



Univerzitet u Nišu  
GRAĐEVINSKO-ARHITEKTONSKI FAKULTET

Vladan M. Nikolić

**KONSTRUKTIVNA OBRADA  
GEOMETRIJSKIH POVRŠI  
I NJIHOVA PRIMENA  
U ARHITEKTURI**

doktorska disertacija

Niš | 2015.

Univerzitet u Nišu  
GRAĐEVINSKO-ARHITEKTONSKI FAKULTET

Vladan M. Nikolić

**KONSTRUKTIVNA OBRADA  
GEOMETRIJSKIH POVRŠI  
I NJIHOVA PRIMENA  
U ARHITEKTURI**

doktorska disertacija

Niš | 2015.



University of Niš  
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING AND ARCHITECTURE

Vladan M. Nikolić

**CONSTRUCTIVE TREATMENT  
OF GEOMETRIC SURFACES  
AND THEIR APPLICATIONS  
IN ARCHITECTURE**

doctoral dissertation

Niš | 2015.

### Članovi komisije:

**dr Biserka Marković**

redovni profesor Građevinsko-arhitektonskog fakulteta  
Univerziteta u Nišu

**dr Ljiljana Radović | mentor**

vanredni profesor Mašinskog fakulteta  
Univerziteta u Nišu

**dr Ratko Obradović**

redovni profesor Fakulteta tehničkih nauka  
Univerziteta u Novom Sadu

Datum odbrane doktorske disertacije:

# ZAHVALNOST

Želim da izrazim iskrenu zahvalnost na podršci tokom istraživanja i izrade ove doktorske disertacije svojim profesorima dr Miroslavu Markoviću, dr Biserki Marković, dr Ljiljani Radović i dr Ratku Obradoviću. Takođe se zahvaljujem svim profesorima, kolegama i prijateljima koji su mi iskreno pomogli u izradi doktorata. Zahvalan sam Građevinsko-arhitektonskom fakultetu u Nišu, kao instituciji u kojoj sam studirao, diplomirao i završio doktorske studije.

Posebnu zahvalnost dugujem svojoj supruzi i sinu, roditeljima i svima onima koji su me podržali.



Posvećeno mom sinu **Lazaru**

# KONSTRUKTIVNA OBRADA GEOMETRIJSKIH POVRŠI I NJIHOVA PRIMENA U ARHITEKTURI

## REZIME

Suština arhitekture je složen misaoni proces prožet eksperimentima, inovacijama i imaginacijom. Arhitektura i geometrija su neraskidivo vezane, a arhitektura bez geometrije ne može da postoji. Istorija geometrije je ujedno i deo istorije arhitekture i obrnuto. Osnova svake uspešne arhitekture je vešta i racionalna primena geometrijskih površi u oblikovanju kompleksnih prostornih struktura, uz postizanje estetski kvalitetnih formi. Trenutna istraživanja forme i vizuelnih koncepcija u arhitekturi zahtevaju sveobuhvatno poznavanje, sagledavanje i konstruktivnu obradu geometrijskih površi, a zasnovana su na primeni novih kompjuterskih tehnologija.

Klasifikacija površi je razmatrana u kontekstu mogućnosti njihove primene u arhitekturi i dizajnu. Prikazana podela je jasna i upotrebljiva kao polazna osnova za analizu i uspešno planiranje forme arhitektonskih objekata, kao i drugih prostornih struktura. U praksi se češće koriste pravoizvodne geometrijske površi zbog jednostavnosti projektovanja, određivanja osnovnih parametara, kao i jednostavnosti praktičnog izvođenja. U ovoj doktorskoj disertaciji su prikazane površi koje predstavljaju osnovni skup upotrebljivanih formi u arhitekturi i dizajnu.

Analizirane su geometrijske površi 2. stepena i njihova primena u arhitekturi. Dokazana je polazna hipoteza da je konstruktivnu obradu površi 2. stepena moguće izvesti uvođenjem opšte ili perspektivne kolineacije prostora, gde se beskonačno daleka ravan prostora dovodi u konačnost. Prostornom kolineacijom može se odrediti slika apsolutne konike prostora u nedoglednoj ravni. Nakon toga određuju se zajednički elementi slike apsolutne konike prostora i slike beskonačno daleke konike kvadrike, što omogućava određivanje osa, središta, kružnih tačaka i kružnih preseka kod geometrijskih površi 2. stepena.

Za konstruktivnu obradu geometrijskih površi 2. stepena neophodno je određivanje zajedničkih elemenata para konika, bez obzira na realitet. Postupak je zasnovan isključivo na geometrijskim metodama i moguće ga je primeniti na bilo koji par konika. Određivanje zajedničkih elemenata para konika rešeno je uspostavljanjem kolinearnog odnosa između dva kolokalna polja određena tim dvema konikama. Nalaženjem žiža (fokusa) polja i primenom postupka za određivanje direktne veze između jedne realne dvostruke prave i žiža opšte kolinearnih polja, određene su strane zajedničkog autopolarnog trougla, a nakon toga i presečne tačke para konika. Prikazana su i detaljno objašnjena tri primera

određivanja preseka konika i to: para realnih konika, para imaginarnih konika, odnosno realne i imaginarne konike.

Analizirane su pravoizvodne površi višeg reda i transcendentne pravoizvodne površi. Postavljeni su kriterijumi koje analizirane površi treba da ispunjavaju, kako bi mogle opravdano i uspešno da se primenjuju u projektovanju i oblikovanju različitih prostornih struktura. To su pre svega univerzalnost, jednostavnost projektovanja i praktičnog izvođenja, vizuelni kvaliteti i karakteristike, racionalnost i ekonomičnost. Predložena su inovativna oblikovna rešenja u kontekstu prethodno definisanih kriterijuma, što omogućava uspešno sagledavanje i implementaciju analiziranih površi u geometrijske forme budućih arhitektonskih objekata. Mogućnosti praktične primene su sagledane kroz razmatranje karakterističnih segmenata i isečaka površi, njihovu multiplikaciju i uklapanje u složene prostorne strukture - sklopove. Posebna pažnja u radu posvećena je kompjuterskom generisanju i konstruktivnoj obradi pravoizvodnih površi višeg reda i transcendentnih pravoizvodnih površi. Korišćeno je NURBS modelovanje, zbog kvaliteta i preciznosti izvedenih površi, u kompjuterskom programu *Rhinoceros*. Sprovedeno istraživanje predstavlja spoj postojećih saznanja iz oblasti geometrijskih površi, novih originalnih metoda njihove konstruktivne obrade i upotrebe inovativnih oblikovnih rešenja u arhitekturi.

**Ključne reči:** arhitektura, geometrijske površi, površi 2. stepena, pravoizvodne površi višeg reda, transcendentne pravoizvodne površi, konstruktivna obrada, intersekcija konika, opšta i perspektivna kolineacija prostora, 3D modelovanje i vizuelizacija.

**Naučna oblast:** arhitektura

**Uža naučna oblast:** vizuelizacija u arhitekturi i građevinarstvu

**UDK:** 514.18:004.9(043.3)

**Klasifikaciona oznaka za datu naučnu oblast:** T 240

# CONSTRUCTIVE TREATMENT OF GEOMETRIC SURFACES AND THEIR APPLICATIONS IN ARCHITECTURE

## ABSTRACT

The basics of architecture is complex process permeated with experiments, innovations and imagination. Architecture and geometry are inseparably connected, and architecture without geometry cannot exist. The history of geometry is in the same time also a part of history of architecture and vice versa. The foundation of every successful architecture is skillful and rational application of geometrical surfaces in shaping complex space structures, with reaching aesthetically quality forms. Current researches of form and visual conceptions in architecture demand one comprehensive knowledge, overview and constructive treatment of geometrical surfaces and are based upon the application of new computer technologies.

Classification of surfaces is elaborated in the context of the possibility of their application in architecture and design. Shown division is clear and usable as a starting basis for further analyses and successful planning of form of architectonic objects, as well as other space structures. In practice more frequent are used ruled geometrical surfaces because of the simplicity of projecting, determination of basic parameters, as well as simplicity of practical works. In this doctoral thesis are shown the surfaces that represent basic gathering of the used forms in architecture and design.

There have been analyzed the surfaces of the second degree and their application in architecture. The starting hypothesis is proved that constructive treatment of the surfaces of the second degree it is possible to do with the introduction of general colineation of the space where infinitely distant plane of space is put to finality. With space colineation one can determine the picture of absolute conic of the space in infinite plane. After that, the common elements of the picture of absolute conic of the space and the picture of infinite distant conic of quadric, are determined, which allows the determination of the axis, center, circular dots and circular sections with the quadrics.

For constructive treatment of quadrics it is necessary to determine the common elements of the conics pair, no matter for reality. This procedure is based only on geometrical methods and it is possible to use to any other conics pair. Determination of common elements of conics pair is solved with the establishment of collinear relation between two collocal fields determined with those two conics. With finding focuses of the fields and the application of the procedure for

determination of direct connection between one real double straight line and focus of general conic fields, the sides of common auto-polar triangle are determined and after that also the cutting - section points of conics pair. There were shown and in details explained the examples of determination of the three conic sections such as pair of real conics, pair of imaginary conics, i.e. real and imaginary conics.

Ruled surfaces are analyzed of the higher order and transcendent productive surfaces. Criteria are also set that the analyzed surfaces should fulfill, so that they could be justified and successfully applied in projecting and shaping of various space structures. These are first of all universality, simplicity of projecting and practical use, visual qualities and characteristics, rationality and economy. There have been suggested the innovative shaped solutions in the context of former defined criteria, which provides successful overview and implementation of the analyzed surfaces into geometrical forms of future architectonic objects. The possibilities of practical use are taking into account through the review of characteristic segments and cutouts of surfaces, their multiplication and fitting in complex space structures - assemblies. Special attention in the work is dedicated to computer generating and constructive treatment of ruled surfaces of higher degree and transcendent ruled surfaces. NURBS modeling is used because of the quality and accuracy of treated surfaces in computer programme *Rhinoceros*. This conducted research represents the connection of the existing knowledge from the geometrical surfaces spheres, new original methods and their constructive treatments and uses of innovative shaped solutions in architecture.

**Key words:** architecture, geometrical surfaces, quadrics, ruled surfaces of higher degrees, transcendent ruled surfaces, constructive treatment, intersection of conics, general or perspective collineation of space, 3D modeling i visualization.

**Scientific area:** architecture

**Field of Academic Expertise:** visualization in architecture and civil engineering

**UDK:** 514.18:004.9(043.3)

**Classification code for a given scientific field:** T 240



# SADRŽAJ

<b>UVOD .....</b>	<b>1</b>
<b>I POGLAVLJE   KLASIFIKACIJA POVRŠI .....</b>	<b>10</b>
I1 UVODNE NAPOMENE .....	11
I2 POVRŠI I NJIHOVO IZVOĐENJE.....	12
I3 KLASIFIKACIJA POVRŠI .....	15
I4 GEOMETRIJSKE POVRŠI.....	16
14.1 PRAVOIZVODNE POVRŠI.....	16
14.1.1 Razvojne pravoizvodne površi .....	17
14.1.1.1 Poliedarske (rogljaste) površi .....	17
Poliedri.....	18
Platonova tela - konveksni pravilni poliedri.....	19
Kepler-Poinsotova tela - konkavni pravilni poliedri.....	20
Arhimedova tela .....	24
Piramide i prizme .....	27
14.1.1.2 Jednostruko zakrivljene površi.....	28
Konusi i oblice .....	28
Konvolutne površi .....	30
14.1.2 Vitoperne pravoizvodne površi .....	32
14.1.2.1 Vitoperne jednostruko izvodne površi .....	33
Cilindroidi i konoidi .....	34
Tetroidi .....	35
Helikoidi .....	36
14.1.2.2 Vitoperne dvostruko izvodne površi .....	38
Jednograni eliptični hiperboloidi .....	38
Jednograni obrtni hiperboloidi .....	39
Hiperbolički paraboloidi.....	41

14.2 DVOSTRUKO ZAKRIVLJENE POVRŠI.....	43
Vrste tačkaka površi.....	43
14.2.1 Opšte dvostruko zakrivljene površi .....	44
Elipsoidi .....	45
Lopta (sfera) .....	46
Dvograni hiperboloidi .....	48
Paraboloidi .....	49
14.2.2 Obrtne dvostruko zakrivljene površi.....	50
Torusi.....	51
Dupinove ciklide .....	53
14.2.3 Klizne dvostruko zakrivljene površi.....	58
15 TOPOGRAFSKE POVRŠI .....	59
16 ZAKLJUČNA RAZMATRANJA I POGLAVLJA.....	60
<b>II POGLAVLJE   GEOMETRIJSKE POVRŠI 2. STEPENA I NJIHOVA PRIMENA U ARHITEKTURI .....</b>	<b>61</b>
II1 UVODNE NAPOMENE .....	62
II2 POVRŠI 2. STEPENA .....	64
II2.1 Pravoizvodne površi 2. stepena kao proizvod projektivnih temeljnih tvorevina 1. vrste u prostoru .....	68
II2.2 Opšte površi 2. stepena kao proizvod korelativnih svežnjeva u prostoru .....	71
II3 OSE, KRUŽNI PRESECI I KRUŽNE TAČKE POVRŠI 2. STEPENA.....	74
II3.1 Ose površi 2. stepena .....	74
II3.2 Kružni preseci i kružne tačke površi 2. stepena.....	75
II4 ZAJEDNIČKI ELEMENTI KRIVIH 2. STEPENA - KONIKA.....	77
II4.1 Presečne tačke para konika .....	78
II4.2 Konstruktivni postupak određivanja presečnih tačkaka para konika .....	82
II4.2.1 Presečne tačke dve realne konike .....	83
II4.2.2 Presečne tačke realne i imaginarne konike .....	87
II4.2.3 Presečne tačke dve imaginarne konike .....	90

<b>II5 KONSTRUKTIVNA OBRADA PRAVOIZVODNIH I OPŠTIH POVRŠI 2. STEPENA PRIMENOM OPŠTE ILI PERSPEKTIVNE KOLINEACIJE I APSOLUTNE KONIKE PROSTORA .....</b>	<b>94</b>
II5.1 Opšta kolineacija prostora .....	94
II5.1.1 Konstruktivna obrada kvadraka primenom opšte kolineacije prostora .....	95
II5.2 Perspektivna kolineacija prostora .....	96
II5.2.1 Određivanje slike apsolutne konike prostora .....	97
II5.2.2 Određivanje ose, temena i glavne ravni hiperboličkog paraboloida .....	97
<b>II6 ZAKLJUČNA RAZMATRANJA II POGLAVLJA .....</b>	<b>100</b>
<b>III POGLAVLJE   PRAVOIZVODNE TRANSCEDENTNE POVRŠI I PRAVOIZVODNE POVRŠI VIŠEG REDA I NJIHOVA PRIMENA U ARHITEKTURI .....</b>	<b>102</b>
<b>III1 UVODNE NAPOMENE.....</b>	<b>103</b>
III1.1 SOFTVERSKA REŠENJA I IZVOĐENJE KRIVIH I POVRŠI.....	104
<b>III2 KRIVE VIŠEG REDA .....</b>	<b>106</b>
III2.1 KRIVE 3. REDA.....	106
III2.2 KRIVE 4. REDA.....	110
<b>III3 PRAVOIZVODNE POVRŠI VIŠEG REDA.....</b>	<b>114</b>
III3.1 PRAVOIZVODNE POVRŠI 3. REDA .....	114
III3.2 PRAVOIZVODNE POVRŠI 4. REDA .....	117
<b>III4 IZABRANE PRAVOIZVODNE POVRŠI VIŠEG REDA         I MOGUĆNOSTI NJIHOVE PRIMENE U ARHITEKTURI .....</b>	<b>119</b>
III4.1 Primer I .....	119
III4.2 Primer II.....	122
III4.3 Primer III .....	126
III4.4 Primer IV.....	131
III4.5 Primer V .....	133
III4.6 Primer VI.....	136
<b>III5 TRANSCEDENTNE KRIVE .....</b>	<b>138</b>

<b>III6 PRIMENA TRANSCEDENTNIH PRAVOIZVODNIH POVRŠI U ARHITEKTURI .....</b>	<b>140</b>
<b>III7 IZABRANE TRANSCEDENTNE PRAVOIZVODNE POVRŠI I MOGUĆNOSTI NJIHOVE PRIMENE U ARHITEKTURI .....</b>	<b>147</b>
<b>III7.1 KOHLEOIDNI KONUS .....</b>	<b>148</b>
117.1.1 Izvođenje kohleoidnog konusa i karakteristike .....	148
117.1.2 Primena kohleoidnog konusa u arhitekturi .....	153
117.1.3 Dvostruki kohleoidni konus.....	154
117.1.4 Prodori dvostrukih kohleoidnih konusa i njegova primena u arhitekturi .....	155
<b>III7.2 TRANSCEDENTNE PRAVOIZVODNE POVRŠI ČIJE SU VODILJE         KONUSNA, SFERNA I HIPERBOLOIDNA ZAVOJNICA .....</b>	<b>169</b>
<b>III8 ZAKLJUČNA RAZMATRANJA III POGLAVLJA .....</b>	<b>177</b>
<b>ZAKLJUČAK .....</b>	<b>179</b>
<b>LITERATURA .....</b>	<b>184</b>
<b>BIOGRAFIJA .....</b>	<b>188</b>
<b>IZJAVE AUTORA .....</b>	<b>189</b>

# **SPIŠAK SLIKA, ILUSTRACIJA I TABELA**

## **I POGLAVLJE**

<i>Slika 1.</i>	<i>Primena geometrijskih površi u oblikovanju arhitektonskog objekta (V. Nikolić) *</i>	11
<i>Slika 2.</i>	<i>Površni koje formiraju izvodnice i, kretanjem po vodiljama d *</i>	12
<i>Slika 3.</i>	<i>Neki od mogućih prostornih odnosa izvodnica - vodilja prilikom izvođenja površi *</i>	13
<i>Slika 4.</i>	<i>Tipovi površi *</i>	13
<i>Slika 5.</i>	<i>Transformacija cilindar - cilindroid - cilindar *</i>	14
<i>Tabela I</i>	<i>Klasifikacija površi koje imaju primenu u tehničkoj praksi</i>	15
<i>Slika 6.</i>	<i>Teatro Popular, Niteroi, Brazil, 2007. (Oscar Niemeyer Architect)</i>	16
<i>Slika 7.</i>	<i>Površ nastala presekom triju kompleksa *</i>	17
<i>Slika 8.</i>	<i>Konveksno telo *</i>	18
<i>Slika 9.</i>	<i>Polyhedra Modular Coffee Table (Haldane Martin) Folded Polyhedra Coffee Table (Jon Hills)</i>	19
<i>Slika 10.</i>	<i>Platonova tela - konveksni pravilni poliedri</i>	19
<i>Slika 11.</i>	<i>Treehotel, Švedska, 2012. (Tham &amp; Videgård Arkitekter)</i>	20
<i>Slika 12.</i>	<i>Tetrahedron Tower, Singapur, Evolo konkurs, 2010. (Tan Bing Hui)</i>	20
<i>Slika 13.</i>	<i>Housing Tower, Lima, konkursni rad, 2014. (Tammo Prinz Arch.)</i>	21
<i>Tabela II</i>	<i>Platonova tela - konveksni pravilni poliedri</i>	21
<i>Slika 14.</i>	<i>Konkavni pravilni poliedri - Kepler-Poinsotova tela</i>	22
<i>Tabela III</i>	<i>Kepler-Poinsotova tela - konkavni pravilni poligoni</i>	22
<i>Slika 15.</i>	<i>Dodecaedrum Varazze, Milano, Italija, 2012. (Duisio Forte)</i>	23
<i>Slika 16.</i>	<i>Gravitacija, 1952. (M. C. Escher) Skulptura, Kampus Univerziteta u Tventeu, Holandija</i>	23
<i>Slika 17.</i>	<i>Arhimedova tela</i>	24
<i>Slika 18.</i>	<i>Tetraedar i zasečeni tetraedar</i>	25
<i>Slika 19.</i>	<i>Splav, Kopenhagen, Danska</i>	25
<i>Tabela IV</i>	<i>Arhimedova tela</i>	26
<i>Slika 20.</i>	<i>Piramidalna poliedarska površ *</i>	27
<i>Slika 21.</i>	<i>Prizmatična poliedarska površ *</i>	27
<i>Slika 22.</i>	<i>Pravilna prava trostrana piramida *</i>	27
<i>Slika 23.</i>	<i>Pravilna prava trostrana prizma *</i>	27
<i>Slika 24.</i>	<i>Pirizme i piramide - Pavilion 21 mini opera space, Minhen, Nemačka, 2008. (Coop Himmelb(l)au)</i>	27
<i>Slika 25.</i>	<i>Konusna površ *</i>	28
<i>Slika 26.</i>	<i>Obrtni (kružni) konus *</i>	28
<i>Slika 27.</i>	<i>Cilindrična površ *</i>	28
<i>Slika 28.</i>	<i>Obrtna (kružna) oblica *</i>	28
<i>Slika 29.</i>	<i>Transformacija prizme u obliku beskonačnim uvećavanjem broja strana vodilje</i>	29
<i>Slika 30.</i>	<i>Velo Towers, Seul, Južna Koreja, 2012. (Asymptote Architecture)</i>	29

<i>Slika 31.</i>	<i>Cloud House, Fitzroy North VIC, Australia, 2012. (McBride Charles Ryan)</i>	29
<i>Slika 32.</i>	<i>Ski Resort in Lapland, Levi, Finska, 2011. (BIG)</i>	30
<i>Slika 33.</i>	<i>Konvolutna površ opšteg tipa *</i>	31
<i>Slika 34.</i>	<i>Zavojna konvolutna površ - Zavojna torza *</i>	31
<i>Slika 35.</i>	<i>Anvelopna površ</i>	31
<i>Slika 36.</i>	<i>Tipovi zavojnica *</i>	31
<i>Slika 37.</i>	<i>Olympic Stadium - Small Arena, Tokijo, Japan, 1961. (Kenzo Tange)</i>	32
<i>Slika 38.</i>	<i>The Cathedral of Christ the Light, Oukland, Kalifornija, SAD, 2002. (SOM)</i>	32
<i>Slika 39.</i>	<i>Malezijski paviljon, Šangaj, Kina, EXPO 2010.</i>	33
<i>Slika 40.</i>	<i>Cilindroid *</i>	34
<i>Slika 41.</i>	<i>Konoid *</i>	34
<i>Slika 42.</i>	<i>Sydney Cruise Terminal, Sidnej, Australija, 2013. (Johnson Pilton Walker Architects)</i>	34
<i>Slika 43.</i>	<i>Školska zgrada uz katedralu Svete porodice, Barselona, Španija (Antonio Gaudi)</i>	35
<i>Slika 44.</i>	<i>Tetroid (ortogonalne projekcije i perspektiva) *</i>	35
<i>Slika 45.</i>	<i>Nadstrešnice tržnog centra, Kraljevo, Srbija *</i>	36
<i>Slika 46.</i>	<i>Otvoreni i zatvoreni helikoid (ort. projekcije i aksonometrija)</i>	36
<i>Slika 47.</i>	<i>Helikoidi (ortogonalne projekcije) *</i>	37
<i>Slika 48.</i>	<i>Jednograni eliptički hiperboloid</i>	38
<i>Slika 49.</i>	<i>Hyper Tower, Westonbirt, Velika Britanija, 2009. (Marks Barfield)</i>	39
<i>Slika 50.</i>	<i>Jednograni obrtni hiperboloid *</i>	39
<i>Slika 51.</i>	<i>Public library and community centre Gen Coel Heerlerheide, Herlen, Holandija, 2008. (Hans Erren)</i>	40
<i>Slika 52.</i>	<i>Jednograni obrtni hiperboloid *</i>	40
<i>Slika 53.</i>	<i>Stubovi mosta na Bulevaru Medijana, Niš, Srbija, 2006. *</i>	41
<i>Slika 54.</i>	<i>Hiperbolički paraboloid *</i>	41
<i>Slika 55.</i>	<i>Hiperbolički paraboloid *</i>	42
<i>Slika 56.</i>	<i>Crkva Svetog Alojsija, Nju Džersi, SAD, 2009. (Erdy McHenry Architecture)</i>	42
<i>Slika 57.</i>	<i>Vrste tačaka površi *</i>	43
<i>Slika 58.</i>	<i>Vrste tačaka površi</i>	44
<i>Slika 59.</i>	<i>Opšta dvostruko zakrivljena površ (perspektiva) *</i>	45
<i>Slika 60.</i>	<i>Izduženi i spljošteni obrtni elipsoid (sferoidi) *</i>	45
<i>Slika 61.</i>	<i>Troosni elipsoid *</i>	45
<i>Slika 62.</i>	<i>Oriental Art Center, Šangaj, Kina, 2002. (Paul Andreu Architects)</i>	46
<i>Slika 63.</i>	<i>Studentski rad, 2010. (Tamara Manojlović)</i>	46
<i>Slika 64.</i>	<i>Lopta (sfera) *</i>	47
<i>Slika 65.</i>	<i>A Housing for 1000 artists, studentski rad, Njujork, SAD, 2013. (Ehab Ghali)</i>	47
<i>Slika 66.</i>	<i>Dvograni obrtni hiperboloid (perspektiva) *</i>	48
<i>Slika 67.</i>	<i>Dvograni eliptični hiperboloid (perspektiva) *</i>	48
<i>Slika 68.</i>	<i>Eliptični paraboloid (perspektiva) *</i>	49
<i>Slika 69.</i>	<i>Obrtni paraboloid (perspektiva) *</i>	49

<i>Slika 70.</i>	<i>Baha'i House of Worship, Panama City, Panama, 1972. (Peter Tillotson)</i>	50
<i>Slika 71.</i>	<i>Obrtne površi (ort. projekcije i perspektiva) *</i>	50
<i>Slika 72.</i>	<i>Jean-Marie Tjibaou Cultural Centre, Francuska, 1993. (Renzo Piano)</i>	51
<i>Slika 73.</i>	<i>Torus (perspektiva) *</i>	51
<i>Slika 74.</i>	<i>Vrste tačkaka torusa (perspektiva) *</i>	51
<i>Slika 75.</i>	<i>Exploration Place, Vičita, Kansas, SAD, 1997. (www.msafdie.com)</i>	52
<i>Slika 76.</i>	<i>Kružni torusi (perspektiva) *</i>	52
<i>Slika 77.</i>	<i>Dupinova ciklida (ortogonalne projekcije i perspektiva) *</i>	53
<i>Slika 78.</i>	<i>Golden city, Proposal for Novosibirsk, Russia, 2007 (Eric Worcester Architecture)</i>	53
<i>Slika 79.</i>	<i>Dupinova ciklida, skulptura, 2011. (Friedhelm Kürpig)</i>	54
<i>Slika 80.</i>	<i>Moguće varijante Štajnerovog lanca i Paposov lanac</i>	54
<i>Slika 81.</i>	<i>Sodijev hekslet (perspektiva i ortogonalne projekcije) *</i>	55
<i>Slika 82.</i>	<i>Dupinova ciklida kao obvojnica lopti sodijevog heksleta (perspektiva) *</i>	55
<i>Slika 83.</i>	<i>Dupinova ciklida - preseci po kružnicama (osnova i perspektiva) *</i>	56
<i>Slika 84.</i>	<i>Serpentine Pavilion 2014, Kensington Gardens, London (Smiljan Radić)</i>	56
<i>Slika 85.</i>	<i>Hekslet sferoida. (perspektiva) *</i>	57
<i>Slika 86.</i>	<i>Ciklida kao obvojnica heksleta sferoida *</i>	57
<i>Slika 87.</i>	<i>Ciklida kao obvojnica lanca sferoida *</i>	57
<i>Slika 88.</i>	<i>Klizna dvostruko zakrivljena površ (perspektiva i osnova) *</i>	58
<i>Slika 89.</i>	<i>Translacijska klizna dvostruko zakrivljena površ (perspektiva i osnova) *</i>	58
<i>Slika 90.</i>	<i>Barajas Airport Terminal 4, Madrid, Španija, 2006. (Antonio Lamela, Richard Rogers, TPS Engineers)</i>	58
<i>Slika 91.</i>	<i>Topografska površ *</i>	59
<i>Slika 92.</i>	<i>Površ nastala proizvoljnom deformacijom dupinove ciklide *</i>	59
<i>Slika 93.</i>	<i>Autobuska stanica, Kasares, Španija, 2004. (Justo García Rubio)</i>	60

## **II POGLAVLJE**

<i>Slika 94.</i>	<i>Glasgow Science Center, Velika Britanija, 2000.</i>	62
<i>Slika 95.</i>	<i>Paviljon Singapura, EXPO 2010, Šangaj, Kina, 2010.</i>	63
<i>Slika 96.</i>	<i>Hypar paviljon u kamusu Linkoln centru u Njujorku, 2011. (Diller Scofidio + Renfro)</i>	63
<i>Slika 97.</i>	<i>Palata umetnosti kraljice Sofije, Valensija, Španija, 2005. (Santiago Calatrava)</i>	64
<i>Slika 98.</i>	<i>Kontrolni toranj aerodroma u Stokholmu, Švedska</i>	65
<i>Slika 99.</i>	<i>Canton Tower, Kina, 2010.</i>	65
<i>Slika 100.</i>	<i>Paviljon Saudijske Arabije EXPO 2010, Šangaj, Kina</i>	65
<i>Slika 101.</i>	<i>Paviljon Japana, EXPO 2010, Šangaj, Kina, 2010.</i>	66
<i>Slika 102.</i>	<i>Površ 2. stepena *</i>	67
<i>Slika 103.</i>	<i>Pravoizvodna površ 2. stepena dobijena kao proizvod projekivnih pramenova ravni *</i>	68
<i>Slika 104.</i>	<i>Pravoizvodna površ 2. stepena dobijena kao proizvod projekivnih nizova u prostoru *</i>	69
<i>Slika 105.</i>	<i>Corporation street bridge, Mančester, Engleska, 2000. (Hodder Associates)</i>	69
<i>Slika 106.</i>	<i>Teatro Regio, Torino, Italija, 2009. (Armin Linke, Carlo Mollino)</i>	70

<i>Slika 107. Macao Science Center, Makao, Kina, 2009. (Pei Partnership Architects)</i>	70
<i>Slika 108. The POD Exhibition Hall, Kuala Lumpur, Malezija, 2010. (Luca F. Nicoletti and Serina Hijjas)</i>	70
<i>Slika 109. Pravoizvodna površ 2. stepena čije su izvodnice transverzale triju mimoilaznih pravih *</i>	71
<i>Slika 110. Opšta površ 2. stepena dobijena kao proizvod korelativnih svežnjeva u prostoru *</i>	72
<i>Slika 111. Korelativni svežnjevi u prostoru</i>	72
<i>Slika 112. King Abdullah Stadium, Saudijska Arabija (Marks Barfield Architects)</i>	73
<i>Slika 113. Prefabrikovani drveni objekti „Domespace” (domespace.com)</i>	73
<i>Slika 114. 3D vizuelizacija, 2013. (Vladan Nikolić) *</i>	74
<i>Slika 115. Bahá'í Temple, Langenhain, Nemačka, 1964. (Teuto Rocholl)</i>	74
<i>Slika 116. Ose površi 2. stepena *</i>	75
<i>Slika 117. Opšta površ 2. stepena - dva sistema paralelnih ravni koje je seku po kružnicama *</i>	76
<i>Slika 118. Zajednički autopolarni trougao para konika *</i>	77
<i>Slika 119. Varijante preseka dve realne konike *</i>	78
<i>Slika 120. Varijante preseka dve realne konike od kojih je jedna degenerisana *</i>	79
<i>Slika 121. Varijante preseka dve realne degenerisane konike *</i>	80
<i>Slika 122. Varijante preseka realne i imaginarne konike *</i>	81
<i>Slika 123. Varijante preseka dve imaginarne konike *</i>	81
<i>Slika 124. Kolinearni odnos dva kolokalna polja *</i>	82
<i>Slika 125. Određivanje presečnih tačaka dve realne konike *</i>	83
<i>Slika 126. Određivanje presečnih tačaka dve realne konike *</i>	85
<i>Slika 127. Određivanje presečnih tačaka dve realne konike *</i>	86
<i>Slika 128. Određivanje presečnih tačaka realne i imaginarne konike *</i>	87
<i>Slika 129. Određivanje presečnih tačaka realne i imaginarne konike *</i>	88
<i>Slika 130. Određivanje presečnih tačaka realne i imaginarne konike *</i>	89
<i>Slika 131. Određivanje presečnih tačaka dve imaginarne konike *</i>	90
<i>Slika 132. Određivanje presečnih tačaka dve imaginarne konike *</i>	91
<i>Slika 133. Određivanje presečnih tačaka dve imaginarne konike *</i>	92
<i>Slika 134. Provera dobijenih rezultata</i>	93
<i>Slika 135. Opšte kolinearni prostori</i>	95
<i>Slika 136. Šematski prikaz konstruktivne obrade kvadraka primenom opšte kolineacije prostora *</i>	96
<i>Slika 137. Određivanje slike apsolutne konike prostora</i>	97
<i>Slika 138. Određivanje ose, temena i glavne ravni hiperboličkog paraboloida</i>	99
<i>Slika 139. Muritzeum, Varen, Nemačka, 2007. (Wingardh Arkitektkontor)</i>	100
<i>Slika 140. Oslo Central Station, Norveška, 2008. (Space Group)</i>	101
<b>III POGLAVLJE</b>	
<i>Slika 141. Randers Museum of Art, Randers, Danska, 2009. (3XN)</i>	103
<i>Slika 142. NURBS površi generisane u računarskom programu Rhinoceros</i>	105
<i>Slika 143. Ravna i prostorna kriva 3. reda (ortogonalne projekcije i aksonometrija)</i>	106



<i>Slika 144. Izvođenje krive 3. reda jedno-dvoznačnim projektivnim pridruživanjem dva pramena pravih</i>	107
<i>Slika 145. Izvođenje krive 3. reda projektivnim pridruživanjem pramena konika sa običnim pramenom pravih - prava strofoida</i>	107
<i>Slika 146. Izvođenje krive 3. reda projektivnim pridruživanjem pramena konika sa običnim pramenom pravih</i>	108
<i>Slika 147. Izvođenje bicirkularnih krivih 4. reda</i>	111
<i>Slika 148. Grupe prostornih krivih na osnovu njihove ortogonalne projekcije *</i>	113
<i>Slika 149. Prostorne konhoide na sferi i prostorna konhoida u prodoru sfere i površi 4. reda</i>	113
<i>Slika 150. Pravoizvodne površi 3. reda tipa I i tipa II</i>	114
<i>Slika 151. Keplijeva pravoizvodna površ 3. reda</i>	115
<i>Slika 152. Realne keplijeve površi 3. reda</i>	115
<i>Slika 153. Plikerov konoid, pravoizvodna površ 3. reda *</i>	116
<i>Slika 154. Pravoizvodna površ višeg reda *</i>	118
<i>Slika 155. Izvođenje pravoizvodne površi u Rhinoceros-u *</i>	119
<i>Slika 156. Izvođenje Plikerovog konoida u Rhinoceros-u *</i>	120
<i>Slika 157. Isečak plikerovog konoida nastao presecanjem ravnima A, B i C *</i>	120
<i>Slika 158. Način umnožavanja formiranog isečka Plikerovog konoida *</i>	121
<i>Slika 159. Prostorna struktura formirana radijalnom multiplikacijom dva osno simetrična isečka plikerovog konoida, 2013. (V. Nikolić) *</i>	122
<i>Slika 160. Izvođenje jednogranog obrtnog hiperboloida u Rhinoceros-u</i>	122
<i>Slika 161. Prodor jednogranog obrtnog hiperboloida sa obrtnim oblicama *</i>	123
<i>Slika 162. Prodor pravoizvodne površi 3. reda i cilindrične oblice (ort. projekcije i pers.) *</i>	123
<i>Slika 163. Izvođenje isečka konoida i forme arhitektonske strukture u Rhinoceros-u *</i>	124
<i>Slika 164. Arhitektonska vizuelizacija prostorne strukture zasnovane na pravoizvodnoj površi 3. reda, 2013. (V. Nikolić) *</i>	125
<i>Slika 165. Prodor jednogranog obrtnog hiperboloida i parabolične oblice *</i>	126
<i>Slika 166. Delovi pravoizvodne površi - dva konoida i konus *</i>	126
<i>Slika 167. Pravoizvodne površi 3. reda izvedena na vodiljama <math>d_1</math> i <math>s</math>, odnosno <math>d_2</math> i <math>s</math> *</i>	127
<i>Slika 168. Formiranje "osnovnog elementa" od dva para pravoizvodnih površi 3. reda *</i>	127
<i>Slika 169. Način i postupak formiranja uzorka prostorne šrafure *</i>	128
<i>Slika 170. Proporcije korišćene matrice i prostorna šrafura u perspektivi *</i>	129
<i>Slika 171. Prostorne srafure (mustre), 2013. (V. Nikolić) *</i>	130
<i>Slika 172. Cilindroid 4. reda sa vodiljana <math>b_1</math> i <math>b_2</math> (ortogonalne projekcije i aksonometrija) *</i>	131
<i>Slika 173. Način formiranja prostorne structure u prodoru obrtne oblice i cilindroida 4. reda *</i>	131
<i>Slika 174. Arhitektonska vizuelizacija prostorne strukture, 2014. (V. Nikolić) *</i>	132
<i>Slika 175. Varijante konusa sa torusnim čvorom (1,2) kao vodiljom i vrhom na njemu *</i>	133
<i>Slika 176. Objekat zasnovan na korišćenju konusa sa torusnim čvorom kao vodiljom *</i>	134
<i>Slika 177. Izvođenje prostorne strukture zasnovane na korišćenju isečaka konusa izvedenog na torusnom čvoru u Rhinoceros-u *</i>	135
<i>Slika 178. Prostorna kriva 4. reda 1. vrste u prodoru dve kvadrike (ortogonalne projekcije i aksonometrija) *</i>	136
<i>Slika 179. Konus 4. reda i isečak VAB (ortogonalne projekcije i aksonometrija) *</i>	136

<i>Slika 180. Ortogonalne projekcije, perspektiva i arhitektonska vizuelizacija prostorne strukture zasnovane na primeni konusa 4. reda, 2014. (V. Nikolić) *</i>	137
<i>Slika 181. Krive oscilacija (<a href="http://igem.org/User:Heyu3/MM">http://igem.org/User:Heyu3/MM</a>)</i>	138
<i>Slika 182. Sinusoida i trohoide</i>	139
<i>Slika 183. Kriva C dobijena slaganjem dve oscilacije A i B</i>	139
<i>Slika 184. Spirale, ravne transcendentne krive</i>	140
<i>Slika 185. Vavilonska kula, vizuelizacije: Pieter Bruegel, 1563. i Gustave Doré, 1865.</i>	141
<i>Slika 186. Minaret džamije u Samari, Irak, 848. Minaret Ibn Tulunove džamije, Kairo, Egipat, 879.</i>	142
<i>Slika 187. Crkva Spasitelja, Kopenhagen, Danska, 1752. Spomenik Trećoj internacionali, 3D vizuelizacija, Petrograd, 1919.</i>	142
<i>Slika 188. Školska zgrada uz katedralu Svete porodice i detalji enterijera, Barselona, Španija (Antonio Gaudi)</i>	143
<i>Slika 189. Iglesia de Cristo Obrero, Atlantida, Urugvaj, 1952. (Eladio Dieste) Iglesia de San Juan de Ávila, Madrid, Španija, 1996. (Eladio Dieste)</i>	143
<i>Slika 190. Spiral Lookout Tower, Hong Kong, Kina, 1997. Garvan institut, Sidnej, Australija, 1997. (Ken Woolley)</i>	144
<i>Slika 191. Ysios vinarija u oblasti Alava u Španiji, 1998. (Santiago Calatrava)</i>	144
<i>Slika 192. Cocoon, Ciriš, Švajcarska, 2007. (Camenzind Evolution)</i>	145
<i>Slika 193. Taipei City Museum of Art, Tajpej, Tajvan, 2011. (Influx Studio)</i>	145
<i>Slika 194. Interims Audimax, Tehnički univerzitet Minhen, Nemačka, 2011. (Deubzer Konig &amp; Rimmel Architekten) Observation Tower, Finiks, SAD, 2012. (BIG)</i>	146
<i>Slika 195. Evolution Tower, Moskva, Rusija, 2014. (RMJM) ArcelorMittal Orbit, London, Velika Britanija, 2014. (Anish Kapoor, Cecil Balmond)</i>	146
<i>Slika 196. Talasasti aluminijumski lim</i>	147
<i>Slika 197. Školska zgrada uz katedralu Svete porodice, Barselona, Španija (Antonio Gaudi)</i>	148
<i>Slika 198. Deo kohleoidnog konusa ograničen cilindričnom površi *</i>	148
<i>Slika 199. Kohleoidni konus *</i>	149
<i>Slika 200. Kohleoida *</i>	150
<i>Slika 201. Presek kohleoidnog konusa po "transcendentnoj paraboli" *</i>	151
<i>Slika 202. Presek po "transcendentnoj hiperboli" *</i>	151
<i>Slika 203. Presek po "transcendentnoj hiperboli" *</i>	152
<i>Slika 204. Presek po "transcendentnoj hiperboli" *</i>	152
<i>Slika 205. Prostorna struktura zasnovana na korišćenju isečaka kohleoidnog konusa *</i>	153
<i>Slika 206. Izvođenje prostorne strukture zasnovane na korišćenju isečaka kohleoidnog konusa u Rhinoceros-u *</i>	154
<i>Slika 207. Dvostruki kohleoidni konus - ortogonalne projekcije, mreža i perspektiva *</i>	155
<i>Slika 208. Model dvostrukog kohleoidnog konusa *</i>	155
<i>Slika 209. Prodor dva dvostruka kohleoidna konusa *</i>	156
<i>Slika 210. Umnoženi segmenti prodora dvostrukih kohleoidnih konusa sa slike 209d *</i>	156
<i>Slika 211. Izvođenje prostorne strukture prikazane na slici 212 u Rhinoceros-u *</i>	157
<i>Slika 212. Arhitektonska prostorna struktura, 2013. (V. Nikolić) *</i>	158
<i>Slika 213. Dvostruki kohleoidni konusi - prodor *</i>	158

<i>Slika 214. Formiranje prostorne strukture od nastalih isečaka dva dvostruka kohleoidna konusa *</i>	159
<i>Slika 215. Prodor dva dvostruka kohleoidna konusa *</i>	160
<i>Slika 216. Prodor dva dvostruka kohleoidna konusa - isečci *</i>	161
<i>Slika 217. Arhitektonski objekat - osnova i 3D vizuelizacija, 2013. (V. Nikolić)</i>	162
<i>Slika 218. Prodor dva dvostruka kohleoidna konusa *</i>	163
<i>Slika 219. Arhitektonska prostorna struktura, 2013. (V. Nikolić) *</i>	164
<i>Slika 220. Izvođenje prostorne strukture prikazane na slici 219 u Rhinoceros-u</i>	165
<i>Slika 221. Prodorne krive dva dvostruka kohleoidna konusa *</i>	166
<i>Slika 222. Prodori dvostrukih kohleoidnih konusa i obrtne oblice *</i>	166
<i>Slika 223. Arhitektonska prostorna struktura, 2013. (V. Nikolić) *</i>	167
<i>Slika 224. Izvođenje prostorne strukture prikazane na slici 223 u Rhinoceros-u *</i>	168
<i>Slika 225. Transcedentni konus izveden po konusnoj zavojnici - vodilji površi *</i>	169
<i>Slika 226. Prostorna struktura formirana od konusa <math>k_1</math>, <math>k_2</math> i <math>k_3</math> *</i>	169
<i>Slika 227. Prostorna struktura formirana od tri konusa sa konusnom zavojnicom kao vodiljom, osnova i arhitektonska 3D vizuelizacija, 2013. (V. Nikolić)*</i>	170
<i>Slika 228. Izvođenje prostorne strukture prikazane na slici 227, u Rhinoceros-u *</i>	171
<i>Slika 229. Prostorna struktura formirana od konusa sa loksodromom kao vodiljom i arhitektonska vizuelizacija unutrašnjosti, 2013. (V. Nikolić) *</i>	172
<i>Slika 230. Izvođenje prostorne strukture prikazane na slici 229 u Rhinoceros-u *</i>	173
<i>Slika 231. Arhitektonska prostorna struktura, 2013. (V. Nikolić) *</i>	174
<i>Slika 232. Površi - delovi prostorne strukture prikazane na slici 231 u Rhinoceros-u *</i>	175
<i>Slika 233. Izvođenje prostorne strukture prikazane na slici 231 u Rhinoceros-u *</i>	176
<i>Slika 234. Stolica, konkursni rad, 2007. (V. Nikolić)</i>	177
<i>Slika 235. Tall Emblem Structure in Za'abeel Park, Dubai, konkursni rad, 2009. (V. Nikolić, B. Stojanović, O. Milosavljević, P. Milošević) *</i>	178

\* Autorske slike i ilustracije



## **UVOD**

**KONSTRUKTIVNA OBRADA  
GEOMETRIJSKIH POVRŠI  
I NJIHOVA PRIMENA  
U ARHITEKTURI**

# UVOD

## KONSTRUKTIVNA OBRADA GEOMETRIJSKIH POVRŠI I NJIHOVA PRIMENA U ARHITEKTURI

### 1. GEOMETRIJA

#### Euklidska (elementarna) geometrija

Naziv **geometrija** potiče iz grčkog jezika ( $\gamma\epsilon\omega$  = *zemlja*,  $\mu\epsilon\tau\rho\epsilon\omega$  = *meriti*). Geometrija se razvila iz praktičnih razloga kao empirijska nauka i datira od perioda Vavilona i Starog Egipta. Oko VII veka p.n.e. saznanja iz geometrije su prenesena u Grčku i od tada počinje period sistematskog izučavanja geometrije kao nauke. Grci su, za razliku od Egipćana i induktivnog metoda, razvili deduktivni metod zaključivanja. Anaksagora se bavio kvadraturom kruga i perspektivom, Pitagora je otkrio nesamerljive duži (iracionalni brojevi), Hipokrat Hionski sistematski je izložio geometriju u svom delu *Elementi geometrije*, dok Platon i Aristotel nisu ostavili pisana dela o geometriji, ali su dali veliki doprinos osnovama geometrije. Geometrija antičkog doba dostiže vrhunac osnivanjem Aleksandrijske škole, za šta zasluge pripadaju Euklidu, Arhimedu, Eratostenu i Apoloniju. Sistematizaciju geometrije izvršio je Euklid, u svom delu *Elementi*, koje obuhvata 13 knjiga. **Euklidska geometrija** se još naziva i **elementarna geometrija**. /13, 59/

Sve do XIX veka naučnici su se bavili preispitivanjem aksioma Euklidske geometrije. Ta istraživanja su pokazala nedostatke Euklidovog sistema aksioma, a pre svega njegovu nepotpunost. Nedostajale su grupe aksioma neophodnih za izvođenje besprekornih dokaza. Paš (*Moritz Pasch*) je Euklidov sistem aksioma dopunio aksiomama poretka, a ispitivanje aksiomatike Euklidove geometrije konačno je završio Hilbert (*David Hilbert*) 1899. godine i time okončao viševjekovna ispitivanja zasnovanosti elementarne geometrije. /13/

Izostavljanjem aksiome paralelnosti nastaje **apsolutna geometrija**, a zamenom te aksiome svojom negacijom **neeuclidska geometrija**. Danas se u savremenom aksiomatskom izlaganju Euklidske geometrije ne koriste uvek Hilbertove aksiome, već se može uzeti ekvivalentan sistem aksioma, koji omogućava brže dobijanje nekih geometrijskih činjenica. /47/

## Geometrija Lobačevskog

Vekovni pokušaji matematičara i geometričara, od pojave Euklidovih „Elementa“, da dokažu peti postulat ostali su neuspešni. Oni su pokušavali da peti postulat izvedu iz drugih Euklidovih postulata. Lobačevski (*Лобачевский Николаи Иванович*) je oko 1829. godine došao do zaključka da se peti postulat ne može izvesti iz ostalih postulata geometrije, odnosno da je nezavistan od ostalih. Na taj način je stvorio novu geometriju, koju Jefimov naziva „imaginarna“ geometrija. Lobačevski je uspeo da dokaže da u tako zasnovanoj geometriji ne postoje logičke protivrečnosti i time potvrdio njenu ispravnost. U istom periodu, nezavisno od Lobačevskog, do istih zaključaka je došao i Boljai (*János Bolyai*), ali je rad objavio tri godine kasnije. Gaus (*Carl Friedrich Gauss*) je takođe došao do sličnih zaključaka, ali ih nije objavio. Geometrija Lobačevskog još se naziva i hiperbolična geometrija. Iscrpan dokaz neprotivrečnosti geometrije Lobačevskog dao je Poenkare (*Jules Henri Poincaré*) krajem XIX veka, „izgradnjom“ modela te geometrije u Euklidskoj ravni. Beltrami (*Eugenio Beltrami*) je dokazao da na površi stalne negativne krivine važi ravna geometrija Lobačevskog. Klajnova (*Feliks Kristijan Klajn*) interpretacija ravne geometrije Lobačevskog realizuje se unutar kruga na Euklidskoj ravni. /13, 43/

## Rimanova geometrija

Posle Lobačevskog, Riman (*Bernhard Riemann*) je novim analitičkim principima geometrije još više izmenio Euklidove aksiome i inspirisan Gausovim delom *Disquisitiones generales circa superficies curvas* o diferencijalnoj geometriji zakrivljenih površi, razvio novu neeuklidsku geometriju - Rimanovu geometriju. Na principima Rimanove geometrije zasnovana je i Ajnštajnova (*Albert Einstein*) Opšta teorija relativnosti, koja kaže da prisustvo materije utiče na geometriju prostora, koji usled toga prestaje da bude euklidski. Riman je izneo ideju da je realni prostor zakrivljen, što je mnoge navelo da se time ozbiljnije bave. Rezultat tih proučavanja je formulacija Rimanovog prostora, čiji su specijalni slučajevi Euklidski prostor, prostor Lobačevskog, kao i sam prostor u kome je Riman zasnovao svoju geometriju. Herman fon Helmut (*Hermann von Helmholtz*) istraživao je fizičke aspekte Rimanove teorije i postavio je, na osnovu astronomskih posmatranja, granice moguće zakrivljenosti prostora. /13, 43/

## Projektivna geometrija

Projektivna geometrija formirana je u prvoj polovini XIX veka i vezuje se za francuskog geometričara Poncelea (*Jean-Victor Poncelet*), koji je odredio predmet proučavanja u projektivnoj geometriji: Svojstva figura i sa njima povezanih veličina koje su invarijantne u odnosu na bilo koje projektovanje. Kao samostalnu nauku projektivnu geometriju je utemeljio Jakob Štajner (*Jakob Steiner*). U radovima Štauta (*Karl Georg Christian von Staudt*) projektivna geometrija je oslobođena pojma metrike i postaje disciplina koja proučava samo svojstva međusobnog položaja geometrijskih figura. Štaut je rešio problem imaginarnih elemenata tako što je parove konjugovano imaginarnih elemenata definisao na isti način i istim

sredstvima kao i parove realnih elemenata. Veliki doprinos u razvoju projektivne geometrije dali su Dupin (*Dupin*), Brianson (*Brianchon*), Keli (*Kelly*), Mobius (*Möbius*), Pliker (*Plücker*), Kremona (*Cremona*) itd. /43/

U projektivnoj geometriji projektivni prostor čine svi konačni i beskonačno daleki elementi, kao i imaginarni elementi. Dve prave u ravni imaju uvek jednu zajedničku tačku (konačnu ili beskonačno daleku), odnosno u prostoru dve prave se seku ili su mimoilazne. U projektivnoj ravni prave neku kružnicu seku u dvema realnim tačkama, u dvema realnim i poklopljenim tačkama ili u dvema konjugovano imaginarnim tačkama. Projektivna geometrija može se obrađivati postupcima analitičke, diferencijalne, kao i sintetičke geometrije. /50/

Akademik Vilko Niče je izdavanjem svoje knjige *Uvod u sintetičku geometriju*, kao i brojnim drugim radovima iz oblasti projektivne geometrije, zaslužan što je ova grana geometrije prihvaćena i proučavana kod nas. Doktorska disertacija prof. Miroslava Markovića *Imaginarne krive i površi*, kao i doktorske disertacije prof. Biserke Marković *Izvođenje proizvodnih tvorevina primenom polariteta u pramenovima i nizovima kvadratika* i prof. Sonje Krasić *Pridruživanje kvadratika pomoću apsolutnih konika opšte kolinearnih prostora*, predstavljaju doprinos razvoju ove naučne oblasti i polaznu osnovu za dalje proučavanje u ovoj doktorskoj disertaciji.

### **Nacrtna geometrija**

**Nacrtna geometrija** se razvijala za potrebe inženjerske prakse, a pre svega za izradu tehničkih crteža, nacрта, pa je od reči „nacrt“ i dobila naziv. Često je u upotrebi naziv **deskriptivna geometrija**, što ukazuje na tačno opisivanje predmeta crtanja i rada. Prvi tehnički planovi javljaju se oko IV veka p.n.e. Francuski inženjer Monž (*Gaspard Monge*) objavljuje svoju knjigu *Nacrtna geometrija* 1799. godine, u kojoj daje opšti metod rešavanja stereometrijskih zadataka pomoću geometrijskih konstrukcija. Monž je transformacijom povezo osnovu i izgled objekta, naučno obradio postupak ortogonalnog projiciranja i time postavio temelje nove discipline geometrije. Nacrtna geometrija se oslanja na sve do sada pomenute geometrije, a najviše na projektivnu i sintetičku geometriju. /47, 51/

### **Geometrija u XXI veku**

Savremena geometrija je sastavni deo matematike i sadrži mnogobrojne grane geometrije i geometrijske teorije, između kojih nema jasno definisanih granica. Pri tome se pojedine geometrijske teorije usko prepliću sa analizom (diferencijalna geometrija) i teorijom skupova (teorija skupova tačaka, topologija). Svaka geometrija se razlikuje od druge prema tome kakav prostor izučava, kakvim metodama se služi i kakve objekte (figure), odnosno njihova svojstva izučava. Geometrija kao nauka stalno napreduje, a trenutno naročito kroz implementaciju geometrijskih postupaka u gotovo sve kompjuterske grafičke programe, odnosno kroz kompjutersku obradu i proučavanje geometrije koje ranije nije bilo moguće. Savremeni računarski načini obrade i generisanja geometrijskih elemenata otvorili su potpuno nove oblasti istraživanja i mogućnosti daljeg razvoja. Sa aspekta

arhitekata i arhitektonske prakse ovaj period razvoja geometrije je najprogresivniji, s obzirom na veliki broj istovremeno otvorenih mogućnosti za dalja istraživanja i nove načine izvođenja i primene geometrijskih površi.

## **2. PREDMET ISTRAŽIVANJA**

Površni 2. stepena, kao i sve pravoizvodne površi imaju veliku primenu u arhitekturi. Njihova savremena interpretacija i primena u novom kontekstu se zasniva na geometrijskim principima poznavanja njihove konstruktivne obrade. Jedan od preduslova za uspešnu primenu istraživanih površi u arhitekturi je proučavanje mogućnosti njihove konstruktivne obrade uz upotrebu savremenih računarskih tehnologija. Predmet istraživanja obuhvata oblast konstruktivne obrade geometrijskih površi, sa teorijskog aspekta, kao i sa aspekta njihove praktične primene u arhitektonskoj i dizajnerskoj praksi. Predmet istraživanja su geometrijske površi 2. stepena, odnosno konstruktivno određivanje osnovnih parametara, u koje spadaju: središte, ose, kružni preseki i kružne tačke površi. Takođe, predmet istraživanja su pravoizvodne površi višeg reda i pravoizvodne transcendentne površi i mogućnosti njihove praktične primene u oblikovanju arhitektonskih objekata, kao i upotrebe u dizajnu. To se odnosi na analizirane pravoizvodne površi koje ispunjavaju u ovom radu definisane kriterijume za opravdanost njihove praktične primene.

## **3. CILJ ISTRAŽIVANJA**

U ovoj doktorskoj disertaciji analizirane su površi 2. stepena, odnosno pravoizvodne površi višeg reda i pravoizvodne transcendentne površi. Kako se radi o površima različitih karakteristika, ciljevi konstruktivne obrade za svaku od njih su specifični. Međutim, konstruktivni postupci koji se primenjuju su kompatibilni i rešavaju se na univerzalan i originalan način, imajući u vidu da se površi zadaju u najopštijem obliku. Iznalaženje pomenutih univerzalnih i originalnih postupaka konstruktivne obrade analiziranih geometrijskih površi je osnovni cilj istraživanja.

Kod površi 2. stepena potrebno je definisati univerzalni postupak za konstruktivno određivanje njihovih osnovnih parametara: središta, osa, kružnih preseka i kružnih tačaka. Postupak treba da bude primenljiv bez obzira na vrstu i način izvođenja kvadrata, a konkretni cilj istraživanja svodi se na nalaženje konstruktivnog postupka određivanja preseka konika, bez obzira na njihov realitet.

Pravoizvodne površi višeg reda i transcendentne pravoizvodne površi sagledane su sa aspekta njihove praktične primene u arhitekturi i dizajnu. Cilj istraživanja je analiza mogućnosti njihove konstruktivne obrade i sagledavanje mogućnosti njihove inovativne praktične primene u formiranju upotrebljivih prostornih struktura. Poseban akcenat je na kompjuterskom generisanju i konstruktivnoj obradi površi, utemeljenoj na naučnim dostignućima različitih oblasti geometrije.



## 4. ZADATAK ISTRAŽIVANJA

Način zadavanja površi 2. stepena može biti različit, ali sve imaju jedno središte, tri ose i dva pramena uporednih ravni koje ih seku po kružnicama, a dodiruju u četiri kružne tačke. Zadatak istraživanja je konstruktivno određivanje navedenih parametara kvadraka na jedinstven i univerzalan način, bez obzira na to kako su površi zadate. Problem se može rešiti uvođenjem opšte ili perspektivne kolineacije prostora. Pri tome, beskonačno dalekoj ravni prostora pridružena je nedogledna ravan u konačnosti, u kojoj se određuju pridružene konike apsolutnoj konici prostora i beskonačno dalekoj konici kvadrake. Na taj način se konstrukcija središta, osa, kružnih tačaka i kružnih preseka kvadraka svodi se na intersekciju para konika, koja se primenom kolineacije u prostoru geometrijski rešava u konačnosti, a vraćanjem u beskonačno daleku ravan dolazi se do rešenja zadatog problema. Zbog određivanja osnovnih parametara kvadraka potrebno je rešiti intersekciju para konika, bez obzira na njihov realitet, koja do sada konstruktivno nije rešena u najopštijem slučaju. Postupak koji se primenjuje je originalan i univerzalan, tj. može se primenjivati kod svih kvadraka na identičan način, što predstavlja naučni doprinos konstruktivnoj obradi površi 2. stepena, a u radu je predstavljen na konkretnim primerima.

Pravoizvodne površi višeg reda i transcendentne pravoizvodne površi mogu se uspešno primenjivati u arhitektonskoj i dizajnerskoj praksi. Potrebno je definisati uslove pod kojima je njihova praktična primena opravdana i na konkretnim primerima proveriti i pokazati mogućnosti njihove upotrebe. Neophodno je sagledati način izvođenja analiziranih površi, njihove klasifikacije i mogućnosti konstruktivne obrade. Kod površi višeg reda posebno su interesantne pravoizvodne površi 3. i 4. reda, s obzirom da su ove površi sa teorijskog aspekta proučavane i analizirane u postojećoj literaturi, ali ne i sa aspekta njihove praktične primene u arhitekturi i dizajnu. Transcendentne pravoizvodne površi imaju kontinuitet praktične primene u arhitekturi kroz istoriju civilizacije. Potrebno je sagledati inovativne mogućnosti njihove konstruktivne obrade i primene u praksi. Zadatak istraživanja se pre svega odnosi na iznalaženje mogućnosti jednostavnog i racionalnog izvođenja pravoizvodnih površi višeg reda i transcendentnih pravoizvodnih površi, kao i formiranja karakterističnih isečaka i segmenata površi primenljivih u arhitekturi i dizajnu.

## 5. POLAZNE HIPOTEZE

Polazeći od klasifikacije geometrijskih površi i njihovih osnovnih parametara, moguće je vršiti konstruktivnu obradu površi 2. stepena, kao i pravoizvodnih površi višeg reda i transcendentnih pravoizvodnih površi, primenom novih geometrijskih postupaka i prikazati inovativnu upotrebu tih površi u arhitekturi i dizajnu. U radu se koriste geometrijske metode. Teorijski deo zasniva se na metodama, izvedenim činjenicama i teoremama projektivne geometrije, a prostorne transformacije i

grafički postupci obrađuju se metodama nacrtne geometrije. Praktično izvođenje analiziranih površi i analiza mogućnosti njihove primene u arhitektonskom projektovanju i dizajnu vrši se korišćenjem adekvatnih računarskih programa. Moguće je definisati sledeće polazne hipoteze:

- Određivanje zajedničkih elemenata para konika, bez obzira na realitet, moguće je rešiti uspostavljanjem kolinearnog odnosa između dva kolokalna polja određena tim konikama. Nalaženjem žiža tih polja i primenom postupka za određivanje direktne veze između jedne realne dvostruke prave i žiža opšte kolinearnih polja moguće je odrediti strane zajedničkog autopolarnog trougla. Nakon toga moguće je odrediti presečne tačke para konika.
- Konstruktivna obrada površi 2. stepena može se izvesti uvođenjem opšte ili perspektivne prostorne kolineacije, čime se beskonačno daleka ravan dovodi u konačnost. U toj ravni se određuju osnovni parametri geometrijskih površi 2. stepena, a zatim se istim, prethodno pomenutim postupkom kolineacije, ti elementi vraćaju u beskonačnost.
- Pravoizvodne površi višeg reda i pravoizvodne transcendentne površi mogu se koristiti u formiranju arhitektonskih prostornih struktura, kao i različitih elemenata dizajna. Tu se pre svega misli na njihove segmente i isečke, koji mogu da se multipliciraju i kombinuju sa drugim vrstama površi. Kriterijumi koji treba da budu zadovoljeni da bi analizirane površi mogle uspešno da se primenjuju u projektovanju i oblikovanju različitih prostornih struktura su: univerzalnost, jednostavnost projektovanja i praktičnog izvođenja, estetski kvaliteti i karakteristike, racionalnost i ekonomičnost.

## 6. NAUČNE METODE ISTRAŽIVANJA

Istraživački rad u ovoj doktorskoj disertaciji zasnovan je na korišćenju više naučnih metoda. U prvom poglavlju doktorske disertacije koristi se analitički metod, za klasifikaciju poznatih geometrijskih površi i njihovih karakteristika, sa analizom arhitektonskih objekata na kojima su pojedine površi primenjene. Takođe, u drugom i trećem poglavlju disertacije koristiti se analitička metoda za sagledavanje postojećih saznanja o površima 2. stepena i površima višeg reda, kao i mogućnostima njihove primene u arhitekturi i dizajnu. Tipološki metod, u okviru prethodne analize, koristi se za klasifikaciju površi po određenim kriterijumima.

U drugom poglavlju disertacije koristi se metoda modelovanja, s obzirom da je neophodno usvojiti model za proučavanje prethodno definisanog naučnog problema. Primenjuje se deduktivni oblik zaključivanja, gde su nađena rešenja geometrijskih problema u opštem slučaju primenljiva na sve specijalne slučajeve. Specijalizacijom se ide ka uopštavanju postavljenog zadatka i sintezom poznatih postupaka, dobijaju originalni postupci koji vode ka rešavanju naučnog problema na potpuno nov način.

U trećem poglavlju primenjuje se takođe metoda modelovanja, gde se na konkretno generisanim primerima proučavaju neophodne relacije i specifičnosti potrebne za ispunjavanje definisanog cilja i zadataka. U ovom poglavlju metodom studije slučaja analiziraju se konkretni praktični primeri, a metodom generalizacije dolaziti do zaključaka koji se kasnije sintetizuju u jasne preporuke za implementaciju proučavanih pravoizvodnih površi višeg reda i transcendentnih pravoizvodnih površi u složene prostorne strukture.

## **7. STRUKTURA DOKTORSKE DISERTACIJE**

Doktorska disertacija je podeljena u tri poglavlja, tako da zajedno predstavljaju zaokruženu celinu definisanu u nazivu teme. Težište istraživanja i naučni doprinos uglavnom je izložen u drugom i trećem poglavlju rada, u kojima se razmatraju površi 2. stepena, kroz unapređenje postupaka neophodnih za njihovu konstruktivnu obradu, odnosno pravoizvodne površi višeg reda i pravoizvodne transcendentne površi, kroz njihovu praktičnu analizu i analizu primenljivosti u oblasti arhitekture i dizajna. Rad je spoj teorijskog i praktičnog pristupa naučnom problemu, što je izuzetno važno s obzirom da se tema nalazi u oblasti tehničkih nauka, ali i arhitekture i dizajna kao umetničkih disciplina.

### **I POGLAVLJE - KLASIFIKACIJA POVRŠI**

Prvo poglavlje rada predstavlja uvod u razmatranje i analizu geometrijskih površi. Prikazani su načini izvođenja geometrijskih površi, njihove osnovne karakteristike i klasifikacija. Svaka od prikazanih površi je predstavljena teorijski i praktično, primerima iz arhitektonske i dizajnerske prakse. Izložene karakteristike se koriste u drugom i trećem poglavlju doktorske disertacije kao osnova za proučavanje i analizu obrađivanih površi. Geometrijske površi su sistematizovane prema nastanku i vrstama, kao i prema redu i razredu. Osnovna podela je na opšte i pravoizvodne površi. Obe vrste površi imaju primenu u arhitekturi, s tim da su pravoizvodne u prednosti zbog lakšeg praktičnog izvođenja i racionalnosti. Kod praktičnih primera upotrebe geometrijskih površi u arhitekturi, prikazani su uglavnom savremeni primeri objekata koji potenciraju aktuelnost izložene teme, kao i neophodnost njenog daljeg proučavanja.

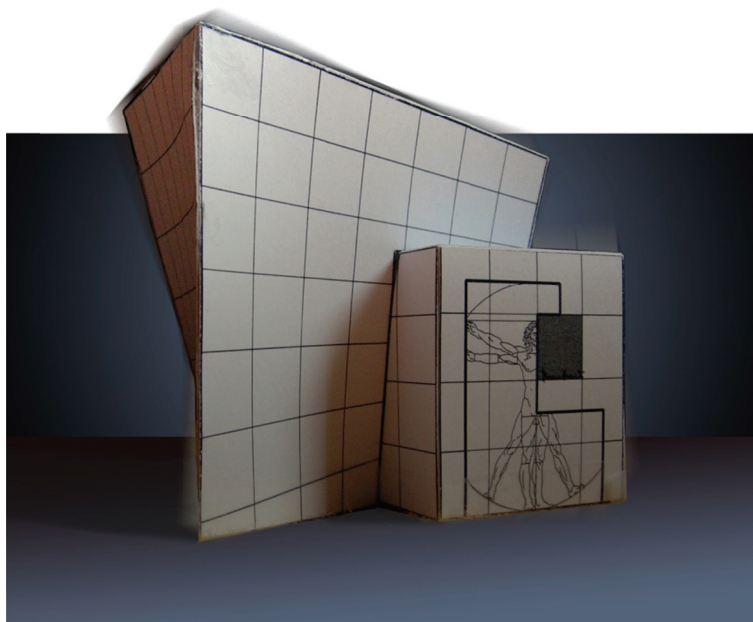
### **II POGLAVLJE - GEOMETRIJSKE POVRŠI 2. STEPENA I NJIHOVA PRIMENA U ARHITEKTURI**

U drugom poglavlju se pre svega definišu nastanak i osobine pravoizvodnih i opštih površi 2. stepena, polazeći od toga da se zadaju u najopštijem obliku, što je veoma bitno s obzirom da se dobijeni rezultati mogu primeniti i na sve ostale specijalne slučajeve obrađivanih površi. Izloženi konstruktivni postupak obrade površi 2. stepena je originalan i bazira se na intersekciji konika (realnih i

imaginarnih). Određivanje zajedničkih elemenata para konika vrši se uspostavljanjem kolinearnog odnosa između dva kolokalna polja određena tim konikama. Nalaženjem fokusa tih polja i primenom postupka za određivanje direktne veze između jedne realne dvostruke prave i fokusa opšte kolinearnih polja određuju se strane zajedničkog autopolaranog trougla, a nakon toga, zajednički elementi para konika (presek konika). Takođe se razmatraju varijante preseka para konika kroz ilustracije i definisanje osnovnih parametara. U ovom poglavlju su izloženi konstruktivni postupci za određivanje osa, središta, kružnih tačaka i kružnih preseka zadatih površi 2. stepena. Upotrebom apsolutne konike prostora i zadatom prostornom kolineacijom omogućeno je određivanje svih osnovnih parametara kvadraka. Primena površi 2. stepena u arhitekturi prikazana je kroz niz istorijskih i savremenih primera arhitektonskih objekata.

### **III POGLAVLJE - PRAVOIZVODNE TRANSCEDENTNE POVRŠI I PRAVOIZVODNE POVRŠI VIŠEG REDA I NJIHOVA PRIMENA U ARHITEKTURI**

U trećem poglavlju analizirane su i obrađene pravoizvodne površi 3. i 4. reda i pravoizvodne transcendentne površi, sa aspekta mogućnosti njihove praktične primene u arhitekturi i dizajnu. Polazi se od nastanka ovih površi u najopštijem obliku, preko analize osnovnih parametara površi, do istraživanja mogućnosti njihove implementacije u geometrijske prostorne strukture. Prikazani praktični primeri površi su izvedeni korišćenjem konstruktivno dobijenih krivih višeg reda, odnosno transcendentnih krivih. Formirane su karakteristične prostorne strukture zasnovane na izvedenim površima, odnosno njihovim segmentima i isečcima i sagledane mogućnosti njihove primene u arhitekturi i dizajnu. Zadati su određeni kriterijumi i provereno je da li ih analizirane površi ispunjavaju. Ispunjenost zadatih kriterijuma je neophodna kako bi se analizirane površi mogle smatrati pogodnim za primenu u arhitekturi i različitim oblastima dizajna. Paralelno sa teorijskom i praktičnom analizom pravoizvodnih površi višeg reda i transcendentnih pravoizvodnih površi, sagledane su i mogućnosti njihovog kompjuterskog izvođenja i konstruktivne obrade u pogodnim računarskim programima.



# **I POGLAVLJE**

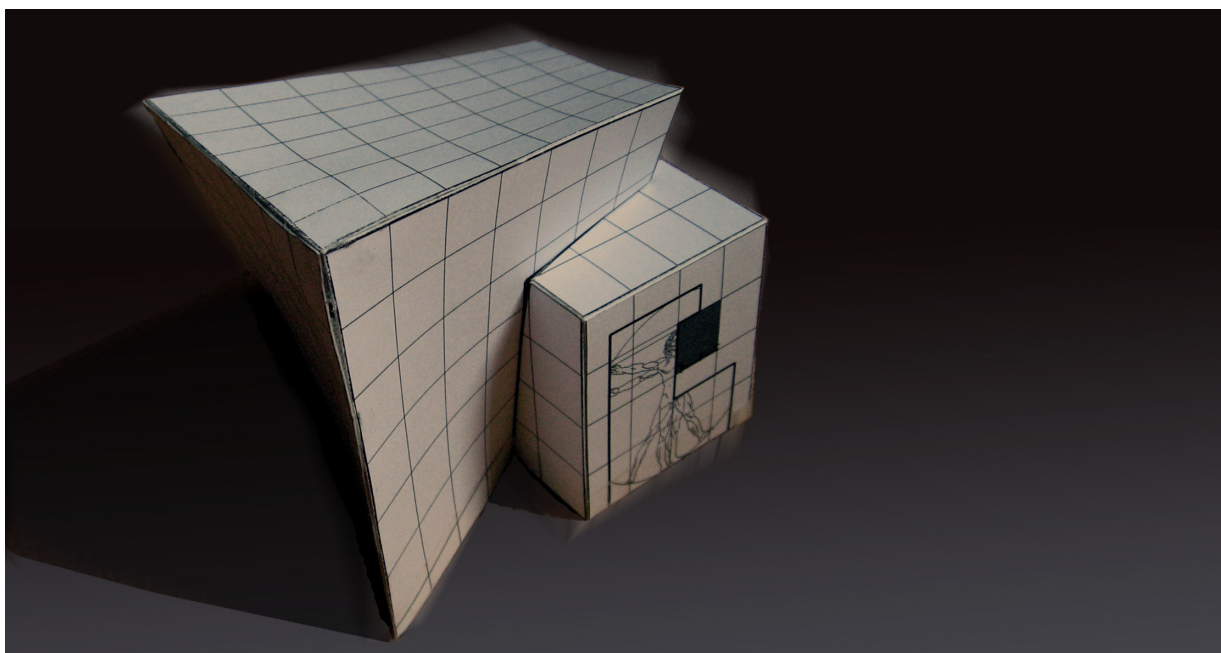
## **KLASIFIKACIJA POVRŠI**

# I POGLAVLJE

## KLASIFIKACIJA POVRŠI

### I1 UVODNE NAPOMENE

Suština arhitekture je složen misaoni proces prožet eksperimentima, inovacijama i imaginacijom. Konačan proizvod su kompleksne prostorne strukture geometrijskih površi, a njihova povezanost i funkcija utilitarnih sklopova su kontekst postojanja i razvoja svake civilizacije. Istraživanje i analiza površi, sa aspekta njihove primene u arhitekturi i građevinarstvu, su uvek aktuelne i poželjne teme, *slika 1*. Postoje brojni načini za izvođenje površi, kao i klasifikacije zasnovane na određenim zajedničkim osobinama tih površi. Izvođenje površi, njihove karakteristike i klasifikacija su od fundamentalne važnosti za bilo koje istraživanje i analizu površi, a samim tim i za uspešno i kvalitetno bavljenje formom u arhitekturi. U ovom poglavlju je akcenat stavljen upravo na načinima izvođenja i klasifikacije, pre svega, geometrijskih površi. Prikazane površi predstavljaju osnovni skup upotrebljavanih formi u arhitekturi, na kojima su zasnovani gotovo svi objekti u arhitektonskoj praksi. Sve površi prikazane su i predstavljene svojim osnovnim karakteristikama i parametrima. Zbog lakšeg razumevanja upotrebe geometrijskih površi u projektantskoj praksi, prikazani su izvedeni arhitektonski objekti čija se osnovna forma zasniva na tim površima. Uglavnom su izabrani objekti kod kojih je na eksplicitan način primenjena određena geometrijska površ. Pored takvih primera, postoji veliki broj objekata gde se koriste segmenti ili isecci površi, koji multiplikacijom i spajanjem formiraju prostorne strukture.



*slika 1. Primena geometrijskih površi u oblikovanju arhitektonskog objekta (V. Nikolić)*

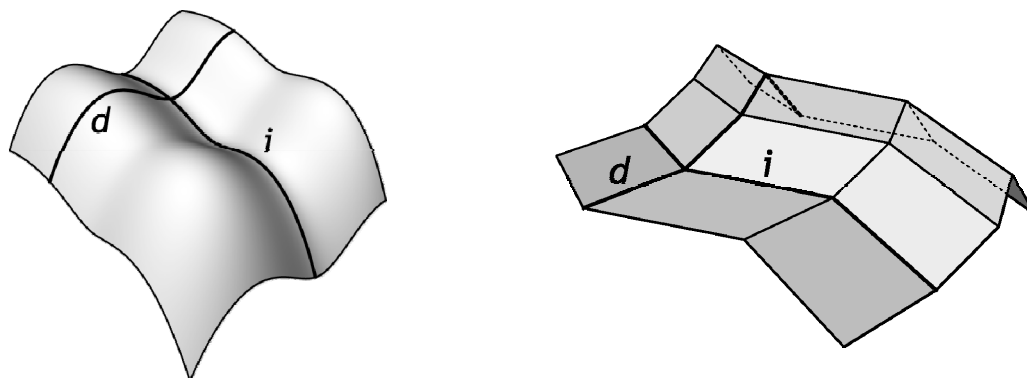
## 12 POVRŠI I NJIHOVO IZVOĐENJE

Pre nego što se definiše površ i izvrši klasifikacija površi, potrebno je definisati prostor u kome se površi nalaze, kao i njegove osnovne elemente i temeljne tvorevine. U ovoj analizi površi koriste se postupci nacrtne i projektivne geometrije, odnosno sintetički način obrade zasnovan na projektivnoj geometriji.

**Projektivni prostor** sadrži konačne i beskonačno daleke elemente, a osim realnih sadrži i imaginarne elemente. **Projektivna prava** sadrži jednu beskonačno daleku tačku, zajedničku za sve prave koje su joj paralelne. **Projektivna ravan** ima jednu beskonačno daleku pravu, zajedničku za sve ravni koje su joj paralelne. Svi beskonačno daleki elementi projektivnog prostora čine jednu **beskonačno daleku ravan**, sa kojom svaka projektivna prava ima jednu zajedničku tačku, a svaka projektivna ravan jednu zajedničku pravu /47, 50/.

Postoje **temeljne** i **izvedene (više)** tvorevine projektivne geometrije, kao i **temeljne metode** koje se koriste u sintetičkim postupcima projektivne geometrije.

**Površ** je geometrijsko mesto u prostoru sastavljeno od  $\infty^2$  tačaka ili ravni neprekidno povezanih po nekom određenom zakonu (pravilu). Takvu površ čini tih  $\infty^2$  tačaka, odnosno dodiruje  $\infty^2$  ravni. Površ spadaju u izvedene (više) tvorevine projektivne geometrije /50/.

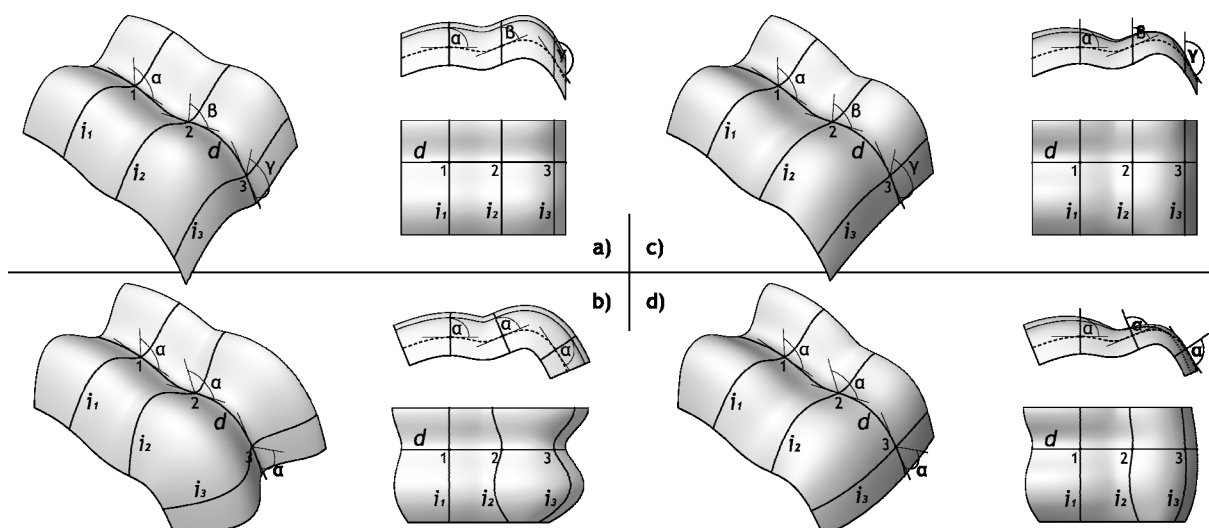


slika 2. Površ koje formiraju izvodnice *i*, kretanjem po vodiljama *d*

Ako se neka linija *i* kreće, po nekom zakonu, po drugoj liniji *d*, onda ona opisuje jednu površ, *slika 2*. Linija *i* je **izvodnica (generatrisa)** te površi, a linija *d* je **vodilja (direktrisa)**. Izvodnice i vodilje mogu biti krive, ili prave linije. Takođe, izvodnica i vodilja mogu biti otvorene ili zatvorene, ravne ili prostorne linije. Zavisno od oblika izvodnice i vodilje nastaju različiti tipovi površi /12/.

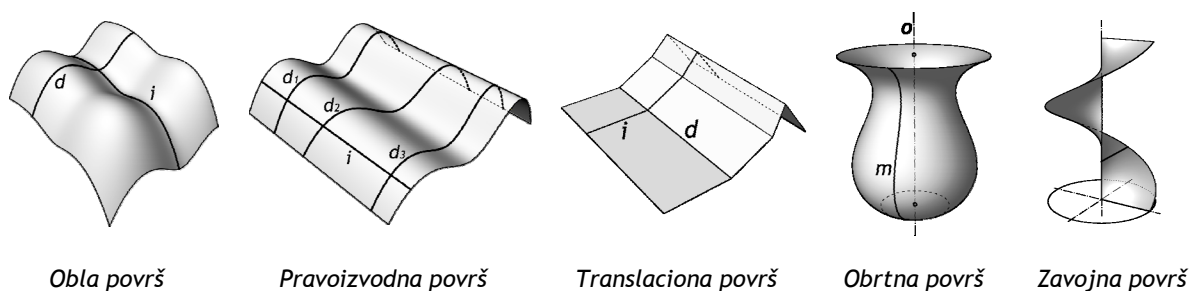
Izvodnica prilikom kretanja može da ostane podudarna u svim položajima, a može i da se postojano menja po nekom zakonu (pravilu) /14/. Osim toga, izvodnica prilikom kretanja može da zadržava svoj položaj u odnosu na vodilju, a može i da menja svoj položaj prema vodilji, opet po nekom pravilu. Uvođenjem zakona (pravila) po kome se izvodnica postojano menja, ili menja svoj položaj u odnosu na vodilju, određene su sve tačke nastale površi. Na *slici 3* su prikazani neki od mogućih prostornih odnosa između izvodnice i vodilje, prilikom izvođenja

neke površi. Izvodnica na *slici 3a* prilikom svog kretanja ostaje podudarna i paralelna u svim položajima svom početnom položaju, tako da se njen odnos prema vodilji postojano menja. Na *slici 3b* izvodnica ostaje podudarna i zadržava nepromenljiv odnos prema vodilji. Na *slici 3c* izvodnica se tokom kretanja postojano menja (po nekom zakonu) i ostaje paralelna u svim položajima svom početnom položaju. Na *slici 3d* izvodnica se tokom kretanja postojano menja (po nekom zakonu) i zadržava nepromenljiv odnos prema vodilji. Na ovakav način nastaju četiri potpuno različite površi, iako imaju istu vodilju i izvodnicu koja je u početnom položaju podudarna u sva četiri slučaja.



*slika 3. Neki od mogućih prostornih odnosa izvodnica - vodilja prilikom izvođenja površi*

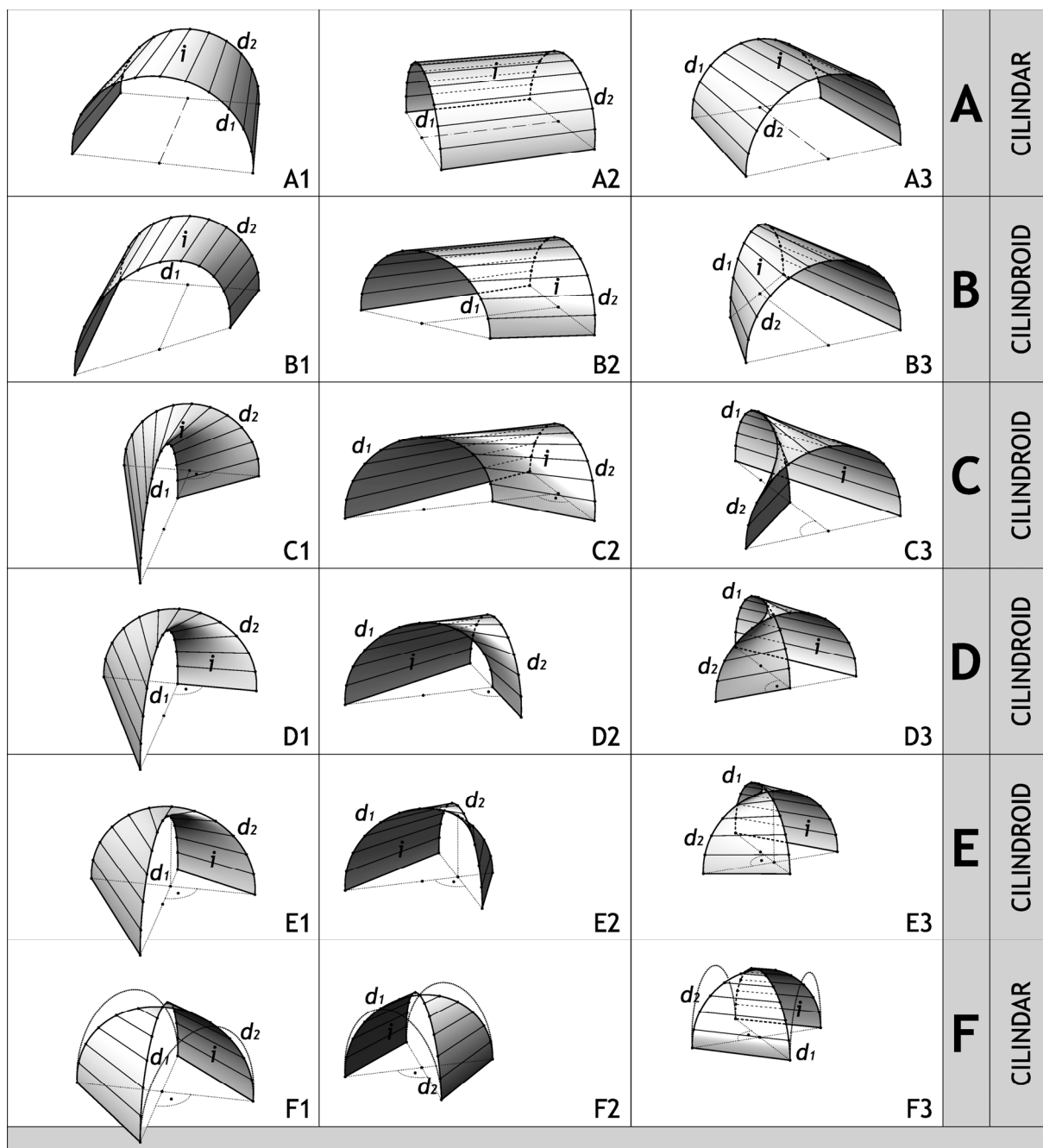
Površni koje nastaju kretanjem neke linije nazivaju se **kinematičke površi**. Ukoliko je izvodnica ili vodilja kriva linija, nastaje **obla površ**. Kada je izvodnica prava linija, nastala površ je **pravoizvodna**. Translacijom (paralelnim pomeranjem) neke linije nastaje **translaciona površ**, obrtanjem (rotacijom) neke linije oko jedne prave nastaje **obrtna (rotaciona) površ**, a zavojnim kretanjem neke linije, obrtanjem oko jedne prave uz translaciju duž te prave, nastaje **zavojna površ** /47/. Prethodno pomenute površi prikazane su na *slici 4*.



*slika 4. Tipovi površi*



Promenom međusobnog položaja u prostoru vodilja površi, mogu se izvesti transformacije jedne površi u neku drugu površ. Na *slici 5* prikazana je transformacija cilindar - cilindroid - cilindar u 6 koraka (od A do F), sa po tri izgleda datih u perspektivi. Cilindar prikazan na *slici 5A* ima vodilje  $d_1$  i  $d_2$  i izvodnicu  $i$ . Na *slikama 5B* i *C*, vodilja  $d_1$  se rotira oko vertikalne ose za određeni ugao, čime se cilindar transformiše u cilindroid. Beskonačno daleka prava izvodnica cilindroida određena je horizontalnom direktrisnim ravni. Na *slikama 5D* i *E*, prikazano je translatorno pomeranje vodilje  $d_1$  upravno na vodilju  $d_2$ . *Slika 5F* prikazuje novonastalu cilindričnu površ, u položaju kada se vodilje  $d_1$  i  $d_2$  seku.



*slika 5. Transformacija cilindar - cilindroid - cilindar*

### 13 KLASIFIKACIJA POVRŠI

Najopštija klasifikacija površi može se izvršiti po zakonitosti njihovog oblika, odnosno njihove geometrijske strukture. Ukoliko je geometrijska struktura površi definisana nekim zakonom (pravilom), svrstava se u grupu **geometrijskih (zakonomernih) površi**. U suprotnom, ako geometrijska struktura površi nije definisana nekim zakonom, svrstava se u grupu **topografskih (grafičkih) površi** /12, 14, 47/. U zakonomerne površi spadaju **algebarske** i **transcedentne površi**. Ako proizvoljna prava prodire analitičku površ konačan broj puta, površ je algebarska, a ako je prodire beskonačan broj puta, površ je transcedentna /12, 47/. Algebarske površi se dalje mogu klasifikovati određivanjem reda i razreda površi. **Red algebarske površi** predstavlja najveći mogući broj tačaka prodora neke prave (koja joj ne pripada) kroz tu površ. Prodorne tačke mogu biti realne i imaginarne. **Razred algebarske površi** predstavlja najveći mogući broj tangencijalnih (dirnih) ravni koje se mogu postaviti na datu površ, kroz neku tačku van te površi /12/. Transcedentne površi nemaju red i razred, odnosno neka prava ih prodire beskonačno mnogo puta /12, 47/. Ukoliko su red i razred površi isti broj  $n$ , kažemo da je ta površ  $n$ -tog stepena. Svaka ravan koja ne pripada datoj površi  $n$ -tog reda, seče je po krivoj  $n$ -tog reda. Presek dve površi  $n$ -tog i  $m$ -tog reda je kriva  $n \times m$ -tog reda /12, 64/.

Tabela I: Klasifikacija površi koje imaju primenu u tehničkoj praksi /30, 47/

POVRŠI						
14		geometrijske površi (zakonomerne)			15	topografske površ (grafičke)
14.1		pravoizvodne površi		14.2		dvostruko zakrivljene površi
14.1.1		razvojne	14.1.2	14.2.1	14.2.2	14.2.3
			nerazvojne (vitoperne)	opšte površi	obrtne površi	klizne površi
14.1.1.1	14.1.1.2	14.1.2.1	14.1.2.2			
poliedarske površ	jednostruko zakrivljene površ	jednostruko izvodne	dvostruko izvodne			

## 14 GEOMETRIJSKE POVRŠI

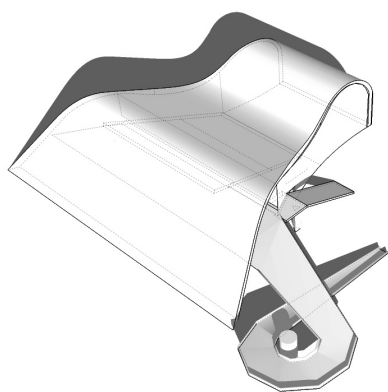
Površ je **geometrijska (zakonomerna)** ako je položaj svake njene tačke određen izvesnim zakonom (pravilom), bilo u obliku jednačine između njenih koordinata u izvesnom koordinatnom sistemu, ili u obliku načina kako se određena površ izvodi. Geometrijske površi mogu biti **pravoizvodne i dvostruko zakrivljene** /14, 47/.

### 14.1 PRAVOIZVODNE POVRŠI

U najopštijem slučaju, u projektivnoj geometriji, **pravoizvodne površi** nastaju presekom kompleksa i kongruencija. Sve prave prostora koje jedanput seku neku prostornu krivu  $d$ ,  $n$ -tog reda, čine kompleks  $n$ -tog stepena. To su  $\infty^3$  unisekanta prostorne krive  $d$ , koja se zove temeljna kriva kompleksa. Prave koje su zajedničke unisekante prostornih krivih  $r$  i  $s$ , ili bisekante jedne od tih krivih, čine kongruenciju. Kongruencija ima  $\infty^2$  pravih (izvodnica) koje seku temeljne krive /50/.

Najjednostavnije definisano, **pravoizvodnu površ** izvodi prava kretanjem po nekoj liniji. Svaki položaj te prave u prostoru, koji ona može da zauzme takvim kretanjem, naziva se **izvodnica (generatrisa)** nastale pravoizvodne površi. Zakonitost kretanja izvodnice može se utvrditi pomoću tri (prave ili krive) međusobno nezavisne linije, koje izvodnica mora neprekidno da seče pri svom kretanju. Ove tri linije nazivaju se **vodilje (direktrise)** te površi /12/.

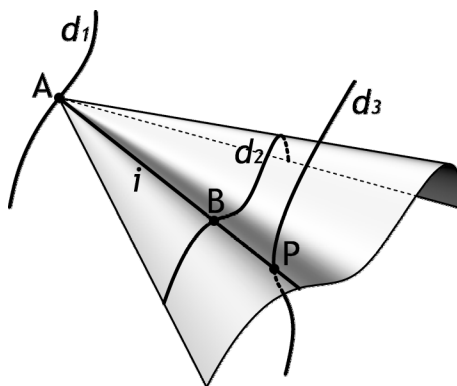
Na **slici 6**, prikazan je objekat *Teatro Popular*, izgrađen u Brazilu 2007. godine. Formu ovog savremenog objekta određuje niz jasno izdvojenih pravoizvodnih površi /58/. Ovde su primenjeni isecci cilindričnih pravoizvodnih površi, koje su detaljnije opisane u delu **14.1.1.2**.



*slika 6. Teatro Popular, Niteroi, Brazil, 2007. (Oscar Niemeyer Architect)  
/Guillermo Arévalo Aucahuasi; archifeed.weebly.com/*

Pravoizvodne površi nastaju i u preseku tri kompleksa. Prostorne krive  $d_1$ ,  $d_2$  i  $d_3$  su temeljne krive tri kompleksa i vodilje jedne pravoizvodne površi. Svakom tačkom krive  $d_1$  prolazi samo određeni broj transverzala krivih  $d_2$  i  $d_3$ . Takvih transverzala ima  $\infty^1$ , poređenih tako da seku sve tri temeljne krive

i one su izvodnice jedne pravoizvodne površi. Takođe, moguće je zadati jedan kompleks temeljnom krivom  $d_1$  i jednu kongruenciju čije su temeljne krive  $d_2$  i  $d_3$ . U preseku datog kompleksa i date kongruencije nastaje jedna pravoizvodna površ [2, 47, 50].



slika 7. Pravoizvodna površ nastala presekom triju kompleksa

Proizvoljno odabrana tačka  $A$  na vodilji  $d_1$  određivaće sa vodiljom  $d_2$  sasvim određenu konusnu površ  $k$ , slika 7. Ako vodilja  $d_3$  prodire kroz ovu konusnu površ u tački  $P$ , onda će spojnica  $AP$ , obzirom da seče sve tri vodilje ( $d_1$ ,  $d_2$  i  $d_3$ ), biti izvodnica pravoizvodne površi. Ako vodilja  $d_3$  prodire kroz pomenutu konusnu površ u dve, tri ili više tačaka, onda će tačkom  $A$  prolaziti dve, tri ili više izvodnica pravoizvodne površi. Menjajući oblik i međusobni položaj linija vodilja mogu se dobiti različiti tipovi pravoizvodnih površi [2, 47, 50].

Pravoizvodne površi dele se, prema tome da li se mogu razviti u jednu ravan, na razvojne i nerazvojne. Nerazvojne pravoizvodne površi nazivaju se još i vitoperne površi.

#### 14.1.1 Razvojne pravoizvodne površi

Razvojne pravoizvodne površi mogu se razviti u jednu ravan, sečenjem po jednoj izvodnici. Kod ovih površi dve beskonačno bliske izvodnice se seku u konačnosti ili u beskonačnosti (međusobno su paralelne). Razvojne pravoizvodne površi dele se na poliedarske (pravilni poliedri, piramide i prizme) i jednostruko zakrivljene (konvolutivne površi, konusi i oblice).

##### 14.1.1.1 Poliedarske (rogljaste) površi

Poliedarske ili rogljaste pravoizvodne površi sastavljene su od strana (pljosni) i ivica koje predstavljaju preseke tih strana. Rogljevi poliedarske površi predstavljaju presek najmanje tri strane poliedarske površi. Vrh roglja, i kome se susstiču najmanje tri ivice je teme površi. Poliedarske površi mogu biti otvorene i zatvorene. Kod zatvorenih površi duž svake ivice seku se dve susedne strane, dok kod otvorenih poliedarskih površi postoje slobodni rubovi površi, duž kojih se ne

sastaju dve susedne strane. Zatvorene poliedarske površi nazivaju se **poliedri**. Svaka zatvorena poliedarska površ deli prostor na unutrašnju i spoljašnju oblast te površi. Pod poliedrom se podrazumeva i telo ograničeno istoimenom površi, odnosno unija zatvorene rogljaste površi i unutrašnje oblasti te površi.

Poliedarske površi mogu se podeliti prema strukturi svojih strana na /47/:

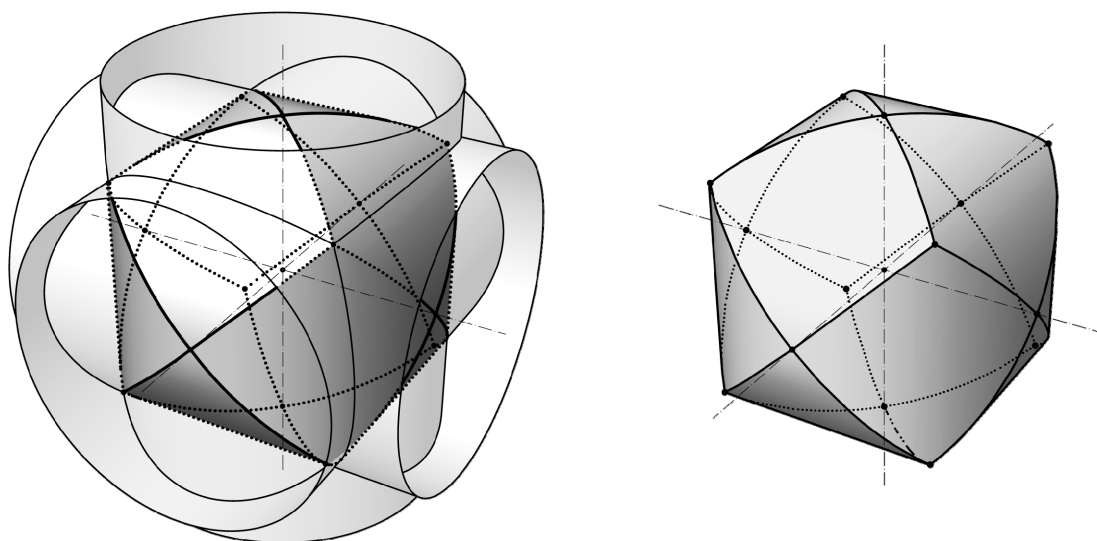
- **obične poliedarske površi**, kojima su sve strane ravne,
- **oble poliedarske površi**, kojima su sve strane oble i
- **mešovite poliedarske površi**, koje imaju i oblih i ravnih strana.

## Poliedri

**Poliedri** su zatvorene poliedarske površi. Odnos broja strana i temena zatvorene rogljaste površi (poliedra) određen je Ojlerovim jednačinom:

$$t + p = i + 2$$

gde je **t** - broj temena, **p** - broj pljosni (strana), **i** - broj ivica. Ako ravan koja sadrži ma koju stranu poliedra ne preseca poliedar, taj poliedar je **konveksan (ispupčen)**. Ukoliko bilo koja ravan strane seče poliedar, takav poliedar je **konkavan (udubljen)**. Poliedri kao i sve ostale poliedarske površi mogu biti **obični, obli i mešoviti**, zavisno od toga da li su im strane ravne ili oble /47/. Kao primer oblog poliedra, na *slici 8* prikazano je **konveksno telo**, poliedar koji se dobija kao jezgro preseka tri identične obrtne oblice sa međusobno upravnim osama /32, 65/. Poliedri mogu biti **pravilni i nepravilni**. Poliedar je **pravilan** ako su njegove pljosni podudarni pravilni poligoni (mnogouglovi) i svi rogljevi podudarni.



*slika 8. Konveksno telo*

Na *slici 9* levo, prikazan je modularni stočić *Polyhedra Modular Coffee Table* čiju konstrukciju čine rešetke u vidu celih i presečenih nepravilnih dodekaedara. Od nekoliko ponuđenih elemenata, zasnovanih na dodekaedrima, moguće je sklopiti

različite forme stočića. Na istoj slici desno prikazan je klub stočić *Folded Polyhedra Coffee Table* čija je forma zasnovana na upotrebi nepravilnog poliedra. Prikazane su kompjuterske 3D vizuelizacije.



*slika 9. Polyhedra Modular Coffee Table (Haldane Martin) /haldanemartin.co.za/  
Folded Polyhedra Coffee Table (Jon Hills) /jonhills.com/*

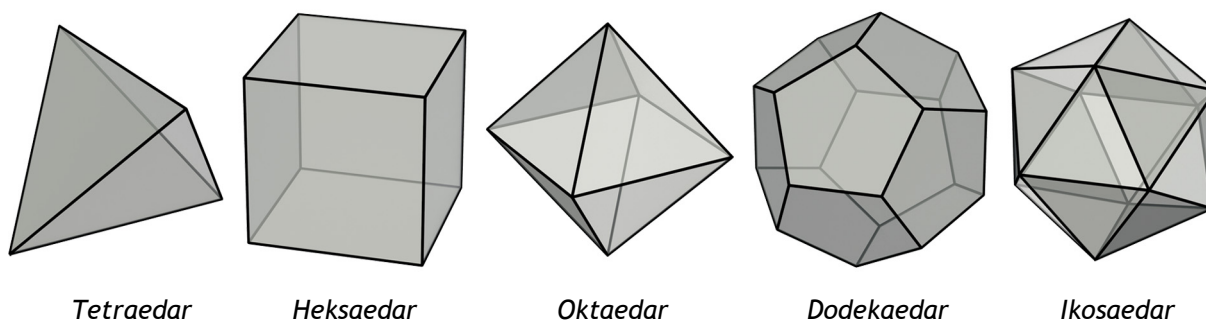
Pravilni poliedri nazivaju se još **regularni poliedri** i mogu se podeliti na:

- **Platonova tela** (konveksni pravilni poliedri),
- **Kepler-Poinsotova tela** (konkavni pravilni poliedri).

Pravilim zasecanjem Platonovih tela ravnima mogu se dobiti **Arhimedova tela**, koja spadaju u izvedene poliedre.

### Platonova tela - konveksni pravilni poliedri

**Platonova tela** su pravilni poliedri čije su sve pljosni pravilni međusobno podudarni mnogouglovi, a svi rogljevi su podudarni i konveksni. Postoji pet pravilnih konveksnih poliedara: **tetraedar**, **heksaedar (kocka)**, **oktaedar**, **dodekaedar** i **ikosaedar**. Mogu se upisati jedan u drugi i to sledecim redosledom, od spolja ka unutra: dodekaedar - heksaedar - tetraedar - oktaedar - ikosaedar. Pljosni tetraedra, oktaedra i ikosaedra su jednakostranični trouglovi, pljosni kocke su kvadrati, dok su pljosni dodekaedra pravilni petouglovi. Platonova tela su prikazana na *slici 10*.



*slika 10. Platonova tela - konveksni pravilni poliedri*

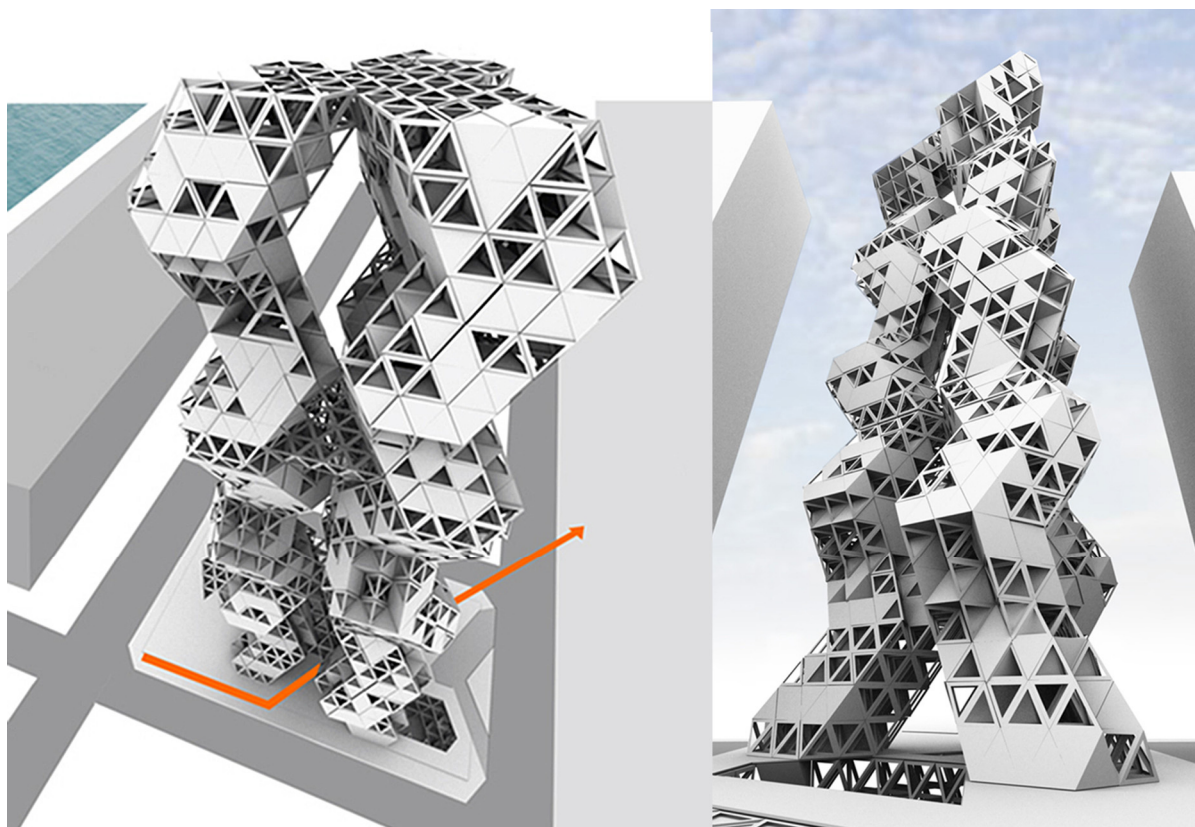


Na *slici 11*, prikazan je jedan od objekata hotela u Švedskoj, čije su smeštajne jedinice sagrađene na drveću. Forma kocke izgrađena je oko nosećeg stabla. Površine kocke obložene su ogledalima, čime objekat iz pojedinih uglova gledanja postaje gotovo nevidljiv, reflektujući sliku okoline. Na *slici 12*, desno, prikazan je 3D model preseka kroz objekat.



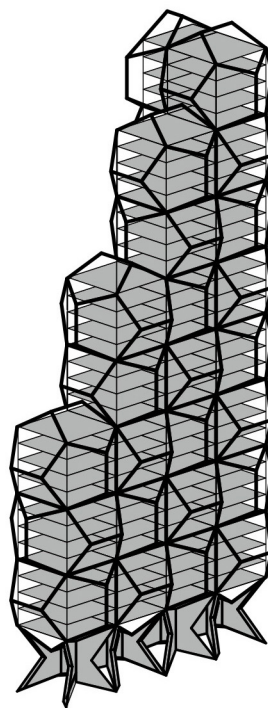
*slika 11. Treehotel, Švedska, 2012. (Tham & Videgård Arkitekter) /archdezart.com/*

Na *slici 12*, prikazan je konkursni rad *Tetrahedron Tower*. Forma tornja sastoji se od pravilnih tetraedara i oktaedara, složenih u nepravilno oblikovanu prostornu rešetku u koju su umetnuti modularni puni poliedarski elementi.



*slika 12. Tetrahedron Tower, Singapur, Evolo konkurs, 2010. (Tan Bing Hui) /evolo.us/*


Projektovanje forme arhitektonskog objekta zasnovane na upotrebi pravilnih poliedara prikazao je na *slici 13*. *Housing Tower* je kompleksna stambena kula sastavljena od segmenata pravilnih dodekaedara.



*slika 13. Housing Tower, Lima, konkursni rad, 2014. (Tammo Prinz Arch.) / tammoprinz.com/*

U tabeli II prikazana su Platonova tela sa svojim karakteristikama, brojem temena, ivica i strana /4, 8/.

Tabela II: Platonova tela - konveksni pravilni poliedri /4, 8/

	Poliedar	Karakteristika	Broj temena	Broj ivica	Broj strana
	tetraedar	{3,3}	4	6	4
	heksaedar	{4,3}	8	12	6
	oktaedar	{3,4}	6	12	8
	dodekaedar	{5,3}	20	30	12
	ikosaedar	{3,5}	12	30	20

Označavanje karakteristika Platonovih tela: {n,k}

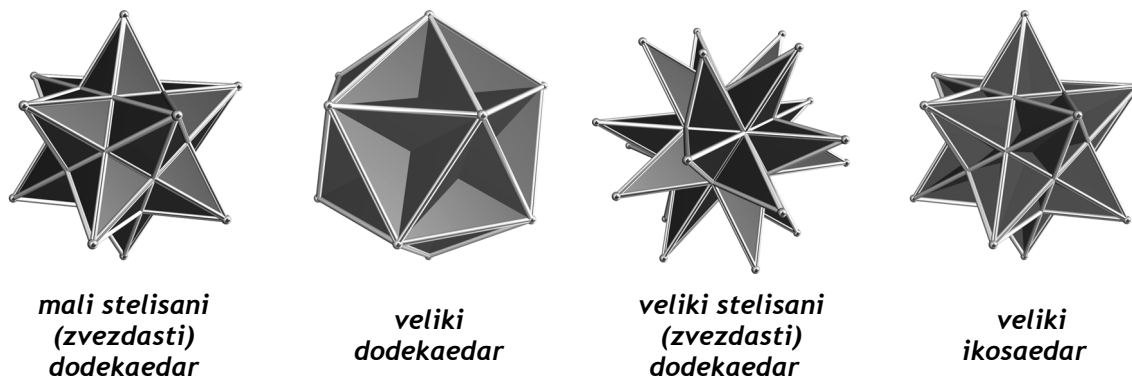
n - broj stranica pravilnog mnogougla

k - broj poligona koji se sutiču u temenu poliedra (potreban broj poligona za formiranje rogla)



## Kepler-Poinsotova tela - konkavni pravilni poliedri

Ukoliko izuzmemo uslov da su svi rogljevi konveksni dobijamo još četiri pravilna konkavna poliedra, **Kepler-Poinsotova tela**. To su: **mali zvezdasti dodekaedar**, **veliki dodekaedar**, **veliki zvezdasti dodekaedar** i **veliki ikosaedar**, prikazani na **slici 14**. Strane ovih poliedara su pravilni podudarni poligoni koji se međusobno presecaju /4, 8/.







*slika 14. Konkavni pravilni poliedri - Kepler-Poinsotova tela /en.wikipedia.org/*

Konkavni pravilni poliedri nastaju produžavanjem ivica nekih pravilnih konveksnih poliedara i njihovim presecanjem. Zavisno od načina produžavanja ivica i izbora njihovih presečnih tačaka od jednog konveksnog pravilnog poliedra može nastati više različitih konkavnih pravilnih poliedara. Ovaj postupak produžavanja strana i ivica do preseka svakog elementa sa ostalim, naziva se **stalacija**. Zbog toga neki konkavni poliedri u nazivu imaju izraz stelisani /8, 67/.

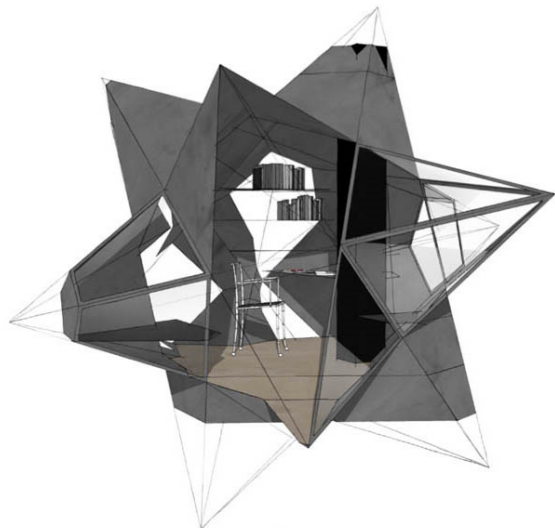
U tabeli III prikazana su **Kepler-Poinsotova tela** sa svojim karakteristikama, brojem temena, ivica i strana /4, 8/.

**Tabela III: Kepler-Poinsotova tela - konkavni pravilni poligoni /4, 8/**

	Poliedar	Karakteristika	Broj temena	Broj ivica	Broj strana
	mali stelisani (zvezdasti) dodekaedar	{5/2,5}	12 {5}	30	12 {5/2}
	veliki dodekaedar	{5,5/2}	12 {5/2}	30	12 {5}
	veliki stelisani (zvezdasti) dodekaedar	{5/2,3}	20 {3}	30	12 {5/2}
	veliki ikosaedar	{3,5/2}	12 {5/2}	30	20 {3}

Označavanje karakteristika Kepler-Poinsotova tela: {p/q,k}  
 p/q - oznaka podudarnih pravilnih poligona - strana poliedra  
 k - broj poligona koji se sutiču u temenu poliedra (potreban broj poligona za formiranje roglja)

*Dodecaedrum Varazze* je radni prostor napravljen u formi malog stelisanog dodekaedra. Na *slici 15* levo prikazan je način izvođenja forme elementa (kompjuterski 3D model), nastalog ravnim presecanjem nekih od rogljeva poligona. Element, radni prostor, je uklopljen u enterijer stana, *slika 16* desno.



*slika 15. Dodecaedrum Varazze, Milano, Italija, 2012. (Dulio Forte) /atelierforte.com/*

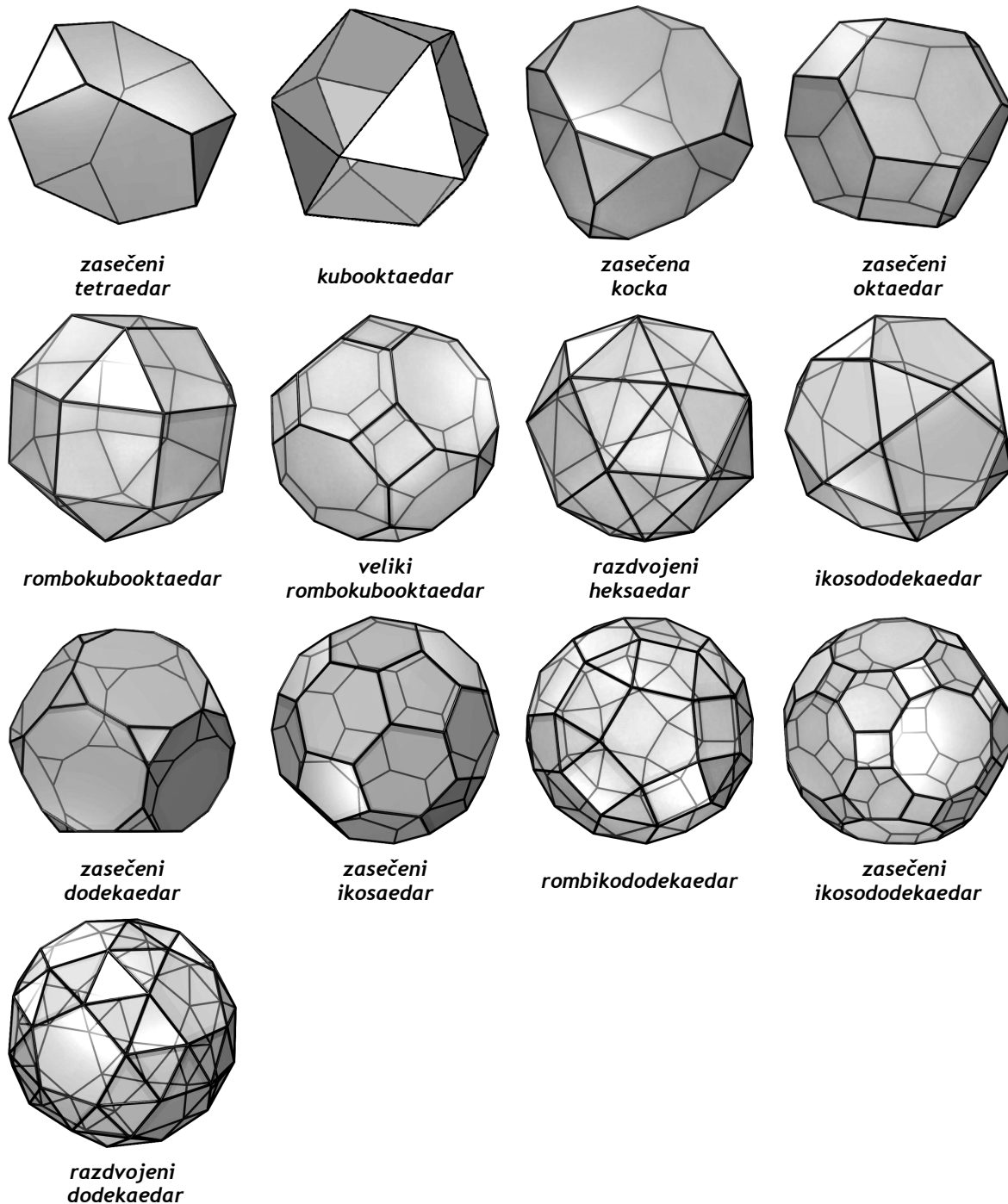
Na *slici 16* levo prikazana je slika *Gravitacija* holandskog umetnika *M. C. Eschera*, iz 1952. godine. Osnovni element slike je apstraktna forma u obliku malog stelisanog dodekaedra. Na istoj slici *desno* prikazana je skulptura u obliku malog stelisanog dodekaedra, inspirisana i izrađena po nacrtima prethodnog crteža.



*slika 16. Gravitacija, 1952. (M. C. Escher) /wikiart.org/  
Skulptura, Kampus Univerziteta u Tventeu, Holandija /en.wikipedia.org/*

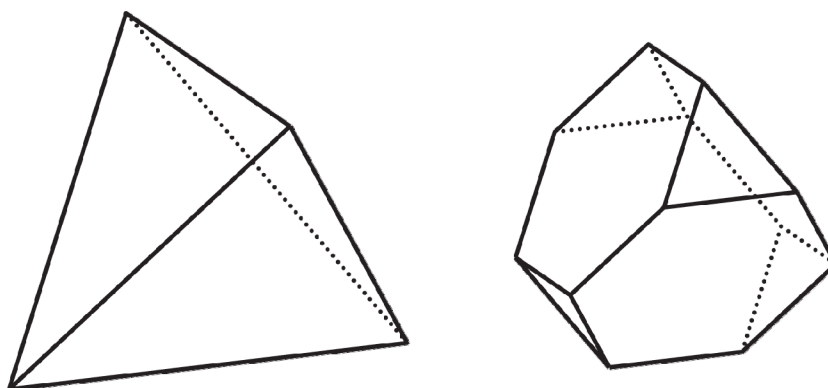
## Arhimedova tela

Simetričnim zasecanjem Platonovih tela ravnima, odnosno podelom njihovih ivica na dva ili tri jednaka dela, kao i njihovim daljim zasecanjem, dobijaju se **Arhimedova tela**. Postoji ukupno 13 tela prikazanih na *slici 17*. Rogljevi Arhimedovih tela su podudarni ili simetrični (u odnosu na neku ravan simetrije poliedra), a strane (pljosni) su različiti pravilni poligoni podudarnih ivica. U svakom temenu poliedra, odnosno u temenu svakog njegovog roglja, sutiče se isti broj poligona određenih tipova, u istom ili suprotnom cirkularnom poretku. Moguće kombinacije pravilnih poligona ograničava konveksnost rogljeva /4, 7, 8, 23/.



slika 17. Arhimedova tela /en.wikipedia.org/

Na *slici 18* prikazan je primer simetričnog zasecanja **tetraedra** ravnima koje presecaju ivice pravilnog poliedra na tri jednaka dela. Pri tome izbor deonih tačaka obezbeđuje pravilnost poligona koji u tom procesu nastaje i jednakost njihovih stranica, odnosno jednakost ivica novonastalog poliedra. U toj podeli, srednji deo ivice predstavlja ivicu novonastalog poliedra, a preostali delovi ne pripadaju tom poliedru. Nastalo arhimedovo telo prikazano na *slici 18 desno* je **zasečeni tetraedar** /67/.



*slika 18. Tetraedar i zasečeni tetraedar*

Zasecanje se može izvršiti i ravnima koje sadrže središta ivica koje polaze iz istog temena. Te ravni presecaju ivice u središtu, dele ih na dva jednaka dela, pri čemu nijedan od tih delova ne pripada novonastalom telu /67/. Na primer, zasecanjem kocke podelom njenih ivica na dva jednaka dela, nastaje **kubooktaedar** /30/.














Prostornu strukturu splava u Kopenhagenu, prikazanog na *slici 19*, čine dva pravilna oktaedra i jedan zasečeni tetraedar. Na *slici 19 levo*, prikazan je pojednostavljeni 3D model osnovne forme objekta, gde su pravilni oktaedri označeni sivom bojom i belom bojom označen je zasečeni tetraedar, dobijen postupkom prikazanim na prethodnoj *slici 19*. Sva tri dela su dodatno zasečena obaranjem ivica, čime neznatno odstupaju od prikazanih idealnih formi.



*slika 19. Splav, Kopenhagen, Danska /blog.artsnapper.com/*

U tabeli IV prikazana su Arhimedova tela sa svojim karakteristikama, brojem temena, ivica i strana /4, 8, 67/.

Tabela IV: Arhimedova tela /4, 8, 67/

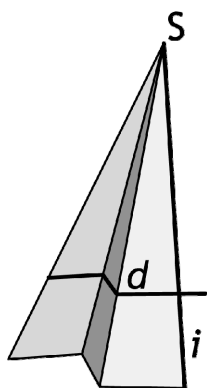
	Poliedar	Karakteristika	Broj temena	Broj ivica	Broj strana
	zasećeni tetraedar	{3,6,6}	12	18	8 (4 trougla, 4 šestougla)
	kubooktaedar	{3,4,3,4}	12	24	14 (8 trouglova, 6 kvadrata)
	zasećena kocka	{3,8,8}	12	36	14 (8 trouglova, 6 osmouglova)
	zasećeni oktaedar	{4,6,6}	24	36	14 (6 kvadrata, 8 šestouglova)
	rombokubooktaedar	{3,4,4,4}	24	48	26 (8 trouglova, 18 kvadrata)
	veliki rombokubooktaedar	{4,6,8}	48	72	26 (12 kvadrata, 8 šestouglova, 6 osmouglova)
	razdvojeni heksaedar	{3,3,3,3,4}	48	72	38 (32 trougla, 6 kvadrata)
	ikosododekaedar	{3,5,3,5}	30	60	32 (20 trouglova, 12 petouglova)
	zasećeni dodekaedar	{3,10,10}	60	90	32 (20 trouglova, 12 desetouglova)
	zasećeni ikosaedar	{5,6,6}	60	90	32 (12 petouglova, 20 šestouglova)
	rombikododekaedar	{3,4,5,4}	60	120	62 (12 petouglova, 30 kvadrata, 20 trouglova)
	zasećeni ikosododekaedar	{4,6,10}	120	180	62 (30 kvadrata, 20 šestouglova, 12 desetouglova)
	razdvojeni dodekaedar	{3,3,3,3,5}	60	150	92 (80 trouglova, 12 petouglova)

Označavanje karakteristika Arhimedovih tela: niz celih brojeva, dužine k, koji označavaju redom tipove pravilnih mnogouglova koji cirkularno generišu rogalj, odnosno označavaju redom tipove pravilnih mnogouglova koji se sutiču u istom temenu poliedra. k predstavlja broj poligona koji se sutiču u istom temenu i generišu rogalj

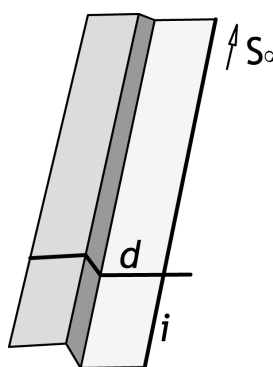


## Piramide i prizme

Ako se neka prava  $i$  kreće u prostoru tako da prolazi kroz stalnu tačku  $S$  i klizi po nekom ravnom ili prostornom poligonu nastaje **piramidalna površ**, *slika 20*. Tačka  $S$  je vrh ili teme površi, prava  $i$  izvodnica, a ravni ili prostorni poligon vodilja  $d$  nastale površi. Svaka izvodnica koja prolazi kroz temena poligona je ivica površi. Ako se vrh piramidalne površi pomeri u beskonačnost, njene ivice postaju paralelne i nastaje **prizmatična površ**, *slika 21*. Prizmatične i piramidalne površi se prostiru u beskonačnost /14, 51, 64/. Zavisno od broja strana vodilje (poligona), mogu biti trostrane, četvorostrane, petostrane itd. Obe površi su pravilne ako postoji bar jedan ravni presek (bazu) koji je pravilna figura. Ukoliko je spojnica centra te pravilne figure sa vrhom površi (osa) upravna na presečnu figuru, piramida ili prizma su prave, *slike 22 i 23* /14/. Ravnim presecanjem piramidalne, ili prizmatične površi po svim izvodnicama nastaju piramida ili prizma, a dobijeni ravni presek naziva se bazu. Ukoliko je ravni presek pravilan mnogougao, piramidu tj. prizmu nazivamo pravilnom. Ukoliko je osa upravna na bazu pravom, piramidu tj. prizmu nazivamo pravom /51/.



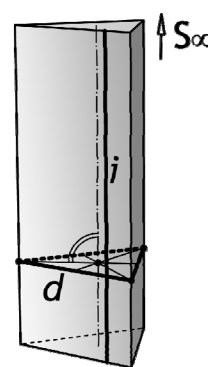
*slika 20. Piramidalna poliedarska površ*



*slika 21. Prizmatična poliedarska površ*



*slika 22. Pravilna prava trostrana piramida*



*slika 23. Pravilna prava trostrana prizma*

Najveći broj arhitektonskih objekata zasnovan je upravo na formama prizme i piramide. Na *slici 24* prikazan je *Pavilion 21 mini opera space* u Minhenu gde su prizme i piramide složene u kompleksnu formu fasade i arhitektonski interpretirane na savremen način. /52/.



*slika 24. Pirizme i piramide - Pavilion 21 mini opera space, Minhenu, Nemačka, 2008. (Coop Himmelb(l)au) /aasarchitecture.com/*

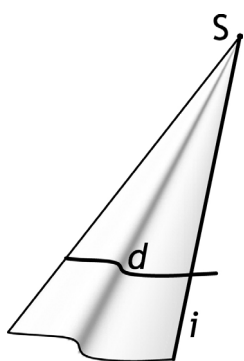
### 14.1.1.2 Jednostruko zakrivljene površi

Razvojne pravoizvodne **jednostruko zakrivljene površi** nastaju kretanjem prave izvodnice po vodilji koja je ravna ili prostorna kriva linija, tako da svi položaji izvodnice prolaze kroz jednu konačnu ili beskonačno daleku tačku, čime se ove površi svrstavaju u grupu razvojnih površi. Kriva vodilja može biti **otvorena** ili **zatvorena**, **ravna** ili **prostorna**. Svaki ravni presek razvojne pravoizvodne jednostruko zakrivljene površi, koji ne prolazi kroz neku od izvodnica, može se smatrati **bazisom** te površi /51/. Pri tome bazisi ne pripadaju izvedenoj površi. Red izvedene površi jednak je redu krive vodilje. Bilo koja transverzala, spojnica tačke vodilje  $d$  sa vrhom  $S$  čini jednu izvodnicu površi /47, 63/.

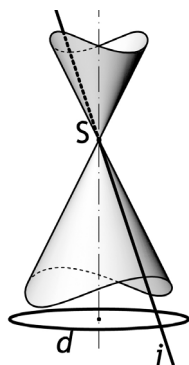
Razvojne jednostruko zakrivljene površi su sve **konusne, cilindrične i konvolutne površi**.

#### Konusi i oblice

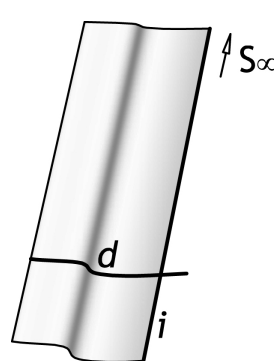
Kada se prava izvodnica kreće po vodilji koja je ravna ili prostorna kriva linija, pri čemu prolazi kroz jednu stalnu konačnu tačku  $S$ , nastaje **konusna površ**, *slike 25 i 26*. Ako je tačka  $S$  beskonačno daleka tačka (prava izvodnica pri kretanju ostaje stalno paralelna prvobitnom položaju) nastaje **cilindrična (obličasta) površ**, *slike 27 i 28* /51/. Ukoliko su krive vodilje 2. stepena nastaju konusi i oblice 2. stepena. Obe vrste površi prema obliku vodilje 2. stepena mogu biti: **kružne, eliptične, paraboloidne i hiperbolične**. Spojnica vrha površi sa centrom bazisa je osa površi. Ukoliko je vodilja površi **kružnica** upravna na osovini konusa ili oblice, nastaje **obrtni konus ili obrtna oblica**, *slike 26 i 28* /14, 64/.



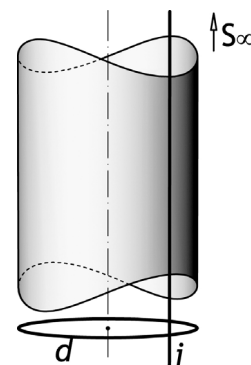
*slika 25. Konusna površ*



*slika 26. Obrtni (kružni) konus*

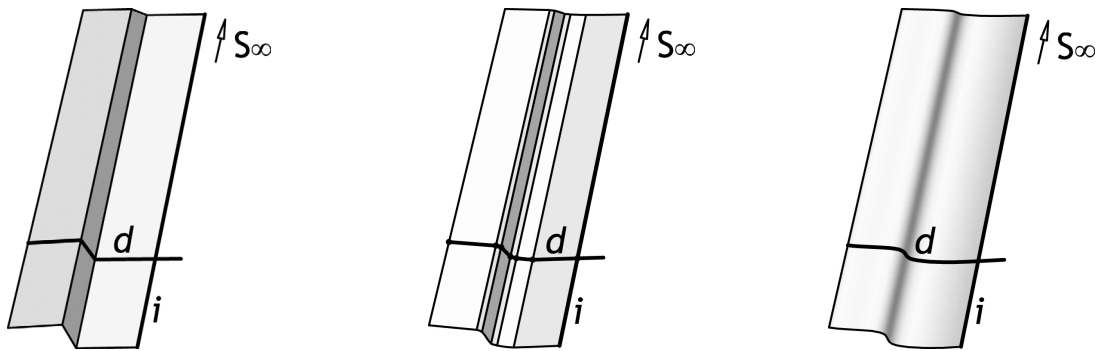


*slika 27. Cilindrična površ*



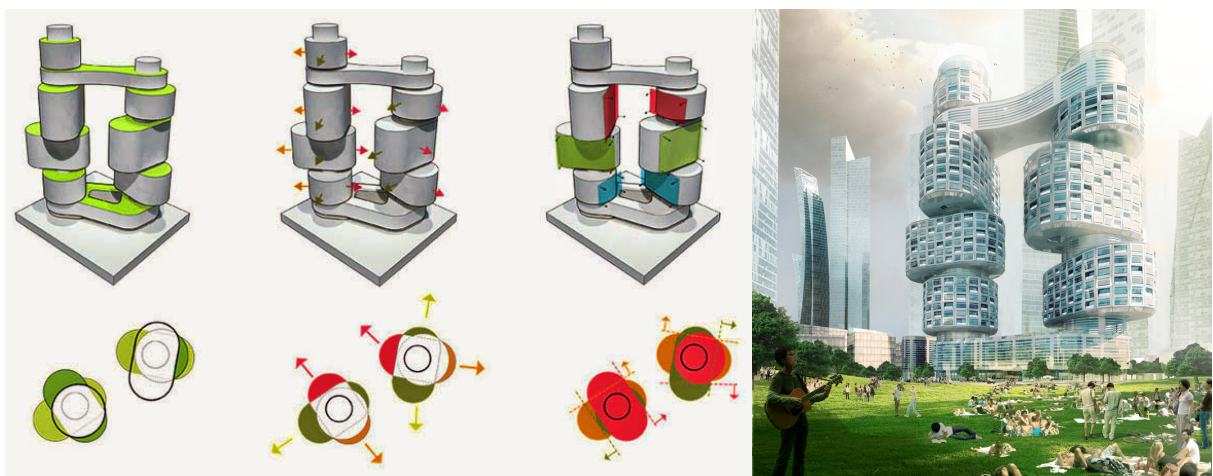
*slika 28. Obrtna (kružna) oblica*

Nastanak konusa ili oblice identičan je nastanku piramide ili prizme, razlikuje se samo vodilja po kojoj se izvodnica kreće. Kod prizme i piramide vodilja je poligonalna ravna ili prostorna linija, a kod piramide i prizme ravna ili prostorna kriva koju možemo smatrati i poligonalnom linijom sa beskonačno mnogo strana. Može se zaključiti da je oblica prizma, a konus piramida, sa beskonačnim brojem strana. Na *slici 29* prikazan je primer prizmatične površi koja se uvećavanjem broja strana vodilje transformiše u cilindričnu površ.



slika 29. Transformacija prizme u obliku beskonačnim uvećavanjem broja strana vodilje

Na *slici 30*, prikazan je projekat *Velo Towers*. Elementi koji formiraju tornjeve zasnovani su na oblicama. Na *slici 31*, levo, prikazana je šema po kojoj su složeni i spojeni cilindrični elementi, a desno kompjuterska 3D vizuelizacija objekata.



slika 30. *Velo Towers*, Seoul, Južna Koreja, 2012. (Asymptote Architecture) / [asymptote.net/](http://asymptote.net/)

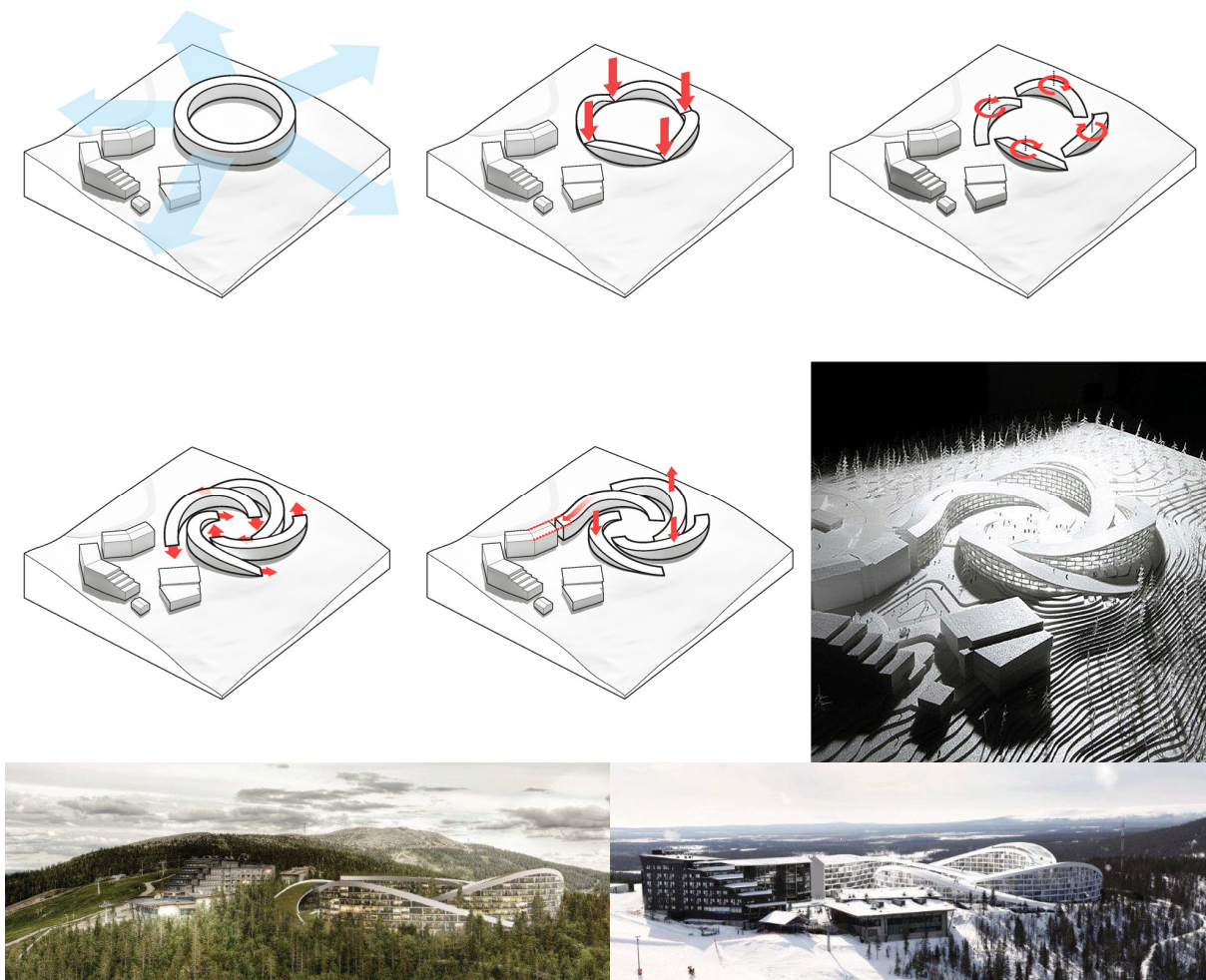
Na *slici 31*, prikazana je *Cloud House* (Kuća oblak) čiji spoljašnji zidovi, odnosno omotač kuće, čini prava cilindrična površ. Ova površ može se rastaviti na četiri segmenta obrtnih oblica različitih prečnika.



slika 31. *Cloud House*, Fitzroy North VIC, Australia, 2012. (McBride Charles Ryan) / [John Gollings; archdaily.com/](http://JohnGollings.com/)



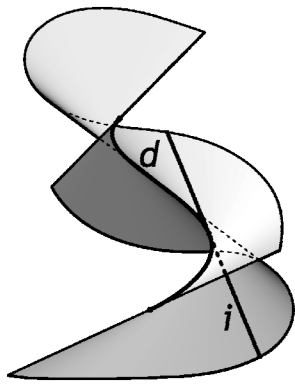
Na *slici 32* prikazana je analiza izvođenja forme kompleksa objekata *Ski Resort in Lapland* u Finskoj. Osnovna forma objekta zasnovana je na cilindričnim površima, a na slici je ilustrovano nekoliko faza izvođenja, kao i fotografija makete i kompjuterska 3D vizuelizacija.



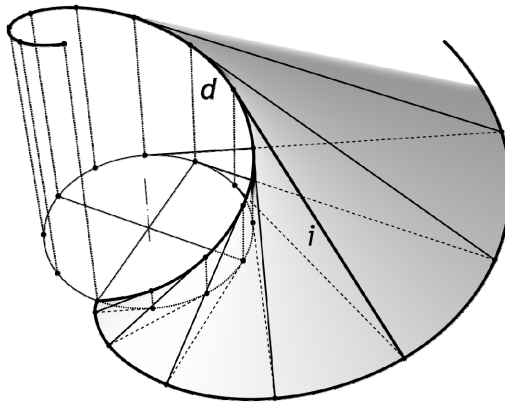
*slika 32. Ski Resort in Lapland, Levi, Finska, 2011. (BIG) /big.dk/*

## Konvolutne površi

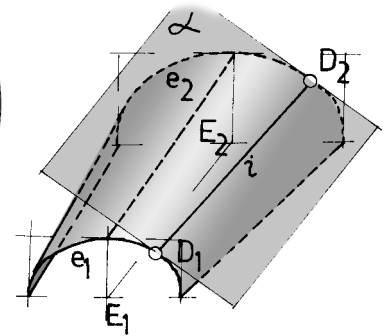
Konvolutne površi mogu biti svrstane u dva tipa (grupe). U prvi tip spadaju konvolutne površi **opšteg tipa**, a u drugi tip **anvelopne površi**. Konvolutnu površ opšteg tipa izvodi tangenta jedne prostorne krive. Prostorna kriva vodilja  $d$ , je rebro (greben) površi, a tangente  $i$  krive su izvodnice površi, *slika 33*. Ukoliko se za prostornu krivu vodilju uzme zavojnica, onda njene tangente čine **konvolutnu površ zavojnog tipa (zavojna torza)**, *slika 34*. Anvelopnu površ izvodi neka ravan kretanjem po dvema vodiljama koje su ravne krive linije, ostajući pri tome dirna ravan izvedene površi. Spojnice tačaka u kojima ravan dodiruje vodilje su izvodnice anvelopne površi, *slika 35*. Dve beskonačno bliske izvodnice konvolutnih površi seku se u jednoj tački određujući pri tome jednu dirnu ravan te površi /47/.



slika 33. Konvolutna površ opšteg tipa

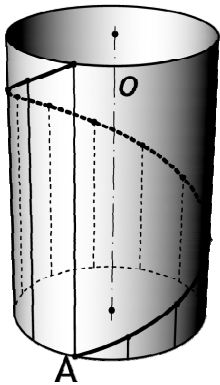


slika 34. Zavojna konvolutna površ - Zavojna torza

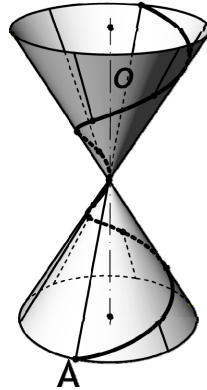


slika 35. Anvelopna površ /47/

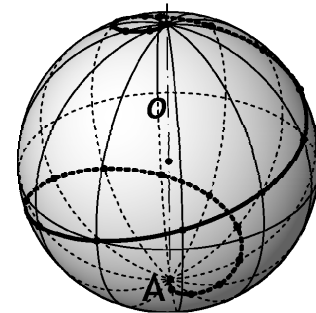
Zavojnice se koriste kao vodilje konvolutnih površi zavojnog tipa, kao i vodilje helikoida prikazanih u nastavku izlaganja. Ako se tačka **A** kreće po liniji **a**, uz njihovu istovremenu rotaciju oko ose **o**, pri čemu je kretanje tačke po liniji **a** proporcionalno uglu rotacije, nastaje zavojna prostorna kriva ili zavojnica /6/. Linija **a**, po kojoj se kreće tačka **A**, je meridijan neke obrtne površi, odnosno prava ili kriva linija. Zavojnica zaklapa isti ugao sa svakim položajem linije **a**, po kojoj se tačka **A** kreće. Zavojnice mogu nastati na površini bilo koje obrtne površi, koja predstavlja nosač zavojnice. Na slici 36 prikazano je nekoliko tipova zavojnica korišćenih u daljoj analizi i izlaganju /19, 25, 65/.



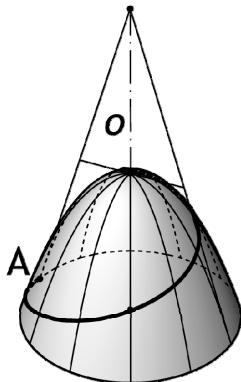
Cilindrična zavojnica



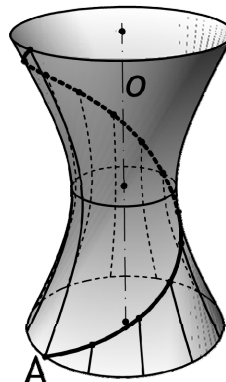
Konusna zavojnica



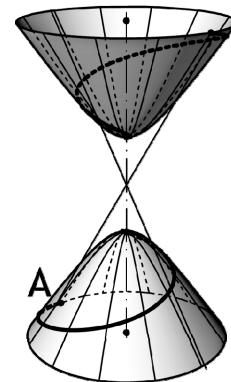
Zavojnica na lopti - loksodroma



Paraboloidna zavojnica



Jednograna hiperboloidna zavojnica



Dvograna hiperboloidna zavojnica

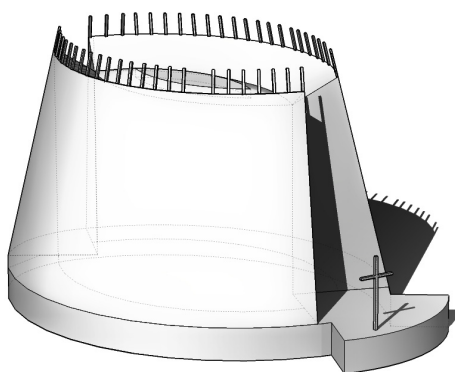
slika 36. Tipovi zavojnica

Na *slici 37*, prikazana je Mala arena Olimpijskog stadiona u Tokiju. Površina krova je oblikovana kao zavojna torza sa izvesnim odstupanjem u vidu povijanja nosećih kablova.



*slika 37. Olympic Stadium - Small Arena, Tokijo, Japan, 1961. (Kenzo Tange) / revistaaxis.com.co/*

Na *slici 38*, prikazana je katedrala *Christ the Light* čiji je spoljačnji omotač izveden od dve simetrično postavljene anvelopne površi, nastalih kretanjem ravni po dvema elipsama različitih dužina osa. Na *slici 39* levo, prikazan je pojednostavljeni 3D model forme objekta, gde se jasno izdvajaju segmenti pomenute površi.



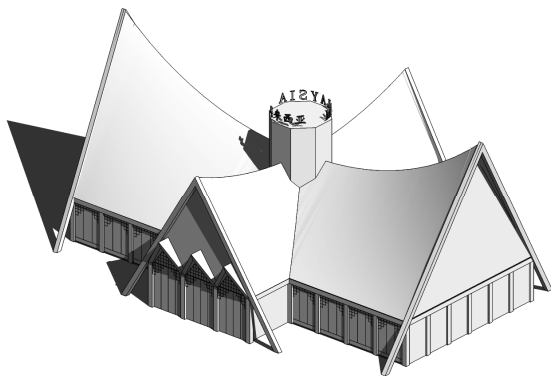
*slika 38. The Cathedral of Christ the Light, Oukland, Kalifornija, SAD, 2002. (SOM) / som.com/*

#### 14.1.2 Vitoperne pravoizvodne površi

Nerazvojne pravoizvodne površi ili vitoperne površi se ne mogu razviti u jednu ravan sečenjem po nekoj izvodnici. Kod ovih površi dve beskonačno bliske izvodnice se ne seku u konačnosti ili beskonačnosti (nisu međusobno paralelne) /47/. Vitoperne površi mogu imati jedan ili dva sistema izvodnica, pa se na osnovu toga dalje dele na **jednostruko** i **dvostruko izvodne**. Sve vitoperne pravoizvodne površi drugog stepena su dvostruko izvodne, a sve pravoizvodne površi stepena višeg od dva su jednostruko izvodne /62, 63/.

Na *slici 39* prikazan je primer vitopernih površi primenjenih u oblikovanju krova Malezijskog paviljona na izložbi EXPO 2010. Prikazane površi spadaju u grupu konoida, o kojima će biti reči u nastavku izlaganja.





slika 39. Malezijski paviljon, Šangaj, Kina, EXPO 2010. /blog.dwnnews.com/

#### 14.1.2.1 Vitoperne jednostruko izvodne površi

Vitoperne jednostruko izvodne površi imaju samo jedan sistem izvodnica i stepen veći od dva. Nastaju kao preseki triju kompleksa ili jednog kompleksa i jedne kongruencije. Temeljne krive ili krive vodilje  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  mogu biti i prave, ali ne sve tri, jer u tom slučaju nastaje dvostruko izvodna vitoperna površ. Jedna od tih vodilja može biti beskonačno daleka prava, koja se zadaje jednom ravni (**direktrisna ravan**). Sve izvodnice takve pravoizvodne površi paralelne su direktrisnoj ravni. Ukoliko je jedna od vodilja beskonačno daleka kriva, direktrisna površ je konus (**direktrisni konus**), čije su izvodnice spojnice jedne tačke u konačnosti sa tačkama beskonačno daleke krive vodilje. Izvodnice takve površi paralelne su izvodnicama direktrisnog konusa /47, 63/.

Beskonačno daleke tačke svih izvodnica jedne površi određuju beskonačno daleku krivu te površi. Dirne ravni u beskonačno dalekim tačkama površi su **asimptotske ravni**, a njihovi preseci sa beskonačno dalekom ravni tangente beskonačno daleke krive te površi. Ako se kroz neku tačku u konačnosti postave prave paralelne izvodnicama te površi nastaje konus koji sa tom površi ima beskonačno daleku krivu površi. To je **asimptotski konus** površi, čije su dirne ravni paralelne asimptotskim ravnima /47/.

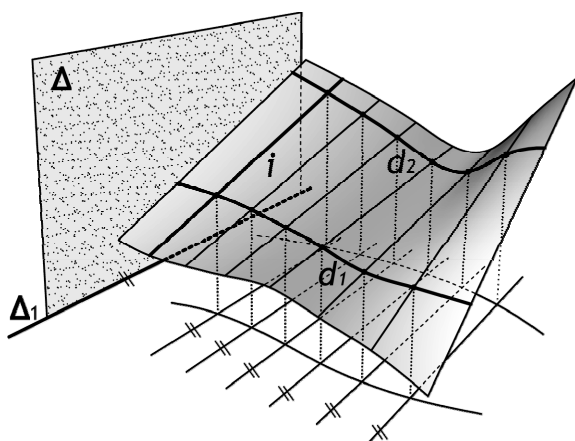
Zavisno od izbora tri vodilje, odnosno od toga da li su krive ili prave (s tim da ne mogu sve tri biti prave) i da li je neka od njih beskonačno daleka nastaju različiti tipovi jednostruko izvodnih vitopernih površi. U jednostruko izvodne vitoperne površi spadaju:

- **cilindroidi** (jednostruko izvodne vitoperne površi cilindričnog tipa),
- **konoidi** (jednostruko izvodne vitoperne površi koničnog tipa),
- **tetroidi** (jednostruko izvodne vitoperne površi tetroidnog tipa),
- **helikoidi** (jednostruko izvodne vitoperne površi zavojnog tipa),

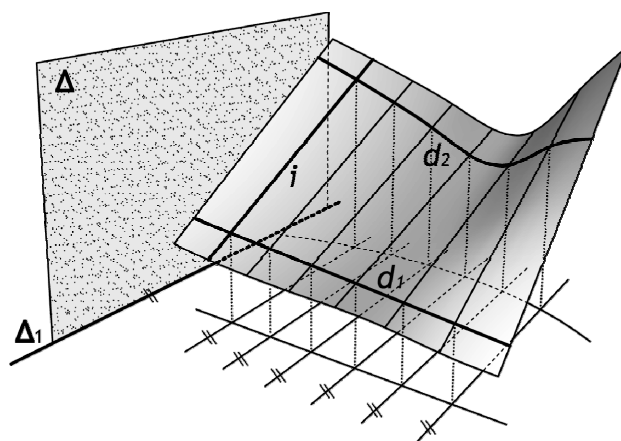
## Cilindroidi i konoidi

Cilindroid nastaje ako se prava izvodnica  $i$  kreće po dvema krivim vodiljama  $d_1$  i  $d_2$  u konačnosti i jednom beskonačno dalekom pravom vodiljom, koja se zadaje direktrisnom ravni  $\Delta$ . Sve izvodnice cilindroida paralelne su sa direktrisnom ravni  $\Delta$ . Izvodnice pri tom nisu i međusobno paralelne, a dve vodilje u konačnosti mogu biti bilo koje ravne ili prostorne krive, *slika 40* /2, 63/. Ukoliko su vodilje cilindroida  $d_1$  i  $d_2$  podudarne krive ili različite krive u nekom specijalnom položaju nastaje cilindrična površ. Ova površ se može smatrati posebnim slučajem cilindroida gde su krive vodilje  $d_1$  i  $d_2$  takve da su sve izvodnice paralelne direktrisnoj ravni, kao i međusobno.

Konoid nastaje ako se prava izvodnica  $i$  kreće po dvema vodiljama  $d_1$  i  $d_2$  u konačnosti (od kojih je jedna kriva, a druga prava) i jednom beskonačno dalekom pravom vodiljom, koja se zadaje direktrisnom ravni  $\Delta$ . Kao i kod cilindroida sve izvodnice su paralelne direktrisnoj ravni, *slika 41* /2, 63/.

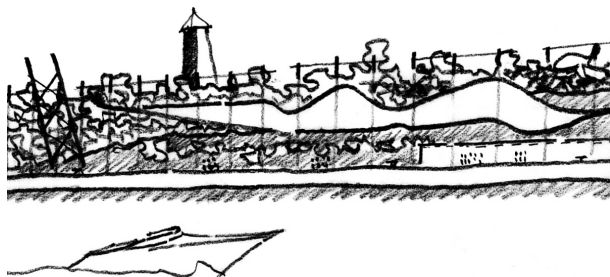


*slika 40. Cilindroid*



*slika 41. Konoid*

Na *slici 42* prikazan je lučki putnički terminal u Sidneju. O postojeću konstrukciju nekadašnjeg lučkog kрана ovešan je krov novog putničkog terminala u formi cilindroida.



*slika 42. Sydney Cruise Terminal, Sidnej, Australija, 2013.  
(Johnson Pilton Walker Architects) /archdaily.com/*

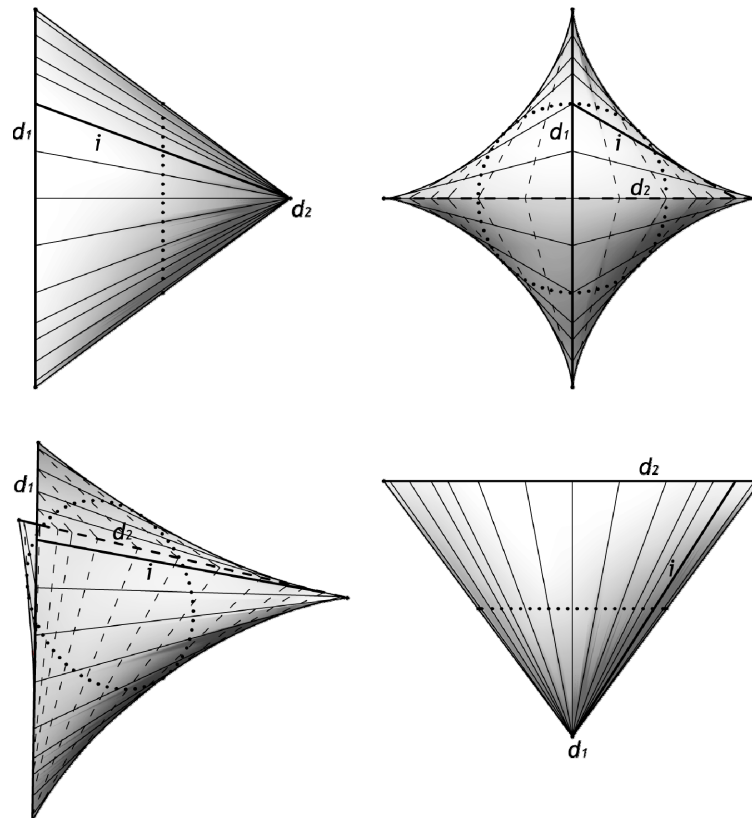
Na *slici 43*, prikazana je školska zgrada sagrađena za decu radnika na izgradnji katedrale Svete porodice u Barseloni. Krovna površina je izvedena u formi konoida, čija je jedna od vodilja sinusoida. Zidovi su u formi cilindroida, čije su vodilje takođe sinusoidne.



*slika 43. Školska zgrada uz katedralu Svete porodice, Barselona, Španija (Antonio Gaudi)*

### Tetroidi

Tetroid nastaje ako se prava izvodnica  $i$  kreće po dvema pravim vodiljama  $d_1$  i  $d_2$  u konačnosti i jednom beskonačno dalekom krivom vodiljom, koja se zadaje direktrisnim konusom  $K$ . Ova površ se dobija kretanjem prave  $i$  duž dve mimoilazne ortogonalne prave vodilje  $d_1$  i  $d_2$ , tako da je udaljenost tačkaka A (tačka preseka pravih  $i$  i  $d_1$ ) i B (tačka preseka pravih  $i$  i  $d_2$ ), konstantne dužine, *slika 44* /3, 30/.



*slika 44. Tetroid (ortogonalne projekcije i perspektiva)*



Na *slici 45* prikazan je primer primene isečaka jednostruko izvedenih vitopernih površi, za čiju je polaznu osnovu korišćen tetroid. Svaka od nadstrešnice tržnog centra u Kraljevu izvedena je od po četiri identična betonska segmenata (na slici obojeni žutom bojom).

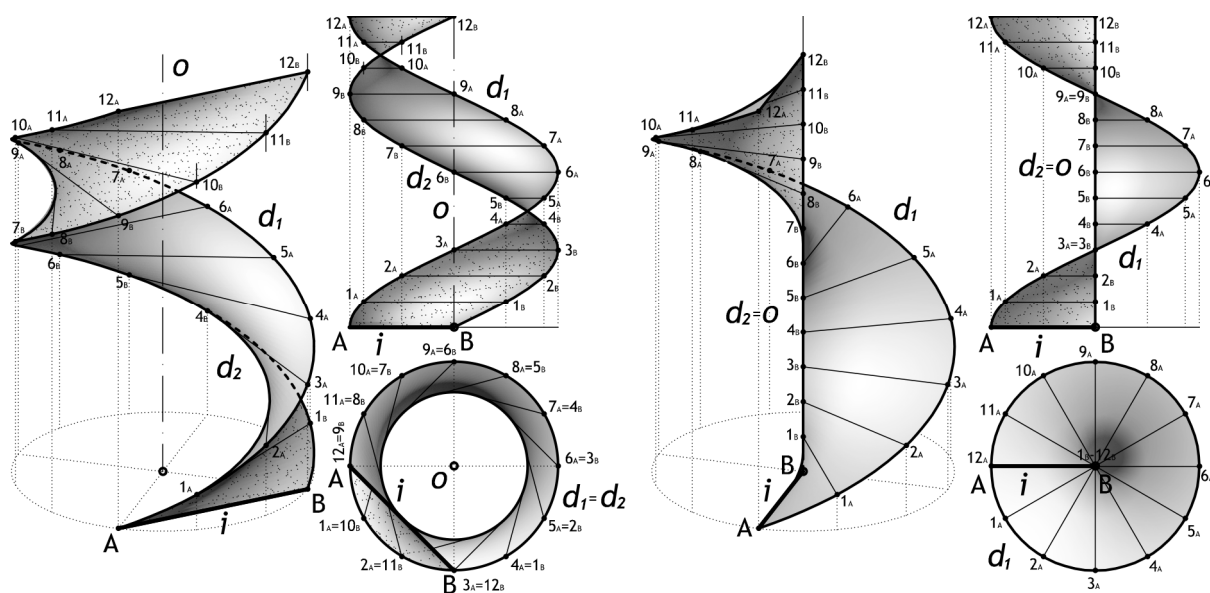


*slika 45. Nadstrešnice tržnog centra, Kraljevo, Srbija /V. Nikolić/*

## Helikoidi

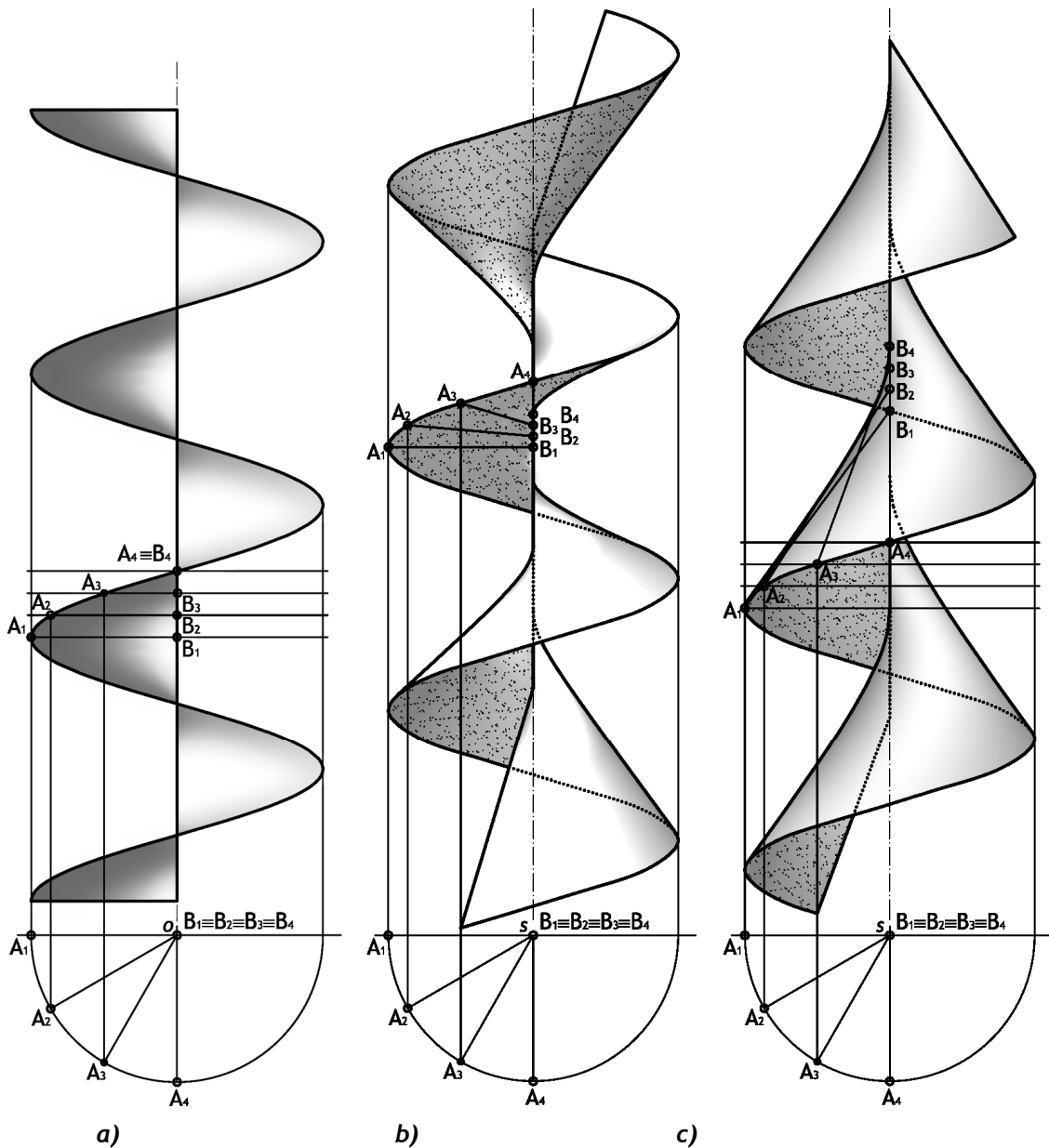
**Helikoid** je jednostruko izvodna vitoperna zavojna površ koja nastaje kretanjem prave izvodnice  $i$  po vodiljama koje mogu biti dve zavojnice  $d_1$  i  $d_2$  u konačnosti i jedna beskonačno daleka prava (*slika 46 levo*), ili zavojnica  $d_1$  i prava  $d_2$  u konačnosti i beskonačno daleka kriva (*slika 46 desno*) /30/. Kod ovih površi dve uzastopne izvodnice su mimoilazne pa se svrstavaju u nerazvojne pravoizvodne jednostruko izvodne površi /2/. Helikoid može biti:

- **otvoreni**, ako izvodnica ne seče osu površi, *slika 46 levo* i
- **zatvoreni**, ako izvodnica seče osu površi, *slika 46 desno*.



*slika 46. Otvoreni i zatvoreni helikoid (ort. projekcija i aksonometrija)*

Ukoliko je prava izvodnica upravna na osu, helikoid je **normalan**, *slika 47a*, a u suprotnom nastaje **kosi helikoid**, *slika 47c* /2,19/. U slučaju da izvodnica seče osu zavojnice, kao kod zatvorenog helikoida, osa zavojnice je jedna od vodilja izvedene površi /30/. Prilikom izvođenja helikoida kretanje tačke **A** po izvodnici  $d_1$  je proporcionalno kretanju tačke **B** po izvodnici  $d_2$ . Ukoliko se taj proporcijski odnos menja, mogu nastati zavojne vitoperne površi različitog oblika, kao na primer površ prikazana na *slici 47b*. Dok se tačka **A** pomeri za visinu jednog hoda cilindrične zavojnice (vodilje  $d_1$ ), tačka **B** se pomeri za polovinu istog hoda duž ose cilindrične zavojnice (vodilje  $d_2$ ). Ovakav helikoid ima samo jednu izvodnicu  $A_1B_1$  koja je upravna na osu zavojnice, dok sve ostale nisu. U toj izvodnici menja se znak ugla koji izvodnice zaklapaju sa osom. Promenom pomenutog proporcijskog odnosa moguće je izvesti beskonačno mnogo različitih zavojnih vitopernih površi.



*slika 47. Helikoidi (ortogonalne projekcije)*



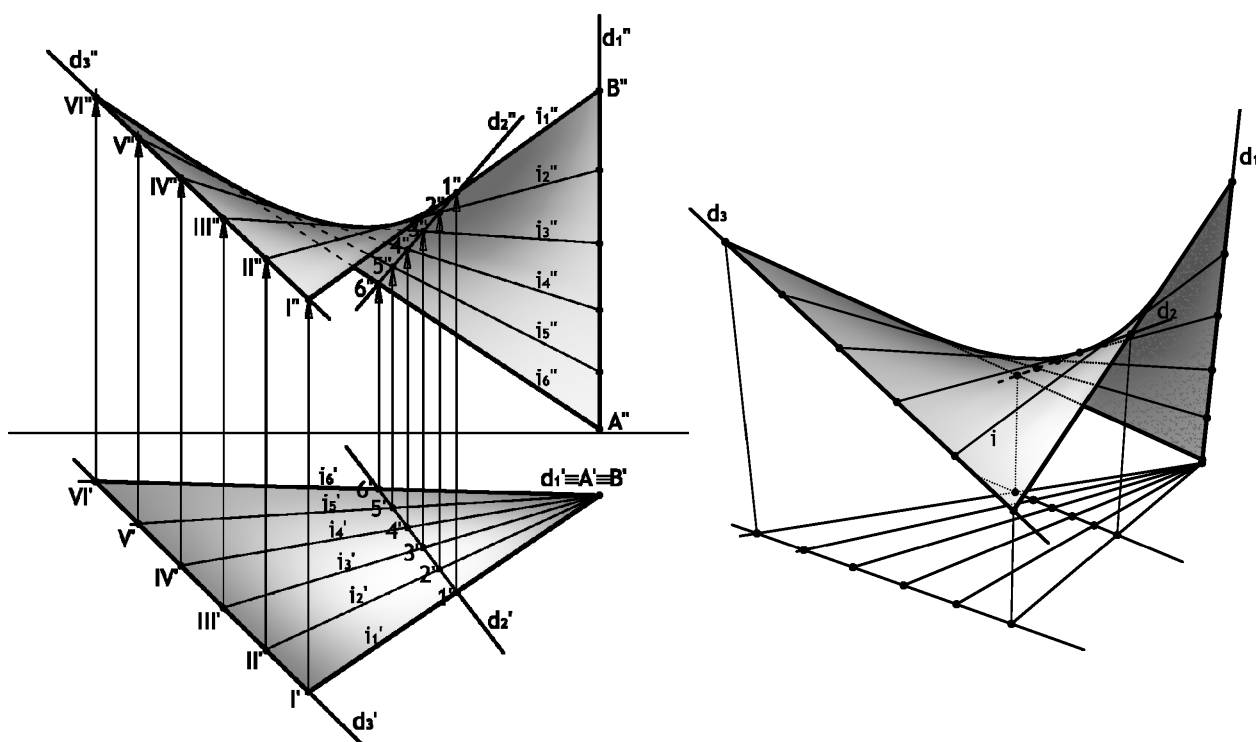
### 14.1.2.2 Vitoperne dvostruko izvodne površi

Sve vitoperne dvostruko izvodne površi su drugog stepena i imaju dva sistema izvodnica, pri čemu svaka izvodnica jednog sistema seče sve izvodnice drugog sistema. Pravoizvodne površi drugog stepena nastaju kao proizvod projektivnih temeljnih tvorevina 1. vrste u prostoru, odnosno presekom triju linearnih kompleksa čije su vodilje prave.

U vitoperne dvostruko izvodne površi spadaju: **jednograni eliptični hiperboloidi**, **jednograni obrtni hiperboloid** i **hiperbolički paraboloidi**.

#### Jednograni eliptični hiperboloidi

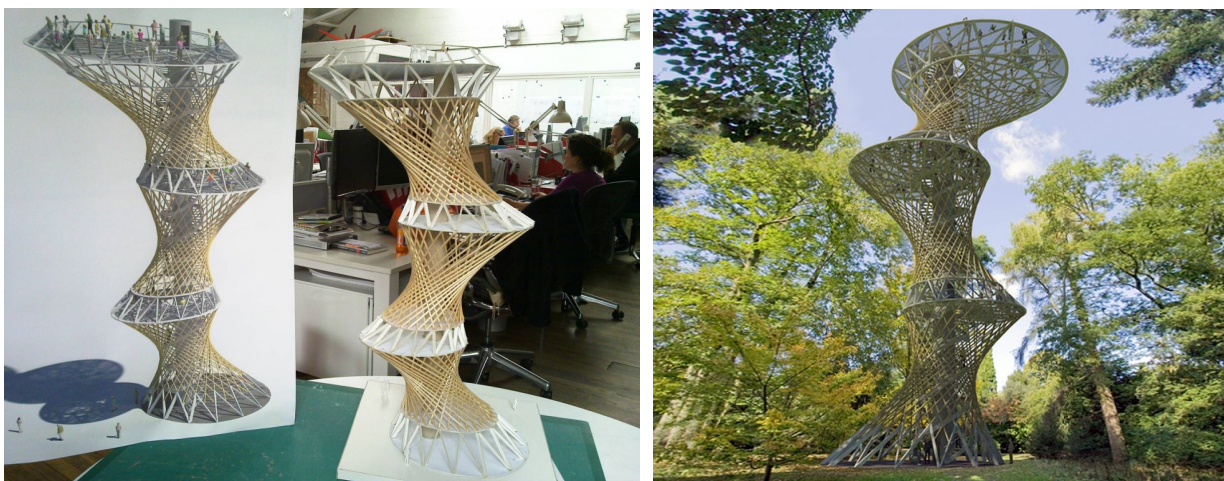
**Jednograni eliptični hiperboloid** nastaje ako se prava izvodnica  $i$  kreće po trima mimoilaznim pravama vodiljama  $d_1$ ,  $d_2$  i  $d_3$  u konačnosti, **slika 48**. Prikazane izvodnice čine jedan sistem izvodnica. Ukoliko bilo koje tri izvodnice ovog sistema proglasimo vodiljama, onda će njihove transversale činiti drugi sistem izvodnica površi /2, 47/. **Jednograni eliptični hiperboloid** nastaje i ako se kružnice jednogranog obrtnog hiperboloida, paralele površi, zamene elipsama. Elipsa koju opisuju temena hiperbola, meridijana površi, ima najkraće ose i naziva se grlena ili strikciona elipsa /63/.



slika 48. Jednograni eliptički hiperboloid

Na **slici 49** prikazan je *Hyper Tower*, izgrađen od tri jednograna eliptična hiperboloida. Jednograni eliptični hiperboloidi su presečeni i spojeni po kružnim

presecima, u horizontalnim ravnima. Ravni preseki upravni na osu površi su eliptični.

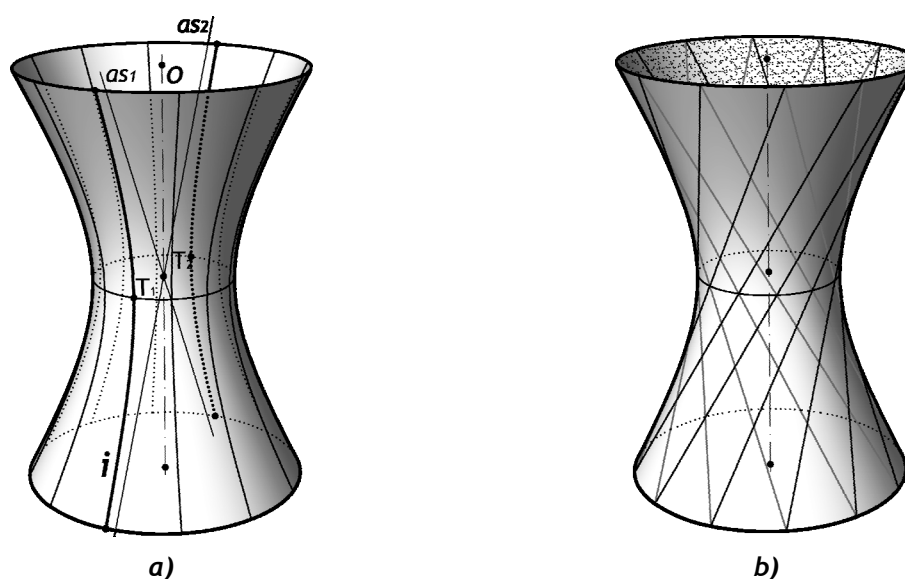


slika 49. Hyper Tower, Westonbirt, Velika Britanija, 2009. (Marks Barfield) /marksbarfield.com/

### Jednograni obrtni hiperboloidi

Jednograni obrtni hiperboloid je specijalni slučaj jednogranog eliptičkog hiperboloida. Može da nastane na dva načina /63/:

- Rotacijom hiperbole oko svoje imaginarne ose, **slika 50a**. Svaka tačka hiperbole opisuje kružnicu koja predstavlja paralelu površi. Kružnicu najmanjeg prečnika opisuje teme hiperbole i naziva se grlena kružnica ili strikciona paralela.
- Rotacijom jedne prave oko neke druge mimoilazne prave nastaje jednograni obrtni hiperboloid, **slika 50b**. U ovom slučaju svaki položaj prave koja rotira čini jedan od dva sistema izvodnica površi, a prava oko koje se vrši rotacija je osa površi.



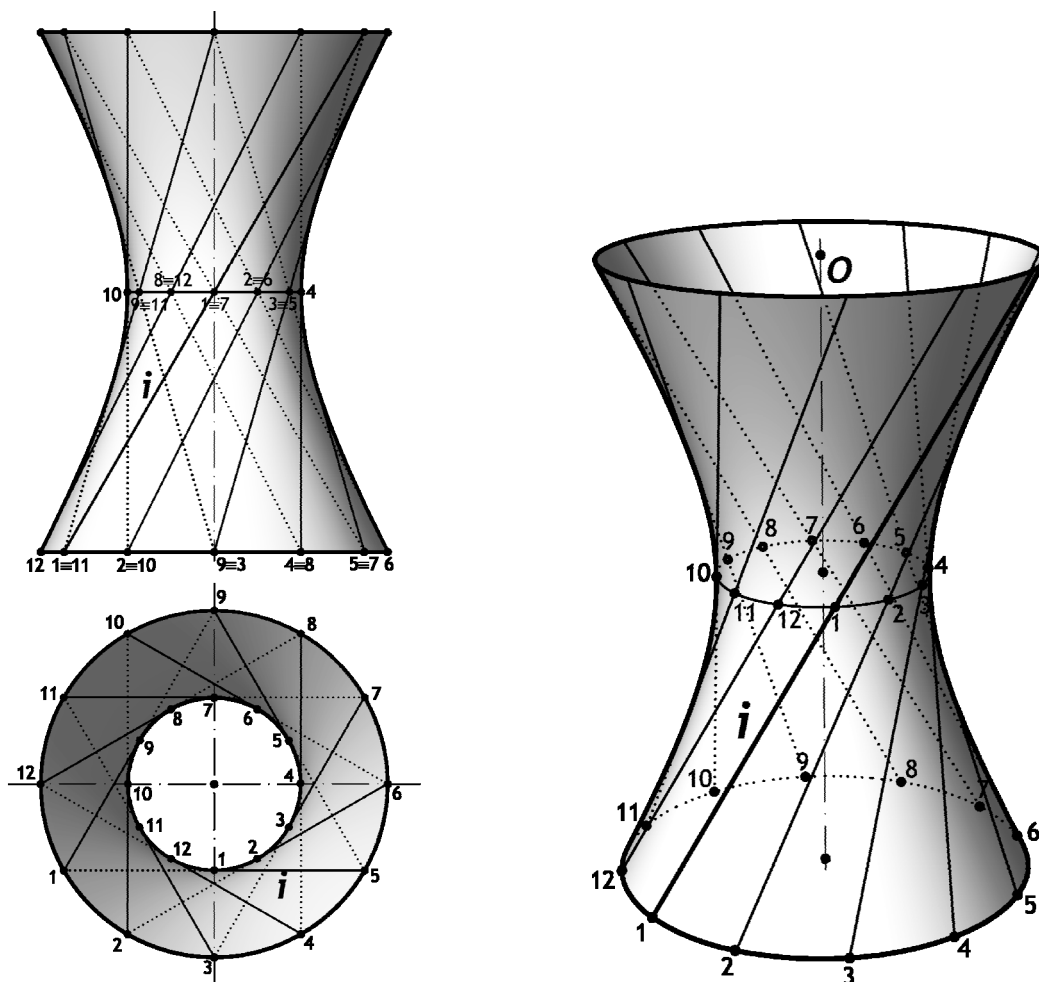
slika 50. Jednograni obrtni hiperboloid

Na *slici 51*, prikazan je objekat biblioteke u Holandiji čiji je jedan deo izveden u formi ostakljenog jednogranog obrtnog hiperboloida. Na fasadi je podela strukturalne fasade izvedena po oba sistema pravih izvodnica, kao i po hiperbolama.



*slika 51. Public library and community centre Gen Coel Heerlerheide, Herlen, Holandija, 2008. (Hans Erren) /concerto.eu/*

Na *slici 52* prikazan je jednograni obrtni hiperboloid i jedan od sistema pravih izvodnica, u ortogonalnim projekcijama i perspektivi. Prikazano je 12 položaja izvodnice na jednakom rastojanju.



*slika 52. Jednograni obrtni hiperboloid*



Na *slici 53*, prikazani su armirano-betonski stubovi mosta na Bulevaru Medijana u Nišu, čiji su kapiteli u formi jednogranog obrtnog hiperboloida, a telo u formi konusa.

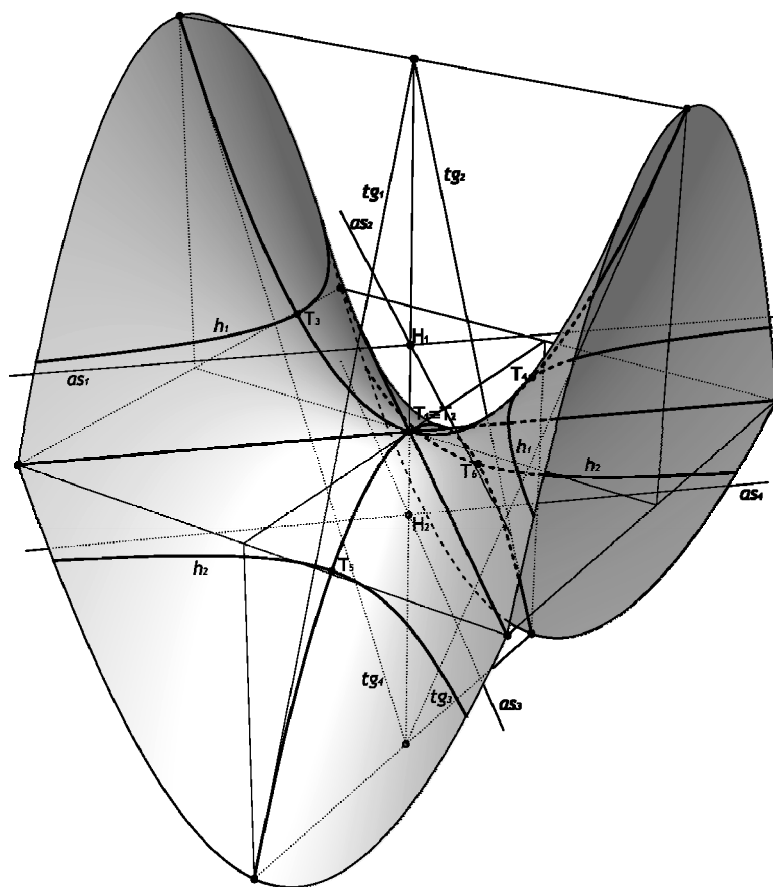


*slika 53. Stubovi mosta na Bulevaru Medijana, Niš, Srbija, 2006. /V. Nikolić/*

## Hiperbolički paraboloidi

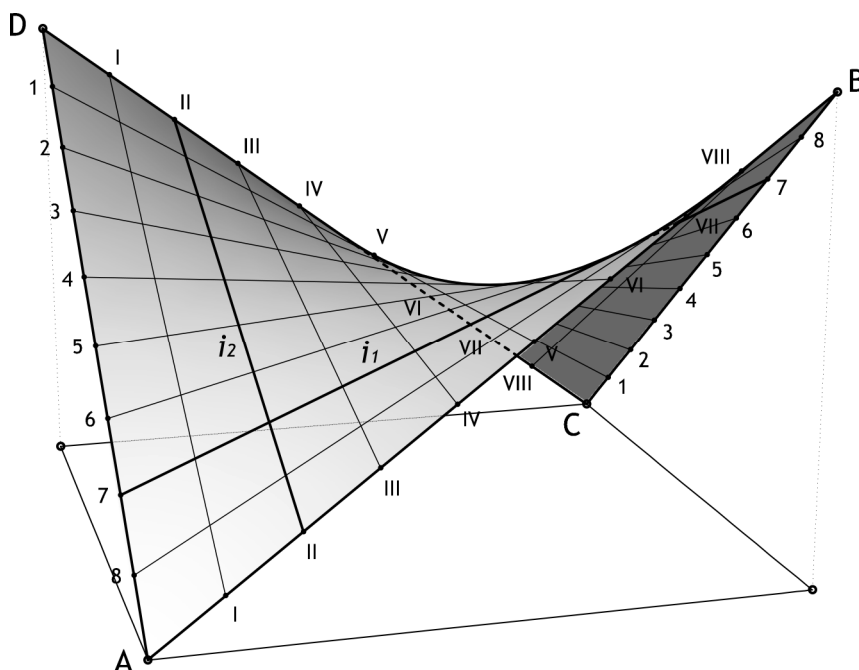
Hiperbolički paraboloid je vitoperna dvostruko izvodna površ koja može nastati na dva načina:

- Kretanjem parabole po paraboli, pri čemu te dve parabole leže u međusobno upravnim ravnima. Na *slici 54* prikazan je deo hiperboličkog paraboloida sa parabolama koje ga opisuju /63/.



*slika 54. Hiperbolički paraboloid*

- Kretanjem prave izvodnice po trima pravim vodiljama, od kojih su dve mimoilazne u konačnosti i jedna beskonačno daleka prava, **slika 55**. Ove izvodnice čine jedan od dva sistema izvodnica i paralelne su direktrisnoj ravni. Drugi sistem izvodnica može se dobiti ako se za vodilje uzmu bilo koje dve izvodnice prvog sistema, a direktrisna ravan paralelna tim vodiljama. Sve izvodnice površi prvog sistema, seku sve izvodnice drugog sistema i obrnuto /47/.



*slika 55. Hiperbolički paraboloid*

Hiperbolički paraboloid ima široku primenu, kako u arhitekturi 20. veka, tako i u savremenoj arhitekturi. Primenjuju se različiti segmenti površi koji formiraju atraktivne, kompleksne i racionalne prostorne strukture. Na **slici 56**, prikazana je crkva u Njudžersiji sa krovom sastavljenim od hiperboličkih paraboloida.



*slika 56. Crkva Svetog Alojsija, Nju Džersi, SAD, 2009. (Erdy McHenry Architecture) / Alan Schindler; www.archdaily.com/*

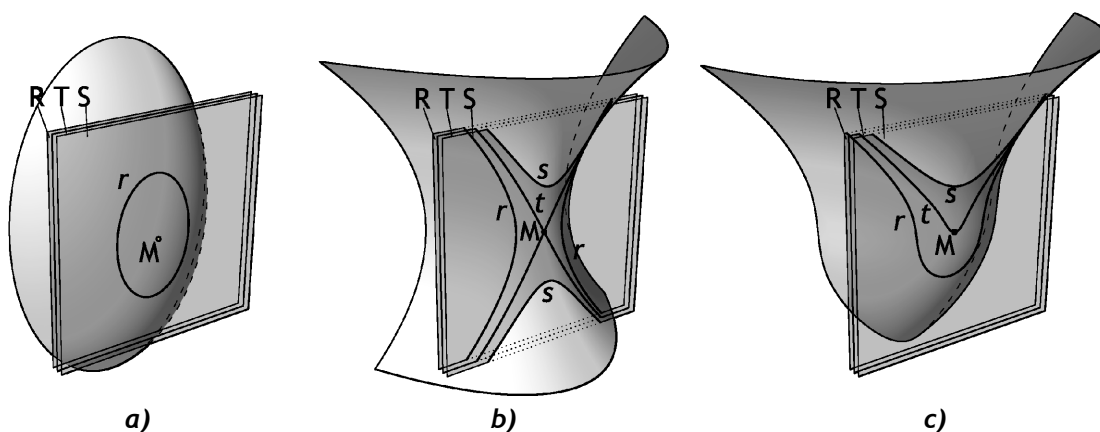
## 14.2 DVOSTRUKO ZAKRIVLJENE POVRŠI

U najopštijem slučaju dvostruko zakrivljene ili oble površi nastaju kretanjem izvodnice, krive linije, po vodilji, koja je takođe kriva linija. Sve tačke dvostruko zakrivljenih površi mogu se podeliti u nekoliko vrsta: kružne, eliptične, hiperbolične i parabolične tačke površi. Opšte dvostruko zakrivljene površi 2. stepena imaju dva sistema paralelnih (uporednih) ravni koje ih seku po kružnicama, dok obrtne ili rotacione imaju samo jedan sistem takvih ravni. Dvostruko zakrivljene površi mogu se podeliti na opšte, obrtne i klizne /30, 47/.

### Vrste tačaka površi

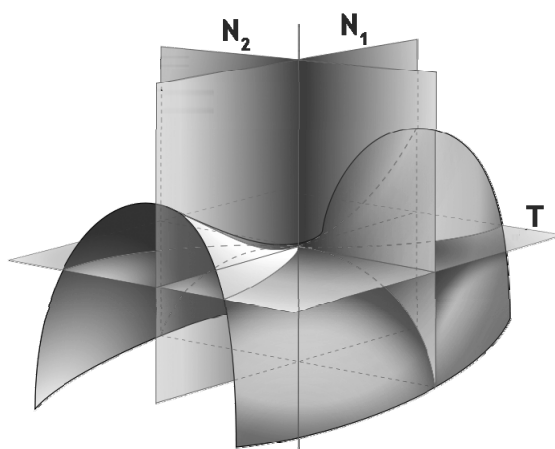
Sve tačke površi mogu se podeliti u nekoliko vrsta. Postoje kružne, eliptične, parabolične i hiperbolične tačke površi. Neke površi mogu sadržati tačke svih navedenih vrsta, a postoje i površi čije tačke pripadaju samo jednoj vrsti. Vrstu tačaka određuje beskonačno bliska okolina površi. Prema njenom položaju u odnosu na dirnu ravan te površi, u posmatranoj tački i u odnosu na dve njoj paralelne ravni (od kojih je jedna iznad, a druga ispod na beskonačno malom rastojanju), određuje se vrsta tačke /64/.

Na slici 57a, tangenta ravan  $T$  dodiruje površ u tački  $M$  i ima sa njom zajedničku samo tu dirnu tačku. Ravni  $R$  i  $S$  nalaze se ispod i iznad dirne ravni  $T$  na beskonačno malom rastojanju. Ravan  $S$  nema u realnom prostoru zajedničkih tačaka sa površi. Ravan  $R$  seče površ po ovalnoj zatvorenoj krivoj  $r$ . U ovom slučaju  $M$  je eliptična tačka površi. U slučaju da je ovalni presek površi kružnica, kažemo da je tačka kružna, što predstavlja specijalni slučaj eliptične tačke. Sve tačke lopte su kružne, troosni elipsoid ima četiri kružne tačke i sve ostale eliptične, dok obrtni elipsoid ima dve kružne tačke i sve ostale eliptične itd. Na slici 57b, tangenta ravan  $T$  dodiruje površ u tački  $M$  i seče je po krivoj koja u tački  $M$  ima dvostruku tačku. Paralelne ravni  $R$  i  $S$  seku površ po dvogranim krivama  $r$  i  $s$ . U ovom slučaju  $M$  je hiperbolična tačka površi. Tangente presečne krive u tački  $M$  su glavne tangente površi u toj tački. Na slici 57c, tangenta ravan u tački  $M$  seče površ po krivoj koja u tački  $M$  ima jednu povratnu tangentu. Paralelne ravni  $R$  i  $S$  seku površ po paraboličnim krivama, pa je tačka  $M$  parabolična /64/.



slika 57. Vrste tačaka površi /64/

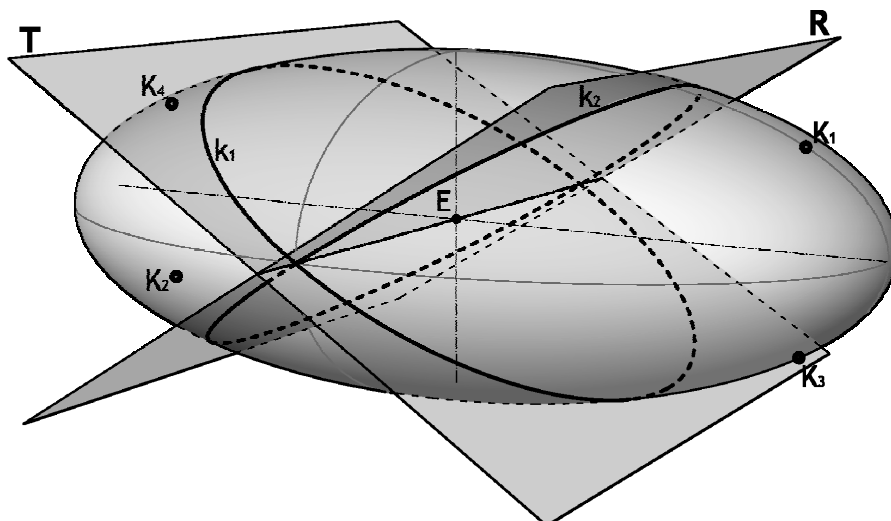
Vrste tačkaka površi mogu se definisati i na drugi način. Na *slici 58* je data površ koja u tački  $M$  ima dirnu ravan  $T$  i normalu  $n$ . Kroz normalu su postavljene još dve ravni u pravcima glavnih zakrivljenosti površi. Zavisno od toga kakav je odnos između ovih preseka imamo **ravanske**, **eliptične**, **parabolične** i **hiperbolične tačke površi**. Ako je presek površi ovakvim ravnima po dvema pravama, odnosno zakrivljenost je 0, tačka je **ravanska**. Ukoliko je smer obe presečne krive isti, tačka je **eliptična**, a površ je u neposrednoj blizini te tačke konveksna. **Kružna tačka** je ukoliko su obe presečne krive iste zakrivljenosti. Ako je jedna od glavnih zakrivljenosti nula, tačka je **parabolična**. Sve parabolične tačke neke površi leže na linijama koje razdvajaju područja eliptičnih i hiperboličnih tačkaka. Ukoliko je smer presečnih krivih različit, tačka je **hiperbolična**, a površ je u neposrednoj blizini tačke sedlasta.



*slika 58. Vrste tačkaka površi /en.wikipedia.org/*

#### 14.2.1 Opšte dvostruko zakrivljene površi

Opšte dvostruko zakrivljene površi 2. stepena mogu se dobiti kao proizvod temeljnih tvorevina 2. vrste, odnosno kao proizvod korelativnih svežnjeva u prostoru. Svakoj pravoj jednog svežnja pridružena je ravan u drugom svežnju i obrnuto /43/. Preseci tako pridruženih parova određuju  $\infty^2$  tačkaka površi 2. stepena, kada se prave i pridružene ravni u datim svežnjevima pomeraju kontinualno. Opšte dvostruko zakrivljene površi 2. stepena imaju dva sistema paralelnih ravni koje ih seku po kružnicama. Kao predstavnik dvostruko zakrivljenih površi, na *slici 59* je prikazan troosni elipsoid. Ravni  $T$  i  $R$  koje prolaze kroz središte elipsoida  $E$ , seku ga po kružnicama  $k_1$  i  $k_2$ . Svi preseci paralelni ovim ravnima su kružnice različitog poluprečnika. Ravni iz ova dva sistema dodiruju površ u četiri kružne tačke  $K_1, K_2, K_3$  i  $K_4$ . Zavisno od vrste površi, neke od kružnih tačkaka mogu biti u konačnosti, a neke beskonačno daleke, kao na primer kod paraboloida /46/.



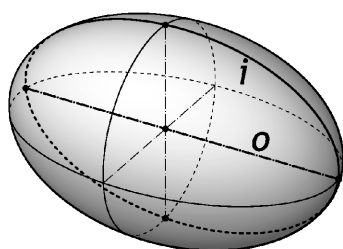
slika 59. Opšta dvostruko zakrivljena površ (perspektiva)

Opšte dvostruko zakrivljene površi 2. stepena mogu se podeliti prema tome po kakvoj konici ih seče beskonačno daleka ravan prostora, na: **elipsoide**, sferu, dvoigrane hiperboloide i paraboloide /27, 47/.

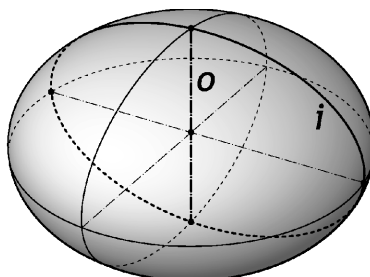
## Elipsoidi

**Elipsoidi** spadaju u opšte dvostruko zakrivljene površi 2. stepena i seku beskonačno daleku ravan po imaginarnim konikama, odnosno nemaju nijednu realnu zajedničku tačku sa beskonačno dalekom ravni. Ta imaginarna konika sa apsolutnom konikom prostora ima jedan realni autopolarni trougao i četiri konjugovano imaginarna secičta koja leže na dve realne prave. Elipsoidi u najopštijem slučaju imaju tri ose, dva sistema paralelnih ravni koje ih seku po kružnicama i četiri kružne tačke. Sve ostale tačke elipsoida su eliptične /14, 47/.

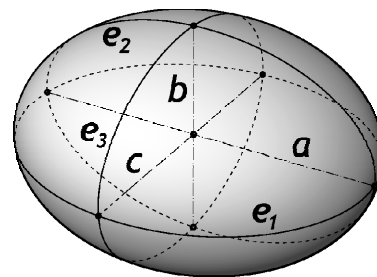
Elipsoidi se mogu podeliti na **troosne** i **obrtne**, dok obrtni mogu biti **izduženi** i **spljošteni**, a nazivaju se i **sferoidima**, *slike 60 i 61*.



a)



b)



slika 61. Troosni elipsoid

slika 60. Izduženi i spljošteni obrtni elipsoid (sferoidi)

Obrtni (rotacioni) elipsoid može nastati rotacijom elipse, izvodnice, oko jedne svoje ose. Ako se elipsa okreće oko svoje velike ose nastaje **izduženi elipsoid** (*slika 60a*), a ako se okreće oko svoje male ose nastaje **spljošteni elipsoid** (*slika*



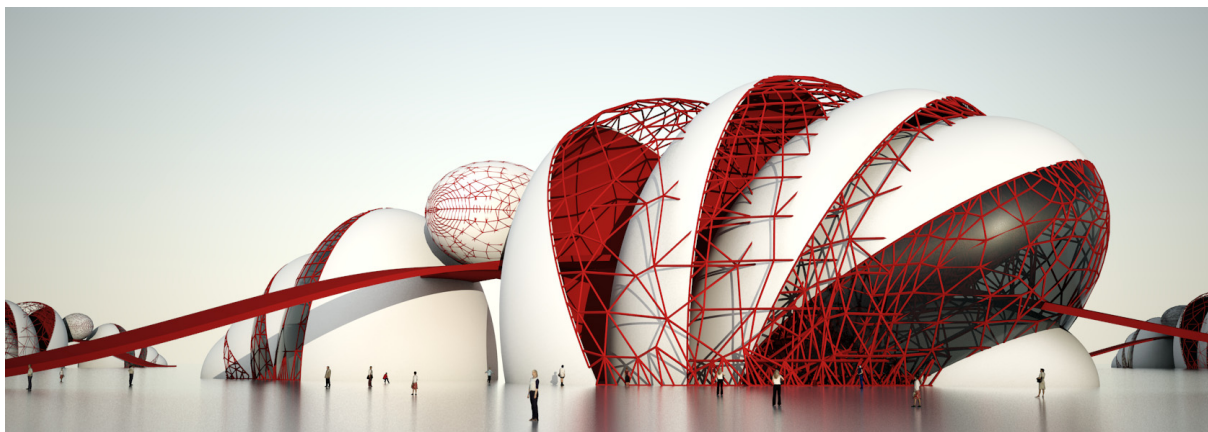
**60b).** Imaju jednu glavnu osu i beskonačno mnogo parova drugih dveju osa. Kod ovih elipsoida preseki upravni na osu obrtanja  $o$ , **glavnu osu**, su kružnice. Imaju samo dve kružne tačke koje se nalaze na glavnoj osi /47/.

Na **slici 61** prikazan je **troosni elipsoid** sa tri ose različite dužine  $a$ ,  $b$  i  $c$ . Svaki presek upravan na bilo koju od osa je elipsa. Elipse  $e_1$ ,  $e_2$  i  $e_3$  su preseki upravno na ose, a kroz centar elipsoida. Troosni elipsoid nastaje okretanjem elipse, koja se pri tom postojano menja po nekom pravilu, oko neke svoje ose /47/.



*slika 62. Oriental Art Center, Šangaj, Kina, 2002. (Paul Andreu Architects) /e-architect.co.uk/*

Na **slici 62** prikazan je *Oriental Art Center* u Kini koji se sastoji od pet koncertnih dvorana različitih kapaciteta, smeštenih u delove troosnih elipsoidnih formi. Prostorna kompozicija, u osnovi, podseća na leptira raširenih krila. Na **slici 63** prikazan je studentski rad, prostorna struktura zasnovana na elipsoidima. Struktura je sastavljena od segmenata troosnih elipsoida i sferoida.

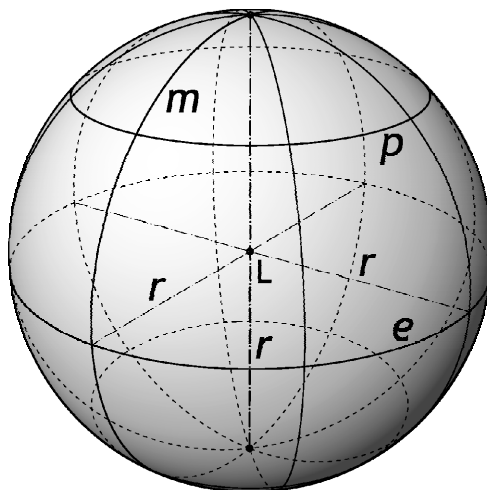


*slika 63. Studentski rad, 2010. (Tamara Manojlović)*

## **Lopta (sfera)**

**Lopta** je geometrijsko mesto tačaka u prostoru koje imaju podjednako rastojanje  $r$  od jedne stalne tačke  $L$ . Stalna tačka  $L$  je **središte lopte**, a rastojanje tačaka površi od te tačke je **poluprečnik lopte**  $r$ . Presek lopte sa beskonačno dalekom ravni je po apsolutnoj konici prostora. Sve tačke lopte su kružne, a svi ravni preseki su kružnice.

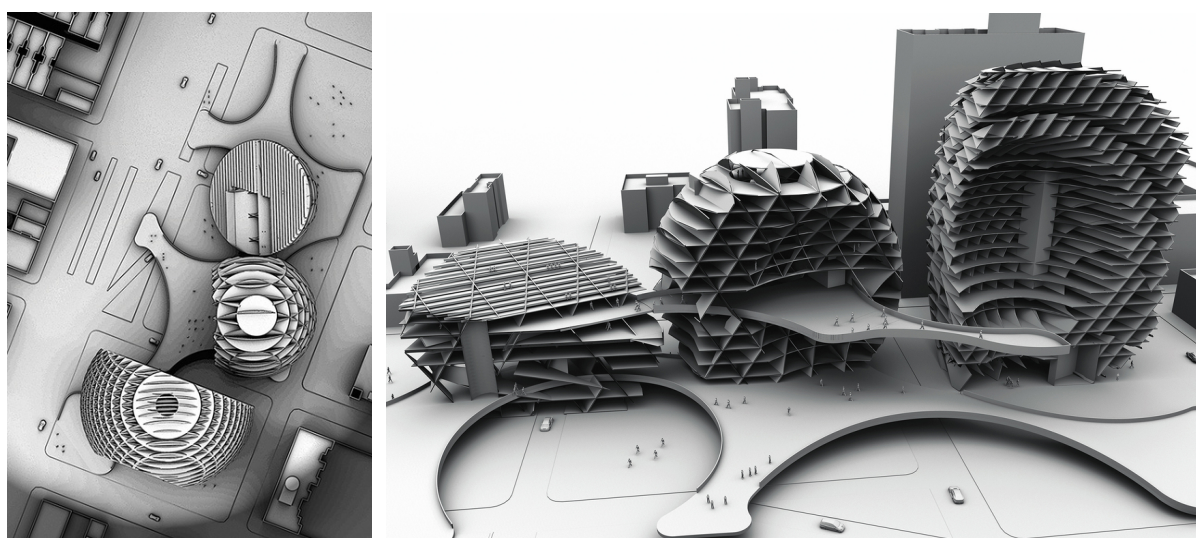
Loptu možemo svrstati u specijalni slučaj elipsoida sa svim osama iste dužine. Nastaje rotacijom kružnice oko jednog svog prečnika. Sve kružnice lopte koje sadrže taj prečnik su **meridijani (m)**, a kružnice upravne na njega **paralele (p)**. Paralela koja prolazi kroz središte lopte je **ekvator lopte (e)**, *slika 64 /14, 47/*.



*slika 64. Lopta (sfera)*

Velika kružnica lopte je kružnica koja se dobija ravnim presekom lopte kroz njeno središte (centar). Poluprečnik velike kružnice lopte jednak je poluprečniku lopte na kojoj ona leži. Meridijani i ekvator lopte su velike kružnice lopte. Kroz svake dve tačke lopte koje nisu krajevi njenog prečnika prolazi samo jedna velika kružnica lopte. Bilo koje dve velike kružnice lopte seku se u dvema dijametralno suprotnim tačkama lopte /14, 47/.

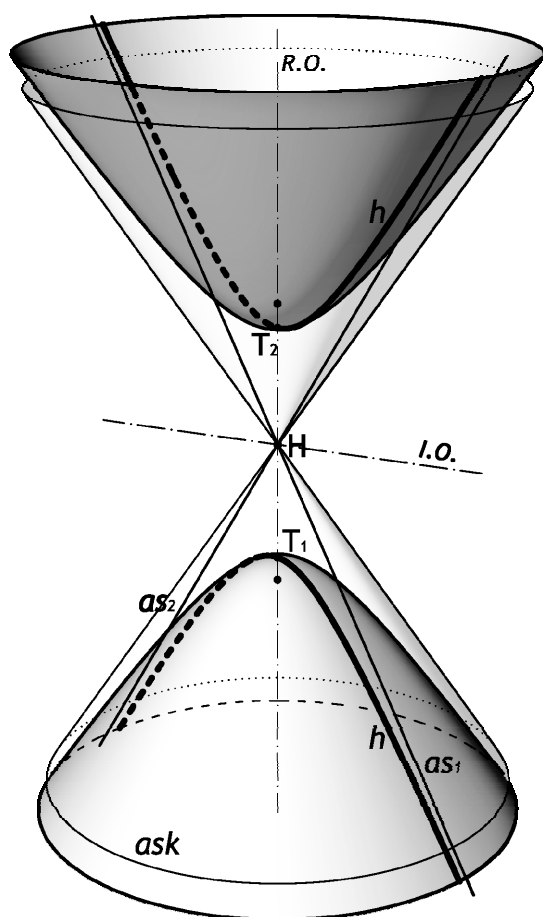
Na *slici 65* prikazan je studentski rad *Habitat Manhattan / A Housing for 1000 artists*. Osnovnu formu tri objekta čine isečci lopte, a noseću strukturu sistemi uporednih ravni. Na *slici 65*, levo, prikazana je osnova kompleksa.



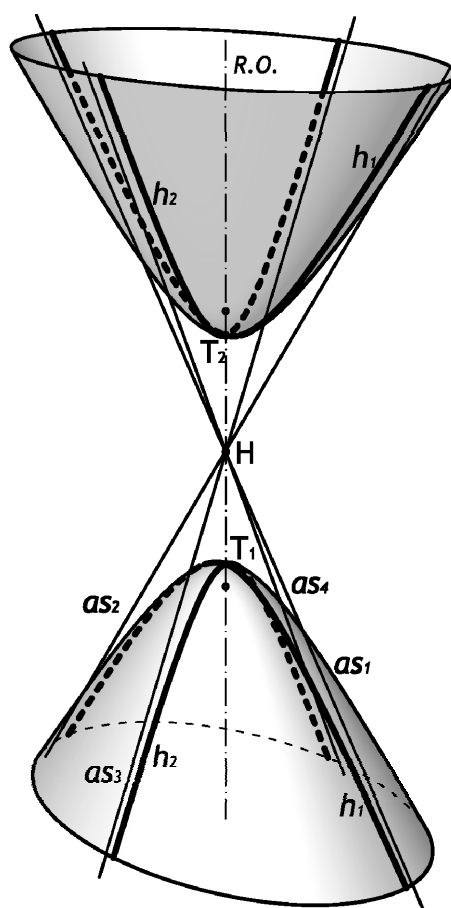
*slika 65. A Housing for 1000 artists, studentski rad, Njujork, SAD, 2013. (Ehab Ghali) /architect.com/*

## Dvograni hiperboloidi

Dvograni hiperboloid ima presek sa beskonačno dalekom ravni prostora po realnoj konici. Ta konika sa apsolutnom konikom prostora ima jedan realni autopolarni trougao i četiri konjugovano imaginarna secičta koja leže na dve realne prave. U najopštijem slučaju **dvograni eliptični hiperboloid (slika 67)** ima tri ose, dva snopa uporednih ravni koje ga seku po kružnicama i četiri **kružne tačke**. Ostale tačke su **eliptične**. Ukoliko se beskonačno daleka konika i apsolutna konika prostora dodiruju **dvograni hiperboloid je obrtni (slika 66)**. Pramenovi uporednih ravni se stapaju u jedan pramen uporednih ravni i seku površ po kružnicama upravnim na realnu osu. Po dve kružne tačke se takođe poklapaju, tako da na obrtnom dvogranom hiperboloidu imamo dve kružne tačke, koje su poklopljene sa njegovim temenima. Ostale tačke su eliptične. Središte hiperboloida **H** i beskonačno daleka konika određuju **asimptotski konus /47/**.



slika 66. Dvograni obrtni hiperboloid (perspektiva)

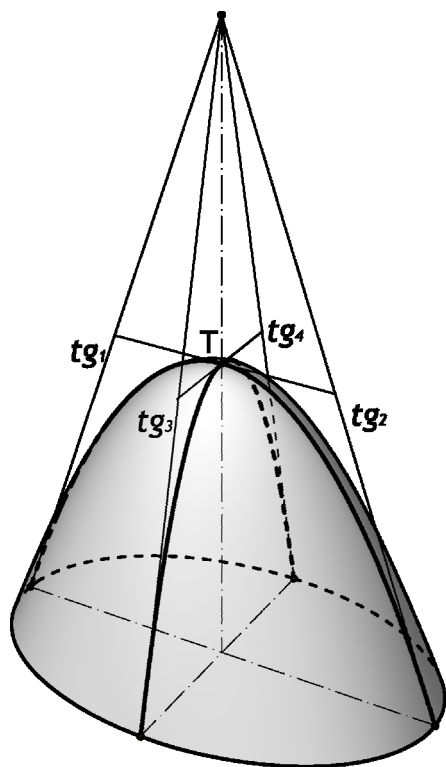


slika 67. Dvograni eliptični hiperboloid (perspektiva)

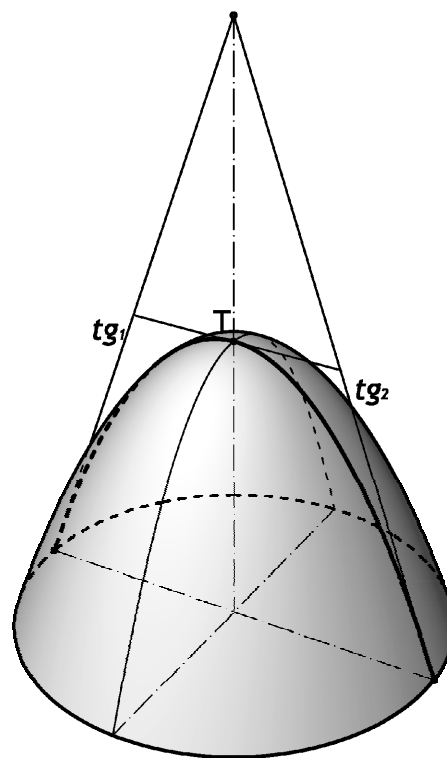
## Paraboloidi

Paraboloidi spadaju u opšte dvostruko zakrivljene površi 2. stepena i seku beskonačno daleku ravan po konjugovano imaginarnim pravama, odnosno beskonačno daleka konika paraboloida raspada se u dve konjugovano imaginarne prave koje prolaze jednom realnom beskonačno dalekom tačkom. Ta tačka je središte površi i kroz nju prolazi osa paraboloida. Pošto je središte paraboloida beskonačno daleka tačka, ostale dve ose su beskonačno daleke prave. Paraboloidi se mogu podeliti na **eliptične** i **obrtne** /25, 47/.

U opštem slučaju paraboloidi imaju dva sistema paralelnih ravni koje ga seku po kružnicama, četiri **kružne tačke** u kojima ravni iz tih sistema tangiraju površ. Dve **kružne tačke** su realne, a dve beskonačno daleke. Sve ostale tačke paraboloida su **eliptične**. Na *slici 68* prikazan je eliptični paraboloid, koji nastaje rotacijom parabole, koja se postojano menja, oko svoje ose /47/.



*slika 68. Eliptični paraboloid (perspektiva)*

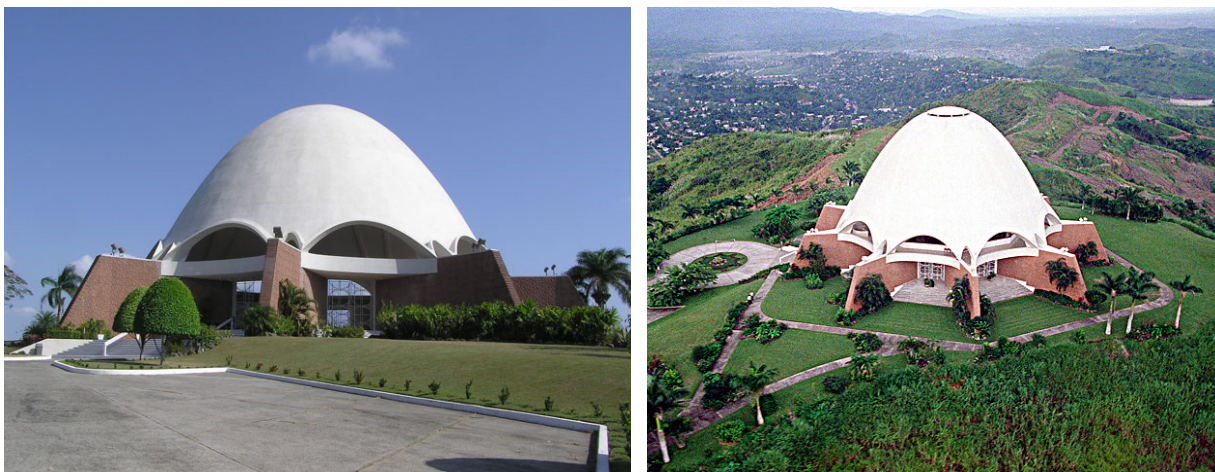


*slika 69. Obrtni paraboloid (perspektiva)*

Ukoliko se secišta konjugovano imaginarnih izvodnica poklapa sa središtem apsolutne konike prostora, paraboloid je **obrtni**, *slika 69*. Ovakav paraboloid ima jedan sistem paralelnih ravni koje ga seku po kružnicama i dve kružne tačke od kojih je jedna beskonačno daleka. Teme paraboloida T je ujedno jedna od dve kružne tačke površi. Obrtni paraboloida nastaje rotacijom parabole oko svoje ose /30, 47/.



Na *slici 70* prikazan je hram *Baha'i House of Worship* u Panami čija je kupola izvedena u formi kružnog (obrotnog) paraboloida. U osnovi paraboloid je presečen parabolničnim oblicama i oslonjen u osam tačaka na radijalno postavljene zidove.



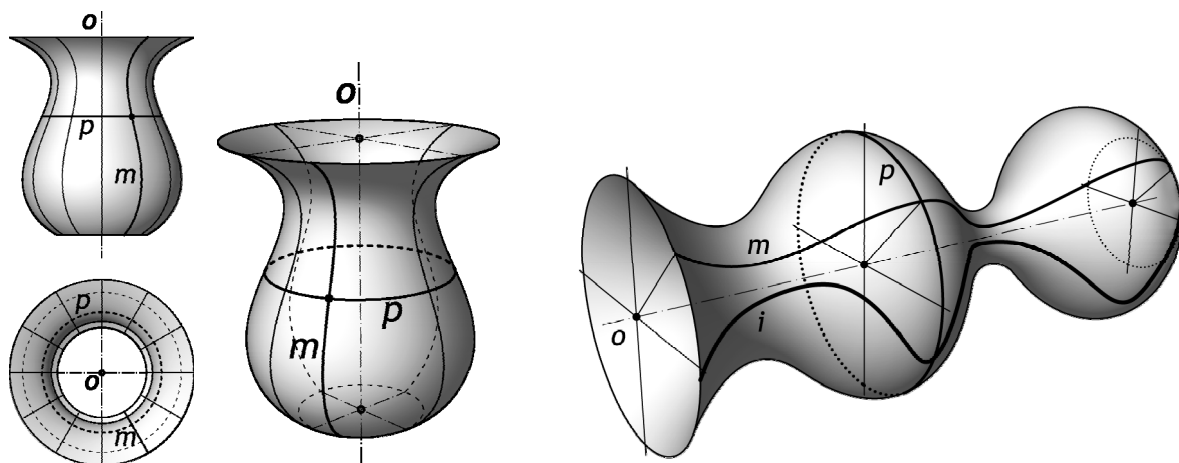
*slika 70. Baha'i House of Worship, Panama City, Panama, 1972. (Peter Tillotson) /bahaikipedia.org/*

#### 14.2.2 Obrtne dvostruko zakrivljene površi

Obrtne površi dvostruke zakrivljenosti nastaju rotacijom ravne ili prostorne krive linije oko neke prave. Ta kriva linija je izvodnica površi  $i$ , a prava oko koje izvodnica rotira, osa površi  $o$ . Svaka tačka izvodnice opisuje krug rotacije, upravan na osu površi, koji se naziva paralela ili uporednik površi  $p$ . Ravni koje prolaze kroz osu površi seku obrtnu površ po ravnim krivama simetričnim u odnosu na osu površi. Te ravne krive su meridijani površi  $m$ . Na *slici 71* levo prikazana je obrtna površ dvostruke zakrivljenosti. Tačke na obrtnim površima mogu biti eliptične, parabolnične ili hiperbolične /14, 47/.

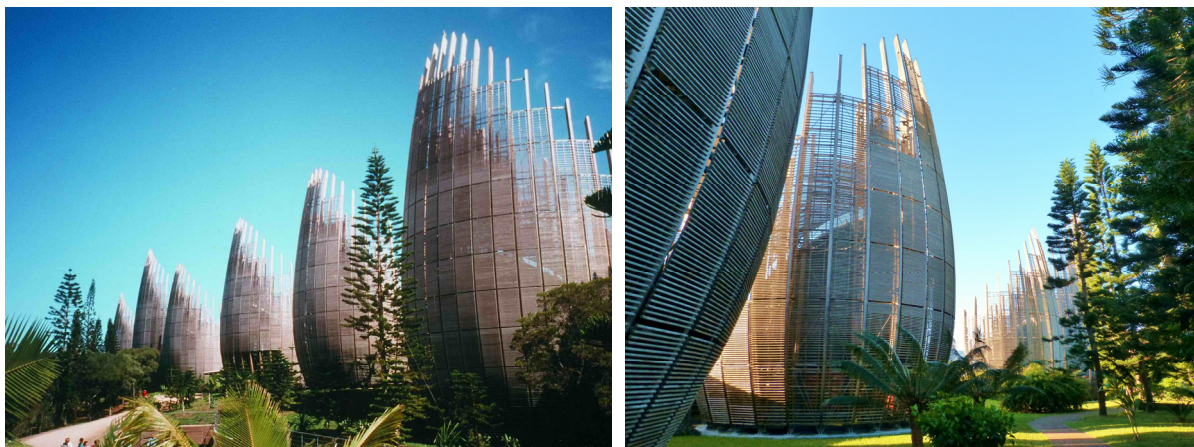
Obrtne dvostruko zakrivljene površi dele se na: opšte obrtne površi i toruse.

Na *slici 71* desno prikazana je opšta obrtna površ koja nastaje rotacijom prostorne krive  $i$  oko ose  $o$ . Na izvedenoj površi obeležena je ravna kriva, jedan od meridijana površi  $m$ , kao i jedna od paralela, kružnica  $p$ .



*slika 71. Obrtne površi (ort. projekcije i perspektiva)*

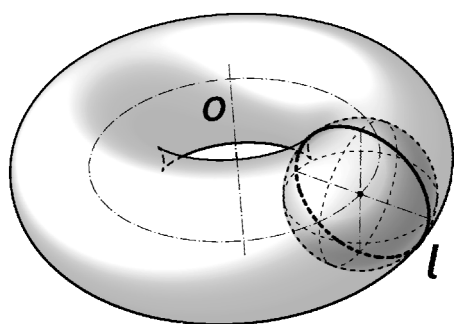
Na *slici 72* prikazan je objekat kulturnog centra u Francuskoj. Elementi koji formiraju fasadne površi delova objekata imaju formu isečaka obrtnih površi, izvedenih od drvenih nosača i drvenih brisoleja.



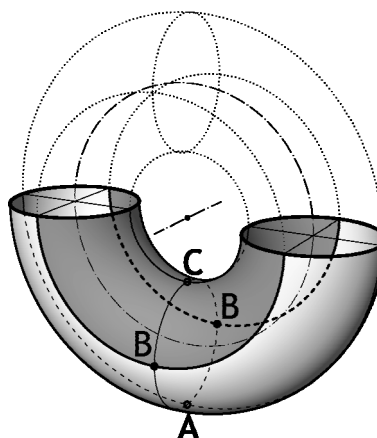
*slika 72. Jean-Marie Tjibaou Cultural Centre, Francuska, 1993. (Renzo Piano) /rpbw.com/*

## Torusi

Torus ili anuloid nastaje rotacijom lopte  $l$  oko neke prave  $o$  koja ne prolazi kroz centar lopte, *slika 73*. Ta prava je **osa torusa**. Prilikom tog kretanja centar lopte opisuje kružnicu upravnu na osu torusa koja se naziva **središnja kružnica torusa**. Obvojnica svih lopti, istog poluprečnika, koje možemo da opišemo oko tačaka te kružnice je torusna površ /2, 14/.



*slika 73. Torus (perspektiva)*

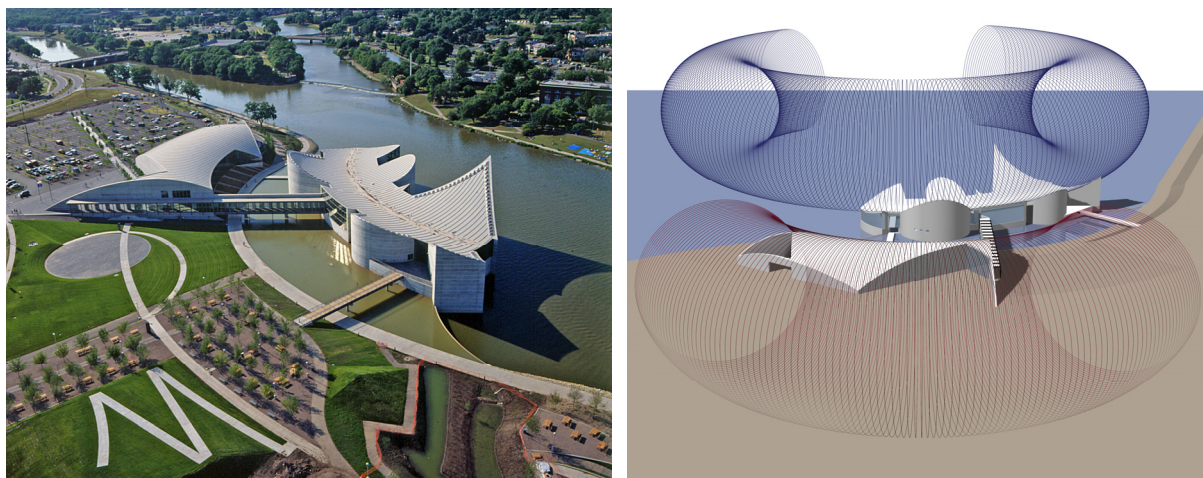


*slika 74. Vrste tačaka torusa (perspektiva)*

Torus se sastoji od **eliptičnih, parabolinih i hiperboličnih tačaka**. Na *slici 74* prikazan je deo torusa. Tačka **A** je eliptična tačka površi, tačka **C** je hiperbolična, dok je tačka **B** parabolina tačka površi. Parabolične tačke **B** leže na dvema kružnicama na torusu koje razdvajaju polje eliptičnih od polja hiperboličnih tačaka (različito obojeni delovi površi na *slici 74*) /64/.

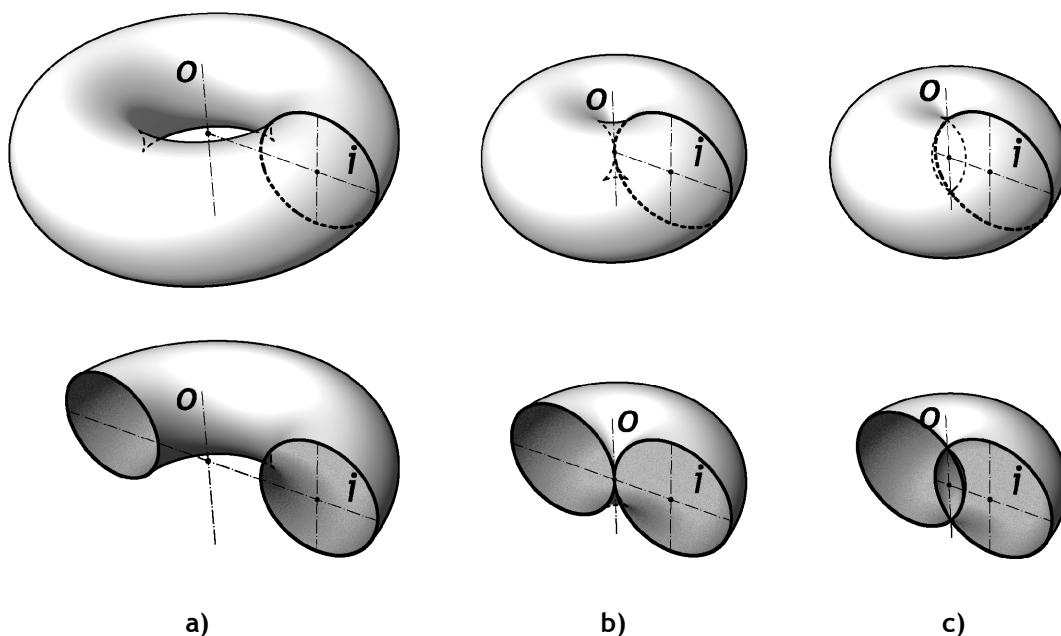


Na *slici 75 levo*, prikazan je objekat čije su krovne površine isečci dva torusa. Nastanak forme krovnih površina prikazan je na *slici 75 desno*. Kod jednog objekta krovna površina je konveksna, a kod drugog konkavna.



*slika 75. Exploration Place, Vičita, Kansas, SAD, 1997. (Moshe Safdie) /msafdie.com/*

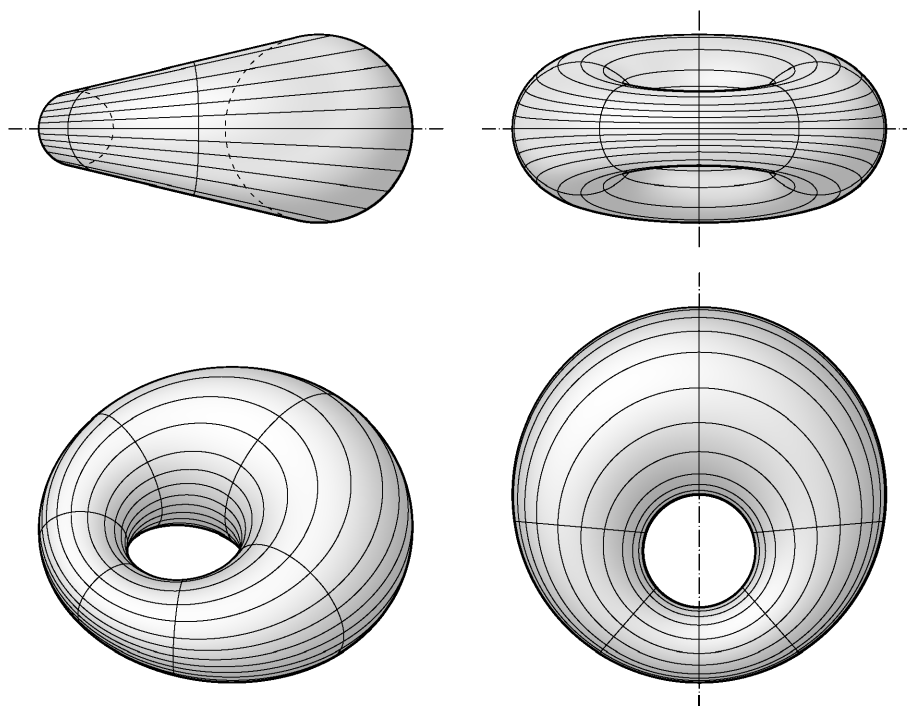
Kružni torus takođe nastaje rotacijom neke kružnice oko neke prave koja ne prolazi kroz centar te kružnice i koplanarna je sa njom, zadržavajući pri tom odstojanje u odnosu na pravu. Nastala površ je podudarna površi koja bi nastala okretanjem lopte istog prečnika oko iste te prave. Zavisno od položaja prave, ose kružnog torusa, u odnosu na kružnu izvodnicu, razlikujemo tri tipa torusa. Ukoliko osa ne seče kružnicu nastaje **prstenasti torus (slika 76a)**, ako je dodiruje nastaje **trnoliki torus (slika 76b)** i ako je seče nastaje **vretenasti torus (slika 76c)**. Ova podela važi i za eliptični torus, kao i za sve toroide nastale okretanjem neke zatvorene krive 2. stepena /25/.



*slika 76. Kružni torusi (perspektiva)*

## Dupinove ciklide

Dupinova ciklida, *slika 77*, nastaje okretanjem lopte  $l$  oko neke prave  $o$  (osa ciklide) koja ne prolazi kroz centar lopte i čiji se prečnik postojano menja po nekom zakonu prilikom tog kretanja. Prilikom tog kretanja centar lopte opisuje elipsu upravnu na osu ciklide koja se naziva *središnja elipsa ciklide*. Zbog ovakve mogućnosti izvođenja, Dupinova ciklida je prikazana sa obrtnim površima u ovom poglavlju rada /5, 17, 31/.



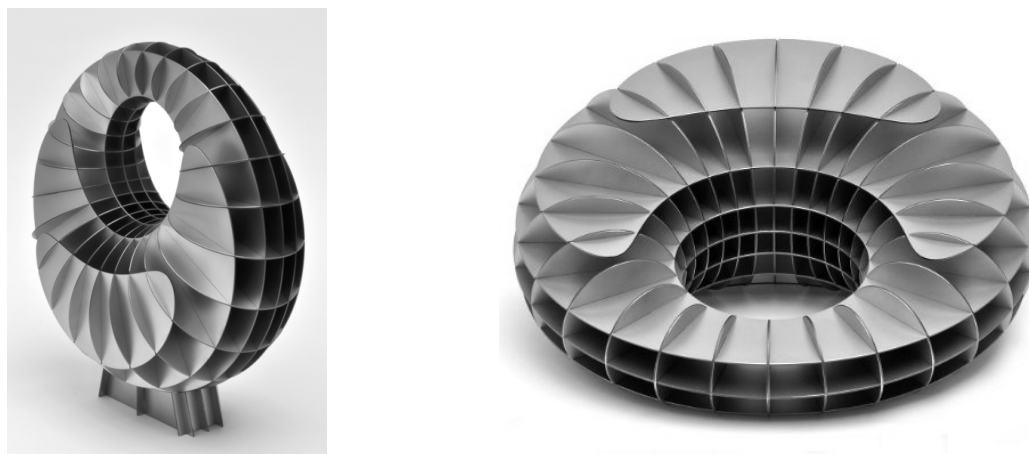
*slika 77. Dupinova ciklida (ortogonalne projekcije i perspektiva)*

Na *slici 78* prikazan je konkursni rad *Golden city*, gde je za pokrivanje prostorne strukture iskorišćen segment dupinove ciklide.



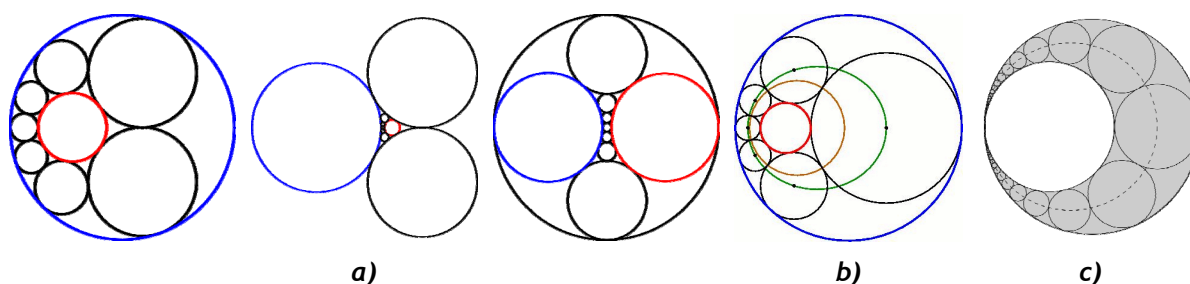
*slika 78. Golden city, Proposal for Novosibirsk, Russia, 2007  
(Eric Worcester Architecture) /mnfld.net/*

Na *slici 79*, prikazana je skulptura u formi Dupinove cilide. Skulptura se sastoji od 7 paralelnih ravni i 24 ravni meridijana površi presečenih Dupinovom ciklidom. Autor skulpture je *Friedhelm Kürpig*. Isti autor ima dosta radova zasnovanih na sličnim formama.



*slika 79. Dupinova ciklida, skulptura, 2011. (Friedhelm Kürpig) /friedhelm-kuerpig.de/*

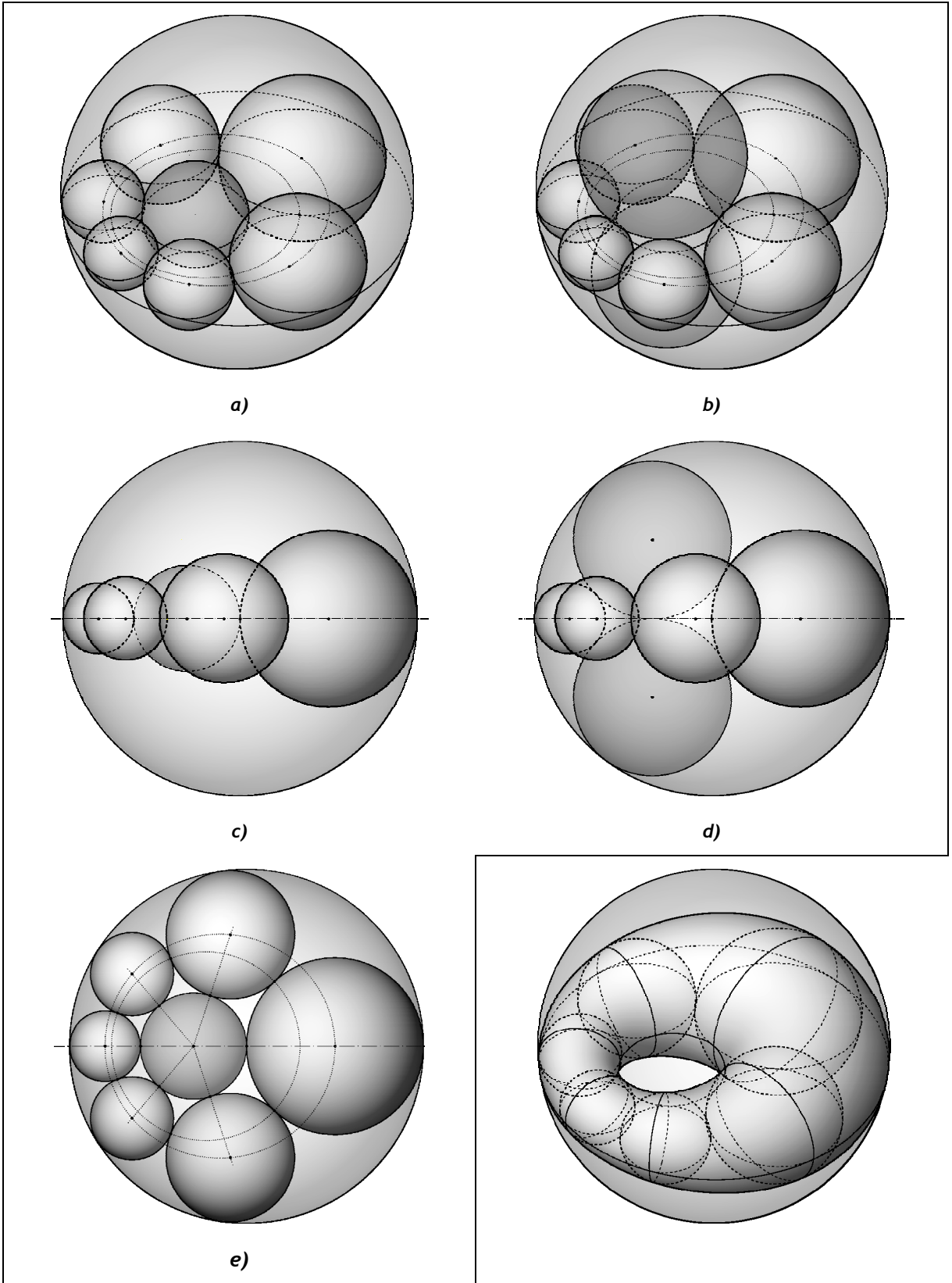
Štajnerov lanac, *slika 80a*, čini  $n$  kružnica koje tangiraju dve date kružnice koje se međusobno ne seku, a pri tom svaka od  $n$  kružnica iz lanca dodiruje susedne dve kružnice. Papusov lanac, *slika 80c*, nastaje ukoliko se dve date kružnice dodiruju. Tada postoji beskonačno mnogo krugova u lancu. Na *slici 80b* prikazan je Štajnerov lanac sa  $n=6$  kružnica. Centri svih krugova lanca leže na prikazanoj elipsi. Kružnice se međusobno dodiruju u tačkama na kružnici.



*slika 80. Moguće varijante Štajnerovog lanca i Papusov lanac*

Ukoliko se kružnice Štajnerovog lanca sa *slike 80b* zamene loptama nastaje Sodijev hekslet, *slika 81*. Ovih šest lopti dodiruju dve lopte koje se međusobno ne seku, *slike 81 a, c i e*. Manja lopta može se zameniti dvema loptama koje dodiruju sve lopte heksleta, kao i veću loptu obvojnici heksleta, *slike 81 b i d*. Ove dve lopte međusobno se dodiruju u ravni simetrije heksleta. Dupinova ciklida je tada obvojnica lopti Sodijevog heksleta, *slike 82*, ali i lopti koje zamenjuju kružnice bilo kog Štajnerovog, ili Papusovog lanca /5, 13/. Torus je prema tome specijalni slučaj Dupinove ciklide nastao kao obvojnica Štajnerovog lanca podudarnih lopti /31/.

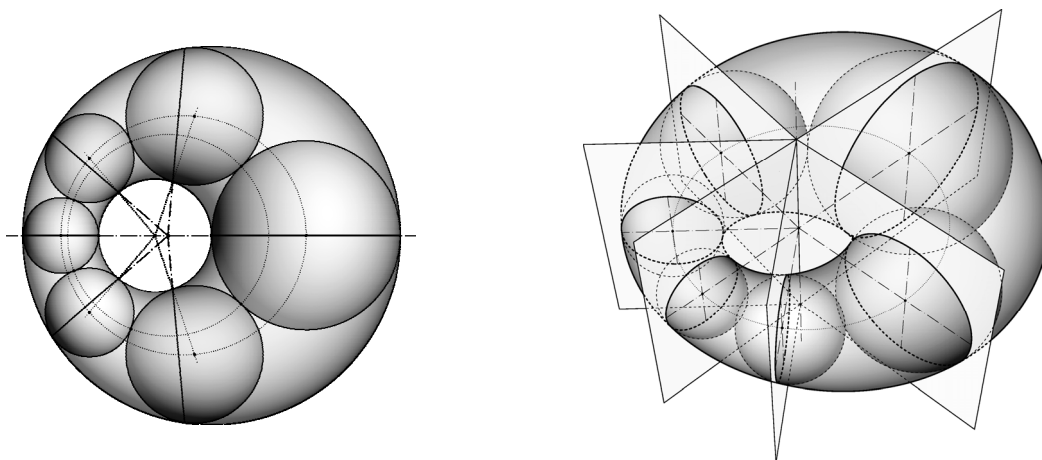




*slika 81. Sodijev hekslet (perspektiva i ortogonalne projekcije)*

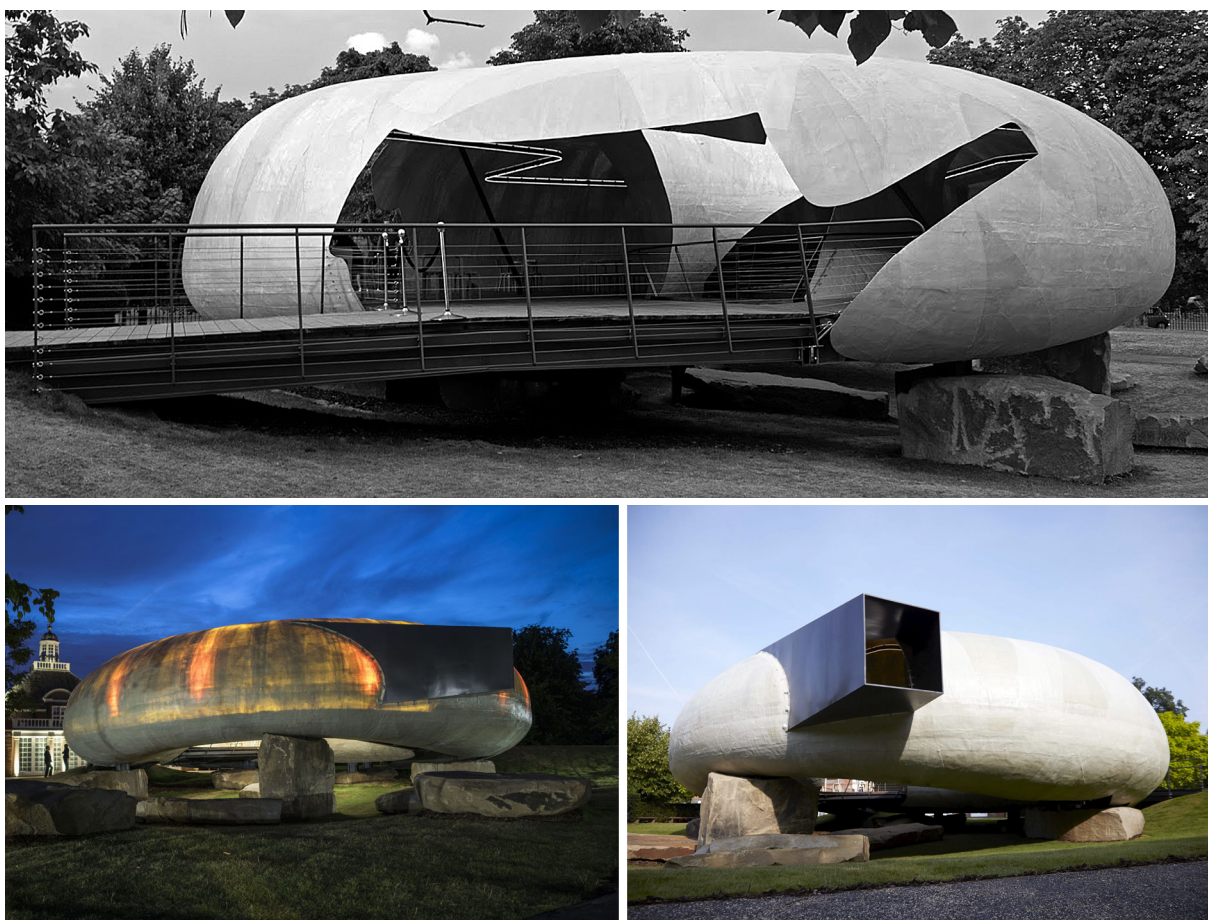
*slika 82. Dupinova ciklida kao obvojnica lopti sodijevog heksleta (perspektiva)*

Kod dupinove ciklide postoje dva sistema pramenova ravni koji se seku po kružnicama. Pramenjača jednog sistema upravna je na ravan simetrije ciklide, a druga leži u ravni simetrije, preseki prvog sistema su prikazani na *slici 83*. Ovi preseki su meridijani dupinove ciklide.



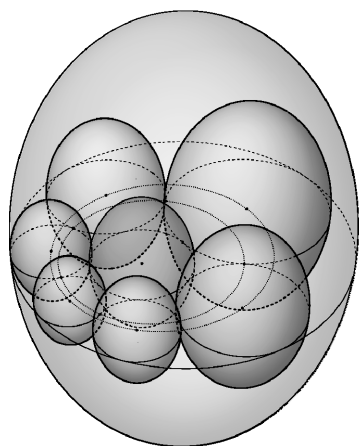
*slika 83. Dupinova ciklida - preseki po kružnicama (osnova i perspektiva)*

Na *slici 84* prikazana je privremena prostorna struktura *Serpentine Pavilion 2014* izvedena od fiberglasa i postavljena u *Kensington Gardens*, u Londonu. Forma objekta je zasnovana na dupinovoj ciklidi, uz izvesna odstupanja od idealnog oblika te površi.

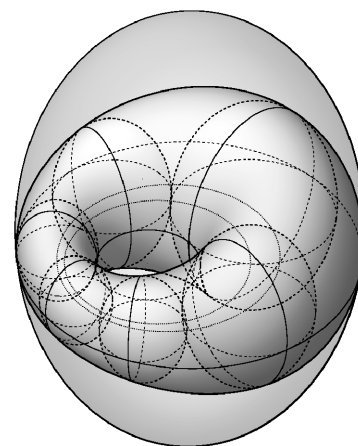
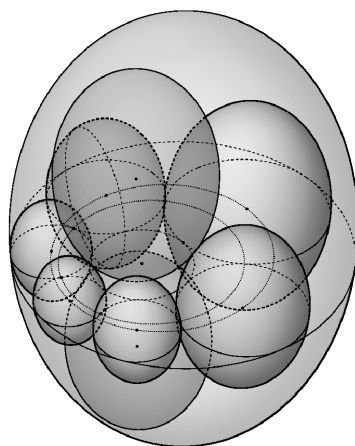


*slika 84. Serpentine Pavilion 2014, Kensington Gardens, London (Smiljan Radić /serpentinegalleries.org/)*

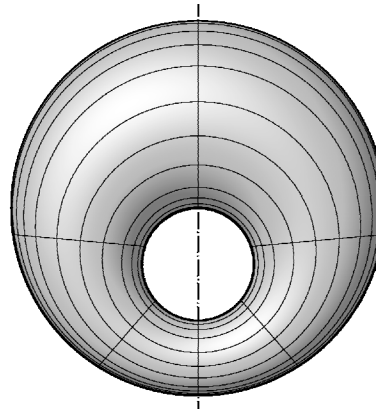
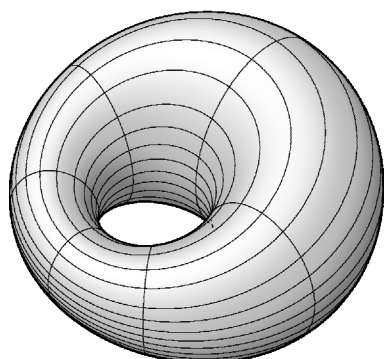
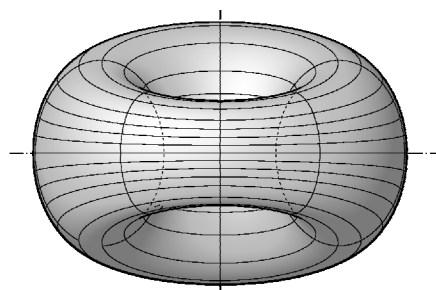
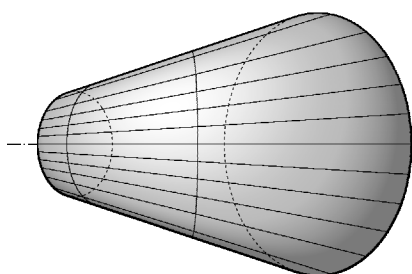
Ukoliko se lopte iz lanca zamene sferoidima (izduženim ili spljoštenim elipsoidima), *slika 85*, nastaje ciklida prikazana na *slici 86*. Sferoidi u lancu su postavljeni tako da su ravni njihovih kružnih preseka (jedan snop ravni) paralelne ravni simetrije nastale ciklide. U ovom slučaju svi sferoidi su slični, a ciklida je njihova obvojnica. Kod ovakve ciklide postoji samo jedan sistem ravni koje je seku po kružnicama, a pramenjača leži u ravni simetrije ciklide, *slika 87*.



*slika 85. Hekslet sferoida. (perspektiva)*



*slika 86. Ciklida kao obvojnica heksleta sferoida*

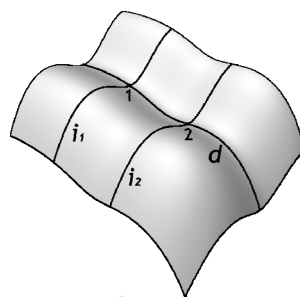
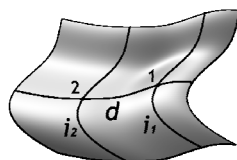
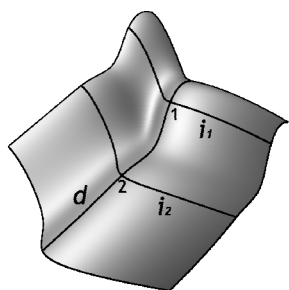


*slika 87. Ciklida kao obvojnica lanca sferoida*



### 14.2.3 Klizne dvostruko zakrivljene površi

Dve ravne ili prostorne krive koje imaju jednu zajedničku tačku izvide **kliznu dvostruko zakrivljenu površ** kada jedna kriva klizi po drugoj krivoj, kao i obrnuto. U slučaju da su obe krive ravne, ne smeju da budu koplanarne. Odnos pomenutih krivih, odnosno izvodnice i vodilje, već je razmatran u **delu 12** i prikazan na **slici 3**, upravo na primeru kliznih površi. Ukoliko izvodnica prilikom kretanja (klizanja) vrši translacijsko kretanje, nastaje **translacijska klizna površ**. Na **slici 88** prikazana je klizna dvostruko zakrivljena površ nastala klizanjem izvodnice  $i$ , po vodilji  $d$ , pri čemu su obe prostorne krive. Uočena su dva položaja izvodnice  $i_1$  i  $i_2$ , odnosno presečne tačke izvodnice i vodilje u tim položajima **1** i **2**. Izvodnice su u položajima  $i_1$  i  $i_2$  translacijski jednake. Ista površ nastaje i klizanjem krive  $d$  po izvodnici  $i$ , odnosno izvodnica i vodilja mogu zameniti uloge. Na **slici 89** prikazan je primer klizne dvostruko zakrivljene površi nastale nad pravougaonom osnovom translacijom izvodnice  $i$ , po vodilji  $d$ . Tačke na kliznim površima mogu biti **eliptične, parabolične ili hiperbolične** /30/.

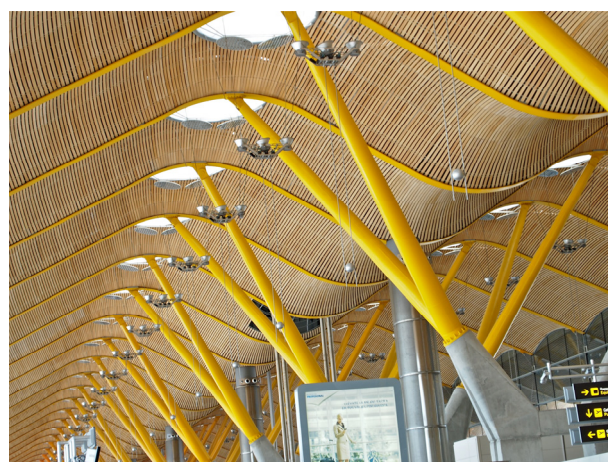


$d$		
	1	2
	$i_1$	$i_2$

**slika 88.** Klizna dvostruko zakrivljena površ (perspektiva i osnova)

**slika 89.** Translacijska klizna dvostruko zakrivljena površ (perspektiva i osnova)

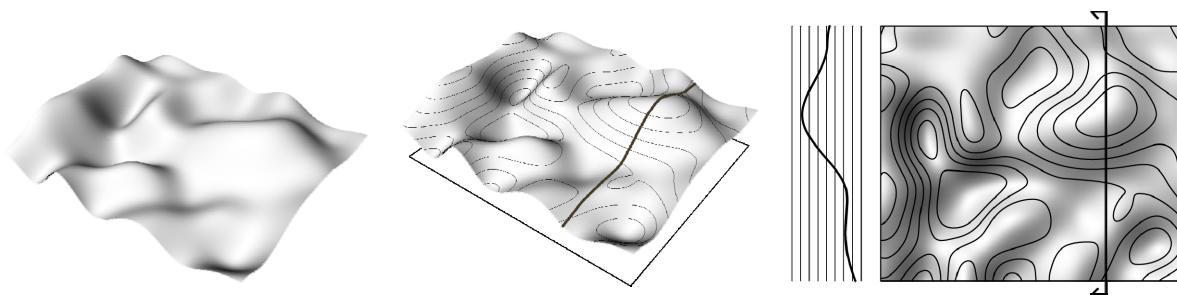
Na **slici 90** prikazana je, u enterijeru, krovna površ Terminala 4, Aerodroma u Madridu. Objekat terminala pokrivaju podudarni segmenti kliznih površi nastalih kretanjem lučne izvodnice po sinusoidi, sa prodorima na mestima lanterni za osvetljenje.



**slika 90.** Barajas Airport Terminal 4, Madrid, Španija, 2006. (Antonio Lamela, Richard Rogers, TPS Engineers) / [tensinet.com/](http://tensinet.com/)

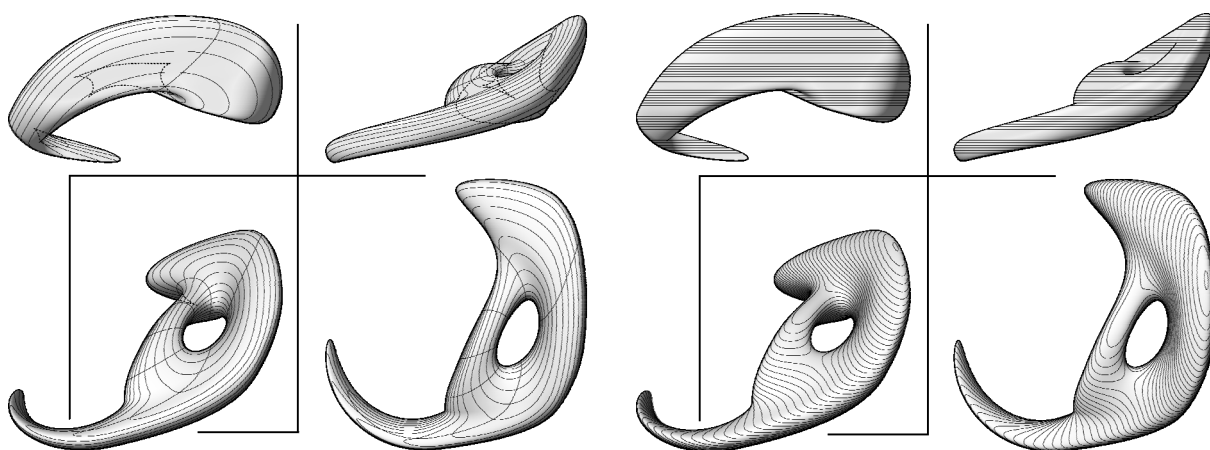
## 15 TOPOGRAFSKE POVRŠI

Topografske ili grafičke površi čine posebnu vrstu površi koje se mogu zadati jednim nizom podudarnih ili sličnih krivih, kao i proizvoljnim krivim linijama na određenom rastojanju /47/. Od gustine krivih linija (izolinija) zavisi stepen tačnosti kojom je površ određena. Ove površi ne mogu se zadati analitički, i nisu predmet daljeg proučavanja i analize u ovom radu. Na *slici 91* prikazana je topografska površ određena izolinijama, sa određenim konstantnim međusobnim rastojanjem horizontalnih ravni u kojoj leže.



*slika 91. Topografska površ*

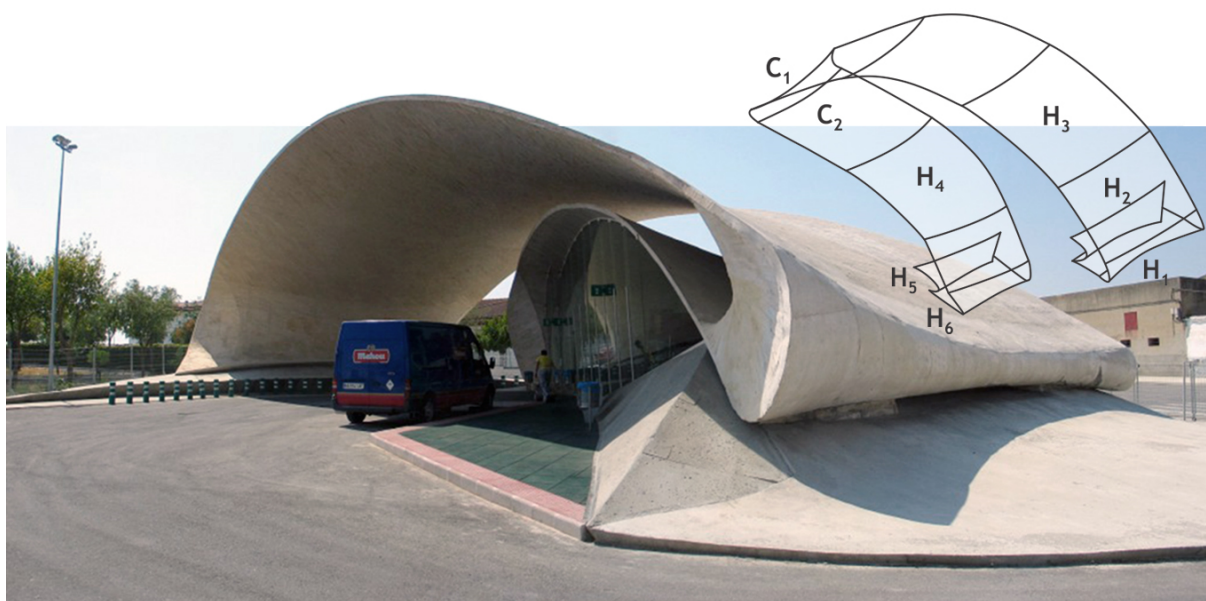
Na *slici 92* levo prikazana je topografska površ nastala proizvoljnom transformacijom Dupinove ciklide (sa *slike 77*), a na *slici 92* desno ista površ sa uočenim izolinijama, kojima se takođe može zadati. Izolinije topografske površi su ravne krive linije u snopu horizontalnih ravni, raspoređenih na jednakom rastojanju. Topografska površ je prikazana u po tri ortogonalne projekcije i perspektivi.



*slika 92. Površ nastala proizvoljnom deformacijom dupinove ciklide (ort. projekcije i perspektiva)*

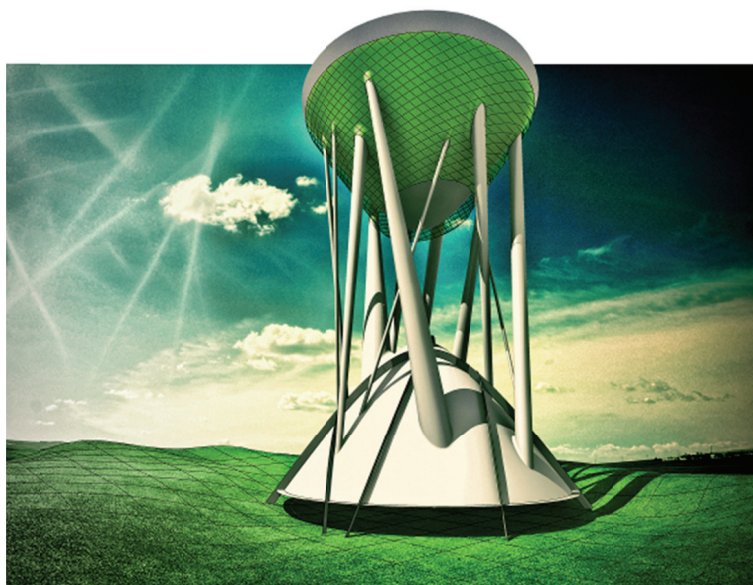
## I6 ZAKLJUČNA RAZMATRANJA I POGLAVLJA

Osnova svake uspešne arhitekture je vešta i racionalna primena geometrijskih površi u oblikovanju arhitektonskog objekta, uz postizanje atraktivne i vizuelno kvalitetne forme. Za uspešnu primenu površi u arhitekturi, potrebno je njihovo poznavanje, kao i poznavanje njihovih osnovnih karakteristika. Klasifikacija površi je preduslov za njihovo sagledavanje i primenu. U ovom poglavlju data je klasifikacija površi koje imaju primenu u tehničkoj praksi. Klasifikacija površi je izvršena po zakonitosti njihovog oblika, odnosno geometrijskoj strukturi. Ovakva podela je jasna i upotrebljiva kao polazna osnova za razmatranje i planiranje forme arhitektonskih objekata.



*slika 93. Autobuska stanica, Kasares, Španija, 2004. (Justo García Rubio) /mimoa.eu/*

U tehničkoj praksi najčešće su korišćene geometrijske ili zakonomerne površi. Razlozi su jednostavnost u konstruisanju, određivanju osnovnih parametara, jednostavnost proračuna i praktičnog izvođenja. Ovo se posebno odnosi na pravoizvodne površi. Topografske površi su u prošlosti vrlo retko korišćene, dok se u savremenoj arhitekturi češće primenjuju, s obzirom na mogućnosti koje pruža razvoj računarske tehnologije. Međutim, kako je jedan od principa arhitekture racionalnost i ekonomičnost, samim tim i održivost, uz zadržavanje atraktivnosti forme i dizajna, geometrijske površi imaju veliku primenu u savremenoj arhitekturi. Ovo se postiže svođenjem složenijih površi na jednostavnije, zakonomerne površi, a vrlo često na pravoizvodne geometrijske površi. Veći broj tako svedenih segmenata u konačnom obliku formira složenu i atraktivnu prostornu strukturu. Na *slici 93* prikazan je primer formiranja takvog sklopa od isečaka jednogranog obrtnog hiperboloida, na objektu Autobuske stanice u Španiji.



## **II POGLAVLJE**

**GEOMETRIJSKE POVRŠI 2. STEPENA  
I NJHOVA PRIMENA U ARHITEKTURI**



## II POGLAVLJE

### GEOMETRIJSKE POVRŠI 2. STEPENA I NJIHOVA PRIMENA U ARHITEKTURI

#### II1 UVODNE NAPOMENE

Površni 2. stepena imaju veliku primenu u arhitekturi, što se naročito odnosi na pravoizvodne površi 2. stepena. Pravoizvodne površi jednostavnije je primeniti u oblikovanju arhitektonskih objekata i lakše ih je geometrijski izvesti od nepravoizvodnih površi. Sa razvojem računara i njihove sveobuhvatne primene u arhitekturi, građevinarstvu i industriji građevinskih materijala, omogućeno je projektovanje i izvođenje složenih geometrijskih formi, između ostalih i formi objekata zasnovanih na dvostruko zakrivljenim površima, kao i topografskim površima. I pored toga pravoizvodne površi su zadržale svoju veliku zastupljenost u formama savremenih arhitektonskih objekata, uz upotrebu novih materijala. Veštim oblikovanjem i implementacijom pravoizvodnih površi mogu se dobiti složene i inovativne forme arhitektonskih objekata /videti 9, 32, 60, 68/. Na *slici 94* prikazan je objekat IMAX bioskopa Centra nauke u Glazgovu. Spoljašnji omotač objekta sačinjen je od niza isečaka razvojnih pravoizvodnih površi 2. stepena, konusa i oblica. Ovakav pristup predstavlja poseban izazov za dalje proučavanje i iznalaženje postupaka svođenja složenih geometrijskih formi na niz manjih razvojnih pravoizvodnih površi /15/.

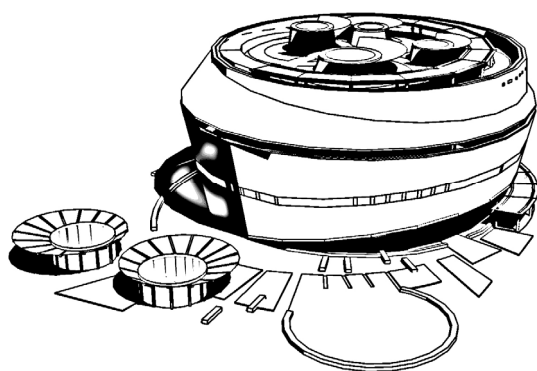


*slika 94. Glasgow Science Center, Velika Britanija, 2000. (BDP)  
/Florian Fuchs; glasgowsciencecentre.org/*

U ovom poglavlju izloženi su načini izvođenja, osnovne karakteristike i klasifikacija pravoizvodnih i opštih površi 2. stepena, kao i primeri arhitektonskih objekata čija je osnovna forma zasnovana na tim površima. Za konstruktivnu obradu površi 2. stepena primenom opšte i perspektivne kolineacije prostora neophodno je poznavanje postupka određivanja zajedničkih elemenata para

konika. U ovom radu prikazan je originalan i univerzalan način za određivanje presečnih tačaka para konika, bez obzira na realitet. Takođe, izloženi su i osnovni principi i primeri konstruktivne obrade kvadraka primenom opšte i perspektivne kolineacije prostora.

Na *slici 95*, prikazan je primer primene **pravoizvodnih razvojnih površi, konusa i oblice**, na objektu Singapurskog EXPO paviljona u Šangaju, izgrađenog 2010. godine. Isecanjem konusa i oblica i njihovim spajanjem po presečnim konikama formirana je kružna osnova objekta, kao i elementi mobilijara oko objekta. Atraktivnu formu upotpunjuju pravougaoni elementi postavljeni upravno na površinu fasade.



*slika 95. Paviljon Singapura, EXPO 2010, Šangaj, Kina, 2010. /arup.com/*

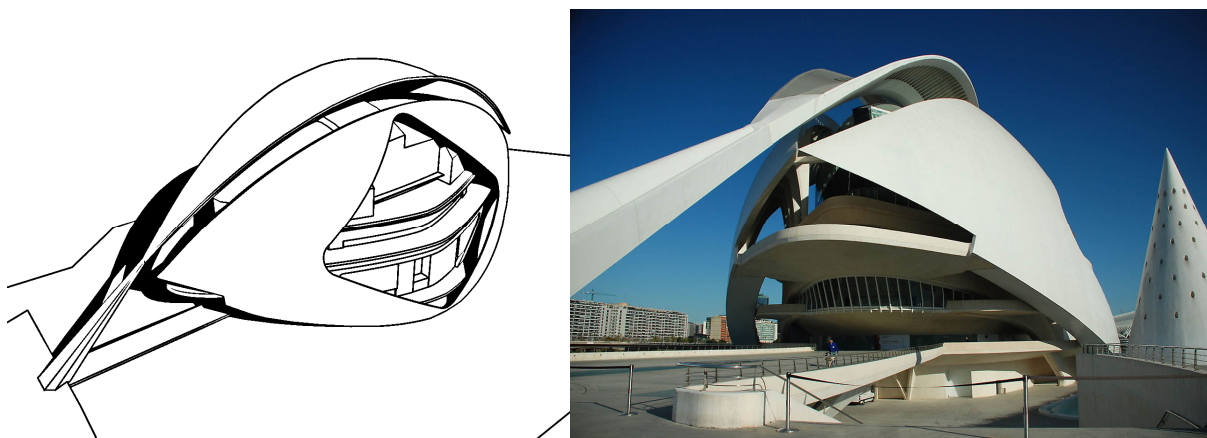
Na *slici 96*, prikazan je primer primene **hiperboličkog paraboloida, pravoizvodne nerazvojne površi drugog stepena**, u savremenoj arhitekturi. Ozelenjena prohodna krovna površina Paviljona u Linkoln centru u Njujorku ima formu hiperboličkog paraboloida nad kvadratnom osnovom objekta. Površina krova se jednim uglom oslanja na parter kako bi se obezbedio nesmetan pristup posetiocima. Na *slici 96* levo, prikazana je 3D vizuelizacija modela, a desno fotografija izvedenog objekta.



*slika 96. Hypar paviljon u kamusu Linkoln centru u Njujorku, 2011. (Diller Scofidio + Renfro) /archdaily.com/*



Na *slici 97*, prikazan je primer primene segmenata elipsoida, opšte površi drugog stepena, na Palati umetnosti kraljice Sofije u Veneciji, arhitekta Santjaga Kalatreve (*Santiago Calatrava*). Isecanjem elipsoida formirana su fasadna platna i nosači koji definišu simetričnu formu objekta.



*slika 97. Palata umetnosti kraljice Sofije, Valensija, Španija, 2005. (Santiago Calatrava) /calatrava.com/*

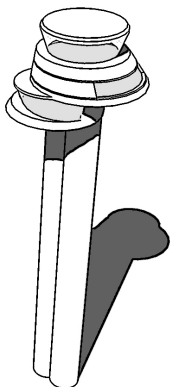
## II2 POVRŠI 2. STEPENA

Površni 2. stepena su površni 2. reda i 2. razreda, što znači da ih bilo koja prava u prostoru prodire u dvema realnim ili imaginarnim tačkama i da se iz bilo koje prave van površni mogu postaviti dve dirne ravni površni. Površni 2. stepena nazivaju se kvadrike. Svaki presek površni 2. stepena nekom ravni je kriva 2. stepena, konika, koja može biti realna, imaginarna i degenerisana (raspadnuta). Način na koji se pomenute površni seku i konstruktivno određuju naročito je bitan kod projektovanja i izvođenja objekata kod kojih se te površni primenjuju. Određivanje svih elemenata i parametara površni neophodno je za njihovo precizno konstruisanje i uklapanje u celinu. Samim tim proučavanje ovih površni, od načina nastanka do mogućnosti međusobnih preseka, osnovni je preduslov njihove uspešne primene u arhitekturi. Takođe je neophodno razmatranje mogućnosti njihovog isecanja i uklapanja dobijenih isečaka površni u prostornu strukturu objekta. Sistematizaciju ovih površni, odnosno njihovu podelu, moguće je uraditi prema različitim kriterijumima.

Površni 2. stepena mogu se podeliti prema načinu izvođenja na:

1. pravoizvodne površni
  - razvojne površni
  - nerazvojne površni (vitoperne površni)
2. opšte dvostruko zakrivljene površni

Kontrolni toranj Stokholmskog aerodroma, na *slici 98*, je sklop razvojnih pravoizvodnih površi 2. stepena, konusa i oblica, koje se međusobno presecaju. Način njihovog uklapanja u celinu doprineo je dinamičnosti, ali i jednostavnosti celog prostornog sklopa objekta. Rezultat je estetski kvalitetan objekat, izgrađen od savremenih materijala, na ekonomičan i racionalan način.



*slika 98. Kontrolni toranj aerodrome u Stokholmu, Švedska /silent.se/*

Toranj *Canton* u Kini, *slika 99*, ima formu jednogranog eliptičnog hiperboloida, pravoizvodne nerazvojne površi 2. stepena. Štapovi konstrukcije tornja imaju pravac izvodnica ove geometrijske površi. Paviljon Saudijske Arabije EXPO 2010 u Šangaju, *slika 100*, je isečak troosnog elipsoida, opšte površi 2. stepena. Površ je podignuta na stubove i formira veliku krovnu terasu okruženu IMAX displejem koji je uklopljen u formu elipsoida.

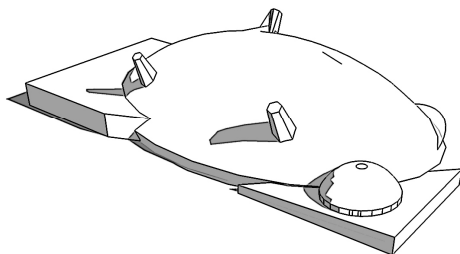


*slika 99. Canton Tower, Kina, 2010. (M. Hemel & B. Kuit)*



*slika 100. Paviljon Saudijske Arabije EXPO 2010, Šangaj, Kina /bobotako.pixnet.net/*

Japanski paviljon za izložbu EXPO 2010 takođe ima osnovnu formu **troosnog elipsoida, opšte površi 2. stepena**, prikazan je na *slici 101*. Površ je dodatno raščlanjena i estetski upotpunjena usecanjem i dodavanjem elemenata konusnog oblika.

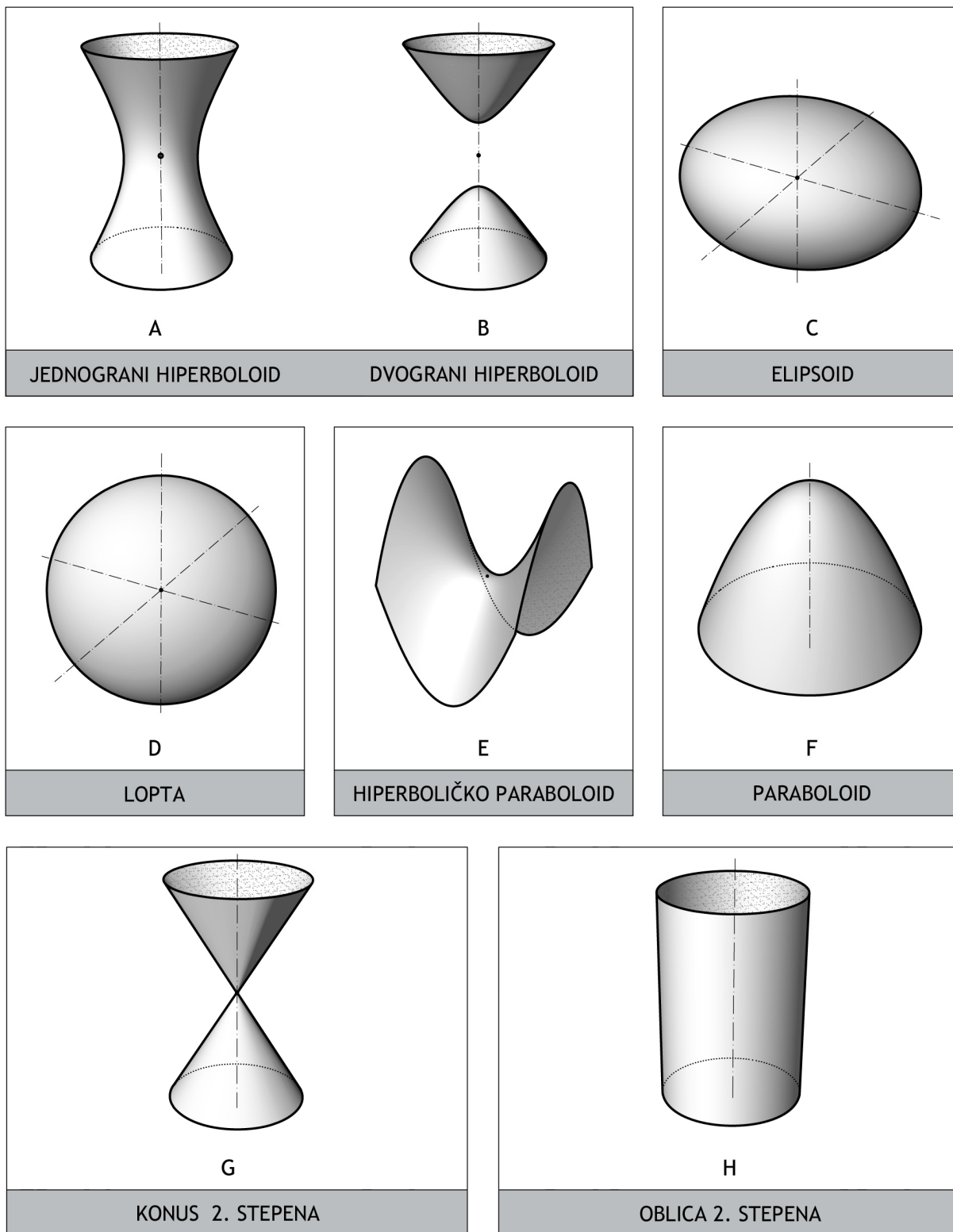


*slika 101. Paviljon Japana, EXPO 2010, Šangaj, Kina, 2010. /detaoma.com/*

Klasifikacija **površi 2. stepena (kvadrika)** može se izvršiti i prema tome po kakvoj konici beskonačno daleka ravan prostora seče datu površ. Prema prethodno definisanom kriterijumu kvadrike je moguće podeliti na sledeći način: /27, 47/

1. **Hiperboloid**, presek po realnoj beskonačno dalekoj konici (*slika 102 A i B*)
2. **Elipsoid**, presek po imaginarnoj beskonačno dalekoj konici (*slika 102 C*)
3. **Sfera** (specijalni slučaj elipsoida), presek po apsolutnoj konici prostora (*slika 102 D*)
4. **Hiperbolički paraboloid**, presek po degenerisanoj (raspadnutoj) konici na dve realne razdvojene beskonačno daleke prave (*slika 102 E*)
5. **Paraboloid**, presek po degenerisanoj (raspadnutoj) konici na dve konjugovano imaginarne prave (*slika 102 F*)
6. **Konus**, presek po realnoj beskonačno dalekoj konici (*slika 102 G*)
7. **Oblica**, presek po degenerisanoj konici na dve konjugovano imaginarne prave (*slika 102 H*)

U najopštijem slučaju **opšte i pravoizvodne površi 2. stepena** mogu se zadati kao proizvod projektivnih temeljnih tvorevina 1. vrste u prostoru, što je prikazano u daljem izlaganju. Konstruktivnim postupcima obrade određuju se osnovni parametri površi, kao što su središte površi, ose površi, kružni preseki i kružne tačke površi. U projektivnom prostoru koriste se metode sintetičke projektivne geometrije, kao i postupci iz nacrtna geometrije za vizuelno prikazivanje prostornih oblika.

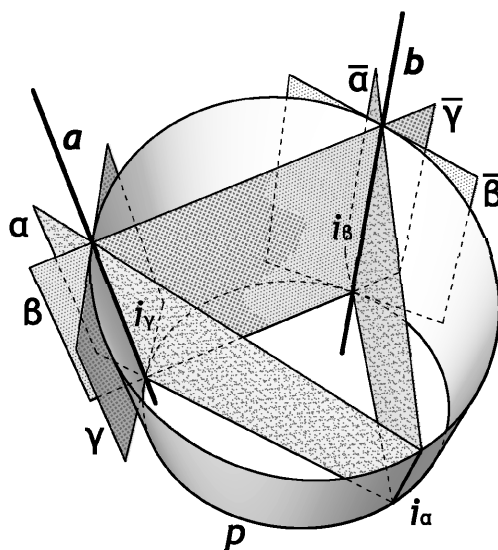


slika 102. Površni 2. stepena

## II2.1 PRAVOIZVODNE POVRŠI 2. STEPENA KAO PROIZVOD PROJEKTIVNIH TEMELJNIH TVOREVINA 1. VRSTE U PROSTORU

Pravoizvodne površi 2. stepena u opštem slučaju mogu se dobiti kao proizvod projektivnih temeljnih tvorevina 1. vrste u prostoru, odnosno kao proizvod projektivnih pramenova ravni i nizova u prostoru. Projektivitet je uzajamno jednoznačna transformacija definisana jednakošću dvorazmere pridruženih četvorki tačaka, pravih, ravni kod dva projektivna niza, pramena pravih, pramena ravni. Dva pramena ravni u prostoru su projektivna kada je svakoj ravni jednog pramena pridružena jedna ravan drugog pramena, tako da analogni dvojni odnos sinusa međusobnih uglova u paru pridružene četvorke ravni tih pramenova imaju istu vrednost. Na osnovu prethodnog, sledi da je pramen ravni projektivan sa svakim svojim ravnim presečnim pramenom pravih i sa nizom svojih prodora na svakoj pravoj /43, 47, 50, 63/.

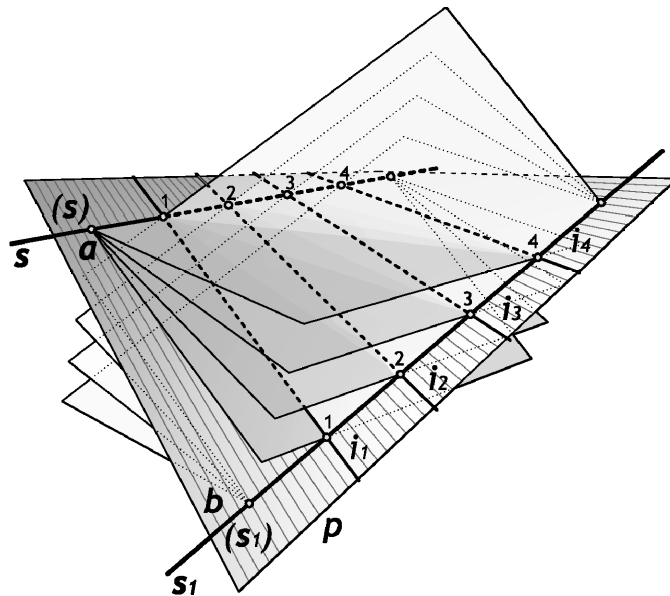
Na *slici 103*, prikazana su dva projektivna pramena ravni  $[a]$  i  $[b]$ , gde je svakoj ravni pramena  $[a]$  pridružena ravan pramena  $[b]$ . Presečnice parova pridruženih ravni  $i_a, i_b$  i  $i_\gamma$  su izvodnice pravoizvodne površi 2. stepena  $p$ . Ravni svakog od pramenova prolaze kroz ose  $a$  i  $b$ , a kako su izvodnice presečnice projektivno pridruženih parova ravni ovih nizova, onda su izvodnice ujedno i transversale osa  $a$  i  $b$ . Presecanjem projektivnih pramenova  $[a]$  i  $[b]$  nekom ravni, nastaju projektivni pramenovi pravih čiji je proizvod kriva 2. stepena, presečna konika površi 2. stepena - kvadrike /43, 47, 50/.



*slika 103. Pravoizvodna površ 2. stepena dobijena kao proizvod projektivnih pramenova ravni*

Pravoizvodne površi 2. stepena dobijaju se i kao proizvod projektivnih nizova u prostoru. Na *slici 104*, dati su projektivni nizovi  $(s)$  i  $(s_1)$  na mimoilaznim pravama  $s$  i  $s_1$ . Tačkama niza  $(s)$  i pravom  $s_1$  određen je pramen ravni  $[a]$ , a tačkama niza  $(s_1)$  i pravom  $s$  pramen ravni  $[b]$ . Projektivni pramenovi  $[a]$  i  $[b]$  izvedu jednu pravoizvodnu površ 2. stepena, kvadriku /43, 47, 62/.

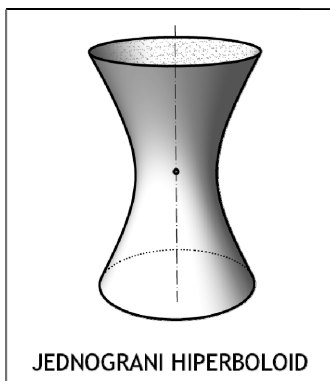




*slika 104. Pravoizvodna površ 2. stepena dobijena kao proizvod projektivnih nizova u prostoru*

Ako su pramenjače  $a$  i  $b$ , odnosno  $s$  i  $s_1$ , *slika 104*, mimoilazne prave, onda je nastala površ **jednograni hiperboloid**. U slučaju da su pomenute prave beskonačno daleke nastala površ je **hiperbolički paraboloid**. Ako se pramenjače seku nastaje **konus 2. stepena**, pri čemu je presek pramenjača vrh konusa. Ukoliko je presek beskonačno daleka tačka, izvodnice i pramenjače su međusobno paralelne, a nastala površ je **oblica 2. stepena** /43, 62/.

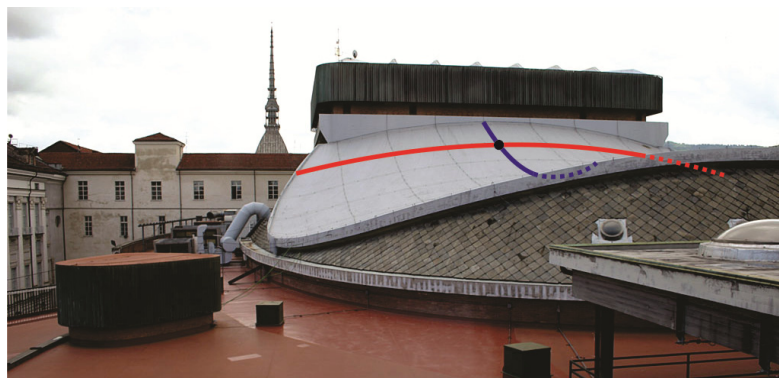
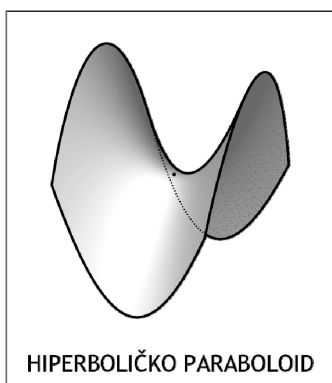
Na *slici 105* prikazan je *Corporation street bridge* u Engleskoj. Pešačka topla veza između dve zgrade izgrađena je u formi jednogranog obrtnog hiperboloida, sa horizontalno orijentisanom osom upravnom na fasade oba objekta. Čelični nosači postavljeni su u pravcima oba sistema pravih izvodnica površi, a ispuna je od stakla.



*slika 105. Corporation street bridge, Mančester, Engleska, 2000. (Hodder Associates) /Finn Lyngesen, manchestereveningnews.co.uk/*

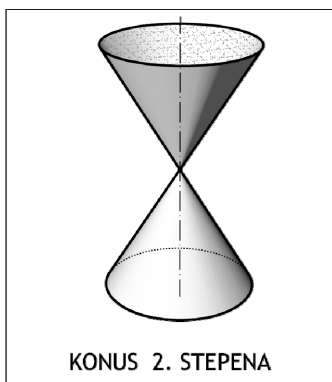
Na *slici 106* prikazan je krov *Teatro Regio* u Torinu, Italija. Segment krovne površine je isečak hiperboličnog paraboloida. Spojnice krovnih elemenata su izvedene po paraboličnim presecima površi, po jedna parabola iz dva vertikalna snopa presečnih ravni je označena na slici. Ove parabole su ujedno i izvodnice i vodilje hiperboličkog paraboloida, što je opisano i **I poglavlju**.





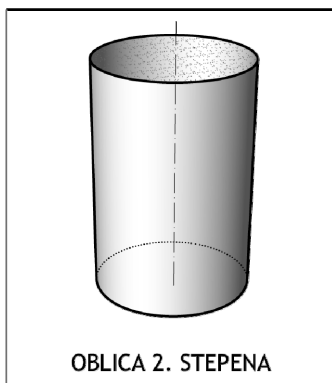
slika 106. Teatro Regio, Torino, Italija, 2009. (Armin Linke, Carlo Mollino) / teatroregio.to.it/

Na *slici 107* prikazan je Macao Science Center u Kini. Jedan od elemenata forme objekta ima formu kosog konusa 2. stepena. Konus je isečen po elipsi i kružnici, a bočno ga prodire pešačka pristupna rampa. Spojevi fasadnih elemenata izvedeni su po izvodnicama konusa.



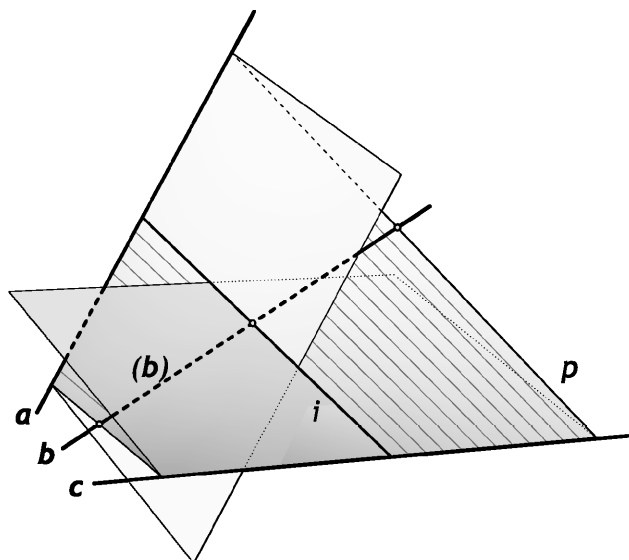
slika 107. Macao Science Center, Makao, Kina, 2009. (Pei Partnership Architects) / panoramio.com - anrwong/

Na *slici 108* prikazan je The POD Exhibition Hall u Maleziji. Izgrađen je od niza segmenata eliptičnih oblica 2. stepena, a inspiracija arhitekata, prilikom projektovanja objekta, bile su kapljice vode. Sve velike ose segmenata oblica leže u paralelnim horizontalnim ravnima, dok su male ose u jednom delu koplanarne, a u drugom delu leže u paralelnim vertikalnim ravnima.



slika 108. The POD Exhibition Hall, Kuala Lumpur, Malezija, 2010. (Luca F. Nicoletti and Serina Hijjas) / H. Lim Ho, designboom.com/

Transverzale triju mimoilaznih pravih određuju pravoizvodnu površ 2. stepena. Na *slici 109* date su tri mimoilazne prave  $a$ ,  $b$  i  $c$ . Pravama  $a$  i  $c$  i tačkama niza  $(b)$  na pravoj  $b$  mogu se formirati dva pramena ravni  $[a]$  i  $[c]$ . Prave  $a$  i  $c$  su pramenjače. Kako je pramen ravni  $(a)$  projektivan sa nizom  $(b)$ , odnosno pramen ravni  $[c]$  je takođe projektivan sa nizom  $(b)$ , onda su i pramenovi ravni  $[a]$  i  $[c]$  projektivni i izvide pravoizvodnu površ 2. stepena. Nastala površ je **jednograni eliptični hiperboloid** /43, 50, 62/.

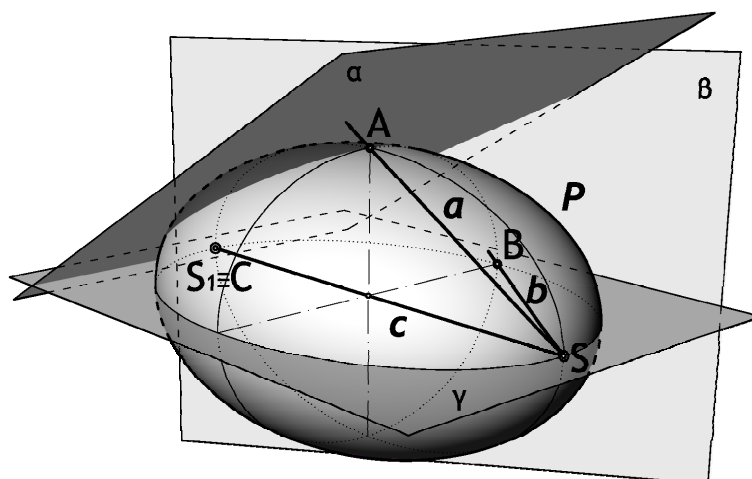


*slika 109.* Pravoizvodna površ 2. stepena čije su izvodnice transverzale triju mimoilaznih pravih

Pravoizvodne površi 2. stepena imaju po dva sistema izvodnica, od kojih svaka izvodnica jednog sistema seče sve izvodnice drugog sistema. Kod hiperboličkog paraboloida postoje dve beskonačno daleke izvodnice, po jedna iz svakog od dva sistema izvodnica površi. Izvodnice svakog od sistema su tada paralelne po jednoj od dve ravni. Te ravni nazivaju se direktrisne ravni površi. Sve ravni prostora seku pravoizvodne površi 2. stepena po realnoj krivoj 2. stepena ili po dvema realnim izvodnicama (degenerisanim konikama) /43, 50, 62/. Konstruktivni postupak određivanja osnovnih parametara ovih površi prikazan je u nastavku izlaganja.

## II2.2 OPŠTE POVRŠI 2. STEPENA KAO PROIZVOD KORELATIVNIH SVEŽNJEVA U PROSTORU

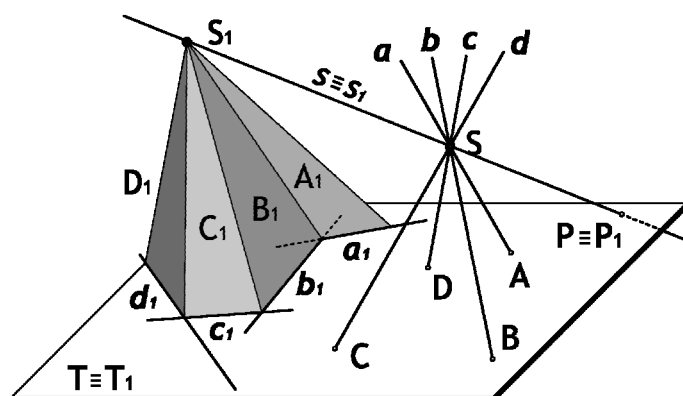
Opšte površi 2. stepena mogu se dobiti kao proizvod temeljnih tvorevina 2. vrste, odnosno kao proizvod korelativnih svežnjeva u prostoru. Svakoj pravoj jednog svežnja pridružena je ravan u drugom svežnju i obrnuto. Preseci tako pridruženih parova određuju  $\infty^2$  tačaka površi 2. stepena, kada se prave i pridružene ravni u datim svežnjevima pomeraju kontinualno /43, 47/. Na *slici 110* prikazana su dva korelativna svežnja  $(S)$  i  $(S_1)$ . Pravama  $a$ ,  $b$  i  $c$ , svežnja pravih  $(S)$ , pridružene su ravni  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ , svežnja ravni  $(S_1)$ . Prodori  $A$ ,  $B$  i  $C$ , svake od pravih kroz njoj pridruženu ravan, predstavljaju tačke opšte površi 2. stepena /43, 50/.



slika 110. Opšta površ 2. stepena dobijena kao proizvod korelativnih svežnjeva u prostoru

Na slici 111 /preuzeta iz literature 43 i 47/ su prikazana dva korelativna svežnja  $(S)$  i  $(S_1)$ , koji su odraz para kolokalnih korelativnih polja  $T$  i  $T_1$ . Tačkama  $A, B, C$  i  $D$ , polja  $T$ , pridružene su prave  $a_1, b_1, c_1$  i  $d_1$ , polja  $T_1$ . Spojnicama  $a, b, c$  i  $d$ , tačke  $S$  sa tačkama  $A, B, C$  i  $D$ , pridružene su ravni  $A_1, B_1, C_1$  i  $D_1$ , svežnja  $(S_1)$ . Četiri para pridruženih elemenata određuju korelativnu pridruženost polja  $T$  i  $T_1$ , a time i korelativnu pridruženost svežnjeva pravih  $(S)$  i ravni  $(S_1)$ . Tački  $P$  u polju  $T$ , pridružena je prava  $p_1$ , polja  $T_1$ , a tački  $P_1=P$  u polju  $T_1$  prava  $p$ , polja  $T$ . Spojnici  $s$ , svežnja  $(S)$ , pridružena je ravan  $R_1=p_1S_1$ , a spojnici  $s_1=s$ , svežnja  $(S_1)$ , ravan  $R=pS$ , svežnja  $(S)$ . Vrhovi  $S$  i  $S_1$  su takođe tačke izvedene kvadrike određene datim korelativnim svežnjevima, odnosno dirne tačke tangencijalnih ravni  $R$  i  $R_1$ . Pramen ravni  $[s]$  seče ravan  $R_1$  po pramenu pravih  $(S_1)$ , a kolokalan je i projektivan pramenu pravih  $(S)$ . Proizvod ovih kolokalnih projektivnih pramenova su njihove dvostruke prave  $d$  i  $d_1$ , izvodnice date površi /43, 47, 50/. Zavisno od realiteta dvostrukih pravih  $d$  i  $d_1$  mogu nastati:

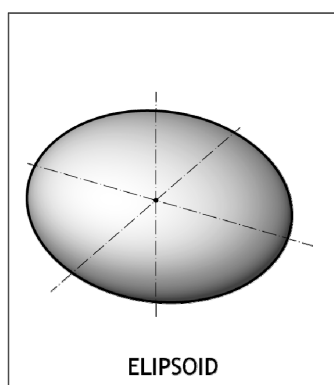
- pravoizvodne površi 2. stepena, ako su dvostruke prave realne
- opšte površi 2. stepena, ako su dvostruke prave konjugovano imaginarne



slika 111. Korelativni svežnjevi u prostoru /43, 47/

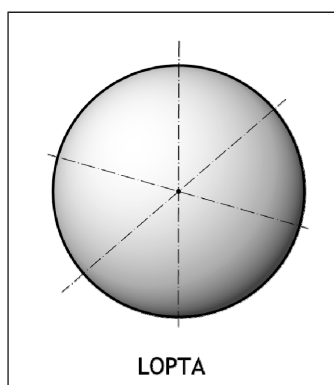
Opšta površ 2. stepena nastaje i kao proizvod nekolokalnih korelativnih polja  $T$  i  $T_1$ . Svakoj tački polja  $T$  pridružena je prava polja  $T_1$  i obrnuto, čime je određena jedna ravan. Postoji  $\infty^1$  parova ovako pridruženih elemenata i isto toliko ravni koje dodiruju jednu opštu površ 2. stepena /43, 47, 50/. U opšte površi 2. stepena spadaju: elipsoidi, lopta (specijalni slučaj elipsoida), dvograni hiperboloidi i paraboloidi.

Na *slici 112* prikazan je 3D model stadiona „Kralj Abdulah” u Saudijskoj Arabiji. Spoljašnji omotač i natkrivanje tribina stadiona projektovano je u formi troosnog elipsoida. Glavni nosači površi postavljeni su po ravnim eliptičnim presecima troosnog elipsoida.



*slika 112. King Abdullah Stadium, Saudijska Arabija (Marks Barfield Architects) /marksbarfield.com/*

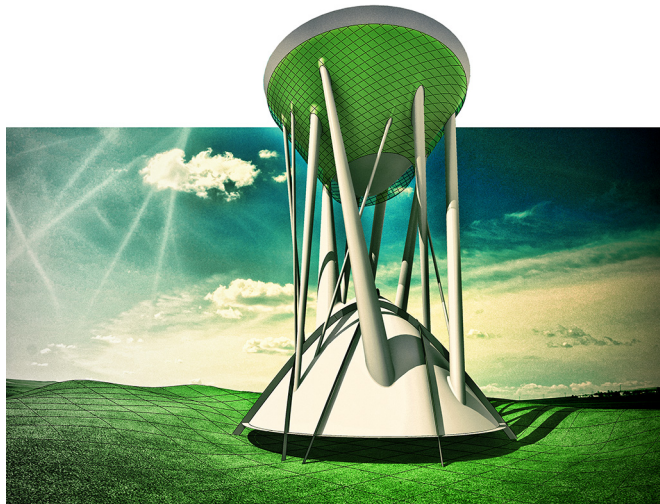
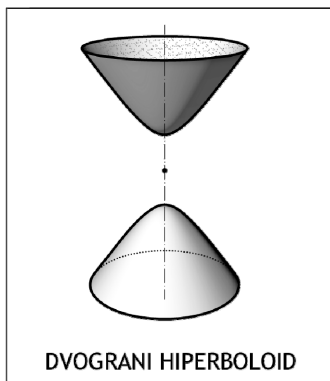
Na *slici 113* prikazan je jedan od prefabrikovanih drvenih objekata firme *Domespace*. Osnovnu formu objekta čine dve spojene kalote lopti različitog poluprečnika (kalota - deo lopte sa jedne strane njenog ravnog preseka). Spoj ovih segmenata je po horizontalnoj kružnici.



*slika 113. Prefabrikovani drveni objekti „Domespace” /domespace.com/*

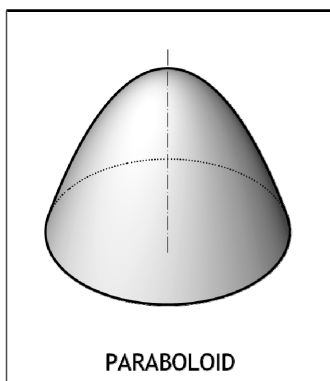
Na *slici 114* prikazan je 3D model virtuelnog objekta zasnovanog na dvogranom obrtnom hiperboloidu. Dve grane prikazane opšte površi 2. stepena povezane su elementima, zasnovanim na obrtnim konusima i oblicama 2. stepena. U arhitektonskoj praksi se ova površ retko primenjuje, s obzirom na to da su forme obrtnog i eliptičnog paraboloida primerenije u oblikovnom i statičkom smislu.





slika 114. 3D vizuelizacija, 2013. (Vladan Nikolić)

Na *slici 115* prikazan je Bahai hram u Nemačkoj, izgrađen 1964. godine. Kupola hrama ima formu kalote obrtnog paraboloida, ojačanog parabolničnim rebrima. Slične kupole, paraboloidne forme, primenjene su kod brojnih drugih hramova Bahai religije širom sveta.



slika 115. Bahá'í Temple, Langenhain, Nemačka, 1964. (Teuto Rocholl) /bahai.org/

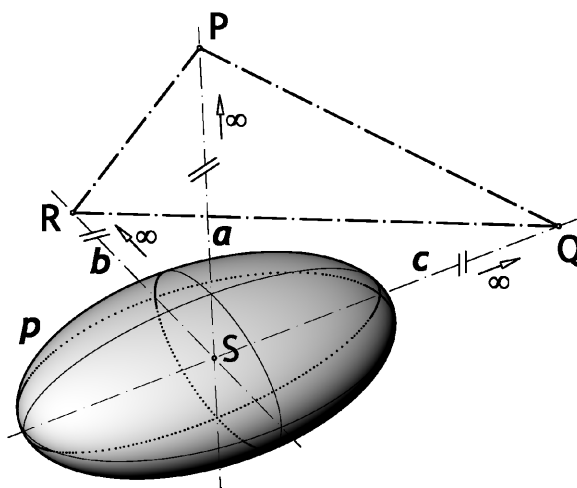
## II3 OSE, KRUŽNI PRESECI I KRUŽNE TAČKE POVRŠI 2. STEPENA

### II3.1 OSE POVRŠI 2. STEPENA

Konjugovane ose površi 2. stepena su dve prave, pramenjače pramenova polarnih ravni svih tačaka neke prave u odnosu na tu površ 2. stepena. Takođe, svaka kvadrika indukuje involuciju konjugovanih tačaka na nekoj pravoj, a dvostruke tačke su prodori te prave kroz površ. Spojnice bilo kog para konjugovanih tačaka neke prave sa bilo kojim parom konjugovanih tačaka na njoj konjugovanoj pravoj, čine autopolarne tetraedar površi 2. stepena. Svako teme tog tetraedra je pol suprotne stranice tetraedra, u odnosu na datu površ 2. stepena. Središtu površi 2. stepena, kao polu, pridružena je beskonačno daleka polarna ravan. Središte



površ 2. stepena sa svakim autopolarnim trouglom beskonačno daleke konike te površi 2. stepena, određuje jedan autopolarni tetraedar. Ivice tetraedra koje prolaze kroz središte površi, predstavljaju trojku konjugovanih prečnika te površi, kojih ima  $\infty^1$ . Beskonačno daleka konika površi 2. stepena i apsolutna konika prostora imaju jedan zajednički autopolarni trougao **PQR**. Ose površi 2. stepena su spojnice temena tog trougla sa središtem površi /43, 47/. Na *slici 116* prikazana je opšta površ 2. stepena *p*, čije su ose *a*, *b* i *c* spojnice temena zajedničkog autopolarnog trougla **PQR** sa središtem površi *S*. **PQRS** je autopolarni tetraedar.



*slika 116. Ose površi 2. stepena*

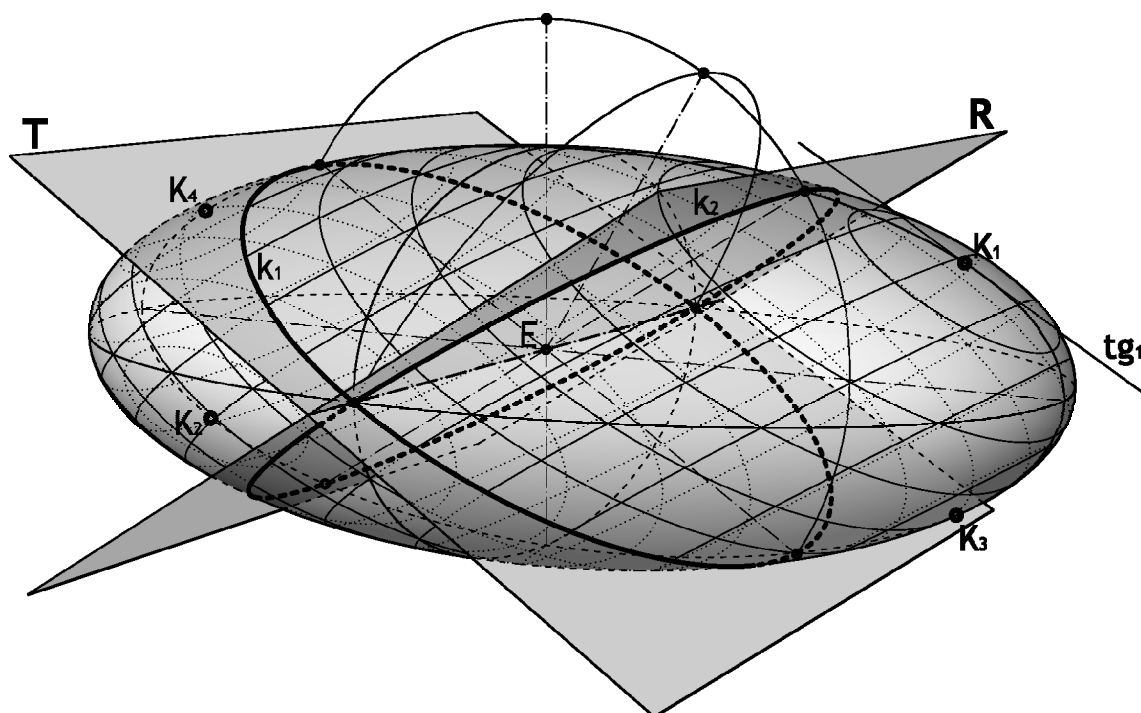
### II3.2 KRUŽNI PRESECI I KRUŽNE TAČKE POVRŠI 2. STEPENA

Beskonačno daleka ravan seče svaku površ po krivoj 2. stepena, konici. Ta konika može biti realna (kod hiperboloida i konusa), imaginarna (kod elipsoida), degenerisana na dve realne razdvojene prave (kod hiperboličkog paraboloida i hiperboličke oblice), degenerisana na dve realne poklopljene prave (kod paraboličke oblice) i degenerisana na dve konjugovano imaginarnе prave (kod paraboloida i oblice), o čemu je već bilo reči. Beskonačno daleka konika površi 2. stepena i apsolutna konika prostora seku se u četiri konjugovano imaginarnе tačke, koje u parovima leže na dvema beskonačno dalekim realnim pravama *d* i *d*<sub>1</sub>. Sve ravni koje prolaze kroz prave *d* i *d*<sub>1</sub> seku površ po konikama, koje prolaze apsolutnim tačkama svojih ravni, pa su to **kružni preseki kvadraka**. Kružni preseki definišu se na isti način bez obzira na realitet površi 2. stepena /43, 47, 50/.

Hiperbolički paraboloid, hiperbolička i parabolička oblica imaju realan par beskonačno dalekih izvodnica, koje su kod paraboličke oblice poklopljene, a kod hiperboličke su paralelne. Preseci sa apsolutnom konikom prostora se nalaze na tom realnom paru beskonačno dalekih izvodnica, a ravni koje kroz njih prolaze seku prethodno pomenute površi po još jednoj izvodnici. Tada se beskonačno daleka konika površi raspada na dve realne prave, kao i kružni preseki. Kod površi koje imaju par konjugovano imaginarnih izvodnica u beskonačno dalekoj ravni

(paraboloidi, obrtne i eliptične oblice), preseči degenerisanih konika i apsolutne konike prostora leže na paru realnih pravih. Tim parom realnih pravih su određena dva pramena paralelnih (uporednih) ravni u konačnosti, koje pomenute površi seku po kružnicama. Ako su ti pramenovi poklopljeni, direktrisne beskonačno daleke prave su poklopljene, a beskonačno daleka konika površi dodiruje apsolutnu koniku prostora u dve konjugovano imaginarne tačke, onda su takve površi rotacione. Ako se imaginarna beskonačno daleka konika površi poklapa sa apsolutnom konikom prostora, sve ravni prostora seku površ po kružnicama, a takva površ je sfera (lopta). Realne konuse beskonačno daleka ravan seče po realnim konikama /43, 47, 50/.

Apsolutna konika prostora i beskonačno daleka konika kvadrike imaju dve realne beskonačno daleke presečne prave, a njima konjugovane prave, u odnosu na površ 2. stepena, prodiru tu površ u **kružnim tačkama**. Četiri ravni (iz dva pramena ravni koje površ seku po kružnicama) tangiraju površ u kružnim tačkama. Na nepravoizvodnim realnim površima 2. stepena su kružne tačke realne, dok su kod ostalih kvadrika konjugovano imaginarne /43, 47, 50/. Na **slici 117** prikazan je troosni elipsoid, kao primer opšte površi 2. stepena. Ravni paralelne ravnima T i R čine dva sistema uporednih ravni koje površ seku po kružnicama. Tačke  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  i  $K_4$  su kružne tačke površi.



*slika 117. Opšta površ 2. stepena - dva sistema paralelnih ravni koje je seku po kružnicama (perspektiva)*

## II4 ZAJEDNIČKI ELEMENTI KRIVIH 2. STEPENA - KONIKA

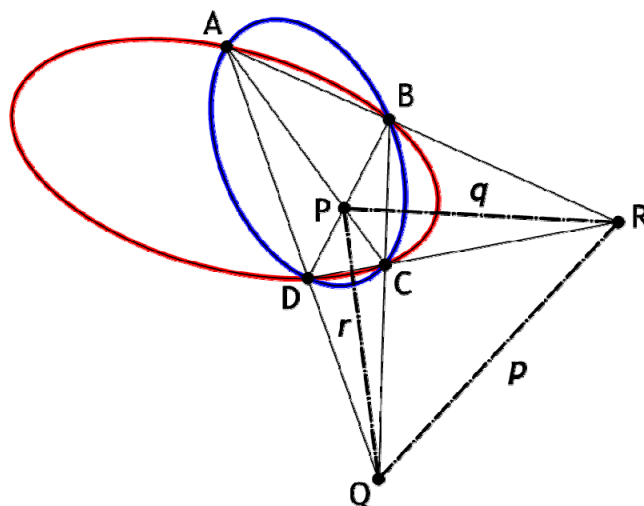
Za određivanje osnovnih parametara površi 2. stepena (središta, osa, kružnih preseka i kružnih tačaka) neophodno je odrediti zajedničke elemente para konika, bilo da su one realne ili imaginarne. Taj zaključak proizilazi iz razmatranja u prethodnim delovima ovog izlaganja. U literaturi ne postoji konstruktivno rešenje za određivanje preseka i zajedničkog autopolarnog trougla para konika u opštem položaju, osim konstruktivnih rešenja za određivanje zajedničkih elemenata para konika u specijalnim slučajevima i položajima /videti 37, 38, 42, 43/. Određivanje preseka para konika analitičkim putem svodi se na jednačinu 4. stepena, čija se rešenja mogu odrediti Ferarijevom metodom. Identično rešenje može se dobiti konstruktivnim (grafičkim) postupkom, što je i jedan od ciljeva ovog rada.

Za par konika, bez obzira na realitet, važi sledeće:

„Postoji uvek šest pravih u ravni na kojima par konika indukuje identične involutorne nizove. To su stranice potpunog četvorotemenika  $A, B, C$  i  $D$ , spojnice secišta para konika.” /43/,

„Postoji šest tačaka u ravni u kojima par konika indukuje identične involutorne pramenove. To su temena potpunog četvorostranika  $a, b, c$  i  $d$ , secišta tangenata para konika.” /43/,

„Secišta  $P, Q$  i  $R$ , suprotnih stranica četvorotemenika  $A, B, C$  i  $D$ , su temena, a spojnice  $p, q$  i  $r$ , suprotnih vrhova četvorotemenika  $a, b, c$  i  $d$ , su stranice zajedničkog autopolarnog trougla para konika.” /43/, *slika 118*.



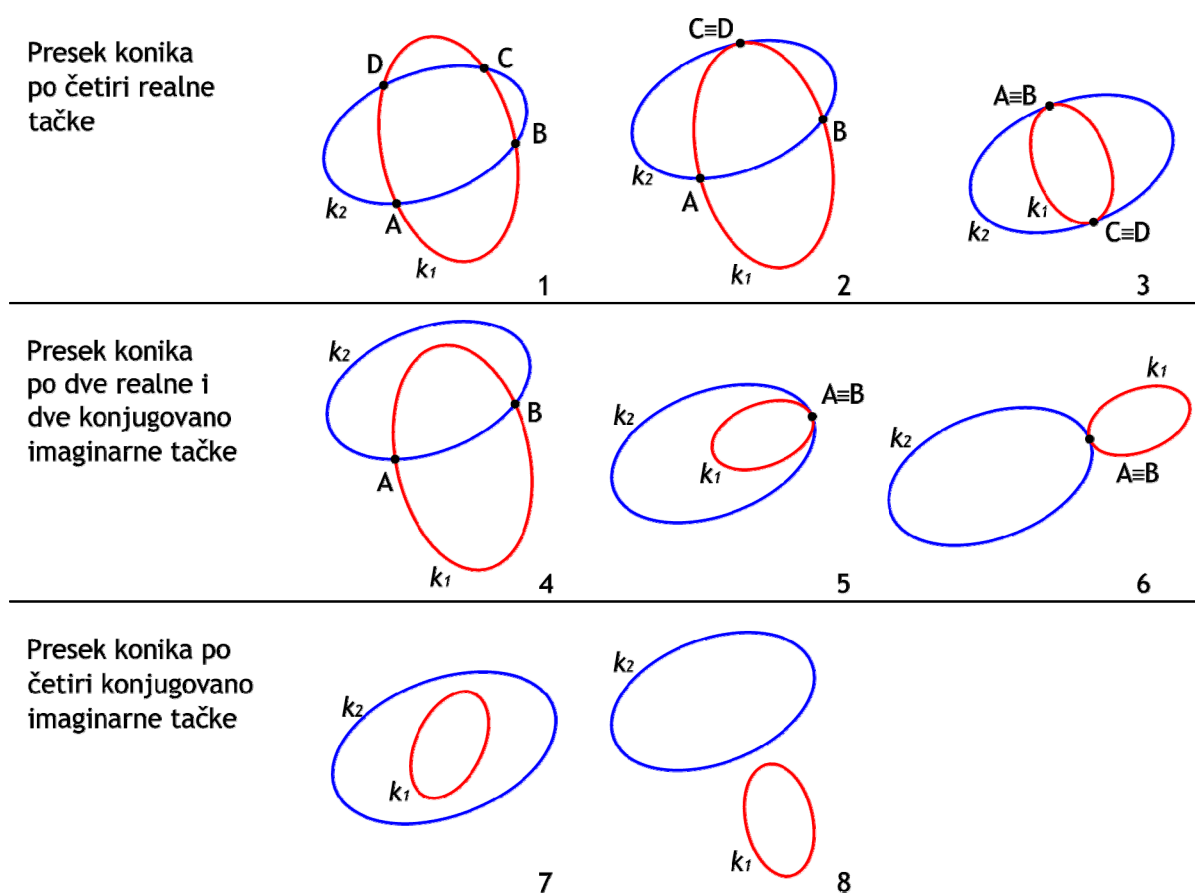
*slika 118. Zajednički autopolarni trougao para konika*

„Zavisno od realiteta secišta i dirališta para konika, spojnice presečnih tačaka odnosno secišta zajedničkih tangenata mogu biti u parovima realne, ili konjugovano imaginarne” /43/.

## II.4.1 PRESEČNE TAČKE PARA KONIKA

Dve konike seku se po četiri presečne tačke. Te presečne tačke mogu biti realne u konačnosti, realne u beskonačnosti ili u parovima konjugovano imaginarne. Presek realne i imaginarne konike, kao i presek dve imaginarne konike je uvek u dva para konjugovano imaginarnih tačaka. Na sledećim slikama prikazani su preseki, odnosno vrste presečnih tačaka realnih konika, uključujući i realne degenerisane (raspadnute) konike, kao i varijante preseka realne i imaginarne konike i dve imaginarne konike. Definicije i izvođenje realnih i imaginarnih konika, kao i degenerisanih konika poznate su iz literature, a njima se detaljno bavio M. Marković u svojoj magistarskoj tezi i doktorskoj disertaciji /videti 42 i 43/.

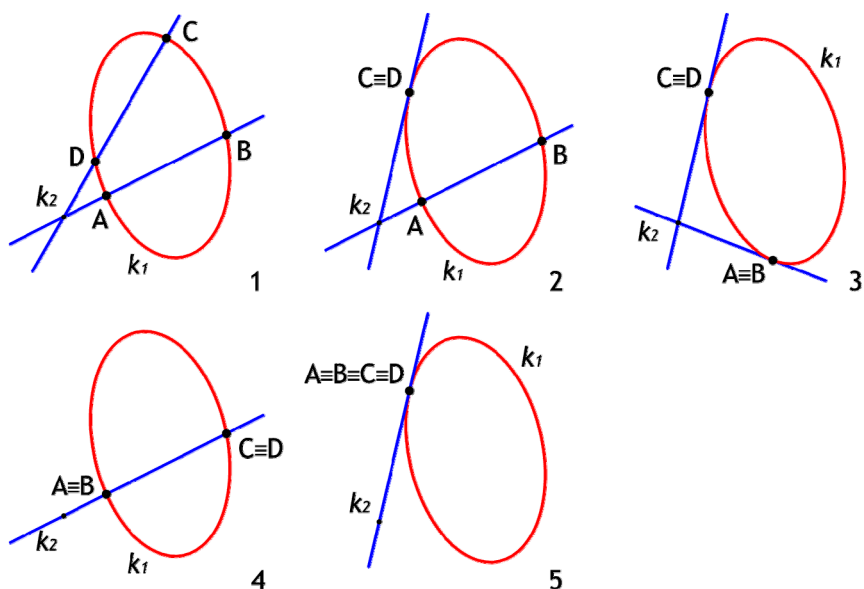
Na *slici 119* prikazane su varijante mogućih preseka para realnih konika. U slučajevima 1, 2 i 3, konike se seku po četiri realne tačke. U slučaju 1 sve tačke su razdvojene, u slučaju 2 su dve tačke poklopljene, a dve razdvojene, dok su u slučaju 3 po dve tačke poklopljene. U slučajevima 4, 5 i 6 dve presečne tačke su realne, a dve konjugovano imaginarne. U slučaju 4 su dve realne tačke razdvojene, dok su u slučajevima 5 i 6 poklopljene. U slučajevima 7 i 8 sve četiri presečne tačke su konjugovano imaginarne /42, 43, 62/.



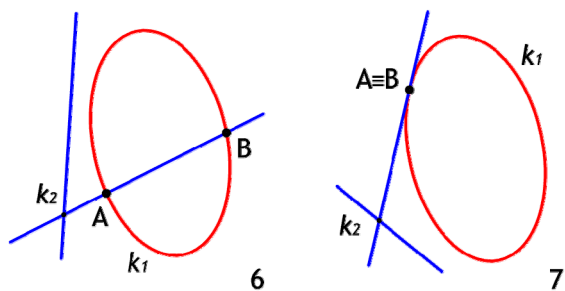
*slika 119. Varijante preseka dve realne konike*

Na *slici 120*, prikazane su varijante mogućih preseka dve realne konike, od kojih je jedna degenerisana (raspadnuta). U slučajevima 1 - 5 konike se seku po četiri realne tačke. U slučaju 1 sve četiri tačke su razdvojene, u slučaju 2 su dve tačke poklopljene, a dve razdvojene, dok su u slučajevima 3 i 4 tačke poklopljene u parovima. U slučaju 5 sve četiri presečne tačke su poklopljene. U slučajevima 6 i 7 dve presečne tačke konika su realne, a dve konjugovano imaginarne. Dve realne tačke su u slučaju 6 razdvojene, a u slučaju 7 poklopljene. Kod slučaja 8 preseka konika, postoje dva para konjugovano imaginarnih presečnih tačaka /42, 43, 62/.

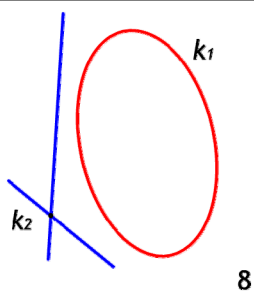
Presek konika po četiri realne tačke



Presek konika po dve realne i dve konjugovano imaginarne tačke



Presek konika po četiri konjugovano imaginarne tačke



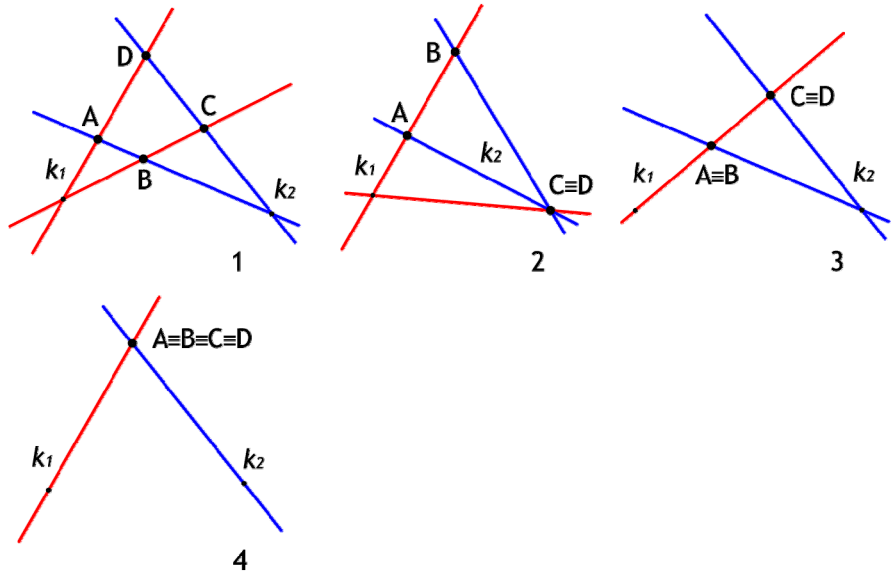
*slika 120. Varijante preseka dve realne konike od kojih je jedna degenerisana*

Na *slici 121* prikazane su varijante mogućih preseka para realnih degenerisanih (raspadnutih) konika. Kod preseka ovakvih konika sve presečne tačke su realne, a mogu biti u konačnosti i beskonačnosti. U slučajevima 1 - 4 sve presečne tačke su u konačnosti, pri čemu su u slučaju 1 razdvojene, u slučaju 2 dve razdvojene i dve poklopljene, u slučaju 3 poklopljene u parovima, dok su u slučaju 4 poklopljene

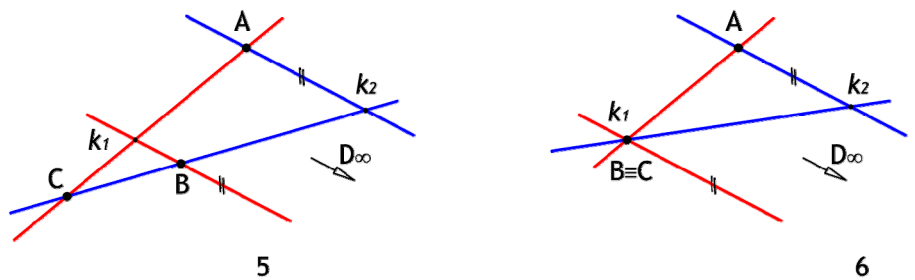


sve presečne tačke. U slučajevima 5 i 6, tri presečne tačke leže u konačnosti, a jedna tačka je realna beskonačno daleka, pri čemu su u slučaju 5 sve tri tačke u konačnosti razdvojene, a u slučaju 6 su dve tačke u konačnosti poklopljene. U slučajevima 7 i 8, dve presečne tačke su u konačnosti, a dve tačke su beskonačno daleke, gde su u slučaju 7 sve tačke razdvojene, a u slučaju 8 su poklopljene dve tačke u konačnosti i dve tačke u beskonačnosti. U slučaju 9 sve četiri presečne tačke su poklopljene u beskonačnosti /42, 43, 62/.

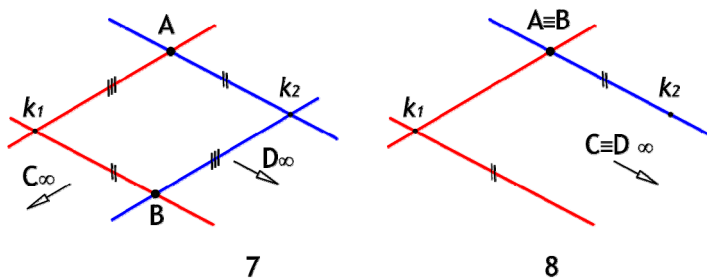
Presek konika  
po četiri realne  
tačke u konačnosti



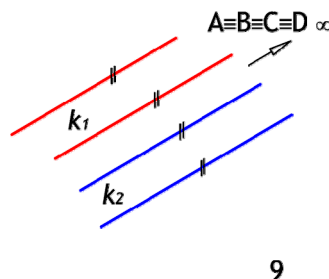
Presek konika  
po tri realne  
tačke u konačnosti  
i jednoj realnoj  
beskonačno  
dalekoj tački



Presek konika  
po dve realne  
tačke u konačnosti  
i dve realne  
beskonačno  
daleke tačke

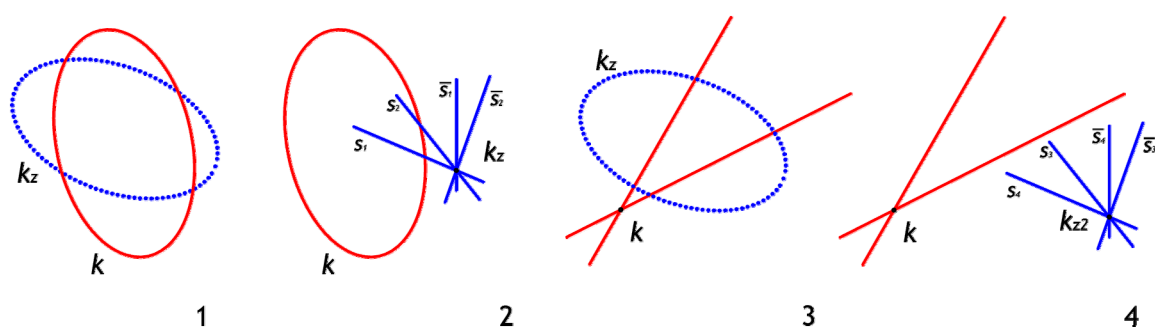


Presek konika po  
četiri realne  
beskonačno  
daleke tačke



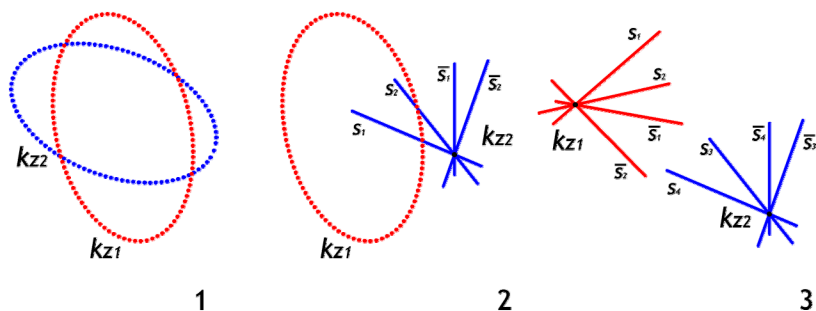
slika 121. Varijante preseka dve realne degenerisane konike

Realna i imaginarna konika uvek se seku u paru konjugovano imaginarnih tačaka, a na *slici 122* su prikazane varijante ovakvih preseka, uključujući i degenerisane (raspadnute) realne i imaginarne konike. U varijanti 1 prikazan je presek realne konike  $k$  i imaginarne konike  $k_i$ , predstavljene svojim realnim zastupnikom  $k_z$ , koje se u svakom od mogućih međusobnih položaja seku po dva para konjugovano imaginarnih tačaka. Varijanta 2 prikazuje mogući presek realne konike  $k$  i imaginarne degenerisane konike  $k_i$ , čiji je realni zastupnik pramen  $k_z$ . U varijanti 3 prikazan je presek realne degenerisane konike  $k$  i imaginarne konike  $k_i$ , prikazane realnim zastupnikom  $k_z$ . Varijanta 4 ilustruje presek realne degenerisane konike  $k$  i imaginarne degenerisane konike  $k_i$ , prikazane realnim zastupnikom  $k_z$  /42, 43, 62/.



*slika 122. Varijante preseka realne i imaginarne konike*

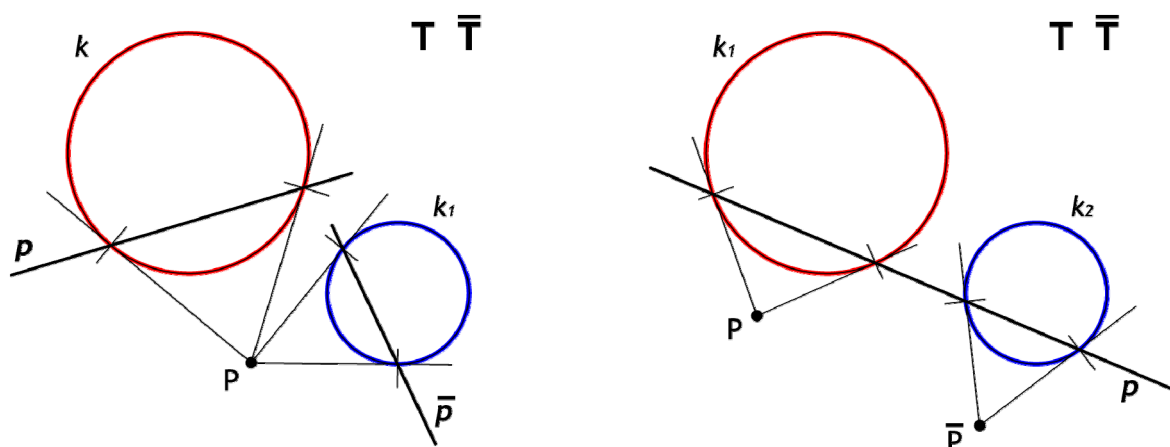
Dve imaginarne konike uvek se seku u paru konjugovano imaginarnih tačaka, a na *slici 123* su prikazane varijante ovakvih preseka, uključujući i degenerisane (raspadnute) imaginarne konike. U varijanti 1 prikazan je presek dve imaginarne konike  $k_{i1}$  i  $k_{i2}$ , date svojim realnim zastupnicima  $k_{z1}$  i  $k_{z2}$ , koji je u svakom od mogućih međusobnih položaja konika, po dva para konjugovano imaginarnih tačaka. Varijanta 2 prikazuje mogući presek imaginarne konike  $k_{z1}$  i imaginarne degenerisane konike  $k_{i2}$ , čiji je realni zastupnik pramen  $k_{z2}$ . U varijanti 3 prikazan je presek dve imaginarne degenerisane konike  $k_{i1}$  i  $k_{i2}$ , prikazane realnim zastupnicima  $k_{z1}$  i  $k_{z2}$  /42, 43, 62/.



*slika 123. Varijante preseka dve imaginarne konike*

## II4.2 KONSTRUKTIVNI POSTUPAK ODREĐIVANJA PRESEČNIH TAČAKA PARA KONIKA

Bilo koja kriva 2. stepena, bez obzira na realitet, određuje jedno korelativno involutorno (polarno) polje. Dve konike u jednoj ravni određuju dva kolokalna kolinearna polja  $T$  i  $\bar{T}$ . Između ovih polja moguće je uspostaviti kolinearni odnos. Tački  $P$  u polju  $T$  odgovara polara  $p$ , s obzirom na koniku  $k$  i istoj tački  $P$  u polju  $\bar{T}$  odgovara polara  $\bar{p}$ , s obzirom na koniku  $k_1$ , *slika 124 levo*. Isto tako za istu pravu  $p$  u poljima  $T$  i  $\bar{T}$  postoje dve tačke, polovi te prave u odnosu na date konike  $k$  i  $k_1$ , *slika 124 desno*. Pridruživanjem polara jedne tačke i polova iste prave s obzirom na konike  $k$  i  $k_1$  određena je jednoznačna povezanost tih polja, odnosno kolinearna pridruženost. Tačke čije se polare poklapaju (nezavisno od toga u kom se polju nalaze) i prave čiji su polovi incidentne tačke s obzirom na date konike su dvostruki elementi prethodno definisanih kolokalnih kolinearnih polja. Te tačke i prave su temena i stranice zajedničkog autopolarnog trougla konika  $k$  i  $k_1$  /42/.

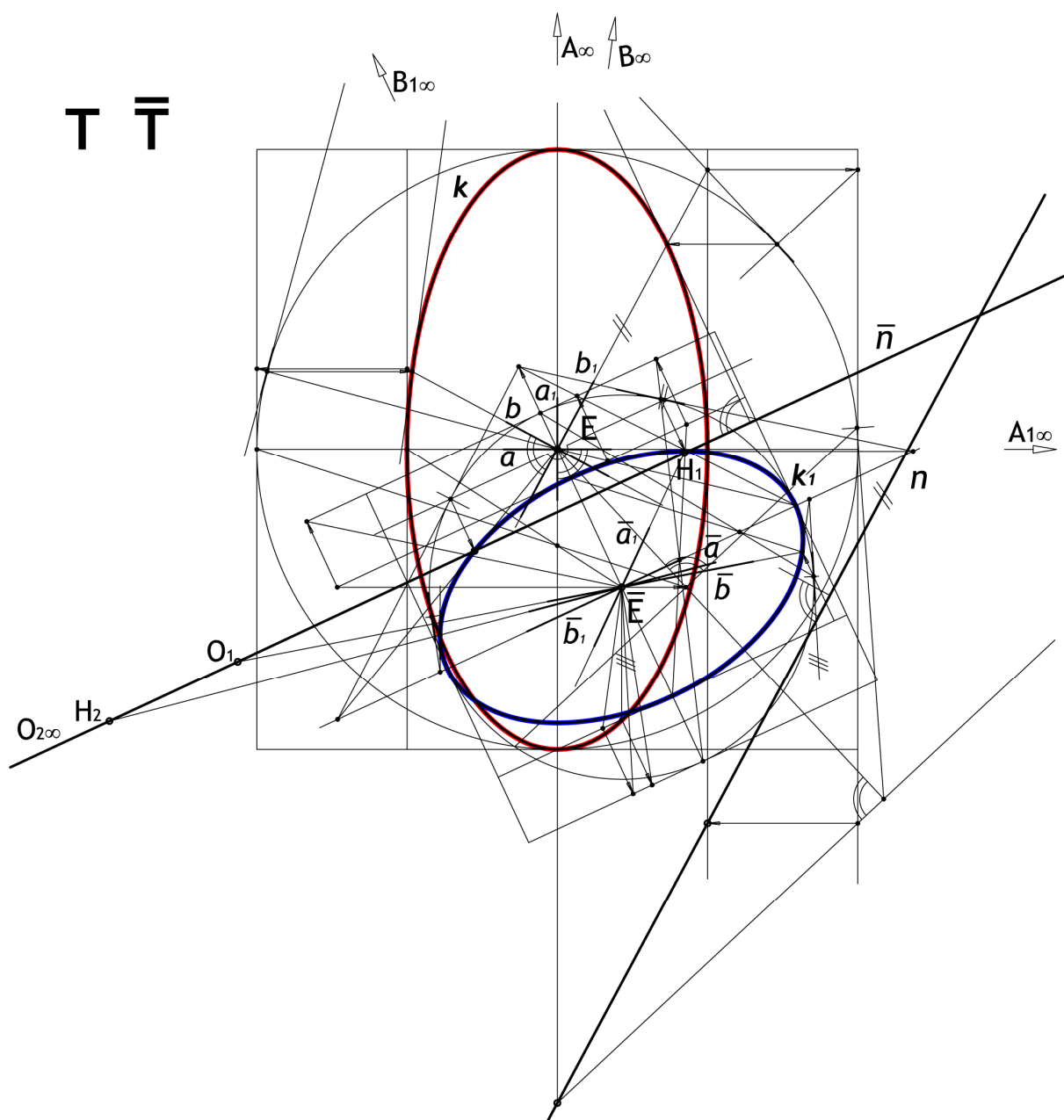


*slika 124. Kolinearni odnos dva kolokalna polja*

U nastavku izlaganja prikazani su konstruktivni postupci određivanja presečnih tačaka para konika. Kao polazna osnova korišćen je postupak M. Markovića, kojim je moguće odrediti presečne tačke realnih konika u opštem položaju /42/. Korišćenjem postupka za određivanje direktne veze između jedne realne dvostruke prave i žiža (fokusa) opšte kolinearnih polja M. Obradović /55/, omogućava se određivanje zajedničkih elemenata para konika bez obzira na realitet. Konstruktivni postupci određivanja presečnih tačaka realnih, kao i imaginarnih konika, su identični i univerzalni. Razmatrani su slučajevi u kojima su konike (realne ili imaginarne) date i opštem položaju. Izabrani su slučajevi preseka dve realne, realne i imaginarne, odnosno dve imaginarne konike. Kod imaginarnih konika, pol  $P$  imaginarne konike za bilo koju polaru  $p$ , je antipol njenom realnom zastupniku. Takođe važi i obrnuto, polara  $p$  za pol  $P$  imaginarne konike je antipolara njenom realnom zastupniku. Za rešavanje intersekcije para konika u specijalnim položajima primenjuju se identične metode, s tim što su konstruktivni postupci jednostavniji.

## II4.2.1 Presečne tačke dve realne konike

Zajednički elementi polja  $T$  i  $\bar{T}$  određeni su korišćenjem žiža (fokusa) tih polja, *slika 125*. Elipse  $k$  i  $k_1$  određuju polarna polja, između kojih se uspostavlja kolinearni odnos na prethodno definisani način. Polara tačke  $E$ , s obzirom na elipsu  $k_1$ , je nedoglednica  $\bar{n}$ , a polara tačke  $\bar{E}$ , s obzirom na elipsu  $k$ , je nedoglednica  $n$ . Prilikom konstrukcije korišćena je afina kružnica. Za dati kolinearni odnos one su pridružene fiktivnim pravama polja  $T$  i  $\bar{T}$ . Tački  $E$  pridružena je tačka  $\bar{E}$ , a cirkularnom involutornom pramenu pravih  $(E)$  pridružen je eliptički involutorni pramen  $(\bar{E})$ . Prave  $a, a_1, b$  i  $b_1$  su parovi pravih cirkularnog pramena  $(E)$  i proizvoljno su izabrane. Njima su pridružene prave  $\bar{a}, \bar{a}_1, \bar{b}$  i  $\bar{b}_1$  eliptičkog involutornog pramena  $(\bar{E})$ . Prilikom pridruživanja korišćena je afina kružnica. Pramen  $(\bar{E})$  indukuje na nedoglednici  $\bar{n}$  niz  $(O_1, O_2 : H_1, H_2) / 42/$ .



*slika 125. Određivanje presečnih tačaka dve realne konike*

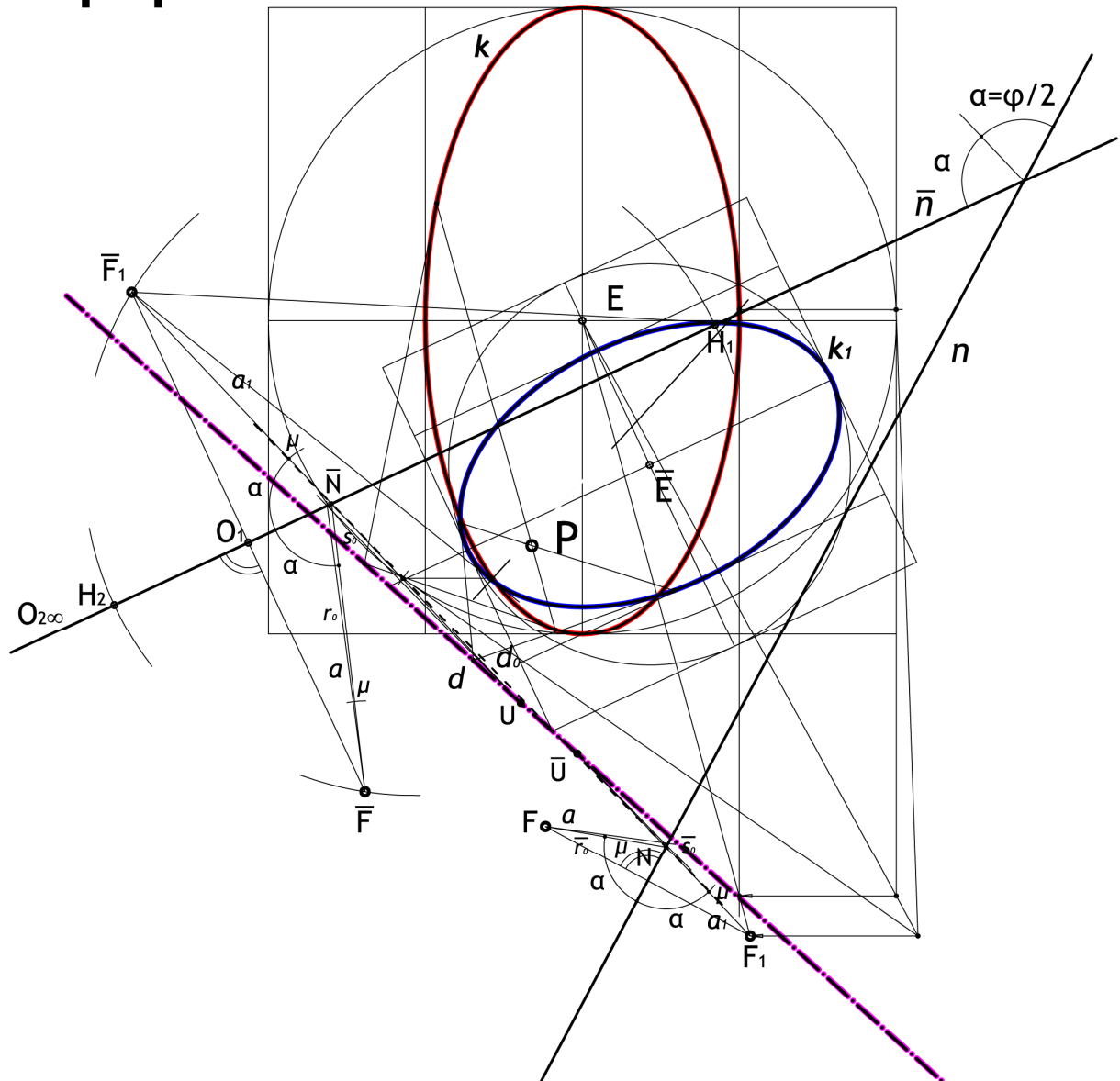
*La Guerre* - ove tačke involutornog niza  $\bar{n}(O_1, O_2 : H_1, H_2)$  su žiže  $\bar{F}$  i  $\bar{F}_1$  polja  $\bar{T}$ , a pridružene tačke  $F$  i  $F_1$  žiže polja  $T$ , **slika 126**. Kako je tačka  $O_2$  u beskonačnosti, onda je tačka  $O_1$  središte involucije, a kružnica sa centrom na nedoglednici  $\bar{n}$  koja prolazi kroz tačke  $H_1$  i  $H_2$  preseca normalu nedoglednice  $\bar{n}$  u tački  $O_1$  u žižama  $\bar{F}$  i  $\bar{F}_1$ . Žiže  $F$  i  $F_1$  su određene tako što je određena polara žiže  $\bar{F}_1$ , u odnosu na koniku  $k_1$ , a koja je ista prava kao i polara žiže  $F_1$ , s obzirom na koniku  $k$ . Žiža  $F$  simetrična je sa žižom  $F_1$ , u odnosu na nedoglednicu  $n$  /42/.

Primenom postupka za određivanje direktne veze između jedne realne dvostruke prave i žiža opšte kolinearnih polja moguće je odrediti strane zajedničkog autopolaranog trougla. Teorija opšte kolinearnih polja i teorija žiža su povezane jednim konstruktivnim postupkom koji omogućava direktno iznalaženje dvostrukih elemenata (onih koji se preslikavaju sami u sebe) opšte kolinearnih polja, ako su ta polja zadata samo sa dva para pridruženih tačaka - žiža (tj. Lagerovim tačkama preslikanih apsolutnih involucija sa beskonačno dalekih pravih ovih polja na nedoglednicama). Konstruktivni postupak zasniva se na rotaciji, odnosno, koristi metode nacrtne geometrije, a obe polazne teorije se zasnivaju na principima projektivne geometrije /55/.

Prethodno pomenuti konstruktivni postupak prikazan je na **slici 126**. Određena je dvostruka prava  $\bar{d}$  korišćenjem žiža  $\bar{F}$  i  $\bar{F}_1$  polja  $\bar{T}$  i žiža  $F$  i  $F_1$  polja  $T$ . Nedoglednice  $n$  i  $\bar{n}$  zaklapaju ugao  $\phi$ . Iz žiža  $F$  i  $F_1$  postavljene su prave  $a$  i  $a_1$ , koje sa nedoglednicom  $n$  zaklapaju uglove:  $\alpha_0$ , odnosno  $-\alpha_0 = \phi/2$ , tako da se sa nedoglednicom  $n$  seku u istoj tački  $N$ . Iz žiža  $\bar{F}$  i  $\bar{F}_1$  postavljene se prave  $\bar{a}$  i  $\bar{a}_1$  koje sa nedoglednicom  $\bar{n}$  zaklapaju isti ugao  $\alpha_0$ , odnosno  $-\alpha_0 = \phi/2$ , tako da u preseku sa njom daju tačku  $\bar{N}$ . Spajanjem tačaka  $N$  i  $\bar{N}$ , dobija se spojnica  $d_0$ , koja sa pravama  $a_1(F_1N)$  i  $\bar{a}_1(\bar{F}_1\bar{N})$  zaklapa uglove  $\mu$  i predstavlja dvostruku pravu. Kroz žižu  $F$  postavlja se prava  $r_0$  koja sa pravom  $a$  zaklapa prethodno određeni ugao  $\mu$ . Kružnica koja tangira  $a$ ,  $a_1$  i  $r_0$  ima centar na nedoglednici  $n$ . Paralelno sa  $d_0$  postavlja se prava  $s_0$  koja tangira konstruisanu kružnicu i seče se sa pravom  $a_1$  u tački  $U$ . Tangenta  $s_0$  sa pravom  $\bar{a}_1$  zaklapa ugao  $\mu$ . Isti postupak ponavlja se u polju  $T$  za prave  $\bar{a}$ ,  $\bar{a}_1$  i  $r_0$ , a dobijeni krug tangira se pravom  $s_0$  koja u preseku sa  $\bar{a}_1$  određuje tačku  $\bar{U}$ . Kroz tačke  $U$  (u polju  $T$ ) i  $\bar{U}$  (u polju  $\bar{T}$ ) prolazi realna dvostruka prava  $d$ . Za dvostruku pravu  $d$ , stranu zajedničkog autopolaranog trougla, određen je pol  $P$ , jedno od temena zajedničkog autopolaranog trougla. Izabrane su dve proizvoljne tačke na dvostrukoj pravoj  $d$  i za njih, kao polove, određene su polare na elipsama  $k$  i  $k_1$ . U preseku tih polara nalazi se traženi pol  $P$ , **slika 126**.



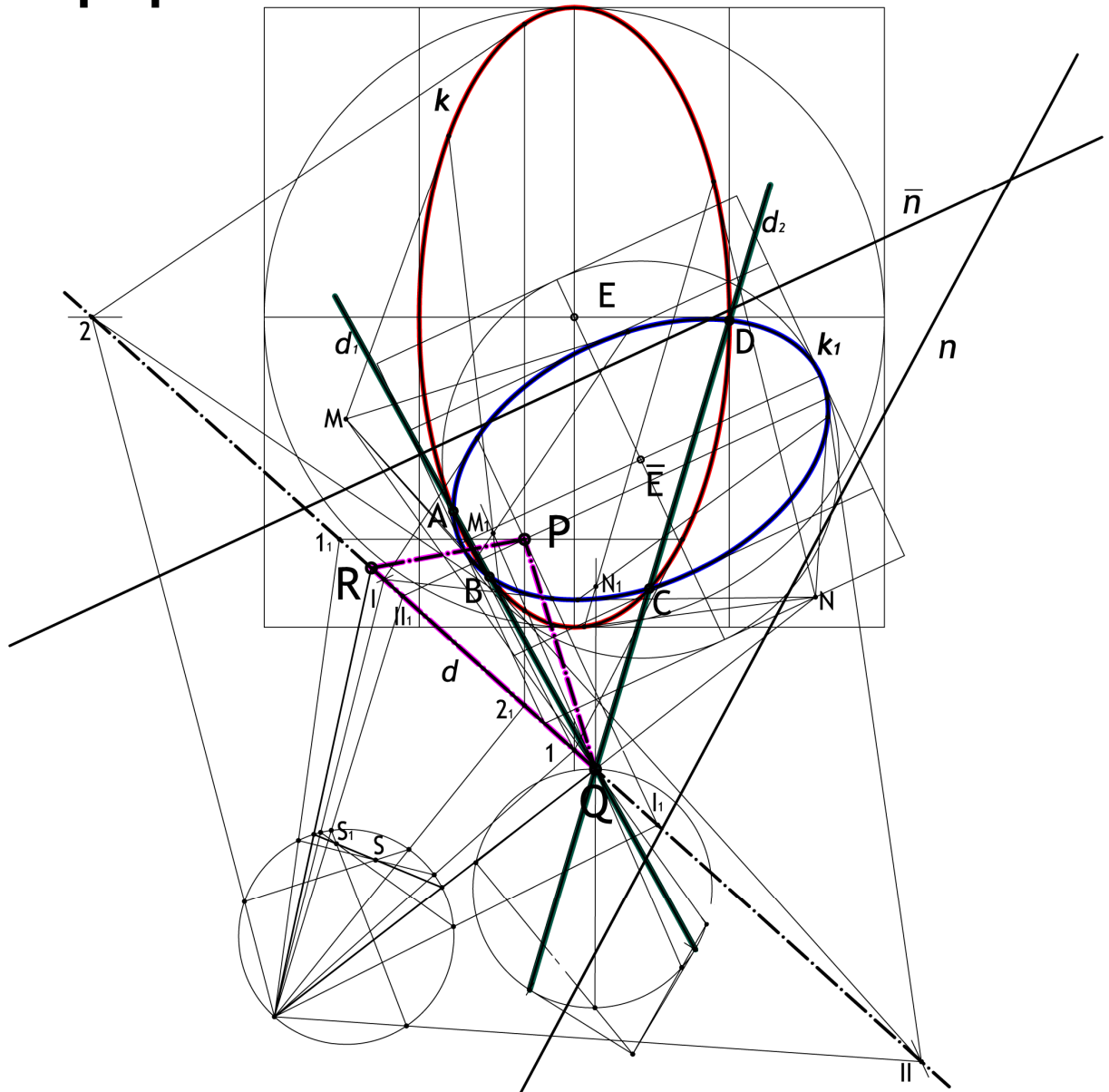
T  $\bar{T}$



slika 126. Određivanje presečnih tačaka dve realne konike

Temena Q i R zajedničkog autopolarnog trougla određena su nalaženjem po dva para pridruženih tačaka eliptičnih nizova na pravoj  $d$ , koje indukuju elipse (konike)  $k$  i  $k_1$ , slika 127. Proizvoljno odabranim tačkama 1, 2, I i II na pravoj  $d$ , pridružene su tačke  $1_1, 2_1, I_1$  i  $II_1$ . Postupak je izveden tako što su za polove 1 i 2 određene polare u odnosu na elipsu  $k$  koje pravu  $d$  seku u tačkama  $1_1$  i  $2_1$ , a za polove I i II određene polare u odnosu na elipsu  $k_1$  koje pravu  $d_1$  seku u tačkama  $I_1$  i  $II_1$ . Zraci proizvoljno odabranog eliptičnog involutornog pramena kroz tačke jednog eliptičnog niza (1,  $1_1$ , 2 i  $2_1$ ) određuju u preseku tetiva tačku S, a zraci drugog eliptičnog involutornog pramena kroz tačke niza (I,  $I_1$ , II i  $II_1$ ) određuju u preseku tetiva tačku  $S_1$ . Tetiva pomoćne kružnice kroz tačke S i  $S_1$  određuje zajedničke prave eliptičnih pramenova, koji u preseku sa pravom  $d$  daju zajedničke tačke Q i R nizova, a koje predstavljaju preostala dve temena zajedničkog autopolarnog trougla.

T  $\bar{T}$

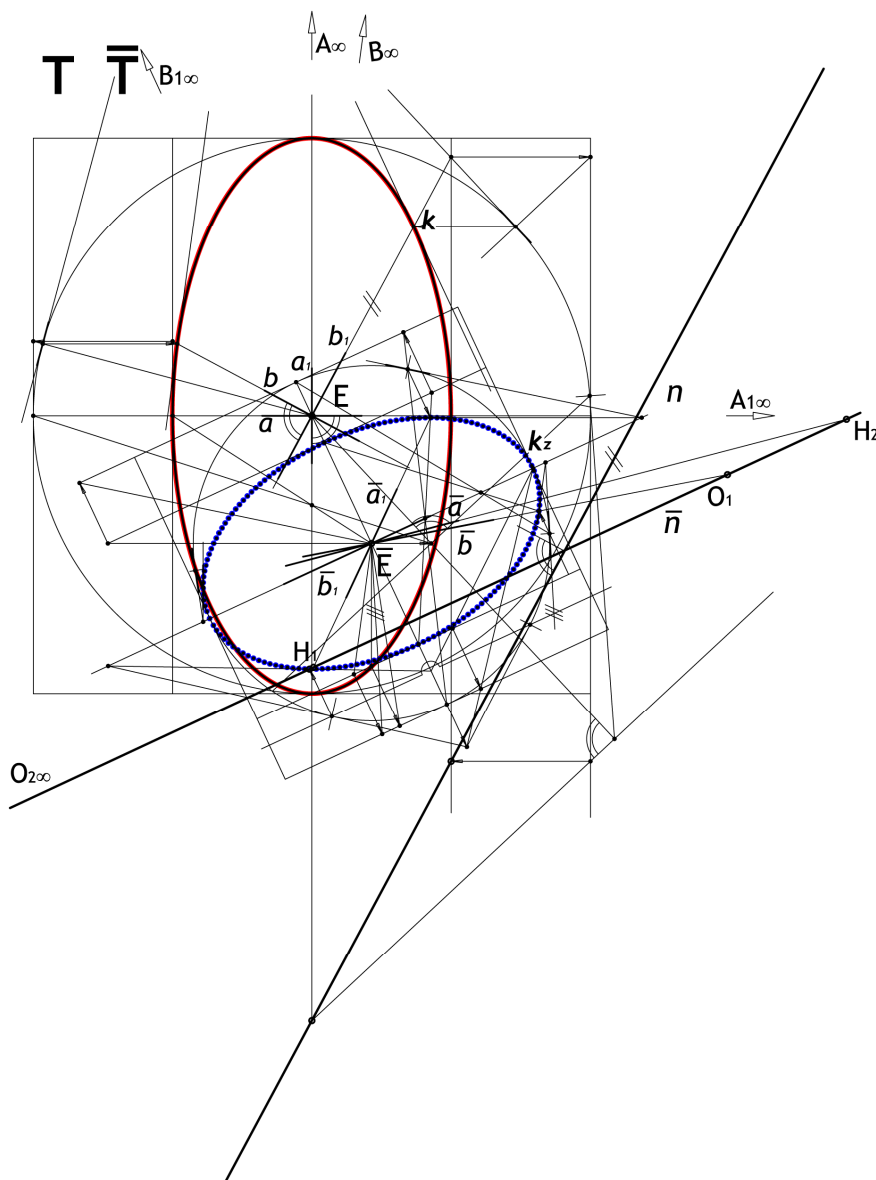


slika 127. Određivanje presečnih tačaka dve realne konike

Dvostruke prave  $d_1$  i  $d_2$  određuju se tako što se proizvoljno odabranim tačkama  $M$  i  $N$  odrede konjugovani polovi  $M_1$  i  $N_1$ . Za pol  $M$  konjugovani pol  $M_1$  je presečna tačka polara konika  $k$  i  $k_1$ , a na isti način određuje se i konjugovani pol  $N_1$  tački  $N$ . Spojnice tačaka  $M$  i  $M_1$ , odnosno  $N$  i  $N_1$  sa temenom autopolarnog trougla  $Q$  su prave eliptičnog involutornog pramena. Za taj pramen određuju se dvostruke prave  $d_1$  i  $d_2$ , na kojima se nalaze tačke preseka zadatih konika. Prethodno opisanim konstruktivnim postupkom moguće je odrediti presek bilo kog para realnih konika.

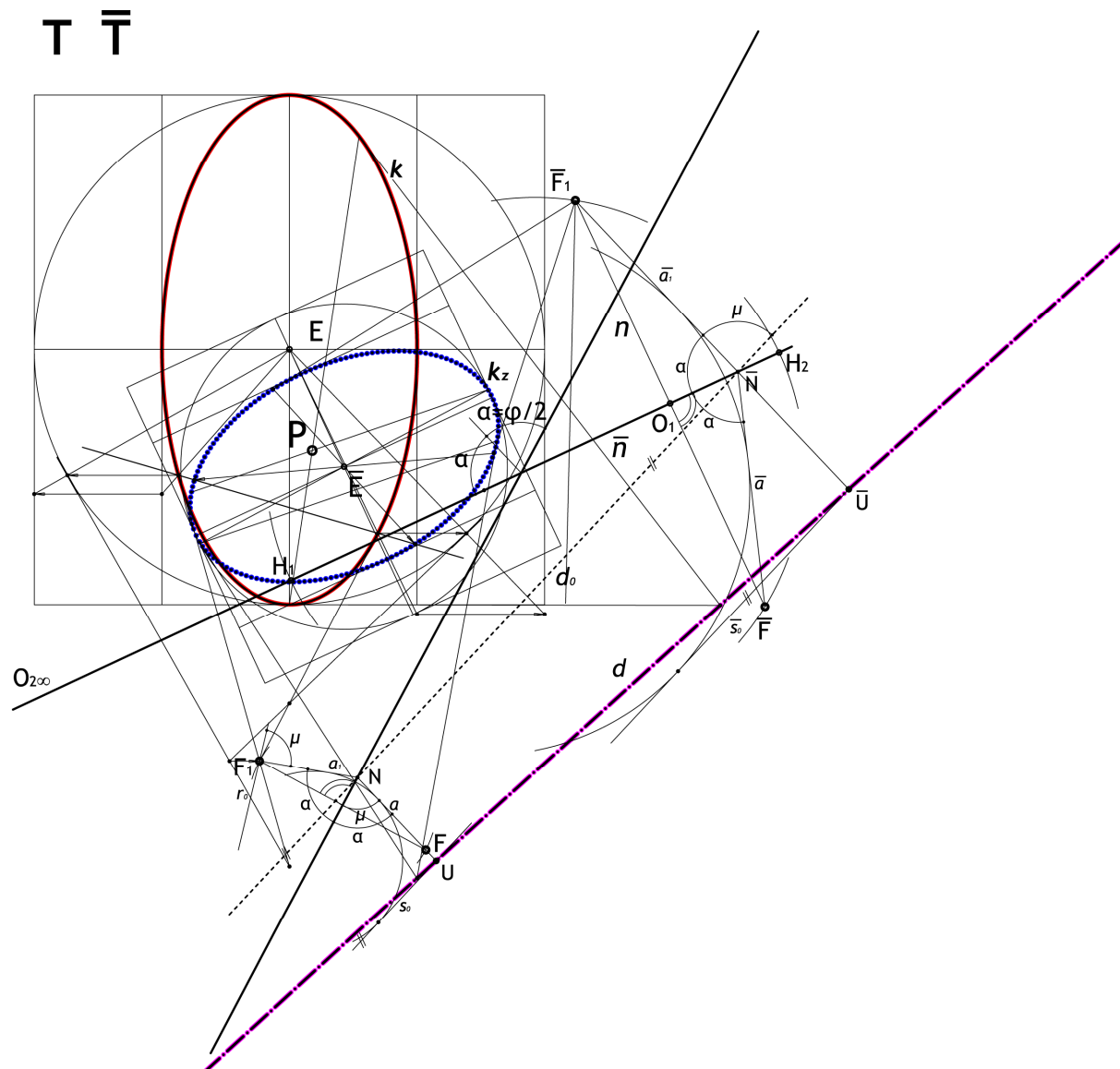
## II4.2.2 Presečne tačke realne i imaginarne konike

Imaginarne konike u ovom radu date su svojim realnim zastupnicima i obeležene su isprekidanom linijom. Nastanak i konstruktivni postupci poznati su iz literature /43, 50/. Elipsa  $k$  i elipsa  $k_z$  (realni zastupnik imaginarne elipse  $k_i$ ), određuju polarna polja  $T$  i  $\bar{T}$ , između kojih se uspostavlja kolinearni odnos, *slika 128*. Antipolarna tačka  $E$ , s obzirom na koniku  $k_z$  (odnosno polara imaginarne konike  $k_i$ ) je nedoglednica  $\bar{n}$ , a polara tačke  $\bar{E}$ , s obzirom na elipsu  $k$ , je nedoglednica  $n$ . Za dati kolinearni odnos one su pridružene fiktivnim pravama polja  $T$  i  $\bar{T}$ . Tački  $E$  pridružena je tačka  $\bar{E}$ , a cirkularnom involutornom pramenu pravih ( $E$ ) pridružen je eliptički involutorni pramen ( $\bar{E}$ ). Prave  $a$ ,  $a_1$ ,  $b$  i  $b_1$  su parovi pravih cirkularnog pramena ( $E$ ) i proizvoljno su izabrane. Njima su pridružene prave  $\bar{a}$ ,  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{b}$  i  $\bar{b}_1$  eliptičkog involutornog pramena ( $\bar{E}$ ). Prilikom pridruživanja korišćena je afina kružnica. Pramen ( $\bar{E}$ ) indukuje na nedoglednici  $\bar{n}$  niz ( $O_1, O_2 : H_1, H_2$ ).



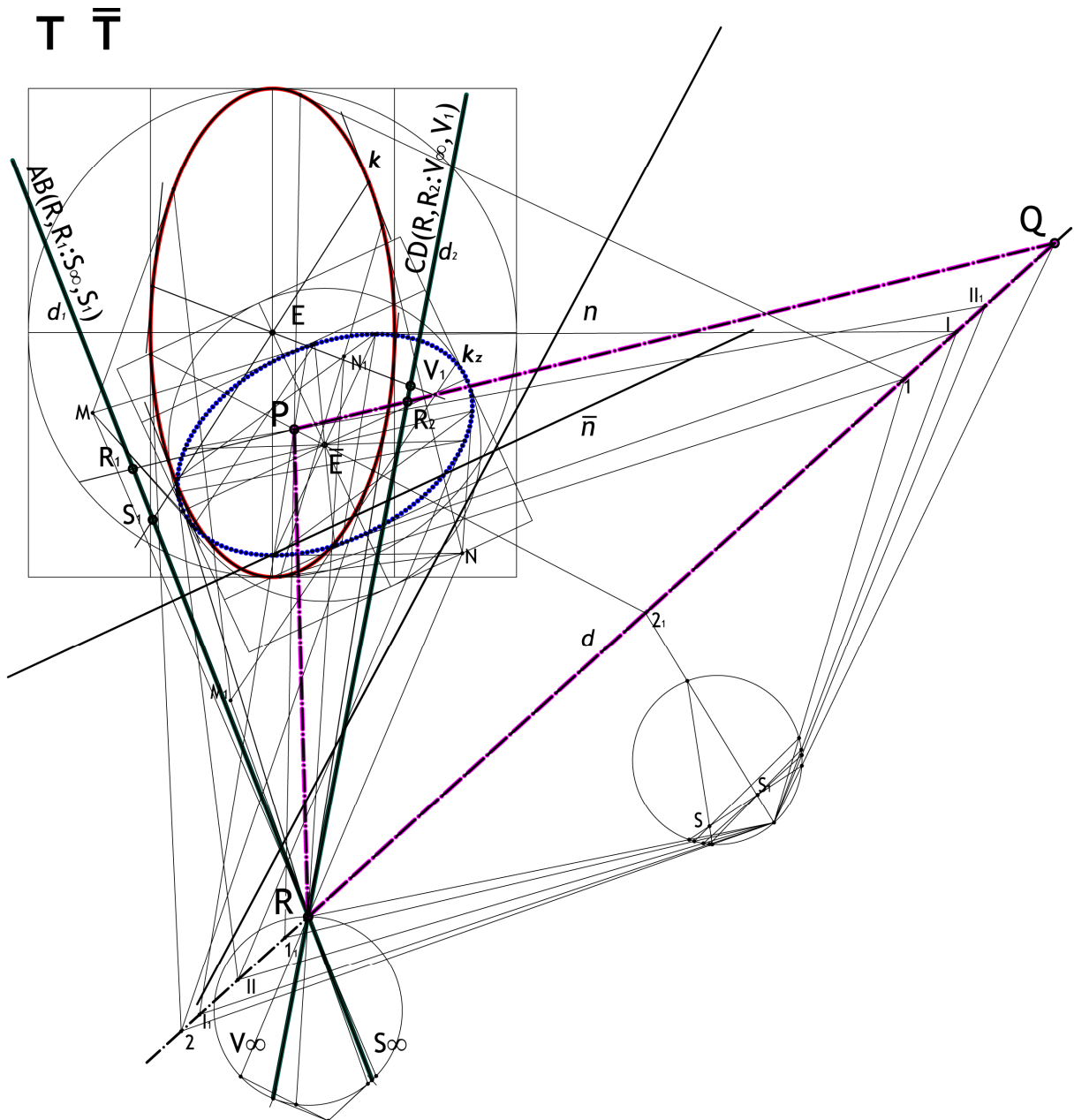
*slika 128. Određivanje presečnih tačaka realne i imaginarne konike*

*La Guerre* - ove tačke involutornog niza  $\bar{n}(O_1, O_2 : H_1, H_2)$  su žiže  $\bar{F}$  i  $\bar{F}_1$  polja  $\bar{T}$ , a pridružene tačke  $F$  i  $F_1$  žiže polja  $T$ , **slika 129**. Kako je tačka  $O_2$  u beskonačnosti, onda je tačka  $O_1$  središte involucije, a kružnica sa centrom na nedoglednici  $\bar{n}$  koja prolazi kroz tačke  $H_1$  i  $H_2$  preseca normalu nedoglednice  $\bar{n}$  u tački  $O_1$  u žižama  $\bar{F}$  i  $\bar{F}_1$ . Žiže  $F$  i  $F_1$  su određene tako što je određena antipolara žiže  $\bar{F}_1$ , u odnosu na koniku  $k_z$ , a koja je ista prava kao i polara žiže  $F_1$ , s obzirom na koniku  $k$ . Žiža  $F$  simetrična je sa žižom  $F_1$ , u odnosu na nedoglednicu  $n$ . Primenom postupka za određivanje direktne veze između jedne realne dvostruke prave i žiža opšte kolinearnih polja moguće je odrediti strane zajedničkog autopolarnog trougla /55/. Postupak je prikazan na **slici 129** i identičan je prethodno opisanom postupku u delu II4.2.1, prilikom određivanja presečnih tačaka para realnih konika. U nastavku konstrukcije, za dvostruku pravu  $d$  (stranu zajedničkog autopolarnog trougla) određen je pol  $P$ , jedno od temena zajedničkog autopolarnog trougla. Izabrane su dve proizvoljne tačke na dvostrukoj pravoj  $d$  i za njih, kao polove, određene su polara na elipsi  $k$  i antipolara na elipsi  $k_z$ . U preseku polare i antipolare nalazi se traženi pol  $P$ .



**slika 129.** Određivanje presečnih tačaka realne i imaginarne konike

Temena  $Q$  i  $R$  zajedničkog autopolarnog trougla određena su nalaženjem po dva para pridruženih tačaka eliptičnih nizova na pravoj  $d$ , koje indukuju elipse (konike)  $k$  i  $k_z$ , **slika 130**. Proizvoljno odabranim tačkama  $1, 2, I$  i  $II$  na pravoj  $d$ , pridružene su tačke  $1_1, 2_1, I_1$  i  $II_1$ . Postupak je izveden tako što su za polove  $1$  i  $2$  određene polare u odnosu na elipsu  $k$  koje pravu  $d$  seku u tačkama  $1_1$  i  $2_1$ , a za polove  $I$  i  $II$  su određene antipolare u odnosu na elipsu  $k_z$  (realnog zastupnika imaginarne konike  $e_j$ ) koje pravu  $d$  seku u tačkama  $I_1$  i  $II_1$ . Zraci proizvoljno odabranog eliptičnog involutornog pramena kroz tačke jednog eliptičnog niza ( $1, 1_1, 2$  i  $2_1$ ) određuju u preseku tetiva tačku  $S$ , a zraci drugog eliptičnog involutornog pramena kroz tačke niza ( $I, I_1, II$  i  $II_1$ ) određuju u preseku tetiva tačku  $S_1$ . Tetiva pomoćne kružnice kroz tačke  $S$  i  $S_1$  određuje zajedničke prave eliptičnih pramenova, koji u preseku sa pravom  $d$  daju zajedničke tačke  $Q$  i  $R$  nizova, a koje predstavljaju preostala dva temena zajedničkog autopolarnog trougla.



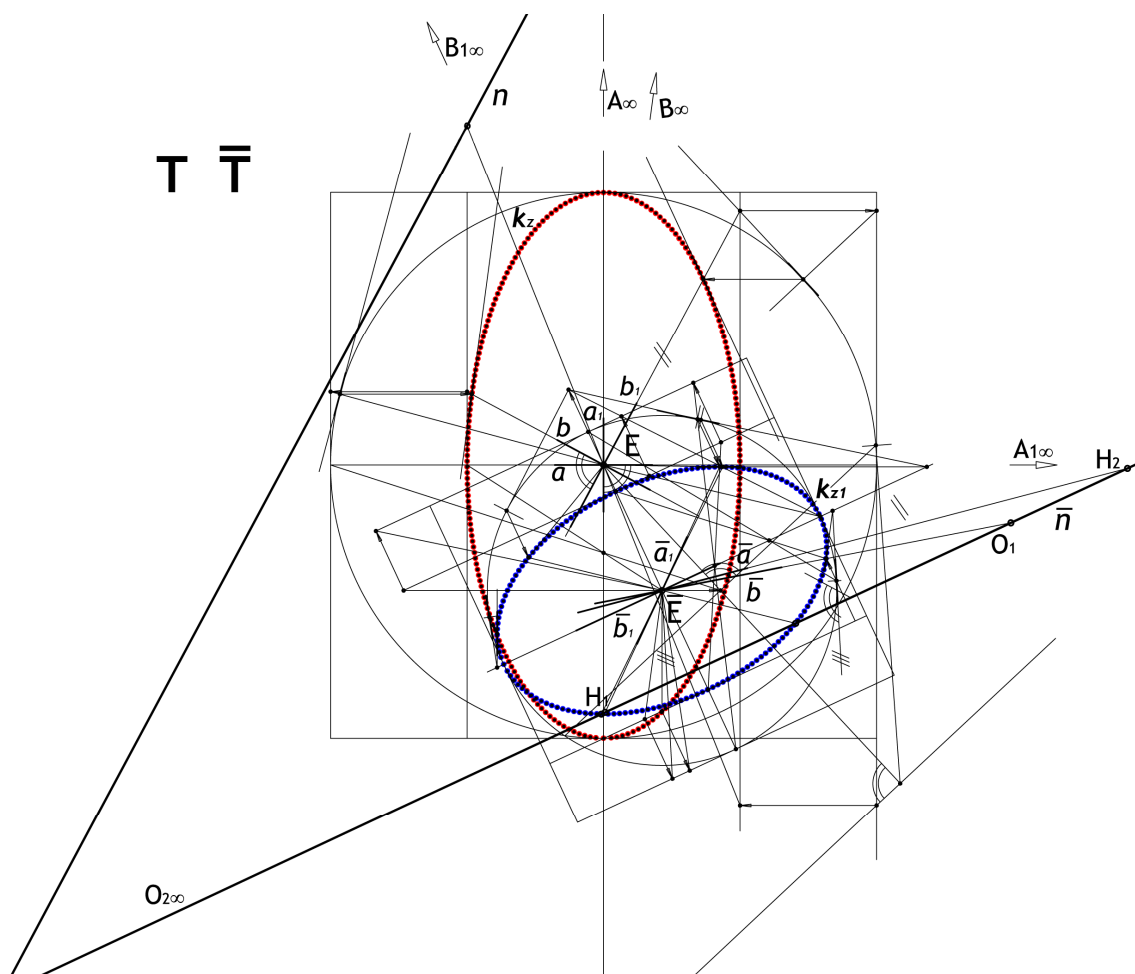
*slika 130. Određivanje presečnih tačaka realne i imaginarne konike*



Na isti način kao i kod preseka dve realne konike određuju se dvostruke prave  $d_1$  i  $d_2$ , na kojima se nalaze tačke preseka zadatih konika. Tačke preseka konika definišu se kao dvostruke tačke eliptičnih nizova na pravama  $d_1$  i  $d_2$ , indukovanih involucijom u odnosu na konike  $k$  i  $k_z$ ,  $AB$  ( $R, R_1 : S_\infty, S_1$ ) i  $CD$  ( $R, R_2 : V_\infty, V_1$ ), *slika 130*. Prethodno opisanim konstruktivnim postupkom se određuje presek bilo koje realne i imaginarne konike.

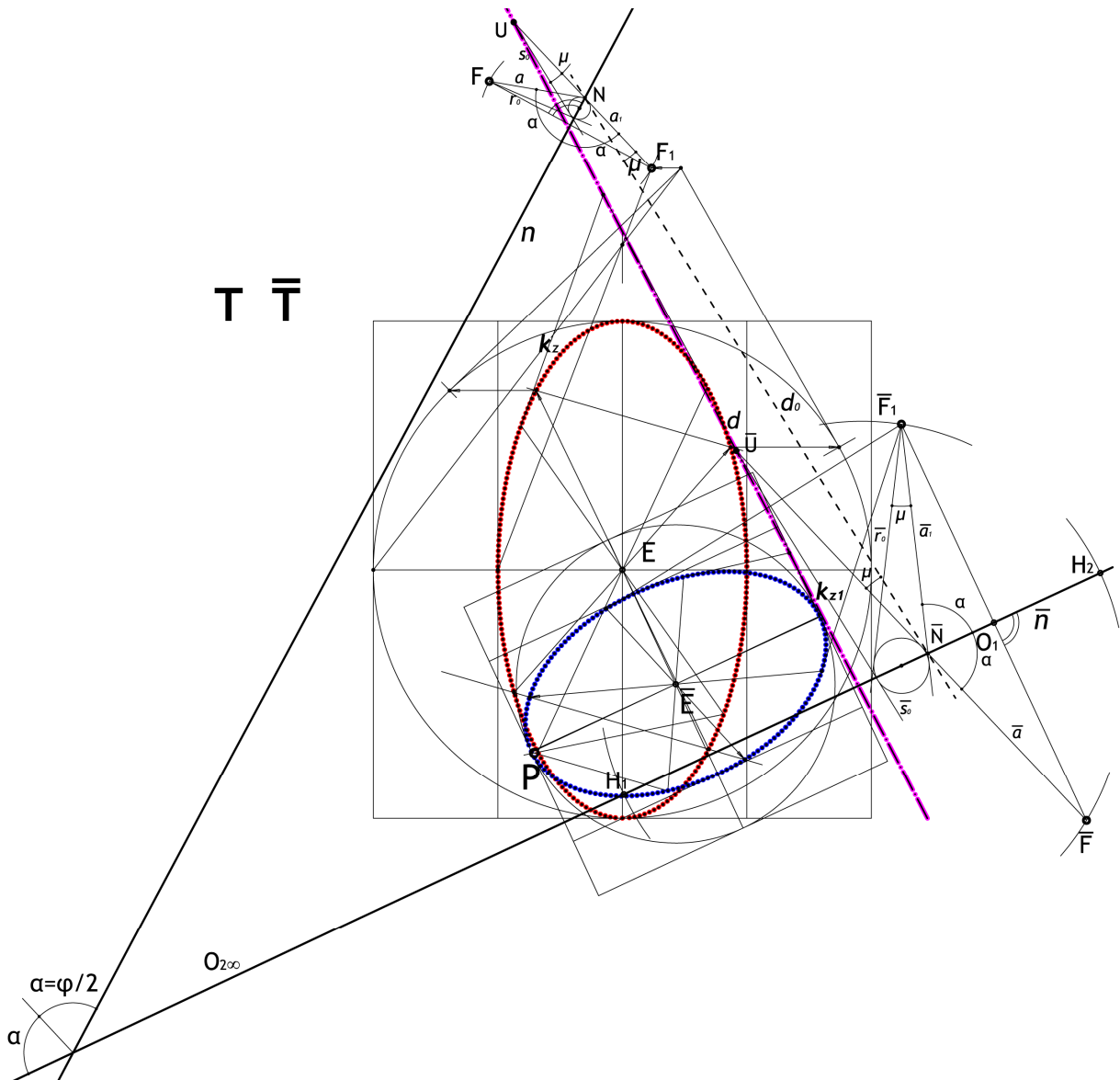
### II4.2.3 Presečne tačke dve imaginarne konike

Elipse  $k_z$  i  $k_{z1}$  su realni zastupnici imaginarnih elipsi  $k_i$  i  $k_{i1}$  i određuju polarna polja  $T$  i  $\bar{T}$ , između kojih se uspostavlja kolinearni odnos, *slika 131*. Antipolara tačke  $E$ , s obzirom na koniku  $k_{z1}$  (odnosno polara imaginarne konike  $k_{i1}$ ) je nedoglednica  $\bar{n}$ , a antipolara tačke  $\bar{E}$ , s obzirom na elipsu  $k_z$  (odnosno polara imaginarne konike  $k_i$ ), je nedoglednica  $n$ . Za dati kolinearni odnos one su pridružene fiktivnim pravama polja  $T$  i  $\bar{T}$ . Tački  $E$  pridružena je tačka  $\bar{E}$ , a cirkularnom involutornom pramenu pravih  $(E)$  pridružen je eliptički involutorni pramen  $(\bar{E})$ . Prave  $a, a_1, b$  i  $b_1$  su parovi pravih cirkularnog pramena  $(E)$  i proizvoljno su izabrane. Njima su pridružene prave  $\bar{a}, \bar{a}_1, \bar{b}$  i  $\bar{b}_1$  eliptičkog involutornog pramena  $(\bar{E})$ . Prilikom pridruživanja korišćena je afina kružnica. Pramen  $(\bar{E})$  indukuje na nedoglednici  $\bar{n}$  niz  $(O_1, O_2 : H_1, H_2)$ .



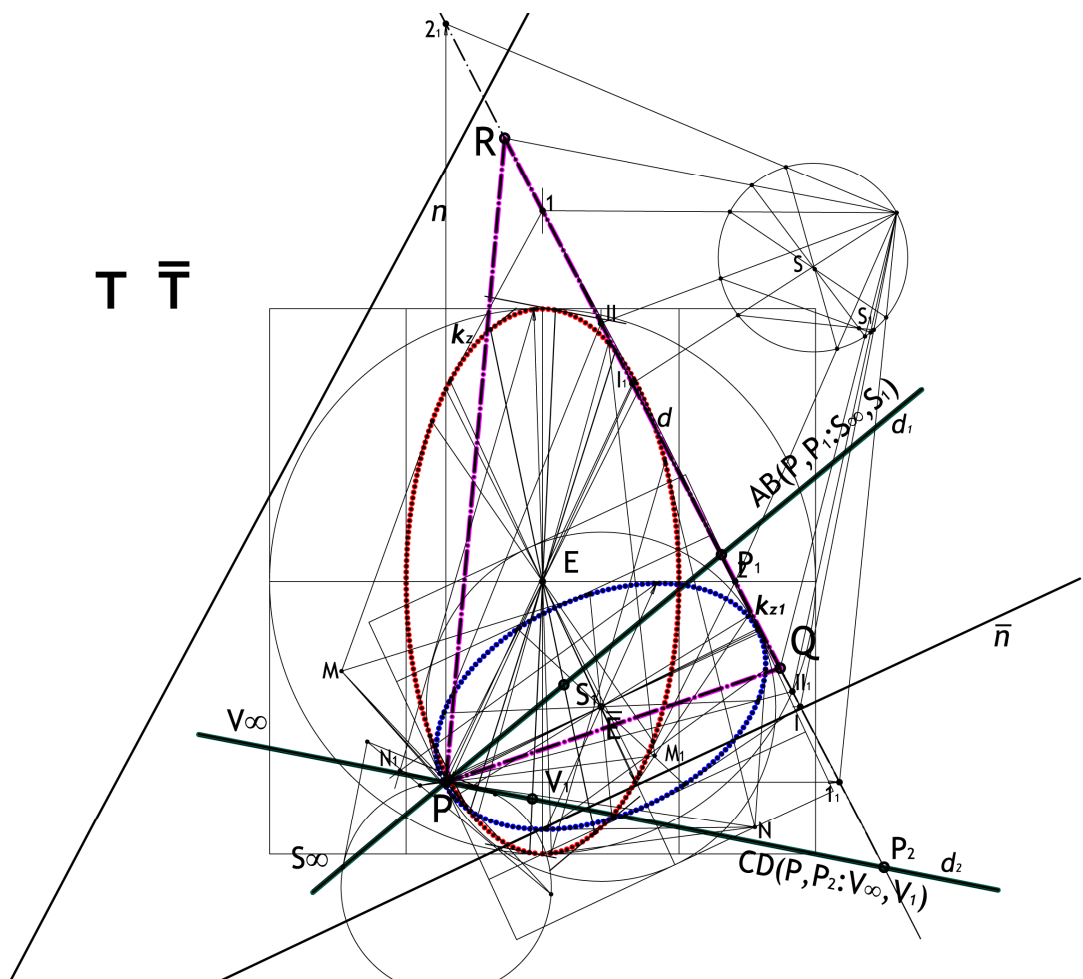
*slika 131. Određivanje presečnih tačaka dve imaginarne konike*

*La Guerre* - ove tačke involutornog niza  $\bar{n}(O_1, O_2 : H_1, H_2)$  su žiže  $\bar{F}$  i  $\bar{F}_1$  polja  $\bar{T}$ , a pridružene tačke  $F$  i  $F_1$  žiže polja  $T$ , *slika 132*. Kako je tačka  $O_2$  u beskonačnosti, onda je tačka  $O_1$  središte involucije, a kružnica sa centrom na nedoglednici  $\bar{n}$  koja prolazi kroz tačke  $H_1$  i  $H_2$  preseca normalu nedoglednice  $\bar{n}$  u tački  $O_1$  u žižama  $\bar{F}$  i  $\bar{F}_1$ . Žiže  $F$  i  $F_1$  određene su tako što je određena antipolara žiže  $\bar{F}_1$ , u odnosu na koniku  $k_{z1}$ , a koja je ista prava kao i antipolara žiže  $F_1$ , s obzirom na koniku  $k_z$ . Žiža  $F$  je simetrična sa žižom  $F_1$ , u odnosu na nedoglednicu  $n$ . Primenom postupka za određivanje direktne veze između jedne realne dvostruke prave i žiža opšte kolinearnih polja moguće je odrediti strane zajedničkog autopolarnog trougla /55/. Postupak je prikazan na *slici 132* i identičan je prethodno opisanom postupku u delu II4.2.1. Za dvostruku pravu  $d$ , stranu zajedničkog autopolarnog trougla, određen je pol  $P$ , jedno teme zajedničkog autopolarnog trougla. Izabrane su dve proizvoljne tačke na dvostrukoj pravoj  $d$  i za njih, kao polove, određene su antipolare na elipsama  $k_z$  i  $k_{z1}$ , realnim zastupnicima imaginarnih elipsi  $k_i$  i  $k_{i1}$ . U preseku antipolara nalazi se traženi pol  $P$ , *slika 132*.



*slika 132. Određivanje presečnih tačaka dve imaginarne konike*

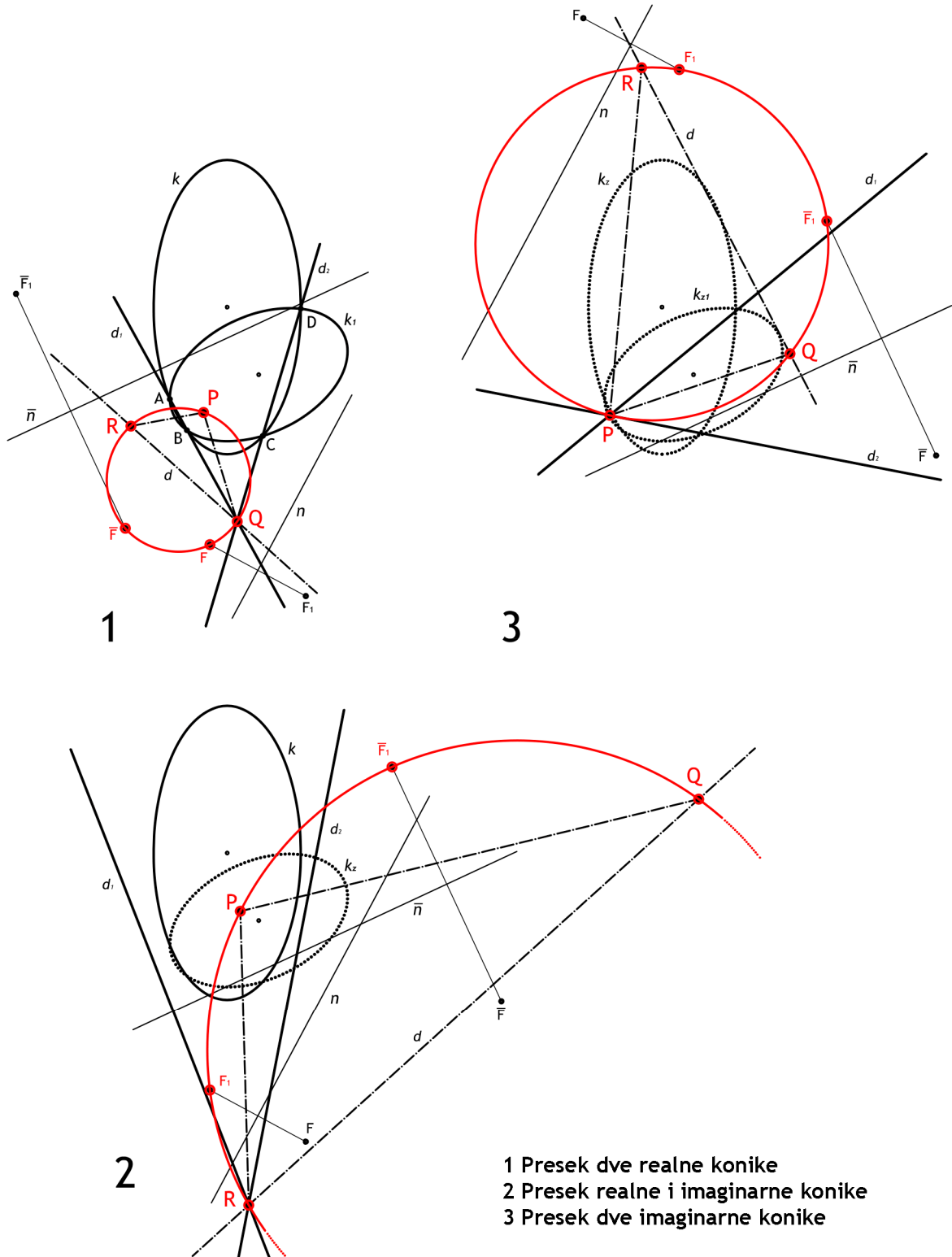
Temena  $Q$  i  $R$  zajedničkog autopolarnog trougla određena su nalaženjem po dva para pridruženih tačaka eliptičnih nizova na pravoj  $d$ , koje indukuju elipse (konike)  $k_z$  i  $k_{z1}$ , *slika 133*. Proizvoljno odabranim tačkama  $1, 2, I$  i  $II$  na pravoj  $d$ , pridružene su tačke  $1_1, 2_1, I_1$  i  $II_1$ . Postupak je izveden tako što su za polove  $1$  i  $2$  određene antipolare, u odnosu na elipsu  $k_z$  (realnog zastupnika imaginarne konike  $k_i$ ), koje pravu  $d$  seku u tačkama  $1_1$  i  $2_1$ , a za polove  $I$  i  $II$  su određene antipolare, u odnosu na elipsu  $k_{z1}$  (realnog zastupnika imaginarne konike  $k_{i1}$ ), koje pravu  $d$  seku u tačkama  $I_1$  i  $II_1$ . Zraci proizvoljno odabranog eliptičnog involutornog pramena kroz tačke jednog eliptičnog niza ( $1, 1_1, 2$  i  $2_1$ ) određuju u preseku tetiva tačku  $S$ , a zraci drugog eliptičnog involutornog pramena kroz tačke niza ( $I, I_1, II$  i  $II_1$ ) određuju u preseku tetiva tačku  $S_1$ . Tetiva pomoćne kružnice kroz tačke  $S$  i  $S_1$  određuje zajedničke prave eliptičnih pramenova, koji u preseku sa pravom  $d$  daju zajedničke tačke  $Q$  i  $R$  nizova, temena zajedničkog autopolarnog trougla.



*slika 133. Određivanje presečnih tačaka dve imaginarne konike*

Dvostruke prave  $d_1$  i  $d_2$  određuju se istim prethodno opisanim postupkom, primenjenim kod preseka dve realne, odnosno realne i imaginarne konike. Na dvostrukim pravama nalaze se tačke preseka zadatih konika, koje se definišu kao dvostruke tačke eliptičnih nizova na pravama  $d_1$  i  $d_2$ , indukovanih involucijom u odnosu na konike  $k_z$  i  $k_{z1}$ ,  $AB(P, P_1 : S_\infty, S_1)$  i  $CD(P, P_2 : V_\infty, V_1)$ . Prethodno opisanim konstruktivnim postupkom može se odrediti presek bilo kog para imaginarnih konika.

Na *slici 134* prikazana je provera ispravnosti određenih preseka konika, u sve tri prethodno prikazane varijante. Cirkularni involutorni pramenovi ( $F$ ) i ( $\bar{F}$ ) određuju kružnicu, a pramenovi ( $F_1$ ) i ( $\bar{F}_1$ ) hiperbolu. Kružnica i hiperbola seku se u tačkama  $P$ ,  $R$  i  $Q$ . Za proveru su upotrebljene kružnice, označene crvenom bojom, koje moraju da prolaze kroz temena autopolarne trougla  $P$ ,  $R$  i  $Q$ , kao i kroz žiže  $F$  i  $\bar{F}$ .



*slika 134. Provera dobijenih rezultata*

## II5 KONSTRUKTIVNA OBRADA PRAVOIZVODNIH I OPŠTIH POVRŠI 2. STEPENA PRIMENOM OPŠTE ILI PERSPEKTIVNE KOLINEACIJE I APSOLUTNE KONIKE PROSTORA

Za konstruktivnu obradu površi 2. stepena (kvadrika), koristi se opšta ili perspektivna kolineacija prostora. U kolinearnim prostorima su beskonačno dalekim elementima prostora pridruženi elementi u konačnosti. Beskonačno dalekoj ravni jednog prostora pridružena je nedogledna ravan drugog prostora. Apsolutnoj konici prvog prostora pridružena je slika apsolutne konike drugog prostora i obrnuto /27, 50/. U daljem izlaganju prikazani su konstruktivni postupci za dobijanje karakterističnih parametara opšte (nedogledne ravni, ose prostora i slike apsolutne konike prostora) i perspektivno kolinearnih prostora (središte perpektiviteta, ravan koincidencije, žiže prostora i slike apsolutne konike prostora). Cilj je da se upotrebom apsolutne konike prostora odrede osnovni parametri površi: središte, ose, kružni preseki i kružne tačke. Primena opšte kolineacija prostora je složenija od perspektivne, pa je u nastavku teksta perspektivna kolineacija prostora detaljnije opisana. Koristeći bilo koju od ovih kolineacija prostora, konstruktivna obrada kvadrika se svodi na rešavanje intersekcije konika. Primena opšte kolineacije prostora u konstruktivnoj obradi kvadrika prikazana je šematski, a slike i postupci su preuzeti iz literature pod brojem 27. Konstruktivna obrada kvadrika primenom perspektivne kolineacije prostora prikazana je na primeru hiperboličkog paraboloida. Kod ove površi se beskonačno daleka konika površi raspada na dve prave, pa se njena intersekcija sa slikom apsolutne konike prostora jednostavno određuje, s obzirom da se radi o specijalnom slučaju preseka para konika.

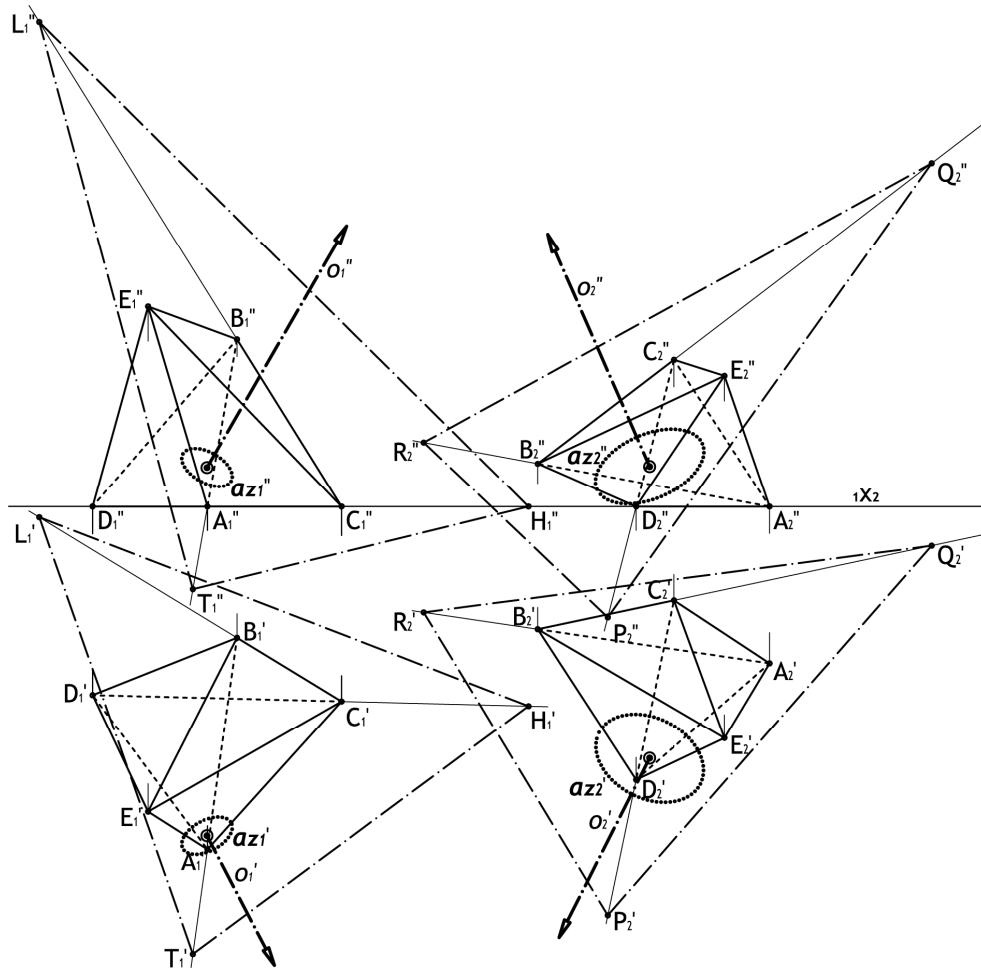
### II5.1 OPŠTA KOLINEACIJA PROSTORA

Dva prostora su kolinearno pridružena ako je svakoj tački jednog prostora pridružena jedna tačka drugog prostora, odnosno svakoj ravni jednog prostora pridružena je jedna ravan drugog prostora, a svakoj tački u nekoj ravni jednog prostora pridružena je tačka drugog prostora koja leži u pridruženoj ravni tog prostora. Kolinearno pridruživanje dva prostora definisano je sa pet parova pridruženih tačaka ili ravni, na sledeći način: Ako grupi od pet tačaka, ili pet ravni, prostora  $W_1$ , pridružimo pet tačaka, ili ravni, prostora  $W_2$ , tako da nijedna grupa od četiri tačke ne leži u jednoj ravni, odnosno po četiri ravni ne prolaze jednom tačkom, uspostavlja se kolinearan odnos prostora  $W_1$  i  $W_2$  /18, 50/.

Konstruktivni postupci opšte kolinearnih prostora su poznati iz literature /videti 27, 28, 29/. Na *slici 135* /preuzeta iz 27/, u paru Monžovih projekcija, zadata su dva opšte kolinearna prostora  $W_1$  i  $W_2$  sa po pet parova jednoznačno pridruženih tačaka  $A_1, B_1, C_1, D_1$  i  $E_1$  u prostoru  $W_1$  i  $A_2, B_2, C_2, D_2$  i  $E_2$  u prostoru  $W_2$ . Na ovaj način potpuno je uspostavljen projektivni odnos, dva kolinearna prostora. Za konstruktivno određivanje svih karakterističnih parametara, koristi se projektivni odnos na svim pridruženim nizovima tačaka. Svaki projektivni prostor ima jednu beskonačno daleku ravan. Fiktivna (beskonačno daleka) ravan prvog prostora pridružena je nedoglednoj ravni drugog prostora i obrnuto. Nedogledne ravni



određene su sa tri tačke (nedogledi) na projektivnim nizovima, koji su pridruženi beskonačno dalekim tačkama na pridruženim projektivnim nizovima u svakom prostoru. Nedogledna ravan  $N_1$  u prostoru  $W_1$  pridružena je beskonačno dalekoj ravni  $N_{2\infty}$  prostora  $W_2$  i određena je nedogledima  $T_1$ ,  $H_1$  i  $L_1$ . Nedogledna ravan  $M_2$  u prostoru  $W_2$  pridružena je beskonačno dalekoj ravni  $M_{1\infty}$  prostora  $W_1$  i određena je nedogledima  $R_2$ ,  $P_2$  i  $Q_2$ . Ose prostora  $o_1$  u prostoru  $W_1$  i  $o_2$  u prostoru  $W_2$  su jedine dve prave koje su projektivno pridružene i upravne na odgovarajuće nedogledne ravni  $N_1$  i  $M_2$  /18, 27/.

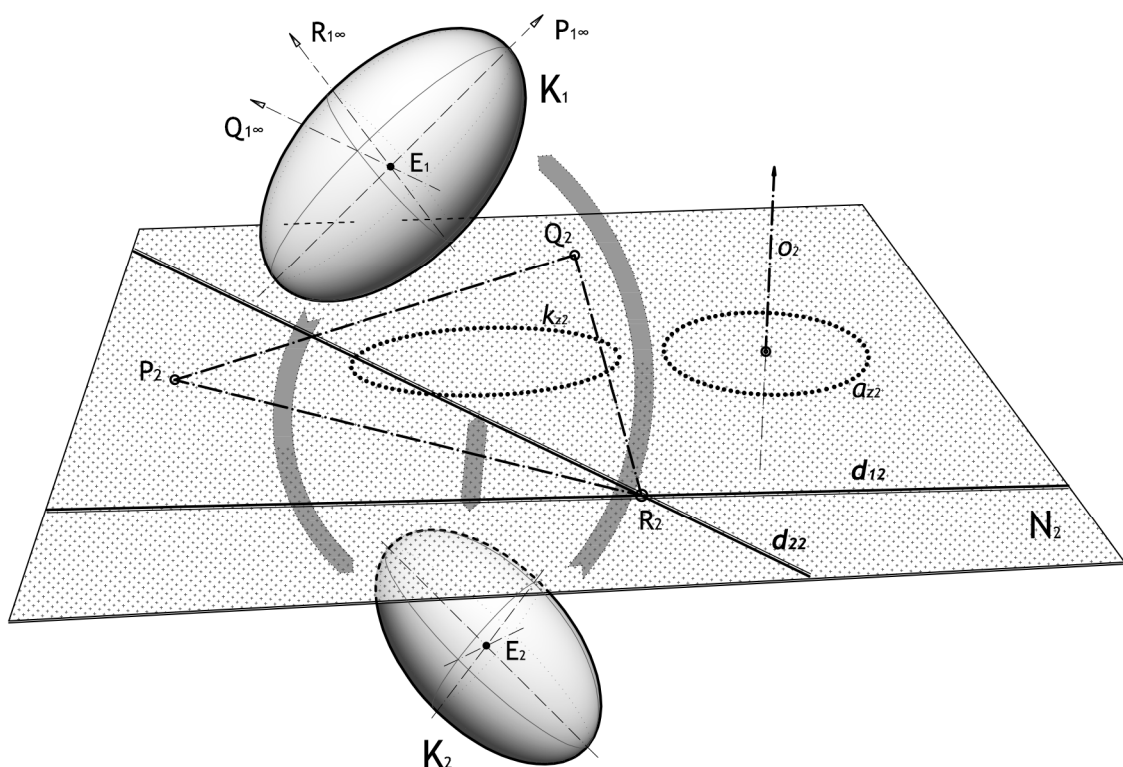


slika 135. Opšte kolinearni prostori /27/

### II5.1.1 Konstruktivna obrada kvadraka primenom opšte kolineacije prostora

Za konstruktivnu obradu kvadraka primenom opšte kolineacije prostora neophodno je, na prethodno opisan način, zadati dva opšte kolinearna prostora i odrediti njihove karakteristične parametre: nedogledne ravni, ose i centre prostora prostora i slike apsolutnih konika prostora. Svakoj kvadraci u jednom prostoru pridružena je jedna kvadraci u drugom prostoru i obrnuto. Na slici 136 šematski je, na primeru troosnog elipsoida, prikazan postupak konstruktivne obrade kvadraka primenom opšte kolineacije prostora. Kvadraci  $K_1$  (elipsoid sa centrom  $E_1$ ) u prostoru  $W_1$  pridružena je kvadraci  $K_2$  (elipsoid sa centrom  $E_2$ ) u prostoru

$W_2$ . U nedoglednoj ravni  $N_2$ , prostora  $W_2$ , postoje dve konike: slika apsolutne konike prostora  $a_{z2}$  i presečna konika  $k_{z2}$ , kvadrike  $K_2$  i nedogledne ravni  $N_2$  (ova konika može biti realna ili imaginarna, u datom slučaju je imaginarna). Postupkom opisanim u delu II4, određuju se zajednički elementi para konika  $a_{z2}$  i  $k_{z2}$ . Zajednički elementi su temena zajedničkog autopolarnog trougla  $P_2R_2Q_2$  i dve realne prave  $d_{12}$  i  $d_{22}$ , na kojima date konike indukuju identičnu involuciju, odnosno čije dvostruke tačke eliptičnih nizova predstavljaju presek tih konika. Tako određeni elementi se opštom kolineacijom vraćaju u prostor  $W_1$ , odnosno u beskonačno daleku ravan tog prostora  $M_{1\infty}$ . Spojnice temena zajedničkog autopolarnog trougla  $P_{1\infty}$ ,  $R_{1\infty}$  i  $Q_{1\infty}$  sa središtem  $E_1$ , kvadrike  $K_1$ , su ose kvadrike (troosnog elipsoida). Dva pramena uporednih ravni kroz prave  $d_{1\infty}$  i  $d_{2\infty}$ , seku kvadriku  $K_1$  po kružnicama, a četiri ravni iz tih pramenova dodiruju kvadriku  $K_1$  u kružnim tačkama /27/.



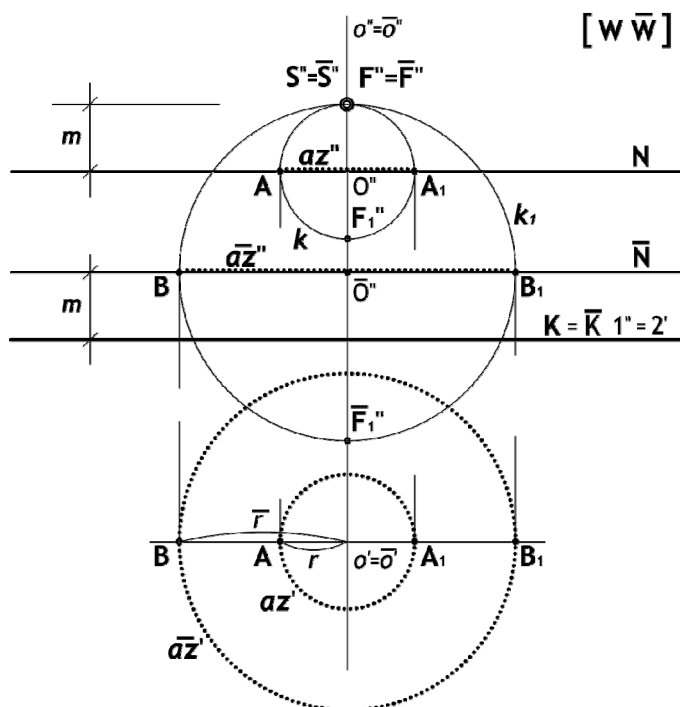
slika 136. Šematski prikaz konstruktivne obrade kvadrika primenom opšte kolineacije prostora

## II5.2 PERSPEKTIVNA KOLINEACIJA PROSTORA

Dva kolinearna prostora  $W$  i  $\bar{W}$ , određena su dvema grupama od po pet parova pridruženih tačaka:  $A, B, C, D, E$  u prostoru  $W$  i  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{E}$  u prostoru  $\bar{W}$ . Pri tome su  $A=\bar{A}$ ,  $B=\bar{B}$ ,  $C=\bar{C}$  i  $D=\bar{D}$  i leže u istoj ravni  $T$ . Dva kolokalna kolinearna polja u toj ravni imaju četiri tačke pridružene same sebi, a time i sve ostale tačke te ravni pridružene same sebi. Parovi pridruženih tačaka u dva kolinearna prostora, koji imaju jednu ravan i sve njene tačke zajedničke (ravan koincidencije), leže na pravama koje prolaze jednom tačkom  $S$  (središte perspektiviteta). Kolinearni odnos uspostavljen između dva prostora na ovaj način naziva se **perspektivna kolineacija** /50/.

### II5.2.1 Određivanje slike apsolutne konike prostora

Na *slici 137*, u paru ortogonalnih projekcija, data su dva perspektivno kolinearna prostora  $\overline{W}$  i  $\overline{W}$ . Ravan koincidencije  $K=\overline{K}$  i nedogledne ravni  $N$  i  $\overline{N}$ , su u drugoj projekciji u zračnom položaju. Središte perspektiviteta, tačke  $S=\overline{S}$ , su istovremeno i žiže (fokusi) datih prostora  $F=\overline{F}$ , a ose  $o=\overline{o}$  su upravne na ravan koincidencije. Kružnicama  $k$  i  $k_1$ , čija su središta tačke  $O''$  i  $O''$  u nedoglednim ravnima koje prolaze središtima perspektiviteta  $S=\overline{S}$ , određena su dva para pridruženih tačaka  $F''=\overline{F''}$  i  $F_1'', \overline{F}_1''$  na osi  $o''$ . Te tačke su žiže perspektivno kolinearnih prostora  $\overline{W}$  i  $\overline{W}$ . Istovremeno te kružnice seku nedogledne ravni  $N$  i  $\overline{N}$  u tačkama  $A, A_1$  i  $B, B_1$ . Duž  $AA_1$ , sa središtem  $O$ , je prečnik imaginarne kružnice  $a_z$ , koja je pridružena apsolutnoj konici prostora  $\overline{W}$ , a duž  $BB_1$ , sa središtem  $\overline{O}$ , je prečnik imaginarne kružnice  $\overline{a}_z$ , koja je pridružena apsolutnoj konici prostora  $\overline{W}$ . Na prikazan način, određene su slike apsolutnih konika prostora  $\overline{W}$  i  $\overline{W}$ , odnosno njihovi realni zastupnici, koji su u drugoj projekciji u zračnom položaju, a u I projekciji kružnice predstavljene isprekidanom linijom. U prvoj projekciji slike spolutnih konika prostora vide se u pravoj veličini /43/.



slika 137. Određivanje slike apsolutne konike prostora

### II5.2.2 Određivanje ose, temena i glavne ravni hiperboličkog paraboloida

U ovom primeru prikazan je postupak određivanja osa, temena i glavne ravni hiperboličkog paraboloida koji je zadat proizvoljnim prostornim četvorostranikom  $ABCD$ . Na *slici 138* proizvoljno su date tačke  $A, B, C$  i  $D$  u paru ortogonalnih projekcija, koje određuju po dve izvodnice jednog i drugog sistema izvodnica hiperboličkog paraboloida.

Za proizvoljno izabranu perspektivnu kolineaciju, pri čemu je ravan 1 ravan koincidencije, tačka  $S$  središte perpektiviteta, tačke  $A$  i  $\bar{A}$  par pridruženih tačaka, prostoru  $W$  pridružen je prostor  $\bar{W}$ , a datom hiperboličkom paraboloidu pridružen je jednograni hiperboloid. Za ovako usvojenu kolineaciju prostora, beskonačno dalekoj ravni  $N_\infty$ , prostora  $W$ , pridružena je nedogledna ravan  $\bar{N}$ , prostora  $\bar{W}$ . Ravan koincidencije i nedogledna ravan su u drugoj projekciji u zračnom položaju. Beskonačno dalekim tačkama  $E_\infty, F_\infty, G_\infty, H_\infty$  stranica  $\underline{AB}, \underline{CD}, \underline{AD}, \underline{BC}$ , četverostranika  $ABCD$ , pridružene su nedogledne tačke  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{H}$  u nedoglednoj ravni  $\bar{N}$ . Prave  $\bar{m}(\bar{E}, \bar{F})$  i  $\bar{n}(\bar{G}, \bar{H})$  u nedoglednoj ravni  $\bar{N}$ , pridružene su beskonačno dalekim izvodnicama hiperboličkog paraboloida  $ABCD$ . Imaginarna kružnica  $\bar{ai}$ , čiji je realni zastupnik kružnica  $\underline{az}$ , poluprečnika  $\underline{SO}$ , u nedoglednoj ravni  $\bar{N}$ , pridružena je apsolutnoj konici prostora  $W$ . Imaginarna kružnica  $\bar{ai}$  i raspadnuta konika  $\bar{k}(\bar{m}, \bar{n})$  imaju jedan zajednički autopolarni trougao  $\underline{PQR}$ . Tački  $\underline{P}(\bar{m} \times \bar{n})$ , kao polu, odgovara polara  $\underline{p}$ , s obzirom na imaginarnu kružnicu  $\bar{ai}$ , odnosno antipolara  $\underline{p}$  njenom realnom zastupniku kružnici  $\underline{az}$ . Imaginarna kružnica  $\bar{ai}$  na pravoj  $\underline{p}$  inducira eliptički involutorni niz čije su dvostruke tačke  $\underline{D}_1$  i  $\underline{D}_2$ . Zajedničke tačke  $\underline{R}$  i  $\underline{Q}$  ovih nizova na pravoj  $\underline{p}$  su temena zajedničkog autopolarnog trougla. Spojnice  $\underline{SP}, \underline{SQ}$  i  $\underline{SR}$  paralelne su osama hiperboličkog paraboloida  $ABCD$ .

Pošto je središte hiperboličkog paraboloida beskonačno daleka tačka, u konačnosti postoji samo jedna osa koja je paralelna sa spojnicom  $\underline{SP}$ . Ova osa je paralelna i presečnici direktrisnih ravni, pa se može odrediti i na taj način. Parovima osa ortogonalnog triedra  $\underline{SP}, \underline{SQ}$  i  $\underline{SR}$  određene su tri ortogonalne ravni koje su paralelne glavnim ravnima hiperboličkog paraboloida. Ravan  $\underline{SRQ}$  paralelna je dirnoj ravni površi u temenu  $T$ . Teme  $T$  je prodorna tačka ose kroz površ i kroz nju prolaze dve izvodnice hiperboličkog paraboloida jednog i drugog sistema izvodnica, koje u toj tački obrazuju dirnu ravan površi. Te izvodnice nazivaju se glavne izvodnice hiperboličkog paraboloida.

Teme površi dobija se preko glavnih izvodnica, koje su paralelne presečnicama direktrisnih ravni i ravni koja je upravna na osu površi. Spojnice tačaka  $\underline{SD}_1$  i  $\underline{SD}_2$  kao presečnice direktrisnih ravni  $\underline{SEF}$  i  $\underline{SGH}$  sa ravni  $\underline{SRQ}$ , paralelne su glavnim izvodnicama površi. Tačke  $\underline{D}_1$  i  $\underline{D}_2$  u nedoglednoj ravni  $\bar{N}$  pridružene su beskonačno dalekim tačkama glavnih izvodnica. Pošto se hiperbolički paraboloid datom kolineacijom preslikava u jednograni hiperboloid, onda su i njihove izvodnice međusobno pridružene. Izvodnice jednog hiperboloida su transversale triju pravih i to: jedan sistem izvodnica seku prave  $\underline{EF}, \underline{AD}$  i  $\underline{BC}$ , a drugi sistem izvodnica seku prave  $\underline{HG}, \underline{AB}$  i  $\underline{CD}$ . Izvodnice  $\underline{i}_1$  i  $\underline{i}_2$ , koje su pridružene glavnim izvodnicama  $\underline{i}_1$  i  $\underline{i}_2$ , prolaze nedoglednim tačkama  $\underline{D}_1$  i  $\underline{D}_2$ . Izvodnica  $\underline{i}_1$  prolazi tačkom  $\underline{D}_1$  i seče mimoilazne prave  $\underline{AD}$  i  $\underline{BC}$ , a izvodnica  $\underline{i}_2$  prolazi tačkom  $\underline{D}_2$  i seče mimoilazne prave  $\underline{AB}$  i  $\underline{CD}$ . Kolinearnim preslikavanjem dobijene su glavne izvodnice  $\underline{i}_1$  i  $\underline{i}_2$ , kao i teme  $T(\underline{i}_1 \times \underline{i}_2)$ . Osa  $o$  hiperboličkog paraboloida paralelna je spojnici  $\underline{SP}$  i sa pravama  $\theta_1$  i  $\theta_2$ , koje su paralelne spojnicama  $\underline{SR}$  i  $\underline{SQ}$ , čine jedan ortogonalni triedar pravih u temenu  $T$ .





## II6 ZAKLJUČNA RAZMATRANJA II POGLAVLJA

Površni 2. stepena imaju veliku primenu u arhitekturi. To se naročito odnosi na pravoizvodne površi 2. stepena, s obzirom na njihovo jednostavnije izvođenje i racionalnost konstrukcije. Pojedine opšte površi 2. stepena takođe su često primenjivane, naročito u arhitekturi dvadesetog veka, kao i u savremenoj arhitekturi. U ovom poglavlju prikazani su mahom savremeni primeri arhitektonskih objekata zasnovanih na primeni površi 2. stepena (kvadrika). Njihova racionalnost u konstrukciji i izvođenju preporuka je i osnova za njihovu primenu u budućnosti. Sa razvojem računara i softvera namenjenih primeni u arhitekturi i građevinarstvu, stvoren je potpuno novi kontekst za projektovanje i primenu površi 2. stepena, *slika 139*.



*slika 139. Muritzmuseum, Varen, Nemačka, 2007. (Wingårdh Arkitektkontor) /mueritzmuseum.de/*

Za uspešnu primenu površi 2. stepena u arhitekturi, neophodno je njihovo dobro poznavanje od strane arhitekata i građevinskih inženjera. To se odnosi na njihovu klasifikaciju, način njihovog nastanka, osobine i načine konstruktivne obrade, odnosno određivanja osnovnih parametara geometrijskih površi 2. stepena, zadatih u najopštijem obliku. U ovom poglavlju prikazani su mogući slučajevi intersekcije para konika, realnih i imaginarnih. Određivanje zajedničkih elemenata para konika, tj. preseka, rešeno je na univerzalan i originalan način, bez obzira na njihov realitet. Postupak je zasnovan isključivo na geometrijskim metodama i moguće ga je primeniti na bilo koji par konika. U postojećoj literaturi nije postojalo konstruktivno rešenje za određivanje preseka i zajedničkog autopolarog trougla para konika u najopštijem položaju, osim konstruktivnih rešenja za određivanje preseka para konika u specijalnim slučajevima i položajima. Određivanje zajedničkih elemenata para konika, neophodnih za konstruktivnu obradu površi 2. stepena, rešeno je uspostavljanjem kolinearnog odnosa između dva kolokalna polja određena tim konikama. Nalaženjem žiža (fokusa) tih polja i primenom postupka za određivanje direktne veze između jedne realne dvostruke prave i žiža opšte

kolinearnih polja, određene su strane zajedničkog autopolarnog trougla, a nakon toga i presečne tačke para konika. Prikazana su i detaljno objašnjena tri primera određivanja preseka konika i to: para realnih konika, para imaginarnih konika i jedne realne i jedne imaginarne konike. Izloženi postupak je univerzalan i primenljiv na bilo koji par konika, bez obzira na realitet.

Jedan od zadataka ovog istraživanja je konstruktivna obrada površi 2. stepena, odnosno konstruktivno određivanje osnovnih parametara kvadraka, jedinstvenim postupkom, bez obzira na koji način su površi zadate. Konstruktivna obrada površi 2. stepena izvodi se uvođenjem opšte ili perspektivne prostorne kolineacije, čime se beskonačno daleka ravan prostora dovodi u konačnost, zajedno sa apsolutnom konikom prostora. U toj ravni se određuju osnovni parametri površi, a zatim se istim, prethodno opisanim postupcima opšte i perspektivne kolineacije prostora, konstruktivno određeni elementi vraćaju u beskonačnost. Određivanje središta, osa, kružnih tačaka i kružnih preseka kvadraka svodi se na prethodno rešenu intersekciju para konika, koja se primenom kolineacije u prostoru geometrijski rešava u konačnosti. Određivanjem osnovnih parametara površi 2. stepena, omogućava se njihova uspešna praktična primena u arhitekturi i građevinarstvu. Savremena interpretacija, novi kontekst i inovativnost su karakteristike savremene arhitekture. Trenutna istraživanja forme i koncepcija u arhitekturi zahtevaju sveobuhvatno poznavanje i sagledavanje geometrijskih površi. Na **slici 140** prikazan je primer Centralne stanice u Oslu, gde je osnova forma objekta izvedena oduzimanjem elipsoida od prizme. Poznavanje površi 2. stepena, kao i njihove konstruktivne obrade jedan su od preduslova za uspešno bavljenje arhitektonskim projektovanjem i dizajnom.



*slika 140. Oslo Central Station, Norveška, 2008. (Space Group) / Luxigon, archdaily.com/*



### **III POGLAVLJE**

**PRAVOIZVODNE TRANSCEDENTNE  
POVRŠI I PRAVOIZVODNE POVRŠI  
VIŠEG REDA I NJIHOVA PRIMENA  
U ARHITEKTURI**

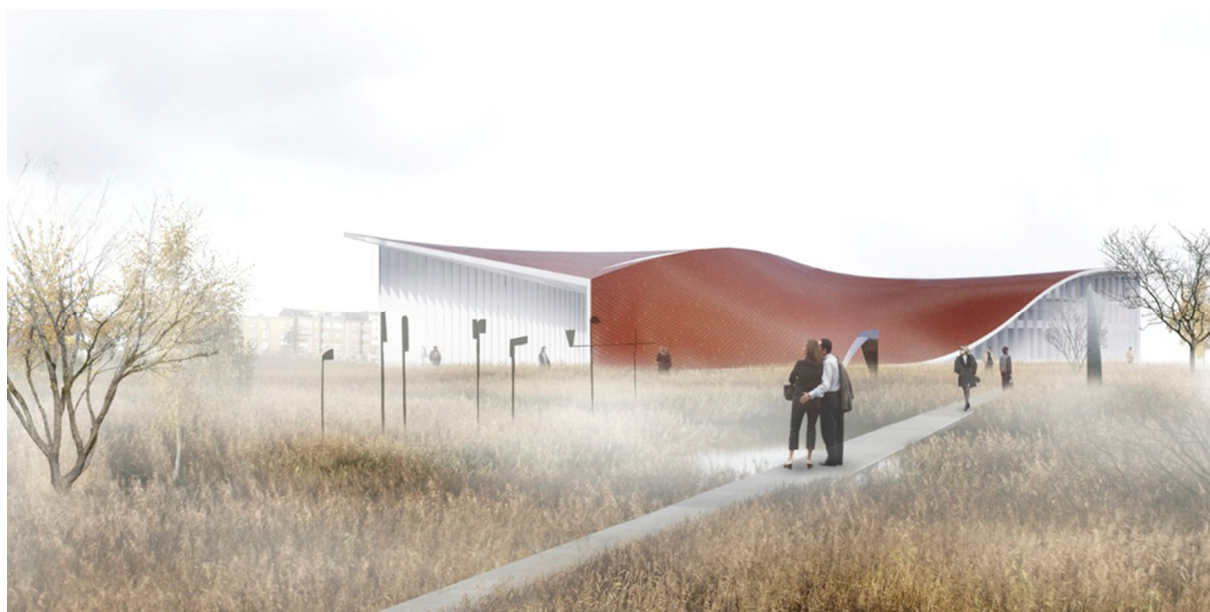


## III POGLAVLJE

### PRAVOIZVODNE TRANSCEDENTNE POVRŠI I PRAVOIZVODNE POVRŠI VIŠEG REDA I NJIHOVA PRIMENA U ARHITEKTURI

#### III1 UVODNE NAPOMENE

U ovom poglavlju, analizirane su i obrađene pravoizvodne površi višeg reda, odnosno pravoizvodne površi 3. i 4. reda, kao i pravoizvodne transcendentne površi. Kako je već rečeno u prethodnom izlaganju, pravoizvodne površi su češće primenjivane u formama arhitektonskih objekata u odnosu na dvostruko zakrivljene površi. U geometrijski - konstruktivnom (kao i projektantskom i izvođačkom) smislu pravoizvodne površi višeg reda, kao i pravoizvodne transcendentne površi, su jednostavnije za praktično izvođenje od dvostruko zakrivljenih. Pravoizvodne površi višeg reda, prikazane u ovom poglavlju, izvedene su po ravnim i prostornim krivama vodiljama. Razmotrene su mogućnosti primene njihovih karakterističnih segmenata i isečaka u oblikovanju arhitektonskih objekata, kao i mogućnosti njihove multiplikacije i kombinovanja u složenije prostorne strukture, sklopove. Kod pravoizvodnih transcendentnih površi akcenat je na korišćenju različitih vrsta zavojnih vodilja, koje spadaju u prostorne transcendentne krive. Predložena oblikovna rešenja treba da na praktično primenljiv način omoguće implementaciju površi višeg reda u geometrijske forme budućih arhitektonskih struktura, kao i njihovu upotrebu u različitim oblastima dizajna. To podrazumeva poznavanje vrsta površi, njihovih osnovnih parametara, kao i mogućnosti konstruktivne obrade i vizuelizacije. Na *slici 141* prikazan je primer upotrebe pravoizvodnih površi višeg reda u arhitekturi, na objektu *Randers Museum of Art* u Danskoj. Prikazana je slika iz idejnog rešenja, prvonagrađenog konkursnog rada.



*slika 141. Randers Museum of Art, Randers, Danska, 2009. (3XN) / 3xn.com/*

Viši redovi pravoizvodnih površi, kao i pravoizvodne transcendentne površi, omogućavaju projektovanje vizuelno kvalitetnih formi i njihovih sklopova, primenljivih u svim oblastima arhitekture i dizajna /videti 16, 22, 30, 54, 58, 60/. Za uspešno istraživanje i analizu pomenutih površi neophodno je uspostaviti kriterijume po kojima su odabrane prikazane površi, kao i načini njihove obrade. Kao najznačajniji kriterijumi za uspešnu praktičnu primenu istraživanih površi i njihovih sklopova, izdvojeni su:

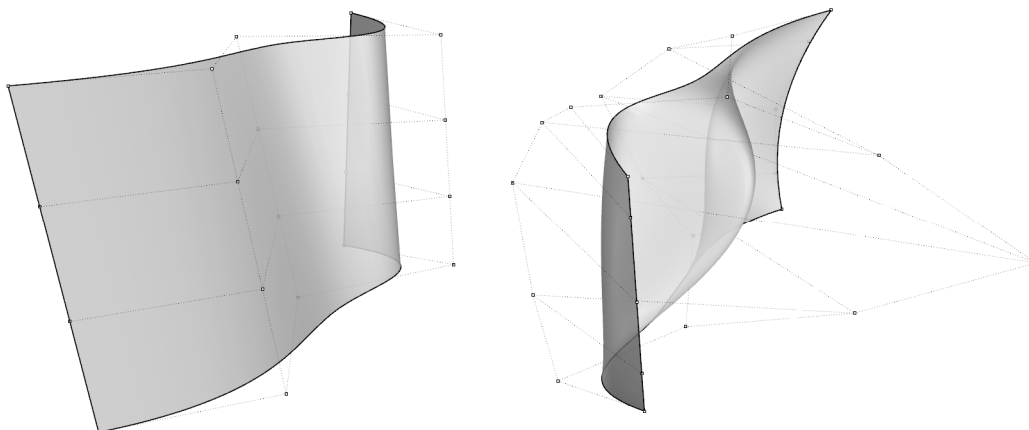
- Univerzalnost primene u formiranju različitih prostornih struktura,
- Jednostavnost projektovanja i praktičnog izvođenja,
- Estetski (vizuelni) kvaliteti i karakteristike,
- Racionalnost i ekonomičnost primene.

Najpre su izložene osobine, načini izvođenja i klasifikacije ravnih i prostornih krivih 3. i 4. reda, kao i transcendentnih krivih. Nakon toga su izložene osnovne osobine, načini izvođenja i klasifikacije pravoizvodnih površi 3. i 4. reda i transcendentnih pravoizvodnih površi. U nastavku izlaganja, izabrane su i prikazane karakteristične pravoizvodne površi 3. i 4. reda i pravoizvodne transcendentne površi, u kontekstu mogućnosti praktične primene sa aspekta prethodno postavljenih kriterijuma. Analiza je sprovedena od generisanja krive vodilje istraživanih pravoizvodnih površi, preko izvođenja same površi i njene dalje konstruktivne obrade, do konačne arhitektonske vizuelizacije. Ova obrada podrazumeva izbor adekvatnih reprezentativnih segmenata površi, odnosno izdvajanje odgovarajućih isečaka površi i njihovu upotrebu u formiranju prostornih struktura različitih arhitektonskih objekata. U delu poglavlja gde su obrađene transcendentne pravoizvodne površi, data je kratka istorijska retrospektiva njihove primene u oblikovanju izvedenih arhitektonskih objekata, s obzirom da je to manje obrađivano u postojećoj literaturi. Kompletno izvođenje, obrada i analiza prikazanih primera u ovom poglavlju urađena je primenom računara i odgovarajućih softverskih rešenja. Pojedini postupci su, s obzirom na njihovu specifičnost, raščlanjeni i postupno opisani u nastavku izlaganja.

### III.1.1 SOFTVERSKA REŠENJA I IZVOĐENJE KRIVIH I POVRŠI

Izvođenje obliha površi moguće je u svim programskim paketima namenjenim 3D modelovanju. Ono što pojedine računarske programe izdvaja za potrebe izvođenja i analize površi prikazanih u ovom radu, je način na koji se te površi generišu, u smislu preciznosti, jednostavnosti izvođenja, uređivanja i manipulacije. Postoji više načina izrade 3D modela koji se koriste u različitim softverskim rešenjima. Najpoznatiji načini su: poligonalno, „patch”, NURBS modelovanje itd. Kao najadekvatniji način za izvođenje 3D modela analiziranih površi izdvaja se **NURBS** (Non-Uniform Rational Basis Splines) modelovanje, u kome se koriste krive i površi definisane stepenom, kontrolnim tačkama i čvorovima, kao i određenim

pravilima, **slika 142**. Po kvalitetu i preciznosti izvođenja može se uporediti sa vektorskom 2D grafikom, gde broj detalja ne zavisi od dimenzije nekog elementa. Najznačajnije prednosti ovog načina 3D modelovanja su: velika preciznost izvedenih elemenata, mala količina informacija kojima se elementi definišu i samim tim manji fajlovi, jednostavna obrada podataka u različitim računarskim programima, mogućnost konvertovanja u ostale vrste 3D modela itd /34/.



*slika 142. NURBS površi generisane u računarskom programu Rhinoceros*

Za geometrijsko izvođenje i obradu svih prikazanih primera prostornih struktura u ovom poglavlju korišćen je programski paket **Rhinoceros**, specijalizovan za izradu i vizuelizaciju 3D modela pomoću NURBS krivih i površi. Konceptcija ove vrste modelovanja u *Rhinoceros*-u je veoma intuitivna, jednostavna i pogodna za primenu u različitim oblastima arhitekture i dizajna. S obzirom na intuitivnost i praktične potencijale programa, njegova primena u kreiranju zakrivljenih formi u arhitekturi se nameće kao kvalitetno rešenje. U ovom radu su analizirane pravoizvodne površi, od kojih su neke razvojne, a posebnu prednost programa *Rhinoceros* predstavlja mogućnost njihovog razvijanja. To zajedno sa ostalim naprednim opcijama koje program poseduje omogućava jednostavno projektovanje i praktično izvođenje najšireg spektra krivih i površi. Mogućnost povezivanja sa laserskim sekačem, 3D štampačem i drugim računarski upravljanim mašinama čini ga utilitarnim softverskim alatom za projektovanje i izvođenje složenih geometrijskih formi u arhitektonskoj praksi /33, 34/. *Rhinoceros* ima mogućnost izvoza datoteka u sve standardne 3D formate. U ovom softveru postoji veliki broj opcija koje omogućavaju izvođenje, obradu i analizu krivih i površi, a koje su uglavnom svrstane u nekoliko grupa: *Curve Drawing*, *Curve Tools*, *Curves From Object*, *Surface Creation*, *Surface Tools* i *Surface Analysis*.

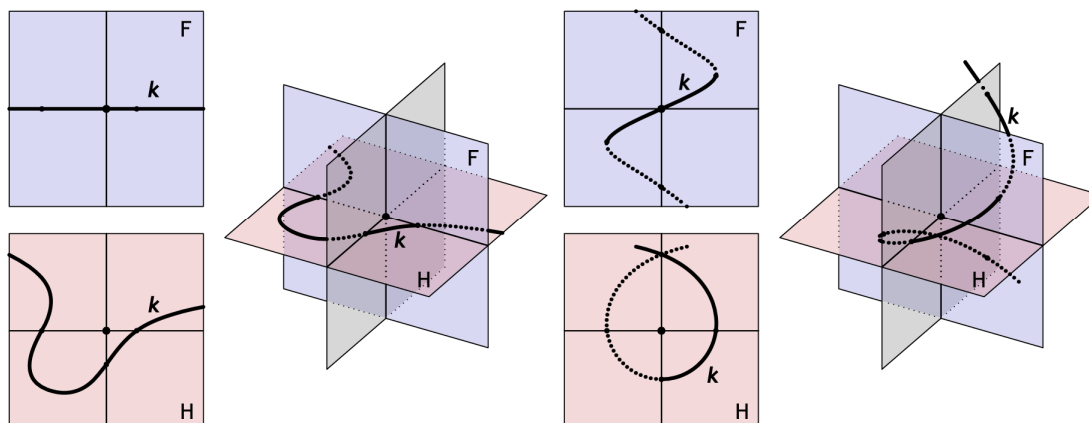
U daljem tekstu su ilustracije nastale kopiranjem sadržaja prikaza iz računarskog programa *Rhinoceros* prikazane uokvireno. Dorada svih ilustracija i postprodukcija prikazanih arhitektonskih vizuelizacija izvedena je u računarskim programima **AutoCAD** i **Photoshop**, namenjenim izradi tehničkih crteža i obradi rasterske grafike.



## III2 KRIVE VIŠEG REDA

### III2.1 KRIVE 3. REDA

Krive 3. reda mogu biti ravne i prostorne. Ravne krive 3. reda mogu imati najviše tri realna preseka sa bilo kojom koplanarnom pravom, *slika 143* levo. Prostorne krive 3. reda mogu imati najviše tri realna prodora kroz bilo koju ravan prostora, *slika 143* desno /12, 66/.



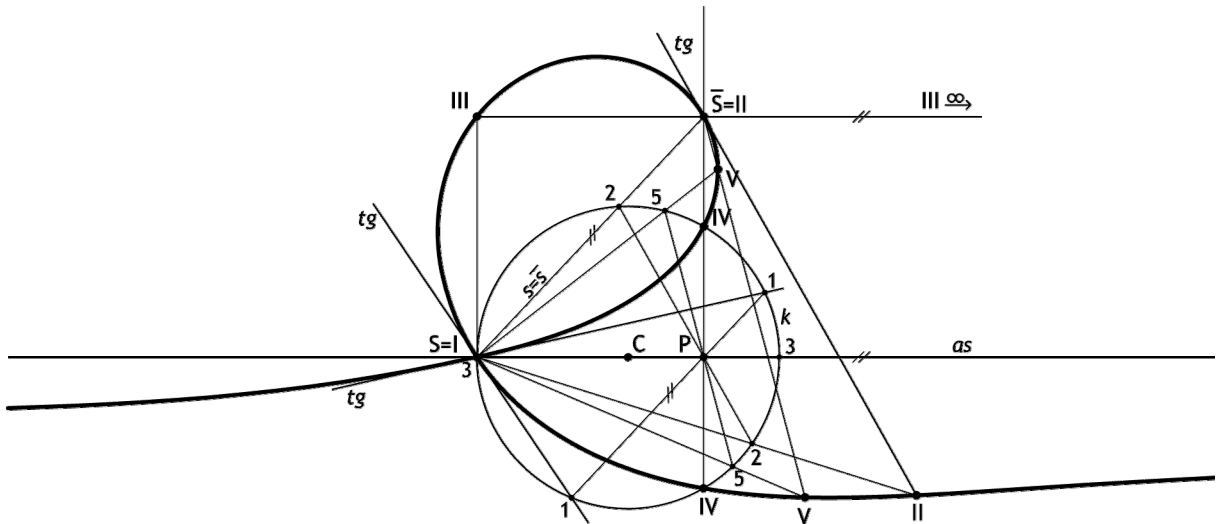
*slika 143. Ravna i prostorna kriva 3. reda (ortogonalne projekcije i aksonometrija)*

Izvođenje ravnih krivih 3. reda moguće je na više načina. Neki od mogućih načina izvođenja su: /24, 61, 63/

1. Jedno-dvoznačnim projektivnim pridruživanjem dva pramena pravih, od kojih je jedan običan, a drugi involutoran. *Slika 144*
2. Projektivnim pridruživanjem pramena konika sa običnim pramenom pravih, pri čemu se konstruišu cirkularne krive 3. reda roda 0. - strofoide i strofoidale. *Slike 145 i 146*
3. Cisoidalni način izvođenja krivih 3. reda
4. Ravnim presecanjem površi 3. reda
5. Izvođenje površi 3. reda opštom inverzijom konika
6. Centralnom ili paralelnom projekcijom prostornih krivih dobijenih prodorom kvadraka.

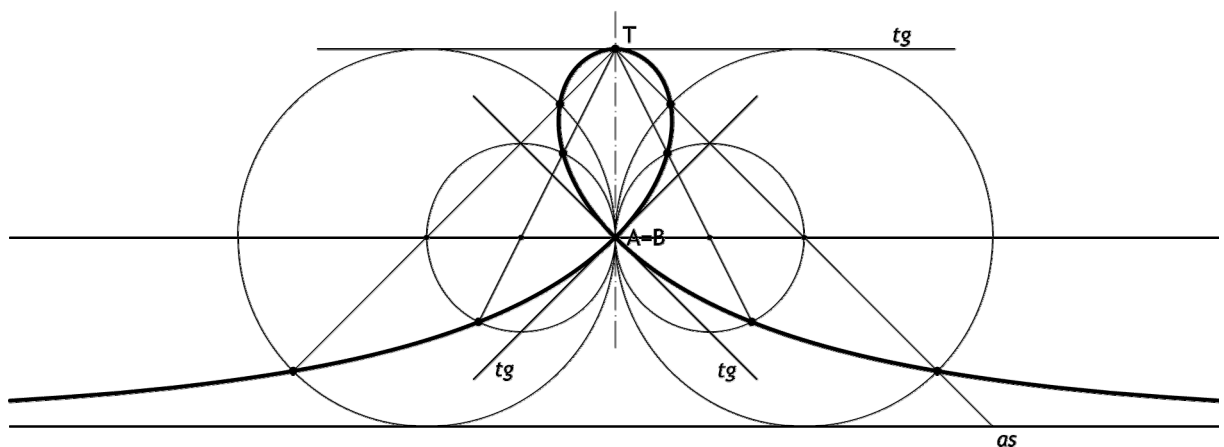
Na *slici 144*, prikazan je postupak izvođenja ravne krive 3. reda jedno-dvoznačnim projektivnim pridruživanjem običnog i involutornog pramena pravih. Involutori eliptički pramen dat je temenom  $S$ , nizom 2. reda na kružnici  $k$  i središtem involucije  $P$ . Ovaj pramen je projektivno jedno-dvoznačno pridružen običnom pramenu pravih  $\bar{S}$ . Tačka  $S$  je dvostruka tačka krive 3. reda i u njoj su tangente određene tako što je kroz  $P$  postavljena tetiva 1-1 koja je perspektivno pridružena zraku  $\bar{s}$ , a koji je poklopljen sa zrakom  $s$ . Spojnice tačaka 1 i 1 sa tačkom  $S$  su pridruženi zraci involutornog pramena, koji se sa zrakom  $\bar{s}$  običnog pramena seku u dve beskonačno bliske tačke tački  $S$  i predstavljaju tangente krive u toj dvostrukoj tački. Involutornom zraku  $s$  pridružena je tetiva kružnice 2-2, a

njoj paralelan zrak običnog pramena  $\bar{S}$  seče zrake involutornog niza  $S^2$  i  $S^2$  u tačkama krive II i II, od kojih je jedna beskonačno bliska tački  $\bar{S}$ , pa kao spojnica dve beskonačno bliske tačke predstavlja tangentu izvedene krive u toj tački. Tetiva kružnice 3-3 određuje zrake involutornog pramena od kojih je jedan tangenta kružnice u tački S, a drugi se poklapa sa pravcem same tetive. Pridruženi zrak običnog pramena, paralelno sa tetivom, seče tetivu u tačkama krive III i III, od kojih je jedna beskonačno daleka. Zrak običnog pramena pravih  $\bar{S}$  koji se poklapa sa tetivom kružnice određuje secišta izvedene krive sa kružnicom  $k$ , tačke IV i IV (dvostruke tačke involutornog niza 2. reda na kružnici) /63/.



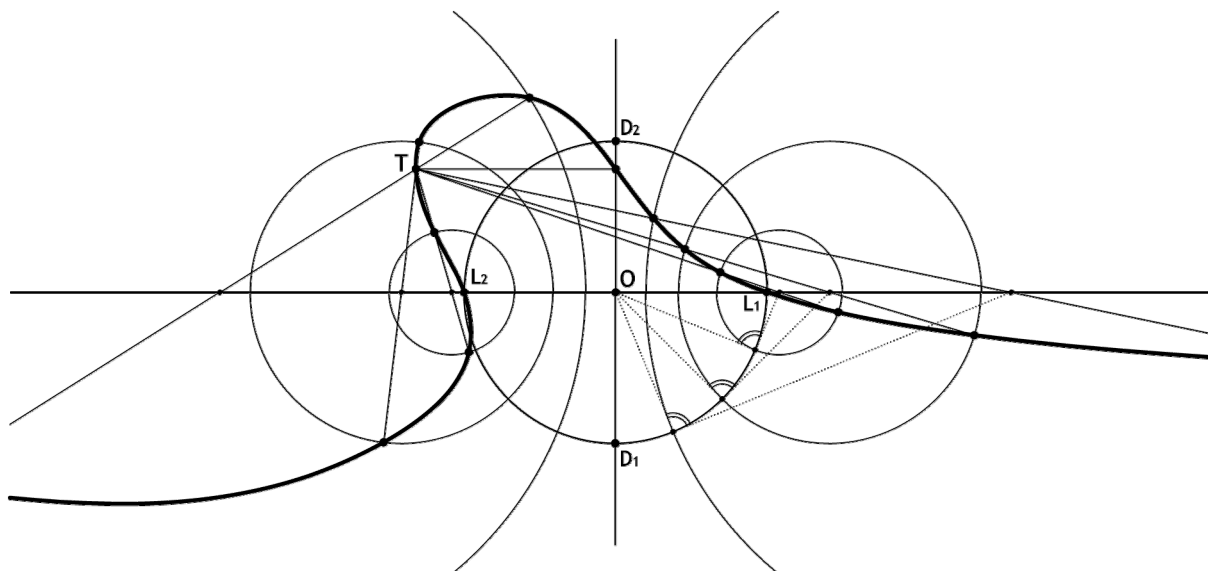
slika 144. Izvođenje krive 3. reda jedno-dvoznačnim projektivnim pridruživanjem dva pramena pravih /63/

Na slici 145, prikazan je postupak izvođenja strofoide, cirkularne krive 3. reda roda 0., projektivnim pridruživanjem pramena konika sa običnim pramenom pravih. Pramen pravih sa temenom T projektivno je pridružen pramenu kružnica sa poklopljenim temeljnim tačkama A i B, tako da svaki zrak prolazeći kroz centar svake od kružnica pramena određuje u preseku sa tim kružnicama tačke izvedene ravne krive 3. reda /34, 63/.



slika 145. Izvođenje krive 3. reda projektivnim pridruživanjem pramena konika sa običnim pramenom pravih - prava strofoida /63/

Na *slici 146*, takođe je prikazan postupak izvođenja **cirkularne krive 3. reda** **roda 0**. projektivnim pridruživanjem pramena konika čije su temeljne tačke konjugovano imaginarne sa običnim pramenom pravih. Pramen pravih sa temenom **T** projektivno je pridružen pramenu kružnica sa konjugovano imaginarnim temeljnim tačkama **A** i **B**, a date su eliptičnim involutornim nizom. U tom slučaju sve kružnice tog pramena ortogonalno seku kružnicu koja određuje simetrične tačke eliptičkog involutornog niza sa Lagerovim tačkama  $L_1$  i  $L_2$  /63/.



*slika 146. Izvođenje krive 3. reda projektivnim pridruživanjem pramena konika sa običnim pramenom pravih /63/*

**Prostorne krive 3. reda** mogu se dobiti prodorom dve površi 2. stepena. Te površi se seku (prodiru) po prostornoj krivoj 4. reda 1. vrste, a kada imaju jednu zajedničku izvodnicu, seku se po krivoj 4. reda koja se raspada na jednu pravu (zajedničku izvodnicu) i jednu prostornu krivu 3. reda /47/.

Najpraktičniji način razvrstavanja krivih, prema njihovom redu, uveo je Njutn još 1704. godine. On se posebno bavio krivama 3. reda i u svom radu „*Klasifikacija krivih 3. reda*” definisao je 72 oblika ravnih krivih 3. reda. Svoje izučavanje Njutn je zasnovao na prenošenju pojmova i teorema iz teorije krivih 2. reda, stvaranih vekovima unazad sve od grčkog matematičara Menehma iz 4. veka pre nove ere. Sistematizaciju i klasifikaciju krivih 3. reda nastavio je Ojler 1748. godine, otklanjajući nesavršenosti Njutnove klasifikacije /11, 61/. Klasifikacija ravnih krivih 3. reda koju je predložio Lazar Dovniković, nazivajući ih **kubne konike**, pogodna je za dalje razmatranje i izvođenje površi 3. reda.

**Ravne krive 3. reda** mogu se podeliti prema vrsti njihovih beskonačno dalekih tačaka. Beskonačno daleka prava ravni seče ravnu krivu 3. reda u tri fiktivne tačke, od kojih je jedna uvek realna, a zavisno od toga kakve su ostale dve vrši se njihova podela analogno krivama 2. reda. Samim tim koristi se termin **ravne kubne konike**. Postoji ukupno 98 karakterističnih oblika ovih krivih /11, 62/. Sledeća klasifikacija L. Dovnikovoća preuzeta je iz literature /11/.

**Ravna kubna konika može biti:**

1. **Kubna elipsa.** Beskonačno daleka prava ravni (fiktivna prava) seče je u jednoj realnoj i dve konjugovano imaginarne tačke. Kod **kubne kružnice** dve konjugovano imaginarne tačke su apsolutne tačke ravni. Postoji 19 karakterističnih oblika kubnih kružnica (11 pravih i 8 kosih), odnosno isto toliko kubnih elipsa koje se mogu dobiti afinim preslikavanjem kubnih kružnica.
2. **Kubna hiperbola.** Beskonačno daleka prava ravni seče je u tri realne razdvojene tačke. Postoji ukupno 17 karakterističnih oblika kubnih hiperbola (11 pravih i 6 kosih).
3. **Kubna hiperbolička parabola.** Beskonačno daleka prava ravni seče je u tri realne tačke, od kojih su dve poklopljene (beskonačno bliske). Zavisno od vrste tih dveju beskonačno bliskih tačaka, postoje četiri tipa kubne hiperboličke parabole, odnosno 31 karakterističan oblik krive.

**tip A** - poklopljene tačke su regularne, a fiktivna prava je tangenta krive. Postoji 19 karakterističnih oblika krive.

**tip B** - dve tačke su poklopljene u samopresečnoj tački krive, a fiktivna prava je singularna tangenta krive u samopresečnoj tački. Postoji 5 karakterističnih oblika krive.

**tip C** - dve tačke su poklopljene u šiljku 1. vrste, a fiktivna prava je singularna tangenta krive u šiljku 1. vrste. Postoje 3 karakteristična oblika krive.

**tip D** - dve tačke su poklopljene u izolovanoj tački krive, a fiktivna prava je singularna tangenta krive u izolovanoj tački. Postoje 4 karakteristična oblika krive.

4. **Kubna parabola.** Beskonačno daleka prava ravni seče je u tri realne poklopljene tačke. Postoje tri tipa kubne parabole, odnosno 12 karakterističnih oblika krive.

**tip A** - fiktivna prava je infleksiona tangenta u prevojnoj tački krive. Postoji 10 karakterističnih oblika krive.

**tip B** - fiktivna prava je regularna tangenta u samopresečnoj tački krive. Postoji 1 karakteristični oblik krive.

**tip C** - fiktivna prava je regularna tangenta krive u šiljku 1. vrste. Postoji 1 karakteristični oblik krive.

**Ravna kriva 3. reda** prema mogućim dvostrukim tačkama može biti:

1. **Kriva bez dvostruke tačke**

- dvodelna

- jednodelna.

## 2. Kriva sa dvostrukom tačkom

- sa samopresečnom dvostrukom tačkom
- sa izolovanom dvostrukom tačkom
- sa šiljkom 1. vrste

Ravna kriva 3. reda prema mogućnosti simetrije može biti:

1. Prava (ortogonalno simetrična)
2. Kosa (potpuno asimetrična)
3. Koso simetrična
4. Centralno simetrična

## III2.2 KRIVE 4. REDA

Krive 4. reda mogu biti **ravne** i **prostorne**. Ravne krive 4. reda mogu imati najviše četiri preseka sa bilo kojom koplanarnom pravom. Prostorne krive 4. reda mogu imati najviše četiri prodora kroz bilo koju ravan prostora.

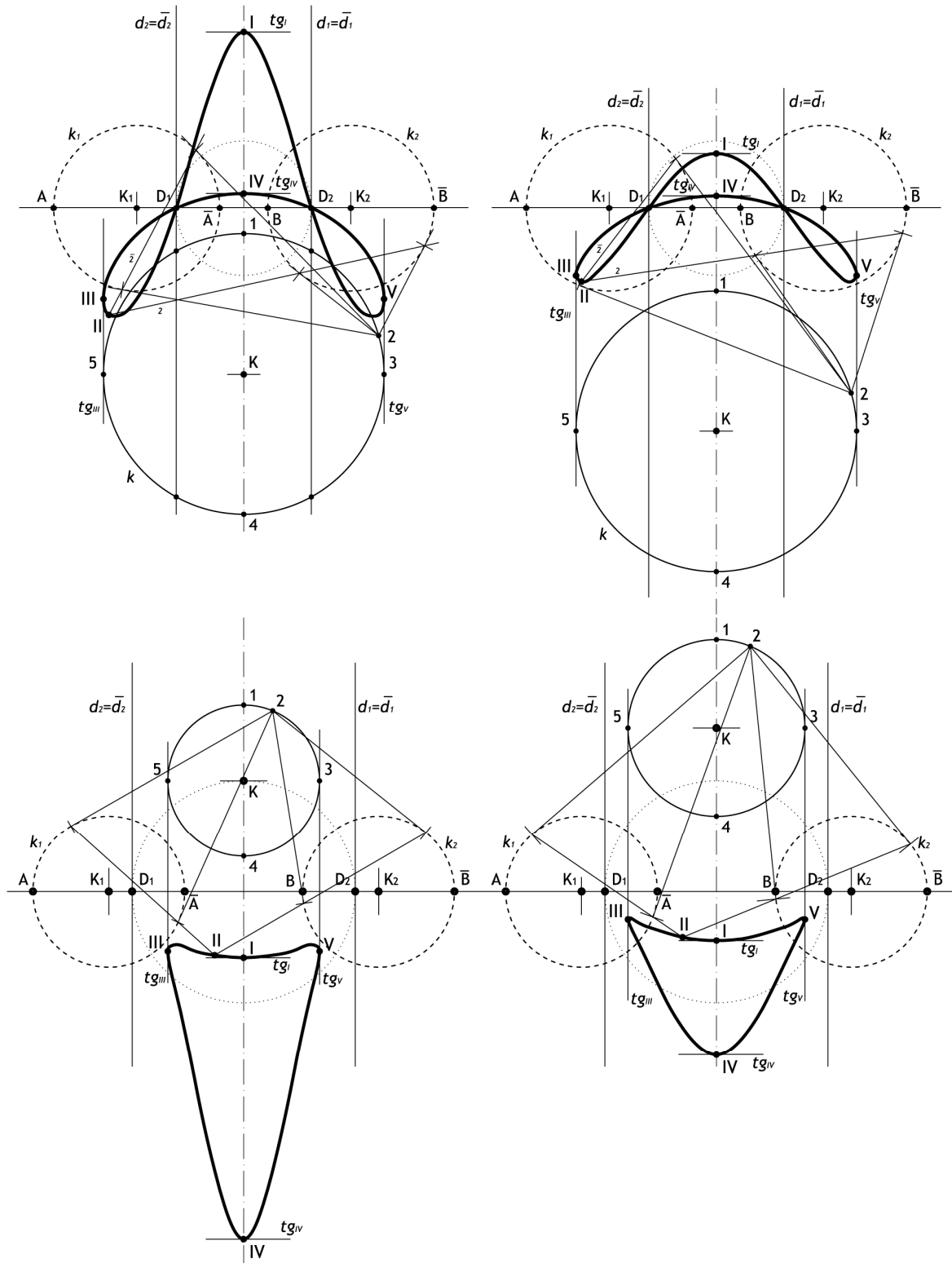
Izvođenje **ravnih krivih 4. reda** moguće je na više načina. Neki od mogućih načina izvođenja su /24, 41, 61, 63/:

1. Dvo-dvoznačnim projektivnim pridruživanjem dva involutorna pramena pravih.
2. Ravni preseki površi 4. reda
3. Cisoidnim načinom konstruišu se cisoide 4. reda, koje su i nožišne krive konika - elipse i hiperbole.
4. Opštom inverzijom konika
5. Kvadratnom transformacijom niza 2. reda u pramenu polarnih polja
6. Centralnom ili paralelnom projekcijom prostornih krivih dobijenih prodorom kvadraka.

Na *slici 147* prikazane su bicirkularne krive 4. reda izvedene kvadratnom transformacijom niza 2. reda, koji se ostvaruje u pramenu polarnih polja. Bicirkularne krive 4. reda imaju dve konjugovano imaginarne dvostruke tačke koje se poklapaju sa apsolutnim tačkama ravni. Opšti model transformacije zadaje se nizom polova 2. reda na konici  $k$  i dvema konikama  $k_1$  i  $k_2$ , koje kao temeljne konike pramena određuju pramen polarnih polja. Zavisno od vrste izabranih konika  $k$ ,  $k_1$  i  $k_2$  i njihovog međusobnog odnosa, postavlja se model transformacije. Bicirkularne krive 4. reda nastaju ako se za konike  $k$ ,  $k_1$  i  $k_2$  usvoje kružnice centara  $K$ ,  $K_1$  i  $K_2$ . Polarnom transformacijom (preslikavanjem) niza tačaka (polova) 2. reda na kružnici  $k$ , u odnosu na temeljnu kružnicu  $k_1$ , na osnovu svojstava polariteta kao projektivne korelacije, dobija se projektivno pridružen pramen



polara 2. razreda. Nizu polova  $k$ , na isti način, s obzirom na temeljnu kružnicu  $k_2$ , projektivno se pridružuje drugi pramen polara 2. razreda. Oba pramena polara projektivno su pridruženi istom nizu polova  $k$ , kao i međusobno. U presjecima parova pridruženih polara dobijaju se tačke prikazanih krivih 4. reda /40/.



slika 147. Izvođenje bicirkularnih krivih 4. reda

Teorija krivih 4. reda i njihova klasifikacija slabije su razrađene u odnosu na teoriju krivih 3. reda. Raniji pokušaju klasifikacije vezani su za Veringa (1792), koji je ravne krive 4. reda podelio na 12 klasa sa ukupno 84551 krivih specijalnog oblika. Ojler i Kramer su, razmatrajući ponašanje krivih u beskonačnosti, podelili krive 4. reda u 9 kategorija. Njihova podela je sačinjena prema rasporedu beskonačno dalekih tačaka krive, koje mogu biti prema A. Savelovu /61/:

1. četiri imaginarne tačke - dva para konjugovano imaginarnih tačaka
2. dve realne razdvojene i dve konjugovano imaginarne tačke
3. četiri realne razdvojene tačke
4. dve realne poklopljene i dve konjugovano imaginarne tačke
5. dve realne razdvojene i dve realne poklopljene tačke
6. dve realne dvostruke tačke
7. dve dvostruke konjugovano imaginarne tačke
8. jedna jednostruka i jedna trostruka tačka
9. jedna četvorostruka tačka (specijalni raspad).

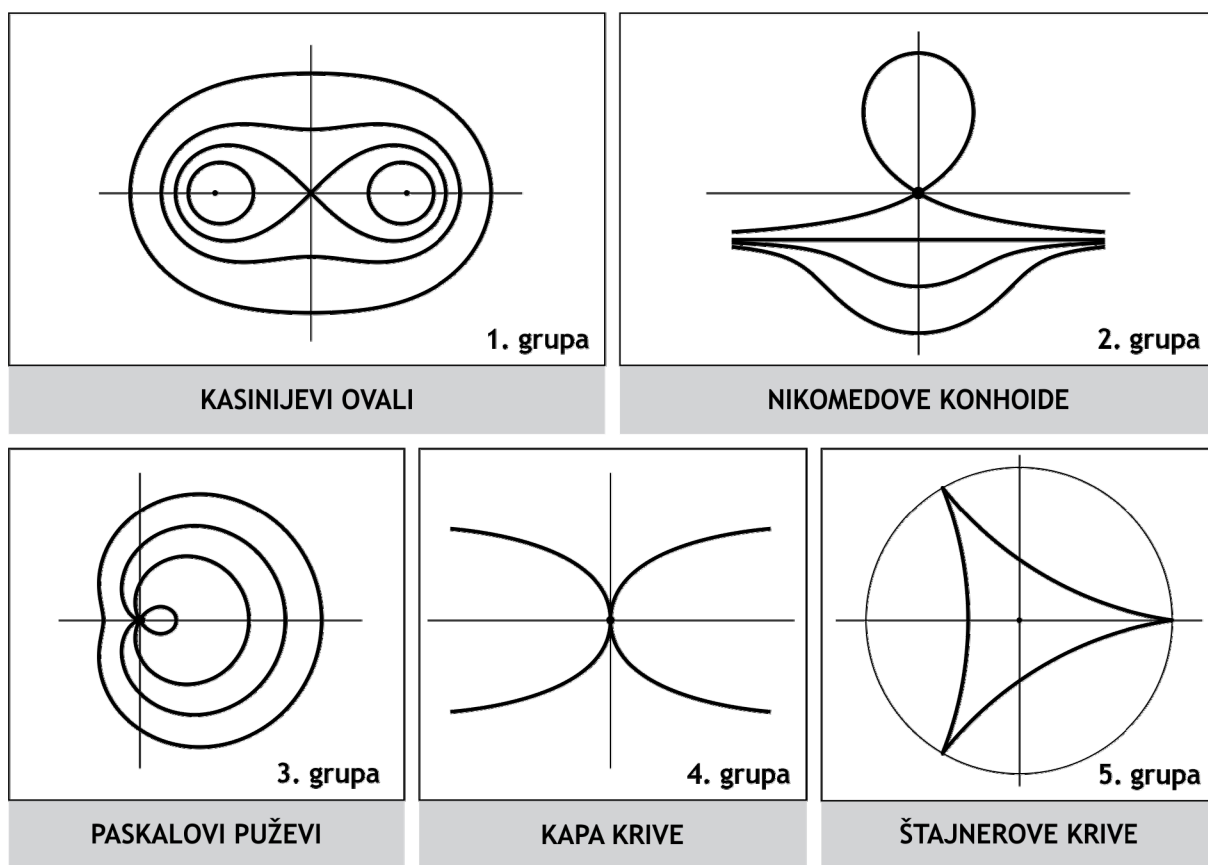
Prethodne grupe krivih 4. reda Pliker je podelio na 152 oblika. Kasnije je Ojlerova i Kramerova klasifikacija zamenjena klasifikacijom zasnovanom na razmatranju vrste i broja singularnih tačaka krive. Po tom principu krive 4. reda svrstane su u četiri velike grupe sa sledećim karakteristikama /61/:

1. krive 4. reda bez singularnih tačaka
2. krive 4. reda sa jednom dvostrukom tačkom
3. krive 4. reda sa dve dvostruke eliptične tačke
4. krive 4. reda sa tri dvostruke tačke ili jednom trostrukom.

Prostorna kriva 4. reda 1. vrste je temeljna kriva prodora kvadrika, jer se po njoj seku bilo koje dve kvadrike. Prostorna kriva 4. reda 1. vrste, određena je sa osam tačaka u prostoru. Svaka nova, deveta tačka određuje po jednu od kvadrika iz pramena kvadrika određenog prostornom krivom /45, 48, 50, 63/. Oblik prostorne krive 4. reda 1. vrste zavisi od vrste i međusobnog položaja para kvadrika, koje se po toj krivoj seku. Na osnovu njihovih ortogonalnih projekcija, odnosno ravnih krivih 4. reda u koje se projektuju, krive 4. reda 1. vrste možemo podeliti u pet grupa, *slika 148* /10, 11/:

1. grupa, prostorne krive koje se projektuju u Kasinijeve ovale
2. grupa, prostorne krive koje se projektuju u Nikomedove konhoide
3. grupa, prostorne krive koje se projektuju u Paskalove puževe
4. grupa, prostorne krive koje se projektuju u Kapa krive
5. grupa, prostorne krive koje se projektuju u Štajnerove krive

Svaka od ovih pet grupa predstavlja familiju krivih u kojoj ima i graničnih slučajeva, odnosno karakterističnih oblika.

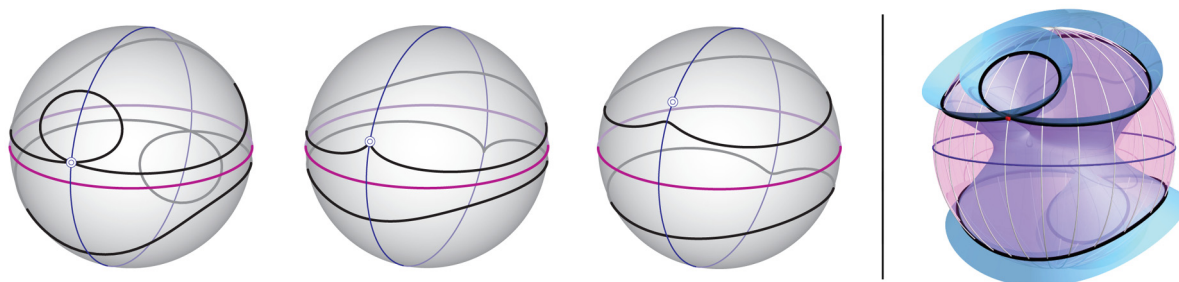


slika 148. Grupe prostornih krivih na osnovu njihove ortogonalne projekcije

Prostorna kriva 4. reda 2. vrste nastaje u prodoru pravoizvodne površi 2. reda i pravoizvodne površi 3. reda, postavljenih tako da se jedna prava izvodnica površi 2. reda poklapa sa dvostrukom pravom površi 3. reda. Tada se prostorna kriva raspada na jednu prostornu krivu 4. reda 2. vrste i na tu dvostruku pravu /12, 63/.

\* \* \* \* \*

Osim krivih 3. i 4. reda moguće je izvesti, odnosno konstruisati i krive viših redova. *Odehnal* se u svom radu bavi postupcima konstrukcije konhoida na sferi, gde primenjuje postupke slične postupcima konstrukcije ravnih konhoida, *slika 149 levo*. Dobijene konhoide na sferi su prostorne krive 6. reda, a mogu nastati u prodoru sfere i površi 4. reda, *slika 149 desno* /57/.

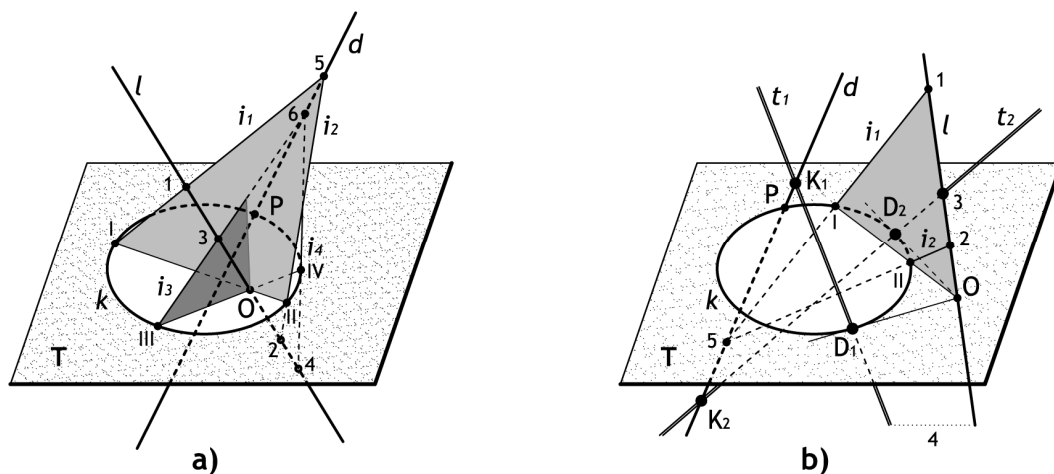


Slika 149. Prostorne konhoide na sferi i prostorna konhoida u prodoru sfere i površi 4. reda /57/

### III3 PRAVOIZVODNE POVRŠI VIŠEG REDA

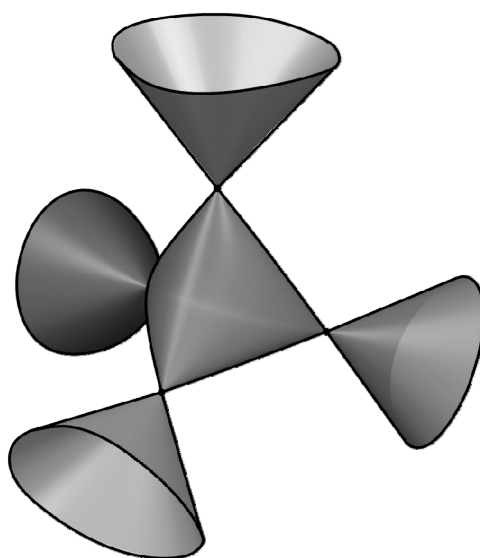
#### III3.1 PRAVOIZVODNE POVRŠI 3. REDA

Pravoizvodna površ 3. reda može nastati kao presek triju kompleksa, od kojih su dva linearna, a treći 2. stepena, s tim da vodilja jednog linearnog kompleksa mora da seče vodilju kompleksa 2. stepena u jednoj tački. Takođe, mogu nastati i kao proizvod jedno-dvoznačno pridruženog običnog i involutornog pramena ravni /32, 63/. Površ 3. reda nazivaju se još i **kubike**. Bilo koja pravoizvodna površ 3. reda ima jednu jednostruku i jednu dvostruku pravu, koje ne pripadaju sistemu izvodnica. Izvodnice pravoizvodne površi 3. reda su zajedničke transversale jedne krive 2. stepena i dve prave, od kojih jedna prava seče krivu 2. stepena u jednoj tački. Ravan postavljena kroz bilo koju izvodnicu pravoizvodne površi 3. reda seče površ po toj izvodnici i po nekoj krivoj 2. stepena. Postoji beskonačno mnogo izvodnica pravoizvodne površi 3. reda, pa samim tim i beskonačno mnogo krivih 2. stepena na toj površi /43, 50/. Konika je vodilja pravoizvodne površi 3. reda, prava koja seče koniku je dvostruka prava, a jednostruka prava prodire ravan konike u spoljašnjem ili unutrašnjem delu, **slika 150** /preuzeta iz literature 43/. „Ako jednostruka prava  $l$  prodire ravan konike unutar krive, u svakoj ravni te prave nalaze se dve realne izvodnice pravoizvodne površi 3. reda. Svaka tačka dvostruke prave  $d$  je presek dve izvodnice date površi. Ovako nastala pravoizvodna površ 3. reda je **tipa I**, **slika 150a**. Ukoliko jednostruka prava  $l$  prodire ravan konike u spoljašnjem delu krive, realne izvodnice pravoizvodne površi 3. reda nalaze se samo u ravnima kroz pravu  $l$  koje koniku realno seku. U graničnim ravnima prave  $l$ , koje tangiraju vodilju  $k$ , nalaze se torzalne prave  $t_1$  i  $t_2$  pravoizvodne površi 3. reda. Presečne tačke  $K_1$  i  $K_2$ , dvostruke prave  $d$  i torzalnih pravih  $t_1$  i  $t_2$ , su kuspidalne tačke. Parovi realnih izvodnica površi seku se između kuspidalnih tačaka na dvostrukoj pravoj  $d$ . Ovako nastala pravoizvodna površ 3. reda je **tipa II**, **slika 150b**. Parovi izvodnica pravoizvodnih površi 3. reda, koje se seku na dvostrukoj pravoj, seku jednostruku pravu u parovima pridruženih tačaka jednog involutornog niza. Na površima tipa I involucija tog niza je eliptička, a na površima tipa II hiperbolička” /43/.



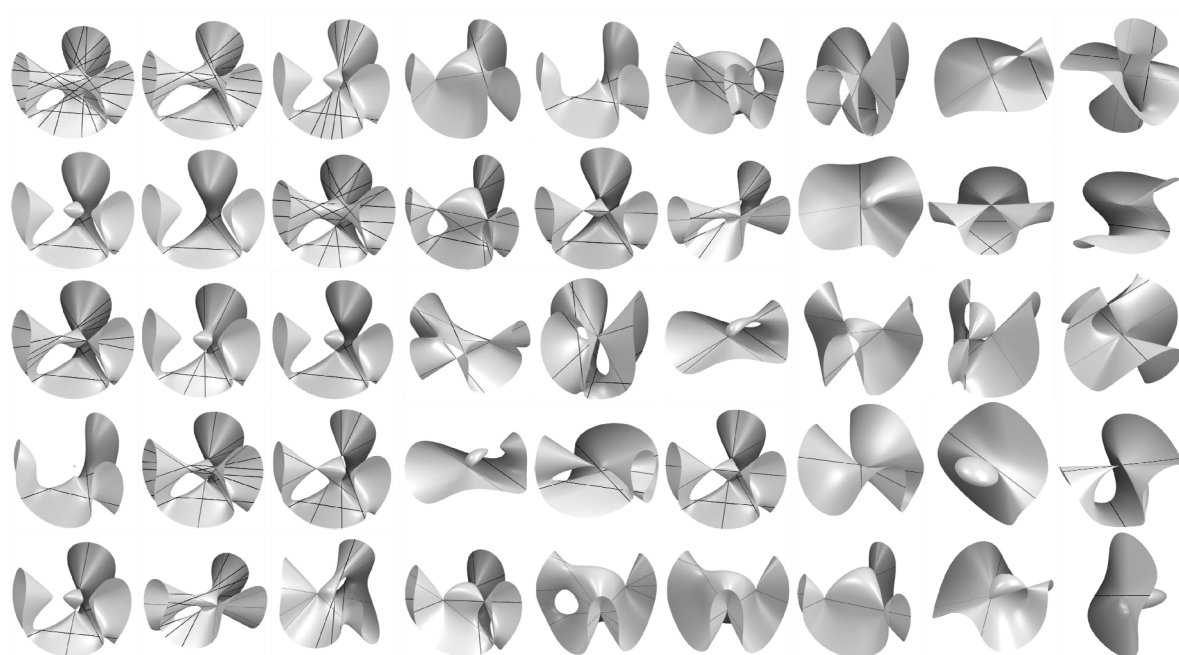
slika 150. Pravoizvodne površi 3. reda tipa I i tipa II /43/

Na *slici 151* prikazana je **Kejljeva pravoizvodna površ 3. reda**, kod koje su jednostruka i dvostruka prava poklopljene pa involucija na jednostrukoj pravoj nestaje. Kod ove pravoizvodne površi 3. reda postoji projektivna pridruženost niza tačaka na vodilji, pravoj, sa nizom tačaka na vodilji, konici, ali tako da njihovo secište ne korespondira samo sebi. Kuspidalne tačke, torzalne prave i ravni, se kod Kejljeve površi poklapaju. Torzalna prava poklapa se sa dvostrukom pravom, a kuspidalna tačka je korespondentna tačka secištu te prave sa konikom. Torzalna ravan prolazi kroz dvostruku pravu, a dodiruje vodilju, koniku /50, 63/.



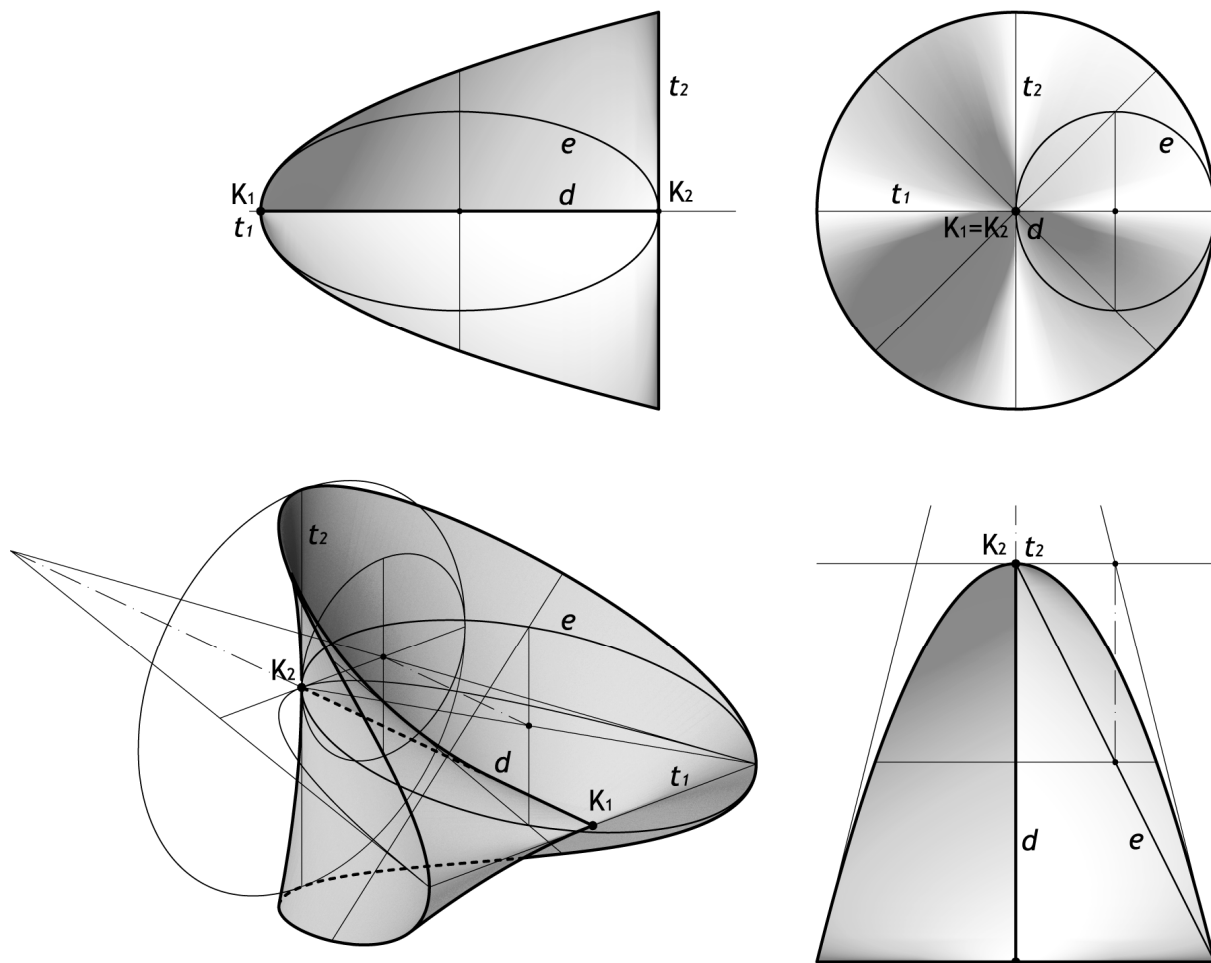
*slika 151. Kejljeva pravoizvodna površ 3. reda*

Knorer i Miler su 1987. godine klasifikovali realne Kejljeve površi 3. reda. Na *slici 152* je prikazano 45 vrsta ovih površi sa racionalnim dvostrukim tačkama. Ove površi mogu sadržati najviše 27 pravih /26/.



*slika 152. Realne Kejljeve površi 3. reda /26/*

Pravoizvodne površi 3. reda, kojima se jednostruka prava nalazi u beskonačnosti, nazivaju se **konoidi 3. reda**. Ukoliko se za vodilje usvoji jedan ravni presek obrtne oblice, za dvostruku pravu jedna izvodnica iste oblice, a ravan upravna na osu oblice usvoji kao direkcionalna ravan (kojom se zadaje jednostruka beskonačno daleka prava površi), nastaje konoid 3. reda koji se naziva **Plikerov konoid**. /62, 63/ Na **slici 153** prikazan je deo Plikerovog konoida presečen obrtnom oblicom čija je osa poklopljena sa dvostrukom pravom konoida. Prikazane su torzalne prave  $t_1$  i  $t_2$ , koje u preseku sa dvostrukom pravom  $d$ , daju kuspidalne tačke  $K_1$  i  $K_2$ . Kriva vodilja 2. stepena je elipsa  $e$ , koja se u drugoj ortogonalnoj projekciji vidi kao kružnica.



*slika 153. Plikerov konoid - pravoizvodna površ 3. reda*

Spojnice bilo koje tačke sa tačkama neke ravne ili prostorne krive 3. reda, ako ta tačka nije u ravni krive ili na prostornoj krivoj, su izvodnice konusa 3. reda. Ukoliko je ta tačka u beskonačnosti, nastaje cilindrična površ 3. reda /50/. Ovaj princip je korišćen za izvođenje nekih od izabranih površi 3. reda u nastavku izlaganja, upotrebljenih za formiranje prikazanih i analiziranih prostornih struktura. Konstruktivni postupci i izvođenje pravoizvodnih površi 3. reda obrađivani su u kontinuitetu od strane brojnih autora /videti 6, 9, 16, 21, 44, 46, 48, 49, 66/, a sa aspekta primene u arhitekturi su aktuelna tema za dalja istraživanja.



### III3.2 PRAVOIZVODNE POVRŠI 4. REDA

Pravoizvodna površ 4. reda može nastati kao presek kompleksa i kongruencije, ili kao presek tri kompleksa. Za izvođenje ovih površi vodilje mogu biti ravne krive 4. reda, ravne ili prostorne krive 3. reda, ili krive 2. stepena i prave /32/. Površi 4. reda nazivaju se još i kvartike. Najopštija podela površi 4. reda može se, prema B. Marković, uspostaviti po realitetu beskonačno dalekih izvodnica, na /39/:

- **Otvorene pravoizvodne površi 4. reda**, koje imaju realnih beskonačno dalekih izvodnica
- **Zatvorene pravoizvodne površi 4. reda**, koje nemaju realnih beskonačno dalekih izvodnica.

Na osnovu klasifikacije krivih 4. reda i detaljnijeg sagledavanja svih mogućnosti odnosa beskonačno dalekih elemenata, površi 4. reda mogu se podeliti po kriterijumu broja i karaktera beskonačno dalekih izvodnica /39/.

#### Otvorene površi

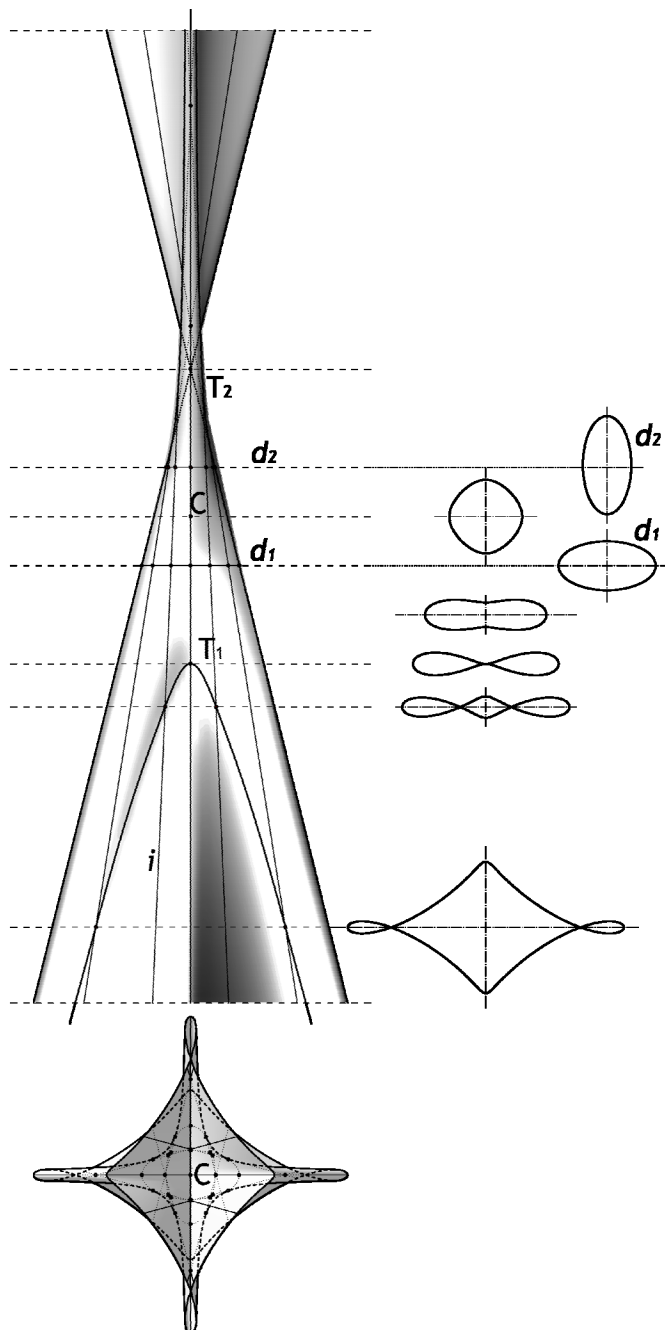
1. Površi sa četiri realne, razdvojene, beskonačno daleke izvodnice
2. Površi sa dve realne, dvostruke, beskonačno daleke izvodnice i dve realne, razdvojene, beskonačno daleke izvodnice
3. Površi sa dve realne, dvostruke, beskonačno daleke izvodnice
4. Površi sa jednom jednostrukom i jednom trostrukom, realnom, beskonačno dalekom izvodnicom
5. Površi sa jednom četvorostrukom, realnom, beskonačno dalekom izvodnicom
6. Površi sa dve realne, razdvojene i dve konjugovano imaginarne, beskonačno daleke izvodnice
7. Površi sa dve realne poklopljene i dve konjugovano imaginarne, beskonačno daleke izvodnice

#### Zatvorene površi

1. Površi sa četiri konjugovano imaginarne, beskonačno daleke izvodnice
2. Površi sa dve dvostruke, konjugovano imaginarne, beskonačno daleke izvodnice.

Konstruktivni postupci i izvođenje pravoizvodnih površi 4. reda obrađivani su u postojećoj literaturi najčešće na teorijskom nivou /videti 20, 21, 25, 35, 39, 49/, a sa aspekta primene u arhitekturi su aktuelna tema za dalja istraživanja. Razvoj računara i računarskih programa namenjenih primeni u inženjerstvu i dizajnu doprinelo je otvaranju čitavog niza novih mogućnosti za analizu i istraživanje arhitektonskih formi. Površi 4. reda imaju veliki potencijal u projektovanju i izvođenju savremenih formi koje u potpunosti mogu da zadovolje prethodno definisane kriterijume. Njihovi potencijali prikazani su u sledećim primerima, deo III4 ovog poglavlja.

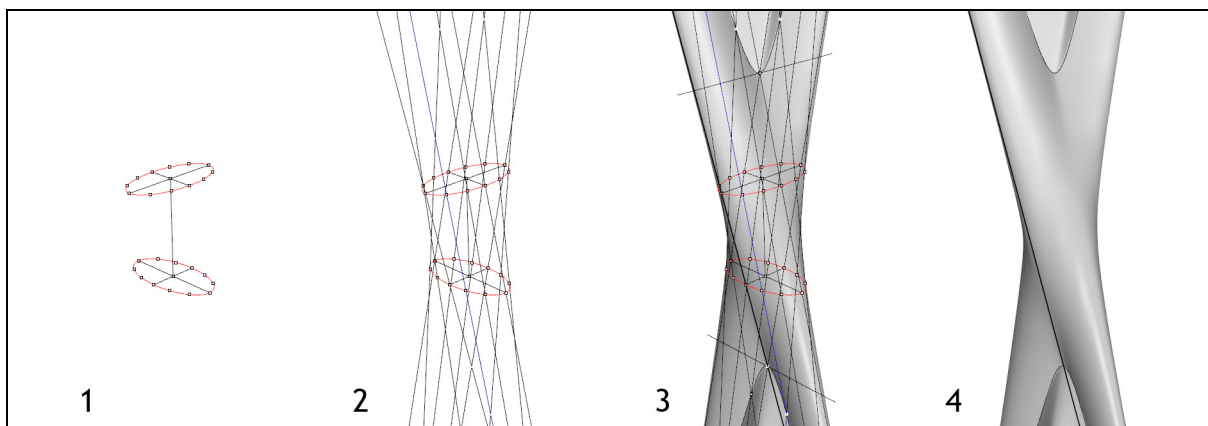
Osim pravoizvodnih površi 3. i 4. reda, u arhitektonskoj praksi je moguća upotreba i viših redova pravoizvodnih površi, koje nisu razmatrane u ovom radu. Na **slici 154** je prikazan primer pravoizvodne površi višeg reda koju izvodi prava  $i$ , kretanjem po vodiljama, elipsama  $d_1$  i  $d_2$ . Velike ose elipsi postavljene su pod pravim uglom u prvoj ortogonalnoj projekciji. Na istoj slici, desno, prikazane su presečne krive površi u označenim ravnim presecima.



*slika 154. Pravoizvodna površ višeg reda*

Na **slici 155** prikazan je način izvođenja pravoizvodne površi sa prethodne *slike* u *Rhinocerosu*, upotrebom opcije *Sweep 2 rail*. Prethodno opisane, horizontalno postavljene elipse su vodilje („rails“ u kompjuterskom programu) i podeljene su na jednak broj delova, faza 1. Kroz njih su postavljene izvodnice prikazane u fazi 2, od kojih je jedna korišćena u programu kao „cross section curve“. Izvedena je

površ prikazana u fazi 3, odnosno bez izvodnica i vodilja u fazi 4. S obzirom da se radi o samopresečnoj površi, presek konstruisanih izvodnica je korišćen za definisanje dve grane samopresečne krive, što je prikazano u fazi 3.



slika 155. Izvođenje pravoizvodne površi u Rhinoceros-u

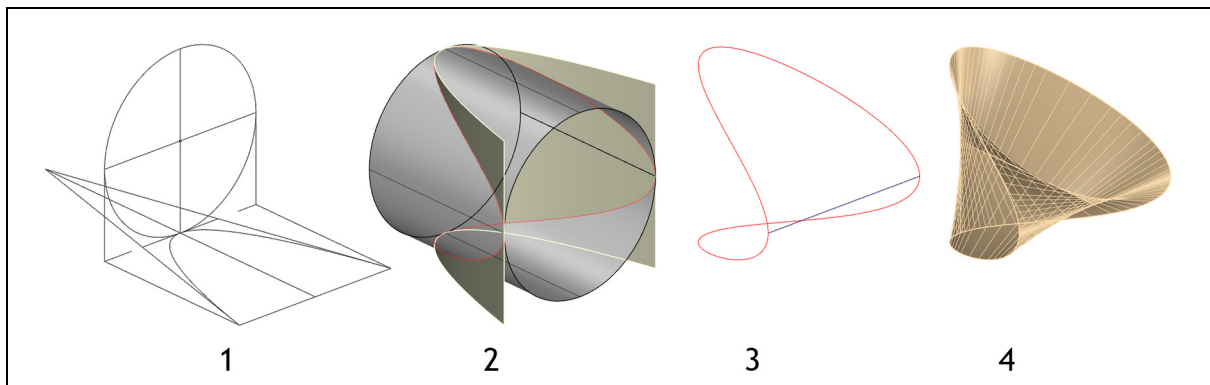
### III4 IZABRANE PRAVOIZVODNE POVRŠI VIŠEG REDA I MOGUĆNOSTI NJIHOVE PRIMENE U ARHITEKTURI

Primena geometrijskih površi višeg reda u formiranju prostornih struktura je moguća kako upotrebom celih površi ili njihovog većeg dela, tako i spajanjem različitih isečaka tih površi u složeniju formu. Adekvatna primena pravoizvodnih površi višeg reda, u prikazanim primerima, doprinosi jednostavnosti projektovanja i praktičnog izvođenja, racionalnosti i ekonomičnosti, a uz zadržavanje vizuelnih (estetskih) kvaliteta prostorne strukture. Upotrebom nekih od prethodno pomenutih ravnih i prostornih krivih 3. i 4. reda, kao vodilja, izvedene su pravoizvodne površi 3. i 4. reda koje mogu imati primenu u arhitekturi. Formirane površi, njihovi delovi i isečci su univerzalni i primenljivi u projektovanju i izgradnji najrazličitijih arhitektonskih prostornih struktura. Praktično izvođenje prikazanih površi u računarskom programu *Rhinoceros* je opisano po fazama u svakom od primera. Primena tih površi je sagledana sa aspekta ispunjenosti kriterijuma definisanih u uvodnim razmatranjima ovog poglavlja. Takođe, izvedene su i neke prostorne krive 3. i 4. reda koje u prethodnom razmatranju nisu analizirane. Dovođenjem dve pravoizvodne površi 2. stepena u položaj da imaju jednu zajedničku izvodnicu, dobijaju se prodorne prostorne krive 4. reda koje su raspadnute na jednu pravu i jednu prostornu krivu 3. reda. Ovakvim načinom su izvedene prostorne krive 3. reda, upotrebljene u ovom radu za izvođenje površi 3. reda. Krive 4. reda izvedene su kao prodori dve kvadrike.

#### III4.1 PRIMER I

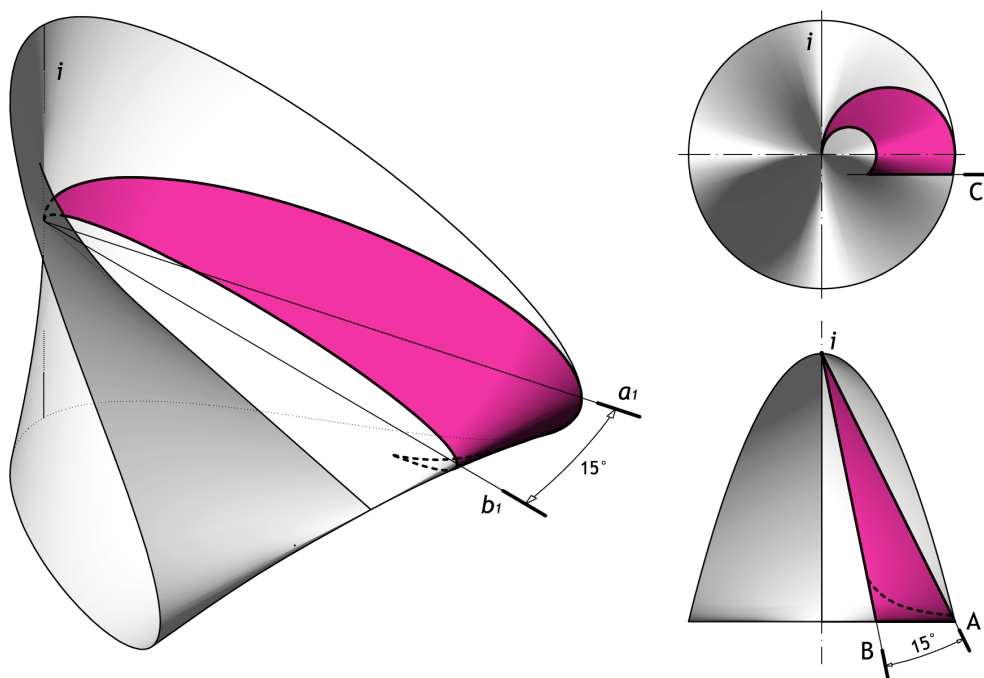
U ovom primeru je za formiranje prostorne strukture korišćen Plikerov konoid, odnosno jedan reprezentativni isečak te površi. Računarski 3D model prikazanog konoida izveden je u *Rhinoceros*-u upotrebom opcije *Sweep 1 rail*. Za izvodnicu površi („*cross section curve*“ u kompjuterskom programu) korišćen je deo torzalne

prave  $t_1$ , dužine jednake prečniku oblice kojom je Plikerov konoid ograničen. Za vodilju („rail“ u komp. programu) je u ovom slučaju najpogodnije bilo korišćenje upravo prodora te oblice (čija je osovina poklopljena sa dvostrukom pravom) sa budućim konoidom, s obzirom da je moguća njena prethodna konstrukcija. Prodorna kriva izvedena je kao prodor obrtne oblice i parabolične oblice, koja je formirana nad parabolom (druga ortogonalna projekcija Plikerovog konoida). Ovaj postupak prikazan je u četiri faze na *slici 156*.



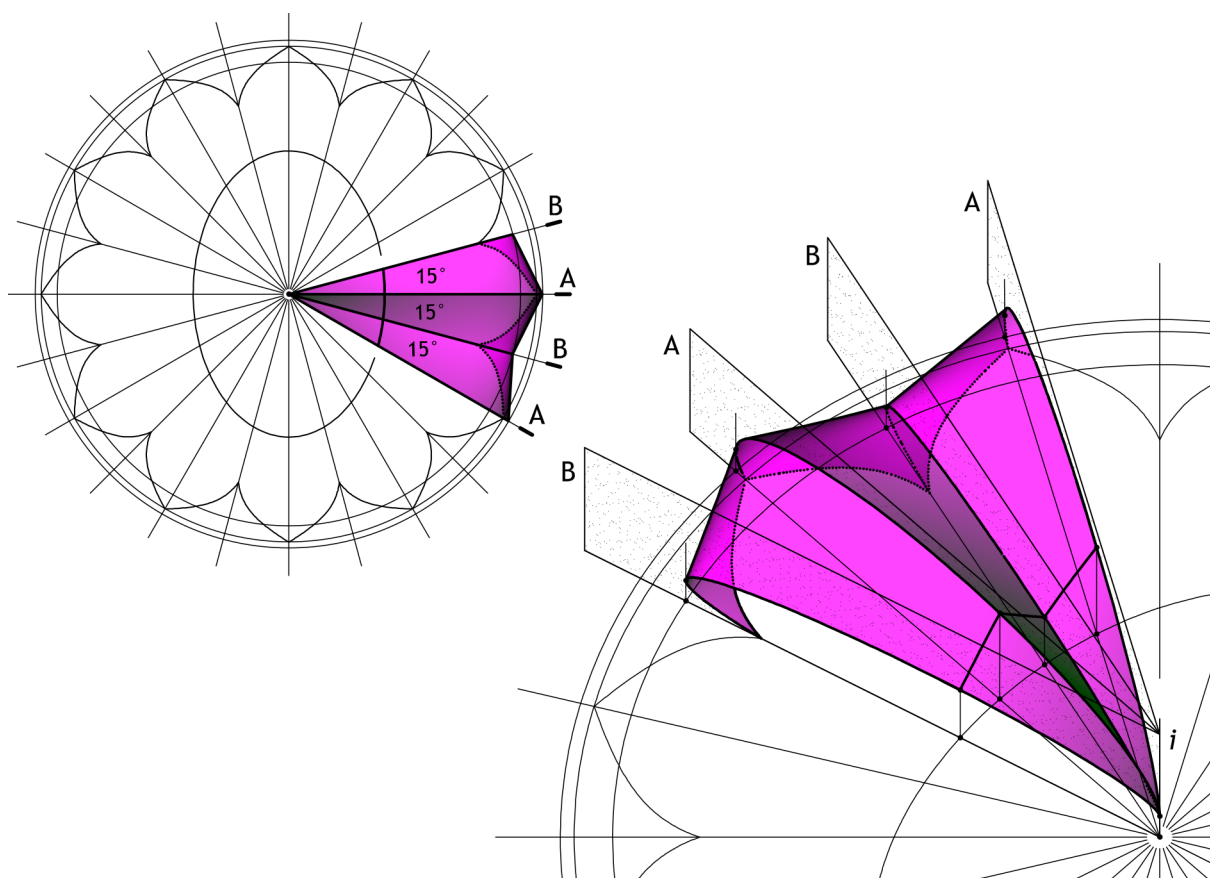
*slika 156. Izvođenje Plikerovog konoida u Rhinoceros-u*

Na *slici 157* prikazan je način formiranja jednog isečka Plikerovog konoida. Isečak nastaje presecanjem konoida ravnima **A**, **B** i **C**. Ravnine **A** i **B** su vertikalne, prolaze kroz vertikalnu izvodnicu konoida  $i$ , seku konoid po elipsama /63/, a međusobno zaklapaju ugao od  $15^\circ$ . Ravnine su prikazane u prvoj projekciji u zračnom položaju, dok su u aksonometriji obeleženi prvi tragovi ravni  $a_1$  i  $b_1$ . Treća presečna ravan **C** je horizontalna i u drugoj projekciji je prikazana u zračnom položaju.



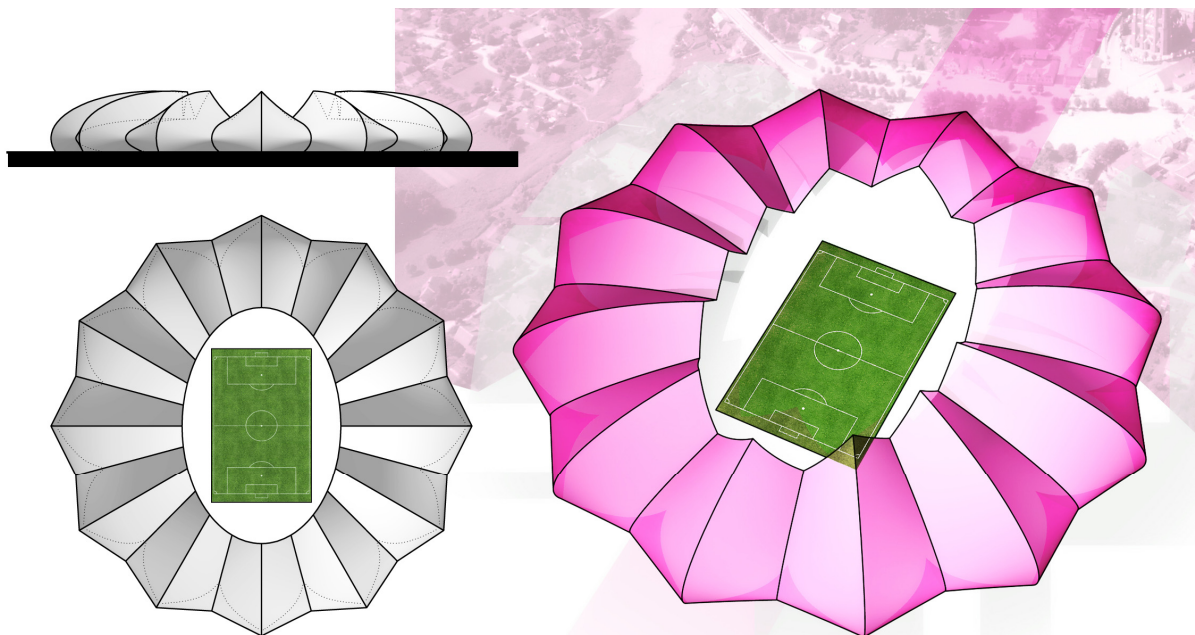
*slika 157. Isečak Plikerovog konoida nastao presecanjem ravnima A, B i C*

Prethodno formirani isečak Plikerovog konoida moguće je praktično upotrebiti na više načina u formiranju arhitektonske prostorne strukture. Na *slici 158* prikazan je način multiplikacije isečka bilateralnom simetrijom do pune kružne osnove. S obzirom da je isečak formiran nad uglom od  $15^\circ$  u osnovi, ceo broj isečaka sadržan je u kružnoj osnovi (24 komada). Vertikalne ravni bilateralne 3D simetrije su naizmenično **A** i **B**. Sve ravni bilateralne simetrije čine pramen, sa izvodnicom **i** kao pramenjačom. Formirana prostorna struktura od multipliciranih isečaka Plikerovog konoida dodatno je presečena vertikalnom eliptičnom oblicom. Na *slici 158* je prikazana osnova i aksonometrija sa tri isečka multiplicirana bilateralnom simetrijom. Ravnj simetrije su označene sa **A** i **B**, izvodnica konoida sa **i**, a prodor sa eliptičnom oblicom je definisan karakterističnim tačkama određenim u osnovi.



*slika 158. Način umnožavanja formiranog isečka Plikerovog konoida*

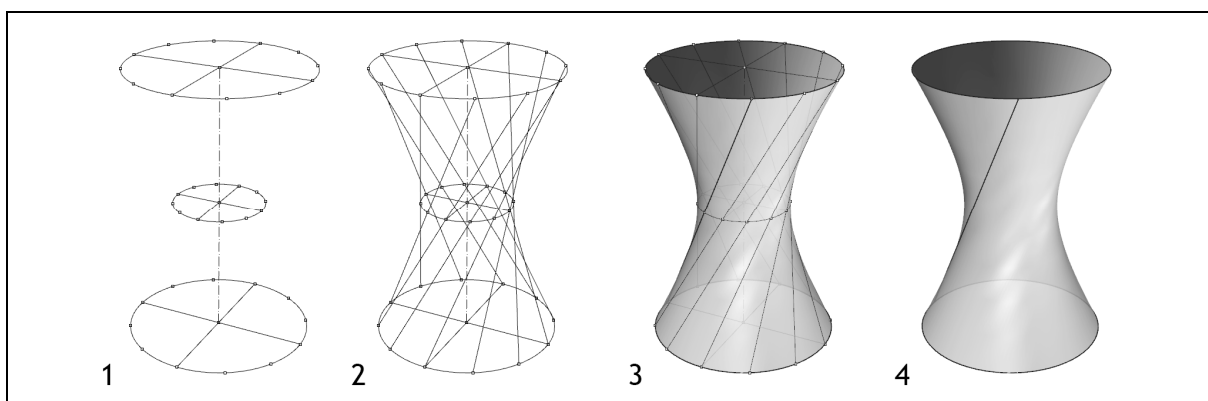
Upotrebom prethodno dobijenog isečka Plikerovog konoida i njegovom multiplikacijom, na prethodno prikazan način, formirana je prostorna struktura prikazana na *slici 159*. Prikazane su dve ortogonalne projekcije i perspektiva konačno izvedene arhitektonske prostorne strukture. Izvedena prostorna struktura zadovoljava prethodno definisane kriterijume. Tome doprinose multiplikacija tipskih elemenata, estetski kvaliteti postignuti upotrebom jednostavne pravoizvodne površi, racionalnost projektovanja i izvođenja (s obzirom na poznate osnovne karakteristike i parametre Plikerovog konoida) itd.



slika 159. Prostorna struktura formirana multiplikacijom isečka Plikerovog konoida bilateralnom simetrijom, 2013. (V. Nikolić)

### III4.2 PRIMER II

U ovom primeru je za formiranje prostorne strukture korišćena, kao jedna od vodilja izvedene površi, kriva 4. reda nastala u prodoru jednogranog obrtnog hiperboloida i obrtne oblice. Hiperboloid je u *Rhinoceros*-u izveden opcijom *Revolve*, gde se jedna od izvodnica okreće oko vertikalne ose formirajući površ, što je prikazano u 4 faze na *slici 160*.

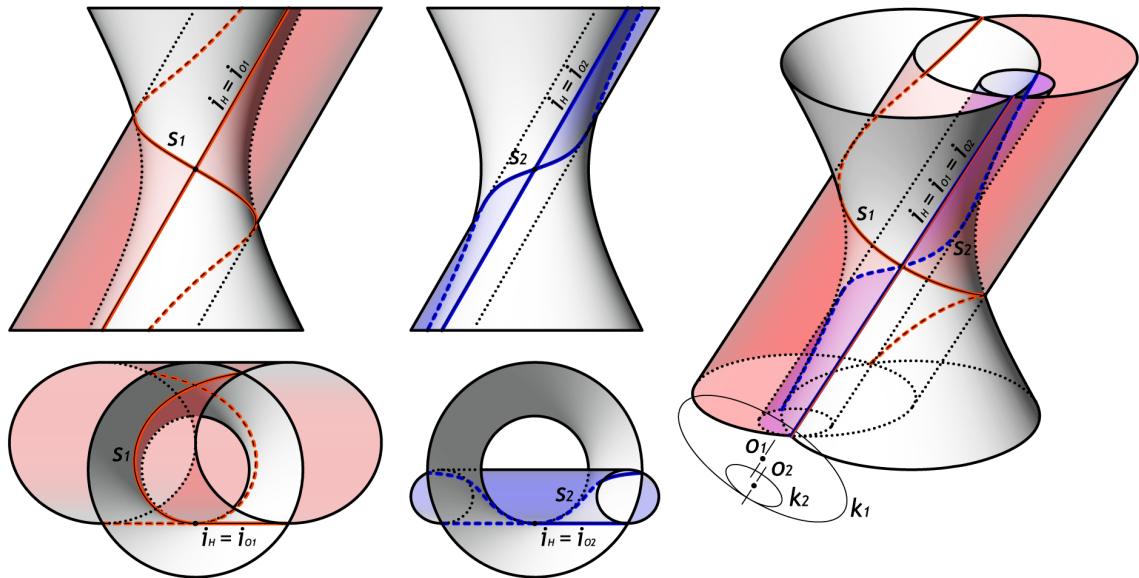


slika 160. Izvođenje jednogranog obrtnog hiperboloida u *Rhinoceros*-u

Na *slici 161* prikazani su prodori jednogranog obrtnog hiperboloida sa dvema obrtnim oblicama. Prva oblica, sa osovnom  $o_1$  i bazisnom kružnicom  $k_1$ , ima veći prečnik bazisa od prečnika strikcionne kružnice hiperboloida. Jednograni obrtni hiperboloid i obrtna oblica imaju zajedničku izvodnicu  $i_H = i_{O1}$ . Prodor ovih površi je raspadnuta prostorna kriva 4. reda, na pravu (izvodnicu)  $i_H = i_{O1}$  i prostornu krivu 3. reda  $s_1$ . Druga oblica, sa osovnom  $o_2$  i bazisnom kružnicom  $k_2$ , ima manji prečnik bazisa od prečnika strikcionne kružnice hiperboloida. Jednograni obrtni hiperboloid i

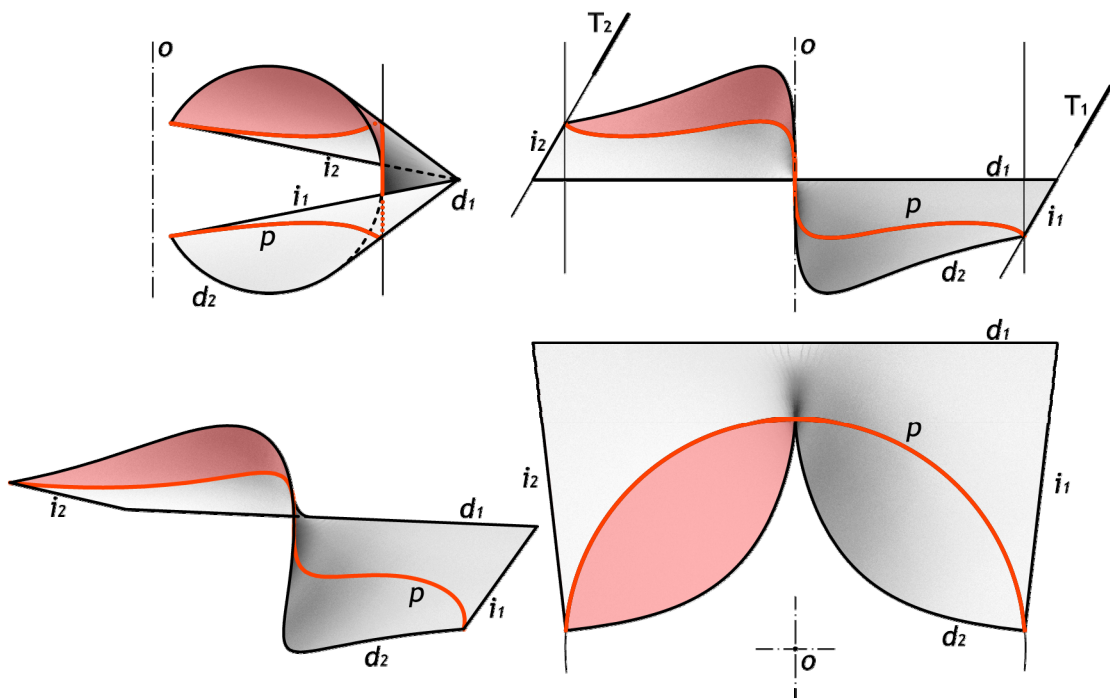


obrtne oblice imaju zajedničku izvodnicu  $i_H = i_{O2}$ . Prodor ovih površi je raspadnuta prostorna kriva 4. reda, na pravu (izvodnicu)  $i_H = i_{O2}$  i prostornu krivu 3. reda  $s_2$ . Oba prodora su prikazana posebno u ortogonalnim projekcijama na **slici 161**, a u aksonometriji su prikazani hiperboloid i obe oblice, sa međusobnim prodorima, kao i osovine  $o_1$  i  $o_2$  i bazisne kružnice  $k_1$  i  $k_2$  obrtnih oblica.



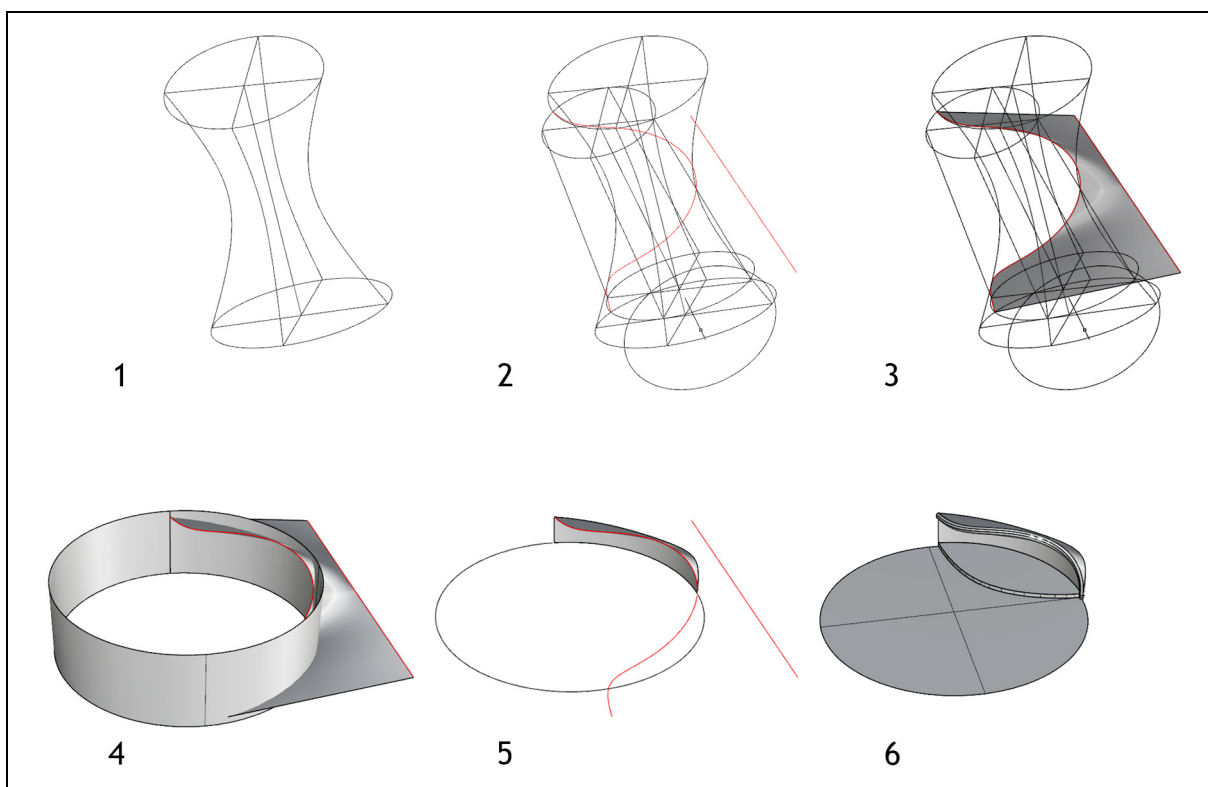
**slika 161.** Prodor jednogranog obrtnog hiperboloida sa obrtnim oblicama

Korišćenjem prethodno dobijene prostorne krive  $s_1$  izvedena je pravoizvodna površ prikazana na **slici 162**. Izvodnica  $d_1$  je prava paralelna sa  $i_H = i_{O1}$ , a izvodnica  $d_2$  je prostorna kriva  $s_1$ . Paralelne ravni  $T_1$  i  $T_2$  su ravni bazisa jednogranog obrtnog hiperboloida i eliptičnih preseka obrtnih oblica sa **sluke 161**. Ovako izvedena pravoizvodna površ u prodoru je sa oblicom, po prostornoj krivoj  $p$ . Segment ove površi, označen crvenom bojom, upotrebljen je za formiranje prostorne strukture.



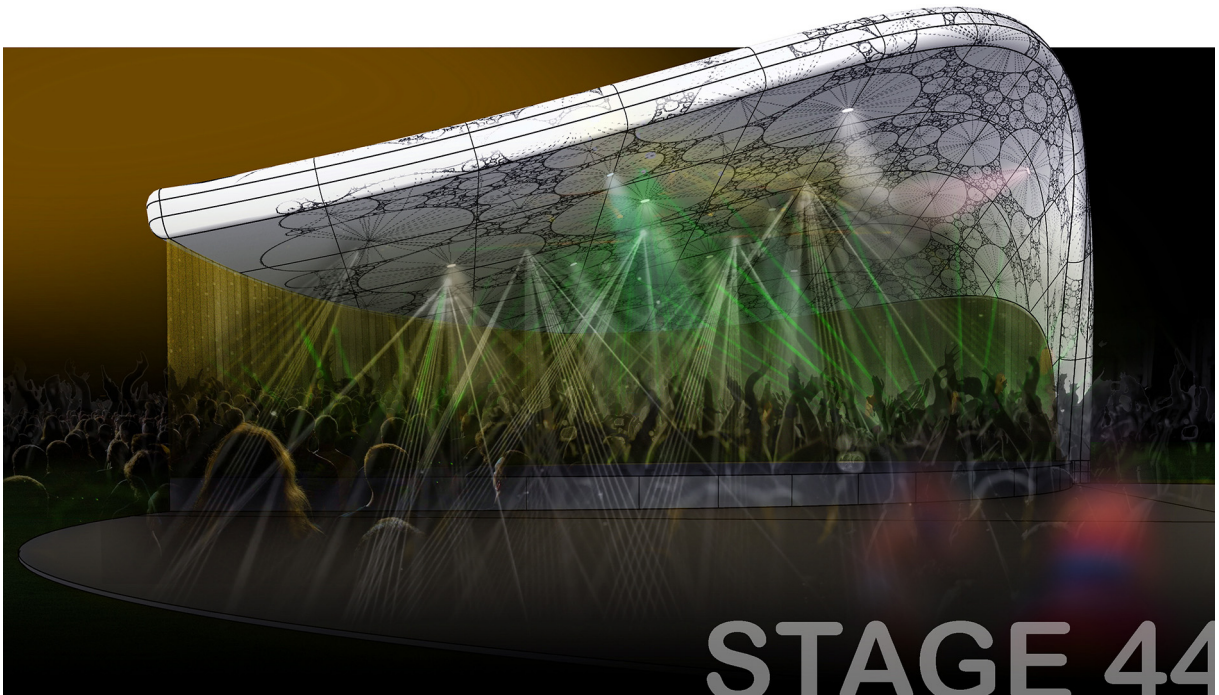
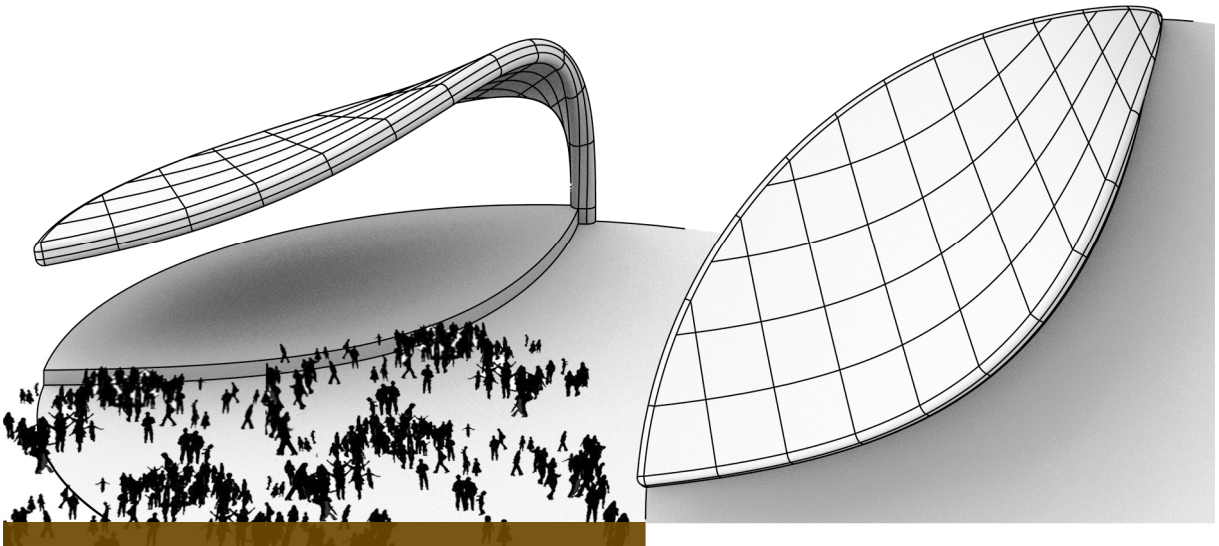
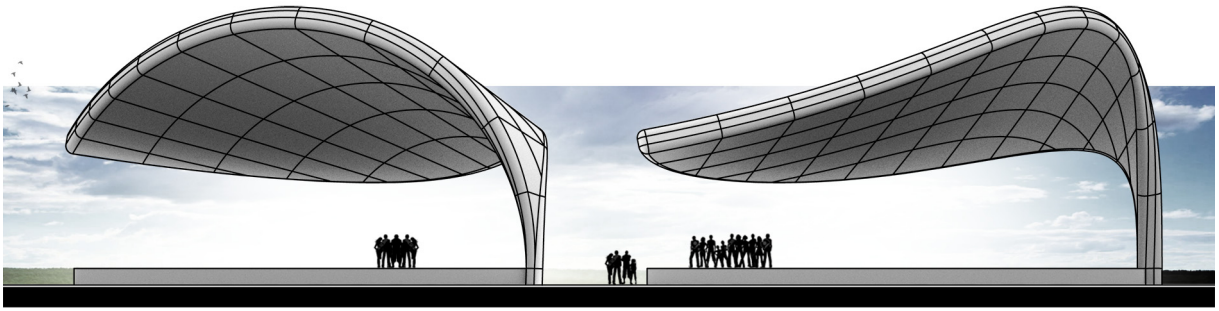
**slika 162.** Prodor pravoizvodne površi 3. reda i cilindrične oblice (ort. projekcije i persp.)

Na **slici 163** je prikazan postupak izvođenja krive, konoida, njegovog reprezentativnog isečka i formiranje prostorne strukture u *Rhinceros-u*, u šest faza. U fazi 1 je prikazan žičani model jednogranog obrtnog hiperboloida, a u fazi 2 njegov prodor sa obrtnom oblicom po raspadnutoj prostornoj krivoj 4. reda (raspada se na prostornu krivu 3. reda i pravu). Međusobni položaj i odnos jednogranog obrtnog hiperboloida i obrtne oblice prethodno je definisan i opisan. Između prostorne krive vodilje 3. reda i prave vodilje (paralelne osovini obrtne oblice i jednoj izvodnici hiperboloida) je izvedena pravoizvodna površ 3. reda, opcijom *Loft*, faza 3. Na taj način je generisan konoid 3. reda koji je u fazi 4 presečen vertikalnom obrtnom oblicom. Zadržan je samo jedan isečak površi, prikazan u fazi 5. Ovaj isečak je opcijom *Offset surface*, obostrano kopiran uz istovremenu konverziju u puno telo. Tako formiranom „*solid*“ 3D modelu su zaobljene ivice opcijom *Fillet surface*, faza 6. Takođe su, pre dalje vizuelne obrade u smislu zadavanja sekundarnih vizuelnih svojstava 3D modela (boja i tekstura), izdvojene izolinije na jednakom rastojanju u dva pravca, opcijom *Extract isocurve*.



**slika 163.** Izvođenje isečka konoida i forme arhitektonske strukture u *Rhinceros-u*

Na **slici 164** prikazana je, u tri ortogonalne projekcije i perspektivi, prostorna struktura formirana od prethodno izvedenog isečka površi 3. reda, a na prethodno opisan način. Arhitektonska vizuelizacija prostorne strukture prikazana je na istoj slici. Ovakva arhitektonska prostorna struktura zadovoljava prethodno definisane kriterijume, gde se od relativno jednostavne pravoizvodne površi 3. reda (čije su osnovne karakteristike i parametri poznati) može praktično izvesti vizuelno kvalitetna, dinamična struktura, koja je uporediva sa sklopovima mnogo složenijih površi.

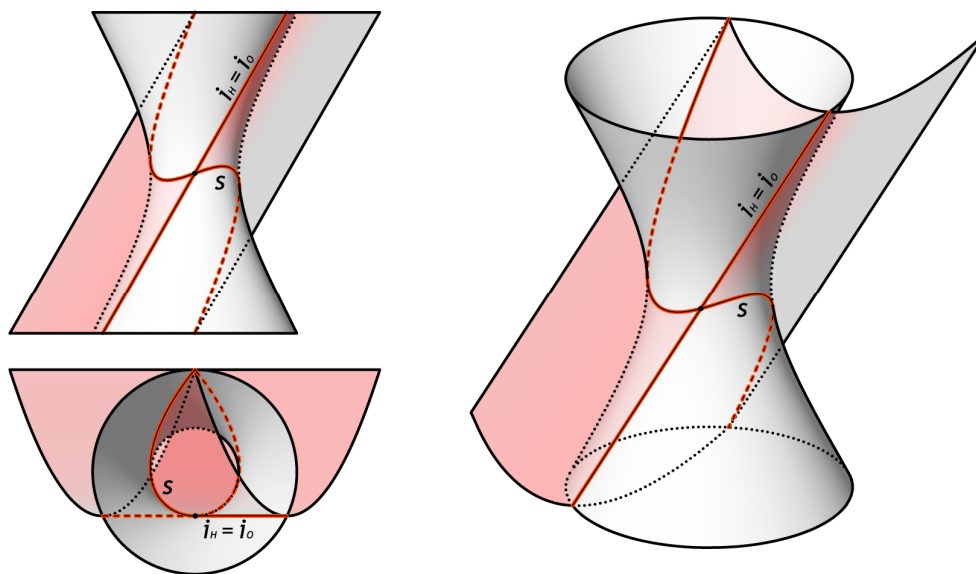


*slika 164. Arhitektonska vizuelizacija prostorne strukture zasnovane na pravoizvodnoj površi 3. reda, 2013. (V.Nikolić)*



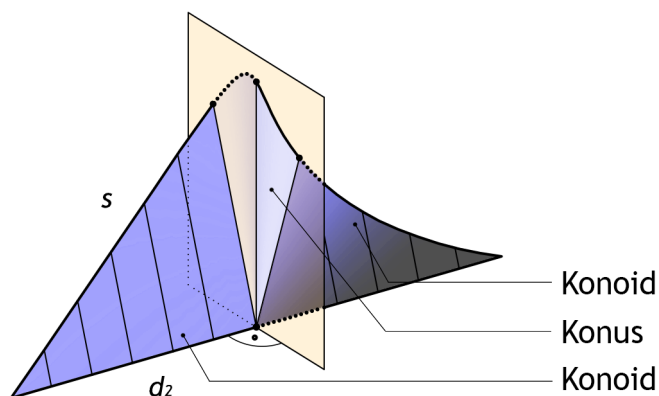
### III4.3 PRIMER III

Za formiranje prostorne strukture prikazane u ovom primeru korišćene su dve pravoizvodne površi 3. reda izvedene po jednoj zajedničkoj vodilji, prostornoj krivoj 3. reda. Najpre je izvedena kriva vodilja prodorom dve površi 2. stepena. Na **slici 165** prikazan je prodor jednogranog obrtnog hiperboloida (čije je izvođenje u *Rhinoceros*-u prethodno opisano) sa paraboličnom oblicom u dve ortogonalne projekcije i aksonometriji. Jednograni obrtni hiperboloid i parabolična oblica imaju zajednički izvodnicu  $\hat{i}_H = \hat{i}_O$ . Prodor ovih površi je prostorna kriva 4. reda, koja se raspada na pravu (izvodnicu)  $\hat{i}_H = \hat{i}_O$  i prostornu krivu 3. reda  $s$ .

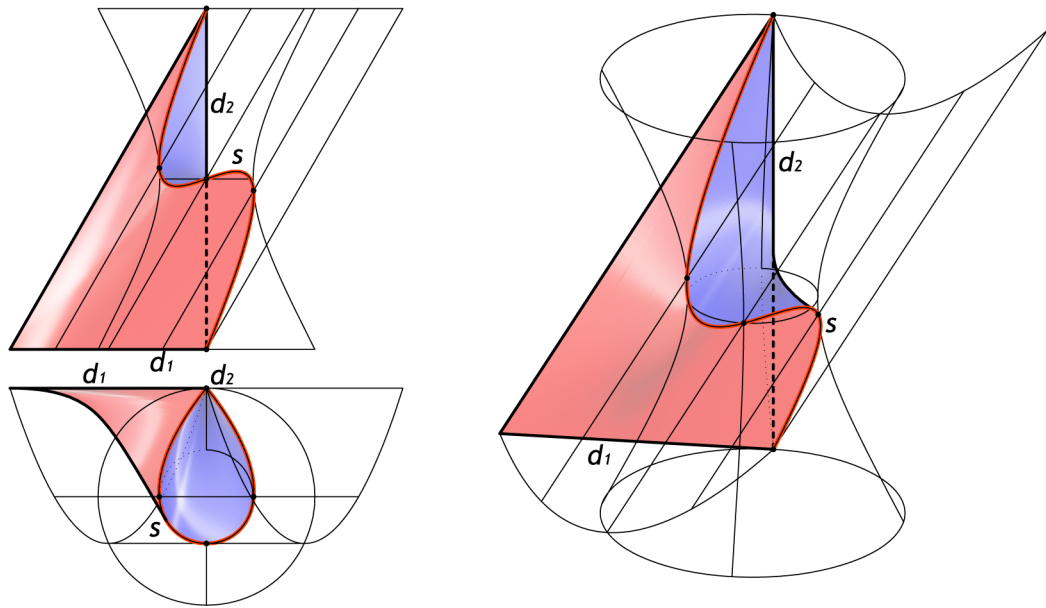


*slika 165. Prodor jednogranog obrtnog hiperboloida i parabolične oblice*

Korišćenjem prethodno dobijene prostorne krive 3. reda  $s$ , kao i pravih vodilja  $d_1$  i  $d_2$ , izvedena su dva segmenta pravoizvodnih površi 3. reda, prikazanih na **slici 167** u dve ortogonalne projekcije i aksonometriji. Pravoizvodna površ obojena crvenom bojom nastaje kretanjem prave po vodiljama  $d_1$  i  $s$ , a pravoizvodna površ obojena plavom bojom kretanjem prave po vodiljama  $d_2$  i  $s$ . Površ nastala na vodiljama  $d_2$  i  $s$  može se rastaviti na dva konoida i jedan konus, **slika 166**. Jedna izvodnica pravoizvodne površi i prave vodilje  $d_1$  i  $d_2$  formiraju pravougli trougao, koji se vidi u pravo veličini u drugoj ortogonalnoj projekciji, a u zračnom položaju u prvoj ortogonalnoj projekciji na **slici 167**.

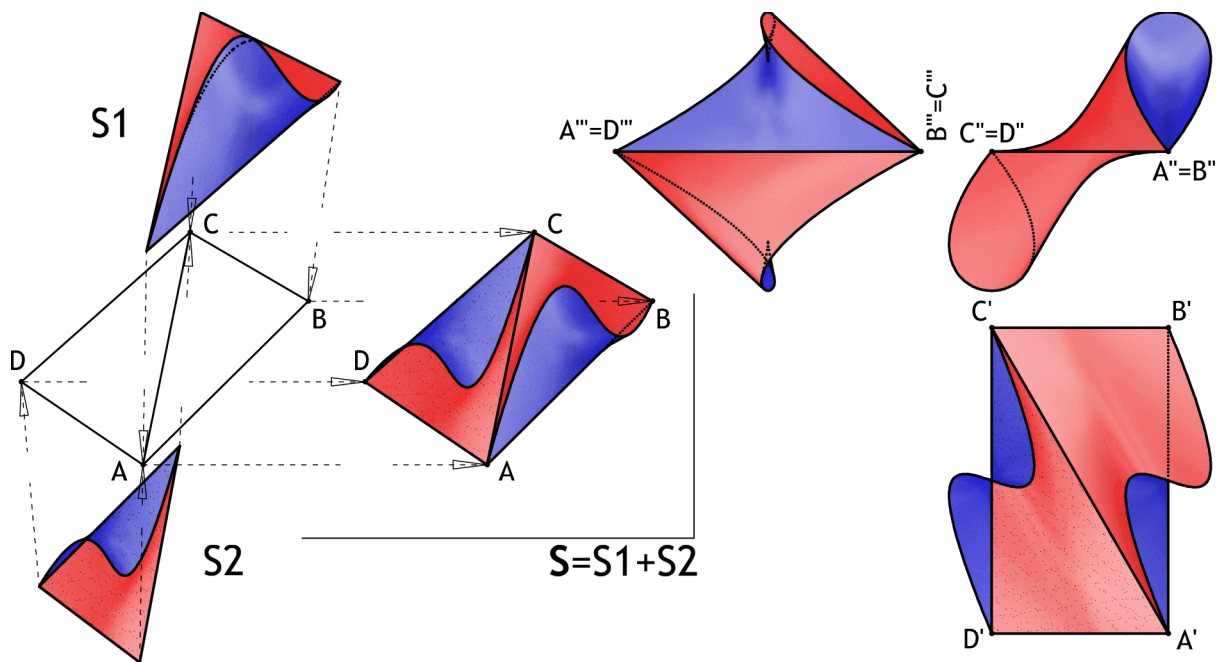


*slika 166. Delovi pravoizvodne površi - dva konoida i konus*



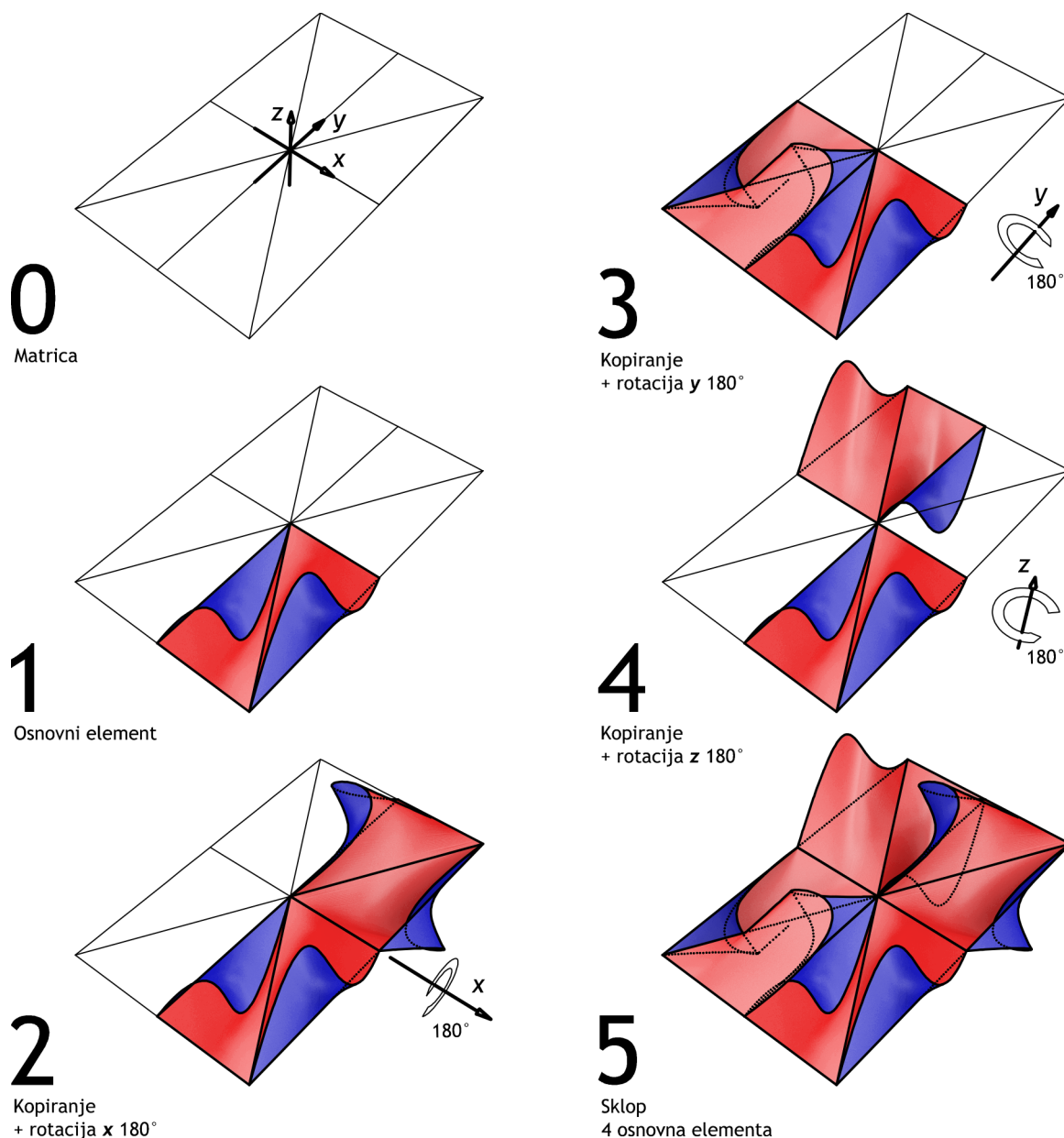
slika 167. Pravoizvodne površi 3. reda izvedene na vodiljama  $d_1$  i  $s$ , odnosno  $d_2$  i  $s$

Bilateranom simetrijom i rotacijom prethodno izvedenih pravoizvodnih površi nastaje „osnovni element” koji je u nastavku korišćen za razvoj geometrijske prostorne strukture, *slika 168*. Delovi  $S_1$  i  $S_2$  su hiralni, odnosno bilateralno simetrični tako da se ne mogu poklopiti primenom geometrijskih transformacija. Postoje „levi” i „desni” deo, kao što su na primer ljudske šake. Ovi delovi ugrađeni su u matricu  $ABDC$  što je prikazano na *slici 168, levo*. Formirani „osnovni element”  $S$  prikazan je u tri ortogonalne projekcije na istoj slici *desno*. Na ovaj način uspostavlja se dinamičan trodimenzionalni odnos upotrebljenih segmenata pravoizvodnih površi. Ovakav element može se umnožavati na različite načine, a u nastavku je prikazan jedan od načina pogodan za formiranje prostorne šrafure.



slika 168. Formiranje „osnovnog elementa” od dva para pravoizvodnih površi 3. reda

Prethodno formirani „osnovni element” je smešten u matricu 2 x 2 polja, *slika 169* faza 1. Odnos dužina strana matrice je 1:√3, a dužina dijagonale je 2. Prethodno je u fazi 0 definisan položaj koordinatnog sistema i orijentacija osa *x*, *y* i *z*. Kopiranjem i rotacijom po osama *x*, *y* i *z* nastaje sklop od četiri „osnovna elementa”. U fazi 2 izvršeno je kopiranje „osnovnog elementa” i njegova rotacija po *x* osi za 180°. Ista prostorna transformacija ponovljena je u fazama 3 i 4, po osama *y* i *z*. U fazi 5 je prikazan formirani uzorak prostorne šrafure. Ovaj postupak se može primeniti i na površi drugačije forme i sklopa, a za formiranje različitih uzoraka prostornih šrafura.

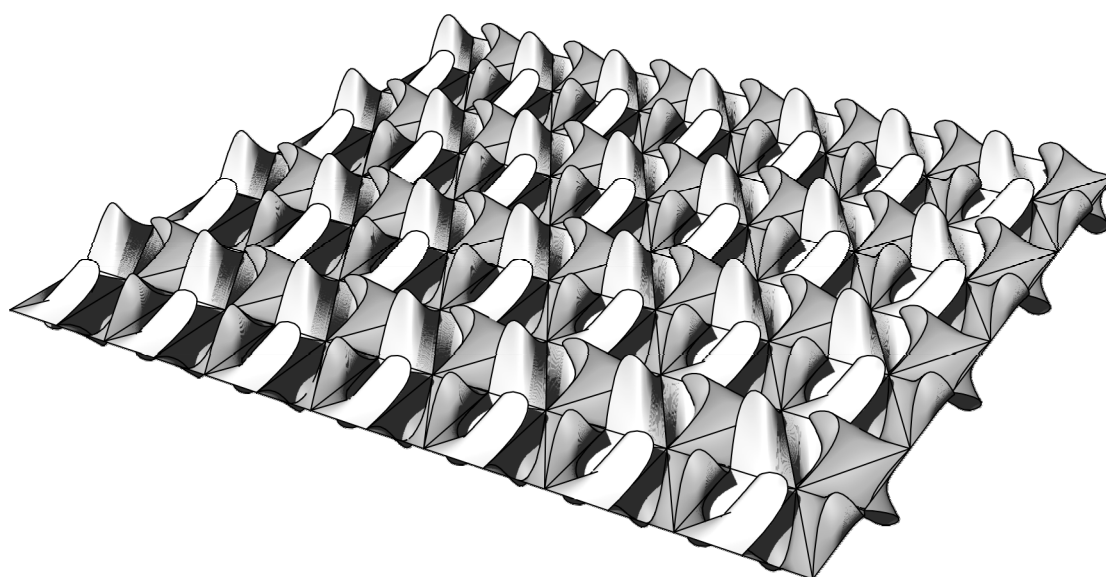
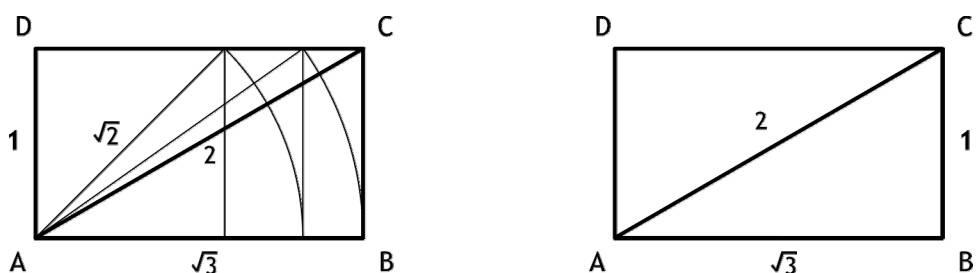


*slika 169. Način i postupak formiranja uzorka prostorne šrafure*

Sklop od 4 osnovna elementa je umnožen translatorno u ravni, po *x* i *y* osi (struktura od 7 x 4 sklopova od po 4 „osnovna elementa”), što formira približno kvadratnu prostornu šrafuru, prikazanu u perspektivi na *slici 170*. Svi elementi u



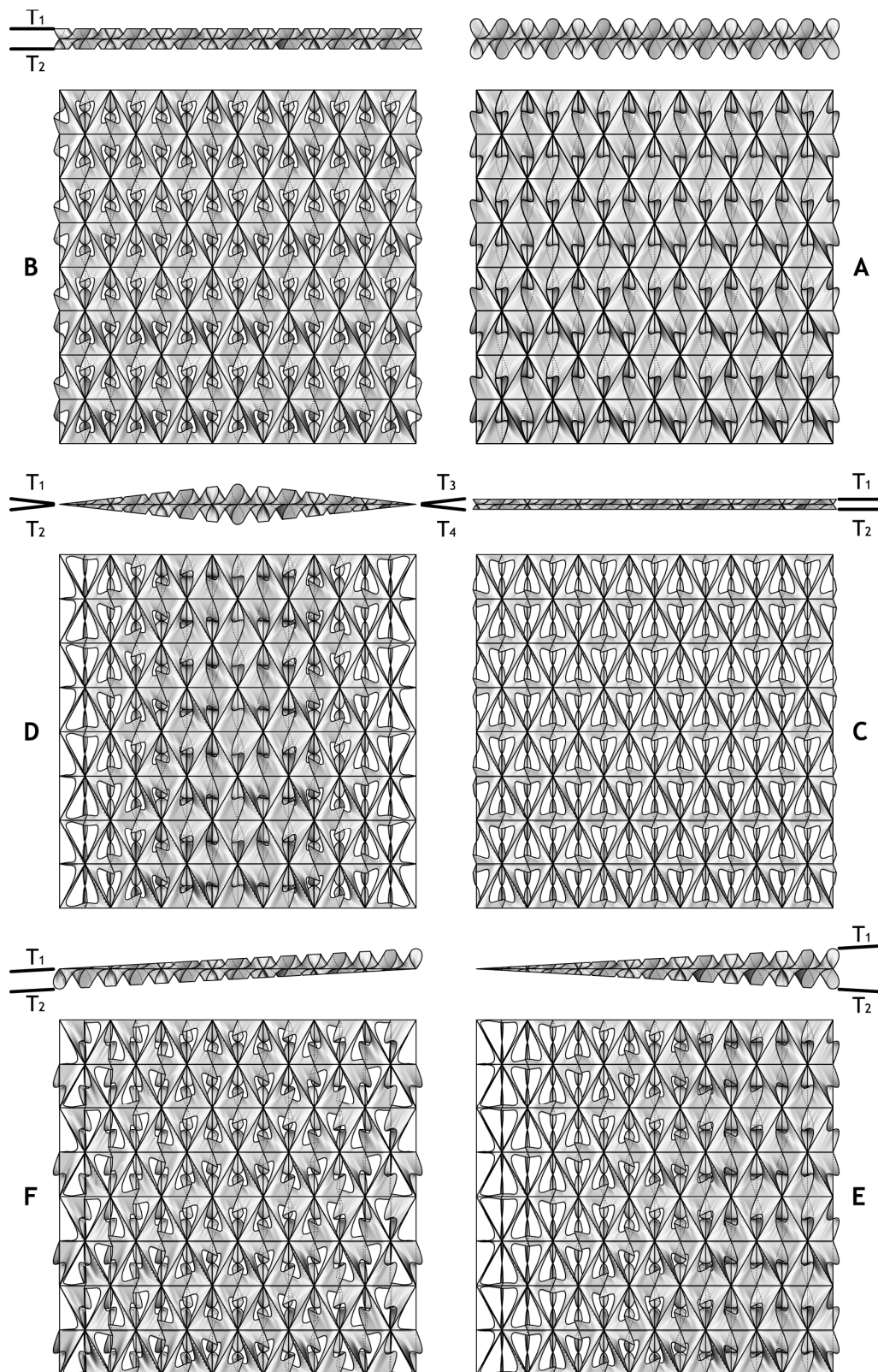
sklopu imaju drugačiju orijentaciju, što i pored ponavljanja čini prostornu strukturu dinamičnom i „fluidnom“, a opet u strogo definisanom zakonomernom rasporedu. Na istoj slici, gore, prikazani su proporcijски odnosi korišćeni u matrici.



*slika 170. Proporcije korišćene matrice i prostorna šrafura u perspektivi*

Prethodno formirana prostorna šrafura (3D mustra), prikazana je i na *slici 171 A* u dve ortogonalne projekcije. Na istoj slici prikazane su varijante od *B* do *F*, izvedene prostorne šrafure, presečene ravnima u nekoliko različitih međusobnih položaja. Položaj presečnih ravni  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  i  $T_4$  prikazan je u drugoj projekciji svake od varijanti, u zračnom položaju. U varijantama *B* i *C* presečne ravni  $T_1$  i  $T_2$  su međusobno paralelne i paralelne su ravni u kojoj je razvijena prostorna šrafura. Postavljene su na različitim rastojanjima u ove dve varijante. U varijanti *F* međusobno paralelne presečne ravni  $T_1$  i  $T_2$  nisu paralelne sa ravni prostorne šrafure, a u varijanti *E* presečne ravni  $T_1$  i  $T_2$  se međusobno seku po pravoj koja leži u ravni prostorne šrafure. U varijanti *D* uvedene su četiri presečne ravni  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  i  $T_4$ , od kojih se po dve međusobno seku po pravama koje leže u ravni prostorne šrafure. Primenom prikazanih postupaka i principa moguće je formirati beskonačno mnogo različitih prostornih šrafura, kako u formalnom smislu, tako i u smislu njihove dalje obrade. To je veliki estetski potencijal koji je moguće primenjivati u projektovanju fasadnih i krovnih elemenata arhitektonskih objekata, kao i u

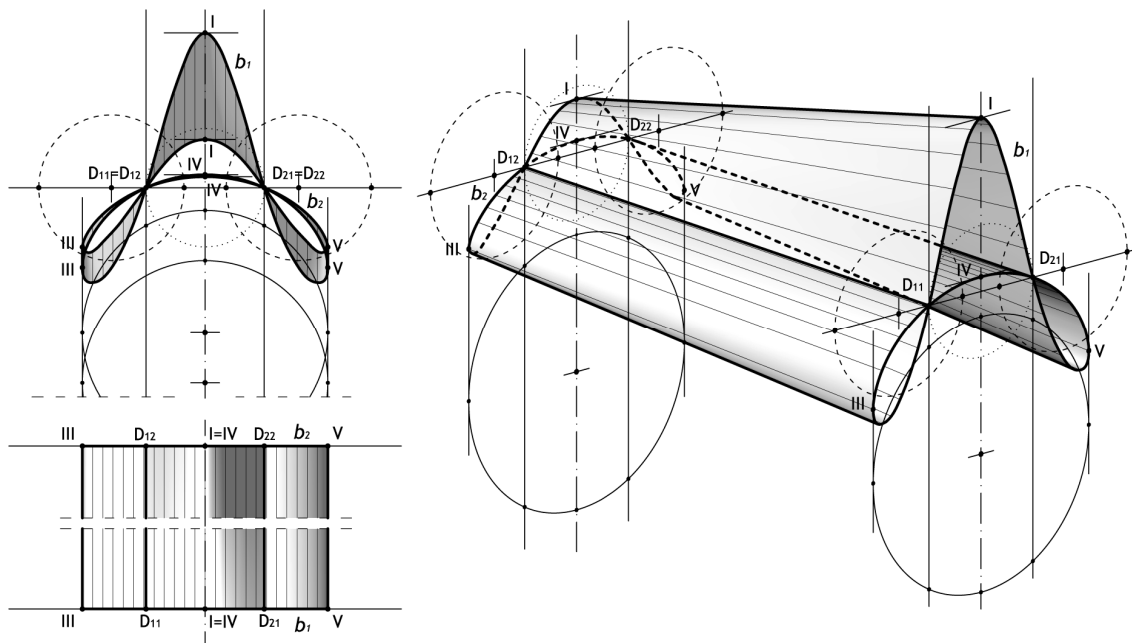
dizajnu enterijera. U ovom slučaju analiza forme je urađena manuelno, ali je moguće primeniti automatizovana softverska rešenja za parametarsko modelovanje, kakav je na primer *Grasshopper plug-in* za *Rhinoceros*. Na taj način je moguće razvijanje prostornih šrafura u ravni po dve ose, kao i na zakrivljenim površima, po tri prostorne ose.



slika 171. Prostorne šrafure (mustre), 2013. (V. Nikolić)

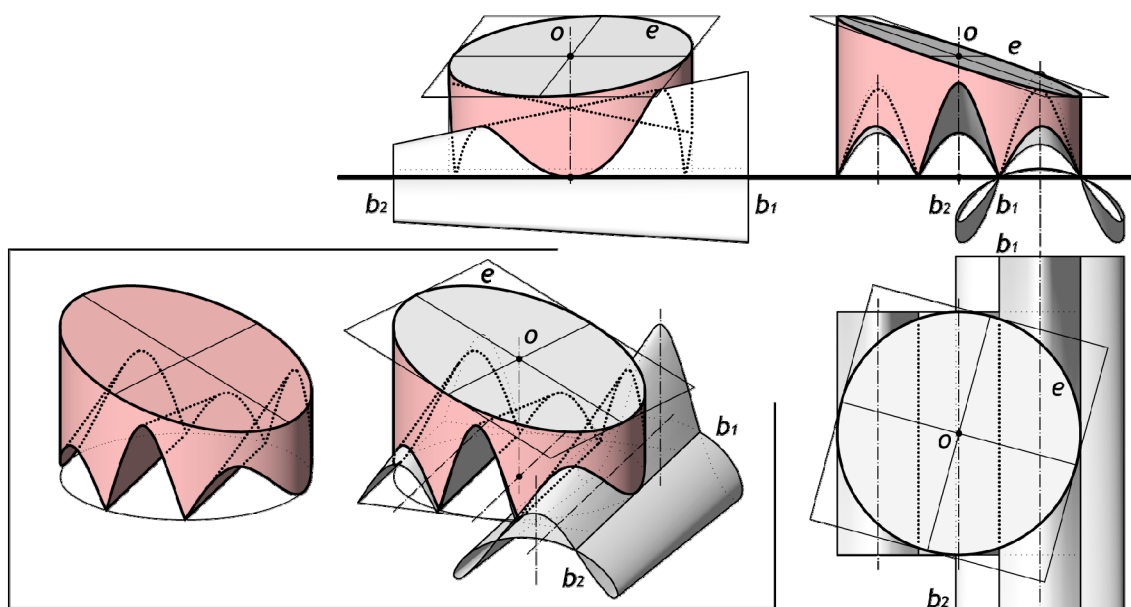
### III4.4 PRIMER IV

Upotrebom bicirkularnih krivih 4. reda (prikazanih i izvedenih u *delu III2.2, slika 147*), formiran je cilindroid 4. reda, prikazan na *slici 172*. Paralelno postavljene bicirkularne krive  $b_1$  i  $b_2$  su vodilje samopresečne pravoizvodne površi, cilindroida 4. reda. Beskonačno daleka prava vodilja površi zadata je direktrisnom ravni koja je upravna na ravni krivih  $b_1$  i  $b_2$  i paralelna ravni koja prolazi kroz ose simetrije obe bicirkularne krive /39/.



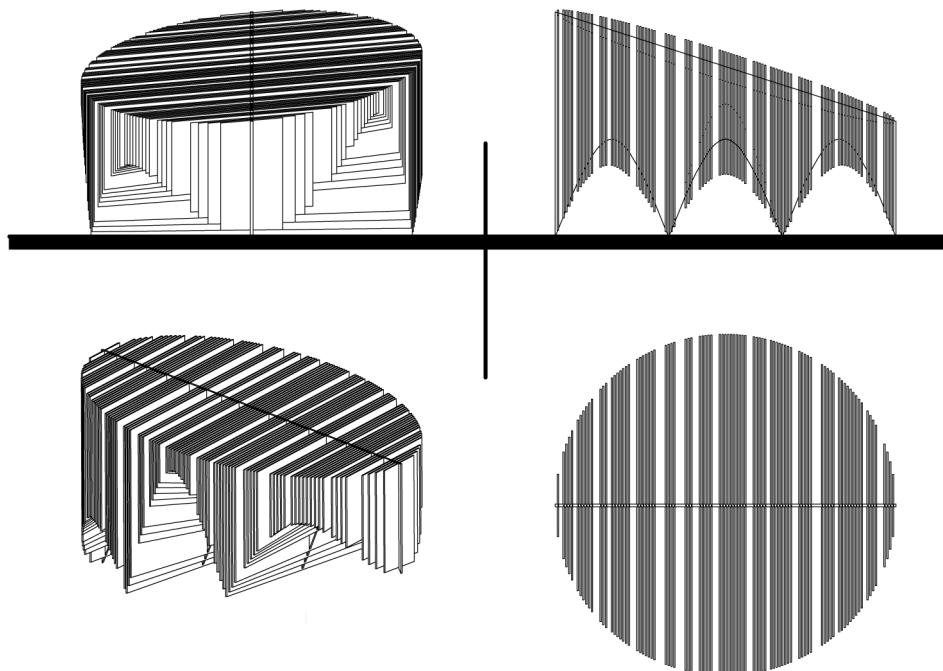
*slika 172. Cilindroid 4. reda sa vodiljama  $b_1$  i  $b_2$  (ortogonalne projekcije i aksonometrija)*

Prostorna struktura na *slici 173* formirana je prodorom jednog isečka obrtne oblice (osovine  $o$ ) i prethodno izvedenim cilindroidom 4. reda sa vodiljama  $b_1$  i  $b_2$ . Oblica je dodatno ravno presečena po elipsi  $e$ .



*slika 173. Način formiranja prostorne strukture u prodoru obrtne oblice i cilindroida 4. reda*

Prethodno dobijena forma poslužila je kao „kalup” za izvođenje prostorne strukture prikazane na *slici 174*, zasnovane na upotrebi pravoizvodnih površi 4. reda. Niz površinskih elemenata, složenih u sistem uporednih ravni, presečen je formom („kalupom”) prikazanom na *slici 173* levo.

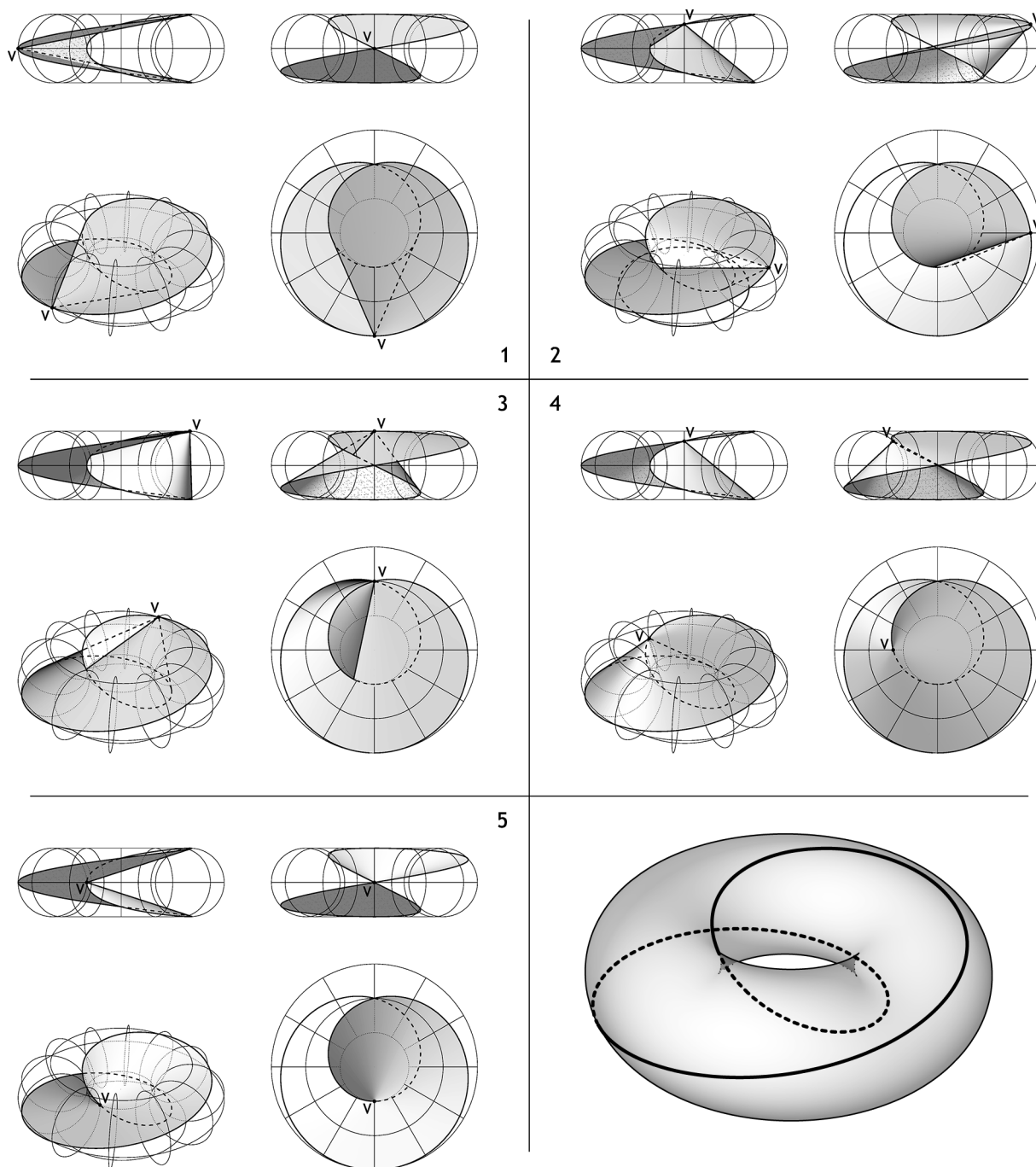


*slika 174. Arhitektonska vizuelizacija prostorne strukture, 2014. (V.Nikolić)*



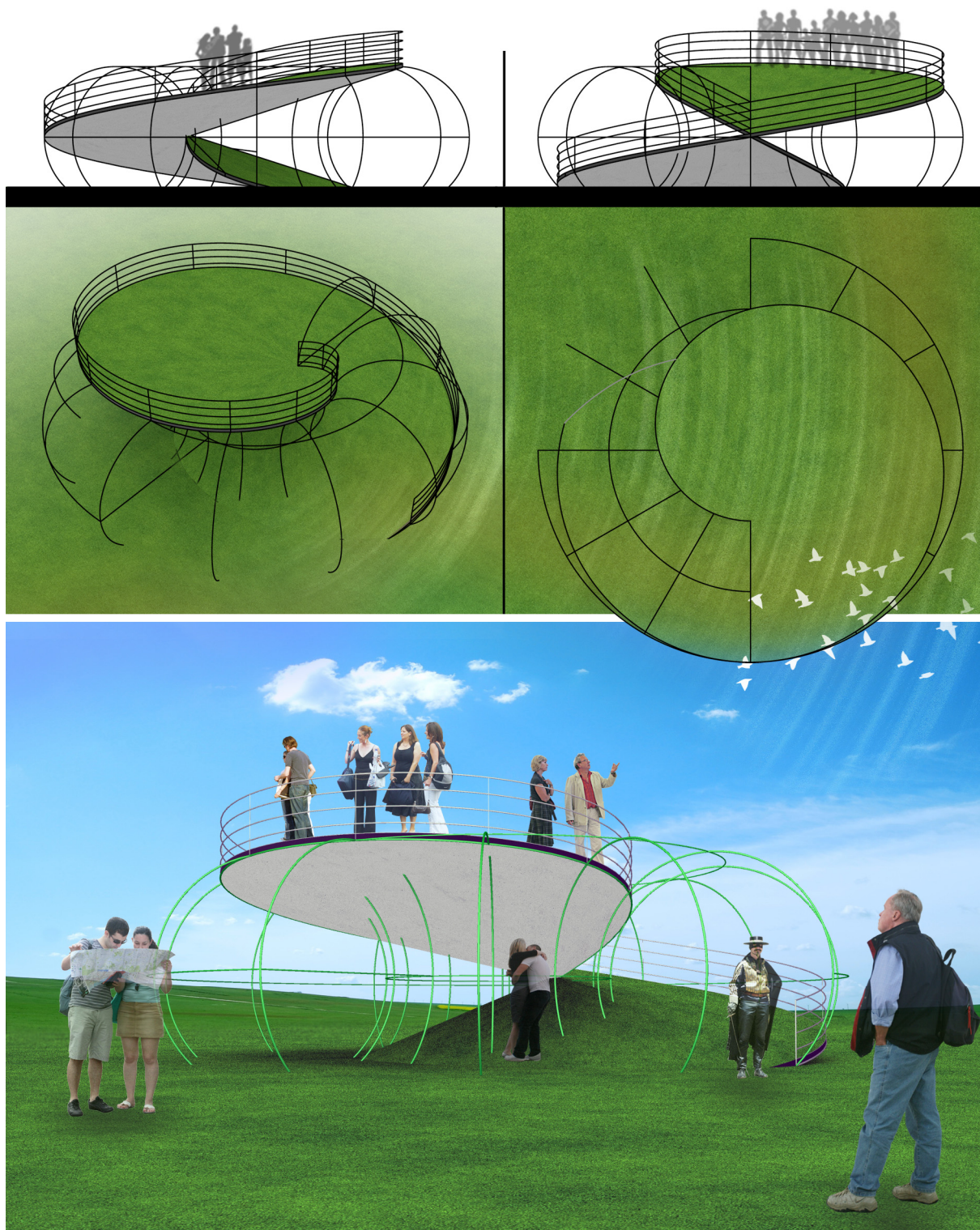
### III4.5 PRIMER V

Prostorna kriva izvedena na površini torusa (torusni čvor (1,2)), upotrebljena je kao vodilja za izvođenje konusa prikazanih na *slici 175*. Kod svih konusa vrh je postavljen u nekoj od tačaka prostorne krive vodilje, tako da su sve izvodnice konusa bisektrise vodilje. Prostorna kriva je 4. reda, a nastale konusne površi su 3. reda. Konusi u varijantama 2 i 3 su samopresečne površi. Tangenta prostorne krive u tački poklopljenoj sa vrhom konusa je karakteristična izvodnica svakog od prikazanih konusnih površi. U varijanti prikazanoj na *slici 175-5* vrh se nalazi u ravni ekvatora površi, nosača prostorne krive /54/.



*slika 175. Varijante konusa sa torusnim čvorom (1,2) kao vodiljom i vrhom na njemu*

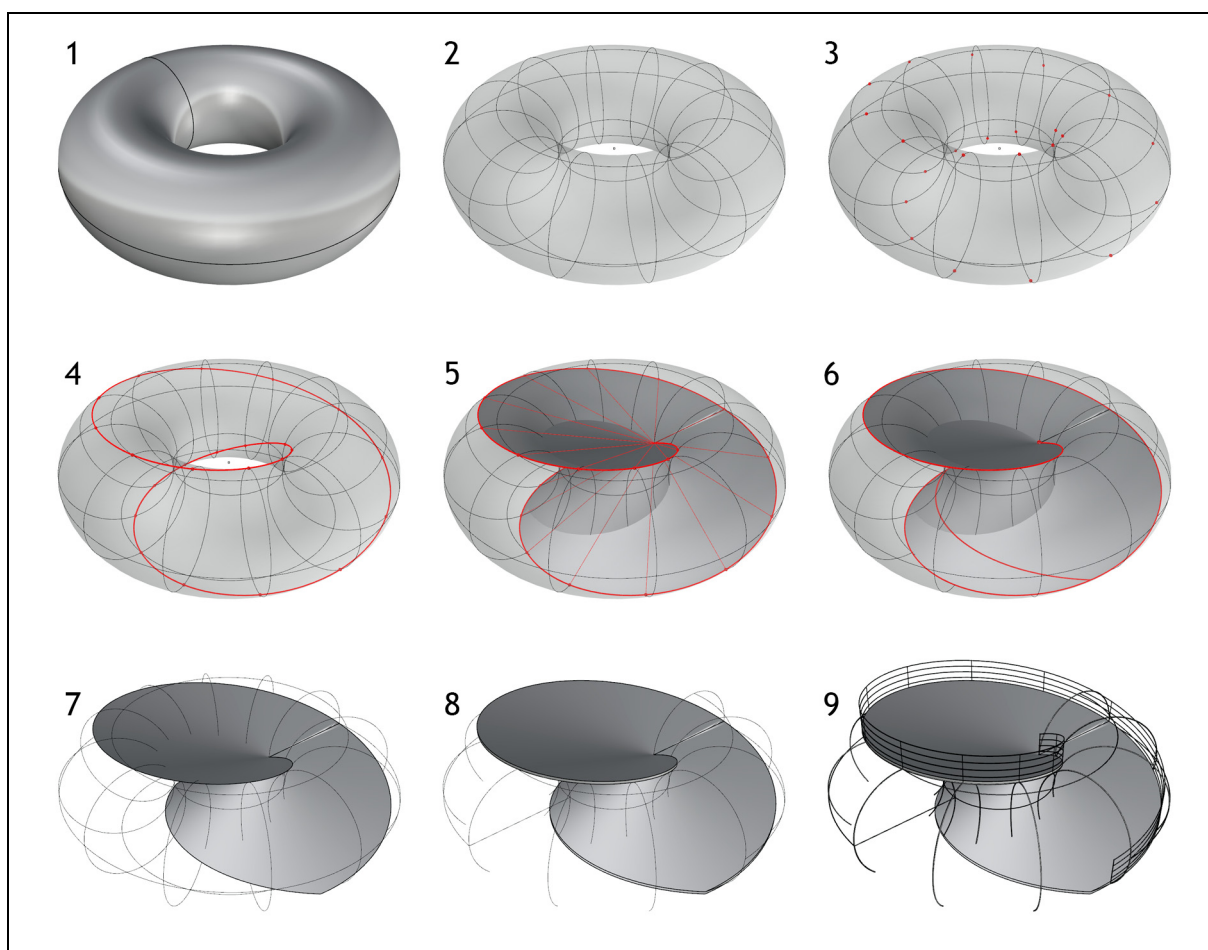
Koristeći konus prikazan na *slici 175-5*, formiran je objekat prikazan na *slici 176*, u tri ortogonalne projekcije i perspektivi. Površ je iskorišćena za formiranje rampe - vidikovca, sa linearnim nosačima nastalim po meridijanima na površini torusa, nosača prostorne krive. Na istoj slici dole, prikazana je vizuelizacija tako nastalog objekta. Poseban kvalitet nastale forme je fluidnost korišćene površi i vizuelni efekat „lebdjenja” gornjeg dela rampe, koji je iskorišćen za vidikovac.



*slika 176. Objekat zasnovan na korišćenju konusa sa torusnim čvorom kao vodiljom, 2013. (V. Nikolić) /54/*



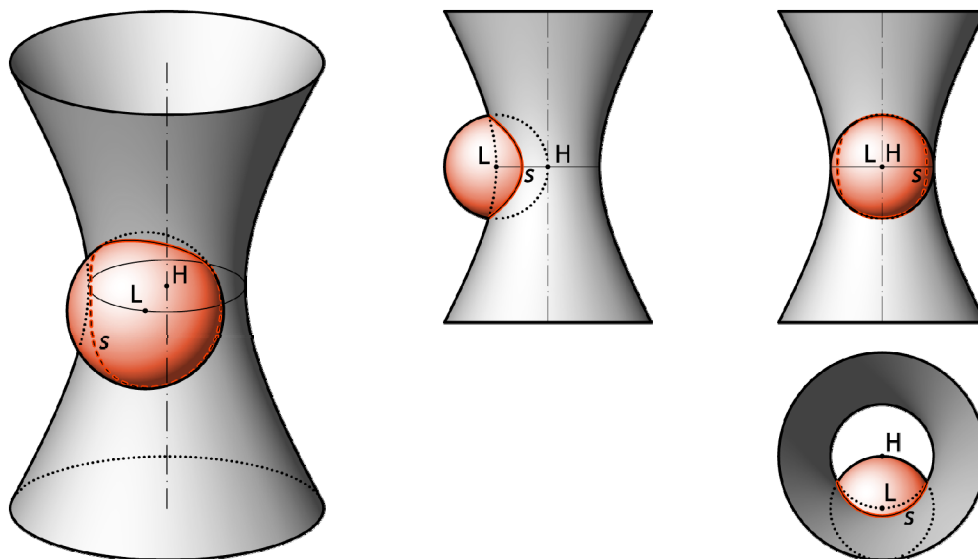
Način izvođenja prethodno prikazane prostorne strukture u računarskom programu *Rhinceros* prikazan je u devet faza, u perspektivi, na *slici 177*. Faza 1 prikazuje torus na kome su u fazama 2 i 3 konstruisane tačke torusnog čvora (1,2). Kroz dvanaest konstruisanih tačaka na površini torusa provučena je zatvorena prostorna kriva opcijom *Interpolate on surface*, faza 4. Ovom opcijom generiše se prostorna ili ravna kriva direktno na nekoj površi. Za izvođenje pravoizvodne razvojne površi, za vrh je odabrana tačka na torusnom čvoru u ravni ekvatora sa unutrašnje strane površi. Od vrha do svake od konstruisanih tačaka torusnog čvora moguće je postaviti prave izvodnice konusa. Konus je u računarskom programu generisan opcijom *Loft*, između torusnog čvora i izabranog vrha, faza 5. Izveden konus je presečen horizontalnom ravni ispod ravni ekvatora. Presek je prikazan u fazi 6, a isečak konusa u fazi 7. Nakon toga je površ iskopirana i translatorno pomerena po vertikalnoj osi za debljinu projektovane pešačke rampe, pri čemu je formirano puno telo, faza 8. U fazi 9 je prostorna struktura upotpunjena linearnim elementima ograde i noseće konstrukcije koja je poklopljena sa geometrijskom konstrukcijom tačaka torusnog čvora. Za generisanje linearnih elemenata sa određenom debljinom korišćena je opcija *Pipe*. Ovako formirana prostorna struktura (3D model) je poslužila kao polazna osnova za izradu arhitektonske vizuelizacije, prikazane na *slici 176*.



*slika 177. Izvođenje prostorne strukture zasnovane na korišćenju isečaka konusa izvedenog na torusnom čvoru u Rhinceros-u*

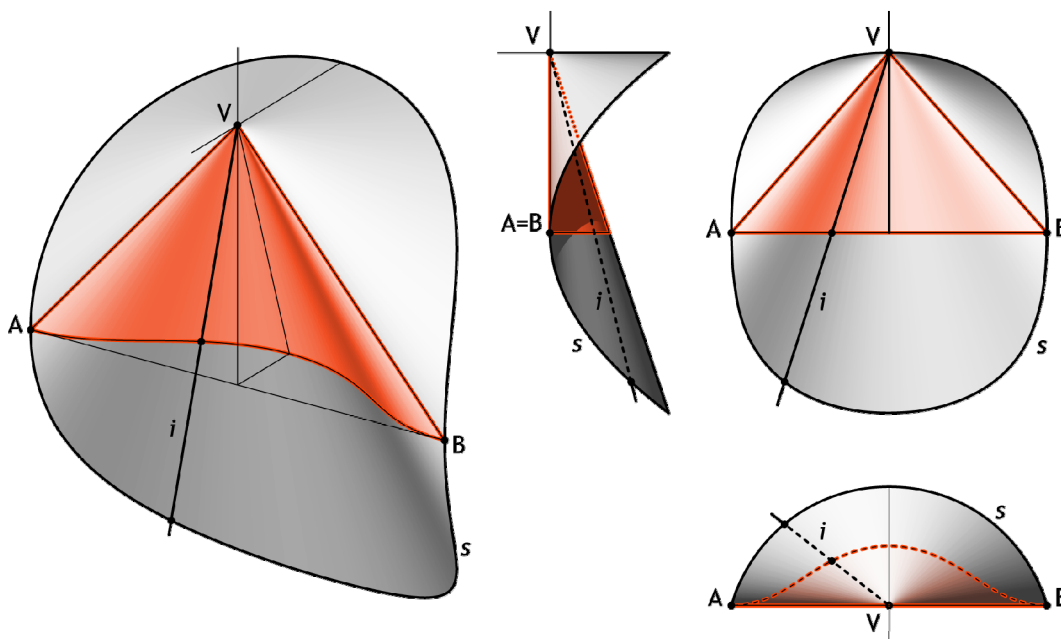
### III4.6 PRIMER VI

Prodorom dve kvadrike nastaje prostorna kriva 4. reda 1. vrste. Na *slici 178* je prikazan način izvođenja krive  $s$ , u prodoru jednogranog obrtnog hiperboloida i lopte. Centar lopte  $L$ , nalazi se na strikcionoj kružnici hiperboloida, a lopta ima isti poluprečnik kao i strikciona kružnica. Lopta prolazi kroz centar jednogranog obrtnog hiperboloida, tačku  $H$ .



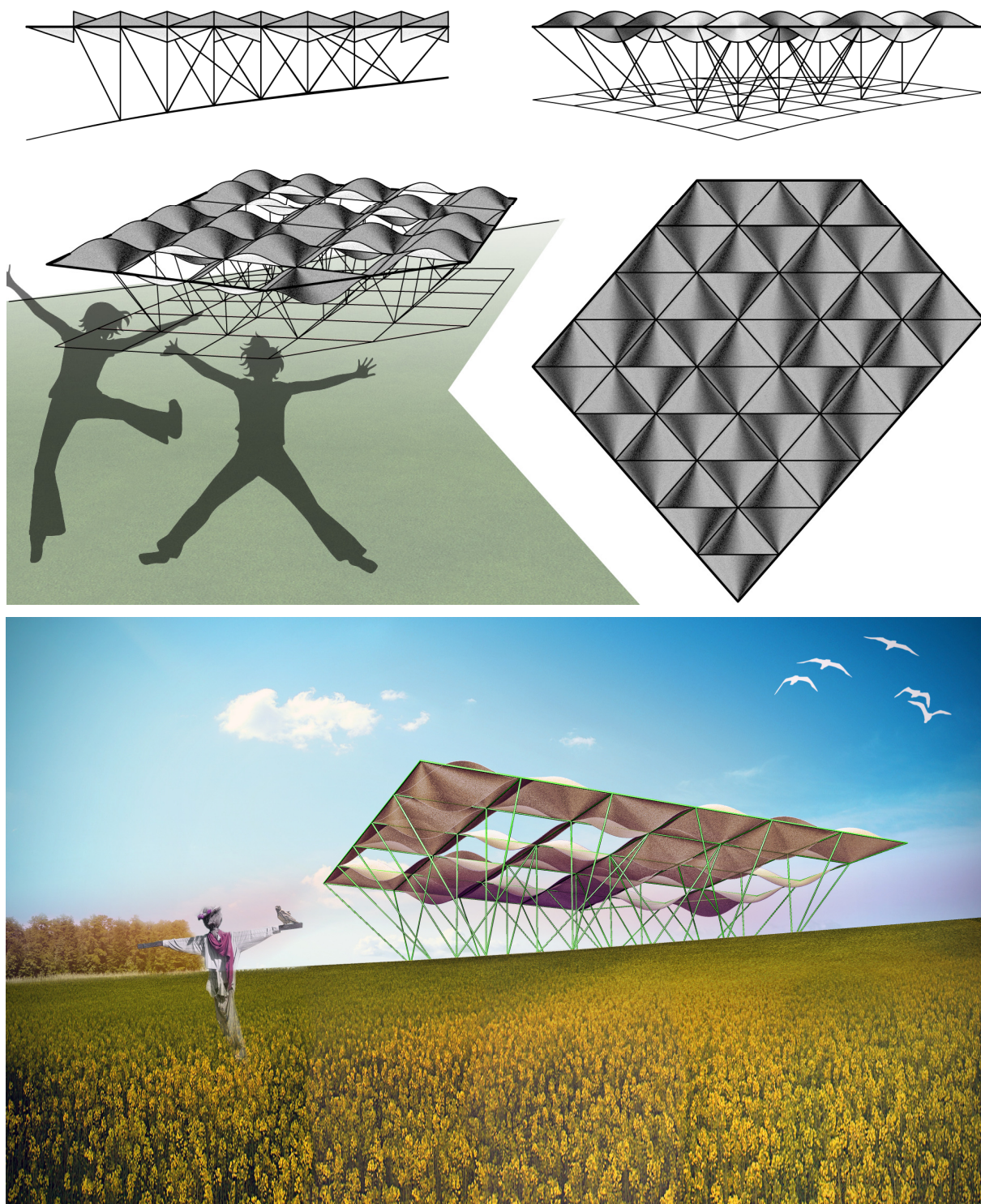
*slika 178. Prostorna kriva 4. reda 1. vrste u prodoru dve kvadrike (ortogonalne projekcije i aksonometrija)*

Korišćenjem prodorne prostorne krive dve kvadrike  $s$ , izveden je konus 4. reda sa vrhom  $V$  i izvodnicom  $i$ , prikazan na *slici 179*. Isecanjem segmenta  $VAB$  konusa 4. reda, formiran je isečak prikazan na istoj slici i označen crvenom bojom.



*slika 179. Konus 4. reda i isečak VAB (ortogonalne projekcije i aksonometrija)*

Multiplikacijom prethodno nastalog isečka konusa 4. reda, u trougaonoj matrici, formirana je prostorna struktura prikazana na *slici 180*. U tri ortogonalne projekcije i perspektivi prikazan je način slaganja podudarnih isečaka, koji su drugačije orijentisani u matrici linearnih elemenata. Na istoj slici dole prikazana je arhitektonska vizuelizacija prostorne strukture.



*slika 180. Ortogonalne projekcije, perspektiva i arhitektonska vizuelizacija prostorne strukture zasnovane na primeni konusa 4. reda, 2014. (V. Nikolić)*

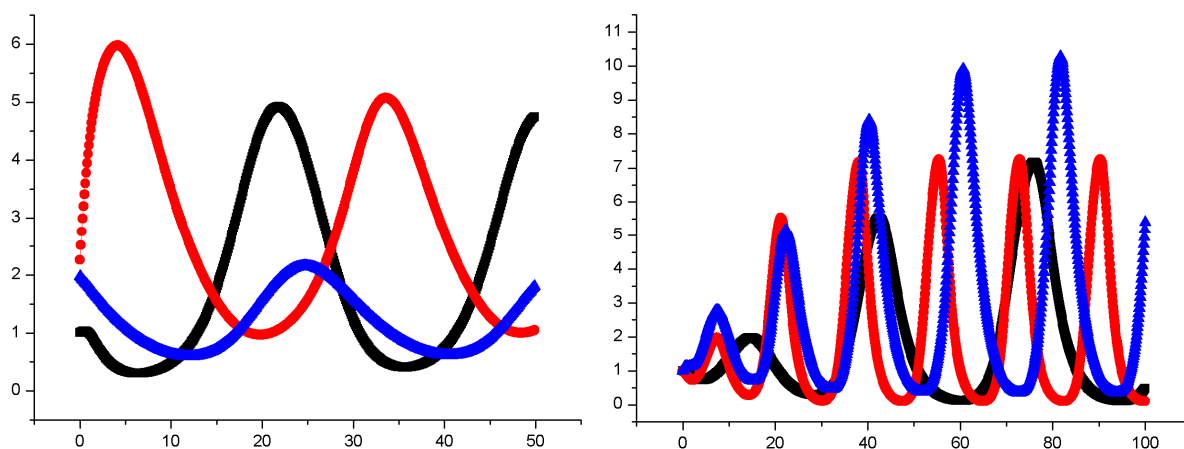


### III5 TRANSCEDENTNE KRIVE

Ravnu transcendentnu krivu koplanarna prava seče beskonačno mnogo puta, odnosno prostornu transcendentnu krivu neka ravan seče beskonačno mnogo puta. To znači da su transcendentne krive beskonačnog reda. U skladu sa tim, karakterističnih tačaka neke transcendentne krive ima beskonačno mnogo. Na primer, transcendentna kriva može imati beskonačno mnogo temena. Transcendentne krive mogu imati posebne tačke, kakve algebarske krive nemaju. To su tačke prekida, tačke loma i asimptotske tačke. Tačke prekida transcendentne krive imaju osobinu da kružnice beskonačno malog prečnika, sa središtem u tim tačkama, seku krivu samo u po jednoj tački. U tački loma su prekinute dve grane krive, pri čemu svaka od tih grana ima svoju tangentu u toj tački. Transcendentna kriva može imati i asimptotsku tačku prema kojoj se neograničeno približava grana krive, čineći pritom beskonačno mnogo okreta, kao što je slučaj kod sferne zavojnice. Transcendentne krive mogu imati posebne oblike. Kriva može imati tačkastu granu, koja se sastoji od beskonačno mnogo izolovanih tačaka. Transcendentne krive mogu imati i posebne osobine, samo njima svojstvene. Za neke transcendentne krive je dužina luka od bilo koje tačke krive do asimptotske tačke konačna veličina, dok je za druge krive beskonačno velika  $/61/$ . Bilo je više pokušaja klasifikacije transcendentnih krivih, ali zbog njihove složenosti za sada ne postoji uspešna i sveobuhvatna klasifikacija.

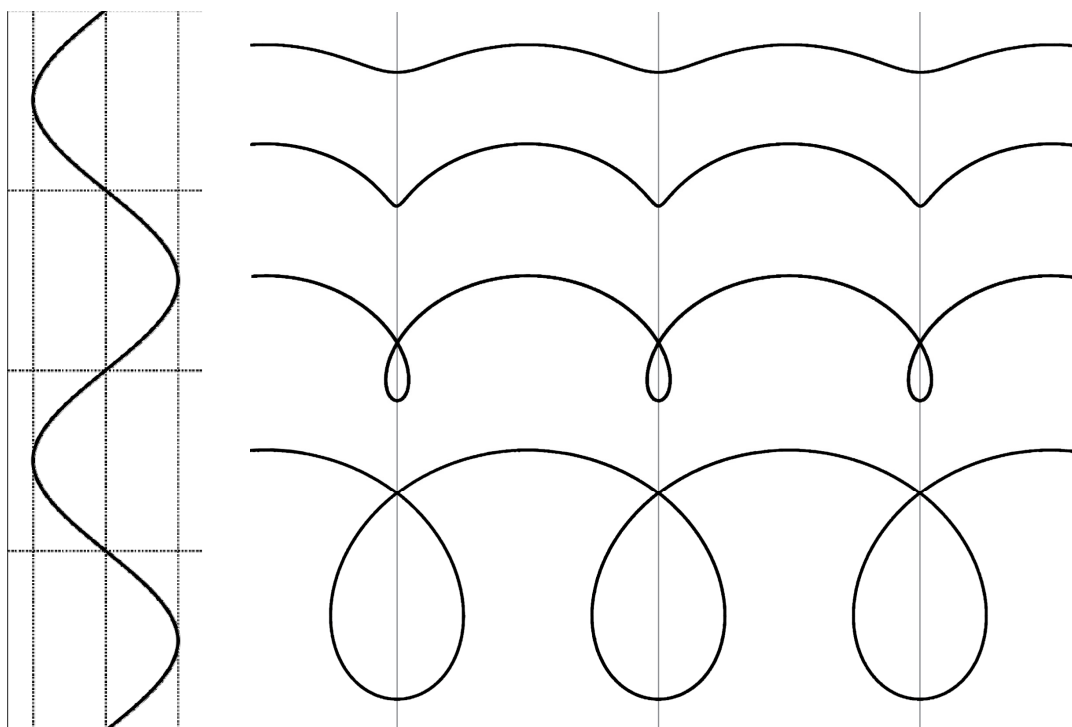
U transcendentne krive spadaju sve spirale, krive oscilacija (sinusoide, krive prigušenih oscilacija, krive slaganja oscilacija), trohoide, odnosno cikloide, kao i zavojnice. Zavojnice, prostorne transcendentne krive, su već izložene u I poglavlju ovog rada, a neke od njih su upotrebljene kao vodilje za izvođenje transcendentnih pravoizvodnih površi u nastavku izlaganja.

Na *sluci 181* prikazane su **krive oscilacija**, dobijene eksperimentalnim putem, menjanjem različitih parametara. Krive su prikazane ilustrativno. Ovako nastale transcendentne krive mogu biti upotrebljene u izvođenju transcendentnih površi, čiji se isecci mogu koristiti u formiranju složenijih prostornih struktura.



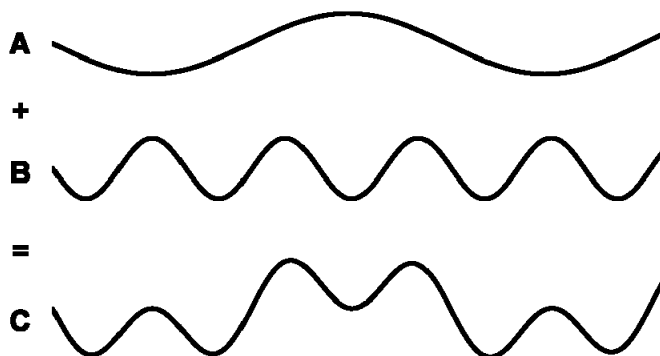
*sluka 181. Krive oscilacija (igem.org/User:Heyu3/MM)*

Na *slici 182* levo prikazana je **sinusoida**, ravna transcendentna kriva koja je u arhitektonskoj praksi često korišćena kao vodilja za izvođenje transcendentnih konoida i cilindroida. Projekcija cilindrične zavojnice na ravan paralelnu osovini je sinusoida. **Trohoide** su trajektorije (putanje) tačaka vezanih za kružnicu koja se kotrlja po nekoj pravoj. Ukoliko se tačka nalazi na kružnici nastaje kriva koja se naziva **cikloida**. Ukoliko je rastojanje tačke (koja izvodi krivu) od centra kružnice manje od poluprečnika kružnice nastale krive nazivaju se **skraćene cikloide**, odnosno u suprotnom **produžene cikloide**. Na *slici 182* desno prikazane su neke od trohoida /36/.



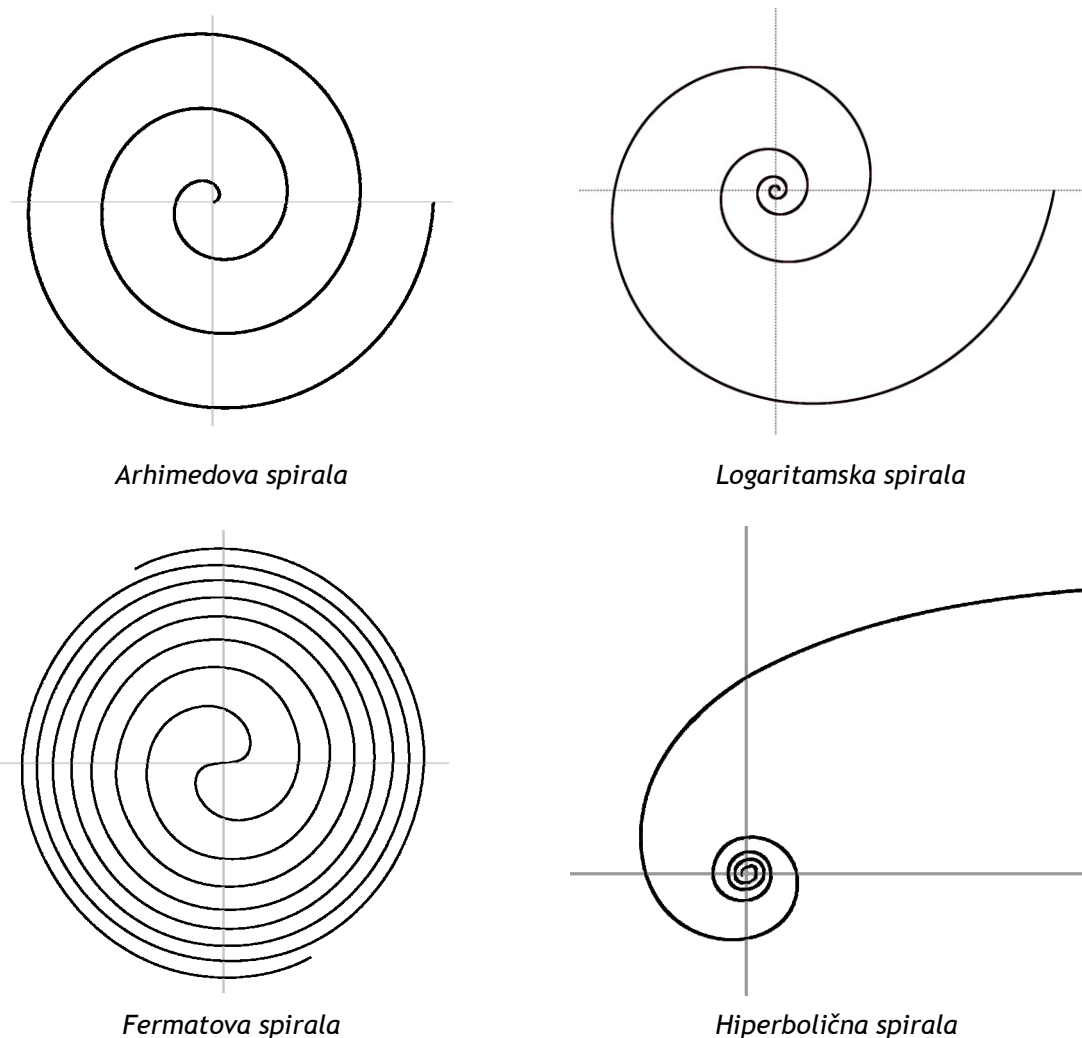
*slika 182. Sinusoida i trohoide*

Na *slici 183* prikazane je varijanta krive dobijene slaganjem dve oscilacije, predstavljene dvema sinusoidama. Na isti način moguće je slaganje bilo kojih transcendentnih krivih. Slaganje krivih može da se prevede na slaganje transcendentnih površi koje su po njima izvedene, što pruža odličnu osnovu za šira istraživanja i primenu u arhitektonskoj praksi.



*slika 183. Kriva C dobijena slaganjem dve oscilacije A i B*

Na *slici 184* prikazane su neke vrste **spirala**, ravnih transcendentnih krivih, koje se upotrebljavaju kao vodilje za izvođenje transcendentnih pravoizvodnih površi. Pored prikazanih postoje i druge vrste spirala. Sve spirale ujedno su i ortogonalne projekcije neke od zavojnica. Najveću primenu u arhitektonskoj praksi ima Arhimedova spirala, koja predstavlja projekciju konusne zavojnice na ravan upravnu na osu konusa nosača zavojnice /34, 36, 61/.



*slika 184. Spirale, ravne transcendentne krive*

### III6 PRIMENA TRANSCEDENTNIH PRAVOIZVODNIH POVRŠI U ARHITEKTURI

Pravoizvodne transcendentne površi imaju sve značajniju primenu u arhitekturi, a u nastavku izlaganja prikazani su karakteristični primeri arhitektonskih objekata na kojima su ove površi primenjene u oblikovanju. Objekti su prikazani hronološki, po vremenu projektovanja i izgradnje, kako bi se mogao pratiti istorijski kontinuitet primene pravoizvodnih transcendentnih površi u arhitekturi. Najčešće se u arhitektonskoj praksi upotrebljavaju transcendentni cilindri, konoidi, cilindroidi i



helikoidi, kao i transcendentni konusi. Primenom transcendentnih pravoizvodnih površi nastaju racionalni, estetski kvalitetni prostorni sklopovi. Prikazane površi su univerzalne i primenljive u oblikovanju objekata različite namene. Posebno su interesantne, u savremenom arhitektonskom kontekstu, kompjuterski generisane složene forme koje je moguće praktično izvesti uz zadržavanje racionalnosti konstrukcije. Savremeni materijali i tehnologije omogućavaju primenu transcendentnih pravoizvodnih površi u oblikovanju arhitektonskih objekata na inovativan način.

**Vavilonska kula** pominje se u predanju iz starozavetne Knjige postanja. Istraživanja nemačkog arheologa Koldeveja, na području nekadašnjeg Vavilona, južno od Bagdada otkrila su ostatke moguće Vavilonske kule. Utvrđeno je da je najverovatnije reč o zigratu Etemenanki, kojeg spominju mnogi istorijski izvori. Zigurat širine 90 metara i pretpostavljene visine 90 metara imao je sedam "terasastih spratova", a na vrhu se nalazio hram boga Marduka. U nekim istorijskim vizuelizacijama Vavilonska kula je predstavljena u formi koju čine transcendentne pravoizvodni površi, *slika 185*.



*slika 185. Vavilonska kula, vizuelizacije: Pieter Bruegel, 1563. i Gustave Doré, 1865.*

**Minaret Džamije u Samari**, u Iraku, izgrađen je u 9. veku, *slika 186 levo*. Ima formu transcendentnog cilindra, koji izvodi prava kretanjem po konusnoj zavojnici. Konusna zavojnica se u osnovi projektuje u Arhimedovu spiralu, što odgovara potrebama za formiranjem pešačke rampe, jer je rastojanje između uzastopnih hodova spirale uvek jednako. Izvodnica cilindrične površi paralelna je osovini konusa, nosača zavojnice. Površ na kojoj je formirano spiralno stepenište, koje vodi do vrha minareta, ima formu normalnog helikoida. Prikazani minaret postao je uzor za projektovanje i izgradnju čitavog niza objekata sve do savremenih primera. Na identičan prethodno prikazan način izvedena je forma manjeg minareta **Ibn Tulunove džamije u Kairu**, u Egiptu, izgrađene 879. godine, *slika 186 desno*.



*slika 186. Minaret džamije u Samari, Irak, 848. /Jill Purce/  
Minaret Ibn Tulunove džamije, Kairo, Egipat, 879. /Berthold Werner/*

Crkva Spasitelja u Kopenhagenu građena je u 18. veku, a zavojni deo tornja završen je naknadno 1752. godine, *slika 187 levo i u sredini*. Toranj ima formu transcendentnog cilindra nastalog kretanjem prave po konusnoj zavojnici. Način nastanka forme tornja identičan je kao kod prethodno prikazanog minareta Džamije u Samari. Zavojni deo tornja izdiže se iznad oktagonalne osnove, a formirano spoljašnje stepenište vodi do samog vrha. Spomenik Trećoj internacionali koji je Vladimir Tatlin projektovao 1919. godine ostao je samo u formi ideje, koja je do danas inspiracija mnogim arhitektima, *slika 187 desno*.

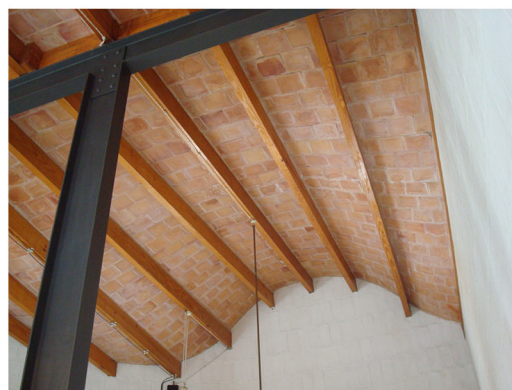


*slika 187. Crkva Spasitelja, Kopenhagen, Danska, 1752. /avda-foto.de/  
Spomenik Trećoj internacionali, 3D vizuelizacija, Petrograd, 1919. (Vladimir Tatlin)*

Na *slici 188 levo*, prikazana je Školska zgrada uz Katedralu Svete porodice u Barseloni. Krovna površina je segment transcendentnog konoida, dok su zidovi segmenti transcendentnih cilindroida. Podužno po sredini krovne površine pruža se



prava izvodnica transcendentnog konoida. Dve sinusoide jedna u vertikalnoj, druga u horizontalnoj ravni su vodilje transcendentnog cilindroida koji formira svaki od podužnih fasadnih zidova. Način formiranja fasadnih zidova i krovne površine, kod prikazanog objekta, predstavlja uzor za nastanak niza objekata slične forme i materijalizacije sve do savremenih primera. Na *slici 188 desno*, prikazani su detalji plafona Školske zgrade. Transcedentni konoid je jasno uočljiv, kao i drveni nosači postavljeni u pravcima izvodnica površi. Prodor plafona i zida je po sinusoidi, jednoj od vodilja konoida.



*slika 188. Školska zgrada uz katedralu Svete porodice i detalji enterijera, Barselona, Španija (Antonio Gaudi)*

*Iglesia de Cristo Obrero* je crkva izgrađena u gradu Atlantida, u Urugvaju 1952. godine, *slika 189 levo*. Formu crkve čini niz transcendentnih pravoizvodnih površi, pre svega konoida čija je jedna od vodilja sinusoida, ravna transcendentna kriva. Konoidi formiraju bočne, podužne zidove crkve. Crkva u Madridu, prikazana na *slici 189 desno*, izgrađena je od istih materijala i upotrebom prethodno prikazanih isečaka transcendentnih pravoizvodnih površi u oblikovanju objekta. Primenjeni su transcendentni konoidi, transcendentni cilindri i cilindroidi čije su vodilje sinusoidne transcendentne ravne krive. U sličnom maniru projektovan je i Šoping centar u Montevideu, istog autora. Transcedentni konoidi i cilindroidi su osnovne površi koje čine formu objekta.



*slika 189. Iglesia de Cristo Obrero, Atlantida, Urugvaj, 1952. (Eladio Dieste) / luzymirada.wix.com/ Iglesia de San Juan de Ávila, Madrid, Španija, 1996. (Eladio Dieste) / Ángel Luis Alfaro/*



Helikoidi su osnovna forma svakog spiralnog stepeništa, a na *slici 190 desno* prikazano je stepenište Garven instituta u Sidneju. Prikazani primer je karakterističan po tome što je stepenište smešteno u galerijskom holu i potpuno oslobođeno dodatnih konstruktivnih elemenata. Na eksplicitan i nedvosmislen način je konstruktivno primenjena prostorna struktura u formi kosog helikoida (sa donje strane) i normalnog helikoida (sa gornje strane) na čijoj površini su formirani stepenici. Toranj za panoramsko razgledanje u Hong Kongu izgrađen je u gradskoj luci. Pešačka rampa izvedena je u formi nastaloj upotrebom helikoida i transcendentnog cilindra, *slika 190 levo i u sredini*.



*slika 190. Spiral Lookout Tower, Hong Kong, Kina, 1997. /panoramio.com - Michael MH Ng/ Garven institut, Sidnej, Australija, 1997. (Ken Woolley) /flickr.com - eagle-ffm/*

*Ysios* vinarija u oblasti Alava u Španiji, *slika 191*, izgrađena je na pravougaonoj osnovi sa podužnim zidovima u formi transcendentnih sinusoidnih cilindričnih površi i krovom u formi transcendentnog konoida. Prava vodilja konoida je postavljena podužno po sredini osnove krova. Krovnu površ formira niz prizmatičnih elemenata postavljenih u pravcima izvodnica konoida. Geometrijska struktura krova vidljiva je i u enterijeru, u vidu drvenih nosača.



*slika 191. Ysios vinarija u oblasti Alava u Španiji, 1998. (Santiago Calatrava) /lebaccanti.com/*



Poslovna zgrada *Cocoon* u Cirihi projektovana je u formi transcendentnog cilindra, *slika 192*. Vodilja po kojoj prava izvodnica formira površ je zavojnica na eliptičnom konusu u eksterijeru, odnosno u enterijeru.



*slika 192. Cocoon, Cirihi, Švajcarska, 2007. (Camenzind Evolution) / camenzindevolution.com/*

Konkursni rad za *Taipei City Museum of Art* na Tajvanu zasnovan je na formi transcendentnog konusa, nastalog kretanjem prave po konusnoj zavojnici. Pri tome vrh konusa nije poklopljen sa vrhom konusa nosača zavojnice, *slika 193*.



*slika 193. Taipei City Museum of Art, Tajvan, 2011. (Influx Studio) /influx-studios.com/*

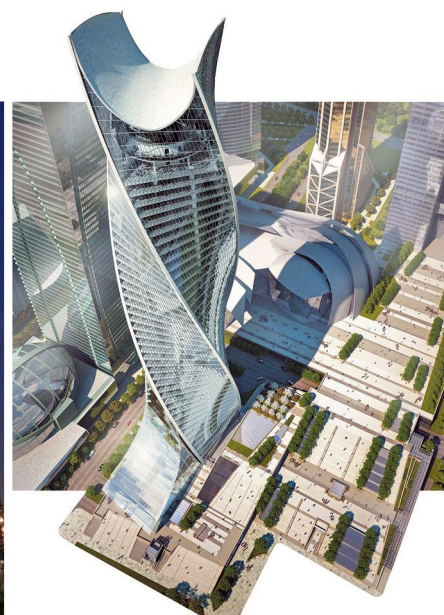
Transcendentne cilindrične površi, izvedene kretanjem prave po sinusoidi, formiraju fasade jednog od objekta Tehničkog univerziteta u Minhenu, *slika 194* *levo*. Fasada je izvedena od drvenih modularnih kaseti, pa se može reći da je u oblikovanju fasada korišćena 3D muštra, odnosno 3D šrafura. Na *slici 194* *desno* je prikazan Toranj u Finiksu sa helikoidnom rampom za panoramsko razgledanje. Helikoidne površi rampe izvodi prava izvodnica kretanjem po sfernoj zavojnici, loksodromi. Ostakljenje je izvedeno u formi transcendentnog cilindra nastalog kretanjem prave po istoj loksodromi.





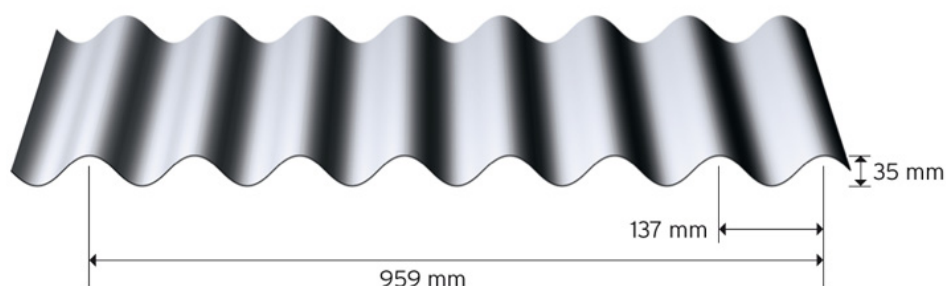
*slika 194. Interims Audimax, Tehnički univerzitet Minhen, Nemačka, 2011. (Deubzer Konig & Rimmel Architekten) /henningkoepe.de/  
Observation Tower, Finiks, SAD, 2012. (BIG) /bustler.net/*

**ArcelorMittal Orbit** je skulptura/toranj za panoramsko razgledanje u Londonu visine 115m, *slika 195* levo. Inspiracija je između ostalog bila i Vavilonska kula, a zavojna rampa prepletena sa potpuno slobodno formiranim rešetkastim nosačem može se percipirati i kao ideja Tatlinove kule u savremenom kontekstu. **Evolution Tower** je 255 metara visoka kula koja je u fazi izgradnje u Moskvi, *slika 195* desno. Predstavlja deo budućeg Internacionalnog biznis centra. Na fasadi, u strukturi zid zavese mogu se uočiti prave izvodnice normalnog helikoida koji je primenjen u oblikovanju objekta.



*slika 195. Evolution Tower, Moskva, Rusija, 2014. (RMJM) /skyscrapercity.com/  
ArcelorMittal Orbit, London, Velika Britanija, 2014. (Anish Kapoor, Cecil Balmond)*

U arhitekturi je moguća i primena konvolutnih površi zavojnog tipa, koje takođe spadaju u transcendentne površi. Ove površi i primeri izvedenih objekata prikazani su u I poglavlju ovog rada. Primena transcendentnih pravoizvodnih površi u arhitekturi nije ograničena samo na oblikovanje forme objekata, već i na oblikovanje pojedinih građevinskih materijala koji se koriste u izgradnji. Krovni i fasadni limovi, kao i drugi slični građevinski materijali, često su oblikovani u formi transcendentnih pravoizvodnih površi. Na *slici 196* prikazan je talasati aluminijumski lim, izveden po sinusoidnoj vodilji.

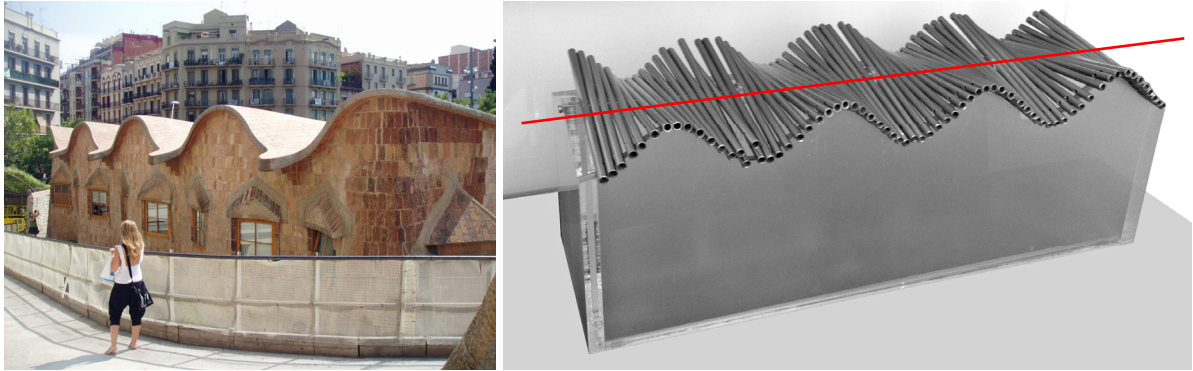


*slika 196. Talasasti aluminijumski lim*

U daljoj analizi prikazane su neke od specifičnih pravoizvodnih transcendentnih površi: kohleoidni konus, dvostruki kohleoidni konus, kao i konusi čije su vodilje konusna, sferna i hiperboloidna zavojnica. Analizirane su mogućnosti njihove primene u arhitekturi, a posebna pažnja posvećena je analizi kohleoidnog konusa, kao i dvostrukog kohleoidnog konusa, s obzirom da nisu detaljnije obrađivani u postojećoj literaturi.

### **III7 IZABRANE TRANSCEDENTNE PRAVOIZVODNE POVRŠI I MOGUĆNOSTI NJIHOVE PRIMENE U ARHITEKTURI**

U ovom delu rada razmatrane su neke od transcendentnih pravoizvodnih površi sa aspekta mogućnosti njihove primene u arhitekturi, uz uslov da ispunjavaju prethodno, u uvodnim razmatranjima, definisane kriterijume. Analizirane pravoizvodne transcendentne površi izvode se kretanjem prave izvodnice, po nekoj transcendentnoj ravnoj ili prostornoj krivoj, kao jednoj od vodilja, gde je to kretanje definisano zakonom (pravilom). Krovna površina objekta na *slici 197* je segment transcendentnog konoida, dok su zidovi segmenti transcendentnih cilindroida. Na istoj slici desno je prikazana maketa krovne površi objekta, gde se po sredini pruža prava, jedna od vodilja konoida (označena crvenom bojom). U daljoj analizi prikazane su neke od specifičnih pravoizvodnih transcendentnih površi: kohleoidni konus, dvostruki kohleoidni konus, kao i pravoizvodne površi čije su vodilje konusna, sferna i hiperboloidna zavojnica. Takođe su analizirane njihove mogućnosti primene u formiranju arhitektonskih prostornih struktura. Posebna pažnja posvećena je analizi kohleoidnog konusa, kao i dvostrukog kohleoidnog konusa, s obzirom da do sada nisu detaljnije obrađivani u postojećoj literaturi.

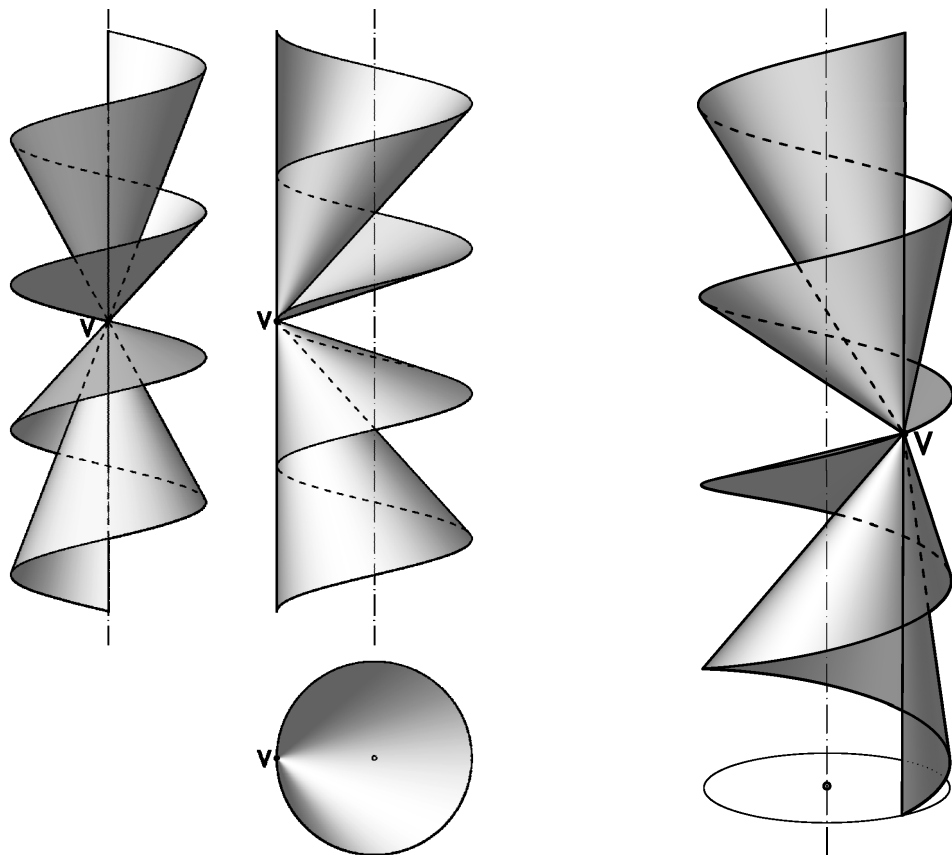


slika 197. Školska zgrada uz katedralu Svete porodice, Barselona, Španija (Antonio Gaudi)

### III7.1 KOHLEOIDNI KONUS

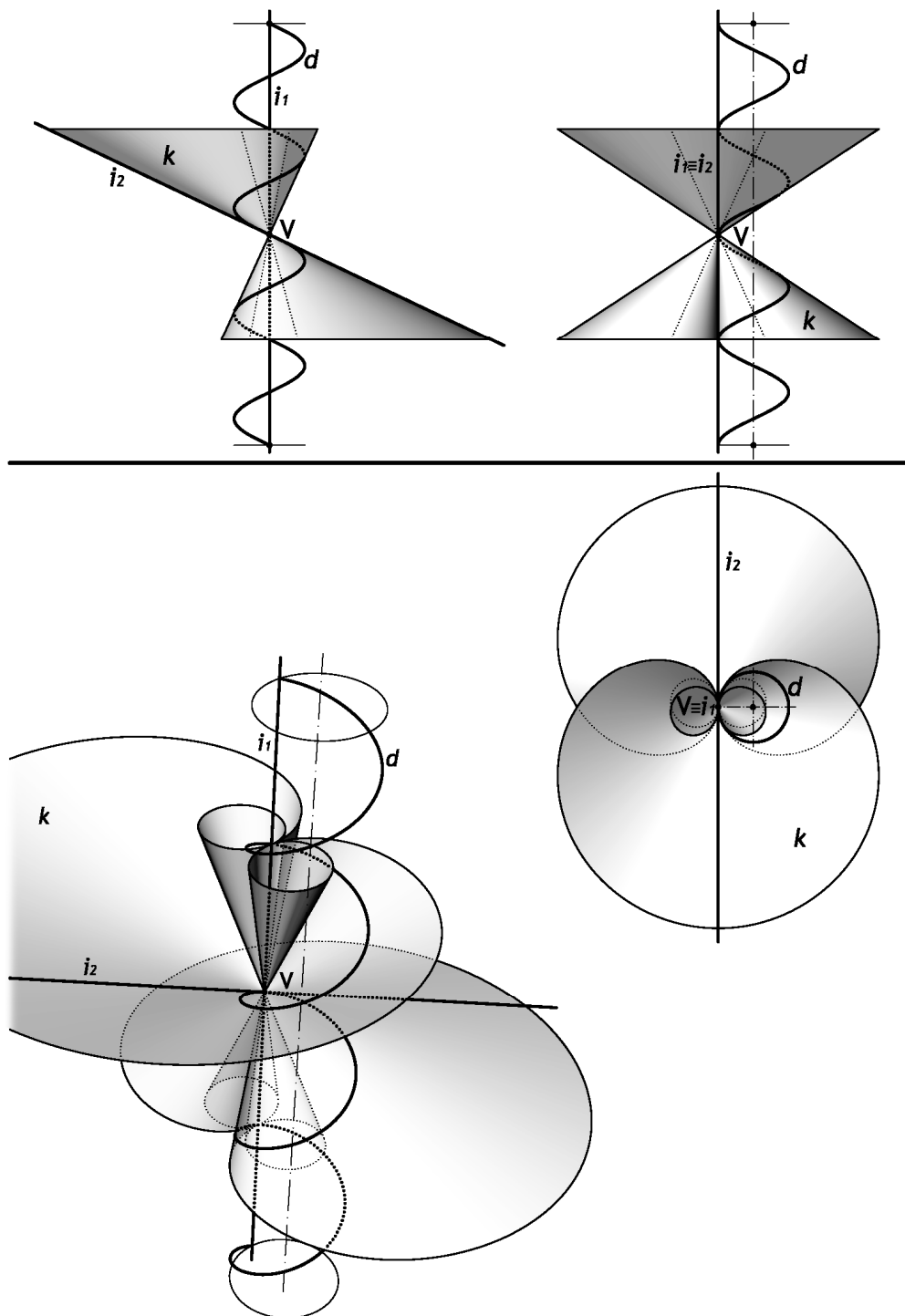
#### III7.1.1 Izvođenje i karakteristike kohleoidnog konusa

Kohleoidni konus je razvojna jednostruko zakrivljena površ koju formiraju sve bisekante cilindrične zavojnice kroz jednu njenu tačku. Bisekante su izvodnice kohleoidnog konusa, a cilindrična zavojnica vodilja. Nastali konus je transcendentna površ, s obzirom da ga neka prava prodire beskonačno mnogo puta. Na *slici 198* prikazan je deo kohleoidnog konusa ograničen obrtnom oblicom, nosačem zavojnice vodilje nastalog konusa. Date su tri ortogonalne projekcije, kao i prikaz u perspektivi /53/.



slika 198. Deo kohleoidnog konusa ograničen obrtnom oblicom /53/

Postoje dve karakteristične izvodnice kohleoidnog konusa. Jedna je tangenta cilindrične zavojnice kroz vrh konusa, izvodnica  $i_2$ , a druga prava koja preseca cilindričnu zavojnicu beskonačno mnogo puta (u njoj se poklapa beskonačno mnogo bisekanata cilindrične zavojnice) i paralelna je sa osovnom cilindrične zavojnice, izvodnica  $i_1$ . Obe izvodnice leže u ravni simetrije konusa, koja tangira cilindričnu zavojnicu, **slika 199**. Parovi po jednog hoda zavojnica sa obe strane vrha formiraju segmente kohleoidnog konusa, kojih ima beskonačno mnogo. Izvodnica  $i_1$  je zajednička svakom od segmenata prikazanog konusa /53/.

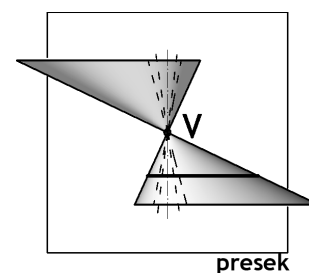
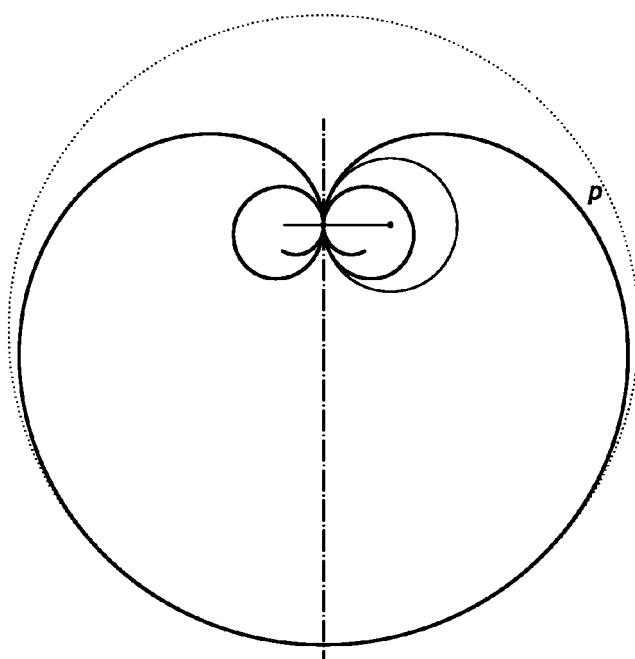


**slika 199.** Kohleoidni konus /53/



Ravni presek svake površi  $n$ -tog reda je kriva istog tog reda, dok je ravni presek transcendentne površi, transcendentna ravna kriva. Ravni preseki kohleoidnog konusa mogu se posmatrati na sličan način kao i preseki kružnog konusa. Ako se uspostavi analogija sa tipovima preseka kružnog konusa, onda postoje tri vrste preseka kohleoidnog konusa, ali sa beskonačno mnogo varijacija. Kohleoidni konus, osim dirnih ravni cele površi, ima i dirne ravni svakog od beskonačno mnogo segmenata površi. Dirne ravni cele površi su dirne ravni prvog segmenta konusa. Dirne ravni ostalih segmenata konusa, počev od drugog segmenta, seku sve prethodne segmente. U kontekstu prethodno navedenog, a zavisno od položaja presečne ravni i njenog odnosa sa dirnim ravnima kohleoidnog konusa i njegovih segmenata, nastaju različite ravne presečne krive. Kriterijum po kojoj krivoj neka ravan seče konus određuje paralelna pomoćna ravan kroz vrh konusa /47, 53/. U daljem izlaganju prikazani su ravni preseki upravni na ravan simetrije kohleoidnog konusa.

Ako pomoćna ravan ne seče kohleoidni konus po realnim izvodnicama, već po konjugovano imaginarnim, sve ostale njoj paralelne ravni seku konus po **kohleoidi**, transcendentnoj ravnoj krivoj koja spada u kvadratrikse /56, 61/, **slika 200**. Sve izvodnice konusa prodiru presečnu ravan u konačnosti, pa se nastala kriva (po analogiji sa kružnim konusom) može smatrati i „**transcendentnom elipsom**”, odnosno „**transcendentnom kružnicom**”. Kohleoida je bazis prikazanog konusa.

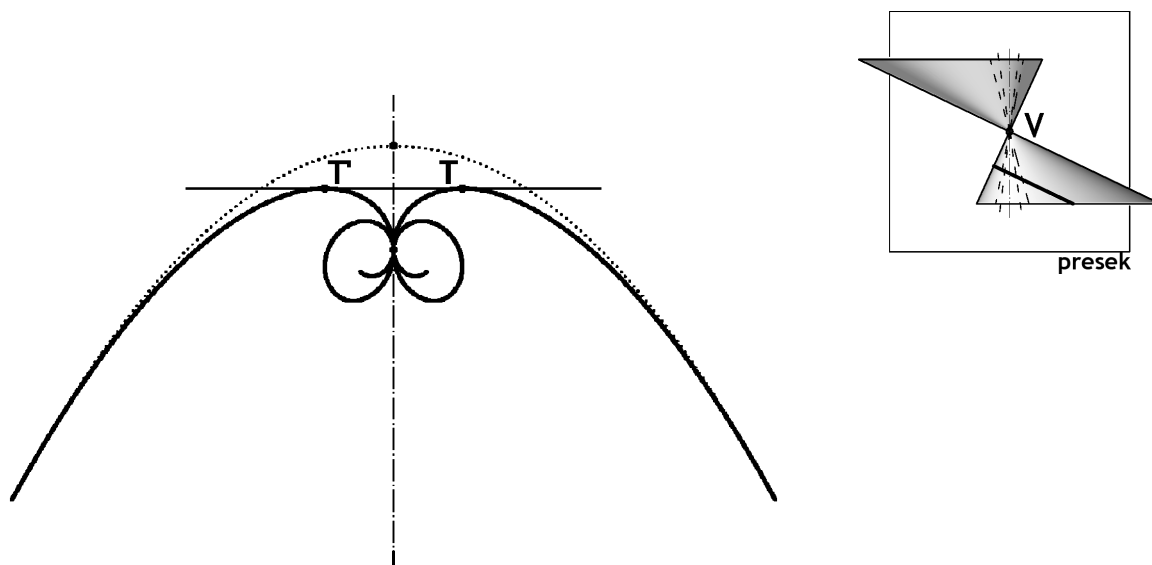


*slika 200. Kohleoida /53/*

Ostali ravni preseki su krive homologne (perspektivno-kolinearne) sa bazisom kohleoidom /13/. Ako je pomoćna ravan dirna ravan prvog segmenta kohleoidnog konusa, ujedno i dirna ravan cele površi, sve ravni paralelne njoj seku samo po jednu granu svih segmenata konusa. Nastala presečna kriva prikazana je na **slici 201**. Ovakva kriva može se smatrati „**transcendentnom parabolom**”, sa beskonačno

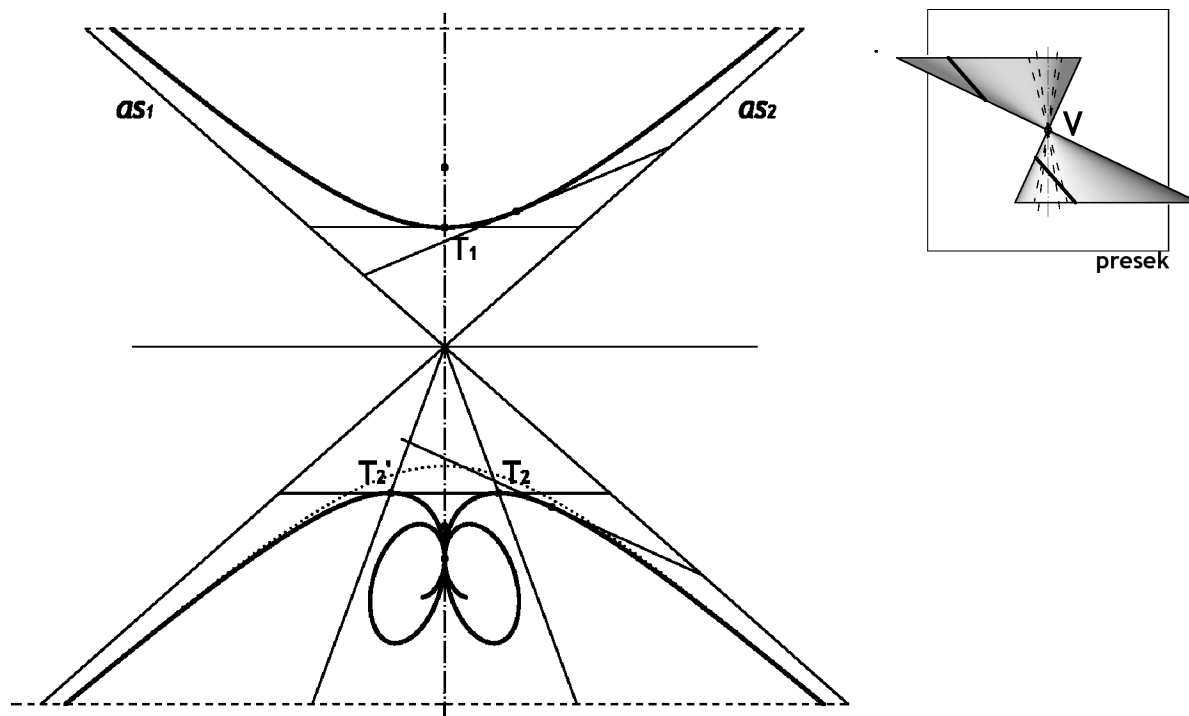


mного temena. Kriva ima tačku kroz koju prolazi beskonačno mnogo puta, koja se nalazi u prodoru izvodnice  $i_1$  kroz presečnu ravan konusa.



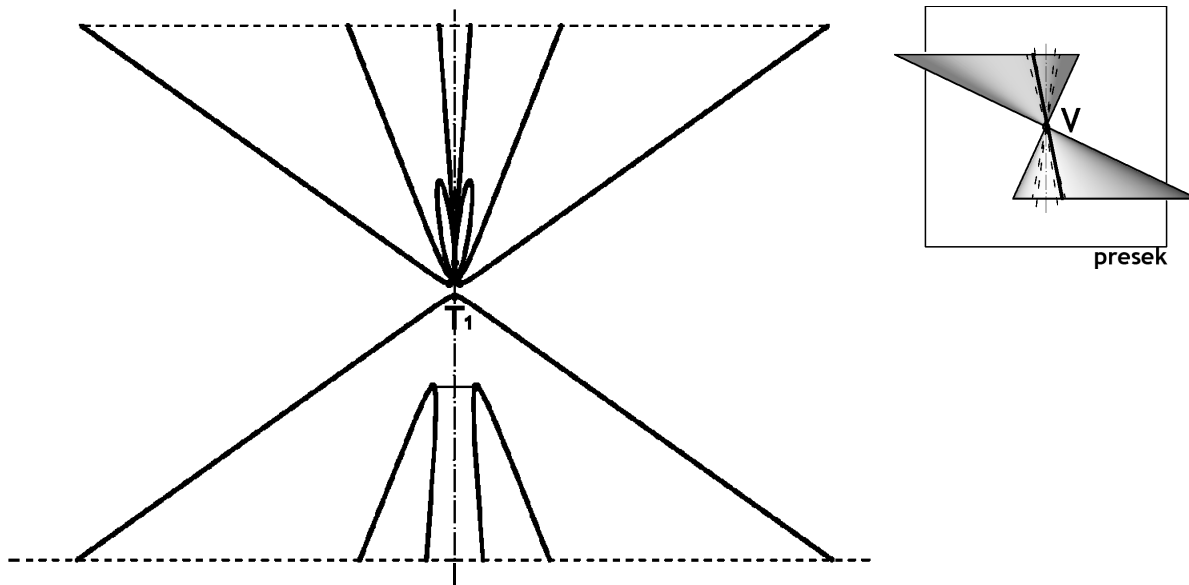
slika 201. Presek kohleoidnog konusa po “transcedentnoj paraboli” /53/

Ako je pomoćna ravan u položaju između dirne ravni prvog i drugog segmenta kohleoidnog konusa, sve ravni paralelne njoj seku obe grane prvog segmenta konusa i po jednu granu svih ostalih segmenata konusa. Nastala presečna kriva prikazana je na slici 202. Ovakva kriva može se smatrati „transcedentnom hiperbolom”. Jedna grana odgovara hiperboli 2. stepena, dok se druga grana ima beskonačno mnogo temena. Kriva ima tačku kroz koju prolazi beskonačno mnogo puta i nalazi se u prodoru izvodnice  $i_1$  kroz presečnu ravan konusa /53/.



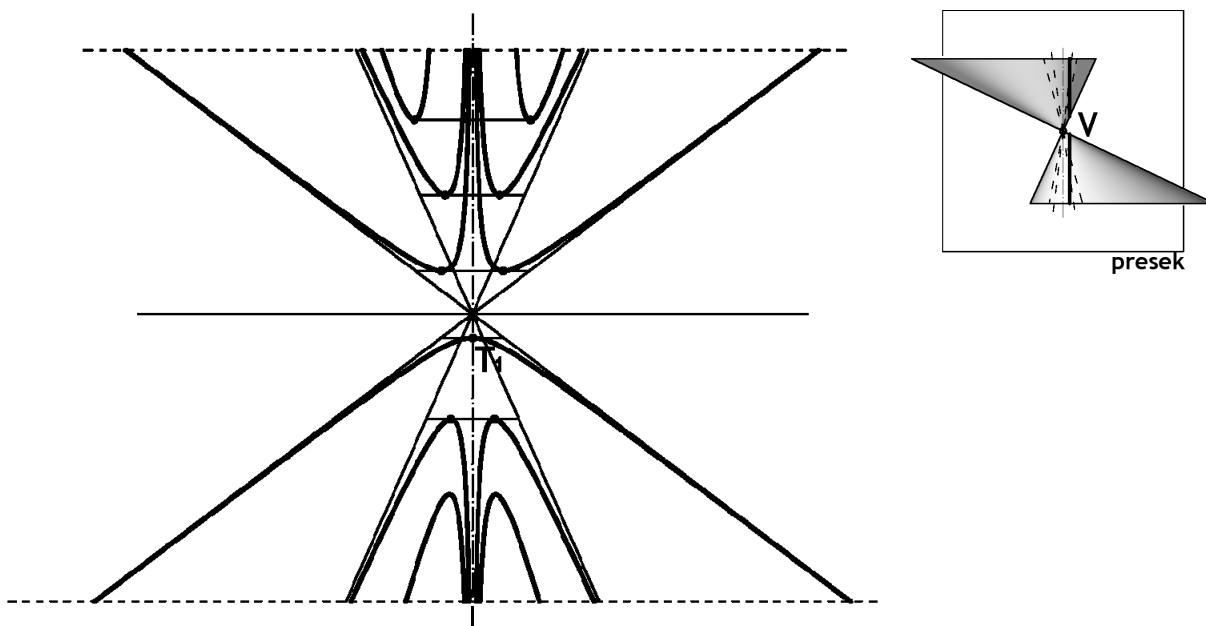
slika 202. Presek po “transcedentnoj hiperboli” /53/

Ako je pomoćna ravan u položaju između dirne ravni drugog i trećeg segmenta kohleoidnog konusa, sve ravni paralelne njoj seku obe grane prvog i drugog segmenta konusa i po jednu granu svih ostalih segmenata konusa. Nastala presečna kriva prikazana je na *slici 203*, a može se smatrati sledećom vrstom ravnog preseka kohleoidnog konusa, odnosno „trancedentne hiperbole”.



*slika 203. Presek po “trancedentnoj hiperboli” /53/*

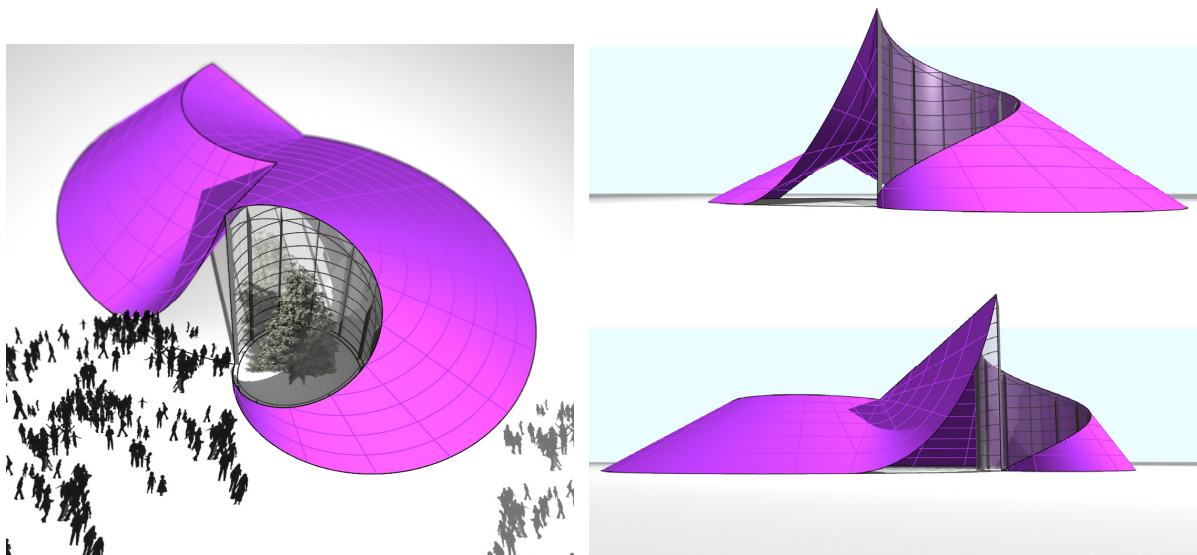
Na prikazani način moguće je dobiti beskonačno mnogo varijanti presečne krive postavljajući pomoćnu ravan između dirnih ravni dva uzastopna segmenta kohleoidnog konusa. Krajnji slučaj predstavlja položaj pomoćne ravni koja seče obe grane svih segmenata konusa. Presečne ravni paralelne takvoj pomoćnoj ravni takođe seku obe grane svih segmenata konusa, *slika 204* /53/.



*slika 204. Presek po “trancedentnoj hiperboli” /53/*

### III7.1.2 Primena kohleoidnog konusa u arhitekturi

Korišćenjem segmenata kohleoidnog konusa kao i isečaka tih segmenata moguće je formirati atraktivne i kompleksne prostorne strukture. Primer prostorne strukture zasnovane na korišćenju kohleoidnog konusa prikazan je na *slici 205*. Prostorna struktura nastala je kombinovanjem isečaka jednog segmenta kohleoidnog konusa, u kombinaciji sa cilindričnom površi /54/.

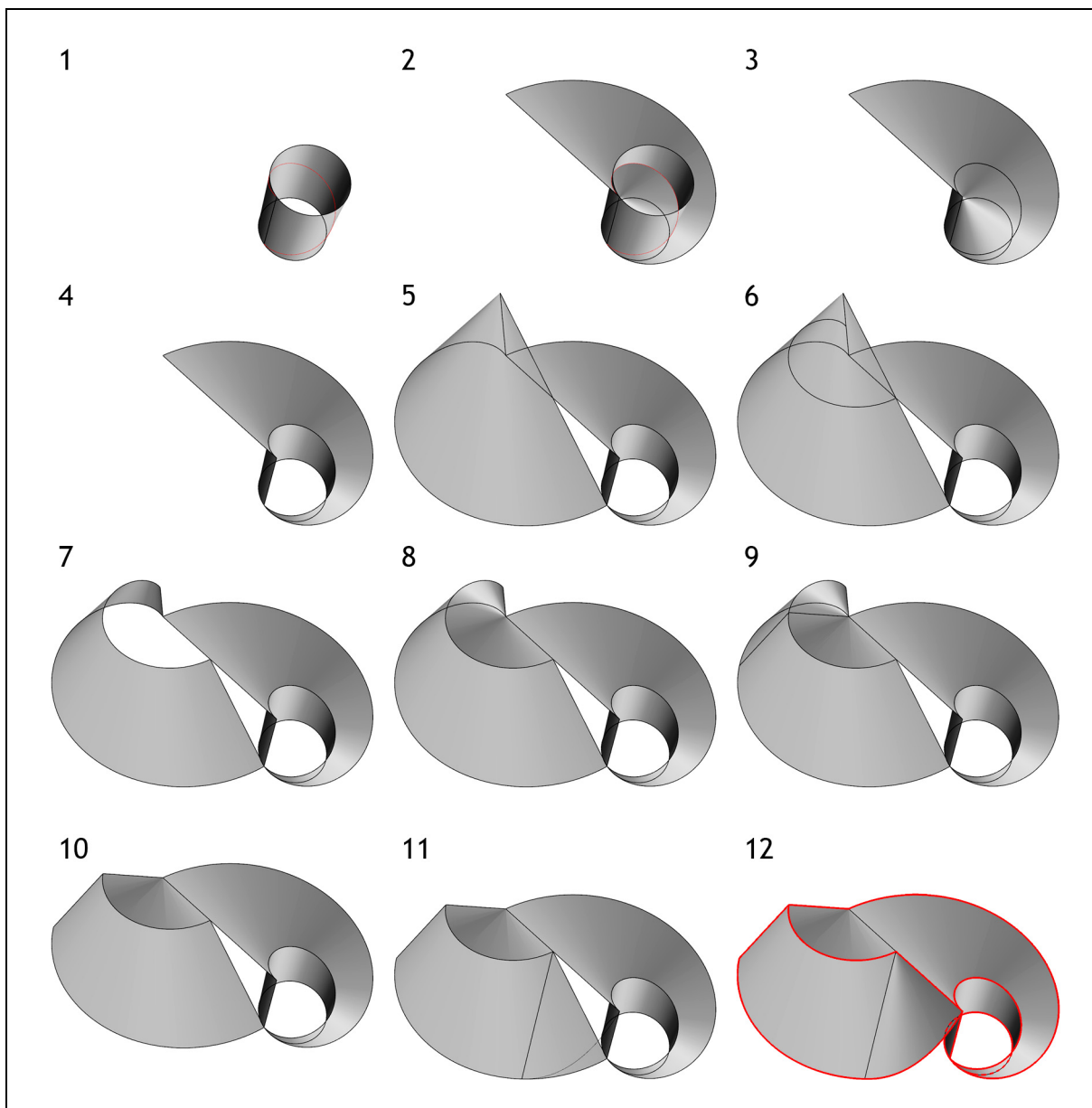


*slika 205. Prostorna struktura zasnovana na korišćenju isečaka kohleoidnog konusa /54/*

Za primenu u arhitekturi i drugim granama dizajna najupotrebljiviji je segment konusa koji nastaje kretanjem izvodnice po jednom, prvom hodu zavojnice, sa svake strane vrha konusa. Ovaj segment moguće je isecati i tako dobijene isečke spajati na najrazličitije načine. Posebno su značajni spojevi koji ponovo daju glatke površi (prikazano u prethodnom primeru), s obzirom da konusi spadaju u Žordanove glatke površi koje su neprekidne i u svakoj tački imaju tangencijalnu ravan. Primer takvog isecanja i spajanja isečaka je dvostruki kohleoidni konus, a njegova primenljivost ogleda se u mogućnosti dalje konstruktivne obrade.

Način izvođenja prethodno formirane prostorne strukture u računarskom programu *Rhinoceros* prikazan je u dvanaest faza na *slici 206*. Cilindrična zavojnica, kriva vodilja za izvođenje kohleoidnog konusa, prikazana je u fazi 1 sa obrtnom oblicom na kojoj je izvedena. Kohleoidni konus izvodi prava izvodnica krećući se po cilindričnoj zavojnici, pri čemu je vrh konusa u jednoj od njenih tačaka, faza 2. U *Rhinoceros*-u je generisana opcijom *Loft* između krive vodilje i tačke (vrha konusa). U fazi 3 je isečen deo obrtne oblice iznad nastalog konusa, a u fazi 4 i deo konusa unutar iste oblice. Na formirani sklop površi je dodat konus sa istim parametrima kao i prethodni, zarotiran za  $180^\circ$ , faza 5. Ovaj konus je presečen horizontalnom ravni u označenoj visini, a gornji deo konusa je uklonjen, faze 6 i 7. Horizontalni presek je kohleoida, koja spojena sa jednom tačkom u osnovi takođe izvodi kohleoidni konus, faza 8. Dva konusa nastala u fazama 5 - 8 su presečena vertikalnom ravni, pri čemu je po jedan deo svake površi uklonjen, faze

9 i 10. Deo jednog od konusa je takođe uklonjen, presecanjem vertikalnom ravni, a prostorna struktura je upotpunjena delom pravoizvodne površi, faza 11. Konačno formirana prostorna struktura zasnovana na korišćenju isečaka kohleoidnog konusa, sa označenim konturama, prikazana je u fazi 12.

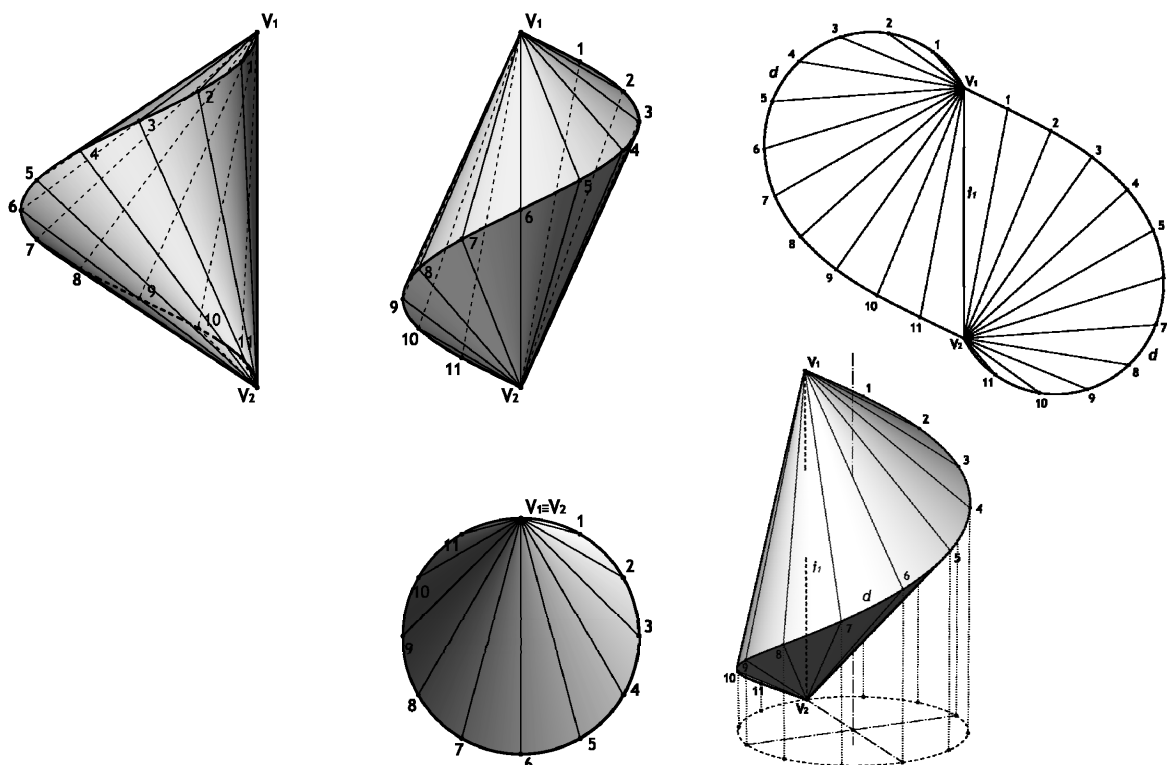


*slika 206. Izvođenje prostorne strukture zasnovane na korišćenju isečaka kohleoidnog konusa u Rhinoceros-u*

### III7.1.3 Dvostruki kohleoidni konus

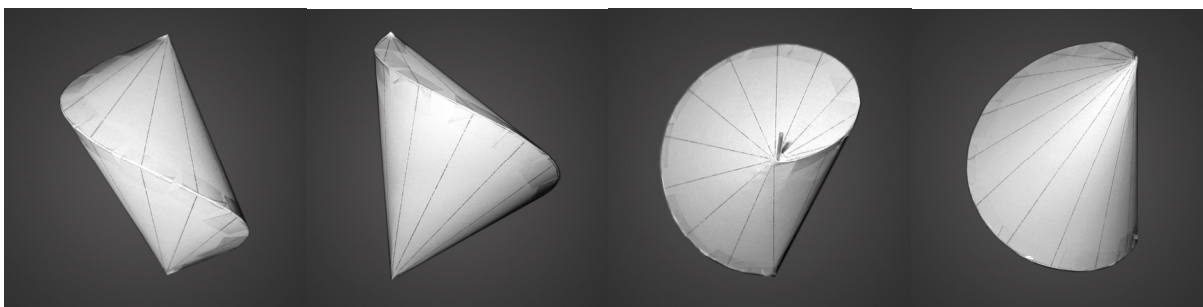
Ukoliko se na krajevima jednog hoda cilindrične zavojnice (vodilje konusa), uzmu dva vrha  $V_1$  i  $V_2$ , nastaju dva kohleoidna konusa koji se seku po toj zavojnici. Ovakve dve površi, od vrhova do zavojnice, čine jedinstvenu zatvorenu oblu površ sa grebenom. Takva površ naziva se **dvostruki kohleoidni konus**, prikazan na *slikama 207* i *208*. Karakteristična izvodnica  $i_1$  koja preseca cilindričnu zavojnicu beskonačno mnogo puta je zajednička izvodnica oba konusa, po kojoj se spajaju u

jednu oblu površ i po kojoj imaju zajedničku tangentnu ravan. Na istoj slici prikazana je i mreža površi /53/.



slika 207. Dvostruki kohleoidni konus - ortogonalne projekcije, mreža i perspektiva /53/

Primena dvostrukog kohleoidnog konusa i njegovih segmenata moguća je i u arhitekturi i u primenjenom dizajnu. Jednostavnost njenog izvođenja i karakter zatvorene površi predstavljaju glavne prednosti njene primene. Takođe su moguće razne njene varijacije u smislu sečenja i daljeg kombinovanja tih isečaka.



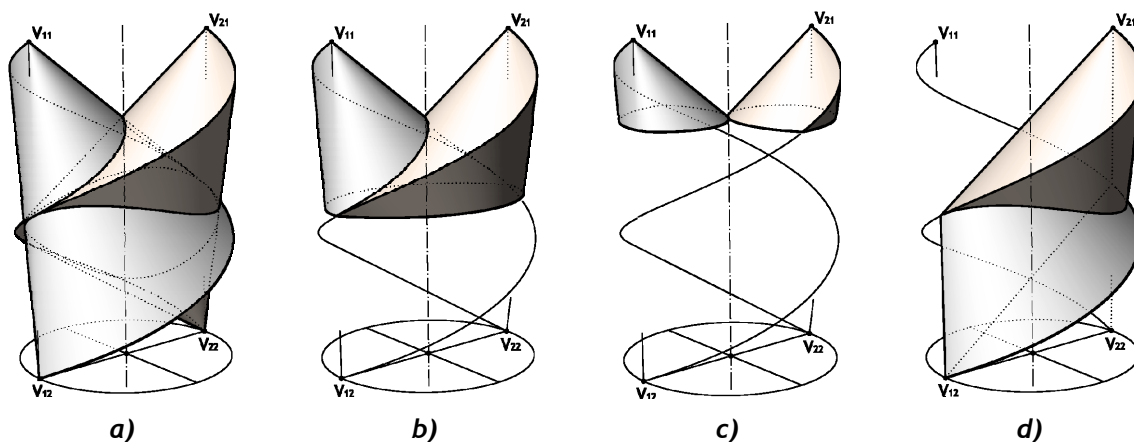
slika 208. Fotografije modela dvostrukog kohleoidnog konusa (V. Nikolić)

#### III7.1.4 Prodori dvostrukih kohleoidnih konusa i njegova primena u arhitekturi

U daljem razmatranju, dati su prodori dva dvostruka kohleoidna konusa u nekoliko karakterističnih međusobnih položaja. Izdvojeni su segmenti tih prodora (odnosno njihovi isečci) i dati modeli arhitektonskih prostornih struktura zasnovanih na njima. Prikazani prodori i segmenti površi imaju za cilj da pokažu praktične mogućnosti primene prikazanih konusa u arhitekturi i dizajnu. Takođe su prikazani karakteristični prodori dvostrukog kohleoidnog konusa sa cilindričnom površi.

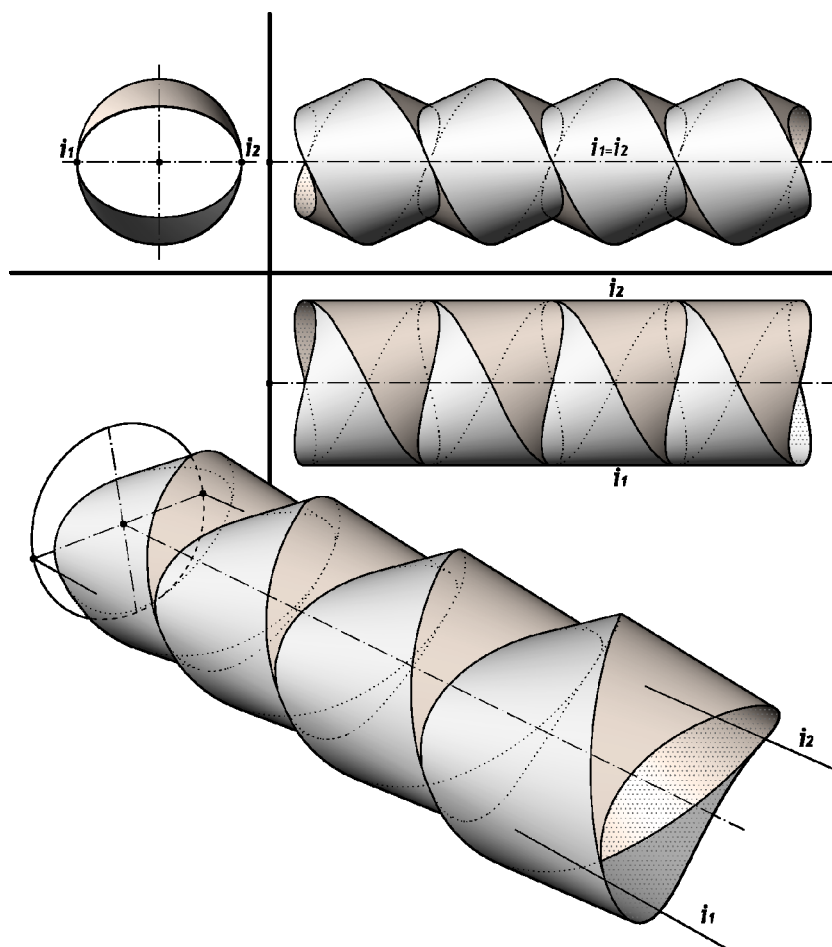


Na **slici 209**, prikazan je prodor dva identična dvostruka kohleoidna konusa, kod kojih su karakteristične izvodnice  $V_{11}V_{12}$  i  $V_{21}V_{22}$  međusobno paralelne, a osovine cilindričnih zavojnica poklopljene, koaksijalne. Obe izvodnice i osovine leže u istoj ravni, koplanarne su. Na **slici 209a**, prikazane su obe površi u celini, dok su na **slikama 209b - d** prikazani segmenti datih površi u prodoru.



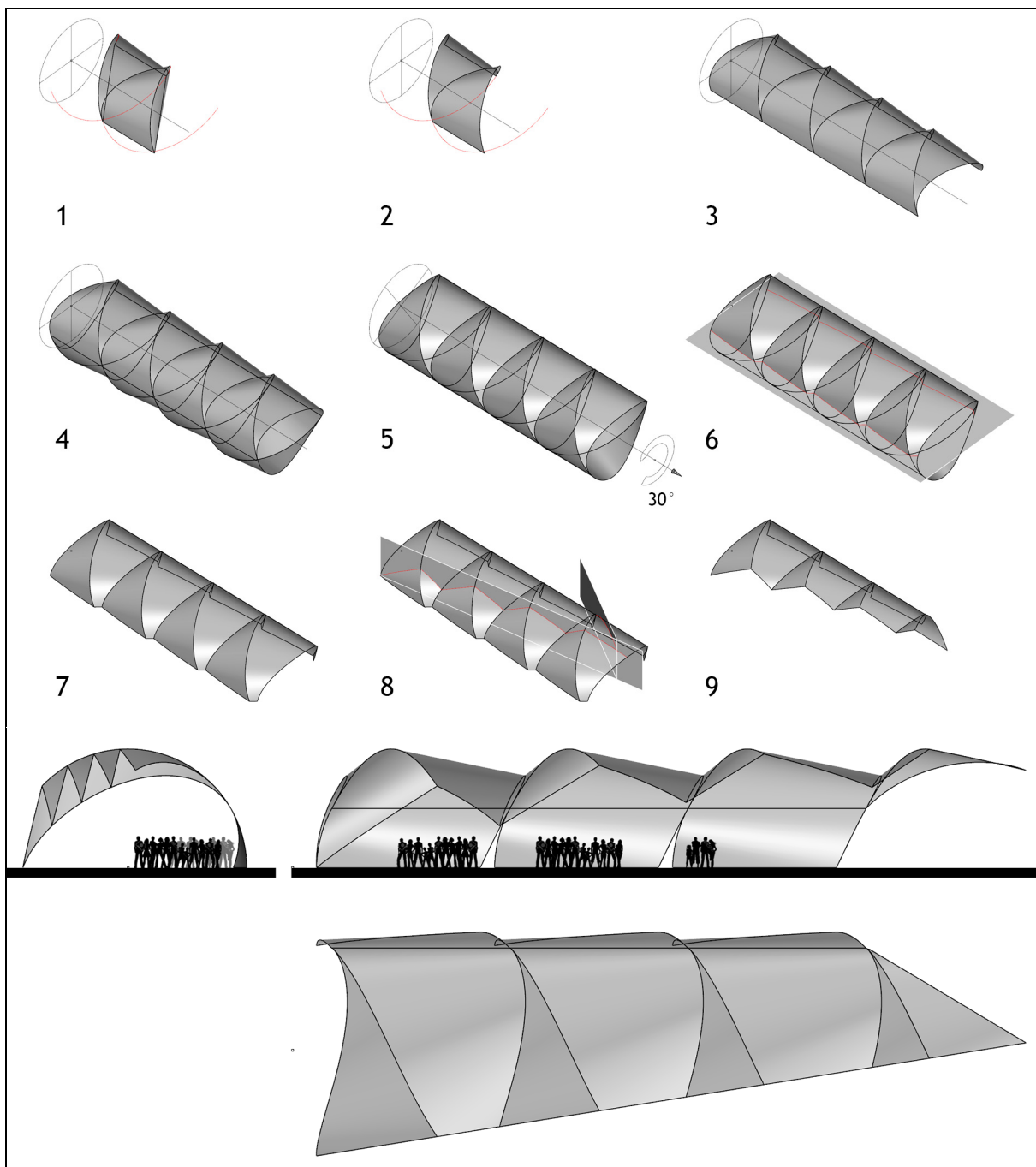
**slika 209.** Prodor dva dvostruka kohleoidna konusa

Koristeći prikazane segmente iz varijante prodora na **slici 209d**, formirana je prostorna struktura prikazana na **slici 210**. Segmenti su multiplicirani duž zajedničkih izvodnica konusa  $i_1$  i  $i_2$ .



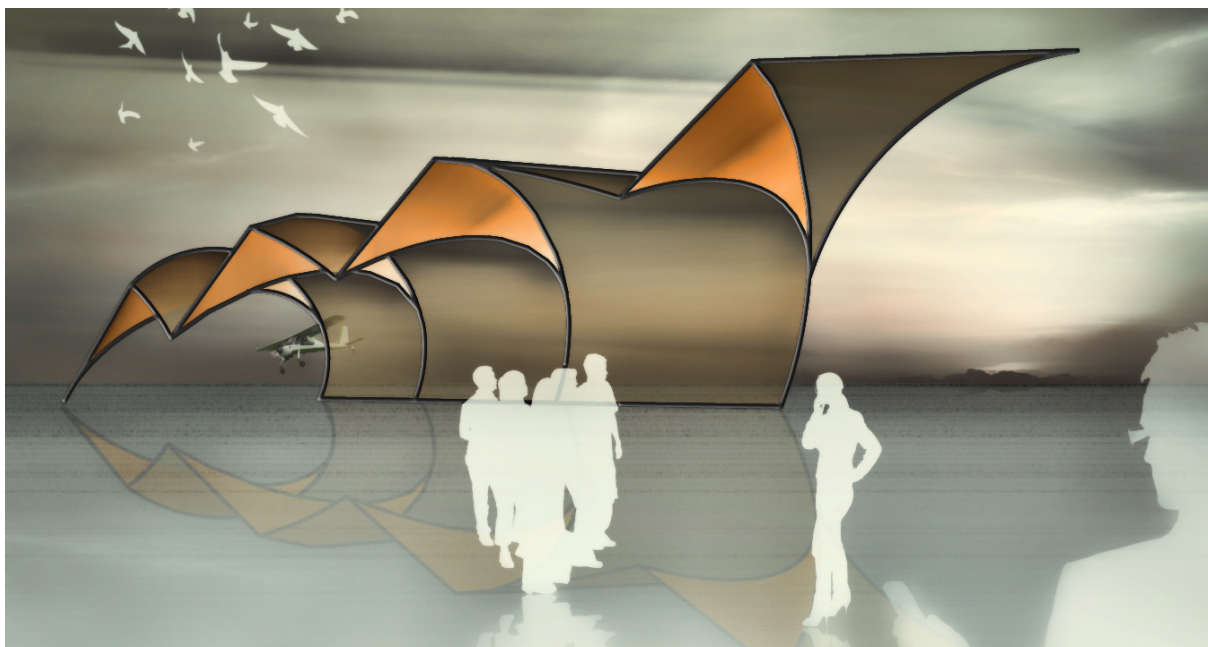
**slika 210.** Umnoženi segmenti prodora dvostrukih kohleoidnih konusa sa **slike 209d**

Način izvođenja reprezentativne prostorne strukture, zasnovane na prethodno opisanom prodoru konusa, u računarskom programu *Rhinceros*, prikazan je aksonometrijski u devet faza, na *slici 211*. Dve cilindrične zavojnice su vodilje dva dvostruka kohleoidna konusa, faza 1. Isečci su preuzeti iz varijante prodora prikazane na *slici 210*. U fazi 2 su uklonjeni delovi sa oba dvostruka kohleoidna konusa, a zatim je izvršena multiplikacija isečaka duž ose cilindričnih zavojnica, faza 3. Tako formirani sklop je u fazi 4 kopiran i rotiran za  $180^\circ$  oko iste ose (čime se dobija prostorni sklop prethodno prikazan na prethodnoj slici). Nakon toga je isti sklop zarotiran oko ose za  $30^\circ$  i u tom položaju presečen horizontalnom ravni postavljenom kroz osu cilindričnih zavojnica, faze 5 i 6.



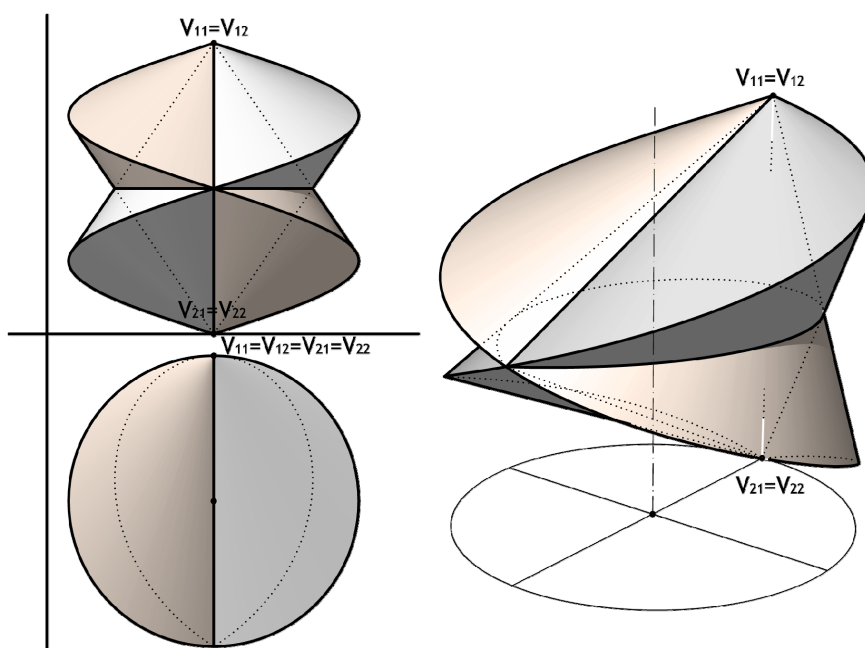
*slika 211. Izvođenje prostorne strukture prikazane na slici 212 u Rhinceros-u*

Delovi isečaka ispod presečne ravni su uklonjeni, faza 7. U fazi 8 je dvema vertikalnim ravnima izvršeno presecanje sklopa površi. Konačno formirana prostorna struktura je prikazana u fazi 9, kao i njene tri ortogonalne projekcije na istoj slici dole. Koristeći prethodno formirani sklop isečaka dva dvostruka kohleoidna konusa formirana je prostorna struktura ahitektonskog objekta prikazanog na *slici 212*.



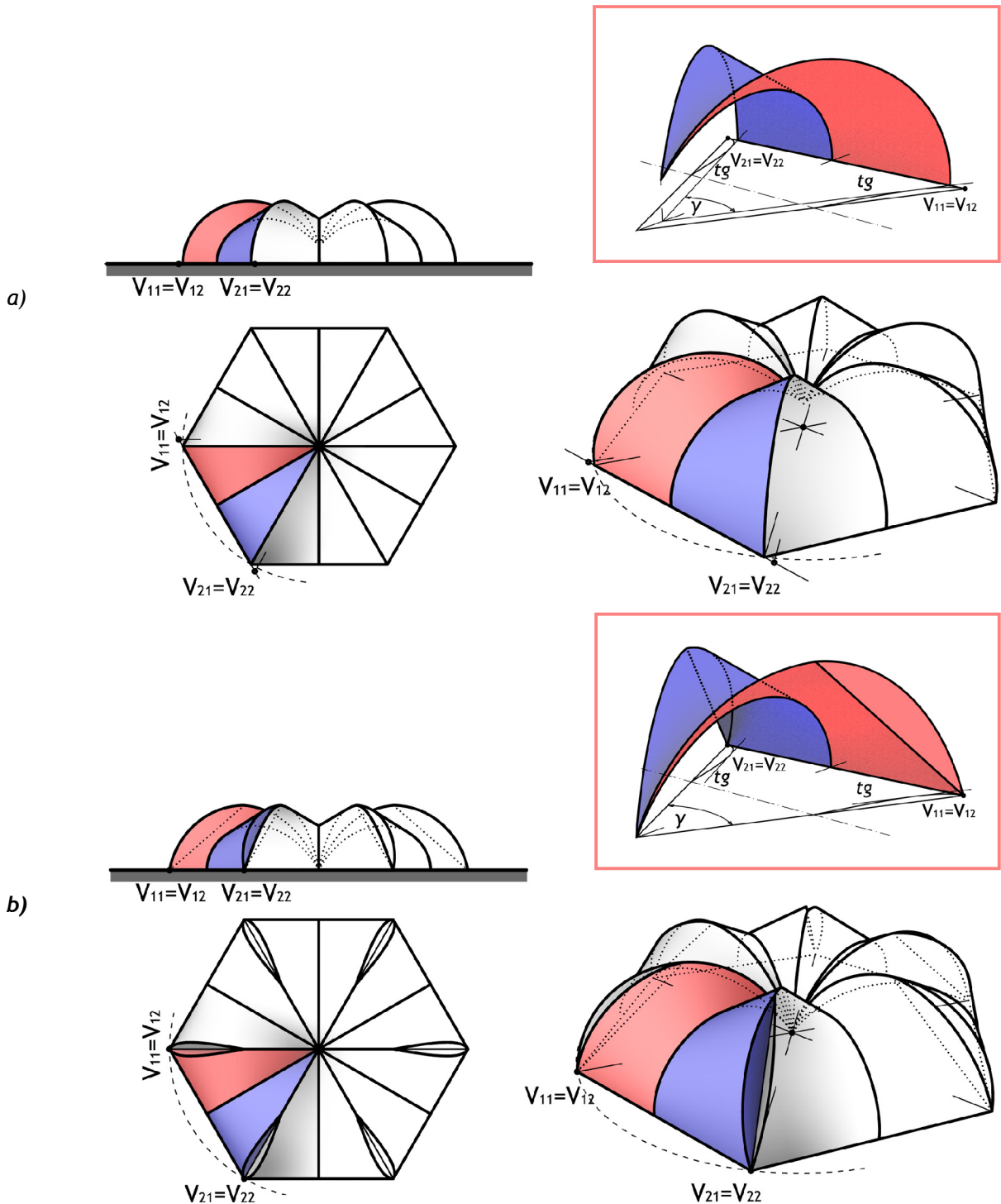
*slika 212. Arhitektonska prostorna struktura, 2013. (V. Nikolić)*

Na *slici 213*, prikazan je prodor dva dvostruka kohleoidna konusa, kod kojih su karakteristične izvodnice  $V_{11}V_{12}$  i  $V_{21}V_{22}$  poklopljene, kao i osovine cilindričnih zavojnica. Cilindrične zavojnice su istih prečnika i visina, a različitih smerova.



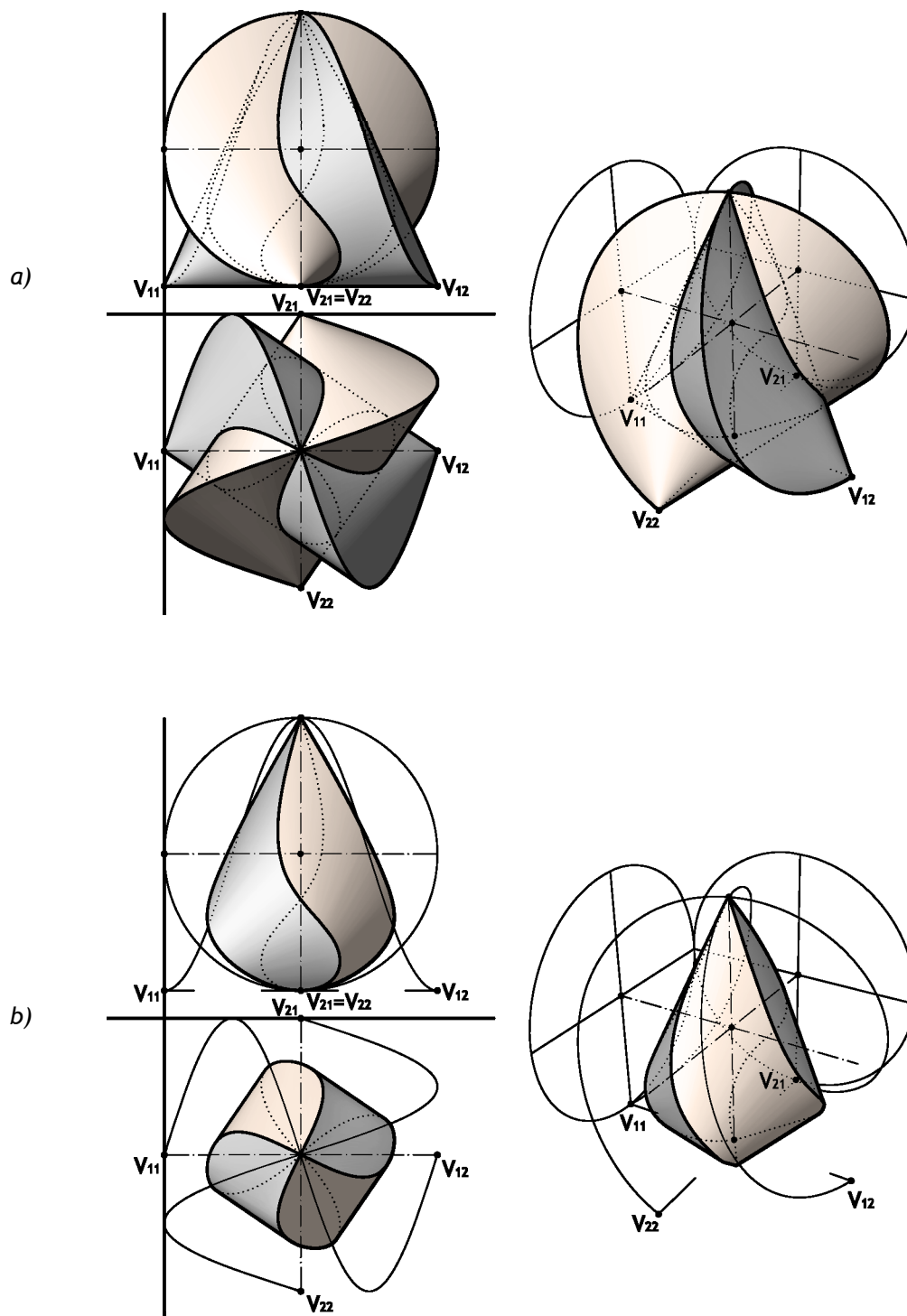
*slika 213. Dvostruki kohleoidni konusi - prodor*

Na *slikama 214 a i b* prikazane su dve prostorne strukture, formirane korišćenjem isečaka iz prethodnog prodora dva dvostruka kohleoidna konusa. Korišćeni isečci prikazani su izdvojeno na istim slikama. Ukoliko ugao  $\gamma$  iznosi  $120^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $15^\circ \dots$ , moguće je prikazanim isečcima konusa pokriti pravilne poligonalne osnove objekata. U prikazanim slučajevima korišćeni su karakteristični isečci sa uglom  $\gamma=60^\circ$ . Crveno obojene površi isečaka pripadaju jednom, a plavo obojene površi drugom dvostrukom kohleoidnom konusu. Obe strukture su formirane nad pravilnim šestougaonim osnovama, radijalnim umnožavanjem isečaka oko vertikalne ose.



*slika 214. Formiranje prostorne strukture od isečaka dva dvostruka kohleoidna konusa*

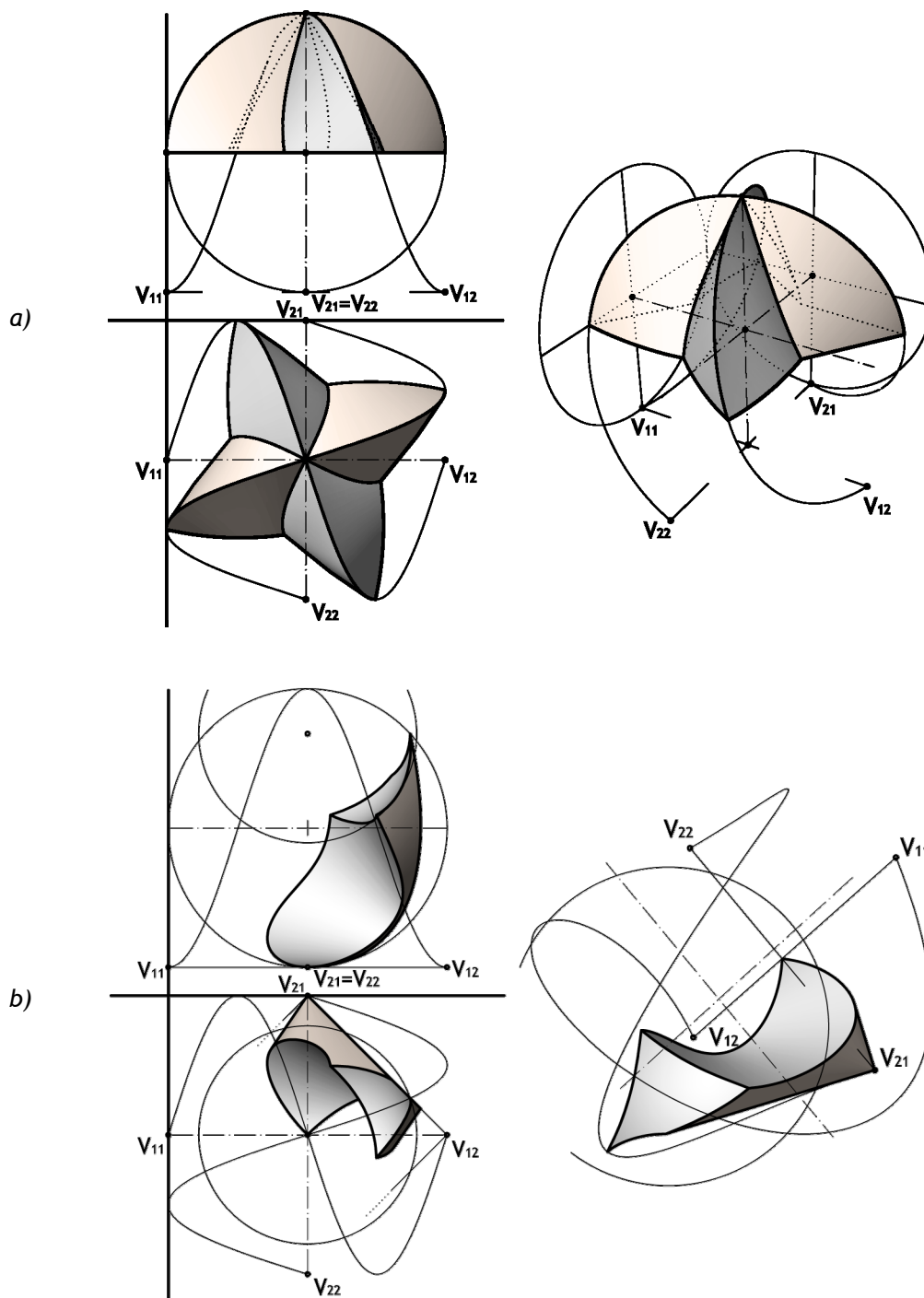
Na *slici 215*, prikazan je prodor dva identična dvostruka kohleoidna konusa, kod kojih je prečnik cilindrične zavojnice (vodilje površi) jednak visini jednog hoda zavojnice. Karakteristične izvodnice  $V_{11}V_{12}$  i  $V_{21}V_{22}$ , kao i osovine cilindričnih zavojnica, seku se pod pravim uglom i međusobno polove. Na *slici 215a* prikazane su obe površi u celini, a varijanta prikazana na *slici 215b* predstavlja jezgro prodora datih konusa.



*slika 215. Prodor dva dvostruka kohleoidna konusa*

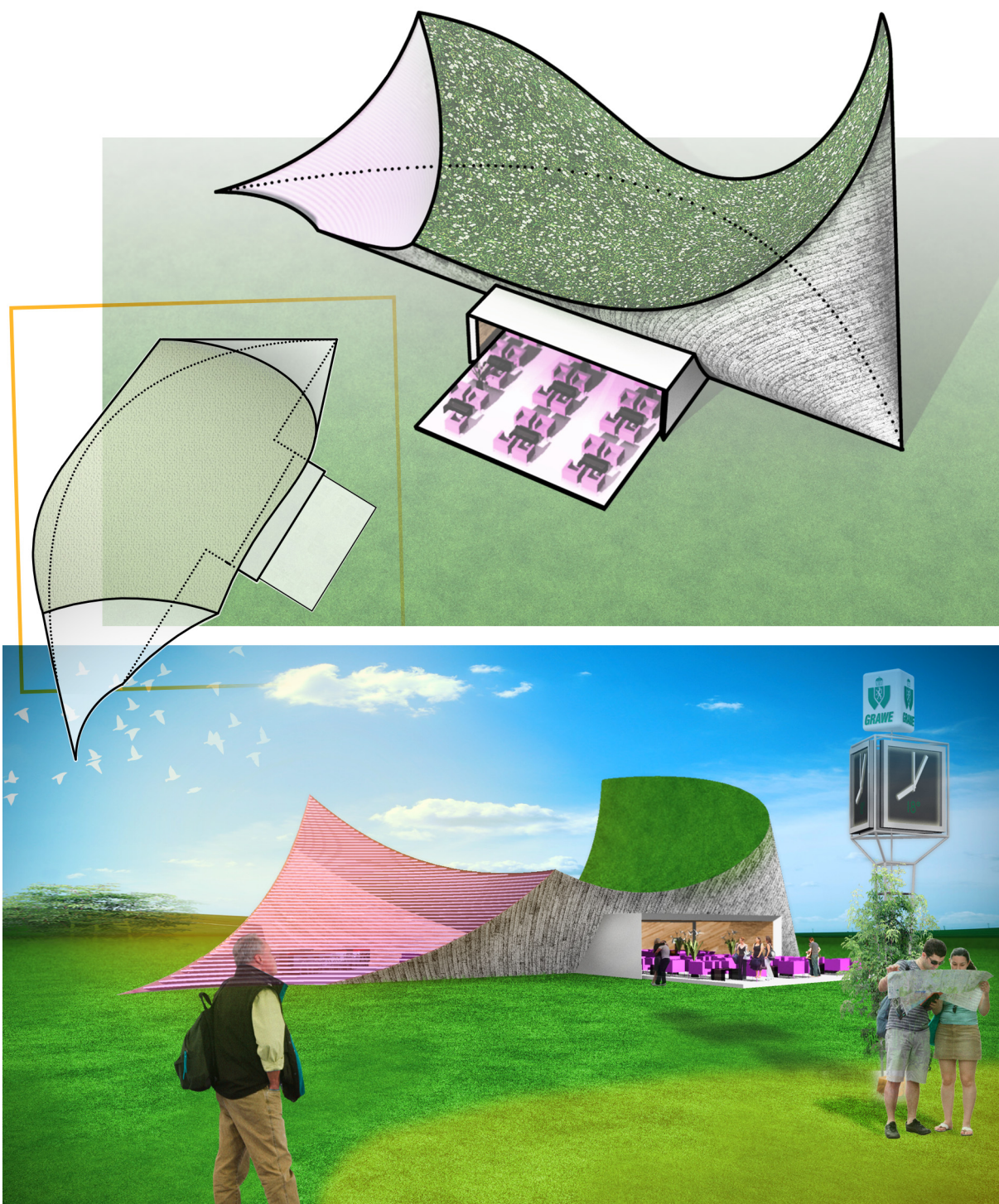


Na *slici 216* prikazani su neki od mogućih isečaka dva identična dvostruka kohleoidna konusa iz prodora prikazanog na *slici 217*. U varijanti prikazanoj na *slici 216a*, konusi su presečeni horizontalnom ravni kroz osovine obe cilindrične zavojnice. U varijanti prikazanoj na *slici 216b* deo konusa u prodoru, isečen je sferom  $S$  i vertikalnom ravni kroz vrhove  $V_{12}V_{21}$  konusa.



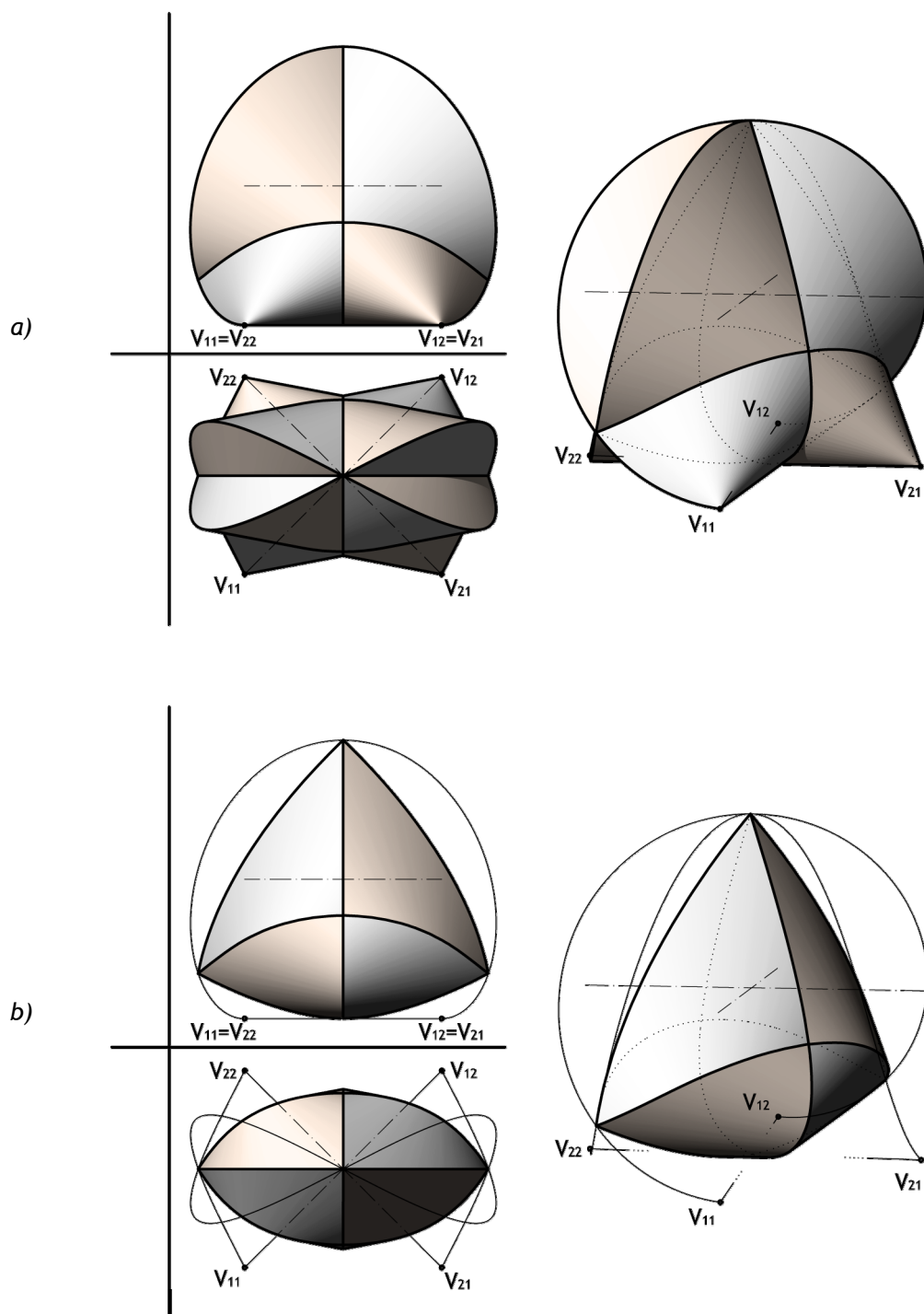
*slika 216. Prodor dva dvostruka kohleoidna konusa - iseći*

Koristeći prethodno izvedeni sklop isečaka konusa, prikazan na *slici 216b*, formirana je prostorna struktura prikazana na *slici 217*. Struktura je oslonjena na podlogu po ravnom preseku kroz vrhove konusa  $V_{12}V_{21}$  „srpolikog” oblika, a upotpunjena je prodorom prizmatične forme. Prikazana je 3D arhitektonska vizuelizacija formirane prostorne strukture, gde je segment jednog konusa površina „zelenog krova“, a segment drugog konusa predstavlja zidove objekta. Isečak sfernog oblika je transparentna zid zavesa sa horizontalnim brisolejima.



*slika 217. Arhitektonski objekat - osnova i 3D vizuelizacija, 2013. (V. Nikolić)*

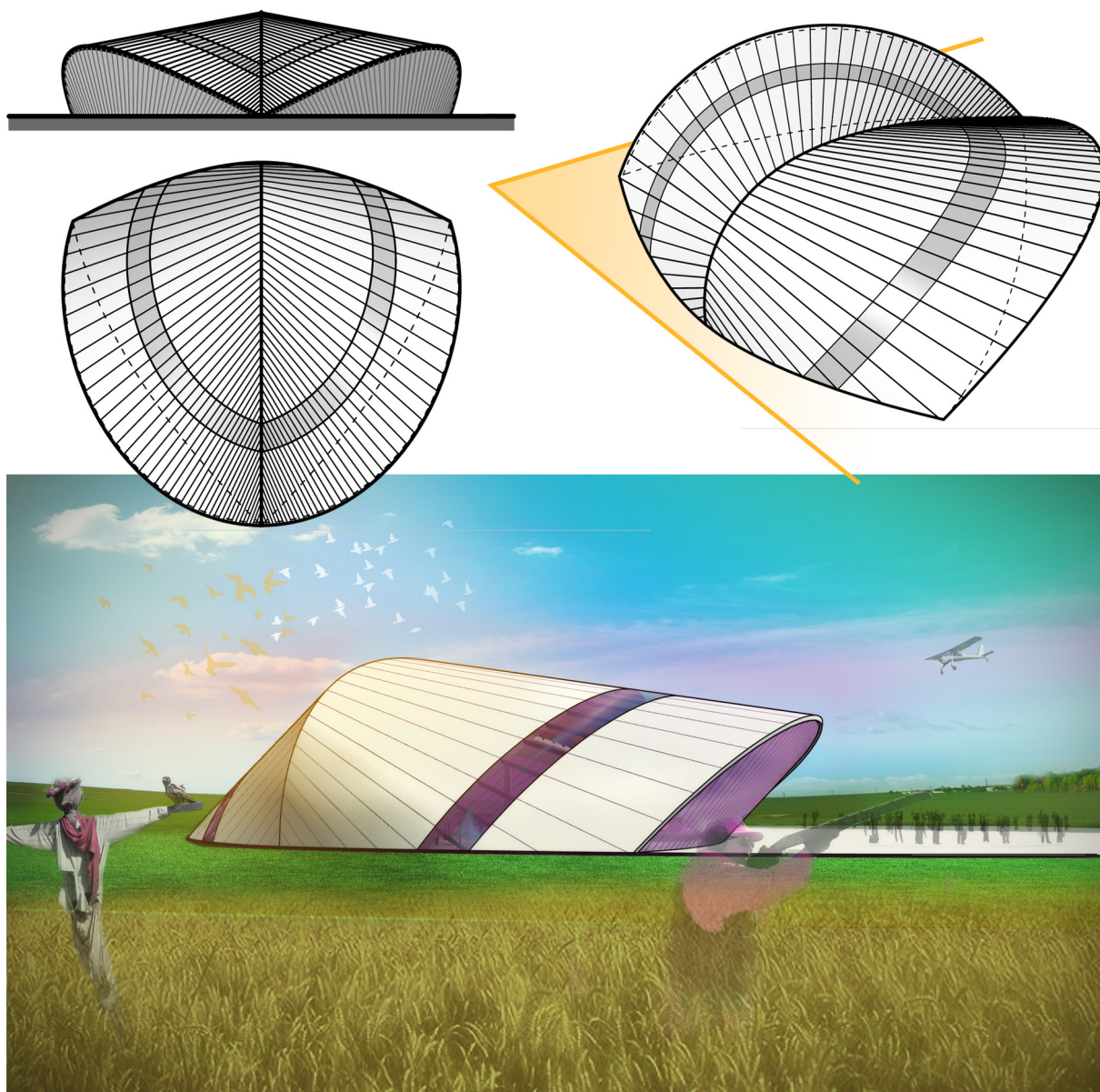
Na *slici 218*, prikazan je prodor dva dvostruka kohleoidna konusa, različitih smerova zavojnica, kod kojih su prečnici obe cilindrične zavojnice (vodilje površi) jednaki visinama jednog hoda zavojnice. Karakteristične izvodnice  $V_{11}V_{12}$  i  $V_{21}V_{22}$ , kao i osovine cilindrične zavojnice, seku se pod pravim uglom i međusobno polove. Na *slici 218a* prikazane su obe površi u celini, dok je na *slici 218b* prikazano jezgro prodora datih konusa.



*slika 218. Prodor dva dvostruka kohleoidna konusa*



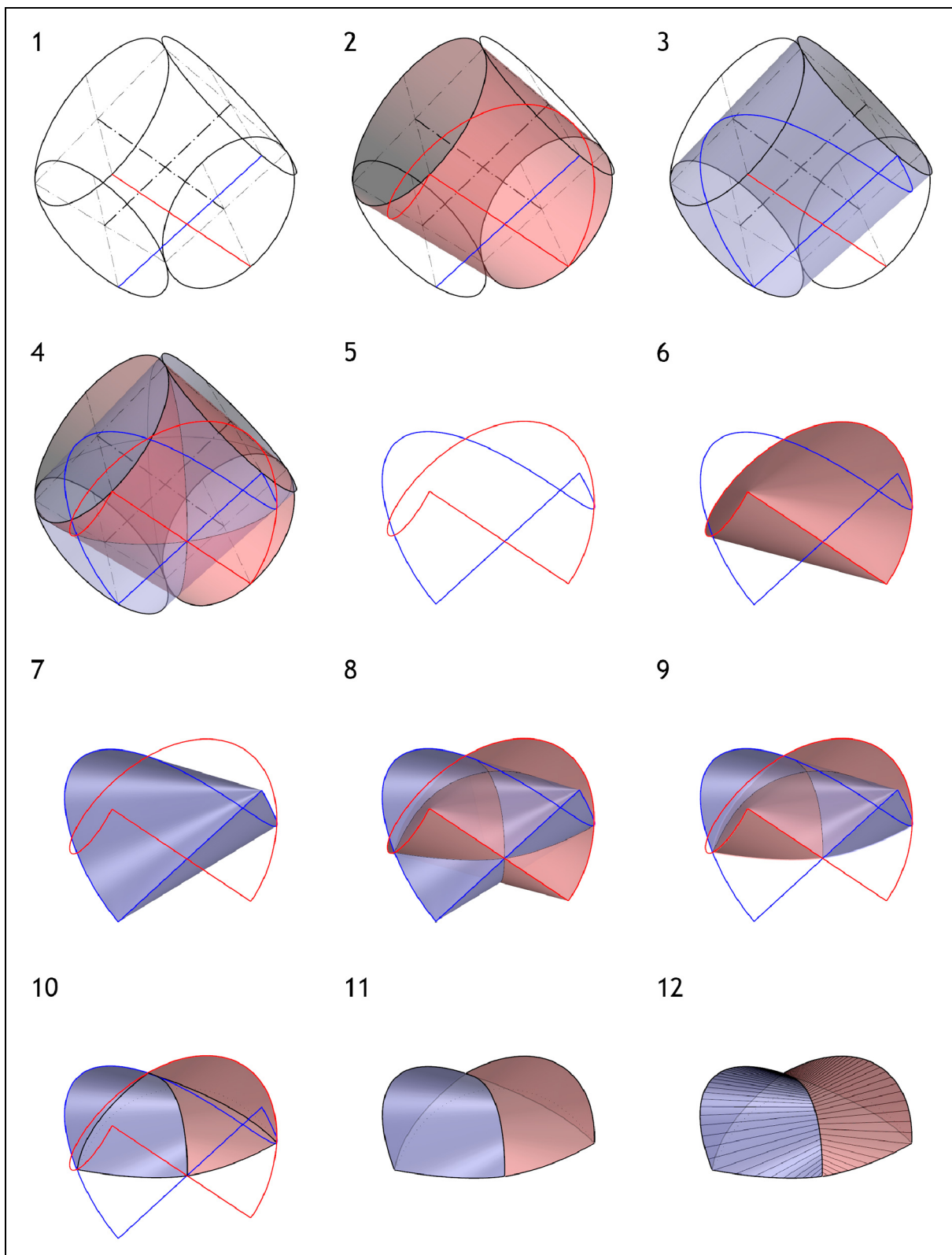
Koristeći segmente konusa iz prethodno prikazanog prodora, izvedena je arhitektonska struktura jednostavne, racionalne i vizuelno efektne forme, prikazana na *slici 219*. Primenjeni su simetrični segmenti oba konusa, koji prekrivaju osnovu u formi trougla sa zakrivljenim stranama. Spojevi elemenata u krovnoj konstrukciji su poklopljeni sa izvodnicama konusa, kao i podela na ostakljenim površinama.



*slika 219. Arhitektonska prostorna struktura, 2013. (V. Nikolić)*

Način izvođenja prethodno prikazane prostorne strukture u računarskom programu *Rhinoceros* prikazan je u dvanaest faza, u perspektivi, na *slici 220*. U fazi 1 su prikazane dve izvodnice (obeležene crvenom i plavom bojom), kao i osovine i bazisi obrtnih oblica koje one izvođe. Visine oblica jednake su prečnicima bazisa, a osovine i izvodnice se seku pod pravim uglom. U fazama 2 i 3 su prikazane izvedene oblice, kao i po jedan hod cilindričnih zavojnica na tim površinama. Sklop oblica i zavojnica prikazan je u fazi 4, a u fazi 5 su izdvojene prave izvodnice i

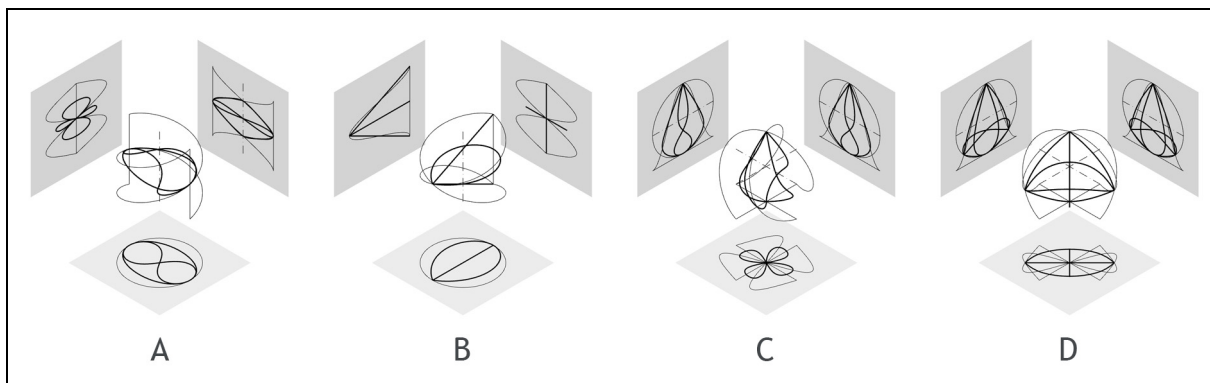
cilindrične zavojnice. Po njima su izvedena dve dvostruka kohleoidna konusa, faze 6 i 7, koji su zajedno prikazani u fazi 8. Konusi su presečeni horizontalnom (faza 9) i vertikalnom (faza 10) ravni. Zadržan je po jedan deo svakog od konusa sa obe strane vertikalne presečne ravni, faza 11. U fazi 12 prikazan je izvedeni sklop isečaka dva dvostruka kohleoidna konusa sa izdvojenim sistemima pravih izvodnica.



*slika 220. Izvođenje prostorne strukture prikazane na slici 219 u Rhinoceros-u*

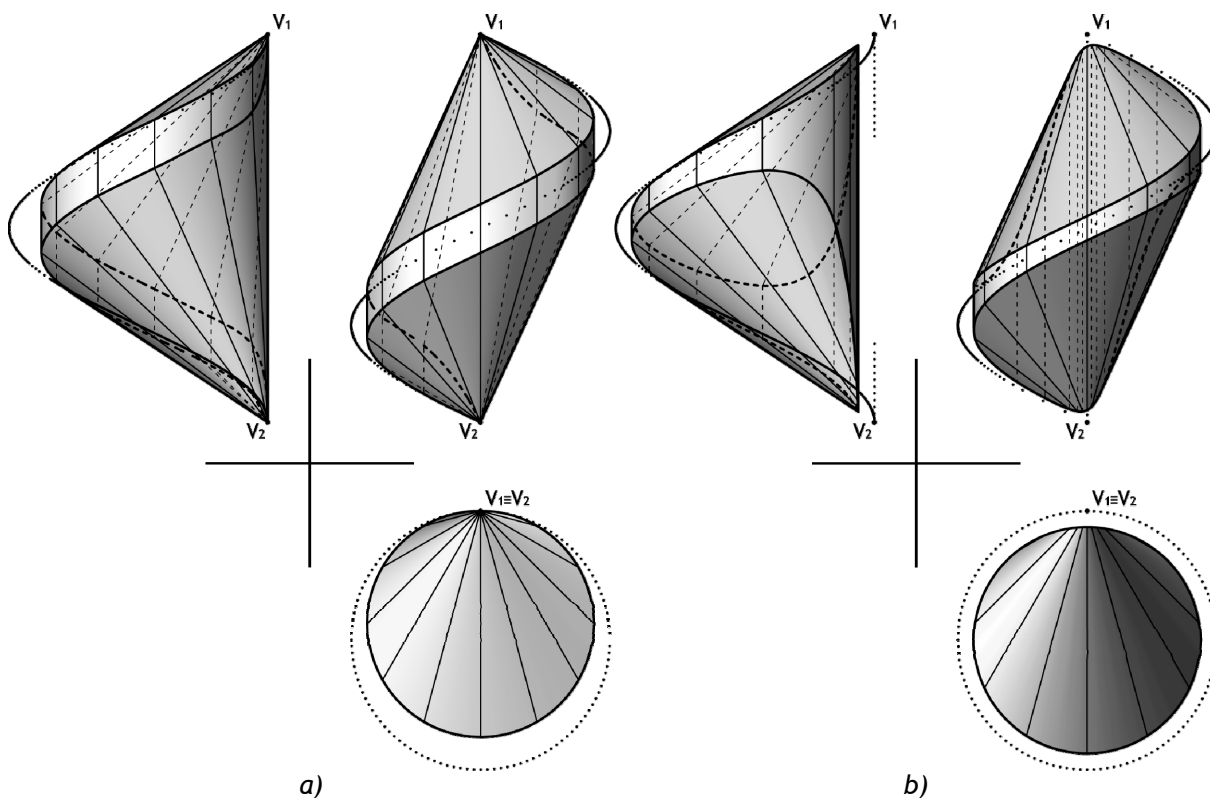


Dvostruki kohleoidni konus se sastoji od isečaka dve transcendentne površi. Prodor transcendentnih površi je prostorna transcendentna kriva. U prethodna četiri primera izvedeni su prodori dva dvostruka kohleoidna konusa, a na **slici 221** su izdvojene njihove prodorne krive, koje se sastoje od delova transcendentnih prostornih krivih.



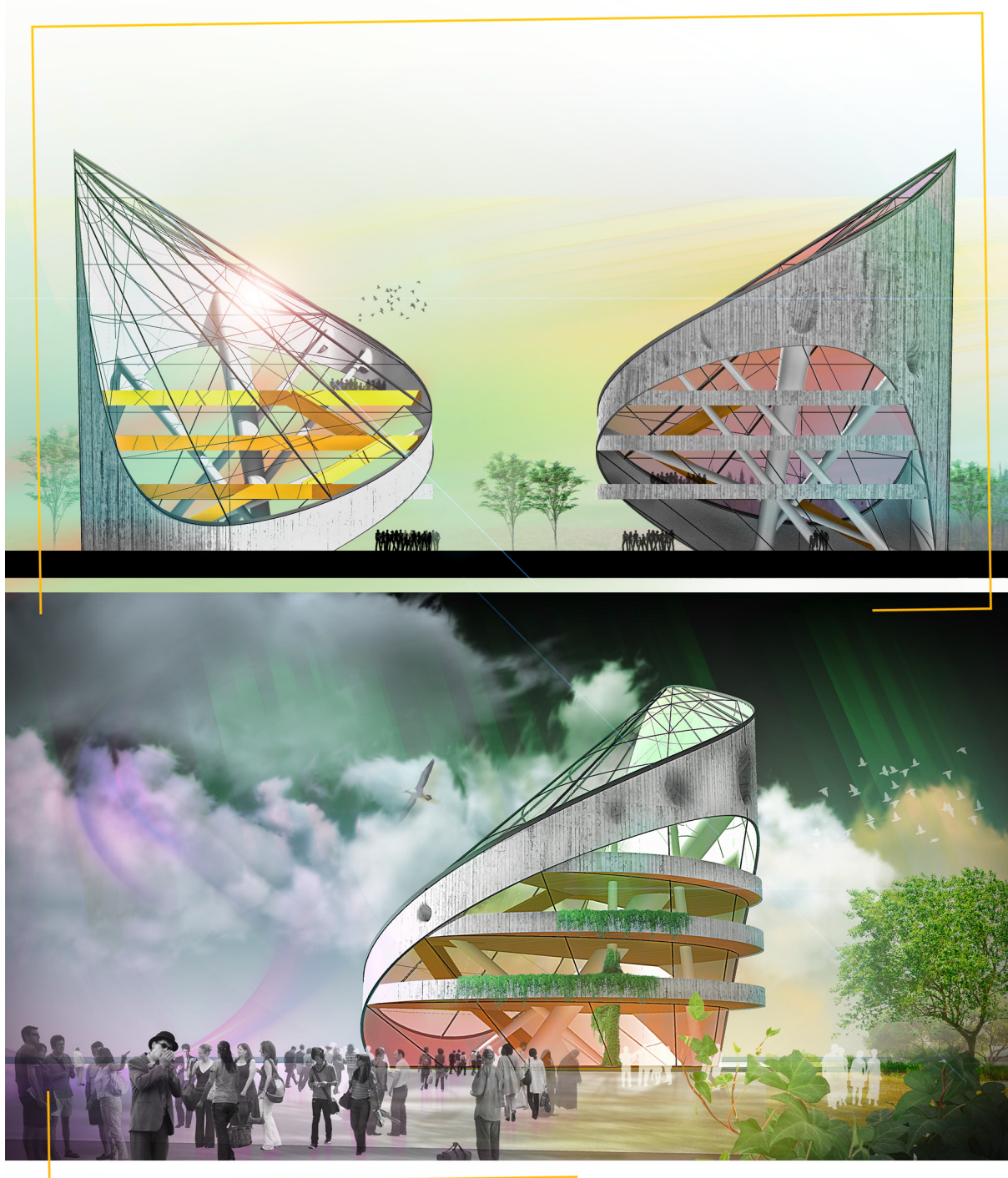
**slika 221.** Prodorne krive dva dvostruka kohleoidna konusa

Na **slici 222** prikazane su dve varijante prodora dvostrukog kohleoidnog konusa sa cilindričnom površi u tri ortogonalne projekcije. U varijanti prikazanoj na **slici 222a**, cilindrična površ (nosač zavojnice) i prodorni konus imaju zajedničku izvodnicu, koja je takođe i specifična izvodnica kohleoidnog konusa. U varijanti prikazanoj na **slici 222b**, cilindrična površ (nosač zavojnice) i konus, u prodoru, imaju poklopljene osovine. U oba slučaja prečnik bazisa cilindrične površi manji je od prečnika cilindrične zavojnice.



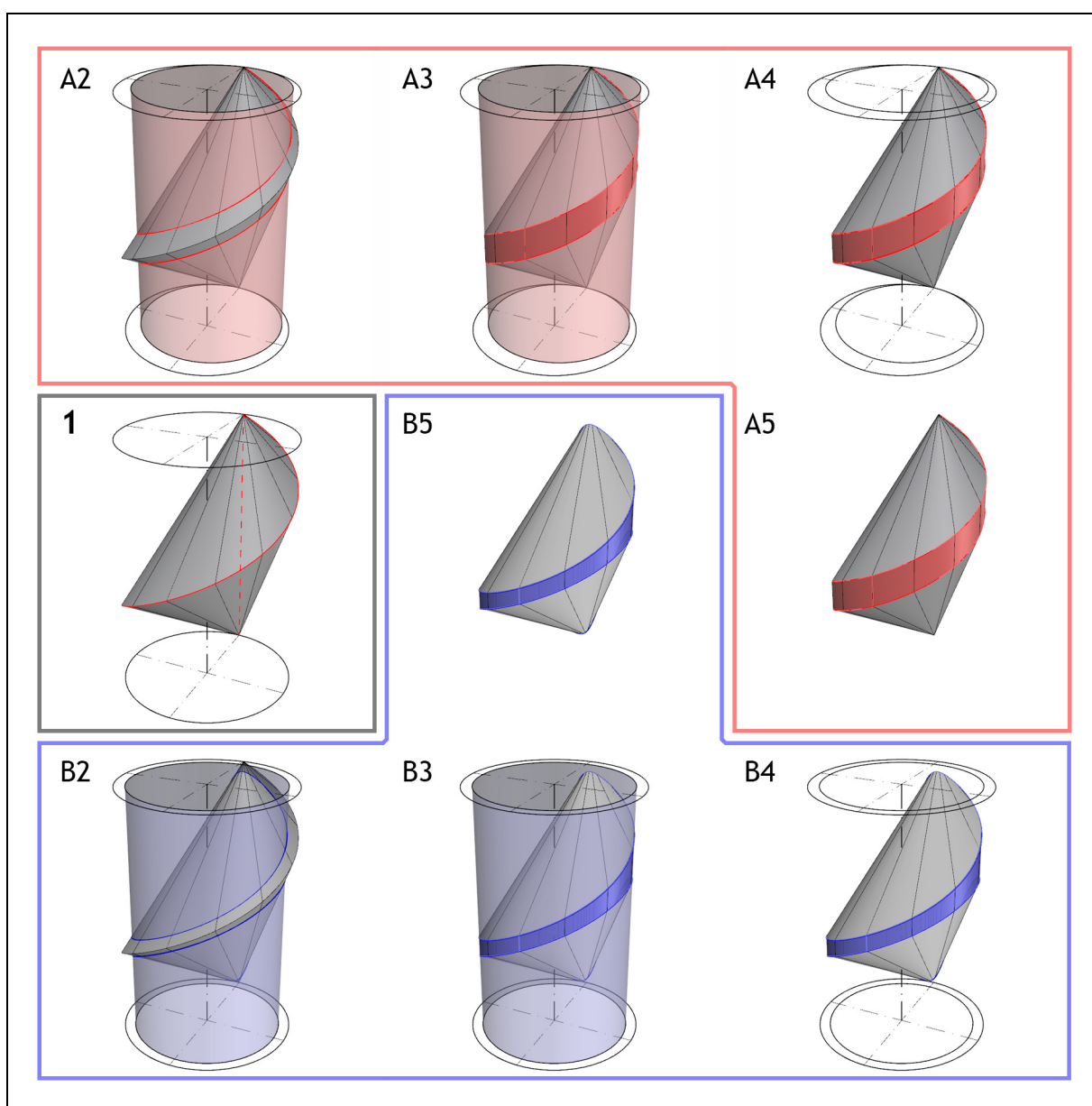
**slika 222.** Prodori dvostrukih kohleoidnih konusa i obrtne oblice

Koristeći prodor prikazan na *slici 222b*, formirana je arhitektonska prostorna struktura prikazana na *slici 223*. Transparentni delovi objekta su delovi dvostrukog kohleoidnog konusa, a površine zidova delovi prodorne cilindrične površi. Prikazani primeri su samo neki od mogućih odnosa dvostrukog kohleoidnog konusa prema prodornoj površi. Ukoliko su prodorne površi pravoizvodne razvojne, kakva je i površ analiziranog transcendentnog konusa, omogućeno je relativno jednostavno projektovanje i praktično izvođenje racionalnih, estetski kvalitetnih prostornih struktura.



*slika 223. Arhitektonska prostorna struktura, 2013. (V. Nikolić) /54/*

Izvođenje prethodno prikazanih isečaka dvostrukog kohleoidnog konusa, u prodoru sa vertikalnim obrtnim oblicima (cilindričnim površima), u računarskom programu *Rhinoceros*, prikazano je u perspektivi na *slici 224*. Faza 1 predstavlja dvostruki kohleidni konus, koji je već opisan i upotrebljen u prethodnim primerima. U slučaju **A** konus je u prodoru sa vertikalnom obrtnom oblicom čija je osa paralelna osi cilindrične zavojnice. Prodorna oblica ima manji prečnik bazisa od prečnika cilindrične zavojnice. Jedna izvodnica prodorne oblice poklopljena je sa vertikalnom izvodnicom konusa (specifičnom izvodnicom konusa). Proces izvođenja prodora dat je u fazama **A2 - A5**. U slučaju **B** konus je u prodoru sa vertikalnom obrtnom oblicom čija je osa poklopljena sa osom cilindrične zavojnice. Prodorna oblica ima manji prečnik bazisa od prečnika cilindrične zavojnice. Proces izvođenja prodora prikazan je u fazama **B2 - B5**.

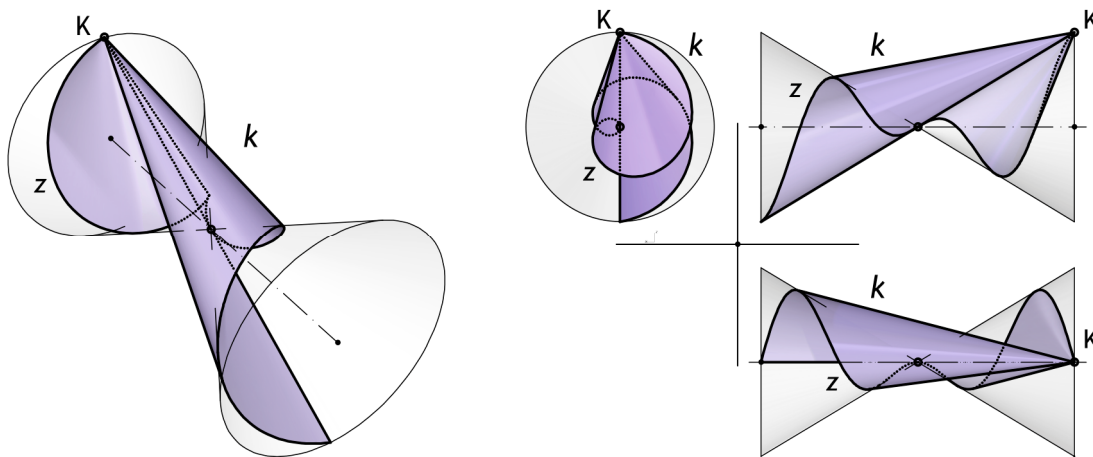


*slika 224. Izvođenje prostorne strukture prikazane na slici 223 u Rhinoceros-u*



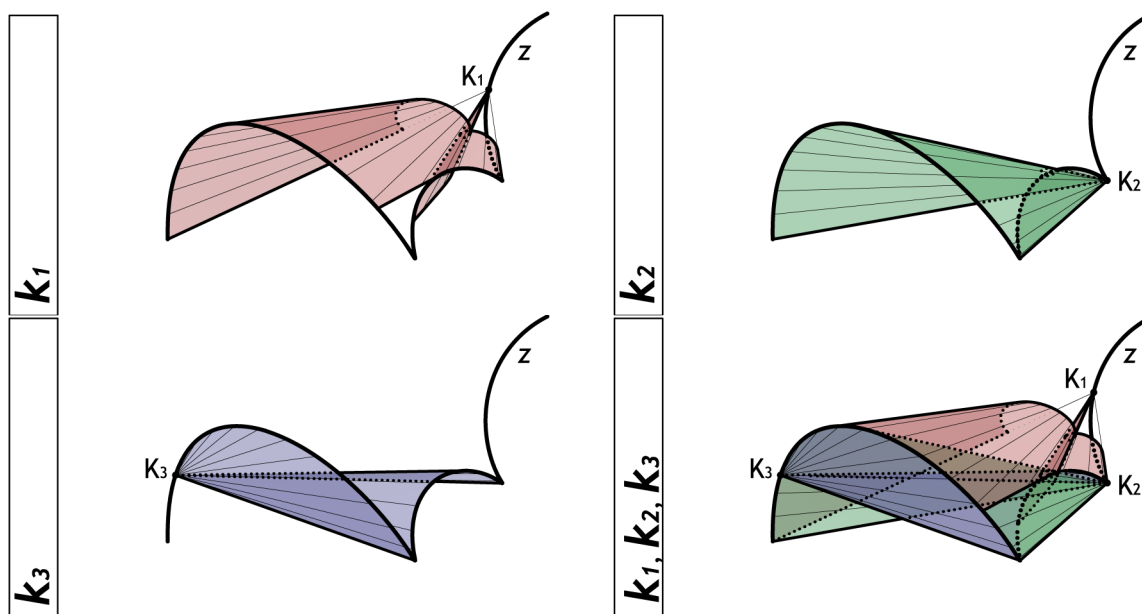
### III7.2 TRANSCEDENTNE PRAVOIZVODNE POVRŠI ČIJE SU VODILJE KONUSNA, SFERNA I HIPERBOLOIDNA ZAVOJNICA

Ukoliko se za izvođenje pravoizvodne površi koristi konusna zavojnica  $z$  kao vodilja, a za vrh  $K$  uzme neka tačka na njoj, koja nije poklopljena sa vrhom konusa  $V$  (nosača zavojnice), nastaje transcendentna konusna površ  $k$ , **slika 225**.



**slika 225.** Transcendentni konus izveden po konusnoj zavojnici - vodilji površi

Korišćenjem ovakvih konusa sa vrhovima  $K_1$ ,  $K_2$  i  $K_3$  na konusnoj zavojnici  $z$ , odnosno njihovih isečaka, formirana je prostorna struktura prikazana u na **slici 226**. Prikazani su iseći svakog od konusa posebno, kao i sklop sva tri isečka transcendentnih konusa /54/.



**slika 226.** Prostorna struktura formirana od transcendentnih konusa  $k_1$ ,  $k_2$  i  $k_3$

Na **slici 227**, u perspektivi je prikazan objekat nastao na prethodno opisan način, spajanjem segmenata konusa sa konusnom zavojnicom kao vodiljom i vrhovima na njoj, kao i daljim isecanjem tih segmenata. Na istoj slici je prikazana i osnova objekta. Dinamičnost forme je postignuta međusobnim prodiranjem i

prožimanjem konusnih površina koje grade kompleksnu prostornu strukturu. Sve površi prostorne strukture su pravoizvodne, razvojne i jednostruko zakrivljene.

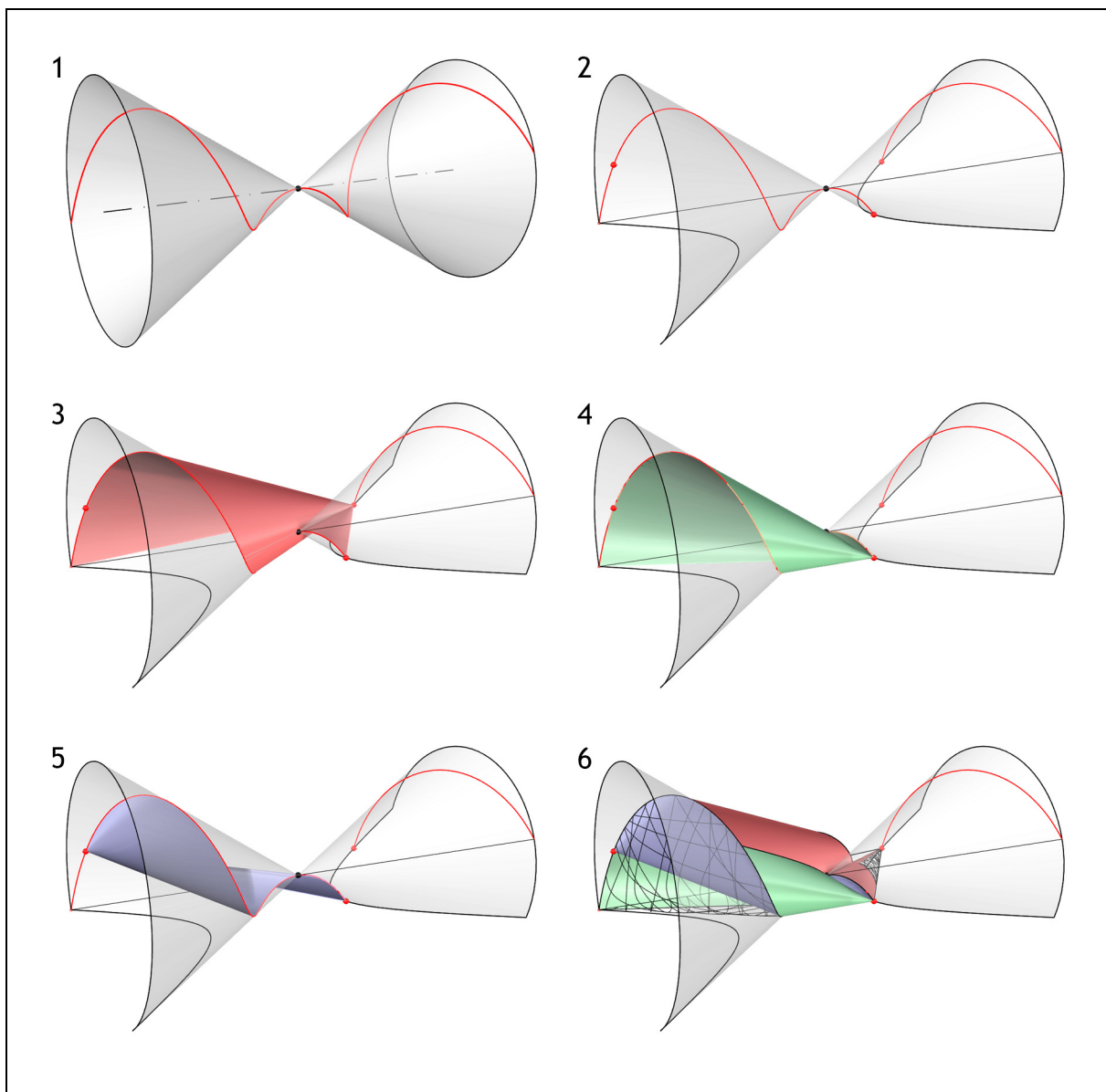


*slika 227. Prostorna struktura formirana od tri konusa sa konusnom zavojnicom kao vodiljom, osnova i arhitektonska 3D vizuelizacija, 2013. (V. Nikolić)*

Način izvođenja prethodno prikazane prostorne strukture u računarskom programu *Rhinceros* prikazan je u šest faza, u perspektivi, na *slici 228*. U fazi 1 je izveden obrtni konus, na kome je generisana konusna zavojnica. Osovina konusa, nosača zavojnice, je postavljena pod određenim uglom u odnosu na horizontalnu površinu podloge kojom su presečeni konus i zavojnica u fazi 2. Na zavojnici su uočene tri tačke, vrhovi transcendentnih konusa. Prvi konus (označen crvenom



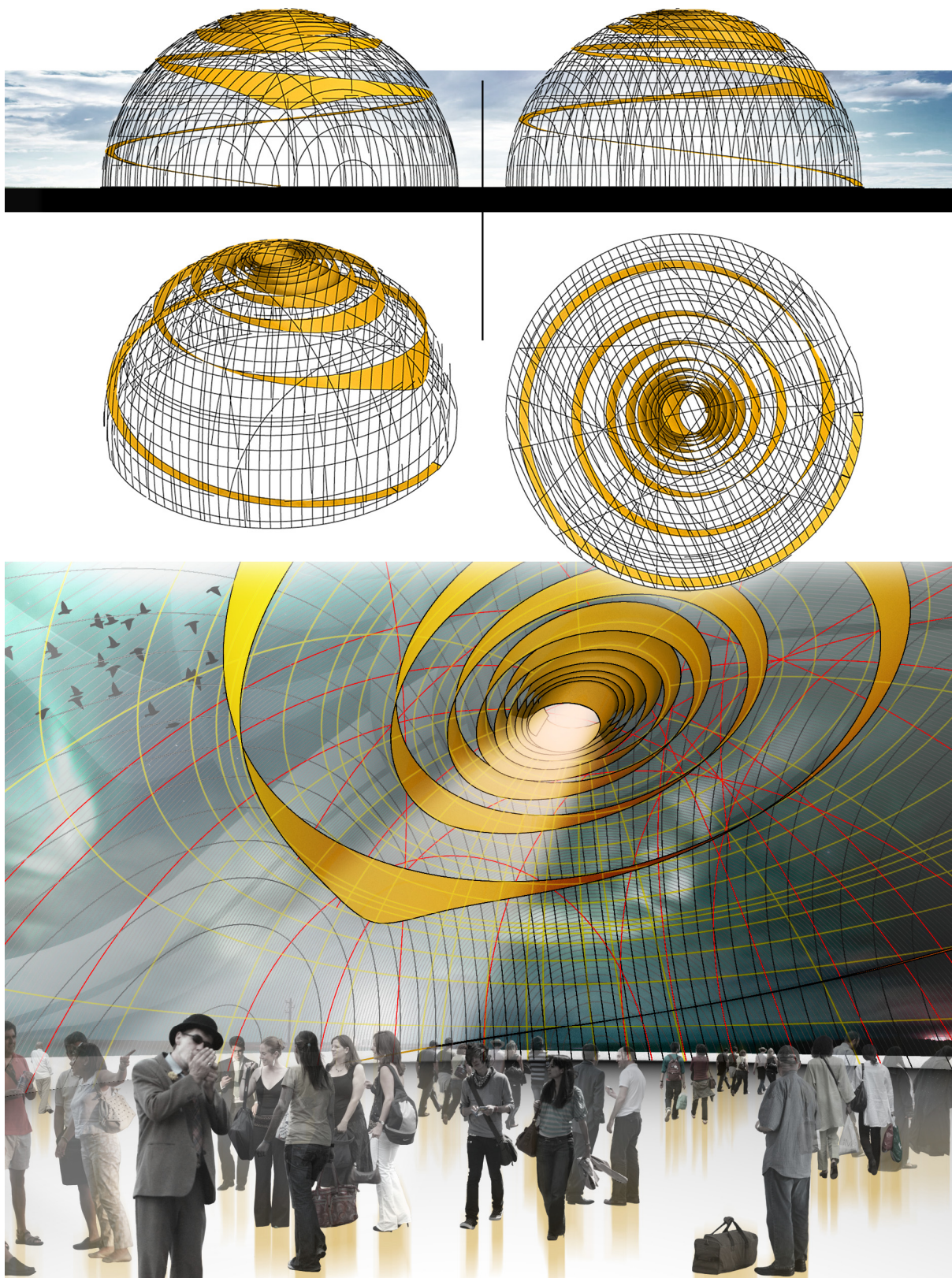
bojom) je izveden u fazi 3, drugi konus (označen zelenom bojom) u fazi 4, a treći konus (označen plavom bojom) u fazi 5. Vodilja sva tri konusa je konusna zavojnica, a generisani su opcijom *Loft* između zavojnice i vrhova. Sklop tri konusa prikazan je u fazi 6. Vertikalnom ravni je odsečen deo prvog konusa, a prostorna struktura je upotpunjena linearnim elementima koji leže na površima četvrtog pomoćnog konusa i uklonjenom delu prvog konusa. Linearni elementi su izvedeni opcijom *Section*.



*slika 228. Izvođenje prostorne strukture prikazane na slici 227, u Rhinoceros-u*

Sferna zavojnica je prostorna kriva koja se kreće od jednog do drugog pola sfere, zadržavajući pri tom konstantan ugao (koji nije prav) prema svim meridijanima. Poseban slučaj sferne zavojnice je loksodroma, transcendentna prostorna kriva /1/. Koristeći loksodromu kao vodilju i tačku na njoj kao vrh, izveden je konus čiji je isečak primenjen u formiranju prostorne strukture prikazane na *slici 229*. Vrh tog konusa nalazi se u preseku loksodrome i ekvatora sfere, nosača loksodrome. Prikazane su tri ortogonalne projekcije i perspektiva tako nastalog objekta.

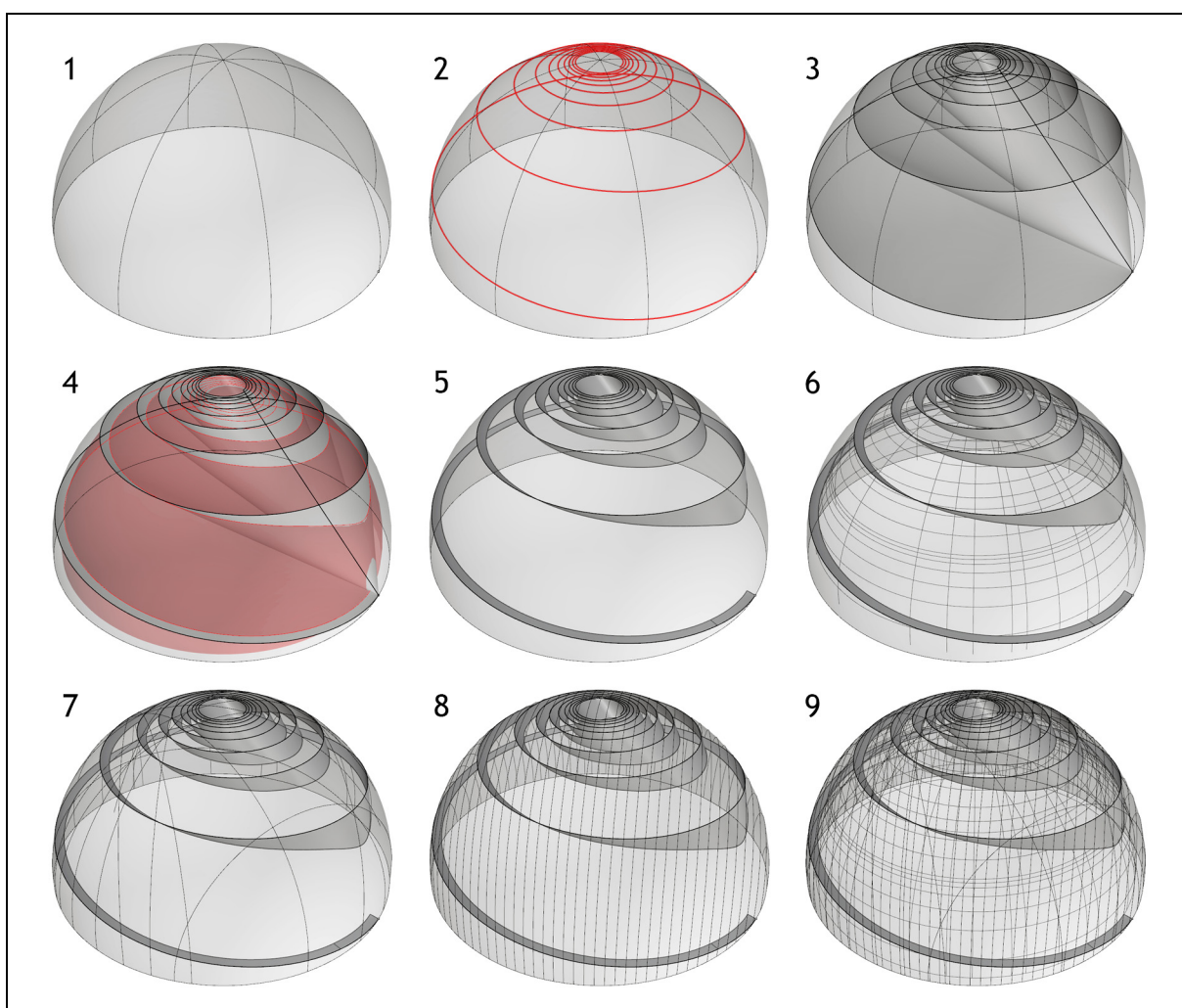
Arhitektonska vizuelizacija, pogled unutar prethodno opisane prostorne strukture, prikazan je na *slici 229 dole*. Isečak konusa dobijen je između dve koncentrične sfere. Prostornu strukturu nose linearni elementi nastali ravnim presecanjem sfere, nosača loksodrome /54/.



*slika 229. Prostorna struktura formirana od konusa sa loksodromom kao vodiljom i arhitektonska vizuelizacija unutrašnjosti, 2013. (V. Nikolić) /54/*



Način izvođenja prethodno prikazane prostorne strukture u računarskom programu *Rhinoceros* prikazan je u devet faza, u perspektivi, na *slici 230*. U fazama 1 i 2 je formirana polulopta, a na njenoj površi loksodroma. Jedna od tačaka loksodrome, u ovom slučaju tačka u osnovi polulopte, je vrh transcendentnog konusa. Konus prikazan u fazi 3, odnosno njegov deo unutar polulopte, je generisan opcijom *Loft* između transcendentne krive i tačke vrha konusa. Ovaj deo konusa presečen je pomoćnom koncentričnom poluloptom, a zadržan je deo konusa između polulopti, faze 4 i 5. Na taj način je izvedena pravoizvodna razvojna transcendentna površ, konus, na kojoj je zasnovana prikazana prostorna struktura. U fazi 6 dodata je mreža meridijana i paralela na površi pomoćne polulopte, a u fazi 7 mreža na površini spoljašnje polulopte nastala isecanjem površi slobodno postavljenim vertikalnim ravnima. Korišćena je opcija *Section*. U fazi 8 izvedena je još jedna mreža na površi polulopte, generisana opcijom *Contour*. Ovom opcijom generisane su presečne polukružnice površi u paralelnim vertikalnim ravnima na jednakom rastojanju. Faza 9 prikazuje konačno formiranu prostornu strukturu, koja je korišćena za arhitektonsku vizuelizaciju.



*slika 230. Izvođenje prostorne strukture prikazane na slici 229 u Rhinoceros-u*

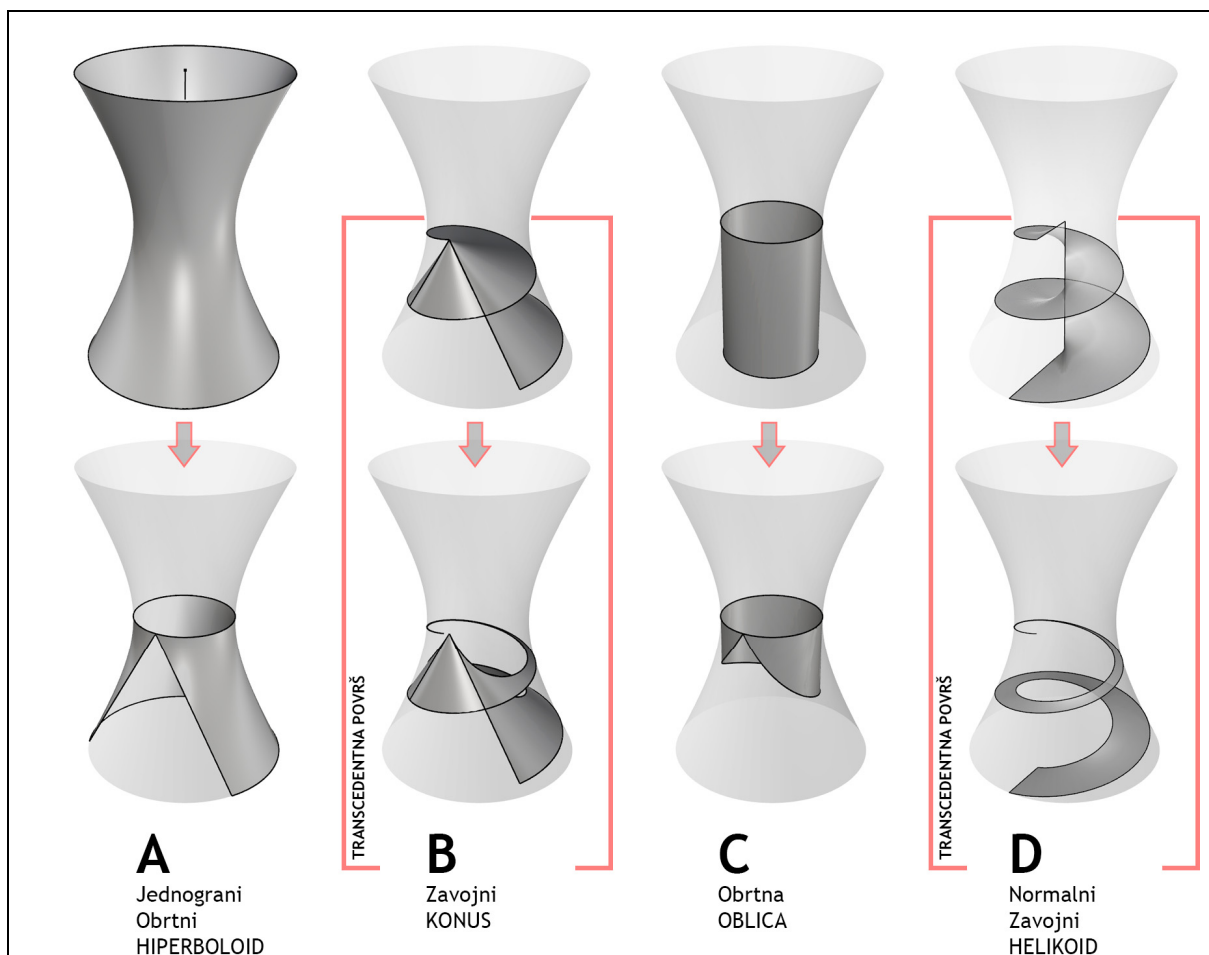
Transcedentni konusi formirani na loksodromi (prostorna kriva vodilja) i vrhom na njoj predstavljaju upotrebljive površi za formiranje različitih arhitektonskih prostornih struktura. Svi konusi spadaju u razvojne površi, pa je moguće razvijanje mreže površi u ravni, čime se pojednostavljuje njihovo praktično izvođenje. Uz inventivnost projektanta i njegovo poznavanje geometrije površi moguće je izvesti vizuelno kvalitetne sklopove, koji su u isto vreme racionalni i ekonomični.

Zavojnica je moguće izvesti na bilo kojoj obrtnoj površi, uz uslov da zavojna prostorna kriva zaklapa isti ugao sa svim meridijanima obrtne površi. Jednograna hiperboloidna zavojnica se može izvesti na površi jednogranog obrnog hiperboloida. Korišćenjem te zavojnice kao vodilje i vrha na njoj nastaje transcedentni konus, **slika 231**. Vrh konusa postavljen je u preseku jednograne hiperboloidne zavojnice i grlene kružnice jednogranog obrnog hiperboloida. Segment takvog konusa primenjen je u formiranju prostorne strukture prikazane na istoj slici /54/.



*slika 231. Arhitektonska prostorna struktura, 2013. (V. Nikolić) /54/*

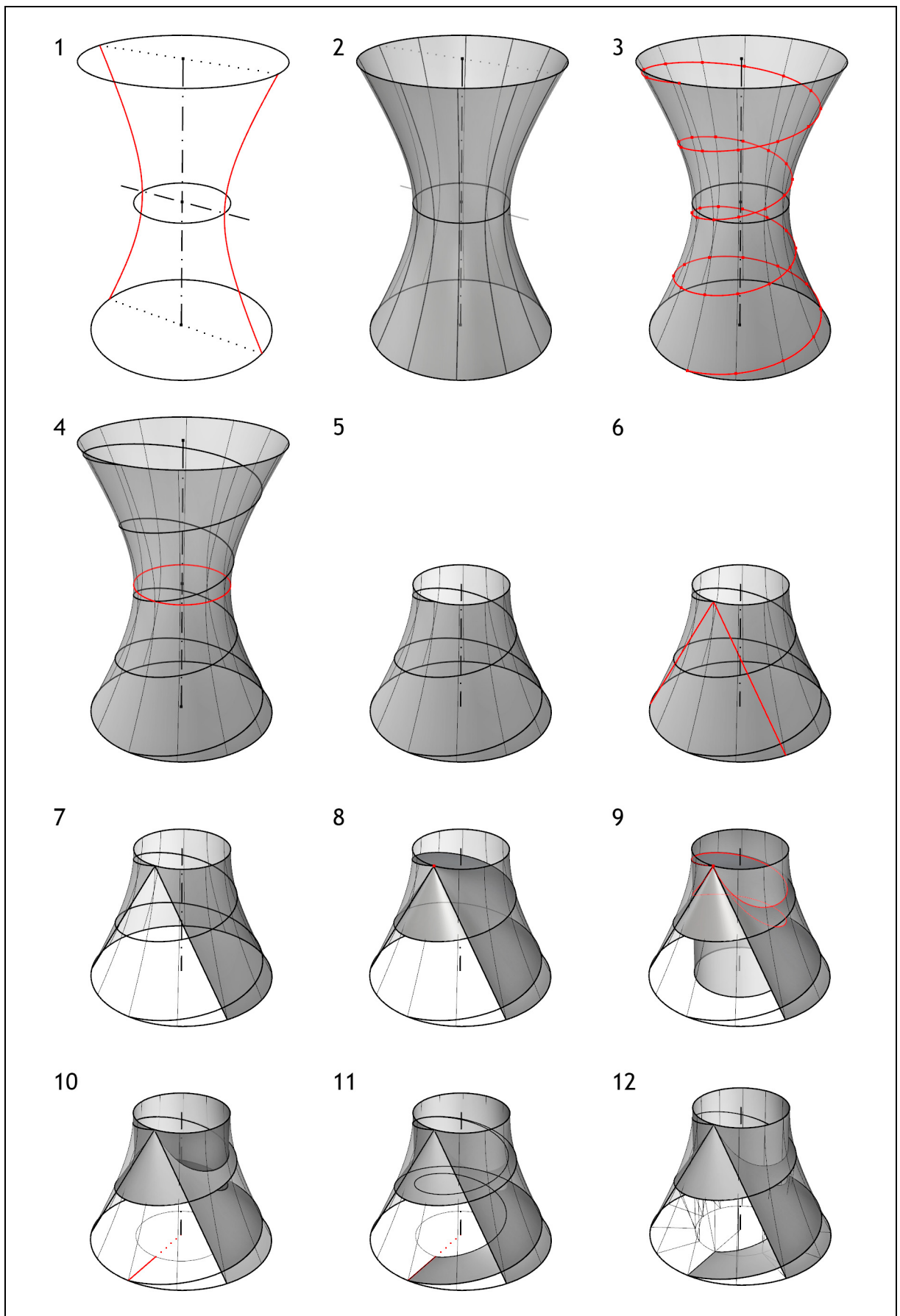
Na *slici 232* su prikazane pravoizvodne površi od kojih se sastoji prethodno prikazana prostorna struktura. U gornjem redu su prikazane cele pravoizvodne površi generisane u računarskom programu *Rhinoceros*, a u donjem redu upotrebljeni isečci tih površi. Površni **B** |zavojni konus (konus čija je vodilja neka zavojna kriva) i **D** |normalni zavojni helikoid su transcendentne.



*slika 232. Površni - delovi prostorne strukture prikazane na slici 231 u Rhinoceros-u*

Način izvođenja prethodno prikazane prostorne strukture u računarskom programu *Rhinoceros* prikazan je u dvanaest faza, u perspektivi, na *slici 233*. U fazama 1 i 2 prikazano je izvođenje jednogranog obrtnog hiperboloida (JOH) rotacijom hiperbole oko svoje imaginarne ose, opcija *Revolve*. U fazi 3 određen je položaj tačaka zavojnice na hiperbolama JOH (meridijanima obrtne površi) i kroz njih postavljena hiperboloidna zavojnica opcijom *Interpolate on surface*. Tako izvedena površ i zavojnica presečene su horizontalnom ravni kroz grlenju kružnicu JOH, faze 4 i 5. Formirani deo površi dodatno je presečen vertikalnom ravni po dvema pravama koje leže na JOH, faze 6 i 7. Za vrh konusa izabrana je tačka na grlenoj kružnici JOH, koja je ujedno i jedna od tačaka zavojne vodilje konusa, a površ je izvedena opcijom *Loft*, faza 8. Vertikalna obrtna oblica, poluprečnika bazisa jednakog grlenoj kružnici JOH, prodire se sa konusom, faze 9 i 10. Prava izvodnica upravna na osu JOH izvodi normalni zavojni helikoid, koji je presečen prethodno izvedenom oblicom, faza 11. Ceo sklop četiri pravoizvodne površi, upotpunjen linearnim elementima, prikazan je u fazi 12.





*slika 233. Izvođenje prostorne strukture prikazane na slici 231 u Rhinoceros-u*

### III8 ZAKLJUČNA RAZMATRANJA III POGLAVLJA

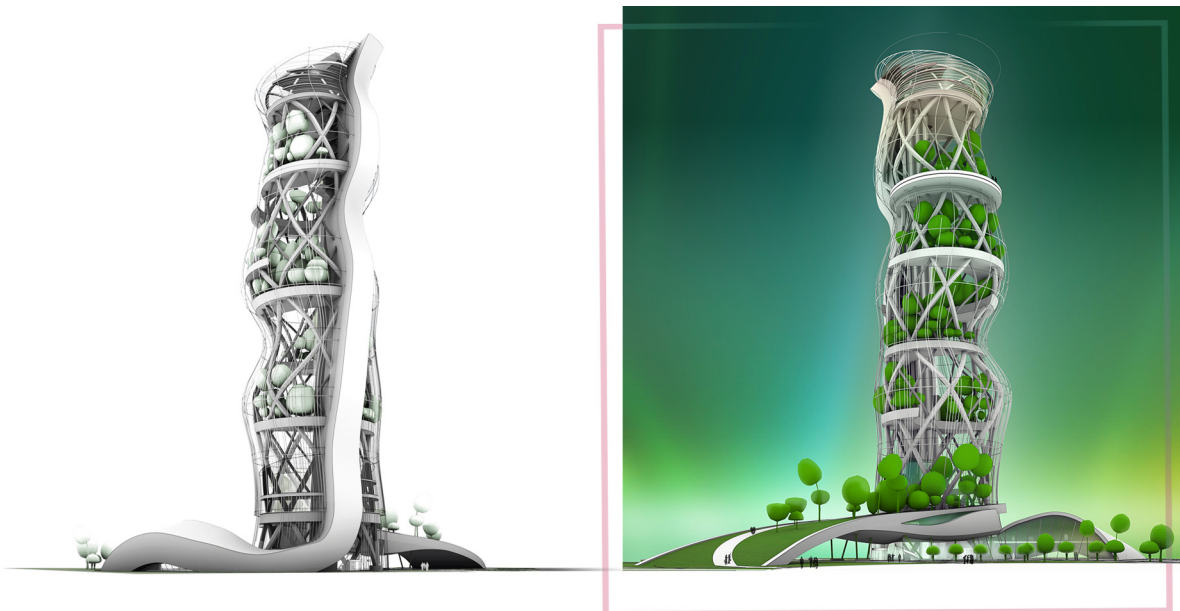
Pravoizvodne površi 3. i 4. reda, kao i pravoizvodne transcendentne površi, moguće je jednostavnije i racionalnije primeniti u arhitekturi i dizajnu u odnosu na dvostruko zakrivljene površi. Ove površi, odnosno njihovi segmenti i isečci, ispunjavaju prethodno definisane kriterijume u uvodnim napomenama ovog poglavlja. Kriterijumi prema kojima su analizirane površi, u smislu opravdanosti njihove primene u projektovanju i oblikovanju različitih arhitektonskih struktura, kao i u različitim oblastima dizajna, su definisani kao univerzalnost, jednostavnost projektovanja i praktičnog izvođenja, vizuelni (estetski) kvaliteti i karakteristike, racionalnost i ekonomičnost. Univerzalnost podrazumeva da su površi, njihovi isečci i sklopovi primenljivi u oblikovanju arhitektonskih objekata različite strukture i namene. Jednostavnost projektovanja i izvođenja su povezane sa racionalnošću i ekonomičnošću kompletnog procesa. Uz ispunjenost prethodnih kriterijuma, u arhitekturi i dizajnu je posebno važan estetski aspekt izvedenih objekata. Samo forme koje zadovoljavaju većinu mogućih estetskih zahteva projektanata predstavljaju skup upotrebljivih površi. U prethodno navedenom kontekstu razmatrane su pravoizvodne površi višeg reda i pravoizvodne transcendentne površi, čije je poznavanje neophodno projektantima za njihovu uspešnu primenu u arhitektonskoj i dizajnerskoj praksi, *slika 234*.



*slika 234. Stolica, konkursni rad, 2007. (V. Nikolić)*

U ovom poglavlju su izložene osnovne karakteristike krivih višeg reda i transcendentnih krivih, kao i njihove klasifikacije. Ove krive, ravne ili prostorne, predstavljaju vodilje za izvođenje analiziranih pravoizvodnih površi. Takođe su razmatrane osnovne karakteristike pravoizvodnih površi 3. i 4. reda i transcendentnih pravoizvodnih površi, kao i njihove klasifikacije. Saznanja iz izložene materije korišćena su u daljem istraživačkom radu za generisanje i obradu pravoizvodnih površi sa aspekta mogućnosti njihove primene u arhitekturi i

dizajnu. Predložena oblikovna rešenja omogućavaju uspešno sagledavanje i implementaciju pravoizvodnih površi višeg reda kao i transcendentnih pravoizvodnih površi u geometrijske forme budućih arhitektonskih objekata. Razmotrene su mogućnosti primene karakterističnih segmenata i isečaka obrađenih površi u oblikovanju arhitektonskih objekata, odnosno mogućnosti njihove multiplikacije i kombinovanja u složenije prostorne strukture, kao što su prostorne šrafure.



*slika 235. Tall Emblem Structure in Za'abeel Park, Dubai, konkursni rad, 2009.  
(V. Nikolić, B. Stojanović, O. Milosavljević, P. Milošević)*

Upotrebom istraživanih površi u prikazanim primerima prostornih struktura dolazi se do zaključka da je moguća njihova primena na univerzalan, jednostavan, racionalan i ekonomičan način, uz izvođenje vizuelno (estetski) kvalitetnih formi. Vizuelni kvaliteti ovih površi i njihovih sklopova uporedivi su sa strukturama zasnovanim na mnogo složenijim geometrijskim formama. Rezultati dobijeni prethodnom analizom površi, njihovih sklopova i na njima zasnovanih prostornih struktura predstavljaju inicijalne ideje i smernice za dalja istraživanja i praktičnu primenu, *slika 235*. Njihova upotreba omogućena je i podržana primenom računara u svim segmentima projektovanja i izvođenja. To se, pre svega, odnosi na računarske programe koji pored mogućnosti geometrijskog izvođenja najrazličitijih formi, imaju i mogućnost integracije procesa projektovanja sa procesom praktične realizacije. Kao jedno od kvalitetnijih softverskih rešenja izdvaja se softverski paket *Rhinoceros*, posebno na polju jednostavnosti izvođenja i obrade geometrijskih površi, njihove analize, kao i povezivanja sa računarski upravljanim mašinama u daljem procesu realizacije. Unapređenje pomenutog softvera moguće je nadogradnjom i dodavanjem novih opcija u vidu *plug-in* modula. Pravoizvodne površi viših redova i pravoizvodne transcendentne površi pružaju, uz primenu kvalitetnih softverskih rešenja, velike mogućnosti za dalja vizuelna istraživanja u oblasti arhitekture i dizajna.



## **ZAKLJUČAK**

**KONSTRUKTIVNA OBRADA  
GEOMETRIJSKIH POVRŠI  
I NJIHOVA PRIMENA  
U ARHITEKTURI**

# ZAKLJUČAK

## KONSTRUKTIVNA OBRADA GEOMETRIJSKIH POVRŠI I NJIHOVA PRIMENA U ARHITEKTURI

Arhitektura i geometrija su neraskidivo vezane, a arhitektura bez geometrije ne može da postoji. Istorija geometrije je ujedno i istorija arhitekture i obrnuto. Osnova svake uspešne arhitekture je vešta i racionalna primena geometrijskih formi u oblikovanju arhitektonskih objekata, uz postizanje estetski kvalitetnih formi. Savremena interpretacija, novi kontekst i inovativnost su karakteristike kvalitetne arhitekture. Trenutna istraživanja forme i vizuelnih koncepcija u arhitekturi zahtevaju sveobuhvatno poznavanje, odnosno sagledavanje geometrijskih površi i zasnovana su na primeni novih računarskih tehnologija. Sve prethodno rečeno važi i za oblast dizajna, kako industrijskog tako i svih ostalih oblasti dizajna. Geometrija i geometrijske površi su suština svake vizuelizacije, bilo da je ona dvodimenzionalna ili trodimenzionalna. Samo je sveobuhvatnim promišljanjem geometrije, uz teorijska znanja, moguće doći do kvalitetnih rezultata u arhitektonskoj i dizajnerskoj praksi.

\* \* \* \* \*

U prvom poglavlju ovog rada razmatrana je klasifikacija površi u kontekstu mogućnosti njihove primene u arhitekturi i dizajnu. Data je klasifikacija površi koje imaju primenu u tehničkoj praksi, prema zakonitosti njihovog oblika, tj. geometrijskoj strukturi. Prikazana podela je jasna i upotrebljiva kao polazna osnova za razmatranje i uspešno planiranje forme arhitektonskih objekata, kao i drugih prostornih struktura. U praksi se najčešće koriste geometrijske (zakonomerne) površi. Razlozi su jednostavnost u projektovanju, konstruisanju i određivanju osnovnih parametara, kao i jednostavnost proračuna i praktičnog izvođenja. Sa ovog aspekta posebno su interesantne pravoizvodne površi, koje nastaju kretanjem prave u prostoru po nekom zakonu. U prvom poglavlju prikazane su površi koje predstavljaju osnovni skup upotrebljavanih formi u arhitekturi i dizajnu, na kojima se zasnivaju mnoge prostorne strukture. Prikazani su izvedeni arhitektonski objekti čija se osnovna forma zasniva na analiziranim geometrijskim površima, primenjenim na eksplicitan i nedvosmislen način. Pored ovakvih primera, postoji veliki broj objekata gde su upotrebljeni segmenti ili isecci površi, koji multiplikacijom i spajanjem formiraju složenije prostorne strukture.



**U drugom poglavlju** rada analizirane su geometrijske površi 2. stepena i njihova primena u arhitekturi. Površi 2. stepena imaju najveću primenu u arhitekturi, a naročito pravoizvodne površi 2. stepena s obzirom na njihovo jednostavnije izvođenje i racionalnost konstrukcije u odnosu na opšte površi 2. stepena. U ovom poglavlju prikazani su uglavnom savremeni primeri arhitektonskih objekta zasnovanih na površima 2. stepena. Njihova racionalnost u konstrukciji i izvođenju preporuka su i osnova za njihovu dalju analizu i praktičnu primenu. Razvojem računara i softvera namenjenih primeni u arhitekturi i dizajnu, sa aspekta geometrije, stvoren je potpuno novi kontekst za projektovanje i primenu površi 2. stepena. Budućnost njihove primene je pre svega u kompleksnom korišćenju delova i isečaka površi, uklopljenih u složenije, inovativne i estetski kvalitetne forme savremenih arhitektonskih objekata.

Za uspešnu praktičnu primenu geometrijskih površi potrebno je poznavanje načina njihove konstruktivne obrade, odnosno određivanja osnovnih parametara površi. Sve površi 2. stepena imaju jedno središte, tri ose i dva pramena uporednih ravni koje ih seku po kružnicama, a dodiruju u četiri kružne tačke. U drugom poglavlju rada su korišćene isključivo geometrijske metode konstruktivne obrade površi. Teorijski deo se zasniva na metodama, izvedenim činjenicama i teoremama projektivne geometrije, a prostorne transformacije i grafičke metode obrađene su metodama nacrtne geometrije. Dokazana je polazna hipoteza da je konstruktivnu obradu površi 2. stepena moguće izvesti uvođenjem opšte ili perspektivne kolineacije prostora, gde se beskonačno daleka ravan prostora dovodi u konačnost. U toj ravni se određuju osnovni parametri geometrijskih površi 2. stepena, a zatim se istim, prethodno pomenutim postupkom kolineacije u prostoru, ti elementi vraćaju u beskonačnost. Upotreba apsolutne konike prostora (imaginarna kružnica u beskonačno dalekoj ravni prostora) prilikom konstruktivne obrade površi predstavlja originalnu ideju. Prostornom kolineacijom može se odrediti slika apsolutne konike prostora u nedoglednoj ravni, odnosno zajednički elementi slike apsolutne konike prostora i slike beskonačno daleke konike kvadrike (koja je u konačnosti), što omogućava određivanje osnovnih parametara geometrijskih površi 2. stepena.

Za konstruktivnu obradu geometrijskih površi 2. stepena neophodno je određivanje zajedničkih elemenata para konika, bez obzira na njihov realitet. To podrazumeva određivanje zajedničkog autopolarog trougla i presečnih tačaka. U ovom poglavlju prikazani su mogući slučajevi intersekcije para konika, realnih i imaginarnih, u različitim karakterističnim međusobnim položajima. Određivanje zajedničkih elemenata para konika, tj. preseka, rešeno je na univerzalan i originalan način. Postupak je zasnovan isključivo na geometrijskim metodama i moguće ga je primeniti na bilo koji par konika. U postojećoj literaturi nije detaljnije razmatrano konstruktivno rešenje za određivanje secišta i zajedničkog autopolarog trougla para konika u najopštijem položaju, osim konstruktivnih rešenja za određivanje preseka para konika u specijalnim slučajevima i položajima. Određivanje zajedničkih elemenata para konika rešeno je uspostavljanjem

kolinearnog odnosa između dva kolokalna polja određena tim dvema konikama. Nalaženjem žiža (fokusa) tih polja i primenom postupka za određivanje direktne veze između jedne realne dvostruke prave i žiža opšte kolinearnih polja, određene su strane zajedničkog autopolarnog trougla, a nakon toga i presečne tačke para konika. Prikazana su i detaljno objašnjena tri primera određivanja preseka konika i to: para realnih konika, para imaginarnih konika, odnosno realne i imaginarne konike. Predloženi konstruktivni postupak intersekcije para konika moguće je primeniti na sve vrste krivih 2. stepena, u svim međusobnim položajima i bez obzira na njihov realitet. Korišćenjem ovog postupka unapređuju se mogućnosti konstruktivne obrade kvadraka primenom opšte, ili perspektivne kolineacije prostora.

**U trećem poglavlju** rada su analizirane pravoizvodne površi višeg reda (traćeg i četvrtog) i transcendentne pravoizvodne površi. Postavljeni su kriterijumi koje analizirane površi treba da ispunjavaju kako bi mogle opravdano i uspešno da se primenjuju u projektovanju i oblikovanju različitih prostornih struktura. To su pre svega univerzalnost, jednostavnost projektovanja i praktičnog izvođenja, estetski (vizuelni) kvaliteti i karakteristike, racionalnost i ekonomičnost. Izložene su i analizirane površi koje ispunjavaju ove kriterijume, čime je dokazana polazna hipoteza. Sagledane su dve osnovne mogućnosti: upotreba celih površi, odnosno njihovog većeg dela i spajanje različitih isečaka tih površi u složenije forme. Kompletno izvođenje, obrada i vizuelna prezentacija u ovom poglavlju urađena je primenom računara i odgovarajućih softverskih rešenja. Posebnu upotrebnu vrednost radu daju praktično opisani postupci generisanja ovih struktura u računarskom programu Rhinoceros. Postupci su raščlanjeni i opisani po fazama generisanja. Sugerisana je mogućnost povezivanja softvera sa različitim računarski upravljanim mašinama, što olakšava projektovanje i izvođenje složenih geometrijskih formi u arhitektonskoj praksi i dizajnu.

Pre same analize pravoizvodnih površi 3. i 4. reda i pravoizvodnih transcendentnih površi izložene su osnovne karakteristike krivih koje mogu biti vodilje za njihovo izvođenje. To podrazumeva način nastanka i odgovarajuće klasifikacije ravnih i prostornih krivih višeg reda, kao i ravnih i prostornih transcendentnih krivih. Nakon toga su analizirane osnovne karakteristike pravoizvodnih površi 3. i 4. reda i transcendentnih pravoizvodnih površi, kao i klasifikacije pomenutih površi. Saznanja iz izložene materije korišćena su u daljem istraživačkom radu, za generisanje i konstruktivnu obradu takvih površi. Kod pravoizvodnih površi 3. i 4. reda predložena su konkretna oblikovna rešenja u kontekstu prethodno definisanih kriterijuma. To omogućava uspešno sagledavanje i implementaciju površi višeg reda u geometrijske forme budućih arhitektonskih struktura. Mogućnosti primene su analizirane kroz razmatranje karakterističnih segmenata i isečaka površi, njihovu multiplikaciju i uklapanje u složene prostorne strukture. Transcendentne pravoizvodne površi imaju istorijski kontinuitet praktične upotrebe u formama arhitektonskih objekata. Najčešće su u arhitektonskoj praksi upotrebljavani transcendentni cilindri, konoidi, cilindroidi i helikoidi. Na osnovu tih istraživanja, u

kontekstu prethodno definisanih kriterijuma, izvršena je analiza mogućnosti njihove savremene i inovativne primene, kroz predložene mogućnosti novih oblikovnih rešenja. Razmatrani su pre svega transcendentni konusi, a akcenat je na korišćenju različitih vrsta zavojnih vodilja, koje spadaju u prostorne transcendentne krive. Najveći deo razmatranja mogućnosti primene pravoizvodnih transcendentnih površi u arhitekturi i dizajnu posvećen je kohleoidnom konusu, odnosno dvostrukom kohleoidnom konusu. Ova površ nije detaljnije analizirana u postojećoj literaturi, pa su detaljno izloženi načini generisanja, osnovne karakteristike i ravni preseki površi. Nakon toga, razmatrani su mogući međusobni prodori, kao i segmenti i isečci koje je moguće koristiti u arhitektonskoj praksi. Prikazana su nova oblikovna rešenja sa aspekta praktične primene u arhitekturi i dizajnu.

\* \* \* \* \*

Sublimiranjem rezultata istraživanja iz sva tri poglavlja ovog rada dolazi se do jedinstvenih zaključaka, koji imaju teorijski i praktičan značaj. Dokazane su prethodno postavljene polazne hipoteze i sveobuhvatno sagledana široka oblast inovativne praktične upotrebe geometrijskih površi koje su predmet istraživanja. Iznaženje novih mogućnosti konstruktivne obrade, uz primenu savremenih računarskih tehnologija, predstavljaju značajan naučni doprinos primenljiv u svim stručnim oblastima koje u osnovi imaju oblikovanje prostornih formi. Iz toga proizilaze mogućnosti dalje analize i razvoja modela za široku praktičnu primenu. Geometrijske površi sagledane u ovom radu su deo beskonačnih oblikovnih resursa za kreiranje najrazličitijih prostornih struktura. Sprovedeno istraživanje predstavlja spoj postojećih saznanja iz oblasti geometrije i geometrijskih površi, novih originalnih metoda generisanja i njihove konstruktivne obrade, kao i upotrebe inovativnih oblikovnih rešenja u arhitekturi. Savremena arhitektura i primena geometrije, u novom kontekstu, neraskidivo su vezane za principe univerzalnosti dizajna kao gradivnog elementa svake civilizacije.

# LITERATURA

1. Alexander, J. **Loxodromes: A Rhumb Way to Go**, Mathematics Magazine, Vol. 77, No. 5, December 2004, pp. 349-356.
2. Anagnosti, P. **Nacrtna geometrija**, Naučna knjiga, Beograd, 1981.
3. Asensi, F. I. **Geometria Descriptiva Superior y Aplicada**, Editorial dossat, S.A. Madrid, 1975.
4. Barnes, J. **Gems of Geometry**, Springer, 2009.
5. Bo, P. et al. **Circular Arc Structures**, ACM Transactions on Graphics (TOG) - Proceedings of ACM SIGGRAPH 2011, Volume 30, Issue 4, July 2011, Article No. 101
6. Brauner, H.; Kickingner, W. **Geometrija u graditeljstvu**, Školska knjiga, Zagreb, 1980. (prevod: P. Kurilj, B. Hajsig)
7. Cederberg, N.J. **A Course in Modern Geometries**, Springer-Verlag, New York, 2005.
8. Coxeter, H.S.M. **Regular Polytopes**, Dover, New York, 1973.
9. Dančević, D. **Konstruktivni sistemi**, Centar za informativno-izdavačku delatnost, Niš, 1978.
10. Dovniković, L. **Ravne krive 4. reda kao projekcije prostornih krivih 4. reda 1. vrste**, magistarski rad, Novi Sad, 1974.
11. Dovniković, L. **Nacrtno-geometrijska obrada i klasifikacija ravnih krivih 3. reda**, izvod iz doktorske disertacije, Matica srpska, Novi Sad, 1977.
12. Dovniković, L. **Zapisi iz teorije krivih i površi**, skripta, Beograd, 1986.
13. Dovniković, L. **Harmonija sfera**, Matica srpska, Novi Sad, 1999.
14. Đurović, V. **Nacrtna geometrija**, Naučna knjiga Beograd, 1963.
15. Flöry, S.; Pottmann, H. **Ruled Surfaces for Rationalization and Design in Architecture**, ACADIA 10: LIFE in:formation, On Responsive Information and Variations in Architecture [Proceedings of the 30th Annual Conference of the Association for Computer Aided Design in Architecture] New York 21-24 October, 2010, pp. 103-109.
16. Filipan, S.; Gorjanc, S.; Kvasnička, H. **Roofing with a Parabolic Conoid**, KoG 5, Zagreb, 2000, pp. 57-64.
17. Foufou, S.; Garnier, L.; Pratt, M. J. **Conversion of Dupin cyclide patches into rational biquadratic Bézier form**, Mathematics of Surfaces XI, 11th IMA International Conference, Loughborough, UK, 2005.
18. Gagić, Lj. **Grafičko Preslikavanje Kolinearnih Prostora**, doktorska disertacija, Beograd, 1977.
19. Гордон, В. О. **Курс начертательной геометрии**, Наука, Москва, 1988.
20. Gorjanc, S. **Izvođenje pet tipova pravičastih ploha 4. stupnja**, KoG 2, Zagreb, 1997, str. 57-67.
21. Gray, A. **Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Matematica**, CRC Press, Boca Raton, 1997.

22. Hamlin, J. F.; Séquin, C. H. **Ribbed Surfaces for Art Architecture and Visualization**, Computer-Aided Design & Applications, Volume 6, Issue 6, 2009, pp. 749-758.
23. Heinz, A. **Development of mathematical imagination of 3- dimensional polyhedra throughout history and inversion phenomena**, 13<sup>th</sup> International conference on geometry and graphics, Dresden, August 4-10, 2008.
24. Hilton, H. **Plane Algebraic Curves**, Oxford University Press, London, 1920.
25. Hohenberg, F. **Konstruktivna geometrija u tehnici**, Građevinska knjiga, Beograd, 1966.
26. Holzer, S.; Labs, O. **Illustrating the Classification of Real Cubic Surfaces**, Algebraic Geometry and Geometric Modeling 2006, Springer, pp. 119-134.
27. Krasić, S. **Pridruživanje kvadraka pomoću apsolutnih konika opšte kolinearnih prostora**, doktorska disertacija, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Niš, 2006.
28. Krasić, S.; Nikolić, V. **Mapping of a sphere into a rotational ellipsoid with the aid of the absolute conic of space in general collinear spaces**, Proceedings of the International conference MoNGeometrija 2008, Faculty of Civil engineering and Architecture, University of Nis, 2008, pp. 144-154.
29. Krasić, S.; Nikolić, V. **Constructive procedure for determination of absolute conic figure in general collinear spaces**, Filomat, Proceedings of the Conference Mongeometrija 2008, Vol. 23, No. 2, University of Nis, Nis, 2009, pp. 90-96.
30. Krasić, S. **Geometrijske površi u arhitekturi**, monografija, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Niš, 2012.
31. Кривошапко, С. Н.; Иванов В. Н. **Энциклопедия аналитических поверхностей**, Либроком, Москва, 2010.
32. Kučinić, B.; Kristoforović, O.; Saler, I. **Oble forme u graditeljstvu**, Građevinar, Zagreb, 1992.
33. Kolarević, B. **Digital Fabrication: Manufacturing Architecture in the Information Age**, Proceedings of Association for Computer Aided Design in Architecture. Buffalo, New York, 2001, pp. 268-277.
34. Kolarević, B. (Ed.) **Architecture in the digital age: design and manufacturing**. Taylor & Francis, 2004.
35. Liu, Y.; Pottmann, H.; Wallner, J.; Yang, Y. L.; Wang W. **Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces**, ACM Trans. Graphics 25, no. 3, 2006, pp. 681-689.
36. Lockwood, E.H. **A Book of Curves**, Cambridge University Press, 1961.
37. Marković, B. **Konike konjugovanih polova i polara u pramenovima i nizovima konika**, Magistarski rad, Beograd, 1981.
38. Marković, B. **Konike konjugovanih polova u pramenovima afinog tipa III E**, Zbornik radova Građevinskog fakulteta, Niš, 1986.
39. Marković, B. **Izvođenje pravoizvodnih tvorevina primenom polariteta u pramenovima i nizovima kvadraka**, doktorska disertacija, Arhitektonski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 1987.
40. Marković, B.; Krasić, S. **Kriterijumi za konstruktivno određivanje realnih dvostrukih tačaka bicirkularnih krivih 4. reda**, Zbornik radova Mongeometrija 2000, Niš, 2000, str.161-170
41. Marković, B.; Jevrić, M.; Nikolić, V. **Determining the characters of infinitely distant points of 4th order curve made by the square transformation in affined pencil of conic 1H**, Proceedings of the International conference MoNGeometrija 2008, Faculty of Civil engineering and Architecture, University of Nis, 2008, pp. 155-168.
42. Marković, M. **Zajednički elementi krivih 2. stepena**, magistarski rad, Beograd, 1973.
43. Marković, M. **Imaginarne krive i površi 2. stepena**, doktorska disertacija, Beograd, 1981.
44. Marković, M. **Konoidi III reda kao proizvod para površi II stepena**, Zbornik radova Građevinskog fakulteta br. 9, Niš, 1989, str.179-190.



45. Marković, M. **Pramenovi realnih i imaginarnih lopti**, Zbornik radova Gradjevinskog fakulteta br. 13-14, Niš, 1992/93, str. 103-108.
46. Marković, M. **Pravoizvodne površi 3. stepena kao proizvod para površi 2. stepena**, Zbornik radova Gradjevinskog fakulteta br.15-16, Niš, 1994/95, str.199-207.
47. Marković, M. **Nacrtna geometrija**, Univerzitet u Nišu, 1998.
48. Marković, M. **The 3rd degree rectilinear surfaces in quadric tufts**, The Scientific Journal Facta Universitatis, Series: Architecture and Civil Engineering, Vol. 2, No 1, University of Niš, Niš, 1999, pp. 1-5.
49. Niče V. **Neki izvodi za konoide trećeg i četvrtog reda**. Nastavni vjesnik, 37, 1929, str. 1-23
50. Niče, V. **Uvod u sintetičku geometriju**, Školska knjiga, Zagreb, 1956.
51. Niče, V. **Deskriptivna geometrija: /sv./ 1**, Školska knjiga, Zagreb, 1974.
52. Nikolić, O.; Nikolić, V.; Pejić, P. **The triangular forms of the modern architecture buildings facades**, Proceeding of 3rd International Conference on Geometry and Graphics, MoNGeometrija 2012, pp. 637-648.
53. Nikolić, V.; Krasić, S.; Nikolić, O. **Cone whose directrix is a cylindrical helix and the vertex of the directrix is - A cochleoid cone**, The Scientific Journal Facta Universitatis, Series: Architecture and Civil Engineering Vol. 9, No 3, University of Niš, Niš, 2011, pp. 501-509
54. Nikolić, V.; Nikolić, O.; Marković, B. **Possibilities of application of transcendent cones in the form of architectural structures**, Scientific Bulletin of the "Politehnica" University of Timisoara, Romania, Tom 58 (72), Fascicola 1, 2013, pp. 83-86.
55. Obradović, M. **Iznalaženje direktne veze između jedne realne dvostruke prave i žiža opšte kolinearnih polja**, moNGeometrija 2000, GAF, Niš, 2000, str. 87-95.
56. Obradovic R.; Dovnikovic L.; Stulic R. **Projiciranje cilindricne zavojnice u druge ravne transcendentne krive pomocu racunara**, Filomat '94, Nis, 1994, str. 10-11.
57. Odehnal, B. **Conchoids on the Sphere**, KoG 17, 2013, pp. 43-52.
58. Pizzato, E. **Curves at the work of Oscar Niemeyer**, Arqtexto 10/11, UFRGS, Brasil, 2008, pp. 42-65
59. Pogorelov A.V. **Predavanja iz osnova geometrije**, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1963.
60. Pottmann, H.; Asperl, A.; Hofer, M.; Kilian, A. **Architectural geometry**, Bentley Institute Press, 2007.
61. Savelov, A. A. **Ravanske krivulje**, Školska knjiga, Zagreb, 1979.
62. Sbutega, V. **Sintetička geometrija I**, skripta sa postdiplomskih studija, Beograd, 1967.
63. Sbutega, V. **Sintetička geometrija III**, skripta sa postdiplomskih studija, Beograd, 1967.
64. Sbutega, V. **Nacrtna geometrija**, Naučna knjiga, Beograd, 1971.
65. Strubecker, K. **Nacrtna geometrija**, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.
66. Velimirović, Lj. Stanković, M., Radivojević, G. **Modeling conoid surfaces**, Facta Universitatis, Series: Architecture and Civil Engineering Vol. 2, No 4, 2002, pp. 261-266.
67. Williams, R. **The Geometrical Foundation of Natural Structure: A Source Book of Design**. Dover Publications Inc, 1979.
68. Williams, C.; Adriaenssens, S.; Block, P.; Veenendaal, D. **Shell Structures for Architecture: Form Finding and Optimization**, Routledge, New York, 2014.
69. Xiaohong, J. **Role of moving planes and moving spheres following Dupin cyclides**, Computer Aided Geometric Design 31, 201, pp. 168-181.

# INTERNET ADRESE

1. [archdaily.com](http://archdaily.com)
2. [arh.bg.ac.rs](http://arh.bg.ac.rs) - 1.9.2010. - Poliedri - predavanja dr Ljiljana Petruševski
3. [cumincad.architecturez.net](http://cumincad.architecturez.net)
4. [domespace.com](http://domespace.com) - 6.10.2013
5. [en.wikipedia.org](http://en.wikipedia.org)
6. [friedhelm-kuerpig.de](http://friedhelm-kuerpig.de)
7. [geometria-poliedros.blogspot.com/2008\\_06\\_01\\_archive.html](http://geometria-poliedros.blogspot.com/2008_06_01_archive.html) - 18.11.2010.
8. [javaview.de/demo/PaPlatonic.html](http://javaview.de/demo/PaPlatonic.html) - 8.9.2010.
9. [georgehart.com](http://georgehart.com)
10. [mathworld.wolfram.com](http://mathworld.wolfram.com) - 8.9.2010.
11. [mnfld.net/projects/golden\\_city.html](http://mnfld.net/projects/golden_city.html)
12. [mousse magazine.it/linke-malvezzi-vistamare](http://mousse magazine.it/linke-malvezzi-vistamare) - 07.10.2013
13. [o-tozagorje.tb.edus.si](http://o-tozagorje.tb.edus.si) - 2.9.2010.
14. [sketchup.google.com/3dwarehouse/TaffGoch models](http://sketchup.google.com/3dwarehouse/TaffGoch_models)
15. [sr.wikipedia.org](http://sr.wikipedia.org)

# BIOGRAFIJA

Vladan M. Nikolić, d.i.a. rođen je u Knjaževcu 1977. godine gde je završio osnovnu i srednju mašinsku školu. Tokom školovanja više puta je nagrađivan za postignute rezultate u oblasti prirodnih nauka i umetnosti. Diplomirao je na odseku arhitekture, Građevinsko-arhitektonskog fakulteta u Nišu 2004. godine. Više puta je nagrađivan za izuzetne rezultate u toku studiranja. Bio je stipendista Ministarstva za nauku i tehnološki razvoj Republike Srbije i učesnik na nekoliko nacionalnih naučnih projekata. Radio je kao saranik u arhitektonskim biroima ABR i Ekos u Nišu. Osnivač je projektantske prakse AFREESTUDIO. Autor je, ili koautor, brojnih stručnih radova iz oblasti arhitekture i dizajna, kao i dobitnik više nagrada na stručnim konkursima. Takođe je autor, ili koautor, većeg broja naučnih radova.

Na Građevinsko - arhitektonskom fakultetu u Nišu bio je angažovan kao demonstrator nastavi od 1999. godine. Izabran je za saradnika u nastavi 2007. godine, a u zvanje asistenta 2010. godine. Angažovan je na predmetima Nacrtna geometrija, Nacrtna geometrija 1 i 2, Primena računara u arhitekturi, Modelovanje u arhitekturi i urbanizmu, Projektovanje javnih zgrada, Metodologija projektovanja i Geometrijske površi u arhitekturi.

Osnivač je i prvi predsednik Studentske asocijacije GAF-a u Nišu 2001. godine. Bio je potpredsednik i v.d. predsednika Niške studentske asocijacije i jedan od osnivača Studentske asocijacije na nivou Srbije 2002. godine. Organizator je i producent nekoliko izložbi radova studenata arhitekture. Član je Inženjerske komore Srbije, Društva arhitekata Niša i Srpskog udruženja za geometriju i grafiku.

Oženjen je Oliverom i ima sina Lazara.



---

Прилог 1.

### ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

#### **КОНСТРУКТИВНА ОБРАДА ГЕОМЕТРИЈСКИХ ПОВРШИ И ЊИХОВА ПРИМЕНА У АРХИТЕКТУРИ**

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација, ни у целини, ни у деловима, није била предложена за добијање било које дипломе, према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права, нити злоупотребио интелектуалну својину других лица.

У Нишу, 22.01.2015.

Аутор дисертације: Владан М. Николић

Потпис докторанта:



---

**Прилог 2.**

**ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКЕ  
ДИСЕРТАЦИЈЕ**

Име и презиме аутора: Владан М. Николић

Студијски програм: архитектура

Наслов рада: **КОНСТРУКТИВНА ОБРАДА ГЕОМЕТРИЈСКИХ ПОВРШИ  
И ЊИХОВА ПРИМЕНА У АРХИТЕКТУРИ**

Ментор: проф. др Љиљана Радовић

Изјављујем да је штампана верзија моје докторске дисертације истоветна електронској верзији, коју сам предао за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 22.01.2015.

Аутор дисертације: Владан М. Николић

Потпис докторанта:





---

**Прилог 3.**

**ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ**

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да, у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

**КОНСТРУКТИВНА ОБРАДА ГЕОМЕТРИЈСКИХ ПОВРШИ  
И ЊИХОВА ПРИМЕНА У АРХИТЕКТУРИ**

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство – некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да подвучете само једну од шест понуђених лиценци; кратак опис лиценци је у наставку текста).

У Нишу, 22.01.2015.

Аутор дисертације: Владан М. Николић

Потпис докторанта:

