Izveštaj komisije o radu " Ocjene norme integralnih operatora na prostorima Besova i Bloha" kandidata mr. Đorđija Vujadinovića.

Ocjene norme integralnih operatora na prostorima Besova i Bloha

Rad se sastoji od tri poglavlja.
Prvo poglavlje je uvodnog karaktera. Započeto je sa poznatim tvrđenjima koja se tiču analitičkih funkcija više promenljivih i navođenjem osobina subharmonijskih funkcija. Druga sekcija uvodnog dela posvećena je Grupi automorfizama i Mebijusovim transformacijama jedinične lopte koje će igrati značajnu ulogu u rezultatima drugog poglavlja. U tom smislu, navedene su osnovne osobine i identiteti koji se tiču biholomorfnih preslikavnja i Mebijusovih transformacija jedinične lopte. Specijalno navedena je i dokazana formula za realni Jakobijan biholomorfnog preslikavanja jedinične lopte.
Naredne dve sekcije bave se uvođenjem Bergmanovih analitičkih prostora funkcija, te Bergmanovog tipa projekcija kao i Besovljevih i Blohovih prostora. Sekcija 1.3 posvećena Bergmanovim prostorima i Bergmanovom tipu projekcije u ravni ili višedimenzionalnom slučaju predstavlja klasičan materijal na pomenutu temu. U slučaju prostora Besova i Bloha akcenat je stavljen na prezentaciju datih prostora u kontekstu Bergmanovog tipa projekcije. U ovim sekcijama uvedeni su i opisani osnovni objekti na kojima se temelje rezultati druge glave.Peta sekcija je opšteg karaktera i odnosi se na integralne operatore. Na početku su date poznate osobine koje se tiču integralnih operatora sa slabo polarnim jezgrom, a zatim i kriterijum za ograničenost određenih klasa konvolucionih operatora. Navedeni su klasični rezultati poput Ris-Torinove interpolacione teoreme i Šurovog kriterijuma za ograničenost integralnih operatora. Poslednja sekcija uvodnog poglavlja bavi se osnovnim osobinama i identitetima hipergeometrijskih redova. Ojlerove i Pfafove transformacije hipergeometrijskih redova igraće bitnu ulogu u daljim rezultatima rada.
U drugoj glavi prezentovani su rezultati na koje se odnosi naslov disertacije i najveći sadržaj rada. Na početku opisana je motivacija poznatog problema određivanje norme Bergmanove projekcije i odgovarajući rezultati. Prvi rezultat disertacije daje ocjenu norme obične (netežinske) Bergmanove projekcije u slučaju Besovljevih prostora. Naime, razmatra se preslikavanje $P : L^p(D, d\lambda(z)) \to B_p, p > 1$ gde je $d\lambda(z) = \frac{dA(z)}{(1-|z|^2)^2}$ Mebijus invarijantna mera na disku D,

$$Pf(z) = \int_D \frac{f(w)}{(1 - z\bar{w})} dA(w), f \in L^p(D, d\lambda), z \in D.$$

Dobijena je opšta ocena norme

$$\|P\|_{L^p \to B_p} \leq C_p,$$

gde je

$$C_p = \left(\frac{8}{p\sin\frac{\pi}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{8}{p\sin\frac{\pi}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Rezultat je asimptotski tačan u smislu da za $p \to \infty, C_p \to \frac{8}{\pi}$, što predstavlja poznati rezultat za normu Bergmanove projekcije iz prostora $L^\infty(D)$ na Blohov prostor $\mathcal{B}$, koji je ujedno i granični Besov prostor B_∞. U razmatranim slučajevima tretirana je tzv. polu-norma na Besovljevim prostorima B_p, tj.

$$\|f\|_{B_p} = \left(\int_D |f'(z)|^p (1-|z|^2)^p d\lambda(z)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Određena je norma Bergmanove projekcije u Hilbertovom slučaju prostora Besova,tzv. Dirihleovog prostora B_2.
Druga sekcija ove glave odnosi se na tzv. slabe ocene norme Bergmanove projekcije za granični slučaj $p=1$. Sardžaj je motivisan analognom situacijom za Bergmanove prostore. Naime, kao što je poznato Bergmanova projekcija je neograničeno preslikavanje iz $L^1(D, dA)$ u Bergmanov prostor A^1, ali je preslikavanje slabog tipa $(1,1)$. U konkretnom slučaju razmatrana je Lebegova mera m na disku D i dokazano je da postoji konstanta $C > 0$, takva

$$m(\{z \in D : |Pf| > t\}) \leq \frac{C}{t}\|f\|_{L^1(D,d\lambda)}, t > 0, \text{ za sve } f \in L^1(D, d\lambda).$$

U dokazu korišćena je klasična Kalderon-Zigmundova tehnika razbinja L^1-funkcije na "dobar" i "loš" deo.
Kao otvoreno pitanje ostaje da se nađe norma Bergmanove projekcije iz prostora $L^1(D, d\lambda)$ u B_1. Napomenimo da je na dato pitanje dat odgovor u radu A. Peralla,"Sharp constant for the Bergman projection onto the minimal Mobius invariant space,"Arch. Math.102 (2014)Springer Basel, (003-889X/14/030263- 8, published online March 7, 2014) gde je početni rezultat disertcije citiran. U trećoj sekciji razmatrana je norma adjungovanog operatora Bergmanove projekcije u pomenutom slučaju $(P : L^1(D, d\lambda) \to B_1)$. Dobijeno je ocena sa gornje i donje strane, tj.

$$2 \leq \|P^*\| \leq 4.$$

Četvrta sekcija posvećen je određivanju norme Bergmanove projekcije u slučaju Blohovog prostora u više dimenzija. Blohov prostor tretiran je kao granični slučaj Besovljevih prostora i tako je i odgovarajuća norma Blohov prostora razmatrana kao granična norma prostora Besova, $\|\cdot\|_{B_p}, p \to \infty$. Preciznije određena je norma Bergmanove projekcije za slučaj da na Blohovom prostoru $\mathcal{B}$ razmatramo polunormu $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{B}}}$,

$$\|f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} = \max_{|m|=N} \sup_{z\in B} (1-|z|^2)^N \left|\frac{\partial^N f}{\partial z^m}(z)\right|, \tag{1}$$

tj.

$$\|P_\alpha\|_{\tilde{\mathcal{B}}} = \sup_{\|g\|_\infty \le 1} \|P_\alpha g\|_{\tilde{\mathcal{B}}}$$
$$= \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)\Gamma(N)}{\Gamma^2(\frac{N}{2}+\frac{n+\alpha+1}{2})},$$

što predstavlja uopštenje glavnog rezultata rada D. Kalaj, M. Markovic,"Norm of the Bergman projection ," Math. Scand. 54 (No.4 (2002), 847875). Takođe je određena norma Bergmanove projekcije na Blohovom prostoru ukoliko razmatramo normu $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \max_{|m|\le N-1} \left|\frac{\partial^{|m|} f}{\partial z^m}(0)\right| + \max_{|m|=N} \sup_{z\in B} \left|(1-|z|^2)^N \frac{\partial^N f}{\partial z^m}(z)\right|, \quad f\in\mathcal{B},\ \ N\in\mathbf{N}, \tag{2}$$

gde je

$$\|P_\alpha\|_{\mathcal{B}} = \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)\Gamma(\frac{1+N}{2})}{\Gamma(\frac{1+N}{2}+\alpha+n)} + \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)\Gamma(N)}{\Gamma^2(\frac{N}{2}+\frac{n+\alpha+1}{2})}.$$

Sadržaj treće glave je poseban deo disertacije. U centru razmatranja ove glave nalazi se Poasonova jednačina sa nehomogenim Dirihleovim graničnim uslovom na jediničnoj lopti i odgovarajuće slabo rešenje u smislu distribucija. Slabo rešenje pomenutog problema u smislu distribucija dato je formulom u kojoj se pojavljuje integralni operator indukovan Grinovom funkcijom. Odredjivanje norme operatora indukovanog Grinovom funkcijom u kontekstu različtih L^p normi za slučaj više dimenzija predstavlja glavni cilj i sadržaj ove glave. U uvodnom delu navode se poznata tvđenja vezana za Laplasovu jednačinu, Grinovu formulu i klasičnog rešenje Dririhleovog problema za slučaj više dimenzija. Takođe, navedeni su osnovni koncepti koji se tiču pojma slabih izvoda, Soboljevskih prostora i slabih rešenja.
U centru razmatranja je operator $\mathcal{G}$ definisan na $L^p(B^n), p > \frac{n}{2}$ i sa slikom u $L^\infty(B^n)$, tj.

$$u(x) = -\mathcal{G}[g](x) = -\int_B G(x,y)g(y)dy, |x|<1,$$

gde je $G(x,y)$ Grinova funkcija za loptu u R^n. Centralni rezultat odnosi se na određivanje norme pomenutog operatora, tj. dobijen je rezultat

$$\|\mathcal{G}\| = c_n \left(\frac{\pi^{n/2}\Gamma(1+q)\Gamma\left(\frac{n-q(-2+n)}{-2+n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{-2+n}\right)}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1<q<\frac{n}{n-2}$$

gde $n\ge 3$ i $1/p+1/q=1$. Specijalno za $p=\infty$

$$\|\mathcal{G}\|_\infty = \frac{1}{2n}\ \ (n\ge 3).$$

Dokaz se u velikoj meri zasniva na primeni smena promenljivih Mebijusovim transformacijama i primenama transformacionih identiteta za hipergeometriske redove U Teoremi 3.4 posebno je razmatran Hilbertov slučaj , tj $\mathcal{G} : L^2(B^n) \to L^2(B^n)$ gde je određena norma operatora. Dokaz se u teorijskom smislu zasniva na egzistenciji ortonormirane baze prostora $L^2(B^n)$ koja se sastoji od sopstvenih funkcija Dirihleovog problema za Laplasijan i pokazuje se da je norma operatora

$$\|\mathcal{G}\|_1 = \frac{1}{\lambda_1},$$

gde λ_1 predstavlja kvadrat prve pozitivne nule Beselove funkcije J_a prvog reda za $a = \frac{n-1}{2}$. Koristeći princip dualnosti odeređena je norma operatora $\mathcal{G}$ iz $L^1(B^n)$ u $L^1(B^n)$. Zatim je primenjena Ris-Torinova interpolaciona teorema za opšti slučaj $\mathcal{G} : L^p(B^n) \to L^p(B^n)$.
Završni deo rada predstavlja ponavljanje predhodnih postupaka i metoda u određivanju i proceni norme gradijenta slabih rešenja Dirihleovog problema.
Rad je baziran na nekoliko radova kandidata koju su publikovani u časopisima sa SCI liste, i to:
1.Dj. Vujadinović: Some Estimates for the Norm of the Bergman Projection on Besov Spaces , Integral Equations and Operator Theory, 76 (2013), 213-224 .

2.D. Kalaj, Dj. Vujadinović: Adjoint operator of Bergman Projection and Besov space B1,Mathematical Reports (ISSN:1582-3067), Volume 15, Issue 04, Dec. 2013, Page(s) [12185].

3. D.Kalaj, Dj.Vujadinović: Norm of the Bergman projection onto the Bloch space, Journal of Operator theory, 2014.

S obzirom na izloženi sadržaj zaključujemo da kandidatski rad zadovoljava sve kriterijume za doktorsku disertaciju i s toga ga preporučujemo Veću Matematičkog fakulteta da prihvati izveštaj o pregledu i oceni i odredi komisiju za odbranu doktorske disertacije "Ocjene norme integralnih operatora na prostorima Besova i Bloha" kandidata mr Đorđija Vujadinovića.

Komisija:

1. Prof Dr Miloš Arsenović (Mentor)

2. Prof Dr David Kalaj (ko-Mentor)

3. Prof Dr Miroslav Pavlović

Beograd 27.05.2014.