

**Универзитет у Београду
Машински факултет**

Милош В. Павић

**Нови алгоритми вођења ракете
земља–ваздух средњег домета**

Докторска дисертација

Београд, 2015.

**Belgrade University
Mechanical faculty**

Milos V. Pavic

**The new guidance algorithms
for surface-to-air
medium range missile**

Phd thesis

Belgrade, 2015.

Комисија за преглед и одбрану:

Ментор: др Слободан Јарамаз, редовни професор,
Машински факултет у Београду

Чланови Комисије: др Момчило Милиновић, редовни професор,
Машински факултет у Београду

др Дејан Мицковић, редовни професор,
Машински факултет у Београду

др Предраг Елек, ванредни професор,
Машински факултет у Београду

др Дарко Васиљевић, виши научни сарадник,
Институт за физику, Београд.

Датум одбране: _____.____.2015. године

Своју захвалност желим да изразим:

- Ментору др Слободану Јарамазу, професору Машинског факултета Универзитета у Београду и Катедри за Системе наоружања.
- Др Данилу Ћуку, научном саветнику у пензији и бившем директору Војнотехничког института на стручном вођству и помоћи при изради рада.
- Родитељима.
- Супрузи.
- Пријатељима и колегама из Војнотехничког института.

Београд, 2015. године

Милош В. Павић

Нови алгоритми вођења ракете земља–ваздух средњег домета

Резиме

У раду су дати нови закони вођења применљиви на ракете земља–ваздух средњег домета, али и на друге типове летелица. Класични закони вођења као, нпр., пропорционална навигација, представљени су на нови начин, тј., изнова одређени и проширени помоћу теорије стабилности нелинеарних система методом Љапунова. Оптимални закони вођења за разне критеријуме оптималности представљени су за случај двостране оптимизације која се анализира теоријом диференцијалних игара (где циљ врши интелигентни – оптимални маневар избегавања ракете). На основу теорије система променљиве структуре одређени су закони вођења методом клизања. Коначна верификација одабраних закона вођења извршена је нумеричком симулацијом комплетног система самоновођене ракете као објекта са шест степени слободе кретања који има изразито нестационарне динамичке карактеристике и нелинеарне аеродинамичке коефицијенте. Ефикасност закона вођења типичне ракете земља–ваздух средњег домета испитана је против маневришућих циљева са различитим стратегијама избегавања ракете. Истражени методи самонавођења ракете успешно су примењени и на тзв. "паметну муницију" чиме је њихова прецизност вишеструко побољшана у односу на невођене пројектиле. Резултати нумеричке симулације су показани на примеру минобацачког пројектила управљаног импулсно–фреквентном модулацијом бочног вектора потиска.

Кључне речи: вођење, управљање, оптимизација, ракета.

Научна област: Машинство

Ужа научна област: Војно машинство – системи наоружања

УДК број: 623.642.2:623.465.3(043.3)

The new guidance algorithms for surface–to–air medium range missile.

Abstract

This work presents new guidance laws for surface–to–air medium–range missiles, applicable to other flight vehicles as well. The classical guidance laws such as proportional navigation, are presented in a new way, i.e., re–defined and expanded by using the stability theory of nonlinear systems using the method of Lyapunov. Optimal guidance laws for various criteria of optimality are presented in case of double–sided optimization which was analyzed by the differential games theory (where the target performed intelligent – optimal avoidance maneuver against the missile). Based on the theory of variable structure systems, various sliding–mode guidance laws were determined. Final verification of selected guidance laws was performed by numerical simulation of the complete system for a homing missile as an object with six degrees of freedom, which has highly nonstationary dynamic characteristic and nonlinear aerodynamic coefficients. The efficiency of guidance laws for typical surface–to–air medium–range missile was tested against maneuvering targets with different strategies for avoiding missiles. Explored homing methods were successfully applied to the so–called. "smart munitions" for their accuracy improvement compared to unguided projectiles. Results of numerical simulations are shown in the case of mortar missile with a pulse jet control mechanism using the pulse–frequency modulation technique.

Key words: guidance, control, optimization, missile.

Scientific discipline: Mechanical engineering

Scientific subdiscipline: Military engineering – weapon systems

UDK number: 623.642.2:623.465.3(043.3)

Садржај

Резиме.....	i
Abstract	ii
Садржај.....	iii
1. Увод.....	1
1.1. Основни појмови	1
1.2. Досадашња истраживања из области самонавођења	4
1.3. Предмет и циљ дисертације.....	6
1.4. Преглед садржаја дисертације	7
2. Математички модел кретања	10
2.1. Нелинеарани кинематски модел система ракета–циљ у правоуглом координатном систему	10
2.1.1. Нелинеаран кинематски модел у инерционом координатном систему ..	10
.....	10
2.1.2. Нелинеаран кинематски модел у поларном координатном систему... 17	17
2.2. Линеаризовани кинематски модел система ракета–циљ	18
2.3. Линеаризовани кинематски модел са угаоном брзином линије визирања циља.....	22
3. Пропорционална навигација и њене модификације	25
3.1. Пропорционална навигација ракете против неманевришућег циља	25
3.2. Проширена пропорционална навигација.....	29
3.3. Пропорционална навигација као управљачки проблем	30
3.4. Проширена пропорционална навигација као управљачки проблем.....	32
3.5. Закони вођења базирани на паралелном приближавању	33

3.6.	Резултати нумеричке симулације	36
3.6.1.	Утицај маневра циља.....	36
3.6.2.	Утицај грешке у заузимања угла претицања	41
4.	Оптимално вођење *	44
4.1.	Диференцијалне игре.....	44
4.1.1.	Правила игре	46
4.1.2.	Кандидати за равнотежна стања	48
4.2.	Примена линеарно–квадратних диференцијалних игара у синтези закона вођења.....	50
4.2.1.	Формулација проблема	51
4.2.2.	Идеална ракета.....	51
4.2.2.1.	Опште решење	51
4.2.2.2.	Без услова по нормалној брзини	53
4.2.2.3.	Рандеву вођење	54
4.2.3.	Ракета са аутопилотом	55
4.3.	Резултати нумеричке симулације	60
5.	Вођење методом клизања	64
5.1.	Уводни пример.....	64
5.2.	Метод клизања на ограниченом домену	69
5.3.	Осциловање и квази–клизни режим.....	69
5.3.1.	Смањење осциловања раздвајањем управљања	70
5.3.2.	Смањење осциловања заменом прекидне функције континуалном функцијом типа засићења	72
5.4.	Закон вођења методом клизања	75
5.5.	Побољшани методи клизања.....	77
5.5.1.	Континуални метод клизања са коначним временом достизања клизне површине	77
5.5.2.	Регулатор са ваљањем (<i>Twisting Controller</i>).....	78

5.5.3. Регулатор са изузетно квалитетним ваљањем (<i>Supertwisting Controller</i>)	79
5.5.4. Глатко клизно управљање (<i>Smooth Second Order Sliding Mode Control</i>)	79
5.6. Закони вођења побољшаним методима клизања.....	80
5.6.1. Класични метод клизања:	85
5.6.2. Континуални метод клизања са коначним временом достизања површине клизања:.....	85
5.6.3. Регулатор са изузетно квалитетним ваљањем (<i>Supertwisting Controller</i>)	85
5.6.4. Глатко управљање методом клизања (<i>Smooth Second Order Sliding Mode Control</i>):	85
5.7. Резултати нумеричке симулације	86
6. Синтеза закона вођења при просторном кретању ракете и циља	91
6.1. Увод.....	91
6.2. Модел кретања ракете применом концепта 6–ДОФ	91
6.2.1. Нелинеарности аеродинамичких коефицијената	94
6.2.2. Модел атмосфере.....	97
6.3. Равнотежна путања.....	98
6.4. Динамичке карактеристике пропињања–скретања ракете	99
6.5. Динамичке особине ракете као објекта управљања.....	101
6.6. Модел аутопилота пропињања–скретања.....	104
6.7. Модел покретача.....	107
6.8. Модел кретања циља	107
6.9. Модел релативног кретања циља у односу на ракету.....	107
6.10. Модел комбинованог вођења ракете	108
6.10.1. Фаза одржања правца брзине ракете	109

6.10.2. Фаза командног вођења ракете	110
6.10.2.1. Симулатор лета – тренажер за оператера ручног вођења по методу покривања циља.....	111
6.10.3. Фаза самонавођења ракете.....	113
6.11. Нумеричка симулација и анализа резултата за различите законе вођења.....	114
6.11.1. Гађање циља "у доласку"	115
6.11.1.1. Неманевришући циљ	116
6.11.1.2. Циљ врши маневар избегавања са константним нормалним убрзањем	116
6.11.1.3. Циљ врши синусни маневар избегавања	123
6.11.2. Гађање циља "у одласку"	124
6.11.2.1. Неманевришући циљ	125
6.11.2.2. Циљ врши маневар избегавања са константним нормалним убрзањем	125
6.11.2.3. Циљ врши синусни маневар избегавања	130
7. Примена оптималних закона вођења на корекцију путање "паметних" минобацачких пројектила.....	133
7.1. Увод.....	133
7.2. Кинематски модел судара	135
7.3. Закони вођења.....	139
7.4. Пулсно–фреквентна модулација управљачких бочних импулсних ракетних мотора	143
7.5. Резултати нумеричке симулације	145
8. Закључак.....	157
8.1. Преглед оригиналних доприноса у дисертацији	161
8.2. Правци даљих истраживања.....	163
Литература.....	165
Прилог А – Стабилност нелинеарних система.....	169

A.1. Љапуновљев метод.....	169
A.2. Радни режими, трансформација координата, равнотежна стања	176
Прилог Б – MAPLE 17 и MATLAB 2014 програми	181
MAPLE програми за одређивање појачања оптималних закона вођења .	181
Програм Б.1. Примена линеарно–квадратних диференцијалних игара у синтези закона вођења – Идеална ракета.....	181
Програм Б.2. Примена линеарно–квадратних диференцијалних игара у синтези закона вођења – Неидеализована ракета са аутопилотом без ограничења завршне нормалне брзине.....	181
MATLAB програми за одређивање појачања аутопилота и параметара ускладника за вођење методом покривања циља.....	182
Програм Б.3. Синтеза појачања аутопилота.....	182
Програм Б.4. Синтеза параметара ускладника командног вођења	183
Прилог Ц – Основне ознаке и скраћенице	184
Основне ознаке.....	184
Скраћенице	191
Биографија.....	192

Глава

1. Увод

Непрекидни развој одбрамбених система потребан је због заштите од нападача који користе нове генерације напредног наоружања. Као средство за одбрану против модерних авиона углавном се користе системи вођених ракета.

Побољшање вођења ракета постизањем високе тачности и прецизности погађања циљева представља један од најважнијих проблема истраживања и развоја савремених ракетних система. Развој система вођених ракета обухвата многе научне области па у њој учествују мултидисциплинарни тимови али се најодговорније улоге везане за анализу, синтезу, интеграцију и тестирање целокупног система вођења и управљања поверавају систем инжењерима са знањем из области аутоматског управљања.

Развој савремене технологије (компјутерске и сензорске), има велики утицај на развој савремених вођених ракета. Модерни компјутерски процесори уз смањење габарита омогућавају извршавање великог броја рачунских операција за кратко време, што је један од услова за примену рачунски сложених метода вођења у "реалном времену". Теоријске основе метода вођења које се заснивају на линеарној квадратној оптимизацији и диференцијалним играма представљене су у [1], а оне које примењују нелинеарну теорију управљања по клизној површини описане су у [2] и [3]. Модерни сензори поред повећања тачности и прецизности, ниже су цене и мањих габарита, па их је оправдано користити не само за реализацију вођења у скупим ракетним системима, већ и за вођење јефтине "паметне" муниције као што су, нпр., вођени минобацачки или други артиљеријски пројектили.

1.1. Основни појмови

Вођена ракета представља летелицу најчешће са две равни симетрије, која има средства и начине за измену своје путање/трајекторије.

Систем вођења ракете представља скуп компонената које мере позицију ракете у односу на циљ и мењају путању ракете на основу закона вођења. Систем вођења обухвата сензорске, рачунарске и управљачке компоненте.

Закон вођења је сложени алгоритам који одређује потребно динамичко кретање ракете, тј., њено управљачко убрзање.

Код система класичног наоружања (топови, невођене ракете и бомбе) информације о положају циља добијају се осматрањем на основу чега се врши нишањење/усмеравање и испаливање/лансирање пројектила из оруђа. Од тренутка када се граната или невођена ракета испали, односно бомба одбаци, њихова путања зависи једино од тренутног стања атмосфере, аеродинамичких карактеристика, гравитације, потиска, ветра и балистике пројектила. Време од лансирања до погађања циља назива се *укупно време лета*.

Насупрот гранати/невођеној ракети/бомби, вођена ракета се у лету стално преусмерава на основу информација о међусобном положају циља и ракете добијених помоћу сензора. Постоје системи за праћење циљева који сем тренутног положаја циља врше и предикцију/предвиђање односно естимацију/процену будућих положаја циља. Напредни системи вођења могу да користе и информације о процени убрзања циља као и предвиђеној тачки сусрета два објекта у простору.

Да би водили и управљали ракету потребно је:

- Нишањењем успоставити основну почетну геометрију између ракете и циља.
- Вођење које генерише потребне команде да би се погодио циљ и евентуално испунили и додатни услови. Они се најчешће задају као ограничења у тренутку судара као нпр. задати угао путање, брзина ракете, убрзање ракете и сл.
- Управљање којим се команде вођења претварају у одзив ракете реализује се помоћу аутопилота. Актуатор механички покреће спољашње аеродинамичке површине да би мењао аеродинамичке силе које делују на ракету или покреће млазник ракетног мотора мењајући тако правац потиска.

Нишањење као и управљање биће представљено само у обиму неопходном за изучавање закона вођења.

Вођење је динамички процес кретања објекта ка задатој тачки у простору која може бити стационарна или покретна, што представља налажење пута између једне тачке у другу за шта се кроз историју пловидбе бродова користио израз "навигација", а данас и за кретање по Земљи, у ваздуху и у свемиру.

Сврха вођења ракета је погодити циљ са минималним промашајем. Ово значи да у неком тренутку и ракета и циљ треба да буду на одређеном растојању у простору да би циљ био уништен. Ради ефикаснијег уништавања појединих врста циљева уводе се и додатни услови као, нпр., задати угао путање ракете у тренутку сусрета с циљем. Потребно је математички формулисати алгоритам вођења којим се реализују задати услови сусрета два објекта у простору. Ако, нпр., оба објекта у тренутку сусрета имају исте тангентне правце на путање, тада се реализује тзв. "рандеву" вођење.

Методи вођења деле се у две основне класе:

- методи вођења "две тачке (ракета и циљ)" или методи самонавођења и
- методи вођења "три тачке (ракета, циљ и командно место)" или методи командног вођења, где је задатак вођења да ракету као тачку доведе на линију одређену са преостале две тачке.

Предмет докторског рада обухватаће углавном прву групу метода вођења.

Класични методи вођења "две тачке" су:

- Директно вођење, код кога се уздужна оса ракете усмерава у правцу циља. Овај метод нема практичну примену јер због постојања нападног угла између вектора брзине и уздужне осе ракете, погодак није могућ чак ни теоретски.
- Потера је метод вођења код кога се вектор брзине ракете усмерава ка циљу.
- Вођење са константним углом претицања код кога се вектор брзине ракете усмерава за неки константан угао претицања испред циља. На овај начин путања ракете је мање закривљена у односу на путању ракете која користи метод потере. Паралелно приближавање код кога се вектор брзине усмерава у тачку судара са циљем под

претпоставком да се брзина ракете и вектор брзине циља надаље не мењају. Теоретски, путања ракете је права линија. Карактеристика овог метода вођења је да се линија која спаја тренутне положаје ракете и циља, тзв. линија визирања циља помера у простору паралелно претходном положају.

- Пропорционална навигација (ПН) је метод који се заснива на захтеву да извод угла вектора брзине ракете буде пропорционалан изводу угла линије визирања циља. Кривина путање ракете за типичне примере овог метода је између потере и паралелног приближавања, као граничних случајева. Веће вредности коефицијента пропорционалности смањују закривљеност путање ракете. Ово је широко распрострањен метод вођења и користи се када информација о интензитету маневра циља није доступна ракети.
- Проширена пропорционална навигација (ППН) је метод који, поред угаоне брзине линије визирања циља, користи и информацију о маневру циља који је описан нормалним убрзањем које се процењује у току лета циља.

Лет ракете се обично дели у три фазе:

- Почетна фаза лета од тренутка лансирања до тренутка када ракета достиже потребну брзину за управљање.
- Средња фаза лета током које се вођење ракете врши по унапред задатој путањи (помоћу уграђеног инерционог навигационог система или помоћу спољашњег система вођења).
- Завршна фаза лета – фаза самонавођења неким од метода "две тачке".

Тежиште докторског рада је истраживање нових алгоритама вођења ракете у завршној фази лета која је од пресудног утицаја на облик сусрета и вредност промашаја циља.

1.2. Досадашња истраживања из области самонавођења

Поред основног захтева да систем вођења обезбеди минималан промашај, често се у поступку синтезе закона вођења постављају и други услови као што су

минимално време лета или подешавање релативне нормалне брзине ракете у односу на циљ у тренутку сусрета. Ови захтеви одређују оптималну путању по којој систем вођења мора да наводи ракету ка циљу. У случају стационарних циљева, закон вођења одређује се као решење "оптималног проблема" [4] и на тај начин креирајући оптималну путању која захтева само мале корекције током лета. За решавање истог проблема у случају маневришућих циљева потребна је информација о њиховом будућем кретању, која је у општем случају непозната па оптимално вођење код маневришућих циљева има ограничену употребу.

Применом теорије линеарне квадратне (једностране) оптимизације на вођење ракета, Ben–Asher [5] је представио метод вођења који у обзир узима ограничења по питању нормалне брзине у тренутку судара. Касније су Ben–Asher и Yeash [1] представили нове законе вођења користећи двострану оптимизацију тј. методу диференцијалних игара. Ћук и Mandić [6] су представили два побољшана метода пропорционалне навигације за самонавођене ракете са променљивом брзином лета у којима су укључили и повратну везу по углу пеленга циља, и поред смањења промашаја, у једном случају остварили смањење вредности нормалног убрзања ракете, а у другом случају смањење угаоне брзине линије визирања циља. Синтезу аутопилота пропињања–скретања за случај овакве ракете са изразито нестационарним динамичким параметрима представили су Ћук и Mandić [7].

Самонавођење модификованим методом потере који осим угаоног одступања брзине ракете од правца циља користи и нападни угао (или угао клизања) као и углове оријентације летелице анализирали су Ћук и Mandić [8] и извршили синтезу оваквог вођења, да би исти аутори у раду [9] анализирали утицај угаоне брзине ваљања ракете на процес самонавођења.

Нелинеарну модификацију метода пропорционалног управљања коришћењем Љапуновљевог метода испитивања стабилности система аутоматског управљања, представили су Yanushevsky и Boord [10] и [11].

Примену нелинеарне теорије управљања у клизном режиму на проблем самонавођења ракета представили су Zhou и сарадници [3] који су као клизну површину за формирање управљања користили угаону брзину линије визирања.

Савремени методи управљања у клизном режиму који смањују или

елиминишу самоосциловање управљачког сигнала и обезбеђују његову континуалност, па чак и то да он буде глатка крива, навео је Shtessel са сарадницима [2], [12] и [13].

Последње деценије све већа је примена интегрисаног система управљања у клизном режиму, који осим самонавођења у себи обухвата и синтезу управљања нормалним убрзањем ракете, што је у класичном приступу пројектовања система вођења и управљања био задатак аутопилота. Овим проблемом су се бавили Shtessel са сарадницима [14], [15], [16], [17], као и Shima са сарадницима [18].

1.3. Предмет и циљ дисертације

Основни задатак ове дисертације је да истражи и представи алгоритме/законе вођења ракета земља–ваздух средњег домета (5 – 50 km) полазећи од услова који досада нису посебно истицани, а односе се на нелинеарност кинематског модела сусрета ракете и циља, нестационарност ракете као динамичког објекта и маневрисање циља ради избегавања ракете. Полазећи од истраживачких задатака у Војнотехничком институту у Београду, установи у којој су реализована ова истраживања, предмет рада обухвата и могућност примене савремених закона самонавођења на тзв. "паметну муницију", једну нову класу убојних средстава која последњих година све више користи технологије вођених ракета ради упрошћене корекције путање у току лета.

Истраживање у дисертацији засновано је на математичком моделовању релативног просторног кретања самонавођене ракете у односу на циљ. На основу развијеног нелинеарног математичког модела извршена је линеаризација једначина кретања јер је синтеза/одређивање неких закона вођења захтевала хипотезу о линеарном математичком моделу кретања ракете.

Међутим, нумеричка провера свих синтетисаних закона вођења извршена је помоћу нелинеарних математичких модела, и то прво поједностављеног раванског модела који укључује само временску константу аутопилота и ограничење нормалног убрзања, а затим помоћу комплексног нелинеарног математичког модела који описује ракету као објект са шест степени слободе кретања и при том обухвата: просторно кретање ракете и циља, промену брзина ракете и циља, промену динамичких особина ракете (природне учестаности, управљивости,

маневарске способности и сл.), као и математичке моделе аутопилота који се примењују код ракета земља–ваздух.

Докторским радом је обухваћено истраживање нових закона вођења у функцији од почетног положаја циља ради добијања одговарајућих дијаграма за процену зоне лансирања самонавођене ракете који су значајни у прелиминарној фази пројектовања ракетног система.

Предмет докторског рада је изучавање оптималних закона вођења за ракете које имају информацију о маневру циља, који је описан нормалним убрзањем, као и за такве системе којима није доступна ова величина. Према томе, циљ ових истраживања је избор оптималних закона вођења у зависности од тога да ли циљ користи стратегију избегавања ракете применом детерминистичког или случајног маневра. У овој другој варијанти испитаће се ефикасност метода вођења ако циљ врши маневар у хоризонталној равни с константним нормалним убрзањем и случајним почетком маневра, односно са хармонијском променом нормалног убрзања и случајном вредношћу почетне фазе маневра.

На крају, један од циљева докторске дисертације је поставка концепта довољно једноставне корекције путање минобацачког пројектила којим ће се потврдити могућност примене истражених закона вођења и на овај тип "паметне муниције".

1.4.Преглед садржаја дисертације

Истраживања у овој докторској тези приказана су кроз осам поглавља.

Глава 1 је посвећена дефинисању истраживачког проблема, опису мотивације за остварење постављених циљева у раду, примењеној методологији и на крају кратком прегледу садржаја дисертације.

У глави 2 изводе се нелинеарни математички модели раванског релативног кретања ракете у односу на циљ у правоуглом и поларном координатном систему. Постављени кинематски математички модели служе за испитивање и верификацију нових закона вођења, као и поређење постигнутих перформанси (промашаја и утрошка енергије) са овим карактеристикама класичне пропорционалне навигације. Пошто се коначно решење оптималних закона

вођења заснива на хипотези линеарног модела система, у овом поглављу је извршена и линеаризација оба кинематичка модела релативног кретања.

Глава 3 почиње са класичним приказом пропорционалне навигације (ПН) и њених модификација, проширене пропорционалне навигације (ППН) са различитим вредностима фактора појачања за компензацију нормалног убрзања циља. Изучавањем пропорционалне навигације као управљачког проблема и испитивањем стабилности помоћу метода Љапунова, изведене су нелинеарна пропорционална навигација (НПН) и проширена нелинеарна пропорционална навигација (ПНПН) као могући кандидати за примену код ракета земља–ваздух. Нелинеарна структура функције управљања добијена је увођењем кубног члана по угаоној брзини линије визирања циља. Поглавље се завршава нумеричком симулацијом раванског нелинеарног кинематског модела и оценом основних перформанси система самонавођења ракете.

Оптимално вођење ракете изучава се у Глави 4 применом метода диференцијалних игара који вреднује и управљање ракете, да би се минимизирали промашај, релативна нормална брзина и утрошак енергије, и маневар циља да би се максимизирале поменуте величине. После дискусије добијених закона вођења у функцији од параметра, који представља процењени однос расположивих нормалних оптерећења ракете и циља, изведени су изрази за законе вођења који се могу добити и помоћу једностране квадратне оптимизације која полази од тога да је маневарска способност ракете вишеструко већа од ове величине код циља. Овим поглављем се врши избор две основне групе закона вођења: против маневришућег циља са нормалним убрзањем које је познато ракети, и против "интелигентног" циља који врши случајни маневар. Као и у претходном поглављу, карактеристике одабраних закона вођења верификоване су нумеричком симулацијом раванског кретања ракете и циља.

Изучавање закона вођења за сценарио у коме маневар циља није познат ракети наставља се и у Глави 5 методом клизања. Као управљачки систем променљиве структуре, метод клизања је једноставан за реализацију јер захтева једино информацију о угаоној брзини линије визирања, а робустан је у односу на спољашње поремећаје. Различити методи клизања верификовани су нумеричком

симулацијом раванског кретања и тестирани с обзиром на спречавање самоосцилација система.

У Глави 6 је приказана синтеза закона вођења при просторном кретању ракете земља–ваздух средњег домета. Дат је комплетан математички модел кретања ракете као објекта са шест степени слободе кретања. Објашњене су основне нелинеарности аеродинамичких карактеристика ракете. Изучавањем равнотежних путања описане су нестационарне појаве у динамици лета ракете које су битне за синтезу закона управљања и вођења. Моделом је обухваћен комбиновани систем вођења који се састоји из командног вођења на линију визирања циља на почетном и средњем делу путање и један од метода самонавођења у терминалној/завршној фази који су одабрани на основу нумеричке симулације раванског кретања у претходним поглављима. Тежиште истраживања у овом делу рада је верификација оптималних метода вођења ракете за различите сценарије маневрисања циља.

У Глави 7 је приказана примена нових алгоритама вођења у корекцији путања једне нове класе убојних средстава, тзв. "паметне муниције". Предност предложеног концепта корекције путање потврђена је компаративном анализом прецизности класичног и "паметног" минобацачког пројектила.

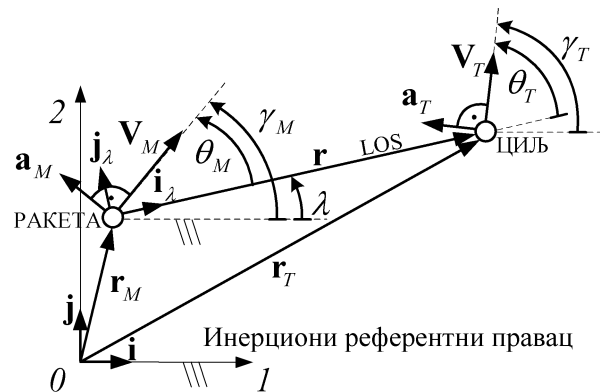
Основни резултати истраживања и научни доприноси докторског рада сумирани су у Глави 8.

Глава

2. Математички модел кретања

2.1. Нелинеарни кинематски модел система ракета–циљ у правоуглом координатном систему

Кинематски модел сусрета ракете и циља посматра се у две управне равни на основу релативног кретања ракете и циља као материјалних тачака – вертикалној и хоризонталној равни као што је то учињено у [19]. Кретање у хоризонталној равни инерционог координатног система, приказано је на Слици 2.1. У вертикалној равни постоји још додатни гравитациони члан који се може укључити у еквивалентни маневар циља, на начин као што је то приказано у [20] и у Глави 7.



Слика 2.1 – Геометрија релативног кретања у равни

2.1.1. Нелинеаран кинематски модел у инерционом координатном систему

Код тактичких ракета средњег домета дужина путање је релативно мала (до неколико десетина km) па се као инерциони координатни систем може сматрати координатни систем везан за површину "равне" Земље. Ова претпоставка дозвољава интеграљење убрзања и брзина дуж оса овог инерционог референтног система без додатних компонената Кориолисовог убрзања.

На Слици 2.1 брзина ракете V_M усмерена је под углом θ_M у односу на линију визирања. Овај угао се од идеалног почетног нишанског угла претицања θ_{M0} енг. *lead angle* (који представља нишански угао претицања/предњачења који би довео до поготка циља под условом да се вектори брзина ракете и циља надаље не

мењају) разликује за вредност угла грешке нишањења $\Delta\theta_{M0}$, тј.:

$$\theta_M = \theta_{M0} + \Delta\theta_{M0} \quad (2.1)$$

Нишански угао одређује се из карактеристике паралелног приближавања као метода вођења код кога се линија визирања помера у простору паралелно сама себи што уз претпоставку да се вектори брзина ракете и циља не мењају доводи до сусрета два објекта. Зато пројекције брзина ракете и циља управне на правац линије визирања морају бити једнаке па ће линија визирања остати паралелна сама себи што је приказано следећом једначином

$$V_M \sin\theta_{M0} = V_T \sin\theta_{T0} \quad (2.2)$$

Употребом угловних релација са Сlike 2.1, и на основу једначине (2.2) почетни (лансирни) правац вектора брзине ракете у референтном координатном систему одређен је следећом једначином:

$$\gamma_{M0} = \theta_{M0} + \lambda_0 = \sin^{-1} \frac{V_T \sin(\gamma_{T0} - \lambda_0)}{V_M} + \lambda_0 \quad (2.3)$$

Ово је идеалан почетни правац вектора брзине ракете да би она летела у тренутну тачку сусрета с циљем. То значи да ако је ракета на овом курсу на њу није више потребно деловати никаквим нормалним убрзањем да би погодила циљ. Грешка угла нишањења представља почетно одступање правца брзине ракете од идеалног правца и биће обухваћена нелинеарном симулацијом, тако што ће се њена вредност додавати идеалном почетном правцу. Из тог разлога, пројекције почетне брзине ракете на осе инерционог координатног система одређене су следећом једначином:

$$\begin{aligned} V_{M1} &= V_M \cos(\gamma_{M0} + \Delta\theta_{M0}) \\ V_{M2} &= V_M \sin(\gamma_{M0} + \Delta\theta_{M0}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Релативно растојање ракете и циља на Слици 2.1 означено је са r . Задатак вођења је да ово растојање у идеалном случају сведе на нулу, а у реалности минимизује. Најмања даљина назива се промашај и нелинеарна симулација се завршава када даљина почне да се повећава.

Релативна брзина приближавања представља негативни извод даљине и одређена је следећом једначином:

$$V_C = -\dot{r} \quad (2.5)$$

Имајући у виду претходну једначину, услов за одређивање промашаја тј. крај нелинеарне симулације који је еквивалентан тренутку када даљина почиње да се увећава, може се представити као:

$$V_C < 0 \quad (2.6)$$

Команда закона вођења представља захтевано убрзање \mathbf{a}_M које треба да делује на ракету да би она кориговала своју путању у складу са законом вођења. На Слици 2.1 команда је представљена нормално на вектор брзине ракете.

На примеру пропорционалне навигације као закона вођења разликују се два случаја

- Пропорционална навигација (ПН) која за синтезу команде користи брзину ракете, а сама команда (задато убрзање ракете) је нормална на правац брзине ракете. Овај метод је погодан за техничку реализацију јер се за случај аеродинамичког управљања остварују управо промене убрзања у равни нормалној на вектор брзине.
- Тачна пропорционална навигација (ТПН) која за синтезу команде користи релативну брзину приближавања ракете и циља (коју је у неким случајевима лакше мерити од брзине саме ракете), а њена команда је нормална на правац линије визирања. За техничку реализацију овог метода било би потребно постојање начина/средстава за контролу и убрзања у правцу вектора брзине ракете, нпр. контролом силе потиска што доноси више проблема него користи од могућности примене ТПН. Ипак оваква форма закона вођења методом пропорционалне навигације има предности у теоретским разматрањима код анализирања осетљивости на поремећаје и шум, као и то да се за овај закон вођења може показати да је то оптималан закон вођења са становишта минимизације промашаја и времена лета тј. тачности поготка и енергетских захтева.

Из разлика наведених на примеру пропорционалне навигације, у нелинеарној симулацији постоје две могућности:

- команда закона вођења се извршава нормално на правац вектора брзине, пројектовањем команде на осе референтног инерционог система следећом једначином:

$$\begin{aligned} a_{M1} &= -a_M \sin \gamma_M \\ a_{M2} &= a_M \cos \gamma_M \end{aligned} \quad (2.7)$$

- команда закона вођења се извршава нормално на правац линије визирања ако се у претходној једначини угао правца вектора брзине ракете γ_M замени углом правца линије визирања λ .

Изабрани референтни координатни систем везан је за површину "равне Земље" и за домете тактичких ракета може се сматрати инерционим координатним системом па се компоненте брзина ракете дуж његових оса одређују интеграљењем следећих диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{M1} &= a_{M1} \\ \dot{V}_{M2} &= a_{M2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из истог разлога, за одређивање положаја ракете потребно је интеграљење следећих диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} \dot{r}_{M1} &= V_{M1} \\ \dot{r}_{M2} &= V_{M2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

За одређивање компонената брзине циља у инерцијалном систему претпоставља се да он може контролисати једино своје нормално убрзање. Тада је довољно интеграљење следеће диференцијалне једначине за одређивање угаоне брзине вектора брзине циља дуж сопствене путање:

$$\dot{\gamma}_T = \frac{a_T}{V_T} \quad (2.10)$$

након чега се врши пројектовање брзине циља на осе референтног координатног система:

$$\begin{aligned} V_{T1} &= V_T \sin \gamma_T \\ V_{T2} &= V_T \cos \gamma_T \end{aligned} \quad (2.11)$$

За одређивање положаја циља потребно је интеграљење следећих диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}\dot{r}_{T1} &= V_{T1} \\ \dot{r}_{T2} &= V_{T2}\end{aligned}\tag{2.12}$$

Пројекције релативног растојања одређују се једноставно као:

$$\begin{aligned}r_1 &= r_{T1} - r_{M1} \\ r_2 &= r_{T2} - r_{M2}\end{aligned}\tag{2.13}$$

а потребне су за одређивање угла линије визирања са Сликe 2.1:

$$\lambda = \arctan \frac{r_2}{r_1}\tag{2.14}$$

Велики број закона вођења за синтезу команде користи информацију о угаоној брзини линије визирања која се добија диференцирањем претходне једначине:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2} \frac{\dot{r}_2 r_1 - r_2 \dot{r}_1}{r_1^2} = \frac{\dot{r}_2 r_1 - r_2 \dot{r}_1}{r_1^2 + r_2^2} = \frac{V_2 r_1 - r_2 V_1}{r^2}\tag{2.15}$$

Пројекције релативне брзине одређују се следећом једначином:

$$\begin{aligned}V_1 &= V_{T1} - V_{M1} \\ V_2 &= V_{T2} - V_{M2}\end{aligned}\tag{2.16}$$

док се даљина добија из следеће једначине:

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}\tag{2.17}$$

Релативна брзина приближавања дефинисана једначином (2.5) може се одредити диференцирањем последње једначине:

$$V_G = -\dot{r} = -\frac{d}{dt} \left[(r_1^2 + r_2^2)^{\frac{1}{2}} \right] = -\frac{1}{2} (r_1^2 + r_2^2)^{-\frac{1}{2}} (2r_1 \dot{r}_1 + 2r_2 \dot{r}_2) = -\frac{r_1 V_1 + r_2 V_2}{r}\tag{2.18}$$

Све кинематске једначине потребне за нелинеарну симулацију кретања сада су одређене, а алгоритам симулационог програма који може бити примењен у било ком програмском језику, дат је на Слици 2.2.

У датом алгоритму укључена је нелинеарност команде вођења типа симетричног засићења представљена следећом једначином:

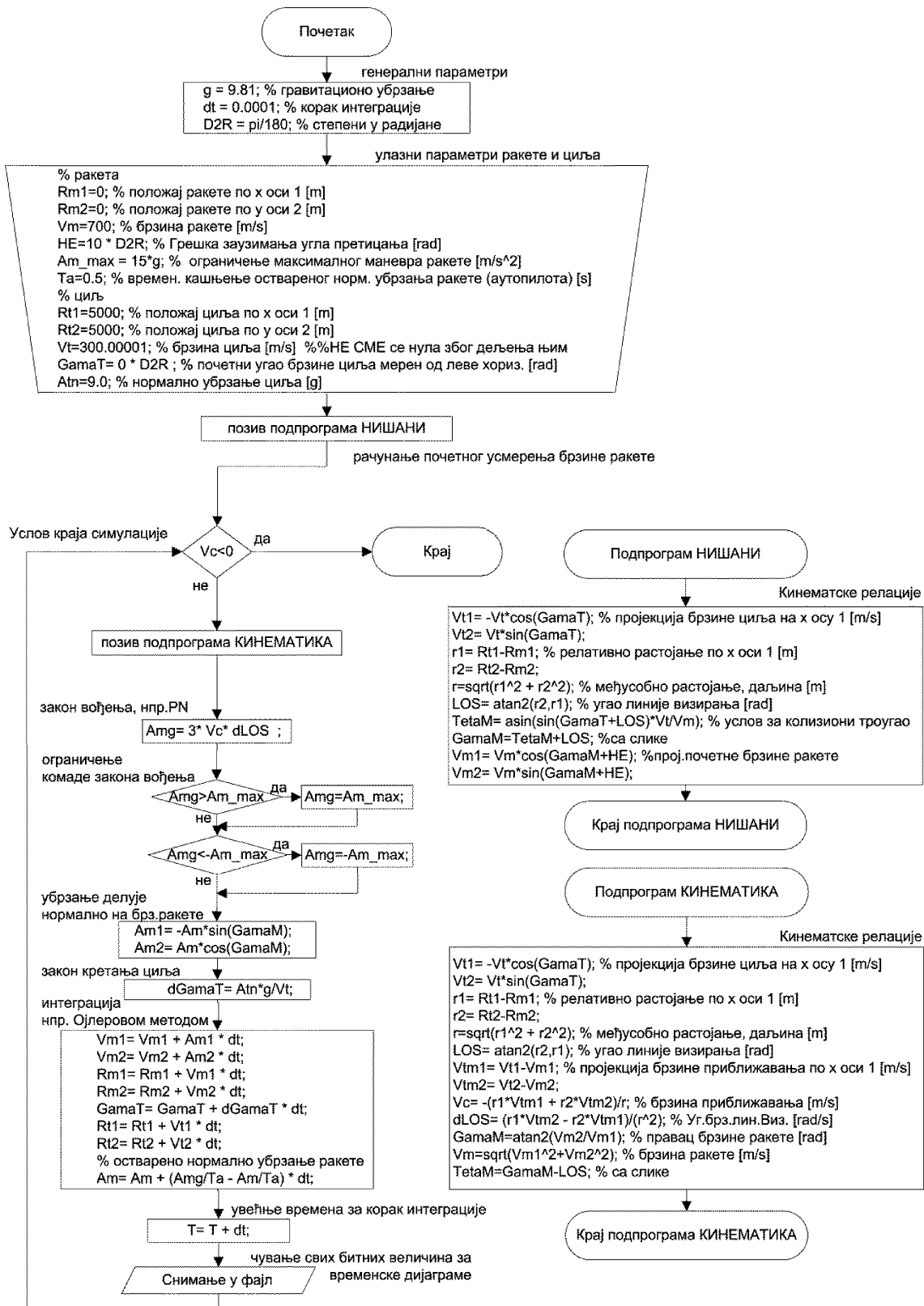
$$a_{MG}^{SAT} = \begin{cases} a_{MG}, & |a_{MG}| \leq a_{MG}^{\max} \\ a_{MG}^{\max} \operatorname{sgn} a_{MG}, & |a_{MG}| > a_{MG}^{\max} \end{cases}\tag{2.19}$$

У алгоритму је додат и утицај аутопилота за управљање нормалним убрзањем ракете као управљачким системом коме је ракета објекат управљања. Аутопилот је представљен линеарним системом првог реда чија је преносна функција:

$$a_{Mn} = \frac{1}{T_M s + 1} a_{MG}^{SAT} \quad (2.20)$$

На основу претходне једначине јасно је да се у временском домену остварено нормално убрзање добија решавањем следеће диференцијалне једначине:

$$\dot{a}_{Mn} = \frac{-a_{Mn} + a_{MG}^{SAT}}{T_M} \quad (2.21)$$



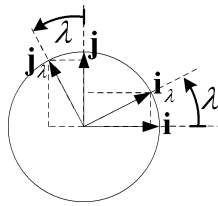
Слика 2.2 – Алгоритам програма за нелинеарну симулацију

2.1.2. Нелинеаран кинематски модел у поларном координатном систему

Овај координатни систем може да се користити при синтези закона вођења методом клизања, која је дата у Глави 5.

Геометрија кретања у хоризонталној равни иста је као на Слици 2.1.

На Слици 2.3 је приказана ротација јединичних вектора поларног координатног система који се у односу на инерциони координатни систем ротиран за угао λ .



Слика 2.3 – Положај јединичних вектора поларног и инерционог координатног система

На основу геометрије приказане на Слици 2.3 одређена је веза јединичних вектора ова два координатна система као:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_\lambda &= \mathbf{i} \cos \lambda + \mathbf{j} \sin \lambda \\ \mathbf{j}_\lambda &= -\mathbf{i} \sin \lambda + \mathbf{j} \cos \lambda \end{aligned} \quad (2.22)$$

Диференцирањем последње две једначине добија се:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{i}}_\lambda &= -\mathbf{i} \sin \lambda \dot{\lambda} + \mathbf{j} \cos \lambda \dot{\lambda} = \dot{\lambda} (-\mathbf{i} \sin \lambda + \mathbf{j} \cos \lambda) = \dot{\lambda} \mathbf{j}_\lambda \\ \dot{\mathbf{j}}_\lambda &= -\mathbf{i} \cos \lambda \dot{\lambda} - \mathbf{j} \sin \lambda \dot{\lambda} = \dot{\lambda} (-\mathbf{i} \cos \lambda - \mathbf{j} \sin \lambda) = -\dot{\lambda} \mathbf{i}_\lambda \end{aligned} \quad (2.23)$$

Једначина релативног положаја циља у односу на ракету у инерционом к.с. (2.13) у векторском облику може се написати као:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_M = r \cos \lambda \mathbf{i} + r \sin \lambda \mathbf{j} \quad (2.24)$$

а њеним диференцирањем одређен је вектор релативне брзине циља у односу на ракету који се након прегруписавања чланова и употребе (2.22) може изразити као:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \cos \lambda \mathbf{i} - r \sin \lambda \dot{\lambda} \mathbf{i} + \dot{r} \sin \lambda \mathbf{j} + r \cos \lambda \dot{\lambda} \mathbf{j} = \\ &= \dot{r} \underbrace{(\cos \lambda \mathbf{i} + \sin \lambda \mathbf{j})}_{\mathbf{i}_\lambda} + r \dot{\lambda} \underbrace{(-\sin \lambda \mathbf{i} + \cos \lambda \mathbf{j})}_{\mathbf{j}_\lambda} = \\ &= \dot{r} \mathbf{i}_\lambda + r \dot{\lambda} \mathbf{j}_\lambda \end{aligned} \quad (2.25)$$

Пројектовањем последње једначине на осе поларног к.с. одређене су следеће две скаларне једначине:

$$\dot{V}_r = \dot{r} \quad (2.26)$$

$$\dot{V}_\lambda = r\dot{\lambda} \quad (2.27)$$

Диференцирањем векторске једначине релативне брзине (2.25) одређен је вектор релативног убрзања циља у односу на ракету, који се коришћењем (2.23), а затим прегруписавањем чланова и коришћењем (2.22) може изразити на следећи начин:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{V}} &= \ddot{r}\mathbf{i}_\lambda + \dot{r}\dot{\mathbf{i}}_\lambda + \dot{r}\dot{\lambda}\mathbf{j}_\lambda + r\ddot{\lambda}\mathbf{j}_\lambda + r\dot{\lambda}\dot{\mathbf{j}}_\lambda = \\ &= \ddot{r}\mathbf{i}_\lambda + \dot{r}\dot{\lambda}\mathbf{j}_\lambda + \dot{r}\dot{\lambda}\mathbf{j}_\lambda + r\ddot{\lambda}\mathbf{j}_\lambda + r\dot{\lambda}(-\dot{\lambda}\mathbf{i}_\lambda) = \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\lambda}^2)\mathbf{i}_\lambda + (2\dot{r}\dot{\lambda} + r\ddot{\lambda})\mathbf{j}_\lambda \end{aligned} \quad (2.28)$$

Пројектовањем последње једначине на осе поларног к.с. одређене су следеће две скаларне једначине:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\lambda}^2 \quad (2.29)$$

$$a_\lambda = 2\dot{r}\dot{\lambda} + r\ddot{\lambda} \quad (2.30)$$

Диференцирањем скаларних једначина (2.26) и (2.27) одређене су следеће везе:

$$\dot{V}_r = \dot{r} \quad (2.31)$$

$$\dot{V}_\lambda = r\dot{\lambda} + r\ddot{\lambda} \quad (2.32)$$

Употребом последње две једначине као и једначина (2.26) и (2.27), једначине (2.29) и (2.30) се могу представити и на следећи начин:

$$a_r = \dot{V}_r - r\dot{\lambda}^2 \quad (2.33)$$

$$a_\lambda = \dot{V}_\lambda + V_r \frac{V_\lambda}{r} \quad (2.34)$$

Последње две једначине, заједно са једначинама (2.26) и (2.27) представљају систем диференцијалних једначина у поларном координатном систему везаном за ракету који описује релативно кретање ракете и циља.

2.2. Линеаризовани кинематски модел система ракета–циљ

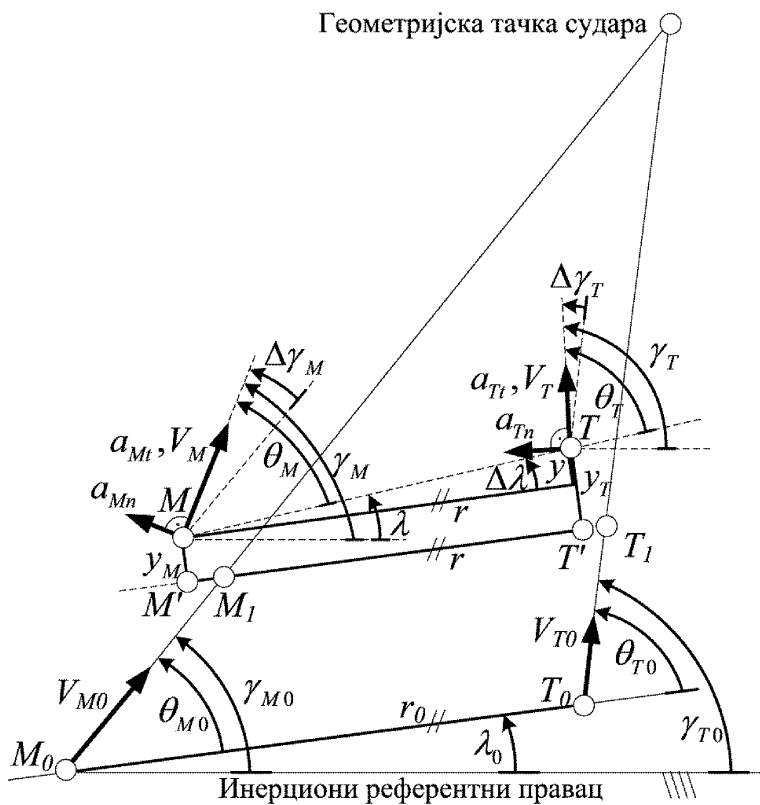
За развој нових оптималних закона вођења потребно је извршити

линеаризацију кинематског модела релативног кретања ракете и циља [21].

За даљу анализу уводе се следеће претпоставке:

- Интензитети брзине ракете и циља споро се мењају током вођења.
- Путање ракете и циља могу се линеаризовати око номиналних, тј., оних путања које воде ракету и циљ у тачку сусрета.

Кинематске величине и углови приказани су на Слици 2.4.



Слика 2.4 – Кинематски модел за линеаризацију

Да би правац тренутне линије визирања остао паралелан почетном r_0 , нормалне пројекције брзина ракете и циља на тај правац, морају бити једнаке па важи једначина (2.2). Тада је обезбеђен сусрет два објекта у истој тачки у истом временском тренутку. На основу једначине (2.3) одређује се угао идеалног правца ракете.

У произвољном тренутку одговарајући положаји ракете и циља који се налазе на сударном курсу означени су као тачке M_1 и T_1 . Дозволивши мала одступања од

овог курса (номиналних путања), стварни положаји ракете и циља приказани су на Слици 2.4 и означени као тачке M и T .

Означавањем нормалних одступања од почетног правца линије визирања са y_M и y_T за ракету, односно за циљ, релативно нормално одступање и брзина одређене су следећим једначинама:

$$\begin{aligned} y &= y_T - y_M \\ \dot{y} &= \dot{y}_T - \dot{y}_M \end{aligned} \quad (2.35)$$

Увођењем поремећајних величина и пројектовањем брзина на правац који је управан на почетну линију визирања циља, следи:

$$\dot{y} = (V_{T0} + \Delta V_T) \sin(\theta_{T0} + \Delta\theta_T) - (V_{M0} + \Delta V_M) \sin(\theta_{M0} + \Delta\theta_M) \quad (2.36)$$

За мала одступања од углова ракете и циља од идеалних путања могу се користити следеће апроксимације:

$$\sin(\theta_{M0} + \Delta\theta_M) = \sin\theta_{M0} \underbrace{\cos\Delta\theta_M}_1 + \cos\theta_{M0} \underbrace{\sin\Delta\theta_M}_{\Delta\theta_M} \quad (2.37)$$

Применом линеаризације једначина (2.36) постаје:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= V_{T0} \sin\theta_{T0} + V_{T0} \cos\theta_{T0} \cdot \Delta\theta_T - V_{M0} \sin\theta_{M0} - V_{M0} \cos\theta_{M0} \cdot \Delta\theta_M + \\ &+ \Delta V_T \sin\theta_{T0} + \underbrace{\Delta V_T \cos\theta_{T0} \cdot \Delta\theta_T}_0 - \Delta V_M \sin\theta_{M0} - \underbrace{\Delta V_M \cos\theta_{M0} \cdot \Delta\theta_M}_0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Користећи услов (2.2) и занемаривањем малих величина другог реда, једначина (2.38) постаје:

$$\dot{y} = V_{T0} \cos\theta_{T0} \cdot \Delta\theta_T - V_{M0} \cos\theta_{M0} \cdot \Delta\theta_M + \Delta V_T \sin\theta_{T0} - \Delta V_M \sin\theta_{M0} \quad (2.39)$$

Избором релативног нормалног одступања и релативне нормалне брзине као величина стања:

$$x_1 = y ; \quad x_2 = \dot{y} \quad (2.40)$$

и обједињавањем једначина (2.39) и (2.40), добија се математички модел система у простору стања као:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = \frac{d}{dt} (V_{T0} \cos\theta_{T0} \cdot \Delta\theta_T - V_{M0} \cos\theta_{M0} \cdot \Delta\theta_M + \Delta V_T \sin\theta_{T0} - \Delta V_M \sin\theta_{M0}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Након диференцирања, последња једначина постаје:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= V_{T0} \cos \theta_{T0} \cdot \dot{\theta}_T - V_{M0} \cos \theta_{M0} \cdot \dot{\theta}_M + \dot{V}_T \sin \theta_{T0} - \dot{V}_M \sin \theta_{M0}\end{aligned}\quad (2.42)$$

Уводећи ознаке:

$$\begin{aligned}V_{M0} \dot{\theta}_M &= a_{Mn} \\ V_{T0} \dot{\theta}_T &= a_{Tn}\end{aligned}\quad (2.43)$$

где су: a_{Mn} – нормално убрзање ракете, а a_{Tn} – нормално убрзање циља.

Тангентна убрзања ракете и циља су:

$$\begin{aligned}\dot{V}_M &= a_{Mt} \\ \dot{V}_T &= a_{Tt}\end{aligned}\quad (2.44)$$

Применом ознака (2.43) и (2.44) на једначину (2.42), добија се:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{Tn} \cos \theta_{T0} - a_{Mn} \cos \theta_{M0} + a_{Tt} \sin \theta_{T0} - a_{Mt} \sin \theta_{M0}\end{aligned}\quad (2.45)$$

У другој једначини система (2.45) једина променљива на коју се може директно утицати и представља управљачки улаз је убрзање ракете нормално на LOS, означимо са $u = a_{Mn} \cos \theta_{M0}$. Све остале променљиве заједно представљају поремећај означен са w , који сем убрзања циља нормалног на LOS обухвата тангентна убрзања ракете и циља. Увођењем трансформација:

$$\begin{aligned}u &= -a_{Mn} \cos \theta_{M0} \\ w &= a_{Tn} \cos \theta_{T0} + a_{Tt} \sin \theta_{T0} - a_{Mt} \sin \theta_{M0}\end{aligned}\quad (2.46)$$

Једначина (2.45) постаје:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u + w\end{aligned}\quad (2.47)$$

Или у матричној форми:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot u + \mathbf{D} \cdot w \\ \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.48)$$

Уколико је у линеаризованом математичком моделу кретања потребно обухватити утицај динамичког понашања ракете и аутопилота, уз претпоставку да се они могу представити као динамички систем првог реда са временским кашњењем, тј. временском константом T_M , као што је то у нелинеарном моделу

дато једначином (2.20) уводи се нова величина стања $x_3 = a_{Mn}$, која представља остварену команду тј. остварено нормално убрзање ракете. Једначина (2.49) описује ову динамику преко преносне функције:

$$G_A = \frac{x_3}{a_{MG}} = \frac{1}{T_M S + 1} \quad (2.49)$$

где је a_{MG} захтевано нормално убрзање које је генерисано помоћу закона вођења.

Математички модел система са неидеалном ракетом је:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + w \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{T_M} x_3 + \frac{1}{T_M} a_{MG} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Или, у матричној форми:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{w}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Модел система представљен једначином (2.51) коришћен је у линеарним симулацијама кретања ракете и циља, као и за синтезу закона вођења. За разлику од Реф. [1] и [5], овај математички модел садржи поремећај w који укључује, поред нормалног убрзања циља, и тангентна убрзања циља и ракете па се зато може применити на ракету са променљивом брзином, тј., на нестационарни објекат управљања.

2.3. Линеаризовани кинематски модел са угаоном брзином линије визирања циља

Исти систем може имати различите математичке формулације, зависно од начина избора величина стања, а његова форма бити погоднија за неке примене у синтези одређених закона вођења. Математички модел линеаризованог система може се трансформисати у облик који користи мерне сигнале уређаја за вођење као што су глава за самонавођење и аутопилот. Из тог разлога линеаризација посматраног система биће извршена на још један начин уз коришћење већ

наведених претпоставки.

Са Сликe 2.4 добија се промена угла линије визирања:

$$\Delta\lambda \approx \tan \Delta\lambda = \frac{y}{r} \quad (2.52)$$

Диференцирањем једначине (2.52) два пута по времену, изводи се:

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{y}r - \dot{r}y}{r^2} = \frac{\dot{y}}{r} - \frac{\dot{r}y}{r^2} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda} &= \frac{\ddot{y}r - \dot{y}\dot{r}}{r^2} - \frac{(\ddot{r}y + \dot{r}\dot{y})r^2 - \dot{r}y2r\dot{r}}{r^4} = \frac{1}{r}\ddot{y} - \frac{\dot{y}\dot{r}}{r^2} - \frac{\ddot{r}y + \dot{r}\dot{y}}{r^2} + \frac{2}{r}\frac{\dot{r}y\dot{r}}{r^2} = \\ &= \frac{1}{r}\ddot{y} - 2\frac{\dot{y}\dot{r}}{r^2} - \frac{\ddot{r}y}{r^2} + \frac{2\dot{r}}{r}\frac{y\dot{r}}{r^2} = \frac{1}{r}\ddot{y} - \frac{\ddot{r}}{r}\frac{y}{r} - \frac{2\dot{r}}{r}\left(\frac{\dot{y}}{r}\frac{r}{r} + \frac{y\dot{r}}{r^2}\right) = \frac{1}{r}\ddot{y} - \frac{\ddot{r}}{r}\frac{y}{r} - \frac{2\dot{r}}{r}\frac{\dot{y}r + y\dot{r}}{r^2} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Из једначина (2.40) и (2.47), следи:

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = -u + w \quad (2.55)$$

па једначина (2.54) постаје:

$$\ddot{\lambda} = -\frac{1}{r}u + \frac{1}{r}w - \frac{\ddot{r}}{r}\frac{y}{r} - 2\frac{\dot{r}}{r}\frac{\dot{y}r - \dot{r}y}{r^2} \quad (2.56)$$

Дефинисањем нових величина стања:

$$z_1 = \Delta\lambda; \quad z_2 = \dot{\lambda} \quad (2.57)$$

Диференцијална једначина другог реда (2.56) се трансформише у систем две једначине првог реда:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{1}{r}u + \frac{1}{r}w - \frac{\ddot{r}}{r}\frac{y}{r} - 2\frac{\dot{r}}{r}\frac{\dot{y}r - \dot{r}y}{r^2} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Применом једначина (2.52), (2.53) и (2.57), систем (2.58) постаје:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{1}{r}u + \frac{1}{r}w - \frac{\ddot{r}}{r}z_1 - 2\frac{\dot{r}}{r}z_2 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Или у матричној форми:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{w} \\ \mathbf{z} &= \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\ddot{r}}{r} & -2\frac{\dot{r}}{r} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{r} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{r} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Овај модел система је, нпр., погодан за примену закона вођења по методу клизања на начин као што је представљено у [6], а такође и за анализу закона вођења као управљачког проблема на начин како је представљено у поглављу 3.3.

Уколико је потребно обухватити утицај динамичког кашњења ракете са аутопилотом, модел линеаризованог система може се проширити на исти начин као што је то урађено на крају поглавља 2.1.2, и представљено једначинама (2.49)–(2.51).

Глава

3. Пропорционална навигација и њене модификације

3.1. Пропорционална навигација ракете против неманевришућег циља

Пропорционална навигација (ПН) је закон вођења који је у практичној реализацији најчешће коришћен.

Уз претпоставку да постоји контрола угла и/или угаоне брзине ваљања, кретање ракете се може разложити и посматрати у две нормалне равни у којима се примењује једна од два случаја пропорционалне навигације који су објашњени у 2.1.

Класична пропорционална навигација (ПН) одређена је из услова да извод угла правца вектора брзине ракете буде пропорционалан угаоној брзини линије визирања циља [22].

$$\dot{\gamma}_M = k\dot{\lambda} \quad (3.1)$$

где је k константа пропорционалне навигације.

Како је нормално убрзање ракете:

$$a_{Mn} = V_M \dot{\gamma}_M \quad (3.2)$$

пропорционална навигација се може приказати и у следећем облику:

$$a_{Mn} = V_M k \dot{\lambda} \quad (3.3)$$

Користећи појам захтеваног нормалног убрзања уместо реализованог, пропорционална навигација се може приказати у облику:

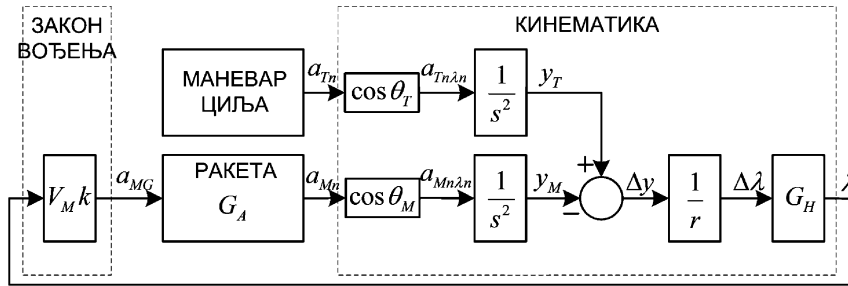
$$a_{MG}^{PH} = K \dot{\lambda} \quad (3.4)$$

Тачна пропорционална навигација (ТПН) има сличну формулацију као ПН одређена једначином (3.3) и математички се може изразити следећом једначином:

$$a_{MG}^{TPH} = V_C k \dot{\lambda} \quad (3.5)$$

При томе треба имати у виду да се за синтезу команде нормалне на правац линије визирања по методи ТПН користи релативна брзина приближавања ракете и циља V_C (која се може мерити радаром) и одговара другом облику линеаризованог кинематског модела датом у поглављу 2.3.

Систем вођења методом ПН може представити блок дијаграмом на Слици 3.1



Слика 3.1 – Блок дијаграм система вођења методом ПН

У блок дијаграму система вођења методом ПН коришћена је веза промене угла линије визирања циља (ЛВЦ) од релативног нормалног одступања и даљине (2.52) а обухваћене су следеће компоненте: глава за самонавођење (представљена преносном функцијом G_H чије је појачање K_H) и аутопилот (представљен преносном функцијом G_A чије је појачање K_A). Блок закона вођења методом ПН представља појачање $V_M k$, па се дефинише укупни фактор појачања на следећи начин:

$$K = V_M k \cdot K_A \cdot K_H \quad (3.6)$$

Са Сlike 3.1 појачање отвореног кола може се изразити следећом једначином:

$$K_{OK} = \frac{K \cos \theta_{M0}}{r} \quad (3.7)$$

Уз претпоставку да ни ракета ни циљ надаље не маневришу и увођењем *преосталог времена* (енг. time-to-go) на начин представљен следећом једначином:

$$t_{go} = t_f - t \quad (3.8)$$

где t_f представља време у тренутку судара, тада уз претпоставку да се релативно растојање може представити као производ брзине приближавања и преосталог времена:

$$r = V_C t_{go} \quad (3.9)$$

Сада се једначина (3.7) трансформише у следећи облик:

$$K_{OK} = \frac{K \cos \theta_{M0}}{V_C t_{go}} \quad (3.10)$$

Из последње једначине је јасно да ће динамичко понашање два система са Сlike 3.1 са истим аутопилотом и главом за самонавођење, бити исто за произвољно t_{go} ако имају исту вредност параметра дефинисаног једначином (3.11) који се назива *кинематско појачање* и који се приликом синтезе закона вођења бира у оквиру интервала најчешће од 3–5.

$$N = \frac{K \cos \theta_{M0}}{V_C} \quad (3.11)$$

На основу једначина (3.10) и (3.11)(3.12) важи следећа веза:

$$K_{OK} = \frac{N}{t_{go}} \quad (3.12)$$

До истог закључка може се доћи и одређивањем релативне нормалне брзине преко пројекција брзина ракете и циља нормално на правац ЛВЦ, што је дато следећом једначином:

$$\dot{y} = r\dot{\lambda} = V_T \sin \theta_T - V_M \sin \theta_M \quad (3.13)$$

Диференцирањем последње једначине, добиће се:

$$\ddot{y} = \dot{r}\dot{\lambda} + r\ddot{\lambda} = \dot{V}_T \sin \theta_T + V_T \cos \theta_T \cdot \dot{\theta}_T - \dot{V}_M \sin \theta_M - V_M \cos \theta_M \cdot \dot{\theta}_M \quad (3.14)$$

Угловне релације на Слици 2.4 су следеће:

$$\begin{aligned} \theta_T &= \gamma_T - \lambda \\ \theta_M &= \gamma_M - \lambda \end{aligned} \quad (3.15)$$

Диференцирањем последњих једначина, одређује се:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_T &= \dot{\gamma}_T - \dot{\lambda} \\ \dot{\theta}_M &= \dot{\gamma}_M - \dot{\lambda} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Употребом једначине (3.16), једначина (3.14) се трансформише у облик:

$$\begin{aligned} \dot{r}\dot{\lambda} + r\ddot{\lambda} &= \\ &= \dot{V}_T \sin \theta_T + V_T \cos \theta_T \cdot \dot{\gamma}_T - V_T \cos \theta_T \cdot \dot{\lambda} \\ &\quad - \dot{V}_M \sin \theta_M - V_M \cos \theta_M \cdot \dot{\gamma}_M + V_M \cos \theta_M \cdot \dot{\lambda} = \\ &= \dot{V}_T \sin \theta_T + V_T \cos \theta_T \cdot \dot{\gamma}_T - \dot{V}_M \sin \theta_M \\ &\quad - V_M \cos \theta_M \cdot \underbrace{\dot{\gamma}_M}_{k\dot{\lambda}} - \underbrace{(V_T \cos \theta_T - V_M \cos \theta_M)}_{\dot{r}} \dot{\lambda} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Промена даљине представља разлику пројекција брзина ракете и циља дуж правца ЛВЦ, и одређена је следећом једначином:

$$-\dot{r} = V_C = -V_T \cos \theta_T + V_M \cos \theta_M \quad (3.18)$$

Употребом последње једначине, као и дефиниције ПН (3.1), тада се једначина (3.17) трансформише у облик:

$$\left(2\dot{r} + V_M \cos \theta_M k\right)\dot{\lambda} + r\ddot{\lambda} = \dot{V}_T \sin \theta_T + V_T \cos \theta_T \cdot \dot{\gamma}_T - \dot{V}_M \sin \theta_M \quad (3.19)$$

Уз уведене претпоставке да су брзина циља константна $\dot{V}_T = 0$, путања циља праволинијска $\dot{\gamma}_T = 0$ и брзина ракете константна $\dot{V}_M = 0$, тада је цела десна страна једначине (3.19) једнака нули и уз коришћење (3.6) и (3.18) она се може написати у следећем облику:

$$r\ddot{\lambda} - V_C \left(2 - \frac{K \cos \theta_M}{V_C}\right)\dot{\lambda} = 0 \quad (3.20)$$

Промена $\lambda(t)$ одређена је претходном хомогеном диференцијалном једначином па да би два система имали идентично понашање за сваку задату почетну даљину, намеће се увођење истог кинематског појачања као што је то већ учињено једначином (3.11).

Комбиновањем једначина (3.6) и (3.11) одређује се веза навигационе константе и кинематског појачања:

$$k = \frac{NV_C}{\cos \theta_{M0} V_M} \quad (3.21)$$

Да би се остварила иста вредност жељеног кинематског појачања N (одређена приликом дизајнирања и синтезе система вођења методом ПН), константа пропорционалне навигације k одређује се једначином (3.21)

У случају непокретног циља и доброг почетног нишањења биће $V_C = V_M$ и $\cos \theta_{M0} = 1$ па је тада $k = N$. Да би кинематски фактор појачања задржао константну вредност (3–5) без обзира на режим гађања покретног циља, константа пропорционалне навигације мења своју вредност по формули (3.21): при гађању "циљева у доласку" код којих је већа вредност брзине приближавања константу пропорционалне навигације k треба сразмерно повећати, а у случају "циљева у одласку" треба је сразмерно смањити.

У литератури [19] уведен је појам промашаја при нултом утрошку енергије, енг. *Zero effort miss* (ZEM), који представља крајњи промашај уз услов да од тренутног времена лета ракета и циљ не маневришу. Помоћу већ дефинисаног преосталог времена (3.8), овај промашај се математички формулише следећом једначином:

$$\text{ZEM} = \dot{y}(t)t_{go} + y(t) \quad (3.22)$$

Из претходне једначине може се закључити да је условни промашај једнак збиру тренутног релативног одступања и компоненте коју ствара релативна брзина због нетачног заузимања угла претицања.

Применом (3.9), једначина (2.53) се трансформише у следећи облик:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t)V_C t_{go} + V_C y(t)}{(V_C t_{go})^2} = \frac{\dot{y}(t)t_{go} + y(t)}{V_C t_{go}^2} = \frac{\text{ZEM}}{V_C t_{go}^2} \quad (3.23)$$

Тиме се закон вођења ТПН дефинисан једначином (3.5) може представити у алтернативном облику помоћу ZEM:

$$a_{MG}^{ТПН} = V_C k \dot{\lambda} = V_C k \frac{\text{ZEM}}{V_C t_{go}^2} = k \frac{\text{ZEM}}{t_{go}^2} \quad (3.24)$$

Ако се ZEM третира као тренутни промашај који се може одредити на основу знања о будућем кретању циља, тада се ТПН закон вођења (3.24) може сматрати законом вођења са предвиђањем или предикцијом.

3.2. Проширена пропорционална навигација

Иако ТПН као закон вођења није изведен узимајући у обзир маневар циља, у пракси се користи и у случају оваквих циљева. За његову примену није потребно одређивање преосталог времена или релативног растојања. Зато је ТПН могуће применити само са угловним сензорима уграђеним у ракету што представља велику предност.

Уколико постоји могућност одређивања маневра циља, укључивањем ове информације у закон вођења може се смањити захтевано командно убрзање ТПН које је у случају маневришућег циља највеће у завршној фази самонавођења, тј., непосредно пре сусрета с циљем.

Проширена пропорционална навигација (ППН) представља управо овакво

побољшање закона вођења ТПН, употребом њеног алтернативног облика датог једначином (3.24).

Уз претпоставку да циљ изводи константан маневар избегавања који је нормалан на линију визирања циља ЛВЦ, $a_{Tn\lambda n}$, тренутни промашај (без даљег маневрисања ракете) који је описан једначином (3.22) биће проширен чланом који потиче од нормалног убрзања циља и представља пређени пут циља за преостало време до сусрета два објекта:

$$ZEM = \dot{y}(t)t_{go} + y(t) + 0.5a_{Tn\lambda n}t_{go}^2, \quad (3.25)$$

Сменом (3.25) у (3.24) добија се израз за закон вођења ППН:

$$a_{MG}^{ППН} = k \frac{\dot{y}(t)t_{go} + y(t) + 0.5 \cdot a_{Tn\lambda n}t_{go}^2}{t_{go}^2} = V_C k \dot{\lambda} + k_T a_{Tn\lambda n}; \quad k_T = k / 2 \quad (3.26)$$

што очигледно представља проширење ТПН у виду додатног члана који зависи од процењеног маневра циља.

3.3. Пропорционална навигација као управљачки проблем

Правило да се линија визирања помера у простору паралелно сама себи карактеристика је паралелног приближавања као метода вођења који на интуитиван начин дефинише ПН као закон вођења такав да чим се угаона брзина линије визирања циља одступа од нуле, генерише се команда нормалног убрзања ракете пропорционална овом одступању у циљу његовог елиминисања.

Из наведеног ПН се може посматрати не као проблем вођења већ као управљачки проблем који има задатак да постигне паралелно приближавање задовољивши следећу једначину:

$$\dot{\lambda}(t) = 0 \quad (3.27)$$

Посматрањем другог облика линеаризованог кинематског модела представљеног у поглављу 2.3 и увођењем временски променљивих коефицијената на следећи начин:

$$b_1 = \frac{1}{r} \quad (3.28)$$

$$a_1 = \frac{\ddot{r}}{r} \quad (3.29)$$

$$a_2 = 2 \frac{\dot{r}}{r} \quad (3.30)$$

једначина (2.59) може се написати у следећем облику

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -b_1 u + b_1 w - a_1 z_1 - a_2 z_2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

где су управљачка и поремећајна величина дефинисане једначином (2.46).

Анализираће се случај ПН, за који је брзина циља константна, тј., нема поремећајног члана у претходној једначини ($w = 0$).

На основу усвојене дефиниције величина стања овог система датих једначином (2.57), карактеристика паралелног приближавања може се представити као услов асимптотске стабилности у односу на стање z_2 , тј. $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = 0$, па ће закон управљања који ово задовољи уједно бити закон вођења по принципу паралелног приближавања.

Према томе, проблем закона вођења може се представити као проблем закона управљања који гарантује асимптотску стабилност система описаног једначином (3.31) у односу на стање z_2 .

За испитивање асимптотске стабилности коришћен је Љапуновљев метод (Прилог А). Љапуновљева функцију за једначину (3.31) бира се као квадрат угаоне брзине линије визирања циља, тј. следећом једначином у којој c_0 представља позитиван коефицијент:

$$V = \frac{1}{2} c_0 z_2^2 \quad (3.32)$$

Извод Љапуновљеве функције дуж било које путање одређене системом једначина (3.31) може се представити као:

$$\dot{V} = c_0 z_2 \dot{z}_2 = c_0 z_2 (-b_1 u - a_1 z_1 - a_2 z_2) \quad (3.33)$$

Негативна одређеност/дефинитност извода Љапуновљеве функције, што одговара стабилности посматраног система, на основу Теорема А.1, може се представити следећом једначином:

$$\dot{V} = c_0 z_2 (-b_1 u - a_1 z_1 - a_2 z_2) \leq -c_1 z_2^2 \quad (3.34)$$

у којој је c_1 позитивни коефицијент.

За случај номиналног курса при константним брзинама ракете и циља биће

$a_1 = \frac{\ddot{r}}{r} = 0$, те неједначина (3.34) постаје:

$$z_2(-b_1 u - a_2 z_2) \leq -\frac{c_1}{c_0} z_2^2 \quad (3.35)$$

Уз претпоставку да су позитивни коефицијенти изабрани тако да је $c_1 \ll c_0$, последња једначина прелази у следећи облик:

$$-a_2 z_2 \leq b_1 u \quad (3.36)$$

Дељењем претходне једначине са позитивном вредношћу b_1 која је одређена једино даљином помоћу једначине (3.28) и уз увођење следећег временски променљивог коефицијента:

$$a_3 = -\frac{a_2}{b_1} = -\frac{2\dot{r}/r}{1/r} = -2\dot{r} = 2V_c \quad (3.37)$$

једначина (3.36) трансформише у следећи облик:

$$u \geq a_3 z_2 = 2V_c \dot{\lambda} \quad (3.38)$$

Коришћењем једначине (2.46), претходна једначина се може написати у облику:

$$a_{MG} = V_c k \dot{\lambda}; \quad k \geq 2 \quad (3.39)$$

Последња једначина представља закон ТПН који је изражен и једначином (3.5).

3.4. Проширена пропорционална навигација као управљачки проблем

У случају маневришућег циља, извод Љапуновљеве функције (3.32) дуж било које путање система (3.31) може се представити као:

$$\dot{V} = c_0 z_2 \dot{z}_2 = c_0 z_2 (-b_1 u + b_1 w - a_1 z_1 - a_2 z_2) \quad (3.40)$$

Негативна одређеност/дефинитност извода Љапуновљеве функције, што одговара асимптотској стабилности посматраног система, може се представити следећом једначином:

$$\dot{V} = c_0 z_2 (-b_1 u + b_1 w - a_1 z_1 - a_2 z_2) \leq -c_1 z_2^2 \quad (3.41)$$

у којој је c_1 позитивни коефицијент.

За случај номиналног курса при константним брзинама ракете и циља биће $a_1 = \frac{\ddot{r}}{r} = 0$ па претходна једначина постаје:

$$z_2 (-b_1 u + b_1 w - a_2 z_2) \leq -\frac{c_1}{c_0} z_2^2 \quad (3.42)$$

Уз претпоставку да су позитивни коефицијенти изабрани тако да је $c_1 \ll c_0$, последња једначина се трансформише у следећи облик:

$$b_1 w - a_2 z_2 \leq b_1 u \quad (3.43)$$

Дељењем претходне једначине са позитивном вредношћу b_1 која је одређена једино даљином помоћу једначине (3.28) и уз увођење следећег временски променљивог коефицијента дефинисаног једначином (3.37), последња једначина трансформише се у следећи облик:

$$u \geq a_3 z_2 = 2V_C \dot{\lambda} + w \quad (3.44)$$

Коришћењем (2.46) једначина (3.44) може се написати у облику:

$$a_{MG}^{ППН} = V_C k \dot{\lambda} + k_T a_{Tn\lambda n}; \quad k \geq 2; \quad k_T = 1 \quad (3.45)$$

Последња једначина слична је закону ППН који је изражен једначином (3.26), а која је изведена за случај константног маневра циља нормалног на ЛВЦ. Директним поређењем ове две једначине, може се уочити да је у последњој једначини члан уз убрзање циља нормално на ЛВЦ мањи $k/2$ пута у односу на исти члан у једначини (3.26) за ППН. Из тог разлога, закон вођења дефинисан једначином (3.45) биће, такође, означен ППН, али са јединичним фактором појачања по нормалном убрзању циља.

3.5. Закони вођења базирани на паралелном приближавању

Коришћењем представљеног начина третирања пропорционалне навигације као управљачког проблема који у основи користи принцип паралелног приближавања, биће изведени нови облици могућих закона вођења базираних на

истом принципу чија се применљивост испитује негативном одређеношћу извода Љапуновљеве функције. За потребе поређења ПН са другим законима вођења може се користити модуо извода Љапуновљеве функције као нека врста индекса перформансе [11],[10].

За систем (3.31) изабрана је Љапуновљева функција (3.32), а њен извод дуж било које путање одређен је једначином (3.33). У циљу генерализације проблема уместо једначине (3.34) негативна одређеност дефинише се на следећи начин:

$$\dot{V} = c_0 z_2 (-b_1 u - a_1 z_1 - a_2 z_2) \leq -c_1 z_2^2 - c_2 z_2^4 \quad (3.46)$$

у којој су c_1 и c_2 позитивни коефицијенти.

За случај номиналног курса при константним брзинама ракете и циља биће $a_1 = \frac{\ddot{r}}{r} = 0$ те једначина (3.34) постаје:

$$z_2 (-b_1 u - a_2 z_2) \leq -\frac{c_1}{c_0} z_2^2 - \frac{c_2}{c_0} z_2^4 \quad (3.47)$$

Уз претпоставку да су позитивни коефицијенти изабрани тако да је $c_1 \ll c_0$, последња једначина прелази у следећи облик:

$$-b_1 u z_2 - a_2 z_2^2 + \frac{c_2}{c_0} z_2^4 \leq 0 \quad (3.48)$$

Дељењем претходне једначине са позитивном вредношћу b_1 која је одређена једино даљином помоћу једначине (3.28) и уз увођење временски променљивог коефицијента a_3 датог са (3.37) и другог временски променљивог коефицијента одређеног следећом једначином:

$$c_3 = \frac{c_2}{c_0} \quad (3.49)$$

једначина (3.48) трансформише се у следећи облик:

$$u \geq 2V_C z_2 + c_3 r z_2^3 \quad (3.50)$$

Коришћењем једначине (2.46), претходна једначина се може написати у облику:

$$a_{MG}^{НПН} = V_C k \dot{\lambda} + c_3 r \dot{\lambda}^3; \quad k \geq 2, \quad c_3 > 0 \quad (3.51)$$

Последња једначина представља нелинеарну пропорционалну навигацију (НПН закон вођења) који ће обезбедити негативну одређеност извода Љапуновљеве функције, а самим тим управљање које ће стабилизирати систем (3.31) у односу на величину стања $z_2 = \dot{\lambda}$, тј. обезбедиће путању такву да је $\dot{\lambda} = 0$, што представља математичку формулацију принципа паралелног приближавања.

Како је при паралелном приближавању пожељно што брже свођење угаоне брзине ЛВЦ на нулту вредност, тј. $\dot{\lambda} = 0$, модул извода усвојене Љапуновљеве функције $|\dot{V}|$ може се усвојити као мера квалитета вођења (индекс перформансе) за поређење закона вођења базираних на овом принципу.

У случају маневришућег циља, у једначини (3.46) постојаће и додатни члан услед маневра циља:

$$\dot{V} = c_0 z_2 (-b_1 u + b_1 w - a_1 z_1 - a_2 z_2) \leq -c_1 z_2^2 - c_2 z_2^4 \quad (3.52)$$

Већ изложеним поступком одређује се потребно управљање за стабилизацију овог система као:

$$a_{MG}^{ПНПН} = V_C k \dot{\lambda} + c_3 r \dot{\lambda}^3 + a_{Tn\lambda n}; \quad k \geq 2, \quad c_3 > 0 \quad (3.53)$$

Закон вођења дефинисан једначином (3.53) представља проширену нелинеарну пропорционалну навигацију (ПНПН).

За ове законе вођења може се закључити да повећање навигационе константе k утиче на брже смањење угаоне брзине ЛВЦ, али то утиче и на увећање осетљивости на шум нарочито за мале вредности $\dot{\lambda}$, што смањује тачност вођења. Превелике вредности навигационе константе могу цео систем вођења учинити недовољно робусним.

Очекује се да систем са временски променљивим појачањем које је веће за случај великих вредности $\dot{\lambda}$, а мање у случају малих вредности измерене угаоне брзине ЛВЦ, оствари боље карактеристике од класичног облика ТПН датог једначином (3.5). Кубни члан у једначинама (3.51) и (3.53) уз правилно изабрану константу c_3 управо томе служи.

3.6. Резултати нумеричке симулације

Представљени закони вођења тестирани су нелинеарном нумеричком симулацијом за ракету земља–ваздух средњег домета. У посматраном сценарију лета претпоставља да циљ лети на висини од $r_{T2}=7\text{km}$ изнад лансирног места при чему су анализирани различите почетне даљине. Типични профил брзине ракете је линеарно растући у првих пар секунди до вредности брзине преко 3М (Маха), а затим опада након престанка рада ракетног мотора, у симулацији је зато као вредност брзине ракете коришћена средња вредност процењена на $V_M = 600 \text{ m/s}$. Брзина циља је константна $V_T = 300 \text{ m/s}$, а уколико циљ маневрише претпостављен је константан нормални маневар избегавања $4g$ нагоре/надоле (или десно/лево) тј. $a_{Tn} = \pm 4 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2$. Максимални нормални маневар ракете ограничен је на $10g$, тј., $a_{MG}^{\max} = \pm 10 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2$, а временска константа аутопилота је $T_M = 0.5 \text{ s}$. Осим поремећаја услед нормалног маневра циља, као други поремећај је анализирана грешка у заузимању угла претицања (*Heading Error*) $\Delta\theta_{M0} = \pm 30^\circ$. Параметри анализираних закона вођења су: $k = 3$ и $c_3 = 30000$.

У досад публикованој литератури [19] и [1] промашај ракете због маневра циља и грешке у заузимању угла претицања одређиван је помоћу адјунгованог метода с тим што је систем самонавођене ракете претходно линеаризован. У овом раду полазимо од нелинеарног модела због чега се не може применити адјунговани метод. Зато је софтвер за нумеричку симулацију прилагођен реализацији великог броја симулација како за гађање циља у "доласку" тако и при гађању у "одласку". Као резултат нумеричке симулације, за различите законе вођења добијени су дијаграми промашаја и нормализоване управљачке енергије у зависности од почетног растојања. Као битне карактеристике једног закона вођења издвајају се максимално могући промашај и нормализована управљачка енергија:

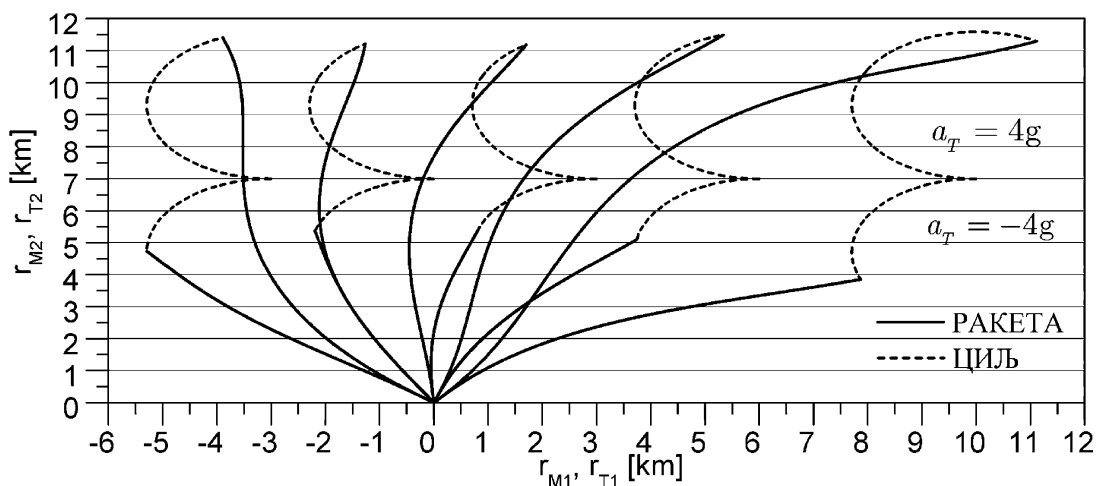
$$\text{Нормализована управљачка енергија} = \int_0^{t_f} a_{MG}^2 dt / g^2 t_f \quad (3.54)$$

3.6.1. Утицај маневра циља

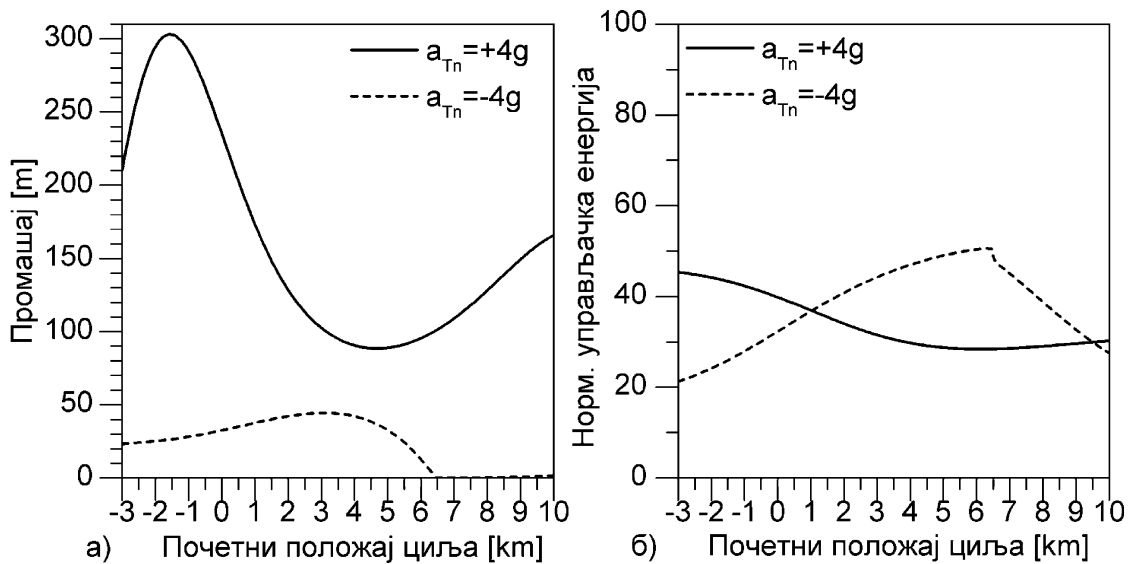
Слика 3.2 се односи на вођење ракете класичном, односно правом,

пропорционалном навигацијом (ПН) а Слика 3.3 показује да промашај и нормализована управљачка енергија ракете зависе од почетног растојања ракете и циља, као и од режима гађања (гађање у "доласку", односно "одласку"). Максимална вредност промашаја се добија за одређено почетно растојање и одређује да ли се овај положај налази у зони лансирања, тј., да ли треба лансирати ракету. За циљ то је најповољнији положај за почетак маневра. Показано је да су промашаји због маневра на горе већи од оних при гађању циља који маневрише на доле.

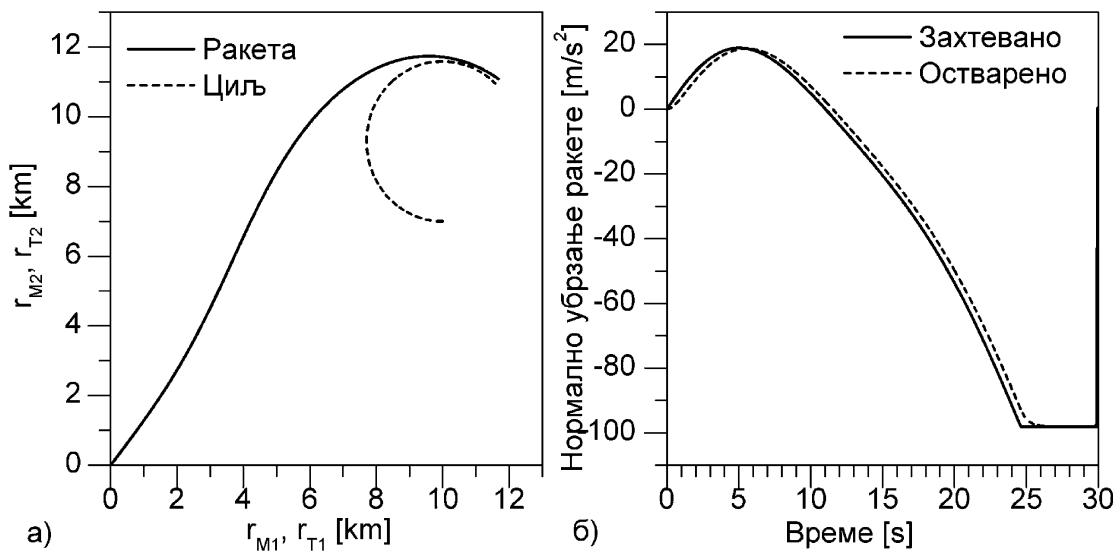
У случају ПН закона вођења, са Сlike 3.3 а) може се закључити да су промашаји превелики и да се овај закон вођења не може користити када циљ врши константни маневар избегавања $a_{Tn} = \mp 4g$. Разлог овако великих промашаја видљив је са Сlike 3.4 на којој је приказана једна карактеристична путања. Нормално убрзање ракете, наиме, ПН закон вођења захтева максималне вредности маневра ракете на крају фазе самонавођења (када се приближава циљу), али због ограничења расположивог маневра ракете $5-6s$ пре доласка до циља достиже се максимална расположива вредност маневра ракете, и зато се јављају велике вредности промашаја.



Слика 3.2 – Карактеристичне путање за маневришући циљ при вођењу методом ППН.

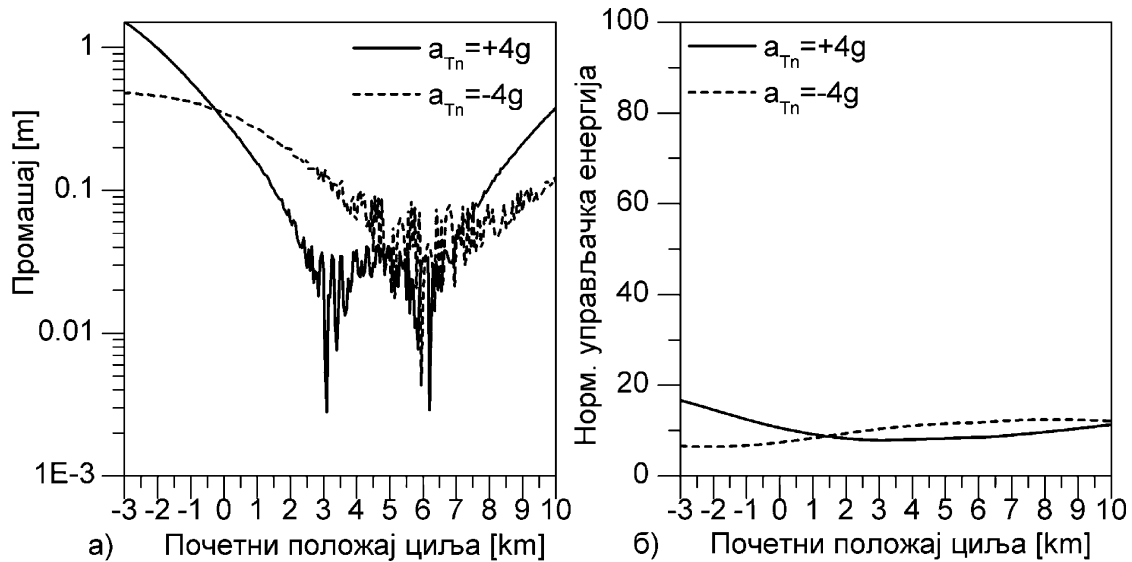


Слика 3.3 – ПН при маневру циља, а) промашај, б) нормализована захтевана управљачка енергија.



Слика 3.4 – ПН при маневру циља, а) путања, б) командно и остварено нормално убрзање ракете.

Резултати нумеричке симулације лета ракете применом проширене пропорционалне навигације (ППН) која врши компензацију нормалног маневра циља приказани су дијаграмима промашаја и нормализоване управљачке енергије у зависности од почетног положаја циља, Слика 3.5.

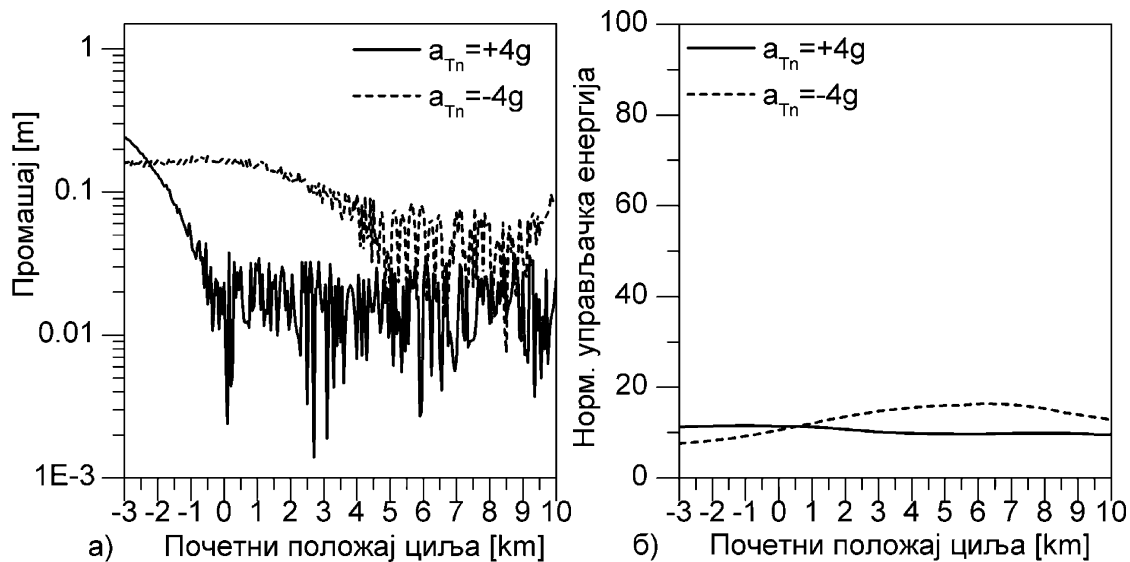


Слика 3.5 – ППН при маневру циља, а) промашај, б) нормализована захтевана управљачка енергија.

Закон проширене пропорционалне навигације (ППН) остварује драстично мање промашаје у односу на ПН и то уз смањени утошак управљачке енергије, али он захтева систем за процену нормалног маневра циља током лета како би вршио његову компензацију.

Закон вођења ППН са континуалном компензацијом маневра циља остварује мање промашаје и мању управљачку енергију у односу на ПН. Без обзира на гађање циља у одласку и доласку, за смер маневра циља на горе/на доле, добијене су максималне вредности промашаја око 1,1m, односно 0,4m.

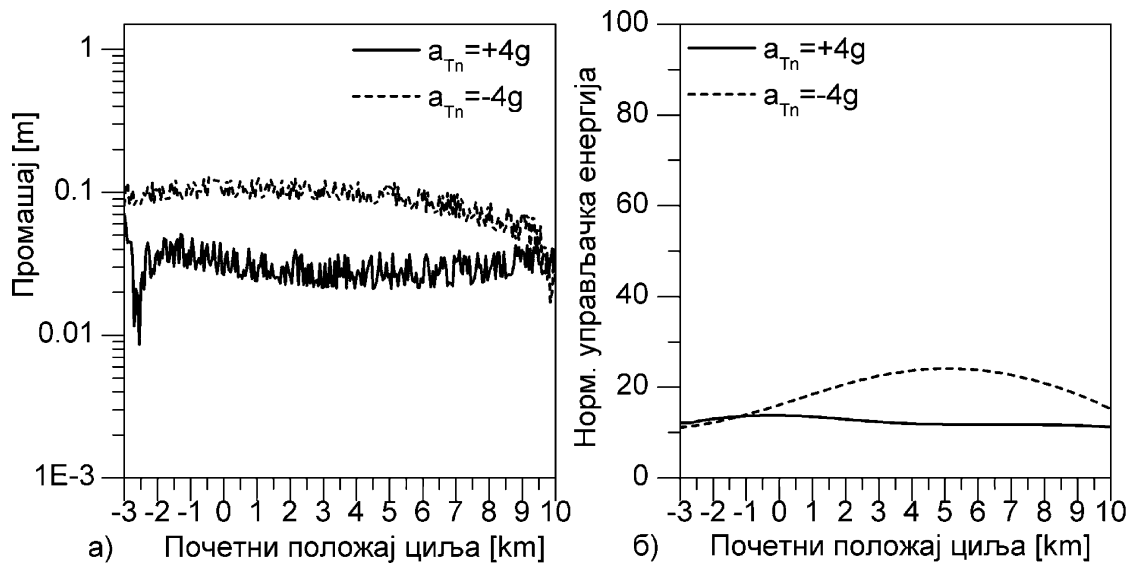
Ако се фактор појачања по нормалном убрзању циља смањи на јединичну вредност (закон вођења ППН, $k_T = 1$), добијају се дијаграми на Слици 3.6, и боље перформансе вођења, тј., мање вредности промашаја и управљачке енергије.



Слика 3.6 – ППН, $k_T = 1$, при маневру циља, а) промашај, б) нормализована захтевана управљачка енергија.

Поређењем дијаграма на Слици 3.6 са Сликама 3.5 и Сликама 3.3 изводи се закључак да закон вођења ППН, $k_T = 1$, остварује мање промашаје ($<0,3m$) у односу на ПН и ППН. Сличан закључак важи и за захтевану управљачку енергију. Мање вредности максималног промашаја код ППН, $k_T = 1$, (Слика 3.6 б) указује да би ракета имала ширу зону лансирања, али као и код ППН закона вођења, потребан је систем за процену нормалног маневра циља током вођења.

Нелинеарна пропорционална навигација (НПН) је једноставна за реализацију јер не захтева познавање нормалног убрзања циља. Нумеричком симулацијом лета ракете са овим законом вођења добијени су дијаграми на Слици 3.7.



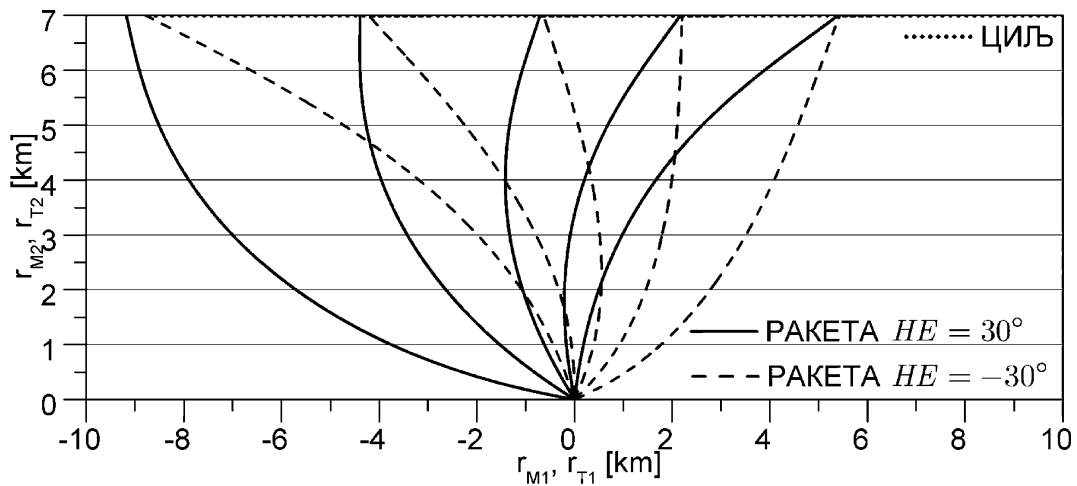
Слика 3.7 – НПН при маневру циља, а) промашај, б) нормализована управљачка енергија.

Закон вођења НПН остварује мање промашаје у односу на ПН, ППН и ППН са $k_T = 1$. Перформансе вођења (промашај и управљачка енергија) су уједначене с обзиром на режим гађања (у доласку или одласку), а мало бољи резултати постижу се при смеру нормалног убрзања циља на горе у односу смера маневра на доле). Међутим, да би се дала потпуна оцена о квалитету овог метода вођења, потребно је испитати и утицај грешке у заузимања угла претицања на остварени промашај што је раду приказано у следећем одељку.

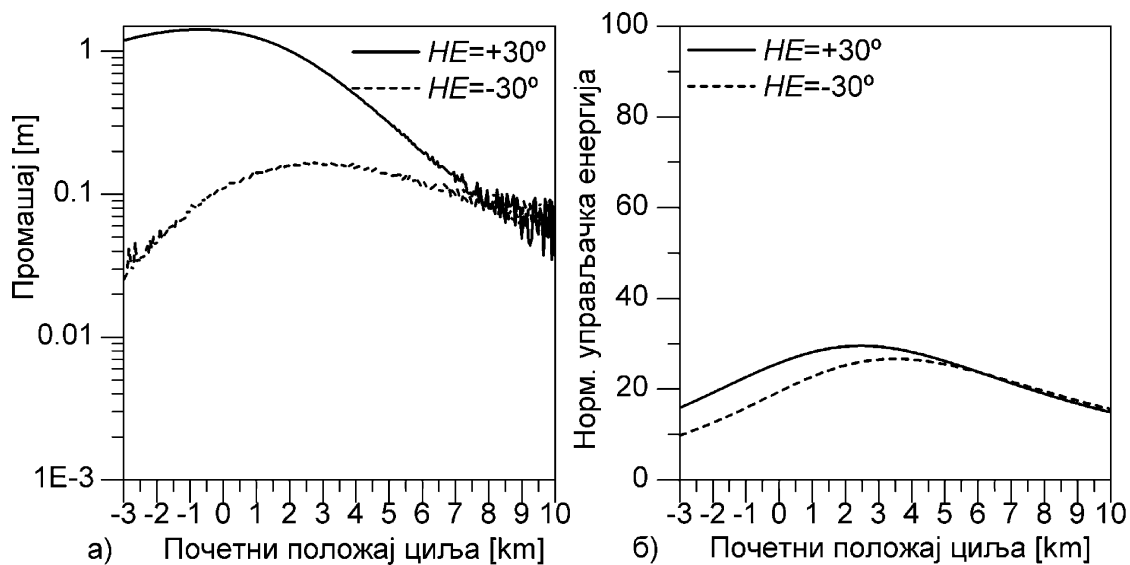
3.6.2. Утицај грешке у заузимања угла претицања

Ако циљ не врши маневар, довољно је анализирати само класичну и нелинеарну пропорционалну навигацију пошто се остали методи вођења свде на ова два.

Утицај грешке у заузимању угла претицања на путање, промашај и захтевану управљачку енергију ракете вођене тачном пропорционалном навигацијом (ПН) приказане су редом на Сликама 3.8 и 3.9. Ако се примени нелинеарна пропорционална навигација (НПН), добијају се дијаграми на Слици 3.10.

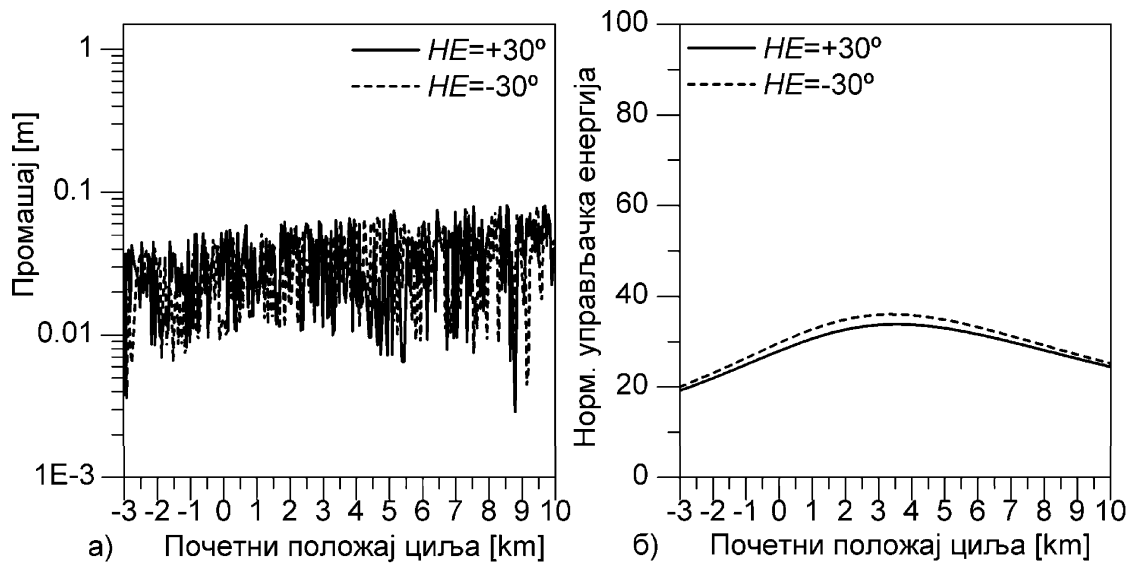


Слика 3.8 – Карактеристичне путање при грешци у заузимању угла претицања при вођењу методом ПН.



Слика 3.9 – ПН при грешци угла претицања, а) промашај, б) нормализована захтевана управљачка енергија.

Код ПН закона вођења остварене су мале вредности промашаја, нарочито у случају негативне грешке у заузимању нишанског угла.



Слика 3.10 – НПН при грешци нишањења, а) промашај, б) нормализована захтевана управљачка енергија.

Нелинеарни пропорционална навигација одређена са (3.51) постиже боље резултате (мање промашаје) уз мало већу потрошњу управљачке енергије.

Глава

4. Оптимално вођење *

4.1. Диференцијалне игре

За већину проблема оптималног вођења може се успешно применити теорија линеарних квадратних диференцијалних игара [4] поглавља 1 и 4, као и [1].

Полазећи од Реф. [1] у овом поглављу дају се опште теоријске основе диференцијалних игара у сажетом облику како би у наредним поглављима истражили њихову примену у формирању алгоритама вођења на ракете земља–ваздух, као и на неке нове типове летелица које су почеле да примењују технологије вођених ракета.

Посматра се систем у простору стања, представљен следећом једначином:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{D}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{D}_2\mathbf{d}; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.1)$$

и одговарајући индекс перформансе:

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_0^{t_f} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w}) dt + \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f) \quad (4.2)$$

Управљачки сигнал $\mathbf{u}(t)$ представља акције ракете такве да минимизују индекс перформансе дат претходном једначином. То је најчешће улаз у аутопилот убрзања ракете који се може представити као систем првог реда са својом временском константом. Ако је ова константа временског кашњења занемарива, тада је управљачки сигнал једнак нормалном убрзању ракете. Управљачки сигнал $\mathbf{u}(t)$ служи као минимизатор у овом оптимизационом проблему.

За непознати сигнал поремећаја $\mathbf{w}(t)$ претпоставља се да је коначне енергије, тј.,

$$\int_0^{t_f} \mathbf{w}^T \mathbf{w} dt < \infty \quad (4.3)$$

Он описује маневар циља. "Паметан" циљ бира свој маневар избегавања на бази потпуног познавања вектора стања $\mathbf{x}(t)$, па акције циља потичу из

* Ово поглавље је делом преузето из [1]

затвореног система управљања и могу се представити као:

$$\mathbf{w}(t) = f_c[\mathbf{x}(t), t] \quad (4.4)$$

Сигнал поремећаја $\mathbf{w}(t)$, као и сигнал управљања $\mathbf{u}(t)$, неће бити ограничени неким чврстим границама као што је нелинеарност типа засићења, већ само преко свог деловања у једначини индекса перформансе (4.2). Сигнал поремећаја $\mathbf{w}(t)$ служи као максимизатор индекса перформансе.

Када се параметар γ у једначини (4.2) повећава и тежи ∞ , смањују се и на крају поништавају акције циља, а проблем оптимизације тада постаје једностран (тј. стандардни линеарно–квадратни проблем управљања).

Улазна величина $\mathbf{d}(t)$ служи као познати маневар избегавања који је све време и у потпуности познат ракети. Овај тип поремећаја се користи за "неинтелигентне" циљеве који имају могућност да извршавају унапред припремљене маневре као што су: константно убрзање, синусно убрзање, итд.

Случај $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2$ може се посматрати тако да ракета процењује убрзање циља $(\mathbf{w} + \mathbf{d})$, где је \mathbf{d} процењена вредност, а да \mathbf{w} представља грешку процене. Зато је потребно пројектовати вођење које ће узети у обзир најнеповољније грешке мерења.

У теорији линеарних квадратних диференцијалних игара, разматра се још један тип поремећаја који потиче из стратегије отвореног система аутоматског управљања, а на бази познавања вектора стања у почетном тренутку може се приказати следећом једначином:

$$\mathbf{w}(t) = f_c(\mathbf{x}_0, t) \quad (4.5)$$

Неће се анализирати овакве стратегије отвореног система, јер уколико је циљ довољно "паметан" да одреди маневар према једначини (4.5), тј., да одреди вектор стања у почетном тренутку, нема разлога зашто не би могао да га одређује и у било ком другом тренутку па самим тим може да одреди маневар као $\mathbf{w}(t) = f_c(\mathbf{x}, t)$. Зато се разматрају само "неинтелигентни" циљеви који могу применити унапред програмиране маневре, или они циљеви који су довољно

"паметни" да користе стратегије затвореног система аутоматског управљања.

Вектор $\mathbf{x}(t)$ чија промена током времена описује лет ракете у близини номиналне путање у себи садржи релативну позицију и брзину (између ракете и циља), а може садржати и убрзање ракете, убрзање циља, итд. Почетне вредности вектора стања $\mathbf{x}(0)$ сматрају се константним (често једнаким нули) и не дају почетну предност ракети. Вектор стања на крају лета $\mathbf{x}(t_f)$ је слободан, тј. ничим ограничен.

Претпоставља се да је матрица утицаја вектора стања $\mathbf{Q} \geq 0$, а најчешће се узима да је $\mathbf{Q} = 0$. Матрица утицаја вектора стања на крају мисије је \mathbf{Q}_f . У већини примера, али не увек, уз претпоставку да је $\mathbf{Q}_f \geq 0$, уводи се захтев малог промашаја помоћу великих позитивних вредности елемената \mathbf{Q}_f који одговарају релативном растојању између ракете и циља.

За тежинску управљачку матрицу \mathbf{R} претпоставља се да је $\mathbf{R} > 0$, па на тај начин добија се случај несингуларних линеарних квадратних игара. Ова претпоставка обезбеђује директну примену вариационог прорачуна да би се одредили кандидати за оптималне контролне и поремећајне сигнале.

Матрица динамике система је \mathbf{A} . Матрица \mathbf{D}_1 је матрица пресликавања непознатих поремећаја на изводе величина стања. Матрица пресликавања управљања (утицај управљања на изводе величина стања) је \mathbf{B} , док је \mathbf{D}_2 матрица пресликавања познатог поремећаја на изводе величина стања.

Параметар синтезе закона вођења γ представља однос маневарских способности ракете и циља.

4.1.1. Правила игре

Уводе се следеће претпоставке:

- Разматра се игра са два учесника, где је један учесник ракета, а други је циљ.

- Временски интервал $[0, t_f]$ унапред је дефинисан и представља трајање игре.

Претпостављена је информациона структура "идеалног познавања вектора стања".

Следећа тврдња показује да има утицаја који учесник почиње игру. Са $\min_u \max_w J(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ је означена ситуација када ракета (u) прва бира своју стратегију; овај избор постаје познат циљу као другом учеснику (w), и онда он бира своју стратегију. Супротно овој ситуацији, ознака $\max_w \min_u J(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ односи се на случај кад други учесник први бира своју стратегију.

Тврдња:

$$\bar{J} = \min_u \max_w J(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \geq \max_w \min_u J(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \underline{J} \quad (4.6)$$

се лако доказује: са $(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1)$ се означи решење $\min_u \max_w J(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ а са $(\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2)$ решење $\max_w \min_u J(\mathbf{u}, \mathbf{w})$. Разматра се прво $\max_w \min_u J(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ проблем. За случај да \mathbf{u} минимизира $J(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ након што је \mathbf{w} изабрао $\mathbf{w} = \mathbf{w}_2$, одатле за свако \mathbf{u} важи:

$$J(\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2) \leq J(\mathbf{u}, \mathbf{w}_2) \quad (4.7)$$

Слично, из $\min_u \max_w J(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ проблема, код кога w максимизује $J(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ након што је \mathbf{u} изабрао $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$, закључује се да за свако \mathbf{w} важи:

$$J(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1) \geq J(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}) \quad (4.8)$$

Заменом $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ у једначину (4.7) и $\mathbf{w} = \mathbf{w}_2$ у једначину (4.8), добија се редом $J(\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2) \leq J(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2)$ и $J(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1) \geq J(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2)$, одакле је $J(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1) \geq J(\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2)$.

У игри у којој \mathbf{u} покушава да минимизује J а \mathbf{w} покушава да минимизује $-J$, каже се да оваква игра има нулту суму. Ако је горња вредност игре $\bar{J} = J(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1)$ једнака доњој вредности игре $\underline{J} = J(\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2)$ тада је $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}^*$ и

$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}^*$ па је:

$$J^* = J(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*) = \bar{J} = \underline{J} \quad (4.9)$$

Тада се пар $(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*)$ назива тачком равнотежног стања и може се рећи да игра има равнотежно стање. Оваква тачка равнотежног стања ће задовољити једначине (4.7) и (4.8) па важи:

$$J(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}) \leq J(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*) \leq J(\mathbf{u}, \mathbf{w}^*) \quad (4.10)$$

где се $J(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*)$ назива вредност игре са нултом сумом. Значење неједнакости равнотежног стања (4.10) је следећа: Ако ракета изабере да примени стратегију \mathbf{u} различиту од \mathbf{u}^* , тада циљ може да примени стратегију \mathbf{w}^* што му даје предност и доводи да је $J(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*) \leq J(\mathbf{u}, \mathbf{w}^*)$. Исто важи и за циљ: ако циљ изабере неку стратегију $\mathbf{w} \neq \mathbf{w}^*$, онда ракета може изабрати да примени \mathbf{u}^* , што доводи до $J(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}) \leq J(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*)$. Зато оба играча треба да се држе својих стратегија равнотежних стања да би минимизовали потенцијални губитак (J за ракету и $-J$ за циљ).

4.1.2. Кандидати за равнотежна стања

Претпоставља се постојање равнотежног стања $(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*)$ које задовољава једначину (4.10). Применом вариационог прорачуна, добијају се кандидати за $(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*)$ који задовољавају потребне услове првог реда.

Нека је \mathbf{x}^* путања стања која одговара улазима $(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*)$ за диференцијалну једначину:

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{D}_1\mathbf{w}^* + \mathbf{B}\mathbf{u}^* + \mathbf{D}_2\mathbf{d} \quad ; \quad \mathbf{x}^*(0) = 0 \quad (4.11)$$

Претпоставља се да је $\mathbf{w} = \mathbf{w}^*$ фиксно, а да је \mathbf{u}^* поремећено и дато као:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \eta\bar{\mathbf{u}} \quad (4.12)$$

где је $\bar{\mathbf{u}}$ поремећајни сигнал, а η представља неку малу скаларну вредност.

Тада \mathbf{x} , као поремећени вектор стања задовољава:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{D}_1\mathbf{w}^* + \mathbf{B}(\mathbf{u}^* + \eta\bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{D}_2\mathbf{d} \quad ; \quad \mathbf{x}(0) = 0 \quad (4.13)$$

Одузимањем једначине номиналних вредности (4.11) од једначине поремећених вредности (4.13), добија се једначина по одступањима:

$$\frac{d(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \mathbf{B}\eta\bar{\mathbf{u}} \quad (4.14)$$

Ако се $\bar{\mathbf{x}}$ дефинише као:

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^*}{\eta} \quad (4.15)$$

једначина (4.14) постаје:

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \quad ; \quad \bar{\mathbf{x}}(0) = 0 \quad (4.16)$$

Замењујући једначине (4.12) и (4.15) у једначину индекса перформансе (4.2) добија се:

$$J = J_\eta(\mathbf{u}, \mathbf{w}^*) = \int_0^{t_f} \left[(\mathbf{x}^* + \eta\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}^* + \eta\bar{\mathbf{x}}) + (\mathbf{u}^* + \eta\mathbf{u})^T \mathbf{R}(\mathbf{u}^* + \eta\mathbf{u}) - \gamma^2 \mathbf{w}^{*T} \mathbf{w}^* \right] dt + \left[\mathbf{x}^*(t_f) + \eta\bar{\mathbf{x}}(t_f) \right]^T \mathbf{Q}_f \left[\mathbf{x}^*(t_f) + \eta\bar{\mathbf{x}}(t_f) \right] \quad (4.17)$$

Пошто \mathbf{u}^* по својој дефиницији, минимизује индекс перформансе, то $J_\eta(\mathbf{u}, \mathbf{w}^*)$ не може бити повољније од $J(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*)$, па њен минимум мора бити за $\eta = 0$. Последица тога је да линеарни коефицијент уз η у једначини (4.17) мора бити једнак нули (у супротном би увек постојало неко η које побољшава индекс перформансе). Због тога је:

$$\int_0^{t_f} \left[\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}^* + \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} \mathbf{u}^* \right] dt + \bar{\mathbf{x}}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{x}^*(t_f) = 0 \quad (4.18)$$

Са $\boldsymbol{\lambda}(t)$ се означава адјунгована променљива, која задовољава следећу једначину:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q} \mathbf{x}^* \quad ; \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{Q}_f \mathbf{x}^*(t_f) \quad (4.19)$$

Заменом једначине (4.19) у једначину (4.18), добија се:

$$\int_0^{t_f} \bar{\mathbf{x}}^T (-\mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} - \dot{\boldsymbol{\lambda}}) dt + \int_0^{t_f} \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} \mathbf{u}^* dt + \bar{\mathbf{x}}^T(t_f) \boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0 \quad (4.20)$$

Замена једначине (4.16) у последњу једначину (4.20), даје:

$$\int_0^{t_f} (-\dot{\bar{\mathbf{x}}}^T \boldsymbol{\lambda} + \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} - \bar{\mathbf{x}}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}) dt + \int_0^{t_f} \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} \mathbf{u}^* dt + \bar{\mathbf{x}}^T(t_f) \boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0 \quad (4.21)$$

Како је:

$$\frac{d(\bar{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\lambda})}{dt} = \dot{\bar{\mathbf{x}}}^T \boldsymbol{\lambda} + \bar{\mathbf{x}}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} \quad ; \quad \bar{\mathbf{x}}(0) = 0 \quad (4.22)$$

тада је:

$$\int_0^{t_f} \bar{\mathbf{u}}^T [\mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{R} \mathbf{u}^*] dt = 0 \quad (4.23)$$

Због тога што је $\bar{\mathbf{u}}$ произвољно, може се закључити да је члан у загради једнак нули, па се налази:

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (4.24)$$

Слично, ако се усвоји $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$, и анализира поремећај стратегије \mathbf{w}^* такав да је $\mathbf{w} = \mathbf{w}^* + \eta \bar{\mathbf{w}}$, добило би се да \mathbf{w}^* максимизује резултујући индекс перформансе само ако је:

$$\mathbf{w}^* = \gamma^{-2} \mathbf{D}_1^T \boldsymbol{\lambda} \quad (4.25)$$

Заменом једначина (4.24) и (4.25) у једначину (4.11) доводи до следећег проблема граничних вредности са две тачке:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^* \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \gamma^{-2} \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_1^T - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{x}^*(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \boldsymbol{\lambda}(t_f) &= \mathbf{Q}_f \mathbf{x}^*(t_f) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Према томе, решење једначине (4.26) води до потребних услова за оптималност, где се почетни и крајњи услови добијају из једначина (4.11) и (4.19).

4.2. Примена линеарно–квадратних диференцијалних игара у синтези закона вођења

4.2.1. Формулација проблема

Посматра се исти систем једначина раванског сусрета, који је у простору стања у матричном облику већ представљен у поглављу 2.1.2 и описан је диференцијалном једначином (2.48), тј.:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Dw} \quad ; \quad \mathbf{x}(t_0) = [x_1(t_0), x_2(t_0)]^T \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.27)$$

уз претпоставку да је циљ довољно интелигентан да врши не једноставан већ оптималан маневар ради увећања промашаја.

У једначинама закона вођења неће бити члана који захтева мерење нормалног убрзања циља, међутим постоји члан $\gamma > 1$ који представља параметар маневарских способности ракете и циља. Подразумева се да циљ има мању маневарску способности од ракете.

Проблем управљања се своди на минимизирање индекса перформансе (4.2) који је у овом случају [5]:

$$J = \frac{b}{2} x_1^2(t_f) + \frac{c}{2} x_2^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [u^2(t) - \gamma^2 w^2] dt \quad (4.28)$$

где тежински коефицијенти $b > 0$ минимизује промашај, а $c > 0$ минимизује крајњу нормалну брзину. Да би се постигао за погодак $x_1(t_f) = 0$, потребно је да $b \rightarrow \infty$, а за рандеву вођење је поред претходног испуњен и услов $x_2(t_f) = 0$, те је потребно да и $c \rightarrow \infty$.

4.2.2. Идеална ракета

4.2.2.1. Опште решење

Адјунговане једначине су:

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \quad , \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \quad , \quad u = -\lambda_2 \quad , \quad w = \frac{\lambda_2}{\gamma^2} \quad (4.29)$$

са граничним условима:

$$\lambda_1(t_f) = bx_1(t_f) \quad , \quad \lambda_2(t_f) = cx_2(t_f) \quad (4.30)$$

Решења система адјунгованих једначина су:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= bx_1(t_f) \\ \lambda_2 &= bx_1(t_f)[t_f - t] + cx_2(t_f) \end{aligned} \quad (4.31)$$

одакле су управљање:

$$u = -[bx_1(t_f - t) + cx_2(t_f)] \quad (4.32)$$

и оптимални маневар циља:

$$w = \gamma^{-2}[bx_1(t_f - t) + cx_2(t_f)] \quad (4.33)$$

Понављањем претходне процедуре заменом (4.32) и (4.33) у (4.27) па интегралњем од t_0 до t , следе изрази за $x_1(t)$ и $x_2(t)$ из којих се након смене $t = t_f$ одређују решења по непознатим крајњим вредностима $x_1(t_f)$ и $x_2(t_f)$ а након тога одређује управљање, користећи MAPLE 17 Програм Б.1.

Почетни тренутак t_0 је произвољан $t_0 = t$, па је управљање линеарно по $x_1(t)$ и $x_2(t)$, тј. добијени израз за управљање има следећи облик:

$$u(t) = -[g_1 x_1(t) + g_2 x_2(t)] \quad (4.34)$$

Увођењем преосталог времена до сусрета ракете и циља $t_{go} = t_f - t$ и након упрошћавања појачања су дата следећим једначинама:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{b\gamma^2 t_{go} \left(\frac{1}{2} t_{go} c (\gamma^2 - 1) + \gamma^2 \right)}{t_{go}^4 \frac{cb}{12} (\gamma^2 - 1)^2 + \left(t_{go} c + t_{go}^3 \frac{b}{3} \right) \gamma^2 (\gamma^2 - 1) + \gamma^4} \\ g_2 &= \frac{\gamma^2 \left[t_{go}^3 \frac{cb}{3} (\gamma^2 - 1) + (t_{go}^2 b + c) \gamma^2 \right]}{t_{go}^4 \frac{cb}{12} (\gamma^2 - 1)^2 + \left(t_{go} c + t_{go}^3 \frac{b}{3} \right) \gamma^2 (\gamma^2 - 1) + \gamma^4} \end{aligned} \quad (4.35)$$

У случају једностране оптимизације (када циљ не врши оптимални маневар избегавања) изрази за коефицијенте g_1 и g_2 , се поједностављују и одређују усвајањем да $\gamma \rightarrow \infty$.

Услов за погодак еквивалентан је $b \rightarrow \infty$ и појачања се поједностављују:

$$g_1 = \frac{6t_{go} + \frac{12}{c(1-\gamma^{-2})}}{t_{go}^3(1-\gamma^{-2}) + 4\frac{t_{go}^2}{c}} \quad (4.36)$$

$$g_2 = \frac{4t_{go} + \frac{12}{c(1-\gamma^{-2})}}{t_{go}^2(1-\gamma^{-2}) + 4\frac{t_{go}}{c}}$$

Када је $c > 0$ појачања су коначна за свако $t_{go} \in (0, t_f)$. Међутим, за $c < 0$ добија се случај максимизовања нормалне брзине у тренутку сусрета ракете и циља. Појачања су коначна само ако је испуњен услов:

$$t_{go} < \frac{4}{c(1-\gamma^{-2})} \quad (4.37)$$

Како је максимална вредност леве стране претходне неједначине на посматраном интервалу једнака $\max(t_{go}) = t_f$ следи следећи услов који обезбеђује одсуство коњугованих тачака

$$t_f < \frac{4}{c(1-\gamma^{-2})} \quad (4.38)$$

Зависно од параметра c разликују се два гранична случаја.

4.2.2.2. Без услова по нормалној брзини

Ако нормална релативна брзина приликом сусрета ракете с циљем није битна, тада је $c = 0$ и појачања су:

$$g_1 = \frac{3}{t_{go}^2(1-\gamma^{-2})} \quad (4.39)$$

$$g_2 = \frac{3}{t_{go}(1-\gamma^{-2})}$$

Увођењем еквивалентног појачања:

$$N' = \frac{3}{(1-\gamma^{-2})} \quad (4.40)$$

овај закон вођења може се изразити на следећи начин:

$$u^{ТПНДИ} = -N'V_C\dot{\lambda} \quad (4.41)$$

и биће означен као тачна пропорционална навигација применом диференцијалних игара (ТПНДИ):

$$a_{MG}^{ТПНДИ} = \frac{3V_C\dot{\lambda}}{(1 - \gamma^{-2})} \quad (4.42)$$

У поређењу са ТПН (3.5) код кога је константа навигације $k = 3$, метод синтезе закона вођења путем диференцијалних игара даје увећану навигациону константу у зависности од односа маневарске способности ракете и циља. До сад је на основу емпиријских сазнања навигациона константа увек нешто увећавана ако се радило о мисији ракета против маневришућих циљева.

4.2.2.3. Рандеву вођење

Случај $c \rightarrow \infty$ минимизује и нормалну брзину приликом судара, па су појачања следећа:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{6}{t_{go}^2 (1 - \gamma^{-2})} \\ g_2 &= \frac{4}{t_{go} (1 - \gamma^{-2})} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Усвајањем еквивалентног појачања (4.40) овај закон оптималног рандеву вођења применом диференцијалних игара (ОРВДИ), може се представити у следећем облику:

$$a_{MG}^{ОРВДИ} = V_C \left(4\dot{\lambda} + \frac{2}{t_{go}} \lambda \right) \frac{1}{(1 - \gamma^{-2})} \quad (4.44)$$

Оптимално рандеву вођење (ОРВ) у случају једностране оптимизације (када циљ не врши оптимални маневар избегавања) одређује се усвајањем да $\gamma \rightarrow \infty$, па је:

$$a_{MG}^{ОРВ} = V_C \left(4\dot{\lambda} + \frac{2}{t_{go}} \lambda \right) \quad (4.45)$$

Поређењем ове две једначине које представљају ТПН са $k = 4$ и још једном повратном везом по углу линије визирања, применом диференцијалних игара се

добијају увећана појачања зависно од параметра маневарске способности γ . Ако $\gamma \rightarrow \infty$ (маневарска способност ракете је вишеструко већа од ове карактеристике циља), појачања теже вредностима које важе за ОРВ.

4.2.3. Ракета са аутопилотом

Претпоставља се да ракета са аутопилотом има временско кашњење првог реда при постизању задате команде вођења (2.49), као што је уведено у поглављу 2.1.2 и посматра се раније представљен систем (4.27).

Ради добијања што једноставнијих аналитичких израза за појачања, у индексу перформансе који се минимизира занемариће се утицај завршне нормалне брзине, тако да се (4.28) трансформише у облик:

$$J = \frac{b}{2} x_1^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [u^2(t) - \gamma^2 w^2] dt \quad (4.46)$$

Адјунговане једначине су исте као (4.29) али је један гранични услов измењен у односу на (4.30), тј.,:

$$\lambda_1(t_f) = bx_1(t_f) \quad , \quad \lambda_2(t_f) = 0 \quad (4.47)$$

Пошто су решења система адјунгованих једначина:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= bx_1(t_f) \\ \lambda_2 &= bx_1(t_f)[t_f - t] \end{aligned} \quad (4.48)$$

налазе се оптимална решења за ракету, односно циљ:

$$u = -[bx_1(t_f - t)] \quad (4.49)$$

$$w = \gamma^{-2} [bx_1(t_f - t)] \quad (4.50)$$

Понављањем претходне процедуре заменом (4.49) и (4.50) у (4.27) па интегралњем од t_0 до t , следе изрази за $x_1(t)$ и $x_2(t)$ из којих се након смене $t = t_f$ одређују решења по коначним вредностима величина стања $x_1(t_f)$ и $x_2(t_f)$, односно оптимално управљање ракете и циља, користећи Програм Б.2 за MAPLE 17.

Почетни тренутак t_0 је произвољан па се може усвојити $t_0 = t$ чиме се добија

линеарно управљање у функцији од времена $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Увођењем преосталог времена до сусрета $t_{go} = t_f - t$, као и релативног односа ове величине према временској константи аутопилота $h = \frac{t_{go}}{T_M}$, управљање се може изразити у следећој форми:

$$u(t) = -[g_1 x_1(t) + g_2 x_2(t) + g_3 x_3(t)] \quad (4.51)$$

$$g_1 = \frac{6h^2(h-1+e^{-h})}{t_{go}^2 \left(\frac{6}{T_M^3 b} + 2(1-\gamma^{-2})h^3 - 6h^2 + 6h - 12he^{-h} - 3e^{-2h} + 3 \right)}$$

$$g_2 = \frac{6h^2(h-1+e^{-h})}{t_{go} \left(\frac{6}{T_M^3 b} + 2(1-\gamma^{-2})h^3 - 6h^2 + 6h - 12he^{-h} - 3e^{-2h} + 3 \right)} \quad (4.52)$$

$$g_3 = \frac{6(h-1+e^{-h})^2}{\frac{6}{T_M^3 b} + 2(1-\gamma^{-2})h^3 - 6h^2 + 6h - 12he^{-h} - 3e^{-2h} + 3}$$

Увођењем ефективне навигационе константе

$$N' = \frac{6h^2(h-1+e^{-h})}{\frac{6}{T_M^3 b} + 2(1-\gamma^{-2})h^3 - 6h^2 + 6h - 12he^{-h} - 3e^{-2h} + 3} \quad (4.53)$$

појачања постају:

$$g_1 = \frac{N'}{t_{go}^2}$$

$$g_2 = \frac{N'}{t_{go}}$$

$$g_3 = \frac{N'}{h^2} (h-1+e^{-h}) \quad (4.54)$$

Користећи (2.40) дефиницију величина стања (тј. $x_1 = y$ и $x_2 = \dot{y}$), овај закон вођења са минималним утрошком енергије применом диференцијалних игара (ВМЕДИ), може се представити у облику:

$$a_{MG}^{ВМЕДИ} = N' \left(V_C \dot{\lambda} + \frac{h-1+e^{-h}}{h^2} a_{Mn} \right) \quad (4.55)$$

Структура ВМЕДИ закона вођења одговара структури класичне пропорционалне навигације (ППН) проширеној за додатну повратну везу по оствареном нормалном убрзању ракете, док се константа навигације непрекидно одређује на основу познате временске константе аутопилота и преосталог времена до сусрета ракете и циља.

Вођење са минималним утрошком енергије (ВМЕ) у случају једностране оптимизације (када циљ не врши оптимални маневар избегавања, већ је маневар циља познат ракети) одређује се усвајањем да $\gamma \rightarrow \infty$ и $b \rightarrow \infty$, па је ефективна навигациона константа:

$$N' = \frac{6h^2(h-1+e^{-h})}{2h^3 - 6h^2 + 6h - 12he^{-h} - 3e^{-2h} + 3} \quad (4.56)$$

У закону вођења фигурише и процењени нормални маневар циља:

$$a_{MG}^{BME} = N' \left(V_c \dot{\lambda} + \frac{h-1+e^{-h}}{h^2} a_{Mn} + \frac{1}{2} a_{Tn} \right) \quad (4.57)$$

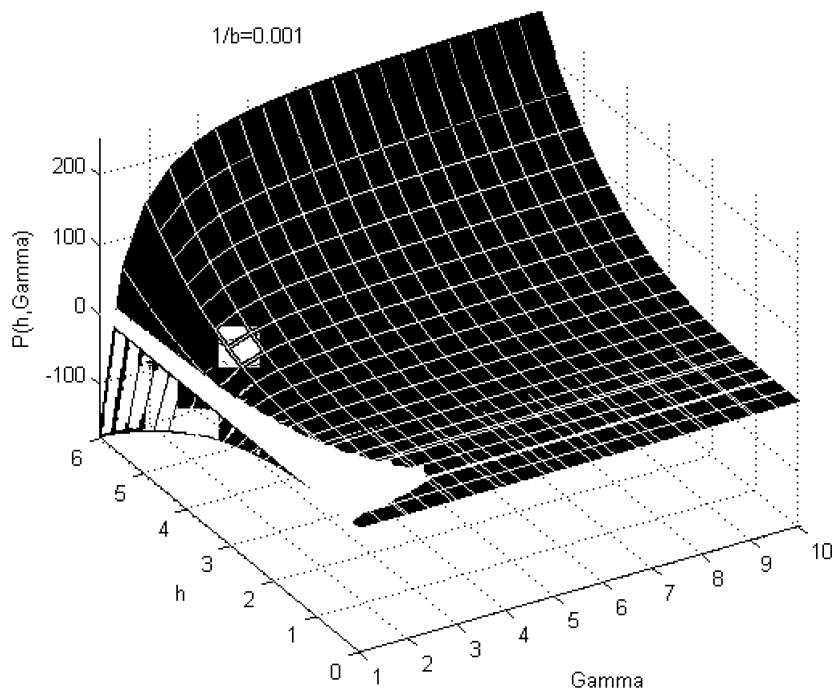
Структура вођења са минималним утрошком енергије (ВМЕ) одговара структури проширене пропорционалне навигације (ППН) уз увођење додатне повратне везе по оствареном нормалном убрзању ракете, a_{Mn} , док се константа навигације непрекидно одређује на основу познате временске константе аутопилота и преосталог времена до сусрета ракете и циља.

Анализом израза за N' за било коју коначну вредност параметра маневарских способности ракете и циља γ показује се да у случају диференцијалних игара постоје коњуговане тачке (док у случају једностране оптимизације не постоје). За испитивање коњугованих тачака, потребно је укључити избор параметра $b < \infty$ и истражити услове за избегавање позитивних вредности коренова имениоца у појачањима (4.52), тј. нула следећег полинома:

$$P(\gamma, h, b) = \frac{6}{T_M^3 b} + 2(1 - \gamma^{-2})h^3 - 6h^2 + 6h - 12he^{-h} - 3e^{-2h} + 3 \quad (4.58)$$

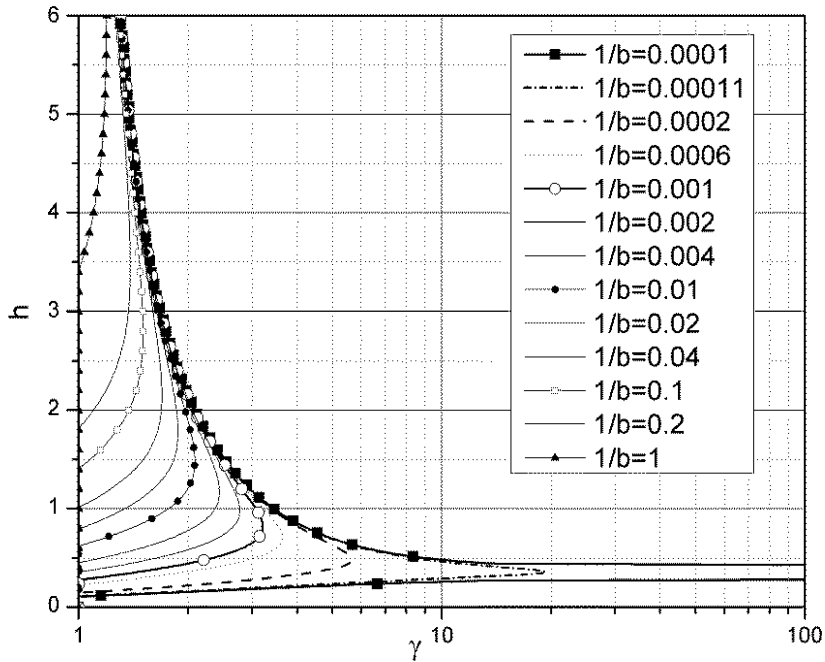
За укупно трајање лета од $t_f = 3s$ и $T_M = 0.5s$ параметар $h = \frac{t_{go}}{T_M}$ се током времена лета мења у интервалу $h \in [0, 6]$. Растеређивањем услова идеалног

погодка, тј., усвајањем неке коначне вредности, нпр., $b = 1000$ и графичким приказом вредности карактеристичног полинома (4.58) у домену $\gamma \in [1, 10]$ на Слици 4.1, уочава се да је током целог лета $h \in [0, 6]$ могуће избећи нуле карактеристичног полинома ако је $\gamma > 3.25$.



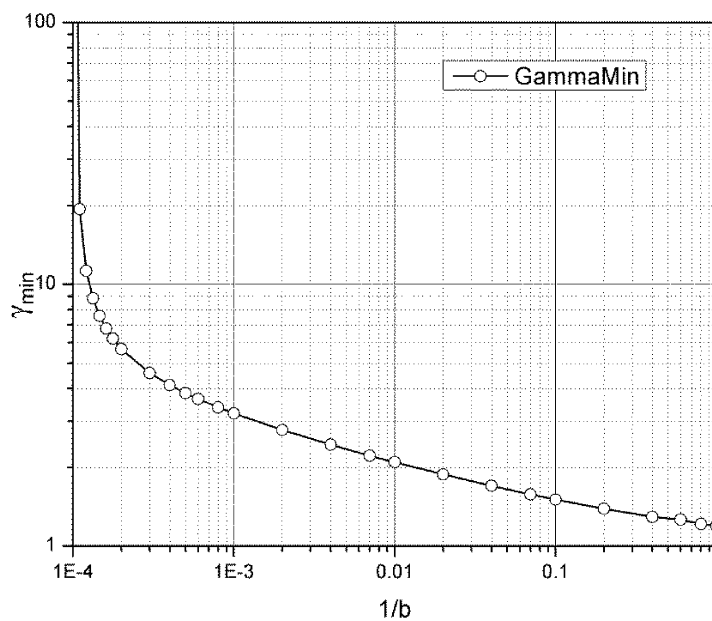
Слика 4.1 – Графички приказ полинома $P(\gamma, h, b)$ за $b = 1000$.

Издвајањем пресечних контура нула карактеристичног полинома за различите вредности параметра b формира се следећи дијаграм:



Слика 4.2 – Издвојене контуре нула карактеристичног полинома појачања.

На основу издвојених контура са Сликe 4.2, за разне вредности параметра b може се са сваке контуре издвојити превојна тачка тј. минимална вредност параметра маневарских способности ракете и циља γ која обезбеђује непостојање коњугованих тачака и то приказати дијаграмом на Слици 4.3:



Слика 4.3 – Зависност параметра маневарских способности γ и параметра промашаја b у појави коњугованих тачака.

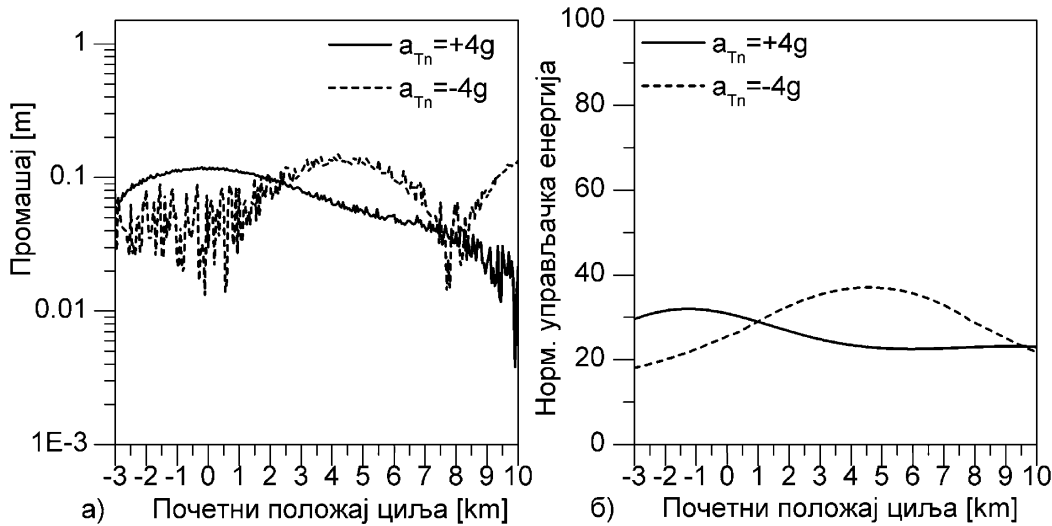
Из ове анализе јасно је да се мора одустати од услова идеалног поготка и толерисати нека коначна вредност промашаја, односно одступити од услова $b \rightarrow \infty$ у индекс перформансе. Последица је да ће се површина приказана на Слици 4.1 подићи за вредност $b / (bT_M^3)$ и формирати нову пресечну контуру која ће обезбедити непостојање коњугованих тачака при мањим вредностима параметра маневарских способности γ . Ако се γ може изабрати довољно велико, потребно је мање подизање површи параметром b , тј., мора постојати компромис у избору ова два параметра при синтези закона вођења. Другим речима не може се постићи мали промашај (велико b) са малом маневарском способношћу (малим γ).

Синтеза закона вођења методом диференцијалних игара отвара нове могућности у борби против интелигентних циљева, али за разлику од метода једностране линеарно–квадратне оптимизације, доноси нови проблем да конструктор мора да одлучи о вредностима параметра промашаја b и параметра маневарских способности ракете и циља γ тако да се не појаве коњуговане тачке током трајања лета. Ова анализа мора се извршити за сваки специфични сценарио лета на начин као што је то приказано на Слици 4.3, са које види да уколико $1/b$ веће (тј. дозвољава се већи промашај) утолико је параметар γ , односно захтеви за расположивом маневарском способношћу ракете су блажи. Према томе, величине b и γ су конструкторски параметри којима се прави компромис између аеродинамичке конфигурације, тј., маневарске способности ракете која се не може синтетички побољшати, и закона вођења преко дозвољеног промашаја који, с друге стране, одређује избор ефикасне бојеве главе. Резултат синтезе закона вођења јесте избор тачке $(1/b, \gamma)$ изнад криве са Сlike 4.3.

4.3. Резултати нумеричке симулације

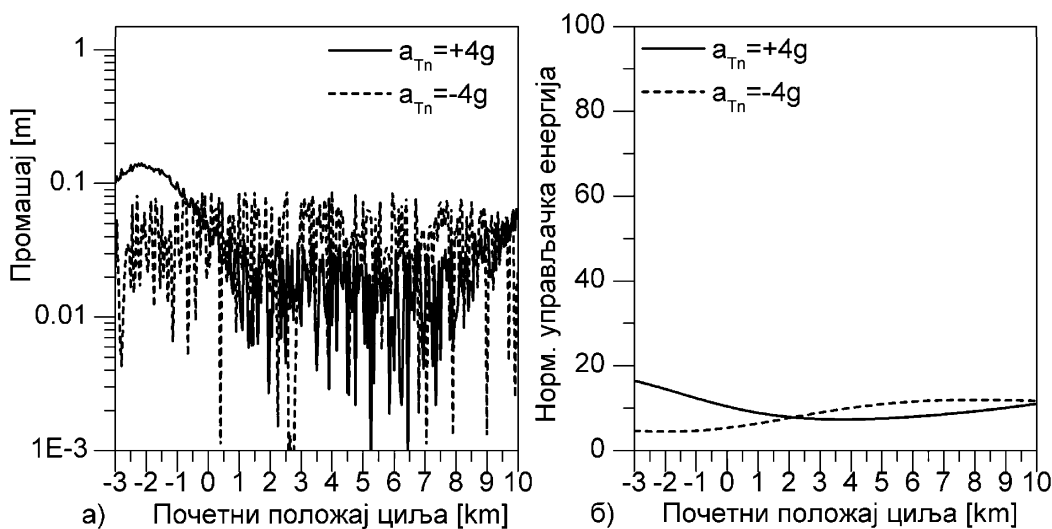
Промашај и захтевана енергија у случају посматраног сценарија сусрета ракете и циља представљеног у поглављу 3.6, за оптимално рандеву вођење (4.45), приказан је на Слици 4.4. Овај, ОРВ закон вођења (као и вођење са минималним утрошком енергије, ВМЕ закон вођења) одређен је помоћу линеарне квадратне

једностране оптимизације, односно добија се методом диференцијалних игара ако $\gamma \rightarrow \infty$. Анализа резултата нумеричке симулације из [1], овде су проширени истраживањем особина вођења при гађању ваздушног циља у одласку и доласку применом нелинеарног раванског математичког модела.



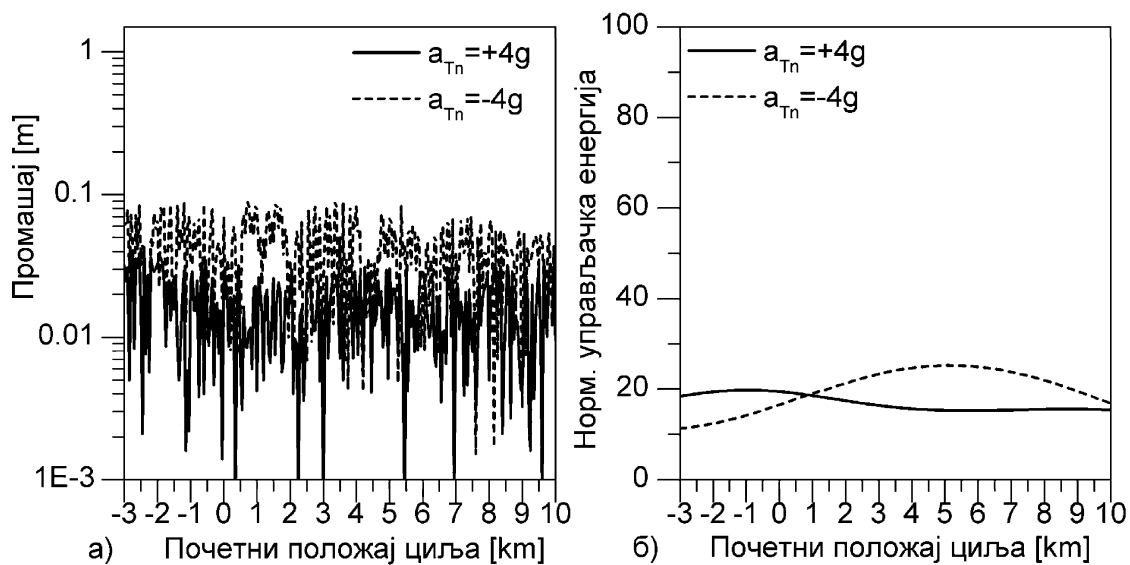
Слика 4.4 – Оптимално рандеву вођење (ОРВ): а) промашај, б) нормализована захтевана управљачка енергија.

Ако ракета мери своје нормално убрзање и врши предикцију нормалног убрзања циља, може се применити вођење са минималним утрошком енергије, ВМЕ (4.57). Слика 4.5 показује да су остварени мали промашаји уз минимални утрошак управљачке енергије.



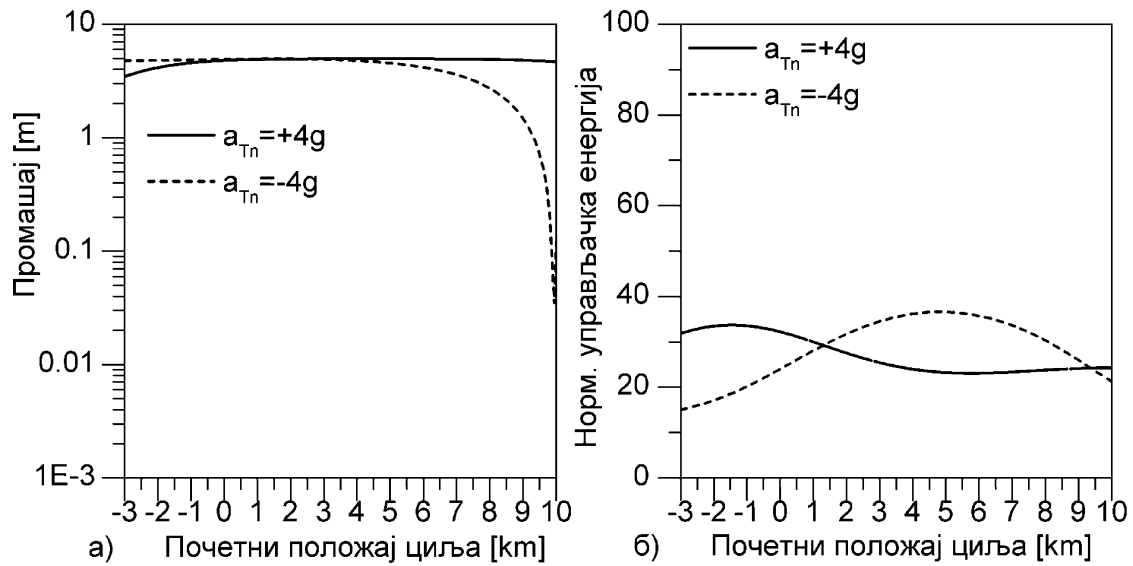
Слика 4.5 – Вођење са минималним утрошком енергије (ВМЕ): а) промашај, б) нормализована захтевана управљачка енергија.

Применом теорије диференцијалних игара, тј., двостране оптимизације подразумева се оптимални маневар циља па у синтези закона вођења одређених овим методом не врши се процена случајне компоненте нормалног убрзања циља. Раније одређена класична пропорционална навигација (ТПН) и оптимално рандеву вођење (ОРВ) се трансформишу у законе вођења ТПНДИ (4.42) и ОРВДИ (4.44) који су добијени применом метода диференцијалних игара. Фактори појачања ових метода вођења додатно су повећани множењем са величином $1 / (1 - \gamma^{-2})$. Усвајањем параметра маневарских способности ракете и циља $\gamma = 1.4$, драстично се смањује остварени промашај у односу на тачну (класичну) пропорционалну навигацију, ТПН, што је приказано на Слици 4.6.



Слика 4.6 – Тачна пропорционална навигација са применом диференцијалних игара (ТПНДИ): а) промашај, б) нормализована захтевана управљачка енергија.

Ако је нормално убрзање циља непознато ракети, вођење са минималним утрошком енергије (ВМЕ) трансформише се у ВМЕДИ (4.55) закон вођења. Параметри $b = 100, \gamma = 2,1$ су изабрани у складу са Сликаом 4.3 како се не би појавиле коњуговане тачке у решењу закона вођења прихватајући увећани промашај. Одговарајући резултати нумеричке симулације приказани су на Слици 4.7. У зависности од режима гађања циља (у одласку или доласку), овај закон вођења је остварио промашаје ≤ 5 m, Слика 4.7.



Слика 4.7 – Вођење са минималним утрошком енергије применом диференцијалних игара (ВМЕДИ): а) промашај, б) нормализована захтевана управљачка енергија.

Глава

5. Вођење методом клизања

Системи аутоматског управљања који се заснивају на методи клизања представљају специјалну форму система са променљивом структуром из класе нелинеарних система управљања.

Почетак истраживања ових система везана су за прве радове у Совјетском Савезу још 1957. године. Захваљујући развоју компјутерске и сензорске технологије и њених примена у ракетној техници последњих 20–ак година дошло је до интензивног истраживања овог метода у оквиру научне дисциплине вођења и управљања ракета и код западних земаља, [23].

Код управљања методом клизања трајекторије унутрашњих стања система се "форсирају" да достигну тзв. клизну површину (која у случају система 2. реда представља праву линију) за неко коначно време, и да надаље једноставно "клизају" у нулто равнотежно стање по клизној површини. Кретање по клизној површини не зависи од нелинеарности и поремећаја у систему.

Примена управљања методом клизања код дигиталних пнеуматских система управљања ради повећања енергетске ефикасности приказана је у [24].

Примарна мотивација за истраживање могућности примене овог метода управљања на системе самонавођених ракета била је да се формирају алгоритми вођења који ће бити довољно ефикасни против циљева чији је маневар непознат ракети.

5.1. Уводни пример

Посматра се систем другог реда [25], описан следећим једначинама:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= h(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \cdot u \end{aligned} \quad (5.1)$$

где су $h(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ непознате нелинеарне функције и $g(\mathbf{x}) > g_0 > 0$, за $\forall \mathbf{x} \in R^2$.

Циљ је одредити закон управљања који на основу мерења величина стања стабилише нулто равнотежно стање.

Уз претпоставку да је могуће реализовати закон управљања који кретање система одржава на правој линији која је задата следећом једначином

$$s = ax_1 + x_2 \quad (5.2)$$

По овој линији кретање система одређено је једначином $s = 0$:

$$x_2 = \dot{x}_1 = -ax_1 \quad (5.3)$$

Избором параметра $a > 0$ обезбедиће да вектор стања $\mathbf{x} \rightarrow 0$ када $t \rightarrow \infty$, при чему брзина конвергенције зависи од избора вредности параметра a .

Кретање по линији $s = 0$ не зависи од функција h и g .

Закључак је да кретање прво треба довести до линије $s = 0$ и надаље га одржавати по њој. Да би се ово постигло, диференцирањем једначине ове линије (5.2) у склопу система (5.1), добија се:

$$\dot{s} = a\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = ax_2 + h(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \cdot u \quad (5.4)$$

Одавде се може одредити управљање које обезбеђује $\dot{s} = 0$:

$$u = -\frac{ax_2 + h(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \quad (5.5)$$

Уз претпоставку да непознате нелинеарне функције $h(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ задовољавају следећу неједначину:

$$|u| = \left| \frac{ax_2 + h(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \right| = \frac{|ax_2 + h(\mathbf{x})|}{|g(\mathbf{x})|} \leq \rho(\mathbf{x}), \text{ за } \forall \mathbf{x} \in R^2 \quad (5.6)$$

тј., да управљање има ограничен интензитет, где је $\rho(\mathbf{x}) > 0$ нека позната функција.

Избором функције V у следећем облику:

$$V = \frac{s^2}{2} \quad (5.7)$$

као могућег кандидата за Љапуновљеву функцију за посматрани систем, њеним диференцирањем и уз употребу једначине (5.4), следи:

$$\dot{V} = s\dot{s} = s[ax_2 + h(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \cdot u] = s[ax_2 + h(\mathbf{x})] + s \cdot g(\mathbf{x}) \cdot u \quad (5.8)$$

Претпоставка дата неједначином (5.6) може се изразити као:

$$-g(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) \leq ax_2 + h(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) \quad (5.9)$$

па за једначину (5.8) важи:

$$\dot{V} \leq |s|g(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) + s \cdot g(\mathbf{x}) \cdot u \quad (5.10)$$

Избором управљања у следећем облику:

$$u = -\beta(\mathbf{x})\operatorname{sgn}(s) \quad (5.11)$$

где су $\beta(\mathbf{x}) \geq \beta_0 + \rho(\mathbf{x})$; $\beta_0 > 0$, и $\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ 0, & s = 0 \\ -1, & s < 0 \end{cases}$

неједнакост (5.10) се даље трансформише у:

$$\dot{V} \leq |s|g(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \cdot \beta(\mathbf{x}) \cdot \underbrace{s \cdot \operatorname{sgn}(s)}_{|s|} \quad (5.12)$$

Ако се услов наведен уз једначину (5.11) помножи са -1 , добија се:

$$-\beta(\mathbf{x}) \leq -\beta_0 - \rho(\mathbf{x}) \quad (5.13)$$

и применом услова на неједнакост (5.12) следи:

$$\dot{V} \leq |s|g(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \cdot [\beta_0 + \rho(\mathbf{x})] \cdot |s| = -g(\mathbf{x})\beta_0 |s| \quad (5.14)$$

На основу дефиниције функције $g(\mathbf{x})$ система (5.1) важи следећа неједнакост:

$$-g(\mathbf{x}) < -g_0 < 0 \quad (5.15)$$

Применом (5.15) на неједнакост (5.14) изводи се:

$$\dot{V} \leq -g_0\beta_0 |s| \quad (5.16)$$

Кретање система из произвољног почетног стања може се представити у две фазе:

Прва фаза (режим достизања): режим у којем кретање достиже клизну површину за неко коначно време.

Ово се може доказати на следећи начин. На основу избора функције V , једначина (5.7) даје:

$$|s| = \sqrt{2V} \quad (5.17)$$

Заменом (5.17) у (5.16), она се трансформише у следећи облик:

$$\frac{dV}{dt} \leq -g_0\beta_0\sqrt{2V} \quad (5.18)$$

Решавањем неједначине (5.18) добија се

$$V^{-\frac{1}{2}}dV \leq -(g_0\beta_0\sqrt{2})dt \quad (5.19)$$

Након интеграљења следи неједначина:

$$2V^{\frac{1}{2}} \leq -(g_0\beta_0\sqrt{2})t + c \quad (5.20)$$

при чему c представља константу која се одређује из почетних услова $V|_{t=0} = V_0$:

$$2\sqrt{V_0} = c \quad (5.21)$$

Дељењем неједначине (5.20) са 2 а затим њеним квадрирањем следи:

$$V(t) \leq \left(-\frac{g_0\beta_0\sqrt{2}}{2}t + \sqrt{V_0} \right)^2 \quad (5.22)$$

У првој фази кретања система решење диференцијалне неједначине $V(t)$ није негативно и ограничено је вредношћу V_0 . Оно ишчезава за неко коначно време:

$$t = \frac{\sqrt{2V_0}}{g_0\beta_0} \quad (5.23)$$

када и величина s (5.2) на основу (5.17) добија нулту вредност чиме почиње фаза клизања.

Друга фаза (режим клизања): кретање система "клизи" по површини одређеној једначином $s = 0$ при чему асимптотски тежи координатном почетку (нултом стању $\mathbf{0}_x$). Динамика овог кретања је описана диференцијалном једначином (5.3) која је у овом случају првог реда иако је посматрани динамички систем другог реда (5.1).

Управљање (5.11) представља закон управљања методом клизања.

Скица лика стања (скуп кретања система у фазном простору стања) контролисаног законом управљања методом клизања, дата је на Слици 5.1.



Слика 5.1 – Типични лик стања система управљаног методом клизања.

На основу наведеног, могу се извести следећи закључци:

- У фази клизања, динамика система је одређена параметрима који описују клизну површину $s = 0$, и не зависи од параметара објекта управљања тј. функција h и g . То значи да је кретање система у фази клизања инваријантно (робусно) на промене параметара објекта управљања.
- У фази клизања систем је описан динамиком нижег реда од оригиналног система. У наведеном случају система другог реда, кретање у фази клизања описано је једначином праве $x_2 = -ax_1$, што на основу фазне дефиниције величина стања (5.1) представља динамичку једначину првог реда: $\dot{x}_1 + ax_1 = 0$.
- Управљање служи да обезбеди фазу клизања али у описивању кретања у фази клизања не учествује.
- При пројектовању система није потребно знати тачне вредности параметара система, већ само опсег њихове промене ради одређивања управљања за обезбеђење фазе клизања.

5.2. Метод клизања на ограничененом домену

Ако је потребно пројектовати систем управљања на неком ограничененом домену Ω , нпр. дефинисаном на следећи начин:

$$\Omega = \left\{ |x_1| \leq \frac{c}{a}, |s| \leq c \right\}; \quad c > 0 \quad (5.24)$$

потребно је одредити максималну вредност функције:

$$\rho_{\max} = \max \left| \frac{ax_2 + h(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \right|; \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (5.25)$$

а затим на основу (5.11) може да се усвоји управљање у једноставнијем облику, тј. у форми једноставног релеја:

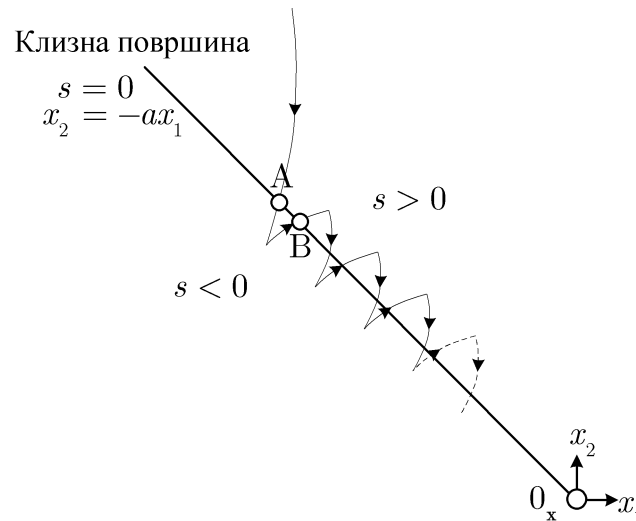
$$u = -\beta_{\min} \operatorname{sgn}(s) \quad (5.26)$$

где су $\beta_{\min} \geq \beta_0 + \rho_{\max}$; $\beta_0 > 0$.

Тиме све раније изведене особине кретања важе и овом случају у посматраном домену Ω . Ако је могуће усвојити произвољно велико β_{\min} у том случају управљање (5.26) ће стабилисати систем у скоро–целом простору стања.

5.3. Осциловање и квази–клизни режим

Појава осциловања/треперења/ (енг. *Chattering*) око клизне површине, приказана на Слици 5.2, може се појавити због немоделиране динамике која је занемарена при пројектовању а постоји у готово свакој практичној примени. Транспортна или инерциона кашњења у објекту управљања или извршном елементу (нпр. релеју) такође узрокују осциловање сигнала управљања.



Слика 5.2 – Осциловање око клизне површине.

У фази достизања из нпр. области $s > 0$ трајекторија је усмерена ка клизној површини $s = 0$. У неком тренутку достиже клизну површину у тачки А. У случају идеалног управљања методом клизања, даља трајекторија би наставила да клизи по овој површини. У стварности постоји неко временско кашњење док се не промени знак од s као и временско кашњење док управљање не промени смер. Током времена кашњења трајекторија пресеца клизну површину и улази у област $s < 0$. Променом смера управљања трајекторија поново креће ка клизној површини, поново је пресеца у тачки В и цео процес се понавља, стварајући циклус осцилације око клизне површине. Овакво кретање у фази клизања назива се квази–клизни режим.

Осциловање смањује тачност, ствара непријатне звучне сигнале, генерише велике топлотне губитке у електричним системима као и брзо хабање делова у механичким системима и не сме се толерисати. Осциловање може да побуди високо–фреквентну немоделирану динамику система, смањујући његове перформансе, па чак и да доведе до нестабилности.

Постоје радови посвећени проблему ублажавања или елиминације осциловања [26], али овај проблем није потпуно изучен и решен. Следе два могућа начина за смањење или елиминисање осциловања.

5.3.1. Смањење осциловања раздвајањем управљања

Основна идеја је раздвојити управљање на две компоненте. На континуалну и

прекидачку (дисконтинуалну) компоненту, да би се амплитуда прекидачке компоненте можда могла смањити и на тај начин смањила и амплитуда осцилација.

За систем (5.1) који се налази у номиналном радном режиму где су $\hat{h}(\mathbf{x})$ и $\hat{g}(\mathbf{x})$ номиналне вредности одговарајућих функција. Увођењем одговарајућих одступања поменутих функција, уз претпоставку да су ова одступања по интензитету ограничена, може се формулисати на следећи начин:

$$h(\mathbf{x}) - \hat{h}(\mathbf{x}) = \delta_h ; \quad |\delta_h| \leq \bar{\delta}_h \geq 0 \quad (5.27)$$

$$g(\mathbf{x}) - \hat{g}(\mathbf{x}) = \delta_g ; \quad |\delta_g| \leq \bar{\delta}_g \geq 0 \quad (5.28)$$

Управљање се усваја као збир континуалног управљања које обезбеђује $\dot{s} = 0$ (5.5) у номиналном радном режиму и дисконтинуалног (прекидног) управљања v :

$$u = -\frac{ax_2 + \hat{h}(\mathbf{x})}{\hat{g}(\mathbf{x})} + v \quad (5.29)$$

Уобичајено је да се први члан у последњој једначини тј. континуално управљање које обезбеђује $\dot{s} = 0$ у номиналном радном режиму назове "еквивалентно управљање":

$$\hat{u}_{eq} = -\frac{ax_2 + \hat{h}(\mathbf{x})}{\hat{g}(\mathbf{x})} \quad (5.30)$$

па се једначина (5.29) може изразити као:

$$u = \hat{u}_{eq} + v \quad (5.31)$$

Коришћењем једначине (5.30), једначина (5.4) се трансформише у:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= ax_2 + [\hat{h}(\mathbf{x}) + \delta_h] + [\hat{g}(\mathbf{x}) + \delta_g] \cdot \left[-\frac{ax_2 + \hat{h}(\mathbf{x})}{\hat{g}(\mathbf{x})} + v \right] = \\ &= \delta_h - \delta_g \frac{ax_2 + \hat{h}(\mathbf{x})}{\hat{g}(\mathbf{x})} + [\hat{g}(\mathbf{x}) + \delta_g] v \end{aligned} \quad (5.32)$$

Дефинисањем поремећајног члана као:

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta_h - \delta_g \frac{ax_2 + \hat{h}(\mathbf{x})}{\hat{g}(\mathbf{x})} \quad (5.33)$$

и коришћењем (5.28), једначина (5.32) се трансформише у:

$$\dot{s} = \delta(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})v \quad (5.34)$$

Да би био испуњен услов $\dot{s} = 0$, на основу последње једначине, мора бити испуњено:

$$v = -\frac{\delta(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \quad (5.35)$$

Ако поремећајни члан $\delta(\mathbf{x})$ задовољава следећу неједначину, тј. услов да је интензитет дисконтинуалног дела управљања ограничен:

$$|v| = \left| \frac{\delta(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \right| \leq \rho(\mathbf{x}), \text{ за } \forall \mathbf{x} \in R^2 \quad (5.36)$$

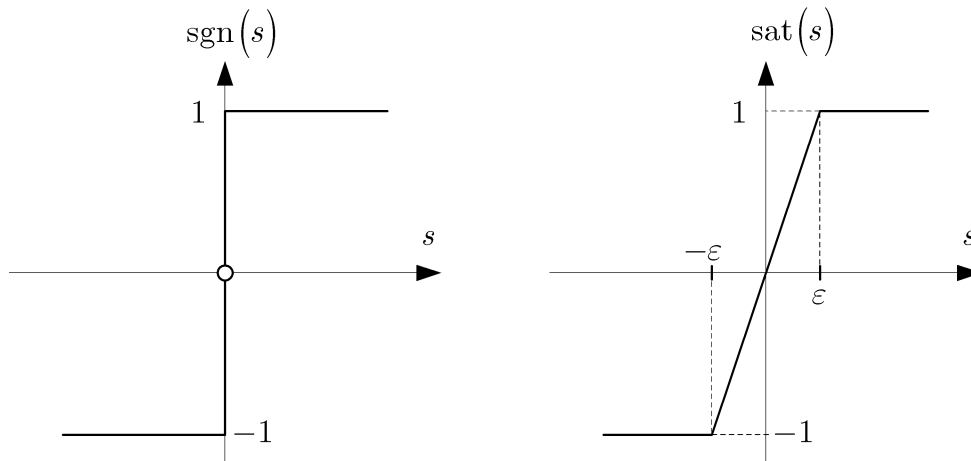
тада се управљање може усвојити у облику датог једначином (5.11), односно:

$$v = -\beta(\mathbf{x})\text{sgn}(s); \quad \beta(\mathbf{x}) \geq \beta_0 + \rho(\mathbf{x}); \quad \beta_0 > 0 \quad (5.37)$$

Како $\rho(\mathbf{x})$ овде представља ограничење са горње стране само поремећајног члана врло је вероватно да је оно мање од ограничења са горње стране за цео систем (5.6), па ће и појачање дисконтинуалног дела управљања (5.37) бити мање, што као последицу може да има смањење амплитуде осциловања.

5.3.2. Смањење осциловања заменом прекидне функције континуалном функцијом типа засићења

Идеја смањења осциловања може да буде и замена дисконтинуалне функције $\text{sgn}(\cdot)$ континуалном функцијом типа засићења са великим нагибом $\text{sat}(\cdot)$ чији су графици приказани на Слици 5.3.



Слика 5.3 – Дисконтинуална функција $\text{sgn}(\cdot)$ и њена апроксимација континуалном функцијом засићења $\text{sat}(\cdot)$.

Ова функција се математички може представити на следећи начин:

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} \text{sgn}(s), & |s| > \varepsilon \\ \frac{s}{\varepsilon}, & |s| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (5.38)$$

Нагиб линеарног дела функције $\text{sat}(s)$ износи $\frac{1}{\varepsilon}$ а за добру апроксимацију дисконтинуалне функције $\text{sgn}(s)$ потребно је да ε буде довољно мало. У граничном случају када $\varepsilon \rightarrow 0$ ове две функције се подударају.

Управљање (5.11) се може усвојити у следећем облику:

$$u = -\beta(\mathbf{x})\text{sat}(s) \quad (5.39)$$

Ово управљање је сада континуално и потребно је испитати кретања и стабилност система са "континуалном" методом клизања.

Постојање нелинеарности (5.39) дефинише зону (гранични слој) око клизне површине $s = 0$. Ова зона је одређена параметром ε на следећи начин: $|s| \leq \varepsilon$.

У фази достизања, кад кретања почињу изван граничног слоја $|s| > \varepsilon$ функција засићења иста је као функција $\text{sgn}(\cdot)$ на посматраној области, за коју је већ показано да има усмерена кретања ка граничном слоју који достижу за коначно време, једначине (5.7)–(5.23), и надаље остају о оквиру граничног слоја.

Унутар граничног слоја $|s| \leq \varepsilon$ може се одредити област привлачења Ω_ε на следећи начин:

Функција V_1 као могући кандидат за Љапуновљеву функцију за посматрани систем бира се у следећем облику:

$$V_1 = \frac{x_1^2}{2} \quad (5.40)$$

Њеним диференцирањем и уз употребу (5.1) и (5.2), следи једначина:

$$\dot{V}_1 = x_1 \dot{x}_1 = x_1 x_2 = x_1 (s - ax_1) = -ax_1^2 + x_1 s \quad (5.41)$$

Имајући у виду да су $x_1 \leq |x_1|$ и $s \leq |s| \leq \varepsilon > 0$ на основу последње једначине важи неједнакост:

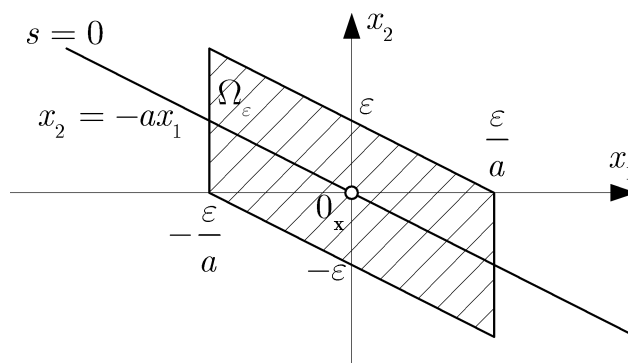
$$\dot{V}_1 \leq -ax_1^2 + |x_1| \varepsilon \quad (5.42)$$

Предложена функција биће негативно полуодређена $\dot{V}_1 \leq 0$ на основу последње неједнакости, све док буде испуњен услов:

$$-ax_1^2 + |x_1| \varepsilon \leq 0 \Rightarrow |x_1| \varepsilon \leq a |x_1| |x_1| \Rightarrow \frac{\varepsilon}{a} \leq |x_1| \quad (5.43)$$

Тада ће сва кретања бити усмерена ка области привлачења Ω_ε приказаној на Слици 5.4, која се на основу изложеног може одредити као:

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ |x_1| \leq \frac{\varepsilon}{a}, |s| \leq \varepsilon \right\} \quad (5.44)$$



Слика 5.4 – Област привлачења континуалним методом вођења.

Избором довољно мале вредности параметра ε област привлачења може се

учинити веома малом околином нултог стања $\mathbf{0}_x$, а даље кретање унутар те области зависи од посматраног система.

5.4. Закон вођења методом клизања

За извођење закона вођења методом клизања, користи се други облик линеаризованог кинематског модела за равански сусрет ракете и циља, представљен у поглављу 2.3 где је систем описан матричном диференцијалном једначином у којој су величине стања $z_1 = \Delta\lambda$ и $z_2 = \lambda$:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{w}$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\ddot{r}}{r} & -2\frac{\dot{r}}{r} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{r} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{r} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Као што је описано у [3], клизна површина закона вођења методом клизања, усваја се у облику:

$$s = r \cdot z_2 \quad (5.46)$$

Диференцирањем претходне једначине, следи:

$$\dot{s} = \dot{r}z_2 + r\dot{z}_2 \quad (5.47)$$

Коришћењем (2.59), последња једначина постаје:

$$\dot{s} = -\dot{r}z_2 - \ddot{r}z_1 + u + w \quad (5.48)$$

Закон управљања усваја се као диференцијална једначина првог реда у следећем облику:

$$\dot{s} = -\frac{k_4 \cdot |\dot{r}|}{r} s - \beta_0 \cdot \operatorname{sgn} s, \quad (5.49)$$

у којој су $k_4 = \operatorname{const} > 0$ и $\beta_0 = \operatorname{const} > 0$. Како је клизна површина одређена једначином (5.46), закон управљања може се написати као:

$$\dot{s} = -k_4 \cdot |\dot{r}| z_2 - \beta_0 \cdot \operatorname{sgn}(r \cdot z_2) \quad (5.50)$$

Из једначина (5.48) и (5.50), имајући у виду да су $r > 0$ и $\dot{r} < 0$, следи:

$$u = -(k_4 + 1) \cdot |\dot{r}| z_2 - \beta_0 \cdot \operatorname{sgn}(z_2) + \ddot{r}z_1 - w \quad (5.51)$$

На основу претпоставке да се брзине ракете и циља споро мењају, важи следеће:

$$|\dot{r}| \approx const = V_C \Rightarrow \ddot{r} = 0, \quad (5.52)$$

где V_C представља релативну брзину између ракете и циља, па се (5.51) поједностављује:

$$u = -\left[(k_4 + 1) \cdot V_C z_2 + \beta_0 \cdot \operatorname{sgn}(z_2) + w \right] \quad (5.53)$$

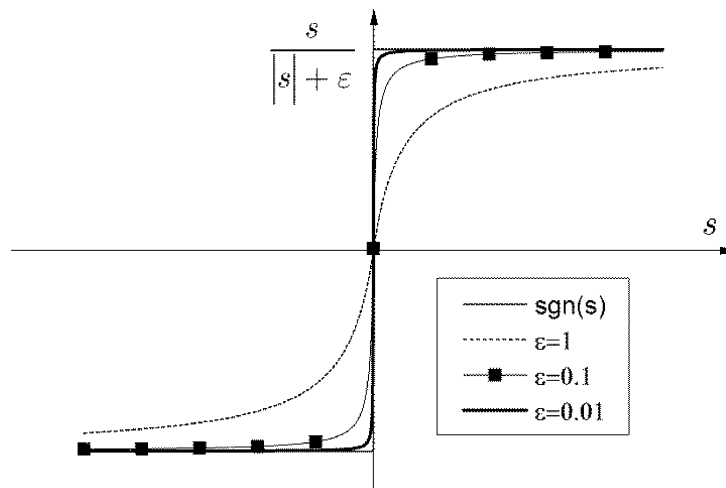
Ако се не располаже информацијом од тренутној вредности поремећаја, тада се члан w у последњој једначини може изоставити, одакле следи:

$$u = -\left[k \cdot V_C z_2 + \beta_0 \cdot \operatorname{sgn}(z_2) \right] \quad (5.54)$$

Да би се избегла могућа појава осциловања око линије клизања, функција "sgn" је замењена континуалном "сигмоидном" функцијом приказаној на Слици 5.5 у којој параметар ε представља неку малу позитивну вредност. Тада на основу дефиниције величина стања (2.57) следи:

$$u = -\left[k \cdot V_C \dot{\lambda} + \beta_0 \frac{\dot{\lambda}}{|\dot{\lambda}| + \varepsilon} \right], \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (5.55)$$

Први члан у једначини (5.55) представља тачну пропорционалну навигацију (ТПН), док заједно са другим чланом представља закон вођења методом клизања.



Слика 5.5 – Дисконтинуална функција $\operatorname{sgn}(\cdot)$ и њена континуална "сигмоидна" апроксимација.

Сличан класичан метод клизања примењен је у [18] и [27] али коришћењем првог облика линеаризованог математичког модела кретања у односу на почетну линију визирања представљеном у поглављу 2.2 при чему је једначина (2.51)

проширена динамиком циља која је представљена системом првог реда са познатом временском константом. За клизну површину усвојена је вредност тренутног промашаја (3.23)

5.5. Побољшани методи клизања

Класични метод клизања који смањује осциловање раздвајањем управљања представљен је једначинама (5.29) и (5.37). Ако се примени на ограниченом домену Ω одређеном једначином (5.24) и ограничењем ρ_{\max} :

$$\begin{aligned} \rho_{\max} &= \max |v| = \max \left| \frac{\delta(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \right| = \max \left| \frac{\delta_h - \delta_g \frac{ax_2 + \hat{h}(\mathbf{x})}{\hat{g}(\mathbf{x})}}{g(\mathbf{x})} \right| = \\ &= \max \left| \frac{(h(\mathbf{x}) - \hat{h}(\mathbf{x})) - (g(\mathbf{x}) - \hat{g}(\mathbf{x})) \frac{ax_2 + \hat{h}(\mathbf{x})}{\hat{g}(\mathbf{x})}}{g(\mathbf{x})} \right| = \\ &= \max \left| \frac{ax_2 + h(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} - \frac{ax_2 + \hat{h}(\mathbf{x})}{\hat{g}(\mathbf{x})} \right|; \quad \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (5.56)$$

управљање по методу клизања може се приказати на једноставан начин:

$$\begin{aligned} u &= \hat{u}_{eq} - \beta_{\min} \operatorname{sgn}(s) = -\frac{ax_2 + \hat{h}(\mathbf{x})}{\hat{g}(\mathbf{x})} - \beta_{\min} \operatorname{sgn}(s); \\ \beta_{\min} &\geq \beta_0 + \rho_{\max}; \quad \beta_0 > 0 \end{aligned} \quad (5.57)$$

Оваква синтеза управљања обезбеђује достизање клизне површине за коначно време, али је притом управљање прекидно/дисконтинуално.

5.5.1. Континуални метод клизања са коначним временом достизања клизне површине

Континуално управљање у клизном режиму са коначним временом достизања клизне површине, представљено је у [28] и одређено је следећом једначином:

$$u = \hat{u}_{eq} - 2^{-\frac{b}{2}} \beta_{\min} |s|^b \operatorname{sgn}(s); \quad b \in (0,1), \quad \beta_{\min} \geq \beta_0 + \rho_{\max}; \quad \beta_0 > 0 \quad (5.58)$$

Уочава се да се за вредност параметра $b = 0$ добија израз за класични метод клизања (5.57). Овај модификовани метод је у каснијим радовима, нпр. [14] и [15], најчешће коришћен са вредношћу параметра $b = 0.5$ тј. у облику:

$$\begin{aligned} u &= \hat{u}_{eq} - 2^{-\frac{1}{4}} \beta_{\min} |s|^{0.5} \operatorname{sgn}(s) = \\ &= \hat{u}_{eq} - 2^{-\frac{1}{4}} \beta_{\min} \frac{s}{|s|^{0.5}}; \quad \beta_{\min} \geq \beta_0 + \rho_{\max}; \quad \beta_0 > 0 \end{aligned} \quad (5.59)$$

Чак и у случају када је еквивалентно управљање потпуно непознато тада је члан $\hat{u}_{eq} = 0$ па и такво управљање обезбеђује конвергенцију ка произвољно малој области привлачења око клизне равни. Мана таквог управљања је што максимална вредност несигурности (5.25) на посматраној области одређује интервал/дебљину области привлачења. Чак и за сасвим сигурно одређено еквивалентно управљање, а у случају временски дискретне реализације управљања, интервал привлачења пропорционалан је времену семпловања.

Да би се смањило осциловање, уводи се управљање методом клизања другог (или вишег) реда код кога се дисконтинуална компонента управљања тј. члан $\operatorname{sgn}(s)$, налази у оквиру другог (или вишег) извода променљиве s . Метод клизања другог реда својим управљањем не само да обезбеђује кретање које достиже клизну површину $s = 0$ за неко коначно време већ такође обезбеђује $\dot{s} = 0$.

5.5.2. Регулатор са ваљањем (*Twisting Controller*)

Регулатор са ваљањем [2] је први регулатор са методом клизања другог реда и дефинисан је једначином:

$$u = \hat{u}_{eq} - \beta_1 \operatorname{sgn}(s) - \beta_2 \operatorname{sgn}(\dot{s}); \quad \beta_1 > \beta_2 > 0 \quad (5.60)$$

За његову примену, као и за примену још неколико сличних метода потребна је информација о изводу променљиве s , која најчешће није расположива те се она мора проценити.

5.5.3. Регулатор са изузетно квалитетним ваљањем (*Supertwisting Controller*)

Карактеристика овог метода клизања другог реда је што за његову примену није потребно одређивање извода променљиве s а дефинисан је једначином:

$$u = \hat{u}_{eq} - \beta_1 |s|^{0.5} \operatorname{sgn}(s) - \beta_2 \int \operatorname{sgn}(s) d\tau \quad (5.61)$$

где су константе β_1 и β_2 које се одређују синтезом закона вођења овим методом.

Овај регулатор обезбеђује континуални управљачки сигнал и има коначно време достизања клизне површине. У практичној временски дискретној примени он је веће тачности од метода клизања првог реда (класичног и континуалног метода клизања са коначним временом достизања) јер је интервал привлачења пропорционалан квадрату времена семпловања $T_s^2 \ll T_s \ll 1$. Због наведеног, овај регулатор представља одличну замену у свим системима где се већ користи класични метод клизања.

5.5.4. Глатко клизно управљање (*Smooth Second Order Sliding Mode Control*)

Иако су управљања (5.59) и (5.61) континуалне функције, оне нису глатке криве, што нема утицаја приликом управљања моторима једносмерне струје и других објеката који се могу управљати ширинско–импулсном модулацијом. Међутим, када се овакав контролер користи у спољашњој спреги управљања системом који у унутрашњој спреги има инхерентно диференцирање, потребно је да сигнал управљања који представља улаз у унутрашњу спрегу буде глатка крива. Глаткост управљачког сигнала није лако постићи код управљања методом клизања без смањења прецизности и робусности.

Континуални алгоритам управљања методом клизања, другог реда представљен је у [13] а касније је коришћен за синтезу закона вођења и аутопилота [16], [12] и [17]. Он генерише глатак управљачки сигнал у смислу да у временски дискретној реализацији овог управљања неће постојати високо–фреквентне компоненте у околини времена семпловања. Ово омогућује нумеричко диференцирање сигнала управљања на крају сваког периода времена

дискретизације и особину да ће добијени сигнал такође бити гладак. Теореме доказане у [12] и [17] дефинишу потребно управљање у следећем облику:

$$u = \hat{u}_{eq} - \beta_1 |s|^{\frac{2}{3}} \operatorname{sgn}(s) - \beta_2 \int |s|^{\frac{1}{3}} \operatorname{sgn}(s) d\tau; \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0 \quad (5.62)$$

при чему је постављен услов да нема грешке у одређивању еквивалентног управљања, па је зато уведен естиматор еквивалентног управљања, тј., непознатог нормалног маневра циља.

5.6. Закони вођења побољшаним методима клизања

За извођење закона вођења побољшаним методима клизања, користи се нелинеарни математички кинематски модел у поларном координатном систему везаном за ракету, представљен у поглављу 2.1.2 где је систем описан диференцијалним једначинама (2.26), (2.27), (2.33) и (2.34). Груписањем одређених чланова у овим једначинама и пројектовањем убрзања циља и ракете на одговарајуће осе поларног координатног система на Слици 2.1 добијају се следеће диференцијалне једначине:

$$\dot{r} = V_r \quad (5.63)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{V_\lambda}{r} \quad (5.64)$$

$$\dot{V}_r = r\dot{\lambda}^2 + a_{Tr} - a_{Mn} \sin \theta_M \quad (5.65)$$

$$\dot{V}_\lambda = -V_r \frac{V_\lambda}{r} + a_{T\lambda} - a_{Mn} \cos \theta_M \quad (5.66)$$

где a_{Mn} представља убрзање ракете нормално на правац њене брзине и то је улазна управљачка величина у систем вођења.

Да би се обезбедио погодак, потребно је релативну брзину у правцу линије визирања циља (5.63) одржати мањом од нуле, тј. $V_r = -V_c < 0$. Динамика промене ове уздужне релативне брзине описна је једначином (5.65) и у њој је најкритичнији први члан који се уз коришћење (5.64) може изразити као $r\dot{\lambda}^2 = \frac{V_\lambda^2}{r}$ јер он брзо расте са порастом угаоне брзине линије визирања. Када је растојање до циља мало, овај члан проузрокује готово тренутну промену смера релативне

уздужне брзине V_r .

Зато се једна од могућих стратегија вођења своди на потпуно елиминисање овог члана, односно обезбеђење услова $\dot{\lambda} = 0$. Вектор релативне брзине \mathbf{V}_r одржава правац вектора релативног положаја \mathbf{r} али супротног смера (тзв. антиколинеарни вектори). На тај начин промена знака интензитета релативне брзине V_r тј. њеног смера, може да се деси тек после проласка релативног растојања кроз нулу што представља директан погодак циља. Ова стратегија примењена је у Глави 3, јер омогућава трансформацију проблема вођења у проблем управљања. Ова стратегија се користи за формирање клизне површине:

$$s = \dot{\lambda} = 0 \quad (5.67)$$

или у алтернативном облику који је коришћен у [29] и [30] (заједно са методом клизања):

$$s = V_\lambda = 0 \quad (5.68)$$

За директни погодак довољно је елиминисати нормалну компоненту релативне брзине у тренутку сусрета ракете и циља: $\lim_{r \rightarrow 0} V_\lambda = 0$. Тада ће вектор релативне брзине бити у правцу линије визирања. Пропорционална навигација као најчешће примењен закон вођења постепено доводи вектор релативне брзине на правац линије визирања.

Друга могућа стратегија вођења своди се на толерисање угаоне брзине линије визирања циља при чему се први члан у једначини (5.56) ограничава неком вредношћу како се ракета приближава циљу:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \dot{\lambda}^2 \leq M \quad (5.69)$$

Ако се стратегија вођења претпостави у облику:

$$\dot{\lambda} = c_0 r^{-\alpha_1} ; c_0 > 0 \quad (5.70)$$

тада једначина (5.69) даље постаје:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r c_0^2 r^{-2\alpha_1} = \lim_{r \rightarrow 0} c_0^2 r^{1-2\alpha_1} \leq M \quad (5.71)$$

Усвајањем вредности параметра $\alpha_1 = 0.5$ због елиминисања утицаја

растојања, последња једначина се трансформише и представља жељено ограничење услед центрифугалног убрзања:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \dot{\lambda}^2 = c_0^2 \leq M \quad (5.72)$$

Потребно је испитати и граничну вредност пројекције нормалне релативне брзине да би се обезбедио следећи услов:

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_\lambda = \lim_{r \rightarrow 0} r \dot{\lambda} = \lim_{r \rightarrow 0} r c_0 r^{-0.5} = c_0 \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} = 0 \quad (5.73)$$

што представља захтев за директан погодак. Предложена стратегија вођења може се користити у формирању клизне површине за управљање методом клизања у предложеном облику (5.70):

$$s = \dot{\lambda} - c_0 r^{-0.5} = 0 \quad (5.74)$$

или у алтернативном облику:

$$s = V_\lambda - c_0 r^{0.5} = 0 \quad (5.75)$$

Следећа теорема показује постојање вредности потребних параметара за постизање поготка циља.

Теорема 5.1 Ако важе следеће претпоставке:

- i. Стратегија вођења (5.75) је обезбеђена извршењем одговарајућег управљања,
- ii. Радијална убрзања циља и ракете су ограниченог интензитета: $|a_{Tr}| \leq a_{Tr}^{\max}$
и $|a_{Mn}| \leq a_{Mn}^{\max}$,

тада, постоје параметри $V_r(0) < 0$ и $c_0 > 0$ који задовољавају услов $r(t^*) \leq 0$ при чему је $t_f \leq t^*$.

Доказ:

Претпоставка i. одређује компензовану кинематику па једначина (5.65) постаје

$$\dot{V}_r = c_0^2 + a_{Tr} - a_{Mn} \sin \theta_M \quad (5.76)$$

Интеграљењем последње једначине уз претпоставку ii. и уз коришћење

ограничења функције $|\sin \theta_M| < c_1 \leq 1$, одређена је уздужна релативна брзина, која није већа од:

$$V_r(t) \leq V_r(0) + (c_0^2 + a_{Tr}^{\max} + c_1 a_{Mn}^{\max})t \quad (5.77)$$

На основу последње неједначине може се одредити време пре кога уздужна релативна брзина не мења знак, тј., превојна тачка релативног растојања је одређена из:

$$t^* \geq -\frac{V_r(0)}{c_0^2 + a_{Tr}^{\max} + c_1 a_{Mn}^{\max}} \quad (5.78)$$

Двоструким интегралњем једначине (5.63) уз претпоставку ii, коришћење (5.77) и ограничења функције $|\sin \theta_M| < c_1 \leq 1$, добија се:

$$r(t) \leq r(0) + V_r(0)t + \frac{c_0^2 + a_{Tr}^{\max} + c_1 a_{Mn}^{\max}}{2} t^2 \quad (5.79)$$

Заменом (5.78) у последњу неједначину одређено је релативно растојање при ком релативна уздужна брзина мења знак и релативно растојање након почетног опадања почиње да се увећава:

$$r(t^*) \leq r(0) - \frac{1}{2} \frac{V_r^2(0)}{c_0^2 + a_{Tr}^{\max} + c_1 a_{Mn}^{\max}} \quad (5.80)$$

За погађање циља битно је да је ово растојање (тј. његова превојна тачка) мања од нуле, па из последње неједначине следи услов:

$$r(0) - \frac{1}{2} \frac{V_r^2(0)}{c_0^2 + a_{Tr}^{\max} + c_1 a_{Mn}^{\max}} \leq 0 \quad (5.81)$$

који се може написати као:

$$|V_r(0)| \geq \sqrt{2(c_0^2 + a_{Tr}^{\max} + c_1 a_{Mn}^{\max})r(0)} \quad (5.82)$$

или

$$c_0 \leq \sqrt{\frac{V_r^2(0)}{2r(0)} - a_{Tr}^{\max} - c_1 a_{Mn}^{\max}} \quad (5.83)$$

па се параметри $V_r(0)$ и c_0 могу изабрати тако да претходни услов буде испуњен, чиме је Теорема 5.1 доказана.

Напомена 5.1 Прва представљена стратегија дефинисана једначином (5.68) представља специјалан случај друге стратегије (5.75) када се у њој усвоји вредност параметра $c_0 = 0$, па ће се у синтези закона вођења методима клизања користити друга стратегија вођења (5.75) као општији облик.

Избором неке од наведених стратегија вођења, проблем вођења се трансформише у проблем управљања који треба да оствари једначину изабране стратегије (5.75) помоћу управљања нормалним убрзањем ракете при чему обезбеђује да релативна брзина у правцу линије визирања буде мања од нуле, $V_r < 0$.

Већ је доказано да се избором одговарајућих параметара $V_r(0)$ и c_0 може обезбедити $V_r < 0$ све време трајања лета. Да би се остварила усвојена стратегија, потребно је задовољити једначину (5.75), која након диференцирања постаје:

$$\dot{s} = \dot{V}_\lambda - c_0 \frac{1}{2\sqrt{r}} \dot{r} = 0 \quad (5.84)$$

Коришћењем једначина (5.66) и (5.63) кинематског модела кретања у поларним координатама, последња једначина се трансформише у:

$$\dot{s} = -V_r \frac{V_\lambda}{r} + a_{T\lambda} - a_{Mn} \cos \theta_M - c_0 \frac{V_r}{2\sqrt{r}} = 0 \quad (5.85)$$

Из последње једначине може се одредити номинално/еквивалентно управљање као:

$$\hat{u}_{eq} = -a_{Mn} = -\frac{1}{\cos \theta_M} \left(N' V_c \dot{\lambda} + a_{T\lambda} + c_0 \frac{V_c}{2\sqrt{r}} \right); \quad N' = 1 \quad (5.86)$$

Управљање (5.31) се усваја као збир континуалног управљања које обезбеђује $\dot{s} = 0$ у номиналном радном режиму, тзв., еквивалентног управљања (5.86) и управљања v које зависи од примењеног метода клизања који су дати једначинама (5.57)–(5.62).

Први члан у делу еквивалентног управљања формално одговара тачној пропорционалној навигацији (ТПН). Ради коректног поређења ових метода вођења са тачном (ТПН) и проширеном (ППН) пропорционалном навигацијом, у

нумеричким симулацијама усвојена је вредност параметра $N' = 3$. Тако су одређени следећи закони вођења методом клизања:

5.6.1. Класични метод клизања:

$$\begin{aligned} u &= \hat{u}_{eq} - \beta_{\min} \operatorname{sgn}(s) = \\ &= - \left[\frac{1}{\cos \theta_M} \left(3V_C \dot{\lambda} + a_{T\lambda} + c_0 \frac{V_C}{2\sqrt{r}} \right) + \beta_{\min} \operatorname{sgn}(s) \right]; \\ \beta_{\min} &\geq \beta_0 + \rho_{\max}; \beta_0 > 0 \end{aligned} \quad (5.87)$$

5.6.2. Континуални метод клизања са коначним временом достизања површине клизања:

$$\begin{aligned} u &= - \left[\frac{1}{\cos \theta_M} \left(3V_C \dot{\lambda} + a_{T\lambda} + c_0 \frac{V_C}{2\sqrt{r}} \right) + 0.85 \beta_{\min} |s|^{0.5} \operatorname{sgn}(s) \right]; \\ \beta_{\min} &\geq \beta_0 + \rho_{\max}; \beta_0 > 0 \end{aligned} \quad (5.88)$$

5.6.3. Регулатор са изузетно квалитетним ваљањем (Supertwisting Controller) [2]:

$$\begin{aligned} u &= - \left[\frac{1}{\cos \theta_M} \left(3V_C \dot{\lambda} + a_{T\lambda} + c_0 \frac{V_C}{2\sqrt{r}} \right) + \beta_1 |s|^{0.5} \operatorname{sgn}(s) + \beta_2 \int \operatorname{sgn}(s) d\tau \right]; \\ \frac{d}{dt} \left(3V_C \dot{\lambda} + a_{T\lambda} + c_0 \frac{V_C}{2\sqrt{r}} \right) &\leq C, \quad 0 \leq K_m \leq \cos \theta_M \\ \beta_1 &= \frac{1.5}{K_m} \sqrt{C}, \quad \beta_2 = \frac{1.1}{K_m} C \end{aligned} \quad (5.89)$$

5.6.4. Глатко управљање методом клизања (Smooth Second Order Sliding Mode Control):

$$\begin{aligned} u &= - \left[\frac{1}{\cos \theta_M} \left(3V_C \dot{\lambda} + \hat{a}_{T\lambda} + c_0 \frac{V_C}{2\sqrt{r}} \right) + \beta_1 |s|^{\frac{2}{3}} \operatorname{sgn}(s) + \beta_2 \int |s|^{\frac{1}{3}} \operatorname{sgn}(s) d\tau \right]; \\ \beta_1 &> 0, \beta_2 > 0 \end{aligned} \quad (5.90)$$

Уз претпоставку да се величине V_C , $\dot{\lambda}$ и r могу тачно измерити, да је функција

$\left(V_C \dot{\lambda} + a_{T\lambda} + c_0 \frac{V_C}{2\sqrt{r}} \right)$ диференцијабилна са познатом Липшицовом константом

$L > 0$, непознато нормално убрзање циља у једначини управљања $\hat{a}_{T\lambda}$ процењује

се помоћу естиматора базираном на методу клизања [12] и [17]:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_{E0} &= v_{E0} - a_M \cos \theta_M + V_C \dot{\lambda} + c_0 \frac{V_C}{2\sqrt{r}} \\
 v_{E0} &= -2L^{\frac{1}{3}} |z_{E0} - s|^{\frac{2}{3}} \operatorname{sgn}(z_{E0} - s) + z_{E1} \\
 \dot{z}_{E1} &= v_{E1} \\
 v_{E1} &= -1.5L^{\frac{1}{2}} |z_{E1} - v_{E0}|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(z_{E1} - v_{E0}) + z_{E2} \\
 \dot{z}_{E2} &= -1.1L \operatorname{sgn}(z_{E2} - v_{E1}) \\
 \hat{a}_{T\lambda} &= z_{E1}
 \end{aligned} \tag{5.91}$$

5.7. Резултати нумеричке симулације

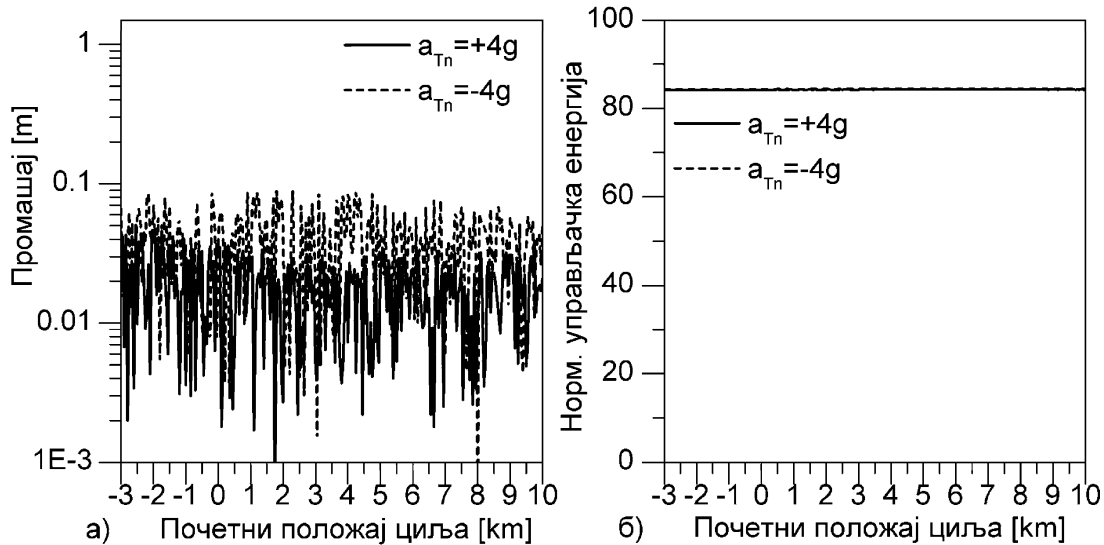
Тестирани закони вођења примењени су за случај дејства оба поремећаја, тј. сценарија наведеног у Поглављу 3.6 који обухвата постојање грешке у заузимању угла претицања и маневра циља. Сви коефицијенти у закону вођења одређени су методом подешавања параметара. На основу вишеструких нумеричких симулација уочено је да примена друге стратегије вођења, која толерише мање вредности угаоне брзине линије визирања циља, делимично смањује тачност, а за узврат не доноси неки нови квалитет вођења, те су даље приказани резултати закони вођења који користе прву стратегију вођења код које је коефицијент $c_0 = 0$. Угао θ_M је довољно мали па је нумеричким симулацијама потврђена оправданост апроксимације $\cos \theta_M \approx 1$. У анализираним законима вођења методом клизања претпостављено је непознавање нормалног маневра циља $a_{T\lambda} = 0$ као једном од чланова у еквивалентном управљању.

На основу наведеног и једначина (5.87) и (5.54), закон вођења класичним методом клизања означен као ВМК, може се представити на следећи начин:

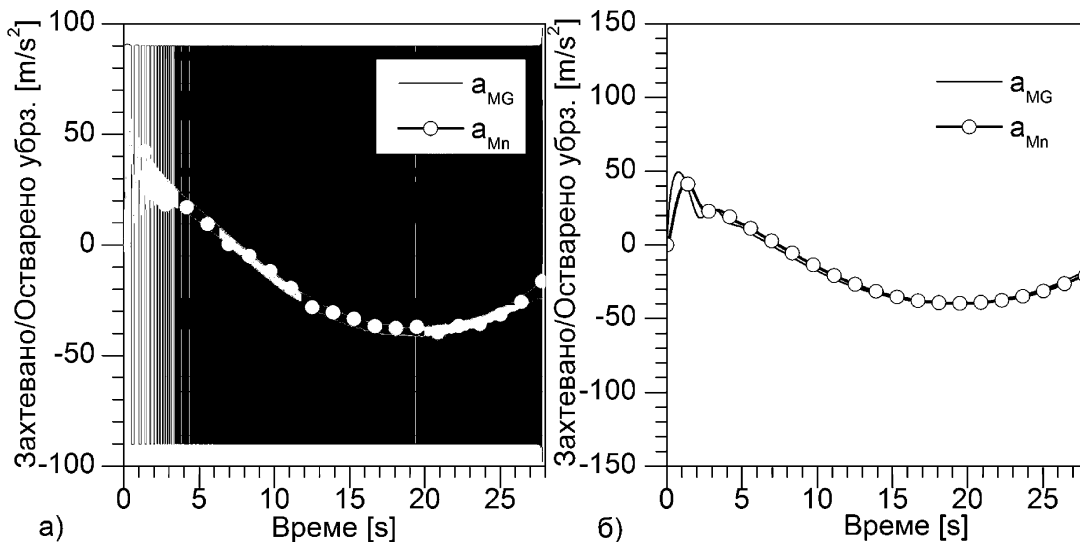
$$a_{MG}^{BMC} = V_C k \dot{\lambda} + \beta_0 \cdot \operatorname{sgn} \dot{\lambda} \tag{5.92}$$

За вредност параметра $\beta_0 = 90$ резултати нумеричке симулације приказани су на Слици 5.6. Вредности промашаја су мале, али уз **огромну потрошњу управљачке енергије** што је последица појаве треперења/осциловања у захтеваном тј. командом убрзању приказаном на Слици 5.7 а), за циљ на почетном положају од $+10 \text{ km}$ и за $a_{Tn} = +4 \text{ m} / \text{s}^2$. Вођење класичним методом клизања има

структуру пропорционалне навигације с тим што је додат један члан облика сигнум функције угаоне брзине линије визирања циља константне амплитуде ($\beta_0 \cdot \text{sgn } \dot{\lambda}$). Непосредно после промене знака угаоне брзине линије визирања циља као грешке вођења енергичност захтеваног нормалног убрзања (сигнала вођења) је велика што доприноси смањењу промашаја, али доводи и до појаве самоосциловања, нежељене појаве у систему самонавођене ракете.



Слика 5.6 – ВМК а) промашај, б) норм. захтевана управљачка енергија.



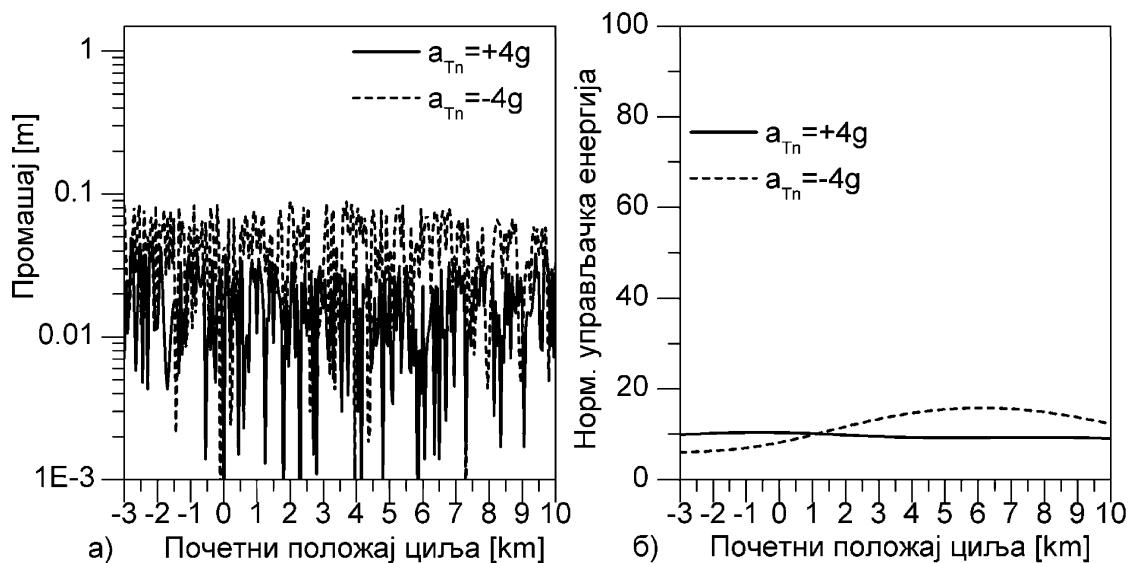
Слика 5.7 – Захтевано и остварено нормално убрзање ракете а) вођење класичном методом клизања (ВМК), б) вођење методом клизања са "сигмоидном" функцијом (ВМКСФ).

Проблем осциловања/треперења може се драстично ублажити, како је

приказано на Слици 5.7 б), заменом дисконтинуалне функције континуалном функцијом са параметром $\varepsilon = 0.001$ чиме је, у складу са (5.55), добијено вођење методом клизања са "сигмоидном" функцијом (ВМКСФ):

$$a_{MG}^{ВМКСФ} = V_c k \dot{\lambda} + \beta_0 \frac{\dot{\lambda}}{|\dot{\lambda}| + \varepsilon} \quad (5.93)$$

Уместо захтева за нултом угаоном брзином линије визирања циља ($\dot{\lambda} = 0$), помоћу параметра ε дозвољава се да $\dot{\lambda}$ буде довољно блиско нули. Тиме се незнатно увећава промашај, али се смањује потребна управљачка енергија, што је приказано на Слици 5.8. Добијени закон вођења применљив је у практичној реализацији и то без информације о маневру циља.

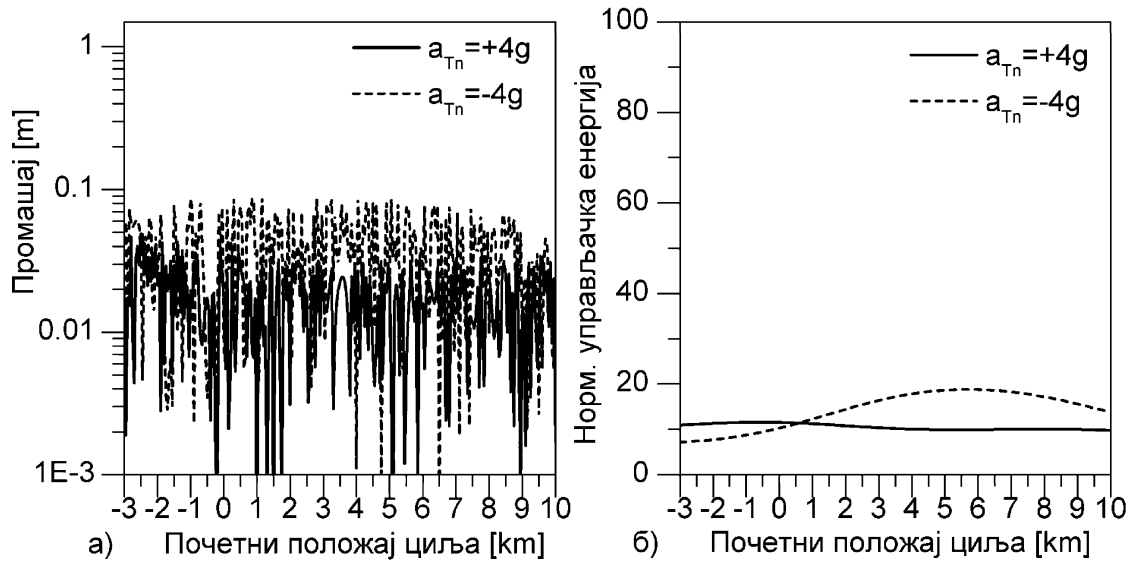


Слика 5.8 – Побољшано вођење методом клизања (ВМКСФ): а) промашај, б) нормализована захтевана управљачка енергија.

Задржавајући и даље структуру пропорционалне навигације, самоосциловање система самонавођења може се спречити додавањем степене сигнум функције угаоне брзине линије визирања циља. Тако, нпр., применом континуалног метода клизања са коначним временом достизања површине клизања представљеног у поглављу 5.6.2, добија се степена функција са експонентом 0.5, па се на основу једначине (5.88) добија следећа зависност захтеваног нормалног убрзања од угаоне брзине линије визирања циља:

$$a_{MG}^{ПВМК} = V_c k \dot{\lambda} + \beta_1 |\dot{\lambda}|^{0.5} \operatorname{sgn} \dot{\lambda} \quad (5.94)$$

Резултати промашаја и захтеване управљачке енергије за овај закон вођења са параметром $\beta_1 = 500$, приказани су на Слици 5.9.

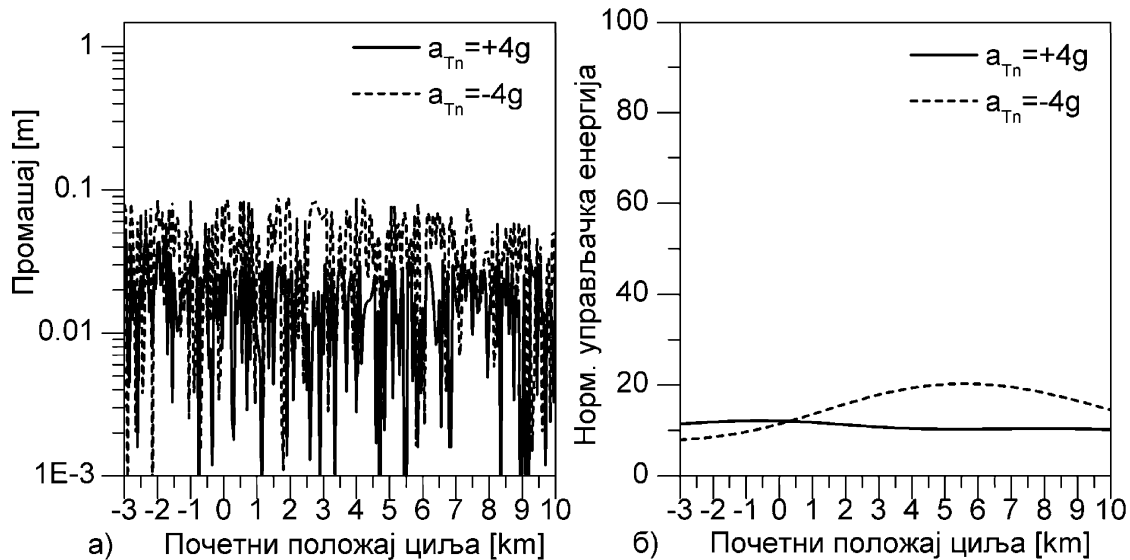


Слика 5.9 – Побољшано вођење методом клизања (ПВМК) са експонентом 1/2: а) промашај, б) нормализована захтевана управљачка енергија.

Други облик степене сигнум функције од угаоне брзине линије визирања циља са експонентом $2/3$ добија се из глатког управљања методом клизања који је приказан у поглављу 5.6.4 једначином (5.90) уз занемаривање интегралног члана, тј., усвајањем коефицијента $\beta_2 = 0$. Побољшани закон вођења методом клизања дефинисан је следећом релацијом између захтеваног нормалног убрзања и угаоне брзине линије визирања циља:

$$a_{MG}^{ПВМК} = V_c k \dot{\lambda} + \beta_1 |\dot{\lambda}|^{2/3} \text{sgn } \dot{\lambda} \quad (5.95)$$

За усвојену вредност параметра $\beta_1 = 1000$ остварени промашај и захтевана управљачка енергија приказани су на Слици 5.10.



Слика 5.10 – Побољшано вођење методом клизања (ПВМК) са експонентом 2/3: а) промашај, б) нормализована захтевана управљачка енергија.

У случају вођења помоћу метода клизања са степеним сигнум функцијама који имају експоненте 1/2 и 2/3 нема појаве самоосцилација сигнала вођења. Оба закона вођења спадају у групу нелинеарних статичких закона управљања. Диференцирањем једначина (5.94) и (5.95) по угаоној брзини линије визирања циља (по сигналу грешке вођења), добијају се следећи фактори појачања (стрмине):

$$\frac{da_{MG}}{d\dot{\lambda}} = V_c k + \frac{\beta_1}{2|\dot{\lambda}|^2} \quad (5.96)$$

$$\frac{da_{MG}}{d\dot{\lambda}} = V_c k + \frac{2\beta_1}{3|\dot{\lambda}|^3}$$

Фактори појачања опадају са повећањем грешке вођења због чега је захтевано нормално убрзање мање интензивно при већим грешкама вођења. Супротно томе, при малим грешкама вођења, стрмине нелинеарних закона вођења се повећавају што повољно утиче на тачност система самонавођења јер захтевано нормално убрзање расте у поређењу са класичном пропорционалном навигацијом као стандардним линерним законом самонавођења.

Глава

6. Синтеза закона вођења при просторном кретању ракете и циља

6.1. Увод

У претходној синтези закона вођења коришћен је равански кинематски модел сусрета ракете и циља који је осим ограничења кретања на једну раван подразумевао следећа упрошћења: непроменљивост интензитета брзина кретања ракете и циља, непроменљивост динамичких особина ракете (природне учестаности, управљивости, маневарске способности и сл.), занемаривање утицаја гравитације, занемаривање промене густине ваздуха од висине лета, занемаривање промене центра масе, занемаривање динамике и нелинеарности извршних органа и сензора.

Због тога је неопходно извршити синтезу предложених закона вођења помоћу комплетног математичког модела целокупног система вођене ракете заснованог на моделу са шест степени слободе кретања, тзв. 6–ДОФ који треба да обухвати сва одступања од хипотеза које су уведене при изучавању раванског кинематског модела. Развијен је нови софтвер у програмском језику Microsoft Visual C++ из Microsoft Visual Studio 6.0 пакета, којим се решава синтеза закона вођења и управљања, као нумеричка симулација комплетног система у сложеним сценаријима лета маневришућег циља.

6.2. Модел кретања ракете применом концепта 6–ДОФ

Нелинеарни динамички модел просторног кретања ракете земља–ваздух крстасте конфигурације као објекта са шест степени слободе кретања, описан је у динамичком координатном систему, помоћу дванаест диференцијалних једначина првог реда [31] и [22]:

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_K &= rv_K - qw_K + (X + F_x) / m - g \sin \theta \\
 \dot{v}_K &= pw_K - ru_K + (Y + F_y) / m \\
 \dot{w}_K &= qu_K - pv_K + (Z + F_z) / m + g \cos \theta \\
 \dot{p} &= (L + L^F) / J_x \\
 \dot{q} &= pr(J_y - J_x) / J_y + (M + M^F) / J_y \\
 \dot{r} &= pq(J_x - J_y) / J_y p\tilde{q} + (N + N^F) / J_y \\
 \dot{\psi} &= (q \sin \phi + r \cos \phi) / \cos \theta \\
 \dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi \\
 \dot{\phi} &= p + (q \sin \phi + r \cos \phi) \tan \theta \\
 \dot{x} &= U_K \cos \psi \cos \theta + v_K (\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi) + w_K (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) \\
 \dot{y} &= U_K \sin \psi \cos \theta + v_K (\sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi) + w_K (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) \\
 \dot{h} = -\dot{z} &= U_K \sin \theta - v_K \cos \theta \sin \phi - w_K \cos \theta \cos \phi
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

где су: U_K, v_K, w_K компоненте брзине ракете V_K у односу на Земљу у динамичком координатном систему; p, q, r су угаоне брзине ваљања, пропињања и скретања у динамичком систему; ψ, θ, ϕ су углови скретања, пропињања и ваљања; x, y, z су координате положаја ракете у инерционом координатном систему који је везан за Земљину површину.

Компоненте аеродинамичке силе дуж оса динамичког координатног система су функције аеродинамичких коефицијената C_X, C_Y и C_Z :

$$\begin{aligned}
 X &= C_X QS \\
 Y &= C_Y QS \\
 Z &= C_Z QS
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

где су: $S = \pi d^2 / 4$ – референтна површина; d – референтна дужина која је обично једнака пречнику ракете (калибру); Q – динамички притисак.

$$Q = \rho V^2 / 2 \tag{6.3}$$

где су: ρ – густина ваздуха, V – брзина ракете у односу на атмосферу.

Алтернативне ознаке су: $C_A = -C_X$ за коефицијент аксијалне силе, а $C_N = -C_Z$ за нормалну силу.

Компоненте аеродинамичког момента око оса динамичког система, момент

ваљања, пропињања и скретања су функције аеродинамичких коефицијената C_l , C_m и C_n :

$$\begin{aligned} L &= C_l Q S d \\ M &= C_m Q S d \\ N &= C_n Q S d \end{aligned} \quad (6.4)$$

Аеродинамички коефицијенти су нелинеарне функције, а развојем у Тајлоров ред могу се приближно представити на следећи начин [32] и [33]:

$$\begin{aligned} C_A &= C_{A_0} + C_{A\delta^2} (\delta_n^2 + \delta_m^2) + C_{A\delta_l} \delta_l^2 + C_{A\alpha^2} (\alpha^2 + \beta^2) + C_{A\alpha\beta} (\alpha\delta_m - \beta\delta_n) \\ C_N &= \left[C_{N\alpha} + C_{N\alpha^3} (\alpha^2 + \beta^2) \right] \alpha + \left[C_{N\delta} + C_{N\alpha^2\delta} \alpha^2 + C_{Y\alpha^2\delta} \beta^2 \right] \delta_m - (C_{N\alpha^2\delta} - C_{Y\alpha^2\delta}) \alpha\beta\delta_n \\ C_Y &= - \left[C_{N\alpha} + C_{N\alpha^3} (\alpha^2 + \beta^2) \right] \beta + \left[C_{N\delta} + C_{N\alpha^2\delta} \beta^2 + C_{Y\alpha^2\delta} \alpha^2 \right] \delta_n - (C_{N\alpha^2\delta} - C_{Y\alpha^2\delta}) \alpha\beta\delta_m \\ C_l &= \left[C_{l\delta_l} + C_{l\alpha^2\delta_l} (\alpha^2 + \beta^2) \right] \delta_l + C_{l\alpha\delta} (\beta\delta_m + \alpha\delta_n) + C_{lp} p^* \\ C_m &= \left[C_{m\alpha} + C_{m\alpha^3} (\alpha^2 + \beta^2) \right] \alpha + \left[C_{m\delta} + C_{m\alpha^2\delta} \alpha^2 + C_{n\alpha^2\delta} \beta^2 \right] \delta_m - (C_{m\alpha^2\delta} - C_{n\alpha^2\delta}) \alpha\beta\delta_n + C_{mq} \cdot q^* \\ C_n &= - \left[C_{m\alpha} + C_{m\alpha^3} (\alpha^2 + \beta^2) \right] \beta + \left[C_{m\delta} + C_{m\alpha^2\delta} \beta^2 + C_{n\alpha^2\delta} \alpha^2 \right] \delta_n - (C_{m\alpha^2\delta} - C_{n\alpha^2\delta}) \alpha\beta\delta_m + C_{mq} \cdot r^* \end{aligned} \quad (6.5)$$

где су угаоне брзине нормализоване множењем са V/d и представљене као бездимензионе величине:

$$p^* = p \frac{d}{V}, \quad q^* = q \frac{d}{V}, \quad r^* = r \frac{d}{V} \quad (6.6)$$

У случају промене положаја центра масе у односу на референтни положај, пре одређивања аеродинамичких момената, потребно је извршити редукцију аеродинамичких коефицијената момената на следећи начин:

$$\begin{aligned} C_m &= C_m \Big|_{x_{CM_Ref}} + C_N (x_{CM} - x_{CM_Ref}) / d \\ C_n &= C_n \Big|_{x_{CM_Ref}} + C_Y (x_{CM} - x_{CM_Ref}) / d \end{aligned} \quad (6.7)$$

Сви деривативи потребни за одређивање аеродинамичких коефицијената (6.5) који се користе за одређивање аеродинамичких сила и момената зависе само од Маховог броја.

У претходним једначинама, аеродинамичке силе и моменти се одређују на основу релативне брзине ракете V која зависи од компонената кинематске брзине ракете и ветра у динамичком координатном систему:

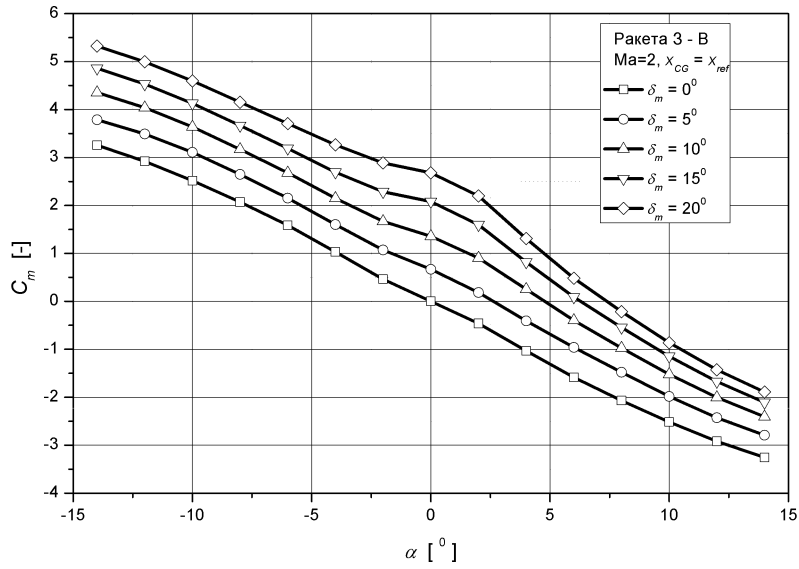
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U \\ v \\ w \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U_K \\ v_K \\ w_K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_w \\ v_w \\ w_w \end{bmatrix} \\ V &= \sqrt{U^2 + v^2 + w^2} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Нападни угао и угао клизања одређени су једначинама:

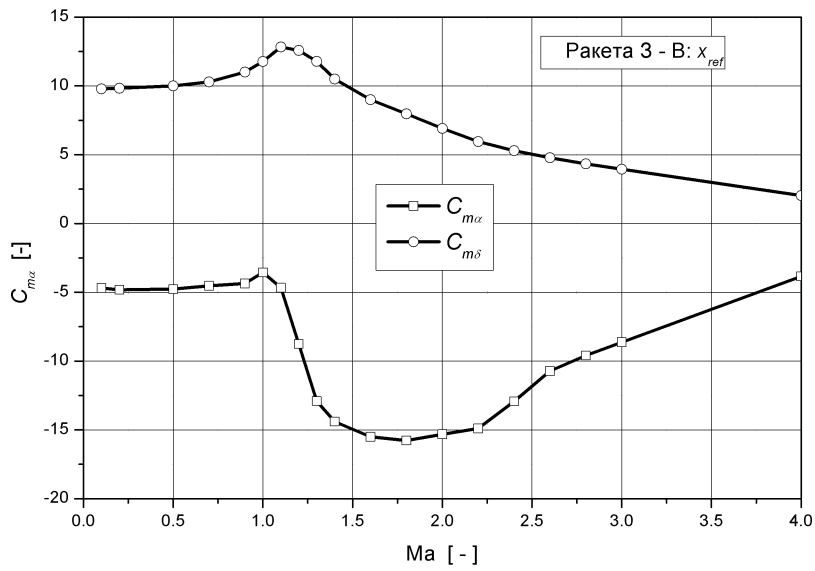
$$\alpha = \frac{w}{V}, \quad \beta = \frac{v}{V} \quad (6.9)$$

6.2.1. Нелинеарности аеродинамичких коефицијената

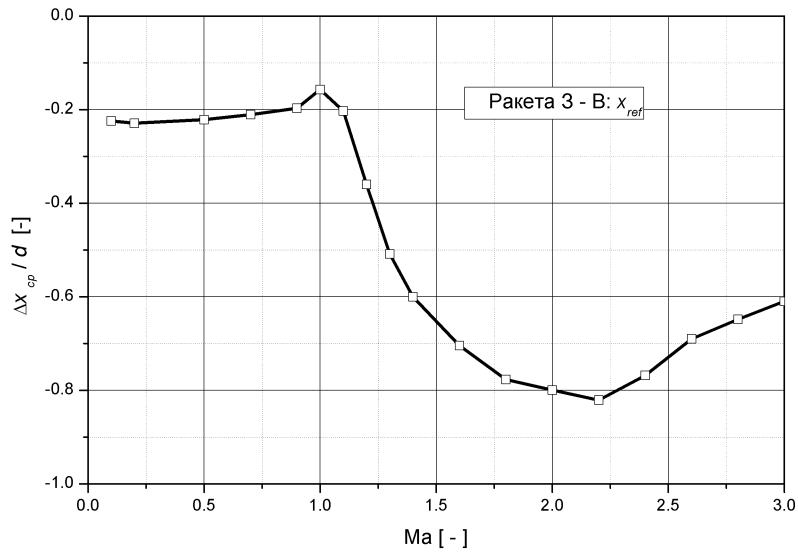
Нелинеарности аеродинамичких карактеристика ракете су изражене, пре свега, преко зависности аеродинамичког момента пропињања од нападног угла, отклона управљачких површина и Маховог броја (Слика 6.1 – Слика 6.5) што резултира значајном променом равнотежног нападног угла. Слика 6.1 показује нелинеарни карактер аеродинамичког коефицијента момента пропињања са повећањем нападног угла и отклона управљачких површина. Зато је неопходно укључити у математички модел кретања ракете нелинеарне аеродинамичке деривативе $C_{m\alpha^3}$ (Слика 6.4) и $C_{m\alpha^2\delta}$ (Слика 6.5). Овоме треба додати и одступање резерве статичке стабилности од дијаграма који се добија ако је аеродинамичка конфигурација на малим нападним угловима (Слика 6.3). Линеаризацијом једначина кретања ове појаве су само делимично обухваћене. Због тога се оцена једног закона вођења ракете против ваздушног циља са унапређеним стратегијама избегавања мора вршити на бази нумеричке симулације комплетног нелинеарног и нестационарног система као што ће бити приказано у овом поглављу тезе.



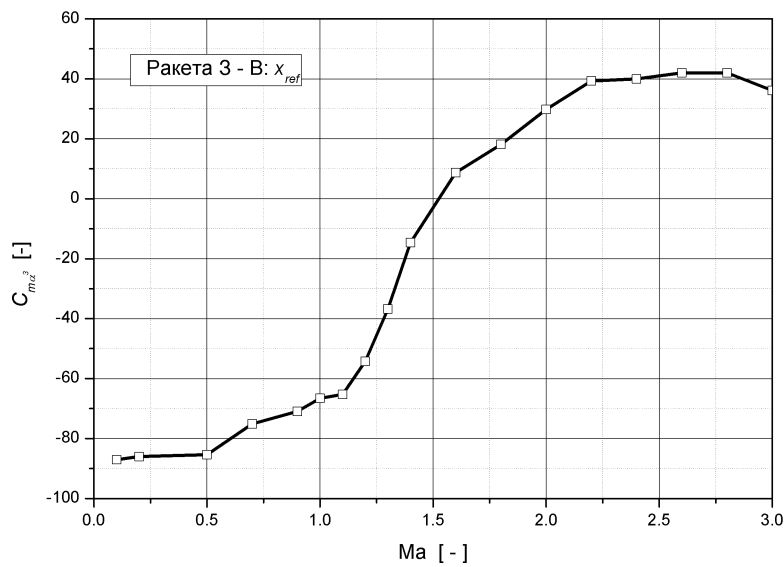
Слика 6.1 – Аеродинамички коефицијент момента пропињања у зависности од нападног угла и отклона управљачких површина.



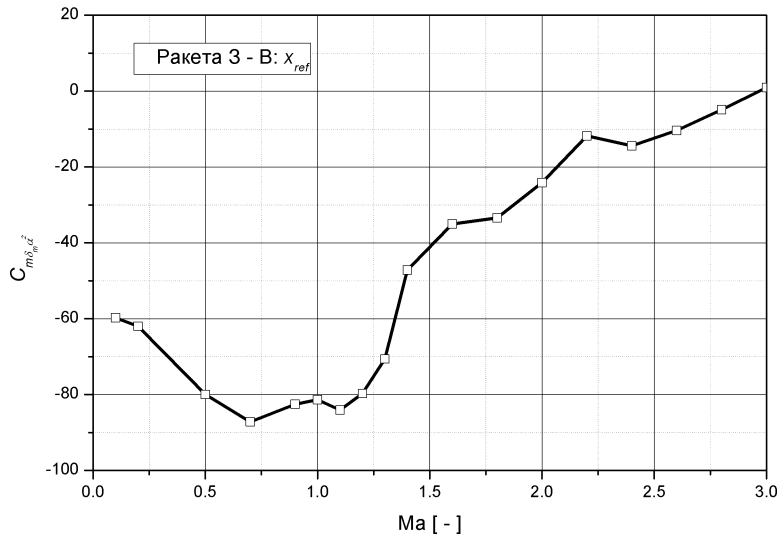
Слика 6.2 – Линеарни деривативи аеродинамичког коефицијента момента пропињања у зависности од Маховог броја.



Слика 6.3 – Резерва статичке стабилности у односу на референтну тачку у зависности од Маховог броја.



Слика 6.4 – Нелинеарни аеродинамички дериватив статичког момента пропињања у зависности од Маховог броја.



Слика 6.5 – Нелинеарни аеродинамички дериватив управљачког момента пропињања у зависности од Маховог броја.

6.2.2. Модел атмосфере

У претходним једначинама потребно је одредити вредност динамичког притиска која зависи и од густине ваздуха која се мења са висином због промене температуре и притиска:

$$\rho = \frac{100 \cdot P}{287,14 \cdot T} \quad (6.10)$$

Претпоставља се да температура до висине од 11km линеарно опада градијентом 0,0065 и надаље остаје константна:

$$T = \begin{cases} T_0 - 0.0065 \cdot h, & h \leq 11000 \\ T_0 - 0.0065 \cdot 11000 & h > 11000 \end{cases}; \quad T_0 = 293K \quad (6.11)$$

На основу температуре може се одредити локална брзина звука:

$$V_{zvuka} = 20,05\sqrt{T} \quad (6.12)$$

Она је потребна за одређивање Маховог броја, од кога зависе сви аеродинамички деривативи:

$$Mach = V / V_{zvuka} \quad (6.13)$$

Претпоставља се спорији пад притиска до висине од 11km, а затим бржи експоненцијални пад:

$$P = \begin{cases} P_0 \left(1 - \frac{0,0065 \cdot h}{T_0} \right)^{\frac{9,8066}{0,0065 \cdot 287,14}}, & h \leq 11000 \\ P_0 \left(1 - \frac{0,0065 \cdot h}{T_0} \right)^{\frac{9,8066}{0,0065 \cdot 287,14}} e^{-9,8066 \frac{h-11000}{287,14 T}}, & h > 11000 \end{cases}; \quad P_0 = 1012 \text{ mbar} \quad (6.14)$$

6.3. Равнотежна путања

Равнотежна путања се користи као номинална путања и представља непоремећену путању при којој нема ротације око попречне осе ракете нити промене правца брзине. Линеаризација једначина је извршена у односу на ову путању.

Услов да нема попречне ротације подразумева равнотежу аеродинамичких момената око центра масе који се јављају услед нападног угла у вертикалној равни (или угла клизања у равни скретања) и угла отклона управљачких површина ракете. Полазећи од променљивости аеродинамичких дериватива са Маховим бројем овим се успоставља, после извршене линеаризације једначина, квази-стационарна, линеарна веза [34] и [31]:

$$\eta_{tr} = -\frac{C_{m\alpha}}{C_{m\eta}} \alpha_{tr} \quad (6.15)$$

Одређивањем резултанте свих сила које делују на ракету у правцу управном на брзину ракете и њено изједначавање са нулом, обезбедиће константан правац вектора брзине ракете, што се може изразити као:

$$\begin{aligned} F_p \sin \alpha_{tr} + L &= mg \cos \gamma_{tr} \\ L &= N \cos \alpha_{tr} - A \sin \alpha_{tr} \end{aligned} \quad (6.16)$$

где су: F_p – сила потиска, L – аеродинамичка сила узгона, N – нормална сила, A – аксијална сила.

На основу (6.15) и (6.16) уз увођење претпоставке да су ови углови мали, може се одредити потребна промена отклона управљачких површина за неку константну задату вредност угла брзине ракете γ_{tr} , што представља праволинијску равнотежну путању, у облику:

$$\eta_{tr} = \frac{mg \cos \gamma_{tr}}{-\frac{C_{m\eta}}{C_{m\alpha}}(F_P - A + QSC_{N\alpha}) + QSC_{N\eta}} \quad (6.17)$$

Динамичке карактеристике одређују се за изабрану равнотежну путању, која је у конкретном случају ракете земља–ваздух средњег домета, претпостављена као праволинијска са константним углом нагиба $\gamma_{tr} = 30^\circ$.

Применом већ представљеног модела кретања ракете у поглављу 6.2, за усвојену равнотежну путању, може се извршити линеаризација једначина кретања ракете, а затим и одредити аеродинамичке функције преноса које су потребне за синтезу аутопилота ракете [35].

6.4. Динамичке карактеристике пропињања–скретања ракете

Ако се ракета посматра као објект којим се управља отклоном одговарајућих крмила, најинтересантније су следеће две функције преноса [22].

Аеродинамичка функција преноса нормалног убрзања у односу на отклон управљачких површина пропињања:

$$\frac{\Delta f_z(s)}{\Delta \eta(s)} = -VK_q \frac{\omega_n^2 (T_\gamma^2 s^2 + 2\zeta_\gamma T_\gamma s + 1)}{s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2} \quad (6.18)$$

чији су коефицијенти (K_q – фактор маневарске способности, односно, фактор појачања по угаоној брзини пропињања – скретања, ω_n – сопствена учестаност, ζ_n – коефицијент релативног пригушења, T_γ – временска константа) изведени у функцији динамичких дериватива ракете у [22] и [35]:

$$\begin{aligned}
 K_q &= \frac{z_\eta m_w - z_w m_\eta}{m_q z_w - m_w V} \\
 \omega_n^2 &= -(m_w V - z_w m_q) \\
 \zeta_n &= -\frac{m_q + z_w}{2\omega_n} \\
 T_\gamma^2 &= -\frac{z_\eta}{V(z_\eta m_w - z_w m_\eta)} \\
 2\zeta_\gamma T_\gamma &= \frac{m_q z_\eta}{V(z_\eta m_w - z_w m_\eta)}
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Аеродинамичка функција преноса угаоне брзине пропињања:

$$\frac{\Delta q(s)}{\Delta \eta(s)} = \frac{\omega_n^2 K_q (T_q s + 1)}{s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2} \tag{6.20}$$

чија је временска константа кашњења угла правца путање у односу на угао пропињања, T_q , изражени преко динамичких дериватива:

$$T_q = \frac{m_\eta}{z_\eta m_w - z_w m_\eta} \tag{6.21}$$

Динамички коефицијенти зависе од параметара лета ракете и аеродинамичких дериватива:

$$\begin{aligned}
 z_w &= -\frac{Q \cdot S}{mV} C_{Z\alpha} \\
 m_w &= \frac{Q \cdot S \cdot l}{J_y V} C_{m\alpha} \\
 m_q &= \frac{Q \cdot S \cdot l^2}{J_y} C_{mq} \\
 z_\eta &= -\frac{Q \cdot S}{mV} C_{Z\eta} \\
 m_\eta &= \frac{Q \cdot S \cdot l}{J_y} C_{m\eta}
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

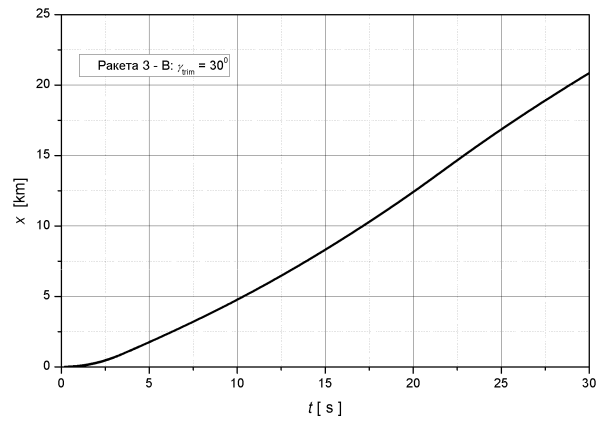
где су: $Q = \frac{1}{2} \rho V^2$ – динамички притисак; m – маса; V – брзина ракете; l –

референтна дужина (калибар); S – референтна површина; J_y – попречни момент инерције.

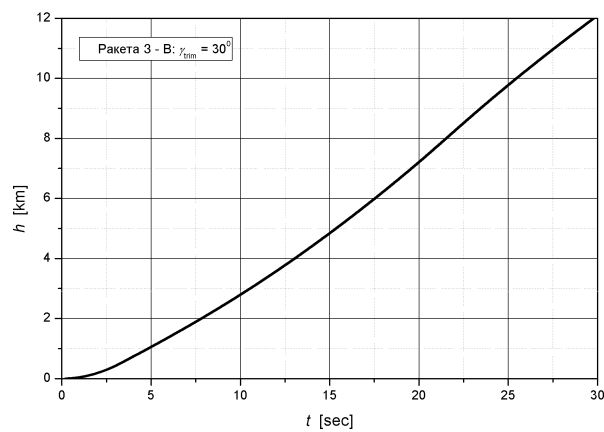
6.5. Динамичке особине ракете као објекта управљања

Полазећи од постављеног задатка синтезе савременог закона вођења и управљања, у овом одељку дају се основне динамичке особине типичне ракете земља–ваздух средњег домета о којима треба водити рачуна при његовој реализацији. Посматра се праволинијска тримована путања са углом нагиба од 30° . Домет (Слика 6.6) и висина лета (Слика 6.7) одговарају ракети средњег домета. Промена брзине у току лета (Слика 6.8) указује и на нестационарност свих осталих параметара лета као што су: отклон управљачких површина и нападни угао који обезбеђују равнотежни режим лета (Слика 6.9), сопствена фреквенција ракете (Слика 6.10), максимално нормално убрзање, односно маневарска способност ракете (Слика 6.11). Избор пропусног опсега аутопилота зависи од сопствене фреквенције ракете [35], па ће због тога и он бити временски променљив. Синтеза закона вођења са минималним утрошком енергије захтева познавање временске константе аутопилота, која ће, такође, бити нестационарна, па отуда и параметри закона вођења. Ова кратка анализа динамичких особина ракете указује на велики значај што тачније њихове идентификације у синтези савременог закона вођења.

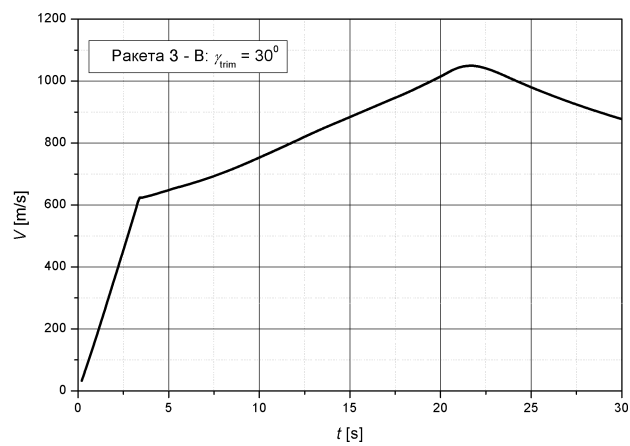
Примена концепта ограничења максималног нормалног убрзања по шарнирном моменту (Слика 6.11) донекле олакшава поступак синтезе закона вођења и конструкције ракете која може бити изложена великим оптерећењима при маневрисању циља, али и даље остаје његова променљивост током лета. Ограничена маневарска способност ракете на већим висинама (5 – 10 g) мотивише истраживаче и конструкторе ракета на синтезу таквих закона вођења који ће захтевати минимална управљачка убрзања, односно минимални утрошак енергије.



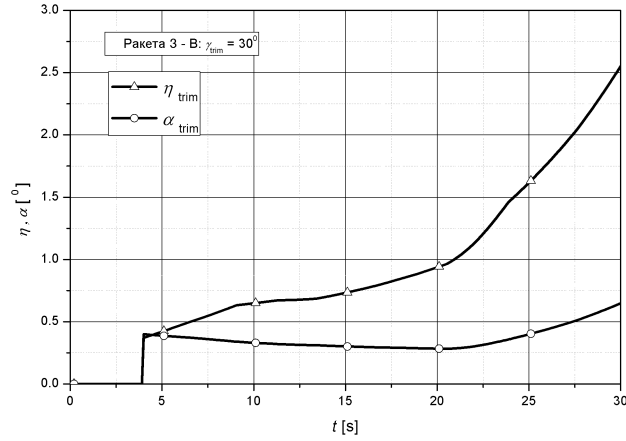
Слика 6.6 – Домет ракете земља–ваздух за тримовану путању.



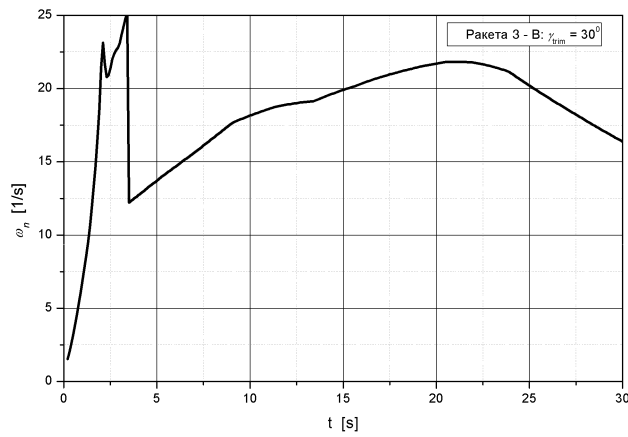
Слика 6.7 – Висина лета ракете земља–ваздух за тримовану путању.



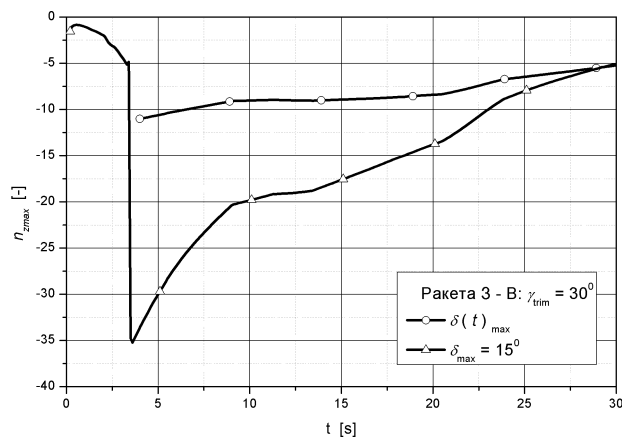
Слика 6.8 – Брзина ракете земља–ваздух за тримовану путању.



Слика 6.9 – Отклон управљачких површина и нападни угао земља–ваздух за тримовану путању.



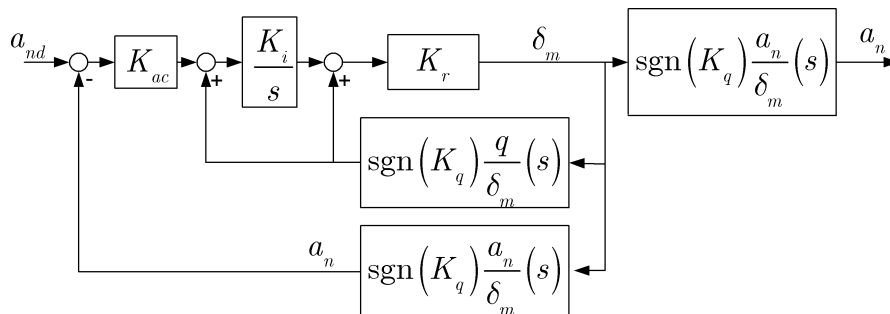
Слика 6.10 – Сопствена фреквенција ракете земља–ваздух за тримовану путању.



Слика 6.11 – Максимално нормално убрзање ракете земља–ваздух за тримовану путању, са и без ограничења отклона управљачких површина по шарнирном моменту.

6.6. Модел аутопилота пропињања–скретања

Усвојен је аутопилот са повратним везама по оствареном нормалном убрзању и угаоној брзини пропињања–скретања који у својој структури садржи и додатну синтетичку повратну спрегу по угаоној брзини, чији је блок дијаграм приказан на Слика 6.12.



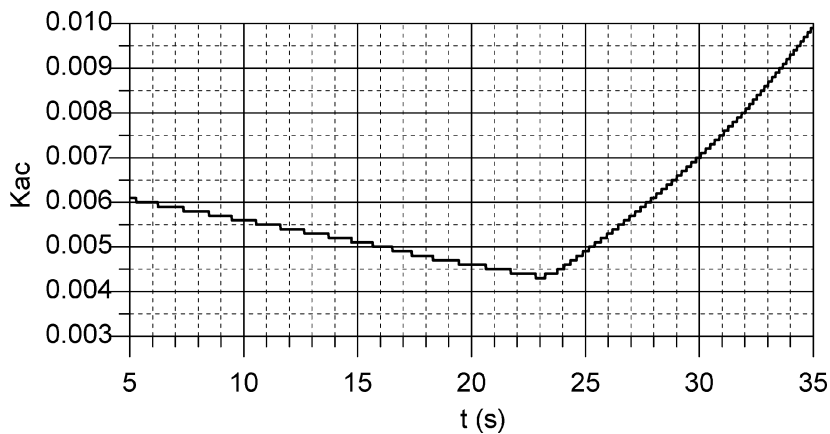
Слика 6.12 – Блок шема аутопилота пропињања–скретања

Уводе се следеће претпоставке: параметар пригушења $m_q \approx 0$, параметар управљачке нормалне силе је мали у односу на бочну силу услед нападног угла $z_\eta \ll z_w$, па се занемарује, а такође и фактор пригушења у имениоцу преносне функције $2\zeta_n \omega_n \approx 0$ се може занемарити (када се упореди са вештачким пригушењем аутопилота). На овај начин могу се једноставно одредити потребна појачања аутопилота, како је приказано у [7].

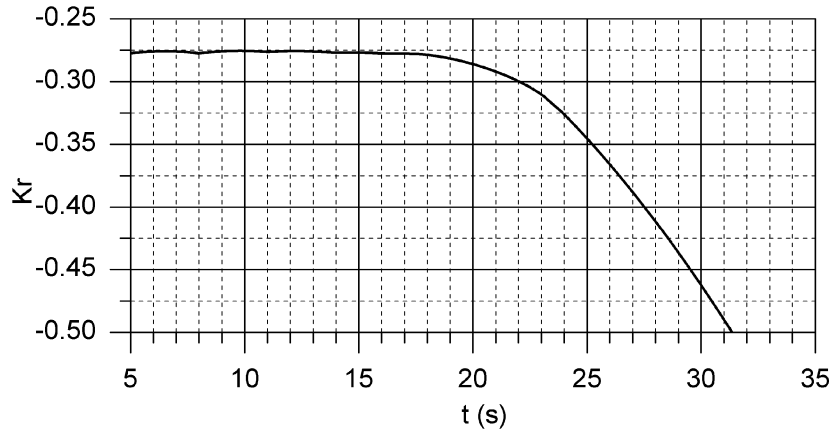
Улазни подаци су аеродинамичке функције преноса које се одређују дуж референтне путање, као и жељене динамичке карактеристике аутопилота: $\tau_{ap} = 0,1s$; $\zeta_{ap} = 0,65$; $\omega_C = 50 s^{-1}$. Потребне једначине су (6.23) а програм за одређивање појачања аутопилота дат је у Прилогу Б – Програм Б.3.

$$\begin{aligned}
 \omega_{ap} &= \frac{1}{T_{ap}} = \frac{\left(\frac{2\zeta_n}{T_n} + \omega_c\right) \tau_{ap} - 1}{2\zeta_{ap} \tau_{ap}} \\
 T_0 &= T_{ap} \sqrt{\omega_c \tau_{ap}} \\
 2\zeta_0 T_0 &= 2\zeta_{ap} T_{ap} + \tau_{ap} \left(1 - \frac{T_{ap}^2}{T_n^2}\right) \\
 K_0 &= \frac{T_n^2}{T_0^2} \omega_c \\
 K_i &= \frac{T_0^2 - T_\gamma^2 - T_q (2\zeta_0 T_0 - 2T_\gamma \zeta_\gamma)}{(2\zeta_0 T_0 - T_q)(T_0^2 - T_\gamma^2) - T_0^2 (2\zeta_0 T_0 - 2T_\gamma \zeta_\gamma)} \\
 K_{ac} &= \frac{1}{V} \frac{T_0^2 - \frac{T_q}{K_i}}{T_\gamma^2 - T_0^2} \\
 K_r &= \frac{K_0}{-\text{sgn}(K_q) K_i K_q (1 + K_{ac} V)} \tag{6.23}
 \end{aligned}$$

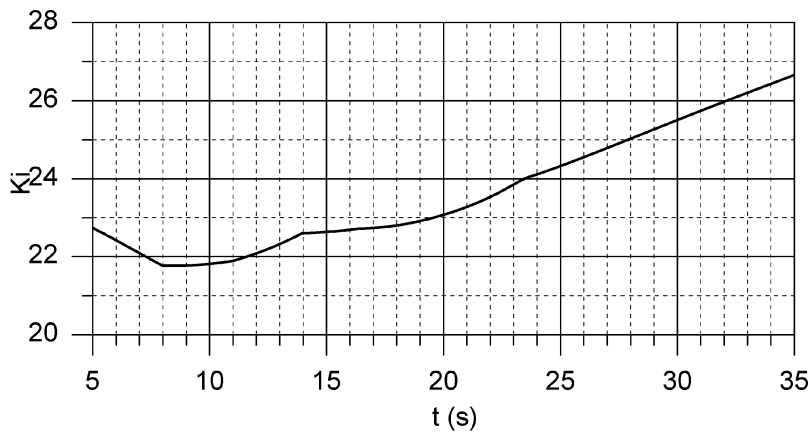
Временски дијаграми фактора појачања аутопилота који обезбеђују жељене динамичке карактеристике аутопилота дуж задате референтне путање приказани су на Сликама 6.13 до Слика 6.15.



Слика 6.13 – Фактор појачања акцелерометра, K_{ac}



Слика 6.14 – Фактор појачања брзинског жирокопа, K_r



Слика 6.15 – Фактор појачања синтетичке повратне везе, K_i

Усвојене су константне вредности појачања аутопилота, па као компромисно решење које треба да буде задовољавајуће и свим фазама лета и на различитим равнотежним путањама, појачања су изабрана из временског интервала од 15s до 20s и то: $K_{ac} = 0,005$; $K_r = -0,275$; $K_i = 22,7$. Ова појачања су коришћена у свим нумеричким симулацијама у овом поглављу и на тај начин проверена.

За нумеричку симулацију, потребно је аутопилот приказан на Слици 6.12 представити у погодној нумеричкој форми, што се може учинити увођењем помоћне величине стања (y) непосредно после интегратора на посматраном блок дијаграму, након чега се може одредити захтевани отклон управљачких површина:

$$\begin{aligned} \eta &= K_r (y + q) \\ \dot{y} &= K_i \left[K_{ac} (a_{nd} - a_n) + q \right] \end{aligned} \quad (6.24)$$

6.7. Модел покретача

Претпоставља се употреба дигитално контролисаног покретача који је другог реда и описан је својом сопственом учестаношћу и пригушењем: $\omega = 180$; $\zeta = 0,6$, односно, следећом преносном функцијом:

$$W = \frac{x_i}{x_u} = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega \cdot s + \omega^2} \quad (6.25)$$

За потребе нумеричке симулације, усвајањем величина стања као $x_1 = x_i$; $x_2 = \dot{x}_1$, динамика покретача може се представити помоћу две диференцијалне једначине, које се у програму нумерички решавају:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \omega^2(x_u - x_1) - 2\zeta\omega \cdot x_2 \end{aligned} \quad (6.26)$$

Максимални отклон управљачких површина ограничен је помоћу шарнирног момента по нападном углу ракете и текућег отклона управљачких површина.

6.8. Модел кретања циља

Просторно кретање циља као материјалне тачке са три степена слободе кретања, може се представити са шест диференцијалних једначина у инерционом координатном систему везаним за Земљу:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{Cx} &= a_{Cx} \\ \dot{V}_{Cy} &= a_{Cy} \\ \dot{V}_{Cz} &= a_{Cz} \\ \dot{x}_C &= V_{Cx} \\ \dot{y}_C &= V_{Cy} \\ \dot{z}_C &= V_{Cz} \end{aligned} \quad (6.27)$$

6.9. Модел релативног кретања циља у односу на ракету

Од интереса су изрази за нумеричко одређивање физичких величина које представљају улазне величине за посматране законе вођења.

Угаона брзина линије визирања, угао линије визирања и брзина приближавања детаљно су изведене за раванско кретање у Глави 2, једначине (2.15) и (2.18), а овде се наводе једначине које се користе при нумеричкој симулацији просторног кретања:

$$\begin{aligned}
 r_x &= x_C - x, \quad r_y = y_C - y, \quad r_z = z_C - z \\
 V_x &= V_{Cx} - V_{Kx}, \quad V_y = V_{Cy} - V_{Ky}, \quad V_z = V_{Cz} - V_{Kz} \\
 \dot{\lambda}_H &= \frac{V_y r_x - r_y V_x}{r_x^2 + r_y^2} \\
 \lambda_H &= \arctan_2(r_y / r_x) \\
 V_{CH} &= -\frac{r_x V_x + r_y V_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} \\
 \dot{\lambda}_V &= \frac{V_z r_x - r_z V_x}{r_x^2 + r_z^2} \\
 \lambda_V &= \arctan_2(r_z / r_x) \\
 V_{CV} &= -\frac{r_x V_x + r_z V_z}{\sqrt{r_x^2 + r_z^2}}
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

где коришћене инверзне тригонометријске функције раде у сва четири квадранта и при том одређују вредност аркус тангенса у интервалу $\pm\pi$.

За командно вођење методом покривања циља потребно је одређивање нормалног одступања ракете од правца тренутне линије визирања циља посматраног са командног места [34]:

$$\begin{aligned}
 h_H &= \sqrt{x^2 + y^2} \left[\arctan_2(y_C / x_C) - \arctan_2(y / x) \right] \\
 h_V &= \sqrt{x^2 + z^2} \left[\arctan_2(z_C / x_C) - \arctan_2(z / x) \right]
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

6.10. Модел комбинованог вођења ракете

Претпостављено је вођење ракете које се састоји од три различите фазе вођења и које је названо комбиновано вођење из разлога што комбинује три метода вођења на следећи начин:

1. вођење које одржава правац почетне брзине ракете, који се примењује од почетног тренутка лансирања ракете $t = 0s$ до тренутка $t = 4s$.
2. командно вођење методом покривања циља, које може бити аутоматско или ручно (оператер са управљачком палицом), који се примењује од тренутка $t = 4s$ до тренутка кад до сусрета са циљем преостане пет секунди $t = t_f - 5s$, где t_f представља укупно време лета.
3. самонавођење неким од истражених закона самонавођења, што

представља завршну фазу вођења када се ракета довољно приближи циљу да би се остварио "захват циља" помоћу главе за самонавођење. У приказаном примеру вођене ракете ово се дешава пет секунди пре сусрета ракете и циља $t_f - t < 5 s$. Како укупно време лета није унапред познато, то се преостало време до сусрета у нумеричкој симулацији приближно одређује помоћу количника релативног растојања и релативне брзине ракете и циља на следећи начин:

$$t_{go} = t_f - t = \frac{\sqrt{(x_C - x)^2 + (y_C - y)^2 + (z_C - z)^2}}{\sqrt{(\dot{x}_C - \dot{x})^2 + (\dot{y}_C - \dot{y})^2 + (\dot{z}_C - \dot{z})^2}} \quad (6.30)$$

6.10.1. Фаза одржања правца брзине ракете

Ова почетна фаза лета треба да обезбеди улазак ракете у радарски сноп за следећу фазу (командног вођења), односно видно поље оператера (уколико се ради о ручном вођењу у овој фази лета ракете). Да би се то остварило, потребно је да ракета задржи почетни правац вектора брзине који је одређен усмеравањем лансирне шине.

Идеално би било да сензори у ракети могу да мере правац брзине ракете који би се тада контролисао затвореним системом аутоматског управљања, али је претпоставка да ракета нема такве сензоре. Међутим, помоћу расположиве информације о углу пропињања, његовом контролом може се постићи приближно сличан ефекат. Због повећања стабилности овог система аутоматског управљања, осим пропорционалног члана додат је и диференцијални члан који обухвата и угаону брзину пропињања–скретања. Тако су отклони управљачких површина у овој фази:

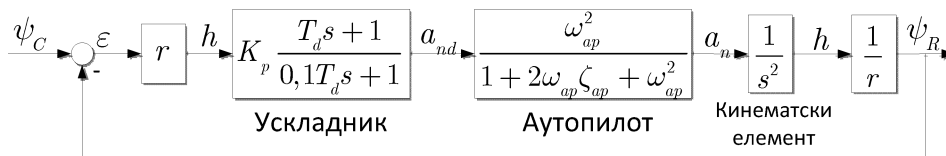
$$\begin{aligned} \delta_m &= K_P (\theta_0 - \theta) + K_D q \\ \delta_n &= K_P (\psi_0 - \psi) + K_D r \end{aligned} \quad (6.31)$$

У практичној реализацији мере се само угаоне брзине пропињања и скретања q и r , а одступања углова пропињања и скретања одређују интеграљењем сигнала угаоних брзина измерених помоћу брзинских жироскопа.

6.10.2. Фаза командног вођења ракете

У овој фази командно вођење ракете може бити аутоматско или корекцијом путање помоћу оператора који је саставни део система. На основу угловне разлике положаја циља и ракете одређене са командног места уз информацију о удаљености ракете, може се одредити нормално одступање ракете од осе радарског снопа (линије визирања циља – ЛВЦ). Задатак система аутоматског вођења или оператора је да ово одступање помоћу командног убрзања елиминише.

Проблем које се уочава анализом заједничке фазно–фреквентне карактеристике раније синтетисаног аутопилота и кинематског елемента је то што се цела фазно–фреквентна карактеристика налази у зони испод -180° , што овакав систем чини нестабилним. Неопходно је увести пропорционално–диференцијални (ПД) ускладник (компензатор) са фазним предњачењем, који треба да обезбеди поправку фазно–фреквентне карактеристике отвореног кола целог система аутоматског управљања, приказаног на Слици 6.16.



Слика 6.16 – Блок шема командног вођења методом покривања циља

Усваја се захтевани претек фазе од $\varphi_{zad} = 38^\circ$.

Максимална могућа поправка фазе помоћу оваквог ПД ускладника је $\varphi_{PD,max} = 54,9^\circ$, а пресечна учестаност појачања отвореног кола ω_c може се одредити из услова жељене вредности претека фазе [22], на следећи начин:

$$\varphi_{zad} = 180 + \varphi_{ok}|_{\omega=\omega_c} + \varphi_{PD,max} \Rightarrow \varphi_{ok}|_{\omega=\omega_c} = -180 - \varphi_{PD,max} + \varphi_{zad} \quad (6.32)$$

MATLAB 2014 програм који врши цео поступак синтезе параметара ПД ускладника, дат је у Прилогу Б, Програм Б.4, којим су одређени параметри $T_d = 0,47$ и $K_p = 14$. Нелинеарна симулација је показала да се они морају кориговати због стабилности целог система вођења, па је у симулацијама смањена

вредност појачања на $K_P = 3$, а увећано диференцијално пригушно дејство ускладника на $T_d = 1$.

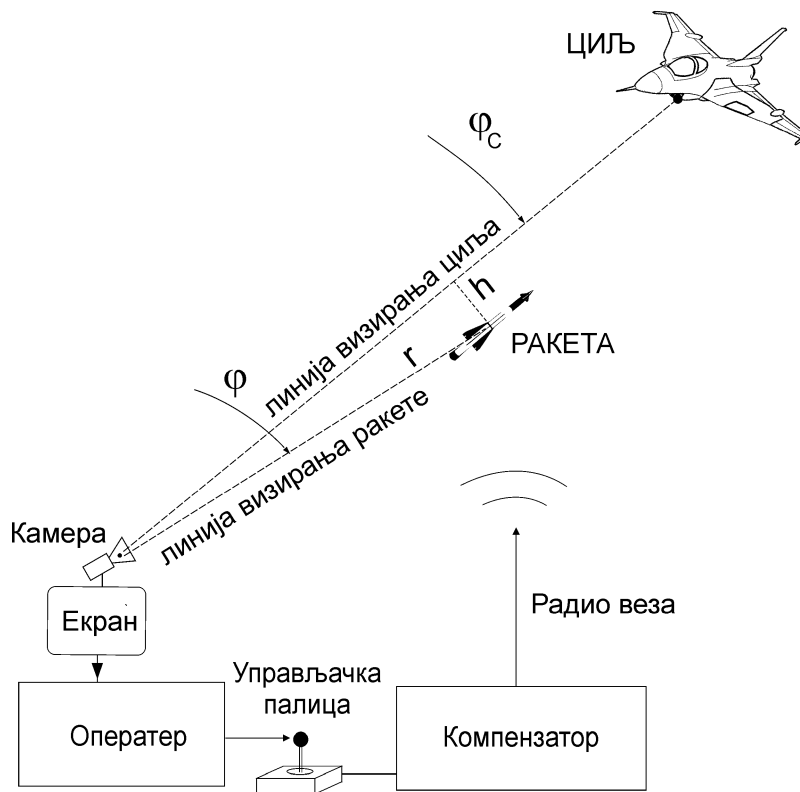
За потребе нумеричке симулације, захтевана нормална убрзања могу се представити следећим диференцијалним једначинама:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{ndH} &= \frac{1}{\alpha_{PD}} \left(K_P \dot{h}_H + \frac{K_P h_H - a_{ndH}}{T_d} \right) \\ \dot{a}_{ndV} &= \frac{1}{\alpha_{PD}} \left(K_P \dot{h}_V + \frac{K_P h_V - a_{ndV}}{T_d} \right) \end{aligned} \quad (6.33)$$

где је потребно одредити и брзине нормалних одступања. Пошто грешка вођења садржи шум пре пропуштања кроз диференцијални компензатор врши се филтрирање по неком од метода приказаним у [19] и [36].

6.10.2.1. Симулатор лета – тренажер за оператера ручног вођења по методу покривања циља

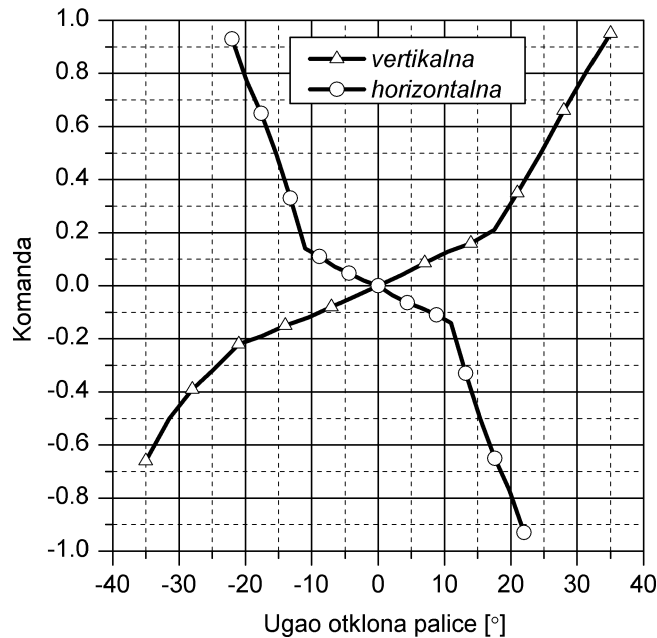
Фаза командног вођења може бити и ручна, где оператер (у петљи вођења), на екрану прати положај циља и ракете и помоћу управљачке палице контролише нормална убрзања ракете да би се она довела на линију визирања. Принцип оваквог вођења приказан је на Слици 6.17.



Слика 6.17 – Командно вођење методом покривања циља помоћу камере

Увежбаност оператора је од пресудне важности за цео систем вођења и погађање циља, из тог разлога потребно је реализовати тренажер за обуку стрелца. Сличан тренажер за обуку стрелца за субсоничну вођену ракету представљен је у [37], који се уз минималне измене може применити и у посматраном случају ракете земља–ваздух.

Математички модел кретања ракете и циља представљен је у овом поглављу, а потребно је још обухватити статичку преносну карактеристику управљачке палице, која је приказана на Слици 6.18.



Слика 6.18 – Статичка карактеристика управљачке палице

Команде које задаје оператер су нелинеарне функције отклоне палице. Нелинеарна карактеристика управљачке палице може се представити преко два нагиба. Мањи нагиби су у зонама отклоне од $-12^{\circ} \div 12^{\circ}$ у хоризонталној и $-20^{\circ} \div 20^{\circ}$ у вертикалној равни. Ови мањи нагиби омогућују стрелцу да постигне бољу контролу ракете када је она у околини линије визирања циља. Већи нагиби су са друге стране наведених граница до максимума од $\pm 22^{\circ}$ у хоризонталној и $\pm 35^{\circ}$ у вертикалној равни.

6.10.3. Фаза самонавођења ракете

У овој фази су примењени различити закони самонавођења који су се по својим перформансама издвојили приликом изучавања раванског кретања ракете у претходним главама. С обзиром да се класична пропорционална навигација са и без минималних модификација најчешће користи код тактичких ракета које се сада налазе у оперативној употреби, она се користи за компаративну анализу са новим законима вођења. Наведени закони самонавођења на исти начин су примењени и у хоризонталној и у вертикалној равни, са улазним величинама датим у поглављу 6.9.

6.11. Нумеричка симулација и анализа резултата за различите законе вођења

Због равноправног поређења представљених закона самонавођења, претпоставља се да ракета нема информацију о маневру циља. Анализираће се два конкретна случаја, где се у првом случају посматра циљ "у доласку" (циљ лети ка ракети), а у другом случају циљ "у одласку" (радијалне компоненте брзина ракете и циља имају исти смер). У оба случаја претпоставља се да циљ лети на константној висини, а уколико маневрише, маневар врши само у хоризонталној равни.

Од наведених метода самонавођења, анализираће се: класична пропорционална навигација (ТПН), нелинеарна пропорционална навигација (НПН), вођење са минималним утрошком енергије применом диференцијалних игара (ВМЕДИ) и побољшано вођење методом клизања без интегралног члана (ПВМК). Ради лакшег праћења резултата нумеричке симулације просторног кретања ракете поновиће се математичке формулације ових закона вођења:

Класична пропорционална навигација (ТПН):

$$a_{MG}^{ТПН} = V_C k \dot{\lambda} \quad (6.34)$$

Нелинеарна пропорционална навигација (НПН):

$$a_{MG}^{НПН} = V_C k \dot{\lambda} + c_3 r \dot{\lambda}^3; \quad k \geq 2, \quad c_3 > 0 \quad (6.35)$$

Вођење са минималним утрошком енергије применом диференцијалних игара (ВМЕДИ):

$$a_{MG}^{ВМЕДИ} = N' \left(V_C \dot{\lambda} + \frac{h-1+e^{-h}}{h^2} a_{Mn} \right); \quad h = \frac{t}{T_M},$$

$$N' = \frac{6h^2(h-1+e^{-h})}{\frac{6}{T_M^3 b} + 2(1-\gamma^{-2})h^3 - 6h^2 + 6h - 12he^{-h} - 3e^{-2h} + 3} \quad (6.36)$$

Побољшано вођење методом клизања без интегралног члана (ПВМК) са експонентом 2/3:

$$a_{MG}^{ПВМК} = V_C k \dot{\lambda} + \beta_1 |\dot{\lambda}|^{\frac{2}{3}} \operatorname{sgn} \dot{\lambda} \quad (6.37)$$

Параметри изабраних закона вођења, дати су у Табела 6.1.

Класична пропорционална навигација до сада је у пракси најраспрострањенији метод вођења, али за маневришуће циљеве може имати велике промашаје, што су показале нумеричке симулације у оквиру главе 3.6.1. Из тог разлога представљен је метод нелинеарне пропорционалне навигације који садржи кубни члан по угаоној брзини линије визирања циља и на тај начин остварује временски променљиво појачање које је веће за случај великих вредности измерене угаоне брзине линије визирања што би требало да смањи промашај. На бази теорије диференцијалних игара представљен је закон вођења са минималним утрошком енергије чија структура одговара структури класичне пропорционалне навигације проширеној за додатну повратну везу по оствареном нормалном убрзању ракете, где је појачање временски променљиво и одређује се на основу познате временске константе аутопилота и преосталог времена до сусрета ракете и циља. Последње анализирано побољшано вођење методом клизања има структуру пропорционалне навигације уз додатни члан степене сигнум функције угаоне брзине линије визирања циља, чиме се при малим грешкама вођења повећава појачање закона вођења што повољно утиче на тачност система самонавођења.

6.11.1. Гађање циља "у доласку"

Претпостављен је почетни положај циља: даљина $x_{c_0} = 20km$, одступање по правцу $y_{c_0} = 0m$, висина $z_{c_0} = -7km$. Брзина циља је $600 m/s$ и у хоризонталној је равни, а усмерена је према командном месту тако да најмање растојање путање циља од вертикалне осе командног места износи $7km$. Лансирање ракете врши се директно у правцу циља. Ако би се у обзир узимало претицање, лансирање се може извршити према тачки у простору где се циљ очекује $4s$ после тренутка лансирања (не треба користити пуно претицање, јер то не одговара закону вођења по линији визирања циља (ВЛВЦ)).

Када би циљ био непокретан (или споро покретан), као што су земаљски циљеви (бункери, тенкови, возила, ...), задовољавајуће резултате постигао би и командни закон вођења по линији визирања циља.

6.11.1.1. Неманевришући циљ

За анализирани методе самонавођења, вредности остварених промашаја приказане су у Табела 6.1.

Табела 6.1. Остварени промашаји за различите законе вођења

Закон вођења	ТПН	НПН	ВМЕДИ	ПВМК	ВЛВЦ
Промашај (m)	0,14	0,08	0,34	0,48	25,63
Параметри	$K = 3$	$K = 3$ $C_3 = 3000$	$T_M = 0,1$ $b = 100$ $\gamma = 2,1$	$K = 3$ $\beta_1 = 1000$ $\exp = 2 / 3$	$T_d = 1$ $K_p = 3$

Осим ВЛВЦ закона вођења, сви остали закони вођења постижу задовољавајуће резултате, што је и био циљ увођења комбинованог вођења.

6.11.1.2. Циљ врши маневар избегавања са константним нормалним убрзањем

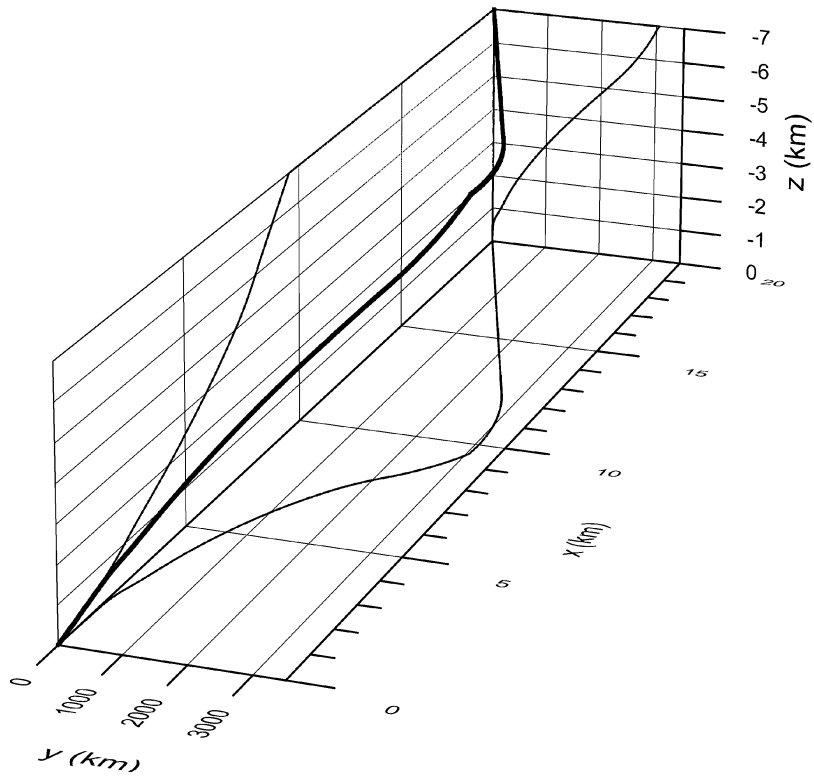
Претпостављен је маневар циља описан константним нормалним убрзањем у хоризонталној равни интензитета $5g$, који се остварује са почетком фазе самонавођења. У временском интервалу од $4s$ па до тренутка $5s$ пре сусрета, на ракети је примењено вођење по линији визирања циља (ВЛВЦ), да би после тога реализовано завршно самонавођење једним од следећих метода: класичном пропорционалном навигацијом (ТПН), нелинеарном пропорционалном навигацијом (НПН), вођењем са минималним утрошком енергије применом диференцијалних игара (ВМЕДИ) или побољшаним вођењем методом клизања (ПВМК). Вредности остварених промашаја приказане су у Табела 6.2.

Табела 6.2. Остварени промашаји за различите законе вођења

Закон вођења	ТПН	НПН	ВМЕДИ	ПВМК	ВЛВЦ
Промашај (m)	10,97	4,14	1,27	0,37	22,21

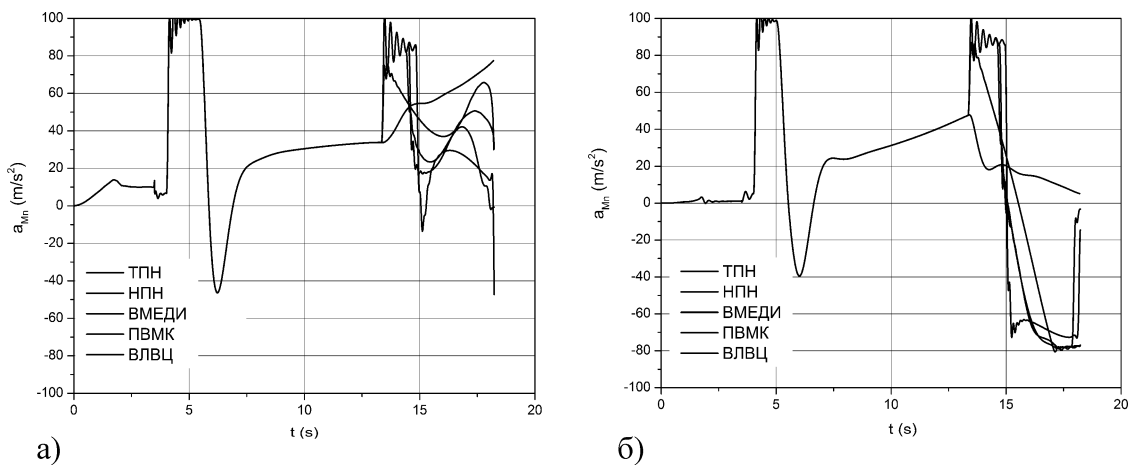
Уочава се повећање вредности промашаја, нарочито код метода класичне пропорционалне навигације (ТПН) и нелинеарне пропорционалне навигације (НПН).

Путање ракете и циља у простору приказане су на Слици 6.19 за случај вођења методом НПН

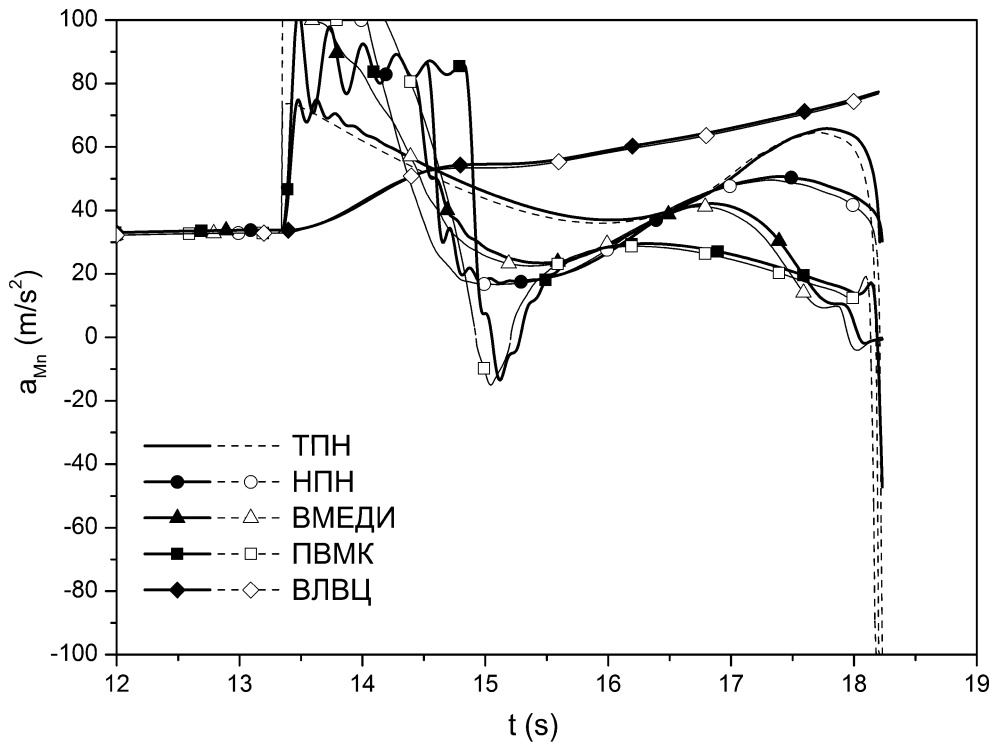


Слика 6.19 – Путање циља и ракете вођене методом НПН.

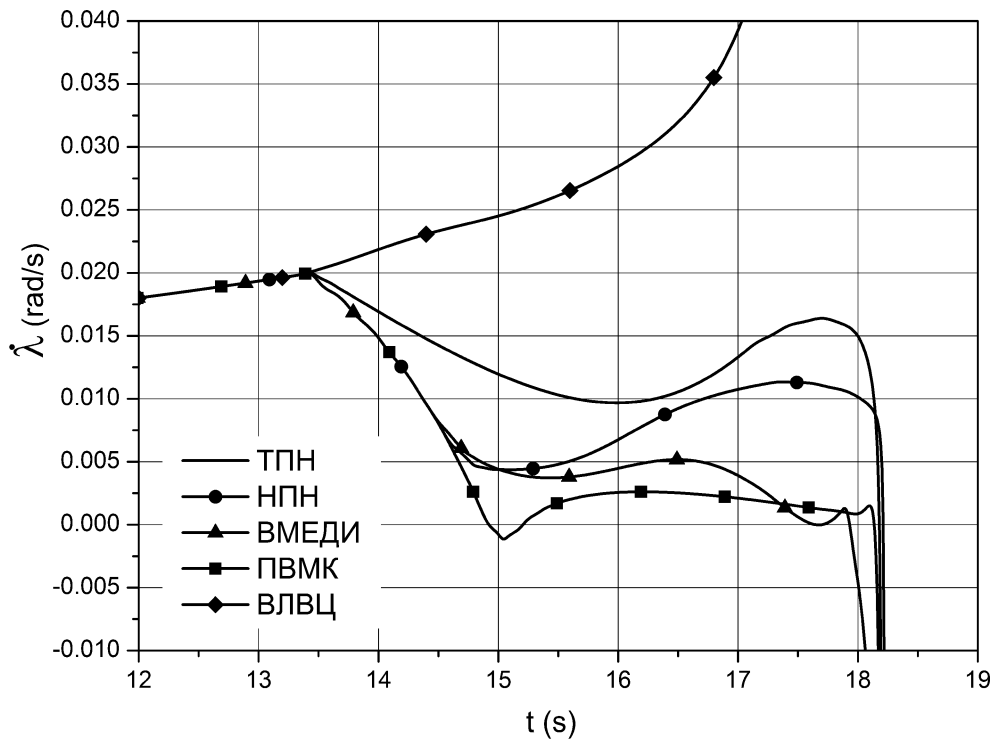
Промене захтеваног и оствареног нормалног убрзања ракете у хоризонталној и вертикалној равни са одговарајућим променама угаоних брзина линије визирања циља приказане су на Сликама 6.20 до 6.24.



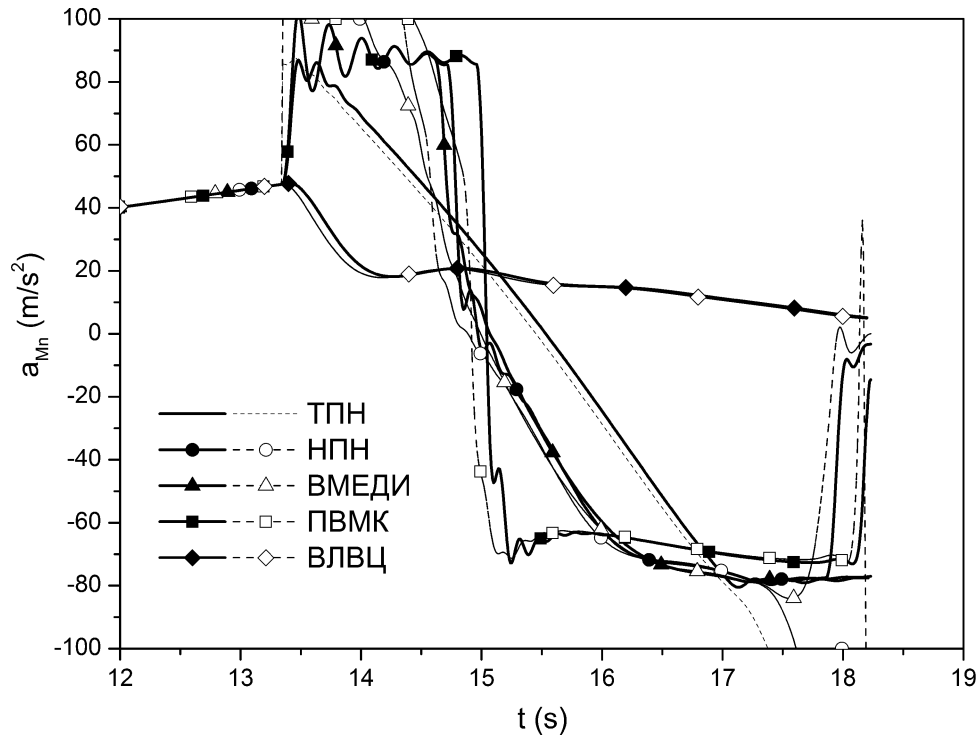
Слика 6.20 – Остварена нормална убрзања ракете у а) вертикалној и б) хоризонталној равни, током лета.



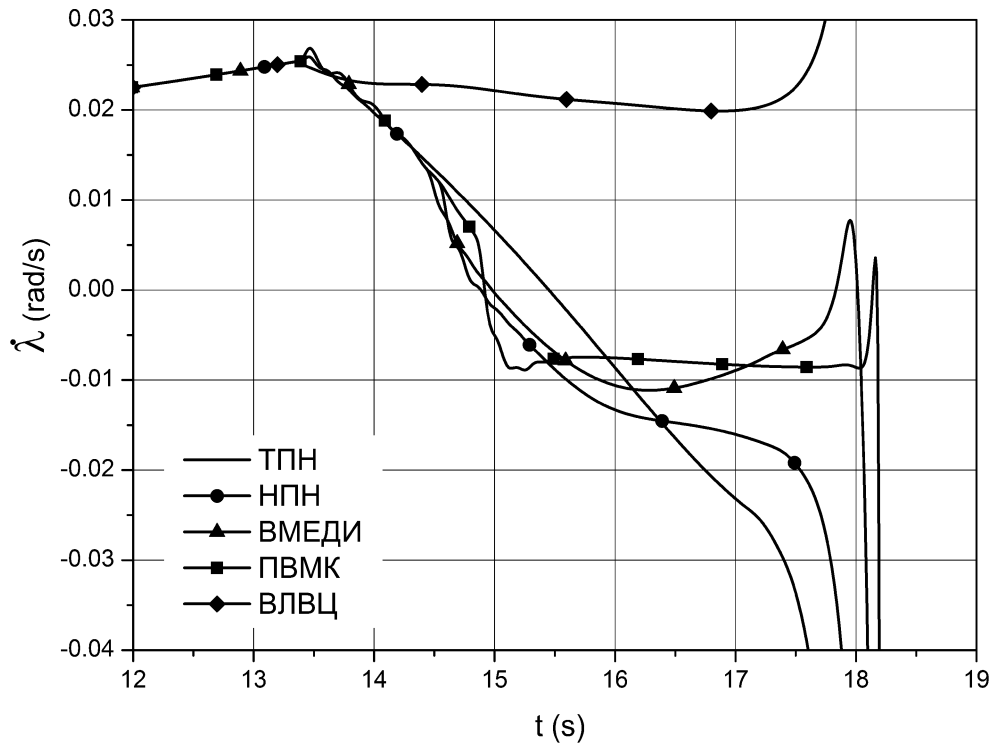
Слика 6.21 – Захтевана (линија црта-црта) и остварена нормална (пуна линија) убрзања ракете у вертикалној равни у фази самонавођења.



Слика 6.22 – Угаоне брзине линије визирања у фази самонавођења, вертикална равна.



Слика 6.23 – Захтевана (линија црта-црта) и остварена нормална (пуна линија) убрзања ракете у хоризонталној равни у фази самонавођења.



Слика 6.24 – Угаоне брзине линије визирања циља у фази самонавођења, хоризонтална раван.

Из дијаграма остварених нормалних убрзања у вертикалној равни (Слика 6.21), види се да вођење са минималним утрошком енергије применом диференцијалних игара (ВМЕДИ) и побољшано вођење методом клизања (ПВМК) имају мање енергетске захтеве и вођење завршавају са нижим вредностима нормалног убрзања, у односу на класичну пропорционалну навигацију (ТПН) и нелинеарну пропорционалну навигацију (НПН). Нема засићења захтеваних нормалних убрзања ни за један анализирани закон вођења, што се могло и очекивати, обзиром да маневар циља није ни претпостављен у овој равни.

Дијаграми остварених нормалних убрзања у хоризонталној равни (Слика 6.23), показују да су и овде ВМЕДИ и ПВМК закони вођења растеретили нормално убрзање на самом крају вођења и то захваљујући томе што су знатно раније од ТПН и НПН закона вођења променили смер нормалног убрзања. Нелинеарна пропорционална навигација (НПН) се током највећег дела времена поклапа са ВМЕДИ законом вођења, али на крају одлази у засићење, што резултује већим промашајем у односу на ВМЕДИ, али мањим од ТПН закона вођења који први одлази у засићење.

До сличних закључака може се доћи и посматрањем дијаграма промене угаоне брзине линије визирања циља, јер се као мера квалитета неког закона самонавођења може сматрати његова способност да вредност угаоне брзине линије визирања одржи што ближе нули.

Ако се као критеријум за квалитет вођења усвоји минимизација угаоне брзине линије визирања циља, онда је на основу Сlike 6.22 најбоље резултате даје побољшано вођење методом клизања (ПВМК), а затим следи вођење са минималним утрошком енергије применом диференцијалних игара (ВМЕДИ), па нелинеарна пропорционална навигација (НПН) и на крају класична пропорционална навигација (ТПН).

Анализом промена угаоне брзине линије визирања у хоризонталној равни (Слика 6.24), редослед закона вођења остаје непромењен, наиме, ПВМК, ВМЕДИ, НПН, ТПН, јер се поред интеграла квадрата угаоне брзине посматра и тренутак када је угаона брзина отишла у засићење.

У реалним условима примене ракете земља–ваздух циљ може да отпочне

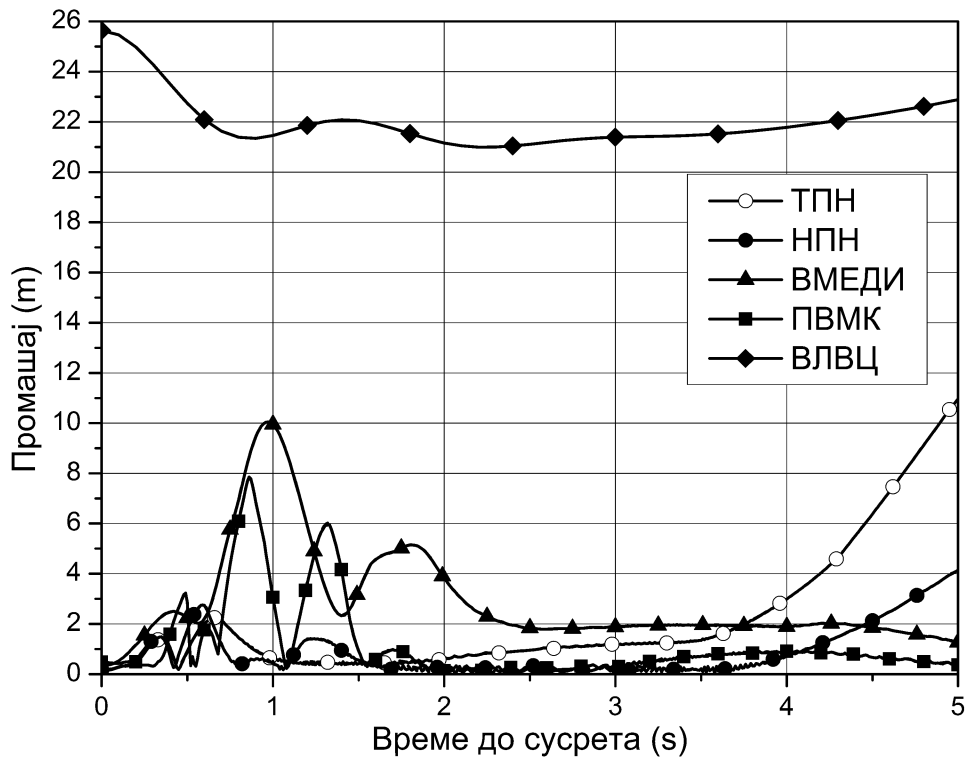
маневар у произвољном тренутку, па је због тога од интереса изучити утицај случајног почетка маневра на промашај ракете. Почетак маневра циља са константним нормалним убрзањем $n_c g$ је једнако вероватан у било ком тренутку T интервала $[t_0, t_f]$ те је густина расподеле вероватноће описана једначином:

$$p_T(t) = \frac{1}{t_f - t_0} \quad (6.38)$$

где су t_0 – почетак самонавођења ракете и t_f – очекивано време сусрета два објекта.

Резултати ове анализе приказани су на Слици 6.33. Уколико циљ почне маневар 1s пре судара, највеће промашаје дају управо побољшано вођење методом клизања (ПВМК) и вођење са минималним утрошком енергије применом диференцијалних игара (ВМЕДИ).

Утицај почетка маневра циља на промашај ракете у објављеној литератури [19], [21] и [38] изучаван је помоћу адјунгованог метода при чему је он применљив само на линеарне системе. Зато су резултати из ове тезе, који су добијени нумеричком симулацијом неупрошћеног нестационарног, нелинеарног система самонавођене ракете, знатно веродостојнији и ближи реалном лету ракете.



Слика 6.25 – Промашај у функцији тренутка почетка маневра циља.

У Табела 6.3. приказани су средњи промашаји за овакву униформну расподелу почетног тренутка маневра циља у току фазе самонавођења, што мења добар утисак о ПВМК, а нарочито о ВМЕДИ, док поправља утисак о ТПН, а посебно о НПН методу вођења.

Табела 6.3. Средњи промашаји за различите методе вођења

Закон вођења	ТПН	НПН	ВМЕДИ	ПВМК	ВЛВЦ
Средњи промашај (m)	2,15	0,86	2,90	1,16	22,01

6.11.1.3. Циљ врши синусни маневар избегавања

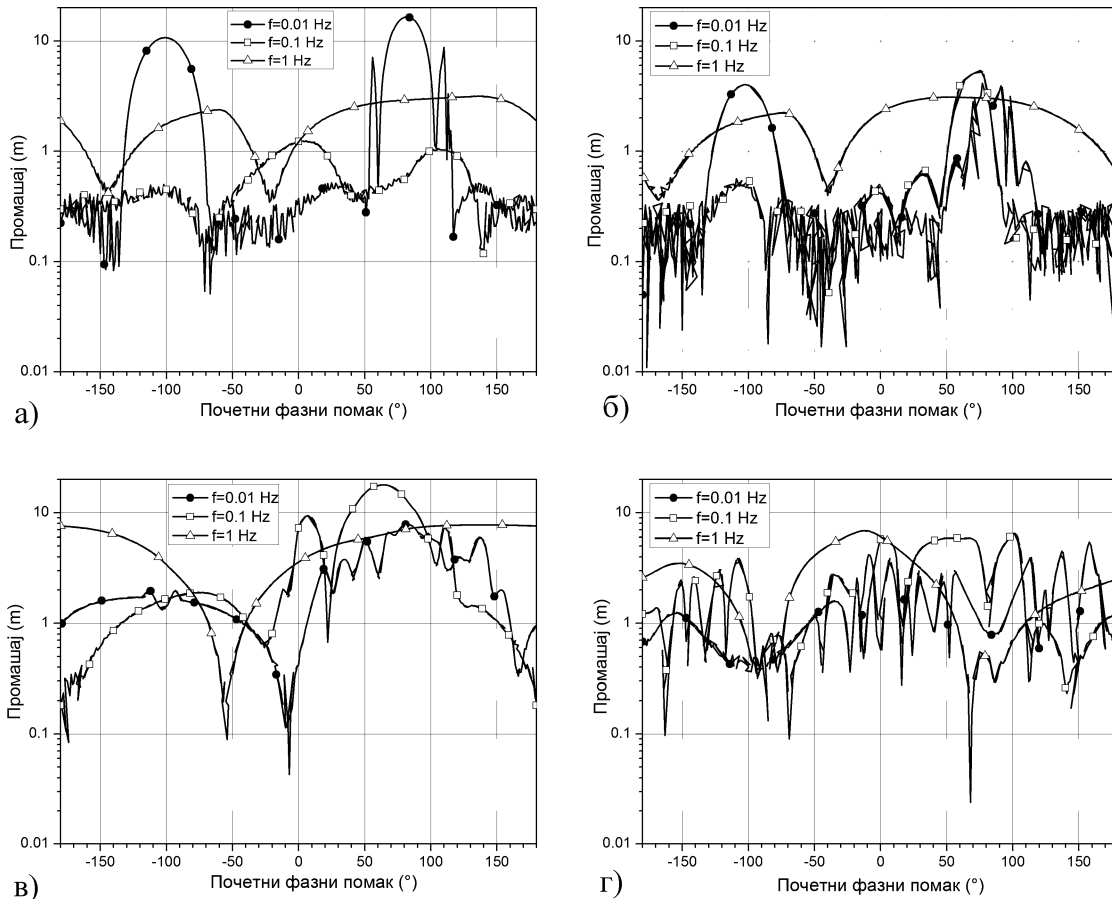
Претпостављен је синусни нормални маневар циља, тзв., "таласаста маневар", константне амплитуде $5g$, који почиње у тренутку преласка на самонавођење. Почетна фаза синусног маневра φ_0 је случајна функција са униформном расподелом $p_{\varphi_0} = 1 / 2\pi$ у интервалу $[-\pi, +\pi]$. Анализирано је десет различитих фреквенција, а за сваку од њих је почетни фазни помак узет из интервала од -180° до $+180^\circ$ са кораком $+1^\circ$, а затим одређена средња вредност промашаја за ту фреквенцију. Резултати ове анализе сумирани су у Табела 6.4.

Слично почетку маневра са константним нормалним убрзањем, и овде је почетна фаза маневра за ракету непозната величина, па је због тога треба третирати као случајну величину.

Табела 6.4. Средњи промашаји у зависности од фреквенције маневра циља

f (Hz)	0,01	0,02	0,05	0,08	0,1	0,2	0,5	0,8	1	2	Ср.в.
ТПН	2,89	2,49	1,27	0,44	0,54	1,06	1,62	1,99	1,99	1,76	1,60
НПН	0,83	0,76	0,33	0,27	0,63	0,77	1,52	1,65	1,90	1,74	1,04
ВМЕДИ	2,49	2,49	2,96	3,23	4,08	2,55	5,14	6,06	5,18	4,29	3,85
ПВМК	1,43	1,61	2,02	2,34	2,31	2,08	3,18	2,74	2,58	3,23	2,35

Дијаграми вредности промашаја за неке од испитаних фреквенција у зависности од почетног фазног помака, приказани су на Слици 6.34.



Слика 6.26 – Утицај фазног помака хармонијског маневра на промашај циља за разне законе вођења: а) класична пропорционална навигација (ТПН) , б) нелинеарна пропорционална навигација (НПН) , в) вођење са минималним утрошком енергије применом диференцијалних игара (ВМЕДИ), г) побољшано вођење методом клизања (ПВМК).

На основу ових резултата, у случају хармонијског маневара циља, највеће промашаје остварује ракета са класичном пропорционалном навигацијом (ТПН) и вођењем са минималним утрошком енергије применом диференцијалних игара (ВМЕДИ). На вишим фреквенцијама маневра циља, ТПН и НПН закони вођења остварују сличне промашаје, док на фреквенцијама нижим од 0,1 Hz мање промашаје ипак остварује нелинеарна пропорционална навигација (НПН).

6.11.2. Гађање циља "у одласку"

Претпостављен је почетни положај циља: даљина $x_{c_0} = 5km$, одступање по правцу $y_{c_0} = 0m$, и висина лета $z_{c_0} = -7km$. Обзиром на смањење брзине ракете током времена (после 40s брзина ракете је $<640m/s$), анализирана је брзина циља

од 500 m/s која је у хоризонталној је равни, а усмерена је супротно од командног места, тако да најмање растојање путање циља од вертикалне осе командног места износи 7km. Лансирање ракете врши се директно у правцу почетног положаја циља.

6.11.2.1. Неманевришући циљ

За анализиране методе самонавођења, вредности остварених промашаја приказане су у Табела 6.5. , при истим параметрима закона вођења као у случају "долазећег" циља.

Табела 6.5. Остварени промашаји за различите законе вођења

Закон вођења	ТПН	НПН	ВМЕДИ	ПВМК	ВЛВЦ
Промашај (<i>m</i>)	0,04	0,05	0,21	0,07	5,05

Осим вођења по линији визирања циља (ВЛВЦ), применом било које од предложених метода самонавођења постижу се мале вредности промашаја ако "одлазећи" циљ не врши маневар.

6.11.2.2. Циљ врши маневар избегавања са константним нормалним убрзањем

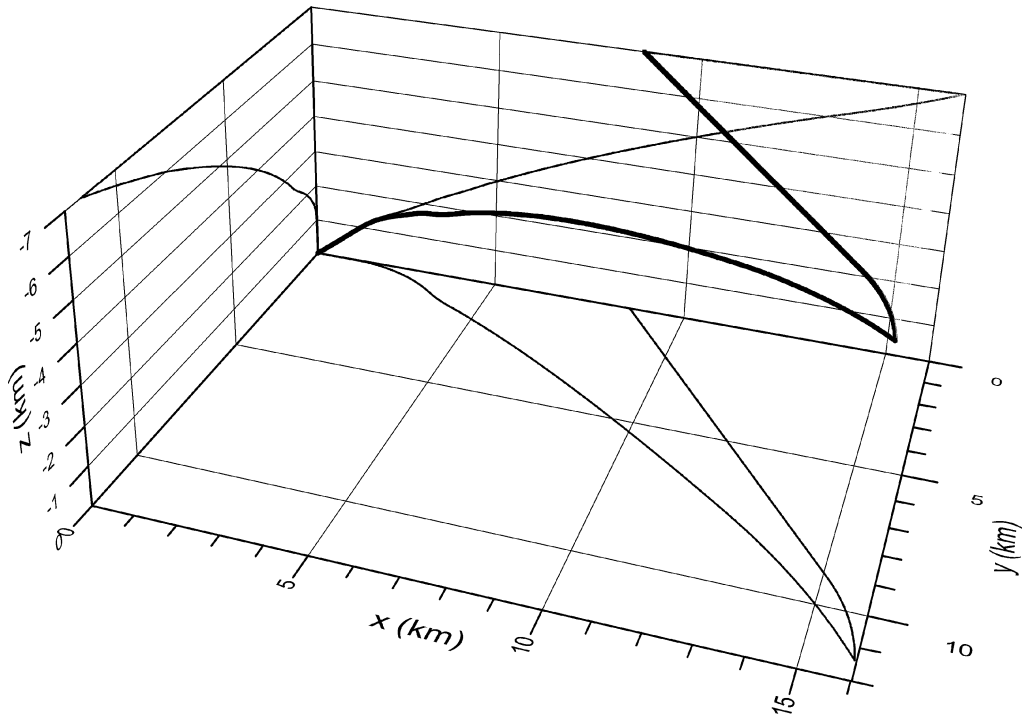
Претпостављен је маневар циља са константним нормалним убрзањем интензитета 5g у фази самонавођења, а вредности остварених промашаја приказане су у Табела 6.6.

Табела 6.6. Остварени промашаји за различите законе самонавођења

Закон вођења	ТПН	НПН	ВМЕДИ	ПВМК	ВЛВЦ
Промашај (<i>m</i>)	71,88	0,76	1,56	0,09	23,18

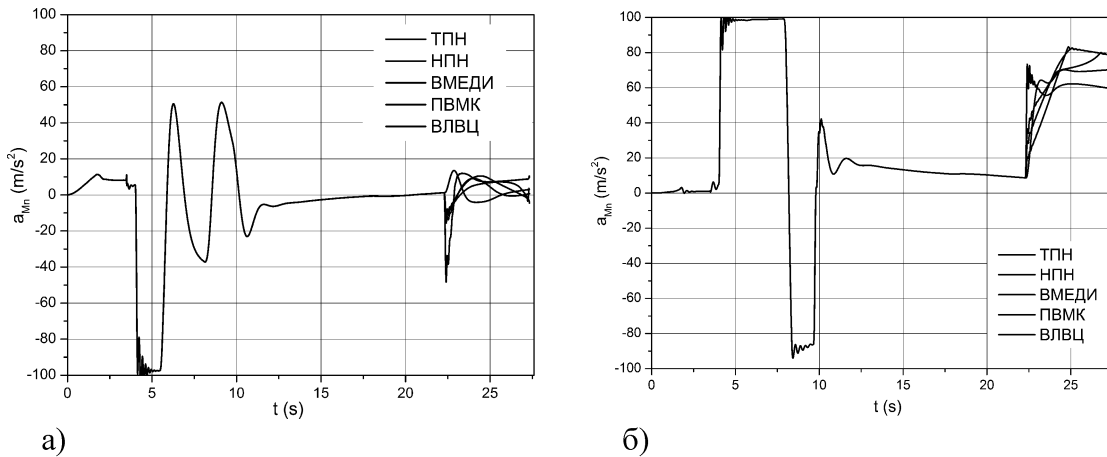
У односу на неманевришући циљ, уочава се драстично повећање вредности промашаја код класичне пропорционалне навигације (ТПН), мала повећања код нелинеарне пропорционалне навигације (НПН) и вођења са минималним утрошком енергије применом диференцијалних игара (ВМЕДИ), а готово никакво повећање код побољшаног вођења методом клизања (ПВМК).

Путање ракете и "одлазећег" циља у простору при НПН закону вођења, приказане су на Слици 6.19.

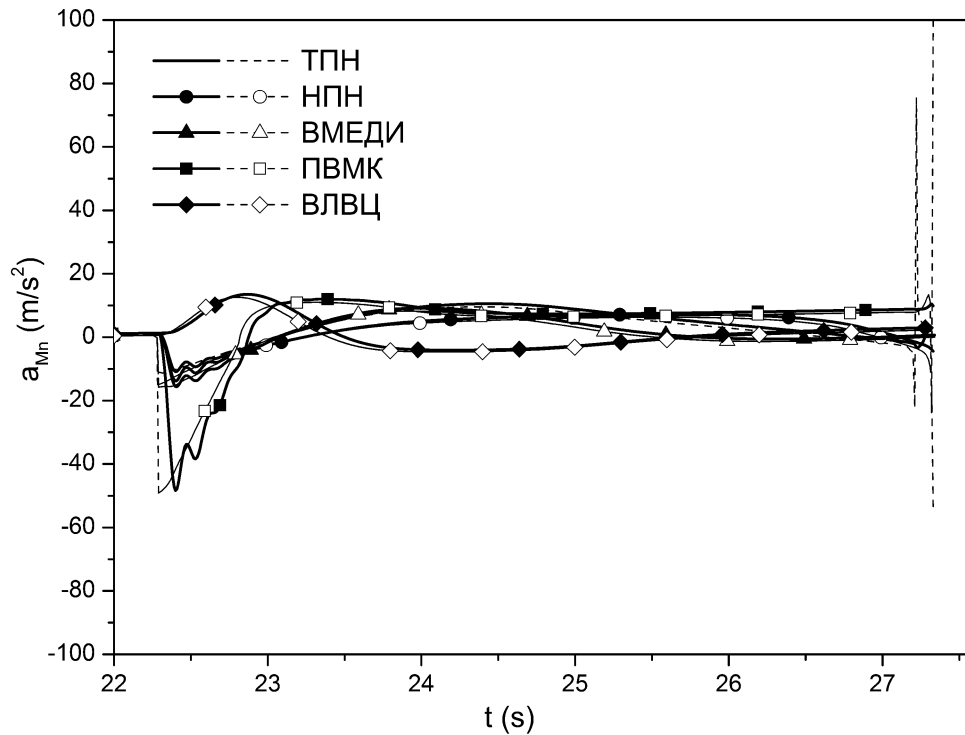


Слика 6.27 – Путање ракете и "одлазећег циља" при НПН закону вођења.

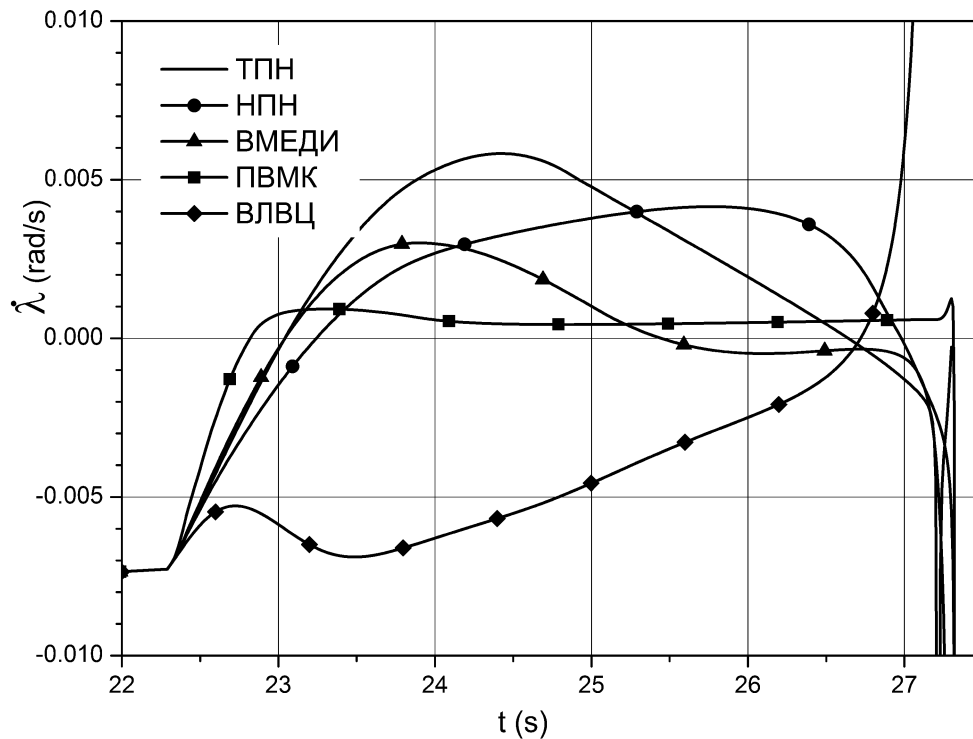
Промене захтеваног и оствареног нормалног убрзања ракете у хоризонталној и вертикалној равни са одговарајућим променама угаоних брзина линије визирања циља приказане су на Сликама 6.28 до 6.32.



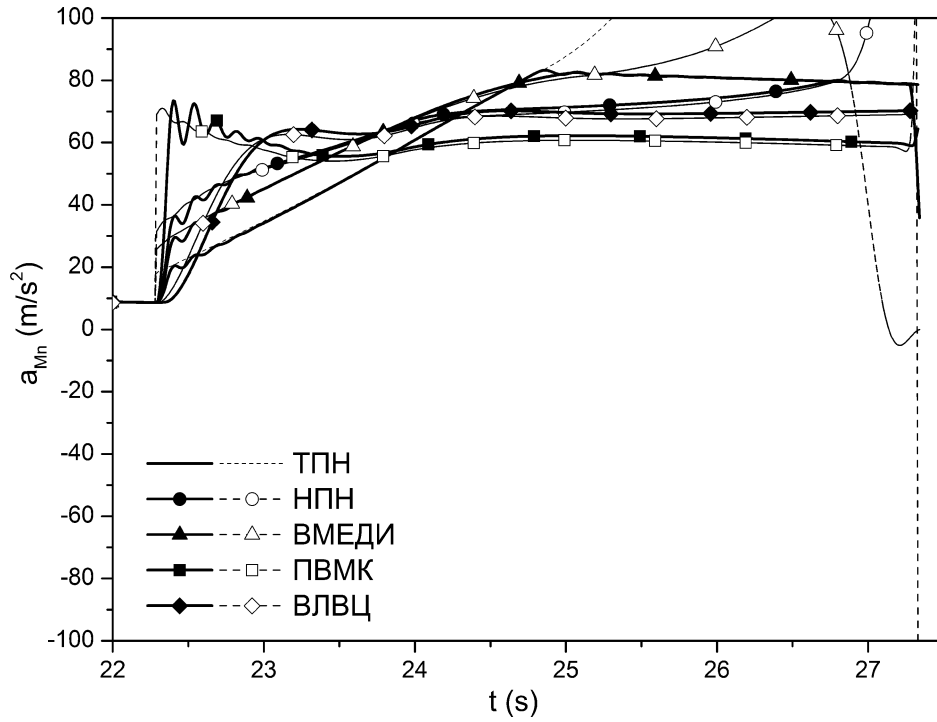
Слика 6.28 – Остварена нормална убрзања у а) вертикалној и б) хоризонталној равни при гађању маневришућег циља у "одласку".



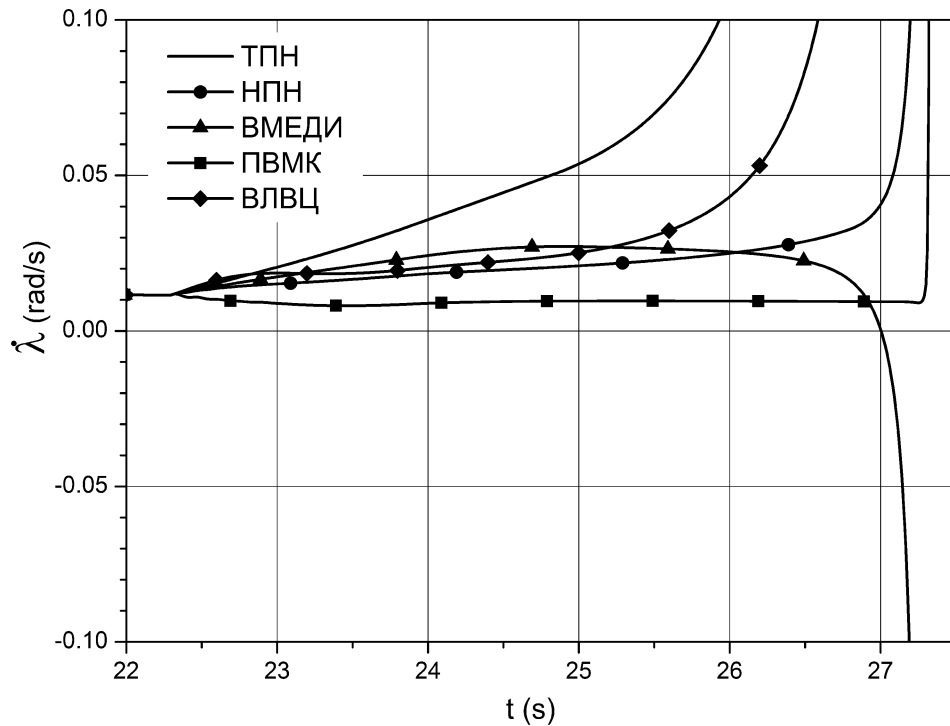
Слика 6.29 – Захтевана (линија црта–црта) и остварена нормална убрзања (пуна линија) у фази самонавођења, вертикална раван.



Слика 6.30 – Угаоне брзине линије визирања у фази самонавођења, вертикална раван.



Слика 6.31 – Захтевана (линија црта–црта) и остварена нормална (пуна линија) убрзања у фази самонавођења, хоризонтална раван.



Слика 6.32 – Угаоне брзине линије визирања у фази самонавођења, вертикална раван.

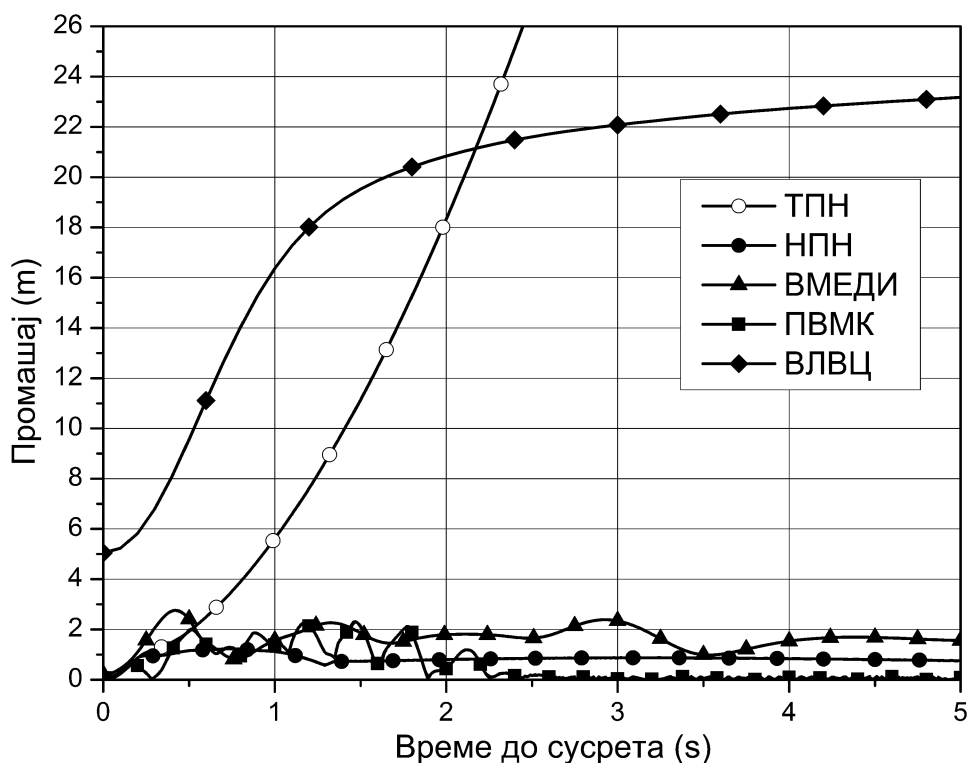
Из дијаграма остварених нормалних убрзања у вертикалној равни (Слика 6.29), види се да ни један анализирани закон вођења нема велике енергетске захтеве и да сви они вођење завршавају са малим вредностима нормалног убрзања. Ово је и очекивано, обзиром да је маневар циља претпостављен само у хоризонталној равни.

Такође, посматрањем дијаграма промене угаоне брзине линије визирања циља у вертикалној равни (Слика 6.30), сви анализирани закони вођења успешно свODE ову величину на нулту вредност у близини тренутка судара, а кинематско засићење се дешава непосредно пре мимиоиласка ракете и циља. Ипак, ако се као мера квалитета неког закона самонавођења примени критеријум колико добро он одржава угаону брзину линије визирања у околини нулте вредности, онда се предност може дати побољшаном вођењу методом клизања (ПВМК).

У хоризонталној равни, у којој је претпостављен маневар циља, потребна су много већа нормална убрзања (Слика 6.31). Види се да класична пропорционална навигација (ТПН) најкасније реагује и најспорије увећава захтевано нормално убрзање, а прва одлази у засићење, што као последицу има да овај метод остварује највећи промашај. До истог закључка долази се и анализом промена угаоне брзине линије визирања у вертикалној равни (Слика 6.32), где ТПН закон вођења први одлази у засићење. Полазећи од овог дијаграма и даље се предност даје побољшаном вођењу методом клизања (ПВМК), као и у вертикалној равни, јер он током читаве фазе самонавођења угаону брзину линије визирања циља одржава најближе нултој вредности.

Анализом промашаја у зависности од тренутка почетка маневра циља, приказаног на Слици 6.33, види се да се у овом случају ТПН закон вођења не може применити због велике вредности промашаја, док су сви остали закони вођења употребљиви. Интересантно је да ПВМК закон вођења готово у потпуности компензује константан маневар циља уколико је он отпочео довољно рано (пре више од 2,5s) и остварује најмање промашаје. Овакви дијаграми промашаја у зависности од тренутка почетка маневра циља до сада су искључиво публиковани за случај оптималних закона вођења из "фамилије закона пропорционалне навигације", а генерисани су под претпоставком линеарног

система применом адјунгованог метода анализе и синтезе самонавођене ракете.



Слика 6.33 – Промашај у функцији тренутка почетка маневра "одлазећег" циља.

У Табела 6.7. приказани су средњи промашаји за униформну расподелу почетног тренутка маневра циља у току фазе самонавођења, који потврђују дате закључке.

Табела 6.7. Средњи промашаји за различите методе самонавођења при униформној случајној расподели тренутка почетка маневра циља

Закон вођења	ТПН	НПН	ВМЕДИ	ПВМК	ВЛВЦ
Средњи промашај (m)	30,56	0,85	1,64	0,60	19,12

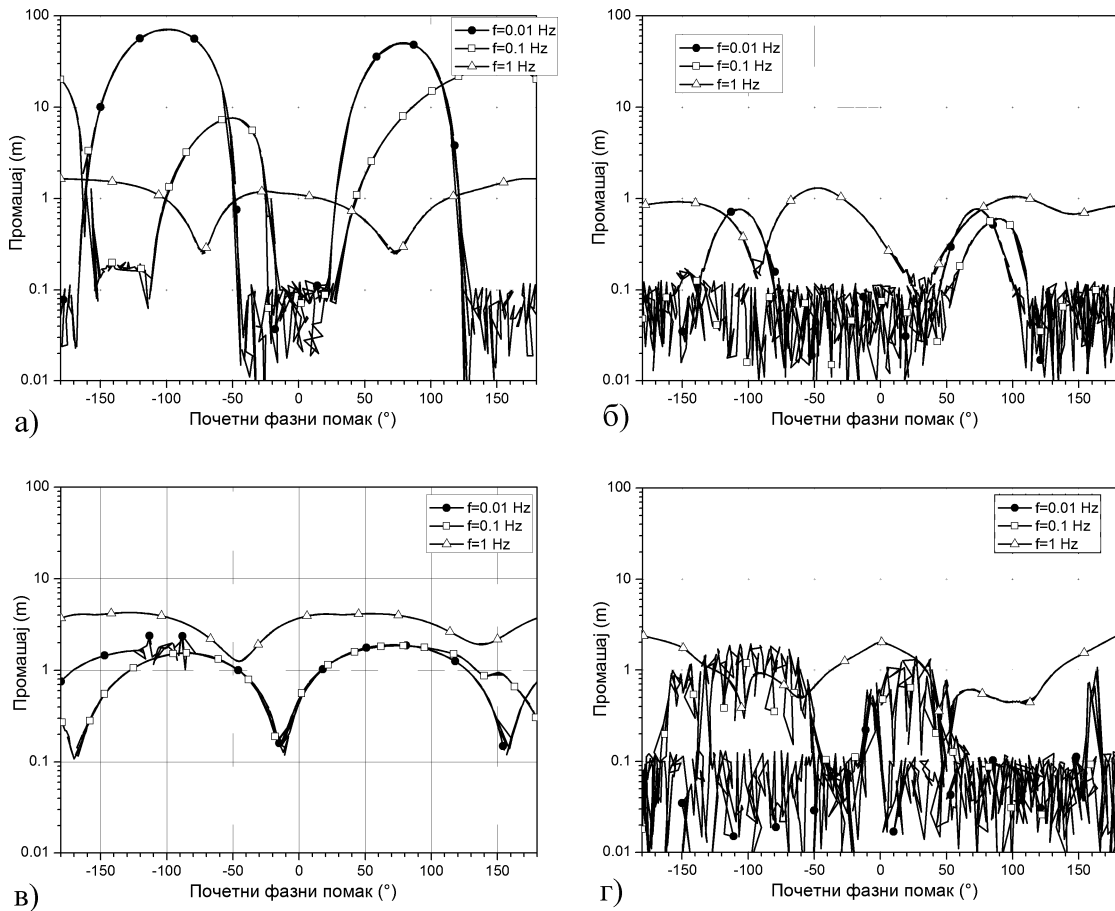
6.11.2.3. Циљ врши синусни маневар избегавања

Претпостављен је исти синусни нормални маневар циља и анализирано је десет различитих фреквенција (као у случају "долазећег" циља). Одређена је средња вредност промашаја за неколико фреквенција за све могуће почетне фазне помаке, што је приказано у Табела 6.8.

Табела 6.8. Средњи промашаји "одлазећег циља" у функцији од фреквенције хармонијског маневра и униформне расподеле почетног фазног помака

f (Hz)	0,01	0,02	0,05	0,08	0,1	0,2	0,5	0,8	1	2	Ср.в.
ТПН	20,2	19,7	16,6	11,6	8,12	1,68	0,84	0,94	1,03	0,90	8,16
НПН	0,19	0,18	0,16	0,13	0,12	0,12	0,19	0,43	0,70	1,12	0,33
ВМЕДИ	1,19	1,19	1,21	1,10	1,08	1,09	1,56	1,73	3,28	2,02	1,55
ПВМК	0,09	0,12	0,18	0,33	0,45	0,81	1,01	0,90	1,11	0,94	0,59

Дијаграми вредности промашаја у зависности од фазног помака за неке од испитаних фреквенција приказани су на Слици 6.34.



Слика 6.34 – Утицај фазног помака хармонијског маневра на промашај "одлазећег" циља за разне законе вођења: а) класична пропорционална навигација (ТПН), б) нелинеарна пропорционална навигација (НПН), в) вођење са минималним утрошком енергије применом диференцијалних игара (ВМЕДИ), г) побољшано вођење методом клизања (ПВМК).

Полазећи од резултата нумеричке симулације лета ракете и циља, показује се да у случају хармонијских маневара циља треба користити нелинеарну пропорционалну навигацију (НПН), побољшано вођење методом клизања (ПВМК), или евентуално закон вођења са минималним утрошком енергије без предикције маневра циља (ВМЕДИ), док класична пропорционална навигација (ТПН) није погодна за овакве сценарије лета циља јер настају велике вредности промашаја.

Добијени резултати нумеричке симулације комплетног система самонавођене ракете и циља са реализованим софтвером имају два аспекта примене: а) омогућавају избор најповољнијег закона управљања ракете минимизирањем промашаја и утрошка енергије (захтеваног нормалног убрзања) у функцији од нових сценарија употребе ваздухоплова и других типова летелица, и б) избор стратегије маневрисања ваздухоплова која ће максимизирати промашај ракете и утрошак њене енергије. Тиме оваква методологија изучавања закона вођења ракете и стратегије маневрисања циља представља допуну аналитичком приступу у реализацији метода диференцијалних игара два учесника (ракете и циља) који је ограничен низом хипотеза да би се дошло до коначног примењивог решења постављеног проблема.

Глава

7. Примена оптималних закона вођења на корекцију путање "паметних" минобацачких пројектила

7.1. Увод

Иако су сви претходно одређени закони вођења у тези примењени код ракета земља–ваздух средњег домета, у овој глави ће ти алгоритми бити примењени на примеру минобацачког пројектила као једне врсте паметне муниције.

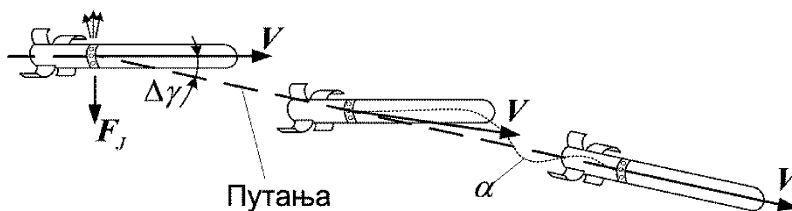
Вођење је нашло примену и у области минобацача како би се повећала вероватноћа уништавања циља једним пројектилом. Вођење против–тенковских минобацачких пројектила, обично користи ласерско озрачавање циља или топлотно самонавођење у завршној фази лета. Задатак завршног самонавођења је да минобацачки пројектил може да открије, погоди и уништи борбено возило или тенк.

Минобацачки пројектил се испаљује из глатке цеви минобацача. Деловање почетних поремећаја током лета у атмосфери и велика осетљивост на атмосферске поремећаје током балистичке путање као и кретање циља, доводе до велике дисперзије/растурања погодака (тј. промашаја). Додатни захтев повећања вероватноће уништавања циља једним пројектилом може се остварити уградњом пратеће главе за самонавођење која врши праћење циља и обезбеђује потребне информације за изабрани закон вођења.

Путања минобацачког пројектила може се поделити у два дела: балистички лет (који представља око 80% укупне путање) и завршно самонавођење. Видни угао главе за самонавођење мора бити довољно велики како би се услед растурања погодака невођеног пројектила на крају фазе балистичког лета циљ нашао у њеном видном пољу. Уз претпоставку да глава за самонавођење може да открије/детектује, а затим и прати циљ удаљености до око 1,500m тада њен видни угао треба да обезбеди осматрање полупречника од око 150m. Минобацачки пројектил је у том случају довољно лансирати ка подручју активности циља.

Како се пројектил управља само током завршне фазе лета тј. на растојању до циља мањем од 1,500m потребно је обезбедити брзе промене вектора брзине.

Овакав начин директног управљања брзином може се остварити ако се по ободу пројектила, а око центра масе монтира прстен са импулсним реактивним моторима. Овај прстен се састоји од коначног броја појединачних импулсних реактивних мотора (ИРМ). Сваки појединачни ИРМ генерише краткотрајну силу која делује на пројектил у равни симетрије пројектила а кроз центар масе. Супротно од аеродинамичког управљања, у овом случају управљачка сила делује директно на центар гравитације и узрокује веома брзу промену угла нагиба путање, а вектор брзине пројектила се због дејства управљачке силе мења на начин како је приказано на Слици 7.1, стварајући нападни угао који се пригушује услед аеродинамичке стабилности. Закривљена крила су смештена на крају пројектила и она се отварају одмах по лансирању, тј. чим пројектил напусти цев минобацача. Крила се уграђују под одређеним углом који обезбеђује лагану ротацију пројектила што омогућује примену једноканалног система вођења преко активирања појединачних ИРМ у одређеним фазним угловима зависно од команде вођења.



Слика 7.1 – Корекција путање импулсним реактивним моторима око центра масе

Механизам вођења са бочним ИРМ спада у категорију импулсних управљачких механизма насупрот великој већини континуалних управљачких механизма како што су покретна крила која константо генеришу управљачку силу за праћење задате путање.

Смањење растурања употребом бочних ИРМ истраживано је у следећим радовима. Поређење различитих закона вођења (пропорционалне навигације, параболичке навигације и праћење путање) код ракета за директно гађање помоћу механизма са ИРМ представио је Jithraphai и ост. [39]. Када је број појединачних ИРМ мали метод праћења путање највише смањује растурање. У случају већег броја ИРМ закон параболичне и пропорционалне навигације обезбеђују мало бољи резултат од метода праћења путање. Начин за правилан избор параметара закона вођења за постизање оптималног смањења растурања погодака за метод праћења

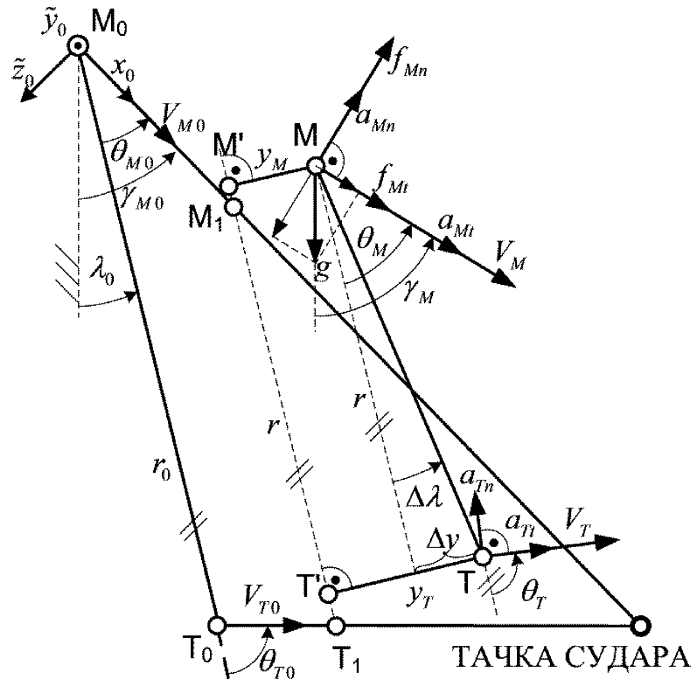
путање код ракета за директно гађање представили су Jitagraphai и Costello [40]. Сличан проблем али за артиљеријске ракете решили су Gupta и ост. [41] и Pavkovic и ост. [42] и [43]. Сви ови радови односе се на праћење путање а не на самонавођење. Fresconi [44] је представио систем вођења са предвиђањем падне тачке који као сензор користи пријемник глобалног позиционог система (ГПС), са канарима као аеродинамичким управљачким површинама. Glebocki и Vogt [45] објаснили су концепт корекције путање минобацачког пројектила применом бочних ИРМ постављених око центра масе и употребом пропорционално–диференцијалног ускладника као контролера који као повратну информацију за вођење користи угловну разлику између ЛВЦ и главне осе симетрије пројектила. Rogers и Costello [46] су предложили корекцију путање минобацачког пројектила који је стабилисан против ваљања и користи управљање помоћу аеродинамичких површина које континуално мењају размах. Regan [47] је дискутовао аеродинамичке аспекте и предности завршне корекције путање за жirosкопски стабилисани против–авионски пројектил. Развој закона вођења за такав пројектил са главом за самонавођење представио је Cuk [48].

Да би се побољшала тачност погађања минобацачког пројектила, у овој глави биће коришћени већ раније изведени закони вођења и примењени на противтенковски минобацачки пројектил калибра 120mm опремљен управљачким механизмом са бочним ИРМ постављеним око центра масе пројектила. Њихови резултати биће приказани за два основна типа поремећаја: грешку нишањења и "еквивалентни" маневар циља. Еквивалентни маневар циља представља обједињени утицај гравитационог и тангентног убрзања пројектила, као и кретања циља. Команде закона вођења се трансформишу у корекцију путање помоћу пулсно–фреквентне модулације управљачке силе генерисане механизмом са бочним ИРМ. Нумеричке симулације пореде различите законе вођења.

7.2. Кинематски модел судара

Посматраће се општији случај од линеаризованог кинематског модела датог у поглављу 2.1.2. Проширен је увођењем гравитационог члана јер се посматра кретање у вертикалној равни, а дозволиће се и спора промена брзина пројектила и циља у току фазе самонавођења.

Дво–димензиона геометрија сусрета прилагођена посматраном случају, може се илустровати на следећи начин:



Слика 7.2 – Геометрија сусрета у вертикалној равни

Да би пројектил остао на сударном курсу, потребно је да пројектил и циљ буду на одговарајућим положајима M_1 и T_1 у произвољном временском тренутку, као што је приказано на Слици 7.2. Дозвољавањем малих одступања од сударног курса, стварни положаји пројектила и циља су M и T . Увођењем нормалних одступања пројектила y_M и циља y_T у односу на номиналну линију визирања r , са Сlike 7.2 су одређене следеће кинематске једнакости:

$$\dot{r} = V_T \cos \theta_T - V \cos \theta_M \quad (7.1)$$

$$\Delta \dot{y} = \dot{y}_T - \dot{y}_M = V_T \sin \theta_T - V_M \sin \theta_M \quad (7.2)$$

где је $r(t)$ дужина номиналне линије визирања, а $\Delta y(t)$ релативно одступања у датом временском тренутку t .

Номинални услов судара у почетном тренутку t_0 је испуњен чим је $\Delta \dot{y} = 0$:

$$V_{T0} \sin \theta_{T0} - V_{M0} \sin \theta_{M0} = 0 \quad (7.3)$$

одакле се може одредити почетни номинални нишански угао у односу на почетну

номиналну линију визирања циља:

$$\theta_{M0} = \sin^{-1} \left(\frac{V_{T0}}{V_{M0}} \sin \theta_{T0} \right) \quad (7.4)$$

Брзина приближавања после линеаризације, одређена је изразом:

$$V_C = -\dot{r} = V_{M0} \cos \theta_{M0} - V_{T0} \cos \theta_{T0} - V_{M0} \Delta \theta_M \sin \theta_{M0} + \Delta V_M \cos \theta_{M0} + V_{T0} \Delta \theta_T \sin \theta_{T0} - \Delta V_T \cos \theta_{T0} \quad (7.5)$$

Одступања пројектила и циља од њихових номиналних вредности дефинисане су као:

$$\begin{aligned} \Delta V_M &= V_M(t) - V_{M0} \\ \Delta V_T &= V_T(t) - V_{T0} \\ \Delta \theta_M &= \theta_M(t) - \theta_{M0} \\ \Delta \theta_T &= \theta_T(t) - \theta_{T0} \end{aligned} \quad (7.6)$$

На основу претпоставке да су ова одступања довољно мала и имајући на уму да је заузет сударни курс тј. задовољена једначина (7.3), тада се из једначина (7.2) и (7.5) може одредити:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{y} &= \dot{y}_T - \dot{y}_M = (V_{T0} + \Delta V_T) \sin(\theta_{T0} + \Delta \theta_T) - (V_{M0} + \Delta V_M) \sin(\theta_{M0} + \Delta \theta_M) = \\ &= (V_{T0} + \Delta V_T) (\sin \theta_{T0} \cos \Delta \theta_T + \cos \theta_{T0} \sin \Delta \theta_T) \\ &\quad - (V_{M0} + \Delta V_M) (\sin \theta_{M0} \cos \Delta \theta_M + \cos \theta_{M0} \sin \Delta \theta_M) = \\ &= V_{T0} \sin \theta_{T0} - V_{M0} \sin \theta_{M0} + \Delta V_T \sin \theta_{T0} + V_{T0} \Delta \theta_T \cos \theta_{T0} + \Delta V_T \Delta \theta_T \cos \theta_{T0} \\ &\quad - (\Delta V_M \sin \theta_{M0} + V_{M0} \Delta \theta_M \cos \theta_{M0} + \Delta V_M \Delta \theta_M \cos \theta_{M0}) = \\ &\approx V_{T0} \cos \theta_{T0} \Delta \theta_T + \Delta V_T \sin \theta_{T0} - V_{M0} \cos \theta_{M0} \Delta \theta_M - \Delta V_M \sin \theta_{M0} \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} V_C = -\dot{r} &= - \left[(V_{T0} + \Delta V_T) \cos(\theta_{T0} + \Delta \theta_T) - (V_{M0} + \Delta V_M) \cos(\theta_{M0} + \Delta \theta_M) \right] = \\ &= - (V_{T0} + \Delta V_T) (\cos \theta_{T0} + \sin \theta_{T0} \Delta \theta_T) + (V_{M0} + \Delta V_M) (\cos \theta_{M0} + \sin \theta_{M0} \Delta \theta_M) = \\ &= -V_{T0} \cos \theta_{T0} - V_{T0} \sin \theta_{T0} \Delta \theta_T - \Delta V_T \cos \theta_{T0} - \underbrace{\Delta V_T \Delta \theta_T}_0 + \\ &\quad + V_{M0} \cos \theta_{M0} + V_{M0} \sin \theta_{M0} \Delta \theta_M + \Delta V_M \cos \theta_{M0} + \underbrace{\Delta V_M \sin \theta_{M0} \Delta \theta_M}_0 = \\ &\approx V_{M0} \cos \theta_{M0} - V_{T0} \cos \theta_{T0} \end{aligned} \quad (7.8)$$

Апроксимација израза за брзину приближавања V_C ствара малу грешку у одређивању времена до судара која може бити значајна код оптималних метода вођења који користе ову вредност. Претпоставка константне брзине приближавања оправдана је у случају закона вођења примењених у овом поглављу, који у синтези

вођења не користе вредност времена до судара.

Након диференцирања једначина (7.7) постаје:

$$\Delta \dot{y} = V_{T_0} \cos \theta_{T_0} \Delta \dot{\theta}_T + \Delta \dot{V}_T \sin \theta_{T_0} - V_{M_0} \cos \theta_{M_0} \Delta \dot{\theta}_M - \Delta \dot{V}_M \sin \theta_{M_0} \quad (7.9)$$

Промене углова претицања пројектила и циља једнаке су променама углова њихових тангенти на путање $(\Delta \theta_T = \Delta \gamma_T, \Delta \theta_M = \Delta \gamma_M)$, па важе следеће једначине:

$$\begin{aligned} a_{Tn} &= V_{T_0} \Delta \dot{\theta}_T \\ a_{Tt} &= \Delta \dot{V}_T \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} a_{Mn} &= V_{M_0} \Delta \dot{\theta}_M = f_{Mn} - g \sin \gamma_M \\ a_{Mt} &= \Delta \dot{V}_M = f_{Mt} + g \cos \gamma_M \end{aligned} \quad (7.11)$$

Коришћењем последње две једначине у (7.9), уочавајући са Сlike 7.2 да је

$\gamma_M = \lambda_0 + \theta_{M_0} + \Delta \theta_M$ уз услов да су сва одступања мала, може се одредити:

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{y} &= a_{Tt} \sin \theta_{T_0} + a_{Tn} \cos \theta_{T_0} - (f_{Mt} + g \cos \gamma_M) \sin \theta_{M_0} - (f_{Mn} - g \sin \gamma_M) \cos \theta_{M_0} = \\ &= a_{Tt} \sin \theta_{T_0} + a_{Tn} \cos \theta_{T_0} - f_{Mt} \sin \theta_{M_0} + g(\sin \gamma_M \cos \theta_{M_0} - \cos \gamma_M \sin \theta_{M_0}) \\ &\quad - f_{Mn} \cos \theta_{M_0} = \\ &= a_{Tt} \sin \theta_{T_0} + a_{Tn} \cos \theta_{T_0} - f_{Mt} \sin \theta_{M_0} + g \sin(\underbrace{\gamma_M - \theta_{M_0}}_{\lambda_0 + \Delta \theta_M}) - f_{Mn} \cos \theta_{M_0} \\ &\approx a_{Tt} \sin \theta_{T_0} + a_{Tn} \cos \theta_{T_0} - f_{Mn} \cos \theta_{M_0} - f_{Mt} \sin \theta_{M_0} + g \sin \lambda_0 + \Delta \theta_M g \cos \lambda_0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

Маневар циља и гравитационо убрзање које делује на пројектил имају заједнички ефекат као поремећај на кретање пројектила. Зато се дефинише "еквивалентни маневар циља" као:

$$a_{Teq} = a_{Tt} \sin \theta_{T_0} + a_{Tn} \cos \theta_{T_0} - f_{Mt} \sin \theta_{M_0} + g \sin \lambda_0 + \Delta \theta_M g \cos \lambda_0 \quad (7.13)$$

Тада једначина (7.12) постаје:

$$\Delta \ddot{y} = -f_{Mn} \cos \theta_{M_0} + a_{Teq} \quad (7.14)$$

Нека је нормално убрзање пројектила управљачка величина и усвајањем величина стања у следећем облику:

$$x_1 = \Delta y, \quad x_2 = \Delta \dot{y}, \quad u = -f_{Mn} \cos \theta_{M_0}, \quad w = a_{Teq} \quad (7.15)$$

математички модел геометрије судара у матричној форми постаје:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{w} \\ \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Еквивалентни маневар циља зависи од тангентног и нормалног убрзања циља, негравитационог тангентног убрзања пројектила и две компоненте његовог гравитационог убрзања: константног члана ($g \sin \lambda_0$) и променљивог члана ($\Delta\theta_M g \cos \lambda_0$). Ако је могуће проценити вредност $\Delta\theta_M$ током фазе самонавођења, еквивалентни маневар се може одређивати током лета. Алтернативно, природа повратне спреге закона вођења настојаће да поништи овај члан. У том случају гравитациони вектор, као поремећај, се може предвидети унапред још пре лансирања на основу прорачуна номиналне невођене путање и угла линије визирања λ_0 .

Мале разлике између предвиђених и стварних вредности гравитационог вектора не утичу значајно на промашај. Зато при синтези одговарајућих закона вођења претпоставља се да је еквивалентни маневар у вертикалној равни познат пројектилу. Највећи утицај гравитационог убрзања на вођење пројектила је за путање са малим вредностима завршног угла путање (тј. велике вредности угла линије визирања као што је приказано једначином (7.13). У том случају променљиви члан ($\Delta\theta_M g \cos \lambda_0$) се може занемарити у односу на константни део еквивалентног маневра.

Математички модел релативног кретања у хоризонталној равни има исти облик али без утицаја гравитационог убрзања. У случају маневришућег циља, поремећај w је непознат систему вођења. Земаљски циљеви као, нпр., тенкови имају мале маневарске способности, па се може очекивати да ће анти–тенковски минобацачки пројектил помоћу пропорционалне навигације ефикасно компензовати овај поремећај у фази самонавођења.

7.3. Закони вођења

Следећи класични и побољшани закони вођења дати у претходним главама биће примењени у случају описаног анти–тенковског минобацачког пројектила.

Закон пропорционалне навигације (ТПН) (3.5), када пројектил нема информацију о маневру циља, описан је следећом једначином:

$$u^{ТПН} = -kV_c\dot{\lambda} \quad (7.17)$$

Закон проширене пропорционалне навигације (ППН) (3.26), у коме пројектил треба да мери или макар да процени убрзање циља, описан је следећом једначином:

$$u^{ППН} = -k(V_c\dot{\lambda} + 0.5w) \quad (7.18)$$

Примена овог закона треба да обезбеди да крајње нормално убрзање пројектила тежи нули док нормална брзина има неку вредност различиту од нуле. Пројектил прилази циљу са већим упадним угловима путање у односу на ТПН закон вођења.

Проширено оптимално рандеву вођење (ПОРВ) у случају маневришућег циља на основу оптималног рандеву вођења (ОРВ) дефинисаног једначином (4.45) може се представити на следећи начин:

$$u^{ПОРВ} = -\left(\frac{6}{t_{go}^2} x_1 + \frac{4}{t_{go}} x_2 + w \right) \quad (7.19)$$

Овај закон вођења треба да обезбеди прилазак циљу са нултим нормалним одступањем и нултом нормалном брзином, али са неком вредношћу завршног нормалног убрзања пројектила. Претпоставља се да пројектил има информацију о маневру циља, међутим овај закон вођења захтева одређивање нормалног одступања и нормалне брзине што може да представља проблем.

Зато се често користи комбинација ППН и ПОРВ закона вођења тако што се за релативно нормално одступање и брзину користе појачања из ППН закона вођења док се за компензовање маневра циља користи појачање из ПОРВ закона вођења, тј. нови закон вођења назван побољшано проширено оптимално рандеву вођење (ППОРВ). Овај закон вођења може се изразити једначином:

$$u^{ППОРВ} = -k(V_c\dot{\lambda} + w) \quad (7.20)$$

Вођење методом клизања са "сигмоидном" функцијом (ВМКСФ) представљено је у Глави 5 и одређен је следећим изразом:

$$u^{ВМКСФ} = -(kV_c\dot{\lambda} + \beta_0 \frac{\dot{\lambda}}{|\dot{\lambda}| + \delta}) \quad (7.21)$$

где је $\beta_0 > 0$ константа дела променљиве структуре, а δ је мали позитиван реални број који елиминише самоосциловање које је непожељно у управљачким системима, нарочито са ограниченом управљачком енергијом. Ако се β_0 изабере да буде веће од апсолутне вредности еквивалентног маневра $|a_{Teq}|$ датог једначином (7.13), тада $\dot{\lambda} \rightarrow 0$. У пракси захтев вођења је да $\dot{\lambda}$ буде довољно блиско нули, што се може постићи, нпр., избором $\beta_0 = 2$ и $\delta = 0.001$. У овом случају нема појаве самоосцилација јер се овим параметром ублажује захтев $\dot{\lambda} = 0$ захтевом да $\dot{\lambda}$ буде у δ околини око нуле. Дати ПВМК закон вођења за реализацију захтева само информацију о угаоној брзини ЛВЦ, исто као и ТПН.

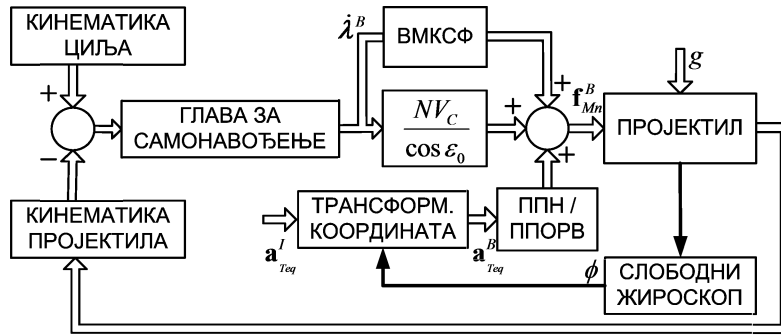
Употребом (7.15) може се ППН закон вођења (7.18) представити у облику који представља захтевано управљачко убрзање као:

$$a_{Mn}^{ППН} \cos \theta_{M0} = kV_C \dot{\lambda} + \frac{k}{2} a_{Teq} \quad (7.22)$$

где је еквивалентни маневар у случају неманевришућег циља на земљи у вертикалној равни:

$$a_{Teq} = -f_{Mt} \sin \theta_{M0} + g \sin \lambda_0 + \Delta \theta_M g \cos \lambda_0 \quad (7.23)$$

Да би се компензовао еквивалентни маневар у случају ППН и ППОРВ, у систем вођења потребно је увести додатни сензор (слободни жирокоп) на начин као што је приказано на Слици 7.3. Еквивалентни маневар \mathbf{a}_{Teq}^I се из инерционог координатног система трансформише у везани к.с. \mathbf{a}_{Teq}^B на основу угла ваљања пројектила ϕ измереног слободним жирокопом, а затим се додаје захтеваном нормалном убрзању одређеног на основу угаоне брзине ЛВЦ измерене у везаном к.с. $\dot{\lambda}^B kV_C$. Захтевано нормално убрзање \mathbf{f}_{Mn}^B одређено је суперпонирањем ових компоненти.



Слика 7.3 – Блок дијаграм система вођења

Угаона брзине тангенте на путању у вертикалној равни $\dot{\gamma}_f$ (услед деловања негравитационих сила) је $f_{M0} = V_{M0} \dot{\gamma}_f$, па се једначина (7.22) трансформише у следећи облик:

$$\dot{\gamma}_f = k \frac{V_C}{V_{M0} \cos \theta_{M0}} \dot{\lambda} + \frac{k}{2} \frac{a_{T_{eq}}}{V_{M0}} \quad (7.24)$$

За непокретне или споро покретне земаљске циљеве важи да је $\frac{V_C}{V_M \cos \theta_{M0}} \approx 1$ па се општа форма која обухвата сва четири наведена закона вођења може представити на следећи начин:

$$\dot{\gamma}_f = k \dot{\lambda} + k_T \frac{g}{V_{M0}} \cos \gamma_0 + \frac{\beta_0}{V_{M0}} \frac{\dot{\lambda}}{|\dot{\lambda}| + \delta} \quad (7.25)$$

где је $k = 3$ за све законе вођења; $k_T = 0$ и $\beta_0 = 0$ за класичну пропорционалну навигацију (ТПН); $k_T = 1.5$ и $\beta_0 = 0$ за проширену пропорционалну навигацију (ППН); $k_T = 1$ и $\beta_0 = 0$ за побољшано проширено оптимално рандеву вођење (ППОРВ); $k_T = 0$, $\beta_0 = 2$ и $\delta = 0.001$ за вођење методом клизања са "сигмоидном" функцијом (ВМКСФ).

У нагнутој равни $x_0 \tilde{y}_0$ (равни управној на вертикалну раван) због непостојања гравитационог члана и мале маневарске способности земаљских циљева коришћен је најједноставнији закон вођења – класична пропорционална навигација ТПН, тј.:

$$\dot{\chi}_f = k \dot{\lambda}_z \quad (7.26)$$

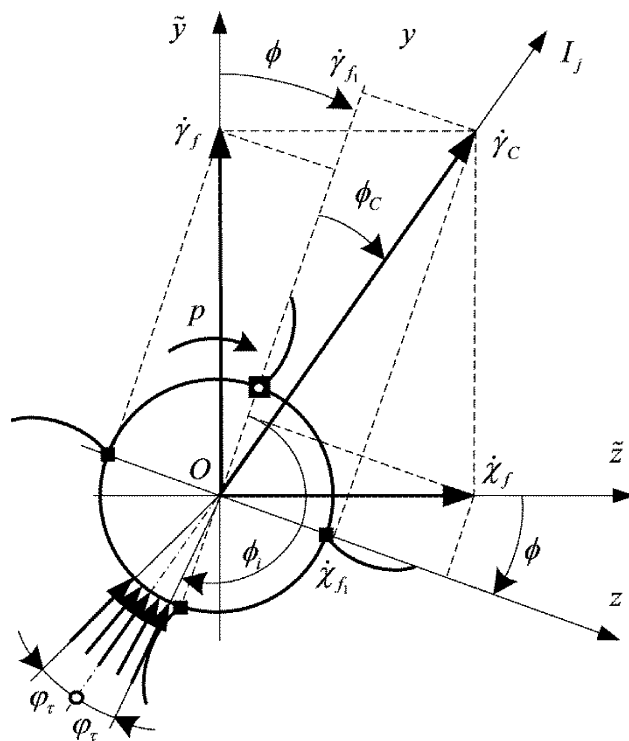
7.4. Пулсно–фреквентна модулација управљачких бочних импулсних ракетних мотора

Компоненте захтеваних угаоних брзина у везаном к.с. зависе од угаоних брзина тангенте на путању у аеро–балистичком, тзв., полувезаном к.с. $x\tilde{y}\tilde{z}$ чији је координатни почетак везан за центар масе пројектила али не ротира са пројектилом, Слика 7.4.

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{f_1} &= \dot{\gamma}_f \cos \phi + \dot{\chi}_f \sin \phi \\ \dot{\chi}_{f_1} &= -\dot{\gamma}_f \sin \phi + \dot{\chi}_f \cos \phi\end{aligned}\quad (7.27)$$

Укупна команда промене угла путање и њен фазни угао у везаном к.с. xyz су:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_c &= \sqrt{\dot{\gamma}_{f_1}^2 + \dot{\chi}_{f_1}^2} \\ \phi_c &= \tan^{-1}(\dot{\chi}_{f_1}, \dot{\gamma}_{f_1})\end{aligned}\quad (7.28)$$



Слика 7.4 – Компоненте угаоне брзине тангенте на путању у аеро–
балистичком и везаном координатном систему

Угаона брзина промене угла путање услед дејства једног бочног ИРМ одређена је изразом:

$$\dot{\gamma}_J(t) = \frac{F_J(t)}{mV_M} \quad (7.29)$$

Брзина пројектила је споро променљива, па се може сматрати константном V_{M0} током интервала Δt рада ИРМ. Тада је средња вредност угаоне брзине услед дејства једног импулса одређена следећим изразом:

$$[\dot{\gamma}_J]_{\text{mean}} = \frac{\int_0^{\Delta t} F_J(t) dt}{mV_{M0}} \frac{1}{\Delta t} = \frac{I_J}{mV_{M0}} \frac{1}{\Delta t} \quad (7.30)$$

Изједначавањем остварене угаоне брзине промене путање $[\dot{\gamma}_J]_{\text{mean}}$ и семпловане вредности из закона вођења $\dot{\gamma}_C$, може се одредити временски период између активирања бочних ИРМ. Према томе, из једначина (7.30) и (7.28) следи:

$$\Delta t = \frac{I_J}{mV_{M0}} \frac{1}{\dot{\gamma}_C} \quad (7.31)$$

Да би се активирао конкретан бочни ИРМ морају бити испуњени следећи услови:

Време протекло од последњег активiranог ИРМ мора бити веће или једнако од временског периода одређеног на основу закона вођења (7.31), и веће или једнако од минималног дефинисаног временског периода између два узастопна импулса.

$$t \geq t^* + \Delta t, \quad t \geq t^* + \Delta t_{\text{min}} \quad (7.32)$$

Након овог времена, управљачки систем активира први неискоришћени бочни ИРМ који се нађе на жељеној позицији која одговара фазном углу ϕ_C одређеним законом вођења (7.28) што се у оквиру неке дозвољене границе ϕ_{THRES} грешке заузимања овог угла може представити следећим изразом:

$$\left| \phi_i - \pi - (\phi_C - \varphi_\tau) \right| \leq \phi_{\text{THRES}} \quad (7.33)$$

$$\varphi_\tau = \frac{p\tau_J}{2} \quad (7.34)$$

Тренутак активирања претходног ИРМ означен је са t^* , а следећег ИРМ са t . Угао π налази се у претходној неједначини зато што је потисак ИРМ увек супротног смера од угла на коме се на пројектилу налази сам бочни ИРМ, Слика 7.4.

У управљачком систему се два параметра морају дефинисати за сваки конкретан проблем:

- минимална вредност временског периода између активирања два бочна ИРМ Δt_{\min} , за чију је вредност је усвојено време половине периода једне ротације пројектила,
- дозвољено угловно одступање за активирање бочног ИРМ, тј. максимална разлика између фазног угла одређене команде и угла у коме ће деловати сила конкретног бочног ИРМ. За случај брзог управљачког система усвојена је вредност овог параметра $\phi_{\text{THRES}} = 0.1^\circ$.

Минимално време између два узастопна активирања ИРМ Δt_{\min} одређује максималну вредност укупне командоване угаоне брзине путање $\dot{\gamma}_C$.

Компоненте силе потиска дуж оса везаног к.с. услед дејства i -тог појединачног бочног ИРМ су:

$$\begin{aligned} Y_j &= -F_j \cos \frac{2\pi(i-1)}{n_j} \\ Z_j &= -F_j \sin \frac{2\pi(i-1)}{n_j} \end{aligned} \quad (7.35)$$

Претпоставља се да се први бочни ИРМ налази тачно на y -оси.

7.5. Резултати нумеричке симулације

У нумеричкој симулацији пројектил је сматран крутим телом са шест степени слободе кретања чији је математички балистички модел дат у [31] и укључује силе услед дејства бочних ИРМ. Да би се испитала могућност бочних ИРМ учвршћених на прстену око центра масе пројектила да смање одступање падне тачке, једначине кретања пројектила као и једначине различитих закона вођења уз представљену пулсно-фреквентну модулацију рачунате су нумеричком методом Runge-Kutta четвртог реда.

Пројектил коришћен у нумеричкој симулацији представља типичан минобацачки пројектил који се лансира из глатке цеви са четири олучаста крила која се налазе на задњем делу пројектила и обезбеђују стабилност као и ротацију

пројектила приближно око $10 s^{-1}$ аеродинамички услед одређеног угла уградње, јер пројектил по напуштању минобацачке цеви нема ротацију. Прстен са бочним ИРМ учвршћен је око центра масе пројектила. Минобацачки пројектил $120 mm$ има следеће карактеристике: масу $13.5 kg$, уздужни момент инерције $0.00113 kg \cdot m^2$, попречни момент инерције $0.0415 kg \cdot m^2$, укупну дужину $0.8 m$, центар масе на растојању $0.42 m$ од задњег дела и почетну брзину на изласку из цеви од $320 m / s$. Да би се постигао већи домет, пројектилу је додат мали ракетни мотор за повећање брзине у току лета, који је активан од $4-10 s$ са потиском од $300 N$, и обухваћен је нумеричком симулацијом.

Циљ је непокретан за све представљене резултате. Упоређене су путање невођеног и пројектила вођеног методом проширене пропорционалне навигације (ППН). Номиналне вредности угаоних брзина пропињања и скретања су $0 rad / s$.

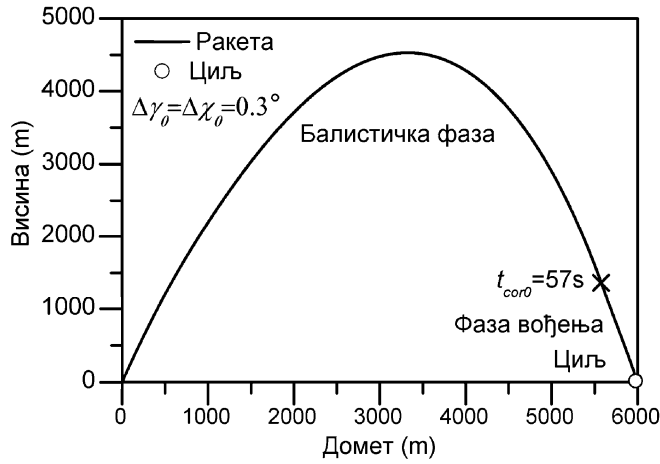
Модел за нумеричку симулацију занемарује Магнусов ефекат и ротацију Земље па је одступање пројектила од вертикалне равни последица инерционог купловања ротације пројектила. Номинални лансирни углови елевације и азимута одређени су тако за дату почетну брзину ($V_0 = 320 m / s$) и рад ракетног мотора да се обезбеди пад невођеног пројектила на домету од $6.000 m$ без одступања по правцу и на нултој висини који редом износе 68.65° и 0.32° .

Увођење одступања углова лансирања азимута и елевације од $+0.3^\circ$, узрокује одступање од номиналне путање невођеног пројектила и промашај од $61m$ по домету и $31m$ по правцу.

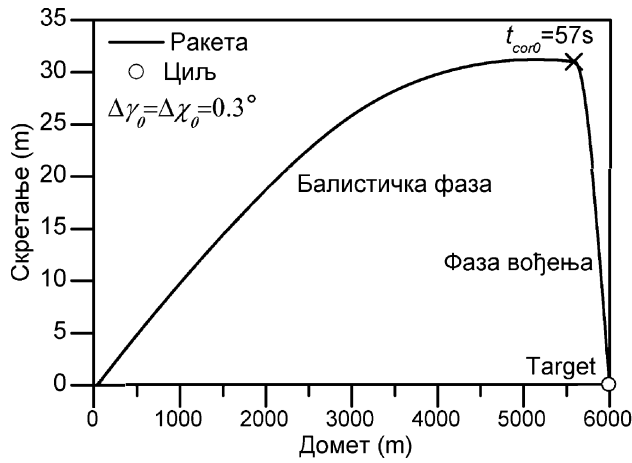
Управљачки прстен садржи 18 бочних ИРМ, а сваки од њих делује импулсом од $15Ns$ на центар масе током времена од $0.1s$. Минимална вредност временског периода између активирања два бочна ИРМ износи $\Delta t_{\min} = 0.05s$. Глава за самонавођење уочава циљ на растојању од $\approx 1500m$ што одговара временском тренутку од $t \approx 57s$ од када почиње завршна фаза самонавођења. Укупно време лета је $t_f = 63s$ па прва фаза балистичког лета чини 90% укупног времена лета.

Коришћењем проширене пропорционалне навигације (ППН) промашај постаје свега $0.2m$. Дијаграми на Сликама 7.5 до 7.7 представљају резултате нумеричке

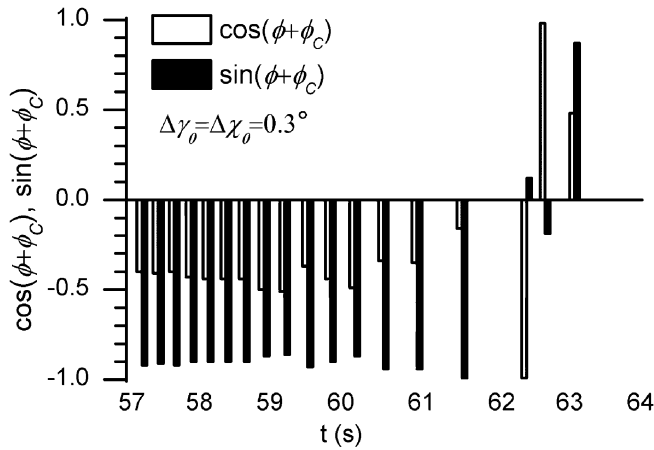
симулације за овај случај.



Слика 7.5 – Висина–домет (ППН, $I_J=15N-s$).

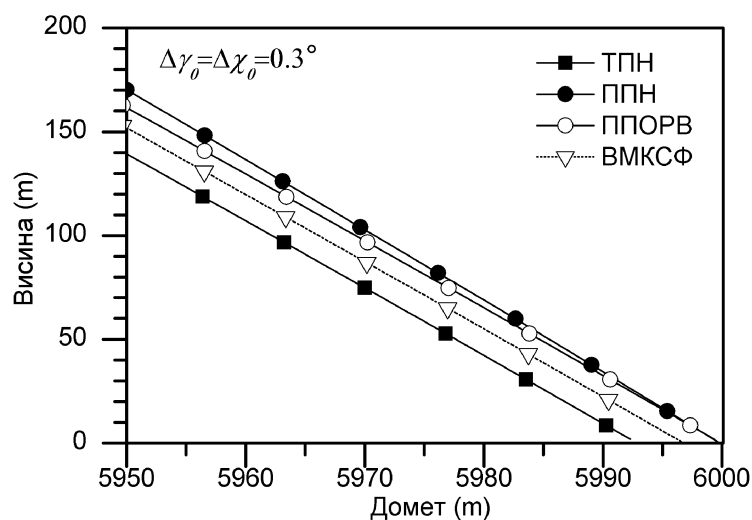


Слика 7.6 – Скретање–домет (ППН, $I_J=15N-s$).

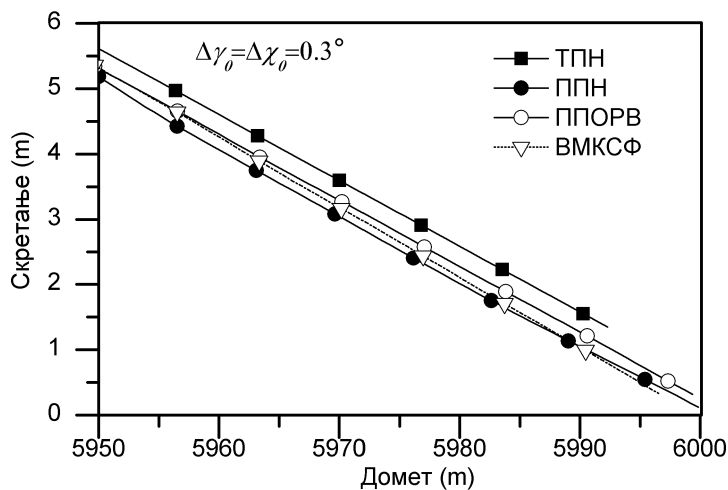


Слика 7.7 – Дијаграм активирања ИРМ и компоненте пројекције управљачке
силе на осе аеро–балистичког к.с. (ППН, $I_J=15N-s$).

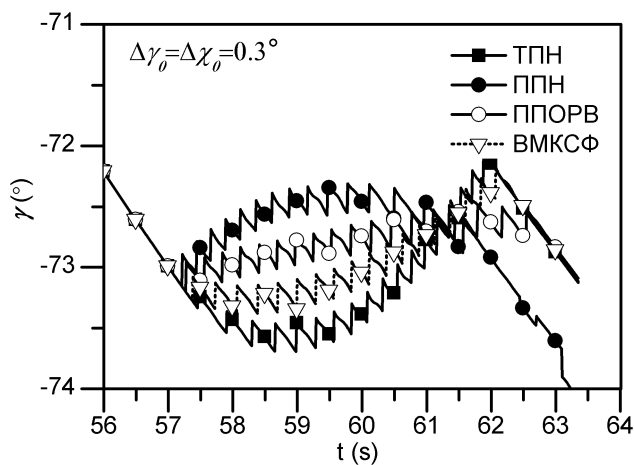
Поређење завршних делова путања пројектила вођеног применом класичне пропорционалне навигације (ТПН), проширене пропорционалне навигације (ППН), побољшаног проширеног оптималног рандеву вођења (ППОРВ) и вођења методом клизања са "сигмоидном" функцијом (ВМКСФ) дато је на Слици 7.8 и Слици 7.9. У случају ТПН закона вођења, пројектил пада пре циља са промашајем од $7.24m$ док се употребом ВМКСФ закона вођења промашај смањује на $3.22m$. Закони вођења ППН и ППОРВ значајно смањују промашај на $0.26m$, односно на $0.2m$. Временски дијаграми промене угла нагиба путање, као и угла између ЛВЦ и вектора брзине дати су на Слици 7.10 и Слици 7.11. У случају ТПН закона вођења нема компензације еквивалентног маневра (гравитационог убрзања) и пројектил има све веће управљачке захтеве док прилази циљу. Случај ВМКСФ закона вођења нешто је повољнији по питању интензитета завршног маневра. Угао вектора брзине у односу на циљ у вертикалној равни не достиже нулту вредност у случајевима ТПН и ВМКСФ закона вођења, док у случајевима ППН и ППОРВ тежи нултој вредности. Код ППН закона вођења еквивалентни маневар је превише компензован у односу на ППОРВ због веће вредности појачања k_T .



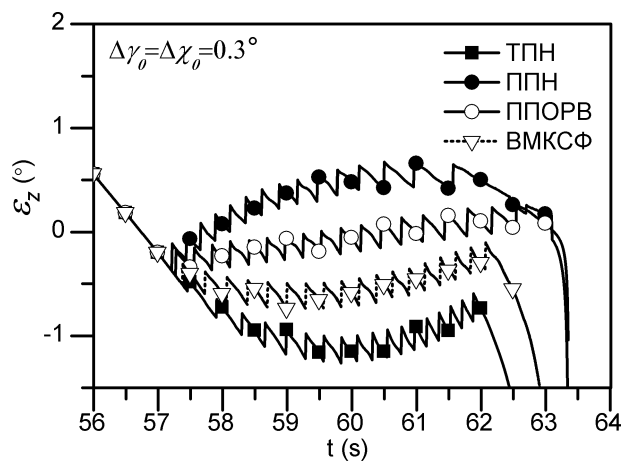
Слика 7.8 – Висина–домет за разне законе вођења ($I_f=15N-s$).



Слика 7.9 – Скретање–домет за разне законе вођења ($I_J=15N-s$): класична пропорционална навигација (ТПН), проширена пропорционална навигација (ППН), побољшано проширено оптимално рандеву вођење (ППОРВ) и вођење методом клизања са "сигмоидном" функцијом (ВМКСФ).

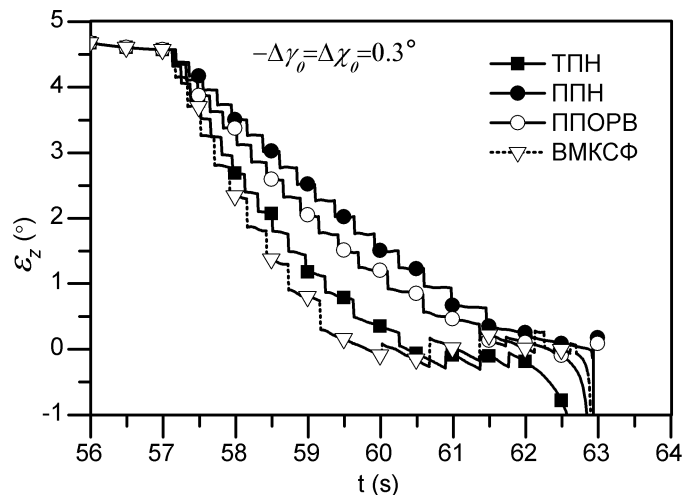


Слика 7.10 – Угао нагиба путање у вертикалној равни за разне законе вођења ($I_J=15N-s$).



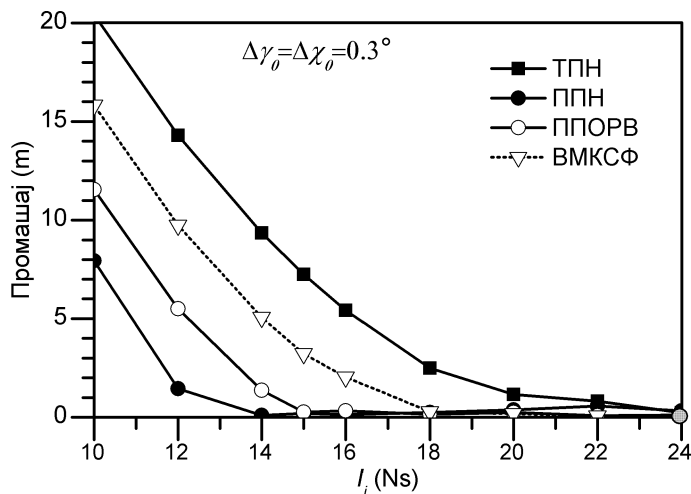
Слика 7.11 – Угао брзине пројектила у односу на циљ за разне законе вођења $\Delta\gamma = -0.3^\circ$ ($I_f=15\text{N-s}$): класична пропорционална навигација (ТПН), проширена пропорционална навигација (ППН), побољшано проширено оптимално рандеву вођење (ППОРВ) и вођење методом клизања са "сигмоидном" функцијом (ВМКСФ).

Утицај почетног одступања углова елевације и правца на угао претицања у вертикалној равни приказан је на Слици 7.12 за различите законе вођења. Најбољи резултати у смислу промашаја, поново се постижу код ППН и ППОРВ где се вектор брзине у тренутку судара поклапа са линијом визирања циља. У случају ВМКСФ време потребно за довођење вектора брзине на линију визирања циља је најкраће. Избором веће вредности параметра β_0 ово време би се још скратило, али би се утрошили сви ИРМ знатно пре краја лета што би довело до већих вредности промашаја.



Слика 7.12 – Угао брзине пројектила у односу на циљ за разне законе вођења $\Delta\gamma = -0.3^\circ$ ($I_J=15N\cdot s$):): класична пропорционална навигација (ТПН), проширена пропорционална навигација (ППН), побољшано проширено оптимално рандеву вођење (ППОРВ) и вођење методом клизања са "сигмоидном" функцијом (ВМКСФ).

Утицај интензитета појединачног импулса ИРМ на промашај за дате почетне услове и различите законе вођења, представљен је на Слици 7.13. Најбољи резултат постиже се употребом ППН када се прихватљив промашај (погађање тачкастог циља нпр. тенка, возила, бункера) постиже уколико је вредност појединачног импулса већа од $14Ns$. Ако се примени ППОРВ, потребан је интензитет појединачног импулса већи од $15Ns$, док је за примену ТПН потребно чак више од $24Ns$ да би се компензовала закривљеност путање у вертикалној равни услед дејства гравитације. Примена ВМКСФ захтева интензитет појединачних импулса већи од $18Ns$ за погађање тачкастих циљева, и по оствареној тачности налази се између ТПН и ППН/ППОРВ. Међутим, овај закон вођења, као и класична пропорционална навигација, задржава једноставност реализације.



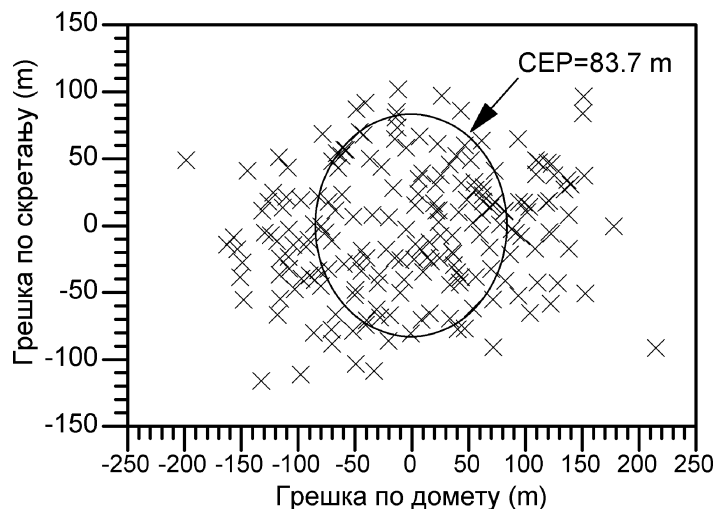
Слика 7.13 – Промашај–интензитет појединачног импулса за разне законе вођења: класична пропорционална навигација (ТПН), проширена пропорционална навигација (ППН), побољшано проширено оптимално рандеву вођење (ППОРВ) и вођење методом клизања са "сигмоидном" функцијом (ВМКСФ).

Одступање почетних услова узрокује растурање падне тачке пројектила. Да би се симулирала одступања почетних услова, следеће величине представљене су као независно променљиве случајне величине описане нормалном (Гаусовом) расподелом са својом средњом вредношћу и стандардном девијацијом: почетна брзина $320 / 2m / s$, азимут $0.3215 / 0.1^\circ$, елевација $68.6466 / 0.1^\circ$, угаоне брзине пропињања и скретања $0 / 0.1rad / s$, нападни угао и угао клизања $0 / 0.1^\circ$.

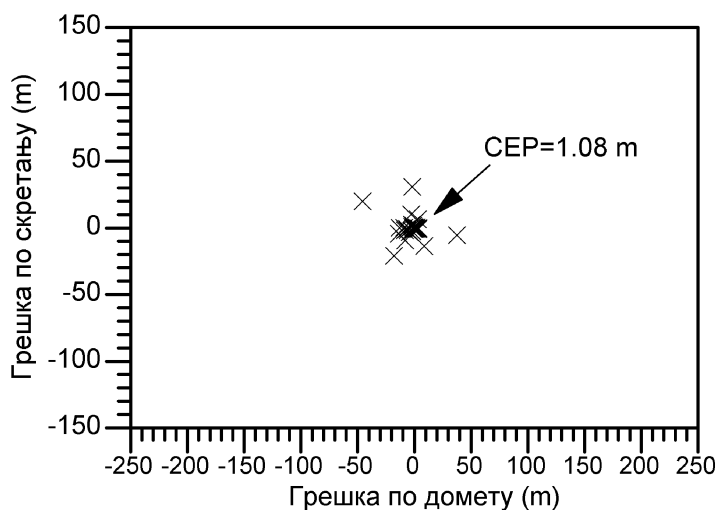
Ексцентрицитет потиска ракетног мотора се поништава захваљујући ротацији пројектила, али је његов интензитет представљен нормалном расподелом од $300 / 3N$. Грешка угла под којим делује сила услед појединачних бочних ИРМ представљена је нормалном расподелом као $0 / 0.1^\circ$, а њихов импулс као $20 / 0.6Ns$. Угао уградње крила стабилизатора пројектила која обезбеђују лагану ротацију, представљен је такође нормалном расподелом као $1.87 / 0.1^\circ$. Метеоролошки подаци би требало да елиминишу утицај ветра, али је у симулацији претпостављен неки некомпензовани део ветра са константним интензитетом од $4m / s$ чији је правац равномерно распоређен изнад терена у интервалу $0^\circ - 360^\circ$. Управљачки систем се сматра довољно брзим па временска кашњења нису укључена. Коришћен је Monte–Carlo метод симулације са узорком од 200 путања.

Растурање погодака конвенционалног минобацачког пројектила приказано је на

Слици 7.14, а пројектила са вођењем методом клизања са "сигмоидном" функцијом (ВМКСФ) и управљачким прстеном који садржи 18 ИРМ са појединачним импулсима од $20Ns$ приказано је на Слици 7.15.



Слика 7.14 – Растурање падне тачке за невођени минобацачки пројектил.

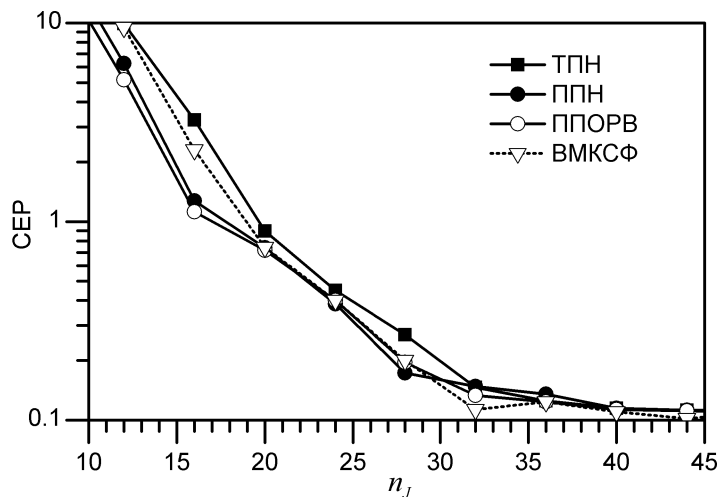


Слика 7.15 – Растурање падне тачке за минобацачки пројектил са вођењем методом клизања са "сигмоидном" функцијом (ВМКСФ).

Вероватна кружна грешка (СЕР), представља полупречник кружнице у чијем домену се налази 50% погодака. Вредност кружне грешке од око 1m показује могућност поготка тачкастог циља помоћу ВМКСФ.

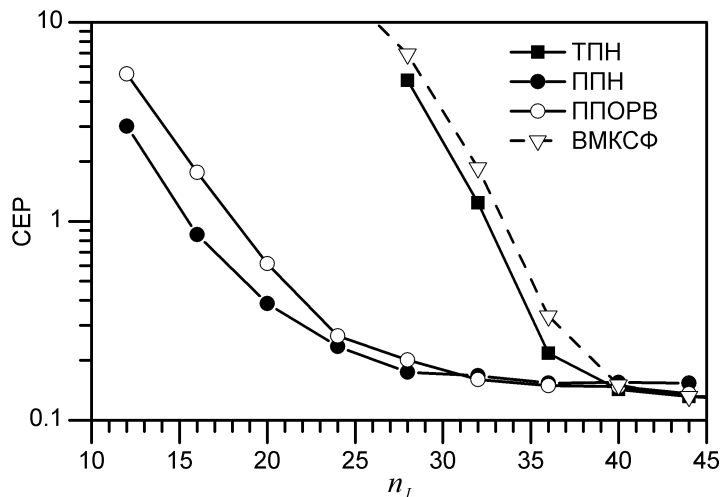
Слика 7.16 приказује утицај метода вођења на вероватну кружну грешку (СЕР) при гађању непокретног циља на удаљености од 6000m. За све законе вођења СЕР се смањује како расте број ИРМ. Задовољавајуће растурање сви анализирани закони

вођења постижу када је $n_j \geq 20$. У овом примеру на карактеристике растурања мало утиче избор закона вођења јер је завршни угао путање велики (већи од 70°) тј. мали почетни угао линије визирања циља λ_0 , и према томе мале вредности еквивалентног маневра (7.23).



Слика 7.16 – СЕР за различите законе вођења на домету од 6000m ($I_j=20N-s$): класична пропорционална навигација (ТПН), проширена пропорционална навигација (ППН), побољшано проширено оптимално рандеву вођење (ППОРВ) и вођење методом клизања са "сигмоидном" функцијом (ВМКСФ).

Анализом лансирања пројектила под углом елевације 45° (што одговара домету од 8275m) одређено је растурање приказано на Слици 7.17. У овом случају завршни угао путање доста је мањи па гравитациони члан повећава "еквивалентни маневар циља" и има већи утицај током фазе самонавођења. Очигледно да ППН и ППОРВ имају предност над ТПН и ВМКСФ, јер су у стању да компензују еквивалентни маневар циља који је одређен једначином (7.23). Ови методи вођења постижу $СЕР < 1m$ са дупло мањим бројем ИРМ у односу на ТПН и ВМКСФ.



Слика 7.17 – СЕР за различите законе вођења при лансираном углу елевације 45 deg ($I_f=20N-s$): класична пропорционална навигација (ТПН), проширена пропорционална навигација (ППН), побољшано проширено оптимално рандеву вођење (ППОРВ) и вођење методом клизања са "сигмоидном" функцијом (ВМКСФ).

Примена система вођења који се састоји од главе за самонавођење и управљачког прстена са бочним ИРМ монтираним око центра масе омогућава значајно смањење растурања погодака за случај непокретног циља у поређењу са невођеним пројектилом. За нумеричку симулацију коришћен је динамички модел минобацачког пројектила са шест степени слободне кретања.

Класична пропорционална навигација (ТПН) је елиминисана као могуће решење због великог броја ИРМ, или појединачних импулса, потребних за компензовање нежељеног ефекта "еквивалентног маневра циља" у случају малих лансирних углова. Вођење методом клизања са "сигмоидном" функцијом (ВМКСФ) постиже сличне резултате, али као ни ТПН не захтева уградњу слободног жироскопа за његову примену, те се одликује једноставношћу конструкције.

Проширена пропорционална навигација (ППН) и побољшано проширено оптимално рандеву вођење (ППОРВ) постижу боље резултате за исте параметре од других закона вођења, посебно при малим лансирним угловима, кад гравитациони члан има значајан утицај током фазе самонавођења. Они захтевају уградњу слободног жироскопа за превођење еквивалентног маневра у управљачки координатни систем везан за тело.

Иако је смањење растурања за непокретан циљ употребом различитих закона

вођења значајно, потребно је проширити анализу за случај покретних и маневришућих циљева, јер се резултати могу разликовати. У случају ППН и ППОРВ, смањење растурања зависиће од тачности процене маневра циља.

Глава

8. Закључак

У дисертацији су истражени и представљени нови закони вођења и нумерички тестирани у случају ракета земља–ваздух средњег домета са задатком минимизације промашаја и утрошка енергије, односно квадрата нормалног убрзања током лета ракете. Добијене карактеристике и предности предложених закона вођења упоређени су са досада примењеним методима вођења.

Постављени су нелинеарни математички модели геометрије сусрета ракете и циља у правоуглом и поларном координатном систему водећи рачуна о њиховој примени код нових закона вођења. Ради ефикасне примене ови модели су решавани за случај раванског кретања ракете и циља. Почетна претпоставка била је да су расположиво нормално убрзање ракете (маневарска способност) и реализовани маневар циља знатно већи од гравитационог убрзања чији ефекат је занемарен па се развијени математички модели могу применити у било којој равни у простору. Примена метода оптимизације вођења захтевала је линеаризацију кинематских модела и њихово прилагођавање потребама њихове инжењерске реализације. Дефинитивна верификација истражених алгоритама вођења извршена је путем нумеричке симулације комплетног система самонавођења ракете и модела лета ракете помоћу шест степени слободе кретања (6–ДОФ).

Изведен је кинематски модел за сусрет ракете и циља за случај кад не може да се занемари утицај гравитационог убрзања. Уведен је појам „еквивалентног маневра циља“ чиме је проблем оптимизације сведен на општи случај геометрије сусрета два објекта, а развијени закони вођења могу се применити и у случају других типова летелица као нпр. минобацачког пројектила са корекцијом путање.

Перформансе различитих закона вођења изучаване су имајући у виду два основна типа поремећаја, маневар циља описан нормалним убрзањем и грешка у заузимању угла претицања.

Најпре је изучавана група закона вођења која у основи има структуру пропорционалне навигације. Применом класичне (праве) пропорционалне навигације (ТПН) са константом $k = 3$ добијене су велике вредности промашаја па

због тога примена овог закона вођења против маневришућих циљева није оправдана.

Применом проширене пропорционалне навигације, ППН, и континуалним одређивањем маневра циља током лета значајно се смањује промашај ракете. За дати сценарио маневра циља остварени су промашаји мањи од 1,1 m уз знатно мањи утрошак енергије. Ако се смањи фактор појачања по нормалном убрзању циља, $k_T = 1$, добијен је промашај мањи од 0,3 m уз сличан утрошак енергије, па се због тога препоручује ова варијанта проширене пропорционалне навигације. Иако закон нелинеарне пропорционалне навигације (НПН) не захтева информацију о маневру циља, ипак остварује промашаје мање од 0,1 m, уз сличну потрошњу енергије, што га чини правим избором у овој групи алгоритама вођења.

На основу анализе закона вођења из прве групе оптималних, тј. одређених помоћу линеарне квадратне једностране оптимизације, оптимално рандеву вођење (ОРВ) може се успешно применити јер остварује промашаје мање од 0,14 m. Коришћењем и додатне информације о оствареном нормалном убрзању ракете преко вођења са минималним утрошком енергије (ВМЕ) и предикцијом маневра циља, остварује се додатни квалитет вођења јер су вредности промашаја смањене на испитиваном опсегу домета, уз знатно смањење потрошње управљачке енергије. Недостатак метода се испољава у сложености алгорита вођења јер захтева тачно познавање динамике аутопилота, времена до сусрета два објекта и прогнозу нормалног убрзања циља.

Закони вођења из друге групе оптималних, тј. одређених помоћу теорије диференцијалних игара (двостране оптимизације), подразумевају оптимални маневар циља ради избегавања ракете и због тога не захтевају информацију о нормалном убрзању циља. У суштини они представљају класичну пропорционалну навигацију (ТПН), као и оптимално рандеву вођење (ОРВ), код којих су увећани фактори појачања и означени су са ТПНДИ и ОРВДИ. Оба ова закона вођења постижу одличне резултате, тј. промашаје до 0.1 m. Применом диференцијалних игара, вођење са минималним утрошком енергије трансформише се у ВМЕДИ закон вођења чији резултати за параметре $b = 100, \gamma = 2,1$ (који су изабрани тако да се не појаве коњуговане тачке) остварио

је најлошије резултате јер су промашаји до 5 m.

После сажетог приказа управљања помоћу метода клизања нелинеарних система са променљивом структуром, детаљно је анализирана реализација закона вођења помоћу ове теорије. Закони вођења методом клизања код којих је кинематски модел сусрета третиран као специјална форма система са променљивом структуром из класе нелинеарних система управљања, једноставни су за реализацију могу да обухвате и информацију о маневру циља. Међутим, показано је да су ови алгоритми ефикасни и ако се маневар циља третира као поремећај што значајно проширује њихову примену код различитих типова летелица.

У раду је показано да вођење методом клизања спада у класу нелинеарних закона управљања који задржавају структуру пропорционалне навигације. Поред линеарног члана по коме је захтевано нормално убрзање сразмерно угаоној брзини линије визирања циља (грешци вођења), постоји и додатни члан у облику сигнум функције од грешке вођења. Класични метод клизања има сигнум функцију константне амплитуде и остварује задовољавајућу прецизност, али уз велики утрошак енергије и самоосциловање управљачког сигнала које је изузетно неповољно за рад аутопилота и главе за самонавођење. Заменом дисконтинуалне функције, која карактерише класичну методу клизања, континуалном "сигмоидном" функцијом синтетисан је закон вођења који задржава исте вредности промашаја, али уз драстично смањење осциловања управљачког сигнала.

Даља примена метода клизања код самонавођених ракета истраживана је увођењем степених сигнум функција од угаоне брзине линије визирања циља. Резултати нумеричке симулације су презентирани за функције са експонентима $1/2$ и $2/3$. Обе варијанте дају задовољавајућу прецизност јер је промашај мањи од 0,09 m. У предности ових метода треба укључити и одсуство самоосциловања и једноставност реализације.

Аеродинамичке карактеристике ракете и параметри лета типичне ракете земља–ваздух показали су да је то изразито нестационаран и нелинеаран објекат управљања. Зато је наредна верификација предложених закона вођења извршена

нумеричком симулацијом просторног кретања самонавођене ракете као динамичког објекта са шест степени слободе кретања. Наведени су и описани основи узроци нелинеарних и нестационарних појава у лету. Истражени су следећи закони вођења: класична пропорционална навигација као референтни закон који је најчешће примењен код већ реализованих ракета, нелинеарна пропорционална навигација са линеарним и кубним чланом по угаоној брзини линије визирања циља, закон вођења са минималним утрошком енергије синтетисан методом диференцијалних игара без предикције маневра циља и вођење помоћу метода клизања са степеном сигнум функцијом од угаоне брзине линије визирања циља.

Нумеричка симулација ракете земља–ваздух средњег домета извршена је за комплетан лет на коме је примењено комбиновано вођење: на почетном и средњем делу путање користи се вођење по радарском или оптичком снопу, а у завршној фази примењен је један од метода самонавођења који су изучавани у овом раду. Показано је да се грешка у достизању жељене вредности угла претицања на почетку самонавођења успешно компензује помоћу свих поменутих закона вођења. Разлике у перформансама предложених закона вођења јављају се у случају маневришућих циљева и реализацији њиховог маневра. Тако, нпр., класични метод пропорционалне навигације тешко се може применити против маневришућих циљева, посебно ако се има у виду ограничено расположиво нормално убрзање ракете на средњим висинама, или изненадни случајни маневар циља.

Пошто се кретање циља карактерише маневром који поред детерминистичке компоненте, која се може проценити, има и случајно убрзање које је непознато ракети, извршена је верификација различитих закона вођења за овакве сценарије маневрисања циља. Посматране су две стратегије циља у избегавању ракете: а) циљ врши маневар у хоризонталној равни са константним нормалним убрзањем с тим што је почетак маневра у одређеном интервалу лета униформна случајна променљива, и б) циљ врши маневар са хармонијском променом нормалног убрзања у хоризонталној равни при чему је почетна фаза хармонијског кретања униформна случајна променљива у интервалу углова $[0, 2\pi]$. Ако се као параметар квалитета самонавођења усвоји средња вредност промашаја, онда се за усвојене

стратегије циља издвајају следећи закони: вођење методом клизања са експонентом степене сигнум функције од $2/3$, нелинеарна пропорционална навигација са кубним чланом угаоне брзине линије визирања циља и метод диференцијалних игара са минималним утрошком енергије. У случају константног маневра и униформне расподеле тренутка почетка маневра, предност има метод клизања, а при хармонијској промени нормалног убрзања нешто боље перформансе се добијају нелинеарном пропорционалном навигацијом. Како су добијене релативно мале разлике у средњим вредностима промашаја, потребно је даље истраживање ових метода полазећи од дејства случајних поремећаја, непоузданости динамичких особина ракете као објекта управљања, процене времена до сусрета два објекта итд.

Предложена методологија синтезе закона вођења може се успешно применити и на другим типовима летелица, што је илустровано на примеру савременог минобацачког пројектила који спада у класу паметне муниције. Показано је да је могуће драстично смањење кружне вероватне грешке, као мере растурања, са вредности од преко 80 m за невођени пројектил на вредности мање од 0.3 m код "паметног пројектила" са уграђеним сензорима и импулсним управљачким одсеком. За разлику од ракете земља–ваздух код које је примењено аеродинамичко континуално управљање, минобацачки пројектил има централну секцију импулсних ракетних мотора којима се директно утиче на промену правца брзине у складу са одабраним законом вођења. Извршена је комплетна синтеза различитих оптималних закона вођења полазећи од опција да је приближно познат "еквивалентни маневар циља" или да немамо информацију о овој величини. Одређен је алгоритам трансформације захтеваног нормалног убрзања у поворку фреквентно модулисаних импулса водећи рачуна о појединачном импулсу ракетног мотора и укупним енергетским ресурсима минобацачког пројектила.

8.1.Преглед оригиналних доприноса у дисертацији

Сумирајући целокупне резултате истраживања у дисертацији као главни научни доприноси издвајају се:

1. Постављени су нелинеарни математички модели раванског сусрета ракете и циља у правоуглом и поларном координатном систему водећи рачуна о

примени нових закона вођења. За потребе синтезе нових закона вођења ови модели су линеаризовани пошто то захтева практично налажење оптималних закона вођења путем решавања адјунгованог система једначина у коначном облику. За летелице мале маневарске способности какав је, нпр., минобацачки пројектил, модификован је равански модел кретања летелице увођењем "еквивалентног маневра циља" који зависи од гравитационог и тангентног убрзања пројектила. Тиме је проблем генерализован те се изведени модел користи за синтезу закона вођења како летелице велике тако и мале маневарске способности.

2. После сажетог приказа фундаменталних теорија једносмерне квадратне оптимизације и метода диференцијалних игара, у раду су детаљно истражене могућности примене различитих закона вођења на ракете земља–ваздух. У прву групу закона вођења спадају они који су добијени минимизацијом квадрата нормалног убрзања као управљачког сигнала, промашаја и нормалне релативне брзине зближавања два објекта, а у другу су они који поред ових задатака вреднују и максимизирање промашаја од стране циља. Полазећи од нелинеарног математичког модела генерисани су дијаграми зависности промашаја и управљачке енергије од тренутног положаја циља, који имају посебан значај у синтези алгоритма вођења и процени зоне лансирања ракете. Они су знатно поузданији од оних који су до сада добијани помоћу адјунгованог система заснованог на хипотези линеарног динамичког модела кретања ракете.
3. За реализацију вођења код система самонавођених ракета које поседују способност предикције маневра циља предложени су следеће закони: проширена пропорционална навигација (ППН), проширено оптимално рандеву вођење (ПОРВ) и вођење са минималним утрошком енергије (ВМЕ). Значајан научни допринос је остварен избором закона вођења за системе без предикције нормалног убрзања циља: нелинеарна пропорционална навигација са кубним чланом по угаоној брзини линије визирања циља (НПН), побољшано вођење методом клизања (ПВМК) са степеном функцијом, као и различите варијанте метода диференцијалних игара.

4. Вредни истраживачки резултати у примени нових алгоритама вођења остварени су нумеричком симулацијом комплетног система самонавођене ракете, као објекта са шест степени слободе кретања, против ваздушних циљева који примењују стратегије случајних маневара за максимизирање промашаја ракете.
5. Према мени доступним научним информацијама, у овом докторском раду су по први пут синтетизовани и анализирани оптимални закони вођења за нову класу минобацачких пројектила, тзв., "паметну" муницију чиме је вишеструко повећана њихова прецизност. Дат је комплетан концепт корекције путање у завршној фази лета пројектила који обухвата нови закон вађења са и без компензације "еквивалентног маневра циља" и трансформацију захтеваног убрзања у поворку фреквентно модулисаних импулса ракетних мотора којима се дискретно мења правац брзине пројектила.

8.2. Правци даљих истраживања

Истраживања нових алгоритама вођења ракета земља–ваздух средњег домета постављају нове проблеме које треба решити пре њихове практичне реализације на конкретним системима:

- Особине оптималних закона вођења при деловању случајних поремећаја као што су грешке одређивања или мерења угаоне брзине линије визирања циља, радијалне брзине приближавања ракете и циља, грешке предикције времена лета ракете до сусрета с циљем итд;
- Осетљивост перформанси закона вођења (промашаја, максималне управљачке енергије) на одступање параметара система (матрице система, природне учестаности, фактора управљивости или маневарске способности) од стварних вредности, осетљивост на грешку у предикцији маневра циља;
- Корекција закона вођења према прогнозираним одступањима система;
- Утицај нових стратегија циља у избегавању вођене ракете на подешавања параметара закона вођења и прорачун зона лансирања;
- Примена нових закона вођења на разне типове артиљеријске муниције

водећи рачуна о новим технолошким достигнућима као што су ГПС (Глобални Позициони Систем) пријемници, инерцијални сензори и нови уређаји за једноставну корекцију путање.

Литература

1. Ben-Asher, J., Yaesh, I.: *Advances in Missile Guidance Theory*. American Institute of Aeronautics and Astronautics (1998)
2. Shtessel, Y., Tournes, C.: *Higher-Order Sliding Modes for Missiel Guidance and Control*. In : *Advances in Missile Guidance, Control and Estimation*. CRC Press, Boca Raton (2013) 195-240
3. Zhou, D., Chundi, M., Wenli, X.: *Adaptive Sliding-Mode Guidance of a Homing Missile*. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 22(4), 589-594 (1999)
4. Başar, T., Bernhard, P.: *Optimal Control and Related Minimax Design Problems*, 2nd ed. Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin (1995)
5. Ben-Asher, J.: *Linear Quadratic Pursuit-Evasion Games with Terminal Velocity Constraints*. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 19(2), 499-501 (1996)
6. Ćuk, D., Mandić, S.: *Izbor algoritma vođenja kod samonavedenih raketa sa promenljivom brzinom leta*. *Naučno-tehnički pregled XL(8-9)*, 12-20 (1990)
7. Ćuk, D., Mandić, S.: *Sinteza autopilota propinjanja rakete sa izrazito nestacionarnim dinamičkim parametrima*. *Naučnotehnički Pregled* 1(3), 19-28 (2000)
8. Ćuk, D., Mandić, S.: *Izbor parametara modifikovanog zakona potere samonavedene letelice*. *Naučnotehnički pregled XLVIII(3)*, 3-12 (1998)
9. Ćuk, D., Mandić, S.: *Uticaj ugaone brzine valjanja na parametre putanje letelice sa modifikovanim zakonom potere.*, 5-13 (2000)
10. Yanushevsky, R., Boord, W.: *Lyapunov approach to guidance laws design*. *Nonlinear Analysis* 63(5-7), e743-e749 (2005)
11. Yanushevsky, R., Boord, W.: *New Approach to Guidance Law Design*. *Journal of Guidance Control and Dynamics* 28(1), 162-166 (2005)
12. Shtessel, Y., Shkolnikov, I., Levant, A.: *Smooth Second-Order Sliding Modes: Missile Guidance Application*. *Automatica* 43(8), 1470-1476 (2007)
13. Shtessel, Y., Shkolnikov, I., Brown, M.: *An Asymptotic Second-Order Smooth Sliding Mode Control*. *Asian Journal of Control* 5(4), 498-504 (2003)
14. Shtessel, Y., Shkolnikov, I., Lianos, D.: *Integrated Guidance-Control System of a Homing Interceptor: Sliding Mode Approach*. In : *AIAA Guidance, Nabigation and*

- Control Conference and Exhibit, AIAA-2001-4218, Montreal (2000)
15. Shtessel, Y., Shkolnikov, I., Plekhanov, S., Lianos, D.: Integrated Homing Guidance-Control System for Endo-Atmospheric Intercept in Sliding Modes. In : 15th Triennial World Congress, Barcelona (2002)
 16. Shtessel, Y., Shkolnikov, I.: Integrated Guidance and Control of Advanced Interceptors Using Second Order Sliding Modes. In : Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii, USA (2003)
 17. Shtessel, Y., Tournes, C.: Integrated High-Order Sliding Mode Guidance and Autopilot for Dual-Control Missiles. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 32(1), 79-94 (2009)
 18. Shima, T., Idan, M., Golan, O.: Sliding-Mode Control for Integrated Missile Autopilot Guidance. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 29(2), 250-260 (2006)
 19. Zarchan, P.: *Tactical and Strategic Missile Guidance*, 6th ed. Progress in Astronautics and Aeronautics, vol. 239, Reston USA (2012) 13-34
 20. Pavic, M., Pavkovic, B., Mandic, S., Zivkovic, S., Cuk, D.: Pulse-frequency modulated guidance laws for a mortar missile with a pulse jet control mechanism. *Aeronautical Journal* 119(1213), 389-405 (2015)
 21. Павић, М.: Оптимизација трајекторије ласерски вођене бомбе применом модификованог закона потере. Магистарска теза, Београд (2007)
 22. Garnell, P., East, D.: *Guided weapon control systems*. Pergamon press, Oxford (1977)
 23. Utkin, V., Guldner, J., Shi, J.: *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Taylor & Francis, Padstow (1999) 1-46
 24. Blagojević, V.: Prilog razvoju energetski efikasnog upravljanja pneumatskim izvršnim organima, doktorska disertacija. Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad (2010) 62-72
 25. Khalil, H.: *Nonlinear Design Tools*. In : *Nonlinear Systems*, 3-rd Ed. Prentice Hall, New Jersey (2002) 551-563
 26. Hoon, L.: Chattering suppression in sliding mode control system, Phd. Dissertation.

- The Ohio State University, Ohio (2007)
27. Idan, M., Shima, T., Golan, O.: Integrated Sliding Mode Autopilot-Guidance for Dual-Control Missiles. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 30(4), 1081-1089 (2007)
 28. Brown, M., Shtessel, Y., Buffington, J.: Finite Reaching Time Continuous Sliding Mode Control with Enhanced Robustness. In : *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, AIAA-2000-3964, Denver (2000)
 29. Jongki, M., Youdan, K.: Design of Missile Guidance Law via Variable Structure Control. In : *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, Denver (AIAA-2000-4068, 2000)
 30. Jongki, M., Kiseok, K., Youdan, K.: Design of Missile Guidance Law via Variable structure Control. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 24(4), 559-664 (2001)
 31. Etkin, B., Reid, L.: *Dynamics of Flight Stability and Control*, 3rd ed. John Wiley and Sons (1996, ch.4)
 32. Ђук, Д.: Нелинеарне појаве у динамици лета самовођених брзоротирајућих пројектила. Докторска теза, Београд (1984)
 33. Святодух, В.: Динамика пространственного движения управляемых ракет. *Машиностроение* (1969)
 34. Minović, S.: *Dinamika sistema vođenja i upravljanja projektila*. Mašinski fakultet, Beograd (1970)
 35. Ђук, Д., Ђурџин, М., Мандић, С.: *Autopilot design: Theoretical manual*. Military technical institute, Belgrade (2004)
 36. Zarchan, P.: *Fundamentals of Kalman Filtering: A Practical Approach*, 3rd ed. American Institute of Aeronautics and Astronautics (2009)
 37. Pavic, M., Mandic, S., Cuk, D., Pavkovic, B.: A new type of flight simulator for manual command to line-of-sight guided missile. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics* 125(21), 6579-6585 (2014)
 38. Николић, Т.: Вођење авионске бомбе методом потере при благој ротацији око уздужне осе. *Машински факултет, Београд* (2007)

39. Jitraphai, T., Burchett, B., Costello, M.: A Comparison of Different Guidance Scheme for a Direct Fire Rocket With a Pulse Jet Control Mechanism., Aberdeen Proving Ground (2002)
40. Jitraphai, T., and Costello, M.: Dispersion Reduction of a Direct Fire Rocket Using Lateral Pulse Jets. *Journal of Spacecraft and Rockets* 38(6), 929-936 (2001)
41. Gupta, S., Saxena, S., Singhal, A., K, G.: Trajectory Correction Flight Control System Using Pulse Jet on Artillery Rocket. *Defence Science Journal* 58(1), 15-33 (2008)
42. Pavkovic, B., Pavic, M., Cuk, D.: Frequency-Modulated Pulse-Jet Control of an Artillery Rocket. *Journal of Spacecraft and Rockets* 49(2), 286-294 (2012)
43. Павковић, Б.: Истраживање метода корекције трајекторија пројектила у функцији од повећања њиховог домета и прецизности, Докторска теза. Машински факултет, Београд (2012)
44. Fresconi, F.: Guidance and Control of a Projectile with Reduced Sensor and Actuator Requirements. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 34(6), 1757-1766 (2011)
45. Glebocki, R., Vogt, R.: Guidance System of Smart Mortar Missile. *The Archive of Mechanical Engineering* LIV(1), 47-63 (2007)
46. Rogers, J., Costello, M.: Design of a Roll-Stabilized Mortar Projectile with Reciprocating Canards. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 33(4), 1026-1034 (2010)
47. Regan, F.: Aeroballistics of a Terminally Corrected Spinning Projectile (TCSP). *Journal of Spacecraft* 12(12), 733-738 (1975)
48. Cuk, D.: Trajectory Correction of Gyroscopic Stabilized Projectile Using Proportional Navigation. *Military Technical Courier* LVIII(1), 13-32 (2010)
49. Грујић, Љ., Лазић, Д.: Нелинеарни системи. Машински факултет, Београд (2005) 235-295
50. Yoshizawa, T.: Stability Theory by Liapunov's Second Method. The Mathematical Society of Japan, Tokyo (1966)

Прилог А – Стабилност нелинеарних система

А.1. Љапуновљев метод

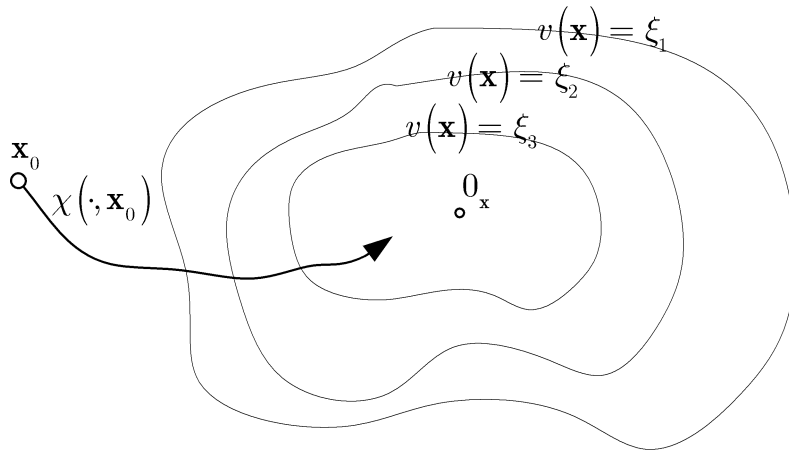
Руски научник Александар Михилович Љапунов (1857–1918) је развио метод за проверу особина стабилности нелинеарног система описаног (А.1) без решавања ове нелинеарне векторске диференцијалне једначине тј. без одређивања појединачних кретања система.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}) \quad (\text{A.1})$$

Овај метод може да се примени и у случају када је $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ линеарна функција, али је на основу постојеће теорије аутоматског управљања линеарних система оцену особина стабилности једноставније дати испитивањем сопствених вредности матрице \mathbf{A} .

За испитивање особина стабилности на основу дефиниције тј. у односу на промене кретања система $\chi(\cdot, \mathbf{x}_0)$ за свако почетно стање \mathbf{x}_0 из скупа S , захтева решавање једначине (А.1) које је аналитички могуће само у неким посебним случајевима, а нумеричким решавањем помоћу рачунара трајало би предуго јер у скупу S постоји бесконачно много почетних стања \mathbf{x}_0 .

Љапуновљев метод који се назива још и други/квалитативни/директни метод [48] представља најопштији приступ проучавању нелинеарних система вишег реда а базира се на коришћењу функције $v(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ која обезбеђује постојање хиперповршина $v(\mathbf{x}) = \xi = \text{const}$ које су повезане околине нултог стања $\mathbf{x} = \mathbf{0}_x$. Слика А.1, при чему промена функције $v(\cdot)$ дуж кретања система $v(\chi(\cdot, \mathbf{x}_0))$ може да се испита без познавања самих кретања.



Слика А.1 – Хиперповршине функције $v(\mathbf{x})$ и кретање система.

Тако хиперповршина $v(\mathbf{x}) = \xi_1$ обухвата хиперповршину $v(\mathbf{x}) = \xi_2$ ако је $\xi_1 > \xi_2$. Па ако се утврди да вредност функције $v(\cdot)$ не расте дуж кретања система $v(\chi(\cdot, \mathbf{x}_0))$ онда је нулто стање стабилно, а ако се утврди да вредност функције $v(\cdot)$ опада дуж кретања система $v(\chi(\cdot, \mathbf{x}_0))$ онда је нулто стање асимптотски стабилно (стабилно и привлачно).

Љапунов је разматрао посебан случај система (А.1) чија су кретања диференцијабилна у некој околини нултог стања, што се математички може формулисати следећом претпоставком:

Претпоставка А.1 Постоји повезана околина $\mathbb{N}, \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ нултог стања $\mathbf{x} = \mathbf{0}_x$

таква да систем (А.1) има јединствено кретање кроз свако $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{N}$ које је дефинисано и диференцијабилно на $(t, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$, тј.

$$\chi(t, \mathbf{x}_0) \in C^{(1,1)}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}) \quad (\text{А.2})$$

Користећи претходну претпоставку могу се формулисати следеће теореме:

Теорема А.1 Нека је испуњена Претпоставка А.1. Да би $\mathbf{x} = \mathbf{0}_x$ система (А.1)

било **стабилно**, потребно је и довољно да постоји отворена повезана околина S нултог стања и позитивно одређена диференцијабилна функција $v(\cdot) : S \rightarrow \mathbb{R}$ на скупу S таква да је њен Ојлеров извод дуж кретања система

(A.1) непозитиван на скупу S , тј.

$$\dot{v}(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in S \quad (\text{A.3})$$

Теорема А.2 Нека је испуњена Претпоставка А.1. Да би $\mathbf{x} = \mathbf{0}_x$ система (A.1) било **асимптотски стабилно**, потребно је и довољно да постоји отворена повезана околина S нултог стања и позитивно одређена диференцијабилна функција $v(\cdot): S \rightarrow \mathbb{R}$ на скупу S таква да је њен Ојлеров извод дуж кретања система (A.1) негативно одређена функција на скупу S , тј.

$$\dot{v}(\mathbf{x}) < 0, \forall \mathbf{x} \in S \quad (\text{A.4})$$

Дуго се сматрало да је за асимптотску стабилност у целом, довољно да важе услови Теорема А.2 на целом простору стања. Руски научници Барбаши и Красовски су показали да то није довољно већ је потребно и довољно да уз те услове посматрана функција $\dot{v}(\mathbf{x})$ буде и радијално неограничена. Зато важи следећа теорема:

Теорема А.3 Нека је испуњена Претпоставка А.1 на $\mathbb{N} = \mathbb{R}^n$. Да би $\mathbf{x} = \mathbf{0}_x$ система (A.1) било **асимптотски стабилно у целом**, потребно је и довољно да постоји глобално позитивно одређена радијално неограничена диференцијабилна функција $v(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ таква да је њен Ојлеров извод дуж кретања система (A.1) глобално негативно одређена функција, тј.

$$\dot{v}(\cdot) < 0 \quad (\text{A.5})$$

Претходне теореме применом Динијевих извода могу се проширити на већу подкласу система описаних са (A.1) која је одређена следећом претпоставком где кретања не морају бити диференцијабилна већ само непрекидна:

Претпоставка А.2 Постоји повезана околина $\mathbb{N}, \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ нултог стања $\mathbf{x} = \mathbf{0}_x$ таква да систем (A.1) има јединствено кретање кроз свако $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{N}$ које је дефинисано и непрекидно на $(t, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$, тј.

$$\chi(t, \mathbf{x}_0) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}) \quad (\text{A.6})$$

Оправданост увођења ове претпоставке може се проверити:

- математички, преко особина функције $f(\cdot)$ коришћењем теорема о постојању, јединствености и непрекидности кретања,
или
- физикалношћу, на основу знања о физичким особинама система и његовим кретањима.

Могу се формулисати следеће теореме:

Теорема А.4 Нека је испуњена Претпоставка А.2 Да би $\mathbf{x} = \mathbf{0}_x$ система (А.1) било **стабилно**, потребно је и довољно да постоји отворена повезана околина S нултог стања и позитивно одређена функција $v(\cdot): S \rightarrow \mathbb{R}$ на скупу S таква да је њен горњи десни Динијев извод дуж кретања система (А.1) непозитиван на скупу S , тј.

$$D^+v(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in S \quad (\text{A.7})$$

Теорема А.5 Нека је испуњена Претпоставка А.2 Да би $\mathbf{x} = \mathbf{0}_x$ система (А.1) било **асимптотски стабилно**, потребно је и довољно да постоји отворена повезана околина S нултог стања и позитивно одређена функције $v(\cdot): S \rightarrow \mathbb{R}$ и $\psi(\cdot): S \rightarrow \mathbb{R}$ на скупу S такве да десни горњи Динијев извод функције $v(\cdot)$ дуж кретања система (А.1) на скупу S задовољава:

$$D^+v(\mathbf{x}) \leq -\psi(\mathbf{x}), \forall (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_x) \in S; D^+v(\mathbf{0}_x) = 0 \quad (\text{A.8})$$

Теорема А.6 Нека је испуњена Претпоставка А.2 на $\mathbb{N} = \mathbb{R}^n$. Да би $\mathbf{x} = \mathbf{0}_x$ система (А.1) било **асимптотски стабилно у целом**, потребно је и довољно да постоји глобално позитивно одређена радијално неограничена функција $v(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и глобално позитивно одређена функција $\psi(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такве да десни горњи Динијев извод функције $v(\cdot)$ дуж кретања система (А.1) на скупу S задовољава (А.8)

Докази наведених теорема представљени су у [48], а очигледно је да су услови асимптотске стабилности строжији од оних за стабилност посматраног

система.

Сада се могу навести и дефиниције Љапуновљевих функција:

Дефиниција А.1 Функција $v(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ је Љапуновљева функција прве врсте (краће: Љапуновљева функција) за систем (А.1) ако и само ако она задовољава услове Теорема А.1 или Теорема А.4.

Дефиниција А.2 Функција $v(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ је Љапуновљева функција друге врсте (краће: Љапуновљева функција) за систем (А.1) ако и само ако она задовољава услове Теорема А.2 или Теорема А.5.

Дефиниција А.3 Функција $v(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ је Љапуновљева функција треће врсте (краће: Љапуновљева функција) за систем (А.1) ако и само ако она задовољава услове Теорема А.3 или Теорема А.6.

Уколико изабрана функција $v(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ не задовољи ни једну од наведених теорема једино што се може закључити је да она није Љапуновљева функција за систем (А.1), али се не може закључити ништа о стабилности посматраног система јер можда постоји нека друга функција $v(\cdot)$ која ће бити Љапуновљева функција за систем (А.1) и потврдити (асимптотску) стабилност посматраног система.

За практичну примену Љапуновљевог метода, потребно је:

- Проверити диференцијабилност кретања датог система (Претпоставка А.1), или непрекидност кретања (Претпоставка А.2). Ако не важи ни једна од њих тада претходно наведене теореме не могу да се примене.
- Испитати да ли је нулто стање $\mathbf{0}_x$ равнотежно. Ако није, нема смисла испитивати његову стабилност.
- Усваја се позитивно одређена функција $v(\cdot)$.
- Зависно од испуњених претпоставки, одређује се Ојлеров извод функције $v(\cdot)$ дуж кретања система (А.1)

$$\dot{v}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} v(\mathbf{x}) = [\text{grad} v(\mathbf{x})]^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \quad (\text{A.9})$$

или десни горњи Динијев извод функције $v(\cdot)$ дуж кретања система
(A.1)

$$D^+v(\mathbf{x}) = \limsup \left\{ \frac{v[\chi(\theta, \mathbf{x})] - v(\mathbf{x})}{\theta} \right\}; \theta \rightarrow 0^+ \quad (\text{A.10})$$

и испитивањем услова одговарајуће теореме доноси закључак.

У специјалном случају када је изабрана позитивно одређена функција $v(\cdot)$ уједно и Липшицова функција на посматраној околини тј. $v(\mathbf{x}) \in Lip(S)$, и када је $S \neq \emptyset$ непразан отворен скуп а $\chi(\tau, \mathbf{x}_0) \in S$ тада се десни горњи Динијев извод може једноставније одредити (што је доказао Yoshizawa [49]) помоћу следеће једначине:

$$D^+v(\mathbf{x}) = \limsup \left\{ \frac{v[x + \theta \cdot f(\mathbf{x})] - v(\mathbf{x})}{\theta} \right\}; \theta \rightarrow 0^+ \quad (\text{A.11})$$

Дефиниција А.4 Функција $v(\cdot)$ је **Липшицова функција** на скупу S , што се означава $v(\mathbf{x}) \in Lip(S)$, ако и само ако је S непразан и компактан скуп и постоји позитиван број $c = c(S, v)$ такав да важи:

$$\|v(\mathbf{x}') - v(\mathbf{x}'')\| \leq c \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|; \quad \forall \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in S \quad (\text{A.12})$$

Услов (A.12) је **Липшицов услов**, а свако $c \in \mathbb{R}_+$ које га задовољава је **Липшицова константа** за v на скупу S , који се онда назива **Липшицов скуп** за v .

У претходној дефиницији коришћена је функција норма која је дата у следећој дефиницији нормираног линеарног простора:

Дефиниција А.5 Линеарни векторски простор $L \in \mathbb{R}^n$ над пољем комплексних бројева $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ је **нормиран линеарни простор** ако и

само ако постоји функција $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, која задовољава (i)–(iv) за $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in L$ и $\forall \alpha \in F$:

$$\text{i) } \|\mathbf{x}\| \geq 0, \forall \mathbf{x} \in L$$

$$\text{ii) } \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}_x$$

$$\text{iii) } \|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\| \leq \|\mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_2\|, \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in L$$

$$\text{iv) } \|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in L, \forall \alpha \in F$$

Функција $\|\cdot\|$ је тада и само тада **норма** на L а $\|\mathbf{x}\|$ је тада и само тада **норма** од \mathbf{x} .

Претходно коришћен појам позитивно одређене функције $v(\cdot)$ дат је следећом дефиницијом:

Дефиниција А.6 Нека је skup S повезана околина нултог стања $\mathbf{x} = \mathbf{0}_x$ и $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Функција $v(\cdot) : S \rightarrow \mathbb{R}$ је:

- 1) **локално позитивно одређена** ако и само ако постоји повезана околина N нултог стања $\mathbf{x} = \mathbf{0}_x$ таква да:
 - a) $v(\mathbf{x}) \in C(N)$
 - b) $v(\mathbf{0}_x) = 0$
 - c) $v(\mathbf{x}) > 0, \forall (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_x) \in N$
- 2) **позитивно одређена на S** ако и само ако 1) важи за $N = S$
- 3) **глобално позитивно одређена** ако и само ако 1) важи за $N = \mathbb{R}^n$

Дефиниција А.7 Нека је skup S повезана околина нултог стања $\mathbf{x} = \mathbf{0}_x$ и $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Функција $v(\cdot) : S \rightarrow \mathbb{R}$ је:

- 1) **локално негативно одређена** ако и само ако је $-v(\cdot)$ локално позитивно одређена, тј. постоји повезана околина N нултог стања $\mathbf{x} = \mathbf{0}_x$ таква да:
 - a) $v(\mathbf{x}) \in C(N)$
 - b) $v(\mathbf{0}_x) = 0$
 - c) $v(\mathbf{x}) < 0, \forall (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_x) \in N$
- 2) **негативно одређена на S** ако и само ако 1) важи за $N = S$
- 3) **глобално негативно одређена** ако и само ако 1) важи за $N = \mathbb{R}^n$

A.2. Радни режими, трансформација координата, равнотежна стања

Посматра се стационаран динамички систем дат у тоталним координатама, следећом једначином:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}^*}{dt} &= f(\mathbf{X}, \mathbf{X}_u) \\ \mathbf{X}_i &= g(\mathbf{X}, \mathbf{X}_u) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

код кога функције f и g не зависе од времена (стационарност) а нелинеарне су по \mathbf{X} или \mathbf{X}_u те систем може бити **унутрашње нелинеаран** (нелинеарна функција f) или **излазно нелинеаран** (нелинеарна функција g).

Физички узроци нестационарности су све оно што доводи до промене вредности параметара и карактеристика система, као што су: старење материјала, трење, хабање, запрљаност филтра, промена масе при сагоревању ракетног мотора и сл.

Код стационарних система избор почетног тренутка нема утицај на динамичке особине система.

Са становишта задатка објекта управљања најважнији је квалитет његовог

стварног/неноминалног/поремећеног $\mathbf{X}_i(\cdot)$ одзива/излаза у односу на жељени/номинални/непоремећени $\mathbf{X}_{i\dot{z}}(\cdot) = \mathbf{X}_{iN}(\cdot)$ одзив/излаз, тј. квалитет његовог стварног у односу на жељено динамичко понашање.

Посматрано у простору стања, ова динамичка понашања могу се представити одговарајућим кретањима система: стварно/поремећено кретање $\chi(\cdot)$ и номинално/напоремећено кретање које се у случају да је посматрани систем објект управљања назива и жељено кретање $\chi_N(\cdot) = \chi_z(\cdot)$.

Дефиниција А.8 Систем се налази у **номиналном радном режиму** (на T) ако и само ако је његов стварни излаз једнак његовом номиналном излазу за све време $t \in \mathbb{R}$, ($t \in T$):

$$\mathbf{X}_i(t) = \mathbf{X}_{iN}(t); \quad \forall t \in \mathbb{R}, (\forall t \in T) \quad (\text{A.14})$$

Ако је посматрани систем објект или систем аутоматског управљања објекта, тада и само тада се његов номинални радни режим (на T) назива његов **жељени радни режим** (на T).

Услови за номинални радни режим посматраног система дати су следећом теоремом:

Теорема А.7 Да би за систем (А.13) пар $[\mathbf{X}^*(\cdot), \mathbf{X}_u^*(\cdot)]$ био номиналан у односу на $\mathbf{X}_{iN}(\cdot)$ (на T), тј. да би важило:

$$[\mathbf{X}^*(t), \mathbf{X}_u^*(t)] = [\mathbf{X}_N(t), \mathbf{X}_{uN}^*(t)]; \quad \forall t \in \mathbb{R}, (\forall t \in T) \quad (\text{A.15})$$

потребно је и довољно да он задовољава (А.16)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}^*}{dt} &= f[\mathbf{X}^*(t), \mathbf{X}_u^*(t)]; \quad \forall t \in \mathbb{R}, (\forall t \in T) \\ g[\mathbf{X}^*(t), \mathbf{X}_u^*(t)] &= \mathbf{X}_{iN}(t); \quad \forall t \in \mathbb{R}, (\forall t \in T) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

За дато $\mathbf{X}_{iN}(\cdot)$ номинални пар $[\mathbf{X}^*(\cdot), \mathbf{X}_u^*(\cdot)]$ се одређује решавањем система (А.16). При томе се може десити да:

- једначине (А.16) немају решење, што значи да систем описан са (А.13)

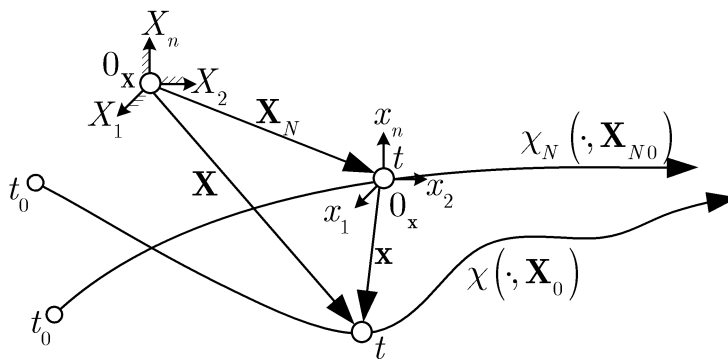
не може да оствари задато $\mathbf{X}_{iN}(\cdot)$ ни под којим условима,

- систем (А.16) има само једно решење,
- систем (А.16) има више решења. Тада се за номинални пар усваја оно решење које најбоље задовољава додатне техно–економске услове.

Љапуновљева трансформација координата представља одступање стварног и номиналног радног режима увођењем следећих одступања:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{X} - \mathbf{X}_N \\ \mathbf{x}_i &= \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{iN} \\ \mathbf{x}_u &= \mathbf{X}_u - \mathbf{X}_{uN} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Динамички ова трансформација за координатни почетак узима тренутну тачку на номиналној трајекторији, која се током времена мења те он "путује" по номиналној трајекторији, Слика А.2.



Слика А.2 – Љапуновљева трансформација координата.

Геометријски ова трансформација координата је одређена translацијом координатног система из $\mathbf{X} = \mathbf{0}_X \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}_x$, $\mathbf{X}_i = \mathbf{0}_i \rightarrow \mathbf{x}_i = \mathbf{0}_i$ и $\mathbf{X}_u = \mathbf{0}_u \rightarrow \mathbf{x}_u = \mathbf{0}_u$.

За одређивање математичког модела система по одступањима, прво се формира разлика стварног и номиналног стања и излаза система (А.13) тј.:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) - \dot{\mathbf{X}}_N(t) &= f[\mathbf{X}(t), \mathbf{X}_u(t)] - f[\mathbf{X}_N(t), \mathbf{X}_{uN}(t)] \\ \mathbf{X}_i(t) - \mathbf{X}_{iN}(t) &= g[\mathbf{X}(t), \mathbf{X}_u(t)] - g[\mathbf{X}_N(t), \mathbf{X}_{uN}(t)] \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Употребом уведених одступања (А.17) претходна једначина се трансформише

у:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= f[\mathbf{x}(t) + \mathbf{X}_N(t), \mathbf{x}_u(t) + \mathbf{X}_{uN}(t)] - f[\mathbf{X}_N(t), \mathbf{X}_{uN}(t)] \\ \mathbf{x}_i(t) &= g[\mathbf{x}(t) + \mathbf{X}_N(t), \mathbf{x}_u(t) + \mathbf{X}_{uN}(t)] - g[\mathbf{X}_N(t), \mathbf{X}_{uN}(t)]\end{aligned}\quad (\text{A.19})$$

Увођењем следећих функција:

$$\begin{aligned}h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_u, \mathbf{X}_N, \mathbf{X}_{uN}) &= f[\mathbf{x}(t) + \mathbf{X}_N(t), \mathbf{x}_u(t) + \mathbf{X}_{uN}(t)] - f[\mathbf{X}_N(t), \mathbf{X}_{uN}(t)] \\ q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_u, \mathbf{X}_N, \mathbf{X}_{uN}) &= g[\mathbf{x}(t) + \mathbf{X}_N(t), \mathbf{x}_u(t) + \mathbf{X}_{uN}(t)] - g[\mathbf{X}_N(t), \mathbf{X}_{uN}(t)]\end{aligned}\quad (\text{A.20})$$

Једначина (А.19) се трансформише у облик:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= h(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_u(t), \mathbf{X}_N(t), \mathbf{X}_{uN}(t)) \\ \mathbf{x}_i(t) &= q(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_u(t), \mathbf{X}_N(t), \mathbf{X}_{uN}(t))\end{aligned}\quad (\text{A.21})$$

На основу последње једначине очигледно је да ако су $\mathbf{X}_N(\cdot)$ или $\mathbf{X}_{uN}(\cdot)$ временски променљиви, математички модел система по одступањима је нестационаран иако је математички модел у тоталним координатама (А.13) стационаран! Овај феномен не може да се јави код линеарних система, јер ако су функције f, g линеарне, онда ће и математички модел система по одступањима бити линеарна, без обзира да ли су $\mathbf{X}_N(\cdot)$ или $\mathbf{X}_{uN}(\cdot)$ временски променљиви или не. Ово представља математичко порекло нестационарности код нелинеарних система па се из тог разлога уводи следећа претпоставка:

Претпоставка А.3 Жељени излаз $\mathbf{X}_{i\check{z}}(\cdot)$ и номинални пар $[\mathbf{X}_N(\cdot), \mathbf{X}_{uN}(\cdot)]$ су временски непроменљиви:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{i\check{z}}(t) &= \mathbf{X}_{i\check{z}} \\ [\mathbf{X}_N(t), \mathbf{X}_{uN}(t)] &= [\mathbf{X}_N, \mathbf{X}_{uN}]\end{aligned}\quad (\text{A.22})$$

У том случају једначина (А.21) може се написати у следећем облику:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_u) \\ \mathbf{x}_i &= q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_u)\end{aligned}\quad (\text{A.23})$$

На основу уведене Претпоставка А.3 једначина (А.20) за нулто одступање може се написати као:

$$\begin{aligned}h(\mathbf{0}_x, \mathbf{0}_u) &= f[\mathbf{0}_x + \mathbf{X}_N(t), \mathbf{0}_u + \mathbf{X}_{uN}(t)] - f[\mathbf{X}_N(t), \mathbf{X}_{uN}(t)] = \mathbf{0}_x \\ q(\mathbf{0}_x, \mathbf{0}_u) &= g[\mathbf{0}_x + \mathbf{X}_N(t), \mathbf{0}_u + \mathbf{X}_{uN}(t)] - g[\mathbf{X}_N(t), \mathbf{X}_{uN}(t)] = \mathbf{0}_i\end{aligned}\quad (\text{A.24})$$

што значи да нулто одступање стања $\mathbf{0}_x$ представља жељено кретање, а нулто одступање излаза $\mathbf{0}_i$ представља жељени излаз. Једначина $h(\mathbf{0}_x, \mathbf{0}_u) = \mathbf{0}_x$ представља услов да нулто одступање стања $\mathbf{x} = \mathbf{0}_x$ буде равнотежно стање система (А.23).

Према дејству улаза $\mathbf{x}_u(\cdot)$ на систем (А.23) он може да буде у следећем радном режиму:

- **слободном радном режиму** на T ако и само ако је:

$$\mathbf{x}_u(t) = \mathbf{0}_u, \forall t \in T. \quad (\text{A.25})$$

- **принудном радном режиму** на T ако и само ако постоји $t \in T$ такво да је:

$$\mathbf{x}_u(t) \neq \mathbf{0}_u. \quad (\text{A.26})$$

Према промени функције прелаза стања $\chi(\cdot)$ система (А.23) он може да буде у следећем радном режиму:

- **равнотежном радном режиму** на T ако и само ако за сва његова кретања у слободном радном режиму важи:

$$\chi(t; \mathbf{x}; \mathbf{0}_u) = \mathbf{x}, \quad \forall t \in T. \quad (\text{A.27})$$

Услови за равнотежно стање дати су следећом теоремом:

Теорема А.8 Да би стање $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ било **равнотежно стање** динамичког система (А.23) (на T), потребно је и довољно да је он има јединствено кретање $\chi(t; \mathbf{x}^*; \mathbf{0}_u)$ кроз \mathbf{x}^* у слободном радном режиму (на T), следствено, или, еквивалентно, да је:

$$h(\mathbf{x}^*, \mathbf{0}_u) = \mathbf{0}_x \quad (\text{A.28})$$

Прилог Б – MAPLE 17 и MATLAB 2014 програми

MAPLE програми за одређивање појачања оптималних закона вођења

Програм Б.1. Примена линеарно–квadratних диференцијалних игара у синтези закона вођења – Идеална ракета

```

restart;
LambdaODE := { diff(l1(t),t) = 0, diff(l2(t),t) = -l1(t), l1(tf) =
    b*x1f, l2(tf) = c*x2f };
ResenjeLambda := simplify( dsolve(LambdaODE ) );
assign(ResenjeLambda);
IksODE := { diff(x1(t),t) = x2(t), diff(x2(t),t) = -l2(t) +
    l2(t)/G^2, x1(t0)=x10, x2(t0)=x20};
ResenjeIks := simplify( dsolve(IksODE) );
assign(ResenjeIks);
y1:=subs(t=tf,x1(t));
y2:=subs(t=tf,x2(t));
sys5:={x1f=y1, x2f=y2};
ResenjeSys5 := solve( sys5, {x1f,x2f} );
assign(ResenjeSys5);
u:=-eval(l2(t));
u0:=subs(t=t0,u);
u0Simp:=simplify(u0);

```

Програм Б.2. Примена линеарно–квadratних диференцијалних игара у синтези закона вођења – Неидеализована ракета са аутопилотом без ограничења завршне нормалне брзине

```

restart;
LambdaODE := { diff(l1(t),t) = 0, diff(l2(t),t) = -l1(t), l1(tf) =
    b*x1f, l2(tf) = 0 };
ResenjeLambda := simplify( dsolve(LambdaODE ) );
assign(ResenjeLambda);
IksODE := { diff(x1(t),t) = x2(t), diff(x2(t),t) = -l2(t) +
    l2(t)/G^2, x1(t0)=x10, x2(t0)=x20};
ResenjeIks := simplify( dsolve(IksODE) );
assign(ResenjeIks);
y1:=subs(t=tf,x1(t));
y2:=subs(t=tf,x2(t));
sys5:={x1f=y1, x2f=y2};
ResenjeSys5 := solve( sys5, {x1f,x2f} );
assign(ResenjeSys5);
u:=-eval(l2(t));
u0:=subs(t=t0,u);
u0Simp:=simplify(u0);

```


MATLAB програми за одређивање појачања аутопилота и параметара ускладника за вођење методом покривања циља

Програм Б.3. Синтеза појачања аутопилота

```

clear all;
%konstante
R2D = 180/pi;
D2R = pi /180 ;
%dvostepena raketa
d = 1.00; %kalibar - referentna velicina
Sref = 0.25 * pi * (d^2);
%%Zadati parametri autopilota propinjanja
taue = 0.1; wc = 50; ze = 0.5;
%Ulazni fajl: Vreme Masa Brzina Jy CNA CMA CMQ CND CMD
Qdin %(kolone razdvojene zarezima u ulaznom fajlu)
podaci = csvread('IzlazSintezaAutopilota.dat',1,0); %ucitavamo fajl
Vreme = podaci(:,1); %Prvo vektor vremena
%Inercione karakterisike
m = podaci(:,2); %Masa
V = podaci(:,3);
Jy = podaci(:,4);
Qdin = podaci(:,10);
%Aerodinamicki derivativi (CZa = - CNA, CZeta = - CND)
%Pocetna faza,
CNA = podaci(:,5);
Cma = podaci(:,6);
Cmq = podaci(:,7);
CND = podaci(:,8);
Cmeta = podaci(:,9); %on ne treba da se invertuje
CZa = - CNA; %smer Z ose je suprotan od konvencije smeru norm. sile
CZeta = -CND;
%Aerodinamicki koeficijenti
zw = (Qdin*Sref).*(CZa./(m.*V));
mw = (Qdin*Sref).*(d*Cma./(Jy.*V));
mq = (Qdin*Sref).*(d^2*Cmq./(Jy.*V));
zeta = (Qdin*Sref).*(CZeta./m);
meta = (Qdin*Sref).*(d*Cmeta./Jy);
%Koef. prenosnih funkcija
Kq = (zeta.*mw-zw.*meta)./(mq.*zw-mw.*V);
Tq = meta./(zeta.*mw-zw.*meta);
wn2 = -(mw.*V-zw.*mq);
wn = sqrt(wn2);
zn = -(mq+zw)./(2*wn);
Tn = 1./wn;
Tg2 = -zeta./(V.*(zeta.*mw-zw.*meta));
zgTg = 0.5*mq.*zeta./(V.*(zeta.*mw-zw.*meta));
%Odredjivanje pojacanja
Te = 2*ze*taue./((wc+2*zn./Tn)*taue-1);
we = 1./Te;
T0 = Te*sqrt(wc*taue);
z0T0 = ze*Te+0.5*taue*(1-(Te./Tn).^2);
K0 = (Tn./T0).^2*wc;
Ki = (T0.^2-Tg2-Tq.*(2*z0T0-2*zgTg))./((2*z0T0-Tq).*(T0.^2-Tg2)-
T0.^2.*(2*z0T0-2*zgTg));
Kac = (T0.^2-Tq./Ki)./(V.*(Tg2-T0.^2));
Kr = -sign(Kq).*K0./(Ki.*Kq.*(1+Kac.*V));
figure; plot(Vreme, Ki); grid;

```

```
figure; plot(Vreme, Kac); grid;
figure; plot(Vreme, Kr); grid;
```

Програм Б.4. Синтеза параметара ускладника командног вођења

```
% Komandno vodjenje - primer sinteze PID uskladnika
clear all;
% Zadati parametri
fizad = 38; % zeljena vrednost preteka faze
alfa = 0.1; % parametar alfa (0.1 = 1 dekada)
% autopilot
wnap = 30; % sopstvena ucestanost
znap = 0.65; % prigusenje
Kap = 1; % pojačanje
Wap = tf([Kap],[1/wnap^2 2*znap/wnap 1]); %Pren f. autopilota
rakete
Wke = tf([1],[1 0 0]); % kinematski element
Wol = Wap*Wke; % Prenosna funkcija otvorenog kola
figure; margin(Wol); grid on;
% Odredjivanje koeficijenta uskladnika
FaktorPolovinaAlfa = sqrt(1/alfa);
wnom=1; %ispitamo uskladnik na wnom=1 rad/s
Wpd = tf([(1/wnom)*FaktorPolovinaAlfa
1],[(1/wnom)/FaktorPolovinaAlfa 1]); % PD uskladnik sa max
popravkom faze na 1 rad/s
figure; bode(Wpd); grid on;
[mag,fimaxpd] = bode(Wpd,1); % interesuje nas maksimalna
popravka faze pd uskladnika
fico = -180 - fimaxpd + fizad; % Fazni ugao na kome ce biti wc
% ucestanost na kojoj ce fazna FK otvorenog kola biti 'fico' tj.
gde moze da se postigne 'fizad'
w = logspace (-2,3,200);
[mag,fiol] = bode(Wol,w);
for i = 1:200
fiolv(i) = fiol(1,1,i);
end
wco = interp1(fiolv,w,fico); % pres.uc. pojačanja gde moze da se
postigne 'fizad'
Td=(1/wco)*FaktorPolovinaAlfa
Wc=tf([Td 1],[Td*alfa 1]); % Korigovani PD uskladnik
%figure; bode(Wc); grid on;
Wolc=Wol*Wc; % prenosna F-ja otvorenog kola sa PD uskladnikom
figure; margin(Wolc); grid on;
% Odredi Kp tako da wco bude presecna ucestanost pojačanja
[mag,ph]=bode(Wolc,wco);
Kp=1/mag
Wolc2 = Wolc * Kp; %PD otvorenoKolo
figure; margin(Wolc2); grid on;
Wcl = feedback(Wolc2,1);
%figure; bode(Wcl); grid on;
figure; step(Wcl); grid on;%
```

Прилог Ц – Основне ознаке и скраћенице

Основне ознаке

A	= матрица динамике система (пресликава утицај величина стања на њихове изводе)
a	= вектор релативног убрзања циља у односу на ракету, m/s^2
a_M, a_T	= вектори убрзања ракете и циља у инерционом координатном систему, m/s^2
a_{Mn}, a_{Tn}	= нормална убрзања ракете и циља у односу на правац одговарајуће брзине, m/s^2
a_{Mt}, a_{Tt}	= тангентна убрзања ракете и циља у правцу одговарајуће брзине, m/s^2
a_{MG}	= захтевано нормално убрзање ракете одређено законом вођења, m/s^2
a_{MG}^{SAT}	= ограничење интензитета убрзања ракете нелинеарношћу типа засићења, m/s^2
a_{MG}^{max}	= максимално остварива апсолутна вредност нормалног убрзања, m/s^2
a_{Teq}^B	= еквивалентни маневар циља у координатном систему везаном за тело, m/s^2
a_{Teq}^I	= еквивалентни маневар циља у инерционом координатном систему, m/s^2
a_{Teq}	= еквивалентни маневар циља, m/s^2
a	= коефицијент нагиба површине клизања
a₁, a₂, a₃, b₁	= временски променљиви коефицијенти
B	= матрица управљања (пресликава утицај управљања на изводе величина стања)
b, c	= тежински коефицијенти промашаја и завршне релативне нормалне брзине

C	= матрица која пресликава утицај вредности величина стања на вредности излаза
c	= произвољан вектор различит од нуле
c_0, c_1, c_2	= позитивни коефицијенти
c_3	= позитивни коефицијент вођења нелинеарне пропорционалне навигације НПН
D	= матрица поремећаја (пресликава утицај поремећаја на изводе величина стања)
D_1, D_2	= матрица непознатог и матрица познатог дела поремећаја (пресликавају њихов утицај на изводе величина стања)
d	= вектор познатог дела поремећаја
F_J	= сила појединачног ИРМ, N
$f_c(\cdot)$	= функција интелигентног маневра циља
f_{Mn}^B	= компонента захтеваног нормалног убрзања услед управљања, m/s^2
f_{Mn}, f_{Mt}	= нормално и тангентно убрзање ракете односу на правац брзине услед дејства негравитационих сила, m/s^2
G_A	= преносна функција аутопилота ракете
G_H	= преносна функција пратеће главе за самонавођење
g	= гравитационо убрзање, m/s^2
g_i	= појачања оптималних закона вођења
$g(\cdot)$	= нелинеарна функција уз управљање
$\hat{g}(\cdot)$	= нелинеарне функције уз управљање у номиналном режиму
g_0	= позитивна вредност мања минимума нелинеарне функције уз управљање
H	= матрица прелаза граничног дво–тачкастог проблема

h	= релативни однос времена до судара и временске константе аутопилота
$h(\cdot)$	= нелинеарна функција
$\hat{h}(\cdot)$	= нелинеарна функција у номиналном режиму
I_J	= импулс појединачног ИРМ, N–s
\mathbf{i}, \mathbf{j}	= јединични вектори инерцијалног координатног система
$\mathbf{i}_\lambda, \mathbf{j}_\lambda$	= јединични вектори поларног к.с. који је ротиран за угао λ у односу на инерцијални к.с.
J	= индекс перформансе оптималног вођења
K	= укупни фактор појачања пропорционалне навигације, m/s
K_A, K_E, K_H	= фактори појачања: аутопилота, електронике вођења, главе за самонавођење
K_{OK}	= фактор појачања отвореног кола
k	= константа пропорционалне навигације
$k = 0, 1, 2, \dots$	= ред природног праћења (k –тог реда)
k_4	= позитивна константа
k_T	= појачање проширене пропорционалне навигације
M	= ограничење динамике промене релативне уздужне брзине
m	= маса ракете, kg
N	= кинематско појачање пропорционалне навигације
N'	= еквивалентно појачање оптималног вођења
n_J	= број ИРМ
n_U	= димензија вектора управљања
p	= уздужна угаона брзина ракете, rad/s

\mathbf{Q}, \mathbf{Q}_f	= матрице важности стања у произвољном и у тренутку судара
\mathbf{R}	= тежинска управљачка матрица
\mathbb{R}	= скуп реалних бројева
\mathbf{r}	= вектор положаја циља у односу на ракету, m
$\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_M$	= вектори положаја циља и ракете у инерцијалном к.с., m
r	= релативно растојање циља у односу на ракету или дужина номиналне линије визирања (линеаризован кинематски модел), m
s	= комплексни оператор или једначина површине клизања
T_M	= временска константа аутопилота ракете, s
T_S	= време семпловања/одабирања, s
t	= време, s
t^*	= време када је активиран последњи ИРМ, s
Δt	= управљањем одређени период између два ИРМ, s
Δt_{\min}	= минимални период између два ИРМ, s
t_{cor0}	= време почетка фазе самонавођења, s
t_f	= укупно време лета, s
t_{go}	= време преостало до сусрета/судара ракете и циља, s
u	= управљачко убрзање нормално на номинални правац линије визирања, m/s ²
\hat{u}_{eq}	= еквивалентно управљање – континуални део управљања методом клизања одређено за номинални радни режим
\mathbf{V}	= вектор релативне брзине циља у односу на ракету, m/s
V_r, V_λ	= пројекције релативне брзине на осе поларног координатног система
V, V_1	= Љапуновљева функција за посматрани систем

$\mathbf{V}_M, \mathbf{V}_T$	= вектори брзина ракете и циља у инерционом к.с., m/s
V_C	= релативна брзина приближавања ракете и циља, m/s
v	= дисконтинуални део управљања методом клизања
w	= поремећајно убрзање нормално на номинални правац линије визирања, m/s ²
\mathbf{x}, \mathbf{X}	= вектор стања (по одступањима и у тоталним координатама)
x_1	= величина стања, релативно нормално одступање у односу на правац номиналне линије визирања, m
x_2	= величина стања, релативна нормална брзина у односу на правац номиналне линије визирања, m/s
x_3	= величина стања, остварено нормално убрзање ракете, m/s ²
$x_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0$	= инерциони координатни систем (дуж номиналне линије визирања)
$x\tilde{y}\tilde{z}$	= аеро–балистички (полувезани тј. неротирајући) координатни систем
xyz	= везани координатни систем (везан за тело ракете)
y	= релативно нормално одступања положаја циља у односу на положај ракете нормално на номинални правац линије визирања, m
\dot{y}	= релативна нормална брзина циља у односу на брзину ракете нормално на номинални правац линије визирања, m
y_T, y_M	= нормална одступања положаја циља и ракете од номиналног правца линије визирања, m
Δy	= релативно нормално одступање, m
Y_J, Z_J	= компоненте бочне силе дуж оса везаног координатног система, N
\mathbf{z}	= вектор стања
z_1	= величина стања, промена угла линије визирања, rad
z_2	= величина стања, угаона брзина линије визирања, rad/s

α_1	= параметар стратегије вођења методом клизања
$\beta(\cdot)$	= променљиво појачање управљања методом клизања
β_{\min}	= минимална вредност појачања управљања методом клизања
$\beta_0, \beta_1, \beta_2$	= позитивне вредности
γ	= параметар маневарске способности ракете и циља
γ_M, γ_T	= углови усмерења брзина ракете и циља у односу на референтну инерциону осу, rad
$\dot{\gamma}_f, \dot{\chi}_f$	= угаона брзина тангенти на путању услед деловања негравитационих сила у вертикалној и хоризонталној равни, rad/s
$\dot{\gamma}_C$	= укупна команда у везаном координатном систему, rad/s
$\delta(\cdot)$	= поремећајна функција
δ_h, δ_g	= одступања стварних и номиналних вредности одговарајућих функција
$\bar{\delta}_h, \bar{\delta}_g$	= ограничења апсолутних одступања одговарајућих функција
ε	= мала позитивна вредност која одређује зону линеарности при апроксимацији функције знака помоћу функције засићења
η	= мала позитивна скаларна вредност
θ_M, θ_T	= углови усмерења брзина ракете и циља у односу на линију визирања, rad
$\Delta\theta_{M0}$	= грешка угла претицања, rad
λ, λ_i	= вектор адјунговане променљиве и његови елементи
$\dot{\lambda}^B$	= угаона брзина линије визирања у везаном координатном систему, rad
λ	= угао линије визирања, rad

$\dot{\lambda} \equiv \dot{\lambda}_y$	= угаона брзина линије визирања у вертикалној равни, rad/s
$\dot{\lambda}_z$	= угаона брзина линије визирања у нагнутој равни, rad/s
$\rho(\cdot)$	= функција која ограничава интензитет управљања
ρ_{\max}	= максимум функција која ограничава интензитет управљања
τ	= време до судара (адјунговано време), s
τ_J	= трајање појединачног импулса бочног ИРМ, s
ϕ	= угао ваљања (ротације око уздужне осе) ракете, rad
ϕ_C	= угао укупне команде у везаном координатном систему, rad
ϕ_{ij}	= елементи матрице прелаза
ϕ_i	= угловни положај <i>i</i> -тог ИРМ, rad
ϕ_{THRES}	= праг/граница за активирање бочног ИРМ, rad
Ω	= домен над којим се врши синтеза закона клизања
Ω_ϵ	= домен привлачења методом клизања
\cdot_1, \cdot_2	= пројекције векторских величина на осе референтног инерцијалног к.с.
\cdot_r, \cdot_λ	= пројекције векторских величина на осе поларног к.с. везаног за ракету
$\cdot_m, \cdot_{\lambda n}$	= пројекције векторских величина дуж и нормално на правац номиналне линије визирања
\cdot_0	= вредност посматране величине у почетном временском тренутку
\cdot^*	= вредност посматране величине за равнотежно стање

Скраћенице

6–ДОФ	6 степени слободе кретања
ВЛВЦ	Вођење по линији визирања циља
ВМЕ	Вођење са минималним утрошком енергије
ВМЕДИ	Вођење са минималним утрошком енергије применом диференцијалних игара
ВМК	Вођење методом клизања
ВМКСФ	Вођење методом клизања са "сигмоидном" функцијом
ИРМ	Импулсни ракетни мотор
ЛВЦ	Линија визирања циља
НПН	Нелинеарна пропорционална навигација
ОРВ	Оптimalно рандеву вођење
ОРВДИ	Оптimalно рандеву вођење применом диференцијалних игара
ПН	Пропорционална навигација
ПНПН	Проширена нелинеарна пропорционална навигација
ПОРВ	Проширено оптimalно рандеву вођење
ППОРВ	Побољшано проширено оптimalно рандеву вођење
ППН	Проширена пропорционална навигација
ПВМК	Побољшано вођење методом клизања
ТПН	Тачна пропорционална навигација
ТПНДИ	Тачна пропорционална навигација применом диференцијалних игара

Биографија

Име и презиме: Милош Павић, дипл.инж.маш.

Датум рођења: 15.06.1972.

Место рођења: Београд, Србија.

Породично стање: Ожењен, троје деце.

Школовање:

1979.–1987. Основна школа у Сопоту.

1987.–1991. Електро техничка школа у Младеновцу.

1991.–1997. Студије на Машинском факултету у Београду, Одсек за Аутоматско управљање.

27.мај.1997. Дипломски рад са темом "Аналогно–дигитални конвертор са сукцесивном апроксимацијом" на Машинском факултету у Београду, катедра за аутоматско управљање.

8.мај.2007. Магистарски рад са темом "Оптимизација трајекторије ласерски вођене бомбе применом модификованог закона потере" на Машинском факултету у Београду, катедра за војно машинство.

Радни однос:

2001.– Војнотехнички институт, Београд, Сектор за ракетно наоружање.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Милош Павић

број индекса _____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Нови алгоритми вођења ракете земља-ваздух средњег домета

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 12.3.2015. год.

Милош Павић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Милош Павић

Број индекса _____

Студијски програм _____

Наслов рада Нови алгоритми вођења ракете земља-ваздух средњег димензиона

Ментор проф. др Слободан Јарамац

Потписани/а Милош Павић


Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

у Београду, 12.3.2015. године



Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Нови алгоритми вођења ракете земља-ваздух средњег домета.

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 12.3.2015. године



1. Ауторство - Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.