - x'$, $x_2 = \xi_2 - x'$, $y_1 = \eta_1 - y'$, итд.

Како се претпоставља да је призма константе и хомогене густине, решење овог интеграла је

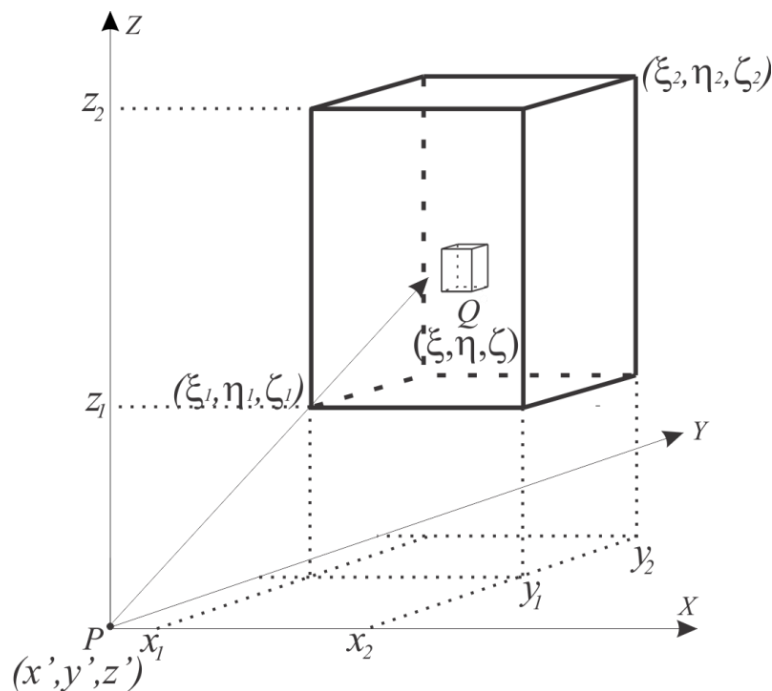
$$V = k\rho_c \left\| \int \int \int xy \ln(z+r) + xz \ln(y+r) + yz \ln(x+r) - \right. \\ \left. - \frac{x^2}{2} \arctan \frac{yz}{xr} - \frac{y^2}{2} \arctan \frac{xz}{yr} - \frac{z^2}{2} \arctan \frac{xy}{zr} \right|_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2}, \quad (5.4)$$

где је $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Први парцијални извод потенцијала у односу на Z осу добија се диференцирањем израза (5.3) и уједно представља утицај призме (сегмента топографије) на убрзања силе Земљине теже:

$$V_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -k\rho_c \left\| \int \int \int x \ln(y+r) + y \ln(x+r) - z \arctan \frac{xy}{zr} \right|_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2}. \quad (5.5)$$

Знак минус у изразу за V_z означава да је усвојени смер Z осе супротан од смера силе Земљине теже.



Слика 5.1: Призма са правоугаоном основом, константне густине

Први парцијални изводи по X и Y оси, тзв. хоризонталне компоненте вектора убрзања силе теже, могу се одредити из израза (5.5) цикличном пермутацијом:

$$V_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -k\rho \left\| \left[y \ln(z+r) + z \ln(y+r) - x \arctan \frac{yz}{xr} \right]_{x_1}^{x_2} \left[y_1 \right]_{y_1}^{y_2} \left[z_1 \right]_{z_1}^{z_2} \right\|, \quad (5.6)$$

$$V_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -k\rho \left\| \left[z \ln(x+r) + x \ln(z+r) - y \arctan \frac{zx}{yr} \right]_{x_1}^{x_2} \left[y_1 \right]_{y_1}^{y_2} \left[z_1 \right]_{z_1}^{z_2} \right\|.$$

Затворени изрази за друге парцијалне изводе потенцијала призме V су:

$$V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = k\rho \left[-\arctan \frac{yz}{xr} \right]_{x_1}^{x_2} \left[y_1 \right]_{y_1}^{y_2} \left[z_1 \right]_{z_1}^{z_2},$$

$$V_{yy} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = k\rho \left[-\arctan \frac{xz}{yr} \right]_{x_1}^{x_2} \left[y_1 \right]_{y_1}^{y_2} \left[z_1 \right]_{z_1}^{z_2},$$

$$V_{zz} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = k\rho \left[-\arctan \frac{xy}{zr} \right]_{x_1}^{x_2} \left[y_1 \right]_{y_1}^{y_2} \left[z_1 \right]_{z_1}^{z_2}, \quad (5.7)$$

$$V_{xy} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = k\rho [\ln(z+r)]_{x_1}^{x_2} \left[y_1 \right]_{y_1}^{y_2} \left[z_1 \right]_{z_1}^{z_2},$$

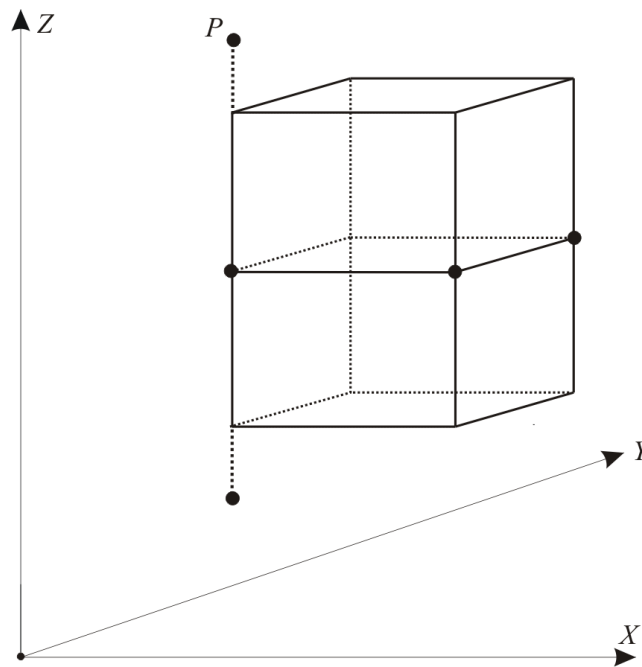
$$V_{xz} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = k\rho [\ln(y+r)]_{x_1}^{x_2} \left[y_1 \right]_{y_1}^{y_2} \left[z_1 \right]_{z_1}^{z_2},$$

$$V_{yz} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = k\rho [\ln(x+r)]_{x_1}^{x_2} \left[y_1 \right]_{y_1}^{y_2} \left[z_1 \right]_{z_1}^{z_2}.$$

Из једначина (5.5) до (5.7), могу се уочити сингуларитети за посебне положаје тачке рачунања P (Слика 5.2, Табела 5.1). Уколико је $x = y = z = 0$, тада се у интегралима за потенцијал V и његовим првим и другим изводима јављају нуле. Одговарајуће граничне вредности су изведене у раду (Nagy et al. 2000).

Табела 5.1: Случајеви сингуларитета у зависности од положаја тачке рачунања

| Положај тачке P | Сингуларитети |
|-------------------------|--|
| $(x, y) = (0, 0)$ | $V, V_x, V_y, V_{xx}, V_{yy}$ |
| $(x, z) = (0, 0)$ | $V, V_x, V_z, V_{xx}, V_{zz}$ |
| $(y, z) = (0, 0)$ | $V, V_y, V_z, V_{yy}, V_{zz}$ |
| $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ | $V, V_x, V_y, V_z, V_{xx}, V_{yy}, V_{zz}, V_{xy}, V_{xz}, V_{yz}$ |



Слика 5.2: Карактеристични положаји тачке рачунања

С обзиром на то да се удаљавањем од тачке рачунања смањује гравитациони утицај топографских маса, за призме на великој удаљености сложени израз (5.4) се може заменити једноставнијим изразом. Формула се односи на геометријски центар призме (Forsberg, интернет комуникација). Развојем језгра интеграла (5.3) у Тејлоров ред до трећег степена долази се до формуле за гравитациони потенцијал правоугаоне призме (MacMillan):

$$V = k\rho\Delta x\Delta y\Delta z \left[\frac{1}{l_0} + \frac{3(x_0 - x)^2 - l_0^2}{24l_0^5} \Delta x^2 + \frac{3(y_0 - y)^2 - l_0^2}{24l_0^5} \Delta y^2 + \right. \\ \left. + \frac{3(z_0 - z)^2 - l_0^2}{24l_0^5} \Delta z^2 + \dots \right], \quad (5.8)$$

где су

$x_0 = (x_1 + x_2)/2$, $y_0 = (y_1 + y_2)/2$, $z_0 = (z_1 + z_2)/2$, координате геометријског центра призме, l_0 растојање између тачке P и геометријског центра призме, са $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$. Први изводи потенцијала, као и изводи вишег реда, могу се једноставно одредити диференцирањем једначине (5.8) у односу на осе x, y, z .

Ако се из једначина (5.5) до (5.7) елиминише услов сингуларитета, односно случај када је $x = y = z = 0$, тада се интеграл потенцијала, као и интеграли његових извода могу решити према следећој шеми (Tsoulis, 1999):

$$V_i = k\rho \{ f_i(2,2,2) - f_i(2,2,1) \\ + f_i(1,2,1) - f_i(1,2,2) \\ + f_i(2,1,1) - f_i(2,1,2) \\ + f_i(1,1,2) - f_i(1,1,1) \}, \quad (5.9)$$

при чему је $f_i(x_j, y_j, z_j)$ функција за $i = V, x, y, z$, а $j = 1, 2$ представљају разлике координата левог и десног темена призме са координатама тачке рачунања.

За израчунавање утицаја топографских маса, координате основе призме и висине призми преузимају се из дигиталног модела терена, док се за вредност густине призме може усвојити нека константна вредност или вредност густине из дигиталног модела густина.

У поступку одређивања утицаја изостатичких маса, у случају Ејри-Хајсканеновог модела, висина призме узима се да буде једнака висини корена или

антикорена, са разликом густина $\Delta\rho = \rho_o - \rho_k$, при чему је ρ_o густина омотача, а ρ_k је густина Земљине коре. Код Прат-Хајфордовога модела, висина призме се узима да буде једнака ортометријским висинама топографије уз додатак дубине компензације, са разликом густина као што је утврђено у подпоглављу 4.3.2. за континентална и океанска подручја.

5.1.1. Утицај закривљености Земље на гравитационциони утицај призме

Приликом одређивања гравитационог утицаја топографских маса које су на великим удаљеностима од тачке рачунања у обзир се мора узети и закривљеност Земље. На ком растојању од тачке рачунања је потребно урачунати и закривљеност Земље зависи од изгледа саме топографије.

Сагласно свим научним истраживањима до сада утврђено је да утицај закривљености Земље треба узимати у обзир након 15 km од тачке прорачуна (Nowell D.A.G., 1999; Hinze, J., W., 2005; Dieren N.G., 2012).

На великим удаљеностима од рачунске тачке, вертикална оса правоуглог координатног система призме (x, y, z) није паралелна са вертикалом у тачки рачунања, па је неопходно дефинисати локални правоугли координатни систем тачке рачунања (x^*, y^*, z^*) и извршити трансформацију између ова два система (Слика 5.3).

Нека је правац вертикале тачке прорачуна P дефинисан геодетском латитудом B и лонгитудом L , а правац Z - осе удаљене призме дефинисан са B' и L' . Тада је веза између ортогоналних вектора овако дефинисаних система са глобалним терестричким координатним системом (X, Y, Z) :

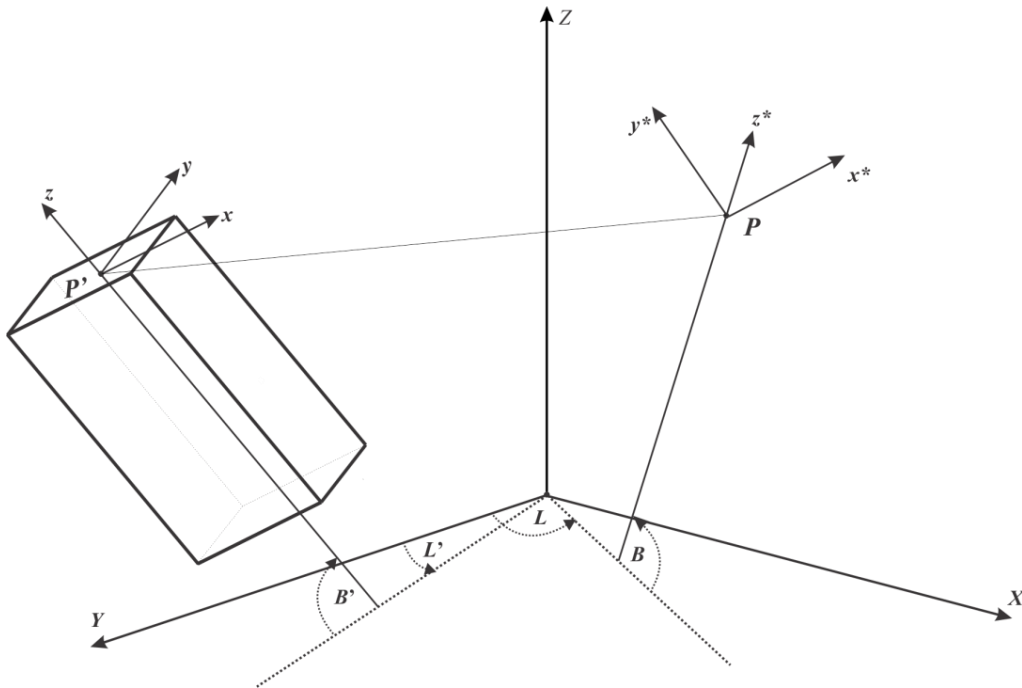
$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)^T &= \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{R}_2\left(\frac{\pi}{2} - B'\right) \cdot \mathbf{R}_3(L')(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)^T \\ (\mathbf{e}_x^*, \mathbf{e}_y^*, \mathbf{e}_z^*)^T &= \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{R}_2\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \cdot \mathbf{R}_3(L)(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)^T \end{aligned}, \quad (5.10)$$

при чему су \mathbf{R}_2 и \mathbf{R}_3 матрице ротације око y и z - осе, а матрица \mathbf{P}_1 је матрица за прелаз између десно оријентисаног глобалног система и лево оријентисаног локалног система (Makhloof, 2007).

Формула за трансформацију између система призме и локалног координатног система тачке рачунања се тада може написати:

$$\begin{pmatrix} v_x^* \\ v_y^* \\ v_z^* \end{pmatrix}^T = \mathbf{R}(B, L, B', L') \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}^T, \quad (5.11)$$

где су (v_x^*, v_y^*, v_z^*) и (v_x, v_y, v_z) први изводи потенцијала у локалном вертикалном систему тачке и координатном систему призме, респективно.



Слика 5.3: Трансформација између система удаљене призме и локалног система тачке рачунања (утицај закривљености Земље)

Матрица ротације \mathbf{R} је облика:

$$\mathbf{R}(\varphi, \lambda, \varphi', \lambda') = \begin{bmatrix} s_1 s_1' (c_2 c_2' + s_2 s_2') + c_1 c_1' & s_1 (-c_2 s_2' - s_2 c_2') & -s_1 c_1' (c_2 c_2' + s_2 s_2') + c_1 c_1' \\ s_1' (s_2 c_2' + c_2 s_2') & s_2 s_2' + c_2 c_2' & c_1' (-s_2 c_2' + c_2 s_2') \\ -c_1 s_1' (c_2 c_2' + s_2 s_2') + s_1 c_1' & c_1 (-c_2 s_2' + s_2 c_2') & c_1 c_1' (c_2 c_2' + s_2 s_2') + s_1 s_1' \end{bmatrix}$$

где је

$$\begin{aligned} s_1 &= \sin B, & s_2 &= \sin L, & c_1 &= \cos B, & c_2 &= \cos L, \\ s'_1 &= \sin B', & s'_2 &= \sin L', & c'_1 &= \cos B', & c'_2 &= \cos L'. \end{aligned}$$

Ова трансформација се врши са сваку појединачну призму која се налази на одређеној удаљености од тачке рачунања, када је потребно обрачунати закривљеност Земље. Треба напоменути да се и други изводи потенцијала могу трансформисати на основу исте матрице ротације.

5.2. ГРАВИТАЦИОНИ ПОТЕНЦИЈАЛ ТЕСЕРОИДА

Узимајући у обзир закривљеност Земље постиже се много боља апроксимација при моделирању великих геолошких структура. Један од начина је приказ топографије елементима сферних призми (тесероидом) и каснијом интеграцијом. У том случају, геоид се замењује сфером полупречника R (Heck and Seitz, 2007).

У сферној апроксимацији, тесероид је елемент масе топографије који је ограничен географским координатним линијама, са две меридијанске линије (λ_1, λ_2) , две паралеле (φ_1, φ_2) и две сферне површине полупречника (r_1, r_2) (Слика 5.4).

Потенцијал топографских маса у тачки рачунања P , између топографске површине S и сфере полупречника R се може изразити Њутновим интегралом у сферним координатама:

$$V = k \iint_{\sigma} \left[\int_R^{r_Q} \rho(Q) \frac{\xi^2}{l} d\xi \right] d\sigma. \quad (5.12)$$

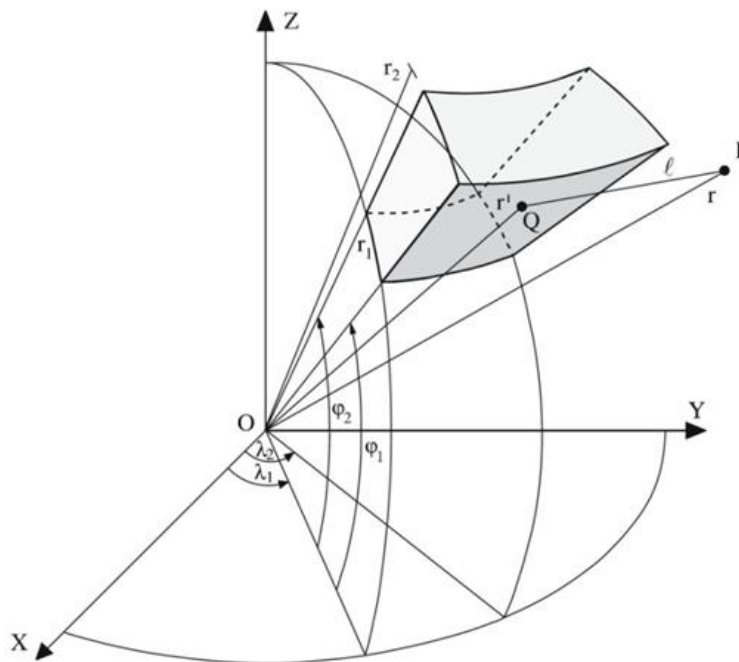
где је

$$l = l(PQ) = \sqrt{r^2 + \xi^2 - 2r\xi \cos \psi}, \quad (5.13)$$

$\rho(Q)$ густина сферног елемента интеграције, која се на површинама океана одређује као $\rho(Q) = \rho_c - \rho_v$, $r_Q = R + H_Q$, а $d\sigma = d\varphi_Q d\lambda_Q \cos \varphi_Q$ је површински елемент у сферним координатама. Геоцентрични угао ψ је сферно растојање између радијус вектора тачке рачунања $\mathbf{r}_p(r, \varphi, \lambda)$ и тачке интеграције $\mathbf{r}_Q(r_Q, \varphi_Q, \lambda_Q)$:

$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi_Q + \cos \varphi \cos \varphi_Q \cos(\lambda_Q - \lambda). \quad (5.14)$$

а φ и λ су геодетска латитуда и лонгитуда тачке рачунања P .



Слика 5.4: Геометрија сферног тесероида (Heck and Seitz, 2007)

Ако се сегмент топографије састоји од неколико слојева са различитим густинама (Слика 5.5), потенцијал топографских маса се може представити у облику:

$$V = k \iint_{\sigma} \left[\int_R^{R+H_i} \sum_{i=0}^l (\rho_i - \rho_{i+1}) \frac{\xi^2}{l} d\xi \right] d\sigma. \quad (5.15)$$

Уколико је густина константна израз се може трансформисати као:

$$V = k\rho_c \iint_{\sigma} \left[\int_R^{r_0} \frac{\xi^2}{l} d\xi \right] d\sigma. \quad (5.16)$$

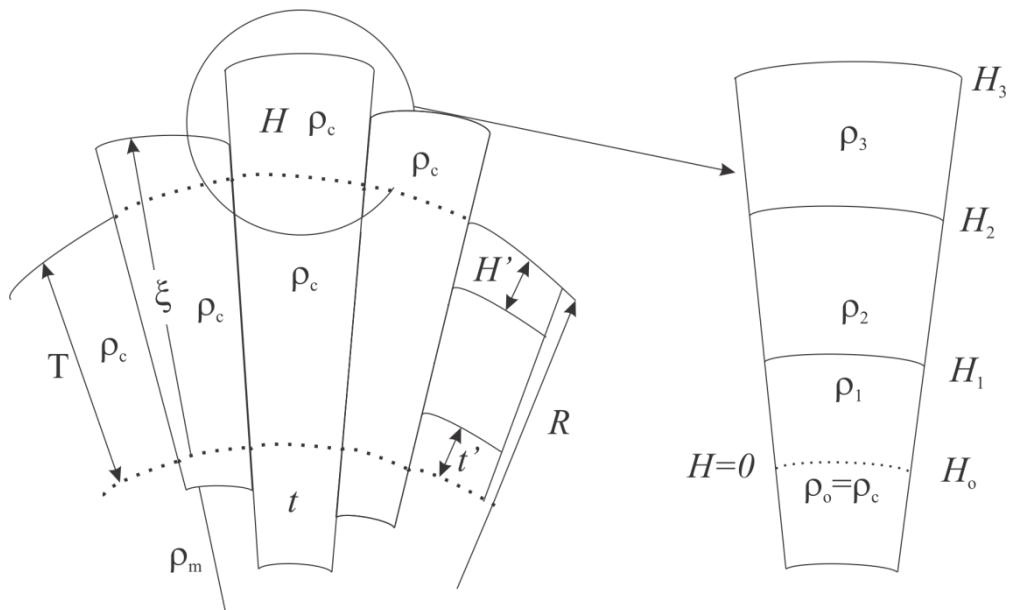
Унутрашњи интеграл једначине (5.12) може се одредити коришћењем израза:

$$V = \frac{1}{2} k\rho_c \iint_{\sigma} [F_0(r, \psi, \xi)]_{\xi=R}^{r_0} d\sigma, \quad (5.17)$$

Са

$$F_0(r, \psi, \xi) = (\xi + 3r \cos \psi) l(r, \psi, \xi) + r^2 (3 \cos^2 \psi - 1) \ln(l(r, \psi, \xi) + \xi - r \cos \psi). \quad (5.18)$$

и $\mathbf{r}_p(R + H_p, \varphi, \lambda)$.



Слика 5.5: Распоред густина маса унутар тесериода

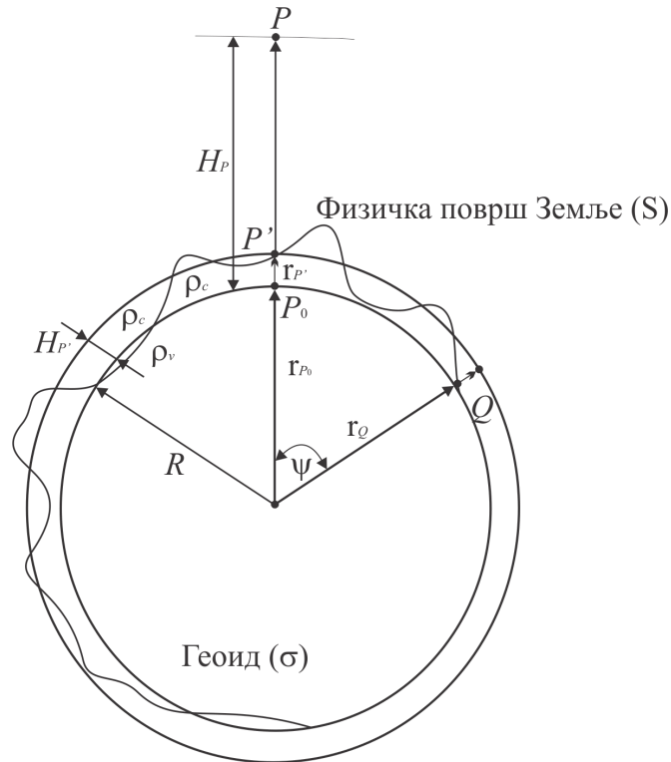
Интервал интеграције у једначини (5.17) се сада може поделити на два дела: $(R, r_{P'})$ и $(r_{P'}, r_Q)$. Тачка P' припада површи S и налази се испод тачке P , а њен геоцентрични радијус је $r_{P'} = R + H_{P'}$. Тада се интеграл (5.3) може написати у облику

$$V = \frac{2\pi k \rho_c}{r_P} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3}(r_{P'}^3 + R^3) \quad \forall r_P \geq r_{P'} \\ r_P(r_{P'}^2 - R^2) \quad \forall r_P \leq r_{P'} \end{array} \right\} + \frac{1}{2} k \rho_c \iint_{\sigma} [r_Q \bar{l}' - r_P \bar{l} + 3r_P \cos \psi (\bar{l}' - \bar{l}) + r_P^2 (3 \cos^2 \psi - 1) \ln \left| \frac{\bar{l}' + r_Q - r_P \cos \psi}{\bar{l} + r_{P'} - r_P \cos \psi} \right|] d\sigma, \quad (5.19)$$

за тачку која се налази ван и на физичкој површи Земље, при чему су растојања

$$\begin{aligned} \bar{l}' &:= \sqrt{r_P^2 + r_{P'}^2 - 2r_P r_{P'} \cos \psi}, \\ \bar{l} &:= \sqrt{r_P^2 + r_Q^2 - 2r_P r_Q \cos \psi}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

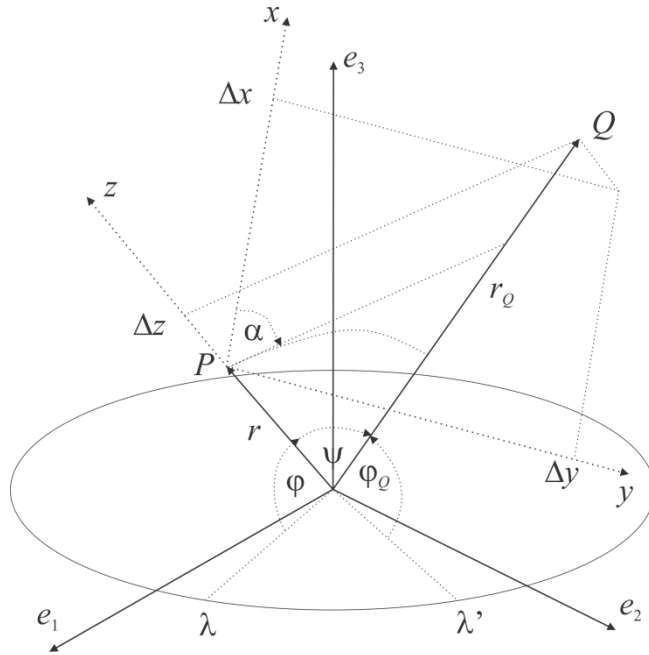
На овај начин се, уствари, гравитациони утицај топографских маса може раздвојити на два дела: један део представља утицај топографије сферне љуске хомогене густине ρ_c и дебљине $H_{P'} = r_{P'} - R$, док други део зависи од тога да ли се тачка рачунања налази на или ван површи Земље (Слика 5.6). Интегрални део у једначини (5.19) представља утицај одступања топографије због $r_Q \neq r_{P'}$ и означава теренску корекцију (Makhloof, 2007).



Слика 5.6: Изглед топографије у сферној апроксимацији

У првом случају $r_p \geq r_{p'}$ одређује се утицај топографско-изостатичких маса на површи Земље или на висини сателита, док се у другом случају $r_p \leq r_{p'}$ обрачунава утицај топографско-изостатичких маса на ундулације геоида.

За одређивање првог и другог извода потенцијала топографских маса дефинише се локални правоугли геоцентрични координатни систем лево оријентисан, где је x -оса усмерена према северу, z -оса се поклапа са геоцентричним вектором радијуса r и y -оса је оријентисана ка истоку (Слика 5.7).



Слика 5.7: Веза локалног правоуглог и сферног координатног система
(по узору на Grombein, Т., 2013)

Тада се први извод потенцијала топографских маса у односу на z - осу може одредити:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{4\pi k \rho_c}{3r^2} (r_p^3 - R^3) + k \rho_c \iint_{\sigma} [F_1(r, \psi, \xi)]_{\xi=r_p}^{r_Q} d\sigma \quad (5.21)$$

где је

$$F_1(r, \psi, \xi) = \left[(\xi^2 + 3r^2) \cos \psi + \xi r (1 - 6 \cos^2 \psi) \right] / l(r, \psi, \xi) + r(3 \cos^2 \psi - 1) \ln |l(r, \psi, \xi) + \xi - r \cos \psi| \quad (5.22)$$

Први извод потенцијала топографских маса у односу на x - осу може се одредити на основу израза:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \frac{\partial V}{\partial \psi}, \quad (5.23)$$

где је на основу израза (5.12) и (5.14) извод једнак

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = k\rho_c \iint_{\sigma} \left[\frac{F_0}{\partial \psi} \right]_R^{r_0} d\sigma. \quad (5.24)$$

док је

$$\frac{\partial F_0}{\partial \psi} := F_2(r, \psi, \xi), \quad (5.25)$$

при чему је $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\cos \alpha_{\varrho}$, а сферни азимут се одређује према изразу:

$$\tan \alpha_{\varrho} = \frac{\cos \varphi_{\varrho} \sin(\lambda_{\varrho} - \lambda)}{\sin \varphi_{\varrho} \cos \varphi - \cos \varphi_{\varrho} \sin \varphi \cos(\lambda_{\varrho} - \lambda)}. \quad (5.26)$$

Интервал интеграције у једначини (5.24) је поново подељен на два дела, $(R, r_{p'})$ и $(r_{p'}, r_{\varrho})$. Први интервал интеграције представља утицај сферне Бугеове љуске, док је други интервал интеграције дат изразом:

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = k\rho_c \iint_{\sigma} [F_2(r, \psi, \xi)]_{r_{p'}}^{r_{\varrho}} d\sigma, \quad (5.27)$$

при чему је

$$F_2(r, \psi, \xi) = \left[-\left(r\xi^2 \sin \psi - r^2 \xi \cos \psi (5 - 6 \cos^2 \psi) / \sin \psi + r^3 (2 - 3 \cos^2 \psi) / \sin \psi \right) / l(r, \psi, \xi) - \right. \\ \left. - \left(r^2 (3/2 \sin 2\psi - 1) \ln |\xi - r \cos \psi + l(r, \psi, \xi)| \right) \right] \quad (5.28)$$

Први извод потенцијала топографских маса у односу на y -осу може се одредити као:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial V_t}{\partial \lambda} = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial V_t}{\partial \psi}, \quad (5.29)$$

где је $\partial V / \partial \psi$ одређен са (5.27), а $\partial \psi / \partial \lambda = -\cos \varphi \sin \alpha_Q$.

Први парцијални изводи, односно изрази (5.21) (5.23) (5.29) могу да се користе за проучавање ефекта топографских маса на резултате сателитских мерења.

Други извод потенцијала топографских маса у односу на z -осу се може одредити:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{8\pi k \rho_c}{3r^3} (r_p^3 - R^3) + k \rho_c \iint_{\sigma} \left[\frac{\partial F_1(r, \psi, \xi)}{\partial r} \right]_{\xi=r_p}^{r_Q} d\sigma \quad (5.30)$$

са

$$\frac{\partial F_1(r, \psi, \xi)}{\partial r} := F_3(r, \psi, \xi) \quad (5.31)$$

где је

$$\begin{aligned} F_3(r, \psi, \xi) = & \left[(\xi \cos \psi - r) \left((\xi^2 - 3r^2) \cos \psi + r\xi(1 - 6\cos^2 \psi) \right) \right] l^{-3}(r, \psi, \xi) + \\ & + (3\cos^2 \psi - 1) \ln |l(r, \psi, \xi) + \xi - r \cos \psi| + \\ & + [2\xi + 6r \cos \psi - 9\xi \cos^2 \psi]^{-1}(r, \psi, \xi) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Тада је други извод потенцијала топографских маса у односу на x -осу:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \quad (5.33)$$

Први део је дат једначином (5.21), а други део се може извести полазећи од једначине за први извод у правцу x - осе:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial \psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] \quad (5.34)$$

са $\partial^2 \psi / \partial \varphi^2 = \sin^2 \alpha_0 \operatorname{ctg} \varphi$.

Израз

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = k \rho_c \iint_{\sigma} \left[\frac{\partial F_2(r, \psi, \xi)}{\partial \psi} \right]_{r_p}^{r_0} d\sigma \quad (5.35)$$

слиди из једначине за први извод у правцу ψ (5.24) и са једначином (5.25) је у односу

$$\frac{\partial F_2(r, \psi, \xi)}{\partial \psi} := F_4(r, \psi, \xi) \quad (5.36)$$

где се након одређених операција добија

$$\begin{aligned} F_4(r, \psi, \xi) = & -[3r^2 (\cos 2\psi) \ln|\xi - r \cos \psi + l(r, \psi, \xi)|] + \\ & + [r\xi(r\xi^2 \sin^2 \psi - r^2 \xi \cos \psi (5 - 6 \cos^2 \psi) + r^3 (2 - 3 \cos^2 \psi)) / l^3(r, \psi, \xi)] + \\ & + [(-r\xi^2 \cos \psi + 15r^2 \xi \cos^2 \psi - r^2 \xi (5 - 6 \cos^2 \psi) / \sin^2 \psi - \\ & - 9r^3 \cos \psi + r^3 \cos \psi (2 - 3 \cos^2 \psi) / \sin^2 \psi) / l(r, \psi, \xi)] \end{aligned} \quad (5.37)$$

Други извод потенцијала топографских маса у односу на y -осу је:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} - \frac{\tan \varphi}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (5.38)$$

Први део једначине је, уствари, први извод у правцу z -осе и дат је једначином (5.21), а други део се може израчунати полазећи од израза:

$$\frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial \psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \right], \quad (5.39)$$

са

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} = \cos^2 \alpha_\varrho \cos^2 \varphi \operatorname{ctg}^2 \psi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \cos \alpha_\varrho. \quad (5.40)$$

Изводи $\partial V / \partial \psi$ и $\partial^2 V / \partial \psi^2$ су већ дефинисани са (5.27) и (5.35).

За извођење других мешовитих извода, $(V)_{xz}$ и $(V)_{yz}$ читалац се упућује на изводе Чернинга (Tscherning, 1976):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial r} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} &= -\frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial V}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \lambda} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Први део једначине (5.41) у $(V)_{xy}$ је већ одређен, док се други део једначине одређује:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \psi} \cos \alpha_\varrho. \quad (5.42)$$

где је

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \psi} = k \rho_c \iint_{\sigma} \left[\frac{\partial F_2(r, \psi, \xi)}{\partial r} \right]_{r_p}^{r_\varrho} d\sigma \quad (5.43)$$

са

$$\frac{\partial F_2(r, \psi, \xi)}{\partial r} := F_5(r, \psi, \xi) \quad (5.44)$$

и након одређених операција вредност за $F_5(r, \psi, \xi)$ се може одредити на основу следећег израза:

$$F_5(r, \psi, \xi) = \left[\begin{aligned} & -r\xi \sin \psi (\cos \psi (\xi^2 + 3r^2) + r\xi(1 - 6\cos^2 \psi)) l^{-3}(r, \psi, \xi) + \\ & + (6r\xi \sin 2\psi - \sin \psi (\xi^2 + 3r^2)) l^{-1}(r, \psi, \xi) - \\ & - 3r \sin 2\psi \ln |\xi + l(r, \psi, \xi) - r \cos \psi| + \\ & + \frac{r \sin \psi (l(r, \psi, \xi) + \xi)}{l(r, \psi, \xi)(l(r, \psi, \xi) + \xi - r \cos \psi)} r(3\cos^2 \psi - 1) \end{aligned} \right] \quad (5.45)$$

У мешовитом изводу $(V)_{yz}$ први део је одређен, док се други део једначине одређује:

$$\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \lambda} = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \psi} \sin \alpha_\varphi, \quad (5.46)$$

са $\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \psi}$ који је одређен изразом (5.43).

И финално, други мешовити извод за $(V)_{xy}$ је:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= -\frac{\tan \varphi}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial V}{\partial \lambda} + \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \lambda} = \\ &= -\frac{\tan \varphi}{r} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial V}{\partial \varphi \partial \lambda} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Први део једначине у мешовитом изводу у $(V)_{xy}$, је већ одређен, док се други део једначине одређује:

$$\frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \lambda} = \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi \partial \lambda} \frac{\partial V}{\partial \psi} \right], \quad (5.48)$$

са

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi \partial \lambda} = \sin \alpha_o (\sin \varphi - \cos \varphi \cos \alpha_o \operatorname{ctg} \psi). \quad (5.49)$$

док су $\partial V / \partial \psi$ и $\partial^2 V / \partial \psi^2$ одређени изразима (5.27) и (5.35).

Други парцијални изводи потенцијала топографских маса су од значаја за сателитску алтиметрију и градиометрију.

Битно је нагласити, да све формуле изведене у претходном одељку представљају гравитациони утицај некомпензованих топографских маса. У наставку рада биће анализирани и гравитациони утицаји компензационих маса у два различита изостатичка модела (Ејријев и Пратов модел).

Код Ејри-Хајсканеновог модела висина топографије $H=0$ се поклапа са нормалном дебљином Земљине коре, константне густине ρ (Makhloof, 2007). У пределима са израженом топографијом дебљина корена се може одредити на основу формула приказаних у поглављу 4.3.1. Исто важи и за дебљину корена на океанима (антикорени).

Потенцијал изостатичких маса у тачки рачунања P може да се одреди на исти начин као и потенцијал топографских маса:

$$V_I = k \Delta \rho \iint_{\sigma} \left[\int_{R-T-i_o}^{R-T} \frac{\xi^2}{l} d\xi \right] d\sigma, \quad (5.50)$$

где је

$$l = l(PQ) = \sqrt{r^2 + \xi^2 - 2r\xi \cos \psi}, \quad (5.51)$$

а $d\sigma$ је површински сферни елемент.

Интервал интеграције $(R - T - t_Q, R - T)$ може поново бити подељен у два дела, на класичну теренску корекцију $(R - T - t_Q, R - T - t_{P'})$ и љуску дебљине $(R - T - t_{P'}, R - T)$, где је $t_{P'}$ дебљина корена или антикорена у тачки прорачуна P или P' , респективно.

Тада је формула за потенцијал изостатичких компензационих маса:

$$V_I = \frac{4\pi k \Delta \rho}{3r_p} [(R - T)^3 - (R - T - t_p)^3] + \frac{1}{2} k \Delta \rho \iint_{\sigma} [F_0(r, \psi, \xi)]_{R-T-t_p}^{R-T-t_Q} d\sigma, \quad (5.52)$$

при чему је $\Delta \rho = \rho_m - \rho_c$ разлика густине омотача и густине изостатичке компензационе масе, док је за $F_0(r, \psi, \xi)$ формула иста као код утицаја топографских маса. Први део у једначини (5.52) представља утицај компензационих маса сферне Бугеове љуске за тачку P' .

Први и други изводи потенцијала компензационих маса су исти као у случају топографских маса, само што границе интеграљења морају бити правилно одабране.

Први парцијални извод $(V_I)_z$ у правцу z -осе је

$$\frac{\partial V_I}{\partial z} = -\frac{4\pi k \Delta \rho}{3r_p^2} [(R - T)^3 - (R - T - t_p)^3] + k \Delta \rho \iint_{\sigma} [F_1(r, \psi, \xi)]_{R-T-t_p}^{R-T-t_Q} d\sigma, \quad (5.53)$$

где је $F_1(r, \psi, \xi)$ такође дефинисано.

Аналогно томе се могу одредити први и други изводи потенцијала компензационих маса по свим осама.

Комбиновани утицај топографско-изостатичких маса на различите функционале потенцијала, представља разлику између утицаја топографских маса и ефекта изостатичке компензације маса:

$$V_{II} = V - V_I. \quad (5.54)$$

У случају Прат-Хајфордовога модела, ефекат топографских маса се одређује из два дела: један део за копнена подручја и други за област океана. Исто мора да се уради и за ефекте маса изостатичке компензације. Други извод утицаја топографских маса у радијалном правцу је:

$$\frac{\partial^2 V^L}{\partial z^2} = k \iint_{\sigma} [F_3(r, \psi, \xi)]_R^Q \rho_L d\sigma, \quad (5.55)$$

где је ρ_L густина копнених области, док је функција $F_3(r, \psi, \xi)$ већ одређена у поступку топографских маса. Уколико је густина топографских маса позната, онда се у формули може користити она уместо ρ_L .

Ова формула важи на копненим површинама, односно у оним случајевима где су висине h позитивне. У случају океанских подручја, густина воде је ρ_v , висине h' су негативне, а ефекти топографских маса су:

$$\frac{\partial^2 V^O}{\partial z^2} = k(\rho_c - \rho_v) \iint_{\sigma} [F_3(r, \psi, \xi)]_R^Q d\sigma. \quad (5.56)$$

Утицај компензационих маса, за копнене површине је:

$$\frac{\partial^2 V_I^L}{\partial z^2} = k \iint_{\sigma} [F_3(r, \psi, \xi)]_{R-D}^R (\rho_c - \rho_L) d\sigma, \quad (5.57)$$

док је за океанске области, са густином ρ_O

$$\frac{\partial^2 V_I^0}{\partial z^2} = k \iint_{\sigma} [F_3(r, \psi, \xi)]_{R-D}^{r_0} (\rho_c - \rho_0) d\sigma. \quad (5.58)$$

Први и други изводи потенцијала за топографско-изостатичке масе могу се одредити применом до сада изведених формула, користећи одговарајуће интегралне једначине.

На крају, битно је напоменути да код тесероида као сферног модела, не постоје формуле у затвореном облику. Да би се избегле грешке приближних формула и интеграла углавном се користе формуле за призму са правоугаоном основом.

5.3. МОДЕЛИРАЊЕ ГРАВИТАЦИОНОГ УТИЦАЈА ТОПОГРАФСКИХ МАСА

У зависности од облика топографских маса и распореда густина, утицај истих на поље убрзања силе теже је различит. Сви до сада описани топографско-изостатички модели се успешно примењују за одређивање гравитационог утицаја топографских маса, које описују краткоталасне промене у гравитационом пољу (Forsberg, R., Tscherning, C., 1998).

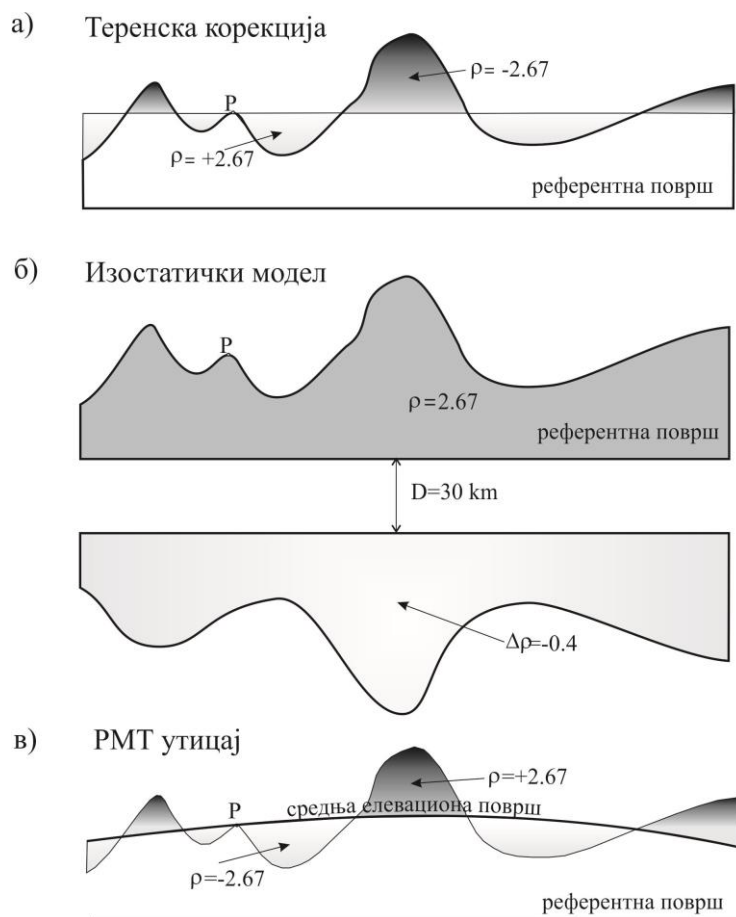
Гравитациони утицај топографских маса на аномалијски потенцијал и његове функционале у основи обухвата (Слика 5.8) (Forsberg, 1984):

- утицај укупне топографских маса (Бугеов слој и класична теренска корекција),
- утицај изостатичке компензације (Ејри-Хајсканенов и Прат-Хајфордов модел) и
- утицај резидуалног модела терена (РТМ).

Разлике између наведених метода су у начину третирања топографских маса изван геоида, а са теоријског становишта, сваки метод би требало да обезбеди исти резултат (Heiskanen W., Moritz H., 2000).

При избору методе за моделирање ефекта топографских маса обично се разматрају: средња вредност и стандардна девијација резидуалних аномалија

убрзања силе теже која ће се користити за предикцију ундулације геоида или аномалијске висине и величина индиректног ефекта, који би требало да се врати на вредност резидуалне ундулације геоида или аномалијску висину.



Слика 5.8: Ефекти топографских маса

У овом поглављу дат је кратак преглед за две конвенционалне методе, које се користе за моделирање ефеката топографских маса у поступку одређивања геоида или квазигеоида:

- класична теренска корекција и
- резидуални модел терена.

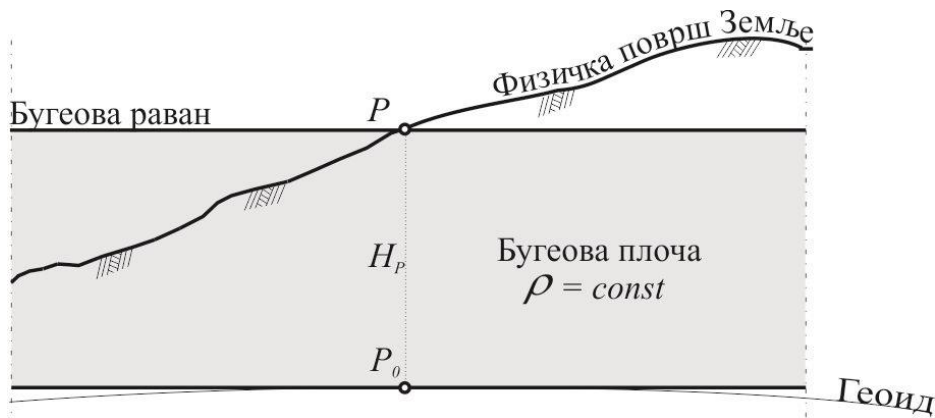
5.3.1. Теренска корекција

Утицај Бугеовог слоја и класичне теренске корекције представља укупан утицај топографских маса на поље убрзања силе теже (Слика 5.9).

У пределима са израженом топографијом, укупан утицај топографских маса на аномалије убрзање силе теже се може одредити на основу потпуне Бугеове редукције (Δg_{BA}):

$$\Delta g_{BA} = g_P - F - A_B + c - \gamma, \quad (5.59)$$

где је g_P - убрзање силе теже мерено на физичкој површи Земље у тачки P , F - редукција за слободан ваздух, $A_B = 2\pi k \rho H_P^0$ - редукција за Бугеов слој, c - класична теренска корекција, која у тачки рачунања P , представља одступање топографских маса од Бугеовог слоја и γ - нормално убрзање у тачки на елипсоиду. (Heiskanen W., Moritz H., 2000; Forsberg, R., Tscherning, C., 1998).



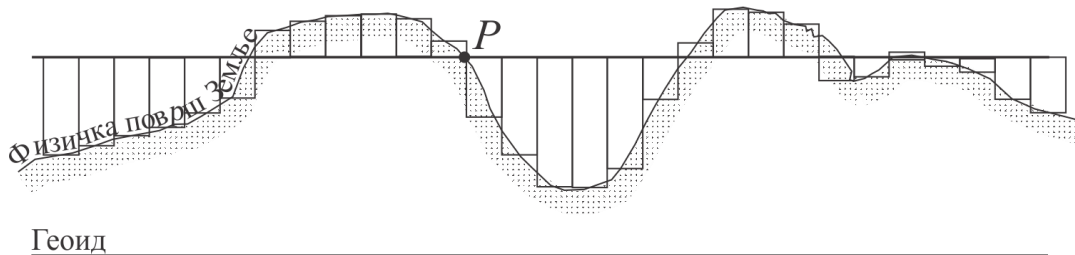
Слика 5.9: Маса изнад и испод Бугеове плоче

Теренска корекција, дакле, представља збир утицаја гравитационих сила која се јављају због постојања вишка маса изнад и дефицита маса испод Бугеове плоче (Слика 5.10). У тачки рачунања P интензитет вектора убрзања силе Земљине теже био би већи за интензитет вектора маса изнад Бугеове плоче које вуку на горе, а због постојања дефицита маса унутар Бугеове плоче потребно је вредност утицаја плоче умањити за интензитет вектора који изазива дефицит маса.

Као што је већ објашњено, у правоуглом координатном систему чији се координатни почетак налази у тачки P , а правац Z -осе се поклапа са правцем вектора убрзања силе теже, теренска корекција је дефинисана изразом:

$$c = k\rho \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{z=H_p}^{z=H(x,y)} \frac{(z - H_p)}{\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2}} dx dy dz, \quad (5.60)$$

Њена вредност је увек позитивна, али ако се у обзир узимају масе које су значајно удаљене од тачке рачунања, због закривљености Земљине површи теренске корекције могу имати и негативни знак.



Слика 5.10: Теренска корекција

Када се редукција појављује као део remove-restore методе, тада у поступку предикције аномалијских висина/ундулације геоида, долази до појаве индиректног ефекта.

Индиректни ефекат је последица уклањања или потискивања топографских маса и доводи до промена потенцијала убрзања силе теже, а површ која настаје под присуством индиректног ефекта назива се когеоид (ζ^k). Из тог разлога, додатно се морају моделирати и промене у вредностима аномалијских висина:

$$\zeta = \zeta^k + \delta\zeta^k. \quad (5.61)$$

Вредност индиректног ефекта $\delta\zeta^k$ се може одредити на основу израза (Sjoberg, L., Nahavandchi, H., 1999; Smith, D.,A., Roman, D.,R, 2001; Agren, et al., 2009):

$$\delta\zeta^k = -\frac{\pi k \rho H_p^2}{\gamma}, \quad (5.62)$$

при чему је k универзална гравитациона константа, а γ је вредност нормалног убрзања на телуриду.

Може се закључити да је индиректни ефекат строго локалног карактера, јер зависи управо од висине тачке H_p у којој се ефекат обрачунава и густине ρ топографских маса на којој се тачка налази.

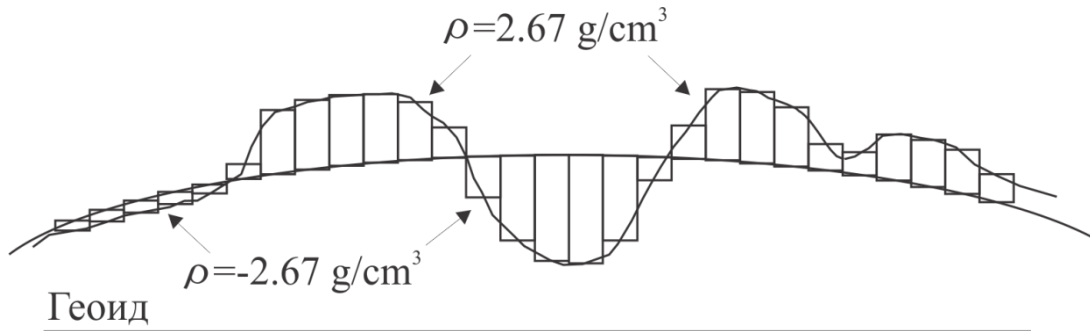
5.3.2. Резидуални модел терена

Резидуални модел терена уведен је од стране Р. Форсберга (1984). Представља референту површ или средњу елевациону површ h_{ref} , чија резолуција одговара резолуцији глобалног геопотенцијалног модела, а настаје након отклањања дела утицаја свих топографских маса применом глобалног геопотенцијалног модела. Преостале топографске масе изнад референтне површи су константне густине, а део чији је утицај елиминисан отклањањем дуготаласних карактеристика, попуњава се масама са негативним предзнаком (Слика 5.11).

Код резидуалног модела терена ефекат удаљених маса је константан и најчешће занемарљив, елиминише се потреба за одређивањем утицаја закривљености Земље што олакшава рад у пракси.

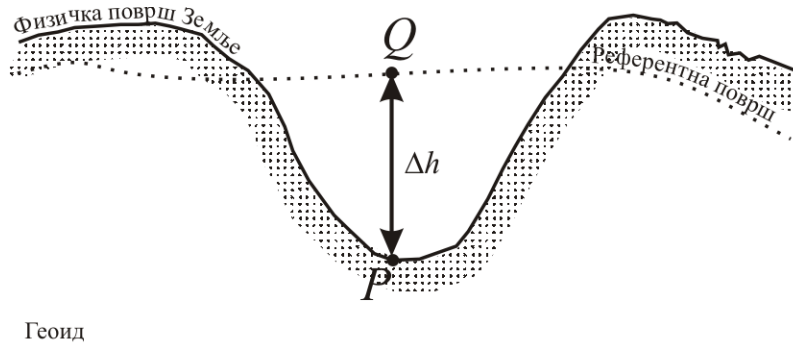
Додатна предност примене РТМ је дефинисање различитих резолуција референтне површи, кроз поступак филтрирања висина тачака подручја за које се резидуални модел креира. Поступак филтрирања висина тачака биће објашњен у оквиру нумеричких истраживања у поглављу 6.

Ако резолуција површи одговара резолуцији глобалног геопотенцијалног модела тада је утицај топографије, у принципу, правилно одређен. Међутим, дефинисањем различитих резолуција могуће је мењати карактеристике резидуалних резултата опажања. Референтна површ мање резолуције доводи до веома глатких површи резидуалних резултата опажања, погодних у погледу предикције, док се референтна површ високе резолуције користи у циљу добијања краткоталасних карактеристика функционала, чији утицај у укупној вредности функционала није нарочито изражен.



Слика 5.11: Референтна (средња елевациона) површ

Основни проблем јавља се у тачкама које остају унутар маса с обзиром на то да аномалијски потенцијал, након попуњавања долина, више није хармонијска функција (Слика 5.12). У околини тачке P референтна површ је без значајних промена, па се утицај масе изнад нивоа тачке P и испод референтне површи може посматрати као утицај Бугеове плоче. Кондензовањем маса плоче, тако да формирају материјалну површ (раван) испод тачке P , неће се учинити значајна промена потенцијала ван референтне површи, али је у тачки P аномалијски потенцијал сада хармонијска функција.



Слика 5.12: Тачка унутар топографских маса

Ефекти кондензације попуњавајућих маса на компоненте одступања вертикала и аномалијске висине занемарљиво су мали у односу на саму вредност њихових краткоталасних карактеристика, док се у случају аномалије убрзања мора уводити хармонијска корекција:

$$\delta_{\Delta g} = -4\pi k \rho \Delta h, \quad (5.63)$$

при чему је k универзална гравитациона константа, ρ густина, а Δh је разлика висине тачке Q на референтној површи и посматране тачке P на површи Земље.

Међутим, у оквиру рада (Omang O.C., et al., 2012) разматран је нови приступ за одређивање хармонијске корекције.

Уз претпоставку су хоризонтални градијенти убрзања једнаки нули, хармонијска корекција је, унутар маса, једнака вертикалном градијенту убрзања силе теже помножена са висинском разликом Δh (разлика висине тачке на референтној површи и праве висине тачке P). То тумачење омогућава да се дефинише генерализована хармонијска корекција, која се може применити и у случају аномалијских висина, тако што је разлика аномалијског потенцијала у одговарајућој тачки на референтној површи и тачки посматрања P једнака интегралу поремећајног убрзања унутар маса између ових двеју тачака. Тада важи (Omang et al., 2012)

$$\zeta_c = -\frac{4\pi k \rho \Delta h^2}{\gamma}, \quad (5.64)$$

где је γ вредност нормалног убрзања.

Када је произвољна тачка P изван стварних топографских маса, аномалијски потенцијал у тачки $T(P)$ може се представити у облику

$$T(P) = T_{RTM}(P) + T_{REZ}(P), \quad (5.65)$$

где је $T_{RTM}(P)$ вредност добијена из РТМ, а $T_{REZ}(P)$ је преостали део.

Ако се тачка P налази унутар вештачких маса, тада се генерализовани приступ користи у тачки на референтној површи Q , па за аномалијски потенцијал T , као и за његове функционале важи:

$$T(Q) = T_{RTM}(P) + T_{REZ}(Q), \quad (5.66)$$

где се хармонијска корекција примењује у тачки рачунања P . Хармонијска корекција има функцију да помера топографске маса од тачке P до Q , без обзира на вредности хоризонталних градијената.

Сада се вредност $T_{REZ}(Q)$ може одредити развојем у Тејлоров ред:

$$\tilde{T}(Q) = T_{REZ}(P) + \left. \frac{\partial T}{\partial h} \right|_P \cdot \Delta h. \quad (5.67)$$

Наведене једначине се могу написати за било који функционал, па је за аномалију убрзања и аномалијску висину једначина облика:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{g}_{REZ}(Q) &= \Delta g_{ASV}(P) - \Delta g_{GGM}(P) - \Delta g_{RTM}(P) - T_{zz} \cdot \Delta h \\ \tilde{\zeta}_{REZ}(Q) &= \zeta(P) - \zeta_{GGM}(P) - \zeta_{RTM}(P) - \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \Delta h. \end{aligned} \quad (5.68)$$

где је Δg_{ASV} аномалија слободног ваздуха, $\Delta g_{GGM} / \zeta_{GGM}$ вредност аномалије убрзања/аномалијске висине добијене применом глобалног модела, $\Delta g_{RTM} / \zeta_{RTM}$ вредност аномалије убрзања/аномалијске висине добијене применом РТМ укључујући хармонијску корекцију, T_{zz} вертикални градијент убрзања силе теже и $\frac{\partial T}{\partial r}$ први члан развоја у Тејлоров ред, при прелазу од тачке рачунања P до тачке на референтној површи Q .

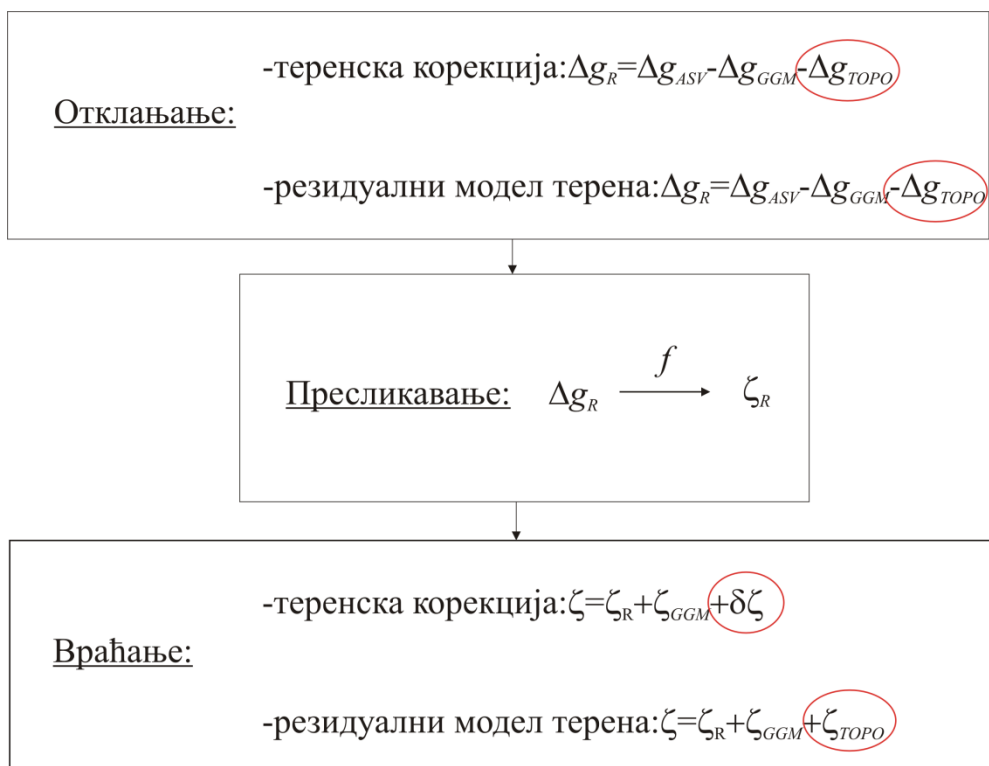
ПОГЛАВЉЕ 6

НУМЕРИЧКА ИСТРАЖИВАЊА

Сва нумеричка истраживања изведена су на основу теоријских поставки, које су приказане у претходним поглављима, а крајњи циљ је моделирање густина топографских маса, унутар литосфере до геоида, за потребе решавања граничних проблема потенцијала Земљине теже.

На основу резултата терестричких мерења одређене су аномалије слободног ваздуха (Δg_{ASV}), док су на основу података дигиталног модела терена на територији Србије и података глобалног модела SRTM ван граница Србије одређени гравитациони утицаји топографских маса на аномалијски потенцијал и његове функционале. Моделирање гравитационог утицаја топографских маса, применом класичне теренске корекције и резидуалног модела терена, са различитим вредностима густина може обезбедити информације о утицајима густина топографских маса на аномалијски потенцијал и његове функционале. Према условима дефинисаним у оквиру remove-restore методе, на основу вредности резидуалних аномалија убрзања силе теже (Δg_R) и величине индиректног ефекта ($\delta\zeta$), може се утврдити који од наведених модела обезбеђује погоднију референтну површ за предикцију аномалијских висина. (Слика 6.1).

Основни циљ је одредити колики је гравитациони утицај топографских маса (Δg_{TOPO}) на аномалије убрзања и аномалијске висине ($\delta\zeta, \zeta_{TOPO}$) без обзира који се приступ користи за пресликавање (одређивање) резидуалних аномалијских висина (ζ_R). Дакле, након одређивање средњеталасне карактеристике, неопходно је моделирати гравитациони утицај топографских маса на резидуалне аномалијске висине.



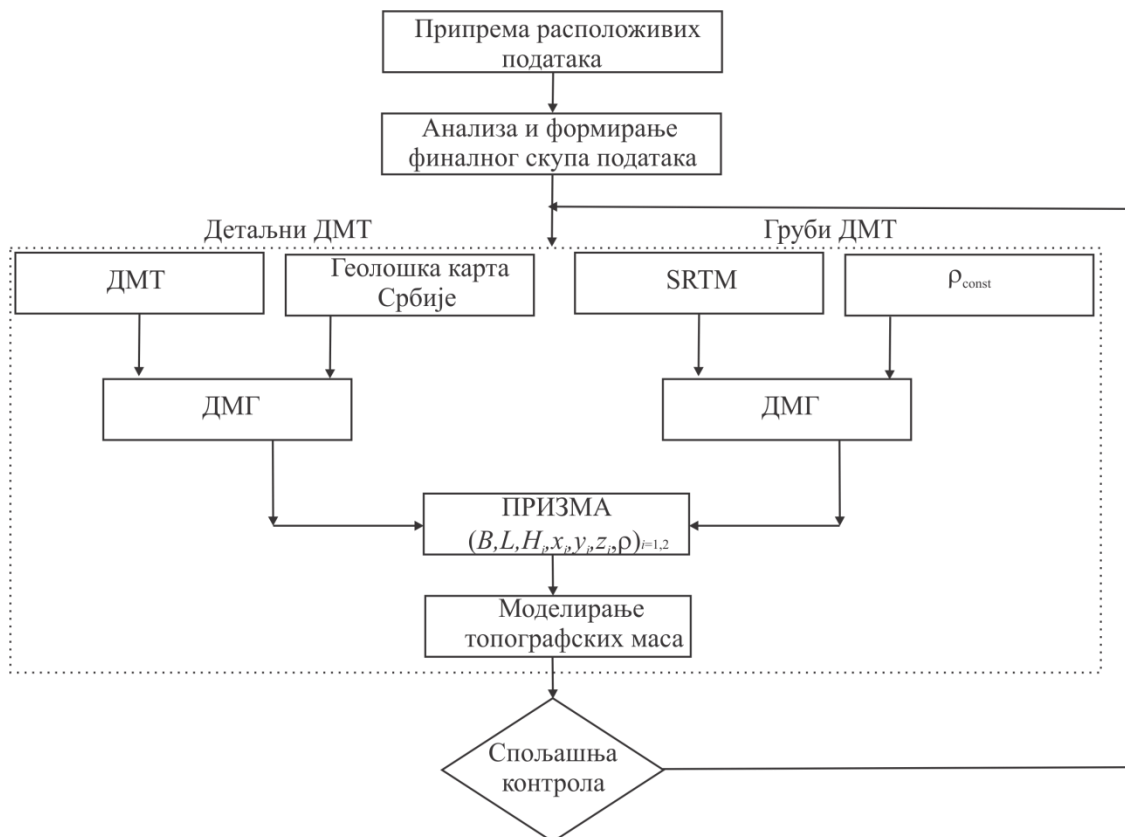
Слика 6.1: Моделирање утицаја топографских маса у оквиру remove-restore методе

Пресликавање је могуће извршити параметарским или интегралним приступом, за случај када се располаже резултатима мерења убрзања Земљине теже (Стоксово решење, решење Молоденског или колокација која омогућава комбиновање свих расположивих података) (Hofmann-Wellenhof, В., Moritz, Н., 2005; Tschering, С.С., 1979). Разлике међу наведеним присупима пресликавања су последица података који се користе.

Ток истраживања се може поделити у неколико фаза (Слика 6.2):

1. припрема расположивих података подразумева да сви расположиви подаци, након неопходних трансформација, буду датумски хомогени, тј. да се односе на:
 - Међународни терестрички референтни систем (International Terrestrial Reference System–ITRS) у епохи 96 (International Terrestrial Reference Frame 96–Међународни терестрички референтни оквир 96-ITRF96),
 - Геодетски референтни систем 80 (Geodetic Reference System 80–GRS80),

- Нивелман високе тачности 2 Србије (НВТ2),
 - Међународну гравиметријску стандардизовану мрежу 1971 (International Gravity Standardization Network 1971–IGSN71);
2. анализа и формирање финалног скупа података, подразумева да се на основу усвојених критеријума, квалитета и правилног просторног распореда расположивих података, дефинише финални скуп података који ће се користити у нумеричким истраживањима;
 3. креирање дигиталног модела густина-деталног за потребе одређивања утицаја локалних маса до 20 km од тачке прорачуна и грубог модела густина за утицаје удаљених топографских маса;
 4. подела топографских маса на праве правоугаоне призме са својим карактеристикама;
 5. моделирање топографских маса-класична теренска корекција и резидуални модел терена;
 6. спољашња контрола.



Слика 6.2: Ток нумеричких истраживања

Сва нумеричка истраживања изведена су на основу расположивих података:

- тачака детаљног гравиметријског премера Србије,
- дигиталног модела терена резолуције једне лучне секунде у оба правца,
- дигиталног модела густина до геоида, креираног за потребе нумеричких истраживања,
- глобалног геопотенцијалног модела EGM2008 (Earth Gravitational Model 2008),
- резидуалног модела терена, креираног за потребе нумеричких истраживања,
- глобалног дигиталног модела терена SRTM, резолуције три лучне секунде, за територију ван граница Србије.

Информације о мисији SRTM доступне су јавности и дигитални модели терена могу се преузети на интернет адреси (<http://srtm.csi.cgiar.org>).

За све скупове података, који су коришћени или одређени у оквиру нумеричких истраживања, приказани су основни статистички подаци (ОСП) или статистике, одређене сагласно следећим поставкама:

- S , скуп података чије се статистике одређују,
- N , укупан број података скупа S ,
- минимални члан скупа S или минимум

$$X_{\min} \in S : X_{\min} \leq X, \forall X \in S,$$

- максимални члан скупа S или максимум

$$X_{\max} \in S : X_{\max} \geq X, \forall X \in S,$$

- средња вредност

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i,$$

- стандардна девијација

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}.$$

Поред наведених статистичких података, за готово све прорачуне приказани су релевантни графички прикази као што су просторни распоред тачака или општи облици површи и одговарајући хистограми (нпр. аномалија слободног ваздуха, аномалијских висина, теренске корекције...).

Све топографске масе на територији Србије ($41^{\circ} \leq B \leq 47^{\circ}$, $18^{\circ} \leq L \leq 24^{\circ}$) су на основу података дигиталног модела терена подељене на праве правоугаоне призме. Подаци о призмама су архивирани у 129600 датотека, на основу координата центра призме које су у пољу од једног минута по обе координате. Исто је урађено и за топографске масе ван граница Србије на основу података глобалног модела терена SRTM.

У прорачунима је учествовало више стотина милиона призми, за чије су креирање и одређивање гравитационог утицаја коришћени програми креирани у Матлабу (Прилог 13-А, 13-Б). Међутим, за прорачуне у програму Матлаб, због великог броја података, за сваки модела је било потребно више од 80 сати.

Управо из тог разлога је креиран нови програм у програмском језику C++, од стране проф. др Олега Одаловића. Програм је креиран тако да омогућава коришћење више језгара процесора и на тај начин је постигнуто значајно убрзање свих прорачуна, па је за моделирање гравитационог утицаја топографских маса

- применом теренске корекције са густинама из ДМГ било потребно око 10.5 сати за завршетак прорачуна и исто толико када је у прорачунима коришћена константна вредност густине,
- применом резидуалног модела терена резолуције пет лучних минута, која укључује и одговарајућу интерполацију за висине тачака на референтној површи, време за завршетак прорачуна је 10.5 сати,
- применом резидуалног модела терена резолуције једне лучне минуте, који је унапред припремљен како би се избегла додатна интерполација, време потребно за завршетак прорачуна је 10.1 сати када су коришћене густине из ДМГ и 9.9 сати када је коришћена константна вредност густине.

6.1. РАСПОЛОЖИВИ ПОДАЦИ

6.1.1. Детаљни гравиметријски премер

Организована гравиметријска мерења на територији Србије започета су 1951. године и представљају део гравиметријских одређивања Социјалистичке Федеративне Републике Југославије (СФРЈ). Мерења су иницирана од стране Географског Института Југословенске народне армије и Главне геодетске управе тадашње Федеративне Народне Републике Југославије.

У периоду од 1951. до 1953. године одређени су апсолутни ниво и размера гравиметријских одређивања, а упоредо са калибрационим радовима формирана је и гравиметријска мрежа 1. реда.

Мрежа 1. реда представљала је веома добру основу за све врсте гравиметријских радова, али се у циљу извођења детаљног премера приступило њеном прогушћавању, односно формирању гравиметријске мреже 2. реда.

Мрежа 2. реда је развијана парцијално, без одређеног глобалног плана, углавном за потребе одређених институција.

Основна гравиметријска мрежа у потпуности је реализована у периоду од 1964. до 1967. године и представљала је тачну и хомогену основу за све врсте практичних и научних примена.

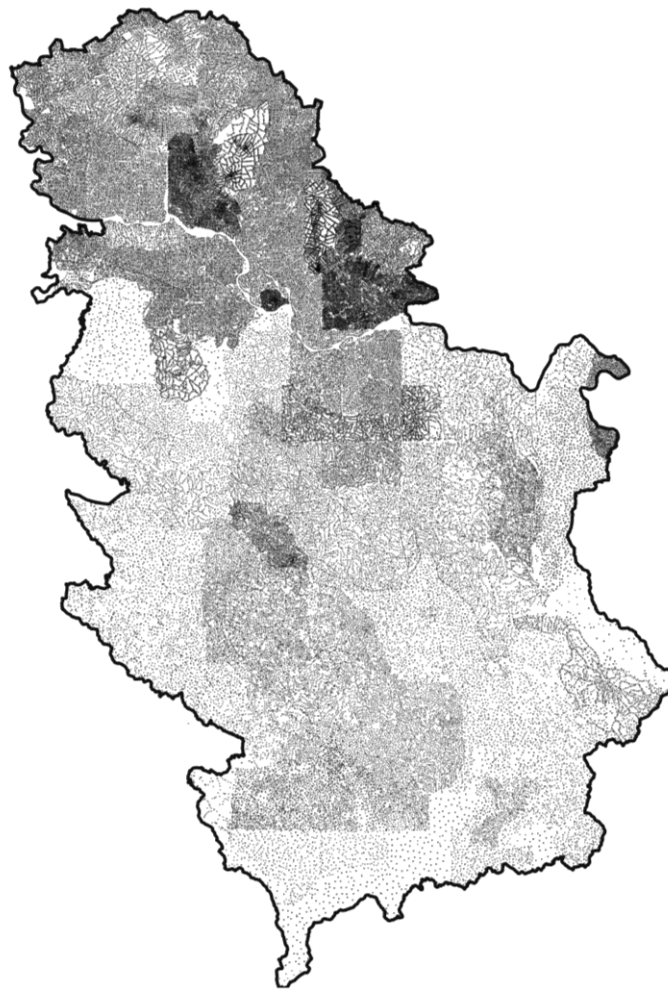
Упоредо са формирањем референтних гравиметријских мрежа непрекидно је вршен и детаљни гравиметријски премер, односно локални и регионални гравиметријски премер (Слика 6.3). Детаљним премером омогућено је решавање низа геолошких и геодетских задатака.

Треба напоменути следеће:

- координате тачака детаљног премера одређиване су разним методама. Положај тачака дефинисан је везивањем за геодетску основу, а у случајевима када није било геодетске основе, развијањем бусолних или полигонских влакова који су се ослањали на тригонометријске тачке, па и идентификацијом на картама 1:25000,
- у погледу висина тачака може се рећи да је њихова референтна површ нулта нивоска површ, која пролази кроз репер у Трсту (референтна површ Нивелмана високе тачности 1-НВТ1). При одређивању висина у равним пределима висинске разлике одређиване су применом геометријског, а у

планинским применом тригонометријског нивелмана, при чему је везивање вршено на репере свих редова, а у појединим случајевима и на тригонометријске тачке,

- убрзања теже при свим наведеним гравиметријским одређивањима односе се на референтни ниво дефинисан вредношћу апсолутног убрзања силе Земљине теже на тачки у Потсдаму.



Слика 6.3: Распоред тачака гравиметријског премера Србије

У оквиру пројекта Capacity Building for Serbia, Phase II, Real Estate and Registration Project, који је Републички геодетски завод реализовао са експертима из Шведске (Swedesurvey-Lantmäteriet), одређене су вредности убрзања Земљине теже на три тачке на територији Србије (Слика 6.4). Мерења су извршена

применом апсолутног гравиметра CG5 са тачношћу реда 4 μgal (Odalović et al., 2012).



Слика 6.4: Распоред тачака у којима су одређена убрзања применом апсолутног гравиметра и полигони нове основне гравиметријске мреже Србије

Упоредо са реализацијом апсолутних мерења, а у периоду од 2004. до 2009. године реализована је и Основна гравиметријска мрежа Србије. Мрежа је развијана у облику затворених полигона, са укупно 75 тачака, 137 страна и 60 полигона. При изравнању разлика убрзања, мрежа је ослоњена на вредности одређене апсолутним гравиметрима. Просечна оцењена вредност, након изравнања износила је 33.13 μgal . Након завршене Основне гравиметријске мреже 2007. године започета је реализација новог регионалног гравиметријског премера Србије. Пројектовано је да се територија Србије покрије са 2655 тачака регионалног премера, које се налазе на просечном међусобном растојању од 5 km.

Сви подаци детаљног гравиметријског премера (ДГП) архивирани су у облику текстуалне датотеке у којој се за око 90 000 тачака налазе подаци о координатама тачака, њиховим висинама и вредностима убрзања.

6.1.2. Дигитални модел терена

Дигитални модел терена креиран је на основу података који су производ пројекта Војногеографског Института Војске Србије и Црне Горе „Дигитални модел терена Србије и Црне Горе за војне потребе”, започет 2002. године. У току реализације пројекта извршена је трансформација висинске представе дефинисане на картама 1:25000 у дигитални облик. Материјал је архивиран у облику низа тачака, при чему су за сваку тачку познате координате у Гаус-Кригеровој пројекцији (елипсоид Бесела) и висине.

ВГИ је податке 2004. године уступио за научна истраживања и на основу њих је креиран дигитални модел терена резолуције једне лучне секунде у оба правца, који је коришћен у поступку одређивања геоида високе резолуције за територију Републике Србије (Одаловић, О., 2005)

Дигитални модел терена је креиран коришћењем опште аритметичке средине

$$H_{DMT}^O = \frac{p_1 H_1^O + \dots + p_n H_n^O}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad (6.1)$$

где је n број тачака чије се висине користе у поступку одређивања висине тачке модела терена, док је p_i тежина која представља реципрочну вредност квадрата растојања L_i . У тачки модела, чија се висина одређује, дефинисан је правоугли координатни систем са координатним почетком у самој тачки, а у сваком квадранту координатног система одабране су четири тачке које су најближе тачки модела (укупно 16 тачака).

За територију ван граница Републике Србије, као што је већ напоменуто, коришћен је глобални дигитални модел терена SRTM, резолуције три лучне секунде у оба правца.

6.1.3. Дигитални модел густина

Са геофизичког аспекта, креирање дигиталног модела густина захтева анализу :

- распореда површинских густина топографије, на основу података са геолошке карте Србије,
- постојећих хипотеза о распореду густина маса Земљине коре унутар литосфере до површи геоида.

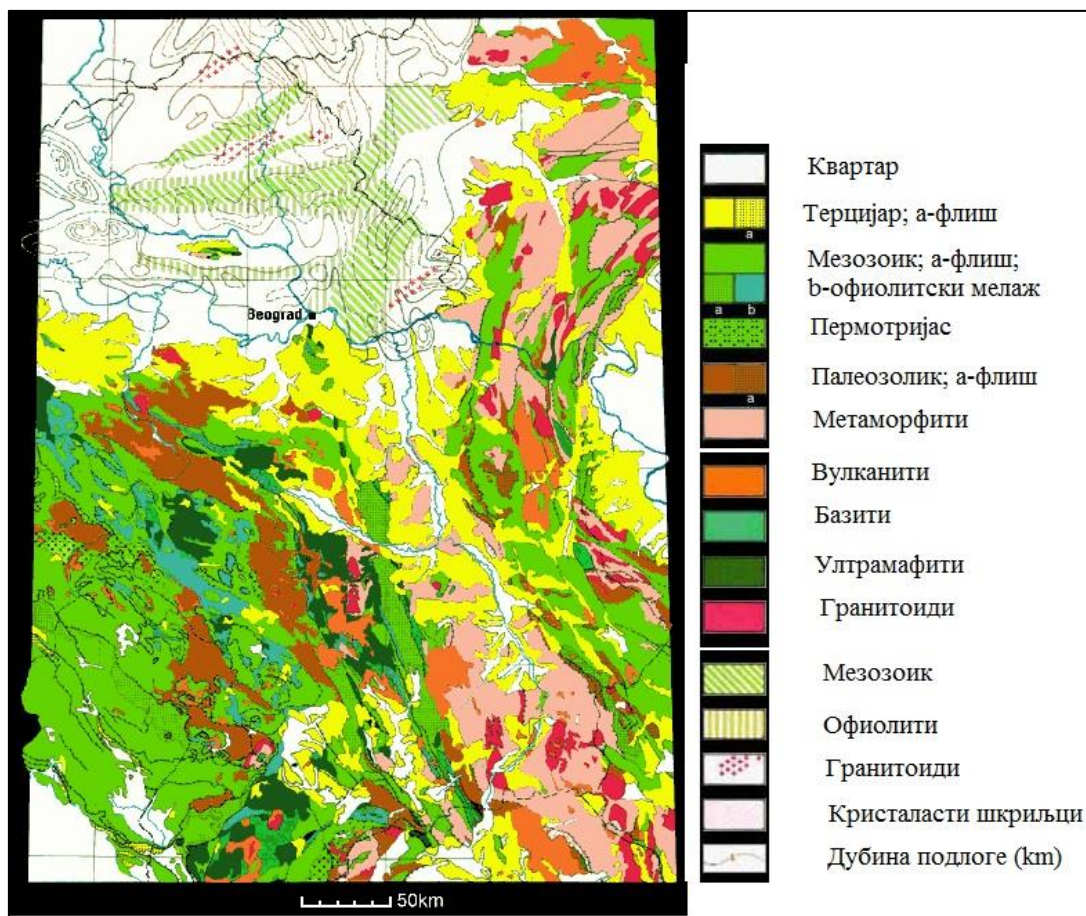
Анализа површинских густина урађена је на основу геолошке карте Србије. Геолошку карту СФРЈ израдио је Институт за геолошко-рударска истраживања и испитивања нуклеарних и других минералних сировина у Београду, а издата је 1970. године у Београду од стране Савезног геолошког завода.

Карта је настала компилацијом геолошких карата размере 1:100 000, које су рађене у периоду од 20 година, почевши од педесетих година 20. века. Један лист карте размере 1:100 000 обухвата 30' по географској дужини и 20' по географској ширини, што износи око 40 km по правцу запад-исток и око 37 km по правцу север-југ. Због једноставнијег приказа, приказана је геолошка карта Србије размере 1:2 000 000 (Слика 6.5).

Карта размере 1:500 000 настала је тзв. генерализацијом карата 1:100 000, а састоји се из шест листова који носе називе: Лист 1: Загреб, Лист 2: Нови Сад, Лист 3: Сарајево, Лист 4: Београд, Лист 5: Дубровник, Лист 6: Скопје.

За простор Србије, који је третиран у овом раду, коришћени су листови: Нови Сад, Београд и Скопје.

На основу информација о површинским густинама у геолошкој карти Србије, креиран је дигитални модел површинских густина резолуције једне лучне секунде у оба правца.



Слика 6.5: Геолошка карта Србије

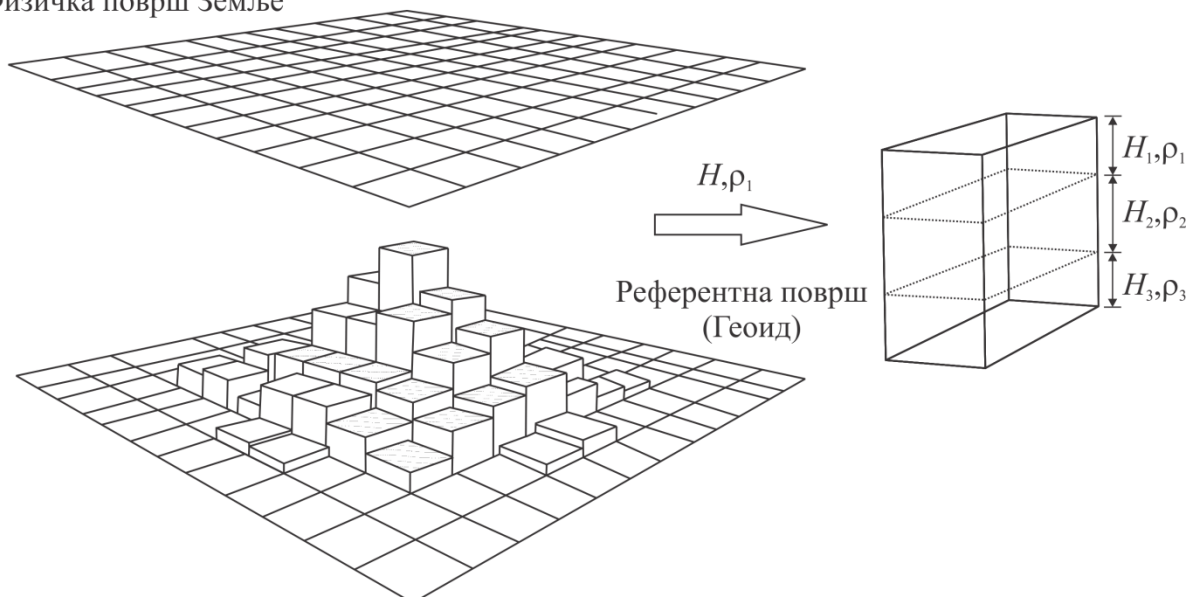
Подаци који су коришћени за креирање 2Д-ДМГ добијени су векторизацијом геолошке карте Србије, која је претходно генерализована на области са значајним променама густине (река Дунав, са густином $\rho = 1.00 \text{ gcm}^{-3}$ и распон густина топографије од $\rho_{\min} = 2.20 \text{ gcm}^{-3}$ до $\rho_{\max} = 2.80 \text{ gcm}^{-3}$). Са тако генерализоване геолошке карте Србије, извршена је трансформација области са значајним вредностима густина у дигитални облик. Материјал је архивиран у облику низа тачака, при чему су за сваку тачку познате координате у Гаус-Кригеровој пројекцији (елипсоид Бесела) и додељена је вредност густине области којој тачка припада.

На основу овако припремљених података креиран је дигитални модел површинских густина резолуције једне лучне секунде у оба правца применом опште аритметичке средине (примењен је исти поступак као при креирању дигиталног модела терена). За креирање дигиталног модела површинских густина

ван граница Републике Србије коришћена је вредност константне густине $\rho = 2.67 \text{ gcm}^{-3}$.

За креирање дигиталног модела густина, од физичке површи Земље до геоида, топографске масе су представљене у функцији двеју величина: висине центра призме од геоида (H) и површинске густине призме (ρ_1) (Слика 6.6). Висине тачака H преузете су из дигиталног модела терена, док је вредност густине преузета из дигиталног модела површинских густина.

Физичка површ Земље



Слика 6.6: Подела призме на слојеве до геоида

На основу критеријума приказаних у Табели 6.1 дефинисане су висине појединих слојева призми и њихове густине, при чему су величине у табели (Старчевић, М., 2011; Васиљевић, И., 2013): $H(\text{m})$ -висина из ДМТ, ρ_1 -густина на површини терена, ρ_2 -густина средњег слоја која се добија по формули $\rho_2 = \left(\frac{\rho_1 + 2.80}{2} \right)$, GS -густина одговарајућег слоја, VS -висина слоја у процентима од укупне висине из ДМТ.

Табела 6.1: Критеријуми за дефинисање висина и густина слојева призме

| H (m) | ρ_1 | Слој | |
|------------|-------------|----------|----------|
| | | GS | VS (%) |
| ≤ 100 | 2.20 | 2.20 | 30 |
| | | 2.30 | 70 |
| ≤ 100 | 2.21 - 2.30 | ρ_1 | 30 |
| | | 2.40 | 70 |
| ≤ 100 | > 2.30 | ρ_1 | 100 |
| > 100 | ≤ 2.20 | ρ_1 | 10 |
| | | ρ_2 | 50 |
| | | 2.80 | 40 |
| | 2.21 - 2.30 | ρ_1 | 20 |
| | | ρ_2 | 40 |
| | | 2.80 | 40 |
| | 2.31 - 2.40 | ρ_1 | 10 |
| | | ρ_2 | 50 |
| | | 2.80 | 40 |
| | 2.41 - 2.50 | ρ_1 | 20 |
| | | ρ_2 | 40 |
| | | 2.80 | 40 |
| | 2.51 - 2.60 | ρ_1 | 30 |
| | | ρ_2 | 40 |
| | | 2.80 | 30 |
| | 2.61 - 2.70 | ρ_1 | 30 |
| | | ρ_2 | 40 |
| | | 2.80 | 30 |
| | > 2.70 | ρ_1 | 50 |
| | | 2.80 | 50 |

Поред ових критеријума, дефинисан је и критеријум за водене површине у Србији када је густина $\rho_1 = 1.00 \text{ gcm}^{-3}$. Критеријум за веће водене токове геометријски је решен дефинисањем једначине праве која описује ток реке Дунав на територији Србије и зависи само од положаја тачака (координате тачака су у Гаус-Кригеровој пројекцији у односу на елипсоид GRS80) (Табела 6.2). Величине у табели дефинисане су следећим једнакостима, које представљају геометријско решење:

$$y_b = 2.65655 \cdot x - 15312771.43,$$

$$H_{2a} = H - 10 \text{ m},$$

$$H_{2b} = 0.5 \cdot (H - 10 \text{ m}),$$

$$H_{3b} = 0.5 \cdot (H - 10 \text{ m}).$$

Табела 6.2: Критеријуми за дефинисање висине и густине слоја за водене површине

| Координате | ρ_1 | Слој | |
|---------------------------|----------|-----------|---------------|
| | | <i>GS</i> | <i>VS</i> (m) |
| $x \leq 7551667$ | 1.00 | 1.00 | 10 m |
| | | 2.30 | H_{2a} |
| $x > 7613000, y \geq y_b$ | 1.00 | 1.00 | 10 m |
| | | 2.30 | H_{2a} |
| $x > 7551667, y < y_b$ | 1.00 | 1.00 | 10 m |
| | | 2.50 | H_{2b} |
| | | 2.80 | H_{3b} |

На основу овако дефинисаних критеријума, креиран је дигитални модел густина за потребе моделирања гравитационог утицаја топографских маса у поступку решавања граничних проблема потенцијала Земљине теже.

6.1.4. Глобални геопотенцијални модел

Глобални геопотенцијални модели (GGM) добијају се решавањем проблема граничних вредности гравитационог потенцијала за сферу и представљају модел сферних хармоника. Успешно се користе за рачунање физичких параметара поља убрзања силе теже за било коју тачку на физичкој површи Земље, од који су најважнији:

- поремећајни потенцијал,
- ундулација геоида,
- аномалија убрзања силе теже,
- поремећајно убрзање силе теже,
- компоненте отклона вертикала.

Ови модели представљају дуготаласни, углачани модел поља убрзања силе теже који не садржи локалне, детаљне карактеристике поља.

Данас постоји низ јавно доступних података сателитских мисија као што је: CHAMP (Challenging Mini-Satellite Payload, мисија започета 2000. године), GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment, мисија започета 2002. године), GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer, мисија започета 2009. године), EIGEN-6C2 (European Improved Gravity 6C2), као и EGM2008 који је креиран од стране NGA (National Geospatial-Intelligence Agency, United States of America).

Израз за аномалијски потенцијал у функцији (ортонормираних) сферних хармоника представља основни израз којим се долази до вредности дуготаласних карактеристика функционала аномалијског потенцијала (Rapp, R., 1990):

$$T_{GGM} = \frac{kM}{r} \sum_{n=2}^{N_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos m\lambda + \bar{K}'_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos\theta), \quad (6.2)$$

где је kM производ универзалне гравитационе константе и масе Земље, N_{\max} максимални степен модела, n, m степен и ред, a велика полуоса елипсоида усвојеног референтног система, r, θ, λ сферне координате тачака, $\bar{J}'_{nm}, \bar{K}'_{nm}$ коефицијенти глобалног геопотенцијалног модела EGM2008, \bar{J}_{nm}^U ортонормирани коефицијенти сферно хармонијског развоја нормалног поља, $\bar{P}_{nm}(\theta)$ ортонормиране Лажандрове функције,

$$\bar{P}_{nm}(\cos\theta) = \sqrt{\frac{k(2n+1)(l-m)!}{(l+m)!}} P_{nm}(\cos\theta), \quad k=1 \text{ за } m=0 \text{ и } k=2 \text{ за } m \neq 0,$$

$$P_{nm}(\cos\theta) = P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2-1)^n, \quad \text{за } t = \cos\theta.$$

За одређивање дуготаласне карактеристике функционала примењени су изрази који су дефинисани на основу теоријски дефинисаних односа аномалијског потенцијала и његових линеарних функционала:

$$\Delta g_{GGM} = \frac{kM}{r^2} \sum_{n=2}^{N_{\max}} (n-1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}^U_{nm}) \cos m\lambda + \bar{K}'_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \quad (6.3)$$

$$\zeta_{GGM} = \frac{kM}{r\gamma} \sum_{n=2}^{N_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}^U_{nm}) \cos m\lambda + \bar{K}'_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \quad (6.4)$$

Тачност са којом ће дуготаласне карактеристике бити одређене зависи од тачности са којом су одређени коефицијенти глобалног модела, као и од степена и реда глобалног модела.

6.1.5. Резидуални модел терена

Резидуални модел терена представља глатку референтну површ или средњу елевациону површ, односно филтрирани ДМТ.

Може се дефинисати на два различита начина. Један од начина за креирање РТМ је сферно-хармонијски развој топографских маса у ред, при чему резолуција референтне површи одговара максималном степену глобалног геопотенцијалног модела. Други начин подразумева да се РТМ конструише применом *moving average* (МА) оператора на дигитални модел терена.

У оквиру овог истраживања, РТМ је конструиран применом МА оператора на ДМТ резолуције једне лучне секунде у оба правца. Висина H_{ref}^{MA} применом МА се може одредити као (Hirt, С., 2010):

$$H_{ref}^{MA}(k, l) = \frac{1}{(2n+1)(2n+1)} \sum_{i=-n}^n \sum_{j=-n}^n H(k+i, l+j), \quad (6.5)$$

где је H матрица која садржи податке ДМТ, а (k, l) је пар индекса који означава тачку рачунања. Једначина (6.5) користи филтер “прозор” квадратног облика који

је центриран на тачке прорачуна. Параметар n се може одредити у зависности од ширине прозора за филтрирање w и резолуције ДМТ ΔB :

$$n = \text{int}\left(\frac{w}{2\Delta B}\right), \quad (6.6)$$

при чему је ширина филтер “прозора” прилагођена просторној резолуцији глобалног геопотенцијалног модела

$$w = \frac{180^\circ}{N_{\max}}. \quad (6.7)$$

У случају примене модела EGM2008, чији је максимални степен $N_{\max} = 2190$, ширина филтер прозора је 5 лучних минута.

Као што је речено, РТМ подаци се користе за одређивање краткоталасне карактеристике функционала аномалијског потенцијала. У том случају, за тачке на физичкој површи Земље у којима су измерене вредности убрзања силе Земљине теже, одговарајуће висине на површи РТМ одређене су интерполацијом. Примењен је метод инверзног растојања (енгл. *Inverse Distance to a Power*) који за рачунање висине интерполоване тачке H^* користи висине суседних тачака H_i које се налазе унутар задатог радијуса за претраживање. Висине H_i су пондерисане обрнуто сразмерно квадрату растојања од тачке чија се висина интерполује до суседних тачака (може бити и неки други степен):

$$H^* = \frac{\frac{1}{d_1^2} H_1 + \frac{1}{d_2^2} H_2 + \dots + \frac{1}{d_n^2} H_n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i^2}}.$$

6.2. ПРИПРЕМА ПОДАТАКА

У циљу добијања датумски хомогених података за нумеричка истраживања, било је неопходно извршити припрему доступних података, односно извршити низ трансформација:

- трансформисати висине тачака детаљног гравиметријског премера из система висина у употреби НВТ1 у систем нормалних висина мреже НВТ2,
- трансформисати вредности убрзања из Потсдамског система у систем IGSN71,
- трансформисати координате тачака са Беселовог елипсоида на елипсоид GRS80, на основу параметара трансформације, одређених на основу заједничких тригонометријских тачака у системима Бесел–GRS80.

На тај начин је формиран скуп тачака ДГП, чије се геодетске координате односе на елипсоид GRS80, висине на систем нормалних висина мреже НВТ2, а вредности мереног убрзања силе теже изражене су у систему IGSN71.

Након формирања датумски хомогеног скупа тачака, извршена је његова анализа у погледу тачности и просторног распореда и одабран је адекватан скуп података за даља нумеричка истраживања.

6.2.1. Трансформација висина тачака детаљног гравиметријског премера

Трансформација висина тачака ДГП извршена је на основу заједничких репера мрежа НВТ1 и НВТ2 (Слика 6.7, Табела 6.3). Из резултата приказаних у табели 6.3 може се закључити да максимална вредност разлика висина НВТ2 и НВТ1 износи -41 cm, што утиче на убрзање силе Земљине теже приближно 0.13 mGal (при чему је усвојено да је градијент реалног убрзања једнак градијенту нормалног убрзања).



Слика 6.7: Просторни распоред заједничких репера мрежа НВТ1 и НВТ2

Табела 6.3: Статистички подаци разлика висина НВТ2 и висина НВТ1

| Параметар | Број | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|-----------------|------|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| $H^2 - H^1$ [m] | 1357 | -0.41 | -0.20 | -0.33 | 0.03 |

Коришћењем 1357 вредности разлика висина оцењени су коефицијенти површи другог степена облика (Табела 6.4):

$$\Delta H^0 = H^2 - H^1 = f(B, L) = k_1 L^2 + k_2 BL + k_3 B^2 + k_4 L + k_5 B + k_6, \quad (6.8)$$

где је ΔH^0 разлика висина, H^2 нормална висина репера у мрежи НВТ2, H^1 висина репера у мрежи НВТ1, B, L геодетске координате репера у односу на Беселов елипсоид, k_i , $i = 1, \dots, 6$ непознати коефицијенти.

Приближне вредности коефицијената могу се одредити коришћењем 6 разлика, а усвајањем претпоставки да срачунате разлике $H^2 - H^1$ немају систематских грешака, као и то да су све одређене са истом тачношћу, коефицијенте је могуће одредити применом методе најмањих квадрата.

За сваку тачку детаљног гравиметријског премера, коришћењем оцењених вредности коефицијената, одређена је поправка висина за прелаз у систем нормалних висина мреже НВТ2.

Табела 6.4: Оцењене вредности коефицијената површи другог степена

| Коефицијент | \hat{k}_1 | \hat{k}_2 | \hat{k}_3 | \hat{k}_4 | \hat{k}_5 | \hat{k}_6 |
|------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Оцене коефицијената | 0.00025 | 0.00676 | 0.00653 | -0.31765 | -0.74242 | 19.99838 |

Додавањем поправака на висине тачака ДГП добијен је скуп у којем се све нормалне висине односе на систем нормалних висина НВТ2.

6.2.2. Трансформација вредности убрзања из Потсдамског система у систем IGSN71

Нова основна гравиметријска мрежа тачака, размештених широм света са одговарајућим вредностима апсолутног убрзања силе Земљине теже, под називом Међународна стандардна гравиметријска мрежа IGSN71, усвојена је у Москви 1971. године на генералном заседању Међународне асоцијације за геодезију и геофизику (International Association of Geodesy-IAG).

У IGSN71 су укључене и тачке наше основне гравиметријске мреже, што свакако мења апсолутни ниво и размеру мреже. Апсолутни ниво мреже мења се за око 15 mgal, а размера мреже за око 1%. Вредност убрзања силе Земљине теже на тачки основне мреже у Београду у систему IGSN71 одређена је са тачношћу од око 0.06 mgal.

Резултати мерења убрзања Земљине теже на територији Србије могу се одредити у систему IGSN71 на основу израза (Grašić, M., 1976):

$$g_{\text{IGSN71}} = 980592.54 + 1.001427 (g_{\text{Potsdam}} - 980607.66), \quad (6.9)$$

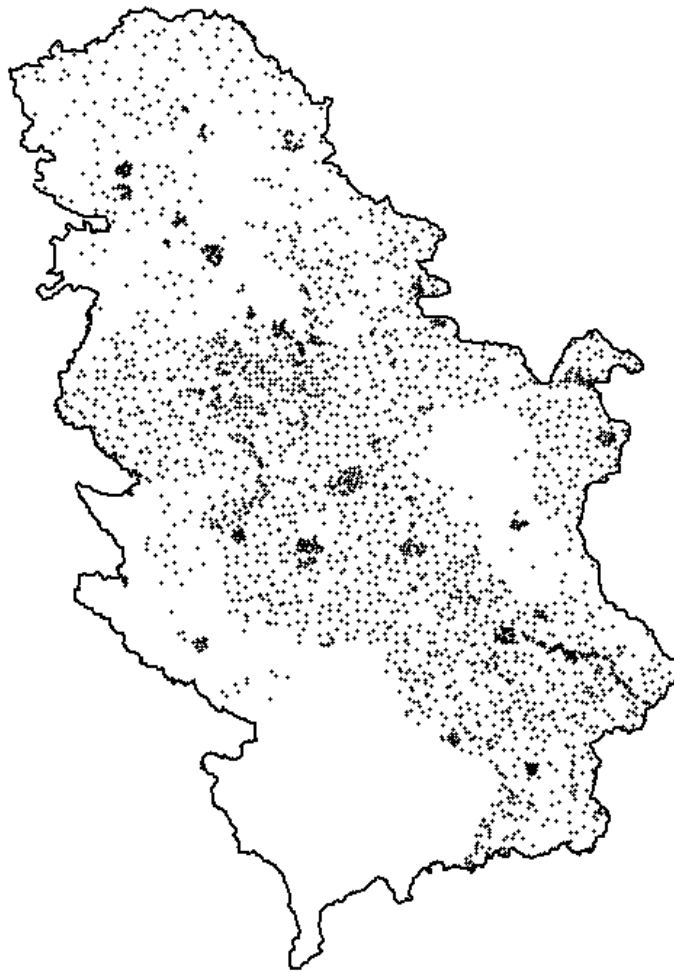
где је 980592.54 mgal вредност убрзања силе Земљине теже у тачки у Београду у систему IGSN71, 1.001427 фактор размере између Потсдамског и IGSN71 система и 980607.66 mgal вредност убрзања силе Земљине теже на тачки Београд у Потсдамском систему.

На тај начин је убрзање силе теже у свим тачкама ДГП одређено и у систему IGSN71.

6.2.3. Трансформација координата тачака на елипсоид GRS80

У оквиру свих прорачуна за референтни систем усвојен је међународни терестрички референтни систем ITRS. Сагласно препорукама IAG, за одређивање нормалног потенцијала ITRS систему се придружује елипсоид GRS80. Глобални координатни систем елипсоида GRS80 оријентисан је тако да се координатни почетак налази у центру масе Земље, Z -оса је у правцу и смеру конвенционалног земаљског пола, X -оса је у правцу Гриничког меридијана и равни екватора и Y -оса 90° источно од X -осе, формира десно оријентисан, геоцентричан и ортогонални координатни систем.

За потребе датумске трансформације и одређивање параметара трансформације између два система, обезбеђене су координате тригонометријских тачака у односу на Беселов елипсоид, као и њихове координате које су одређене применом глобалног система за позиционирање (ГПС) у систему ITRS, односно оквиру ITRF96, за епоху 1998.7 (Слика 6.8). Тригонометријске тачке представљају саставни део свих тригонометријских мрежа, од 1. до 4. реда, као и низа градских тригонометријских мрежа (Bratuljević i ostali, 1995).



Слика 6.8: Просторни распоред заједничких тригонометара

Коришћењем 2905 координата тригонометријских тачака у оба система, оцењено је седам параметара трансформације (Табела 6.5), а затим извршена датумска трансформација тачака ДГП у односу на елипсоид GRS80.

Поступак трансформације је извршен на следећи начин:

- елипсоидне координате тачака које се односе на Беселов елипсоид трансформисане су у координате правоуглог координатног система придруженог Беселовом елипсоиду:

$$(B, L, h)_{\text{Besel}} \rightarrow (X, Y, Z)_{\text{Besel}},$$

при чему су се уместо елипсоидних висина тачака користиле њихове ортометријске висине,

- на основу познатих параметара трансформације, извршена је датумска трансформација:

$$(X, Y, Z)_{\text{Besel}} \rightarrow (X, Y, Z)_{\text{GRS80}},$$

- а затим су одређене елипсоидне координате тачака у односу на елипсоид GRS80:

$$(X, Y, Z)_{\text{GRS80}} \rightarrow (B, L, h)_{\text{GRS80}}.$$

Изрази коришћени за трансформације су следећи:

- $(B, L, h)_{\text{Besel}} \rightarrow (X, Y, Z)_{\text{Besel}} :$

$$X = (N + h) \cos B \cos L,$$

$$Y = (N + h) \cos B \sin L,$$

$$Z = \left(N \frac{b^2}{a^2} + h \right) \sin B,$$

где је

$$N = \frac{a}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}},$$

- $(X, Y, Z)_{\text{Besel}} \rightarrow (X, Y, Z)_{\text{GRS80}} :$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{GRS80}} = \mathbf{T} + \mu \mathbf{R} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{Besel}},$$

где је

$$\mathbf{T} - \text{вектор са параметрима транслације, } \mathbf{T} = [T_x \ T_y \ T_z]^T,$$

μ - параметар размере,

\mathbf{R} - матрица ротације координатних оса, при чему су $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ углови ротације око координатних оса,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 & \cos \alpha_1 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 & \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 \\ -\cos \alpha_2 \sin \alpha_3 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 & \sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \\ \sin \alpha_2 & -\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \end{bmatrix}$$

- $(X, Y, Z)_{\text{GRS80}} \rightarrow (B, L, h)_{\text{GRS80}} :$

$$B = \arctg \frac{Z + e'^2 b \sin^3 \theta}{p - e^2 a \cos^3 \theta},$$

$$L = \arctg \frac{Y}{X},$$

$$h = \frac{P}{\cos B} - N, \text{ где је } p = \sqrt{X^2 + Y^2} \text{ и } \theta = \arctg \frac{Za}{pb}.$$

Табела 6.5: Оцењене вредности параметара датумске трансформације

| Параметар | Оцењена вредност параметра | Јединице |
|------------|----------------------------|----------|
| T_x | 567.36783 | m |
| T_y | 157.51196 | m |
| T_z | 375.49697 | m |
| α_x | -5.25165 | “ |
| α_y | 0.91613 | ” |
| α_z | 12.58706 | ” |
| μ | 1.0000109273 | нема |

Након трансформације тачака гравиметријског премера, координатама B^{GRS80} и L^{GRS80} придружене су нормалне висине у систему НВТ2, тако да тачке гравиметријског премера имају координате као уређену тројку бројева $(B^{GRS80}, L^{GRS80}, H^N)$.

6.3. ПОДЕЛА ТОПОГРАФСКИХ МАСА НА ПРАВЕ ПРАВОУГАОНЕ ПРИЗМЕ

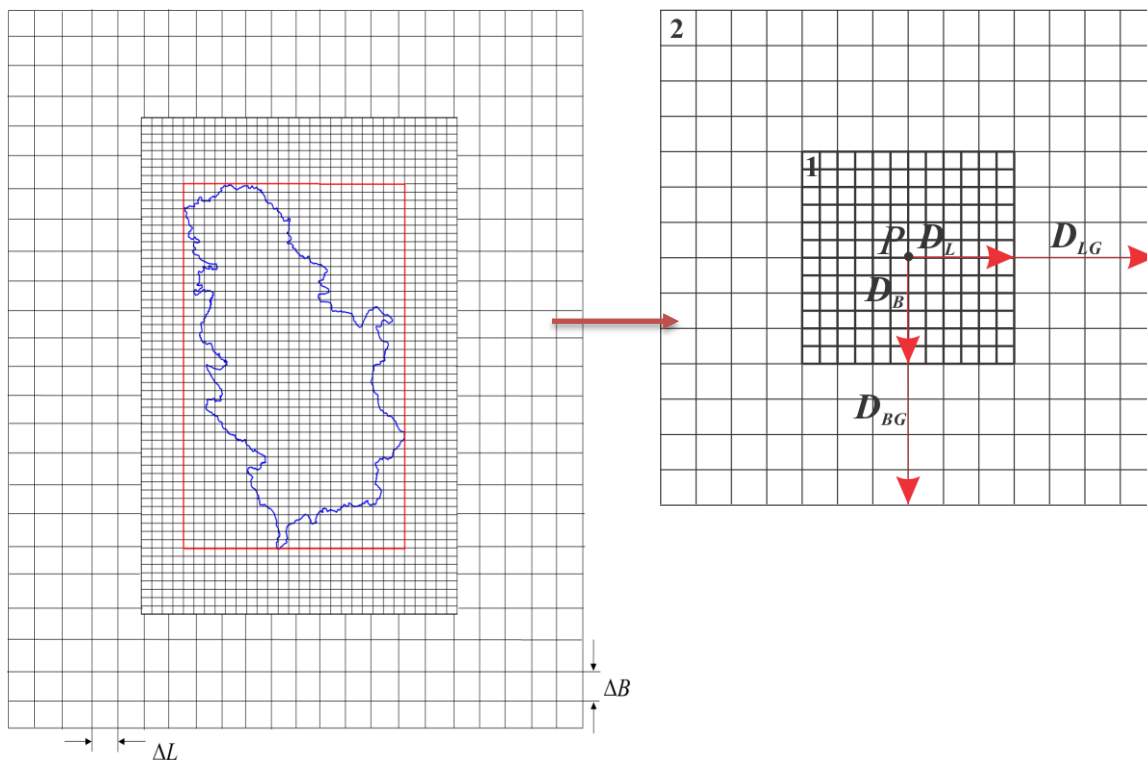
Све већи захтеви, при одређивању геоида центиметарске тачности, као што су доступност ДМТ у већој резолуцији и могућност проширења области интеграције код моделирања топографских маса, указују на додатно решавање проблема као што је оптималан полупречник области интеграције, негативна вредност теренске

корекције услед закривљености Земље, као и оптимизација самог поступка за моделирање гравитационог утицаја топографских маса.

Приликом одређивање гравитационог утицаја топографских маса могу се посебно разматрати утицаји локалних и удаљених топографских маса, због тога што локалне масе имају далеко већи гравитациони утицај на аномалијски потенцијал и његове функционале (Forsberg, R.). У великом броју радова утврђено је да је највећи утицај топографских маса до 20 km од тачке прорачуна (Одаловић, О., 2005; Hwang, С., 2003).

За одређивање утицаја локалних топографских маса коришћени су подаци “деталног” дигиталног модела терена Србије резолуције једне лучне секунде у оба правца, док су за утицај удаљених топографских маса коришћени подаци глобалног модела SRTM. Како је резолуција SRTM три лучне секунде у оба правца, за моделирање утицаја удаљених топографских маса креиран је “груби” дигитални модел терена резолуције 15 лучних секунди у оба правца (Sanso, F., Sideris, G., 2013). Нумеричким истраживањем утврђено је да се употребом “грубљег” модела терена (ДМТ мање резолуције) губи информација о гравитационом утицају удаљених топографских маса. Како се гравитациони утицаји топографских маса смањују се удаљавањем од тачке прорачуна, нумеричким истраживањем је установљено да је гравитациони утицаји топографских маса на функционале аномалијског потенцијала након 200 km од тачке рачунања мањи од 0.01 mgal .

На слици 6.9 приказане су границе локалних и удаљених топографских маса: D_B - у правцу геодетске латитуде и D_L -у правцу геодетске лонгитуде дефинишу границе локалних топографских маса (поље 1) чији се гравитациони утицај одређује из података деталног модела терена, D_{BG} и D_{LG} представљају границе удаљених топографских маса које су описане грубим дигиталним моделом терена.



Слика 6.9: Утицај локалних и удаљених маса

На тај начин, детаљни дигитални модел терена коришћен је на растојању $D_B = 11'$ и $D_L = 16'$ од тачке прорачуна, што одговара растојању од око 20 km, док је за утицај удаљених маса коришћен груби дигитални модел терена на растојању $D_{BG} = 1^\circ 37'$ и $D_{LG} = 2^\circ 17'$ од тачке прорачуна (што одговара растојању од око 200 km).

У циљу примене затворених израза за гравитациони утицај топографских маса, неопходно је топографске масе поделити на праве правоугаоне призме.

Како што је објашњено у претходном поглављу, топографске масе око тачке рачунања P деле се на праве правоугаоне призме, а применом методе интеграције, укупан гравитациони утицај топографских маса на поље убрзања силе теже добија се сумирањем утицаја свих појединачних призма.

Призме су креиране на основу података дигиталног модела терена и дигиталног модела густина. Висина призме дефинисана је висином тачке која представља центар горње основе призме (висина из ДМТ), док су величине страна правоугаоне основе призме дефинисане резолуцијом ДМТ (величине страна су

1" × 1"). Како је за утицаје топографских маса ван границе Србије, коришћен груби дигитални модел терена SRTM, призме су креиране на основу података из модела SRTM. Свакој призми додељена је одговарајућа вредност густине сагласно табели 6.1 и табели 6.3, док је призмама из грубог модела SRTM додељена константна вредност густине $\rho_{const.} = 2.67 \text{ gcm}^{-3}$.

Координате левог темена доње основе и десног темена горње основе призме трансформисане су у раван Гаус-Кригерове пројекције у односу на елипсоид GRS80, управо из разлога што су формуле за потенцијал прилагођене за случај када y -оса представља пројекцију средњег меридијана и x -оса представља пројекцију екватора у равни.

Подаци за сваку призму архивирани су у облику текстуалне датотеке у којој су подаци редом:

- број призме
- координате центра горње основе призме (B, L) ,
- координате левог темена доње основе призме (x_1, y_1) ,
- висина доње основе призме (H_1) ,
- координате десног темена горње основе призме (x_2, y_2) ,
- висина горње основе призме (H_2) и
- одговарајућа густина (ρ) .

6.4. АНАЛИЗА И ФОРМИРАЊЕ ФИНАЛНОГ СКУПА ПОДАТАКА

Анализом квалитета и просторног распореда тачака гравиметријског премера, дефинисан је финални скуп података који ће се користити у даљим нумеричким истраживањима.

Спроведена је провера сагласности висина у свим тачкама ДГП (H) са висинама из дигиталног модела терена (H_{DMT}) и као критеријум квалитета усвојено је да у даљим прорачунима неће учествовати тачке премера у којима разлика висина $\Delta H = |H - H_{DMT}|$ прелази 15 m.

У геометријском смислу, тачке прорачуна морају имати правилан распоред на територији Републике Србије, резолуције 5 лучних минута (Слика 6.10, Табела

6.6). Финални скуп тачака који је коришћен у оквиру прорачуна чини укупно 5766 тачака гравиметријског премера, које задовољавају овако дефинисан критеријум квалитета и просторног распореда.



Слика 6.10: Просторни распоред тачака финалног скупа

Табела 6.6: Основни статистички подаци одабраног скупа тачака ДП

| Параметар | Број | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|---|------|-----------|-----------|-----------------|-----------------------|
| $g_{IGSN71} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ | 5766 | 9.7977566 | 9.8072132 | 9.80432863 | 0.002 |

Након формирања финалног скупа података одређене су аномалије слободног ваздуха.

6.4.1. Аномалије слободног ваздуха

Аномалије слободног ваздуха, узимајући у обзир и утицај атмосфере, могуће је одредити на основу израза:

$$\Delta g_{ASV} = g + \delta_A - \gamma_{H^N}, \quad (6.10)$$

при чему је g вредност мереног убрзања Земљине теже, δ_A атмосферска корекција, γ_{H^N} вредност нормалног убрзања силе теже на телуroidу.

Атмосферска корекција се може одредити према изразу:

$$\delta_A [\mu\text{ms}^{-2}] = 8.74 - 9.9 \cdot 10^{-4} \cdot H_{[\text{m}]} + 3.56 \cdot 10^{-8} \cdot H_{[\text{m}]}, \quad (6.11)$$

док је вредност нормалне теже могуће одредити (Heiskanen, W., Moritz, H., 2000):

$$\gamma_{H^N} = \gamma_0 - F \cdot H^N. \quad (6.12)$$

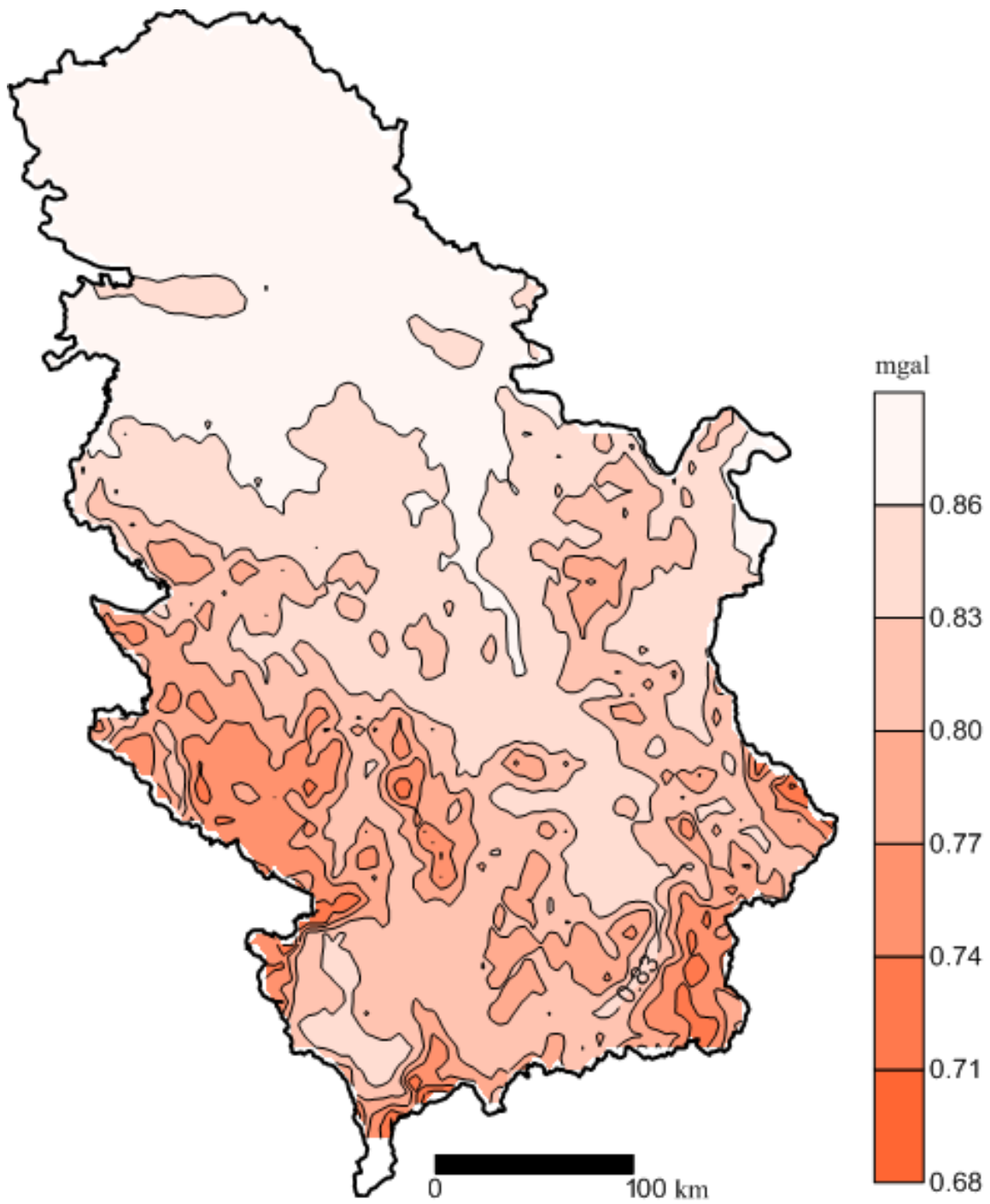
$F = -\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right) = +0.3086 \text{ mgal/m}$ представља градијент нормалног убрзања теже, док

се γ_0 , вредност нормалне теже на елипсоиду за тачку латитуде B , може одредити по формули Сомиланија

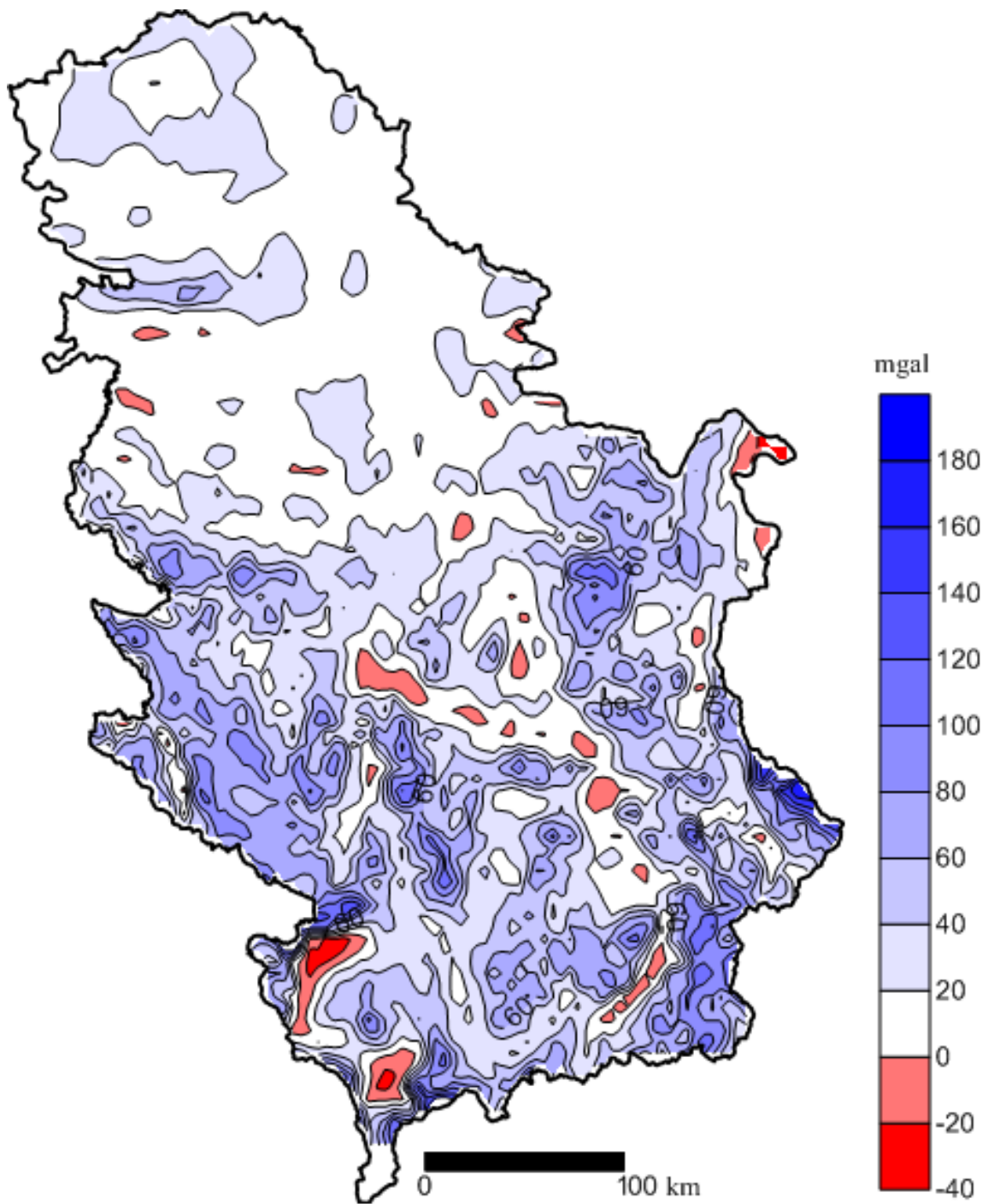
$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_a \cos^2 B + b\gamma_b \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \quad (6.13)$$

при чему су a и b велика и мала полуоса елипсоида, а γ_a и γ_b , вредности нормалне теже на екватору и полу.

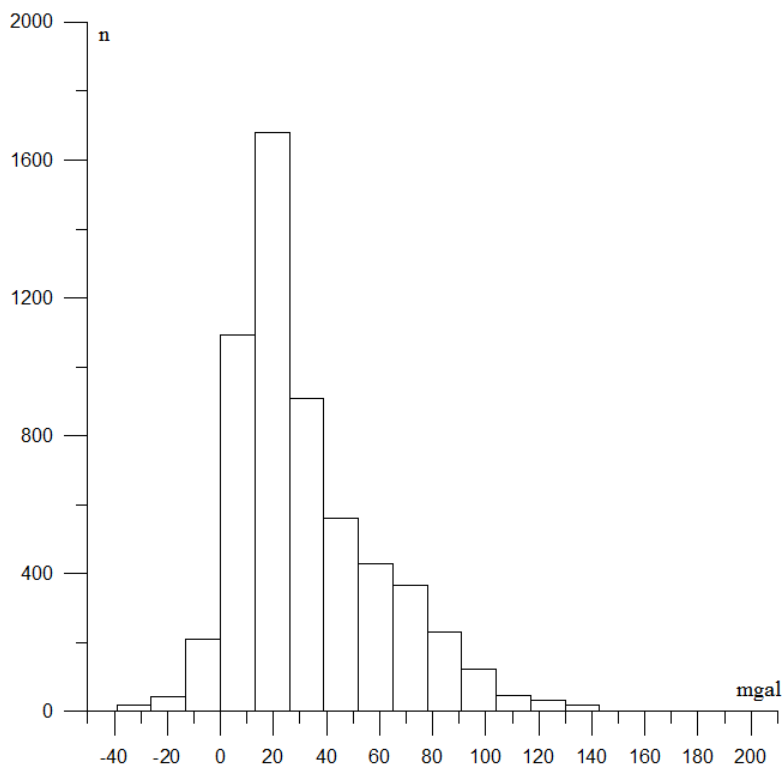
Основни статистички подаци за атмосферску корекцију и аномалије слободног ваздуха приказани су у Табели 6.7, а општи облици површи и хистограм за аномалије слободног ваздуха на Слици 6.11, 6.12 и 6.13, респективно.



Слика 6.11: Општи облик површи атмосферских корекција
(еквидистанца=0.03 mgal)



Слика 6.12: Општи облик површи аномалија слободног ваздуха
(еквидистанца=20 mgal)



Слика 6.13: Хистограм аномалија слободног ваздуха

Табела 6.7: ОСП атмосферске корекције и аномалија слободног ваздуха

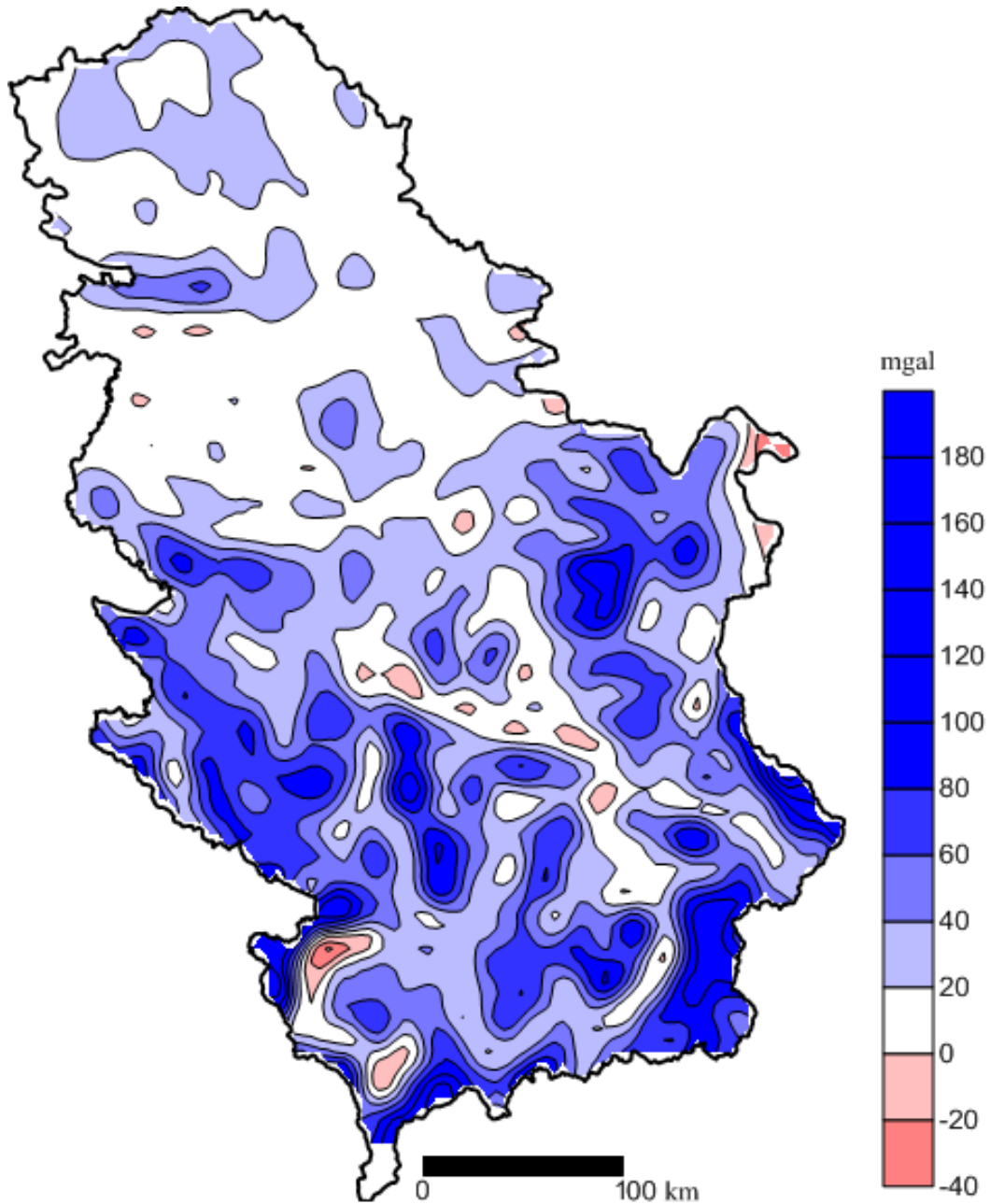
| Параметар | Број тачака | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|-------------------------|-------------|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| δ_A [mgal] | 5766 | 0.64 | 0.87 | 0.83 | 0.04 |
| Δg_{ASV} [mgal] | 5766 | -39.11 | 210.33 | 32.58 | 27.93 |

6.5. ДУГОТАЛАСНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ АНОМАЛИЈА СЛОБДНОГ ВАЗДУХА И АНОМАЛИЈСКИХ ВИСИНА

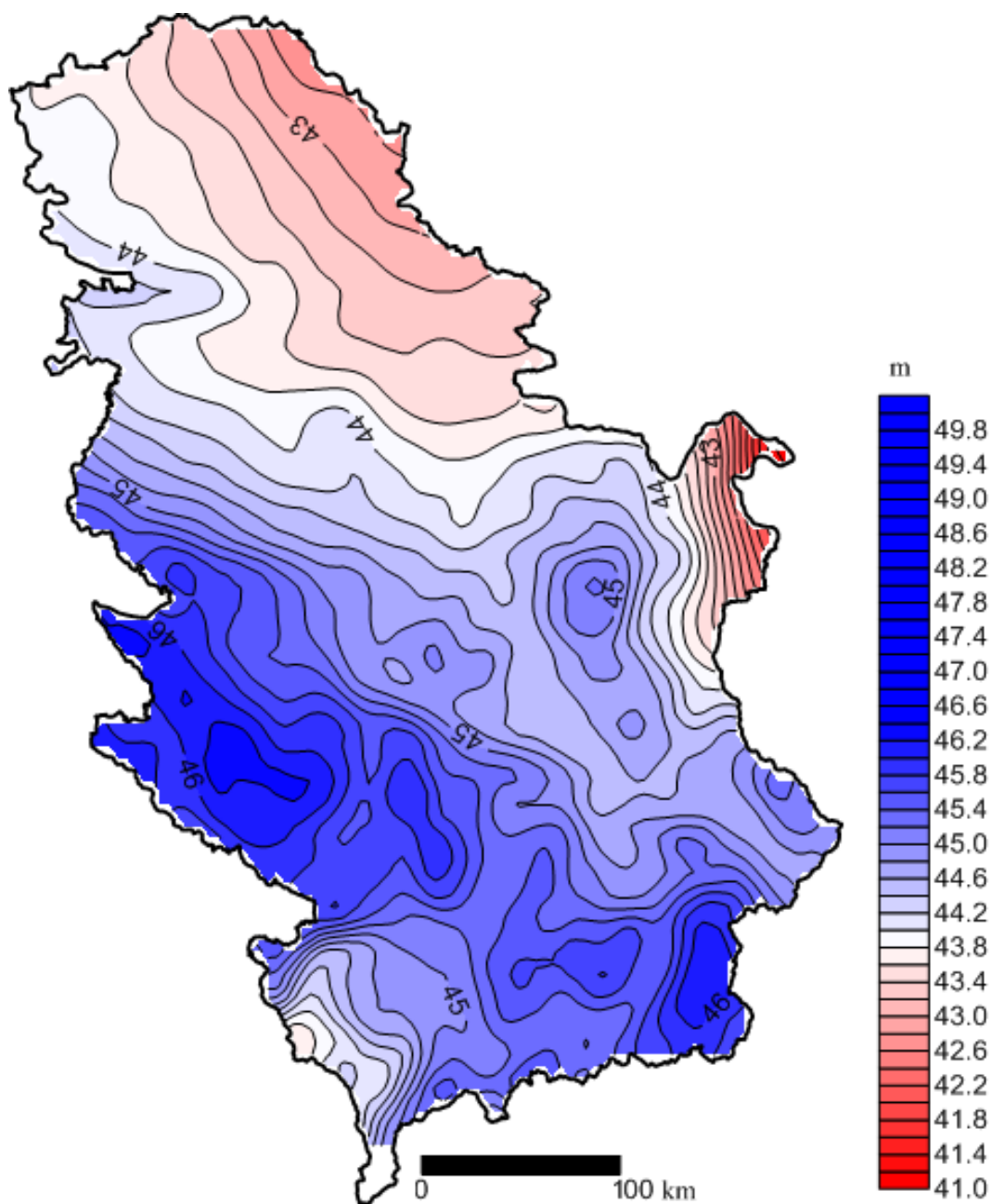
За одређивање дуготаласних карактеристика функционала аномалијског потенцијала данас је на располагању низ јавно доступних података сателитских мисија. У оквиру овог рада дуготаласне карактеристике аномалија убрзања и аномалијских висина одређене су коришћењем коефицијената глобалног геопотенцијалног модела EGM2008. Разлог употребе EGM2008 је највећи степен и ред модела ($N_{\max} = 2190$, $M_{\max} = 2159$), као и резултати ранијих истраживања на територији Србије (Odalović et al., 2013).

Дуготаласна карактеристика аномалија убрзања и аномалијских висина одређена је у тачкама финалног скупа ДГП, применом израза (6.3) и (6.4).

Основни статистички подаци за Δg_{GGM} и ζ_{GGM} приказани су у Табели 6.8, а општи облици површи на Сликци 6.14 и 6.15.



Слика 6.14: Општи облик површи аномалија убрзања одређених применом EGM2008
(еквидистанца=20 mgal)



Слика 6.15: Општи облик површи аномалијских висина одређених применом EGM2008
(еквидистанца=0.2 m)

Табела 6.8: ОСП дуготаласних карактеристика аномалија убрзања и аномалијских висина

| Параметар | Број тачака | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|-------------------------|-------------|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| Δg_{GGM} [mgal] | 5766 | -45.71 | 180.00 | 34.18 | 25.87 |
| ζ_{GGM} [m] | 5766 | 41.04 | 46.29 | 44.53 | 0.94 |

6.6. ГРАВИТАЦИОНИ УТИЦАЈ ТОПОГРАФСКИХ МАСА КОНСТАНТНЕ ГУСТИНЕ НА АНОМАЛИЈЕ УБРЗАЊА

У 5766 тачака финалног скупа ДГП одређени су утицаји топографских маса на аномалије убрзања са следећим параметрима:

- теренска корекција, са густином $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$ ($\Delta g_{\text{ТОРО}} = c^{2670}$),
- резидуални модел терена резолуције 5 лучних минута, са густином $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$ ($\Delta g_{\text{ТОРО}} = \Delta g_{\text{RTM5}}^{2670}$).

Основни статистички подаци прорачуна приказани су у наредној табели.

Табела 6.9: ОСП теренске корекције и утицаја RTM резолуције 5' са константном густином

| Параметар | Број тачака | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|--|-------------|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| c^{2670} [mgal] | 5766 | -0.01 | 37.68 | 1.98 | 2.69 |
| $\Delta g_{\text{RTM5}}^{2670}$ [mgal] | 5766 | -247.78 | 83.01 | -7.96 | 24.49 |

Како су у обзир узете топографске масе које су значајно удаљене од тачке рачунања, тада због закривљености Земљине површи, теренска корекција може променити знак и бити негативна, што се може уочити у резултатима приказаним у табели.

6.6.1. Резидуалне аномалије

Нумерички показатељи о предности неког од модела могу се утврдити, према условима дефинисаним у оквиру remove-restore методе, анализом вредности резидуалних аномалија убрзања. Резидуалне аномалије су одређене у свим тачкама скупа ДГП:

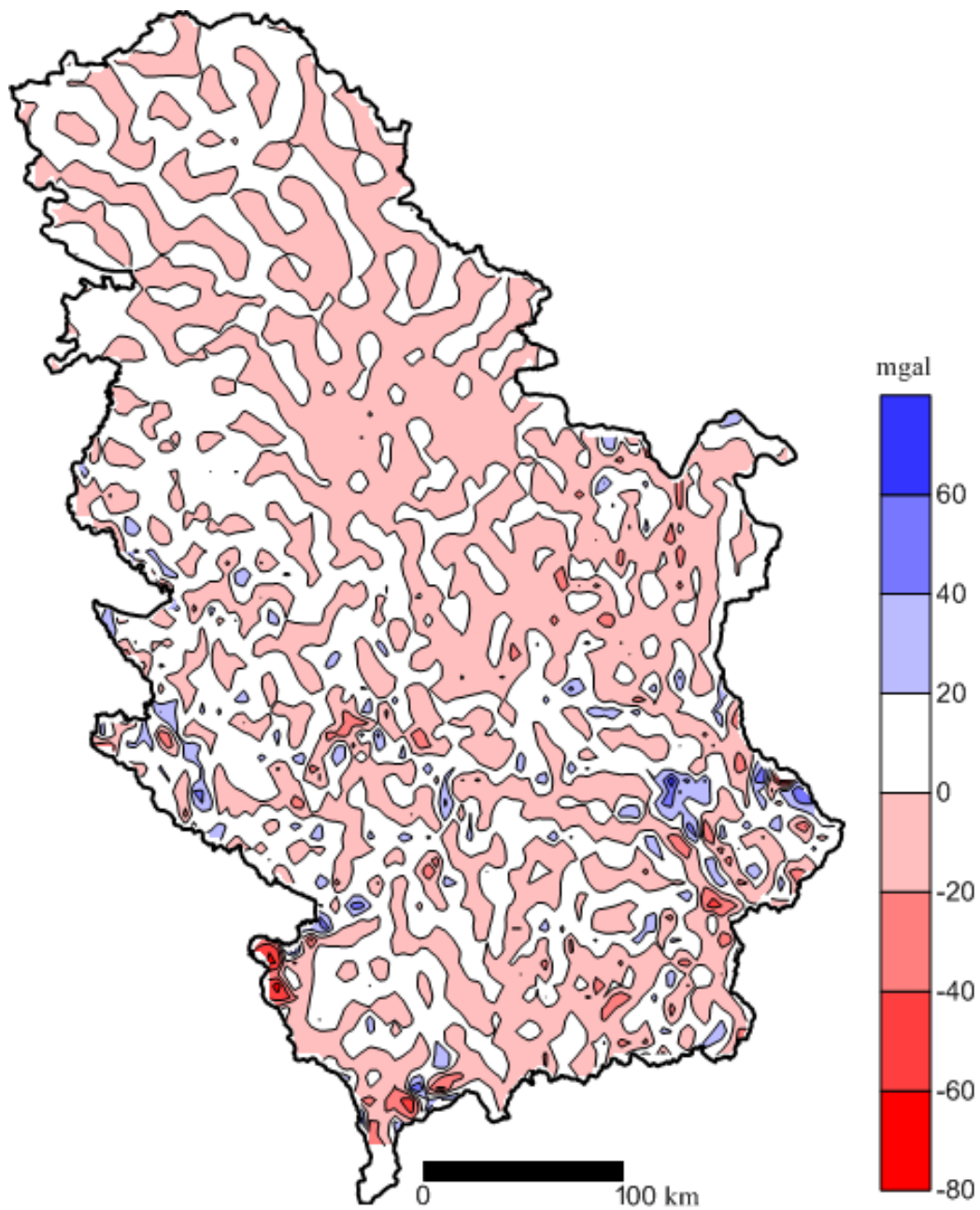
- применом теренске корекције

$$\Delta g_R^{c^{2670}} = \Delta g_{\text{ASV}} - \Delta g_{\text{GGM}} + c^{2670}, \quad (6.14)$$

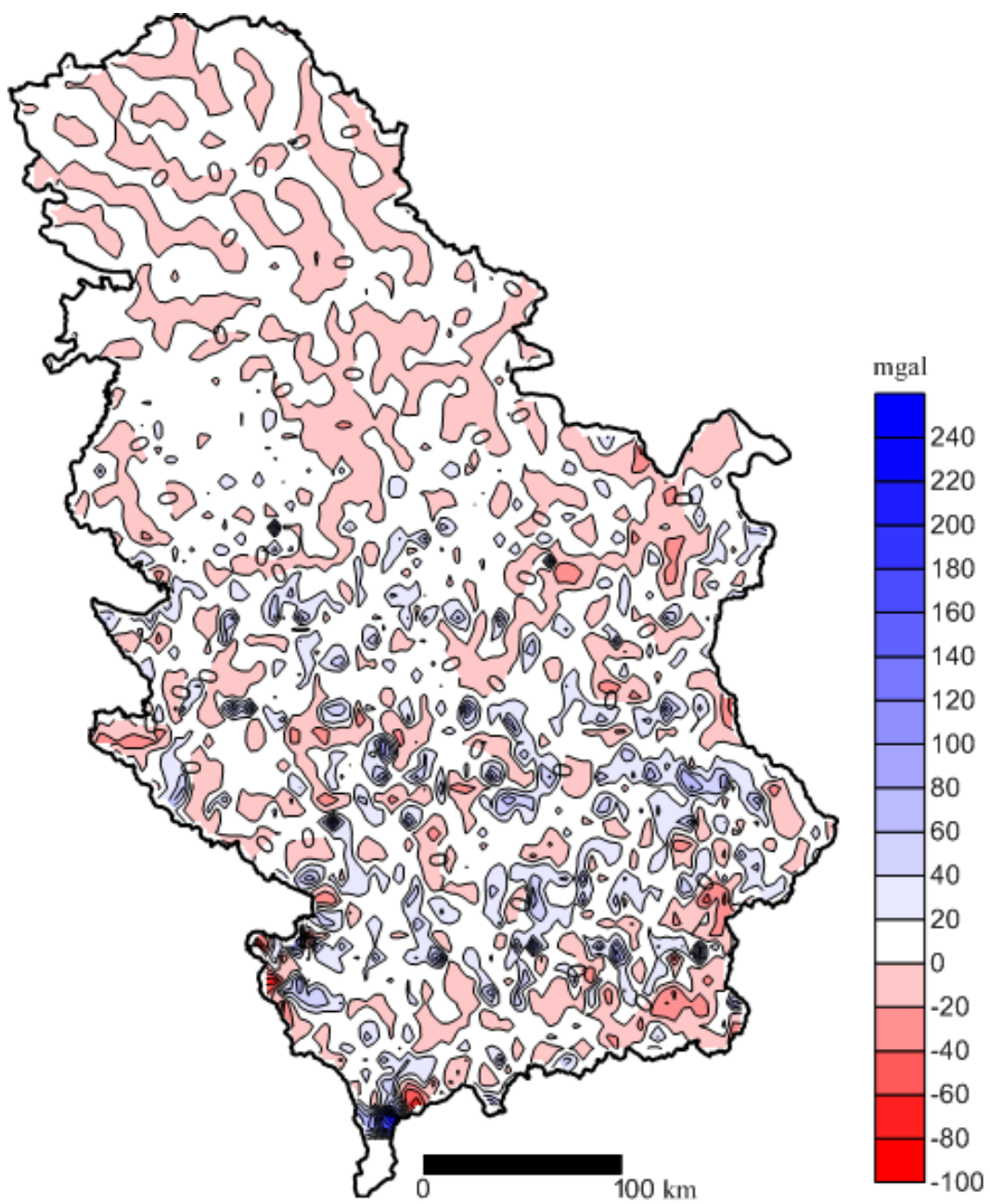
- применом резидуалног модела терена

$$\Delta g_R^{RTM5^{2670}} = \Delta g_{ASV} - \Delta g_{GGM} - \Delta g_{RTM5}^{2670}. \quad (6.15)$$

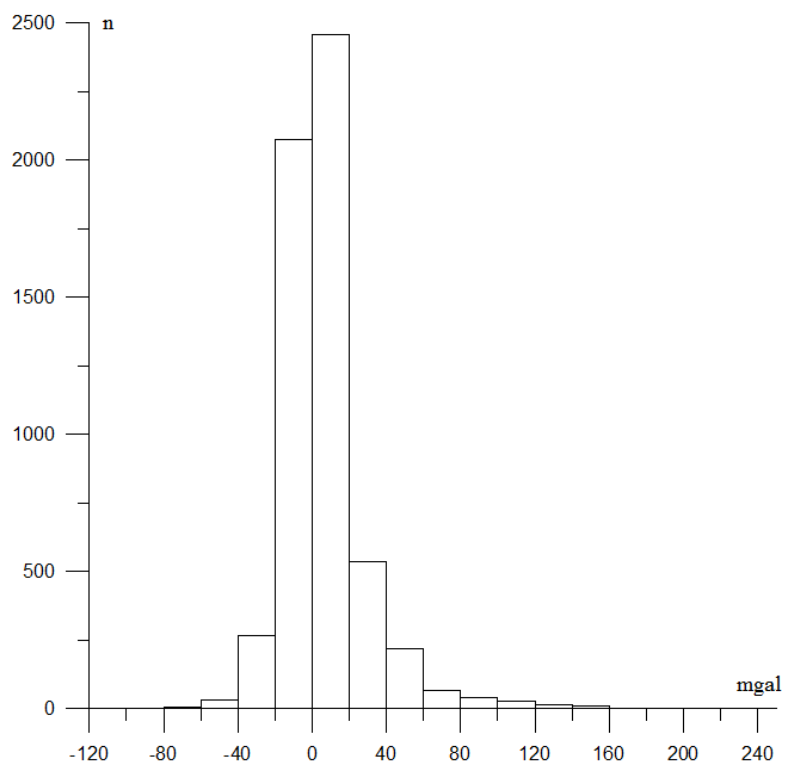
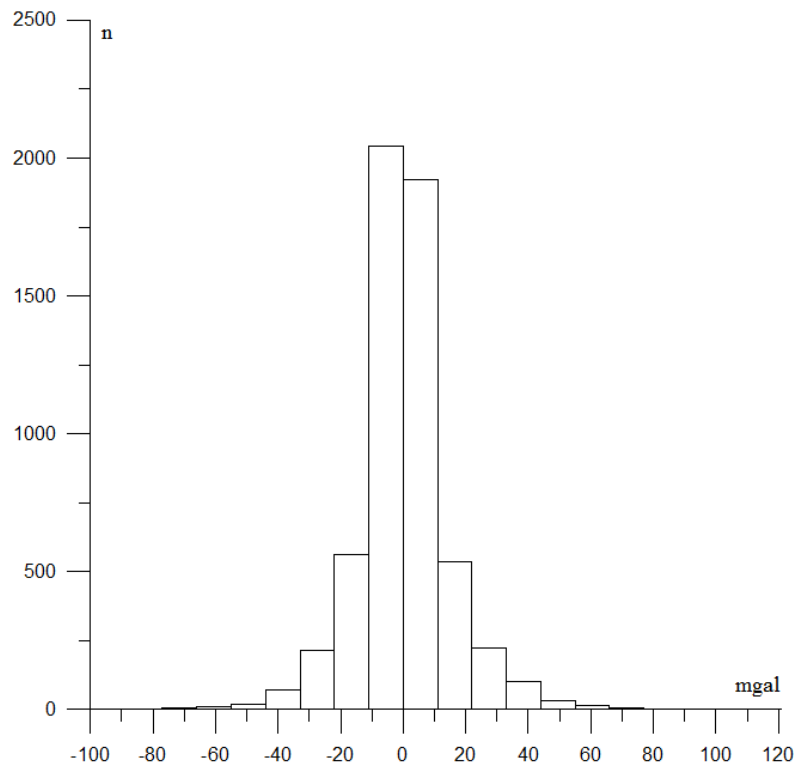
Основни статистички подаци резидуалних аномалија приказани су у Табели 6.10, а општи облици површи резидуалних аномалија и одговарајући хистограми приказани су на Слици 6.16, 6.17, 6.18, респективно.



Слика 6.16: Општи облик површи резидуалних аномалија применом теренске корекције (еквидистанца=20 mgal)



Слика 6.17: Општи облик површи резидуалних аномалија применом РТМ (резолюције 5')
(еквидистанца=20 mgal)



Слика 6.18: Хистограм резидуалних аномалија:
Горе: применом теренске корекције
Доле: применом РТМ (резолуције 5')

Табела 6.10: ОСП резидуалних аномалија са константном густином

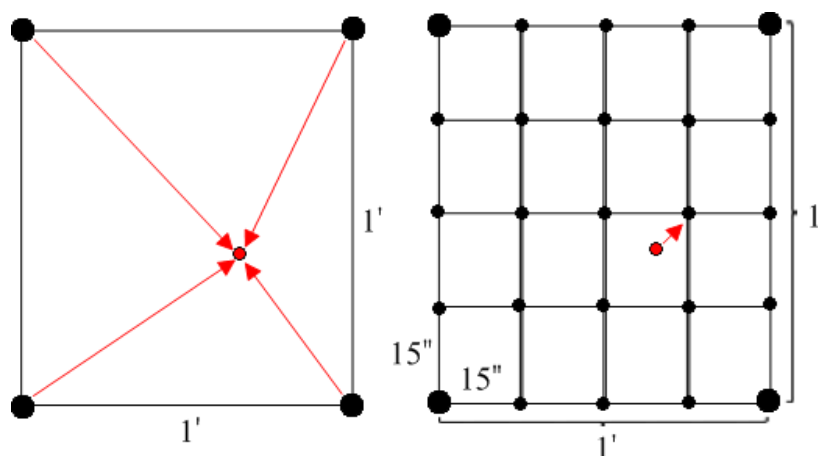
| Параметар | Број тачака | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|-----------------------------------|-------------|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| $\Delta g_R^{C^{2670}}$ [mgal] | 5766 | -84.31 | 118.56 | 0.38 | 14.70 |
| $\Delta g_R^{RTM5^{2670}}$ [mgal] | 5766 | -115.89 | 268.98 | 6.36 | 23.62 |

На основу приказаних резултата може се закључити да резидуалне аномалије применом РТМ резолуције пет лучних минута (5'), у поређењу са резидуалним аномалијама применом теренске корекције, не могу да обезбеде довољно глатку референтну површ погодну за пресликавање.

Како је дефинисањем различитих резолуција резидуалног модела терена могуће мењати карактеристике резидуалних резултата опажања, даља истраживања воде у правцу одређивања новог резидуалног модела терена веће резолуције, једне лучне минуте, са циљем да се добију бољи резидуални резултати у смислу услова дефинисаних remove-restore методом.

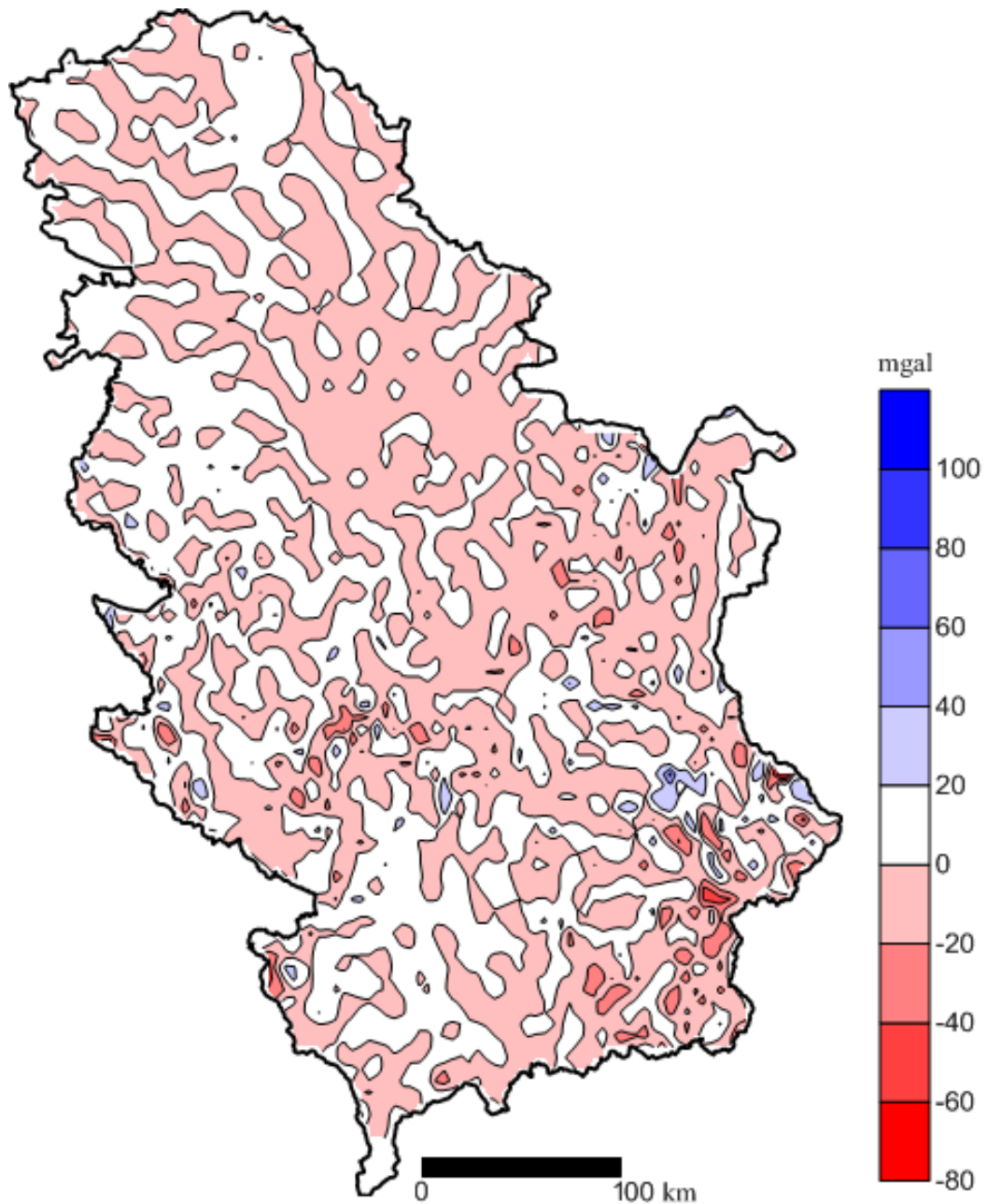
Након креирања РТМ резолуције једне лучне минуте (1'), урађена је подела истог на поља величине 15 лучних секунди (15").

РТМ је унапред припремљен управо из разлога да се избегну додатне интерполације висина тачака и тако убрза посупак рачунања (Слика 6.19). Једноставно, сада тачки на физичкој површи Земље одговара висина најближе тачке РТМ.

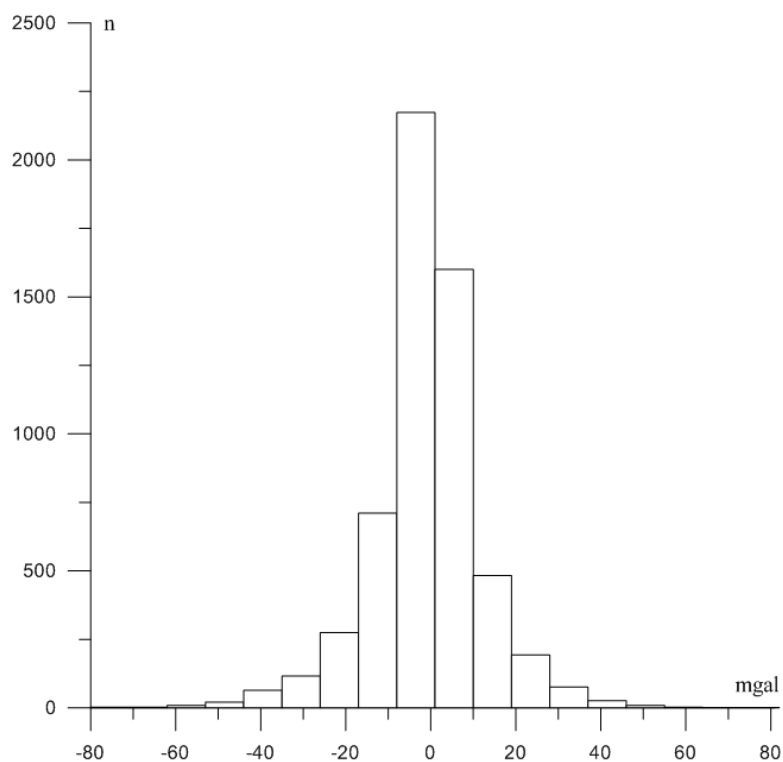


Слика 6.19: Припрема РТМ резолуције 1' за моделирање топографских маса

Основни статистички подаци утицаја РТМ резолуције једне лучне минуте на аномалије убрзања, као и вредности резидуалних аномалија приказани су у Табели 6.11, а општи облик површи и хистограм резидуалних резултата приказан је на Слици 6.20 и 6.21.



Слика 6.20: Општи облик површи резидуалних аномалија применом РТМ (резолуције 1')
(еквидистанца=20 mgal)



Слика 6.21: Хистограм резидуалних аномалија применом РТМ резолуције 1'

Табела 6.11: ОСП утицаја РТМ (1') на аномалије убрзања и одговарајуће резидуалне аномалије

| Параметар | Број тачака | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|-----------------------------------|-------------|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| Δg_{RTM1}^{2670} [mgal] | 5766 | -94.46 | 48.23 | -0.68 | 6.48 |
| $\Delta g_R^{RTM1^{2670}}$ [mgal] | 5766 | -80.72 | 81.80 | -0.92 | 12.87 |

Применом резидуалног модела терена резолуције једне лучне минуте у оба правца, добијени су резултати који, према условима дефинисаним у оквиру remove-restore методе, описују глатку површ, погоднију за предикцију аномалијских висина.

У наставку нумеричких истраживања, за моделирање утицаја топографских маса применом РТМ, коришћен је резидуални модел терена резолуције једне лучне минуте који је унапред припремљен и подељен на поља величине $15'' \times 15''$. Овако припремљени РТМ у даљем тексту ће се означавати са РТМ15.

6.7. РАЗЛИКА УТИЦАЈА ТОПОГРАФСКИХ МАСА НА АНОМАЛИЈЕ УБРЗАЊА СА ГУСТИНАМА ИЗ МОДЕЛА И КОНСТАНТНОМ ГУСТИНОМ

На основу креираног дигиталног модела густина, могуће је обезбедити информације о гравитационим утицајима топографских маса различитих густина на вредност аномалија убрзања, а након пресликавања и на вредност аномалијских висина.

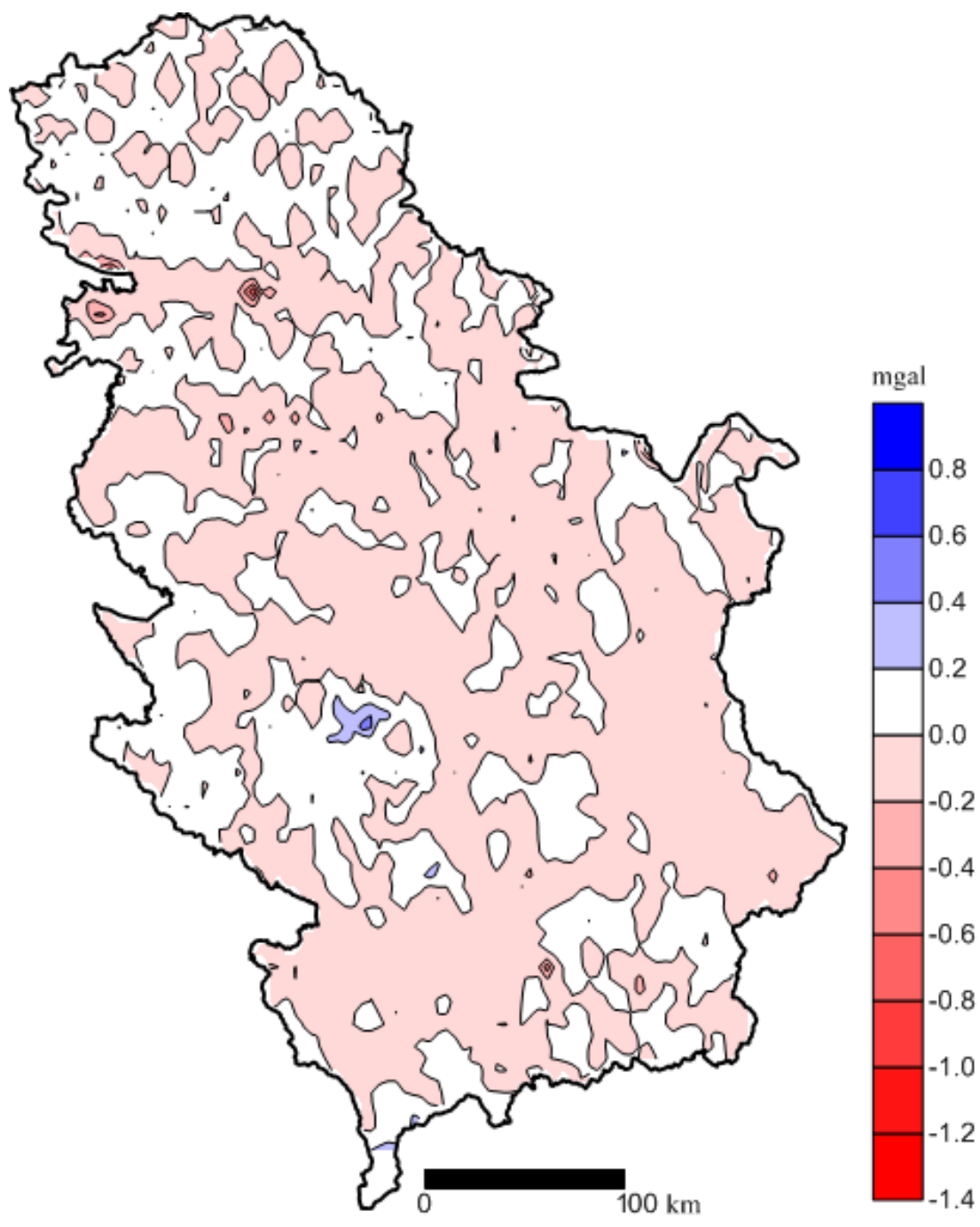
Промена вредности гравитационог утицаја топографских маса услед промена густине, изазваће промене у вредностима резидуалних аномалија, с обзиром да су прва два члана, у изразима за одређивање резидуалних аномалија убрзања (израз (6.14), (6.15)), константне вредности.

Гравитациони утицаји топографских маса на аномалије убрзања одређени су применом теренске корекције и RTM15 са густинама из ДМГ, а затим формиране разлике са резултатима добијеним уз коришћење константне вредности густине.

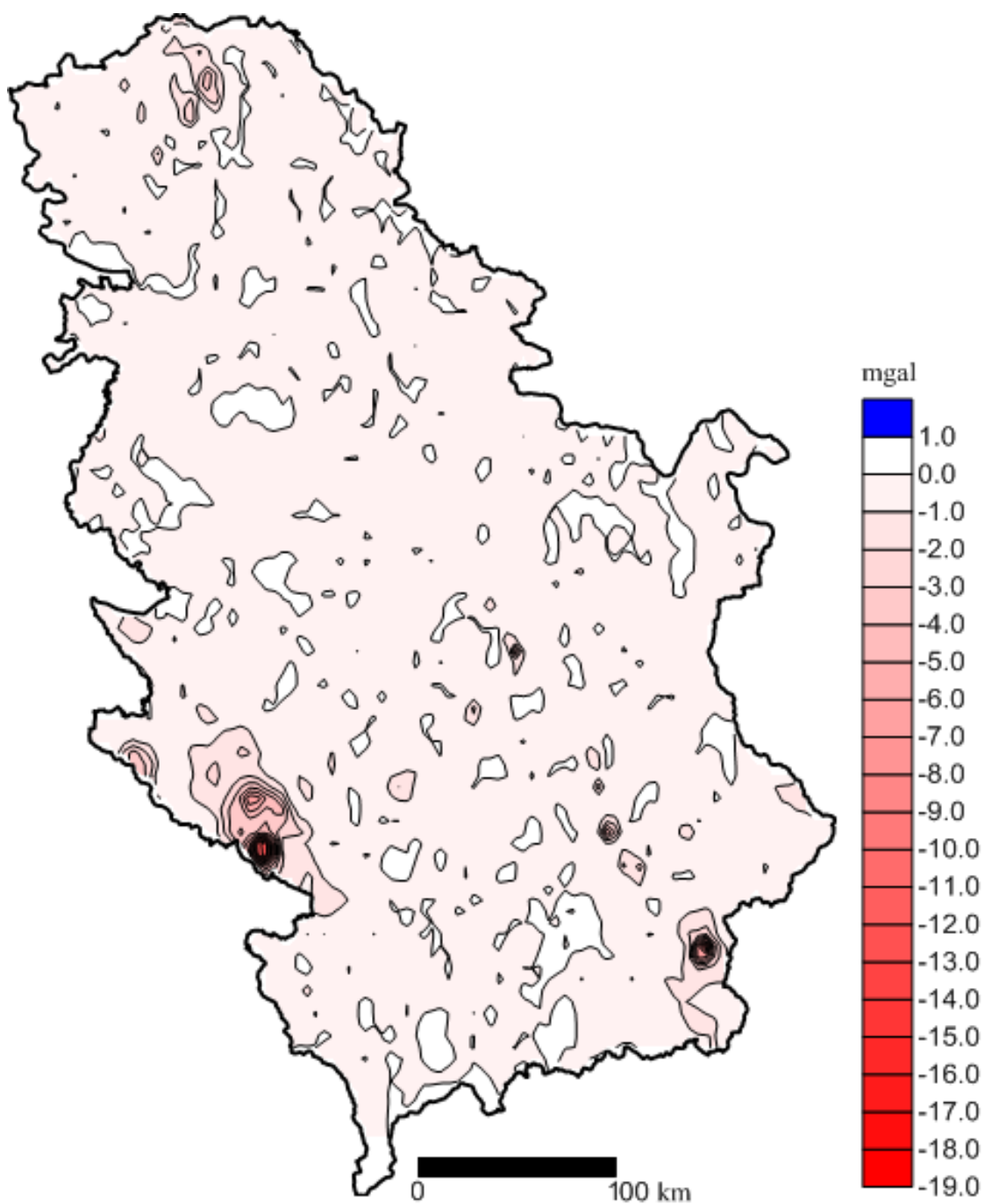
Основни статистички подаци разлика гравитационог утицаја топографских маса на аномалије убрзања приказани су у Табели 6.12, а општи облици површи разлика и хистограми разлика приказани су на сликама 6.22, 6.23 и 6.24, респективно.

Табела 6.12: ОСП разлика теренске корекције и утицаја RTM15 са густином из ДМГ и константном густином

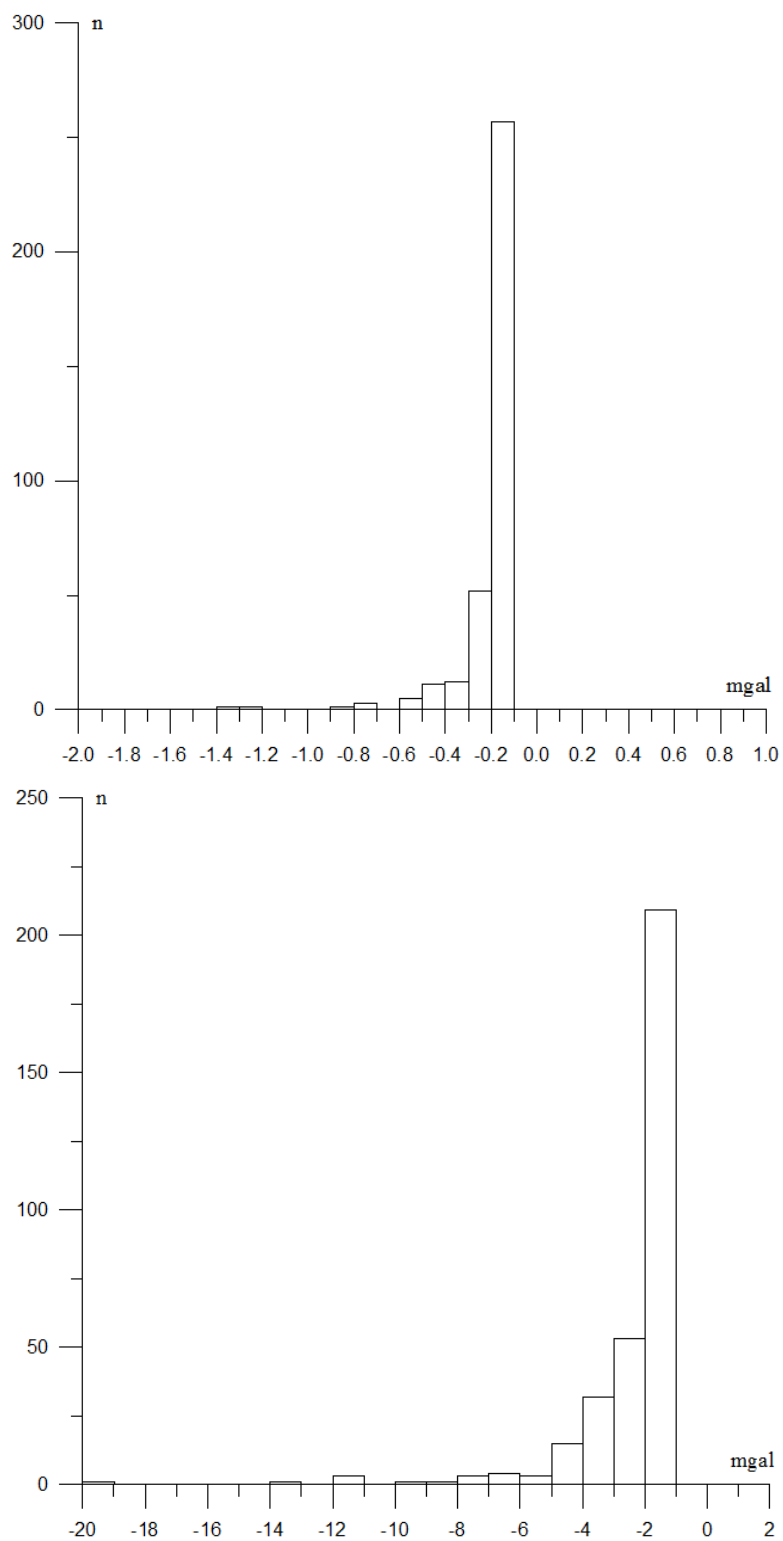
| Параметар | Број тачака | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|---|-------------|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| $c^{\rho} - c^{2670}$ [mgal] | 5766 | -1.31 | 0.73 | -0.01 | 0.07 |
| $\Delta g_{RTM15}^{\rho} - \Delta g_{RTM15}^{2670}$ [mgal] | 5766 | -19.09 | 1.01 | -0.22 | 0.71 |



Слика 6.22: Општи облик површи разлика теренске корекције са густином из ДМГ и константном густином (еквидистанца=0.2 mgal)



Слика 6.23: Општи облик површи разлика РТМ15 са густином из ДМГ и константном густином (еквидистанца=1 mgal)



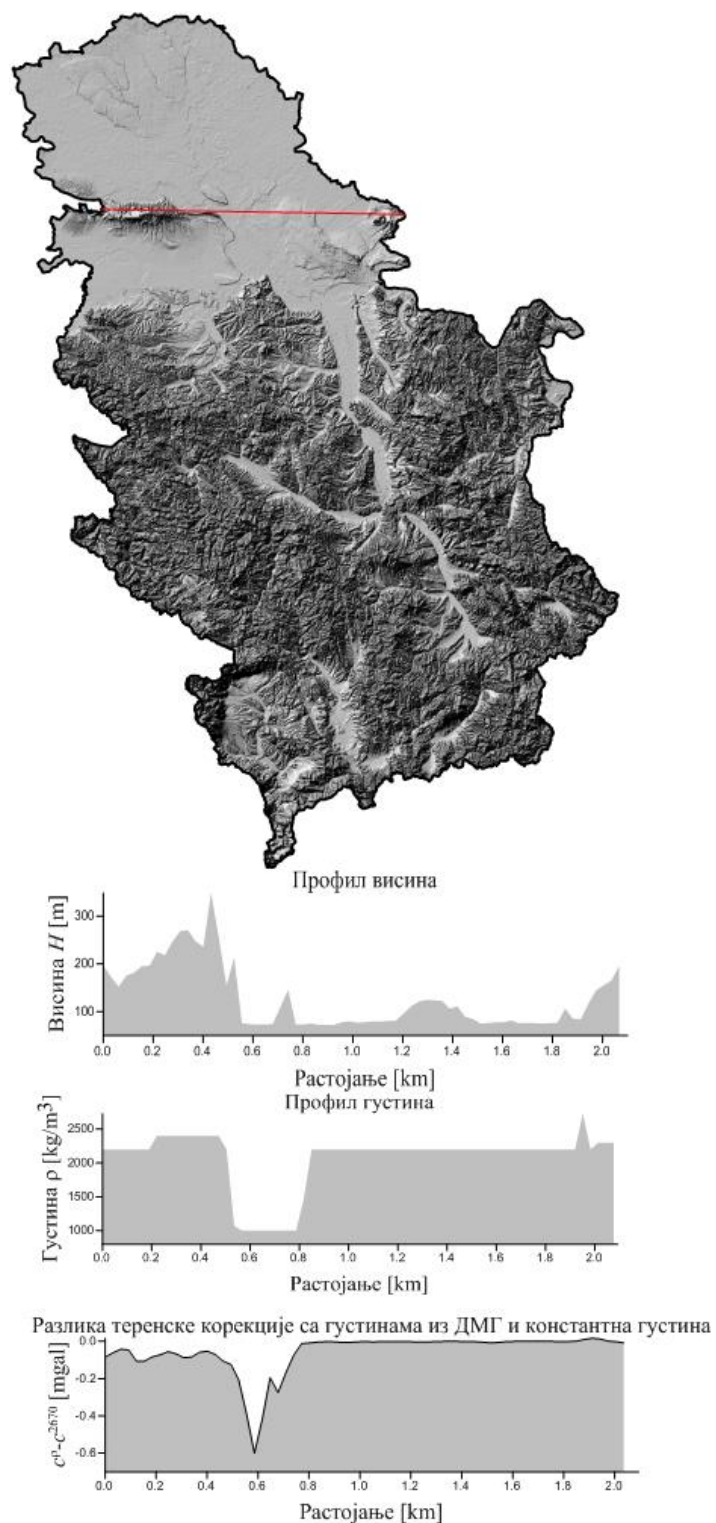
Слика 6.24: Хистограм разлика утицаја топографских маса на аномалије убрзања при различитим густинама: Горе:теренска корекција; Доле:РТМ15

Увидом у резултате, може се уочити да различите вредности густина доводе до промена гравитационог утицаја топографских маса на аномалије убрзања.

Разлика гравитационог утицаја топографских маса на аномалије убрзања, услед различитих густина, применом класичне теренске корекције достиже вредност до 1.3 mgal, док код моделирања топографских маса применом резидуалног модела терена, разлике утицаја иду и до 19 mgal.

Анализом резултата који су добијени применом РТМ, може се закључити да се веће разлике утицаја топографских маса јављају у пределима на граници Србије где су, за описивање топографских маса, коришћени подаци модела SRTM. Екстремне вредности нису последица коришћења различитих вредности густина, већ подаци у моделу SRTM, који садржи празнине и пукотине.

Такође, може се уочити да је разлика у вредностима теренске корекције, услед промене густине, у корелацији са топографијом. Као пример, профил терена у околини Фрушке Горе јасно показује корелацију густине и утицаја топографских маса (Слика 6.25).



Слика 6.25: Корелација топографије са променом густине

Дакле, може се закључити да промена у густини, доводи до промене гравитационог утицаја топографских маса на аномалије убрзања, тако да се њихов утицај не може занемарити у поступку моделирања топографских маса.

6.8. ГРАВИТАЦИОНИ УТИЦАЈ ТОПОГРАФСКИХ МАСА КОНСТАНТЕ ГУСТИНЕ НА АНОМАЛИЈСКЕ ВИСИНЕ

Као што је већ објашњено на почетку овог поглавља, када се теренска корекција директно појављује као део remove-restore методе, тада се након пресликавања захтева додатно моделирање индиректног ефекта на аномалијске висине, у делу restore. Уколико се аномалијске висине одређују уз редукцију резултата мерења применом резидуалног модела терена, тада се након пресликавања, у делу restore моделира гравитациони утицај топографских маса на аномалијске висине.

За одређивање гравитационог утицаја топографских маса на аномалијске висине у 5766 тачака финалног скупа ДГП, примењена су два поступка:

- индиректни ефекат, као последица теренске корекције, са густином $\rho = 2.67 \text{g/cm}^3$ ($\delta\zeta = \delta\zeta^{2670}$),
- резидуални модел терена (RTM15), са густином $\rho = 2.67 \text{g/cm}^3$ ($\zeta_{\text{ТОРО}} = \zeta_{\text{RTM15}}^{2670}$).

Основни статистички подаци добијених резултат приказани су у Табели 6.13.

Табела 6.13: ОСП индиректног ефекта и утицаја RTM15 са константном густином

| Параметар | Број тачака | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|-----------------------------------|-------------|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| $\delta\zeta^{2670}$ [m] | 5766 | -0.38 | 0.00 | -0.02 | 0.03 |
| $\zeta_{\text{RTM15}}^{2670}$ [m] | 5766 | -0.03 | 0.17 | 0.006 | 0.02 |

6.9. ГРАВИТАЦИОНИ УТИЦАЈ ТОПОГРАФСКИХ МАСА НА АНОМАЛИЈСКЕ ВИСИНЕ СА РАЗЛИЧИТИМ ГУСТИНАМА

Након одређивања гравитационог утицаја топографских маса константне густине на аномалијске висине, одређени су и утицаји топографских маса на аномалијске висине са различитим вредностима густине и то:

- индиректни ефекат са ρ ($\delta\zeta = \delta\zeta^\rho$),
- резидуални модел терена (PTM15) са ρ ($\zeta_{ТОРО} = \zeta_{PTM15}^\rho$).

Основни статистички подаци приказани су у наредној табели.

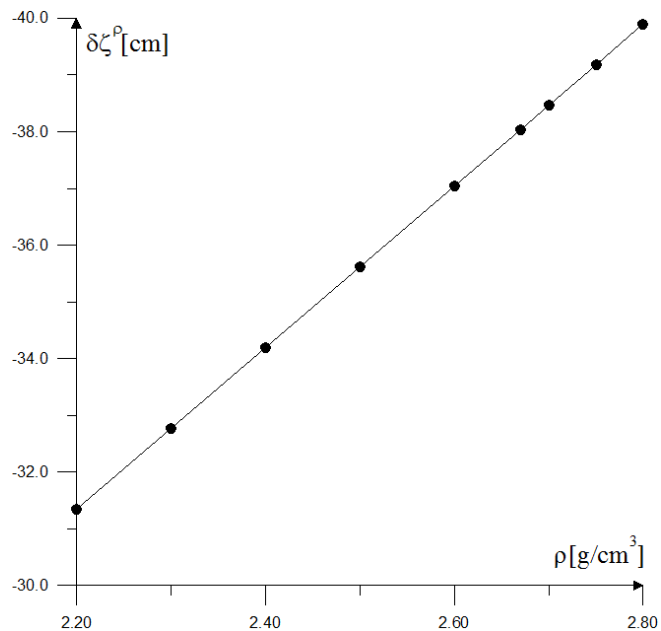
Табела 6.14: ОСП индиректног ефекта и утицаја PTM15 са густином из ДМГ

| Параметар | Број тачака | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|--------------------------|-------------|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| $\delta\zeta^\rho$ [m] | 5766 | -0.39 | 0.00 | -0.02 | 0.04 |
| ζ_{PTM15}^ρ [m] | 5766 | -0.04 | 0.09 | 0.001 | 0.01 |

Вредност индиректног ефекта мења се у зависности од густине топографских маса на којој се тачка прорачуна налази (Табела 6.15, Слика 6.26).

Табела 6.15: Промена индиректног ефекта у зависности од густине

| Тачка са висином $H_p = 2580$ m | |
|--|--|
| Густина ρ [g/cm ³] | Индиректни ефекат $\delta\zeta^\rho$ [cm] |
| 2.20 | -31.3 |
| 2.30 | -32.8 |
| 2.40 | -34.2 |
| 2.50 | -35.6 |
| 2.60 | -37.0 |
| 2.67 | -38.0 |
| 2.70 | -38.5 |
| 2.75 | -39.2 |
| 2.80 | -39.9 |



Слика 6.26: Промена индиректног ефекта у зависности од густине

У тачки финалног скупа ДГП, са највећом висином $H_p = 2580 \text{ m}$, одређена је вредност индиректног ефекта за различите вредности густина топографских маса, од $\rho = 2.20 \text{ g/cm}^3$ до $\rho = 2.80 \text{ g/cm}^3$. На основу добијених резултата, може се уочити промена вредности индиректног ефекта до чак 8 cm, у зависности од густине топографских маса.

Индиректни ефекат је строго локалног карактера и зависи од висине тачке у којој се ефекат обрачунава, као и од густине локалних топографских маса.

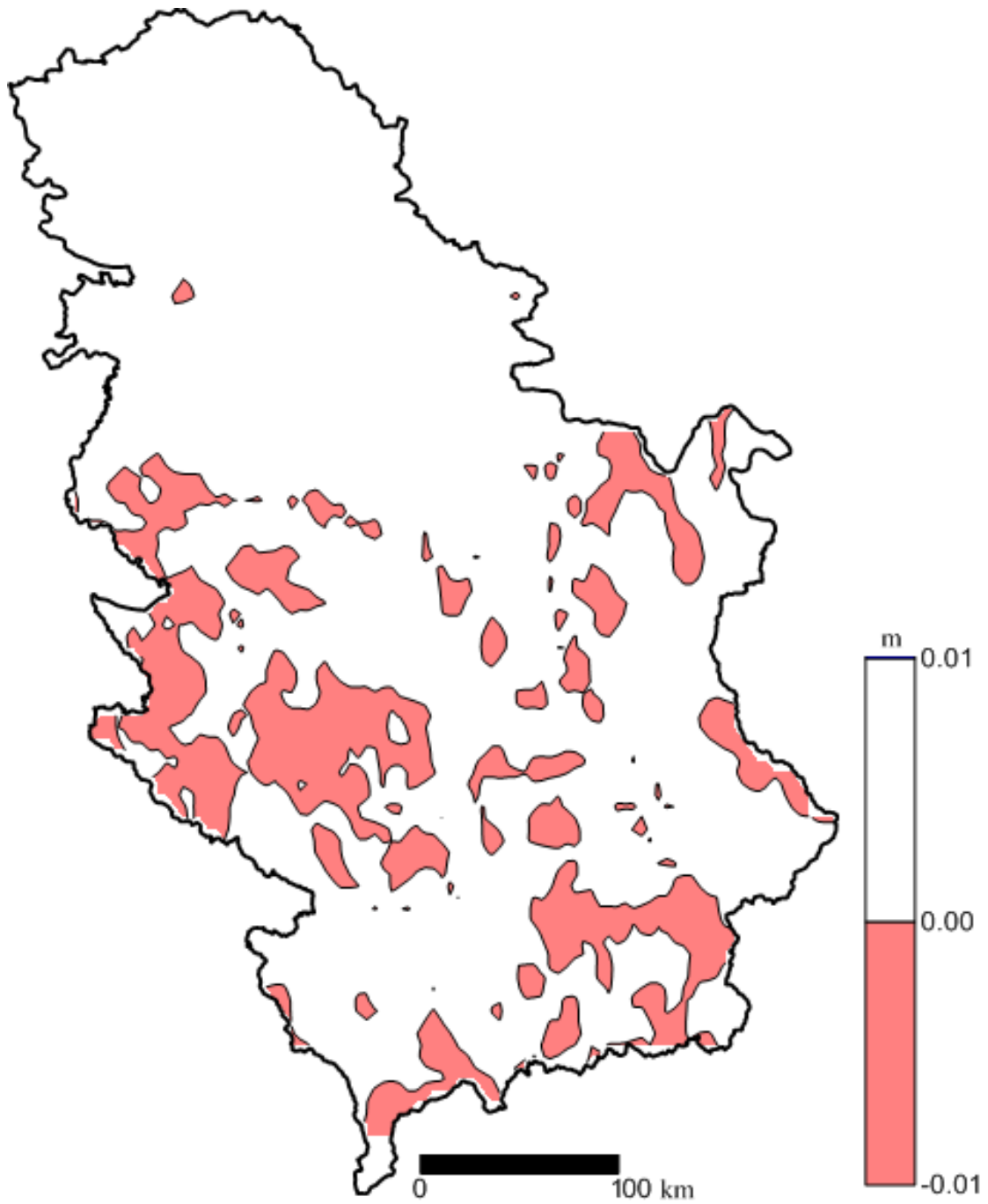
6.9.1. Разлика утицаја топографских маса на аномалијске висине са густинама из модела и константном густином

Као и у случају аномалија убрзања, на основу дигиталног модела густина одређен је гравитациони утицај топографских маса на аномалијске висине са различитим вредностима густина.

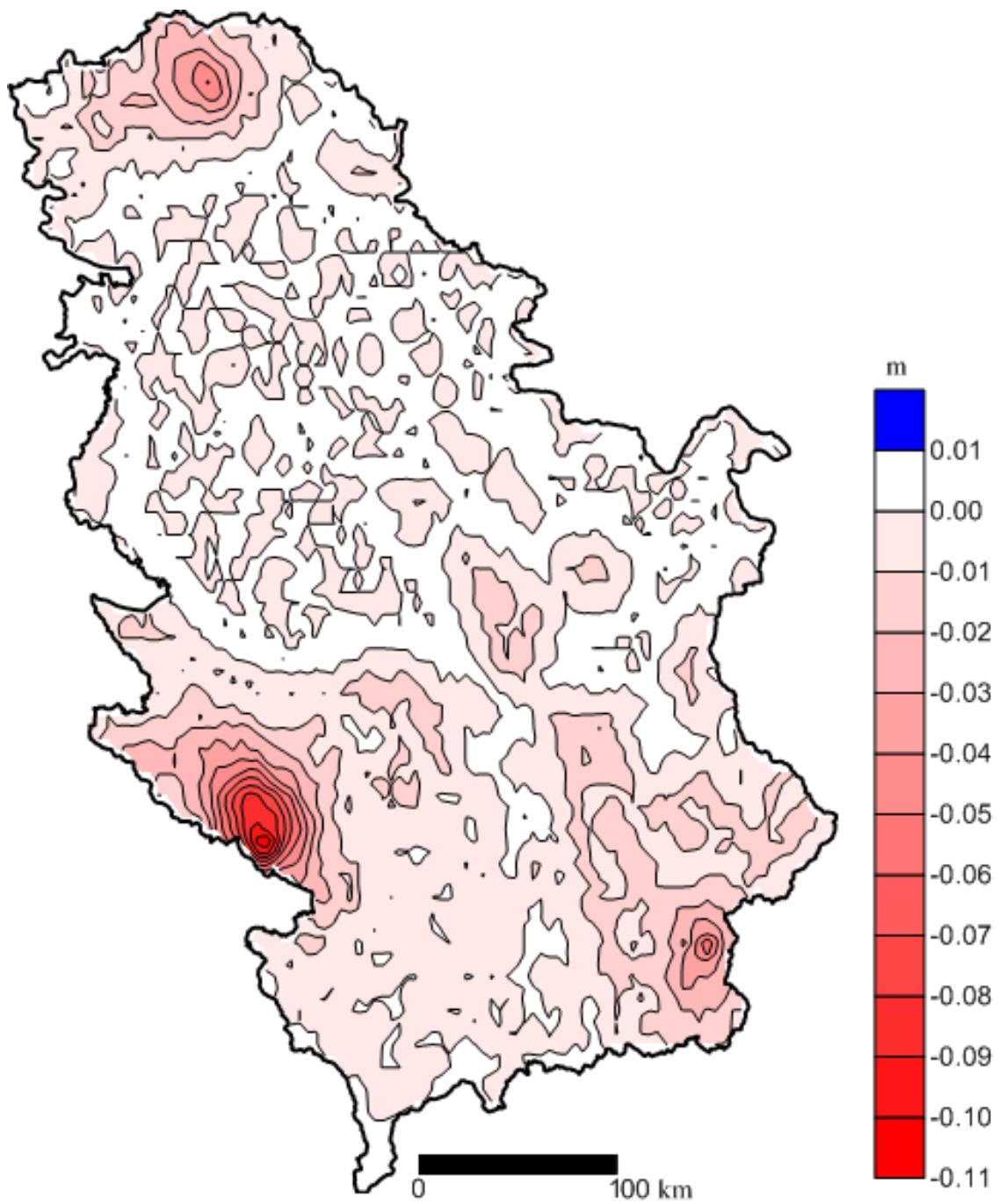
Формиране су разлике са резултатима који су добијени са константном вредности густине и то за:

- индиректни ефекат и
- резидуални модел терена РТМ15.

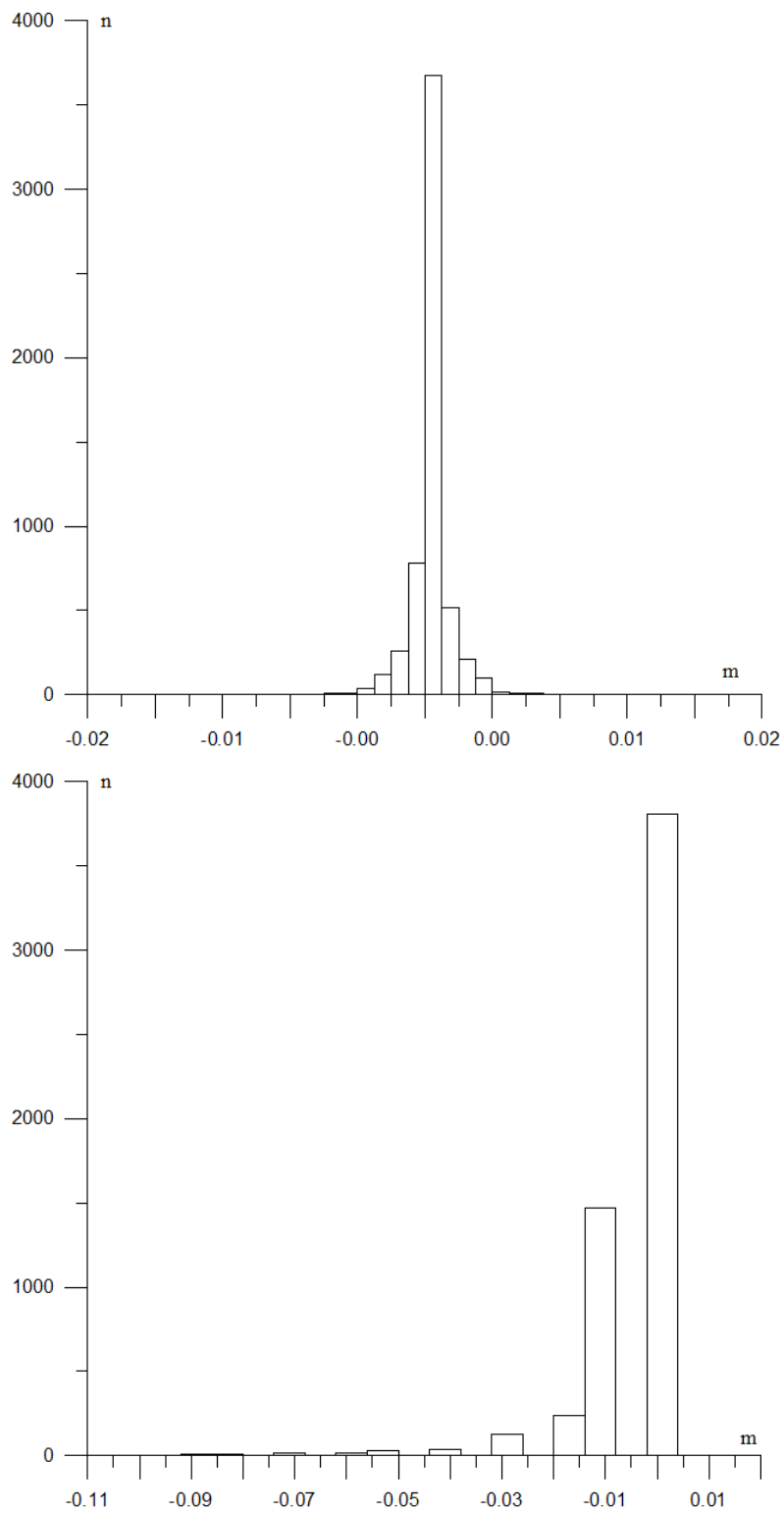
Основни статистички подаци разлика гравитационог утицаја топографских маса на аномалијске висине приказани су у Табели 6.16, а општи облици површи разлика, као и хистограми разлика, приказани су на сликама 6.27, 6.28 и 6.29, респективно.



Слика 6.27: Општи облик површи разлика индиректног ефекта са густином из ДМГ и константном густином (еквидистанца=1 cm)



Слика 6.28: Општи облик површи разлика RTM15 утицаја на аномалијске висине са густином из ДМГ и константном густином (еквидистанца=1 cm)



Слика 6.29: Хистограм разлика утицаја топографских маса на аномалијске висине при различитим густинама: Горе: индиректни ефекат; Доле: PTM15

Са променом вредности густине, разлика која се појављује у вредностима индиректног ефекта је 1 cm, док су разлике гравитационог утицаја топографских маса применом резидуалног модела терена и до 11 cm.

Табела 6.16: ОСП разлика индиректног ефекта и утицаја RTM15

| Параметар | Број тачака | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|---|-------------|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| $\delta\zeta^{\rho} - \delta\zeta^{2670}$ [m] | 5766 | -0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| $\zeta_{RTM15}^{\rho} - \zeta_{RTM15}^{2670}$ [m] | 5766 | -0.11 | 0.01 | -0.01 | 0.01 |

Промена у густини утиче на промене гравитационог утицаја топографских маса на аномалијске висине, па се може закључити да се њихов утицај не може занемарити у поступку одређивања квазигеоида/геоида.

ПОГЛАВЉЕ 7

ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА

Моделирање гравитационог ефекта топографских маса, са познатим распоредом густина, заједнички је задатак геодетских и геофизичких истраживања у поступку одређивања геоида, интерпретацији континенталне коре Земље, као и квалитетнијој интерпретацији резултата гравиметријских испитивања.

На основу података дигиталног модела терена и геолошких података на територији Србије, креиран је дигитални модел густина. То је омогућило да се испита да ли модел густина може да побољша моделирање гравитационог утицаја топографских маса на аномалијски потенцијал и његове функционале у односу на досадашње моделирање са константном вредности густине.

Из тог разлога, моделирање гравитационог утицаја топографских маса применом класичне теренске корекције и резидуалног модела терена урађено је кроз два поступка: први поступак је подразумевао константну вредност густине за све топографске масе, док је други поступак подразумевао вредност густина из модела густина.

Моделирање утицаја топографских маса на начин описан у оквиру нумеричких истраживања, у потпуности испуњава постављени циљ истраживања:

утицај густина маса Земљине коре није занемарљив у поступку решавања граничних проблема потенцијала Земљине теже, а посебно при одређивању геоида центиметарске тачности.

У 5766 тачака финалног скупа детаљног гравиметријског премера, најпре су одређени гравитациони утицаји топографских маса на аномалије убрзања:

- Применом првог поступка теренске корекције, гравитациони утицај топографских маса је у интервалу од -0.01 mgal до 38 mgal . Знак минус у вредности теренске корекције је последица закривљености Земље, јер су у обзир узете топографске масе до 200 km од тачке прорачуна.
- Разлика резултата из првог и дугог поступка, применом теренске корекције, је 1.3 mgal (Табела 6.12) и може се уочити да су ове разлике у корелацији са топографијом.
- У поређењу са резултатима добијеним применом теренске корекције (Табела 6.9), резидуални модел терена резолуције пет лучних минута са константном густином од $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$ не обезбеђује довољно глатку површ за предикцију аномалијских висина, према условима дефинисаним у оквиру remove-restore методе. Из тог разлога је креиран резидуални модел терена веће резолуције, једне лучне минуте у оба правца. Како би се избегла додатна интерполација висина тачака на референтној површи и убрзао процес рачунања, РТМ резолуције $1'$ је унапред припремљен и подељен на поља величине $15''$.
- Применом РТМ резолуције $15''$, разлика гравитационог утицаја топографских маса из првог и другог поступка је 20 mgal (Табела 6.12).

Може се закључити да је, у поступку моделирања утицаја топографских маса на аномалије убрзања, применом теренске корекције и резидуалног модела терена, утицај густина маса значајан. Како је за потребе одређивања геоида, потребна тачност мереног убрзања силе теже 1 mgal , разлика утицаја топографских маса на аномалије убрзања применом теренске корекције од 1.3 mgal није занемарљива.

Без обзира на то која функција ће бити примењена за пресликавања резидуалних резултата, у оквиру remove-restore методе, за предикцију аномалијских висина, у тачкама финалног скупа ДГП, одређени су утицаји топографских маса на аномалијске висине:

- Примена теренске корекције, у remove-restore методи, захтева додатно моделирање индиректног ефекта на аномалијске висине. Индиректни ефекат је строго локалног карактера и зависи искључиво од висине тачке и густине топографије на којој се тачка налази.
- Индиректни ефекат на аномалијске висине, са константном густином топографских маса, достиже вредност од 38 cm (Табела 6.13) .
- Индиректни ефекат са густинама из модела, има вредност до 39 cm.
- Разлика вредности индиректног ефекта из првог и другог приступа, иде и до ± 1 cm (Табела 6.16).
- Вредност индиректног ефекта, у тачки ДГП са висином од 2580 m, мења се и до 8 cm, за распон густина од 2.20 – 2.80 g/cm³ (Табела 6.15).
- Применом резидуалног модела терена резолуције 15" са константном густином, гравитациони утицај топографских маса на аномалијске висине има вредност од -3 cm до 17 cm (Табела 6.13) .
- Применом резидуалног модела терена резолуције 15" са густинама из модела, гравитациони утицај топографских маса на аномалијске висине има вредност од -4 cm до 9 cm (Табела 6.14) .
- Због разлика у густини, применом резидуалног модела терена резолуције 15" , појављује се разлика у гравитационом утицају топографских маса на аномалијске висине од -11 cm до 1 cm (Табела 6.16).

И у случају моделирања утицаја топографских маса на аномалијске висине, такође се може закључити да се утицај густина маса не може занемарити.

Нарочито је важно у поступку одређивања геоида ако се захтева центиметарска тачност.

Истраживања о реалним информацијама распореда густина топографских маса на основу геолошких и сеизмичких података и подлога, могла би да обезбеде креирање 3Д дигиталног модела густина.

Поред одређивања теренске корекције, утицаја резидуалног модела терена и индиректног ефекта, информације о густини топографских маса треба да буду укључене у свим корацима поступка одређивања геоида.

Уколико дигитални модел терена није на располагању, препорука је да се макар за карактеристична подручја користе средње вредности густина.

ЛИТЕРАТУРА

Agren J., Sjoberg L., Kiamehr, R., The new gravimetric quasigeoid model KTH08 over Sweden, *Journal of Applied Geodesy* 3, pp. 143–153, 2009. DOI 10.1515/JAG.2009.015

Anderson E., The effect of topography on solutions of Stokes' problem, *Reports from the school of surveying, University of new south Wales, Sydney, Australia*, 1976.

Bagherbandi Mohammad, An isostatic Earth Crustal Model And Its Application, *Doctoral Dissertation in Geodesy, Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, Sweden*, 2011.

Bajracharya Sujan, Terrain Effects on Geoid Determination, *Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, Alberta, Canada*, 2003.

Bjerhamer, A., On the boundary value problem of physical geodesy, *Royal Institute of Technology, Stockholm*, Manuscript received March 27, 1969.

Bratuljević, N., Mrkić R., Milovanović V., Delčev S., Blagojević D., Vasiljev V., *Geodetske referentne mreže, Institut za Geodeziju, Beograd*, 1995.

Claessens S. J., Solutions to Ellipsoidal Boundary Value Problems for Gravity Field Modelling, *Department of Spatial Sciences, Curtin University of Technology*, 2006.

Direen N.G., Application of terrain corrections in Australia (C13), Part 1—Land based corrections, *Intrepid Geophysics*, 2012.

Forsberg R., A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling, *Scientific Report No. 5, The Ohio State University*, 1984.

Forsberg, R., Tscherning, C., Topographic effects in gravity field modeling for BVP, Интернет комуникација, 1998.

Forsberg R., Terrain Effect in Geoid Computations, Geodetic Division, National Survey and Cadastre, Copenhagen, Denmark, Интернет комуникација.

Grasic, M., International standard gravimetric network 1971 and our basic gravimetric measurements. Proceedings. Symposium on basic geodetic works in Yugoslavia. Union of Geodetic Engineers and Surveyors of Yugoslavia, Hercegnovi, 1976.

Grombein, T., Seitz K., Heck B., Optimized formulas for the gravitational field of a tesseroid, Journal of Geodesy, doi:10.1007/s00190-013-0636-1, 2013.

Hamblin W. Kenneth and Christiansen H. Eric, Earth's Dynamic Systems, ISBN: 0131420666, 2004.

Heck B., Seitz K., A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling, Journal of Geodesy, pp 121-136, 2007.

Heiskanen, W., Moritz, H., *Fizička geodezija*, [preveo Dragan Blagojević], Institut za geodeziju, Građevinski fakultet, Beograd, ID:85219340, 2000.

Hein, G., Hehl, K., Eissfeller, B., Ertel, M., Jacoby, W., Czerwek, D., On Gravity Prediction Using Density and Seismic Data, Final Report, University of the Federal Armed Forces, Institute of Astronomical and Physical Geodesy, Munich, 1989.

Hinze, J., William, Carlos Aiken, John Brozena, Bernard Coakley, David Dater, Guy Flanagan, Rene Forsberg, Thomas Hildenbrand, G. Randy Keller, James

Kellogg, Robert Kucks, Xiong Li, Andre Mainville, Robert Morin, Mark Pilkington, Donald Plouff, Dhananjay Ravat, Daniel Roman, Jamie Urrutia-Fucugauchi, Marc Veronneau, Michael Webring, and Daniel Winester, New standards for reducing gravity data: The North American gravity database, *Geophysics*, Vol. 70, No. 4, pp. J25–J32, 2005.

Hirt C., Prediction of vertical deflections from high-degree spherical harmonic synthesis and residual terrain model data, *Journal of Geodesy* 84(3), pp. 179-190. DOI 10.1007/s00190-009-0354-x, 2010.

Hofmann-Wellenhof, B., Moritz, H., *Physical Geodesy*, Springer Wien New York, 2005, ISBN-10 3-211-23584-1, ISBN-13 978-3-211-23584-3.

Hwang Cheinway, Wang Cheng-Gi, Hsiao Yu-Shen, Terrain correction computation using Gaussian quadrature, *Computers and Geosciences* 29, pp. 1259–1268, 2003.

Jianliang, H., Computational methods for the discrete downward continuation of the Earth gravity and effects of lateral topographical mass density variation on gravity and the geoid, Technical report No. 216, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, July 2002.

Kuhn, M., Geoid determination with density hypotheses from isostatic models and geological information, *Journal of Geodesy* 77, pp. 50–65, 2003. DOI 10.1007/s00190-002-0297-y.

Li, Y., C., Sideris, M., G., Improved gravimetric terrain corrections, *Geophys. Journal. Int.* 119, pp. 740-752, 1994.

Makhloof, A., The Use of Topographic-Isostatic Mass Information in Geodetic Applications, Doctoral Dissertation, Institut für Geodäsie und Geoinformation der Universität Bonn, Egypt, 2007.

Miloje Ilić, Miroslav Starčević, Luka Pešić, Vladan Čelebonović, NEKA RAZMATRANJA O GRAĐI ZEMLJE I NJENIM FIZIČKIM OSOBINAMA, Geološki Anali Balkanskog Poluostrva, knjiga II, broj 12, pp. 131-138, 1998.

Moritz, H., Linear solutions of the geodetic boundary-value problem, Reports of the Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Ohio, 1966.

Moritz, H., Advanced Physical Geodesy, Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe, Abacus Press Tunbridge Wells Kent, 1980.

Moritz, H., The figure of the Earth: theoretical geodesy and the earth's interior, Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe, ISBN: 3-87907-220-5, 1990.

Nagy D., Papp G., Benedek J., The gravitational potential and its derivatives for the prism, Journal of Geodesy, pp 552-560, 2000.

Nowell D.A.G., Gravity terrain corrections — an overview, Journal of Applied Geophysics No. 42, pp 117-134, 1999.

Одаловић О., Методологија одређивања геоида високе резолуције центиметарске тачности за територију Републике Србије, Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Докторска дисертација, Београд, 2005.

Одаловић Олег, Физичка геодезија, Универзитет у Београду, Грађевински факултет, ISBN: 978-86-7518-112-5, Београд, 2010.

Odalovic Oleg, Grekulovic Sanja, Vasiljevic Ivana, Evaluation and comparison recent global geopotential model in Serbia, 13th International multidisciplinary scientific geoconference SGEM2013, 16th-22th June, 2013, Albena Co., Bulgaria, pp 175-182. ISBN: 978-619-7105-01-8.

Odalović O., Starčević M., Grekulović S., Burazer M., Aleksić I., The Establishment Of A New Gravity Reference Frame For Serbia, *Survey Review*, Vol. 44, No 327, pp. 272-281, United Kingdom, 2012. DOI: 10.1179/1752270611Y.0000000033.

Odalović Oleg, Popović Jovan, Grekulović Sanja, Todorović Miljana, Aleksić Ivan, Geodetic infrastructure of Serbia, *Proceedings of International Scientific Conference Professional Practice and Education in Geodesy And Related Fields*, 24th-26th Jun 2011, Kladovo, Serbia. pp 192-201. ISBN: 978-86-7518-135-4.

Olugbenga, E., Spectral Analysis of Gravity Field Data and Errors in view of Sub-Decimetre Geoid Determination in Canada, *Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, UCGE Reports Number 20137*, 2000.

Omang O.C., Tscherning C.C., Forsberg R., Generalizing the Harmonic Reduction Procedure in Residual Topographic Modeling, VII Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy, International Association of Geodesy Symposia 137, DOI 10.1007/978-3-642-22078-4 35, 2012.

Rapp, R., Pavlis, N., The development and analysis of geopotential coefficient models to spherical harmonic degree 360, *Journal of Geophysical Research*, vol. 95, No. B13, pp. 21885-21911, 1990.

Rumel R., Teunissen, P., Geodetic boundary value problem and linear inference, *Proc. int. Symp. Figure and Dynamics of the Earth, Moon and Planets*, Prague, 1986.

Sanso, F., Sideris, G. M., *Geoid Determination: Theory and Methods*, Lecture Notes in Earth System Sciences 110, 2013. DOI 10.1007/978-3-540-74700-0.

Sideris, M., G., Li, Y., C., Gravity field convolutions without windowing and edge effects, *Bulletin Geodesique* 67, pp. 107-118, 1993.

Sjoberg, L., E., Nahavandchi, H., On the indirect effect in the Stokes–Helmert method of geoid determination, *Journal of Geodesy*, Volume 73, 1999.

Smith, D.,A., Roman, D.,R, GEOID99 and G99SSS: 1-arc-minute geoid models for the United States, *Journal of Geodesy*, pp. 469-490, 2001.

Starčević R. Miroslav, *Gravimetrijske metode istraživanja*, Nauka, Beograd, ISBN: 86-7621-030-6, 1991.

Старчевић Р. Мирослав, *Усмена комуникација*, 2011.

Torge, W., *Geodesy*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2001.

Tscherning C. C., Gravity prediction using collocation and taking known mass density anomalies into account, *Geophys. J. R. astr. Soc.* 59, pp.147-153, 1979.

Tsouliis, D., *Analytical and numerical methods in gravity field modeling of ideal and real masses*, Deutsche Geodätische Kommission, Munchen, 1999. ISSN: 0085-5325, ISBN: 3789695488.

Vaniček P., Krakiwsky E., J., *Geodezija: Koncepti*, [preveo prof. Dragan Blagojević], Beograd, 1999.

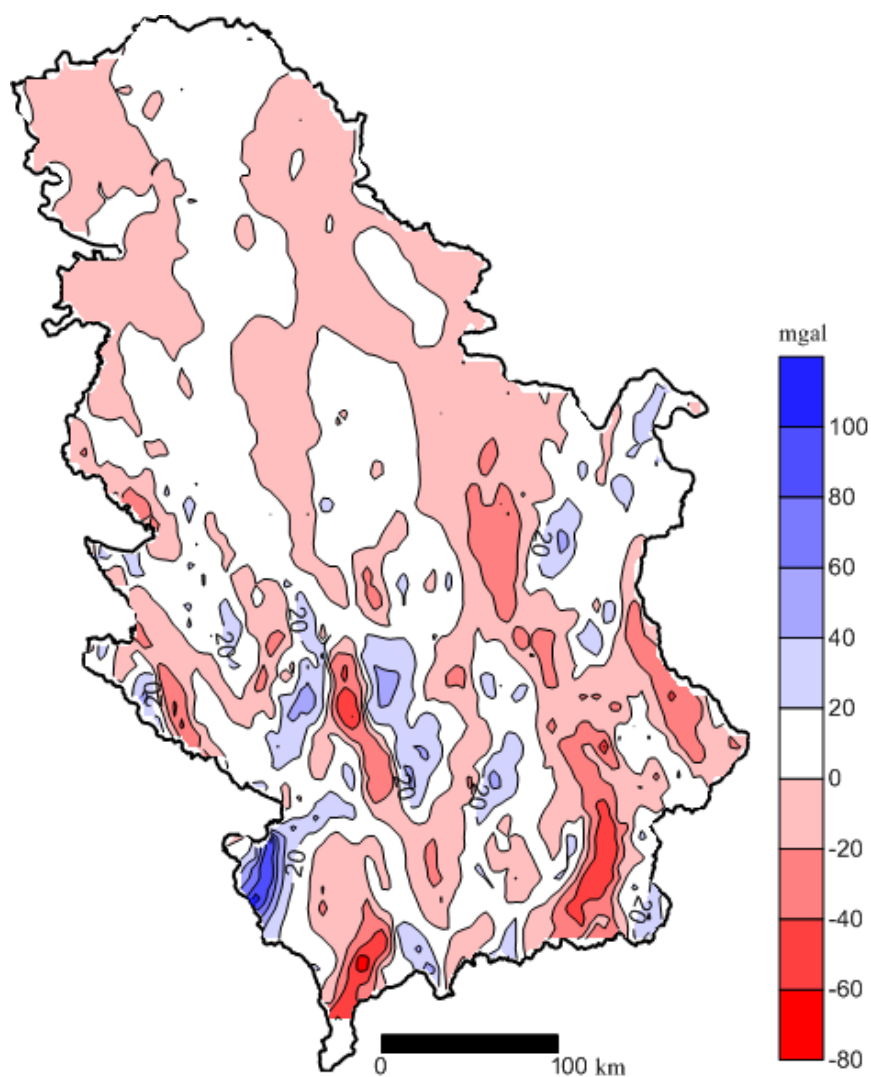
Васиљевић Ивана, *Усмена комуникација*, 2013.

Zhiling F., *Refinement of Geodetic Boundary Value Problem Solutions*, UCGE Reports, Number 20139, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, Calgary, 2000.

ПРИЛОЗИ

Прилог 1

Хоризонтална компонента вектора убрзања силе теже у правцу x -осе применом теренске корекције са густином из ДМГ (V_x^p)

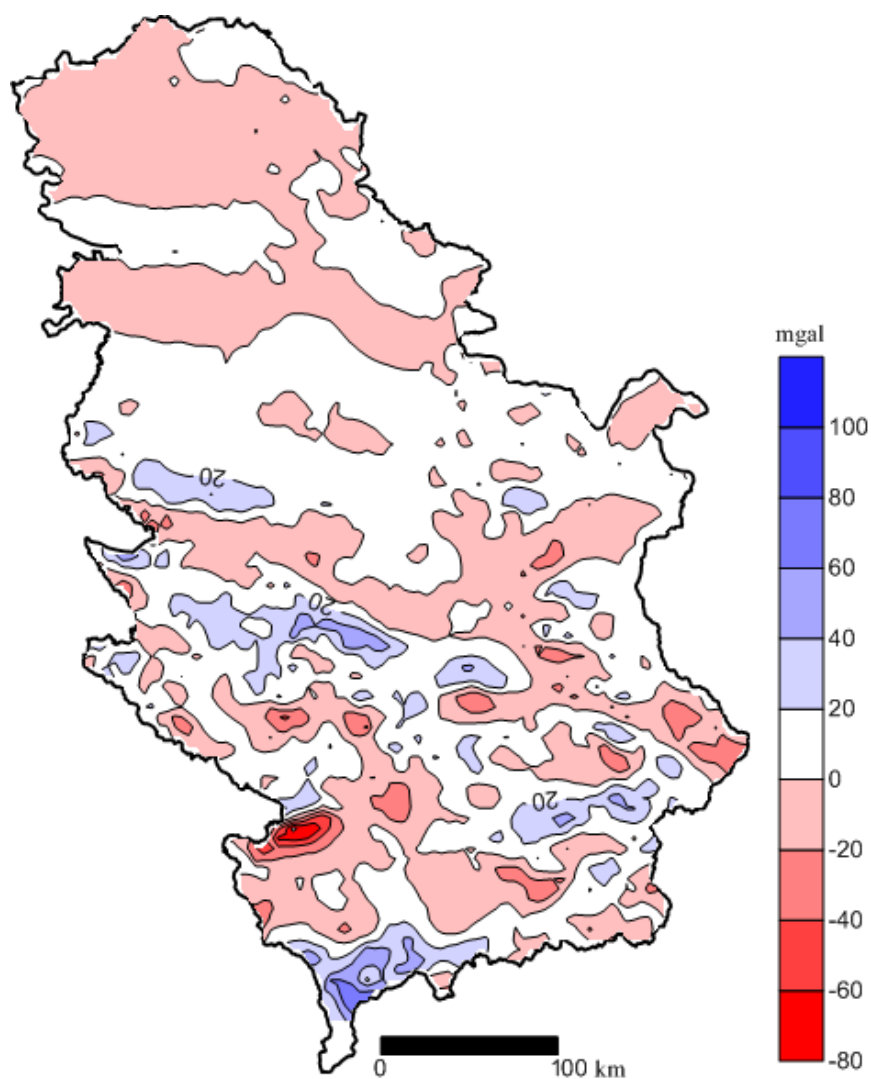


Слика 1: Општи облик површи хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу x -осе

Табела 1: ОСП хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу x -осе са густином из ДМГ

| Параметар | Број тачака | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|----------------|-------------|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| V_x^p [mgal] | 5766 | -81.41 | 115.88 | 0.71 | 15.98 |

Хоризонтална компонента вектора убрзања силе теже у правцу у–осе применом теренске корекције са густином из ДМГ (V_y^p)

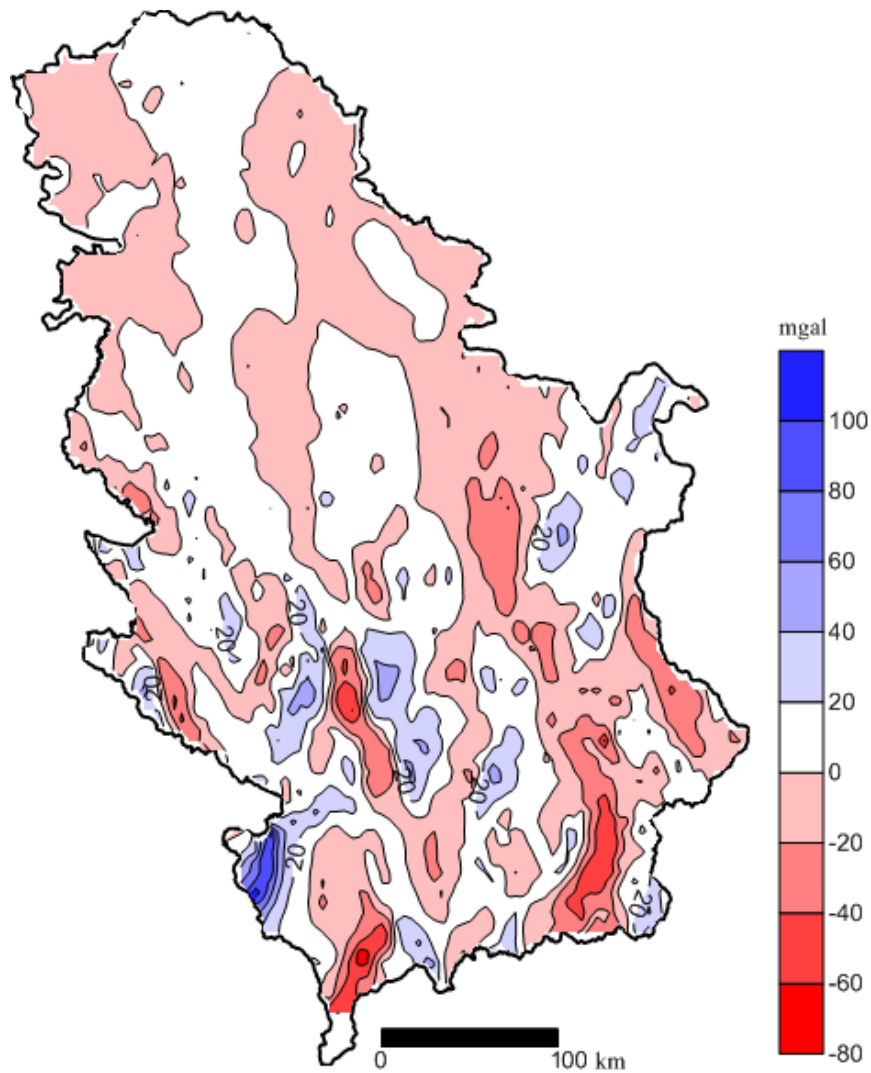


Слика 2: Општи облик површи хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу у-осе

Табела 2: ОСП хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу у-осе са густином из ДМГ

| Параметар | Број тачака | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|----------------|-------------|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| V_y^p [mgal] | 5766 | -97.41 | 80.52 | 2.51 | 13.84 |

Хоризонтална компонента вектора убрзања силе теже у правцу x -осе применом теренске корекције са константном густином (V_x^{2670})

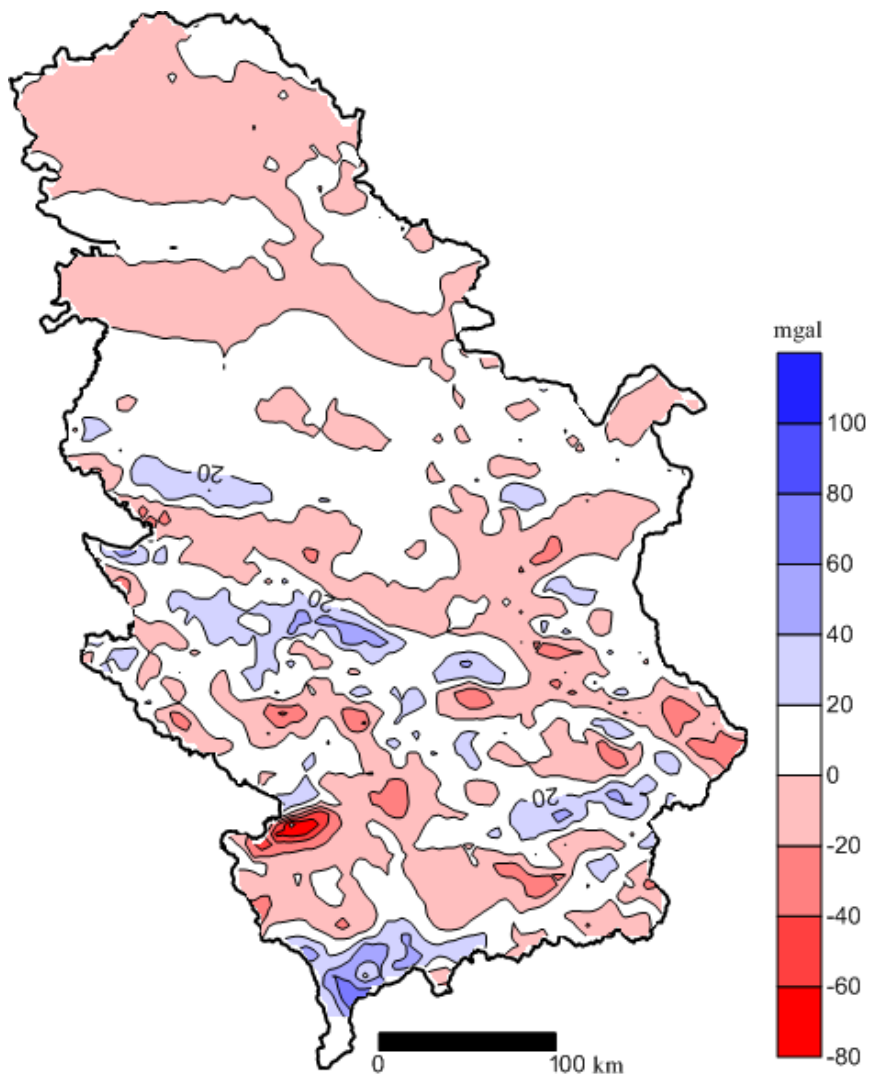


Слика 3: Општи облик површи хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу x -осе

Табела 3: ОСП хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу x -осе са константном густином

| Параметар | Број тачака | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|---------------------|-------------|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| V_x^{2670} [mgal] | 5766 | -81.63 | 114.99 | 0.72 | 15.96 |

Хоризонтална компонента вектора убрзања силе теже у правцу у–осе применом теренске корекције са константном густином (V_y^{2670})



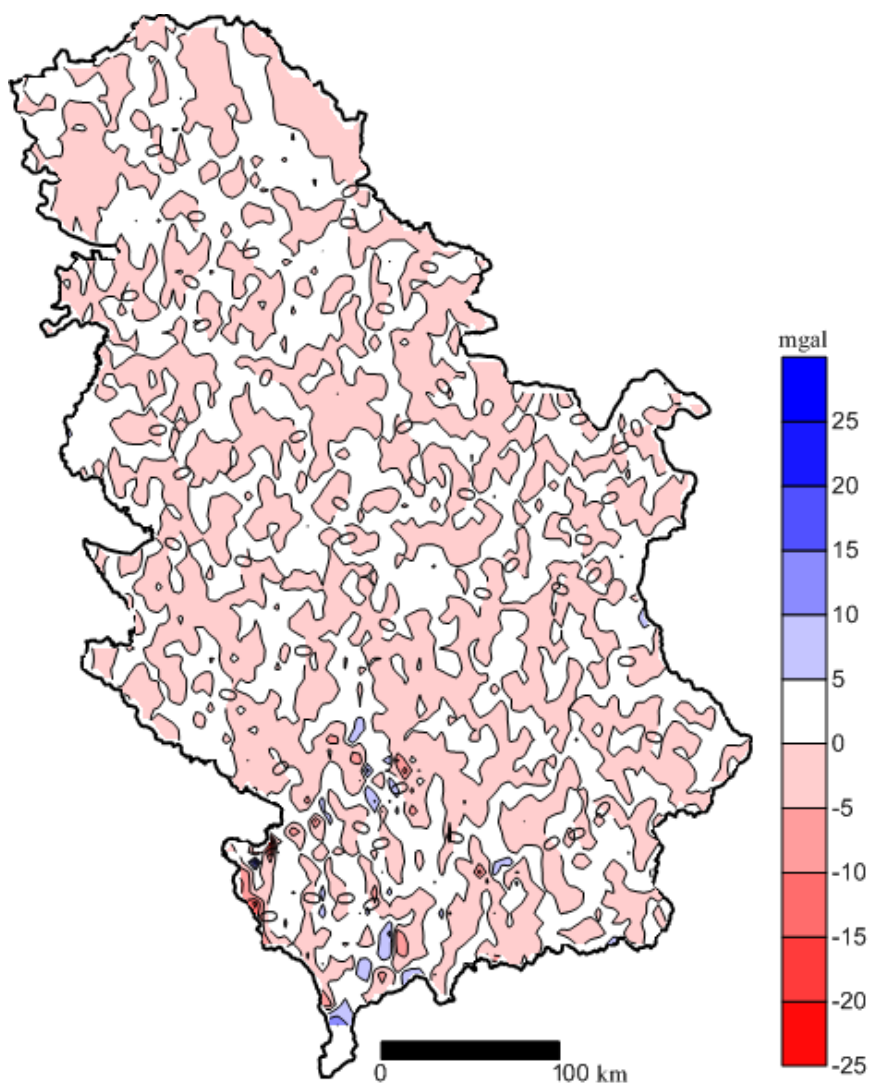
Слика 4: Општи облик површи хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу у-осе

Табела 4: ОСП хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу у-осе са константном густином

| Параметар | Број тачака | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|---------------------|-------------|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| V_y^{2670} [mgal] | 5766 | -97.86 | 80.11 | 2.49 | 13.81 |

Хоризонтална компонента вектора убрзања силе теже у правцу x -осе применом

RTM резолуције $15''$ са густином из ДМГ (V_x^p)

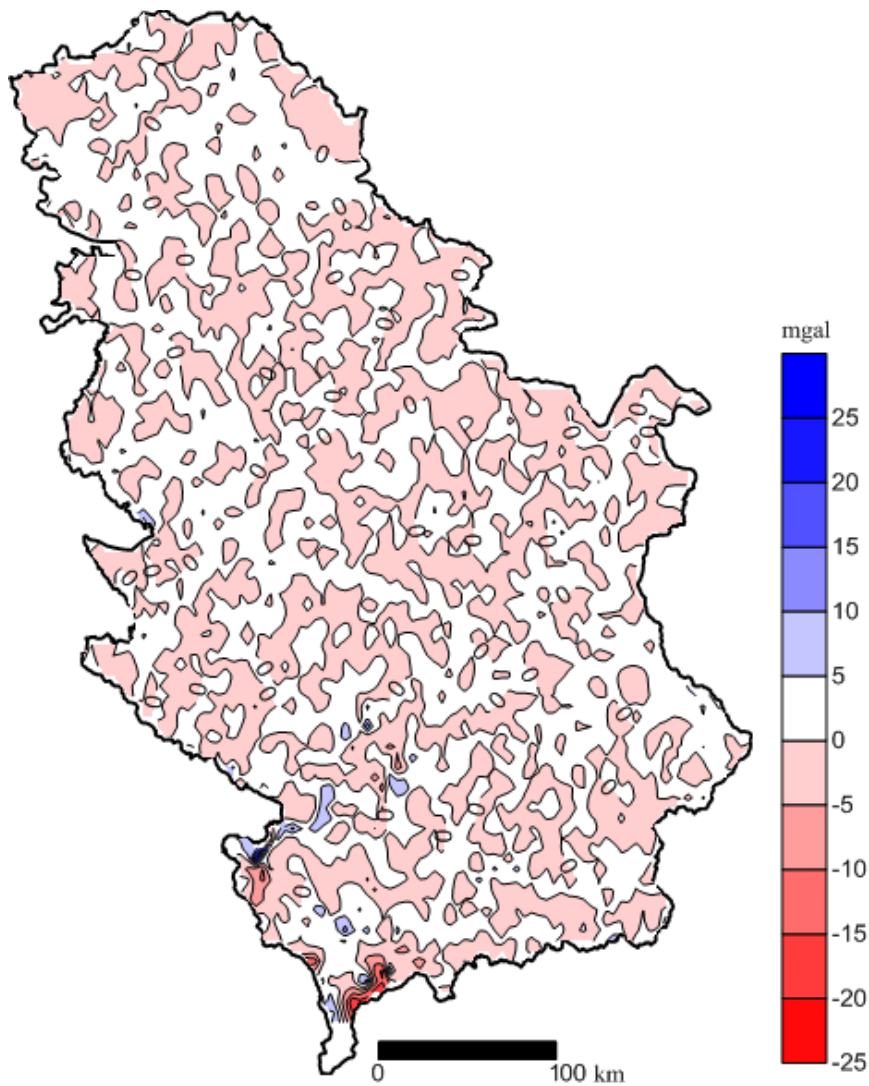


Слика 5: Општи облик површи хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу x -осе

Табела 5: ОСП хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу x -осе са густином из ДМГ

| Параметар | Број тачака | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|----------------|-------------|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| V_x^p [mgal] | 5766 | -27.32 | 27.85 | 0.001 | 2.10 |

Хоризонтална компонента вектора убрзања силе теже у правцу у–осе применом
RTM резолуције 15" са густином из ДМГ (V_y^p)



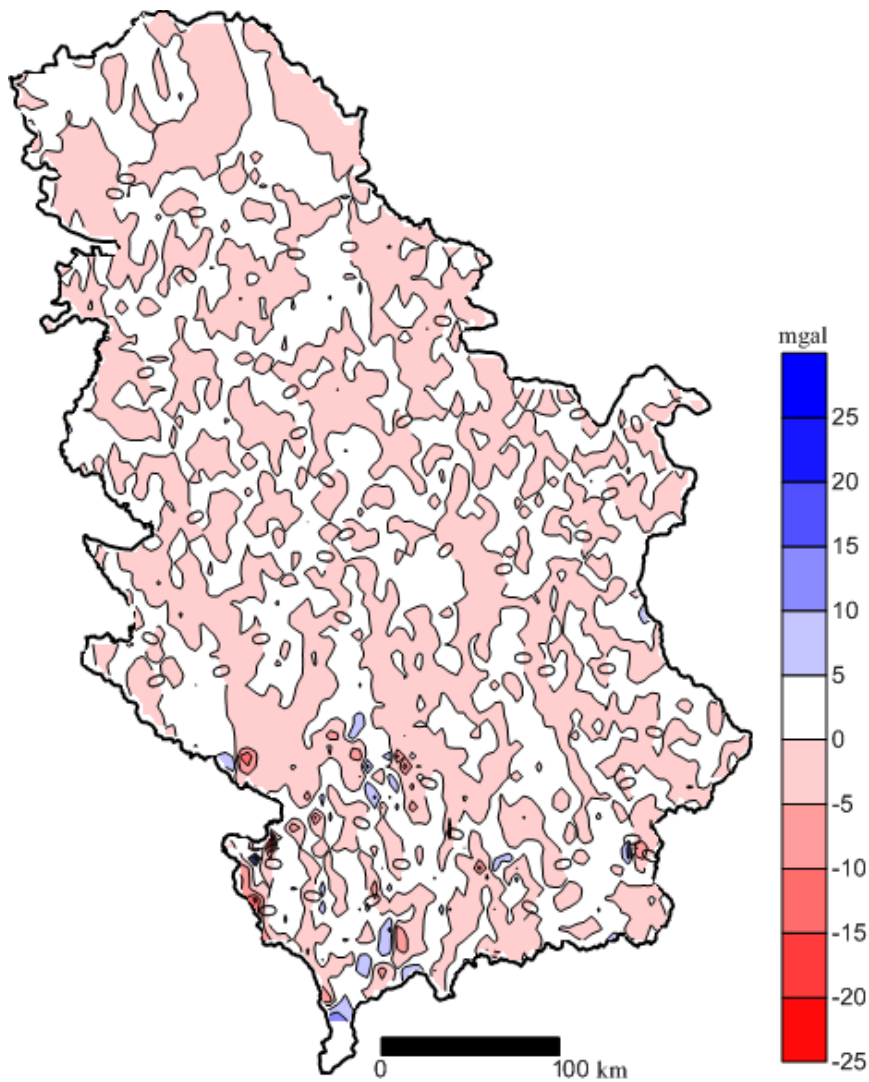
Слика 6: Општи облик површи хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу у-осе

Табела 6: ОСП хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу у-осе са густином из ДМГ

| Параметар | Број тачака | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|----------------|-------------|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| V_y^p [mgal] | 5766 | -23.74 | 32.81 | 0.06 | 2.02 |

Хоризонтална компонента вектора убрзања силе теже у правцу x -осе применом

РТМ резолуције 15" са константном густином (V_x^{2670})



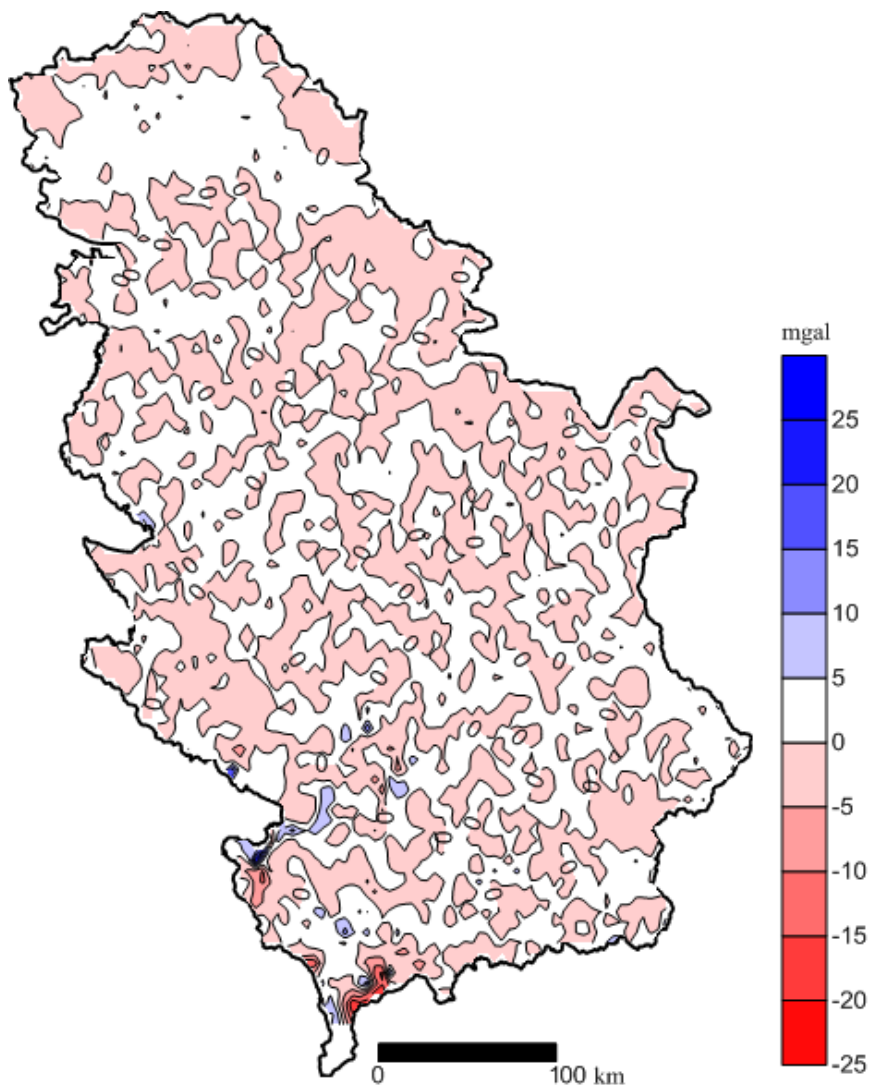
Слика 7: Општи облик површи хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу x -осе

Табела 7: ОСП хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу x -осе са константном густином

| Параметар | Број тачака | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|---------------------|-------------|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| V_x^{2670} [mgal] | 5766 | -27.57 | 28.19 | -0.01 | 2.27 |

Хоризонтална компонента вектора убрзања силе теже у правцу у–осе применом

PTM резолуције 15" са константном густином (V_y^{2670})



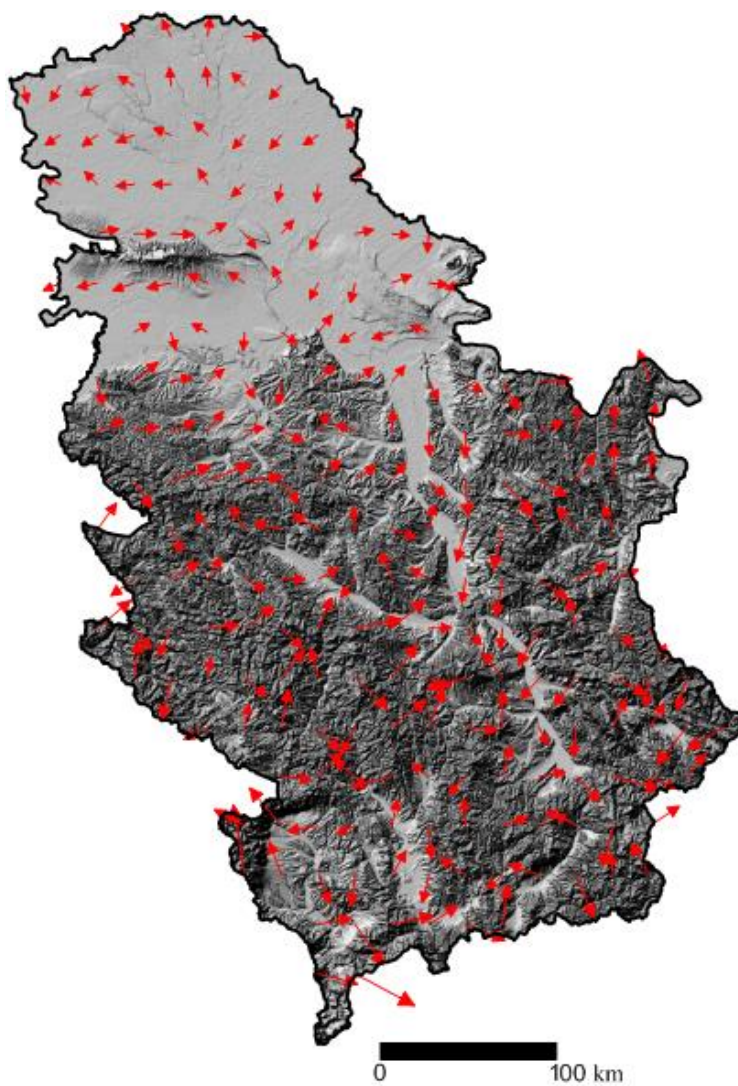
Слика 8: Општи облик површи хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу у-осе

Табела 8: ОСП хоризонталне компоненте вектора убрзања у правцу у-осе са константном густином

| Параметар | Број тачака | Минимум | Максимум | Средња вредност | Стандардна девијација |
|---------------------|-------------|---------|----------|-----------------|-----------------------|
| V_y^{2670} [mgal] | 5766 | -24.15 | 33.11 | 0.05 | 2.14 |

Теренска корекција са константном густином:

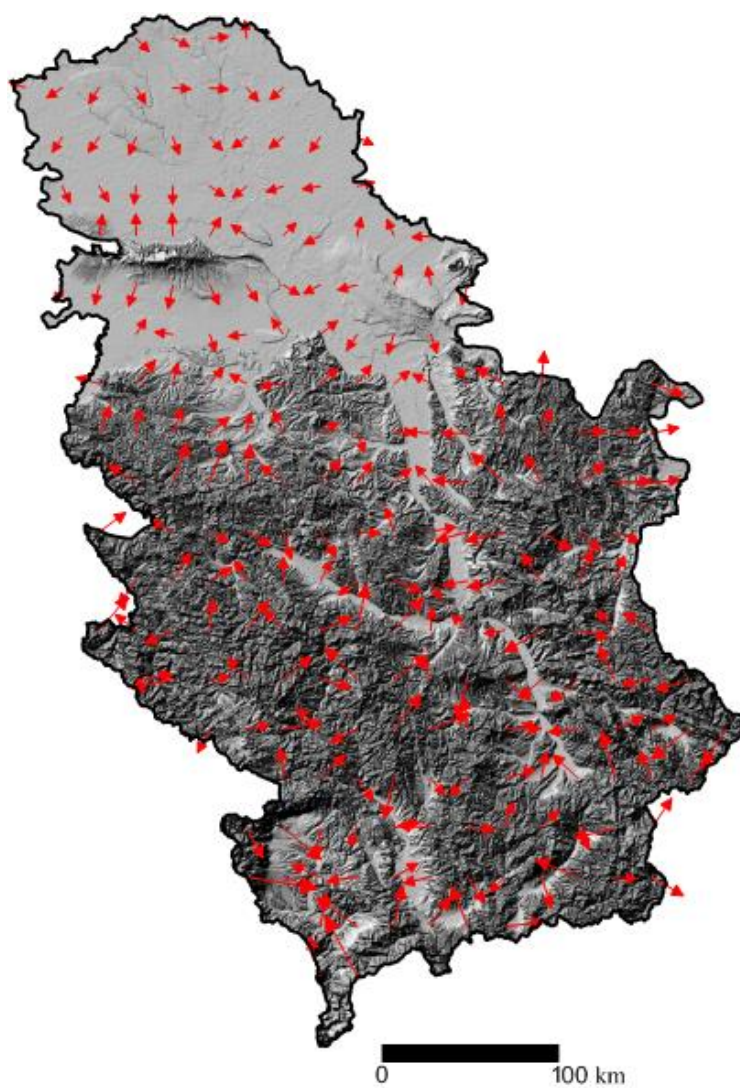
Вектори положаја убрзања силе теже у равни xy (V_{xy}^{2670})



Слика 9: Вектори положаја применом теренске корекције са константном густином

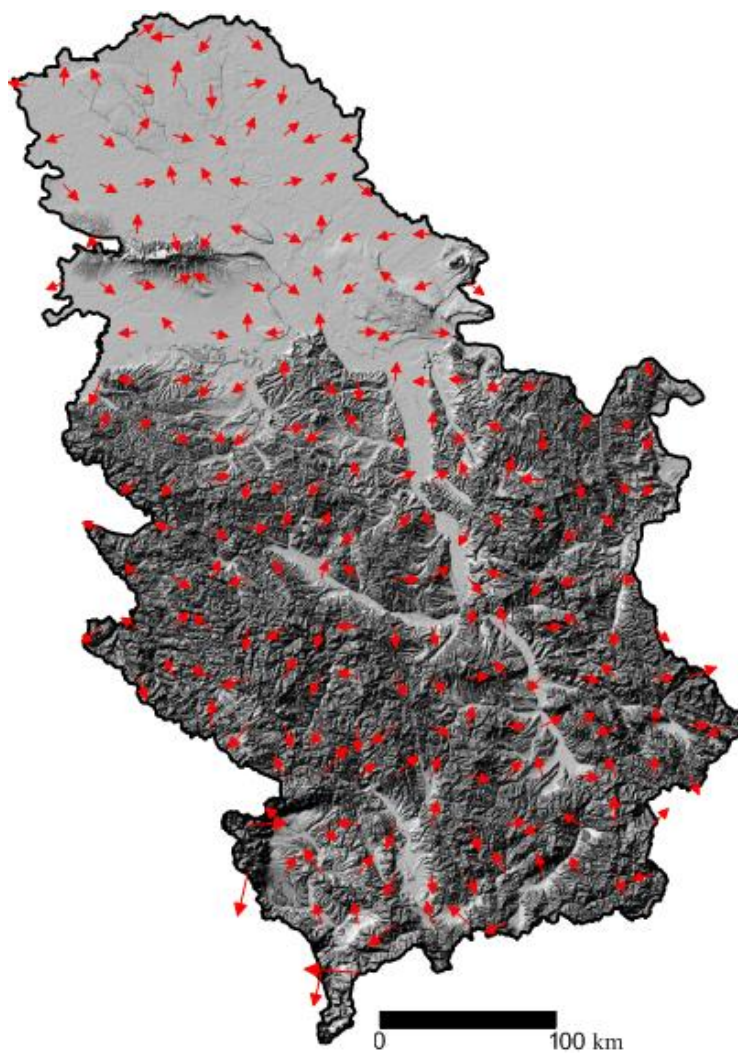
Теренска корекција са густином из ДМГ:

Вектори положаја убрзања силе теже у равни xy (V_{xy}^{ρ})



Слика 10: Вектори положаја применом теренске корекције са густином из ДМГ

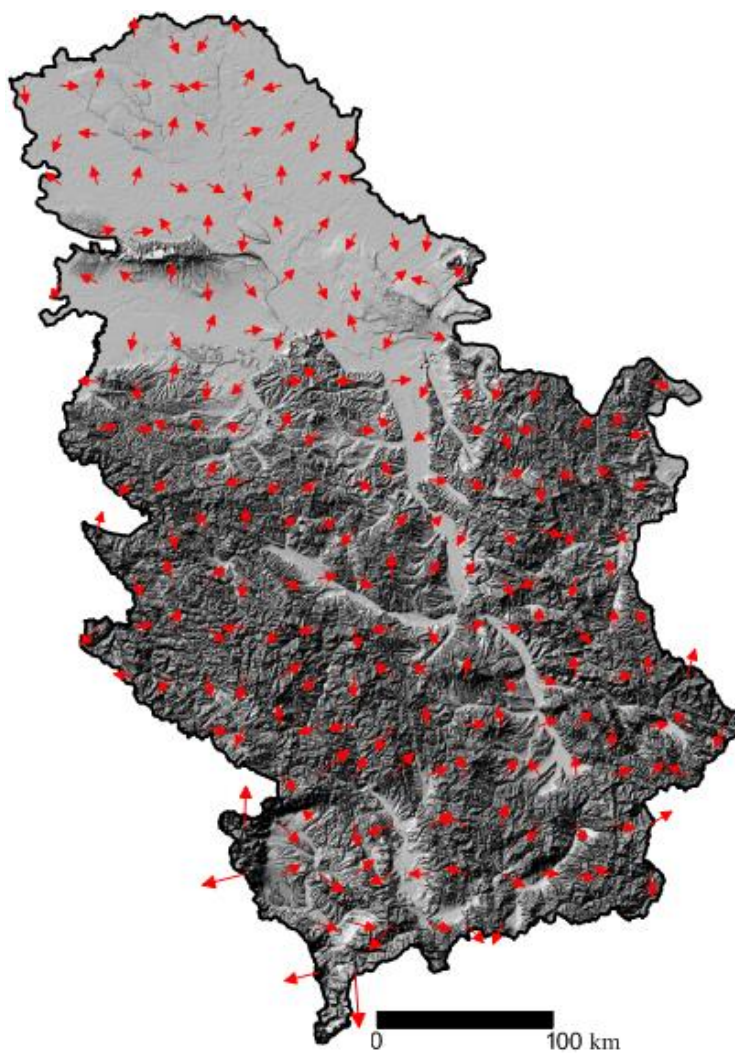
Резидуални модел терена са константним густином:
Вектори положаја убрзања силе теже у равни $xу$ (V_{xy}^{2670})



Слика 11: Вектори положаја применом РТМ15 са константним густином

Резидуални модел терена са густином из ДМГ:

Вектори положаја убрзања силе теже у равни xy (V_{xy}^{ρ})



Слика 10: Вектори положаја применом РТМ15 са густином из ДМГ

```
%Formiranje spiskova prizmi u okviru svakog DMT-a velicine
stepen puta stepen. Svaki pojedinačni DMT ce imati osnovnih
3601*3601 prizmi i jos podela svake prema kriterijumima.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc
clear
tic

% Otvaranje spiska DMT-a i citanje grida
fileID = fopen('spisak_DMT.dat');
DMTs = textscan(fileID, '%s');
fclose(fileID);
for ii=1:19

    DMTS=DMTs{1}{ii};

    [DMT, LminT, LmaxT, BminT, BmaxT, ZminT,
ZmaxT]=grd_read_v2(DMTS); % ima ih 19, menjati
    [br1, br2]=size(DMT);

% Otvaranje spiska DMG-a i citanje grida
fileID = fopen('spisak_DMG.dat');
DMGs = textscan(fileID, '%s');
fclose(fileID);

    DMGS=DMGs{1}{ii};

    [DMG, Lmin, Lmax, Bmin, Bmax, Romin, Romax]=grd_read_v2(DMGS);
    [br3, br4]=size(DMG);

    fprintf('Zavrшено ucitavanje gridova broj %i od ukupno 19.\n',
ii);
    %% Preuzimanje tacaka centra prizme iz DMT-a i DMG-a,
odgovarajuće rezolucije i cuvanje u fajl.

    [pathstr, name] = fileparts(DMTS);
    name(1:6)='Spisak';
    name(18:21)='.dat';
    filename=name;
    fid = fopen(filename, 'w');
    k= 1/3600; % rezolucija DMT i DMG
    A=zeros(39000000,10);

    Br=0;
    for i=1:br1
        tic
        fprintf('vrsta je broj %i',i);
```

```

        for j=1:br2
B= Bmin+(i-1)*k;
L= Lmin+(j-1)*k;
H= DMT(i,j);
    if (H>9000)
        H=0;
    end
Ro= DMG(i,j);
Tc=[L B];

fprintf('Preuzeta je tacka grida iz vrste %i i kolone
%i\n',i,j);

%% Zatim se koordinate centra prizme transformisu u GK-
projekciju, funkcijom GK, gde ulazni podaci moraju biti prvo
longituda pa latitude [L B]

[yx]=GK(Tc);

% fprintf('Odredjena su koordinate tacke u projekciji\n iz reda
%i i kolone %i\n', i,j);
% F-ja segmenti deli prizmu prema usvojenim kriterijumima.
% H1 je visina gornjeg segmenta prizme, H2 je visina srednjeg
segmenta prizme, H3 je visina donjeg segmenta prizme
if (Ro~=1000)
    [H1,Ro1,H2,Ro2,H3,Ro3] = segmenti(H,Ro);
else
    [H1,Ro1,H2,Ro2,H3,Ro3] = segmentiVode(yx(1),yx(2),H);
end
[y1, x1, y2, x2] = calc(yx(1),yx(2));
Brojac = (i-1)*br2 +j;
Br=Br+1;
A(Br,1)=Brojac;
A(Br,2)=B;
A(Br,3)=L;
A(Br,4)=y1;
A(Br,5)=x1;
A(Br,6)=H2+H3;
A(Br,7)=y2;
A(Br,8)=x2;
A(Br,9)=H1+H2+H3;
A(Br,10)=Ro1;
if (H2~=0)
    Br2=Brojac+0.2;
    Br=Br+1;
A(Br,1)=Br2;
A(Br,2)=B;
A(Br,3)=L;
A(Br,4)=y1;
A(Br,5)=x1;
A(Br,6)=H3;
A(Br,7)=y2;
A(Br,8)=x2;

```

```

A(Br,9)=H2+H3;
A(Br,10)=Ro2;
end
if (H3~=0)
    Br3=Brojac+0.3;
    Br=Br+1;
A(Br,1)=Br3;
A(Br,2)=B;
A(Br,3)=L;
A(Br,4)=y1;
A(Br,5)=x1;
A(Br,6)=0;
A(Br,7)=y2;
A(Br,8)=x2;
A(Br,9)=H3;
A(Br,10)=Ro3;
end
    end
    toc
end

toc

for z=1:Br
    fprintf(fid,'%9.1f %11.6f %11.6f %d %d %d %d %d %d %d
\n',A(z,1),A(z,2),A(z,3),A(z,4),A(z,5),A(z,6),A(z,7),A(z,8),A(z,
9),A(z,10));
end

fclose(fid);
end

```

```

% Funkcija za potencijal prave pravougaone prizme
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [ f0 ] = fV0( x,y,z )

r=sqrt((x)^2+(y)^2+(z)^2);

if x==0 && y==0 && z==0
    f0=0;
    return;
elseif x==0 && y==0
    f0=0;
    return;
elseif x==0 && z==0
    f0=0;
    return;
elseif y==0 && z==0
    f0=0;
    return;
end
f01=(x)*(y)*log(abs(z+r));
f02=(x)*(z)*log(abs(y+r));
f03=(y)*(z)*log(abs(x+r));
f04=((x)^2/2)*atan2((y*z),(x*r));
f05=((y)^2/2)*atan2((x*z),(y*r));
f06=((z)^2/2)*atan2((x*y),(z*r));
f0=f01+f02+f03-f04-f05-f06;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [V0] = PrismV0(xp,yp,zp,x1,y1,z1,x2,y2,z2,Rho)

G=6.67384*10^(-11);
xx1=x1-xp;
yy1=y1-yp;
zz1=z1-zp;
xx2=x2-xp;
yy2=y2-yp;
zz2=z2-zp;

a1=fV0(xx2,yy2,zz2);
a2=fV0(xx2,yy2,zz1);
a3=fV0(xx1,yy2,zz1);
a4=fV0(xx1,yy2,zz2);
a5=fV0(xx2,yy1,zz1);
a6=fV0(xx2,yy1,zz2);
a7=fV0(xx1,yy1,zz2);

```

```

a8=fV0(xx1,yy1,zz1);

V=a1-a2+a3-a4+a5-a6+a7-a8;
V0=Rho*G*V;
end

% Funkcija za prvi izvod potencijala prave pravougaone prizme u
pravcu x-ose
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [ fx ] = fVx( x,y,z )

r=sqrt((x)^2+(y)^2+(z)^2);

if x==0 && y==0 && z==0
    fx=0;
    return;
elseif x==0 && y==0
    fx=(z)*log(abs(y + r));
    return;
elseif x==0 && z==0
    fx=(y)*log(abs(z + r));
    return;
end
fx1=(y)*log(abs(z + r));
fx2=(z)*log(abs(y + r));
fx3=(x)*atan2((y*z), (x*r));
fx=fx1+fx2-fx3;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [Vx] = PrismVx(xp,yp,zp,x1,y1,z1,x2,y2,z2,Rho)

G=6.67384*10^(-11);
xx1=x1-xp;
yy1=y1-yp;
zz1=z1-zp;
xx2=x2-xp;
yy2=y2-yp;
zz2=z2-zp;

a1=fVx(xx2,yy2,zz2);
a2=fVx(xx2,yy2,zz1);
a3=fVx(xx1,yy2,zz1);
a4=fVx(xx1,yy2,zz2);
a5=fVx(xx2,yy1,zz1);
a6=fVx(xx2,yy1,zz2);
a7=fVx(xx1,yy1,zz2);
a8=fVx(xx1,yy1,zz1);

V=a1-a2+a3-a4+a5-a6+a7-a8;
Vx=Rho*G*V;

```

```

end

% Funkcija za prvi izvod potencijala prave pravougaone prizme u
pravcu y-ose
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [ fy ] = fVy( x,y,z )

r=sqrt( (x)^2+(y)^2+(z)^2 );

if x==0 && y==0 && z==0
    fy=0;
    return;
elseif x==0 && y==0
    fy=(z)*log(abs(x + r));
    return;
elseif y==0 && z==0
    fy=(x)*log(abs(z + r));
    return;
end
fy1=(x)*log(abs(z + r));
fy2=(z)*log(abs(x + r));
fy3=(y)*atan2( (x*z), (y*r) );
fy=fy1+fy2-fy3;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [Vy] = PrismVy(xp,yp,zp,x1,y1,z1,x2,y2,z2,Rho)

G=6.67384*10^(-11);
xx1=x1-xp;
yy1=y1-yp;
zz1=z1-zp;
xx2=x2-xp;
yy2=y2-yp;
zz2=z2-zp;

a1=fVy(xx2,yy2,zz2);
a2=fVy(xx2,yy2,zz1);
a3=fVy(xx1,yy2,zz1);
a4=fVy(xx1,yy2,zz2);
a5=fVy(xx2,yy1,zz1);
a6=fVy(xx2,yy1,zz2);
a7=fVy(xx1,yy1,zz2);
a8=fVy(xx1,yy1,zz1);

V=a1-a2+a3-a4+a5-a6+a7-a8;
Vy=Rho*G*V;
end

```

```

% Funkcija za prvi izvod potencijala prave pravougaone prizme u
pravcu z-ose
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [ fz ] = fVz( x,y,z )

r=sqrt((x)^2+(y)^2+(z)^2);

if x==0 && y==0 && z==0
    fz=0;
    return;
elseif x==0 && z==0
    fz=(y)*log(abs(x + r));
    return;
elseif y==0 && z==0
    fz=(x)*log(abs(y + r));
    return;
end
fz1=(x)*log(abs(y + r));
fz2=(y)*log(abs(x + r));
fz3=(z)*atan2((x*y), (z*r));
fz=fz1+fz2-fz3;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [Vz] = PrismVz(xp,yp,zp,x1,y1,z1,x2,y2,z2,Rho)

G=6.67384*10^(-11);
xx1=x1-xp;
yy1=y1-yp;
zz1=z1-zp;
xx2=x2-xp;
yy2=y2-yp;
zz2=z2-zp;

a1=fVz(xx2,yy2,zz2);
a2=fVz(xx2,yy2,zz1);
a3=fVz(xx1,yy2,zz1);
a4=fVz(xx1,yy2,zz2);
a5=fVz(xx2,yy1,zz1);
a6=fVz(xx2,yy1,zz2);
a7=fVz(xx1,yy1,zz2);
a8=fVz(xx1,yy1,zz1);

V=a1-a2+a3-a4+a5-a6+a7-a8;
Vz=Rho*G*V;
end

```


Биографија аутора

Сања Мирко Грекуловић, рођена је у Београду, 1. октобра 1982. године. Након завршене средње Геодетске техничке школе у Београду, 2001. године уписује Грађевински факултет, Универзитета у Београду, Одсек за геодезију.

Дипломирала је 2007. године са просечном оценом 8,61. Дипломски рад из предмета Анализа методе мерења на тему: „Одређивање грешке читавања код дигиталног нивелира“, одбранила је са оценом 10.

Докторске студије на Грађевинском факултету уписала је 2007. године, и положила све испите са просечном оценом 9,88. Током докторских студија је као аутор или коатур објавила више радова од тога: 1 рад у међународном часопису са *SCI* листе, 2 рада у домаћим часописима, 3 рада на националним конгресима, 9 радова на међународним конференцијама и коаутор је објављене збирке задатака из предмета Физичка геодезија.

У току докторских студија била је учесник студијског путовања у циљу упознавања система образовања на универзитетима у Немачкој (2009. године). Учествовала је у више летњих и зимских школа за докторанте, као и у једном семинару GIS project seminar in Serbia, за докторанте и студенте, у оквиру немачко-српског пројекта Land Management/Cadastre in Serbia (LAMCAD).

Од 2008. године, Сања Грекуловић је запослена као асистент на Грађевинском факултету у Београду. Учествоје у настави на предметима: Геодетска метрологија, Геодетске референтне мреже, Физичка геодезија, Нумеричке методе физичке геодезије, Практична настава из геодезије. Као истраживач учествовала је на 2 научно-истраживачка пројекта финансирана од стране Министарства науке Републике Србије и једном међународном пројекту COST, посвећеном моделирању података тропосфере за праћење већих временских догађаја.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани Сања Грекуловић

број индекса 11/07

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

„МОДЕЛИРАЊЕ ГУСТИНЕ ЗЕМЉИНЕ КОРЕ ПРИ РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМА
ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ“

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 23.05.2014. године

Сања Грекуловић

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске
верзије докторског рада**

Име и презиме аутора Сања Грекуловић

Број индекса 11/07

Студијски програм Геодезија и геоинформатика

Наслов рада „МОДЕЛИРАЊЕ ГУСТИНЕ ЗЕМЉИНЕ КОРЕ ПРИ РЕШАВАЊУ
ПРОБЛЕМА ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ“

Ментор В.проф. др Олег Одловић, дипл. геод. инж

Потписани _____



Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 23.05.2014. године



Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

„МОДЕЛИРАЊЕ ГУСТИНЕ ЗЕМЉИНЕ КОРЕ ПРИ РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМА
ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ“

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
- 3. Ауторство – некомерцијално – без прераде**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 23.05.2014. године



1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.