УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Ђорђије Вујадиновић

ОЦЈЕНЕ НОРМЕ ИНТЕГРАЛНИХ ОПЕРАТОРА НА ПРОСТОРИМА БЕСОВА И БЛОХА

докторска дисертација

БЕОГРАД 2014.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Djordjije Vujadinović

ESTIMATES FOR THE NORM OF INTEGRAL OPERATORS ONTO THE BLOCH AND BESOV SPACES

Doctoral Dissertataion

BELGRADE 2014.

Комисија:

(проф.др Милош Арсеновић, редовни професор-ментор)

(проф.др Давид Калај,редовни професор,ПМФ,Универзитет Црне Горе)

(проф.др Мирослав Павловић,редовни професор, Универзитет у Београду)

(Датум одбране)

АПСТРАКТ

У овом раду предмет разматрања се односи на одређивање норме извјесних интегралних оператора, у првом реду Бергмановог типа пројекције и одређених интегралних оператора који су индуковани Грином функцијом. Простори на којима разматрамо дејство Бергманове пројекције су тежински Лебегови простори са кодоменом у просторима аналитичких функција, конкретно Блоховим просторима Бесова. Добијена је оцјена норме за Бергманову пројекцију у случају простора Бесова B_p када $1 < p < +\infty$ која је асимптотски тачна за $p \to +\infty$. Одређена је тачна норма за Хилбертов случај $p = 2$. У граничном случају за простор Бесова B_1 разматрали смо одређене слабе оцјене норме Бергманове пројекције. Разматран је случај адјунговане Бергманове пројекције у случају поменутог простора Бесова B_1. Прецизније, у том случају добијена је оцјена норме са доње и горње стране за адјунговани оператор. Презентован је метод за одређивање норме Бергмановог типа пројекције са доменом у тежинским Лебеговим просторима и сликом у Блоховом простору на јединичној лопти $\mathbb{B}$ у $\mathbb{C}^n$.

Посебно је разматрана норма интегралног оператора индукованог Грином функцијом у контексту слабих рјешења Поасонове једначине са хомогеним граничним условом на јединичној лопти за случај више димензија. Норма датог оператора је одређена у Хилбертовом случају и у случају кад је оператор дефинисан на L^∞ (и случај L^1 као дуалан). Финални резултати везани су за процјену норме градијената слабих рјешења Поасонове једначине.

Научна област: Математичка анализа

Ужа научна област: Функицонална анализа

Кључне речи: Бергманова пројекција, норма, простори аналитичких функција, оператори

УДК број: 517.98:517.547.7(043.3)

ABSTRACT

Estimates for the norm of integral operators onto the Bloch and Besov spaces

In this work we investigate the various norms of known integral operators such as Bergman projection and certain integral operators induced with Green function. We have observed acting of the Bergman projection on the weighted Lebesgue spaces with image in spaces of analytic functions, Bloch and Besov spaces. We obtained the estimate for the norm of the Bergman projection onto the Besov spaces, when $1 < p < \infty$, and this estimate is asimptoticaly sharp for $p \to +\infty$. We have found norm for the special Hilbert case $p = 2$. We have also considered some weak type inequalities for the norm of the Bergman projection onto Besov space B_1 .We observed the adjoint operator for the Bergman projection fot the mentioned case B_1. Precisely, in this case we obtained two-sided bounds of norm for the adjoint operator. It was represented a method for determinig the norm of the Bergman type projection defined in weighted Lebesgue spaces and with image in Bloch space in the unit ball $\mathbb{B}$ in $\mathbb{C}^n$.

Specially, we have considered the norm of the integral operator induced with Green function in a context of the weak solutions for the Poisson's equation with homogenuous condition in the unit ball in higher dimensions. The norm for the mentioned operator was determined for the Hilbert case and when operator is defined on $L^\infty-$spaces (and also L^1-case, which is dual).Final results are related to estimating the norm of gradient for the weak solutions of Poisson's equation.

Scientific field: Mathematical analysis

Scientific subfield: Functional analysis

Keywords: Bergman’s projection, norm, analytical functions spaces, operators

UDC number: 517.98:517.547.7(043.3)

ПРЕДГОВОР

Ране седамдесете године двадесетог вијека означене су као почетак интезивних функционо-теоријских студија у Бергмановим просторима аналитичких функција. Главни допринос је направљен у областима као што су инваријантни простори, циклични вектори и нула скупови.

Деценију касније развој поменуте теорије обиљежен је теоријско-операторским истраживањима повезаним са Бергмановим просторима. Доприноси овог периода су бројни и презентовани су у Жуовој књизи "Operator theory in Function spaces" из 1990-те године. Каснији развој теорије Бергманових простора начелно наставља се у више праваца и теоријскофункционом и у вези са теоријом оператора.

Централни оператор који се појављује у истраживању Бергманових простора представља Бергманов тип пројекције.Садржај ове дисертације односи се на презентовање метода за одређивање и оцјену норме Бергмановог типа пројекције у случају простора Бесова и Блохових простора. Посљедњи дио рада у теоријском смислу представља одступање од поменутог главног правца излагања. Наиме, у трећој глави разматрани су методи за одређивање норме интегралних операта индукованих Гриновим језгром у контексту слабих рјешења Дирихлеовог проблема.

Користим ову прилику да се захвалим ментору проф.др Милошу Арсеновићу, који је својим дугогодишњим искуством и педагошком истанчаношћу одредио поље мог теоријског интересовања и правац истраживачког рада.

Посебну захвалност дугујем коментору проф.др Давиду Каљају. Његова племенита жеља да укључи што већи број постдипломаца у научно-истраживачки рад отворила је и мени пут у формирању као истраживачу. Три заједничка рада написана у сарадњи са професором Каљајем чине у највећој мјери основ ове дисертације.

Захваљујем се проф.др Дарку Митровићу са ПМФ-а у Подгорици, на корисним сугестијама приликом писања тезе.

Такође, захвалио бих се проф.др Мирославу Павловићу, професору на испиту "Хардијеви и Бергманови простори" и члану комисије.

Захваљујем се сестри Бојани на стрпљењу да увијек прочита дијелове прелиминарног текста дисертације и да укаже на граматичке грешке, нарочито из енглеског.

На крају, захваљујем се мојим родитељима оцу Миленку и мајки Бранки. Њихова пажња и истинска подршка пратила ме је током цијелог периода одрастања и школовања. У то име, симболично овај рад посвећујем њима.

Београд, мај 2014 .
Ђорђије Вујадиновић

САДРЖАЈ

ГЛАВА 1

ПРОСТОРИ АНАЛИТИЧКИХ ФУНКЦИЈА

У овој глави уводимо основну нотацију и терминологију коју ћемо користити кроз читав рад. У Глави 1 и Секцији 1.1 дефинишемо основне појмове, а у Секцијама (1.3) и (1.4) главне објекте наших посматрања. Уводно излагање везано је за увођење појмова као што је Бергманова пројекција у великој мјери је стандардизовано. Наиме, поред основних појмова који се тичу аналитичких функција више промјенљивих у $\mathbb{C}^n$, незаобилазан дио увода односи се и на групе аутоморфизама $\mathrm{Aut}(\mathbb{B})$ на јединичној лопти $\mathbb{B}$. У том смислу, у Секцији (1.2) презентоване су основне особине и идентитети групе $\mathrm{Aut}(\mathbb{B})$, али и посебно Мебијусових трансформација. Са друге стране, видјећемо да у резултатима Главе 2 и Главе 3 важну улогу у одређеним техничким моментима заузимају смјене промјенљивих Мебијусовим трансформацијама и бихоломорфним пресликавањима из групе $\mathrm{Aut}(\mathbb{B})$. Секција (1.3) односи се на основне особине тежинских Бергманових простора и Бергмановог типа пројекције. Секција (1.4) представља природан наставак Секције (1.3). Један од кључних теоријских момената у излагању ове Секције(1.4) су теореме о репрезентацији Блохових и Бесових простора у терминима виших извода функција и Бергмановог типа пројекције. На темељима ових теорема изводимо главна тврђења Главе 2.

Прве три секције у тематском смислу чине цјелину. Посебна секција ове главе су Интегрални оператори (Секција (1.5)). У поглављу (1.5) презентоване су особине Интегралних оператора које ће бити коришћене у овом раду. У истом поглављу назначили смо одређена својства конволуционих оператора без интенције да улазимо у даље излагање материјала из класичне Теорије Сингуларних интеграла јер то излази из-ван оквира овог рада. Наведена је класична интерполациона теорема Рис-Торина коју ћемо користити у Глави 3, а као посљедицу теореме Рис-Торина извели смо слабу варијанту Шуровог теста.

Посебно поглавље ове главе чини Секција (1.6). У овој секцији увели смо појмове хипергеометријског реда и хипергеометријске функције. При–мјена трансформационих идентитета хипергеометријских функција у тврдњењима Главе 2 и Главе 3 показује се значајном. У складу са тим, акценат Секције (1.6) је стављен на формулисање познатих идентитета и трансформација које задовољавају хипергеометријске функције.

1.1 Основни појмови

Уводни дио и ознаке овог рада (Глава 1 и Глава 2) су углавном засноване по стандардној терминологији која се тиче комплексних функција више промјенљивих и одговарајућих аналитичких простора функција на јединичној лопти. Књиге Рудина [34],Кранца [26], Жуа [40] и [39] (за случај комплексне равни) представљају главни извор термина и нотације присутне у раду.

Кроз текст поглавља са $\mathbb{C}$ ћемо означавати поље комплексних бројева, а са $\mathbb{C}^n$ Декартов производ од $\mathbb{C}$ n пута, при чему је n позитиван цијели број.Тачке $\mathbb{C}^n$ су уређене n-торке $z = (z_1, ..., z_n)$, $z_i \in \mathbb{C}$. Тополшки $\mathbb{C}^n$ је euклидски R^{2n} реалне димензије $2n$. У алгебарском смислу $\mathbb{C}^n$ третирамо као n-димензионални векторски простор над пољем скалара $\mathbb{C}$. Стандардна база у $\mathbb{C}^n$ састоји се од вектора:

$$e_1 = (1, 0, 0..., 0), \ \ e_2 = (0, 1, ..., 0), \ \ ..., e_n = (0, ..., 1).$$

За векторе $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ и $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ у $\mathbb{C}^n$ дефинишемо скаларни производ на начин

$$\langle z, w\rangle = z_1\bar{w_1} + z_2\bar{w_2} + ... + z_n\bar{w_n},$$

и одговарајућу норму $|z| = \langle z, z\rangle^{\frac{1}{2}} = (|z_1|^2 + |z_2|^2 + ... + |z_n|^2)^{\frac{1}{2}}$.
Отворена јединична лопта у $\mathbb{C}^n$ је скуп $\mathbb{B} = \{z : |z| < 1\}$. У случају да разматрамо комплексну раван $\mathbb{C}$ ознака за јединичну лопту је D, тј. јединични диск. Граница од $\mathbb{B}$ је јединична сфера у $\mathbb{C}^n$ у ознаци $\mathbb{S}$. Слично дефинишемо и затворену јединичну лопту $\bar{\mathbb{B}} = \{z : |z| \leq 1\} = \mathbb{B} \cup \mathbb{S}$.
Постоји неколико еквивалентних дефиниција холоморфне (комплексно ана–литичке) функције у $\mathbb{C}^n$ (видјети [26]).
Наводимо класичну дефиницију за холоморфност функције $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}^n$.

Дефиниција 1.1 *Функција $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}^n$ је холоморфна у $\mathbb{B}$ ако за свако $z \in \mathbb{B}$ и свако $k \in \{1, 2, .., n\}$ постоји*

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{f(z + \lambda e_k) - f(z)}{\lambda}$$

постоји, гдје је $\lambda \in \mathbb{C}$. Тада је f холоморфна (аналитичка) у $\mathbb{B}$.

Користимо ознаку $\frac{\partial f}{\partial z_k}(z) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(z+\lambda e_k) - f(z)}{\lambda}$ да означимо парцијални извод функције f по z_k.
Комплексан градијент функције f се дефинише

$$\nabla f(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z), ..., \frac{\partial f}{\partial z_n}(z) \right).$$

Еквивалентна дефиниција за аналитичност функције f у $\mathbb{B}$ односи се на репрезен–тацију функције f у облику локално униформног конвергентног степеног реда. Наиме, функција $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ је холоморфна ако је

$$f(z) = \sum_m a_m z^m, \quad z \in \mathbb{B}.$$

Овдје се сумација односи на мулти-индексе $m = (m_1, m_2, ..., m_n)$, гдје су m_k ненегативни цијели бројеви и $z^m = z_1^{m_1} ... z_n^{m_n}$. Као и у обичном случају за аналитичке функције једне промјенљиве у комплексној равни; горњи ред се назива Тејлоров ред функције f у координатном почетку и конвергира униформно на сваком скупу $r\bar{\mathbb{B}} = \{z : |z| \leq r\}, 0 < r < 1$.

Тејлоров развој холоморфне функције f у $\mathbb{B}$ такође можемо да представимо у облику хомогене експанзије

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z),$$

гдје је $f_k(z) = \sum_{|m|=k} a_m z^m, \ \ k \geq 0$, при чему је $|m| = m_1 + m_2 + ... + m_n$. Са f_k означавамо хомогени полином степена k. Тејлоров развој и хомогена експанзија су јединствено одређене са аналитичком функцијом f.
Као и у случају комплексне функције једне промјенљиве, холоморфност функције f у $\mathbb{B}$ повлачи да су и парцијални изводи вишег реда такође холоморфне функције. За фиксиран мулти-индекс $m = (m_1, m_2, ..., m_n)$ уводимо ознаку

$$\frac{\partial^m f}{\partial z^m} = \frac{\partial^{|m|} f}{\partial z_1^{m_1} ... \partial z_n^{m_n}}$$

за виши парцијални извод . Напоменимо да за мулти-индекс m одговарајући факторијел $m! = m_1! ... m_n!$.

Простори у овом раду биће дефинисани у терминима L^p интеграла функција или њихових извода. Мјере које користимо у овим интегралима су базиране на тзв. запреминској мјери јединичне лопте или површинској мјери јединичне сфере.
Са $dA(z)$ означавамо површинску мјеру диска D која је нормализована

тако да мјера јединичног диска D износи 1. Тачније у "правоугаоним" и поларним координатама $dA(z) = \frac{1}{\pi} dxdy = \frac{1}{\pi} rdrd\theta$.
Уколико разматрамо јединичну лопту $\mathbb{B}$ у $\mathbb{C}^n$ одговарајућу запреминску мјеру на $\mathbb{B}$ означаваћемо са dv. Мјера dv је такође нормализована, тј. $v(\mathbb{B}) = 1$. Површинска мјера на $\mathbb{S}$ биће означена са $d\sigma$. Такође, подразумијевамо да је у питању нормализована мјера, тј. $\sigma(\mathbb{S}) = 1$. Нормализујуће константе су заправо запремина јединичне лопте $\mathbb{B}$ и површинска мјера сфере $\mathbb{S}$. Напоменимо да запремина јединичне лопте $\mathbb{B}$ износи $\frac{\pi^n}{n!}$, док површина јединичне сфере $\mathbb{S}$ је $\frac{2\pi^n}{(n-1)!}$.

Релација између мјера dv и ds дата је са $dv = 2nr^{2n-1} drd\sigma$, тј. за сваку локалну интеграбилну функцију f у $\mathbb{B}$ важи

$$\int_{\mathbb{B}} f(z) dv(z) = 2n \int_0^1 r^{2n-1} dr \int_{\mathbb{S}} f(r\xi) d\sigma(\xi).$$

Горњи идентитет означавамо и као интеграцију у поларним координатама.

Значајно је поменути и тзв. формулу за интеграцију по слојевима, тј. "slice-integration." Наиме, ако је $f \in L^1(\mathbb{S}, d\sigma)$ важи

$$\int_{\mathbb{S}} f(\xi) d\sigma = \int_{\mathbb{S}} d\sigma(\xi) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}\xi) d\theta. \tag{1.1}$$

Свака од мјера $dv_\alpha \;\; -\infty < \alpha < \infty$ је унитарно инваријантна, тј.

$$\int_{\mathbb{B}} f(Uz) dv_\alpha(z) = \int_{\mathbb{B}} f(z) dv_\alpha(z),$$

гдје је $f \in L^1(\mathbb{B}, dv_\alpha)$ и U је произвољна унитарна трансформација простора $\mathbb{C}^n$.

Као посљедицу ротационе инваријантности, $Uz = e^{i\theta} z$ имамо сљедеће индентитете

$$\int_{\mathbb{S}} \xi_m \bar{\xi}^l d\sigma\xi = 0, \int_{\mathbb{B}} z^m \bar{z}^l dv_\alpha(z) = 0,$$

гдје је $\alpha > -1$ и m, l су мулти-индекси ненегативних цијелих бројева такви да $m \neq l$.

Посебно наводимо сљедећи резултат који ће бити од значаја у даљем раду

Лема 1.1 *Претпоставимо да је $m = (m_1, ..., m_n)$ мулти-индекс од ненегативних цијелих бројева и $\alpha > -1$. Тада*

$$\int_{\mathbb{S}} |\xi^m|^2 d\sigma = \frac{(n-1)! m!}{(n-1+|m|)!}, \tag{1.2}$$

и

$$\int_{\mathbb{B}} |z^m|^2 dv_\alpha(z) = \frac{\Gamma(n+|\alpha|+1) m!}{\Gamma(n+|m|+\alpha+1)}. \tag{1.3}$$

Субхармонијске функције. Нека је Ω отворен скуп у $\mathbb{C}^n$ и нека је u функција полунепрекидна одозго на Ω, $-\infty \leq u < \infty$. Тада кажемо да је u субхармонијска ако је

$$u(a) \leq \int_{\mathbb{S}} u(a + r\xi) d\sigma(\xi) \tag{1.4}$$

за свако $r > 0$, тако да $a + r\bar{\mathbb{B}} \subset \Omega$. Ако у једначини (1.4) замијенимо r са tr, гдје је $0 \leq t \leq 1$, и помножимо са $2nt^{2n-1}$, затим интегралимо у границама од $0 \leq t \leq 1$, користећи поларне координате добијамо

$$u(a) \leq \int_{\mathbb{B}} u(a + rw) dv(w) \tag{1.5}$$

ако је u субхармонијска и $a + r\bar{\mathbb{B}} \subset \Omega$.

Познато је да за аналитчку функцију f једна комплексне промјенљиве, функције $|f|^p$ $(p > 0)$, $\log|f|$ јесу субхармонијске.Аналоган резултат важи и за случај функција више промјенљивих.
Наиме, уколико је f аналитичка функција на области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Тада за фиксирано $a \in \Omega$ и $\xi \in \mathbb{S}$ можемо да посматрамо функцију $\lambda \to \log|f(a + \lambda\xi)|$ која је субхармонијска у околини нуле у $\mathbb{C}$. Тако, према предходном коментару

$$\log|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|f(a + re^{it}\xi)| dt$$

за свако $r > 0$ довољно мало. Уколико на последњу неједнакост примјенимо формулу за интеграцију по дијеловима (1.1) добијамо (1.4). Према томе, $\log|f|$ је субхармонијска функција. Слично, $\varphi(x) = \exp(px), x \in R$ је растућа конвексна функција, па субхармоничност функције $\log|f|$ повлачи да је и функција $|f|^p$ субхармонијска.

1.2 Група аутоморфизама, Мебијусова трансформација

Познато је да конформна бијективна пресликавања $\varphi_a(z)$, јединичног диска $D \subset \mathbb{C}$ на себе која пресликавају $a \in D$ у нулу имају форму $\varphi_a(z) = \lambda\frac{a-z}{1-z\bar{a}}, z \in D(|\lambda| = 1)$. Пресликавање φ_a називамо и аутоморфизмом, тј. бихоломорфним пресликавањем.

Природно је поставити питање постојања аналогних пресликавања у јединичној лопти $\mathbb{B}$ у $\mathbb{C}^n$. Групу свих аутоморфизама на $\mathbb{B}$ означавамо са $\mathrm{Aut}(\mathbb{B})$. Примијетимо да је свако унитарно пресликавање простора $\mathbb{C}^n$ такође један аутоморфизам од $\mathbb{B}$.

У општем важи да је аутоморфизам φ на $\mathbb{B}$ унитарна трансформација од $\mathbb{C}^n$ ако и само ако је $\varphi(0) = 0$, за доказ тврђења видјети [40] (Лема 1.1).

Посебна класа аутоморфизама на $\mathbb{B}$ чине инволутивни аутоморфизми или инволуције.Наиме, нека је P_a ортогонална пројекција из $\mathbb{C}^n$ на потпростор $[a]$ генерисан вектором a $(P_0 = 0)$, и нека је $Q_a = I - P_a$ пројекција на ортогонални комплемент од $[a]$. Прецизније $P_a(z) = \frac{\langle z,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a$, $Q_a(z) = z - \frac{\langle z,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a$, $a \neq 0$. Ставимо да је $s_a = (1-|a|^2)^{\frac{1}{2}}$ и дефинишемо

$$\varphi_a(z) = \frac{a - P_a(z) - s_a Q_a(z)}{1 - \langle z, a\rangle}, z \in \mathbb{B}. \tag{1.6}$$

За $a = 0$ просто добијамо $\varphi_0(z) = -z$. Очигледно је да је свако φ_a холоморфно пресликавање из $\mathbb{B}$ у $\mathbb{C}^n$.

Наредном теоремом (за доказ видјети [34]) сублимирамо најважнија својства пресликавања φ_a.

Теорема 1.1 *За свако $a \in \mathbb{B}$, φ_a има сљедећа својства:*
(1)$\varphi_a(0) = a$ и $\varphi_a(a) = 0$.
(2)$\varphi_a'(0) = -s_a^2 P_a - s_a Q_a$ и $\varphi_a(a)' = -P_a s_a^2 - Q_a s_a$.
(3) Идентитет

$$1 - \langle \varphi_a(z), \varphi_a(w)\rangle = \frac{(1-|a|^2)(1-\langle z,w\rangle)}{(1-\langle z,a\rangle)(1-\langle a,w\rangle)},$$

важи за све $z, w \in \bar{\mathbb{B}}$.
(4) Идентитет

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\langle z,w\rangle|^2}$$

важи за свако $z \in \mathbb{B}$.
(5) φ_a је инволуција: $\varphi_a(\varphi_a(z)) = z$.
(6) φ_a је хомеоморфизам од $\bar{\mathbb{B}}$ на $\bar{\mathbb{B}}$, и $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B})$.

Сваки аутоморфизам $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B})$ је облика $\varphi = U\varphi_a = \varphi_b V$, гдје су U, V су унитарне трансформације од $\mathbb{C}^n$ и φ_a, φ_b су инволуције. Такође, из Теореме 1.1 и предходног коментара лако се показује да сваки аутоморфизам $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B})$ може да се продужи на хомеоморфизам јединичне сфере $\mathbb{S}$.

За дати аутоморфизам $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B})$ користимо ознаку $J_C\varphi(z)$ да означимо детерминанту комплексне матрице $\varphi'(z)$ и називамо је комплексни Јакобијан пресликавања φ у тачки z. Са друге стране, ако лопту $\mathbb{B}$ третирамо на природан начин као лопту у $2n-$димензионалном еуклидском реалном простору R^{2n}, онда за пресликавање φ на исти начин посматрамо и одговарајућу детерминанту реалног Јакобијана за пресликавање φ и означавамо је са $J_R\varphi(z)$. Веза између реалног и комплексног Јакобијана изражена је формулом

$$J_R\varphi(z) = |J_C\varphi(z)|^2.$$

Теорема 1.2 *За сваки аутоморфизам* $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B})$ *имамо*

$$J_R\varphi(z) = \left(\frac{(1-|a|^2)}{|1-\langle z,a\rangle|^2}\right)^{n+1},$$

гдје је $a = \varphi^{-1}(0)$.

Доказ. За фиксирану тачку a и z у $\mathbb{B}$ са $a \neq 0$, ставимо да је $w = \varphi_a(z)$ посматрамо аутоморфизам $U = \varphi_w \circ \varphi_a \circ \varphi_z$. Како је $U(0) = 0$, то је на основу предходног U унитаран. Напишимо $\varphi_a = \varphi_w \circ U \circ \varphi_z$ и примјенимо формулу за извод композиције. Добијамо

$$\varphi_a'(z) = \varphi_w'(0)U\varphi_z'(z),$$

и зато је

$$J_C\varphi_a(z) = \det(\varphi_w'(0))\det(\varphi_z'(z)).$$

Према идентитету (2) из Теореме 1.1 линеарна трансформација $\varphi_w'(0)$ има једнодимензионалан сопствени потпростор са сопственом вриједношћу $-(1-|w|^2)$ и $(n-1)-$ димензионалан потпростор са сопственом вриједношћу $-\sqrt{1-|w|^2}$. Према томе одговарајућа детерминанта је производ сопствених вриједности и износи $(-1)^n(1-|w|^2)^{\frac{n+1}{2}}$. Сличним рачуном за за детерминанту $\varphi_z'(z)$ користећи идентитет (3) из Теореме 1.1 добијамо

$$J_R\varphi_a(z) = |J_C\varphi_a(z)|^2 = \left(\frac{1-|w|^2}{1-|z|^2}\right)^{n+1}.$$

Примјена идентитета (4) из Теоремэ.1 даје

$$J_R\varphi_a(z) = \left(\frac{1-|a|^2}{|1-\langle z,a\rangle|}\right)^{n+1}.$$

Сваки $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B})$ можемо да запишемо као $\varphi = U\varphi_a$, гдје је $a = \varphi_{-1}(0)$. Тако општи случај слиједи из предходног специјалног случаја. □

Мебијусова трансформација јединичне лопте У овом дијелу наводи–мо основне особине и идентитете везане за Мебијусове трансформације јединчне лопте $\mathbb{B} \subset R^n$ на себе које ће бити од значаја у Глави 3. Упућујемо на књигу Алфорса [6] за детаљни приступ овој важној класи пресликавања.

Као што је већ речено конформна пресликавања јединичног диска D у себе које тачку a пресликава у 0 имају облик $\varphi_a(z) = e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \alpha \in R$. Предходно пресликавање могуће је конструисати користећи инверзију, тј. пресликавање "$*$," $x \to x^*, x = \frac{x}{|x|^2}$ $(0 \to \infty)$. Понављајући поменути поступак за случај јединичне лопте $\mathbb{B}$ у R^n (видјети [6]) долазимо до

канонске формуле Мебијусовог пресликавања.
У општем Мебијусова трансформација јединичне лопте $\mathbb{B}$ у $\mathbb{B}$ која преводи тачку x у 0, у ознаци $T_x : B^n \to B^n$, дата је формулом

$$z = T_x y = \frac{(1-|x|^2)(y-x) - |y-x|^2 x}{[x,y]^2}, \tag{1.7}$$

при чему је $[x,y] = |x|y| - \frac{y}{|y|}| = |y|x| - \frac{x}{|x|}|$. Важи сљедећи идентитет

$$|T_x y| = \left|\frac{x-y}{[x,y]}\right| \tag{1.8}$$

Ако са dy означимо запреминску мјеру на $\mathbb{B}$, тада из чињенице да је $y = T_{-x}z$ конформно пресликавање и из релације (1.8) имамо

$$dy = \left(\frac{1-|x|^2}{[z,-x]^2}\right)^n dz. \tag{1.9}$$

1.3 Бергманов простор, Бергманова пројекција

Простор аналитичких функција на $\mathbb{B}$ означаваћемо кроз рад са $H(\mathbb{B})$, а простор ограничених аналитичких функција на $\mathbb{B}$ са $H^\infty(\mathbb{B})$.

Тежинска Лебегова мјера dv_α, за $\alpha > -1$ дефинисана је $dv_\alpha(z) = c_\alpha(1-|z|^2)^\alpha dv(z)$, гдје је c_α нормализујућа константа таква да је dv_α вјероватносна мјера на $\mathbb{B}$. Користећи поларне координате просто се добија да је $c_\alpha = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}$.

Простор $L^p(\mathbb{B}, dv_\alpha) \cap H(\mathbb{B})$ се састоји од аналитичких функција f које припадају $L^p(\mathbb{B}, dv_\alpha)$, $p > 0$. Дакле, норма функције f у простору $L^p(\mathbb{B}, dv_\alpha)$ је коначна, што означавамо

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_{\mathbb{B}} |f(z)|^p dv_\alpha(z)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

За $\alpha > -1$ и $p > 0$ са $A^p_\alpha = L^p(\mathbb{B}, dv_\alpha) \cap H(\mathbb{B})$ означавамо тежински Бергманов простор, који чини линеарни потпростор од $L^p(\mathbb{B}, dv_\alpha)$. Када је $\alpha = 0$, A^p_α означавамо са A^p и називамо Бергманов простор (у смислу нетежински). Примијетимо да су за $1 \le p \le \infty$ простори A^p_α Банахови. Наиме, ако низ $\{f_n\}$ из A^p_α конвергира у норми простора A^p_α ка функцији f, онда јасно $f \in L^p(\mathbb{B}, dv_\alpha)$. Са друге стране, за фиксирано $z \in \mathbb{B}$, субхармоничност функције $|f_n - f_m|$ повлачи

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z)| &\le \frac{1}{\delta} \int_{|z-w|<1-|z|} |f_n(w) - f_m(w)|^p dv_\alpha(w) \\ &\le \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{B}} |f_n(w) - f_m(w)|^p dv_\alpha(w) \\ &= \frac{1}{\delta} \|f_n - f_m\|^p_{p,\alpha}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

при чему је $\delta = \int_{|z-w|<1-|z|} dv_\alpha(w)$. Из (1.10) слиједи на основу Кошијевог критеријума да низ f_n униформно конвергира ка f на сваком компактном подскупу од $\mathbb{B}$, зато је f такође аналитичка функција на $\mathbb{B}$. Према томе A^p_α су затворени Банахови потпростори од $L^p(\mathbb{B}, dv_\alpha), 1 \leq p \leq \infty$.

Уколико је $0 < p < 1$, као што је познато простори $L^p(\mathbb{B}, dv_\alpha)$ су комплетни метрички простори са метриком $\rho(f, g) = \|f - g\|^p_{p,\alpha}$. Понављењем предходног поступка користећи аргумент субхармоничности за $|f_n - f_m|^p$ функцију, добијамо да је A^p_α затворни потпростор од $L^p(\mathbb{B}, dv_\alpha)$.

Специјално за $p = 2$, A^p_α је затворен потпростор Хилбертовог простора $L^2(\mathbb{B}, dv_\alpha)$ са одговарајућим индукованим скаларним производом $\langle f, g\rangle_\alpha = \int_{\mathbb{B}} f\bar{g} dv_\alpha, f, g \in A^2_\alpha$. Ако је $f \in A^2_\alpha$, онда је Тејлоров развој функције f дат са $f(z) = \sum_m a_m z^m$; користећи формулу (1.3) из Леме (1.1) имамо

$$\|f\|^2_{2,\alpha} = \int_{\mathbb{B}} |f(z)|^2 dv_\alpha(z) = \sum_{m\geq 0} \frac{m!\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+|m|+\alpha+1)} |a_m|^2.$$

Заправо, функције $e_m(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+|m|+\alpha+1)}{m!\Gamma(n+\alpha+1)}} z^m$ формирају ортонормирану базу за A^2_α, гдје су $m = (m_1, m_2, ..., m_n)$ мулти-индекси ненегативних цијелих бројева.

Значајно је поменути резултат који се односи на оцјену брзине раста функција из A^p_α у близини границе јединичне лопте $\mathbb{B}$. Без доказа наводимо сљедећу теорему

Теорема 1.3 *Претпоставимо да је* $0 < p < \infty$ *и* $\alpha > 0$. *Тада*

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|_{p,\alpha}}{(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\alpha}{p}}}$$

за све $f \in A^p_\alpha$ *и* $z \in \mathbb{B}$.

Бергманово језгро. Предходно наведена теорема повлачи да је за фиксирано $w \in \mathbb{B}$ функционал $\Lambda_w : A^2_\alpha \to \mathbb{C}$, задат са $\Lambda_w f = f(w)$ непрекидан. Тада на основу Рисове теореме о репрезентацији функционала на Хилберотовм простору слиједи да за свако $w \in \mathbb{B}$ постоји јединствена функција K^α_w из A^2_α таква да

$$f(w) = \langle f, K^\alpha_w\rangle_\alpha = \int_{\mathbb{B}} f(z)\overline{K^\alpha_w(z)} dv_\alpha(z), \quad f \in A^2_\alpha.$$

Горња формула се назива репродукујућом или генераторном формулом за функцију f у A^2_α. Са друге стране, функција $K^\alpha(z, w) = K^\alpha_w$ назива се репродукујућим (генераторним) језгром за A^2_α. Када је $\alpha = 0$, $K(z, w) = K^0_w$ се такође назива Бергмановим језгром.

Природан наставак предходних извођења јесте налажење експлицитне форме генераторног језгра за A^2_α. Посебно је интересантан случај Бергмановог језгра за $A^2(D, dA(z))$.

Наиме, ако је $\{e_n(z)\}$ база простора A^2, тада

$$K(z,w) = \sum_{n=1}^{+\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)}. \tag{1.11}$$

Практично Бергманово језгро $K(z,w)$ је независно од од избора ортонормиране базе $\{e_n(z)\}$. У циљу да докажемо идентитет (1.11) показећемо да ред $\sum_{n=1}^{+\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)}$ конвергира униформно по промјенљивим z и w које припадају компактном неком скупу $K \subset D$. Довољно је у том смислу да докажемо униформну конвергенцију на K за ред $\sum_{n=1}^{+\infty} |e_n(z)|^2$. Примијетимо да важи сљедећи низ идентитета

$$\begin{aligned} &\sup\left\{\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|e_n(z)|^2\right)^{\frac{1}{2}} : z \in K\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n(z)\right| : z \in K, \left(\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1\right\} \\ &= \sup\{|f(z)| : z \in K, \|f\|_2 = 1\} \le C_K. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Слиједи да ред $\sum_{n=1}^{+\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)}$ конвергира униформно ако су z, w у неком компактном подскупу од D.

Уколико је $f \in A_2$, тада $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n\rangle e_n$. Ред конвергира у A^2. Имајући у виду предходни коментар закључујемо да ред конвергира униформно на компактним подскуповима од D. Специјално за $z \in D$ имамо

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, e_n\rangle e_n(z) = \left\langle f, \sum_{n=1}^{\infty} \overline{e_n(z)} e_n \right\rangle = \left\langle f(\cdot), \sum_{n=1}^{\infty} \overline{e_n(z)} e_n(\cdot) \right\rangle.$$

Јединственост Рисове репрезентације и чињеница да $\sum_{n=1}^{+\infty} e_n(z)\overline{e_n(\cdot)} \in A^2$ повлачи

$$K(z,w) = \sum_{n=1}^{+\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)}.$$

Како $K(z,w)$ не зависи од избора ортонормиране базе, то узимајући низ $\{e_n(z)\}$, $e_n(z) = \sqrt{n+1} z^n, n \ge 0$, који чини ортонормирану базу простора A^2, на основу формуле (1.11) добијамо у случају јединичног диска

$$K(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \bar{w}^n = \frac{1}{(1 - z\bar{w})^2}.$$

Генерално, за $\alpha > -1$ генераторно језгро за A^2_α је дато формулом

$$K^\alpha(z,w) = \frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+\alpha+1}}, \quad z,w \in \mathbb{B}. \tag{1.13}$$

Предходна формула је директна посљедица сљедеће теореме.

Теорема 1.4 *Ако је* $\alpha > -1$ *и* $f \in A^1_\alpha$, *тада*

$$f(z) = \int_{\mathbb{B}} \frac{f(w)dv_\alpha(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+\alpha+1}} \tag{1.14}$$

за свако $z \in \mathbb{B}$.

Доказ: Нека је $f \in A^1_\alpha$. Користећи својство средње вриједности за аналитичке функције имамо

$$f(0) = \int_{\mathbb{S}} f(r\xi)d\sigma(\xi), 0 \le r < 1. \tag{1.15}$$

Интеграцијом у поларним координатама релације (1.15) имамо

$$f(0) = \int_{\mathbb{B}} f(w)dv_\alpha(w). \tag{1.16}$$

Нека је $z \in \mathbb{B}$ и замијенимо f са $f \circ \varphi_z$ у (1.16). Тада добијамо

$$f(z) = \int_{\mathbb{B}} f \circ \varphi_z(w)dv_\alpha(w). \tag{1.17}$$

Правећи природну смјену промјенљивих у интегралу (1.17) према Теореми 1.2 имамо

$$f(z) = \int_{\mathbb{B}} \frac{(1-|z|^2)^{n+1+\alpha}}{|1-\langle z,w\rangle|^{2(n+1+\alpha)}} f(w)dv_\alpha(w). \tag{1.18}$$

Сада за фиксирано $z \in \mathbb{B}$ мијењамо функцију f са $f(w)(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}$ и тако долазимо до тражене формуле. $\square$

Примијетимо да због чињенице да је $A^p_\alpha \subset A^1_\alpha$, репрезентација из Теореме 1.4 важи за све функције из A^p_α, $1 \le p \le \infty$. Такође, Теореме 1.4 је валидна и за функције $f \in H^\infty$. Дакле, из Теореме 1.4 и јединствености Рисове репрезентације слиједи формула (1.13).

Бергманов тип пројекције. Будући да је функција K^α ограничена по w за фиксирано z, то има смисла посматрати интегралне операторе дефинисане са

$$P_\alpha(f)(z) = \int_{\mathbb{B}} f(w)K^\alpha(z,w)dv_\alpha(w), f \in L^1(\mathbb{B}, dv_\alpha).$$

Како је A^2_α затворен потпростор Хилбертовог простора $L^2(\mathbb{B}, dv_\alpha)$, то повлачи да постоји ортогонална пројекција P из $L^2(\mathbb{B}, dv_\alpha)$ на A^2_α. У наредној леми видјећемо да ортогонална пројекција P представља рестрикцију оператора P_α на простор $L^2(\mathbb{B}, dv_\alpha)$.

Лема 1.2 *Претпоставимо да је $\alpha > -1$. Тада рестрикција оператора P_α на $L^2(\mathbb{B}, dv_\alpha)$ представља ортогоналну пројекцију из $L^2(\mathbb{B}, dv_\alpha)$ на A^2_α.*

Доказ. Нека је $f \in L^2(\mathbb{B}, dv_\alpha)$ и $z \in \mathbb{B}$ генераторно језгро K^α и самоадјунгованост ортогоналне пројекције P даје

$$Pf(z) = \langle Pf, K^\alpha_z \rangle_\alpha = \langle f, PK^\alpha_z \rangle_\alpha .$$

Како $K^\alpha_z \in A^2_\alpha$, то $PK^\alpha_z = K^\alpha_z$. Према томе,

$$Pf(z) = \langle f, K^\alpha_z \rangle_\alpha = \int_{\mathbb{B}} f(w)K^\alpha(z,w)dv_\alpha.$$

Тиме је доказано да P представља рестрикцију оператора P_α на $L^2(\mathbb{B}, dv_\alpha)$.
□

Предходна лема показује да оператор P_α ограничено слика простор $L^2(\mathbb{B}, dv_\alpha)$ на Бергманов простор A^2_α. Уколико је $\alpha = 0$, тада се оператор $P_0 = P$ назива Бергманова пројекција.

У контексту реченог, поставља се питање ограничености оператора P_α на просторима $L^p(\mathbb{B}, dv_t)$. Значајно средство у разматрању датог проблема представља Шуров тест који ћемо посебно навести у Глави 2 (Теорема 2.3). Наредну теорему (Теорема 2.11 у [40]) наводимо без доказа, њено тврђење даје одговор на постављено питање.

Теорема 1.5 *Претпоставимо да је $-1 < \alpha < \infty$, $-1 < t < \infty$, и $1 \le p < \infty$. Тада оператор P_α је ограничено пресликавање из $L^p(\mathbb{B}, dv_t)$ на A^p_t ако и само ако*

$$p(1+\alpha) > 1+t.$$

Практично, P_α је ограничен оператор из $L^p(\mathbb{B}, dv_\alpha)$ на A^p_t ако и само ако је $p > 1$, и P_α је ограничен оператор из $L^1(\mathbb{B}, dv_t)$ на A^1_t ако и само ако је $\alpha > t$.

Предходни резултат садржан је у познатом раду Форели-Рудин[14], а екстензија предходног резултата дата је у раду М.Павловића (видјети [28]).

1.4 Блохов и Бесов простор

У овом поглављу навешћемо основне особине Блохових и Бесових простора које су релевантне за даље излагање.
У једнодимензионалном случају комплексне равни $\mathbb{C}$, аналитичка функција f на диску D припада Блоховом простору, у ознаци $\mathcal{B}$, ако је

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z \in D} |(1 - |z|^2)||f'(z)| < \infty.$$

Мали Блохов простор, у ознаци $\mathcal{B}_0$ је потпростор од $\mathcal{B}$ и састоји се од аналитичких функција f из $\mathcal{B}$, таквих да

$$\lim_{z \to 0} |(1 - |z|^2)||f'(z)|.$$

Лако се показује да је $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ полу-норма и Мебијус инваријантна. Уколико на $\mathcal{B}$ дефинишемо норму на начин

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \|f\|_{\mathcal{B}},$$

тада је $\mathcal{B}$ Банахов простор.
Треба рећи да је Мали Блохов простор $\mathcal{B}_0$ затворен потпростор Блохов простора $\mathcal{B}$ и скуп полинома је густ у Малом Блоховом простору $\mathcal{B}_0$.

Предходну дефиницију је могуће генерализовати за случај више димензија на неколико начина. Сљедеће двије дефиниције представљају природна и еквивалентна уопштења полу-норме на Блоховом простору:

$$\sup_{z \in \mathbb{B}} (1 - |z|^2)|\nabla f(z)| < \infty,$$

и

$$\sup_{z \in \mathbb{B}} (1 - |z|^2)|Rf(z)| < \infty,$$

при чему је R диференцијални оператор дефинисан на начин

$$Rf(z) = \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial f}{\partial z_k}(z).$$

Према томе Блохов простор $\mathcal{B}$ функција дефинисаних на јединичној лопти $\mathbb{B}$ у $\mathbb{C}^n$ се састоји од аналитичких функција f на $\mathbb{B}$ за које је

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z \in \mathbb{B}} (1 - |z|^2)|\nabla f(z)| < \infty.$$

Блохов простор постаје Банахов простор са нормом $\|f\| = \|f\|_{\mathcal{B}} + |f(0)|$.
Слично, Мали Блохов простор се карактерише условом

$$\lim_{z \to 0} (1 - |z|^2)|\nabla f(z)| = 0.$$

Тврђење сљедеће теореми даје важну карактеризацију Блохових простора у терминима радијалних оператора и тежинске Бергманове пројекције.

Теорема 1.6 *Претпоставимо да је $\alpha > -1$ и f је аналитичка функција на $\mathbb{B}$. Тада су сљедећи услови еквивалентни:*
(1) $f \in \mathcal{B}$.
(2)$(1-|z|^2)|\nabla f(z)|$ је ограничена функција у $\mathbb{B}$.
(3)$(1-|z|^2)|Rf(z)|$ је ограничена функција у $\mathbb{B}$.
(4)$f = P_\alpha g$ за неку функцију $g \in L^\infty(\mathbb{B})$.

Прије формулације наредне теореме увешћемо појам фракционих радијалних диференцијалних оператора. Наиме, користећи хомогену експанзију аналитичке функције $f(z)$ и реалан параметар t дефинишемо оператор R^t на начин

$$R^t : H(\mathbb{B}) \to H(\mathbb{B}),$$

$$R^t f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^t f_k(z), \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z). \tag{1.19}$$

Уопште, за произвољне реалне параметре α и t уз услов да ниједан од бројева $\alpha+t$ и $\alpha+n+t$ није негативан цијели број дефинишемо фракциони диференцијални радијални оператор

$$R^{\alpha,t} : H(\mathbb{B}) \to H(\mathbb{B}),$$

$$R^{\alpha,t} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+\alpha)\Gamma(n+1+k+\alpha+t)}{\Gamma(n+1+\alpha+t)\Gamma(n+1+k+\alpha)} f_k(z).$$

Блохови простори могу бити описани користећи више изводе и предходно описане фракционе радијалне операторе.

Теорема 1.7 *Претпоставимо да је N позитиван цијели број, $t > 0$, и f је аналитичка функција на $\mathbb{B}$. Нека је α реалан параметар такав да ниједан од бројева $n+\alpha$ и $n+\alpha+t$ није негативан цијели број.Тада су сљедећи услови еквивалентни:*
(1) $f \in \mathcal{B}$.
(2)$(1-|z|^2)^t R^{\alpha,t} f(z)$ је ограничена функција у $\mathbb{B}$.
(3)Функције

$$(1-|z|^2)^N \frac{\partial^N f}{\partial z^m}, \quad |m| = N$$

су ограничене у $\mathbb{B}$.

Важи аналогна карактеризација Малих Блохових простора $\mathcal{B}_0$ која је изражена сљедећом теоремом:

Теорема 1.8 *Претпоставимо да је $\alpha > -1$ и f је аналитичка функција на $\mathbb{B}$. Тада су сљедећи услови еквивалентни:*
(1) $f \in \mathcal{B}_0$.
(2) Функција $(1-|z|^2)|\nabla f(z)|$ припада $C_0(\mathbb{B})$.
(3) Функција $(1-|z|^2)|Rf(z)|$ припада $C_0(\mathbb{B})$.
(4) Постоји функција $g \in C_0(\mathbb{B})$ тако да је $f = P_\alpha g$.

Простор $C_0(\mathbb{B})$ се састоји од непрекидних функција f на $\overline{\mathbb{B}}$ таквих да f једнако нули на $\partial\mathbb{B} = \mathbb{S}$, тј. $f|_{\mathbb{S}} = 0$.

Простори Бесова. За $1 < p < +\infty$ Бесов простор на диску D дефинисан је као простор аналитичких функција f на D за које

$$\|f\|_{B_p} = \left[\int_D (1-|z|^2)^p |f'(z)|^p d\lambda(z)\right]^{\frac{1}{p}} < \infty, \tag{1.20}$$

гдје је $d\lambda(z) = \frac{dA(z)}{(1-|z|^2)^2}$ Мебијус инваријантна мјера на D. Показује се да је $\|\cdot\|_{B_p}$ је комплетна полу-норма на B_p. Такође, $\|\cdot\|_{B_p}$ је Мебијус инваријантна, тј. важи $\|f \circ \varphi\|_{B_p} = \|f\|_{B_p}$, при чему је $\varphi \in \mathrm{Aut}(D)$. На B_p је могуће дефинисати тачну норму $\|\cdot\|$ на начин

$$\|f\| = |f(0)| + \|f\|_{B_p}$$

која Бесов простор B_p чини Банаховим простором.

За гранични Бесов простор B_∞ узимамо Блохов простор $\mathcal{B}$. Са друге стране, $B_2 = \mathcal{D}$ називамо Дирихлеов простор.

Бесов простор B_1 дефинишемо на други начин из разлога што $(1 - |z|2)|f'(z)|$ припада $L^1(D, d\lambda)$ ако и само ако је f константа. B_1 је простор аналитичких функција на D које могу да се запишу

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \varphi_{\lambda_n}(z)$$

за неки низ $\{a_n\}$ у l^1 и низ $\{\lambda_n\}$ у D. Дефинишемо норму у B_1 са

$$\|f\|_{B_1} = \inf\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| : f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_{\lambda_n}(z)\right\}.$$

Простор $(B_1, \|\cdot\|_{B_1})$ је Банахов простор (за разлику од $\|\cdot\|_{B_p}, \|\cdot\|_{B_1}$ је норма). Такође, $B_1 \subset H^\infty$. Бесов простор B_1 представља минималан Мебијус инваријантан Банахов простор аналитичких функција на диску. Слично као за Блохове просторе и Бесове просторе можемо да опишемо у корелацији са Бергмановом пројекцијом и вишим изводима функције. Наиме, важи сљедеће тврђење

Теорема 1.9 *Претпоставимо да је f аналитичка на диску $D, 1 \leq p \leq +\infty$, и n је природан број $n \geq 2$. Тада су сљедећи услови еквивалентни:*
(1)$f \in B_p$;
(2)$(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) \in L^p(D, d\lambda)$;
(3)$f \in PL^p(D, d\lambda)$, гдје је P Бергманова пројекција.

У вишедимензионалном случају, Бесов простор $B_p, 0 < p < \infty$ на лопти $\mathbb{B} \subset C^n$ се састоји од аналитичких функција f на $\mathbb{B}$, за које је норма $\|\cdot\|_{B_p}$ коначна, тј.

$$\|f\|_{B_p}^p = \sum_{|m| \leq N-1} \left| \frac{\partial^m f}{\partial z^m}(0) \right|^p + \sum_{|m|=N} \int_{\mathbb{B}} \left| (1-|z|^2)^N \frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z) \right|^p d\tau(z) < \infty,$$

при чему је N природан број који задовољава неједнакост $N > \frac{n}{p}$, а $d\tau(z) = \frac{dv(z)}{(1-|z|^2)^{n+1}}$.

Поставља се природно питање да ли сама дефиниција Бесовог простора у вишим димензијама зависи од избора броја N. У том смислу наводимо сљедећу теорему (Теорема 6.1 у [40]).

Теорема 1.10 *Претпоставимо да је $0 < p < \infty$ и f је аналитичка функција на $\mathbb{B}$. Тада су сљедећа тврђења еквивалентна*
а)Функције

$$(1-|z|^2)^N \frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z) \in L^p(\mathbb{B}, d\tau(z)), \text{ за неки природан број } N > \frac{n}{p}, \ (|m| = N),$$

б) Функције

$$(1-|z|^2)^N \frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z), \ |m| = N,$$

припадају простору $L^p(\mathbb{B}, d\tau)$ за сваки природан број $N > \frac{n}{p}, |m| = N$.

Дакле, дефиниција Бесов простора B_p је независна од избора броја N.

На крају овог поглавља, наводимо резултат који даје интегралну репрезентацију за Бесов простор $B_p, p \geq 1$ на лопти $\mathbb{B}$ преко Бергмановог типа пројекције P_α (за доказ погледати [40]).

Теорема 1.11 *Претпоставимо да је $1 \leq p < \infty$ и $\alpha > -1$. Тада је $B_p = P_\alpha L^p(\mathbb{B}, d\tau)$.*

1.5 Интегрални оператори

Нека је (X, μ) мјерљив простор и K је мјерљива функција на $X \times X$. Тада K формално индукује линеаран оператор T на Хилбертовом простору $L^2(X, d\mu)$ формулом

$$Tf(x) = \int_X K(x,y) f(y) d\mu(y), \ \ f \in L^2(X, d\mu).$$

Оператор T називамо интегралним оператором са језгром K. Текст овог поглавља се односи на ограничене интегралне операторе T. Такође, за домен оператора T узимамо поред поменутог Хилбертовог случаја $L^2(X, d\mu)$ и све $L^p(X, d\mu), 1 \leq p \leq \infty$.

Испитивање ограничености интегралног оператора у општем није лак задатак. Циљ ове секције је да размотримо неке аспекте критеријума који дају довољне услове на K тако да оператор T буде ограничен.
Напоменимо да ако $K \in L^2(X \times X, d\mu)$, онда је одговарајући интегрални оператор T ограничен и компактан на $L^2(X, d\mu)$, тј. припада Шатеновој класи S_2, тзв. Хилберт-Шмитови оператори. Заправо, постоји изометрична кореспонденција између простора $L^2(X \times X)$ и S_2 (видјети [15]) на начин

$$L^2(X \times X) \ni K(x, y) \longleftrightarrow T \in S_2.$$

Интегрални оператори који су у објекту изучавања овог рада су интегрални оператори са сингуларним језгром. Тако у наставку, наводимо позната тврђења која се односе на одређене класе сингуларних интегралних оператора.

Интегрални оператори са слабо поларним језгром. Нека је Ω ограничен мјерљив скуп у $n-$димензионалном еуклидском простору R^n, затим тачке $x, \xi \in \Omega$, и $r = |x - \xi|$ растојање између њих. Нека је даље $A(x, \xi)$ функција дефинисана на Ω, и ограничена, тј.

$$|A(x, \xi)| \leq C = \text{const}, \quad x, \xi \in \Omega. \tag{1.21}$$

Функција

$$K(x, \xi) = \frac{A(x, \xi)}{r^\alpha}, \quad \alpha = \text{const}, 0 \leq \alpha < n,$$

се назива језгром са слабим сингуларитетом, а интегрални оператор T индукован језгром K,

$$Tf(x) = \int_\Omega K(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

назива се интегрални оператор са слабо поларним језгром.

Теорема 1.12 *Интегрални оператор T са слабо поларним језгром одређен је на цијелом простору $L^2(\Omega)$ и ограничен је на њему. Тачније, важи оцјена*

$$\|T\| \leq \frac{C|\mathbb{S}|H^{m-\alpha}}{m - \alpha},$$

при чему је C константа из (1.21)*, H је диаметар скупа Ω и $|\mathbb{S}|$ површина сфере у R^n.*

Доказ предходне теореме је дат у [27]. Поред ограничености, доказано је да је оператор T и компактан на $L^2(\Omega)$. Аналогни резултати су доказани да важе за оператор T и на простору непрекидних функција $C(\Omega)$.

Показује се на сличан начин да је оператор T ограничен и на просторима $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$ (подразумијевамо Лебегову мјеру у R^n).

Сингуларни интегрални оператори. У контексту већ реченог, рекли би смо да је интегрални оператор T сингуларан ако је ред сингуларитета његовог језгра α једнак n, тј. димензији простора R^n. Један од најважнијих примјера сингуларних интегралних оператора јесте Хилбертова трансформација, $Hf(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{f(x-y)}{y}dy, \;\; x, y \in R$.
У овом дијелу наводимо Теорему 2.2 из [36] која даје довољне услове за огра–ниченост одређених специјалних класа конволуционих оператора.

Теорема 1.13 *Нека је $K \in L^2(R^n)$. Претпоставимо да:*
а) Фуријеова трансформација функције K је есенцијално ограничена,

$$|\hat{K}(x)| \leq B.$$

б)Функција K је класе C^1 ван координатног почетка и задовољава неједнакост

$$|\nabla K(x)| \leq \frac{B}{|x|^{n+1}}.$$

За $f \in L^1 \cap L^p$ дефинишемо

$$Tf(x) = \int_{R^n} K(x-y)f(y)dy.$$

Тада постоји константа A_p, таква да важи

$$\|Tf\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p}, \;\; 1 < p < \infty.$$

Оператор T је могуће непрекидно проширити на читав простор L^p. Константа A_p зависи само од p, B и димензије n. Практично A_p не зависи од L^2 норме функције K.

Главна идеја доказа Теореме 1.13 темељи се на Калдерон-Зигмундовој декомпозицији функције $f \in L^p$. Поменути метод и идеја биће искоришћени у Глави 2 у дијелу који се односи на добијање извјесних слабих оцјена норме оператора.

Рис-Торинова интерполациона теорема. Рис-Торинова интерполациона теорема представља класичан резултат који у најкраћем претпоставља оцјене "граничне" норме оператора, а даје природно ограничење норме оператора на међупросторима (за доказ видјети [16]).

Теорема 1.14 *Нека су (X,μ) и (Y,ν) мјерљиви простори. Нека је T линеаран оператор дефинисан на скупу простих функција на X и са кодоменом у скупу мјерљивих функција на Y. Нека је даље $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ и претпоставимо да важе сљедеће неједнакости*

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^{q_0}} &\leq M_0\|f\|_{L^{p_0}}, \\ \|Tf\|_{L^{q_1}} &\leq M_0\|f\|_{L^{p_1}} \end{aligned} \tag{1.22}$$

за све просте функције f на X. Тада за све $0<\theta<1$ имамо

$$\|Tf\|_{L^q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}\|f\|_{L^p}$$

за све просте функције f на X, гдје

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \tag{1.23}$$

T је могуће јединствено проширити до ограниченог оператора из $L^p(X,\mu)$ на $L^q(Y,\nu)$ за све p и q за које важи релација (1.23).

Већ смо напоменули да јако средство у доказивању ограничености интегралних оператора чини примјена Шуровог теста. Будући да смо дефинисали интерполациону теорему Рис-Торина, у позицији смо да директно докажемо једну слабији варијанту Шуровог теста. Наиме, важи

Лема 1.3 *Претпоставимо да је $K(x,y)$ локално-интеграбилна функција на производу два $\sigma-$ коначна мјерљива простора (X,μ) и (Y,ν) и T је линеаран оператор индукован са K. Ако K задовољава сљедеће идентитете*

$$\sup_{x\in X}\int_Y |K(x,y)|d\nu(y) = A < \infty,$$

и

$$\sup_{x\in Y}\int_X |K(x,y)|d\mu(x) = B < \infty.$$

Тада је могуће оператор T проширити на ограничен оператор из $L^p(Y)$ у $L^p(X)$, при чему је ограничење норме дато са $A^{1-\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{p}}$ за $1\leq p\leq\infty$.

Доказ: Други услов даје да T слика L^1 у L^1 са нормом ограниченом са B, док први услов повлачи да T ограничено слика L^∞ у L^∞ са нормом ограниченом са A. На основу Теореме 1.14 слиједи да T слика L^p у L^p са ограничењем $A^{1-\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{p}}$. □

1.6 Хипергеометријске функције

У овом поглављу уводимо појам хипергеометријских редова и изводимо њихове најважније особине које ће играти битну улогу у резултатима Главе 2. Све елементарне функције у математици су хипергеометријске или количник хипергеометријских функција. Такође, многе неелементарне функције које се појављују у математици имају репрезентацију у облику хипергеометријских редова.

Постоји неколико приступа у изучавању хипергеометријских функција. Метод који који ћемо користити односи се на Ојлерову фракциону интегралну репрезентацију. Поменута Ојлерова трансформација даје лак пут у извођењу фундаменталних идентитета и трансформација везаних за хипергеометријске функције.

Хипергеометријски редови. На самом почетку напомињемо да са $(a)_n$ означаваћемо помјерени факторијел (”shifted factorial”) или још Похамаров симбол, који дефинишемо на начин

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1), \;\; (a)_0 = 1,$$

за $n \in \mathbf{N}$ и a је произвољан реалан или комплексан број.

Хипергеометријски ред је ред $\sum c_n$, такав да $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ представља рационалну функцију од n. Факторишући одговарајуће полиноме по n имамо

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_p)x}{(n+b_1)(n+b_2)\cdots(n+b_q)(n+1)}. \tag{1.24}$$

Појављивање промјенљиве x је условљено чињеницом да одговарајући полиноми не морају да буду монични. Фактор $(n+1)$ може да буде, али није обавезан резултат фаторизације. Уколико није, додајемо исти фактор $(n+1)$ и у бројиоцу. Мотив за присуство овог фактора јесте увођење $n!$ у хипергеометријском реду $\sum c_n$. Појављивање фактора $n!$ показује се корисним јер се често на природан начин појављује у многим значајним случајевима.
Тако из (1.24) добијамо

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n x^n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n n!} = c_{0p}F_q(a_1, ..., a_p; b_1, ..., b_q; x). \tag{1.25}$$

У формули (1.25) b_i нису негативни цијели бројеви или нула, што чини израз добро дефинисаним. Ознака са десне стране у (1.25) се понекад и скраћено означава са ${}_pF_q$. Природан наредни корак јесте одређивање радијуса конвергенције реда из (1.25). Наиме, примијетимо да важи

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \leq \frac{|x|n^{p-q-1}(1+|a_1|/n)\cdots(1+|a_p|/n)}{|(1+1/n)(1+b_1/n)\cdots(1+b_q/n)|},$$

што повлачи сљедеће тврђење:

Теорема 1.15 *Ред* ${}_pF_q(a_1,...,a_p;b_1,...,b_q;x)$ *апсолутно конвергира за све* x *ако је* $p \leq q$, *за случај да је* $p = q+1$, *ред конвергира за* $|x| < 1$, *а дивергира за све* $x \neq 0$ *ако је* $p > q+1$.

Доказ: Јасно је да $|c_{n+1}/c_n| \to 0$ за $n \to \infty$ ако је $p < q$. Са друге стране, ако је $p = q+1$, $\lim_{n\to\infty} |c_{n+1}/c_n| = |x|$, и ако је $p > q+1$, $|c_{n+1}/c_n| \to \infty$, за $n \to \infty$. Тиме је теорема доказана. □

Случај $|x| = 1$ када је $p = q+1$ је од посебног интереса. У том смислу наводимо сљедећу теорему без доказа (видјети [2]).

Теорема 1.16 *Ред* ${}_{q+1}F_q(a_1,...,a_{q+1};b_1,...,b_q;x)$ *за* $|x| = 1$ *конвергира апсолутно ако* $\mathrm{Re}(\sum b_i - \sum a_i) > 0$. *Ред конвергира условно ако је* $x = e^{i\theta} \neq 1$ *и* $0 \geq \mathrm{Re}(\sum b_i - \sum a_i) > -1$, *и ред дивергира ако* $\mathrm{Re}(\sum b_i - \sum a_i) \leq -1$.

Кроз ово поглавље главни акценат је на хипергеометријским редовима специјалног случаја ${}_2F_1(a,b;c;x)$. Ред ${}_2F_1$ је изучаван од стране бројних математичара као што су Ојлер, Пфаф, Гаус, Кумер и Риман и сви резултати које ћемо да наведемо темеље се на њиховим фундаменталним идејама.
Видјели смо да ${}_2F_1(a,b;c;x)$ дивергира у општем случају за $x = 1$ и за $\mathrm{Re}(c-a-b) \leq 0$. Сљедећа теорема описује асимптотско понашање реда за $x \to 1^-$.

Теорема 1.17 *Ако је* $\mathrm{Re}(c-a-b) < 0$, *тада*

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{{}_2F_1(a,b,;c;x)}{(1-x)^{c-a-b}} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)};$$

и за $c = a+b$,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{{}_2F_1(a,b,;a+b;x)}{\log(1/(1-x))} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}.$$

Примијетимо да елементарне функције можемо да представимо у облику хипергеометријских редова. На примјер, $\log(1+x) = x{}_2F_1(1,1;2;-x)$.

Хипергеометријске функције. У позицији смо да дамо дефиницију хипергеометријске функције облика ${}_2F_1$.

Дефиниција 1.2 *Хипергеометријска функција* ${}_2F_1(a,b;c;x)$ *је дефинисана редом*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} x^n$$

за $|x| < 1$, *и аналитичким продужењем другдје.*

На примјер, за функцију $\log(1-x) = -x{}_2F_1(1,1;2;x)$ видимо да ред конвергира за $|x| < 1$, и да постоји продужење на једнозначну функцију у комплексној равни без реалне праве која спаја тачке 1 и ∞.

Тврђење сљедеће теореме (Ојлер, 1769) даје важну интегралну репрезентацију функције ${}_2F_1$.

Теорема 1.18 *Ако је* $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0$, *тада*

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt $$

у $x-$*равни без реалне осе од 1 до* ∞. *Подразумијевамо да је* $\arg t = \arg(1-t) = 0$ *и узимамо главну вриједност за* $(1-xt)^{-a}$.

Доказ: Претпоставимо да је $|x| < 1$. Развијајући функцију $(1-xt)^{-a}$ према биномном обрасцу добијамо да десна страна формуле постаје

$$ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n \int_0^1 t^{n+b-1}(1-t)^{c-b-1}dt. $$

Посљедњи интеграл је заправо бета-интеграл, што у терминима Гама функције даје вриједност $\frac{\Gamma(n+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(n+c)}$. Замијењујући у посљедњи израз добијамо

$$ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\Gamma(n+b)}{\Gamma(n+c)n!} x^n = {}_2F_1(a,b;c;x). $$

Тиме је формула доказана за $|x| < 1$. Како је горња интегрална формула аналитичка у $x-$равни без реалне осе од 1 до ∞, то теорема важи и у овој области. $\square$

Важно је напоменути да функцију ${}_2F_1(a,b;c;x)$ посматрамо као функцију од четири комплексне промјенљиве a, b, c и x умјесто само од x. Лако је уочити да је тада функција $\frac{1}{\Gamma^2(c)}{}_2F_1(a,b;c;x)$ цијела функција од промјенљивих a, b, c ако је x фиксирано и $|x| < 1$. Тада ред конвергира униформно по a, b, c у сваком компактном подскупу од a, b, c.

Сљедећа теорема је резултат Гауса из 1812 године (за доказ видјети [2]).

Теорема 1.19 *За* $\mathrm{Re}(c-a-b) > 0$, *имамо*

$$ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} = {}_2F_1(a,b,c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. $$

У сљедећој теореми дате су двије значајне формуле за трансформацију хипергеометријских функција.Главни моменат у извођењу ових формула представља примјена Ојлерове интегралне репрезентације.

Теорема 1.20

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = (1-x)^{-a}{}_2F_1(a,c-b;c;\frac{x}{x-1}), \tag{1.26}$$

(Пфафофа трансформација)

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = (1-x)^{c-a-b}{}_2F_1(c-a,c-b;c;x) \tag{1.27}$$

(Ојлерова трансформација)

Доказ. Замијенимо t са $1-s$ у Ојлеровом интегралу (1.18) у циљу да добијемо

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,b;c;x) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 (1-x+xs)^{-a}(1-s)^{b-1}s^{c-b-1}ds \\ &= \frac{(1-x)^{-a}\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 (1-\frac{xs}{x-1})^{-a}(1-s)^{b-1}s^{c-b-1}ds. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Тиме је доказана Пфафофа трансформација за $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0$. Комплетан резултат слиједи из продужења за c и b.

Како је хипергеометријска функција симетрична по параметрима a и b, тако да примјеном Пфафофе трансформације добијамо:

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = (1-x)^{-a}\left(1-\frac{x}{x-1}\right)^{-c+b}{}_2F_1(c-a,c-b;c;x),$$

што представља Ојлерову трансформацију и уједно доказ теореме. □

Важан идентитет за извод хипергеометријске функције дат је формулом

$$\frac{\partial}{\partial x}{}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{ab}{c}{}_2F_1(a+1,b+1;c+1;x). \tag{1.29}$$

На крају навешћемо још једну битну трансформацију за хипергеометријске функције која ће бити од користи

$$ {}_2F_1\left(a,b;2b;\frac{4x}{(1+x)^2}\right) = (1+x)^{2a}{}_2F_1\left(a,a+\frac{1}{2}-b;b+\frac{1}{2};x^2\right), \tag{1.30}$$

за свако x за које редови у (1.30) конвергирају.

ГЛАВА 2

НОРМА БЕРГМАНОВЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ

Одређивање тачне норме Бергманове пројекције представља и даље у доброј мјери отворен проблем и чест мотив у истраживањима. Форели-Рудинови типови оцјена за одређене интегралне операторе на јединичној лопти и Шуров тест за ограниченост интегралних оператора на L^p просторима су класични резултати и почетна полазишта на којима се темељи највећи дио поменутих резултата. На самом почетку наводимо резултат К.Жуа који даје оцјену норме Бергмановог типа пројекције са доње и горње стране за случај тежинских Бергманових простора (видјети [38]).

Теорема 2.1 *За свако* $\alpha, -1 < \alpha < \infty$, *постоји константа* C *која зависи само од* α *и* n *таква да норма оператора*

$$P_\alpha : L^p(\mathbb{B}, dv_\alpha) \to A^p_\alpha$$

задовољава сљедеће оцјене

$$C^{-1}\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{p})} \leq \|P_\alpha\| \leq C\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{p})},$$

за све $1 < p < \infty$.

Примијетимо да је вриједност $(\sin(\frac{\pi}{p}))^{-1}$ упоредива са p за $p \to \infty$, а са $\frac{p}{p-1}$ за $p \to 1^+$.
Прецизније одређивање константе C за специјалан случај када је $n = 1$ и $\alpha = 0$ презентован је у раду М.Достанића (видјети [10]), гдје је доказано да

$$K_p \leq \|P\| \leq \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}, \;\; 2 \leq p \leq +\infty,$$

и

$$K_{\frac{p}{p-1}} \leq \|P\| \leq \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}, \;\; 1 < p \leq 2,$$

при чему је константа K_p одређена са

$$K_p = \max_{\alpha>-1} \frac{\Gamma(1+\frac{\alpha}{p})\Gamma(\frac{2}{p})}{\Gamma(\frac{\alpha+2}{p})} \sqrt[p]{\frac{\Gamma^2(1+\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1+\alpha)}}.$$

У раду Перале [31] одређена је норма Бергманове пројекције за случај Блоховог простора на диску ($\alpha = 0$). Наиме, разматран је Блохов простор на диску са полу-нормом $\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f'(z)|, f \in \mathcal{B}$ и за $P : L^{\infty}(D) \to \mathcal{B}$ је добијено

$$\|P\| = \frac{8}{\pi}.$$

Горе поменути резултат је уопштен у раду Д.Калаја и М. Марковића [19], а касније је одређена операторска норма за случај кад се третира тачна норма на $\mathcal{B}$ (видјети [30]).

Централно разматрање овог поглавља односи се на проблем одредјивања норме Бергманове пројекције у контексту Бесових простора B_p и Блоховог простора $\mathcal{B}$. У граничном случају $p = 1$ биће размотрене и одређене слабе оцјене норме као и норма адјунгованог оператора за P. Посебно је обрађен случај Блоховог простора $\mathcal{B}$ на лопти у $\mathbb{C}^n$, гдје је норма на $\mathcal{B}$ задата као гранична норма Бесовог простора B_p за $p \to +\infty$.

2.1 Бергманова пројекција и Бесов простор

У уводној глави наведено је да Бергманова пројекција је ограничено пресликавање из $L^p(D, d\lambda)$ на Бесов простор B_p. Понављамо тврђење Теореме 1.9 у скраћеној верзији.

Теорема 2.2 *Претпоставимо да је $f \in H(D), 1 \leq p \leq +\infty$. Тада*

$$f \in B_p \Leftrightarrow f \in PL^p(D, d\lambda), \;\; \text{гдје } P \text{ је Бергманова пројекција.}$$

У доказу предходне Теореме која је дата у [39] главни моменат доказа је примјена Шуровог теста и Леме 4.2.2 из [39]. Наводимо класичну верзију Шуровог теста, која ће бити од значаја у наставку.

Теорема 2.3 *Претпоставимо да је K ненегативна мјерљива функција на $X \times X$, гдје је (X, μ) мјерљив простор. Нека је T интегрални оператор индукован језгром K, тј.*

$$Tf(x) = \int_X K(x,y)f(y)d\mu(y),$$

гдје $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Нека постоје константе* $C_1, C_2 > 0$ *и позитивна мјерљива функција* h *на* X *таква да важи*

$$\int_X K(x,y)h(y)^q d\mu(y) \le C_1 h(x)^q$$

за $x \in X$, μ*-скоро свуда, и*

$$\int_X K(x,y)h(x)^p d\mu(x) \le C_2 h(y)^p$$

за $y \in X, \mu$*-скоро свуда. Тада је* T *је ограничен на* $L^p(X, d\mu)$ *са нормом мањом или једнаком* $C_1^{\frac{1}{q}} C_2^{\frac{1}{p}}$.

У наредној теореми налазимо оцјену норме Бергманове пројекције у поменутом случају Бесовљевих простора за општи случај, тј. $1 < p < +\infty$.

Теорема 2.4 *Нека је* P *Бергманова пројекција,* $P : L^p(D, d\lambda) \to B_p$, $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Тада*

$$\|P\| \le C_p, \ \text{гдје}\ C_p = \left(\frac{8}{p \sin \frac{\pi}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{8}{p \sin \frac{\pi}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказ. Нека је T оператор дефинисан на $L^p(D, d\lambda)$ и индукован језгром

$$K(z,w) = 2\frac{(1-|w|^2)^2(1-|z|^2)}{|1-z\bar{w}|^3} \quad z, w \in D,$$

тј.

$$Tf(z) = 2(1-|z|^2)\int_D \frac{(1-|w|^2)^2}{|1-\bar{z}w|^3} f(w) d\lambda(w), \quad f \in L^p(D, d\lambda), \quad z \in D.$$

Тада јасно

$$\|Pf\|_{B_p} \le \|T|f|\|_{L^p(D,d\lambda)}, \quad f \in L^p(D, d\lambda).$$

У циљу да примјенимо Шуров тест, посматрамо тест функцију $h(z) = (1-|z|^2)^{\frac{1}{pq}}$. Лема 4.2.2.из [39] повлачи да постоје минималне константе $C_1, C_2 > 0$ такве да

$$\begin{aligned} &\int_D K(z,w)h(w)^q d\lambda(w) \le C_1 h(z)^q, z \in D, \\ &\int_D K(z,w)h(z)^p d\lambda(z) \le C_2 h(w)^p, w \in D. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Сада из прве неједнакости у (2.1) слиједи

$$2(1-|z|^2)^{1-\frac{1}{p}}\int_D \frac{(1-|w|^2)^{\frac{1}{p}}}{|1-z\bar{w}|^3}dA(w)\le C_1,$$

тј.

$$\frac{2\Gamma(\frac{1}{p}+1)}{\Gamma^2(\frac{3}{2})}(1-|z|^2)^{1-\frac{1}{p}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2(\frac{3}{2}+n)}{n!\Gamma(n+2+\frac{1}{p})}|z|^{2n}\le C_1,\ \ z\in D.$$

Посљедња неједнакост може да се запише у облику:

$$\frac{2p}{(p+1)}(1-|z|^2)^{1-\frac{1}{p}}{}_2F_1\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2};\frac{1}{p}+2;|z|^2\right)\le C_1\ \ z\in D. \tag{2.2}$$

Користећи Ојлеров идентитет (1.27) из Главе 1 (поглавље 1.6) за хипергеометријске функције добијамо сљедећу неједнакост

$$\frac{2p}{(p+1)}{}_2F_1\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2},\frac{1}{p}+\frac{1}{2};\frac{1}{p}+2;|z|^2\right)\le C_1. \tag{2.3}$$

Знајући чињеницу да је

$$\frac{d}{dx}{}_2F_1(a,b;c;x)=\frac{ab}{c}{}_2F_1(a+1,b+1;c+1;x),$$

те да је посљедично функција са лијеве стране у (2.3) растућа, закључујемо да је максимум лијеве стране израза у (2.3)

$$\frac{2p}{(p+1)}{}_2F_1\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2},\frac{1}{p}+\frac{1}{2};\frac{1}{p}+2;1\right)=\frac{2p}{(p+1)}\frac{\Gamma(\frac{1}{p}+2)\Gamma(1-\frac{1}{p})}{\Gamma^2(\frac{3}{2})}=\frac{8}{p\sin\frac{\pi}{p}}.$$

Аналогно, из друге неједнакости у (2.1) добијамо

$$2(1-|w|^2)^{2-\frac{1}{q}}\int_D \frac{(1-|w|^2)^{\frac{1}{q}-1}}{|1-z\bar{w}|^3}dA(z)\le C_2,$$

тј.

$$\frac{2\Gamma(\frac{1}{q})}{\Gamma^2(\frac{3}{2})}(1-|w|^2)^{1-\frac{1}{p}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2(\frac{3}{2}+n)}{n!\Gamma(n+1+\frac{1}{q})}|w|^{2n}\le C_2,\ \ w\in D.$$

Користећи презентацију у облику хипергеометријског реда добијамо да је предходна неједнакост еквивалентна са

$$\frac{2\Gamma(\frac{1}{q})}{\Gamma(1+\frac{1}{q})}(1-|w|^2)^{2-\frac{1}{q}}{}_2F_1\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2};1+\frac{1}{q};|w|^2\right)\le C_2,\ \ w\in D.$$

Користећи опет Ојлеров идентитет (1.27) добијамо да је горња неједнакост еквивалентна са

$$\frac{2\Gamma(\frac{1}{q})}{\Gamma(1+\frac{1}{q})} {}_2F_1\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2},\frac{1}{q}-\frac{1}{2};1+\frac{1}{q};|w|^2\right) \leq C_2, \quad w \in D. \tag{2.4}$$

Слично као у предходном расуђивању закључујемо да је функција

$${}_2F_1\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2},\frac{1}{q}-\frac{1}{2};1+\frac{1}{q};x^2\right), x \in [0,1]$$

растућа по x и да је максимум израза на лијевој страни у (2.4)

$$\frac{2\Gamma(\frac{1}{q})}{\Gamma(1+\frac{1}{q})} {}_2F_1\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2},\frac{1}{q}-\frac{1}{2};1+\frac{1}{q};1\right) = \frac{2\Gamma(\frac{1}{q})\Gamma(1+\frac{1}{q})\Gamma(2-\frac{1}{q})}{\Gamma(1+\frac{1}{q})\Gamma^2(\frac{3}{2})} = \frac{8}{p\sin\frac{\pi}{q}}.$$

□

Примијетимо да је горња оцјена асимптотски тачна за $p \to +\infty$. Наиме,

$$\lim_{p\to+\infty} C_p = \frac{8}{\pi},$$

што је управо вриједност добијена за норму када $P : L^\infty(D) \to \mathcal{B}$.

Норма Бергманове пројекције у Хилбертовом случају Бесових простора је одређена у раду Х. Каптаноглуа [25], при чему је норма дата преко радијалних диференцијалних оператора.У поменутом доказу коришћене су одређене асимптотске оцјене из рада Форели-Рудин. За норму задату у уводном дијелу (1.20) и због касније употребе у сљедећој теореми одређујемо норму Бергманове пројекције за Хилбертов случај Бесових простора B_2, тзв. Дирихлеов простор.

Теорема 2.5 *Нека је P Бергманова пројекција дефинисана на простору $L^2(D, d\lambda)$, $P : L^2(D, d\lambda) \to B_2$. Тада*

$$\|P\| = \sqrt{2}.$$

Доказ. Простор B_2 је Дирихлеов простор и третираћемо га као Хилбертов простор са скаларним производом $\langle f, g\rangle = \int_D f'\bar{g}' dA$. Нека је $\varphi \in L^2(D, d\lambda)$ и $f = P\varphi$. Тада

$$f(z) = P\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \|f\|^2_{B_2} = \langle f, f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2.$$

Јасно да $\varphi(w) = (1-|w|^2)\psi(w), w \in D,$ овдје $\psi \in L^2(D, dA)$, и

$$\|\varphi\|^2_{L^2(D,d\lambda)} = \|\psi\|^2_{L^2(D,dA)}.$$

Ако $\psi(w)=\sum_{n,m=0}^{\infty}b_{n,m}w^n\bar{w}^m$, (само за коначно много коефицијената $b_{n,m}\neq 0$) тада за $n-m=d$, имамо

$$\psi(w)=\sum_{d=-\infty}^{\infty}\psi_d(w)=\sum_{d=-\infty}^{\infty}g_d(w)e^{idt}\Rightarrow\|\psi\|^2_{L^2(D,dA)}=\sum_{d=-\infty}^{\infty}\|\psi_d\|^2_{L^2},\tag{2.5}$$

гдје је

$$\psi_d(w)=\sum_{k,l\quad k-l=d}b_{k,l}w^k\bar{w}^l=g_d(w)e^{idt},\ \ w=re^{it},$$

и функција g_d је одговарајућа радијална функција. Посљедња једнакост (2.5) је директна последица ортогоналности функција ψ_d.

Тада,

$$\begin{aligned}\sum_{d=0}^{\infty}a_dz^d&=\int_D\frac{\psi(w)(1-|w|^2)}{(1-z\bar{w})^2}dA(w)\\&=\sum_{d=0}^{\infty}(d+1)z^d\int_D g_d(|w|)(1-|w|^2)|w|^d dA(w)\\&=2\sum_{d=0}^{\infty}(d+1)z^d\int_0^1\sum_{l=0}^{\infty}b_{d+l,l}r^{2l+2d+1}(1-r^2)dr\\&=\sum_{d=0}^{\infty}(d+1)z^d\int_0^1 t^d(1-t)\sum_{l=0}^{\infty}b_lt^ldt,\end{aligned}\tag{2.6}$$

тј. имамо

$$|a_d|^2=(d+1)^2\left|\int_0^1 t^d(1-t)\sum_{l=0}^{\infty}b_lt^ldt\right|^2,\tag{2.7}$$

гдје $b_l=b_{d+l,l}$.

Са друге стране,

$$\|\psi_d\|^2_{L^2}=\sum_{k,l\geq 0}\frac{b_l\overline{b_k}}{d+k+l+1}.$$

Желимо да нађемо минималну константу A_d такву да важи неједнакост

$$d|a_d|^2\leq A_d\|\psi_d\|^2_{L^2}.\tag{2.8}$$

Ако означимо са $\phi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nt^n,\ \ t\in[0,1]$, тада

$$\sum_{k,l\geq 0}\frac{b_l\overline{b_k}}{d+k+l+1}=\int_0^1 r^d|\phi(r)|^2dr.$$

Релација у (2.8) може да се изрази као

$$\begin{aligned} d(d+1)^2 \left| \int_0^1 t^d(1-t)\phi(t)dt \right|^2 &\leq A_d \int_0^1 r^d |\phi(r)|^2 dr, \\ \left| \int_0^1 t^d(1-t)\phi(t)dt \right|^2 &\leq B_d \int_0^1 r^d |\phi(r)|^2 dr, \quad B_d = \frac{A_d}{d(d+1)^2}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Посматрамо Хилбертов простор $L^2(d\mu)$, гдје је $d\mu = t^d dt$ мјера на $[0,1]$. Наша неједнакост повлачи

$$|\langle \phi, 1-t \rangle|^2 \leq B_d \|\phi\|^2_{L^2(d\mu)}. \tag{2.10}$$

Коши-Шварцова неједнакост тврди да је то тачно за свако $\phi \in L^2(d\mu)$ и

$$B_d = \|1-t\|^2_{L^2(d\mu)} = \int_0^1 t^d(1-t)^2 dt = \frac{2}{(d+1)(d+2)(d+3)},$$

и ова константа је тачна јер можемо да узмемо $\phi(t) = 1-t,\ t \in [0,1]$ за коју се достиже једнакост.

Закључујемо да

$$A_d = \frac{2d(d+1)}{(d+2)(d+3)} < 2 \tag{2.11}$$

и коначно

$$\sup_{d \geq 1} A_d = 2.$$

. $\square$

2.2 Слабе оцјене

Као што је познато Бергманова пројекција је неограничено линеарно пресликавање из $L^1(D, dA)$ простора у Бергманов простор A^1. У предходној ситуацији природно је поставити питање одређивања тзв. слабих оцјена норме. Прецизније у раду [8] је показано да је Бергманова пројекција слабог типа (1,1) . У овој глави размотрићемо аналогну ситуацију у граничном случају $p = 1$ у контексту Бесовог простора B_1, тј. $P : L^1(D, d\lambda) \to B_1$.

На почетку наводимо основне дефиниције које се тичу слабих L^p простора.

Дефиниција 2.1 *За мјерљиву функцију f на мјерљивом простору (X, μ), функција дистрибуције за f је функција d_f дефинисана на $[0, \infty]$ на начин*

$$d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}).$$

Дефиниција 2.2 *За* $0 < p < \infty$, *слаби* $L^p(X,\mu)$ *простор је дефинисан за све* $\mu-$ *мјерљие функције* f *такве да је*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \inf\left\{C > 0 : d_f(\alpha) \le \frac{C^p}{\alpha^p},\ \alpha > 0\right\}$$

коначан. Слаби $L^\infty(X,\mu)$ *простор је према дефиницији* $L^\infty(X,\mu)$.

На почетку, треба да уочимо да не постоји константа $C > 0$ таква да

$$\|Pf\|_{L^{1,\infty}} \le C\|f\|_{L^1(D,d\lambda)} \text{ за све } f \in L^1(D,d\lambda).$$

Наиме, ако размотримо функцију $\psi(z) = \frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}, z \in D$, тада према Теореми 2.2 из Главе 2.1 постоји функција $\varphi \in L^1(D,d\lambda)$ таква да је $P\varphi(z) = \psi(z), z \in D$. Сада лако слиједи да

$$\lambda\left(\left\{z \in D : |P\varphi(z)| > \frac{1}{2}\right\}\right) = +\infty.$$

У контексту реченог доказујемо сљедећи резултат.

Теорема 2.6 *Нека је* P *Бергманова пројекција,* $P : L^1(D,d\lambda) \to B_1$. *Тада постоји константа* $C > 0$ *таква*

$$m(\{z \in D : |Pf| > t\}) \le \frac{C}{t}\|f\|_{L^1(D,d\lambda)}, t > 0, \text{ за све } f \in L^1(D,d\lambda).$$

Прије доказивања Теореме 2.6 наводимо сљедеће леме.

Лема 2.1 *(Виталијев тип покривања) За фамилију* Π *отворених скупова* $Q \subset D$ *постоји дисјунктна подфамилија* $\Pi_0 \subset \Pi$ *таква да*

$$m\left(\bigcup_{Q\in\Pi} Q\right) \le 25 \sum_{Q\in\Pi_0} m(Q).$$

Лема 2.2 (*Витнијева декомпозиција) За дати затворен скуп* $X \subset R^2$ *и* $\Omega = R^2 \setminus X$ *постоји фамилија кубова* Π *таква да*
(а) $\Omega = \bigcup_{Q\in\Pi} Q,\ Int(Q_i) \cap Int(Q_j) = \emptyset,\ i \ne j.$
(б) Постоје константе c_1, c_2 *такве*

$$c_1 diam(Q) \le dist(Q,X) \le c_2 diam(Q), Q \in \Pi (\text{можемо да узмемо } c_1 = 1, c_2 = 4).$$

Максимална функција Mf за функцију $f \in L^1(D,dA)$ на D дефинисана је са

$$Mf(z) = \sup\left\{\frac{1}{m(Q)}\int_Q |f|dA : z \in Q \subset D\right\}.$$

Лема 2.3 *За свако фиксирано* $t > 0$, *можемо да направимо партицију* $\overline{D} = \Omega \cup F$, *гдје* Ω *је отворен скуп,* $\Omega = \{z \in D : Mf(z) > t\}$ *и* $F = \bar{D} \setminus \Omega$ *је затворен скуп, и важи*

$$m(\Omega) \leq \frac{25}{t}\|f\|_1.$$

Доказ. Ако је $(Mf)(z) > t$, тада постоји куб Q_z такав да $\frac{1}{m(Q_z)}\int_{Q_z}|f|dA > t$. Тако, $m(Q_z) < \frac{1}{t}\int_{Q_z}|f|dA$. Користећи Лему (2.1) и представљајући Ω као дисјунктну колекцију, добијамо

$$m(\Omega) = m(\bigcup_{z\in D} Q_z) \leq 25 \sum_{Q_z\in\Pi_0} m(Q_z) \leq \frac{25}{t}\sum_{Q_z\in\Pi_0}\int_{Q_z}|f|dA \leq \frac{25}{t}\int_D |f|dA.$$

□

Доказ који предстоји суштински је базиран на познатој конструкцији Калдерон-Зигмунда из теорије сингуларних интегралних оператора (видјети [36]). Грубо говорећи, циљ је да сваку функцију $f \in L^1(D, d\lambda)$ представимо као суму двије функције, $f = f_1 + f_2$, гдје је $f_1 \in L^2(D, d\lambda)$, $f_2 \in L^1(D, d\lambda)$ и онда да нађемо одговарајуће слабе оцјене за Pf_1 и Pf_2 у односу на мјеру m.

Доказ Теореме 2.6: На самом почетку примијетимо да је неједнакост тривијална за случај $t \leq \|f\|_{L^1(d\lambda)}$, јер тада

$$m(\{z \in D : |Pf(z)| > t\}) \leq m(D) = 1 \leq \frac{\|f\|_{L^1(d\lambda)}}{t}.$$

Зато претпостављамо да је $t > \|f\|_{L^1(d\lambda)}$.

Понављамо још један пут очигледан факт

$$f \in L^1(D, d\lambda) \Leftrightarrow f(z) = h(z)(1-|z|^2)^2, z \in D, \ \ h \in L^1(D, dA).$$

Такође, уочимо декомпозицију од D дату са, $D = D_1 \cup D_2$ гдје $D_1 = \{z \in D : |z| \leq 1 - \frac{\pi}{2k}\}$ и $D_2 = \{z \in D : 1 - \frac{2\pi}{k} < |z| < 1\}$, гдје k је фиксиран природан број, такав да $\frac{\pi}{2k} < \frac{1}{2}$.

Бергманово репродукујуће језгро $\mathcal{K}(z, w)$ је ограничено на $D_1 \times D$. Сада је јасно да постоји константа $C > 0$, таква да

$$m(\{z \in D_1 : |Pf(z)| > t\}) \leq \frac{C}{t}\|f\|_{L^1(d\lambda)}.$$

Наиме, користећи Чебишевљеву неједнакост и Фубинијеву теорему, просто добијамо

$$\begin{aligned} m(\{z \in D_1 : |Pf(z)| > t\}) &\le \frac{1}{t}\int_{D_1} |Pf(z)| dA(z) \\ &\le \frac{1}{t}\int_{D_1}\int_{D} \frac{|f(w)|}{|1-z\bar{w}|^2} dA(w)dA(z) \\ &\le \frac{1}{t}\int_{D_1} \frac{1}{|1-z\bar{w}|^2} dA(z)\int_{D} |f(w)| dA(w) \\ &\le \frac{C}{t}\|f\|_{L^1(d\lambda)}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Са $\bar{f}$ означићемо рестрикцију функције f на D_2. У наставку наш циљ је да покажемо да постоји константа $C > 0$ таква да важи

$$m(\{z \in D_2 : |P\bar{f}(z)| > t\}) \le \frac{C}{t}\|f\|_{L^1(d\lambda)}.$$

Можемо да представимо D_2 као $D_2 = \bigcup_{j=1}^{k} D^j$, где $D^j = \{re^{i\theta} : 1 - \frac{2\pi}{k} < r < 1, \frac{2(j-1)\pi}{k} \le \theta < \frac{2j\pi}{k}\}$.

Означимо са $\Omega = \{z \in D_2 : |Mh(z)| > t\}$, и $X = \overline{D_2} \setminus \Omega$ ($X' = X \setminus (\{z : |z| = 1\} \cup \{z : |z| = 1 - \frac{2\pi}{k})\}))$. Сада, јасно да можемо да примјенимо Лему3.6 за Ω и X. Тачније, можемо да представимо Ω као унију кубова $Q_j \in \Pi$, чије су унутрашњости међусобно дисјунктне и чији дијаметри су пропорционални њиховом растојању од X. Треба напоменути да у процесу конструисања поменутих кубова, описаном у и [36], можемо да формирамо кубове $Q \in \Pi$ из Леме (2.2) тако да они буду назначени криволинијски квадрати у ознаци D^j.

2.2.1 *Добар и лош дио за* h

Дефинишемо двије функције

$$g(z) = \begin{cases} h(z), & z \in X' \\ \frac{1}{m(Q)}\int_Q h dA, & z \in Q \in \Pi \end{cases}$$

и

$$b(z) = \begin{cases} 0, & z \in X' \\ h(z) - \frac{1}{m(Q)}\int_Q h dA, & z \in Q \in \Pi. \end{cases}$$

Даље, нека је

$$f_1(z) = \begin{cases} (1-|z|^2)^2 g(z), & z \in D_2 \\ 0, & z \in D_1, \end{cases}$$

и

$$f_2(z) = \begin{cases} (1-|z|^2)^2 b(z), & z \in D_2 \\ 0, & z \in D_1. \end{cases}$$

Тако, $\bar{f} = f_1 + f_2$,тј. $P\bar{f}(z) = Pf_1(z) + Pf_2(z)$ што повлачи

$$\{z \in D_2 : |P\bar{f}(z)| > t\} \subset A \cup B, \text{где } A = \{z \in D_2 : |Pf_1(z)| > \frac{t}{2}\},$$

и $B = \{z \in D_2 : |Pf_2(z)| > \frac{t}{2}\}$.

2.2.2 *Добар дио оцјене*

Овдје нам је потребна тривијална неједнакост,

$$\text{ако } f \in L^2(D, d\lambda), \text{ тада } |Pf(0)|^2 \leq \int_D |f|^2 d\lambda.$$

Користећи $Pf_1 \in B_2, Pf_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, z \in D$, и резултат Теореме 2.5 даје

$$\begin{aligned} m(A) &\leq \frac{4}{t^2} \int_{D_2} |Pf_1(z)|^2 dA(z) \leq \frac{4}{t^2} \int_D |Pf_1|^2 dA(z) \\ &\leq \frac{4}{t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} = \frac{4}{t^2} \left(|Pf_1(0)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} \right) \\ &\leq \frac{4}{t^2} \left(\int_D |f_1|^2 d\lambda + \|Pf_1\|_{B^2}^2 \right) \\ &\leq \frac{20}{t^2} \int_D |f_1|^2 d\lambda. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Лако је да се провјери да је $|g(z)| \leq Mh(z) \leq t$ за $z \in X'$. Штавише, за $z \in Q \in \Pi$ дефинишемо $Q^* = 4Q$ и из Леме (2.2) имамо $Q^* \cap X' \neq \emptyset$. Предходне релације повлаче

$$|g(z)| \leq \frac{1}{m(Q)} \int_Q |h| dA \leq \frac{16}{m(Q^*)} \int_{Q^*} |h| dA \leq 16 \max_{X'} Mh \leq 16t, z \in Q.$$

Како $|h(z)| = |g(z)| \leq t, z \in X'$, имамо

$$\begin{aligned}\int_{D_2} |f_1|^2 d\lambda &= \int_{X'} |f_1|^2 d\lambda + \int_{\Omega} |f_1|^2 d\lambda \\ &\leq \frac{Ct}{k^4} \int_{X'} |f| d\lambda + 16\frac{Ct}{k^4} \sum_{Q\in\Pi} \int_Q |f_1| d\lambda \\ &= \frac{Ct}{k^4} \int_{X'} |f| d\lambda + 16\frac{Ct}{k^4} \sum_{Q\in\Pi} \int_Q |h| dA \\ &= \frac{Ct}{k^4} \int_{X'} |f| d\lambda + 16\frac{Ct}{k^4} \sum_{Q\in\Pi} \int_Q |f| d\lambda \\ &\leq 16\frac{Ct}{k^4} \int_{D_2} |f| d\lambda \leq 16\frac{Ct}{k^4} \int_D |f| d\lambda,\end{aligned} \tag{2.14}$$

што повлачи да је

$$m(A) \leq \frac{C}{t} \|f\|_{L^1(D,d\lambda)}.$$

У низу неједнакости (2.14), а и у наставку овог параграфа, константа C је дата без тачне вриједности и може да се мијења од случаја до случаја.

2.2.3 *Лоши дио оцјена*

Почињемо са декомпозицијом функције b, $b = \sum_{Q\in\Pi} b_Q$, гдје

$$b_Q(z) = \begin{cases} 0, & z \in D \setminus Q \\ h(z) - \frac{1}{m(Q)} \int_Q h dA, & z \in Q \end{cases} \tag{2.15}$$

$$f_2 = \sum_Q f_Q, \quad (f_Q(z) = (1 - |z|^2)^2 b_Q(z), z \in D).$$

Користећи Лему (3.6) и конструкцију имамо,

$$m(\{z \in \Omega : |Pf_2(z)| > \frac{t}{2}\}) \leq m(\Omega) \leq \frac{25}{t} \|h\|_{L^1(D,dA)} \leq \frac{25}{t} \|f\|_{L^1(D,d\lambda)}.$$

Даље, за $z \in X'$,

$$\begin{aligned} Pf_Q(z) &= \int_Q \frac{(1 - |w|^2)^2 b_Q(w)}{(1 - z\bar{w})^2} dA(w), \\ |Pf_Q(z)| &\leq 4 \int_Q |b_Q| dA(w) = 4 \int_Q |f_Q(w)| d\lambda(w). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Тада,

$$\begin{aligned}\int_{X'} |Pf_2(w)|dA(w) &\leq 4\sum_Q \int_Q |b_Q|dA \\ &\leq 8\sum_Q \int_Q |h|dA \leq 8\int_D |f|d\lambda.\end{aligned} \tag{2.17}$$

примјењујући Чебишевљеву неједнакост добијамо

$$m(\{z \in X' : |Pf_2(z)| > \frac{t}{2}\}) \leq \frac{2}{t}\int_{X'} |Pf_2|dA \leq \frac{16}{t}\int_D |f|d\lambda. \tag{2.18}$$

Коначно, (2.17) и (2.18) повлаче

$$m(\{z \in D_2 : |Pf(z)| > t\}) < \frac{C}{t}\|f\|_{L^1(D,d\lambda)}.$$

□

2.3 Адјунгована Бергманова пројекција и Бесов простор B_1

У овој глави у фокусу разматрања је адјунгована Бергманова пројекција и Бесов простор B_1, тј. оператор $P^* : (B_1)^* \to (L^1(D, d\lambda))^*$. Као што смо већ видјели Бергманова пројекција P сурјективно слика $L^1(D, d\lambda)$ простор на B_1. Теореме о Затвореном графику повлачи да је у том случају P ограничено пресликавање, па према томе и P^*. Кључни резултат ове главе односи се на оцјену норме од P^* са двије стране, тј. показано је да је $2 \leq \|P^*\| \leq 4$.

Сљедећа теорема односи се на класифицкију дуалних простора за Бесовљев простор $B_p, 1 \leq p \leq +\infty$. Треба напоменути да се контекст дуалности односи на дејство функционала f на начин:

$$\langle f, g\rangle = \int_D f'(z)g'(z)dA(z).$$

Теорема 2.7 *(1)*$B_p^* \cong B_q$ *ако* $1 \leq p < +\infty$ *и* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;
(2) $\mathcal{B}_0{}^* \cong B_1$.

Прије доказа поменутог резултата (Теорема 2.9), доказаћемо да је Бергманова пројекција P неограничено пресликавање из посебно дефи– нисаног простора $L^1_\alpha(D, d\lambda)$ у B_1.

Наиме, претпоставимо да је $-2 < \alpha \leq -1$ и дефинишемо $d\lambda_\alpha = (1 - |z|^2)^\alpha dA(z)$. Како је $d\lambda_\alpha \leq d\lambda$, слиједи да $L^1(D, d\lambda) \subset L^1(D, d\lambda_\alpha)$. У наставку посматраћемо $L^1(D, d\lambda)$ као векторски потпростор нормираног простора $L^1(D, d\lambda_\alpha)$, у ознаци $L^1_\alpha(D, d\lambda)$, са нормом из ширег простора $L^1(D, d\lambda_\alpha)$.

Сљедећи једноставан резултат односи се на дуал простора $L^1_\alpha(D, d\lambda)$.

Лема 2.4 *Дуалан простор* $(L^1_\alpha(D, d\lambda))^*$*је изометрично изоморфан са* $L^\infty(D, d\lambda_\alpha)$.

Доказ Према Хан-Банаховој теореми сваком ограниченом функционалу $\varphi \in (L^1_\alpha(D, d\lambda))^*$ можемо да придружимо његову екстензију ψ он $L^1(D, d\lambda_\alpha)$, тј. $\psi \in (L^1(D, d\lambda_\alpha))^* = L^\infty(D, d\lambda_\alpha)$, гдје

$$\|\psi\| \leq \|\varphi\|.$$

Са друге стране, чињеница да је $L^1_\alpha(D, d\lambda)$ густ у $L^1(D, d\lambda_\alpha)$ повлачи

$$\|\psi\| = \|\varphi\|,$$

и да је ψ јединствено.
Слично, сваком $\psi \in (L^1(D, d\lambda_\alpha))^*$ можемо да придружимо одговарајућу ограничену рестрикцију на $L^1_\alpha(D, d\lambda)$ са истим горе поменутим особинама. Према томе, закључујемо да је описана кореспонденција изометрични изоморфизам. □

Теорема 2.8 *Нека је* $d\lambda_\alpha = (1 - |z|^2)^\alpha dA(z)$, $-2 < \alpha \leq -1$ *и* P *је Бергманова пројекција* $P : L^1_\alpha(D, d\lambda) \to B_1$. *Тада је* P *неограничен оператор.*

Доказ.
Према Леми 2.4, идентификоваћемо дуалан простор $(L^1_\alpha(D, d\lambda))^*$ са $L^\infty(D, d\lambda_\alpha)$. Сада, посматрамо адјунгован оператор $P^* : \mathcal{B} \to L^\infty(D, d\lambda_\alpha)$. Потребно је да предходно одредимо форму оператора P^*.
На почетку третираћемо функцију g као полином или произвољну функцију из Блоховог простора са ограниченим изводом. Користећи класичну дефиницију за адјунгован оператор

$$P^*g(f) = g(Pf), \text{ гдје } g \in \mathcal{B}, f \in L^1(D, d\lambda). \tag{2.19}$$

Идентитет у (2.19) је еквивалентан са

$$\begin{aligned}\int_D f(z)\overline{P^*g(z)}d\lambda_\alpha(z) &= \int_D (Pf)'(z)\overline{g'(z)}dA(z) \\ &= \int_D \int_D \frac{2f(w)\bar{w}}{(1 - z\bar{w})^3} dA(w)\overline{g'(z)}dA(z).\end{aligned} \tag{2.20}$$

У циљу да примјенимо Фубинијеву теорему на десну страну од (2.20), претпоставићемо да је f непрекидна функција са компактним носачем у D, тј. $f \in C_0(D)$.Сада смо у позицији да примјенимо Фубинијеву теорему, и добијамо

$$\int_D f(w)\overline{P^*g(w)}d\lambda_\alpha(w) = 2\int_D f(w)(1-|w|^2)^{-\alpha}\bar{w}\int_D \frac{\overline{g'(z)}}{(1-z\bar{w})^3}dA(z)d\lambda_\alpha(w). \tag{2.21}$$

На лијевој и десној страни од (2.21) имамо два ограничена функционала на $L^1(D, d\lambda)$, која су идентична на $C_0(D)$, према томе закључујемо да су исти.

Другим ријечима, имамо

$$P^*g(z) = 2(1-|z|^2)^{-\alpha}z\int_D \frac{g'(w)}{(1-z\bar{w})^3}dA(w), \quad z \in D. \tag{2.22}$$

До сада одредили смо форму за P^* на потпростору ограничених функција у $\mathcal{B}$ и у наставку доказујемо да P^* није ограничен на наведеном потпростору у односу на норму простора $\mathcal{B}$.

Посматрамо функције

$$g_z^n(w) = \frac{1}{C_n}\sum_{k=0}^{n}\bar{z}^k w^{k+1}, \quad w \in D, \quad \text{за фиксирано } z \in D, \ n \in \mathbf{N}$$

и $C_n = 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{k}{2}}$. Лако је да се покаже да $g_z^n \in \mathcal{B}_0$ и $\|g_z^n\|_{\mathcal{B}} \leq 1$.Такође, важи $C_n = O(n), n \to +\infty$.

Са друге стране, имамо

$$P^*g_z^n(z) = 2(1-|z|^2)^{-\alpha}z\int_D \frac{(g_z^n(w))'}{(1-z\bar{w})^3}dA(w). \tag{2.23}$$

Тада за фиксирано $z \in D$, користећи Тејлоров развој за функцију $\frac{1}{(1-z\bar{w})^3}$, формулу $(g_z^n(w))' = \frac{1}{C_n}\sum_{k=0}^n (k+1)\bar{z}^k w^k$ и ортогоналност, добијамо сљедећи низ једнакости

$$\begin{aligned} P^*g_z^n(z) &= \frac{2}{C_n}(1-|z|^2)^{-\alpha}z\int_D \sum_{k=0}^{n}(k+1)\bar{z}^k w^k \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma(3+l)}{l!\Gamma(3)}z^l\bar{w}^l dA(w) \\ &= \frac{1}{C_n}(1-|z|^2)^{-\alpha}z\sum_{k=0}^{n}(k+1)\frac{\Gamma(k+3)}{k!}|z|^{2k}\int_D |w|^{2k}dA(w) \\ &= \frac{1}{C_n}(1-|z|^2)^{-\alpha}z\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)|z|^{2k}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Сада, примијетимо да $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)|z|^{2k} = \frac{2}{(1-|z|^2)^3}$, $z\in D$,тј.

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)|z|^{2k}$$
$$= \frac{-2+|z|^{2+2n}\left(6+5n+n^2-2(1+n)(3+n)|z|^2+(1+n)(2+n)|z|^4\right)}{\left(|z|^2-1\right)^3}. \tag{2.25}$$

Бирајући низ $z_n = 1-\frac{1}{n}$, према релацији (2.25), добијамо

$$|P^*g_{z_n}^n(z_n)| \asymp n^{2+\alpha}, \;\; n\to+\infty.$$

$\square$

Напоменимо да $a_n \asymp b_n, n\to\infty$ означава

$$0 < C_1 \le \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \le C_2 < \infty,$$

гдје су C_1, C_2 константе независне од n.
Сљедећа техничка лема биће од значаја за доказ најављеног резултата са почетка ове секције формулисаног у Теореми 2.9.

Лема 2.5 *Нека је $\mathcal{B}$ Блохов простор. Ако је $f\in\mathcal{B}$ тада*

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2|(z^2f'(z))'| \le 4\|f\|_{\mathcal{B}}.$$

Доказ. Користећи Кошијеву интегралну формулу за аналитичку функцију f, за фиксирано $z\in D$ и $|z|<r<1$ имамо

$$\begin{aligned}
(1-|z|^2)^2|(z^2f'(z))'| &= (1-|z|^2)^2\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{\xi^2f'(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi\right| \\
&= (1-|z|^2)^2\left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{r^3e^{3it}if'(re^{it})}{(re^{it}-z)^2}dt\right| \\
&\le \frac{r^3\|f\|_{\mathcal{B}}}{2\pi(1-r^2)}(1-|z|^2)^2\int_0^{2\pi}\frac{dt}{|re^{it}-z|^2}dt \\
&= \frac{r^3\|f\|_{\mathcal{B}}}{2\pi(1-r^2)}(1-|z|^2)^2\frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-\frac{z}{r}e^{-it}}\frac{1}{1-\frac{\bar{z}}{r}e^{it}}dt \qquad (2.26)\\
&= \frac{r\|f\|_{\mathcal{B}}}{(1-r^2)}(1-|z|^2)^2\sum_{n=0}^{\infty}|z|^{2n}r^{-2n} \\
&= r^3\|f\|_{\mathcal{B}}\frac{(1-|z|^2)^2}{(1-r^2)(r^2-|z|^2)} \\
&\le \|f\|_{\mathcal{B}}\frac{(1-|z|^2)^2}{(1-r^2)(r^2-|z|^2)}.
\end{aligned}$$

Са друге стране, за фиксирано z можемо да изаберемо r тако да вриједност функције $\varphi(r) = (1-r^2)(r^2-|z|^2)$ буде максимална,тј. за $r = \sqrt{\frac{1+|z|^2}{2}}$ достиже се максимална вриједност $\varphi_{max} = \frac{(1-|z|^2)^2}{4}$. Коначно,

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2|(z^2 f'(z))')| \leq 4\|f\|_{\mathcal{B}}.$$

□

Теорема 2.9 *Нека је P Бергманова пројекција, $P : L^1(D, d\lambda) \to B_1$. Тада је P^* ограничен оператор и*

$$2 \leq \|P^*\| \ \leq 4.$$

Доказ.

Као што смо већ видјели у доказу Теореме 2.11, адјунгован оператор $P^* : \mathcal{B} \to L^\infty$ дјелује на сљедећи начин

$$\begin{aligned}&\int_D f(z)\overline{P^*g(z)}d\lambda(z) = \int_D (Pf)'(z)\overline{g'(z)}dA(z)\\ &= 2\int_D\int_D \frac{f(w)\bar{w}}{(1-z\bar{w})^3}dA(w)\overline{g'(z)}dA(z),\end{aligned} \tag{2.27}$$

гдје је $f \in L^1(D, d\lambda)$ и g је Блохова функција.
Користећи елементарну формулу за норму функционала x^* на Банаховом простору X,
$\|x^*\| = \sup\{|\langle x, x^*\rangle| : x \in X, \ \ \|x\| \leq 1\}$, закључујемо

$$\|P^*g\| = 2\sup_{\|f\|\leq 1}\left|\int_D\int_D \frac{f(w)\bar{w}}{(1-z\bar{w})^3}dA(w)\overline{g'(z)}dA(z)\right|. \tag{2.28}$$

Јасно, у последњој релацији можемо да узмемо да је f непрекидна функција са компактним носачем, тј. $f \in C_0(D)$. Тако, за фиксирано $f \in C_0(D)$, $\|f\|_{L^1(D,d\lambda)} = 1$, имамо

$$\begin{aligned}&\left|\int_D\int_D \frac{f(w)\bar{w}}{(1-z\bar{w})^3}dA(w)\overline{g'(z)}dA(z)\right|\\ &= \lim_{r\to 1^-}\left|\int_{rD}\int_D \frac{f(w)\bar{w}}{(1-z\bar{w})^3}dA(w)\overline{g'(z)}dA(z)\right|\\ &= \lim_{r\to 1^-}\left|\int_D f(w)\bar{w}(1-|w|^2)^2\int_{rD}\frac{\overline{g'(z)}}{(1-z\bar{w})^3}dA(z)d\lambda(w)\right|.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Дуалност простора $(L^1(D,d\lambda))^* = L^\infty(D,d\lambda)$ повлачи

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 1^-}\left|\int_D f(w)\bar{w}(1-|w|^2)^2\int_{rD}\frac{\overline{g'(z)}}{(1-z\bar{w})^3}dA(z)dAd\lambda(w)\right| \\
&\leq \lim_{r\to 1^-}\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2\left|z\int_{rD}\frac{g'(w)}{(1-z\bar{w})^3}dA(w)\right| \\
&= \lim_{r\to 1^-}\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2\left|z\int_{D}\frac{g'(rw)}{(1-rz\bar{w})^3}rdA(w)\right| \\
&\leq \lim_{r\to 1^-}\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2|z||\varphi(rz)|,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

гдје је $\varphi(z)=\int_D \frac{g'(rw)}{(1-z\bar{w})^3}dA(w)$ аналитичка функција од z. Штавише,

$$\lim_{r\to 1^-}\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2|z||\varphi(rz)| = \sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2|z||\varphi(z)|. \tag{2.31}$$

Докажимо (2.31).За $\omega = re^{it}, t\in[0,2\pi), r\in[0,1)$, користећи факт да је $|\varphi(\omega z)|$ субхармонијска за фиксирано z, закључујемо да је функција

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2|\omega z\varphi(\omega z)|$$

такође субхармонијска по ω.Према принципу максимума за субхармонијске функције имамо

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 1^-}\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2|rz||\varphi(rz)| &\leq \sup_{\omega\in D}\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2|\omega z||\varphi(\omega z)| \\
&\leq \sup_{t\in[0,2\pi)}\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2|e^{it}z||\varphi(e^{it}z)| \\
&= \sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2|z||\varphi(z)|.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Даље, ако је z_n низ у D такав да

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2|z||\varphi(z)| = \lim_{n\to\infty}(1-|z_n|^2)^2|z_n||\varphi(z_n)|,$$

онда за $r_n = 1-(1-|z_n|)/n$, имамо

$$\lim_{r\to 1^-}\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2|z||\varphi(rz)| \geq (1-|z_n/r_n|^2)^2|z_n||\varphi(z_n)| = (1-|y_n|^2)^2|r_ny_n||\varphi(r_ny_n)|,$$

при чему $|y_n| = |z_n|/(1-(1-|z_n|)/n) < 1$ за $n>1$. Како је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-|z_n|^2}{1-|z_n/r_n|^2} = 1,$$

слиједи
$$\lim_{r\to 1^-}\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2|rz||\varphi(rz)|\geq \sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2|z||\varphi(z)|.$$
Коначно, имамо
$$\|P^*g\|\leq 2\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2\left|z\int_D \frac{g'(w)}{(1-z\bar{w})^3}dA(w)\right|, \tag{2.33}$$
за $g\in\mathcal{B}$.
Наш циљ је да одредимо константу C такву да
$$2\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2\left|z\int_D \frac{g'(w)}{(1-z\bar{w})^3}dA(w)\right|\leq C\|g\|_{\mathcal{B}}. \tag{2.34}$$
Запишимо w у поларним координатама, $w=re^{it}$, тада
$$\begin{aligned} z\int_D \frac{g'(w)}{(1-z\bar{w})^3}dA(w) &= z\frac{1}{\pi}\int_0^1 rdr\int_0^{2\pi}\frac{g'(re^{it})}{(1-zre^{-it})^3}dt \\ &= z\frac{1}{\pi}\int_0^1 rdr\int_{|\xi|=r}\frac{g'(\xi)\xi^2}{(\xi-zr^2)^3}d\xi. \end{aligned} \tag{2.35}$$
Кошијева интегрална формула примјењена на последњи интеграл у (2.35) даје
$$\begin{aligned} z\frac{1}{\pi}\int_0^1 rdr\int_{|\xi|=r}\frac{g'(\xi)\xi^2}{(\xi-zr^2)^3}d\xi &= z\int_0^1 (g'(\xi)\xi^2)''_{|\xi=zr^2}rdr \\ &= \frac{1}{2}\int_0^z (g'(\xi)\xi^2)''d\xi \\ &= \frac{1}{2}(z^2g'(z))'. \end{aligned} \tag{2.36}$$
Према Леми 5, имамо
$$\begin{aligned} &2\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2\left|z\int_D \frac{g'(w)}{(1-z\bar{w})^3}dA(w)\right| \\ &\quad\leq \sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2|(z^2g'(z))'| \\ &\quad\leq 4\|g\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned} \tag{2.37}$$
На крају, дајемо и оцјену са доње стране за $\|P^*\|$.

Нека је $g=\frac{1}{2}\log[(1+z)/(1-z)]$. Тада $g'=1/(1-z^2)$. Из (2.29), добијамо
$$\langle P^*g,f\rangle = 2\lim_{r\to 1^-}\left|\int_D f(w)\bar{w}(1-|w|^2)^2\int_{rD}\frac{\overline{g'(z)}}{(1-z\bar{w})^3}dA(z)d\lambda(w)\right|.$$

Одредимо

$$I_r = \int_{rD} \frac{\overline{g'(z)}}{(1-z\bar{w})^3} dA(z).$$

Имамо

$$I_r = \int_{rD} \frac{1}{1-\bar{z}^2} \frac{1}{(1-z\bar{w})^3} dA(z).$$

Даље,

$$\frac{1}{1-\bar{z}^2} \frac{1}{(1-z\bar{w})^3} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{z}^{2k} \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) z^{j-2} \bar{w}^{j-2}$$

и из $z = \rho e^{it}$, добијамо

$$\frac{1}{1-\bar{z}^2} \frac{1}{(1-z\bar{w})^3} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2)(2k+1) \rho^{4k} \bar{w}^{2k} + \sum_{l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{ilt} A_l(\rho, w),$$

гдје функције $A_l(\rho, w)$,$l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ не зависе од t. Тако је

$$\begin{aligned} I_r &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} dt \int_0^r (2k+2)(2k+1) \rho^{4k+1} \bar{w}^{2k} d\rho \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) r^{4k+2} \bar{w}^{2k} \\ &= \frac{r^2}{(1-r^4\bar{w}^2)^2}. \end{aligned}$$

Према томе,

$$\begin{aligned} \langle P^* g, f \rangle &= 2 \lim_{r \to 1^-} \left| \int_D f(w) \bar{w} (1-|w|^2)^2 \frac{r^2}{(1-r^4\bar{w}^2)^2} d\lambda(w) \right| \\ &= 2 \int_D f(w) \frac{\bar{w}(1-|w|^2)^2}{(1-\bar{w}^2)^2} d\lambda(w). \end{aligned}$$

Што повлачи да је

$$\|P^* g\| = \sup_{\|f\| \le 1} |\langle P^* g, f \rangle| = 2 \sup_{|w|<1} \left| \frac{\bar{w}(1-|w|^2)^2}{(1-\bar{w}^2)^2} \right| = 2.$$

Како је Блохова норма од g једнака 1, то повлачи $\|P^*\| \geq 2$, што је и тражено.

$\square$

У контексту доказаног остаје отворен проблем одређивања тачне норме адјунговане Бергманове пројекције. Вјерујемо да је дати проблем у вези са наредном хипотезом.

Хипотеза 2.1 *За дати функционал*

$$P(f) := \sup_{|z|<1}(1-|z|^2)^2|(z^2 f'(z))|$$

одредити супремум под условом да $f \in \mathcal{B}, \|f\| = 1$.

2.4 Бергманова пројекција и Блохов простор, више–димензионални случај

Постоји више начина да се дефинише норма на Блоховом простору $\mathcal{B}$ која га чини Банаховим (видјети [40]). У овој глави Блохов простор третираћемо као граничи случај Бесовог простора за $p = \infty$. Одговарајућу норму на $\mathcal{B}$ дефинисаћемо као граничну норму Бесових простора B_p за $p \to \infty$. За тако добијену норму одредићемо норму Бергманове пројекције на Блоховом простору.

На почетку подвуцимо да Бесов простор B_p на јединичној лопти $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}^n$ третирамо као простор који садржи све аналитичке функције f у $\mathbb{B}$ такве да је норма

$$\|f\|_{B_p}^p = \sum_{|m|\le N-1}\left|\frac{\partial^{|m|} f}{\partial z^m}(0)\right|^p + \sum_{|m|=N}\int_{\mathbb{B}}\left|(1-|z|^2)^N \frac{\partial^N f}{\partial z^m}(z)\right|^p d\tau(z), \tag{2.38}$$

коначна, при чему је N природан број такав да важи $pN > n$. Мјера $d\tau$ је дата са

$$d\tau(z) = \frac{dv(z)}{(1-|z|^2)^{n+1}}, \quad z \in \mathbb{B}$$

а мулти-индекс m, представља n-торку ненегативних цијелих бројева, $m = (m_1, ..., m_n)$, гдје $|m| = \sum_{i=1}^n m_i$.
Под полу-нормом $\|\cdot\|_{\beta_p}$ у простору Бесова B_p $(0 < p < \infty)$ подразумијевамо

$$\|f\|_{\beta_p}^p = \sum_{|m|=N}\int_{\mathbb{B}}\left|(1-|z|^2)^N \frac{\partial^N f}{\partial z^m}(z)\right|^p d\tau(z).$$

Када је $p = \infty$, Бесов простор B_p је Блохов простор, $B_\infty = \mathcal{B}$. Желимо да дефинишемо норму (полу-норму) на Блоховом простору B_∞ индуковану са Бесовог просотора B_p за $p \to \infty$.
Прије него изведемо експлицитну формулу за тражену норму, наводимо скраћену варијанту Теореме 1.9 (Теорема 3.5 из [40]).

Теорема 2.10 *Предпоставимо да је N позитиван цијели број и f је аналитичка функција у $\mathbb{B}$, тада су следећи услови еквиваленти :*
(1) $f \in \mathcal{B}$

(2) функције

$$(1-|z|^2)^N \frac{\partial^N f}{\partial z^m}(z), \;\; |m| = N,$$

су ограничене у $\mathbb{B}$.

У наредној леми изводимо фромулу за полу-норму на Блоховом простору када $p \to +\infty$.

Лема 2.6 *Нека је* $B_p, 1 < p < \infty$, *Бесов простор и* $\|\cdot\|_{B_p}$ *Бесова норма дефинисана са* (2.38), *тада*

$$\|f\|_{\beta_p} \to \|f\|_{\tilde{\mathcal{B}}}, \;\; p \to \infty \;\; \text{за} \;\; f \in B_r \cap \mathcal{B} \;\; \text{за неко} \;\; r \in (1, \infty),$$

гдје је

$$\|f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} = \max_{|m|=N} \sup_{z \in \mathbb{B}} (1-|z|^2)^N \left| \frac{\partial^N f}{\partial z^m}(z) \right|. \qquad (1)$$

Доказ. Доказаћемо теорему у општем случају. Наиме, ако је $\{f_k\}_{k=1}^N$ низ мјерљивих функција на мјерљивом простору (Ω, μ) такав да

$$f_k \in L^r(\Omega, \mu) \cap L^\infty(\Omega, \mu), \;\; k = 1, ..., N, \;\; \text{за неко} \;\; r \in (1, \infty),$$

тада

$$\left(\sum_{k=1}^N \|f_k\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \to \max_{1 \le k \le N} \|f_k\|_\infty.$$

Последња релација је лака посљедица познате релације $\lim_{p \to \infty} \|f_k\|_p \to \|f_k\|_\infty$ (видјети [33]) и сљедећих очигледних неједнакости

$$\left(\sum_{k=1}^N \|f_k\|_p^p \right)^{1/p} \le N^{1/p} \max_k \{\|f_k\|_p\},$$

и

$$\left(\sum_{k=1}^N \|f_k\|_p^p \right)^{1/p} \ge \max_k \{\|f_k\|_p\}.$$

Ако $f \in B_r \cap \mathcal{B}$ за неко $r > 1$, онда

$$\|f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} = \lim_{p \to \infty} \|f\|_{\beta_p} = \max_{|m|=N} \sup_{z \in \mathbb{B}} \left| (1-|z|^2)^N \frac{\partial^N f}{\partial z^m}(z) \right|.$$

□

Примијетимо да на исти начин важи

$$\left(\sum_{|m|\le N-1}\left|\frac{\partial^{|m|}f}{\partial z^m}(0)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to \max_{|m|\le N-1}\left|\frac{\partial^{|m|f}}{\partial z^m}(0)\right|, \text{ за } p\to\infty.$$

У складу са Лемом (2.6) дефинисаћемо тачну норму $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ на Блоховом простору на начин

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \max_{|m|\le N-1}\left|\frac{\partial^{|m|}f}{\partial z^m}(0)\right| + \max_{|m|=N}\sup_{z\in\mathbb{B}}\left|(1-|z|^2)^N\frac{\partial^N f}{\partial z^m}(z)\right|, \quad f\in\mathcal{B}, \quad N\in\mathbf{N}, \tag{2.39}$$

и одговарајућу полу-норму $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{B}}}$ са

$$\|f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} = \max_{|m|=N}\sup_{z\in\mathbb{B}}\left|(1-|z|^2)^N\frac{\partial^N f}{\partial z^m}(z)\right|, \quad f,\in\mathcal{B} \;\; N\in\mathbf{N}. \tag{2.40}$$

Иако у дефиницији (2.38) норме $\|\cdot\|_{B_p}$ за Бесов простор B_p имамо услов $pN>n$, према формули (2.39) можемо да дефинишемо $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ на $\mathcal{B}$ за свако N. Предходно својство није изненађујуће имајући у виду да важи $\infty\cdot N>n$. Доказ сљедеће леме представља рутинску провјеру и зато га изостављамо.

Лема 2.7 *Блохов простор $\mathcal{B}$ је Банахов простор у норми* (2.39).

У наставку са $\tilde{\mathcal{B}}$-нормом и $\mathcal{B}$-нормом Бергманове пројекције $P_\alpha : L^\infty \to \mathcal{B}$ подразумијевамо

$$\|P_\alpha\|_{\tilde{\mathcal{B}}} = \sup_{\|g\|_\infty\le 1}\|P_\alpha g\|_{\tilde{\mathcal{B}}}, \tag{2.41}$$

и

$$\|P_\alpha\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\|g\|_\infty\le 1}\|P_\alpha g\|_{\mathcal{B}}, \tag{2.42}$$

респективно.

Предстојећа техничка лема биће од значаја у доказу главне Теореме 2.11 (за доказ видјети [19]).

Лема 2.8 *За мулти-индекс $m=(m_1,...,m_n)\in\mathbf{N}_0^{\mathrm{n}}$ имамо*

$$\int_S |\zeta^m|d\sigma(\zeta) = \frac{(n-1)!\prod_{i=1}^n\Gamma(1+\frac{m_i}{2})}{\Gamma(n+\frac{|m|}{2})} \tag{2.43}$$

и

$$\int_{\mathbb{B}} |z^m|dv_\alpha(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha+n+\frac{|m|}{2})}\prod_{i=1}^n\Gamma(1+\frac{m_i}{2}), \tag{2.44}$$

при чему $w^m := \prod_{i=1}^n w_i^{m_i}$, *и* $|m|=\sum_{i=1}^n m_i$.

Сада слиједи главни резултат овог поглавља.

Теорема 2.11 *Нека је P_α Бергманова пројекција $P_\alpha : L^\infty(\mathbb{B}) \to \mathcal{B}$, гдје је $\mathcal{B}$ Блохов простор са полу-нормом* (2.40). *Тада је*

$$\|P_\alpha\|_{\tilde{\mathcal{B}}} = \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)\Gamma(N)}{\Gamma^2(\frac{N}{2}+\frac{n+\alpha+1}{2})}.$$

Доказ. Нека је P Бергманова пројекција, $P : L^\infty(\mathbb{B}) \to \mathcal{B}$. Како је P сурјективно пресликавање, за свако $f \in \mathcal{B}$ постоји $g \in L^\infty(\mathbb{B})$ такво да $f = Pg$, тј.

$$f(z) = \int_{\mathbb{B}} \frac{g(w)}{(1-\langle z, w\rangle)^{n+1+\alpha}} dv_\alpha(w), z \in \mathbb{B}. \tag{2.45}$$

Диференцирајући испод знака интеграла у (2.45) добијамо

$$\begin{aligned} \|P_\alpha g\|_{\tilde{\mathcal{B}}} &= \max_{|m|=N} \sup_{z\in\mathbb{B}} (1-|z|^2)^N \left|\frac{\partial^N f(z)}{\partial z^m}\right| \\ &\le \|g\|_\infty \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \max_{|m|=N} \sup_{z\in B_n} (1-|z|^2)^N \int_{B_n} \frac{|h_m(w)|}{|1-\langle z, w\rangle|^{n+1+N+\alpha}} dv_\alpha(w). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Тако добијамо

$$\|P_\alpha\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \le \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \max_{|m|=N} \sup_{z\in\mathbb{B}} (1-|z|^2)^N \int_{B_n} \frac{|h_m(w)|}{|1-\langle z, w\rangle|^{n+1+N+\alpha}} dv_\alpha(w), \tag{2.47}$$

гдје $h_m(\bar{w}) = \bar{w}^m = (\bar{w}_1)^{m_1}...(\bar{w}_n)^{m_n}, \sum m_n = N$.

За фиксирано $z \in \mathbb{B}$ уводимо смјену промјенљивих $w = \varphi_z(\omega)$. Користећи формулу за реалан Јакобијан

$$(J_R\varphi_z)(\omega) = \left(\frac{1-|z|^2}{|1-\langle z, \omega\rangle|^2}\right)^{n+1},$$

и идентитет (4) Теорема 1.1 имамо

$$dv_\alpha(w) = c_\alpha(1-|w|^2)^\alpha dv(w) = c_\alpha \left(\frac{1-|z|^2}{|1-\langle z, \omega\rangle|^2}\right)^{n+1} \frac{(1-|z|^2)^\alpha(1-|\omega|^2)^\alpha}{|1-\langle z, \omega\rangle|^{2\alpha}} dv(\omega) \tag{2.48}$$

Примјењујићи (2.48) у (2.47) имамо

$$\begin{aligned} \|P_\alpha\|_{\tilde{\mathcal{B}}} &\le \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \max_{|m|=N} \sup_{z\in\mathbb{B}} (1-|z|^2)^N \int_{\mathbb{B}} \frac{|h_m(w)|}{|1-\langle z, w\rangle|^{n+N+\alpha+1}} dv_\alpha(w) \\ &= \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \max_{|m|=N} \sup_{z\in\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} \frac{|h_m(\varphi_z(\omega))|}{|1-\langle z, \omega\rangle|^{n-N+\alpha+1}} dv_\alpha(\omega). \end{aligned} \tag{2.49}$$

Даље,

$$\begin{aligned}\|P_\alpha\|_{\tilde{\mathcal{B}}} &\leq \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \max_{|m|=N} \sup_{z\in\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} \frac{|h_m(\varphi_z(\omega))|}{|1-\langle z,\omega\rangle|^{n-N+\alpha+1}} dv_\alpha(\omega)\\ &\leq \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \max_{|m|=N} \left(\sup_{\omega\in\mathbb{B}} |h_m(\omega)|\right) \sup_{z\in\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{|1-\langle z,\omega\rangle|^{n-N+\alpha+1}} dv_\alpha(\omega).\end{aligned} \tag{2.50}$$

У наставку, примјетимо да за сваки полином h_m, $|h_m(\omega)| \leq 1$. Максимална вриједност се достиже, на примјер за $h_{(N,0,\ldots,0)}(\omega) = h_1(\omega) = \omega_1^N$ и $\omega = e_1$. Према томе, закључујемо

$$\|P_\alpha\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \leq \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \sup_{z\in\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{|1-\langle z,\omega\rangle|^{n-N+\alpha+1}} dv_\alpha(\omega). \tag{2.51}$$

Наш наредни циљ је да одредимо максимум функције $m(z)$, гдје је

$$m(z) = \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_{\mathbb{B}} \frac{dv_\alpha(\omega)}{|1-\langle z,\omega\rangle|^{n-N+\alpha+1}}, \quad z\in\mathbb{B}.$$

Користећи униформну конвергенцију и чињеницу да су $\langle z,\omega\rangle^{k_1}$ и $\langle z,\omega\rangle^{k_2}$, $(k_1,k_2\in\mathbf{N}, k_1\neq k_2)$ ортогонални у $L^2(\mathbb{B}, dv_\alpha(\omega))$, и поларне координате, добијамо низ следећих једнакости

$$\begin{aligned} m(z) &= \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_{\mathbb{B}} \frac{dv_\alpha(\omega)}{|1-\langle \zeta,\omega\rangle|^{n-N+\alpha+1}} dv_\alpha(\omega)\\ &= \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{\Gamma(k+\lambda)}{k!\Gamma(\lambda)}\right|^2 \int_{\mathbb{B}} |\langle z,\omega\rangle|^{2k} dv_\alpha(\omega)\\ &= \frac{2n\Gamma(n+N+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{\Gamma(k+\lambda)}{k!\Gamma(\lambda)}\right|^2 \int_0^1 r^{2n+2k-1}(1-r^2)^\alpha dr \int_S |\langle z,\xi\rangle|^{2k} d\sigma(\xi)\end{aligned} \tag{2.52}$$

гдје је $\lambda = \frac{n-N+\alpha+1}{2}$ и $\omega = r\xi, |\xi| = 1$.

Унитарна матрица U, $U\xi = \xi'(\xi' = (\xi_1',\ldots,\xi_n'), \xi_1' = \frac{\langle \xi,z\rangle}{|z|})$ (видјети [40]) примјењена на последњи површински интеграл даје

$$m(z) = \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{\Gamma(k+\lambda)}{k!\Gamma(\lambda)}\right|^2 \frac{n\Gamma(n+k)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+k+\alpha+1)} \int_S |\xi_1'|^{2k} d\sigma(\xi')|z|^{2k}. \tag{2.53}$$

Коначно, према Леми (2.8) имамо

$$
\begin{aligned}
m(z) &= \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)}{\Gamma^2(\lambda)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(k+\lambda)}{k!\Gamma(n+k+\alpha+1)} |z|^{2k} \\
&= \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} {}_2F_1(\lambda;\lambda;n+\alpha+1,|z|^2),
\end{aligned} \tag{2.54}
$$

гдје је ${}_2F_1(\lambda;\lambda;n+\alpha+1,|z|^2)$ хипергеометријска функција. Користећи формулу

$$
\frac{d}{dx} {}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1,b+1;c+1;x),
$$

закључујемо да је максимум од ${}_2F_1(\lambda;\lambda;n+\alpha+1,|z|^2)$ је ${}_2F_1(\lambda;\lambda;n+\alpha+1,1)$. Тако

$$
\begin{aligned}
\sup_{z\in\mathbb{B}} m(z) &= \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} {}_2F_1(\lambda;\lambda;n+\alpha+1,1) \\
&= \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(N)}{\Gamma^2(\frac{N}{2}+\frac{n+\alpha+1}{2})},
\end{aligned} \tag{2.55}
$$

тј.

$$
\|P_\alpha\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \leq \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)\Gamma(N)}{\Gamma^2(\frac{N}{2}+\frac{n+\alpha+1}{2})}, \quad N\in\mathbf{N} \tag{2.56}
$$

У релацији (2.55) користили смо Гаусов идентитет за хипергеометријске функције, тачније Теорему 1.19. Наиме, за $\mathrm{Re}(c-a-b)>0$, имамо

$$
{}_2F_1(a;b;c,1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.
$$

Докажимо обратну неједнакост. Како је функција $|h_m(\omega)|$ субхармонијска у $\mathbb{B}$, то постоји $\zeta_0\in S$ тако да

$$
\max_{|\zeta|=1} |h_m(\zeta)| = |h_m(\zeta_0)|.
$$

Као што је већ наглашено ако је $h_k(\omega)=\omega_k^N$ и $\zeta_0=e_k$, $(h_k(\omega)=h_{(0,..,N,..,0)}(w))$, онда $|h_k(\zeta_0)|=1$. Фиксирамо $z_r=r\zeta_0$, и функцију $g_{z_r}(w)=\frac{(1-\langle z_r,w\rangle)^{n+N+\alpha+1}}{|1-\langle z_r,w\rangle|^{n+N+\alpha+1}}$. Јасно да важи $\|g_{z_r}\|_\infty=1$. Тада је

$$
\begin{aligned}
\|P_\alpha g_{z_r}\|_{\tilde{\mathcal{B}}} &= \frac{\Gamma(N+n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \max_{|m|=N} \sup_{z\in\mathbb{B}} (1-|z|^2)^N \left| \int_{\mathbb{B}} \frac{g_{z_r}(w)h_m(w)dv_\alpha(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+N+\alpha+1}} \right| \\
&\geq \frac{\Gamma(N+n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \max_{|m|=N} (1-|z_r|^2)^N \left| \int_{\mathbb{B}} \frac{h_m(w)dv_\alpha(w)}{|1-\langle z_r,w\rangle|^{n+N+\alpha+1}} \right|.
\end{aligned} \tag{2.57}
$$

Користећи замјену промјенљивих, $w \to \varphi_{z_r}(\omega)$, као у прошлом случају имамо

$$\|P_\alpha g_{z_r}\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \geq \frac{\Gamma(N+n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \max_{|m|=N} \left| \int_{\mathbb{B}} \frac{h_m(\varphi_{z_r}(w))dv_\alpha(w)}{|1-\langle z_r, w\rangle|^{n-N+\alpha+1}} \right|. \tag{2.58}$$

Како је

$$\left| \int_{\mathbb{B}} \frac{h_m(\varphi_{z_r}(\omega))dv_\alpha(\omega)}{|1-\langle z_r, w\rangle|^{n-N+\alpha+1}} \right| \leq \int_{\mathbb{B}} \frac{dv_\alpha(\omega)}{|1-\langle z_r, \omega\rangle|^{n-N+\alpha+1}} < \infty,$$

можемо да примјенимо Лебегову теорему о доминантној конвергенцији

$$\begin{aligned} \|P_\alpha\|_{\tilde{\mathcal{B}}} &\geq \lim_{r\to 1^-} \frac{\Gamma(N+n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \max_{|m|=N} \left| \int_{\mathbb{B}} \frac{h_m(\varphi_{z_r}(w))dv_\alpha(w)}{|1-\langle z_r, w\rangle|^{n-N+\alpha+1}} \right| \\ &= \frac{\Gamma(N+n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \max_{|m|=N} \left| \int_{\mathbb{B}} \frac{h_m(\zeta_0)dv_\alpha(w)}{|1-\langle \zeta_r, w\rangle|^{n-N+\alpha+1}} \right|. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Користили смо у (2.59) да је $\varphi_{\zeta_0}(w) = \zeta_0$ за $|\zeta_0| = 1$. Коначно, из (2.59) добијамо

$$\begin{aligned} \|P_\alpha\|_{\tilde{\mathcal{B}}} &\geq \frac{\Gamma(N+n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} |h_m(\zeta_0)| \left| \int_{\mathbb{B}} \frac{dv_\alpha(w)}{|1-\langle \xi, w\rangle|^{n-N+\alpha+1}} \right| \\ &= \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)\Gamma(N)}{\Gamma^2(\frac{N}{2}+\frac{n+\alpha+1}{2})}. \end{aligned} \tag{2.60}$$

□

Теорема 2.12 *Нека је* P_α *Бергманова пројекција* $P_\alpha : L^\infty(\mathbb{B}) \to \mathcal{B}$, *гдје је* $\mathcal{B}$ *Блохов простор у норми* (2.39). *Тада је*

$$\|P_\alpha\|_{\mathcal{B}} = \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)\Gamma(\frac{1+N}{2})}{\Gamma(\frac{1+N}{2}+\alpha+n)} + \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)\Gamma(N)}{\Gamma^2(\frac{N}{2}+\frac{n+\alpha+1}{2})}, \quad N \in \mathbf{N}.$$

Доказ. Користићемо исту нотацију као и у теореми 2.11. Нека је $f(z) = P_\alpha(g)(z), z \in \mathbb{B}$, гдје $g \in L^\infty(\mathbb{B}), f \in \mathcal{B}$.
Тада

$$\begin{aligned} \|P_\alpha g\|_{\mathcal{B}} &= \max_{|m|\leq N-1} \left| \frac{\partial^{|m|} f}{\partial z^m}(0) \right| + \max_{|m|=N} \sup_{z\in\mathbb{B}} (1-|z|^2)^N \left| \frac{\partial^N f}{\partial z^m}(z) \right| \\ &\leq \|g\|_\infty \max_{|m|\leq N-1} \int_{\mathbb{B}} |h_m(w)| dv_\alpha(w) + \|g\|_\infty \|P\|_{\tilde{\mathcal{B}}}, \end{aligned} \tag{2.61}$$

тј.

$$\|P\|_{\mathcal{B}} \leq \max_{|m|\leq N-1} \int_{\mathbb{B}} |h_m(w)| dv_\alpha(w) + \|P\|_{\tilde{\mathcal{B}}}.$$

Користећи Лему (2.8) и поларне координате добијамо

$$\begin{aligned} \|P\|_{\mathcal{B}} &\leq \max_{|m|\leq N-1} \frac{\Gamma(|m|+n+\alpha+1)}{\Gamma(\frac{|m|}{2}+\alpha+n+1)} \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1+\frac{m_j}{2}) + \|P\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \\ &= \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)\Gamma(\frac{1+N}{2})}{\Gamma(\frac{1+N}{2}+\alpha+n)} + \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)\Gamma(N)}{\Gamma^2(\frac{N}{2}+\frac{n+\alpha+1}{2})}. \end{aligned} \tag{2.62}$$

У циљу да добијемо супротну неједнакост користимо функције

$$g_{z_r}(w) = \frac{(1-\langle z_r, w\rangle)^{n+N+\alpha+1}}{|1-\langle z_r, w\rangle|^{n+N+\alpha+1}}, \quad w \in \mathbb{B}$$

које смо користили у доказу Теореме 2.11 са циљем да одредимо максимум $\|P_\alpha f\|_{\tilde{\mathcal{B}}}$. Дефинишемо нове тест функције $g^\delta_{z_r}$ уз услов $\|g^\delta_{z_r}\|_\infty \leq 1$, на начин:

$$g^\epsilon_{z_r}(w) = \begin{cases} g_{z_r}(w), & |w| \geq \delta \\ \frac{w_1^{N-1}}{|w_1|^{N-1}}, & |w| \leq \delta^2 \end{cases}$$

и дефинишемо $g^\delta_{z_r}$ на $\{\delta^2 < |w| < \delta\}$ тако да је $g^\delta_{z_r}$ непрекидно на $\mathbb{B}$. Тврдимо да

$$(1-|z_r|^2)^N \max_{|m|=N} \left| \frac{\partial^N P g^\delta_{z_r}}{z^m}(z_r) \right| \to \|P\|_{\tilde{\mathcal{B}}}, \text{ када } r \to 1^-.$$

Наиме, јасно је према дефиницији полу-норме $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{B}}}$ да

$$\limsup_{r\to 1^-} (1-|z_r|^2)^N \max_{|m|=N} \left| \frac{\partial^N P g^\delta_{z_r}}{z^m}(z_r) \right| \leq \|P\|_{\tilde{\mathcal{B}}}.$$

Такође, доказано је у Теореми 2.11 да

$$\lim_{r\to 1^-} (1-|z_r|^2)^N \left| \frac{\partial^N P_\alpha g_{z_r}}{z^m}(z_r) \right| = \|P_\alpha\|_{\tilde{\mathcal{B}}}.$$

Према томе, имамо

$$\begin{aligned} &(1-|z_r|^2)^N \max_{|m|=N} \left| \frac{\partial^N P_\alpha g_{z_r}}{z^m}(z_r) - \frac{\partial^N P_\alpha g^\delta_{z_r}}{z^m}(z_r) \right| \\ &\quad = (1-|z_r|^2)^N \max_{|m|=N} \left| \frac{\partial^N P_\alpha (g_{z_r} - g^\delta_{z_r})}{z^m}(z_r) \right| \\ &\quad \leq \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_{|w|<\delta} \frac{2(1-|z_r|^2)^N dv_\alpha(w)}{|1-\langle z_r, w\rangle|^{n+N+\alpha+1}}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Десна страна од (2.63) конвергира ка 0 за $r \to 1^-$.
Тако

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 1^-}(1-|z_r|^2)^N \max_{|m|=N}\left|\frac{\partial^N P_\alpha g^\delta_{z_r}}{z^m}(z_r)\right| \\ = \lim_{r\to 1^-}(1-|z_r|^2)^N \max_{|m|=N}\left|\frac{\partial^N P_\alpha g_{z_r}}{z^m}(z_r)\right| \\ = \|P_\alpha\|_{\tilde{\mathcal{B}}}.\end{aligned} \tag{2.64}$$

Даље, за свако $r \in (0,1)$, имамо

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^{N-1}P(g^\delta_{z_r})}{z_1^{N-1}}(0)\right| \geq \int_{|w|\leq\delta^2}|w_1|^{N-1}dv_\alpha(w) - \int_{|w|>\delta^2}dv_\alpha \\ \to \int_{\mathbb{B}}|w_1|^{N-1}dv_\alpha(w) = \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)\Gamma(\frac{1+N}{2})}{\Gamma(\frac{1+N}{2}+\alpha+n)}\end{aligned} \tag{2.65}$$

за $\delta \to 1^-$. Јасно је да у (2.65) можемо да третирамо произвољан парцијалан извод $\frac{\partial^{N-1}P(g^\delta_{z_r})}{z_k^{N-1}}(0)$, гдје $k = 1, ..., n$.
За дато $\epsilon > 0$, можемо да изаберемо $\delta > 0$ такво

$$\left|\frac{\partial^{N-1}Pg^\delta_{z_r}}{z_1^{N-1}}(0)\right| > \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)\Gamma(\frac{1+N}{2})}{\Gamma(\frac{1+N}{2}+\alpha+n)} - \frac{\epsilon}{2},$$

за свако $r \in (0,1)$. Фиксирамо такво δ. Према релацији (2.64), можемо да изаберемо $r \in (0,1)$ такво да

$$(1-|z_r|^2)^N \max_{|m|=N}\left|\frac{\partial^N P_\alpha g^\delta_{z_r}}{z^m}(z_r)\right| > \|P_\alpha\|_{\tilde{\mathcal{B}}} - \frac{\epsilon}{2}.$$

Тада, за дату функцију $g^\delta_{z_r}$ имамо

$$\begin{aligned}\|P_\alpha\|_{\mathcal{B}} &\geq \|P_\alpha g^\delta_{z_r}\|_{\mathcal{B}} \\ &\geq \left|\frac{\partial^{N-1}P(g^\delta_{z_r})}{z_1^{N-1}}(0)\right| + (1-|z_r|^2)^N \max_{|m|=N}\left|\frac{\partial^N P_\alpha g^\delta_{z_r}}{z^m}(z_r)\right| \\ &> \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)\Gamma(\frac{1+N}{2})}{\Gamma(\frac{1+N}{2}+\alpha+n)} + \|P_\alpha\|_{\tilde{\mathcal{B}}} - \epsilon.\end{aligned} \tag{2.66}$$

Тако, $\|P_\alpha\|_{\mathcal{B}} \geq \frac{\Gamma(n+N+\alpha+1)\Gamma(\frac{1+N}{2})}{\Gamma(\frac{1+N}{2}+\alpha+n)} + \|P_\alpha\|_{\tilde{\mathcal{B}}}$, и комбинујући са релацијом (2.62) завршавамо доказ. $\square$

Ако је P_α Бергманова пројекција, $P_\alpha : L^\infty(\mathbb{B}) \to \mathcal{B}$, гдје $\mathcal{B}$ је Блохов простор у полу-норми (2.40), тада је лако да се нађе доња оцјена за $\tilde{\mathcal{B}}$–полу-норму од P_α тј.

$$\|P_\alpha\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \geq \frac{\Gamma(N+n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}.$$

Наиме, фиксирамо $z_0 \in \mathbb{B}$ и користимо функцију $g_{z_0}(w) = \frac{(1-\langle z_0,w\rangle)^N}{(1-\langle w,z_0\rangle)^N}$. Јасно да $g_{z_0} \in L^\infty$, $\|g_{z_0}\| = 1$.

Тако

$$\begin{aligned}\|P_\alpha g_{z_0}\|_{\tilde{\mathcal{B}}} &= \frac{\Gamma(N+n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \max_{|m|=N} \sup_{z\in\mathbb{B}} (1-|z|^2)^N \left| \int_{\mathbb{B}} \frac{g_{z_0}(w) h_m(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+N+\alpha+1}} dv_\alpha(w) \right| \\ &\geq \frac{\Gamma(N+n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \max_{|m|=N} (1-|z_0|^2)^N \left| \int_{\mathbb{B}} \frac{\frac{h_m(w)}{(1-\langle w,z_0\rangle)^N}}{(1-\langle z_0,w\rangle)^{n+\alpha+1}} dv_\alpha(w) \right|.\end{aligned} \tag{2.67}$$

Са друге стране, како важи да $\frac{h_m(w)}{(1-\langle w,z_0\rangle)^N} \in H^\infty(\mathbb{B})$, то даље повлачи неједнакост

$$\begin{aligned}\|P_\alpha\|_{\mathcal{B}} &\geq \frac{\Gamma(N+n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \max_{|m|=N} \sup_{z\in\mathbb{B}} |h_m(z)| \\ &= \frac{\Gamma(N+n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}.\end{aligned} \tag{2.68}$$

Желимо да нагласимо да на простору $\mathcal{B}$ можемо да разматрамо и норме облика

$$\|f\|_{\mathcal{B}_p} = \sum_{|m|\leq N-1} \left| \frac{\partial^{|m|} f}{\partial z^m}(0) \right| + \sup_{z\in\mathbb{B}} (1-|z|^2)^N \left(\sum_{|m|=N} \left| \frac{\partial^N f}{\partial z^m}(z) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.69}$$

и одговарајуће полу-норме

$$\|f\|_{\beta_p} = \sup_{z\in\mathbb{B}} (1-|z|^2)^N \left(\sum_{|m|=N} \left| \frac{\partial^N f}{\partial z^m}(z) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.70}$$

гдје $f \in \mathcal{B}, N \in \mathbf{N}$, $1 \leq p < \infty$.

Примијетимо да је за $N = 1$, $\tilde{\mathcal{B}}-$ норма Бергманове пројекције износи $\|P_\alpha\|_{\tilde{\mathcal{B}}} = \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma^2(\frac{n+\alpha+2}{2})}$ и то је један од главних резултата у раду Д. Калаја и М.Марковића [19]. За специјалан случај када је $n = 1$, добијамо $\|P\|_{\tilde{\mathcal{B}}} = \frac{8}{\pi}$, што је главни резултат у Перале у [31].

У циљу да изведемо глани резултат из [19] као специјалан случај Теореме 2.11, поступићемо на сљедећи начин. Прије свега, јасно је према дефиницији да

$$\|g\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \leq \|g\|_{\beta_2}, \tag{2.71}$$

и зато стављајући да је $g = P_\alpha[f]$ у предходној релацији имамо,

$$\|P_\alpha f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \leq \|P_\alpha f\|_{\beta_2} \tag{2.72}$$

и

$$\|P_\alpha\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \leq \|P_\alpha\|_{\beta_2}. \tag{2.73}$$

У циљу да докажемо обратну неједнакост у (2.73) узмимо прозвољно $f \in L^\infty(B)$. Користећи исти аргумент као у доказу Теореме 2.11 добијамо

$$\begin{aligned}
\|P_\alpha f\|_{\beta_2} &= \sup_{z\in B}(1-|z|^2)\left(\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial g}{\partial z_i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (n+\alpha+1)\|f\|_\infty \sup_{z\in B}(1-|z|^2)\left(\sum_{i=1}^n\left(\int_B \frac{|w_i|dv_\alpha(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\alpha}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (n+\alpha+1)\|f\|_\infty \sup_{z\in B}\left(\sum_{i=1}^n\left(\int_B \frac{|h_i(\varphi_z(\omega))|dv_\alpha(\omega)}{|1-\langle z,\omega\rangle|^{n+\alpha}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= (n+\alpha+1)\|f\|_\infty \sup_{z\in B}\left(\sum_{i=1}^n\left(\psi(z)\int_B \frac{|h_i(\phi_z(\omega))|dv_\alpha(\omega)}{\psi(z)|1-\langle z,\omega\rangle|^{n+\alpha}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{2.74}$$

гдје је

$$\psi(z) = \int_B \frac{dv_{\alpha(\omega)}}{|1-\langle z,\omega\rangle|^{n+\alpha}}.$$

Примјена Јенсенове неједнакости даје

$$\begin{aligned}
&\|P_\alpha f\|_{\beta_2} \leq (n+\alpha+1)\|f\|_\infty \sup_{z\in B}(\psi(z))^{\frac{1}{2}}\left(\left(\int_B \frac{\sum_{i=1}^n |h_i(\phi_z(\omega))|^2 dv_\alpha(\omega)}{|1-\langle z,\omega\rangle|^{n+\alpha}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (n+\alpha+1)\|f\|_\infty \sup_{z\in B}(\psi(z)) = \|f\|_\infty \sup_{z\in B} m(z) = \|f\|_\infty \|P_\alpha\|_{\bar{B}},
\end{aligned} \tag{2.75}$$

гдје је функција $m(z)$ дефинисана предходно у доказу Теореме 2.11. Тако у релацији (2.73) добијамо једнакост.

Како за вектор $a = (a_1, ..., a_n)$ имамо познате неједнакости за еквивалентне норме, $\|a\|_\infty \leq \|a\|_p \leq \|a\|_2$ за $p > 2$. Тако предходна неједнакост повлачи да за $N = 1$ и $p \geq 2$ имамо

$$\|P_\alpha\|_{\beta_p} = \|P_\alpha\|_{\beta_2} = \|P_\alpha\|_{\mathcal{B}}.$$

ГЛАВА 3

ГРИНОВА ФУНКЦИЈА И НЕХОМОГЕНИ ДИРИХЛЕОВ ПРОБЛЕМ

3.1 Увод

Тематика ове главе представља посебан дио рада. У центру разматрања ове главе налази се Поасонова једначина са нехомогеним Дирихлеовим граничним условом на јединичној лопти и одговарајуће слабо рјешење у смислу дистрибуција. Слабо рјешење поменутог проблема у смислу дистрибуција дато је формулом у којој се појављује интегрални оператор индукован Гриновом функцијом. Одређивање норме оператора индукованог Гриновом функцијом у контексту различитих L^p норми за случај више димензија представља главни циљ и садржај ове главе.Уводни теоријски дио је у највећој мјери заснован на књигама Гилбрад-Трудингер[17] , Еванса[13] и Акслера[5]. Резултати главе су базирани на раду [24].

3.2 Лапласова једначина

Нека је Ω област у R^n а $u \in C^2(\Omega)$. Лапласијан функције u уобичајено означавамо са $\triangle u$, и дефинишемо

$$\triangle u = \sum_{n=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = div(\nabla u).$$

Функција u је хармонијска на Ω ако је $\triangle u|_{\Omega} = 0$.

У овој секцији изложићемо основне појмове и својства која се тичу рјешења класичног Дирихлеовог задатка за једначину Лапласа $\triangle u = 0$. Почетна тачка излагања свакако се односи на познату теорему о дивергенцији у R^n. Наиме, ако је Ω ограничена област у R^n са границом $\partial\Omega$ која је класе C^1 са спољашњом нормалом n за $\partial\Omega$. Тада за призвољно векторско поље w класе $C^1(\Omega)$ важи идентитет

$$\int_{\Omega} div(w)dx = \int_{\partial\Omega} w \cdot nds, \tag{3.1}$$

гдје је ds површинска мјера на $\partial\Omega$ и " $\cdot$ " стандардни скаларни производ у R^n.

Уколико су функције $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, тада узимајући да је $w = v \cdot Du$ из предходног идентитета (3.1) добијамо прву формулу Грина

$$\int_{\Omega} v \cdot \triangle udx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla vdx = \int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} ds. \tag{3.2}$$

Мјењајући мјеста за u и v у (3.2) долазимо да другог Гриновог идентитета

$$\int_{\Omega} (v \cdot \triangle u - u \cdot \triangle v)dx = \int_{\partial\Omega} (v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} - u \cdot \frac{\partial v}{\partial n})ds. \tag{3.3}$$

Једначина Лапласа има радијално-симетрично рјешење r^{n-2} за $n > 2$ и $\log r$ за $n = 2$, при чему је r растојање од фиксиране тачке. Ако фиксирамо тачку $y \in \Omega$ дефинишемо фундаментално рјешење Лапласове једначине

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\omega_{n-1}} |x-y|^{2-n}, & n > 2 \\ \frac{1}{2\pi} \log|x-y| & n = 2. \end{cases}$$

Функција Γ је хармонијска кад-год је $x \neq y$. Такође, сваку функцију $u \in C^2(\bar{\Omega})$ можемо да презентујемо формулом

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \triangle udx, \quad y \in \Omega. \tag{3.4}$$

Формулу (3.4) називамо презентацијом Грина.За интеграбилну функцију f интеграл $\int_{\Omega} \Gamma(x-y)f(x)dx$ називамо Њутновим потенцијалом са густином f. Специјално за хармонијску функцију u важи

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \quad y \in \Omega. \tag{3.5}$$

Предпоставимо сада да функција $h \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ задовољава Лапласову једначину $\triangle u = 0$ на Ω. Тада користећи други идентитет Грина (3.3) добијамо

$$-\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial h}{\partial n} - h\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds = \int_{\Omega} h\triangle u dx. \tag{3.6}$$

Стављајући да је $G = \Gamma + h$ из (3.6) и (3.4) добијамо формулу

$$u(y) = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds + \int_{\Omega} G\triangle u dx. \tag{3.7}$$

Уколико као допунски услов додамо да је $G = 0$ на $\partial\Omega$, онда

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial G}{\partial n}ds + \int_{\Omega} G\triangle u dx, \tag{3.8}$$

при чему $\frac{\partial G}{\partial n}(x,y) = \nabla_y G(x,y)\cdot n(y)$ је стандардна ознака за извод по нормали функције G по промјенљивој y. Функцију $G(x,y)$ називамо функцијом Грина за (Дирихлеов задатак) област Ω. Понекад функцију $G(x,y)$ називамо и функцијом Грина првог рода за област Ω. Према реченом, у могућности смо да одредимо рјешење $u \in C^2(\bar{\Omega})$ граничног проблема

$$\begin{cases} \triangle u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u = g, & \text{на } \partial\Omega \end{cases}$$

гдје су f, g дате непрекидне функције. Наиме, користећи формулу (3.8) добијамо (репрезентациону формулу користећи Гринову функцију)

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y)\frac{\partial G}{\partial n}(x,y)ds(y) - \int_{\Omega} G(x,y)f(y)dy, \ \ x \in \Omega. \tag{3.9}$$

Гринова функција за јединичну лопту. Гринова функција за јединичну лопту дата је формулом

$$G(x,y) = \begin{cases} \Gamma(|x-y|) - \Gamma(|y||x-y^*|), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

за све $x, y \in \mathbb{B}$, $x \neq y$, при чему понављамо да $x^* = \frac{x}{|x|^2}$, за $x \neq 0$ и за $x = 0, x^* = \infty$. Прецизније Гринова функција за јединичну лопту у R^n дата је формулом

$$G(x,y) = c_n\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{[x,y]^{n-2}}\right),$$

гдје је

$$c_n = \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}},$$

ω_{n-1} Хауздорфова мјера јединичне сфере $\mathbb{S}$ и

$$[x,y] := |x|y| - y/|y|| = |y|x| - x/|x||.$$

Напоменимо да је $\frac{\partial G(x,y)}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial |y|} = \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n n\omega_{n-1}}$ и тиме је дата формула за Поасонов језгро $P(x,\xi) = c_n \frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^n}$.
Претпоставимо да u функција која задовљава гранични проблем

$$\begin{cases} \triangle u = 0, & \text{у лопти } \mathbb{B} \\ u = g, & \text{на } \mathbb{S} \end{cases}$$

Тада на основу предходног дијела важи формула

$$u(x) = \int_{\mathbb{S}} g(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n}(x,y) ds(y) = \frac{1}{n\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}} \frac{(1-|x|^2)g(y)}{|x-y|^n} ds(y) \ \ x \in \mathbb{B},$$

позната као интегрална Поасонова формула. Специјално ако је $u \in C^1(\bar{\mathbb{B}}) \cap C^2(\mathbb{B})$, имамо

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}} \frac{(1-|x|^2)u(y)}{|x-y|^n} ds(y), \ \ x \in \mathbb{B}.$$

3.3 Простори дистрибуција

Садржај ове секције односи се на основне концепте простора дистрибуција и слабих (уопштених) рјешења и Собољевских простора који ће бити коришћени у наставку рада. Као главни извор литературе за поменуту тематику наводимо књиге [32],[17],[35] и [1].

Простор основних функција. Са $C_0^\infty(\Omega)$ означавамо скуп бесконачно диференцијабилних функција на Ω које имају компактан носач, тј.$f \in C^\infty(\Omega)$ и $\overline{\text{supp}(f)} \subset \Omega$ је компактан. За низ функција $\{f_i\}$ које припадају простору $C_0^\infty(\Omega)$ кажемо да конвергирају ка функцији $f \in C_0^\infty(\Omega)$ у смислу простора $\mathcal{D}(\Omega)$ ако су задовољени сљедећи услови:
а) постоји компактан скуп $K \subset \Omega$, такав да $\text{supp}(f_i - f) \subset K$ за свако i,
б)$\lim_{i\to\infty} D^\alpha f_i(x) = D^\alpha f(x)$ униформно на K за сваки мулти-индекс α,
гдје ознака D^α стандардно означава дифенцијални оператор

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, x \in \Omega \ \ \alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n), |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Постоји локално конвексна топологија на векторском простору $C_0^\infty(\Omega)$ у односу на коју линеарни функционал T је непрекидан ако и само ако $Tf_i \to Tf$ у $\mathbb{C}$ кад год $f_i \to f$ у смислу простора $\mathcal{D}(\Omega)$. Са овом топологијом простор $C_0^\infty(\Omega)$ постаје векторско тополошки простор који називамо простором основних функција, у ознаци $\mathcal{D}(\Omega)$, а његове елементе називамо тест функцијама. Напоменимо да простор $\mathcal{D}(\Omega)$ није метризабилан.

Простор дистрибуција. Дуалан простор $\mathcal{D}'(\Omega)$ за $\mathcal{D}(\Omega)$ назива се простором дистрибуција на Ω. Простор $\mathcal{D}'(\Omega)$ је дат у слабој-звијезда топологији као дуалан простор од $\mathcal{D}$ и са истом топологијом чини локалноконвексан векторско тополошки простор.

Регуларне дистрибуције. Свакој локално интеграбилној функцији $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ одговара дистрибуција $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ дефинисана са

$$T_u(\varphi) = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Дистрибуције облика T_u називају се регуларне дистрибуције. Наравно, постоје дистрибуције из $\mathcal{D}'(\Omega)$ које нису регуларне (на примјер $\delta-$дистрибуција).

Постоји изоморфизам између простора $L^1_{loc}(\Omega)$ и простора регуларних дистрибуција, па регуларну дистрибуцију T_u поистовјећујемо са функцијом u. Из изложеног слиједи да је $\mathcal{D}(\Omega)$ подскуп од $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Изводи Дистрибуција. Нека је $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Тада извод $D^\alpha T$ дистрибуције $T \in \mathcal{D}'$ дефинишемо

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha \varphi) \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.10}$$

Јасно, да $D^\alpha\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ и $D^\alpha T$ је линеаран функционал на $\mathcal{D}(\Omega)$ за који се лако показује да је непрекидан, тј. $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Свака дистрибуција из $\mathcal{D}'(\Omega)$ има изводе свих редова у $\mathcal{D}'(\Omega)$ у смислу дефиниције (3.10). Тачније, пресликавање D^α из $\mathcal{D}'(\Omega)$ у $\mathcal{D}'(\Omega)$ је непрекидно.

Слаби извод. Нека је $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Тада можда постоји или не, функција $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$, таква да је $T_{v_\alpha} = D^\alpha T_u$ у $\mathcal{D}'(\Omega)$. Уколико постоји таква функција, она је једнистена до на скуп мјере нула и називамо је слаби или дистрибуционални парцијални извод функције u и означавамо са $D^\alpha u$. Тако $D^\alpha u = v_\alpha$ у смислу дистрибуција за $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ задовољава

$$\int_\Omega u(x)D^\alpha\varphi(x)dx = (-1)^\alpha \int_\Omega v_\alpha(x)\varphi(x)dx,$$

за сваку $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Ако је функција u довољно глатка да има непрекидан парцијални извод $D^\alpha u$ (у класичном смислу), тада је $D^\alpha u$ је такође и слаби парцијални извод за u. Наравно, $D^\alpha u$ може да постоји, а да класични извод не постоји.

Наводимо значајну теорему која се тиче апроксимације слабих извода.

Теорема 3.1 *Локално интеграбилна функција v_α је слаби парцијални извод локално интеграбилне функције $u, v_\alpha = D^\alpha u$, ако и само ако постоји низ функција $\{u_m\}$ из $C^\infty(\Omega)$ који конвергира ка функцији $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, тако да изводи $D^\alpha u_m$ конвергирају ка v у $L^1_{loc}(\Omega)$.*

Теорема 3.1 показује на који начин се поклапају слаби и јаки изводи и захваљујући њој многи резултати класичног диференцијалног рачуна могу да се пренесу и у случају слабих извода.

Собољевски простори. Дефинишемо функционал $\|\cdot\|_{m,p}$, гдје је m позитиван цијели број и $1 \leq p \leq \infty$, на начин

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \tag{3.11}$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty, \tag{3.12}$$

за сваку функцију u за коју десна страна има смисла, $\|\cdot\|_p$ је норма у $L^p(\Omega)$.
За произвољан позитиван цијели број m и $1 \leq p \leq \infty$ дефинишемо векторски простор $W^{m,p}(\Omega)$ са нормом $\|\cdot\|_{m,p}$

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}, \tag{3.13}$$

гдје се за $D^\alpha u$ подразумијева да је слаби (дистрибуционални) парцијални извод.
Са нормама (3.11) и (3.12) простор (3.13) називамо Собољевским простором над Ω.
Показује се да је $W^{m,p}(\Omega)$ Банахов простор који је сепарабилан за $1 \leq p < \infty$. Практично, $W^{m,2}$ је сепарабилни Хилбертов простор са скаларним производом

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle,$$

гдје је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ стандардни скаларни прозвод у $L^2(\Omega)$.

Уопштена рјешења. Нека је L елиптички оператор задат у дивергентној форми

$$Lu = D^i(a_{ij}(x)D^j u + b_i(x)u) + c_i D^i u(x)u + d(x)u, \tag{3.14}$$

гдје су коефицијенти a_{ij}, b_i, c_i и d мјерљиве функције у области Ω.
Општи елиптички оператор $\tilde{L}$ који је облика

$$\tilde{L}u = a_{ij} D^{(i,j)} u + b_i(x) D^i u + c(x)u, u \in C^2(\Omega), \quad a_{ij} = a_{ji} \tag{3.15}$$

(у тачки $x \in \Omega$ матрица његових најстаријих коефицијентана $[a_{ij}(x)]$ је позитивна) могуће је записати у облику (3.14) ако су коефицијенти a_{ij} диференцијабилни. Обратно, ако су (3.14) коефицијенти a_{ij}, b_i диференцијабилни и $u \in C^2(\Omega)$ тада је оператор L је могуће записати у облику (3.15). Дивергентна форма записа има одређену предност јер могуће је оператор L дефинисати на ширем скупу функција од $C^2(\Omega)$.
Кажемо да функција u у слабом или уопштеном смислу задовољава једначину $Lu = 0$ и неједнакости $Lu \geq 0, Lu \leq 0$ у Ω ако

$$\mathcal{L}(u,v) = \int_\Omega \{(a_{ij}D^j u + b_i u)D^i u - (c_i D^i u + du)v\}dx = 0$$

$$\mathcal{L}(u,v) \geq 0, \mathcal{L}(u,v) \leq 0$$

за сваку ненегативну функцију $v \in C_0^1(\Omega)$.
Нека су $f_i, g, i = 1, 2, ..., n$ локално интеграбилне функције на Ω. Тада се слабо диференцијална функција u назива слабим или уопштеним рјеше– њем нехомогене једначине

$$Lu = g + D^i f_i \tag{3.16}$$

у Ω, ако важи релација

$$\mathcal{L}(u,v) = \int_\Omega (f_i D^i v - gv)dx, \quad v \in C_0^1(\Omega). \tag{3.17}$$

Лако се провјерава да је свако класично рјешење једначине (3.16) такође и уопштено рјешење, као и да уопштења рјешења која припадају класи $C^2(\Omega)$ су такође и класична рјешења, под условом да су коефицијенти оператора L и функције у десној страни релације (3.17) глатке.

3.4 Гринова функција и Поасонова једначина

Нека је $f : \mathbb{S} \to R$ L^1 интеграбилна функција на јединичној сфери $\mathbb{S}$ и нека је $g : \mathbb{B} \to R$ L^1 интеграбилна функција на јединичној лопти. Тада слабо рјешење Поасонове једначине $\triangle u = g$ (у смислу дистрибуција) у јединичној лопти и са граничним условом $u|_{\mathbb{S}} = f$ је дато формулом

$$u(x) = P[f](x) - \mathcal{G}[g](x) := \int_\mathbb{S} P(x,\xi)f(\xi)d\sigma(\xi) - \int_\mathbb{B} G(x,y)g(y)dy, \tag{3.18}$$

гдје $|x| < 1$.

Разматраћемо Поасонову једначину са хомогеним граничним Дирихлеовим условом

$$\begin{cases} \triangle u(x) = g(x), & x \in \mathbb{B} \\ u = 0, & \text{на } \mathbb{S} \end{cases}$$

гдје је $g \in L^p(\mathbb{B}), p \geq 1$. Тада је слабо рјешење дато формулом

$$u(x) = -\mathcal{G}[g](x) = -\int_{\mathbb{B}} G(x,y)g(y)dy, |x| < 1. \tag{3.19}$$

Као што смо нагласили у уводу ове главе, главни циљ представља проналажење норме оператора $\mathcal{G}$ за случај различитих L^p простора и норми. Сматрамо да је $n > 2$. Случај $n = 2$ је размотрен у раду [22]. За неке повезане резултате који се тичу такође планарног случаја упућујемо на радове [3],[7] и [9]. У раду [4] аутори су разматрали L^2 норму оператора

$$\mathcal{N}[f](x) = \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y)dy.$$

Резултати овог поглавља уопштавају одговорајуће резултате из [22] и [4].

Сопствене вриједности Лапласијана за Дирихлеов проблем. Познато је да постоји ортонормирана база за $L^2(\mathbb{B})$ која се састоји од сопствених функција (φ_n) Дирихлеовог проблема за Лапласијан

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = \lambda u(x), & x \in \mathbb{B} \\ u = 0, & \text{на } \mathbb{S} \end{cases} \tag{3.20}$$

са одговарајућим сопственим вриједностима $\lambda_1 < \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n...$ Функције φ_n су реално вриједносне.

Познато је да $\lambda_1(\mathbb{B})$ представља квадрат прве позитивне нуле Беселове функције J_α првог реда за $\alpha = \frac{n-1}{2}$:

$$J_\alpha(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+\alpha}. \tag{3.21}$$

Предстоје нам помоћни резултати који су техничког карактера а играју важну улогу у доказу главног резултата ове главе, Теореме 3.2. Првенствено се то односи на Лему 3.2. Предходно наводимо резултат из рада [12] који се тиче неједнакости везаних за Гама функцију.

Лема 3.1 *Нека су m, p и k реални бројеви $m, p > 0$ и $p > k > -m$: Ако важи*

$$k(p-m-k) \leq 0 (\geq 0)$$

тада имамо

$$\Gamma(p)\Gamma(m) \geq (\leq) \Gamma(p-k)\Gamma(m+k).$$

Лема 3.2 *Нека је*

$$I(t) = (1-t^2)^{n-q(n-2)} \int_0^1 \frac{(1-r^{n-2})^q r^{n-q(n-2)-1}}{(1-r^2t^2)^{n-q(n-2)+1}} dr, \quad 0 \le t < 1,$$

гдје је $n \ge 3$ *природан број и* $1 < q < \frac{n}{n-2}$. *Тада се максимална вриједност функције* $I(t)$ *достиже за* $t = 0$, *тј.*

$$\begin{aligned} \max_{0\le t<1} I(t) &= \int_0^1 (1-r^{n-2})^q r^{n-q(n-2)-1} dr \\ &= \frac{\Gamma(1+q)\Gamma\left(\frac{n-q(n-2)}{n-2}\right)}{(n-2)\Gamma\left(1+q+\frac{n-q(n-2)}{n-2}\right)} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Доказ. На почетку разматрамо случај $n > 3$. За $a = n - q(n-2)$ имамо $0 < a < 2$ и сљедећи развој

$$\begin{aligned} I(t) &= (1-t^2)^a \int_0^1 \frac{(1-r^{n-2})^{\frac{n-a}{n-2}} r^{a-1}}{(1-r^2t^2)^{a+1}} dr = \\ &= (1-t^2)^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+a+1)}{\Gamma(a+1)k!} t^{2k} \int_0^1 (1-r^{n-2})^{\frac{n-a}{n-2}} r^{2k+a-1} dr \\ &= \frac{\Gamma(2+\frac{2-a}{n-2})(1-t^2)^a}{(n-2)\Gamma(a+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+a+1)\Gamma(\frac{a+2k}{n-2})}{\Gamma\left(\frac{2(k+n-1)}{n-2}\right)k!} t^{2k}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ако је $n \ge 3$ и $k \ge 0$ имамо

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{a+2k}{n-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2(k+n-1)}{n-2}\right)} &= \frac{\Gamma(2+\frac{a+2k}{n-2})}{\Gamma(2+\frac{2+2k}{n-2})} \frac{1}{\left(\frac{a+2k}{n-2}\right)\left(\frac{a+2k}{n-2}+1\right)} \\ &\le \frac{\Gamma(2+\frac{a}{n-2})}{\Gamma(2+\frac{2}{n-2})} \frac{1}{\left(\frac{a+2k}{n-2}\right)\left(\frac{a+2k}{n-2}+1\right)}. \end{aligned}$$

Посљедња неједнакост слиједи из познатог идентитета $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ и Леме (3.1). Прецизније, уколико неједнакост

$$\Gamma(M)\Gamma(P) \le \Gamma(M-K)\Gamma(P+K), \quad \text{za} \;\; K(P-M-K) \le 0$$

примјенимо на

$$K = \frac{2k}{n-2}, \quad M = 2 + \frac{2k+a}{n-2}, \quad P = 2 + \frac{2}{n-2}.$$

Даље, за $a \in (0,2)$ имамо

$$\begin{aligned}
\frac{I(t)}{\frac{\Gamma\left(2+\frac{2-a}{n-2}\right)}{n-2}} : \frac{\Gamma(2+\frac{a}{n-2})}{\Gamma(2+\frac{2}{n-2})} &\le \frac{(1-t^2)^a}{\Gamma(a+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k+1)}{\Gamma(1+k)} \frac{t^{2k}}{\left(\frac{a+2k}{n-2}\right)\left(\frac{a+2k}{n-2}+1\right)} \\
&= \frac{(n-2)(1-t^2)^a}{a} F\left(\frac{a}{2}, 1+a, \frac{2+a}{2}, t^2\right) \\
&- \frac{(n-2)(1-t^2)^a}{(n+a-2)} F\left(1+a, \frac{1}{2}(n+a-2), \frac{a+n}{2}, t^2\right) \\
&= \frac{(n-2)}{a} F\left(1, -\frac{a}{2}, 1+\frac{a}{2}, t^2\right) \\
&- \frac{(n-2)a}{a(n+a-2)} F\left(1, \frac{1}{2}(n-a-2), \frac{a+n}{2}, t^2\right) \\
&:= J(t).
\end{aligned}$$

Последњи израз за функцију $J(t)$ смо добили користећи идентитет (1.27) из Секције (1.6). Примијетимо да је

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(t)}{\partial t} &= \frac{-2t(n-2)}{a+2} F\left(2, \frac{2-a}{2}, 2+\frac{a}{2}, t^2\right) \\
&- \frac{2t(n-2)(n-a-2)}{(n+a-2)(a+n)} F\left(2, 1+\frac{1}{2}(n-a-2), 1+\frac{a+n}{2}, t^2\right) \\
&< 0,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

тј. закључујемо да се максимална вриједност функције $I(t)$ постиже за $t = 0$.

У циљу да докажемо тврђење леме и за случај $n = 3$, $1 < q < 3$, примијетимо да

$$\begin{aligned}
\max_{0\le t<1} I(t) &= \max_{0\le t<1} (1-t^2)^{3-q} \int_0^1 \frac{(1-r)^q r^{2-q}}{(1-r^2t^2)^{4-q}} dr \\
&\le \max_{0\le t<1} (1-t^2)^{3-q} \int_0^1 \frac{(1-r)^q r^{2-q}}{(1-rt^2)^{4-q}} dr.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Ставимо да је

$$J(t) := (1-t^2)^{3-q} \int_0^1 \frac{(1-r)^q r^{2-q}}{(1-rt^2)^{4-q}} dr, 0 \le t < 1.$$

Користећи униформну експанзију добијамо

$$J(t) = \frac{\Gamma(1+q)\Gamma(3-q)}{6} (1-t^2)^{3-q} F\left(4-q, 3-q, 4; t^2\right), 0 \le t < 1. \tag{3.26}$$

Примјењујући трансформационе идентитете (1.27) и (1.26) респективно на функцију $J(t)$ имамо

$$J(t) = \frac{\Gamma(1+q)\Gamma(3-q)}{6} F\left(q, 3-q, 4; \frac{t^2}{t^2-1}\right), 0 \le t < 1. \tag{3.27}$$

Тако долазимо до израза

$$\begin{aligned} \max_{0\le t<1} J(t) &= \frac{\Gamma(1+q)\Gamma(3-q)}{6} \max_{0\le t<1} F\left(q, 3-q, 4; \frac{t^2}{t^2-1}\right) \\ &= \frac{\Gamma(1+q)\Gamma(3-q)}{6} \max_{0\le t<1} F\left(q, 3-q, 4; 0\right). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Посљедња једнакост је посљедица чињенице да је $\frac{t^2}{t^2-1} < 0$ и да коефицијенти

$$\frac{(q)_k(3-q)_k}{(1)_k(4)_k}$$

хипергеометријске функције

$$F\left(q, 3-q, 4; \frac{t^2}{t^2-1}\right)$$

су опадајући у односу на $k \ge 1$.
Дакле,

$$\max_{0\le t<1} I(t) = I(0) = \int_0^1 (1-r)^q r^{2-q} dr = \frac{\pi q(1-q)(2-q)}{6\sin \pi q}. \tag{3.29}$$

□

Лема 3.3 *Нека је* $\|\mathcal{G}\| := \|\mathcal{G} : L^p(\mathbb{B}) \to L^\infty(\mathbb{B})\|$ *за* $p > \frac{n}{2}$. *Тада је*

$$\|\mathcal{G}\| = \sup_{x\in\mathbb{B}} \left(\int_{\mathbb{B}} |G(x,y)|^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Доказ. Нека је $u(x) = \mathcal{G}[g](x)$, $g \in L^p(B)$. Холдерова неједнакост повлачи

$$\|u\|_\infty \le \sup_{x\in B} \left(\int_B |G(x,y)|^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_B |g(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}},$$

тј.

$$\|\mathcal{G}\| \le \sup_{x\in\mathbb{B}} \left(\int_{\mathbb{B}} |G(x,y)|^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Са друге стране, постоји $x_0 \in \mathbb{B}$ тако да

$$\left(\int_{\mathbb{B}} |G(x_0, y)|^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}} > \sup_{x \in \mathbb{B}} \left(\int_{\mathbb{B}} |G(x, y)|^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}} - \epsilon.$$

Фиксирамо $x_0 \in \mathbb{B}$. Размотримо тест функцију

$$g(y) = \frac{(G(x_0, y))^{q-1}}{\|(G(x_0, y))^{q-1}\|_p}.$$

Тада

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}\| &\geq |\mathcal{G}[g](x_0)| \\
&= \left(\int_{B^n} |G(x_0, y)|^q \, dy\right)^{-\frac{1}{p}} \int_{B^n} |G(x_0, y)|^q dy \\
&= \left(\int_{B^n} |G(x_0, y)|^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&> \sup_{x \in B^n} \left(\int_{B^n} |G(x, y)|^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}} - \epsilon,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

тј.

$$\|\mathcal{G}\| = \sup_{x \in \mathbb{B}} \left(\int_{\mathbb{B}} |G(x, y)|^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Теорема 3.2 *Нека је* $\mathcal{G} : L^p(\mathbb{B}) \to L^\infty(\mathbb{B})$*, гдје* $p > n/2$*. Тада*

$$\|\mathcal{G}\| = c_n \left(\frac{\pi^{n/2}\Gamma(1+q)\Gamma\left(\frac{n-q(-2+n)}{-2+n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{-2+n}\right)}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 < q < \frac{n}{n-2}$$

гдје $n \geq 3$ *и* $1/p + 1/q = 1$*. Специјално за* $p = \infty$

$$\|\mathcal{G}\|_\infty = \frac{1}{2n} \ (n \geq 3).$$

Доказ. Подијелићемо доказ у два дијела.

а) У првом случају разматамо парове (n, q): $n > 3$, при чему је $1 < q < \frac{n}{n-2}$ и $n = 3$ за $q \in (2, 3)$. Према Леми 3.3,

$$\|\mathcal{G}\| = \sup_{x \in \mathbb{B}} \left(\int_{\mathbb{B}} |G(x, y)|^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}}, q > 1.$$

Даље имамо

$$\|\mathcal{G}\|^q = c_n^q \sup_{x\in\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{|x-y|^{q(n-2)}} \left| 1 - \left| \frac{x-y}{[x,y]} \right|^{n-2} \right|^q dy, \tag{3.31}$$

гдје је c_n дефинисано у уводном дијелу. Користимо смјену промјенљивих $z = T_x y$ тј. $T_{-x} z = y$, у предходном интегралу, гдје је $T_x y$ Мебијусова трансформација дефинисана у Секцији (1.2). Према идентитету (1.9) из Секције (1.6), означавајући $t = |x|$, добијамо сљедећи низ једнакости

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} |G(x,y)|^q \, dy \\
&= \sup_{x\in\mathbb{B}} c_n^q \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{|x - T_{-x}z|^{q(n-2)}} |1-|z|^{n-2}|^q \frac{(1-t^2)^n}{[z,-x]^{2n}} dz \\
&= c_n^q \sup_{x\in\mathbb{B}} (1-t^2)^n \int_{\mathbb{B}} \frac{(1-|z|^{n-2})^q}{\left| \frac{x[z,-x]^2 - (1-t^2)(x+z) - |x+z|^2 x}{[z,-x]^2} \right|^{q(n-2)}} \frac{dz}{[z,-x]^{2n}} \\
&= c_n^q \sup_{x\in\mathbb{B}} (1-t^2)^n \int_{\mathbb{B}} \frac{(1-|z|^{n-2})^q}{|z|^{q(n-2)} \left| \frac{1-t^2}{[z,-x]} \right|^{q(n-2)}} \frac{dz}{[z,-x]^{2n}} \\
&= c_n^q \sup_{x\in\mathbb{B}} (1-t^2)^{n-q(n-2)} \int_{\mathbb{B}} \left(\frac{1-|z|^{n-2}}{|z|^{n-2}} \right)^q [z,-x]^{q(n-2)-2n} dz \\
&= c_n^q \sup_{x\in\mathbb{B}} (1-t^2)^{n-q(n-2)} \int_0^1 \frac{(1-r^{n-2})^q}{r^{q(n-2)+1-n}} dr \int_S \frac{d\xi}{|rx+\xi|^{2n-q(n-2)}} \\
&= c_n^q \sup_{x\in\mathbb{B}} (1-t^2)^a \int_0^1 \frac{(1-r^{n-2})^q}{r^{1-a}} dr \int_S \frac{d\xi}{(r^2t^2 + 2rt\xi_1 + 1)^{\frac{n+a}{2}}} \\
&= c_n^q C_n \sup_{x\in\mathbb{B}} (1-t^2)^a \int_0^1 \frac{(1-r^{n-2})^q}{r^{1-a}} dr \int_{-1}^1 \frac{(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}}}{(r^2t^2 + 2rts + 1)^{\frac{n+a}{2}}} ds,
\end{aligned} \tag{3.32}$$

гдје је

$$a = n - q(n-2), \quad C_n = \frac{\omega_{n-1}\Gamma(n-1)}{2^{n-2}\Gamma^2(\frac{n-2}{2})}$$

у посљедње двије једнакости узимали смо без умањења општости да је $x = te_1, \xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$. Уколико направимо смјену промјенљивих

$$\tau = \frac{1-s}{2}$$

у предходном интегралу добијамо

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}\|^q : c_n^q &= C_n \sup_{x\in B^n}(1-t^2)^a\int_0^1\frac{(1-r^{n-2})^q}{r^{1-a}}dr\int_{-1}^1\frac{(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}}}{(r^2t^2+2rts+1)^{\frac{n+a}{2}}}ds\\ &= 2^{n-2}C_n \sup_{x\in B^n}(1-t^2)^a\int_0^1\frac{(1-r^{n-2})^q r^{a-1}}{(1+rt)^{n+a}}dr\int_0^1\frac{\tau^{\frac{n-3}{2}}(1-\tau)^{\frac{n-3}{2}}}{(1-\frac{4rt\tau}{(1+rt)^2})^{\frac{n+a}{2}}}d\tau.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Са друге стране, за фиксирано r имамо $\frac{4rt}{(1+rt)^2}<1$ и

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{\tau^{\frac{n-3}{2}}(1-\tau)^{\frac{n-3}{2}}}{(1-\frac{4rt\tau}{(1+rt)^2})^{\frac{a+n}{2}}}d\tau\\ &=\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma(\lambda+k)}{k!\Gamma(\lambda)}\left(\frac{4rt}{(1+rt)^2}\right)^k\int_0^1\tau^{k+\frac{n-3}{2}}(1-\tau)^{\frac{n-3}{2}}d\tau\\ &=\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma(\lambda+k)\Gamma(k+\frac{n-3}{2}+1)}{k!\Gamma(\lambda)\Gamma(n-1+k)}\left(\frac{4rt}{(1+rt)^2}\right)^k\\ &=\frac{\Gamma^2(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(n-1)}F\left(\lambda,\frac{n-1}{2};n-1;\frac{4rt}{(1+rt)^2}\right),\end{aligned} \tag{3.34}$$

гдје $\lambda=\frac{n+a}{2}$.
Користећи трансформациони идентит (1.30) и Ојлерову трансформацију за хипергеометријске функције за $t=|x|$, добијамо

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in B^n}(1-t^2)^a\int_0^1\frac{(1-r^{n-2})^q r^{a-1}}{(1+rt)^{n+a}}F\left(\lambda,\frac{n-1}{2};n-1;\frac{4rt}{(1+rt)^2}\right)dr\\ &=\sup_{x\in B^n}(1-t^2)^a\int_0^1(1-r^{n-2})^q r^{a-1}F\left(\frac{n+a}{2},\frac{a+2}{2};\frac{n}{2};r^2t^2\right)dr\\ &=\sup_{x\in B^n}(1-t^2)^a\int_0^1(1-r^{n-2})^q r^{a-1}(1-r^2t^2)^{-a-1}\mathcal{F}(rt)dr\\ &\le\sup_{x\in B^n}(1-t^2)^a\int_0^1(1-r^{n-2})^q r^{a-1}(1-r^2t^2)^{-a-1}\max_{t\le1}\mathcal{F}(rt)dr,\end{aligned} \tag{3.35}$$

гдје је

$$\mathcal{F}(s)=F\left(-\frac{a}{2},\frac{q(n-2)-2}{2};\frac{n}{2};s^2\right).$$

Примјењујући идентитет за извод хипергеометријске функције имамо

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}F\left(-\frac{a}{2},\frac{q(n-2)-2}{2};\frac{n}{2};r^2t^2\right)\\ &=-2r^2t\frac{2}{n}\frac{a}{2}\frac{q(n-2)-2}{2}F\left(\frac{q(n-2)-n+2}{2},\frac{q(n-2)}{2};\frac{n+2}{2};r^2t^2\right)<0,\end{aligned} \tag{3.36}$$

за свако $t \in [0,1]$, што имплицира да

$$\max_{|x|\le 1} F\left(-\frac{a}{2}, \frac{q(n-2)-2}{2}; \frac{n}{2}; r^2|x|^2\right) = F\left(-\frac{a}{2}, \frac{q(n-2)-2}{2}; \frac{n}{2}; 0\right). \tag{3.37}$$

Коначно, према Леми (3.2), за $n > 3$ максимална вриједност функције

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(x) &= \int_{\mathbb{B}} |G(x,y)|^q\, dy \\ &= c_n^q (1-|x|^2)^a \int_0^1 (1-r^{n-2})^q r^{a-1} dr \int_S \frac{d\xi}{|rx+\xi|^{2n-q(n-2)}}\end{aligned}$$

се достиже у тачки $x = 0$. Према томе,

$$\begin{aligned}\|G\|^q : c_n^q =& \sup_{x\in\mathbb{B}} (1-|x|^2)^a \int_0^1 (1-r^{n-2})^q r^{a-1} dr \int_S \frac{d\xi}{|rx+\xi|^{n+a}} \\ &= \omega_{n-1} \sup (1-|x|^2)^a \int_0^1 \frac{(1-r^{n-2})^q r^{a-1}}{(1-r^2|x|^2)^{a+1}} \mathcal{F}(r|x|) dr \\ &= \omega_{n-1} \int_0^1 (1-r^{n-2})^q r^{n-q(n-2)-1} dr F\left(\frac{n+a}{2}, \frac{q(n-2)-2}{2}; \frac{n}{2}; 0\right) \\ &= \omega_{n-1} \int_0^1 (1-r^{n-2})^q r^{a-1} dr = \frac{\omega_{n-1}\Gamma(1+q)\Gamma(\frac{n-q(n-2)}{n-2})}{(n-2)\Gamma(1+q+\frac{n-q(n-2)}{n-2})}.\end{aligned} \tag{3.38}$$

б) Случај $n = 3$ за $1 < q \le 2$. Јасно је да

$$\mathcal{I}(x) = \int_{B^3} |G(x,y)|^q\, dy = \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{B^3} \left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{[x,y]}\right)^q dy,$$

и да исте трансформације за $I(x)$ као у предходном случају дају

$$\mathcal{I}(x) = c_3 (1-x^2)^{3-q} \int_0^1 (1-r)^q r^{2-q} F[(6-q)/2, (5-q)/2, 3/2, r^2x^2] dr,$$

гдје је c_3 одговарајућа константа као у општем случају. Нека је $t = |x|$. Можемо да представимо $\mathcal{I}(x)$ на начин

$$\mathcal{I}(x) = c_3 \int_0^1 \frac{(1-r)^q r^{1-q} \left(1-t^2\right)^{3-q} \left((1-rt)^{-4+q} - (1+rt)^{-4+q}\right)}{2(4-q)t} dr.$$

Дакле,

$$\mathcal{I}(x) = c_3 \frac{\left(1-t^2\right)^{3-q}}{2(4-q)t} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_0^1 (1-r)^q r^{1-q} (r^n - (-r)^n) \binom{-4+q}{n} dr,$$

и то повлачи

$$\mathcal{I}(x) = c_3 \frac{(1-t^2)^{3-q}}{2(4-q)t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1+e^{in\pi})\binom{-4+q}{n}\Gamma(2+n-q)\Gamma(1+q)}{\Gamma(3+n)} t^n.$$

Тако

$$\mathcal{I}(x) = c_3 \frac{\pi(-1+q)q\,(1-t^2)^{3-q}\,(F(2-q,4-q;3;t) - F(2-q,4-q;3;-t))}{4\sin(\pi q)(4-q)t}.$$

Нека је

$$c'(q) := c_3 \frac{2^{-q}\pi^{2-q}(-1+q)q}{(4-q)\sin(\pi q)}.$$

Тада

$$\mathcal{I}(x)/|c'| \le I_1(x) = \frac{(1-t^2)}{t}\,(F(2-q,4-q;3;t) - F(2-q,4-q;3;-t))$$

за $1 < q < 2$ и

$$I_1(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$$

гдје је $a_0 > 0$ и

$$a_n = \frac{2\,(1+(-1)^n)\,\Gamma(3+n-q)(-(n-q)!\Gamma(4+n) + \Gamma(n)\Gamma(5+n-q))}{\Gamma(n)\Gamma(2+n)\Gamma(4+n)\Gamma(2-q)\Gamma(4-q)}.$$

Даље, $a_n \le 0$ јер

$$\frac{(1+n-q)(2+n-q)(3+n-q)(4+n-q)}{n(1+n)(2+n)(3+n)} \le 1,$$

што опет повлачи да се максимална вриједност функције $\mathcal{I}(x)$ достиже за $x = 0$.

На крају остаје да размотримо и најлакши случај теореме за $p = \infty$. Доказ овог случаја слиједи из сљедећих једноставних опсервација. Како функција $u(x) = -\frac{1}{2n}(1-|x|^2)$ представља јединствено рјешење Поасонове једначине

$$\begin{cases} \triangle u(x) & = 1, x \in \Omega \\ & u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases},$$

слиједи да за сваки природан број $n, n \ge 3$ имамо

$$\|\mathcal{G}\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{B}} \left| \int_{B^n} G(x,y)dy \right| = \frac{1}{2n} \sup_{x\in B^n} (1-|x|^2) = \frac{1}{2n}. \tag{3.39}$$

Тиме је завршен доказ Теореме 3.2. □

Природно се поставља питање проширења Теореме 3.2 за случај када оператор $\mathcal{G}$ слика из L^p-простора у исти L^p-простор. У том смислу навешћемо битан резултат садржан у Леми (3.4) уз предходно објашњење ознака.
Нека је Ω област у R^n и нека је са $|\Omega|$ означен волумен дате области. За $\mu \in (0,1]$ дефинишемо оператор V_μ на простору $L^1(\Omega)$

$$(V_\mu f)(x) = \int_\Omega |x-y|^{n(\mu-1)} f(y)dy.$$

Оператор V_μ је дефинисан за свако $f \in L^1(\Omega)$ и V_μ је ограничен на простору $L^1(\Omega)$. Генерално, важи сљедећи резултат (видјети [17],156-159)

Лема 3.4 *Нека је V_μ дефинисан на $L^p(\Omega)$ за $p > 0$. Тада V_μ је непрекидно пресликавање $V_\mu : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$, гдје је $1 \le q \le \infty$, и*

$$0 \le \delta = \delta(p,q) = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \mu.$$

Штавише, за свако $f \in L^p(\Omega)$ важи

$$\|V_\mu\|_q \le \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} \|f\|_p$$

Наредна теорема је посљедица Теореме 3.2 и предходне Леме (3.4).

Теорема 3.3 *Нека је $\|\mathcal{G}\|_1 := \|\mathcal{G} : L^1(\mathbb{B}) \to L^1(\mathbb{B})\|$, тада*

$$\|\mathcal{G}\|_1 = \frac{1}{2n}.$$

Доказ. Према Теореми 3.2 имамо

$$\|\mathcal{G}\|_{L^\infty \to L^\infty} = \frac{1}{2n}.$$

Са друге стране, Лема 3.4 тврди да $\mathcal{G} : L^1 \to L^1$ је ограничен. Тада

$$\|\mathcal{G}\|_{L^1 \to L^1} = \|\mathcal{G}^*\|_{L^\infty \to L^\infty},$$

гдје је $\mathcal{G}^*$ одговарајући адјунгован оператор. Како је

$$\mathcal{G}^* f(x) = \int_{\mathbb{B}} \overline{G(y,x)} f(y)dy = \int_{\mathbb{B}} G(x,y) f(y)dy, f \in L^\infty(\mathbb{B}),$$

имамо

$$\|\mathcal{G}\|_{L^1 \to L^1} = \|\mathcal{G}\|_{L^\infty \to L^\infty}.$$

□

У наставку посматраћемо Хилбертов случај $p = 2, \mathcal{G} : L^2(\mathbb{B}) \to L^2(\mathbb{B})$.

Теорема 3.4 *Нека је* $\|\mathcal{G}\|_2 := \|\mathcal{G} : L^2(\mathbb{B}) \to L^2(\mathbb{B})\|$, *тада*

$$\|\mathcal{G}\|_2 = \frac{1}{\lambda_1}.$$

Важи

$$\|\mathcal{G}g\|_2 \leq \frac{1}{\lambda_1}\|g\|_2, \;\; g \in L^2(\mathbb{B}). \tag{3.40}$$

Једнакост се достиже у (3.49) *за* $g(x) = c\varphi_1(x), c.c.\ x \in \mathbb{B}$ *гдје је* c *реална константа.*

Доказ. Ако је $f \in L^2(\mathbb{B})$, тада користећи предходну нотацију имамо

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x),$$

гдје је (φ_n) ортонормирани низ за Лапласов оператор и одговарајући Дирихлеов проблем (3.20). Како је $\mathcal{G}$ ограничен,то

$$\mathcal{G}[f] = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \mathcal{G}[\varphi_k].$$

Такође,

$$\mathcal{G}[\varphi_k] = \frac{1}{\lambda_k}\mathcal{G}[\triangle\varphi_k] = -\frac{1}{\lambda_k}\varphi_k.$$

Чињеница да је (φ_k) ортонормиран низ повлачи

$$\|\mathcal{G}f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle f, \varphi_k \rangle|^2}{\lambda_k^2}.$$

Како је λ_1 проста сопствена вриједност и $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq ...$, имамо

$$\|\mathcal{G}f\|_2 \leq \frac{1}{\lambda_1}\|f\|_2.$$

Коначно,

$$\|\mathcal{G}\|_2 = \frac{1}{\lambda_1}.$$

□

Директном примјеном интерполационе теореме Рис-Торина 1.14, добијамо сљедећи резултат за оцјену норме оператора $\mathcal{G} : L^p \to L^p, p \geq 1$.

Теорема 3.5 *Означимо са* $\|\mathcal{G}\|_{L^1\to L^1} = \|\mathcal{G}\|_{L^\infty\to L^\infty} = \|\mathcal{G}\|_1$ *и* $\|\mathcal{G}\|_{L^2\to L^2} = \|\mathcal{G}\|_2$. *Тада*

$$\|\mathcal{G}\|_p \leq \|\mathcal{G}\|_1^{\frac{2-p}{p}} \|\mathcal{G}\|_2^{\frac{2(p-1)}{p}} = (2n)^{\frac{p-2}{p}} \lambda_1^{\frac{2(1-p)}{p}},$$

гдје $\|\mathcal{G}\|_p$ *представља норму оператора* $\mathcal{G} : L^p(\mathbb{B}) \to L^p(B^n)$, $1 < p < 2$. *Такође,*

$$\|\mathcal{G}\|_p \leq \|\mathcal{G}\|_2^{\frac{2}{p}} \|\mathcal{G}\|_1^{\frac{p-2}{p}} = \lambda_1^{-\frac{2}{p}} (2n)^{\frac{p-2}{p}},$$

гдје $\mathcal{G} : L^p(\mathbb{B}) \to L^p(B^n)$, $2 < p < \infty$.

3.5 $L^\infty-$ норма градијента

У овој секцији посматраћемо опет гранични проблем

$$\begin{cases} \triangle u(x) & = g, x \in \Omega \\ & u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Овдје, $g \in L^p(\mathbb{B})$ и $p > n$. Као у предходној секцији слабо рјешење у смислу дистрибуција дато је са

$$u(x) = -\mathcal{G}[g](x) = -\int_{\mathbb{B}} G(x,y)g(y)dy, |x| < 1. \tag{3.41}$$

Главни циљ ове секције састоји се у процјењивању норме градијента рјешења u. Очекивано, показује се да је проблем одређивања тачне норме градијента рјешења знатно тежи задатак од проналажења норме рјешења из предходне секције. Узимамо у обзир оператор

$$\nabla u = \mathcal{D}[g] = \int_{\mathbb{B}} \nabla_x G(x,y) g(y) dy$$

и бавићемо се оцјеном $L^\infty-$норме за $\mathcal{D}$. Важи сљедећа теорема.

Теорема 3.6 *Нека је* $\mathcal{D} : L^\infty(\mathbb{B}) \to L^\infty(\mathbb{B})$. *Тада*

$$\|\mathcal{D}\|_{L^\infty\to L^\infty} \leq \frac{2n\pi^{n/2}}{(n+1)\Gamma(n/2)}$$

Доказ. На почетку, означимо са

$$\nabla G(x,y) = c_n(2-n)\left(\frac{x-y}{|x-y|^n} - \frac{|y|^2 x - y}{[x,y]^n}\right).$$

Нагласимо да ћемо у доказу ове теореме разматрати нешто општију ситуацију за домен оператора $\mathcal{D}$, тј. узимаћемо у обзир дејство оператора $\mathcal{D}$ на ширем простору $L^p(\mathbb{B})$ $(p \leq \infty,)$ док ће технички дио доказа

који се тиче одређивања оцјене норме бити спроведен за специјалан случај $p = \infty$.
Наиме, како је $\left|\frac{x-y}{|x-y|^n}\right| \leq \frac{1}{|x-y|^{n-1}}$, и за $q(n-1) < n$ $(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1)$, за $x \in \mathbb{B}$ имамо

$$\begin{aligned}
\|\nabla u(x)\| &= \sup_{|\xi|=1} \left| \left\langle \int_B \nabla G(x,y) g(y) dy, \xi \right\rangle \right| = \sup_{|\xi|=1} \left| \int_{\mathbb{B}} \langle \nabla G(x,y), \xi \rangle \, g(y) dy \right| \\
&= (n-2)c_n \sup_{|\xi|=1} \left| \int_{\mathbb{B}} \left\langle \frac{x-y}{|x-y|^n} - \frac{|y|^2 x - y}{[x,y]^n}, \xi \right\rangle g(y) dy \right| \\
&\leq (n-2)c_n \int_{\mathbb{B}} \sup_{|\xi|=1} \left| \left\langle \frac{x-y}{|x-y|^n} - \frac{|y|^2 x - y}{[x,y]^n}, \xi \right\rangle \right| |g(y)| dy \qquad (3.42) \\
&\leq (n-2)c_n \int_{B^n} \left| \frac{x-y}{|x-y|^n} - \frac{|y|^2 x - y}{[x,y]^n} \right| |g(y)| dy \\
&\leq (n-2)c_n \left(\int_{\mathbb{B}} \left| \frac{x-y}{|x-y|^n} - \frac{|y|^2 x - y}{[x,y]^n} \right|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \|g\|_p.
\end{aligned}$$

Треба да израчунамо

$$\max_{x \in \mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} \left| \frac{x-y}{|x-y|^n} - \frac{|y|^2 x - y}{[x,y]^n} \right|^q dy.$$

Као и у доказу Теореме 3.2 користићемо смјену промјенљивих $y = T_{-x} z (T_x y = z)$, гдје је $T_{-x} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ је Мебијусова трансформација дефинисана са

$$T_{-x}(z) = \frac{(1-|x|^2)(y+x) + x|z+x|^2}{[z,-x]^2}.$$

Како је $|T_x(y)| = \left|\frac{x-y}{[x,y]}\right|$ и

$$x - T_{-x}(z) = \frac{(1-|x|^2)(-x|z|^2 - z)}{[z,-x]^2}, \quad |x - T_{-x}(z)| = |z| \frac{1-|x|^2}{[z,-x]},$$

то лако добијамо сљедећи идентитет

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{x-y}{|x-y|^n}-\frac{|y|^2x-y}{[x,y]^n}\right|^q\\
&=\frac{1}{|x-y|^{qn}}\left|(x-y)-(|y|^2x-y)\left|\frac{x-y}{[x,y]}\right|^n\right|^q\\
&=\frac{1}{|x-y|^{qn}}\left|(x-y)-(|y|^2x-y)|z|^n\right|^q\\
&=\frac{1}{|x-T_{-x}z|^{qn}}\left|(x-T_{-x}z)-(|T_{-x}z|^2x-T_{-x}z)|z|^n\right|^q \qquad (3.43)\\
&=\frac{[z,-x]^{qn}}{(1-|x|^2)^{qn}|z|^{qn}}\left|\frac{(1-|x|^2)(-x|z|^2-z)}{[z,-x]^2}+\frac{(1-|x|^2)(z+x)}{[z,-x]^2}|z|^n\right|^q\\
&=\frac{[z,-x]^{qn}}{(1-|x|^2)^{qn}|z|^{qn}}\frac{(1-|x|^2)^q}{[z,-x]^{2q}}|z|^q|(-x|z|-z\|z|)+|z|^{n-1}(z+x)|^q\\
&=\frac{[z,-x]^{q(n-2)}}{(1-|x|^2)^{q(n-1)}|z|^{q(n-1)}}|(-x|z|-z/|z|)+|z|^{n-1}(z+x)|^q.
\end{aligned}$$

Према идентитету (3.43), имамо

$$\begin{aligned}
&\max_{x\in\mathbb{B}}\int_{\mathbb{B}}\left|\frac{x-y}{|x-y|^n}-\frac{|y|^2x-y}{[x,y]^n}\right|^q dy\\
&=\max_{x\in\mathbb{B}}\int_{\mathbb{B}}\frac{1}{|x-y|^{qn}}\left|(x-y)-(|y|^2x-y)\frac{|x-y|^n}{[x,y]^n}\right|^q dy\\
&=\max_{x\in\mathbb{B}}\int_{\mathbb{B}}\frac{1}{|x-T_{-x}z|^{qn}}\left|(x-T_{-x}z)-(|T_{-x}z|^2x-T_{-x}z)|z|^n\right|^q\frac{(1-|x|^2)^n}{[z,-x]^{2n}}dz \qquad (3.44)\\
&=\max_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)^{n+q-qn}\int_{\mathbb{B}}\frac{|(-x|z|-z/|z|)+|z|^{n-1}(z+x)|^q}{|z|^{q(n-1)}[z,-x]^{2(n+q)-qn}}dz\\
&=\max_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)^{n+q(1-n)}\int_0^1 r^{n+q(1-n)-1}dr\int_S\frac{|rx(r^{n-2}-1)+\xi(r^n-1)|^q}{|rx+\xi|^{2(n+q)-qn}}d\xi
\end{aligned}$$

Сада, специјално за $q=1$ користимо просту неједнакост

$$|rx(r^{n-2}-1)+\xi(r^n-1)|\le(1-r^{n-2})|rx+\xi|+(r^{n-2}-r^n)$$

и тако добијамо

$$\frac{|rx(r^{n-2}-1)+\xi(r^n-1)|}{|rx+\xi|^{2(n+1)-n}}\le\frac{1-r^{n-2}}{|rx+\xi|^{n+1}}+\frac{r^{n-2}-r^n}{|rx+\xi|^{n+2}}$$

Према томе,

$$\max_{x\in\mathbb{B}}\int_{\mathbb{B}}\left|\frac{x-y}{|x-y|^n}-\frac{|y|^2x-y}{[x,y]^n}\right|^q dy$$
$$\leq \max_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)^{n+q(1-n)}\int_0^1 r^{n+q(1-n)-1}dr\int_S\frac{((1-r^{n-2})|rx+\xi|+(r^{n-2}-r^n))^q}{|rx+\xi|^{2(n+q)-qn}}d\xi. \tag{3.45}$$

Важи

$$\int_S\frac{d\xi}{|rx+\xi|^a}=\frac{\Omega_{n-1}}{\int_0^\pi\sin^{n-2}tdt}\int_0^\pi\frac{\sin^{n-2}tdt}{(1+r^2|x|^2+2r|x|\cos t)^{a/2}}.$$

Како

$$\int_0^\pi\frac{\sin^{n-2}tdt}{(1+r^2|x|^2+2r|x|\cos t)^{a/2}}=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left[\frac{1}{2}(-1+n)\right]}{\Gamma\left[\frac{n}{2}\right]}\,{}_2F_1\left[a/2,1-\frac{n}{2}+a/2,\frac{n}{2},r^2x^2\right]$$

и

$$\frac{\Omega_{n-1}}{\int_0^\pi\sin^{n-2}tdt}=\frac{\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma[n/2]}}{\frac{\sqrt{\pi}\Gamma[1/2(-1+n)]}{\Gamma[n/2]}}=\frac{2\pi^{n/2}}{\sqrt{\pi}\Gamma[1/2(-1+n)]},$$

добијамо

$$\int_S\frac{d\xi}{|rx+\xi|^a}=2\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left[\frac{n}{2}\right]}\,{}_2F_1\left[a/2,1-\frac{n}{2}+a/2,\frac{n}{2},r^2x^2\right]$$

Како је

$$\|\nabla u(x)\|\leq C_n\max_{x\in\mathbb{B}}J(x)$$

гдје

$$J(x)=(1-|x|^2)\int_0^1(1-r^{n-2})_2F_1\left[\frac{3}{2},\frac{1+n}{2},\frac{n}{2},r^2x^2\right]dr$$
$$+(1-|x|^2)\int_0^1(r^{n-2}-r^n)\frac{n-(n-4)r^2x^2}{n\left(1-r^2x^2\right)^3}dr=\int_0^1 K_r(x)dr.$$

овдје је

$$K_r(x)=\sum_{p=0}^\infty A_p(r)x^{2p}$$

и $A_0(r)=1-r^n$ и за $p\geq 1$

$$A_p(r)=\frac{1}{2}r^{-4+2p}\Bigg(\frac{r^n\left(1-r^2\right)\left(-2p(-2+n+2p)+2(1+p)(n+2p)r^2\right)}{n}$$
$$+\frac{\left(r^n-r^2\right)\left((n-1)r^2+4p^2(r^2-1)+2p(2+n(r^2-1))\right)\Gamma[\frac{n}{2}]\Gamma[\frac{1+2p}{2}]\Gamma[\frac{n+2p-1}{2}]}{\sqrt{\pi}p!\Gamma\left[\frac{1+n}{2}\right]\Gamma\left[\frac{n}{2}+p\right]}\Bigg).$$

Тада

$$\|\nabla u(x)\| \leq a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p x^{2p}$$

при чему је

$$a_0 = \frac{2n\pi^{n/2}}{(n+1)\Gamma(n/2)}$$

и

$$\begin{aligned} a_p = & \frac{2(-3+n)n + 4(-2+n)p}{n(-3+n+2p)(-1+n+2p)(1+n+2p)} \\ & - \frac{(-2+n)(-3+n+4p)\Gamma\left[\frac{n}{2}\right]\Gamma\left[-\frac{1}{2}+p\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(-3+n)+p\right]}{8\sqrt{\pi}\Gamma\left[\frac{1+n}{2}\right]\Gamma[1+p]\Gamma\left[\frac{n}{2}+p\right]} \end{aligned}$$

Примијетимо да је $a_p < 0$ ако и само ако

$$b_p := \frac{2((-3+n)n + 2(-2+n)p)\sqrt{\pi}p!\Gamma\left[\frac{1+n}{2}\right]\Gamma\left[\frac{n}{2}+p\right]}{(-2+n)n(-3+n+4p)\Gamma\left[\frac{n}{2}\right]\Gamma\left[-\frac{1}{2}+p\right]\Gamma\left[\frac{3+n}{2}+p\right]} < 1$$

Према Теореми [12] имамо

$$\Gamma\left[-\frac{1}{2}+p\right]\Gamma\left[\frac{3+n}{2}+p\right] \geq \Gamma\left[p\right]\Gamma\left[\frac{2+n}{2}+p\right]$$

и зато

$$b_p \leq c(p) := \frac{2p((n-3)n + 2(n-2)p)\sqrt{\pi}\Gamma\left[\frac{1+n}{2}\right]}{(-2+n)(n+2p)(-3+n+4p)\Gamma\left[1+\frac{n}{2}\right]},$$

како посљедњи израз расте по p јер

$$c'(p) = \frac{2\left((n-3)^2n^2 + 4(n-3)(n-2)np + 4(6+(n-3)n)p^2\right)\sqrt{\pi}\Gamma\left[\frac{1+n}{2}\right]}{(n-2)(n+2p)^2(n+4p-3)^2\Gamma\left[1+\frac{n}{2}\right]}$$

и $-(-3+n)^2n^2(2+n) \leq 0$,имамо

$$b_p \leq \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left[\frac{1+n}{2}\right]}{2\Gamma\left[1+\frac{n}{2}\right]} < 1$$

што је требало да се докаже. □

Наводимо хипотезу која се на природан начин надовезује на предходну теорему.

Хипотеза 3.1 *Нека је* $\mathcal{G} : L^p(\mathbb{B}) \to L^\infty(\mathbb{B}), p > n$ *и* $u = \mathcal{G}[g]$. *Познато је да*

$$\|\nabla u\|_\infty \leq C_p \|g\|_p,$$

гдје је

$$C_p = \max_{x\in\mathbb{B}} \left(\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{B}} \left| \frac{x-y}{|x-y|^n} - \frac{|y|^2 x - y}{[x,y]^n} \right|^q dy \right)^{1/q}.$$

Тада је

$$C_p = \left(\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{B}} \left(\frac{1}{|y|^{n-1}} - |y| \right)^q dy \right)^{1/q} = \left(\frac{\Gamma\left(1 - \frac{nq}{n+1}\right)\Gamma[1+q]}{(n+1)\Gamma\left(2 + \frac{q}{n+1}\right)} \right)^{1/q}.$$

Теорема 3.7 *Нека је* $\mathcal{D} : L^1(\mathbb{B}) \to L^1(\mathbb{B})$. *Тада*

$$\|\mathcal{D}\|_{L^1 \to L^1} \leq \frac{1}{n-2}$$

У циљу да докажемо Теорему3.7 потребна нам је сљедећа лема.

Лема 3.5 *Нека је* $H(x,y) = \left| \frac{y-x}{|y-x|^n} - \frac{|x|^2 y - x}{[y,x]^n} \right|$, *и нека је*

$$\mathcal{H}[f] = \frac{1}{(n-2)c_n} \int_{\mathbb{B}} H(x,y) g(y) dy$$

тада

$$\|\mathcal{H}\|_{L^\infty \to L^\infty} = \frac{1}{(n-2)c_n} \int_{\mathbb{B}} H(0,y) dy = \frac{1}{n-2}.$$

Доказ. На почетку имамо

$$H(x,y) \leq K(x,y) + L(x,y) = |x-y| \left(\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{[x,y]^n} \right) + \frac{|y|(1-|x|^2)}{[x,y]^n}.$$

Даље,

$$\sup_{x\in\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} |K(x,y)|\, dy = \sup_{x\in\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \left| 1 - \left| \frac{x-y}{[x,y]} \right|^n \right| dy. \tag{3.46}$$

Користићемо смјену промјенљивих $z = T_x y$, тј. $T_{-x} z = y$, гдје је $T_x y$ Мебијусова трансформација

$$T_x y = \frac{(1-|x|^2)(y-x) - |y-x|^2 x}{[x,y]^2}, \quad |T_x y| = \left| \frac{x-y}{[x,y]} \right|.$$

Добијамо

$$dy = \left(\frac{1-|x|^2}{[z,-x]^2} \right)^n dz.$$

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{B}}\int_{\mathbb{B}}|H(x,y)|\,dy = \sup_{x\in\mathbb{B}}\int_{\mathbb{B}}\frac{1}{|x-T_{-x}z|^{n-1}}|1-|z|^n|\frac{(1-|x|^2)^n}{[z,-x]^{2n}}dz\\
&=\sup_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)^n\int_{\mathbb{B}}\frac{(1-|z|^{n-2})}{\left|\frac{x[z,-x]^2-(1-|x|^2)(x+z)-|x+z|^2x}{[z,-x]^2}\right|^{n-1}}\frac{dz}{[z,-x]^{2n}}\\
&=\sup_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)^n\int_{\mathbb{B}}\frac{(1-|z|^n)}{|z|^{n-1}\left|\frac{1-|x|^2}{[z,-x]}\right|^{n-1}}\frac{dz}{[z,-x]^{2n}}\\
&=\sup_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)^{n-(n-1)}\int_{\mathbb{B}}\left(\frac{1-|z|^n}{|z|^{n-1}}\right)[z,-x]^{(n-1)-2n}dz\\
&=\sup_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)^{n-(n-1)}\int_0^1(1-r^n)r^{n-(n-1)-1}dr\int_S\frac{d\xi}{|rx+\xi|^{2n-(n-1)}} \qquad (3.47)\\
&=\sup_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)\int_0^1(1-r^n)dr\int_S\frac{d\xi}{(r^2|x|^2+2r|x|\xi_1+1)^{\frac{n+1}{2}}}\\
&=C_n\sup_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)\int_0^1(1-r^n)dr\int_{-1}^1\frac{(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}}{(r^2|x|^2+2r|x|t+1)^{\frac{n+1}{2}}}dt,\\
&=C_n\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left[-\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n}{2}\right]}\sup_{x\in\mathbb{B}}(1-|x|^2)\int_0^1(1-r^n){}_2F_1\left[\frac{3}{2},\frac{1+n}{2},\frac{n}{2},r^2x^2\right]dr\\
&=C_n\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left[-\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n}{2}\right]}\sup_{x\in\mathbb{B}}J(x)
\end{aligned}$$

гдје је

$$\begin{aligned}
&J(x)=\frac{n}{1+n}\\
&-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n\left(8m^2+(n-1)^2+2m(3n-5)\right)\Gamma\left[m-\frac{1}{2}\right]\Gamma\left[\frac{3}{2}+m+\frac{n}{2}\right]\Gamma\left[\frac{n}{2}\right]}{(-1+2m+n)^2(1+2m+n)^2\sqrt{\pi}\Gamma[1+m]\Gamma\left[m+\frac{n}{2}\right]\Gamma\left[\frac{1+n}{2}\right]}x^{2m} \qquad (3.48)\\
&\le J(0).
\end{aligned}$$

У посљедње двије једнакости смо без умањења општости претпоставили да је $x=|x|e_1,\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$.

Са друге стране,

$$\begin{aligned}L(x) &= \int_{\mathbb{B}} L(x,y)dy \\ &= C_n' \frac{\sqrt{\pi}\,(1-x^2)\,\Gamma\left[\frac{1}{2}(-1+n)\right]{}_2F_1\left[1, \frac{1+n}{2}, \frac{3+n}{2}, x^2\right]}{(1+n)\Gamma\left[\frac{n}{2}\right]} \\ &= C_n' \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left[\frac{1}{2}(-1+n)\right]}{(1+n)\Gamma\left[\frac{n}{2}\right]} - C_n' \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left[\frac{1}{2}(-1+n)\right]}{(-1+2m+n)(1+2m+n)\Gamma\left[\frac{n}{2}\right]} x^{2m} \\ &\le L(0).\end{aligned}$$

□

Доказ.(Доказ Теореме 3.7)
Лема 3.4 тврди да је $\mathcal{D} : L^1 \to L^1$ ограничен. Тада

$$\|\mathcal{D}\|_{L^1 \to L^1} = \|\mathcal{D}^*\|_{L^\infty \to L^\infty},$$

гдје је $\mathcal{D}^*$ одговарајући адјунговани оператор. Како је

$$\mathcal{D}^* f(x) = \int_{\mathbb{B}} \overline{D(y,x)} f(y)dy = \int_{\mathbb{B}} H(x,y)f(y)dy, \quad f \in L^\infty(B),$$

то имамо

$$\|\mathcal{D}\|_{L^1 \to L^1} = \|\mathcal{D}\|_{L^\infty \to L^\infty}.$$

□

Слично као у предходној секцији размотрићемо и одговарајући Хилбертов случај. Важи сљедећа теорема

Теорема 3.8 *Нека је $\mathcal{D} : L^2(\mathbb{B}) \to L^2(\mathbb{B})$, тада*

$$\|\mathcal{D}\| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}.$$

$$\|\mathcal{D}g\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|g\|_2, \;\; g \in L^2(\mathbb{B}). \tag{3.49}$$

Једнакост се постиже у (3.49) за $g(x) = c\varphi_1(x), c.c.\ x \in \mathbb{B}$ гдје је c реална константа.

Лема 3.6 *[22]Користећи нотацију из уводног дијела ове секције, за $n, m \in \mathbf{N}$,*

$$\int_{\mathbb{B}} \nabla\varphi_n(z) \bullet \nabla\varphi_m(z) dA(z) = \lambda_n \delta_{mn}.$$

Овдје $\bullet$ означава скаларни производ.

Доказ. Ако је $f \in L^2(\mathbb{B})$, тада на основу предходног имамо

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \, \varphi_k(x).$$

Како је $\mathcal{D}$ ограничен, имамо

$$\mathcal{D}[f] = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \, \mathcal{D}[\varphi_k].$$

Такође,

$$\mathcal{D}[\varphi_k] = \frac{1}{\lambda_k} \mathcal{D}[\triangle \varphi_k] = -\frac{1}{\lambda_k} \nabla \varphi_k.$$

Чињеница да $(\nabla \varphi_k)$ је ортогоналан систем вектора повлачи

$$\|\mathcal{D} f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle f, \varphi_k \rangle|^2 |\nabla \varphi_k|^2}{\lambda_k^2}.$$

Како је λ_1 проста сопствена вриједност и $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq ...$, имамо

$$\|\mathcal{D} f\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|f\|_2.$$

Коначно,

$$\|\mathcal{D}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}.$$

□

Примјеном Рис-Торинове интерполационе теореме добијамо сљедеће оцјене за норму оператора $\mathcal{D}$,

Последица 3.1 *Означимо са* $\|\mathcal{D}\|_i := \|\mathcal{D}\|_{L^i \to L^i}$, $i \in \{1, 2, \infty\}$. *Тада*

$$\|\mathcal{D}\|_p \leq \|\mathcal{D}\|_1^{\frac{2-p}{p}} \|\mathcal{D}\|_2^{\frac{2(p-1)}{p}},$$

гдје $\|\mathcal{D}\|_p$ *репрезентује норму оператора* $\mathcal{D} : L^p(\mathbb{B}) \to L^p(\mathbb{B}), 1 < p < 2$. *Слично,*

$$\|\mathcal{D}\|_p \leq \|\mathcal{D}\|_2^{\frac{2}{p}} \|\mathcal{D}\|_\infty^{\frac{p-2}{p}},$$

гдје је $\mathcal{D} : L^p(\mathbb{B}) \to L^p(\mathbb{B}), 2 < p < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] R.Adams, John. Fournier : *Sobolev Spaces*, Springer (2000).

[2] G. Andrews, R. Askey, R. Roy : *Special functions*, Cambridge University Press (2000).

[3] J. M. Anderson, A. Hinkkanen:*The Cauchy transform on bounded domains*, Proc. Amer. Math. Soc. 107 (1989), no. 1, 179-185.

[4] J. M. Anderson, D. Khavinson, V. Lomonosov:*Spectral properties of some integral operators arising in potential theory*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 43 (1992), no. 172, 387-407.

[5] S.Axler, P.Bourdon, W. Ramey: *Harmonic Function Theory*, Secon Edition. Springer-Verlag, New York (2000) .

[6] L. V. Ahlfors: *Möbius transformations in several dimensions* University of Minnesota, School of Mathematics, 1981.

[7] A. Baranov; H. Hedenmalm:*Boundary properties of Green functions in the plane*, Duke Math. J. 145 (2008), no. 1, 1-24.

[8] Yahoua Deng, Li Huang, Tao Zhao, Dechao Zheng: *Bergman projection and Bergman spaces*,J. Operator Theory **46**(2001), 3-24.

[9] M. Dostanić:*Norm estimate of the Cauchy transform on* $Lp(\omega)$, Integral Equations Operator Theory 52 (2005), no. 4, 465-475.

[10] M.Dostanić: *Two sided norm estimate of the Bergman projection on* L^p *space*, Czechoslovak Mathematical Journal, **58** (133) (2008), 569-575.

[11] M.Dostanić:*The properties of the Cauchy transform on a bounded domain*, Journal of the Operator Theory 36 (1996), 233-247.

[12] S.S. Dragomir, R.P. Agarwal, N. S. Barnett:*Inequalities for Beta and Gamma functions via some classical and new integral inequalities* (English) J. Inequal. Appl. 5, No.2, 103-165 (2000).

[13] Lawrence C. Evans:*Partial Differential Equations*, American Mathematical Society,Berkley, 1997.

[14] F. Forelli, W. Rudin: *Projections on Spaces of Holomorphic Functions in Balls*, Indiana University Mathematics Journal,Vol.24 No.6 (1974).

[15] I. Gohberg, M. Krein:*Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert space*, American mathematical society **57** (1969), 2158–2166.

[16] L.Grafakos:*Classical and Modern Fourier Analysis*,University of Missouri (2003).

[17] D. Gilbarg and N. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 224. Springer-Verlag, Berlin, 1983. xiii+513 pp.

[18] D. Kalaj: *Cauchy transform and Poisson's equation*, Advances in Mathematics Volume 231, Issue 1, 10 September 2012, Pages 213-242.

[19] D. Kalaj, M. Marković:*Norm of the Bergman projection* , Math. Scand. **54**, No.4 (2002), 847–875.

[20] D. Kalaj, M. Pavlović:*On quasiconformal self-mappings of the unit disk satisfying the Poisson's equation*, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011) 4043-4061.

[21] D. Kalaj, Dj. Vujadinović: *Adjoint operator of Bergman Projection and Besov space* B_1,Mathematical Reports (ISSN:1582-3067), Volume 15, Issue 04, Dec. 2013, Page(s) [12185].

[22] D. Kalaj: *On Some Integral Operators Related to the Poisson Equation*, Integral Equation and Operator Theory 72 (2012), 563-575.

[23] D.Kalaj, Dj.Vujadinović: *Norm of the Bergman projection onto the Bloch space*, Journal of Operator theory, 2014.

[24] D. Kalaj, Dj. Vujadinović: *Solution operator of inhomogenuous Dirichlet problem in the unit ball*, (2014).

[25] H.T.Kaptanoğlu, A.E.Üreyen:*Analytic Properties of Besov Spaces via Bergman Projections* , Contemporary Mathematics.

[26] Steven.G. Krantz: *Function theory of several complex variables*, Second edition, AMS Chelsea, 2000.

[27] *С. Михлин: Курс математическоЙ физики,Москва*(1968).

[28] M.Pavlović:*An extension of the Forelli-Rudin projection theorem*, Proc.Edinburgh Math.Soc. **36** (1993), 375–389.

[29] A. Perälä: *On the optimal constant for the Bergman projection onto the Bloch space,*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 37, 245249 (2012).

[30] A. Perälä: *Bloch spaces and the norm of the Bergman projection,*Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 38, 849853 (2013).

[31] A. Perälä: *Sharp constant for the Bergman projection onto the minimal Möbius invariant space,*, Arch. Math.102 (2014)Springer Basel, 003-889X/14/030263-8, published online March 72014.

[32] S.Pilipović, B. Stanković: *Prostori Distribucija*, SANU, Novi Sad (2000).

[33] W.Rudin: *Real and Complex Analysis. 3rd edition,*New York, NY: McGraw-Hill. xiv, 416 p. (1987).

[34] W. Rudin: *Function theory in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Springer, reprint 1980.

[35] H.Schaefer:*Topological Vector Spaces,*The Macmilian company, New York(1966).

[36] E.M Stein:*Singular integrals and diferentiability properties of functions,*Prineceton University Press (1970).

[37] Dj. Vujadinović: *Some Estimates for the Norm of the Bergman Projection on Besov Spaces* , Integral Equations and Operator Theory, **76** (2013), 213–224 .

[38] K. Zhu: *A sharp norm estimate of the Bergman projection on* L^p, preprint.

[39] K.Zhu: *Operator theory in function spaces,*Monographs and textbooks in pure and applied mathematics;139. (1990)..

[40] K.Zhu: *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*, vol. 226 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, NY, USA, 2005..

Биографија аутора

Ђорђије Вујадиновић(рођен 1985) запослен је као сарадник у настави на ПМФ-у у Подгорици од 2008. године, када је и дипломирао на истом факултету. Звање магистра наука стекао 2010. године на ПМФ-у у Подгорици под менторством проф.др Давида Каљаја на тему "Интеграција на апстрактним просторима и максимална функција". Докторске студије на Математичком факултету у Београду уписао је 2009. године на катедри за Математичку анализу под руководством проф.др Милоша Арсеновића. Области његовог научног интересовања су: Функционална анализа, Комплексна анализа и Парцијалне једначине.

Адреса: Цетињски пут бб, 81000 Подгорица, Црна Гора.

Електронска адреса: djordjijevuj@t-com.me.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Ђорђије Вујадиновић

број индекса 2009/21

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Оцјене норме интегралних оператора на просторима Бесова и Блоха

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, ________________

Ђорђије Вујадиновић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Ђорђије Вујадиновић

Број индекса 2009/21

Студијски програм Математичка анализа

Наслов рада Оцене норме интегралних оператора на просторима Бесова и Блоха

Ментор Проф. др Милош Арсеновић

Потписани/а Ђорђије Вујадиновић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, ________________________

Ђорђије Вујадиновић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Оцјене норме интегралних оператора
на просторима Бесова и Блоха

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, ______________________

Ђорђије Вујадиновић

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.