- УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ -
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

МИЉАН В. КНЕЖЕВИЋ

ХАРМОНИЈСКА И КВАЗИКОНФОРМНА ПРЕСЛИКАВАЊА, КВАЗИ-ИЗОМЕТРИЈЕ И КРИВИНА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

БЕОГРАД - ОКТОБАР 2014.

- UNIVERSITY OF BELGRADE -
FACULTY OF MATHEMATICS

MILJAN V. KNEŽEVIĆ

HARMONIC AND QUASICONFORMAL MAPPINGS, QUASI-ISOMETRIES AND THE CURVATURE

DOCTORAL DISSERTATION

BELGRADE - OCTOBER 2014.

МЕНТОР:

др Миодраг Матељевић, редовни професор
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ, МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

др Миодраг Матељевић, редовни професор
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ, МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

др Мирољуб Јевтић, редовни професор
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ, МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

др Милош Арсеновић, редовни професор
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ, МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

др Божидар Јовановић, научни саветник
МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ САНУ

Датум одбране:

Мојој породици и пријатељима

Садржај

Резиме

У овој тези се разматрају различите особине обичних хармонијских пресликавања, квазиконформних пресликавања и хармонијских пресликавања у односу на задату конформну метрику у слици. Добијени су одговори на многа питања која се односе на одређивање оних особина тих класа функција, које су од есенцијалног значаја за валидност резултата попут оних који уопштавају чувене неједнакости Шварц-Пиковог типа. Предност је дата геометријском приступу, анализирањем особина Гаусове кривине конформних метрика са којима оперишемо.

Кључне речи: Квазиконформно пресликавање, Хармонијско пресликавање, Риманова површ, Универзално наткривање, Конформна метрика, Гаусова кривина, Густина хиперболичке метрике, Хиперболичка дужина, Хиперболичко растојање, Хиперболички извод, Квадратни диференцијал, Квази-изометрија, Липшицово и ко-Липшицово пресликавање.

Научна област: Математика

Ужа научна област: Комплексна анализа

УДК број: [517.545+517.548+517.57](043.3)

Abstract (English)

This thesis considers various properties of Euclidean harmonic mappings, quasiconformal mappings and generalized harmonic mappings, which are harmonic with respect to the conformal metric on the image surface. In particular, we obtained the answers to many questions concerning these classes of functions and that are related to the determination of different properties that are of essential importance for validity of the results such as those that generalize famous inequalities of the Schwarz-Pick type. The approach used was geometrical in nature, via analyzing the properties of the Gaussian curvature of the conformal metrics we are dealing with.

Key words: Quasiconformal mapping, Harmonic mapping, Riemann surface, Universal covering, Conformal metric, Gaussian curvature, Hyperbolic density, Hyperbolic length, Hyperbolic distance, Hyperbolic derivative, Quadratic differential, Quasiisometry, Lipschitz i co-Lipschitz mapping.

Scientific field: Mathematics

Scientific subfield: Complex analysis

UDK number: [517.545+517.548+517.57](043.3)

Захвалност

Упућујем неизмерну захвалност свима онима који су својим чињењем, искреним саветима и топлином обасјали светлошћу стазу по којој сам све ове године ходао. Тај осећај сигурности и подршке ми је дао крила да полетим и досегнем до оног места где човек и нечовек нису браћа. Сада гледам изблиза своју звезду водиљу, чекам тај тренутак када ћу је и руком дотаћи, те усмерити њену вечну светлост ка другим људима.

Искористио бих прилику да изразим велику захвалност своме ментору, дописном члану САНУ и декану Математичког факултета, професору Миодрагу Матељевићу, који је својим присуством и залагањем првенствено утицао на формирање мог математичког погледа и укуса. Професор Матељевић ми је, дајући себе, пренео неопходну љубав и помогао да усмерим своје мисли према важним областима у математици и науци уопште. Посебно сам му захвалан на поверењу које ми је указао током свих ових година и што ми је омогућио да као предавач активно учествујем у раду београдског Семинара за комплексну анализу, на коме сам провео најлепше тренутке у досадашњој каријери.

Велику захвалност дугујем и професору Мирославу Павловићу, који је увек несебично делио своје математичко знање и искуство са мном, бодрио ме и утицао да проширим своје видике и постанем комплетнији математичар. Веома сам захвалан и осталим члановима комисије, мојим професорима Мирољубу Јевтићу и Милошу Арсеновићу, као и професорима Давиду Калају и Божидару Јовановићу, који су брижљиво прегледали рукопис, дали велики број корисних примедби и сугестија и тиме допринели да рад поприми садашњи облик. Њихови јасни савети су недвосмислено утицали да се овај велики посао заокружи и приведе крају.

На крају, захваљујем се колегама Мареку Светлику, Јелени Катић, Зорици Станимировић и Зорану Ракићу на подршци и помоћи коју су ми пружили приликом израде ове дисертације, као и свим мојим драгим пријатељима и члановима моје породице, којима је овај рад посвећен.

мр Миљан Кнежевић

Увод

У класичној теорији функција комплексне променљиве одувек су многи проблеми, чијим решавањем би се описала поједина геометријска својства аналитичких функција, преокупирали пажњу великог броја истакнутих математичара. Међутим, веома мало особина те класе функција, чак и ако се модификују, се могу директно пренети на неке друге веома важне класе пресликавања, као што су хармонијска, односно квазиконформна пресликавања.

Предмет ове докторске дисертације је проучавање различитих особина обичних хармонијских пресликавања, квазиконформних и хармонијских пресликавања у односу на задату конформну метрику у слици, док је главни циљ издвајање оних особина тих класа функција које су од есенцијалног значаја за валидност неких важних резултата, попут оних који уопштавају чувене теореме Шварц-Пиковог типа. Потенцирано је на томе да се уведу нове методе приликом истраживања, што је довело до тога да је акценат стављен на геометријски приступ анализирањем различитих особина Гаусове кривине конформних метрика које су разматране.

Теза се састоји из пет поглавља, са списком литературе од 60 библиографских јединица. У првом делу је изложен преглед основних појмова и резултата из теорије квазиконформних пресликавања. Уведен је неопходни аналитички апарат, који ће касније бити од велике користи. У потпуности је изложен познати Гречов проблем, а затим су описана сва друга важна својства тих пресликавања која их чине природним уопштењем конформних.

У другом делу су пажљиво обрађене теме из теорије хармонијских функција. Доказано је неколико помоћних тврђења, а затим су показане теорема Левија, одговарајућа верзија Шварцове леме за хармонијска пресликавања, као и неједнакост Хајнца са свим њеним последицама.

Трећи део садржи многе појединости које се односе на појам Риманове површи и на конформне метрике на истој. Показано је неколико важних резултата који се тичу теорије уопштених хармонијских пресликавања, уопштених у смислу присуства конформне метрике у слици. Дат је и аналогон чувене Риманове теореме, тј. теорема униформизације, која нам обезбеђује да извршимо класификацију Риманових површи у односу на универзалну наткривајућу површ. Затим је доказана и могућност увођења (видети теорему 3.4.1) хиперболичке метрике на површима хиперболичког типа, тј. онима које се наткривају јединичним диском $\mathbb{D}$. Доказана је и Бохнерова формула, тј. формула (3.5.6), уз помоћ које је у наредној глави представљен нови приступ и метод у доказу Ванове теореме (видети теорему 4.4.4, као и [58]).

У четвртом поглављу представљен је кратак преглед геометријске теорије функција као и разне верзије неједнакости Шварц-Пиковог типа (Теорема 4.2.4), специјално, Алфорс-Шварцова лема (видети лему 4.3.1). Дате су оцене за хиперболички извод пресликавања, под одређеним условима, као и многи резултати који се односе на упоређивање метрика (Теорема 4.3.2), али и њихове последице. Доказана је на потпуно други начин Ванова теорема, која је многим математичарима послужила као инспирација за даље истраживање у овој области. Штавише, по први пут су одређене константе билипшицовости хиперболичког хармонијског и квазиконформног дифеоморфизма јединичног диска на себе, у односу на хиперболичку метрику.

Теорема 0.0.1. (**Ван** [**58**]) *Сваки хармонијски, у односу на хиперболичку метрику, k-квазиконформни дифеоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$ на себе је квазиизометрија тог диска у односу на хиперболичку метрику. Осим тога, пресликавање f је уједно и*

$$(1-k, \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\,)$$

би-Липшицово у односу на ту метрику.

Такође, представљено је неколико занимљивих резултата који описују понашање реалних хармонијских пресликавања јединичног диска $\mathbb{D}$ у интервал $(-1, 1)$, као и неколико последица истих.

На крају, у петом делу су посматрани еуклидски хармонијски дифеоморфизми разних домена, који су још и квазиконформна пресликавања, и добијени су многи значајни резултати који унапређују ову теорију. Многи од тих резултата су ауторски (Теорема 5.1.10, Теорема 5.4.3, Последица 5.4.4, Последица 5.4.5, Теорема 5.4.6), док је неколико њих добијено у сарадњи са ментором (Теорема 5.1.2, Теорема 5.1.4, Теорема 5.3.4, Теорема 5.3.5). Такође, дате су смернице које воде ка даљим истраживањима у области хармонијских и квазиконформних пресликавања.

Иначе, прву некомплетну карактеризацију хармонијског квазиконформног дифеоморфизма f јединичног диска $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на себе у свом чланку [39] дао је О. Мартио. Он је, уз помоћ Хајнцове неједнакости (Теорема 2.4.1), тј. неједнакости

$$|f_z(z)|^2 + |f_{\bar{z}}(z)|^2 \geqslant \frac{1}{\pi^2},\ z \in \mathbb{D},$$

приметио да је сваки хармонијски квазиконформни дифеоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$ на себе пресликавање које је ко-Липшицово. Међутим, у раду из 2002. године М. Павловић (видети [51]), користећи Моријеву неједнакост за квазиконформна пресликавања, је у потпуности окарактерисао поменуте дифеоморфизме у терминима граничне функције, јер се свако квазиконформно пресликавање јединичног диска на себе може проширити до хомеоморфизма одговарајућих затворења. Прецизније, показао је да су за произвољан хармонијски дифеоморфизам f јединичног диска на себе следећа тврђења еквивалентна: (а) f је квазиконформно, (б) f је би-Липшицово у односу на еуклидску метрику, (ц) гранична функција је такође би-Липшицово пресликавање и Хилбертова трансформација њеног извода припада простору $L^\infty(\mathbb{R})$. Са друге стране, у заједничком раду аутора ове тезе са ментором из 2007. године (видети [34]), показано је, користећи потпуно нови приступ, да је свако једно такво пресликавање уједно и квази-изометрија у односу на хиперболичку метрику. Штавише, добијене су конкретне константе билипшицовости.

Теорема: (видети [**34**]) *Нека је f пресликавање које је k-квазиконформни хармонијски дифеоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$ на себе. Тада је пресликавање f квази-изометрија јединичног диска у односу на хиперболичку метрику. Специјално, пресликавање f је (K^{-1}, K) би-Липшицово у односу на ту метрику, где је $K = \dfrac{1+k}{1-k}$.*

У истом раду дато је неколико тврђења која су генерализација претходног и тичу се уопштених хармонијских пресликавања, са кривином конформне метрике у слици не већом од унапред задатог негативног броја, која у овој тези нећемо наводити.

Мотивисан питањима са Семинара, аутор тезе, као последицу претходног резултата (видети теорему 5.1.10), уз додатни услов да поменуто пресликавање f фиксира тачку нула, добија оцену модула таквог једног пресликавања, а затим и конкретне константе еуклидске билипшицовости пресликавања f у тачки $z = 0$, тј. показано је да важи

$$\frac{1}{K}|z| \leqslant |f(z)| \leqslant K|z|,$$

кад год је $z \in \mathbb{D}$. Иначе, од раније је било познато да ако је $m(K)$ најбоља могућа константа за коју важи $m(K)|z| \leqslant |f(z)|$, за свако $z \in \mathbb{D}$, да је тада $\lim\limits_{K \to 1_+} m(K) = 1$, што је технички било захтевно (погледати чланак [49]), док је сада очигледно да важи исто, јер $\dfrac{1}{K} \leqslant m(K) \leqslant 1$. Како је композиција хармонијског и аналитичког пресликавања хармонијско, испоставило се да се сви претходни резултати могу генерализовати уколико се домен замени произвољним Жордановим доменом са $C^{1,\alpha}$ границом. Међутим, „пост-компоновање” хармонијског пресликавања аналитичким губи својство хармоничности, па су очекиване неке друге технике које ће довести до сличних тврђења у случају произвољног кодомена комплексне равни.

У раду из 2005. године, М. Павловић и Д. Калај су описали хармонијске квазиконформне дифеоморфизме горње полуравни $\mathbb{H}$ на себе. Показали су да ако је ψ хомеоморфизам реалне осе на себе, који чува оријентацију, да се тада исти може продужити до хармонијског квазиконформног дифеоморфизма горње полуравни на себе ако и само ако је пресликавање ψ би-Липшицово и ако Хилбертова трансформација његовог извода припада простору $L^{\infty}(\mathbb{R})$. Сличну такву карактеризацију, у заједничком раду, добијају и М. Матељевић, В. Божин и аутор тезе (видети [40]). Међутим, пре тога, М. Матељевић и аутор добијају и конкретне константе билипшицовости, како у еуклидском, тако и у хиперболичком случају. Штавише, показано је да је сваки k-квазиконформни хармонијски дифеоморфизам горње полуравни на себе (K^{-1},K) квази-изометрија горње полуравни у односу на хиперболичку, али и у односу на еуклидску метрику, као и да се добијене неједнакости достижу.

Теорема: (видети **[34]**) *Претпоставимо да пресликавање f задовољава горе поменуте услове. Тада је исто (K^{-1},K) квази-изометрија у односу на еуклидску метрику, а самим тим и (K^{-1},K) би-Липшицово пресликавање, тј. важи*

$$\frac{1}{K}|z_1-z_2| \leqslant |f(z_1)-f(z_2)| \leqslant K|z_1-z_2|,$$

за свако z_1, $z_2 \in \mathbb{H}$, где је $K=\dfrac{1+k}{1-k}$. При томе се обе неједнакости постижу.

Касније је Д. Калај уопштио претходне резултате на случај квазиконформног хармонијског дифеоморфизма јединичног диска на произвољну конвексну област са глатком $C^{1,\alpha}$ границом и добио је да је свако такво пресликавање би-Липшицово у односу на хиперболичку метрику, док су Чен и Фенг (видети [11]), примењујући потпуно исти метод као онај представљен у раду аутора тезе са ментором (видети [34]), потврдили добијене константе билипшицовости и у случај произвољног просто повезаног конвексног кодомена различитог од $\mathbb{C}$. Ту је доказан и аналогон Кебеове теореме дисторзије. Међутим, М. Матељевић и В. Божин (видети [7]), новом техником и идејама, добијају да у случају Жордановых области са $C^{1,\alpha}$ границом сваки хармонијски квазиконформни дифеоморфизам између њих је такође би-Липшицово пресликавање, али у односу на еуклидску метрику.

Претходни резултати су послужили као мотивација за даље истраживање, па су добијени резултати који потврђују да је сваки квазиконформни хармонијски дифеоморфизам f јединичног диска на произвољни просто повезани хиперболички домен G комплексне равни, користећи само својства хиперболичке метрике и уопштење верзије Шварцове леме за Келерове многострукости (видети [60] и [57]), коју је дао Јау, под условом да је конформна метрика $ds^2 = \lambda_G(f(z))|f_z(z)|^2$, $z \in \mathbb{D}$, комплетна (λ_G је густина хиперболичке метрике на G), ко-Липшицово пресликавање у односу на одговарајуће хиперболичке метрике.

Теорема: *Нека је f једно k-квазиконформно хармонијско пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на G, где је $G \subset \mathbb{C}$ произвољна просто повезана област различита од $\mathbb{C}$. Уколико је конформна метрика $ds^2 = \lambda_G(f(z))|f_z(z)|^2|dz|^2$ комплетна на $\mathbb{D}$, тада важи*

$$d_G(f(z_1), f(z_2)) \geqslant m(k)\, d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2),$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, *односно пресликавање* f *је* $m(k)$ *ко-Липшицово у односу на хиперболичку метрику, где је* $m(k) = \dfrac{1-k}{\sqrt{1+k^2+\dfrac{16+9\sqrt{3}}{2}k}}$.

У обрнутој ситуацији, такав начин истраживања је дао само парцијални резултат. Наиме, одређена је константа липшицовости само за мале k, тј. за она пресликавања која су сувише блиска конформним. Такође, дат је и резултат који се односи на густину квазихиперболичке мерике и може послужити као мотивација да се поједини резултати пренесу и на тај случај.

Теорема: *Нека је* $f : \mathbb{D} \to G$ *пресликавање које је* k*-квазиконформно и хармонијско, где је* $G \subset \mathbb{C}$ *произвољна просто повезана област различита од* $\mathbb{C}$. *Тада, за све* $0 \leqslant k < k_0 = \dfrac{2}{16+9\sqrt{3}}$, *важи*

$$d_G(f(z_1), f(z_2)) \leqslant M(k)\, d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2),$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, *односно пресликавање* f *је* $M(k)$ *Липшицово у односу на хиперболичку метрику, где је* $M(k) = \dfrac{1+k}{\sqrt{1-\dfrac{16+9\sqrt{3}}{2}k}}$.

Глава 1

Квазиконформна пресликавања домена комплексне равни

Теорија квазиконформних пресликавања почела је да се развија још почетком XX века. Данас представља једну модерну и веома важну област комплексне анализе. Немачки математичар Греч, мотивисан једним лепим и природним питањем, први је потражио пример пресликавања које је, на неки начин „блиско” конформном, јер је било познато да не постоји конформно пресликавање квадрата S на правоугаоник R, који није квадрат, које ће темена тог квадрата пресликавати у темена датог правоугаоника.

1.1 Увод

Нека су $\Omega \subset \mathbb{C}$ и $\Omega' \subset \mathbb{C}$ дате области у равни и $f : z \mapsto w = f(z) = u(z) + iv(z) \in \Omega'$, $u(z) = \mathrm{Re}(f(z))$, $v(z) = \mathrm{Im}(f(z))$, $z = x + iy \in \Omega$, пресликавање класе C^1, које област Ω пресликава на област Ω'. Тада, у произвољној тачки $z_0 \in \Omega$ одговарајући диференцијал $df(z_0)$ пресликавања

f је $\mathbb{R}$-линеарно пресликавање облика

$$df(z_0)(h) = f_z(z_0)h + f_{\bar{z}}(z_0)\bar{h},$$

где су $f_z(z_0) = \dfrac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0))$ и $f_{\bar{z}}(z_0) = \dfrac{1}{2}(f_x(z_0) + if_y(z_0))$, при чему је свакако $f_x(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(z_0)$ и $f_y(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i\dfrac{\partial v}{\partial y}(z_0)$.

Нека је $\alpha \in [0, 2\pi)$ произвољно. Тада је извод пресликавања f у правцу вектора $e^{i\alpha}$ у тачки z_0 једнак

$$\begin{aligned}(\partial_\alpha f)(z_0) &= \lim_{r\to 0} \frac{f(z_0 + re^{i\alpha}) - f(z_0)}{re^{i\alpha}} \\ &= f_z(z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)e^{-2i\alpha}.\end{aligned}$$

Очигледно је сада

$$\Lambda_f(z_0) = \max_{\alpha\in[0,2\pi)} |(\partial_\alpha f)(z_0)| = |f_z(z_0)| + |f_{\bar{z}}(z_0)|$$

и

$$\lambda_f(z_0) = \min_{\alpha\in[0,2\pi)} |(\partial_\alpha f)(z_0)| = |f_z(z_0)| - |f_{\bar{z}}(z_0)|.$$

У овој глави ћемо углавном разматрати дифеоморфизме класе C^1 који чувају оријентацију, тј. она пресликавања $f : \Omega \to \Omega'$ за која је $J_f(z) > 0$, односно, за која је $|f_z(z)| > |f_{\bar{z}}(z)|$, за свако $z \in \Omega$, где је $J_f(z) = \Lambda_f(z)\lambda_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2$, $z \in \Omega$, јакобијан пресликавања f. Конформну дилатацију, тј. дисторзију, пресликавања f дефинишемо као количник

$$D_f(z) = \frac{\Lambda_f(z)}{\lambda_f(z)} = \frac{|f_z(z)| + |f_{\bar{z}}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|},\ z \in \Omega.$$

Комплексна дилатација пресликавања f у тачки z дефинише се, на уобичајени начин, са $\mu_f(z) = \dfrac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}$, $z \in \Omega$. Очигледно је $D_f(z) = \dfrac{1 + |\mu_f(z)|}{1 - |\mu_f(z)|}$, одакле, уколико је f конформно пресликавање, тривијално следи да је $D_f(z) = 1$, за свако $z \in \Omega$.

Дефиниција 1.1.1. Нека су Ω и Ω' дате области и $f : \Omega \to \Omega'$, дифеоморфизам класе C^1, који чува оријентацију, једне области на другу. Казаћемо да је пресликавање f регуларно квазиконформно, уколико је конформна дилатација истог, тј. реална функција D_f, ограничена у Ω. Такође, за пресликавање f кажемо да је регуларно K-квазиконформно, ако постоји реалан број $K \geqslant 1$, такав да важи $D_f(z) \leqslant K$, за свако $z \in \Omega$.

На основу претходне дефиниције, ако уведемо ознаку

$$K_f = \sup\{D_f(z) : z \in \Omega\},$$

закључујемо да је пресликавање f регуларно квазиконформно у области Ω, уколико је K_f коначно. При томе је K_f најмања од свих константи $K \geqslant 1$ за коју је пресликавање f регуларно K-квазиконформно.

Дефиниција 1.1.2. За регуларно K- квазиконформно пресликавање f области Ω на област Ω', број $K_f \geqslant 1$ називамо максималном конформном, или само максималном, дилатацијом пресликавања f.

Сада ћемо извести неке формуле које ћемо користити касније.

Нека су Ω, Ω' и Ω'' области у комплексној равни. Претпоставимо да су $f : z \mapsto w = f(z) \in \Omega'$, $z = x + iy \in \Omega$ и $g : w \mapsto \zeta = g(w) \in \Omega''$, $w = u + iv \in \Omega'$, пресликавања класе C^1, редом, у областима Ω и Ω'. Тада, знајући да је $(\bar{f})_z(z) = \overline{f_{\bar{z}}(z)}$, као и $(\bar{f})_{\bar{z}}(z) = \overline{f_z(z)}$, за свако $z \in \Omega$, једноставно добијамо да је за свако $z \in \Omega$

$$(g \circ f)_z(z) = g_w(f(z))f_z(z) + g_{\bar{w}}(f(z))\overline{f_{\bar{z}}(z)}, \tag{1.1.1}$$

$$(g \circ f)_{\bar{z}}(z) = g_w(f(z))f_{\bar{z}}(z) + g_{\bar{w}}(f(z))\overline{f_z(z)}. \tag{1.1.2}$$

Стога, ако је пресликавање f конформно, тј. $f_{\bar{z}}(z) = 0$, као и $f_z(z) = f'(z)$, за свако $z \in \Omega$, добијамо да је

$$\mu_{g\circ f}(z) = \frac{(g\circ f)_{\bar{z}}(z)}{(g\circ f)_z(z)} = \frac{g_{\bar{w}}(f(z))\overline{f_z(z)}}{g_w(f(z))f_z(z)} \tag{1.1.3}$$

$$= (\mu_g \circ f)(z)\frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)}, \tag{1.1.4}$$

па је

$$D_{g\circ f}(z) = \frac{1 + |\mu_{g\circ f}(z)|}{1 - |\mu_{g\circ f}(z)|} = D_g(f(z)).$$

Такође, уколико је пресликавање g конформно, добијамо да је

$$\mu_{g\circ f}(z) = \frac{(g\circ f)_{\bar{z}}(z)}{(g\circ f)_z(z)} = \frac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)} = \mu_f(z),$$

па је

$$D_{g\circ f}(z) = \frac{1 + |\mu_{g\circ f}(z)|}{1 - |\mu_{g\circ f}(z)|} = D_f(z).$$

Специјално, ако је f дифеоморфизам области Ω на област Ω', $\Omega'' = \Omega$ и $g = f^{-1}$, тада је

$$1 = (g\circ f)_z(z) = (f^{-1})_w(f(z))f_z(z) + (f^{-1})_{\bar{w}}(f(z))\overline{f_{\bar{z}}(z)},$$

$$0 = (g\circ f)_{\bar{z}}(z) = (f^{-1})_w(f(z))f_{\bar{z}}(z) + (f^{-1})_{\bar{w}}(f(z))\overline{f_z(z)},$$

одакле произилази да је

$$(f^{-1})_w(f(z)) = \frac{1}{J_f(z)}\overline{f_z(z)},$$

као и

$$(f^{-1})_{\bar{w}}(f(z)) = -\frac{1}{J_f(z)}f_{\bar{z}}(z).$$

Такође, тривијално се добија да је $(\mu_{f^{-1}} \circ f)(z) = -\dfrac{f_{\bar{z}}(z)}{\overline{f_z(z)}}$, односно

$$|(\mu_{f^{-1}} \circ f)(z)| = |\mu_f(z)|.$$

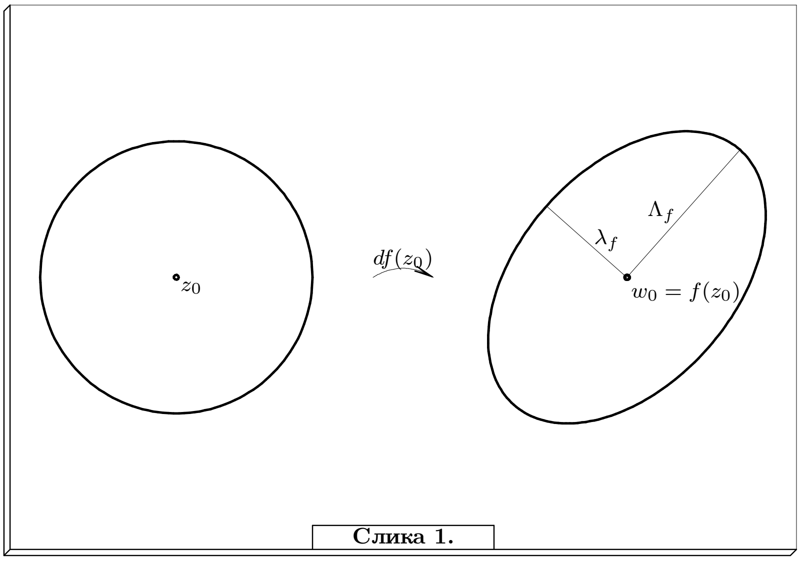
Са друге стране, уколико претпоставимо да пресликавања f и g у одговарајућим доменима имају дефинисане све парцијалне изводе другог реда који су непрекидне функције, тада, диференцирајући једнакост (1.1.1) по промењљивој $\bar{z}$, добијамо

$$\begin{aligned}(g\circ f)_{z\bar{z}}(z) &= (g_{ww}\circ f)(z)f_z(z)f_{\bar{z}}(z)\\ &+(g_{w\bar{w}}\circ f)(z)(|f_z(z)|^2+|f_{\bar{z}}(z)|^2)\\ &+(g_{\bar{w}\bar{w}}\circ f)(z)\overline{f_z(z)f_{\bar{z}}(z)}\\ &+(g_w\circ f)(z)f_{z\bar{z}}(z)+(g_{\bar{w}}\circ f)(z)\overline{f_{z\bar{z}}(z)},\end{aligned}$$

одакле, ако је пресликавање f аналитичко, налазимо да је

$$(g\circ f)_{z\bar{z}}(z) = (g_{w\bar{w}}\circ f)(z)|f_z(z)|^2, \tag{1.1.5}$$

за свако $z\in\Omega$. Специјално, уколико је g хармонијско пресликавање (видети наредно поглавље), тј. ако је $(\triangle g)(w) = 4g_{w\bar{w}}(w) = 0$, за свако $w\in\Omega'$, ту особину ће задржати и композиција $g\circ f$.



Слика 1.

1.2 Гречов проблем

Нека су a, b, a' и b' позитивни реални бројеви. Означићемо са

$$R = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 0 < x < a,\, 0 < y < b\},$$

као и са

$$R' = \{w = u + iv \in \mathbb{C} : 0 < u < a',\, 0 < v < b'\},$$

два, на тренутак, издвојена правоугаоника у равни. Познато је да, користећи принцип симетрије, рецимо, не можемо наћи конформно пресликавање f једног правоугаоника на други, које ће, након проширења до хомеоморфизма њихових затворења, темена првог правоугаоника пресликавати у одговарајућа темена другог правоугаоника, осим у случају када су ти правоугаоници слични. Дакле, ако је са $\tilde{f} : \overline{R} \to \overline{R'}$ означен поменути хомеоморфизам који проширује пресликавање f на $\overline{R}$, уз захтев да важи $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{f}(a) = a'$, $\tilde{f}(a + ib) = a' + ib'$ и $\tilde{f}(ib) = ib'$, мора бити испуњено и $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$. Приметимо да ће се тада, свакако, странице првог правоугаоника пресликавати на странице другог.

Са друге стране, афино пресликавање дефинисано са

$$A(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}\right) z + \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right) \bar{z},\ z \in \mathbb{C}, \tag{1.2.1}$$

је један дифеоморфизам класе C^∞ правоугаоника R на правоугаоник R', који очигледно чува оријентацију, хомеоморфизам је њихових затворења и темена првог пресликава у одговарајућа темена другог правоугаоника. При томе је $A_z(z) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a'}{a} + \dfrac{b'}{b}\right)$, $z \in R$, као и $A_{\bar{z}}(z) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a'}{a} - \dfrac{b'}{b}\right)$, $z \in R$, па је $D_A(z) = \dfrac{a'b}{ab'}$, за свако $z \in R$, ако је $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{a'}{b'}$, док је $D_A(z) = \dfrac{ab'}{a'b}$, за свако $z \in R$, уколико је $\dfrac{a}{b} \geqslant \dfrac{a'}{b'}$.

Посматрајмо сада фамилију $\mathfrak{F}$ свих дифеоморфизама, који чувају оријентацију, правоугаоника R на правоугаоник R', који се могу непрекидно проширити да хомеоморфизама њихових затворења и који темена првог правоугаоника пресликавају у одговарајућа темена другог. С обзиром на претходно разматрање, фамилија $\mathfrak{F}$ је свакако непразна. Претпоставимо, још, да је $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{a'}{b'}$. Природно питање се намеће сада. Да ли међу њима постоји онај са најмањом максималном дилатацијом, тј. да ли постоји $f_0 \in \mathfrak{F}$, тако да је $K_{f_0} \leqslant K_f$, за свако $f \in \mathfrak{F}$? Потврдан одговор на ово питање обезбеђује нам наредно тврђење.

Пропозиција 1.2.1. *Нека је $f \in \mathfrak{F}$ произвољан дифеоморфизам. Тада важи*

$$\frac{a'b^2}{b'} \leqslant \iint_R D_f(z)dxdy. \tag{1.2.2}$$

Штавише, афино пресликавање, дефинисано изразом (1.2.1)*, је екстремално пресликавање. Специјално, уколико је f регуларно K-квазиконформно, тада је и $\dfrac{a'}{b'} \leqslant K\dfrac{a}{b}$.*

Доказ: Нека је $y \in (0, b)$ произвољно и $\gamma_y : x \mapsto \gamma_y(x) = x + iy$, $0 \leqslant x \leqslant a$, хоризонтална крива која спаја „b-странице" правоугаоника R. Означимо са $\Gamma_y = f \circ \gamma_y$ криву која представља слику криве γ_y при пресликавању f. С обзиром да сада крива Γ_y мора спајати „b-странице" правоугаоника R', добијамо да је еуклидска дужина исте не мања од a', тј.

$$\begin{aligned} a' &\leqslant \int_{\Gamma_y} |dw| = \int_0^a |f_z(x+iy) + f_{\bar{z}}(x+iy)|dx \\ &= \int_0^a |f_z(x+iy)||1+\mu_f(x+iy)|dx,\ y \in [0,b], \end{aligned}$$

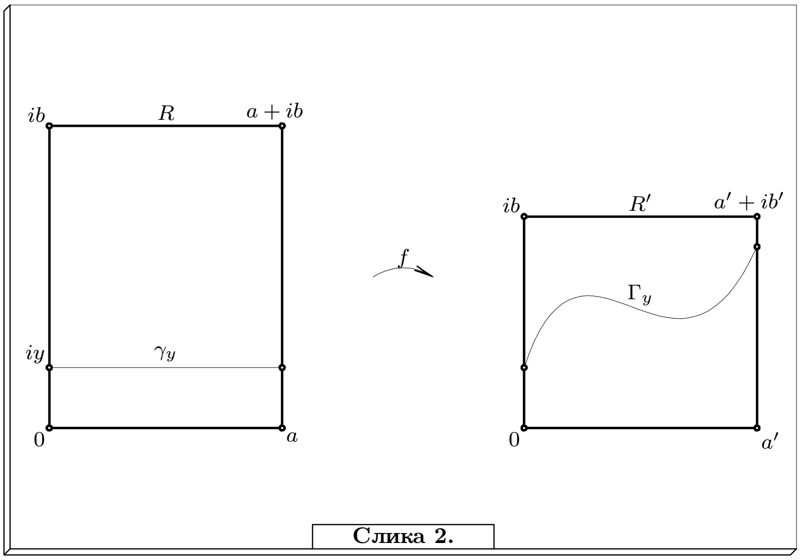
одакле, интегралећи обе стране неједнакости по y на сегменту $[0,b]$, добијамо да је

$$\begin{aligned} a'b &\leqslant \iint_R |f_z(x+iy)||1+\mu_f(x+iy)|dxdy \\ &= \iint_R \frac{|f_z(z)||1+\mu_f(z)|}{\sqrt{|f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2}} \sqrt{J_f(z)}dxdy \\ &= \iint_R \frac{|1+\mu_f(z)|}{\sqrt{1-|\mu_f(z)|^2}} \sqrt{J_f(z)}dxdy \\ &\leqslant \iint_R \frac{(1+|\mu_f(z)|)}{\sqrt{1-|\mu_f(z)|^2}} \sqrt{J_f(z)}dxdy \\ &= \iint_R \sqrt{\frac{1+|\mu_f(z)|}{1-|\mu_f(z)|}} \sqrt{J_f(z)}dxdy \\ &\leqslant \sqrt{\iint_R \frac{1+|\mu_f(z)|}{1-|\mu_f(z)|}dxdy} \sqrt{\iint_R J_f(z)dxdy}, \end{aligned}$$

односно

$$(a'b)^2 \leqslant a'b' \iint_R D_f(z)dxdy.$$

$\square$



Слика 2.

Квадрилатерал $Q = Q(z_1, z_2, z_3, z_4) \subset \mathbb{C}$, или уопштени правоугаоник, је Жорданова област у равни, односно, она област чија је граница $\partial Q \subset \overline{\mathbb{C}}$, као скуп, у складу са наслеђеном топологијом из $\overline{\mathbb{C}}$, хомеоморфна јединичној кружници $\mathbb{T} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$, заједно са уређеном четворком (z_1, z_2, z_3, z_4) различитих истакнутих тачака које припадају граници ∂Q те области. Тачке z_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, називаћемо теменима квадрилатерала Q и, уколико је $\varphi : \partial Q \to \mathbb{T}$ пресликавање која успоставља хомеоморфизам границе истог и јединичне кружнице, захтеваћемо да је $[0, 2\pi) \ni \varphi_1 = \arg(\varphi(z_1)) < \psi(\varphi(z_2)) < \psi(\varphi(z_3)) < \psi(\varphi(z_4)) < \varphi_1 + 2\pi$, где је са ψ означена непрекидна грана аргумента издвојена у области $\{w \in \mathbb{C} : w \neq \rho e^{i\varphi_1},\ \rho \geqslant 0\}$. Дакле, четворка истакнутих тачака је уређена у складу са позитивном оријентацијом границе ∂Q у односу на квадрилатерал Q.

На основу Риманове теореме, следи да је сваки квадрилатерал $Q = Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ конформно еквивалентан са одговарајућим правоугаоником

$R = \{w \in \mathbb{C} : 0 < u < a, 0 < v < b\}$, за неке позитивне реалне бројеве a и b, те да се сваки други правоугаоник, припадник исте класе конформно еквивалентних, може добити од правоугаоника R, једноставно, трансформацијом сличности, која чува оријентацију. Стога, оправдано је увођење појма конформног модула квадрилатерала Q.

Дефиниција 1.2.1. Конформни модул, или краће, модул, датог квадрилатерала $Q = Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ је број $M(Q) = \dfrac{a}{b}$, где су a и b еуклидске дужине страница одговарајућег канонског правоугаоника.

1.3 Екстремалне дужине

Да бисмо дали геометријску дефиницију квазиконформног пресликавања, увешћемо појам екстремалне дужине, која ће представљати инваријанту у односу на конформна пресликавања, односно квазиинваријанту у односу на квазиконформна пресликавања. У том циљу, нека је Γ произвољна фамилија локално ректифицијабилних кривих у области $\Omega \subset \mathbb{C}$, које су задате непрекидним пресликавањима отворених, полуотворених, односно затворених, интервала реалне праве, као и највише пребројивих дисјунктних унија истих (осим у овој глави, крива у некој области $\Omega \subset \mathbb{C}$ ће бити дефинисана на уобичајени начин, тј. као непрекидно пресликавање затвореног интервала $[0, 1]$ у Ω). Ненегативну Борел мерљиву функцију ρ, која је дефинисана у Ω, ћемо звати допустивом метриком на Ω, ако важи

$$A(\Omega, \rho) = \iint_{\Omega} \rho^2(z) dxdy \in (0, +\infty),$$

$z = x + iy \in \Omega$, док ћемо за криву $\gamma \in \Gamma$ дефинисати дужину исте у односу на допустиву метрику ρ као $L(\gamma, \rho) = \int_\gamma \rho(z)|dz|$, која може бити и бесконачна. Осим тога, за целу фамилију кривих γ дефинишемо дужину исте као $L(\Gamma, \rho) = \inf_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma, \rho)$.

Дефиниција 1.3.1. Екстремална дужина фамилије кривих Γ у области Ω је број $\lambda(\Gamma) = \lambda(\Omega, \Gamma) = \sup_\rho \dfrac{L^2(\Gamma, \rho)}{A(\Omega, \rho)}$, где се супремум узима по свим допустивим метрикама ρ на Ω.

Дакле, екстремалну дужину фамилије кривих Γ ћемо схватити као просечну минималну дужину кривих из те фамилије. Одмах примећујемо да она зависи искључиво од саме те фамилије, а не од области у којој се налазе трагови кривих из те фамилије. Заиста, уколико је $\Omega \subset \Omega'$ и Γ произвољна фамилија локално ректифицијабилних кривих у Ω, издвајањем произвољне допустиве метрике ρ на Ω, можемо формирати допустиву метрику ρ' на Ω', захтевом $\rho'(z) = \rho(z)$, $z \in \Omega$, односно $\rho'(z) = 0$, $z \in \Omega' - \Omega$. Отуда је $L(\Gamma, \rho) = L(\Gamma, \rho')$, као и $A(\Omega, \rho) = A(\Omega', \rho')$. па је и $\lambda(\Omega, \Gamma) \leqslant \lambda(\Omega', \Gamma)$. Са друге стране, узимајући произвољну допустиву метрику на Ω', рестрикција исте на Ω дефинише допустиву метрику на Ω, па је испуњена и обрнута неједнакост.

Посматрајмо сада две фамилије кривих Γ_1 и Γ_2 у Ω. Казаћемо да $\Gamma_1 < \Gamma_2$, ако за свако $\gamma_2 \in \Gamma_2$ постоји $\gamma_1 \in \Gamma_1$, тако да је пресликавање γ_1 рестрикција пресликавања γ_2. При томе је $\gamma_1^* \subset \gamma_2^*$, али и $\Gamma_1 < \Gamma_2$, уколико је $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$, где је са γ^* означен траг неке криве γ. Стога, као непосредну последицу дефиниције, добијамо да ако је $\Gamma_1 < \Gamma_2$, то је и $\lambda(\Omega, \Gamma_1) \leqslant \lambda(\Omega, \Gamma_2)$.

Пример 1.3.1. (а) Нека је $R = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ правоугаоник у равни и Γ фамилија локално ректифицијабилних кривих које спајају ,,b-странице" тог правоугаоника и из њега не излазе. Изаберимо једну допустиву метрику ρ на R. Тада је, за фиксирано $y \in (0, b)$, $L(\Gamma, \rho) \leqslant \int_0^a \rho(x + iy)dx$, одакле је, након интеграције, користећи неједнакост Коши-Шварца,

$$\begin{aligned} b^2 L^2(\Gamma, \rho) &\leqslant \left(\iint_R \rho(z)dxdy\right)^2 \\ &\leqslant ab \iint_R \rho^2(z)dxdy \\ &= ab\, A(R, \rho),\ z = x + iy, \end{aligned}$$

односно $\dfrac{L^2(\Gamma, \rho)}{A(R, \rho)} \leqslant \dfrac{a}{b}$. Дакле, $\lambda(R, \Gamma) \leqslant \dfrac{a}{b}$. Узимајући $\rho_0(z) = 1$, за свако $z \in R$, добијамо да је $\dfrac{L^2(\Gamma, \rho_0)}{A(R, \rho_0)} = \dfrac{a}{b}$, па је $\lambda(R, \Gamma) = \dfrac{a}{b}$.

(б) Посматрајмо сада кружни прстен $P = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$, где су r_1 и r_2 дати позитивни бројеви, $r_1 < r_2$, и фамилију локално ректифицијабилних кривих Γ које спајају тачке са граничних кружница прстена P и које не излазе из тог прстена. Тада, за произвољну допустиву метрику ρ на прстену P и фиксирано $\theta \in [0, 2\pi)$, имамо $L(\Gamma, \rho) \leqslant \int_{\gamma_\theta} \rho(z)|dz|$, где је $\gamma_\theta(r) = re^{i\theta}$, $r_1 < r < r_2$, одакле се интеграцијом и применом Коши-Шварцове неједнакости добија

$$\begin{aligned} (2\pi L(\Gamma, \rho))^2 &\leqslant \left(\iint_{(r_1,r_2)\times[0,2\pi)} \rho(re^{i\theta})drd\theta\right)^2 \\ &\leqslant \iint_{(r_1,r_2)\times[0,2\pi)} \frac{1}{r}drd\theta \iint_{(r_1,r_2)\times[0,2\pi)} r\rho^2(re^{i\theta})drd\theta \\ &= 2\pi \log\frac{r_2}{r_1} \iint_P \rho^2(z)dxdy = 2\pi \log\frac{r_2}{r_1} A(P, \rho),\ z = re^{i\theta}, \end{aligned}$$

односно, $\dfrac{L^2(\Gamma, \rho)}{A(P, \rho)} \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{r_2}{r_1}$, тј. $\lambda(P, \Gamma) \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{r_2}{r_1}$. Стављајући $\rho_0(z) = \dfrac{1}{r}$,

$z = re^{i\theta} \in P$, налазимо да је $\dfrac{L^2(\Gamma, \rho_0)}{A(P, \rho_0)} = \dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{r_2}{r_1}$, односно, $\lambda(P, \Gamma) = \dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{r_2}{r_1}$.

Напомена 1.3.1. Да смо у претходном примеру посматрали фамилију локално ректифицијабилних кривих Γ', које остају у прстену P и раздвајају компоненте повезаности границе тог прстена, добили бисмо да је $\lambda(P, \Gamma') = 2\pi \left(\log \dfrac{r_2}{r_1} \right)^{-1}$.

Као што је најављено, екстремална дужина фамилије кривих представља конформну инваријанту, односно, квазиинваријанту у односу на регуларна квазиконформна пресликавања. Ту чињеницу нам обезбеђује наредно тврђење.

Теорема 1.3.1. *Нека је* $f : \Omega \to \Omega' = f(\Omega)$ *регуларно* K*-квазиконформно пресликавање и нека је* Γ *произвољна фамилија локално ректифицијабилних кривих чији трагови припадају* Ω*. Означимо са* $\Gamma_1 = \{f \circ \gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *одговарајућу фамилију кривих у* Ω'*. Тада је*

$$\frac{\lambda(\Omega, \Gamma)}{K} \leqslant \lambda(\Omega', \Gamma_1) \leqslant K\lambda(\Omega, \Gamma).$$

Доказ: Нека је ρ произвољна допустива метрика на Ω. Дефинишимо допустиву метрику ρ_1 на Ω' са $\rho_1(w) = \dfrac{\rho(f^{-1}(w))}{\lambda_f(f^{-1}(w))}$, $w = f(z) = u + iv \in \Omega'$, где је $\lambda_f(z) = |f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|$, $z \in \Omega$ ($\lambda_f(z) > 0$, за свако $z \in \Omega$, јер је пресликавање f квазиконформно). Тада је

$$\begin{aligned} A(\Omega', \rho_1) &= \iint_{\Omega'} \rho_1^2(w)\,dudv \\ = \iint_{\Omega} \rho_1^2(f(z)) J_f(z)\,dxdy &= \iint_{\Omega} \frac{\rho^2(z)}{\lambda_f{}^2(z)} J_f(z)\,dxdy \\ &= \iint_{\Omega} \frac{|f_z(z)| + |f_{\bar{z}}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|} \rho^2(z)\,dxdy \leqslant KA(\Omega, \rho). \end{aligned}$$

Аналогно, кад год је $\gamma \in \Gamma$ важи

$$L(\gamma_1,\rho_1) = \int_{\gamma_1} \rho_1(w)|dw| \geqslant \int_{\gamma} \frac{\rho(z)}{\lambda_f(z)} \left||f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|\right| |dz|$$
$$= \int_{\gamma} \frac{\rho(z)}{\lambda_f(z)} \left(|f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|\right) |dz| = \int_{\gamma} \rho(z)|dz| = L(\gamma,\rho),$$

где је $\gamma_1 = f \circ \gamma$. Стога је $L(\Gamma_1,\rho_1) \geqslant L(\Gamma,\rho)$, па је и

$$\frac{L^2(\Gamma_1,\rho_1)}{A(\Omega',\rho_1)} \geqslant \frac{1}{K}\frac{L^2(\Gamma,\rho)}{A(\Omega,\rho)},$$

одакле, због произвољности допустиве метрике ρ добијамо леву страну неједнакости. Десну страну неједнакости тривијално добијамо као последицу претходно доказане и чињенице да је f^{-1} такође једно K-квазиконформно пресликавање. $\square$

У прилог претходном тврђењу, уколико је f конформно пресликавање области Ω на област Ω', сходно претходним ознакама, лако добијамо да је $\lambda(\Omega',\Gamma_1) = \lambda(\Omega,\Gamma)$, јер је у том случају $K = 1$, што је речено раније. Дакле, екстремална дужина заиста јесте конформна инваријанта.

Лема 1.3.2. *Нека су* Γ_1 *и* Γ_2 *две фамилије локално ректифицијабилних кривих које припадају, редом, дисјунктним областима* Ω_1 *и* Ω_2 *у равни. Тада, ако је* $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 = \{\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 : \gamma_1 \in \Gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_2\}$*, фамилија кривих настала надовезивањем кривих из датих фамилија (чак и када за то нема смисла, тј. не захтева се да крива* γ_1 *има крајњу тачку исту као што је иницијална тачка криве* γ_2*) важи*

$$\lambda(\Omega_1,\Gamma_1) + \lambda(\Omega_2,\Gamma_2) \leqslant \lambda(\Gamma).$$

Доказ: Нека је Ω произвљана област која садржи $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Очигледно је (видети коментар након дефиниције 1.3.1), најпре, $\lambda(\Gamma_i) = \lambda(\Omega_i,\Gamma_i) =$

$\lambda(\Omega,\Gamma_i)$, $i\in\{1,2\}$, одакле, ако обе фамилије третирамо као фамилије кривих у Ω, следи Γ_1, $\Gamma_2<\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$, па је $0\leqslant\max\{\lambda(\Gamma_1),\lambda(\Gamma_2)\}\leqslant\lambda(\Gamma)$. То заправо значи да уколико је нека од поменутих екстремалних дужина 0 или $+\infty$, доказ је завршен. Стога, претпоставимо да важи $\lambda(\Gamma_i)\in(0,+\infty)$, $i\in\{1,2\}$.

Уочимо сада две произвољне допустиве метрике ρ_1 и ρ_2 , редом, на Ω_1 и Ω_2 и без умањења општости претпоставимо (тј. извршимо нормализацију) да је $L_1=L(\Omega_1,\rho_1)=A(\Omega_1,\rho_1)$, као и $L_2=L(\Omega_2,\rho_2)=A(\Omega_2,\rho_2)$. Дефинишимо допустиву метрику ρ на Ω са $\rho(z)=\rho_1(z)$, $z\in\Omega_1$, $\rho(z)=\rho_2(z)$, $z\in\Omega_2$, односно $\rho(z)=0$, $z\in\Omega-(\Omega_1\cup\Omega_2)$. Тада важи $L(\Omega,\rho)\geqslant L_1+L_2=A(\Omega_1,\rho_1)+A(\Omega_1,\rho_2)$. Са друге стране, очигледно је $A(\Omega,\rho)=A(\Omega_1,\rho_1)+A(\Omega_2,\rho_2)$, па је стога и

$$\begin{aligned}\lambda(\Gamma)=\lambda(\Gamma_1+\Gamma_2)&\geqslant\frac{L^2(\Omega,\rho)}{A(\Omega,\rho)}\\ \geqslant\frac{(A(\Omega_1,\rho_1)+A(\Omega_2,\rho_2))^2}{A(\Omega_1,\rho_1)+A(\Omega_2,\rho_2)}&=A(\Omega_1,\rho_1)+A(\Omega_2,\rho_2)\\ &=\frac{L_1^2}{A(\Omega_1,\rho_1)}+\frac{L_2^2}{A(\Omega_2,\rho_2)},\end{aligned}$$

одакле следи тврђење. □

Приметимо да смо могли да извршимо претходну нормализацију, јер је претпостављено да важи $\lambda(\Gamma_i)\in(0,+\infty)$, $i\in\{1,2\}$, па се можемо ослонити на чињеницу да изрази који дефинишу одговарајуће екстремалне дужине остају исти када се изабране допустиве метрике помноже погодно одабраним позитивним константама.

1.4 Геометријска дефиниција квазиконформног пресликавања

Сада ћемо покушати да се ослободимо захтева да су пресликавања са којима радимо класе C^1. С тим у вези уводимо следећи појам.

Дефиниција 1.4.1. Нека је $f : \Omega \to \Omega'$ хомеоморфизам који чува оријентацију. За пресликавање f ћемо рећи да је K-квазиконформно, у геометријском смислу, ако за сваки квадрилатерал Q, за који је испуњено $\overline{Q} \subset \Omega$, важи

$$\frac{M(Q)}{K} \leqslant M(f(Q)) \leqslant KM(Q).$$

Приметимо да претходна дефиниција има смисла, јер је и слика произвољног квадрилатерала Q, који компактно лежи у Ω, такође један квадрилатерал који компактно припада области Ω', с обзиром на својства пресликавања f. Осим тога, уколико је пресликавање f K-квазиконформно, тада је, свакако, $K \geqslant 1$. Такође, с обзиром на везу између модула произвољног квадрилатерала $Q = Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ и њему конјугованог квадрилатерала $\tilde{Q} = Q(z_2, z_3, z_4, z_1)$, довољно је било захтевати да је $M(f(Q)) \leqslant K\, M(Q)$, за сваки квадрилатерал Q, $\overline{Q} \subset \Omega$.

Пре него што докажемо неколико корисних тврђења која ће нам бити од значаја касније, уведимо следећу ознаку. За дати квадрилатерал $Q = Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$, $\overline{Q} \subset \mathbb{C}$, са $s_a(Q)$, односно са $s_b(Q)$, ћемо означавати еуклидско растојање између његових „a-страница”, односно „b-страница”, редом. Свакако је $s_a(Q)$, $s_b(Q) \in (0, +\infty)$.

Пропозиција 1.4.1. *Нека су* Ω, Ω', $\Omega'' \subset \mathbb{C}$ *дате области. Петпоставимо да је* $f : \Omega \to f(\Omega) = \Omega'$ K_1*-квазиконформно пресликавање, а* $g : \Omega' \to g(\Omega') = \Omega''$ K_2*-квазиконформно пресликавање. Тада је композиција* $g \circ f$ K_1K_2*-квазиконформно пресликавање.*

Доказ: Како је јакобијан композиције пресликавања производ одговарајућих јакобијана, тврђење се своди на елементарну оцену одозго конформне дилатације композиције. □

Пропозиција 1.4.2. (**Ренгелова неједнакост, [37]**) *Нека је дат произвољан квадрилатерал* $Q = Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ *у равни. Тада за његов модул важи*

$$\frac{s_b^2(Q)}{m(Q)} \leqslant M(Q) \leqslant \frac{m(Q)}{s_a^2(Q)}, \tag{1.4.1}$$

где је m *ознака за дводимензионалну Лебегову меру. Једнакост у обе неједнакости важи ако и само ако је* Q *правоугаоник.*

Пропозиција 1.4.3. *Нека су* $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ *дате области и* $f : \Omega \to f(\Omega) = \Omega'$ *дифеоморфизам класе* C^1 *истих. Тада важи, пресликаване* f *је* K*-квазиконформно, у геометријском смислу, ако и само ако је регуларно* K*-квазиконформно, тј. ако и само ако је* $D_f(z) \leqslant K$*, за свако* $z \in \Omega$*.*

Доказ: Претпоставимо најпре да је $D_f(z) \leqslant K$, за свако $z \in \Omega$. Означимо са Q произвољан квадрилатерал у Ω, $\overline{Q} \subset \Omega$, као и са $Q' = f(Q) \subset \Omega'$ слику истог при f. Нека су, даље f_1 и f_2 конформна пресликавања квадрилатерала Q и Q', редом, на одговарајуће канонске правоугаонике $R = R(0, M, M+i, i)$ и $R' = R'(0, M', M'+i, i)$, где су $M = M(Q)$ и $M' = M(Q')$ модули квадрилатерала Q и Q'. Тада је, на основу тврђења 1.4.1, компоновано пресликавање $g = f_2 \circ f \circ (f_1)^{-1} : R \to R'$ регуларно K-квазиконформно пресликавање правоугаоника R на правоугаоник R', које се, с обзиром да се пресликавања f_1 и f_2 могу проширити до хомеоморфизама између $\overline{Q}$ и $\overline{R}$, односно $\overline{Q'}$ и $\overline{R'}$, која чувају истакнута темена одговарајућих квадрилатерала, може проширити до хомеоморфизма између $\overline{R}$ и $\overline{R'}$ које чува одговарајућа темена. Стога је, на основу тврђења 1.2.1, $M' = M(Q') \leqslant KM(Q) = KM$, одакле закључујемо, због произвољности квадрилатерала Q, да је пресликавање f K-квазиконформно пресликавање, у смислу геометријске дефиниције.

Обрнуто, претпоставимо да је пресликавање f K-квазиконформно у геометријском смислу и да $0 \in \Omega$, као и да је $f(0) = 0$, али и $f_z(0) = |f_z(0)|$ и $f_{\bar{z}}(0) = |f_{\bar{z}}(0)|$. Тада је

$$\begin{aligned} f(z) &= f_z(0)z + f_{\bar{z}}(0)\bar{z} + o(z) \\ &= (|f_z(0)| + |f_{\bar{z}}(0)|)x + i(|f_z(0)| - |f_{\bar{z}}(0)|)y + o(z) \\ &= \Lambda_f(0)x + i\lambda_f(0)y + o(z), \end{aligned}$$

$z = x + iy \in B_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$, $\overline{B_\rho} \subset \Omega$. Како пресликавање f чува оријентацију, тј. $J_f(z) > 0$, $z \in \Omega$, то је и $\Lambda_f(0) \geqslant \lambda_f(0) > 0$. Са друге стране, изаберимо $r > 0$ тако да правоугаоник $R = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : -r < x < r, -r < y < r\}$ компактно припада диску B_ρ. Нека је $R' = f(R)$. Тада, за $z = -r + iy$, $|y| \leqslant r$, важи да је $\operatorname{Re}(f(z)) = -\Lambda_f(0)r + o(r)$, као и за $z = r + iy$, $|y| \leqslant r$, важи да је $\operatorname{Re}(f(z)) = \Lambda_f(0)r + o(r)$, одакле следи да је $s_b(R') = 2\Lambda_f(0)r + o(r)$. Међутим, како је $M(R) = 1$, то је $M(R') \leqslant K$, док је на основу неједнакости (1.4.1) испуњено $\dfrac{s_b^2(R')}{m(R')} \leqslant M(R')$, тј. $s_b^2(R') \leqslant Km(R')$, где је m, као и раније, ознака за дводимензионалну Лебегову меру. Такође, како је $m(R') = 4\Lambda_f(0)\lambda_f(0)r^2 + o(r^2)$, то је и $s_b^2(R') = (2\Lambda_f(0)r + o(r))^2 =$

$4\Lambda_f(0)^2r^2 + o(r^2) \leqslant 4K\Lambda_f(0)\lambda_f(0)r^2 + o(r^2)$, одакле, дељењем леве и десне стране неједнакости са $4\Lambda_f(0)\lambda_f(0)r^2$, те преласком на граничну вредност, кад $r \to 0_+$, добијамо да је $D_f(0) = \dfrac{\Lambda_f(0)}{\lambda_f(0)} \leqslant K$. □

Остало нам је да докажемо најважније тврђење у овом делу рада, а односи се на карактеризацију 1-квазиконформних, у геометријском смислу, пресликавања. С тим у вези ћемо имати неколико помоћних тврђења, као и једно запажање.

Лема 1.4.4. *Нека је γ произвољна крива која спаја „a-странице" правоугаоника $R = R(0, \tilde{m}, \tilde{m}+i, i)$, $\tilde{m} > 1$, и која дели тај правоугаоник на два квадрилатерала Q_1 и Q_2. Тада је*

$$M(Q_1) + M(Q_2) \leqslant M(R), \tag{1.4.2}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је γ вертикални сегмент.

Доказ: Приметмо да једнакост у претходној неједнакости тривијално важи уколико је крива γ вертикални сегмент који спаја „a-странице" правоугаоника R. Стога, да бисмо, прво, показали неједнакост (1.4.2), означимо са Γ_1, односно са Γ_2, фамилије кривих које спајају, редом, леву „b-страницу" правоугаоника R са кривом γ, односно криву γ са десном „b-страницом" истог. Ако је $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, то је, на основу леме 1.3.2, $\lambda(\Gamma_1) + \lambda(\Gamma_2) \leqslant \lambda(\Gamma)$, те неједнакост тривијално следи.

Претпоставимо да је сада $M(Q_1) + M(Q_2) = M(R)$ и докажимо да је γ вертикални сегмент који спаја „a-странице" правоугаоника R. Томе у прилог, означимо са f_1, односно са f_2, канонска пресликавања која квадрилатерале Q_1 и Q_2, пресликавају, редом, на правоугаонике $R_1 =$

$R_1(0, m_1, m_1{+}i, i)$ и $R_2 = R_2(0, m_2, m_2{+}i, i)$. Тада је $\tilde{m} = m_1{+}m_2$. Дефинишимо сада метрику ρ на правоугаонику R са $\rho(z) = |f_1'(z)|$, $z \in Q_1$, $\rho(z) = |f_2'(z)|$, $z \in Q_2$ и $\rho(z) = 0$, иначе. Тада важи

$$\begin{aligned}\iint_R (\rho^2(z) - 1)dxdy &= \iint_{Q_1} (|f_1'(z)|^2 - 1)dxdy + \iint_{Q_2} (|f_2'(z)|^2 - 1)dxdy \\ &= \iint_{Q_1} |f_1'(z)|^2 dxdy + \iint_{Q_2} |f_2'(z)|^2 dxdy - \iint_R dxdy \\ &= m(R_1) + m(R_2) - m(R) = m_1 + m_2 - \tilde{m} = 0,\end{aligned}$$

тј. $\displaystyle\iint_R \rho^2(z)dxdy = \tilde{m}$, где је m ознака за дводимензионалну Лебегову меру. Са друге стране, било која хоризонтална линија l, која спаја „b-странице" правоугаоника R, је кривом γ подељена на две криве γ_1 и γ_2, чије слике $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$, при f_1, односно при f_2, у збиру имају еуклидску дужину не мању од $\tilde{m}$. Стога је $\displaystyle\iint_R \rho(z)dxdy \geqslant \tilde{m}$, па је, на основу неједнакости Коши-Шварца

$$\tilde{m}^2 \leqslant \left(\iint_R \rho(z)dxdy\right)^2 \leqslant \tilde{m} \iint_R \rho^2(z)dxdy = \tilde{m}^2,$$

одакле закључујемо да је $\rho(z) = 1$ скоро свуда, тј. да су пресликавања f_1 и f_2 идентитета. $\square$

Дакле важи следеће тврђење.

Теорема 1.4.5. *Свако* 1*-квазиконформно пресликавање је уједно и конформно.*

Доказ: Нека је $f : \Omega \to f(\Omega) = \Omega'$ 1-квазиконформно пресликавање. Како свака тачка области Ω лежи унутар неког квадрилатерала Q, $\overline{Q} \subset \Omega$, то је довољно показати да тврђење важи у случају пресликавања између квадрилатерала.

Стога, нека је $Q = Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ произвољан квадрилатерал у Ω. Означимо са $Q' = Q'(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = f(Q)$ индуковани квадрилатерал.

Такође, нека су $R = R(0, M, M+i, i)$ и $R' = R'(0, M', M'+i, i)$ канонски правоугаоници који одговарају, редом, квадрилатералима Q и Q'. Како је f пресликавање које је 1-квазиконформно, према дефиницији истог, важи да је $M(Q) = M(Q')$, па су и одговарајући канонски правоугаоници слични, те стога, можемо претпоставити да су исти. Означимо са $f_1 : Q \to R$ и $f_2 : Q' \to R'$ одговарајућа канонска пресликавања. Тада је и композиција $g = f_2 \circ f \circ (f_1)^{-1} : R \to R'$ такође 1-квазиконформно пресликавање, али правоугаоника R на себе. Докажимо да се претходна композиција своди на идентитета пресликавање. Заиста, нека је $z_0 = x_0 + iy_0 \in R$ произвољна тачка. Сада можемо поделити правоугаоник R на два правоугаоника $R_1 = R_1(0, x_0, x_0+i, i)$ и $R_2 = R_1(x_0, M, M+i, x_0+i)$, а самим тим и правоугаоник R' на два квадрилатерала $R_1' = f(R_1)$ и $R_2' = f(R_2)$. Међутим, како је пресликавање f 1-квазиконформно, тада је $M(R) = M(R_1) + M(R_2) = M(R_1') + M(R_2') \leqslant M(R') = M(R)$, тј. $M(R_1') + M(R_2') = M(R')$, па је, на основу леме 1.4.4, квадрилатерал R_1' заправо правоугаоник. Стога је и $\mathrm{Re}(f(z_0)) = x_0$. Слично је и $\mathrm{Im}(f(z_0)) = y_0$, па је $f(z_0) = z_0$. □

Напомена 1.4.1. Многи аутори у својим књигама за дефиницију квазиконформног пресликавања узимају аналитичку дефиницију, коју ћемо навести (видети [37] и [1]). Напоменимо да је она еквивалентна са одговарајућом геометријском дефиницијом. Такав приступ приликом описивања квазиконформних пресликавања је погодан у вишим димензијама.

Дефиниција 1.4.2. Нека је $f : \Omega \to \Omega'$ хомеоморфизам који чува оријентацију. За пресликавање f ћемо рећи да је K-квазиконформно, у аналитичком смислу, ако важи:

(а) f је апсолутно непрекидна на линијама у Ω, тј. $f \in \mathrm{ACL}(\Omega)$,

(б) $|f_{\bar{z}}(z)| \leqslant k|f_z(z)|$, скоро свуда у Ω, где је $k = \dfrac{K-1}{K+1}$.

Напоменимо да под апсолутном непрекидношћу на линијама за дату функцију $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$, $u = \operatorname{Re} f$ и $v = \operatorname{Im} f$, на Ω, подразумевамо то да су реалне функције u и v такве, тј. да су апсолутно непрекидне на скоро свим хоризонталним и скоро свим вертикалним линијама у Ω. Прецизније, за обе функције важи да за сваки правоугаоник $R = [a, b] \times [c, d]$ који припада Ω, функције $x \mapsto u(x + iy)$ и $x \mapsto v(x + iy)$, су апсолутно непрекидне на $[a, b]$, за скоро све $y \in [c, d]$, односно функције $y \mapsto u(x + iy)$ и $y \mapsto v(x + iy)$, су апсолутно непрекидне на $[c, d]$, за скоро све $x \in [a, b]$,

Теорема 1.4.6. *Геометријска и аналитичка дефиниција квазиконформности су еквивалентне.*

Глава 2

Хармонијска пресликавања

Хармонијска пресликавања су настала као природна уопштења аналитичких, односно, конформних пресликавања. Ми ћемо се углавном концентрисати на својства једнолисних хармонијских пресликавања. У односу на аналитичка пресликавања, хармонијска не чине чак ни алгебру, јер композиција два таква пресликавања не мора бити хармонијско. Међутим, иста су била предмет интересовања великог броја истакнутих математичара и нашла су примене у многим областима математике и физике. Многи класични резултати из геометријске теорије функција пренети су и у случају хармонијских пресликавања.

2.1 Увод

У овој секцији ћемо поновити нека од основних тврђења на која ћемо се често позивати. Једно од њих је и раванска верзија теореме униформизације, тј. Риманова теорема. Међутим, пре тога, подсетимо се неких важних својстава аналитичких пресликавања, водећи при томе рачуна о особинама домена равни између којих иста делују.

За дату област $\Omega \subset \mathbb{C}$ означићемо са $\mathcal{H}(\Omega)$ скуп свих оних функција $f : \Omega \to \mathbb{C}$ које су аналитичке у Ω. Особине тог простора ћемо груписати у неколико познатих тврђења. Прво од њих је Вајерштрасова теорема.

Теорема 2.1.1. (**Вајерштрасова теорема, [55]**) *Ако низ* (f_n), $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, *равномерно, кад* $n \to +\infty$, *на компактним подскуповима у* Ω *конвергира ка функцији* f, *тада је функција* f *аналитичка у* Ω. *При томе, и низ* (f_n'), $n \in \mathbb{N}$, *равномерно, кад* $n \to +\infty$, *на компактним подскуповима у* Ω *конвергира ка функцији* f'.

Дефиниција 2.1.1. За фамилију функција $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ кажемо да је нормална у Ω, односно компактна у Ω, ако се из сваког низа (f_n), $f_n \in \mathfrak{F}$, $n \in \mathbb{N}$, може издвојити подниз (f_{n_k}), $k \in \mathbb{N}$, који конвергира равномерно на компактним подскуповима у Ω, кад $k \to +\infty$. Иста је равномерно ограничена, ако за сваки компактан скуп $K \subset \Omega$ постоји константа $M(K) > 0$, тако да је $|f(z)| \leqslant M(K)$, за свако $z \in K$ и свако $f \in \mathfrak{F}$.

Теорема 2.1.2. (**Монтелова теорема, [55]**) *Свака равномерно ограничена фамилија функција* $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ *је нормална.*

Две области комплексне равни су конформно еквивалентне, уколико постоји $1-1$, тј. једнолисно, аналитичко пресликавање једне области на другу. На основу теореме о инверзној функцији и чињенице да су неконстантна аналитичка пресликавања отворена, закључујемо да је и инверзно пресликавање истог, такође, аналитичко пресликавање. Иначе, једна од најважнијих теорема у основном курсу комплексне анализе је чувена Риманова теорема, која нам обезбеђује конформну еквивалентност правих, у смислу инклузије, просто повезаних домена комплексне равни.

Теорема 2.1.3. ([**55**]) *Нека је* $G \subset \mathbb{C}$ *дата просто повезана област у равни. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

(а) G *је просто повезана област.*

(б) *Скуп* $\overline{\mathbb{C}} - G$ *је повезан.*

(ц) *Свака аналитичка функција у области* G *има у тој области примитивну функцију.*

(д) *За сваку аналитичку функцију* $f : G \to \mathbb{C}$, $f(z) \neq 0$, $z \in G$, *постоји аналитичка функција* $g : G \to \mathbb{C}$, *са особином да је* $f(z) = e^{g(z)}$, *за свако* $z \in G$.

(е) *Свака реална хармонијска функција* u *у области* G *је реални део неке аналитичке функције у тој области.*

Напомена 2.1.1. Уколико се за дату реалну хармонијску функцију u у некој области $\Omega \subset \mathbb{C}$, може наћи реална хармонијска функција v у тој области, таква да је функција $f = u + iv$ аналитичка у Ω, казаћемо да је тада функција v хармонијски конјугована функцији u. Очигледно је функција $-u$ хармонијски конјугована функцији v у поменутој области, као и да у просто повезаној облсти $G \subset \mathbb{C}$ свака реална хармонијска функција има одговарајућу хармонијски конјуговану (детаљи се могу наћи у наредном поглављу).

Теорема 2.1.4. (**Риманова теорема,** [**55**]) *Нека је* $D \subset \mathbb{C}$ *просто повезана област различита од целе равни, тј. она чија граница у* $\overline{\mathbb{C}}$ *садржи барем две тачке, и* $z_0 \in D$ *произвољна тачка те области. Тада постоји и јединствено* *је одређено конформно пресликавање φ области D на јединични диск $\mathbb{D}$, за које је $\varphi(z_0) = 0$ и $\varphi'(z_0) > 0$.*

Дефиниција 2.1.2. Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ дата област. Кажемо да област Ω има регуларну границу класе C^∞, ако за сваку тачку $p \in \partial\Omega$ постоји околина U_p те тачке, као и дифеоморфизам $\varphi : U_p \to V_p \subset \mathbb{C}$, класе C^∞, који исту пресликава на околину V_p тачке $\varphi(p) = 0$, за који је $\varphi(U_p \cap \overline{\Omega}) = V_p \cap \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \leqslant 0\}$ и $J_\varphi(z) > 0$, $z \in U_p$.

Теорема 2.1.5. ([**5**]) *Нека је D ограничен просто повезани домен комплексне равни са регуларном границом класе C^∞. Ако је f једнолисно аналитичко пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на D, тада се пресликавање f, али и одговарајући пацијални изводи истог, могу непрекидно проширити на $\overline{\mathbb{D}}$. Штавише, инверзно пресликавање f^{-1}, заједно са својим парцијалним изводима, допуштају непрекидно проширење на $\overline{D}$.*

2.2 Хармонијска пресликавања

За комплексну функцију $f : z \mapsto f(z) = u(z) + iv(z)$, $u(z) = \operatorname{Re}(f(z))$, $v(z) = \operatorname{Im}(f(z))$, $z = x + iy \in \Omega$, дефинисану и класе C^2 у датој области $\Omega \subset \mathbb{C}$, кажемо да је хармонијска у тој области ако су функције u и v реалне хармонијске функције области Ω, односно, ако важи

$$(\triangle u)(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) = 0$$

као и

$$(\triangle v)(z) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(z) = 0,$$

за свако $z \in \Omega$.

Благодарећи Коши-Римановим условима, свака аналитичка функција у области Ω уједно је и хармонијска у тој области. Обрнуто свакако не важи.

Многе познате особине аналитичких функција могу бите пренете и у случају хармонијских функција.

Пропозиција 2.2.1. *Нека је f хармонијска функција у просто повезаној области $\Omega \subset \mathbb{C}$ и нека је $z_0 \in \Omega$ произвољна тачка. Тада се f на јединствен начин може приказати у облику $f = h + \bar{g}$, где су h и g функције које су аналитичке у области Ω и $g(z_0) = 0$. Такву репрезентацију називамо канонском репрезентацијом функције f у области Ω односу на тачку z_0.*

Доказ: Како је функција f хармонијска у области Ω, то је функција f_z аналитичка у тој области. Са друге стране, област Ω је просто повезана, те у истој постоји примитивна функција h функције f_z, тј. она функција за коју је $h'(z) = f_z(z)$, $z \in \Omega$, која је одређена условом $h(z_0) = f(z_0)$. Отуда, за функцију $g(z) = \overline{f(z) - h(z)}$, $z \in \Omega$, важи да је $g_{\bar{z}}(z) = \overline{f_z(z) - h'(z)} = 0$, за свако $z \in \Omega$, одакле закључујемо да је функција g аналитичка у Ω. При томе је, свакако, $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, $z \in \Omega$, као и $g(z_0) = \overline{f(z_0) - h(z_0)} = 0$. $\square$

Функција h се често назива аналитички део функције f, док се за функцију g каже да је њен антианалитички део.

Нека је u реална хармонијска функција у области $\Omega \subset \mathbb{C}$. За тачку $z_0 \in \Omega$ кажемо да је критична тачка функције u ако је $\dfrac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(z_0) = 0$. Уколико тачка $z_0 \in \Omega$ није критична, називаћемо је регуларном тачком функције u.

Лема 2.2.2. *Нека је u неконстантна реална хармонијска функција у области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Тада су све критичне тачке функције u изоловане.*

Доказ: Функција $u_z : z \mapsto u_z(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z)\right)$, $z = x + iy \in \Omega$, је аналитичка у Ω, јер је u хармонијска. Дакле, ако је z_0 критична тачка функције u, тада ће тачка z_0 бити нула аналитичке функције u_z, чије су нуле свакако изоловане, осим у случају $u_z(z) = 0$, за свако $z \in \Omega$, тј. када је функција u константна у Ω. □

Лема 2.2.3. *Нека је u неконстантна реална хармонијска функција у области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Претпоставимо да је z_0 критична тачка функције u и да је $u(z_0) = a \in \mathbb{R}$. Тада, се скуп $\{z \in \Omega : u(z) = a\}$, локално, тј. у околини тачке z_0, састоји од трагова две или више аналитичких кривих, које се под једнаким угловима секу у тачки z_0.*

Доказ: Не мењајући општост тврђења, претпоставимо да је $\Omega \ni z_0 = 0$, као и да је $a = u(0) = 0$. Ако са f означимо аналитичку функцију у погодно одабраној просто повезаној околини $V \subset \Omega$ тачке 0, за коју је $u(z) = \mathrm{Re}(f(z))$, $z \in V$, тада је $f'(0) = 0$, јер је тачка 0 критична тачка функције u.

Претпоставимо, даље, да је $f(0) = u(0) = 0$, што једноставно постижемо избором функције која је хармонијски конјугована функцији u у околини V. Тада, постоји $r > 0$ такво да је $f(z) = z^n\psi(z)$, за свако $z \in D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\} \subset V$, $\mathbb{N} \ni n \geqslant 2$, где је ψ аналитичка функција у диску D_r која је различита од нуле. Нека је φ било која регуларна грана вишезначне функције $z \mapsto \sqrt[n]{\psi(z)}$ у D_r. Тада важи $f(z) = (z\varphi(z))^n$, $z \in D_{r'} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r'\}$, за $0 < r' < r$, одакле, једноставним аргументом, тј. преласком на одговарајућа инверзна пресликавања, добијамо жељени резултат. □

На наредну теорему ћемо се врло често позивати у тексту.

Теорема 2.2.4. (**Леви, [38]**) *Нека је f хармонијска функција у области $\Omega \subset \mathbb{C}$ која је локално једнолисна, тј. локално $1{-}1$, у тој области. Тада је $J_f(z) \neq 0$, за свако $z \in \Omega$.*

Доказ: Нека је $f(z) = u(z) + iv(z)$, $z \in \Omega$. Претпоставимо да постоји нека тачка $z_0 \in \Omega$ за коју је $J_f(z_0) = 0$ и да је, без умањења општости, $u(z_0) = v(z_0) = 0$, тј. $f(z_0) = 0$. Тада хомоген систем линеарних једначина, са непознатим променљивама a и b,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) \cdot a + \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \cdot b \\ 0 &= \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \cdot a + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \cdot b \end{aligned}$$

има нетривијално решење $(a, b) \neq (0, 0)$, па је за неконстантну реалну хармонијску функцију $w(z) = au(z) + bv(z)$, $z \in \Omega$, тачка z_0 критична. Посматрајмо сада скуп $\{z \in \Omega : w(z) = w(z_0) = 0\}$. Локално, тј. у околини тачке z_0, тај скуп се састоји, на основу леме 2.2.3, од трагова најмање две аналитичке криве које се секу у тачки z_0. Са друге стране, слика тог скупа функцијом f припада правој $au + bv = 0$. Међутим, функција f је локално једнолисна, па постоји околина тачке z_0 у којој је f $1 - 1$, одакле добијамо контрадикцију. □

Према томе, тачно је и следеће тврђење.

Теорема 2.2.5. *Једина $1 - 1$ хармонијска пресликавања комплексне равни $\mathbb{C}$*

на себе су афина, тј. она која су облика $f(z) = \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \neq |\beta|$.

Доказ: Применом леме 2.2.1, функцију f можемо записати у облику $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, $g(0) = 0$, $z \in \mathbb{C}$, где су f и g целе функције, тј. аналитичке у $\mathbb{C}$. Лема 2.2.4 нам обезбеђује да је јакобијан пресликавања f различит од нуле у $\mathbb{C}$, па можемо претпоставити да је $J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 > 0$, за свако $z \in \mathbb{C}$, тј. да пресликавање f чува оријентацију. Специјално, $h'(z) \neq 0$, за свако $z \in \mathbb{C}$, одакле добијамо да је функција $\nu(z) = \dfrac{g'(z)}{h'(z)}$ аналитичка у $\mathbb{C}$ и $|\nu(z)| < 1$, $z \in \mathbb{C}$, па је $\nu(z) = a$, $|a| < 1$, за свако $z \in \mathbb{C}$. Отуда, $g(z) = ah(z) + b$, где је $b \in \mathbb{C}$, па је $f(z) = h(z) + \overline{a}\overline{h(z)} + \overline{b} = (H \circ h)(z)$, где је $H(w) = w + \overline{a}\,\overline{w} + \bar{b}$, $z \in \mathbb{C}$. Пресликавање H је једнолисно афино пресликавање комплексне равни на себе, јер је $|a| < 1$, чији је инверз H^{-1} такође афино, одакле добијамо да је пресликавање $h(z) = (H^{-1} \circ f)(z)$ једно $1-1$ аналитичко пресликавање комплексне равни на себе, па је облика $h(z) = \alpha z + \beta$, $z \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, што повлачи да је тврђење испуњено. □

Подсетићемо се сада неких важних резултата из класичне теорије аналитичких функција.

Дефиниција 2.2.1. Нека су f и g аналитичке функције на $\mathbb{D}$. Кажемо да је f квази-субординирана функцији g и пишемо $f \ll g$, ако постоји аналитичка функција $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ за коју је $|f(z)| \leqslant |g(\varphi(z))|$, за свако $z \in \mathbb{D}$, али и $|\varphi(z)| \leqslant |z| < 1$, $z \in \mathbb{D}$.

Очигледно је да важи $f \ll g$ ако и само ако постоје функције w и φ, које су аналитичке на јединичном диску $\mathbb{D}$, за које је $|w(z)| \leqslant 1$, $|\varphi(z)| \leqslant |z|$ и $f(z) = w(z)g(\varphi(z))$, за свако $z \in \mathbb{D}$.

За функције са наведеном особином важе следећа тврђања.

Теорема 2.2.6. *Нека су f и g аналитичке функције у јединичном диску $\mathbb{D}$ и нека је $f \ll g$. Тада, за свако $0 \leqslant r < 1$ важи*

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Доказ: За $r = 0$ нема шта да се доказује. Фиксирајмо зато r, $0 < r < 1$, и изаберимо произвољно ρ, $0 < \rho < r$. Нека је $\zeta = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Тада је

$$g^2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^2(\zeta) \operatorname{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) d\theta,$$

за свако $z \in D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Зато је и

$$|f(z)|^2 \leqslant |g(\varphi(z))|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(\zeta)|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{\zeta + \varphi(z)}{\zeta - \varphi(z)}\right) d\theta,$$

јер функција φ задовољава $|\varphi(z)| \leqslant |z| < r = |\zeta|$. Интегралећи последњу неједнакост по кружници $\gamma_\rho : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z = \rho e^{it}$, $0 < \rho < r$, добијамо

$$\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 dt \leqslant \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta,$$

за свако $0 < \rho < r < 1$, јер је

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{\zeta + \varphi(\rho e^{it})}{\zeta - \varphi(\rho e^{it})}\right) dt = \operatorname{Re}\left(\frac{\zeta + \varphi(0)}{\zeta - \varphi(0)}\right) = 1.$$

Неједнакост сада тривијално следи преласком на граничну вредност кад $\rho \to r_-$. □

Теорема 2.2.7. *Нека су f, $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ аналитичке функције и нека је $f \ll g$. Тада важи*

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} |b_k|^2,$$

за свако $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где су $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ и $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, редом, одговарајући Тејлорови развоји функција f и g у диску $\mathbb{D}$.

Доказ: Нека је $f(z) = w(z)g(\varphi(z))$, $z \in \mathbb{D}$. Тада је

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k - w(z) \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \varphi(z)^k$$
$$= w(z) \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi(z)^k = H(z),$$

за свако $z \in \mathbb{D}$. Како је сада функција H квази-субординирана функцији $\sum_{k=0}^{n} b_k z^k$, $z \in \mathbb{D}$, то је на основу Парсевалове формуле и претходне теореме, за свако $0 \leqslant r < 1$, испуњено

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 r^{2k} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| w(re^{i\theta}) \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi^k(re^{i\theta}) \right|^2 d\theta$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} |r^k b_k e^{ik\theta}|^2 d\theta = \sum_{k=0}^{n} |b_k|^2 r^{2k},$$

кад год је $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Резултат сада тривијално следи преласком на граничну вредност, кад $r \to 1_-$. □

Последица 2.2.8. *Нека је $f = h + \bar{g} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ локално $1 - 1$ хармонијско пресликавање које чува оријентацију, при чему функције h и g дефинишу канонску репрезентацију пресликавања f у јединичном диску $\mathbb{D}$ у односу на тачку $z = 0$, и нека је $f(0) = 0$. Тада је*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 |b_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^2 |a_k|^2,$$

за свако $n \in \mathbb{N}$, где су $h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ и $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$, редом, одговарајући Тејлорови развоји функција h и g у том диску.

Доказ: Очигледно је $h(0) = 0$, јер је $g(0) = 0$, па су оправдане формуле за развој аналитичког и антианалитичког дела пресликавања f. Како је

$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 > 0$, за свако $z \in \mathbb{D}$, то је функција $w(z) = \dfrac{g'(z)}{h'(z)}$ аналитичка у $\mathbb{D}$ и важи $|w(z)| < 1$, $z \in \mathbb{D}$. Међутим, како је $g' \ll h'$ и

$$h'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n,$$

односно,

$$g'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) b_{n+1} z^n,$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, закључујемо да тврђење постаје непосредна последица претходног. □

2.3 Шварцова лема за обична хармонијска пресликавања

У жељи да докажемо тврђење које ће нам описати понашање парцијалних извода датог хармонијског пресликавања, прво ћемо доказати следећу лему, а након тога и Шварцову лему за хармонијска пресликавања.

Лема 2.3.1. *Нека је* $|x| < \dfrac{\pi}{4}$, *тада је* $|\tan z| \geqslant \tan |x|$, $z = x + iy$.

Доказ: Доказ тврђења тривијално следи из својства елементарних функција. Заиста, важи,

$$\begin{aligned} |\tan z|^2 - \tan^2 |x| &= |\tan z|^2 - |\tan x|^2 \\ &= \frac{\sin^2 x + \sinh^2 y}{\cos^2 x + \sinh^2 y} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos 2x \sinh^2 y}{(\cos^2 x + \sinh^2 y)\cos^2 x} \geqslant 0, \end{aligned}$$

за свако $z = x + iy$, $|x| < \dfrac{\pi}{4}$. □

Лема 2.3.2. (**Шварцова лема, [13]**) *Нека је* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *хармонијско пресликавање и нека је* $f(0) = 0$*. Тада важи*

$$|f(z)| \leqslant \frac{4}{\pi} \arctan |z|, \tag{2.3.1}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$*, која се достиже.*

Доказ: Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$ произвољно. Функција $\tilde{f}(z) = e^{-i\alpha} f(z) = \tilde{u}(z) + i\tilde{v}(z)$ је такође хармонијска у $\mathbb{D}$, те је реални део исте, тј. функција $\tilde{u}$, реална хармонијска функција у $\mathbb{D}$. Означимо са g аналитичку функцију у $\mathbb{D}$, за коју је $\operatorname{Re}(g(z)) = \tilde{u}(z)$, $z \in \mathbb{D}$, и $g(0) = 0$. Очигледно је $|\tilde{f}(z)| < 1$, $z \in \mathbb{D}$, па је $|\operatorname{Re}(g(z))| < 1$, за свако $z \in \mathbb{D}$. Са друге стране, функција $w \mapsto \tan w$, $|\operatorname{Re} w| < \frac{\pi}{4}$, конформно пресликава вертикални појас $\left\{ w \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} w| < \frac{\pi}{4} \right\}$ на јединични диск $\mathbb{D}$, одакле закључујемо да ће за функцију

$$G(z) = \tan(\frac{\pi}{4} g(z)), \; z \in \mathbb{D},$$

важити да је аналитичка у $\mathbb{D}$, $G(0) = 0$ и $|G(z)| < 1$, $z \in \mathbb{D}$. Применом Шварцове леме добијамо да је за свако $z \in \mathbb{D}$ испуњено

$$|G(z)| = |\tan(\frac{\pi}{4} g(z))| \leqslant |z|.$$

Међутим, лема 2.3.1 нам обезбеђује да је и

$$|G(z)| = |\tan(\frac{\pi}{4} g(z))| \geqslant \tan |\operatorname{Re}(\frac{\pi}{4} g(z))| = \tan(\frac{\pi}{4} |\operatorname{Re}(g(z))|),$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, тј.

$$|\operatorname{Re}(g(z))| \leqslant \frac{4}{\pi} \arctan |z|, \; z \in \mathbb{D}. \tag{2.3.2}$$

Нека је сада $z_0 \in \mathbb{D}$ произвољно. Означимо са $\alpha_0 = \arg(f(z_0)) \in [0, 2\pi)$. Тада је $|f(z_0)| = e^{-i\alpha_0} f(z_0)$, па је, на основу претходне неједнакости, испуњено $|f(z_0)| \leqslant \frac{4}{\pi} \arctan |z_0|$. □

2.4 Хајнцова неједнакост и њене последице

Хармонијска пресликавања имају много значајних геометријских својстава. Овде ћемо навести нека, која су многим математичарима послужила као полазна основа за даља истраживања.

Теорема 2.4.1. (**Хајнц, [18]**) *Нека је f једнолисно хармонијско пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на себе и нека је $f(0) = 0$. Тада важи*

$$|f_x(z)|^2 + |f_y(z)|^2 \geqslant \frac{2}{\pi^2}, \tag{2.4.1}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$. Специјално, $|f_z(z)|^2 + |f_{\bar{z}}(z)|^2 \geqslant \dfrac{1}{\pi^2}$, $z \in \mathbb{D}$.

Доказ: Претпоставимо, најпре, да је функција f, заједно са својим парцијалним изводима $f_x : z \mapsto f_x(z)$ и $f_y : z \mapsto f_y(z)$, $z \in \mathbb{D}$, непрекидна на $\overline{\mathbb{D}}$. Тада су и одговарајући парцијални изводи функције f, у односу на z и $\bar{z}$ такође непрекидне функције на $\overline{\mathbb{D}}$. На основу леме 2.2.4, јакобијан $J_f : z \mapsto J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2$, $z \in \mathbb{D}$, пресликавања f се не анулира у $\mathbb{D}$, па можемо претпоставити да је позитиван на $\mathbb{D}$, тј. да је $|f_z(z)| > |f_{\bar{z}}(z)|$, $z \in \mathbb{D}$, односно, да пресликавање f чува оријентацију. Такође, како је f хармонијско пресликавање, то је функција f_z аналитичка у $\mathbb{D}$ и важи $|f_z(z)| > 0$, за свако $z \in \mathbb{D}$, јер је испуњено $0 < J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2 \leqslant |f_z(z)|^2$, $z \in \mathbb{D}$. Даље је, на основу принципа минимума модула за аналитичке функције, такође испуњено

$$|f_z(z)| \geqslant \min\{|f_z(e^{i\theta})| : 0 \leqslant \theta < 2\pi\}, \tag{2.4.2}$$

кад год је $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

Нека је, сада, $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Тада, на основу леме 2.3.2, важи

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})}{1-r}\right| &\geqslant \frac{||f(e^{i\theta})| - |f(re^{i\theta})||}{1-r}\\ &= \frac{1 - |f(re^{i\theta})|}{1-r}\\ &\geqslant \frac{1 - \dfrac{4}{\pi}\arctan r}{1-r}, \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

јер је, према полазној претпоставци, $|f(e^{i\theta})| = 1$, за свако $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Такође, на основу непрекидности одговарајућих парцијалних извода функције f на $\overline{\mathbb{D}}$ и очигледне једнакости

$$\frac{\partial f}{\partial r}(re^{i\theta}) = f_z(re^{i\theta})e^{i\theta} + f_{\bar{z}}(re^{i\theta})e^{-i\theta},\ z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} - \{0\},$$

закључујемо да постоји коначан $\lim\limits_{r\to 1_-} \dfrac{\partial f}{\partial r}(re^{i\theta}) = \dfrac{\partial f}{\partial r}(e^{i\theta})$, за свако $0 \leqslant \theta < 2\pi$, који је једнак $\dfrac{\partial f}{\partial r}(e^{i\theta}) = f_z(e^{i\theta})e^{i\theta} + f_{\bar{z}}(e^{i\theta})e^{-i\theta}$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, одакле, користећи неједнакост (2.4.3), те преласком на граничну вредност, кад $r \to 1_-$, добијамо да је

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial r}(e^{i\theta})\right| &= |f_z(e^{i\theta})e^{i\theta} + f_{\bar{z}}(e^{i\theta})e^{-i\theta}|\\ &\leqslant |f_z(e^{i\theta})| + |f_{\bar{z}}(e^{i\theta})| \leqslant 2|f_z(e^{i\theta})|,\end{aligned}$$

тј. $|f_z(e^{i\theta})| \geqslant \dfrac{1}{\pi}$, за свако $0 \leqslant \theta < 2\pi$, јер је $|f_z(z)| > |f_{\bar{z}}(z)|$, $z \in \mathbb{D}$, па је и $|f_z(e^{i\theta})| \geqslant |f_{\bar{z}}(e^{i\theta})|$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Дакле, кад год је $0 \leqslant \theta < 2\pi$, имамо да је $|f_z(e^{i\theta})| \geqslant \dfrac{1}{\pi}$, одакле, применом неједнакости (2.4.2), важи

$$|f_z(z)| \geqslant \min\{|f_z(e^{i\theta})| : 0 \leqslant \theta < 2\pi\} \geqslant \frac{1}{\pi},\ z \in \mathbb{D},$$

а самим тим и

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \leqslant |f_z(z)| = \frac{1}{2}|f_x(z) - if_y(z)| \\ \leqslant \frac{|f_x(z)| + |f_y(z)|}{2} \\ \leqslant \sqrt{\frac{|f_x(z)|^2 + |f_y(z)|^2}{2}},\end{aligned}$$

тј.

$$|f_x(z)|^2 + |f_y(z)|^2 \geqslant \frac{2}{\pi^2},\ z = x + iy \in \mathbb{D}. \tag{2.4.4}$$

Најзад, посматрајмо пресликавање f које задовољава задате услове теореме. Како је f једнолисно и хармонијско пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на себе, оно је и дифеоморфизам истог, што произилази из теореме 2.2.4, односно, инвертибилности Јакобијеве матрице тог пресликавања. Стога, јасно је да постоји монотоно растући низ (r_n), $0 < r_n < 1$, $n \geqslant 2$, такав да је $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 1$, са својством да се диск $\{w \in \mathbb{C} : |w| < r_n\}$, за фиксирано n, инверзним пресликавањем датог пресликавања f пресликава на просто повезани Жорданов домен D_n, за који важи

$$\left\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1 - \frac{1}{n}\right\} \subset D_n \subset \mathbb{D},\ n \geqslant 2. \tag{2.4.5}$$

Отуда, применом Риманове теореме постоји и јединствено је одређен низ (g_n) функција, $g_n : \mathbb{D} \to D_n$, $n \geqslant 2$, које конформно пресликавају јединични диск $\mathbb{D}$ на D_n, за које је $g_n(0) = 0$ и $g_n'(0) > 0$, $n \geqslant 2$. Такође, на основу теореме 2.1.5, имамо да се свака од функција g_n, $n \geqslant 2$, али и сви њени парцијални изводи, могу проширити до непрекидних пресликавања на $\overline{\mathbb{D}}$. Стога, функција $\tilde{g}_n : \zeta \mapsto \dfrac{f(g_n(\zeta))}{r_n}$, $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{D}$, хармонијски и једнолисно пресликава диск $\mathbb{D}$ на себе, $g_n(0) = 0$ и има, заједно са својим парцијалним изводима, непрекидно проширење на $\overline{\mathbb{D}}$, одакле, на основу првог дела доказа, налазимо да је

$$\begin{aligned}\frac{|g_n'(\zeta)|^2}{r_n^2}&(|f_x(g_n(\zeta))|^2 + |f_y(g_n(\zeta))|^2)\\ &= |(\tilde{g}_n)_\xi(\zeta)|^2 + |(\tilde{g}_n)_\eta(\zeta)|^2 \geqslant \frac{2}{\pi^2},\end{aligned}$$

односно,

$$|f_x(g_n(\zeta))|^2 + |f_y(g_n(\zeta))|^2 \geqslant \frac{2r_n^2}{\pi^2|g_n'(\zeta)|^2}, \tag{2.4.6}$$

за свако $\zeta \in \mathbb{D}$, $n \geqslant 2$.

Даље, како је $|g_n(\zeta)| < 1$, $|\zeta| < 1$, $n \geqslant 2$, то је низ функција (g_n) униформно ограничен на $\mathbb{D}$, те стога, на основу Монтелове теореме, можемо издвојити подниз (g_{n_k}), $k \in \mathbb{N}$, тог низа који униформно на компактим подскуповима унутар $\mathbb{D}$ конвергира ка аналитичкој функцији $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$. При томе, низ (g_{n_k}) униформно на компактима конвергира ка g'. Очигледно је $g(0) = 0$, одакле следи, користећи униформну ограниченост низа (g_n) и принцип максимума модула аналитичке функције, да је и $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Међутим, на основу релације (2.4.5), применом принципа максимума модула на аналитичку функцију $F : \zeta \mapsto (1-\dfrac{1}{n_k})\dfrac{\zeta}{g_{n_k}(\zeta)}$, $\zeta \in \mathbb{D}-\{0\}$, $F(0) = (1-\dfrac{1}{n_k})\dfrac{1}{g_{n_k}'(0)}$, те применом Шварцове леме на пресликавање g_{n_k}, добијамо да је

$$\left(1 - \frac{1}{n_k}\right)|\zeta| \leqslant |g_{n_k}(\zeta)| \leqslant |\zeta|,\ \zeta \in \mathbb{D}, \tag{2.4.7}$$

као и $|g_{n_k}'(0)| \geqslant (1 - \dfrac{1}{n_k})$, за свако $k \in \mathbb{N}$. Специјално, $g'(0) = \lim\limits_{k\to+\infty} g_{n_k}'(0) = 1$, одакле, на основу Шварцове леме, добијамо да је $g(z) = z$, $z \in \mathbb{D}$. Дакле, низ (g_{n_k}') униформно на компактима у $\mathbb{D}$ конвергира ка функцији која је идентички једнака 1 у $\mathbb{D}$.

Коначно, ако је $z \in \mathbb{D}$ произвољна тачка. Тада постоје $k_0 \in \mathbb{N}$ и $0 < \rho < 1$ такви да је $\dfrac{|z|}{1 - \dfrac{1}{n_k}} \leqslant \rho < 1$, $k \geqslant k_0$, па важи $z \in D_{n_k}$, $k \geqslant k_0$. Нека је (ζ_k), $k \geqslant k_0$, низ тачака у $\mathbb{D}$ за који је $g_{n_k}(\zeta_k) = z$, $k \geqslant k_0$. На основу неједнакости (2.4.7) добијамо да важи $|\zeta_k| \leqslant \dfrac{|g_{n_k}(\zeta_k)|}{1 - \dfrac{1}{n_k}} = \dfrac{|z|}{1 - \dfrac{1}{n_k}} \leqslant \rho < 1$, $k \geqslant k_0$.

Користећи раније добијену неједнакост (2.4.6) и чињеницу да низ (g'_{n_k}) униформно на компакту $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leqslant \rho\}$ тежи ка $g'(\zeta) = 1$, $\zeta \in \mathbb{D}$, преласком на граничну вредност, када $k \to \infty$, добијамо тврђење. □

Као последицу издвајамо једно битно тврђење.

Теорема 2.4.2. (**Радо, [13]**) *Не постоји једнолисно хармонијско пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на $\mathbb{C}$.*

Доказ: Нека је $R > 0$ произвољно и $D_R = \{w \in \mathbb{C} : |w| < R\}$. Претпоставимо, сада, да постоји једнолисно хармонијско пресликавање f јединичног диска $\mathbb{D}$ на $\mathbb{C}$ и без умањења општости нека је $f(0) = 0$. Означимо са $\Omega_R = f^{-1}(D_R) \subset \mathbb{D}$ одговарајућу просто повезану област која се пресликавањем f пресликава на D_R. На основу Риманове теореме, постоји конформно пресликавање $\varphi : \zeta \mapsto \varphi(z) \in \Omega_R$, $\zeta \in \mathbb{D}$, тј. $1-1$ аналитичко, јединичног диска $\mathbb{D}$ на Ω_R, за које је $\varphi(0) = 0$. Стога, композиција F, задата са $F(\zeta) = \dfrac{f(\varphi(\zeta))}{R}$, $\zeta \in \mathbb{D}$, дефинише једно $1-1$ хармонијско пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на себе, за које важи $F(0) = 0$, те применом теореме

2.4.1, тј. неједнакости (2.4.1), добијамо да је

$$\begin{aligned}&|F_\zeta(0)|^2 + |F_{\bar\zeta}(0)|^2\\ = &\frac{1}{R^2}(|f_z(0)\varphi'(0)|^2 + |f_{\bar z}(0)\overline{\varphi'(0)}|^2)\\ = &\frac{|\varphi'(0)|^2}{R^2}(|f_z(0)|^2 + |f_{\bar z}(0)|^2) \geqslant \frac{1}{\pi^2},\end{aligned}$$

односно, $|f_z(0)|^2 + |f_{\bar z}(0)|^2 \geqslant \dfrac{R^2}{|\varphi'(0)|^2\pi^2} \geqslant \dfrac{R^2}{\pi^2}$, јер је, на основу Шварцове леме, $|\varphi'(0)| \leqslant 1$. Међутим, како је $R > 0$ произвољно, за довољно велико R долазимо до контрадикције. □

Последица 2.4.3. *Нека је $D \subset \mathbb{C}$ просто повезана област различита од $\mathbb{C}$. Тада не постоји $1-1$ хармонијско пресликавање области D на $\mathbb{C}$.*

Глава 3

Риманове површи

У математици, а посебно у теорији функција једне комплексне променљиве, Риманове површи заузимају значајно место. Оне представљају једнодимензионалне комплексне многострукости и представљају природни амбијент за проучавање особина аналитичких функција. Иако се тај појам појављује још у радовима Римана, формалну дефиницију појма Риманове површи је први формулисао Вејл (видети [59]).

3.1 Основни појмови и дефиниције

Дефиниција 3.1.1. Риманова површ је повезан Хаусдорфов тополошки простор R, заједно са отвореним покривачем $\{U_\nu\}$ и системом хомеоморфизама $\{h_\nu\}$, $h_\nu : U_\nu \to h_\nu(U_\nu) = V_\nu$, који отворене скупове U_ν пресликавају на отворене скупове $V_\nu \subset \mathbb{C}$, при чему, кад год је $U_\mu \cap U_\nu \neq \emptyset$, пресликавање дефинисано са

$$h_\nu \circ h_\mu^{-1} : h_\mu(U_\mu \cap U_\nu) \to h_\nu(U_\mu \cap U_\nu), \tag{3.1.1}$$

је аналитичко.

Из дефиниције се јасно види да су Риманове површи једнодимензионалне комплексне многострукости, односно, оријентабилне дводимензионалне реалне многострукости. За колекцију парова $\{(U_\nu, h_\nu)\}$, које ћемо називати локалним картама на површи R, кажемо да дефинишу комплексну структуру на тој површи и, уколико не буде од пресудног значаја о којој структури је реч, Риманову површ ћемо означавати са R, односно, са $(R, \{(U_\nu, h_\nu)\})$. Такође, колекцију локалних карата $\{(U_\nu, h_\nu)\}$ ћемо често називати атласом на Римановој површи R.

Нека је (U_ν, h_ν), $h_\nu(U_\nu) = V_\nu \subset \mathbb{C}$, локална карта на површи R. Параметар $z_\nu \in V_\nu$ ћемо називати локалним параметром тачака на површи R. На основу релације (3.1.1) закључујемо да се прелазак из једног локалног параметра на други, под условом да то има смисла, остварује преко $1-1$ аналитичких пресликавања. Пресликавање које остварује тај прелазак ћемо називати транзиционим пресликавањем између одговарајућих параметара.

Означимо са U произвољан отворен скуп на површи R, односно, са h хомеоморфизам тог скупа на неки отворен скуп $V \subset \mathbb{C}$. Рећи ћемо да је пар (U, h) компатибилан са задатом комплексном структуром $\{(U_\nu, h_\nu)\}$ на површи R, ако додавањем тог пара колекцији $\{(U_\nu, h_\nu)\}$, проширена колекција и даље чини комплексну структуру на R. Две комплексне структуре на Римановој површи R називају се еквивалентним, уколико њихова унија чини комплексну структуру на површи R, тј. уколико је сваки пар из прве колекције компатибилан са сваким паром из друге колекције и обрнуто. Такве комплексне структуре сматраћемо истим.

На основу претходног, задату комплексну структуру $\{(U_\nu, h_\nu)\}$ можемо обогатити свим могућим компатибилним паровима (U, h). Овако проширена структура је очигледно еквивалентна са полазном. Означимо добијену проширену структуру, поново, са $\{(U_\nu, h_\nu)\}$ и назовимо је максималном комплексном структуром на површи R, односно, максималним атласом. Тада, две Риманове површи $(R_1, \{(U_\nu, h_\nu)\})$ и $(R_2, \{(W_\mu, g_\mu)\})$ сматрамо есенцијално истим, уколико су им одговарајући максимални атласи идентични.

Пример 3.1.1. (а) Нека је задата произвољна област $D \subset \mathbb{C}$. Пар (D, h), где је $h : z \mapsto z$, $z \in D$, идентичко пресликавање, дефинише једну комплексну структуру на D, што нам омогућава да област D третирамо као Риманову површ.

(б) Нека је $R = \overline{\mathbb{C}}$. Колекција $\{(U_i, h_i)\}$, $i = 1, 2$, где је $U_1 = \mathbb{C}$, $U_2 = \overline{\mathbb{C}} - \{0\}$, $h_1(z) = z$ и $h_2(w) = \dfrac{1}{w}$ очигледно дефинише комплексну структуру на $\overline{\mathbb{C}}$. При томе важи $(h_2 \circ h_1^{-1})(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \in h_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} - \{0\}$. Овако дефинисану површ ћемо звати Риманова сфера.

(ц) Сваки отворени подскуп Риманове површи је Риманова површ са, на уобичајени начин, наслеђеном конформном структуром.

(д) Нека су w_1 и w_2 комплексни бројеви различити од нуле за које је $\operatorname{Im} \dfrac{w_1}{w_2} \neq 0$. Дефинишимо релацију у скупу $\mathbb{C}$: $z_1 \sim z_2$ ако и само ако је $z_2 = z_1 + mw_1 + nw_2$, за неке m, $n \in \mathbb{Z}$. Очигледно је овим захтевом дефинисана једна релација еквиваленције у скупу $\mathbb{C}$. Означимо са $T = \tau(\mathbb{C})$, где је $\tau : z \mapsto [z]$, $z \in \mathbb{C}$, одговарајућа пројекција. Посматрајмо произвољан отворен скуп $W_\alpha \subset \mathbb{C}$ који не садржи нити један пар еквивалентних тачака.

Означимо са $U_\alpha = \tau(W_\alpha)$, односно, са $h_\alpha = (\tau|_{W_\alpha})^{-1}$, $z \in U_\alpha$. Колекција $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ дефинише једну комплексну структуру на T. Убудуће, такву Риманову површ ћемо називати торусом који је генерисан комплексним бројевима w_1 и w_2.

Претпоставимо да су R и S две унапред задате Риманове површи и да је $f : R \to S$ једно непрекидно пресликавање. Нека је P произвољна тачка површи R. За пресликавање f кажемо да је аналитичко у тачки P ако постоје локалне карте (U, h) око тачке P и (W, g) око тачке $f(P)$, $f(U) \subset W$, са локалним параметрима $z \in V = h(U) \subset \mathbb{C}$ и $w \in V' = g(W) \subset \mathbb{C}$, респективно, такве да је функција $w = F(z) = (g \circ f \circ h^{-1})(z)$, $z \in V$, аналитичка у тачки $h(P)$. Јасно је, с обзиром на релацију (3.1.1), да претходна дефиниција не зависи од избора локалних параметара око тача P и $f(P)$. Ако је пресликавање f аналитичко у свакој тачки површи R, зваћемо га аналитичким пресликавањем, односно, конформним пресликавањем, уколико је једнолисно. Такође, на потпуно исти начин се дефинишу пресликавања класе C^k, $k \in \mathbb{N}$, која делују између Риманових површи.

Дефиниција 3.1.2. За две Риманове површи кажемо да су конформно еквивалентне, ако постоји конформно пресликавање једне на другу површ.

3.2 Универзално наткривање

У дефиницији Риманове површи захтевано је да преласци између локалних параметара буду остварени уз помоћ $1-1$ аналитичких пресликавања. Међутим, уколико је песликавање $h_\nu \circ h_\mu^{-1} : h_\mu(U_\mu \cap U_\nu) \to h_\nu(U_\mu \cap U_\nu)$

непрекидно, говорићемо о тополошкој површи, односно, краће, о површи.

Под наткривајућом површи дате површи R подразумевамо пар $(\tilde{R}, \tau)$, где је $\tilde{R}$ површ и $\tau : \tilde{R} \to R$ сурјективно пресликавање које је локални хомеоморфизам. Пресликавање τ ћемо звати пројекцијом и кад год је $P \in R$ произвољно, за тачку $\tilde{P} \in \tau^{-1}(P)$ кажемо да лежи изнад тачке P. Уколико истицање одговарајуће пројекције није од пресудног значаја, наткривајућу површ ћемо означавати само са $\tilde{R}$ и називаћемо је наткривањем површи R.

Посматрајмо, даље, криву $\gamma : [0,1] \to R$ на површи R. Кажемо да је крива $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{R}$ наткрива криву γ, односно да је $\tilde{\gamma}$ лифтинг криве γ на површи $\tilde{R}$, ако је $\tau \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Ако је $\gamma(0) = P \in R$ и $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{P} \in \tilde{R}$, тада је тачка $\tilde{P}$ изнад тачке P и за криву $\tilde{\gamma}$ кажемо, још, да је лифтинг криве γ из тачке $\tilde{P}$.

Дефиниција 3.2.1. Наткривајућа површ $(\tilde{R}, \tau)$ дате површи R се назива регуларна наткривајућа површ, ако свака крива γ на површи R има лифтинг из било које тачке која лежи изнад иницијалне тачке те криве. У том случају, пресликавање $\tau : \tilde{R} \to R$ је сурјекција и кардиналност скупа $\tau^{-1}(P)$, $P \in R$, остаје иста променом тачке P.

Теорема 3.2.1. (**Теорема о монодромији, [2]**) *Нека је $\tilde{R}$ регуларно наткривање дате површи R. Претпоставимо да су γ_1 и γ_2 две хомотопне криве на површи R. Тада лифтинзи кривих γ_1 и γ_2 на површи $\tilde{R}$, из исте тачке, имају исту крајњу тачку и такође су хомотопни.*

Приметимо да је у случају регуларног наткривања просто повезане површи R пројекција τ хомеоморфизам.

У даљем тексту ћемо разматрати искључиво регуларне наткривајуће површи. За две наткривајуће површи $(\tilde{R}_1, \tau_1)$ и $(\tilde{R}_2, \tau_2)$ дате површи R кажемо да је $(\tilde{R}_2, \tau_2)$ снажнија од $(\tilde{R}_1, \tau_1)$, ако постоји пресликавање $\tau_{21} : \tilde{R}_2 \to \tilde{R}_1$, такво да је $\tau_2 = \tau_1 \circ \tau_{21}$, а пар $(\tilde{R}_2, \tau_{21})$ је наткривајућа површ површи $\tilde{R}_1$. Овако уведена релација између наткривајућих површи је очигледно транзитивна и иста дефинише једно парцијално уређење на скупу свих могућих наткривајућих површи задате површи R. Такође, уколико су две наткривајуће површи задате површи R узајамно снажније једна од друге, сматраћемо их еквивалентним.

Нека је $(\tilde{R}, \tau)$ наткривајућа површи дате површи R и $P_0 \in R$ произвољна тачка. Фиксирајмо тачку $\tilde{P}_0 \in \tau^{-1}(P_0)$ и означимо са $G(\tilde{P}_0)$ скуп свих хомотопских класа затворених кривих γ на површи R са иницијалном тачком P_0, чији је лифтинг из тачке $\tilde{P}_0$ затворена крива на површи $\tilde{R}$. На основу теореме 3.2.1, скуп $G(\tilde{P}_0)$ образује подгрупу фундаменталне групе $\pi_1(R)$ површи R. Уколико је $\tilde{Q}_0 \in \tau^{-1}(P_0)$ тачка различита од тачке $\tilde{P}_0$ и $G(\tilde{Q}_0)$ одговарајућа индукована подгрупа групе $\pi_1(R)$, тада ће групе $G(\tilde{P}_0)$ и $G(\tilde{Q}_0)$ бити међусобно конјуговане. Такође, избор тачке P_0 није од фундаменталног зчаја.

Дакле, свако наткривање површи R одређује класу конјугованих подгрупа групе $\pi_1(R)$, при чему еквивалентним наткривајућим површима одговара иста класа. Обрнуто, полазећи од произвољне подгрупе G фундаменталне групе површи R, једноставно је конструисати одговарајућу наткривајућу површ $(\tilde{R}, \tau)$, или њој еквивалентну, која ће одређивати класу конјугованих подгрупа групе $\pi_1(R)$, у односу на подгрупу G. При томе ће група $\pi_1(\tilde{R})$ бити изоморфна са G (видети [2]).

Најснажније наткривајуће површи дате површи R (све су наравно међусобно еквивалентне) су оне које су одређене тривијалном подгрупом фундаменталне групе површи R. Исте ћемо називати универзалним наткривајућим површима површи R. Дакле, универзална наткривања су просто повезане површи.

Уведимо сада један важан појам који се односи на наткривајуће површи, тј. појам наткривајуће трансформације.

Дефиниција 3.2.2. Нека је $(\tilde{R}, \tau)$ наткривајућа површ дате површи R и нека је φ хомеоморфизам површи $\tilde{R}$ на себе. За пресликавање φ кажемо да је наткривајућа трансформација површи $\tilde{R}$ ако важи $\tau \circ \varphi = \tau$, тј. ако тачке $\tilde{P}$ и $\varphi(\tilde{P})$ имају исту пројекцију, за свако $\tilde{P} \in \tilde{R}$.

Очигледно је да скуп свих наткривајућих трансформација наткривања $\tilde{R}$ површи R чини групу у односу на композицију пресликавања. Такође, није тешко показати да било која наткривајућа трансформација површи $\tilde{R}$, различита од идентичког пресликавања, нема фиксних тачака. Та информација ће нам бити од користи приликом класификације Риманових површи.

У даљем тексту ћемо наткривања посматрати искључиво у случају Риманових површи и учинићемо их Римановим површима снабдевањем истих са одговарајућом ,,подигнутом" комплексном структуром. У том случају ће одговарајуће пројекције бити аналитичка пресликавања.

Теорема 3.2.2. *Нека је R дата Риманова површ и $(\tilde{R}, \tau)$ наткривајућа површ исте. Тада се $\tilde{R}$ може снабдети јединственом комплексном структуром,* *која ће учинити пресликавање τ аналитичким. Такву структуру ћемо називати подигнутом комплексном структуром, односно, лифтингом комплексне структуре која је задата на R на површ $\tilde{R}$.*

Доказ: Нека колекција $\{(U_\nu, h_\nu)\}$ дефинише комплексну структуру на површи R. За сваку тачку $\tilde{P} \in \tilde{R}$ изаберимо околину $\tilde{U}_{\tilde{P}}$ исте, такву да је пресликавање $\tau|_{\tilde{U}_{\tilde{P}}}$ једнолисно и чија је слика, при τ, садржана у отвореном скупу U_ν, за неко ν. Тада, колекција $\{(\tilde{U}_{\tilde{P}}, h_\nu \circ \tau|_{\tilde{U}_{\tilde{P}}})\}$ дефинише комплексну структуру на површи $\tilde{R}$ и пресликавање τ је аналитично. Јединственост тривијално следи. □

Приметимо да, уколико су R и $\tilde{R}$ Риманове површи, наткривајуће трансформације су конформни аутоморфизми површи $\tilde{R}$. Специјално, ако је $\tilde{R} \in \{\mathbb{D}, \mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}}\}$, где је $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, тада су одговарајуће наткривајуће трансформације билинеарна пресликавања.

3.3 Теорема униформизације

Формулисаћемо сада једно од најважнијих тврђења у теорији функција једне комплексне променљиве. У литератури се исто најчешће појављује под називом теорема униформизације и представља аналогон Риманове теореме која се односи на домене у комплексној равни.

Теорема 3.3.1. *Свака просто повезана Риманова површ R је конформно еквивалентна са тачно једном од површи $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{C}$ или са $\overline{\mathbb{C}}$.*

Дакле, на основу претходне теореме, свака Риманова површ као универзално наткривање има површ $\tilde{R}$ која је конформно еквивалентна са тачно једном од површи $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$ или са $\overline{\mathbb{C}}$. За површ R чије је универзално наткривање конформно еквивалентно са $\mathbb{D}$ кажемо да је хиперболичког типа. У случају да је универзално наткривање површи R конформно еквивалентно са $\mathbb{C}$ рећи ћемо да је тада површ R параболичког типа. Елиптичког типа су површи чије је универзално наткривање конформно еквивалентно са $\overline{\mathbb{C}}$. Познато је да су скоро све Риманове површи хиперболичког типа (видети [2]). Ако је $\overline{\mathbb{C}}$ универзално наткривање дате Риманове површи, тада је одговарајућа група наткривајућих трансформација тривијална, те је стога и R конформно еквивалентно са $\overline{\mathbb{C}}$. Такође, површи конформно еквивалентне са $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ и торусом су једине површи параболичког типа.

3.4 Конформна метрика и Гаусова кривина

Нека је R произвољна Риманова површ чија је комплексна структура дефинисана атласом $\{(U_\nu, h_\nu)\}$. Означимо са $z_\nu \in V_\nu = h_\nu(U_\nu) \subset \mathbb{C}$ локални параметар на површи R који је асоциран карти (U_ν, h_ν). Претпоставимо да је на површи R дефинисана Риманова метрика, која у терминима локалних параметара има репрезентацију $ds^2 = \rho_\nu(z_\nu)|dz_\nu|^2$, где је ρ_ν позитивна функција класе C^2 у V_ν, компатибилна са комплексном структуром на површи R, тј. са својством да кад год су $z_\mu \in V_\mu = h_\mu(U_\mu) \subset \mathbb{C}$ и $z_\nu \in V_\nu = h_\nu(U_\nu) \subset \mathbb{C}$ локални параметри на површи R, за које је $U_\mu \cap U_\nu \neq \emptyset$, да је тада $\rho_\mu(z_\mu) = \rho_\nu(A(z_\mu))|A'(z_\mu)|^2$, $z_\mu \in U_\mu \cap U_\nu$, где је са $z_\nu = A(z_\mu) = (h_\nu \circ h_\mu^{-1})(z_\mu)$

означено пресликавање које описује конформни прелазак између локалних параметара z_μ и z_ν.

Приметимо да је у околини сваке тачке Риманове површи R метрика репрезентована као позитивни умножак еуклидске метрике. У прилог конформној инваријантности одговарајућих репрезената приликом промене локалних параметара, дефинисану метрику на површи R ћемо звати конформном метриком и кад год је то могуће, без губитка општости, означавати са $ds^2 = \rho(z)|dz|^2$. Такође, одговарајућег репрезента $z \mapsto \rho(z)$ ћемо звати густином конформне метрике у терминима локалног параметра z.

Означимо са $\gamma : [0,1] \to R$ произвољну ректифицијабилну криву на површи R. Дужина криве γ у односу на задату метрику $ds^2 = \rho(z)|dz|^2$ на површи R је ненегативан број, у означи $|\gamma|_\rho$, дефинисан са $|\gamma|_\rho = \displaystyle\int_\gamma \sqrt{\rho(z)}|dz|$. С обзиром на инваријантност линијског елемента $ds = \sqrt{\rho(z)}|dz|$ на површи R, није тешко проверити да је дужина ректифицијабилне криве коректно дефинисана. Такође, познато је да уколико произвољно изаберемо две тачке P_1 и P_2 на површи R и означимо са $d_\rho(P_1, P_2) = \inf |\gamma|_\rho$, где се инфимум узима дуж свих ректифицијабилних кривих γ на површи R које спајају тачке P_1 и P_2, да је тиме дефинисано једно растојање на површи R, што значи да површ R можемо третирати и као метрички простор. Функцију d_ρ ћемо звати растојањем на Римановој површи R које је индуковано конформном метриком $ds^2 = \rho(z)|dz|^2$.

Дефиниција 3.4.1. Нека је $ds^2 = \rho(z)|dz|^2$ конформна метрика дефинисана на Римановој површи R. Уочимо локални параметар $z \in V = h(U) \subset \mathbb{C}$ око произвољне тачке P_0, $h(P_0) = z_0 \in V$, на површи R и претпоставимо да задата метрика, у терминима параметра z има исто означену репрезентацију. Реалан број

$$K_\rho(z_0) = -\frac{1}{2}\frac{(\triangle \log \rho)(z_0)}{\rho(z_0)} \tag{3.4.1}$$

називамо Гаусовом кривином, односно, кривином конформне метрике $ds^2 = \rho(z)|dz|^2$ у тачки P_0 површи R.

Није тешко показати да претходна дефиниција не зависи од избора локалног парамера у околини тачке P_0 на површи R. Заиста, уколико је $\tilde{z} \in \tilde{V} = \tilde{h}(\tilde{U}) \subset \mathbb{C}$ неки други локални параметар око тачке P_0, $\tilde{h}(P_0) = \tilde{z}_0$, односно, $ds^2 = \tilde{\rho}(\tilde{z})|d\tilde{z}|^2$ одговарајућа репрезентација дате конформне метрике у терминима тог параметра, тада је испуњено

$$\begin{aligned}(\triangle \log \rho)(z) &= (\triangle \log((\tilde{\rho} \circ A)|A'(z)|^2))(z)\\ &= (\triangle \log(\tilde{\rho} \circ A))(z) + 2(\triangle \log |A'|)(z)\\ &= (\triangle \log \tilde{\rho})(A(z))|A'(z)|^2,\end{aligned}$$

у некој, погодно одабраној, околини $V' \subset V$ тачке z_0, јер је функција $z \mapsto \log|A'(z)|$, $z \in V'$, хармонијска, где је $\tilde{z} = A(z)$ пресликавање које успоставља конформни прелазак између одговарајућих параметара. Међутим, како је $\tilde{z}_0 = A(z_0)$ и $\rho(z_0) = \tilde{\rho}(A(z_0))|A'(z_0)|^2$, то је $K_\rho(z_0) = K_{\tilde{\rho}}(\tilde{z}_0)$.

Убудуће, независно од избора локалног параметра са којим оперишемо, говорићемо о Гаусовој кривини конформне метрике $ds^2 = \rho(z)|dz|^2$ као о функцији дефинисаној на датој Римановој површи која је задата формулом (3.4.1), што је у потпуности оправдано с обзиром на претходно разматрање.

Пример 3.4.1. Означимо са $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ јединични диск у $\mathbb{C}$. Посматрајмо конформну метрику $ds^2 = \lambda(z)|dz|^2$ на диску $\mathbb{D}$, чија је густина $z \mapsto \lambda(z)$ дефинисана са

$$\lambda(z) = \left(\frac{2}{1-|z|^2}\right)^2, \, z \in \mathbb{D}. \tag{3.4.2}$$

Како је

$$\begin{aligned}(\triangle \log \lambda)(z) &= 4(\log \lambda)_{z\bar{z}}(z) = -8(\log(1-|z|^2))_{z\bar{z}}(z)\\ &= 8\left(\frac{\bar{z}}{1-|z|^2}\right)_{\bar{z}}(z) = \frac{8}{(1-|z|^2)^2}, \, z \in \mathbb{D},\end{aligned}$$

тј. $(\triangle \log \lambda)(z) = 2\lambda(z)$, $z \in \mathbb{D}$, то је $K_\lambda(z) = -1$, за свако $z \in \mathbb{D}$. Дакле, конформна метрика $ds^2 = \lambda(z)|dz|^2$ је константне Гаусове кривине једнаке -1 на $\mathbb{D}$. Осим тога (видети поглавље 4.1), није тешко показати да је одговарајуће растојање на диску $\mathbb{D}$ индуковано том метриком дато формулом

$$d_\lambda(z_1, z_2) = \log \frac{1 + |\frac{z_1 - z_2}{1-\bar{z}_2 z_1}|}{1 - |\frac{z_1 - z_2}{1-\bar{z}_2 z_1}|}, \, z_1, \, z_2 \in \mathbb{D}. \tag{3.4.3}$$

Дефиниција 3.4.2. Конформну метрику $ds^2 = \lambda(z)|dz|^2$ дефинисану на јединичном диску $\mathbb{D}$, чија је густина дефинисана релацијом (3.4.2) називамо хиперболичком метриком на јединичном диску $\mathbb{D}$. Њену густину називамо хиперболичком густином, а одговарајуће индуковано растојање d_λ хиперболичким растојањем на јединичном диску $\mathbb{D}$.

Посматрајмо, поново, произвољну Риманову површ R. Претпоставимо да је површ R хиперболичког типа, тј. да је универзално наткривање површи R конформно еквивалентно са јединичним диском $\mathbb{D}$. Означимо са

$\tau : \mathbb{D} \to R$ одговарајућу пројекцију. Изаберимо произвољну тачку $P_0 \in R$ и означимо са $w_0 \in \mathbb{D}$ произвољну тачку из скупа $\tau^{-1}(P_0)$. Нека су $w \in W$ и $z \in V = h(U) \subset \mathbb{C}$, $U = \tau(W)$, локални параметри око тачака w_0 и P_0, респективно, са својством да је пресликавање τ једнолисно у W. Означимо, без губитка општости, са τ индуковано пресликавање $w \mapsto (h \circ \tau)(w) = z$, $w \in W$. Дефинишимо функцију $\lambda_R(z) = |(\tau^{-1})'(z)|^2 \lambda(\tau^{-1}(z))$, $z \in V$. Очигледно је λ_R позитивна функција класе C^2 у V, па је, због произвољности тачке P_0, на овај начин дефинисана једна колекција функција у терминима локалних параметара тачака на површи R. Једноставно је показати да та колекција има својство конформне инваријантности приликом промене локалног параметра, те да дефинише једну конформну метрику на површи R, коју ћемо, без умањења општости, означавати са $ds^2 = \lambda_R(z)|dz|^2$. При томе, као у случају доказа коректности дефиниције Гаусове кривине, која остаје иста приликом промене локалног параметра, показујемо да је на овај начин дефинисана конформна метрика константне Гаусове кривине једнаке -1 на површи R, која не зависи ни од избора пројекције τ. Тиме смо практично доказали следеће тврђење.

Теорема 3.4.1. *Нека је R произвољна Риманова површ хиперболичког типа. Тада се површ R на јединствен начин може снабдети конформном метриком константне Гаусове кривине једнаке -1, коју ћемо називати хиперболичком метриком на површи R. Такође, ако је $\tau : \mathbb{D} \to R$ пројекција уз помоћ које је остварено наткривање површи R јединичним диском $\mathbb{D}$, тада је пресликавање τ локална изометрија у односу на растојања индукована одговарајућим хиперболичким метрикама.*

Интересантно је приметити да, користећи функцију $\tau : w \mapsto rw$, $w \in \mathbb{D}$, $r > 0$, којом се остварује наткривање диска $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ јединичним диском $\mathbb{D}$, хиперболичка метрика, чију ћемо густину, уместо са $\lambda_{\mathbb{D}_r}$, у даљем тексту означавати са λ_r, која је дефинисана на диску $\mathbb{D}_r$, има једноставан облик $ds^2 = \lambda_r(z)|dz|^2$, где је $\lambda_r(z) = \dfrac{4r^2}{(r^2 - |z|^2)^2}$, $z \in \mathbb{D}_r$. Лако се проверава да је $K_{\lambda_r}(z) = -1$, за свако $z \in \mathbb{D}_r$. Такође, примећујемо да је $\lambda_1 = \lambda$, као и $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}$.

Пример 3.4.2. Означимо са $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ горњу полураван у $\mathbb{C}$ и нека је $ds^2 = \lambda_{\mathbb{H}}(z)|dz|^2$ хиперболичка метрика дефинисана на $\mathbb{H}$. Тада, како је $g(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$, $z \in \mathbb{H}$, конформни изоморфизам горње полуравни $\mathbb{H}$ на јединични диск $\mathbb{D}$, добијамо да за густину $\lambda_{\mathbb{H}}$ важи $\lambda_{\mathbb{H}}(z) = \lambda(g(z))|g'(z)|^2 = \dfrac{1}{y^2}$, за свако $z = x + iy \in \mathbb{H}$.

У даљем тексту ћемо са $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$ означавати вертикални појас у комлексној равни. Густину хиперболичке метрике $\lambda_{\mathbb{S}}$ на појасу $\mathbb{S}$ ћемо одредити у наредном примеру.

Пример 3.4.3. Посматрајмо пресликавање $s(z) = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{2}z} - 1}{e^{i\frac{\pi}{2}z} + 1} = i\tan(\frac{\pi}{4}z)$, $z \in \mathbb{S}$, које успоставља конформни изоморфизам појаса $\mathbb{S}$ и јединичног диска $\mathbb{D}$. Сада, лако налазимо да је

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathbb{S}}(z) &= \frac{4|s'(z)|^2}{(1 - |s(z)|^2)^2}\\ &= \left(\frac{\pi}{2(|\cos(\frac{\pi}{4}z)|^2 - |\sin(\frac{\pi}{4}z)|^2)}\right)^2\\ &= (\frac{\pi}{2})^2 \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{2}\operatorname{Re} z)},\end{aligned}$$

за свако $z \in \mathbb{S}$.

3.5 Уопштена хармонијска пресликавања

Нека су R и S две унапред задате Риманове површи. Посматрајмо сада пресликавање $f : R \to S$, класе C^2, површи R у површ S. Означимо са (U, h) локалну карту са параметром $z = x + iy \in V = h(U) \subset \mathbb{C}$ на површи R, као и са (W, g) локалну карту са параметром $w = u + iv \in V' = g(W) \subset \mathbb{C}$ на површи S, са својством да је $f(U) \subset W$. Тада је пресликавање $F : V \to V'$, које је дефинисано са $w = F(z) = u(z) + iv(z) = (g \circ f \circ h^{-1})(z)$, $z \in V$, класе C^2. Уведимо следеће ознаке:

$$F_z(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(z) - i\frac{\partial F}{\partial y}(z)\right),$$
$$F_{\bar{z}}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(z) + i\frac{\partial F}{\partial y}(z)\right),$$
$$J_F(z) = |F_z(z)|^2 - |F_{\bar{z}}(z)|^2,$$

при чему је $\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z)$, као и $\frac{\partial F}{\partial y}(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(z) + i\frac{\partial v}{\partial y}(z)$, $z \in V$. Број $J_F(z)$ ћемо називати јакобијаном пресликавања F у тачки $z \in V$. Такође, уколико је за неко $z \in V$, број $|F_z(z)| > 0$, од посебног интереса је дефинисати комплексну дилатацију, $\mu_F(z)$, пресликавања F у тачки z као $\mu_F(z) = \frac{F_{\bar{z}}(z)}{F_z(z)}$. Природно се намеће следеће разматрање.

Нека је P произвољна тачка површи R и нека је $Q = f(P)$ одговарајућа тачка површи S. Уочимо локалне параметре $z \in V = h(U) \subset \mathbb{C}$ и $\tilde{z} \in \tilde{V} = \tilde{h}(U) \subset \mathbb{C}$, где су (U, h) и $(U, \tilde{h})$ локалне карте око тачке P на површи R, такве да је $h(P) = \tilde{h}(P) = 0$, односно, локалне параметре $w \in V' = g(W) \subset \mathbb{C}$ и $\tilde{w} \in \tilde{V}' = \tilde{g}(W) \subset \mathbb{C}$, где су (W, g) и $(W, \tilde{g})$ локалне карте око тачке Q на површи S, такве да је $g(Q) = \tilde{g}(Q) = 0$ и $f(U) \subset W$. Означићемо са $F(z) = (g \circ f \circ h^{-1})(z)$, $z \in V$, и $\tilde{F}(\tilde{z}) = (\tilde{g} \circ f \circ \tilde{h}^{-1})(\tilde{z})$, $\tilde{z} \in \tilde{V}$, одговарајућа индукована пресликавања. Такође, означимо са $\tilde{z} = A(z) = (\tilde{h} \circ h^{-1})(z)$, $z \in V$, односно, са $\tilde{w} = \tilde{A}(w) = (\tilde{g} \circ g^{-1})(w)$, $w \in V'$, транзициона пресликавања која описују конформне преласке између локалних параметара на површи R, односно, на површи S. Тада је $\tilde{F}(\tilde{z}) = (\tilde{A} \circ F \circ A^{-1})(\tilde{z})$, $\tilde{z} \in \tilde{V}$, одакле применом уобичајених правила диференцирања налазимо да је

$$\tilde{F}_{\tilde{z}}(0) = \frac{\tilde{A}'(0)}{A'(0)} F_z(0) \quad \text{и} \quad \tilde{F}_{\bar{\tilde{z}}}(0) = \frac{\tilde{A}'(0)}{\overline{A'(0)}} F_{\bar{z}}(0), \tag{3.5.1}$$

као и $J_{\tilde{F}}(0) = \dfrac{|\tilde{A}'(0)|^2}{|A'(0)|^2} J_F(0)$. Такође, ако је $F_z(0) \neq 0$, тада је и $\tilde{F}_{\tilde{z}}(0) \neq 0$, као и $|\mu_{\tilde{F}}(0)| = |\mu_F(0)|$.

Убудуће ћемо, кад год је то могуће, одговарајуће индуковано пресликавање означавати исто са f, одговарајуће парцијалне изводе са f_z и $f_{\bar{z}}$, Јакобијан са J_f и, коначно, комплексну дилатацију са μ_f, односно, са μ, уколико је јасно о којој функцији је реч. Напоменимо да нити један од претходно дефинисаних објеката не дефинише функцију на Римановој површи R. Међутим, из претходног разматрања јасно је да можемо, глобално, говорити о нулама израза f_z, односно $f_{\bar{z}}$, а самим тим и рећи да је $|\mu_f|$ функција дефинисана на површи R, осим у оним тачкама у којима је $f_z = 0$.

Дефиниција 3.5.1. За пресликавање $f : R \to S$ класе C^2 кажемо да је хармонијско у односу на задату конформну метрику $ds^2 = \rho(w)|dw|^2$ на површи S, уколико је за сваки пар локалних параметара $z \in V = h(U) \subset \mathbb{C}$ и $w \in V' = g(W) \subset \mathbb{C}$, где су (U, h) и (W, g) локалне карте на површи R и површи S, респективно, за које важи $f(U) \subset W$, испуњено

$$(f_z)_{\bar{z}}(z) + \frac{\rho_w(f(z))}{\rho(f(z))} f_z(z) f_{\bar{z}}(z) = 0, \tag{3.5.2}$$

за свако $z \in V$, где је ρ одговарајућа репрезентација конформне метрике у терминима локалног параметра w на површи S.

У случају пресликавања f које делује између домена комплексне равни и присуства еуклидске метрике у слици, релација (3.5.2) дефинише обично хармонијско пресликавање. Неки аутори исто називају и еуклидско хармонијско пресликавање. Приметимо да у том случају за $f : \Omega \to \Omega'$, где су Ω и Ω' области у $\mathbb{C}$, важи $(\triangle f)(z) = 4f_{z\bar{z}}(z) = 0$, $z \in \Omega$, што нам карактерише хармонијско пресликавање у области Ω.

Теорија уопштених хармонијских пресликавања, односно, пресликавања која су хармонијска у односу на конформну метрику у слици, је тесно повезана са теоријом холоморфних квадратних диференцијала (видети [56]). Прецизније, уколико је $f : R \to S$, где су R и S две произвољне Риманове површи, хармонијско пресликавање у односу на задату конформну метрику $ds^2 = \rho(w)|dz|^2$ на површи S, тада пресликавање f дефинише једну колекцију аналитичких функција, у терминима локалних параметара на површи R, и самим тим један холоморфни квадратни диференцијал на тој површи.

Посматрајмо, стога, комплексну структуру на површи R, коју дефинише атлас $(\{(U_\nu, h_\nu)\})$, са локалним параметрима $z_\nu \in V_\nu = h_\nu(U_\nu) \subset \mathbb{C}$.

Дефиниција 3.5.2. Холоморфни квадратни диференцијал φ на Римановој површи R је дефинисан колекцијом $\{\varphi_\nu\}$, $\varphi_\nu : V_\nu \to \mathbb{C}$, аналитичких функција за које, кад год је $U_\mu \cap U_\nu \neq \emptyset$, важи

$$\varphi_\mu(z_\mu) = \varphi_\nu(A(z_\mu))(A'(z_\mu))^2, \tag{3.5.3}$$

где је $z_\nu = A(z_\mu) = (h_\nu \circ {h_\mu}^{-1})(z_\mu)$, $z_\mu \in h(U_\mu \cap U_\nu)$, пресликавање које успоставља конформни прелазак између локалних параметара z_μ и z_ν.

Функцију φ_ν називамо репрезентацијом холоморфног квадратног диференцијала φ у локалној карти са параметром z_ν, док ћемо за релацију (3.5.3) рећи да описује својство инваријантности одговарајућих репрезената истог.

Јасно је да се о квадратном диференцијалу не може говорити као о функцији на Римановој површи. Међутим, користећи релацију (3.5.3), можемо расправљати о његовим нулама. Оне ће бити, свакако, изоловане и добро дефинисаног реда, осим у случају тривијалног квадратног диференцијала, тј. оног чије су све одговарајуће репрезентације идентички једнаке нули. Стога, у случају нетривијалног холоморфног квадратног диференцијала, скуп нула истог ће бити дискретан на површи R, док ће бити коначан на компактним Римановим површима.

Пример 3.5.1. (а) Очигледно је да се квадратни диференцијал може задати на свакој Римановој површи. У случају домена комплексне равни, било каја аналитичка функција дефинисана у тој области дефинише један холоморфни квадратни диференцијал.
(б) На Римановој сфери $\overline{\mathbb{C}}$ се не може задати холоморфни квадратни диференцијал осим тривијалног. Заиста, уколико је φ један нетривијалан холоморфни квадратни диференцијал на $\overline{\mathbb{C}}$, чија је комплексна структура дефинисана у примеру 3.1.1, тада важи

$$\varphi_1(z) = \varphi_2(\frac{1}{z})((\frac{1}{z})')^2 = \varphi_2(\frac{1}{z})\frac{1}{z^4},\ z \in \mathbb{C} - \{0\}, \tag{3.5.4}$$

тј. $z^4\varphi_1(z) = \varphi_2(\frac{1}{z})$, $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, где су са $\varphi_1 : \mathbb{C} = h_1(U_1) \to \mathbb{C}$ и $\varphi_2 : \mathbb{C} = h_2(U_2) \to \mathbb{C}$ означене репрезентације тог квадратног диференцијала у терминима локалних параметара z и w. Међутим, како је функција φ_1 аналитичка у околини тачке $z = 0$, то ће функција φ_2 бити ограничена у околини тачке $z = \infty$, па ће бити константна функција на целом $\mathbb{C}$, различита од нуле. Тада, на основу релације (3.5.4), закључујемо да ће функција φ_1 имати пол четвртог реда у тачки $z = 0$, што је немогуће. □

Теорема 3.5.1. *Нека су R и S Риманове површи и $f : R \to S$ хармонијско пресликавање у односу на задату конформну метрику $ds^2 = \rho(w)|dw|^2$ на површи S. Тада, за сваки пар локалних параметара $z \in V = h(U) \subset \mathbb{C}$, на површи R, и $w \in V' = g(W) \subset \mathbb{C}$, на површи S, за које је $f(U) \subset W$, важи да је функција*

$$\psi(z) = (\rho \circ f)(z) f_z(z) \overline{f_{\bar{z}}(z)},\ z \in V, \tag{3.5.5}$$

аналитичка у V, где је са ρ означена одговарајућа репрезентација дате метрике у терминима локалног параметра w.

Доказ: Користећи дефиницију уопштеног хармонијског пресликавања добијамо

$$\begin{aligned}
\psi_{\bar{z}}(z) &= (\rho \circ f)_{\bar{z}}(z) f_z(z) \overline{f_{\bar{z}}(z)} + \rho(f(z))(f_z \overline{f_{\bar{z}}})_{\bar{z}}(z) \\
&= \rho_w(f(z)) f_z(z) |f_{\bar{z}}(z)|^2 + \rho_{\bar{w}}(f(z)) |f_z(z)|^2 \overline{f_{\bar{z}}(z)} \\
&\quad + \rho(f(z)) f_{z\bar{z}}(z) \overline{f_{\bar{z}}(z)} + \rho(f(z)) \overline{f_{z\bar{z}}(z)} f_z(z) \\
&= \rho(f(z)) \overline{f_{\bar{z}}(z)} \left(f_{z\bar{z}}(z) + \frac{\rho_w(f(z))}{\rho(f(z))} f_z(z) f_{\bar{z}}(z) \right) \\
&\quad + \rho(f(z)) f_z(z) \left(\overline{f_{z\bar{z}}(z)} + \frac{\rho_{\bar{w}}(f(z))}{\rho(f(z))} \overline{f_z(z) f_{\bar{z}}(z)} \right),
\end{aligned}$$

за свако $z \in V$, јер је $\dfrac{\rho_w(f(z))}{\rho(f(z))} = (\log)_w(f(z))$, односно, $\dfrac{\rho_{\bar{w}}(f(z))}{\rho(f(z))} = (\log)_{\bar{w}}(f(z))$, $z \in V$. Дакле, функција $z \mapsto \psi(z)$ је аналитичка у V. $\square$

Користећи понашање конформне метрике приликом промене локалног параметра, тј. важно својство инваријантности исте, једноставно је показати да је релацијом (3.5.2) дефинисана једна колекција аналитичких функција, у терминима одговарајућих локалних параметара, која дефинише један холоморфни квадратни диференцијал на датој Римановој површи R. На тај начин одређен квадратни диференцијал заузима значајно место у теорији уопштених хармонијских пресликавања и у даљем тексту ћемо га звати Хопфов диференцијал који је генерисан хармонијским пресликавањем f.

Теорема 3.5.2. *Нека су R и S Риманове површи и $f : R \to S$ хармонијско пресликавање у односу на задату конформну метрику $ds^2 = \rho(w)|dw|^2$ на површи S. Тада, за сваки пар локалних параметара $z \in V = h(U) \subset \mathbb{C}$, на површи R, и $w \in V' = g(W) \subset \mathbb{C}$, на површи S, за које је $f(U) \subset W$, важи да функције $z \mapsto f_z(z)$ и $z \mapsto f_{\bar{z}}(z)$, $z \in V$ имају изоловане нуле у V, добро дефинисаног реда, или су исте идентички једнаке нули.*

Доказ: Доказаћемо тврђење за функцију $z \mapsto f_z(z)$, $z \in V$. Доказ је аналоган за функцију $z \mapsto f_{\bar{z}}(z)$, $z \in V$. Нека је $g(z) = -\dfrac{\rho_w(f(z))}{\rho(f(z))} f_{\bar{z}}(z)$, $z \in V$. Претпоставимо, још, да је V околина тачке нула у $\mathbb{C}$ и да је $f_z(0) = 0$. Означимо са $\delta : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ функцију класе C^∞, са компактним носачем у $\mathbb{C}$, која је једнака јединици у V. Посматрајмо функцију $\chi(z) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\iint_{\mathbb{C}} \dfrac{\delta(\zeta)g(\zeta)}{z - \zeta} d\xi d\eta$, $z \in V$, где је $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$. Тада је $\chi_{\bar{z}}(z) = \delta(z)g(z) = g(z)$, $z \in V$. Како је f хармонијско пресликавање, то је $f_{z\bar{z}}(z) = -\dfrac{\rho_w(f(z))}{\rho(f(z))} f_z(z) f_{\bar{z}}(z)$, $z \in V$, односно,

$(f_z e^{\chi})_{\bar{z}}(z) = -g(z)f_z(z)e^{\chi(z)} + f_z(z)(e^{\chi})_{\bar{z}}(z) = -g(z)f_z(z)e^{\chi(z)} + g(z)f_z(z)e^{\chi(z)} = 0$, $z \in V$. Дакле, функција $z \mapsto f_z(z)e^{\chi(z)}$ је аналитичка у V, те постоји околина тачке $z = 0$, која припада V, у којој је $f_z(z)e^{\chi(z)} = z^n \psi(z)$, $\psi(z) \neq 0$, за неко $n \in \mathbb{N}$. Тиме смо доказали тврђење. □

Теорема 3.5.3. (**Бохнерова формула, [56]**) *Нека су R и S Риманове површи и $f : R \to S$ хармонијско пресликавање у односу на задату конформну метрику $ds^2 = \rho(w)|dw|^2$ на површи S, које чува оријентацију. Означимо са $ds^2 = \sigma(z)|dz|^2$ конформну метрику на површи R чија је репрезентација у терминима локалног параметра z, на површи R, дата са $\sigma(z) = \rho(f(z))|f_z(z)|^2$. Тада је*

$$K_\sigma(z) = K_\rho(f(z))(1 - |\mu_f(z)^2|), \tag{3.5.6}$$

независно од избора локалног параметра z.

Доказ: Како пресликавање f чува оријентацију, то ће јакобијан тог пресликавања бити позитиван, а самим тим и $f_z(z) \neq 0$, независно од избора локалног параметра z. Такође, функција $|\mu_f(z)| = \dfrac{|f_{\bar{z}}(z)|}{|f_z(z)|}$ је добро дефинисана на површи R и важи да је $|\mu(z)| < 1$. Осим тога, избором локалног параметра $z \in V = h(U) \subset \mathbb{C}$, где је са (U, h) означена локална карта на површи R, није тешко проверити да је са $\sigma(z) = \rho(f(z))|f_z(z)|^2$, $z \in V$, задата једна конформна метрика на R.

Тада је

$$\begin{aligned} (\triangle \log \sigma)(z) &= 4(\log \sigma)_{z\bar{z}}(z) \\ &= 4(\log(\rho \circ f) + \log f_z + \log(\overline{f_z}))_{z\bar{z}}(z),\ z \in V. \end{aligned}$$

Диференцирањем сваког члана претходне суме добијамо:

$$
\begin{aligned}
(\log(\rho\circ f))_{z\bar z} &= (((\log\rho)_w\circ f)f_z+((\log\rho)_{\bar w}\circ f)(\bar f)_z)_{\bar z}\\
&= ((\log\rho)_{ww}\circ f)f_zf_{\bar z}+((\log\rho)_{w\bar w}\circ f)f_z(\bar f)_{\bar z}\\
&\quad +((\log\rho)_w\circ f)f_{z\bar z}+(((\log\rho)_{\bar w}\circ f)\overline{f_{\bar z}})_{\bar z},\\
(\log f_z)_{z\bar z} &= (\frac{f_{z\bar z}}{f_z})_z=-(((\log\rho)_w\circ f)f_{\bar z})_z\\
= -((\log\rho)_{ww}\circ f)f_zf_{\bar z} &- ((\log\rho)_{w\bar w}\circ f)(\bar f)_zf_{\bar z}-((\log\rho)_w\circ f)f_{z\bar z},\\
(\log\overline{f_z})_{z\bar z} &= (\frac{(\bar f)_{\bar z z}}{\overline{f_z}})_{\bar z}=(\frac{\overline{f_{z\bar z}}}{\overline{f_z}})_{\bar z}=-(((\log\rho)_{\bar w}\circ f)\overline{f_{\bar z}})_{\bar z},
\end{aligned}
$$

одакле, сабирањем, налазимо да је

$$
\begin{aligned}
\triangle\log\sigma &= 4((\log\rho)_{w\bar w}\circ f)(f_z(\bar f)_{\bar z}-(\bar f)_zf_{\bar z})\\
&= 4((\log\rho)_{w\bar w}\circ f)(f_z\overline{f_z}-\overline{f_{\bar z}}f_{\bar z})\\
&= ((\triangle\log\rho)\circ f)(|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2)\\
&= ((\triangle\log\rho)\circ f)|f_z|^2(1-|\mu_f|^2).
\end{aligned}
$$

Коначно, користећи формуле за Гаусове кривине датих метрика добијамо да је $K_\sigma(z)=K_\rho(f(z))(1-|\mu_f(z)|^2)$, за свако $z\in V$. □

Приметимо да смо у претходној теореми захтевали да пресликавање f чува оријентацију. Међутим, тврђење теореме ће остати на снази у свакој тачки z за коју је $f_z(z)\neq 0$, тј. у оним тачкама на површи R у којима је функција $|\mu_f|$ дефинисана.

Дефиниција 3.5.3. За локално једнолисно пресликавање $f:R\to S$ класе C^2, које чува оријентацију, где су R и S две унапред задате Риманове површи, кажемо да је k-квазирегуларно, постоји неко $k\in[0,1)$, за које је

$$|\mu_f(z)|\leqslant k, \tag{3.5.7}$$

независно од избора локалног параметра на површи R. Уколико је, још, пресликавање f хомеоморфизам, исто ћемо називати k-квазиконформним.

Обично се, видети [37], за број k узима најмањи од свих оних бројева из интервала $[0, 1)$ за који важи релација (3.5.7), јер, уколико је пресликавање f k-квазирегуларно, онда је и k_1-квазирегуларно, за $k \leqslant k_1 < 1$. Тај број ћемо називати квазирегуларном, односно, квазиконформном константом. Иначе, многи аутори за квазиконформну константу узимају број $K = \dfrac{1+k}{1-k} \geqslant 1$. Осим тога, уколико је $k = 0$, тј. $K = 1$, пресликавање је очигледно аналитичко. Такође, због претпоставке да пресликавање f чува оријентацију, претходна дефиниција има смисла.

Глава 4

Алфорс-Шварцова лема и примене

Као што је описано у глави која је претходила овој, присуство хипербличке метрике више није привилегија, већ реалност, јер је скоро сваки домен са којим оперишемо хиперболичког типа, па је оправдано у општем случају додатно испитивати геометријска својства поменуте метрике. Једно од тих својстава, на које ћемо се најчешће позивати, јесте својство максималности хиперболичке метрике у односу на све друге конформне метрике чија је Гаусова кривина не већа -1, као и њему слична.

4.1 Хиперболичко растојање

Нека је $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ јединични диск у $\mathbb{C}$ и φ произвољан конформни аутоморфизам диска $\mathbb{D}$, тј. $1-1$ аналитичко пресликавање диска $\mathbb{D}$ на себе. Тада постоје $a \in \mathbb{D}$ и $\alpha \in [0, 2\pi)$ такви да је $\varphi(z) = e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, за свако $z \in \mathbb{D}$. Стога, за произвољне две тачке z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$ добијамо да важи

$$\varphi(z_1) - \varphi(z_2) = e^{i\alpha} \frac{(1 - |a|^2)(z_1 - z_2)}{(1 - \bar{a}z_1)(1 - \bar{a}z_2)},$$
$$1 - \overline{\varphi(z_1)}\varphi(z_2) = \frac{(1 - |a|^2)(1 - \overline{z_1}z_2)}{(1 - \bar{a}z_1)(1 - \bar{a}z_2)},$$

односно, дељењем претходних једнакости, те преласком на модуле, добијамо да је

$$\left| \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{1 - \overline{\varphi(z_1)}\varphi(z_2)} \right| = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}z_2} \right|, \tag{4.1.1}$$

тј. $\delta_h(\varphi(z_1), \varphi(z_2)) = \delta_h(z_1, z_2)$, где је $\delta_h(z, w) = \left| \dfrac{z - w}{1 - \overline{z}w} \right|$, z, $w \in \mathbb{D}$.

У даљем тексту ћемо са φ_a означавати конформни аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$ који је задат са $\varphi_a : z \mapsto \varphi_a(z) = \dfrac{z - a}{1 - \bar{a}z}$, $z \in \mathbb{D}$, $a \in \mathbb{D}$. Такође, број $\delta_h(z, w)$, z, $w \in \mathbb{D}$, ћемо убудуће називати псеудо-хиперболичким растојањем између тачака z и w. Хиперболичко растојање између тих тачака на јединичном диску $\mathbb{D}$ дефинишемо као $d_h(z, w) = \log \dfrac{1 + \delta_h(z, w)}{1 - \delta_h(z, w)}$. Једноставно се да проверити да је функцијом $d_h : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to [0, \infty)$ дефинисана једна метрика на диску $\mathbb{D}$, коју ћемо такође звати хиперболичком (видети пример 3.4.1). Осим тога, користећи релацију (4.1.1), непосредно произилази да су конформни аутоморфизми јединичног диска уједно и изометрије у односу на псеудо-хиперболичко, а самим тим и у односу на хиперболичко растојање d_h. Са друге стране (видети пример 3.4.1), са d_λ смо означили хиперболичко растојање индуковано хиперболичком метриком $ds^2 = \lambda(z)|dz|^2$ на диску $\mathbb{D}$, где је одговарајућа густина λ дефинисана релацијом (3.4.2). Међутим, преласком на граничну вредност, кад z_2 тежи z_1, у релацији (4.1.1), добијамо да и хиперболичко растојање d_λ остаје инваријантно у односу на конформне аутоморфизме јединичног диска, односно, добијамо да је за произвољан конформни аутоморфизам φ јединичног диска $\mathbb{D}$ испуњено $\dfrac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2} = \dfrac{1}{1-|z|^2}$, $z \in \mathbb{D}$. Такође, како је $d_\lambda(0,r) = \log\dfrac{1+r}{1-r}$, $0 \leqslant r < 1$, што је тривијално показати, то се растојање d_λ у потпуности поклапа са растојањем d_h на јединичном диску $\mathbb{D}$, те да су геодезијске линије, тј. локално најкраће криве у односу на хиперболичку метрику, делови кружница, унутар диска $\mathbb{D}$, које су ортогоналне на јединичну кружницу $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, односно, делови правих, унутар истог, које садрже тачку $z = 0$.

4.2 Основна тврђења Шварц-Пиковог типа

Формулисаћемо сада и доказати два веома важна тврђења из класичне теорије функција комплексне променљиве. Друго од њих је геометријска интерпретација првог у присуству хиперболичке метрике.

Лема 4.2.1. (**Шварцова лема, [2]**) *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ аналитичка функција. Ако је $f(0) = 0$, тада је $|f(z)| \leqslant |z|$, за свако $z \in \mathbb{D}$, односно, $|f'(0)| \leqslant 1$. Уколико је $|f(z)| = |z|$, за неко $z \neq 0$, или $|f'(0)| = 1$, тада је $f(z) = e^{i\alpha}z$, за неко $\alpha \in [0, 2\pi)$, тј. f је ротација.*

Доказ: Нека је $z \in \mathbb{D}$ произвољно и $|z| < r < 1$. Дефинишимо функцију $g(\zeta) = \dfrac{f(\zeta)}{\zeta}$, $0 < |\zeta| < 1$, $g(0) = f'(0)$. Очигледно је функција g аналитичка у околини затворења диска $\mathbb{D}_r = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < r\}$, одакле, на основу принципа максимума модула, постоји неко ζ_0, $|\zeta_0| = r$, за које је $|g(\zeta)| \leqslant |g(\zeta_0)| = \left|\dfrac{f(\zeta_0)}{\zeta_0}\right| < \dfrac{1}{r}$, $|\zeta| \leqslant r$. Специјално, $|g(z)| < \dfrac{1}{r}$, те преласком на граничну вредност, када $r \to 1_-$, добијамо да је $|g(z)| \leqslant 1$. Међутим, уколико је

$|g(z)| = 1$, за неко $z \in \mathbb{D}$, тада је g константна функција, тј. $f(z) = e^{i\alpha} z$, за неко $\alpha \in [0, 2\pi)$, односно, f је ротација. $\square$

Лема 4.2.2. (**Шварц-Пикова лема, [2]**) *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ аналитичка функција. Тада f не повећава одговарајуће псеудо-хиперболичко, односно, хиперболичко растојање на диску $\mathbb{D}$. Дакле важи, $\delta_h(f(z_1), f(z_2)) \leqslant \delta_h(z_1, z_2)$, односно, $d_h(f(z_1), f(z_2)) \leqslant d_h(z_1, z_2)$, за свако z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$. Једнакост у претходним неједнакостима важи ако и само ако је f конформни аутоморфизам диска $\mathbb{D}$.*

Доказ: Означимо са z_1 и z_2 две произвољно изабране тачке у $\mathbb{D}$. Посматрајмо функцију $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ дефинисану са $F : \zeta \mapsto F(\zeta) = (\varphi_{f(z_1)} \circ f \circ \varphi_{-z_1})(\zeta)$. Свакако је F аналитичка функција и важи да је $F(0) = 0$, па су за исту задовољени услови Шварцове леме. Дакле, важи $|F(\zeta)| \leqslant |\zeta|$, за свако $\zeta \in \mathbb{D}$, односно

$$|(\varphi_{f(z_1)} \circ f \circ \varphi_{-z_1})(\zeta)| \leqslant |\zeta|,$$

за свако $\zeta \in \mathbb{D}$. Стога, ако у претходној неједнакости уврстимо $\zeta = \varphi_{z_1}(z_2)$, јер је $(\varphi_{z_1})^{-1} = \varphi_{-z_1}$, добијамо да је

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)} f(z_2)} \right| \leqslant \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1} z_2} \right|, \tag{4.2.1}$$

тј. $\delta_h(f(z_1), f(z_2)) \leqslant \delta_h(z_1, z_2)$. Осим тога, уколико се деси да у неједнакости (4.2.1) важи знак једнакости, једноставно се закључује да је пресликавање F ротација, односно да је f конформни аутоморфизам јединичног диска.

Други део тврђења, тј. особина аналитичких пресликавања јединичног диска у себе да не повећавају ни одговарајуће хиперболичко растојање дефинисано на $\mathbb{D}$, је једноставна последица чињенице да је функција $x \mapsto \log \frac{1+x}{1-x}$ растућа на интервалу $[0, 1)$. □

Нагласимо још да постоје многе верзије и генерализације претходне неједнакости. Многи аутори је представљају у еквивалентном облику који наводимо у наредном тврђењу, на основу кога се види инваријантност густине хиперболичке метрике у односу на конформне аутоморфизме јединичног диска. Такође, нама ће бити од интереса да издвојимо ону која се тиче аналитичких пресликавања која делују између Риманових површи хиперболичког типа (видети теорему 4.2.4).

Последица 4.2.3. *Нека је* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *аналитичка функција. Тада важи*

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1 - |z|^2}, \tag{4.2.2}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$. *При томе, једнакост важи ако и само ако је* f *конформни аутоморфизам диска* $\mathbb{D}$.

Доказ: Тврђење добијамо уколико извршимо прелазак на граничну вредност у неједнакости (4.2.1), када $z_2 \to z_1 = z \in \mathbb{D}$. □

Теорема 4.2.4. *Нека су* R *и* S *две Риманове површи хиперболичког типа и нека је* $f : R \to S$ *аналитичко пресликавање. Означимо са* $ds^2 = \lambda_R(z)|dz|^2$ *и* $ds^2 = \lambda_S(w)|dw|^2$ *наслеђене, користећи универзално наткривање, хиперболичке метрике на површи* R *и* S, *редом. Тада важи*

$$\lambda_S(f(z))|f'(z)|^2 \leqslant \lambda_R(z), \tag{4.2.3}$$

за свако $z \in R$. *Такође важи* $d_{\lambda_S}(f(z_1), f(z_2)) \leqslant d_{\lambda_R}(z_1, z_2)$, *за било које две тачке* z_1 *и* z_2 *са површи* R, *тј. важи да пресликавање* f *не повећава одговарајуће хиперболичко растојање.*

Доказ: Нека је $z_0 \in R$ произвољно и $w_0 = f(z_0) \in S$. Покажимо да је неједнакост (4.2.3) задовољена у тачки z_0. Стога, преласком на универзална наткривања датих површи, уочавамо одговарајуће пројекције $\tau_1 : \mathbb{D} \to R$ и $\tau_2 : \mathbb{D} \to S$, за које, без умањења општости, можемо претпоставити да важи $\tau_1(0) = z_0$, као и $\tau_2(0) = w_0$. Посматрајмо сада „подигнуто” пресликавање f, тј. пресликавање аналитичко пресликавање $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, за које важи $\tau_2 \circ F = f \circ \tau_1$, али и $F(0) = 0$. Како је, на основу Шварцове леме $|F'(0)| \leqslant 1$, то је $|f'(z_0)| \left|\frac{\tau_1'(0)}{\tau_2'(0)}\right| \leqslant 1$, односно $|(\tau_2^{-1})'(w_0)||f'(z_0)| \leqslant |(\tau_1^{-1})'(z_0)|$, одакле добијамо тврђење теореме, јер је $(\lambda \circ \tau_1^{-1})(z_0) = (\lambda \circ \tau_2^{-1})(w_0) = 1$.

Други део тврђења је ништа друго него „интегрална” верзија првог, те је стога и та неједнакост задовољена. □

4.3 Алфорс-Шварцова лема

Нека је, даље, $\Omega \subset \mathbb{C}$ произвољан домен у комплексној равни. Дефинишимо сада појам ултра-хиперболичке метрике на Ω.

Дефиниција 4.3.1. Метрику $ds^2 = \rho(z)|dz|^2$, $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, називамо ултра-хиперболичком метриком на Ω, ако је ρ одозго полунепрекидна функција на Ω и ако за сваку тачку $z_0 \in \Omega$, за коју је $\rho(z_0) > 0$, постоји функција ρ_0, позитивна и класе C^2 у некој околини V тачке z_0, таква да је $\rho(z) \geqslant \rho_0(z)$, $K_{\rho_0}(z) \leqslant -1$, за свако $z \in V$, и $\rho_0(z_0) = \rho(z_0)$.

Тривијално је показати да ако је ρ ултра-хиперболичка метрика на Ω и $f : \mathbb{D} \to \Omega$ аналитичка функција, тада је метрика дефинисана са $ds^2 = \sigma(z)|dz|^2$, где је $\sigma(z) = \rho(f(z))|f'(z)|^2$, $z \in \mathbb{D}$, ултра-хиперболичка на јединичном диску $\mathbb{D}$.

Лема 4.3.1. (**Алфорс-Шварцова лема, [2]**) *Нека је* $ds^2 = \rho(w)|dw|^2$ *ултра-хиперболичка метрика дефинисана на некој области* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *и нека је* $f : \mathbb{D} \to \Omega$ *аналитичка функција. Тада је* $\rho(f(z))|f'(z)|^2 \leqslant \lambda(z)$, *за свако* $z \in \mathbb{D}$.

Дакле, хиперболичка метрика је максимална ултра-хиперболичка метрика на јединичном диску $\mathbb{D}$. Следеће тврђење, које наводимо, је од есенцијалног значаја у нашем приступу.

Теорема 4.3.2. *Нека су* $ds^2 = \sigma(z)|dz|^2$ *и* $ds^2 = \rho(z)|dz|^2$ *две конформне метрике дефинисане на јединичном диску* $\mathbb{D}$. *Ако важи* $\sigma(z) \to +\infty$, *када* $|z| \to 1_-$, *и ако је* $K_\rho(z) \leqslant K_\sigma(z) < 0$, *за свако* $z \in \mathbb{D}$, *тада је* $\rho(z) \leqslant \sigma(z)$, *за свако* $z \in \mathbb{D}$. *Посебно, ако је* $K\rho(z) \leqslant -1$, *тада је*

$$\rho(z) \leqslant \lambda(z) = \left(\frac{2}{1-|z|^2}\right)^2, \ z \in \mathbb{D}. \tag{4.3.1}$$

Доказ: Нека је $0 < r < 1$ и $\sigma_r(z) = \frac{1}{r^2}\sigma\left(\frac{z}{r}\right)$, $z \in \mathbb{D}_r$, где је, поновимо, $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Дефинишимо функцију $f_r(z) = \log\left(\frac{\rho(z)}{\sigma_r(z)}\right)$, $z \in \mathbb{D}_r$. Како $\sigma_r(z) \to +\infty$, кад $|z| \to r_-$, то функција f_r достиже максимум на $\mathbb{D}_r$ у некој тачки z_0. Међутим, тада је $(\triangle f_r)(z_0) \leqslant 0$, тј. $(\triangle \log\rho)(z_0) - (\triangle \log\sigma_r)(z_0) \leqslant 0$, што је еквивалентно са

$$\sigma_r(z_0)K_{\sigma_r}(z_0) \leqslant \rho(z_0)K_\rho(z_0). \tag{4.3.2}$$

Из претходне неједнакости тривијално добијамо да је $\frac{\rho(z_0)}{\sigma_r(z_0)} \leqslant \left|\frac{K_{\sigma_r}(z_0)}{K_\rho(z_0)}\right| \leqslant 1$, што повлачи да је $f_r(z) \leqslant f_r(z_0) = \log\left(\frac{\rho(z_0)}{\sigma_r(z_0)}\right) \leqslant 0$, $z \in \mathbb{D}_r$, тј. $\frac{\rho(z)}{\sigma_r(z)} \leqslant 1$, $z \in \mathbb{D}_r$. Коначно, преласком на граничну вредност, кад $r \to 1_-$, добијамо тврђење. □

Приметимо да тврђење претходне теореме остаје на снази ако претпоставимо да густина σ конформне метрике $ds^2 = \sigma(z)|dz|^2$ задовољава $\sigma(z) \to +\infty$, кад $|z| \to 1_-$, $-1 \leqslant K_\sigma(z) < 0$, $z \in \mathbb{D}$, и да је метрика $ds^2 = \rho(z)|dz|^2$ ултра-хиперболичка на јединичном диску $\mathbb{D}$.

4.4 Хиперболички извод и Ванова теорема

Нека је $G \subset \mathbb{C}$ произвољна просто повезана област у $\mathbb{C}$, различита од $\mathbb{C}$, тј. она чија граница у $\overline{\mathbb{C}}$ садржи најмање две тачке. На основу Риманове теореме, област G је конформно еквивалентна са јединичним диском $\mathbb{D}$. Означимо са $g : G \to \mathbb{D}$ пресликавање које успоставља поменути конформни изоморфизам. Тада, видети коментар непосредно изнад теореме 3.4.1, на области G се може дефинисати хиперблична метрика $ds^2 = \lambda_G(w)|dw|^2$, где је $\lambda_G(w) = \dfrac{4|g'(w)|^2}{(1-|g(w)|^2)^2}$, $w \in G$. Приметимо да, уколико је $\tilde{g} : G \to \mathbb{D}$ неко друго пресликавање које успоставља конформни изоморфизам области G и диска $\mathbb{D}$, тада је $\dfrac{|\tilde{g}'(w)|}{1-|\tilde{g}(w)|^2} = \dfrac{|g'(w)|}{1-|g(w)|^2}$, јер је $\tilde{g} \circ g^{-1}$ конформни аутоморфизам диска $\mathbb{D}$. Дакле, овако дефинисана хиперболичка метрика не зависи од избора пресликавана g. У даљем тексту са G ћемо увек означавати такву једну област.

Дефиниција 4.4.1. Нека су G, $G' \subset \mathbb{C}$ просто повезане области различите од $\mathbb{C}$ и нека је $f : G \to G'$ пресликавање класе C^1. Хиперболички парцијални изводи пресликавања f, у односу на z и $\bar{z}$, у области G су, редом, дати са

$$||\partial f||(z) = \sqrt{\frac{\lambda_{G'}(f(z))}{\lambda_G(z)}}|f_z(z)|, \tag{4.4.1}$$

$$||\bar{\partial} f||(z) = \sqrt{\frac{\lambda_{G'}(f(z))}{\lambda_G(z)}}|f_{\bar{z}}(z)|. \tag{4.4.2}$$

Очигледно је да за $G = G' = \mathbb{D}$ и аналитичко пресликавање f важи $||\partial f||(z) = 1$, $z \in \mathbb{D}$. Такође, ако је $f : G \to G'$ класе C^1 и $h : \mathbb{D} \to G$ Риманово пресликавање, тј. $1-1$ аналитичко пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на област G, тада

$$\begin{aligned} ||\partial(f \circ h)||(\zeta) &= \sqrt{\frac{\lambda_{G'}((f \circ h)(\zeta))}{\lambda_{\mathbb{D}}(\zeta)}}|(f \circ h)_\zeta(\zeta)| \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_{G'}(f(z))}{\lambda_G(z)}}\sqrt{\frac{\lambda_G(z)}{\lambda_{\mathbb{D}}(\zeta)}}|f_z(z)||h'(\zeta)| \\ = \sqrt{\frac{\lambda_{G'}(f(z))}{\lambda_G(z)}}|f_z(z)|&\frac{|(h^{-1})'(z)|(1-|\zeta|^2)}{1-|h^{-1}(z)|^2}|h'(\zeta)| = ||\partial f||(z), \end{aligned}$$

јер је h конформни изоморфизам. Слично је и $||\bar{\partial}(f \circ h)||(\zeta) = ||\bar{\partial} f||(z)$. Дакле, довољно је ограничити се на пресликавања $f : \mathbb{D} \to G$, где је $G \neq \mathbb{C}$ просто повезани домен у $\mathbb{C}$.

Поновимо да ако су Ω и Ω' произвољне области у $\mathbb{C}$ и $f : \Omega \to \Omega'$ пресликавање класе C^1, тада важи

$$L_f(z) = |f_z(z)| + |f_{\bar{z}}(z)|, \; z \in \Omega$$

$$l_f(z) = |f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|, \; z \in \Omega.$$

Сада нам је циљ да користећи процене за хиперболички извод дате функције, под одређеним условима, опишемо понашање хармонијских квазиконформних дифеоморфизама јединичног диска, као и неких других значајних области.

Лема 4.4.1. *Нека је $f : \mathbb{D} \to G$, где је G просто повезана хиперболичка област у $\mathbb{C}$, пресликавање класе C^1 које чува оријентацију. Ако постоји неко $M > 0$ такво да је $||\partial f||(z)(1 + |\mu_f(z)|) \leqslant M$, за свако $z \in \mathbb{D}$, тада је*

$$d_G(f(z_1), f(z_2)) \leqslant M\, d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2), \tag{4.4.3}$$

за свако z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$.

Доказ: Нека су z_1 и z_2 произвољне тачке у диску $\mathbb{D}$ и $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ геодезијска линија у односу на хиперболичку метрику у диску $\mathbb{D}$, која спаја тачке z_1 и z_2. Тада је

$$\begin{aligned} d_G(f(z_1), f(z_2)) &\leqslant \int_{f\circ\gamma} \sqrt{\lambda_G(w)}|dw| \\ \leqslant \int_\gamma \sqrt{\frac{\lambda_G(f(z))}{\lambda(z)}}\sqrt{\lambda(z)}(|f_z(z)| &+ |f_{\bar{z}}(z)|)|dz| \\ = \int_\gamma ||\partial f||(z)\sqrt{\lambda(z)}(1 &+ |\mu_f(z)|)|dz| \\ \leqslant M \int_\gamma \sqrt{\lambda(z)}|dz| &= M\, d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2), \end{aligned}$$

што се и тврдило. □

Лема 4.4.2. *Нека је $f : \mathbb{D} \to G$, где је G просто повезана хиперболичка област у $\mathbb{C}$, хомеоморфизам класе C^1 који чува оријентацију. Ако постоји неко $m > 0$ такво да је $||\partial f||(z)(1 - |\mu_f(z)|) \geqslant m$, за свако $z \in \mathbb{D}$, тада је*

$$d_G(f(z_1), f(z_2)) \geqslant m\, d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2), \tag{4.4.4}$$

за свако z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$.

Доказ: Нека су z_1 и z_2 произвољне тачке у диску $\mathbb{D}$ и $\Gamma : [0,1] \to G$ геодезијска линија у односу на хиперболичку метрику у области G, која спаја тачке $f(z_1)$ и $f(z_2)$. Ако је $\gamma = f^{-1} \circ \Gamma$, тада је

$$\begin{aligned} d_G(f(z_1), f(z_2)) &= \int_\Gamma \sqrt{\lambda_G(w)}|dw| \\ \geqslant \int_\gamma \sqrt{\frac{\lambda_G(f(z))}{\lambda(z)}} &\sqrt{\lambda(z)}(|f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|)|dz| \\ &= \int_\gamma ||\partial f||(z)\sqrt{\lambda(z)}(1 - |\mu_f(z)|)|dz| \\ &\geqslant m \int_\gamma \sqrt{\lambda(z)}|dz| \geqslant m\, d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2), \end{aligned}$$

што је требало доказати. □

Последица 4.4.3. *Нека су G и G' просто повезане области у $\mathbb{C}$, различите од $\mathbb{C}$, и нека је $g : G \to G'$ хомеоморфизам класе C^1 који чува оријентацију. Ако постоје позитивне константе M и m, за које је*

$$\frac{m}{1 - |\mu_g(z)|} \leqslant ||\partial g||(z) \leqslant \frac{M}{1 + |\mu_g(z)|},$$

за свако $z \in G$, тада је

$$m\, d_G(z_1, z_2) \leqslant d_{G'}(g(z_1), g(z_2)) \leqslant M\, d_G(z_1, z_2), \tag{4.4.5}$$

за свако z_1, $z_2 \in G$.

Доказ: Означимо са $h : \zeta \mapsto z = h(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$, конформни изоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$ и области G и нека је $F = g \circ h$. Користећи једнакости (1.1.3) и (1.1.4), за произвољно $\zeta \in \mathbb{D}$ налазимо, прво, да је $\mu_F(\zeta) = \mu_g(h(\zeta))\dfrac{\overline{h'(\zeta)}}{h'(\zeta)}$, тј. $|\mu_F(\zeta)| = |\mu_g(z)|$, где је $z = h(\zeta)$, а затим и

$$\frac{m}{1 - |\mu_F(\zeta)|} \leqslant ||\partial F||(\zeta) \leqslant \frac{M}{1 + |\mu_F(\zeta)|},$$

јер је $||\partial F||(\zeta) = ||\partial g||(h(\zeta))$. Стога, на основу лема 4.4.1 и 4.4.2, добијамо да је

$$m\, d_{\mathbb{D}}(\zeta_1, \zeta_2) \leqslant d_{G'}(F(\zeta_1), F(\zeta_2)) \leqslant M\, d_{\mathbb{D}}(\zeta_1, \zeta_2), \tag{4.4.6}$$

за свако ζ_1, $\zeta_2 \in \mathbb{D}$.

Коначно, да бисмо доказ тврђења привели крају, изабраћемо произвољне тачке z_1 и z_2 у области G. Тада, ако је $\zeta_1 = h^{-1}(z_1)$, односно $\zeta_2 = h^{-1}(z_2)$, на основу неједнакости (4.4.6) једноставно добијамо да тврђење важи, јер је пресликавање h, осим што је конформни изоморфизам области $\mathbb{D}$ и G, уједно и изометрија у односу на одговарајуће хиперболичке метрике дефинисане на тим доменима. □

Дефиниција 4.4.2. Нека су Ω и Ω' произвољне области у равни са конформним метрикама $ds^2 = \rho(z)|dz|^2$ и $ds^2 = \tilde{\rho}(w)|dw|^2$, редом. За пресликавање $f : \Omega \to \Omega'$ кажемо да је квази-изометрија у односу на поменуте метрике, ако постоји константа $c \geqslant 1$ таква да је

$$\frac{1}{c}\, d_\rho(z_1, z_2) \leqslant d_{\tilde{\rho}}(f(z_1), f(z_2)) \leqslant c\, d_\rho(z_1, z_2),$$

за било које две тачке z_1 и z_2 из Ω. Дакле, пресликавање f је би-Липшицово у односу на те метрике.

Као што је најављено (видети [34], [58]), узимајући у обзир да за густину важи $\sigma(z) \to +\infty$, кад $|z| \to 1_-$, конформне метрике $ds^2 = \sigma(z)|dz|^2$, где је $\sigma(z) = \lambda(f(z))|f_z(z)|^2$, $z \in \mathbb{D}$, користећи Бохнерову формулу (видети 3.5.6) и лему 4.3.1, можемо једноставно показати да је сваки хармонијски дефеоморфизам диска $\mathbb{D}$ на себе, уједно и квази-изометрија истог, у односу на хиперболичку метрику (видети 4.4.4). Заиста, да $\sigma(z) \to +\infty$, кад $|z| \to 1_-$, следи из чињенице да се сваки хармонијски дифеоморфизам диска непрекидно проширује до хомеоморфизма затворења истог (видети [19]) и битног својства које каже да је $|f_z(z)| \geqslant c$, кад год је $z \in \mathbb{D}$ (видети [42]). Стога, важи следеће тврђење у чијем доказу је представљен потпуно нови приступ.

Теорема 4.4.4. (**Ван [58]**) *Сваки хармонијски, у односу на хиперболичку метрику, квазиконформни дифеоморфизам јединичног диска* $\mathbb{D}$ *на себе је квазиизометрија тог диска у односу на хиперболичку метрику. Осим тога, пресликавање* f *је уједно и*

$$(1-k, \sqrt{\frac{1+k}{1-k}})$$

би-Липшицово у односу на ту метрику.

Доказ: Претпоставимо да је f k-квазиконформно пресликавање. Посматрајмо конформну метрику $ds^2 = \sigma(z)|dz|^2$ на јединичном диску $\mathbb{D}$, где је $\sigma(z) = \lambda(f(z))|f_z(z)|^2$, $z \in \mathbb{D}$. Користећи Бохнерову формулу добијамо $\frac{1}{2}(\triangle \log \sigma)(z) = \sigma(z)(1 - |\mu_f(z)|^2)$, $z \in \mathbb{D}$, тј. $K_\sigma(z) = (|\mu_f(z)|^2 - 1)$, за свако $z \in \mathbb{D}$. Међутим, како је f квазиконформно пресликавање, то постоји неко $0 \leqslant k < 1$ тако да је $|\mu_f(z)| \leqslant k$, $z \in \mathbb{D}$. Отуда, $0 > K_\sigma(z) = (|\mu_f(z)|^2 - 1) \geqslant -1$, $z \in \mathbb{D}$. Са друге стране, како важи $\sigma(z) \to +\infty$, кад $|z| \to 1_-$, то се применом теореме 4.3.2, добија $\lambda(z) \leqslant \lambda(f(z))|f_z(z)|^2$, $z \in \mathbb{D}$, а самим тим и $||\partial f||(z)(1 - |\mu_f(z)|) > (1-k)$, за свако $z \in \mathbb{D}$. Дакле, на основу леме 4.4.2, добијамо да је

$$d_h(f(z_1), f(z_2)) \geqslant (1-k) d_h(z_1, z_2). \tag{4.4.7}$$

Са друге стране, ако посматрајмо конформну метрику

$$ds^2 = \tilde{\sigma}(z) = (1-k^2)\sigma(z)|dz|^2, \ z \in \mathbb{D},$$

добијамо

$$K_{\tilde{\sigma}}(z) = \frac{K_{\sigma}(z)}{1-k^2} = \frac{|\mu_f(z)|^2 - 1}{1-k^2} \leqslant \frac{k^2-1}{1-k^2} = -1,$$

$z \in \mathbb{D}$, као и $\tilde{\sigma}(z) = (1-k^2)\lambda(f(z))|f_z(z)|^2 \leqslant \lambda(z)$, $z \in \mathbb{D}$. Међутим тада је и $||\partial f||(z)(1+|\mu_f(z)|) \leqslant \dfrac{1+|\mu_f(z)|}{\sqrt{1-k^2}} \leqslant \dfrac{1+k}{\sqrt{1-k^2}} = \sqrt{\dfrac{1+k}{1-k}} \leqslant \dfrac{1}{1-k}$, $z \in \mathbb{D}$. Коначно, на основу леме 4.4.1, добијамо да је

$$d_h(f(z_1), f(z_2)) \leqslant \frac{1}{1-k} d_h(z_1, z_2), \tag{4.4.8}$$

а тиме и тврђење теореме. □

Приметимо да смо на десној страни неједнакости (4.4.8) добили, прво, константу $\sqrt{\dfrac{1+k}{1-k}}$, која очигледно није већа од $\dfrac{1}{1-k}$, $0 \leqslant k < 1$.

4.5 Шварцова лема за реална хармонијска пресликавања

Посматрајмо сада реално хармонијско пресликавање u дефинисано на јединичном диску $\mathbb{D}$ и покушајмо да пренесемо нека од претходних запажања и у овом случају.

Лема 4.5.1. *Нека је* $|x| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. *Тада је* $\cos x \leqslant 1 - \dfrac{4}{\pi^2}x^2$.

Доказ: Очигледно је за $-\dfrac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ испуњено $|\sin t| \geqslant \dfrac{4}{\pi\sqrt{2}}|t|$, одакле је

$$\frac{1-\cos 2t}{2} = \sin^2 t \geqslant \left(\frac{4}{\pi\sqrt{2}}\right)^2 t^2,$$

односно $\cos 2t \leqslant 1 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 t^2$, па отуда, сменом $x = 2t$, добијамо тражену неједнакост. □

У раду [29] добијена је следећа оцена норме градијента хармонијске функције.

Теорема 4.5.2. *Нека је $u : \mathbb{D} \to (-1, 1)$ реална хармонијска функција. Тада важи*

$$|(\nabla u)(z)| \leqslant \frac{4}{\pi}\frac{1 - |u(z)|^2}{1 - |z|^2}, \tag{4.5.1}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$. Претходна неједнакост се достиже.

Доказ: Нека је v функција која је хармонијски конјугована функцији u у јединичном диску $\mathbb{D}$, тј. она за коју је функција $f(z) = u(z) + iv(z)$, $z \in \mathbb{D}$, аналитичка у $\mathbb{D}$. Тада, функција f пресликава јединични диск $\mathbb{D}$ у вертикални појас $\Omega = \{w \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} w < 1\}$. Означимо са g регуларну грану вишезначне функције $G : \zeta \mapsto \frac{2i}{\pi}\log\frac{1+\zeta}{1-\zeta} = w$, $\zeta \in \mathbb{D}$, одређене условом $g(0) = 0$, која $1-1$ аналитички пресликава јединични диск $\mathbb{D}$ на појас Ω. Отуда, на основу последице Шварцове леме, тј. леме 4.2.2, коју примењујемо на функцију $h = g^{-1} \circ f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, једноставно добијамо да је $\frac{|d\zeta|}{1-|\zeta|^2} \leqslant \frac{|dz|}{1-|z|^2}$, односно $|h'(z)| \leqslant \frac{1-|h(z)|^2}{1-|z|^2}$, за свако $z \in \mathbb{D}$. Тривијално је $f'(z) = \frac{4i}{\pi}\frac{h'(z)}{1-h^2(z)}$, кад год је $z \in \mathbb{D}$, па је

$$\begin{aligned}(\nabla u)(z)| = |f'(z)| = \left|\frac{4i}{\pi}\frac{h'(z)}{1-h^2(z)}\right| \\ = \frac{4}{\pi}\frac{|h'(z)|}{|1-h^2(z)|} \leqslant \frac{4}{\pi}\frac{1-|h(z)|^2}{|1-h^2(z)|(1-|z|^2)},\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$.

Нека је сада $z \in \mathbb{D}$ фиксирано. Како важи $\dfrac{1+h(z)}{1-h(z)} \in \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$, јер је $|h(z)| < 1$, следи да постоје и једнозначно су одређени $r > 0$ и $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, такви да је $\dfrac{1+h(z)}{1-h(z)} = re^{it}$. Стога је $h(z) = \dfrac{re^{it}-1}{re^{it}+1}$, одакле је

$$1 - |h(z)|^2 = 1 - h(z)\overline{h(z)}$$
$$= 1 - \frac{re^{it}-1}{re^{it}+1}\frac{re^{-it}-1}{re^{-it}+1} = \frac{4r\cos t}{r^2+2r\cos t+1}.$$

Слично је и $|1-h^2(z)| = \dfrac{4r}{r^2+2r\cos t+1}$, одакле, користећи лему 4.5.1, добијамо

$$\frac{1-|h(z)|^2}{|1-h^2(z)|} = \cos t \leqslant 1 - \frac{4}{\pi^2}t^2. \tag{4.5.3}$$

Међутим, како је $u(z) = \operatorname{Re}(f(z))$ и $f(z) = (g \circ h)(z)$, то је $u(z) = -\dfrac{2}{\pi}t$, те је стога и $1 - \dfrac{4}{\pi^2}t^2 = 1 - u^2(z) = 1 - |u(z)|^2$.

Најзад, тврђење сада непосредно следи на основу последњег запажања, неједнакости (4.5.3) и (4.5.2), као и произвољности тачке $z \in \mathbb{D}$. $\square$

Приметимо да у доказу претходне теореме нисмо морали да примењујемо тврђење леме 4.5.1, већ смо могли само да констатујемо да је, према претходним ознакама, $u(z) = \operatorname{Re}(f(z)) = -\dfrac{2}{\pi}t$, тј. да је $\cos t = \cos(-\dfrac{\pi}{2}u(z)) = \cos(\dfrac{\pi}{2}u(z))$. Стога, тврђење које је исказано у последици испод је незнатно побољшање претходног (видети [10]). Осим тога, анализирајући доказ теореме 4.5.2, тј. случај када у неједнакости (4.5.2), која је последица Шварцове леме, може важити знак једнакости, долазимо до закључка да можемо веома једноставно одредити функцију u за коју у свакој тачки $z \in \mathbb{D}$ важи једнакост у неједнакости 4.5.4. Очигледно, због природе процене у леми 4.5.1, једнакост у неједнакости (4.5.1), за ту функцију u, може важити само у тачки $z = 0$ (видети пример 4.5.1).

Последица 4.5.3. *Нека је* $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *хармонијска функција таква да је* $|u(z)| < 1$, *за свако* $z \in \mathbb{D}$. *Тада важи*

$$|(\nabla u)(z)| \leqslant \frac{4}{\pi} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} u(z))}{1 - |z|^2}, \tag{4.5.4}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$.

Пример 4.5.1. Посматрајмо функцију

$$u(z) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}, \ z = x + iy \in \mathbb{D}.$$

Једноставно се проверава да је функција u хармонијска у јединичном диску $\mathbb{D}$, као и да је $|u(z)| < 1$, $z \in \mathbb{D}$. Такође, тривијално важи

$$\cos(\frac{\pi}{2} u(z)) = \frac{1 - |z|^2}{\sqrt{x^4 + 2x^2(y^2 - 1) + (y^2 + 1)^2}},$$

за свако $z = x + iy \in \mathbb{D}$, али и

$$|(\nabla u)(z)| = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{1}{x^4 + 2x^2(y^2 - 1) + (y^2 + 1)^2}},$$

за свако $z = x + iy \in \mathbb{D}$. Дакле, из претходног, за функцију u, једнакост у неједнакости (4.5.4) важи у свакој тачки $z \in \mathbb{D}$. Међутим, очигледно је $|(\nabla u)(0)| = \dfrac{4}{\pi}$, одакле следи да се једнакост у неједнакости (4.5.1) достиже.

Докажимо, на сличан начин презентован у доказу леме 4.4.1, следеће корисно тврђење.

Лема 4.5.4. *Нека је* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *произвољна област и* $u : \Omega \to (-1, 1)$ *функција класе* $C^1(\Omega)$. *Претпоставимо да је на* Ω *задата конформна метрика* $ds^2 = \rho(z)|dz|^2$. *Ако постоји* $a > 0$ *за које важи,*

$$|(\nabla u)(z)| \leqslant a \cdot \sqrt{\frac{\rho(z)}{\lambda(u(z))}} = \frac{a}{2} \sqrt{\rho(z)}(1 - |u(z)|^2),$$

за свако $z \in \Omega$, *тада је*

$$d_h(u(z_1), u(z_2)) \leqslant a d_\rho(z_1, z_2), \tag{4.5.5}$$

за свако z_1, $z_2 \in \Omega$.

Доказ: Претпоставимо да су z_1 и z_2 различите тачке у Ω, јер је у противном тврђење тривијално. Такође, претпоставимо да је још и $u(z_1) < u(z_2)$. Означимо са $\gamma : [0,1] \ni t \mapsto \gamma(t) \in \Omega$, $\gamma'(t) \neq 0$, $0 < t < 1$, при чему је $\gamma(0) = z_1$, $\gamma(1) = z_2$, регуларну криву у Ω, тј. класе C^1 на интервалу $(0,1)$, која спаја поменуте истакнуте тачке. Нека је, даље, $S = \{t \in (0,1) : (u \circ \gamma)(t) \in (u(z_1), u(z_2)), (u \circ \gamma)'(t) = ((\nabla u)(\gamma(t)), \gamma'(t)) > 0\}$. Тада је, из претходног, скуп S непразан отворен подскуп скупа $(0,1)$, па се може записати као највише пребројива унија дисјунктних отворених интервала I_n, $n \in \mathbb{N}$ (уколико је у питању коначна унија, узећемо да је $I_n = \emptyset$, почевши од неког $n \geqslant 2$). Дефинишимо сада, индуктивно, колекцију скупова J_n, $n \in \mathbb{N}$, који су мерљиви у смислу Лебегове мере на реалној правој: $J_1 = I_1$, односно, $J_n = \{t \in I_n : (u \circ \gamma)(t) \notin (u \circ \gamma)(\bigcup_{k=1}^{n-1} J_k)\}$, $n \geqslant 2$. Стога, ако дефинишемо скуп $J = \bigcup_{n=1}^{+\infty} J_n$, тада, на основу конструкције, важи да је исти ништа друго него највише пребројива унија отворених, односно, полуотворених интервала, па је мерљив, као и да је Лебегова мера скупа $(u \circ \gamma)(J)$ једнака Лебеговој мери сегмента $[u(z_1), u(z_2)]$, тј. $u(z_2) - u(z_1) = |u(z_2) - u(z_1)| = m((u \circ \gamma)(J))$, где је m уобичајена ознака за Лебегову меру на $\mathbb{R}$. Штавише, функција $u \circ \gamma$ је $1-1$ на J, а самим тим и γ, одакле, на основу услова тврђења и неједнакости Коши-Шварца добијамо да је

$$\frac{d_h(u(z_1), u(z_2))}{a} = \frac{1}{a}\int_{[u(z_1),u(z_2)]}\frac{2}{1-\xi^2}d\xi$$
$$= \frac{1}{a}\int_{(u\circ\gamma)(J)}\frac{2}{1-|\xi|^2}d\xi \leqslant \frac{1}{a}\int_J\frac{2|(\nabla u)(z)||\gamma'(t)|}{1-|(u\circ\gamma)(t)|^2}dt$$
$$= \frac{1}{a}\int_{\gamma(J)}\frac{2}{1-|u(z)|^2}|(\nabla u)(z)||dz|$$
$$\leqslant \int_{\gamma(J)}\sqrt{\rho(z)}|dz| \leqslant \int_\gamma \sqrt{\rho(z)}|dz|,$$

јер је $d\xi = ((\nabla u)(\gamma(t)), \gamma'(t))dt$. Међутим, како се за $d_\rho(z_1, z_2)$ узима инфимум десне стране претходне неједнакости по свим могућим ректифицијабилним кривим које спајају тачке z_1 и z_2, закључујемо да имамо доказано комплетно тврђење леме. □

Међутим, важи и више.

Последица 4.5.5. *Нека је u хармонијска функција која пресликава јединични диск $\mathbb{D}$ у интервал $(-1, 1)$. Тада важи*

$$d_h(u(z), u(w)) \leqslant \frac{4}{\pi}d_h(z, w),$$

за свако z, $w \in \mathbb{D}$.

Доказ: Посматрајмо на диску $\mathbb{D}$ хиперболичку метрику дату са $ds^2 = \lambda(z)|dz|^2 = \frac{4}{(1-|z|^2)^2}|dz|^2$. Тада, на основу теореме 4.5.2, као и тврђења леме 4.5.4, за $a = \frac{4}{\pi}$, добијамо жељени резултат. □

Као мотивацију ради генерализације претходног тврђења, у ситуацији која је општија, размотрићемо произвољно хармонијско пресликавање $u : G \to (-1, 1)$, где је G произвољан просто повезани хиперболички домен комплексне равни. На основу Риманове теореме знамо да постоји $1-1$

аналитичко пресликавање g те области на јединични диск $\mathbb{D}$, па је пресликавање $f = u \circ g^{-1} : \mathbb{D} \to (-1,1)$ такође једно реално хармонијско (видети коментар непосредно након једнакости 1.1.5). Ако сада применимо теорему 4.5.5 на функцију f, одмах добијамо да важи

$$d_{\mathbb{D}}(f(\zeta_1), f(\zeta_2)) \leqslant \frac{4}{\pi} d_{\mathbb{D}}(\zeta_1, \zeta_2),$$

за свако $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{D}$, те стога, користећи инваријантност хиперболичке метрике у односу на конформни изоморфизам g одговарајућих области, ако изаберемо произвољне тачке z_1 и z_2 које припадају области G, добијамо да важи

$$\frac{4}{\pi} d_G(z_1, z_2) \equiv \frac{4}{\pi} d_{\mathbb{D}}(g(z_1), g(z_2)) \geqslant d_{\mathbb{D}}(u(z_1), u(z_2)),$$

где је $\zeta_1 = g(z_1)$ и $\zeta_2 = g(z_2)$. Дакле, показали смо да важи и следеће тврђење.

Последица 4.5.6. *Нека је* u *хармонијска функција која пресликава просто повезани домен* $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$, *у интервал* $(-1,1)$. *Тада важи*

$$d_{\mathbb{D}}(u(z), u(w)) \leqslant \frac{4}{\pi} d_G(z, w),$$

за свако z, $w \in G$.

Глава 5

Хармонијске квазиконформне квази-изометрије

У овој глави ћемо се бавити обичним хармонијским дифеоморфизмима која делују између различитих хиперболичких домена у равни, која су још и квазиконформна преслакавања. Поновимо да је прва некомплетна карактеризација хармонијског квазиконформног дифеоморфизма јединичног диска на себе представљена у раду [39], где је добијено да је свако једно такво пресликавање ко-Липшицово. Такође, у раду [51], уз помоћ Моријеве неједнакости за квазиконформна пресликавања, су у потпуности окарактерисани поменути дифеоморфизми у терминима граничне функције, јер се свако квазиконформно пресликавање јединичног диска на себе може проширити до хомеоморфизма одговарајућих затворења. Показано је да су та пресликавања би-Липшицова у односу на еуклидску метрику. Такође, иста су и квази-изометрије у односу на хиперболичку метрику (видети [34]).

5.1 Случај јединичног диска $\mathbb{D}$

Нека је f произвољно k-квазиконформно хармонијско пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ у себе, са комплексном дилатацијом μ_f и нека је $\sigma(z)|dz|^2$ конформна метрика на диску $\mathbb{D}$, где је $\sigma(z) = \lambda(f(z))|f_z(z)|^2$, $z \in \mathbb{D}$. Показано је да је (видети [34]) важи

$$K_\sigma(z) = -\left(1 + |\mu_f(z)|^2 + 2\mathrm{R}e\left(\frac{(f(z))^2\,\overline{f_{\bar{z}}(z)}}{f_z(z)}\right)\right), \tag{5.1.1}$$

а самим тим и да је

$$-(1 + |\mu_f(z)|)^2 \leqslant K_\sigma(z) \leqslant -(1 - |\mu_f(z)|)^2, \tag{5.1.2}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, што нам даје могућност да се позовемо на тврђење леме 4.3.1, али и тврђење теореме 4.3.2.

Пропозиција 5.1.1. *Нека је f произвољно k-квазиконформно хармонијско пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ у себе. Тада за свако $z \in \mathbb{D}$ важи*

$$|f_z(z)| \leqslant \frac{1}{1-k}\,\frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2},$$

односно $||\partial f||(z) \leqslant \dfrac{1}{1-k}$.

Доказ: Дефинишимо метричку густину $\sigma(z) = (1-k)^2\lambda(f(z))|f_z(z)|^2$, $z \in \mathbb{D}$. Како је f хармонијска функција у $\mathbb{D}$, тј. $(f_z)_{\bar{z}}(z) = 0$, $z \in \mathbb{D}$, тада је функција f_z аналитичка у $\mathbb{D}$, одакле закључујемо да је функција $z \mapsto \log|f_z(z)|$ хармонијска у $\mathbb{D}$. Отуда је $(\triangle \log \sigma)(z) = (\triangle \log(\lambda \circ f))(z)$, за свако $z \in \mathbb{D}$. Такође,

$$(\triangle \log(\lambda \circ f))(z) = 4(\log(\lambda \circ f))_{z\bar{z}}(z)$$

$$= \frac{8|f_z(z)|^2}{(1-|f(z)|^2)^2}\left(1+|\mu_f(z)|^2+2\mathrm{Re}\left(\frac{(f(z))^2\,\overline{f_z(z)}\,\overline{f_{\bar z}(z)}}{|f_z(z)|^2}\right)\right)$$
$$= \frac{2\sigma(z)}{(1-k)^2}\left(1+|\mu_f(z)|^2+2\mathrm{Re}\left(\frac{(f(z))^2\,\overline{f_z(z)}\,\overline{f_{\bar z}(z)}}{|f_z(z)|^2}\right)\right).$$

Дакле,

$$K_\sigma(z) = -\frac{1}{(1-k)^2}\left(1+|\mu_f(z)|^2+2\mathrm{Re}\left(\frac{(f(z))^2\,\overline{f_z(z)}\,\overline{f_{\bar z}(z)}}{|f_z(z)|^2}\right)\right), \tag{5.1.3}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$. Међутим, како је

$$\left|\mathrm{Re}\left(\frac{(f(z))^2\,\overline{f_z(z)}\,\overline{f_{\bar z}(z)}}{|f_z(z)|^2}\right)\right| \leqslant \left|\frac{(f(z))^2\,\overline{f_z(z)}\,\overline{f_{\bar z}(z)}}{|f_z(z)|^2}\right| \leqslant |\mu_f(z)|, \tag{5.1.4}$$

добијамо

$$\mathrm{Re}\left(\frac{(f(z))^2\,\overline{f_z(z)}\,\overline{f_{\bar z}(z)}}{|f_z(z)|^2}\right) \geqslant -|\mu_f(z)|,$$

и отуда

$$K_\sigma(z) \leqslant -\frac{1}{(1-k)^2}\left(1+|\mu_f(z)|^2-2|\mu_f(z)|\right) = -\frac{(1-|\mu_f(z)|)^2}{(1-k)^2} \leqslant -1.$$

На крају, на основу леме 4.3.1, следи

$$(1-k)^2\lambda(f(z))|f_z(z)|^2 \leqslant \lambda(z), \tag{5.1.5}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, а самим тим и тврђење. □

Сада смо у прилици да докажемо да произвољно хармонијско k-квазиконформно пресликавање f јединичног дислка $\mathbb{D}$ у себе не повећава одговарајуће хиперболичко растојање, до на извесну мултипликативну константу која зависи од константе квазиконформности k (видети [34]).

Теорема 5.1.2. *Нека је f k-квазиконформно хармонијско пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ у себе. Тада за сваке две тачке z_1 и z_2 у диску $\mathbb{D}$ важи*

$$d_h(f(z_1), f(z_2)) \leqslant \frac{1+k}{1-k} d_h(z_1, z_2).$$

Доказ: На основу пропозиције 5.1.1 имамо да је $||\partial f||(z) \leqslant \dfrac{1}{1-k}$, за свако $z \in \mathbb{D}$, односно, $||\partial f||(z)(1 + |\mu_f(z)|) \leqslant \dfrac{1+k}{1-k}$, за свако $z \in \mathbb{D}$, одакле, користећи лему 4.4.1, добијамо тврђење. □

Да бисмо добили супротну неједнакост у односу на добијену у пропозицији 5.1.1, морамо претпоставити да је пресликавање f сурјективно.

Пропозиција 5.1.3. *Нека је f k-квазиконформно хармонијско пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на себе. Тада, за свако $z \in \mathbb{D}$ важи*

$$|f_z(z)| \geqslant \frac{1}{1+k}\,\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2},$$

као и $||\partial f||(z) \geqslant \dfrac{1}{1+k}$.

Доказ: Као у доказу пропозиције 5.1.1, за метричку густину

$$\sigma(z) = (1-k)^2\lambda(f(z))|f_z(z)|^2,\ z \in \mathbb{D},$$

на основу релација (5.1.3) и (5.1.4), добијамо да такође важи

$$-1 \geqslant K_\sigma(z) \geqslant -\frac{1}{(1-k)^2}\left(1 + |\mu_f(z)|^2 + 2|\mu_f(z)|\right) \tag{5.1.6}$$

$$= -\frac{(1+|\mu_f(z)|)^2}{(1-k)^2} \geqslant -(\frac{1+k}{1-k})^2, \tag{5.1.7}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, јер је

$$\mathrm{Re}\left(\frac{(f(z))^2\,\overline{f_z(z)}\,\overline{f_{\bar z}(z)}}{|f_z(z)|^2}\right) \leqslant |\mu_f(z)|,\ z \in \mathbb{D}.$$

Са друге стране, ако је $\tilde\sigma(z) = (\dfrac{1+k}{1-k})^2\sigma(z)$, $z \in \mathbb{D}$, тада је

$$K_{\tilde\sigma}(z) = (\frac{1-k}{1+k})^2 K_\sigma(z),\ z \in \mathbb{D},$$

па је

$$-1 \leqslant K_{\tilde{\sigma}}(z) \leqslant -(\frac{1-k}{1+k})^2 < 0,\, z \in \mathbb{D}.$$

Међутим, како важи $\tilde{\sigma}(z) = (1+k)^2\lambda(f(z))|f_z(z)|^2 \to +\infty$, кад $|z| \to 1_-$, применом теореме 4.3.2, добијамо да је $\lambda(z) \leqslant \tilde{\sigma}(z)$, за свако $z \in \mathbb{D}$, што нам даје први део тврђења, а затим и

$$||\partial f||(z) = \sqrt{\frac{\lambda((f(z))}{\lambda(z)}}|f_z(z)| \geqslant \frac{1}{1+k},$$

за свако $z \in \mathbb{D}$. □

Теорема 5.1.4. *Нека је f пресликавање које је k-квазиконформно и хармонијско пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на себе. Тада за сваке две тачке z_1 и z_2 у диску $\mathbb{D}$ важи*

$$d_h(f(z_1), f(z_2)) \geqslant \frac{1-k}{1+k} d_h(z_1, z_2).$$

Доказ: На основу пропозиције 5.1.3 имамо да је $||\partial f||(z) \geqslant \dfrac{1}{1+k}$, за свако $z \in \mathbb{D}$, тј. $||\partial f||(z)(1 - |\mu_f(z)|) \geqslant \dfrac{1-k}{1+k}$, за свако $z \in \mathbb{D}$, одакле, користећи лему 4.4.2, добијамо тврђење. □

Поновимо да многи аутори као константу квазиконформности најчешће подразумевају број $K = \dfrac{1+k}{1-k}$, $0 \leqslant k < 1$. С тим у вези наводимо следеће тврђење.

Последица 5.1.5. *Нека је f k-квазиконформно хармонијско пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на себе. Ако је $K = \dfrac{1+k}{1-k}$, тада је пресликавање f квазиизометрија јединичног диска у односу на хиперболичку метрику. Специјално, пресликавање f је (K^{-1}, K) би-Липшицово у односу на хиперболичку метрику на $\mathbb{D}$.*

Размотримо ситуацију у којој је још и $f(0)=0$. Тада је

$$d_h(f(z),0)\leqslant Kd_h(z,0) \quad \text{и} \quad d_h(f(z),0)\geqslant \frac{1}{K}d_h(z,0),$$

где је $K=\dfrac{1+k}{1-k}$. Међутим, како је $d_h(r,0)=\ln\dfrac{1+r}{1-r}$, $0\leqslant r<1$, добијамо да је и

$$|f(z)|\leqslant \frac{(1+|z|)^K-(1-|z|)^K}{(1+|z|)^K+(1-|z|)^K}, \tag{5.1.8}$$

као и

$$|f(z)|\geqslant \frac{(1+|z|)^{\frac{1}{K}}-(1-|z|)^{\frac{1}{K}}}{(1+|z|)^{\frac{1}{K}}+(1-|z|)^{\frac{1}{K}}}. \tag{5.1.9}$$

Приметимо да за $K=1$, што је еквивалентно случају $k=0$, тј. да је f конформно пресликавање, добијамо да је $f(z)=e^{i\alpha}z$, за неко $\alpha\in[0,2\pi)$. Штавише, било који хармонијски дифеоморфизам диска $\mathbb{D}$, који задовољава претходне неједнакости за $K=1$, је ротација.

Докажимо сада неколико помоћних тврђења.

Лема 5.1.6. *За* $a>1$ *функција* $s(x)=(1+x)^a(x-a)+(1-x)^a(a+x)$ *је негативна, за свако* $0<x<1$, *док је за* $0<a<1$ *иста позитивна, за свако* $0<x<1$.

Доказ: Очигледно је за $a>1$ испуњено $\dfrac{a-x}{a+x}>\dfrac{1-x}{1+x}>\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^a$, за свако $0<x<1$. Са друге стране, уколико је $0<a<1$, тада важи $\dfrac{a-x}{a+x}<\dfrac{1-x}{1+x}<\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^a$, кад год је $0<x<1$, одакле у потпуности добијамо тврђење. □

Лема 5.1.7. *Нека је* $a>1$ *произвољно. Тада је функција*

$$s:x\mapsto \frac{(1+x)^a-(1-x)^a}{(1+x)^a+(1-x)^a},\ 0<x<1,$$

конкавна и строго монотоно растућа на интервалу $(0,1)$. *При томе за десни извод те функције у тачки* $x=0$ *важи* $s'_+(0)=a$, *па је отуда и*

$\dfrac{(1+x)^a-(1-x)^a}{(1+x)^a+(1-x)^a} < ax$, за свако $0 < x < 1$. Такође, испуњено је и $s'_{-}(1) = 0$, где је са $s'_{-}(1)$ означен леви извод те функције у тачки $x = 1$.

Доказ: На основу основних правила диференцирања налазимо да је

$$s'(x) = \frac{4a(1-x^2)^{a-1}}{[(1-x)^a+(1+x)^a]^2},\ 0 < x < 1,$$

као и

$$s''(x) = \frac{8a(1-x^2)^{a-2}[(1+x)^a(x-a)+(1-x)^a(a+x)]}{[(1-x)^a+(1+x)^a]^3},\ 0 < x < 1.$$

Сада је јасно, користећи лему 5.1.6, да функција s има наведена својства. □

Међутим, важи и више.

Лема 5.1.8. *Нека је $0 < a < 1$ произвољно. Тада је функција*

$$s : x \mapsto \frac{(1+x)^a-(1-x)^a}{(1+x)^a+(1-x)^a},\ 0 < x < 1,$$

конвексна и строго монотоно растућа на интервалу $(0,1)$. При томе за десни извод те функције у тачки $x = 0$ важи $s'_{+}(0) = a$, па је отуда и $\dfrac{(1+x)^a-(1-x)^a}{(1+x)^a+(1-x)^a} > ax$, за свако $0 < x < 1$.

Теорема 5.1.9. *Нека је f k-квазиконформно хармонијско пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на себе и нека је још и $f(0) = 0$. Тада је за свако $z \in \mathbb{D}$ испуњено*

$$\frac{1}{K}|z| \leqslant |f(z)| \leqslant K|z|,$$

где је $K = \dfrac{1+k}{1-k}$.

Доказ: На основу добијених неједнакости (5.1.8) и (5.1.9), доказ теореме непосредно следи применом леме 5.1.8. □

У раду [49] аутори су добили важну неједнакост исказану у наредној теореми, која одређује доњу границу за константу колипшицовости, за пресликавање које је хармонијски k-квазиконформни дифеоморфизам јединичног диска на себе и које фиксира тачку $z = 0$.

Теорема 5.1.10. *Нека је f k-квазиконформно хармонијско пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на себе и нека је $f(0) = 0$. Тада, за свако $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ важи*

$$|f(z_1) - f(z_2)| \geqslant m(K)|z_1 - z_2|,$$

где је $K = \dfrac{1+k}{1-k}$ *и* $m(K) = \dfrac{2^{\frac{5}{2}(1-K^2)(3+\frac{1}{K})}}{K^{3K+1}(K^2+K+1)^{3K}}$.

У раду [28] аутори, Калај и Павловић, су користећи познату Моријеву константу добили још бољу константу колипшицовости, док су у чланку [9] аутори навели неколико интересантних проблема из теорије хармонијских пресликавања, од којих је један управо проналажење најбоље константе $c(K)$, за коју је $|f(z)| \geqslant c(K)|z|$, кад год је $z \in \mathbb{D}$. Очигледно је $1 \geqslant c(K) \geqslant \dfrac{1}{K}$, те је отуда и $\lim\limits_{K\to 1_+} c(K) = 1$.

Напомена 5.1.1. Добијена неједнакост (5.1.8) свакако није боља од познате неједнакости (2.3.1) исказане у Шварцовој леми 2.3.2 за хармонијске функције. Међутим, стављајући $z_2 = 0$ у неједнакости теореме 5.1.10, добијамо да је $|f(z)| \geqslant \dfrac{1}{K}|z| \geqslant m(K)|z| = \dfrac{2^{\frac{5}{2}(1-K^2)(3+\frac{1}{K})}}{K^{3K+1}(K^2+K+1)^{3K}}|z|$.

5.2 Случај конвексних кодомена

Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ просто повезана конвексна област у комплексној равни, различита од $\mathbb{C}$. Познато је да се претходна тврђења могу пренети у случају конвексног просто повезаног домена у слици (видети [11]).

Размотримо, најпре, следећи пример.

Пример 5.2.1. (a) Нека је, као и до сада, $0 \leqslant k < 1$ произвољно и $K = \dfrac{1+k}{1-k}$. Пресликавање $h : w \mapsto \zeta = h(w) = Ku + iv$, $w = u + iv \in \mathbb{H}$, је хармонијски k-квазиконформни дифеоморфизам горње полуравни на себе, па отуда (видети пример 3.4.2), узимајући произвољан конформни изоморфизам g јединичног диска $\mathbb{D}$ и горње полуравни $\mathbb{H}$, $g : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$, добијамо да за пресликавање $f : z \mapsto f(z) = h(g(z))$, $z \in \mathbb{D}$, важи

$$||\partial f||(z) = ||\partial h||(w) = \sqrt{\frac{\lambda_{\mathbb{H}}(h(w))}{\lambda_{\mathbb{H}}(w)}}|(h_w(w)| = |h_w(w)| = \frac{K+1}{2},$$

за свако $z \in \mathbb{D}$.

(б) Ако бисмо уместо функције h коју смо дефинисали у претходном делу овог примера, посматрали њену инверзну функцију, тј. функцију $w = H(\zeta) = \dfrac{1}{K}\xi + i\eta$, $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{H}$, која је такође хармонијски k-квазиконформни дифеоморфизам горње полуравни на себе, истим резоновањем добили бисмо да је

$$||\partial F||(z) = ||\partial H||(\zeta) = \sqrt{\frac{\lambda_{\mathbb{H}}(H(\zeta))}{\lambda_{\mathbb{H}}(\zeta)}}|(H_\zeta(\zeta)| = |h_\zeta(\zeta)| = \frac{K+1}{2K},$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, где је $F : z \mapsto F(z) = H(g(z))$, $z \in \mathbb{D}$.

У раду [17] је доказано следеће битно тврђење, које ће нам омогућити да применимо метод упоређивања конформних метрика и у овом случају.

Лема 5.2.1. *Нека је* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *дата просто повезана област различита од* $\mathbb{C}$. *Тада,* Ω *је конвексна обалст ако и само ако за густину хиперболичке метрике* λ_Ω, *која је дефинисана на* Ω, *важи*

$$|(\log \lambda_\Omega)_z(z)| \leqslant \sqrt{\lambda_\Omega(z)}, \tag{5.2.1}$$

за свако $z \in \Omega$. *Такође, уколико важи претходна неједнакост, тада је и*

$$|(\log \lambda_\Omega)_{zz}(z)| \leqslant \frac{1}{2}\lambda_\Omega(z), \tag{5.2.2}$$

за свако $z \in \Omega$.

Овакво једно тврђење не важи у случају произвољне просто повезане области.

Теорема 5.2.2. *Нека је* f k*-квазиконформно хармонијско пресликавање јединичног диска* $\mathbb{D}$ *на* Ω, *где је* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *просто повезана конвексна област различита од* $\mathbb{C}$. *Тада важи*

$$\frac{K+1}{2K} \leqslant ||\partial f||(z) \leqslant \frac{K+1}{2}, \tag{5.2.3}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, *где је* $K = \dfrac{1+k}{1-k} \geqslant 1$. *При томе, обе неједнакости се достижу.*

Доказ: Поступајући, слично, као раније, дефинишимо конформну метричку густину $\sigma(z) = (1-k)^2\lambda_\Omega(f(z))|f_z(z)|^2$, $z \in \mathbb{D}$. Рачунајући одговарајуће парцијалне изводе, једноставно добијамо да је

$$(\triangle \log \sigma)(z) = (\triangle \log{(\lambda_\Omega \circ f)})(z),$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, јер је функција f_z аналитичка у $\mathbb{D}$, па је отуда функција $z \mapsto \log|f_z(z)|$ хармонијска у $\mathbb{D}$. Такође важи,

$$
\begin{aligned}
(\triangle \log(\lambda_\Omega \circ f))(z) &= 4(\log(\lambda_\Omega \circ f))_{z\bar{z}}(z) \\
&= 4\left((\log\lambda_\Omega)_{w\bar{w}}(f(z))(|f_z(z)|^2 + |f_{\bar{z}}(z)|^2) + 2\mathrm{R}e((\log\lambda_\Omega)_{ww}(f(z))f_z(z)f_{\bar{z}}(z))\right) \\
&= (\triangle \log\lambda_\Omega)(f(z))(|f_z(z)|^2 + |f_{\bar{z}}(z)|^2) + 8\mathrm{R}e((\log\lambda_\Omega)_{ww}(f(z))f_z(z)f_{\bar{z}}(z)) \\
&= 2\lambda_\Omega(f(z))(|f_z(z)|^2 + |f_{\bar{z}}(z)|^2) + 8\mathrm{R}e((\log\lambda_\Omega)_{ww}(f(z))f_z(z)f_{\bar{z}}(z)),
\end{aligned}
$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, јер је $K_{\lambda_\Omega}(w) = -1$, $w = f(z) \in \Omega$. Стога је и

$$
K_\sigma(z) = -\frac{1}{(1-k)^2}\left(1 + |\mu_f(z)|^2 + 4\mathrm{R}e\left(\frac{(\log\lambda_\Omega)_{ww}(f(z))}{\lambda_\Omega(f(z))}\frac{f_{\bar{z}}(z)}{\overline{f_z(z)}}\right)\right), \tag{5.2.4}
$$

за свако $z \in \mathbb{D}$. Даље, применом неједнакости (5.2.2), исказане у леми 5.2.1, добијамо да важи

$$
\left|\mathrm{R}e\left(\frac{(\log\lambda_\Omega)_{ww}(f(z))}{\lambda_\Omega(f(z))}\frac{f_{\bar{z}}(z)}{\overline{f_z(z)}}\right)\right| \leqslant \left|\frac{(\log\lambda_\Omega)_{ww}(f(z))}{\lambda_\Omega(f(z))}\frac{f_{\bar{z}}(z)}{\overline{f_z(z)}}\right| \leqslant \frac{1}{2}|\mu_f(z)|, \tag{5.2.5}
$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, а самим тим, користећи (5.2.4), и да је испуњено

$$
K_\sigma(z) \leqslant -\frac{1 + |\mu_f(z)|^2 - 2|\mu_f(z)|}{(1-k)^2} = -\frac{(1 - |\mu_f(z)|)^2}{(1-k)^2} \leqslant -1, \tag{5.2.6}
$$

односно,

$$
K_\sigma(z) \geqslant -\frac{1 + |\mu_f(z)|^2 + 2|\mu_f(z)|}{(1-k)^2} = -\frac{(1 + |\mu_f(z)|)^2}{(1-k)^2} \geqslant -(\frac{1+k}{1-k})^2, \tag{5.2.7}
$$

за свако $z \in \mathbb{D}$.

Најзад, на основу неједнакости (5.2.6), применом леме 4.3.1, добијамо да је $\sigma(z) \leqslant \lambda(z)$, $z \in \mathbb{D}$, што је еквивалентно са

$$
||\partial f||(z) = \sqrt{\frac{\lambda_\Omega(f(z))}{\lambda(z)}}|f_z(z)| \leqslant \frac{1}{1-k} = \frac{K+1}{2},
$$

за свако $z \in \mathbb{D}$.

Са друге стране, за Гаусову кривину конформне метрике $ds^2 = \tilde{\sigma}(z)|dz|^2$ на $\mathbb{D}$, где је $\tilde{\sigma}(z) = (\frac{1+k}{1-k})^2\sigma(z)$, $z \in \mathbb{D}$, применом процене (5.2.7), тривијално важи

$$0 > K_{\tilde{\sigma}}(z) = (\frac{1-k}{1+k})^2 K_{\sigma}(z) \geqslant -1,\ z \in \mathbb{D},$$

што нам, применом теореме 4.3.2, обезбеђује да је $\lambda(z) \leqslant \tilde{\sigma}(z)$, за свако $z \in \mathbb{D}$, јер $\tilde{\sigma}(z) \to +\infty$, кад $|z| \to 1_-$, односно,

$$||\partial f||(z) = \sqrt{\frac{\lambda_\Omega(f(z))}{\lambda(z)}}|f_z(z)| \geqslant \frac{1}{1+k} = \frac{K+1}{2K},$$

за свако $z \in \mathbb{D}$.

Да се неједнакости достижу, показују примери на почетку поглавља. Такође, примећујемо да десна страна неједнакости остаје и даље на снази у случају да пресликавање f није сурјективно. □

Последица 5.2.3. *Нека је f k-квазиконформно хармонијско пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на Ω, где је $\Omega \subset \mathbb{C}$ просто повезана конвексна област различита од $\mathbb{C}$. Тада важи*

$$\frac{1}{K}d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) \leqslant d_\Omega(f(z_1), f(z_2)) \leqslant K d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2), \tag{5.2.8}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, где је $K = \frac{1+k}{1-k} \geqslant 1$.

Последица 5.2.4. *Нека је f k-квазиконформно хармонијско пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на Ω, где је $\Omega \subset \mathbb{C}$ просто повезана конвексна област различита од $\mathbb{C}$. Ако је $K = \frac{1+k}{1-k}$, тада је пресликавање f квази-изометрија јединичног диска на област Ω у односу на одговарајућа хиперболичка растојања. Специјално, пресликавање f је (K^{-1}, K) би-Липшицово у односу на иста.*

5.3 Полураван $\mathbb{H}$ и вертикални појас $\mathbb{S}$

У овом одељку нам је циљ да опишемо, под одређеним условима, хармонијске дифеоморфизме између појединих битних домена комплексне равни. Специјално, интересантни ће нам бити домени $\mathbb{H}$ и $\mathbb{S}$, односно горња полураван и вертикални појас (видети примере 3.4.2 и 3.4.3).

Познато да за позитивне хармонијске функције (видети [4] и [34]) дефинисане на горњој полуравни $\mathbb{H}$ важи следећа важна теорема репрезентације. То тврђење се у литератури често назива теоремом Риса и Херглоца.

Теорема 5.3.1. *Ако је* $u : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ *позитивна хармонијска функција у дефинисана у горњој полуравни. Тада постоји неопадајућа реална функција* μ*, дефинисана на* $\mathbb{R}$*, као и ненегативна константа* c*, тако да важи*

$$u(z) = cy + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P(z,t)d\mu(t),$$

за свако $z = x + iy \in \mathbb{H}$*, где је са* $P(z,t) = \dfrac{y}{|z-t|^2}$*,* $z \in \mathbb{H}$*,* $t \in \mathbb{R}$*, означено Пуасоново језгро за горњу полураван.*

Такође, у даљем, од значаја ће нам бити и последица претходне теореме (видети [34] и [28]).

Последица 5.3.2. *Нека је пресликавање* f *хармонијски дифеоморфизам горње полуравни* $\mathbb{H}$ *на себе и нека је хомеоморфизам одговарајућих затворења у смислу метрике у* $\overline{\mathbb{C}}$*. Ако важи* $f(\infty) = \infty$*, тада је* $v(z) = \mathrm{Im}(f(z)) = cy$*,* $c > 0$*, за свако* $z \in \mathbb{H}$*.*

Доказ: На основу услова теореме $v = \operatorname{Im} f$ је строго позитивна хармонијска функција дефинисана у горњој полуравни $\mathbb{H}$, за коју је још и $\lim\limits_{y \to 0_+} v(z) = v(x) = 0$, за свако фиксирано $x \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$. Са друге стране, постоји неопадајућа функција $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, али и константа $c \geqslant 0$, тако да важи

$$v(z) = cy + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(z,t) d\mu(t),$$

за свако $z \in \mathbb{H}$. Имајући то у виду, на основу процене $|z-t|^2 = y^2 + |x-t|^2 \leqslant 2y^2$, $x \leqslant t \leqslant x+y$, за фиксирано $x = \operatorname{Re} z$, $z \in \mathbb{H}$, добијамо $v(z) \geqslant cy + \frac{1}{\pi} \int_x^{x+y} P(z,t) d\mu(t) \geqslant cy + \frac{1}{2\pi y} \int_x^{x+y} d\mu(t) = cy + \frac{\mu(x+y) - \mu(x)}{2\pi y} \geqslant 0$, одакле, преласком на граничну вредност кад $y \to 0_+$, добијамо да је $\mu'_+(x) = 0$. Аналогно, примењујући исту процену за именилац Пуасоновог језгра, те преласком на интеграл на сегменту $[x-y, x]$, добијамо да је и леви извод функције μ у тачки x једнак 0, тј. $\mu'_-(x) = 0$. Дакле, због произвољности $x \in \mathbb{R}$, функција μ је константна функција на $\mathbb{R}$, па је стога $v(z) = cy$, за свако $z \in \mathbb{H}$. Међутим, сада је јасно да мора бити $c > 0$, те отуда следи и тврђење. □

У даљем тексту, ради једноставности, са $\mathrm{QC}(\mathbb{H})$ ћемо означавати скуп свих квазиконформних пресликавања f горње полуравни на себе, која се непрекидно могу проширити до хомеоморфизма затворене, у смислу топологије у $\overline{\mathbb{C}}$, горње полуравни на себе и која фиксирају тачку ∞. Уколико је пресликавање $f \in \mathrm{QC}(\mathbb{H})$ још и хармонијско у $\mathbb{H}$, рећи ћемо да припада простору $\mathrm{QCH}(\mathbb{H})$. Познато је (видети [1]) да ако важи $f \in \mathrm{QC}(\mathbb{H})$, да је тада пресликавање $\varphi = f|_{\mathbb{R}}$, тј. рестрикција пресликавања f на $\mathbb{R}$, пресликавање које је квазисиметрично, тј. строго растући хомеоморфизам реалне осе на себе за који постоји константа $c \geqslant 1$ таква да је

$\dfrac{1}{c} \leqslant \dfrac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-t)} \leqslant c$, за свако $x \in \mathbb{R}$ и свако $t > 0$. Такође, уколико је φ настало као рестрикција пресликавања $f \in \mathrm{HQC}(\mathbb{H})$ на $\mathbb{R}$, тада ће исто бити би-Липшицово на $\mathbb{R}$, самим тим и апсолутно непрекидно на $\mathbb{R}$, те да ће важити $\dfrac{1}{c} \leqslant \varphi'(x) \leqslant c$, за скоро свако $x \in \mathbb{R}$, где је c нека позитивна константа.

Навешћемо сада једну од првих карактеризација простора $\mathrm{HQC}(\mathbb{H})$ (видети [27]), чији је доказ непосредна последица претходних разматрања.

Пропозиција 5.3.3. *Нека је $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ хармонијско k-квазиконформно пресликавање. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

(а) $f \in \mathrm{QC}(\mathbb{H})$.

(б) *Постоје позитивне константе c и M, такве да важи*

$$v(z) = \mathrm{Im}(f(z)) = cy,\ \frac{1}{M} \leqslant \frac{\partial u}{\partial x}(z) \leqslant M,\ \left|\frac{\partial u}{\partial y}(z)\right| \leqslant M,$$

за свако $z = x + iy \in \mathbb{H}$.

(ц) *f је би-Липшицово пресликавање горње полуравни на себе.*

Међутим, важи и више.

Теорема 5.3.4. *Нека је f пресликавање које је k-квазиконформни хармонијски дифеоморфизам горње полуравни $\mathbb{H}$ на себе. Тада је f уједно и (K^{-1}, K) квази-изометрија у односу на хиперболичку метрику на $\mathbb{H}$, тј. (K^{-1}, K) би-Липшицово пресликавање у односу на ту метрику, где је $K = \dfrac{1+k}{1-k}$.*

Доказ: Како је f квазиконформни хармонијски дифеоморфизам горње полуравни $\mathbb{H}$ на себе, то се f може проширити до хомеоморфизма затворене горње полуравни $\overline{\mathbb{H}}$, у смислу топологије у $\overline{\mathbb{C}}$, на себе (видети [1]). Означићемо то проширење са f, такође. Стога, уколико $f(\infty) \neq \infty$, можемо наћи тачно једно $a \in \mathbb{R}$ за које је $f(a) = \infty$. Означимо сада са g конформни аутоморфизам полуравни $\mathbb{H}$ на себе, за који је $g(\infty) = a$. С обзиром да је пресликавање g уједно и изометрија горње полуравни $\mathbb{H}$, у односу на хиперболичку метрику, те како је композиција $f \circ g$, на основу пропозиције 1.4.1, такође k-квазиконформно пресликавање, али на основу једнакости (1.1.5) и хармонијско пресликавање, можемо претпоставити да полазно пресликаване f задовољава да је $f(\infty) = \infty$. Даље, користећи лему 5.3.2, постоји константа $c > 0$ таква да је $v(z) = \mathrm{Im}(f(z)) = cy$, за свако $z \in \mathbb{H}$. Уз помоћ трансформације сличности $h : \zeta \mapsto h(\zeta) = \dfrac{\zeta}{c}$, $\zeta \in \mathbb{H}$, на потпуно исти начин као што је горе описано, можемо претпоставити, ради једноставности, да је $c = 1$.

Стога, нека је $f(z) = u(z) + iy$, $u(z) = \mathrm{Re}(f(z))$, $z = x + iy \in \mathbb{H}$. Како је функција u хармонијска, постоји аналитичка функција $F : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ таква да је $u(z) = \mathrm{Re}(F(z))$, $z \in \mathbb{H}$, а отуда је и $f(z) = \dfrac{F(z) + z}{2} + \dfrac{\overline{F(z) - z}}{2}$, за свако $z \in \mathbb{H}$. Са друге стране, важи да је $f_z(z) = \dfrac{1}{2}(F'(z) + 1)$, као и $f_{\bar{z}}(z) = \dfrac{1}{2}(F'(z) - 1)$, за свако $z \in \mathbb{H}$, одакле налазимо да је $\mu_f(z) = \dfrac{F'(z) - 1}{F'(z) + 1}$, $z \in \mathbb{H}$, односно, $F'(z) = \dfrac{1 + \mu_f(z)}{1 - \mu_f(z)}$, за свако $z \in \mathbb{H}$, где смо са μ_f означили комплексну дилатацију пресликавања f. Користећи основна својства билинеарног пресликавања $B : w \mapsto \dfrac{1 + w}{1 - w}$, $w \in \mathbb{D}$, које конформно пресликава јединични диск $\mathbb{D}$ на десну полураван $\Pi^+ = \{\zeta \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\zeta > 0\}$, једноставно добијамо да за диск $D_k = \{w \in \mathbb{C} : |w| < k\}$ важи $B(\overline{D_k}) = \overline{B(c_k, r_k)}$, где је $B(c_k, r_k) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - c_k| < r_k\}$ диск у $\mathbb{C}$ са центром у тачки $c_k = \dfrac{1 + k^2}{1 - k^2}$, полупречника $r_k = \dfrac{2k}{1 - k^2}$. Стога, како је $\mu_f(z) \in \overline{D_k}$, за свако $z \in \mathbb{H}$, добијамо да је $F'(z) = B(\mu_f(z)) \in \overline{B(c_k, r_k)}$, кад год је $z \in \mathbb{H}$. Како је, за

$K = \dfrac{1+k}{1-k}$, испуњено $c_k = \dfrac{1}{2}(K + \dfrac{1}{K})$, односно, $r_k = \dfrac{1}{2}(K - \dfrac{1}{K})$, добијамо да је $K + 1 \geqslant |F'(z) + 1| \geqslant 1 + \dfrac{1}{K}$, као и $K - 1 \geqslant |F'(z) - 1| \geqslant 1 - \dfrac{1}{K}$. Коначно, како је $\Lambda_f(z) = |f_z(z)| + |f_{\bar{z}}| = \dfrac{1}{2}\left(|(F'(z)+1)| + |(F'(z)-1)|\right)$, $z \in \mathbb{H}$, то је $1 \leqslant \Lambda_f(z) \leqslant K$, за свако $z \in \mathbb{H}$. Међутим, важи и $D_f(z) = \dfrac{\Lambda_f(z)}{\lambda_f(z)} \leqslant K$, за свако $z \in \mathbb{H}$.

Дакле, $\dfrac{1}{K} \leqslant \lambda_f(z) \leqslant \Lambda_f(z) \leqslant K$, за свако $z \in \mathbb{H}$. Међутим, када израчунамо хиперболички извод пресликавања f (видети и пример 3.4.2), добијамо

$$||\partial f||(z) = \sqrt{\frac{\lambda_{\mathbb{H}}(f(z))}{\lambda_{\mathbb{H}}(z)}}|f_z(z)| = \frac{y}{\operatorname{Im}(f(z))}|f_z(z)| = |f_z(z)|,$$

па је стога и $||\partial f||(z)(1 - |\mu_f(z)|) = \lambda_f(z) \geqslant \dfrac{1}{K}$, док је $||\partial f||(z)(1 + |\mu_f(z)|) = \Lambda_f(z) \leqslant K$, за свако $z \in \mathbb{H}$, одакле, на основу последице 4.4.3 следи тврђење. □

Теорема 5.3.5. *Претпоставимо да пресликавање f задовољава услове претходне теореме. Тада за песликавање f важи да је (K^{-1}, K) квази-изометрија и у односу на еуклидску метрику, а самим тим и (K^{-1}, K) би-Липшицово пресликавање, тј. важи*

$$\frac{1}{K}|z_1 - z_2| \leqslant |f(z_1) - f(z_2)| \leqslant K|z_1 - z_2|,$$

за свако z_1, $z_2 \in \mathbb{H}$, где је $K = \dfrac{1+k}{1-k}$.

Доказ: Поступајући на исти начин који је представљен у доказу леме 4.4.1, односно у доказу леме 4.4.2, узимајући геодезијске линије у односу на еуклидску метрику, тј. праволинијске сегменте, тврђење постаје непосредна последица чињенице $\dfrac{1}{K} \leqslant \lambda_f(z) \leqslant \Lambda_f(z) \leqslant K$, која важи за свако $z \in \mathbb{H}$. □

Описаћемо сада хармонијске дифеоморфизме појаса $\mathbb{S}$ на себе. По угледу на [44] доказаћемо следећу пропозицију.

Пропозиција 5.3.6. *Нека је хомеоморфизам* $f : \overline{\mathbb{S}} \to \overline{\mathbb{S}}$ *хармонијско пресликавање појаса* $\mathbb{S}$ *на себе и нека фиксира тачку* ∞. *Означимо са* g, *односно са* h, *аналитички, односно антианалитички део тог пресликавања, редом. Тада важи* $g(z) + h(z) = z$, *за свако* $z \in \mathbb{S}$. *При томе је* $f(z) = z - 2i\,\mathrm{Im}(h(z))$ *и* $\mathrm{Re}(h'(z)) < \frac{1}{2}$, *за свако* $z \in \mathbb{S}$, *као и* $\lim\limits_{z\to\infty}(y - 2\,\mathrm{Im}(h(z))) = \infty$, $z = x + iy \in \mathbb{S}$.

Доказ: Нека је $u(z) = \mathrm{Re}(f(z))$, $z \in \mathbb{S}$. Примењујући прво принцип симетрије, а затим и расуђивање потпуно аналогно оном које је приказано у доказу пропозиције 5.3.2, једноставно добијамо да је $u(z) = x$, за свако $z = x+iy \in \mathbb{S}$, или је $u(z) = -x$, за свако $z = x+iy \in \mathbb{S}$. Претпоставимо стога да је $f(z) = x + iv(z)$, $z \in \mathbb{S}$. Тада постоји аналитичка функција $F : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ таква да је $v(z) = \mathrm{Im}(F(z))$, кад год је $z \in \mathbb{S}$. Отуда је, за фиксирано $z \in \mathbb{S}$,

$$f(z) = x + \frac{F(z) - \overline{F(z)}}{2} = \frac{F(z) + z}{2} + \overline{\frac{z - F(z)}{2}},$$

односно, ако су g и h, редом, аналитички и антианалитички део пресликавања f, тј. $f = g + \bar{h}$, добијамо да је $g(z) + h(z) = z$, односно $f(z) = z - 2i\,\mathrm{Im}(h(z))$. Са друге стране важи $|F'(z) + 1| > |1 - F'(z)|$, јер пресликавање f чува оријентацију, што је еквивалентно са $\mathrm{Re}(F'(z)) > 0$, одакле добијамо да је $\mathrm{Re}(h'(z)) < \dfrac{1}{2}$. Осим тога, како је $f(\infty) = \infty$, следи да је и $\lim\limits_{z\to\infty}(y - 2\,\mathrm{Im}(h(z))) = \infty$. □

Користећи ову карактеризацију, можемо на потпуно исти начин, као што је урађено у другом делу доказа теореме 5.3.4, показати да за пресликавање f које задовољава услове претходне пропозиције такође важи

$\frac{1}{K} \leqslant \lambda_f(z) \leqslant \Lambda_f(z) \leqslant K$, за свако $z \in \mathbb{S}$. Отуда, када израчунамо хиперболички извод пресликавања f (видети пример 3.4.3), налазимо да је $||\partial f||(z) = |f_z(z)|$, јер је $\mathrm{Re}(f(z)) = x$, за свако $z = x + iy \in \mathbb{S}$, те позивајући се на пропозицију 4.4.3, добијамо следеће тврђење.

Теорема 5.3.7. *Нека је хомеоморфизам $f : \overline{\mathbb{S}} \to \overline{\mathbb{S}}$ хармонијско k-квазиконформно пресликавање појаса $\mathbb{S}$ на себе и нека фиксира тачку ∞. Тада f има особину да је (K^{-1}, K) квази-изометрија у односу на хиперболичку и еуклидску метрику, $K = \dfrac{1+k}{1-k}$, па је исто уједно и (K^{-1}, K) би-Липшицово пресликавање у односу на обе метрике.*

5.4 Случај просто повезаних кодомена хиперболичког типа

Од многих генерализација Шварц-Пикове леме издвојићемо сада још једну која се тиче аналитичких пресликавања која делују између Риманових површи (видети теорему 4.2.4), односно ону која је директна последица генерализације Шварцове леме за Келерове многострукости, коју је дао Јау (видети [60]). Иста представља и уопштење теореме 4.3.2 (видети прелеп чланак [57]).

Теорема 5.4.1. *Нека су R и S две Риманове површи без границе са конформним метрикама $ds^2 = \rho(z)|dz|^2$ и $ds^2 = \sigma(w)|dw|^2$, редом. Ако је метрика $ds^2 = \rho(z)|dz|^2$ на површи R још и комплетна и ако за одговарајуће Гаусове кривине истих важи $K_\rho(z) \geqslant -a_1$ и $K_\sigma(w) \leqslant -a_2$, за неке реалне константе*

$a_1 \geqslant 0$ *и* $a_2 > 0$, *тада за било које аналитичко пресликавање* $F : R \to S$ *између тих површи важи*

$$\sigma(F(z))|F'(z)|^2 \leqslant \frac{a_1}{a_2}\rho(z),$$

за свако $z \in R$. *Специјално, ако је* $a_1 = 0$ *тада је* F *константно пресликавање.*

Пример 5.4.1. Нека је $\Omega = \mathbb{C} - [0, +\infty)$. Означимо са s регуларну грану вишезначне функције $S : z \mapsto \sqrt{z}$ у области Ω, која је одређена условом $s(-1) = i$. Тада, је пресликавањем $g(z) = \dfrac{s(z) - i}{s(z) + i}$, $z \in \Omega$, које је конформни изоморфизам области Ω на јединични диск $\mathbb{D}$, одређена хиперболичка метрика на Ω. При томе је $\lambda_\Omega(z)|dz|^2 = \dfrac{|dz|^2}{4|z|\operatorname{Im}(s(z))}$, $z \in \Omega$.

Посматрајмо пресликавања $f(z) = Kx + iy$ и $\tilde{f}(z) = \dfrac{1}{K}x + iy$, $z = x + iy \in \Omega$. Очигледно су пресликавања f и $\tilde{f}$ k-квазиконформна, $k = \dfrac{K-1}{K+1}$, и хармонијска у Ω. При томе је $f(\Omega) = \tilde{f}(\Omega) = \Omega$. Такође, није тешко проверити да важи $f_z(z) = \dfrac{K+1}{2}$, као и $\tilde{f}_z(z) = \dfrac{K+1}{K}$, за свако $z \in \Omega$. Међутим, једноставним испитивањем (видети [11]) добијамо да је испуњено $||\partial f||(z) > \dfrac{K+1}{2}$, као и $||\partial \tilde{f}||(z) < \dfrac{K+1}{2K}$, кад год је $z = x + iy \in \Omega$, $x > 0$, $y > 0$.

Претходни пример нам говори да у случају просто повезаних домена комплексне равни, који су хиперболичког типа, тј. чија се граница у $\overline{\mathbb{C}}$ састоји од најмање две тачке, и који нису конвексни, очекујемо другачије резултате. Зато, нека је $G \subset \mathbb{C}$ просто повезана област различита од $\mathbb{C}$. Покушајмо да испитамо, додатно, својства хиперболичке метрике на G, да бисмо показали да претходна тврђења, само са другачијим константама, важе и у случају произвољног хиперболичког домена у $\mathbb{C}$. У том циљу издвајамо један резлтат који о томе говори (видети [17]).

Лема 5.4.2. *Нека је* $G \subset \mathbb{C}$ *дата просто повезана област различита од* $\mathbb{C}$. *Тада за густину хиперболичке метрике* λ_G, *која је дефинисана на* G, *важи*

$$|(\log \lambda_G)_z(z)| \leqslant 2\sqrt{\lambda_G(z)}, \tag{5.4.1}$$

за свако $z \in G$. *Међутим, у том случају је и*

$$|(\log \lambda_G)_{zz}(z)| \leqslant \frac{p(2)}{2}\lambda_G(z), \tag{5.4.2}$$

кад год је $z \in G$, *где је* $p(\eta) = \eta^2 + (\eta + \frac{1}{2\eta})\sqrt{\eta^2 - 1}$, $\eta \geqslant 1$. *Дакле,*

$$|(\log \lambda_G)_{zz}(z)| \leqslant \frac{16 + 9\sqrt{3}}{8}\lambda_G(z),\ z \in G. \tag{5.4.3}$$

Теорема 5.4.3. *Нека је* f k-*квазиконформно хармонијско пресликавање јединичног диска* $\mathbb{D}$ *на* G, *где је* $G \subset \mathbb{C}$ *произвољна просто повезана област различита од* $\mathbb{C}$. *Уколико је конформна метрика* $ds^2 = \lambda_G(f(z))|f_z(z)|^2|dz|^2$ *комплетна на* $\mathbb{D}$, *тада важи*

$$||\partial f||(z) \geqslant \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 + \dfrac{16 + 9\sqrt{3}}{2}k}}, \tag{5.4.4}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$.

Доказ: За густину конформне метрике $\sigma(z) = \lambda_G(f(z))|f_z(z)|^2$, $z \in \mathbb{D}$, као и у ранијим ситуацијама, добијамо да је

$$K_\sigma(z) = -\left(1 + |\mu_f(z)|^2 + 4\mathrm{Re}\left(\frac{(\log \lambda_G)_{ww}(f(z))}{\lambda_G(f(z))}\frac{f_{\bar{z}}(z)}{\overline{f_z(z)}}\right)\right), \tag{5.4.5}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$. Стога, применом неједнакости (5.4.3), закључујемо да је

$$\left|\mathrm{Re}\left(\frac{(\log\lambda_G)_{ww}(f(z))}{\lambda_G(f(z))}\frac{f_{\bar z}(z)}{\overline{f_z(z)}}\right)\right| \leqslant \frac{16+9\sqrt{3}}{8}|\mu_f(z)|, \tag{5.4.6}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, па је, користећи (5.4.5), испуњено

$$\begin{aligned} K_\sigma(z) &\geqslant -\left(1+|\mu_f(z)|^2+\frac{16+9\sqrt{3}}{2}|\mu_f(z)|\right) \\ &\geqslant -\left(1+k^2+\frac{16+9\sqrt{3}}{2}k\right), \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$. Најзад, како густина $\sigma(z)=\lambda_G(f(z))|f_z(z)|^2$, $z \in \mathbb{D}$, индукује комплетну метрику на $\mathbb{D}$, применом теореме 5.4.1 на пресликавање које је идентитета и одговарајуће метричке густине, добијамо да је

$$\lambda(z) \leqslant (1+k^2+\frac{16+9\sqrt{3}}{2}k)\lambda_G(f(z))|f_z(z)|^2,\ z \in \mathbb{D}.$$

Отуда је, када израчунамо одговарајући хиперболички извод,

$$||\partial f||(z)=\sqrt{\frac{\lambda_G(f(z))}{\lambda(z)}}|f_z(z)| \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+k^2+\dfrac{16+9\sqrt{3}}{2}k}},$$

за свако $z \in \mathbb{D}$. □

Напомена 5.4.1. Напоменимо да није једноставно утврдити када и под којим условима важи знак једнакости у неједнакости (5.4.7). Штавише, у првом тренутку може бити и нејасно да ли је најбоља доња граница за кривину K_σ уопште негативна. Међутим, ипак кривина K_σ не може бити ненегативна. Заиста, уколико би то било тачно, тада, на основу теореме 5.4.1, за пресликавање $F : \mathbb{D} \ni z \mapsto w = F(z) = z \in \mathbb{D}$, које је идентитета, уколико изаберемо конформне метрике $ds^2 = \sigma(z)|dz|^2 = \lambda_G(f(z))|f_z(z)|^2|dz|^2$ и $ds^2 = \lambda(w)|dw|^2$, би важило да је исто и константно, што никако није тачно. Дакле, ипак је $\inf\{K_\sigma(z) : z \in \mathbb{D}\} < 0$.

Последица 5.4.4. *Нека је f k-квазиконформно хармонијско пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на G, где је $G \subset \mathbb{C}$ произвољна просто повезана област различита од $\mathbb{C}$. Уколико за конформну метрику $ds^2 = \lambda_G(f(z))|f_z(z)|^2|dz|^2$ важи да је комплетна на $\mathbb{D}$, тада је*

$$\delta_G(f(z)) \leqslant (1-|z|^2)\frac{\sqrt{1+k^2+\frac{16+9\sqrt{3}}{2}k}}{1-k}\left(|f_z(z)|-|f_{\bar{z}}(z)|\right),$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, где је $\delta_G(w)$ растојање тачке $w \in G$ до границе те области.

Доказ: Фиксирајмо $z \in \mathbb{D}$. Како је f пресликавање које је k-квазиконформно, то је $|f_{\bar{z}}(z)| \leqslant k|f_z(z)|$, одакле је $\lambda_f(z) = |f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)| \geqslant (1-k)|f_z(z)|$, па је зато и

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\lambda_G(f(z))}{\lambda(z)}}(|f_z(z)|-|f_{\bar{z}}(z)|) &\geqslant (1-k)||\partial f||(z)\\ &\geqslant \frac{1-k}{\sqrt{1+k^2+\frac{16+9\sqrt{3}}{2}k}}.\end{aligned}$$

Са друге стране, за произвољан хиперболички домен комплексне равни (за детаље видети [2]), а самим тим и за област G, важи $\delta_G(w))\sqrt{\lambda_G(w)} \leqslant 2$, $w = f(z)$, одакле добијамо тврђење. □

Последица 5.4.5. *Нека је f k-квазиконформно хармонијско пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на G, где је $G \subset \mathbb{C}$ произвољна просто повезана област различита од $\mathbb{C}$. Уколико је конформна метрика $ds^2 = \lambda_G(f(z))|f_z(z)|^2|dz|^2$*

комплетна на $\mathbb{D}$*, тада важи*

$$d_G(f(z_1), f(z_2)) \geqslant m(k)\, d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2), \tag{5.4.8}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$*, односно пресликавање* f *је* $m(k)$ *ко-Липшицово у односу на хиперболичку метрику, где је* $m(k) = \dfrac{1-k}{\sqrt{1+k^2+\dfrac{16+9\sqrt{3}}{2}k}}$.

Доказ: Тврђење је непосредна последица претходне теореме, неједнакости

$$||\partial f||(z)(1-|\mu_f(z)|) \geqslant \frac{1-k}{\sqrt{1+k^2+\dfrac{16+9\sqrt{3}}{2}k}},\ z \in \mathbb{D},$$

као и тврђења леме 4.4.2. □

У општем случају, користећи метод упоређивања погодно одабраних конформних метрика, не можемо наћи оцену одозго за хиперболички извод k-квазиконформног хармонијског пресликавања $f : \mathbb{D} \to G$. Заиста, из једнакости 5.4.5, добијамо да је

$$K_\sigma(z) \leqslant -\left(1-\frac{16+9\sqrt{3}}{2}k\right), \tag{5.4.9}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, одакле анализирањем линеарне функције $[0,1) \ni k \mapsto a(k) = 1-\dfrac{16+9\sqrt{3}}{2}k$, добијамо да је за све $0 \leqslant k < k_0$, где је k_0 решење једначине $a(k) = 0$, које свакако припада $(0,1)$, испуњено

$$K_\sigma(z) \leqslant -\left(1-\frac{16+9\sqrt{3}}{2}k\right) < 0, \tag{5.4.10}$$

кад год је $z \in \mathbb{D}$. У том случају, тј. за свако $0 \leqslant k < k_0$, на основу Алфорс-Шварцове леме, односно, леме 4.3.1, следи да је

$$\left(1-\frac{16+9\sqrt{3}}{2}k\right)\sigma(z) \leqslant \lambda(z),$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, а отуда и

$$||\partial f||(z) = \sqrt{\frac{\lambda_G(f(z))}{\lambda(z)}}|f_z(z)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{16+9\sqrt{3}}{2}k}}, \tag{5.4.11}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, $0 \leqslant k < k_0$.

Приметимо да је $k_0 \approx 0.06331$, те како смо одозго проценили хиперболички извод пресликавања f, за $0 \leqslant k < k_0 \approx 0.06331$, доказали смо и следеће тврђење, јер је исто последица те процене и леме 4.4.1.

Теорема 5.4.6. *Нека је $f : \mathbb{D} \to G$ пресликавање које је k-квазиконформно и хармонијско, где је $G \subset \mathbb{C}$ произвољна просто повезана област различита од $\mathbb{C}$. Тада, за све $0 \leqslant k < k_0 = \dfrac{2}{16+9\sqrt{3}}$, важи*

$$d_G(f(z_1), f(z_2)) \leqslant M(k)\, d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2), \tag{5.4.12}$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, односно пресликавање f је $M(k)$ Липшицово у односу на хиперболичку метрику, где је $M(k) = \dfrac{1+k}{\sqrt{1 - \frac{16+9\sqrt{3}}{2}k}}$.

Било би интересантно да се, под истим условима, пронађе одговарајућа константа липшицовости, у случају хиперболичке метрике, али уз помоћ неког другог метода. Углавном, су све верзије теорема Шварц-Пиковог типа прилагођене површима на којима имамо присуство конформне метрике непозитивне Гаусове кривине. Такође, што је и много захтевније, треба усмерити пажњу ка проналажењу одговарајућих константи билипшицовости и у еуклидском случају. Еуклидска метрика има Гаусову кривину једнаку нула, те не може бити објекат разматрања приказаних у овом поглављу.

Литература

[1] L. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, Van Nostrand Mathematical Studies, D. Van Nostrand, 1966.

[2] L. Ahlfors, *Conformal invariants*, McGraw-Hill Book Company, 1973.

[3] K. Astala, T. Iwaniec and G. J. Martin, *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*, Princeton University Press, MR 2472875 (2010j:30040), 2009.

[4] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[5] C. A. Berenstein and R. Gay, *Complex Variables, An Introduction*, New York, Springer-Verlag, 1991.

[6] A. Beurling and Ahlfors. L., *The boundary correspondence under quasiconformal mappings*, Acta Math., 96, 125–142, 1956.

[7] V. Božin and M. Mateljević, *Quasiconformal harmonic mapping between* $C^{1,\alpha}$ *Jordan domains*, preprint.

[8] V. Božin and M. Mateljević, *Some counterexamples related to the theory of HQC mappings*, Filomat, 24:4, 25–34, 2010.

[9] D. Bshouty and A. Lyzzaik, *Problems and Conjectures in Planar Harmonic Mappings*, Proceedings of the ICM2010 Satellite Conference International Workshop on Harmonic and Quasiconformal Mappings, Editors: D. Minda, S. Ponnusamy, and N. Shanmugalingam, J. Analysis, 18, 69–81, 2010.

[10] H. H. Chen, *The SchwarzPick lemma and Julia lemma for real planar harmonic mappings*, Science China Mathematics, 56/11, 2327–2334, 2013.

[11] X. Chen and A. Fang, *A Schwarz-Pick inequality for harmonic quasiconformal mappings and its applications*, Journal Math. Anal. Appl., 369, 22-28, 2010.

[12] J. Clunie and T. Sheil-Small, *Harmonic univalent functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I, 9, 3–25, 1984.

[13] P. L. Duren, *Theory of H^p Spaces*, New York, Academic Press, 1970.

[14] J. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, New York, Academic Press, 1981.

[15] F. W. Gehring and B. Osgood, *Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric*, Journal dAnalyse Mathmatique, 36(1), 50–74, 1979.

[16] G. M. Goluzin, *Geometric function theory*, Nauka Moskva, 1966.

[17] R. Harmelin, *Hyperbolic metric, curvature of geodesics and hyperbolic discs in hyperbolic plane domains*, Israel J. Math., 70 (1), 111128., 1990.

[18] E. Heinz, *On certain nonlinear elliptic differential equations and univalent mappings*, Journal dAnalyse Mathmatique, 5, 197–272, 1956/57.

[19] D. Kalaj, *Univalent harmonic mappings between Jordan domains*, Publications de l'Institut Mathematique, vol. 69, br. 83, str. 108-112, 2001.

[20] D. Kalaj, *Quasiconformal harmonic mapping between Jordan domains*, Math. Z., Volume 260(2), 237–252, 2008.

[21] D. Kalaj, *Lipschitz spaces and harmonic mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 34(2), 475–485, 2009.

[22] D. Kalaj and M. Mateljević, *Inner estimate and quasiconformal harmonic maps between smooth domains*, Journal dAnalise Math., 100, 117–132, 2006.

[23] D. Kalaj and M. Mateljević, *Quasiconformal and harmonic mappings between Jordan smooth domains*, Novi Sad J. Math., 38(3), 147–156, 2008.

[24] D. Kalaj and M. Mateljević, *Quasiconformal Harmonic Mappings and Generalizations*, J. Analysis, Proceedings of the ICM2010 Satellite Conference International Workshop on Harmonic and Quasiconformal Mappings, Editors: D. Minda, S. Ponnusamy, N. Shanmugalingam, Volume 18, 239–260, 2010.

[25] D. Kalaj and M. Mateljević, *(K,K')-quasiconformal harmonic mappings*, Potential analysis, ISSN:0926-2601, Volume 34, Issue 4, Page(s) 21 pages, 2011.

[26] D. Kalaj and M. Mateljević, *On quasiconformal harmonic surfaces with rectifiable boundary*, Complex Analysis and Operator Theory, 5(3), 633–646, 2011.

[27] D. Kalaj and M. Pavlović, *Boundary correspondence under harmonic quasi-conformal homeomorfisms of a half-plane*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 30, No.1, 159–165, 2005.

[28] D. Kalaj and M. Pavlović, *On quasiconformal self-mappings of the unit disk satisfying Poissons equation*, Trans. Amer. Math. Soc., 363, 4043-4061, 2011.

[29] D. Kalaj and M. Vuorinen, *On harmonic functions and the Schwarz lemma*, Proc. Amer. Math. Soc., 140/1, 161–165, 2012.

[30] O. Kellogg, *On the derivatives of harmonic functions on the boundary*, Trans. Amer. Math. Soc., 33, 689–692., 1931.

[31] Seong-A. Kim and T. Sugawa, *Characterizations of hyperbolically convex regions*, Journal Math. Anal. Appl., 309, 37-51, 2005.

[32] M. Knežević, *Harmonijska preslikavanja, trajektorije i krivina*, Magistarski rad, Beograd, 2005.

[33] M. Knežević, *Some Properties of Harmonic Quasi-Conformal Mappings*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics (LTAPH), Volume 36, pp 531–539, 2013.

[34] M. Knežević and M. Mateljević, *On the quasi-isometries of harmonic quasiconformal mappings*, Journal Math. Anal. Appl., 334 (1), 404-413, 2007.

[35] Kovalev L. V. Koh, N T, *Area contraction for harmonic automorphisms of the disk*, Bull. London Math. Soc., 43 (1): 91–96, 2011.

[36] W. Kraus, *Über den Zusammenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereiches mit der Kreisabbildung*, Mitt. Math. Sem. Giessen, 21, 1-28, 1932.

[37] O. Lehto and K. I. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Springer Verlag, 1973.

[38] H. Lewy, *On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings*, Uspekhi Mat. Nauk., 3:2(24), 216–219, 1948.

[39] O. Martio, *On harmonic quasiconformal mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I, 425, 10., 1968.

[40] M. Mateljević, V. Božin and M. Knežević, *Quasiconformality of Harmonic mappings between Jordan domains*, Filomat, 24:3, 111–124, 2010.

[41] M. Mateljević, *Estimates for the modulus of the derivatives of harmonic univalent mappings*, Proceedings of International Conference on Complex Analysis and

Related Topics (IXth Romanian-Finnish Seminar, 2001), Rev Roum Math Pures Appliq (Romanian Journal of Pure and Applied mathematics), 47 (5-6), 709–711, 2002.

[42] M. Mateljević, *Dirichlet's principle, distortion and related problems for harmonic mappings*, Publications de l'Institut Mathematique, nouvelle serie 75(89), 147-171 (special number Quasiconformal and Harmonic mappings, special guest editor M. Mateljević), ISSN 0350-1302, 2004.

[43] M. Mateljević, *Distortion of harmonic functions and harmonic quasiconformal quasi-isometry*, Revue Roum. Math. Pures Appl., 51, 5–6, 711–722, 2006.

[44] M. Mateljević, *Quasiconformality of harmonic mappings between Jordan domains*, Filomat, 26:3, 479–510, 2012.

[45] M. Mateljević, *Topics in Conformal, Quasiconformal and Harmonic Maps*, Zavod za udžbenike, Beograd (ISBN 978-86-17-17961-6), 2012.

[46] M. Mateljević, *Distortion of Quasiregular Mappings and Equivalent Norms on Lipschitz-Type Spaces*, Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, Volume 2014, Article ID 895074, 20 pages, 2014.

[47] Z. Nehari, *The Schwarzian derivative and Schlicht functions*, Bull. Amer. Math. Soc., 55, 545-551, 1949.

[48] G. B. Osgood, *Some Properties of f"/f' and the Poincare metric*, Ind. Univ. Math. J., Vol. 31 (No. 4), 1982.

[49] D. Partyka and S. Ken-ichi, *On bi-Lipschitz type inequalities for quasiconformal harmonic mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn., 32, 579-594, 2007.

[50] M. Pavlović, *Boundary correspondence under harmonic quasi- conformal homeomorfisms of the unit disc*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 27, 365–372, 2002.

[51] M. Pavlović, *Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of the unit disk*, Ann. Acad. Sci. Fenn., 27, 365–372, 2002.

[52] M. Pavlović, *A Schwarz lemma for the modulus of a vector-valued analytic function*, Proceedings of the American Mathematical Society, 139:969–973, 2011.

[53] C. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck& Ruprecht in Göttingen, 1975.

[54] C. Pommerenke, *Boundary behavour of conformal maps*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[55] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1966.

[56] R. Schoen and S. T. Yau, *Lectures on Harmonic Maps*, Conf. Proc. and Geometry and Topologynd Lecture Notes, Inter. Press, Vol. II, 1997.

[57] M. Troyanov, *The Schwarz Lemma for nonpositively curved Riemannian surfaces*, Manuscripta Math., 72, 251–256, 1991.

[58] T. Wan, *Conastant mean curvature surface, harmonic maps, and univrsal Teichmüller space*, J. Diff. Geom., 35, 643-657, 1992.

[59] H. Weil, *Die die Idee der Riemannschen Fläche*, Taubner, Leipzig, 1913.

[60] S. T. Yau, *A general Schwarz Lemma for Kahlcr Manifolds*, Amer. Jour. Math., 100, 197–203, 1978.

Биографија

Лични подаци

Име и презиме: Миљан (Вукић) Кнежевић
Датум рођења: 12.05.1973.
Радно место: Математички факултет, Универзитет у Београду, помоћник продекана за наставу и координатор за акредитацију Факултета.
Звање: Асистент
Адреса: Студентски трг 16, 11000 Београд, Србија
Електронска адреса: kmiljan@matf.bg.ac.rs

Образовање

Након завршене Математичке гимназије у Београду, јуна 1992. године, уписује се на Математички факултет, Универзитет у Београду, на којем и дипломира јануара 1997. године, на смеру за теоријску математику и примене, са просчном оценом 9.69. Звање магистра математичких наука стекао је октобра 2005. године на истом факултету, на тему - ХАРМОНИЈСКА ПРЕСЛИКАВАЊА, ТРАЈЕКТОРИЈЕ И КРИВИНА, под руководством ментора професора Миодрага Матељевића, сада декана Математичког факултета. Дана 12.12.2011. године Универзитет у Београду је дао сагласност на предлог теме докторске дисертације под називом - ХАРМОНИЈСКА И КВАЗИКОНФОРМНА ПРЕСЛИКАВАЊА, КВАЗИ-ИЗОМЕТРИЈЕ И КРИВИНА, под руководством ментора професора

Миодрага Матељевића.

Искуство у настави

Од октобра 2001. године је запослен као асистент на Математичком факултету, Универзитет у Београду, ужа научна област - Комплексна анализа. Тренутно је ангажован на предметима Комплексна анализа, Увод у комплексну анализу, Увод у финансијску математику, Геометријска теорија функција и Начела наставе математике, док је раније изводио вежбе и на предметима Анализа 1, Анализа 2, Диференцијалне једначине, Диференцијална геометрија, Основи геометрије, Математика 2.

Интересовања

Комплексна анализа, Хармонијска анализа, Геометријска теорија функција, Диференцијална геометрија, Парцијалне једначине, Квантитативна финансијска анализа, Макроекономија.

Друштвене активности

Члан је Друштва математичара Србије, као и Републичке комисије за такмичења ученика средњих школа. Био је у неколико наврата вођа српског националног тима на међународним такмичењима из математике.

Списак научних и стручних радова

- M. Knežević, M. Mateljević, *On the quasi-isometries of harmonic quasiconformal mappings*, JMAA (2007), doi: 10.1016/j.jmaa. 2006.12.069.
- M. Knežević, *Some Properties of Harmonic Quasiregular Mappings*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics (LTAPH), Volume 36, pp 531–539, 2013.
- M. Mateljević, V. Božin, M. Knežević, *Quasiconformality of Harmonic Mappings Between Jordan Domains*, FILOMAT, (2010), vol. 24 br. 3, str. 111–122.

- M. Knežević, *Some models of economic growth and capital accumulation*, Proceedings of XXXIX Symposium in Operations Research, (SYMOPIS 2012).
- M. Knežević, Dj. Krtinić, *A note on infinite descent principle*, Teaching of Mathematics, Vol. 16, br. 2, str. 67–78, 2013.
- B. Radivojević, M. Knežević, *Pricing options using the binomial model. Practical application*, Zbornik radova, IV Symposium - Mathematics and Applications, University of Belgrade, Vol IV(1), 40–47, 2014.
- I. Anić, M. Stamenković, M. Knežević, *Insurance Company Valuation Based on Electre Multicriteria Decision Making*, Proceedings of XXXVIII Symposium in Operations Research, (SYMOPIS 2011), ISBN: 978-86-403-1168-7.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а **Миљан В. Кнежевић**

број индекса ________________________________

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

ХАРМОНИЈСКА И КВАЗИКОНФОРМНА ПРЕСЛИКАВЊА, КВАЗИ-ИЗОМЕТРИЈЕ И КРИВИНА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 01.11.2014.

Миљан В. Кнежевић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора: **Миљан В. Кнежевић**

Број индекса ______________________________

Студијски програм ______________________________

Наслов рада: **ХАРМОНИЈСКА И КВАЗИКОНФОРМНА ПРЕСЛИКАВЊА, КВАЗИ-ИЗОМЕТРИЈЕ И КРИВИНА**

Ментор: **проф. др Миодраг С. Матељевић** - Математички факултет

Потписани/а **Миљан В. Кнежевић**

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 01.11.2014.

Миљан В. Кнежевић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

ХАРМОНИЈСКА И КВАЗИКОНФОРМНА ПРЕСЛИКАВЊА, КВАЗИ-ИЗОМЕТРИЈЕ И КРИВИНА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

[✓ 6. Ауторство – делити под истим условима]

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 01.11.2014.

Миљан В. Кнежевић

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.